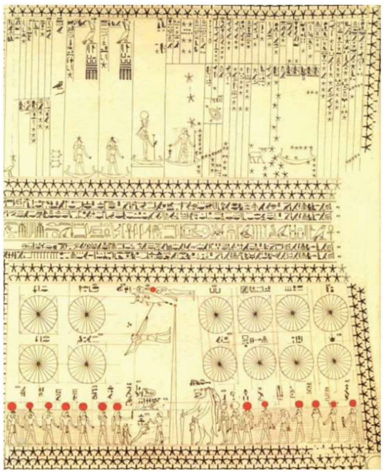
Unidad 5

Resolución de triángulos oblicuángulos

El área matemática de la trigonometría tiene su origen histórico en la astronomía. Esta disciplina fue muy estudiada por los antiguos pueblos egipcios e hindúes, sin embargo, no es hasta con el astrónomo y matemático griego Hiparco que se realiza la primera tabla trigonométrica, que estaba basada en mediciones de cuerdas que ubicaban en el firmamento las diferentes constelaciones. Es por su origen histórico que la medición de ángulos se da en un sistema sexagesimal; además, se solía dividir el cielo en 36 “decanos”, y en cada uno de ellos se ubicaba las constelaciones respectivas.



Documento donde se muestra la división de la Tierra en 360° para ubicar las constelaciones.

El teodolito es un instrumento de medición de ángulos verticales y horizontales utilizado en actividades ingenieriles.

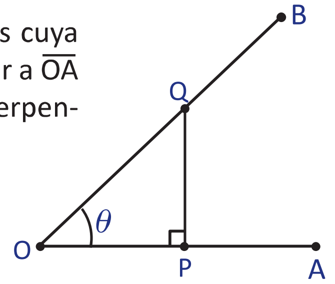
La resolución de triángulos oblicuángulos en la actualidad tiene muchas aplicaciones, algunas de las más importantes son por ejemplo, el cálculo de ángulos de elevación y depresión en diferentes situaciones, también sirve para calcular distancias específicas, ya sean estas alturas de objetos, distancias entre objetos, etc.

Al estudiar la unidad aprenderás sobre la definición de las razones trigonométricas de un ángulo agudo así como de cualquier ángulo, además, conocerás la aplicación de la trigonometría para el cálculo de ángulos de elevación y depresión, también los resultados importantes de la ley de los senos y del coseno.

1.1 Razón trigonométrica*

Problema inicial

Se consideran los segmentos de recta $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ y el ángulo formado entre ellos cuya medida es θ. Sobre $\overline{OB}$ se toma un punto Q y se traza un segmento perpendicular a $\overline{OA}$ y que pase por Q. Se define por P el punto de intersección entre este segmento perpendicular y $\overline{OA}$, como muestra la figura.



Del triángulo rectángulo OPQ se definen las razones: $\frac{PQ}{OQ}$, $\frac{OP}{OQ}$ y $\frac{PQ}{OP}$.

Justifica que las razones definidas no dependen de las longitudes de los lados del triángulo rectángulo OPQ.

Solución

Se toma un punto cualquiera Q' sobre $\overline{OB}$ distinto de Q. Se traza un segmento perpendicular a $\overline{OA}$ que pase por Q' y sea P' la intersección de esta perpendicular y $\overline{OA}$, como muestra la figura. Luego, los triángulos OPQ y OP'Q' son semejantes por el criterio AA (denotado ΔOPQ ~ ΔOP'Q'), por lo tanto

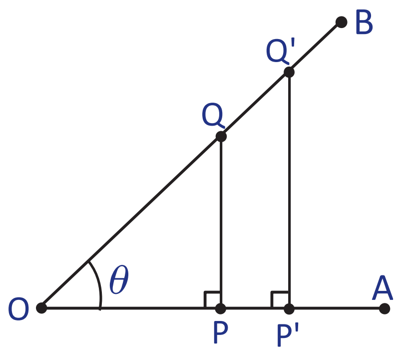
$$\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{OP}{OP'} = \frac{OQ}{OQ'}.$$

De $\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{OQ}{OQ'}$ se deduce que $\frac{PQ}{OQ} = \frac{P'Q'}{OQ'}$.

De $\frac{OP}{OP'} = \frac{OQ}{OQ'}$ se deduce que $\frac{OP}{OQ} = \frac{OP'}{OQ'}$.

De $\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{OP}{OP'}$ se deduce que $\frac{PQ}{OP} = \frac{P'Q'}{OP'}$.

En una proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se cumple que $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.



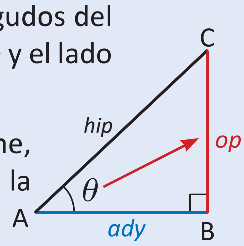
Entonces, $\frac{PQ}{OQ} = \frac{P'Q'}{OQ'}$, $\frac{OP}{OQ} = \frac{OP'}{OQ'}$ y $\frac{PQ}{OP} = \frac{P'Q'}{OP'}$.

Por lo tanto, las razones $\frac{PQ}{OQ}$, $\frac{OP}{OQ}$ y $\frac{PQ}{OP}$ no dependen de las longitudes de los lados del triángulo.

Definición

Sea ABC un triángulo rectángulo, recto en B y sea θ la medida de uno de los ángulos agudos del ΔABC. Se define a la hipotenusa del triángulo por *hip*, el lado opuesto al ángulo como *op* y el lado adyacente al ángulo como *ady*.

Nótese que el opuesto y adyacente en un triángulo dependerá de cuál ángulo se tome, y se debe tener especial cuidado cuando el triángulo está ubicado en otra posición a la mostrada en la figura.



Se definen las razones sen θ, cos θ y tan θ, como sen $\theta = \frac{op}{hip}$, cos $\theta = \frac{ady}{hip}$, tan $\theta = \frac{op}{ady}$, y se leen "seno de theta", "coseno de theta" y "tangente de theta", respectivamente.

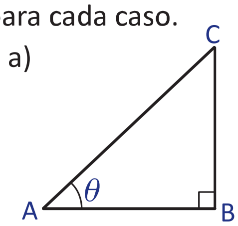
A las razones sen θ, cos θ y tan θ, se les llama **razones trigonométricas** del ángulo θ.

Problemas

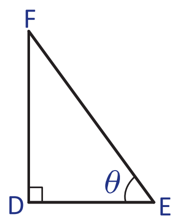
En un triángulo rectángulo, el lado que se opone al ángulo de 90° se conoce como **hipotenusa** y los dos lados que forman dicho ángulo se conocen como **catetos**. Además, la hipotenusa es el lado de mayor longitud.

Identifica la hipotenusa, el lado opuesto y adyacente del ángulo θ y expresa las razones trigonométricas para cada caso.

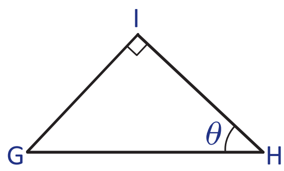
a)



b)



c)

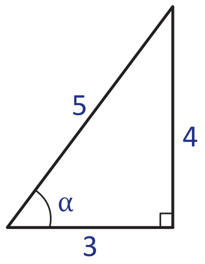


1.2 Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo

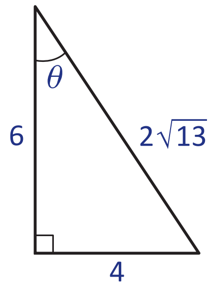
Problema inicial

Determina las tres razones trigonométricas para el ángulo α y θ.

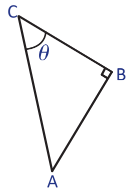
a)



b)



Hay que tener cuidado al elegir el lado opuesto y adyacente al ángulo. Por ejemplo, en el triángulo ABC, el opuesto de θ es $\overline{AB}$ y el lado adyacente θ a es $\overline{BC}$.



Solución

a) Se identifica la hipotenusa, el lado opuesto y el lado adyacente del ángulo α. En este caso, *hip* = 5, *op* = 4 y *ady* = 3, entonces,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{op}{hip} = \frac{4}{5}, \quad \cos\alpha = \frac{ady}{hip} = \frac{3}{5}, \quad \tan\alpha = \frac{op}{ady} = \frac{4}{3}.$$

b) Se identifica la hipotenusa, el lado opuesto y el lado adyacente del ángulo θ. En este caso, *hip* = $2\sqrt{13}$, *op* = 4 y *ady* = 6, entonces,

- $\operatorname{sen}\theta = \frac{op}{hip} = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \times \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, racionalizando el denominador.

- $\cos\theta = \frac{ady}{hip} = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, racionalizando el denominador.

- $\tan\theta = \frac{op}{ady} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Recuerda que para racionalizar una fracción, se multiplica y divide por el radical que aparece en el denominador de la fracción.

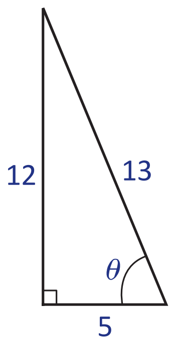
Definición

Si se conocen las medidas de los lados de un triángulo rectángulo pueden calcularse las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de uno de sus ángulos agudos, identificando la medida de la hipotenusa, del lado opuesto y adyacente de dicho ángulo y luego calculando las razones como se definieron en la clase 1.1.

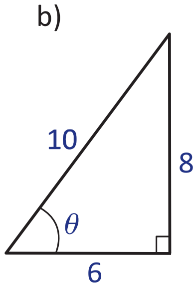
Problemas

1. Para cada uno de los siguientes triángulos, calcula las razones trigonométricas sen θ, cos θ y tan θ. Simplifica o racionaliza cuando sea posible.

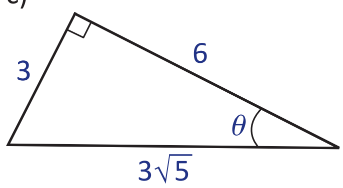
a)



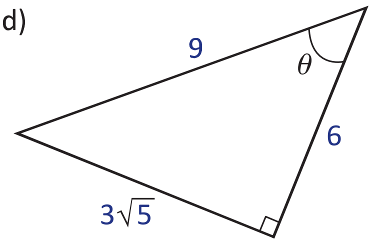
b)



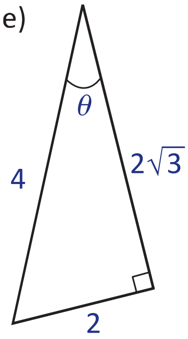
c)



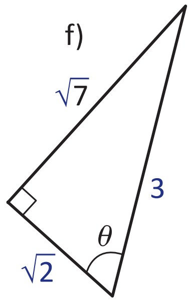
d)



e)



f)

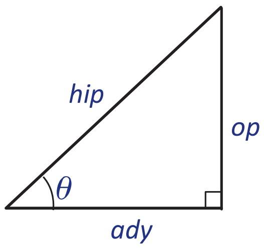


2. Se definen las razones trigonométricas cosecante, secante y cotangente de un ángulo agudo θ, denotadas por csc θ, sec θ y cot θ, respectivamente:

$$\csc \theta = \frac{hip}{op},$$

$$\sec \theta = \frac{hip}{ady},$$

$$\cot \theta = \frac{ady}{op}.$$



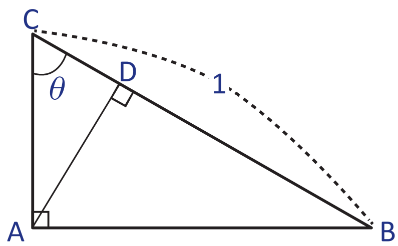
Encuentra las razones trigonométricas csc θ, sec θ y cot θ para los triángulos del Problema 1.

3. Con base a la definición en el Problema 2, demuestra que csc $\theta = \frac{1}{\text{sen } \theta}$.

4. Con base a la definición en el Problema 2, demuestra que sec $\theta = \frac{1}{\cos \theta}$.

5. Con base a la definición en el Problema 2, demuestra que cot $\theta = \frac{1}{\tan \theta}$.

6. En la siguiente figura, ABC es un triángulo rectángulo, ∢CAB = 90°, ∢BCA = θ y BC = 1. Escribe los valores de las longitudes de los segmentos AC, AB, AD, BD y CD en términos del ángulo θ.



El nombre **trigonometría** deriva de palabras griegas que significan "*triángulo*" y "*medir*". Se llama así porque sus inicios tienen que ver principalmente con el problema de "*resolver un triángulo*" (calcular las medidas de los tres lados y tres ángulos, conocidos algunos de ellos).

Si bien la trigonometría nace por la necesidad de resolver triángulos, en la actualidad es utilizada para muchos ámbitos como por ejemplo, en la física (medición del movimiento de un péndulo), la astronomía (medir distancias entre estrellas) o cartografía (medir distancias entre dos puntos).

Alrededor del siglo II a.C., el matemático Hiparco (180-125 a.C.), nacido en Nicea, Asia Menor, es considerado el más destacado de los astrónomos griegos, inicia el uso de una tabla de cuerdas de la circunferencia que en cierto modo equivalía a una tabla rudimentaria de valores del seno.

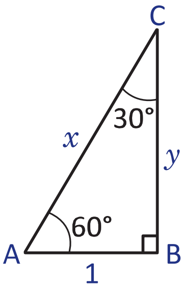
Abbott , B.A. (1967). *Teach Yourself Trigonometry.*

1.3 Triángulos rectángulos notables

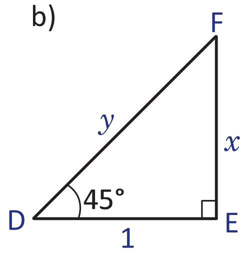
Problema inicial

Dados los siguientes triángulos rectángulos, encuentra el valor de x y y.

a)

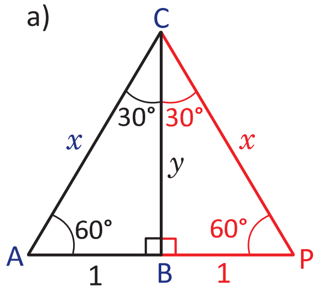


b)



Solución

a)



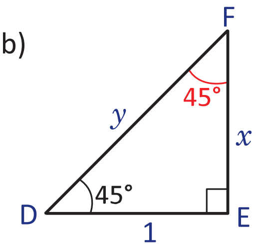
Si se refleja el triángulo ABC con respecto a $\overline{BC}$ se obtiene el triángulo APC. Como $\sphericalangle BCA = 30°$ se tiene que $\sphericalangle PCA = 60°$. Resulta que el triángulo APC es equilátero, y por lo tanto $x = AP = 2$.

Luego, para encontrar el valor de y se aplica el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC: $x^2 = 1^2 + y^2$. Es decir,

$$y^2 = x^2 - 1^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3.$$

Como $y > 0$, entonces, $y = \sqrt{3}$.

b)



En el triángulo DEF, los ángulos FDE y DFE son complementarios, es decir, $\sphericalangle FDE + \sphericalangle EFD = 90°$; por lo tanto, $\sphericalangle EFD = 45°$. Se tiene entonces que el triángulo DEF es isósceles, y por lo tanto $x = 1$.

Para encontrar el valor de y se aplica el teorema de Pitágoras en el triángulo DEF.

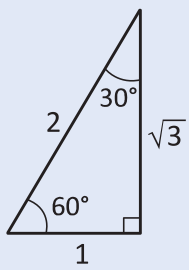
$$y^2 = 1^2 + x^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

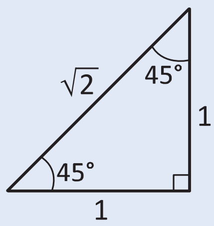
Como $y > 0$, entonces, $y = \sqrt{2}$.

Definición

Al triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos son de 30° y 60°, y al triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos son de 45° se les conoce como **triángulos notables**.

Se suele hacer referencia a estos triángulos como triángulo de 30 y 60; y triángulo de 45.

