ユニット 3. 不等式

このユニットのねらい

不等式の性質を使い、変数を用いて、一次不等式や非線形不等式を解き、数学の定理の演繹と確認を行います。また、これらの不等式の使用を示唆する状況を解釈し解決します。

関連と発展

中学 3 年

ユニット 3：一次方程式（第 7 学年）
- 数式の同等性
- 一次方程式
- 一次方程式の応用

ユニット 3：一次関数（第 8 学年）
- 一次関数
- 一次関数と2元一次方程式
- 一次関数の応用

高校 1 年

ユニット 3：不等式
- 不等式
- 一次不等式
- 非線形不等式

ユニット 4：実関数
- 関数の定義
- 二次関数
- 二次関数の応用
- その他の実関数
- GeoGebraを使った演習

高校 2 年

ユニット 1 ：方程式
- 方程式と連立方程式

ユニット学習計画

レッスン	授業時数	授業
1. 不等式	1	1. 不等式の性質 パート1
	1	2. 不等式の性質 パート2
2. 一次不等式	1	1. 一次不等式の定義
	1	2. 一次不等式の解　パート1
	1	3. 一次不等式の解　パート2
	1	4. 一次不等式の解　パート3
	1	5. 一次不等式グラフの解釈
	1	6. 一次不等式の応用
	1	7. 復習
3. 非線形不等式	1	1. 演習：辺を描いて作成する三角形
	1	2. 三角不等式　パート1
	1	3. 三角不等式　パート2
	1	4. 算術幾何平均の不等式
	1	5. 有理式による不等式
	1	6. このユニットの問題
	1	ユニット3　テスト

ユニット3　15 時間の授業 + テスト

各レッスンの要点

レッスン 1：不等式

この課では、不等式を解く為に使用される 2 つの特性について説明します。不等式の両方の辺に実数（ゼロとは異なる）を加算または乗算した場合です。授業では、生徒がそれぞれの状況で結果を確認して推測できるように、特定のケースから始めます。

レッスン 2：一次不等式

最初の授業では、7 年生で習う一次不等式の定義を取り上げます。次に、一次方程式を解くのと同様に、特定の形式（$x + a \geq c$、$ax \geq c$）の一次不等式を次のように解いていきます。レッスン 1 で習った特性は直接適用され、最終的に $ax + b \geq c$（または $ax + b \leq c$）の形式になります。最後の課は、日常生活での写像、つまり、状況に応じて解を見つけて解釈するために一次不等式が発生する状況です。

レッスン 3：非線形不等式

この課では、不等式に関する 2 つの定理を示します：三角形の不等式（三角形の長さと実数の絶対値の両方）と、算術的および幾何学的平均の不等式です。不等式は、分子が実数で、分母が変数の次数 1 の多項式である有理式でも解くことが出来ます。

レッスン 1 不等式

1.1 不等式の性質 パート 1

導入問題

≤、≥、< 又は >、いずれかの正しい不等号で空欄を埋めてください。

a) $1 \ \square \ -2$　　b) $3.5 \ \square \ \frac{7}{2}$　　c) $-3+2 \ \square \ 5+2$

d) $-5+3 \ \square \ -7+3$　　e) $\frac{1}{2}-1 \ \square \ -1-1$　　f) $1.5-5 \ \square \ 4-5$

解法

a) 正の数は負の数よりも大きくなります。したがって、

$$1 \ \boxed{>} \ -2$$

b) 3.5 は $\frac{7}{2}$ の少数になります。したがって、≤ と ≥ の両方で表すことができます。

$$3.5 \ \boxed{\geq} \ \frac{7}{2}$$

c) $-3<5$ の両辺に 2 を足すと $-3+2=-1$ と $5+2=7$ になり不等号の向きは変わりません。したがって、

$$-3+2 \ \boxed{<} \ 5+2$$

d) 前の問題と同じように、$-5>-7$ となるので、

$$-5+3 \ \boxed{>} \ -7+3$$

e) $\frac{1}{2}>-1$ の両辺から 1 を引くと、各辺が $-\frac{1}{2}$、-2 となり、不等号の向きは変わりません。
したがって、

$$\frac{1}{2}-1 \ \boxed{>} \ -1-1$$

f) に類似した解き方で、$1.5<4$ となるので、

$$1.5-5 \ \boxed{<} \ 4-5$$

まとめ

不等号 ≤, ≥, < 又 > は、数値の大小関係を表すために使います。下記の不等号の表す大小関係は次の通りです。

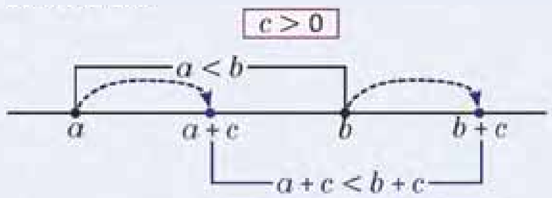
≤ : 小なりイコール　　≥ : 大なりイコール

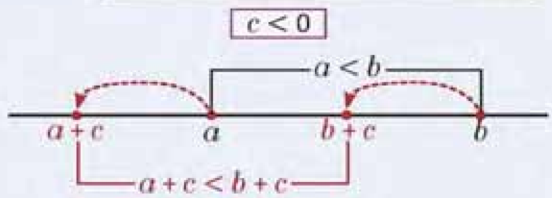
< : 小なり　　> : 大なり

２つの数値又は数式の大小関係を表した数式を**不等式**といいます。$a \leq b$ の不等式の場合、a が**左辺**そして b が**右辺**となります。

a、b 及び c が実数で、**$a<b$ が成り立つとき、$a+c<b+c$** となります。通常、不等式の両辺に対し実数を足しても（或いは引いても）、不等式の成り立ちは変わりません。

この性質は $a>b$, $a \geq b$, $a \leq b$ どの不等式に対しても成り立ちます。つまり、実数 c を a と b の両辺に足しても不等式の成り立ちは変わりません。





問題

空欄を適切な不等号で埋めてください。

a) $3+7 \ \square \ 10+7$　　b) $-1+4 \ \square \ 5+4$　　c) $-6-2 \ \square \ -9-2$

d) $-\frac{1}{2}-5 \ \square \ -0.5-5$　　e) $-0.25+5 \ \square \ -\frac{1}{4}+5$　　f) $4.5+1.2 \ \square \ 1+1.2$

g) $-3+2.7 \ \square \ -1.9+2.7$　　h) $-3+\sqrt{2} \ \square \ -1+\sqrt{2}$　　i) $\sqrt{2}-\frac{1}{2} \ \square \ -\sqrt{3}-\frac{1}{2}$

達成の目安

1.1 不等式の両辺に同じ実数を足したときの不等式の成り立ちを、不等号で正しく表せるようにします。

学習の流れ

前回の授業では、不等号 >, <, ≥ そして ≤ を使って、数値の大小関係を表すことを学びました。今回の授業では、復習も兼ねながら、両辺に実数を足したときの不等式の性質について証明できるようにします。

ねらい

導入問題においては、生徒は足し算（或いは引き算）で計算式を解き、適切な不等号を求めます。問題欄では、生徒は計算をせずに、既に表記されている不等式の性質を使い、不等号を求めます。

問題の解き方：

a) $3 < 10$ なので $3+7 \boxed{<} 10+7$ となり、不等式の両辺に 7 を足しています。

b) $-1 < 5$ なので $-1+4 \boxed{<} 5+4$ となり不等式の両辺に 4 を足しています。

c) $-6 > -9$ なので、$-6-2 \boxed{>} -9-2$ となり、不等式の両辺に -2 を（或いは 2 を引く）足しています。

d) -0.5 は $-\frac{1}{2}-5 \boxed{\geq} -0.5-5$ の少数なので、$-\frac{1}{2}$ となります。≤ の不等号で表しても正解です。

e) -0.25 は $-\frac{1}{4}$ の少数なので $-0.25+5 \boxed{\geq} -\frac{1}{4}+5$ となります。≤ の不等号で表しても正解です。

f) $4.5 > 1$ なので $4.5+1.2 \boxed{>} 1+1.2$ となり、不等式の両辺に 1.2 を足しています。

g) $-3 < 1.9$ なので $-3+2.7 \boxed{<} 1.9+2.7$ となり、不等式の両辺に 2.7 を足しています。

h) $-3 < -1$ なので、$-3+\sqrt{2} \boxed{<} -1+\sqrt{2}$ となり、不等式の両辺に $\sqrt{2}$ を足しています。

i) $\sqrt{2} > -\sqrt{3}$ なので、$\sqrt{2}-\frac{1}{2} \boxed{>} -\sqrt{3}-\frac{1}{2}$ となり、不等式の両辺に $-\frac{1}{2}$ を（或いは $\frac{1}{2}$ を引く）足しています。

レッスン 1

1.2 不等式の性質 パート 2

導入問題

<、> いずれかの正しい不等号で空欄を埋めてください。

a) 2(4) ☐ 5(4)　　b) –5(3) ☐ 4(3)　　c) –3(10) ☐ –9(10)

d) 6(–2) ☐ 3(–2)　　e) 8(–4) ☐ –5(–4)　　f) –11(–5) ☐ –7(–5)

解法

a) 2 < 5 の両辺に 4 を掛けると 2(4) = 8 、5(4) = 20 になり大小関係は変わりません。
したがって、

$2(4) \boxed{<} 5(4)$

b) a) に類似した解き方で、–5 < 4 の両辺に 3 を掛けても大小関係は変わりません。
したがって

$-5(3) \boxed{<} 4(3)$

c) –3 > –9 の両辺を 10 倍にしても、大小関係は変わりません。
したがって、

$-3(10) \boxed{>} -9(10)$

d) 6 > 3ですが、この場合は、両辺に負の数を掛けるので 6(–2) = –12 、3(–2) = –6 になるので大小関係が変わります。

$6(-2) \boxed{<} 3(-2)$

d) と類似した解き方で、8 > –5 の両辺に負の数を掛けるので、8(–4) = –32 、–5(–4) = 20 となり大小関係が変わります。

$8(-4) \boxed{<} -5(-4)$

f) 前の問題と同様に –11 < –7 の両辺に負の数を掛けると大小関係が変わります。
したがって、

$-11(-5) \boxed{>} -7(-5)$

まとめ

a 、b または c が実数であり、$a < b$ の条件が成り立つ場合。

1. **$c > 0$ のとき、$ac < bc$ が成り立ちます。** すなわち、不等式の両辺に正の数を掛けても不等号の向きは変わりません。

同様の性質が成り立ちます。
不等式 $a > b$、$a \geq b$、また $a \leq b$ のときも

2. **$c < 0$ のとき、$ac > bc$ が成り立ちます。** すなわち、不等式の両辺に負の数を掛けると不等号の向きが変わります。

問題

1. 空欄を正しい不等号で埋めてください。

a) 8(5) ☐ 11(5)　　b) –3(6) ☐ –7(6)　　c) 6(–3) ☐ –4(–3)

d) –10(–7) ☐ –5(–7)　　e) 4.8(9) ☐ 1.3(9)　　f) –3.5(–2) ☐ –3.6(–2)

g) $\frac{4}{5}(-4)$ ☐ $5(-4)$　　h) $-\frac{8}{5}(3)$ ☐ $\frac{1}{2}(3)$　　i) $10\left(\frac{1}{2}\right)$ ☐ $7\left(\frac{1}{2}\right)$

j) $-6.5\left(-\frac{1}{4}\right)$ ☐ $-4.3\left(-\frac{1}{4}\right)$　　k) $\frac{8}{3}\left(\frac{5}{4}\right)$ ☐ $-\frac{1}{4}\left(\frac{5}{4}\right)$　　l) $\sqrt{6}(-11)$ ☐ $\sqrt{3}(-11)$

2. 実数 c 、d において $c < d$ が成り立つとき、< 、>いずれか正しい不等号を選んで空欄を埋めてください。（また、等式が成り立つことを証明してください）。

a) $3c$ ☐ $3d$　　b) $-c$ ☐ $-d$　　c) $5.6c$ ☐ $5.6d$

d) $-2c$ ☐ $-2d$　　e) $-7c$ ☐ $-7d$　　f) $\frac{3}{4}c$ ☐ $\frac{3}{4}d$

3. a を正の数とするとき、次の不等式が成り立つことを証明してください。

a) $a > 1$ とすると $a^2 > a$ になります。　　b) $a < 1$ とすると $a^2 < a$ になります。

達成の目安

1.2 不等式の両辺に同じ実数を掛けたとき、不等式の成り立ちを不等号で正しく表せるようにします。

学習の流れ

不等式の性質の証明を引き続き行います。不等式の両辺に 0 以外の負または正の実数を掛けたときの不等式を証明します。

ねらい

1.1 の授業と同様に、導入問題において生徒は正と負の実数のどちらを掛け算に用いているか区別しながら、適切な不等号を求める為に計算式を解きます。問題欄 1 では、計算式は解かずに、既に表記されている不等式の特質を使って、どのように不等号が成り立つか証明します。

つまずきやすい点

負の数を掛ける問題に関しては、生徒が不等号の向きを考えるのに十分時間を費やすよう確認してください。連立不等式の問題に取り組む際につまずくことがないよう、この授業でしっかりと生徒に理解させることが大切です。

問題の解き方：

1a) $8 < 11$ なので $8(5)$ $\boxed{<}$ $11(5)$ となり、両辺に正の実数を掛けているので、大小関係は変わりません。

1b) $-3 > -7$ なので $-3(6)$ $\boxed{>}$ $-7(6)$ となり、両辺に正の実数を掛けるので、大小関係は変わりません。

1c) $6 > -4$ なので $6(-3)$ $\boxed{<}$ $-4(-3)$ となり、両辺に負の実数を掛けるので、大小関係が変わります。

1d) $-10 < -5$ なので $-10(-7)$ $\boxed{>}$ $-5(-7)$ となり、両辺に負の実数を掛けるので、大小関係が変わります。

1e) $4.8(9)$ $\boxed{>}$ $1.3(9)$

1f) $-3.5(-2)$ $\boxed{<}$ $-3.6(-2)$

1g) $\frac{4}{5}(-4)$ $\boxed{>}$ $5(-4)$

1h) $-\frac{8}{5}(3)$ $\boxed{<}$ $\frac{1}{2}(3)$

1i) $10\left(\frac{1}{2}\right)$ $\boxed{>}$ $7\left(\frac{1}{2}\right)$

1j) $-6.5\left(-\frac{1}{4}\right)$ $\boxed{>}$ $-4.3\left(-\frac{1}{4}\right)$

1k) $\frac{8}{3}\left(\frac{5}{4}\right)$ $\boxed{>}$ $-\frac{1}{4}\left(\frac{5}{4}\right)$

1l) $\sqrt{6}(-11)$ $\boxed{<}$ $\sqrt{3}(-11)$

2a) $3c$ $\boxed{<}$ $3d$ は両辺に正の実数 (3) を掛けています。

2b) $-c$ $\boxed{>}$ $-d$ は、両辺に負の実数 (–1) を掛けています。

2c) $5.6c$ $\boxed{<}$ $5.6d$ は両辺に正の実数 (5.6) を掛けています。

2d) $-2c$ $\boxed{>}$ $-2d$ は、両辺に負の実数 (–2) を掛けています。

2e) $-7c$ $\boxed{>}$ $-7d$ は、両辺に負の数 (–7) を掛けています。

2f) $\frac{3}{4}c$ $\boxed{<}$ $\frac{3}{4}d$ は両辺に正の実数を掛けています。

3a) $a > 1$ が成り立つとき、両辺に a を掛けると大小関係は変わりません（$a > 0$ になる）。
従って $a(a) > a(1)$、もしくは $a^2 > a$ となります。

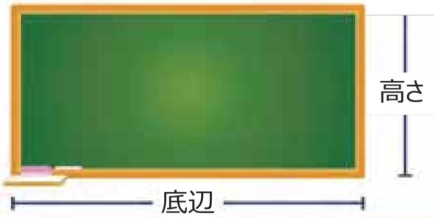
3b) $a < 1$ が成り立つとき、両辺に a を掛けると大小関係は変わりません（$a > 0$ になる）。
従って $a(a) < a(1)$、もしくは $a^2 < a$ となります。

レッスン 2 一次不等式

2.1 一次不等式の定義

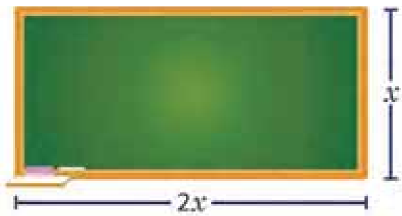
導入問題

長方形の黒板の底辺の長さは高さの2倍あり、その周囲の長さは7.20m²です。周囲の長さとその最大値を関連付ける不等式を書きましょう。



解法

下図が示すように、黒板の高さをメートルで表したものを x とします。問題文によると、底辺の長さは高さの 2 倍なので、底辺の長さは $2x$ になります。



黒板の周囲の長さは、以下の方法で計算します。

$$2x + 2(2x) = 6x$$

すなわち、黒板の周囲の長さは $6x$ となります。問題文によると、周囲の長さの最大値は 7.20 m² です。これは、周囲の長さが 7.20 m² 以下であることを意味します。したがって、周囲の長さとその最大値を関連付ける不等式は、以下の通りとなります。$6x \leq 7.20$

定義

不等式とは、変数を含む二つの一次式からなる**一次不等式を指します。**一次不等式では、変数によって表される未知の値を**未知数**と言い、不等式を成り立たせる未知数の数値の区間を、**不等式の解**と言います。

この場合の変数は、実数値つまり実数でなければなりません。

問題

1. 次の命題を一次不等式で表してください。
   a) サラは通勤に最長で 1 時間 15 分かかります。
   b) 環境・自然資源省（MARN）によると、2015 年までに、人体に感じない微小地震の数が、人体に感じる地震の数の 11 倍になり、その年には、4000 件以上の地震が記録されました。
   c) マリオの年齢は、アントニオの年齢の 3 分の 1 で、2 人の年齢の合計は、28 年未満です。
   d) 洗濯機の消費電力は、一時間あたり 500 ワットです。ある一定の時間が過ぎた際の消費電力は、1 時間あたり 3,500 ワットを超えました。

2. ベアトリスとホセは、一学年を通して貯金することにしました。学年の終わりにベアトリスの貯金額は、ホセの貯金額の半分以上でした。不等式を書きましょう。

達成の目安

2.1　ある変数の一次不等式を用いて、日常の状況を表してください。

学習の流れ

この授業では、数式の相関関係の表記について、7年生で学んだ内容を復習します。一次不等式と一次不等式に用いられる記号や用語を定義します。

ねらい

導入問題や問題の範囲は、不等式を解くためのものではなく、生徒が、不等式の問題に出てくる変数を表すための文字の使用に慣れてもらうことを目的としています。

つまずきやすい点

1番目の問題では、関連する金額についてのヒントを与えることができ、不等号を示す各リテラルの「せいぜい」「上」「下」という表現の重要性を示すことができます。問題2では、ベアトリスとホセの貯金額には、2つの変数を用いてください。

解法：

1a) サラが通勤にかかる最長時間（1 時間 15 分または 75 分）を用いる必要があります。サラの通勤時間（分）を x とします。したがって、$x \leq 75$ となります。

1b) 揺れが感じられる地震と感じられない地震の数は、2015 年に検知された地震の数（4,000 件以上）と関係しています。2015 年に起きた人体に感じる地震の件数を x とすると、人体に感じない地震の件数は $11x$ となります。したがって、

$$x + 11x > 4\,000$$
$$12x > 4\,000.$$

1c) マリオとアントニオのそれぞれの年齢は、2 人の年齢を足した年数と関係しています。（28年未満）マリオの年齢を x とすると、アントニオの年齢は $3x$ になります。したがって、

$$x + 3x < 28$$
$$4x < 28.$$

次に、別の解き方を示します。アントニオの年齢（年）を y とした場合、マリオさんの年齢は $\frac{1}{3}y$ と等しくなります。したがって、

$$y + \frac{1}{3}y < 28$$
$$\frac{4}{3}y < 28.$$

1d) 洗濯機の稼働時間（時）を x とした場合、最終的な消費電力は $500x$ となります。したがって、

$$500x > 3\,500.$$

2. ベアトリスさんの貯金額を x とし、ホセさんの貯金額を y とします。（どちらも一学年全体）。したがって、

$$x > \frac{1}{2}y.$$

レッスン 2

2.2 一次不等式の解 パート1

導入問題

次の不等式を満たすxのすべての値を求めましょう。

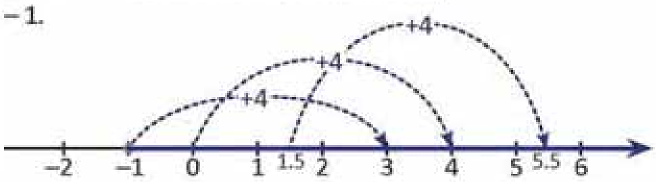
a) $x + 4 \geq 3$　　b) $x - 5 < 2$

解法

a) 足して 4 になる実数を求めましょう。解は 3 か 3 以上になります。一次方程式 $x + 4 = 3$ を用いて、4 を足して解が 3 になる実数を求めることができます。

$$x + \cancel{4} - \cancel{4} = 3 - 4$$ 両辺からそれぞれ 4 を引く、
$$x = -1.$$

右の図では、次のことがわかります。
−1よりも大きいすべての数は
不等式 $x + 4 \geq 3$ を満たします。したがって、
$x \geq -1$ の場合、$x + 4 \geq 3$ となります。



この問題は、1.1の授業 で学習した内容を用いて解くこともできます。つまり、元の不等式の両辺それぞれから、4 を引きます。

$$x + 4 \geq 3$$
$$x + \cancel{4} - \cancel{4} \geq 3 - 4$$ 両辺それぞれから 4 を引いても、不等式は変わりません。
$$x \geq -1.$$

したがって、$x \geq -1$ で、不等式 $x + 4 \geq 3$ が成り立ちます。部分集合 $x \geq -1$ を用いて、以下のように表します。
$x \in [-1, \infty[$.

b) 不等式の特性を用いて、両辺にそれぞれ 5 を足します。

$$x - 5 < 2$$
$$x - \cancel{5} + \cancel{5} < 2 + 5$$ 両辺にそれぞれ5を足しても、不等式は変わりません。
$$x < 7.$$

したがって、不等式 $x - 5 < 2$ は、$x < 7$ にも当てはまります。部分集合を用いて、$x \in]-\infty, 7[$ と表します。

まとめ

b と c のいずれも実数とします。$x + b \geq c$ または、$x + b \leq c$,の形で表される一次不等式を解くには、$x \geq d$ または、$x \leq d$ と書かなければなりません。その際、不等式の両辺に $-b$ を足してください。

1. $x + b \geq c$ は、$x \geq c - b$ に当てはめることができます。部分集合を用いて、次のように表します。　$x \in [c - b, \infty[$
2. $x + b \leq c$ は $x \leq c - b$ が成り立ちます。区間を用いて $x \in]-\infty, c - b]$ と表します。

不等式が $x + b > c$ または $x + b < c$ である場合、解には極値 $c - b$ を用いてはいけません。

問題

1. 次の一次不等式を解きましょう。（区間を用いた解を書いてください。）

a) $x + 7 \geq 10$　　b) $x - 3 > -8$　　c) $x - 2 < 11$
d) $x + 4 \leq -6$　　e) $x - 6 \geq 0$　　f) $0 \geq x + 8$
g) $x + \frac{2}{3} < \frac{1}{3}$　　h) $x - \frac{5}{2} > \frac{1}{2}$　　i) $x + \frac{1}{4} \geq 1$
j) $x - \frac{4}{3} \leq -\frac{3}{4}$　　k) $x + \frac{1}{2} < -4$　　l) $x + \sqrt{2} \geq 5\sqrt{2}$

2. 1.1の授業で学んだ、解を証明する不等式の特性を用いてください。
$x + b \leq c$ は、$x \in]-\infty$ または $c - b]$ です。

達成の目安

2.2 $x+b\geq c$ または $x+b\leq c$ の形の一次不等式を解いてください。

学習の流れ

今回の授業では、$x+b\geq c$ または $x+b\leq c$ の形（> と < の不等号も含まれます。）の一次不等式を解くために、1.1の授業 で学んだ（両辺に実数を足す場合の）不等式の特性を用います。

ねらい

導入問題の a) では、不等式の直観的な問題の解き方が書かれています。このことは後で、1.1 の授業内容を用いて、代数的解法の中で確認します。b) の問を解く時も、同じ解法を用います。問題のパートでは、生徒は、結論に示されている、一次不等式の代数的解法を用いてください。

解法：

1a) $x+7\geq 10$
$x\geq 10-7$
$x\geq 3$
したがって、$x+7\geq 10$ は、$x\in[3$ または $\infty[$ になります。

1b) $x-3>-8$
$x>-8+3$
$x>-5$
したがって、$x-3>-8$ は、$x\in]-5$ または $\infty[$ に当てはまります。

1c) $x-2<11$
$x<11+2$
$x<13$
したがって、$x-2<11$ は、$x\in]-\infty$ または $13[$ になります。

1d) $x+4\leq -6$
$x\leq -6-4$
$x\leq -10$
したがって、$x+4\leq -6$ は、$x\in]-\infty$ または $-10]$ に当てはまります。

1e) $x-6\geq 0$ は、$x\in[6$ または $\infty[$ に当てはまります。

1f) $0\geq x+8$ は、$x\in]-\infty,-8]$ に当てはまります。

1g) $x+\frac{2}{3}<\frac{1}{3}$
$x<\frac{1}{3}-\frac{2}{3}$
$x<-\frac{1}{3}$
したがって、$x+\frac{2}{3}<\frac{1}{3}$ は $x\in\left]-\infty,-\frac{1}{3}\right[$ に当てはまります。

1h) $x-\frac{5}{2}>\frac{1}{2}$
$x>\frac{1}{2}+\frac{5}{2}$
$x>3$
したがって、$x-\frac{5}{2}>\frac{1}{2}$ は $x\in]3,\infty[$ に当てはまります。

1i) $x+\frac{1}{4}\geq 1$ は $x\in\left[\frac{3}{4},\infty\right[$ になります。

1j) $x-\frac{4}{3}\leq -\frac{3}{4}$ は $x\in\left]-\infty,\frac{7}{12}\right]$ になります。

1k) $x+\frac{1}{2}<-4$
$x<-4-\frac{1}{2}$
$x<-\frac{9}{2}$
したがって、$x+\frac{1}{2}<-4$ は $x\in\left]-\infty,-\frac{9}{2}\right[$ になります。

1l) $x+\sqrt{2}\geq 5\sqrt{2}$
$x\geq 5\sqrt{2}-\sqrt{2}$
$x\geq 4\sqrt{2}$
したがって、$x+\sqrt{2}\geq 5\sqrt{2}$ は $x\in[4\sqrt{2},\infty[$ になります。

2. b は、あらゆる実数です。したがって不等式 $x+b\leq c$ では、

$x+b-b\leq c-b$ 両辺に $-b$ を足しても不等式は変化しません。

$x\leq c-b$

よって、不等式 $x+b\leq c$ の解は、$x\leq c-b$ になります。区間の表記：$x\in]-\infty,c-b]$。

レッスン 2

2.3 一次不等式の解 パート2

導入問題

次の不等式を満たす x のすべての値を求めましょう。
不等式：

a) $3x > 12$　　b) $-5x \leq -10$

両辺を掛ける実数が正の数である場合不等式は変化しませんが、実数が負の数である場合、不等式は逆になります。

解法

a) 不等式を解くためには、$x > d$ という形を用いなければなりません。この場合 d は実数とします。その為に、不等式の両辺を $\frac{1}{3}$ 掛けます。

$$3x > 12$$
$$\cancel{3}x\left(\frac{1}{\cancel{3}}\right) > 12\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$x > 4$$

それぞれの両辺に $\frac{1}{3}$ を掛けても、不等式は変化しません。

したがって、不等式 $3x > 12$ は $x > 4$ となり、よって、$x \in]4$ のとき $+\infty[$ となります。

b) 前の問題と同じように、不等式の両辺に $-\frac{1}{5}$ を掛けます。こうすることで、不等式の記号は、≤ から ≥ に変わります。

$$-5x \leq -10$$
$$-\cancel{5}x\left(-\frac{1}{\cancel{5}}\right) \geq -10\left(-\frac{1}{5}\right)$$
$$x \geq 2$$

したがって、$-5x \leq -10$ は $x \geq 2$ となり、よって、$x \in [2$ のとき $+\infty[$ となります。

まとめ

a はゼロ以外の実数とします。$ax \geq c$ または $ax \leq c$ の形の一次不等式を解くには、不等式の両辺を a の逆、つまり、$\frac{1}{a}$ で掛けます。

1. a が正の数のとき、不等式 $ax \geq c$ と $ax \leq c$ はそれぞれ、$x \geq \frac{c}{a}$ 及び $x \leq \frac{c}{a}$ が成り立ちます。
2. a が負の数の時、不等式 $ax \geq c$ 及び $ax \leq c$ はそれぞれ $x \leq \frac{c}{a}$、$x \geq \frac{c}{a}$ が成り立ちます。

不等式が、$ax > c$ または $ax < c$ の時、解には極値 $\frac{c}{a}$ を用いることはできません。

$x \geq \frac{c}{a}$ の解は $x \in \left[\frac{c}{a}, \infty\right[$ などの区間を用いて表します。一方 $x \leq \frac{c}{a}$ は以下の数字で表します。 $x \in \left]-\infty, \frac{c}{a}\right]$

問題

一次の一次不等式を解きましょう。（区間を用いた解を書いてください。）

a) $2x \leq 6$　　b) $4x \geq 24$　　c) $-3x > -33$

d) $-14 > 7x$　　e) $-8x \geq 0$　　f) $0 \geq 5x$

g) $-4x < 18$　　h) $5x > -1$　　i) $-\frac{1}{3}x \geq 3$

j) $\frac{2}{5}x < -1$　　k) $\frac{5}{2}x \leq -\frac{5}{3}$　　l) $-\sqrt{2}\,x > 1$

2.次の各問題について、両方の不等式を満たす x のすべての値を求めましょう。

a) $\begin{cases} x+2 > -3 \\ 3x > 9 \end{cases}$　　b) $\begin{cases} x-5 \geq 2 \\ -2x > 10 \end{cases}$　　c) $\begin{cases} x+4 < 1 \\ 5x > -30 \end{cases}$

次の各問題について、数直線を使ってそれぞれの不等式の回答を示しましょう。また、両方の部分集合が同じ値であることを証明してください。

達成の目安

2.3 $ax \geq c$ または $ax \leq c$ の形の一次不等式を解いてみましょう。

学習の流れ

この授業で出てくる一次不等式は $ax \geq c$ または $ax \leq c$（> と < の不等号を含む）の形もので、1.2 の授業で学んだ、正の数 a や負の数 a などの特性を用いて解きます。

つまずきやすい点

生徒には、変数係数が負の数の場合、不等式を逆にすることを注意しましょう。また生徒が、不等式の反対側の辺を変数係数で割ることが難しいようであれば、逆数を掛けてから単純化することもできます。

解法：

1a) $2x \leq 6$
$x \leq \frac{6}{2}$
$x \leq 3$
よって、$x \in]-\infty, 3]$ の時、$2x \leq 6$ になります。

1b) $4x \geq 24$
$x \geq \frac{24}{4}$
$x \geq 6$
よって、$x \in [6, \infty[$ の時、$4x \geq 24$ になります。

1c) $-3x > -33$
$x < \frac{-33}{-3}$
$x < 11$
よって、$x \in]-\infty, 11[$ の時、$-3x > -33$ になります。

1d) $-14 > 7x$
$7x < -14$
$x < \frac{-14}{7}$
$x < -2$
よって、$x \in]-\infty, -2[$ の時、$-14 > 7x$（または $7x < -14$ と同等）になります。

1e) $x \in]-\infty, 0]$ の時、$-8x \geq 0$ になります。

1f) $x \in]-\infty, 0]$ の時、$0 \geq 5x$ になります。

1g) $x \in \left]-\frac{9}{2}, \infty\right[$ の時、$-4x < 18$ になります。

1h) $x \in \left]-\frac{1}{5}, \infty\right[$ の時、$5x > -1$ になります。

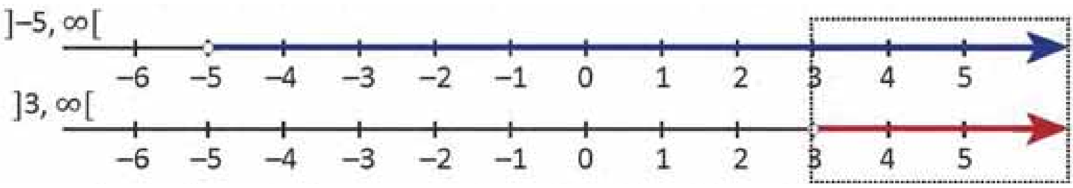
1i) $x \in]-\infty, -9]$ の時、$-\frac{1}{3}x \geq 3$ になります。

1j) $x \in \left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[$ の時、$\frac{2}{5}x < -1$ になります。

1k) $x \in \left]-\infty, -\frac{2}{3}\right]$ の時、$\frac{5}{2}x \leq -\frac{5}{3}$ になります。

1l) $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ の時、$-\sqrt{2}x > 1$ になります。

2a) $x \in]-5, \infty[$ の時、不等式は $x + 2 > -3$ になります。一方で $x \in]3, \infty[$ の時、$3x > 9$ になります。
両方の不等式を満たすx の値は、以下の区間を表すことで求められます。
数直線上の]−5、∞[及び]3、∞[と、一致する値を特定します。



したがって、区間が重なるのは]3, ∞[です。つまり、$x + 2 > -3$ または $3x > 9$ を満たすx の値は、]3, ∞[の部分集合に属します。

2b) $x \in [7, \infty[$ の時は、$x - 5 \geq 2$ になり、一方 $]-\infty, -5[$ の時は、$-2x > 10$ になります。行間 [7, ∞[及び]−∞,−5[はどの値とも一致しません。（確認するために数直線上に表すことができます。）よって、$x - 5 \geq 2$ 及び $-2x > 10$ を満たす実数はありません。

2c) $x \in]-\infty, -3[$ の時、$x + 4 < 1$ になり、]−6, ∞[の時、$5x > -30$ になります。区間]−∞, −3[及び]−6, ∞[は]−6 , −3[と一致します。よって、$x + 4 < 1$ と $5x > -30$ を満たすx の値は、行間]−6 , −3[に属します。

2.4 一次不等式の解 パート3

導入問題

以下の不等式を解きましょう。

a) $2x+7>-9$　　b) $6x-5\leq 2x+15$

解法

a) $x>d$ という形を導き出すために不等式の特性を用います。まずはじめに加法または減法、次に乗法の順で行ってください。

$$2x+7>-9$$

$$2x+\cancel{7}-\cancel{7}>-9-7$$ 両辺からそれぞれ 7 を引き、

$$\cancel{2}x\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)>-16\left(\frac{1}{2}\right)$$ 次に両辺にそれぞれ $\frac{1}{2}$ を掛けます。

$$x>-8.$$

したがって、不等式 $2x+7>-9$ は、$x\in\,]-8,\infty[$ で成り立ちます。

以下のことが推測できます。
- どちらかの辺に足した時に出てくる項を、反対側の辺から引きます。
  （移項：項の移動）
- $mx\leq n$ の形まで解いたら、x を係数 1 で表し、n を m の逆数で掛けます。

b) $6x-5\leq 2x+15$ を解くために前の授業で学んだことを応用して、次の問題を解きましょう。

$$6x-5\leq 2x+15$$

$$6x\leq 2x+15+5$$

$$6x-2x\leq 20$$

右辺に 5 を移項し、
左辺に $2x$ を移項します。

$$4x\leq 20$$

$$x\leq 20\left(\frac{1}{4}\right)$$ x を係数 1 で表し、左辺に $\frac{1}{4}$ を掛けます。

$$x\leq 5.$$

したがって、不等式 $6x-5\leq 2x+15$ には、$x\in\,]-\infty,5]$ が成り立ちます。

まとめ

次の方法で一次不等式を解きます。
1. 不等式を $mx\geq n$ または $mx\leq n$ の形にするために移項します。
2. 係数 1 を用いて未知数を表し、m の逆数を両辺に掛けます。

問題

1. 次の一次不等式を解きましょう。（区間を用いた解を書いてください。）

a) $3x-4<8$　　b) $2\leq 5x+12$　　c) $7x-24>-x$

d) $4x+9<2x+11$　　e) $2x-1\leq 5x+14$　　f) $3x-2\geq x+6$

g) $x-4\leq -2x-9$　　h) $3x+16<7x+2$　　i) $6x+3\geq 4x-1$

j) $\frac{1}{3}x-2\geq x-\frac{7}{2}$　　k) $\frac{5}{2}x+\frac{1}{3}<-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$　　l) $-4x-5\sqrt{3}>x+10\sqrt{3}$

2. 次の各問題について、両方の不等式を満たす x のすべての値を求めましょう。

a) $\begin{cases}-3x>0\\ 2x-5>-3\end{cases}$　　b) $\begin{cases}x+4\leq 3x\\ 5x-1>4x+7\end{cases}$　　c) $\begin{cases}3x+7>-x-5\\ -2x>3x-10\end{cases}$

ユニット 3

達成の目安

2.4　$ax + b \geq 0$ または $ax + b \leq 0$ の形の一次不等式を解いてみましょう。

学習の流れ

$ax + b \geq 0$ または $ax + b \leq 0$ の形の一次不等式を解くには、不等式の法則が用いられます。（不等号 $>$ 及び $<$ も含みます。）一次方程式を解くように、移項を用いて比較を行います。

ねらい

結論で示されているように、問題の範囲内の不等式では、生徒は $mx \geq n$ の形の不等式にするために移項（または不等号に応じて、それに類似する方法）を用いる必要があります。つまり、両辺に同じ値の足算や引算を段階的に示す必要はありません。

解法：

1a)
$$\begin{aligned} 3x - 4 &< 8 \\ 3x &< 8 + 4 \\ 3x &< 12 \\ x &< 12\left(\tfrac{1}{3}\right) \\ x &< 4 \end{aligned}$$

よって、$x \in\,]-\infty$、4[の時、$3x - 4 < 8$ になります。

$3x < 12$ の後は、同様に、前回の授業の通り、$\frac{12}{3}$ の分数を直接書き込んだり、指数を計算することができます。

1b)
$$\begin{aligned} 2 &\leq 5x + 12 \\ 5x + 12 &\geq 2 \\ 5x &\geq 2 - 12 \\ x &\geq -10\left(\tfrac{1}{5}\right) \\ x &\geq -2 \end{aligned}$$

よって、$x \in [-2, \infty[$ の時、$2 \leq 5x + 12$ になります。

生徒は、困難でなければ いつでも計算を簡略化できます。

1c)
$$\begin{aligned} 7x - 24 &> -x \\ 7x + x &> 24 \\ 8x &> 24 \\ x &> 24\left(\tfrac{1}{8}\right) \\ x &> 3 \end{aligned}$$

つまり、$x \in\,]3, \infty[$ の時、$7x - 24 > -x$ になります。

1d)
$$\begin{aligned} 4x + 9 &< 2x + 11 \\ 4x - 2x &< 11 - 9 \\ 2x &< 2 \\ x &< 1 \end{aligned}$$

つまり、$x \in\,]-\infty, 1[$ の時、$4x + 9 < 2x + 11$ になります。

1e) $x \in [-5, \infty[$ の時、$2x - 1 \leq 5x + 14$ になります。

1f) $x \in [4, \infty[$ の時、$3x - 2 \geq x + 6$ になります。

1g) $x \in \left]-\infty, -\frac{5}{3}\right]$ の時、$x - 4 \leq -2x - 9$ になります。

1h) $x \in \left]\frac{7}{2}, \infty\right[$ の時、$3x + 16 < 7x + 2$ になります。

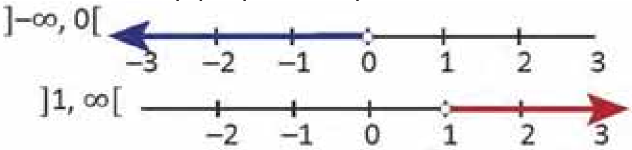
1i) $x \in [-2, \infty[$ の時、$6x + 3 \geq 4x - 1$ になります。

1j) $x \in \left]-\infty, \frac{9}{4}\right[$ の時、$\frac{1}{3}x - 2 > x - \frac{7}{2}$ になります。

1k) $x \in \left]-\infty, \frac{14}{33}\right[$ の時、$\frac{5}{2}x + \frac{1}{3} < -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$ になります。

1l) $x \in\,]-\infty, -3\sqrt{3}[$ の時、$-4x - 5\sqrt{3} > x + 10\sqrt{3}$ になります。

2a) $x \in\,]-\infty$ の時、$-3x > 0$ になり、$x \in\,]1, \infty[$ の時、0[及び $2x - 5 > -3$ になります。数直線にこれらの区間を配置します。



共通の値は両辺にはありません。よって、$-3x > 0$ 及び $2x - 5 > -3$を満たす実数はありません。

2b) $x \in [2, \infty[$ の時、$x + 4 \leq 3x$ になり、また、$x \in\,]8, \infty[$ の時、$5x - 1 > 4x + 7$ になります。これらの区間は以下の場合一致します。]8, ∞[。つまり、$x + 4 \leq 3x$ 及び $5x - 1 > 4x + 7$ を満たすx の値は、]8, ∞[に属します。

2c) $x \in\,]-3$ の時、$3x + 7 > -x - 5$ が成り立ち、$x \in\,]-\infty, 2[$ の時、$-2x > 3x - 10$ が成り立ちます。これらの区間は]−3, 2[の間で一致します。つまり、$3x + 7 > -x - 5$ と $-2x > 3x - 10$ を満たす x の値は]−3, 2[に属します。

2.5 一次不等式のグラフの解釈

導入問題

一次関数 $y = 2x - 4$ を用いて：

1. 座標軸との交点を見つける関数のグラフを描きましょう。

2. $y \geq 0$である時、$y = 2x - 4$ のグラフを用いて、x の値を求めましょう。

3. 前の問で得た x の値と $2x - 4 \geq 0$ の解の関係を答えましょう。

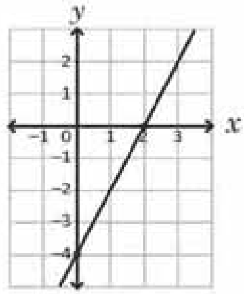
一次関数 $y = ax + b$ のグラフは、点 $(0, b)$ と点 $(x, 0)$ を通る直線です。$y = 0$ を解くことで二つ目点の x の値が求められます。

解法

1. y 軸の共通部分は点 $(0, -4)$ です。一方で x 軸の共通部分は $y = 0$ を解くことで求められます。

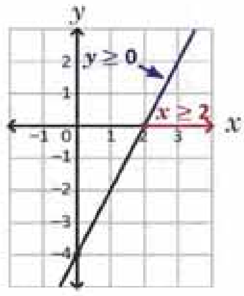
$$2x - 4 = 0$$
$$x = 2$$

右の図のように、座標平面に点 $(0, -4)$ と点 $(2, 0)$ を描きこみ、その両点を通る直線を引きます。



2. $y \geq 0$ である x 値を求めることは、$y = 2x - 4$ のグラフが x 軸と交差するか、この上を通るグラフ上の値を指します。

以下のことがわかります。$x \geq 2$ の時、$y \geq 0$ が成り立ちます。よって、$x \in [2$ の時、$+\infty[$ となります。



3. $2x - 4 \geq 0$ の不等式の解は $x \geq 2$ です。つまり、前の問題の解と同じです。

まとめ

$ax + b \geq 0$ または $ax + b \leq 0$ の形の一次不等式を解くことは、x 軸を切る関数 $y = ax + b$ のグラフの x の値を求めることと等しいです。また、$ax + b \geq 0$ の場合は x 軸の上を通り、$ax + b \leq 0$ の場合は x 軸の下を通ります。

