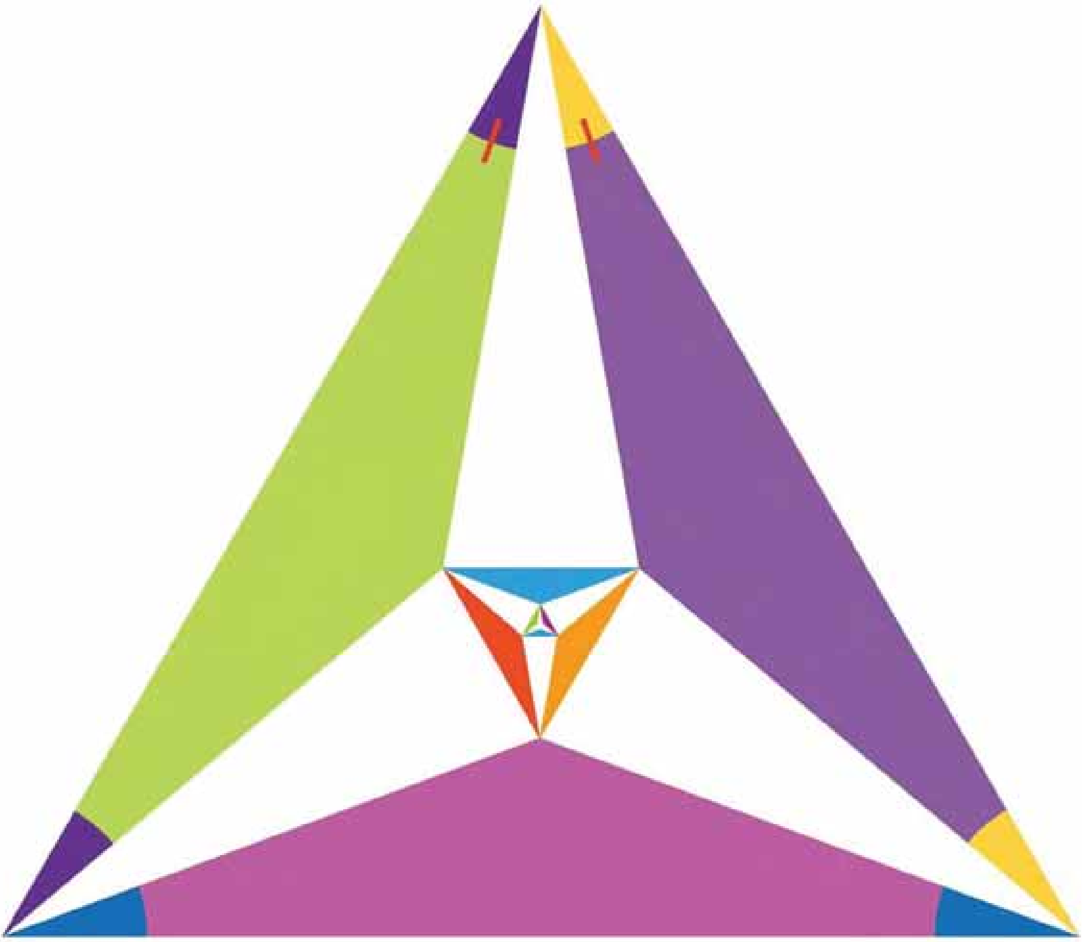
エルサルバドル政府

教育省

算数

高校1年



第1巻

指導案

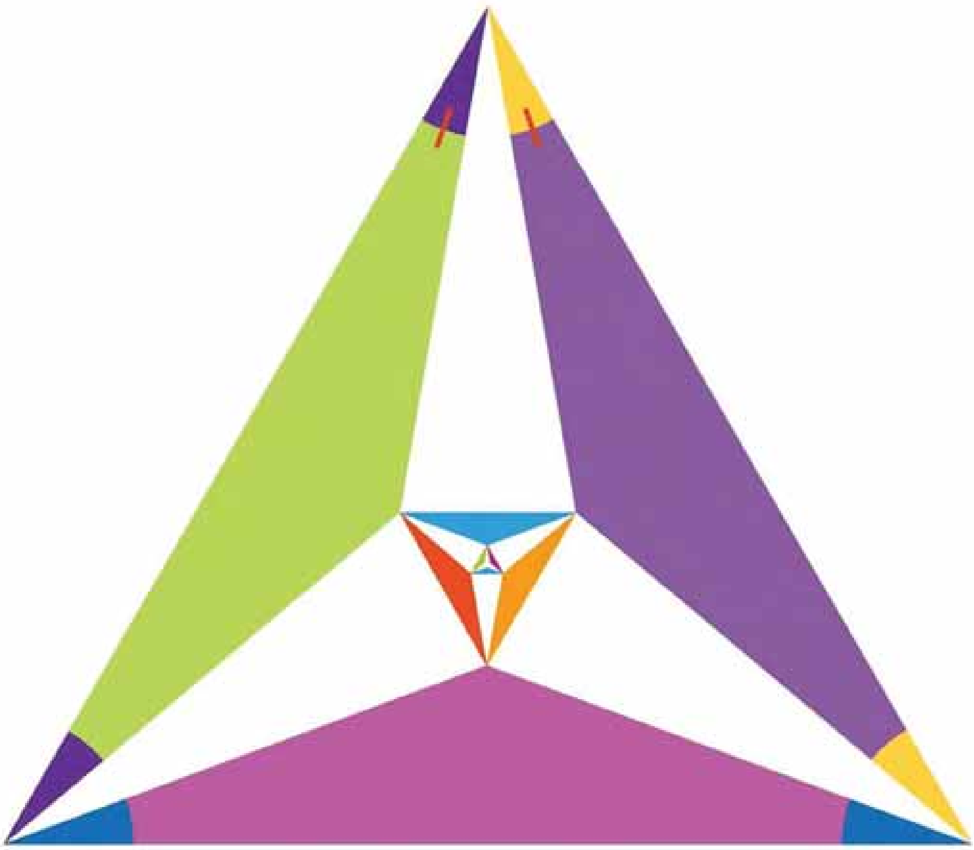
第二版

エルサルバドル政府

教育省

算数

高校1年



第1巻

指導案

第二版

調整および技術的校正

Francisco Antonio Mejía Ramos

教育省の執筆及びレイアウトチーム

Ana Ester Argueta Aranda
Diana Marcela Herrera Polanco
César Omar Gómez Juárez
Francisco Antonio Mejía Ramos

デザイン及びレイアウトの校正

Francisco René Burgos Álvarez
Judith Samanta Romero de Ciudad Real

文体修正

Marlene Elizabeth Rodas Rosales
Ana Esmeralda Quijada Cárdenas

国際協力機構（JICA）を通じた日本の技術協力

表紙の画像は教育的見地から、正三角形の内角を三等分し、それによりその中にできる最も大きい三角形の辺の値を求めることができる図を用いています。
答えは裏表紙にあります。

510.712
M425 算数：高校1年［電子資料］：、
指導案 第1巻／Ana Ester Argueta Aranda、Diana Marcela Herrera Polanco、César Omar Gómez Juárez、Francisco Antonio Mejía Ramos
-- 第2版 -- サンサルバドル、エルサルバドル：教育省（MINED）、2019年。
電子資料 1ファイル（288ページ；図解入り；28 cm -（Esmate）
電子データ（1ファイル：pdf、10 MB）--
www.mined.gob.sv/index.php/esmate.
ISBN 978-99961-348-5-2（電子書籍）
1. 算数 – 教科書。2. 数学 – 練習、問題、など。3. 初等教育 – 教科書。
I. Argueta Aranda、Ana Ester、共著。II. タイトル。

教師のみなさん

心からご挨拶を申し上げ、エルサルバドルの全国民のために重要な仕事をされていることに感謝します。

教育科学技術省（MINEDUCYT）は初中等教育算数・数学指導力向上プロジェクト（ESMATE）を通じて、みなさんのために算数・数学科目の指導案を作成しました。この指導書は日常の指導活動で重要なツールとなるでしょう。

この資料は、当科目の授業を展開する方法を具体的に指導し、その結果エルサルバドルの生徒たちの学びを大きく向上させることを主な目的としています。

この指導案は生徒用の教科書に対応する授業内容の提案となっていることから、算数学習プログラムの規程を具体的に実現するものであると言えます。

みなさんがこの資料を最大限に活用し、私たちの愛する国の発展に貢献し続けるべく、全力で努力し献身されると確信しています。

敬具

Carla Evelyn Hananía de Varela
教育科学技術大臣

Ricardo Cardona Alvarenga
教育科学技術副大臣

目次

I. はじめに

本指導案（SM）は、算数科の指導プロセスを改善する目的で行われた、教育科学技術省の初中等教育算数・数学指導力向上プロジェクト（ESMATE）により、他の一連の教材と合わせ作成されたものです。

この指導の手引きでは、生徒の学力を向上させるために、学習指導を行うにあたって考慮すべき全てのポイントを、出題する問題の解き方をベースに詳しく解説しています。この指導の手引きを活用することで、教師は、教科書（LT)を十分活用した効果的な授業を行うことができるでしょう。

この指導の手引きを活用することで、主に以下の目標の達成を目指します。

1. レッスンとユニット毎に示される指標や単元の内容に沿った授業の進め方を提案すること。

2. 教師および生徒が内容を理解するのに役立つような具体的かつ適切な指導の手引きを提示すること。

3. 生徒が身につけるべき算数・数学的教養に相応しい到達指標を達成できるように、具体的な指導の手引きを提示すること。

教育科学技術省は、これらの教材を適切に用いることが教師の指導力向上に役立ち、また生徒の学力向上にも大いに役立つと確信し、義務教育課程でこれらの教材を使うことを推奨しています。そのため以下にこの教材を用いる上で大切なポイントをまとめます。

1. **算数学習の重要性：** 数学的思考を発展させることで、生徒たちは、複雑な問題を解いたり、問題の状況を分析したり、創造力を働かせたり、批評や応用も含め、実用主義的思考や論理的思考を身につけることができます。数学的知識を身につければ、我々の日常生活にはあらゆる場面で科学が関わっていること、また身近にある物を使って、日常的に直面する様々な問題を解決することができることに気付くことができます。ですので数学的思考力は、一市民として生活を送る上で必要不可欠な知識であり、自分の属するコミュニティーの持続可能な開発を可能にする能力でもあるのです。

2. **教師の基本的役割と生徒の主体性：** 生徒の教育において教師が果たす役割は非常に重要で、教育成果を出すためには、その資質が問われます。そこで、あくまで授業の主役は生徒自身であることをふまえ、各生徒の学習到達度に合わせ、適宜、教師が使える指導支援ツールとして利用できるものとして、これらの教材が作成されました。主体性は各授業に学習指標の達成を設定することで引き出すことができます。これらの指標の達成が、ユニット相応の学力を身につけ、既習の知識を駆使して簡単な問題から難しい問題まで正しく解けるようになるための「ステップ」となります。それにはもちろん、教員が各授業の到達指標とそれに向けた授業構成をしっかり理解していることが大前提となります。

3. **授業の流れと正しい学び体験**： 生徒の主体性は授業の流れの中に盛り込まれており、その多くは以下の手順や内容を含んでいます。

   - 導入問題
   - 導入問題の解き方
   - 結論（定義、定理、まとめ、利用）
   - 問題

この流れになる理由は授業の各要素のねらいで詳しく解説しています。生徒たちが教師のサポートを受けて思考力を磨き、必要な学力を身につけることができるように、このような流れに沿って授業を行うことを推奨します。

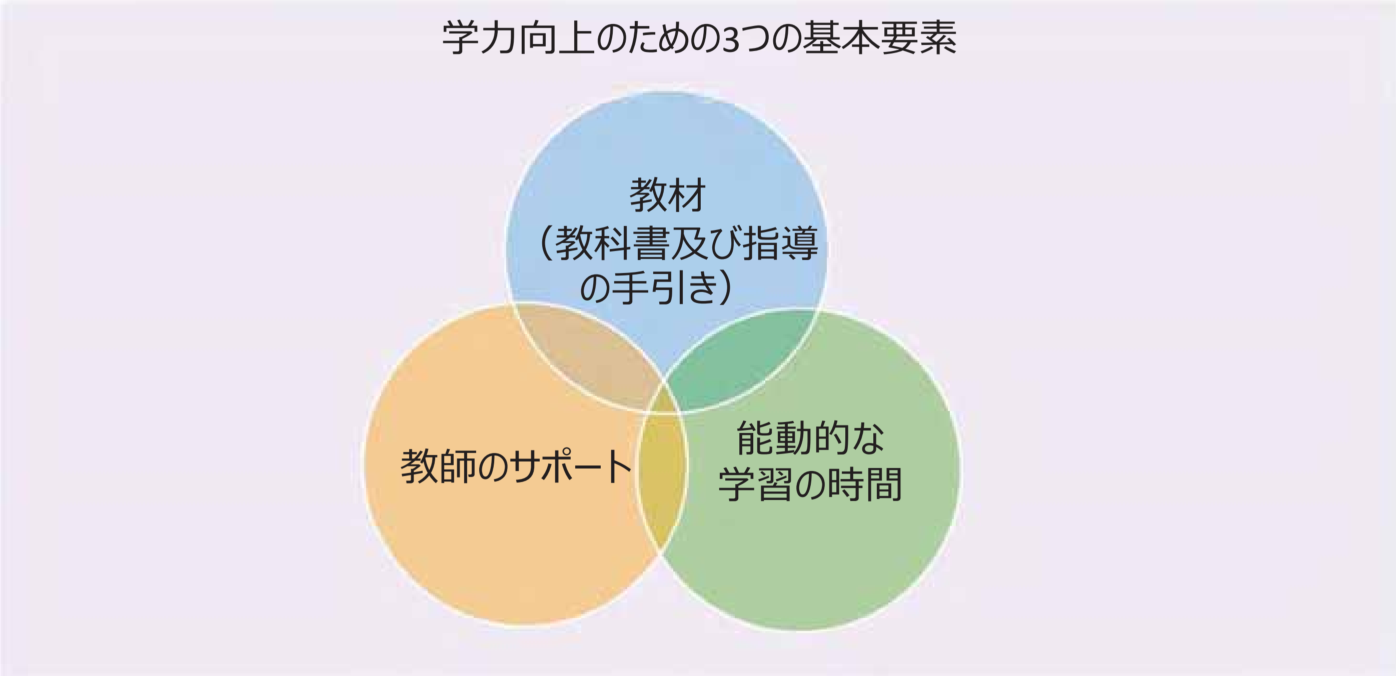
4.**学校運営との完全調和**：これらの学習教材の効果を最大限に引き出すために、もう1つ考慮すべき基本事項に、学習をするのに適した環境を整えるという問題があります。これは、行政と教育機関の体制に密接にかかわるテーマです。この管理については、教師が年間を通して実施する授業の時間数が深く関わってきます。この指導の手引きにある授業を実施して学習内容の到達指標を達成するためには、年間に少なくとも192時間の授業を行うことが必要になります。公式には240時間の授業を行うことができるため、残りの48時間は教師が評価、研修など、教育科学技術省や教育機関が必要とする他の活動に充てることが可能です。

本書の構成要素のうち、**IV章、指導案の構成**は特に重要で、ここでは授業の流れとねらいが示されています。さらに一部の授業については、授業中に生徒が間違いやすいポイントを取り上げて解説しています。強調すべきもう１つの重要な要素は、授業で扱う問題の解き方です。また、各授業の到達指標と授業で扱った問題に直接対応する各ユニットのテスト見本が示されています。それらは、プロセス全体を通し生徒の学習理解度を確認する資料として大いに役立てられるでしょう。

もう1つの重要な意義を持つ章が**V章になります。問題の解き方をベースに算数の授業を行う方法を提案しており、**ここでは、学習の中で生徒たちが主に取り組むべきことや教師のサポートの仕方、また授業のすすめ方など授業の流れの各要素を詳しく詳しく解説しています。さらに、生徒の主体性とそれをスムーズにサポートする教師の役割に関して具体的な方法を提案している点も注目に値します。

本書を含む教材の開発には、全国から実際に生徒の教育や指導に携わった経験を持つ多くの教員が参加しており、彼らの多大なる貢献により、これらの指導の手引きの各要素が作成されました。この教材開発が参加型であったように、この教材の活用に関しても、各教師は生徒の学習に必要だと思う部分を適宜補いながら活用するべきで、この指導書はあくまで柔軟に扱える改訂可能な教材として活用することが大切です。

これらの教材を用いる目的は、将来我が国を担うことになる生徒たちの学力の向上であり、ここで掲げる提案とは別に、この目的に関する要素を以下に挙げます。



これらの３つの要素が学力向上のための主要戦略です。：教科書と指導案からなる**教材、**授業中および家庭学習における**能動的な学習の時間**、そして学習を進める上での教師の**サポート**や**役割**です。

教材

学習効果や効率を良くするには、生徒たちの理解力に対し、学習の流れと問題難易度が適切であること、つまり、これらの教材の内容が学術的にも教育的にも十分である上に、さらに理解しやすいものであることが重要となります。

ここで述べている最初の要件を満たすためには、算数科で身につけるべき教養が教育科学技術省が定める基準を確実に満たすものであることが必要です。二つ目に掲げた要件については、教科書の内容がエルサルバドルの学生たちの学力にできる限り近いものである必要があります。

能動的な学習の時間

これらの教材が出来上がる前段階として、教育科学技術省が学校教育の調査を行った際、その結果が満足いくものでなかったという点に触れておかなければなりません。その調査では、能動的な学習の時間が十分でなかったことが確認され、その結果、生徒の能力が十分に引き出せていないことが分かりました。そのため、今回作成された教科書では、教師に対し、生徒たちが自分の力やクラスメートと相互学習することで能動的に問題に取り組む時間を少なくとも20分は用意すべきであると提案しています。

能動的な学習

1. 個別形式
   学力がつくのはどの時点でしょうか？生徒が自分で教科書を読んでいる時や授業用ノートを使って自力で問題を解いている時が能動的な学習に相当します。反対に、教師の説明を生徒が一方的に聞いている時間は一般的に受け身学習となるため、能動的学習に比べ学び力が劣るとされます。

   その理由から、教師には生徒一人一人がそれぞれ個別に能動的に学習する時間を作るように勧めています。

2. 相互学習形式
   実際の授業では、教師が一人か二人の生徒に個別に対応している間、他の生徒が放置されてしまうという場面がよく見られます。これは、生徒は全員学習しなくてはならないにも関わらず、教師が生徒全員に対応することが難しいという現実を表わしています。

   他に、生徒全員が必要なサポートを受けられる方法はないのでしょうか？
   生徒同士で相互学習（または交互学習）させるべきです。相互学習には多くのメリットがあります。まず、ペアで行う学習は、もし片方の生徒が内容を理解していなければ、時間を無駄にすることなく（教師が対応してくれるのを待つ必要なく）もう一方の生徒に聞けばよいというメリット、二つ目は、クラスメートを相手に説明する側の生徒も声に出して説明することで、自分の理解を深めることができるというメリット、三つ目は、教師が個別に対応できていない生徒たちが学ぶ機会を得るというメリット、そして四つ目は、教室に共生の雰囲気が生まれるというメリットです。

   したがってまず最初に個別形式の取組みを行い、その後相互形式の学習をもってくることを勧めます。

各授業では、生徒がそれぞれ教科書のページにある問題や練習問題を解くのに、（少なくとも）20分与えるのが理想です。この個別形式の学習（もしくは相互学習）で、生徒たちに学ぶ力がついて、学力が向上し、それにより、出題される問題に対する理解度も上がることなどが期待されます。

最後に、教室で教科書を使って学習する以外に、家においても最低20分の能動的な学習時間を作って、授業中に解けなかった問題を解く習慣をつける必要があることを理解しなくてはなりません。それぞれ能動的な家庭での20分の学習と授業での20分の学習をあわせ、それを192日間続けると、以下が達成されることになります。**(20分 ＋ 20分) × 192日 = 学力の向上。** 我が国の全ての教師はこの点を意識すべきでしょう。

サポートと役割

教育科学技術省は教師の役割についての解釈を、**教えること**から**学習のサポート**へと切り替えることを提案しています。従来、教育課程においては、**生徒たちが何を得ることができるか**に焦点をあてる代わりに、**教師がすべきことは何か**という問に対する答えを模索してきました。学びに着目することが真の努力であり、教師の仕事に対する評価の基本になります。

教師は学力を高めることに注力し、生徒に学力がついたかどうか、その結果を常に注視すべきです。

1. 教科書内の1授業の構成

以下は、ユニット４の授業4.7のページです。

レッスンの番号を示しています。

授業の番号を示しています。

このアイコンが出てくるときは、生徒は問題を解くのに電卓を使ってよいことを示しています。

授業では、まず最初に生徒に対し問題を提示して、その問題をどのように解くかを考えさせる必要があります。そのようにして授業で扱うテーマを導入することになります。

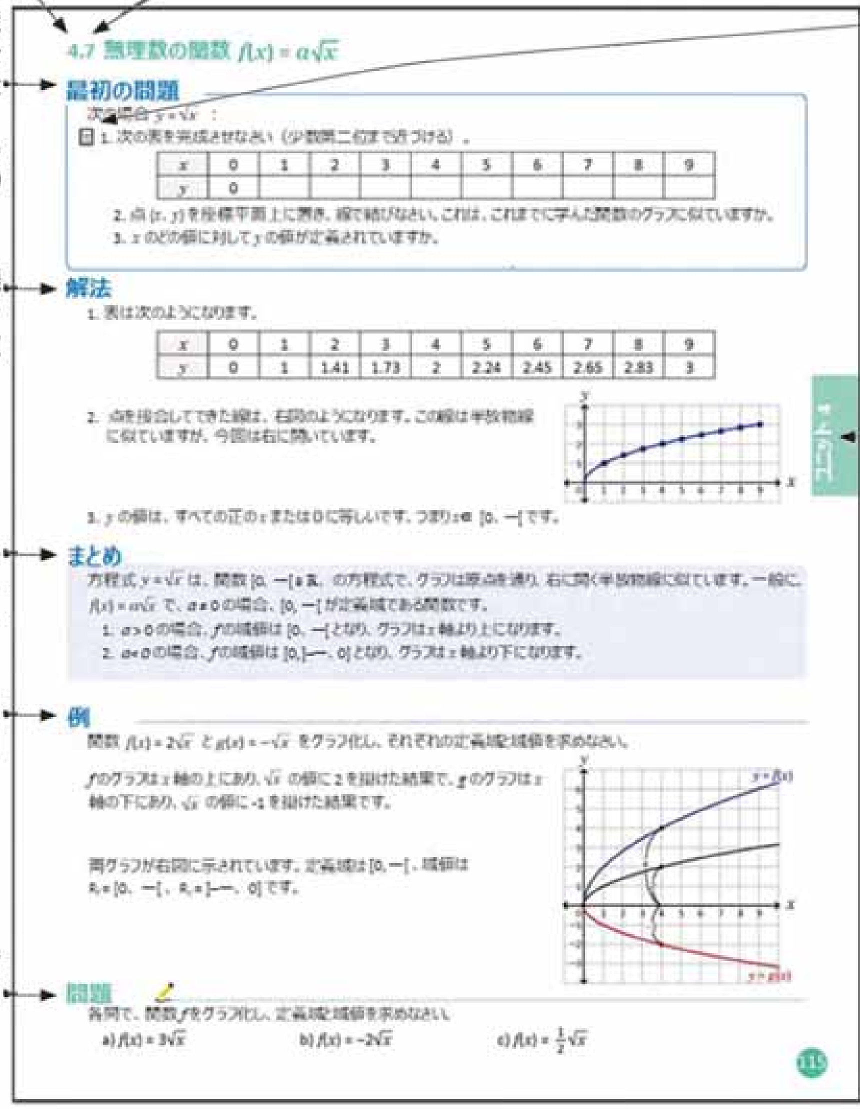
授業の第2ステップでは、提示された問題に対する1つまたは複数の解き方が教科書の中で提案されます。

授業に対応するユニットを表示しています。

学習内容を定着させます。この部分で導入問題とその解き方を結び付けて、数学用語を用いてその単元の学習内容を説明しています。

授業によっては、学習内容の定着を図るために追加問題が出ています。

生徒が学習内容を復習できるように、問題や練習問題が出されています。


4.7 無理数の関数 $f(x)=a\sqrt{x}$

最初の問題

次の場合 $y=\sqrt{x}$：

1. 次の表を完成させなさい（少数第二位まで近づける）。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0									

2. 点 (x, y) を座標平面上に置き、線で結びなさい。これは、これまでに学んだ関数のグラフに似ていますか。
3. x のどの値に対して y の値が定義されていますか。

解法

1. 表は次のようになります。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	1	1.41	1.73	2	2.24	2.45	2.65	2.83	3

2. 点を接合してできた線は、右図のようになります。この線は半放物線に似ていますが、今回は右に開いています。
3. y の値は、すべての正の x または0に等しいです。つまり $x\in[0,\infty[$ です。

まとめ

方程式 $y=\sqrt{x}$ は、関数 $[0,\infty[$ → ℝ の方程式で、グラフは原点を通り、右に開く半放物線に似ています。一般に、$f(x)=a\sqrt{x}$ で、$a\neq0$ の場合、$[0,\infty[$ が定義域である関数です。

1. $a>0$ の場合、f の値域は $[0,\infty[$ となり、グラフは x 軸より上になります。
2. $a<0$ の場合、f の値域は $]-\infty,0]$ となり、グラフは x 軸より下になります。

例

関数 $f(x)=2\sqrt{x}$ と $g(x)=-\sqrt{x}$ をグラフ化し、それぞれの定義域と値域を求めなさい。

f のグラフは x 軸の上にあり、$\sqrt{x}$ の値に2を掛けた結果で、g のグラフは x 軸の下にあり、$\sqrt{x}$ の値に-1を掛けた結果です。

両グラフが右図に示されています。定義域は $[0,\infty[$、値域は $R_f=[0,\infty[$、$R_g=]-\infty,0]$ です。

問題

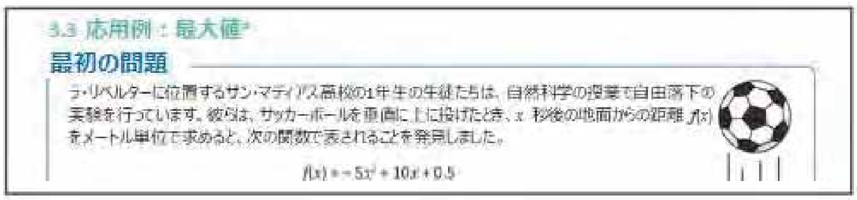
各問で、関数 f をグラフ化し、定義域と値域を求めなさい。

a) $f(x)=3\sqrt{x}$　b) $f(x)=-2\sqrt{x}$　c) $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}$

115

2. 教科書の重要な側面

難易度の高い授業： タイトルにアスタリスク（*）がついている授業は、他の授業に比べ難しい問題を扱うことを意味しています。教員は生徒の出来具合に合わせて、なかなか問題が解けない場合は、導入問題の解き方について、詳しい説明を与えても構いません。例えば：


3.3 応用例：最大値*

最初の問題

ラ・リベルタ―に位置するサン・マティアス高校の1年生の生徒たちは、自然科学の授業で自由落下の実験を行っています。彼らは、サッカーボールを垂直に上に投げたとき、x 秒後の地面からの距離 $f(x)$ をメートル単位で求めると、次の関数で表されることを発見しました。

$$f(x)=-5x^2+10x+0.5$$

補足情報： 教科書には、予備知識やヒント、算数の歴史に関する小話など、学習をスムーズにする要素が盛り込まれ、それぞれ色を変えて紹介されています。

予備知識	ヒント	小話

授業配分： 教科書は8ユニットで構成されており、各ユニットには複数の課があり、それぞれの課は複数の授業で構成されています。各授業のタイトルについている番号は、最初の番号が何課であるかを示し、二つ目の番号が何番目の授業であるかを示しています。

そして、各ユニットの最後には、必ず学習したテーマに関する問題があり、時には数学の技術的リソースとしてのGeoGebraを使った演習を行う場合もあります。

GeoGebraを活用した授業の展開： 教科書の革新的なコンテンツの1つに、数学ソフトの利用があげられます。これは計算や作図などがスムーズにできるよう、数学の学習効率アップにつながるツールとして利用するものです。そのため、ユニットによっては、最後に、生徒がソフトを使って解いた問題の答えを確かめる方法が解説されている場合や、ソフトを使って解く問題が掲載されている場合があります。

具体的な材料を用いた導入授業の実施： 一部のユニットでは、論理的思考や洞察力、直感的思考、空間認識の力を伸ばす目的で、その単元の内容を導入できるような授業を組んでおり、そうすることで生徒に理解しやすいようものとなるよう工夫しています。

1. 年間計画の作成

<table>
<tr><th>学期</th><th>月</th><th>ユニット（授業の時限数）</th><th>GM のページ（教科書のページ）</th><th>内容</th></tr>
<tr><td rowspan="4">一学期</td><td rowspan="2">1月</td><td>ユニット1：実数（10）</td><td>23〜50
(7〜18)</td><td>• 平方根の演算
• 有理化
• ネイピア数と黄金数
• 実数
• 絶対値
• 区間</td></tr>
<tr><td rowspan="3">ユニット2：多項式と複素数の計算（37）</td><td rowspan="3">51〜144
(19〜60)</td><td rowspan="3">• 多項式の次数
• 乗法公式
• 単項式と多項式の共通因数
• 三項式 $x^2 + (a + b)x + ab$
• 完全平方三項式
• 二乗の差
• たすきがけ
• 多項式のわり算
• 組立除法
• 留数定理
• 因数定理
• 因数分解と解の公式を用いた二次方程式の解法
• 複素数：実部と虚部
• 複素数を含む四則計算
• 負数の平方根
• 二次方程式の判別式
• 多項式の根</td></tr>
<tr><td>2月</td></tr>
<tr><td>3月</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">二学期</td><td>3月</td><td>ユニット3：不等式（15）</td><td>145〜182
(61〜76)</td><td>• 一次不等式の代数的解法
• グラフを用いた一次不等式の解き方
• 一次不等式の応用
• 三角不等式
• 算術幾何平均の不等式
• 有理式による不等式</td></tr>
<tr><td>4月</td><td rowspan="2">ユニット4：実関数（40）</td><td rowspan="2">183〜288
(77〜122)</td><td rowspan="2">• 関数の定義
• 関数のグラフ
• 定義域と域値
• 2次関数グラフ：放物線、頂点
• 定義域と値域
• 縦方向または水平方向の移動
• 二次関数方程式の一般形
• 最大値または最小値
• 最大値または最小値の利用
• 2次関数のグラフと座標軸の交点
• 二次不等式
• その他の実関数
• GeoGebraを使った演習</td></tr>
<tr><td>5月</td></tr>
</table>

学期	月	ユニット（授業の時限数）	GM のページ（教科書のページ）	内容
三学期	6月 7月	ユニット5：斜三角形の解法(33)	293～372 (123～160)	• 鋭角の三角比 • 基本直角三角形 • 三角比の応用 • 俯角と仰角 • 座標平面上での対称性 • 座標平面上の角度 • 任意の角の三角関数の比率 • 三角形の面積 • サインの定義およびコサインの定義 • 三角形の決定 • サインの定義およびコサインの定義の応用
	7月 8月	ユニット6：三角関数の恒等式と方程式（15）	373～418 (161～176)	• 対角の三角関数の恒等式 • 余角と補角の三角関数の恒等式 • 加算の定理 • 倍角の定理 • 半角の定理 • 三角方程式
四学期	8月 9月	ユニット7：ベクトルと複素数（25）	419～480 (177～204)	• ベクトルの定義 • ベクトルの計算 • 底辺と座標 • 平行度 • 垂直投影 • 平行ベクトルの内積および平行ではないベクトルの内積 • 内積の三角関数的形状 • 複素数の幾何学的表現 • 複素数を用いた四則計算の幾何学解法 • 複素数のかけ算とわり算の幾何学的解法 • ド・モアブルの定理 • GeoGebraを使った演習
	10月	ユニット8：記述統計 (17)	481～528 (205～224)	• 統計に関する基本定義 • 標本調査の種類 • 中心傾向とばらつき • 変動係数 • 四分位数 • 箱ひげ図 • 十分位数とパーセンタイル • GeoGebraを使った演習

決められた内容を全て行うためには、表示されている計画を達成する必要があります。

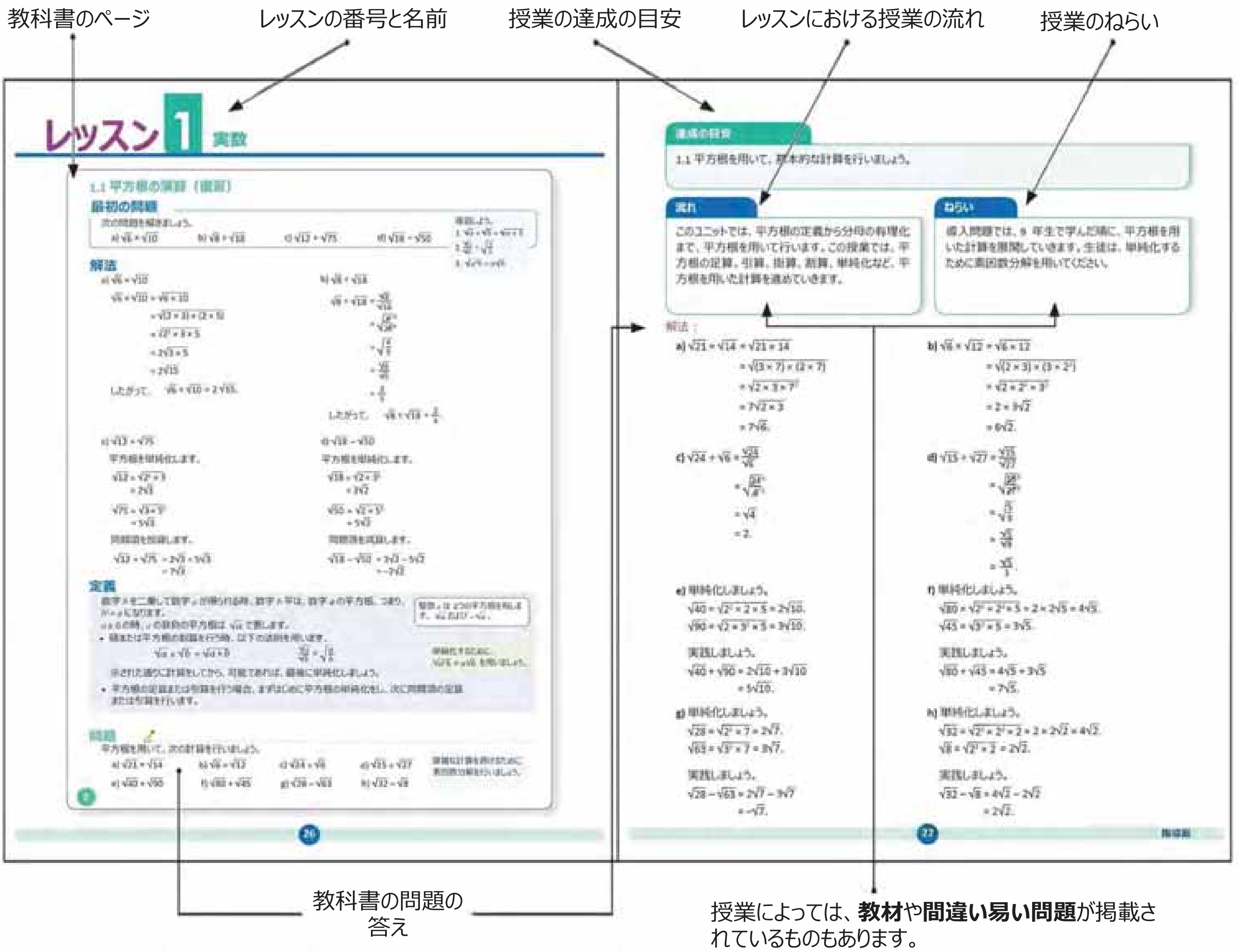
2. ユニット番号

a) このユニットのねらい：このユニットを終えた時点で生徒たちが身につけているべき学力を示しています。
b) 関連および発展（前学年次までと次年次以降）：生徒が予備知識を学習した年次、また今後この内容の続きを学習する年次が示されています。
c) ユニット学習計画：各ユニットの授業内容が示されています。
d) 各レッスンの要点 ：各ユニットのレッスンで扱う重要事項が示されています。

3. ユニットのテスト

生徒たちの理解度と教師によるユニット目標到達度を測るためのテストの例を紹介します。正解率が悪い問題があった場合は、教師はどのようにその問題を改善するかを考え、その正解率の低さが次の学習の妨げとならないように配慮する必要があります。このように、教師はこのテスト結果について学内あるいは他校の教師仲間と議論することができます。

4. 指導案のページの要素



授業によっては、問題を解く上でヒントになる小話や教師向けの重要情報が盛り込まれています。それらは以下のような図で示されています。

教師にとって大切な情報

1. 授業展開に関する教員向けアドバイス

以前の学習プログラムと同じく、この新バージョンにおいても、算数の授業では、「問題の解き方」に焦点をあてて、それをもとに授業展開する方法を提案しています。この方法で行われる授業では、学びのプロセスの主体は生徒となります。そのため、この方法では文章題や出された問いに対し、どの方法を使うかやその手順などを考えます。このプロセスにおいて、教師が果たすべき主な役割は、生徒たちの学習に寄り添うことです。そのためには教員は以下に示す手順を守る必要があります。

手順	学びのプロセス（生徒）	学習サポートのプロセス（教師）	サポートする上での重要注意事項
1	宿題問題の答え合わせと予備知識の確認	前回の授業でやり残して宿題として出した教科書問題の答え合わせをします。	この手順にかける時間は最大3分とします。
2	授業の導入問題を各自で解く	授業の導入問題を読むように指示し、そのテーマに関する生徒たちの理解度を把握してから、それぞれ各自で問題を解いてみるように指示を出します。（能動的学習）	- 生徒たちが導入問題を解いている間、教師は教室内を巡回し、生徒の進み具合やつまずき具合を確認します。 - 分からない場合は、教科書に掲載されている解き方を参照するように促します。 - この手順にかける時間は最大6分とします。
3	クラスメートとの相互学習	クラスメート同士で解き方や分からない点を確認しあうようにしっかり取り組ませます。	- まずは二人のペアをつくって取組み、少しずつグループ人数を増やして最終的に4人までのグループで取り組ませます。 - 分からない場合は、教科書に掲載されている解き方を参照するように促します。
4	解き方と授業のまとめの共有化	解き方と授業のまとめを発表するよう促します。	もし必要な場合は、解き方を説明するか、全体で解き方を確認し合うようにもっていきます。
5	問題と練習問題コーナーの一つ目の設問を解く（能動的学習）	問題コーナーの最初の問題を解くように指示します。	もしすでに一つ目の設問を解き終えた生徒がいた場合は、残りの設問も解くように伝えます。

6	設問の最初の問題の答え合わせ	最初の問題について、生徒全員の答え合わせをして、正しく解けていたかどうかを確認します。	- 生徒たちが取り組んでいる間、教師は教室内を巡回し、生徒全員の最初の問題の答えを確認します。 - 難易度によっては、教師が解き方を説明してもいいですし、ただ答えを書いても構いません。
7	残りの問題の取組み	残りの問題を解くように指示を出します。その後答えがあっているかを確かめて間違えた問題については再度解いてみるように指導します。	早く終えた生徒たちには、クラスメートをサポートするように伝えます。
8	家でする宿題をメモします。	やり残した教科書問題を宿題にします。	もし教科書にある授業用の課題を全て終えることが出来なかった場合、生徒たちに対し、宿題として出しても構いませんが、他の宿題の分量を考慮する必要があります。

生徒たちの学力を高める手段として出しているので、最低20分の能動的学習時間を与えなくてはなりませんし、それに関しては、これまでの手順、特に手順2、3、5、7ができている場合は、問題ないと思われます。

2. 学習を支援する上で考慮すべき重要なポイント

a. 適切な時間配分

学習プログラムには、達成の目安が示され、そのカリキュラムで指定されている授業時間内に学習すべき内容が示されています。プログラムにおいては、1つの授業は45分で構成され、年間240授業相当の時間数が設定されています。この枠にそって、その時間内で教科書にある全ての内容を学習できるようにする必要があります。この点については、与えられた時間に対する学習の効率化が必要となってきます。45分で達成の目安を達成することは容易ではありません。したがって、以下に学習をスムーズにすすめるテクニックの一部を紹介します。

生徒の机の配置

生徒の机の配置は授業のねらいによって変わることもありますが、以下にあげる理由により算数の授業では生徒たちが全員黒板に向かって座るように、基本的に机は黒板に向かって縦に並べることを推奨します。

a. 生徒たちの学習状況を確認するために巡回しやすい
b. クラスメートとの相互学習がしやすい
c. 生徒が黒板を見やすい

授業を始める前の教科書の配布

教室内では授業を受ける態度に関するきまりがありますが、それにもう1つルールを作った方がいいでしょう。つまり、授業が始まる前に、生徒が授業で使う必要な道具の用意を済ませておくというルールです。このルールを決めたら、一部の生徒に教科書配布係を割り当てることで、担当になった生徒たちが責任をもって授業開始前に教科書を配布するようになります。

それで浮いた時間を予備知識の整理や復習に充てることができます。

授業時間は限られており、各授業にはその授業で生徒全員が到達すべき指標が設定されています。もし最初の予備知識を整理する段階で3分以上かかってしまった場合、おそらく時間が足りなくなって到達指標を達成することは難しくなると思われます。そしてその遅れが次の授業の遅れを招き、その結果、その年に履修すべき学習プログラムの内容を全て終えることができなくなる可能性がでてきてしまいます。

もし冒頭の予備知識を整理する段階でつまずいた場合、多くの場合短時間で内容を思い出すのは難しく、逆に予備知識の整理にもっと時間をかける必要がでてきます。たとえば、高校では、大抵方程式でつまずく生徒が出ますが、方程式をマスターするには、もっと問題を解くという時間のかかる作業が必要になります。ですので、予備知識の整理を行う際は、教師は、その日の授業の問題が解けるように、その部分ではヒントを出すことがねらいであって、そこで復習させることが主目的ではないことを決して忘れてはなりません。

各自が授業の導入問題に取り組む時間

1. 授業展開に関する教員向けアドバイスに定めているようにこの時間は6分間とるべきです。多くの場合、生徒たちは個別に取り組む中で、次に何をすればよいか分からない場合、単純に教師の次なる指示を待とうとします。そのような場合、生徒同士で確認し合うように、相互学習を指示するのが良いでしょう。

時間不足で授業内容を全て網羅できない場合

時間が足りなくなって授業時間内に全てを終えられない場合もあるでしょう。別の授業で扱うことにする教師もいれば、宿題にする教師もいます。しかし、できるだけ宿題として出した方がよいでしょう。もし生徒たちが他に宿題を多く抱えている場合は、教師はそれらの問題を手つかずのままにして、テスト前のテスト準備の課題として使うことにしても構いませんし、あるいは、早く問題を終えた生徒たちに取り組ませてもよいでしょう。

授業時間外の校内学習の習慣づけ

時には十分に学習内容をまとめあげる前に授業時間が終了してしまうことがありますが、そのような場合には、宿題として課す以外に、学校にいる授業時間外の時間を有効活用させる方法もあります。学校の時間割りには余分な時間はありませんが、実際には使える時間は確かにあります。例えば、教師が授業前に来客対応や緊急の用で授業開始が遅れたり、あるいは一日不在になる場合、その時間をあてたり、また45分かからず授業が終わった時など、そういう時間を使って、教科書で手つかずとなっている問題に取り組ませるのが良いでしょう。主に、間違い易い基本的な内容の問題を解く力をつけることに多くの時間を割くのがよいでしょう。

解いた問題は全て答え合わせをし、解答が正しいかどうかを確認します。

生徒が解いた問題を全てチェックするのは、とても時間のかかる作業で決して容易ではありませんので、何か他の方法をみつけなくてはなりません。そのためには、生徒たちに二つの習慣をつけさせる必要があります。