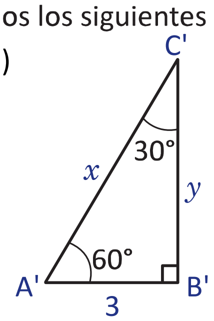




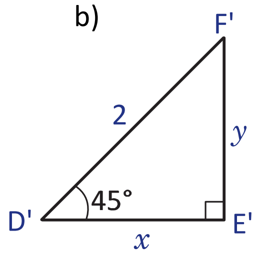
Ejemplo

Dados los siguientes triángulos, encuentra los valores de x y y.

a)

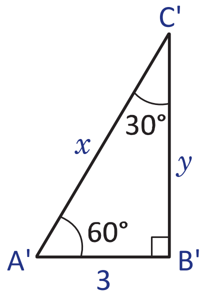


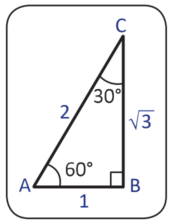
b)



a) Nótese que $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$, entonces,

$\frac{x}{2} = \frac{3}{1} \quad \Rightarrow \quad x = 3(2) = 6 \quad$ y $\quad \frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{3}{1} \quad \Rightarrow \quad y = 3\sqrt{3}.$

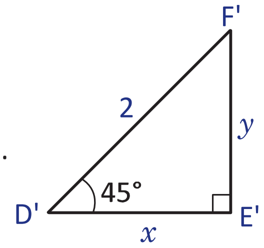


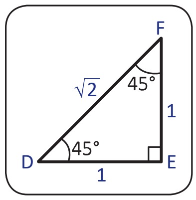


b) De igual forma que en a) $\Delta D'E'F' \sim \Delta DEF$, entonces,

$\frac{x}{1} = \frac{2}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$

Luego, como el $\Delta D'E'F'$ es isósceles se tiene que $y = \sqrt{2}$.

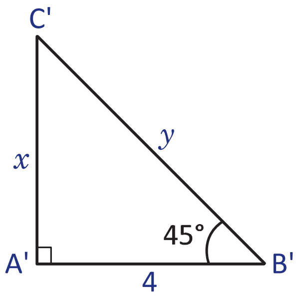




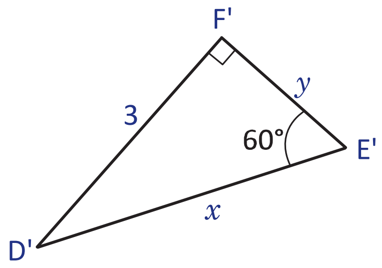
Problemas

Encuentra el valor de x y y en cada triángulo.

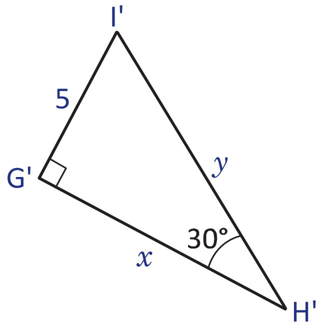
a)



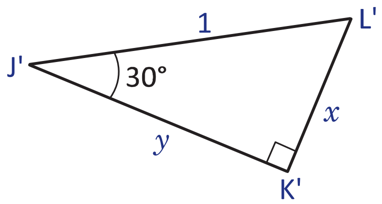
b)



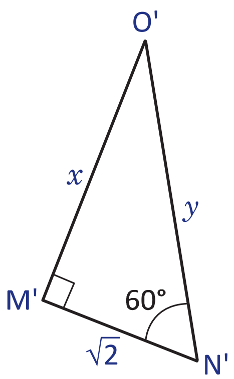
c)



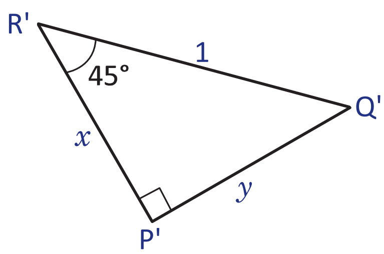
d)



e)



f)



1.4 Razones trigonométricas de triángulos rectángulos notables

Problema inicial

Encuentra las tres razones trigonométricas de los ángulos 30°, 45° y 60°.

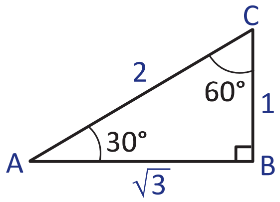
Solución

a) Para calcular las razones trigonométricas para 30° se utiliza el triángulo que se muestra en la figura. Identificando el lado opuesto y adyacente al ángulo de 30° se tiene que, *ady* = $\sqrt{3}$ y *op* = 1. Por lo tanto,

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2},$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

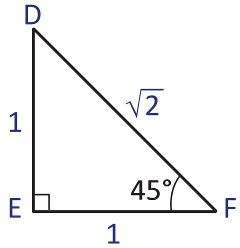


b) Se utiliza el triángulo mostrado en la figura para calcular las razones trigonométricas de 45°. Identificando el lado opuesto y adyacente al ángulo de 45°se tiene que, *ady* = *op* = 1. Por lo tanto,

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\tan 45° = \frac{1}{1} = 1.$$



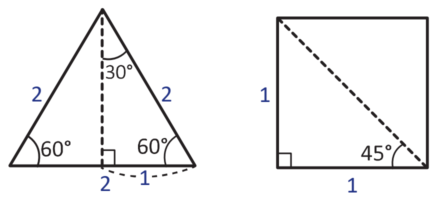
c) Para calcular las razones trigonométricas para 60° se utiliza el mismo triángulo ABC que se utilizó en a). En este caso, *ady* = 1 y *op* = $\sqrt{3}$. Por lo tanto,

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2},$$

$$\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$

Una forma para recordar las razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60° es recordar cómo se construyen el triángulo de 30° y 60°, y el triángulo de 45°, como se muestra a continuación:



Conclusión

Las razones trigonométricas para los ángulos 30°, 45° y 60° se resumen en la siguiente tabla.

θ	30°	45°	60°
sen θ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos θ	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan θ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Cuando se calculen las razones trigonométricas de los ángulos 30°, 45° y 60° hay que utilizar los valores que aparecen en el cuadro.

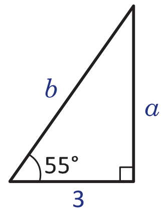
Problemas

Encuentra las razones trigonométricas secante, cosecante y cotangente para los ángulos 30°, 45° y 60°.

1.5 Triángulo rectángulo conocidos un lado y un ángulo agudo

Problema inicial

Dado el siguiente triángulo, encuentra la medida de los dos lados faltantes. Aproxima hasta las décimas.



Solución

Como se conoce el valor de uno de los ángulos agudos del triángulo se pueden utilizar las razones trigonométricas para calcular la medida de los lados faltantes.

Se sabe que tan 55° = $\frac{a}{3}$, entonces a = 3tan 55°. Como 55° no es un ángulo de un triángulo notable, se calcula el valor de tan 55° con la calculadora, pero antes hay que configurarla de modo que los ángulos estén medidos en grados, realizando los siguientes pasos:

Presionar la tecla MODE dos veces y presionar la tecla [1].

Ahora que está configurada la calculadora, se introduce tan 55° como se muestra a continuación:

[tan] [5] [5] [=] $\Rightarrow$

Pantalla de la calculadora

tan 55
1.428148007

Aproximando a un decimal se tiene que a = 3tan 55° ≈ 3(1.4) = 4.2. Para calcular el valor de b se considera el hecho que

$$\cos 55° = \frac{3}{b} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{3}{\cos 55°}$$

[3] [÷] [cos] [5] [5] [=] $\Rightarrow$

Pantalla de la calculadora

3÷cos 55
5.230340387

Por lo tanto, a ≈ 4.2 y b ≈ 5.2.

Dependiendo del modelo de la calculadora, la tecla MODE puede aparecer de dos formas.

MODE CLR MODE SETUP

Si tu calculadora tiene la segunda opción, debes presionar las teclas SHIFT MODE SETUP y luego presionar la tecla [3].

En la calculadora, la función seno aparece como [sin].

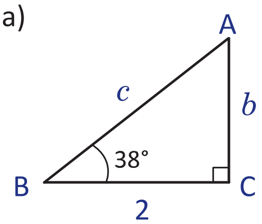
Conclusión

Dadas la medida de un lado y de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo pueden encontrarse las medidas de los lados restantes utilizando las razones trigonométricas del ángulo agudo.

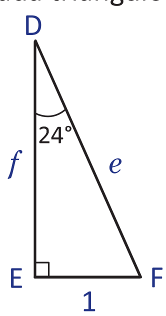
Problemas

Encuentra la medida de los lados faltantes en cada triángulo.

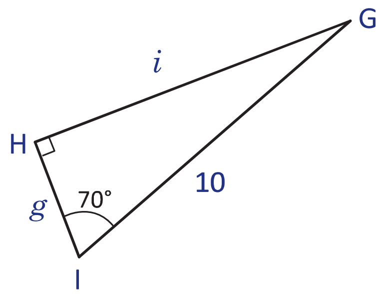
a)



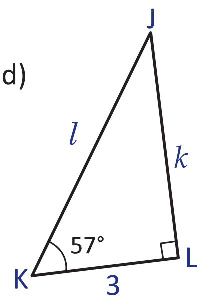
b)



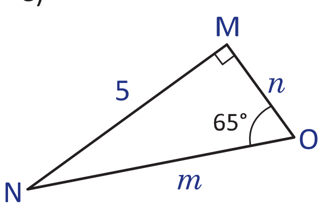
c)



d)



e)

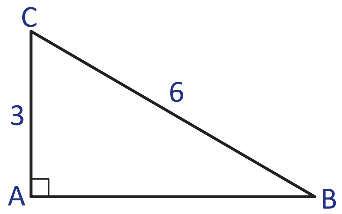


1.6 Triángulo rectángulo conocidos dos lados

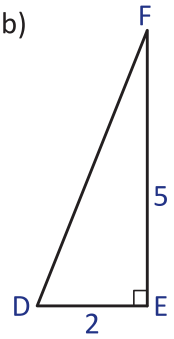
Problema inicial

En los siguientes triángulos, encuentra las medidas de los ángulos agudos.

a)



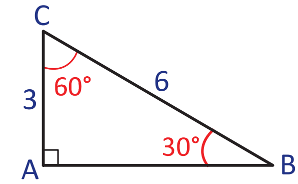
b)



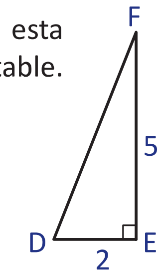
En un triángulo ABC, se suele denotar a la medida del ángulo C por *C* (en cursiva).

Solución

a) Obsérvese que $\cos C = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. El ángulo que cumple esta condición es el ángulo de 60°, por lo tanto $C = 60°$ y $B = 30°$.



b) Del triángulo se tiene que $\tan D = \frac{5}{2}$. Para encontrar el valor del ángulo D que cumpla esta condición se utilizará una calculadora ya que la razón no corresponde a algún triángulo notable.



SHIFT $\tan^{-1}$ tan (5 ÷ 2) = $\Longrightarrow$

Pantalla de la calculadora

$\tan^{-1}(5\div2)$

68.19859051

Aproximando a las décimas, se tiene que $D \approx 68.2°$. Luego, $F \approx 90° - 68.2° = 21.8°$.

La función de la calculadora $\tan^{-1}$ devuelve un ángulo que cumpla la condición que se le indique. Por ejemplo, $\tan^{-1} \frac{5}{2}$ devuelve el ángulo θ que cumple que $\tan \theta = \frac{5}{2}$, con θ entre –90° y 90°.

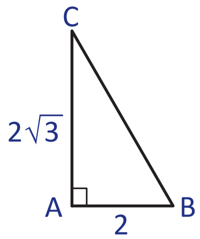
Conclusión

Dadas las medidas de dos lados de un triángulo rectángulo se pueden encontrar los ángulos agudos utilizando las razones trigonométricas.

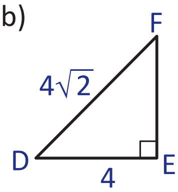
Problemas

Encuentra la medida de los ángulos agudos de los triángulos rectángulos.

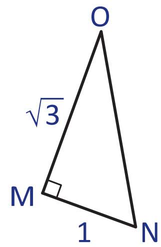
a)



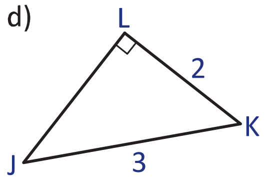
b)



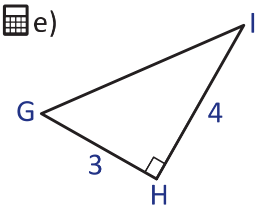
c)



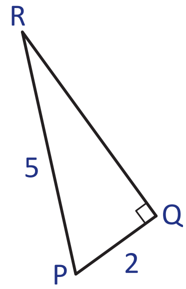
d)



e)



f)

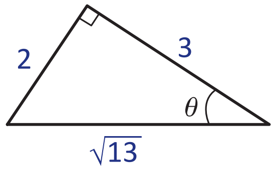


Unidad 5

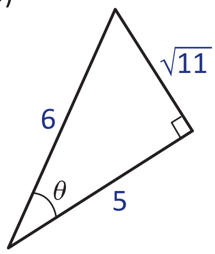
1.7 Practica lo aprendido

1. Determina las razones trigonométricas sen θ, cos θ y tan θ para cada uno de los siguientes triángulos.

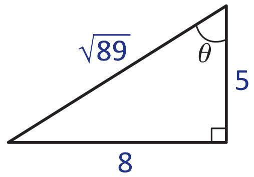
a)



b)

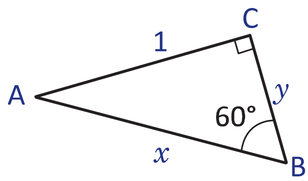


c)

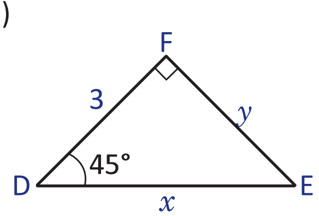


2. Determina el valor de x y y en cada triángulo.

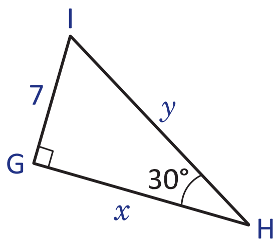
a)



b)

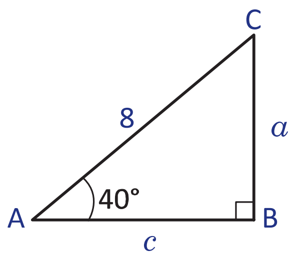


c)

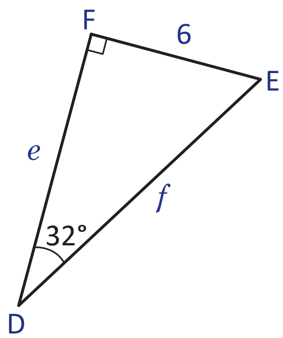


3. Calcula la medida de los lados faltantes en cada triángulo. Aproxima tu respuesta hasta las décimas.

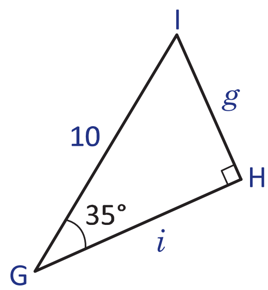
a)



b)

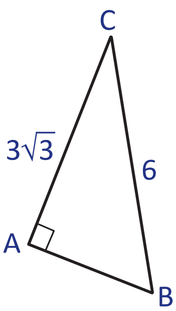


c)

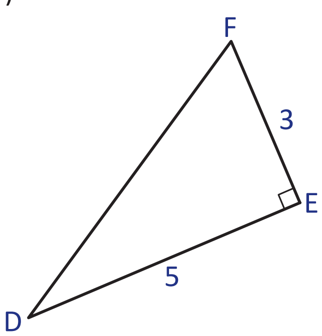


4. Calcula la medida de los ángulos agudos de los triángulos rectángulos hasta las décimas.

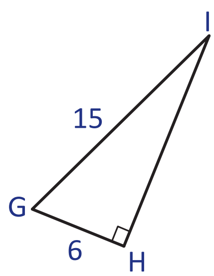
a)



b)



c)



1.8 Aplicación de las razones trigonométricas

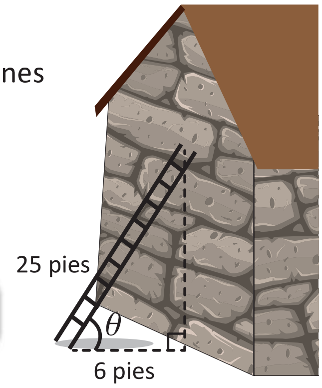
Problema inicial

Un carpintero compra una escalera de 25 pies y en las instrucciones de uso dice que la posición más segura para ubicarla sobre la pared es cuando el pie de la escalera se encuentra a 6 pies de la pared. ¿Qué ángulo forma la escalera con el suelo?