不等式が > または < の時、$y = ax + b$ がゼロである場合の値は考慮しません。

問題

1. 次の不等式をグラフを用いて解いてみましょう。

a) $-2x + 6 < 0$　　b) $5x - 5 > 0$　　c) $-\frac{1}{2}x - 1 \geq 0$

2. $a \neq 0$ を用いた $ax + b \geq 0$ または $ax + b \leq 0$ の形の一次不等式に解がない可能性はありますか？$y = ax + b$のグラフに基づいてあなたの答えを証明しましょう。

3. a を正の数とします。$ax + b < 0$ の不等式の解が $ax + b < 0$ が $\left]-\infty, -\frac{b}{a}\right[$ であることを証明してください。

達成の目安

2.5 関数$f(x) = ax + b$のグラフを用いて一次不等式を解いてみましょう。

学習の流れ

授業では、$ax + b \geq 0$ の形の不等式の代数的な解は、x 軸上にある関数 $y = ax + b$ のグラフの x の値と関連しています。$ax + b > 0$、$ax + b \leq 0$ 及び $ax + b < 0$ の形の不等式についても同様の分析を行う必要があります。

ねらい

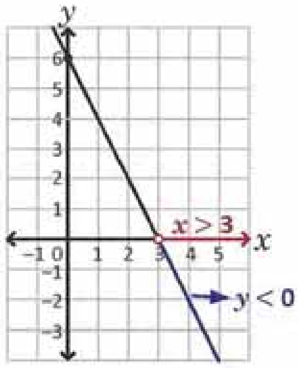
一次関数のグラフを使って、不等式の解のためにこの授業で行った分析は、次のユニットで学ぶ内容である二次不等式の解の解釈に役立ちます。

解法：

1a) $y = -2x + 6$とします。$y = -2x + 6$のグラフがx軸の下に来るようにxの値を求めましょう。y軸が$y = -2x + 6$のグラフの共通部分の点は(0, 6)です。一方で、x軸の共通部分を求めるために $y = 0$ を解きます。

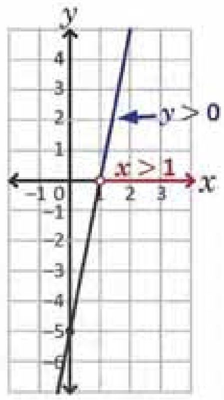
$$\begin{aligned} -2x + 6 &= 0 \\ 6 &= 2x \\ x &= 3 \end{aligned}$$

したがって、x 軸が $y = -2x + 6$ のグラフの共通部分の点は (3, 0) です。グラフを図に示します。その結果、$x > 3$ の時、$y = -2x + 6 < 0$ になり、区間の表記は、$x \in]3, \infty[$。



1b) $y = 5x - 5$ とします。$y = 5x - 5$ のグラフが x 軸の上にある x の値を求めましょう。y 軸のグラフの共通部分の点は (0, –5)で、x 軸の点は (1, 0) です。グラフは図のようになります。

その結果、$x > 1$ の時、$y = 5x - 5 > 0$ になります。区間の表記では、$x \in]1, \infty[$。



1c) 1a 及び 1b の問にも同様の分析を行います。したがって、$x \leq -2$ の時、もしくは $x \in]-\infty, -2]$ の時、$y = -\frac{1}{2}x - 1 \geq 0$ は成り立ちます。

2. $a \neq 0$ の時、$y = ax + b$ になります。（問題文に説明がある通り）$y = ax + b \geq 0$ または $y = ax + b \leq 0$ の解は、$y = ax + b$ のグラフが x 軸の上または下にある x の値です。（授業の結論を参考にしましょう。）一次関数のグラフは直線であるため、x 軸 ($a \neq 0$) では必ず一点のみと交差します。したがって、常に $y = ax + b \geq 0$ または $y = ax + b \leq 0$ を解く x の値を求めることができます。

3. 不等式の法則を用いて $ax + b < 0$ を解きましょう。

$$ax + b < 0$$
$$ax < -b \quad \text{右辺に } -b \text{ を移項します。}$$
$$x < -\frac{b}{a} \quad \text{右辺に } \frac{1}{a} \text{ を掛けます。} a > 0 \text{ なので、この数は正の数です。}$$

したがって、$ax + b < 0$ は、$x < -\frac{b}{a}$ で成り立ちます。つまり、$x \in \left]-\infty, -\frac{b}{a}\right[$ で成り立ちます。

2.6　一次不等式の応用

導入問題

マリオさんは事業に必要なインターネットサービスの契約を、A 社とするか、B 社とするか決めなければいけません。A 社は、モデムの取り付け工事費として1時間あたり 9.50 ドル、また、月々の利用代金に 45 ドル掛かり、B社は、モデムの取り付け工事費として 1 時間あたり 12.50 ドル、また、月々の利用代金に 43.50 ドル掛かります。もしもマリオさんが工事費と月々の利用代金にかかる費用を算出した場合、何か月後に A 社よりも B 社の方が安くなる計算になるでしょうか？

解法

x カ月経過した後の A 社のサービスにかかる総費用の計算の仕方は、

$$45x + 9.5,$$

一方で、x カ月経過した後の B 社のサービスにかかる総費用は、

$$43.5x + 12.5$$

経過しなければならない月数を求めることで、

総費用 B < 総費用 A

$$43.5x + 12.5 < 45x + 9.5$$

一次不等式を解きましょう。

$$12.5 - 9.5 < 45x - 43.5x$$
$$3 < 1.5x$$
$$2 < x.$$

解では、整数を用いて計算するために、不等式の両辺のすべての項に10を掛けることができます。

よって、B 社のサービスが A 社のサービスよりも安くなるのは 2 か月後、つまり、3か月目以降です。

全体を通して

一次不等式の使用に伴う状況を解決するためには、次の順序で行います。

1. 問題の示されている通りの、未知数が表す数を決めます。
2. 一次不等式を提案します。
3. 一次不等式を解決し、計算法を説明してください。

問題

1. 環境・自然資源省（MARN）によると、2015 年に、人体に感じない微小地震の数が、人体に感じる地震の数の 11 倍になり、同年、4,000 件以上の地震が記録されたとのことです。人体に感じる地震の最小件数は何件になるかを求めましょう。

2. x 時間後の自動車の走行距離 y（km）は以下の式で求められます。$y = 70x$ 最低でも何時間で 315 キロメートル道路を走れるかを求めましょう。

3. 大半のアングロサクソン国家では、気温の計測に華氏が使われています。例えば、2017 年 8 月カナダで、71°F（華氏 71 度と読みます。）を記録しました。一方、同じ日のサンサルバドルの気温は 31°C でした。（摂氏 31 度と読みます。）摂氏と華氏の違いは、方程式 $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ によって表され、C は摂氏温度、F は華氏温度を表します。もしも 2017 年のエルサルバドルの記録された最低気温が、20°C だった場合、華氏での最低気温は何度でしょう。

達成の目安

2.6 数学的に解釈するため、または日常の状況を解決するために、一次不等式を用いてください。

学習の流れ

この授業では、解法を求め解釈するために、不等式を形式化する場合があります。

つまずきやすい点

一次不等式の位置づけについて、各問の説明から、この段階を簡略化するためにいくつかのヒントを得ることができます。

解法：

1. 2015 年に起こった人体に感じる地震の件数を x とします。（x は当然、正の数でなければなりません。）したがって、人体に感じない地震の件数は、$11x$ と同じです。同年、通算で 4,000 件以上の地震を検知したので、$x + 11x > 4{,}000$ となります。この不等式を解きましょう。

$$\begin{aligned} 12x &> 4000 \\ x &> \frac{4000}{12} \end{aligned}$$

つまり、$x > 333.\overline{3}$ となります。したがって、2015 年に起きた人体に感じる地震の最小件数は、334 件になります。

2. 走行距離は最低でも 315 kmでなければならないため、は、315 km と同じか、それ以上になります。したがって、$y = 70x \geq 315$ になります。この不等式を解きましょう。

$$\begin{aligned} 70x &\geq 315 \\ x &\geq \frac{315}{70} \\ x &\geq 4.5 \end{aligned}$$

したがって、自動車は最低でも315 km の距離を、少なくとも 4.5 時間または 4 時間 30 分で走行できます。

3. エルサルバドルで記録された気温は20°C だったため、$C \geq 20$ になります。上記に $C = \frac{5}{9}(F-32)$ を代入して、F の不等式を解きましょう。

$$\begin{aligned} \frac{5}{9}(F-32) &\geq 20 \\ F-32 &\geq 20\left(\frac{9}{5}\right) \\ F-32 &\geq 36 \\ F &\geq 36+32 \\ F &\geq 68 \end{aligned}$$

したがって、華氏単位の最低気温は 68°F になります。

2.7 練習問題

1. 次の一次不等式を解きましょう。（区間を用いた解を書いてください。）

a) $5x-7<-2x$　b) $3x+11\geq 8x-14$　c) $-4x+9\geq -5x-15$

d) $-x-10<9x-8$　e) $2x-6\geq 4x+5$　f) $\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}\leq -\frac{5}{2}x+\frac{1}{5}$

g) $-\frac{4}{3}x+\frac{2}{5}>-\frac{1}{4}+\frac{5}{2}x$　h) $4x>x+12\sqrt{3}$　i) $-3x-9\sqrt{5}\leq -7x-13\sqrt{5}$

j) $x+4\sqrt{2}\geq \frac{1}{2}x+10\sqrt{2}$　k) $6\sqrt{3}x-9<2\sqrt{3}x+7$　l) $\sqrt{6}x+5>x+4$

2. 次の不等式をグラフを用いて解いてみましょう。

a) $-3x+12\geq 0$　b) $4x+8<0$　c) $\frac{1}{3}x-2\geq 0$

3. 以下の文章題を解いてみましょう。

a) マリオの年齢は、アントニオの年齢の三分の一です。二人の年齢の合計が 28 歳以下の時、マリオの最大年齢は何歳ですか？

b) 2017 年のサンサルバドル大学歯学部の総学生数は 717 人にのぼりました。男性と女性の比率が 1：2 の時、男性の数は何人でしょうか？

c) 2017 年 8 月、サンサルバドルでの国産小豆 1 キンタルの最低価格は、50 ドルで、最高価格は 58 ドルでした。1 キンタルは、約 100 ポンドに相当します。いくらにするべきでしょうか？利益を出すには、小豆 1 ポンド相当の最低金額は

- 1 キンタルを 50 ドルで購入した場合：
- 1 キンタルを 58 ドルで購入した場合：

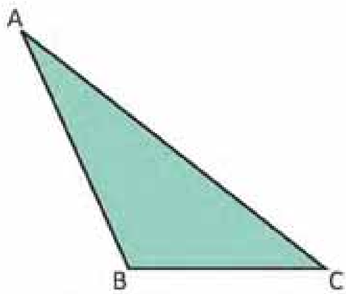
d) 二歳までの子供の成長速度は、思春期（15 歳）に達するまでは、最低でも年間6センチメートルです。7 歳で身長が 1 メートル 19 センチだった場合、10 歳以上の子供の最低身長はどれくらいになるでしょうか？

e) カロリーナは自動車ディーラーです。一台 6,000 ドルの車の売上ごとに、売値の 3% 分の手数料が貰えます。カロリーナは、最低でもこの値段の車を何台売れば、年末までに 1,080 ドル以上の手数料が貰えるでしょうか？

f) 長方形の高さと底辺の長さの比は3です。4. 長方形の周囲の長さの合計が 105 センチメートルだった場合、高さの最大長は何センチメートルになりますか？また、底辺の最大長は何センチメールになるでしょうか？

g) 右の三角形 ABC の辺 AB の長さは辺 BC よりも 2 センチメートル長く、辺 CA の長さは辺 BC の二倍です。三角形の周辺の和が 34 センチメートルかそれ以下の場合：

- 辺 BC の最大長は何センチメートルでしょうか？
- 辺 AB の最大長は何センチメートルでしょうか？
- 辺 CA の最大長は何センチメートルでしょうか？



達成の目安

2.7 一次不等式に関する問題を解きなさい。

解法：

1a) $x \in]-\infty, 1[$ の時、$5x - 7 < -2x$ になります。

1b) $x \in]-\infty, 5]$ の時、$3x + 11 \geq 8x - 14$ になります。

1c) $x \in [-24, \infty[$ の時、$-4x + 9 \geq -5x - 15$ になります。

1d) $x \in \left]-\frac{1}{5}, \infty\right[$ の時、$-x - 10 < 9x - 8$ になります。

1e) $x \in \left]-\infty, -\frac{11}{2}\right]$ の時、$2x - 6 \geq 4x + 5$ になります。

1f) $x \in \left]-\infty, -\frac{2}{5}\right]$ の時、$\frac{3}{4}x + \frac{3}{2} \leq -\frac{5}{2}x + \frac{1}{5}$ になります。

1g)

$$-\frac{4}{3}x + \frac{2}{5} > -\frac{1}{4} + \frac{5}{2}x$$
$$\frac{2}{5} + \frac{1}{4} > \frac{5}{2}x + \frac{4}{3}x$$
$$\frac{13}{20} > \frac{23}{6}x$$
$$x > \frac{13}{20}\left(\frac{6}{23}\right)$$
$$x > \frac{39}{230}$$

よって、$x \in \left]\frac{39}{230}, \infty\right[$ になります。

1h)

$$4x > x + 12\sqrt{3}$$
$$4x - x > 12\sqrt{3}$$
$$3x > 12\sqrt{3}$$
$$x > 12\sqrt{3}\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$x > 4\sqrt{3}$$

したがって、$x \in]4\sqrt{3}, \infty[$ の時、$4x > x + 12\sqrt{3}$ になります 。

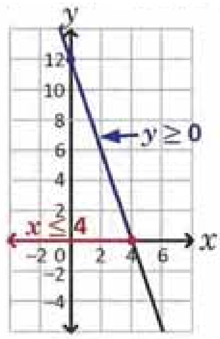
1i) 不等式が成立します。$x \in]-\infty, -\sqrt{5}]$

1j) 不等式は $x \in [12\sqrt{2}, \infty[$ で成立します。

1l) 不等式は $x \in \left]-\infty, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right[$ の時、成立します。

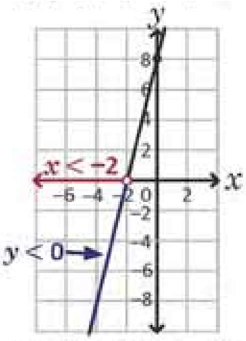
1l) 不等式は $x \in \left]-\frac{\sqrt{6}+1}{5}, \infty\right[$ の時、成立します。

2a) $y = -3x + 12$ とします。グラフは (0, 12) と (4, 0) を通ります。



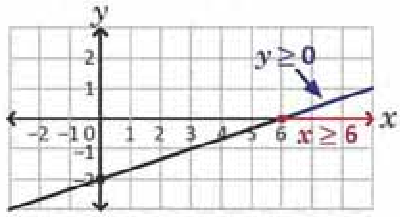
もし $x \in]-\infty, 4]$ であるなら、$y = -3x + 12 \geq 0$

2b) $y = 4x + 8$ の場合、(0, 8) 及び (−2, 0) を通ります。



もし $x \in]-\infty, -2[$ であるなら、$y = 4x + 8 < 0$

2c) $y = \frac{1}{3}x - 2$ とします。グラフは (0, −2) と (6, 0) を通ります。



もし $x \in [6, \infty[$ であるなら、$y = \frac{1}{3}x - 2 \geq 0$

3a) 問題の一次不等式は $4x < 28$です。（2.1 の授業の 1c の問題の解を参考にしましょう。）$x < 7$ の時、不等式が成り立ちます。つまり、マリオの最大年齢は 6 歳です。

3b) x が 2017 年度の歯学部の男性生徒の数を表すとき、$2x$ は同年の同学部の女性生徒の数を表す値になります。$x + 2x \leq 717$ という不等式が成りたち、$x \leq 239$ の場合に満たされます。したがって、男性の総生徒数は 239 名になります。

3c) 1 キンタル 50 ドルで購入する場合、1 ポンドあたりの小豆の最低価格は 0.51 ドルです。1 キンタル 58 ドルで購入する場合、1 ポンドあたりの小豆の最低価格は 0.59 ドルです。

3d) 最小身長は、1 メートル 37 センチになります。

3e) カロリーナは、6,000 ドル相当の自動車を最低でも 7 台売ったことになります。

3f) 高さの最大長は、22.5 センチメートルで、底辺の最大長は 30 センチメートルです。

3g) 辺 BC の長さ（cm）を x とした時、辺 AB の長さは $x + 2$ になり、辺 CA の長さは $2x$ になります。周囲の長さが34 cm かそれ以下であるため、$x + (x + 2) + 2x \leq 34$ となります。上記のものは、$x \leq 8$ の時、成り立ちます。つまり辺 BC の最大長は 8 cm、辺 AB は 10 cm、辺 CA は 16 cm ということになります。

レッスン 3 非線形不等式

3.1 課題辺を描いて行う

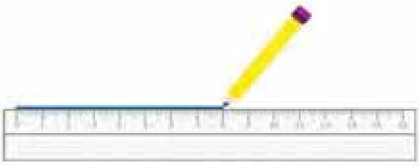
教材

- 定規及びコンパス
- 鉛筆及びノート

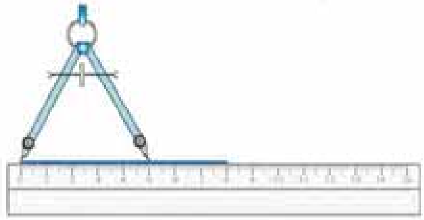
課題

各辺の長さがそれぞれ 5、7、8 センチメートルの三角形を描く方法は次の通りです。

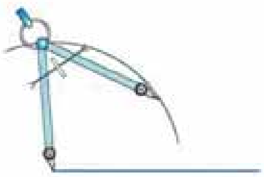
1. 長さ 8 cm の線を引きます。



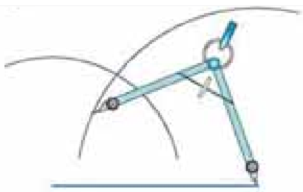
2. コンパスで他の辺の長さ、この場合、例えば 5 cm をとります。



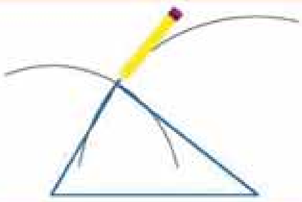
3. 1 で引いた線のどちらか一方の端にコンパスを置き、円の弧を描きます。



4. 次にコンパスで 7 cm の長さを取り、線のもう一方の端にコンパスを置いて手順 2 と 3 を繰り返します。



5. 二つの弧が交差する点から 8 cm の線の両端にそれぞれ線を引きます。三角形のそれぞれの辺が 5、7、8 センチメートルになっているか確認します。



問

1. それぞれの場合について、次の a、b、c の辺の長さを持つ三角形を描くことができるか確かめましょう。

a) $a = 4$ cm, $b = 5$ cm、$c = 6$ cm
b) $a = 8$ cm, $b = 10$ cm、$c = 15$ cm
c) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm、$c = 7$ cm
d) $a = 6$ cm, $b = 8$ cm、$c = 15$ cm

2. 問 1 のそれぞれの問題について、次のように行います。

a) $a + b$, $b + c$ 及び $a + c$ の合計をそれぞれ計算します。
b) 次の不等式 $a + b > c$, $b + c > a$ 及び $a + c > b$ が成立しますか。

ユニット 3

達成の目安

3.1 与えられた辺の長さで、定規とコンパスを使って三角形を書くことができるか確かめます。

学習の教材

ノートまたは白いボンド紙、定規（三角定規を使用してもよい）、コンパス、鉛筆、消しゴム

学習の流れ

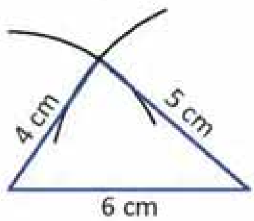
この授業は、三角不等式の導入になります。幾何学の手段を用いて、辺の長さから三角形を描くことができるか確認します。

ねらい

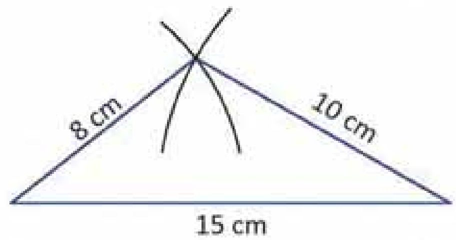
この授業では、導入問題が提起されません。生徒たちは手順を踏んで書かれている課題を行い、「問」に書かれてある各問題を解くためにこの解答方法を用います。

問題の解き方：

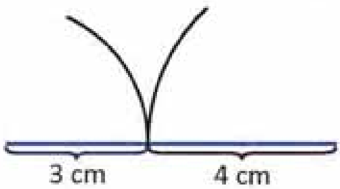
1a) c = 6 cm の長さの辺を描き、a = 4 cm、b = 5 cmの長さの弧を描きます。



1b) c = 15 cm の長さの辺を描き、a = 8 cm、b = 10 cm の長さの弧を描きます。

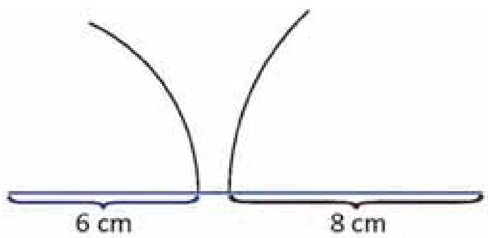


1c) c = 7 cm の長さの辺を描き、a = 3 cm、b = 4 cmの長さの弧を描きます。



弧は 7 cm の辺のちょうど上で交わります。このため、三角形を描くことはできません。

1d) c = 15 cm の長さの辺を描き、a = 6 cm、b = 8 cm の長さの弧を描きます。



弧が交差しないので、三角形を描くことはできません。

2a)
- a = 4 cm, b = 5 cm, c = 6 cm のとき、$a + b$ = 9 cm, $b + c$ = 11 cm, $a + c$ = 10 cm.
- a = 8 cm, b = 10 cm, c = 15 cm のとき、$a + b$ = 18 cm, $b + c$ = 25 cm, $a + c$ = 23 cm.
- a = 3 cm, b = 4 cm, c = 7 cm のとき、$a + b$ = 7 cm, $b + c$ = 11 cm, $a + c$ = 10 cm.
- a = 6 cm, b = 8 cm, c = 15 cm のとき、$a + b$ = 14 cm, $b + c$ = 23 cm, $a + c$ = 21 cm.

2b) それぞれの場合において、三つの不等式が成立するか確認します。
- 一つ目の場合：9 cm > 6 cm ($a + b > c$), 11 cm > 4 cm ($b + c > a$) 及び 10 cm > 5 cm ($a + c > b$)。このため $a + b > c$, $b + c > a$ 及び $a + c > b$ が成立します。
- 二つ目の場合：18 cm > 15 cm ($a + b > c$), 25 cm > 8 cm ($b + c > a$) 及び 23 cm > 10 cm ($a + c > b$)。このため、$a + b > c$, $b + c > a$ と $a + c > b$ が成立します。
- 三つ目の場合： $a + b$ = 7 cmでこれはつまり $a + b = c$ になります ($a + b > c$ は成立しません）。
- 四つ目の場合：14 cm < 15 cm、つまり $a + b < c$ になります($a + b > c$ は成立しません)。

3.2 三角不等式　第1部*

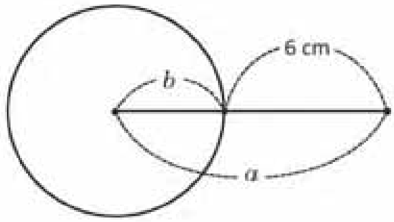
導入問題

a = 10 cm、b = 4 cmで、c が正数であるとします。a、b 及び c それぞれを辺にもつ三角形が成立するためには、c にはどのような数字が入るでしょうか。

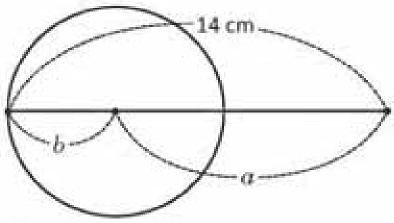
a の長さを持つ辺を描き、その辺のどちらかの端を中心として b を半径とする円の弧を描きます。

解法

a = 10 cm の辺を描き、その辺のどちらかの端を中心とする半径 b = 4 cm の円の弧を描きます。三角形の二つの頂点が辺 a の両端である場合、三つ目の頂点はこの円上になければなりません。原則として、c は $a - b$ = 6 cm よりも大きい値でなければなりません。これよりも小さい場合、三角形を描くことはできません（右の図参照）。



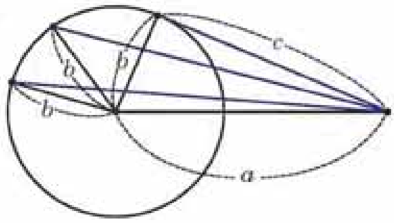
また c は、$a + b$ = 14 cm よりも小さい値でなければなりません。この値をとる場合、右の図のように三つ目の頂点が辺aの延長線上に来てしまい、三角形にならないからです。



これ以外の場所に三つ目の頂点が来る場合、c の値は常に 6 cm より大きく、14 cm より小さくなります。したがって：

$$a - b < c < a + b$$
$$6 < c < 14$$

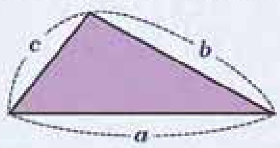
したがって、三角形を描くためには c の値は 6 cm と 14 cm の間の値をとります。



定理

すべての三角形において、二辺の長さの和は、もう一辺の長さよりも大きい。また二辺の長さの差は、もう一辺の長さよりも小さい。すなわち：

a) $b - c < a < b + c$;
b) $a - c < b < a + c$;
c) $a - b < c < a + b$.



三角形の辺の長さがそれぞれ a, b 及び c で、$b \geq c$ の場合：

$$b - c < a < b + c.$$

問題

1. 三角形の二辺の長さが次の通り与えられている場合、残りの一辺が取り得る値を求めましょう。
   a) 二辺の長さがそれぞれ 9 及び 14 センチメートルの場合。
   b) 二辺の長さがそれぞれ 3 及び 11 センチメートルの場合。
   c) 二辺の長さがそれぞれ 13 及び 7 センチメートルの場合。

2. 三辺の長さがそれぞれ14 cm、30 cm 及び 16cm の場合、どうして三角形にならないのか図を書かずに説明しましょう。

達成の目安

3.2 三角形の二辺の長さが与えられている場合、残りの辺の長さが取りうる値を求めます。

学習の流れ

この授業では、3.1の授業　で学習したように辺の長さから三角形を形づくる方法を使い、三角不等式をみちびきます。生徒が「導入問題」を解くのに苦労している場合は、教師は「解答」を段階的に教え、説明する必要があります。

ねらい

「問題」の項目では、生徒たちは「導入問題」に書かれている三角形の書き方ではなく、「定理」の説明を使わなければなりません。

問題の解き方：

1a) c が三角形の第三の辺の長さの場合、これは他の二辺の長さの和よりも小さく、その差よりも大きくなければなりません。つまり：

$$14-9<c<14+9$$
$$5<c<23$$

よって、三つ目の辺がとり得る値は 5 cm から 23 cm の間の値になります（ただし両値は含まない）。

1b) 問題 1a) と同じく、c が三角形の三つ目の辺の値の場合：

$$11-3<c<11+3$$
$$8<c<14$$

よって、三つ目の辺がとり得る値は 8 cm から 14 cm の間の値になります（ただし両値は含まない）。

1c) c が三角形の三つ目の辺の値の場合：

$$13-7<c<13+7$$
$$6<c<20$$

よって、三つ目の辺がとり得る値は 6 cm から 20 cm の間の値になります（ただし両値は含まない）。

2. a = 14 cm, b = 30 cm 及び c = 16 cm の場合。$a+c$ = 30 cm で、すなわち $a+c=b$ になります。しかし 3.2 の授業の定理によれば、三角形を形成する場合、二辺の長さの和は他の一辺の長さよりも大きくなければなりません。このため、この場合は定理を満たしていません（a と c の和は b よりも大きくないため）このため、三辺の長さがそれぞれ 14 cm、30 cm 及び 16 cm の場合、三角形を描くことはできません。

3.3 三角不等式　第2部*

導入問題

a と b が実数で $a \le b$ の場合、次の不等式が成立することを証明しましょう。

$$|a+b| \le |a| + |b|.$$

場合ごとに分ける：a と b が両方とも正数またはゼロの場合、一方が正数またはゼロ、もう一方が負の数の場合、両方とも負の数の場合。

解法

不等式を証明する場合、a と b が正の数またはゼロを取るか負の数になるか、それぞれの場合に分けて考えましょう。

a) **1 つ目の場合： $a \ge 0$ で $b \ge 0$ のとき。**この場合、$|a| = a$, $|b| = b$ になり $a + b \ge 0$; したがって：

$$|a+b| = a + b = |a| + |b|$$

つまり、不等式 $|a+b| \le |a| + |b|$ は成立します。等式が成立するからです。

b) **2つ目の場合： $a < 0$ で $b \ge 0$のとき。**この場合、$|a| = -a$, $|b| = b$ になり、$|a| + |b| = (-a) + b$ となります。

- $a + b < 0$ の場合、次のようになります。　$|a+b| = -(a+b) = (-a) + (-b)$

しかし、$-b < b$ （b が正の数であるため）となり、$(-a) + (-b) < (-a) + b$ になり、よって不等式 $|a+b| \le |a| + |b|$ が成立します。

- $a + b \ge 0$ の場合は練習問題とします。

$a \ge 0$ で $b < 0$ の場合は、2 番目の場合と同様に証明します。

c) **3つ目の場合： $a < 0$ で $b < 0$のとき。**この場合、$|a| = -a$ で $|b| = -b$になります。さらに a と b の和も負の数になります。

$$\begin{aligned} |a+b| &= -(a+b) \\ &= (-a) + (-b) \\ &= |a| + |b| \end{aligned}$$

つまり、等式を満たすため、不等式 $|a+b| \le |a| + |b|$ は成立します。

一般的に

a と b がどのような実数であっても、不等式 $|a+b| \le |a| + |b|$ は常に成立します。つまり二つの数の和の絶対値が、その二つの数それぞれの絶対値の和と同じか、またはこれよりも小さくなります。この不等式を**三角不等式**と呼びます。

問題

1.次の a と b の数字の組合せのときに三角不等式が成立するか確かめましょう。

a) $a = 9$ および $b = 7$　　b) $a = -8$ および $b = 10$　　c) $a = -5$ および $b = -6$
d) $a = 11$ および $b = -13$　　e) $a = -4$ および $b = 4$　　f) $a = 8$ および $b = 8$
g) $a = 0$ y および $b = -6$　　h) $a = -\frac{4}{5}$ および $b = \frac{2}{5}$　　i) $a = \sqrt{2}$ および $b = 3\sqrt{2}$

2. $a < 0$, $b \ge 0$ 及び $a + b \ge 0$ の場合、すなわち $|a+b| \le |a| + |b|$ になることを示します。

3. a、b 及び c が実数の場合。三角不等式を使って、次の不等式を証明しましょう。
$|a+b+c| \le |a| + |b| + |c|$.

ユニット 3

達成の目安

3.3 a と b が実数の場合、三角不等式 $|a+b| \leq |a| + |b|$ を確かめます。

学習の流れ

実数 a と b の絶対値について三角不等式を証明します。生徒が「導入問題」を解くのにとても苦労している場合は、教師は「解答」を段階的に教え、説明する必要があります。

つまずきやすい点

「問題」の 3 は、そうして不等式が真であるのか理解させるために、生徒たちと段階ごとに確かめます。ここでは徹底した数学的証明は期待されていません。

問題の解き方：

1a) $|a+b| = |9+7| = |16| = 16$

$|a| = |9| = 9$
$|b| = |7| = 7$ $\Rightarrow |a| + |b| = 16$

上記より：$16 \leq 16$ となり、つまり不等式 $|a+b| \leq |a| + |b|$ が成立します。

1b) $|a+b| = |-8+10| = |2| = 2$

$|a| = |-8| = 8$
$|b| = |10| = 10$ $\Rightarrow |a| + |b| = 18$

上記より：$2 \leq 18$ となり、つまり不等式 $|a+b| \leq |a| + |b|$ が成立します。

1c) $|a+b| = |-5-6| = |-11| = 11$

$|a| = |-5| = 5$
$|b| = |-6| = 6$ $\Rightarrow |a| + |b| = 11$

上記より：$11 \leq 11$

1d) $|a+b| = |11-13| = |-2| = 2$

$|a| = |11| = 11$
$|b| = |-13| = 13$ $\Rightarrow |a| + |b| = 24$

上記より：$2 \leq 24$

1e) $|a+b| = |-4+4| = 0$　$|a| = 4, |b| = 4$ となり $|a| + |b| = 8$。したがって $0 \leq 8$

1f) $|a+b| = |8+8| = 16$　$|a| = 8, |b| = 8$ となり $|a| + |b| = 16$。したがって、$16 \leq 16$

1g) $|a+b| = |0-6| = |-6| = 6$

$|a| = |0| = 0$
$|b| = |-6| = 6$ $\Rightarrow |a| + |b| = 6$

上記より：$6 \leq 6$

1h) $|a+b| = \left|-\frac{4}{5} + \frac{2}{5}\right| = \left|-\frac{2}{5}\right| = \frac{2}{5}$

$|a| = \left|-\frac{4}{5}\right| = \frac{4}{5}$

$|b| = \left|\frac{2}{5}\right| = \frac{2}{5}$ $\Rightarrow |a| + |b| = \frac{4}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$

上記より：$\frac{2}{5} \leq \frac{6}{5}$

1i) $|a+b| = |\sqrt{2} + 3\sqrt{2}| = |4\sqrt{2}| = 4\sqrt{2}$; $|a| = |\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|b| = |3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2}$ y $|a| + |b| = \sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.
したがって、$4\sqrt{2} \leq 4\sqrt{2}$.

2. a と b が、$a < 0$, $b \geq 0$ で $a + b \geq 0$ である実数であるため（設問の示すとおり）。この場合、$|a| = -a$, $|b| = b$ になり、$|a+b| = a+b$ となります。しかし $a < -a$（a は負の数であるため）となり、$a + b < -a + b$ となるため、不等式 $|a+b| \leq |a| + |b|$ が成立します。

3. 実数 a, b 及び c は $a + b + c = (a+b) + c$ になります（和の結合法則による）。従って、

三角不等式により $|a+b+c| = |(a+b)+c| \leq |a+b| + |c|$ となります。

さらに、$|a+b| \leq |a| + |b|$ となり、したがって $|a+b| + |c| \leq |a| + |b| + |c|$ になります。よって

$$|a+b+c| \leq |a| + |b| + |c|.$$

レッスン 3

3.4 算術幾何平均の不等式

導入問題

次の不等式が成り立つことを証明しましょう。
1. x が実数の場合 $x^2 \geq 0$ であること。
2. a と b が負の数ではない実数の場合、$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

a) では、$x > 0$ と $x < 0$ の場合にわけて考えます。b) では、x を $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ に置き換えて a) の結果を利用します。

解法

1. $x = 0$ の場合、$x^2 = 0$ となり等式が成立します。x がとり得る値ごとに場合分けします。 $x > 0$ の場合と $x < 0$ の場合。

1 つ目の場合, $x \geq 0$

$x(x) \geq 0(x)$ 両方の側に正の数をかける場合、不等式は変わりません。

$x^2 \geq 0.$

2 つ目の場合, $x < 0$

$x(x) > 0(x)$ 両方の側に負の数をかける場合、不等式は反転します。

$x^2 > 0.$

よって x がどのような実数であっても $x^2 \geq 0$ は成立します。

2. 前の問題の結果を使い、x を $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ に置き換えます。つまり $x = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ の場合：

$$x^2 = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$$

$$a - 2\left(\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b}\right) + b \geq 0$$ 二項式を二乗します。

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$ $2\sqrt{ab}$ を不等式の両辺に足します。

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$ 不等式の両辺に $\frac{1}{2}$ をかけます。

よって、負ではない数 a と b はどのような組合せであっても次が成立します：$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

法則

1. 全ての実数 a について $a^2 \geq 0$ が成立します。$a = 0$ の場合、等式が成立します。
2. a と b が負ではないいかなる数の場合でも次の不等式が真となります。

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

不等式の左の項は a と b の相加平均であり、右の項は a と b の相乗平均です。この不等式を**相加相乗平均の不等式**とよびます。

問題

1. a と b が次の数字の組合せの場合、相加相乗平均の不等式が成立するか確かめましょう。

a) $a = 9$ および $b = 4$	b) $a = 8$ および $b = 18$	c) $a = \frac{1}{4}$ および $b = \frac{1}{16}$
d) $a = 10$ および $b = 90$	e) $a = 25$ および $b = 49$	f) $a = 6$ および $b = 30$

2. 相加相乗平均の不等式を使って、次を証明しましょう。
 a) x が負の数ではない場合、$1 + x \geq 2\sqrt{x}$ が成立すること。
 b) a と b が両方とも正の数の場合、$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ が成立すること。

達成の目安

3.4 負ではない実数の場合、相加相乗平均の不等式が成り立つことを確かめます。

学習の流れ

この授業では、実数の基本的法則である ($x^2 \geq 0$) を示します。この法則は、この後、負の数ではない実数について相加相乗平均の不等式を証明するために使います。

つまずきやすい点

「問題」の2番では、「法則」の 2 に説明されている a と b が、相加相乗平均の不等式において置き換えられるためにどのような数にならなければならないか生徒にヒントを与えます。

問題の解き方：

1a) $\frac{a+b}{2} = \frac{9+4}{2} = \frac{13}{2} = 6.5$

$\sqrt{ab} = \sqrt{9(4)} = \sqrt{36} = 6$

よって $6.5 \geq 6$ となり、つまり不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ が成立します。

1b) $\frac{a+b}{2} = \frac{8+18}{2} = \frac{26}{2} = 13$

$\sqrt{ab} = \sqrt{8(18)} = \sqrt{144} = 12$

よって $13 \geq 12$となり、つまり不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ が成立します。

1c) $\frac{a+b}{2} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}{2} = \frac{\frac{5}{16}}{2} = \frac{5}{32}$

$\sqrt{ab} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{16}\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$

したがって $\frac{5}{32} \geq \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

1d) $\frac{a+b}{2} = \frac{10+90}{2} = \frac{100}{2} = 50$

$\sqrt{ab} = \sqrt{10(90)} = \sqrt{900} = 30$

したがって、$50 \geq 30$

1e) $\frac{a+b}{2} = \frac{25+49}{2} = \frac{74}{2} = 37$

$\sqrt{ab} = \sqrt{25(49)} = 5(7) = 35$

したがって、$37 \geq 35$.