1. 自分で答え合わせをする習慣
2. 間違えた問題をもう一度解いてみるという習慣

生徒が最初の習慣を身につけるには、教師が口頭で答えを確認する方法と黒板に書いて答え合わせをさせる方法があります。またその際、生徒同士でノートを交換し、お互いに答え合わせをし合うという方法もあります。一方、二つ目の習慣については、生徒たちが分からないままにならず、間違えても努力すればよいという人格形成の上で大切な指導につながり、本人の学習意欲を引き出す効果が期待できます。

b. 授業準備

この指導の手引きでは各授業における授業の進め方を提案しているので、それ以外に授業計画や進行表や話す内容などを別紙で用意する必要はありません。また、もし必要と感じるのであれば、重要なポイントのみ鉛筆で書きこんでも構いません（この指導の手引きは学校の所有物であり、教師の私物ではありませんので、ボールペンで書きこむのは控えるべきです）。生徒の特性に合わせ、授業の内容をアレンジする必要がでてきた場合は、この指導の手引きで提案されている内容に基づく範囲であれば、アレンジしても差し支えありません。

c. 教室内の巡回によるチェックと指導

生徒たちが問題を解いている間、教師は教室内を巡回し、生徒が設問を正しく理解して正解できているかチェックしながら、その理解度を確認します。

多くの場合、つまずいている生徒がいれば、教師はその生徒に指導しますが、全員に対応するには時間が足りません。そこで以下の方法をとることを推奨します。もしつまずく生徒が5人以下である場合は、個別にサポートし、そうでない場合は別の方法で指導するのがよいでしょう。例えば、全員に対して説明する、グループ別に説明をする、あるいは答え合わせの時に解説する、などの方法です。

d. 課題を他の生徒より早く終える生徒たちへの対応

問題コーナーでは難易度が低い問題も高い問題も含まれているため、生徒が問題を解くのに要する時間には常にばらつきがあります。公的教育では、常に学ぶ機会の平等を保証しなくてはならず、他の生徒より早く課題を終えてしまう生徒に何をすればよいか提案しないことは、彼らの時間を無駄にしていることになり、また、生徒にとって何もすることがないという状況は、学級の教育面においても負の要素となってしまう可能性があります。この状況を防ぎそのような生徒たちの能力を引き出すためにも教師は次のルールを決めるとよいでしょう。全ての問題を解き終わり、答え合わせも終えた場合は、クラスメートのサポートに回ってもよい、とすることです。このようにして、つまずいている生徒はクラスメートにサポートしてもらうことができ、またサポートする側になる生徒も授業の学びを深めることができます。同様に、教師は授業内容の定着を図るためさらなる問題を出しても構いませんし、生徒の能力をさらに引き出すように、難易度をあげた挑戦問題を出しても構いません。

e. 授業用ノートの確認

教師が定期的にノートの使い方をチェックしないと、生徒によっては全く整理できないまま使用している場合がありますので、ノートの使い方は平均で月に1回程度、定期的にチェックする必要があります。ここでのポイントは、学年の最初にチェックの回数を増やし、生徒にチェックされているという意識をもたせ、きちんとノートをとる習慣を身につけさせることです。

f. 宿題のチェック

授業用ノートのチェックと同様に、宿題をきちんとしているかどうかを継続的にチェックする必要があります。授業の最初に宿題のチェックを行う以外に、定期的なチェックも行い、全てをきちんとこなし、自己採点をし、間違った問題をもう一度やり直した生徒には特別な配慮をしてもよいでしょう。

g. 家庭学習の習慣を身につけること

第三回地域比較説明研究（TERCE）の算数・数学テストの結果によれば、30分以上家庭学習を行っている生徒は、家庭学習の時間がそれより少ないか全く行っていない他の生徒に比べ、明らかに優秀な成績を納めていることが分かっています。家庭学習の理想的な時間は学年により異なりますが、年次×10分にさらに10分追加したものが平均的に必要な家庭学習時間とされています。例えば、三年生の場合は、$10 \times 3 + 10 = 40$分です。生徒たちに家で宿題をする習慣をつけさせるのは、教師にとっても親にとっても容易ではありません。したがってまず最初は宿題を出すことで家庭学習の習慣を身につけさせることになるでしょう。

h. 指導し、確認し、再指導し、褒めるというサイクル

教師が行う指導サイクルの基本は、何かを指導した後、モニターをし、それがきちんと達成されているか確認するというものです。そして生徒たちが達成していた場合は、できたことを褒めてあげなければならず、逆にできていない時は、もう一度指導する必要があります。これは全ての指導に当てはまるものです。例えば、何か課題を与えた時、生徒がそれを達成できたかを確かめ、それができていれば褒め、できていなければ再度指導し直す必要があるということです。このサイクルは学習のサポートにもいえます。ある内容について指導し、テストを通してその問題を正しく溶けていたことが確認できた場合は、褒めてあげなくてはなりません。またそうでない場合は再度指導してあげなければなりません。このサイクルは単純に思えますが、継続的に行うためには習慣づける必要があります。

1. テストの応用の重要性

生徒たちの学力評価により得た結果は、教師にとって、実際の学習成果の全体像をみる上でとても意味のある情報です。その結果に基づき、教師は指導している生徒が各授業の到達指標に達しているかや、全体的に能力がついているか、またその学年に相応しい学力を横断的にカバーできているかなどを判断することができます。

結果が良い場合は、さらに学力を高められるよう、教師は引き続きよい授業を行う努力をつづければよいです。

もしテストの結果があまりよくない場合は、教師は生徒たち各の学力評価と照らし合わせ自分の指導の仕方を自己採点し、授業を改善するための努力に着手する必要があります。そのためには、研修に参加して、生徒のつまずきが多いと考えられる単元の内容を調べたり、同僚に相談したりする必要がでてきます。

教師は教育環境において非常に重要な役割を担っていることを今一度考える必要があります。その役目をしっかり果たし、各生徒の学力評価に基づいて自分の取組みをきちんと自己評価しなくてはなりません。

以上をふまえて、この指導の手引きにあるテストを行う必要があります。テストを行うことで、生徒がどの分野の学力をみにつけ、また十どの分野の学力がまだ十分でないか等の貴重な得られます。

2. テストのねらい

以上のことから、テストのねらいを以下のようにまとめることができます。
- 生徒たちの学習内容理解度を知る。
- 生徒たちがつまずいた単元の授業を改善する方法を考える。
- テスト結果の分析に基づいて教師としての取組みを評価し改善に努める。

3. 各テストの機能

テストの種類は 2 つあります。ユニットテストと学期毎のテストです。いずれも同じねらいで作られたものであるものですが、必要に応じ、それぞれ様々な用途にも利用することは可能です。以下にテストの活用例について述べます。

a. ユニットテスト

テストに出てくる問題は、それぞれ主たる（単元の）到達指標に対応しており、その到達指標は各ユニットの授業で明示されているものです。したがって、教師は生徒の学習内容の理解度を知ることができます。テストをして理解できていないところが分かれば、その箇所を再学習させればよい、という考え方です。ですが、毎回追加授業を行うだけの十分な時間がとれるとは限りません。その場合、生徒たちに自分たちで復習し、テストの際に解けなかった問題をもう一度解くように指導しても構いません。

グループで確認できるようにこの指導の手引きにあるテストの答えのコピーを生徒に渡しても構いません。そのようにすれば生徒たちは相互学習ができます。 そして教師は生徒たちに自分たちでやり直したテストの紙を集めさせ、それを元にして生徒の学習進度を把握するということも可能です。

テストを実施する前に、生徒たちに対しテスト範囲のユニットを示し、予めその内容を復習しておくように伝えると良いでしょう。

b.学期ごとのテスト

このテストは、それぞれの学期に学習した重要単元の内容を含む問題で構成されています。タイミングとしては、最後の授業で学習内容の復習ができるように、その学期が終わる1日前にこのテストを行うのがよいでしょう。しかしながら、それが難しい場合は、学期の最終日にテストをして、次の学期の最初の授業で振り返り学習をすることになる場合もあるかと思います。

さらに、教員研修の際に他の学校の教師とテスト結果を共有するのもよいでしょう。そのようにすることで、どの単元に生徒がつまずきやすいかや、他の教師がどんな工夫をしているかなど、学習の改善につながる情報を得る事ができるでしょう。他の教師との信頼関係を築くことができれば、SNSを使った情報のやりとりができ、さらには生徒たちの学習の改善につながる手立て等も共有できるでしょう。

各教員がコピーできるように、各ユニットの最後と各学期の最後にそれぞれのテストが掲載されており、その先に解き方と各項目の評点も掲載されています。

4. テスト結果の利用

例
高校1年次の生徒にあるテストを行い、以下にあげる二例の状況になったと仮定します。

a. 正解：

	次の乗法公式を展開しなさい： $(x+3)^2$
生徒たちの解き方	x^2+6x+9
この答えになった生徒の割合	70%

b. 不正解：

	次の乗法公式を展開しなさい： $(x+3)^2$
生徒たちの解き方	x^2+9
この答えになった生徒の割合	60%

先にあげた二例について、この結果はどのように評価すればよいのでしょうか？

この結果から教師が得られる情報

身についた学力	学力として身についていない部分
乗法公式の展開	累乗の概念
適切な計算手順	かけ算の概念

テスト結果を再学習に活かす方法

短期的配慮	中期的配慮
乗法公式の展開を理解し易くするためには幾何学的リソースの利用がお勧めです。	既習内容の復習をするためにクラスメートからアドバイスを受けたり、助けてもらう「生徒同士の相互学習」を導入するべきでしょう。
同じようなつまずきが複数の生徒にみられた場合は、同じタイプの問題を黒板を使って再学習する必要があるでしょう。	同じタイプの問題を解けるようになるまで、自宅や学校で自己学習を促す必要があります。

以上から、教師は生徒が正しく答えることができなかった問題に的を絞って時間をかけたり工夫したりすることができます。

最後に、教師がとるべきテストの適切な活用方法を以下に説明します。

a. 指導の手引きに含まれるテストを適切なタイミングで行う
   - ユニットのテスト （ユニットが終わるごとに実施するもの）
   - 学期毎のテスト （各学期が終わる前に実施するもの）

b. 実施したテストを見直す

c. テスト結果から得られた情報を分析する

d. 再学習の方法を考える

e. 学期ごとのテストの場合は、教員研修の際に指導改善案が出せるよう、その結果を近隣の学校で指導している教員と共に分析してもよいでしょう。

ユニット1. 実数

このユニットのねらい

問題を解くために実数の大小関係、表記、演算の性質を用います。

関連と展開

中学 3 年	高校 1 年	高校 2 年

中学 3 年

ユニット 2：平方根（第 9 学年）
- 平方根と実数
- 平方根の演算

高校 1 年

ユニット 1：実数
- 実数

ユニット 3：不等式
- 不等式
- 一次不等式
- 非線形不等式

ユニット 4：実関数
- 関数の定義
- 二次関数
- 二次関数の応用
- その他の関数

高校 2 年

ユニット 4：超越関数 I
- 累乗と n 乗根
- 指数関数と指数方程式

ユニット 5：超越関数 II
- 全単射関数と逆関数
- 対数関数
- 三角関数
- GeoGebraを使った演習

このユニットでの学習計画

レッスン	時間	授業
1. 実数	1	1. 平方根の演算（復習）
	1	2. 平方根との混合算（復習）
	1	3. 分母の有理化
	1	4. 分母に2項ある場合の有理化
	1	5. ネイピア数と黄金数
	1	6. 実数の定義：数直線
	1	7. 実数の定義：少数
	1	8. 実数の絶対値
	1	9. 区間の定義
	1	10. 復習問題
	1	ユニット 1　テスト

ユニット 1　授業数 10 時間 + テスト

このレッスンの重要事項

レッスン 1：実数

ここでは平方根の定義を学び、実数の非負の平方根の表し方と二次方程式の解としての平方根との違いに注視します。平方根と組み合わせた初歩的な演算、そして単純な有理化、さらに二項の分母を用いた有理化を行います。数直線で表された実数を定義し、それを小数を用いて書く表し方に取り組みます。対応の概念による関数として絶対値の概念を紹介します。最後に区間を定義し、数直線上および集合の概念におけるその表し方を学びます。

レッスン 1 実数

1.1 平方根の演算（復習）

導入問題

次の問題を解きましょう。

a) $\sqrt{6}\times\sqrt{10}$　b) $\sqrt{8}\div\sqrt{18}$　c) $\sqrt{12}+\sqrt{75}$　d) $\sqrt{18}-\sqrt{50}$

復習しよう。
1. $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$
2. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$
3. $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$

解法

a) $\sqrt{6}\times\sqrt{10}$

$$\begin{aligned}\sqrt{6}\times\sqrt{10} &= \sqrt{6\times10}\\ &= \sqrt{(2\times3)\times(2\times5)}\\ &= \sqrt{2^2\times3\times5}\\ &= 2\sqrt{3\times5}\\ &= 2\sqrt{15}\end{aligned}$$

したがって、　$\sqrt{6}\times\sqrt{10}=2\sqrt{15}.$

b) $\sqrt{8}\div\sqrt{18}$

$$\begin{aligned}\sqrt{8}\div\sqrt{18} &= \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}}\\ &= \sqrt{\frac{\cancel{8}^{\,4}}{\cancel{18}_{\,9}}}\\ &= \sqrt{\frac{4}{9}}\\ &= \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

したがって、　$\sqrt{8}\div\sqrt{18}=\frac{2}{3}.$

c) $\sqrt{12}+\sqrt{75}$

平方根を単純化します。

$$\begin{aligned}\sqrt{12} &= \sqrt{2^2\times3}\\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{75} &= \sqrt{3\times5^2}\\ &= 5\sqrt{3}\end{aligned}$$

同類項を加算します。

$$\begin{aligned}\sqrt{12}+\sqrt{75} &= 2\sqrt{3}+5\sqrt{3}\\ &= 7\sqrt{3}\end{aligned}$$

d) $\sqrt{18}-\sqrt{50}$

平方根を単純化します。

$$\begin{aligned}\sqrt{18} &= \sqrt{2\times3^2}\\ &= 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{50} &= \sqrt{2\times5^2}\\ &= 5\sqrt{2}\end{aligned}$$

同類項を減算します。

$$\begin{aligned}\sqrt{18}-\sqrt{50} &= 3\sqrt{2}-5\sqrt{2}\\ &= -2\sqrt{2}\end{aligned}$$

定義

数字 b を二乗して数字 a が得られる時、数字 b 平は、数字 a の平方根、つまり、$b^2=a$ になります。
$a\geq0$ の時、a の非負の平方根は $\sqrt{a}$ で表します。

- 積または平方根の割算を行う時、以下の法則を用います。

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}\qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

示された通りに計算をしてから、可能であれば、最後に単純化しましょう。

- 平方根の足算または引算を行う場合、まずはじめに平方根の単純化をし、次に同類項の足算または引算を行います。

整数 a は 2つの平方根を有します。$\sqrt{a}$ および $-\sqrt{a}$。

単純化するために、$\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$ を用いましょう。

問題

平方根を用いて、次の計算を行いましょう。

a) $\sqrt{21}\times\sqrt{14}$　b) $\sqrt{6}\times\sqrt{12}$　c) $\sqrt{24}\div\sqrt{6}$　d) $\sqrt{15}\div\sqrt{27}$

e) $\sqrt{40}+\sqrt{90}$　f) $\sqrt{80}+\sqrt{45}$　g) $\sqrt{28}-\sqrt{63}$　h) $\sqrt{32}-\sqrt{8}$

複雑な計算を避けるために、素因数分解を行いましょう。

達成の目安

1.1 平方根を用いて、基本的な計算を行いましょう。

学習の流れ

このユニットでは、平方根の定義から分母の有理化まで、平方根を用いて行います。この授業では、平方根の足算、引算、掛算、割算、単純化など、平方根を用いた計算を進めていきます。

ねらい

導入問題では、9 年生で学んだ順に、平方根を用いた計算を展開していきます。生徒は、単純化するために素因数分解を用いてください。

解法：

a) $\sqrt{21}\times\sqrt{14}=\sqrt{21\times 14}$
$=\sqrt{(3\times 7)\times(2\times 7)}$
$=\sqrt{2\times 3\times 7^2}$
$=7\sqrt{2\times 3}$
$=7\sqrt{6}.$

b) $\sqrt{6}\times\sqrt{12}=\sqrt{6\times 12}$
$=\sqrt{(2\times 3)\times(3\times 2^2)}$
$=\sqrt{2\times 2^2\times 3^2}$
$=2\times 3\sqrt{2}$
$=6\sqrt{2}.$

c) $\sqrt{24}\div\sqrt{6}=\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$
$=\sqrt{\frac{\cancel{24}^{4}}{\cancel{6}^{1}}}$
$=\sqrt{4}$
$=2.$

d) $\sqrt{15}\div\sqrt{27}=\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{27}}$
$=\sqrt{\frac{\cancel{15}^{5}}{\cancel{27}^{9}}}$
$=\sqrt{\frac{5}{9}}$
$=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}}$
$=\frac{\sqrt{5}}{3}.$

e) 単純化しましょう。
$\sqrt{40}=\sqrt{2^2\times 2\times 5}=2\sqrt{10}.$
$\sqrt{90}=\sqrt{2\times 3^2\times 5}=3\sqrt{10}.$

実践しましょう。
$\sqrt{40}+\sqrt{90}=2\sqrt{10}+3\sqrt{10}$
$=5\sqrt{10}.$

f) 単純化しましょう。
$\sqrt{80}=\sqrt{2^2\times 2^2\times 5}=2\times 2\sqrt{5}=4\sqrt{5}.$
$\sqrt{45}=\sqrt{3^2\times 5}=3\sqrt{5}.$

実践しましょう。
$\sqrt{80}+\sqrt{45}=4\sqrt{5}+3\sqrt{5}$
$=7\sqrt{5}.$

g) 単純化しましょう。
$\sqrt{28}=\sqrt{2^2\times 7}=2\sqrt{7}.$
$\sqrt{63}=\sqrt{3^2\times 7}=3\sqrt{7}.$

実践しましょう。
$\sqrt{28}-\sqrt{63}=2\sqrt{7}-3\sqrt{7}$
$=-\sqrt{7}.$

h) 単純化しましょう。
$\sqrt{32}=\sqrt{2^2\times 2^2\times 2}=2\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}.$
$\sqrt{8}=\sqrt{2^2\times 2}=2\sqrt{2}.$

実践しましょう。
$\sqrt{32}-\sqrt{8}=4\sqrt{2}-2\sqrt{2}$
$=2\sqrt{2}.$

1.2 平方根との混合算（復習）

導入問題

次の式を解いてください。

a) $\sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{10})$　　b) $(\sqrt{2}+\sqrt{15})(\sqrt{5}-\sqrt{6})$

解法

a) $\sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{10}) = \sqrt{2}\times\sqrt{6}+\sqrt{2}\times\sqrt{10}$　分布特性を適用すれば、

$= \sqrt{2\times 6}+\sqrt{2\times 10}$

$= \sqrt{12}+\sqrt{20}$　一度で素因数分解できます。

$= \sqrt{2^2\times 3}+\sqrt{2^2\times 5}$

$= 2\sqrt{3}+2\sqrt{5}.$

したがって、 $\sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{10}) = 2\sqrt{3}+2\sqrt{5}.$

b) $(\sqrt{2}+\sqrt{15})(\sqrt{5}-\sqrt{6}) = \sqrt{2}\times\sqrt{5}-\sqrt{2}\times\sqrt{6}+\sqrt{15}\times\sqrt{5}-\sqrt{15}\times\sqrt{6}$　掛算を行います。

$= \sqrt{2\times 5}-2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-\sqrt{3^2\times 5\times 2}$　素因数分解します。

$= \sqrt{10}-2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-3\sqrt{10}$

$= -2\sqrt{10}+3\sqrt{3}.$

したがって、 $(\sqrt{2}+\sqrt{15})(\sqrt{5}-\sqrt{6}) = -2\sqrt{10}+3\sqrt{3}.$

まとめ

ルートの複合算は、次の順序で行います。

1. 掛算と割算をしましょう。
2. 平方根を単純化します。
3. 同類項の足算と引算をします。

分配法則と乗法公式を復習しよう。

$$a(b+c) = ab+ac$$
$$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$$

問題

次の計算をしましょう。

a) $\sqrt{2}(\sqrt{14}+\sqrt{5})$　b) $\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{8})$　c) $\sqrt{5}(4\sqrt{10}+7\sqrt{15})$

d) $(2-\sqrt{18})(2+\sqrt{18})$　e) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$　f) $(\sqrt{8}-\sqrt{6})^2$

g) $(\sqrt{5}+\sqrt{12})(\sqrt{10}+\sqrt{24})$　h) $(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{21}-\sqrt{15})$　i) $(\sqrt{12}-4)(\sqrt{6}+9)$

達成の目安

1.2 平方根を用いた混合算を行いましょう。

学習の流れ

前回の授業では、平方根を個別に計算しました。今回の授業では、混合算を進めていきます。解の単純化を常に明らかにしましょう。

ねらい

解では、生徒に対して、積を行わないように掛算から素因数分解までのやり方を教えます。問題では、掛算する際に括弧を使うことを提案しましょう。

解法：

a) $\sqrt{2}(\sqrt{14}+\sqrt{5}) = \sqrt{2}\times\sqrt{14}+\sqrt{2}\times\sqrt{5} = \sqrt{2\times 14}+\sqrt{2\times 5} = \sqrt{2^2\times 7}+\sqrt{10} = 2\sqrt{7}+\sqrt{10}$

b) $\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{8}) = \sqrt{6}\times\sqrt{3}-\sqrt{6}\times\sqrt{8} = \sqrt{6\times 3}-\sqrt{6\times 8} = \sqrt{2\times 3^2}-\sqrt{2^2\times 2^2\times 3} = 3\times\sqrt{2}-2\times 2\sqrt{3} = 3\sqrt{2}-4\sqrt{3}$

c)
$$\begin{aligned}\sqrt{5}(4\sqrt{10}+7\sqrt{15}) &= \sqrt{5}\times 4\sqrt{10}+\sqrt{5}\times 7\sqrt{15}\\ &= 4\sqrt{5\times 10}+7\sqrt{5\times 15}\\ &= 4\sqrt{2\times 5^2}+7\sqrt{3\times 5^2}\\ &= 4\times 5\times\sqrt{2}+7\times 5\times\sqrt{3}\\ &= 20\sqrt{2}+35\sqrt{3}\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}(2-\sqrt{18})(2+\sqrt{18}) &= 2^2-(\sqrt{18})^2\\ &= 4-18\\ &= -14\end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned}(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 &= (\sqrt{2})^2+2(\sqrt{2})(\sqrt{3})+(\sqrt{3})^2\\ &= 2+2\sqrt{2\times 3}+3\\ &= 2+2\sqrt{6}+3\\ &= 5+2\sqrt{6}\end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned}(\sqrt{8}-\sqrt{6})^2 &= (\sqrt{8})^2-2(\sqrt{8})(\sqrt{6})+(\sqrt{6})^2\\ &= 14-2\sqrt{8\times 6}\\ &= 14-2\sqrt{2^2\times 2^2\times 3}\\ &= 14-2\times 2\times 2\sqrt{3}\\ &= 14-8\sqrt{3}\end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned}(\sqrt{5}+\sqrt{12})(\sqrt{10}+\sqrt{24}) &= \sqrt{5}\times\sqrt{10}+\sqrt{5}\times\sqrt{24}+\sqrt{12}\times\sqrt{10}+\sqrt{12}\times\sqrt{24}\\ &= \sqrt{5\times 10}+\sqrt{5\times 24}+\sqrt{12\times 10}+\sqrt{12\times 24}\\ &= \sqrt{2\times 5^2}+\sqrt{5\times 2^2\times 2\times 3}+\sqrt{2^2\times 3\times 2\times 5}+\sqrt{2^2\times 2^2\times 2\times 3^2}\\ &= 5\sqrt{2}+2\sqrt{30}+2\sqrt{30}+2\times 2\times 3\sqrt{2}\\ &= 5\sqrt{2}+2\sqrt{30}+2\sqrt{30}+12\sqrt{2}\\ &= 17\sqrt{2}+4\sqrt{30}\end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned}(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{21}-\sqrt{15}) &= \sqrt{7}\times\sqrt{21}-\sqrt{7}\times\sqrt{15}-\sqrt{5}\times\sqrt{21}+\sqrt{5}\times\sqrt{15}\\ &= \sqrt{7\times 21}-\sqrt{7\times 15}-\sqrt{5\times 21}+\sqrt{5\times 15}\\ &= \sqrt{3\times 7^2}-\sqrt{105}-\sqrt{105}+\sqrt{3\times 5^2}\\ &= 7\sqrt{3}-2\sqrt{105}+5\sqrt{3}\\ &= 12\sqrt{3}-2\sqrt{105}\end{aligned}$$

i)
$$\begin{aligned}(\sqrt{12}-4)(\sqrt{6}+9) &= \sqrt{12}\times\sqrt{6}+\sqrt{12}\times 9-4\times\sqrt{6}-36\\ &= \sqrt{12\times 6}+9\sqrt{12}-4\sqrt{6}-36\\ &= \sqrt{2^2\times 2\times 3^2}+9\sqrt{2^2\times 3}-4\sqrt{6}-36\\ &= 6\sqrt{2}+18\sqrt{3}-4\sqrt{6}-36\end{aligned}$$

1.3 分母 $\sqrt{a}$ を用いた有理化

導入問題

分母を有理化して、可能であれば単純化しましょう。

a) $\frac{3}{\sqrt{6}}$　　b) $\frac{2}{\sqrt{20}}$

解法

a) $\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$

$= \frac{3 \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}}$

$= \frac{\cancel{3}^{1}\sqrt{6}}{\cancel{6}_{2}}$

$= \frac{\sqrt{6}}{2}$.

したがって、$\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

掛算し、また $\sqrt{6}$ で割ってください。
$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 1$ に注目してください。

b) 平方根を単純化し、

$\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \times 5}$

$= 2\sqrt{5}$

代用し、また、有理化し、

$\frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{\cancel{2}^{1}}{{}_{1}\cancel{2}\sqrt{5}}$

$= \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

$= \frac{1 \times \sqrt{5}}{5}$

$= \frac{\sqrt{5}}{5}$.

したがって、$\frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

まとめ

$\frac{b}{\sqrt{a}}$ の分母の有理化は、次の順序で行います。

1. 掛け算します。 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$.
2. 可能であれば解を単純化してください。 $\frac{b}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{a}$

分数の有理化とは、整数の分母を用いて等しい分数を導き出すことです。

問題

1. 分母を有理化し、可能な場合は必ず単純化しましょう。

a) $\frac{5}{\sqrt{5}}$　b) $\frac{7}{\sqrt{14}}$　c) $\frac{3}{\sqrt{15}}$　d) $\frac{4}{\sqrt{8}}$

e) $\frac{6}{\sqrt{18}}$　f) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{12}}$　g) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{10}}$　h) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{72}}$

有理化する前に単純化できるか確認しましょう。

2. 分母を有理化し、どれが等しいか決めましょう。

a) $\frac{2}{\sqrt{10}}$　b) $\frac{3}{\sqrt{7}}$　c) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$　d) $\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{21}}$

e) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{21}}$　f) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$　g) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$　h) $\frac{3\sqrt{7}}{7\sqrt{3}}$

達成の目安

1.3 分母 $\sqrt{a}$ を用いて分数を有理化しましょう。

学習の流れ

平方根の演算の方法がわかったので、分母 $\sqrt{a}$,を用いて分数の有理化に取り組んでみましょう。まずは、計算が複雑にならないように因数分解をしましょう。

つまずきやすい点

問題によっては、割り算で単純化できることを教えてあげましょう。ただし混乱してしまうこともあるので、その場合は有理化してから単純化した方がいいでしょう。

解法：

1a) $\frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$

1b) $\frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{7}{\sqrt{14}} \times \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = \frac{7\sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{2}$

1c) $\frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{3}{\sqrt{15}} \times \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = \frac{3\sqrt{15}}{15} = \frac{\sqrt{15}}{5}$

1d) 単純化しましょう。

$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}.$

有理化しましょう。

$\frac{4}{\sqrt{8}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$

1e) 単純化しましょう。

$\sqrt{18} = \sqrt{2 \times 3^2} = 3\sqrt{2}.$

有理化しましょう。

$\frac{6}{\sqrt{18}} = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$

1f) 単純化しましょう。

$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}.$

有理化しましょう。

$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} \times \sqrt{3}}{2 \times 3} = \frac{\sqrt{6 \times 3}}{6} = \frac{\sqrt{2 \times 3^2}}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{6}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}.$

この場合は、まずはじめに割り算をしてから、有理化することもできます。

$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{6}{12}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

1g) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{3 \times 10}}{10} = \frac{\sqrt{30}}{5}$

1h) 単純化しましょう。

$\sqrt{72} = \sqrt{2^2 \times 2 \times 3^2} = 2 \times 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}.$

有理化しましょう。

$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{72}} = \frac{\sqrt{15}}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{15}}{6\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{15} \times \sqrt{2}}{6 \times 2} = \frac{\sqrt{15 \times 2}}{12} = \frac{\sqrt{30}}{12}.$

2a) $\frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

2b) $\frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

2c) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{5 \times 2}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

2d) $\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{21}} \times \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{35} \times \sqrt{21}}{21} = \frac{\sqrt{3 \times 5 \times 7^2}}{21} = \frac{7\sqrt{15}}{21} = \frac{\sqrt{15}}{3}$

2e) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{21}} \times \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{27} \times \sqrt{21}}{21} = \frac{\sqrt{3^2 \times 3^2 \times 7}}{21} = \frac{3 \times 3\sqrt{7}}{21} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

2f) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{7}}{7} = \frac{\sqrt{3 \times 7}}{7} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

2g) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{2 \times 5}}{5} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

2h) $\frac{3\sqrt{7}}{7\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{7}}{7\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{7} \times \sqrt{3}}{7 \times 3} = \frac{\sqrt{7 \times 3}}{7} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

次の偶数は等しいです。

a) および g)

b) および e)

f) および h)

1.4 分母の項が 2 つの時の有理化

導入問題

どんな方法で分母を有理化できますか？

a) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

解法

乗法公式を復習しましょう。『二項式の差の和』：$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$

二つの平方根の差による足算のためにこの乗法を行うことができます。

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b$$

有理数の平方根の和の積の差は有理数になります。

それでは与えられた演習に適用してみましょう。

a) $$\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

項の差で掛算と割算をします。

$$=\frac{2\times(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{2\times(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2}$$

$$=\frac{2\times(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}$$

$$=\frac{2\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}.$$

したがって、 $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}.$

b) $$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

項の和で掛算と割算をします。

$$=\frac{1\times(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1}$$

$$=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

したがって、 $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$

定義

数式 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ を、$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ の**共役**と呼びます 。二つの項の数式の**共役**は、二つ目の項の符号を変更することで得られます。一方が他方の**共役**である時、二つの式は**共役**です。

分母が、平方根との和または差である分数を**有理化**するには、掛算し分母の**共役**で割算をします。

例

分母 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-2}$ を有理化しましょう。

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-2}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-2}\times\frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\times(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{7}+\sqrt{3}\times 2}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{21}+2\sqrt{3}}{3}.$$

$\sqrt{7}-2$の共役は $\sqrt{7}+2$です。

乗法公式を行います。
$(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)=(\sqrt{7})^2-(2)^2=7-4=3,$

したがって、 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-2}=\frac{\sqrt{21}+2\sqrt{3}}{3}.$

問題

次の分数の分母を有理化しましょう。

a) $\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ b) $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}+\sqrt{6}}$ d) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}$ e) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{8}+\sqrt{6}}$ f) $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{5}}{\sqrt{15}-\sqrt{5}}$ g) $\frac{4}{\sqrt{10}+3}$ h) $\frac{\sqrt{14}+2}{1-\sqrt{7}}$

達成の目安

1.4　分母 $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ または $a \pm \sqrt{b}$ で分数を有理化しましょう。

学習の流れ

複合演算を用いて、二項分母による分数の有理化を学びます。

ねらい

例では、生徒に対して、乗法公式（差による和）を行う際に、プロセスを省略して、すでに計算してある平方の差を書くよう指示しましょう。

解法：

a) $\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6-2} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \times \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \dfrac{2(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})} = \dfrac{2(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2} = \dfrac{2(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{7-5} = \sqrt{7}+\sqrt{5}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}+\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{3}\times(\sqrt{12}-\sqrt{6})}{(\sqrt{12}+\sqrt{6})(\sqrt{12}-\sqrt{6})} = \dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{12}-\sqrt{3}\times\sqrt{6}}{12-6} = \dfrac{\sqrt{3\times12}-\sqrt{3\times6}}{6} = \dfrac{\sqrt{2^2\times3^2}-\sqrt{2\times3^2}}{6} = \dfrac{6-3\sqrt{2}}{6} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{11}-\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{6}\times(\sqrt{11}+\sqrt{10})}{(\sqrt{11}-\sqrt{10})(\sqrt{11}+\sqrt{10})} = \dfrac{\sqrt{6}\times\sqrt{11}+\sqrt{6}\times\sqrt{10})}{11-10} = \dfrac{\sqrt{6\times11}+\sqrt{6\times10}}{1} = \sqrt{66}+\sqrt{2^2\times3\times5} = \sqrt{66}+2\sqrt{15}$

e) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{8}+\sqrt{6}} = \dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{8}-\sqrt{6})}{(\sqrt{8}+\sqrt{6})(\sqrt{8}-\sqrt{6})} = \dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{8}-\sqrt{3}\times\sqrt{6}+\sqrt{2}\times\sqrt{8}-\sqrt{2}\times\sqrt{6}}{8-6} = \dfrac{\sqrt{3\times8}-\sqrt{3\times6}+\sqrt{2\times8}-\sqrt{2\times6}}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{2^2\times2\times3}-\sqrt{2\times3^2}+\sqrt{2^2\times2^2}-\sqrt{2^2\times3}}{2} = \dfrac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}+4-2\sqrt{3}}{2}$

f) $\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{5}}{\sqrt{15}-\sqrt{5}} = \dfrac{(\sqrt{15}+\sqrt{5})(\sqrt{15}+\sqrt{5})}{(\sqrt{15}-\sqrt{5})(\sqrt{15}+\sqrt{5})} = \dfrac{(\sqrt{15})^2+2\sqrt{15}\times\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}{15-5} = \dfrac{15+2\sqrt{15\times5}+5}{10} = \dfrac{20+2\sqrt{3\times5^2}}{10} = \dfrac{20+2\times5\sqrt{3}}{10} = 2+\sqrt{3}$

g) $\dfrac{4}{\sqrt{10}+3} = \dfrac{4\times(\sqrt{10}-3)}{(\sqrt{10}+3)(\sqrt{10}-3)} = \dfrac{4\sqrt{10}-12}{10-9} = \dfrac{4\sqrt{10}-12}{1} = 4\sqrt{10}-12$

h) $\dfrac{\sqrt{14}+2}{1-\sqrt{7}} = \dfrac{(\sqrt{14}+2)(1+\sqrt{7})}{(1-\sqrt{7})(1+\sqrt{7})} = \dfrac{\sqrt{14}\times1+\sqrt{14}\times\sqrt{7}+2\times1+2\times\sqrt{7}}{1-7} = \dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{14\times7}+2+2\sqrt{7}}{-6} = \dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{2\times7^2}+2+2\sqrt{7}}{-6}$

$= -\dfrac{\sqrt{14}+7\sqrt{2}+2+2\sqrt{7}}{6}$

1.5 ネイピア数と黄金数

導入問題

ネイピア数 e

その値は、2.718281828459045...です。また、n が最大自然数の時、式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ と通して近似できます。

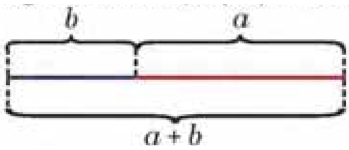
上記を踏まえて、次の問題を解いてみましょう。

1. n の値が増えると、前の式の数値が増えることに注意してください。
2. n = 1,000、n = 10,000、n = 100,000 の値を用いて、前の式の数値を求めましょう。

黄金数 $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

これは、二つの異なる線分 a と b の関係による長さの比率です。長さの和は、最長の区分が最短の区分になるように、最長の区分になります。

代数的に与えられた比は、以下のように記します。



$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}=\phi$$

比率から ϕ を導き出しましょう。

解法

1. 計算機を使って、値を評価しましょう。

n	1	2	3	4
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2.25	2.3703...	2.4414...

n の値が大きくすると、式の値も大きくなります。

2. 与えられた値を用いて図を完成させましょう。

n	1000	10000	100000
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2.71692...	2.71814...	2.71826...

n の『とても大きい』値を求めることによって、最初に与えられた e の値を概算します。

$\phi=\frac{a+b}{a}=\frac{a}{a}+\frac{b}{a}=1+\frac{b}{a}$ 及び $\frac{a}{b}=\frac{\phi}{1}$ したがって、$\frac{b}{a}=\frac{1}{\phi}$

$\phi=1+\frac{1}{\phi}$,　比率の代わりに、

$\phi^2=1+\phi$,　ϕ を掛けて、

$\phi^2-\phi-1=0$, 移項します。

左辺から a = 1、b = −1 及び c = −1 には平方根の解の公式を用います。

$$\phi=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-1)}}{2(1)}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},$$

ϕ は長さの比率であるため、正の数になります。

よって、$\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ です。

まとめ

数 e は無理数です。そのため、e の正確な値は概算です。

レオンハルト・オイラーは 1748 年に、『無限解析入門』の中で、e の値を概算するために二つの式を示しました。

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ y } e=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$$

J.L.クーリッジ。(1950)。ネイピア数 e

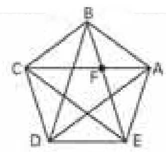
数 ϕ は無理数であるため、二つの整数の指数として表すことはできません。

黄金数は、葉の成長や哺乳類の骨格など自然のさまざまな分野でよく見られる定数です。また、芸術や音楽にも現れ、その比率は調和と美の知覚に関係していると考えられています。

A. カサン(2001)。神の美的側面比率。

問題

1. 自然数 n と $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$ として、式 $e=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ を用いて、e の値を n = 10 に近似します。
2. 辺 1 の正五角形 ABCDE にはすべての対角線が描かれています。次の手順で行ってください。
   a) ΔABC ~ ΔBFAであることを証明してください。
   b) ΔBCF が二等辺であることを証明してください。
   c) a が対角線 $\overline{AC}$ の長さである時、FA = $a-1$ で あることを証明してください。
   d) $a=\frac{1}{a-1}$ であることを証明してください。　e) a の値を求めましょう。



12

達成の目安

1.5 ネイピア数と黄金数の計算をしましょう。

学習の流れ

特異性として、以下の特徴を持つ二つの実数を表します。ナペリア数は、特定の代数表現の近似値として得られ、黄金比は幾何学的比率として得られます。

つまずきやすい点

問2に関しては、生徒は様々な幾何学的表記を覚えていない可能性があるため、正五角形の特性（すべての辺と角が等しい）を復習させるようにしましょう。

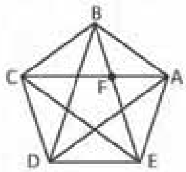
解法：

1.

n	1	2	3	4	5
$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\dots+\frac{1}{n!}$	2	2.5	$2.\overline{6}$	$2.708\overline{3}$	$2.71\overline{6}$
n	6	7	8	9	10
$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\dots+\frac{1}{n!}$	$2.7180\overline{5}$	$2.71\overline{825396}$	2.7182787698...	2.7182815255...	2.7182818011...

2a) 三角形 ABC では、
$\sphericalangle ABC = 180° \times 3 \div 5 = 108°$
AB = BC ⇒ ΔABC は二等辺三角形です。⇒ $\sphericalangle BCA = \sphericalangle CAB$

$\theta = \sphericalangle BCA = \sphericalangle CAB$ とすると、
⇒ $2\theta + 108° = 180°$ ⇒ $\theta = 36°$
したがって、$\sphericalangle BCA = \sphericalangle CAB = 36°$



同様に ΔABE の証明をします。
$\sphericalangle BEA = \sphericalangle ABE = 36°$
したがって、三角形 BFA では、
$\sphericalangle ABE = \sphericalangle CAB = \sphericalangle FAB = 36°$

したがって、基本的に AA は次のようになります。
ΔABC ~ ΔBFA.

2b) 三角形 BCF では、
$\sphericalangle FBC = \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABF$
⇒ $\sphericalangle FBC = 108° - 36° = 72°$

したがって、$\sphericalangle CFB$ は ΔABF の外側にあります。
⇒ $\sphericalangle CFB = \sphericalangle FAB + \sphericalangle ABF$
⇒ $\sphericalangle CFB = 36° + 36° = 72°$

⇒ $\sphericalangle FBC = \sphericalangle CFB = 72°$.

したがって、ΔBCF は二等辺三角形です。

2c) 次のようになります
CF + FA = AC ⇒ FA = AC − CF ⇒ FA = a − CF
ΔBCF は二等辺三角形であり、それぞれの角は
$\sphericalangle FBC = \sphericalangle CFB = 72°$であるためCF = CB = 1となります。
したがって、FA = $a - 1$ になります。

2d) 2a) の結果から、ΔABC ~ ΔBFA となるため
$$\frac{AC}{BA} = \frac{BA}{FA} \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{1}{a-1} \Rightarrow a = \frac{1}{a-1}.$$

2e) $a = \frac{1}{a-1} \Rightarrow a(a-1) = 1 \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0$
二次式を適用します。 $a = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
$a > 0$であるため、$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ （黄金数）

1.6 実数の定義：数直線

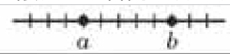
導入問題

1. 以下の数を数直線上に図示してください。

a) 3　b) −2　c) $\frac{1}{2}$　d) $-\frac{9}{5}$　e) −2.5　f) 1.4　g) $\sqrt{5}$　h) ϕ　i) −1　j) π

2. 上記の数を、有理数と無理数に分けてください。

数直線上の b は、y が $a < b$ の場合に限り、a の右側にあります。



解法

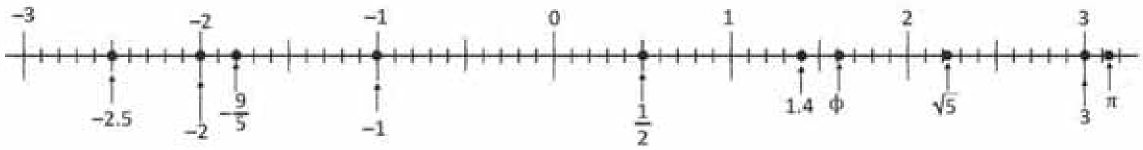
1. 与えられた数から少数のおおよその値を使用します。

a) 3 = 3　b) −2 = −2　c) $\frac{1}{2}$ = 0.5　d) $-\frac{9}{5}$ = − 1.8　e) −2.5 = −2.5

f) 1.4　g) $\sqrt{5}$ = 2.236...　h) ϕ = 1.618...　i) −1　j) π = 3.141...

数直線上に数字を書き込む前に、小さい順に並べます。

$-2.5 < -2 < -\frac{9}{5} < -1 < \frac{1}{2} < 1.4 < \phi < \sqrt{5} < 3 < \pi$



a) 3 は有理数です。　b) -2 は有理数です。　c) $\frac{1}{2}$ は有理数です。　d) $-\frac{9}{5}$ は有理数です。

e) $-2.5 = -\frac{5}{2}$ は有理数です。f) $1.4 = \frac{7}{5}$ は有理数です。g) $\sqrt{5}$ は無理数です。　h) ϕ は無理数です。

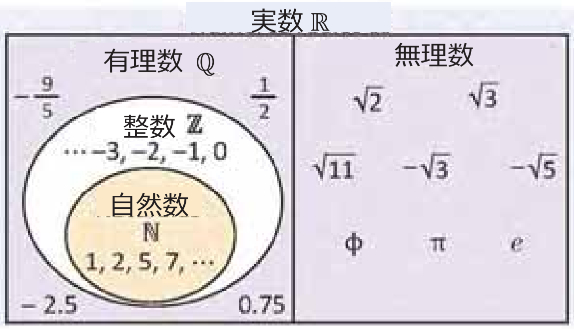
i) -1 は有理数です。　j) π は無理数です。

定義

実数の集合は、有理数と無理数から成り立っています。

実数の集合を表すために用いられる記号は $\mathbb{R}$ です。

数直線とは、実数の集合を表したものです。一つの実数には、線上に一つの点のみ存在します。つまり線上の一つの点には、一つの実数のみ存在します。



問題

1. 以下の数を数直線上で示しなさい。

a) $\frac{2}{5}$　b) 1　c) −3　d) $\sqrt{3}$

e) $-\frac{8}{5}$　f) $-0.\overline{5}$　g) 2.9　h) 0.15

i) $-\frac{11}{10}$　j) e　k) $\sqrt{2}$　l) $\frac{7}{3}$

2. 以下の集合をそれぞれ定義しましょう。$\mathbb{N}$、$\mathbb{Z}$、$\mathbb{Q}$ は、問 1 の各数、または無理数の場合に属しています。

達成の目安

1.6 数直線上に実数を配置してみましょう。

学習の流れ

この授業では、数直線上の点の置かれた場所を通して、実数の順序関係を求めます。後ほど生徒は図を作成したり、不等式を解くためにこれらの知識を用いるでしょう。

つまずきやすい点

順序が明確でない可能性があるため、生徒は、数字と数字の間に最低でも少数の値を区別するため、数直線の単位の間に印を書き入れましょう。

解法：

1a) $\frac{2}{5} = 0.4$

1b) 1

1c) -3

1d) $\sqrt{3} = 1.73...$

1e) $-\frac{8}{5} = -1.6$

1f) $-0.\overline{5} = -0.555...$

1g) 2.9

1h) 0.15

1i) $-\frac{11}{10} = -1.1$

1j) $e = 2.71....$

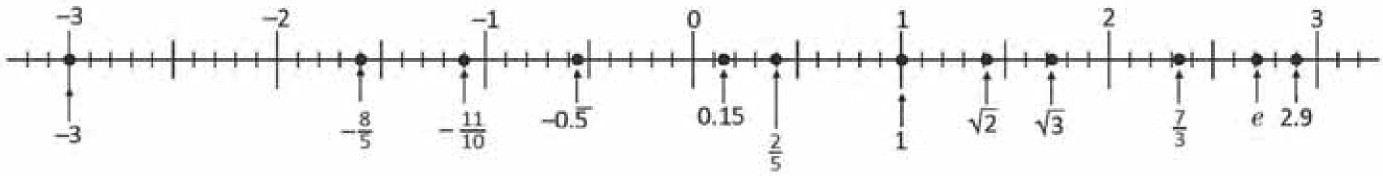
1k) $\sqrt{2} = 1.41....$

1l) $\frac{7}{3} = 2.333....$

小さい順に並べましょう。

$-3 < -\frac{8}{5} < -\frac{11}{10} < -0.5 < 0.15 < \frac{2}{5} < 1 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < \frac{7}{3} < e < 2.9$

与えられた数のおおよその 10 進値を使用します。



2a) $\frac{2}{5}$ は有理数です。

2b) 1 は自然数です。

2c) -3 は整数です。

2d) $\sqrt{3} = 1.73...$ は無理数です。

2e) $-\frac{8}{5}$ は有理数です。

2f) $-0.\overline{5} = -\frac{5}{9}$ は有理数です。

2g) $2.9 = \frac{29}{10}$ は有理数です。

2h) $0.15 = \frac{3}{20}$ は有理数です。

2i) $-\frac{11}{10}$ は有理数です。

2j) $e = 2.71...$ は無理数です。

2k) $\sqrt{2} = 1.41...$ は無理数です。

2l) $\frac{7}{3}$ は有理数です。

問 2 では、様々な解があります。例えば、2b) では、1 は自然数、整数、そして有理数です。

1.7 実数の定義：少数

導入問題

以下の実数を少数で表しましょう。

a) 3　　b) –2　　c) $\frac{3}{2}$　　d) $\frac{5}{3}$　　e) $\frac{1}{6}$　　f) $\sqrt{7}$　　g) e　　h) π

解法

a) 3.000... は少数です。整数の部分が 3 で、少数の部分が 0.000... です。

b) -2.000... は少数です。整数の部分が -2 で、少数の部分が 0.000... です。

c) $\frac{3}{2}$ を $\frac{3}{2} = 3 \div 2 = 1.5$ で割ります。

d) $\frac{5}{3}$ を $\frac{5}{3} = 5 \div 3 = 1.\overline{6}$ で割ります。

e) $\frac{1}{6}$ を $\frac{1}{6} = 1 \div 6 = 0.1\overline{6}$ で割ります。

f) $\sqrt{7} = 2.645751...$

g) $e = 2.7182818...$

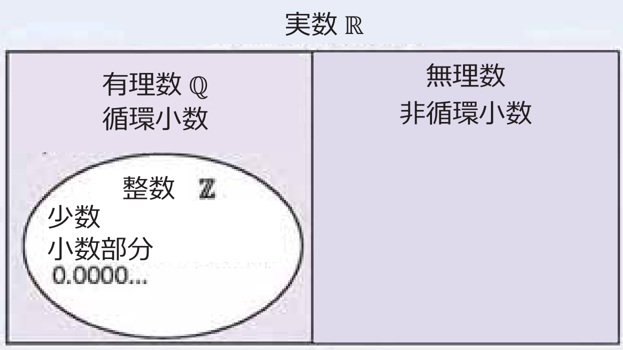
h) $\pi = 3.141592...$

定義

少数は、単位を部分を表すために使用します。したがって、少数は $a.bcdefg...$ の形で表します。a は整数を表し、b, c, d, e, f, g... は 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 または 9 のうちのいずれかの数字になります。

a は、**整数部分**と呼ぶ、0.$bcdefg$... は、**小数部分**と呼びます。

したがって、**実数**の集合 $\mathbb{R}$ は、すべての 10 進数で形成されます。



問題

以下の少数を有理数または無理数に分けましょう。

a) 0.125　　b) 0.101001000100001...　　c) 0

d) 5.75757575...　　e) –7.321　　f) 1.221212121212121...

g) –10　　h) 3.333333...　　i) 3.141592653589...

j) 4.12666666　　k) 0.123456789101112...　　l) –0.61803398874989...