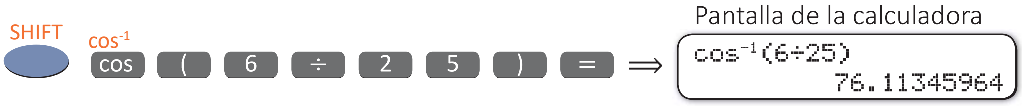
Solución

Se puede formar un triángulo rectángulo, como muestra la figura. Aplicando razones trigonométricas se tiene que

$$\cos\theta = \frac{6}{25}.$$



Utilizando la calculadora para calcular el ángulo se tiene



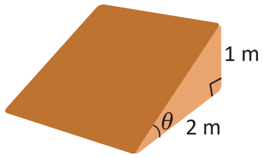
Entonces, el ángulo que forma la escalera con el suelo es aproximadamente 76°.

Conclusión

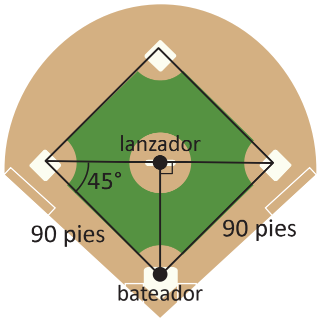
Las razones trigonométricas pueden utilizarse para calcular ángulos de inclinación que forman algunos objetos con superficies planas, para calcular distancias entre dos objetos o alturas de edificios o árboles.

Problemas

1. Un patinador hará una pirueta sobre una rampa cuyo largo es de 2 metros. Si la altura de la rampa es de 1 metro, ¿cuál es el ángulo de inclinación de la rampa?

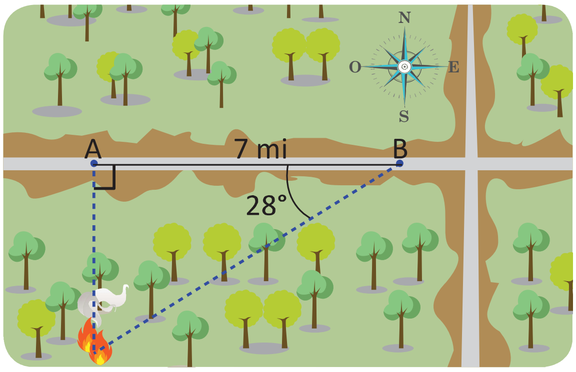


2. Las tres bases por las que debe pasar un beisbolista están sobre un cuadrado de 90 pies, como muestra la figura. ¿A qué distancia se encuentra el lanzador del bateador?



3. Una escalera de 20 pies yace sobre una pared y alcanza una altura de 16 pies, ¿cuál es el ángulo de inclinación de la escalera con respecto al suelo?

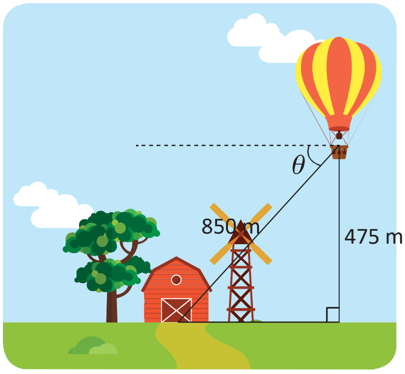
4. Un guardabosques que se encuentra en el punto A observa un incendio directamente al sur. Un segundo guardabosques en el punto B, a 7 millas del primer guardabosques observa el mismo incendio a 28° al suroeste, ¿qué tan lejos está el incendio del primer guardabosques?



1.9 Ángulo de depresión

Problema inicial

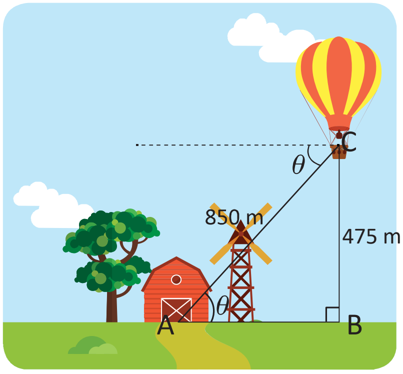
Un fotógrafo profesional desea tomarle una foto a una granja que observa desde un globo aerostático que está a una altura aproximada de 475 metros del suelo y a una distancia de 850 metros de la granja, observa la figura. ¿Cuánto mide el ángulo θ si la línea punteada es horizontal?



Solución

Se etiquetan con A, B y C los vértices del triángulo formado, como muestra la figura. Entonces, $\sphericalangle CAB = \theta$ ya que la línea punteada es paralela a $\overline{AB}$. Utilizando razones trigonométricas, se tiene que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{475}{850}.$$



Utilizando la calculadora,

SHIFT sen^{-1}

[SHIFT] [sen] [(] [4] [7] [5] [÷] [8] [5] [0] [)] [=]

↓

Pantalla de la calculadora

```
sen⁻¹(475÷850)
       33.97447595
```

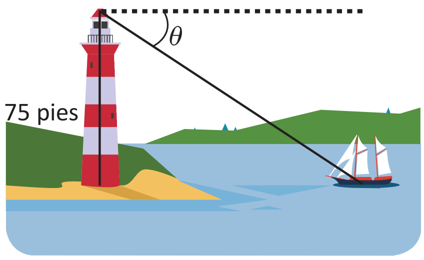
Por lo tanto, $\theta \approx 34°$.

Definición

Si un observador se encuentra por encima de un objeto, al ángulo que se forma entre una línea horizontal imaginaria y la línea de visión hacia el objeto se le llama **ángulo de depresión**. Por ejemplo, el ángulo θ que aparece en el dibujo del Problema inicial es un ángulo de depresión.

Problemas

1. Un faro tiene 75 pies de altura, y desde la punta de este se observa un bote de modo que el coseno del ángulo de depresión es $\frac{4}{5}$, ¿qué tan lejos está el bote del faro?



2. Desde la parte alta de un viejo edificio, un niño observa a un perro que se encuentra en la calle, de modo que se forma un ángulo de depresión de 37°. Si la altura del edificio es de 9 m, ¿a qué distancia de la base del edificio se encuentra el perro?

3. Un edificio tiene 100 metros de altura, y desde su punto más alto hay una persona observando unas ardillas comiendo en el suelo. La tangente del ángulo de depresión del observador es $\frac{5}{4}$, ¿a qué distancia están las ardillas de la base del edificio?

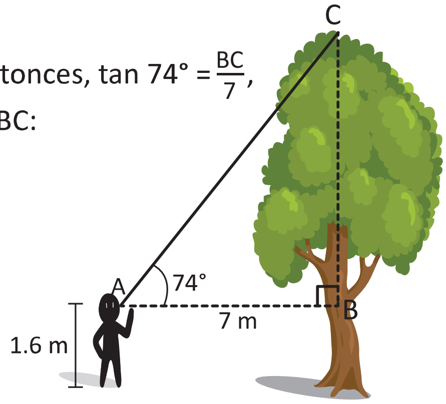
4. Una persona que mide 1.5 metros se encuentra en un muelle que sobresale 3.5 metros por encima del mar. La persona observa un bote con un ángulo de depresión de 10°, ¿a qué distancia está el bote del muelle?

1.10 Ángulo de elevación

Problema inicial

Un guardabosques quiere calcular la altura de un árbol y para ello se coloca a 7 metros de la base del árbol y observa la punta de este con un ángulo de 74°. Si la altura del guardabosques es de 1.6 metros, ¿cuál es la altura del árbol?

Solución



Se forma un triángulo rectángulo auxiliar ABC como muestra la figura. Entonces, $\tan 74° = \frac{BC}{7}$, por lo que $BC = 7\tan 74°$. Se puede utilizar la calculadora para encontrar BC:

Pantalla de la calculadora

7 × tan 7 4 = ⟹ 7×tan 74 24.41190111

Al valor de BC hay que sumarle la altura del guardabosques, por lo que la altura del árbol es aproximadamente 24.4 + 1.6 = 26 metros.

Definición

Si un observador se encuentra por debajo de un objeto, al ángulo que se forma entre una línea horizontal imaginaria y la línea de visión hacia el objeto se le llama **ángulo de elevación**. Por ejemplo, del gráfico del Problema inicial, el ángulo de elevación es ∢CAB.

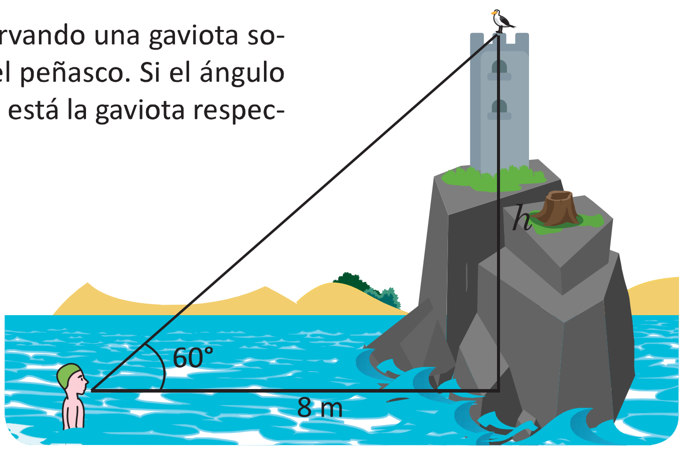
Problemas

1. Una guardabosques debe entrenar a un nuevo equipo de madereros para calcular la altura de los árboles. Como ejemplo, ella camina a 12 metros de la base de un árbol y estima que el ángulo de elevación desde el suelo a la punta del árbol es de 70°. Calcula la altura del árbol.

2. Para calcular la altura a la que se encuentra una nube del suelo durante la noche, se dirige un rayo vertical de luz hacia un punto de ella. En algún punto sobre el suelo, a 135 pies de donde se emite el rayo, se determina que el ángulo de elevación hacia el tope del rayo es de 65°. ¿Cuál es la altura a la que se encuentra la nube?

3. Un niño está a 2 metros de un árbol y observa a un gato que ha quedado atrapado en la punta del árbol. Si la altura del niño es de 1 metro y el ángulo de elevación es de 60°, ¿a qué altura está el gato del suelo?

4. Un nadador está a 8 metros de un peñasco observando una gaviota sobre la punta de un viejo edificio que está sobre el peñasco. Si el ángulo de elevación del nadador es de 60°, ¿qué tan alto está la gaviota respecto al nivel del mar?



Unidad 5

1.11 Actividad. Construcción de un clinómetro

Un clinómetro es un aparato que se utiliza para medir inclinaciones en superficies, aunque también se utiliza para calcular alturas de edificios, árboles, postes, etc. Los clinómetros profesionales son sencillos de utilizar, y esta actividad muestra cómo construir uno.

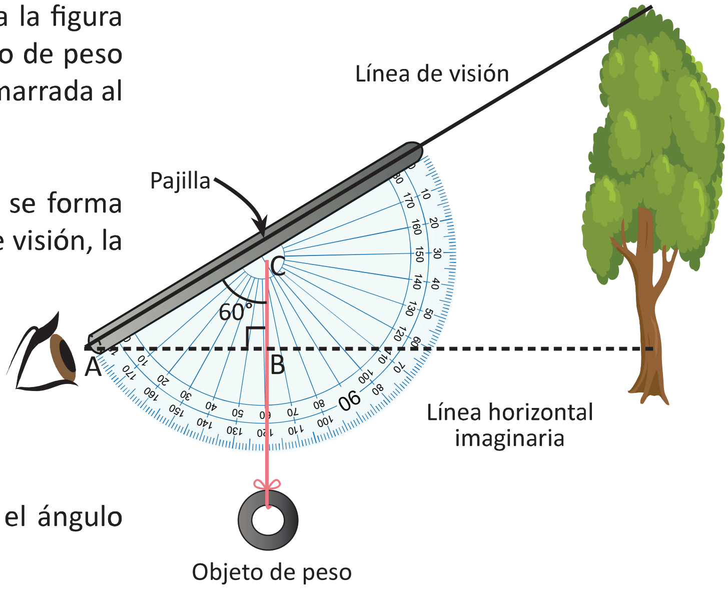
Funcionamiento de un clinómetro

El observador coloca el clinómetro como muestra la figura y a través de un tubo observa el objeto. Un objeto de peso está amarrado a una cuerda y esta a su vez está amarrada al transportador.

Al colocar el clinómetro como muestra la figura, se forma un triángulo rectángulo (el ΔABC) entre la línea de visión, la línea horizontal imaginaria y el trozo de cuerda tensado. El ángulo que marca la cuerda en el transportador es el ángulo BCA. Entonces, en el ΔABC se tiene que:

$$\sphericalangle CAB = 90° - \sphericalangle BCA = 90° - 60° = 30°.$$

Se puede observar que con este procedimiento, el ángulo calculado corresponde al ángulo de elevación.

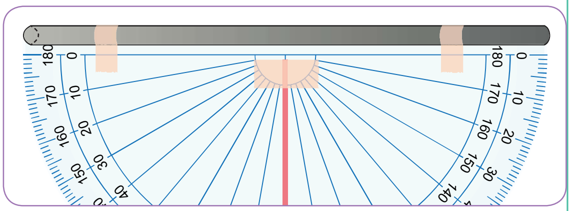


Materiales

- Un transportador
- Una pajilla
- Cinta adhesiva
- Lana o un trozo de cuerda
- Tijeras
- Un objeto pesado, puede ser una tuerca de 20 mm

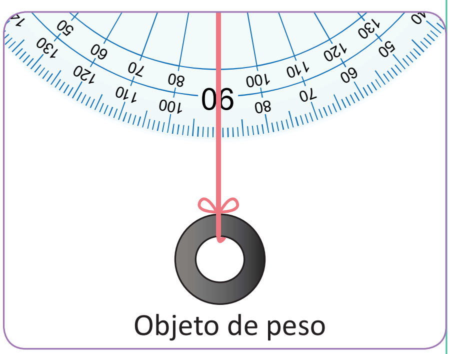
Actividad

1. Algunos transportadores tienen un hueco en su centro, por lo que puede amarrarse un trozo de cuerda en este hueco. Si no tiene el hueco, puede pegarse con un trozo de cinta adhesiva, donde está el centro del transportador. La longitud del trozo de cuerda debe sobrepasar al radio del transportador.



2. Cortar un trozo de pajilla, con longitud igual al diámetro del transportador. Pegar el trozo de pajilla con cinta adhesiva, con cuidado de no apretarla ya que hay que ver a través de ella.

3. En el extremo de la cuerda que quedó libre, amarrar la tuerca.



El clinómetro está listo para utilizarse.