1f) $\frac{a+b}{2} = \frac{6+30}{2} = \frac{36}{2} = 18$

$\sqrt{ab} = \sqrt{6(30)} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$

したがって、$18 \geq 6\sqrt{5}$ となります。

$\sqrt{324} \geq \sqrt{180}$ だからです。

2a) $a = 1$ 及び $b = x$ の場合、相加相乗平均の不等式を使って、次を証明しましょう。

$\frac{1+x}{2} \geq \sqrt{1(x)}$ 　相加相乗平均の不等式によります。

$1 + x \geq 2\sqrt{x}$ 　右の項に $\frac{1}{2}$ の逆数をかけます。

よって不等式 $1 + x \geq 2\sqrt{x}$ は負の数ではない全ての数 x について真となります。

2b) a と b が両方とも正の数であるため、$\frac{a}{b}$ と $\frac{b}{a}$ を定義することができます（分母はゼロではないため）。
したがって：

$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{2} \geq \sqrt{\left(\frac{\cancel{a}}{\cancel{b}}\right)\left(\frac{\cancel{b}}{\cancel{a}}\right)}$ 　相加相乗平均の不等式によります。

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ 　約分し、右の項に $\frac{1}{2}$ の逆数をかけます。

よって、不等式 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ は正の数 a と b のどのような組合せについても真となります。

レッスン 3

3.5 有理式による不等式

導入問題

次の各問題について、不等式を満たす x を求めましょう。

a) $\frac{1}{x}>0$　　　b) $\frac{1}{x-1}<0$

解法

a) 数 $\frac{1}{x}$ が正の数となるような x の値をすべて求めます。$x=0$ は解の一部とはなりません。なぜならば $\frac{1}{0}$ という不定形の形になってしまうからです。

$\frac{1}{x}$ の式が正になるために、分子と分母は両方とも正の数か、または両方とも負の数である必要があります。ただし、この場合すでに分子が正の数であるため、$x>0$ である必要があります。

このため不等式 $\frac{1}{x}>0$ は $x>0$ について成立します。すなわち $x\in\,]0,+\infty[$ となります。

b) 解答手順は前の問題と類似しています。異なる点は $\frac{1}{x-1}$ が負の数にならなければならない点です。分子が正の数であるため、次のようにならなければなりません。

$$x-1<0$$

$$x<1$$

このため不等式 $\frac{1}{x-1}<0$ は $x<1$ について成立します。すなわち $x\in\,]-\infty,1[$ となります。

まとめ

a と b は実数で、ただし $a\neq0$ の場合。

1. 不等式 $\frac{1}{ax+b}>0$ を解くことは、式が正になるような値を求めるということです。これは $ax+b>0$ の場合にのみ成立します。
2. 不等式 $\frac{1}{ax+b}>0$ を解くことは、式が負になるような値を求めるということです。これは $ax+b<0$ の場合にのみ成立します。

例

不等式 $-\frac{1}{2x+3}<0$ を解きましょう。

両方の辺に -1 をかけ、これにより不等式が逆転します。

$$\frac{1}{2x+3}>0$$

よって、$\frac{1}{2x+3}>0$ は $2x+3>0$ の場合にのみ成立します。

$$2x>-3$$

$$x>-\frac{3}{2}$$

このため、不等式 $-\frac{1}{2x+3}<0$ は $x>-\frac{3}{2}$ の場合に成立します。すなわち これは $x\in\left]-\frac{3}{2},+\infty\right[$ の場合ということです。

記号 ≥ と ≤ についてはこの不等式については考慮しません。なぜなら、$\frac{1}{ax+b}$ の形の式については決してゼロになることはなく、そのような場合を考慮することは意味がないからです。

問題

次の不等式を解きましょう（区間を使って回答を示しましょう）。

a) $\frac{1}{x+4}>0$　　b) $\frac{1}{2x-5}<0$　　c) $\frac{-1}{3x+1}>0$

d) $-\frac{1}{1-x}>0$　　e) $\frac{1}{-2x+10}>0$　　f) $\frac{2}{4x-7}<0$

g) $-\frac{3}{5x+6}>0$　　h) $\frac{-x-4}{x+5}>-1$　　i) $\frac{x+2}{x+3}>1$

問題 h) と i) は、全てを一つの辺にまとめて、一方の辺にはゼロが残るようにします。

ユニット 3

達成の目安

3.5 $\frac{1}{ax+b} > 0$ または $\frac{1}{ax+b} < 0$ の形の不等式を解く。

学習の流れ

この授業では、不等式の一つの辺が、変数を一つ含む一次多項式を分母に持つ分数で、もう一方の辺がゼロに等しい不等式を解きます。変数の値をもとめるために、分数が正の数の場合、または負の数の場合について、不等式の種類を考えていきます。

つまずきやすい点

「問題」にある問題 h) と i) の不等式については項を移して分数の和を出し、$\frac{1}{ax+b} > 0$ または $\frac{1}{ax+b} < 0$の形にするように生徒に指示します。

問題の解き方：

a) 不等式 $\frac{1}{x+4} > 0$ は次の場合にのみ成立します。

$$x+4>0$$
$$x>-4$$

よって、$x \in]-4, \infty[$ のときに $\frac{1}{x+4} > 0$ となります。

b) 不等式 $\frac{1}{2x-5} < 0$ は次の場合にのみ成立します。

$$2x-5<0$$
$$x<\frac{5}{2}$$

したがって $\frac{1}{2x-5} < 0$ は $x \in \left]-\infty, \frac{5}{2}\right[$ の場合に成立します。

c) ここでは $\frac{-1}{3x+1} > 0$ の両方の辺に –1 をかけて、$\frac{1}{3x+1} < 0$ の等積を得ます。この二番目は次の場合にのみ成立します。

$$3x+1<0$$
$$x<-\frac{1}{3}$$

したがって、$\frac{-1}{3x+1} > 0$ は $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[$ の場合に成立します。

d) ここでは $-\frac{1}{1-x} > 0$ の両方の辺に -1 をかけて $\frac{1}{1-x} < 0$ の等積を得ます。この二番目は次の場合にのみ成立します。

$$1-x<0$$
$$1<x$$

よって $-\frac{1}{1-x} > 0$ は $x \in]1, \infty[$ の場合に成立します。

e) $\frac{1}{-2x+10} > 0$ は $x \in]-\infty, 5[$ の場合に成立します。

f) $\frac{2}{4x-7} < 0$ は $x \in \left]-\infty, \frac{7}{4}\right[$ の場合に成立します。

g) $-\frac{3}{5x+6} > 0$ は $\frac{3}{5x+6} < 0$ に等しくなりますが、これは $5x+6<0$ の場合に成立します（分子が正の数であるため）。

$$5x<-6$$
$$x<-\frac{6}{5}$$

したがって、$-\frac{3}{5x+6} > 0$ は $x \in \left]-\infty, -\frac{6}{5}\right[$ の場合に成立します。

h) 項の移動と分数の和を使います。

$$\frac{-x-4}{x+5}+1>0$$
$$\frac{-\cancel{x}-4+\cancel{x}+5}{x+5}>0$$
$$\frac{1}{x+5}>0$$

この最後の式は $x>-5$ の場合に成立します。よって、$\frac{-x-4}{x+5} > -1$の回答は $x \in]-5, \infty[$となります。

i) 問題hと同じく、項の移動と分数の和を使います。

$$\frac{x+2}{x+3}-1>0 \Rightarrow \frac{\cancel{x}+2-\cancel{x}-3}{x+3}>0 \Rightarrow \frac{-1}{x+3}>0$$

不等式 $\frac{-1}{x+3} > 0$ は $x<-3$ の場合に成立します。よって $\frac{x+2}{x+3} > 1$ の回答は $x \in]-\infty, -3[$ となります。

3.6 ユニット問題

1. 次の一次不等式を解きましょう （区間を使って回答を示しましょう） 。

a) $4x - 12\sqrt{7} \leq 20\sqrt{7}$
b) $x + 9\sqrt{5} \leq -x - 7\sqrt{5}$
c) $-5x + 3\sqrt{6} > -x + 5\sqrt{6}$
d) $11x + 2\sqrt{2} \geq 4x + 5\sqrt{2}$
e) $8x - 15\sqrt{2} < 5x - 6\sqrt{3}$
f) $\sqrt{10}\,x - 8 > \sqrt{2}\,x - 6$

2. 次の各問題について、両方の不等式を満たす x を求めましょう。

a) $\begin{cases} 5x - 3 > 4x - 5 \\ -2x + 5 \leq -3x + 8 \end{cases}$
b) $\begin{cases} 7x - 6 < 5x - 16 \\ x + 11 \geq -x - 15 \end{cases}$
c) $\begin{cases} 3x - 7 < 5x + 1 \\ 6x > 3x + 1 \end{cases}$
d) $\begin{cases} -2x - 3 \leq x - 5 \\ 3x - 1 \geq 4x + 7 \end{cases}$

各問題について、数直線を使ってそれぞれの不等式の回答を示しましょう。それから、両方の区分が一致する値であるか確認しましょう。

3. 以下の文章題を解きなさい。

a) ホセは高校一年生です。今年、数学の学期テストでそれぞれ次の成績をとりました。

第1学期	7.6
第2学期	8.0
第3学期	8.2

ホセが最終的な成績の平均を 8.0 と同等またはこれよりも高い値にしたい場合、第4学期のテストで取るべき成績の最低限の値はいくつになりますか。

b) フリアは旅行のために車を借りようとしています。A 社では車のレンタル料金 24.00 ドルに加えて、走行距離一キロにつき 0.30 ドルかかります。一方、B 社では、車のレンタル料金 25.00 ドルに加えて、走行距離一キロにつき 0.25 ドルかかります。A 社の料金が B 社の料金を上回るためには、フリアは少なくとも何キロ走行する必要がありますか。

c) 製品は、その売り上げによる収入が生産費用を上回る場合にのみ利益を生み出します。ある携帯電話の会社では、携帯電話を x 台生産するのにコストが C（ドル）かかると試算しています。

$$C = 90x + 1000,$$

一方で収入は 次の通り R (ドル) としています：R = 140x.

利益を得るためには、少なくとも何台の携帯電話を売らなければならないでしょうか。

4. a, b 及び c を、ある三角形のそれぞれの辺の長さとします。このとき次の不等式が成立することを証明しなさい。

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 3.$$

このユニットの 3.2 の授業の結果を使いましょう。

5. 相加相乗平均の不等式を使って、次を証明しましょう。

a) $x > 0$ の場合、$x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ になること。

b) a, b 及び x が正の数の場合、$ax + \dfrac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab}$ が成立すること。

達成の目安

3.6 不等式に関する問題を解きなさい。

問題の解き方：

1a) $4x - 12\sqrt{7} \leq 20\sqrt{7}$

$$4x \leq 20\sqrt{7} + 12\sqrt{7}$$
$$x \leq 32\sqrt{7}\left(\tfrac{1}{4}\right)$$
$$x \leq 8\sqrt{7}$$

不等式 $4x - 12\sqrt{7} \leq 20\sqrt{7}$ は $x \in]-\infty, 8\sqrt{7}]$ の場合に成立します。

1b) $x + 9\sqrt{5} \leq -x - 7\sqrt{5}$

$$x + x \leq -7\sqrt{5} - 9\sqrt{5}$$
$$2x \leq -16\sqrt{5}$$
$$x \leq -8\sqrt{5}$$

不等式 $x + 9\sqrt{5} \leq -x - 7\sqrt{5}$ は $x \in]-\infty, -8\sqrt{5}]$ の場合に成立します。

1c) $-5x + 3\sqrt{6} > -x + 5\sqrt{6}$

$$3\sqrt{6} - 5\sqrt{6} > -x + 5x$$
$$-2\sqrt{6} > 4x$$
$$-\tfrac{1}{2}\sqrt{6} > x$$
$$x < -\tfrac{1}{2}\sqrt{6}$$

不等式 $-5x + 3\sqrt{6} > -x + 5\sqrt{6}$ は $x \in \left]-\infty, -\tfrac{1}{2}\sqrt{6}\right[$ の場合に成立します。

1d) $11x + 2\sqrt{2} \geq 4x + 5\sqrt{2}$

$$11x - 4x \geq 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$$
$$7x \geq 3\sqrt{2}$$
$$x \geq \tfrac{3}{7}\sqrt{2}$$

不等式 $11x + 2\sqrt{2} \geq 4x + 5\sqrt{2}$ は $x \in \left[\tfrac{3}{7}\sqrt{2}, \infty\right[$ の場合に成立します。

1e) $8x - 15\sqrt{2} < 5x - 6\sqrt{3}$

$$8x - 5x < -6\sqrt{3} + 15\sqrt{2}$$
$$3x < -6\sqrt{3} + 15\sqrt{2}$$
$$x < (-6\sqrt{3} + 15\sqrt{2})\left(\tfrac{1}{3}\right)$$
$$x < (-6\sqrt{3})\left(\tfrac{1}{3}\right) + (15\sqrt{2})\left(\tfrac{1}{3}\right)$$
$$x < -2\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$$

不等式 $8x - 15\sqrt{2} < 5x - 6\sqrt{3}$ は $x \in]-\infty, 5\sqrt{2} - 2\sqrt{3}[$ の場合に成立します。

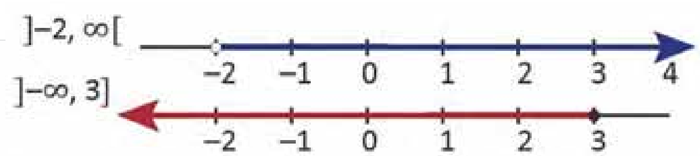
1f) $\sqrt{10}x - 8 > \sqrt{2}x - 6$

$$\sqrt{10}x - \sqrt{2}x > -6 + 8$$
$$(\sqrt{10} - \sqrt{2})x > 2$$
$$x > \frac{2}{\sqrt{10} - \sqrt{2}}$$
$$x > \frac{\sqrt{10} + \sqrt{2}}{4}$$

有理化するといいでしょう。

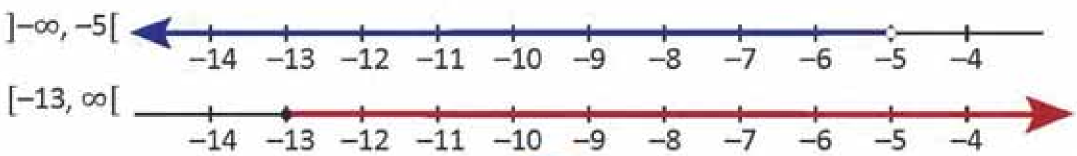
不等式 $\sqrt{10}x - 8 > \sqrt{2}x - 6$ は $x \in \left]\frac{\sqrt{10} + \sqrt{2}}{4}, \infty\right[$ の場合に成立します。

2a) 不等式 $5x - 3 > 4x - 5$ は $x \in]-2, \infty[$ の場合に成立します。一方で、$-2x + 5 \leq -3x + 8$ は $x \in]-\infty, 3]$ の場合に成立します。合致する値を求めるために、双方の解答を数直線を使って表します。



前述の内容に従えば、双方の区分は $]-2, 3]$ に合致します。よって、不等式 $5x - 3 > 4x - 5$ と $-2x + 5 \leq -3x + 8$ を満たす x の値は、$]-2, 3]$ の区分に属します。

2b) 不等式 $7x - 6 < 5x - 16$ は $x \in]-\infty, -5[$ について成立します。一方で、$x + 11 \geq -x - 15$ は $x \in [-13, \infty[$ について成立します。双方の回答を数直線であらわすと次のようになります。



よって双方の区分は [–13, –5[に合致します。よって不等式 $7x - 6 < 5x - 16$ と $x + 11 \geq -x - 15$ を満たす x の値は [–13, –5[の区分に属します。

2c) 不等式 $3x - 7 < 5x + 1$ は $x \in]-4, \infty[$ について成立します。一方で $6x > 3x + 1$ は $x \in \left]\frac{1}{3}, \infty\right[$ について成立します。2a) と 2b) に示される計算過程に従うと、双方の不等式を満たすxの値が推測できます。これは区分 $\left]\frac{1}{3}, \infty\right[$ に属する値になります。

2d) 不等式 $-2x - 3 \leq x - 5$ は $x \in \left[\frac{2}{3}, \infty\right[$ について成立します。一方で、$3x - 1 \geq 4x + 7$ は $x \in]-\infty, -8]$ について成立します。2a) と 2b) に示される計算過程に従うと、区分はどのような値にも合致しないことがわかります。このため、双方の不等式を満たすような x に当てはまる実数は存在しないことになります。

3a) ホセが第4学期にとらなければならない成績を x とします。最終的な成績の平均値が 8.0 と同等かこれよりも高くなければならないため：

$$\frac{7.6 + 8.0 + 8.2 + x}{4} \geq 8.0$$

上記の不等式を解き、次の回答を得ます。

$$23.8 + x \geq 32.0$$
$$x \geq 8.2$$

このためホセがとるべき最低限の成績は 8.2 となります。

3b) フリアが走行する距離を x とします。この場合、A 社が徴集する料金は $24 + 0.3x$ ドルとなります。一方で、B 社の料金は $25 + 0.25x$ ドルとなります。A 社の料金が B 社の料金を上回る場合：

$$24 + 0.3x > 25 + 0.25x$$
$$0.05x > 1$$
$$x > 20$$

このため、20 キロメートルを超えて走行すると A 社の料金が B 社の料金を上回ることになります。

3c) 利益が発生するためには R > C、つまり $140x > 90x + 1\,000$ である必要があります。この不等式を解くと：

$$140x > 90x + 1000$$
$$50x > 1000$$
$$x > 20$$

このため、利益を得るためには、この会社は少なくとも掲載電話を21台売る必要があります。

4. 三角形の長さであるため、a, b 及び c は正の数であり、$b + c,\ a + c$ と $a + c$ の和についても正の数になります。3.2 の授業の三角形の辺に関する定理により、次の不等式 $a < b + c$, $b < a + c$ と $c < a + b$ が成立します。不等式の法則を利用し、$a < b + c$ について、右側の項に $b + c$ の逆数をかけると、不等式は変化しません。すなわち：

$$a\left(\frac{1}{b+c}\right) < 1 \Rightarrow \frac{a}{b+c} < 1.$$

同様に、$\frac{b}{a+c} < 1$ と $\frac{c}{a+b} < 1$ が得られます。よって

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 1 + 1 + 1$$
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 3.$$

5a) x は正の数であるため、$\frac{1}{x}$ の値を決めることができます（この値も正の数になります）。相加相乗平均の不等式と不等式の法則を利用すると：

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{\cancel{x}\left(\frac{1}{\cancel{x}}\right)} \Rightarrow \frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq 1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

5b) a, b 及び x は正の数であるため、ax と $\frac{b}{x}$ についても正の数になることがわかります。相加相乗平均の 不等式と不等式の法則を利用すると：

$$\frac{ax + \frac{b}{x}}{2} \geq \sqrt{a\cancel{x}\left(\frac{b}{\cancel{x}}\right)} \Rightarrow ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab}.$$

このユニットのねらい

有理数および無理数の二次関数と$f(x) = ax^3$の形式の三次関数の構成要素と特徴を特定します。その際、値域の対応表とグラフを使用して単調関数の問題や日常生活で発生する状況に関する問題を解き、二次不等式の解をグラフによって理解します。

関連と発展

初等教育第 3 期

ユニット 6：正比例と反比例（7 学年）
- 正比例
- 反比例
- 比例の適用

ユニット 3：一次関数（8 学年）
- 一次関数
- 一次関数と 2 元 一次方程式
- 一次関数の応用

ユニット4：$y = ax^2 + c$ の形式の 二次関数（9 学年）
- 関数 $y = ax^2$
- 関数 $y = ax^2 + c$

高校 1 年

ユニット 4：実関数
- 関数の定義
- 二次関数
- 二次関数の応用
- その他の関数
- GeoGebraを使った演習

ユニット 5：斜三角形の解法
- 鋭角の三角比
- 一般角の三角比
- 斜三角形の解法

高校2年

ユニット 4：超越関数 I
- 累乗と n 乗根
- 指数関数と指数方程式

ユニット 5：超越関数 II
- 全単射関数と逆関数
- 対数関数
- 三角関数
- GeoGebraを使った演習

ユニット学習計画

レッスン	授業時数	授業
1. 関数の定義	1	1. 関数の表記法
	1	2. 関数のグラフ
	1	3. 関数の定義域と値域
2. 二次関数	1	1. 縦方向の移動
	1	2. $f(x) = a(x - h)^2$、の形式の関数、$h > 0$ の場合
	1	3. $f(x) = a(x - h)^2$、の形式の関数、$h < 0$ の場合
	1	4. $f(x) = a(x - h)^2 + k$ の形式の関数、第1部
	1	5. $f(x) = a(x - h)^2 + k$ の形式の関数、第2部
	1	6. $f(x) = ax^2 + bx$ の形式の関数
	1	7. $f(x) = x^2 + bx + c$ の形式の関数
	1	8. $f(x) = ax^2 + bx + c$ の形式の関数
	1	9. 最初の条件
	2	10. 復習問題
	1	レッスン 1 および レッスン 2 のテスト
3. 二次関数の応用	1	1. 単調関数
	1	2. バリエーション： 最大値または最小値

レッスン	授業時数	授業
	1	3. 応用例： 最大値
	1	4. 応用例： 最小値
	1	5. 二次関数のグラフと y 軸の交差
	1	6. 二次関数のグラフと x 軸の交差
	1	7. 二次不等式 $ax^2 + bx + c \geq 0$、$a > 0$ 第 1 部
	1	9. 二次不等式 $ax^2 + bx + c \leq 0$、$a > 0$
	1	10. 二次不等式、$a < 0$
	1	11. 増減表、第 1 部
	1	12. 増減表、第 2 部
	1	13. 復習問題
4. その他の関数	1	1. 関数 $f(x) = x^3$
	1	2. 関数 $f(x) = ax^3$、$a > 0$
	1	3. 関数 $f(x) = -ax^3$、$a > 0$
	1	4. 関数 $f(x) = \frac{k}{x}$ とその移動
	1	5. 関数 $h(x) = \frac{k}{x-p} + q$ のグラフ

レッスン	授業時数	授業
	1	6. 関数 $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ のグラフ
	1	7. 無理数の関数 $f(x) = a\sqrt{x}$
	1	8. 無理数の関数 $f(x) = \sqrt{ax}$
	1	9. 復習問題
	1	10. ユニット問題
5. GeoGebraを使った演習	1	1. 概要
	1	2. 縦方向の移動
	1	3. 横方向の移動
	1	レッスン 3 および レッスン 4 のテスト
	2	2 学期テスト

授業 40 時間 + レッスン 1 およびレッスン 2 のテスト + レッスン 3 及びレッスン 4 のテスト + 1 学期期末テスト

各レッスンの要点

レッスン 1：関数の定義

この課では、$f(x)$ という関数の表記法、関数の定義域と値域の定義、ある直線がある関数のグラフに対応しているかの検証を紹介します。

レッスン 2：二次関数

課の初めに、8 学年と 9 学年で扱った、一次関数と $f(x) = ax^2 + c$ の形式の 二次関数の移動を復習します。その後、縦方向および横方向の移動を用いて、関数 $f(x) = ax^2$ と $g(x) = a(x - h)^2 + k$ の要素（グラフ、定義域と値域）間の関係を検証します。このステップは少しずつ進められます。まず横方向の移動の推定を行い、その後移動の組み合わせを行います。最後に、二次関数の方程式の一般形および $a(x - h)^2 + k$ の形式で関数を表すために平方完成を行う方法を学びます。

レッスン 3：二次関数の応用

二次関数の概要（グラフ、定義域と値域）を学んだら、この課では 二次関数の性質を利用して単調関数、最大値と最小値の計算、二次不等式に関する問題を解きます。二次不等式では、ある 二次関数のグラフを利用して不等式の解を理解し、その後増減表を用いて問題を解きます。

レッスン 4：その他の関数

この課では、値域の対応表を用いて関数 $f(x) = ax$ $f(x) = \frac{k}{x}$ $f(x) = a\sqrt{x}$ $f(x) = \sqrt{ax}$ のグラフを描き、表に基づいて各関数の定義域と値域を推測します。さらに、関数 $g(x) = \frac{k}{x}$ を縦方向および横方向に移動し、関数 $f(x) = \frac{k}{x-p} + q$ のグラフを描きます。また、関数 $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ $f(x) = \frac{k}{x-p} + q$ の形式に変形し、グラフを描きます。

レッスン 5：GeoGebraを使った演習

この課では数学ソフトウェア GeoGebra を使用して、関数のグラフを描き、横方向および縦方向の移動を行い、$(x, f(x))$ の形式の点の集まりから関数のグラフを作成します。

レッスン 1 関数の定義

1.1 関数表記

導入問題

以下それぞれにある x の値に対応する関数 y の値を求めなさい。

a) $y = 5x - 1;\ x = -3$　　b) $y = 4x^2;\ x = \frac{1}{2}$　　c) $y = \frac{x^2}{2} + 5;\ x = 10$

解法

いずれの場合も、x の値を代入して y の値を求めます。

a)
$$\begin{aligned} y &= 5(-3) - 1 \\ &= -15 - 1 \\ &= -16 \end{aligned}$$

$x = -3$ ならば、$y = -16$

b)
$$\begin{aligned} y &= 4\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \\ &= 4\left(\tfrac{1}{4}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$x = \frac{1}{2}$ ならば、$y = 1$

c)
$$\begin{aligned} y &= \frac{(10)^2}{2} + 5 \\ &= \frac{100}{2} + 5 \\ &= 55 \end{aligned}$$

$x = 10$ ならば、$y = 55$

定義

A と B の 2 つの集合がある場合に、集合 A にある x の要素それぞれを定める B の集合にある y の要素が唯一である場合の関係を **B は A の関数**であるといいます。B が A の関数であることを示す表記は ***f* を使い、A ⟶ B**, A にある x の要素を**独立変数または説明変数**といい、B にある y の要素を**従属変数または目的変数**といいます。関数を用いる時は、y の変数は $\boldsymbol{f(x)}$ と表し、「x の関数」と読みます。

すでに特定の 2 種類の関数、すなわち 一次関数 $f(x) = ax + b$ と、二次関数 $f(x) = ax^2 + c$ を学習しています。どちらの関数も$\mathbb{R}$の関数$\mathbb{R}$となっているので、x の値も、y の値も実数です。関数は他の文字を使って表すことも可能です。例えば、$g(x)$ や $h(x)$ などと表記できます。

$x = m$ が成り立つ場合、$f(m)$ の値を求めるには、x に m をあてはめて**関数 *f* の方程式**を解きます。

例

以下の式にある関数 $f(x)$ の値を求めなさい。

a) $f(x) = -2x + 7;\ x = -5$　　b) $f(x) = 3x^2 + 2;\ x = 2$

$f(x)$ は、f かける x を意味しているのではなく、xの関数であることを表しています。

それぞれ関数の方程式に、x の値を代入します。1 つ目の問題では、$x = -5$ である関数を、$f(-5)$ と表し、二つ目の問題では、$x = 2$ である関数を $f(2)$ と表します。

a)
$$\begin{aligned} f(-5) &= -2(-5) + 7 \\ &= 10 + 7 \\ &= 17 \end{aligned}$$

よって、$f(-5) = 17$

b)
$$\begin{aligned} f(2) &= 3(2)^2 + 2 \\ &= 3(4) + 2 \\ &= 14 \end{aligned}$$

よって、$f(2) = 14$

問題

1. 以下の問題で、x がそれぞれ与えられた値を持つ場合の関数 $f(x)$ を求めなさい。

a) $f(x) = x + 4;\ x = 0$　　b) $f(x) = 4x - 6;\ x = 1$　　c) $f(x) = -\frac{x}{3} + 1;\ x = 6$

d) $f(x) = -5x^2;\ x = 3$　　e) $f(x) = x^2 + 4;\ x = -1$　　f) $f(x) = -\frac{x^2}{2} - 2;\ x = 2$

2. 一次関数 $f(x) = 2x - 3$ である場合に、$f(x) = 5$ となる x の値を求めなさい。

3. 関数 $f(x) = 4x^2 + 5$である場合に、$f(x) = 11$ となる x の値を求めなさい。

達成の目安

1.1 関数の方程式と x の値を使って関数 $f(x)$ の値を求めなさい。

学習の流れ

中学3年次に扱った関数は、$y = ax + b$ または $y = ax^2 + c$ と表しました。この授業では、関数を $f(x)$ と表すことを覚えます。また、関数が 2 つ以上出てくる場合には $g(x)$ や $h(x)$ などを用いる（一般的な）関数の表し方と、独立関数、従属関数についても学習します。

ねらい

この授業では、生徒たちが関数表記に慣れ、与えられた値を用いて関数を表すことができるようになることを目指します。問題で出てくる 一次関数や $f(x) = ax^2 + c$ の式で表される二次関数については、それぞれ 8 学年次、9 学年次に学習しています。

つまずきやすい点

特定の値をあてはめて関数を表す際に生徒たちが正しく書けているかを確認します。$f(x)$ が f に x をかけるの意味ではない点に注意を促します。

問題の解き方：

1a) $x = 0$ である関数は $f(0)$ と表します。方程式に $x = 0$ を代入します。

$$f(0) = 0 + 4$$
$$= 4$$

したがって、$f(0) = 4$

1b) $x = 1$ である関数は $f(1)$ と表します。関数の方程式に $x = 1$ を代入します。

$$f(1) = 4(1) - 6$$
$$= -2$$

したがって、$f(1) = -2$

1c) 関数の方程式に $x = 6$ を代入し、

$$f(6) = -\frac{1}{3}(6) + 1$$
$$= -2 + 1$$
$$= -1$$

したがって、$f(6) = -1$

1d) 関数の方程式に $x = 3$ を代入し、

$$f(3) = -5(3)^2$$
$$= -5(9)$$
$$= -45$$

したがって、$f(3) = -45$

1e) 関数の方程式に $x = -1$ を代入し、

$$f(-1) = (-1)^2 + 4$$
$$= 1 + 4$$
$$= 5$$

したがって、$f(-1) = 5$

1f) 関数の方程式に $x = 2$ を代入し、

$$f(2) = -\frac{1}{2}(2)^2 - 2$$
$$= -\frac{1}{2}(4) - 2$$
$$= -4$$

したがって、$f(2) = -4$

2. $f(x) = 2x - 3$ なので、$2x - 3 = 5$ 。この 一次関数の式は未知数を使って解きます。

$$2x - 3 = 5$$
$$2x = 8$$
$$x = 4$$

よって、$f(x) = 5$ になるためには x の値は 4 にならなくてはなりません。

3. $f(x) = 4x^2 + 5$ なので、$4x^2 + 5 = 11$。この二次関数式を解きます。

$$4x^2 + 5 = 11$$
$$4x^2 = 6$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

よって、x の値は、$\sqrt{\frac{3}{2}}$ もしくは $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ にならなくてはなりません。

レッスン 1

1.2 関数グラフ

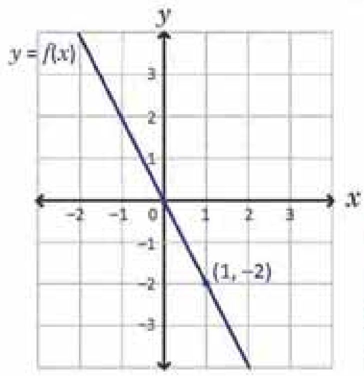
導入問題

$f(x) = -2x$ と $g(x) = 2x^2$ の式を例にとって、

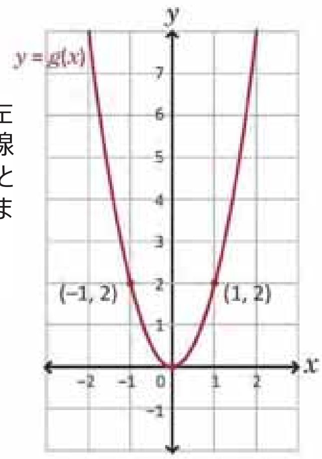
1. それぞれのグラフを作成しなさい。　　f のグラフは直線で、g のグラフは放物線です。
2. それぞれのグラフに垂線を描きなさい。垂線は f と g それぞれのグラフと何回交差しますか？
3. もし垂線を描き続けたら、それらの垂線は f と g それぞれのグラフと何回交差することになりますか？

解法

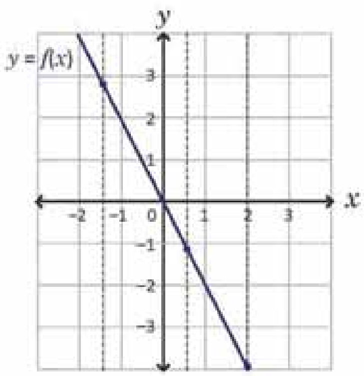
1. 関数 f は、一次関数で、そのグラフは原点を通る直線 です。そのことから、もし x が 1 ユニット増えると（つまり $x = 1$ になると） $f(x)$ は 2 減少します。$f(x) = -2x$ のグラフは、右図になります。

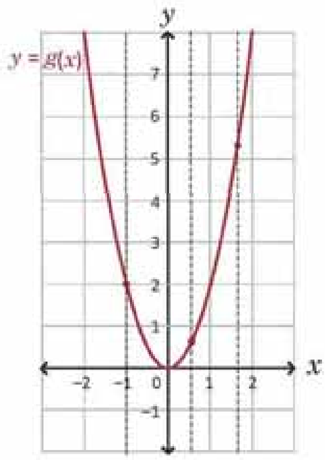


関数グラフ g は、頂点が原点にある放物線です。グラフ化するには、頂点の左と右にくる点を求めます。もし $x = -1$ ならば、$g(-1) = 2(-1)^2 = 2$ となり、放物線 g に属する点 $(-1, 2)$ が求められます。同様に、$x = 1$ ならば、$g(1) = 2(1)^2 = 2$ となり、放物線上の点 $(1, 2)$ が求められます。$g(x) = 2x^2$ のグラフは右図になります。



2. それぞれのグラフに 3 つの垂線を引いています。それぞれの垂線は、それぞれグラフ f もしくはグラフ g と 1 点で交わっています。





3. 垂線を何本引こうと、引いた垂線は全てそれぞれ関数 f のグラフや関数 g のグラフと （どちらのグラフであっても）1 点で交わります。

まとめ

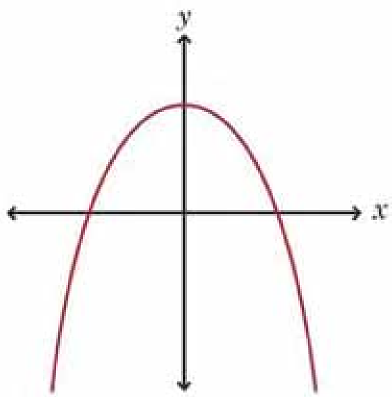
座標表面に描かれた一本の線の x の値が I の域にあって、I の域に描かれた垂線のいずれとも 1 点でのみと交わる場合、その線は関数グラフであると言えます。このように関数グラフを認識する方法を**垂線の証明**といいます。

これは関数そのものの定義により起こります。x の要素それぞれに対応する y の要素は唯一です。それぞれのグラフで描かれた垂線は x の特定の値を表しています。もしこの垂線が関数グラフと唯一の点で交わる場合は、その xの値に対し、関数 $f(x)$ または $g(x)$ の値が唯一であることを意味します。

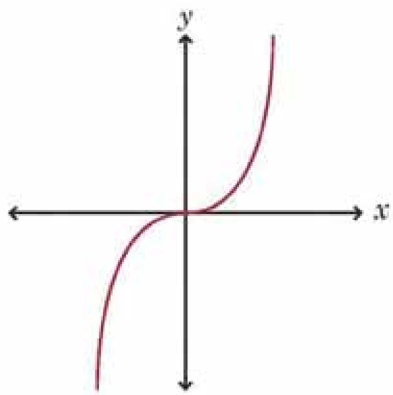
問題

それぞれの特定の垂線の証明を使って、関数グラフを表すと、こうなります。（関数の方程式を求める必要はありません）

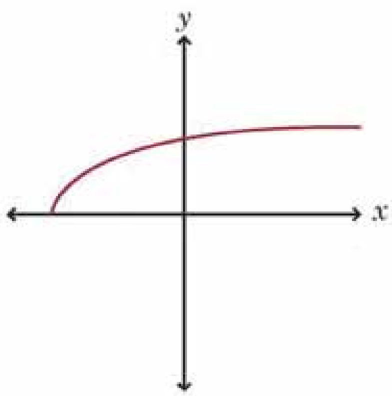
a)



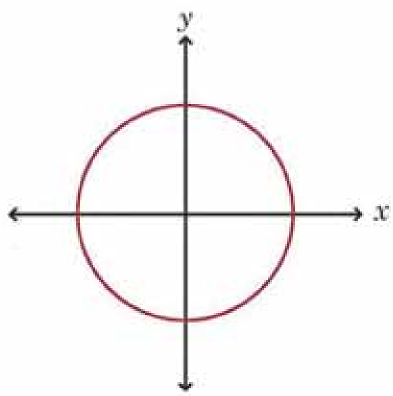
b)



c)



d)



達成の目安

1.2 垂直条件を用いて関数グラフを特定しなさい。

学習の教材

導入問題の関数グラフを作成するために、厚紙の上に描いた座標平面を黒板にかけたもの（木の板に厚紙をかけて、プラスチックか幅広の透明なテープをかぶせて、油井マジックで方眼を描きこんで用意すれば、グラフを学習する授業で使えるので役に立ちます）、と、木製の 1 メートルの定規と直角三角形の定規を用意します。

学習の流れ

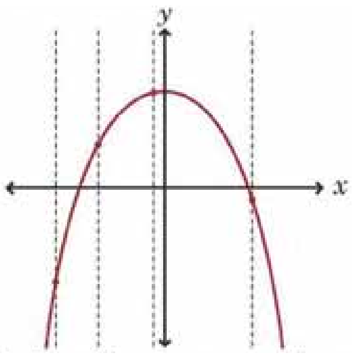
今回の授業では、座標平面に描かれた直線が関数グラフに対応していることを分析するため「垂直条件の証明」と定義された方法を明らかにします。関数の定義から始め、どうしてこの方法が関数グラフを認識するために有効であるかを明らかにします。関数グラフを作成するために座標平面のコピーを配っても構いません。

ねらい

前学年までは（直線グラフになる）一次関数または $f(x) = ax^2 + c$ で表される（放物線グラフになる）二次関数グラフだけを学習してきました。問題ブロックには、これまでに学習しているグラフのみでなく、三次関数、有理数、円のグラフもあることに注意します。生徒たちに関数の方程式を理解させようというのではなく、関数グラフを理解させることを目的としています。

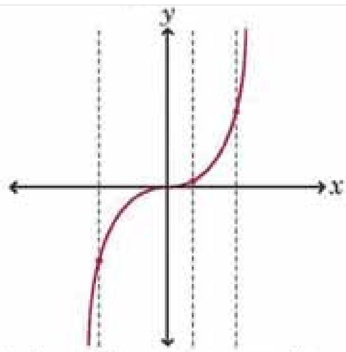
問題の解き方：

a) 複数の垂線を引き、それぞれの垂線が線と 1 点のみで交わっていることを確認します。



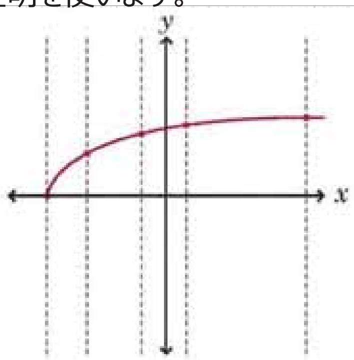
よって、このグラフは関数グラフです。

b) 複数の垂線を引き、それぞれの垂線が線と 1 点のみで交わっていることを確認します。



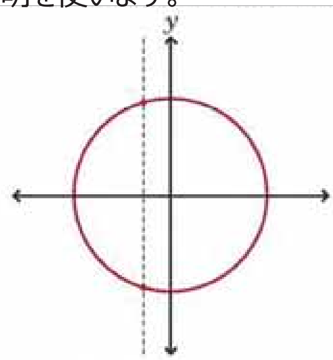
よって、このグラフは関数グラフです。

c) 垂線の証明を使います。



よって、このグラフは関数グラフです。

d) 垂線の証明を使います。



垂線は線と2か所で交わります。よって、これは関数グラフではありません。

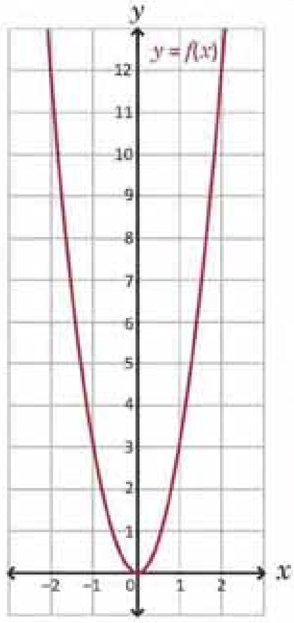
1.3 関数の定義域と値域*

導入問題

方程式 $f(x) = 3x^2$ とそのその関数グラフを使って以下の問いに答えなさい。
1. なぜ x の値は $f(x)$ によって決まるのですか？
2. $f(x)$ にあてはまる可能性がある値を全てあげなさい

解法

この関数グラフは右図で示すような頂点が (0,0) にある下に向かって開いた放物線グラフです。



1. 関数 $f(x) = 3x^2$ の方程式と、あらゆる実数の値をもつことができ、係数が常に $f(x)$ である独立変数 x よって、x の値がどんな実数であろうと $f(x)$ は一定であることが分かります。

2. この関数グラフでは、従属変数 $y = f(x)$ が最小の値となるのは、$x = 0$ のときです。x が増加または減少するにつれ、$f(x)$ の値 は増加します。（これは放物線が上に向かって開いている場合にあてはまります）よって、$f(x)$ にあてはまる値は 0 以上の実数、つまり、[0, ∞[の間にある数値となります。

定義

関数 f の**定義域**は D_f と表し、それは $f(x)$ 定数である時に x にあてはまる全ての数値の集合です。関数 f の値域は R_f と表し、関数 $f(x)$ の値になり得る全ての値の集合です。

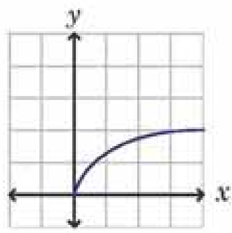
一次関数の場合、定義域も値域も実数の集合であるので、$\mathbb{R}$ と表します。関数 $f(x) = ax^2$ の定義域は $\mathbb{R}$ で、値域は a の値によって変動します。
1. $a > 0$ であれば、$R_f = [0, \infty[$
2. $a < 0$ であれば、$R_f =]-\infty, 0]$

問題

1. 以下の関数それぞれの定義域と値域を求めなさい。

a) $f(x) = \frac{1}{3}x + 4$　　b) $f(x) = -10x + 3$　　c) $f(x) = -x - 5$
d) $f(x) = x^2$　　e) $f(x) = 2x^2$　　f) $f(x) = -x^2$
g) $f(x) = -3x^2$　　h) $f(x) = 3x^2$　　i) $f(x) = -2x^2$

2. ある関数グラフが右に示されています。このグラフだけを用いて、この関数の定義域と値域を求めなさい。



達成の目安

1.3 一次関数 $f(x) = ax^2$ の定義域と値域を関数の方程式を使って求めなさい。

学習の教材

黒板にかけて導入問題の関数グラフを描く用の座標平面を描いた厚紙と、同じく黒板にかける問題ブロックの問 2 のグラフを描きこんだ座標平面

学習の流れ

三学期には、一次関数の方程式とグラフ、また 二次関数 $f(x) = ax^2 + c$ の方程式とグラフだけを学習しました。今回の授業では一般的な方法で、関数の定義域や値域にあてはまる数値を求めます。またそれぞれの集合をD_fと R_fの表記を使って表します。

ねらい

問題ブロックの問 1 では、生徒たちは明らかになっている定義を用いてそれぞれの問題がどの関数（一次または二次）であるかを識別して、定義域と値域を求める必要がありますが、関数グラフを描く必要はありません。問題が難しすぎる場合は、教師が各問がどんな関数であるかヒントを与えます。

問題の解き方：

1a) 関数 $f(x) = \frac{1}{3}x + 4$ は 一次関数です。
（$f(x) = ax + b$、$a = \frac{1}{3}$、$b = 4$ です）よって、$D_f = \mathbb{R}$ 、$R_f = \mathbb{R}$です。

1b) 関数 $f(x) = -10x + 3$ は 一次関数です。
（$f(x) = ax + b$、$a = -10$、$b = 3$ です）よって、$D_f = \mathbb{R}$ 、$R_f = \mathbb{R}$です。

1c) これまでの問題と同じように、$f(x) = -x - 5$ は一次関数であるので、$D_f = \mathbb{R}$ 、$R_f = \mathbb{R}$です。

1d) 関数 $f(x) = x^2$ は $f(x) = ax^2$、$a = 1$ です。したがって、$Df = \mathbb{R}$ で、$a > 0$ なので、$R_f = [0, \infty[$ です。

1e) $f(x) = 2x^2$ も、$f(x) = ax^2$ の式に直すことができ、$a = 2$ であるので、$D_f = \mathbb{R}$、そして、$a > 0$ であるので、$R_f = [0, \infty[$ です。

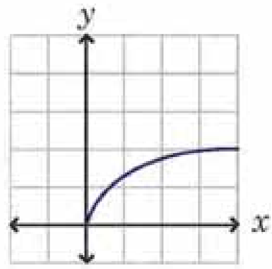
1f) 関数 $f(x) = -x^2$ で、$f(x) = ax^2$、$a = -1$ です。なので、$D_f = \mathbb{R}$ 、$a < 0$ なので、$R_f =]-\infty, 0]$ です。

1g) 問 1f) の類似問題で、関数 $f(x) = -3x^2$、$a = -3$ です。なので、$D_f = \mathbb{R}$ で $R_f =]-\infty, 0]$ です。

1h) 問 1e) の類似問題で、関数 $f(x) = 3x^2$ $a = 3$ です。よって、$D_f = \mathbb{R}$ 、$R_f = [0, \infty[$ です。

1i) 問 1f) の類似問題で、関数 $f(x) = -2x^2$、$a = -2$、よって $D_f = \mathbb{R}$ 、$R_f =]-\infty, 0]$ です。

2. グラフになる関数は $f(x)$ で表されます。観察すると、原点から「始まって」いるので、点は (0, 0) です。x の値が増えるにつれ y の値も増えています。よって、$D_f = [0, \infty[$ 、$R_f = [0, \infty[$ です。

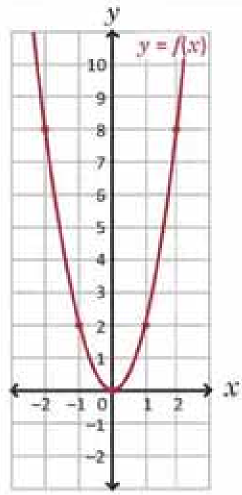


レッスン 2 二次関数

2.1 縦方向の平行移動

導入問題

関数 $f(x) = 2x^2$ のグラフを用いて以下を行いましょう。

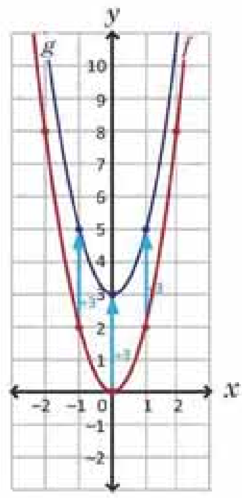


1. 関数 $g(x) = 2x^2 + 3$ と $h(x) = 2x^2 - 2$ をグラフで表しましょう。それぞれの関数の定義域と値域はどうなっていますか?

$g(x)$ のグラフは、f のグラフを上に単位 1 で +3 平行移動したものに相当します。h の平行移動はどの方向に向かってになるのでしょうか?

