ユニット6 ピタゴラスの定理

このユニットのねらい

図形や立体形で求められていない長さの計算を計算するためにピタゴラスの定理を使用します。
そして実際の問題の解法に応用します。

関連と発展

8 学年

ユニット 4：平行線と多角形の角
- 多角形の内角と外角の和
- 平行な直線と角

ユニット 5：三角形の合同条件
- 三角形の合同

ユニット 6：三角形と四角形の特徴
- 三角形
- 平行四辺形

ユニット 7：幾何学立体の面積と体積
- 立体の要素と特徴
- 幾何学的な立体体積の計算
- 体積の応用
- 立体の面積
- 面積の応用

9 学年

ユニット5：相似図形
- 相似
- 三角形の相似
- 相似と平行
- 相似と相似三角形の応用

ユニット 6：ピタゴラスの定理
- ピタゴラスの定理
- ピタゴラスの定理の応用

ユニット 7：円周角と中心角
- 中心角と円周角
- 中心角と円周角の応用

高校 1 年次

ユニット 5：斜三角形の解法
- 比率　鋭角の三角比
- 比率　非鋭角の三角比
- 斜三角形の解法

ユニット 6：恒等式と三角方程式
- 三角関数の恒等式
- 三角方程式

ユニット 7：ベクトルと複素数
- ベクトル
- ベクトルの点乗積
- 複素数
- GeoGebraを使った演習

ユニット学習計画

レッスン	時間	授業
1. ピタゴラスの定理	1	1. 直角三角形の斜辺の計算、パート 1
	1	2. 直角三角形の斜辺の計算、パート 2
	1	3. ピタゴラスの定理、パート 1
	1	4. ピタゴラスの定理、パート 2
	1	5. 直角を作る辺の長さの計算
	1	6. ピタゴラスの定理を使った問題の解法
	1	7. 特別な三角形
	1	8. ピタゴラスの定理の逆
2. ピタゴラスの定理の応用	1	1. 錐の高さと体積の計算
	1	2. 四角錐の高さと体積の計算
	1	3. 直方体の斜線の長さの計算
	1	4. 六角形の面積の計算
	1	5. 復習問題
	1	6. 復習問題
	1	7. ピタゴラスの定理の応用
	1	8. 復習問題
	1	9. 復習問題
	1	ユニット 6 のテスト

授業 17 時間 + ユニット 6 の テスト

各レッスンの要点

レッスン1：ピタゴラスの定理

面積の計算を通し、斜辺の長さを求めます。隣辺の長さを簡単に求める方法を学習し、その後、ピタゴラスの定理を定着させ、隣辺と斜辺が関係する公式を使い、隣辺の長さの計算を行います。ピタゴラスの定理の逆や三角形の長さを求めるための使用といった重要点を学習します。

レッスン2：ピタゴラスの定理の応用

日常の、また数学での問題を、ピタゴラスの定理を使用して解いていきます。これらにおいて、定理の重要性は、立体の高さの計算と特定の対象の面積の決定にあります。

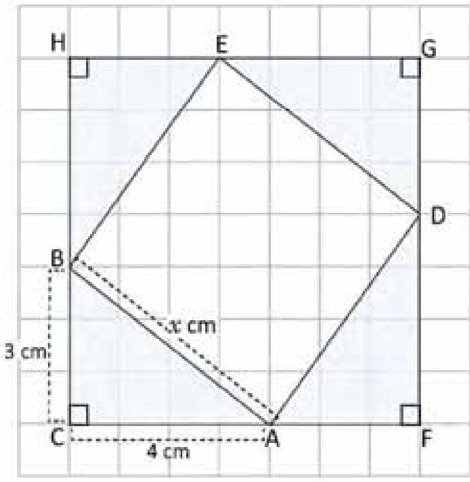
レッスン 1 ピタゴラスの定理

1.1 直角三角形の斜辺の計算、パート 1

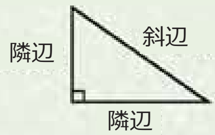
P

図のΔABC、ΔDAF、ΔEDG、ΔBEH は直角三角形であり合同です。

a) 正方形 CFGH の面積を求めましょう。
b) 四角形 ADEB の面積を求めましょう。
c) $\sphericalangle BAD = 90°$ であることを確認して、四角形 ADEB は正方形であることを証明しましょう。
d) 辺 AB の長さを求めましょう。



直角三角形において、90° の角に隣接する辺のことを**隣辺**と呼び、直角の反対側にある辺のことを**斜辺**と呼びます。



S

a) CF = 4 + 3 = 7 (cm)、したがって面積は：$7^2 = 49$ (cm²)

b) 四角形 ADEB の面積は、正方形 FGHC から 4 つの合同な三角形の面積を引くことで計算できます。

$$(ADEB) = (FGHC) - (ABC) \times 4$$
$$= (4+3)^2 - \frac{3\times 4}{2} \times 4$$
$$= 49 - 24$$
$$= 25\ (cm)^2$$

c) $\sphericalangle BAD = 180° - (\sphericalangle CAB + \sphericalangle DAF)$
$= 180° - (\sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC)$, dado que $\Delta ABC \cong \Delta DAF$
$= 180° - 90° = 90°$

同様に $\sphericalangle ADE = \sphericalangle DEB = \sphericalangle EBA = 90°$ になります。

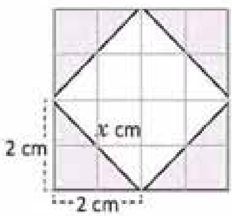
四角形 ADEB において辺と角は等しいので、これは正方形です。

d) 正方形 ADEB の面積は AB^2 であり、さらにその面積は 25 cm² です。したがって $AB^2 = 25$、AB = 5 (cm)

C

4 つの合同な直角三角形で正方形を形成しその面積を計算すると、隣辺から斜辺の長さを求めることができます。

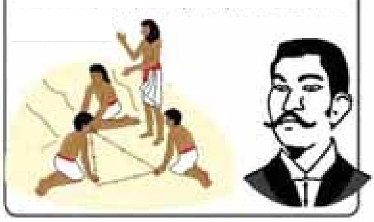
次の図形の x の値を求めましょう。



$x = 2\sqrt{2}$

考古学の記録によると、紀元前 2000 年頃エジプトで同じ長さの 12 本の縄を繋げました。このうちの連続する 5 本を伸ばし結び目から引っ張ったところ、1つの直角を含む確かな三角形が形成されました。この 3、4、5 の辺を持つ三角形は、エジプトの聖なる三角形として知られています。

W. ダンハム (2002). 数学の知性—天才と定理でたどる数学史



128

達成の目安

1.1 直角三角形の特に面積を使って、斜辺の長さを求めます。

学習の流れ

中学校で使う全ての定理の中でも、ピタゴラスの定理は他の重要な証明にも役に立ち、高校で最も使う定理でもあります。
8 年生で図形と論理的な証明の仕方を学びますが、このユニットでは 2 つの異なった方法でピタゴラスの定理を証明します。そのうちの 1 つでは、前のユニットで学んだ三角形の相似の知識が必要です。

ねらい

Ⓟ、Ⓢ ステップ順に斜辺の長さを求めます。図では各正方形に辺 1 があることが確認でき、これにより最初の設問が解きやすくなります。解答するとき、(FGHC) は四角形 FGHC の面積を表していることを確認する必要があります。

ADEB の面積を求め、それが正方形であることを証明することが重要です。そうすれば、後は平方根を計算するだけで辺の長さを求めることができます。

一部の設問の解答：

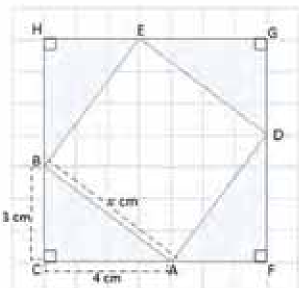
図中の数値より、大きな正方形の面積：
$(4\text{ cm})^2 = 16\text{ cm}^2$
三角形の面積：
$\frac{2 \times 2}{2} = 2\text{ cm}^2$
4 つの三角形の合計：
$4 \times 2 = 8\text{ cm}^2$
白い正方形の面積：
$16\text{ cm}^2 - 8\text{ cm}^2 = 8\text{ cm}^2$

したがって、x の値は以下のようになります：
$x = \sqrt{8}$ cm つまり、$x = 2\sqrt{2}$ cm
このような単純化はユニット 2 の平方根で学習しました。

備考：
冒頭の設問と同じように、A、B、C、D で頂点を示しながら解くことができます。また三角形は合同であると仮定し、白い部分が正方形であることを証明する必要はありません。

日付： **U6 1.1**

Ⓟ 図形のΔABC、ΔDAF、ΔEDG、ΔBEH は合同です。



a) 正方形 CFGH の面積を求めましょう。
b) ADEB の面積を求めましょう。
c) ADEB が正方形であることを証明しましょう。
d) 辺 AB の長さを求めましょう。

Ⓢ a) CF = 4 + 3 = 7 cm 面積は $7^2 = 49\text{ cm}^2$ です。
b) $(ADEB) = (FGHC) - (ABC) \times 4$
$= (4+3)^2 - \frac{3 \times 4}{2} \times 4$
$= 49 - 24$
$= 25\text{ cm}^2$.
c) $\sphericalangle BAD = 180° - (\sphericalangle CAB + \sphericalangle DAF)$
$= 180° - (\sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC)$;
ΔABC ≅ ΔDAFなので、
$= 180° - 90° = 90°$.
d) 正方形の面積は AB^2
$AB^2 = 25\text{ cm}^2$、したがって AB = 5 cm

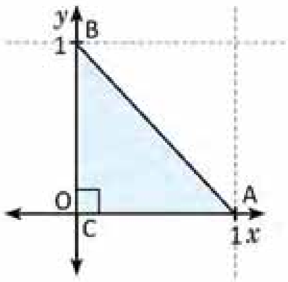
Ⓡ $x = 2\sqrt{2}$

宿題： 練習帳130ページ

1.2 直角三角形の斜辺の計算、パート 2

P

A (1, 0)、B (0, 1)、C (0, 0) を頂点とする直角三角形の斜辺の長さを求めましょう。

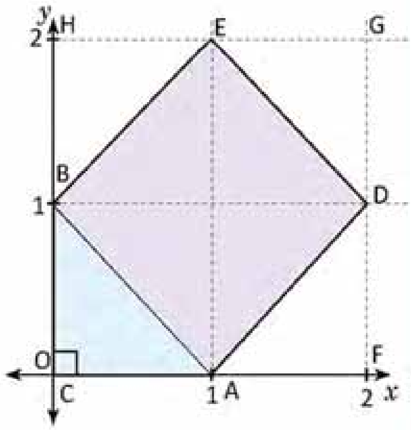


ある 1 点は、x 軸上の値を a、y 軸上の値を b とする (a, b) として座標平面上で表されます。

S

一辺が三角形 ABC の斜辺 AB となるような正方形を作ると、この正方形の頂点は A (1, 0), D (2, 1), E (1, 2), B (0, 1) となります。

三角形 ABC と合同の三角形を作ると、正方形 FGHC が形成されます。正方形 ADEB の面積は、正方形 FGHC の面積から 4 つの三角形の面積を引くことで求められます。



$$
\begin{aligned}
(ADEB) &= (FGHC) - (ABC) \times 4 \\
&= (2)^2 - \frac{1 \times 1}{2} \times 4 \\
&= 4 - 2 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

よって、$AB^2 = 2$ (ADEB の面積)

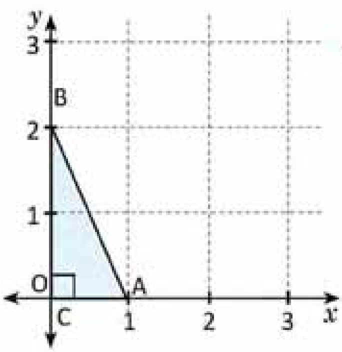
したがって、$AB = \sqrt{2}$ (正の平方根)

C

A (1, 0)、B (0, 1)、C (0, 0) を頂点とする直角三角形の斜辺の長さは $\sqrt{2}$ です。

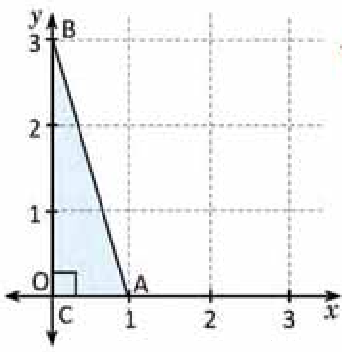
各設問の頂点によって形成された三角形の斜辺を求めましょう。

a) A(1, 0), B(0, 2) と C(0, 0)



$\sqrt{5}$

b) A(1, 0),B(0, 3) と C(0, 0)



$\sqrt{10}$

達成の目安

1.2 座標平面上の点を頂点とする直角三角形の斜辺を求めます。

学習の流れ

前の授業では、面積を使い斜辺の長さを計算する手順を学びました。今回の授業でも同じ計算手順は使うものの、前回とは違い座標平面上の点を頂点とする直角三角形を取り扱います。点は軸の上にあるため、隣辺の長さは簡単に求めることができます。

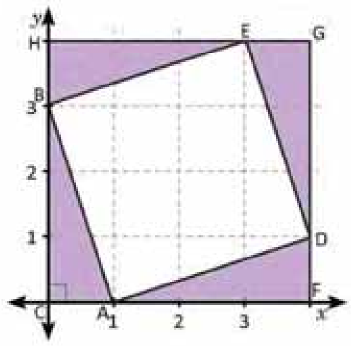
ねらい

Ⓟ、Ⓢ 前の授業の考え方を使って解くことが重要になります。したがって斜辺を含む正方形を作り、その周りに元の三角形と合同の 3 つの三角形が形成されることを確認する必要があります。このようにして、1.1 の授業の内容を使うことができます。

今回は特別な解答になりますが、同様の手順を他の直角三角形にも使うことができることを示す必要があります。

一部の設問の解答：

b)



$$(ADEB) = (CFGH) - (ABC) \times 4$$
$$= (4)^2 - \frac{3 \times 1}{2} \times 4$$
$$= 16 - 6$$
$$= 10$$

よって、$AB^2 = 10$.

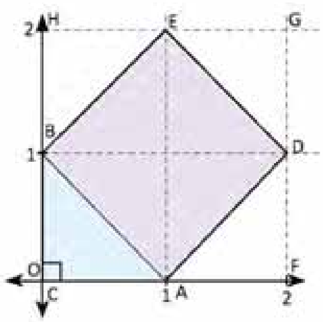
したがって、$AB = \sqrt{10}$.

特に b) など、これらの練習問題を解くときはノートの方眼を使い、少し線を延ばして作図できるようにする必要があります。

備考：
正方形と合同の三角形は問題を解くときに板書をし、それ以前にはしないで下さい。

日付： **U6 1.2**

Ⓟ A (1, 0), B (0, 1), C (0, 0) のときの、AB の長さを求めましょう。



Ⓢ AB を含む正方形を作ります。また ABC と合同の三角形を作ります。

$$(ADEB) = (FGHC) - (ABC) \times 4$$
$$= 2^2 - \frac{1 \times 1}{2} \times 4$$
$$= 4 - 2$$
$$= 2$$

よって、$AB^2 = 2$.

したがって、$AB = \sqrt{2}$.

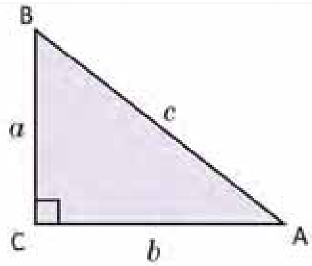
Ⓡ a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{10}$

宿題： 練習帳131ページ

1.3 ピタゴラスの定理、パート 1

P

CA = b、AB = c、BC = a、∢BCA = 90° となるような ΔABC があります。1 の授業での手順を使い、$a^2 + b^2 = c^2$ であることを証明しましょう。

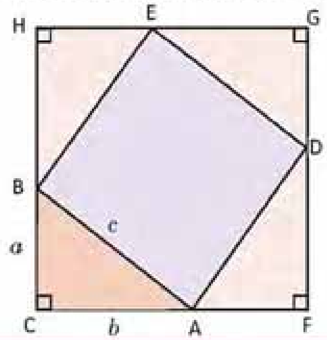


S

1 つの辺が斜辺 AB となる正方形を作ります。

斜辺が正方形 ADEB の残りの 3 つの辺となるような ΔABC と合同の 3 つの直角三角形を作ると、各辺の長さが $a + b$ となる正方形 CFGH が形成されます。

CFGH の面積は以下のように 2 つの方法で求められます：



方法 1

$A_1 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

方法 2

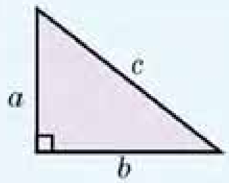
$A_2 = c^2 + 4(\frac{ab}{2}) = c^2 + 2ab$.

同じ範囲の面積を示しているので $A_1 = A_2$ になります。

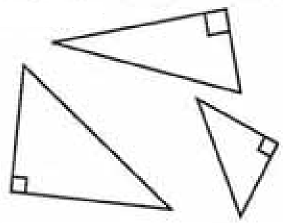
$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$.

C

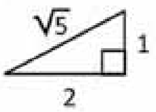
直角三角形で隣辺の長さの 2 乗を足した数は、斜辺の長さの 2 乗に等しくなります。つまり、三角形の辺が a、b、c のとき、$a^2 + b^2 = c^2$ が成立します。これは**ピタゴラスの定理**として知られています。

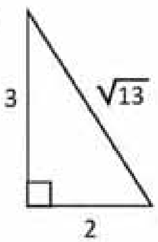


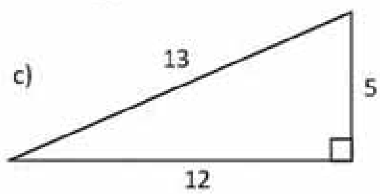
ピタゴラスの定理は直角三角形の位置に関わらず成立します。



次の直角三角形においてピタゴラスの定理が成立することを確認しましょう。

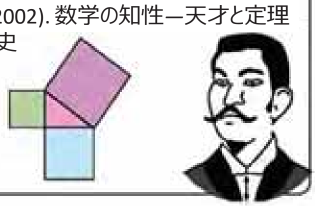
a)


b)


c)


エウクレイデス (紀元前 300 年) は次の命題を示しました：「直角三角形において、直角の対辺を含む正方形の面積は、他の 2 辺を含むそれぞれの正方形の面積の合計と等しくなる。」

W. ダンハム (2002). 数学の知性―天才と定理でたどる数学史



達成の目安

1.3 三角形と正方形の面積を使いピタゴラスの定理を証明します。

学習の流れ

前の授業では、斜辺を含む正方形の面積の平方根から斜辺の長さを出しました。今回の授業では、1.1 の授業と同じように面積を使ってピタゴラスの定理を証明しますが、今回は一般化します。

ねらい

Ⓟ、Ⓢ $a^2 + b^2 = c^2$ の関係の有効性を証明します。問題を解くヒントとして、1 の授業で使った手順を復習するよう強調する必要があります。したがって、まず斜辺を含む正方形を作ります。

両方とも同じ正方形の面積を表しているので、$A_1 = A_2$ と定めて問題を解くこともできます。

一部の設問の解答：

a)
$1^2 + 2^2 = 1 + 4$
$= 5$
さらに、$(\sqrt{5}\,)^2 = 5$
したがって、ピタゴラスの定理は成立します。

b)
$2^2 + 3^2 = 4 + 9$
$= 13$
さらに、$(\sqrt{13})^2 = 13$
したがって、ピタゴラスの定理は成立します。

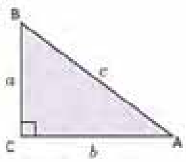
c)
$12^2 + 5^2 = 144 + 25$
$= 169$
さらに、$13^2 = 169$
したがって、ピタゴラスの定理は成立します。

ユニット 2 より、$(\sqrt{a})^2 = a$ であることを知っています。

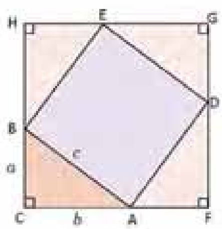
三角形の位置に関係なく、直角三角形であれば常にこの関係は成立します。

日付： **U6 1.3**

Ⓟ 直角三角形 ABC があります。$a^2 + b^2 = c^2$ を証明しましょう。



Ⓢ



方法 1
$A_1 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$
方法 2
$A_2 = c^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right) = c^2 + 2ab.$

$A_1 = A_2$ 同じ範囲の面積を示しているからです。

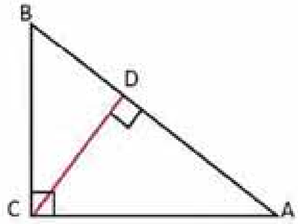
$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$

Ⓡ a)
$1^2 + 2^2 = 1 + 4$
$= 5$
さらに、 $(\sqrt{5})^2 = 5.$
したがって、ピタゴラスの定理は成立します。

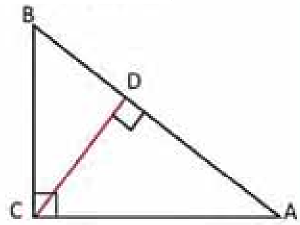
宿題： 練習帳132ページ

1.4 ピタゴラスの定理、パート2

P $\Delta ABC \sim \Delta CBD$ と $\Delta ABC \sim \Delta ACD$ の相似を使い、ΔABC において $BC^2 + CA^2 = AB^2$ が成立することを証明しましょう。



S 頂点 C から辺 AB へ高さの線を引くと、直角三角形 ADC と直角三角形 CDB が形成されます。



$\Delta ABC \sim \Delta CBD$ (2 組の角が等しい)

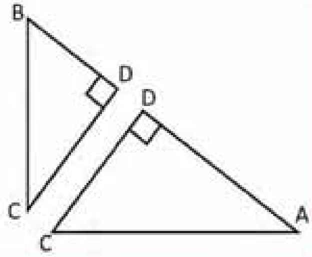
$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{DB}$ (三角形 ABC と三角形 CBD が相似のため)

よって、$BC^2 = AB \times DB$ (比例式の基本特性)

$\Delta ABC \sim \Delta ACD$ (2 組の角が等しい)

$\frac{AB}{CA} = \frac{CA}{AD}$ (三角形 ABC と三角形 ADC が相似のため)

よって、$CA^2 = AB \times AD$ (比例式の基本特性)



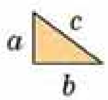
ゆえに、$CA^2 + BC^2 = AB \times AD + AB \times DB = AB \times (AD + DB) = AB^2$

したがって、$BC^2 + CA^2 = AB^2$

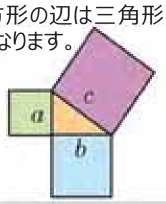
C 三角形の相似を使いピタゴラスの定理を証明することができます。

切り抜きを使ったピタゴラスの定理の確認： 1 番大きい正方形の面積 (c^2 の範囲) が、他の 2 つの正方形の面積の合計 (b^2 と a^2 の面積) と等しいことを確認しましょう。

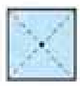
直角三角形を1つ描きます。



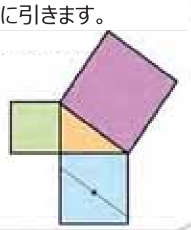
カラーページの3つの正方形を切り抜きます。それぞれの正方形の辺は三角形の辺にもなります。



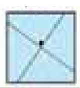
水色の正方形を対角線に沿って折り、再度広げて対角線同士の交差点に印をつけます。



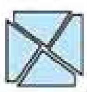
斜辺と平行になる線を、印を通るように引きます。



先ほどの線と垂直に交わる線を、印を通るように引きます。

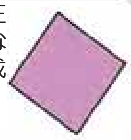


水色の正方形を4つに切り分けます。



切り分けた4つの図形と正方形をくっつけます。

最も大きい正方形と合同な正方形を形成します。



ユニット6

達成の目安

1.4 三角形の相似を使いピタゴラスの定理を証明します。

学習の流れ

1.3 と 1.4 の授業では別の 2 つの考え方を使い、それぞれ異なった方法でピタゴラスの定理を証明します。1.3 では形成された三角形との合同を使い、1.4 では前のユニットの内容であった三角形の相似を使います。

ねらい

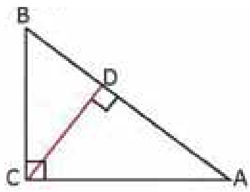
Ⓟ、Ⓢ 証明の理解度を上げるために、形成された三角形を分けて、まずはそれぞれに対応する辺を確認することができます。形成された三角形と三角形 ABC との相似から得られる関係性を総合して証明を行います。

Ⓒ ここでは 2 つのみの紹介ですが、ピタゴラスの定理を証明する方法は沢山あることを伝えることが重要です。

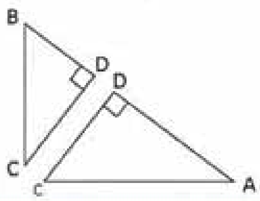
平行線や垂線を引くときは、定規や三角定規を使う必要があります。切り抜きが大きな正方形と完全に一致することを確認することが重要です。

日付： **U6 1.4**

Ⓟ この図形において：
$\Delta ABC \sim \Delta CBD$、$\Delta ABC \sim \Delta ACD$ です。
$BC^2 + CA^2 = AB^2$であることを証明しましょう。



Ⓢ 図形を 2 つの三角形に分けます。



1. $\Delta ABC \sim \Delta CBD$ なので
$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{DB}$ (相似による)
よって、$BC^2 = AB \times DB$.

2. $\Delta ABC \sim \Delta ACD$ なので
$\frac{AB}{CA} = \frac{CA}{AD}$ (相似による)
よって、$CA^2 = AB \times AD$.

$$
\begin{aligned}
CA^2 + BC^2 &= AB \times AD + AB \times DB \\
&= AB \times (AD + DB) \\
&= AB \times AB \\
&= AB^2
\end{aligned}
$$

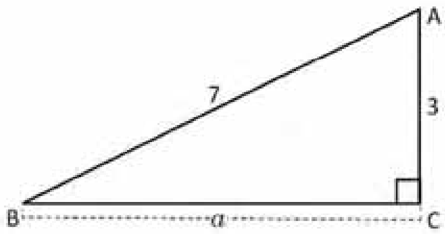
したがって、$BC^2 + CA^2 = AB^2$

宿題：練習帳133ページ

1.5 隣辺の長さの計算

P

次の直角三角形 ABC において、隣辺 BC の長さ、つまり a の値を求めなさい。



S

直角三角形は $3^2 + a^2 = 7^2$ (ピタゴラスの定理) を満たすので、

a^2 を求め、　　　$a^2 = 7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40.$

平方根の定義から、$a^2 = 40 \Rightarrow a = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ となります。$a > 0$ なので、

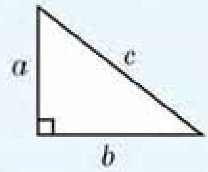
よって　　　$a = 2\sqrt{10}$.

直角三角形 ABC では、斜辺の長さは 7、また隣辺は 3 で、2 つ目の隣辺の長さは $2\sqrt{10}$ 。

C

一般的に、直角三角形において、辺 a、b、c は、$a^2 + b^2 = c^2$ を満たすため、
斜辺と隣辺は次のように求めることができます：

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$　　$a = \sqrt{c^2 - b^2}$　　$b = \sqrt{c^2 - a^2}$

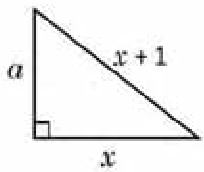


E

x を使い、隣辺 a の値を求めなさい。$x > 0$ とします。

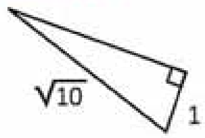
よって $a^2 = (x + 1)^2 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1.$

したがって、$a = \sqrt{2x + 1}$.