Problemas

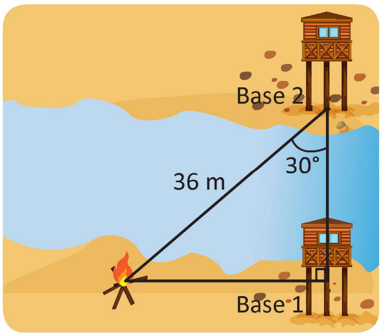
1. Calcula la altura de un árbol que se encuentre a tu alrededor utilizando el clinómetro para determinar el ángulo de elevación.
2. Con el clinómetro construido en la Actividad 1.11, ¿puedes calcular ángulos de depresión? Si la respuesta es afirmativa, explica cómo.

1.12 Aplicaciones de las razones trigonométricas

1. Un pescador está a 12 km de un barco que se encuentra al este de él y observa un faro a 60° desde la línea de visión con el barco. ¿A qué distancia está el barco del faro si se encuentra en dirección sur del barco?

2. Un globo aerostático es amarrado a una roca con un lazo de 20 metros. El seno del ángulo que forma el lazo con el suelo es $\frac{3}{4}$, ¿qué tan alto está el globo?

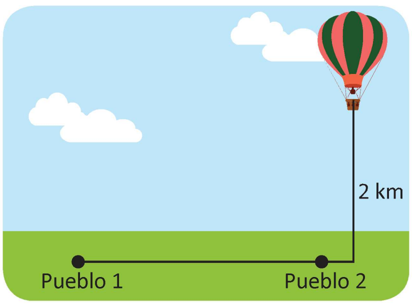
3. En el dibujo, ¿cuál es la distancia entre la Base 1 y la fogata?



4. Un hombre observa desde el tope de un faro una embarcación pesquera y estima que el ángulo de depresión es de 25°. Si la altura del faro es de 40 metros, ¿a qué distancia está la embarcación del faro?

5. Un hombre se encuentra en un edificio observando otro edificio que está a 100 m de distancia. El ángulo de elevación al tope del edificio es de 30° y el ángulo de depresión a la base es de 15°, ¿cuál es la altura del edificio que observa? Desprecia la altura del hombre.

6. Desde un globo aerostático a 2 km de altura, se observan dos pueblos. El ángulo de depresión a ambos pueblos es de 80° y 20°. ¿Qué distancia hay entre los pueblos?



Unidad 5

2.1 Distancia entre dos puntos

Problema inicial

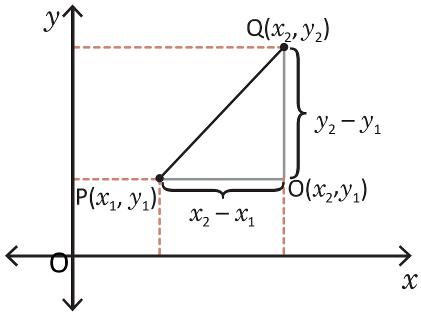
Dados dos puntos P(x_1, y_1) y Q(x_2, y_2) en el plano cartesiano, ¿cuál es la distancia entre los puntos?

Se define la distancia entre dos puntos como la longitud del segmento de recta que une ambos puntos.

Solución

Supóngase que $x_1 \neq x_2$ y $y_1 \neq y_2$. Si se trazan rectas perpendiculares a los ejes que pasen por P y Q, como muestra la figura, el punto O tiene coordenadas (x_2, y_1). De aquí se deduce que OP = $x_2 - x_1$ y QO = $y_2 - y_1$. Luego, por el teorema de Pitágoras en el triángulo POQ, se tiene que

$$(PQ)^2 = (OP)^2 + (QO)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$



Pero PQ > 0 por ser una distancia, entonces

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Si $x_1 = x_2$ y $y_1 \neq y_2$, entonces la distancia de P a Q sería

$$\Rightarrow \quad PQ = \sqrt{(x_2 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|.$$

De manera análoga, si $x_1 \neq x_2$ y $y_1 = y_2$, la distancia de P a Q sería

$$\Rightarrow \quad PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|.$$

Para todo número real a se cumple que $\sqrt{a^2} = |a|$.

Definición

La distancia de dos puntos P y Q en el plano con coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) respectivamente, denotada por d(P, Q) está dada por

$$d(P, Q) = PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ejemplo

Calcula la distancia entre los puntos P(–1, 3) y Q(2, 1).

La distancia es,

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \sqrt{(2 - (-1))^2 + (1 - 3)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{9 + 4} \\ &= \sqrt{13}. \end{aligned}$$

Problemas

1. Calcula la distancia entre los puntos P y Q.

a) P(–2, –1), Q(2, 2) b) P(7, 2), Q(4, –2) c) P(2, –2), Q(–8, 4)

d) P(1, 1), Q(9, 2) e) P(0, 1), Q(3, 5) f) P(–3, 5), Q(7, –9)

g) P(–1, 4), Q(2, 4) h) P(3, 2), Q(3, 2) i) P(–1, 0), Q(–1, 0)

2. Demostrar que si P(x_1, y_1) y Q(x_2, y_2), entonces d(P, Q) = d(Q, P).

2.2 Simetrías en el plano cartesiano*

Problema inicial

Se toma el punto P(a, b) sobre el plano cartesiano. Determina lo siguiente respecto al punto P:

a) Las coordenadas del punto simétrico respecto al eje x.

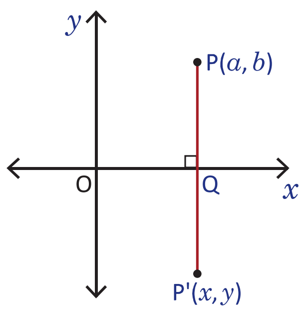
b) Las coordenadas del punto simétrico respecto al eje y.

c) Las coordenadas del punto simétrico respecto al origen.

d) Las coordenadas del punto simétrico respecto a la recta $y = x$.

Solución

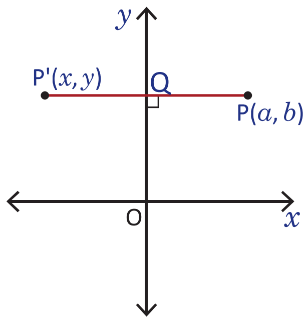
a) Sea P'(x, y) el punto simétrico de P respecto al eje x. Por propiedades de simetría, el segmento PP' es perpendicular al eje x y si Q es la intersección de dicho segmento con el eje, se satisface que PQ = P'Q.



Como el segmento PP' es vertical, solo la segunda coordenada de P' cambia. P y P' están a la misma distancia del eje x, por lo tanto la segunda coordenada de P' es el número opuesto a b, es decir $-b$.

Por lo tanto, el simétrico de P(a, b) respecto al eje x es P'(a, $-b$).

b) Sea P'(x, y) el punto simétrico de P respecto al eje y. Por propiedades de simetría, el segmento PP' es perpendicular al eje y y si Q es la intersección de dicho segmento con el eje, se satisface que PQ = P'Q.

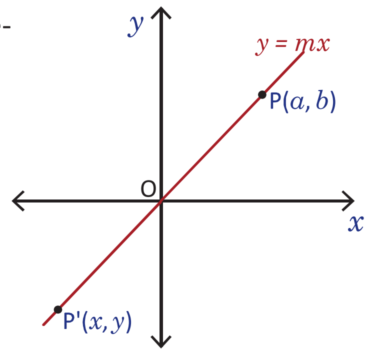


Como el segmento PP' es horizontal, solo la primera coordenada de P' cambia. P y P' están a la misma distancia del eje y, por lo tanto la primera coordenada de P' es el número opuesto a a, es decir $-a$.

Por lo tanto, el simétrico de P(a, b) respecto al eje y es P'($-a$, b).

c) Sea P'(x, y) el simétrico de P respecto al origen O. Por definición de simetría respecto a un punto, se tiene que OP = OP', es decir

$$(\text{OP})^2 = (\text{OP}')^2$$
$$\Rightarrow \quad (x-0)^2 + (y-0)^2 = (a-0)^2 + (b-0)^2$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \qquad \text{------------------ (1)}$$



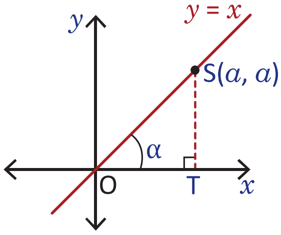
Pero P y P' están sobre la recta $y = mx$, por lo que también se cumple que $b = ma$. Sustituyendo y y b en (1) se tiene

$$x^2 + m^2x^2 = a^2 + m^2a^2$$
$$\Rightarrow \quad x^2(1 + m^2) = a^2(1 + m^2);$$

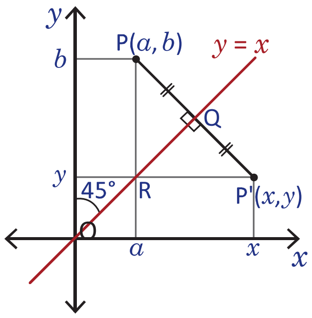
como $1 + m^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad x = a$ o bien $x = -a$.

Si $x = a$ entonces $y = mx = ma = b$, por lo que P' resulta ser el mismo punto P. Si $x = -a$ entonces $y = mx = -ma = -b$, así P'($-a$, $-b$) es el simétrico de P respecto al origen. Por lo tanto, P'($-a$, $-b$).

d) Primero véase que, si se toma el punto S(a, a) sobre la recta $y = x$, al trazar el triángulo OTS se deduce que tan $\alpha = 1$, por lo que $\alpha = 45°$; es decir, la recta $y = x$ divide en dos partes iguales a los cuadrantes I y III del plano cartesiano.



Sea P(a, b) un punto del plano cartesiano y P'(x, y) su simétrico respecto a la recta $y = x$. El resultado no se ve afectado si consideramos a P sobre la recta $y = x$. Sea Q la intersección del segmento PP' y la recta $y = x$. Por propiedades de simetría, PP' es perpendicular a dicha recta y PQ = P'Q.



Se traza el segmento vertical PR. Los triángulos PQR y P'QR son congruentes ya que PQ = P'Q, QR es lado común y ∢PQR = ∢P'QR = 90° (criterio LAL). Por lo tanto,

PR = P'R y ∢PRQ = ∢P'RQ. ------------------ (2)

Pero ∢PRQ = 45°, ya que PR es paralela al eje y. Luego ∢P'RQ = 45°, por lo que ∢P'RP = 90°. Por tanto, P'R es perpendicular a PR y así P'R = $x - a$ y PR = $b - y$.

De (2) se tiene que PR = P'R, pero PR = $b - a$, por lo que $b - a$ = P'R = $x - a$, es decir $x = b$. De igual forma, $b - a$ = PR = $b - y$, es decir, $y = a$. Por lo tanto, las coordenadas de P' son (b, a).

Teorema

Si P(a, b) es un punto sobre el plano cartesiano entonces:
- P'(a, $-b$) es el punto simétrico de P respecto al eje x.
- P'($-a$, b) es el punto simétrico de P respecto al eje y.
- P'($-a$, $-b$) es el punto simétrico de P respecto al origen.
- P'(b, a) es el punto simétrico de P respecto a la recta $y = x$.

A la recta que tiene por ecuación $y = x$ se le conoce como **recta identidad**.

Ejemplo

Sean P(−1, 3) y Q(−2, −3) dos puntos en el plano. Determina el simétrico de P y Q respecto al eje x, respecto al eje y, respecto al origen y respecto a la recta identidad.

a) El simétrico de P respecto al eje x es $P_1(-1, -3)$.
El simétrico de P respecto al eje y es $P_2(1, 3)$.
El simétrico de P respecto al origen es $P_3(1, -3)$.
El simétrico de P respecto a la recta identidad es $P_4(3, -1)$.

b) El simétrico de Q respecto al eje x es $Q_1(-2, 3)$.
El simétrico de Q respecto al eje y es $Q_2(2, -3)$.
El simétrico de Q respecto al origen es $Q_3(2, 3)$.
El simétrico de P respecto a la recta identidad es $Q_4(-3, -2)$.

Problemas

1. Determina el simétrico de cada punto respecto al eje x, respecto al eje y, respecto al origen y respecto a la recta $y = x$.

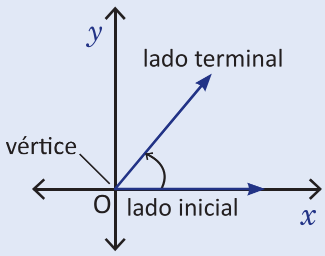
a) P(1, 4) b) P(3, −2) c) P(−3, −1)
d) P(−5, 4) e) P(2, 0) f) P(0, −3)

2. ¿Puede encontrarse el simétrico respecto al origen de un punto P haciendo una simetría respecto al eje x y luego haciendo otra simetría respecto al eje y? Justifica tu respuesta.

2.3 Ángulos

Definición

Se ubica un rayo sobre el eje x con punto inicial en el origen del plano cartesiano y se rota este rayo alrededor del origen; a la abertura entre el rayo inicial y el final se le llama **ángulo** y al rayo inicial se le llama **lado inicial** y al rayo final se le llama **lado terminal** del ángulo. Se dice que un ángulo está en **posición estándar** si su lado inicial está sobre el lado positivo del eje x y su vértice sobre el origen. Un ángulo puede medirse en grados y cada grado resulta de dividir una circunferencia en 360 partes iguales, siendo cada parte 1° (un grado).



Si un ángulo se genera mediante una rotación en el sentido antihorario será positivo, y una rotación en el sentido horario genera un ángulo negativo.

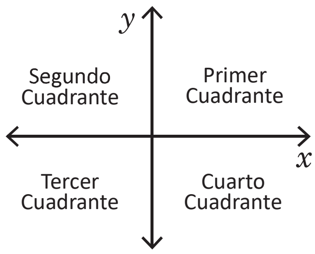
Dependiendo en qué cuadrante está el lado terminal del ángulo, se dice que el ángulo es de dicho cuadrante.

Ejemplo

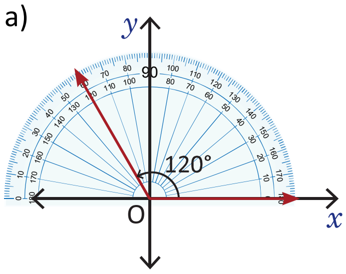
Dibuja cada ángulo en posición estándar e identifica a qué cuadrante pertenece.

a) 120° b) –70° c) –150°

Cuando se construye el plano cartesiano se obtienen cuatro secciones a las que se les llama cuadrantes y se enumeran a partir del cuadrante superior derecho y en sentido antihorario.



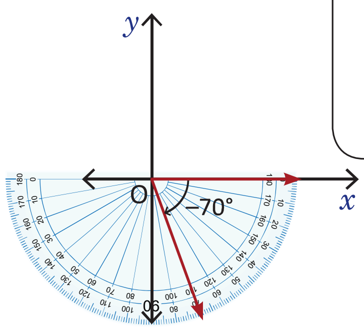
a)



Como el lado final está en el segundo cuadrante, 120° pertenece al segundo cuadrante.

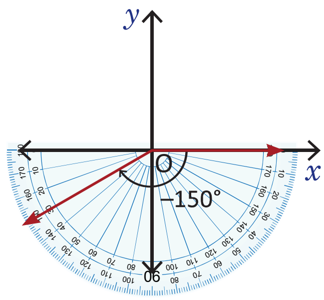
b) Para graficar este ángulo, como va en el sentido a las agujas del reloj, se coloca el transportador hacia abajo y se marca 70°.

Como el lado final está en el cuarto cuadrante, –70° pertenece al cuarto cuadrante.



c) Para graficar este ángulo, como va en el sentido a las agujas del reloj, se coloca el transportador hacia abajo y se marca 150°.

Como el lado final está en el tercer cuadrante, –150° pertenece al tercer cuadrante.