2. g と h のグラフを求める際に、f のグラフに何が起こるのか説明しましょう。

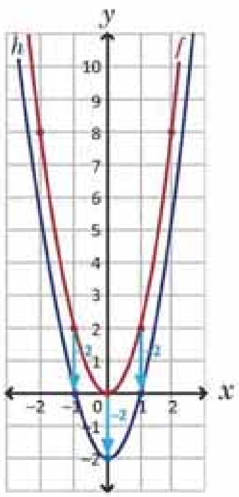
解法



1. 関数 $g(x) = 2x^2 + 3$ をグラフで表すためには、関数 $f(x) = 2x^2$ のグラフを縦方向で上に +3 平行移動させます。(参照:右の図)。

つまり、関数 f のグラフの頂点は (0, 0) であるので、関数 g のものは (0, 3) となります。点 (–1, 2) と (1, 2) は関数 f の放物線上に存在することから、点 (–1, 5) と (1, 5) は関数 g のグラフ上に存在することになります。

関数のグラフから、以下が導きだされます。$D_g = \mathbb{R}$ かつ $R_g = [3, \infty[$



関数 $h(x) = 2x^2 - 2$ のグラフを表す際には、$f(x) = 2x^2$ のグラフを単位 1 で -2 下に平行移動させます。

つまり、関数 f のグラフの頂点は (0, 0) であるので、関数 h のものは (0, -2) となります。点 (–1, 2) と (1, 2) が関数 f の放物線上に存在することから、点 (–1, 0) と (1, 0) は関数 h のグラフ上に存在することになります。

関数のグラフから、以下が導きだされます。$D_h = \mathbb{R}$ かつ $R_h = [-2, \infty[$

2. $f(x) = 2x^2$ を用いることにより：

a) 関数 $g(x) = 2x^2 + 3$ のグラフは、
$f(x) = 2x^2$ のグラフを縦方向で上に単位 1 で +3 平行移動させることにより求められます。

b) 関数 $h(x) = 2x^2 - 2$ のグラフは、
$f(x) = 2x^2$ のグラフを縦方向で下に単位 1 で -2 平行移動させることにより求められます。

定義

関数 $f(x)$ と、0 と異なる実数 k が与えられている場合、関数 $g(x) = f(x) + k$ のグラフは、**f のグラフを縦方向に単位 1 で** k 平行移動させたものです。もし $k > 0$ であれば、グラフは上に平行移動し、もし $k < 0$ であれば、グラフは下に平行移動します。

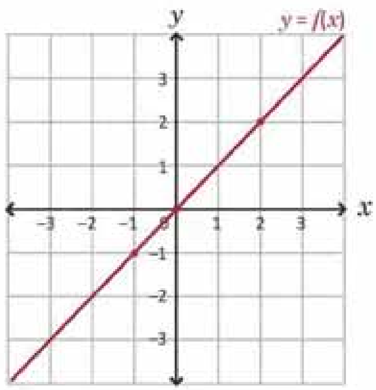
$f(x) = ax^2$ の場合、$g(x) = ax^2 + k$ のグラフは頂点が $(0, k)$ にある放物線で：

1. もし $a > 0$ であれば、$R_f = [k,\infty[$。
2. もし $a < 0$ であれば、$R_f =]-\infty, k]$。

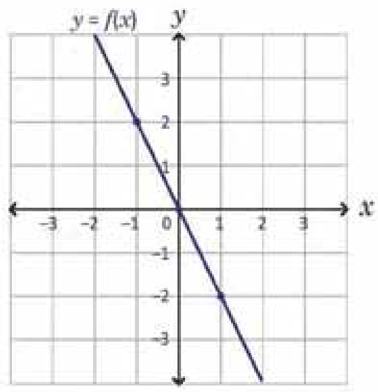
問題

それぞれの場合について、関数 $f(x)$ のグラフを用いて、関数 $g(x)$ のグラフを表して、その定義域と値域を求めましょう。

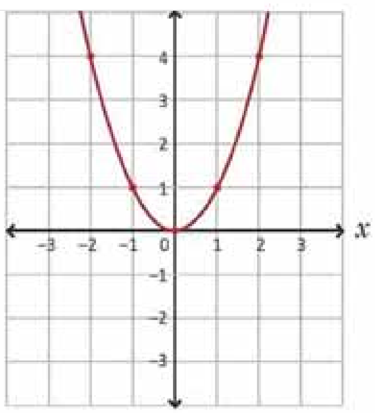
a) $f(x) = x$ と $g(x) = x + 1$



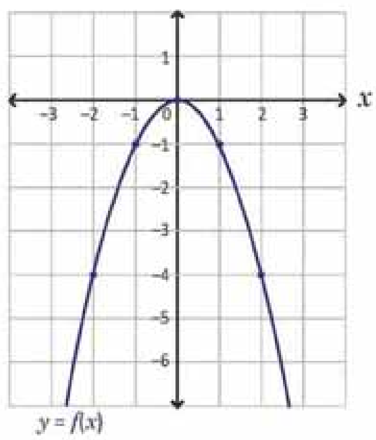
b) $f(x) = -2x$ と $g(x) = -2x - 3$



c) $f(x) = x^2$ と $g(x) = x^2 + 2$



d) $f(x) = -x^2$ と $g(x) = -x^2 - 3$



ユニット 4

達成の目安

2.1 縦方向の平行移動を利用して、関数 $g(x) = ax + b$ または $f(x) = ax^2 + c$ のグラフを描けることと、定義域と値域を求めることができること。

学習の教材

ボンド紙に、座標平面上に導入問題の関数を描いたもので、これは黒板に貼り付けます（問題群を解くのに使用することもできます）。
木製の定規または三角定規。

学習の流れ

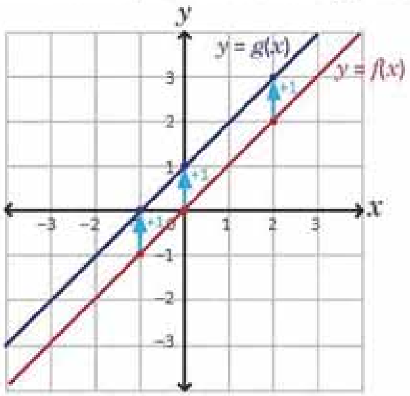
縦方向の平行移動は、中学３年で触れる内容である線形関数と $f(x) = ax^2 + c$ 型二次関数のところで学習しました。この授業では、この平行移動について復習し、さらに関数の定義域と値域の確定のことが追加されます。

つまずきやすい点

もし学生が、縦方向の平行移動をどう行うのか想い出せない場合には、「定義」から始め、事例として導入問題の説明を行うことができます。

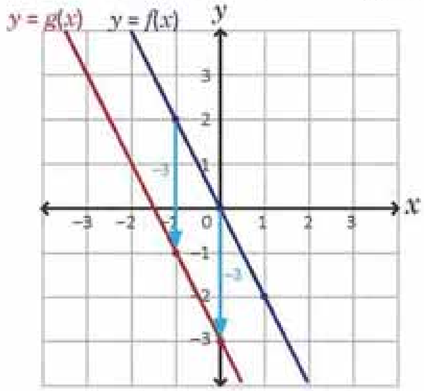
問題の解き方：

a) f のグラフを、縦方向に単位 1 で +1上に平行移動して g のグラフを求めます。



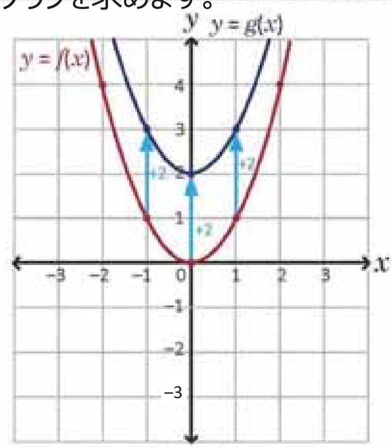
よって、$D_g = \mathbb{R}$ かつ $R_g = \mathbb{R}$ 。

b) f のグラフを、縦方向に単位 1 で -3下に平行移動して g のグラフを求めます。



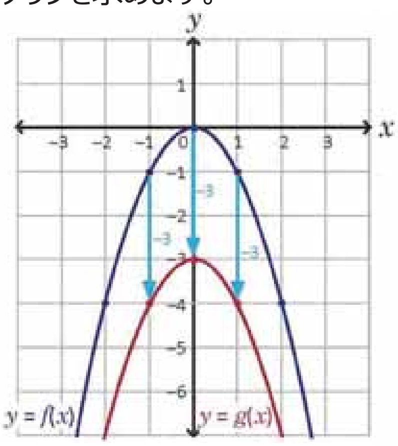
よって、$D_g = \mathbb{R}$ かつ $R_g = \mathbb{R}$ 。

c) f のグラフを、縦方向に単位 1 で +2 上に平行移動して g のグラフを求めます。



よって、$D_g = \mathbb{R}$ かつ $R_g = [2, \infty[$ 。

d) f のグラフを、縦方向に単位 1 で -3 下に平行移動して g のグラフを求めます。



よって、$D_g = \mathbb{R}$ かつ $R_g =]-\infty, -3]$ 。

レッスン 2

2.2 $f(x) = a(x-h)^2$, $h > 0$ 型の関数

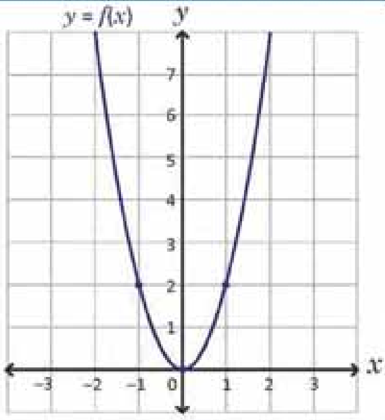
導入問題

関数 $f(x) = 2x^2$ のグラフを用いて以下を行いましょう。

1. 関数 $g(x) = 2(x-1)^2$ の表とグラフを完成させましょう。

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	18	8	2	0	2	8	18
$g(x)$							

g のグラフは放物線になります。



2. g のグラフの頂点の座標はどれになりますか? g の定義域と値域はどのようになりますか?
3. g のグラフを得るには、f のグラフをどのように平行移動させるべきですか?

解法

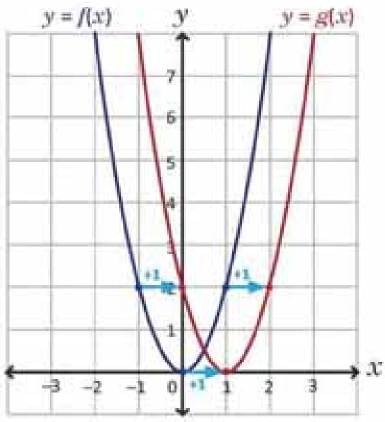
1. 表は次のようになります。

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	18	8	2	0	2	8	18
$g(x)$	32	18	8	2	0	2	8

次のことが分かります。ある x の値が与えられると、対応する $g(x)$ の値は、$f(x-1)$ の値に等しくなります。例えば、$x = 0$ のときは：

$$g(0) = f(0-1) \\ = f(-1) \\ = 2$$

g のグラフは右に示してあります。



2. g のグラフの頂点の座標は (1, 0) で、$D_g = \mathbb{R}$ かつ $R_g = [0, \infty[$ 。

3. $f(x) = 2x^2$ のグラフは、横方向で右に単位 1 で +1 平行移動し、$g(x) = 2(x-1)^2$ のグラフが求まりました。

まとめ

$f(x) = ax^2$ として、a は任意の 0 でない実数で、かつ $h > 0$ のとき、関数のグラフは：

$$g(x) = f(x-h) = a(x-h)^2$$

f のグラフを、**横方向で右に単位 1 で h 平行移動させたものです。**放物線の頂点は $(h, 0)$ で、$D_g = \mathbb{R}$、かつ

1. $a > 0$ であれば、$Rg = [0, \infty[$
2. $a < 0$ であれば、$Rg =]-\infty, 0]$

問題

$f(x)$ のグラフを用いて、関数 $g(x)$ のグラフを、それぞれの場合について描きましょう。関数 g の頂点の座標と、定義域と値域を求めましょう。

a) $f(x) = x^2$; $g(x) = (x-2)^2$
b) $f(x) = -x^2$; $g(x) = -(x-1)^2$
c) $f(x) = 2x^2$; $g(x) = 2(x-2)^2$
d) $f(x) = -2x^2$; $g(x) = -2(x-3)^2$

達成の目安

2.2 関数 $g(x) = a(x - h)^2$ で、$h > 0$ のときのもののグラフを描き、定義域と値域を求めることを、$f(x) = ax^2$ の横方向の平行移動を用いて行うことができること。

学習の教材

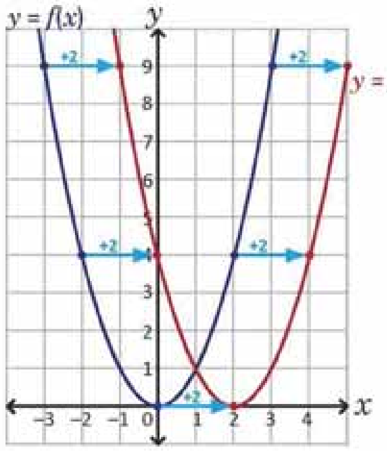
ボンド紙に、座標平面を描いたもので、これは黒板に貼り付けて導入問題の項 1 と項 3 を解いていきます（問題群を解くのに使用することもできます）。

学習の流れ

縦方向に平行移動するときと同様に、関数 $f(x) = ax^2$ のグラフと、値域の対応表を用い、関数 $g(x) = f(x - h) = a(x - h)^2$ のグラフを描いて、f の横方向の移動を認識します。この場合には、h の値は正になります。

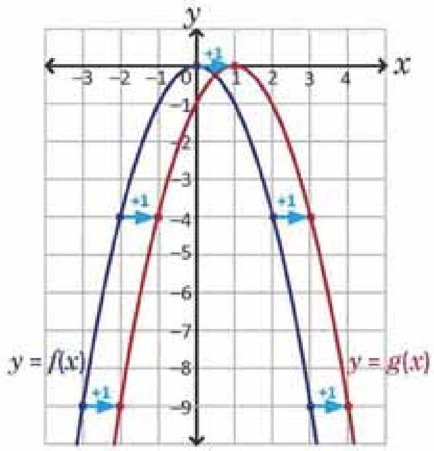
問題の解き方：

a) $f(x) = x^2$ のグラフを横方向で単位 1 で +2 右に平行移動し、$g(x) = (x - 2)^2$ のグラフを描きます。



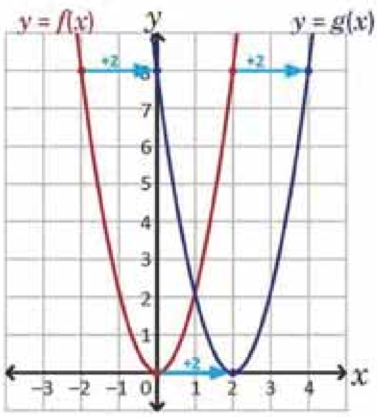
頂点の座標は (2, 0) で、$D_g = \mathbb{R}$ かつ $R_g = [0, \infty[$ 。

b) $f(x) = -x^2$ のグラフを横方向で単位 1 で +1 右に平行移動し、$g(x) = (x - 1)^2$ のグラフを描きます。



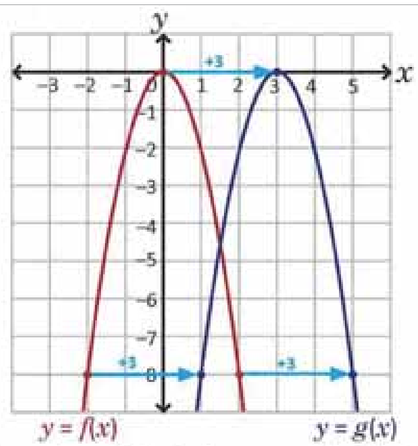
頂点の座標は (1, 0) で、$D_g = \mathbb{R}$ かつ $R_g =]-\infty, 0]$ 。

c) $f(x) = 2x^2$ のグラフを横方向で単位 1 で +2 右に平行移動し、$g(x) = 2(x - 2)^2$ のグラフを描きます。



頂点の座標は (2, 0) で、$D_g = \mathbb{R}$ かつ $R_g = [0, \infty[$ 。

d) $f(x) = -2x^2$ のグラフを横方向で単位 1 で +3 右に平行移動し、$g(x) = -2(x - 3)^2$ のグラフを描きます。



頂点の座標は (3, 0) で、$D_g = \mathbb{R}$ かつ $R_g =]-\infty, 0]$ 。

レッスン 2

2.3 $f(x) = a(x - h)^2$, $h < 0$ 型の関数

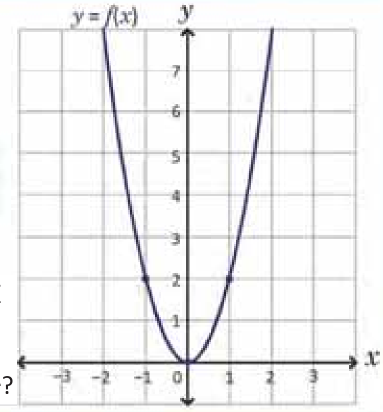
導入問題

関数 $f(x) = 2x^2$ のグラフを用いて以下を行いましょう。

1. 関数 $g(x) = 2(x + 1)^2$ の表とグラフを完成させましょう。

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	18	8	2	0	2	8	18
$g(x)$							

g のグラフは放物線になります。



2. g のグラフの頂点の座標はどれになりますか? g の定義域と値域はどのようになりますか?

3. g のグラフを得るには、f のグラフをどのように平行平行移動させるべきですか?

解法

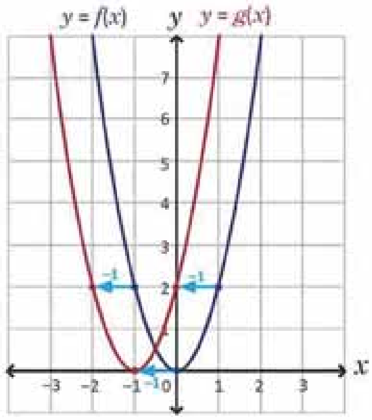
1. 表は次のようになります。

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	18	8	2	0	2	8	18
$g(x)$	8	2	0	2	8	18	32

次のことが分かります。ある x の値が与えられると、対応する $g(x)$ の値は、$f(x + 1)$ の値に等しくなります。例えば、$x = 0$ のときは：

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0 + 1) \\ &= f(1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

g のグラフは右に示してあります。



2. g のグラフの頂点の座標は (−1, 0) で、$D_g = \mathbb{R}$ かつ $R_g = [0, +\infty[$ 。

3. $f(x) = 2x^2$ のグラフは、横方向で左に単位 1 で −1 平行移動して、$g(x) = 2(x + 1)^2$ のグラフが求まりました。

関数 g の方程式は、$g(x) = 2[x - (-1)]^2$ のように書き表すこともできます。

まとめ

$f(x) = ax^2$ として、a は任意の 0 でない実数で、かつ $h < 0$ のとき、関数のグラフは：

$$g(x) = f(x - h) = a(x - h)^2$$

f のグラフを、横方向で左に単位 1 で h 平行移動させたものです。放物線の頂点は $(h,0)$ で、$D_g = \mathbb{R}$、かつ：

1. $a > 0$ であれば、$R_g = [0, \infty[$
2. $a < 0$ であれば、$R_g =]-\infty, 0]$

問題

$f(x)$ のグラフを用いて、関数 $g(x)$ のグラフを、それぞれの場合について描きましょう。関数 g の頂点の座標と、定義域と値域を求めましょう。

a) $f(x) = x^2$; $g(x) = (x + 2)^2$
c) $f(x) = 2x^2$; $g(x) = 2(x + 2)^2$

達成の目安

2.3 関数 $g(x) = a(x-h)^2$ で、$h < 0$ のときのもののグラフを描き、定義域と値域を求めることを、$f(x) = ax^2$ の横方向の平行移動を用いて行うことができること。

学習の教材

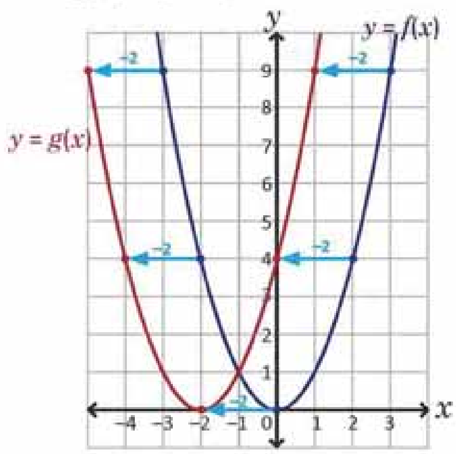
ボンド紙に、座標平面を描いたもので、これは黒板に貼り付けて導入問題の項 1 と項 3 を解いていきます（問題群を解くのに使用することもできます）。

学習の流れ

この授業では、関数 $f(x) = ax^2$ のグラフと、値域の対応表を用い、関数 $g(x) = f(x-h) = a(x-h)^2$ のグラフを描いて、f の横方向の平行移動を認識します。この場合には、h の値は負になります。

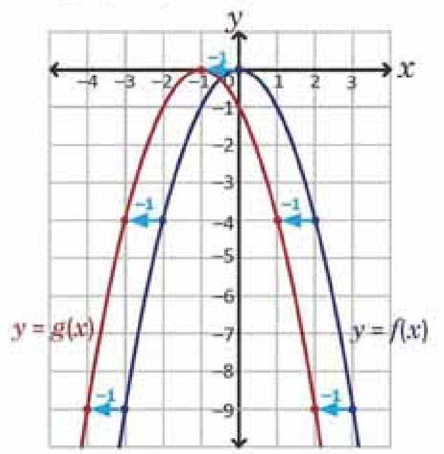
問題の解き方：

a) $f(x) = x^2$ のグラフを横方向で単位 1 で –2 左に平行移動し、$g(x) = (x+2)^2$ のグラフを描きます。



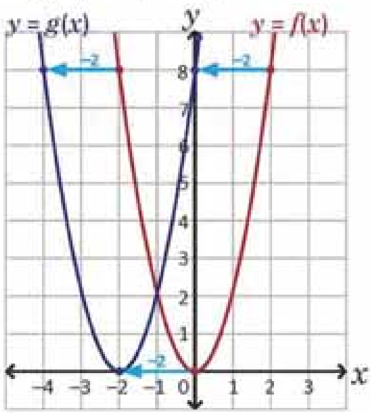
頂点の座標は (–2, 0) で、$D_g = \mathbb{R}$ かつ $R_g = [0, \infty[$ 。

b) $f(x) = -x^2$ のグラフを横方向で単位 1 で –2 左に平行移動し、$g(x) = -(x+1)^2$ のグラフを描きます。



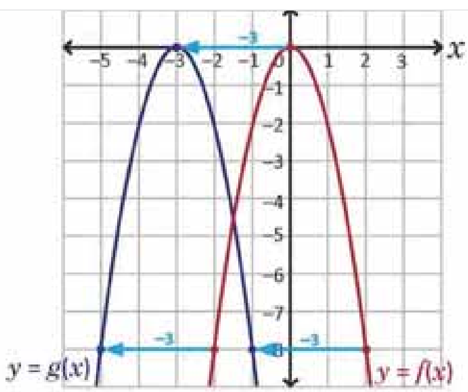
頂点の座標は (–1, 0) で、$D_g = \mathbb{R}$ かつ $R_g =]-\infty, 0]$ 。

c) $f(x) = 2x^2$ のグラフを横方向で単位 1 で –2 左に平行移動し、$g(x) = 2(x+2)^2$ のグラフを描きます。



頂点の座標は (–2, 0) で、$D_g = \mathbb{R}$ かつ $R_g = [0, \infty[$ 。

d) $f(x) = -2x^2$ のグラフを横方向で単位 1 で –3 左に平行移動し、$g(x) = -2(x+3)^2$ のグラフを描きます。

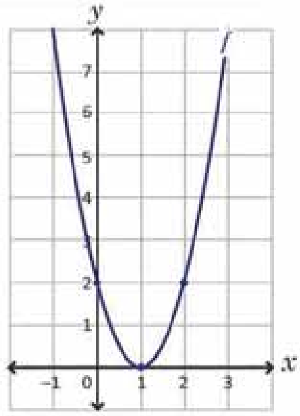


頂点の座標は (–3, 0) で、$D_g = \mathbb{R}$ かつ $R_g =]-\infty, 0]$ 。

2.4 $f(x) = a(x - h)^2 + k$ 型の関数、第 1 部

導入問題

関数 $f(x) = 2(x - 1)^2$ のグラフを用いて以下を行いましょう。

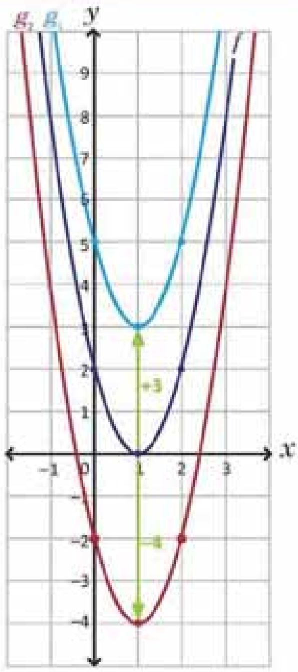


1. 関数 $g_1(x) = 2(x - 1)^2 + 3$ と $g_2(x) = 2(x - 1)^2 - 4$ をグラフで表しましょう。それぞれのグラフを得るには、f のグラフをどのように平行移動させるべきか説明しましょう。

> $g(x) = f(x) + k$ のグラフは、f のグラフを縦方向で単位 1 で k だけ平行移動させたもので、k が正のときは上方向で、k が負のときは下方向への平行移動になります。

2. それぞれの場合について、頂点の座標と、定義域と値域を求めましょう。

解法



1. 双方の関数とも $f(x) + k$ 型をしていますが、これは縦方向に単位 1 で k だけ平行移動したものであることを意味します。

   $g_1(x) = 2(x - 1)^2 + 3$, $k = 3$ の場合には、f のグラフは、これによって、縦方向で単位 1 で上に +3 平行移動します。右の図の空色の放物線は、g_1 のグラフに該当します。

   $g_2(x) = 2(x - 1)^2 - 4$, $k = -4$ の場合には、f のグラフは、これによって縦方向で単位 1 で下に −4 平行移動します。右の図の赤色の放物線は、g_2 のグラフに該当します。

2. 関数 g_1 のグラフの頂点の座標は (1, 3) で、さらに $D_{g1} = \mathbb{R}$ でかつ $R_{g1} = [3, \infty[$ です。

   一方、関数 g_2 のグラフの頂点の座標は (1, −4) で、さらに $D_{g2} = \mathbb{R}$ でかつ $R_{g2} = [-4, \infty[$ です。

まとめ

$f(x) = a(x - h)^2$ として、a と h は任意の実数で、かつ a が 0 と異なるとき、関数のグラフは：

$$g(x) = a(x - h)^2 + k$$

k が実数であるとき、これは f のグラフを縦方向に単位 1 で **k 平行移動させたものになります。** もし $k > 0$ であれば、平行移動は上方向で、もし $k < 0$ であれば、平行移動は下方向になります。**g の放物線の頂点は (h, k)** で、$D_g = \mathbb{R}$、かつ：

1. もし $a > 0$ であれば、$R_g = [k, \infty[$ 。
2. もし $a < 0$ であれば、$R_g =]-\infty, k]$ 。

問題

$f(x)$ のグラフを用いて、関数 $g(x)$ のグラフを、それぞれの場合について描きましょう。関数 g の頂点の座標と、定義域と値域を求めましょう。

a) $f(x) = (x - 2)^2$; $g(x) = (x - 2)^2 + 3$
b) $f(x) = -(x - 1)^2$; $g(x) = -(x - 1)^2 + 2$
c) $f(x) = 2(x + 2)^2$; $g(x) = 2(x + 2)^2 - 1$
d) $f(x) = -2(x + 3)^2$; $g(x) = -2(x + 3)^2 - 4$

達成の目安

2.4 関数 $g(x) = a(x-h)^2 + k$ のグラフを描き、定義域と値域を求めることを、$f(x) = a(x-h)^2$ の縦方向の平行移動を用いて行うことができること。

学習の教材

ボンド紙に、座標平面を描いたもので、これを黒板に貼り付けて導入問題の項 1 を解いていきます。（問題群を解くのに使用することもできます）。

学習の流れ

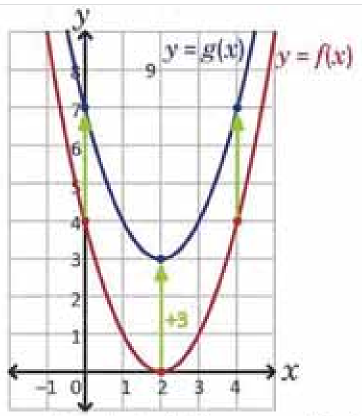
この授業では、$f(x) = a(x-h)^2$ 型をした二次関数のグラフから始め、授業 2.1で触れた縦方向の平行移動を利用して $g(x) = a(x-h)^2 + k$ のグラフを描き、その要素である頂点、定義域、値域を求めます。

ねらい

問題群の各項にある関数 f のグラフは、授業 2.2 と 2.3 で描かれたものですので、学生はこれらを直接取り込むことができます。この授業では、縦方向の平行移動と横方向の平行移動を同時に行うことができるということを認識する助けとなります。

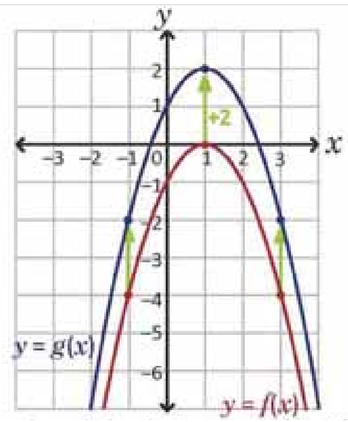
問題の解き方：

a) $f(x) = (x-2)^2$ のグラフを、縦方向に単位 1 で +3 上に平行移動して $g(x) = (x-2)^2 + 3$ のグラフを求めます。



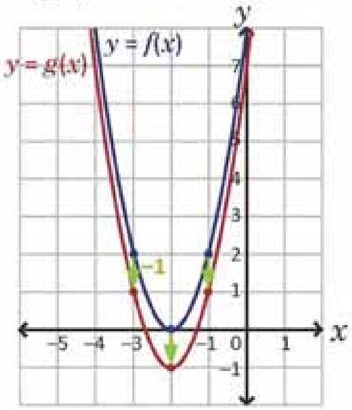
頂点の座標は (2, 3) で、$D_g = \mathbb{R}$ かつ $R_g = [3, \infty[$ 。

b) $f(x) = -(x-1)^2$ のグラフを、縦方向に単位 1 で +2 上に平行移動して $g(x) = -(x-1)^2 + 2$ のグラフを求めます。



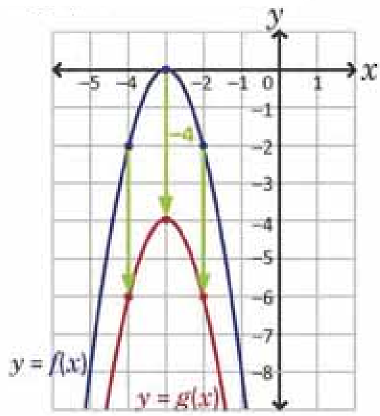
頂点の座標は (1, 2) で、$D_g = \mathbb{R}$ かつ $R_g =]-\infty, 2]$ 。

c) g のグラフは以下のようになります。



頂点の座標は (−2, −1) で、$D_g = \mathbb{R}$ かつ $R_g = [-1, \infty[$ 。

d) g のグラフは以下のようになります。



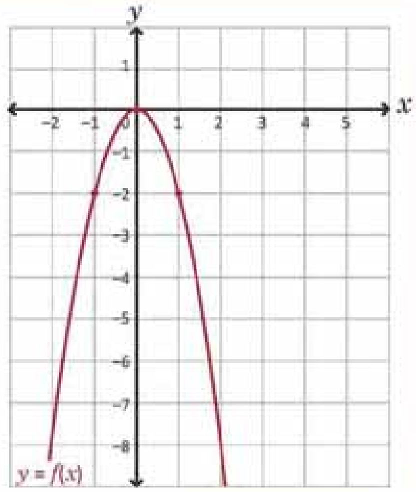
頂点の座標は (−3, −4) で、$D_g = \mathbb{R}$ かつ $R_g =]-\infty, -4]$ 。

2.5 $f(x) = a(x-h)^2 + k$ 型の関数、第２部

導入問題

関数 $f(x) = -2x^2$ のグラフを用いて以下を行いましょう。

1. 関数 $g(x) = -2(x-3)^2 - 1$ のグラフを描きましょう。g のグラフを得るために、f のグラフをどのように平行移動させなければいけないか、説明してください。
2. 関数 g の頂点の座標、定義域と値域を求めましょう。

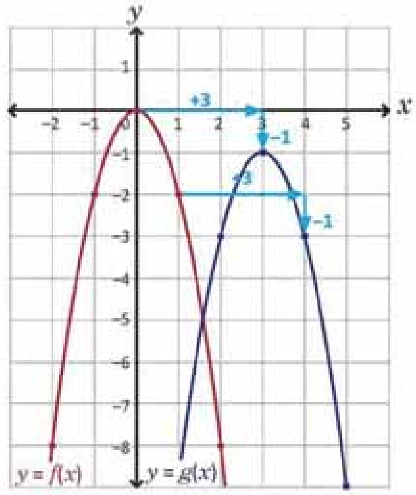


解法

1. 関数 g は $f(x-h) + k$ 型になっています。つまり、縦方向にも横方向にも平行移動がなされています。この場合については、$h = 3$ で $k = -1$ です。

   最初に、f のグラフが横方向に単位 1 で +3 右に平行移動し、次に縦方向で単位 1 で −1 下に平行移動しています。g のグラフは、右の図の青色の放物線に該当します。

2. g のグラフの頂点の座標は (3, −1) で、さらに $D_g = \mathbb{R}$ かつ $R_g =]-\infty, -1]$ 。



まとめ

$f(x) = ax^2$ として、a は任意の 0 でない実数 のとき、関数のグラフは：

$$g(x) = a(x-h)^2 + k$$

f のグラフを **横方向に単位 1 で h 平行移動し、** さらに縦方向に単位 1 で k 平行移動させた放物線です。g のグラフの頂点は (h, k) で、$D_g = \mathbb{R}$ で、かつ：

1. もし $a > 0$ であれば、$R_g = [k, \infty[$ 。
2. もし $a < 0$ であれば、$R_g =]-\infty, k]$ 。

問題

それぞれの場合について、$f(x)$ のグラフを描き、そこから $g(x)$ のグラフを描きましょう。g の頂点の座標と、定義域と値域を求めましょう。

a) $f(x) = x^2$; $g(x) = (x+1)^2 + 2$
b) $f(x) = -x^2$; $g(x) = -(x+3)^2 - 3$
c) $f(x) = 3x^2$; $g(x) = 3(x-2)^2 + 1$
d) $f(x) = -3x^2$; $g(x) = -3(x-4)^2 - 2$

達成の目安

2.5 関数 $g(x) = a(x - h)^2 + k$ のグラフを描き、定義域と値域を求めることを、
$f(x) = ax^2$ の横方向と縦方向の平行移動を用いて行うことができること。

学習の教材

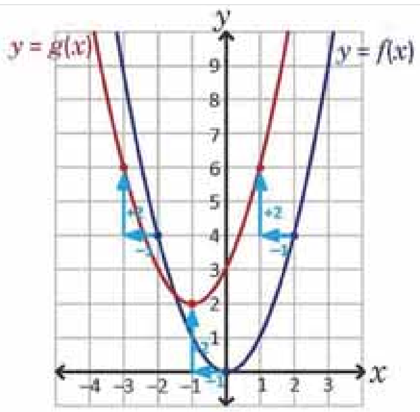
ボンド紙に、座標平面を描いたもので、これを黒板に貼り付けて導入問題の項 1 を解いていきます。（問題群を解くのに使用することもできます）。

学習の流れ

$g(x) = a(x - h)^2 + k$ 型二次関数のグラフを、$f(x) = ax^2$ 型のグラフから描くために、横方向と縦方向の平行移動を組み合わせます。

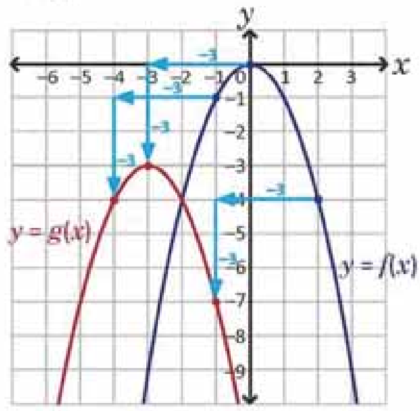
問題の解き方：

a) $h = -1$ かつ $k = 2$ の場合には、f のグラフを、横方向には単位 1 で −1 左に平行移動し、縦方向には単位 1 で +2 上に平行移動することにより、g のグラフを求めます。



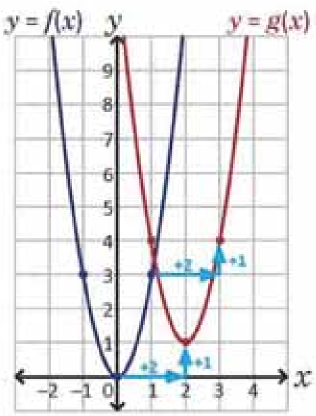
頂点の座標は (−1, 2) で、$D_g = \mathbb{R}$ かつ $R_g = [-2, \infty[$ 。

b) $h = -3$ かつ $k = -3$ の場合には、f のグラフを、横方向には単位 1 で −3 左に平行移動し、縦方向には単位 1 で −3 下に平行移動することにより、g のグラフを求めます。



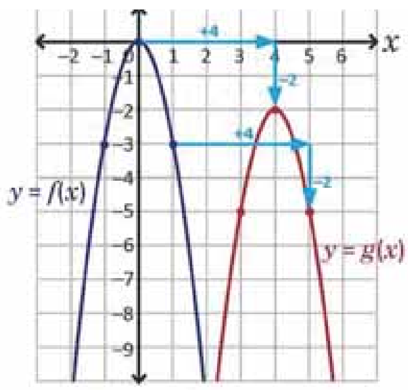
頂点の座標は (−3, −3) で、$D_g = \mathbb{R}$ かつ $R_g =]-\infty, -3]$ 。

c) $h = 2$ かつ $k = 1$ の場合には、f のグラフを、横方向には単位 1 で +2 右に平行移動し、縦方向には単位 1 で +1 上に平行移動することにより、g のグラフを求めます。



頂点の座標は (2, 1) で、$D_g = \mathbb{R}$ かつ $R_g = [1, \infty[$ 。

d) $h = 4$ かつ $k = -2$ の場合には、f のグラフを、横方向には単位 1 で +4 に平行移動し、縦方向には単位 1 で −2 下に平行移動することにより、g のグラフを求めます。



頂点の座標は (4, −2) で、$D_g = \mathbb{R}$ かつ $R_g =]-\infty, -2]$ 。

2.6 $f(x) = ax^2 + bx$ 型の関数 *

導入問題

以下の関数それぞれのグラフを描き、定義域と値域を求めましょう。

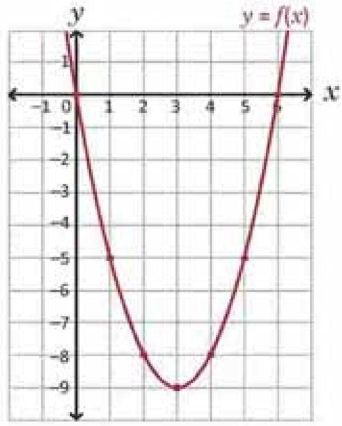
a) $f(x) = x^2 - 6x$　　b) $g(x) = -2x^2 - 4x$

それぞれの関数の方程式で、平方完成しましょう。

解法

a) 関数 f の方程式で平方完成します。

$$f(x) = x^2 - 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2$$
$$= (x^2 - 6x + 3^2) - 3^2$$
$$= (x - 3)^2 - 3^2$$
$$= (x - 3)^2 - 9$$

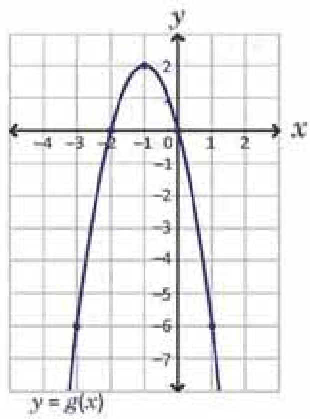


関数 f は $a(x - h)^2 + k$ 型：$D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-9, \infty[$ で、そのグラフは右図に示されているように、頂点を (3, –9) として上に開いた放物線です。

$f(x) = (x - 3)^2 - 9$ は、$h(x) = x^2$ のグラフを横方向に単位 1 で右に +3 平行移動し、縦方向に単位 1 で下に –9 平行移動したものです。

b) 同様に、関数 g の方程式で平方完成します。

$$g(x) = -2(x^2 + 2x)$$
$$= -2\left[x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2\right]$$
$$= -2[x^2 + 2x + 1^2 - 1^2]$$
$$= -2[(x + 1)^2 - 1]$$
$$= -2(x + 1)^2 + 2$$



関数 g は $a(x - h)^2 + k$ 型：$D_g = \mathbb{R}$, $R_g =]-\infty, 2]$ で、そのグラフは右図で示すように頂点を (–1, 2) として下に開いた放物線です。

$g(x) = -2(x + 1)^2 + 2$ は、$h(x) = -2x^2$ のグラフを、横方向に単位 1 で –1 左に平行移動し、縦方向に単位 1 で +2 上に平行移動したものです。

まとめ

$f(x) = ax^2 + bx$ 型の関数が与えられると、関数 f の方程式を平方完成させることにより、$a(x - h)^2 + k$ 型に変形することができ、そのグラフは、$a > 0$ であれば上に開いた放物線で、$a < 0$ であれば下に開いた放物線になっています。

問題

それぞれの場合について、f のグラフを描くために平方完成し、関数の頂点の座標と、定義域と値域を求めましょう。

a) $f(x) = x^2 - 4x$　　b) $f(x) = -x^2 + 2x$　　c) $f(x) = 3x^2 + 6x$

達成の目安

2.6 関数 $f(x) = ax^2 + bx$ の方程式で平方完成して、グラフを描き、定義域と値域を求めることができること。

学習の教材

これを黒板に貼り付けて、導入問題のグラフを描き込むための座標平面を描いたボンド紙（問題群を解答するのに使用できます）。

学習の流れ

この授業から、その方程式が一般形で表された二次関数に取り組み始めます。もし、学生が導入問題を解く際に大きな困難に直面している場合は、教師は「解答」について段階的に説明していかなければなりません。

ねらい

この授業では、関数の方程式が $ax^2 + bx$ 型の場合のみを取り扱いますが、これは平方完成をする際の計算を簡略化するためです。授業 2.7 と授業 2.8 では、方程式に定数項が追加されます。

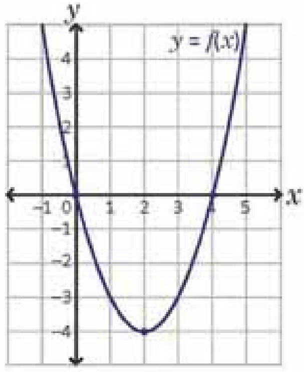
問題の解き方：

a) 関数 $f(x) = x^2 - 4x$ の方程式で平方完成します。

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 \\ &= (x^2 - 4x + 2^2) - 2^2 \\ &= (x - 2)^2 - 4 \end{aligned}$$