14

達成の目安

1.7 少数を有理数または無理数に分けましょう。

学習の流れ

9 年生では、二つの整数の指数に表すことができない次数などの無理数の定義について学びました。この授業では、少数の表現で実数の特性を確立します。

つまずきやすい点

この授業で使用する、小数部分にゼロを追加できることによる整数や有限小数部分を含む少数の循環小数の暗黙の概念についてよく考えましょう。こうした意味で、少数表記の各実数は、循環または非循環少数となります。

解法：

a) 0.125 は有理数であり循環小数です。

b) 0.101001000100001... は無理数であり非循環小数です。

c) 0 は有理数であり循環小数です。

d) 5.75757575... は有理数であり循環小数です。

e) –7.321は有理数であり循環小数です。

f) 1.2212121212121... は有理数であり循環小数です。

g) –10 は有理数であり循環小数です。

h) 3.333333... は有理数であり循環小数です。

i) 3.1415926535... は無理数であり非循環小数です。

j) 4.12666666 は有理数であり循環小数です。

k) 0.123456789101112... は無理数であり非循環小数です。

l) –0.61803398874... は無理数であり非循環小数です。

1.8 実数の絶対値

導入問題

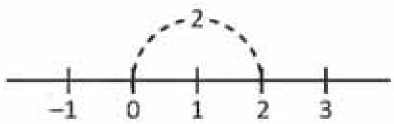
次の数の絶対値を求めましょう。

a) 2　　b) −3　　c) $\sqrt{7}$　　d) $-\frac{3}{4}$

解法

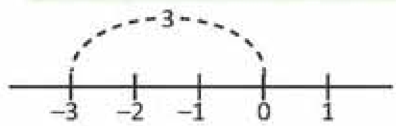
実数の絶対値とは、数直線上のその実数からゼロまでの距離のことです。

a) 2



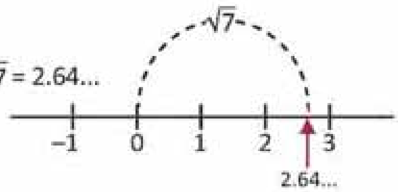
$|2| = 2$

b) −3



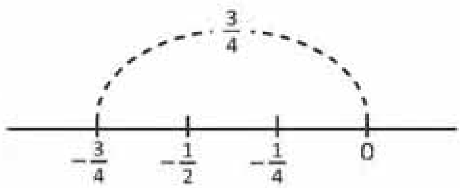
$|-3| = 3$

c) $\sqrt{7} = 2.64...$



$|\sqrt{7}| = \sqrt{7}$

d) $-\frac{3}{4}$



$\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$

正の数の絶対値は、同じ数：

$|2| = 2$　　$|\sqrt{7}| = \sqrt{7}$

負の数の絶対値は、その数の逆の数と等しい数のことです。

$|-3| = 3$　　$\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$

注目：
$-(-3) = 3$ および $-\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$

定義

以下のことに注目します。

- 正の数の絶対値は同じ数になります。つまり、$a > 0$ のとき、$|a| = a$ になります。
- ゼロの絶対値はゼロです。$|0| = 0$
- 負の数の絶対値はその数の逆の数です。$a < 0$ の時、$|a| = -a > 0$ になります。
- それぞれの実数には一つの絶対値があります。つまり、絶対値は、一つの数につき一つしかありません。

実数aの絶対値の定義は、次の通りです。

$$|a| = \begin{cases} \text{もし、} a \geq 0 \text{であるなら、} a \\ \text{もし、} a < 0 \text{であるなら、} -a \end{cases}$$

復習しよう。
$\sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4,$　$\sqrt{0^2} = \sqrt{0} = 0$　$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$
そのため、a のすべての実数の証明は、
$\sqrt{a^2} = |a|$

問題

1. 次の数の絶対値を求めましょう。

a) $\sqrt{6}$　　b) $\frac{1}{70}$　　c) -0.11111　　d) -153

e) e　　f) $-\phi$　　g) 0　　h) $-\frac{1}{3}$

2. a と b を正の数とし、$a \geq b$ としたとき、$|a - b| = a - b$ になります。

達成の目安

1.8　次の数の絶対値を求めましょう。

学習の流れ

7 年生では、生徒は原点までの距離の定義とともに絶対値を使用してきました。これからは、関連した表記を使用し、設定のルールとして定義します。

ねらい

解では、負の数の絶対値を求めると、その逆の値を求めた時と同じ結果が得られ、その定義を関数として使用することが目的となります。

解法：

1a) $|\sqrt{6}| = \sqrt{6}$

1b) $\left|\frac{1}{70}\right| = \frac{1}{70}$

1c) $|-0.11111| = -(-0.11111) = 0.11111$

1d) $|-153| = -(-153) = 153$

1e) $|e| = e$

1f) $|-\phi| = -(-\phi) = \phi$

1g) $|0| = 0$

1h) $\left|-\frac{1}{3}\right| = -\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

2. $a \geq b > 0$

問題によって：

問題1： 仮に $a = b \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow |a - b| = |0| = 0 = a - b$

問題2： 仮に $a > b \Rightarrow a - b > 0 \Rightarrow |a - b| = a - b$

レッスン 1

1.9 区間の定義

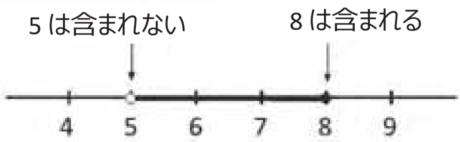
導入問題

数直線上の、次の不等式の読み方と表し方を書きましょう。

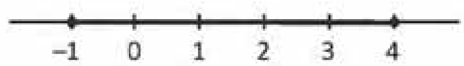
a) $5 < x \leq 8$　　b) $-1 \leq x \leq 4$　　c) $0 < x < 2$　　d) $-3 \leq x < -1$
e) $x > 8$　　f) $x < -4$　　g) $x \leq 5$　　h) $x \geq -2$

解法

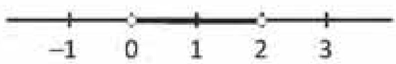
a) $5 < x \leq 8$　これらの不等号の読み方は、
5 小なり x 小なりイコール 8 数直線上での
表し方は、



b) $-1 \leq x \leq 4$ の不等号の読み方は、
-1 小なりイコール x 小なりイコール 4
この不等号は以下のように表します。

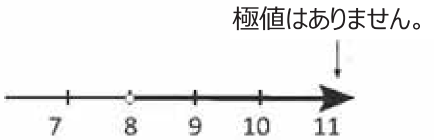


c) $0 < x < 2$　この不等号の読みからは、
0 小なり x 小なり 2 となり、そのためこの
不等号の表し方は、

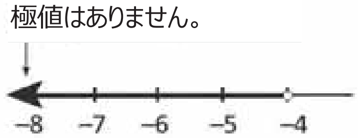


d) $-3 \leq x < -1$　この不等号の読み方は、
-3 小なりイコール x 小なり -1 となり、そのた
めこの不等号の表し方は、

e) $x > 8$ の不等号の読み方は、
x 大なり 8 です。
次のように表します。

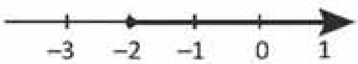


f) $x < -4$の不等号の読み方は、
x 小なり -4 です。
次のように表します。



g) $x \leq 5$ この不等号の読み方は、
x 小なりイコール 5 です。

h) $x \geq -2$ の不等号の読み方は、
x 大なりイコール -2 です。



定義

区分とは、半径または線分で表される数直線の一部分のことを言います。例えば、導入問題の中で出てきた部分集合は、区間のことです。a)、b)、c)、d) は線分で、e)、f)、g)、h) は半径です。

導入問題を参考にした区間を表すために用いられる表記は、

a) $5 < x \leq 8 \Rightarrow]5, 8]$　　b) $-1 \leq x \leq 4 \Rightarrow [-1, 4]$　　c) $0 < x < 2 \Rightarrow]0, 2[$　　d) $-3 \leq x < -1 \Rightarrow [-3, -1[$

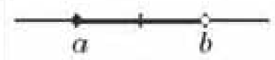
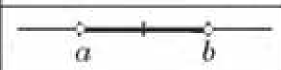
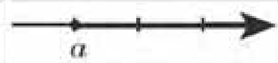
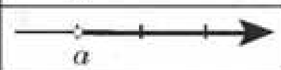
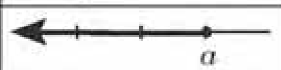
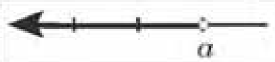
区間上の数を**端点**と呼びます。
もしも端点が含まれない場合、括弧の向きは逆になります。] を始めに置き、[を終わりに置きます。

e) $x > 8 \Rightarrow]8, \infty[$　　f) $x < -4 \Rightarrow]-\infty, -4[$　　g) $x \leq 5 \Rightarrow]-\infty, 5]$　　h) $x \geq -2 \Rightarrow [-2, \infty[$

∞ は、無限大を表す記号です。一方、$-\infty$ はマイナス無限大を表します。これらの記号は、区間において、端点が他にないことを示しています。

$-\infty$ または ∞ に応じた括弧は、逆に配置します。例： $]-\infty, 8]$ 及び $]1, \infty[$

次の図は、区間の種類の表記をまとめたものです。数直線上の表し方や、不等式を用いた集合の表記です。

種類 区間の	区間の表記	数直線上での表し方	集合の表記
閉区間	$[a, b]$		$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
右半開区間	$[a, b[$		$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
左半開区間	$]a, b]$		$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
開区間	$]a, b[$		$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
無限大	$[a, \infty[$		$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
	$]a, \infty[$		$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
	$]-\infty, a]$		$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
	$]-\infty, a[$		$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

集合の表記では以下のように読みます。例えば：$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ 集合エックス属するアール絶対値エー小なりイコールエックス小なりイコールビー

問題

次の区間を異なる二つの表記で表してください。

a) $]-3, 0]$　　b) $]-\infty, -5[$　　c) $[5, \infty[$　　d) $]2, 6[$

e) 

f) 

g) 

h) 

i) $\{x \in \mathbb{R} \mid -9 < x < -5\}$　　j) $\{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x \leq -2\}$

k) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -4\}$　　l) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

達成の目安

1.9 直線状の区間の表し方または集合の表記

学習の流れ

生徒は三学期に実数の集合と、部分集合の一部について学びました。この授業では、実数の部分集合の別の種類について学びます。区間は、ユニット 3 に出てくる不等式や、ユニット 4 の実関数を解くために重要です。

ねらい

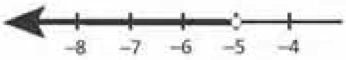
生徒は、数直線上の点で実数を表すことができます。そのために、導入問題では、生徒が、不等式の線分または半径の表し方を導けるようにしましょう。ただし、はじめの項目は例として用いることができます。

区間 / 数直線 / 集合の表記

a)]−3, 0]

$\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 0\}$

b)]−∞, −5[



$\{x \in \mathbb{R} \mid x < -5\}$

c) [5, ∞[

$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$

d)]2, 6[

$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 6\}$

数直線 / 区間 / 集合の表記

e)

[−2, 5] $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}$

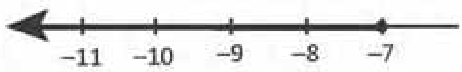
f)

[1, 2[$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$

g)

]0, ∞[$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

h)



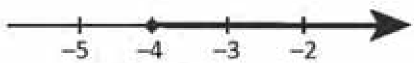
]−∞, −7] $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -7\}$

集合の表記 / 区間 / 数直線

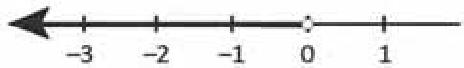
i) $\{x \in \mathbb{R} \mid -9 < x < -5\}$]−9, −5[

j) $\{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x \leq -2\}$]−7, −2]

k) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -4\}$ [−4, ∞[



l) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$]−∞, 0[



1.10 復習問題

1. 次の分数を有理化しましょう。

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$　b) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$　c) $\frac{1}{4+\sqrt{7}}$　d) $\frac{2}{2-\sqrt{3}}$

e) $\frac{\sqrt{3}+2}{1-\sqrt{3}}$　f) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{27}-\sqrt{8}}$　g) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$　h) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}$

2. n 自然数は自然数とします。数直線上に $\sqrt{n}$ または $2<\sqrt{n}<3$ を配置しましょう。

3. 次の数の絶対値を求めましょう。

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$　b) $\frac{2}{3}-\frac{3}{4}$　c) $\frac{5}{6}-\frac{1}{2}$　d) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

e) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$　f) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$　g) $\sqrt{10}-3$　h) $2\sqrt{7}-6$

授業 1.8 の問 2 の解答を使用しましょう。また、a と b が $0<a<b$ のような実数の時、 $\sqrt{a}<\sqrt{b}$ なります。

4. 次の命題を証明しましょう。

a) $\sqrt{12}\div\sqrt{3}$ を割ると、整数を得られます。

b) $\sqrt{2}\div\sqrt{8}$ を割ると、有理数を得られます。

c) 黄金数 ϕ は、ネイピア数 e より小さいです。

d) $\sqrt{2}+\sqrt{3}\neq\sqrt{5}$.

平方根の定義を用いましょう。

e) $\varphi^2-\frac{1}{\varphi}$ を計算すると、整数が得られます。

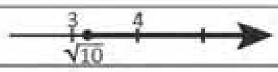
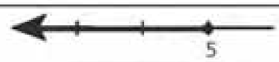
f) 実数の絶対値が負の数になることはありません。

g) 実数 a と b を実数とした場合、$0<b<a$ は $|b-a|=a-b$ になります。

5. 次の問題では、不等式を解くために変数xはどのような値になりますか？

a) $|x|=1$　b) $|x|=6$　c) $|x|=0$　d) $|x+1|=3$

6. 区間の表現に関する以下の表を完成させてください。

区間	集合の表記	数直線上での表し方
$]-4,7]$		
		
	$\{x\in\mathbb{R}\mid x>9\}$	
$[\sqrt{2},\phi]$		
	$\{x\in\mathbb{R}\mid x<2\}$	
$[0,2\pi[$		
	$\left\{x\in\mathbb{R}\mid -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right\}$	
		

18

達成の目安

1.10 実数に当てはまる問題を解きましょう。

1a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　**1b)** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$　　**1c)** $\frac{4-\sqrt{7}}{9}$

1d) $4+2\sqrt{3}$　　**1e)** $-\frac{5+3\sqrt{3}}{2}$　　**1f)** $\frac{13+5\sqrt{6}}{19}$

1g) 変数を変更します。 $y=\sqrt{2}+\sqrt{3}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{1}{y+\sqrt{5}}=\frac{y-\sqrt{5}}{(y+\sqrt{5})(y-\sqrt{5})}=\frac{y-\sqrt{5}}{y^2-5}$$

$$y^2=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=(\sqrt{2})^2+2\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=2+2\sqrt{2\times3}+3=5+2\sqrt{6}.$$

$y=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ および $y^2=5+2\sqrt{6}$ を置換します。

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{y-\sqrt{5}}{y^2-5}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{5+2\sqrt{6}-5}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{6})}{2(6)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{6})2+\sqrt{3}(\sqrt{6})-\sqrt{5}(\sqrt{6})}{12}=\frac{\sqrt{2^2\times3}+\sqrt{2\times3^2}-\sqrt{30}}{12}=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}.$$

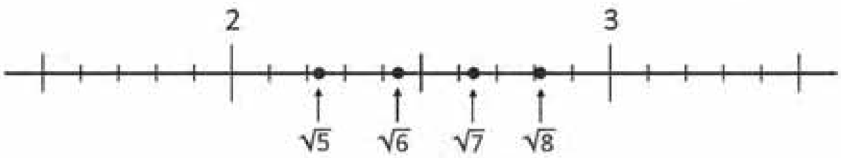
1h) $\frac{2+5\sqrt{2}+3\sqrt{3}-4\sqrt{6}}{23}$

2. 自然数の場合、$2<\sqrt{n}<3$ と $4<n<9$ の条件は一致します。
したがって、求められる自然数は5、6、7 および 8 です。

試行錯誤しながら解決することもできます。

次に、数直線上に配置するためにその少数の値を使用しましょう。

$\sqrt{5}=2.23...$　　$\sqrt{6}=2.44...$　　$\sqrt{7}=2.64...$　　$\sqrt{8}=2.82...$



3a) $\frac{5}{6}$　　**3b)** $\frac{1}{12}$　　**3c)** $\frac{1}{3}$

3d) $|\sqrt{2}+\sqrt{3}|$
二つの正の数の和は正の数、つまり、$\sqrt{2}+\sqrt{3}>0$
なので $|\sqrt{2}+\sqrt{3}|=\sqrt{2}+\sqrt{3}$。

3e) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$.
したがって $5<7\Rightarrow\sqrt{5}<\sqrt{7}$。
1.8 の授業の問題 2 の解を適用しましょう。
次のようになります。$|\sqrt{7}-\sqrt{5}|=\sqrt{7}-\sqrt{5}$

3f) $|\sqrt{2}-\sqrt{3}|$.
したがって $2<3\Rightarrow\sqrt{2}<\sqrt{3}$
$\Rightarrow\ \sqrt{2}-\sqrt{3}=\sqrt{2}+(-\sqrt{3})$ これは負の数です。
$\Rightarrow\ |\sqrt{2}-\sqrt{3}|=-(\sqrt{2}-\sqrt{3})=-\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{3}-\sqrt{2}.$

3g) $\sqrt{10}-3=\sqrt{10}-\sqrt{9}$
$9<10\Rightarrow\sqrt{9}<\sqrt{10}\Rightarrow3<\sqrt{10}.$
1.8 の授業の問題 2 の解を適用しましょう。
次のようになります。$|\sqrt{10}-3|=\sqrt{10}-3$

3h) $2\sqrt{7}-6=\sqrt{28}-\sqrt{36}.$
したがって $28<36\Rightarrow\sqrt{28}<\sqrt{36}$
$\Rightarrow\ \sqrt{28}-\sqrt{36}=\sqrt{28}+(-\sqrt{36})$ は負の数です。
$\Rightarrow\ |2\sqrt{7}-6|=-(2\sqrt{7}-6)=6-2\sqrt{7}.$

4a) $\sqrt{12}\div\sqrt{3}=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{12}{3}}=\sqrt{4}=2$, 整数です。

4b) $\sqrt{2}\div\sqrt{8}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{2}{8}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$, 有理数です。

4c) それらの少数の値を使用しましょう。$\phi = 1.61803...$ 及び、$e = 2.71828...$ したがって、$\phi < e$。

4d) もしも $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ ならば $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5$。
実践しましょう。

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3$$
$$= 5 + 2\sqrt{6} \neq 5.$$

したがって、$\sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{5}$ になります。

解では、両方の数の和が 5 の正の平方根であると仮定して、背理法を使用しました。

4e) $\phi^2 - \frac{1}{\phi}$

$$\phi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{2^2} = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{1}{\phi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \times \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = -\frac{2(1-\sqrt{5})}{4} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \phi^2 - \frac{1}{\phi} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} - \left(-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

4f) 問題ごとに解決しましょう。

もし、$a > 0$ であるなら、$|a| = a > 0$
もし、$a < 0$ であるなら、$|a| = -a > 0$
もし、$a = 0$であるなら、$|0| = 0$

したがって実数の絶対値が負の数になることはありません。

4g) $b - a$

$b + (-a)$ の符号は、数値 $(-a)$ と b の最大絶対値の符号になります。
$|-a| = a$, $|b| = b$ および $0 < b < a$.

よって、$b - a < 0$、したがって、
$|b - a| = -(b - a) = -b - (-a) = -b + a = a - b$.

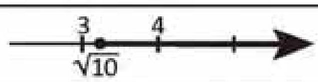
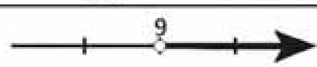
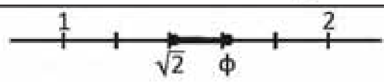
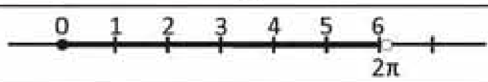
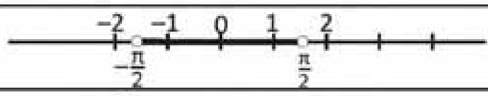
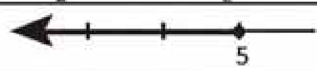
5a) $|x| = 1 \Rightarrow x = 1$ または $x = -1$.
したがって x は、1 または -1 のいずれかの値になると考えられます。

5b) $|x| = 6 \Rightarrow x = 6$ または $x = -6$.
したがって x は、6 または -6 のいずれかの値になると考えられます。

5c) $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$.
したがって x は、0 になると考えることができます。

5d) $|x + 1| = 3 \Rightarrow x + 1 = 3$ または $x + 1 = -3$
もし、$x + 1 = 3$ であるなら、$x = 2$
もし、$x + 1 = -3$ であるなら、$x = -4$
したがって x は、2 または -4 のいずれかの値になると考えられます。

6

区間	集合の表記	数直線上での表し方
$]-4, 7]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq 7\}$	
$[\sqrt{10}, \infty[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \sqrt{10}\}$	
$]9, \infty[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 9\}$	
$[\sqrt{2}, \phi]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} \leq x \leq \phi\}$	
$]-\infty, 2[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$	
$[0, 2\pi[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\pi\}$	
$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$	
$]-\infty, 5]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$	

ユニット2. 多項式と複素数の計算

このユニットのねらい

多項式の因数分解と割り算について、それらをやるために必要な条件を識別しそれらを使って代数の定理検算や数学問題の解答ができるようになる事です。

関連と発展

中学 3 年

ユニット 1 ：多項式のかけ算（第 9 学年）
- 多項式のかけ算
- 特別な多項式
- 因数分解

ユニット 3：二次方程式（第9学年)
- 二次方程式
- 二次方程式の応用

高校 1 年

ユニット 2： 多項式と複素数がある計算
- 特別な多項式と因数分解
- 多項式の除法
- 二次方程式と複素数

ユニット 7：ベクトルと複素数
- ベクトル
- ベクトルの点乗積
- 複素数
- GeoGebraを使った演習

高校 2 年

ユニット 1 ：方程式
- 方程式と連立方程式

ユニット学習計画

レッスン	時間	授業
1. 特別な多項式と因数分解	1	1. 単項式、多項式と次数の定義
	1	2. 二項式と二項式の積、第 1 部
	1	3. 二項式と二項式の積、第 2 部
	1	4. 式 $(ax + b)(cx + d)$ の積
	1	5. 二項式の三乗、第1部
	1	6. 二項式の三乗、第2部
	1	7. 乗法公式の組み合わせ
	1	8. 復習問題
	1	9. 単項式と多項式の共通因数
	1	10. 式 $x^2 + (a + b)x + ab$ の三項式の因数分解
	1	11. 完全二乗三項式と二乗の差、第1部
	1	12. 完全二乗三項式と二乗の差、第2部
	1	13. たすきがけ方。第1部
	1	14. たすきがけ方、第2部
	1	15. 因数分解の方法の組み合わせ、第1部
	1	16. 因数分解の方法の組み合わせ、第2部
	1	17. 復習問題
	1	レッスン 1 のテスト

レッスン	時間	授業
2. 多項式の除法	1	1. 単項式による多項式の分割
	1	2. 多項式による多項式の分割
	1	3. 組立除法、第1部
	1	4. 組立除法、第2部
	1	5. 留数定理
	1	6. 因数定理を使った因数分解、第1部
	1	7. 因数定理を使った因数分解、第2部
	1	8. 因数分解の展開
	1	9. 復習問題
3. 二次方程式と複素数	1	1. 因数分解による二次方程式の解法
	1	2. 解の公式による二次方程式の解法
	1	3. 複素数の定義
	1	4. 複素数のたし算、ひき算とかけ算
	1	5. 複素数のわり算
	1	6. 負数の平方根
	1	7. 二次方程式の判別式
	1	8. 多項式の因数分解
	1	9. 多項式の根
	1	10. 復習問題
	1	11. このユニットの問題
	1	レッスン 2 と レッスン 3 のテスト
	2	第 1 学期の期末テスト

37 時間の授業 + レッスン 1 のテスト + レッスン 2 と レッスン 3 のテスト + 第 1 学期のテスト

各レッスンの要点

レッスン 1：乗法公式と多項式の因数分解

この課では、乗法公式のうち、式 $(mx + a)(mx + b)$ の積、二項の二乗 $(ax \pm by)^2$、二項式の和と差の展開 $(ax + by)(ax - by)$ として 9 学年で学習した内容の復習を行います。その後、式 $(ax + b)(cx + d)$ の積の形に発展させ、また、二項の三乗 $(ax \pm by)^3$ へと学習を拡大し、また、特別な多項式の組み合わせへと学習を進めます。因数分解の授業では、まず、単項式の共通因数、式 $x^2 + (a + b)x + ab$ の三項式の因数分解、三項式の二乗の因数分解と二乗の差として、9 学年で学習した内容を復習します。重要な点は、共通因数の授業において、同類項による因数分解として知られる多項式の共通因数についての学習が加わるところです。続けて、たすきがけを利用した三項式の因数分解を学び、また、因数分解の組み合わさった解き方を学びます。

レッスン 2：多項式の除法

最初の授業において、8学年で学習した多項式と数の除算を復習し、その理解を利用して、多項式と単項式の除算に理解を深めます。次に、筆算を使った多項式の除法の計算方法を学習します。続けて、剰余の定理と因数定理を明らかにし、説明することにより、組み立て除法を用いた多項式と $x - a$ の二項式の除算を学びます。この課の最後には、3 乗の係数は 1 に限るものの3変数の多項式を因数分解するために、レッスン 1 そしてレッスン 2 を通じて学んできたことを総復習します。

レッスン 3：二次方程式と複素数

この課の最初のいくつかの授業において、式 $(x + a)(x + b)$ の因数分解とたすきがけを使った計算方法、そして解の公式を使った 二次方程式の解き方を繰り返し練習して学びます。次に、複素数、その四則演算（加算、除算、乗算、除算）やマイナスの平方根を学習していきます。この課における全ての学習事項は、複素数とは何であり、1 つの多項式の中にいくつの平方根があるかを理解することで、この先に予定されている複素数を使った多項式の因数分解に必要となります。

1.1 単項式、多項式と次数の定義

定義

正の整数を指数とする1つ以上の変数で表される代数式 において、**係数**と呼ばれる実数のある乗法のみを含むものを**項**といいます。1つの項もしくは2つ以上の項の和で表される式を**多項式**といい、1つだけの項で表される多項式は**単項式**といいます。

多項式の項で変数をもたないものを**定数項**といいます。

次数は変数の指数と関連しており、それは次のように定義されます。

1. **単項式の次数**は全ての変数の指数の和です。定数項の次数は、つまり、変数がないので、ゼロとなります。
2. **多項式の次数**には次の 2 タイプがあります。
   a) 1変数の最大指数がその**変数の次数**です。
   b) 多項式の項の中で最も大きい次数を**最高次数**といいます。

多項式がただ一つの変数を含む場合、a) と b) の定義に当てはまり、
その多項式 は **1 変数多項式**といいます。

多項式の項は変数の次数または各項の次数に応じて整理することができます。降べきの順に並べるとは、大きい次数をもつ項から始めて小さい次数を持つ項が最後にくるようにすることで、昇べきの順に並べ替えるとは、小さい次数をもつ項から始めて大きい次数を持つ項が最後にくるようにすることです。

例 1

多項式 $11 + 3xy - 5x^3y^2 + 8x^2y$ について、以下を求めなさい。

1. 多項式の変数と係数を特定しなさい。
2. 多項式の項を特定し、それぞれの次数を計算しなさい。
3. それぞれの変数の次数を数えなさい。
4. 多項式の最高次数を数えなさい。

1. 多項式の変数は、x と y です。多項式の係数は、以下です。

   $11 \longrightarrow$ 定数項
   $-5 \longrightarrow$ x^3y^2 の係数
   $3 \longrightarrow$ xy の係数
   $8 \longrightarrow$ x^2y の係数

2. 多項式の項は、11、$3xy$、$-5x^3y^2$ 、$8x^2y$ それぞれの次数は各項にある変数の指数を足して求めます。
   よって、

   11 の次数は変数がひとつもないので$\longrightarrow$ 0です。
   $3xy$ の次数は変数 x と y の指数がそれぞれ 1 と 1 なので、$\longrightarrow$ 2 です。

   定数項の次数は常にゼロです。

   $-5x^3y^2$ の次数は変数 x と y それぞれの指数が 3 と 2 なので、$\longrightarrow$ 5 です。
   $8x^2y$ の次数は x と y の指数がそれぞれ 2と 1 なので、$\longrightarrow$ 3 です。

3. 変数 x の次数は x の最大指数の 3 です。y と結びつく次数は変数の最大指数なので、2 です。

4. 多項式の最高次数は多項式の項の最大次数であり、問 b) では、$-5x^3y^2$ の項が最大次数のある項です。よって、最高次数は 5です。

例 2

多項式 $11 + 3xy - 5x^3y^2 + 8x^2y$ について、以下を求めなさい。

1. 項を変数 x について昇べきの順と降べきの順に並べ替えなさい。
2. 項を変数 y について昇べきの順と降べきの順に並べ替えなさい。
3. 多項式を項について昇べきの順と降べきの順に並べ替えなさい。

1. 昇べきの順に並べ替えるとは、項を変数の次数が小さいものから大きいものになるように並べ替えることで、降べきの順に並べ替えるとは、その反対です。ですので、多項式 を変数xに関して並べ替えると以下のようになります。

   昇べきの順⟶ $11 + 3xy + 8x^2y - 5x^3y^2$

   降べきの順 ⟶ $-5x^3y^2 + 8x^2y + 3xy + 11$

2. 項 $3xy$ と $8x^2y$ の変数は同じ次数なので、並べ替える際は変数 x の指数を考慮します。そのようにして昇べきの順では、まず、より小さい x の指数をもつ項から並べ、降べきの順では、より大きい x の指数をもつ項から並べます。

   変数 y について昇べきの順と降べきの順で並べ替えた多項式 はこのようになります。

   昇べきの順 ⟶ $11 + 3xy + 8x^2y - 5x^3y^2 = 11 + (3x + 8x^2)y - 5x^3y^2$
   降べきの順⟶ $-5x^3y^2 + 8x^2y + 3xy + 11 = -5x^3y^2 + (8x^2 + 3x)y + 11$

   昇べきの順で並べかえると定数項11が、他のどの変数より先にくる点、また降べきの順で並べ替えるとどの変数よりも後にくる点に注意します。

3. 昇べきの順では、まず、より小さい次数の項から並べ、降べきの順では、より大きい次数の項から並べます。したがって、それぞれの順に並べ替えた多項式は以下のようになっています。

   昇べきの順 $\longrightarrow \underbrace{11}_{次数\,0} + \underbrace{3xy}_{次数\,2} + \underbrace{8x^2y}_{次数\,3} - \underbrace{5x^3y^2}_{次数\,5}$

   降べきの順 $\longrightarrow -5x^3y^2 + 8x^2y + 3xy + 11$

通常、多項式の項は降べきの順で並べます。

問題

1. 以下の多項式において、それぞれ変数、係数、項を特定しなさい。そして、それぞれの多項式の項の次数、変数の次数、最高次数を求めなさい。
   a) $10xy + 5x^2y^2 - 2xy^2 - 6x^3y^3$
   b) $-3a^2b^3 + 4a^3b - ab^2 + b$
   c) $9m^2 - 12m^2n^3 + 2mn - 5mn^2 + 1$
   d) $8x^3 - 10 + 3x + 5x^2$

2. 問 1 の多項式について、それぞれ以下のことを行います。
   a) 多項式の項を変数について昇べきの順、降べきの順に並べ直します。
   b) 多項式を項について並べ替えます。

3. 展開せずに多項式 $(x - 3)^2 + (x + 2)^2 + 9x - 10$ の係数の和を求めなさい。

定数項を忘れないよう注意します。
これもまた係数です。

達成の目安

1.1 多項式の変数と係数を特定しなさい。また変数や項の次数を求めなさい。

学習の流れ

この授業では、8 学年次でも学習した多項式と単項式の定義を扱います。また、代数式の次数についても、単項式の場合と多項式の場合それぞれの定義を学びます。多項式の定義が a, b, c, 等の文字の利用だけに限定されてないことに注目します。

ねらい

まず最初に、高校 1 学年次、2 学年次で学習するユニット全体を通じて出てくる単語の定義を確認します。

問題の解き方

1a) $10xy + 5x^2y^2 - 2xy^2 - 6x^3y^3$

- 変数： x、y
- 係数：10、5、−2、−6
- 項と次数：$10xy$ （次数 2），$5x^2y^2$ （次数 4），$-2xy^2$ （次数 3），$-6x^3y^3$（次数 6）．
- それぞれの変数の次数： x の次数は3、y の次数も3
- 多項式の最高次数：6

1b) $-3a^2b^3 + 4a^3b - ab^2 + b$

- 変数： a, b
- 係数： −3、4、−1、1
- 項と次数： $-3a^2b^3$ （次数 5）、$4a^3b$（次数 4）、$-ab^2$ （次数 3）、b （次数 1）
- それぞれの変数の次数 ： a の次数は 3、b の次数も 3
- 多項式の最高次数：5

1c) $9m^2 - 12m^2n^3 + 2mn - 5mn^2 + 1$

- 変数： m、n
- 係数：9、−12、2、−5、1
- 項と次数：$9m^2$ （次数 2）、$-12m^2n^3$ （次数 5）、$2mn$ （次数 2）、$-5mn^2$（次数 3）、1（次数 0）
- 変数の次数： m の次数は 2、n の次数は 3
- 多項式の最高次数：5

1d) $8x^3 - 10 + 3x + 5x^2$

- 変数： x
- 係数：8、−10、3、5
- 項と次数：$8x^3$ （次数 3）、-10 （次数 0）、$3x$ （次数 1）、$5x^2$ （次数 2）
- これは一変数多項式で、関連する次数が最高次数となるので、次数は 3 です。

2a) 多項式を昇べきの順に並べ替えるだけです。降べきの順に並べる場合は、項の並び順を逆にするだけです。

変数 x：$10xy - 2xy^2 + 5x^2y^2 - 6x^3y^3$
変数 y：$10xy - 2xy^2 + 5x^2y^2 - 6x^3y^3$

変数 m：$1 + 2mn - 5mn^2 + 9m^2 - 12m^2n^3$
変数 n：$1 + 9m^2 + 2mn - 5mn^2 - 12m^2n^3$

変数 a： $b - ab^2 - 3a^2b^3 + 4a^3b$
変数 b： $b + 4a^3b - ab^2 - 3a^2b^3$

変数 x： $-10 + 3x + 5x^2 + 8x^3$

2b) 2a) と同じように、それぞれの多項式を昇べきの順に並び替え、項の並び順を逆にすれば降べきの順となります。

$$10xy - 2xy^2 + 5x^2y^2 - 6x^3y^3$$
$$1 + 9m^2 + 2mn - 5mn^2 - 12m^2n^3$$
$$b - ab^2 + 4a^3b - 3a^2b^3$$
$$-10 + 3x + 5x^2 + 8x^3$$

3. 多項式の係数の和は $x = 1$を代入すれば求められます。

$$(1-3)^2 + (1+2)^2 + 9(1) - 10 = 4 + 9 + 9 - 10 = 12$$

よって、$(x-3)^2 + (x+2)^2 + 9x - 10$ の係数の和は 12 です。

1.2 二項式かける二項式の展開　第1部

導入問題

以下の乗法公式を展開しなさい

a) $(x+9)(x-5)$　b) $(x+3)^2$　c) $(x-7)^2$　d) $(x+4)(x-4)$

解法

a) $(x+a)(x+b)$ 型の展開はこのようになります。

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

これを用いて、

$$\begin{aligned}(x+9)(x-5)&=x^2+(9-5)x+(9)(-5)\\&=x^2+4x-45\end{aligned}$$

よって、　$(x+9)(x-5)=x^2+4x-45.$

b) これは 二項式の二乗の展開なので、

$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$$

これを用いて、

$$\begin{aligned}(x+3)^2&=x^2+2(3)x+3^2\\&=x^2+6x+9\end{aligned}$$

そして、$(x+3)^2=x^2+6x+9.$

c) これも 二項式の二乗なので、

$$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$$

これを用いて、

$$\begin{aligned}(x-7)^2&=x^2-2(7)x+7^2\\&=x^2-14x+49\end{aligned}$$

そして、$(x-7)^2=x^2-14x+49.$

d) これは二項式の和と差の積の展開なので、

$$(x+a)(x-a)=x^2-a^2$$

これを用いて、

$$\begin{aligned}(x+4)(x-4)&=x^2-4^2\\&=x^2-16\end{aligned}$$

よって、　$(x+4)(x-4)=x^2-16.$

定義

乗法公式は多項式の展開結果が分かる、多項式にそのままあてはめて使うことができる展開式です。
a も b もどちらも実数とします。

乗法公式	展開
式の展開 $(x+a)(x+b)$	$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
二項式の二乗	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
二項式の和と差の積	$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

問題

以下の乗法公式を展開しなさい

a) $(x+3)(x+10)$　b) $(y-6)(y-4)$　c) $(x-8)(x+2)$

d) $(y+5)^2$　e) $(m-2)^2$　f) $(x+11)^2$

g) $(x+3)(x-3)$　h) $(10+y)(10-y)$　i) $(m-6)(m+6)$

j) $\left(y+\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{3}{2}\right)$　k) $\left(x+\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$　l) $\left(x+\frac{2}{3}\right)^2$

m) $\left(x+\sqrt{5}\right)^2$　n) $\left(y+2\sqrt{3}\right)^2$　o) $\left(m+\frac{1}{5}\right)\left(m-\frac{1}{5}\right)$

p) $\left(\frac{4}{7}-x\right)\left(\frac{4}{7}+x\right)$　q) $\left(y+\sqrt{6}\right)\left(y-\sqrt{6}\right)$　r) $\left(x-2\sqrt{10}\right)\left(x+2\sqrt{10}\right)$

達成の目安

1.2 乗法公式 $(x + a)(x + b)$ 型、$(a \pm b)^2$ 型、$(a + b)(a - b)$ 型それぞれを展開しなさい。

学習の流れ

多項式の定義をさらに全体的に確認したあと、因数分解する際にとても役立つ乗法公式を扱います。それぞれの二項式では変数の係数が1であることに注目します。

つまずきやすい点

生徒たちが 9 学年次に学習した乗法公式を覚えていない場合には、まとめから始めて導入問題を例題として出しても構いません。この授業のねらいはここに提示した 3つの展開式を計算して答えを得ることではなく、展開の復習、つまりこれらの乗法公式を復習させることにあります。

問題の解き方

a) $(x + 3)(x + 10) = x^2 + (3 + 10)x + 3(10)$
$= x^2 + 13x + 30$

b) $(y - 6)(y - 4) = y^2 + (-6 - 4)y + (-6)(-4)$
$= y^2 - 10y + 24$

c) $(x - 8)(x + 2) = x^2 + (-8 + 2)x + (-8)(2)$
$= x^2 - 6x - 16$

d) $(y + 5)^2 = y^2 + 2(5)y + 5^2$
$= y^2 + 10y + 25$

e) $(m - 2)^2 = m^2 - 2(2)m + 2^2$
$= m^2 - 4m + 4$

f) $(x + 11)^2 = x^2 + 2(11)x + 11^2$
$= x^2 + 22x + 121$

g) $(x + 3)(x - 3) = x^2 - 3^2$
$= x^2 - 9$

h) $(10 + y)(10 - y) = 10^2 - y^2$
$= 100 - y^2$

i) $(m - 6)(m + 6) = m^2 - 6^2$
$= m^2 - 36$

j) $\left(y + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{3}{2}\right) = y^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)y + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)$
$= y^2 + 2y + \frac{3}{4}$

k) $\left(x + \frac{4}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = x^2 + \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right)x + \left(\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)$
$= x^2 + x - \frac{4}{9}$

l) $\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = x^2 + 2\left(\frac{2}{3}\right)x + \left(\frac{2}{3}\right)^2$
$= x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$

m) $\left(x + \sqrt{5}\right)^2 = x^2 + 2\left(\sqrt{5}\right)x + \left(\sqrt{5}\right)^2$
$= x^2 + 2\sqrt{5}x + 5$

n) $\left(y + 2\sqrt{3}\right)^2 = y^2 + 2\left(2\sqrt{3}\right)y + \left(2\sqrt{3}\right)^2$
$= y^2 + 4\sqrt{3}y + 12$

o) $\left(m + \frac{1}{5}\right)\left(m - \frac{1}{5}\right) = m^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2$
$= m^2 - \frac{1}{25}$

p) $\left(\frac{4}{7} - x\right)\left(\frac{4}{7} + x\right) = \left(\frac{4}{7}\right)^2 - x^2$
$= \frac{16}{49} - x^2$

q) $\left(y + \sqrt{6}\right)\left(y - \sqrt{6}\right) = y^2 - \left(\sqrt{6}\right)^2$
$= y^2 - 6$

r) $\left(x - 2\sqrt{10}\right)\left(x + 2\sqrt{10}\right) = x^2 - \left(2\sqrt{10}\right)^2$
$= x^2 - 40$

レッスン 1

1.3 二項式かける二項式の展開　第2部

導入問題

以下の展開をしなさい。

a) $(4x+3)(4x-5)$　b) $(2x+y)^2$　c) $(3x-2y)^2$　d) $(5x+6y)(5x-6y)$

解法

a) $4x$ が両項にあるので、この展開は $(x+a)(x+b)$ の展開とにています。

$$\begin{aligned}(4x+3)(4x-5) &= (4x)^2 + (3-5)(4x) + (3)(-5)\\ &= 16x^2 + (-2)(4x) - 15\\ &= 16x^2 - 8x - 15\end{aligned}$$

よって、　$(4x+3)(4x-5) = 16x^2 - 8x - 15.$

b) 二項式の二乗の展開です。

$$\begin{aligned}(2x+y)^2 &= (2x)^2 + 2(2x)(y) + y^2\\ &= 4x^2 + 4xy + y^2\end{aligned}$$

よって、$(2x+y)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2.$

c) これはひとつ前の問と同じく二項式の二乗の展開です。

$$\begin{aligned}(3x-2y)^2 &= (3x)^2 - 2(3x)(2y) + (2y)^2\\ &= 9x^2 - 12xy + 4y^2\end{aligned}$$

よって、$(3x-2y)^2 = 9x^2 - 12xy + 4y^2.$

d) これは二項式の和と差の積の展開になります。

$$\begin{aligned}(5x+6y)(5x-6y) &= (5x)^2 - (6y)^2\\ &= 25x^2 - 36y^2\end{aligned}$$

よって、　$(5x+6y)(5x-6y) = 25x^2 - 36y^2.$

全体を通して

a、b、m のいずれも実数とします。したがって、

1. $(mx+a)(mx+b)$ は、$(x+a)(x+b)$ 型の展開と同じように展開します。
   $(mx+a)(mx+b) = (mx)^2 + (a+b)(mx) + ab.$

2. $(ax+by)^2$ と $(ax-by)^2$ はどちらも二項式の二乗なので、このように展開します。
   $(ax+by)^2 = (ax)^2 + 2(ax)(by) + (by)^2$
   $(ax-by)^2 = (ax)^2 - 2(ax)(by) + (by)^2.$

3. $(ax+by)(ax-by)$ は二項式の和と差の積なので、このように展開します。
   $(ax+by)(ax-by) = (ax)^2 - (by)^2.$

