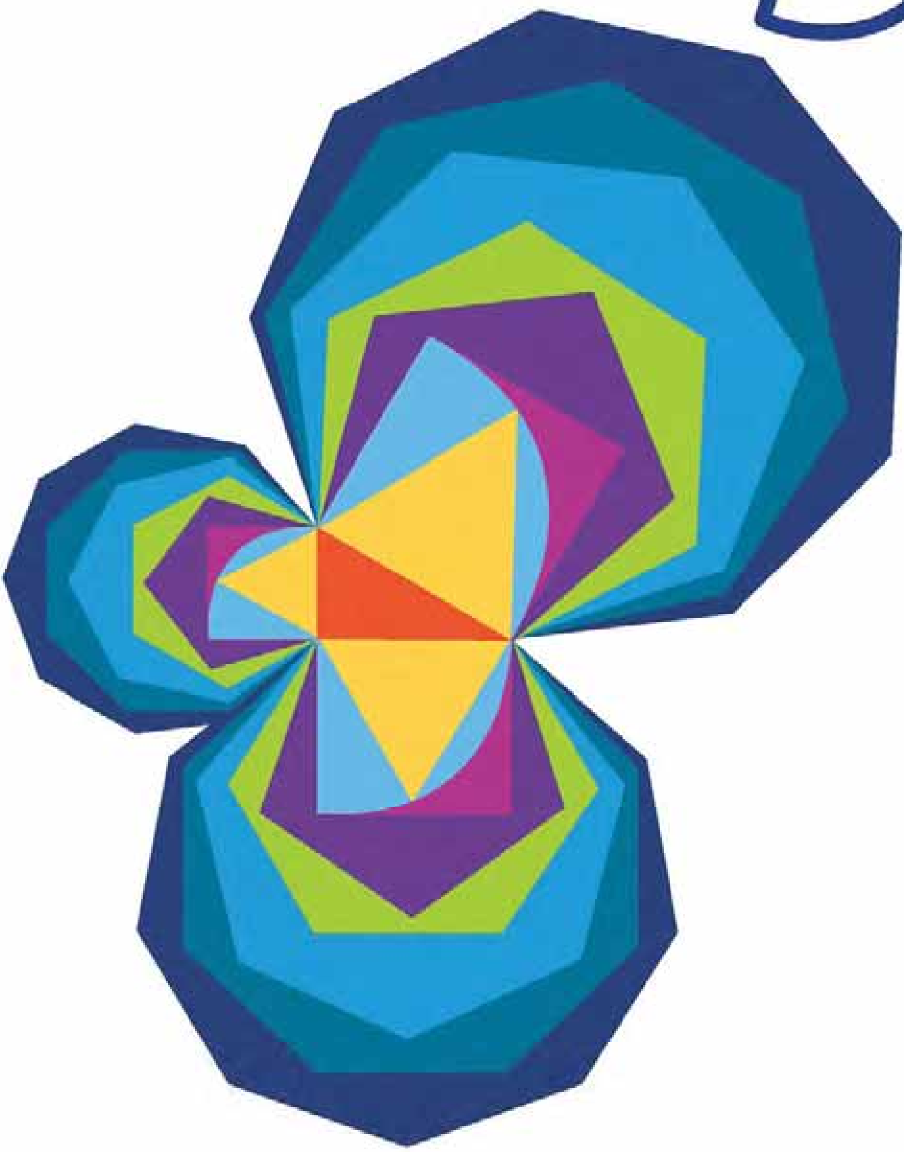
エルサルバドル政府

教育省

算数 9



練習帳
第二版

ESMATE

JICA

教育省執筆・レイアウト専門チーム

Ana Ester Argueta Aranda
Erick Amílcar Muñoz Deras
Diana Marcela Herrera Polanco
Reina Maritza Pleitez Vásquez
Francisco Antonio Mejía Ramos
Norma Elizabeth Lemus Martínez
Salvador Enrique Rodríguez Hernández
César Omar Gómez Juárez

レイアウトチーム
Francisco René Burgos Álvarez

文体修正
Marlene Elizabeth Rodas Rosales
Ana Esmeralda Quijada Cárdenas

国際協力機構（JICA）を通じた日本の技術協力

教育的見地から表紙の図では、辺の数が異なる多角形を用いてピタゴラスの定理と図形の相似を表現しています。

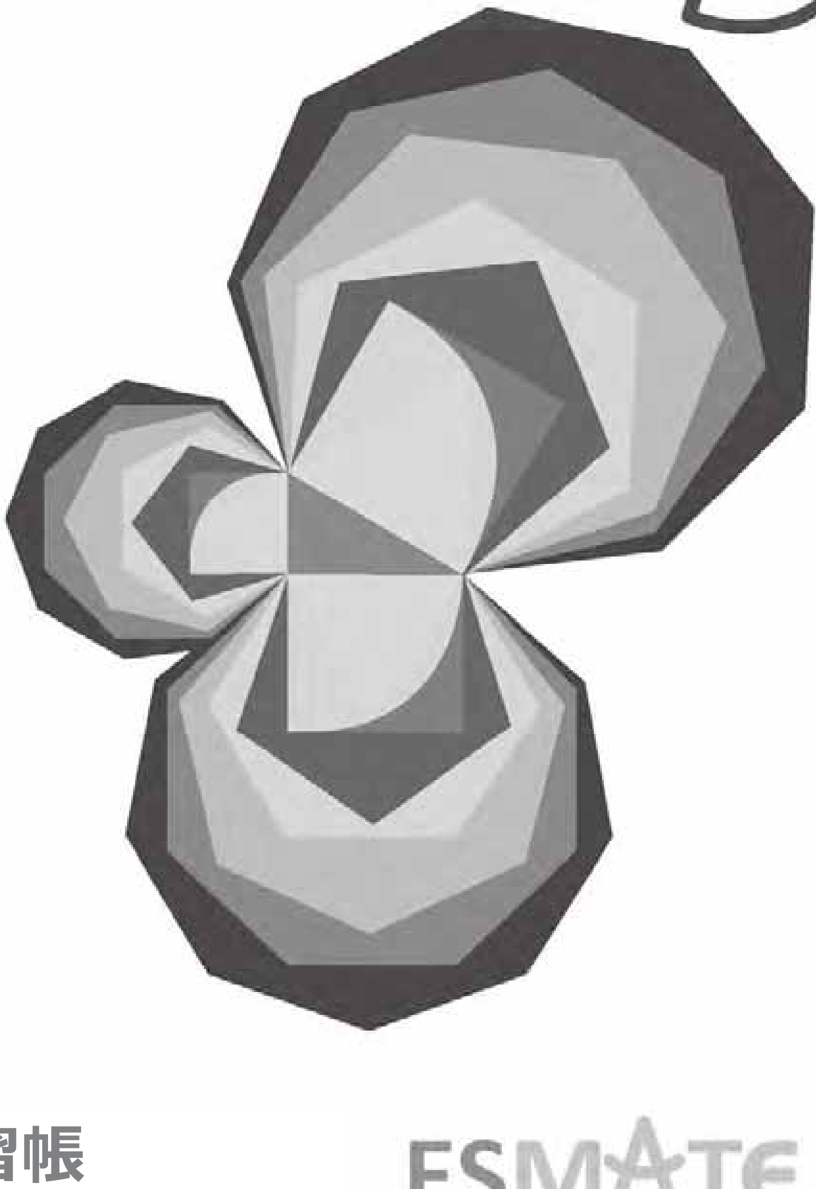
372.704 5
M425 算数 9：練習帳／執筆チーム Ana Ester Argueta、Erick Amílcar Muñoz、
Diana Marcela Herrera、Reina Maritza Pleitez、Francisco Antonio Mejía、
Norma Elizabeth Lemus、Salvador Enrique Rodríguez、César Omar Gómez；
レイアウト Francisco René Burgos Álvarez；文体修正 Marlene Elizabeth Rodas
-- 第1版 -- サンサルバドル、エルサルバドル：MINED、2018年。
電子資料 1件、（185ページ：図解入り、28 cm） -- （Esmate）
ISBN 978-99961-70-70-6（印刷）
1. 算数-問題、練習など。2. 算数-教科書。3. 算数-教授。
I. Argueta Aranda、Ana Ester、1991年 共著。II. 表題

BINA/jmh

エルサルバドル政府

教育省

算数 9



練習帳
第二版

ESMATE

JICA

生徒の皆さんへ：

新しい学年に皆さんをお迎えし、皆さんがこれから算数のさらなる知識を得る機会を得ることを喜ばしく思います。

教育・科学技術省（MINEDUCYT）では、初等教育及び中等教育における算数教育向上計画（ESMATE）を通じ、皆さんのために様々な教育教材を開発してきました。その中のひとつが、いま皆さんが手にされている「練習帳」です。

この練習帳には、皆さんが考える力を強化し、算数の能力を伸ばせるような問題やアクティビティがたくさん含まれています。そうした能力は、日常生活の問題を解決するために役に立つものです。

ですから、この練習帳にある問題を一つ一つに、挑戦だと思って取り組んでみてください。皆さんが、私たちの国の発展に貢献してくれる模範的な市民となるために、この練習帳にすべての力を注いで取り組むことを期待しています。

Carla Evelyn Hananía de Varela
教育・科学技術大臣

Ricardo Cardona Alvarenga
教育副大臣

練習帳の紹介

練習帳は教科書の内容を補うものですが、教科書とは違い、この練習帳では生徒の皆さんが学校で学んだ内容を毎日家で練習するためのものです。これにより、算数の知識を強固なものとし、教育省が公式に定めている能力に達することが期待されます。

教科書と練習帳の関係に基づき、教科書の一授業に対して練習帳の一課が対応する形になっています。

アイコン

Rの文字は**復習**を示しています。このセクションではそれまでの授業二つ分の問題と練習が示されており、その授業の内容を学習する前に復習ができるようになっています。

Cの文字は**結論**を示し、内容の説明がなされています。大部分において、この結論は教科書の内容と同じものになっていますが、一部においては生徒たちによりわかりやすくするように、各解答について例が付け加えられています。

鉛筆のマークは、問題と練習の部分を示しています。

補足情報

この本では、内容の習得を容易にするために事前知識やヒント、追加情報を記載しています。これは次のように示されています：

補足情報

授業配分

この本は8つの教材ユニットから成っています。各ユニットは複数のレッスンから成り、さらに各レッスンは複数の授業で成っています。各授業の番号の振り方については、一つ目の数字がレッスン番号を示し、二つ目の数字が授業番号を示しています。例えば、この本のユニット4におけるレッスン2の授業3は次のように表示されています：

レッスン番号を表示します。

2.3 関数の方程式を求めるための最初の条件

授業番号を表示します。

ユニット番号は奇数ページの側部ラベルに示されています。

目次

ユニット 1

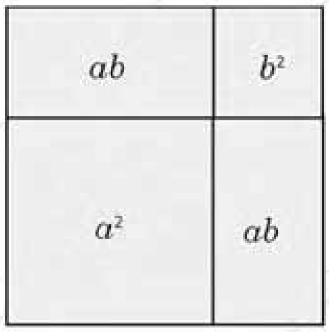
多項式の乗法

アル＝フワーリズミーによって
書かれた本のページ

“アルへブラ” 代数学という言葉はアラビア語のアルジャブル *al-jabr* が語源で、アラビア人の数学者で西暦 825 年頃に生まれたアル＝フワーリズミーによって算数と代数についてのその本で使われた用語で、数学の歴史的発展に大変重要な役割を果たしました。その主な著作は、アル・ジャブル・ワル・ムカバラ *Hisab al-<abr wa’l muqqabala* で ”約分と消約との学” を意味して、その “la-yabr” の部分が方程式の科学の同義の “algebra アルへブラ” に変わったものです。

ギリシャのユークリットの原論第二巻はいろいろな代数的表現で幾何学的論証を証明した幾何学的代数と呼ばれるものを探求しています。

例えば、命題 4 は次のように「もし直線が任意に二分されるならば、その線上に作られる正方形の全体は線分で作られる正方形と長方形の二倍に等しい」と述べています。この与件を図示したものが右の図の通りです。



ユークリットの原理の第 *2* 巻の
命題 *4* の幾何学的図示

代数学の最も深い研究は、工学、計算機科学、数学、物理学、生物学、経済学と統計学の計算を簡略化しながら現在の数学の発展と基本原理の説明を可能としました。

このユニットのアプローチとして代数式の因数分解の為に乗法公式と幾何学的方法をさらに使い多項式による多項式の積を展開します。

1.1 単項式に多項式をかける

次の積を展開しなさい：

a) $x(5x)$

b) $-2y(3y)$

c) $3x(-\frac{1}{4}xy)$

d) $(-9y)(-2xy)$

e) $(5yz)(-6xyz)$

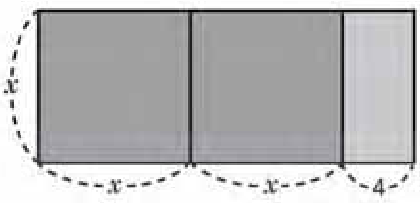
f) $(5xy)(3xyz)$

単項式と二項式の積では、第一に各項毎にかけ合わせます。第二に符号の法則を考慮します。例えば：

$$\begin{aligned}-2x(xy - y) &= -2x(xy) - (-2x)(y)\\ &= -2x^2y - (-2xy)\\ &= -2x^2y + 2xy\end{aligned}$$

従って、$-2x(xy - y) = -2x^2y + 2xy$

1. 次の部品によって作られる長方形の面積を二つの異なる方法で求めなさい。



第一の方法：

第二の方法：

2. 次の積を展開しなさい：

a) $5x(3x - 4)$

b) $-5xy(-x - 2y)$

c) $(xy - y)(3xy)$

d) $(2xy - 3x + 4y)(-2xy)$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.2 二項式に二項式をかける、第 1 部

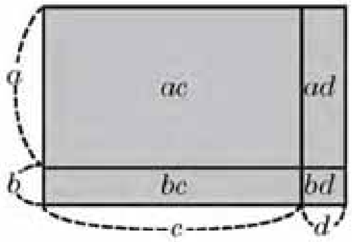
次の積を展開しなさい：

a) $(2xy)(-9yz)$

b) $(2xyz)(5yz)$

c) $2xy(-7x + 10y)$

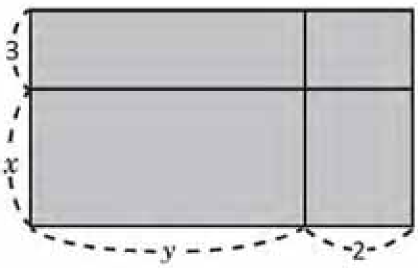
d) $(-4x - 7y)(-3xy)$



二項式と他の二項式の積では符号の法則を考慮して各項の第一項と各項の第二項をかけ合わせます。

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

1. 次の部品によって作られる長方形の面積を二つの異なる方法で求めなさい。



第一の方法：

第二の方法：

2. 次の積を展開しなさい：

a) $(3x + 4)(5x + 11)$

b) $(5xy + 9)(6y + 5)$

c) $(4x + 6y)(3xy + 3x)$

d) $(2xy + 3)(10x + 9y)$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.3 二項式に二項式をかける、第 2 部

1. 次の積を展開しなさい：

a) $(-10xy)(-7xy - 5)$

b) $(4xy + 9x - 3y)(-7xy)$

2. 次の積を展開しなさい：

a) $(3x + 5y)(8x + 10)$

b) $(xy + 8)(4x + 5y)$

$(a - b)(c + d)$ をかけるには：
$a - b = a + (-b)$ と書きます。そして

$$\begin{aligned}(a - b)(c + d) &= [a + (-b)]\,(c + d)\\ &= ac + ad + (-b)c + (-b)d\\ &= ac + ad + (-bc) + (-bd)\\ &= ac + ad - bc - bd\end{aligned}$$

例えば、$(2x - 1)(y + 3)$ を展開すれば：

$$\begin{aligned}(2x - 1)(y + 3) &= [2x + (-1)]\,(y + 3)\\ &= 2x\,(y) + 2x(3) + (-1)\,(y) + (-1)(3)\\ &= 2xy + 6x - y - 3\end{aligned}$$

従って、$(2x - 1)(y + 3) = 2x\,y + 6x - y - 3$

次の積を展開しなさい：

a) $(4x - 6)(3y + 8)$

b) $(7x + 9)(8y - 1)$

c) $(x - y)(xy + y)$

d) $(2xy - x)(3x - 2)$

e) $(5y - 9)(4xy - 7)$

f) $(-10xy + 3)(2x - 5y)$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.4 二項式かける三項式

1. 次の積を展開しなさい：

a) $(9x + 10y)(8y + 7)$

b) $(x + 11y)(5xy + 8)$

2. 次の積を展開しなさい：

a) $(-6x + 1)(2y - 7)$

b) $(2xy - x)(3x - 2)$

$(a + b)(c + d + e)$ の積は二通りの方法で求めることができます。

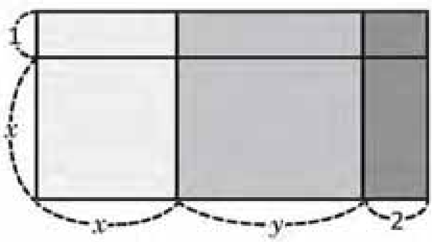
1. 各項の第一項と各項の第二項を符号の法則を考慮しながらかけ合わせます：

$$(a + b)(c + d + e) = ac + ad + ae + bc + bd + be$$

多項式の積の展開の後にいつも同類項をまとめます。

2. $c + d + e = w$ として二項式と単項式の積として展開します。

1. 次の部品によって作られる長方形の面積を二つの異なる方法で求めなさい。



第一の方法：

第二の方法：

2. 次の積を展開しなさい：

a) $(3x + 5)(-2x - 7y + 11)$

b) $(y - 10)(2x + 3y + 9)$

c) $(5x + 3y)(4x - 6y - 3)$

d) $(-x + 10)(xy + 2x + 3y)$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.5 三項式かける三項式

1. 次の積を展開しなさい：

a) $(7x + 5y)(2xy - 7)$

b) $(5y - 6)(-5xy - 4)$

2. 次の積を展開しなさい：

a) $(4x + 7y)(2x + 10y - 7)$

b) $(x - 9y)(2x + 10y - 7)$

前の授業の通り第一の三項式の各項は第二の項とかけ合わせ（符号の法則を考慮して）同類項（もしある場合）をまとめます：

$$\begin{aligned}(x - y + 1)(x + y + 3) &= x(x) + x(y) + x(3) + (-y)(x) + (-y)(y) + (-y)(3) + x + y + 3\\ &= x^2 + yx + 3x - yx - y^2 - 3y + x + y + 3\\ &= x^2 + 4x - y^2 - 2y + 3\end{aligned}$$

従って、$(x - y + 1)(x + y + 3) = x^2 + 4x - y^2 - 2y + 3$

次の積を展開しなさい：

a) $(x - 2y + 4)(2x - 4y - 4)$

b) $(3x + 5y - 2)(-x + 3y - 4)$

c) $(xy + 5x - 3)(-5x + 3y + 6)$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.6 学習内容の自己評価

解いて学んだことに従い適当と思われる欄に “×” を印しなさい。
正直に答えましょう。

項目	はい	改善できます	いいえ	コメント
1. 単項式と多項式の積を展開します、又はその逆。例えば： a) $7x(2xy - 7)$ b) $(5y - 6)(-5xy)$				
2. 二項式と二項式の積を展開します。例えば： a) $(12x + 1)(5xy + 11)$ b) $(6xy - 1)(-9x - 4)$				
3. 二項式と三項式の積を展開します。 例えば： $(5x + 6y)(-9x + 7y - 5)$				
4. 三項式と三項式を展開します。 例えば： $(10x + 4y - 5)(-5x + 3y + 6)$				

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.1 $(x + a)(x + b)$の形の積

次の積を展開しなさい：

a) $(2x + 9)(-6xy + 7x - 2)$

b) $(4xy - 5y + 1)(10xy + 8y - 3)$

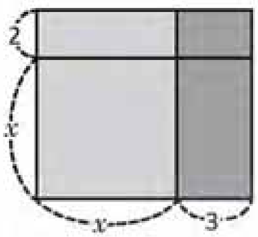
$(x + a)(x + b)$ 形の二項式の積の展開は：

$$(x + a)(x + b) = x^2 + \overbrace{(a + b)}^{\text{たし算 } a \text{ と } b}x + \underbrace{ab}_{a \text{ と } b \text{ の積}}$$

例えば：

$$(x + 5)(x - 2) = x^2 + \overbrace{(5 - 2)}^{\text{和}}x - \overbrace{5(2)}^{\text{積}}$$
$$= x^2 + 3x + 10$$

1. 次の部品によって作られる長方形の面積を二つの異なる方法で求めなさい。



第一の方法：

第二の方法：

2. 次の積を展開しなさい：

a) $(y + 7)(y + 6)$

b) $(x - 2)(x - 3)$

c) $(y + 2)(y - 3)$

d) $(x - 9)(x + 2)$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.2 二項式の二乗、第 1 部

次の積を展開しなさい：

a) $(x-10)(x+4)$

b) $(y-\frac{1}{3})(y-\frac{2}{3})$

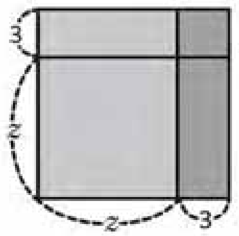
$(x+a)^2$ の形の積の展開は：

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

例えば：

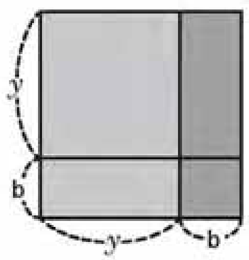
$$\begin{aligned}(x+3)^2 &= x^2 + 2(3)x + (3)^2 \\ &= x^2 + 6x + 9\end{aligned}$$

1. 次の正方形の面積を異なる二つの方法で求めなさい：



第一の方法：

第二の方法：



第一の方法：

第二の方法：

2. 次の積を展開しなさい：

a) $(y+4)^2$

b) $(x+9)^2$

c) $(y+2)^2$

d) $(x+\frac{1}{9})^2$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.3 二項式の二乗、第 2 部

R

1. 次の積を展開しなさい：

a) $(y+8)(y-3)$

b) $(y-\frac{1}{5})(y-\frac{1}{10})$

2. 次の積を展開しなさい：

a) $(x+10)^2$

b) $(x+\frac{5}{2})^2$

C

$(x-a)^2$ の形の積の展開は：

$$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

一般に $(x+a)^2$ と $(x-a)^2$ の積は 二項式の二乗と呼ばれ、そして：

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 \text{ .... } (1)$$

$$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2 \text{ .... } (2)$$

例えば、

$$\begin{aligned}(x-3)^2 &= x^2 - 2(3)x + 3^2 \\ &= x^2 - 6x + 9\end{aligned}$$

従って、$(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$

次の積を展開しなさい：

a) $(x-2)^2$

b) $(y-5)^2$

c) $(y-\frac{1}{10})^2$

d) $(y-\frac{5}{2})^2$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.4 二項式の差によるたし算

1. 次の積を展開しなさい：

a) $(y + 11)^2$

b) $(x + 5)^2$

2. 次の積を展開しなさい：

a) $(x - 10)^2$

b) $(y - \frac{1}{7})^2$

$(x + a)(x - a)$ の形の積は**二項式の差によるたし算の積**又は簡単に**二項式の差によるたし算**と呼ばれ、そして展開は：

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$$

前の授業で習った（そしてここでも）全ての積は**乗法公式**と呼ばれその結果は容易に識別できる形を持っていて直接書くことができます：

乗法公式	展開
$(x + a)(x + b)$ の形の積	$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
二項式の二乗	$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$.....(1)
	$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$.....(2)
二項式の差によるたし算	$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$

次の乗法公式を展開しなさい。

a) $(x + 5)(x - 5)$

b) $(y - 6)(y + 6)$

c) $(y + \frac{5}{6})(y - \frac{5}{6})$

d) $(x - \frac{7}{2})(x + \frac{7}{2})$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.5 代入を使った乗法公式の展開

次の積を展開しなさい：

a) $(x-3)^2$

b) $(x+5)^2$

c) $(x-8)(x+8)$

d) $(y+2)(y-5)$

変数の項がある乗法公式を展開するために適切な代入で知られている乗法公式へ計算式を変える；次の練習はこうしたアイデアをよく例証しています。

例えば展開は：$(5x+2)(5x-2)$

$$(5x+2)(5x-2) = (w+2)(w-2) \quad \ldots\ 5x = w \text{ とすると}$$
$$= w^2 - 4$$
$$= (5x)^2 - 4 \quad \ldots \text{ 再び代入して } w = 5x$$
$$= 25x^2 - 4$$

従って、$(5x+2)(5x-2) = 25x^2 - 4$

次の積を展開しなさい：

a) $(4x-3)(4x+5)$

b) $(2xy-5)(2xy+5)$

c) $(3yz+8)^2$

d) $(5yz-6)^2$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.6 乗法公式の組み合わせ

R 1. 次の積を展開しなさい：

a) $(x-7)(x+7)$

b) $(9-x)(9+x)$

2. 次の積を展開しなさい：

a) $(3x-7y)(3x+7y)$

b) $(5xy-10)^2$

C 乗法公式の組み合わせを展開するには、

1. 式の中でどれがあてはまる乗数公式であるか識別します。
2. 四則演算の諸法則を考慮して展開しなさい。
3. 同類項がもしあればまとめます。

例えば：

$$\begin{aligned}(2x-3)^2+(x+2)(x-2) &= (2x)^2-2(2x)(3)+3^2+x^2-4\\ &= 4x^2-12x+9+x^2-4\\ &= 5x^2-3x+5\end{aligned}$$

従って、$(2x-3)^2+(x+2)(x-2)=5x^2-3x+5$.

次の積を展開しなさい：

a) $(x+y+5)(x+y-5)$

b) $(2y+3)(2y-3)-(y+1)^2$

c) $(2x+1)(2x-1)+(y+7)(y-7)$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.7 三項式の二乗

1. 次の積を展開しなさい：

a) $(5yz - 6)(5yz + 6)$

b) $(\frac{x}{3} - \frac{2}{5})(\frac{x}{3} + \frac{2}{5})$

2. 次の積を展開しなさい：

a) $(x + y + 2)(x + y - 2)$

b) $(4x + 10y)^2 - (3x - 9y)$

$(a + b + c)^2$ の形の積は**三項式の二乗**と呼ばれ展開は：

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

例えば：

$$\begin{aligned}(5x - 3y + 4)^2 &= (5x)^2 + (-3y)^2 + 4^2 + 2(5x)(-3y) + 2(5x)(4) + 2(-3y)(4)\\ &= 25x^2 + 9y^2 + 16 - 30xy + 40x - 24y\\ &= 25x^2 + 9y^2 - 30xy + 40x - 24y + 16\end{aligned}$$

従って、$(5x - 3y + 4)^2 = 25x^2 + 9y^2 + 16 - 30xy + 40x - 24y$

展開しなさい。

a) $(x + 5y + 4)^2$

b) $(8x - 3y + 2)^2$

c) $(-x + 6y + 4)^2$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.8 数値と式の計算

1. 次の式を展開しなさい：

$(10x - 2y)(10x + 2y) + (7x - 3y)^2$

2. 次の式を展開しなさい：

$(3x - y - 7)^2$

1. 次を解きなさい：

a) もし$a^2 + b^2$ =125 そして ab = 50 であれば $(a - b)^2$ の数値は何ですか。

b) もし $(a + b)^2$ = 100 そして $a^2 + b^2$ = 58 であれば ab の数値は何ですか。

c) もし $a^2 + b^2 + c^2$ = 35 そして $ab + bc + ca$ = 23 であれば $(a + b + c)^2$ の数値は何ですか。

2. 乗法公式を使って次の式の結果を計算しなさい：

a) $99 \times 101 =$

b) $111^2 =$

c) $45 \times 55 =$

d) $103 \times 101 =$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.9 学習内容の自己評価

解いて学んだことに従い適当と思われる欄に“×”を印しなさい。
正直に答えましょう。

項目	はい	改善できます	いいえ	コメント
1. $(x+a)(x+b)$ の形の積の展開。 例えば： a) $(x+8)(x-11)$ b) $(y-\frac{5}{2})(y-\frac{3}{2})$				
2. $(x+a)^2$ の形の積の展開。 例えば： $(x+4)^2$				
3. $(x-a)^2$ の形の積の展開。 例えば： $(y-12)^2$				
4. $(x-a)^2$ の形の積の展開。 例えば： $(x+3)(x-3)$				

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.10 学習内容の自己評価

解いて学んだことに従い適当と思われる欄に“×”を印しなさい。
正直に答えましょう。

項目	はい	改善できます	いいえ	コメント
1. 乗法公式を展開するためには代入を使います。 例えば： $(7x + \frac{y}{2})^2$				
2. 乗法公式との組み合わせで関係する多項式の演算を展開します。 例えば：$(3x + 6y + 5)(3x + 6y - 5)$				
3. $(a + b + c)^2$ の形の積の展開。 例えば：$(2x - 3y + z)^2$				
4. 乗法公式を使って代数式の数値を計算します。 例えば： $a^2 + b^2$　もし $a - b = 3$ そして $ab = 70$ ならば				
5. 算術演算の結果の計算をします。 乗法公式を使って。 例えば：105 × 103				

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

3.1 多項式の因数分解

次の積を展開しなさい：

a) $xy(2x + 3y - 5)$

b) $(2x + 9y)^2$

c) $(5x - 7y)^2$

d) $(4x + 3y)(4x - 3y)$

多項式をより簡略化した多項式の積として表す手順を**因数分解**と言います。例えば、 $5x^2 + 7x$ を因数分解すると $x(5x + 7)$ の積となり x と $5x + 7$ の多項式の各項を**因数**と言います。因数分解は多項式の展開の逆の手順です：

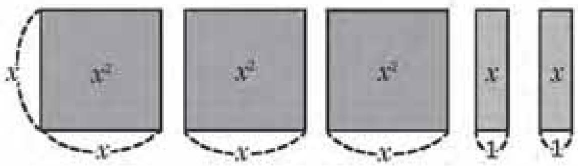
因数分解をします

$$5x^2 + 7x = x(5x + 7)$$

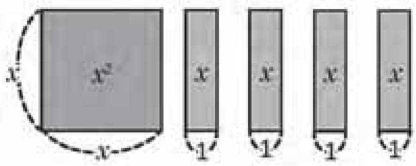
展開します

1. 与えられた部品で形作られる長方形を描き、底辺と高さの積としてその面積を書きなさい。

a)



b)



2. 次の多項式の積にある因数を特定しなさい。

a) $-2x(3x + 9)(4y + 6)$

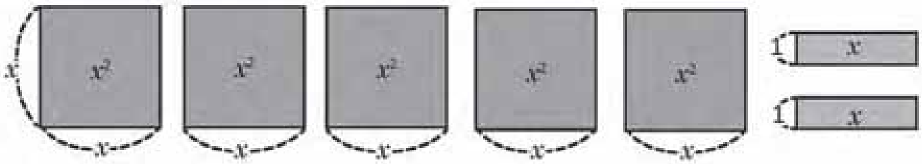
b) $-xy(x - 1)(2x + 7)(y - 7)$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