$y = x^2$ のグラフは、横方向に単位 1 で右に +2 平行移動し、縦方向に単位 1 で – 4 下に平行移動し、$f(x) = (x - 2)^2 - 4$ のグラフを求めます。

よって、$f(x) = (x - 2)^2 - 4$。そのグラフは、頂点を (2, –4) とした上に開いた放物線で、$D_f = \mathbb{R}$, $Rf = [-4, \infty[$ です。

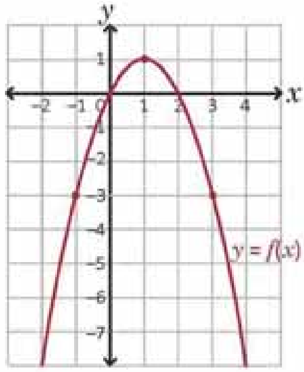


b) 関数 $f(x) = -x^2 + 2x$ の方程式で平方完成します。

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2 - 2x) \\ &= -\left[x^2 - 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{2}{2}\right)^2 \\ &= -(x^2 - 2x + 1^2) + 1^2 \\ &= -(x - 1)^2 + 1 \end{aligned}$$

$y = -x^2$ のグラフを、横方向に単位 1 で右に +1 平行移動し、縦方向に単位 1 で +1 上に平行移動し、$f(x) = -(x - 1)^2 + 1$ のグラフを求めます。

よって、$f(x) = -(x - 1)^2 + 1$。そのグラフは、頂点を (1, 1) とした下に開いた放物線で、$D_f = \mathbb{R}$, $R_f =]-\infty, 1]$ です。

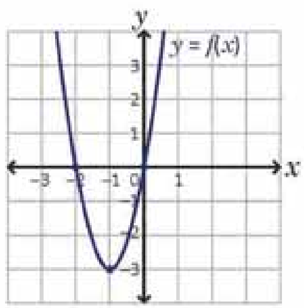


c) 関数 $f(x) = 3x^2 + 6x$ の方程式で平方完成します。

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x^2 + 2x) \\ &= 3\left[x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{2}{2}\right)^2 \\ &= 3(x^2 + 2x + 1^2) - 3 \\ &= 3(x + 1)^2 - 3 \end{aligned}$$

$y = 3x^2$ のグラフを、横方向に単位 1 で左に –1 平行移動し、縦方向に単位 1 で – 3 下に平行移動し、$f(x) = 3(x + 1)^2 - 3$ のグラフを求めます。

よって、$f(x) = 3(x + 1)^2 - 3$。そのグラフは、頂点を (–1, –3) とした上に開いた放物線で、$D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-3, \infty[$ です。



2.7 $f(x) = x^2 + bx + c$ 型の関数

導入問題

グラフを描き、頂点、定義域と値域を求めましょう。

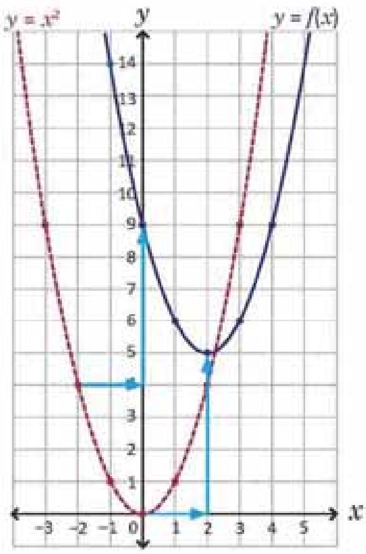
$$f(x) = x^2 - 4x + 9.$$

関数 f の方程式で平方完成しましょう。

解法

関数 f の方程式で平方完成します。

$$f(x) = \left[x^2 - 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2\right] + 9$$
$$= (x^2 - 4x + 2^2) - 2^2 + 9$$
$$= (x - 2)^2 - 4 + 9$$
$$= (x - 2)^2 + 5$$



これにより、関数 f が $(x - h)^2 + k$ 型で $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [5, \infty[$ 、に書き換えられました。そのグラフは、右図に示されるように、頂点を (2, 5) として上に開いた放物線です。

$f(x) = (x - 2)^2 + 5$ は、$y = x^2$ のグラフを横方向に単位 1 で +2 右に平行移動して、縦方向に単位 1 で +5 上に平行移動したものです。

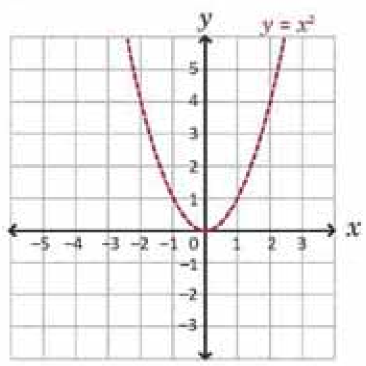
まとめ

$f(x) = x^2 + bx + c$ 型の関数が与えられると、関数 f の方程式を平方完成させることにより、$(x - h)^2 + k$ 型に変形することができ、そのグラフは、上に開いた放物線になります。

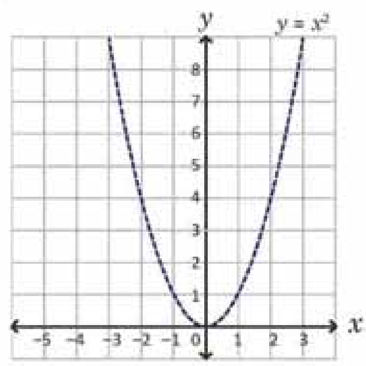
問題

それぞれの場合について、f のグラフを描くために平方完成し、関数の頂点の座標と、定義域と値域を求めましょう。

a) $f(x) = x^2 + 2x - 2$



b) $f(x) = x^2 + 4x + 5$



c) $f(x) = x^2 - 6x + 7$

d) $f(x) = x^2 - 8x + 18$

ユニット 4

達成の目安

2.7 関数 $f(x) = x^2 + bx + c$ の方程式で平方完成して、グラフを描き、定義域と値域を求めることができること。

学習の教材

これを黒板に貼り付けて、導入問題のグラフを描き込むための座標平面を描いたボンド紙（問題群を解答するのに使用できます）。

学習の流れ

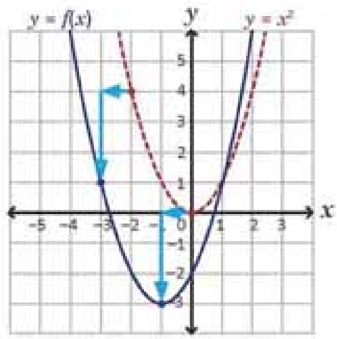
授業で説明される関数の方程式に、定数項が加わります。そして、計算を簡素化するため、その全てで変数 x^2 の係数は 1 に等しくなっています。

問題の解き方：

a) 関数 $f(x) = x^2 + 2x - 2$ の方程式で平方完成します。

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{2}{2}\right)^2 - 2 \\ &= (x^2 + 2x + 1^2) - 1 - 2 \\ &= (x+1)^2 - 3 \end{aligned}$$

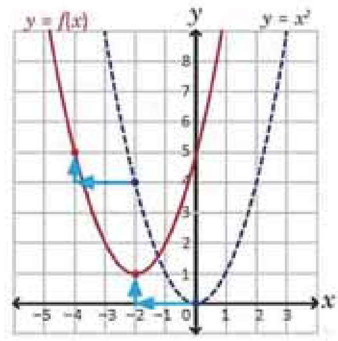
そのグラフは、頂点を (–1, –3) とし、$D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-3, \infty[$ である上に開いた放物線です。



b) 関数 $f(x) = x^2 + 4x + 5$ の方程式で平方完成します。

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{4}{2}\right)^2 + 5 \\ &= (x^2 + 4x + 2^2) - 4 + 5 \\ &= (x+2)^2 + 1 \end{aligned}$$

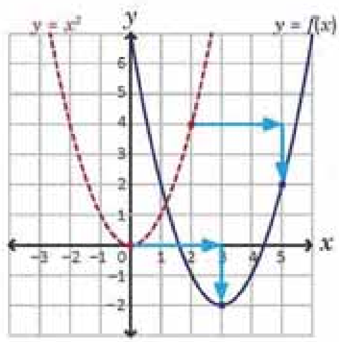
そのグラフは、頂点を (–2, 1) とし、$D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [1, \infty[$ である上に開いた放物線です。



c) 平方完成します。

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[x^2 - 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 7 \\ &= (x^2 - 6x + 3^2) - 9 + 7 \\ &= (x-3)^2 - 2 \end{aligned}$$

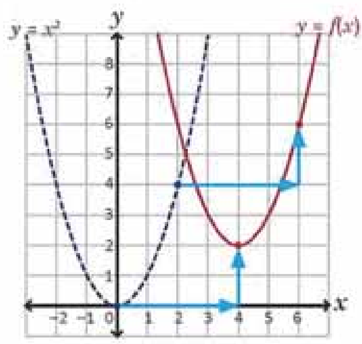
そのグラフは、頂点を (3, –2) とし、$D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-2, \infty[$ である上に開いた放物線です。



d) 平方完成します。

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[x^2 - 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{8}{2}\right)^2 + 18 \\ &= (x^2 - 8x + 4^2) - 16 + 18 \\ &= (x-4)^2 + 2 \end{aligned}$$

そのグラフは、頂点を (4, 2) とし、$D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [2, \infty[$ である上に開いた放物線です。



レッスン 2

2.8 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 型の関数

導入問題

関数のグラフを描き、頂点の座標と、定義域と値域を求めましょう。

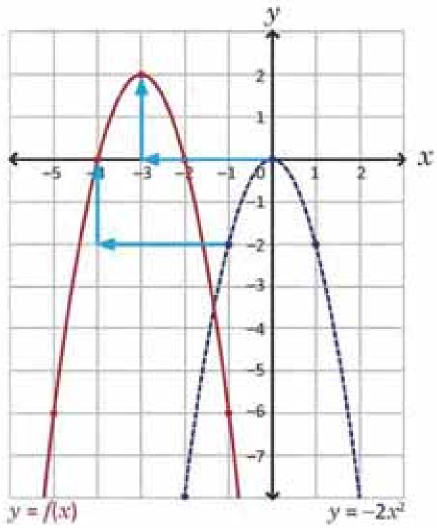
$$f(x) = -2x^2 - 12x - 16.$$

関数 f の方程式で平方完成します。

解法

関数 f の方程式で平方完成します。

$$\begin{aligned} f(x) &= -2[x^2 + 6x] - 16 \\ &= -2\left[x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2\right] - 16 \\ &= -2[x^2 + 6x + 3^2 - 3^2] - 16 \\ &= -2[(x+3)^2 - 9] - 16 \\ &= -2(x+3)^2 + 18 - 16 \\ &= -2(x+3)^2 + 2 \end{aligned}$$



これにより、関数 f は $a(x-h)^2 + k$: $D_f = \mathbb{R}$, $R_f =]-\infty, 2]$ に書き換えられ、そのグラフは、右図に示されるように、頂点を $(-3, 2)$ として下に開いた放物線です。

関数 $f(x) = -2(x+3)^2 + 2$ は、$y = -2x^2$ のグラフを横方向に単位 1 で -3 左に平行移動し、縦方向に単位 1 で上に $+2$ 平行移動したものです。

定義

$f(x) = ax^2 + bx + c$ 型の関数で、a、b、c が任意の実数を取り、a が 0 と異なるものは、**二次関数**と呼ばれます。

二次関数は、関数 f の方程式を平方完成することにより **$a(x-h)^2 + k$** の形にも表すことができ、このとき、そのグラフは頂点を点 (h, k) にとって、もし $a > 0$ であれば上に開いた放物線、もし $a < 0$ であれば下に開いた放物線になります。

ある二次関数の定義域は、常に実数の集合 $(\mathbb{R})$ に等しく、値域は a の値と頂点座標 (h, k) の y 軸の値に依存します。

1. もし $a > 0$ であれば、$R_g = [k, \infty[$ 。
2. もし $a < 0$ であれば、$R_g =]-\infty, k]$ 。

問題

それぞれの場合について、f のグラフを描くために平方完成し、さらに関数の頂点の座標と、定義域と値域を求めましょう。

a) $f(x) = -x^2 + 8x - 13$

b) $f(x) = 3x^2 + 12x + 11$

c) $f(x) = 2x^2 - 20x + 44$

d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$

達成の目安

2.8 関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ の方程式で平方完成して、グラフを描き、定義域と値域を求めることができること。

学習の教材

これを黒板に貼り付けて、導入問題のグラフを描き込むための座標平面を描いたボンド紙（問題群を解答するのに使用できます）。

学習の流れ

二次関数で、定数項を持つものが続きます。授業 2.7 との違いは、この授業では、変数 x^2 の係数は 1 と異なることです。

つまずきやすい点

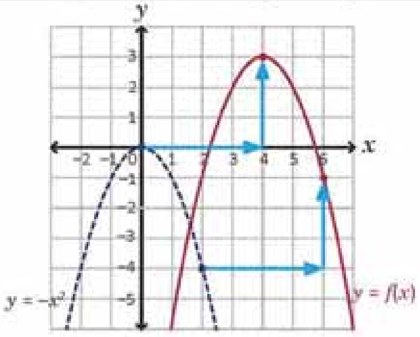
平方完成をする学生の処理過程を確認します。もし計算で困難に直面している場合には、どこかの部分を忘れないように、これを段階ごとに行うことができます。

問題の解き方：

a) 関数 $f(x) = -x^2 + 8x - 13$ の方程式で平方完成します。 $f(x) = -x^2 + 8x - 13$:

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2 - 8x) - 13 \\ &= -\left[x^2 - 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2\right] - 13 \\ &= -(x^2 - 8x + 4^2) + 4^2 - 13 \\ &= -(x-4)^2 + 3 \end{aligned}$$

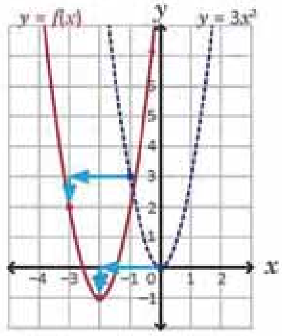
そのグラフは、頂点を (4, 3) とし、$D_f = \mathbb{R}$, $R_f =]-\infty, 3]$ である上に開いた放物線です。



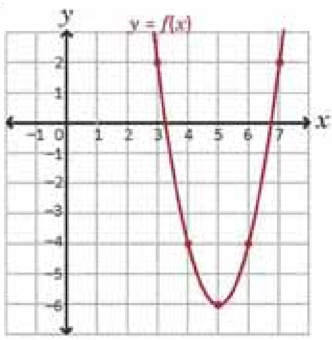
b) 関数 $f(x) = 3x^2 + 12x + 11$の方程式で平方完成します。 $f(x) = 3x^2 + 12x + 11$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x^2 + 4x) + 11 \\ &= 3\left[x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2\right] + 11 \\ &= 3(x^2 + 4x + 2^2) - 3(2^2) + 11 \\ &= 3(x+2)^2 - 1 \end{aligned}$$

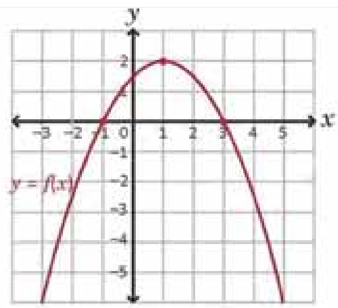
そのグラフは、頂点を (–2, –1) とし、$D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-1, \infty[$ である上に開いた放物線です。



c) 方程式を平方完成することにより、$f(x) = 2(x-5)^2 - 6$ が得られます。そのグラフは、頂点を (5, –6) とし、$D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-6, \infty[$ である上に開いた放物線です。



d) 方程式を平方完成することにより、$f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 2$ が得られます。そのグラフは、頂点を (1, 2) とし、$D_f = \mathbb{R}$, $R_f =]-\infty, 2]$ である下に開いた放物線です。



2.9 初期条件

導入問題

それぞれの場合について、二次関数 f の方程式を求めましょう。
1. f のグラフの頂点は (4, 5) で、点 (2, –7) を通ります。
2. f は $ax^2 + bx$ 型で、グラフは点 (–1, –10) と (–4, –16) を通ります。

解法

1. 初期条件は、f のグラフの頂点の座標を示していますので、次の形で方程式を記述するのが好都合です。

$$f(x) = a(x-h)^2 + k \quad \text{------------------ (1)}$$

(1) の h と k に値を代入して、次が得られます。

$$f(x) = a(x-4)^2 + 5$$

ここで、もしこの曲線が点 (2, –7) を通るのであれば、$x = 2$ のとき $f(2) = -7$ 。前の方程式に代入して、a の値を移項すると：

$$-7 = a(2-4)^2 + 5$$
$$-7 = 4a + 5$$
$$-12 = 4a$$
$$-3 = a$$

よって、関数の方程式は $f(x) = -3(x-4)^2 + 5$

$f(x) = -3(x-4)^2 + 5$ は、次のように記述することもできます。
$f(x) = -3x^2 + 24x - 43$

2. 初期条件は $f(x) = ax^2 + bx$ と示しています。もし f のグラフが点 (–1, –10) を通るのであれば、$x = -1$ のとき、$f(-1) = -10$ これらの値を代入して、a を関数の形になるよう移項して：

$$-10 = a(-1)^2 + b(-1)$$
$$-10 = a - b$$
$$-10 + b = a \quad \text{------------------ (2)}$$

同様に、$x = -4$ のとき、$f(-4) = -16$ これらの値を、(2)で得た a を含めて代入し、b の値を移項します。

$$-16 = a(-4)^2 + b(-4)$$
$$-16 = (b-10)16 - 4b$$
$$-16 = 16b - 160 - 4b$$
$$144 = 12b$$
$$12 = b$$

よって、関数の方程式は $f(x) = 2x^2 + 12x$

まとめ

f が二次関数であることから、これの方程式は、$a(x-h)^2 + k$ または $ax^2 + bx + c$ の形で書き表すことができます。もし、初期条件で f のグラフの頂点の座標が提供されていれば、$a(x-h)^2 + k$ の形で記述するのが望ましいといえます。

問題

1. それぞれの場合について、二次関数 f の方程式を求めましょう。
   a) f のグラフの頂点は (–2, 1) で、点 (0, 5) を通ります。
   b) f のグラフの頂点は (3, –6) で、点 (4, –8) を通ります。
   c) f は $ax^2 + bx$ 型で、グラフは点 (8, 0) と (2, –12) を通ります。

2. 二次関数 f が点 (–2, 8)、(0, 2)、(2, 4) を通るとき、その方程式を求めましょう。

達成の目安

2.9 一定の条件を満たす二次関数の方程式を求めることができること。

学習の流れ

所定の二次関数が持ちうる方程式の形について理解したところで、この授業では、学生が求めるものとして、一定の条件を満たす関数の方程式を取り上げます。

つまずきやすい点

ここで、学生に対し注意喚起していただきたいのは、ある二次関数の方程式の形には、どのような形でも使用可能で、それは選択する問題が規定する条件に左右される、ということです。可能であれば、一つの二次方程式と一つの一次方程式からなる連立方程式を解かなければならなくなることを回避できるような形のものを使用すべきです。

問題の解き方：

1a) 問題文では、頂点の座標が提供されていることから、関数 f の方程式を、$a(x-h)^2+k$ の形、つまり $f(x)=a(x-h)^2+k$ の形で書きましょう。$h=-2$ と $k=1$ の値を代入することで、$f(x)=a(x+2)^2+1$ が得られます。よって、グラフが (0, 5) を通るのであれば $f(0)=5$：

$$\begin{aligned} a(0+2)^2+1&=5\\ a(4)+1&=5\\ 4a&=4\\ a&=1 \end{aligned}$$

よって、$f(x)=(x+2)^2+1$

1b) 1a) と同様に、$f(x)=a(x-h)^2+k$ で、値 $h=3$ と $k=-6$ を代入すると $f(x)=a(x-3)^2-6$ ここで、グラフが (4, –8) を通ることから $f(4)=-8$：

$$\begin{aligned} a(4-3)^2-6&=-8\\ a(1)-6&=-8\\ a&=-2 \end{aligned}$$

よって、$f(x)=-2(x-3)^2-6$

1c) この場合には、$f(x)=ax^2+bx$ で、グラフが (8, 0) と (2, –12) を通っていることから $f(8)=0$ かつ $f(2)=-12$ これらの値を代入して、連立二元一次方程式を解いて：

$$a(8)^2+b(8)=0 \ \Rightarrow 8a+b=0 \ \Rightarrow b=-8a$$
$$a(2)^2+b(2)=-12 \ \Rightarrow 2a+b=-6 \ \Rightarrow 2a-8a=-6 \ \Rightarrow -6a=-6 \ \Rightarrow a=1$$

$b=-8$ かつ $f(x)=x^2-8x$

2. 問題文では頂点の座標は指定されておらず、ただグラフが点 (–2, 8)、(0, 2)、(2, 4) を通ることだけが分かっているところ、ここで $f(x)=ax^2+bx+c$ で、$f(0)=2$ であるから：

$$a(0)^2+b(0)+c=2 \Rightarrow c=2$$

よって $f(x)=ax^2+bx+2$　$f(-2)=8$ と $f(2)=4$ の値を代入して、連立二元一次方程式を解いて：

$$\begin{aligned} a(-2)^2+b(-2)+2=8 \ &\Rightarrow 4a\cancel{-2b}=6\\ a(2)^2+b(2)+2=4 \ &\Rightarrow \underline{4a\cancel{+2b}=2}\\ &\quad\ 8a\qquad\ =8\\ &\qquad\qquad a=1 \end{aligned}$$

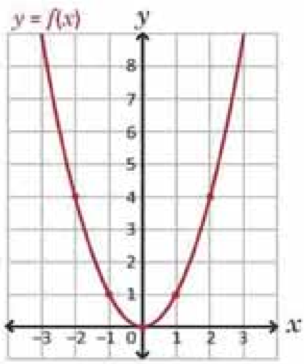
学生には、点 (0, 2) について点検してみるよう勧めてください。

よって、$b=-1$ かつ $f(x)=x^2-x+2$

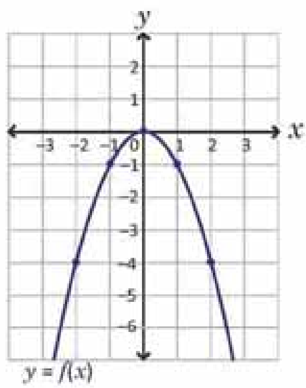
2.10 学んだことで練習しましょう

f のグラフを用いて、g のグラフを描きましょう。
それぞれの場合について、頂点の座標と、定義域と値域を求めましょう。

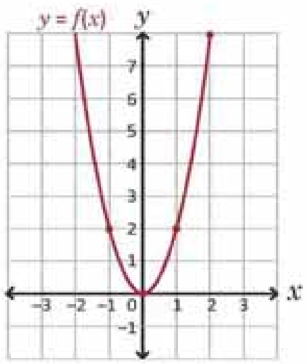
a) $f(x) = x^2$ と $g(x) = x^2 + 3$



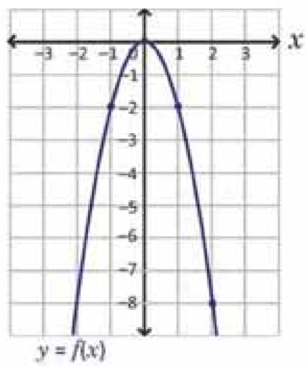
b) $f(x) = -x^2$ と $g(x) = -x^2 + 2$



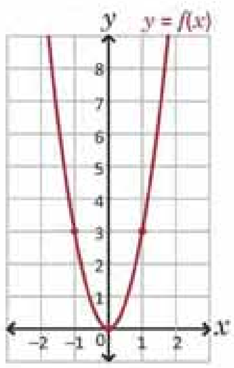
c) $f(x) = 2x^2$ と $g(x) = 2x^2 - 1$



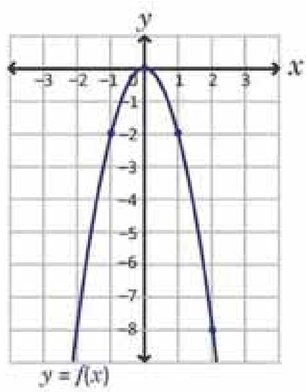
d) $f(x) = -2x^2$ と $g(x) = -2x^2 - 3$



e) $f(x) = 3x^2$ と $g(x) = 3(x - 4)^2$



f) $f(x) = -2x^2$ と $g(x) = -2(x - 1)^2$

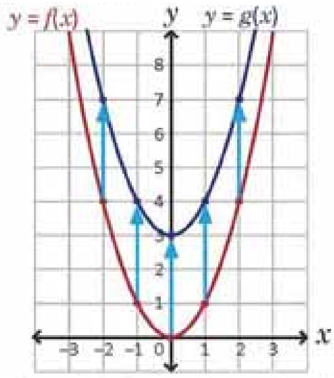


達成の目安

2.10 二次方程式に対応する問題を解けること。

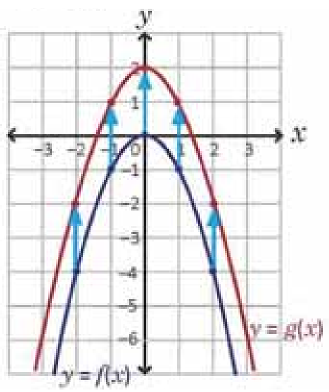
問題の解き方：

a) $f(x) = x^2$ のグラフを、縦方向に単位 1 で +3 上に平行移動して $g(x) = x^2 + 3$ のグラフを求めます。



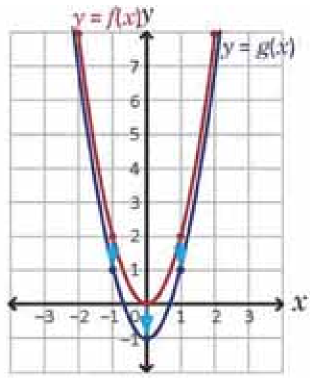
g のグラフの頂点の座標は (0, 3) で、$D_g = \mathbb{R}$ で $R_g = [3, \infty[$ 。

b) $f(x) = -x^2$ のグラフを、縦方向に単位 1 で +2 上に平行移動して $g(x) = -x^2 + 2$ のグラフを求めます。



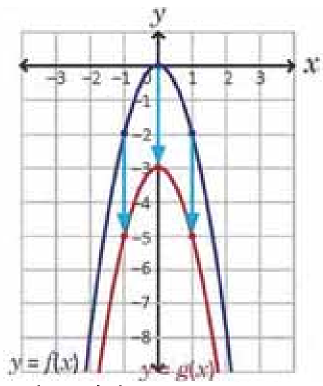
g のグラフの頂点の座標は (0, 2) で、$D_g = \mathbb{R}$ で $R_g =]-\infty, 2]$ 。

c) $f(x) = 2x^2$ のグラフを、縦方向に単位 1 で −1 下に平行移動して $g(x) = 2x^2 - 1$ のグラフを求めます。



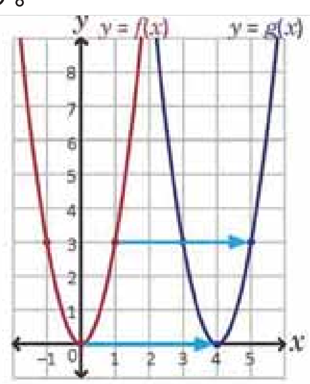
g のグラフの頂点の座標は (0, −1) で、$D_g = \mathbb{R}$ かつ $R_g = [-1, \infty[$ 。

d) $f(x) = -2x^2$ のグラフを、縦方向に単位 1 で − 3 下に平行移動して、$g(x) = -2x^2 - 3$ のグラフを求めます。



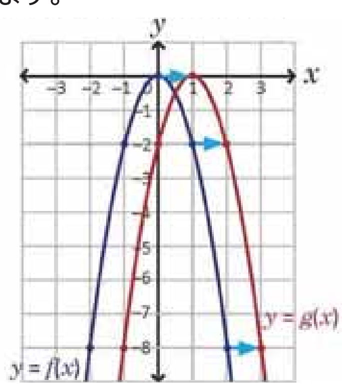
g のグラフの頂点の座標は (0, −3) で、$D_g = \mathbb{R}$ かつ $R_g =]-\infty, -3]$ 。

e) $f(x) = 3x^2$ のグラフは、横方向に単位 1 で +4 右に平行移動します。



g のグラフの頂点の座標は (4, 0) で、$D_g = \mathbb{R}$ かつ $R_g = [0, \infty[$ 。

f) $f(x) = -2x^2$ のグラフは、横方向に単位 1 で +1 右に平行移動します。

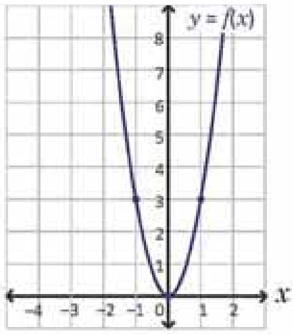


g グラフの頂点の座標は (1, 0) で、$D_g = \mathbb{R}$ かつ $R_g =]-\infty, 0]$ 。

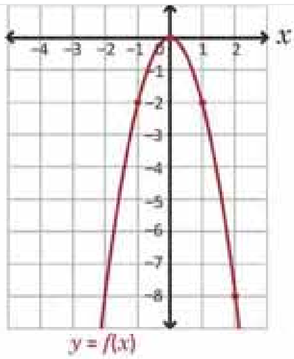
2.11 学んだことで練習しましょう

1. f のグラフを使用して、g のグラフを描きましょう。それぞれの場合について、頂点の座標と、定義域と値域を求めましょう。

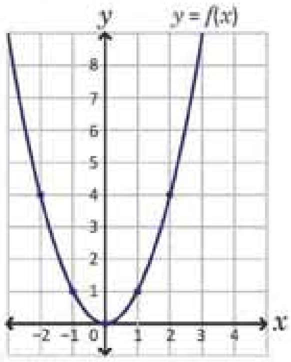
a) $f(x) = 3x^2$ と $g(x) = 3(x + 2)^2$



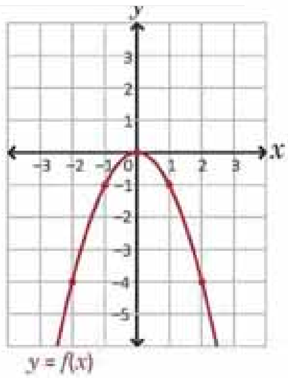
b) $f(x) = -2x^2$ と $g(x) = -2(x + 2)^2$



c) $f(x) = x^2$ と $g(x) = (x - 4)^2 + 2$



d) $f(x) = -x^2$ と $g(x) = -(x + 1)^2 + 3$



2. それぞれの場合について、f のグラフを描くために平方完成しましょう。関数の頂点の座標と、定義域と値域を求めましょう。

a) $f(x) = -3x^2 + 6x$
b) $f(x) = 5x^2 + 10x$
c) $f(x) = -x^2 - 4x$
d) $f(x) = x^2 - 2x + 2$
e) $f(x) = x^2 + 2x + 2$
f) $f(x) = x^2 - 10x + 23$
g) $f(x) = -x^2 - 4x - 7$
h) $f(x) = 2x^2 - 12x + 13$
i) $f(x) = -3x^2 - 6x + 2$

3. 以下の場合について、二次関数 f の方程式を求めましょう。

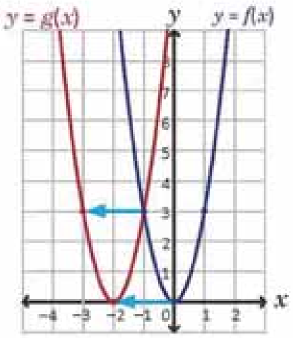
a) f のグラフの頂点が (0, 0) にあり、点 (2, 2) を通るとき。
b) f のグラフの頂点が (0, –1) にあり、点 (–1, –3) を通るとき。
c) f のグラフの頂点が (3, 0) にあり、点 (2, 4) を通るとき。
d) f のグラフの頂点が (2, –5) にあり、点 (4, 3) を通るとき。
e) f は $ax^2 + bx$ 型で、そのグラフは点 (2, 0) と (–1, 3) を通ります。
f) f は $ax^2 + bx$ 型で、グラフは点 (1, –4) と (4, 8) を通ります。
g) f のグラフは点 (–2, 3)、(0, –3)、(1, 0) を通ります。

達成の目安

2.11 二次方程式に対応する問題を解けること。

問題の解答：

1a)

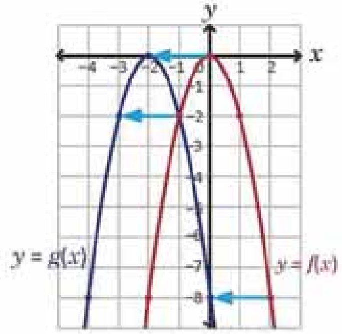


頂点：(−2, 0)

$D_g = \mathbb{R}$

$R_g = [0, \infty[$

1b)

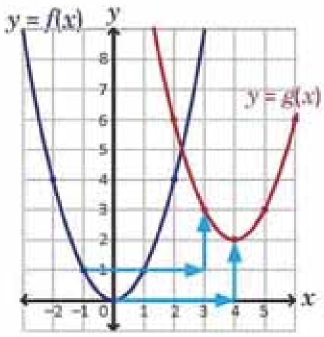


頂点：(−2, 0)

$D_g = \mathbb{R}$

$R_g =]-\infty, 0]$

1c)

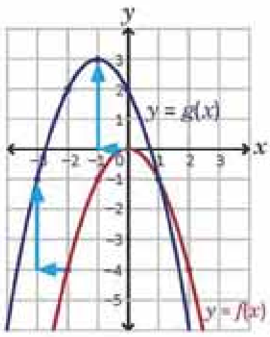


頂点：(4, 2)

$D_g = \mathbb{R}$

$R_g = [2, \infty[$

1d)



頂点：(−1, 3)

$D_g = \mathbb{R}$

$R_g =]-\infty, 3]$

2a) $f(x) = -3(x-1)^2 + 3$; 頂点は (1, 3), $D_f = \mathbb{R}$, $R_f =]-\infty, 3]$.

2b) $f(x) = 5(x+1)^2 - 5$; 頂点は (−1, −5), $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-5, \infty[$.

2c) $f(x) = -(x+2)^2 + 4$; 頂点は (−2, 4), $D_f = \mathbb{R}$, $R_f =]-\infty, 4]$.

2d) $f(x) = (x-1)^2 + 1$; 頂点は (1, 1), $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [1, \infty[$.

2e) $f(x) = (x+1)^2 + 1$; 頂点は (−1, 1), $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [1, \infty[$.

2f) $f(x) = (x-5)^2 - 2$, 頂点は (5, −2), $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-2, \infty[$.

2g) $f(x) = -(x+2)^2 - 3$; 頂点は (−2, −3), $D_f = \mathbb{R}$, $R_f =]-\infty, -3]$.

2h) $f(x) = 2(x-3)^2 - 5$; 頂点は (3, −5), $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-5, \infty[$.

2i) $f(x) = -3(x+1)^2 + 5$; 頂点は (−1, 5), $D_f = \mathbb{R}$, $R_f =]-\infty, 5]$.

学生は、問題 2. の各項でグラフを描かなければなりません。

3a) 頂点が (0, 0) にあるので、$f(x) = ax^2$、もし (2, 2) を通れば、$f(2) = 2$：

$$a(2)^2 = 2 \Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

よって、$f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

3b) 頂点が (0, −1) にあるので、$f(x) = ax^2 - 1$. $f(-1) = -3$ であることから：

$$a(-1)^2 - 1 = -3 \Rightarrow a = -2$$

よって、$f(x) = -2x^2 - 1$.

3c) $f(x) = a(x-3)^2$、さらに $f(2) = 4$、ゆえに：

$$a(2-3)^2 = 4 \Rightarrow a = 4$$

よって、$f(x) = 4(x-3)^2$.

3d) $f(x) = a(x-2)^2 - 5$; また $f(4) = 3$, ゆえに：

$$a(4-2)^2 - 5 = 3 \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

よって、$f(x) = 2(x-2)^2 - 5$.

3e) $f(x) = ax^2 + bx$; さらに $f(2) = 0$ かつ $f(-1) = 3$：

$$a(2)^2 + b(2) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0$$
$$a(-1)^2 + b(-1) = 3 \Rightarrow a - b = 3$$

連立方程式を解いて $a = 1$ かつ $b = -2$、よって $f(x) = x^2 - 2x$.

3f) $f(x) = ax^2 + bx$; また $f(1) = -4$、$f(4) = 8$：

$$a(1)^2 + b(1) = -4 \Rightarrow a + b = -4$$
$$a(4)^2 + b(4) = 8 \Rightarrow 4a + b = 2$$

連立方程式を解いて $a = 2$ かつ $b = -6$; よって、$f(x) = 2x^2 - 6x$.

3g) $f(x) = 2x^2 + x - 3$

3.1 単調関数

導入問題

二次関数 $f(x) = 2(x - 1)^2 - 5$ 及び $g(x) = -2(x - 1)^2 + 5$ である場合、次の問題に回答しましょう。

1. $-1 \leq x \leq 1$ の場合、$f(x)$ と $g(x)$ はどの数の間にありますか？
2. $1 \leq x \leq 3$ とすると、$f(x)$ と $g(x)$ はどの数の間にありますか？

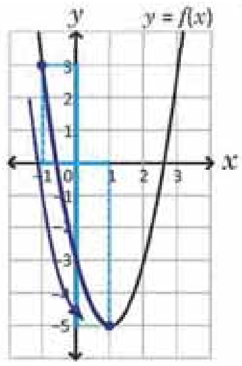
f と g のグラフを使用してください。

解法

1. $f(x)$ と $g(x)$ の値を確定するために関数グラフを描きます。放物線 f は頂点 (1,-5) で上向きに開いており、一方放物線 g は頂点 (1,5) で下向きに開いています。いずれのグラフにおいても、x 軸上では、x が取る値の [-1, 1] のエリアに緑色の影をつけています。

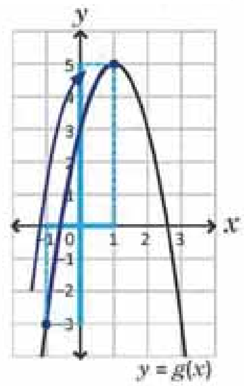
f では：x が -1 から 1 に増加すると、$f(x)$ は $f(-1) = 3$ から $f(1) = -5$ に減少します。

そうすると、$-5 \leq f(x) \leq 3$



g では：x が -1 から 1 に増加すると、$g(x)$ は $g(-1) = -3$ から $g(1) = 5$ に増加します。

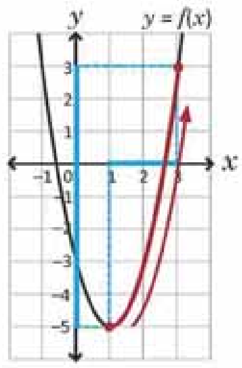
そうすると、$-3 \leq g(x) \leq 5$



2. ここでも、関数のグラフを使うことで、次のように結論できます。

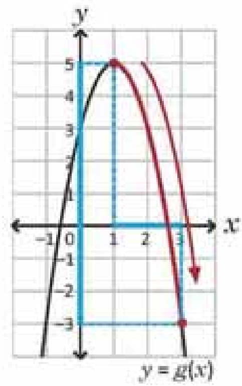
f では：x が 1 から 3 に増加すると、$f(x)$ は $f(1) = -5$ から $f(3) = 3$ に増加します。

そうすると、$-5 \leq f(x) \leq 3$



g では：x が 1 から 3 に増加すると、$g(x)$ は $g(1) = 5$ から $g(3) = -3$ に減少します。

そうすると、$-3 \leq g(x) \leq 5$



定義

関数 f が区間 $[x_1, x_2]$ で**増加している**場合、x がx_1 から x_2 に増加すると、$f(x)$ は $f(x_1)$ から $f(x_2)$ に増加します。すなわち、**m と n が $m \leq n$ で $[x_1, x_2]$ に属している場合、$f(m) \leq f(n)$ となります。**一方で、関数 f が区間 $[x_1, x_2]$ で**減少している**場合、x が x_1 から x_2 に増加すると、$f(x)$ は $f(x_1)$ から $f(x_2)$ に減少します。すなわち、**m と n が $m \leq n$ で $[x_1, x_2]$ に属している場合、$f(m) \geq f(n)$ となります。**

$[x_1, x_2]$ において、区間内で増加または減少している場合、関数は**単調関数**です。

問題

それぞれの場合について，関数 f が与えられた区間で増加しているか減少しているかを判断し，$f(x)$ の値がある区間を回答しましょう。

a) $f(x) = (x - 5)^2;\ 5 \leq x \leq 7$

b) $f(x) = -2x^2 + 3;\ 0 \leq x \leq 2$

c) $f(x) = -3(x - 3)^2 - 1;\ 2 \leq x \leq 3$

d) $f(x) = (x + 2)^2 + 3;\ -5 \leq x \leq -3$

達成の目安

3.1 与えられた区間における 二次関数の単調性を明らかにし、$f(x)$ の値の範囲を求めましょう。

学習の教材

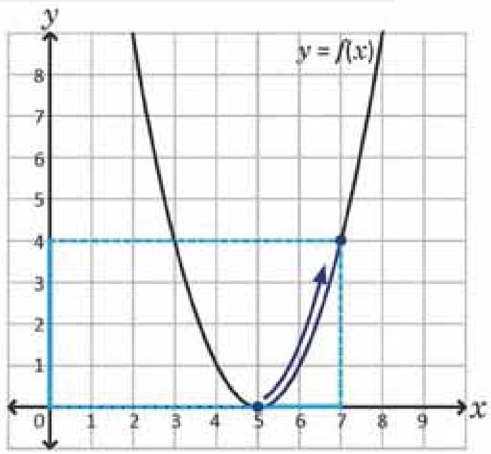
ボンド紙に平面図を描いたものを黒板に配置し、関数の導入問題のグラフを上書きします（グループ設問の解決に使用します）。

学習の流れ

この授業では、二次関数の単調性を与えられた区間で解析します。導入問題やグループ設問では、頂点 (h, k) の h の値は与えられた区間に属していないか、またはその極値かのいずれかであるため、その区間では関数は単調です。

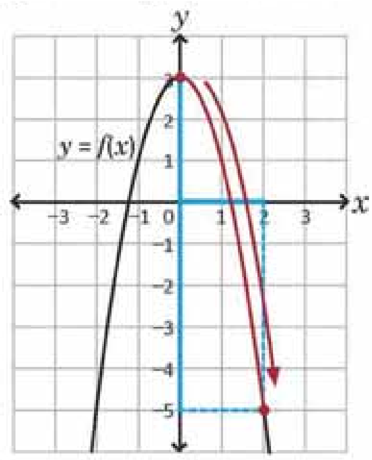
問題の解答：

(a) $f(x) = (x-5)^2$ のグラフを描きます。



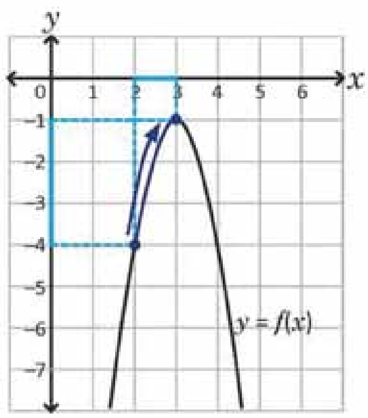
x が 5 から 7 に増加すると、$f(x)$ は 0 から 4 に増加します。したがって、$f(x)$ は [5, 7] と$0 \leq f(x) \leq 4$ で増加します。

b) $f(x) = -2x^2 + 3$のグラフを描きます。



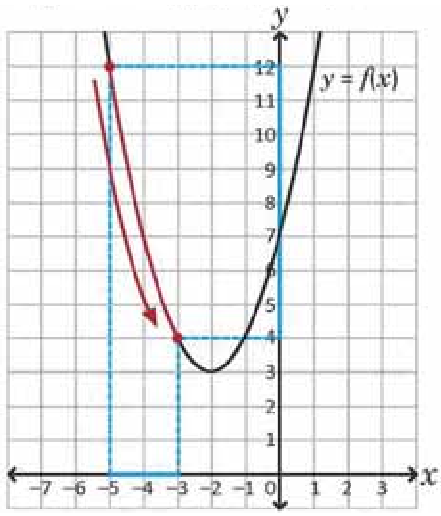
x が 0 から 2 に増加すると、$f(x)$ は 3 から -5 に減少します。したがって、$f(x)$ は [0, 2] と $-5 \leq f(x) \leq 3$ で減少します。

c) $f(x) = -3(x-3)^2 - 1$のグラフを描きます。



x が 2 から 3 に増加すると、$f(x)$ は −4 から −1 に増加します。したがって、$f(x)$ は [2, 3] と $-4 \leq f(x) \leq -1$ で増加します。

d) $f(x) = (x+2)^2 + 3$ のグラフを描きます。



x が −5 から −3 に増加すると、$f(x)$ は 12 から 4 に減少します。そうすると、$f(x)$ は [−5, −3] と $4 \leq f(x) \leq 12$ で減少します。