バビロニア人たちは「それぞれの和（もしくは差）と積が分かっている二つの数字をみつけなさい」という問題を問c)の乗法公式を使って解きました。例えば、「バビロンの推理」を用いて、それぞれの和が14で積が45になる二つの数字をみつける方法を数式に表すとこのようになります。

足して 14 になる数字は、$7+x$ と $7-x$、そして、ふたつの数字の積は 45 なので、

$$(7+x)(7-x) = 45$$

ここから $49 - x^2 = 45$ で、これを解くと $x = \pm 2$ したがってその数字は 9 と 5 であることが分かります。

著者：Bunt, N.H., Jones, P.S. y Bedient, J.D.(1988) 初等数学の歴史的ルーツ

問題

以下の乗法公式を展開しなさい

a) $(2x+9)(2x+1)$　b) $(3x-1)(3x+5)$　c) $(5y-4)(5y-2)$

d) $(4x+5y)^2$　e) $(2x-7y)^2$　f) $(3y-10x)^2$

g) $(2x+5y)(2x-5y)$　h) $(6w+z)(6w-z)$　i) $(8y-3x)(8y+3x)$

j) $\left(2n-\frac{1}{2}\right)\left(2n-\frac{1}{4}\right)$　k) $\left(\frac{1}{3}x+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{3}x-\frac{9}{2}\right)$　l) $\left(\frac{2}{3}y+11\right)\left(\frac{2}{3}y-5\right)$

m) $\left(\sqrt{2}\,x+y\right)^2$　n) $\left(\sqrt{3}\,w+\sqrt{5}\,z\right)^2$　o) $\left(4-3\sqrt{2}\,x\right)^2$

p) $\left(\frac{1}{5}x+\frac{1}{9}y\right)\left(\frac{1}{5}x-\frac{1}{9}y\right)$　q) $\left(\sqrt{5}\,x-\frac{3}{4}y\right)\left(\sqrt{5}\,x+\frac{3}{4}y\right)$　r) $\left(2\sqrt{2}\,x-3\sqrt{3}\,y\right)\left(2\sqrt{2}\,x+3\sqrt{3}\,y\right)$

達成の目安

1.3 乗法公式 $(mx+a)(mx+b)$ 型、$(ax \pm by)^2$ 型、$(ax+by)(ax-by)$ 型それぞれを展開しなさい。

学習の流れ

前回の授業で学んだ 3つの乗法公式を使って、今回は、2つの変数をもち、係数が 1 以上の多項式を学習します。ここで大切なのは、当てはまる乗法公式を考える際に、係数や変数の数は関係ないことを理解することです。

つまずきやすい点

生徒たちが和や積を直接求める必要はありませんが、それぞれの乗法公式をみつけてそれをあてはめて展開式を作らなくてはなりません。例えば、$(2x+y)^2$ を展開するには、$2x$ を二乗し、続いて $2(2x)y$ をつくり、最後に y を二乗します。

問題の解き方

a) $(2x+9)(2x+1) = (2x)^2 + (9+1)(2x) + 9(1)$
$= 4x^2 + 20x + 9$

b) $(3x-1)(3x+5) = (3x)^2 + (-1+5)(3x) + (-1)(5)$
$= 9x^2 + 12x - 5$

c) $(5y-4)(5y-2) = (5y)^2 + (-4-2)(5y) + (-4)(-2)$
$= 25y^2 - 30y + 8$

d) $(4x+5y)^2 = (4x)^2 + 2(4x)(5y) + (5y)^2$
$= 16x^2 + 40xy + 25y^2$

e) $(2x-7y)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(7y) + (7y)^2$
$= 4x^2 - 28xy + 49y^2$

f) $(3y-10x)^2 = (3y)^2 - 2(3y)(10x) + (10x)^2$
$= 9y^2 - 60xy + 100x^2$

通常は、変数はアルファベット順に並べます。よって、$100x^2 - 60xy + 9y^2$ が答えとして正しいです。

g) $(2x+5y)(2x-5y) = (2x)^2 - (5y)^2$
$= 4x^2 - 25y^2$

h) $(6w+z)(6w-z) = (6w)^2 - z^2$
$= 36w^2 - z^2$

i) $(8y-3x)(8y+3x) = (8y)^2 - (3x)^2$
$= 64y^2 - 9x^2$

j) $\left(2n-\frac{1}{2}\right)\left(2n-\frac{1}{4}\right) = (2n)^2 + \left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)(2n) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)$
$= 4n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{1}{8}$

k) $\left(\frac{1}{3}x+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{3}x-\frac{9}{2}\right) = \left(\frac{1}{3}x\right)^2 + \left(\frac{3}{2}-\frac{9}{2}\right)\left(\frac{1}{3}x\right) + \left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{9}{2}\right)$
$= \frac{1}{9}x^2 - x - \frac{27}{4}$

l) $\left(\frac{2}{3}y+11\right)\left(\frac{2}{3}y-5\right) = \left(\frac{2}{3}y\right)^2 + (11-5)\left(\frac{2}{3}y\right) + (11)(-5)$
$= \frac{4}{9}y^2 + 4y - 55$

m) $\left(\sqrt{2}x+y\right)^2 = 2x^2 + 2\sqrt{2}xy + y^2$

n) $\left(\sqrt{3}w+\sqrt{5}z\right)^2 = 3w^2 + 2\sqrt{15}wz + 5z^2$

o) $\left(4-3\sqrt{2}x\right)^2 = 16 - 24\sqrt{2}x + 18x^2$

p) $\left(\frac{1}{5}x+\frac{1}{9}y\right)\left(\frac{1}{5}x-\frac{1}{9}y\right) = \frac{1}{25}x^2 - \frac{1}{81}y^2$

q) $\left(\sqrt{5}x-\frac{3}{4}y\right)\left(\sqrt{5}x+\frac{3}{4}y\right) = 5x^2 - \frac{9}{16}y^2$

r) $\left(2\sqrt{2}x-3\sqrt{3}y\right)\left(2\sqrt{2}x+3\sqrt{3}y\right) = 8x^2 - 27y^2$

1.4 $(ax+b)(cx+d)$ 型の展開

導入問題

$(2x+5)(3x+4)$ を展開しましょう。$(ax+b)(cx+d)$ 型の展開のルールをみつけましょう。

解法

一番目の二項式のそれぞれの項に二番目の二項式のそれぞれの項をかけます。

$$\begin{aligned}(2x+5)(3x+4) &= 2x(3x)+2x(4)+5(3x)+5(4) && \text{それぞれの項を一つずつかけます。}\\ &= 2(3)x^2+[2(4)+5(3)]x+5(4) && \text{交換法則と分配法則に従います。}\\ &= 6x^2+[8+15]x+20 && \text{展開します。}\\ &= 6x^2+23x+20.\end{aligned}$$

よって、$(2x+5)(3x+4) = 6x^2+23x+20$。$(ax+b)(cx+d)$ 型の展開はこうなります。

$$\begin{aligned}(ax+b)(cx+d) &= ax(cx)+ax(d)+b(cx)+bd\\ &= acx^2+(ad+bc)x+bd.\end{aligned}$$

よって、$(ax+b)(cx+d) = acx^2+(ad+bc)x+bd.$

定義

二項式$(ax+b)(cx+d)$ の展開 はこうなります。

$$(ax+b)(cx+d) = \overbrace{acx^2}^{a\text{と}c\text{の展開}} + (\underbrace{ad+bc}_{a\text{と}d\text{の積 たす}\ b\text{と}c\text{の積}})x + \overbrace{bd}^{b\text{と}d\text{の展開}}.$$

例

$(5x-6)(2x+7)$ を展開しましょう。
ここでは、$a=5$、$b=-6$、$c=2$、$d=7$ になっています。したがって

$$\begin{aligned}(5x-6)(2x+7) &= 5(2)x^2+[5(7)+(-6)(2)]x+(-6)(7)\\ &= 10x^2+(35-12)x-42\\ &= 10x^2+23x-42.\end{aligned}$$

よって、 $(5x-6)(2x+7) = 10x^2+23x-42.$

問題

1. 以下の展開をしましょう。

a) $(x+9)(3x+1)$　　b) $(4x+1)(2x+1)$　　c) $(2x+7)(3x-2)$

d) $(4x+3)(x-2)$　　e) $(-x+7)(6x+4)$　　f) $(x-8)(-2x-5)$

g) $(3x-10)(-2x+3)$　　h) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(3x+\frac{5}{2}\right)$　　i) $\left(5x-\frac{1}{4}\right)\left(6x-\frac{1}{10}\right)$

2. 各問題の a、b、c、d それぞれに整数をあてはめて等式が正しいかどうかを確認しましょう。

a) $(ax-7)(4x+d) = 12x^2-25x-7$　　b) $(5x+4)(cx+d) = 10x^2+33x+20$

c) $(ax+b)(cx+6) = 2x^2+5x-42$　　d) $(ax+b)(cx+d) = 5x^2+23x+12$

次数が 2 の二つの多項式 ex^2+fx+g と mx^2+nx+p は $e=m$、$f=n$、$g=p$ である場合、同じ式となります。

達成の目安

1.4 乗法公式 $(ax + b)(cx + d)$ を展開しなさい。

学習の流れ

この授業では $(ax + b)(cx + d)$ 型の展開式の a と c にあてはまる数字が異なる場合を計算します。この乗法公式は、いずれたすきがけの方法を使って三項式の因数分解をする際に役立ちます。

ねらい

導入問題では、$ax + b$ と $cx + d$ の展開する際のルールを明確にします。「結果」は例題や問題ブロックの問 1 にも活用できるよう一般的なものを掲載しています。

つまずきやすい点

導入問題では、生徒たちが乗法公式 $(mx + a)(mx + b)$ の展開を間違わずにできるか注意します。もし必要であれば、多項式の展開の手順、つまり、項かける項であることを復習させます。またここでは、生徒たちが直接和や積を求める必要はなく、$(ax + b)(cx + d)$ の展開が正しく行えるかどうかを確認することをねらいとしています。

問題の解き方

1a) $(x + 9)(3x + 1) = 3x^2 + (1 + 27)x + 9$
$= 3x^2 + 28x + 9$

1b) $(4x + 1)(2x + 1) = 8x^2 + (4 + 2)x + 1$
$= 8x^2 + 6x + 1$

1c) $(2x + 7)(3x - 2) = 6x^2 + (-4 + 21)x - 14$
$= 6x^2 + 17x - 14$

1d) $(4x + 3)(x - 2) = 4x^2 + (-8 + 3)x - 6$
$= 4x^2 - 5x - 6$

1e) $(-x + 7)(6x + 4) = -6x^2 + (-4 + 42)x + 28$
$= -6x^2 + 38x + 28$

1f) $(x - 8)(-2x - 5) = -2x^2 + (-5 + 16)x + 40$
$= -2x^2 + 11x + 40$

1g) $(3x - 10)(-2x + 3) = -6x^2 + (9 + 20)x - 30$
$= -6x^2 + 29x - 30$

1h) $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(3x + \frac{5}{2}\right) = 3x^2 + \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\right)x + \frac{5}{4}$
$= 3x^2 + 4x + \frac{5}{4}$

1i) $\left(5x - \frac{1}{4}\right)\left(6x - \frac{1}{10}\right) = 30x^2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)x + \frac{1}{40}$
$= 30x^2 - 2x + \frac{1}{40}$

2a) $(ax - 7)(4x + d) = 12x^2 - 25x - 7$ は、$4a = 12$ 、$-7d = -7$ となります。よって、$a = 3$ 、$d = 1$ となり、$ad - 28 = -25$ であることが分かります。

2b) $(5x + 4)(cx + d) = 10x^2 + 33x + 20$ は、$5c = 10$、$4d = 20$ となります。よって、$c = 2$、 $d = 5$となり、$5d + 4c = 33$であることが分かります。

2c) $(ax + b)(cx + 6) = 2x^2 + 5x - 42$ は、$ac = 2$、$6b = -42$ となります。よって、$b = -7$ であることが分かります。a と c を求めるには、さらに、$6a - 7c = 5$ を使い、以下の方程式を解きます。

$$\begin{cases} ac = 2 \\ 6a - 7c = 5 \end{cases}$$

整数であることがわかっているので、$a = 2$、$c = 1$ となり、$6a + bc = 5$ となることが分かります。

d)では a と c の値、また b と d の値を入れ替える他の方法で解答を得ることもできます。

2d) $(ax + b)(cx + d) = 5x^2 + 23x + 12$; $a = 1$, $b = 4$, $c = 5$および $d = 3$, または $a = -1$, $b = -4$, $c = -5$ および $d = -3$.

1.5 二項式の三乗　第 1 部

導入問題

展開しなさい。

$(a+b)^3$.

$(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)=(a+b)^2(a+b)$

解法

$(a+b)^3$ は $a+b$ の三乗であり、以下のように表すことができます。

$$(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)$$

最初にある二つの因数を関連づけるとこうなります。

$$\begin{aligned}(a+b)^3&=[(a+b)(a+b)](a+b)\\&=(a+b)^2(a+b).\end{aligned}$$

$(a+b)^2$ を展開して三項式かける二項式の積を求めます。

$$\begin{aligned}(a+b)^3&=(a^2+2ab+b^2)(a+b) && \text{二項式の二乗を展開します}\\&=a^2(a)+a^2(b)+2ab(a)+2ab(b)+b^2(a)+b^2(b) && \text{それぞれの項を一つずつかけます。}\\&=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3 && \text{単項式の項を展開します。}\\&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. && \text{同類項を整理します。}\end{aligned}$$

よって、 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

まとめ

$(a+b)^3$ の形は**二項式の三乗**といい、このように展開します。

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

二項式の三乗は、最初の項の三乗と、最初の項の二乗と二つ目の項の積の三つ分と、最初の項と二つ目の項の二乗の積の三つ分と、二つ目の項の三乗とをあわせたものとなります。

例

$(2x+y)^3$ を展開しなさい。

$(2x+y)^3$ も二項式の三乗なので、このように展開します。

$$\begin{aligned}(2x+y)^3&=(2x)^3+3(2x)^2(y)+3(2x)y^2+y^3\\&=8x^3+3(4x^2)y+6xy^2+y^3\\&=8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3.\end{aligned}$$

よって、$(2x+y)^3=8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$.

問題

以下の展開をしなさい。

a) $(x+1)^3$　　b) $(y+4)^3$　　c) $(m+5)^3$

d) $(x+2y)^3$　　e) $(3x+y)^3$　　f) $(m+4n)^3$

g) $\left(m+\frac{1}{3}\right)^3$　　h) $\left(y+\frac{1}{2}\right)^3$　　i) $(3x+2y)^3$

j) $\left(\frac{1}{3}x+3y\right)^3$　　k) $\left(\frac{2}{3}x+y\right)^3$　　l) $\left(\frac{1}{3}m+\frac{1}{3}n\right)^3$

達成の目安

1.5 乗法公式 $(ax + by)^3$ を展開しなさい。

学習の流れ

すでに二項式の二乗の展開を復習しました。この授業では、乗法公式 $(a + b)^2$ を利用して、二項式の三乗の展開ルールをあてはめて、一項目に二項目が追加された式を解いてみます。

ねらい

導入問題では $(a + b)^3$の展開を行います。例題と問題では、整数または分数の係数をもつ変数が二個までである二項式にまとめの内容をあてはめて解く必要があります。

問題の解き方

a) $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

b) $(y + 4)^3 = y^3 + 3y^2(4) + 3y(4^2) + 4^3$
$= y^3 + 12y^2 + 48y + 64$

c) $(m + 5)^3 = m^3 + 3m^2(5) + 3m(5^2) + 5^3$
$= m^3 + 15m^2 + 75m + 125$

d) $(x + 2y)^3 = x^3 + 3x^2(2y) + 3x(2y)^2 + (2y)^3$
$= x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$

e) $(3x + y)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2y + 3(3x)y^2 + y^3$
$= 27x^3 + 27x^2y + 9xy^2 + y^3$

f) $(m + 4n)^3 = m^3 + 3m^2(4n) + 3m(4n)^2 + (4n)^3$
$= m^3 + 12m^2n + 48mn^2 + 64n^3$

g) $\left(m + \frac{1}{3}\right)^3 = m^3 + 3m^2\left(\frac{1}{3}\right) + 3m\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3$
$= m^3 + m^2 + \frac{1}{3}m + \frac{1}{27}$

h) $\left(y + \frac{1}{2}\right)^3 = y^3 + 3y^2\left(\frac{1}{2}\right) + 3y\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3$
$= y^3 + \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{4}y + \frac{1}{8}$

i) $(3x + 2y)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2(2y) + 3(3x)(2y)^2 + (2y)^3$
$= 27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$

j) $\left(\frac{1}{3}x + 3y\right)^3 = \left(\frac{1}{3}x\right)^3 + 3\left(\frac{1}{3}x\right)^2(3y) + 3\left(\frac{1}{3}x\right)(3y)^2 + (3y)^3$
$= \frac{1}{27}x^3 + x^2y + 9xy^2 + 27y^3$

k) $\left(\frac{2}{3}x + y\right)^3 = \left(\frac{2}{3}x\right)^3 + 3\left(\frac{2}{3}x\right)^2y + 3\left(\frac{2}{3}x\right)y^2 + y^3$
$= \frac{8}{27}x^3 + \frac{4}{3}x^2y + 2xy^2 + y^3$

l) $\left(\frac{1}{3}m + \frac{1}{3}n\right)^3 = \left(\frac{1}{3}m\right)^3 + 3\left(\frac{1}{3}m\right)^2\left(\frac{1}{3}n\right) + 3\left(\frac{1}{3}m\right)\left(\frac{1}{3}n\right)^2 + \left(\frac{1}{3}n\right)^3$
$= \frac{1}{27}m^3 + \frac{1}{9}m^2n + \frac{1}{9}mn^2 + \frac{1}{27}n^3$

1.6 二項式の三乗　第 2 部

導入問題

展開しなさい。

$$(a-b)^3.$$

$(a-b)^3=[a+(-b)]^3$

解法

$(a-b)^3$ は $[a+(-b)]^3$ と直し、二項式の三乗として展開します。

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= [a+(-b)]^3\\ &= a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3\\ &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{aligned}$$

よって、　$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$

まとめ

$(a-b)^3$ も**二項式の三乗**なので、このように展開します。

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

通常は $(ax+by)^3$ と $(ax-by)^3$ はどちらも乗法公式で二項式の三乗といい、次の方法で展開します。

正の符号　正の符号　正の符号　正の符号

$$(ax+by)^3=(ax)^3+3(ax)^2(by)+3(ax)(by)^2+(by)^3.$$

$$(ax-by)^3=(ax)^3-3(ax)^2(by)+3(ax)(by)^2-(by)^3.$$

負の符号　負の符号　正の符号　負の符号

例

$(2x-3y)^3$を展開しなさい。

$(2x-3y)^3$ も二項式の三乗ですので、このように展開します。

$$\begin{aligned}(2x-3y)^3 &= (2x)^3-3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2-(3y)^3\\ &= 8x^3-3(4x^2)(3y)+3(2x)(9y^2)-27y^3\\ &= 8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3\end{aligned}$$

よって、$(2x-3y)^3=8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3.$

問題

1. 以下の展開をしなさい。

a) $(x-1)^3$　b) $(y-3)^3$　c) $(m-10)^3$

d) $(4x-y)^3$　e) $(m-5n)^3$　f) $(5x-2y)^3$

g) $\left(x-\frac{1}{6}\right)^3$　h) $\left(y-\frac{1}{2}\right)^3$　i) $\left(m-\frac{2}{3}\right)^3$

j) $\left(\frac{1}{3}x-2y\right)^3$　k) $\left(3m-\frac{1}{6}n\right)^3$　l) $\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right)^3$

2. それぞれの等式が成り立たせる a または b の値を特定しなさい。

a) $(x+a)^3=x^3+6x^2+12x+8$　b) $(y-a)^3=y^3-12y^2+48y-64$

c) $(ax+by)^3=8x^3+60x^2y+150xy^2+125y^3$　d) $(ax-by)^3=\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{4}x^2y+\frac{1}{6}xy^2-\frac{1}{27}y^3$

達成の目安

1.6 乗法公式 $(ax - by)^3$ を展開しなさい。

学習の流れ

この授業では二番目の項が負の符号になっている二項式の三乗、つまり $(a - b)^3$ の展開を学びます。さらに、乗法公式 $(ax \pm by)^3$ の一般的な展開方法を紹介します。

ねらい

導入問題では前回の授業で学んだ事を活用するため、$(a - b)^3$ を $[a + (-b)]^3$ と直して展開を行います。例題と問題では、整数または分数の係数をもつ変数が二個までである二項式にまとめの内容をあてはめて解く必要があります。

つまずきやすい点

二項式の二項目の符号がマイナスであることに気を付けます。

問題の解き方

1a) $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

1b) $(y-3)^3 = y^3 - 3y^2(3) + 3y(9) - 27$
$= y^3 - 9y^2 + 27y - 27$

1c) $(m-10)^3 = m^3 - 3m^2(10) + 3m(100) - 1000$
$= m^3 - 30m^2 + 300m - 1000$

1d) $(4x-y)^3 = (4x)^3 - 3(4x)^2y + 3(4x)y^2 - y^3$
$= 64x^3 - 48x^2y + 12xy^2 - y^3$

1e) $(m-5n)^3 = m^3 - 3m^2(5n) + 3m(5n)^2 - (5n)^3$
$= m^3 - 15m^2n + 75mn^2 - 125n^3$

1f) $(5x-2y)^3 = (5x)^3 - 3(5x)^2(2y) + 3(5x)(2y)^2 - (2y)^3$
$= 125x^3 - 150x^2y + 60xy^2 - 8y^3$

1g) $\left(x-\frac{1}{6}\right)^3 = x^3 - 3x^2\left(\frac{1}{6}\right) + 3x\left(\frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^3$
$= x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x - \frac{1}{216}$

1h) $\left(y-\frac{1}{2}\right)^3 = y^3 - 3y^2\left(\frac{1}{2}\right) + 3y\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$
$= y^3 - \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{4}y - \frac{1}{8}$

1i) $\left(m-\frac{2}{3}\right)^3 = m^3 - 3m^2\left(\frac{2}{3}\right) + 3m\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3$
$= m^3 - 2m^2 + \frac{4}{3}m - \frac{8}{27}$

1j) $\left(\frac{1}{3}x-2y\right)^3 = \left(\frac{1}{3}x\right)^3 - 3\left(\frac{1}{3}x\right)^2(2y) + 3\left(\frac{1}{3}x\right)(2y)^2 - (2y)^3$
$= \frac{1}{27}x^3 - \frac{2}{3}x^2y + 4xy^2 - 8y^3$

1k) $\left(3m-\frac{1}{6}n\right)^3 = 27m^3 - \frac{9}{2}m^2n + \frac{1}{4}mn^2 - \frac{1}{216}n^3$

1l) $\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right)^3 = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x^2y + \frac{1}{6}xy^2 - \frac{1}{27}y^3$

2a) 左辺を展開すると $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$ になるので、$3a = 6$、$3a^2 = 12$、$a^3 = 8$ となることが分かります。このうち最初の等式から $a = 2$ が分かるので、それを他の等式にあてはめて正しいかどうか確かめます。よって、$a = 2$ であることが分かります。

2b) 2a) と同じような解き方で $a = 4$ となります。

2c) 左辺を展開すると $a^3x^3 + 3a^2bx^2y + 3ab^2xy^2 + b^3y^3$ になるので、$a^3 = 8$、$3a^2b = 60$、$3ab^2 = 150$、$b^3 = 125$ となることが分かります。この最初と最後の等式から $a = 2$、$b = 5$ が分かります。その他の等式にあてはめることで確認します。よって、$a = 2$、$b = 5$

2d) 2c) と同じような解き方で、$a = \frac{1}{2}$、$b = \frac{1}{3}$ となります。

1.7 乗法公式の組み合わせ

導入問題

以下の展開をしなさい。

a) $(2x+3)^3-(2x-3)^3$　　　　b) $(a+b+c)^2$

解法

a) $(2x+3)^3$ と $(2x-3)^3$ はどちらも二項式の三乗です。式にあてはまる乗法公式が分かれば、あとは前回までの授業で習った方法で展開し、同類項があればまとめます。

$$\underbrace{(2x+3)^3}_{(1)}-\underbrace{(2x-3)^3}_{(2)}=\underbrace{8x^3+3(2x)^2(3)+3(2x)(3)^2+27}_{(1)}-\underbrace{[8x^3-3(2x)^2(3)+3(2x)(3)^2-27]}_{(2)}$$

$$=\cancel{8x^3}+3(4x^2)(3)+\cancel{3(2x)(9)}\boxed{+27}-\cancel{8x^3}+3(4x^2)(3)-\cancel{3(2x)(9)}\boxed{+27}$$

$$=36x^2+27+36x^2+27$$

$$=72x^2+54$$

よって、　$(2x+3)^3-(2x-3)^3=72x^2+54.$

b) $a+b=x$ であるなら、$(a+b+c)^2=(x+c)^2$ が二項式の二乗にあてはまります。

$(a+b+c)^2=(x+c)^2$　　　$a+b=x$ を代入します。

$=x^2+2xc+c^2$　　　二項式を展開します。

$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$　　　$x=a+b$ を代入します。

$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc).$

よって、$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc).$

全体を通して

乗法公式の組み合わせを展開する時は、

1. どの部分に乗法公式が示されているかを見極めます。
2. 符号に注意しながら展開します。
3. 同類項があればまとめます。

問題

1. 以下の展開をしなさい。

a) $(5x+11)(5x-6)+(x-2y)(x+2y)$　　　b) $(10x-y)^2+(x-10y)^2$

c) $(x-1)^2+(x+2)^2+(x+4)(x-5)$　　　d) $(x+4y)^3+(x-5y)^3$

e) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-1\right)\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+1\right)$　　　f) $\left(\sqrt{2}\,x+\sqrt{3}\,y\right)\left(\sqrt{2}\,x-\sqrt{3}\,y\right)-(x+y+1)^2$

2. 乗法公式を使って以下の問題を解きなさい。

a) $a+b=25$、$a-b=10$ が成り立つ場合の、a^2-b^2 にあてはまる数値を求めなさい。
b) $a^2+b^2=58$、$a+b=10$ が成り立つ場合の abの数値を求めなさい。
c) 計算機を使わずに 101^3 を解きなさい。

達成の目安

1.7 乗法公式を使って多項式を解きなさい。

学習の流れ

この授業では今まで学習してきた全ての乗法公式を扱います。今回は、代数式を展開させて整理して書くところまで行います。

つまずきやすい点

展開に入る前に、生徒たちに代数式に含まれる乗法公式をみつけることがポイントであることを念押しします。因数分解はすでに 9 学年次に学習済みですが、ここではそれを使うことはお勧めしません。因数分解はまたこのユニットの後の方で復習します。

問題の解き方

1a) $(5x+11)(5x-6)+(x-2y)(x+2y) = (5x)^2+(11-6)(5x)+11(-6)+x^2-(2y)^2$
$= 25x^2+25x-66+x^2-4y^2$
$= 26x^2-4y^2+25x-66$

1b) $(10x-y)^2+(x-10y)^2 = (10x)^2-2(10x)y+y^2+x^2-2x(10y)+(10y)^2$
$= 100x^2-20xy+y^2+x^2-20xy+100y^2$
$= 101x^2-40xy+101y^2$

1c) $(x-1)^2+(x+2)^2+(x+4)(x-5) = x^2-2x+1+x^2+4x+4+x^2-x-20$
$= 3x^2+x-15$

1d) $(x+4y)^3+(x-5y)^3 = x^3+12x^2y+48xy^2+64y^3+x^3-15x^2y+75xy^2-125y^3$
$= 2x^3-3x^2y+123xy^2-61y^3$

1e) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-1\right)\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+1\right) = \left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)^2-1^2$
$= \frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}xy+\frac{1}{4}y^2-1$

9年次には、この証明を行いました。
$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

1f) $(\sqrt{2}x+\sqrt{3}y)(\sqrt{2}x-\sqrt{3}y)-(x+y+1)^2 = (\sqrt{2}x)^2-(\sqrt{3}y)^2-[x^2+y^2+1+2(xy+x+y)]$
$= 2x^2-3y^2-x^2-y^2-1-2xy-2x-2y$
$= x^2-2xy-4y^2-2x-2y-1$

2a) $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ となることが分かっていますので、これに $a+b=25$、$a-b=10$ をあてはめます。

$(25)(10) = a^2-b^2$
$a^2-b^2 = 250$

問 2a) と問 2b) は a と b の値を求める問題ではありません。

よって、a^2-b^2 にあてはまる数値は 250 です。

2b) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ であることから、ab を取り出し $a^2+b^2=58$、$a+b=10$ を代入します。

$2ab = (a+b)^2-(a^2+b^2)$
$2ab = 100-58 = 42$
$ab = 21$

よって、ab に当てはまる数値は 21 です。

2c) $101^3 = (100+1)^3 = 100^3+3(100^2)(1)+3(100)(1^2)+1^3$
$= 1\,000\,000+30\,000+300+1$
$= 1\,030\,301$

1.8 復習問題

1. 以下の展開をしなさい。

a) $(x+7)(x-5)$　b) $(m+8)^2$　c) $(n-6)\left(n-\frac{1}{2}\right)$

d) $(y-10)(y+8)$　e) $(y-4)^2$　f) $(x+6)^2$

g) $(x+5)(x-5)$　h) $\left(\frac{1}{7}-y\right)\left(\frac{1}{7}-y\right)$　i) $(n-2\sqrt{2})(n+2\sqrt{2})$

2. 以下の展開をしなさい。

a) $(3x+7)(3x+2)$　b) $\left(\frac{1}{2}y+5\right)\left(\frac{1}{2}y-9\right)$　c) $\left(5n-\frac{4}{5}\right)\left(5n-\frac{1}{5}\right)$

d) $(9x+4y)^2$　e) $\left(3x-\frac{1}{3}y\right)^2$　f) $(2x+\sqrt{3}y)^2$

g) $(10m+7n)(10m-7n)$　h) $\left(\frac{1}{5}x-\frac{2}{3}y\right)\left(\frac{1}{5}x+\frac{2}{3}y\right)$　i) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$

3. $(ax+b)(cx+d)$ 型の以下の式を展開しなさい。

a) $(2x-3)(x-4)$　b) $(x+6)(3x+5)$　c) $(4y-3)(5y+2)$

d) $\left(2x+\frac{1}{3}\right)\left(3x+\frac{2}{3}\right)$　e) $\left(5n+\frac{1}{2}\right)\left(4n-\frac{4}{5}\right)$　f) $\left(\frac{1}{3}x-8\right)\left(\frac{1}{4}x+3\right)$

4. a、b、c、d にあてはまる数字を特定し、等式が正しいかどうかを確かめなさい。

a) $(x+b)(cx-6)=2x^2+12x-54$　b) $(2x-5)(cx+d)=6x^2-35x+50$

c) $(ax+1)(cx+5)=8x^2+22x+5$　d) $(5x+b)(cx+d)=10x^2-9x-9$

5. 以下の二項式の三乗を展開しなさい。

a) $(m+3)^3$　b) $(y+10)^3$　c) $\left(x+\frac{1}{6}\right)^3$

d) $(y-4)^3$　e) $(5-m)^3$　f) $\left(x-\frac{1}{5}\right)^3$

g) $(10x+3y)^3$　h) $\left(\frac{1}{5}m-5n\right)^3$　i) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3$

6. 以下の展開をしなさい。

a) $(3x+4)(3x-4)-(2x+5)(2x-9)$　b) $(x+3y)^2+(2x-5y)^2$

c) $(2x-y)^3-(x+y)^3$　d) $(3x-4y+5)(3x-4y-5)$

e) $(3x-7)(4x+5)+(5x+1)(5x-6)$　f) $(x+9)(2x-11)+(x-5)^2$

7. 以下を解きなさい。

a) $a^2+b^2=40$、$ab=12$ が成り立つ $(a-b)^2$ の値を求めなさい。

b) $a^2-b^2=24$、$a-b=2$ が成り立つ $a+b$ の値を求めなさい。

c) 乗法公式を用いて以下の式の答えを求めなさい。

- 103^2　• 105(95)　• 45(55)

d) $x=445$ である場合、446(444) − 447(443)
の式を乗法公式を使ってx の項の数を書いて計算しなさい。

e) $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$ であることを証明しなさい。

達成の目安

1.8 乗法公式に関する問題を解きなさい。

問題の解き方

1a) $x^2+2x-35$ **1b)** $m^2+16m+64$ **1c)** $n^2-\frac{13}{2}n+3$

1d) $y^2-2y-80$ **1e)** $y^2-8y+16$ **1f)** $x^2+12x+36$

1g) x^2-25 **1h)** $\frac{1}{49}-y^2$ **1i)** n^2-8

2a) $9x^2+27x+14$ **2b)** $\frac{1}{4}y^2-2y-45$ **2c)** $25n^2-5n+\frac{4}{25}$

2d) $81x^2+72xy+16y^2$ **2e)** $9x^2-2xy+\frac{1}{9}y^2$ **2f)** $4x^2+4\sqrt{3}xy+3y^2$

2g) $100m^2-49n^2$ **2h)** $\frac{1}{25}x^2-\frac{4}{9}y^2$ **2i)** $x-y$

3a) $2x^2-11x+12$ **3b)** $3x^2+23x+30$ **3c)** $20y^2-7y-6$

3d) $6x^2+\frac{7}{3}x+\frac{2}{9}$ **3e)** $20n^2-2n-\frac{2}{5}$ **3f)** $\frac{1}{12}x^2-x-24$

4a) $b=9,\ c=2$ **4b)** $c=3,\ d=-10$ **4c)** $a=4,\ c=2$

4d) $b=3,\ c=2,\ d=-3$ **5a)** $m^3+9m^2+27m+27$ **5b)** $y^3+30y^2+300y+1000$

5c) $x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{12}x+\frac{1}{216}$ **5d)** $y^3-12y^2+48y-64$ **5e)** $125-75m+15m^2-m^3$

5e) では、項を並べ替えて $-m^3+15m^2-75m+125$ となります。

5f) $x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{3}{25}x-\frac{1}{125}$ **5g)** $1000x^3+900x^2y+270xy^2+27y^3$

5h) $\frac{1}{125}m^3-\frac{3}{5}m^2n+15mn^2-125n^3$ **5i)** $x\sqrt{x}+3x\sqrt{y}+3\sqrt{xy}+y\sqrt{y}$

6a) $5x^2+8x+29$ **6b)** $5x^2-14xy+34y^2$ **6c)** $7x^3-15x^2y+3xy^2-2y^3$

6d) $9x^2-24xy+16y^2-25$ **6e)** $37x^2-38x-41$ **6f)** $3x^2-3x-74$

7a) $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=40-24=16$

7b) $a+b=\frac{a^2-b^2}{a-b}=\frac{24}{2}=12$

7c) $103^2=(100+3)^2$
$=10\,000+600+9$
$=10\,609$

$105(95)=(100+5)(100-5)$
$=10\,000-25$
$=9\,975$

$45(55)=(50-5)(50+5)$
$=2\,500-25$
$=2\,475$

7d) $446(444)-447(443)=(445+1)(445-1)-(445+2)(445-2)$
$=(x+1)(x-1)-(x+2)(x-2)$
$=x^2-1-x^2+4$
$=3$

$x=445$である場合、

7e) $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
$=x^3+y^3+(3x^2y+3xy^2)$
$=x^3+y^3+3xy(x+y)$

交換法則と結合法則に従って
共通因数 $3xy$ を取り出します。

1.9 単項式と多項式の共通因数

導入問題

以下の多項式を因数分解しなさい。

a) $10x^2y + 6xy^2 - 8xy$　　b) $xy + 3x + 2y + 6$

問 a) の多項式の項にある共通因数をみつけなさい。
問 b) 共通因数をもつ項をくくりなさい。

解法

a) 多項式の項の共通因数を見つけます。

$$\begin{aligned} 10x^2y &= 2(5)(x)(x)(y) = 2xy(5x) \\ 6xy^2 &= 2(3)(x)(y)(y) = 2xy(3y) \\ -8xy &= -2(4)(x)(y) = -2xy(4) \end{aligned}$$

それらの因数を取り出して単項式かける多項式のかけ算にして書きます。

$$\begin{aligned} 10x^2y + 6xy^2 - 8xy &= 2xy(5x) + 2xy(3y) - 2xy(4) \\ &= 2xy(5x + 3y - 4). \end{aligned}$$

よって、$10x^2y + 6xy^2 - 8xy = 2xy(5x + 3y - 4)$

b) この多項式の項には共通因数がありません。しかし、最初の項と二番目の項は共通因数 x があり、三番目と 4 番目の項には共通因数があります。これらの二つの組み合わせをくくり、それぞれの共通因数を取り出します。

$$\begin{aligned} xy + 3x + 2y + 6 &= (xy + 3x) + [2y + 2(3)] \\ &= x(y + 3) + 2(y + 3). \end{aligned}$$

$m = y + 3$ であると仮定して、上の式に代入し、共通因数 m を取り出します。

$$\begin{aligned} xy + 3x + 2y + 6 &= xm + 2m \\ &= (x + 2)m. \end{aligned}$$

したがって、$xy + 3x + 2y + 6 = (x + 2)(y + 3)$

まとめ

多項式の**因数分解**は、多項式の展開を簡単にして書くことです。つまりその多項式の簡単な形を**因数**といいます。多項式にある項が全て同じ共通の単項式をもつ場合は、その単項式を取り出し、単項式かける多項式の式に直します。

$$ma + mb + mc = m(a + b + c).$$

多項式の項が共通因数をもたない場合で、他の異なる共通因数をもっている項の組とくくることができるのであれば、

1. それぞれの組の共通因数を取り出します。
2. そして、そうすることにより式が単項式かける同じ多項式になる場合は、この共通である多項式を取り出します。

$$\begin{aligned} ma + mb + na + nb &= m(a + b) + n(a + b) \\ &= (m + n)(a + b). \end{aligned}$$

同じ共通因数をもつ項に関連づけて因数分解を行うことを、**共通項でくくる因数分解**といいます。

問題

以下の多項式を因数分解しなさい。

a) $x^2 + xy^2$　　b) $2a - 8ab$　　c) $x^2y^2 - x^2y + xy$

d) $-10a^2b^2 + 5ab^2 - 15abc$　　e) $-12xy^2 + 20x^2 + 16xy$　　f) $12a^2b^2c - 6ab^2c^2 + 18a^2bc$

g) $mn - 4m + 3n - 12$　　h) $xy - 2x - 5y + 10$　　i) $2ab - 12a + b - 6$

j) $3xy - 7x - 12y + 28$　　k) $6mn + 8m + 15n + 20$　　l) $x^2y - 3xy^2 + 8x - 24y$

m) $\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x$　　n) $10\sqrt{2}a^2b + 6\sqrt{2}ab$　　o) $\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}mn + \frac{1}{3}m + \frac{1}{3}n$

達成の目安

1.9 結合法則と分配法則を使って共通因数が単項式または多項式となっている多項式の因数分解をしなさい。

学習の流れ

この授業では 9 学年時に学習した単項式の共通因数を取り出して因数分解する方法を復習します。さらに、共通項でくくる因数分解（授業ではこの名前は使わず生徒が自らどういう場合に項をくくる必要があるかを判断できるようにします。）とされる多項式の共通因数を取り出して因数分解する方法も学習します。

ねらい

導入問題の問 a) は因数分解がどのようなものであったかを、共通因数を取り出すことで復習するための問題です。問b)はヒントボックスにあるように、何が項と結びつくかあるいは何が項をまとめるかを考える問題です。問題ブロックでは、生徒たちはどの多項式で項と因数分解とを関連づける必要があるかを確認しなくてはなりません。

つまずきやすい点

問題ブロックの課題をする際には、生徒たちにすべての項に共通因数があるか、もしくは項をまとめないといけないかをまず確認するよう念押しします。また項をくくる方法はいろいろあるもののどれも同じ解答になる場合があることも最初に伝えておく必要があります。（因数は変換してみつかるものばかりです）

問題の解き方

a) $x^2 + xy^2 = x(x) + x(y^2)$
$= x(x + y^2)$

b) $2a - 8ab = 2a - 2a(4b)$
$= 2a(1 - 4b)$

c) $x^2y^2 - x^2y + xy = xy(xy) - xy(x) + xy$　$xy = 1xy$
$= xy(xy - x + 1)$

d) $-10a^2b^2 + 5ab^2 - 15abc = 5ab(-2ab + b - 3c)$

$-5ab(2ab - b + 3c)$ も正解です。

e) $-12xy^2 + 20x^2 + 16xy = 4x(-3y^2 + 5x + 4y)$

$-4x(3y^2 - 5x - 4y)$ であっても正解です。

f) $12a^2b^2c - 6ab^2c^2 + 18a^2bc = 6abc(2ab - bc + 3a)$

g) $mn - 4m + 3n - 12 = m(n - 4) + 3(n - 4)$
$= (m + 3)(n - 4)$

h) $xy - 2x - 5y + 10 = x(y - 2) - 5(y - 2)$
$= (x - 5)(y - 2)$

i) $2ab - 12a + b - 6 = 2a(b - 6) + (b - 6)$　$(b - 6) = 1(b - 6)$
$= (2a + 1)(b - 6)$

j) $3xy - 7x - 12y + 28 = x(3y - 7) - 4(3y - 7)$
$= (x - 4)(3y - 7)$

k) $6mn + 8m + 15n + 20 = 2m(3n + 4) + 5(3n + 4)$
$= (2m + 5)(3n + 4)$

l) $x^2y - 3xy^2 + 8x - 24y = xy(x - 3y) + 8(x - 3y)$
$= (xy + 8)(x - 3y)$

m) $\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x = \left(\frac{1}{2}x\right)(x^2) + \left(\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{1}{2}x\right) + \left(\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{1}{4}\right)$
$= \frac{1}{2}x\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$

共通因数 $\frac{1}{8}x$ を取り出すこともできるので、その場合は $\frac{1}{8}x(4x^2 + 2x + 1)$ も正解となります。

n) $10\sqrt{2}\,a^2b + 6\sqrt{2}\,ab = 2\sqrt{2}ab(5a) + 2\sqrt{2}ab(3)$
$= 2\sqrt{2}ab(5a + 3)$

o) $\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}mn + \frac{1}{3}m + \frac{1}{3}n = \frac{1}{2}m(m + n) + \frac{1}{3}(m + n)$
$= \left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{3}\right)(m + n)$

レッスン 1

1.10 三項式 $x^2+(a+b)x+ab$ の因数分解

導入問題

以下の多項式を $(x+a)(x+b)$ の形に因数分解しなさい。

a) $x^2+10x+16$　　b) y^2-y-20

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

解法

a) $x^2+10x+16$ を $(x+a)(x+b)$ に因数分解するには、和が 10、積が 16 になる二つの数を見つけなければなりません。和は正の数であるので、二つの数とも正の数である必要があります。

組み合わせ	積	和
1 と 16	16	17
2 と 8	16	10

$(x+2)(x+8)$ の展開をして因数分解が正しいかどうかを確かめます。

よって、$a=2$、$b=8$ となり、$x^2+10x+16=(x+2)(x+8)$ です。

b) 前の設問と同じ方法で、和が -1、積が -20 になる二つの数をみつけます。どちらの値もマイナスなので、その二つの数のどちらか一方が正の数でもう一方が負の数である必要があります。

組み合わせ	積	和
-1 と 20	-20	19
-2 と 10	-20	8
-4 と 5	-20	1
4 と -5	-20	-1

20 を素因数分解すれば組み合わせがみつけられます。$20=2(2)(5)$

よって、$a=4$、$b=-5$、$y^2-y-20=(y+4)(y-5)$

まとめ

三項式 を乗法公式 $(x+a)(x+b)$ の形に因数分解するためには、三項式の項の中にx^2、変数 x のある項、変数のない項（定数項）があることを確認しなければなりません。m も n も正の数とします。

a) 三項式が x^2+mx+n の場合、積が n、和が m となる**二つの数は正の数**をみつけます。

b) 三項式が x^2-mx+n の場合、積が n、和が $-m$ となる**二つの数は負の数**をみつけます。

c) 三項式が x^2+mx-n または x^2-mx-n の場合は、積が $-n$、和が m もしくは $-m$ となる**二つの数の一方が正の数でもう一方が負の数**をみつけます。

問題

1. 以下の多項式を因数分解しなさい。

a) x^2+7x+6　　b) $x^2-9x+14$　　c) $y^2-3y-40$

d) $y^2+2y-15$　　e) $a^2+2a-63$　　f) $b^2-12b+20$

g) $y^2+14y+40$　　h) $x^2-2x-35$　　i) $x^2-12x+27$

j) $y^2+5y-24$　　k) $a^2+15a+56$　　l) $b^2-9b-22$

2. 展開せずに以下の多項式をそれぞれ因数分解しなさい。

a) $(x-1)^2-2(x-1)-24$　　b) $(x+1)^2+10(x+1)+21$

c) $(x-2)^2+5(x-2)-50$　　d) $(x-3)^2-5(x-3)+6$

$y=x-1$ を代入します。

30

達成の目安

1.10 三項式 $x^2 + (a + b)x + ab$ を乗法公式 $(x + a)(x + b)$ の形に因数分解しなさい。

学習の流れ

この授業では 9 学年次に学習した三項式 $x^2 + (a + b)x + ab$ の因数分解 を復習します。そのためには、乗法公式 $(x + a)(x + b)$ の展開を復習する必要があります。問題ブロックの問題にはこの因数分解を行うために変数の置き換えが必要となるものもあります。

つまずきやすい点

この導入問題にある三項式では、積が定数項の値となり、和が指数1をもつ変数の係数となる二つの整数を見つける必要があることを生徒に念押しします。復習授業であるので、この手順は省略して、まとめから入ってもいいでしょう。

問題の解き方

1a) x の係数は正の数で定数項と同じ値です。したがって積が 6、和が 7 となる二つの正の数を見つける必要があります。

組み合わせ	積	和
→ 1と6	6	7

よって、$x^2 + 7x + 6 = (x + 6)(x + 1)$

1b) xの係数は負の数で定数項は正の数です。したがって積が14で和が–9となる二つの負の数をみつけなくてはなりません。

組み合わせ	積	和
–1 と –14	14	–15
→ –2 と –7	14	–9

よって、$x^2 - 9x + 14 = (x - 2)(x - 7)$

1c) 定数項は負の数です。したがって、積が –40 で和が –3 となる一方が正の数でもう一方が負の数である二つの数をみつけなくてはなりません。これを満たす数字は 5 と –8 なので、
$y^2 - 3y - 40 = (y + 5)(y - 8)$ です。

1d) 定数項は負の数です。したがって積が –15 で和が 2 となるような一方が正の数でもう一方が負の数となる二つの数をみつけなくてはなりません。これを満たす数字は、5 と –3 になるので、
$y^2 + 2y - 15 = (y + 5)(y - 3)$ です。

1e) $a^2 + 2a - 63 = (a + 9)(a - 7)$

1f) $b^2 - 12b + 20 = (b - 2)(b - 10)$

1g) $y^2 + 14y + 40 = (y + 10)(y + 4)$

1h) $x^2 - 2x - 35 = (x + 5)(x - 7)$

1i) $x^2 - 12x + 27 = (x - 3)(x - 9)$

1j) $y^2 + 5y - 24 = (y + 8)(y - 3)$

1k) $a^2 + 15a + 56 = (a + 8)(a + 7)$

1l) $b^2 - 9b - 22 = (b + 2)(b - 11)$

2a) $y = x - 1$ として元の三項式 に代入すると $y^2 - 2y - 24$ この式を因数分解して $(y + 4)(y - 6)$、再び $y = x - 1$ を代入して、

$$\begin{aligned}(x-1)^2 - 2(x-1) - 24 &= [(x-1)+4][(x-1)-6]\\ &= (x+3)(x-7)\end{aligned}$$

よって、$(x - 1)^2 - 2(x - 1) - 24 = (x + 3)(x - 7)$.