Problemas

Dibuja cada ángulo en posición estándar e identifica a qué cuadrante pertenece.

a) 80° b) 310° c) –170°

2.4 Ángulos mayores a 360° y menores a –360°

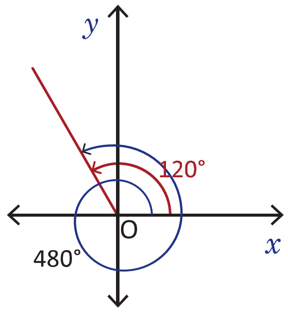
Problema inicial

Dibuja los ángulos 480°, 930°, 2 150° y –1 150°.

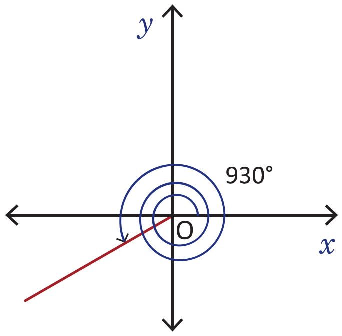
Solución

Para dibujar los ángulos, hay que recordar (de la clase anterior) que una circunferencia se ha dividido en 360 partes iguales y cada parte representa 1°, por lo tanto, un ángulo de 360° representa una vuelta completa.

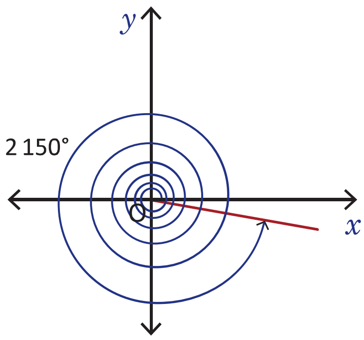
a) Se escribe 480° como 360° + 120°, entonces al dibujar el ángulo se obtiene



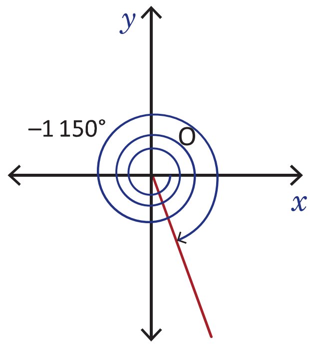
b) Observa que 930° = 360°(2) + 210°, entonces al dibujar se obtiene



c) Observa que 2 150° = 360°(5) + 350°, entonces al dibujar se obtiene



d) Como el ángulo es negativo hay que medirlo en el sentido de las agujas del reloj, además
–1 150° = –360°(3) – 70°



Observa que –1150° también puede escribirse como
360°(–3) – 70° = 360°(–3) – 70° + 360° – 360° = 360°(–4) + 290°
lo cual resulta más útil, ya que de este modo no se trabaja con ángulos negativos.

Conclusión

Para dibujar un ángulo mayor a 360° se determina cuántas vueltas completas contiene el ángulo y el lado terminal será el que corresponde al ángulo menor de 360° que queda al descomponer el ángulo.

Por ejemplo, si θ = 360°n + θ', con n un número entero distinto de cero, n representa el número de vueltas completas que contiene el ángulo y $0 \leq \theta' < 360°$, el lado terminal de θ será igual al lado terminal del ángulo θ'. Si $n > 0$, el ángulo se mide en el sentido antihorario y si $n < 0$, el ángulo se mide en sentido horario.

Problemas

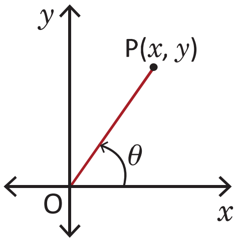
Dibuja cada ángulo.

a) 1 000°
b) 990°
c) 1 480°
d) –1 500°
e) –1 315°
f) –1 880°

2.5 Razones trigonométricas de cualquier ángulo, parte 1

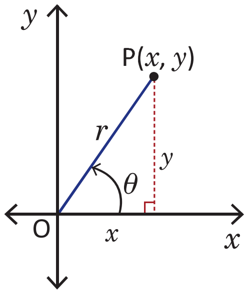
Problema inicial

Considera el ángulo θ de la figura. Expresa los valores seno, coseno y tangente del ángulo θ en términos de x y y.



Solución

Se dibuja un triángulo rectángulo tal que la hipotenusa es el lado terminal del ángulo y uno de los catetos está sobre el eje x, como muestra la figura. El punto final del lado terminal está determinado por el punto P con coordenadas (x, y), por lo que los catetos del triángulo miden x y y unidades.



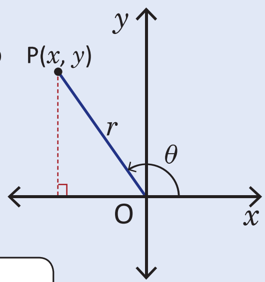
En el triángulo rectángulo, x es la longitud del lado adyacente y y es la longitud del lado opuesto a θ. Para determinar la longitud de la hipotenusa r se aplica el teorema de Pitágoras, obteniéndose $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, por lo tanto,

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}, \ \cos \theta = \frac{x}{r} \ \text{ y } \tan \theta = \frac{y}{x}.$$

Definición

Se definen las razones trigonométricas de cualquier ángulo θ de la siguiente manera: Se coloca el ángulo θ en posición estándar y se toma un punto P(x, y) sobre el lado terminal. Se establece que r = OP = $\sqrt{x^2 + y^2}$, entonces

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}, \ \cos \theta = \frac{x}{r} \ \text{ y } \tan \theta = \frac{y}{x}.$$



Se define tan θ solo cuando $x \neq 0$.

De la definición de razones trigonométricas se establece lo siguiente:

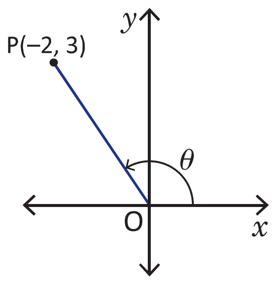
$$y = r\text{sen } \theta, \quad x = r\cos \theta.$$

Además, sen$(360°n + \theta)$ = sen θ y cos$(360°n + \theta)$ = cos θ.

Observar que $\tan \theta = \dfrac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}$.

Ejemplo

Determina las razones seno, coseno y tangente para el ángulo θ en la figura.



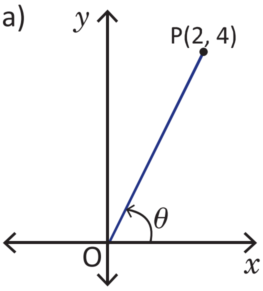
En este caso, $r = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$, por lo tanto,

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{r} = \frac{3}{\sqrt{13}}, \ \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{\sqrt{13}} = -\frac{2}{\sqrt{13}} \ \text{ y } \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}.$$

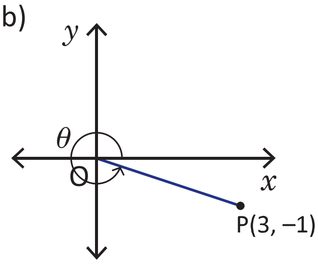
Problemas

Determina los valores seno, coseno y tangente de cada ángulo.

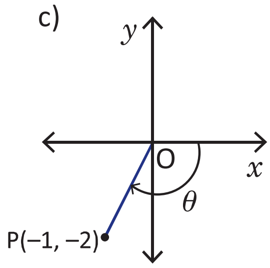
a)



b)



c)



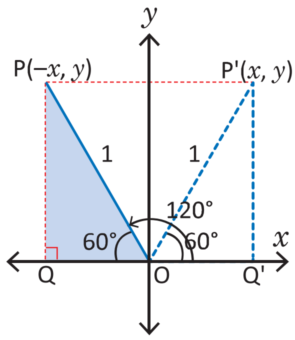
Unidad 5

2.6 Razones trigonométricas de cualquier ángulo, parte 2

Problema inicial

Calcula los valores de sen 120°, cos 120° y tan 120°.

Solución



Se ubica el ángulo en posición estándar y se traza un triángulo OPQ de modo que OP = 1, como muestra la figura. Si se observa, el ∢QOP es igual a 180° – 120° = 60°, por lo que las razones sen 120°, cos 120° y tan 120° pueden calcularse tomando como referencia los valores de sen 60°, cos 60° y tan 60°.

Si se refleja el ΔOPQ con respecto al eje y, el resultado es el triángulo OP'Q'. Las coordenadas de P' son (cos 60°, sen 60°) y por ser P el simétrico de P', sus coordenadas son (–cos 60°, sen 60°), por lo tanto,

$$\text{sen } 120° = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2},$$

$$\tan 120° = \frac{\text{sen } 120°}{\cos 120°} = \frac{\text{sen } 60°}{-\cos 60°} = -\tan 60° = -\sqrt{3}.$$

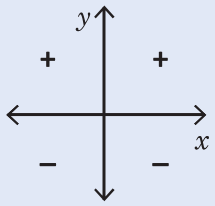
$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{r \text{ sen } \theta}{r \cos \theta} = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}$$

Conclusión

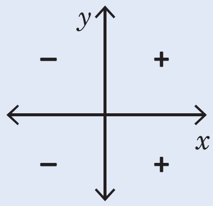
Si se tiene un ángulo distinto de 0°, 90°, 180° o 270° se define el **triángulo de referencia** como el triángulo rectángulo cuya hipotenusa de medida 1, es el lado terminal del ángulo y uno de sus catetos está sobre el eje x. En la solución del Problema inicial, el triángulo OPQ es el triángulo de referencia.

Para calcular razones trigonométricas de ángulos mayores a 90° se procede de la siguiente forma:

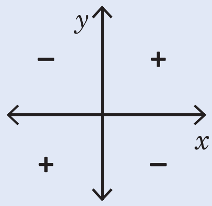
1. Se coloca el ángulo en posición estándar.
2. Se traza el triángulo de referencia siempre que sea posible.
3. Se calculan las razones del ángulo utilizando el ángulo agudo del triángulo de referencia que está comprendido entre el lado terminal del ángulo y el eje x. En este paso se determina el signo que tendrán las razones trigonométricas, dependiendo del cuadrante al que pertenece el ángulo. El signo del seno depende de y, el signo del coseno depende de x y el signo de la tangente depende del cociente $\frac{y}{x}$.



signos del seno



signos del coseno



signos de la tangente

Al ángulo agudo que se utiliza para calcular las razones trigonométricas se le conoce como **ángulo de referencia**.

Problemas

Calcula las razones trigonométricas de cada ángulo de la tabla y complétala. Cuando la razón no esté definida, escribe /.

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sen θ																	
cos θ																	
tan θ																	

Para calcular las razones trigonométricas de los ángulos 0°, 90°, 270° y 360° considera las coordenadas de x y y, que definen el ángulo en el plano cartesiano.

2.7 Razones trigonométricas de cualquier ángulo, parte 3

Problema inicial

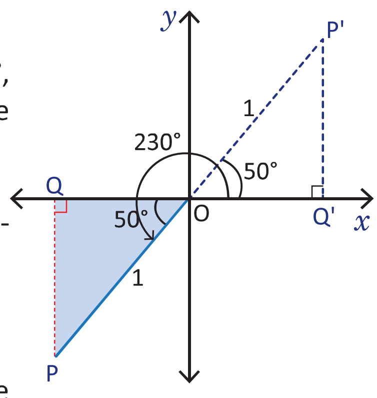
a) Representa los valores de sen 230°, cos 230° y tan 230° en términos de un ángulo agudo.

b) Representa los valores de sen 320°, cos 320° y tan 320° en términos de un ángulo agudo.

Solución

a) Se traza el triángulo de referencia. Si se observa, ∢POQ = 230° – 180° = 50°, por lo que las razones sen 230°, cos 230° y tan 230° pueden representarse tomando como referencia los valores de sen 50°, cos 50° y tan 50°.

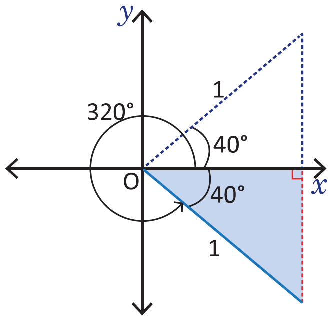
El signo del seno y coseno es negativo y el de la tangente es positivo. Entonces, sen 230° = –sen 50°, cos 230° = –cos 50° y tan 230° = tan 50°.



b) En este caso, el ángulo de referencia es 360° – 320° = 40°. Puede observarse el gráfico de la derecha para analizar por qué se calcula de este modo.

El signo del seno y la tangente es negativo en el cuarto cuadrante, mientras que el coseno es positivo. Entonces,

sen 320° = – sen 40°, cos 320° = cos 40° y tan 320° = – tan 40°.



Conclusión

Los ángulos de referencia sirven para calcular razones trigonométricas de ángulos mayores a 90°.

La forma de calcular el ángulo de referencia depende del cuadrante al que pertenece dicho ángulo. Sea θ un ángulo cualquiera menor que 360°, entonces:

- Si θ pertenece al primer cuadrante, el ángulo de referencia es él mismo.
- Si θ pertenece al segundo cuadrante, el ángulo de referencia es 180° – θ.
- Si θ pertenece al tercer cuadrante, el ángulo de referencia es θ – 180°.
- Si θ pertenece al cuarto cuadrante, el ángulo de referencia es 360° – θ.

Ejemplo

Representa cos(–400°) en términos de un ángulo agudo.

Como –400° = –360° – 40°, el ángulo de referencia es 40°. El ángulo pertenece al cuarto cuadrante, por lo que el signo de cos(–400°) es positivo. Por lo tanto, cos(–400°) = cos 40°.

Problemas

Representa los valores de las razones trigonométricas en términos de los valores de sen θ, cos θ y tan θ, donde $0 \leq \theta < 90°$.

a) 100°	b) 175°	c) 220°
d) 250°	e) 290°	f) 310°
g) 405°	h) 570°	i) 630°
j) –780°	k) –940°	l) –1 000°

Unidad 5

2.8 Razones trigonométricas de cualquier ángulo, parte 4*

Problema inicial

Si θ está entre 0° y 360°, calcula su valor para cada caso:

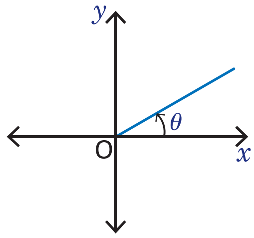
a) sen $\theta = \frac{1}{2}$

b) cos $\theta = -\frac{3}{4}$

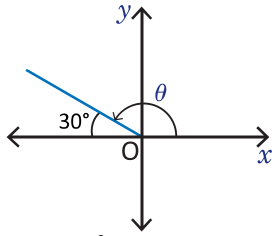
Solución

a) De acuerdo a la condición dada, sen θ es positivo. El seno es positivo en el primer y segundo cuadrante, y además sen 30° = $\frac{1}{2}$. Entonces, hay dos posibles valores para θ si está entre 0° y 360°.

Entonces θ = 30° o bien θ = 180° – 30° = 150°.



Para θ en el primer cuadrante



Para θ en el segundo cuadrante

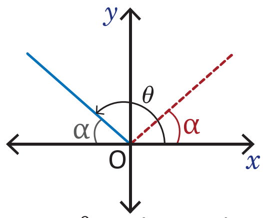
b) De acuerdo a la condición dada, cos θ es negativo. El coseno es negativo en el segundo y tercer cuadrante. Para calcular el valor de θ se utiliza la calculadora. Se utiliza el valor absoluto de $-\frac{3}{4}$ en vez del propio valor.

Considerar el ángulo de referencia α, entonces cos α = $\frac{3}{4}$.

Se sabe que la función $\cos^{-1}$ de la calculadora devuelve el ángulo α que cumpla que cos α = $\frac{3}{4}$; es decir, $\cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = \alpha$.