3.2 バリエーション：最大値または最小値

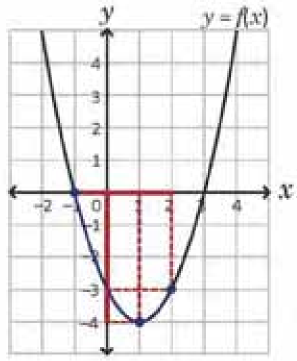
導入問題

二次関数 $f(x) = (x-1)^2 - 4$、$g(x) = -x^2 - 4x - 1$ である場合、次の問題に回答しましょう。

1. $-1 \leq x \leq 2$ とすると、$f(x)$ はどの数の間にありますか？
2. $-4 \leq x \leq 1$ とすると、$g(x)$ はどの数の間にありますか？

f と g のグラフを使用してください。

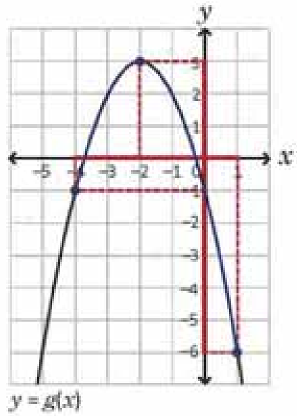
解法



1. 右図のように $f(x)$ の値を求めるために、関数のグラフを作成します。放物線は、(1, -4) に頂点を持ち、上に向かって開いています。

x 軸上では、x が取る値の [–1, 2] のエリアに赤色の影をつけています。x = -1 ならば $f(-1) = 0$ であり、$x = 2$ ならば $f(2) = -3$; この場合、$-3 \leq f(x) \leq 0$ であると考えることができます。

しかし、$f(x)$ はその最小値に $x = 1$ のとき、つまり $f(1) = -4$ のときに到達します。したがって、$-4 \leq f(x) \leq 0$ となります。



2. まず、g を $a(x-h)^2 + k$ の形で書いて式を完成させます。

$$
\begin{aligned}
g(x) &= -(x^2 + 4) - 1 \\
&= -\left[x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2\right] - 1 \\
&= -[x^2 + 4x + 2^2 - 2^2] - 1 \\
&= -[(x+2)^2 - 4] - 1 \\
&= -(x+2)^2 + 4 - 1 \\
&= -(x+2)^2 + 3
\end{aligned}
$$

放物線は (-2, 3) に頂点を持ち、下に向かって開いています。x 軸上では、x が取る値の [–4, 1] のエリアに赤色の影をつけています。$x = -4$ ならば $g(-4) = -1$ であり、$x = 1$ ならば $g(1) = -6$; この場合、$g(x)$ は最大値に $x = -2$ のとき、すなわち $g(-2) = 3$ の時に達します。
したがって、$-6 \leq g(x) \leq 3$ となります。

まとめ

二次関数 $f(x) = a(x-h)^2 + k$ と $x_1 \leq h \leq x_2$ について

1. もしも $a > 0$ ならば、最小値 $f(x)$ には $x = h$ で到達します。
   さらに、x が実数であり、$x_1 \leq x \leq x_2$ で $f(x_1) < f(x_2)$であれば、$k \leq f(x) \leq f(x_2)$ であり、そうでない場合、$f(x_1) \geq f(x_2)$ であれば、$k \leq f(x) \leq f(x_1)$ となります。

2. もしも $a < 0$ ならば、最大値 $f(x)$ には $x = h$ で到達します。
   さらに、x が実数であり、$x_1 \leq x \leq x_2$ で$f(x_1) < f(x_2)$ であれば、$f(x_1) \leq f(x) \leq k$ であり、そうでない場合、$f(x_1) > f(x_2)$ であれば、$f(x_2) \leq f(x) \leq k$ となります。

問題

次の各ケースについて、次の場合に $f(x)$ の値が見つかる区間を決定しましょう。

a) $f(x) = (x-5)^2;\ 2 \leq x \leq 6$
b) $f(x) = -2x^2 + 3;\ -2 \leq x \leq 1$
c) $f(x) = -3(x-3)^2 - 1;\ 2 \leq x \leq 5$
d) $f(x) = (x+2)^2 + 3;\ -6 \leq x \leq 0$
e) $f(x) = 2(x-6)^2 + 1;\ 4 \leq x \leq 8$
f) $f(x) = -(x+4)^2 - 2;\ -6 \leq x \leq -2$

達成の目安

3.2 f が 二次関数である x の値から $f(x)$ が取る値を決定します。

学習の教材

ボンド紙に平面図を描いたものを黒板に配置し、関数の導入問題のグラフを上書きします（グループ設問の解決に使用します）。

学習の流れ

この授業では、x が頂点 (h, k) の h 値を含む区間内にある場合に、二次関数 $f(x)$ が取ることのできる値の範囲を分析します。

ねらい

関数fが所定の区間で増減していた前回の授業とは異なり、この授業では、$a \leq x \leq b$ の場合、必ずしも $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ または $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$ となるとは限りません。

つまずきやすい点

問題の項目 a) から d) では、前回の授業で使った関数のグラフを使って f の値の範囲を求めることができます。

問題の解答：

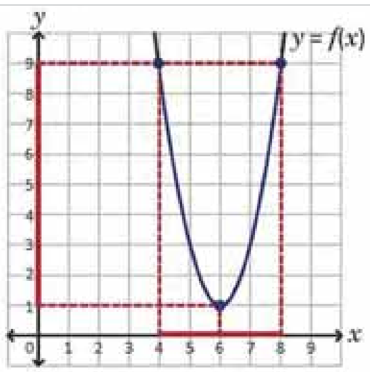
a) 関数 $f(x) = (x - 5)^2$ の場合、頂点の座標は (5, 0) となり、$2 \leq 5 \leq 6$ となります。グラフは上向きに開かれた放物線なので、$f(x)$ の最小値は $x = 5$ に達します。

また、$f(2) = 9$、$f(6) = 1$、すなわち、$f(2) > f(6)$ です。したがって、$0 \leq f(x) \leq 9$ となります。

c) 関数 $f(x) = -3(x - 3)^2 - 1$ の場合、頂点座標は (3, -1) となり、$2 \leq 3 \leq 5$ となります。グラフは下向きに開かれた放物線なので、$f(x)$ の最大値は $x = 3$ に達します。

また、$f(2) = -4$ と $f(5) = -13$、すなわち、$f(2) > f(5)$です。したがって、$-13 \leq f(x) \leq -1$ となります。

e) f のグラフは以下のようになります。



頂点が (6, 1)、最小値が $x = 6$、$f(4) = f(8) = 9$ の開かれた放物線。したがって、$1 \leq f(x) \leq 9$ となります。

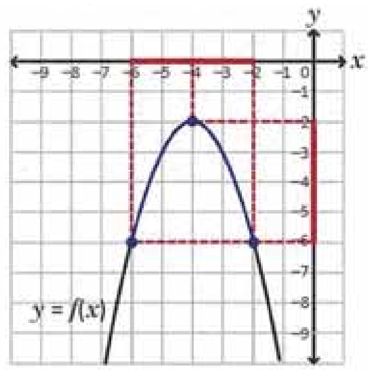
b) 関数 $f(x) = -2x^2 + 3$ の場合、頂点の座標は (0, 3) となり、$-2 \leq 0 \leq 1$ となります。グラフは下向きに開かれた放物線なので、$f(x)$ の最大値は $x = 0$ に達します。

また、$f(-2) = -5$ と $f(1) = 1$、すなわち、$f(-2) < f(1)$ です。したがって、$-5 \leq f(x) \leq 3$ となります。

d) 関数 $f(x) = (x + 2)^2 + 3$ の場合、頂点の座標は (−2, 3) となり、$-6 \leq -2 \leq 0$ となります。グラフは上向きに開かれた放物線なので、$f(x)$ の最小値は $x = -2$ に達します。

また、$f(-6) = 19$ と $f(0) = 7$、すなわち、$f(-6) > f(0)$ です。したがって、$3 \leq f(x) \leq 19$ となります。

f) f のグラフは以下のようになります。



頂点が (−4, −2)、最小値が $x = -4$、$f(-6) = f(-2)$ の下に向かって開かれた放物線。したがって、$-6 \leq f(x) \leq -2$ となります。

3.3 応用例：最大値*

導入問題

ラ・リベルターに位置するサン・マティアス高校の1年生の生徒たちは、自然科学の授業で自由落下の実験を行っています。彼らは、サッカーボールを垂直に上に投げたとき、x 秒後の地面からの距離 $f(x)$ をメートル単位で求めると、次の関数で表されることを発見しました。

$$f(x) = -5x^2 + 10x + 0.5$$

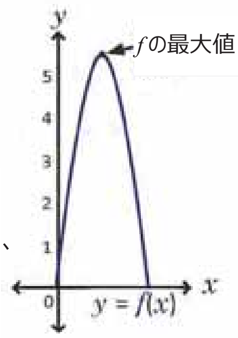
ボールが到達できる最大の高さは？何秒後に最大高度に到達しますか？

解法

ボールを垂直に上向きに投げた場合、いつかは下降しなければならない地点に到達します。質問では、投げられてから下降を開始するまでに地面から何メートル上昇し、何秒が経過するかを計算します。

学生が発見した x 秒後の地上距離の関係を表す関数は二次関数で，x^2 の因数が負であるため，$f(x)$ の最大値は関数のグラフの頂点にあります。そうすると、f の頂点の座標を求めれば回答できます。

$$\begin{aligned} f(x) &= -5(x^2 - 2) + 0.5 \\ &= -5\left[x^2 - 2x + \left(\tfrac{2}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{2}{2}\right)^2\right] + 0.5 \\ &= -5[x^2 - 2x + \mathbf{1}^2 - \mathbf{1}^2] + 0.5 \\ &= -5(x - \mathbf{1})^2 + 5 + 0.5 \end{aligned}$$



f のグラフの頂点を (1, 5.5) とし、放物線を右図に示します（$f(x)$は正かゼロでなければならないので、x 軸に残っている部分だけを取ります）。したがって、ボールが到達する最大の高さは、1 秒後の 5.5 メートルとなります。

まとめ

負の因数 x^2 を持つ 二次関数において、最大値を求める問題が出た場合、答えは関数のグラフの頂点となります。

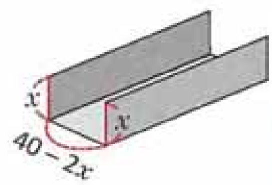
問題

1. 知的障害を持つ青年カルロスは、ラテンアメリカの特殊なオリンピックス競技会に参加するバスケットボールチームの一員です。カルロスがある位置で輪に向かってボールを投げると，x 秒後のボールから地面までの距離（メートル）は次の関数で示すことができます。

$$f(x) = -5x^2 + 6x + 1.4$$

カルロスが投げたボールが到達する最大の高さは？その高さに到達するには何秒かかるのでしょうか？

2. マルタは自分の家の屋根に水路を設置します。そのために、長方形の金属のシートを準備し、水路を形成するためにその側面を曲げます。シートの幅が 40 cm だとすると、最大の容量の水路を形成するためには、片側何 cm 曲げればいいのでしょうか？



側面 x と $40 - 2x$ の断面積が最大となる時に容量が最大となります。

達成の目安

3.3 二次関数の最大値を使って、日常的な問題を解きましょう。

学習の流れ

この授業では、二次関数を用いてモデル化できる問題が提示され、その回答は関数の最大値となります。生徒が導入問題を解くのに苦労している場合は、教師は解決の仕方を段階的に教え、説明する必要があります。

ねらい

前回の授業では、二次関数が最大値や最小値を示すケースを定義しました。生徒は関数をグラフ化することなく、前回の授業の内容を今回の授業で提示された問題の解法と関連付けないといけません。

問題の解答：

1. x 秒後のボールの距離を示す関数 $f(x) = -5x^2 + 6x + 1.4$ の x^2の因数が負の場合、f は関数の頂点で最大値を示し、以下の式に表されます。

$$\begin{aligned} f(x) &= -5(x^2 - 1.2x) + 1.4 \\ &= -5[x^2 - 1.2x + (0.6)^2 - (0.6)^2] + 1.4 \\ &= -5(x - 0.6)^2 + 1.8 + 1.4 \\ &= -5(x - 0.6)^2 + 3.2 \end{aligned}$$

したがって、カルロスが投げたボールが到達する最大の高さは、0.6 秒経過時の 3.2 メートルになります。

因数が少数の場合でも計算のプロセスは同じであり、小数を分数に変換することができることを生徒に説明します。

2. シートを両側×cmに曲げた場合、A(x)を水路の断面積を求める関数とします。水路の容量が最大になるためには、A(x)が最大でなければなりません。このセクションでは、ベースの長方形 $40 - 2x$ と高さ x のような形をしているので：

$$A(x) = (40 - 2x)x = -2x^2 + 40x$$

1 項と同様に、最大値を求めるために数式を完成させます。

$$\begin{aligned} A(x) &= -2[x^2 - 20x + (10)^2 - (10)^2] \\ &= -2(x - 10)^2 + 200 \end{aligned}$$

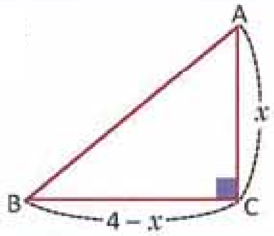
したがって、水路の容量が最大になるように、両側をそれぞれ 10 センチメートル曲げなければなりません。

3.4 応用例：最小値*

導入問題

直角三角形 ABC において、次点の長さが最小とする場合、x の値はどうなりますか？

ピタゴラスの定理から：
$AB^2 = BC^2 + CA^2$,
また、$0 < x < 4$



解法

ピタゴラスの定理を利用し：

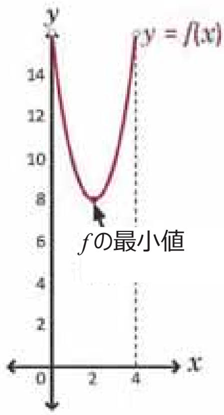
$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$

BCとCAをそれぞれ $4 - x$ と x に置き換え、同様の項を削減します。

$$\begin{aligned} AB^2 &= (4 - x)^2 + x^2 \\ &= 16 - 8x + x^2 + x^2 \\ &= 2x^2 - 8x + 16 \end{aligned}$$

また、AB^2 も最小となると、次点 AB の長さは最小となります。$f(x) = 2x^2 - 8x + 16$ とすると、これは 二次関数であり、x^2 の因数が正なので、放物線は上向きに開きます。$f(x)$ のグラフを描くために数式を完成させせます。

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x^2 - 4x) + 16 \\ &= 2\left[x^2 - 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2\right] + 16 \\ &= 2[x^2 - 4x + 2^2 - 2^2] + 16 \\ &= 2[(x - 2)^2 - 4] + 16 \\ &= 2(x - 2)^2 - 8 + 16 \\ &= 2(x - 2)^2 + 8 \end{aligned}$$



右図は、(2, 8) を頂点とする区間]0, 4[のグラフです。したがって、次点の長さが最小になるためには、x は 2 と等しくなければなりません。

まとめ

正の因数 x^2 を持つ 二次関数において、最小値を求める問題が出た場合、答えは関数のグラフの頂点となります。

問題

1. 差が 20 に等しく、その積が最小である 2 つの整数を求めましょう。
2. 長さ 24 cm の羊毛を 2 つに分けて 2 つの羊毛片にします。一つ目の羊毛片の長さが $4x$ で 2 つ目の長さが $24 - 4x$ の場合、2 つの羊毛片の面積の和が最小になる x の値は何でしょうか？

達成の目安

3.4 二次関数の最小値を使って、日常的な問題を解きましょう。

学習の流れ

授業 3.3 と同様に、この授業で扱う問題は 二次関数で表され、解は関数の最小値で求められます。生徒が導入問題を解くのに苦労している場合は、教師は解決の仕方を段階的に教え、説明する必要があります。

ねらい

生徒は授業 3.2 の内容を応用し、関数の方程式を $a(x-h)^2+k$ の形で書き，関数の最小値を求め，グラフを描かずに関数の解を理解できるようにします。

問題の解答：

1. 解答すべき整数の一つを x とします。もう一方の整数は、両整数の差を計算するために $x-20$とします。

$$x-(x-20)=x-x+20=20$$

$f(x)$ を 2 つの整数の積の結果を計算する関数とすると、その後：

$$f(x)=x(x-20)=x^2-20x$$

積が最小でなければならない場合、関数 $f(x)$ の最小値を探します。x^2 の因数が正であるので、f は頂点で最小値となります。座標を求めるために数式を完成させます。

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-20x+10^2)-10^2 \\ &= (x-10)^2-100 \end{aligned}$$

したがって、$x=10$、$x-20=-10$、つまり、差が 20 に等しく、その積が最小となる整数は 10 と –10 です。

2. 最初の部分の長さは $4x$ で、これは最初の正方形の周囲が $4x$ に等しいことを示しているので、その辺の長さは $(4x)\div4=x$ となります。同様に、2 つ目の部分の長さは $24-4x$、つまり、第 2 の正方形の外周は $24-4x$ であり、したがって、その辺の長さは $(24-4x)\div4=6-x$ となります。2 つの片の面積の和を計算する関数を $g(x)$ とすると：

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2+(6-x)^2 \\ &= x^2+36-12x+x^2 \\ &= 2x^2-12x+36 \end{aligned}$$

x の値が和を最小にする必要がある場合は、関数 $g(x)$ の最小値を求めなければなりません。
x^2 の因数が正であるので、g は頂点で最小値となります。

$$\begin{aligned} &= 2(x^2-6x+3^2)-2(3^2)+36 \\ &= 2(x-3)^2-18+36 \\ &= 2(x-3)^2+18 \end{aligned}$$

したがって、2 つの正方形の面積の和が最小となるように、x の値は 3 に等しくなければなりません。

3.5 二次関数のグラフと y 軸の交差

導入問題

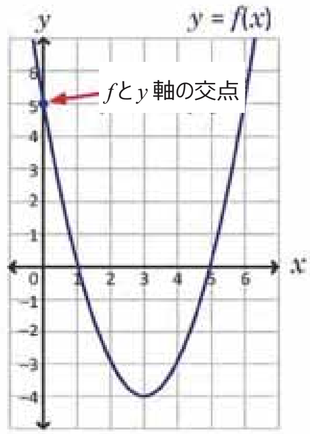
下記の場合の二次関数fのグラフと y 軸との交点の座標を求めましょう。

f のグラフと y 軸との交点の第 1 座標が 0 である時。

a) $f(x) = (x-3)^2 - 4$　　　b) $f(x) = -2x^2 - 12x - 18$

解法

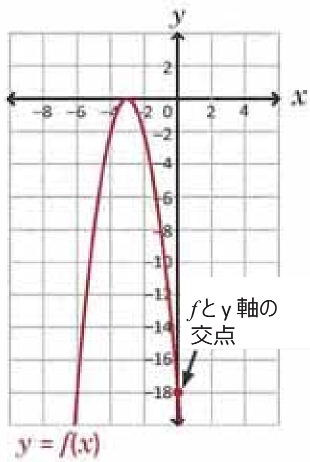
a) f のグラフと y 軸との交点は $x = 0$ のときに発生し、したがって $f(0)$ の値を計算しなければならず、f と y 軸との間の切断点の座標は $(0, f(0))$ となります。



$$
\begin{aligned}
f(0) &= (0-3)^2 - 4\\
&= 9 - 4\\
&= 5
\end{aligned}
$$

したがって、$f(x)=(x-3)^2 - 4$ のグラフと y 軸との交点は $(0, 5)$ となります。

b) 前項と同様に、$f(x) = -2x^2 - 12x - 18$ のグラフと y 軸との交点の座標を求めることは、$(0, f(0))$ を求めることと同じです。



$$
\begin{aligned}
f(0) &= -2(0)^2 - 12(0) - 18\\
&= -18
\end{aligned}
$$

したがって、$f(x) = -2x^2 - 12x - 18$ のグラフと y 軸との交点は $(0, -18)$ となります。

一般的に

関数 f のグラフと y 軸との交点の座標は：$(0, f(0))$.
f が 二次関数の場合、f のグラフは 1 点だけで y 軸を切ります。

問題

1. それぞれの場合について、f のグラフと y 軸との交点の座標を決定します。

a) $f(x) = -(x+4)^2 + 6$　　b) $f(x) = 3(x-2)^2 - 10$　　c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

d) $f(x) = -2x^2 + 7$　　e) $f(x) = -5(x+10)^2$　　f) $f(x) = 2x^2 + 24x + 52$

g) $f(x) = -3x^2 + 6x - 11$　　h) $f(x) = x^2 - x - \frac{3}{4}$　　i) $f(x) = x^2 + 5x + \frac{1}{5}$

2. 任意の関数が y 軸との交点を 2 つ持つことはあり得るのでしょうか？解答し説明しましょう。

達成の目安

3.5 二次関数のグラフと y 軸の交点の座標を関数の式を用いて求めましょう。

学習の流れ

レベル 8 では、一次関数のグラフと y 軸との交点の座標を計算しました。この授業では、任意の関数について、グラフを描く必要無しに y 軸との交点の座標を一般化します。

ねらい

問題の 1 では、生徒は各関数をグラフ化する必要はなく、「一般的に」で説明されるように関数の方程式を使って座標を求めます。

問題の解答：

1a) 関数を $x = 0$ で評価します。

$$\begin{aligned} f(0) &= -(0+4)^2 + 6 \\ &= -16 + 6 \\ &= -10 \end{aligned}$$

そうすると、関数 f のグラフと y 軸との交点の座標は (0, –10) です。

1b) 関数を $x = 0$ で評価します。

$$\begin{aligned} f(0) &= 3(0-2)^2 - 10 \\ &= 12 - 10 \\ &= 2 \end{aligned}$$

そうすると、関数 f のグラフと y 軸との交点の座標は (0, 2)です。

1c) 関数を $x = 0$ で評価します。

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2}(0)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

グラフと y 軸との交点の座標は (0, 0) です。

1d) 関数を $x = 0$ で評価します。

$$\begin{aligned} f(0) &= -2(0)^2 + 7 \\ &= 7 \end{aligned}$$

グラフと y 軸との交点の座標は (0, 7) です。

1e) 関数を $x = 0$ で評価します。

$$\begin{aligned} f(0) &= -5(0+10)^2 \\ &= -5(100) \end{aligned}$$

グラフと y 軸との交点の座標は (0, –500) です。

1f) 関数を $x = 0$ で評価します。

$$\begin{aligned} f(0) &= 2(0)^2 + 24(0) + \\ &= 52 \end{aligned}$$

グラフと y 軸との交点の座標は (0, 52)です。

1g) 前項と同様に：

$$\begin{aligned} f(0) &= -3(0)^2 + 6(0) - 11 \\ &= -11 \end{aligned}$$

座標は (0, –11) です。

1h) 前項と同様に：

$$f(0) = (0)^2 - 0 - \frac{3}{4} = -\frac{3}{4}$$

座標は $(0, -\frac{3}{4})$です。

1i) 前項と同様に：

$$f(0) = (0)^2 + 5(0) + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

座標は $(0, \frac{1}{5})$です。

2. 関数の定義では、各 x が 1 つの $f(x)$ 要素のみに対応しているので、これは不可能です。したがって、y 軸との交点を求めるために、関数の方程式が $x = 0$ で示された場合、$f(0)$ は 1 つの解しか得られません。

3.6 二次関数のグラフと x 軸の交差

導入問題

下記の場合の 二次関数 f のグラフと x 軸との交点の座標を求めましょう。

f のグラフと x 軸との交点の第 2 座標が 0 である時。

a) $f(x) = (x-3)^2 - 4$　　b) $f(x) = -2x^2 - 12x - 18$　　c) $f(x) = 3x^2 + 2$

解法

a) f のグラフと x 軸との交点は、ゼロに等しい第2の座標を持ち、すなわち $(x, 0)$ の形をしています。x の値を求めるには、f の方程式を 0 に等しくし、二次方程式を解きます。

$$(x-3)^2 - 4 = 0$$
$$(x-3)^2 = 4$$
$$x - 3 = \pm 2$$
$$x = 3 \pm 2 \longrightarrow x = 1 \quad x = 5$$

前回の授業で描いた $f(x) = (x-3)^2 - 4$ のグラフを見てください。

したがって、$f(x) = (x-3)^2 - 4$ と x 軸との交点は、(1, 0) と (5, 0) です。

b) 前項と同様に、関数fの方程式を等化し、二次方程式を解きます（この場合、多項式の因数分解を用いることができます）。

$$-2x^2 - 12x - 18 = 0$$
$$x^2 + 6x + 9 = 0$$
$$(x+3)^2 = 0$$
$$x + 3 = 0$$
$$x = -3$$

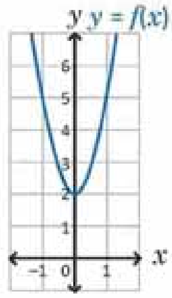
前回の授業で描いた $f(x) = -2x^2 - 12x - 18$ のグラフを見てください。

したがって、$f(x) = -2x^2 - 12x - 18$ のグラフと x 軸との交点は (–3, 0) となります。

c) 関数の方程式がゼロと等しくなると：

$$3x^2 + 2 = 0$$

この 二次方程式は実数の解がありません。これは、右図のように関数 f のグラフが x 軸を切らないことを意味します。



一般的に

関数 f のグラフと x 軸との交点の座標は、f の方程式をゼロに等しくし、得られた 二次方程式を解くことで求められます。

1. 方程式が 2 つの実解 $x = x_1$ と $x = x_2$ を持つ場合、f のグラフは点 $(x_1, 0)$ と $(x_2, 0)$ で x 軸を切断します。
2. 方程式が 1 つの実解 $x = x_1$ を持つ場合、f のグラフは点 $(x_1, 0)$ で x 軸を切断します。
   この点は放物線の頂点であり、f のグラフは x 軸に接線すると言います。
3. 方程式が実解を持たない場合、f のグラフは x 軸を切らない、つまり放物線は 軸の上か下にあります。

問題

それぞれの場合について、f のグラフと x 軸との交点の座標を決定します。

a) $f(x) = 3x^2$　　b) $f(x) = -(x+4)^2$　　c) $f(x) = -(x+6)^2 + 1$

d) $f(x) = (x-5)^2 - 9$　　e) $f(x) = -(x-2)^2 - 4$　　f) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

g) $f(x) = 3x^2 + 9x - 30$　　h) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$　　i) $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$

達成の目安

3.6 二次関数のグラフと x 軸の交点の座標を関数の式を用いて求めましょう。

学習の流れ

この授業では、関数 f のグラフと x 軸との交点の座標を計算します。この内容は、のちに 二次方程不等式の解を解釈するために使用します。

ねらい

問題の項で、生徒は各関数をグラフ化するのではなく、「一般的に」の部分で説明したように、関数の方程式を使って座標を求めます。

問題の解答：

a) $3x^2 = 0$ を解きます。

$$3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

そうすると、$f(x) = 3x^2$のグラフと x 軸との交点は (0, 0) となります。

b) $-(x + 4)^2 = 0$ を解きます。

$$(x+4)^2 = 0 \Rightarrow x + 4 = 0$$

$$x = -4$$

そうすると、$f(x) = -(x+4)^2$ のグラフと x 軸との交点は (–4, 0) となります。

c) $-(x + 6)^2 + 1 = 0$ を解きます。

$$(x+6)^2 = 1$$
$$x + 6 = \pm 1$$
$$x = -6 \pm 1 \quad \Rightarrow \quad x = -7 \quad x = -5$$

そうすると、$f(x) = -(x + 6)^2 + 1$ のグラフと x 軸との交点は (–7, 0) と (–5, 0) になります。

d) $(x - 5)^2 - 9 = 0$ を解きます。

$$(x-5)^2 = 9$$
$$x - 5 = \pm 3$$
$$x = 5 \pm 3 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad x = 8$$

そうすると、$f(x) = (x - 5)^2 - 9$ のグラフと x 軸との交点は (2, 0) と (8, 0) になります。

e) $-(x - 2)^2 - 4 = 0$ を解きます。

$$(x-2)^2 = -4$$

この最後の方程式には実解がないので、$f(x) = -(x-2)^2 - 4$ のグラフは x 軸を切りません。

f) $f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$ を解きます。

$$(x+1)(x-3) = 0$$
$$x + 1 = 0 \quad o \quad x - 3 = 0$$
$$x = -1 \qquad\qquad x = 3$$

そうすると、$f(x) = x^2 - 2x - 3$ のグラフと x 軸との交点は (–1, 0) と (3, 0) になります。

g) $3x^2 + 9x - 30 = 0$ を解きます。

$$3(x^2 + 3x - 10) = 0$$
$$3(x+5)(x-2) = 0$$
$$x + 5 = 0 \quad o \quad x - 2 = 0$$
$$x = -5 \qquad\qquad x = 2$$

すると、$f(x) = 3x^2 + 9x - 30$ のグラフと x 軸との交点は (–5, 0) と (2, 0) になります。

h) $\frac{1}{2}x^2 - 3 = 0$ を解きます。

$$\frac{1}{2}x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 6$$
$$x = \pm\sqrt{6}$$

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$ のグラフと軸 x との交点は、$(-\sqrt{6}, 0)$ と $(\sqrt{6}, 0)$ です。

i) $2x^2 - 12x + 23 = 0$ の式から判別式を計算すると、次のようになります。

$$\Delta = (-12)^2 - 4(2)(23) = 144 - 184 = -40.$$

上記のうち、$\Delta < 0$ と、$2x^2 - 12x + 23 = 0$ の方程式には実解がありません。したがって、$f(x) = 2x^2 - 12x + 23$ のグラフ は x を切りません。

3.7 二次不等式 $ax^2 + bx + c \geq 0$、$a > 0$ 、第 1 部*

導入問題

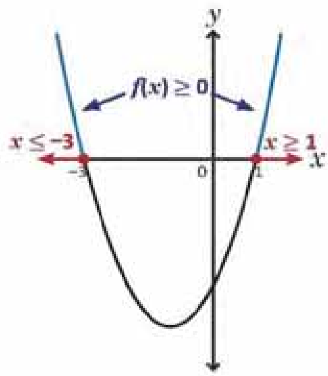
不等式を満たすx のすべての値を求めましょう。

$$x^2 + 2x - 3 \geq 0$$

解法

$f(x) = x^2 + 2x - 3$ とすると、$f(x)$ がゼロより大きいか等しい x の値、すなわち f のグラフが x 軸を切る点、または x 軸より上にある点を決定しなければなりません。x 軸との交点は、二次方程式 $f(x) = 0$ を解くことで求められます。

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$(x + 3)(x - 1) = 0$$
$$x + 3 = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0$$
$$x = -3 \qquad x = 1$$



f のグラフは、(-3, 0) と (1, 0) の点で x 軸を切断します。x^2 の因数が正の値になると、右図に示されるように放物線は上向きに開きます。

以下のようなことが観察できます。$f(x) \geq 0$ は $x \leq -3$ または $x \geq 1$ で示され、不等式 $x \leq -3$ は区間]-∞, -3] を表し、$x \geq 1$ は区間 [1, +∞[を表します。解 $x \leq -3$ または x ≥ 1 は、次の区間を用いて次のように表せます。

$$x \in \,]-\infty, -3] \cup [1, \infty[$$

シンボル "U" は、x の値が第 1 区間または第 2 区間にあることを示しています。

一般的に

$ax^2 + bx + c \geq 0$ の形式の不等式を $a > 0$ で解くことは、$ax^2 + bx + c \geq 0$ が真である x のすべての値を求めることを意味します。$f(x) = ax^2 + bx + c$ で示される場合、$f(x) \geq 0$ は、f の放物線が切断されるか、または x 軸より上にあるような x 値をグラフで求めることを意味します。

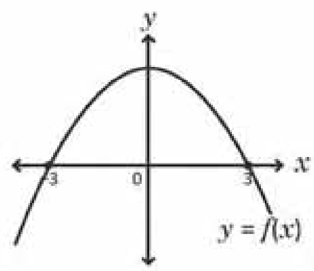
f のグラフが x 軸を 2 点 $(x_1, 0)$ と $(x_2, 0)$で切り、$x_1 < x_2$となる場合、$x \leq x_1$ または $x \geq x_2$ に対して $f(x) \geq 0$ が満たされます。区間を用いて次のように表せます。$x \in \,]-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty[$。

問題

1. それぞれの場合について、不等式を満たす x の値を求めましょう。

a) $x^2 - 4 \geq 0$	b) $4x^2 - 9 \geq 0$	c) $2x^2 + 4x \geq 0$
d) $x^2 - 10x + 21 \geq 0$	e) $x^2 + x - 20 \geq 0$	f) $x^2 + 7x + 6 \geq 0$
g) $x^2 - 4x - 45 \geq 0$	h) $x^2 - 8 \geq 0$	i) $9x^2 - 5 \geq 0$

2. 右図の 二次関数fのグラフを用いて、$f(x) \geq 0$ を満たす x の値を求めましょう。



達成の目安

3.7 $f(x) \geq 0$ の形式の不等式を解きましょう。この場合、二次関数 f は上向きに開いた放物線で、x 軸を 2 点で切断しています。

学習の流れ

二次関数 $f(x) \geq 0$ の不等式を解釈するために授業 3.6 の内容を活用します。生徒が「導入問題」を解くのにとても苦労している場合は、教師は「解答」を段階的に教え、説明する必要があります。

ねらい

二次不等式を一つずつ解いていきます。この授業では、$ax^2 + bx + c \geq 0$ の形式の不等式のみを解いていきますが、ここで $a > 0$ と方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ は 2 つの実解を持ちます。

問題の解答：

1a) $f(x) = x^2 - 4$ とすると、f のグラフと x 軸との交点は、$f(x) = 0$ を解くことで求められます。

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$$
$$x = \pm 2$$

f のグラフは、(−2, 0) と (2, 0) の点で x 軸を切断します。グラフは上向きに開いており、$x \leq -2$ または $x \geq 2$ の場合に不等式 $f(x) = x^2 - 4 \geq 0$ が実現するので、区間を用いて次のように表せます。

$$x \in]-\infty, -2] \cup [2, \infty[.$$

1b) $f(x) = 4x^2 - 9$ とすると、1a) と同様に、方程式 $f(x) = 0$ が解けます。

$$4x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{4}$$
$$x = \pm\frac{3}{2}$$

グラフは上向きに開いており、$x \leq -\frac{3}{2}$ または $x \geq \frac{3}{2}$ の場合に不等式 $f(x) = 4x^2 - 9 \geq 0$ が実現するので、区間を用いて次のように表せます。

$$x \in \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right[$$

1c) $f(x) = 2x^2 + 4x$ とすると、方程式 $f(x) = 0$ が解けま

$$2x^2 + 4x = 0 \Rightarrow 2x(x + 2) = 0$$
$$2x = 0 \quad \text{又は} \quad x + 2 = 0$$
$$x = 0 \qquad\qquad x = -2$$

グラフは上向きに開いており、$x \leq -2$ または $x \geq 0$ の場合に不等式 $f(x) = 2x^2 + 4x \geq 0$ が実現するので、区間を用いて次のように表せます。

$$x \in]-\infty, -2] \cup [0, \infty[$$

1d) $f(x) = x^2 - 10x + 21$ とすると、方程式 $f(x) = 0$ が解けます。

$$x^2 - 10x + 21 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 7) = 0$$
$$x - 3 = 0 \quad \text{又は} \quad x - 7 = 0$$
$$x = 3 \qquad\qquad x = 7$$

グラフは上向きに開いており、$x \leq 3$ または $x \geq 7$ の場合に不等式 $f(x) = x^2 - 10x + 21 \geq 0$ が実現するので、区間を用いて次のように表せます

$$x \in]-\infty, 3] \cup [7, \infty[$$

1e) $f(x) = x^2 + x - 20$ とすると、方程式 $f(x) = 0$ が解けます。

$$x^2 + x - 20 = 0 \Rightarrow (x + 5)(x - 4) = 0$$
$$x + 5 = 0 \quad \text{又は} \quad x - 4 = 0$$
$$x = -5 \qquad\qquad x = 4$$

グラフは上向きに開いており、$x \leq -5$ または $x \geq 4$ の場合に不等式 $f(x) = x^2 + x - 20 \geq 0$ が実現するので、区間を用いて次のように表せます。

$$x \in]-\infty, -5] \cup [4, \infty[$$

1f) $f(x) = x^2 + 7x + 6$ とすると、方程式 $f(x) = 0$ が解けます。

$$x^2 + 7x + 6 = 0 \Rightarrow (x + 6)(x + 1) = 0$$
$$x + 6 = 0 \quad \text{又は} \quad x + 1 = 0$$
$$x = -6 \qquad\qquad x = -1$$

グラフは上向きに開いており、$x \leq -6$ または $x \geq -1$ の場合に不等式 $f(x) = x^2 + 7x + 6 \geq 0$ が実現するので、区間を用いて次のように表せます。

$$x \in]-\infty, -6] \cup [-1, \infty[$$

1g) グラフは上向きに開いており、$x \leq -5$ または $x \geq 9$ の場合に不等式 $x^2 - 4x - 45 \geq 0$ が実現するので、区間を用いて次のように表せます。

$$x \in]-\infty, -5] \cup [9, \infty[.$$

1h) $x \leq -2\sqrt{2}$ または $x \geq 2\sqrt{2}$ の場合に $x^2 - 8 \geq 0$ が実現するので、区間を用いて次のように表せます。

$$x \in]-\infty, -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}, \infty[$$

1i) $x \leq -\frac{\sqrt{5}}{3}$ または $x \geq \frac{\sqrt{5}}{3}$ の場合に不等式 $9x^2 - 5 \geq 0$ が実現するので、区間を用いて次のように表せます。

$$x \in \left]-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{5}}{3}, \infty\right[.$$

2. $f(x) \geq 0$ において、$-3 \leq x \leq 3$ が成り立つので、区間を用いて $x \in [-3, 3]$ と表すことができます。

3.8 二次不等式 $ax^2 + bx + c \geq 0$, $a > 0$、第 2 部

導入問題

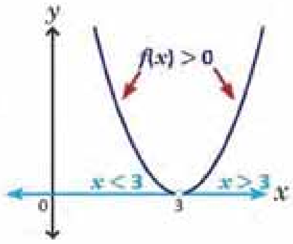
不等式を満たすx のすべての値をそれぞれ求めましょう。

a) $x^2 - 6x + 9 > 0$　　　　b) $x^2 - 2x + 2 > 0$

解法

a) $f(x) = x^2 - 6x + 9$ とすると、前回の授業と同様に、$f(x) = x^2 - 6x + 9 > 0$ を解くことは、f のグラフが x 軸の上にある x の値を見つけることと同じです。今回は厳密な不等式なので、$f(x) = 0$ の点は含まれませんが、x 軸との交点を見つける必要があります。

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 &= 0 \\ (x-3)^2 &= 0 \\ x - 3 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$



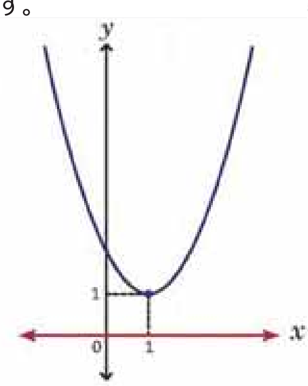
f のグラフは、頂点 (3, 0) で x 軸を切断しており、右図のように上向きに開く放物線です。次のを満たします。$f(x)$ は 3 と異なるどのような実数xに対しても正です。

したがって、$x < 3$ または $x > 3$。区間を用いて次のように表せます。

$$x \in]-\infty, 3[\cup]3, \infty[.$$

b) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ とすると、f のグラフと x 軸の交点を求める時、次の式が得られます。

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$



この方程式は実数の解がありません。$a(x-h)^2 + k$ の形になるように完成させると、次のような式が得られます。

$$\begin{aligned} &= \left[x^2 - 2x + \left(\tfrac{2}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{2}{2}\right)^2\right] + 2 \\ &= (x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + 2 \\ &= (x - 1)^2 + 1 \end{aligned}$$

この関数グラフは右図で示すような頂点が (1, 1) にある上に向かって開いた放物線グラフです。グラフ全体が x 軸上にあるので、すべての実数 x について $f(x) > 0$ となります。

一般的に

不等式 $ax^2 + bx + c > 0$, $a > 0$ が与えられたとき、$f(x) = ax^2 + bx + c$ で表されます。

1. もし f のグラフが頂点 $(h, 0)$ でのみ x 軸を切断するならば、$x < h$ または $x > h$ に対して $f(x) > 0$ となります。区間を用いて次のように表せます。$x \in]-\infty, h[\cup]h, \infty[$。
2. もし f のグラフが x 軸を切らないならば、すべての実数 x に対して $f(x) > 0$ となり、つまり f のグラフは x 軸の上にあります。

問題

それぞれの場合について、不等式を満たす x の値を求めましょう。

a) $2x^2 > 0$　　　　b) $x^2 - 4x + 6 > 0$　　　　c) $x^2 + 4x + 4 > 0$

d) $x^2 - 14x + 49 \geq 0$　　　　e) $x^2 + 2x + 3 \geq 0$　　　　f) $\frac{1}{3}x^2 \geq 0$

達成の目安

3.8 $f(x) \geq 0$ の形式の不等式を解きましょう。この場合、二次関数fは上向きに開いた放物線で、x 軸を 1 点で切断するか、接点がありません。

学習の流れ

$ax^2 + bx + c \geq 0$ の形式の二次不等式の解が続きます。この授業で、方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ は、実数の解を 1 つ持つか、1つも持ちません。

ねらい

前の授業と同様に、問題では、関数のグラフを書く必要は無く、不等式を解くために「一般的に」で説明されている条件を使用します。

問題の解答：

a) $f(x) = 2x^2$ とすると、f のグラフと x 軸との交点は頂点 (0, 0) にあり、グラフは上向きに開きます。したがって、$x < 0$ または $x > 0$ の場合に不等式 $f(x) = 2x^2 > 0$ となるので、区間を用いて次のように表せます。

$$x \in]-\infty, 0[\cup]0, \infty[.$$

また、次のような推論も可能です。$x = 0$ なら $2x^2 = 0$、0 以外のあらゆる実数において $2x^2$ は常に正の値となります。したがって、$x < 0$ または $x > 0$ の場合に不等式$2x^2 > 0$ が成り立ちます。

b) $f(x) = x^2 - 4x + 6$ とすると、f のグラフの頂点は (2, 2)、つまり第 1 象限にあります。さらに、放物線は上向きに開いているため、x 軸を切断しません。そうすると、すべての実数 x に対して不等式 $f(x) = x^2 - 4x + 6 > 0$ が成り立ちます。