2b) $(x + 1)^2 + 10(x + 1) + 21 = [(x + 1) + 7][(x + 1) + 3] = (x + 8)(x + 4)$

2c) $(x - 2)^2 + 5(x - 2) - 50 = [(x - 2) + 10][(x - 2) - 5] = (x + 8)(x - 7)$

2d) $(x - 3)^2 - 5(x - 3) + 6 = [(x - 3) - 2][(x - 3) - 3] = (x - 5)(x - 6)$

2b)、2c)、2d) の各問では、生徒たちは 2a) で示された方法を使うことができます。つまり、変数の置き換えをしたり、直接因数分解をする方法です。生徒は自分でどちらが因数分解しやすいか決めればいいです。

1.11 完全二乗三項式と二乗の差　第 1 部

導入問題

以下の多項式を因数分解しなさい。

a) $x^2 + 12x + 36$　　b) $y^2 - 100$

$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$
$(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$

解法

a) 三項式の一番目の項と定数項が二乗なので、x^2 は x の二乗、36 は 6 の二乗です。
さらに、$12x = 2(6)(x)$ です。

したがって、$x^2 + 12x + 36 = x^2 + 2(6)(x) + 6^2$

上記は二項式を展開させたもの $x^2 + 2(6)(x) + 6^2 = (x + 6)^2$ と等しくなります。

よって、$x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$

b) 二項式のどちらの項も二乗なので、$y^2 - 100 = y^2 - 10^2$

上記は二項式の和と差の積にあてはまるので、$y^2 - 10^2 = (y + 10)(y - 10)$

したがって $y^2 - 100 = (y + 10)(y - 10)$

まとめ

$x^2 \pm 2ax + a^2$ は**完全平方三項式**といいます。これは、二項式の二乗の因数分解を二つ目の項の符号に合わせて行います。

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2.$$

完全平方三項式であるかどうかを確かめるには、まず定数項がどの数字の二乗になっているかを確かめ、次にその数字を 2 倍にしたものが一次の変数の係数となっているかを確かめます。一方、$x^2 - a^2$ の形をもつ多項式は**二乗の差** といい、次のように因数分解します。

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a).$$

問題

1. 以下の多項式を因数分解しなさい。

a) $x^2 - 6x + 9$　　b) $y^2 + 10y + 25$　　c) $b^2 - 8b + 16$

d) $x^2 - 4$　　e) $a^2 - 36$　　f) $49 - y^2$

g) $b^2 + b + \frac{1}{4}$　　h) $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$　　i) $y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}$

j) $a^2 - \frac{1}{25}$　　k) $b^2 - \frac{1}{64}$　　l) $\frac{4}{9} - y^2$

m) $x^2 + 5x + \frac{25}{4}$　　n) $y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{9}{16}$　　o) $x^2 - \frac{7}{5}x + \frac{49}{100}$

p) $a^2 - \frac{36}{49}$　　q) $y^2 - \frac{4}{121}$　　r) $\frac{81}{64} - b^2$

2. 計算機を使わずに以下の式を計算しなさい。

a) $77^2 - 23^2$　　b) $998^2 - 4$　　c) $97^2 + 6(97) + 9$

達成の目安

1.11 完全平方三項式または二乗の差である三項式を乗法公式 $(x \pm a)^2$ と $(x + a)(x - a)$ の形に因数分解しなさい。

学習の流れ

この授業では 9 学年次に学習した完全平方三項式と二乗の差の因数分解を復習します。指数 2 をもつ変数の係数は常に 1 であることに注意します。問題ブロックには、これら二つの因数分解の仕方を使わないと解けない問題が含まれています。

つまずきやすい点

生徒たちに乗法公式 $(x \pm a)^2$ と $(x + a)(x - a)$ の展開を使って導入問題にある多項式の因数分解をするよう念押しします。問題ブロックの問2で、もし生徒が式の答えをあてはめて計算をしたがる場合には、a)を例にあげて行ってください。

問題の解き方

1a) $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2(3)(x) + 3^2$
$= (x - 3)^2$

1b) $y^2 + 10y + 25 = y^2 + 2(5)(y) + 5^2$
$= (y + 5)^2$

1c) $b^2 - 8b + 16 = b^2 - 2(4)b + 4^2$
$= (b - 4)^2$

1d) $x^2 - 4 = x^2 - 2^2$
$= (x + 2)(x - 2)$

1e) $a^2 - 36 = a^2 - 6^2$
$= (a + 6)(a - 6)$

1f) $49 - y^2 = 7^2 - y^2$
$= (7 + y)(7 - y)$

1g) $b^2 + b + \frac{1}{4} = b^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)b + \left(\frac{1}{2}\right)^2$
$= \left(b + \frac{1}{2}\right)^2$

1h) $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2$

1i) $y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9} = \left(y + \frac{1}{3}\right)^2$

1j) $a^2 - \frac{1}{25} = \left(a + \frac{1}{5}\right)\left(a - \frac{1}{5}\right)$

1k) $b^2 - \frac{1}{64} = \left(b + \frac{1}{8}\right)\left(b - \frac{1}{8}\right)$

1l) $\frac{4}{9} - y^2 = \left(\frac{2}{3} + y\right)\left(\frac{2}{3} - y\right)$

1m) $x^2 + 5x + \frac{25}{4} = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2$

1n) $y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{9}{16} = \left(y - \frac{3}{4}\right)^2$

1o) $x^2 - \frac{7}{5}x + \frac{49}{100} = \left(x - \frac{7}{10}\right)^2$

1p) $a^2 - \frac{36}{49} = \left(a + \frac{6}{7}\right)\left(a - \frac{6}{7}\right)$

1q) $y^2 - \frac{4}{121} = \left(y + \frac{2}{11}\right)\left(y - \frac{2}{11}\right)$

1r) $\frac{81}{64} - b^2 = \left(\frac{9}{8} + b\right)\left(\frac{9}{8} - b\right)$

2a) $77^2 - 23^2 = (77 + 23)(77 - 23)$
$= (100)(54)$
$= 5\,400$

2b) $998^2 - 4 = (998 + 2)(998 - 2)$
$= (1\,000)(996)$
$= 996\,000$

2c) $97^2 + 6(97) + 9 = 97^2 + 2(3)(97) + 3^2$
$= (97 + 3)^2$
$= (100)^2$
$= 10\,000$

1.12 完全平方三項式と二乗の差　第 2 部

導入問題

以下の多項式を因数分解しなさい。

a) $49x^2 - 28xy + 4y^2$　　b) $121x^2 - 16y^2$

解法

a) 三項式の最初の項は $7x$ の二乗で、三つ目の項は $2y$ の二乗です。

$$(7x)^2 = 49x^2$$
$$(2y)^2 = 4y^2$$

さらに、$-2(7x)(2y) = -28xy$、よって $49x^2 - 28xy + 4y^2$ は完全平方三項式で、次のように因数分解します。

$$\begin{aligned} 49x^2 - 28xy + 4y^2 &= (7x)^2 - 2(7x)(2y) + (2y)^2 \\ &= (7x - 2y)^2 \end{aligned}$$

よって、$49x^2 - 28xy + 4y^2 = (7x - 2y)^2$

b) 最初の項は $11x$ の二乗で、二つ目の項は $4y$ の二乗です。

$$(11x)^2 = 121x^2$$
$$(4y)^2 = 16y^2$$

したがって $121x^2 - 16y^2$ は二乗の差で因数分解はこうなります。

$$\begin{aligned} 121x^2 - 16y^2 &= (11x)^2 - (4y)^2 \\ &= (11x + 4y)(11x - 4y) \end{aligned}$$

よって、$121x^2 - 16y^2 = (11x + 4y)(11x - 4y)$

全体を通して

三項式 $a^2x^2 \pm 2abxy + b^2y^2$ は完全平方三項式で、因数分解はこうなります。

$$(ax)^2 + 2(ax)(by) + (by)^2 = (ax + by)^2$$
$$(ax)^2 - 2(ax)(by) + (by)^2 = (ax - by)^2.$$

二項式 $a^2x^2 - b^2y^2$ は二乗の差で、その因数分解はこうなります。

$$(ax)^2 - (by)^2 = (ax + by)(ax - by).$$

問題

1. 以下の多項式を因数分解しなさい。

a) $4x^2 + 20xy + 25y^2$　　b) $9x^2 - 12xy + 4y^2$　　c) $25a^2 + 60ab + 36b^2$

d) $9x^2 - 100y^2$　　e) $25x^2 - 16y^2$　　f) $49a^2 - 4b^2$

g) $\frac{1}{4}x^2 + xy + y^2$　　h) $9x^2 - 3xy + \frac{1}{4}y^2$　　i) $\frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{16}y^2$

j) $\frac{1}{64}x^2 - 9y^2$　　k) $\frac{25}{9}a^2 - \frac{1}{49}b^2$　　l) $\frac{4}{81}x^2 - \frac{25}{16}y^2$

m) $4x^2 + 4\sqrt{2}\,xy + 2y^2$　　n) $5a^2 - 2\sqrt{15}\,ab + 3b^2$　　o) $6x^2 + 8\sqrt{3}\,xy + 8y^2$

p) $100a^2 - 7b^2$　　q) $6x^2 - \frac{1}{25}y^2$　　r) $8x^2 - 11y^2$

2. 展開せずに以下の多項式を因数分解しなさい。

a) $9x^2 + 6x(y + 2) + (y + 2)^2$　　$z = y + 2$を代入します。　　b) $(a - 3)^2 - 10(a - 3)b + 25b^2$

c) $(2x + 1)^2 + 2(2x + 1)(3y - 4) + (3y - 4)^2$　　d) $16a^2 - (b + 5)^2$

e) $(x + 9)^2 - (y - 9)^2$　　f) $x^2 + y^2 + 2xy + 10x + 10y$

達成の目安

1.12 完全平方三項式 または二乗の差の多項式を乗法公式 $(ax \pm by)^2$ と $(ax + by)(ax - by)$ の形に因数分解しなさい。

学習の流れ

この授業では引き続き完全平方三項式の因数分解と二乗の差を学習します。（導入問題と問題ブロックに）出て来た多項式の指数 2 をもつ変数の係数は 1 ではありません。

つまずきやすい点

もし生徒たちが導入問題の因数分解をできないようであれば、乗法公式 $(ax \pm by)^2$と $(ax + by)(ax - by)$ の乗法公式の展開を示してあげるのもいいかもしれません。

問題の解き方

1a) $4x^2 + 20xy + 25y^2 = (2x)^2 + 2(2x)(5y) + (5y)^2 = (2x + 5y)^2$

1b) $9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x)^2 - 2(3x)(2y) + (2y)^2 = (3x - 2y)^2$

1c) $25a^2 + 60ab + 36b^2 = (5a + 6b)^2$

1d) $9x^2 - 100y^2 = (3x + 10y)(3x - 10y)$

1e) $25x^2 - 16y^2 = (5x)^2 - (4y)^2 = (5x + 4y)(5x - 4y)$

1f) $49a^2 - 4b^2 = (7a)^2 - (2b)^2 = (7a + 2b)(7a - 2b)$

1g) $\frac{1}{4}x^2 + xy + y^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}x\right)y + y^2 = \left(\frac{1}{2}x + y\right)^2$

1h) $9x^2 - 3xy + \frac{1}{4}y^2 = \left(3x - \frac{1}{2}y\right)^2$

1i) $\frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{16}y^2 = \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y\right)^2$

1j) $\frac{1}{64}x^2 - 9y^2 = \left(\frac{1}{8}x + 3y\right)\left(\frac{1}{8}x - 3y\right)$

1k) $\frac{25}{9}a^2 - \frac{1}{49}b^2 = \left(\frac{5}{3}a + \frac{1}{7}b\right)\left(\frac{5}{3}a - \frac{1}{7}b\right)$

1l) $\frac{4}{81}x^2 - \frac{25}{16}y^2 = \left(\frac{2}{9}x + \frac{5}{4}y\right)\left(\frac{2}{9}x - \frac{5}{4}y\right)$

1m) $4x^2 + 4\sqrt{2}xy + 2y^2 = \left(2x + \sqrt{2}y\right)^2$

1n) $5a^2 - 2\sqrt{15}ab + 3b^2 = \left(\sqrt{5}a - \sqrt{3}b\right)^2$

1o) $6x^2 + 8\sqrt{3}xy + 8y^2 = \left(\sqrt{6}x + 2\sqrt{2}y\right)^2$

1p) $100a^2 - 7b^2 = \left(10a + \sqrt{7}b\right)\left(10a - \sqrt{7}b\right)$

1q) $6x^2 - \frac{1}{25}y^2 = \left(\sqrt{6}x + \frac{1}{5}y\right)\left(\sqrt{6}x - \frac{1}{5}y\right)$

1r) $8x^2 - 11y^2 = \left(2\sqrt{2}x + \sqrt{11}y\right)\left(2\sqrt{2}x - \sqrt{11}y\right)$

2a) $9x^2 + 6x(y + 2) + (y + 2)^2 = 9x^2 + 6xz + z^2 = (3x + z)^2 = (3x + y + 2)^2$

$z = y + 2$を代入します。

2b) $(a - 3)^2 - 10(a - 3)b + 25b^2 = z^2 - 10zb + 25b^2 = (z - 5b)^2 = (a - 5b - 3)^2$

$z = a - 3$を代入します。

2c) $(2x + 1)^2 + 2(2x + 1)(3y - 4) + (3y - 4)^2 = w^2 + 2wz + z^2 = (w + z)^2 = (2x + 1 + 3y - 4)^2 = (2x + 3y - 3)^2$

$w = 2x + 1$と$z = 3y - 4$を代入します。

2d) $16a^2 - (b + 5)^2 = (4a + b + 5)(4a - b - 5)$

2e) $(x + 9)^2 - (y - 9)^2 = (x + 9 + y - 9)(x + 9 - y + 9) = (x + y)(x - y + 18)$

2f) $x^2 + y^2 + 2xy + 10x + 10y = (x + y)^2 + 10(x + y) = (x + y)(x + y + 10)$

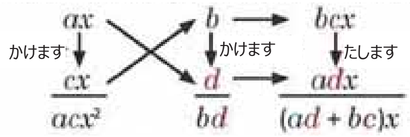
レッスン 1

1.13 たすきがけ　第 1 部

導入問題

多項式 $2x^2 + 13x + 15$ は完全平方三項式ではありませんが、このようにして $(ax + b)(cx + d)$ の形に因数分解できます。

1. 2 と 15 を因数の積として分解します。
2. 下の図では、a と c の値に 2 の因数をあてはめ、b と d の値に 15 の因数をあてはめます。
   $ad + bc = 13$ となるまで計算します。



3. $2x^2 + 13x + 15$ は、$(ax + b)(cx + d)$ の形に直します。

解法

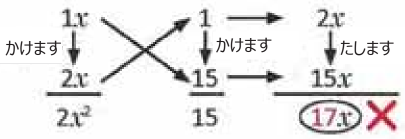
1. 2 と 15 は二つの因数を使ってできる積として次のように分解できます。

$2 = 1(2)$　　　　$15 = \begin{cases} 1(15) \\ 3(5) \end{cases}$

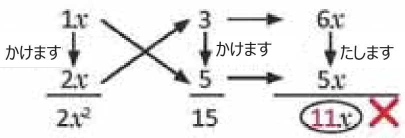
この積は可換性をもつので、$1(2) = 2(1)$

2. $ad + bc = 13$ が成り立つまで a と c に 2 の因数をあてはめ、b と d に 15 の因数をあてはめます。

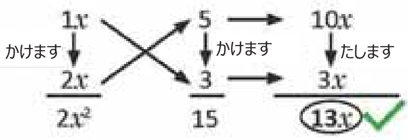
- もし、$a = 1$、$c = 2$ であるなら、$b = 1$、$d = 15$ となります。



- もし、$a = 1$、$c = 2$ であるなら、$b=3$、$d = 5$ となります。



- もし、$a = 1$、$c = 2$ であるなら、$b = 5$、$d = 3$ となります。



3. 以上から、$2x^2 + 13x + 15 = (x + 5)(2x + 3)$

まとめ

$mx^2 + nx + p$ の三項式で、m、n、p がゼロでない整数とします。**ac = m、bd = p、ad + bc = n** になる整数 a、b、c、d があるならば、

$$mx^2 + nx + p = (ax + b)(cx + d).$$

問題

以下の多項式を導入問題の図を活用して因数分解しなさい。

a) $3a^2 + 8a + 5$　　b) $2x^2 + 7x + 3$　　c) $2x^2 + 9x + 9$
d) $2y^2 + 11y + 12$　　e) $3y^2 + 8y + 4$　　f) $3a^2 + 17a + 20$
g) $4x^2 + 5x + 1$　　h) $6x^2 + 11x + 3$　　i) $8y^2 + 22y + 5$
j) $6y^2 + 23y + 20$　　k) $6x^2 + 17x + 12$　　l) $10a^2 + 27a + 18$

達成の目安

1.13 三項式$(ax + b)(cx + d)$ のa、b、c、d がそれぞれ正の整数である場合、この三項式をたすきがけを使って因数分解しなさい。

学習の流れ

9学年次と前回までの授業では $x^2 + (a + b)x + ab$ の形の三項式か完全平方三項式の因数分解のみを行いました。この授業ではたすきがけの手順を覚えて三項式を乗法公式 $(ax + b)(cx + d)$ の形に因数分解します。達成の目安にあるように、a、b、c、d の値が正の整数である三項式のみを扱います。

ねらい

導入問題はたすきがけを使って因数分解する手順を示しています。この授業では、生徒たちがこの手順に慣れることができるように、係数が正の数となる三項式のみを扱います。問 a) から問f)は指数が2の変数の係数が素数なので、その分少ない計算で求めることができます。

つまずきやすい点

生徒たちが導入問題の解き方だけではよく理解できないようであれば、問題ブロックの問 a) を例として取り上げて、その解き方の手順を一つ一つ解説します。

問題の解き方

a)

$$\begin{array}{cccccc} & 1a & \times & 1 & \rightarrow & 3a \\ \text{かけます} & \downarrow & & \downarrow\text{かけます} & & \downarrow\text{たします} \\ & 3a & & 5 & \rightarrow & 5a \\ \hline & 3a^2 & & 5 & & 8a \end{array}$$

したがって、$3a^2 + 8a + 5 = (a + 1)(3a + 5)$

b)

$$\begin{array}{cccccc} & 1x & \times & 3 & \rightarrow & 6x \\ \text{かけます} & \downarrow & & \downarrow\text{かけます} & & \downarrow\text{たします} \\ & 2x & & 1 & \rightarrow & 1x \\ \hline & 2x^2 & & 3 & & 7x \end{array}$$

したがって、$2x^2 + 7x + 3 = (x + 3)(2x + 1)$

c)

$$\begin{array}{cccccc} & 1x & \times & 3 & \rightarrow & 6x \\ \text{かけます} & \downarrow & & \downarrow\text{かけます} & & \downarrow\text{たします} \\ & 2x & & 3 & \rightarrow & 3x \\ \hline & 2x^2 & & 9 & & 9x \end{array}$$

したがって$2x^2 + 9x + 9 = (x + 3)(2x + 3)$

d)

$$\begin{array}{cccccc} & 1y & \times & 4 & \rightarrow & 8y \\ \text{かけます} & \downarrow & & \downarrow\text{かけます} & & \downarrow\text{たします} \\ & 2y & & 3 & \rightarrow & 3y \\ \hline & 2y^2 & & 12 & & 11y \end{array}$$

したがって $2y^2 + 11y + 12 = (y + 4)(2y + 3)$

e)

$$\begin{array}{cccccc} & 1y & \times & 2 & \rightarrow & 6y \\ \text{かけます} & \downarrow & & \downarrow\text{かけます} & & \downarrow\text{たします} \\ & 3y & & 2 & \rightarrow & 2y \\ \hline & 3y^2 & & 4 & & 8y \end{array}$$

したがって $3y^2 + 8y + 4 = (y + 2)(3y + 2)$

f)

$$\begin{array}{cccccc} & 1a & \times & 4 & \rightarrow & 12a \\ \text{かけます} & \downarrow & & \downarrow\text{かけます} & & \downarrow\text{たします} \\ & 3a & & 5 & \rightarrow & 5a \\ \hline & 3a^2 & & 20 & & 17a \end{array}$$

したがって、$3a^2 + 17a + 20 = (a + 4)(3a + 5)$

g)

$$\begin{array}{cccccc} & 1x & \times & 1 & \rightarrow & 4x \\ \text{かけます} & \downarrow & & \downarrow\text{かけます} & & \downarrow\text{たします} \\ & 4x & & 1 & \rightarrow & 1x \\ \hline & 4x^2 & & 1 & & 5x \end{array}$$

したがって、$4x^2 + 5x + 1 = (x + 1)(4x + 1)$

h)

$$\begin{array}{cccccc} & 2x & \times & 3 & \rightarrow & 9x \\ \text{かけます} & \downarrow & & \downarrow\text{かけます} & & \downarrow\text{たします} \\ & 3x & & 1 & \rightarrow & 2x \\ \hline & 6x^2 & & 3 & & 11x \end{array}$$

したがって、$6x^2 + 11x + 3 = (2x + 3)(3x + 1)$

i) $8y^2 + 22y + 5 = (2y + 5)(4y + 1)$

j) $6y^2 + 23y + 20 = (2y + 5)(3y + 4)$

k) $6x^2 + 17x + 12 = (2x + 3)(3x + 4)$

l) $10a^2 + 27a + 18 = (2a + 3)(5a + 6)$

レッスン 1

1.14 たすきがけ　第 2 部

導入問題

以下の多項式を因数分解しなさい。

a) $2x^2 - 5x - 12$　　　　b) $3y^2 - 11y + 8$

前回の授業で学習した方法を使いなさい。

解法

a) x^2 の係数と定数項は、二つの整数の積になります。定数項はマイナスなので、負の数と正の数をかけたものであると分かります。2 と −12 は二つの因数の積なので、

$$2 = 1(2) \qquad -12 = \begin{cases} 1(-12) \text{ o } -1(12) \\ 2(-6) \text{ o } -2(6) \\ 3(-4) \text{ o } -3(4) \end{cases}$$

以下のことに注意します。$ad + bc$ に、$a = 1$、$c = 2$、$b = 1$、$d = -12$ を代入した場合と、$a = 1$、$c = 2$、$b = -12$、$d = 1$ を代入した場合では結果が異なります。つまり、b の値と d の値を入れ替えると $ad + bc$ の結果が違ってきます。よって、たすきがけは、三項式を因数分解するために、正しい答えがみつかるまであてはまりそうな数を入れて試算する**試行錯誤**といわれる方法です。

- もし $a = 1$、$c = 2$ であるなら $b = 1$、$d = -12$

$$\begin{array}{ccccc} 1x & & 1 & \rightarrow & 2x \\ \text{かけます}\downarrow & \times & \downarrow\text{かけます} & & \downarrow\text{たします} \\ 2x & & -12 & \rightarrow & -12x \\ \hline 2x^2 & & -12 & & -10x \end{array}$$

$b = -12$ と $d = 1$ を代入すると、$ad + bc$ は −23 になります。

- もし $a = 1$、$c = 2$ であるなら、$b = 2$、$d = -6$

$$\begin{array}{ccccc} 1x & & 2 & \rightarrow & 4x \\ \text{かけます}\downarrow & \times & \downarrow\text{かけます} & & \downarrow\text{たします} \\ 2x & & -6 & \rightarrow & -6x \\ \hline 2x^2 & & -12 & & -2x \end{array}$$

- もし $a = 1$、$c = 2$ であるなら、$b = 3$、$d = -4$

$$\begin{array}{ccccc} 1x & & 3 & \rightarrow & 6x \\ \text{かけます}\downarrow & \times & \downarrow\text{かけます} & & \downarrow\text{たします} \\ 2x & & -4 & \rightarrow & -4x \\ \hline 2x^2 & & -12 & & 2x \end{array}$$

- もし $a = 1$、$c = 2$ であるなら、$b = 4$、$d = -3$

$$\begin{array}{ccccc} 1x & & 4 & \rightarrow & 8x \\ \text{かけます}\downarrow & \times & \downarrow\text{かけます} & & \downarrow\text{たします} \\ 2x & & -3 & \rightarrow & -3x \\ \hline 2x^2 & & -12 & & 5x \end{array}$$

- もし $a = 1$、$c = 2$ であるなら、$b = -4$、$d = 3$

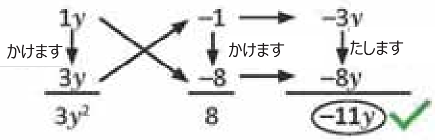
$$\begin{array}{ccccc} 1x & & -4 & \rightarrow & -8x \\ \text{かけます}\downarrow & \times & \downarrow\text{かけます} & & \downarrow\text{たします} \\ 2x & & 3 & \rightarrow & 3x \\ \hline 2x^2 & & -12 & & -5x \end{array}$$

したがって、$2x^2 - 5x - 12 = (x - 4)(2x + 3)$

b) a と c は整数とします。y の係数は負の数で、定数項は正の数です。これは、b と d に当てはまる数字がどちらも負の数であることを意味しています。上記を考慮して、3 と 8 を因数の積と考えると、次のように表すことができます。

$$3 = 1(3) \qquad 8 = \begin{cases} -1(-8) \text{ o } -8(-1) \\ -2(-4) \text{ o } -4(-2) \end{cases}$$

• もしa = 1、c = 3であるなら、b = −1、d = −8



よって、$3y^2 - 11y + 8 = (y - 1)(3y - 8)$

まとめ

$mx^2 + nx + p$ の形の三項式で、m、n、p がそれぞれゼロでない整数で、m が正の数であるとします。$(ax + b)(cx + d)$ の形に因数分解するためには次の手順をとります。

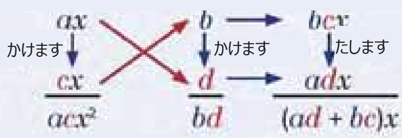
1. m と p をそれぞれ二つの因数に因数分解します。

   a) もし n と p が正の数であるならば、p は二つの正の数の積であるはずです。

   b) もし n が負の数で p が正の数であるなら、p は二つの負の数の積であるはずです。

   c) もし p が負の数であるならば、p は正の数と負の数の積であるはずです。

2. 以下の図で、a と c に m の因数を代入し、b と d に P の因数を代入して、$ad + bc = n$ となる組み合わせがみつかるまで、全ての組み合わせを試します。



3. $mx^2 + nx + p$ は $(ax + b)(cx + d)$ となります。

この図にある前回の三項式の因数分解で用いたaxとd、cxとb というようにななめに掛け合わせる方法を **たすきがけ** といいます。またシンプルなクロス計算といいます。

問題

1. 以下の多項式をたすきがけを使って因数分解しなさい。

a) $2x^2 - x - 10$	b) $2y^2 - y - 15$	c) $3y^2 - 16y + 5$
d) $5x^2 + 2x - 3$	e) $5a^2 - 14a + 8$	f) $7x^2 - 5x - 2$
g) $4x^2 + 17x - 15$	h) $6y^2 - 17y + 12$	i) $8a^2 - 18a - 5$

2. 三項式 $21x^2 + nx + 21$ を a、b、c、d の整数を利用して$(ax + b)(cx + d)$ に因数分解できるような整数をnとします。n がなぜ偶数になるかを説明しなさい。

3. 二項式 $x + 1$ は三項式 $x^2 + mx - 2$ の因数なので、$x^2 + mx - 2 = (x + 1)(x - b)$ さらに、二項式 $2x - 1$ は三項式 $nx^2 + 5x - 4$ の因数です。以上から、$\frac{n}{m}$ を求めなさい。

達成の目安

1.14 a、b、c、dに整数が入る三項式をたすきがけを使って$(ax + b)(cx + d)$の形に因数分解しなさい。

学習の流れ

この授業では引き続きたすきがけを使って三項式を乗法公式 $(ax + b)(cx + d)$ の形に因数分解しますが、今回は a、b、c、d が正の整数になっているものも負の整数になっているものも扱います。

ねらい

導入問題と問題ブロックの三項式には、係数が正の数のものも負の数のものも含めており、まとめではたすきがけを一般化させています。

つまずきやすい点

生徒たちが導入問題の解き方だけではたすきがけの仕方がよく理解できないようであれば、問題ブロックの問1a)を例にとり、その解き方の手順を一つ一つ解説します。

問題の解き方

1a)

$$\begin{array}{ccccc} 1x & & 2 & \longrightarrow & 4x \\ \downarrow\text{かけます} & \times & \downarrow\text{かけます} & & \downarrow\text{たします} \\ 2x & & -5 & \longrightarrow & -5x \\ \hline 2x^2 & & -10 & & -x \end{array}$$

したがって、$2x^2 - x - 10 = (x + 2)(2x - 5)$

1b)

$$\begin{array}{ccccc} 1y & & -3 & \longrightarrow & -6y \\ \downarrow\text{かけます} & \times & \downarrow\text{かけます} & & \downarrow\text{たします} \\ 2y & & 5 & \longrightarrow & 5y \\ \hline 2y^2 & & -15 & & -y \end{array}$$

したがって、$2y^2 - y - 15 = (y - 3)(2y + 5)$

1c) $3y^2 - 16y + 5 = (y - 5)(3y - 1)$

1d) $5x^2 + 2x - 3 = (x + 1)(5x - 3)$

1e) $5a^2 - 14a + 8 = (a - 2)(5a - 4)$

1f) $7x^2 - 5x - 2 = (x - 1)(7x + 2)$

1g) $4x^2 + 17x - 15 = (x + 5)(4x - 3)$

1h) $6y^2 - 17y + 12 = (2y - 3)(3y - 4)$

1i) $8a^2 - 18a - 5 = (2a - 5)(4a + 1)$

2. $21x^2 + nx + 21 = (ax + b)(cx + d)$ であるので、以下が成り立ちます。$ac = 21$、$bd = 21$、$ad + bc = n$ 最初の二つから、a、c、b、d がいずれも奇数であることが分かります。（積の結果が奇数となっているため）したがって ad と bc も奇数です。でも $ad + bc$ はその和になるので偶数になります。よって、$ad + bc = n$ で偶数です

問2の解答では、膨大な計算をする必要はありません。生徒たちが、n がなぜ偶数になるかを直感的に理解できれば十分です。

3. $x^2 + mx - 2 = (x + 1)(x - b)$ であるなら、$-b = -2$ 、$1 - b = m$ となり、よって、$b = 2$、$m = -1$ また $nx^2 + 5x - 4 = (2x - 1)(cx + d)$ はたすきがけを使うと、

$$\begin{array}{ccccc} 2x & & -1 & \longrightarrow & -cx \\ \downarrow & \times & \downarrow & & \downarrow \\ cx & & d & \longrightarrow & 2dx \\ \hline 2cx^2 & & -d & & (-c + 2d)x \end{array}$$

したがって、$-d = -4$、$-c + 2d = 5$ となり、先ほどの方程式を解くと、$d = 4$、$c = 3$ 最後に、$2c = n$、よって $n = 6$、$\frac{n}{m} = \frac{6}{-1} = -6$

1.15 因数分解の組み合わせ　第 1 部

導入問題

以下の多項式を因数分解しなさい。

a) $6x^2y - 4x^2 + 30xy - 20x$　　　b) $6x^2y + 57xy + 27y$

解法

a) まず最初に多項式の項から共通因数を取り出します。そして次に前回までの授業で習った因数分解の方法のいずれかをあてはめます。

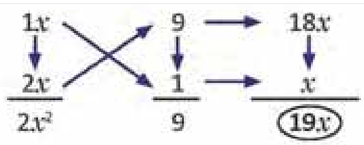
$$\begin{aligned} 6x^2y - 4x^2 + 30xy - 20x &= 2x(3xy - 2x + 15y - 10) && \text{共通因数 } 2x \\ &= 2x[(3xy - 2x) + (15y - 10)] && \text{大括弧の中で項をくくり、} \\ &= 2x[x(3y - 2) + 5(3y - 2)] && \text{共通因数 } x \text{ と } 5 \text{ それぞれを取り出し、} \\ &= 2x(x + 5)(3y - 2) && \text{共通因数} 3y - 2 \text{を取り出します。} \end{aligned}$$

よって、$6x^2y - 4x^2 + 30xy - 20x = 2x(x + 5)(3y - 2)$

b) 前の問と同じように、多項式の項から共通因数を取り出し、それから前回までの授業でならった方法で因数分解をします。

$6x^2y + 57xy + 27y = 3y(2x^2 + 19x + 9)$　　共通因数 $3y$

たすきがけを使って $2x^2 + 19x + 9$ を因数分解 します。



よって、$6x^2y + 57xy + 27y = 3y(x + 9)(2x + 1)$

全体を通して

多項式の因数分解をする際は、まず最初に共通となる単項式があるかどうか確認します。あれば、その単項式を取り出して前回までの授業で習った方法のいずれかを使って他の多項式を因数分解します。

教育省(MINED)は日常的な算数に関する一連のビデオを作製していますが、そのうちの 1 つが多項式の因数分解を紹介しています。こちらのリンクで確認できます。
https：//goo.gl/ZgJVzs

問題

1. 以下の多項式を因数分解しなさい。

a) $20xy^2 - 20xy - 15x$　　b) $90x^3 - 40xy^2$

c) $18x^3y + 12x^2y^2 + 2xy^3$　　d) $6ab^3 - 33ab^2 + 36ab$

e) $225x^3y - 180x^2y^2 + 36xy^3$　　f) $3a^2bc + 6a^2bd + 15a^2b - 2a^2c - 4a^2d - 10a^2$

2. 多項式 $(x + 1)(x - 3y + 4)^2 - (x + 1)(2x + y - 5)^2$ を因数分解しなさい。

ここでは計算をせず、共通因数を特定しなさい。

達成の目安

1.15 多項式から共通因数となる単項式を取り出して因数分解しなさい。

学習の流れ

この授業では、因数分解の課で学んだすべての方法を使って様々な多項式の因数分解に取り組みます。 それぞれの問題では、生徒たちはまず項の共通因数を取り出し、それから因数分解を進めます。

つまずきやすい点

生徒たちには、多項式の項に共通因数があるかを必ず確認するよう念押しします。導入問題であまり時間をとらないように、両方の問題を配ってもいいし、1つだけを扱ってもう1つは例題としておいてもいいです。

問題の解き方

1a) $20xy^2 - 20xy - 15x = 5x(4y^2 - 4y - 3)$
$= 5x[(2y)^2 - 2(2y) - 3]$
$= 5x(2y + 1)(2y - 3)$

共通因数 $5x$ を取り出します。
三項式 $x^2 + (a + b)x + ab$ の因数分解を使って $4y^2 - 4y - 3$ を因数分解しなさい。

$4y^2 - 4y - 3$ を因数分解にも、たすきがけが使えます。

1b) $90x^3 - 40xy^2 = 10x(9x^2 - 4y^2)$
$= 10x[(3x)^2 - (2y)^2]$
$= 10x(3x + 2y)(3x - 2y)$

共通因数$10x$を取り出し、
$9x^2 = (3x)^2$ 、 $4y^2 = (2y)^2$ とします。
因数分解 二乗の差

1c) $18x^3y + 12x^2y^2 + 2xy^3 = 2xy(9x^2 + 6xy + y^2)$
$= 2xy[(3x)^2 + 2(3x)(y) + y^2]$
$= 2xy(3x + y)^2$

共通因数$2xy$を取り出します。
$9x^2 = (3x)^2$ 、 $6xy = 2(3x)(y)$とし、
完全平方三項式の因数分解をします。

1d) $6ab^3 - 33ab^2 + 36ab = 3ab(2b^2 - 11b + 12)$
$= 3ab(b - 4)(2b - 3)$

共通因数 $3ab$ を取り出します。
たすきがけを使って $2b^2 - 11b + 12$ を因数分解します。

1e) $225x^3y - 180x^2y^2 + 36xy^3 = 9xy(25x^2 - 20xy + 4y^2)$
$= 9xy[(5x)^2 - 2(5x)(2y) + (2y)^2]$
$= 9xy(5x - 2y)^2$

共通因数 $9xy$ を取り出します。
$25x^2 = (5x)^2$、$20xy = 2(5x)(2y)$、$4y^2 = (2y)^2$
完全平方三項式の因数分解をします。

1f) $3a^2bc + 6a^2bd + 15a^2b - 2a^2c - 4a^2d - 10a^2 = a^2(3bc + 6bd + 15b - 2c - 4d - 10)$
$= a^2[3b(c + 2d + 5) - 2(c + 2d + 5)]$
$= a^2(3b - 2)(c + 2d + 5)$

2. $(x + 1)(x - 3y + 4)^2 - (x + 1)(2x + y - 5)^2 = (x + 1)[(x - 3y + 4)^2 - (2x + y - 5)^2]$
$= (x + 1)[(x - 3y + 4) + (2x + y - 5)][(x - 3y + 4) - (2x + y - 5)]$
$= (x + 1)(x - 3y + 4 + 2x + y - 5)(x - 3y + 4 - 2x - y + 5)$
$= (x + 1)(3x - 2y - 1)(- x - 4y + 9)$

1.16 因数分解の組み合わせ 第 2 部

導入問題

以下の多項式を因数分解しなさい。

a) $ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 - 2axy - 2bxy$　　b) $2mx^2 - 2nx^2 + 5mx - 5nx - 3m + 3n$

解法

a) 多項式の項には共通因数がありませんが、共通因数をもつものとしてそれらの項をくくって共通因数を取り出すことができます。つまり、

$$bxy = (ax^2 + ay^2) + (bx^2 + by^2) + (-2axy - 2bxy)$$ 項を括弧でくくります。

$$= a(x^2 + y^2) + b(x^2 + y^2) - 2xy(a + b)$$
$$= (a + b)(x^2 + y^2) - 2xy(a + b)$$
それぞれの共通因数を取り出します。

次に多項式 $a + b$の共通因数を取り出し、二つ目の因数を因数分解します。

$$ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 - 2axy - 2bxy = (a + b)(x^2 + y^2 - 2xy)$$
$$= (a + b)(x^2 - 2xy + y^2)$$
$$= (a + b)(x - y)^2$$

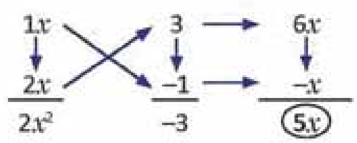
共通因数 $a + b$ を取り出し、項を整理し、$x^2 - 2xy + y^2$ を因数分解 します。

よって、$ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 - 2axy - 2bxy = (a + b)(x - y)^2$

b) 前の問題と同じように、共通因数をもつ項をくくり、その因数を取り出します。

$$2mx^2 - 2nx^2 + 5mx - 5nx - 3m + 3n = 2x^2(m - n) + 5x(m - n) - 3(m - n)$$
$$= (2x^2 + 5x - 3)(m - n)$$

$2x^2 + 5x - 3$ をたすきがけを使って因数分解 します。



したがって、$2x^2 + 5x - 3 = (x + 3)(2x - 1)$、$2mx^2 - 2nx^2 + 5mx - 5nx - 3m + 3n = (x + 3)(2x - 1)(m - n)$

全体を通して

多項式を因数分解する際に、共通となる単項式の項がない場合は、共通因数があるものとして項をくくり、共通因数となる多項式を取り出し、今まで学習した方法のいずれかを使って残りの項を因数分解します。

また、多項式で共通因数をもたない項でも因数分解をしやすいように項をくくることができます。

問題

以下の多項式を因数分解しなさい。

a) $4a^2x + 4a^2y - b^2x - b^2y$

b) $2cm^2 + dm^2 + 50cn^2 + 25dn^2 + 20cmn + 10dmn$

c) $4a^2x - 12abx + 9b^2x - 8a^2y + 24aby - 18b^2y$

d) $(a + b)(c - d)^2 + 2(a + b)(c - d)(2c + 3d) + (a + b)(2c + 3d)^2$

達成の目安

1.16 共通因数となる単項式をもつ項をくくって多項式の因数分解をしなさい。

学習の流れ

この授業では、生徒たちは示された多項式の項に共通因数となる単項式があるものとして括弧でくくり、それからこの課で学習した方法を使って解く必要があります。

つまずきやすい点

まとめにもあるように、生徒たちに、共通因数のある項はくくることができることを念押しします。もし導入問題に時間がかかり過ぎると感じる場合は、練習問題だけを進めて他の問題は例題オプションとします。

問題の解き方

生徒たちに、項との関連の仕方は各設問の答えにあるものと異なっていても結果は常に同じになるということを念押しします。違いはそれぞれ因数が入れ替わっている点です。

a) $4a^2x + 4a^2y - b^2x - b^2y = (4a^2x + 4a^2y) - (b^2x + b^2y)$
$= 4a^2(x + y) - b^2(x + y)$
$= (4a^2 - b^2)(x + y)$
$= (2a + b)(2a - b)(x + y)$

b) $2cm^2 + dm^2 + 50cn^2 + 25dn^2 + 20cmn + 10dmn = (2cm^2 + 50cn^2 + 20cmn) + (dm^2 + 25dn^2 + 10dmn)$
$= 2c(m^2 + 25n^2 + 10mn) + d(m^2 + 25n^2 + 10mn)$
$= (2c + d)[m^2 + 2m(5n) + (5n)^2]$
$= (2c + d)(m + 5n)^2$

c) $4a^2x - 12abx + 9b^2x - 8a^2y + 24aby - 18b^2y = (4a^2x - 12abx + 9b^2x) - (8a^2y - 24aby + 18b^2y)$
$= x(4a^2 - 12ab + 9b^2) - 2y(4a^2 - 12ab + 9b^2)$
$= (x - 2y)(4a^2 - 12ab + 9b^2)$
$= (x - 2y)[(2a)^2 - 2(2a)(3b) + (3b)^2]$
$= (x - 2y)(2a - 3b)^2$

d) $(a + b)(c - d)^2 + 2(a + b)(c - d)(2c + 3d) + (a + b)(2c + 3d)^2 = (a + b)[(c - d)^2 + 2(c - d)(2c + 3d) + (2c + 3d)^2]$
$= (a + b)[(c - d) + (2c + 3d)]^2$
$= (a + b)(c - d + 2c + 3d)^2$
$= (a + b)(3c + 2d)^2$

1.17 復習問題

1. 以下の多項式（共通因数）を因数分解しなさい。

a) $4x^2y^2 + 6x^2y - 10xy$
b) $-15a^2b^2 + 12b^3 - 21b^2$
c) $-2a^2b^2c^2 - 20ab^2c - 10abc$
d) $\frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}xy - \frac{1}{8}x$
e) $2ax + bx + 6ay + 3by$
f) $3mx - 2my - 12nx + 8ny$
g) $5ax - 2bx + \frac{5}{3}ay - \frac{2}{3}by$
h) $2mx + 4nx - 3my - 6ny + 5m + 10n$

2. 以下の $(x + a)(x + b)$ 型の三項式を因数分解しなさい。

a) $x^2 - 17x + 70$
b) $y^2 + 3y - 40$
c) $a^2 - 3a - 54$
d) $b^2 + 14b + 33$
e) $m^2 + 2m - 35$
f) $n^2 - 8n - 20$
g) $4x^2 + 24x + 35$
h) $4y^2 - 24y + 27$
i) $9a^2 - 3a - 20$

問2では、設問 g)、h)、 i)で は、多項式が $m^2 + pm + q$ の形になるように変数を代入して $(m + a)(m + b)$ の形に因数分解します。

3. 以下の多項式を因数分解しなさい（二乗の三項式と二乗の差）

a) $x^2 + 18x + 81$
b) $y^2 - 20y + 100$
c) $a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{16}$
d) $b^2 - 16$
e) $y^2 - 121$
f) $\frac{1}{49} - a^2$
g) $25x^2 + 30xy + 9y^2$
h) $\frac{9}{4}a^2 - \frac{25}{49}b^2$
i) $900x^2 - \frac{121}{100}y^2$

4. たすきがけを使って因数分解しなさい。

a) $2x^2 + 19x + 45$
b) $3y^2 + 26y + 16$
c) $5a^2 - 27a - 18$
d) $3a^2 - 10a + 8$
e) $5b^2 + 13b - 6$
f) $10a^2 - 23a - 5$
g) $12y^2 - 23y + 5$
h) $8x^2 + 10x - 25$
i) $6x^2 + 11x + 4$