Pero α es el ángulo de referencia y como θ está en el segundo cuadrante, se tiene que

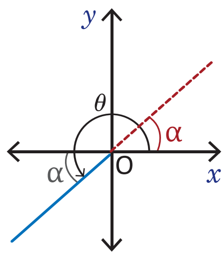
$$\theta = 180° - \alpha = 180° - \cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 138.6°.$$



Para θ en el segundo cuadrante

De igual forma, si θ está en el tercer cuadrante se tiene que

$$\theta = 180° + \cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 221.4°.$$



Para θ en el tercer cuadrante

> Cuando se determinan ángulos con calculadora hay que tener un cuidado especial: esta devuelve ángulos que están entre –90° y 90° para el seno y la tangente, y entre 0° y 180° para el coseno.

Conclusión

Para calcular el valor de un ángulo si se conoce una de sus razones trigonométricas, se utilizan ángulos de referencia. Además, si el ángulo se encuentra entre 0° y 360° generalmente habrán dos ángulos que satisfagan la condición impuesta.

Problemas

Calcula el valor de θ en cada caso si está entre 0° y 360°.

a) sen $\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) tan $\theta = \sqrt{3}$

c) sen $\theta = \frac{2}{3}$

d) cos $\theta = -\frac{4}{7}$

2.9 La identidad pitagórica

Problema inicial

Se denota el cuadrado de una razón trigonométrica, (sen θ)^2, (cos θ)^2, etc., como sen$^2\theta$, cos$^2\theta$, etc.

Demuestra que para cualquier ángulo θ se cumple que sen$^2\theta$ + cos$^2\theta$ = 1.

Solución

Recordando que sen $\theta = \frac{y}{r}$ y cos $\theta = \frac{x}{r}$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces,

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1.$$

Conclusión

La identidad sen$^2\theta$ + cos$^2\theta$ = 1 se conoce como **identidad pitagórica** y es válida para cualquier ángulo θ.

Ejemplo 1

Determinar los valores de cos θ y tan θ si sen $\theta = \frac{5}{13}$ y θ está en el cuadrante I.

Utilizando la identidad pitagórica sen$^2\theta$ + cos$^2\theta$ = 1,

$$\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2\theta = \frac{25}{169} + \cos^2\theta = 1.$$

Entonces $\cos^2\theta = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169-25}{169} = \frac{144}{169}$. Luego, $\cos\theta = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$ o bien $\cos\theta = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$. Pero la otra condición inicial es que θ está en el cuadrante I y en el cuadrante I el coseno es positivo, por lo que $\cos\theta = \frac{12}{13}$.

Para calcular tan θ, recordar que $\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$, entonces

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \frac{5}{13} \div \frac{12}{13} = \frac{5}{13} \times \frac{13}{12} = \frac{5}{12}.$$

Por lo tanto, $\cos\theta = \frac{12}{13}$ y $\tan\theta = \frac{5}{12}$.

Ejemplo 2

Demuestra que $1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\text{sen}^2\theta}$ para cualquier ángulo θ.

Se sabe que $\tan\theta = \frac{y}{x}$, para (x, y) las coordenadas de un punto del plano. Entonces $\cot\theta = \frac{x}{y}$, así

$$1 + \cot^2\theta = 1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{y^2 + x^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2}.$$

Por otra parte, $\frac{1}{\text{sen}^2\theta} = 1 \div \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1 \times \frac{r^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2}$. Por lo tanto, $1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\text{sen}^2\theta}$.

Problemas

1. Determina los valores de sen θ y tan θ si $\cos\theta = -\frac{4}{5}$ y θ está en el cuadrante III.
2. Determina los valores de sen θ y tan θ si $\cos\theta = -\frac{7}{9}$ y $\tan\theta < 0$.
3. Determina los valores de cos θ y tan θ si sen $\theta = \frac{2}{3}$ y θ no está en el cuadrante I.
4. Demuestra que $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ para cualquier ángulo θ.
5. Determina los valores de sen θ y cos θ si $\tan\theta = -\frac{1}{2}$ y sen $\theta > 0$.
6. Demuestra que tan θ + cot θ = sec θ csc θ.
7. Demuestra que sec θ – cos θ = tan θ sen θ.

Puedes utilizar la estrategia aplicada en la solución del problema inicial.

Para el problema 5 puedes utilizar el resultado del problema 4.

2.10 Practica lo aprendido

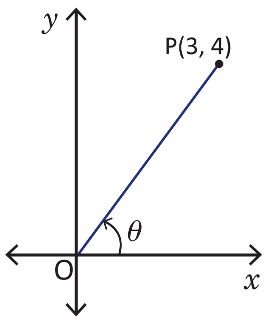
1. Dibuja cada ángulo.

a) 530°　　b) 780°　　c) 855°

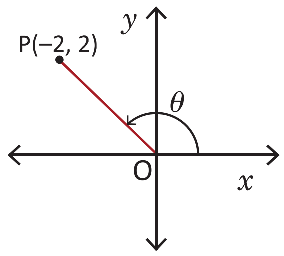
d) –1 360°　　e) –1 210°　　f) –630°

2. Determina las razones trigonométricas seno, coseno y tangente para cada ángulo.

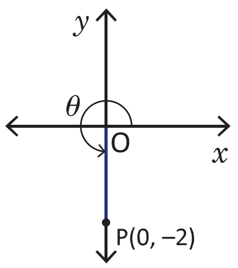
a)



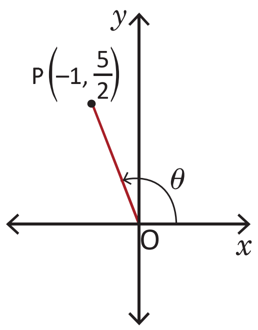
b)



c)



d)



3. Representa los valores de las razones trigonométricas en términos de los valores de sen θ, cos θ y tan θ, donde $0 \leq \theta < 90°$.

a) 165°　　b) 855°　　c) 2 385°

d) –140°　　e) –840°　　f) –2 190°

4. Calcula el valor de θ en cada caso, donde $0° \leq \theta < 360°$.

a) cos $\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$　　b) tan $\theta = 1$　　c) sen $\theta = -\frac{7}{9}$

5. Determina sen θ si cos $\theta = \frac{5}{6}$ y θ no está en el cuadrante I.

6. Determina sen θ y cos θ si tan $\theta = -\frac{1}{3}$ y θ está en el cuadrante II.

7. Demuestra que $\sec^2\theta + \csc^2\theta = \sec^2\theta \csc^2\theta$.

8. Demuestra que $(\tan\theta + \cot\theta)\tan\theta = \sec^2\theta$.

3.1 Área de un triángulo

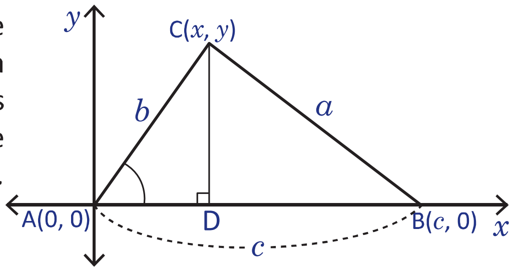
Problema inicial

Del triángulo ABC se conocen las medidas de los lados AC = b y AB = c, y la medida del ángulo A. Determina una fórmula para calcular el área del triángulo utilizando razones trigonométricas.

Recuerda que en un triángulo suele referirse a los ángulos de acuerdo a las etiquetas de los vértices.

Solución

Se ubica el triángulo ABC sobre el plano cartesiano de modo que A(0, 0) y B(c, 0), con $c > 0$, y C(x, y), con $y > 0$. Como el área de un triángulo es igual a la mitad del producto de la base y la altura, es necesario calcular la longitud de la altura, la cual se corresponde con el valor de la coordenada en y del punto C; es decir, $y = b\text{sen } A$.



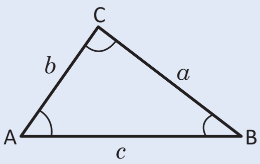
Ahora, la base es AB = c, entonces,

$$\text{Área del } \Delta\text{ABC} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{(\text{AB})(y)}{2} = \frac{c(b\text{sen } A)}{2} = \frac{b c\text{sen } A}{2}.$$

Teorema

Se denota por (ABC) el área de un triángulo ABC. Si se conocen las medidas de dos de los lados de un triángulo y el ángulo entre ellos, entonces puede calcularse el área utilizando trigonometría, de modo que

$$(\text{ABC}) = \frac{ab\text{sen } C}{2} = \frac{bc\text{sen } A}{2} = \frac{ca\text{sen } B}{2}.$$



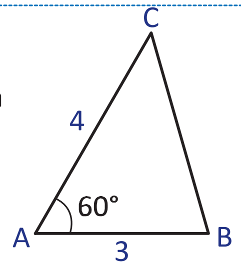
En adelante, se utilizará la notación

$(\text{ABC}) = \frac{1}{2}ab\text{sen } C = \frac{1}{2}bc\text{sen } A = \frac{1}{2}ca\text{sen } B.$

Un triángulo posee tres alturas, que son aquellos segmentos de recta que parten de un vértice y cortan perpendicularmente al lado opuesto.

Ejemplo 1

Calcula el área del triángulo ABC que muestra la figura.

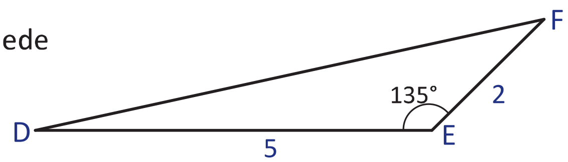


Como el ángulo conocido está entre los lados conocidos, se puede aplicar la fórmula del área directamente. Entonces,

$$(\text{ABC}) = \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{4})(3)\text{sen } 60° = (2)(3)\text{sen } 60° = (\cancel{2})(3)\left(\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right) = 3\sqrt{3}.$$

Ejemplo 2

Determina el área del triángulo DEF que muestra la figura.



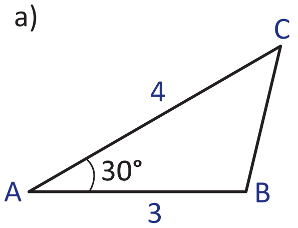
Como el ángulo conocido está entre los lados conocidos, se puede aplicar la fórmula del área directamente. Entonces,

$$(\text{DEF}) = \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2})(5)\text{sen } 135° = 5\text{sen } 135° = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

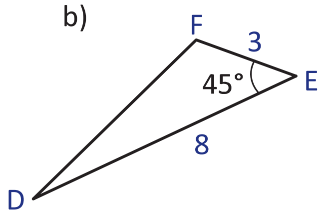
Problemas

1. Calcula el área de cada uno de los triángulos siguientes.

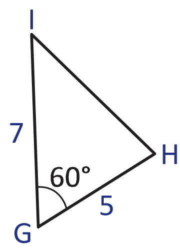
a)



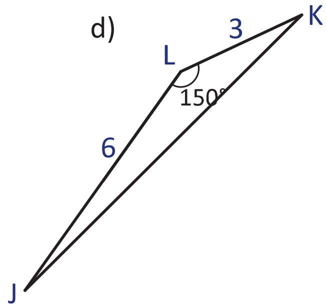
b)



c)



d)



2. Deduce la fórmula del área del triángulo ABC, del Problema inicial, si C tiene coordenadas (x, y), con $x < 0$ y $y > 0$.

3.2 Ley de los senos*

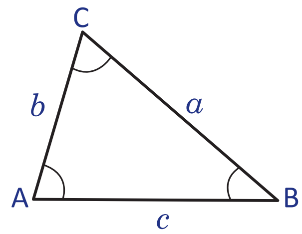
Problema inicial

Demuestra que en cualquier triángulo ABC se cumple que $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$.

Solución

Si se calcula el área del triángulo, se tienen tres maneras: $\frac{1}{2}ab\text{sen } C$, $\frac{1}{2}bc\text{sen } A$ y $\frac{1}{2}ca\text{sen } B$.
Pero el área es igual, no importa cómo se calcule, por lo tanto

$$\frac{1}{2}ab\text{sen } C = \frac{1}{2}bc\text{sen } A = \frac{1}{2}ca\text{sen } B.$$



Multiplicando por 2,

$$bc\text{sen } A = ac\text{sen } B = ab\text{sen } C,$$

dividiendo entre abc

$$\frac{bc\text{sen } A}{abc} = \frac{ac\text{sen } B}{abc} = \frac{ab\text{sen } C}{abc} \Rightarrow \frac{\cancel{bc}\text{sen } A}{a\cancel{bc}} = \frac{\cancel{ac}\text{sen } B}{\cancel{a}b\cancel{c}} = \frac{\cancel{ab}\text{sen } C}{\cancel{ab}c},$$

$$\Rightarrow \frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c}, \qquad \text{------------------ (1)}$$

sacando los recíprocos $\Rightarrow \frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$.

Observa que las razones en la proporción relacionan el lado y el seno del ángulo opuesto a este.

Teorema (Ley de los senos)

En un triángulo ABC, se cumple que $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$.

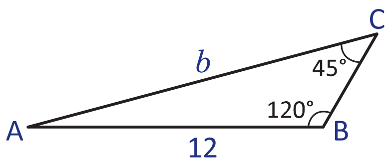
Como las igualdades anteriores son equivalentes a las igualdades en (1), se puede utilizar cualquiera de las dos indistintamente, según sea la necesidad.

Ejemplo

En un triángulo ABC calcula el valor de b si $c = 12$, $B = 120°$ y $C = 45°$.

Se dibuja el triángulo ABC y se ubican los datos. Aplicando el ley de los senos, se tiene

$$\frac{b}{\text{sen } 120°} = \frac{12}{\text{sen } 45°} \Rightarrow b = \frac{12\text{sen } 120°}{\text{sen } 45°} = 12\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \div \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{12\sqrt{3}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{12\sqrt{6}}{2}$$
$$= 6\sqrt{6}.$$



Por lo tanto, $b = 6\sqrt{6}$.

Problemas

Calcula los valores que se piden para el triángulo ABC.

a) El valor de b si $a = 3$, $A = 30°$ y $B = 45°$.

b) El valor de b si $a = 9$, $A = 60°$ y $B = 45°$.

c) El valor de c si $a = 6$, $A = 30°$ y $C = 135°$.

d) El valor de b si $c = 8$, $B = 55°$ y $C = 100°$.

e) El valor de c si $a = 6$, $A = 60°$ y $B = 75°$.

3.3 Cálculo del ángulo de un triángulo conocidos dos lados y un ángulo, parte 1

Problema inicial

En cada uno de los siguientes casos, determina si puede construirse el triángulo y en caso afirmativo, calcula la medida del ángulo pedido.

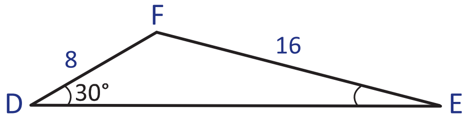
a) En el ΔDEF, $d = 16$, $e = 8$ y $D = 30°$. Calcula la medida del ángulo E.

b) En el ΔMNP, $n = 20$, $p = 8$ y $P = 30°$. Calcula la medida del ángulo N.

Solución

a) Se dibuja el triángulo DEF y se colocan los datos conocidos. Como se conocen dos lados y un ángulo opuesto a uno de estos se aplica la ley de los senos. Por comodidad, se utilizará (1) de la clase 3.2.

$$\frac{\text{sen } E}{8} = \frac{\text{sen } 30°}{16} \quad \Rightarrow \quad \text{sen } E = \frac{8 \text{sen } 30°}{16} = \frac{\cancel{8}\text{sen } 30°}{\cancel{16}} = \frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{4}.$$



Cuando $\text{sen } E = \frac{1}{4}$ se tiene que $E \approx 14.5°$ o bien $E \approx 180° - 14.5° = 165.5°$.

Se sabe que en un triángulo $D + E + F = 180°$. Es necesario comprobar que los valores de E encontrados tienen sentido.

Puede revisarse la clase 2.7 de esta unidad para ver por qué el ángulo E puede tener dos valores.