また、次のような推論も可能です：$f(x) = x^2 - 4x + 6$ とすると、x 軸との交点を求めるには、$x^2 - 4x + 6 = 0$ の式を解きます。しかし、判別値を計算すると次の結果になります。

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(6) = 16 - 24 = -8.$$

つまり、$\Delta < 0$ の場合、この方程式には実解がないので、グラフは x 軸を切断しません。f の放物線が上向きに開いているので、すべての実数 x に対して不等式 $x^2 - 4x + 6 > 0$ が成り立ちます。

c) $f(x) = x^2 + 4x + 4$ とすると、f のグラフと x 軸との交点は頂点 (−2, 0) にあり、グラフは上向きに開きます。したがって、$x < -2$ または $x > -2$ の場合に不等式 $x^2 + 4x + 4 > 0$ となるので、区間を用いて次のように表せます。

$$x \in]-\infty, -2[\cup]-2, \infty[.$$

d) $f(x) = x^2 - 14x + 49$ とすると、f のグラフと x 軸との交点は頂点 (7, 0) にあり、グラフは上向きに開きます。また、すべての実数 x に対して不等式 $f(x) = x^2 - 14x + 49 \geq 0$ が成り立ちます。

e) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ とすると、関数のグラフの頂点は (−1, 2) であり、第 2 象限に位置し、放物線が上向きに開いているので、x 軸を切断しません。また、すべての実数 x に対して不等式 $f(x) = x^2 + 2x + 3 \geq 0$ が成り立ちます。

f) $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ とすると、関数のグラフの頂点は (0, 0) にあり、上向きに開きます。また、すべての実数 x に対して不等式 $\frac{1}{3}x^2 \geq 0$ が成り立ちます。

3.9 二次不等式 $ax^2 + bx + c \le 0, a > 0$

導入問題

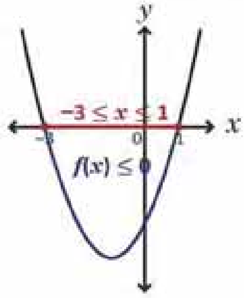
不等式を満たす x のすべての値をそれぞれ求めましょう。

前回の授業のグラフを使用してください。

a) $x^2 + 2x - 3 \le 0$　　b) $x^2 - 6x + 9 \le 0$　　c) $x^2 - 2x + 2 < 0$

解法

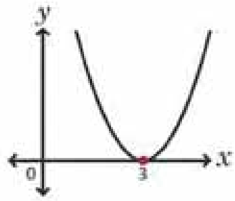
a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ とすると、ここで、$f(x) = 0$ の点を含めて、f のグラフが x 軸より下にある x 値を求めましょう。



右図に示された関数の放物線で、$-3 \le x \le 1$ ならば、$f(x) \le 0$ であることが分かります。区間を用いて次のように表せます。

$$x \in [-3, 1].$$

b) $f(x) = x^2 - 6x + 9$ とすると、前回の授業では右のグラフが示すように、$f(x) = (x - 3)^2$ に達します。$f(x)$がゼロ以下になるxの値を見つけなければなりません。関数の放物線は常に x 軸より上にあり、放物線の頂点では0に等しくなります。そこで、不等式は次のようになります。



$$f(x) = (x - 3)^2 \le 0$$

$x = 3$ の時のみ成り立ちます。

c) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ とすると、前回の授業では、すべての実数 x について $f(x) > 0$、つまり、グラフが完全に x 軸の上にあると結論づけられました。したがって、$f(x) = x^2 - 2x + 2 < 0$ には解がありません。

一般的に

$ax^2 + bx + c \le 0$ の形式の不等式を $a > 0$ で解くことは、$ax^2 + bx + c \le 0$ が真である x のすべての値を求めることを意味します。$f(x) = ax^2 + bx + c$ で示される場合、$f(x) \le 0$ は、f の放物線が切断されるか、または x 軸より上にあるような x 値をグラフで求めることを意味します。したがって、関数グラフの交点は、次の場合に x 軸上にあります。

1. f のグラフが x 軸を 2 点 $(x_1, 0)$ と $(x_2, 0)$ で切り、$x_1 < x_2$ となる場合、$x_1 \le x \le x_2$ に対して $f(x) \le 0$ が成り立つ。区間を用いて次のように表せます。 $x \in [x_1, x_2]$。
2. もし f のグラフが頂点 $(h, 0)$ でのみ x 軸を切断するならば、$f(x) \le 0$ は $x = h$ の場合にのみ成り立ちます。
3. もし f のグラフが x 軸を切断しない場合、$f(x) \le 0$ は解を持ちません。

$ax^2 + bx + c < 0$ の形式の不等式において $f(x) = 0$ の点を含めてはいけません。2 の場合、$f(x) < 0$ には解がありません。

問題

それぞれの場合について、不等式を満たす x の値を求めましょう。

a) $x^2 - 4 \le 0$　　b) $x^2 + 2x \le 0$　　c) $x^2 - 10x + 21 < 0$

d) $x^2 + 8x + 15 < 0$　　e) $2x^2 \le 0$　　f) $x^2 - 10x + 25 < 0$

g) $x^2 - 4x - 3 \le 0$　　h) $x^2 + 2x - 8 < 0$　　i) $x^2 + 8 \le 0$

達成の目安

3.9 $f(x) \leq 0$ の形式の不等式を解きましょう。この場合、二次関数 f は上向きに開いた放物線です。

学習の流れ

$ax^2 + bx + c \leq 0$ の形式の二次不等式を解きます。ここで、a は正の実数です。$f(x) = ax^2 + bx + c$ とすると、授業で出題される問題では、f のグラフは、x 軸との交点を 2 つか 1 つ持つか、もしくは交点を全く持ちません。

ねらい

前の授業と同様に、問題では、関数のグラフを書く必要は無く、不等式を解くために「一般的に」で説明されている条件を使用します。

問題の解答：

a) $f(x) = x^2 - 4$ とすると、x 軸との交点は $(-2, 0)$ と $(2, 0)$ であり、放物線は上に向かって開いています。そうすると、$f(x) = x^2 - 4 \leq 0$ は、区間 $-2 \leq x \leq 2$ の場合に成立します。

$$x \in [-2, 2].$$

b) $f(x) = x^2 + 2x$ とすると、x 軸との交点は $(-2, 0)$ と $(0, 0)$ であり、放物線は上に向かって開いています。そうすると、$f(x) = x^2 + 2x \leq 0$ は $-2 \leq x \leq 0$ の場合に成立し、区間を用いて次のように表せます。

$$x \in [-2, 0].$$

c) $f(x) = x^2 - 10x + 21$ とすると、x 軸との交点は $(3, 0)$ と $(7, 0)$ であり、放物線は上に向かって開いています。そうすると、$f(x) = x^2 - 10x + 21 < 0$ は、$3 < x < 7$ の場合に成立し、区間を用いて次のように表せます。

$$x \in]3, 7[.$$

d) $f(x) = x^2 + 8x + 15$ とすると、x 軸との交点は $(-5, 0)$ と $(-3, 0)$ であり、放物線は上に向かって開いています。そうすると、$f(x) = x^2 + 8x + 15 < 0$ は、$-5 < x < -3$ の場合に成立し、区間を用いて次のように表せます。

$$x \in]-5, -3[.$$

e) $f(x) = 2x^2$ とすると、x 軸との交点は $(0, 0)$ であり、放物線は上に向かって開いています。そうすると、$f(x) = 2x^2 \leq 0$ は $x = 0$ で成立します。

f) $f(x) = x^2 - 10x + 25$ とすると、x 軸との交点は $(5, 0)$ であり、放物線は上に向かって開いています。そうすると、不等式 $f(x) = x^2 - 10x + 25 < 0$ には解がありません。

g) $f(x) = x^2 - 4x - 3$ とすると、x 軸との交点は $(2 - \sqrt{7}, 0)$ と $(2 + \sqrt{7}, 0)$ で、放物線は頂点に向かって開いてます（交点は一般式を用いて 二次方程式 $x^2 - 4x - 3 = 0$ を解くことで求められます）。そうすると、不等式 $f(x) = x^2 - 4x - 3 \leq 0$ は、$2 - \sqrt{7} \leq x \leq 2 + \sqrt{7}$ の場合に成立し、区間を用いて次のように表せます。

$$x \in [2 - \sqrt{7}, 2 + \sqrt{7}].$$

h) $f(x) = x^2 + 2x - 8$ とすると、x 軸との交点は $(-4, 0)$ と $(2, 0)$ であり、放物線は上に向かって開いています。そうすると、$f(x) = x^2 + 2x - 8 < 0$ は、$-4 < x < 2$ の場合に成立し、区間を用いて次のように表せます。

$$x \in]-4, 2[.$$

i) $f(x) = x^2 + 8$ とすると、関数のグラフの頂点は $(0, 8)$ にあり、放物線は上に向かって開いています。したがって、x 軸との交点がないので、不等式 $f(x) = x^2 + 8 \leq 0$ は解がありません。

3.10 二次不等式、$a < 0$

導入問題

不等式を満たす x のすべての値を求めましょう。

$$-x^2 + 4x - 3 < 0.$$

$a < b$ と $c < 0$ の場合、$ac > bc$

解法

不等式の使用すると、不等式のそれぞれの構成要素に -1 が乗算されるため、「小なり」が「大なり」に変化します。

$$(-x^2 + 4x - 3)(-1) > 0(-1)$$
$$x^2 - 4x + 3 > 0 \qquad \text{------------------} \ (1)$$

不等式(1)の解は前回の授業のように求めます。まず、$f(x) = x^2 - 4x + 3$ と x 軸との交点があります。

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$(x - 1)(x - 3) = 0$$
$$x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0$$
$$x = 1 \qquad\qquad x = 3$$

したがって、$x < 1$ または $x > 3$ の場合、$x^2 - 4x + 3 > 0$ となります。この解は、元の不等式も満たしています。

$$-x^2 + 4x - 3 < 0.$$

したがって、$x \in]-\infty, 1[\cup]3, \infty[$

一般的に

以下のような不等式において：

a) $ax^2 + bx + c \geq 0$　　b) $ax^2 + bx + c \leq 0$　　c) $ax^2 + bx + c > 0$　　d) $ax^2 + bx + c < 0$

a が 0 以外の実数である場合、それらは未知数を持つ**二次不等式**と呼ばれます。
もし $a > 0$ の場合、その解は授業 3.7, 3.8, 3.9 のように求めることができます。$a < 0$ の場合、不等式の両方の構成要素に -1 を掛けて、授業 3.7, 3.8, 3.9 のように求めます。

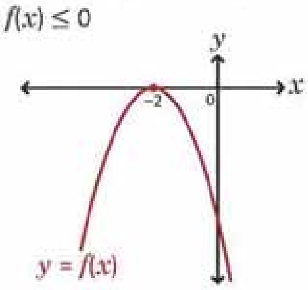
問題

1. それぞれの場合について、不等式を満たす x の値を求めましょう。

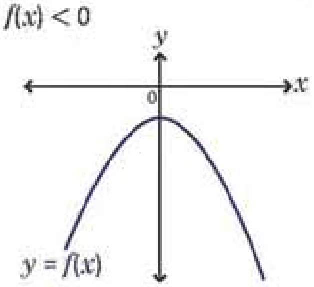
a) $-x^2 + 2x + 15 \leq 0$　　b) $-(x + 3)^2 \leq 0$　　c) $-x^2 + 1 \geq 0$
d) $-x^2 - 6x - 5 \leq 0$　　e) $-2x^2 + 4x - 3 > 0$　　f) $-x^2 + 8x - 16 \geq 0$
g) $-x^2 - 4x - 4 < 0$　　h) $-2x^2 - 1 > 0$　　i) $-x^2 + 5 > 0$

2. それぞれの場合の f のグラフを用いて、不等式を満たす x の値を求めましょう。

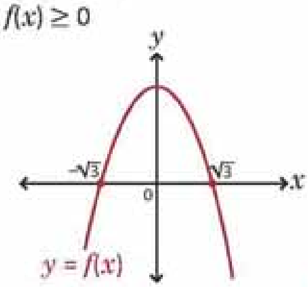
a) $f(x) \leq 0$



b) $f(x) < 0$



c) $f(x) \geq 0$



達成の目安

3.10 不等式の特性を適用して、因数 x^2 が負である二次不等式の解を求めましょう。

学習の流れ

この授業では、因数 x^2 が負である二次不等式の解を求めます。不等式の性質を利用し、構成要素に負の数を掛け算し、前回の授業で勉強した方法を用います。

ねらい

問題 1 では、関数のグラフを書く必要は無く、不等式を解くために「一般的に」で説明されている条件を使用します。

つまずきやすい点

因数 x^2 の記号を変えずに、それぞれの関数のグラフを用いて、二次不等式が x 軸の上または下に位置する区間を求めることにより、（問題 2 と同様に）二次不等式を解くことができます。ただし、x^2 の因数が正の場合はより計算が容易になります。これは、変動表を用いる授業でわかります。

問題の解答：

1a) 両方の構成要素に -1 を掛けると、$x^2 - 2x - 15 \geq 0$ になります。$f(x) = x^2 - 2x - 15$ とすると、方程式 $f(x) = 0$ の解は $x = -3$ と $x = 5$ であり、f のグラフが上に向かって開いているので、$f(x) \geq 0$ は $x \leq -3$ または $x \geq 5$ の場合に満たされます。したがって、次の場合には $-x^2 + 2x + 15 \leq 0$ です。

$$x \in]-\infty, -3] \cup [5, \infty[.$$

1b) 両方の構成要素に –1 を掛けると、$(x + 3)^2 \geq 0$ になります。$f(x) = (x + 3)^2$ の場合、グラフは $(-3, 0)$ に頂点を持つ上に向かって開いた放物線になります。そうすると、$f(x) \geq 0$はすべての実数 x に対して成り立ちます。したがって、次の場合に $-(x + 3)^2 \leq 0$ となります。

$$x \in \mathbb{R}.$$

1c) 両方の構成要素に –1 を掛けると、$x^2 - 1 \leq 0$ になります。$f(x) = x^2 - 1$ とすると、方程式 $f(x) = 0$ の解は
$x = -1$ と $x = 1$で、f のグラフが上に向かって開いているので、$f(x) \leq 0$ は $-1 \leq x \leq 1$ の場合に満たされます。したがって、次の場合に$-x^2 + 1 \geq 0$ です。

$$x \in [-1, 1].$$

1d) 両方の構成要素に –1 を掛けると、$x^2 + 6x + 5 \geq 0$ になります。$f(x) = x^2 + 6x + 5$ とすると、$f(x) = 0$ の方程式の解は $x = -5$ と $x = -1$ です。f のグラフが上向きに開かれているので、$f(x) \geq 0$ は $x \leq -5$ または $x \geq -1$ で成り立ちます。したがって、次の場合に $-x^2 - 6x - 5 \leq 0$ となります。

$$x \in]-\infty, -5] \cup [-1, \infty[.$$

1e) $-2x^2 + 4x - 3 = -2(x - 1)^2 - 1$、したがって不等式 $-2x^2 + 4x - 3 > 0$ は解を持ちません。

1f) 不等式 $-x^2 + 8x - 16 \geq 0$ は $x = 4$ である場合にのみ成り立ちます。

1g) 不等式 $-x^2 - 4x - 4 < 0$ は、$x < -2$ または $x > -2$、つまり、$x \in]-\infty, -2[\cup]-2, \infty[$ で成り立ちます。

1h) 不等式 $-2x^2 - 1 > 0$ には解がありません。

1i) 不等式$-x^2 + 5 > 0$ は、$-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$ で成り立ち、つまり $x \in]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[$ になります。

2a) f 関数のグラフは下向きに開いた放物線で、x 軸を $(-2, 0)$ で切断します。そうすると、$f(x) \leq 0$ はすべての実数 x に対して成り立ちます。

2b) f 関数のグラフは下向きに開いた放物線で、x 軸を切断しません。そうすると、$f(x) < 0$はすべての実数 x に対して成り立ちます。

2c) f 関数のグラフは下向きに開いた放物線で、x 軸を $(-\sqrt{3}, 0)$ と $(\sqrt{3}, 0)$で切断します。そうすると、$f(x) \geq 0$ は $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$ 、つまり $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ で成り立ちます。

3.11 変動表、第 1 部*

導入問題

次の二次不等式を解きなさい。

$$2x^2 - x - 3 > 0$$

解法

$2x^2 - x - 3$ を二項式の積として書きます。

$$2x^2 - x - 3 = (x + 1)(2x - 3)$$

不等式は $(x + 1)(2x - 3) > 0$ となります。この積が 0 より大きくなるためには、二項式の両方が正または負のいずれかでなければなりません。実数を区間に分割して、各区間で $x + 1$ と $2x - 3$ を決定する必要があります。考慮すべき区間は次のように三項式の根に基づいています。

$$(x + 1)(2x - 3) = 0$$
$$x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad 2x - 3 = 0$$
$$x = -1 \qquad\qquad x = \frac{3}{2}$$

下のような表が構築されます。上の行は数字の行を表し、三項式の値 -1 と $\frac{3}{2}$ が配置され、因数がゼロになる縦線上にゼロが配置されます。

	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		∞
$x + 1$			0				
$2x - 3$					0		
$(x + 1)(2x - 3)$							

区間内の各因数の記号を決定するには、区間内の数値を一つ取り、それを因数で評価します。例えば、 -2 は区間 $]-\infty, -1[$ に属します。そうすると、$x = -2$ の場合、1 番目の因数は $-2 + 1 = -1$で負、2 番目の因数は $2(-1) - 3 = -5$ で負となります。因数の記号を表に記載します。

	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		∞
$x + 1$		−	0				
$2x - 3$		−			0		
$(x + 1)(2x - 3)$							

また、一次不等式 $x + 1 > 0$ を解いて、$x + 1$ が正である区間と負である区間を求めることもできます。

他の区間についても同様に行います;そうすると、表は以下の通りになります。

	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		∞
$x + 1$		−	0	+		+	
$2x - 3$		−		−	0	+	
$(x + 1)(2x - 3)$							

そして、各列の因数記号を乗算します。例えば、区間]−∞, −1[では、因数 $x+1$ と $2x-3$ の記号はそれぞれ "−"と "− "なので、乗算すると結果は "+“ になります。

	$-\infty$	-1		$\frac{3}{2}$	∞
$x+1$	−	0	+		+
$2x-3$	−		−	0	+
$(x+1)(2x-3)$	+	0	−	0	+

線の上の 0 は、因数の積が 0 であることを示しています。$(x+1)(2x-3)>0$ のとき、x の値は積が正の値になります。

よって、 $2x^2-x-3=(x+1)(2x-3)>0$ si $x \in]-\infty, -1[\cup]\frac{3}{2}, \infty[$.

まとめ

x_1 と x_2 が多項式 ax^2+bx+c の根で、$x_1<x_2$ とすると、 $ax^2+bx+c>0$ または $ax^2+bx+c<0$ の形の不等式は次のように解きます。

1. $ax^2+bx+c=pq$ と書きます。ここで、p と q は、それぞれ x_1 と x_2 を根とする線形二項式です。
2. 実数は、区間]-∞、x_1[、]x_1、x_2[と]x_2、∞[に分かれています。
3. n が 2 で述べた 3 つの区間のいずれかに属する数で、$x=n$ を評価するときに p または q の値が正または負であれば、p または q は区間全体にわたって正または負になります。
4. p と q の記号は各区間で乗算されています。解は、$ax^2+bx+c>0$ の場合は積が正である区間、$ax^2+bx+c<0$ の場合は積が負である区間となります。

導入問題の解答で作成された表を**変動表**と呼びます。

問題

1. 以下の不等式を解きましょう。

a) $2x^2-x-1>0$	b) $3x^2+8x-3<0$	c) $3x^2-8x+4<0$
d) $2x^2+9x+4>0$	e) $-3x^2-4x+15>0$	f) $-4x^2+7x-3<0$
g) $6x^2+x-1<0$	h) $x^2-4x+4>0$	i) $4x^2-1<0$

2. アントニオは衣料品店を経営しています。シャツの販売による 1 日のドルの利益が関数 $f(x)=x^2-14x-32$ で計算できる推定しました。ここで x は 1 日に販売されたシャツの数です。赤字にならずに利益を出すために、アントニオは何枚のシャツを売らないといけませんか?

達成の目安

3.11 変動表を使って二次不等式を解決しましょう。

学習の流れ

この授業では、$ax^2 + bx + c > 0$ または $ax^2 + bx + c < 0$ の形式の二次不等式を解くために、変動表を使用します。生徒が「導入問題」を解くのに苦労している場合は、教師は「解答」を段階的に教え、説明する必要があります。

つまずきやすい点

二次不等式の解を変動表を使い、再度説明する為に問題 1a) を解くことができます。

問題の解答：

1a) $2x^2 - x - 1 = (2x + 1)(x - 1)$ となり、三項式の根は $x = -\frac{1}{2}$ と $x = 1$ となります。

	$-\infty$ ～ $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ ～ 1	1	1 ～ ∞
$2x + 1$	−	0	+		+
$x - 1$	−		−	0	+
$(2x + 1)(x - 1)$	+	0	−	0	+

したがって $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup]1, \infty[$ の場合、$2x^2 - x - 1 > 0$

1b) $3x^2 + 8x - 3 = (x + 3)(3x - 1)$ となり、三項式の根は $x = -3$ と $x = \frac{1}{3}$ となります。

	$-\infty$ ～ -3	-3	-3 ～ $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ ～ ∞
$x + 3$	−	0	+		+
$3x - 1$	−		−	0	+
$(x + 3)(3x - 1)$	+	0	−	0	+

したがって $x \in \left]-3, \frac{1}{3}\right[$ の場合、$3x^2 + 8x - 3 < 0$

1c) 不等式 $3x^2 - 8x + 4 < 0$ は、$x \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[$ で成り立ちます。

1d) 不等式 $2x^2 + 9x + 4 > 0$ は、$x \in]-\infty, -4[\cup \left]-\frac{1}{2}, \infty\right[$ で成り立ちます。

1e) 不等式 $-3x^2 - 4x + 15 > 0$ は、$x \in \left]-3, \frac{5}{3}\right[$ で成り立ちます。

1f) 不等式 $-4x^2 + 7x - 3 < 0$ は、$x \in \left]-\infty, \frac{3}{4}\right[\cup]1, \infty[$ で成り立ちます。

1g) 不等式 $6x^2 + x - 1 < 0$ は、$x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right[$ で成り立ちます。

1h) 不等式 $x^2 - 4x + 4 > 0$ は、$x \in]-\infty, 2[\cup]2, \infty[$ で成り立ちます。

1i) 不等式 $4x^2 - 1 < 0$ は、$x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ で成り立ちます。

2. 収益を得るということは、$f(x)$ が 0 よりも大きくなければならないことを意味します。三項式 $x^2 - 14x - 32$ の根は $x = -2$ と $x = 16$。変動表を使って：

	$-\infty$ ～ -2	-2	-2 ～ 16	16	16 ～ ∞
$x + 2$	−	0	+		+
$x - 16$	−		−	0	+
$(x + 2)(x - 16)$	+	0	−	0	+

よって、$x^2 - 14x - 32 > 0$ は、$]-\infty, -2[\cup]16, \infty[$ の場合に成り立ちます。問題の文脈上、マイナスの数値になることは無いので、16 枚以上のシャツを売らなければなりません。

3.11 変動表、第 2 部*

導入問題

次の二次不等式を解きなさい。

$$-6x^2 \geq -11x - 7$$

すべての項を、記号「 ≥ 」の片側に残しておく必要があります。

解法

すべての項を、記号「 ≥ 」の片側に残しておく必要があります。不等式の性質を利用して不等式の両辺に $6x^2$ を足します。

$$\cancel{-6x^2} + \cancel{6x^2} \geq -11x - 7 + 6x^2$$
$$0 \geq 6x^2 - 11x - 7$$

後者が $6x^2 - 11x - 7 \leq 0$ に相当します。三項式は、2 つの線形二項式の積、すなわち：

$$6x^2 - 11x - 7 = (3x - 7)(2x + 1)$$

上記から、多項式 $x = -\frac{1}{2}$ と $x = \frac{7}{3}$ の根を求めます。前回の授業と同様に、多項式が負になる区間を決定するための変動表を作成します。

	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{7}{3}$	∞
$3x - 7$	$-$		$-$	0	$+$
$2x + 1$	$-$	0	$+$		$+$
$(3x - 7)(2x + 1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

記号「≤」は、多項式 $6x^2 - 11x - 7$ が 0 に等しい x の値も考慮すべきであることを示しています。

したがって $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{7}{3}\right]$ の場合 $6x^2 - 11x - 7 = (3x - 7)(2x + 1) \leq 0$ です。この解は、元の不等式も満たしています：

まとめ

二次不等式では、次の性質も成立します。

1. 両辺に実数を足したり引いたりしても、不等式は変化しません。
2. 不等式の両辺に正の実数を掛けたり割ったりしても、不等式は変化しません。
3. 不等式の両辺に負の実数を掛けたり割ったりすると、不等式の方向が変わります。

問題

1. 各ケースについて、次の場合に x の値が見つかる区間を決定しましょう。

a) $6x^2 \geq 11x - 3$　b) $15x^2 + 2x \leq 1$　c) $31x + 15 \geq -10x^2$

d) $3x \geq -20x^2 + 2$　e) $-6x^2 + 23x - 7 \geq 0$　f) $9x^2 - 25 \geq 0$

g) $x^2 - 2 \leq 0$　h) $4x^2 - 3 \leq 0$　i) $x^2 \leq 1 + 2x$

2. x_1 と x_2 を $x_1 < x_2$ の三項式 $x^2 + bx + c$ の根とします。変動表を使うと、不等式 $x^2 + bx + c \leq 0$ の解は $[x_1, x_2]$ であることがわかります。

達成の目安

3.12 不等式の特性を適用し、変動表を使用して二次不等式を解きましょう。

学習の流れ

この授業で紹介する 二次不等式では、まず不等式の性質を利用して、pが 二次三項式である $p \geq 0$ の形にする必要があります（記号 ≤, > と < を含む）。 そして、3.11 の授業で学んだことを応用します。

つまずきやすい点

二次不等式は必ず $ax^2 + bx + c \geq$ （または記号≤, > と <）の形にしてから因数分解することを学生に復習させてください。

問題の解答：

1a) 不等式の性質を利用すると、$6x^2 - 11x + 3 \geq 0$ が導かれます。三項式の根は

$6x^2 - 11x + 3$ は $x = \frac{1}{3}$ と $x = \frac{3}{2}$:

	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{2}$	∞
$3x-1$	−	0	+		+
$2x-3$	−		−	0	+
$(3x-1)(2x-3)$	+	0	−	0	+

そうすると、$x \in \left]-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right[$ の場合

$6x^2 \geq 11x - 3$

1b) 不等式の性質を利用すると、$15x^2 + 2x - 1 \leq 0$ が導かれます。三項式の根は

$15x^2 + 2x - 1$ は $x = -\frac{1}{3}$ と $x = \frac{1}{5}$:

	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{5}$	∞
$3x+1$	−	0	+		+
$5x-1$	−		−	0	+
$(3x+1)(5x-1)$	+	0	−	0	+

そうすると、$x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right]$ の場合

$15x^2 + 2x \leq 1$

1c) 不等式 $31x + 15 \geq -10x^2$ は

$x \in \left]-\infty, -\frac{5}{2}\right] \cup \left[-\frac{3}{5}, \infty\right[$. で成り立ちます。

1d) 不等式 $3x \geq -20x^2 + 2$ は

$x \in \left]-\infty, -\frac{2}{5}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, \infty\right[$. で成り立ちます。

1e) 不等式 $-6x^2 + 23x - 7 \geq 0$ は $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{7}{2}\right]$ で成り立ちます。

1f) 不等式 $9x^2 - 25 \geq 0$ は

$x \in \left]-\infty, -\frac{5}{3}\right] \cup \left[\frac{5}{3}, \infty\right[$ で成り立ちます。

1g) 不等式 $x^2 - 2 \leq 0$ は $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ で成り立ちます。

1h) 不等式 $4x^2 - 3 \leq 0$ は $x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ で成り立ちます。

1i) 不等式 $x^2 \leq 1 + 2x$ は $x \in [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$ で成り立ちます。

2. x_1 と x_2 が三項式 $x^2 + bx + c$ の根の場合、$x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$となります。不等式 $x^2 + bx + c \leq 0$ が満たされる x の値は、≤ 0、つまり、$(x - x_1)(x - x_2) \leq 0$ を求めなければなりません。次のことが分かります。

- $x < x_1$ も $x < x_1$ の場合、$x - x_1$ と $x - x_2$は負の数になります。
- $x_1 < x < x_2$ の場合、$x - x_1$ は正の数、$x - x_2$は負の数になります。
- $x_2 < x$ の場合、$x - x_1$ と $x - x_2$ は正の数になります。

	$-\infty$	x_1		x_2	∞
$x-x_1$	−	0	+		+
$x-x_2$	−		−	0	+
$(x-x_1)(x-x_2)$	+	0	−	0	+

したがって、不等式 $x^2 + bx + c \leq 0$ の解は $[x_1, x_2]$ となります。

3.13 これまでの復習

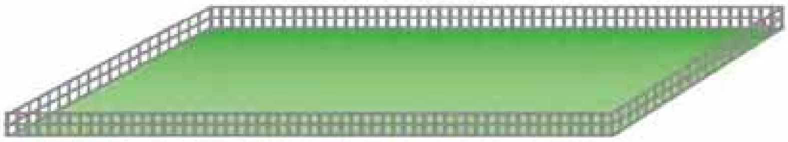
1. それぞれの場合について，関数 f が与えられた区間で増加しているか減少しているかを判断し，$f(x)$ の値がある区間を回答しましょう。

a) $f(x) = -(x+3)^2 - 5; -7 \le x \le -4$　　b) $f(x) = 2(x-2)^2 - 4; -1 \le x \le 1$

2. いずれの場合も、次の場合に $f(x)$ の値がある区間を決定します。

a) $f(x) = -2(x+3)^2 + 7; -4 \le x \le -1$　　b) $f(x) = (x-5)^2 - 8; 1 \le x \le 8$

3. プエルト・エル・トリウンフォ高校では、果物や野菜の消費を促進するために、学校の土地に長方形の畑をつくり、環境保護における価値観や知識の形成に貢献しています。土地をフェンスで囲うために32メートルの網があるとすると、できるだけ多くの面積を得る為には、土地の寸法はどのようにするべきでしょうか？学校の畑の面積はどれだけになるのでしょうか？



4. 仕立て屋で 100 ドルの男性用スーツを製造・販売しています。洋服店が 50 着以上のスーツを注文した場合、注文した数に応じて 0.50 ドル値段が下がります。仕立て屋が最大の利益を出すためには、何着注文すればいいのでしょうか？製造にかかる費用は考慮しません。

5. ミサイルが地面から垂直に上に向かって発射されます。x 秒後に到達した高さ（メートル）を関数で計算できます。

$$f(x) = -5x^2 + 100x.$$

ミサイルが到達する最大の高さと、地面に到達するまでの時間を計算しましょう。

6. 和が 30 に等しく、その 2 乗の和が最小である 2 つの整数を求めましょう。

7. 次の場合の f のグラフと座標軸との交点の座標を求めましょう。

a) $f(x) = (x-3)^2 - 9$　　b) $f(x) = -(x+5)^2 + 4$

c) $f(x) = 2x^2 - 8$　　d) $f(x) = 3x^2 + 4x - 1$

8. 以下の不等式を解きましょう。

a) $x^2 + 2x - 8 \ge 0$　　b) $x^2 - 5x - 24 < 0$

c) $x^2 + 4x + 4 \le 0$　　d) $-\frac{1}{3}x^2 + 2 > 0$

e) $-x^2 - 6x \ge 10$　　f) $2x^2 + 15 < 13x$

g) $-3x^2 - 11x + 4 > 0$　　h) $5x^2 + 3x \le 8$

i) $-4x^2 + 20x - 9 < 0$　　j) $x^2 + 3x - 5 < 0$

達成の目安

3.13 二次関数の応用に対応した問題を解きます。

問題の解答：

1a) $f(x) = -(x+3)^2 - 5$ は、$-7 \le x \le -4$ と $-21 \le f(x) \le -6$ で増加します。

1b) $f(x) = 2(x-2)^2 - 4$ は、$-1 \le x \le 1$ と $-2 \le f(x) \le 14$ で減少します。

2a) $f(x) = -2(x+3)^2 + 7$ とし、$-4 \le x \le -1$ とすると、$-1 \le f(x) \le 7$ になります。

2b) $f(x) = (x-5)^2 - 8$ と $1 \le x \le 8$ とすると、$-8 \le f(x) \le 8$ になります。

3. フェンスの網が 32 m あるということは、土地の周囲が 32 m でなければならないということです。長方形の形状をしているので、地面の縦の長さ x と横の幅 y のどちらか（両方ともメートル単位で測定）。$2x + 2y = 32$、すなわち $y = 16 - x$ とします。長さ x から地形の面積を計算する場合の関数を $f(x)$ とすると、$f(x) = x(16 - x) = -x^2 + 16x$ となります。関数 f は頂点に最大値を持つ。二乗すると $f(x) = -(x-8)^2 + 64$ となります。したがって、可能な限り最大の面積を持つ為には、土地の寸法は縦の長さ 8 m、横の幅 8 mとなり、面積は 64 m^{2}となります。

4. テーラーが作るスーツの数を x とします（50 着以上であること）。注文した数に応じて 0.50 ドル値段が下がるので、その後、各スーツの価格は 100 - $0.5x$ ドルになります。注文したスーツの量 x に基づいて仕立ての利得を計算する関数を $g(x)$ とすると、$g(x) = x(100 - 0.5x) = -0.5x^2 + 100x$ となります。関数 g は頂点に最大値を持つ。二乗すると $g(x) = -0.5(x - 100)^2 + 5000$ となります。そのため、最大の利益を得るためには、仕立屋に 100 着のスーツを注文しなければなりません。

5. 関数 $f(x) = -5x^2 + 100x$ は頂点に最大値を持ちます。二乗すると $f(x) = -5(x-10)^2 + 500$ となります。そうすると、ミサイルが到達する最大の高さは 500 m になります。一方で、地面に到達するということは、距離がゼロに等しくなることなので、すなわち $f(x) = 0$ です。二次方程式 $-5x^2 + 100x = 0$ の解は、$x = 0$ と $x = 20$（一つ目は発射された瞬間に該当）です。すなわち、20 秒後に地面に到達します。

6. x を整数の一つとすると、もう一つは $30 - x$ に等しいです。$f(x)$ が両方の数値の二乗の和を計算する関数であるとすると、$f(x) = x^2 + (30 - x)^2 = 2x^2 - 60x + 900$ となります。この関数は頂点で最小値となり、二乗すると $f(x) = 2(x - 15)^2 + 450$ となります。したがって、両方の整数は 15 に等しくなければなりません

7a) $f(x) = (x-3)^2 - 9$ のグラフと座標軸との交点は、(0, 0) と (6, 0) です。

7b) $f(x) = -(x+5)^2 + 4$ のグラフと座標軸との交点は、(0, –21) と (–7, 0) と (–3, 0) です。

7c) $f(x) = 2x^2 - 8$ のグラフと座標軸との交点は、(0, –8) と (–2, 0) と (2, 0) です。

7d) $f(x) = 3x^2 + 4x - 1$ のグラフと座標軸との交点は、(0, –1) と $\left(-\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3}, 0\right)$ と $\left(-\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}, 0\right)$ です。

8a) $x^2 + 2x - 8 \ge 0$ は、$x \in]-\infty, -4] \cup [2, \infty[$. の場合に成り立ちます。

8b) $x^2 - 5x - 24 < 0$ は、$x \in]-3, 8[$ の場合に成り立ちます。

8c) $x^2 + 4x + 4 \le 0$ は、$x = -2$ の場合に成り立ちます。

8d) $-\frac{1}{3}x^2 + 2 > 0$ は、$x \in]-\sqrt{6}, \sqrt{6}[$ の場合に成り立ちます。

8e) $-x^2 - 6x \ge 10$ には解がありません。

8f) $2x^2 + 15 < 13x$ は、$x \in \left]\frac{3}{2}, 5\right[$ の場合に成り立ちます。

8g) $-3x^2 - 11x + 4 > 0$ は、$x \in \left]-4, \frac{1}{3}\right[$ の場合に成り立ちます。

8h) $5x^2 + 3x \le 8$ は、$x \in \left[-\frac{8}{5}, 1\right]$ の場合に成り立ちます。

8i) $x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{9}{2}, \infty\right[$ の場合に $-4x^2 + 20x - 9 < 0$が成り立ちます。

8j) $x \in \left]-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2}, -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2}\right[$ の場合に $x^2 + 3x - 5 < 0$ が成り立ちます。

レッスン 4 その他の実関数

4.1 関数 $f(x) = x^3$

導入問題

$y = x^3$ の場合：

$x^3 = (x)(x)(x)$

1. 次の表を完成させなさい（少数第二位まで近づける）。

x	−1	−0.8	−0.6	−0.4	−0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	−1										

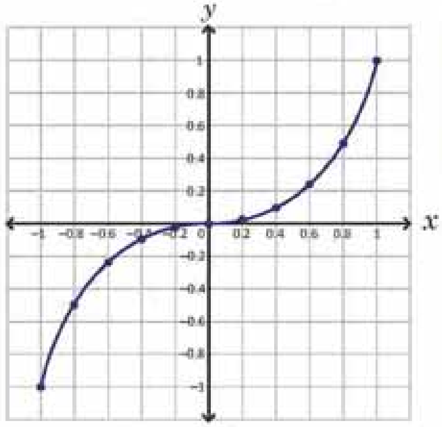
2. 前問で得られた座標 (x, y) を配置しなさい。どのような線が描けますか。

解法

1. y の各値は、x の値にそれ自体を3倍掛けることに等しいです。符号に気をつけなければいけません。
   例えば： $(-1)^3 = (-1)(-1)(-1) = -1$ これに基づくと、表は次のようになります：

x	−1	−0.8	−0.6	−0.4	−0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	−1	−0.51	−0.22	−0.06	−0.01	0	0.01	0.06	0.22	0.51	1

2. こうすると、前に得られた各数点の配置は、右のグラフに示す通りになります。形成された線は直線ではなく、放物線でもありません。



x^3 は数 x の 3 乗で、「xの立方 」とも読みます。

まとめ

$y = x^3$ の方程式は、各実数 x の 3 乗に割り当てたℝ でℝの関数 f にあたります。関数 $f(x) = x^3$ の場合：領域と範囲は実数の集合であり、そのグラフは原点を通過し、すべての領域で増加します。

B における A の関数 x は、集合 A の各要素 x が集合 B の 1 つの要素 y だけを持つことを意味します。もし関数が ℝ で ℝ であれば、x の値は実数であり、対応する $f(x)$ も実数となります。

問題

1. $f(x) = x^3$、次の表を完成させ、点 $(x, f(x))$ を直交平面上に配置しなさい（少数第二位まで近づけます）。
   f のグラフを続けるのに導入問題の問題 1 で見つけたポイントを使いなさい。

x	−2	−1.8	−1.6	−1.4	−1.2	1.2	1.4	1.6	1.8	2
$f(x)$										

2. $x = -1$ と $x = 1$ のときの $f(x) = x^3$ の値にはどのような関係がありますか。それでは、$x = -2$ と $x = 2$ の場合はどうですか。

3. 通常、$x = -m$ や $x = m$ の時、$f(x) = x^3$ の値とはどのような関係がありますか。

達成の目安

4.1 直交平面上に関数の方程式を満たす点を配置して、$f(x) = x^3$ の形式の関数のグラフを作成しなさい。

学習の教材

ボンド紙に描いた座標平面を描いたものを黒板に貼り付けて導入問題の項 2 を解いていきます。

学習の流れ

関数 $y = x^3$ の入力方法は、関数 $y = x$ と $y = x^2$ が提示されたときと似ています。つまり、表を使って特定の値を計算し、そのペア $(x、y)$ を座標平面に配置します。

ねらい

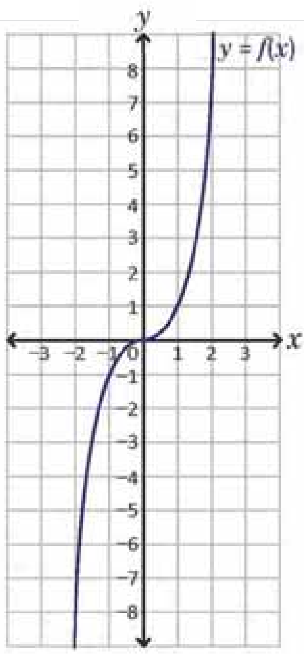
導入問題では $y = x^3$ の形式を使用していますが、結論で関数を定義した後、問題ブロックでは生徒は $f(x) = x^3$ という表記を使用するべきです。

問題の解き方：

1. 表は次のようになります。

x	−2	−1.8	−1.6	−1.4	−1.2	1.2	1.4	1.6	1.8	2
$f(x)$	−8	−5.83	−4.10	−2.74	−1.73	1.73	2.74	4.10	5.83	8

x に対して -2 よりも小さい値が取られる場合、それらの対応する $f(x)$ はより小さくなっていきます。一方、2 よりも大きい値が x に取られた場合、その対応する $f(x)$ は、グラフに示すようにより大きくなっていきます。



2. $f(x) = x^3$ の場合、$f(-1)$ と $f(1)$ が計算されます。$f(-1) = -1$ と $f(1) = 1$、つまり、$f(-1) = -f(1)$ です。似たような形で、$f(-2) = -8$ と $f(2) = 8$ の場合、$f(-2) = -f(2)$ となります。

3. $x = -m$ と $x = m$ の場合、$f(-m) = (-m)^3 = -m^3$ と $f(m) = m^3$ になります。すると、$f(-m) = -f(m)$ であることが検証されます。

問題 2 と問題 3 では、グラフが原点に対して対称であると結論づけられます。

レッスン 4

4.2 関数 $f(x) = ax^3$、$a > 0$

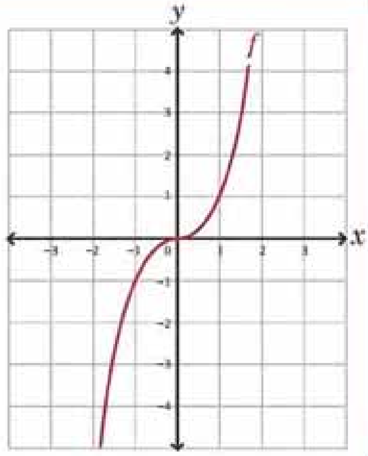
導入問題

$f(x) = x^3$ のグラフから、次に答えなさい。

1. $f(x)$ の値を使って表を完成させ、関数 $g(x) = 2x^3$ と $h(x) = \frac{1}{2}x^3$ をグラフ化します。

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	−8	−3.38	−1	−0.13	0	0.13	1	3.38	8
$g(x)$									
$h(x)$									