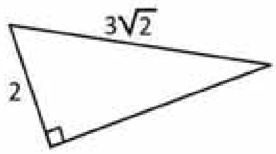


次の三角形の不明な辺の長さを求めなさい：

辺の長さは 3



辺の長さは $\sqrt{14}$



達成の目安

1.5　不明な隣辺の長さを、ピタゴラスの定理を用いて求めなさい。

学習の流れ

前課では、ピタゴラスの定理とさまざまな直角三角形の辺の値が定理を満たしているか学習しました。これから先は、直角三角形の不明な辺の計算にはピタゴラスの定理を使います。

ねらい

Ⓟ、Ⓢ　隣辺の一辺を求めるためにピタゴラスの定理を用います。最終的には $x^2 = b$ の形の二次方程式を定着させます。ユニット 3 で学習したように、別の記号により 2 つの答えがでてきます。この場合は、三角形の辺なので、正の答えだけを使うようにします。

Ⓔ　この場合、解答は、変数であらわされます。辺の長さは正なので、$x > 0$ の条件は必要です。

一部の設問の回答：

はじめの三角形で不明な辺は a とします

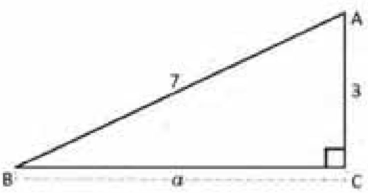
$$(\sqrt{10})^2 = 1^2 + a^2$$
$$(\sqrt{10})^2 = 1^2 + a^2$$
$$a^2 = 10 - 1$$
$$a = \sqrt{9}$$
$$a = 3$$

2 番目の三角形では不明な辺は a とします

$$(3\sqrt{2})^2 = 2^2 + a^2$$
$$\sqrt{18})^2 = 4 + a^2$$
$$a^2 = 18 - 4$$
$$a = \sqrt{14}$$

日付：　　　　**U6 1.5**

Ⓟ　次の直角三角形 ABCにおいて a の値を求めなさい。



Ⓢ　直角三角形では：

$3^2 + a^2 = 7^2$　　(ピタゴラスの定理による)

$a^2 = 7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40$

$a = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

よって、$a = 2\sqrt{10}$ となります。

Ⓔ　x を使って a を表しなさい。

$x > 0$ とします。

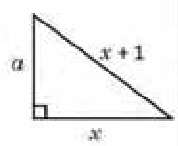
ピタゴラスの定理から：

$a^2 = (x+1)^2 - x^2$

$= x^2 + 2x + 1 - x^2$

$= 2x + 1$

$a = \sqrt{2x+1}$



Ⓡ　1. 辺の長さは 3 です。

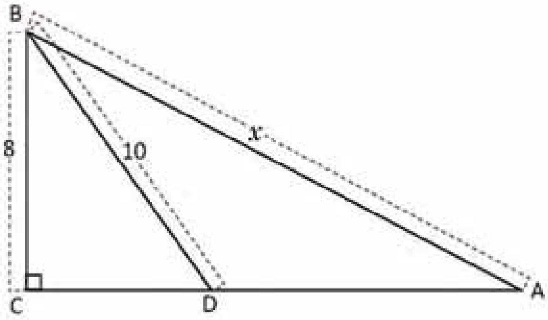
2. 辺の長さは $\sqrt{14}$ です。

宿題：　練習帳134ページ

1.6 ピタゴラスの定理を使った問題の解法

P

三角形 ABC の斜辺の値を、ABD が二等辺三角形であることを考慮して、求めなさい。



S

x の値を求めるには、隣辺 CA の長さを知る必要があります。

ΔABD は二等辺なので、辺 DA の長さは 10。

ΔDBC にピタゴラスの定理をあてはめて：

$CD^2 + BC^2 = DB^2 \Rightarrow CD^2 + 8^2 = 10^2$
$\Rightarrow CD^2 = 36$、$CD > 0$ なので
$\Rightarrow CD = 6$

CA = CD + DA なので、CA = 10 + 6 = 16 となります。

最後に ΔABC にピタゴラスの定理をあてはめます：

$x^2 = BC^2 + CA^2 \Rightarrow x^2 = 8^2 + 16^2 = 320.$

したがって、$x = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$ となります。

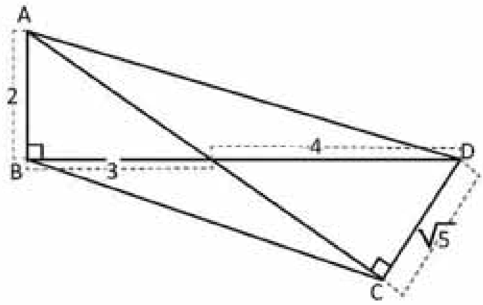
C

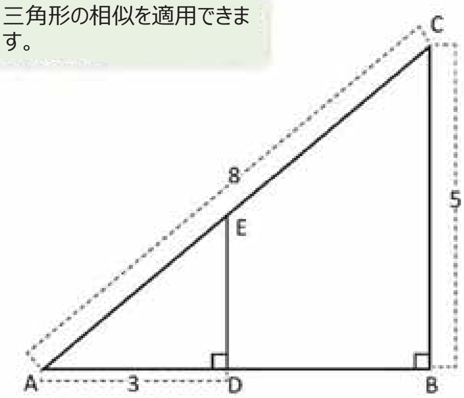
ピタゴラスの定理を用いて問題を解くには、図形の直角三角形を特定し、不明な辺の長さを求めるために、比例する値を用います。

1. 四角形 ABCD の斜辺 AC の長さを求めなさい。

2. ΔADE の斜辺の長さを計算しなさい。

三角形の相似を適用できます。





$AC = \sqrt{13} + \sqrt{11}$

$AE = \dfrac{24}{\sqrt{39}}$

ユニット6

133

達成の目安

1.6　ピタゴラスの定理を 2 度用いて、三角形の辺の長さを計算しなさい。

学習の流れ

前回の授業では、三角形の不明な一辺の長さを、ピタゴラスの定理を用いて計算しました。この授業では、辺の長さを求めるために、ピタゴラスの定理を2回あてはめなければならず、さらに答えを出すためには、別の計算結果を適用しなくてはなりません。

ねらい

Ⓟ、Ⓢ 三角形 ABC は直角三角形であるから、BC の値は求められ、ピタゴラスの定理をあてはめるためには、唯一 CA の値が不明なので、BA を求めます。これを行うために大事なことは、仮定を使うことです。

一部の設問の回答：

1.
対角線の交わる点を M とします。
三角形 ABM が満たしているのは：

$$\begin{aligned} AM^2 &= 2^2 + 3^2 \\ &= 4 + 9 \\ &= 13 \\ AM &= \sqrt{13}. \end{aligned}$$

三角形 CDM が満たしているのは：

$$\begin{aligned} DM^2 &= MC^2 + CD^2 \\ 4^2 &= MC^2 + (\sqrt{5})^2 \\ MC^2 &= 16 - 5 \\ MC &= \sqrt{11} \end{aligned}$$

よって、$MC = \sqrt{11}$.

そして、$AC = AM + MC$, $AC = \sqrt{13} + \sqrt{11}$.

2.
ΔABC は直角三角形なので、以下が成り立ちます：

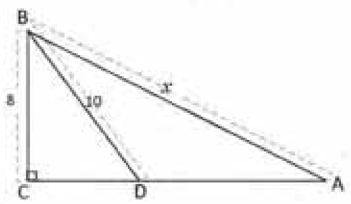
$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ 8^2 &= AB^2 + 5^2 \\ AB^2 &= 64 - 25 \\ AB &= \sqrt{39} \end{aligned}$$

さらに ΔABC ~ ΔADE (AAによる)
よって、

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$$
$$\frac{AE}{8} = \frac{3}{\sqrt{39}}$$
$$AE = \frac{24}{\sqrt{39}}$$

日付：　　　　**U6 1.6**

Ⓟ 二等辺三角形 ABD の x を求めなさい。



Ⓢ ΔABD は二等辺三角形なので DA = 10 です。ピタゴラスの定理をあてはめて

$$CD^2 + BC^2 = DB^2 \Rightarrow CD^2 + 8^2 = 10^2$$
$$\Rightarrow CD^2 = 36$$
$$\Rightarrow CD = 6$$

CA = CD + DA.
CA = 10 + 6.

ΔABC にピタゴラスの定理をあてはめて：

$$x^2 = BC^2 + CA^2 \Rightarrow x^2 = 8^2 + 16^2 = 320.$$

したがって、$x = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$ となります。

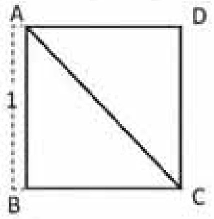
Ⓡ 1. $AC = \sqrt{13} + \sqrt{11}$
2. $AE = \frac{24}{\sqrt{39}}$

宿題： 練習帳135ページ。

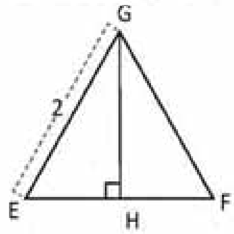
1.7 特別な三角形

P

1. 辺が 1 の四角 ABCD の斜辺 CA の長さはいくつでしょうか? ΔABC の角度はいくつでしょうか?



2. 辺の長さが 2 の正三角形 EFG の高さはいくつですか? ΔEFGの角度はいくつですか？



三角形の高さは、頂点から反対側の辺（またはその延長線）へ出る垂直な線分です。

S

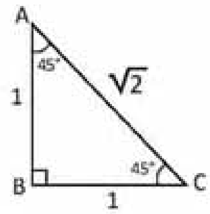
1. 対角線 CA は三角形 ABC と ACD の斜辺です。斜辺 CA の長さを求めるには、これら三角形のどれにでもピタゴラスの定理をあてはめるだけです。

ΔABC において：$AB^2 + BC^2 = CA^2 \Rightarrow CA^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

$\Rightarrow CA = \sqrt{2}$

よって ABCD の斜辺は $\sqrt{2}$.

四角形 ABCD の対角線 CA は、∢DAB と ∢BCD の二等分線なので、ΔABC の角度 ∢CAB と ∢BCAは 45°。



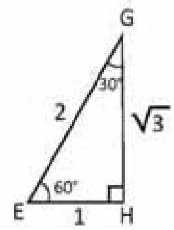
2. ΔEHG ≃ ΔFHG, EH = HF なのでしたがって、EH = 1。

ΔEHG において：$EH^2 + HG^2 = GE^2 \Rightarrow HG^2 = GE^2 - EH^2 = 2^2 - 1^2 = 3$

$\Rightarrow HG = \sqrt{3}$

したがって、ΔEHG の高さは $\sqrt{3}$.

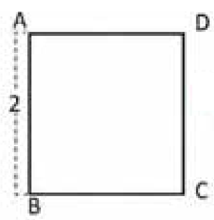
ΔEFG は正三角形なので ∢GEH = 60° であり、一方、内角の合計は 180° であることから、∢HGE = 30° です。



C

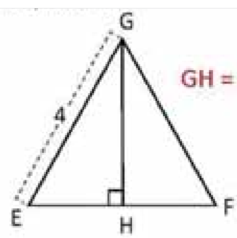
ABC と EHG の三角形は**特別な三角形**と呼ばれ、高校で三角法を学ぶ際に大いに役に立ちます。

1. 次の四角形の対角線の値はいくつですか？



斜辺の長さは $\sqrt{8}$

2. 次の正三角形の高さはいくつでしょうか？



$GH = 2\sqrt{3}$

3. 問 2 の三角形 EFG の面積はいくつですか?

三角形の面積は$4\sqrt{3}$です。

達成の目安

1.7 特別な三角形の辺の長さを、ピタゴラスの定理を用いて求めなさい。

学習の流れ

特別な三角形は、高校での三角法の学習で使われるので、この授業ではピタゴラスの定理を用いた三角形の辺の長さの求め方を学びます。

ねらい

Ⓟ、Ⓢ ピタゴラスの定理を用いて、四角形の対角線と三角形の高さを求めなさい。これらの特徴を持つ三角形は特別な三角形と呼ばれます。

一部の設問の回答：

1.
冒頭の設問と相似した形で解きます。

$CA^2 = 2^2 + 2^2$
$= 4 + 4$
$= 8$
$CA = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

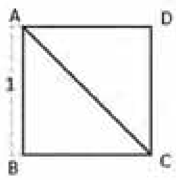
2.
条件 AA により $\Delta EHG \cong \Delta FHG$ なので、
$EH = HF$ であり $EH = 2$

したがって：
$GH^2 = 4^2 - 2^2$
$= 16 - 4$
$= 12$
$GH = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

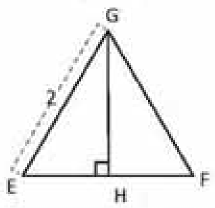
3.
面積 $= \dfrac{4 \times 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

日付： **U6 1.7**

Ⓟ 1. 次の正方形の場合 CA の長さは?



2. 正三角形において、GH の長さはいくつですか?



Ⓢ 1. ΔABC は長方形。したがって、
$CA^2 = AB^2 + BC^2$
$= 1^2 + 1^2$
$= 2$
$CA = \sqrt{2}$

2. $\Delta EHG \simeq \Delta FHG$, $EH = HF$ なので $EH = 1$
$GE^2 = HG^2 + EH^2$
$HE^2 = GE^2 - EH^2$
$= 2^2 - 1^2$
$= 3$
$GH = \sqrt{3}$

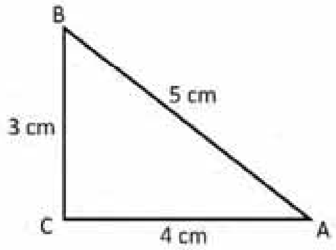
Ⓡ 1. $CA = \sqrt{8}$
2. $GH = 2\sqrt{3}$

宿題： 練習帳136ページ

1.8 ピタゴラスの定理の逆

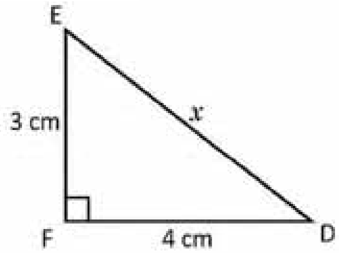
P

ΔABC において、$3^2 + 4^2 = 5^2$ を満たします。∢ACB の値が 90° であることを証明しなさい。



S

1. 三角形 ΔDEF は、辺 EF = 3 cm、辺 FD = 4 cm の直角三角形であるので、



2. ピタゴラスの定理を用いると、$DE^2 = EF^2 + FD^2$

$$\Rightarrow x^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$
$$\Rightarrow x = 5$$

3. CA = FD, AB = DE, BC = EF なので、ΔABC ≅ ΔDEF となります (3 辺の長さは等しい）。

4. ΔABC ≅ ΔDEF, ∢DFE = 90° なので、∢ACB = 90° です。

したがって ΔABC は直角三角形です。

C

三角形の 3 辺 a、b、c が、$a^2 + b^2 = c^2$ の関係を満たすとき、その三角形は直角三角形です。その斜辺は c です。この結果は**ピタゴラス定理の逆**と呼ばれます。

E

3 つの辺の長さが 8, 15, 17 であるとき、直角三角形であるか調べなさい。

2 つの二乗の和が、別の 1 つの二乗と同じか調べます：

$15^2 + 8^2 = 289$, $17^2 = 289$　よって $15^2 + 8^2 = 17^2$.

直角三角形では、斜辺が直角の隣辺の長さより長いことに注目しましょう。

ピタゴラスの定理の逆により、三角形は直角を有する直角三角形であると結論を出すことができます。

por lo tanto, es un triángulo rectángulo.

示された値が辺の長さであるとき、三角形は直角三角形か調べなさい。

a) 2 cm, 2 cm, 3 cm
直角三角形ではありません。

b) 4 cm, 5 cm, $\sqrt{41}$ cm
直角三角形です。

c) 7, 24, 25
直角三角形です。

d) 2, 3, 4
直角三角形ではありません。

ユニット6

135

達成の目安

1.8 三角形が直角三角形か確認するため、ピタゴラスの定理の逆を用いなさい。

学習の流れ

1.3 と 1.4 の授業では、直角三角形の仮定で、ピタゴラスの定理を定着させ、隣辺と斜辺の関係を結論として求めます。この授業では、この理論の逆も正しいと学習します。つまり、三角形の 3 辺がこの関係を満たすなら、直角三角形です。定理の逆は第 8 学年のユニット 6 で学びます。

ねらい

Ⓟ、Ⓢ 斜辺と隣辺が冒頭の設問と同じ長さだと知らない直角三角形を用います。三角形が相似であることが確立されたら、対応する角の角度は等しいので、よって、ABC も直角三角形です。

Ⓔ 3 つの数字で検証するには、最も大きい値を特定し、その値の二乗が他 2 つの数字の二乗の和と同じでなければなりません。

一部の設問の回答：

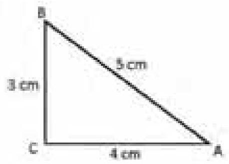
a) $3^2 = 9$
$2^2 + 2^2 = 8$
ピタゴラスの定理の逆は当てはまらないので、直角三角形ではありません。

b) $(\sqrt{41})^2 = 41$
$4^2 + 5^2 = 25 + 16 = 41.$
よって、直角三角形をなします。

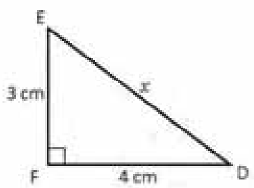
c) $(25)^2 = 625$
$7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$
よって、直角三角形をなします。

日付： **U6 1.8**

Ⓟ ΔABC において、$3^2 + 4^2 = 5^2$ を満たします。$\sphericalangle ACB = 90°$ であることを証明しなさい。



Ⓢ ΔDEF をふまえて：



ピタゴラスの定理を利用し：

$$DE^2 = EF^2 + FD^2$$
$$x^2 = 3^2 + 4^2$$
$$= 9 + 16 = 25$$

よって、$x = 5$
CA = FD、AB = DE、BC = EF、よって $\Delta ABC \cong \Delta DEF$
三角形の一致で導き出すことができるのは
$\sphericalangle ACB = 90°$ です。

Ⓔ 三角形の辺の長さは 15、8、17 です。さらに、次を満たします：

$$15^2 + 8^2 = 289 = 17^2$$

ピタゴラスの定理の逆により、三角形は直角三角形

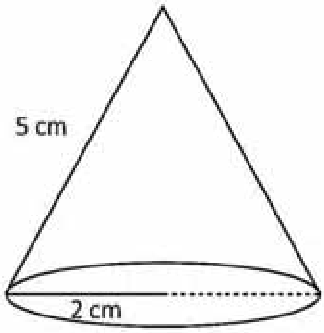
宿題： 練習帳137ページ

レッスン 2 ピタゴラスの定理の応用

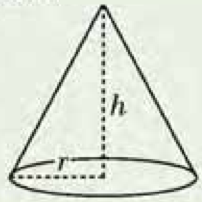
2.1 円錐の高さと体積の求め方

P

円錐の高さと体積を求めましょう。



円錐の半径 r と高さ h の体積は $V_c = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ で求められます。



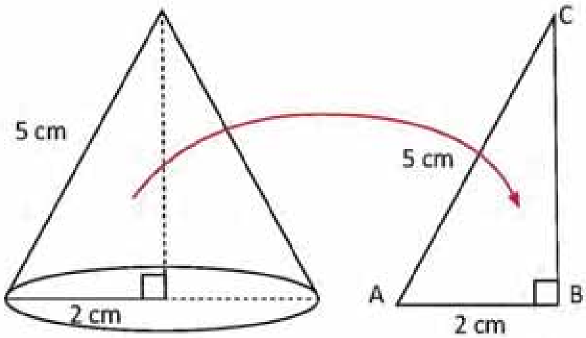
S

円錐の高さにあたる線を描くと、下記の通り、円錐の母線と半径、又、円錐の高さをもう一方の辺とした ΔABC のような直角三角形が構成され、ピタゴラスの定理を応用することが出来ます。

ΔABC は：$AB^2 = BC^2 + CA^2$

$$\Rightarrow BC^2 = CA^2 - AB^2$$
$$= 5^2 - 2^2$$
$$= 25 - 4$$
$$\Rightarrow BC = \sqrt{21}$$

したがって、円錐の高さは $\sqrt{21}$ cm となります。



円錐の体積を求める計算式は $V_c = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ で、$r = 2$ cm, $h = \sqrt{21}$ cm を計算式に当てはめると：

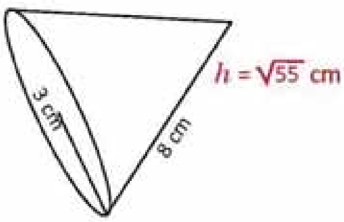
$$V_c = \frac{1}{3}\pi(2)^2\sqrt{21} = \frac{4\sqrt{21}\pi}{3} \text{ cm}^3.$$

したがって、円錐の体積は $\frac{4\sqrt{21}\pi}{3}$ cm³ となります。

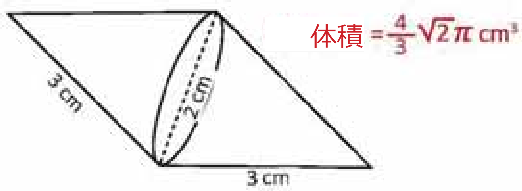
C

円錐の体積、又は高さを求めるとき、ピタゴラスの定理を応用します。

1. 以下の円錐の高さを求めましょう。



2. 以下の立体の体積を求めましょう。



達成の目安

2.1 円錐の高さと体積をピタゴラスの定理を用いて求めましょう。

学習の流れ

8 学年では、高さと半径が分かれば体積が計算でき、円錐の体積は円柱の体積の 1/3 であるという定義を学びました。この授業では、ピタゴラスの定理を用いて、体積から高さを求められるようにします。又、この課では、この定義を応用し身近な問題を解くことも行います。

ねらい

Ⓟ、Ⓢに関しては、定義上、立体の高さは底面と垂直な関係にあり、円錐の高さもピタゴラスの定理を用いて求めることが出来ることに気づくことが大切です。この問題の解答方法は 7 学年で学びました。

いくつかの問題の解答例

1.
円錐の高さを h で表す。

$$8^2 = h^2 + 3^2$$
$$h^2 = 64 - 9$$
$$h = \sqrt{55}\ \text{cm}$$

2.
この問題では、立体が、辺の長さ 3 cm、底面の半径 1 cm の円錐 2 つで構成されているとします。

各円錐の高さを h で表す。

$$3^2 = h^2 + 1^2$$
$$h^2 = 9 - 1$$
$$h = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

各円錐の体積を V で表すとしたとき。

$$V = \frac{1}{3}\pi(1)^2(2\sqrt{2}) = \frac{2}{3}\sqrt{2}\pi\ \text{cm}^3$$

したがって、円錐 2 つの体積は：

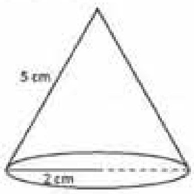
$$2 \times \frac{2}{3}\sqrt{2}\pi = \frac{4}{3}\sqrt{2}\pi\ \text{cm}^3$$

日付： **U6 2.1**

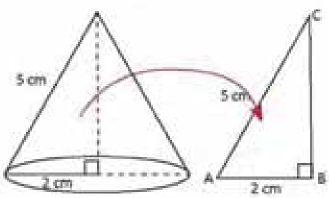
Ⓟ 円錐の高さと体積を求めましょう。

円錐の体積

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



Ⓢ 垂直に高さを描くと、直角三角形ができます。



ΔABC: $AB^2 + BC^2 = CA^2$ は、

$$BC^2 = CA^2 - AB^2$$
$$= 5^2 - 2^2$$
$$BC = \sqrt{21}$$

$r = 2$ cm、$h = \sqrt{21}$ cmとなります。したがって、体積は：

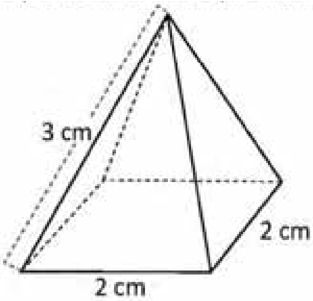
$$V_c = \pi(2)^2\sqrt{21} = \frac{4\sqrt{21}\pi}{3}\text{cm}^3$$

Ⓡ 1. $h = \sqrt{55}$ cm
2. 体積 $= \frac{4}{3}\sqrt{2}\pi\ \text{cm}^3$

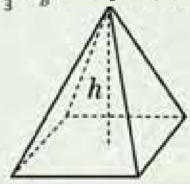
宿題： 練習帳の138ページ

2.2 四角錐の高さと体積の計算

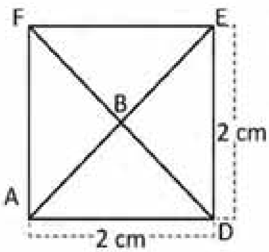
P 四角錐の高さと体積を求めましょう。



底面が A_B、高さが h の四角錐の体積は $V_p = \frac{1}{3} A_B h$ で求められます。



S 正四角錐の高さにあたる線を描くと、ABC の直角三角形が出来ます。斜辺の長さは分かっていますが、他の 2 辺の長さは分かりません。問題である正四角錐の高さにあたる BC の辺の長さを求めるには、まずは、AB の辺の長さから求める必要があります。

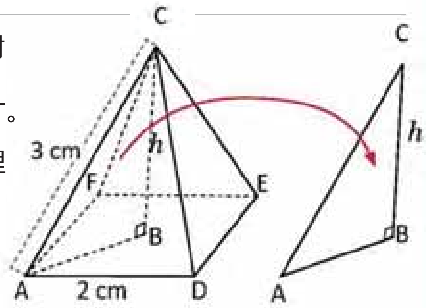


正四角錐の底面は正方形で、AB は対角線の半分にあたります。したがって、AD = 2 cm なので DE = 2 cm になります。

対角線 EA は ΔADE にピタゴラスの定理を適用して求めることが出来ます。

$$EA^2 = ED^2 + DA^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

$$\Rightarrow EA = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$



AB は対角線の半分なので AB = $\sqrt{2}$ cm です。この情報が分かっていれば、この場合も、ピタゴラスの定理を応用して、ΔABC の BC の辺の長さを求めることが出来ます：

$$CA^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow BC^2 = CA^2 - AB^2 = 3^2 - \sqrt{2}^2 = 9 - 2 = 7$$

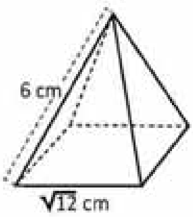
$\Rightarrow BC = \sqrt{7}$ 、したがって $h = \sqrt{7}$ (cm) となります。

正四角錐の体積は $Vp = \frac{1}{3} A_B h$ で求めることが出来るので、この計算式に値をあてはめると、$A_B = 2 \times 2 =$ 4 cm^2 , $h = \sqrt{2}$ cm となります。

$$V_p = \frac{1}{3}(4)\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\ cm^3.$$

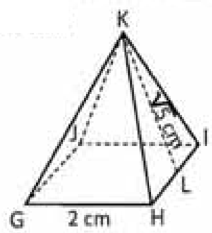
C 正四角錐の高さと体積を求める際には、ピタゴラスの定理を適用しましょう。

1. 正四角錐の高さを求めましょう



$h = \sqrt{30}$

2. KL = 5 cm を二等辺三角形 KHI の高さとするとき、次の正四角錐の体積を求めましょう：



$V = \frac{8}{3}$

達成の目安

2.2 ピタゴラスの定理を用いて、正四角錐の高さと体積を求めましょう。

学習の流れ

前回の授業では、ピタゴラス定理を用いた円錐の高さの求め方を学びました。
今回の授業でも、類似した流れで正四角錐の高さの求め方を学習しますが、今回はピタゴラスの定理を2回に分けて使います。

ねらい

Ⓟ、Ⓢでは、正四角錐の高さから、直角三角形が出来ることに気が付きます。直角三角形の1辺は、底面の対角線の半分の長さであることが分かるので、高さを求めるには、ピタゴラスの定理を2回に分けて使います。

いくつかの問題の解答例

1.
底面の対角線を d で示します。

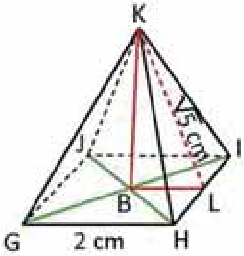
$$d^2 = (\sqrt{12})^2 + (\sqrt{12})^2$$
$$d^2 = 24$$
$$d = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

三角形にピタゴラスの定理を応用します。

$$6^2 = (\sqrt{6})^2 + h^2$$
$$h^2 = 36 - 6$$
$$h^2 = 30$$
$$h = \sqrt{30}\ \text{cm}$$

2.
KL を二等辺三角形の高さとするとき、L は三角形 KHI の中心を通ります。

B は底面の中央にあり、L と B の距離は、
底面の正方形の辺の半分と同じ長さになります。



$$(\sqrt{5})^2 = 1^2 + h^2$$
$$h^2 = 5 - 1$$
$$h = 2$$

したがって、正四角錐の体積は：

$$V = \tfrac{1}{3}4 \times 2 = \tfrac{8}{3}\ \text{cm}^3.$$

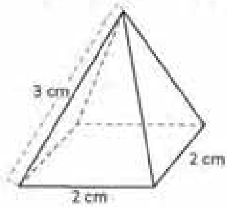
日付：

U6 2.2

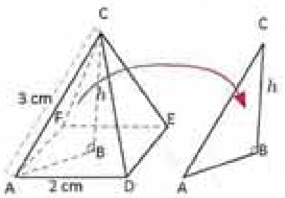
Ⓟ 正四角錐の高さと体積を求めましょう。

円錐の体積：

$$V = \tfrac{1}{3}A_b h$$



Ⓢ 高さを描くと、直角三角形ができます。



対角線 EA は以下のように求められます：

$$EA^2 = AD^2 + AB^2$$
$$EA^2 = 2^2 + 2^2$$
$$EA = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

BC は以下のように求められます：

$$BC^2 = 3^2 - (\sqrt{2})^2$$
$$BC^2 = 9 - 2$$
$$BC = \sqrt{7}$$

正四角錐の体積は：

$$V = \tfrac{4}{3}\sqrt{7}\ \text{cm}^3$$

Ⓡ 1. $h = \sqrt{30}$ cm
2. 体積 $= \tfrac{8}{3}$ cm^3

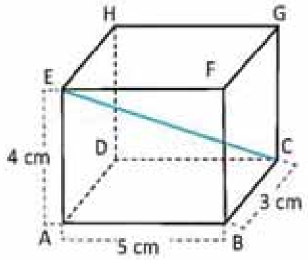
宿題： 練習帳139ページ

レッスン 2

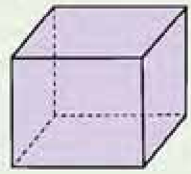
2.3 直方体の対角線の長さの求め方

P

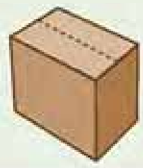
下記の直方体の対角線 CE の長さは何 cm でしょうか？



直方体は筒状になった柱体であり、隣接する面が直角に交わっています。



日常的に使う箱も直方体です。



S

対角線 CE は ΔACE の斜辺にあたります。まずは、$\overline{AC}$ の辺の長さを求め、次に $\overline{CE}$ の長さを求めます。AC も同様に ΔACB の斜辺なので、ピタゴラスの定理を適用して長さを求めることができます：

ΔACBは $AC^2 = BA^2 + CB^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$

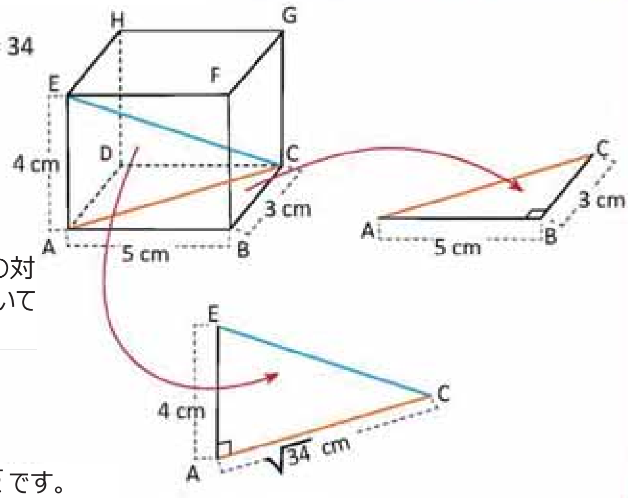
$\Rightarrow AC = \sqrt{34}$

AC と EA の辺の長さが分かっているので、CE の対角線の長さは、ΔEAC にピタゴラスの定理を用いて計算することができます。

$CE^2 = AC^2 + EA^2 = (\sqrt{34})^2 + 4^2 = 34 + 16 = 50$

$\Rightarrow CE = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

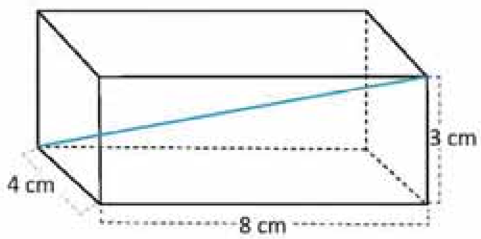
したがって、この直方体の対角線の長さは $5\sqrt{2}$ です。



C

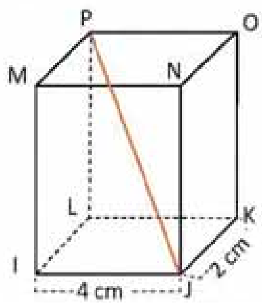
直方体の対角線の長さを求める際、ピタゴラスの定理を 2 回に分けて使います。

1. 直方体の対角線の長さの求め方



対角線の長さは $\sqrt{89}$ cm になります

2. 下記の直方体において、対角線 $JP = 3\sqrt{5}$ とするとき、高さは何 cm でしょうか？



直方体の高さは 5 cm になります

達成の目安

2.3 ピタゴラスの定理を 2 回に分けて使い、直方体の対角線の長さを求めましょう。

学習の流れ

前回の授業では、円錐そして正四角錐の高さと体積の求め方を学習しました。今回の授業では、直方体の対角線の長さの求め方を学習し、生徒が数学的に推論する力を身に着けることができます。前回の授業と同様に、ピタゴラスの定理を 2 回に分けて使います。