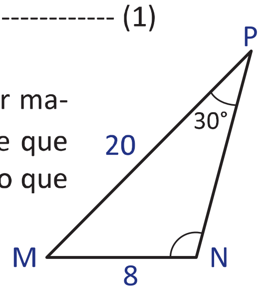
Para $E \approx 14.5°$ se tiene que $D + E \approx 30° + 14.5° = 44.5° < 180°$, por lo tanto $E \approx 14.5°$.

Para $E \approx 165.5°$ se tiene que $D + E \approx 30° + 165.5 = 195.5° > 180°$. Por lo tanto, E no puede tener un valor de 165.5°.

Luego, con los datos proporcionados puede construirse un solo triángulo y $E \approx 14.5°$.

b) Aplicando la ley de los senos se tiene que:

$$\frac{8}{\text{sen } 30°} = \frac{20}{\text{sen } N} \quad \Rightarrow \quad \text{sen } N = \frac{20 \text{ sen } 30°}{8} = \frac{\cancel{20} \text{ sen } 30°}{\cancel{8}} = 5\left(\frac{1}{2}\right) \div 2 = \frac{5}{4} \quad \text{------------------ (1)}$$



Para $\text{sen } \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ se establecerá que esta razón trigonométrica no puede ser mayor que 1 o menor que –1. Para cualesquiera números reales x y y puede verse que $y^2 \leq x^2 + y^2$ (a un número positivo se le está sumando un número positivo). Por lo que $-\sqrt{x^2 + y^2} \leq y \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, al dividir todo entre $\sqrt{x^2 + y^2}$ se obtiene

$$-1 \leq \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 1, \text{ es decir, } -1 \leq \text{sen } \theta \leq 1.$$

Luego, de (1), como $\text{sen } N = \frac{5}{4} > 1$, no hay ángulo que cumpla esta condición ya que el seno no puede ser mayor a 1, y por lo tanto no puede construirse un triángulo con las medidas dadas.

Conclusión

Si se conocen las medidas de dos lados y un ángulo opuesto a uno de los lados conocidos, entonces puede determinarse si el triángulo puede construirse mediante la aplicación de la ley de los senos. Además, pueden calcularse todos los ángulos del triángulo mediante la aplicación de la misma.

Problemas

Determina cuántos triángulos ABC pueden construirse en cada caso, calcula además la medida del ángulo pedido de ser posible.

a) $b = 2$, $c = \sqrt{2}$ y $B = 45°$. Calcula C.

b) $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2}$ y $A = 120°$. Calcula B.

c) $b = 3$, $c = \sqrt{2}$ y $C = 150°$. Calcula B.

d) $b = 6$, $c = \sqrt{3}$ y $C = 135°$. Calcula B.

Unidad 5

3.4 Cálculo del ángulo de un triángulo conocidos dos lados y un ángulo, parte 2

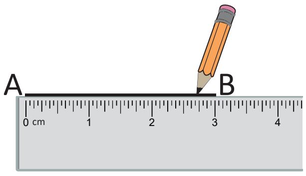
Problema inicial

Del triángulo ABC se sabe que a = 2 cm, c = 3 cm y A = 30°. Construye el triángulo y calcula la medida del ángulo C.

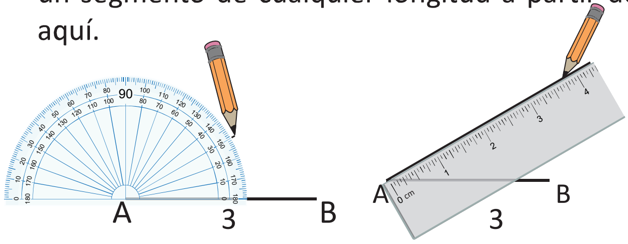
Solución

Puede construirse primero el triángulo de manera exacta como sigue:

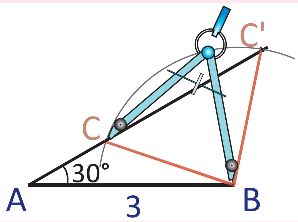
1. Trazar un segmento de longitud 3 cm. Se denota A el extremo inicial y B el extremo final.



2. Con vértice en A trazar un ángulo de 30° y trazar un segmento de cualquier longitud a partir de aquí.



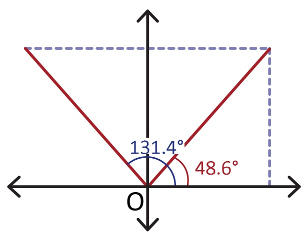
3. Con el compás, medir una amplitud de 2 cm y haciendo centro en B trazar un arco de circunferencia hasta cortar al segmento trazado en el Paso 2. En este paso, se determinan dos cortes, por lo que con las medidas proporcionadas pueden dibujarse dos triángulos.



Para calcular el valor del ángulo C, nótese que se conocen dos lados del triángulo y el ángulo conocido es opuesto a un lado conocido, por lo tanto puede aplicarse la ley de los senos:

$$\frac{2}{\operatorname{sen} 30°} = \frac{3}{\operatorname{sen} C} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} C = \frac{3 \operatorname{sen} 30°}{2} = 3\left(\frac{1}{2}\right) \div 2 = \frac{3}{4}.$$

Cuando sen $C = \frac{3}{4}$ se tiene que $C \approx 48.6°$ o bien $C \approx 180° - 48.6° = 131.4°$.



Hay que comprobar que ambos valores de C son válidos.

- Si $C \approx 48.6°$ se tiene que $A + C \approx 30° + 48.6° = 78.6° < 180°$.
- Si $C \approx 131.4°$ se tiene que $A + C \approx 30° + 131.4° = 161.4° < 180°$.

Luego, el valor del ángulo C con los datos dados puede ser aproximadamente 48.6° o 161.4°.

Conclusión

Si se conocen dos lados de un triángulo y un ángulo opuesto a uno de estos lados, en algunos casos, pueden construirse dos triángulos con dichas medidas. A este caso se le llama **caso ambiguo**.

Problemas

Para cada caso, determina cuántos triángulos pueden construirse con las medidas dadas, y calcula el ángulo pedido de ser posible.

a) a = 3, b = 4 y A = 30°. Calcula B.

b) a = 2, c = 1 y C = 20°. Calcula A.

c) a = 4, b = 6 y B = 60°. Calcula A.

3.5 Ley del coseno*

Problema inicial

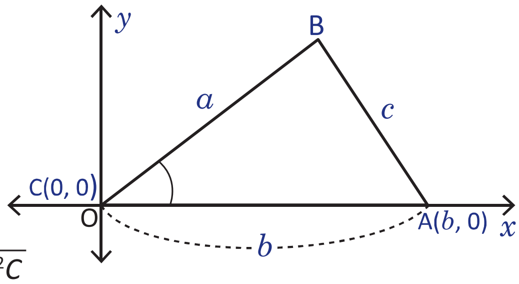
Demuestra que en cualquier triángulo ABC se cumple que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Solución

Se ubica el triángulo ABC en el plano cartesiano de modo que A(b, 0) y C(0, 0).

Si (p, q) son las coordenadas del punto B, entonces



$$\cos C = \frac{p}{a} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} C = \frac{q}{a}.$$

Por lo que $p = a\cos C$ y $q = a\operatorname{sen} C$.

Ahora, la distancia del punto A al punto B es

$$\begin{aligned} d(\text{A, B}) &= \sqrt{(b - a\cos C)^2 + (0 - a\operatorname{sen} C)^2} \\ &= \sqrt{b^2 - 2ab\cos C + a^2\cos^2 C + a^2\operatorname{sen}^2 C} \\ &= \sqrt{a^2(\operatorname{sen}^2 C + \cos^2 C) + b^2 - 2ab\cos C} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}\,. \end{aligned}$$

Pero la distancia de A a B es la longitud del lado AB del triángulo, que es c. Entonces,

$$d(\text{A, B}) = c \quad \Rightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Teorema (Ley del coseno)

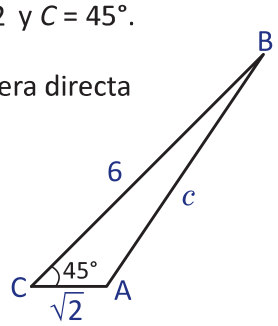
En un triángulo ABC se cumple que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

De igual forma se satisface que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B.$$

Ejemplo

Determina la medida del tercer lado de un triángulo ABC si se sabe que $a = 6$, $b = \sqrt{2}$ y $C = 45°$.



Dibujando el triángulo y ubicando los datos se observa que se puede aplicar de manera directa la ley del coseno. Así,

$$\begin{aligned} c^2 &= 6^2 + (\sqrt{2})^2 - 2(6)(\sqrt{2})\cos 45° \\ &= 36 + 2 - \cancel{12}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right) \\ &= 38 - 6(2) = 38 - 12 = 26. \end{aligned}$$

Como $c > 0$, se tiene que $c = \sqrt{26}$.

Problemas

Para cada caso, calcula la medida del tercer lado del triángulo.

a) En el ΔABC, $a = \sqrt{3}$, $b = 5$ y $C = 30°$.

b) En el ΔABC, $b = 6$, $c = 4$ y $A = 120°$.

c) En el ΔABC, $a = 9$, $c = 9\sqrt{3}$ y $B = 150°$.

d) En el ΔABC, $a = b = 4$ y $C = 60°$.

e) En el ΔABC, $a = \sqrt{2}$, $c = 2$ y $B = 135°$.

Unidad 5

3.6 Cálculo de los ángulos de un triángulo conocidos sus tres lados

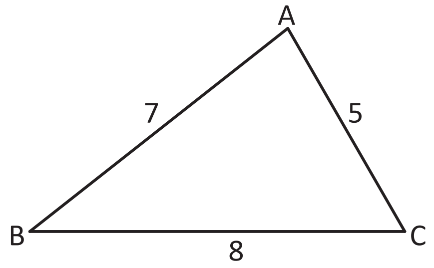
Problema inicial

Del triángulo ABC se sabe que $a = 8$, $b = 5$ y $c = 7$. Determina la medida de los tres ángulos del triángulo.

Solución

Se puede utilizar la ley del coseno para calcular un ángulo del triángulo. Utilizando $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$, entonces:

$$7^2 = 8^2 + 5^2 - 2(8)(5)\cos C$$
$$2(8)(5)\cos C = 8^2 + 5^2 - 7^2$$
$$80\cos C = 64 + 25 - 49$$
$$80\cos C = 40$$
$$\cos C = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}.$$



Cuando $\cos C = \frac{1}{2}$ se tiene que $C = 60°$.

Para calcular otro ángulo se aplica nuevamente la ley del coseno

$$5^2 = 7^2 + 8^2 - 2(7)(8)\cos B$$
$$2(7)(8)\cos B = 8^2 + 7^2 - 5^2$$
$$112\cos B = 64 + 49 - 25$$
$$112\cos B = 88$$
$$\cos B = \frac{88}{112} = \frac{11}{14}.$$

Cuando $\cos B = \frac{11}{14}$, $B \approx 38.2°$.

Luego, $A = 180° - B - C \approx 180° - 38.2° - 60° = 81.8°$.

Por lo tanto, $A \approx 81.8°$, $B \approx 38.2°$ y $C = 60°$.

Observa que para calcular el segundo ángulo también se puede utilizar la ley del seno.

$$\frac{7}{\text{sen } 60°} = \frac{5}{\text{sen } B} \quad \Rightarrow \quad \text{sen } B = \frac{5\text{sen } 60°}{7} = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \div 7 = \frac{5\sqrt{3}}{14}.$$

Cuando sen $B = \frac{5\sqrt{3}}{14}$, $B \approx 38.2°$ o bien $B \approx 180° - 38.2° = 141.8°$. Pero si $B \approx 141.8°$ entonces $B + C \approx 141.8° + 60° = 201.8°$, lo cual no puede ser en un triángulo. Por lo tanto $B \approx 38.2°$. ¿Por qué es preferible utilizar la ley del coseno?

Conclusión

Si se conocen las medidas de los tres lados de un triángulo pueden calcularse las medidas de sus tres ángulos mediante la ley del coseno.

Problemas

1. Para cada caso, determina la medida de los tres ángulos del triángulo si es posible.

a) En el ΔABC, $a = \sqrt{3}$, $b = 1$ y $c = 2$

b) En el ΔABC, $a = 1$, $b = \sqrt{2}$ y $c = \sqrt{5}$

c) En el ΔABC, $a = 5$, $b = 3$ y $c = 7$

d) En el ΔABC, $a = 6$, $b = 10$ y $c = 11$

e) En el ΔABC, $a = \sqrt{3}$, $b = 12$ y $c = 9$

2. En el ΔABC expresa $\cos B$ en términos de los lados a, b y c.

3.7 Practica lo aprendido

1. Calcula el área del triángulo ABC si se conocen los datos proporcionados en cada caso.

a) $a = 7$, $c = 4$ y $B = 45°$

b) $b = 10$, $c = 8$ y $A = 30°$

c) $a = 1$, $b = 2$ y $C = 45°$

d) $a = 4$, $b = 5$ y $C = 60°$

e) $a = 6$, $c = \sqrt{3}$ y $B = 120°$

2. En el triángulo ABC calcula el dato que se pide en cada caso, analizando si el resultado tiene sentido.

a) $b = 24$, $B = 38°$ y $C = 120°$. Calcula c.

b) $c = 10$, $A = 135°$ y $C = 30°$. Calcula a.

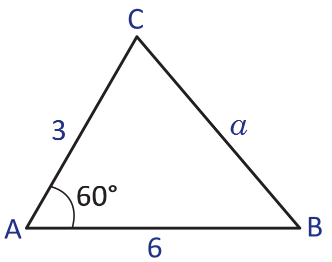
c) $a = 12$, $b = 16$ y $A = 45°$. Calcula el B.

d) $a = 3$, $b = 2$ y $B = 30°$. Calcula el A.

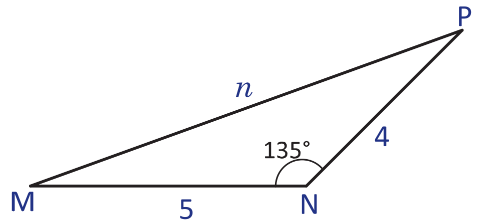
e) $b = 2$, $c = \sqrt{3}$ y $C = 120°$. Calcula el B.

3. Determina el valor del tercer lado en cada caso.

a)



b)

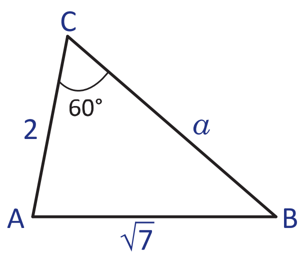


4. Calcula la medida de los tres ángulos del triángulo ABC para cada caso.

a) $a = 12$, $b = 7$ y $c = 6$

b) $a = 2$, $b = 3$ y $c = 4$

5. Determina la medida del tercer lado del triángulo ABC que muestra la figura.



Utiliza la ley del coseno y resuelve la ecuación cuadrática que resulta de ello.

6. Resuelve los siguientes triángulos, utilizando la ley de los senos y la ley del coseno.

a) $b = 21$, $A = 60°$, $B = 12°$

b) $a = 15$, $c = 7$, $B = 65°$

c) $a = 3$, $b = 2$, $c = 2$

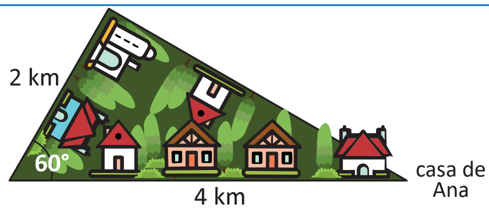
d) $c = 3$, $B = 110°$, $C = 45°$

Resolver un triángulo significa encontrar todas las medidas de sus lados y ángulos.