5. 以下の多項式を因数分解しなさい。

a) $4x^3y - 100xy^3$
b) $5m^3 + 15m^2 - 350m$
c) $75a^3b - 60a^2b^2 + 12ab^3$
d) $-96x^3y - 144x^2y^2 - 54xy^3$
e) $4xy^3 - 26xy^2 + 42xy$
f) $60a^2m - 80a^2n + 30abm - 40abn$

6. 展開せずに以下の多項式を因数分解しなさい。

a) $(5x - 2y + 9)^2 - (x - 8)^2$
b) $(a + 7)^2 + 2(a + 7)(b - 6) + (b - 6)^2$
c) $(2y + 3)^2 + 3(2y + 3) - 28$
d) $(6y - 1)^2 - 5(6y - 1) - 14$
e) $4(m + n)^2 - 4(m + n)(n - 2) + (n - 2)^2$
f) $3(4x + 1)^2 + 11(4x + 1) - 20$

7. 多項式 $amx + anx + amy + any + bmx + bnx + bmy + bny$ を因数分解しなさい。

8. 因数分解を使って以下の式を解きなさい。

a) $999^2 - 1$
b) $550^2 - 450^2$
c) $98^2 + 4(98) + 4$
d) $995^2 + 3(995) - 10$

達成の目安

1.17 多項式の因数分解に関する問題を解きなさい。

問題の解き方

1a) $2xy(2xy + 3x - 5)$

1b) $-3b^2(5a^2 - 4b + 7)$

1c) $-2abc(abc + 10b + 5)$

1d) $\frac{1}{2}x\left(xy - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\right)$

1e) $(2a + b)(x + 3y)$

1f) $(m - 4n)(3x - 2y)$

1g) $(5a - 2b)\left(x + \frac{1}{3}y\right)$

1h) $(m + 2n)(2x - 3y + 5)$

2a) $(x - 7)(x - 10)$

2b) $(y + 8)(y - 5)$

2c) $(a + 6)(a - 9)$

2d) $(b + 3)(b + 11)$

2e) $(m + 7)(m - 5)$

2f) $(n + 2)(n - 10)$

2g) $(2x + 5)(2x + 7)$

2h) $(2y - 3)(2y - 9)$

2i) $(3a + 4)(3a - 5)$

3a) $(x + 9)^2$

3b) $(y - 10)^2$

3c) $\left(a + \frac{1}{4}\right)^2$

3d) $(b + 4)(b - 4)$

3e) $(y + 11)(y - 11)$

3f) $\left(\frac{1}{7} + a\right)\left(\frac{1}{7} - a\right)$

3g) $(5x + 3y)^2$

3h) $\left(\frac{3}{2}a + \frac{5}{7}b\right)\left(\frac{3}{2}a - \frac{5}{7}b\right)$

3i) $\left(30x + \frac{11}{10}y\right)\left(30x - \frac{11}{10}y\right)$

4a) $(x + 5)(2x + 9)$

4b) $(y + 8)(3y + 2)$

4c) $(a - 6)(5a + 3)$

4d) $(a - 2)(3a - 4)$

4e) $(b + 3)(5b - 2)$

4f) $(2a - 5)(5a + 1)$

4g) $(3y - 5)(4y - 1)$

4h) $(2x + 5)(4x - 5)$

4i) $(2x + 1)(3x + 4)$

5a) $4xy(x + 5y)(x - 5y)$

5b) $5m(m + 10)(m - 7)$

5c) $3ab(5a - 2b)^2$

5d) $-6xy(4x + 3y)^2$

5e) $2xy(y - 3)(2y - 7)$

5f) $10a(2a + b)(3m - 4n)$

6a) $(6x - 2y + 1)(4x - 2y + 17)$

6b) $(a + b + 1)^2$

6c) $2(y + 5)(2y - 1)$

6d) $2(6y + 1)(3y - 4)$

6e) $(2m + n + 2)^2$

6f) $2(2x + 3)(12x - 1)$

7. $(a + b)(m + n)(x + y)$

8a) $999^2 - 1^2 = (999 + 1)(999 - 1) = 998\,000$

8b) $550^2 - 450^2 = (550 + 450)(550 - 450) = 100\,000$

8c) $98^2 + 2(98)(2) + 2^2 = (98 + 2)^2 = 10\,000$

8d) $995^2 + 3(995) - 10 = (995 + 5)(995 - 2) = 993\,000$

レッスン 2 多項式の除法

2.1 単項式による多項式の除算

導入問題

次の割り算を解きましょう。

a) $(20xy + 16x - 4y) \div 4$　　　b) $(12ab - 21b^2) \div (3b)$

多項式をある数で割る除算を解くには、多項式の各項にその割る数の逆数を掛けて解きましょう。

ユニット 2

解法

a) 割り算を、除数の逆数との掛け算に直して解きます。つまり、

$$\begin{aligned}(20xy + 16x - 4y) \div 4 &= (20xy + 16x - 4y)\left(\frac{1}{4}\right)\\ &= 20xy\left(\frac{1}{4}\right) + 16x\left(\frac{1}{4}\right) - 4y\left(\frac{1}{4}\right)\\ &= 5xy + 4x - y\end{aligned}$$

したがって、$(20xy + 16x - 4y) \div 4 = 5xy + 4x - y$ となります。

b) 前の文字式では、割り算 $(12ab - 21b^2) \div (3b)$ は、$12ab - 21b^2$ に $3b$ の逆数を掛ける掛け算と等しいので、次のようになります。

$$\begin{aligned}(12ab - 21b^2) \div (3b) &= (12ab - 21b^2)\left(\frac{1}{3b}\right)\\ &= 12ab\left(\frac{1}{3b}\right) - 21b^2\left(\frac{1}{3b}\right)\\ &= \frac{\overset{4}{\cancel{12}}a\cancel{b}}{\cancel{3}\cancel{b}} - \frac{\overset{7}{\cancel{21}}\overset{b}{\cancel{b^2}}}{\cancel{3}\cancel{b}}\\ &= 4a - 7b\end{aligned}$$

$$\frac{b^2}{b} = \frac{\cancel{b}(b)}{\cancel{b}} = b$$

そして、$(12ab - 21b^2) \div (3b) = 4a - 7b$ となります。

一般的に

多項式を単項式で割るためには、多項式の各項にその単項式の逆数を掛けて解き、その結果を約分します。

例

割り算 $(15x^2y^2 - 40x^2y - 25xy) \div (-5xy)$ を解きます。

結論で学んだことを応用します。

$$\begin{aligned}(15x^2y^2 - 40x^2y - 25xy) \div (-5xy) &= 15x^2y^2\left(-\frac{1}{5xy}\right) - 40x^2y\left(-\frac{1}{5xy}\right) - 25xy\left(-\frac{1}{5xy}\right)\\ &= -\frac{\overset{3}{\cancel{15}}\overset{x}{\cancel{x^2}}\overset{y}{\cancel{y^2}}}{\underset{1}{\cancel{5}}\cancel{x}\cancel{y}} + \frac{\overset{8}{\cancel{40}}\overset{x}{\cancel{x^2}}\cancel{y}}{\underset{1}{\cancel{5}}\cancel{x}\cancel{y}} + \frac{\overset{5}{\cancel{25}}\cancel{x}\cancel{y}}{\underset{1}{\cancel{5}}\cancel{x}\cancel{y}}\\ &= -3xy + 8x + 5\end{aligned}$$

したがって、$(15x^2y^2 - 40x^2y - 25xy) \div (-5xy) = -3xy + 8x + 5$ となります。

問題

以下の割り算を解きましょう。

a) $(-8abc + 22a^2 - 18a) \div (2a)$　　　b) $(18xyz + 24x^2yz) \div (3xyz)$

c) $(-10a^2b^2 + 45a^2bc - 20abc) \div (-5ab)$　　　d) $(4x^2y^2z^2 - 40x^2y^2z - 32xy^2z^2) \div (-4xyz)$

e) $(8a^2b + 12ab^2) \div (10ab)$　　　f) $(-14xyz^2 + 15xy^2z^2 - 18xyz) \div (-6xy)$

g) $(-2ab^2 + 5ab^3) \div \left(\frac{1}{2}b\right)$　　　h) $(9xyz - 2xy) \div \left(-\frac{3}{2}xy\right)$

達成の目安

2.1 多項式に除数の逆数を掛けて、単項式による多項式の割り算を解きましょう。

学習の流れ

8 年では、数による多項式の割り算を学習しました。この授業では、それの復習をし、同じ手順を単項式による多項式の割り算に一般化しましょう。

ねらい

導入問題の文字式 a) では、8 年で学習した数による多項式の割り算の復習をしましょう。その数の逆数による掛け算に直して解きましょう。b) では、単項式による割り算なので、同じプロセスを使って解きましょう。結論は、このプロセスは一般化でき、例題においても（除数が負の数）、問題集においても使用しなければなりません。

つまずきやすい点

必要であれば、分数の掛け算で使用するプロセスを復習させましょう。

問題の解き方：

a) $(-8abc + 22a^2 - 18a) \div (2a) = -8abc\left(\frac{1}{2a}\right) + 22a^2\left(\frac{1}{2a}\right) - 18a\left(\frac{1}{2a}\right)$

$= -\frac{\overset{4}{\cancel{8}}\cancel{a}bc}{\cancel{2}\cancel{a}} + \frac{\overset{11}{\cancel{22}}\overset{a}{\cancel{a^2}}}{\cancel{2}\cancel{a}} - \frac{\overset{9}{\cancel{18}}\cancel{a}}{\cancel{2}\cancel{a}}$

$= -4bc + 11a - 9$

b) $(18xyz + 24x^2yz) \div (3xyz) = 18xyz\left(\frac{1}{3xyz}\right) + 24x^2yz\left(\frac{1}{3xyz}\right)$

$= \frac{\overset{6}{\cancel{18xyz}}}{\cancel{3xyz}} + \frac{\overset{8}{\cancel{24}}\overset{x}{\cancel{x^2}}\cancel{yz}}{\cancel{3xyz}}$

$= 6 + 8x$

c) $(-10a^2b^2 + 45a^2bc - 20abc) \div (-5ab) = -10a^2b^2\left(-\frac{1}{5ab}\right) + 45a^2bc\left(-\frac{1}{5ab}\right) - 20abc\left(-\frac{1}{5ab}\right)$

$= \frac{\overset{2}{\cancel{10}}\overset{a}{\cancel{a^2}}\overset{b}{\cancel{b^2}}}{\cancel{5ab}} - \frac{\overset{9}{\cancel{45}}\overset{a}{\cancel{a^2}}\cancel{b}c}{\cancel{5ab}} + \frac{\overset{4}{\cancel{20}}a\cancel{b}c}{\cancel{5}\cancel{b}}$

$= 2ab - 9ac + 4c$

d) $(4x^2y^2z^2 - 40x^2y^2z - 32xy^2z^2) \div (-4xyz) = -xyz + 10xy + 8yz$

e) $(8a^2b + 12ab^2) \div (10ab) = \frac{4}{5}a + \frac{6}{5}b$

f) $(-14xyz^2 + 15xy^2z^2 - 18xyz) \div (-6xy) = \frac{7}{3}z^2 - \frac{5}{2}yz^2 + 3z$

g) $(-2ab^2 + 5ab^3) \div \left(\frac{b}{2}\right) = -2ab^2\left(\frac{2}{b}\right) + 5ab^3\left(\frac{2}{b}\right)$

$= -4ab + 10ab^2$

h) $(9xyz - 2xy) \div \left(-\frac{3}{2}xy\right) = -6z + \frac{4}{3}$

レッスン 2

2.2 多項式による多項式の割り算

定義

変数が 1 つの多項式 p と q があり、そして多項式 d と r があり、次のようになります。

$$p = qd + r$$

ここで、r はゼロか、または r の次数は q の次数よりも小さいです。数の割り算と同じように、多項式 **p が被除数、**q **が除数、d が商で、多項式 r は、p を q で除した時の剰余です。**

多項式を除す手順は次のようになります。

1. 割り算を縦型に書き、被除数と除数をそれぞれの次数の高い順に項を並べます。次数が無い項の場合は、該当する位置にゼロと書きます。

基礎教育では、数の割り算の学習は次のように縦型に書いて行いました。

被除数 剰余	除数 商

2. 被除数の 1 番目の項を除数の 1 番目の項で割って、商の 1 番目の項を得ます。
3. ステップ2で得られた商と、除数の各項を掛けます。次に、その結果を被除数から引きます。
4. このプロセスを繰り返しますが、今度はステップ3で得た結果を被除数として扱います。
   これを、被除数の多項式の次数が除数のそれよりも小さくなるまで繰り返します。

この手順は、**筆算**という呼び方で知られています。

例 1

次の割り算を解きましょう。$(x^3 + 3x^2 - 5x - 4) \div (x + 2)$ そして被除数を、$qd + r$ の形で書きましょう。

被除数の各項は、既に次数の高い順に並べられています。割り算 $(x^3 + 3x^2 - 5x - 4) \div (x + 2)$ を、数の割り算と同様に、縦型に書きます。

$$x^3 + 3x^2 - 5x - 4 \;\underline{|\, x + 2}$$

被除数の 1 番目の項を除数の 1 番目の項で割ります。つまり、$x^3 \div x$ を解き、商の 1 番目の項を得ます。

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 3x^2 - 5x - 4 & \underline{x + 2} \\ & x^2 \longleftarrow x^3 \div x \text{ の結果} \end{array}$$

除数に、商の 1 番目の項を掛けます。つまり、$(x + 2)(x^2) = x^3 + 2x^2$ となります。この結果を、被除数から引きます。

$x^3 + 2x^2$ を被除数から引くということは、これらの項の符号は変わります。

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^3} + 3x^2 - 5x - 4 & \underline{x + 2} \\ \underline{-\cancel{x^3} - 2x^2} & x^2 \\ 0 + \;x^2 - 5x - 4 & \end{array}$$

$x^2 - 5x + 4$ を被除数として、同じ手順をくり返します。

$(x + 2)(x)$ の結果を、$x^2 - 5x + 4$ から引きます。

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 3x^2 - 5x - 4 & \underline{x + 2} \\ \underline{-x^3 - 2x^2} & x^2 + x \longleftarrow x^2 \div x \text{ の結果} \\ 0 + \cancel{x^2} - 5x - 4 & \\ \quad\; \underline{-\cancel{x^2} - 2x} & \\ \quad\; 0 \;\; - 7x - 4 & \end{array}$$

今度は、$-7x-4$ を被除数として扱います。

$$
\begin{array}{rl}
x^3+3x^2-5x-4 & \underline{|\,x+2} \\
\underline{-x^3-2x^2} & x^2+x-7 \\
0+x^2-5x-4 & \\
\underline{-x^2-2x} & \\
0\ \cancel{-7x}-4 & \\
\underline{\cancel{+7x}+14} & \\
0\ +10 &
\end{array}
$$

$(-7x)\div x$ の結果

$(x+2)(-7)$ の結果を、$-7x-4$ から引きます。

計算式 $(x+2)(x^2+x-7)+10$ を展開して、割り算が正しく解かれたかを確認することができます。

よって、$x^3-3x^2-5x-4=(x+2)(x^2+x-7)+10$ となります。

例 2

割り算 $(2x^3-20x-50)\div(x^2+x-4)$ を解きましょう。被除数を、$qd+r$ の形で書きましょう。

被除数は、x^2 の項を含んでいません。そういう時は、縦型の割り算を行うにあたって、その項があるべき位置にゼロと書きます。

$$
2x^3+0x^2-20x-50\ \underline{|\,x^2+x-4}
$$

そして、前の例で見た手順で解きます。

$$
\begin{array}{rl}
\cancel{2x^3}+0x^2-20x-50 & \underline{|\,x^2+x-4} \\
\underline{-\cancel{2x^3}-2x^2+8x} & 2x-2 \\
0\ -\cancel{2x^2}-12x-50 & \\
\underline{\cancel{2x^2}+2x-8} & \\
0\ -10x-58 &
\end{array}
$$

$2x^3-20x-50$ から $(x^2+x-4)(2x)$ を引きます。

$-2x^2-12x-50$ から $(x^2+x-4)(-2)$ を引きます。

$(2x^3)\div x^2$ の結果

$(-2x^2)\div x^2$ の結果

したがって、$2x^3-20x-50=(x^2+x-4)(2x-2)-10x-58$ となります。

問題

1. 以下の割り算を解きましょう。そして被除数を、$qd+r$ の形に書きましょう。

a) $(x^3+x^2-5x+7)\div(x+3)$
b) $(x^3+2x^2-5x+7)\div(x-1)$
c) $(x^3+4x^2-8x-16)\div(x+5)$
d) $(x^3-6x^2+4x+19)\div(x-3)$
e) $(x^3+3x+9)\div(x+2)$
f) $(x^3-7x^2+11)\div(x-2)$
g) $(x^3+5x^2+5x+3)\div(x^2+4x+1)$
h) $(x^3+x^2-12x+2)\div(x^2+3x-6)$
i) $(x^3-5x^2+5x-1)\div(x-1)$
j) $(x^3+4x^2-6x-5)\div(x+5)$
k) $(2x^3-3x^2-x-2)\div(2x^2+x+1)$
l) $(3x^3+2x^2-2x-1)\div(3x^2-x-1)$

2. $(x^3+2x^2-x+a)\div(x-2)$ で、この割り算の剰余がゼロになるための a の値を求めましょう。

3. 割り算 $(2x^4+6x^3-x^2+3x-1)\div(2x^2+1)$ を解きましょう。

達成の目安

2.2 多項式による多項式の割り算を、アルゴリズムを使って解きましょう。

学習の流れ

この授業では、「多項式の筆算」としても知られている、多項式の割り算のアルゴリズムを導入しましょう。そのためには、基礎教育で学習した縦型に書いて行う数の割り算を復習します。なぜならば、多項式においても手順は同様だからです。

ねらい

授業は定義から始めます。なぜならば、例題によって、そこに説明されていることをステップバイステップ行うことで、学生たちがアルゴリズムを自分のものにして、問題集で使用できるようにするのがねらいだからです。2 では、より深い分析が必要であることが見て取れ、どれが割り算の剰余であるかが明確になります。

つまずきやすい点

多項式の割り算の手順と照合するために、基礎教育で学習した自然数の縦型に書いた割り算の実習を展開するのも良いでしょう。

問題の解き方：

1a)

$$
\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{x^3} & +\ x^2 & -\ 5x & +\ 7 & \ x+3 \\
\cancel{-x^3} & -\ 3x^2 & & & x^2-2x+1 \\
\hline
0 & \cancel{-2x^2} & -\ 5x & +\ 7 & \\
 & \cancel{+2x^2} & +\ 6x & & \\
\hline
 & 0 & \cancel{+x} & +\ 7 & \\
 & & \cancel{-x} & -\ 3 & \\
\hline
 & & 0 & +\ 4 &
\end{array}
$$

よって、$x^3 + x^2 - 5x + 7 = (x + 3)(x^2 - 2x + 1) + 4$.

1b)

$$
\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{x^3} & +\ 2x^2 & -\ 5x & +\ 7 & \ x-1 \\
\cancel{-x^3} & +\ x^2 & & & x^2+3x-2 \\
\hline
0 & \cancel{+3x^2} & -\ 5x & +\ 7 & \\
 & \cancel{-3x^2} & +\ 3x & & \\
\hline
 & 0 & \cancel{-2x} & +\ 7 & \\
 & & \cancel{+2x} & -\ 2 & \\
\hline
 & & 0 & +\ 5 &
\end{array}
$$

よって、$x^3 + 2x^2 - 5x + 7 = (x - 1)(x^2 + 3x - 2) + 5$.

1c) $x^3 + 4x^2 - 8x - 16 = (x + 5)(x^2 - x - 3) - 1$

1d) $x^3 - 6x^2 + 4x + 19 = (x - 3)(x^2 - 3x - 5) + 4$

1e) $x^3 + 3x + 9 = (x + 2)(x^2 - 2x + 7) - 5$

1f) $x^3 - 7x^2 + 11 = (x - 2)(x^2 - 5x - 10) - 9$

1g) $x^3 + 5x^2 + 5x + 3 = (x^2 + 4x + 1)(x + 1) + 2$

1h) $x^3 + x^2 - 12x + 2 = (x^2 + 3x - 6)(x - 2) - 10$

1i) $x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = (x - 1)(x^2 - 4x + 1)$

1j) $x^3 + 4x^2 - 6x - 5 = (x + 5)(x^2 - x - 1)$

1k) $2x^3 - 3x^2 - x - 2 = (2x^2 + x + 1)(x - 2)$

1l) $3x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = (3x^2 - x - 1)(x + 1)$

2. $(x^3 + 2x^2 - x + a) \div (x - 2)$ を解くために割り算のアルゴリズムを使用すると、剰余として $a + 14$ が得られます。これがイコールゼロであるならば、次のようなことが起こらなければなりません。

$$a + 14 = 0$$

以上から、$a = -14$ が得られます。割り算の剰余がゼロであることを確認するために、この数値を代入することができます。

$$(x^3 + 2x^2 - x - 14) \div (x - 2)$$

3. $2x^4 + 6x^3 - x^2 + 3x - 1 = (2x^2 + 1)(x^2 + 3x - 1)$

べき指数の特性に関しては学んでいませんが、$x^2(x^2) = x^4$ であることは学生たちに示しておくと良いでしょう。

2.3 組立除法、第 1 部

定義

組立除法は、変数が 1 つの多項式の割り算を行うための方法です。そして、除数の多項式が $x - a$ の形を持つときに使用されます。この方法では、次の図式に沿って解きます。

$$\begin{array}{r|lr|l} & \text{被除数} & & \\ a & & & \\ \hline & \text{商} & & \text{剰余} \end{array}$$

この方法は、$mx - a$ の形の多項式を割る時にも機能します。
この場合、
a の位置に数字 $\frac{a}{m}$ と書きます。

手順は次の通りです。

1. 被除数の項を次数の高い順に並べます。次に、「被除数」と呼ばれている部分に、係数を取り出して横に並べます。
2. 被除数の 1 番目の係数を、「商」と呼ばれている部分に書きます。そして次に、その数と a の値とを掛けて、その結果を被除数の2番目の係数の下に書きます。
3. ステップ 2 の数を足し、その結果は商の 2 番目の係数になります。
4. 被除数の定数項の下に書く数を得るまで、この手順を繰り返します。
5. 剰余は、最後の縦の係数を足して得ます。剰余の左の部分に書かれている数は、商の多項式の係数に該当します。それらの各項の次数は、被除数の次数よりも 1 小さくなります。

例

$(x^3 + 3x^2 - 5x - 4) \div (x + 2)$ を解くために、組立除法を使いましょう。被除数を、$qd + r$ の形で書きましょう。

$x + 2 = x - (-2)$、つまり、$a = -2$

定義で示された図式によると、被除数の多項式の係数を、その順番通りに横並べて書きましょう。$a = -2$ の数値を代入しましょう。

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 3 & -5 & -4 \\ -2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

被除数の1番目の係数を、「商」と呼ばれている部分に書きましょう（これは、商の多項式の中で変数に対する冪（べき）指数が最も高い項の係数となります）。この数に -2 を掛けて、その結果を被除数の2番目の係数の下に書きましょう。つまり、3 の下です。

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 3 & -5 & -4 \\ -2 & & -2 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

$-2(1)$

足し算 $3 + (-2)$ を解き、その結果が商の 2 番目の数になります。

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 3 & -5 & -4 \\ -2 & & -2 & & \\ \hline & 1 & 1 & & \end{array}$$

$3 + (-2)$ の結果

レッスン 2

この手順を繰り返しますが、今度は商の2番目の数に –2 を掛け、その結果を –5 の下に書き、その2つの数を足しましょう。

	1	3	–5	–4
–2		–2	–2	
	1	1	–7	

–5 + (–2) の結果

–2 に –7 を掛け、その結果を –4 の下に書き、その 2 つの数を足しましょう。

	1	3	–5	–4
–2		–2	–2	14
	1	1	–7	10

–4 + 14 の結果

この最後の結果 10 は、割り算の剰余に相当します。1、 1 と –7、この 3 つの数は、商の多項式の係数です。そしてその多項式の次数は 2 です。なぜならば、被除数は 三次の多項式だからです。すなわち、商の多項式は $x^2 + x - 7$ となります。

よって、$x^3 + 3x^2 - 5x - 4 = (x + 2)(x^2 + x - 7) + 10$ となります。

組立除法は、イタリア人数学者パオロ・ルフィニ (1765 - 1822) に因んで、**ルフィニの方法**または**ルフィニのルール**とも呼ばれています。 彼はその他にもイタリアのモデナ大学で、 医学、哲学および文学の研究を行いました。組立除法で得られた結果が筆算で得られた結果と同じであることことが確認できます。

問題

以下の割り算を解きましょう。そして被除数を、$qd + r$ の形に書きましょう。

	1	–12	23	–5
3		3		
	1			

	1	9	–13	–4
1		1		
	1			

c) $(x^3 - 4x^2 - 11x - 2) \div (x + 1)$

	1	–4	–11	–2
–1		–1		
	1			

d) $(x^3 - 2x^2 - 31x + 20) \div (x + 5)$

	1	–2	–31	20
–5		–5		
	1			

e) $(2x^3 - 3x^2 - 4x - 1) \div (x - 2)$

	2	–3	–4	–1
2				

f) $(3x^3 - 11x^2 - 5x + 4) \div (x - 4)$

	3	–11	–5	4

達成の目安

2.3 $x-a$ の形の二項式による多項式の割り算を、組立除法を使って解きましょう。

学習の流れ

授業では、除数が $x-a$ の形の二項式の場合の割り算の、組立除法のアルゴリズムを示して、使用しましょう。結果が同じであることを確認するためには、多項式の筆算を使用しても良いでしょう。

ねらい

2.2 の授業と同じように、組立除法の定義から始め、例題の手順をステップバイステップ展開することによって、 学生たちが問題集を解く時にあまり難しさを感じないようにしましょう。

問題の解き方：

a) $(x^3-12x^2+23x-5)\div(x-3)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -12 & 23 & -5 \\ 3 & & 3 & -27 & -12 \\ \hline & 1 & -9 & -4 & -17 \end{array}$$

$x^3-12x^2+23x-5=(x-3)(x^2-9x-4)-17$

b) $(x^3+9x^2-13x-4)\div(x-1)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 9 & -13 & -4 \\ 1 & & 1 & 10 & -3 \\ \hline & 1 & 10 & -3 & -7 \end{array}$$

$x^3+9x^2-13x-4=(x-1)(x^2+10x-3)-7$

c) $(x^3-4x^2-11x-2)\div(x+1)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -4 & -11 & -2 \\ -1 & & -1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & -6 & 4 \end{array}$$

$x^3-4x^2-11x-2=(x+1)(x^2-5x-6)+4$

d) $(x^3-2x^2-31x+20)\div(x+5)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -2 & -31 & 20 \\ -5 & & -5 & 35 & -20 \\ \hline & 1 & -7 & 4 & 0 \end{array}$$

$x^3-2x^2-31x+20=(x+5)(x^2-7x+4)$

e) $(2x^3-3x^2-4x-1)\div(x-2)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -3 & -4 & -1 \\ 2 & & 4 & 2 & -4 \\ \hline & 2 & 1 & -2 & -5 \end{array}$$

$2x^3-3x^2-4x-1=(x-2)(2x^2+x-2)-5$

f) $(3x^3-11x^2-5x+4)\div(x-4)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 3 & -11 & -5 & 4 \\ 4 & & 12 & 4 & -4 \\ \hline & 3 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$3x^3-11x^2-5x+4=(x-4)(3x^2+x-1)$

2.4 組立除法、第 2 部

導入問題

割り算 $(x^3-8)\div(x-2)$ を解きましょう。被除数を、$qd+r$ の形に書きましょう。

次数が無い項にはゼロと書きましょう。

解法

多項式 x^3-8 には、変数 x^2 と x を含む項がありません。そんな時は、該当する位置にゼロと書きましょう。

$$(x^3+0x^2+0x-8)\div(x-2)$$

組立除法を使用すると、次の図式が得られます。

	1	0	0	−8
2		2	4	8
	1	2	4	0

除数の多項式は x^2+2x+4 で、剰余はゼロです。よって、$(x^3-8)=(x-2)(x^2+2x+4)$ となります。

一般的に

1 つの変数を含む 2 つの多項式の割り算を解くためには、被除数と除数は常に、次数の高い項の順に並べられていなければなりません。
次数が無い項の場合は、該当する位置にゼロと書きましょう。

除数の形が $x-a$ である場合は、組立除法を使いましょう。その他の全てのケースでは筆算を使いましょう。

例

割り算 $(x^2-2x^3-20)\div(3+x)$ を解きましょう。被除数を、$qd+r$ の形に書きましょう。

被除数と除数のそれぞれの項を次数の高い順に並べ、
次数が無い項の係数の位置にはゼロと書きましょう。

$$(-2x^3+x^2+0x-20)\div(x+3)$$

除数の多項式が $x-a$ の形なので、組立除法を使いましょう。そして、$a=-3$ です。

	−2	1	0	−20
−3		6	−21	63
	−2	7	−21	43

よって、$-2x^3+x^2+0-20=(x+3)(-2x^2+7x-21)+43$ となります。

問題

1. 以下の割り算を解きましょう。そして被除数を、$qd+r$ の形に書きましょう。
   a) $(x^3-40x+12)\div(x-6)$
   b) $(2x^3-65x-45)\div(x+5)$
   c) $(x^3-50)\div(x-4)$
   d) $(7x-2x^3-5)\div(x+2)$
   e) $(10x^2-10-3x^3)\div(-3+x)$
   f) $\left(x^3+\frac{1}{8}\right)\div\left(x+\frac{1}{2}\right)$
2. $(x^3-27)\div(x-a)$ で、この割り算の剰余がゼロになるための a の値を見つけ出しましょう。

達成の目安

2.4 被除数に、次数の無い項がある場合は、組立除法を使って解きましょう。

学習の流れ

この授業では、組立除法のアルゴリズムを続けます。このケースでは、被除数とされている多項式には、次数の無い項が存在します。

ねらい

導入問題においても、例題や問題集においても、学生たちには、多項式の筆算の時と同様に、次数が無い項の係数の位置にはゼロと書くことを復習宇させましょう。

問題の解き方：

1a) $(x^3 + 0x^2 - 40x + 12) \div (x - 6)$

	1	0	–40	12
6		6	36	–24
	1	6	–4	–12

$x^3 - 40x + 12 = (x - 6)(x^2 + 6x - 4) - 12$

1b) $(2x^3 + 0x^2 - 65x - 45) \div (x + 5)$

	2	0	–65	–45
–5		–10	50	75
	2	–10	–15	30

$2x^3 - 65x - 45 = (x + 5)(2x^2 - 10x - 15) + 30$

1c) $(x^3 + 0x^2 + 0x - 50) \div (x - 4)$

	1	0	0	–50
4		4	16	64
	1	4	16	14

$x^3 - 50 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16) + 14$

1d) $(-2x^3 + 0x^2 + 7x - 5) \div (x + 2)$

	–2	0	7	–5
–2		4	–8	2
	–2	4	–1	–3

$-2x^3 + 7x - 5 = (x + 2)(-2x^2 + 4x - 1) - 3$

1e) $(-3x^3 + 10x^2 + 0x - 10) \div (x - 3)$

	–3	10	0	–10
3		–9	3	9
	–3	1	3	–1

$-3x^3 + 10x^2 - 10 = (x - 3)(-3x^2 + x + 3) - 1$

1f) $\left(x^3 + 0x^2 + 0x + \frac{1}{8}\right) \div \left(x + \frac{1}{2}\right)$

	1	0	0	$\frac{1}{8}$
$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$
	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0

$x^3 + \frac{1}{8} = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$

2. 組立除法を使って、次の図式を得ましょう。

	1	0	0	–27
a		a	a^2	a^3
	1	a	a^2	$a^3 - 27$

そうすると、$a^3 - 27 = 0$ が得られ、すなわち、$a^3 = 27$ となります。これの解は 3 です。なぜならば、$3^3 = 27$ です。よって、$a = 3$ で、$(x^3 - 27) \div (x - 3)$ を解くと、剰余はゼロであることが確認できます。

2.5 留数定理

導入問題

$p = 2x^3 - 9x^2 - 6x + 7$ と $q = x - 5$ の多項式があります。

1. 割り算 $p \div q$ の剰余を求めましょう。
2. 多項式 p に $x = 5$ を代入しましょう。これは、何の結果と同じですか？

解法

1. 組立除法を使用すると：

	2	−9	−6	7
5		10	5	−5
	2	1	−1	2

$p \div q$ を解くと、剰余は 2 です。

2. 多項式 p に $x = 5$ を代入すると、次のようになります。

$$\begin{aligned}2(5)^3 - 9(5)^2 - 6(5) + 7 &= 2(125) - 9(25) - 30 + 7\\ &= 2\end{aligned}$$

この結果が、割り算 $p \div q$ の剰余です。

p、q、d と r は、1 つの変数 x を含む多項式で、$p = qd + r$ そして、$q = x - a$ です。なので：

$$p = (x - a)d + r$$

p に $x = a$ を代入するということは、$(x - a)d + r$ に $x = a$ を代入するのと同じことで、その結果は r です。

$$(a - a)d + r = (0)d + r = r$$

すなわち、多項式の割り算 $p \div q$ を解くということは、多項式 p に $x = a$ を代入するのと同じことです。

定理

p と q は、変数 1 つを含む2つの多項式で、q の形は $x - a$ です。割り算 $p \div q$ を解いた時の剰余は、p の $x = a$ を置き換えた時に得る値と同じです。この結果は、**留数定理**と呼ばれています。

例

割り算 $(x^3 + 8x^2) \div (x + 7)$ を解いた時に得る剰余を求めましょう。

この定理を使用すると、剰余は、$x^3 + 8x^2$ に $x = -7$ を代入して得る値と同じです。つまり：

$$\begin{aligned}x^3 + 8x^2 &= (-7)^3 + 8(-7)^2\\ &= -343 + 392\\ &= 49\end{aligned}$$

よって、割り算 $(x^3 + 8x^2) \div (x + 7)$ の剰余は 49 です。

問題

1. 以下の割り算を解いた時に得る剰余を求めましょう。
   - a) $(3x^3 - 2x^2 + x - 2) \div (x - 1)$
   - b) $(x^3 + 2x^2 - 14x + 2) \div (x - 2)$
   - c) $(-x^3 + 9x^2 + 7x + 15) \div (x - 10)$
   - d) $(3x^3 - 5x) \div (x + 1)$
   - e) $(2x^3 - 4x^2 - 21x + 30) \div (x + 3)$
   - f) $(x^3 - 7x^2 + 55) \div (x + 1)$
   - g) $(x^3 - x^2 + x) \div \left(x - {}^{1}\right)$
   - h) $(x^3 - x - 1) \div \left(x + {}^{1}\right)$

2. 各ケースで、割り算 $p \div q$ の剰余がゼロになるための a の値を求めましょう。
   - a) $p = x^3 - 4ax + 3, q = x - 1$
   - b) $p = -x^3 + ax^2 - ax + a^2, q = x - 2$

達成の目安

2.5 $x-a$ の形の二項式による多項式の割り算を、留数定理を使って解いて、剰余を計算しましょう。

学習の流れ

多項式の割り算を展開した後は、留数定理を示しましょう。これは、次の授業で学ぶことになる次数が 3 の多項式の因数分解に使用されます。

ねらい

導入問題は、特定のケースを通じて、定理に記載されている結果を例証することがねらいです。例題ではより具体的な形で示されていて、学生たちはそれに従って問題集の 1 を解くことになります。

問題の解き方：

1a) 留数定理を使って、被除数の多項式に $x=1$ を代入しましょう。つまり、

$$\begin{aligned}3(1)^3-2(1)^2+1-2&=3-2+1-2\\&=0\end{aligned}$$

すると、$(3x^3-2x^2+x-2)\div(x-1)$ の剰余は 0 となります。

1b) 被除数の多項式に $x=2$ を代入しましょう。

$$\begin{aligned}(2)^3+2(2)^2-14(2)+2&=8+8-28+2\\&=-10\end{aligned}$$

すると、$(x^3+2x^2-14x+2)\div(x-2)$ の剰余は -10 となります。

1c) 被除数に $x=10$ を代入すると、

$$\begin{aligned}-(10)^3+9(10)^2+7(10)+15&=-1000+900+70+15\\&=-15\end{aligned}$$

$(-x^3+9x^2+7x+15)\div(x-10)$ の剰余は -15 となります。

1d) 被除数に $x=-1$ を代入すると、

$$\begin{aligned}3(-1)^3-5(-1)&=-3+5\\&=2\end{aligned}$$

$(3x^3-5x)\div(x+1)$ の剰余は 2 となります。

1e) 被除数に $x=-3$ を代入すると、

$$\begin{aligned}2(-3)^3-4(-3)^2-21(-3)+30&=-54-36+63+30\\&=3\end{aligned}$$

$(2x^3-4x^2-21x+30)\div(x+3)$ の剰余は 3 となります。

1f) 被除数に $x=-1$ を代入すると、

$$\begin{aligned}(-1)^3-7(-1)^2+55&=-1-7+55\\&=47\end{aligned}$$

$(x^3-7x^2+55)\div(x+1)$ の剰余は47 となります。

1g) 被除数に $x=\frac{1}{2}$ を代入すると、

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}&=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\\&=\frac{3}{8}\end{aligned}$$

$(x^3-x^2+x)\div\left(x-\frac{1}{2}\right)$ の剰余は $\frac{3}{8}$ となります。

1h) 被除数に $x=-\frac{1}{3}$ を代入すると、

$$\begin{aligned}\left(-\frac{1}{3}\right)^3-\left(-\frac{1}{3}\right)-1&=-\frac{1}{27}+\frac{1}{3}-1\\&=-\frac{19}{27}\end{aligned}$$

$(x^3-x-1)\div\left(x+\frac{1}{3}\right)$ の剰余は $-\frac{19}{27}$ となります。

2a) p に $x=1$ を代入すると、

$$1^3-4a(1)+3=-4a+4$$

$-4a+4=0$ となりますので、

$$\begin{aligned}4a&=4\\a&=1\end{aligned}$$

よって、a はイコール 1 となります。

2b) p に $x=2$ を代入すると、

$$-(2)^3+a(2)^2-a(2)+a^2=a^2+2a-8$$

$a^2+2a-8=0$ となりますので、方程式を解くと、$a=-4$ と $a=2$ が得られます。よって、a の値は -4 または 2 となります。

2.6 因数定理を使った因数分解、第 1 部

導入問題

$p = x^3 + 4x^2 + x - 6$ があります。

1. 多項式 p に $x = 1$ を代入すると、得られる値はゼロであることを確認しましょう。
2. 多項式 p を因数分解しましょう。

p を $x - 1$で割ると、剰余はどうなりますか？

解法

1. 多項式 p に $x = 1$ を代入すると、次のようになります。

$$(1)^3 + 4(1)^2 + 1 - 6 = 1 + 4 - 5 = 0$$

つまり、$x = 1$ の時は、p の値はゼロだということです。

2. 留数定理を使って、文字式 a) の結果に基づいて、多項式 p を $x - 1$で割ると、剰余はゼロになります。そうすると、p は $(x - 1)d$ の形で書くことができます。ここで、d は次数が 2 の多項式となります（なぜならば、積の次数は 3 だからです）。多項式 d を導き出すためには、$p \div (x - 1)$ を解きましょう。

	1	4	1	−6
1		1	5	6
	1	5	6	0

すなわち、$d = x^2 + 5x + 6$ で、これは $(x + 3)(x + 2)$ に因数分解できます。よって、

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1)(x + 3)(x + 2).$$

定理

ある多項式 p もしも $x = a$ を代入した時に、p の値がゼロになれば、p は $(x - a)d$ の形に書くことができます。ここで d は、p の次数よりも 1 小さい次数の多項式です。この結果は、**因数定理**として知られています。

例

$p = x^3 - 7x + 6$ があります。もしも $x = -3$ であれば、$p = 0$ で、それを、多項式 p を因数分解するために使います。

p に $x = -3$ を代入すると、次のようになります。

$$(-3)^3 - 7(-3) + 6 = -27 + 21 + 6 = 0.$$

因数定理によって、p は $(x + 3)d$ の形に書けます。d を導き出すために、組立除法を使いましょう。

	1	0	−7	6
−3		−3	9	−6
	1	−3	2	0

そして、$d = x^2 - 3x + 2$ を因数分解すると、$(x - 1)(x - 2)$ の積になります。よって、

$$x^3 - 7x + 6 = (x + 3)(x - 1)(x - 2).$$

問題

各ケースで、$x = a$ であれば、多項式 p の値はゼロであることを確かめ、次に p を因数分解しましょう。

a) $p = x^3 + 2x^2 - x - 2;\ a = 1$

b) $p = x^3 + 6x^2 + 11x + 6;\ a = -1$

c) $p = x^3 + 2x^2 - 5x - 6;\ a = 2$

d) $p = x^3 - 5x^2 - 2x + 24;\ a = -2$

e) $p = x^3 - 21x - 20;\ a = -4$

f) $p = x^3 - 9x^2 + 23x - 15;\ a = 5$

達成の目安

2.6 $x^3 + mx^2 + nx + k$ の形の多項式があって、それの一次の因数の一つが分かっているときに、因数定理を使いましょう。

学習の流れ

この授業では、次数が 3 の多項式を因数分解するために、これまでの授業で学習した多項式の割り算や剰余に関する手順や結果および因数定理を使用しましょう。使用されている多項式の x^3 の係数が 1 であることに注意してください。

ねらい

導入問題は、多項式の割り算の剰余がゼロであるということの意味を明らかにするのに役立ちます。因数定理と授業の例題と共に、その因数の一つから始めて、次数が 3 の多項式をどのように因数分解するのかを示しましょう。

問題の解き方：

a) 多項式 p に $x = 1$ を代入しましょう。

$$1^3 + 2(1)^2 - 1 - 2 = 3 - 3 = 0$$

$p = x^3 + 2x^2 - x - 2$ は、$(x - 1)d$ の形に書くことができます。d を導き出すために、組立除法を使いましょう。

	1	2	−1	−2
1		1	3	2
	1	3	2	0

$d = x^2 + 3x + 2$ で、$(x + 2)(x + 1)$ に因数分解しましょう。よって、

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 2)(x + 1).$$

b) 多項式 p に $x = -1$ を代入しましょう。

$$(-1)^3 + 6(-1)^2 + 11(-1) + 6 = -12 + 12 = 0$$

$p = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ は、$(x + 1)d$ の形に書くことができます。d を導き出すために、組立除法を使いましょう。

	1	6	11	6
−1		−1	−5	−6
	1	5	6	0

$d = x^2 + 5x + 6$ で、$(x + 3)(x + 2)$ に因数分解しましょう。よって、

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1)(x + 3)(x + 2).$$

c) 多項式 p に $x = 2$ を代入しましょう。

$$2^3 + 2(2)^2 - 5(2) - 6 = 16 - 16 = 0$$

$p = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ は、$(x - 2)d$ の形に書くことができます。d を導き出すために、組立除法を使いましょう。

	1	2	−5	−6
2		2	8	6
	1	4	3	0

$d = x^2 + 4x + 3$で、$(x + 3)(x + 1)$ に因数分解しましょう。よって、

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x - 2)(x + 3)(x + 1).$$

d) 多項式 p に $x = -2$ を代入しましょう。

$$(-2)^3 - 5(-2)^2 - 2(-2) + 24 = -28 + 28 = 0$$

$p = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ は、$(x + 2)d$ の形に書くことができます。d を導き出すために、組立除法を使いましょう。

	1	−5	−2	24
−2		−2	14	−24
	1	−7	12	0

$d = x^2 - 7x + 12$で、$(x - 3)(x - 4)$ に因数分解しましょう。よって、

$$x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = (x + 2)(x - 3)(x - 4).$$

e) 多項式 p に $x = -4$ を代入しましょう。

$$(-4)^3 - 21(-4) - 20 = -84 + 84 = 0$$

$p = x^3 - 21x - 20$ は、$(x + 4)d$ の形に書くことができます。d を導くために組立除法を使うと、
$d = x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5)$ が得られます。
よって、

$$x^3 - 21x - 20 = (x + 4)(x + 1)(x - 5).$$

f) 多項式 p に $x = 5$ を代入しましょう。

$$5^3 - 9(5)^2 + 23(5) - 15 = 240 - 240 = 0$$

$p = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$ は、$(x - 5)d$ の形に書くことができます。d を導くために組立除法を使うと、
$d = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$ が得られます。
よって、

$$x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = (x - 5)(x - 1)(x - 3).$$

2.7 因数定理を使った因数分解、第 2 部

導入問題

$p = x^3 - 19x - 30$ があります。

1. 定数項の約数（正と負）を求めましょう。
2. それらの中のどれの時に p がゼロに等しいかを特定しましょう。そして、多項式 p を因数分解しましょう。

解法

1. 定数項 -30 の約数は、±1、±2、±3、±5、±6、±10、±15 と ±30 です（「$\pm$」は、正と負の約数を示すためです）。30 をその素数に分解することで、これらが求められます。

2. 多項式 p の x の値に前の文字式で得られた数を代入すると、次のようになります。

   a) もしも $x = 1$ であれば、$(1)^3 - 19(1) - 30 = -48$ となります。
   b) もしも $x = -1$ であれば、$(-1)^3 - 19(-1) - 30 = -12$ となります。
   c) もしも $x = 2$ であれば、$(2)^3 - 19(2) - 30 = -60$ となります。
   d) もしも $x = -2$ であれば、$(-2)^3 - 19(-2) - 30 = 0$ となります。

因数定理によって、多項式 p は $(x + 2)d$ の形に書くことができます。d を求めるためには、組立除法を使用します。

	1	0	−19	−30
−2		−2	4	30
	1	−2	−15	0

すると $d = x^2 - 2x - 15$ となり、これは $(x + 3)(x - 5)$ に因数分解できます。よって、

$$x^3 - 19x - 30 = (x + 2)(x + 3)(x - 5).$$

まとめ

$p = x^3 + mx^2 + nx + k$ があります。p を $(x - a)d$ の形に書くことを可能にし得る a の値は、定数項 k の約数です。

すなわち、$p = x^3 + mx^2 + nx + k$ を因数分解するには、次のことを行いましょう。

1. 定数項の約数（正と負）を求めましょう。
2. それらの中のどれによって多項式 p の値がゼロに等しくなるかを特定しましょう。
3. p を $(x - a)d$ の形に書くために割り算を行いましょう。ここで d は、次数が2の多項式です。
4. これまでの授業で学習した何れかの方法を使って、d を因数分解しましょう。

問題

1. 以下の多項式を因数分解しましょう。

   a) $x^3 - 2x^2 - x + 2$　　b) $x^3 + 2x^2 - x - 2$　　c) $x^3 + x^2 - 14x - 24$
   d) $x^3 - 5x^2 - 9x + 45$　　e) $y^3 - 4y^2 + y + 6$　　f) $y^3 - 3y^2 - 4y + 12$

2. $(x + 10)^3 + 1$を因数分解しましょう。　$x + 10$ を y に置き換えましょう。

3. 多項式 $x^3 - 13x - 12$ の因数の和を求めましょう。

達成の目安

2.7 定数項の約数を求め、因数定理を活用して、$x^3 + mx^2 + nx + k$ の形の多項式を因数分解しましょう。

学習の流れ

この授業では、次数が3の多項式を因数分解して、まず多項式の $x = a$ に代入した時に結果がゼロとなる、整数 a を求め、次に 2.6 の授業で学習したことを活用しましょう。そのためには、定数項の約数に対して代数学の結果を使用します。したがって、次数が3の項の係数が1の多項式のみが含まれます。

つまずきやすい点

定数項の約数は常に正と負があるので、どちらによって多項式がゼロになるかを試さなければならないことを、学生たちに復習させましょう。約数を得るためには、定数項をその素因数に分解することができます。

問題の解き方：

1a) 2 の約数は、±1 と ±2です。$x^3 - 2x^2 - x + 2$ に $x = 1$ を代入すると、次のようになります。

$$1^3 - 2(1)^2 - 1 + 2 = 3 - 3 = 0$$

よって、$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)d$ となり、d を導くために、組立除法を使います。

	1	−2	−1	2
1		1	−1	−2
	1	−1	−2	0

つまり、 $d = x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$,

$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$.