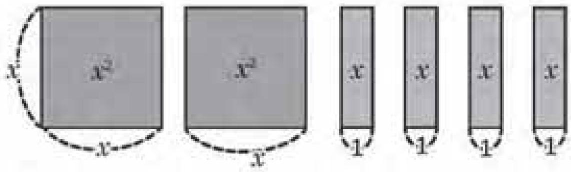
3.2 共通因数

与えられた部品で長方形を作り、その底辺と高さの積としてその面積を書きなさい。

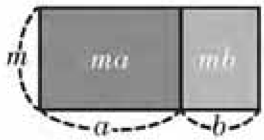
a)



b)



もし多項式のすべての項が一つの共通の単項式を持っていると、この単項式を取り出し分配法則を使って多項式を因数分解します： $ma + mb = m(a + b)$



次の多項式を因数分解しなさい。

a) $9x^2 + 5xy$

b) $-2xy + 3y^2$

c) $-3x^2 - 15xy$

d) $6xy + 12x^2 + 15x$

e) $-4xy - 6y^2 - 14y$

f) $-6x^2y + 8xy^2 + 14xy$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

3.3 $x^2 + (a + b)x + ab$ の形の三項式の因数分解、第 1 部

R

次の多項式の共通因数を各項から取り出して因数分解しなさい：

a) $-15xy + 35y^2$

b) $24x^2y - 20xy^2 - 4xyz$

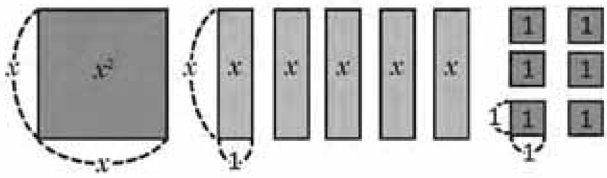
C

乗法公式 $(x + a)(x + b)$ の三項式を因数分解できるには次の通り：

1. 三項式の項目は x^2 で x の文字の部分と他の変数無し（独立項目）の項目であるべきです。

2. 符号の法則を考慮して、積が定数項と等しく、かつその和が x の係数と等しくなる二つの数を求めます。

1. 与えられた部品で形作られる長方形を描き、底辺と高さの積としてその面積を書きなさい。



2. 次の三項式を因数分解しなさい。

a) $x^2 + 7x + 10$

b) $y^2 + 10y + 16$

c) $y^2 + 9y + 18$

d) $x^2 + 14x + 40$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

3.4 $x^2 + (a + b)x + ab$ の形の三項式の因数分解、第 2 部

R

1. 次の多項式を因数分解しなさい。

a) $6xy^2 + 9x^2yz - 15x^2y$

b) $30xyz - 50xy^2z - 40x^2yz$

2. 次の多項式を因数分解しなさい。

a) $x^2 + 11x + 18$

b) $x^2 + 10x + 21$

C

$a > 0$ と $b > 0$ としますと：

もし三項式が $x^2 + ax + b$ であれば	積が $+b$ であって和が $+a$ である**2 つの正数**をさがします。
もし三項式が $x^2 - ax + b$ であれば	積が $+b$ であって和が $-a$ である**2 つの負数**をさがします。
もし三項式が $x^2 + ax - b$ 又は $x^2 - ax - b$ であれば	**2 つの数で、ひとつが正数でもうひとつが負数**であり積が $-b$ であって和がケースによって $+a$ または $-a$ です。

例えば $x^2 - 13x + 36$ の三項式を因数分解する為にはその積が +36 でその和が –13 となる二つの負の数をさがします：

組み合わせ	積	和
–1 と –36	+36	–37
–2 と –18	+36	–20
–3 と –12	+36	–15
–4 と –9	+36	–13

よって： $x^2 - 13x + 36 = (x - 4)(x - 9)$

従って、$x^2 - 13x + 36 = (x - 4)(x - 9)$

次の三項式を因数分解しなさい。

a) $x^2 - 5x + 6$

b) $x^2 - 2x - 24$

c) $y^2 - 8y + 15$

d) $y^2 - 2y - 3$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

3.5 完全平方三項式の因数分解

R

1. 次の多項式を因数分解しなさい。

a) $x^2 + 7x + 12$

b) $x^2 + 12x + 35$

2. 次の多項式を因数分解しなさい。

a) $y^2 - y - 12$

b) $y^2 - 7y + 10$

C

$x^2 \pm 2ax + a^2$ の形の三項式は**完全平方三項式**と言います。これは二項式の第二項の符号に従いその二乗として因数分解をします。

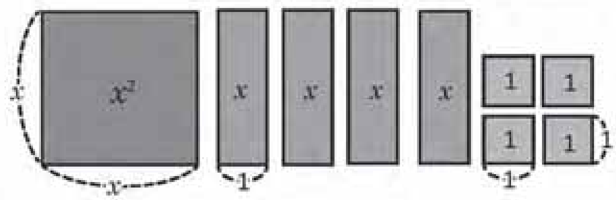
完全平方三項式においては、定数項は決して負ではありません。

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

ある三項式が完全平方三項式であるかどうかを確定するためには、定数項がある数字の二乗であるかどうかまず確かめるべきで、次にその数字の二倍が一次変数の係数と同じかどうか確認することです。例えば、$x^2 + 6x + 9$ は完全平方三項式であり、9 は 3 の二乗 ($3^2 = 9$) であり、さらに 3 の二倍は 6 であってそして一次変数 x の係数と同じです。したがって：

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 &= x^2 + 2(3)x + 3^2 \\ &= (x + 3)^2 \end{aligned}$$

1. この図で：
   a) 部品で示される面積を書きなさい。
   b) 部品で作れる長方形を描きなさい。
   c) できた長方形の面積を求めなさい。



2. 次の三項式を因数分解しなさい。

a) $x^2 + 2x + 1$

b) $x^2 - 6x + 9$

c) $y^2 - 20y + 100$

d) $y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

3.6 二乗の差の因数分解

R 次の多項式を因数分解しなさい。

a) $y^2 - y - 30$

b) $x^2 - 16x + 64$

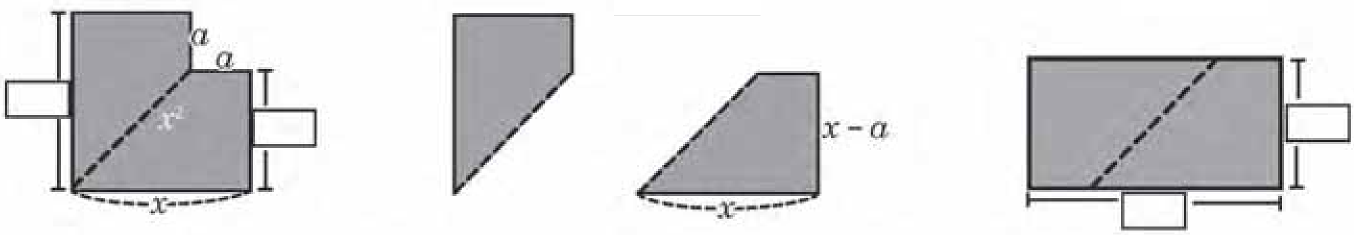
C $x^2 - a^2$ の形の多項式を**二乗の差**と言い、乗法公式の $(x + a)(x - a)$ で因数分解します。つまり、次のようになります。

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a).$$

1. 次のステップの流れは視覚的な実演です。紙一枚を使ってステップ 1 の図形を作図するか、もっと大きいがこれと同じような図形を作りなさい。

a) 図形を切り取りステップに描いた順番に従います。
b) 下の画像の足りない長さを完成させます。

ステップ1　ステップ2　ステップ3



c) 描かれたステップについて示された因数分解の特性を書きなさい。

$\underline{x^2 - a^2}$ = ____________

2. 次の積を展開しなさい：

a) $x^2 - 4$

b) $x^2 - 36$

c) $y^2 - 49$

d) $y^2 - \frac{1}{25}$

e) $x^2 - \frac{4}{9}$

f) $x^2 - \frac{16}{25}$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

3.7 学習内容の自己評価

解いて学んだことに従い適当と思われる欄に“×”を印しなさい。
正直に答えましょう。

項目	はい	改善できます	いいえ	コメント
1. 多項式の因数分解に正方形と長方形の面積を使います。例えば、次の部品で長方形を作って高さと底辺の積で全面積を書きます。 				
2. 多項式の積に因数を識別します。 例えば 次の積では： a) $-10x(x+9)(2y+z)$ b) $(5x-7)(x+3y)(2x+9y-11)$				
3. 多項式の共通因数を取り出します。 例えば： a) $10x^2y^2-20xy^2-15xy$ b) $-21xy^2z^2-18y^2z^2+15yz$				
4. $x^2+(a+b)x+ab$ の形の三項式を因数分解します。 例えば： $x^2+3x-28$				
5. 完全平方三項式の因数分解をします。 例えば： $y^2+8y+16$				
6. 二乗の差である二項式を因数分解します。 例えば： a) x^2-81 b) $x^2-\frac{9}{64}$				

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

3.8 変数の置換えを使った因数分解、第 1 部

次の多項式を因数分解しなさい。

a) $y^2 - 14y + 49$

b) $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$

c) $x^2 - 100$

d) $y^2 - 64$

多項式を因数分解する時その項に共通の単項式がもし無いなら、変数の置換えをして既知の多項式に変換して、前の授業で学習したいずれかの形で因数分解することができます。

次の多項式を因数分解しなさい。

a) $9x^2 + 24xy + 16y^2$

b) $25x^2 - 36y^2$

c) $64x^2 - y^2$

d) $4x^2 + 20x + 25$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

3.9 変数への置き換えを利用した多項式の因数分解、第 2 部

R 次の多項式を因数分解しなさい。

a) $4x^2 + 12xy + 9y^2$

b) $y^2 - 81x^2$

c) $25x^2 - 30x + 9$

d) $49x^2 - 81y^2$

C 多項式を因数分解する時その項に共通の単項式がもし無いなら、変数の置換えをして既知の多項式に変換して、前の授業で学習したいずれかの形で因数分解することができます。

次の三項式を因数分解しなさい。

a) $(x - 2)^2 - (y - 3)^2$

b) $(x + 5)^2 + 2(x + 5)(y - 1) + (y - 1)^2$

c) $9x^2 - 6x(y - 3) + (y - 3)^2$

d) $(x - 2)^2 - 16y^2$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

3.10 連続した因数分解

1. 次の多項式を因数分解しなさい。

a) $25y^2 + 30y + 9$

b) $16x^2 - 81y^2$

2. 次の多項式を因数分解しなさい。

a) $(x - 2)^2 - (y + 2)^2$

b) $(x + 1)^2 + 2(x + 1)(y - 1) + (y - 1)^2$

多項式を因数分解する時は、最初にその項に共通の単項式があるか確認することが必要で、そうであればこの単項式を取り出し、前の授業で学習したいずれかの方法を使って第二の因数の因数分解を行います。

次の多項式を因数分解しなさい。

a) $7x^2 - 28x + 35$

b) $-3x^2 + 15x - 18$

c) $6xy^2 - 48xy + 96x$

d) $3x^2y - 24xy + 48y$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

3.11 因数分解の組み合わせ

R

1. 次の多項式を因数分解しなさい。

$(x + 2)^2 + 2(x + 2)(y - 2) + (y - 2)^2$

2. 次の多項式を因数分解しなさい。

$3xy^2 - 18xy + 27x$

C

一般に普通の多項式を因数分解する時は：

1. その項が共通単項式を持っているか確認して、そうであればその単項式を取り出して第二の因数を因数分解します。

2. もし共通の単項式がない場合：
   多項式を直接いずれかの方法で因数分解します。元の多項式が完全に因数分解されるまで結果の因数のために手順を繰り返します。

次の多項式を因数分解しなさい。

正しく因数分解できたかを確認するためには、全ての因数をかけ算して結果が元の多項式と同じでなければならないことを復習しよう。

a) $5x^2z - 45y^2z$

b) $45x^2z - 20y^2z$

c) $27mn^2 - 18mn + 3m$

d) $28xy^2 - 84xy + 63x$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

3.12 因数分解を用いた数式の計算

R

1. 次の多項式を因数分解しなさい。

a) $2x^2 + 8x - 10$

b) $4x^2y - 24xy + 36y$

2. 次の多項式を因数分解しなさい。

a) $18x^2z - 200y^2z$

b) $50x^2z + 60xyz + 18y^2z$

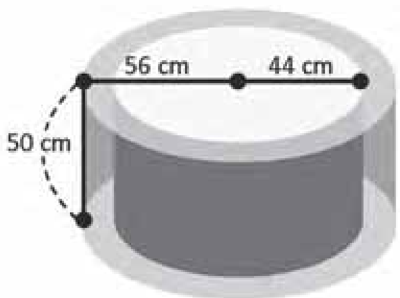
1. 因数分解を使って次の式の計算をしなさい。

a) $55^2 - 15^2$

b) $999^2 - 1$

c) $97^2 - 9$

2. 二つの円筒で一つは半径 44 cmもう一つは 56 cmで円筒の高さは 50 cm（結果は π 項で表しておく）で作られる立体の体積を計算しなさい。



円筒の体積は：

$$V = \pi h r^2$$

ここで h が円筒の高さで r が半径です。

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

3.13 学習内容の自己評価

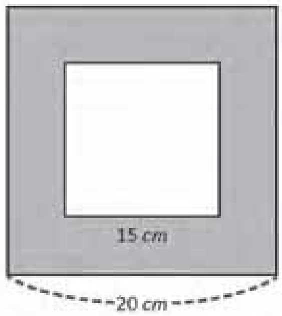
解いて学んだことに従い適当と思われる欄に “×” を印しなさい。
正直に答えましょう。

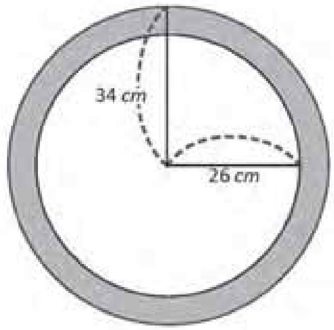
項目	はい	改善できます	いいえ	コメント
1. 乗法公式で多項式を因数分解します。 例えば： a) $16x^2 - 56xy + 49xy^2$ b) $100x^2 - 9y^2$				
2. 完全平方三項式又は二乗の差のように書くために、変数の置換えを使って多項式を因数分解します。 例えば： a) $(2x+3)^2 - (5y-2)^2$ b) $(x-10)^2 + 2(x-10)(2y+7) + (2y+7)^2$				
3. 多項式を因数分解します：共通因数を確認して取り出します。その後乗法公式を使います。 例えば： a) $-2x^2 + 6x + 36$ b) $3y^2 - 300$				
4. 因数分解の組み合わせをまねく多項式の因数分解をします。 例えば： a) $98x^2z - 18y^2z$ b) $18xy^2 - 12xy + 2x$				
5. 因数分解を使って算術演算の計算をします。 例えば： a) $88^2 - 12^2$ b) $190^2 - 90^2$				

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

応用問題

1. **額縁の面積**
大工さんが木の写真の額縁を作っています。ひとつは四角の形でもう一つは円の形です。

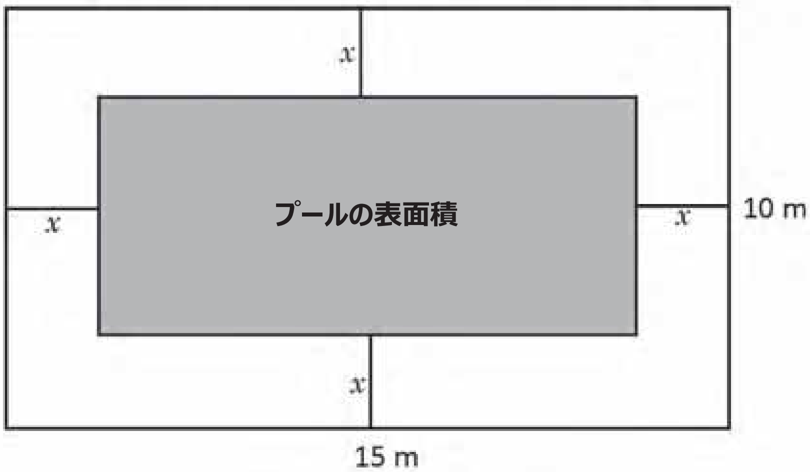




a) 各額縁のタイプの面積（陰で覆われた部分）をもとめなさい。

b) もし大工さんが四角の形の額縁を 4 つ作るとすると、何メートルの木材が作るために必要ですか?

2. **プールの面積**
図が示すような長方形のプールをつくります：



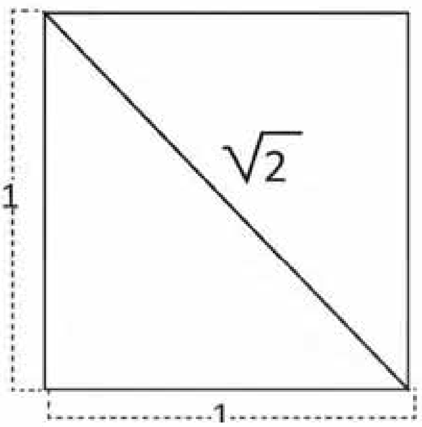
a) プールの表面積を x 関数で表しなさい;

b) 得られる式を展開しなさい;

c) もし $x = 2$ m ならプールの面積はいくつですか?

ユニット 2

平方根

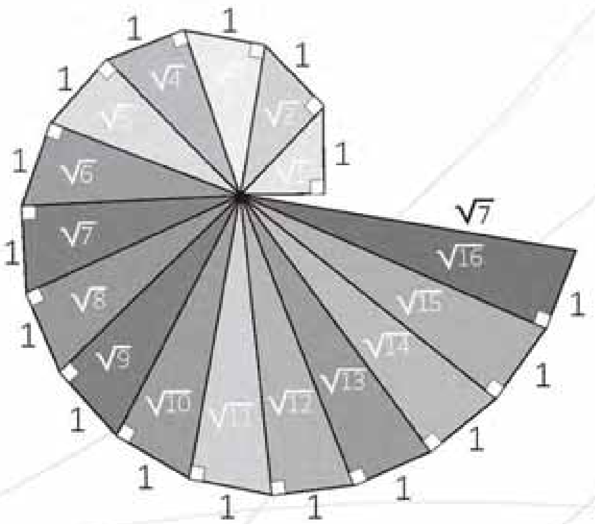


2 の平方根一辺が *1* の正方形の対角線。

数学の歴史では新しい数の集合の発見はいつも歓迎されてきた訳ではありません。紀元前五世紀頃の無理数の場合もそうでした。

a. ギリシャの数学者ヒッパソスは一辺が 1 の正方形の対角線は分数として表現できない数であることを発見し、その時代の思想家の憤慨を引き起こし、この種の数の存在を示した最初の人でした。

数学では実数までの数の普及と無限の数が存在するという知識は、計算とか算数といった必要不可欠な分野の発展を可能にしてきました。さらに物の測定により高い精度を可能にし、現在の物理や化学の発展を育んできました。数学で最も重要な無理数の一つは円周の長さをその直径で割り算して生ずる = 3.1415926535... 無限の小数点が続く数です。



直角三角形によって得られる平方根の連続。

実数の概念を学習して数を有理数と無理数に分類し、根号で数を表し、平方根で演算して、さらに日常の状況へその内容を適用します。

1.1 平方根の意味と記号

記号 $\sqrt{}$ は二乗した結果が記号の中の数字となる**負でない**数を表しています。

記号 $\sqrt{}$ で表し**累乗根**と言われ“平方根”と読みます。

累乗根の中にある数を**被開平数**と言います。

累乗根 → $\sqrt{a}$ ← 被開平数

例えば：
$\sqrt{3}$ は“三の平方根”と読み、正の二乗すると 3 の結果となる数です。

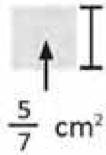
$$(\sqrt{3})^2 = 3$$

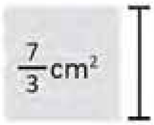
さらに二乗すると 3 になる小数を書くことはできません。

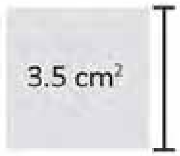
1. 次の正方形の辺の長さを求めなさい。

a)


b)


c)


d)


e)


f)


2. 次の式を二乗するとどんな数字が表されるか求めなさい。

a) $\sqrt{5}$　　b) $\sqrt{11}$　　c) $\sqrt{15}$

d) $\sqrt{\frac{7}{10}}$　　e) $\sqrt{\frac{11}{6}}$　　f) $\sqrt{\frac{5}{13}}$

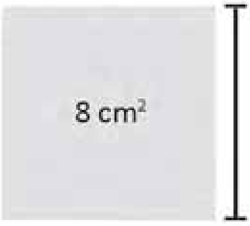
g) $\sqrt{0.7}$　　h) $\sqrt{0.9}$　　i) $\sqrt{1.7}$

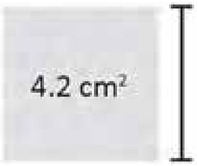
解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

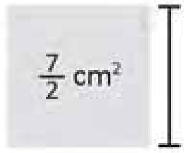
1.2 平方根の記号が付いた数の表し方

R

1. 次の正方形の辺の長さを求めなさい。

a)


b)


c)


2. 次の式を二乗するとどんな数字が表されるか求めなさい。

a) $\sqrt{14}$ b) $\sqrt{\frac{5}{3}}$ c) $\sqrt{1.7}$

C

根号で表される数の中でこの記号を使わないで表せる数があります。

例えば：$\sqrt{25}$ は正の数で二乗するとその結果が 25 となることを表しています。

$$\left(\sqrt{25}\right)^2 = 25$$

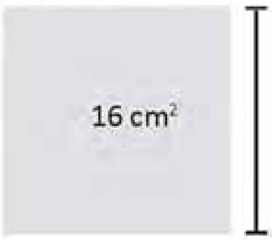
そして$\sqrt{25}$ で表された数は 5 です、なぜなら：$5^2=25$

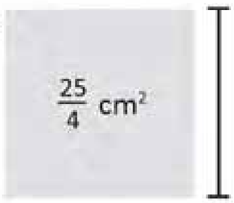
したがって、$\sqrt{25} = 5$

もし $a > 0$ で次を満たせば

$$\sqrt{a^2} = a$$

1. 次の正方形の辺の長さを求めなさい。

a)


b)


c)


2. 次の数を根号なしで表しなさい。

a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt{64}$ c) $\sqrt{121}$

d) $\sqrt{\frac{1}{36}}$ e) $\sqrt{\frac{25}{16}}$ f) $\sqrt{0.16}$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.3 数の平方根

R

1. 次の式を二乗するとどんな数字が表されるか求めなさい。

a) $\sqrt{19}$ b) $\sqrt{\frac{10}{11}}$ c) $\sqrt{\frac{17}{5}}$ d) $\sqrt{1.9}$

2. 次の数を根号なしで表しなさい。

a) $\sqrt{25}$ b) $\sqrt{\frac{1}{16}}$ c) $\sqrt{\frac{25}{64}}$ d) $\sqrt{0.81}$

C

ある正の数 $\boldsymbol{a}$ の**平方根**は二乗すると $\boldsymbol{a}$ となる数と定義されます。

従って、もし $b^2 = a$ であれば、ある数 $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ の平方根 です。

この等式を満たす数字は b と $-b$ で $(-b)^2 = b^2 = a$ です。

また、$\boldsymbol{a}$ の平方根は $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{-b}$ であると言えます。例えば、$(-3)^2 = 9$ と $3^2 = 9$ なので 9 の平方根は 3 と −3 です。

正だけでなく負の平方根を表記するためには ± の記号を使い**プラスマイナス**と読みます。

9 の平方根は ± 3 です。

正の記号付きの平方根は**平方根**として知られ $\sqrt{a}$ と表記します。例えば：

$$\sqrt{9}, \sqrt{\frac{25}{4}}, \sqrt{5}, \text{etc.}$$

負の記号付きの平方根は**負の数の平方根**、そして$\sqrt{a}$ の反数、つまり $-\sqrt{a}$、例えば：

$$-\sqrt{9}, -\sqrt{\frac{25}{4}}, -\sqrt{5}, \text{etc.}$$

1. 次の数字の平方根を求めなさい。

a) 36 b) 81 c) $\frac{49}{100}$ d) 0.25

e) 11 f) 15 g) $\frac{3}{5}$ h) 0.7

2. 空欄を完成しなさい。

$1^2 = 1$ $2^2 = \boxed{}$ $3^2 = \boxed{}$ $4^2 = \boxed{}$ $5^2 = \boxed{}$ $6^2 = 36$ $7^2 = \boxed{}$

$8^2 = 64$ $9^2 = \boxed{}$ $10^2 = \boxed{}$ $11^2 = \boxed{}$ $12^2 = \boxed{}$

！将来の計算を迅速に行うためにはこれらの累乗を記憶することが重要です！

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.4 平方根の大小関係

1. 次の数を根号なしで表しなさい。

a) $\sqrt{64}$　　b) $-\sqrt{16}$　　c) $\sqrt{\frac{1}{100}}$　　d) $-\sqrt{\frac{64}{49}}$　　e) $\sqrt{0.81}$

2. 次の数の平方根を求めなさい：

a) 100　　b) 21　　c) $\frac{36}{25}$　　d) $\frac{3}{14}$　　e) 1.44

もし平方根の被開平数がもう一つの被開平数よりも大きいならば、そのとき最初の平方根は二番目のものよりも大きく、従って：

a、$b > 0$ として、もし $a < b$ ならば従って $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ です。

例えば：

どの数が大きいですか $\sqrt{12}$ か $\sqrt{11}$？

11 < 12なので、従って$\sqrt{11} < \sqrt{12}$

1. 該当する記号 <、>、又は = を書きなさい。二乗する時どちらが大きいかをみて注意することを復習しよう。

a) $\sqrt{8}$ □ $\sqrt{3}$　　b) 5 □ $\sqrt{15}$　　c) $\sqrt{5}$ □ 2

d) $-\sqrt{5}$ □ $-\sqrt{6}$　　e) $\sqrt{\frac{6}{10}}$ □ $\sqrt{0.7}$　　f) $-\sqrt{\frac{1}{4}}$ □ $-\sqrt{0.25}$

2. 次の数字を小さいものから大きいものへ並べましょう。

a) $\sqrt{8}$　　b) −4　　c) 4　　d) $-\sqrt{14}$　　e) $\sqrt{\frac{3}{2}}$　　f) $-\sqrt{2.5}$

答えをここに書きなさい：

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.5 有理数と無理数

1. 次の数の平方根を求めなさい：

a) 25　　b) 4　　c) $\frac{49}{81}$　　d) 0.36

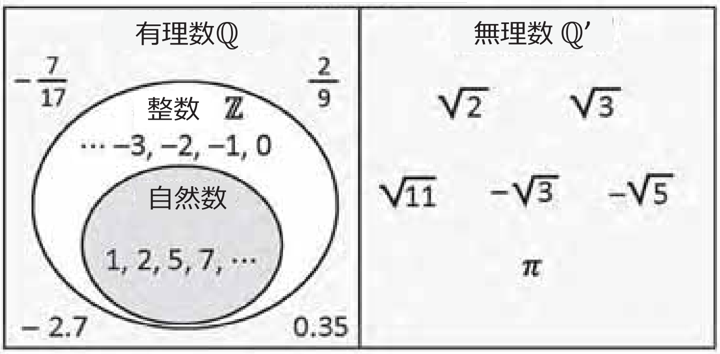
2. 該当する記号 <、>、又は = を書きなさい。二乗する時どちらが大きいかをみて注意することを復習しよう。

a) $\sqrt{12}\ \square\ \sqrt{5}$　　b) $3\ \square\ \sqrt{10}$　　c) $-\sqrt{11}\ \square\ 2$

分数で表すことのできる数、つまり $\frac{a}{b}$ の形で a と b が整数で $b \neq 0$ の数を**有理数**と呼び、その集合を $\mathbb{Q}$ として表し（表記し）ます。

$\frac{a}{b}$ の形で表せない数は**無理数**と呼ばれ、その集合は $\mathbb{Q}'$ として表され（表記され）ます。
例えば：$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi$

数



1. 次の数を、ケースに応じて、有理数か無理数に分類しなさい。

a) -3　　b) 0.16　　c) $-\sqrt{11}$　　d) $\sqrt{5}$

2. 次の数を分数として表しなさい。

a) 7　　b) 0.05

c) -1.4　　d) 0.025

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.6 少数の分数への変換

1. 該当する記号 <、>、又は = を書きなさい。二乗する時どちらが大きいかをみて注意することを復習しよう。

a) $\sqrt{12}$ □ 3　　b) -3 □ $-\sqrt{8}$　　c) $\sqrt{11}$ □ $\sqrt{7}$

2. 次の数を分数として表しなさい。

a) -6　　b) 0.45　　c) -2.5

小数部分に無限に繰り返される何桁かの数字を持つ小数は、**循環小数**として知られています。

循環小数を変換するには：

1. 数を x で表し、そして $10x$（又は $100x$）を計算します。
2. 循環節を除くために、$10x$（または $100x$）から x を引きます。
3. x を解いて、循環小数が表す分数を約分します。

例えば：　$2.\overline{15}$

1. $x = 2.\overline{15}$　　$100x = 215.\overline{15}$　循環節 2桁

2.
$$\begin{array}{rl} 100x = & 215.1515\ldots \\ -\quad x = & 2.1515\ldots \\ \hline 99x = & 213.0000\ldots \end{array}$$

3. $x = \dfrac{\cancel{213}^{\,71}}{\cancel{99}_{\,33}} = \dfrac{71}{33}$

1. 割り算をやって結果が循環する数か循環しない数かどうか書きなさい。

a) $7 \div 12$　　b) $4 \div 3$　　c) $31 \div 7$

2. 次の循環小数を分数で表しなさい。

a) $0.\overline{8}$　　b) $2.\overline{32}$

c) $3.\overline{5}$　　d) $1.\overline{247}$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.7 実数の定義

1. 次の数を有理数か無理数か分類しなさい。

a) $\frac{1}{5}$　　b) -5　　c) $-\pi$

2. 次の循環小数を分数で表しなさい。

a) $0.\overline{7}$　　b) $0.\overline{23}$　　c) $1.\overline{15}$

有理数と無理数からなる集合は**実数**として知られています。

実数は、次の記号で表されます：$\mathbb{R}$
例えば：

- 正数と負数の整数、および零は、有理数なので実数です。

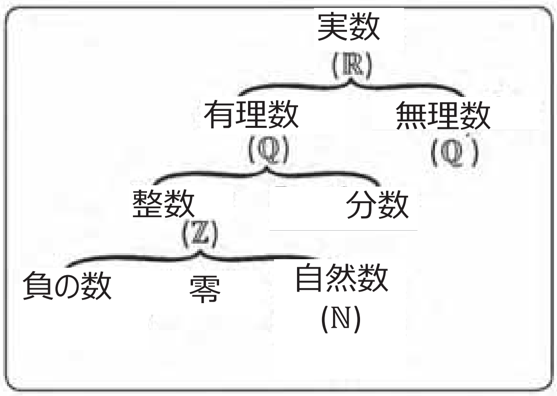
$$2=\frac{2}{1},\ -3=\frac{-3}{1},\ 0=\frac{0}{1}$$