ねらい

Ⓟ、Ⓢでは、生徒が、直方体の直角に交わる性質を用いて、直角三角形がつくれることに気づくことが大切です。他にも箱や教室など沢山の物から直方体の直角を見つけることができます。

いくつかの問題の解答例

1.
ピタゴラスの定理を底面に応用し、未知数である辺を x で示します：

$$x^2 = 8^2 + 4^2$$
$$x^2 = 64 + 16$$
$$x = \sqrt{80}$$

再度ピタゴラスの定理を使い、未知数である辺を y で示します：

$$y^2 = 3^2 + (\sqrt{80})^2$$
$$y^2 = 9 + 80$$
$$y = \sqrt{89}$$

したがって、対角線は $\sqrt{89}$ cmになります。

2.
LJ の長さを求めるには、ΔLJI にピタゴラスの定理を応用します。

$$LJ^2 = 4^2 + 2^2$$
$$LJ^2 = 20$$
$$LJ = \sqrt{20}$$

LJ の長さ（三角形の高さ）を求めるには、三角形 PJL にピタゴラスの定理を応用します。

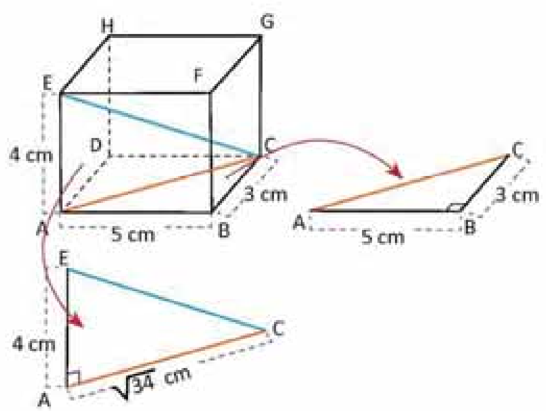
$$PJ^2 = LP^2 + JL^2$$
$$(3\sqrt{5})^2 = LP^2 + (\sqrt{20})^2$$
$$PL^2 = 9 \times 5 - 20$$
$$PL = \sqrt{25} = 5$$

直方体の高さは 5 cm になります。

備考：
直方体の高さは、縦の辺と同じです。

日付： U6 2.3

Ⓟ CE の長さを求めましょう。



ピタゴラスの定理を使います。

ΔACB: $AC^2 = BA^2 + CB^2$
$$AC^2 = 5^2 + 3^2$$
$$= 25 + 9$$
$$AC^2 = 34$$
$$AC = \sqrt{34}$$

ΔEAC：
$$CE^2 = AC^2 + EA^2$$
$$CE^2 = (\sqrt{34})^2 + 4^2$$
$$= 34 + 16$$
$$CE = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

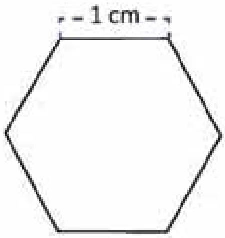
Ⓡ 1. 対角線の長さは $\sqrt{89}$ cm になります。
2. 直方体の高さは 5 cm になります。

宿題： 練習帳140ページ

2.4 六角形の面積の計算

P

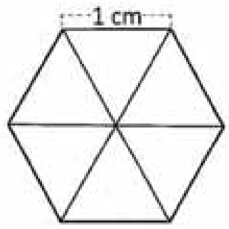
辺が 1 cm の正六角形の面積を計算しましょう。



正多角形は、全ての辺が同じ長さで、全ての内角が同じになることを満たしています。

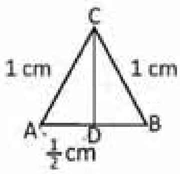
S

正六角形は、合同の正三角形 6 つから構成されています。
この場合、各三角形のそれぞれの辺は 1 cm です。



三角形の面積を求めて、その後 6 でかけると、
正六角形の面積が定まります。

6 つある三角形のどれかを選び、ΔABC と記述します。頂点 C からの高さを引き、ピタゴラスの定理を使うと長さがわかります：



$$CA^2 = AD^2 + DC^2 \Rightarrow DC^2 = CA^2 - AD^2$$

$$\Rightarrow DC^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow DC = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ΔABC の面積は： $(\Delta ABC) = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(cm)^2$.

六角形の面積は $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ $(cm)^2$ です。

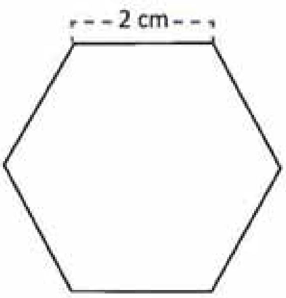
正多角形の中心から任意の辺に引いた垂直線 A は、**辺心距離**と呼ばれます。

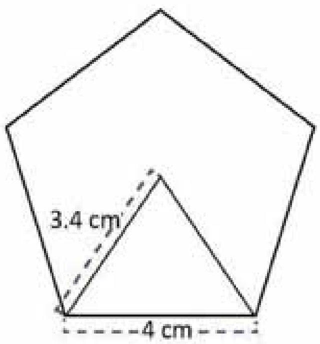
以前の問題では、DC の高さが六角形の辺心距離と一致しています。

C

正多角形の面積を計算するには、ピタゴラスの定理を使って正多角形の辺心距離を定めることができます。

次の正多角形の辺心距離の長さと面積を求めましょう。





六角形の面積は、約 6√3 cmです。

五角形の面積は、約 27.5 cm です。

ユニット6

達成の目安

2.4 六角形に含まれる正三角形の高さと幅を知って、六角形の面積を計算しましょう。

学習の流れ

以前の授業では、ピタゴラスの定理を使用していくつかの立体の高さと、その後体積を計算しました。この授業を発展させて、ピタゴラスの定理を応用して辺心距離と、その後その面積の計算が学習されます。

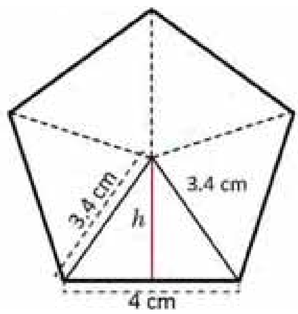
ねらい

Ⓟ、Ⓢ 六角形の面積を求めるためにピタゴラスの定理を用います。六角形の面積を計算するための公式を知らなくても、賢明なアイデアを使って値を定められます。合同の三角形に分割し、これらが正三角形であることを示すことができます。この場合この部分を省略してすぐに想定することもできます。

Ⓒ 正三角形の高さが別の辺を同じ長さの線分2つに区切ることは以前の学年で学習済みですが、授業を始める前に、または問題の解き方を発展させるときに、少し復習することができます。

一部の項目の解答：

2. 変化させて五角形にしてみましょう。解き方のアイデアは同様です。



図形が合同なので、三角形は全て二等辺三角形です。

$(3.4)^2 = h^2 + 2^2$

$h^2 = (3.4)^2 - 2^2$

$h^2 = 7.56$

$h \approx 2.75$

三角形の面積：

$\frac{4 \times 2.75}{2} = 5.5$

五角形の面積は：

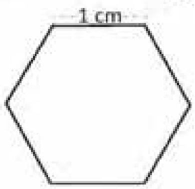
$5.5 \times 5 = 27.5$

このため、五角形の面積は約 27.5 cm^2 です。

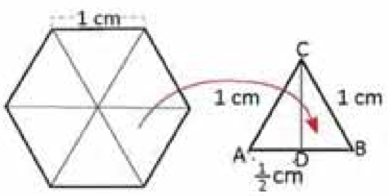
備考：この練習のためだけに計算機を使いましょう。

日付： **U6 2.4**

Ⓟ 六角形の面積を計算しましょう。



Ⓢ 合同な正三角形 6 つに分けます。



$CA^2 = AD^2 + DC^2 \Rightarrow DC^2 = CA^2 - AD^2$

$\Rightarrow DC^2 = 1 - \frac{1}{4}$

$\Rightarrow DC^2 = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$(\Delta ABC) = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ cm^2

六角形の面積は： $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm^2

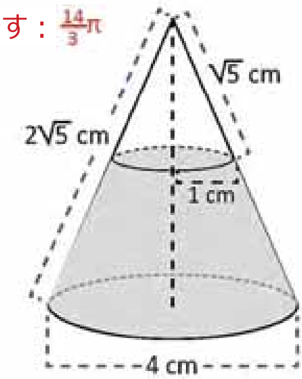
Ⓡ 1. 面積： $6\sqrt{3}$ cm^2
2. 面積（概算）：27.5 cm^2

宿題：練習帳の141ページ

2.5 復習問題

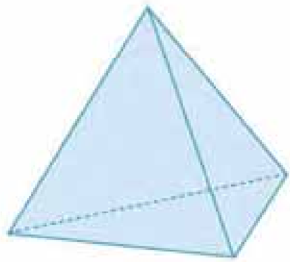
1. 灰色の影がついた立体の体積を求めましょう。

灰色の影がついた立体の体積は以下の通りです：$\frac{14}{3}\pi$



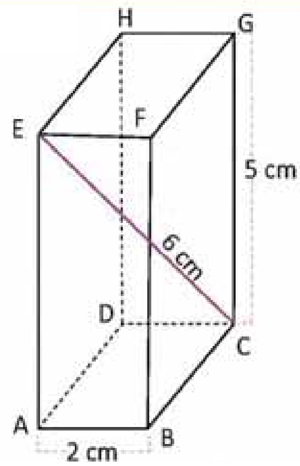
2. 三角形が正三角形で辺の長さが 3 の場合、角錐の合計面積を求めましょう。

面積は：$9\sqrt{3}$



2.6 復習問題

1. 次の直方体の線分 BC の長さを計算しましょう。



ΔACE において、$6^2 = 5^2 + AC^2$

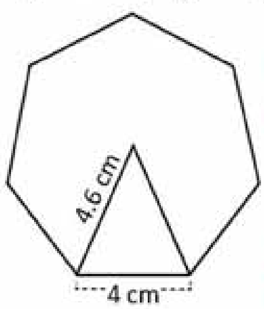
$AC^2 = 36 - 25$

$AC = \sqrt{11}$

ΔABC において、$(\sqrt{11})^2 = 2^2 + BC^2$

$BC^2 = 11 - 4$　よって　$BC = \sqrt{7}$

2. 次の正七角形の面積を計算しましょう。



高さが h の合同な二等辺三角形 7 つができます。

$h^2 = 4.6^2 - 2^2$

$h^2 = 17.16$

$h \approx 4.14$

各三角形の面積：$\frac{4 \times 4.14}{2} = 8.28\ cm^2$

七角形の面積：

$8.28 \times 7 = 57.96\ cm^2$

達成の目安

2.5, 2.6 ピタゴラスの定理を応用して、図形と立方体の問題を解きましょう。

一部の項目の解答：

1.

h_1 が小さな円錐の高さになります。

$$(\sqrt{5})^2 = 1^2 + h_1^2$$
$$h_1^2 = 5 - 1$$
$$h_1 = \sqrt{4}$$
$$h_1 = 2$$

V_1 が小さな円錐の体積になります。

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \times (1)^2 \times 2$$
$$V_1 = \frac{2}{3}\pi$$

h_2 が大きな円錐の高さになります。

$$(2\sqrt{5})^2 = 2^2 + h_2^2$$
$$h_2^2 = 20 - 4$$
$$h_2 = \sqrt{16}$$
$$h_2 = 4$$

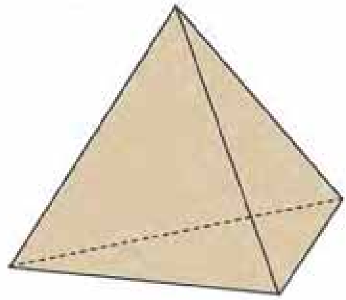
V_2が 大きな円錐の体積になります。

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \times (2)^2 \times 4$$
$$V_2 = \frac{16}{3}\pi$$

よって、影のついた部分の体積は：

$$\frac{16}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{14}{3}\pi$$

2.
その面が正三角形なので、高さは別の辺に中点で接します。



h が三角形の面の高さになります。

$$3^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + h^2$$
$$h^2 = 9 - \frac{9}{4}$$
$$h = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

面の面積は： $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ cm^2.

図の面積は： $4 \times \frac{9\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ cm^2. です。

宿題： 練習帳142ページ

2.7 ピタゴラスの定理の応用

P

サンサルバドルにあるエルサルバドル大学の正門（点C）からフエンテ・ルミノーサ像（点B）までの距離は 554.8 m です。一方、フエンテ・ルミノーサから英雄たち大通りと 21 番通り西の交差点（点A）までの距離は 375.6 m です。点 A と点 C 間の距離を求めなさい。

S

前の状況では直角三角形 ABC が作られ、直角をはさむ辺 AB と BC の長さは知られています。ピタゴラスの定理を使うと、斜辺の長さ CA は：

$$CA^2 = AB^2 + BC^2 = 375.6^2 + 554.8^2 \approx 141\,075.4 + 307\,803.0 = 448\,878.4$$

$$\Rightarrow CA \approx \sqrt{448878.4} \approx 670.$$

C

ピタゴラスの定理は長さを測るのに使用でき、エルサルバドル大学の正門と、英雄たち通りと 21 番通り西の交点の距離が 670 m であることが定められます。

サンサルバドルのリベルター広場の中心にあるプロセレス記念碑の高さを計算しましょう。この記念碑は、独立の最初の叫びから 100 周年を記念して 1911 年 11 月 5 日にマヌエル・エンリケ・アラウホ大統領により除幕され、青銅、大理石、花崗岩とコンクリートで彫られています。

達成の目安

2.7 ピタゴラスの定理を実際の状況に応用して未知の距離を計算し、小数点第 1 位まで計算しましょう。

学習の流れ

前の授業では、ピタゴラスの定理を使って同じ数学に応用できる問題を見ました。この授業では、ピタゴラスの定理を使って実際の問題を解き、計算には小数第 1 位が含まれます。

ねらい

Ⓟ、Ⓢ 問題では、作図された三角形 ABC が直角三角形であると想定する必要があります。ここで大切なのは、距離 2 つが分かっており、3 点が作る三角形が直角三角形の場合、ピタゴラスの定理を使って地図上の長さを定められることを理解することです。

Ⓒ データは実際のデータに近く、インターネット上で信用できる任意の地図で検証できます。

一部の項目の解答：

h はプロセレス記念碑の高さです。

$$h^2 = (22.7)^2 - (10.9)^2$$
$$h^2 = 515.3 - 118.8$$
$$h^2 = 396.5$$
$$h = 19.9$$

身近な問題への数学の応用：
生徒は、ピタゴラスの定理のようないくつかの数学の知識により、具体的な状況の問題を解くことができることや、他の内容は直接応用できないものの、応用可能な他の内容の構築ができるようになることを理解する必要があります。

日付： U6 2.7

Ⓟ B と C の間の距離は 554.8 m で、A と B の距離は 375.6 です。点 A と点 C 間の距離を求めなさい。

ΔABC が直角三角形だと想定します。

Ⓢ
$$CA^2 = AB^2 + BC^2$$
$$= 375.6^2 + 554.8^2$$
$$\approx 141\,075.4 + 307\,803.0$$
$$\approx 448\,878.4$$

よって、$CA \approx \sqrt{448\,878.4} \approx 670$ m.

Ⓡ h はプロセレス記念碑の高さです。

$$h^2 \approx (22.7)^2 - (10.9)^2$$
$$h^2 \approx 515.3 - 118.8$$
$$h^2 \approx 396.5$$
$$h \approx 19.9$$

宿題：練習帳の144ページ

レッスン 2

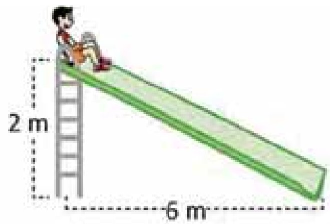
2.8 復習問題

1. マリオは長さが 13 フィートのはしごを持っています。ポールの 12 フィートの高さについている電球を換えようとしています。ポールの付け根部からどのような距離にはしごを置かねばなりませんか?

   ポールとはしごの距離は、5 フィートにしなければなりません。

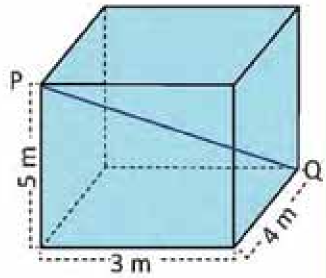
2. ミゲルは、滑り台を滑りたいのです。滑り台の一番高いところは、3.5 m です。地面に接する点と滑り台の付け根との距離は 6 m です。滑り台でどれだけの距離を滑りますか?

   滑るのは 6.94 m です。



3. フアンさんは、コンクリートの貯水槽の P 点と Q 点の間にワイヤーを張る必要があります。ワイヤーはどのような長さになりますか?

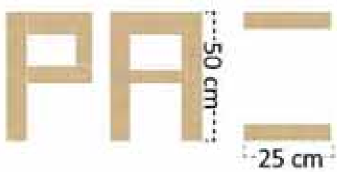
   $PQ = 5\sqrt{2}$ m



2.9 復習問題

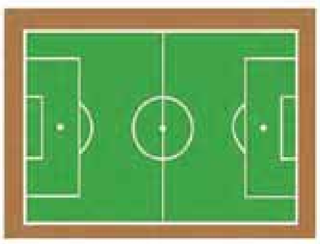
1. エル・サポテ学校では、平和についての行事を準備しています。そのため、ホセに、学校の塀に行事に関する文字を並べるように頼みました。完成までに何センチメートルのひもが必要ですか?

   完成までに 55.9 cm のひもが必要です。



2. サン・サルバドールのクスカトラン・スタジアムのグリーンは、長さが 107 m で対角線は 127 m あります。フィールドの面積はどれくらいですか?

   フィールドの面積は 7,319.9 m^2 です。



142

達成の目安

2.8 ピタゴラスの定理を使って、図形と立方体の問題を解きましょう。

いくつかの問題の解答例

授業： 2.8

1. ポールと地面は 90 度をなします。よって、ピタゴラスの定理を使えます。
求める距離を b とします。

$$12^2 + b^2 = 13^2$$
$$b^2 = 169 - 144$$
$$b^2 = 25$$
$$b = 5$$

2. **備考：**この問題を解くには、図に出ている数字ではなく、問題文の数字を使います。

3. 底辺にピタゴラスの定理を適用して底辺未知の距離を x とします。

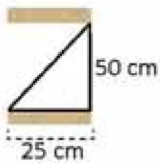
$$x^2 = 3^2 + 4^2$$
$$x^2 = 25$$
$$x = 5$$

再び定理を使って PQ を求めます。

$$PQ^2 = 5^2 + 5^2$$
$$PQ = \sqrt{50}$$
$$PQ = 5\sqrt{2}$$

授業 2.9

1. 文字の高さは全て 50 cm です。

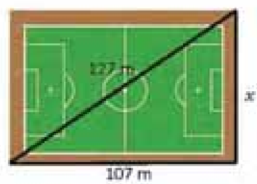


できる三角形は直角三角形です。斜面を h とします。

$$h^2 = 25^2 + 50^2$$
$$h^2 = 625 + 2\,500$$
$$h^2 = 3\,125$$
$$h = 55.90$$

完成までに 55.9 cm のひもが必要です。

2.



$$x^2 + 107^2 = 127^2$$
$$x^2 = 16\,129 - 11\,449$$
$$x^2 = 4\,680$$
$$x \approx 68.41$$

フィールドの面積：
68.41 m × 107 m ≈ 7 319.9 m^2

宿題： 練習帳145ページ

次の授業には、生徒は自分の計算機を持ってこなければなりません。

ユニット7 円周角と中心角

このユニットのねらい

円における弦と弧に関する定理と関係を利用して円周角と、接線と弦のなす角の大きさを求め、平面図形の特徴と性質を学習します。

関連と発展

小学校低学年・高学年

- 分度器を使った角の作図
- 三角形の分類と作図
- 四角形の分類と作図
- 立体図形の分類
- 対称図形
- 三角形・四角形の外周と面積
- 立方体と四角柱、三角柱のパターン
- 円の円周の長さと面積
- 扇形の弧の長さと面積
- 角柱の体積
- 平行移動、回転および回転対称

7 学年

ユニット 8：平面図形と立体図形の構成
- 平面図形上での図形の動き
- 円、線分と角
- 平面図形、立体図形と角柱、角錐、円柱の総面積

8 学年

ユニット 4：平行と多角形の角
- 多角形の内角と外角の和
- 平行な直線と角

ユニット 5：三角形の合同条件
- 三角形の合同

ユニット 6：三角形と四角形の特徴
- 三角形
- 平行四辺形

ユニット7：立体の面積と体積
- 立体の部位の特徴
- 立体の体積の計算
- 体積の応用
- 立体の面積
- 面積の応用

9 学年

ユニット 5：相似な図形
- 相似
- 三角形の相似
- 相似と平行
- 相似と三角形の相似の応用

ユニット 6：ピタゴラスの定理
- ピタゴラスの定理
- ピタゴラスの定理の応用

ユニット 7：円周角と中心角
- 中心角と円周角
- 中心角と円周角の応用

ユニット学習計画

レッスン	時間	授業
1. 中心角と円周角	1	1. 円の部位
	1	2. 円周角の定義と大きさ
	1	3. 円周角、パート 1
	1	4. 円周角、パート 2
	1	5. 円周角の定理
	1	6. 復習問題
	1	7. 合同な弧
	1	8. 復習問題
2. 中心角と円周角の応用	1	1. 円に対する接線の作図
	1	2. 円の弦と弧
	1	3. 三角形の相似への応用
	1	4. 平行
	1	5. 円上の四つの点
	1	6. 接線と弦のなす角
	2	7. 復習問題
	1	ユニット 7 のテスト

授業 16 時間 + ユニット 7 の テスト

各レッスンの要点

レッスン1：中心角と円周角
授業 1.2 では、作図用具を使って中心角の定理を直観的に定め、この課以降の授業でこの定理の証明を形式的に行います。

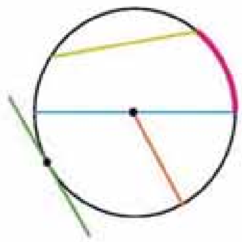
レッスン2：中心角と円周角の応用
先に円周角の定理を証明したので、この課では、その結果を主なツールとして利用することで、いくつかの性質を導き出します。

レッスン 1 中心角と円周角

1.1 円の部位

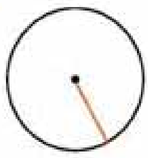
P

次の円に描かれた部位の名前を書きなさい：

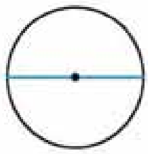


S

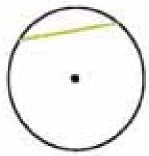
線分



中心点から円周上の 1 点まで延びる線分を**半径**と呼びます。



円周上の 1 点から中心を通って別の 1 点まで延びる線分を**直径**と呼びます。

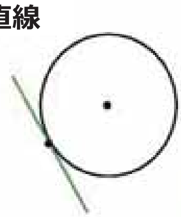


円周上の 1 点から別の 1 点まで延びる線分を**弦**と呼びます。

弧

2 点で区切られた円周部分を**弧**と呼びます。

直線



円に接する直線を**接線**と呼びます。

接線が円に接する点を**接点**と呼びます。

C

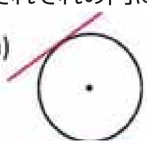
円の部位は以下のとおりです：

- 線分：半径、直径および弦
- 直線：接線
- 円の弧

接点に対する半径は、その接点に対して直角に交わります。

1. それぞれの円に示されている部位の名前を書きなさい：

a)

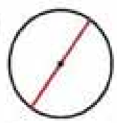


接線

b)

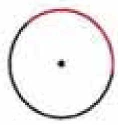
半径

c)



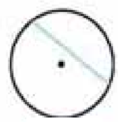
直径

d)



弧

e)



弦

2. 次の問いに答えなさい：

a) 直径の $\frac{1}{2}$ である部位の名前は何ですか。半径

b) 円で一番長い弦の名前は何でしょうか。直径

c) 接線と円の接点に対する半径は、どのようになっていますか。直角に交わります。

d) 円周上に 2 つの点を置くと、弧はいくつできますか。2つ

達成の目安

1.1　円の部位を識別します。

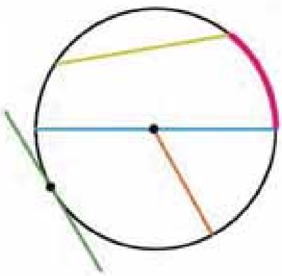
学習の流れ

小学校低学年・高学年では円の部位を識別し、その後第 7 学年では円を再度取りあげて、円の部位を用いて学習し、円に対する接線の意味を定め、交わる 2 つの円の特徴から性質を導き出しました。この授業では円の部位について復習しますが、これまでの授業と異なり、それらの部位を円周の部位として提示し、さらに、円に対する接線をもう一つの部位として提示します。この学年では、生徒は、円と円周の関係を理解する上での関連知識をすでに持っており、したがって、授業のタイトルに関してそれらを混同することはないと思われます。

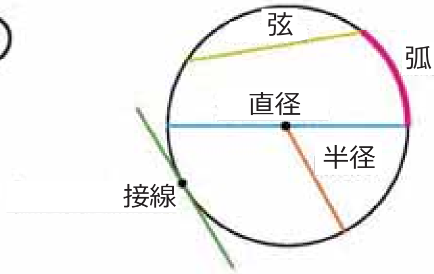
このケースでは、最初の設問は、すべての項目の名前を書くことで完全な回答とします。

日付：　　　　**U7 1.1**

Ⓟ 円周上の各々の部位の名前を書きなさい。



Ⓢ



Ⓡ 1.
a) 接線
b) 半径
c) 直径
d) 弧
e) 弦

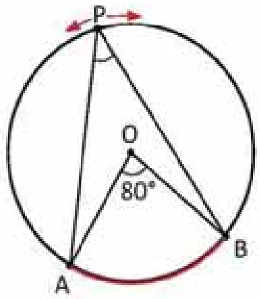
a) 半径
b) 直径
c) 直角に交わります。
d) 2 つ

宿題：練習帳148ページ

1.2 円周角の定義と大きさ

P

紙に作図し、点 P を円周の様々な場所に移動させて ∢BPA を測りなさい。∢BPA の大きさを ∢BOA の大きさと比べなさい。



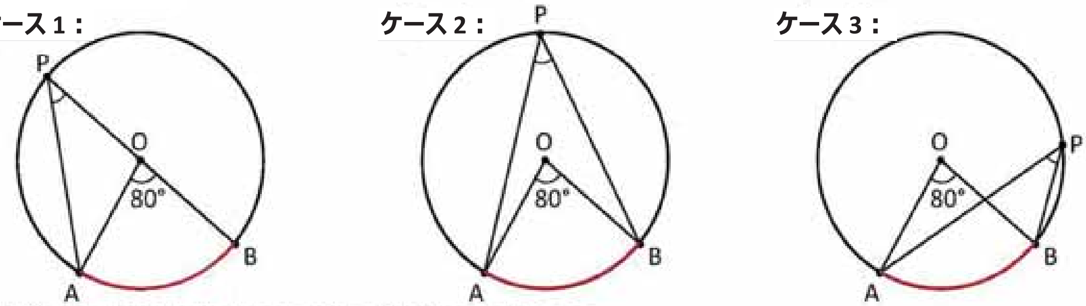
角 BOA は、その頂点が円の中心であるので**中心角**と呼ばれます。

∢BPA と ∢BOA が同じ弧 $\overset{\frown}{AB}$ を共有していることに注目しなさい。

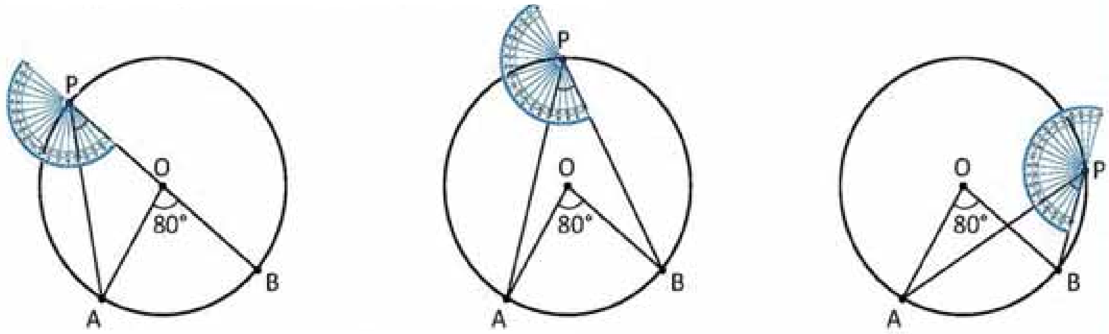
S

定規とコンパスを用いて作図し点 P を移動させることで、以下のケースが考えられます：

ケース 1： **ケース 2：** **ケース 3：**



分度器を用いて、3 つのケースにおける ∢BPA を測ります。



3 つのケースにおいて ∢BPA = 40° の大きさになります。

かつ ∢BOA = 2∢BPA つまり ∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA となります。

C

頂点が円周上にある角を**円周角**と呼びます。

同じ弧に対するとは、同じ弧を共有することを意味します。

円において、任意の円周角と同じ弧に対する中心角の大きさは、その同じ弧に対する任意の円周角の大きさの 2 倍になります。

同じ弧に対する中心角の大きさが 160° である円周角の大きさを求めなさい。
冒頭の設問のように図を利用しなさい。

達成の目安

1.2　円における各種円周角および中心角とのその直観的な関係を認識します。

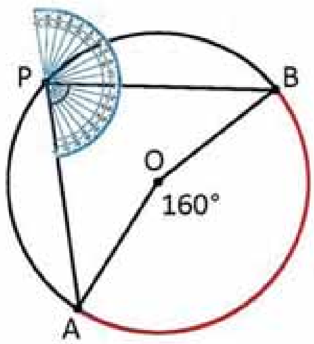
学習の流れ

この授業では、円における円周角の概念を紹介し、同時に、その大きさに関する性質を提示します。作図により、つまり作図用具を使うことで、その性質を直観的に提示します。この授業は重要です。なぜなら、この授業で見たいくつかの要素を後に続く 3 回の授業で再度取りあげるからです。それらの要素をねらいの項で詳述します。

ねらい

Ⓟ 円周上で点を動かすと起こると考えられる 3 つのケースを提示します。
生徒が作る形はもっとあるかもしれませんが、生徒が作るいずれの形も、提示するケースのいずれかに該当します。第 1 のケースは、中心角が円周角の一辺上にあるケース、第 2 のケースは、中心角が円周角の内側にあるケース、そして第 3 のケースは、中心角が円周角の外側にあるケースに関するものです。

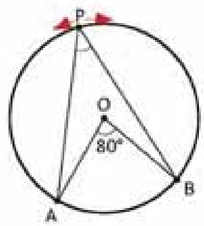
一部の設問の解答：



∢BPA = 80° の大きさになります
∢BOA = 2∢BPA
つまり
∢BPA = $\frac{1}{2}$∢BOA.