1b) −2 の約数は、±1 と ±2です。$x^3 + 2x^2 - x - 2$ に $x = 1$ を代入すると、次のようになります。

$$1^3 + 2(1)^2 - 1 - 2 = 3 - 3 = 0$$

よって、$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)d$ となり、d を導くために、組立除法を使いましょう。

	1	2	−1	−2
1		1	3	2
	1	3	2	0

つまり、 $d = x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$,

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$.

1c) $x^3 + x^2 - 14x - 24 = (x + 2)(x + 3)(x - 4)$

1d) $x^3 - 5x^2 - 9x + 45 = (x - 3)(x + 3)(x - 5)$

1e) $y^3 - 4y^2 + y + 6 = (y + 1)(y - 2)(y - 3)$

1f) $y^3 - 3y^2 - 4y + 12 = (y - 2)(y + 2)(y - 3)$

2. $y = x + 10$ を代入すると、$y^3 + 1$ になります。1 の約数は、±1 です。もしも $y = -1$であれば、次のようになります。

$$(-1)^3 + 1 = -1 + 1 = 0$$

よって、$y^3 + 1 = (y + 1)d$ となり、d を導くために組立除法を使うと、$d = y^2 - y + 1$ となります。この多項式は因数分解できません。なので、$y^3 + 1 = (y + 1)(y^2 - y + 1)$ となります。$y = x + 10$ を代入します。

参考式 $y^2 - y + 1$ の根は複素数です。

$$\begin{aligned}(x + 10)^3 + 1 &= (x + 10 + 1)[(x + 10)^2 - (x + 10) + 1]\\ &= (x + 11)(x^2 + 20x + 100 - x - 10 + 1)\\ &= (x + 11)(x^2 + 19x + 91)\end{aligned}$$

よって、$(x + 10)^3 + 1 = (x + 11)(x^2 + 19x + 91)$ となります。

3. $x^3 - 13x - 12$ を因数分解しましょう。−12 の約数は、±1, ±2, ±3, ±4, ±6 と ±12 です。$x = -1$ を代入すると、次のようになります。

$$(-1)^3 - 13(-1) - 12 = -13 + 13 = 0$$

よって、$x^3 - 13x - 12 = (x + 1)d$ となり、d を導き出すために組立除法を使うと、$d = x^2 - x - 12$ となります。これをまた、$(x + 3)(x - 4)$ に因数分解しましょう。このようになります。$x^3 - 13x - 12 = (x + 1)(x + 3)(x - 4)$。それらの因数を足すと、次のようになります。 $(x + 1) + (x + 3) + (x - 4) = 3x$.

2.8 連続した因数分解

導入問題

以下の多項式を因数分解しましょう。

a) $x^3y^2 - 2x^2y^2 - 9xy^2 + 18y^2$　　　b) $n^3x^2 - n^3y^2 - 3n^2x^2 + 3n^2y^2 + 4x^2 - 4y^2$

解法

a) まず、多項式の各項の共通因数をくくり出しましょう。この場合は、y^2 です。

$$\begin{aligned} x^3y^2 - 2x^2y^2 - 9xy^2 + 18y^2 &= (x^3 - 2x^2 - 9x + 18)y^2 \\ &= y^2(x^3 - 2x^2 - 9x + 18) \end{aligned}$$

$x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ を、因数定理と組立除法を使用して、因数分解しましょう。
この場合、$x = 2$ の時に、多項式はゼロとなります。

$$(2)^3 - 2(2)^2 - 9(2) + 18 = 8 - 8 - 18 + 18 = 0$$

	1	−2	−9	18
2		2	0	−18
	1	0	−9	0

すると、$x^3y^2 - 2x^2y^2 - 9xy^2 + 18y^2 = y^2(x - 2)(x^2 - 9)$ になります。3番目の因数 $x^2 - 9$ は、二乗数同士の引き算で、それは掛け算 $(x + 3)(x - 3)$ に因数分解できます。よって、

$$x^3y^2 - 2x^2y^2 - 9xy^2 + 18y^2 = y^2(x - 2)(x + 3)(x - 3).$$

b) 全ての項に共通因数があるわけではありません。なので、それを含む各項を組み合わせて多項式の共通因数をくくり出しましょう。

$$\begin{aligned} n^3x^2 - n^3y^2 - 3n^2x^2 + 3n^2y^2 + 4x^2 - 4y^2 &= n^3(x^2 - y^2) - 3n^2(x^2 - y^2) + 4(x^2 - y^2) \\ &= (n^3 - 3n^2 + 4)(x^2 - y^2) \end{aligned}$$

多項式 $n^3 - 3n^2 + 4$ を、因数定理と組立除法を使用して、因数分解しましょう。これは、$n = -1$ の時にゼロになります。

	1	−3	0	4
−1		−1	4	−4
	1	−4	4	0

すると、$n^3x^2 - n^3y^2 - 3n^2x^2 + 3n^2y^2 + 4x^2 - 4y^2 = (n + 1)(n^2 - 4n + 4)(x^2 - y^2)$ となります。因数 $n^2 - 4n + 4$ は、完全平方三項式で、それを因数分解すると $(n - 2)^2$ になり、$x^2 - y^2$ は 二乗数同士の引き算で因数分解でき、$(x - y)(x + y)$ となります。よって、

$$n^3x^2 - n^3y^2 - 3n^2x^2 + 3n^2y^2 + 4x^2 - 4y^2 = (n + 1)(n - 2)^2(x - y)(x + y).$$

一般的に

多項式 p を因数分解するには、多項式の各項の共通因数をくくり出して、２番目の因数を因数分解します。
もしも全ての項には共通因数が無いのであれば、それを含む項を適切に組み合わせてから、これまでの授業で学習した方法の何れかを使用して因数分解します。この手順を、元の多項式が、最も簡単な数式の多項式の掛け算で表現できるまで繰り返します。

問題

以下の多項式を因数分解しましょう。

a) $3xy^3 + 15xy^2 + 9xy - 27x$　　　b) $2abc^3 + 2abc^2 - 50abc - 50ab$

c) $m^3n^2 - 4m^2n^2 - 11mn^2 + 30n^2$　　　d) $4x^3y^2 - 16x^2y^2 - 12xy^2 + 72y^2 - x^3 + 4x^2 + 3x - 18$

達成の目安

2.8 多項式の因数分解および割り算の方法を活用して多項式の因数分解をしましょう。

学習の流れ

この授業では、学生たちは多項式を因数分解するために、これまで学習してきた方法を活用しなければなりません。それらは、共通因数、三項式の因数分解、二乗数同士の引き算および多項式の割り算です。

ねらい

先ず、導入問題の両多項式の各項の共通因数をくくり出しましょう（項は、単項式または多項式である可能性があります）。前の授業と同じように、多項式を因数分解するときは、その各項に共通因数があるかを最初に確認しましょう。その後で今まで学習してきた方法の何れかを使いましょう。それは、「一般的に」で説明されていて、問題集でも活用しなければなりません。

問題の解き方：

a) 多項式の各項の共通因数をくくりだしましょう。

$$3xy^3 + 15xy^2 + 9xy - 27x = 3x(y^3 + 5y^2 + 3y - 9)$$

$y^3 + 5y^2 + 3y - 9$ を因数分解するために、因数定理と組立除法を使いましょう。-9 の約数は、±1、±3 と ±9です。$y = 1$ の場合は、

$$(1)^3 + 5(1)^2 + 3(1) - 9 = 9 - 9 = 0$$

よって、$y^3 + 5y^2 + 3y - 9 = (y - 1)d$ となり、多項式 d を求めるために組立除法を使うと、

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 5 & 3 & -9 \\
1 & & 1 & 6 & 9 \\
\hline
 & 1 & 6 & 9 & \multicolumn{1}{|c}{0}
\end{array}$$

すると、$d = y^2 + 6y + 9 = (y + 3)^2$ となります。よって、$3xy^3 + 15xy^2 + 9xy - 27x = 3x(y - 1)(y + 3)^2$ となります。

b)
$$\begin{aligned}
2abc^3 + 2abc^2 - 50abc - 50ab &= 2ab(c^3 + c^2 - 25c - 25) \\
&= 2ab[c^2(c + 1) - 25(c + 1)] \\
&= 2ab(c^2 - 25)(c + 1) \\
&= 2ab(c + 5)(c - 5)(c + 1)
\end{aligned}$$

共通因数 $2ab$ をくくり出しましょう。
各項を組み合わせて、共通因数をくくり出しましょう。
共通因数 $c + 1$ をくくり出しましょう。
$c^2 - 25$ を因数分解しましょう。

c)
$$\begin{aligned}
m^3n^2 - 4m^2n^2 - 11mn^2 + 30n^2 &= n^2(m^3 - 4m^2 - 11m + 30) \\
&= n^2(m - 2)(m^2 - 2m - 15) \\
&= n^2(m - 2)(m + 3)(m - 5)
\end{aligned}$$

共通因数 n^2 をくくり出しましょう。
因数定理と 30 の約数を使いましょう。
$m^2 - 2m - 15$ を因数分解しましょう。

d)
$$\begin{aligned}
4x^3y^2 - 16x^2y^2 - 12xy^2 + 72y^2 - x^3 + 4x^2 + 3x - 18 &= 4y^2(x^3 - 4x^2 - 3x + 18) - (x^3 - 4x^2 - 3x + 18) \\
&= (4y^2 - 1)(x^3 - 4x^2 - 3x + 18) \\
&= (2y + 1)(2y - 1)(x + 2)(x^2 - 6x + 9) \\
&= (2y + 1)(2y - 1)(x + 2)(x - 3)^2
\end{aligned}$$

2.9 復習問題

1. 以下の割り算を解きましょう。

a) $(x^2y - xy^2 + y^3) \div (-y)$
b) $(24m^2n^2 + 30mn^2 - 15mn) \div (3mn)$
c) $(-a^3b^2 + 2a^2b^2 - 5ab^2) \div (-ab^2)$
d) $(35x^3y^3z^3 - 25x^3y^2z^2 - 45x^2y^2z^3) \div (5x^2y^2z^2)$
e) $(m^3n + m^3n^2 - 3m^2n^2) \div \left(\frac{1}{3}m^2n\right)$
f) $(2x^3y^2 - 3x^2y^2 - 5xy) \div \left(-\frac{2}{3}xy\right)$

2. 筆算を使って、以下の割り算を解きましょう。そして被除数を $qd + r$ の形に書きましょう。

a) $(2x^3 + 3x^2 + 9) \div (x + 2)$
b) $(2x^3 - 7x^2 - 3x + 2) \div (x - 4)$
c) $(2y^3 - 13y^2 + 14y + 2) \div (y - 5)$
d) $(2y^3 + 5y^2 - 8y - 6) \div (2y + 1)$
e) $(3x^3 + 11x^2 - x - 3) \div (x^2 + 4x + 1)$
f) $(5y^3 - 8y^2 - 14y + 4) \div (y^2 - 2y - 2)$

3. 以下の割り算を解くために、組立除法を使いましょう。そして被除数を $qd + r$ の形に書きましょう。

a) $(x^3 - 9x^2 + 21x + 2) \div (x - 4)$
b) $(y^3 - 3y^2 - 6y - 11) \div (y - 5)$
c) $(2m^3 + 4m^2 + 3m + 8) \div (m + 3)$
d) $(3n^3 + 4n^2 - 6n - 7) \div (n + 2)$
e) $(a^3 - 37a - 1) \div (a - 6)$
f) $(b^3 + 8b^2 - 29) \div (b + 7)$
g) $(2x^3 + 1) \div (x - 1)$
h) $(y^3 + 2y^2 - y + 1) \div \left(y - \frac{1}{2}\right)$
i) $(x^3 + x^2 + x - 1) \div \left(x + \frac{1}{3}\right)$
j) $\left(y^3 + \frac{1}{27}\right) \div \left(y + \frac{1}{3}\right)$

4. 以下の割り算を解いた時に得る剰余を求めましょう。

a) $(x^3 + x^2) \div (x - 2)$
b) $(8y^3 - 5y) \div (y + 1)$
c) $(5m^3 + 11m^2 - 9) \div (m + 2)$
d) $(n^3 - 13n^2 + 29n + 10) \div (n - 3)$
e) $(y^3 + 4y^2 - 6y - 6) \div (y + 5)$
f) $\left(x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x - 1\right) \div \left(x - \frac{1}{2}\right)$

5. k を整数とします。各ケースで、割り算 $p \div q$ の剰余がゼロになるための k の値を求めましょう。

a) $p = kx^3 + (k + 1)x^2 + (k - 4)x - 2;\ q = x + 1$
b) $p = x^3 + (k - 3)x^2 + (k + 4)x - 6k;\ q = x - 3$
c) $p = x^3 - k^2x^2 + 2kx + k - 1;\ q = x - 1$
d) $p = k^2x^3 + (k + 1)x^2 - 7x + 3k;\ q = x + 2$

6. 以下の多項式を因数分解しましょう。

a) $-2xy^3 - 4xy^2 + 32xy + 64x$
b) $5x^3y^2 - 15x^2y^2 - 90xy^2 + 200y^2$
c) $-abc^3 - 9abc^2 - 11abc + 21ab$

7. 以下の多項式を因数分解しましょう。

a) $4a^3b^2 + 24a^2b^2 - 60ab^2 - 400b^2 - 9a^3 - 54a^2 + 135a + 900$
b) $(x + 1)^3 - (x + 1)^2 - 30(x + 1) + 72$

達成の目安

2.9 多項式の割り算および因数分解に該当するそれぞれの問題を解きましょう。

問題の解き方：

1a) $-x^2+xy-y^2$

1b) $8mn+10n-5$

1c) a^2-2a+5

1d) $7xyz-5x-9z$

1e) $3m+3mn-9n$

1f) $-3x^2y+\frac{9}{2}xy+\frac{15}{2}$

2a) $2x^3+3x^2+9=(x+2)(2x^2-x+2)+5$

2b) $2x^3-7x^2-3x+2=(x-4)(2x^2+x+1)+6$

2c) $2y^3-13y^2+14y+2=(y-5)(2y^2-3y-1)-3$

2d) $2y^3+5y^2-8y-6=(2y+1)(y^2+2y-5)-1$

2e) $3x^3+11x^2-x-3=(x^2+4x+1)(3x-1)-2$

2f) $5y^3-8y^2-14y+4=(y^2-2y-2)(5y+2)+8$

3a) $x^3-9x^2+21x+2=(x-4)(x^2-5x+1)+6$

3b) $y^3-3y^2-6y-11=(y-5)(y^2+2y+4)+9$

3c) $2m^3+4m^2+3m+8=(m+3)(2m^2-2m+9)-19$

3d) $3n^3+4n^2-6n-7=(n+2)(3n^2-2n-2)-3$

3e) $a^3-37a-1=(a-6)(a^2+6a-1)-7$

3f) $b^3+8b^2-29=(b+7)(b^2+b-7)+20$

3g) $2x^3+1=(x-1)(2x^2+2x+2)+3$

3h) $y^3+2y^2-y+1=\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y^2+\frac{5}{2}y+\frac{1}{4}\right)+\frac{9}{8}$

3i) $x^3+x^2+x-1=\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{7}{9}\right)-\frac{34}{27}$

3j) $y^3+\frac{1}{27}=\left(y+\frac{1}{3}\right)\left(y^2-\frac{1}{3}y+\frac{1}{9}\right)$

4a) $2^3+2^2=8+4=12$

4b) $8(-1)^3-5(-1)=-8+5=-3$

4c) $5(-2)^3+11(-2)^2-9=-40+44-9=-5$

4d) $3^3-13(3)^2+29(3)+10=27-117+87+10=7$

4e) $(-5)^3+4(-5)^2-6(-5)-6=-125+100+30-6=-1$

4f) $\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-1=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{2}-1=-\frac{5}{4}$

5a) p に $x=-1$ を代入しましょう。

$k(-1)^3+(k+1)(-1)^2+(k-4)(-1)-2=-k+3$

留数定理によって、$-k+3=0$ となります。
つまり、$k=3$ となります。

5b) p に $x=3$ を代入しましょう。

$3^3+(k-3)(3)^2+(k+4)(3)-6k=6k+12$

留数定理によって、$6k+12=0$ となります。
つまり、$k=-2$ となります。

5c) p に $x=1$ を代入しましょう。

$1^3-k^2(1)^2+2k(1)+k-1=-k^2+3k$

$-k^2+3k=0$ となります。つまり、$k=0$ または $k=3$ となります。

5 番目の問題では、各ケースで計算された k の値を代入して、$p\div q$ の剰余がゼロであることを確認できます。

5d) p に $x=-2$ を代入しましょう。

$k^2(-2)^3+(k+1)(-2)^2-7(-2)+3k=-8k^2+7k+18$

よって、$-8k^2+7k+18=0$ となり、つまり、$8k^2-7k-18=0$ となります。
前の方程式を解くと、$k=-\frac{9}{8}$ または $k=2$ となります。

6a) $-2x(y+4)(y-4)(y+2)$

6b) $5y^2(x-2)(x+4)(x-5)$

6c) $-ab(c-1)(c+3)(c+7)$

7a)
$$\begin{aligned}4b^2(a^3+6a^2-15a-100)-9(a^3+6a^2-15a-100)&=(4b^2-9)(a^3+6a^2-15a-100)\\&=(2b+3)(2b-3)(a-4)(a^2+10a+25)\\&=(2b+3)(2b-3)(a-4)(a+5)^2\end{aligned}$$

7b) $y=x+1$ があります。よって、$(x+1)^3-(x+1)^2-30(x+1)+72=y^3-y^2-30y+72$ となり、
$y^3-y^2-30y+72=(y-3)(y^2+2y-24)=(y-3)(y+6)(y-4)$ となります。
しかしながら、$(y-3)(y+6)(y-4)=(x+1-3)(x+1+6)(x+1-4)=(x-2)(x+7)(x-3)$ です。よって、
$(x+1)^3-(x+1)^2-30(x+1)+72=(x-2)(x+7)(x-3)$ となります。

レッスン 3 二次方程式と複素数

3.1 因数分解による二次方程式の解法

導入問題

次の二次方程式を因数分解で解きなさい。

a) $x^2 - 15x + 56 = 0$　　b) $5x^2 + 11x - 12 = 0$

次のように、a と b が実数で、$ab = 0$ である場合、$a = 0$ または $b = 0$ となります。

解法

a) この多項式を因数分解するには、積が 56 に、和が -15 になる 2 つの数字を求めます (積は正の数、和は負の数になるので、2 つの数字は負の数であることが分かります)。
この 2 つの数字を求めるには、56 を前述の条件を満たす素因数の組み合わせに分解します。すると、次のようになることが確認できます。$(-8)(-7) = 56$ と $-8 - 7 = -15$ したがって、$x^2 - 15x + 56$ は、積 $(x - 8)(x - 7)$ に因数分解できます。よって、次のように計算します。

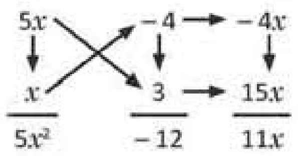
$$(x - 8)(x - 7) = 0$$

積が 0 なので、次のように、因数のうち 1 つは 0 と等しいことになります。

$$x - 8 = 0 \text{ または } x - 7 = 0$$

したがって、解は $x = 8$、$x = 7$

b) $5x^2 + 11x - 12$ を因数分解するには、5 と -12 を 2 つの因数に分解して、たすき掛けします。



よって、$5x^2 + 11x - 12 = (5x - 4)(x + 3) = 0$ となり、$5x - 4 = 0$ または $x + 3 = 0$ が成り立ちます。よって、
$5x^2 + 11x - 12 = 0$ の解は、次のようになります。 $x = \frac{4}{5}$　または $x = -3$

定義

$ax^2 + bx + c = 0$ のような式のうち、a、b、c が実数で、$a \neq 0$ の場合、このような方程式を**二次方程式**といいます。二次方程式を因数分解をつかって解くには、$ax^2 + bx + c$ を一次二項式 2 つの積に書き換えます。因数分解後の一次二項式を解くと、どちらも 0 に等しくなります。

例

次の方程式を因数分解をつかって解きなさい。$\frac{5}{2}x^2 - 2 = -\frac{4}{3}x.$

ある式に等しい方程式を求めるとき、その係数がいずれも整数であれば、難なく因数分解できます。よって、この式の場合、両辺に 6 を掛けて整数にすると、次のような等価方程式になります。$15x^2 - 12 = -8x$ 因数分解をつかうには、方程式を 0 に等しくする必要があるので、$-8x$ を左辺に移項します。すると、方程式は次のようになります。$15x^2 + 8x - 12 = 0$ これをたすき掛けで因数分解すると、$(5x + 6)(3x - 2) = 0$ となります。よって、方程式の解は次のとおりです。 $x = -\frac{6}{5}$、$x = \frac{2}{3}$

問題

1. 次の方程式を因数分解で解きなさい。

a) $x^2 + 2x - 15 = 0$　b) $x^2 - 15x + 44 = 0$　c) $x^2 + 4x + 3 = 0$

d) $x^2 + 7x - 60 = 0$　e) $x^2 + 16x + 63 = 0$　f) $\frac{1}{4}x^2 - x - 15 = 0$

g) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3 = 0$　h) $3x^2 + 13x - 10 = 0$　i) $8x^2 - 38x + 35 = 0$

j) $4x^2 + 21x - 18 = 0$　k) $0.2x^2 + 0.3x - 0.2 = 0$　l) $\frac{3}{5}x^2 - \frac{1}{10}x - \frac{1}{5} = 0$

2. 解が 1 と -15 になる二次方程式を求めなさい。

達成の目安

3.1 二次方程式を $(x+a)(x+b)$ の形に因数分解するか、たすき掛けで解きましょう。

学習の流れ

この授業では、9 学年で学んだ内容として、因数分解で二次方程式を解く方法を復習します。さらに、三項式にも取り組みます。たすき掛けで因数分解したり、分数係数か少数係数を含む三項式の場合は、方程式と整数をかけ算したりします。

ねらい

第 3 課の 1 時限目と 2 時限目は、まずは二次方程式を解きながら、多項式の根について基礎を学びます。この授業では、二次方程式の解の公式を使って方程式を解く必要はありません。公式は次回の授業で使います。

解答：

1a)
$$x^2+2x-15=0$$
$$(x+5)(x-3)=0$$
$$x+5=0、\quad x-3=0$$
解は、$x=-5$、$x=3$

1b)
$$x^2-15x+44=0$$
$$(x-4)(x-11)=0$$
$$x-4=0、\quad x-11=0$$
解は、$x=4$、$x=11$

1c)
$$x^2+4x+3=0$$
$$(x+3)(x+1)=0$$
$$x+3=0、\quad x+1=0$$
解は、$x=-3$、$x=-1$

1d)
$$x^2+7x-60=0$$
$$(x+12)(x-5)=0$$
$$x+12=0、\quad x-5=0$$
解は、$x=-12$、$x=5$

1e)
$$x^2+16x+63=0$$
$$(x+9)(x+7)=0$$
$$x+9=0、\quad x+7=0$$
解は、$x=-9$、$x=-7$

1f) 両辺に 4 をかけると、次のような等価方程式になります。
$$x^2-4x-60=0$$
$$(x+6)(x-10)=0$$
$$x+6=0、\quad x-10=0$$
解は、$x=-6$、$x=10$

1g) 両辺に 2 をかけると、次のような等価方程式になります。
$$x^2+5x+6=0$$
$$(x+3)(x+2)=0$$
$$x+3=0、\quad x+2=0$$
解は、$x=-3$、$x=-2$

1h)
$$3x^2+13x-10=0$$
$$(x+5)(3x-2)=0$$
$$x+5=0、\quad 3x-2=0$$
解は、$x=-5$、$x=\frac{2}{3}$

1i)
$$8x^2-38x+35=0$$
$$(2x-7)(4x-5)=0$$
$$2x-7=0、\quad 4x-5=0$$
解は、$x=\frac{7}{2}$、$x=\frac{5}{4}$

1j)
$$4x^2+21x-18=0$$
$$(x+6)(4x-3)=0$$
$$x+6=0、\quad 4x-3=0$$
解は、$x=-6$、$x=\frac{3}{4}$

1k) 両辺に 10 をかけると、次のような等価方程式になります。
$$2x^2+3x-2=0$$
$$(x+2)(2x-1)=0$$
$$x+2=0 \quad \text{o} \quad 2x-1=0$$
解は、$x=-2$、$x=\frac{1}{2}$

1l) 両辺に 10 をかけると、次のような等価方程式になります。
$$6x^2-x-2=0$$
$$(2x+1)(3x-2)=0$$
$$2x+1=0 \quad \text{o} \quad 3x-2=0$$
解は、$x=-\frac{1}{2}$、$x=\frac{2}{3}$

2. $(x-1)(x+15)=0 \Rightarrow x^2+14x-15=0$

3.2 解の公式による二次方程式の解法

導入問題

次の二次方程式を解きなさい。

a) $2x^2 + 3x - 1 = 0$　　　b) $x^2 - 2x - 6 = 0$

方程式 $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ の解は、次のとおりです。

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

解法

a) この方程式は、因数分解では解けません。このような場合、解の公式をつかって解きます。この場合は、$a = 2$、$b = 3$、$c = -1$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

よって、$2x^2 + 3x - 1 = 0$ の解は次のとおりです。

$$x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \text{ および } x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}.$$

b) 方程式を因数分解で解こうとすると、積が -6、和が -2 になる 2 つの整数が求められないことが分かります。前回の問いと同じように、解の公式をつかうと、次のようになります。$a = 1$、$b = -2$、$c = -6$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4+24}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 1 \pm \sqrt{7}.$$

よって、$x^2 - 2x - 6 = 0$ の解は次のとおりです。

$$x = 1 + \sqrt{7} \text{ および } x = 1 - \sqrt{7}.$$

注目：$\frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{2}$ は、次のように、分子の共通因数である 2 をくくり出すことができるので、約分できます。

$$\frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{2} = \frac{2(1 \pm \sqrt{7})}{2} = 1 \pm \sqrt{7}.$$

まとめ

二次方程式が因数分解で解けない場合は、解の公式をつかいます。

例

方程式 $x = 7 - \frac{4}{x}$ を解きなさい。

$x = 0$ がこの方程式の解ではないことに注目しましょう。方程式は、両辺に x をかけることで、次のように二次方程式にできます。

$$x^2 = 7x - 4 \Rightarrow x^2 - 7x + 4 = 0$$

この方程式は、因数分解では解けません。よって、解の公式をつかうと、次のようになります。

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 16}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

よって、$x = 7 - \frac{4}{x}$ の解は次のとおりです。

$$x = \frac{7 + \sqrt{33}}{2} \text{ および } x = \frac{7 - \sqrt{33}}{2}.$$

問題

次の方程式を解きなさい。

a) $3x^2 + x - 1 = 0$　　b) $x^2 = -2(2x + 1)$　　c) $x^2 - 3(2x + 1) = 0$　　d) $2x(3 - x) = 3$

e) $x = x^2 - 1$　　f) $x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{45}{4} = 0$　　g) $2x = 8 - \frac{5}{x}$　　h) $x = -3 + \frac{2}{x}$

達成の目安

3.2 解の公式をつかって二次方程式を解きましょう。

学習の流れ

この授業では、解の公式による二次方程式の解き方を復習します。この授業で解く方程式には、分母が x に等しい分数項で、二次方程式に簡略化できるものもあります。

つまずきやすい点

解の公式をつかう際、係数の符号を含めるよう、生徒に念押ししてください。

解答：

a) $$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 12}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

$3x^2 + x - 1 = 0$ の解：

$$x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{6} \text{ または } \frac{-1 - \sqrt{13}}{6}$$

b) この方程式は、$x^2 + 4x + 2 = 0$ に等しいので、次のようになります。

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

$x^2 = -2(2x + 1)$ の解：

$x = -2 + \sqrt{2}$ または $x = -2 - \sqrt{2}$

c) この方程式は、$x^2 - 6x - 3 = 0$ に等しいので、次のようになります。

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 12}}{2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{3}$$

$x^2 - 3(2x + 1) = 0$ の解：

$x = 3 + 2\sqrt{3}$ または $x = 3 - 2\sqrt{3}$

d) この方程式は、$2x^2 - 6x + 3 = 0$ に等しいので、次のようになります。

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(2)(3)}}{2(2)} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{4} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$2x(3 - x) = 3$ の解：

$$x = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \text{ または } x = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$$

e) この方程式は、$x^2 - x - 1 = 0$ に等しいので、次のようになります。

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$x = x^2 - 1$ の解：

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ または } x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

f) この方程式は、$4x^2 - 30x + 45 = 0$ に等しいので、次のようになります。

$$x = \frac{30 \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(4)(45)}}{2(4)} = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 720}}{8} = \frac{30 \pm 6\sqrt{5}}{8} = \frac{15 \pm 3\sqrt{5}}{4}$$

$x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{45}{4} = 0$ の解：

$$x = \frac{15 + 3\sqrt{5}}{4} \text{ または } x = \frac{15 - 3\sqrt{5}}{4}$$

g) この方程式は $2x^2 - 8x + 5 = 0$ に等しいので、次のようになります。

$$x = \frac{4 + \sqrt{6}}{2} \text{ または } x = \frac{4 - \sqrt{6}}{2}$$

h) この方程式は $x^2 + 3x - 2 = 0$ に等しいので、次のようになります。

$$x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \text{ または } x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$$

3.3 複素数の定義

定義

$i^2 = -1$ を満たす数 i を**虚数単位**といいます。つまり、次の式が成り立ちます。

$$i = \sqrt{-1}.$$

この虚数単位と 2 つの実数 a と b を用いて、$z = a + bi$ という式で表すことのできる数を**複素数**といいます。
複素数全体からなる集合、つまり $a + bi$ という式は、$\mathbb{C}$. を用いて表します。

複素数 $z = a + bi$ は、次の条件を満たします。

1. $b = 0$ のとき、z は実数です。
2. a と b が 0 ではないとき、z は**虚数**です。
3. $a = 0$、$b \neq 0$ のとき、$z = bi$ は**純虚数**です。

複素数を表すには、通常アルファベットの z と w を用います。2 つ以上の複素数が必要な場合は、z_1、z_2、z_3、z_4 などのように、添字を用います。

a を z の**実部**といい、Re(z) と表します。一方、b を z の**虚部**といい、Im(z) と表します。2 つの複素数があり、実部どうし、虚部どうしがそれぞれ等しい場合、この 2 つの複素数は等しいということになります。

例 1

次の式の Re(z) と Im(z) を求めなさい。

a) $z = 5 - 7i$

b) $z = \sqrt{2} + i$

c) $z = \frac{-4 + 9i}{2}$

a) $\mathrm{Re}(z) = 5$
$\mathrm{Im}(z) = -7$

b) $\mathrm{Re}(z) = \sqrt{2}$
$\mathrm{Im}(z) = 1$

c) まず、z を次のように変換します。

$$z = \frac{-4}{2} + \frac{9i}{2} = -2 + \frac{9}{2}i$$

すると、次にようになります。

$$\mathrm{Re}(z) = -2、\mathrm{Im}(z) = \frac{9}{2}$$

例 2

2 つの複素数が $z = 2x + 3i$、$w = 4 + (y - 1)i$ である場合、z = w を満たす実数 x と y の値を求めなさい。

複素数 z と w が等しくなるには、次のようになります。

$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w) \qquad \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$$
$$2x = 4 \qquad 3 = y - 1$$

両方の一次方程式を解くと、次のようになります。

$$x = 2 \qquad 4 = y$$

よって、$z = w$ を満たすとき、x と y の値は、それぞれ 2 と 4 になります。

問題

1. 次の式で、z の実部と虚部を求めなさい。

a) $z = -3 + 8i$

b) $z = \frac{1}{2} - 6i$

c) $z = \sqrt{5} - \sqrt{3}i$

d) $z = 11i$

e) $z = 3$

f) $z = \frac{-12 - i}{3}$

2. 次の式で、$z = w$ を満たす実数 x と y の値を求めなさい。

a) $z = (x + 1) + 5i$, $w = -6 + (4 - y)i$

b) $z = 10 - 3xi$, $w = 8y + 15i$

c) $z = (x + y) + 4i$, $w = -2x + 3yi$

d) $z = -x + 3yi$, $w = (y - 1) - xi$

達成の目安

3.3 複素数の実部と虚部を見分けましょう。

学習の流れ

この授業では、複素数、実部、虚部の定義と、2 つの複素数が等しくなる条件を説明します。生徒は、これらの学習内容を活かすことで、本章の後半には、実根か虚根かに関わらず、多項式の根を求められるようになります。

ねらい

この授業では、あくまで複素数の実部と虚部を関連づけるだけに留めます。ここでの目的は、生徒が数学用語や虚数単位の使用に慣れることです。次回の授業以降は、複素数の計算の基礎を固めます。

解答：

1a) $z = -3 + 8i$

$\mathrm{Re}(z) = -3;\ \mathrm{Im}(z) = 8$

1b) $z = \frac{1}{2} - 6i$

$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2};\ \mathrm{Im}(z) = -6$

1c) $z = \sqrt{5} - \sqrt{3}i$

$\mathrm{Re}(z) = \sqrt{5};\ \mathrm{Im}(z) = -\sqrt{3}$

1d) $z = 11i$

$\mathrm{Re}(z) = 0;\ \mathrm{Im}(z) = 11$

1e) $z = 3$

$\mathrm{Re}(z) = 3;\ \mathrm{Im}(z) = 0$

1f) $z = \frac{-12 - i}{3} = -\frac{12}{3} - \frac{1}{3}i = -4 - \frac{1}{3}i$

$\mathrm{Re}(z) = -4;\ \mathrm{Im}(z) = -\frac{1}{3}$

2a) $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w)$、$\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$ を満たすと、次のようになります。

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z) &= \mathrm{Re}(w) \\ x + 1 &= -6 \\ x &= -6 - 1 \\ x &= -7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathrm{Im}(z) &= \mathrm{Im}(w) \\ 5 &= 4 - y \\ y &= 4 - 5 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

よって、$z = w$ を満たすには、x と y の値は、それぞれ –7 と –1 になります。

2b) 実部と虚部をそれぞれ等しくすると、次のようになります。

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z) &= \mathrm{Re}(w) \\ 10 &= 8y \\ y &= \frac{10}{8} \\ y &= \frac{5}{4} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathrm{Im}(z) &= \mathrm{Im}(w) \\ -3x &= 15 \\ x &= \frac{15}{-3} \\ x &= -5 \end{aligned}$$

よって、$z = w$ を満たすには、x と y の値は、それぞれ –5 と $\frac{5}{4}$ になります。

2c) 互いの虚部を等しくすると、次のようになります。

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(z) &= \mathrm{Im}(w) \\ 4 &= 3y \\ y &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

互いの実部を等しくして y を代入すると、次のようになります。

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(z) &= \mathrm{Im}(w) \\ x + y &= -2x \\ 3x &= -\frac{4}{3} \\ x &= -\frac{4}{9} \end{aligned}$$

よって、$z = w$ を満たすには、x と y の値は、それぞれ $-\frac{4}{9}$、$\frac{4}{3}$ になります。

2d) 実部と虚部をそれぞれ等しくすると、次のようになります。

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z) &= \mathrm{Re}(w) \\ -x &= y - 1 \\ x &= -y + 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathrm{Im}(z) &= \mathrm{Im}(w) \\ 3y &= -x \\ x &= -3y \end{aligned}$$

二元一次方程式になったので、次のように代入法をつかいます。

$$\begin{aligned} -y + 1 &= -3y \\ 2y &= -1 \\ y &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

このように、$x = -3\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$ となります。よって、解は次のようになります。$x = \frac{3}{2}$、$-\frac{1}{2}$

3.4 複素数のたし算、ひき算、かけ算

導入問題

$z = 3 + 7i$、$w = 2 - 3i$の場合、$z + w$、$z - w$、zw の解を求めなさい。

計算するにあたって、i を変数と考えましょう。

解法

多項式の和のように、たし算できるのは「同類」項だけです。

$$\begin{aligned} z + w &= 3 + 7i + 2 - 3i \\ &= (3 + 2) + [7 + (-3)]i \\ &= (3 + 2) + (7 - 3)i \\ &= 5 + 4i \end{aligned}$$

ひき算をするには、w の実部と虚部の表記に注意します。

$$\begin{aligned} z - w &= 3 + 7i - (2 - 3i) \\ &= (3 - 2) + [7 - (-3)]i \\ &= (3 - 2) + (7 + 3)i \\ &= 1 + 10i \end{aligned}$$

かけ算をするには、$i^2 = -1$ に留意して、二項式の積とします。

$$\begin{aligned} zw &= (3 + 7i)(2 - 3i) \\ &= 3(2) + [3(-3) + 7(2)]i + 7(-3)i^2 \\ &= 6 + (-9 + 14)i - 21(-1) \\ &= 6 + 21 + 5i \\ &= 27 + 5i \end{aligned}$$

よって、次のようになります。$z + w = 5 + 4i$、$z - w = 1 + 10i$、$zw = 27 + 5i$

定義

複素数 $z = a + bi$、$w = c + di$ の**和**と**差**は、それぞれ $z + w$、$z - w$ と表し、次のように定義します。

$$z + w = (a + c) + (b + d)i$$
$$z - w = (a - c) + (b - d)i.$$

複素数 $z = a + bi$、$w = c + di$ の**積**は zw と表し、次のように定義します。

$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

$z = a + bi$ の**共役複素数**（または、単に z の共役数） は、$\overline{z}$で表した別の複素数 $\overline{z} = a - bi$ です。$|z|$ で表した実数は、複素数 $z = a + bi$ の**絶対値**といい、次のように定義します。

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= (a + bi)(a - bi) \\ &= a^2 - b^2i^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

問題

1.それぞれ、$z + w$、$z - w$、zw を計算し、各数の共役数と絶対値を求めなさい。

a) $z = -5 + 4i$, $w = 2 - 3i$
b) $z = 4 - i$, $w = -6 + 4i$
c) $z = -3 - 2i$, $w = -5 + i$
d) $z = 8 - i$, $w = 12 + 3i$
e) $z = 5 - 2i$, $w = 6i$
f) $z = -3 + 8i$, $w = 2$

2. 複素数 $z = a + bi$ の場合、次の等式が成り立つことを証明しなさい。

a) $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$
b) $z - \overline{z} = 2\mathrm{Im}(z)i$

達成の目安

3.4 複素数のたし算、ひき算、かけ算をして、複素数の共役数と絶対値を求めましょう。

学習の流れ

この授業では、多項式におけるたし算、ひき算、かけ算と比較しつつ、複素数のたし算、ひき算、かけ算に取り組みます。

ねらい

「問題」で生徒に求められるのは、「定義」で解説した内容を応用することです。つまり、a、b、c、d を区別して代入しなければなりません。

解答：

1a) $z + w = (-5 + 2) + (4 - 3)i = -3 + i$

$z - w = (-5 - 2) + (4 + 3)i = -7 + 7i$

$zw = [-5(2) - 4(-3)] + [-5(-3) + 4(2)]i = 2 + 23i$

$\overline{z} = -5 - 4i$; $\overline{w} = 2 + 3i$

$|z| = \sqrt{(-5)^2 + 4^2} = \sqrt{41}$

$|w| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

1b) $z + w = (4 - 6) + (-1 + 4)i = -2 + 3i$

$z - w = (4 + 6) + (-1 - 4)i = 10 - 5i$

$zw = [4(-6) - (-1)4] + [4(4) + (-1)(-6)]i = -20 + 22i$

$\overline{z} = 4 + i$; $\overline{w} = -6 - 4i$

$|z| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$

$|w| = \sqrt{(-6)^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$

1c) $z + w = (-3 - 5) + (-2 + 1)i = -8 - i$

$z - w = (-3 + 5) + (-2 - 1)i = 2 - 3i$

$zw = [-3(-5) - (-2)1] + [-3(1) + (-2)(-5)]i = 17 + 7i$

$\overline{z} = -3 + 2i$; $\overline{w} = -5 - i$

$|z| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

$|w| = \sqrt{(-5)^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

1d) $z + w = (8 + 12) + (-1 + 3)i = 20 + 2i$

$z - w = (8 - 12) + (-1 - 3)i = -4 - 4i$

$zw = [8(12) - (-1)3] + [8(3) + (-1)(12)]i = 99 + 12i$

$\overline{z} = 8 + i$; $\overline{w} = 12 - 3i$

$|z| = \sqrt{8^2 + (-1)^2} = \sqrt{65}$

$|w| = \sqrt{12^2 + 3^2} = 3\sqrt{17}$

1e) $z + w = (5 + 0) + (-2 + 6)i = 5 + 4i$

$z - w = (5 - 0) + (-2 - 6)i = 5 - 8i$

$zw = (5 - 2i)6i = 30i - 12i^2 = 12 + 30i$

$\overline{z} = 5 + 2i$; $\overline{w} = -6i$

$|z| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$

$|w| = \sqrt{6^2} = 6$

1f) $z + w = (-3 + 2) + 8i = -1 + 8i$

$z - w = (-3 - 2) + 8i = -5 + 8i$

$zw = (-3 + 8i)2 = -6 + 16i$

$\overline{z} = -3 - 8i$; $\overline{w} = 2$

$|z| = \sqrt{(-3)^2 + 8^2} = \sqrt{73}$

$|w| = \sqrt{2^2} = 2$

2a)
$$\begin{aligned} z + \overline{z} &= (a + bi) + (a - bi) \\ &= (a + a) + (b - b)i \\ &= 2a + 0i \\ &= 2a \\ &= 2\mathrm{Re}(z) \end{aligned}$$

2b)
$$\begin{aligned} z - \overline{z} &= (a + bi) - (a - bi) \\ &= (a - a) + (b + b)i \\ &= 0 + 2bi \\ &= 2bi \\ &= 2\mathrm{Im}(z)i \end{aligned}$$

3.5 複素数のわり算

導入問題

$z = a + bi$、$w = c + di$ の場合、$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di}$ を計算するには、次の手順を踏みます。

1. $\frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{c-di}{c-di}$ でかけます。
2. この積を求めます。
3. 解を求めます。

解法

1. $\frac{\overline{w}}{\overline{w}}$ でかけ算するにあたって、1 でかけています。つまり、元の式に変化はありません。

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \times \frac{c-di}{c-di}$$
$$= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}.$$

2. この積を計算すると、次のようになります。

$$\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd+(-ad+bc)i}{c^2+d^2}.$$

3. z の w によるわり算は、複素数です。

$$\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i.$$

定義

複素数 $z = a + bi$、$w = c + di$ の場合、z の w によるわり算は $\frac{z}{w}$ で表し、次の式が成り立ちます。

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i.$$

例

$4 + 3i$ を $5 - i$ でわりなさい。

この場合、分母と分子を共役数 $5 - i$ でかけると、次のようになります。

$$\frac{4+3i}{5-i} = \frac{4+3i}{5-i} \times \frac{5+i}{5+i} = \frac{(4+3i)(5+i)}{5^2+1^2} = \frac{(20-3)+(4+15)i}{26} = \frac{17+19i}{26} = \frac{17}{26} + \frac{19}{26}i.$$

よって、次のようになります。$\frac{4+3i}{5-i} = \frac{17}{26} + \frac{19}{26}i$

問題

1. それぞれ、$\frac{z}{w}$ を計算しなさい。

a) $z = 3,\ w = 2 + 4i$
b) $z = 5,\ w = 2 - 7i$
c) $z = -7i,\ w = 6 - 2i$
d) $z = 2 + 9i,\ w = -3 - i$
e) $z = -4 + 6i,\ w = 2 + 7i$
f) $z = -3 - 2i,\ w = 5 + 2i$
g) $z = 4 - 2i,\ w = -5i$
h) $z = -2 + 6i,\ w = 3i$