- 正と負の分数は有理数なので実数です。

$$\frac{3}{5},\ -\frac{3}{5}=\frac{-3}{5}$$

- 有理数か無理数なので、小数。
- 有理数か無理数なので、平方根で表される数。

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{10},\ 等。$$



そして実数の間ではたし算、ひき算、かけ算と割り算ができます。

次の数がなぜ実数か説明して小さいものから大きなものへ並べなさい。

a) 9　　b) -13　　c) $\frac{2}{3}$　　d) -0.07

e) 2.718281　　f) $-2.3\overline{15}$　　g) $2.\overline{4}$　　h) $-\sqrt{25}$

順番：______________________________

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.8 学習内容の自己評価

解いて学んだことに従い適当と思われる欄に“×”を印しなさい。
正直に答えましょう。

項目	はい	改善できます	いいえ	コメント
1. 根号で表記される数が何を表すかわかります。：$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$ と $\sqrt{5}$				
2. 根号記号なしで数を表記できます。例えば：$\sqrt{4}$、$\sqrt{9}$ と $\sqrt{1}$				
3. 数の平方根の定義についてわかります。そして正の数には正だけでなく負もあることも。				
4. 根号記号を使わないで正だけでなく負の根を表記できます。：$\sqrt{9}$ と $-\sqrt{49}$				
5. $2.\overline{15}$ のような数を分数に変換できます。				
6. 3、−1、0、1.2 と $\frac{3}{4}$ の数が有理数か説明します。				

1.9 学習内容の自己評価

解いて学んだことに従い適当と思われる欄に“×”を印しなさい。
正直に答えましょう。

項目	はい	改善できます	いいえ	コメント
1. もし $0 \leq a < b$ ならば、どうして $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ となるかわかります。				
2. 次のような数字を小さいものから大きなものへ並べられます：10、−1、$\sqrt{5}$ と $\frac{3}{4}$ 。				
3. 次の数がどうして無理数なのか識別します：$\sqrt{2}$、1.6180339... 、π				
4. 累乗を使って $\sqrt{10}$ の近似を求められます。				
5. 計算機を使って $\sqrt{5}$ の近似を求められます。				
6. 1、π、0、−1、$\sqrt{2}$、0.5 と $\frac{3}{2}$ の数字がどうして実数か説明します。				

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.1 平方根のかけ算

R

$1.\overline{63}$ の数を分数で表しなさい。

C

$\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ と $a, b \geq 0$ を実行するために各平方根の被開平数をかけ算します。

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

例えば、 $\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{3 \times 2} = \sqrt{6}.$

1. 次の平方根のかけ算を実行しなさい：

a) $\sqrt{2} \times \sqrt{5}$

b) $(-\sqrt{5}) \times \sqrt{6}$

c) $(-\sqrt{14}) \times (-\sqrt{3})$

d) $(-\sqrt{7}) \times \sqrt{10}$

e) $\sqrt{2} \times \sqrt{23}$

f) $\sqrt{3} \times (-\sqrt{12})$

2. 根のかけ算の手順が正しいか確認して、もし正しくなければ何が誤りか書きなさい。

a) $3\sqrt{3} \times 5\sqrt{3} = 3 \times 5\sqrt{3} = 15\sqrt{3}$

次を考慮しましょう
$a\sqrt{3} = a \times \sqrt{b}$

b) $4\sqrt{3} \times 5\sqrt{3} = 4 \times 5\sqrt{3 \times 3} = 4 \times 5 \times 3 = 60$

c) $-3\sqrt{3} \times \sqrt{3} = -3\sqrt{3+3} = -3\sqrt{6}$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.2 平方根のわり算

R 次の平方根のかけ算をしましょう。

a) $\sqrt{7} \times \sqrt{3}$　b) $\sqrt{3} \times (-\sqrt{7})$　c) $(-\sqrt{3}) \times \sqrt{3}$　d) $(-\sqrt{43}) \times (-\sqrt{2})$

C $\sqrt{a} \div \sqrt{b}$ と $a, b > 0$ を実行するために各平方根の被開平数をわり算して分数で表します。

$$\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

例えば： $\sqrt{3} \div \sqrt{5} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

次の平方根の割り算を実行しなさい。

a) $\sqrt{6} \div \sqrt{30}$　b) $\sqrt{3} \div (-\sqrt{7})$　c) $(-\sqrt{6}) \div \sqrt{5}$

d) $\sqrt{2} \div \sqrt{10}$　e) $(-\sqrt{21}) \div \sqrt{3}$　f) $\sqrt{12} \div \sqrt{3}$

g) $\sqrt{2} \div (-\sqrt{10})$　h) $(-\sqrt{28}) \div (-\sqrt{7})$　i) $(-\sqrt{20}) \div \sqrt{5}$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.3 根号を使わない数の表し方

R

1. 次の平方根のかけ算を実行しなさい：

a) $\sqrt{6}\times\sqrt{7}$　　b) $\sqrt{3}\times(-\sqrt{11})$　　c) $(-\sqrt{2})\times\sqrt{50}$　　d) $(-\sqrt{8})\times(-\sqrt{8})$

2. 次の平方根の割り算を実行しなさい。

a) $\sqrt{6}\div\sqrt{7}$　　b) $(-\sqrt{45})\div(-\sqrt{30})$　　c) $\sqrt{6}\div(-\sqrt{24})$　　d) $(-\sqrt{45})\div\sqrt{5}$

C

根号を使わないで数を表すためには：

1. 被開平数の素因数分解を求めます。
2. 平方根を累乗根の二乗のかけ算に分けます。
3. 各平方根を計算し結果をかけ算します。

例えば：　$\sqrt{324}$

1. $324 = 2^2\times3^2\times3^2$

324	2
162	2
81	3
27	3
9	3
3	3
1	1

2. $\sqrt{324}=\sqrt{2^2\times3^2\times3^2}$
$=\sqrt{2^2}\times\sqrt{3^2}\times\sqrt{3^2}$

3. $\sqrt{324}=2\times3\times3=18$

次の数を根号を使わず表しなさい：

a) $\sqrt{625}$　　b) $\sqrt{441}$

c) $\sqrt{\frac{16}{81}}$　　d) $\sqrt{\frac{441}{256}}$

e) $-\sqrt{900}$　　f) $-\sqrt{\frac{25}{16}}$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.4 有理数と平方根のかけ算

1. 次の平方根の割り算を実行しなさい。

a) $\sqrt{2} \div \sqrt{3}$　　b) $(-\sqrt{42}) \div (-\sqrt{70})$　　c) $(-\sqrt{17}) \div \sqrt{3}$

2. 次の数を根号なしで表しなさい。

a) $\sqrt{121}$　　b) $-\sqrt{729}$　　c) $-\sqrt{\frac{16}{49}}$

表記法 $a\sqrt{b}$ は $a \times \sqrt{b}$ と $b \geq 0$ のかけ算を表しています。

$a \times \sqrt{b}$ のかけ算を実行してある数の平方根として表すためには：

1. a を根号で表します。

$$a = \sqrt{a^2}$$

2. 平方根をかけ算します。

$$a \times \sqrt{b} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} = \sqrt{a^2 \times b}$$

例えば：　$3\sqrt{3}$

1. $3 = \sqrt{9}$
2. $3\sqrt{3} = 3 \times \sqrt{3} = \sqrt{9} \times \sqrt{3}$

$$= \sqrt{9 \times 3}$$

$$= \sqrt{27}$$

次の数をある数の平方根で表しなさい。

a) $2\sqrt{3}$　　b) $3\sqrt{2}$　　c) $2\sqrt{7}$　　d) $5\sqrt{2}$

e) $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　f) $\frac{\sqrt{3}}{5}$　　g) $\frac{\sqrt{6}}{7}$　　h) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.5 平方数でない被開平数の約分

R 1. 次の数を根号なしで表しなさい。

a) $\sqrt{324}$ b) $-\sqrt{576}$ c) $\sqrt{\frac{196}{225}}$ d) $-\sqrt{\frac{169}{121}}$

2. 次の数をある数の平方根として表しなさい。

a) $4\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{10}$ c) $6\sqrt{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{7}$

C

元より小さい被開平数で表すことを、平方根を**約分する**として知られています。

そして被開平数を可能なより小さい値に約分する場合、平方根を**最小値の式に約分する**といいます。

例えば、$\sqrt{90}$ をその最小値の式に約分します。

90 の素因数分解を使って：

$$\sqrt{90} = \sqrt{3^2 \times 2 \times 5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{2 \times 5} = 3\sqrt{10}$$

注目：

90	2
45	3
15	3
5	5
1	

そして $\sqrt{90}$ のその最小値の式への約分は、被開平数をそれ以上小さくできないので $3\sqrt{10}$ です。

根号を使って計算をする際は、常に結果を最小値の式に約分すべきです。

1. 次の式を約分しなさい：

a) $\sqrt{125}$ b) $\sqrt{32}$ c) $-\sqrt{\frac{3}{49}}$ d) $\sqrt{\frac{5}{16}}$

2. 次の数を最小値の式に約分しなさい。

a) $\sqrt{675}$ b) $\sqrt{648}$ c) $-\sqrt{800}$ d) $-\sqrt{108}$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.6 約分を使った平方根のかけ算

1. 次の数をある数の平方根として表しなさい。

a) $3\sqrt{6}$　　b) $2\sqrt{3}$　　c) $\frac{\sqrt{2}}{5}$

2. 次の数を最小値の式に約分しなさい。

a) $\sqrt{400}$　　b) $\sqrt{243}$　　c) $-\sqrt{\frac{21}{75}}$

被開平数のような大きな数の平方根のかけ算の為には次のようにできます：

1. 可能なら各平方根を約分します。
2. 約分した平方根をかけ算します。

例えば：　$\sqrt{18} \times \sqrt{12}$

1. $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$　　$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
2. $3\sqrt{2} \times 2\sqrt{3} = 3 \times 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} = 6\sqrt{6}$

又は同じく：

1. 平方根をかけ算し、かけ算を素因数で表します。
2. 約分し結果を求めます。

例えば：　$\sqrt{18} \times \sqrt{12}$

1. $\sqrt{18} \times \sqrt{12} = \sqrt{18 \times 12} = \sqrt{2 \times 2^2 \times 3^2 \times 3}$
2. $\sqrt{2 \times 2^2 \times 3^2 \times 3} = 3 \times 2 \times \sqrt{2 \times 3} = 6\sqrt{6}$

次の平方根のかけ算をしましょう。

a) $\sqrt{24} \times \sqrt{63}$　　b) $\sqrt{50} \times \sqrt{27}$　　c) $\sqrt{40} \times (-\sqrt{27})$

d) $\sqrt{30} \times \sqrt{35}$　　e) $\sqrt{6} \times \sqrt{10}$　　f) $\sqrt{12} \times (-\sqrt{24})$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.7 分母の有理化

1. 次の数を最小値の式に約分しなさい。

a) $\sqrt{147}$　　b) $\sqrt{\frac{6}{25}}$　　c) $\sqrt{980}$

2. 次の平方根のかけ算をしましょう。

a) $(-\sqrt{21}) \times \sqrt{28}$　　b) $(-\sqrt{24}) \times (-\sqrt{18})$　　c) $\sqrt{30} \times (-\sqrt{42})$

分母に平方根を持たない分数と同等な分数を求める手順は**平方根の有理化**と呼ばれます。

分数 $\frac{b}{\sqrt{a}}$ の分母の有理化をするためには $a > 0$ として次のステップは：

1. 分数 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$ とかけ算します。
2. かけ算を実行してその結果を約分します。

$$\frac{b}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{a}$$

例えば、$\frac{5}{\sqrt{3}}$ を有理化しなさい：

1. $\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

2. $\frac{5}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

平方根の計算を実行する時はいつでも分母の平方根を有理化しなければなりません。

次の数を有理化しなさい：

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$　　b) $-\frac{1}{\sqrt{13}}$　　c) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$

d) $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{26}}$　　e) $\frac{1}{\sqrt{2}}$　　f) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.8 平方根のたし算とひき算

1. 次の平方根のかけ算を実行しなさい：

a) $\sqrt{72} \times \sqrt{96}$ b) $\sqrt{27} \times (-\sqrt{52})$ c) $(-\sqrt{35}) \times \sqrt{10}$

2. 次の数を有理化しなさい：

a) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ b) $-\frac{1}{\sqrt{14}}$ c) $-\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{7}}$

平方根のたし算とひき算をするためには、同じ被開平数の平方根の係数のたし算やひき算をします。

例： a) $6 + 5\sqrt{7} - 3\sqrt{7}$ b) $3\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

同じ被開平数をもつ数を見つけます：

$6 + 5\sqrt{7} - 3\sqrt{7}$ $3\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

同じ被開平数の平方根の係数をたし算、ひき算します。

$6 + 5\sqrt{7} - 3\sqrt{7} = 6 + (5 - 3)\sqrt{7}$ $3\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = (3 + 2)\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$

したがって：

$6 + 5\sqrt{7} - 3\sqrt{7} = 6 + 2\sqrt{7}$ $3\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$

次の平方根の計算をしなさい：

a) $\sqrt{6} + 8\sqrt{6}$ b) $2\sqrt{5} - 7\sqrt{5}$ c) $\sqrt{3} - 9\sqrt{3}$

d) $4\sqrt{3} - 9\sqrt{3} - 2$ e) $3\sqrt{3} + 2\sqrt{6} + 7\sqrt{6}$ f) $9\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + 9\sqrt{2}$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.9 約分と有理化を使った平方根のたし算とひき算

R

1. 次の数を有理化しなさい：

a) $\frac{1}{\sqrt{11}}$　　b) $-\frac{1}{\sqrt{15}}$　　c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{14}}$

2. 次の平方根の計算をしなさい：

a) $\sqrt{2}+4\sqrt{2}$　　b) $\sqrt{7}-2\sqrt{7}$　　c) $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+8\sqrt{3}$

C

被開平数が異なる平方根のたし算とひき算をするためには：

1. その項を最小の式に約分します。
2. できるものは平方根を有理化します。
3. 同類根でたし算とひき算を計算します。

例えば：

$$\sqrt{20}-\sqrt{45}+\frac{30}{\sqrt{5}}$$

1. $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

   $\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

2. $\frac{30}{\sqrt{5}}=\frac{30}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{30}{5}\sqrt{5}=6\sqrt{5}$

3. $\sqrt{20}-\sqrt{45}+\frac{30}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}-3\sqrt{5}+6\sqrt{5}$

   $=5\sqrt{5}$

次の平方根の計算をしなさい：

a) $\sqrt{45}+\sqrt{20}$　　b) $\sqrt{32}+\sqrt{72}+\sqrt{50}$　　c) $\sqrt{48}-\sqrt{12}+\sqrt{75}$

d) $\sqrt{28}+\frac{14}{\sqrt{7}}$　　e) $\sqrt{80}+\frac{35}{\sqrt{5}}$　　f) $\sqrt{24}-\frac{12}{\sqrt{6}}$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.10 平方根の混合演算、第 1 部

1. 次の平方根の計算をしなさい：

a) $\sqrt{7} + 9\sqrt{7}$

b) $\sqrt{5} - 6\sqrt{5}$

c) $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$

2. 次の平方根の計算をしなさい：

a) $\sqrt{98} + \sqrt{72}$

b) $\sqrt{75} - \sqrt{27} + \sqrt{48}$

c) $\sqrt{180} - \frac{35}{\sqrt{5}}$

たし算に対するかけ算の分配法則は、実数と特に平方根に対しても成り立ちます。

3 つの実数 a、b と c について $a(b + c) = ab + ac$ を満たし、$(a + b)c = ac + bc$ も満たします。

例えば：

$$\sqrt{5}(\sqrt{6} + \sqrt{5}) = \sqrt{5} \times \sqrt{6} + (\sqrt{5})^2$$
$$= \sqrt{30} + 5$$

次の平方根の演算をしなさい（計算する前に約分できるか見直しなさい）。

a) $\sqrt{2}\,(\sqrt{2} + 3)$

b) $\sqrt{6}\,(\sqrt{6} - 7)$

c) $\sqrt{5}\,(\sqrt{80} + 3)$

d) $(\sqrt{175} - 4)\,\sqrt{7}$

e) $(\sqrt{12} - 5)\,\sqrt{3}$

f) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})\,\sqrt{5}$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.11 平方根の混合演算、第 2 部

1. 次の平方根の計算をしなさい：

a) $\sqrt{75}+\sqrt{12}$　　b) $\sqrt{18}-\sqrt{32}+\sqrt{72}$　　c) $\sqrt{125}-\frac{7}{\sqrt{5}}$

2. 次の平方根の計算をしなさい：

a) $\sqrt{5}\,(\sqrt{5}+1)$　　b) $\sqrt{6}\,(\sqrt{96}+7)$　　c) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{3}$

たし算に対するかけ算の分配法則は、実数と特に平方根や $(a+b)(c+d)$ のケースに対しても成り立ちます。

4 つの実数 a、b、c と d について次を満たしています

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd.$$

例えば：　$(\sqrt{7}+\sqrt{3})\,(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

$$(\sqrt{7}+\sqrt{3})\,(\sqrt{2}+\sqrt{3})=\sqrt{7}(\sqrt{2})+\sqrt{7}(\sqrt{3})+\sqrt{3}(\sqrt{2})+(\sqrt{3})^2$$
$$=\sqrt{14}+\sqrt{21}+\sqrt{6}+3$$

このように同じく：

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(\sqrt{2}+1)^2=(\sqrt{2})^2+2(\sqrt{2})(1)+(1)^2$

$=2+2\sqrt{2}+1$

$=3+2\sqrt{2}$

次の平方根の計算をしなさい：

a) $(\sqrt{2}+\sqrt{7})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$　　b) $(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{6})$　　c) $(\sqrt{6}-\sqrt{7})(\sqrt{3}-\sqrt{6})$

d) $(\sqrt{5}-9)(\sqrt{5}-8)$　　e) $(\sqrt{8}+\sqrt{3})(\sqrt{8}-\sqrt{3})$　　f) $(\sqrt{7}+5)^2$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.12 学習内容の自己評価

解いて学んだことに従い適当と思われる欄に “×“ を印しなさい。
正直に答えましょう。

項目	はい	改善できます	いいえ	コメント
1. 次のような平方根のかけ算をすることができます。 $(-\sqrt{10}) \times (-\sqrt{7})$				
2. 次のような平方根のわり算をすることができます。 $\sqrt{2} \div \sqrt{5}$				
3. $\sqrt{400}$ のような根号のない数を因数分解を使って表せます。				
4. $\sqrt{18}$ のようなものには不正確な平方根の約分を適用します。				
5. $2\sqrt{5}$, $\frac{\sqrt{2}}{5}$ のような数やある数の平方根を表します。				

2.13 学習内容の自己評価

解いて学んだことに従い適当と思われる欄に “×“ を印しなさい。
正直に答えましょう。

項目	はい	改善できます	いいえ	コメント
1. 約分を使って $\sqrt{75} \times \sqrt{50}$ をかけ算します。				
2. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ のような数を有理化します。				
3. $\sqrt{7} + 3\sqrt{7}$ のような平方根をたし算ひき算します。				
4. 約分を使って $\sqrt{28} - \sqrt{63} + \sqrt{7}$ の平方根のたし算とひき算ができます。				
5. $\sqrt{5}\,(\sqrt{5} - 6)$ のような演算を解くために分配の法則を正しく適用します。				

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.14 実数の問題の解き方

問題のある状況を解決するため次のステップに従うことができます：

1. もし可能であれば問題の状況を図解することを実行します。
2. 問題が提供する情報を識別します。
3. 問題に対する解決の方法をさがします。
4. 提議された問題に対する回答を提供します。

1. ミゲルの年齢はその娘アナの年齢の二乗です。もしミゲルが 36 歳であればアナは何歳ですか?

2. 一辺が 0.3 m の四角い板石を四角い土地に敷く予定です。もし土地が 36 m^2 だとすると板石はいくつ買えば良いでしょう?

3. ある地域の役員によって開催された集会で昼食に $196 使いました。もし参加者の数が各昼食の一人当たりの価額と同じならば、この集会に何人参加していましたか?

4. ある正方形の土地の面積は 1,296 m^2 です。

   a) 土地の一辺の長さを求めなさい。
   b) 土地の周囲の長さを求めなさい。

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.15 学習内容の自己評価

解いて学んだことに従い適当と思われる欄に “×“ を印しなさい。
正直に答えましょう。

項目	はい	改善できます	いいえ	コメント
1. 次の関係を満たすような a が表すことのできる自然数を求めなさい。 $2 < \sqrt{a} < 3$				
2. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $y = \sqrt{5} - \sqrt{7}$ を考慮して、次の算術式の値を求めなさい： a) $(x + y)^2$ b) xy				
3. $\sqrt{2} \approx 1.414$ を考慮して、次の数の値に近づけます： a) $\sqrt{8}$ b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$				
4. アルベルトさんは面積 36,000 m^2 の正方形の土地を囲いたいと思っています。もし各メートルを囲むのに $3.00 の費用がかかるとすると、土地を囲む費用の総額はいくらですか?				

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

応用問題

1. 石工はエルサルバドルではごく普通の仕事で、多くの人々がやっていてその収入を得ています。石工は建築の作業を実行することを担当して、工事を完成させるための実務作業を行います。

ある石工が正方形の土地を一辺が 0.6 m の長さの石板で敷き詰めたいと思っています。

a) もし土地が 81 m^2 の面積があれば石板をいくつ買うべきでしょうか?

b) もし一つが $2.00 の費用がかかるセラミックスで敷くとすると工事にいくらのお金が必要ですか?

c) 倉庫には、石板を 100 を超えて買えば価格は一つ当たり $0.10 安くなります、この条件では工事の為にいくらのお金が必要ですか?

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

応用問題

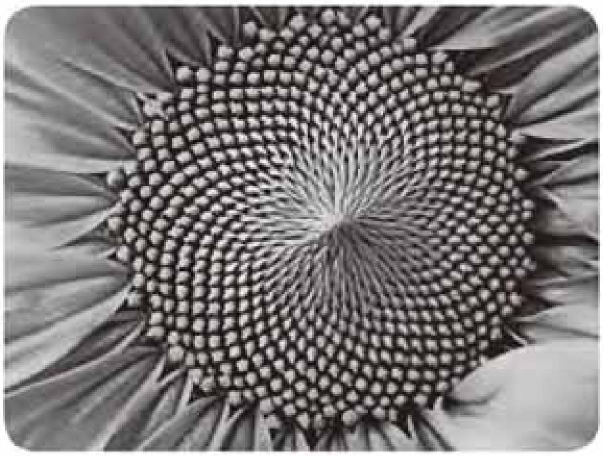
2. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ の数は無理数で良く知られた黄金の数（黄金数）と呼ばれ、大変興味深い数学的特性を持ち表記するためには □ の記号を使います $(□ = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803...)$ 。

自然界にはいくつかの研究があり、この数は重要な役割を担っています、例えば花の花びらの配置と数量、ひまわりや松ぼっくりの場合のように花序の螺旋を構成する要素の数量です。

次の演算を実行しなさい：

全ての実数について次を満たしています
$a^2 = a \times a$
$a^3 = a \times a \times a$
$a^4 = a \times a \times a \times a$

a) $(1-\sqrt{5})$□



b) $□^2$

c) $□^3$

d) $□^4$

e)　b)、c) と d) から何がわかりますか? $□^5$を計算しましょう。

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

ユニット 3

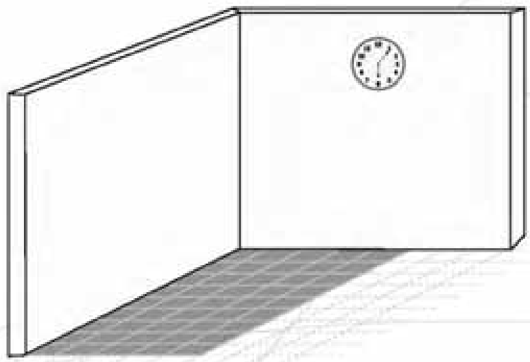
二次方程式

粘土板 *BM 13901* は英国、ロンドンの大英博物館にある最も古い数学文書の *1* つです。*24* 個の問題とその解答が載っています。

数学では、記号は数の表記に使われるだけではありません。記号的推論を行うための第 1 ステップは、問題解決の文脈において行われます。古代バビロニアでは、未知の数量に関する情報を示し、その後値を示していました。その一例は、紀元前 18 世紀にさかのぼる、粘土板 BM 13901 に見られます：「正方形の辺を 7 回、面積を 11 回足すと$6\frac{1}{4}$ が得られる。」これを「挟み撃ち法」と呼び、方程式 $ax^2 + bx + c = 0, c < 0$ の解のプロセスとなります。

二次方程式の解は、インドやアラブの一部の数学者には口伝えで、また幾何構造を通じて知られていましたが、紀元 1114 年に生まれたインドの数学者バースカラにより、記号代数を用いてこの種の方程式を解く方法が知られました。

遥か昔の時代から、多くの計算者や水先案内人は土地を測るための技術に頼った方法を用いていました。現在、その計算法は建設で必要な資材の数量を知るため、金融分野で労働者に未払いの給料を知るため、さらに食べ物の割当量や遺産の配分を知るためなどに使われます。



もし正方形の煉瓦の数量と覆われる対象の面積が決まっていたら、二次方程式で表し、煉瓦の大きさを求めることができます。

これらの内容から、幾何学的手段を用いて因数分解と解の公式を活用しながら二次方程式を解くことの重要性が分かるでしょう。さらに、ある二次方程式に解があるか検討し、応用問題を解くための二次方程式を立てます。

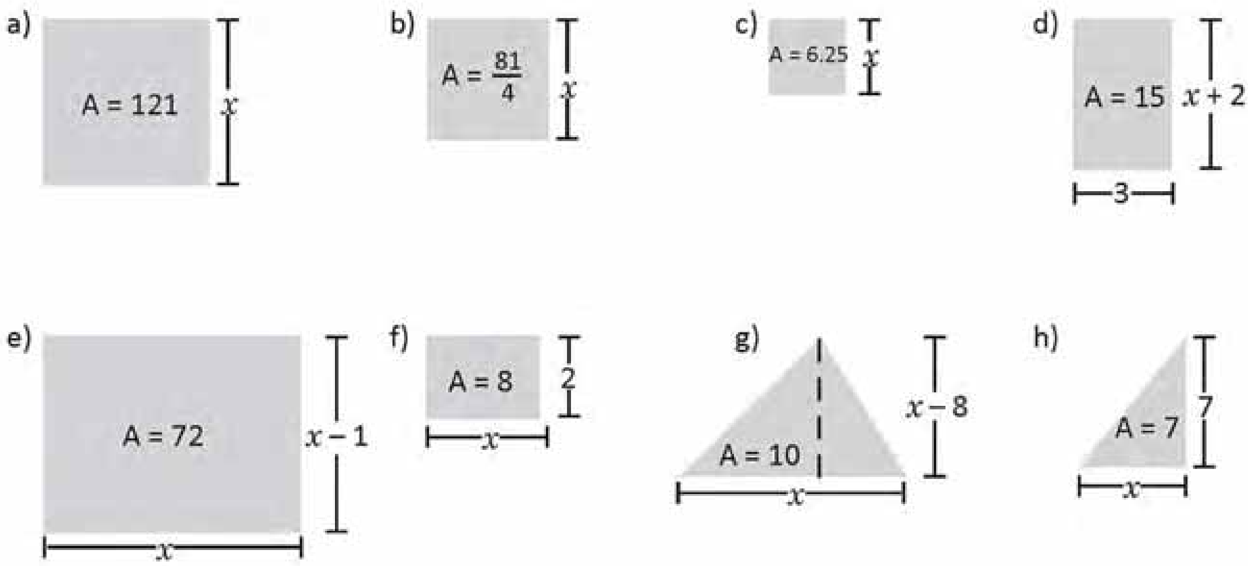
1.1 二次方程式の意味と定義

未知数が 2 乗の数である方程式を、**二次方程式**と呼びます。

一般的に二次方程式は、a、b、c および $a \neq 0$ である実数を用いて $ax^2 + bx + c = 0$ という形として定義されます。

例：$2x^2 - 3 = 0$、$9x^2 - 3 = 0$、$(x + 5)^2 - 16 = 0$、$x^2 + 4x + 1 = 0$、$x^2 + 4x = 0$ など。

1. それぞれの図の底辺の長さを求める方程式を答えましょう。方程式を表に写し、二次方程式かどうかを判断しましょう。



方程式	二次方程式ですか?	方程式	二次方程式ですか?
a)		e)	
b)		f)	
c)		g)	
d)		h)	

2. 足すと 5、掛けると –36 になる 2 つの数を求める方程式を定めましょう。

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.2 二次方程式の解法

二次方程式を丸で囲みましょう。

a) $x^2 - 2x + 9 = 0$　b) $3x + 8 = 0$　c) $7x^2 - x + 5 = 0$　d) $x^2 - 2x = 0$

e) $(x-2)^2 = 3$　f) $-2x + 5 = 0$　g) $3x^2 - 9 = 0$　h) $2x = 5$

二次方程式を満たす未知数の値は**解**と呼ばれます。

その全ての解を求める事を、**二次方程式を解く**といいます。

さらに、二次方程式では解が 2 つまである可能性があります。

例：方程式 $x^2 - 2x - 3$ の解は、次のとおりです：3 と -1

なぜなら：

3 を方程式に代入すると $(3)^2 - 2(3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$ で方程式を満たします。

-1 を方程式に代入すると $(-1)^2 - 2(-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$ で方程式を満たします。

1. かっこ内の数字を使って方程式の解を求めましょう。

a) $x^2 - 4 = 0$　$(-5, -2, 2, 5)$　b) $2x + 10 = 0$　$(-5, -2, 2, 5)$

c) $x^2 + x - 6 = 0$　$(-3, -2, 2, 3)$　d) $3x - 6 = 0$　$(-3, -2, 2, 3)$

e) $x^2 + 12x + 35 = 0$　$(-7, -5, 5, 7)$　f) $3x + 21 = 0$　$(-7, -5, 5, 7)$

g) $x^2 + 6x + 9 = 0$　$(-3, -1, 1, 3)$　h) $4x + 4 = 0$　$(-3, -1, 1, 3)$

2. 上の方程式のうちどれが二次方程式で、どれが一次方程式かを答えましょう。答えを証明しましょう。

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.3 方程式 $x^2 = c$ の解法

1. 二次方程式を丸で囲みましょう。

a) $x^2 - x + 8 = 0$　　b) $10x + 3 = 0$　　c) $2x^2 - 3x + 6 = 0$　　d) $-4x + 7 = 0$

2. かっこ内の数字を使って方程式の解を求めましょう。

a) $x^2 - 25 = 0$　(−5, −3, 3, 5)　　b) $3x - 9 = 0$　(−5, −3, 3, 5)

c) $x^2 - 8x + 15 = 0$　(−5, −3, 3, 5)　　d) $6x - 18 = 0$　(−5, −3, 3, 5)