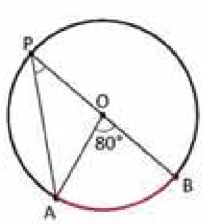
日付：　　**U7 1.2**

Ⓟ 点 P を円周上の様々な位置に移動させて ∢BPA を測りなさい。∢BPA の大きさを ∢BOA の大きさと比べなさい。

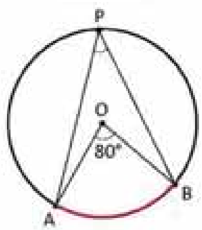


Ⓢ

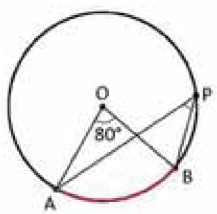
ケース 1



ケース 2

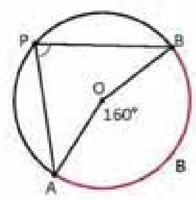


ケース 3



3 つのケースにおいて ∢BPA = 40°、かつ ∢BOA = 2∢BPA つまり ∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA となります。

Ⓡ



∢BPA = 80° の大きさになります

∢BOA = 2∢BPA
　つまり
∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

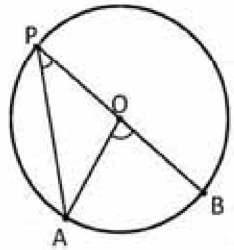
宿題： 練習帳の149ページ

レッスン 1

1.3 円周角、パート 1

P

中心が ΔBPA のいずれかの辺上にあるとき、∢BOA = 2∢BPA であることを証明しなさい。



直径は、円の中心を通る弦です。

S

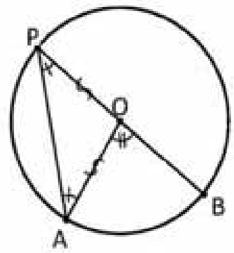
ΔAOP において：OP = OA （これらは円の半径であるため）。

よって、∢OPA = ∢PAO （等しい辺に対して等しい角が向き合うため）。

その一方で ∢BOA = ∢OPA + ∢PAO （∢BOA は ΔAOP の外角だから）。

したがって、∢BOA = 2∢OPA　　　∢OPA = ∢BPA なので、

よって、∢BOA = 2∢BPA



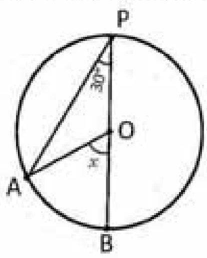
C

辺が円の直径と一致する円周角では、**円周角と同じ弧に対する中心角の大きさは、その円周角の大きさの 2 倍になります。**

E

次の各場合について x の値を求めなさい。

a)

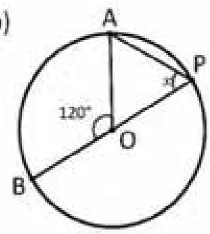


∢BOA = 2∢BPA なので

したがって、

$x = 2\,(30°) = 60°$

b)



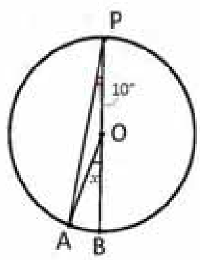
∢BOA = 2∢BPA なので

よって、∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA

したがって、$x = \frac{120°}{2} = 60°$.

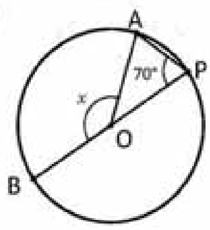
次の各場合について x の値を求めなさい。

a)



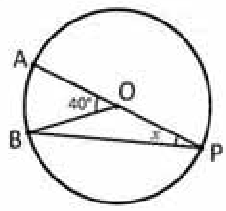
$x = 20°$

b)



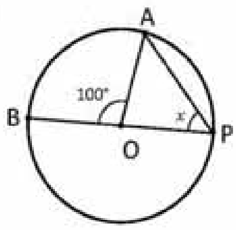
$x = 140°$

c)



$x = 20°$

d)



$x = 50°$

達成の目安

1.3 辺が円の直径と一致する円周角の大きさを求めます。

学習の流れ

前回の授業では円周角の大きさに関する性質を直観的に証明したので、この授業ではその証明を形式的に行います。そのために、前回の授業の解答のケース 1 と類似の状況を取りあげます。

ねらい

Ⓟ 冒頭の設問を解くのに、円の半径の概念、二等辺三角形の特徴、三角形の外角の大きさの性質を適用します。この解答方法の第 1 のステップは、両辺が円の 2 つの半径と一致することから ΔAOP が二等辺三角形であることを確認することです。続いて、外角 BOA の大きさが、それに隣接しない 2 つの内角の和であり、この場合、ΔAOP が二等辺三角形であることから、それらの内角が等しいことを適用します。

Ⓢ 円周角の性質を直接適用して、冒頭の設問の位置とは別の位置にある角において未知数の値を求めます。

一部の設問の解答：

a) ∢BOA = 2∢BPAなので
したがって、$x = 2\ (10°) = 20°$

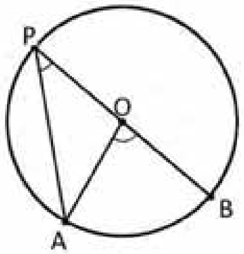
c) ∢BOA = 2∢BPA なので

よって、$∢BPA = \frac{1}{2}\ ∢BOA.$

したがって、$x = \frac{40°}{2} = 20°.$

日付：　　　　U7 1.3

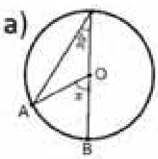
Ⓟ ∢BOA = 2∢BPA であることを証明しなさい。



Ⓢ ΔAOP において：OP = OA （これらは円の半径であるため） **(1)**
∢OPA = ∢PAO （等しい辺に対して等しい角が向き合うため）
その一方で ∢BOA = ∢OPA + ∢PAO （∢BOA は ΔAOP の外角であるため）**(2)**
∢BOA = 2∢OPA （(1) と (2)から）
よって、∢BOA = 2∢BPA

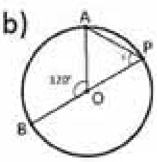
Ⓔ 次の各場合について x の値を求めます。

a)



∢BOA = 2∢BPA
したがって、
$x = 2\ (30°) = 60°$

b)



∢BOA = 2∢BPA
よって、
$∢BPA = \frac{1}{2}∢BOA$
したがって、$x = \frac{120}{2} = 60°$

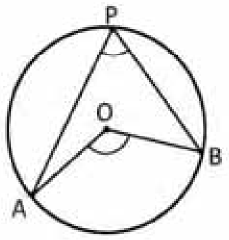
Ⓡ a) $x = 20°$　b) $x = 140°$
c) $x = 20°$　d) $x = 50°$

宿題： 練習帳の150ページ

1.4 円周角、パート 2

P

中心が ∢BPA の内側にあるとき、∢BOA = 2∢BPA であることを証明しなさい。



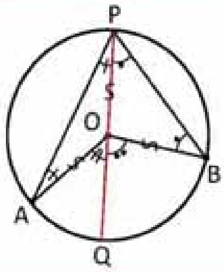
S

直径 QP を引きます。

∢QOA = 2∢QPA かつ ∢BOQ = 2∢BPO （授業 3 で学んだことから）。

両方の等式を足すと：
∢QOA + ∢BOQ = 2∢QPA + 2∢BPQ = 2(∢QPA + ∢BPQ).

したがって、∢BOA = 2∢BPA



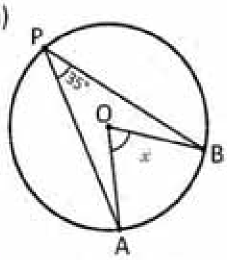
C

同じ弧に対する中心角を内側に持つ円周角においても、**中心角の大きさは、その円周角の大きさの 2 倍になります。**

E

次の各場合について x の値を求めなさい。

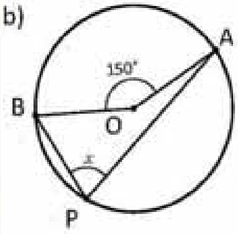
a)



∢BOA = 2∢BPA なので

したがって、$x = 2\,(35°) = 70°$

b)



∢BOA = 2∢BPAなので

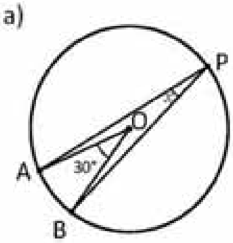
よって、$∢BPA = \frac{1}{2}∢BOA.$

したがって、$x = \frac{150°}{2} = 75°.$

R

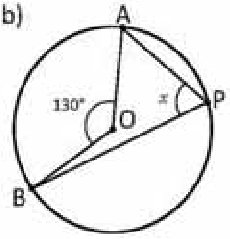
次の各場合について x の値を求めなさい。

a)



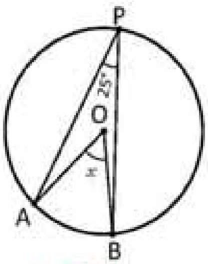
$x = 15°$

b)



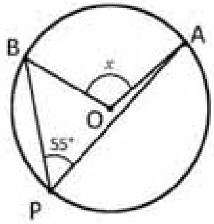
$x = 65°$

c)



$x = 50°$

d)



$x = 110°$

ユニット 7

147

達成の目安

1.4 中心角が円周角の内側にある場合の円周角の大きさを求めます。

学習の流れ

この授業では、授業 1.2 の解答のケース 2 と類似の状況を取りあげ、その性質の証明を行います。それを実行するための方法として、前回の授業で行った証明を利用します。

ねらい

Ⓟ この解答方法の第 1 のステップは、直径 QP の補助線を引くことで、前回の授業の冒頭の設問と類似の状況を作り、得られた結果を証明を行うためのツールとして利用できるようにすることです。

Ⓢ 円周角の性質を直接適用し、冒頭の設問の位置とは別の位置にある角において未知数の値を求めます。

一部の設問の解答：

a) ∢BOA = 2∢BPAなので

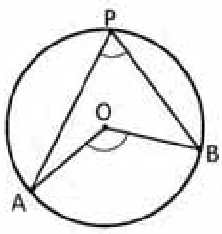
よって、∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

したがって、$x = \frac{30°}{2} = 15°$.

c) ∢BOA = 2∢BPA なので
したがって、$x = 2(25°) = 50°$

日付： U7 1.4

Ⓟ 中心が ∢BPA の内側にあるとき、∢BOA = 2∢BPA であることを証明しなさい。

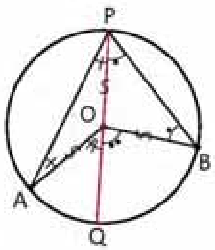


Ⓢ

直径 QP を引きます。
∢QOA = 2∢QPA かつ ∢BOQ = 2∢BPO
（授業 3 で学んだことから）
両方の等式を足すと：

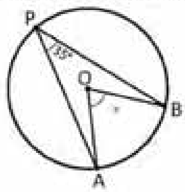
∢QOA + ∢BOQ = 2∢QPA + 2∢BPQ
= 2(∢QPA + ∢BPQ)

したがって、∢BOA = 2∢BPA.



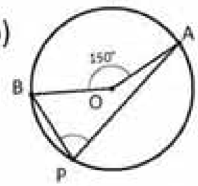
Ⓔ 次の各場合について x の値を求めます。

a)



∢BOA = 2∢BPAなので
したがって、
$x = 2\ (35°) = 70°$

b)



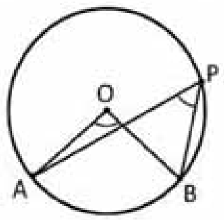
∢BOA = 2∢BPA なので、
∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.
したがって、
$x = \frac{150°}{2} = 75°$.

Ⓡ a) $x = 15°$ b) $x = 65°$
c) $x = 50°$ d) $x = 110°$

宿題： 練習帳151ページ

1.5 円周角の定理

P 中心が ∢BPA の外側にあるとき、∢BOA = 2∢BPA であることを証明しなさい。



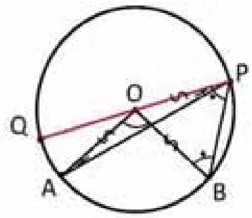
S 直径 QP を引きます。

∢AOQ = 2∢APQ かつ ∢BOQ = 2∢BPQ （授業 3 で学んだことから）。

∢BOA = ∢BOQ – ∢AOQ なので

よって、∢BOA = 2∢BPQ – 2∢APQ = 2(∢BPQ – ∢APQ) = 2∢BPA。

したがって、∢BOA = 2∢BPA。



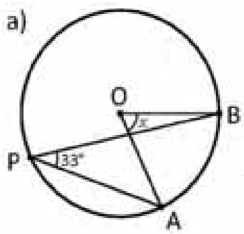
C 円において、どのような円周角に関しても、**中心角の大きさは、同じ弧に対する円周角の大きさの2倍になります。**

さらに、同じ弧に対する円周角の大きさは等しいです。

この結果は、**円周角の定理**として知られています。

E 次の各場合について x の値を求めなさい。

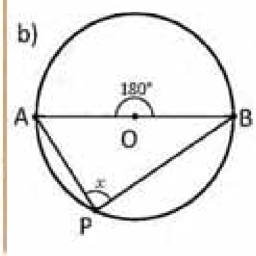
a)



∢BOA = 2∢BPAなので

したがって、$x = 2(33°) = 66°$.

b)



∢BOA = 2∢BPA なので

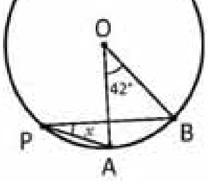
よって、$∢BPA = \frac{1}{2}∢BOA$

したがって、$x = \frac{180°}{2} = 90°$

半円に対する円周角は 90° になります。

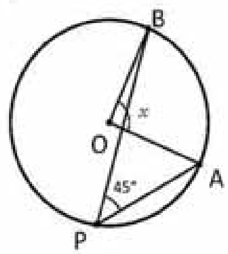
次の各場合について x、y および z の値を求めなさい。

a)



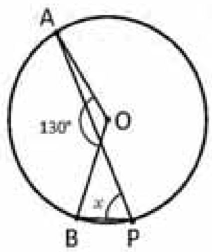
$x = 21°$

b)



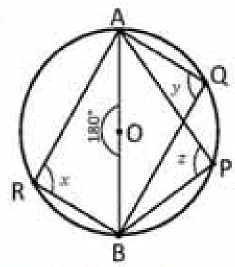
$x = 90°$

c)



$x = 65°$

d)



$x = 90°$ $y = 90°$
$z = 90°$

達成の目安

1.5 円周角の定理を利用し、円における角の大きさを求めます。

学習の流れ

授業 1.2 の解答のケース 3 と類似の状況を取りあげ、その性質の証明を行います。それを実行するための方法として、授業 1.3 で行った証明を利用します。

ねらい

Ⓟ この解答方法の第 1 のステップは、直径 QP の補助線を引くことで、授業 1.3 の冒頭の設問の状況など、ケース 1 の状況と類似の状況を作り、得られた結果を証明を行うためのツールとして利用できるようにすることです。

Ⓢ 結論に取り組むほか、追加情報の枠内に、円周角と中心角の大きさの間にある関係の名前が**円周角の定理**であることを指摘することが重要です。Ⓒ 円周角の性質を直接適用することで、冒頭の設問の位置とは別の位置にある角において未知数の値を求めます。

一部の設問の解答：

a) ∢BOA = 2∢BPA なので

よって、∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

したがって、$x = \frac{42^\circ}{2} = 21^\circ$

b) ∢BOA = 2∢BPA なので
したがって、$x = 2\,(45^\circ) = 90^\circ$

d) ∢BOA = 2∢BPA なので

よって、∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA

したがって、$z = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

∢BOA = 2∢BQA なので

よって、∢BQA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

したがって、$y = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

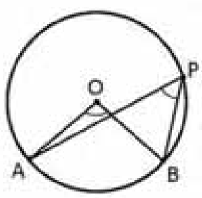
∢BOA = 2∢BRA なので

よって、∢BRA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

したがって、$x = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

日付： **U7 1.5**

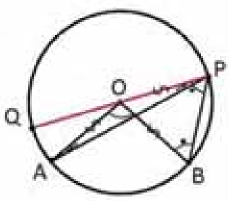
Ⓟ 中心が ∢BPA の外側にあるとき、
∢BOA = 2∢BPA であることを証明しなさい。



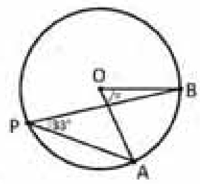
Ⓢ 直径 QP を引きます。
∢AOQ = 2∢APQ かつ ∢BOQ = 2∢BPQ
（授業 3 で学んだことから）
∢BOA = ∢BOQ − ∢AOQ なので

∢BOA = 2∢BPQ − 2∢APQ
= 2(∢BPQ − ∢APQ)
= 2∢BPA.

したがって、∢BOA = 2∢BPA

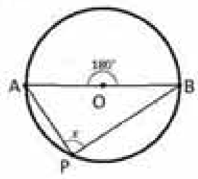


Ⓔ a)



∢BOA = 2∢BPA
なので
したがって、
$x = 2(33^\circ) = 66^\circ$.

b)



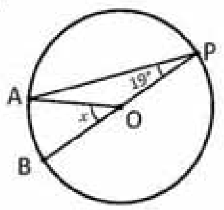
なので
∢BOA = 2∢BPA
∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.
したがって、
$x = \frac{180}{2} = 90^\circ$.

Ⓡ a) $x = 21^\circ$
c) $x = 65^\circ$
b) $x = 90^\circ$
d) $x = 90^\circ$
$y = 90^\circ$
$z = 90^\circ$

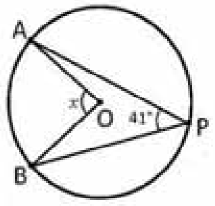
宿題： 練習帳の152ページ

1.6 復習問題

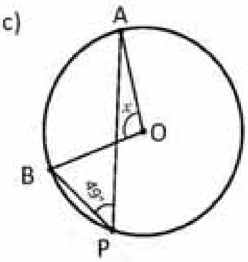
1. 次の各場合について x の値を求めなさい。

a)


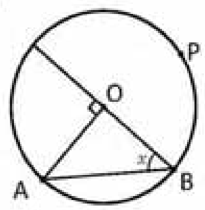
$x = 38°$

b)


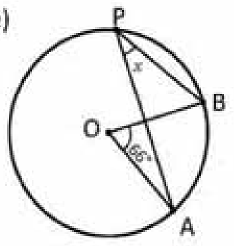
$x = 82°$

c)


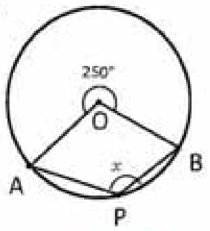
$x = 98°$

d)


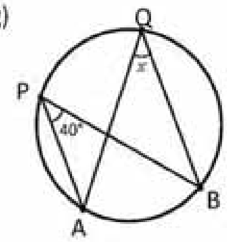
$x = 45°$

e)


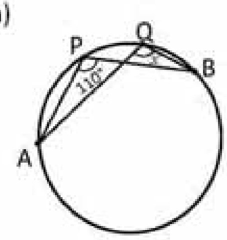
$x = 33°$

f)


$x = 125°$

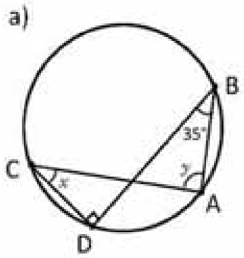
g)


$x = 40°$

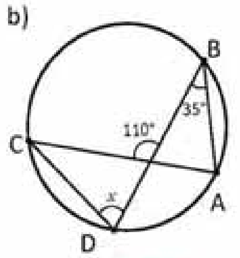
h)


$x = 110°$

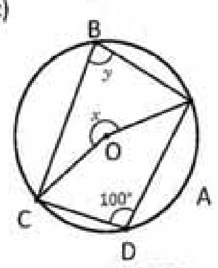
2. 次の各場合について x および y の値を求めなさい。

a)


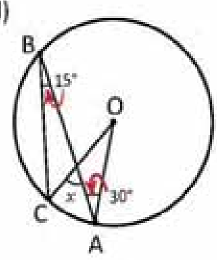
$x = 35°$
$y = 90°$

b)


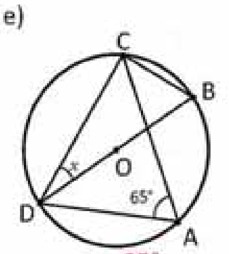
$x = 75°$

c)


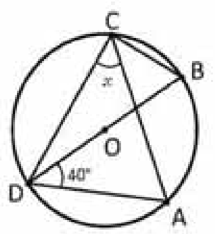
$x = 200°$
$y = 80°$

d)


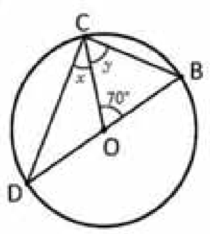
$x = 60°$

e)


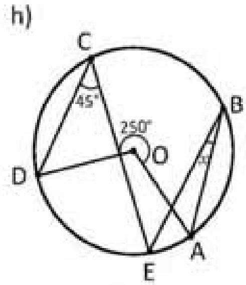
$x = 25°$

f)


$x = 50°$

g)


$x = 35°$
$y = 55°$

h)


$x = 10°$

ユニット 7

149

達成の目安

1.6 中心角と円周角に関する問題を解きます。

一部の設問の解答：

1.

a) ∢BOA = 2∢BPA なので
したがって、$x = 2\ (19°) = 38°$

e) ∢BOA = 2∢BPA なので

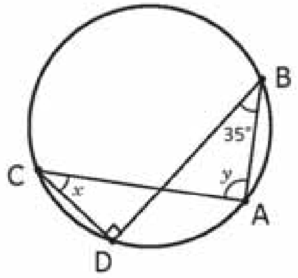
よって、$∢BPA = \frac{1}{2}\ ∢BOA$

したがって、$x = \frac{66°}{2} = 33°$

h) 両方の円周角が $\overset{\frown}{AB}$に対する角なので、x = ∢BQA = ∢BPA = 110°

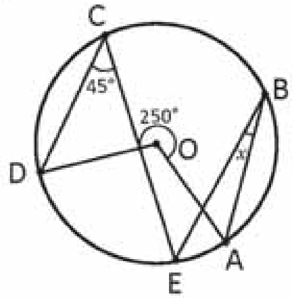
2.

a)



∢CED = 90° – 35° = 55° なので、
よって ∢BEA = ∢CED = 55°
したがって、y = 180° – 35° – 55° = 90°

h)



はじめに線分 $\overline{OE}$ を引きます。

∢AOD = 360° – 250° = 110°

∢EOD = 2(45°) = 90°

∢AOD = ∢AOE + ∢EOD

110° = ∢AOE + 90°

∢AOE = 20°

したがって、

$x = ∢ABE = \frac{1}{2}\ ∢AOE = \frac{20°}{2} = 10°.$

x = 10°

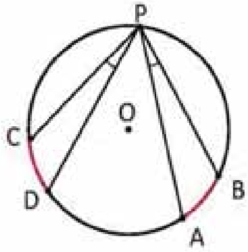
宿題： 練習帳153ページ

レッスン 1

1.7 合同な弧

P

次の図で $\widehat{CD} = \widehat{AB}$ の場合、∢BPA の大きさを ∢DPC の大きさと比べなさい。



記号 $\widehat{AB}$ は、点 A と点 B の間に含まれる弧の部分を意味します。

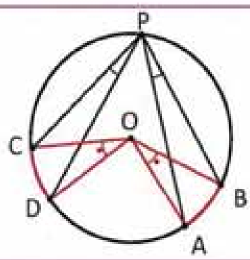
S

角 ∢BOA と ∢DOC を作図します。

∢BOA = ∢DOC （仮定により $\widehat{CD} = \widehat{AB}$ なので）。

∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA y ∢DPC = $\frac{1}{2}$ ∢DOC （円周角なので）。

したがって、∢BPA = ∢DPC



C

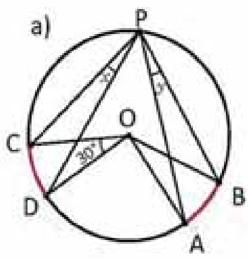
円において、長さの等しい弧に対する円周角は、大きさが等しいです。

2つの円周角の大きさが等しい場合、それらの円周角に対する弧の長さも等しくなります。

E

$\widehat{CD} = \widehat{AB}$ である次の各場合について x および y の値を求めなさい。

a)

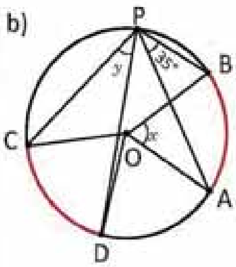


∢BOA = ∢DOC なので

したがって、

$x = y = \frac{30°}{2} = 15°$.

b)



∢BOA = 2∢BPA なので

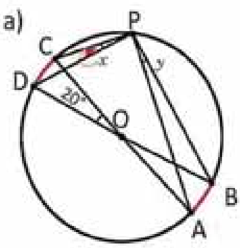
したがって、x = 2 (35°) = 70°

その一方で、∢BOA = ∢DOC

よって、y = ∢DPC = ∢BPA = 35°

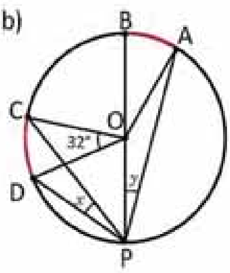
次の各場合について x および y の値を求めなさい。$\widehat{AB} = \widehat{CD}$ とします。

a)



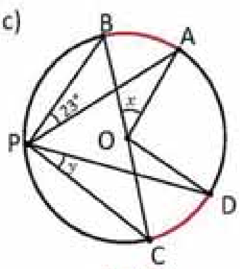
$x = y = 10°$

b)



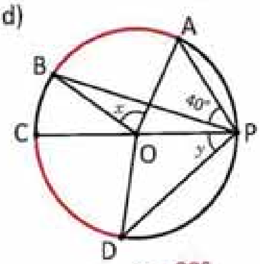
$x = y = 16°$

c)



$x = 46°$
$y = 23°$

d)



$x = 80°$
$y = 40°$

達成の目安

1.7 長さの等しい弧に対する円周角の大きさを求めます。

学習の流れ

この授業では、長さの等しい弧に対する円周角は大きさが等しく、また逆に、2 つの円周角の大きさが等しければ、それらの円周角に対する弧も長さが等しいという性質を証明します。その性質を証明するため、各々の中心角を補助的に作図します。第 7 項で角が円における中心角であるとする扇形の弧の長さについて学び、したがって、2 つの弧が等しければそれらの弧に対する中心角が等しくなることがすでに分かっているので、この方法を用います。

ねらい

Ⓟ 比較を行うための最初のステップとして、中心角 ∢BOA と ∢DOC を描き、続いて、 $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AB}$ なのでそれらの中心角が等しい大きさであることを確認します（第 7 項では、扇形の弧の長さについて学びました）。

Ⓢ 円周角の性質を直接適用し、冒頭の設問の位置とは別の位置にある角において未知数の値を求めます。

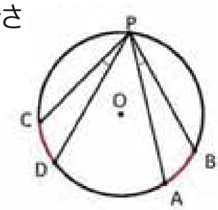
一部の設問の解答：

a) ∢BOA = ∢COD なので
　したがって、$y = x = \frac{20°}{2} = 10°$

c) ∢BOA = 2∢BPA なので
　したがって、$x = 2\,(23°) = 46°$
　その一方で、∢BOA = ∢DOC
　よって、y = ∢DPC = ∢BPA = 23°

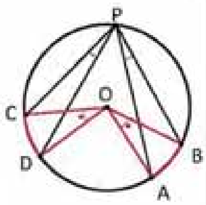
日付： **U7 1.7**

Ⓟ 次の図で $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AB}$ の場合、∢BPA の大きさを ∢DPC の大きさと比べなさい。



Ⓢ 角 ∢BOA と角 ∢DOC を作図します。

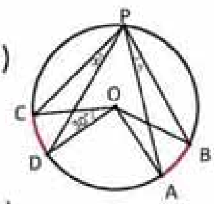
∢BOA = ∢DOC
（仮定により $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AB}$ なので）



∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA かつ
∢DPC = $\frac{1}{2}$ ∢DOC
（円周角なので）

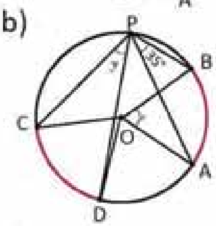
したがって、∢BPA = ∢DPC

Ⓔ a)



∢BOA = ∢DOC なので
したがって、
$y = x = \frac{30}{2} = 15°$.

b)



∢BOA = 2∢BPA なので
したがって、
$x = 2(35°) = 70°$.
その一方で、
∢BOA = ∢DOC.
よって、
y = ∢DPC = ∢BPA = 35°.