注目： これまで複素数を含めた計算を見てきましたが、それぞれ、複素数 $u + vi$ の式の書き出しを目的としています。同じように、わり算については、分子と分母を分母の共役数でかけることで、分母の複素数をくくり出すことを目的としています。

2. $z = a + bi$、$w = c + di$ の場合、次の問を解きなさい。

a) $\frac{z}{w}$ を計算しなさい。
b) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}$ を計算しなさい。
c) $\frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ を計算しなさい。
d) b) と c) の解を比較しなさい。

達成の目安

3.5 除数の共役数でかけることで、2 つの複素数の商を求めましょう。

学習の流れ

この授業では、2 つの複素数のわり算 (商) に取り組みます。ここで用いる解法は、除数 (分母) の共役数によるかけ算です。式 $u+vi$ において u と v が実数を表す場合、その解を書き出します。

ねらい

「定義」にて、$z=a+bi$、$w=c+di$ におけるわり算の解を示していますが、「問題」に取り組むにあたって、a、b、c、d の値を代入する必要はありません。「達成の目安」で定めてあるように、除数の共役数でかけて、その積からできた計算式を解きます。

解答：

1a) $\frac{z}{w}=\frac{3}{2+4i}\times\frac{2-4i}{2-4i}=\frac{3(2-4i)}{2^2+4^2}=\frac{6-12i}{4+16}=\frac{3}{10}-\frac{3}{5}i$

1b) $\frac{z}{w}=\frac{5}{2-7i}\times\frac{2+7i}{2+7i}=\frac{5(2+7i)}{2^2+7^2}=\frac{10+35i}{4+49}=\frac{10}{53}+\frac{35}{53}i$

1c) $\frac{z}{w}=\frac{-7i}{6-2i}\times\frac{6+2i}{6+2i}=\frac{-7i(6+2i)}{6^2+2^2}=\frac{14-42i}{36+4}=\frac{7}{20}-\frac{21}{20}i$

1d) $\frac{z}{w}=\frac{2+9i}{-3-i}\times\frac{-3+i}{-3+i}=\frac{(-6-9)+(2-27)i}{9+1}=-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$

1e) $\frac{z}{w}=\frac{-4+6i}{2+7i}\times\frac{2-7i}{2-7i}=\frac{(-8+42)+(28+12)i}{4+49}=\frac{34}{53}+\frac{40}{53}i$

1f) $\frac{z}{w}=\frac{-3-2i}{5+2i}\times\frac{5-2i}{5-2i}=\frac{(-15-4)+(6-10)i}{25+4}=-\frac{19}{29}-\frac{4}{29}i$

1g) $\frac{z}{w}=\frac{4-2i}{-5i}\times\frac{5i}{5i}=\frac{10+20i}{25}=\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i$

1h) $\frac{z}{w}=\frac{-2+6i}{3i}\times\frac{-3i}{-3i}=\frac{18+6i}{9}=2+\frac{2}{3}i$

2a) $\frac{z}{w}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i$

2b) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}-\frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i$
$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{ad-bc}{c^2+d^2}i$

2c) $\frac{\overline{z}}{\overline{w}}=\frac{a-bi}{c-di}$
$=\frac{a-bi}{c-di}\times\frac{c+di}{c+di}$
$=\frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{c^2+d^2}$
$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{ad-bc}{c^2+d^2}i$

2d) 解が等しいため、次のようになります。

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{w}}$$

3.6 負の数の平方根*

導入問題

複素数 x の場合、$x^2 = -5$ を満たす x の値をすべて求めなさい。

$i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$

解法

複素数のうち、二乗すると解が -5 に等しくなるものを求めます。-5 を積 5(-1) と書き出せることに注目しましょう。よって、次のようになります。$x^2 = 5(-1) = 5i^2$

よって、$x = \sqrt{5}\,i$ または $x = -\sqrt{5}\,i$ では、$x^2 = 5i^2$ を満たします。したがって、次の式が成り立ちます。

$$(\sqrt{5}\,i)^2 = (\sqrt{5})^2 i^2 = -5 \qquad (-\sqrt{5}\,i)^2 = (-\sqrt{5})^2 i^2 = -5$$

よって、$x^2 = -5$ を満たす x の値は、次のとおりです。$x = \sqrt{5}\,i$ または $x = -\sqrt{5}\,i$

定義

正の実数 a ($a > 0$) の場合、$-a$ の平方根は、$\sqrt{a}\,i$ と $-\sqrt{a}\,i$ です。よって、次の式が成り立ちます。

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,i.$$

例

次の数を、式 $a + bi$ で書き表しなさい。

a) $\sqrt{-3}\sqrt{-5}$　　b) $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}}$　　c) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}}$

$-i^2 = -(-1) = 1$

まず負の数の根を式 $\sqrt{a}\,i$ で書き表して、次にそれぞれ計算します。

a) $\sqrt{-3}\sqrt{-5} = (\sqrt{3}\,i)(\sqrt{5}\,i)$

$= \sqrt{15}\,i^2$

$= -\sqrt{15}$

この式から、次の解が導き出せます。

$$\sqrt{-3}\sqrt{-5} = -\sqrt{15}.$$

b) $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{3}\,i}{\sqrt{5}}$

$= \sqrt{\dfrac{3}{5}}\,i$

よって、次のようになります。

$$\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3}{5}}\,i$$

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}\,i}\left(\dfrac{-i}{-i}\right)$

$= \sqrt{\dfrac{3}{5}}\left(\dfrac{-i}{-i^2}\right)$

$= \sqrt{\dfrac{3}{5}}\left(\dfrac{-i}{1}\right)$

$= -\sqrt{\dfrac{3}{5}}\,i$

よって、次のようになります。

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}} = -\sqrt{\frac{3}{5}}\,i$$

一般的に、a と b が正の実数の場合、次の式が成り立ちます。
1. $\sqrt{-a}\sqrt{-b} \neq \sqrt{(-a)(-a)}$　　2. $\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}} \neq \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}$

また、$\sqrt{5}\,i$ の共役数、つまり $-\sqrt{5}\,i$ でかけることもできます。同じ解が求められることを確認しましょう。

問題

1. それぞれ、$-a$ の平方根を求めなさい。

a) $a = 2$　　b) $a = 3$　　c) $a = 7$　　d) $a = 10$

e) $a = 4$　　f) $a = 25$　　g) $a = \frac{1}{3}$　　h) $a = \frac{1}{9}$

2. 次の数を、式 $a + bi$ で書き表しなさい。

a) $\sqrt{-7}\sqrt{2}$　　b) $\sqrt{7}\sqrt{-2}$　　c) $\sqrt{-3}\sqrt{-7}$

d) $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-7}}$　　e) $\dfrac{\sqrt{-4}}{\sqrt{3}}$　　f) $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{-6}}$

達成の目安

3.6 負の実数の平方根を求めて、式 $a+bi$ で書き表しましょう。

学習の流れ

この授業では、複素数の計算の基礎を定義・実践したら、負の実数の平方根を求めます（9 学年でも同様に、正の数の平方根を求めます）。これにより、a が正の実数である場合、$\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$ が成り立つことを、生徒が理解できます。生徒が「導入問題」を解くのに苦労している場合は、生徒に「解答」を説明してください。

ねらい

「導入問題」では、二次方程式の解法に改めて取り組みます。この授業と「定義」で、方程式、多項式の根、複素数の根などの解法を、生徒に説明してください。「問題」の問 1 で生徒に求められるのは、「定義」で解説した内容を応用することです。つまり、解を即座に求めなければなりません。

つまずきやすい点

「問題」の問 2 では、計算に取り掛かる前に、式 bi で平方根記号を書き出すよう、生徒に念を押してください。問 d) や問 f) は、分子と分母を分母の共役数でかけるか、「例」の問 c) のように、単に $-i$ でかけることで、解くことができます。

解答：

1a) $-a=-2$ となります。よって、-2 の根は $\sqrt{2}i$ または $-\sqrt{2}i$ です。

1b) $-a=-3$ となります。よって、-3 の根は $\sqrt{3}i$ または $-\sqrt{3}i$ です。

1c) $-a=-7$ となります。よって、-7 の根は $\sqrt{7}i$ または $-\sqrt{7}i$ です。

1d) $-a=-10$ となります。よって、-10 の根は $\sqrt{10}i$ または $-\sqrt{10}i$ です。

1e) $-a=-4$ となります。よって、-4 の根は

$\sqrt{4}i=2i$ または $-\sqrt{4}i=-2i$ です。

1f) $-a=-25$ となります。よって、-25 の根は

$\sqrt{25}i=5i$ または $-\sqrt{25}i=-5i$ です。

1g) $-a=-\frac{1}{3}$ となります。よって、$-\frac{1}{3}$ の根は

$\sqrt{\frac{1}{3}}i=\frac{1}{\sqrt{3}}i$ または $-\sqrt{\frac{1}{3}}i=-\frac{1}{\sqrt{3}}i$ です。

1h) $-a=-\frac{1}{9}$ となります。よって、$-\frac{1}{9}$ の根は

$\sqrt{\frac{1}{9}}i=\frac{1}{3}i$ または $-\sqrt{\frac{1}{9}}i=-\frac{1}{3}i$ です。

分数を分けて、次にように書き表したまま残しておいても構いません。$\frac{\sqrt{3}}{3}$

2a) $\sqrt{-7}\sqrt{2}=(\sqrt{7}i)\sqrt{2}$
$=\sqrt{14}i$

2b) $\sqrt{7}\sqrt{-2}=\sqrt{7}(\sqrt{2}i)$
$=\sqrt{14}i$

2c) $\sqrt{-3}\sqrt{-7}=(\sqrt{3}i)(\sqrt{7}i)$
$=\sqrt{21}i^2$
$=-\sqrt{21}$

2d) $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-7}}=\frac{\sqrt{3}i}{\sqrt{7}i}$
$=\sqrt{\frac{3}{7}}$

2e) $\frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{4}i}{\sqrt{3}}$
$=\frac{2}{\sqrt{3}}i$

解を分けて、次にように書き表したまま残しておいても構いません。$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

2f) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{-6}}=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}i}\left(\frac{-i}{-i}\right)$
$=-2i$

3.7 二次方程式の判別式

導入問題

二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ で、$\Delta = b^2 - 4ac$ と定義します。次の方程式において、Δ の値を計算してください。その際、符号を確認のうえ、解の公式をつかって解いてください（複素解を検討すること）。

a) $2x^2 - 5x - 1 = 0$　　b) $x^2 - 2x + 1 = 0$　　c) $x^2 + 3x + 5 = 0$

Δ はギリシャ文字のひとつで、「デルタ」と読みます。

解法

a) Δ を計算すると、次のようになります。

$$\Delta = (-5)^2 - 4(2)(-1) = 25 + 8 = 33$$

つまり、$\Delta > 0$ となります。解の公式をつかって方程式を解くと、次のようになります（Δ の値は、解の公式の被開平数です）。

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{33}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{4}.$$

方程式 $2x^2 - 5x - 1 = 0$ には、実数解が 2 つあります。

b) Δ の値は、次のようになります。

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = 0$$

つまり、$\Delta = 0$ となります。また、解の公式における被開平数の値は 0 なので、次の式が成り立ちます。

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

方程式 $x^2 - 2x + 1 = 0$ には、実数解が 1 つあります。

c) Δ の値は、次のようになります。

$$\Delta = 3^2 - 4(1)(5) = 9 - 20 = -11$$

つまり、$\Delta < 0$ となります。解の公式をつかって方程式を解くと、次のようになります。

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{11}\,i}{2}.$$

方程式 $x^2 + 3x + 5 = 0$ には、複素解が 2 つあります。

定義

二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の a、b、c が実数で、$a \neq 0$ の場合、$\Delta = b^2 - 4ac$ は、二次方程式の判別式といいます。二次方程式の解における数とその種類は、次のように見極めることができます。

1. $\Delta > 0$ の場合、方程式には実数解が 2 つあります。つまり、実数を含んでいます。
2. $\Delta = 0$ の場合、方程式には実数解が 1 つあります。
3. $\Delta < 0$ の場合、方程式には虚数解が 2 つあります。つまり、式 $u + vi$ において、$v \neq 0$ です。

例

方程式 $x^2 + mx + 4 = 0$ に実数解が 1 つの場合、m の値を求めなさい。
実数解が 1 つの場合、$\Delta = 0$ を満たします。つまり、$\Delta = m^2 - 16 = 0$ となります。よって、$m = 4$ または $m = -4$ です。
したがって、方程式 $x^2 + mx + 4 = 0$ に実数解が 1 つの場合、m は、4 または -4 です。

問題

1. 次の方程式の解が実数解か虚数解かを求めなさい。

a) $4x^2 + x - 3 = 0$　　b) $4x^2 + x + 14 = 0$
c) $9x^2 - 30x + 25 = 0$　　d) $15x^2 + 12 = -8x$

2. 方程式 $x^2 - 6x + 5 - m = 0$ に実数解が 1 つの場合、m の値を求めなさい。

達成の目安

3.7 判別式をつかって、二次方程式の実数解、または虚数解を求めましょう。

学習の流れ

この授業では、二次方程式の解法における数とその種類に慣れていきます。その際、その解は複素数であるとみなし、方程式の判別式をしっかり考察します。

ねらい

「問題」の問 1 で生徒に求められるのは、「定義」で解説した内容を応用することです。つまり、各問では、判別式をつかって計算しなければなりません (方程式を解く必要はありません)。問 2 では、「例」と同じように考察しなければなりません。

つまずきやすい点

「問題」の問 2 では、c に 5 しか代入しない生徒がいるかもしれません。$c = 5 - m$ であることを示してください。

解答：

1a) $a = 4$、$b = 1$、$c = -3$ なので、次の式が成り立ちます。

$$\Delta = 1^2 - 4(4)(-3) = 1 + 48 = 49$$

この式では、$\Delta > 0$ なので、方程式 $4x^2 + x - 3 = 0$ には、実数解が 2 つあります。

1b) $a = 4$、$b = 1$、$c = 14$ なので、次の式が成り立ちます。

$$\Delta = 1^2 - 4(4)(14) = 1 - 224 = -223$$

この式では、$\Delta < 0$ なので、方程式 $4x^2 + x + 14 = 0$ には、実数解ではなく、虚数解が 2 つあります。

1c) $a = 9$、$b = -30$、$c = 25$ なので、次の式が成り立ちます。

$$\Delta = (-30)^2 - 4(9)(25) = 900 - 900 = 0$$

この式では、$\Delta = 0$ なので、方程式 $9x^2 - 30x + 25 = 0$ には、実数解が 1 つあります。

1d) 方程式は $15x^2 + 8x + 12 = 0$ に等しく、$a = 15$、$b = 8$、$c = 12$ なので、次の式が成り立ちます。

$$\Delta = 8^2 - 4(15)(12) = 64 - 720 = -656$$

この式では、$\Delta < 0$ なので、方程式 $15x^2 + 12 = -8x$ には、実数解ではなく、虚数解が 2 つあります。

2. 二次方程式 $x^2 - 6x + 5 - m = 0$ では、$a = 1$、$b = -6$、$c = 5 - m$ です。よって、次のようになります。

$$\begin{aligned}\Delta &= (-6)^2 - 4(1)(5 - m)\\ &= 36 - 20 + 4m\\ &= 4m + 16\end{aligned}$$

方程式に実数解が 1 つしかない場合、$\Delta = 0$ となります。つまり、$4m + 16 = 0$ なので、次の式が成り立ちます。

$$\begin{aligned}4m &= -16\\ m &= -4\end{aligned}$$

よって、$m = -4$ の場合、$x^2 - 6x + 5 - m = 0$ には実数解が 1 つだけとなります。

3.8 多項式の因数分解*

導入問題

複素数をつかって、多項式 $x^2 + 12x + 40$ を因数分解しなさい。

解法

今回も、三項式 $x^2 + (a + b)x + ab$ の因数分解のケースと同様、積が 40、和が 12 に等しい 2 つの複素数を求めなければなりません。まず、解の公式をつかって、方程式 $x^2 + 12x + 40 = 0$ を解きます。

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(1)(40)}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-12 \pm 4i}{2} = -6 \pm 2i$$

よって、次のようになります。

$$x = -6 + 2i \quad \text{または} \quad x = -6 - 2i$$
$$x - (-6 + 2i) = 0 \quad \text{または} \quad x - (-6 - 2i) = 0$$
$$x + 6 - 2i = 0 \quad \text{または} \quad x + 6 + 2i = 0$$

$z = 6 - 2i$、$w = 6 + 2i$ の場合、$zw = 40$、$z + w = 12$ であることを確認できます。そして、次の式が成り立ちます。

$$(x + z)(x + w) = x^2 + (z + w)x + zw = x^2 + 12x + 40.$$

よって、次のようになります。 $x^2 + 12x + 40 = [x - (-6 + 2i)][x - (-6 - 2i)] = (x + 6 - 2i)(x + 6 + 2i)$

まとめ

x_1 と x_2 が、二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解（実数解または虚数解） である場合、次の式が成り立ちます。

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

例

多項式 $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$ を因数分解しなさい。

定数項の約数は、$a = \pm1$、±2、±7、±14 です。元の多項式で $x = 2$ を代入すると、次のようになります。

$$2^3 - 6(2)^2 + 15(2) - 14 = 8 - 24 + 30 - 14 = 0$$

因数定理により、$x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = (x - 2)d$ とし、d は二次多項式とします。組立除法をつかうと、次のようになります。

$$x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = (x - 2)(x^2 - 4x + 7)$$

次に、二次方程式の解の公式をつかって、多項式 $x^2 - 4x + 7$ を因数分解します。

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(7)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = 2 \pm \sqrt{3}i.$$

よって、次のようになります。

$$x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = (x - 2)[x - (2 + \sqrt{3}i)][x - (2 - \sqrt{3}i)] = (x - 2)(x - 2 - \sqrt{3}i)(x - 2 + \sqrt{3}i)$$

問題

次の多項式を因数分解しなさい。

a) $x^2 - 12x + 40$ b) $5x^2 + 8x + 5$ c) $x^3 - 6x^2 + 2x + 24$
d) $x^3 + x + 10$ e) $x^3 - 3x^2 + 25x + 29$ f) $x^3 - 7x^2 + 20x - 50$

57

達成の目安

3.8 複素数をつかって、二次多項式または三次多項式を因数分解しましょう。

学習の流れ

この授業では、複素数をつかって、三次までの多項式を $a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ と書き表します。このとき、x_1、x_2、x_3 は複素数です。これは、3.9 の授業で、多項式の根を定義・計算するための土台となります。生徒が「導入問題」を解くのに苦労している場合は、生徒に「解答」を説明してください。

つまずきやすい点

この授業では、基本的にこれまでの授業で学んだ内容をすべて応用します。例えば、三次多項式の因数分解の方法、負の数の根の求め方、二次方程式の解法などです。生徒は、授業で学んだ計算手順を、しっかり把握していなければなりません。

解答：

a) 二次方程式の解の公式をつかって、$x^2-12x+40$ を因数分解します。

$$x=\frac{12\pm\sqrt{144-160}}{2}=\frac{12\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{12\pm 4i}{2}=6\pm 2i$$

よって、次のようになります。

$$\begin{aligned}x^2-12x+40&=[x-(6+2i)][x-(6-2i)]\\&=(x-6-2i)(x-6+2i).\end{aligned}$$

b) 二次方程式の解の公式をつかって、$5x^2+8x+5$ を因数分解します。

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{64-100}}{10}=\frac{-8\pm\sqrt{-36}}{10}=\frac{-8\pm 6i}{10}=-\frac{4}{5}\pm\frac{3}{5}i$$

よって、次のようになります。

$$5x^2+8x+5=5\left(x+\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i\right)\left(x+\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i\right).$$

c) $x^3-6x^2+2x+24$ を因数分解するには、レッスン 2 で学んだ内容を活かします。24 の約数は、±1、±2、±3、±4、±6、±8、±12、±24 です。多項式に $x=4$ を代入すると、次のようになります。

$$4^3-6(4)^2+2(4)+24=64-96+8+24=0$$

よって、$x^3-6x^2+2x+24=(x-4)d$ となります。組立除法をつかって多項式 d を解くと、$d=x^2-2x-6$ となり、この式を因数分解すると、積 1 になります。

$$(x-1-\sqrt{7})(x-1+\sqrt{7})$$

よって、次のようになります。

$$x^3-6x^2+2x+24=(x-4)(x-1-\sqrt{7})(x-1+\sqrt{7}).$$

d) 前回の問いと同じように解きます。10 の約数は ±1、±2、±5、±10 です。x^3+x+10 に $x=-2$ を代入すると、次のようになります。

$$(-2)^3-2+10=-8+8=0$$

よって、$x^3+x+10=(x+2)d$ となります。組立除法をつかって多項式 d を解くと、$d=x^2-2x+5$ となり、この式を因数分解すると、積 $(x-1-2i)(x-1+2i)$ になります。

よって、次のようになります。

$$x^3+x+10=(x+2)(x-1-2i)(x-1+2i).$$

e) 29 の約数は、±1 と ±29 です。$x^3-3x^2+25x+29$ に $x=-1$ を代入すると、次のようになります。

$$(-1)^3-3(-1)^2+25(-1)+29=-1-3-25+29=0$$

よって、$x^3-3x^2+25x+29=(x+1)d$ となります。組立除法をつかって多項式 d を解くと、$d=x^2-4x+29$ となり、この式を因数分解すると、積 $(x-2-5i)(x-2+5i)$ になります。

よって、次のようになります。

$$x^3-3x^2+25x+29=(x+1)(x-2-5i)(x-2+5i).$$

f) -50 の約数は、±1、±2、±5、±10、±25、±50 です。$x^3-7x^2+20x-50$ に $x=5$ を代入すると、次のようになります。

$$5^3-7(5)^2+20(5)-50=125-175+100-50=0$$

よって、$x^3-7x^2+20x-50=(x-5)d$ となります。組立除法をつかって多項式 d を解くと、$d=x^2-2x+10$ となり、この式を因数分解すると、積 $(x-1-3i)(x-1+3i)$ になります。

よって、次のようになります。

$$x^3-7x^2+20x-50=(x-5)(x-1-3i)(x-1+3i).$$

3.9 多項式の根*

導入問題

多項式に $x = a$ を代入して解が 0 の場合、a（実数または虚数） は、変数 x の多項式の根です。次の多項式の根を求めてください。

a) $3x - 12$　　b) $2x^2 + 7x + 3$　　c) $x^3 - 3x^2 + 25x + 29$

解法

a) $3x - 12$ の根を求めるには、多項式が 0 になる x の値を求めなければなりません。つまり、方程式 $3x - 12 = 0$ を解くには、根を求めるだけで十分ということです。方程式の解は $x = 4$ なので、4 は $3x - 12$ で唯一の根となります。

b) 前回の問いと同じように、方程式 $2x^2 + 7x + 3 = 0$ を解くには、多項式 $2x^2 + 7x + 3$ の根を求めるだけで十分です。因数分解をつかって解くと、次のようになります。

$$2x^2 + 7x + 3 = (2x + 1)(x + 3) = 0.$$

よって、多項式 $2x^2 + 7x + 3$ の根は次のとおりです。 $x = -\frac{1}{2}$　$x = -3$

c) 三次多項式の場合、因数定理をつかって、多項式が 0 になる値を求めなければなりません。よって、±1 と ±29 のどちらかを x に代入します。

$x = -1$ の場合、次のようになります。$(-1)^3 - 3(-1)^2 + 25(-1) + 29 = -1 - 3 - 25 + 29 = 0$

組立除法をつかって $(x^3 - 3x^2 + 25x + 29) \div (x + 1)$ を計算し、元の多項式を因数分解すると、次のようになります。

$$x^3 - 3x^2 + 25x + 29 = (x + 1)(x^2 - 4x + 29)$$

多項式の根のうちひとつは、$x = -1$ です。次に、方程式 $x^2 - 4x + 29 = 0$ を解きながら、$x^2 - 4x + 29$ の根を求めます。

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(29)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-100}}{2} = \frac{4 \pm 10i}{2} = 2 \pm 5i.$$

よって、$x^3 - 3x^2 + 25x + 29$ の根は次のとおりです。$x = -1$、$x = 2 + 5i$、$x = 2 - 5i$

まとめ

変数の多項式が p は、次の条件を満たします。

1. p が一次多項式の場合、複素数の根は 1 つです。
2. p が二次多項式の場合、複素数の根は 2 つです。複素数の根が何乗されているか数えることで分かります。例えば、多項式 $x^2 + 2x + 1$ は、$(x + 1)^2$ と書き表すことができ、$x = -1$ は二重根です。
3. p が三次多項式の場合、複素数の根は 3 つです。複素数の根が何乗されているか数えることで分かります。

一次多項式は**線形多項式**、二次多項式は**二次式**、三次多項式は**三次式**ともいいます。多項式が、n 次式の場合もあります。n が負の数ではない整数で、かつ変数である場合、次の式で表せます。

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

この場合、a_n は 0 と相異なります。

n 次多項式の場合、複素数の根は n個です。x_1、x_2..., x_r が多項式 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ の（相異なる） 根である場合、次のように因数分解できます。

$$a_n (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_r)^{m_r}$$

この場合、m_i を根 x_i の**重複度**といい、次を満たします。

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n.$$

多項式に虚根が 1 つある場合、共役数もまた、根ということになります。

達成の目安

3.9 複素数をつかって、三次までの多項式の根を求めましょう。

学習の流れ

この授業では、多項式の根を定義します。複素数にはすでに取り組んだため、三次までの多項式に複素数の根がいくつ含まれているのか、おおまかに示してください。生徒が「導入問題」を解くのに苦労している場合は、生徒に「解答」を説明してください。

ねらい

この授業の構成は、「導入問題」、それぞれの「解答」、「まとめ」のみとなっています。これは、多項式の根を求める手順が、本ユニットを通して学んだ内容と同じだからです。「導入問題」と「まとめ」で挙げた内容では、何が多項式の根で、何乗できるのかを示しています。

つまずきやすい点

多項式の根を求めるとはどういうことか、生徒がしっかり理解していることを確認してください。前回の内容では、方程式を解く必要はありませんでした。ただし、「$3x - 12 = 0$ の根は 4」とするのは不正解です。「$3x - 12$ の根は、4 または $x = 4$」とするのが正解です。

問題提起：

この授業には、「問題」セクションがありません。必要に応じて、さらにいくつか出題して、生徒にしっかり説明してください。

次の多項式の根を求めなさい。

a) $-4x - 16$

一次多項式には、複素数の根が 1 つしかありません。これを求めるには、方程式 $-4x - 16 = 0$ を解きます。

$$-4x = 16$$
$$x = -4$$

よって、$-4x - 16$ の根は $x = -4$ です。

b) $x^2 - 2x - 1$

二次多項式には、複素数の根が 2 つあります。これを求めるには、二次方程式の解の公式をつかって $x^2 - 2x - 1 = 0$ を解きます。

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

よって、$x^2 - 2x - 1$ の根は $x = 1 + \sqrt{2}$ または $x = 1 - \sqrt{2}$ です。

c) $x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

三次多項式には、複素数の根が 3 つあります。そのうち 1 つは、因数定理をつかって求めます。また、-2 の約数 (± 1、± 2) の中から、多項式が 0 になる値を求めます。$x = 1$の場合、次のようになります。

$$1^3 - 3(1)^2 + 4(1) - 2 = 1 - 3 + 4 - 2 = 0$$

組立除法をつかって、商 $(x^3 - 3x^2 + 4x - 2) \div (x - 1)$ を計算すると、次のようになります。

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (x - 1)(x^2 - 2x + 2)$$

二次方程式の解の公式をつかうと、$x^2 - 2x + 2$ の根がわかります。つまり、$x = 1 + i$ または $x = 1 - i$ となります。よって、$x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ の根は、$x = 1$、$x = 1 + i$、$x = 1 - i$ となります。

d) $x^3 - 3x^2 + x + 5$

三次多項式には、複素数の根が 3 つあります。因数定理をつかって、5 の約数 (± 1、± 5) の中から、多項式が 0 になる値を求めます。$x = -1$ の場合、次のようになります。

$$(-1)^3 - 3(-1)^2 - 1 + 5 = -1 - 3 - 1 + 5 = 0$$

組立除法をつかって、商 $(x^3 - 3x^2 + x + 5) \div (x + 1)$ を計算すると、次のようになります。

$$x^3 - 3x^2 + x + 5 = (x + 1)(x^2 - 4x + 5)$$

二次方程式の解の公式をつかうと、$x^2 - 4x + 5$ の根がわかります。つまり、$x = 2 + i$ または $x = 2 - i$ となります。よって、$x^3 - 3x^2 + x + 5$ の根は、$x = -1$、$x = 2 + i$、$x = 2 + i$ となります。

3.10 復習問題

1. 次の方程式を、可能であれば因数分解し、そうでなければ解の公式をつかって解きなさい。

a) $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{12} = 0$
b) $x^2 + 5x = 0$
c) $x(3x + 10) = 77$
d) $15x^2 - 14 = 29x$
e) $22x^2 + 67x - 35 = 0$
f) $2.7x^2 + 4.2x + 0.8 = 0$
g) $x^2 - 6x + 12 = 0$
h) $x^2 + 5x + 6 = 0$
i) $x^2 - 2x + 26 = 0$
j) $6x^2 + x + 12 = 0$
k) $x^2 + 3x + 6 = 0$
l) $-3x^2 - 5 = -x$
m) $4x^2 + x + 14 = 0$
n) $15x^2 + 8x = -12$
o) $x^2 + 4x + 14 = 0$
p) $x^2 + 8x + 17 = 0$

2. 次の場合、x の値を求めなさい。

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}$$

赤枠で囲った式から何が分かりますか?

$$x = 1 + \cfrac{1}{\boxed{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}$$

3. 次の場合、 $x = 2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{2 + \ddots}}}}$

$x = 3$ であることを証明しなさい。

4. 次の各問で、$z + w$、$z - w$ を計算しなさい。

a) $z = 2 - i,\ w = 3 + 7i$
b) $z = -3 + 2i,\ w = 2 - 4i$
c) $z = -6 - i,\ w = i$
d) $z = 2 + i,\ w = 8 - i$
e) $z = 1 - 3i,\ w = 5 - 2i$
f) $z = 9i,\ w = 5i$
g) $z = -5,\ w = 15i$
h) $z = 7 - 6i,\ w = -11 - 3i$

5. 次の各問で、zw、$\frac{z}{w}$ を計算しなさい。

a) $z = -5 + 4i,\ w = 2 - 3i$
b) $z = 4 - i,\ w = -6 + 4i$
c) $z = -3 - 2i,\ w = -5 + i$
d) $z = 8 - i,\ w = 12 + 3i$
e) $z = 5 - 2i,\ w = 6i$
f) $z = -3 + 8i,\ w = 2$
g) $z = -9 + 7i,\ w = 4 + 9i$
h) $z = 7 - 6i,\ w = -11 - 3i$

6. 次の多項式を、複素数をつかって因数分解しなさい。

a) $4x^2 + x + 1$
b) $9x^2 + 28x + 50$
c) $x^3 - x^2 - 14x + 24$
d) $x^4 - 11x^3 + 40x^2 - 56x + 24$

達成の目安

3.10 二次方程式や複素数の問題を解きましょう。

解答：

1a) 両辺に 12 をかけると、等価方程式 $12x^2 + 8x + 1 = 0$ を求めることができます。よって、次のようになります。

$$(6x+1)(2x+1) = 0, \text{つまり、} x = -\frac{1}{6}\text{、} x = -\frac{1}{2}.$$

1b) $x(x+5) = 0$ つまり、$x = 0$ または $x = -5$

1c) 積を計算して、等価方程式 $3x^2 + 10x - 77 = 0$ を求めます。よって、次のようになります。

$$(x+7)(3x-11) = 0, \text{つまり、} \quad x = -7\text{、} \ x = \frac{11}{3}.$$

1d) $(3x-7)(5x+2) = 0$ つまり、$x = \frac{7}{3}$ および $x = -\frac{2}{5}$

1e) $(2x+7)(11x-5) = 0$ つまり、$x = -\frac{7}{2}$、$x = \frac{5}{11}$

1f) $(3x+4)(9x+2) = 0$ つまり、$x = -\frac{4}{3}$ および $x = -\frac{2}{9}$

1g) 二次方程式の解の公式をつかうと、次のように解を求めることができます。$x = 3 + \sqrt{3}i$、$x = 3 - \sqrt{3}i$

1h) $(x+2)(x+3) = 0$ つまり、$x = -2$ または $x = -3$

1i) 解：$x = 1 + 5i$、$x = 1 - 5i$

1j) 解：$x = -\frac{1}{12} + \frac{\sqrt{287}}{12}i$ および $x = -\frac{1}{12} - \frac{\sqrt{287}}{12}i.$

1k) 解：$x = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i$、$x = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i$

1l) 解：$x = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{59}}{6}i$ および $x = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{59}}{6}i.$

1m) 解：$x = -\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{223}}{8}i$、$x = -\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{223}}{8}i$

1n) 解：$x = -\frac{4}{15} + \frac{2\sqrt{41}}{15}i$ および $x = -\frac{4}{15} - \frac{2\sqrt{41}}{15}i.$

1o) 解：$x = -2 + \sqrt{10}i$、$x = -2 - \sqrt{10}i$

1p) 解： $x = -4 + i$ または $x = -4 - i$

2. 注目： $x > 0$ であり、赤枠で囲った式は x に等しいです。代入すると、次の方程式になります。

$$x = 1 + \cfrac{1}{\boxed{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}}}$$

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

この方程式は、$x^2 - x - 1 = 0 \ (x \neq 0)$ に等しいです。二次方程式の解の公式をつかってこの式を解くと、解は負の数ではなく、次のようになります。

$$x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

3. $x > 0$ であり、赤枠で囲った式は x に等しいです。代入すると、次の方程式になります。

$$x = 2 + \cfrac{3}{\boxed{2+\cfrac{3}{2+\cfrac{3}{2+\cfrac{3}{2+\ddots}}}}}$$

$$x = 2 + \frac{3}{x}$$

この方程式は、$x^2 - 2x - 3 = 0 \ (x \neq 0)$ に等しいので、解は負の数ではなく、次のようになります。$x = 3$

4a) $z + w = 5 + 6i;\ z - w = -1 - 8i$
4b) $z + w = -1 - 2i;\ z - w = -5 + 6i$
4c) $z + w = -6;\ z - w = -6 - 2i$
4d) $z + w = 10;\ z - w = -6 + 2i$
4e) $z + w = 6 - 5i;\ z - w = -4 - i$
4f) $z + w = 14i;\ z - w = 4i$
4g) $z + w = -5 + 15i;\ z - w = -5 - 15i$
4h) $z + w = -4 - 9i;\ z - w = 18 - 3i$

5a) $zw = 2 + 23i;\ \frac{z}{w} = -\frac{22}{13} - \frac{7}{13}i$

5b) $zw = -20 + 22i;\ \frac{z}{w} = -\frac{7}{13} - \frac{5}{26}i$

5c) $zw = 17 + 7i;\ \frac{z}{w} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

5d) $zw = 99 + 12i;\ \frac{z}{w} = \frac{31}{51} - \frac{4}{17}i$

5e) $zw = 12 + 30i;\ \frac{z}{w} = -\frac{1}{3} - \frac{5}{6}i$

5f) $zw = -6 + 16i;\ \frac{z}{w} = -\frac{3}{2} + 4i$

5g) $zw = -99 - 53i;\ \frac{z}{w} = \frac{27}{97} + \frac{109}{97}i$

5h) $zw = -95 + 45i;\ \frac{z}{w} = -\frac{59}{130} + \frac{87}{130}i$

6a) $4x^2 + x + 1 = 4\left(x + \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{15}}{8}i\right)\left(x + \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{15}}{8}i\right)$

6b) $9x^2 + 28x + 50 = 9\left(x + \frac{14}{9} - \frac{\sqrt{254}}{9}i\right)\left(x + \frac{14}{9} + \frac{\sqrt{254}}{9}i\right)$

6c) $x^3 - x^2 - 14x + 24 = (x-2)(x-3)(x+4)$

6d) $x^4 - 11x^3 + 40x^2 - 56x + 24 = (x-2)(x-3)(x-3-\sqrt{5})(x-3+\sqrt{5})$

問 6b) では、生徒に計算機の使用を許可してください。

3.11 ユニット問題

1. 次の多項式を因数分解しなさい。

a) $(x+y)^2-(x-y)^2$　　b) $(x+y)^2+(x-y)^2$

2. 乗法公式をつかって、次の式の解を求めなさい。

a) $190(210)$　　b) $96(104)-94(106)$

c) $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$　　d) $\sqrt{100(101)(102)(103)+1}$

$x=\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$ として、x^2 を計算しましょう。

$x=100$ として、初項と末項、第二項と第三項をかけましょう。

3. 複素数を $z_1=1+2i$、$z_2=-2+3i$、$z_3=1-i$ とし、次の計算式の解を求めなさい。

a) $z_1+z_2+z_3$　　b) $z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$　　c) $z_1z_2z_3$

d) $z_1^2+z_2^2+z_3^2$　　e) $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}$　　f) $\frac{z_1^2+z_2^2}{z_2^2+z_3^2}$

4. 次の積を計算して、それぞれ等しいことを証明しなさい。

a) $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ac)x+abc$

b) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

c) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$

5. 次の条件を満たす変数 x の二次多項式を求めなさい。1. x の係数と定数項が等しい。2. x に 1 と 2 を代入すると、多項式の値がそれぞれ 7 と 18 になります。

6. x と y が正の実数の場合、次の多項式を因数分解しなさい（平方根を含んだ因数項はそのまま残してもよい）

a) $x+2\sqrt{x}+1$　　b) $x-y$

c) $y+4\sqrt{y}+4$　　d) $x-1$

7. 複素数 z において、$|z|\geq 0$ を満たすことを証明しなさい。

8. $z=a+bi$、$w=c+di$ の場合、$|zw|=|z||w|$ を満たすかどうか証明しなさい。

9. $z=a+bi$、$w=c+di$ の場合、$\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$ を満たすかどうか証明しなさい。

10. 方程式 $mx^2+2x+1=0$ に実数解が 2 つある場合、実数 m に代わる値を求めなさい。

11. 方程式 $x^2+2x+m=0$ に虚数解が 2 つある場合、実数 m に代わる値を求めなさい。

達成の目安

3.11 多項式や複素数の計算問題を解きましょう。

解答：

1a) $(x+y)^2-(x-y)^2 = [(x+y)+(x-y)][(x+y)-(x-y)]$ 二次項の差異に因数分解します。
$= (x\cancel{+y}+x\cancel{-y})(\cancel{x}+y\cancel{-x}+y)$ 括弧をはずします。
$= (2x)(2y)$ 同類項をまとめる積を求めます。
$= 4xy$

1b) $(x+y)^2+(x-y)^2 = x^2\cancel{+2xy}+y^2+x^2\cancel{-2xy}+y^2$ 二項式の二次項を展開します。
$= 2x^2+2y^2$ 同類項をまとめます。
$= 2(x^2+y^2)$ 共通因数をくくり出します。

2a) $190(210) = (200-10)(200+10)$ 数を展開します。
$= 200^2-10^2$ 二項式の差異でたし算します。
$= 40\,000-100$ 二次項を計算します。
$= 39\,900$ ひき算をします。

2b) $96(104)-94(106) = (100-4)(100+4)-(100-6)(100+6)$ 数を展開します。
$= 100^2-4^2-(100^2-6^2)$ 二項式の差異でたし算します。
$= \cancel{100^2}-16-\cancel{100^2}+36$ 二次項を計算し、
$= 20$ 同類項を消すひき算をします。

2c) $x=\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$ の場合、x^2 の解を求めます。

$$x^2 = 3\cancel{+\sqrt{5}}-2\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)+3\cancel{-\sqrt{5}}$$
$$= 6-2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}$$
$$= 6-2\sqrt{9-5}$$
$$= 2$$

つまり、$x^2=2$ となります。$x>0$ なので、解は次のようになります。$x=\sqrt{2}$

2d) $x=100$ の場合、次のようになります。$\sqrt{100(101)(102)(103)+1}=\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}$
積 $x(x+3)$ と $(x+1)(x+2)$ を展開し、項を「わかりやすく」まとめると、次のようになります。

$$\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = \sqrt{(x^2+3x)[(x^2+3x)+2]+1}$$
$$= \sqrt{(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1}$$
$$= \sqrt{[(x^2+3x)+1]^2}$$
$$= (x^2+3x)+1$$

x^2+3x+1 で $x=100$ を代入すると、解は 10301 となります。よって、次のようになります。

$$\sqrt{100(101)(102)(103)+1} = 10\,301.$$

3a) $z_1+z_2+z_3=(1-2+1)+(2+3-1)i=4i.$

3b) $z_1z_2=-8-i;\ z_2z_3=1+5i;\ z_3z_1=3+i$ よって、$z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=-4+5i.$

3c) $z_1z_2=-8-i$ y $z_3=1-i$ よって、$z_1z_2z_3=-9+7i.$

3d) $z_1^2=-3+4i,\ z_2^2=-5-12i$、$z_3^2=-2i$ よって、次のようになります。$z_1^2+z_2^2+z_3^2=-8-10i$ この式もまた、次のことに注意すれば解くことができます。$z_1^2+z_2^2+z_3^2=(z_1+z_2+z_3)^2-2(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)$ よって、次のようになります。

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=(4i)^2-2(-4+5i)$$
$$=-8-10i.$$

3e) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{4}{13}-\frac{7}{13}i,\ \frac{z_2}{z_3}=-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i$、$\frac{z_3}{z_1}=-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$ よって、次のようになります。$\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}=-\frac{311}{130}-\frac{83}{130}i$

3f) $z_1^2 + z_2^2 = -8 - 8i$ 、 $z_2^2 + z_3^2 = -5 - 14i$ よって、次のようになります。 $\frac{z_1^2 + z_2^2}{z_2^2 + z_3^2} = \frac{152}{221} - \frac{72}{221}i$

4a) $(x+a)(x+b)(x+c) = [x^2 + (a+b)x + ab](x+c)$　$(x+a)(x+b)$ を展開します。
$= x^3 + (a+b)x^2 + abx + cx^2 + (ac+bc)x + abc$　積を求めます。
$= x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x + abc$　共通因数をまとめて、くくり出します。

4b) $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} + \cancel{a^2b} - \cancel{ab^2} + b^3$　積を求めます。
$= a^3 + b^3$　同類項をまとめます。

4c) $(a^2+b^2)(x^2+y^2) = a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy - 2abxy$　積を求めます。
$= (a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2) + (a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2)$　項をまとめます。
$= (ax+by)^2 + (ay-bx)^2$　完全平方三項式を因数分解します。

5. 求める多項式が $ax^2 + bx + c$ である場合、x の係数は乗数項に等しいので、$b = c$ となります。つまり、$ax^2 + bx + b$ です。$x = 1$ を代入すると、$a + 2b$ となります。また、$x = 2$ を代入すると、$4a + 3b$ となります。問題で示された内容によると、$a + 2b = 7$ と $4a + 3b = 18$ が成り立ち、その解は $a = 3$ と $b = 2$ となります。よって、求める多項式は次のようになります。$3x^2 + 2x + 2$

6a) $x + 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} + 1)^2$

6b) $x - y = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$

6c) $y + 4\sqrt{y} + 4 = (\sqrt{y})^2 + 2(\sqrt{y})(2) + 2^2 = (\sqrt{y} + 2)^2$

6d) $x - 1 = (\sqrt{x})^2 - 1^2 = (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)$

7. $z = a + bi$ である場合、$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ となります (3.4 の授業の「定義」を参照)。a^2 と b^2 は負の数ではありません（また、a と b は実数です）。よって、その和についても同じことが言えます。よって、次のようになります。 $\sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$

この問題では、法則が正しいとする根拠を、生徒が直感的に理解できれば十分です。厳密に証明する必要はありません。

8. $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$, よって、
$|zw| = \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2}$　複素数の絶対値の式に代入します。
$= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$　問 4c) の解をつかいます。($x = d$、$y = c$)

さらに、次の式が成り立ちます。$|z||w| = \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$
よって、$|zw| = |z||w|$ を満たしています。

9. 3.5 の授業の「定義」より、次の式が成り立ちます。 $\frac{z}{w} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$
よって、次のようになります。 $\left|\frac{z}{w}\right| = \sqrt{\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)^2 + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(ac+bd)^2 + (bc-ad)^2}{(c^2+d^2)^2}}$

問 4c) の解より、次のことが分かります。$(ac+bd)^2 + (bc-ad)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$ よって、次のようになります。

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \sqrt{\frac{(a^2+b^2)\cancel{(c^2+d^2)}}{(c^2+d^2)^{\cancel{2}}}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}}$$

さらに、次の式が成り立ちます。 $\frac{|z|}{|w|} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}}$

よって、次のようになります。 $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

問 10 と問 11 は、試行錯誤して解くように、生徒を指導してください。

10. 方程式に実数解が 2 つある場合、判別式 $\Delta = 4 - 4m = 4(1 - m)$ は 0 以上となります。Δ が 0 以上である場合、$1 - m$ は 0 以上です。数値代入法をつかうと、次のようになります。

- $m = -1$ のとき、$1 - m = 2$
- $m = 0$ のとき、$1 - m = 1$
- $m = 1$ のとき、$1 - m = 0$
- $m = 1.5$ のとき、$1 - m = -0.5$
- $m = 2$ のとき、$1 - m = -1$
- $m = 3$のとき、$1 - m = -2$

よって、m が 1 以下のとき、Δ は 0 以上であることが分かります。

11. 方程式に実数解が 2 つある場合、判別式 $\Delta = 4 - 4m = 4(1 - m)$ は 0 以下となります。
Δ が 0 以下である場合、$1 - m$ は 0 以下です。問 10 の解から分かるように、m が 1 以上のとき、Δ は 0 以下です。