$x^2 = c$ の形の二次方程式を解くには次のステップに従います：

例： $x^2 = \frac{1}{4}$

1. c の平方根を求めながら方程式を解きます。

$$x = \pm\sqrt{c}$$

1. $x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$

2. 根号を使わず数を表します。

2. $x = \pm\frac{1}{2}$

1. 次の二次方程式を解きましょう：

a) $x^2 = 36$　　b) $x^2 = 64$　　c) $x^2 = \frac{1}{16}$　　d) $x^2 = \frac{16}{49}$

e) $x^2 - 16 = 0$　　f) $x^2 - 4 = 0$　　g) $x^2 - \frac{1}{25} = 0$　　h) $\frac{16}{25} - x^2 = 0$

2. サンドラには兄が 1 人と妹が 1 人います。サンドラの兄はサンドラより 7 歳年上で、妹は 7 歳年下です。兄弟の年齢を掛けると 95 となる場合、サンドラは何歳でしょう。

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.4 方程式 $ax^2 = c$ の解法

R

1. かっこ内の数字を使って方程式の解を求めましょう。

a) $x^2 - 49 = 0$　　(−7, −4, 4, 7)

b) $3x + 14 = 0$　　(−7, −4, 4, 7)

c) $x^2 - x - 42 = 0$　　(−7, −6, 6, 7)

d) $6x - 36 = 0$　　(−5, −3, 3, 5)

2. 次の二次方程式を解きましょう：

a) $x^2 = 49$　　b) $x^2 = \frac{1}{81}$　　c) $x^2 - 36 = 0$　　d) $\frac{49}{36} - x^2 = 0$

エニット 3

C

$ax^2 = c$ の形の二次方程式を解くには次のステップに従います：

例：$9x^2 = 4$

1. x^2 の項を整理します。

$$x^2 = \frac{a}{c}$$

1. $x^2 = \frac{4}{9}$

2. $\frac{a}{c}$ の平方根を求めながら方程式を解きます。

$$x = \pm\sqrt{\frac{a}{c}}$$

2. $x = \pm\sqrt{\frac{4}{9}}$

3. 根号を使わずに表すか、最小の式に簡略化します。

3. $x = \pm\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \pm\frac{2}{3}$

1. 次の二次方程式を解きましょう：

a) $3x^2 = 12$　　b) $-16x^2 = -25$　　c) $-9x^2 = -1$　　d) $7x^2 = 14$

e) $-3x^2 + 48 = 0$　　f) $36x^2 - 49 = 0$　　g) $16x^2 - 1 = 0$　　h) $16 - 4x^2 = 0$

2. 2017 年の国際数学オリンピックの開会日を求めましょう。カレンダーで、1 週間前の日（開会日の 7 日前）の 2 乗に 1 週間後の日（開会日の 7 日後）の 2 乗を加えると、386 になります。

2017年7月

月	火	水	木	金	土	日
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.5 $(x+m)^2=n$ の形の方程式の解

R

1. 次の二次方程式を解きましょう：

a) $x^2=16$　b) $x^2=\frac{1}{64}$　c) $x^2-\frac{4}{49}=0$　d) $\frac{16}{81}-x^2=0$

2. 次の二次方程式を解きましょう：

a) $5x^2=20$　b) $11x^2=11$　c) $25x^2-9=0$　d) $-5x^2+7=0$

C

$(x+m)^2=n$ の形の二次方程式を解くには次のステップに従います：

1. 変数 $x+m$ を w で置き換えます：
$w^2=n$
2. $x^2=n$ の形の方程式を解きます：
$w=\pm\sqrt{n}$
3. 最初の変数を置き換えます：
$x+m=\pm\sqrt{n}$
4. 最初の変数を求めます：
$x=-m\pm\sqrt{n}$

例：
$(x-3)^2=7$　$w=x-3$ とします

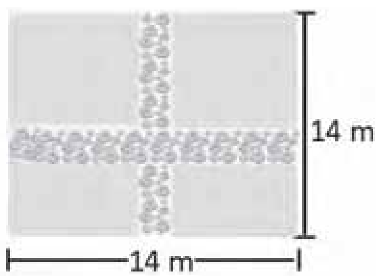
1. $w^2=7$
2. $w=\pm\sqrt{7}$
3. $x-3=\pm\sqrt{7}$
4. $x=3\pm\sqrt{7}$

1. 次の二次方程式を解きましょう：

a) $(x+6)^2=25$　b) $(x-3)^2=5$　c) $(-x-7)^2=18$　d) $(x-9)^2=0$

e) $(x-9)^2-49=0$　f) $(x+8)^2-7=0$　g) $(-x+5)^2-45=0$　h) $(x-\frac{5}{2})^2-\frac{1}{4}=0$

2. カルロスさんは正方形の土地を 4 つに分け、異なる種類の野菜の種を蒔くのに使いたいと考えています。その際、分割された土地の間に道が 1 本あるようにします。もし道の幅が常に同じで、土地の辺の長さは 14 m であった場合、種を蒔く面積が 144 m² になるためには道の幅はいくつであればよいですか。



解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.6 $x^2 + bx = 0$ の形の方程式の解

1. 次の二次方程式を解きましょう：

a) $5x^2 = 45$　　b) $x^2 = 15$　　c) $36x^2 - 49 = 0$　　d) $-11x^2 - 28 = 0$

2. 次の二次方程式を解きましょう：

a) $(x-3)^2 = 36$　　b) $(-x+4)^2 = 40$　　c) $(x+4)^2 - 3 = 0$　　d) $\left(x-\frac{4}{5}\right)^2 - \frac{4}{25} = 0$

$x^2 + bx = 0$ の形の二次方程式を解くために、次の性質を利用しました：

もし $A \times B = 0$であれば$A = 0$ または $B = 0$ です。

1. 共通因子を使って因数分解します。

$x(x+b) = 0$

2. 始めに述べた法則を適用して解くべき一次方程式を定めます。

$x = 0$　と　$x + b = 0$

3. 一次方程式 $x + b = 0$ を解いて二次方程式の解を求めます。

$x = 0$　と　$x + b = 0 \Rightarrow x = -b$

例：

$x^2 - 3x = 0$

1. $x(x-3) = 0$

2. $x = 0$　と　$x - 3 = 0$

3. $x = 0$と$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$x = 0$　と　$x = 3$

因数分解を使って次の二次方程式を解きましょう。

a) $x^2 - 7x = 0$　　b) $x^2 - x = 0$　　c) $6x^2 + 5x = 0$　　d) $8x^2 + x = 0$

e) $-x^2 + 2x = 0$　　f) $-x^2 - 9x = 0$　　g) $12x^2 - 2x = 0$　　h) $-8x^2 + 12x = 0$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.7 $x^2 + 2ax + a^2 = 0$の形の方程式の解

R

1. 次の二次方程式を解きましょう：

a) $(x + 3)^2 = 49$ b) $(x - 7)^2 = 49$ c) $(x + 3)^2 - 5 = 0$ d) $(-x + 5)^2 - 64 = 0$

2. 次の二次方程式を解きましょう：

a) $x^2 - 4x = 0$ b) $7x^2 + 3x = 0$ c) $-x^2 + 16x = 0$ d) $-x^2 - 4x = 0$

C

$x^2 + 2ax + a^2 = 0$ の形の二次方程式を解くには次のステップに従います：

1. 完全平方三項式を使って式を因数分解します。

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2 = 0$$

2. 前回の授業の始めに述べた法則を適用して解くべき一次方程式を定めます。

$$x + a = 0$$

3. 二次方程式の解を求めます。

$$\boldsymbol{x = -a}$$

例えば： $x^2 + 4x + 4 = 0$

$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 = 0$

$\Rightarrow x + 2 = 0$

したがって、$x = -2$

因数分解を使って次の二次方程式を解きましょう：

a) $x^2 - 10x + 25 = 0$ b) $x^2 + 2x + 1 = 0$ c) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$

d) $9x^2 - 6x + 1 = 0$ e) $4x^2 + 12x + 9 = 0$ f) $16x^2 - 4x + \frac{1}{4} = 0$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.8 $(x + a)(x + b) = 0$ の形の方程式の解

1. 因数分解を使って次の二次方程式を解きましょう：

a) $x^2 - 9x = 0$　b) $x^2 + x = 0$　c) $10x^2 - 7x = 0$　d) $-2x^2 + 3x = 0$

2. 因数分解を使って次の二次方程式を解きましょう：

a) $x^2 - 8x + 16 = 0$　b) $16x^2 - 8x + 1 = 0$　c) $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0$

$(x + a)(x + b) = 0$ の形の二次方程式を解くには次のステップに従います：

例：
$(x + 1)(x - 4) = 0$

1. 法則を適用して解くべき一次方程式を定めます。

$x + a = 0$ または $x + b = 0$

1. $x + 1 = 0$と $x - 4 = 0$

2. 一次方程式を解いて二次方程式の解を求めます：

$x = -a$ または $x = -b$

2. $x = -1$　と　$x = 4$

さらに、$x^2 + (a + b)x + ab = 0$ の形の式は $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$ のように因数分解されることを復習しよう。

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b).$$

1. 因数分解を使って次の二次方程式を解きましょう：

a) $(x - 5)(x - 3) = 0$　b) $(x + 7)(x - 1) = 0$　c) $(x - 9)(x + 8) = 0$

d) $x^2 - 8x + 15 = 0$　e) $x^2 - x - 72 = 0$　f) $x^2 + 7x - 30 = 0$

2. 2 つの連続する自然数で、それぞれを 2 乗した後に加算すると 113 となる 2 つの数を求めましょう。

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.9 面積を使った二次方程式の解法

1. 因数分解を使って次の二次方程式を解きましょう：

a) $x^2 + 22x + 121 = 0$ b) $25x^2 + 40x + 16 = 0$ c) $x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{25} = 0$

2. 因数分解を使って次の二次方程式を解きましょう：

a) $x^2 + 10x + 21 = 0$ b) $x^2 - 4x - 21 = 0$ c) $x^2 + x - 30 = 0$

二次方程式の正の解をみつけるのに幾何学的論証を使うことができます。

二次方程式には二つまでの解がありますが、図の辺を扱っているので、正の解のみを考慮します。

幾何学的論証を使い、次の方程式の正の解を求めましょう：

a) $x^2 + 10x = 24$

b) $x^2 + 2x = 99$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.10 平方完成を用いる方程式の解法

R 1. 因数分解を使って次の二次方程式を解きましょう：

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $x^2 - x - 56 = 0$

c) $x^2 + 5x - 66 = 0$

2. 幾何学的論証を使い、次の方程式の正の解を求めましょう：

$x^2 + 6x = 91$

C $x^2 + bx + c = 0$ の形の二次方程式を解くには次のステップに従います：

1. c 項を右辺に移します。
2. 平方完成になるよう、右辺を完成させます。
3. 式を簡略化して計算を行います。
4. $(x + m)^2 = n$ の形の方程式を解きます。

例：

$x^2 + 2x - 1 = 0$

1. $x^2 + 2x = 1$
2. $x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{2}{2}\right)^2$
3. $(x + 1)^2 = 1 + 1 = 2$
4. $x + 1 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$

解：$x = -1 + \sqrt{2}$ y $x = -1 - \sqrt{2}$

平方完成する方法を使って、次の二次方程式を解きましょう。

a) $x^2 + 4x - 1 = 0$

b) $x^2 + 14x + 40 = 0$

c) $x^2 - 6x + 1 = 0$

d) $x^2 - 3x - 5 = 0$

e) $x^2 - 6x + 6 = 0$

f) $x^2 + 6x + 4 = 0$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.11 $ax^2 + bx + c = 0$ の形の方程式の解

1. 幾何学的論証を使い、次の方程式の正の解を求めましょう：

$x^2 + 8x = 9$

2. 平方完成する方法を使って、次の二次方程式を解きましょう。

a) $x^2 - x - 10 = 0$

b) $x^2 + 2x - 7 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ の形の二次方程式を解くには次のステップに従います：

1. 式を x^2 の係数 a で割ります。
2. 定数項を右辺に移します。
3. 式の両辺に適切な数を加えて、左辺の式が完全平方三項式になるようにします。
4. 式を簡略化して必要な計算を行います。
5. $(x + m)^2 = n$ の形の方程式を解きます。

次の二次方程式を解きましょう：

a) $2x^2 + x - 3 = 0$

b) $2x^2 + x - 1 = 0$

c) $3x^2 + x - 1 = 0$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.12 二次方程式の解の公式

R

1. 平方完成する方法を使って、次の二次方程式を解きましょう。

a) $x^2 - 6x + 2 = 0$　　b) $x^2 - 4x - 1 = 0$

2. 前回の授業の方法を使って、次の二次方程式を解きましょう。

a) $3x^2 - x - 3 = 0$　　b) $2x^2 - x - 4 = 0$

C

$ax^2 + bx + c = 0$ の形の二次方程式を解くには次の公式を使うことができます：

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

この公式は **二次方程式の解の公式として知られているものです。** 二次方程式の解を得るには、公式の a、b、c の値を代入します。

例：$3x^2 + 5x + 1 = 0$
もし解の公式で $a = 3$、$b = 5$、$c = 1$ と代入すると、以下の結果が立証されます

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(3)(1)}}{2(3)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 12}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

解の公式を使って次の二次方程式を解きましょう。

a) $2x^2 - x - 2 = 0$　　b) $2x^2 + 5x + 3 = 0$　　c) $4x^2 - 7x + 2 = 0$

d) $5x^2 - 9x + 3 = 0$　　e) $-4x^2 + 9x - 3 = 0$　　f) $3x^2 + x - 1 = 0$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.13 二次方程式の解の公式の適用

1. 次の二次方程式を解きましょう。

$5x^2 - x - 5 = 0$

2. 解の公式を使って次の二次方程式を解きましょう。

a) $5x^2 - x - 1 = 0$　　b) $2x^2 + 3x - 1 = 0$　　c) $4x^2 - 5x - 3 = 0$

二次方程式の解の公式を適用するには、単に二次方程式の a、b、c の値を判別します。解を計算していると、解が有理数の時、簡略化や厳密な値の計算が必要になることがあります（根号の中の数の平方根を求めることができる時）。

例：$4x^2 + 2x - 1 = 0$

$$a = 4,\ b = 2,\ c = -1 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(4)(-1)}}{2(4)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{8} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{\overset{1}{\cancel{-2}} \pm \overset{1}{\cancel{2}}\sqrt{5}}{\underset{4}{\cancel{8}}}$$

したがって、方程式 $4x^2 + 2x - 1 = 0$ の解は $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$ です。

解の公式を使って次の二次方程式を解きましょう：

a) $3x^2 - x - 2 = 0$　　b) $2x^2 - 7x + 3 = 0$　　c) $2x^2 + 3x + 1 = 0$

d) $9x^2 + 6x + 1 = 0$　　e) $2x^2 - 2x - 2 = 0$　　f) $6x^2 - 8x + 1 = 0$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.14 二次方程式を解く方法

R

1. 解の公式を使って次の二次方程式を解きましょう：

a) $2x^2 + 3x - 1 = 0$　　b) $2x^2 + 7x + 1 = 0$　　c) $3x^2 + 5x - 1 = 0$

2. 解の公式を使って次の二次方程式を解きましょう：

a) $2x^2 + 5x - 3 = 0$　　b) $3x^2 + 4x + 1 = 0$　　c) $6x^2 + 5x - 1 = 0$

C

二次方程式の解の最も効率的な方法を選択するためには：

1. 因数分解を使って解きます。
2. 因数分解をみつけることがもし出来ない場合、その他の二つの方法のいずれかを適用できます。

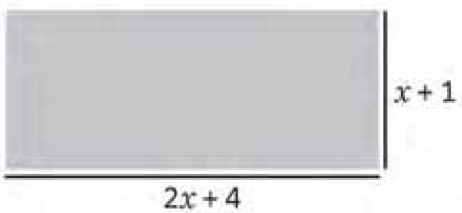
さらに、解の公式は全ての場合に適用できますが、他の方法を使った時より複雑な計算を伴う場合もあり得ることを復習しよう。

1. 最も適切な方法を使って次の二次方程式を解きましょう。

a) $x^2 - \frac{49}{4} = 0$　　b) $(1 - x)^2 - 9 = 0$　　c) $x^2 - 9x - 36 = 0$

d) $x^2 + x - 1 = 0$　　e) $10x^2 + 25x = 0$　　f) $2x^2 - 11x + 10 = 0$

2. 長方形の面積が 24 cm² となるような x の値を求めましょう。



解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.15 学習内容の自己評価

問題を解き、学習した内容について適切だと思うところに「×」印を入れましょう。
正直に答えましょう。

項目	はい	改善できます	いいえ	コメント
1. 次の方程式のどれが二次か判別できます。 $x^2 - 3 = 0$、$2x + 6 = 9$、$(x + 3)2 = 8$、$5x = 5$				
2. $x^2 - 4x - 3 = 0$ のような二次方程式を解くことと $x - 1 = 0$ のような一次方程式を解くことの違いが分かります。				
3. $x^2 = 100$ のような $x^2 = c$ の形の方程式を解くことができます。				
4. $3x^2 = 6$ のような $ax^2 = c$ の形の方程式を解くことができます。				
5. $(x + 1)^2 = 25$ のような $(x + m)^2 = n$ の形の方程式を解くことができます。				
6. $x^2 + 3x = 0$ のような $x^2 + bx = 0$ の形の方程式を、因数分解を使って解くことができます。				
7. $x^2 - 6x + 9 = 0$ のような $x^2 + 2ax + a^2 = 0$ の形の方程式を、因数分解を使って解くことができます。				

1.16 学習内容の自己評価

問題を解き、学習した内容について適切だと思うところに「×」印を入れましょう。
正直に答えましょう。

項目	はい	改善できます	いいえ	コメント
1. $(x + 1)(x + 2) = 0$ のような $(x + a)(x + b) = 0$ の形の方程式を、因数分解を使って解くことができます。				
2. 二次方程式を解くための因数分解の方法を理解しています。				
3. $x^2 + 8x - 20 = 0$ のような $x^2 + bx + c = 0$ の形の方程式を平方完成を行って解くことができます。				
4. $3x^2 + 8x - 2 = 0$ のような $ax^2 + bx + c = 0$ の形の方程式を、解の公式を使って解くことができます。				
5. 二次方程式を解くための最も効率的な方法をすばやく特定することができます。				

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.1 二次方程式の判別式

R 最も適した方法を使って次の二次方程式を解きましょう。

a) $x^2 - \frac{9}{16} = 0$　　b) $12x^2 - 48 = 0$　　c) $(4 - x)^2 - 4 = 0$

d) $x^2 + x - 2 = 0$　　e) $12x^2 + 5x = 0$　　f) $6x^2 - 5x + 1 = 0$

C 式 $b^2 - 4ac$ により与えられる公式の被開平数は、二次方程式の、いわゆる**判別式**です。

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\underbrace{b^2 - 4ac}_{\text{判別式}}}}{2a}$$

判別式が次の 3 つのケースのいずれかを満たすことができることを復習しよう：

a) $b^2 - 4ac > 0$

$2x^2 + 3x + 1 = 0$、この場合、二次方程式は **2 つの解**を持ちます。

b) $b^2 - 4ac = 0$

$4x^2 + 4x + 1 = 0$、この場合、二次方程式は **1 つの解**しか持ちません。

c) $b^2 - 4ac < 0$

$2x^2 + x + 1 = 0$、この場合、二次方程式は**実数に解を持ちません。**

1. 判別式の値をゼロと比べることで、次の二次方程式が解を持たない、1 つ持つ、または 2 つ持つのか判断しましょう。

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$　　b) $x^2 + 3x + 3 = 0$　　c) $x^2 - 5x - 14 = 0$

d) $x^2 + 7 = 0$　　e) $4x^2 - 5x + 2 = 0$　　f) $5x^2 + 10x + 5 = 0$

2. あるシャツの工場では、月に平均して 200 枚のシャツを、1 枚 10 ドルで売ります。もし価格を 1 ドル下げるたびにさらに 28 枚のシャツを売った場合、月末に 3,000 ドルちょうどの売り上げを得ることは可能でしょうか?

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.2 問題の解答における判別式の使用

1. 最も適切な方法を使って次の二次方程式を解きましょう。

a) $6x^2 - 54 = 0$　　b) $49x^2 + 9x = 0$　　c) $2x^2 - 3x - 1 = 0$

2. 判別式の値をゼロと比べることで、次の二次方程式が解を持たない、1 つ持つ、または 2 つ持つのか判断しましょう。

a) $x^2 + 2x + 3 = 0$　　b) $x^2 + 2x + 1 = 0$　　c) $2x^2 + 7x + 3 = 0$

二次方程式の判別式を用いて様々な問題を解くことができます。
二次方程式を作り、その解を分析します。方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) において、

a) $b^2 - 4ac > 0$　　実解が 2 つ存在します。
b) $b^2 - 4ac = 0$　　実解が 1 つ存在します。
c) $b^2 - 4ac < 0$　　実解が存在しません。

1. 和が 6 で積が 10 になるような 2 つの実数が存在しないことを証明しましょう。

2. ある不動産販売者が分譲地を販売しており、土地の形は長方形で、周囲の長さは 22 メートル、面積は 31 平方メートルだと断言しています。

a) これらの情報を使って、販売者が間違えていることを証明しましょう。

b) もし面積が 30 m^2 とされた場合、土地の寸法はいくつでしょうか?

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.3 二次方程式による問題の解答

1. 判別式の値をゼロと比べることで、次の二次方程式が解を持たない、1 つ持つ、または 2 つ持つのか判断しましょう。

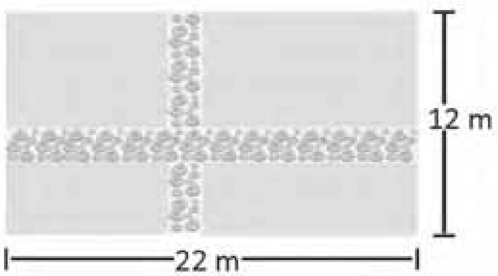
a) $x^2 + 5x + 3 = 0$　　　b) $x^2 + 8x + 16 = 0$　　　c) $2x^2 - 6x + 5 = 0$

2. 2 つの数の和が 6 であり、それらの数を掛け合わせた結果は c になります。方程式が 1 つの実数解を持つためには、c はいくつでなければならないでしょうか?

ある問題状況を解くには、一般的に次のステップに従うことができます：

1. もし可能であれば、問題の状況を図で表します。
2. 問題がもたらす情報を特定し、未知数を表す数が何であるかを定義します。
3. 同じ未知数を用いてすべての数を表します。
4. 解かなければならない二次方程式を作成します（同等性を定めます）。
5. 二次方程式を解きます。
6. 解が問題に対して適当であるか分析します。

1. 長さが 22 mで幅が 12 m の長方形の土地に、図で示すように縦の道を 1 本、横の道を 1 本引きます。種蒔きをするための土地を 200 m² 残すためには、道の幅はいくつであればよいですか?



2. アントニオはボンド紙を折った紙で課題を準備しています。ボンド紙を分割し、長さ 0.7 m の長方形で内容の説明を行い、正方形の部分に例を付けます。ボンド紙の面積が 0.6 m² の場合、長さと幅はいくつですか?

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.4 学習内容の自己評価

問題を解き、学習した内容について適切だと思うところに「×」印を入れましょう。
正直に答えましょう。

項目	はい	改善できます	いいえ	コメント
1. ある二次方程式の解がないか、または 1 個、2 個の解があるかを特定できます。 例：$3x^2 - 2x + 4 = 0$				
2. 問題の解答において判別式を使用します。 例：和が 3 で積が 4 である 2 つの実数は存在しないことを証明すること。				
3. 二次方程式を用いて問題に解答します。 例：周辺の長さが 24 m で面積が 35 m^2 の土地に家を建てます。その土地の寸法はどれだけでしょうか。				

2.5 学習内容の自己評価

問題を解き、学習した内容について適切だと思うところに「×」印を入れましょう。
正直に答えましょう。

項目	はい	改善できます	いいえ	コメント
1. 二次方程式を用いて問題に解答します。 例：カルロスとフリアの年齢の差は 7 歳で、2 人の年齢を掛けると 60 になります。フリアがカルロスより年上の場合の、カルロスとフリアの年齢を求めましょう。				
2. 二次方程式を用いて問題に解答します。 例：面積が 50 m^2 の家に床を敷くのに正方形の煉瓦を 450 個使用しました。使用した煉瓦の大きさを求めましょう。				

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

応用問題

1. **等加速度運動。** 問題の解決に二次方程式が使われる、物理学での応用の 1 つに、ある粒子が等加速度で直線運動を行う時があります。つまり、運動の速度は等間隔で同じ量だけ変わるのです。これは、自然界では頻繁に発生するものの、非常に特殊な物理状態です。次の方程式を用いると、速度と加速度が判明している物体のある特定の時点での位置を知ることができます。

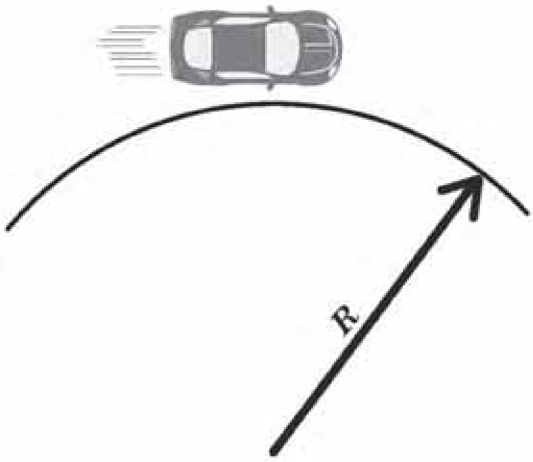
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

x_0 が最初の位置、v_0 が初速度、x が t の時点での位置です。

あるオートバイ運転手の特定の時点 t（秒）での位置はこの方程式で表されます：

$$x = 5 + 15t + 2t^2$$

もしこのオートバイ運転手が最初にいた位置から 43 m（x の値）離れた位置にいた場合、その距離を走るのに何秒かかったでしょうか?



2. **等速円運動。** もしある物体が円に沿って動いており、その速度が一定の場合、等速円運動をしていると言います。例えば、一定の半径のカーブを曲がる自動車、地球の周りで等速円運動を行う衛星、一定の速度で円形の線路を曲がる電車です。

もしある粒子が半径 R の円形の軌道に沿って、一定の速度 v で動く場合、加速度は次の方程式で表されます：

$$a = \frac{v^2}{R}$$

もしある自動車の加速度が 9.4 m/s^2 で、カーブの半径が 170 m の場合、その瞬間の自動車のおおよその速さはいくらですか? 計算処理には計算機を使いましょう。速さの答えは m/s のように書くことを復習しよう。

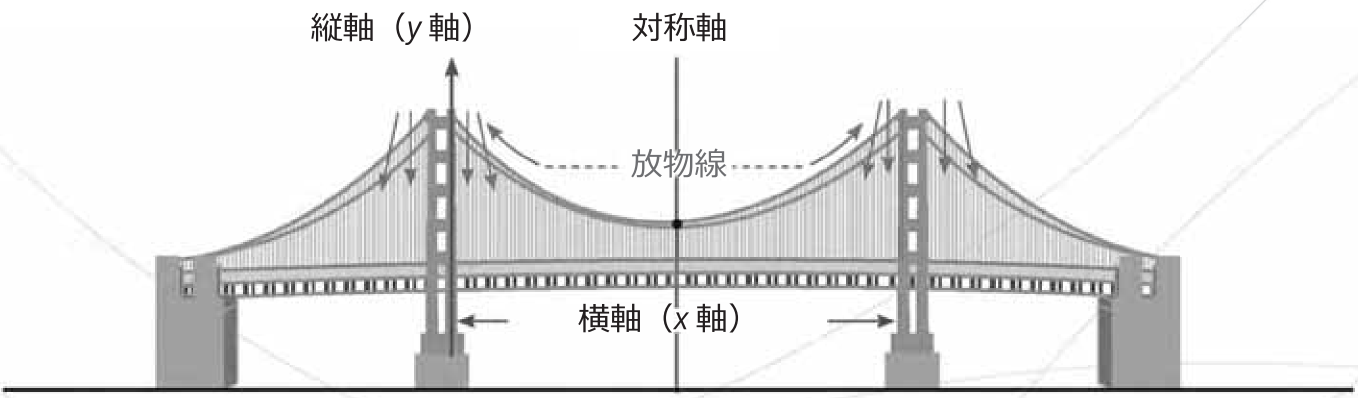
4 ユニット

二次関数の式

$y = ax^2 + c$

16世紀に、方程式の立式において現在使われる記号が導入されました。このような代数学の発展に好ましい変化において、強く影響を与えた数学者の 1 人がフランス人のフランソワ・ビエト（1540～1603）です。方程式の未知数と係数を表すために記号を用いたことで、二次、三次、四次方程式の研究を促進しました。それらの方程式は中世から「関数」と呼ばれるようになりました。

数学者たちの発見に基づき、現在二次関数の活用は自然科学の様々な分野（生物学、物理学、化学）で知られています。同様に、経済学、建築の建設でも活用され、人類に多大な貢献をしています。



このユニットでは、正方形の性質を利用して数量をまとめ、順序対を座標平面に表して関数 $y = x^2$ のグラフを書き、さらに関数 $y = ax^2$ の値の変動を表します。

1.1 2乗に正比例する関数、パート 1

R それぞれの場合で、y が x に正比例するか識別し、比例定数の値を書きましょう：

a)

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

b)

x	1	2	3	4	5
y	3	6	9	12	15

C $y = ax^2$ の時、ある大きさ y は、**もう一つの大きさ x の2乗に正比例します**。数 a は**定数**、つまり変化しない数です。

例：建物の上からボールを落とします。高さ、地面に着くまでにボールが通過する距離は次の表の通りに変わります：

x（秒）	0	1	2	3	4
y（m）	0	5	20	45	80

x を（ボールを落としてからの）経過時間とし、y を x 秒後にボールが通過した距離とします。x^2 と y との間にはどのような関係があるでしょうか。x の項で y はどのように書き表せるでしょうか。

x^2 と y の間の関係は、次の表で見ることができます：

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	9	16
	×5	×5	×5	×5	×5
y	0	5	20	45	80

x^2 の値のそれぞれを 5 倍にすると、対応する y のそれぞれの値になります。したがって、$y = 5x^2$ となります。

1. どちらの問題でも、変数 y は変数 x の 2 乗に正比例します。表に各値を入れて完成させ、それぞれの場合で x の項で y を表しましょう：

a)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64
y	0	4	16	36					

b)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^2	0	1	4	9	16	25			
y	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	3	$\frac{16}{3}$				

2. 表の x と y の値を使います。y は x の 2 乗に正比例するでしょうか?

x	0	1	2	3	4	5
x^2	0	1	4	9	16	25
y	1	3	12	27	48	75

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.2 2 乗に正比例する関数、パート 2

1. 変数 y は、変数 x の 2 乗に正比例しています。表に値を入れて完成させ、x の項で y を表しましょう：

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x^2	0	1	4	9	16	25					
y	0	0.2	0.8	1.8	3.2	5					

2. 次の情報を基に解きます。y は x の 2 乗に正比例するでしょうか。

x	0	1	2	3	4	5
x^2	0	1	4	9	16	25
y	0	–2	–8	–18	–32	–50

y が x の 2 乗に正比例するのであれば、y は x の**関数である**と言います。x に値を代入すると、その値のそれぞれに対して、y の値がただ一つに決まるからです。$y = ax^2$ であれば、定数 a の値は x と y というひと組の提示されている変数に代入して、方程式を解いて求めます。

例えば、$x = 3$、$y = 18$ の時、もし y が変数 x の 2 乗に正比例する場合、変数 a は $y = ax^2$ に $x = 3$ と $y = 18$ を代入して方程式を解いて求められます。

$$18 = a(3)^2$$
$$18 = 9a$$
$$a = \frac{18}{9}$$
$$a = 2$$

したがって、$y = 2x^2$ となります。

通常、a、b、c が実数である関数 $y = ax^2 + bx + c$ は（$a \neq 0$）、2 次関数と言います。

関数 $y = ax^2$ と $y = ax^2 + c$ は、このユニットでは特別なケースとして学習します。2 次関数の完全な形式は高校に入ってから学習することになります。

次の各設問では、y は x の 2 乗に対して正比例しています。それぞれの変数 a の値を計算します。

a) $x = 3$ の時、$y = 90$

b) $x = 8$ の時、$y = 6$

c) $x = 9$ の時、$y = 15$

d) $x = 2$ の時、$y = –20$

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.3 関数 $y = x^2$

R

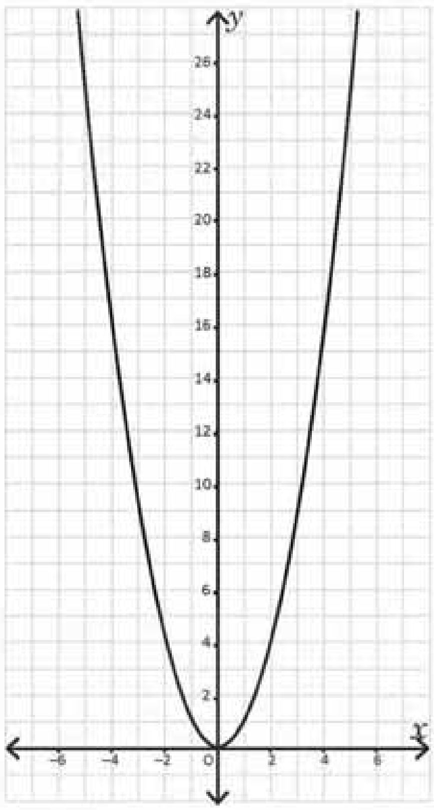
1. 表を完成させ、x の項で y を書き表しましょう：

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64
y	0	8	32	72					

2. 変数 y は x^2 に正比例します。次のそれぞれの場合の定数の値を計算しましょう：
   a) $x = 4$ の時、$y = 112$
   b) $x = 12$ の時、$y = -24$

C

関数 $y = x^2$ をグラフで表した線を、**放物線**と言い、原点 (0, 0) を通ります。全ての 2 次関数は、グラフにすると放物線で表されます。その形は、$y = x^2$ の場合と似ています。



1. $y = x^2$ とします。$x = -3$ と $x = 3$ のときの y の値の間にはどのような関係がありますか? $x = -\frac{1}{3}$ と $x = \frac{1}{3}$ の場合はどうでしょうか?