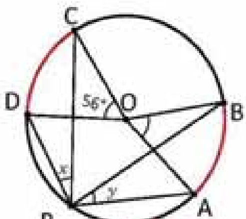
Ⓡ a) $x = y = 10°$　b) $x = y = 16°$
c) $x = 46°$　d) $x = 80°$
$y = 23°$　$y = 40°$

宿題： 練習帳154ページ

1.8 学んだことで練習しましょう

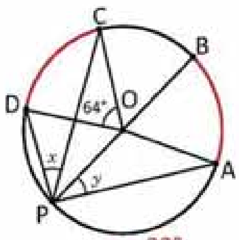
1. 次の各場合について x および y の値を求めなさい。$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ とします。

a) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$



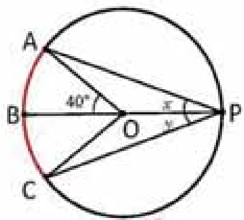
$x = 28°$
$y = 28°$

b) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$



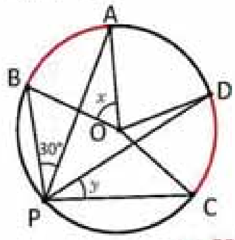
$x = 32°$
$y = 32°$

c) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$



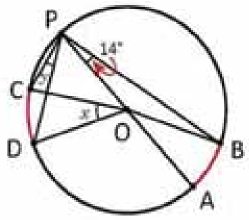
$x = 20°$
$y = 20°$

d) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$



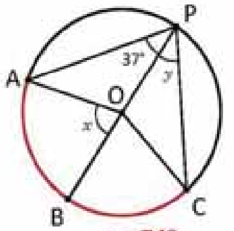
$x = 60°$
$y = 30°$

e) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$



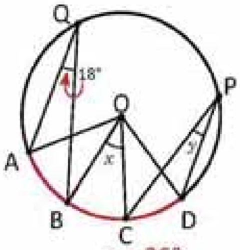
$x = 28°$
$y = 14°$

f) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$



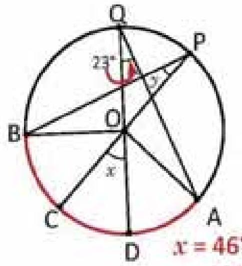
$x = 74°$
$y = 37°$

g) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$



$x = 36°$
$y = 18°$

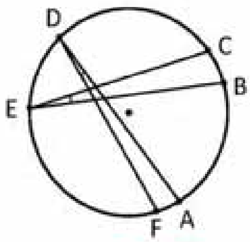
h) $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DA}$



$x = 46°$
$y = 23°$

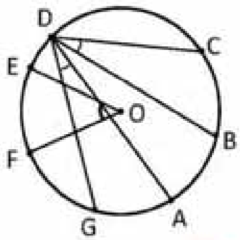
2. 以下の円において、長さの等しい弧を求めなさい。

a) ∢ADF = ∢CEB



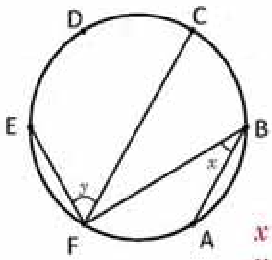
$\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{CB}$

b) ∢FOE = 2∢CDB かつ ∢BDC = ∢ADG



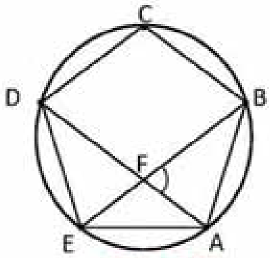
$\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{AG}$

3. 次の図において点 A、B、C、D、E、F が円周を 6 つの等しい弧に分割する場合、x と y の値を求めなさい。



$x = 30°$
$y = 60°$

4. 次の図において ABCDE は正多角形であり、対角線 AD と BE を引きます。∢BFA の大きさを求めなさい。



∢BFA = 72°

ユニット 7

151

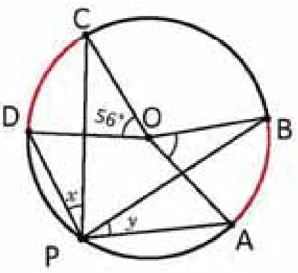
達成の目安

1.8 中心角と円周角に関する問題を解きます。

一部の設問の解答：

1.

a)



$\widehat{BA} = \widehat{CD}$なので、$\sphericalangle BOA = \sphericalangle DOC$

頂点で向き合う角なので、$\sphericalangle BOA = \sphericalangle DOC = 56°$

したがって、

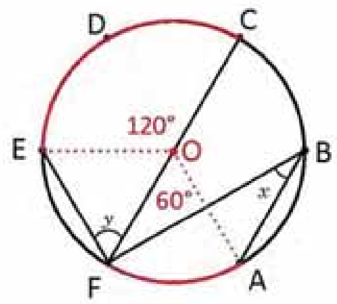
$x = y = \frac{56}{2} = 28°.$

3.

6 つの弧が等しいので、円の 360° も 6 つの等しい角に分割されます。

$360 \div 6 = 60°$

つまり、各々の弧には 60° の中心角が対応します。



$\sphericalangle COE = 2\sphericalangle CFE$ なので

よって、$\sphericalangle CFE = \frac{1}{2}\sphericalangle COE$

したがって、$y = \frac{120°}{2} = 60°$

$\sphericalangle AOF = 2\sphericalangle ABF$ なので

よって、$\sphericalangle ABF = \frac{1}{2}\sphericalangle AOF$

したがって、$x = \frac{60°}{2} = 30°$

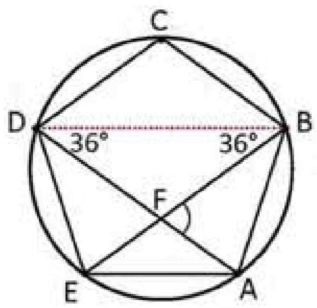
4.

正多角形であるので、その頂点で区切られたそれぞれの弧の長さは等しくなります。

したがって、各々の弧には $\frac{360°}{5} = 72°$ の中心角が対応します。

よって、$\sphericalangle FBD = \sphericalangle FDB = \frac{72°}{2} = 36°$

ΔBFD では、$\sphericalangle BFA = \sphericalangle FBD + \sphericalangle FDB = 72°$



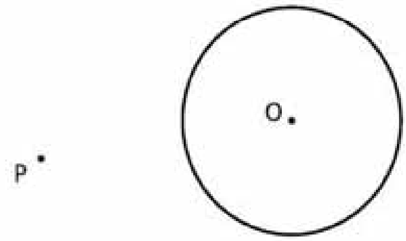
宿題： 練習帳155ページ

レッスン 2 中心角と円周角の応用

2.1 円に対する接線の作図

P

次の円と点 P が与えられるとき、定規とコンパスを使って、点 P を通り円の接線となるような直線を引きましょう。



S

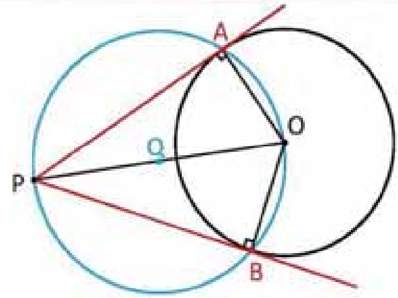
線分 PO の中点を取り、これを Q とします。

Q を中心とし、QO を半径とする円を描きます。

円と交わる点 A と点 B に印をつけます。

このとき、∢OAP = ∢PBO = 90° となります (両者の間は 180° の弦となります)。

このため線分 PA と PB は O を中心とする円の接線です。



円のある点でその半径と直角に交わる直線を、その円の接線と呼びます。

C

解答にあるステップを経ることで、得られた円周角を使い、ある点 P を通る線分と与えられた円の接線を作図することができます。

1. この授業の最初に使用したものとは異なる円と、この円の外にある別の点 P を描き、点 P を通る接線を作図しましょう。

2. 授業の練習問題に基づいて次の問いに答えましょう：
   a) 線分 PA と PB の長さは同じですか。

   b) それはなぜですか。

三角形の合同を使って答えを証明することができます。

達成の目安

2.1 円の周の外にある点から接線を作図します。

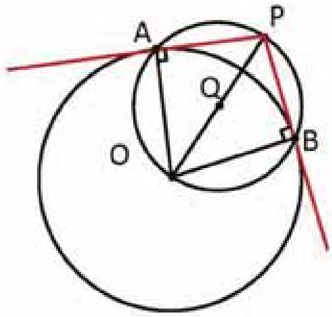
学習の流れ

7 学年では初めて円の接線という概念を扱いました。このため、生徒たちはすでにこの種の直線について知っています。この授業では、円の外側にある点を通る接線を作図します。さらに、円周角の定理を使って、円のある点において半径と直角に交わる直線はその点における接線であるといえます。

ねらい

Ⓟ 接線の作図を終えた後、復習の枠の中にある情報に言及します。ここでは、円のある点でその半径と直角に交わる線を接線と呼ぶことが示されています。

いくつかの設問の解：



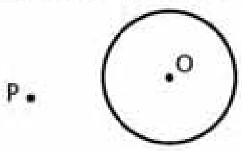
2.

a) はい。

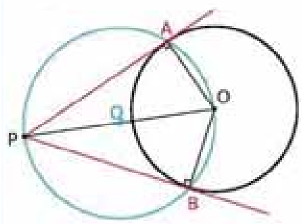
b) なぜなら、ΔOAP と ΔOBP は直角三角形であり、その斜辺と直角を作る辺の一辺で半径に相当する辺の長さが同じだからです（直角三角形の合同の定義による）。したがって PA = PB となります。

日付： **U7 2.1**

Ⓟ 点 P を通り円の接線となる直線を引きましょう。

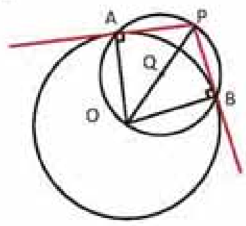


Ⓢ



1. 直線 $\overline{PO}$ の中点をとってこれを Q とし、Q を中心として半径 $\overline{QO}$ となる円を描きます。
3. 円と交わる点 A と点 B に印をつけます。
4. このとき、∢OAP = ∢PBO = 90° となります (両者の間は 180° の弦となります)。
このため線分 PA と PB は O を中心とする円の接線です。

Ⓡ 1.

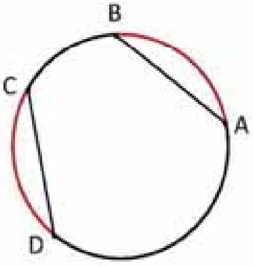


宿題： 練習帳の156ページ

2.2 円の弦と弧

P

以下の図では $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ です。弦 AB と CD の長さを比べましょう。



S

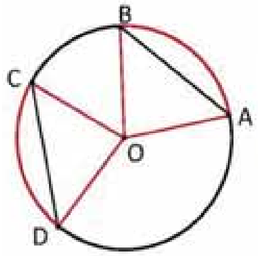
半径 OA, OB, OC と OD を描きます。

∢BOA = ∢DOC ($\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ なので)。

OA = OB = OC = OD (これらは円の半径であるため)。

よって、ΔBOA ≅ ΔDOC (二辺とその間の角が等しい三角形の合同条件による)。

したがって、AB = CD (三角形の合同条件による) となります。



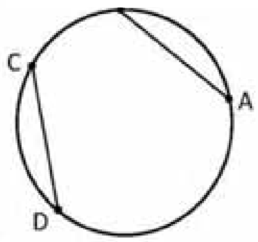
合同の定義 LAL を使うためには、二辺の長さとその間の角が同じである必要があります。

C

円において二つの弧の長さが同じとき、この弧を描く弦の長さも同じになります。

E

以下の図では AB = CD です。弧 $\overset{\frown}{AB}$ と $\overset{\frown}{CD}$ の長さを比べましょう。

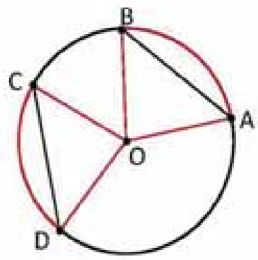


半径 OA, OB, OC と OD を描きます。

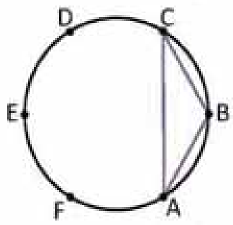
よって、ΔBOA ≅ ΔDOC (三辺が等しい三角形の合同条件による)。

よって、∢BOA = ∢DOC (三角形の合同条件による)。

したがって、$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ (中心角が同じため)。



次の点 A, B, C, D, E, F は円を同じ大きさの弧 6 つに分けます。次の各項に示される点を結んで作られる図形を分類しましょう。例を見ましょう：



a) ABC　BA = BC ($\overset{\frown}{BA} = \overset{\frown}{BC}$ なので)。
答え：ABC は二等辺三角形です。

b) ABDE　c) ACE　d) ACD

e) ABCDEF　f) DEF　g) ABCD

ユニット 7

達成の目安

2.2 合同の弦と弧を使って、辺が等しい図形を分類します。

学習の流れ

すでに三角形の合同条件について学習しました。また、もし 2 つの弧の長さが同じ場合、その中心角の大きさも同じであることを学びました。前者は、ある円において 2 つの弧の長さが同じである場合、その弧に対する弦の長さが同じであることを証明するものとして使います。

ねらい

Ⓟ 最初に二等辺三角形である ΔBOA と ΔDOC を作図します。この二つの三角形は、円の半径であることから同じ長さの辺をもつからです。二辺とその間の角が等しい三角形の合同条件により、三角形は合同であると証明します (赤い線の長さは同じであり、また AB = CD であるため、その間の角の大きさも同じです)。

ΔBOA と ΔDOC の作図と同じように、AB = CD であることを示します。ここでの違いは、AB = CD と仮定されていることから、三角形の合同条件のうち三辺が等しい条件を適用することです。さらに、合同条件が示されたことから、同じ角から引かれたものであることから、弧も等しいことを証明します。

いくつかの設問の解：

b) ∢ABD = 90° (AD は円の直径だから)
同様に： ∢BDE = ∢DEA = ∢EAB = 90°
答え：ABDE は長方形です。

c) AC = CE = EA (AC、CE、EAの長さが等しいので)
ACE は正三角形です。

d) ∢ACD = 90° ($\overline{AD}$ は円の直径だから)
答え：ACD は直角三角形です。

e) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{FA}$
∢ABC = ∢BCD = ∢CDE = ∢DEF = ∢EFA
(なぜなら AB = BC = CD = DE = EF = FAだから)
答え：ABCDEF は正六角形です。

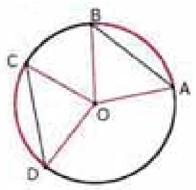
f) DE = EF (DEとEFの長さが等しいので)
答え：DEF は二等辺三角形です。

g) AB = CD ($\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$だから)
$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ($\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ であるため ∢ACB = ∢DBC だから)
答え：ABCD は等脚台形です。

日付： **U7 2.2**

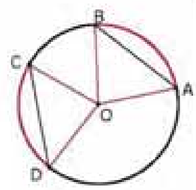
Ⓟ 図では $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ です。弦 AB と CD の長さを比べましょう。

Ⓢ



半径 OA, OB, OC と OD を描きます。
∢BOA = ∢DOC (AB = CDです)
OA = OB = OC = OD (これらは円の半径であるため)。
よって、ΔBOA ≅ ΔDOC となります (二辺とその間の角が等しい三角形の合同条件による)。
したがって、AB = CD (三角形の合同条件による) となります。

Ⓔ もし AB = CD の場合：



OA, OB, OC 及び OD を引くにあたり、ΔBOA ≅ ΔDOC です。
(三辺が等しい三角形の合同条件による)
∢BOA = ∢DOC (合同条件による)
したがって $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ です。
(中心角が同じです)

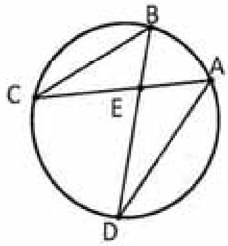
Ⓡ b) AB = DE で AE = BD
(なぜなら $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{DE}$ で $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BD}$ だから)
答え：ABDE は長方形です。

宿題： 練習帳の157ページ

2.3 三角形の相似への応用

P

次の図で、$\Delta AED \sim \Delta BEC$ が成立するか確かめましょう。



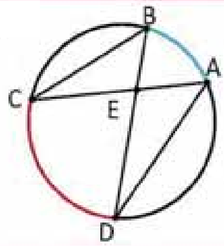
S

図では $\sphericalangle AED = \sphericalangle BEC$ です (これらは対頂角です)。

$\sphericalangle DBC = \sphericalangle DAC$ (同じ弧から弦を引きます)。

しかし $\sphericalangle EBC = \sphericalangle DBC$ で $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DAC$ です。

したがって、$\Delta AED \sim \Delta BEC$ (二組の角がそれぞれ等しい相似条件による)。



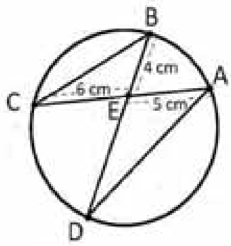
二組の角が等しい相似条件を適用するには、二つの角が合同であれば十分です。

C

二つの三角形の相似を証明するためには、同じ弧の円周角を見ることが必要です。

E

次の図において線分 ED の長さを求めましょう。



$\Delta AED \sim \Delta BEC$ なので。

よって、$\frac{ED}{EC} = \frac{AE}{BE}$.

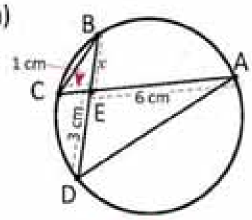
したがって、$ED = EC \times \frac{AE}{BE} = 6 \times \frac{5}{4} = 7.5$.

ED = 7.5 cm

2つの三角形が相似の時、対応する辺の比は同じです。

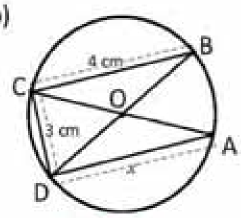
1. 次の図において x を求めましょう。

a)



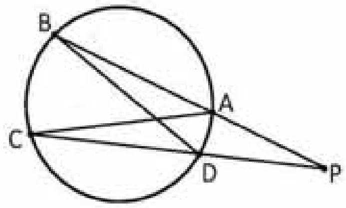
$x = 2$ cm

b)



$x = 4$ cm

2. 次の図において、$\Delta ACP \sim \Delta DPB$であるためにはどのような条件が必要か求めましょう。



これ以上に何か必要ですか。

達成の目安

2.3 円周角の定理を用いて、三角形の相似の問題を解きます。

学習の流れ

事前に対頂角の定理について確認し、二つの三角形が相似であるか確かめました。このユニットの 1.7 の授業と同様に、生徒たちは同じ長さの弧を引く場合、その二つの円周角の大きさが同じであることを学びました。このため、この授業では、その内容を利用して、冒頭の設問のように三角形の相似を証明するときには、同じ弧を引く二つの円周角についてみていくことが必要であることを示します。

ねらい

Ⓟ 三角形の相似を確かめた後、ヒントの四角い枠にある情報を読むよう指示しましょう。

Ⓢ 三角形の相似を確かめた後、ヒントの四角い枠にある情報を読むよう指示しましょう。

いくつかの設問の解：

1.

a) ΔAED ~ ΔBEC なので (二組の角が等しい相似条件による)

したがって、$\frac{ED}{EC} = \frac{AE}{BE}$.

したがって、

$BE = x = AE \times \frac{EC}{ED} = 6 \times \frac{1}{3} = 2$

$x = 2$ cm

b) 三角形 ΔADC と ΔBCD においては、∢ADC = ∢BCD = 90°, CA = DB で $\overline{CD}$ は共通です。

このため、ΔADC ≅ ΔBCD となります。

したがって x = BC = 4

x = 4 cm

2. ΔACP と ΔDBP においては、∢ACP = ∢DBP ($\overset{\frown}{AD}$ の弦から得られた内角であるため) であり、∢P は共通です。

このため、ΔACP ~ ΔDBP となります (二組の角が等しい相似条件による)。

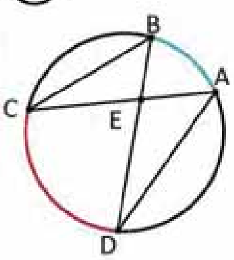
他の条件は必要ありません。

日付： **U7 2.3**

Ⓟ 次の図において

ΔAED ~ ΔBEC が成立するか確かめましょう。

Ⓢ



図では ∢AED = ∢BEC です。

（対頂角です）

∢DBC = ∢DAC

（同じ弧を描いています）

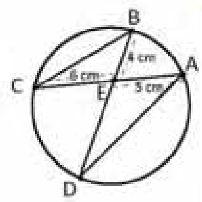
しかし ∢EBC = ∢DBC で

∢DAE = ∢DACです。

このため、ΔAED ~ ΔBEC となります。

(二組の角が等しい相似条件による).

Ⓔ 図では ΔAED ~ ΔBECです。



したがって、$\frac{ED}{EC} = \frac{AE}{BE}$.

したがって、$ED = EC \times \frac{AE}{BE}$

$= 6 \times \frac{5}{4}$

$= 7.5$

Ⓡ 1.

a) x = 2 cm

b) x = 4 cm

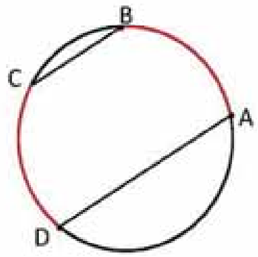
宿題： 練習帳158ページ

レッスン 2

2.4 平行

P

次の図では $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ です。線分 AD と BC は平行か交わるか確かめましょう。

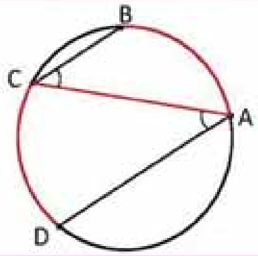


S

弦 AC を引きます。

よって ∢BCA = ∢DAC となります ($\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ のため)。

したがって BC ∥ AD となります　(錯角の大きさが等しいからです)。

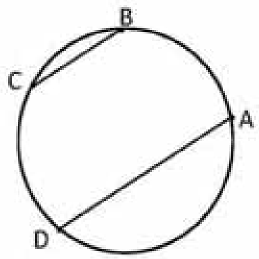


C

円において、同じ長さの弧があるとき、弧の最初の点と終わりの点を結んで作られる弦は平行になります。

E

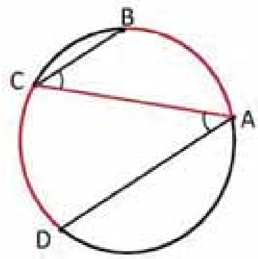
円の弧 $\overset{\frown}{AB}$ と $\overset{\frown}{CD}$ について、BC ∥ AD の場合、比べてみましょう。



弦 AC を引きます。

∢BCA = ∢DAC (錯角だから)。

このため、$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ (円周角の定理による)。



この結果は、最初の練習問題の逆になります。

次の項目のうち、ある円における 4 つの連続する点 A, B, C, D をつないだときに、少なくとも一組の平行な弦が得られるための十分な条件となるものはどれか考えましょう。

a) $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$	b) ∢DBC = ∢BDA	c) CB = DA	d) $\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{AD}$
e) AB = BC	f) ∢ACD = ∢ADB	g) AC = BD	h) ΔABC ≅ ΔDCB

ユニット 7

155

達成の目安

2.4 合同の弧を使い、弦同士の平行を確かめます。

学習の流れ

円において、同じ長さの二つの弧があるとき、弧の最初の点と終わりの点を結んで作られる弦は平行になります。

8 学年では、二つの直線が平行になるための条件を学習しました。この問題では線分ACを引きます。弧の長さが等しいことから ∢ACB = ∢CAD が導かれ、 $\overline{BC}$ と $\overline{AD}$は平行であることがわかります（∢ACB と ∢CAD は錯角）。さらに 1.7 の授業では、2 つの弧の長さが同じ場合、その弦をなす円周角の大きさが同じであることを学習しました。

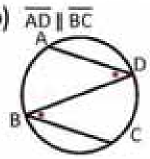
ねらい

Ⓟ「例」では、「結論」と逆のことを行います。つまり、$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ということから AB = CD を導きます。

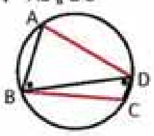
いくつかの設問の解：

必要な条件 (b, c, d, g 及び h)：

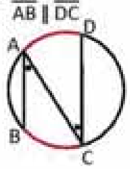
b) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



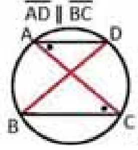
c) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$



d) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

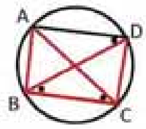


g) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



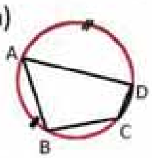
もし AC = BD の場合は、
$\widehat{AC} = \widehat{BD}$ となります。
よって、$\widehat{AB} = \widehat{CD}$ となります。

h) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



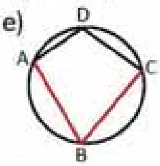
不十分な条件 (a, e 及び f)：

a)



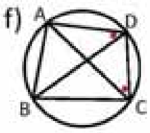
点 B は線分 $\widehat{AC}$上を動くことができます。

e)



点 D は線分 $\widehat{AC}$ 上を動くことができます。

f)

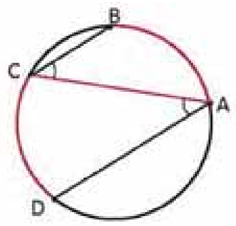


点 C は線分 $\widehat{BD}$ 上を動くことができます。

日付： **U7 2.4**

Ⓟ 図では $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ です。線分 AD と BC は平行か交わるか確かめましょう。

Ⓢ

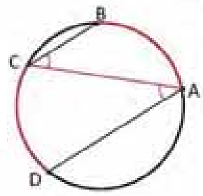


弦 AC を引きます。

よって、∢BCA = ∢DAC となります。($\widehat{AB} = \widehat{CD}$ なので)

したがって、BC ∥ AD となります。
(錯角の大きさが等しいからです。)

Ⓔ もしも BC ∥ AD の場合：



弦 AC を引きます。

∢BCA = ∢DAC
（内側の錯角だから）

よって、$\widehat{AB} = \widehat{CD}$ になります。
(円周角の定理による)

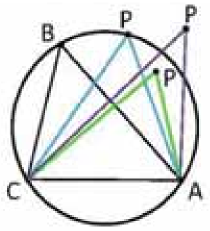
Ⓡ b), c), d), g) y h)

宿題： 練習帳の159ページ

2.5 円上の四つの点

P

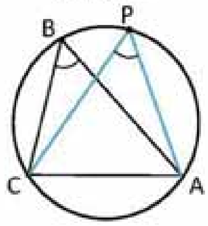
∢ABC = ∢APC であり、両方の角が線分 AC を共有するとします。このとき、点 A, B, C 及び P が同じ円上にあることを証明しましょう。



S

点 P については、円の上、中、外の 3 つの可能性があります。

選択肢 1

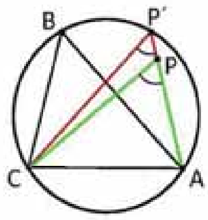


この場合：

∢ABC = ∢APC.

したがって、 A, B, C 及び P は同じ円上になければなりません。

選択肢 2



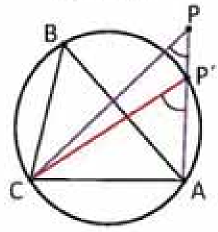
∢AP'Cを描くと

∢ABC = ∢AP'C < ∢APC となります。

∢APC = ∢AP'C + ∢P'CP のため。

したがって、**∢ABC < ∢APC** になります。

選択肢 3



∢AP'Cを描くと、

∢ABC = ∢AP'C > ∢APC となります。

∢AP'C = ∢APC + ∢PCP' のため。

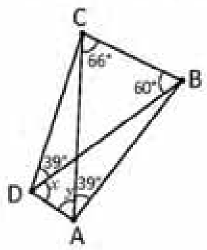
したがって、**∢ABC > ∢APC** になります。

C

もし二つの同じ大きさの角が、その開きで同じ線分を共有しているとき、四つの点は同じ円上にあります。

E

x と y の値を求めましょう。

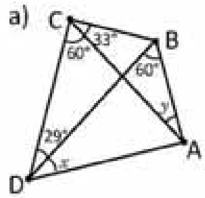


∢CAB = ∢CDB であり、両者は線分 CB を共有するため、 A, B, C, D は同じ円上にあります。

∢BCA = ∢BDA でなければならないため、$x = 66°$ になります。
加えて、 **∢CBD = ∢CAD** でなければならないため、$y = 60°$ になります。

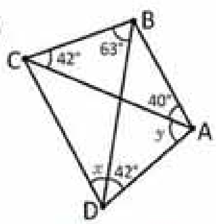
x と y の値を求めましょう。

a)



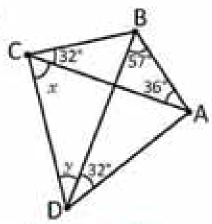
$x = 33°$ で $y = 29°$

b)



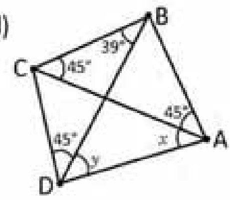
$x = 40°$ で $y = 63°$

c)



$x = 57°$ で $y = 36°$

d)



$x = 39°$ で $y = 45°$

達成の目安

2.5 四つの点が同じ円上にあるための条件を求めます。

学習の流れ

この授業では、角の大きさが同じで、その開きが同じ線分を共有しているとき、四つの点は同じ円上にあることを証明します。そのために、点 P が円に関してとる位置（円の中、上、及び外側）から得られる結果を分析していきます。

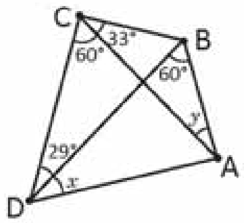
ねらい

Ⓟ冒頭の設問は次のようにしなければなりません：A, B 及び C は円上に固定された点とし、 P は円の中、上または外側にある点とします。もし、∢ABC = ∢APC が成立して両方の角が線分 AC を共有するとき、点 P は同じ円上にあることを証明します。

Ⓢ 解答においては、起こりうる三つの場合について扱い、点が円上にないときは、角の大きさが異なるということを示します。

いくつかの設問の解：

a)



∢ACD = ∢ABD であり、両者は線分 DA を共有するため、A, B, C, D は同じ円上にあります。

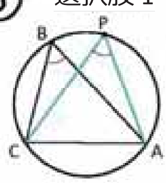
∢ADB と ∢ACB は同じ弧を描くため：
x = ∢ADB = ∢ACB = 33

よって、∢BAC と ∢BDC は同じ弧を描くため：
y = ∢BAC = ∢BDC = 29
x = 33° で y = 29°

日付： **U7 2.5**

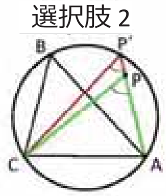
Ⓟ A, B 及び C は円上に固定されており、P はその円の中、上または外側にあるとします。∢ABC = ∢APC で $\overline{AC}$ を共有するとき、P は円上にあることを証明しましょう。

Ⓢ 選択肢 1



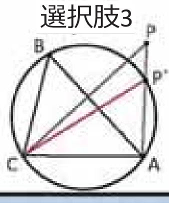
この場合：
∢ABC = ∢APC.