3.8 Aplicaciones de la ley de los senos y la ley del coseno

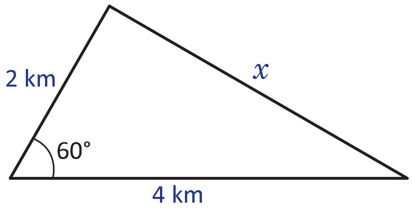
Problema inicial

Ana sale a correr cada mañana alrededor de su cuadra que tiene forma triangular. Primero recorre 4 km, luego 2 km y por último recorre la última calle para regresar a su casa. ¿Cuántos kilómetros corre Ana en total cada mañana si da una vuelta completa en su vecindario?



Solución

Para saber cuántos kilómetros corre Ana en total cada mañana, hay que encontrar la medida del tercer lado del vecindario. Como tiene forma triangular, se conocen dos lados y además el ángulo que se conoce es opuesto al lado que se desea calcular, se utiliza la ley del coseno.



$$x^2 = 4^2 + 2^2 - 2(4)(2)\cos 60° = 16 + 4 - 2(4)(\cancel{2})\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) = 20 - 8 = 12$$

Es decir, $x^2 = 12 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{12}$ o $x = -\sqrt{12}$.

Pero x representa una longitud por lo que no puede ser negativo. Entonces, $x \approx 3.5$ km. Luego, Ana corre cada mañana 4 km + 2 km + 3.5 km = 9.5 km, aproximadamente.

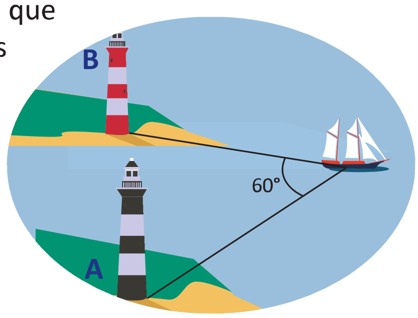
Conclusión

La ley de los senos y la ley del coseno pueden utilizarse para resolver problemas aplicados al entorno cuando dichos problemas involucren triángulos.

En algunos casos resulta útil aplicar la ley de los senos y en otras la ley del coseno, por ello es recomendable elaborar un dibujo y ubicar los datos conocidos y los datos que se desean calcular para identificar cuál de las dos leyes conviene utilizar.

Problemas

1. Un barco deja un faro A y navega 5 km. En este punto observa un faro B que está a 7 km del faro A. Si el ángulo entre las líneas de visión a ambos faros es de 60°, ¿a qué distancia está el bote del faro B?



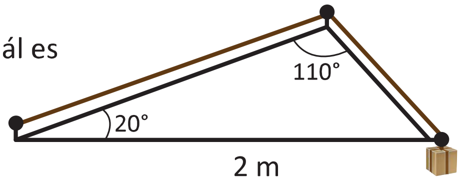
2. Una casa tiene un patio en forma triangular y el dueño quiere ponerle grama, por lo que necesita calcular el área del patio para comprar la grama. Dos de los lados del patio miden 40 y 42 metros, y el ángulo opuesto al lado que mide 42 es de 120°. ¿Cuántos m^2 debe comprar de grama aproximadamente?

3. Un herrero desea construir un columpio usando dos triángulos isósceles en sus extremos. Si el ángulo distinto mide 30° y el lado opuesto a este quiere que mida 1 metro, ¿cuánto deben medir los otros dos lados?

4. Demuestra que el área de un paralelogramo es el producto de dos lados adyacentes y el seno del ángulo entre estos dos lados adyacentes.

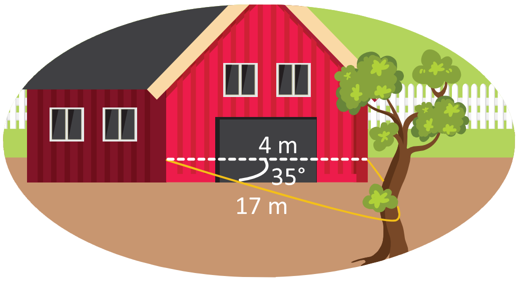
3.9 Practica lo aprendido

1. Una caja está sostenida por una cuerda, como muestra la figura. ¿Cuál es la longitud de la cuerda?

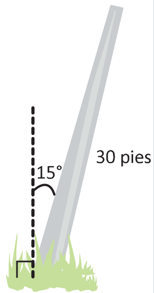


2. La capitana de un barco observa dos faros mientras navega. El barco se encuentra a 15 millas de un faro y a 20 millas del otro faro. Si la capitana determina que el ángulo entre las dos líneas de visión hacia los faros es de 120°, ¿cuál es la distancia entre los faros?

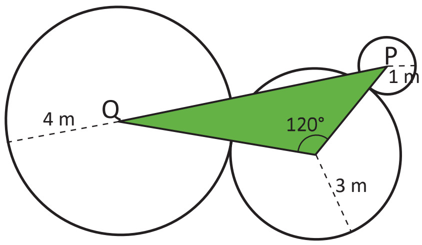
3. Un granjero tiene un establo y necesita hacer un corral extra. Para ello tiene un lazo de 38 metros y piensa atar el lazo como muestra la figura. ¿Tiene el granjero suficiente lazo si los nudos están a una distancia de 4 metros?



4. Un poste de 30 pies de largo se ha inclinado aproximadamente 15° de su posición original. El alcalde de la ciudad piensa sostenerlo con un cable de acero pero necesita calcular cuánto necesita de cable. Si amarra el cable a 100 pies de la base del poste, ¿cuánto necesita aproximadamente?



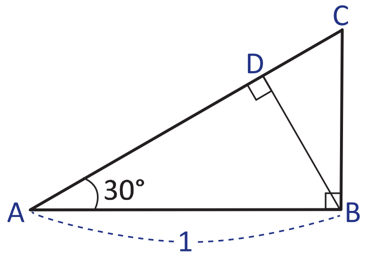
5. Se construirá la decoración de un jardín en forma triangular, como muestra la figura. Si cada vértice del triángulo es centro de la circunferencia sobre la que está, ¿cuál es la longitud de PQ?



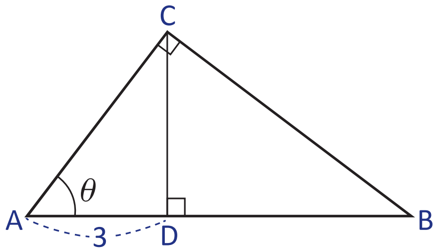
6. Un grupo de exploradores está aprendiendo a navegar para un viaje de supervivencia. Sobre un mapa les han ubicado tres puntos que deben visitar, sin embargo, necesitan conocer las medidas de los ángulos para saber qué tanto deben girar. ¿Cuáles son los ángulos que deben girar para poder visitar los tres puntos?

3.10 Problemas de la unidad

1. De la siguiente figura, calcula las longitudes de los segmentos AD, DC, AC, BD y BC. Racionaliza cuando sea necesario.



2. De la siguiente figura, escribe las longitudes de los segmentos BC, AC, DB y AB en términos del ángulo θ.

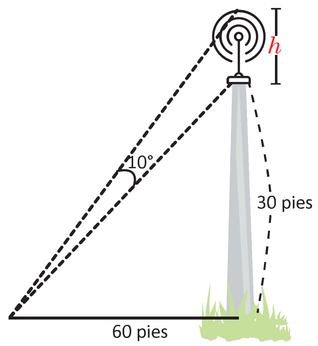


3. Un pentágono regular está inscrito en un círculo de radio 7. Calcula el perímetro del pentágono.

4. Una escalera de 30 pies de largo yace sobre una pared con una inclinación de 70°. Determina la distancia a la que se encuentra el pie de la escalera de la pared.

5. Desde la punta de un faro de 50 pies se observa un bote a un ángulo de depresión de 11°. ¿A qué distancia está el bote del faro?

6. Una antena vertical está montada en el tope de un poste de 30 pies de altura. Desde un punto a 60 pies de la base del poste, la antena subtiende un ángulo de 10°, como muestra la figura. Calcula la longitud h de la antena.



7. Calcula lo que se pide, si los datos se refieren a un triángulo rectángulo.

   a) Si $\cos\theta = \frac{1}{3}$, calcula $\operatorname{sen}\theta$.
   b) Si $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{4}$, calcula $\cos\theta$.
   c) Si $\tan\theta = 2$, calcula $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$.
   d) Si $\sec\theta = 7$, calcula $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$.

8. Calcula la distancia entre P y Q para cada caso.

   a) P(–1, 3) y Q(2, 5)
   b) P(2, 3) y Q(2, 6)

9. Calcula el perímetro del cuadrilátero ABCD que tiene por vértices A(–3, –1), B(0, 3), C(3, 4) y D(4, 1).

3.11 Problemas de la unidad

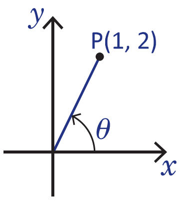
10. Determina el simétrico de cada punto respecto al eje x, respecto al eje y y respecto al origen. Grafica en cada caso.

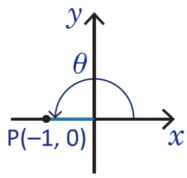
a) P(0, 3) b) P$\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ c) P(–2, 0) d) P(–1, –1)

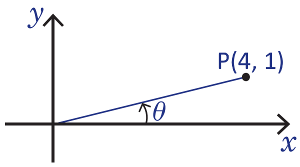
11. Dibuja cada ángulo e identifica a qué cuadrante pertenece.

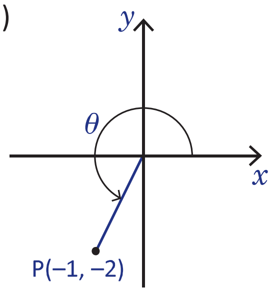
a) 800° b) –300° c) 1 050° d) –735°

12. Determina los valores de seno, coseno y tangente de θ en cada caso.

a) 

b) 

c) 

d) 

13. Representa los valores de las razones trigonométricas en términos de los valores de sen θ, cos θ y tan θ, donde $0° \leq \theta < 90°$.

a) 150° b) 370° c) 450° d) 535°

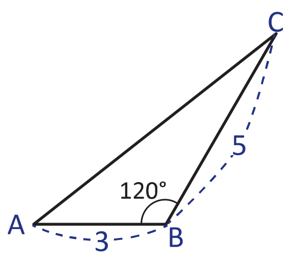
14. Determina los valores que se piden en cada caso.

a) sen θ y tan θ si cos $\theta = -\frac{1}{3}$ y $90° < \theta < 180°$.

b) tan θ si sen $\theta = \frac{3}{4}$ y θ está en el segundo cuadrante.

c) cos θ y sen θ si sec θ = 2 y θ está en el primer cuadrante.

15. Calcula el área del triángulo ABC.



16. Calcula los valores que se piden.

a) El valor de c si a = 3, A = 60° y C = 45°.

b) El valor de B si a = 1, $b = \sqrt{3}$ y A = 30°.

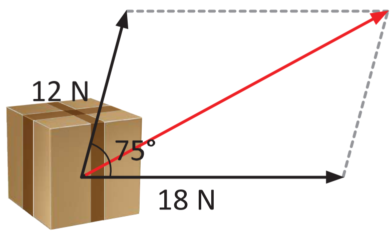
c) El valor de a si b = 2, $c = 2\sqrt{3}$ y A = 150°.

d) La medida de los tres ángulos si $a = b = 2$ y $c = \sqrt{3}$.

e) El valor de A si a = 4, b = 1 y B = 60°.

La unidad de medida de la fuerza aplicada a objetos es el newton y se simboliza por **N**.

17. Cuando dos fuerzas en direcciones distintas actúan sobre un objeto, la fuerza resultante es la diagonal del paralelogramo formado por las fuerzas aplicadas. Si dos fuerzas de 12 y 18 newtons actúan sobre un objeto a un ángulo de 75°, ¿cuál es el valor de la fuerza resultante?



Anexo. Uso de calculadoras

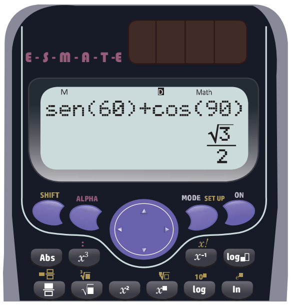
Existen diversos tipos de calculadoras: científicas, gráficas u oficina, entre otras. En este apartado se puede consultar el uso adecuado de una calculadora científica para el cálculo de valores trigonométricos. Para saber qué modelo de calculadora tienes, observa el tipo de teclas que posee y con base a eso podrás configurarla.

Calculadoras científicas

Esta es de las calculadoras más sencillas. Para configurarla para utilizar ángulos en grados se siguen los pasos:

Presionar la tecla MODE dos veces y presionar la tecla 1 .

Para comprobar que la calculadora está en grados, debes observar que aparezca la letra D. Esta letra corresponde a la palabra “grados“ en inglés: “degree”.



Esta calculadora es más avanzada, y para configurarla en grados se siguen los pasos:

Presionar la tecla SHIFT , luego la tecla MODE SETUP

y por último presionar la tecla 3 .

Muchas calculadoras tienen la tecla sin^{-1} sin como función seno, "sin" viene del vocablo inglés "sine".

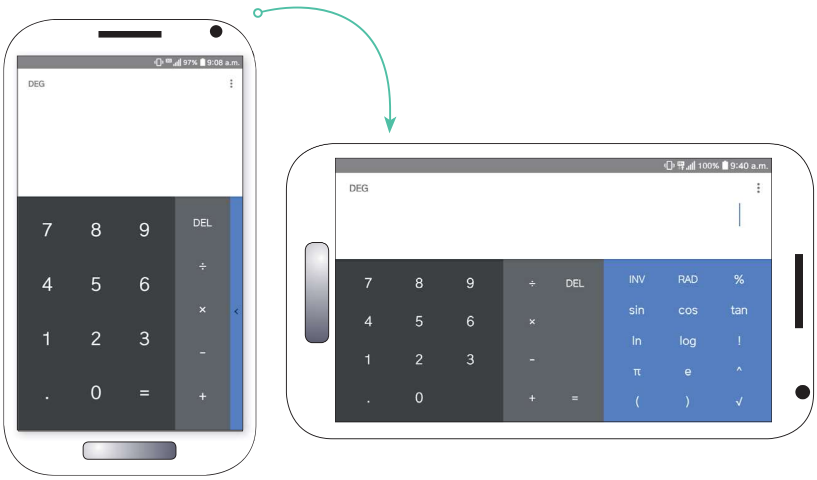
DEG viene del inglés grados, RAD de radianes y GRAD viene de gradianes. Esta última medida es comúnmente utilizada en la ingeniería civil para medir ángulos, y un gradián se calcula al dividir una circunferencia en 400 partes iguales.

En general, cualquier calculadora científica puede configurarse de manera parecida: hay que presionar la tecla MODE y buscar la configuración "deg" (degree).

Celulares

Muchos celulares inteligentes hoy en día traen una calculadora incorporada y presentan funciones científicas más avanzadas aparte de las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división.

Para acceder a la calculadora científica de tu celular ve a la aplicación calculadora ábrela y colócalo de forma horizontal para que puedas visualizar las funciones.



Aparecerá en una parte las funciones básicas de las calculadoras y las teclas numerales y en la otra parte aparecerán las funciones científicas, como las teclas para calcular el seno, coseno y tangente, teclas para calcular logaritmos, potencias, raíces, y los números pi y áureo (el tipo de teclas que aparecen dependen de la aplicación).

Al utilizar la calculadora científica del celular también debes tener cuidado que el ángulo esté medido en grados, observando si aparece en alguna parte de la pantalla la palabra DEG. Si aparece la palabra RAD, en este caso hay que buscar la tecla DEG y presionarla. Dependiendo de la calculadora y del teléfono, la palabra que aparezca puede ser GRAD y no DEG. Hay que tener cuidado que el GRAD del celular no es igual al GRAD de las calculadoras científicas.