2. もし $y = x^2$ の場合：

   a) $x = 4$ の時と y の値が同じになる別の数はどれでしょうか?

   b) $x = -\frac{1}{2}$ の時と y の値が同じになる別の数はどれでしょうか?

   c) $x = \sqrt{2}$ の時と y の値が同じになる別の数はどれでしょうか?

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.4 関数 $y = ax^2$、$a > 1$

R

1. $x = 6$ で $y = -15$ となる時の $y = ax^2$ の定数の値を計算しましょう。表を完成させ、x の項で y を書き表しましょう：

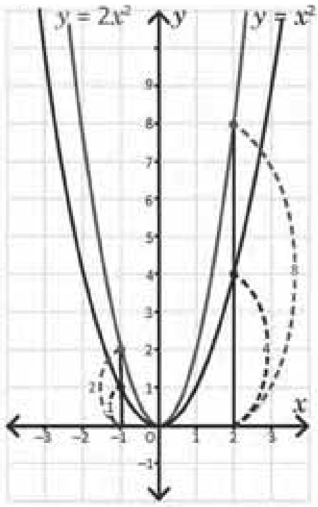
2. $y = x^2$ とします。$x = \sqrt{3}$ の時と y の値が同じになる別の数はどれでしょうか。そして $x = -\sqrt{5}$ の場合はどうでしょうか。

C

a が 1 よりも大きい数だとすると（$a > 1$）、$y = ax^2$ のグラフを描くには、$y = x^2$ の全ての値に a を掛けます。放物線の**対称軸**は、放物線を合同の二つの部分に分ける垂直な線です。$y = ax^2$ の場合、対称軸は、y 軸になります。

例えば、$y = 2x^2$ のグラフは、$y = x^2$ の値を 2 倍することで得られます。

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
x^2	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4
$2x^2$	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8



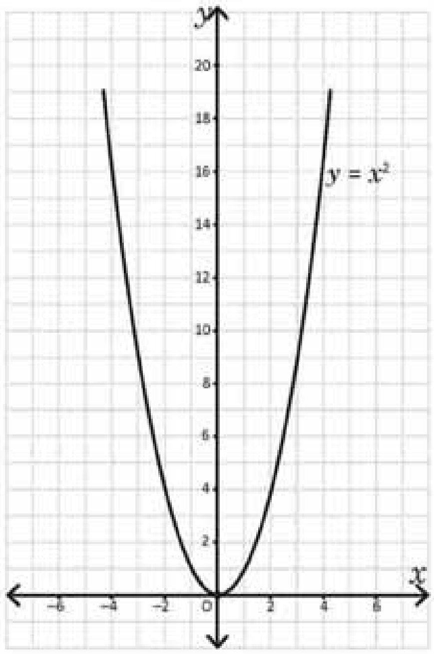
どちらのグラフ（$y = x^2$ と $y = 2x^2$）も原点 (0, 0) を通り、放物線であり、y 軸で折るとグラフの右側の部分と左側の部分が重なります。

2 つのグラフで、原点以外の点は一致しません。
さらに、$y = 2x^2$ では、$y = x^2$「よりも上にあります」。

同じ平面図で $y = x^2$ のグラフをもとにして、次の関数のグラフを描きましょう：

a) $y = 5x^2$

b) $y = \frac{5}{2}x^2$



解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.5 関数 $y = ax^2$ 、$0 < a < 1$

1. $y = x^2$ とします。$x = -\sqrt{7}$ の時と y の値が同じになる別の数はどれでしょうか？そして $x = \frac{1}{3}$ の場合はどうでしょうか？

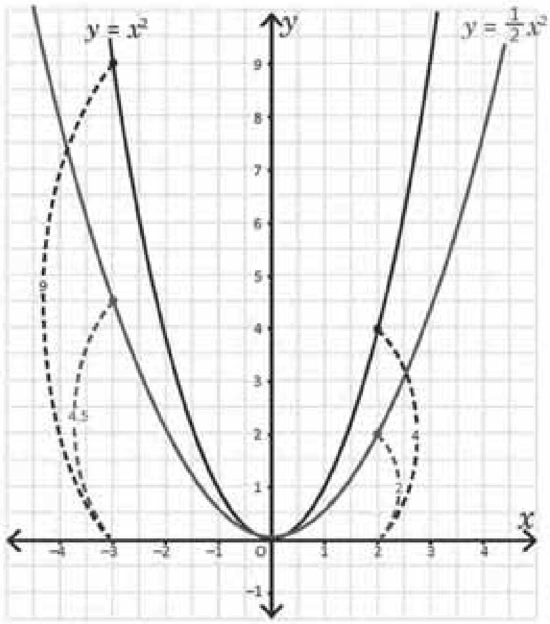
2. $y = \frac{7}{2}x^2$ をグラフに表しましょう。結論の後にあるグラフを使い、そのスペースで計算を行うことができます。

a が 0より大きく 1 よりも小さい数だとしますと ($0 < a < 1$)、$y = ax^2$ のグラフを描くには、$y = x^2$ の全ての値に a を掛けます。

例えば、$y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフは、$y = x^2$ の値を $\frac{1}{2}$ 倍することで得られます。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$\frac{1}{2}x^2$	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5

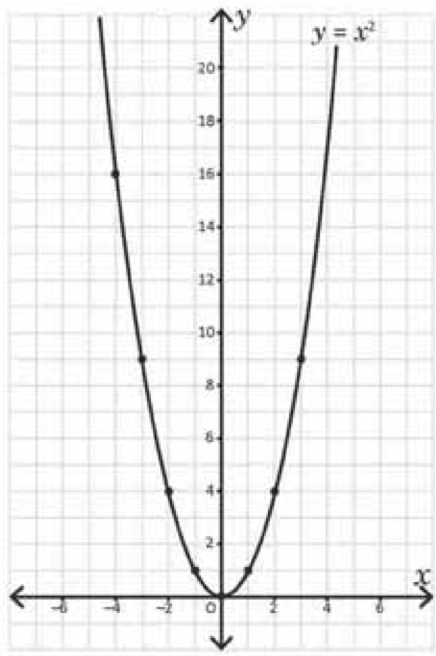
どちらのグラフ（$y = x^2$ と $y = \frac{1}{2}x^2$）も原点 (0, 0) を通り、放物線であり、y 軸は対称軸です。原点以外の異なる点は一致しません。さらに、$y = \frac{1}{2}x^2$ は $y = x^2$「よりも下にあります」。



同じ平面図で $y = x^2$ のグラフをもとにして、次の関数のグラフを描きましょう：

a) $y = \frac{1}{5}x^2$

b) $y = \frac{1}{3}x^2$



解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.6 関数 $y = -ax^2$、$a > 0$

R $y = x^2$ のグラフをもとに、次の関数のグラフを描きましょう：

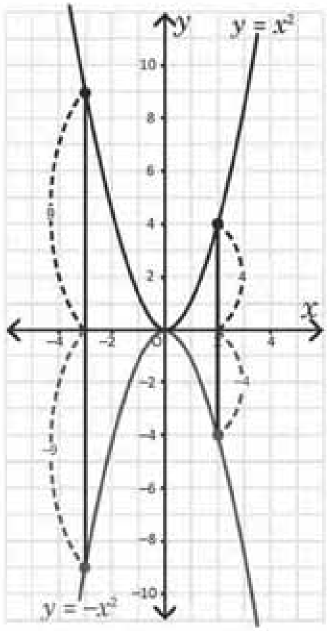
a) $y = \frac{2}{3}x^2$

b) $y = 3x^2$

C a が 0 よりも大きい数だとしますと ($a > 0$)、$y = -ax^2$ のグラフを描くには、$y = ax^2$ の全ての値に –1 を掛けます。関数 $y = -ax^2$ は、関数 $y = ax^2$ のグラフを x 軸に関して**対称移動**させたものです。この場合、$y = -ax^2$ の放物線が下に向かって開いていると言います。

例えば、$y = -x^2$ のグラフは、$y = x^2$ の値を –1 倍することで得られます。

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9 $\times(-1)$	4 $\times(-1)$	1 $\times(-1)$	0 $\times(-1)$	1	4	9
$-x^2$	–9	–4	–1	0	–1	–4	–9

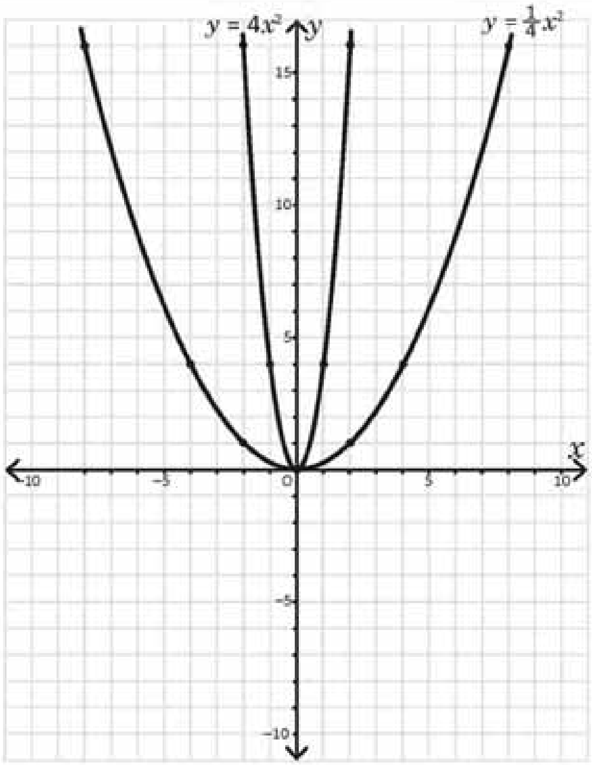


どちらのグラフ（$y = x^2$ と $y = \frac{1}{2}x^2$ も原点 (0, 0) を通り、放物線であり、y 軸は対称軸です。
原点以外の異なる点は一致しません。さらに、$y = -x^2$ は x 軸の下にあります。
つまり、放物線は下に向かって伸び、$y = x^2$ のように上に向かって伸びません。

同じ平面図で $y = 4x^2$ と $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフをもとにして、次の関数のグラフを描きましょう：

a) $y = -4x^2$

b) $y = -\frac{1}{4}x^2$



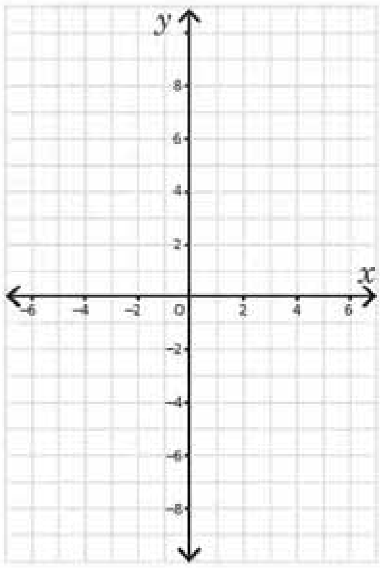
解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.7 $y = ax^2$ の特徴

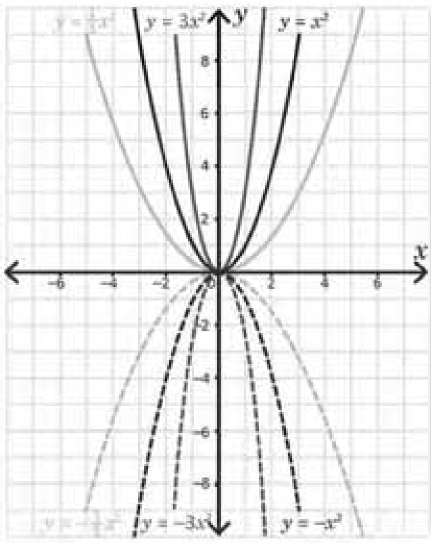
R 以下の関数のグラフを描きましょう：

a) $y = \frac{1}{4}x^2$

b) $y = -4x^2$



C 関数 $y = ax^2$ のグラフを放物線と呼び、y 軸が対称軸となっています。放物線とその対称軸が交差する点を**頂点**と呼びます。$y = ax^2$ の場合、頂点は原点 (0, 0) に一致します。a の絶対値が 1 より大きい時、放物線は y 軸に近づきますが、a の絶対値が 0 と 1 との間にある時は、放物線は y 軸から遠ざかります。$a > 0$の場合、放物線は上に向かって開きます。$a < 0$ の場合、放物線は下に向かって開きます。



例えば、関数 $y = 3x^2$、$y = -3x^2$、$y = \frac{1}{3}x^2$ 、$y = -\frac{1}{3}x^2$ では：

a) 頂点は (0, 0) で、y 軸が対称軸です。
b) 関数 $y = 3x^2$ と $y = -3x^2$ では、グラフは y 軸に近づき、一方 $y = \frac{1}{3}x^2$ と $y = -\frac{1}{3}x^2$ では、グラフは y 軸から離れます。
c) $y = 3x^2$ と $y = \frac{1}{3}x^2$ の放物線は上に向かって開きます。
d) $y = -3x^2$ と $y = -\frac{1}{3}x^2$ の放物線は下に向かって開きます。

次の関数のそれぞれを表すグラフを選びましょう：

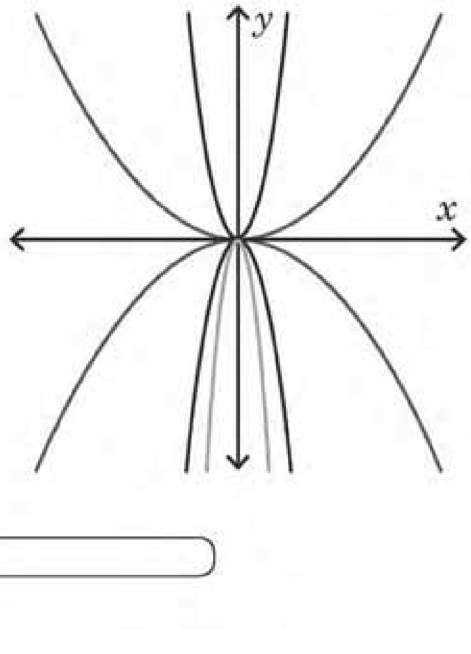
a) $y = -2x^2$

b) $y = 2x^2$

c) $y = -5x^2$

d) $y = -\frac{1}{5}x^2$

e) $y = \frac{1}{5}x^2$

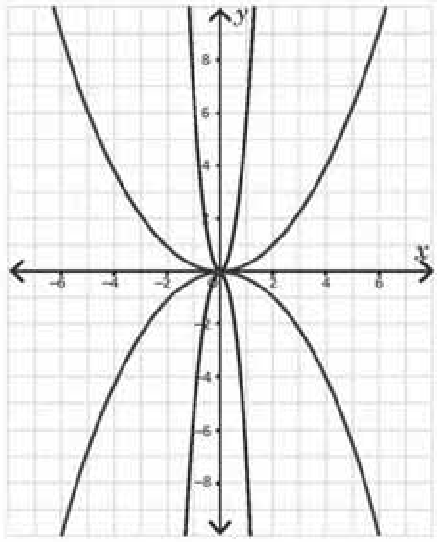


解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.8 $y = ax^2$の変動、パート 1

1. $y = -2x^2$ のグラフを描きましょう。

2. 次の関数のそれぞれを表すグラフを選びましょう：

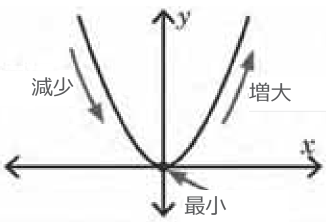
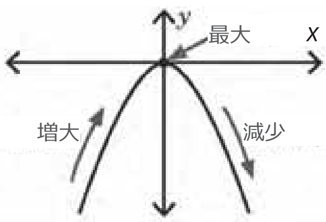


b) $y = -6x^2$

c) $y = -\frac{1}{4}x^2$

d) $y = \frac{1}{4}x^2$

関数が $y = ax^2$ で a が実数（正または負）の場合です。x の値が増え続けるとき、次のようになります：

$a > 0$	$a < 0$
a) $x < 0$ の時、y の値は減ります。 b) $x > 0$ の時、y の値は増えます。 c) $x = 0$であれば、$y = 0$ になります。この場合、$y = 0$ で、これは関数 $y = ax^2$ の最小値であると言います。  	a) $x < 0$ の時、y の値は増えます。 b) $x > 0$ の時、y の値は減ります。 c) $x = 0$ であれば、$y = 0$ になります。この場合、$y = 0$ で、これは関数 $y = ax^2$ の最大値であると言います。 

1. 関数 $y = 4x^2$ と $y = -4x^2$ があります。
   a) x の値が 1 から 2 に増える時、y の値は二つのグラフでどのように変わるでしょうか?
   b) x が -4 から -2 に増えたらどうなるでしょうか?

2. 関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ と $y = -\frac{1}{3}x^2$ があります。
   a) x の値が -3 から -1 に増える時、y の値は二つのグラフでどのように変わるでしょうか?
   b) x が 5 から 6 に増えたらどうなるでしょうか。

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.9 $y = ax^2$ の変動、パート 2

R

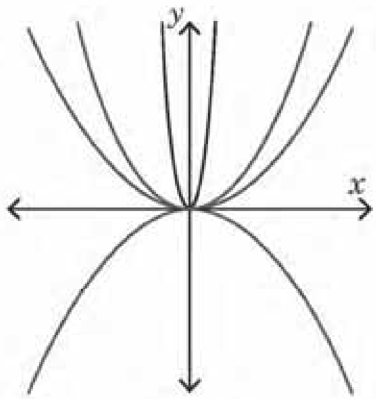
1. 次の関数のそれぞれを表すグラフを選びましょう：

a) $y = 5x^2$

b) $y = \frac{1}{3}x^2$

c) $y = \frac{1}{6}x^2$

d) $y = -\frac{1}{6}x^2$



2. $y = \frac{1}{5}x^2$ と $y = -\frac{1}{5}x^2$ の場合です。

a) x の値が 2 から 5 に増える時、y の値は二つのグラフでどのように変わるでしょうか?
b) x が –10 から –5 に増えたらどうなるでしょうか?

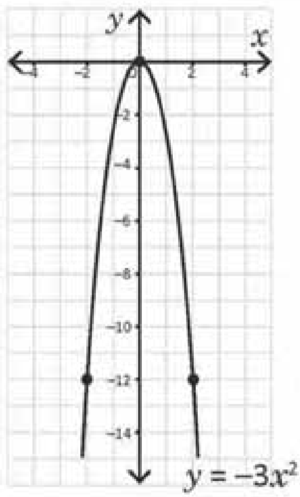
C

関数 $y = -3x^2$ で x の値が –2 と 1 の間にある時：

- y の値の最小値は –12 です（$x = -2$ の時）。
- y の値の最大値は 0 です（$x = 0$ の時）。

そのため、y の値は –12 と 0 の間にあります。

変数 y がとる値を**値域**、変数 x がとる値を**定義域**と言います。



1. $y = \frac{1}{4}x^2$と x の値が –2 と 4 との間にある時、y の値はどの値とどの値の間にあるでしょうか?

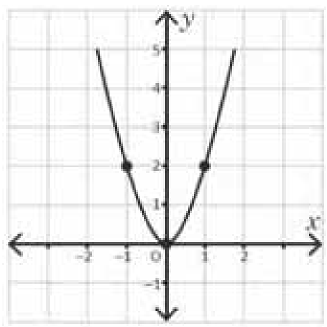
2. $y = -5x^2$と x の値が –3 と 1 との間にある時、y の値はどの値とどの値の間にあるでしょうか?

3. x が –4 と 3 の間にある時、関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ の最大値を求めましょう。

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

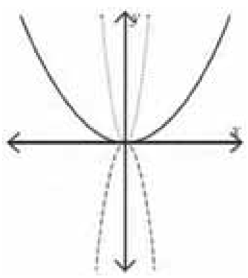
1.10 学習内容の自己評価

問題を解き、学習した内容について適切だと思うところに「×」印を入れましょう。
正直に答えましょう。

項目	はい	改善できます	いいえ	コメント
1. x と y の 2 つの具体的な値を与えられた時、$y = ax^2$ における a の値を求めることができます。例えば、$x = 9$ で $y = 27$ の時です。				
2. $a > 1$ の時、$y = ax^2$ の形の関数のグラフを描くことができます。例：$y = \frac{7}{2}x^2$				
3. $0 < a < 1$ の時、$y = ax^2$ の形の関数のグラフを描くことができます。例：$y = \frac{2}{7}x^2$				
4. $a < 0$ の時、$y = ax^2$ の形の関数のグラフを描くことができます。例：$y = -3x^2$ と $y = -\frac{1}{5}x^2$				
5. 関数のグラフに基づいて、$y = ax^2$ における a の値を特定することができます。例えば、次のようなグラフです：				

1.11 学習内容の自己評価

問題を解き、学習した内容について適切だと思うところに「×」印を入れましょう。
正直に答えましょう。

項目	はい	改善できます	いいえ	コメント
1. $y = ax^2$ の形の関数と対応するグラフを結びつけることができます。例えば、関数 $y = \frac{1}{4}x^2$、$y = -\frac{5}{2}x^2$、$y = 4x^2$ と対応するグラフを結びつけます：				
2. $y = ax^2$ で x が増える時の y の値の変化を特定することができます。例えば、$y = -9x^2$ で x が -5 から -3 に増える場合です。				
3. $y = ax^2$ の時、変数 y が含まれた値を見つけることができます。例えば、もし $y = \frac{8}{5}x^2$ で x の値が -1 と 1 の間にある場合です。				

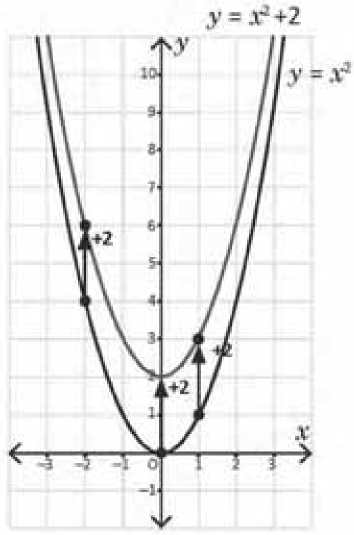
解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.1 関数 $y = ax^2 + c$ ； $c > 0$

a が 0 以外の実数で（正の値または負の値）で c が正の数（$c > 0$）である時、$y = ax^2 + c$ のグラフは、$y = ax^2$ の**グラフを単位 c の分だけ縦方向に**（上に）移動したものになります。$y = ax^2 + c$ の対称軸は、y 軸で、, その頂点は (0, c) になります。

例：$y = x^2 + 2$ のグラフ

x	−2	−1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 + 2$	6	3	2	3	6



$y = x^2$ では (0, 0) が頂点ですが、$y = x^2 + 2$ では (0, 2) が頂点で 2 単位分上にあります。

$y = x^2 + 2$ のグラフを描く時、$y = x^2$ のグラフが 2 単位分上に移動します。

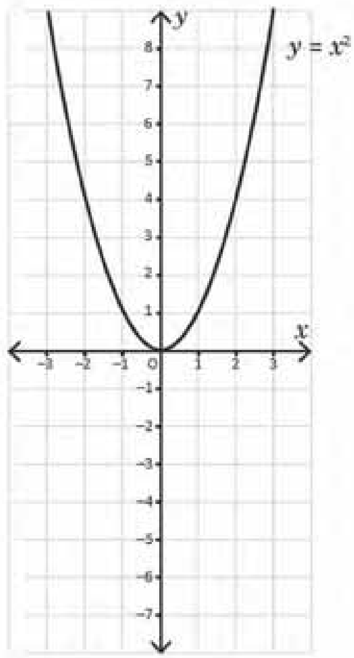
次の関数のグラフを描きましょう。それぞれの場合について頂点がどうなるか書きましょう。

a) $y = x^2 + 1$

b) $y = -x^2 + 1$

c) $y = x^2 + 5$

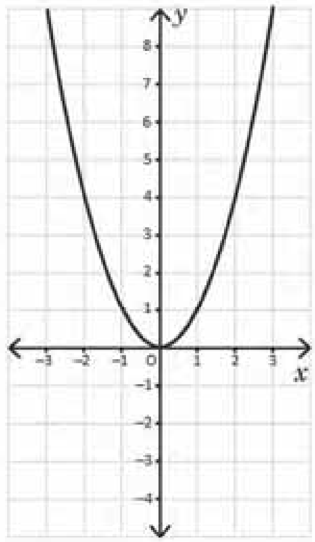
d) $y = -2x^2 + 3$



解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.2 関数 $y = ax^2 + c$; $c < 0$

R 次の関数のグラフを描きましょう。それぞれの場合について頂点がどうなるか書きましょう。



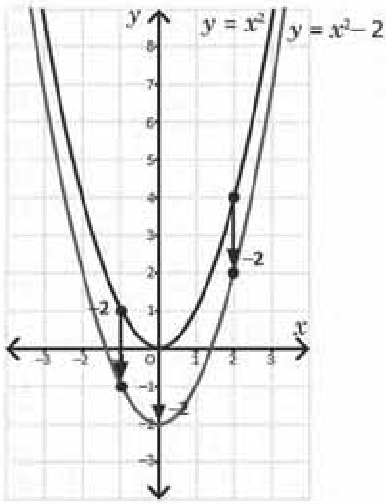
a) $y = -x^2 + 2$

b) $y = 2x^2 + 2$

C a が 0 以外の実数で（正の値または負の値）で c が負の数 ($c < 0$) である時、$y = ax^2 + c$ のグラフは、$y = ax^2$ のグラフを**単位 c の分だけ縦方向に**（下に）移動したものになります。$y = ax^2 + c$ の対称軸は、y 軸で、, その頂点は (0, c) になります。

例 $y = x^2 - 2$ のグラフ

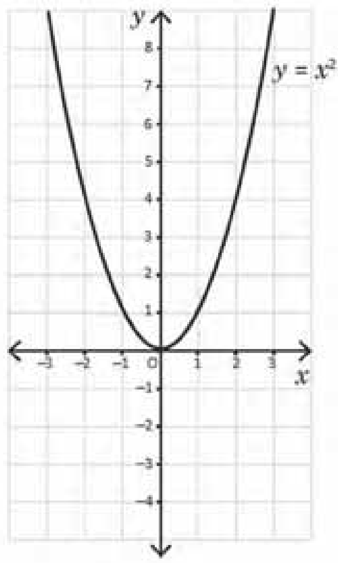
x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 - 2$	2	-1	-2	-1	2



$y = x^2$ では (0, 0) が頂点ですが、$y = x^2 - 2$ では (0, −2) が頂点で 2 単位分下にあります。

$y = x^2 - 2$ のグラフを描く時、$y = x^2$ のグラフが 2 単位分下に移動します。

次の関数のグラフを描きましょう。それぞれの場合について頂点がどうなるか書きましょう。



a) $y = x^2 - 2$

b) $y = -x^2 - 2$

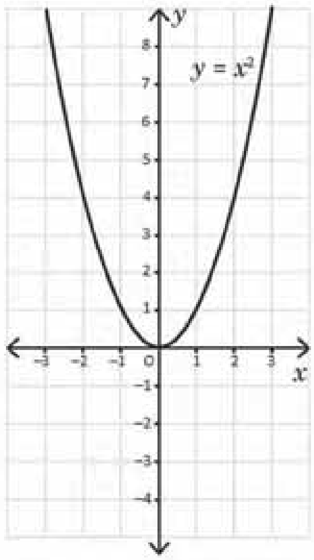
解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.3 関数の方程式を求めるための最初の条件