選択肢 2



∢ABC = ∢AP'C.
∢APC = ∢AP'C + ∢P'CP > ∢AP'C.
したがって、∢ABC = ∢AP'C < ∢APC となります。

選択肢3



∢ABC = ∢AP'C.
∢AP'C = ∢APC + ∢PCP' > ∢APC.
したがって、∢ABC = ∢AP'C > ∢APC となります。

Ⓔ x と y の値を求めます。
∢CAB = ∢CDB であり
$\overline{CB}$ を共有します。
A, B, C 及び D は同じ円上にあります。
∢BCA = ∢BDA, x = 66°
∢CBD = ∢CAD, y = 60°

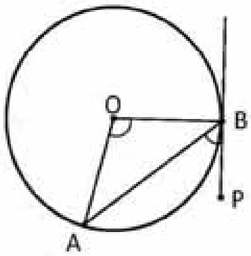
Ⓡ a) x = 33° で y = 29°
b) x = 40° で y = 63°
c) x = 57° で y = 36°
d) x = 39° で y = 45°

宿題： 練習帳160ページ

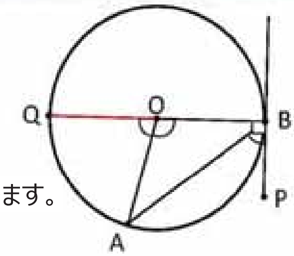
レッスン 2

2.6 接線と弦のなす角

P 次の図において ∢ABP の大きさを ∢BOA と比べましょう。



S 直径 QB を引きます。



よって、∢AOQ = 2∢ABO となります (円周角の定理による)。

また、∢AOQ = 180° – ∢BOA となります (補角)。

よって 2 ∢ ABO = 180° – ∢BOA、すなわち $\sphericalangle ABO = 90° - \frac{\sphericalangle BOA}{2}$ となります。

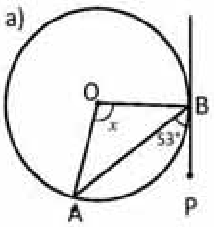
したがって、 $\sphericalangle PBA = \frac{\sphericalangle BOA}{2}$ 、または ∢BOA = 2∢PBA (PB ⊥ BOであるため余角になるため)。

C 接線と弦からなる角を次のように呼びます： **接線と弦のなす角。**

円において、**接線と弦のなす角は、その弦と同じ弧を描く中心角の半分の大きさになります。**

E 次の各場合について x の値を求めましょう。

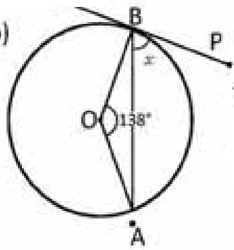
a)



∢BOA = 2∢PBA なので。

したがって、x = 2 (53°) = 106° になります。

b)



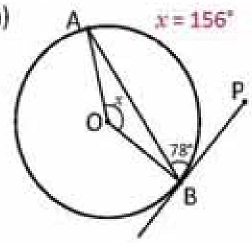
$\sphericalangle PBA = \frac{1}{2} \sphericalangle BOA$ なので、

したがって、

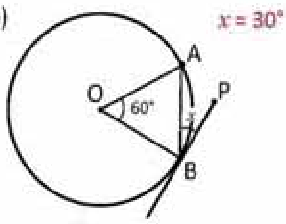
$x = \frac{138°}{2} = 69°$ になります。

次の各場合について x の値を求めましょう。

a)



b)



ユニット 7

達成の目安

2.6 中心角の大きさを使って、接線と弦のなす角の大きさを求めます。

学習の流れ

接弦定理及びその大きさに関する定義を導入します。このような場合について、定義から推察する第一歩として、1.3 の授業の冒頭の設問に示されたのと同様の場合を考えます（つまり、中心角が円周角のある一方にある場合です）。

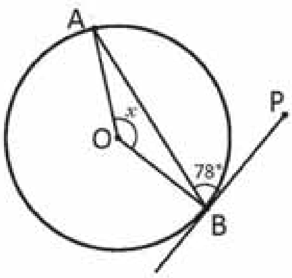
ねらい

Ⓟ 円周角の定理と補角の条件を利用し、角度を比べます。1.2 の授業の「解答」のケース 1 と同様の円周角をつくるために、まずはじめに、直径 QB の補助線をひきます。

Ⓢ 補助線を引く重要性を指摘し（この場合は直径）、幾何学の証明ができるようにします。

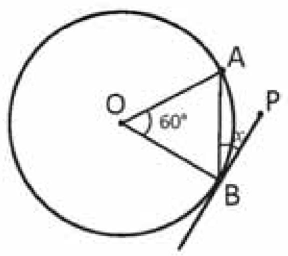
いくつかの設問の解：

a)



∢BOA = 2∢PBA なので。
したがって、x = 2 (78°) = 156° になります。
x = 156°.

b)

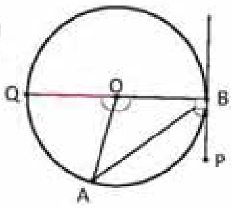


∢PBA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA なので。
したがって、$x = \frac{60°}{2}$ = 30° になります。
x = 30°.

日付： **U7 2.6**

Ⓟ 次の図において∢ABP の大きさを ∢BOA と比べましょう。

Ⓢ



直径 QB を引きます。

∢AOQ = 2∢ABO
(円周角の定理による)

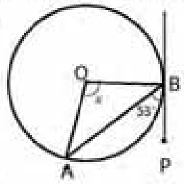
∢AOQ = 180° – ∢BOA
（補角であるため）

よって 2 ∢ ABO = 180° – ∢BOA、
すなわち ∢ABO = 90° – $\frac{∢BOA}{2}$ となります

したがって、∢PBA = 90° – ∢ABO = $\frac{∢BOA}{2}$ 、
または ∢BOA = 2∢PBA となります。
(PB ⊥ BOであるため、余角となるためです)

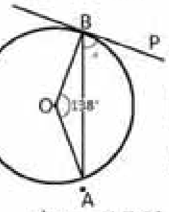
Ⓔ 次の各場合について x の値を求めます。

a)



∢BOA = 2∢PBA
したがって、
x = 2(53°) = 106°.

b)



∢PBA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA
したがって、
$x = \frac{138°}{2}$ = 69°.

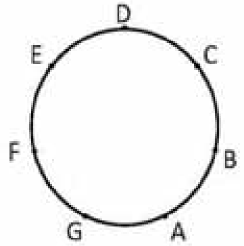
Ⓡ
a) x = 156°
b) x = 30°

宿題： 練習帳161ページ

2.7 復習問題

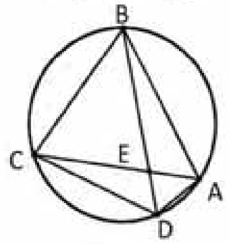
1. 円とその外側にある点 P を描き、定規とコンパスを使って、点 P を通る接線を引きましょう。

2. 次の点 A, B, C, D, E, F, G は円を同じ大きさの弧 7 つに分けます。次の項に示される点を結んで得られる図形を分類しましょう。



a) ABC	b) ACDF	c) ADG	d) ABCDEFG
二等辺三角形 AB = BC	等脚台形 CD ∥ AF，AC = FD	二等辺三角形 AD = DG	正七角形 辺と角はそれぞれ合同です。

3. 次の図において A, B, C, D は同じ円上にあります。次の問いに答えなさい：



a) 次の角 ∢EAB と ∢EDC はどうなっていますか。

b) 次の各 ∢ABE と ∢ACD はどうなっていますか。それはなぜですか。

c) 次の三角形 ΔABE と ΔDCE はどうなっていますか。それはなぜですか。

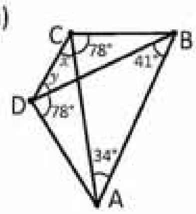
4. 次の項目のうち、ある円における 4 つの連続する点 A, B, C, D をつないだときに、少なくとも一組の平行な弦が得られるための十分な条件となるものはどれか考えましょう。

a) $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$　　b) ∢CAB = ∢CDB　　c) AC = AD　　d) ΔABC ~ ΔCDA

2.8 復習

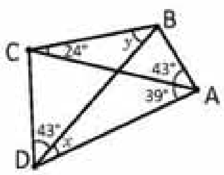
次の場合ごとに x または y の値を求めましょう。

a)



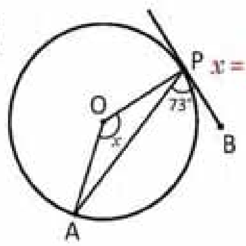
$x = 41°$
$y = 34°$

b)



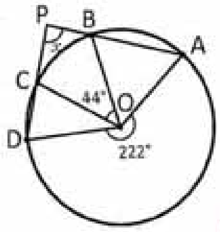
$x = 24°$
$y = 39°$

c)



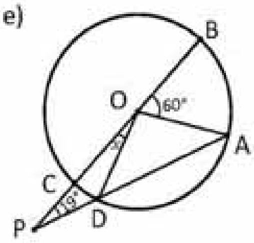
$x = 146°$

d)



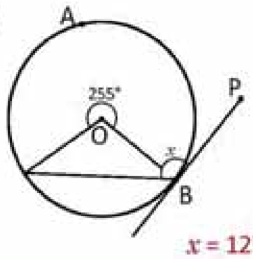
$x = 89°$

e)



$x = 22°$

f)



$x = 127.5°$

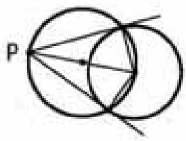
達成の目安

2.7, 2.8 中心角と円周角の応用となる問題を解きます。

いくつかの設問の解：

授業： 2.7

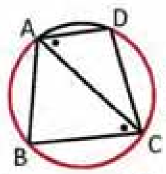
1. 解答の一例は次のようになります：



4.

必要な条件：

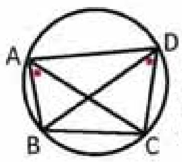
a) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$ であるため、$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$
したがって、$\measuredangle ACB = \measuredangle CAD$ となります。

不十分な条件：

b)



点 D は線分 $\overset{\frown}{AC}$ 上で動くことができます。

授業： 2.8

a) $\measuredangle ADB = \measuredangle ACB$ であり、両者は線分 AB を共有するため、A, B, C, D は同じ円上にあります。
$\measuredangle ACD$ と $\measuredangle ABD$ は同じ弧を描くため：

$x = \measuredangle ACD = \measuredangle ABD = 41°$

よって、$\measuredangle BAC$ と $\measuredangle BDC$ は同じ弧を描くため：

$y = \measuredangle BDC = \measuredangle BAC = 34°$

$x = 41°$, $y = 34°$

宿題： 練習帳162ページ

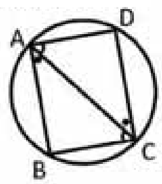
3.

a) $\measuredangle EAB = \measuredangle EDC$ となります。両者とも $\overset{\frown}{BC}$ を描くからです。

b) $\measuredangle ABE = \measuredangle ACD$ となります。なぜなら両者とも $\overset{\frown}{AD}$ を弦とする円周角となるからです。

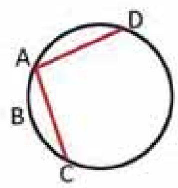
c) ΔABE は ΔDCE に類似します。なぜなら 2 組の角がそれぞれ等しいからです（相似条件）。

d) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ と $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



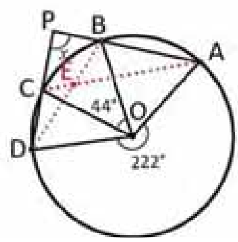
$\Delta ABC \sim \Delta CDA$ であるため、
$\measuredangle CAB = \measuredangle ACD$, $\measuredangle BCA = \measuredangle DAC$ となります。

c)



点 B は線分 $\overset{\frown}{AC}$ 上を動くことができます。

d)



はじめに線分 $\overline{BD}$ と $\overline{AC}$ を引きます。
$\measuredangle AOD = 222°$ は中心角であるため、
円周角は： $\measuredangle ABD = \measuredangle ACD = 111°$ となります。両者とも $\overset{\frown}{AD}$ の弦を描くからです。よって、 $\measuredangle BOC = 44°$ は中心角であるため、 $\measuredangle CAB = 22°$ となります。両者とも $\overset{\frown}{BC}$ の弦を描くからです。
同じく：

$\measuredangle ACP = 180° - \measuredangle ACD$
$= 180° - 111°$
$= 69°$

なぜならどちらの角も $\overline{DP}$ 上にあるからです。
最後に：

$22 + 69 + x = 180$
$x = 89°$

ユニット 8. ばらつきの測定

このユニットのねらい

データ分析を必要とする文脈の状況を批判的に分析するため、ばらつきの測定を求めて解釈します。

関連と発展

小学校低学年・高学年

- 表へのデータの表し方
- 棒グラフ
- ピクトグラム
- 折れ線グラフ
- 最頻値、中央値と平均値
- パーセンテージ

7 学年

ユニット 7：帯グラフと円グラフ
- 帯グラフ
- 円グラフ

8 学年

ユニット 8：統計データの整理と分析
- 量的変数のための統計表とグラフ
- 代表値の測定
- 近似値と重要な桁

9 学年

ユニット 8：ばらつきの測定
- ばらつき
- 標準偏差の特性

ユニット学習計画

レッスン	時間	授業
1. ばらつき	1	1. 散らばったデータの範囲
	1	2. 平均値との偏差
	1	3. 散らばったデータの分散
	1	4. 散らばったデータの偏差
	1	5. データのまとめ
	1	6. 算術平均 と一連のデータの範囲
	1	7. 一連のデータの分散
	1	8. 標準偏差
	1	9. 復習問題
	1	10. 復習問題
2. 標準偏差の特性	1	1. ある変数の標準偏差、プラス定数
	1	2. ある変数をある定数で掛けた時の標準偏差
	1	ユニット 8 のテスト
	1	第 3 学期テスト

授業 12 時間 + ユニット 8 のテスト + 3 学期テスト

各レッスンの要点

レッスン 1：ばらつき
一連のデータと散らばったデータのばらつきの測定の定義を導入します。この課で導入されている測定は、範囲、分散、標準偏差です。

レッスン 2：標準偏差の特性
ある定数を足したり掛けたりして変化したデータの集合体の標準偏差を計算するためのツールとして標準偏差の特性を導入します。

レッスン 1 ばらつき

1.1 散らばったデータの範囲

P 表には、サンサルバドルにある住宅地 2 区域の水道料金の月額（ドル）を示しています。

住宅地 1	
住宅	月額料金（ドル）
1	12
2	11
3	12
4	13
5	12
6	18

住宅地 2	
住宅	月額料金（ドル）
1	10
2	13
3	12
4	11
5	12
6	12
7	14

散らばったデータの平均値、中央値と最頻値はどのように計算しますか

a) 各住宅地の料金の平均値、中央値と最頻値を計算しましょう。

b) 各住宅地の、最も高い料金と最も低い料金の差を計算しましょう。どちらの住宅地の差額が大きいでしょうか？

S a) 平均値 (μ) の計算は、全てのデータを足して、その結果をデータの数で割ります。中央値は、これらのデータを小さいものから大きいものへと順に並べた時に、中央の位置を占めるデータです。そして最頻値は、最も頻度の高いデータ（出てくる回数が最も多いデータ）です。

住宅地 1：

$$\mu = \frac{12+11+12+13+12+18}{6} = \frac{78}{6} = 13$$

平均値は $13 です。

これらのデータを小さいものから大きいものへと順に並べると、次のようになります。

11, 12, 12, 12, 13, 18

データの数が偶数であるため、中央値は 3 と 4 の位置を占めるデータです。

$$\frac{12+12}{2} = 12$$

中央値は $12 です。最後に、住宅地 1 の最頻値は $12 です。なぜならば、出てくる回数が最も多いデータだからです。

住宅地 2：

$$\mu = \frac{10+13+12+11+12+12+14}{7} = \frac{84}{7} = 12$$

平均値は $12 です。

レッスン 1

これらのデータを小さいものから大きいものへと順に並べると、次のようになります。
10, 11, 12, 12, 12, 13, 14
中央の位置（4 番目の位置）を占めるデータは 12 です。すなわち、住宅地 2 の中央値は $12 です。
最後に、住宅地 2 の最頻値は $12 です。なぜならば、出てくる回数が最も多いデータだからです。

これまでの結果は次の表に要約されます。

	住宅地 1	住宅地 2
平均値	$13	$12
中央値	$12	$12
最頻値	$12	$12

b) 住宅地 1 の最高料金は $18 で、最低料金は $11 です。そしてその差は 18 – 11 = 7 です。住宅地 2 の最高料金は $14 で、最低料金は $10 です。そしてその差は 14 – 10 = 4 です。

よって、最高料金と最低料金の間の差額は、住宅地 1 での方が大きいです。

C

ばらつきの測定値は、その平均値からどれだけ各データがばらついているか、または集まっているかを示します。

範囲は、散らばっているデータのあるシリーズで、最大データと最小データの差と同じばらつきの測定値のことです。**範囲**は、**振幅**とも呼ばれています。冒頭の設問では、住宅地 1 の料金はより多くばらついています。なぜならば、その範囲の方が大きいからです。

シリーズ A と B の散らばったデータを観察しましょう。
どっちのシリーズでデータはよりばらついていますか?

シリーズ B の方が範囲はより大きいので、よりばらついているシリーズです。

	シリーズ A	シリーズ B
1	20.3	20.9
2	20.8	20.5
3	21.0	24.0
4	20.5	29.5
5	21.1	21.0
6	20.2	19.1
7	20.4	16.4

2. マリアは、異なる 2 週間の気温を測定して、その結果を右の表に示しました。

a) 各週の平均値、中央値と最頻値を計算しましょう。

b) 各週の範囲を計算しましょう。どっちの週でデータはよりばらついていますか？

a) μ = 30°、中央値 = 30° そして 最頻値 = 29° です。
μ = 30.43°、中央値 = 30° そして 最頻値 = 30° です。

b) 第 1 週、範囲 = 3° 第 2 週、範囲 = 10°
第 2 週のデータの方がよりばらついています。

第 1 週	
曜日	気温
日曜日	32°
月曜日	31°
火曜日	29°
水曜日	30°
木曜日	30°
金曜日	29°
土曜日	29°

第 2 週	
曜日	気温
日曜日	35°
月曜日	34°
火曜日	32°
水曜日	30°
木曜日	30°
金曜日	27°
土曜日	25°

達成の目安

1.1　散らばったデータの範囲を使って、データ分布のばらつきを確認しましょう。

学習の流れ

これまでは、散らばったデータと集合させられたデータの中心傾向の測定に取り組んできましたが、このユニットでは、同様に散らばったデータと集合させられたデータのばらつきの測定に取り組みます。
9年生で学習する代表値やばらつきを表す値はすべて大文字のギリシャ文字で表記することを覚えましょう。データから直接計算できないからです。算術平均や分散を用いる時は、$\bar{x}$ や s^2 の表記は使わないよう気を付けましょう。

一部の設問の回答：

1.

シリーズ A
小さなデータ：20.2 大きなデータ：21.1
範囲：21.1 – 20.2 = 0.9 ドル
シリーズ B
小さなデータ：16.4 大きなデータ：29.5
範囲：13.1 ドル
シリーズ B の方が範囲はより大きいので、よりばらついているシリーズです。

2.
a) 第 1 週
平均値
$$\mu = \frac{32+31+29+30+30+29+29}{7}$$
$$\mu = \frac{210}{7} = 30°$$
中央値
データを順番に並べると、次のようになります。
29, 29, 29, 30, 30, 31, 32
中央値は 30° です。
最頻値
最頻値は 29° です。

第 2 週
平均値
$$\mu = \frac{35+34+32+30+30+27+25}{7}$$
$$\mu = \frac{213}{7} = 30.43°$$
中央値
データを順番に並べると、次のようになります。
25, 27, 30, 30, 32, 34, 35
中央値は 30° です。
最頻値
最頻値は 30° です。

b) 第 1 週
小さなデータ：29　大きなデータ：32
範囲：32 – 29 = 3°
第 2 週
小さなデータ：25　大きなデータ：35
範囲：10°

第 2 週の範囲の方がより大きいので、よりばらついているシリーズです。

日付：　　**U8 1.1**

Ⓟ 各住宅地の：
a) 平均値、中央値と最頻値を計算しましょう。
b) 最も高い料金と最も低い料金の差を計算しましょう。どちらの住宅地の差額が大きいでしょうか?

Ⓢ a) 住宅地 1： μ = 13、中央値 = 12、そして最頻値 = 12
住宅地 2： μ = 12、中央値 = 12 そして最頻値 = 12
b) 住宅地 1：18 – 11 = 7
住宅地 2：14 – 10 = 4
よって、住宅地 1 の差額の方が大きいです。

Ⓡ 1. シリーズ B の方が範囲はより大きいので、よりばらついているシリーズです。
2. μ = 30°、中央値 = 30° そして 最頻値 = 29° です。
μ = 30.43°、中央値 = 30° そして 最頻値 = 30° です。

第 1 週、範囲 = 3°
第 2 週、範囲 = 10°
第 2 週のデータの方がよりばらついています。

宿題： 練習帳166ページ

1.2 平均値との偏差

P

住宅地 1	
住宅	月額料金（ドル）
1	12
2	11
3	12
4	13
5	12
6	18

住宅地 2	
住宅	月額料金（ドル）
1	10
2	13
3	12
4	11
5	12
6	12
7	14

サンサルバドルにある住宅地 2 区域の水道料金の月額データのシリーズから、次のことを得ました。

	住宅地 1	住宅地 2
平均値	$13	$12
中央値	$12	$12

a) 平均値と中央値のどちらの値が各分布をより代表すると思いますか？

b) 両シリーズの、各データとその平均値との差を求めましょう。そして、これらの差とばらつきは、どのような関係にあるのでしょうか？

S

a) 住宅地 1 では、データの多くは平均値である $13 よりも小さいです。その理由は、6 番目のデータ ($18) がその他のデータとかなり違っているので、それが影響しているのです。そのため、この分布では、中央値がより代表的なデータになると考えられます。

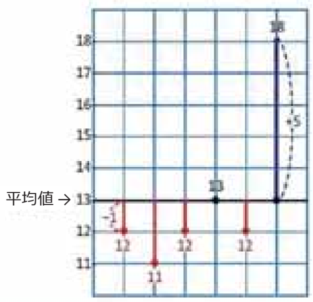
住宅地 2 では、平均値と中央値は同じ値です。よって、この二つのどちらをこの分布の代表的なデータとしてもかまいません。

b) この表には、各データと平均値との間の差が示されています。

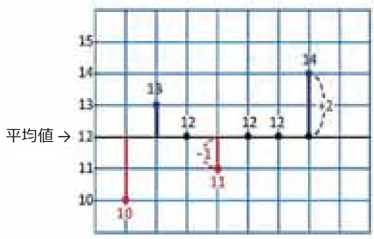
住宅地 1		住宅地 2	
x	$x-\mu$	x	$x-\mu$
12	12−13 = −1	10	10−12 = −2
11	11−13 = −2	13	13−12 = 1
12	12−13 = −1	12	12−12 = 0
13	13−13 = 0	11	11−12 = −1
12	12−13 = −1	12	12−12 = 0
18	18−13 = 5	12	12−12 = 0
		14	14−12 = 2

負の符号を考慮せず、これらの差は、その平均値からの各データの距離を反映します。前述は、次の図式で良く観察できます。

住宅地 1



住宅地 2



レッスン 1

それらの図式では、住宅地 2 では、その平均値 ($12) からの各データの距離は小さく、住宅地 1 では、最後のデータが平均値 ($13) から比較的遠くにあることが観察されます。

C

ある分布における、各データ (x) とその平均値 (μ) との差を、平均値からの**偏差**（または単に偏差）と呼びます。$x - \mu$ で表し、各データと平均値との差を示します。全ての偏差の和は $\Sigma(x - \mu)$ で表しますが、それはいつもイコールゼロです。

全ての偏差の和 = 0 です。

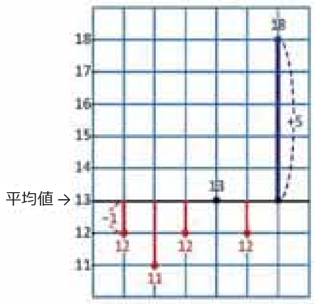
つまり、

$$\Sigma(x - \mu) = 0$$

E

冒頭の設問を使って、平均値からの全ての偏差の和はゼロであることを確認しましょう。

住宅地 1



図式で、負の距離の和の絶対値は正のそれと同じであることに気付くことができます。なので、結果はゼロになります。また、次の計算もできます。

$$\begin{aligned}\Sigma(x - \mu) &= (-1) + (-2) + (-1) + 0 + (-1) + 5 \\ &= -1 - 2 - 1 - 1 + 5 \\ &= -5 + 5 \\ &= 0\end{aligned}$$

次の表には、散らばったデータ 3 シリーズが表示されています。

各表を完了し、偏差に基づいて、平均値に関連した次の質問に答えてください。

どの分布で、それぞれのデータは平均値から最もばらついているのでしょうか?

各データは、シリーズ A で最もばらついています。

シリーズ A

x	$x - \mu$
15	9
4	−2
6	0
3	−3
2	−4
平均値	6
中央値	4
範囲	13

シリーズ B

x	$x - \mu$
8	1
9	2
6	−1
7	0
5	−2
平均値	7
中央値	7
範囲	4

シリーズ C

x	$x - \mu$
15	6
5	−4
8	−1
10	1
7	−2
平均値	9
中央値	8
範囲	10

達成の目安

1.2 それぞれのデータが平均値から最もばらついている分布を確認しましょう。

学習の流れ

この授業では、平均値からのデータの偏差の概念と、全ての偏差の和はゼロであるという事実に取り組みましょう。この概念は、次の授業で、データの集合の分散に取り組むために必要なのです。

ねらい

Ⓟ 平均値からの偏差の概念を定義します。また、

$$\Sigma(x - \mu)$$

という表記の意味は、全ての偏差の和を示します。したがって、この Σ 記号は、ギリシャ語の大文字「シグマ」で、意味は「総和記号」であることに言及しておくことを勧めます。

一部の設問の解答：

シリーズ A

$\mu = 6$

	シリーズ A	
	x	$x - \mu$
	15	15 − 6 = 9
	4	4 − 6 = −2
	6	6 − 6 = 0
	3	3 − 6 = −3
	2	2 − 6 = −4
平均値	6	
中央値	4	
範囲	13	

シリーズ B

$\mu = 7$

	シリーズ B	
	x	$x - \mu$
	8	8 − 7 = 1
	9	9 − 7 = 2
	6	6 − 7 = −1
	7	7 − 7 = 0
	5	5 − 7 = −2
平均値	7	
中央値	7	
範囲	4	

シリーズ C

$\mu = 9$

	シリーズ C	
	x	$x - \mu$
	15	15 − 9 = 6
	5	5 − 9 = −4
	8	8 − 9 = −1
	10	10 − 9 = 1
	7	7 − 9 = −2
平均値	9	
中央値	8	
範囲	10	

各データは、シリーズ A で最もばらついています。

日付： **U8 1.2**

Ⓟ 表のデータがあります。

a) 平均値と中央値のどちらが各住宅地をより代表すると思いますか?

b) 両シリーズで、各データとその平均値の差を計算しましょう。これらの差とばらつきの間にはどのような関係がありますか?

Ⓢ a) 住宅地 1：平均値は 6 番目のデータの影響を大きく受けています。なぜならば、それは他のデータと非常に異なっているからです。中央値がより代表的です。

住宅地 2： 平均値と中央値は同じ値です。どちらを選んでもかまいません。

b) 住宅地 2 のデータは、その平均値からそれぞれ小さい距離にあります。住宅地 1 では、最後のデータがその平均値から比較的遠くに離れています。

Ⓔ $\Sigma(x - \mu)$

$= (-1) + (-2) + (-1) + 0 + (-1) + 5$

$= -1 - 2 - 1 - 1 + 5$

$= -5 + 5$

$= 0$

Ⓡ シリーズ A：9、−2、0、−3、−4

平均値 6 中央値 4 範囲 13

シリーズ B：1、2、−1、0、−2

平均値 7 中央値 7 範囲 4

シリーズ C：6、−4、−1、1、−2

平均値 9 中央値 8 範囲 10

各データは、シリーズ A で最もばらついています。

宿題： 練習帳の168 ページ

レッスン 1

1.3 グループ化されていないデータの分散

P

いくつかのデータに負の符号があったり、データが多かったりする場合は、平均値に対する偏差は解釈が難しいかも知れません。

表では、前回の授業のデータの平均値に対する偏差が示されています：

住宅地 1	
x	$x - \mu$
12	12 − 13 = − 1
11	11 − 13 = − 2
12	12 − 13 = − 1
13	13 − 13 = 0
12	12 − 13 = − 1
18	18 − 13 = 5

住宅地 2	
x	$x - \mu$
10	10 − 12 = − 2
13	13 − 12 = 1
12	12 − 12 = 0
11	11 − 12 = − 1
12	12 − 12 = 0
12	12 − 12 = 0
14	14− 12 = 2

a) 平均値に対する各偏差の二乗を計算しましょう。
b) 前項の偏差の二乗の算術平均値を計算しましょう。この算術平均値は σ^2（σ はギリシャ文字のシグマ）で表します。

S

a) 次の表を見てください。（$x - \mu)^2$ の列に、各偏差を二乗した値が示されています。

住宅地 1		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
12	12 − 13 = − 1	$(-1)^2 = 1$
11	11 − 13 = − 2	$(-2)^2 = 4$
12	12 − 13 = − 1	$(-1)^2 = 1$
13	13 − 13 = 0	$0^2 = 0$
12	12 − 13 = − 1	$(-1)^2 = 1$
18	18 − 13 = 5	$5^2 = 25$

住宅地 2		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
10	10−12 = −2	$(-2)^2 = 4$
13	13−12 = 1	$1^2 = 1$
12	12−12 = 0	$0^2 = 0$
11	11−12 = −1	$(-1)^2 = 1$
12	12−12 = 0	$0^2 = 0$
12	12−12 = 0	$0^2 = 0$
14	14−12 = 2	$2^2 = 4$

b) 前項の偏差の二乗の算術平均値 （σ^2 で表される）は、各表の最後の列の全結果を合計して、それをデータの総数で割って計算します。

住宅地 1では：

$$\sigma^2 = \frac{1+4+1+0+1+25}{6} = \frac{32}{6} \approx 5.33$$

住宅地 2では：

$$\sigma^2 = \frac{4+1+0+1+0+0+4}{7} = \frac{10}{7} \approx 1.43$$

レッスン 1

この値 (σ^2) は、平均値に対するデータのばらつきを計算するのにも役立ちます。平均に対する偏差が大きければ大きい程、σ^2 は大きく、結果として、データのばらつきが大きいです。

住宅地 1 の σ^2 は、偏差の二乗が 25 になる最後の値に影響されて住宅地 2 より σ^2 が大きい結果となっています。従って、住宅地 1 の料金のばらつきの方が大きいです。

C

偏差の二乗の算術平均値を**分散**と呼び、σ^2 で表し、次のように計算します：

$$\text{分散} = \frac{\text{偏差の二乗の合計}}{\text{データの総数}}$$

つまり、

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma(x-\mu)^2}{n}$$

n がデータの総数で μ がデータ数列の算術平均値である場合。冒頭の設問では、住宅地 1 のデータ数列の分散は $\sigma^2 \approx 5.33$；一方、住宅地 2 のデータ数列の分散は $\sigma^2 \approx 1.43$ です。

この値は、データ数列の各データに敏感なので、分散は 範囲に反映しないばらつきの状況を明らかにします。平均に対する偏差が大きければ大きい程、算術平均値に対するデータのばらつきが大きいですが、中央値を分布の代表値として使うことができます。

表には、前回の授業のグループ化されていないデータ数列 3 例が示されています。

数列 A		
x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
15	9	81
4	−2	4
6	0	0
3	−3	9
2	−4	16
分散 (σ^2)	22	

数列 B		
x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
8		1
9	2	4
6	−1	1
7	0	0
5	−2	4
分散 (σ^2)	2	

数列 C		
x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
15	6	36
5	−4	16
8	−1	1
10	1	1
7	−2	4
分散 (σ^2)	11.6	

各表を完成させ、それぞれのデータ数列の分散を計算しましょう。それを基に、どちらのデータ数列のばらつきがより大きいか証明しましょう。前回の授業の結果と比較しましょう。

数列 A の分散の方が大きいので、ばらつきもより大きくなります。範囲で示されたように、分散でも数列 A のばらつきがより大きいことが確認されます。

達成の目安

1.3　分散を使って、グループ化されていないデータのばらつきを証明しましょう。

学習の流れ

1.2 の授業では、平均値に対するばらつきについて学びましたから、この授業では、グループ化されていない一連のデータの分散に取り組むことができます。

一部の設問の回答：

数列 A
$\mu = 6$

数列 A		
x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
15	$15-6=9$	$9^2=81$
4	$4-6=-2$	$(-2)^2=4$
6	$6-6=0$	$0^2=0$
3	$3-6=-3$	$(-3)^2=9$
2	$2-6=-4$	$(-4)^2=16$

$\sigma^2 = \frac{81+4+0+9+16}{5}$
$\sigma^2 = \frac{110}{5}$
$\sigma^2 = 22$

分散 (σ^2)	22

数列 B
$\mu = 7$

数列 B		
x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
8	$8-7=1$	$1^2=1$
9	$9-7=2$	$2^2=4$
6	$6-7=-1$	$(-1)^2=1$
7	$7-7=0$	$0^2=0$
5	$5-7=-2$	$(-2)^2=4$

$\sigma^2 = \frac{1+4+1+0+4}{5}$
$\sigma^2 = \frac{10}{5}$
$\sigma^2 = 2$

分散 (σ^2)	2

数列 C
$\mu = 9$

数列 C		
x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
15	$15-9=6$	$6^2=36$
5	$5-9=-4$	$(-4)^2=16$
8	$8-9=-1$	$(-1)^2=1$
10	$10-9=1$	$1^2=1$
7	$7-9=-2$	$(-2)^2=4$

$\sigma^2 = \frac{36+16+1+1+4}{5}$
$\sigma^2 = \frac{58}{5}$
$\sigma^2 = 11.6$

分散 (σ^2)	11.6

数列 A の分散の方が大きいので、ばらつきもより大きくなります。範囲で示されたように、分散でも数列 A のばらつきがより大きいことが確認されます。

日付：　　**U8 1.3**

Ⓟ 表の情報で、計算しましょう：
a) 各偏差値の二乗　$(x-\mu)$
b) a) で求めた数値の算術平均値、σ^2 で表しましょう 。

Ⓢ 住宅地 1：
1, 4, 1, 0, 1 と 25

住宅地 2：
4, 1, 0, 1, 0, 0 と 4

b) $\sigma^2 = \frac{1+4+1+0+1+25}{6} = \frac{32}{6} \approx 5.33$　　$\sigma^2 = \frac{4+1+0+1+0+0+4}{7} = \frac{10}{7} \approx 1.43$

σ^2 が大きいほど、データのばらつきが大きいです。

Ⓡ 数列 A
$x-\mu = 9, -2, 0, -3$ y -4
$(x-\mu)^2 = 81, 4, 0, 9, 16$
$\sigma^2 = 22$
数列 B
$x-\mu = 1, 2, -1, 0, -2$
$(x-\mu)^2 = 1, 4, 1, 0, 4$
$\sigma^2 = 2$
数列 C
$x-\mu = 6, -4, -1, 1, -2$
$(x-\mu)^2 = 36, 16, 1, 1, 4$
$\sigma^2 = 11.6$
数列 A の分散の方が大きいので、ばらつきもより大きくなります。範囲で示されたように。

宿題：練習帳169ページ

1.4 グループ化されていないデータの標準偏差

P サンサルバドルにある住宅地 2 区域の水道料金の月額データで次のことを実行しましょう。

a) 両方の数列の分散の平方根を計算し、σ（二乗なし）で表しましょう。ばらつきがより大きい住宅地 1 の結果はまだ大きいですか?
b) 各住宅地のデータを数直線上に書きましょう。
c) 各算術平均値に σ のそれぞれの値を減算、加算しましょう。この数字を数直線上に書きましょう。
d) 数直線上で観察したことから、ばらつきがより大きいデータはどれですか?

住宅地 1	
住宅	月額（ドルで）
1	12
2	11
3	12
4	13
5	12
6	18
σ^2	5.33（ドルの二乗）

住宅地 2	
住宅	月額（ドルで）
1	10
2	13
3	12
4	11
5	12
6	12
7	14
σ^2	1.43（ドルの二乗）

S a) 住宅地 1 のデータの分散の平方根は：

$$\sigma = \sqrt{5.33}$$
$$\approx 2.31$$

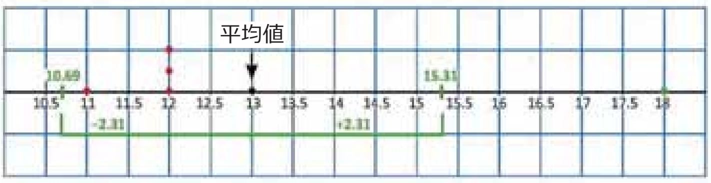
一方、住宅地 2 のデータの分散の平方根は：

$$\sigma = \sqrt{1.43}$$
$$\approx 1.20$$

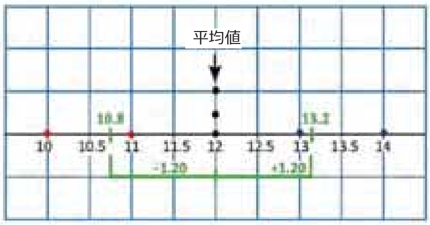
住宅地 1 の結果は、住宅地 2 の結果よりもまだ大きいです。

b) 各点はデータの 1 つを表します；2 つまたはそれ以上等しいデータ値がある場合は、対応する値上に垂直に配置されます。（赤い点は平均値より小さい値、青い点は大きい値、そして黒い点は平均値と同じ値です。）

c) **住宅地 1 の数列で：**平均値 (13) からの距離 σ にあるデータの数を知るためには、μ に σ (2.31) の値を減算、加算します、それぞれ結果は 10.69 と 15.31 になります。下記の図では、6 個のデータ数列のうち 5 個が算術平均値から 2.31 の距離にあることが観察されます。



住宅地 2 の数列で：平均値 (12) に σ (1.20) を減算、加算すると、それぞれ 10.8 と 13.2 になります。下記の図では、7 個のデータ数列のうち 5 個が算術平均値から 1.20 の距離にあることが観察されます。



d) 2 つのデータ数列には目立った違いはありませんが、住宅地 2 の σ がより小さい事実は、住宅地 1 のデータより住宅地 2 のデータの方が算術平均値からより近い距離にあることを示しています。よって、住宅地 1 の月額の方がばらつきが大きいです（これは、$18 というデータに表れています）。

C

分散の平方根は**標準偏差**と名づけ、σ で表し、次のように計算します：

$$\text{標準偏差} = \sqrt{\text{分散}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{偏差の二乗の合計}}{\text{データの総数}}}$$

つまり、

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\mu)^2}{n}}$$

標準偏差は**標準偏差**とも呼びます。

標準偏差は、平均値 μ に対する偏差の平均の一種を示します。つまり、算術平均値に対する各データの距離の平均であり、二乗の単位で表す分散とは異なります。

標準偏差が大きければ大きい程、算術平均値に対するデータのばらつきは大きいですが、中央値をデータ数列の代表値として使用することができます。標準偏差は常にゼロより大きいかゼロに等しいので、負の数字には決してなりません。

前回の授業の練習のデータ数列 A, B と C で次を実行しましょう：

数列 A

x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
15	9	81
4	−2	4
6	0	0
3	−3	9
2	−4	16

σ^2	22
σ	4.69

数列 B

x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
8	1	1
9	2	4
6	−1	1
7	0	0
5	−2	4

σ^2	2
σ	1.41

数列 C

x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
15	6	36
5	−4	16
8	−1	1
10	1	1
7	−2	4

σ^2	11.6
σ	3.41

a) 各数列の標準偏差を計算しましょう。
b) 各数列で、平均値に対する標準偏差の距離を示すデータの値を求めましょう。

数列 A：4、6、3 と 2。
4 データ

数列 B：8、6 と 7。
3 データ

数列 C：8、10 と 7。
3 データ

達成の目安

1.4　標準偏差を使って、ある数列のばらつきを証明しましょう。

学習の流れ

データ集合の分散については既に学びました。分散の平方根である標準偏差を導入します。

ねらい

Ⓟ 標準偏差から 2 つの数列のうちどちらのばらつきがより大きいかを確認できることを明らかにします。
b)、c) と d) の展開から得た図を示すことは、そこからどの数列のばらつきがより大きいかを導き出すことが目的ではなく、単に標準偏差とは何かをグラフで示しているだけです。

一部の設問の回答：

数列 A

$\mu = 6$

数列A		
x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
15	9	81
4	−2	4
6	0	0
3	−3	9
2	−4	16

σ^2	22
σ	$\sqrt{22} = 4.69$

数列 B

$\mu = 7$

数列B		
x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
8	1	1
9	2	4
6	−1	1
7	0	0
5	−2	4

σ^2	2
σ	$\sqrt{2} = 1.41$

数列 C

$\mu = 9$

数列C		
x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
15	6	36
5	−4	16
8	−1	1
10	1	1
7	−2	4

σ^2	11.6
σ	$\sqrt{11.6} = 3.41$

b）数列 A

$\mu - \sigma = 6 - 4.69 = 1.31$

$\mu + \sigma = 6 + 4.69 = 10.69$

データ：4、6、3 と 2。

4 データ

数列 B

$\mu - \sigma = 7 - 1.41 = 5.59$

$\mu + \sigma = 7 + 1.41 = 8.41$

データ：8、6 と 7。

3 データ

数列 C

$\mu - \sigma = 9 - 3.41 = 5.59$

$\mu + \sigma = 9 + 3.41 = 12.41$

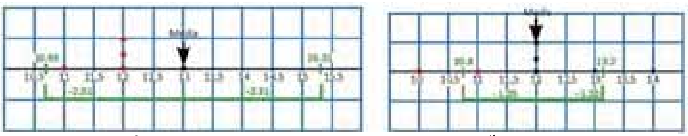
データ：8、10 と 7。

3 データ

日付：　　**U8 1.4**

Ⓟ a) σ^2 の平方根を計算しましょう。数列 1 の結果はまだより大きいですか?
b) 直線上に各数列のデータを書き込みましょう。
c) 各平均値に σ のそれぞれの値を減算、加算し、その値を線上に書き込みましょう。
d) どの数列のばらつきがより大きいですか?

Ⓢ a) 住宅地 1 は：　$\sigma = \sqrt{5.33} \approx 2.31$
住宅地 2 は：　$\sigma = \sqrt{1.43} \approx 1.20$
数列 1 の結果は、数列 2 の結果よりまだ大きいです。
b) と c)



d) 数列 1 の σ は、数列 2 の σ より大きいので、ばらつきはより大きいです。

Ⓡ a) 数列 A：
$\sigma = 4.69$
数列 B：
$\sigma = 1.41$
数列 C：
$\sigma = 3.41$
b) 数列 A：4、6、3 と 2。
4 データ
数列 B：8、6 と 7。
3 データ
数列 C：8、10 と 7。
3 データ

宿題：練習帳171ページ

1.5 データのまとめ

P

カルロスとアントニオはマキリシュアット本屋で働いています。30 日間、日々のノートの販売数を記録しました。結果は下記の通りです：

カルロス				
5	15	23	11	20
10	6	9	10	22
15	21	15	16	34
20	18	13	26	18
16	22	21	24	12
14	17	19	16	11

アントニオ				
9	15	5	18	22
13	17	11	24	14
19	22	23	10	11
20	12	16	28	18
10	13	21	17	8
21	20	15	15	6

それぞれの枠が一日を表します。

a) ノートの販売数を 5 冊ずつ 6 グループに分類し、5 冊から始めて 35 冊で終わるようにします。
b) グループを表に整理し、それぞれのグループの合計を求めましょう。

S

a) グループは 6 で、最初のグループは 5 で始まり、最後は 35 で終わるべきなので、5〜10冊、10〜15冊、15〜20冊、20〜25冊、25〜30冊、30〜35冊のグループとなります。前項に従うと、カルロスのノートの販売数は、次のように分類されます：

カルロス						
			16			
			19			
			17	24		
		11	16	21		
		14	18	22		
		12	18	20		
		13	16	21		
	9	10	15	22		
	6	10	15	20		
	5	11	15	23	26	34
	5〜10	**10〜15**	**15〜20**	**20〜25**	**25〜30**	**30〜35**

"5〜10" のグループに、5、6、7、8 と 9 と該当する販売数を書き込み、最後の数 (10) は、次のグループに書き込みます。その他のグループも同じようにします。

アントニオのノートの販売数も、同じように分類します。

8日の間に、アントニオは20〜25冊売りました。

アントニオ						
			15			
		13	15	20		
		10	17	21		
		12	18	21		
		11	16	20		
	6	10	19	23		
	8	14	17	22		
	5	11	18	24		
	9	13	15	22	28	
	5〜10	**10〜15**	**15〜20**	**20〜25**	**25〜30**	**30〜35**

レッスン 1

b) 表は次のようになります。

ノートの販売数	日数	
	カルロス	アントニオ
5～10	3	4
10～15	7	8
15～20	10	9
20～25	8	8
25～30	1	1
30～35	1	0
合計	**30**	**30**

この数字は、アントニオが20～25冊売った日数を表しています。

C

冒頭の設問のように、データ集合を整理した表を、**度数分布表**と呼びます。

データの間隔は**階級**と呼ばれ、各階級に対応するデータの合計は**頻度**と呼ばれます。階級の大きさは階級幅と呼ばれ、階級の最大値と最低値は**階級限度**と呼ばれます。

例えば、冒頭の設問の最初の授業では、階級限度は 5 と 10 で、最小値は 5、最大値は 10、階級幅は 5 となりました。各階級の真ん中にある数字は**中点**と呼ばれ、 Pm で表し、次の方程式で求めます：

$$Pm = \frac{\text{最大値} + \text{最小値}}{2}$$

最初の階級の中央点は： $Pm = \frac{5 + 10}{2} = 7.5$

モラサン県の 2 集落で、21 歳未満の住民の調査をし、次の結果を得ました：

集落 1					
9	14	15	14	19	16
11	18	9	12	20	12
12	11	10	19	14	13
15	12	11	18	11	16
14	16	17	12	13	17

集落 2					
14	13	9	17	15	9
9	14	15	20	18	12
13	10	9	11	10	13
16	12	12	11	10	13
18	11	14	10	19	9

a) 各集落の 21 歳未満の住人を 3 人ずつ 4 グループに分類し、9 から始めて 21 で終わるようにしましょう。
b) データを度数分布表に整理しましょう。
c) 作成した表にもう一列設けて、各階級値を示しましょう。

達成の目安

1.5　データを度数分布表に整理しましょう。

学習の流れ

8 学年では、生徒達はデータ数列を階級に分類することを学びましたから、既にこの学習についての概念があります。この授業では、以前に実行したことを復習するように指導します。

ねらい

Ⓟ a)　で示される「解きかた」の表は黒板には書きません。授業の展開に時間が掛かるからです。教科書を使って直接生徒達の答えを確認する方が良いでしょう。

一部の設問の回答：

a)

集落 1

	13		
	12		
	14		
	12		
11	13	17	
11	14	17	
10	12	16	18
11	12	16	19
9	12	15	20
11	14	16	18
9	14	15	19
9〜12	12〜15	15〜18	18〜21

集落 2

9			
10			
11	14		
10	13		
11	12		
10	12		
11	13		
9	13		
10	12	16	19
9	14	15	18
9	13	15	18
9	14	17	20
9〜12	12〜15	15〜18	18〜21

b) と c)

年齢	21歳未満の人数	Pm
9〜12	7	10.5
12〜15	11	13.5
15〜18	7	16.5
18〜21	5	19.5
合計	30	

年齢	21歳未満の人数	Pm
9〜12	12	10.5
12〜15	10	13.5
15〜18	4	16.5
18〜21	4	19.5
合計	30	

備考：
a) では、データは整理されていますが、元の表の順序に従って書き込む方が実用的です。

日付：　　　　　　　　　　**U8 1.5**

Ⓟ 教科書に示された記録を使って：
a) ノートの販売数を 5 冊ずつ 6 グループに分類し、5 冊から始めて 35 冊で終わるようにします。
b) グループを表に整理し、それぞれのグループの合計を求めましょう。

Ⓢ b)

ノートの販売数	日数	
	カルロス	アントニオ
5〜10	3	4
10〜15	7	8
15〜20	10	9
20〜25	8	8
25〜30	1	1
30〜35	1	0
合計	30	30

Ⓡ a) 集落 1

	14		
	14		
	14		
11	14		
11	13		
11	13	17	
11	12	17	20
11	12	16	19
10	12	16	19
9	12	15	18
9	12	15	18
9〜12	12〜15	15〜18	18〜21

集落 2

11			
11			
11	14		
10	14		
10	14		
10	11		
10	13		
9	11		
9	13	17	20
9	12	16	19
9	12	15	18
9	12	15	18
9〜12	12〜15	15〜18	18〜21

b) と c)

年齢	21歳未満の人数	Pm
9〜12	8	10.5
12〜15	11	13.5
15〜18	6	19.5
18〜21	5	19.5
合計	30	

年齢	21歳未満の人数	Pm
9〜12	12	10.5
12〜15	10	13.5
15〜18	4	19.5
18〜21	4	19.5
合計	30	

宿題：練習帳172ページ

1.7 グループ化されたデータの分散

P

表には、30 日間でカルロスが販売したノートの数が示されています：

ノートの販売数	日数 カルロス (fc)	中点 (Pm)	$f \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f(Pm - \mu)^2$
5〜10	3	7.5	22.5	−10	100	300
10〜15	7	12.5	87.5			
15〜20	10	17.5	175.0			
20〜25	8	22.5	180.0			
25〜30	1	27.5	27.5			
30〜35	1	32.5	32.5			
合計	30					
算術平均値 (μ)	17.5					

a) 表を完成させ、最後の列のデータの合計を計算しましょう。
b) このグループ化されたデータ数列の分散をどのように計算しますか?

S

a) 完成した表を以下に示します。

ノートの販売数	日数 カルロス (fc)	中点 (Pm)	$f \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f(Pm - \mu)^2$
5〜10	3	7.5	22.5	−10	100	300
10〜15	7	12.5	87.5	−5	25	175
15〜20	10	17.5	175.0	0	0	0
20〜25	8	22.5	180.0	5	25	200
25〜30	1	27.5	27.5	10	100	100
30〜35	1	32.5	32.5	15	225	225
合計	**30**					
算術平均値 (μ)	**17.5**					

最後の列のデータの合計 $f(Pm - \mu)^2$ は以下です：

$$300 + 175 + 0 + 200 + 100 + 225 = 1\,000$$

b) 分散を計算するには a)で計算した合計結果をデータの総数で割るだけです。つまり：

$$\sigma^2 = \frac{1\,000}{30}$$

$$\approx 33.33$$

グループ化されていないデータ数列と同様、分散は二乗の単位で表されます。この事例の場合は、"日数の二乗"です。

従って、$\sigma^2 \approx 33.33$

レッスン 1

b) カルロスの事例では、頻度がゼロでない最後の階級は 30～35 の階級で、頻度は 1、その最大値は 35 です。そして、頻度がゼロでない最初の階級は 5～10（頻度は 3）の階級で、その最小値は 5 です。

頻度がゼロでない最初の階級。

頻度がゼロでない最後の階級。

ノートの販売数	日数 カルロス (f_C)
5～10	3
10～15	7
15～20	10
20～25	8
25～30	1
30 a 35	1
合計	30

同様に、アントニオの場合にも 2 つの階級が見つかります。

頻度がゼロでない最初の階級。

頻度がゼロでない最後の階級。

ノートの販売数	日数 アントニオ (f_A)
5～10	4
10～15	8
15～20	9
20～25	8
25～30	1
30～35	0
合計	30

c) アントニオの数列での差は：
35 – 5 = 30
そして、アントニオの数列での差は：30 – 5 = 25

したがって、カルロスのデータ数列に、より大きいばらつきが見られます。

C

グループ化されたデータ数列の**範囲**は、頻度がゼロでない最後の階級の最大値と頻度がゼロでない最初の階級の最小値の差です。グループ化されたデータ数列の**算術平均値は**、このように計算します：

$$\mu = \frac{\text{製品の合計} f \times Pm}{\text{データの総数}}$$

ある学校では、8 学年と 9 学年の生徒が一日にテレビを見る時間を分で記録します、データは次の度数分布表に示されてます：

分	8 学年 (f_1)	9 学年 (f_2)	Pm	$f_1 \times Pm$	$f_2 \times Pm$
30～40	0	3	35	0	105
40～50	10	8	45	450	360
50～60	11	9	55	605	495
60～70	12	12	65	780	780
70～80	11	10	75	825	750
80～90	6	8	85	510	680
合計	50	50			

8学年: μ = 63.4
9学年: μ = 63.4
平均値は同じです。

a) 表を完成し、各データ数列の算術平均値を求め、比較しましょう。
b) 範囲を比較して、どのデータ数列により多くのばらつきが見られるか確認しましょう。
8学年: 50　9学年: 60

達成の目安

1.6　算術平均値を計算し、グループ化されたデータの範囲を使って、データの分布のばらつきを調べましょう。

学習の流れ

前の授業で、範囲、算術平均値およびデータ集合の分類を学習しました。ですから、もう算術平均値やグループ化されたデータの範囲について学習することができます。グループ化されたデータの算術平均は、8年生でも学習したことを確認しましょう。このテーマは生徒達の復習に役立つでしょう。

一部の設問の回答：

a)

Pm	$f_1 \times Pm$	$f_2 \times Pm$
35	0	105
45	450	360
55	605	495
65	780	780
75	825	750
85	510	680

8年生の平均値

$$\mu = \frac{0 + 450 + 605 + 780 + 825 + 510}{50}$$

$$\mu = \frac{3170}{50}$$

$$\mu = 63.4$$

9年生の平均値

$$\mu = \frac{105 + 360 + 495 + 780 + 750 + 680}{50}$$

$$\mu = \frac{3\,170}{50}$$

$$\mu = 63.4$$

8年生と9年生の平均値は同じです。

b)
8年生の範囲　90 – 40 = 50

9年生の範囲　90 – 30 = 60

9 学年では、データの範囲がより大きいので、ばらつきもより大きいです。

日付：　　　　U8 1.6

Ⓟ カルロスとアントニオの個別のデータ：
a) 表を完成し、平均値を計算しましょう。どうなりましたか？？
b) 頻度がゼロでない最後と最初の階級の最大値と最小値をそれぞれ見つけましょう。
c) b.で求めた最大値から最小値を引きましょう。どちらのデータのばらつきが大きいですか?

Ⓢ カルロス：$\mu = 17.5$　　アントニオ：$\mu = 16.5$

b)	最大値	最小値
カルロス：	35	5
アントニオ：	30	5

c) カルロス：35 – 5 = 30　アントニオ：30 – 5 = 25

カルロスの数列の方がばらつきが大きいです。

Ⓡ a) Pm: 45, 55, 65, 75, 85
$f_1 \times Pm$: 450, 605, 780, 825, 510
$f_2 \times Pm$: 360, 495, 780, 750, 680
8.°： $\mu = 63.4$ 分
9.°： $\mu = 63.4$ 分
平均値は同じです。

b) 8年生：50分
9年生：60 分

宿題： 練習帳174ページ

1.7 グループ化されたデータの分散

P

表には、30 日間でカルロスが販売したノートの数が示されています：

ノートの販売数	日数 カルロス (fc)	中点 (Pm)	$f \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f\,(Pm - \mu)^2$
5～10	3	7.5	22.5	−10	100	300
10～15	7	12.5	87.5			
15～20	10	17.5	175.0			
20～25	8	22.5	180.0			
25～30	1	27.5	27.5			
30～35	1	32.5	32.5			
合計	30					
算術平均値 (μ)	**17.5**					

a) 表を完成させ、最後の列のデータの合計を計算しましょう。
b) このグループ化されたデータ数列の分散をどのように計算しますか?

S

a) 完成した表を以下に示します。

ノートの販売数	日数 カルロス (fc)	中点 (Pm)	$f \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f(Pm - \mu)^2$
5～10	3	7.5	22.5	−10	100	300
10～15	7	12.5	87.5	−5	25	175
15～20	10	17.5	175.0	0	0	0
20～25	8	22.5	180.0	5	25	200
25～30	1	27.5	27.5	10	100	100
30～35	1	32.5	32.5	15	225	225
合計	**30**					
算術平均値 (μ)	**17.5**					

最後の列のデータの合計、$f\,(Pm - \mu)^2$、は以下です：

$$300 + 175 + 0 + 200 + 100 + 225 = 1\,000$$

b) 分散を計算するには a) で計算した合計結果をデータの総数で割るだけです。つまり：

$$\sigma^2 = \frac{1\,000}{30}$$

$$\approx 33.33$$

グループ化されていないデータ数列と同様、分散は二乗の単位で表されます。この事例の場合は、"日数の二乗"です。

従って、$\sigma^2 \approx 33.33$

C グループ化されたデータ数列の分散は次のように計算します：

$$分散 = \frac{製品の合計\ f(Pm - \mu)^2}{データの総数}$$

つまり、

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f(Pm - \mu)^2}{n}$$

n がデータの総数である場合、Σ は合計の符号、f は各階級の頻度、Pm は各階級の中点、そして、μ はデータ数列の算術平均値です。

分散が大きければ大きい程、算術平均値からのデータのばらつきは大きいです。

1. 表を完成させ、アントニオのノートの販売数の分散を計算しましょう。その後、分散を比較して、どのデータ数列により多くのばらつきが見られるか確認しましょう。

ノートの販売数	日数 アントニオ (f_C)	中点 (Pm)	$f \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f(Pm - \mu)^2$
5～10	4	7.5	30.0	-9	81	324
10～15	8	12.5	100.0	−4	16	128
15～20	9	17.5	157.5	1	1	9
20～25	8	22.5	180.0	6	36	288
25～30	1	27.5	27.5	11	121	121
30～35	0	32.5	0.0	16	256	0
合計	30					
算術平均値 (μ)	16.5					

2. 授業 5 のモラサン 2 集落のグループ化されたデータ数列を使って、以下に答えましょう：

a) 次の表を完成させ、集落 1 のデータの分散を計算しましょう：

年齢	人数	中点 (Pm)	$f_i \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f_i(Pm - \mu)^2$
	集落 1 (f_1)					
9～12	7	10.5	73.5	-4	16	112
12～15	11	13.5	148.5	−1	1	11
15～18	7	16.5	115.5	2	4	28
18～21	5	19.5	97.5	5	25	125
合計	30					
算術平均値 (μ)	14.5					

b) 前述のように、集落 2 の表を作成し、そのデータの分散を計算しましょう。
c) 前項を基に、次の問いに答えましょう。どの集落でデータのばらつきがより大きいですか?

集落 2 のデータで分散がより大きいので、ばらつきもより大きいです。

達成の目安

1.7　グループ化されたデータの分散を計算しましょう。

学習の流れ

生徒達は、データ数列を階級に分類する方法、また、グループ化されていないデータ集合の分散を計算する方法を既に知っていますから、今回は、グループ化されたデータのこの値を計算します。

ねらい

Ⓟ 冒頭の設問 b) では、グループ化されたデータの分散の計算式を、グループ化されていないデータのそれと関連付けることが生徒に期待されます。それによって、a) で要求された合計はデータの総数で割るべきであることを確認します。

一部の設問の回答：

1.