R 次の関数のグラフを描き、その頂点はどれか書きましょう。

a) $y = x^2 + 4$ b) $y = -x^2 - 1$

c) $y = 2x^2 + 3$ d) $y = -2x^2 + 1$



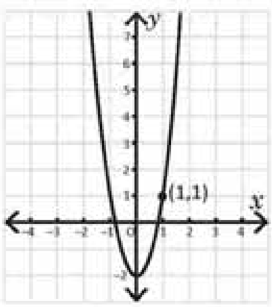
C

関数 $y = ax^2 + c$ とそのグラフ上の点 (m, n) から、a と c の値（正の数にも負の数にもなり得ます）を求めるには、次のようにします：

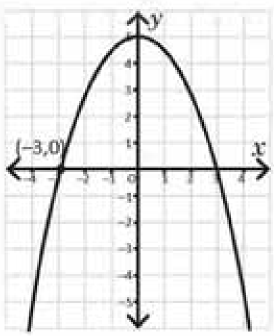
1. グラフ上で、放物線の頂点 $(0, c)$ の位置を見つけます。もし $(0, 0)$ の上にあるのなら、c の値は正の数になり、$(0, 0)$の下にあるのなら、c の値は負の数になります。
2. n と m と c の値を代入して a の値を求めます。そうしますと、$n = am^2 + c$ になります。

1. 次のグラフは、$y = ax^2 + c$ の形式をとる関数のグラフです。それぞれの a の値と c の値を求めましょう。

a)



b)



2. 関数 $y = ax^2 + c$ のグラフは、点 $(1, 2)$ と $(2, 17)$ を通ります。a と c の値を求めましょう。

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.4 学習内容の自己評価

問題を解き、学習した内容について適切だと思うところに「×」印を入れましょう。
正直に答えましょう。

項目	はい	改善できます	いいえ	コメント
1. $c > 0$ の時の $y = ax^2 + c$ の形の関数のグラフを描くことができます。 例えば：$y = 2x^2 + 3$				
2. $c < 0$ の時の $y = ax^2 + c$ の形の関数のグラフを描くことができます。 例えば：$y = 2x^2 - 3$				
3. 二次関数の頂点を書きます。 例えば、$y = 2x^2 + 3$ や $y = 2x^2 - 3$ の頂点です。				
4. 関数の方程式を求めるための最初の条件を活用します。 例： 関数 $y = ax^2 + c$ のグラフは、点 (0, 6) と (1, 7) を通ります。a と c の値を求めましょう。				

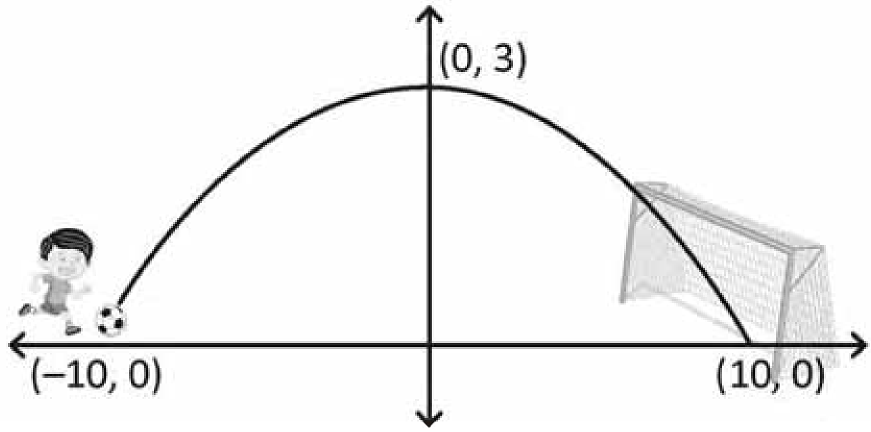
解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

応用問題

1. **放物運動。** 物理学では、軌道が放物線を描く物体の動きを放物運動と呼びます。ある物体がそのような動きをするためには、動く場所の環境に進行を妨げるものがなく、物体は変化のない重力場に従わなければなりません。

   ゴルフボールの軌道、軍事ミサイルの発射、バスケットボールで 2 ポイントシュートをする時のボールの動き、水面での石の跳ね返りなどが、放物運動の例です。多くの場合、放物線は下に向かって開きます。

   カルロスは 20 メートル離れたゴールに向けてフリーキックをしました。ボールは最高で 3 メートルの高さに到達しました。もしボールが最高の高さに到達した場所のちょうど真下に座標表面の中心 (0, 0) を置き、与えられた条件を用いると、ボールの動きを表す方程式が見つけられます。



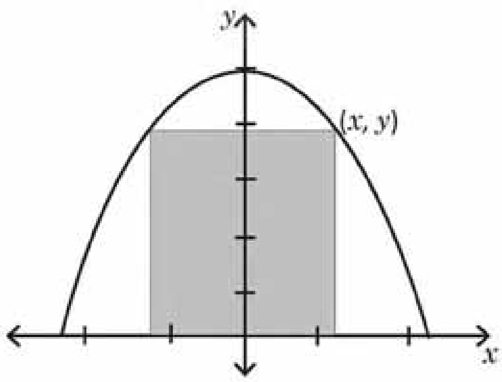
解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

応用問題

2. **エル・トロバドール広場。** 世界には、二次関数の形をした構造物があります。私たちの国にあるそのような構造物の例は、サンサルバドルのサン・ハシントにある、「エル・トロバドール広場」としても知られる「マティアス・デルガード広場」で見られます。正面から見ると、この構造物は下に向かって開いた放物線に似ており、アーチはサンサルバドルの南から歴史地区を訪れる人々を歓迎するシンボルです。

ある構造物が、方程式 $y = -x^2 + 5$ で表される放物線の形をしています。長方形の別の構造物と (x, y) の 1 点で接するように調整します。

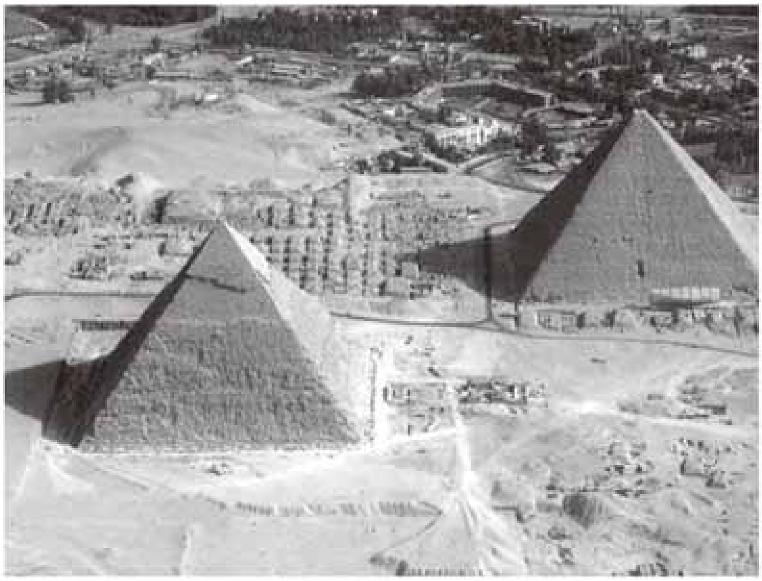
a) x の項で長方形の面積を表しましょう。
b) $x = 2$ の場合、長方形の面積はいくらですか。



解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

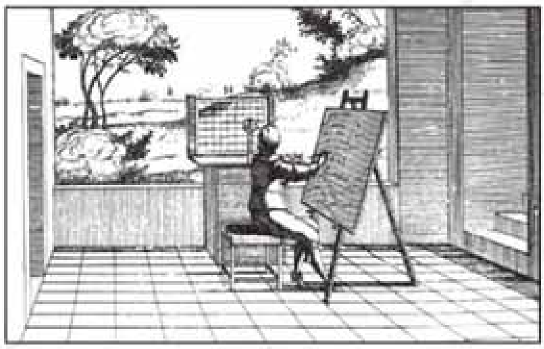
ユニット 5

図形の相似


ケフラー王、クフ王のピラミッド（エジプト）

紀元前 4 世紀のギリシャの数学者、ミレトスのタレスはエジプトのクフ王の大ピラミッドの高さを計測しました。彼は砂漠に棒をたて、地面に落ちた棒の影とピラミッドの影を比較してピラミッドの高さを測りました。タレスは太陽の光は平行に当たると考え、三角形の相似を応用してピラミッドの高さを測定したのです。

画像や写真を拡大・縮小したり、風景を描いたりするときにも、図形の相似を応用した手法が使われることがあります。描きたい風景などを四角の枠にあてはめて格子状の線を引きます。同じようにカンバスや紙を四角の枠にあてはめて格子状の線を引き、お互いの枠の絵が相似になるようにする方法です。

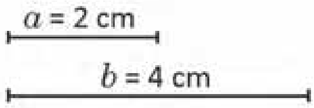

格子線を使って絵を描く画家

このユニットでは線分の比、図形の相似ならびにその特徴と作図について学習します。その過程で三角形の相似条件、中点連結の特性、平行線と線分の比の関係を扱います。また、図形の相似を応用し地図の縮尺を扱います。2つの相似の三角形の面積比、相似の立体の体積比なども学習します。

1.1 線分の比

2つの線分の長さを表す値の割合を、**線分の比**と呼びます。この比は、いかなる単位を付けて表すこともありません。つまり、センチメートル、メートル、その他いかなる長さの単位も伴わないということです。

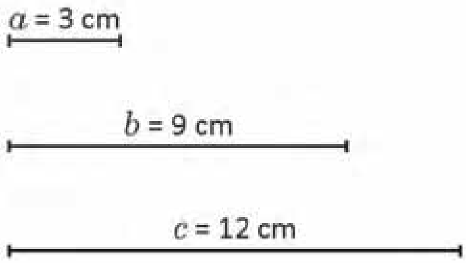
例えば、右図の線分 a と b の比は、$\frac{1}{2}$ であることから、$\frac{a}{b}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ です。これは 1 : 2 とも表し、「1 対 2」と読みます。一般に、線分の比は約分して記述します。



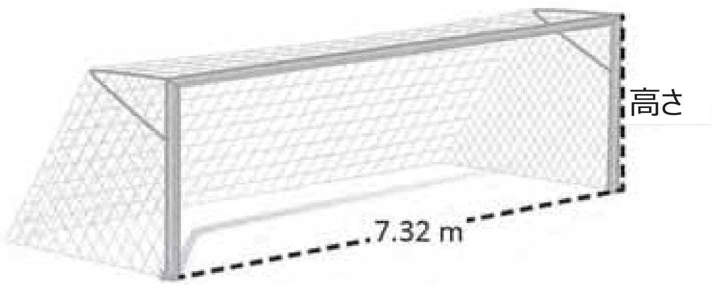
1. 線分 a、b、c について答えましょう：
   a) 線分 a の長さは、線分 b の長さに対して何倍ですか?

   b) 線分 a の長さは、線分 c の長さに対して何倍ですか?

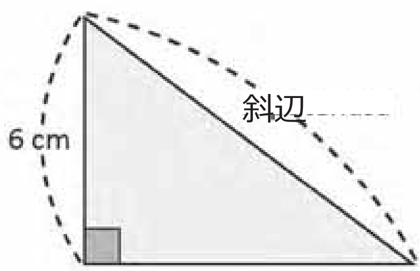
   c) 線分 b と c の比を求めましょう。



2. 国際サッカー連盟（FIFA）は、サッカーゴールの高さと横幅の比を 1 : 3 と決めています。幅が 7.32 m なら、高さはどれだけですか?



3. ある直角三角形の高さと斜辺の比は 3 : 5 です。高さが 6 cm なら、斜辺はどれだけですか?



4. 2 つの線分の比が 2 : 3 になるには、それぞれの線分の長さ (cm) はどれだけでなければなりませんか?可能性のある解答を 3 つ記述しましょう。

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

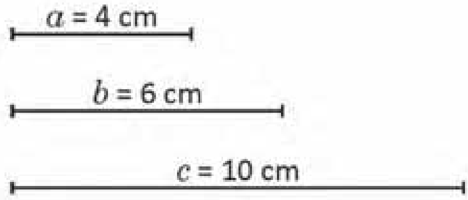
1.2 線分の比

R

1. 線分 a、b、c について答えましょう：
   a) 線分a の長さは、線分 b の長さに対して何倍ですか?

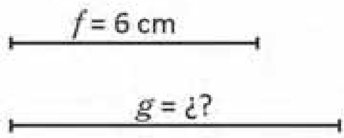
   b) 線分 b の長さは、線分 c の長さに対して何倍ですか?

   c) 線分 a と c の比を求めましょう。



2. 2 つの線分 d と e の比は 2 : 5 です。e の長さが 10 cm なら、d の長さはどれだけですか?

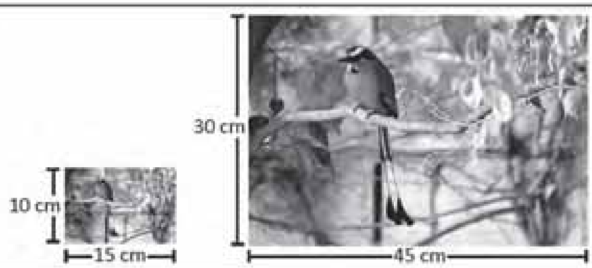
3. 線分 f と g の比が 3 : 4 になるには、線分 g の長さはどれだけでなければなりませんか?



C

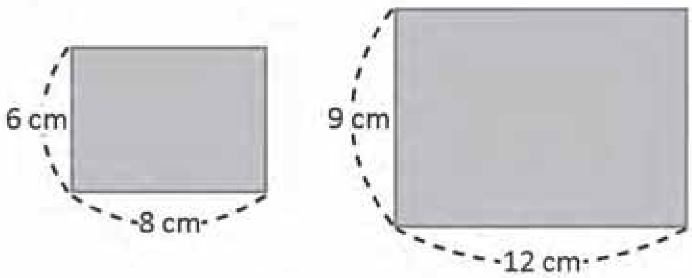
2 つの比の相等性、つまり 2 つの比の値が同じことを**比が等しい** といいます。

例えば、右の 2 つの写真は、横の長さと縦の長さの比が同じです。$\frac{10}{30} = \frac{15}{45}$ ですから、2 つの比は $\frac{1}{3}$ または1 : 3と表すことができます。

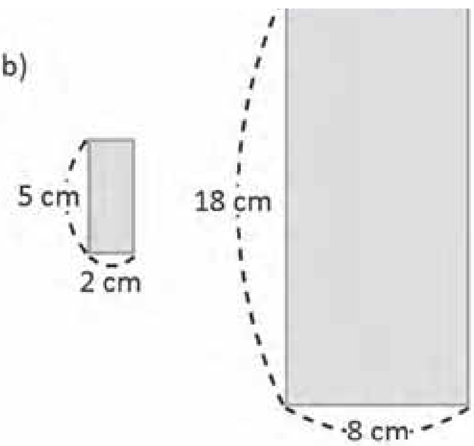


1. 次の長方形の組み合わせについて、それぞれ底辺と高さの比が等しいか調べましょう：

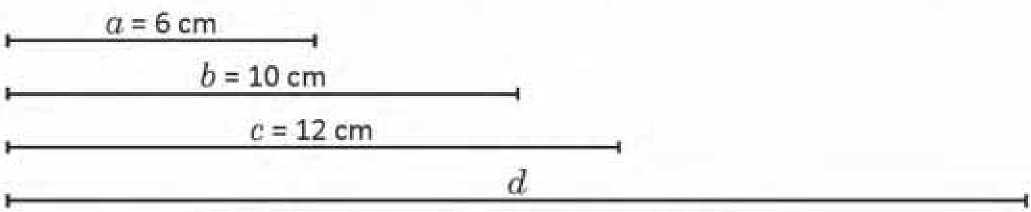
a)



b)



2. 線分 a と b の比が c と d の比と等しくなるには、線分 d の長さはどれだけでなければなりませんか?



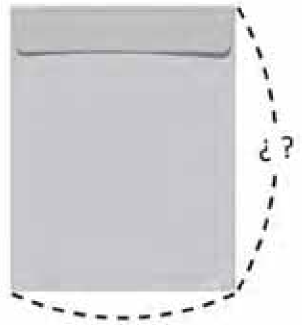
解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

ユニット 5

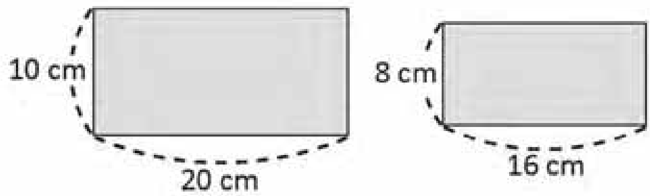
1.3 図形の相似

R

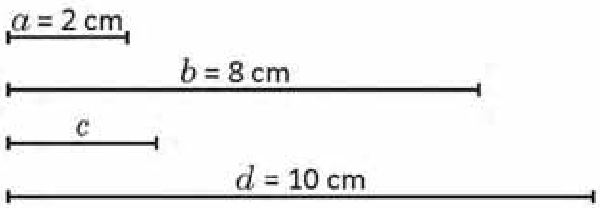
1. レターサイズのマニラ紙の封筒の底辺と縦の長さの比は 3 : 4 です。底辺が 9 インチなら縦の長さはどれだけですか?



2. 次の長方形について、底辺と高さの比は等しいですか? 解答の理由を説明しましょう。



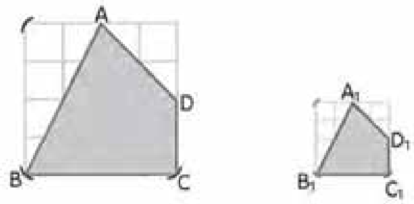
3. 線分 a と b の比が c と d の比と等しくなるには、線分 c の長さはどれだけでなければなりませんか。



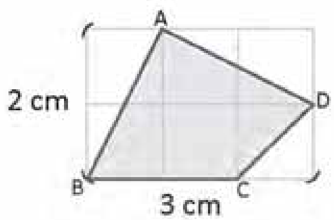
C

2 つかそれ以上の図形が同じ形を持つとき**相似**であるといいます。ただし必ずしも同じ大きさである必要はありません。ある図形を縮小または拡大すると、結果として元の図形と相似な図形になります。

相似を表すには記号 ~ を使います : $ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$ は「ABCD と $A_1B_1C_1D_1$ は相似である」と読みます（図形の名称は対応する角の順に呼びます）。



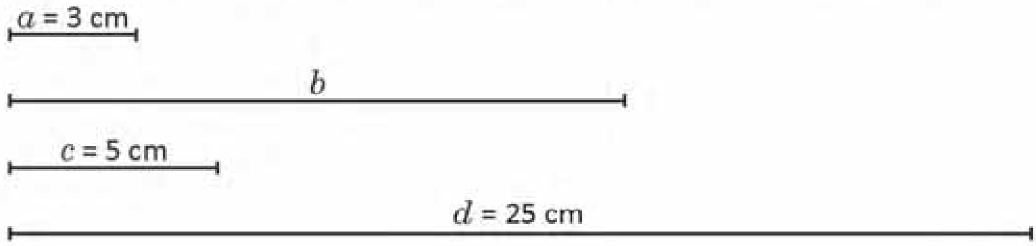
四角形 ABCD を 2 倍に拡大した四角形を作図しましょう。（四角形EFGHとします）:



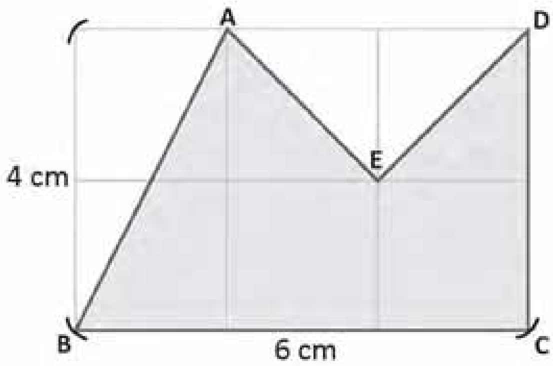
解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.4 相似な図形の特徴 1

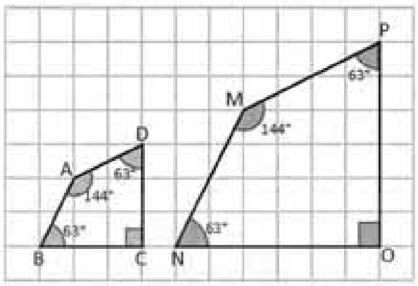
1. 線分 *a* と *b* の比が *c* と *d* の比と等しくなるには、線分 *b* の長さはどれだけでなければなりませんか。



2. 多角形 ABCDE を二分の一に縮小した多角形を作図しましょう。（図形 FGHIJ とします）：



2 つかそれ以上の相似な多角形において、対応する角はそれぞれ合同です。つまり、対応する角の大きさはそれぞれ等しくなります。多角形において同じ位置にある角を**対応する角**といいます。



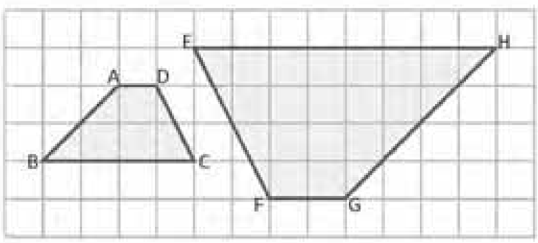
例えば、四角形 ABCD と MNOP は以下が成り立つので相似です：

∢A = ∢M　　∢B = ∢N

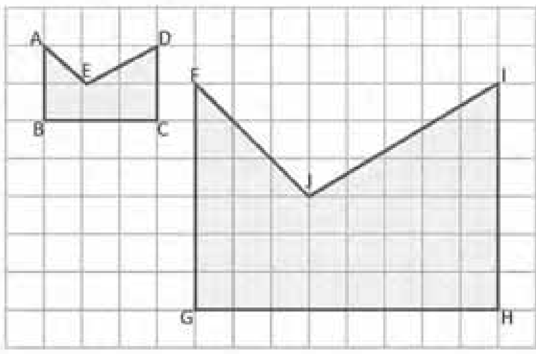
∢C = ∢O　　∢D = ∢P

それぞれの多角形の組み合わせについて、対応する角を見つけましょう。

1.



2.

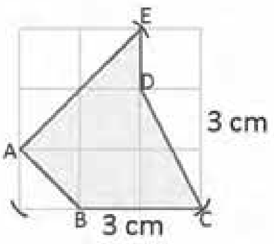


解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

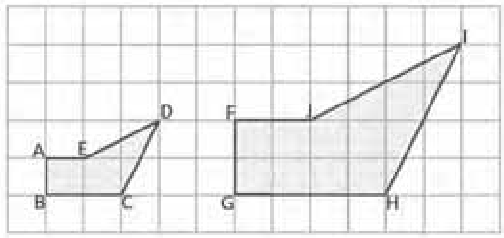
ユニット 5

1.5 相似な図形の特徴 2

1. 多角形 ABCDE を 2 倍に拡大して作図しましょう。（方眼を使ってノートに作図しましょう。）

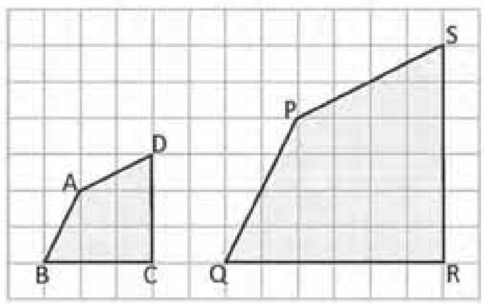


2. 次の相似の多角形について、対応する角を見つけましょう。



2 つの相似な多角形において、対応するそれぞれの辺の長さの比は等しくなります。例えば、右図の四角形 ABCD と PQRS は相似であり、以下が成り立ちます：

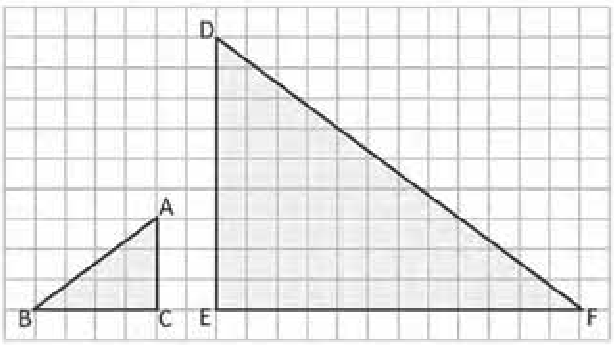
$$\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}=\frac{CD}{RS}=\frac{DA}{SP}=\frac{1}{2}$$



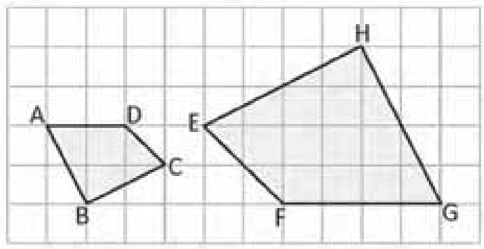
対応する部分の長さを**対応する辺**とも言います。対応する辺の比を**相似比**といいます。

一般に、対応する辺の比がそれぞれ等しく、対応する角がそれぞれ合同であるとき、その **2 つの多角形は相似です**。

1. 三角形 ABC と 三角形 DFE は相似です。それぞれ対応する辺を見つけ、相似比を求めましょう。



2. 四角形 ABCD と四角形 GHEF は相似です。それぞれ対応する辺を見つけ、相似比を求めましょう。

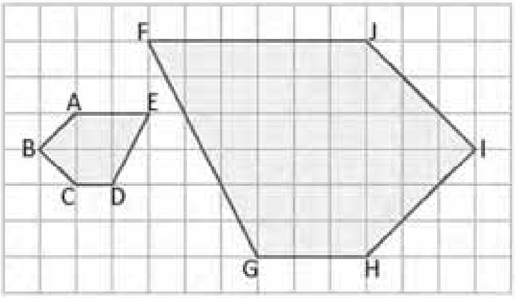


解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

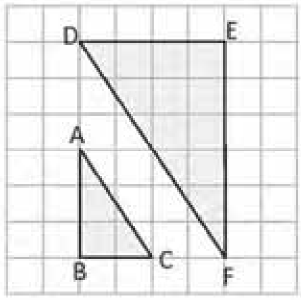
1.6 相似な図形の作成

R

1. 次の多角形の組み合わせにおいて、それぞれ対応する角を見つけましょう。



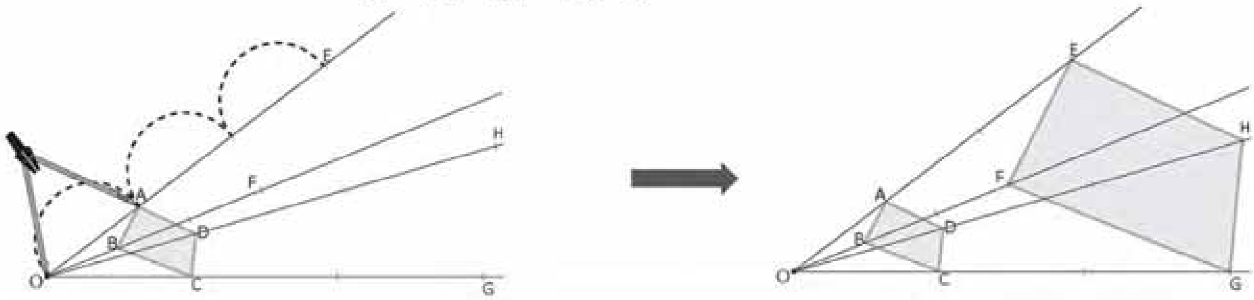
2. 三角形 ABC と三角形 EFD は相似です。それぞれ対応する辺を見つけ、相似比を求めましょう。



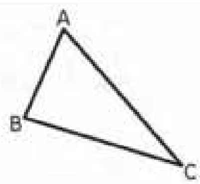
C

以前授業で扱った、相似な図形を描き出す技法は、**相似変換**として知られています。次の図で、点 O は**相似の中心**と呼びます。四角形 ABCD と四角形 EFGH は**相似の位置**にあるといい、その比：

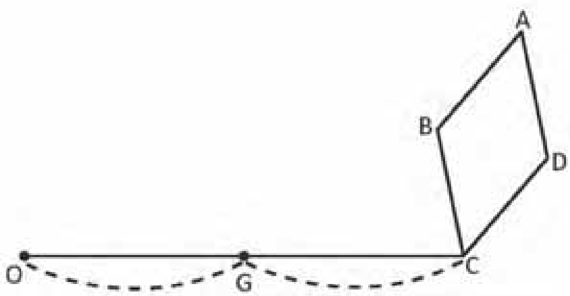
$$\frac{AB}{EF}=\frac{BC}{FG}=\frac{CD}{GH}=\frac{DA}{HE}=\frac{1}{3}$$ を**相似比** と呼びます。



1. 三角形 ABC と同じ三角形を自分のノートに作図しましょう。次にその三角形と相似の三角形 DEF を相似比 1 : 4 で作図しましょう。



2. ひし形 ABCD を使ってこれと相似のひし形 EFGH を作図しましょう。相似の中心を O 、相似比は 2 : 1 とします。

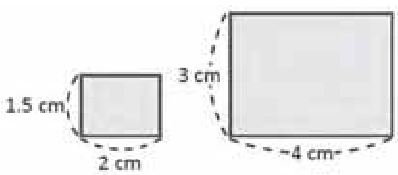
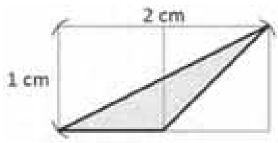
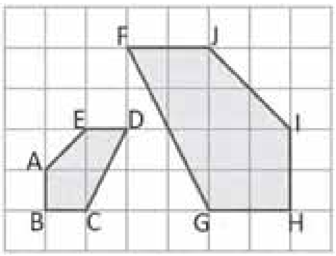
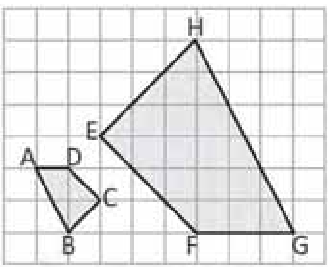


相似比 2 : 1 とは、ひし形 ABCD を半分に縮小するという意味です。図の中で EFGH の角の 1 つが決まっていることに注目します。O と C を結ぶ線を引き、定規かコンパスで中点 G を見つけます。他の角についても同様に、$\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OD}$ を結ぶ線を引きます。それぞれの線分の中点を見つけ、それを結んでひし形 EFGH を作図します。

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1.7 学習内容の自己評価

問題を解いて学習した内容を振り返り、当てはまる欄に "×" のチェックを入れましょう。
正直に答えましょう。

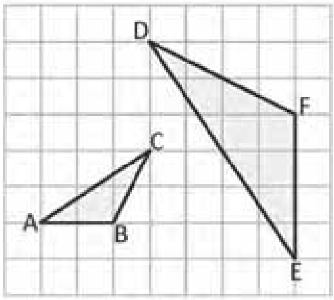
設問	できる	もう少し	できない	コメント
1. 線分の比を計算します。 例えば、a = 4 cm と b = 6 cm の線分の比を計算します。				
2. 線分の比を求めます。例えば、次の長方形の底辺と高さの比が等しいか求めます： 				
3. 多角形を拡大したり縮小したりして相似の図形を作図します。例えば、次の三角形を 2 倍に拡大して作図します： 				
4. 相似の多角形において対応する等しい角を見つけます。 例えば、次の 2 つの五角形で対応する角を見つけます： 				
5. 相似の多角形の対応する辺を見つけ、相似比を計算します： 				
6. 相似な図形を作図します。例えば、相似比が 2 : 3 の 2 つの三角形を作図します。				

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

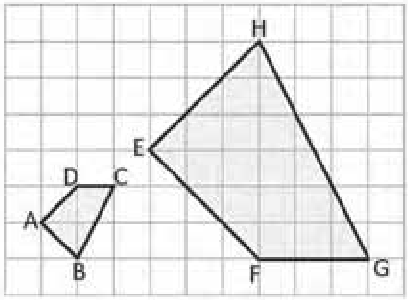
2.1 三角形の相似条件 1

1. 次の組み合わせの図形について、同じ角と比が等しい辺を見つけましょう。次にお互いが相似な図形か答えましょう（相似の場合、相似比を計算しましょう。）：

a)



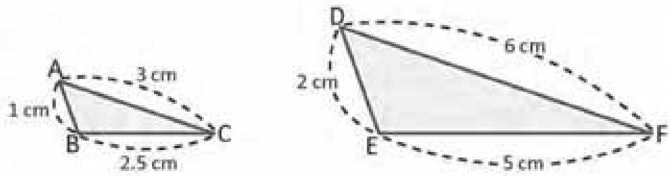
b)



2. 相似比が 3 : 4 の 2 つの三角形を自分のノートに作図しましょう。

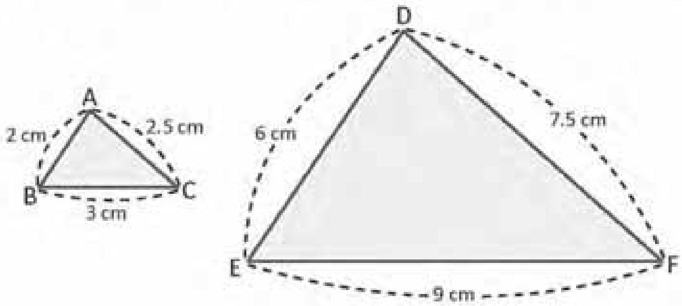
2 つの三角形の対応する辺の比が等しく、対応する角が合同であるとき、その三角形は相似です。

条件　3 組の辺の比がすべて等しい：
2 つの三角形の対応する辺の比が等しければ、これも相似です。例えば、三角形 ABC と DEF は対応する辺の比が等しいので相似です。つまり：

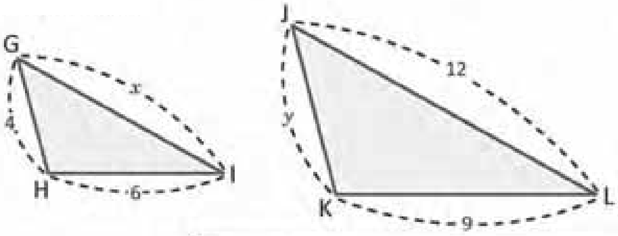


$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{1}{2}$$

1. 三角形 ABC と 三角形 DEF は相似ですか（解答の理由を説明しましょう）：



2. 2 つの三角形 GHI と JKL が相似であるには x と y の値は何でなければなりませんか? 解答の理由を説明しましょう。

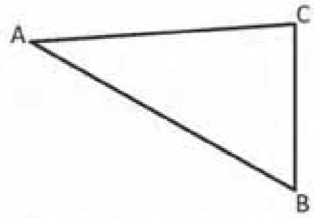


解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

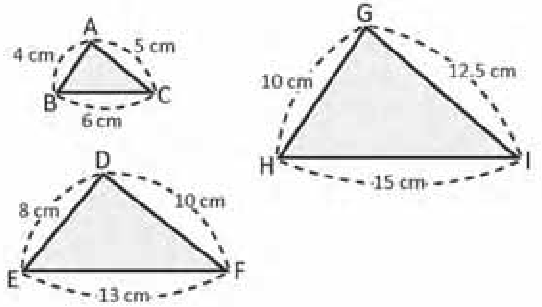
2.2 三角形の相似条件 2

R

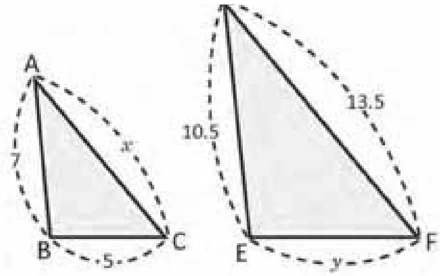
1. 三角形 ABC と同じ三角形 を自分のノートに作図しましょう。次にその三角形と相似の三角形 DEF を相似比 3：1 で作図しましょう。



2. 三角形 ABC に相似な三角形はどれですか? 解答の理由を説明しましょう。



3. ΔABC~ΔDEF が成り立つには x と y の値は何でなければなりませんか。



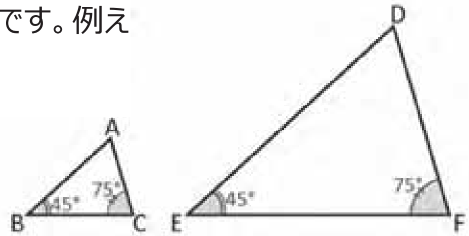
C

条件　2 組の角がそれぞれ等しい：

2 つの三角形の対応する 2 組の角が合同なら、その三角形は相似です。例えば、三角形 ABC と三角形 DEF は対応する 2 組の角が合同です：

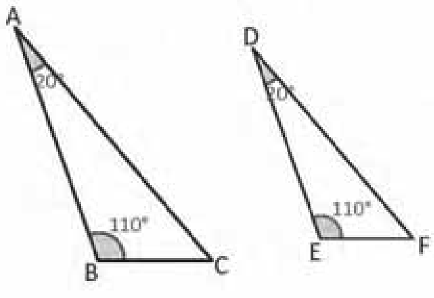
$$\sphericalangle B = \sphericalangle E$$
$$\sphericalangle C = \sphericalangle F$$

よって、2 つの三角形は相似です。

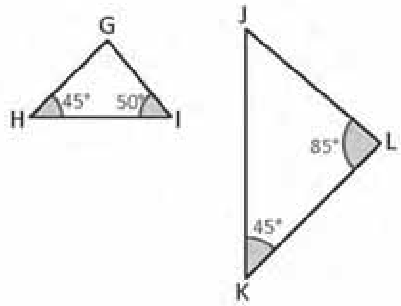


1. 次の三角形は相似ですか（解答の理由を説明しましょう）：

a)

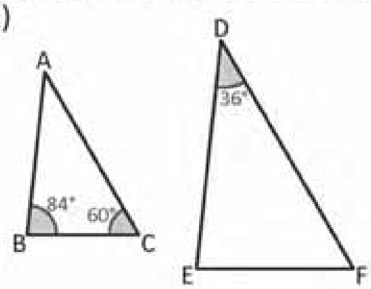


b)

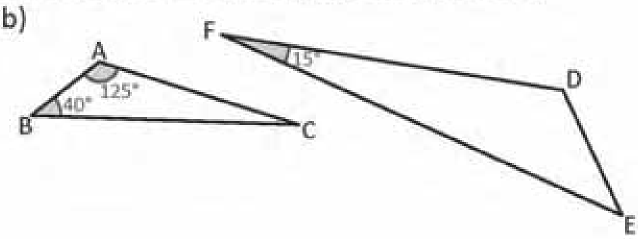


2. 次の問題で、ΔABC~ΔDEF が成り立つには ∢DEF の値は何でなければなりませんか? 解答の理由を説明しましょう。

a)



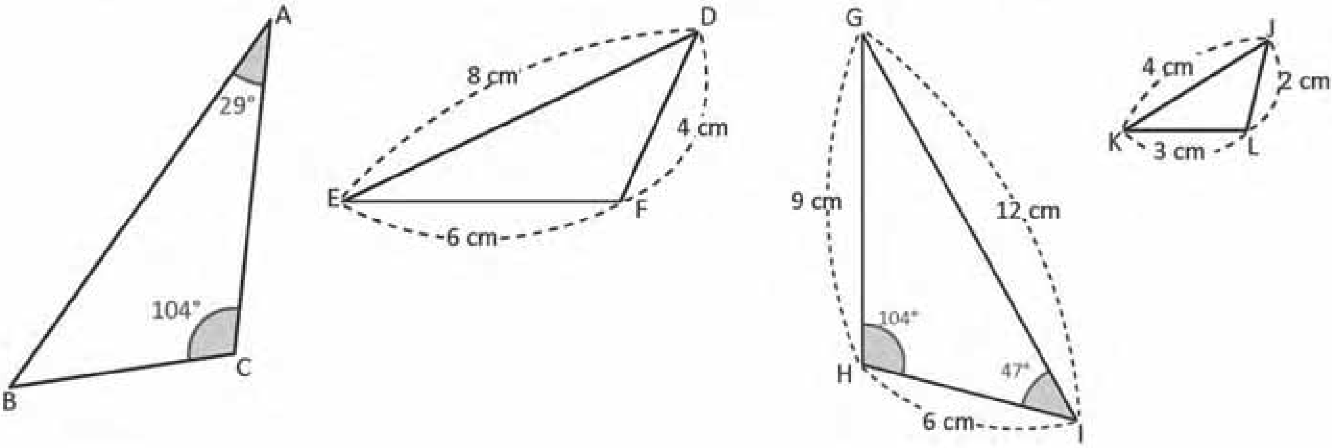
b)



解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.3 三角形の相似条件 3

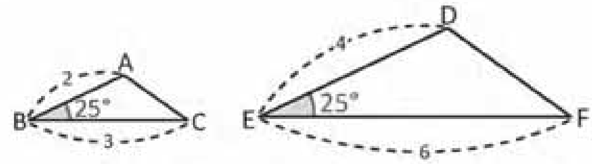
「条件 3 組の辺の比がすべて等しい」と「条件 2 組の角がそれぞれ等しい」を使ってどの三角形が相似か答えましょう：



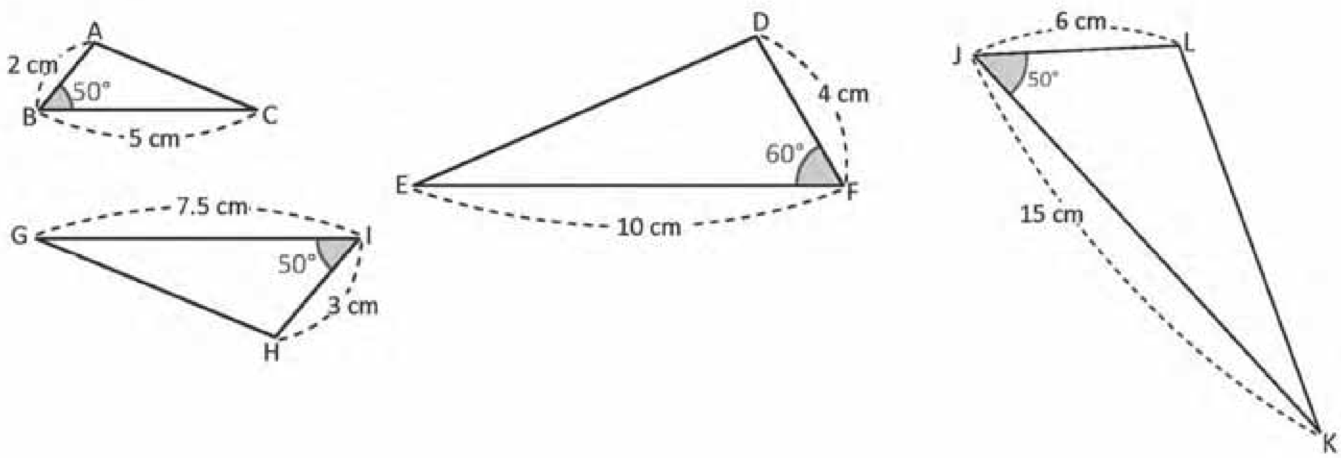
条件 2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい：
2 つの三角形の 2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいとき、その三角形は相似です。

例えば、三角形 ABC と DEF は 2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので相似です。
つまり：

$$\measuredangle B = \measuredangle E$$
$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{1}{2}$$



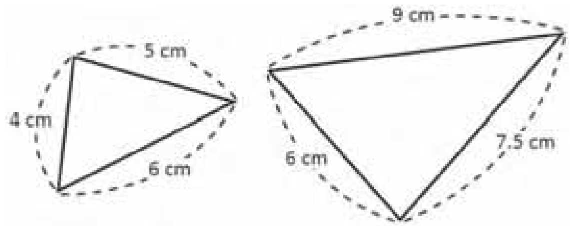
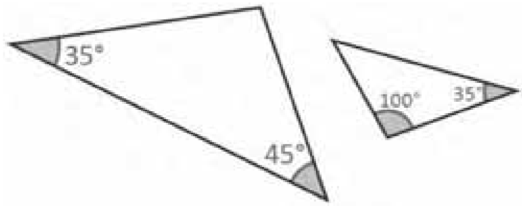
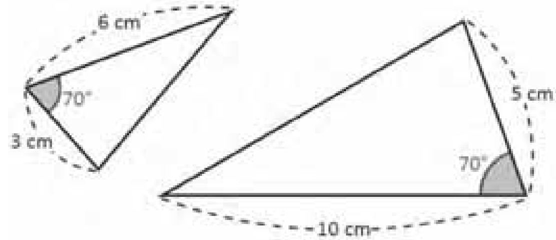
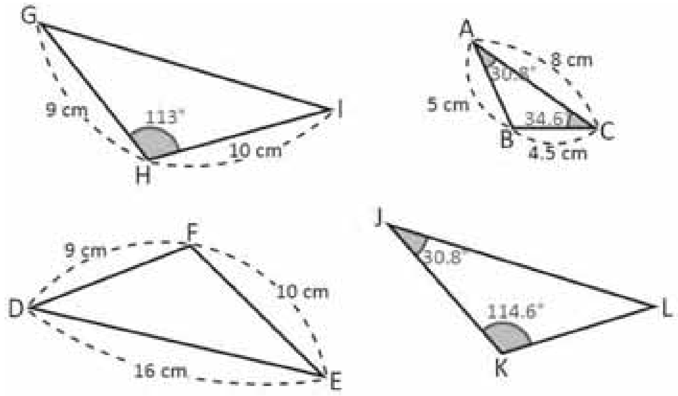
「条件 2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい」を使って三角形 ABC に相似な三角形を答えましょう。
相似の場合、相似比を計算しましょう。



解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.4 学習内容の自己評価

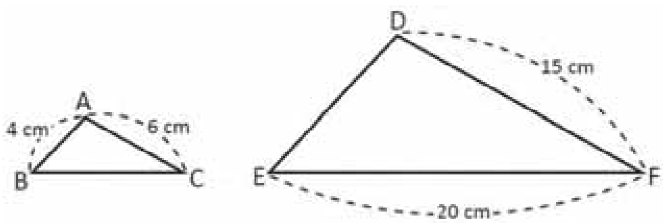
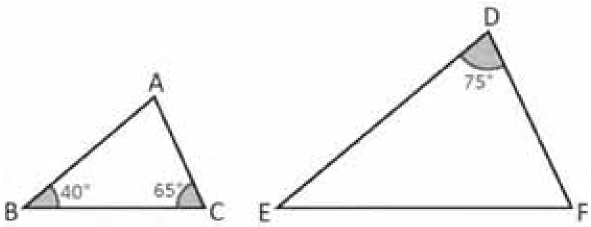
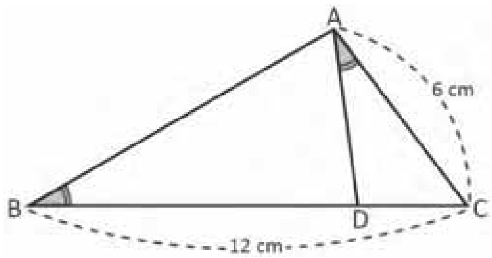
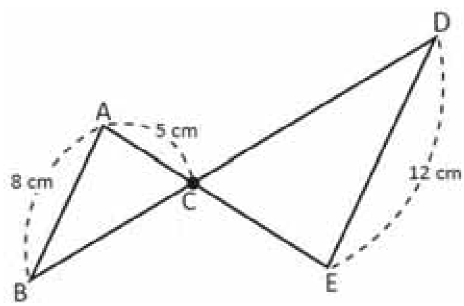
問題を解いて学習した内容を振り返り、当てはまる欄に "×" のチェックを入れましょう。
正直に答えましょう。

項目	できる	もう少し	できない	コメント
1.「条件　3 組の辺の比がすべて等しい」を使って相似の三角形を見つけます。例えば、次の 2 つの三角形：  				
2.「条件　2 組の角がそれぞれ等しい」を使って相似の三角形を見つけます。例えば、次の 2 つの三角形：  				
3.「条件　2　組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい」を使って相似の三角形を見つけます。例えば、次の　2　つの三角形：  				
4.　3　つある三角形の相似条件のいずれかを使って相似の三角形を見つけます（3　組の辺の比がすべて等しい、2　組の角がそれぞれ等しい、2　組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい）。例えば、ΔABC に相似な三角形は：  				

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

2.5 学習内容の自己評価

問題を解いて学習した内容を振り返り、当てはまる欄に "×" のチェックを入れましょう。
正直に答えましょう。

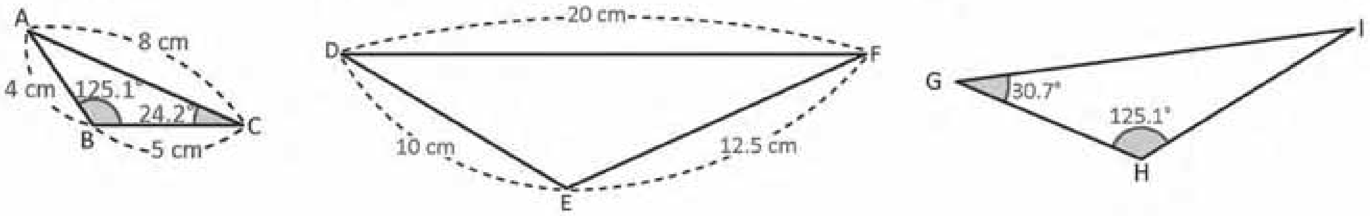
項目	できる	もう少し	できない	コメント
1. 対応する辺の長さを求め、2 つの図形が相似だと証明します。例えば、ΔABC ~ ΔDEF となるように、$\overline{BC}$ と $\overline{DE}$ の長さを求めます： 				
2. 1 つの角の大きさを求め、2 つの三角形が相似だと証明します。例えば、ΔABC ~ ΔDEF となるように、∢DEF の値を求めます： 				
3. 相似の三角形を見つけて、線分の長さを求めます。例えば： a) ∢ABC = ∢CAD のとき $\overline{DC}$ の長さを求めます：  b) 線分 AB と DE が平行のとき、$\overline{CE}$ の長さを求めます。 				

ユニット 5

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

3.1 中点連結定理 1

三角形 DEF と GHI が三角形 ABC と相似であることを証明しましょう：



中点連結定理どのような三角形でも、2 つの辺の中点を結ぶ線分は第 3 の辺と平行であり、その長さは第 3 の辺の半分です。

例えば、三角形 ABC において、M と N はそれぞれ線分 AB と線分 CA の中点です。よって、線分 MN は辺 BC に対し平行であり、その長さは辺 BC の半分に等しいです。よって：

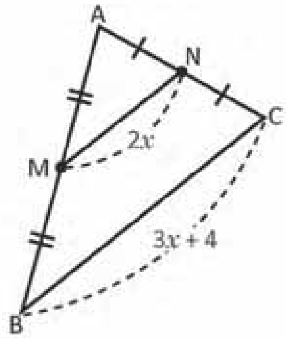
$$\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2x}{3x+4} = \frac{1}{2}$$

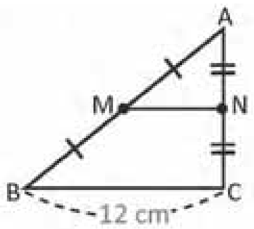
$$4x = 3x + 4$$

$$4x - 3x = 4$$

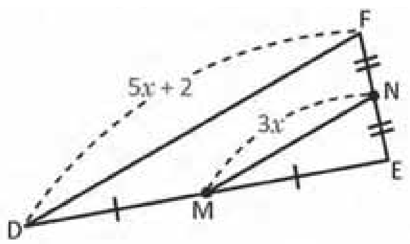
$$x = 4$$



1. 三角形 ABC において、M と N はそれぞれ $\overline{AB}$ と $\overline{CA}$ の中点です。$\overline{MN}$ の長さを求めましょう：



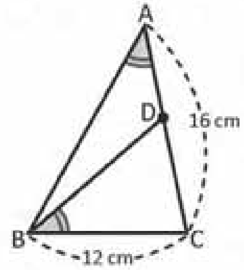
2. 三角形 DEF において、M と N はそれぞれ $\overline{DE}$ と $\overline{EF}$ の中点です。x の値を求めましょう：



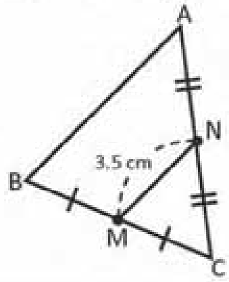
解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

3.2 中点連結定理 2

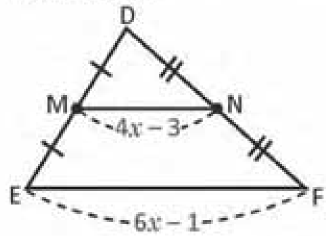
1. 三角形 ABC において、∢CBD = ∢BAC のとき $\overline{CD}$ の長さを求めましょう。



2. 三角形 ABC において、M と N はそれぞれ $\overline{BC}$ と $\overline{CA}$ の中点です。$\overline{AB}$の長さを求めましょう：



3. 三角形 DEF において、M と N はそれぞれ $\overline{DE}$ と $\overline{FD}$ の中点です。x の値を求めましょう：

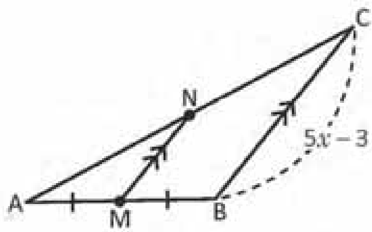


どのような三角形であっても、三角形の 1 つの辺の中点から別の 1 辺に平行な線を引くと、この線はもう 1 つの辺の中点と交わり、その長さは引いた線に平行な辺の半分の長さになります。

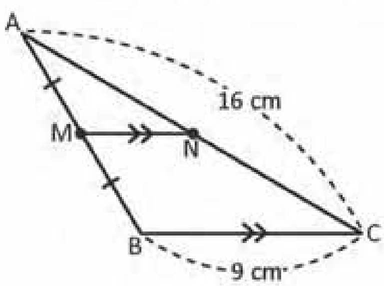
例えば、三角形 ABC において、点 M は $\overline{AB}$ の中点です。そこから $\overline{BC}$ に平行な線分を引きます。このとき N は $\overline{CA}$ の中点であり、$\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ が成り立ちます。

よって：

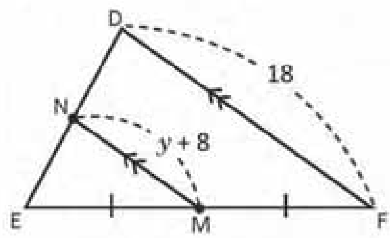
$$\frac{3.5}{5x-3} = \frac{1}{2}$$
$$2(3.5) = 5x - 3$$
$$7 + 3 = 5x$$
$$\frac{10}{5} = x$$
$$x = 2$$



1. 三角形 ABC において、M は $\overline{AB}$の中点であり、$\overline{MN}$ は $\overline{BC}$ に平行です。$\overline{MN}$ と $\overline{NA}$ の長さを求めましょう。



2. 三角形 DEF において、M は $\overline{EF}$ の中点であり、$\overline{MN}$ は $\overline{FD}$ に平行です。y の値を求めましょう：



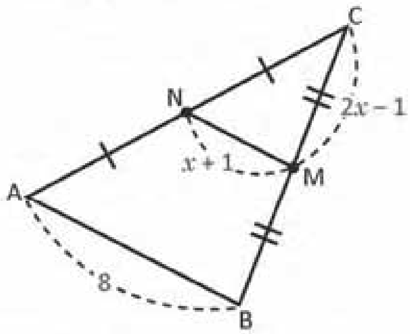
解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

ユニット 5

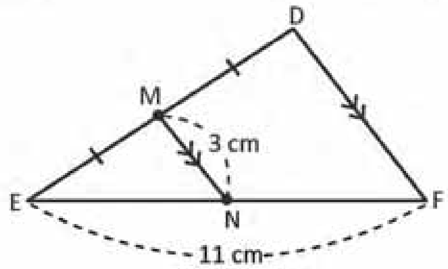
3.3 四角形に内接する平行四辺形

R

1. 三角形 ABC において、M と N はそれぞれ $\overline{BC}$ と $\overline{CA}$ の中点です。x の値と $\overline{BC}$ の長さを求めましょう：



2. 三角形 DEF において、Mは $\overline{DE}$ の中点であり、$\overline{MN}$ は $\overline{DF}$ に平行です。$\overline{DF}$ と $\overline{EN}$ の長さを求めましょう：

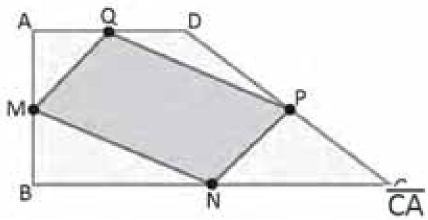


C

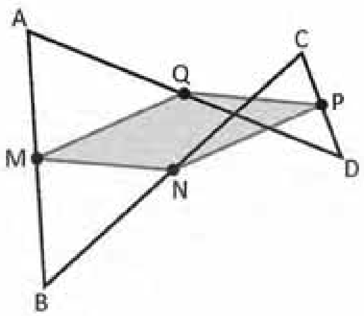
どのような四角形であっても、四角形の各辺の中点を結ぶと、平行四辺形になります。

これは**バリニオンの定理**と呼ばれます。

例えば、次の直角台形 ABCD において、それぞれの辺の中点を M、N、P、Q とします。4 つの中点を結ぶと平行四辺形 MNPQ ができます：



多角形 ABCD において、点 M、N、P、Q はそれぞれ $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$ の中点です。MNPQ が平行四辺形であることを証明しましょう：

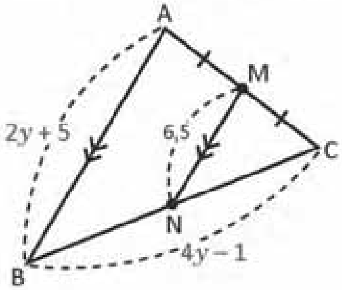


この多角形 ABCD は**砂時計型**と呼びます。向き合う一組の辺、つまり $\overline{BC}$と $\overline{DA}$ が交差しています。

3.4 平行な線分を利用した相似 1

R

1. ΔABC において、M は $\overline{CA}$ であり、かつ $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$です。$y$ の値と $\overline{BN}$ の長さを求めましょう：



2. 長方形 ABCD の中点を結ぶとどのような平行四辺形ができますか。解答の理由を説明しましょう。

C

三角形と平行線の定理

どのような三角形であっても、辺の 1 つに平行な線分と他の 2 辺とともに形作られる三角形は、元の三角形と相似です。

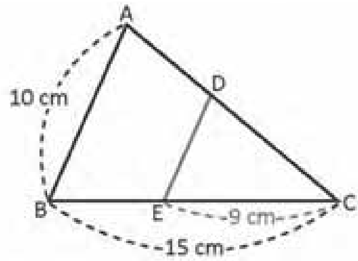
例えば、三角形 ABC において、線分 DE は辺 AB に平行です。
よって、ΔDEC～ΔABC となります。対応する辺の線分の比を使って$\overline{DE}$の長さを求めます。

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EC}{BC}$$

$$\frac{DE}{10} = \frac{9}{15}$$

$$DE = 10\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$DE = 6$$

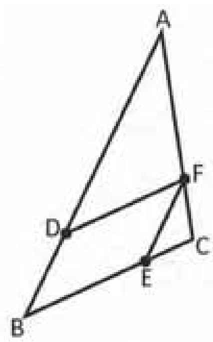


したがって、$\overline{DE}$ の長さは 6 cmです。

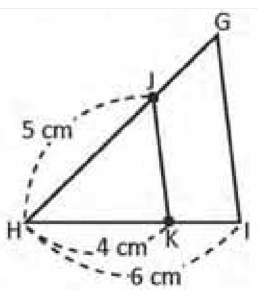
1. 次の三角形 ABC において、線分 DF は辺 BC に平行で、線分 FE はAB に平行です。

a) この図形のなかで、三角形 ABC に相似な三角形はどれですか?

b) どの線分とどの線分の比が等しいですか?



2. 三角形 GHI において、線分 JK は辺 GI に平行です。辺 GH の長さはどれだけですか?