$\Sigma f(Pm - \mu)^2$

$= 324 + 128 + 9 + 288 + 121 + 0$

$= 870$

$\sigma^2 = \frac{870}{30}$

カルロスのデータ集合の分散はより大きいので、ばらつきもより大きいです。

b）集落 2 のためには（左の表を見ましょう。）

$\Sigma f(Pm - \mu)^2$

$= 108 + 0 + 36 + 144$

$= 288$

$\sigma^2 = \frac{288}{30}$

$\sigma^2 = 9.6$

c) 集落 2 のデータで分散がより大きいので、ばらつきもより大きいです。

2.

a)

$\Sigma f(Pm - \mu)^2$

$= 112 + 11 + 28 + 125$

$= 276$

$\sigma^2 = \frac{276}{30}$

$\sigma^2 = 9.2$

集落 2

	f_2	Pm	$f_2 \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f_2(Pm - \mu)^2$
	12	10.5	126	−3	9	108
	10	13.5	135	0	0	0
	4	16.5	66	3	9	36
	4	19.5	78	6	36	144
合計	30					
μ	13.5					

日付：　　**U8 1.7**

Ⓟ 表に示された情報を基に：

a) $f(Pm - \mu)^2$ の列を完成し、データの合計を計算しましょう。

b) このグループ化されたデータ数列の分散をどのように計算しますか？

Ⓢ a) $\Sigma f(Pm - \mu)^2 = 300 + 175 + 0 + 200 + 100 + 225 = 1000$

b) a) で計算した合計の結果をデータの総数で割ります。

$\sigma^2 = \frac{1000}{30}$

$\sigma^2 \approx 33.33$

Ⓡ

1.

$Pm - \mu$: −9, −4, 1, 6, 11, 16

$(Pm - \mu)^2$:81, 16, 1, 36, 121, 256

$f(Pm - \mu)^2$:324, 128, 9, 288, 121, 0

$\sigma^2 = 29$

カルロスのデータ集合の分散はより大きいので、ばらつきもより大きいです。

宿題：練習帳の176ページ

1.8 グループ化されたデータの標準偏差

P

30 日間でカルロスとアントニオが売ったノート数のデータ数列の標準偏差を計算し、どちらの方がばらつきが大きいか証明しましょう。

ノートの販売数	日数	
	カルロス (f_C)	アントニオ (f_A)
5～10	3	4
10～15	7	8
15～20	10	9
20～25	8	8
25～30	1	1
30～35	1	0
合計	**30**	**30**
算術平均 (μ)	**17.5**	**16.5**
分散 (σ²)	33.33	29

S

階級に分類されたデータでも、標準偏差値は分散の平方根と同じです。
カルロスのデータ数列の：

$$\sigma = \sqrt{33.33}$$
$$\approx 5.77$$

そして、アントニオのデータ数列の：

$$\sigma = \sqrt{29}$$
$$\approx 5.39$$

カルロスの分布の標準偏差は、アントニオのそれより大きいので、カルロスの分布データのばらつきはその算術平均 17.5 に対してより大きいことが結論付けられます。

C

グループ化されたデータ数列の標準偏差は次のように計算します：

$$標準偏差 = \sqrt{分散}$$

つまり、

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f(Pm - \mu)^2}{n}}$$

n がデータの総数である場合、Σ は合計の符号、f は各階級の頻度、Pm は各階級の中点、そして、μ はデータ数列の算術平均値です。グループ化されたデータ同様、グループ化されていないデータでも、標準偏差は常にゼロより大きいかゼロに等しいので、負の数字には決してなりません。

前回の授業の練習 2 を基に、モラサン 2 集落のグループ化されたデータ数列の標準偏差 (σ) を計算し、この数値を基に答えましょう。どちらの集落のばらつきがより大きいですか?
集落 1 のデータの標準偏差はより大きいです。従って、より大きいばらつきがあります。

達成の目安

1.8　グループ化されたデータの標準偏差を計算しましょう。

学習の流れ

グループ化されていないデータの標準偏差の求め方と同様、グループ化されたデータの標準偏差も前もってグループ化されたデータで計算された分散から求めます。

ねらい

Ⓟ ここで生徒に期待されることは、このユニットの授業 1.4 で学んだことから、授業で提供されるデータ集合で、標準偏差がより大きいデータに、より大きいばらつきがあることを確認することです。

一部の設問の回答：

集落 1 の

$\sigma^2 = 9.2$
$\sigma = \sqrt{9.2}$
$\sigma \approx 3.03$

集落 2 の

$\sigma^2 = 9.6$
$\sigma = \sqrt{9.6}$
$\sigma \approx 3.10$

集落 1 のデータの標準偏差はより大きいです。従って、より大きいばらつきがあります。

日付：　U8 1.8

Ⓟ カルロスとアントニオのデータ数列で、それぞれの標準偏差を計算しましょう。その後、そのうちどれのばらつきがより大きいか証明します。

Ⓢ 階級にグループ化されたデータでも、σ は分散の平方根と同じです。

カルロス：
$\sigma = \sqrt{33.33}$
$\sigma \approx 5.77$

アントニオ：
$\sigma = \sqrt{29}$
$\sigma \approx 5.39$

5.77 > 5.39 なので、カルロスのデータの方がばらつきが大きいです。

Ⓡ 集落 1 の

$\sigma^2 = 9.2$
$\sigma = \sqrt{9.2}$
$\sigma \approx 3.03$

集落 2 の

$\sigma^2 = 9.6$
$\sigma = \sqrt{9.6}$
$\sigma \approx 3.10$

集落 2 のデータの標準偏差はより大きいです。従って、より大きいばらつきがあります。

宿題： 練習帳178ページ

1.9 復習問題

1. 次のデータは、8 人の生徒の身長をセンチメートルで表しています：

163, 162, 164, 163, 164, 162, 161, 185

a) データ数列の算術平均、中央値、および範囲を計算しましょう。
b) 分布を表すために、平均値、中央値のどちらを選びますか？ 自分の答えを証明しましょう。

μ = 165.5 cm、中央値：163 cm、範囲：185 – 161 = 24 cm

2. 次の表に示されたデータを使って、データ数列 B、C と D のうち標準偏差がデータ数列 A と等しいのはどれか答えましょう。自分の答えを証明しましょう。

A	B	C	D
25	30	35.5	28
24	29	34.5	27
25	30	35.5	28
26	31	36.5	29
23	28	33.5	26
21	26	31.5	21
25	30	35.5	28
24	29	34.5	27
23	28	33.5	23
22	27	32.5	22

A: $\sigma \approx 1.47$ B:
$\sigma \approx 1.47$
C: $\sigma \approx 1.47$
D: $\sigma = 2.7$

計算によると、数列 D だけが数列 A と異なる偏差を持っています。

3. 次のグループ化されていないデータ数列を観察しましょう。

	数列A
1	30
2	25
3	11
4	20
5	14
6	26

	数列B
1	18
2	20
3	19
4	21
5	22

$\sigma \approx 6.73$
$\sigma \approx 1.41$

a) 各数列の算術平均値に対する偏差と標準偏差を計算しましょう。
b) 標準偏差を比較して、どのデータ数列に、より多くのばらつきが見られるか確認しましょう。
各数列の標準偏差によると、数列 A のばらつきがより大きいと結論付けられます。

4. 次のデータは、事務所で働く 9 人の体重をポンドで表しています。

160 *l*、200 *l*、164 *l*、130 *l*、140 *l*、162 *l*、161 *l*、185 *l*、154 *l*

μ = 161.78 ポンド、中央値：161 ポンド、範囲：200 – 130 = 70 ポンド

a) データ数列の算術平均、中央値、および範囲を計算しましょう。
b) 分布を表すために、平均値、中央値のどちらを選びますか？ 自分の答えを証明しましょう。
平均値と中央値がほとんど一致する場合は、平均値を選択します。それは、データ数列の分散に敏感な値であり、扱うのが容易だからです。

ユニット 8

175

達成の目安

1.9 データ集合のばらつきの問題に答えましょう。

一部の設問の回答：

1.

a) 平均値：

$\mu = \frac{163 + 162 + 164 + 163 + 164 + 162 + 161 + 185}{8}$

$\mu = \frac{1324}{8}$

$\mu = 165.5$ cm

中央値：

161, 162, 162, 163, 163, 164, 164, 185

$\frac{163 + 163}{2} = 163$ cm

範囲：

185 – 161 = 24 cm

b) 中央値を選ぶべきです、なぜなら、185 は他のデータと非常に異なるデータで、残りの 7 つのデータのいずれも 165 以上ではないのに、平均値を 165.5 にしているからです。

2.

数列の標準偏差：

A: $\mu = 23.8$, $\sigma^2 = \frac{21.6}{10} = 2.16$, $\sigma \approx 1.47$

B: $\mu = 28.8$, $\sigma^2 = \frac{21.6}{10} = 2.16$, $\sigma \approx 1.47$

C: $\mu = 34.3$, $\sigma^2 = \frac{21.6}{10} = 2.16$, $\sigma \approx 1.47$

D: $\mu = 25.9$, $\sigma^2 = \frac{72.9}{10} = 7.29$, $\sigma = 2.7$

計算によると、数列 D だけが数列 A と異なる偏差を持っています。

3.

a) Desviación típica para la serie:

A: $\mu = 21$, $\sigma^2 = \frac{272}{6} \approx 45.33$, $\sigma \approx 6.73$

B: $\mu = 20$, $\sigma^2 = \frac{10}{5} = 2$, $\sigma \approx 1.41$

b) 各数列の標準偏差によると、数列 A のばらつきがより大きいと結論付けられます。

4.

a) $\mu = \frac{1456}{9} \approx 161.78$ ポンド

中央値

130, 140, 154, 160, 161, 162, 164, 185、200

中央値：161 ポンド

範囲：200 – 130 = 70 ポンド

b) 平均値と中央値がほとんど一致する場合は、平均値を選択します、それは、データ数列の分散に敏感な値だからです。

宿題： 練習帳の180ページ

1.10 復習問題

1. ある衣料品店は A と B の支店を持っています。100 日間各支店で応対した顧客数を記録します。データは次の表に示されます：

顧客数	日数	
	支店 A	支店 B
50～60	15	17
60～70	20	21
70～80	24	27
80～90	22	20
90～100	19	15

a) 各支店の分散を計算しましょう。

支店 A $\sigma^2 = 177$ 支店 B $\sigma^2 = 168.75$

b) 分散を基にすると、どの支店でより大きいばらつきが見られますか?

分散によると、支店 A のデータの方がばらつきが大きいです。

2. ある学校の 9 学年の生徒の体重をポンドで調査しました。結果は次の表に示されています：

ポンドでの体重	A 組	B 組
120～130	7	5
130～140	12	9
140～150	13	12
150～160	10	14
160～170	8	10

算術平均値に対して体重のばらつきがより大きいのは何組かを標準偏差を使って確認しましょう。

A組 $\sigma \approx 12.81$ ポンド B組 $\sigma \approx 12.53$ ポンド 分散によると、A 組のデータは大きいばらつきがあります。

3. あるグループに属する人の身長を次の表にインチで示します。$\mu = 67.45$ であるとして、

身長	f	Pm
60 - 62	1	61
62 - 64	4	63
64 - 66	8	65
66 - 68	30	67
68 - 70	37	69

a) 分散を計算しましょう。
b) 標準偏差を計算しましょう。

達成の目安

1.10 データ集合のばらつきの問題に答えましょう。

一部の設問の回答：

1.

a)

Pm	$f_1 \times Pm$	$f_2 \times Pm$
55	825	935
65	1 300	1 365
75	1 800	2 025
85	1 870	1 700
95	1 805	1 425

支店 A

$\mu = \frac{7600}{100} = 76$ 人

$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f_2(Pm - \mu)^2$
−21	441	6 615
−11	121	2 420
−1	1	24
9	81	1 782
19	361	6 859

$\sigma^2 = \frac{17\,700}{100} = 177$

支店 B

$\mu = \frac{7450}{100} = 74.5$ 人

$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f_1(Pm - \mu)^2$
−19.5	380.25	6 464.25
−9.5	90.25	1 895.25
0.5	0.25	6.75
10.5	110.25	2 205
20.5	420.25	6 303.75

$\sigma^2 = \frac{16\,875}{100} = 168.75$

b) 分散によると、支店 A のデータの方がより大きいばらつきがあります。

3.

$\mu = \frac{5\,396}{80} = 67.45$ インチ

$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f(Pm - \mu)^2$
−6.45	41.6	41.6
−4.45	19.8	79.2
−2.45	6.0	48
−0.45	0.2	6
1.55	2.4	88.8

a) $\sigma^2 = \frac{263.6}{80} \approx 3.3.$

b） σ ≈ 1.82 インチ。

宿題： 練習帳181ページ

レッスン 2 標準偏差の性質

2.1 ある変数の標準偏差、プラス定数

P

ある会社では、10 人の従業員の給料を $50 上げることにしました。右の表には、以前の給料と現在の給料が示されています。

a) その両シリーズのデータのそれぞれの平均値を求めましょう。
b) 両シリーズのデータの標準偏差を計算して、比較しましょう。何が起きてますか?
c) もしも昇給が $60 だとすれば、現在の給料の標準偏差はどうなりますか?

従業員	以前の給料（ドル）	現在の給料（ドル）
1	485	535
2	488	538
3	486	536
4	489	539
5	486	536
6	485	535
7	488	538
8	487	537
9	500	550
10	486	536

S

a) 以前の給料の平均値は、次のように計算しましょう。

$$\mu = \frac{485+488+486+489+486+485+488+487+500+486}{10}$$
$$= 488$$

もしもシリーズ A の全てのデータにある定数を足して、その結果シリーズ B を得たとすれば、シリーズ B の平均値は、シリーズ A の平均値に定数を足した値と同じです。

同様に、現在の給料の平均値を計算しましょう。その結果、538 が得られます。よって、以前の給料の平均値は $488 で、現在の給料のそれは $538 です。

b) 次の表には、以前の給料の平均値 $488 からのそれぞれの偏差と、それぞれの自乗を表示しています。

従業員	以前の給料（ドル）	$x - \mu$	$(x-\mu)^2$
1	485	−3	9
2	488	0	0
3	486	−2	4
4	489	1	1
5	486	−2	4
6	485	−3	9
7	488	0	0
8	487	−1	1
9	500	12	144
10	486	−2	4
平均値 (μ)	**488**		

ユニット 8

177

したがって、標準偏差は次のように計算しましょう。

$$\sigma = \sqrt{\frac{9+0+4+1+4+9+0+1+144+4}{10}}$$

$$= \sqrt{\frac{176}{10}}$$

$$= 4.2$$

訂正：= ではなく、≈ としなければなりません。

同様に、現在の給料の標準偏差を計算しましょう。その結果も 4.2 となります。すなわち、各データに 50 を足しても、平均値とは違い、標準偏差は影響を受けませんでした。

c) もしも昇給が $60 であったとすると、そのときも標準偏差は以前の給料で計算した値と同じです。すなわち、4.2 となります。

C

もしも、ある分布 A の各データに、ある同じ定数 c (c は、どれでも良い数) をプラスして、他の分布 B を得たとします。そのとき、分布 B の標準偏差は、分布 A の標準偏差と同じです。

1. A と B の 2 つのシリーズのデータが示されている表を見てください。この両方の分布のそれぞれの標準偏差は同じなのでしょうか? あなたの解答を説明しながら、標準偏差を計算してください。

	シリーズ A	シリーズ B
1	25.1	37.1
2	26.4	38.4
3	27.5	39.5
4	20.7	32.7
5	21.2	33.2

はい、標準偏差は同じです。シリーズ B は、基本的にはシリーズ A の各データに 12 単位プラスしたものです。

2. 住宅地セントロアメリカでは、水道料金の月額が $5 上がることになりました。この変更を考慮した上での分布の標準偏差の値はいくつになりますか?

住宅	請求料金 （ドル）
1	10.50
2	10.60
3	12.20
4	11.50
5	12.90
6	11.40
7	12.60
8	12.50
9	11.30
10	35.50

シリーズの各データに 1 つの定数を足した場合、元のシリーズの標準偏差は影響を受けません。したがって、元のシリーズの標準偏差を計算するだけです。
σ ≈ 7.18 ドル

達成の目安

2.1 各データが、ある変数プラスある定数で出来た分布の標準偏差を計算しましょう。

学習の流れ

8 年生で平均値の性質を学習したように、9 年生では標準偏差の特性に取り組みましょう。この授業では、ある変数プラスある 1 つの定数の時の標準偏差を勉強しましょう。それらの性質を説明するために、学生たちが容易に理解できるように、シンプルなシリーズを使いましょう。

ねらい

Ⓟ 設問 a) では、8 年生で見た算術平均の性質を参照すると良いでしょう。それによると、「ある集合の各データに 1 つの定数を足すと、その平均値は元のデータの平均値にその定数を足したものです。」

一部の設問の解答：

シリーズ A

シリーズ A		
x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
25.1	0.92	0.85
26.4	2.22	4.93
27.5	3.32	11.02
20.7	−3.48	12.11
21.2	−2.98	8.88

$\mu = 24.18$

$\Sigma(x-\mu)^2$

$\approx 0.85 + 4.93 + 11.02 + 12.11 + 8.88$

$= 37.79$

$\sigma^2 \approx \frac{37.79}{5}$

$\sigma^2 \approx 7.56$

$\sigma \approx \sqrt{7.56} \approx 2.75$

シリーズ B

シリーズ B		
x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
37.1	0.92	0.85
38.4	2.22	4.93
39.5	3.32	11.02
32.7	−3.48	12.11
33.2	−2.98	8.88

$\mu = 36.18$

$\Sigma(x-\mu)^2$

$\approx 0.85 + 4.93 + 11.02 + 12.11 + 8.88$

$= 37.79$

$\sigma^2 \approx \frac{37.79}{5}$

$\sigma^2 \approx 7.56$

$\sigma \approx \sqrt{7.56} \approx 2.75$

2. あるシリーズの各データに 1 つの定数を足した場合、元のシリーズの標準偏差は影響を受けませんので、元のシリーズの標準偏差を計算するだけです。

$\mu = 14.1$ ドルです。

$\Sigma(x-\mu)^2$

$= 12.96 + 12.25 + 3.61 + 6.76 + 1.44 + 7.29 + 2.25 + 2.56 + 7.84 + 457.96$

$= 514.92$

$\sigma^2 = \frac{514.92}{10}$

$\sigma^2 \approx 51.49$

$\sigma \approx \sqrt{51.49} \approx 7.18$ ドルです。

日付： **U8 2.1**

Ⓟ 教科書に載っている表のデータから、次のものを計算しましょう。
a) 各シリーズの平均値。
b) 各シリーズの標準偏差を計算して、それらを比較してみましょう。何が起きてますか?
c) 昇給が $60 であったとした場合の、シリーズの標準偏差。

Ⓢ a) 以前の給料：$\mu = 488$　現在の給料：$\mu = 538$

b) 以前の給料：$\sigma = 4.2$　現在の給料：$\sigma = 4.2$

c) 標準偏差は同じになります。すなわち、$\sigma = 4.2$ です。

Ⓡ 1. シリーズA：
$\sigma \approx 2.75$
シリーズB：
$\sigma \approx 2.75$
はい、標準偏差は同じです。シリーズ B は、基本的にはシリーズ A の各データに 12 単位プラスしたものです。
2. シリーズの各データに 1 つの定数を足した場合、元のシリーズの標準偏差は影響を受けません。したがって、元のシリーズの標準偏差を計算するだけです。$\sigma \approx 7.18$ ドル

宿題： 練習帳182ページ

レッスン 2

2.2 ある変数をある定数で掛けた時の標準偏差

P

5 人のランナーが、2 月の練習では 1 週間に走る距離を 2 倍にすると決めました。表には、1 月に走った距離と 2 月に走ろうとしている距離が表示されています。

a) 各シリーズのデータの標準偏差を計算しましょう。

b) 2 月の標準偏差と 1 月の標準偏差との商を求めましょう。これら 2 つのデータの間の関係は何ですか?

ランナー	走った距離（メートル）	
	1月	2月
1	150	300
2	160	320
3	145	290
4	165	330
5	150	300

S

a) 標準偏差を計算するには、各シリーズのデータの平均値が必要です。1 月の平均値は次のように得ます。

$$\mu = \frac{150+160+145+165+150}{5} = 154.$$

平均値 154 m からの各偏差の自乗を計算して、その結果を示したものが次の表です。

ランナー	1月	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
1	150	−4	16
2	160	6	36
3	145	−9	81
4	165	11	121
5	150	−4	16
平均値 (μ)	**154**		

$$\sigma = \sqrt{\frac{16+36+81+121+16}{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{270}{5}}$$

$$= 7.35$$ ← **訂正：** = ではなく、≈ としなければなりません。

1 月の標準偏差は 7.35 です。

2 月のデータでは、距離が 2 倍に伸びたので（2 で掛けたので）、2 月の平均値も 2 倍に増えました。すなわち、308 m になりました。標準偏差は 1 月のと同じ方法で計算しますので、結果は 14.7 となります。

b) 商は、次のようになります。

$$\frac{2月の標準偏差}{1月の標準偏差} = \frac{14.7}{7.35} = 2$$

すなわち、2 月の標準偏差は、1 月の標準偏差の 2 倍だということです。各データに正の数を掛けた時は、その標準偏差もその数で掛けた値になります。

C

もしも、ある分布 A の各データに、ある同じ定数 c (c は、ある正の数) を掛けて、他の分布 B を得たとします。そのとき、分布 B の標準偏差は、分布 A の標準偏差に定数 c を掛けるのと同じです。

1. 下記の表には、3 つのシリーズのデータが表示されています。

a) シリーズ B を得るために、シリーズ A に掛けなければならない数はどれですか? また、シリーズ C を得るには?

シリーズ B： シリーズ A に 1.5 を掛けます。　シリーズ C： シリーズ A に 0.4 を掛けます。

b) シリーズ A の標準偏差を計算しましょう。それに基づいて、シリーズ B と C の標準偏差を計算しましょう。

A	B	C
12.5	18.75	5.0
11.0	16.5	4.4
11.5	17.25	4.6
12.8	19.2	5.12
12.2	18.30	4.88

シリーズ A： $\sigma \approx 0.66$
シリーズB：$0.66 \times 1.5 = 0.99$
シリーズC：$0.66 \times 0.4 \approx 0.26$

2. あるシリーズのデータで、その分布の平均値は 35 で、標準偏差は 17.07 です。もしも各データが半分に削減された場合は、その新しい標準偏差の値はいくつになりますか?

半分にするということは、$\frac{1}{2}$ で掛けるのと相当します。したがって、新しい σ は、$17.07 \times \frac{1}{2} = 8.54$ です。

3. ある本屋が、月曜日から金曜日までの 2 週間、販売した本の数を記録しました。

a) 第 2 週のデータを得るためには、第 1 週のデータにどの数を掛けなければならないでしょうか?

3 を掛けなければなりません。

b) その 2 つの週の標準偏差を計算しましょう。

曜日	売られた本の数	
	第1週	第2週
月曜日	8	24
火曜日	9	27
水曜日	5	15
木曜日	7	21
金曜日	11	33

第 1 週に対して：
$\sigma = 2$

第 2 週に対して：
$\sigma = 2 \times 3 = 6$

達成の目安

2.2　各データが、ある変数とある定数の積で出来た分布の標準偏差を計算しましょう。

学習の流れ

2.2 の授業では、標準偏差の性質に関する取り組みを続けましょう。ある変数をある定数で掛けた時の標準偏差に取り組みます。

ねらい

Ⓟ 解答の設問 a) では、8 年生で見た算術平均の性質を参照すると良いでしょう。それによると、「ある集合の各データに 1 つの定数を掛けると、その平均値は元のデータの平均値にその定数を掛けたものです。」

一部の設問の解答：

1.

a) シリーズ B を得るために：
シリーズ B の 1 つのデータとシリーズ A のそれに該当するデータの商を計算しましょう。

$$\frac{\text{シリーズ B}}{\text{シリーズ A}} = \frac{18.75}{12.5} = 1.5$$

シリーズ C を得るために：
シリーズ C の 1 つのデータとシリーズ A のそれに該当するデータの商を計算しましょう。

$$\frac{\text{シリーズ C}}{\text{シリーズ A}} = \frac{5}{12.5} = 0.4$$

b) $\mu = 12$

$\Sigma(x-\mu)^2$

$= 0.25 + 1 + 0.25 + 0.64 + 0.04$

$= 2.18$

$\sigma^2 = \dfrac{2.18}{5}$

$\sigma^2 \approx 0.44$

$\sigma \approx \sqrt{0.44} \approx 0.66$

したがって、他のシリーズの偏差は次のとおりです。

B の場合、

$0.66 \times 1.5 = 0.99$

C の場合、

$0.66 \times 0.4 \approx 0.26$

2. 各データを半分にするということは、$\frac{1}{2}$ で掛けるのと相当します。したがって、新しい 標準偏差は次のとおりです。

$$17.07 \times \frac{1}{2} \approx 8.54$$

3.

a) 第 2 週 を得るために：
第 2 週 の 1 つのデータと第 1 週 のそれに該当するデータの商を計算しましょう。

$$\frac{\text{第2週}}{\text{第1週}} = \frac{24}{8} = 3$$

第 1 週に対して：

$\mu = 8$

$\Sigma(x-\mu)^2$

$= 0 + 1 + 9 + 1 + 9$

$= 20$

$\sigma^2 = \dfrac{20}{5}$

$\sigma^2 = 4$

$\sigma = \sqrt{4} =$ 本 2 冊です。

したがって、第 2 週の偏差は、

$2 \times 3 =$ 本 6 冊です。

日付：　　　　**U8 2.2**

Ⓟ 教科書に載っている表のデータから、次のものを計算しましょう。

a) 各シリーズの標準偏差。

b) 2 月の標準偏差と 1 月の標準偏差の商。この 2 シリーズ間の関係は？

Ⓢ a)　1月：$\sigma = 7.35$　　2月：$\sigma = 14.7$

b) $\dfrac{\text{2月の標準偏差}}{\text{1月の標準偏差}} = \dfrac{14.7}{7.35} = 2$

2 月の標準偏差は、1 月の標準偏差の 2 倍です。

Ⓡ 1.

a) シリーズ B：シリーズ A に 1.5 を掛けます。
シリーズ C：シリーズ A に 0.4 を掛けます。

b) シリーズ A：$\sigma \approx 0.66$
シリーズ B：$0.66 \times 1.5 = 0.99$
シリーズ C：$0.66 \times 0.4 \approx 0.26$

2.

半分にするということは、$\frac{1}{2}$ で掛けるのに相当します。したがって、新しい 標準偏差 σ は、次のとおりです。

$17.07 \times \frac{1}{2} = 0.99.$

宿題： 練習帳の184ページ

付録

結果の分析
各学期末には、表を使ってそれぞれの結果を分析することができます。

年間学習量
算数教科の年間指導計画書を作り、その中で授業を行う日の欄にどの授業を行うかを記載しなくてはなりません。

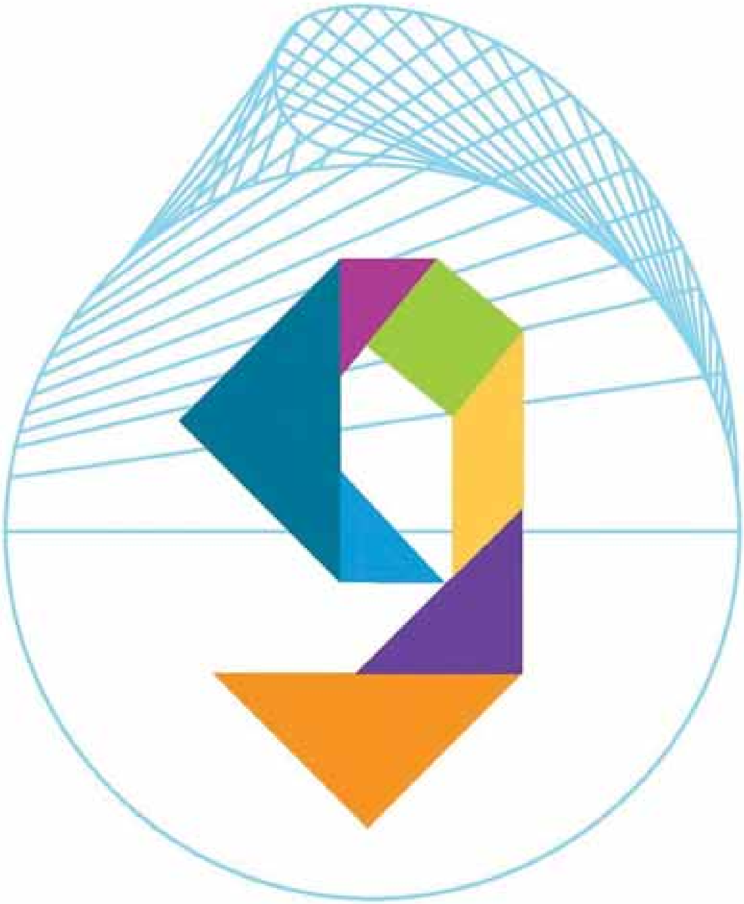
テスト
教員が適宜コピーして使えるように、各ユニット毎のテスト、学期末テスト、学年末テストをここに掲載します。

第1学期の結果分析					
	ユニット__テスト	ユニット__テスト	ユニット__テスト	ユニット__テスト	学期テスト
得られた平均					
平均6未満の学生の数					
平均6～8の学生の数					
平均8以上の学生の数					
第2学期の結果分析					
	ユニット__テスト	ユニット__テスト	ユニット__テスト	ユニット__テスト	学期テスト
得られた平均					
平均6未満の学生の数					
平均6～8の学生の数					
平均8以上の学生の数					
第3学期の結果分析					
	ユニット__テスト	ユニット__テスト	ユニット__テスト	ユニット__テスト	学期テスト
得られた平均					
平均6未満の学生の数					
平均6～8の学生の数					
平均8以上の学生の数					

年間学習量：2020											
	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月
1		X	X					X			X
2		X			X			X			
3					X					X	
4	X			X			X			X	
5	X			X			X		X		
6						X			X		
7			X			X					X
8		X	X					X			X
9		X			X			X			
10					X					X	
11	X			X			X			X	
12	X			X			X		X		
13						X			X		
14			X			X					X
15		X	X					X			X
16		X			X			X			
17					X					X	
18	X			X			X			X	
19	X			X			X		X		
20	U1 1.1					X			X		
21	1.2		X			X					X
22		X	X					X			X
23		X			X			X			
24					X					X	
25	X			X			X			X	
26	X			X			X		X		
27						X			X		
28			X			X					X
29		X	X					X			X
30					X			X			
31					X					X	

年間学習量：											
	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											
11											
12											
13											
14											
15											
16											
17											
18											
19											
20											
21											
22											
23											
24											
25											
26											
27											
28											
29											
30											
31											

REPÚBLICA DE EL SALVADOR EN LA AMÉRICA CENTRAL



教師用指導書 算数 第2版 9 第2巻