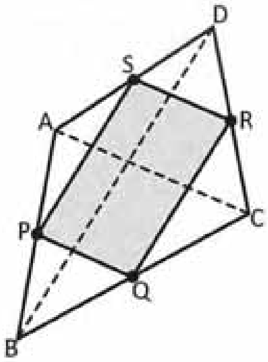


解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

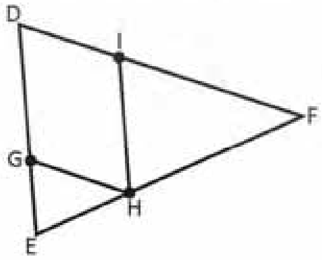
3.5 平行な線分を利用した相似 2

R

1. 四角形 ABCD において、点 P、Q、R、S はそれぞれ辺 AB、BC、CD、DA の中点です。BD = 7 cm ならびに CA = 4 cm のとき、平行四辺形 PQRS の各辺の長さを求めましょう。



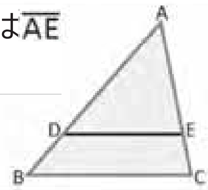
2. ΔDEF について以下が成り立ちます：$\overline{GH} \parallel \overline{DF}$ ならびに $\overline{IH} \parallel \overline{DE}$。ΔDEF に相似の三角形はどれですか。また線分の比が等しいのはどれですか：



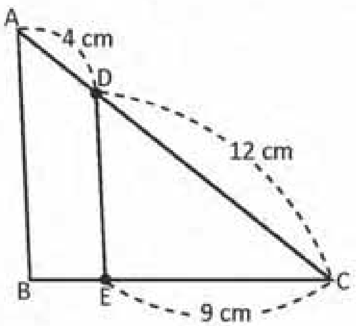
C

三角形 ABC について以下が成り立ちます：DE は辺 BC に平行です。よって、$\overline{AD}$と $\overline{DB}$ は$\overline{AE}$と$\overline{EC}$に対しそれぞれ線分の比が等しいと言えます。つまり：

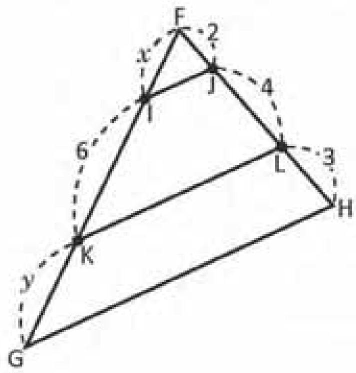
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$



1. 三角形 ABC において辺 AB は線分 DE に平行です。線分 EB の長さを求めましょう：



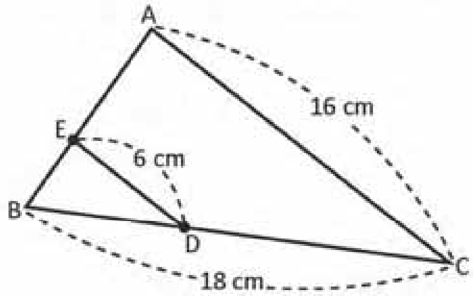
2. 三角形 FGH において辺 GH に平行な線分 IJ と KL を引きます。*x* と *y* の値を求めましょう：



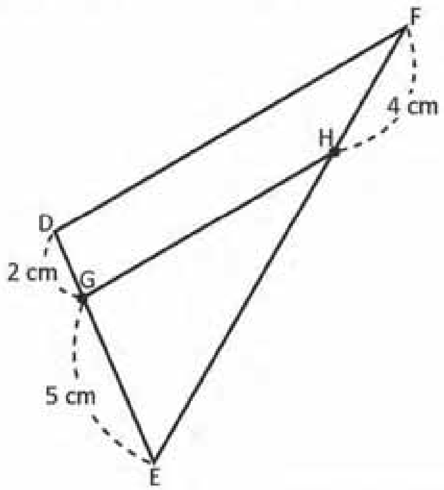
解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

3.6 線分の比を使った平行 1

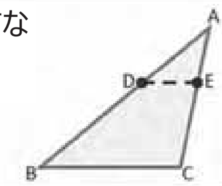
1. ΔABC において $\overline{DE}$ に平行な $\overline{CA}$ を引きます。$\overline{BD}$ の長さはどれだけですか?



2. ΔDEF において $\overline{GH}$ に平行な $\overline{DF}$ を引きます。$\overline{EH}$ の長さを求めましょう。



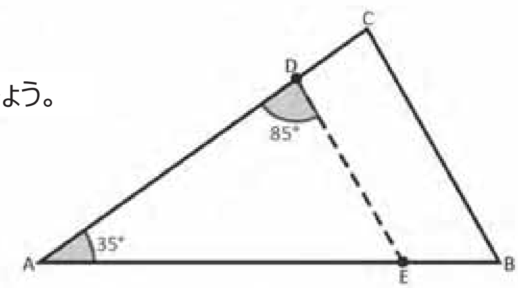
三角形 ABC において D と E がそれぞれ辺 AB と 辺 AC 上にあるとき、$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ を満たすなら、$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ が成り立つ。



三角形 ABC において辺 AC と辺 AB 上に点 D と E を置き、次が成り立つとき：$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$

a) 角 ACB の大きさはどれだけですか? 解答の理由も述べましょう。

b) 角 CBA の大きさはどれだけですか? 解答の理由も述べましょう。

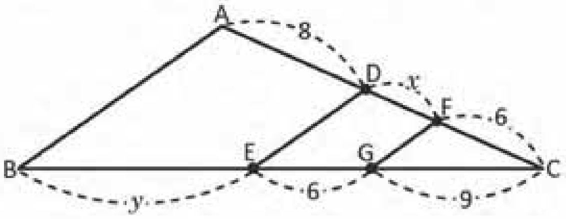


解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

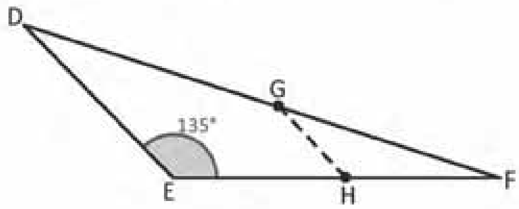
ユニット 5

3.7 線分の比を使った平行 2

1. 三角形 ABC において辺 AB に平行な線分 DE と FG を引きます。x と y の値を求めましょう：



2. ΔDEF において、点 G と H はそれぞれ $\overline{FD}$ と $\overline{FE}$ 上にあります。次が成り立つとき：$\frac{FG}{FD} = \frac{FH}{FE}$。∢FHG の大きさはどれだけですか? 解答の理由も述べましょう。

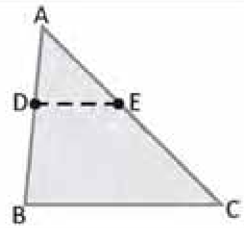


三角形と比の定理

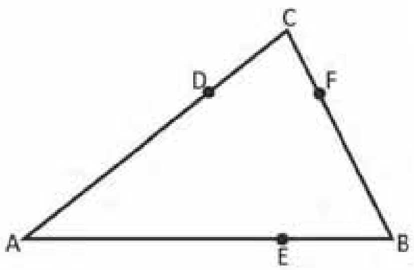
三角形 ABC において、点 D と点 E がそれぞれ $\overline{AB}$ と $\overline{AC}$ 上にあります。

a) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ なら、$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ が成り立つ。

b) $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ なら $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ が成り立つ。



次の三角形 ABC において、3 つの点 D、E、F があり、以下が成り立つとき：$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$ かつ $\frac{CD}{DA} = \frac{CF}{FB}$ 。



a) 点 D、E、F を結んでできるどの線分が辺 BC に平行ですか? 解答の理由も述べましょう。

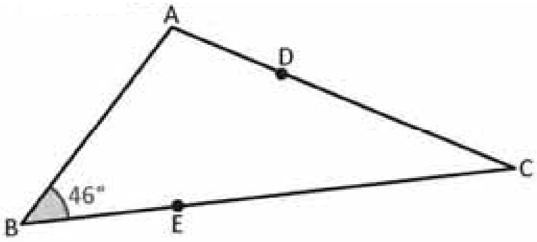
b) 点 D、E、F を結んでできるどの線分が辺 AB に平行ですか? 解答の理由も述べましょう。

c) $\overline{EF}$ は $\overline{AC}$ に対し平行ですか? 解答の理由も述べましょう。

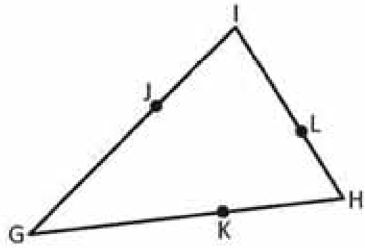
解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

3.8 線分の比を使った平行 3

1. ΔABC において、点 D と点 E はそれぞれ辺 CA と辺 CB 上にあり、次が成り立ちます。$\frac{CD}{DA}=\frac{CE}{EB}$。∢CED の大きさはどれだけですか? 解答の理由も述べましょう。



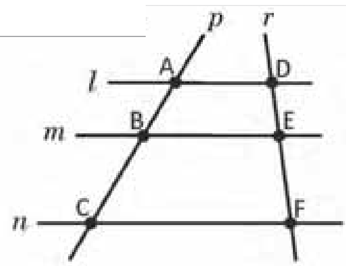
2. ΔGHI において 3 点 J、K、L があり、次が成り立つとき：$\frac{GJ}{GI}=\frac{GK}{GH}$ かつ $\frac{HK}{KG}=\frac{HL}{LI}$。
点 J、K、L と結んでできる線分のうち、それぞれ辺 GI と辺 HI に平行な線分はどれですか?
解答の理由も述べましょう。



平行線と比の定理（タレスの定理）

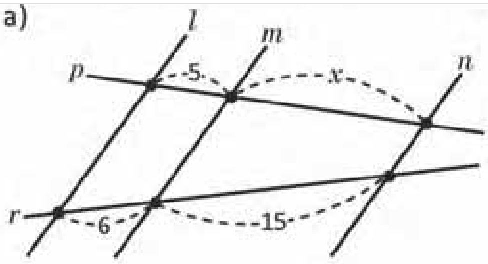
複数の平行な直線が、2 本の直線と交わってできる線分は、2 本の直線がどのようなものであっても、平行な直線によって切り取られる線分の比が等しくなります。

例えば次の図で、2 本の直線 p と r が 3 本の平行線 l、m、n と交わります。そして線分 AB と BC は線分 DE と EF に対し比が等しい、つまり：$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$ が成り立ちます。

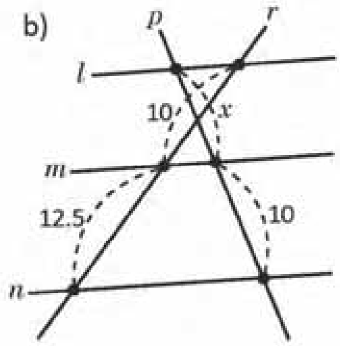


1. 次の図で、直線 p と r が3本の平行線 l、m、n と交わります。それぞれ、x の値を求めましょう：

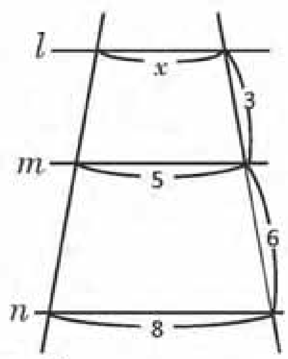
a)



b)



2. x の値を求めましょう。以下が成り立つとします。$l \parallel m,\ m \parallel n$
ヒント：直線を 1 本引き、1 つの辺が x cm の平行四辺形を作りましょう。

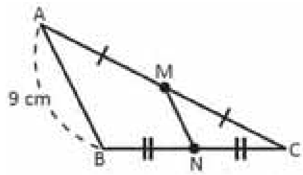
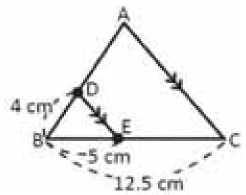


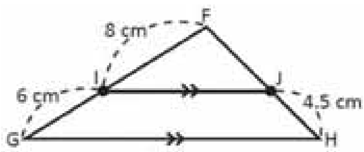
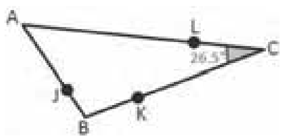
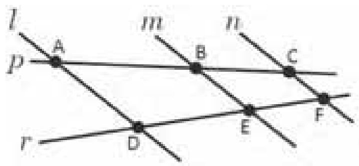
解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

ユニット 5

3.9 学習内容の自己評価

問題を解いて学習した内容を振り返り、当てはまる欄に "×" のチェックを入れましょう。
正直に答えましょう。

<table>
<tr><th>項目</th><th>できる</th><th>もう少し</th><th>できない</th><th>コメント</th></tr>
<tr><td>1.中点連結定理を使って線分の長さを求めます。例えば、三角形 ABC において M と N が $\overline{CA}$ と $\overline{BC}$ の中点であるとき、$\overline{MN}$ の長さを求めます。

</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2. 三角形の平行線と比の定理を使って線分の長さを求めます。例えば、次のような問題：
a) $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ のとき $\overline{AB}$ の長さを求めます。


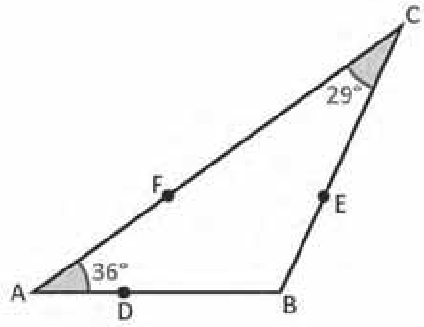
b) $\overline{IJ} \parallel \overline{GH}$ のとき $\overline{FJ}$ の長さを求めます。

</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3. 三角形と比の定理を使って平行な線分と角の大きさを求めます。例えば、$\frac{AJ}{AB} = \frac{AL}{AC}$ かつ $\frac{BJ}{JA} = \frac{BK}{KC}$ のとき、三角形の辺 BC と CA に平行な線分と ∢ALJ の大きさを求めます。

</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4. タレスの定理を使って線分の長さを求めます。例えば、直線 p と r が 3 本の平行線 l、m、n と交わり、AB = 15 cm、DE = 12 cm、EF = 8 cm のとき、BC の長さを求めます。

</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

4.1 地図上の 2 点間の距離

1. 次の三角形 ABC において 3 つの点 D、E、F を次の関係が成り立つように置きます：

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC} \text{ かつ } \frac{CF}{CA} = \frac{CE}{CB}$$

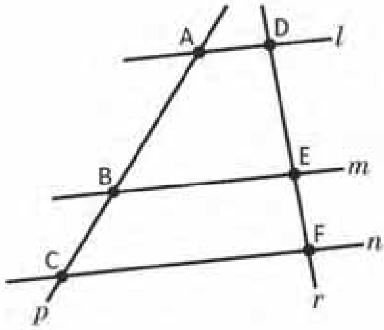


a) 点 D、E 、F と結んでできる線分のうち、どれが $\overline{AB}$ に平行ですか? 解答の理由も述べましょう。

b) 点 D、E 、F と結んでできる線分のうち、どれが $\overline{BC}$ に平行ですか? 解答の理由も述べましょう。

c) ∢CEF の大きさはどれだけですか。

2. 次の図で、直線 *p* と *r* が 3 本の平行線 *l*、*m*、*n* と交わります。



AB = 7.5 cm、BC = 4.5 cm、DE = 6 cm なら、$\overline{EF}$ の長さはどれだけですか。

地図や図面は非常に小さいまたは大きい対象を紙面上で表すために使います。地図や図面で表される土地や対象物の大きさは実際のものに対し相似です。地図上の 2 点間の距離と、実際の距離の長さの比を**縮尺**といいます。

例えば、この地図の縮尺は 1：50 000 です。サルバドール・デル・ムンド記念碑とエルサルバドル大学の 2 か所に丸印がついています。2 点を結ぶ線分を定規で測ると長さは 6 cm です。*x* を 2 点間の実際の距離とすると：

$$\frac{6}{x} = \frac{1}{50\,000}$$

この式から *x* の解を求めると：

$$6(50\,000) = x$$
$$x = 300\,000$$

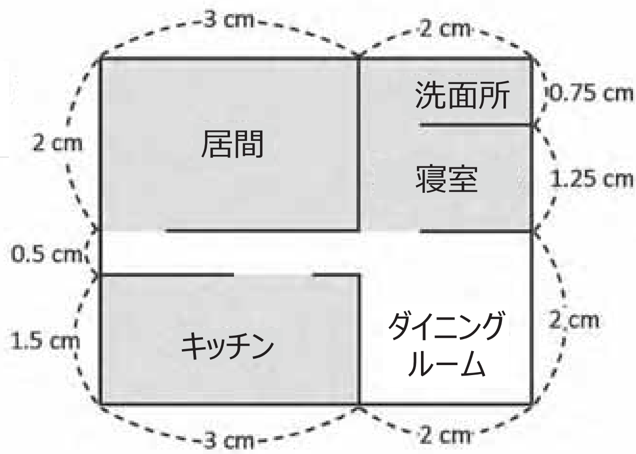
よって、サルバドール・デル・ムンド記念碑とエルサルバドル大学の距離は 300 000 cm つまり 3 km です。

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

1. この地図の縮尺は 1 : 2 250 000 です。サンタ・アナ火山とサン・ビセンテ火山を結ぶ 2 点の線分が 4 cm のとき、2 つの火山の実際の距離はどれだけですか?

2. 次の図面について問題を解きましょう：

a) 居間の実際の寸法が 4.8 m × 7.2 m のとき、この図面の縮尺を求めましょう。



b) 洗面所、ダイニングルーム、キッチンの実際の寸法を求めましょう。

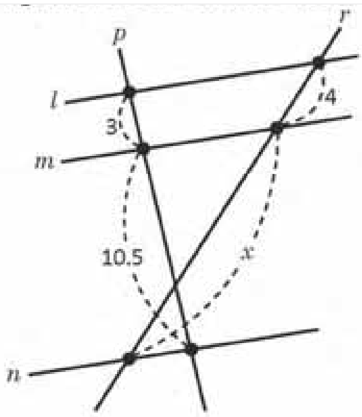
単位はすべて同じ単位を使います。

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

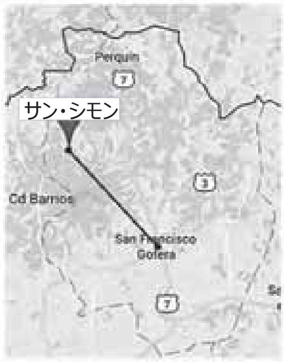
4.2 相似多角形の面積

R

1. 次の図で、直線 p と r が 3 本の平行線 l、m、n と交わります。x の値を求めましょう：



2. モラサン県のサン・シモン市とサン・フランシスコ・ゴテーラ市の距離は 20 km です。地図上で 2 つの市をむすぶ線分が 2.5 cm なら縮尺はどれだけですか。



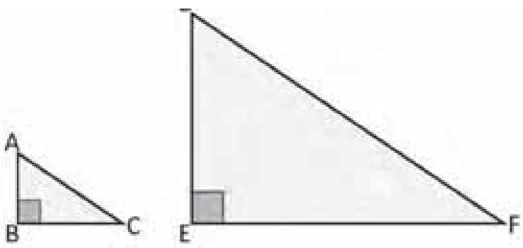
C

2 つの相似図形の面積の比は、相似比の 2 乗に等しい。

例えば、三角形 ABC と DEF は相似であり、相似比は 1：3 です。三角形 ABC の面積は $\frac{(BC)(AB)}{2}$、三角形 DEF の面積は $\frac{(EF)(DE)}{2}$ です。

よって、2 つの三角形の面積比は：

$$\frac{(ABC)}{(DEF)} = \frac{\frac{(BC)(AB)}{2}}{\frac{(EF)(DE)}{2}} = \left(\frac{BC}{EF}\right)\left(\frac{AB}{DE}\right)$$

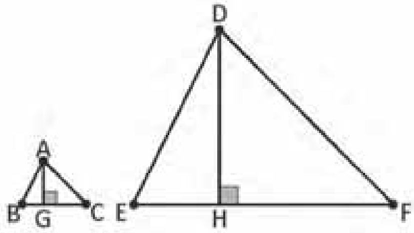


$\frac{BC}{EF} = \frac{1}{3}$ かつ $\frac{AB}{DE} = \frac{1}{3}$（相似比）なので、よって：

$$\frac{(ABC)}{(DEF)} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

よって、ΔABC と ΔDEF の面積比は $\frac{1}{9}$（相似比の 2 乗）と等しくなります。

1. 次の三角形 ABC と DEF の相似比は 1 : 4 で、BC = 3 cm、AG = 2 cm、EF = 12 cm、DH = 8 cm です。
   a) 2 つの三角形の面積比はどれだけですか? 授業で学習した方法を使いましょう。
   b) 前項の問題の解答を、まず 2 つの三角形の面積を求め、次に面積比を求めて検証しましょう。



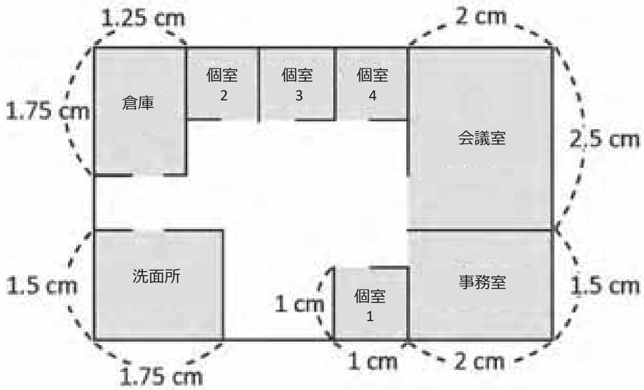
2. 2 つの相似な三角形の面積比が $\frac{1}{25}$ のとき、2 つの三角形の相似比はどれだけですか? 解答の理由も述べましょう。

ユニット 5

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

4.3 相似な立体の体積

1. 次の図面は縮尺　1 ： 200　で作成されています。
倉庫、洗面所、会議室の面積を求めましょう。



2. 2 つの三角形の相似比は 2 : 5 です。面積比はどれだけですか。

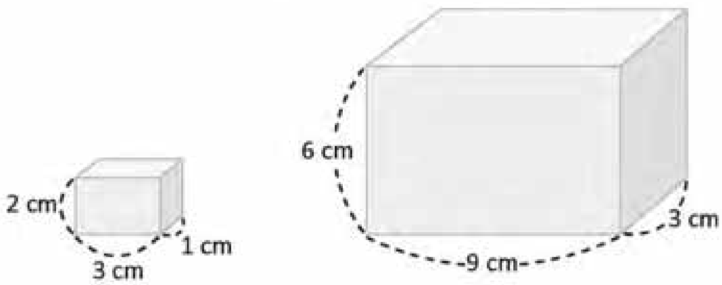
2 つかそれ以上の立体は、同じ種類の立体で、対応するそれぞれの線分（高さ、縦横の長さ、半径）の比が等しいとき、相似です。
2 つの相似な立体の体積比は相似比の 3 乗に等しくなります。

同じ種類の立体とは、比較する面、辺、頂点の部位が対応している立体を意味します。例えば角錐と直方体は面、辺、頂点が対応しておらず比較できないので同じ種類の立体ではありません。

例えば、この 2 つの直方体は対応する辺の長さの比が等しいので相似です。つまり：$\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ が成り立ちます。

V_1 を小さい方の直方体の体積、V_2 を大きい方の直方体の体積とすると、2 つの比は：

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{(2)(3)(1)}{(6)(9)(3)}$$
$$= \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{3}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

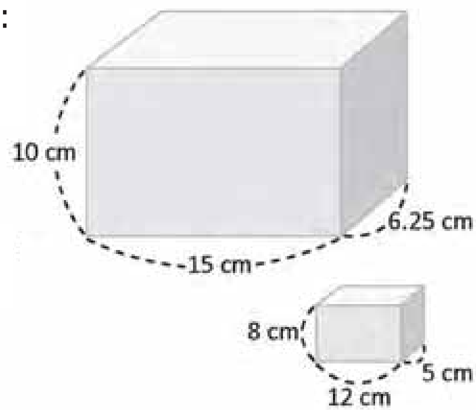


よって、小さい直方体と大きい直方体の体積比は $\frac{1}{27}$ です。

次の直方体が相似か答えましょう。相似の場合、体積比を求めましょう：

a) 授業で学習した方法を使いましょう：

b) a) で得た解答を、まず 2 つの直方体の体積を出し、次に体積比を求めて検証しましょう：



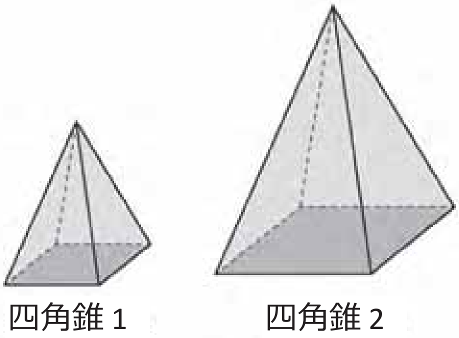
解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

4.4 三角形の相似を利用して解く問題

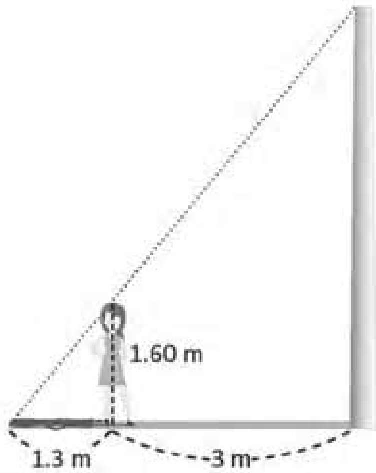
1. 2 つの相似な三角形の面積比は $\frac{9}{16}$ です。2 つの三角形の相似比はどれだけですか? 解答の理由も述べましょう。

2. 次の 2 つの四角錐は相似で、底面は正方形です。四角錐 1 の高さは 9 cm、四角錐 2 の高さは 15 cm です。2 つの体積比を求めましょう。

四角錐の体積の求め方：
$$V_{正四角錐} = \frac{1}{3} \times A_B \times h$$
A_B が底面の面積、h が角錐の高さのとき。



1. フリアは近所にある電柱の高さを測ろうと思います。地面に落ちた自分の影の端と電柱の影の端が揃うように、電柱から 3 m 離れたところに立ちました。フリアの身長が 1.6 m、影の長さが 1.3 m とすると、電柱の高さはどれだけですか? 小数第二位までの概算を求めましょう。

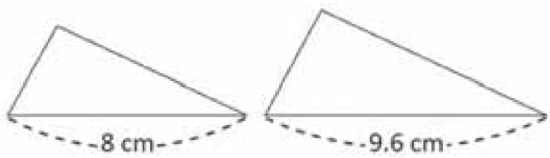
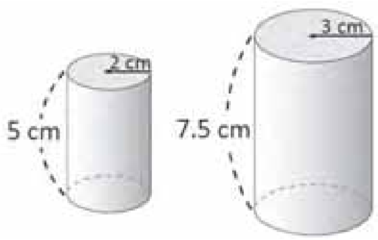
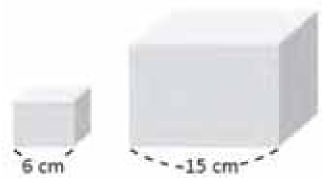


2. 次の地図で、線分 a、f、g が平行の時、バス停とパン屋の距離を求めましょう。

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

4.5 学習内容の自己評価

問題を解いて学習した内容を振り返り、当てはまる欄に "×" のチェックを入れましょう。
正直に答えましょう。

項目	できる	もう少し	できない	コメント
1. 地図の縮尺を求めます。例えば、次の地図でサンサルバドルとサンマルコスを結ぶ線分が 2 cm で実際の距離が 6.3 km のときの縮尺を求めます： 				
2. 相似な図形の面積比を求めます。例えば、次の2つの相似な三角形の面積比を求めます： 				
3. 相似な立体を見つけ、相似比を求めます。例えば、次の2つの円柱が相似であると証明します： 				
4. 相似な立体の体積比を求めます。例えば、次の2つの直方体の体積比を求めます： 				
5. 三角形の相似条件を使って問題を解きます。例えば、次のような条件下でサルバドール・デル・ムンド記念碑の高さを求めます。ある時間における記念碑の影の長さが 9 m、身長 1.68 m の女性の影が 84 cm のとき。				

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

応用問題

1. **地図製作法。**地図製作法とは、地図を作成し研究する学問です。地図の製作には**縮尺**が利用されます。これは実際の寸法とそれを表すものの間にある数学的な法則です。地図や図面などがそれにあたります。

縮尺には 2 種類あります。大きな対象物は縮小して作図、小さな対象物は拡大して作図します。例えば、縮尺が 1：250 なら、1 cm は実際には 250 cm あることを意味します。次の地図の縮尺は 1：500 000 です。エル・トリウンフォ港とサンサルバドルを結ぶ 2 点の線分の長さは 17 cm です。
2 つの地点の距離はどれだけですか?

エルサルバドルの最初の公式な地図は、ドイツ人技師マクシミリアン・フォン・ゾンネンシュターンが発表しました。2008年12月、エルサルバドルの地図製作の歴史はその年から数えて 150 年を迎えました。

このエルサルバドルの地図には1900年の日付があります。ロンドンで印刷されたもので、縮尺は約 1：200,000 です。初版は1906年初頭にエルサルバドルにもたらされました。

地図製作は、天文学、地理学などの発展に大きく貢献しました。また道路や鉄道、ホンジュラスやグアテマラとの地理的つながり、標高、県境など、様々な要素が視覚的に理解しやすくなりました。

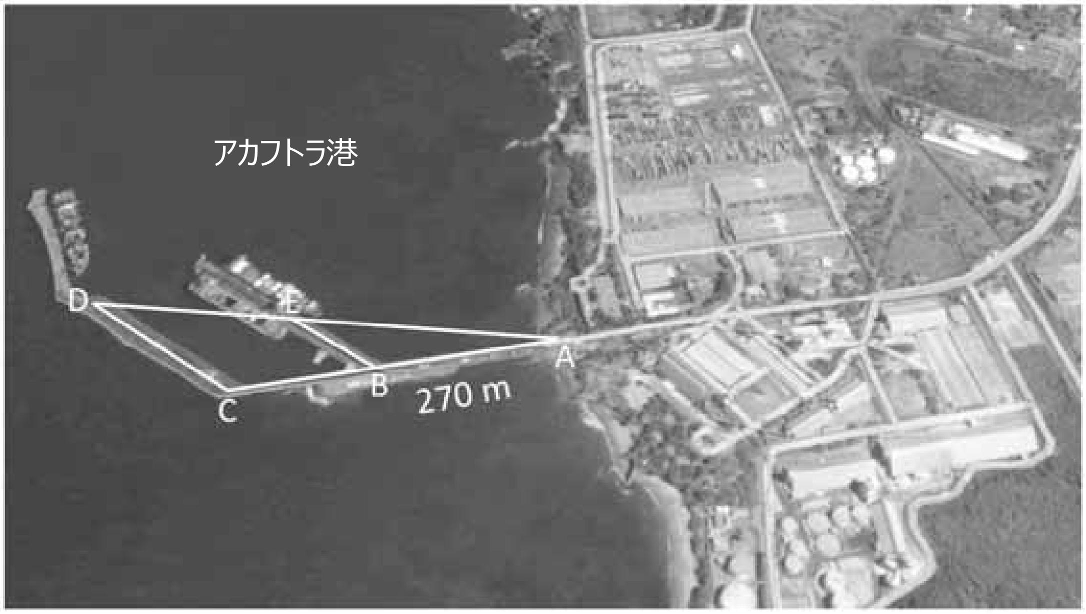
国立登記局(2012)エルサルバドル歴史地図

解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。

応用問題

2. アカフトラ港。 ソンソナーテ県アカフトラ市アカフトラ港は植民地時代から現代まで続く長い歴史を持った港です。何度か別の場所へ移されたり改修が行われたりしましたが、エルサルバドルと中南米の交易にとって最も重要な港の 1 つであることに変わりはありません。港には 2 つの桟橋があり、太平洋から集まる船舶を受け入れています。

1 台の車が点 A に停車しています。運転手が C の地点から 500 m 先の海岸 を眺めています。第 1 桟橋に 1 隻の船が停泊しています。道路から桟橋の距離は 370 m です（EB = 370 m）。$\overline{EB} \parallel \overline{DC}$ なら、運転手は第 2 桟橋（線分 DC）からどれだけの距離にいますか。



解答するのにどのくらい時間がかかりましたか。