2. 関数 f に関して、関数 g と h の類似点と相違点は何ですか。

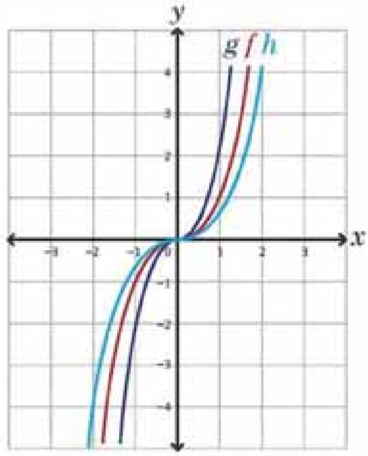


解法

1. $g(x)$ の値は $f(x)$ の値に 2 を掛けた結果であり、$h(x)$ の値は $f(x)$ の値に $\frac{1}{2}$ を掛けた結果です。表は次のようになります。

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	−8	−3.38	−1	−0.13	0	0.13	1	3.38	8
$g(x)$	−16	−6.76	−2	−0.26	0	0.26	2	6.76	16
$h(x)$	−4	−1.69	−0.5	−0.07	0	0.07	0.5	1.69	4

g と h のグラフは右の図のようになります。



2. 関数間の類似点：
   a) 3 つの定義域と域値は $\mathbb{R}$ です。
   b) 3 つの関数のグラフは同じ形をしており、原点を通っています。

関数間の相違点：
a) 原点以外のすべての点が一致しません。
b) もし $x < 0$ であれば、$g(x)$は$f(x)$と$h(x)$ $f(x)$より下であり、$h(x)$ は$f(x)$より上になります。
c) もし $x > 0$ であれば、$g(x)$ は $f(x)$ より上であり、$h(x)$ は $f(x)$ より下になります。

まとめ

$a > 0$ の関数 $g(x) = ax^3$ は、定義域と域値として実数の集合を持ち、すべての定義域で増加します。そのグラフは原点を通り、$f(x) = x^3$ のグラフと同じ形式を持ち、$f(x)$ の値を a で乗算して得られた結果です。

問題

$f(x) = x^3$ のグラフを使って、関数 $g(x) = 3x^3$ と $h(x) = \frac{1}{3}x^3$ をグラフ化しなさい。

導入問題と同じような表を作成しなさい。

ユニット 4

達成の目安

4.2　$f(x) = x^3$ のグラフを用いて、$a > 0$ について $g(x) = ax^3$ の形式の関数をグラフ化しなさい。

学習の教材

ボンド紙に座標平面を描いたものを黒板に貼り付けて導入問題の項 2 を解いていきます（問題群を解くのに使用することもできます）。

学習の流れ

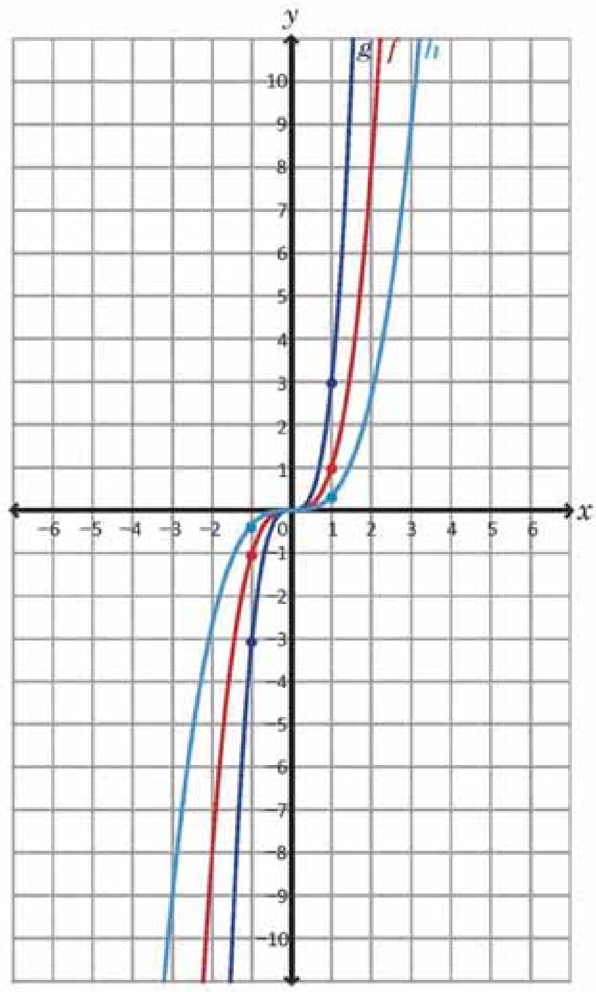
この授業では、$f(x) = x^3$ から $a > 0$ の場合の $g(x) = ax^3$ の形式の関数の特徴を分析します。

問題の解き方：

$f(x) = x^3$ の場合、$g(x) = 3x^3$ と $h(x) = \frac{1}{3}x^3$ とします。$g(x)$ の値は $f(x)$ の値に 3 を掛けた結果であり、$h(x)$ の値は $f(x)$ の値に $\frac{1}{3}$ を掛けた結果です。

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	−8	−3.38	−1	−0.13	0	0.13	1	3.38	8
$g(x)$	×$\frac{1}{3}$ −24	−10.14	−3	−0.39	0	0.39	3	10.14	24
$h(x)$	−2.67	−1.13	−0.33	−0.04	0	0.04	0.33	1.13	2.67

両関数のグラフは次の通りです。



4.3 関数 $f(x) = -ax^3$、$a > 0$

導入問題

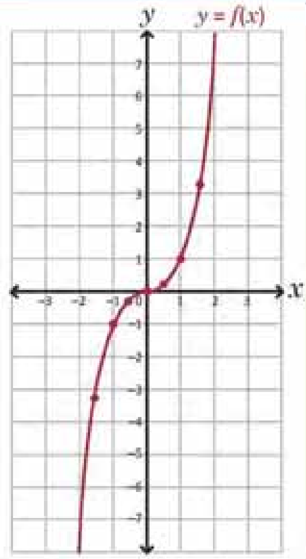
$f(x) = x^3$ のグラフから、次に答えなさい。

1. $f(x)$ の値を使って表を完成させ、関数 $g(x) = -x^3$ をグラフ化しなさい。

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	−8	−3.38	−1	−0.13	0	0.13	1	3.38	8
$g(x)$									

2. 関数 f と g の類似点と相違点は何ですか。

$f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$
の形式の関数は、a が 0 以外の実数である場合は**三次関数**と呼ばれ、$f(x) = ax^3$ は 三次関数の特殊なケースです。



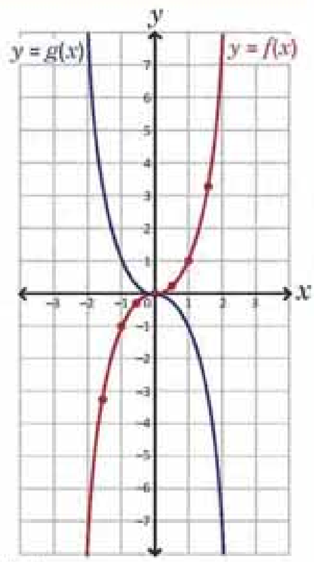
解法

1. $g(x)$ の値は $f(x)$ の値に -1 を乗じた結果であり、表は次のようになります。

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	−8	−3.38	−1	−0.13	0	0.13	1	3.38	8
$g(x)$	8	3.38	1	0.13	0	−0.13	−1	−3.38	−8

×(−1)

f と g のグラフは右の図のようになります。



2. 関数間の類似点：
   a) 双方の定義域と域値は $\mathbb{R}$です。
   b) グラフは同じ形をしており、原点を通っています。

   関数間の相違点：
   a) 原点以外のすべての点が一致しません。
   b) もし $x < 0$ であれば、$g(x)$ は x 軸の上にあり、$f(x)$ は軸の下にあります。
   c) もし $x > 0$ であれば、$g(x)$は x 軸の下にあり、$f(x)$ は軸の上にあります。

まとめ

もし $f(x) = ax^3$ かつ $a > 0$ である場合、$g(x) = -f(x) = -ax^3$ の関数グラフは、**x 軸に関して**、関数 f のグラフに**対称**なグラフとなります。つまり、定義域も値域も実数の集合になり、定義域において常に値が減少する原点を通るグラフとなり、形は関数 f のグラフと同じで、$f(x)$ の値に-1をかけたものになります。

問題

$f(x)$ のグラフを用いて、関数 $g(x)$ のグラフを、それぞれの場合について描きなさい。

a) $f(x) = 2x^3$, $g(x) = -2x^3$　　b) $f(x) = \frac{1}{2}x^3$, $g(x) = -\frac{1}{2}x^3$　　c) $f(x) = 3x^3$, $g(x) = -3x^3$

達成の目安

4.3 $f(x) = x^3$ のグラフを用いて、$a > 0$について、$g(x) = -ax^3$ の形式の関数をグラフ化しなさい。

学習の教材

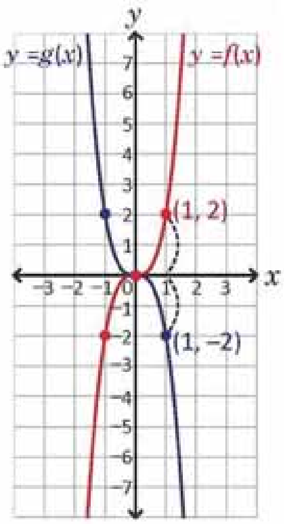
ボンド紙に座標平面を描いたものを黒板に貼り付けて導入問題の項 2 を解いていきます（問題群を解くのに使用することもできます）。

学習の流れ

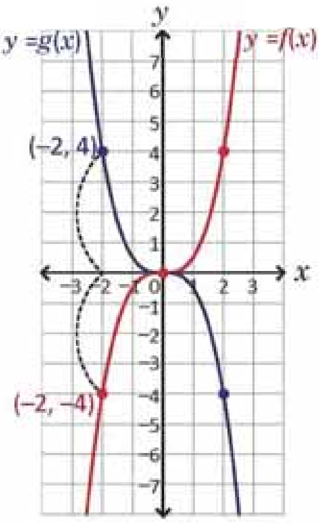
この授業では、$f(x) = x^3$ から $a > 0$ の場合の $g(x) = -ax^3$ の形式の関数の特徴を分析します。問題ブロックの関数 $f(x)$ は、4.2 の授業でグラフ化されているので、これらの問題を解くのに使うことができることを確認します。

問題の解き方：

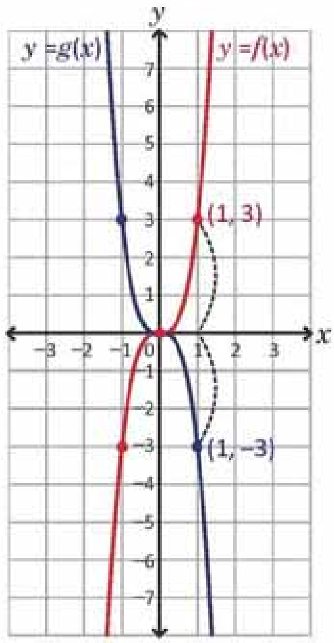
a) $f(x) = 2x^3$ と $g(x) = -2x^3$ とすると、g のグラフは f のグラフの x 軸から対称移動させたものになります。



b) $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ と $g(x) = -\frac{1}{2}x^3$ とすると、g のグラフは f のグラフの x 軸から対称移動させたものになります。



c) $f(x) = 3x^3$ と $g(x) = -3x^3$ の場合、右に表すように g のグラフは f のグラフの x 軸から対称移動させたものになります。



4.4 関数 $f(x)=\frac{k}{x}$ とその移動

導入問題

$f(x)=\frac{2}{x}$ と $g(x)=-\frac{2}{x}$ の場合

1. 次の表の x の各値に対応する $f(x)$ と $g(x)$ の値を求めなさい。

x	−8	−4	−2	−1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$												
$g(x)$												

2. 1 以外の f と g の他の値を決め、点 $(x, f(x))$ と $(x, g(x))$ を見つけ、両方の関数のグラフを描きなさい。

3. f と g のグラフを水平方向に 1 単位右に、垂直方向に 3 単位上に移動させたときに得られる関数の方程式を求めなさい。

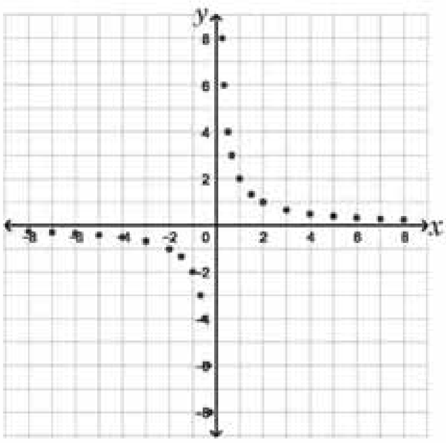
解法

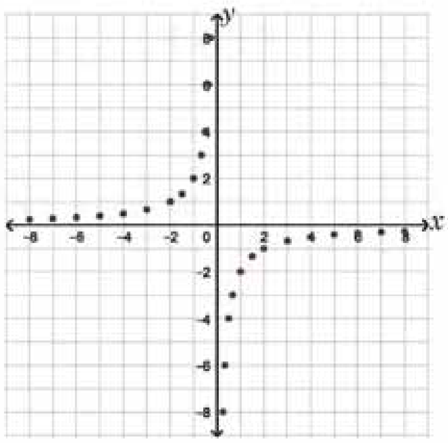
1. 表は次のようになります。

x	−8	−4	−2	−1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$	−0.25	−0.5	−1	−2	−4	−8	8	4	2	1	0.5	0.25
$g(x)$	0.25	0.5	1	2	4	8	−8	−4	−2	−1	−0.5	−0.25

2. 例えば $x=-7, -6, -5, -3, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 3, 5, 6, 7$ のように、点 $(x, f(x))$ や $(x, g(x))$ が座標平面上に位置しているような、f と g の他の値があります。

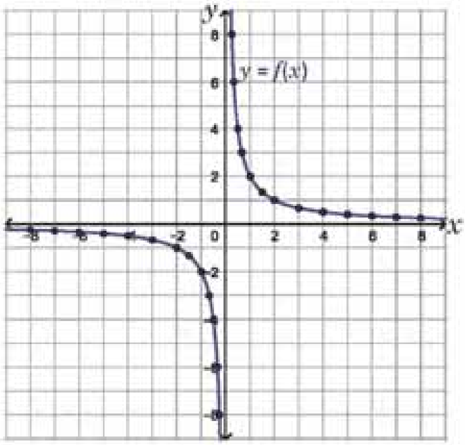
x	−7	−6	−5	−3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	3	5	6	7
$f(x)$	−0.29	−0.33	−0.4	−0.67	−1.33	−3	−6	6	3	1.33	0.67	0.4	0.33	0.29
$g(x)$	0.29	0.33	0.4	0.67	1.33	3	6	−6	−3	−1.33	−0.67	−0.4	−0.33	−0.29

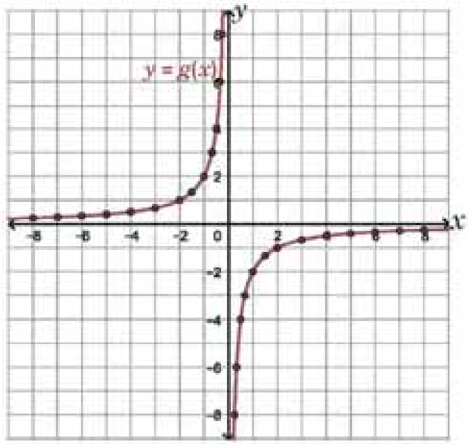




これにより、各グラフの形状をより良く可視化することができます。

次に示すように：





3. $h(x)$ は、f のグラフを水平方向に 1 単位右に，垂直方向に 2 単位上にずらしたときに得られる関数です。$(a、b)$ が h のグラフ上の点ならば、$(a - 1、b - 3)$ は f のグラフ上の点になります。つまり：

$$f(a-1)=b-3$$
$$b=f(a-1)+3$$

すると、方程式 $h(x)$ は $f(x-1)+3$、つまり $h(x)=\frac{2}{x-1}+3$ となります。

似たような形で、$l(x)$ が g のグラフを水平方向に 1 単位右に，垂直方向に 3 単位上にずらしたときに得られる関数であるとすると、次のようになります。

$$l(x)=g(x-1)+3=-\frac{2}{x-1}+3.$$

まとめ

k が 0 以外の実数で $f(x)=\frac{k}{x}$ とします。f は**反比例関数**と呼ばれ、x の絶対値、つまり $|x|$ が無限に増加したとき、f のグラフは x 軸を通過することなく x 軸に近づきます。また、$|x|$ が零に近い場合、$f(x)$ のグラフは y 軸を通過することなく y 軸に近いものになります。

一般に、反比例関数のグラフは、ケースによっては導入問題のグラフと同じ形をしています。
($k>0$ または $k<0$)

以上のことから、反比例関数は座標軸との交点を持たないことがわかります。$f(x)=\frac{k}{x}$ のグラフの **x 軸**を**水平漸近線**、**y 軸**を**垂直漸近線**といいます。

$g(x)$ が $f(x)=\frac{k}{x}$ を p 単位を水平方向に、q 単位を垂直方向に移動させたグラフの関数であるとすると：

$$g(x)=\frac{k}{x-p}+q.$$

$p>0$ の場合、移動は右に、$p<0$ の場合、移動は左になります。一方、$q>0$ の場合、移動は上に、$q<0$ の場合、移動は下になります。

問題

導入問題の関数 f、g を用いて、f、g のグラフを水平に p 単位，垂直に q 単位移動したときに得られる関数の方程式を求めなさい。

a) $p=2, q=1$　　b) $p=-2, q=1$　　c) $p=2, q=-1$　　d) $p=-2, q=-1$

達成の目安

4.4 関数のグラフを水平方向、垂直方向に移動させたときに得られる関数の方程式を求めなさい。
$f(x)=\frac{k}{x}$

学習の教材

ボンド紙に描いた座標平面を描いたものを黒板に貼り付けて導入問題の項2を解いていきます。

学習の流れ

7 年生で学習した反比例関数のグラフを復習します。また、その特性（定義域、域値、漸近線）、水平または垂直方向の移動も追加されています。

ねらい

この授業では，反比例関数のグラフの描き方だけを復習してもらいます。また，反比のグラフを水平または垂直に移動したときに得られる関数の式も見ていきます。$f(x)=\frac{k}{x-p}+q$ の形式の関数のグラフは、4.5. の授業まで行っていきます。k、p、q は一般的な二次関数との区別に使われてきました。しかし、動きを一般化するために、これらの文字をそれぞれ a、h と k に置き換えることができます。

問題の解き方：

a) $f(x)=\frac{2}{x}$ と $g(x)=-\frac{2}{x}$ の場合、f_1、g_1 のグラフが f、g のグラフをそれぞれ水平方向に 2 単位、垂直方向に 1 単位移動させて得られる関数です。したがって、

$$f_1(x)=\frac{2}{x-2}+1,$$

$$g_1(x)=-\frac{2}{x-2}+1.$$

b) a) の項と同様に、$f(x)=\frac{2}{x}$ と $g(x)=-\frac{2}{x}$ の場合、f_1 と g_1 は、f、g のグラフをそれぞれ水平方向に –2 単位、垂直方向に 1 単位移動して得られる関数だとすると：

$$f_1(x)=\frac{2}{x-(-2)}+1,$$
$$=\frac{2}{x+2}+1.$$

$$g_1(x)=-\frac{2}{x-(-2)}+1,$$
$$=-\frac{2}{x+2}+1.$$

$p>0$ の場合、移動は右に、$p<0$ の場合、移動は左になることを覚えておいてください。一方、$q>0$ の場合、移動は上に、$q<0$ の場合、移動は下になります。

c) f_1 と g_1 が $f(x)=\frac{2}{x}$ と $g(x)=-\frac{2}{x}$（それぞれ）を水平方向に 2 単位, 垂直方向に –1 単位移動させたときのグラフの関数であるとすると：

$$f_1(x)=\frac{2}{x-2}+(-1)=\frac{2}{x-2}-1,$$

$$g_1(x)=-\frac{2}{x-2}+(-1)=-\frac{2}{x-2}-1.$$

d) f_1 と g_1 が $f(x)=\frac{2}{x}$ と $g(x)=-\frac{2}{x}$（それぞれ）を水平方向に –2 単位、垂直方向に –1 単位移動させたときのグラフの関数であるとすると：

$$f_1(x)=\frac{2}{x-(-2)}+(-1)=\frac{2}{x+2}-1,$$

$$g_1(x)=-\frac{2}{x-(-2)}+(-1)=-\frac{2}{x+2}-1.$$

4.5 関数 $h(x)=\frac{k}{x-p}+q$ *のグラフを描きなさい

導入問題

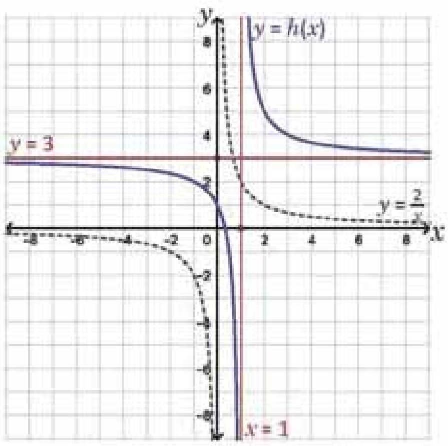
次の場合 $h(x)=\frac{2}{x-1}+3$

1. h のグラフの漸近線の方程式を求めなさい。
2. 前項の漸近線を描いてから、h のグラフを描きなさい。
3. h 関数の定義域と域値を求めなさい。

解法

1. 前回の授業から、$h(x)$ のグラフは $f(x)=\frac{2}{x}$ のグラフから水平方向に 1 単位、垂直方向に 3 単位移動したものであることがわかります。漸近線は同じように移動されます。つまり、y=0 (x軸) と x=0 (y軸) が f の漸近線なら、y=3 と x =1 は h のグラフの漸近線です。

2. y = 3 のグラフは (0, 3) を通る水平直線ですが、x = 1 は (1, 0) を通る直線 の垂直線です。漸近線を描いたら、h のグラフが描かれ、その形状は $f(x)=\frac{2}{x}$ のグラフに似ています。



3. 関数 h の方程式では，分母が零になることはありません。これは x が 1 と異なる場合のみであり、したがって、h の定義域は]−∞、1[U]1、∞[となります。$h(x)$ のグラフから、その域値は]−∞、3[U]3、∞[となります。

まとめ

k がゼロと異なる k、p、q の実数であるとします。関数 $h(x)=\frac{k}{x-p}+q$ の水平方向と垂直方向の漸近線は、それぞれ y=q と x=p、です。関数 h の領域は、D_h =]−∞、p[U]p、∞[であり、その域値は R_h =] −∞、q[U]q、∞[です。

h のグラフを描くときは、まず漸近線を描き、次にグラフを描くことを勧めます。

問題

各ケースで関数 $h(x)$ の漸近点とグラフを描き，その定義域と域値を求めなさい。

a) $h(x)=\frac{1}{x-2}+1$ b) $h(x)=\frac{1}{x+2}+1$ c) $h(x)=\frac{1}{x+1}-1$ d) $h(x)=-\frac{1}{x-2}+1$

ユニット 4

113

達成の目安

4.5 方程式を求め、f のグラフを描くために関数 $f(x)=\dfrac{k}{x-p}+q$ の漸近点をグラフ化しなさい。

学習の教材

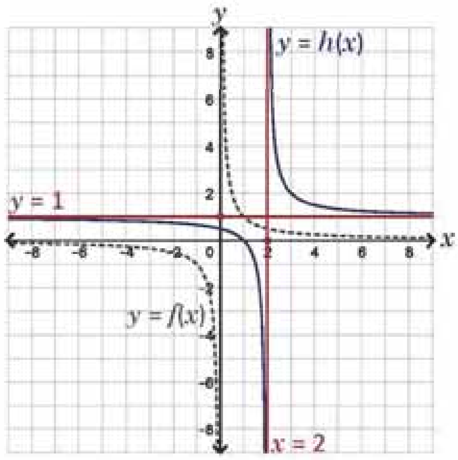
ボンド紙に座標平面を描いたものを黒板に貼り付けて導入問題を解いていきます（問題群を解くのに使用することもできます）。

学習の流れ

この授業では、$f(x)=\dfrac{k}{x-p}+q$ の形の関数のグラフを描きます。もし、学生が導入問題を解くのにとても苦労している場合は、教師は解答について段階的に説明していかなければなりません。

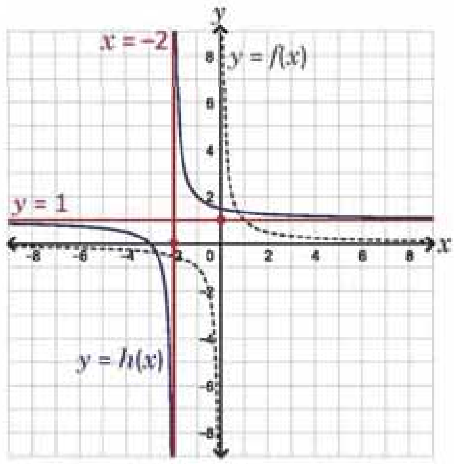
問題の解き方：

a) $h(x)=\dfrac{1}{x-2}+1$ の漸近点は、$y=1$ と $x=2$、そのグラフは $f(x)=\dfrac{1}{x}$ のグラフを水平方向に 2 単位、垂直方向に 1 単位移動した結果です。



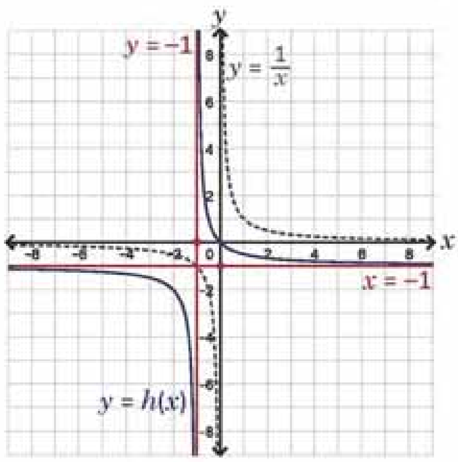
$D_h=]-\infty,2[\cup]2,\infty[$, $R_h=]-\infty,1[\cup]1,\infty[$.

b) $h(x)=\dfrac{1}{x+2}+1$ の漸近点は、$y=1$ と $x=-2$、そのグラフは $f(x)=\dfrac{1}{x}$ のグラフを水平方向に –2 単位、垂直方向に1単位移動した結果です。



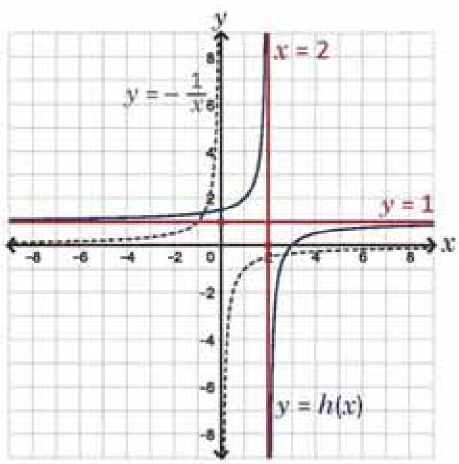
$D_h=]-\infty,-2[\cup]-2,\infty[$, $R_h=]-\infty,1[\cup]1,\infty[$.

c) $h(x)=\dfrac{1}{x+1}-1$ の漸近点は $y=-1$ と $x=-1$：



$D_h=]-\infty,-1[\cup]-1,\infty[$, $R_h=]-\infty,-1[\cup]-1,\infty[$.

d) $h(x)=-\dfrac{1}{x-2}+1$ の漸近点は $y=1$ と $x=2$：



$D_h=]-\infty,2[\cup]2,\infty[$, $R_h=]-\infty,1[\cup]1,\infty[$.

レッスン 4

4.6 関数 $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ のグラフを描きなさい

導入問題

次の場合 $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ ：

1. $(x+1) \div (x-2)$ の割り算を求め、$\dfrac{x+1}{x-2}$ を $\dfrac{k}{x-p}+q$ の形で書きなさい。
2. $f(x)$ のグラフを描きなさい。

解法

1. 組立除法を使って、次のものを求めなさい。

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & 1 \\ 2 & & 2 \\ \hline & 1 & 3 \end{array}$$

組立除算では、被除数と除数の多項式の係数を次のように配置しています。

$$\begin{array}{c|cc} & \text{被除数} & \\ a & & \\ \hline & \text{商} & \text{剰余} \end{array}$$

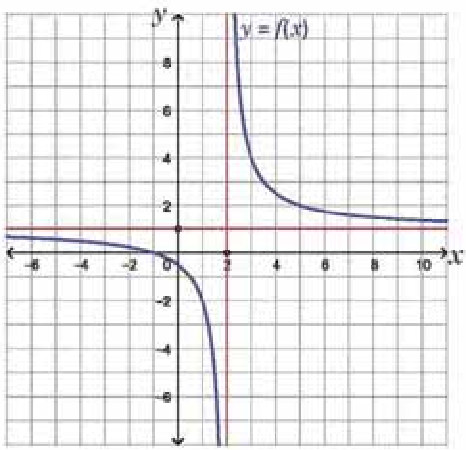
したがって、$x+1 = 1(x-2)+3$ となります。この方程式の両辺を $x-2$ で割ります。

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{1\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} + \frac{3}{x-2} = \frac{3}{x-2} + 1.$$

したがって、$\dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{3}{x-2}+1$ となります。

2. 前の数字 $f(x) = \dfrac{3}{x-2}+1$ から、f のグラフを水平方向に 2 単位、垂直方向に 1 単位移動させて $y = \dfrac{3}{x}$ のグラフを求めます。

f の漸近点は $y = 1$ と $x = 2$ になります。



まとめ

a、b、d のすべてが 0 に等しくない実数であるとして、$c \neq 0$ であるとすると、$f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ の形の関数を**有理関数**といいます。f の方程式は、分子の多項式を分母の多項式で割ることで $\dfrac{k}{x-p}+q$ の形で行うことができます。

一般に、有理関数は $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ の形式であり、ここで $p(x)$ と $q(x)$ は線形多項式であるだけでなく、任意の多項式です。

問題

各問で、関数 f の方程式を $\dfrac{k}{x-p}+q$ の形式で書き、関数のグラフと漸近点を描きなさい。

a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$　　b) $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$　　c) $f(x) = \dfrac{-x+3}{x-2}$

達成の目安

4.6 漸近点を求めグラフを描くために関数 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ を $f(x) = \frac{k}{x-p} + q$ の形状で書きなさい。

学習の教材

ボンド紙に座標平面を描いたものを黒板に貼り付けて導入問題を解いていきます（問題群を解くのに使用することもできます）。

学習の流れ

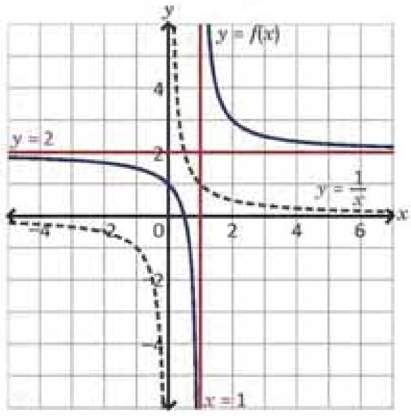
分子と分母が一次多項式である有理関数の方程式を $f(x) = \frac{k}{x-p} + q$ の形に変換し、4.5の授業で学んだことを使ってそのグラフを描きます。

問題の解き方：

a) $(2x-1) \div (x-1)$ の割り算をすると、次が得られます。$2x-1 = 2(x-1)+1$
したがって、

$$\frac{2x-1}{x-1} = \frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 2$$

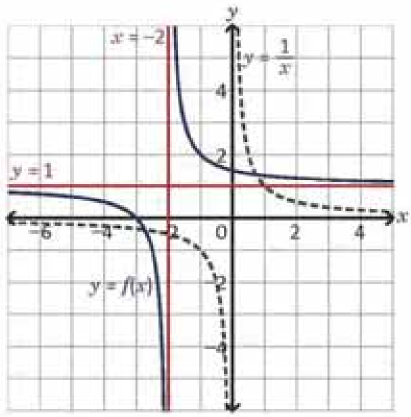
したがって、$f(x) = \frac{1}{x-1} + 2$ の漸近点は、$y = 2$、$x = 1$ となり、グラフは、右図のように、$y = \frac{1}{x}$ のグラフを水平方向に 1 単位、垂直方向に 2 単位移動させた結果となります。



b) $(x+3) \div (x+2)$ の割り算をすると、$x+3 = (x+2)+1$ が得られます。
したがって、

$$\frac{x+3}{x+2} = \frac{\cancel{x+2}}{\cancel{x+2}} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x+2} + 1$$

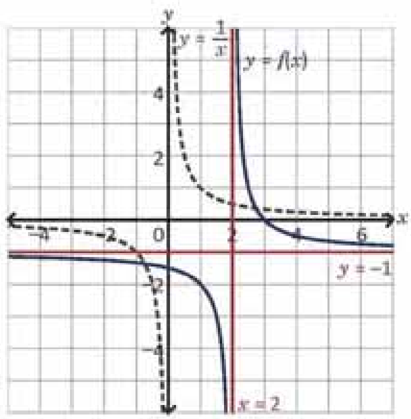
$f(x) = \frac{1}{x+2} + 1$ になります。その漸近点は $y = 1$ と $x = -2$ となり、グラフは、右図のように、$y = \frac{1}{x}$ のグラフを水平方向に -2 単位、垂直方向に 1 単位移動させた結果となります。



c) $(-x+3) \div (x-2)$ の割り算をすると、$-x+3 = -(x-2)+1$ が得られます。
したがって、

$$\frac{-x+3}{x-2} = \frac{-(x-2)}{x-2} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-2} - 1$$

$f(x) = \frac{1}{x-2} - 1$ になります。その漸近点は $y = -1$ と $x = 2$ となり、グラフは、$y = \frac{1}{x}$ のグラフを水平方向に 2 単位、垂直方向に -1 単位移動させた結果となります。



レッスン 4

4.7 無理数の関数 $f(x) = a\sqrt{x}$

導入問題

次の場合 $y = \sqrt{x}$ ：

1. 次の表を完成させなさい（少数第二位まで近づける）。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0									

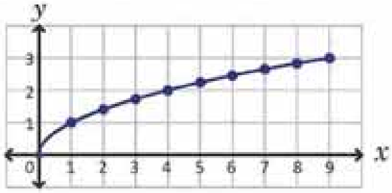
2. 点 $(x、y)$ を座標平面上に置き、線で結びなさい。これは、これまでに学んだ関数のグラフに似ていますか。
3. x のどの値に対して y の値が定義されていますか。

解法

1. 表は次のようになります。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	1	1.41	1.73	2	2.24	2.45	2.65	2.83	3

2. 点を接合してできた線は、右図のようになります。この線は半放物線に似ていますが、今回は右に開いています。



3. y の値は、すべての正の x または 0 に等しいです、つまり $x \in [0、\infty[$ です。

まとめ

方程式 $y = \sqrt{x}$ は、関数 $[0、\infty[$ a ℝ、の方程式で、グラフは原点を通り、右に開く半放物線に似ています。一般に、$f(x) = a\sqrt{x}$ で、$a \neq 0$ の場合、$[0, \infty[$ が定義域である関数です。

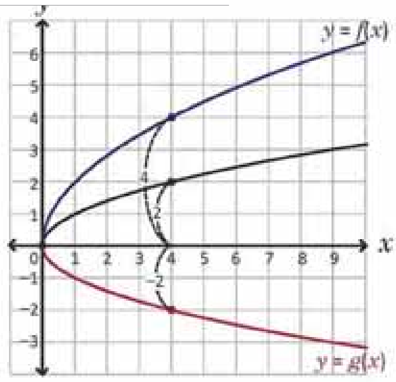
1. $a > 0$ の場合、f の域値は $[0、\infty[$ となり、グラフは x 軸より上になります。
2. $a < 0$ の場合、f の域値は $[0,]-\infty、0]$ となり、グラフは x 軸より下になります。

例

関数 $f(x) = 2\sqrt{x}$ と $g(x) = -\sqrt{x}$ をグラフ化し、それぞれの定義域と域値を求めなさい。

f のグラフは x 軸の上にあり、$\sqrt{x}$ の値に 2 を掛けた結果で、g のグラフは x 軸の下にあり、$\sqrt{x}$ の値に -1 を掛けた結果です。

両グラフが右図に示されています。定義域は $[0, \infty[$ 、域値は $R_f = [0、\infty[$ 、$R_g =]-\infty、0]$ です。



問題

各問で、関数 f をグラフ化し、定義域と域値を求めなさい。

a) $f(x) = 3\sqrt{x}$　　b) $f(x) = -2\sqrt{x}$　　c) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$

ユニット 4

達成の目安

4.7 $f(x) = a\sqrt{x}$ の形の無理数の関数の定義域と域値をグラフにして求めなさい。

学習の教材

ボンド紙に座標平面を描いたものを黒板に貼り付けて導入問題を解いていきます（問題群を解くのに使用することもできます）。

学習の流れ

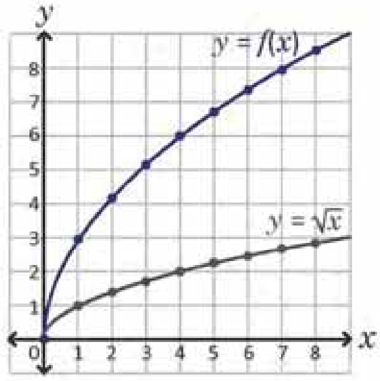
x の特定の値を用いて、関数 $f(x) = \sqrt{x}$ をグラフ化します。ここから、関数 $f(x) = a\sqrt{x}$ の特徴であるグラフ、定義域、域値が一般化されます。

問題の解き方：

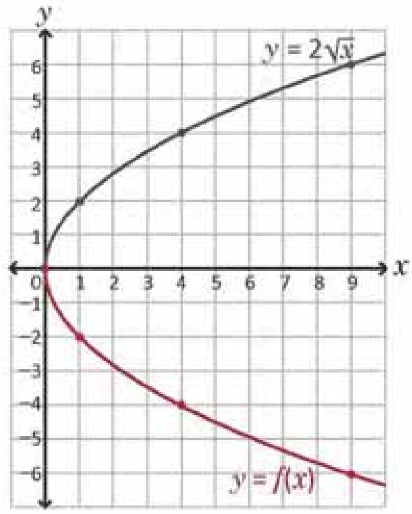
a) 関数 $f(x) = 3\sqrt{x}$ では、a=3 の値が正なので、グラフは x 軸より上になります。導入問題の表を使って、$y = \sqrt{x}$ の値に 3 を掛けます。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$y = \sqrt{x}$	0	1	1.41	1.73	2	2.24	2.45	2.65	2.83	3
$f(x)$	0	3	4.23	5.19	6	6.72	7.35	7.95	8.49	9

すると、D_f=[0、∞[と R_f= [0、∞[となります。



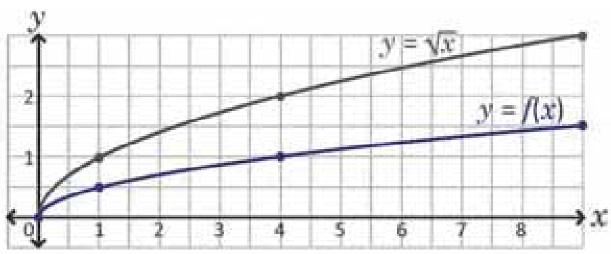
b) 関数 $f(x) = -2\sqrt{x}$ では、$a = -2$ の値が負なので、グラフは x 軸より下になります。授業の例では、$f(x) = 2\sqrt{x}$ のグラフを描いたので、それを x 軸に対して対称にさせれば $f(x) = -2\sqrt{x}$ のグラフが得られます。すると、D_f= [0、∞[と R_f=]–∞、0] となります。



c) 関数 $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ では、$a = \frac{1}{2}$ の値が正なので、グラフは x 軸より上になります。導入問題の表を使って、$\frac{1}{2}$ を $y = \sqrt{x}$ の値に掛けます。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$y = \sqrt{x}$	0	1	1.41	1.73	2	2.24	2.45	2.65	2.83	3
$f(x)$	0	0.5	0.71	0.86	1	1.12	1.23	1.33	1.42	1.5

すると、D_f=[0、∞[と R_f= [0、∞[となります。



レッスン 4

4.8 無理数の関数 $f(x) = \sqrt{ax}$

導入問題

次の場合　$f(x) = \sqrt{-x}$　:

1. 関数 f の定義域は何ですか。
2. 次の表で $f(x)$ の値を計算し、関数のグラフを描きなさい（少数第二位まで近づける）。

x	−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0
$f(x)$										

3. 関数の域値は何ですか。

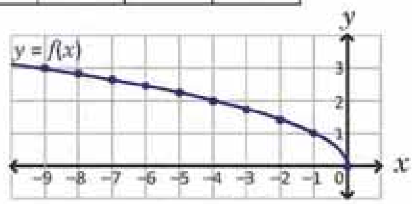
解法

1. 平方数の数値は 0 以上でなければなりません。とすると、関数の定義域は、$-x \geq 0$、すなわち $x \leq 0$ である実数でなければなりません。したがって、$Df =]-\infty, 0]$ となります。

2. 表は次のようになります。

x	−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0
$f(x)$	3	2.83	2.65	2.45	2.24	2	1.73	1.41	1	0

f のグラフは、右図に示されています。



3. $f(x) = \sqrt{-x}$ の値は常に正の数か 0 に等しいので、$Rf = [0、\infty[$ となります。

まとめ

a が 0 以外の実数である $f(x) = a\sqrt{x}$ や　$g(x) = \sqrt{ax}$ の形式の関数は、いわゆる**無理関数**の特殊な例です。
f と g のグラフは原点を通過し x 軸に沿って開く半放物線に似ています。g 関数の場合、その定義域は正の実数と零、つまり、$[0、\infty[$ となり　:

1. $a > 0$ の場合、f の域値は $[0, \infty[$ となり、グラフは y 軸より右になります。
2. $a < 0$ の場合、f の域値は $]-\infty, 0]$ となり、グラフは y 軸より左になります。

例

関数 $f(x) = \sqrt{2x}$ をグラフ化し、その定義域と域値を求めなさい。

f のグラフは、右の図のように y 軸の右にあり、$D_f = [0, \infty[$ と $Rf = [0, \infty[$ となります。

グラフ $f(x) = \sqrt{2x}$ は、$g(x) = 2\sqrt{x}$ のグラフとは一致せず、$h(x) = \sqrt{2}\sqrt{x}$ のグラフと一致します。

問題

各問で、関数 f をグラフ化し、定義域と域値を求めなさい。

a) $f(x) = \sqrt{3x}$　　b) $f(x) = \sqrt{-2x}$　　c) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x}$

達成の目安

4.8 $f(x) = \sqrt{ax}$ の形の無数関数の定義域と域値をグラフにして求めなさい。

学習の教材

ボンド紙に座標平面を描いたものを黒板に貼り付けて導入問題を解いていきます（問題群を解くのに使用することもできます）。

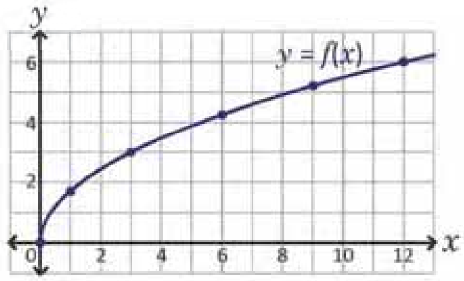
学習の流れ

x の特定の値を用いて、関数 $f(x) = \sqrt{-x}$ をグラフ化します。ここから、関数 $f(x) = \sqrt{ax}$ の特徴であるグラフ、定義域、域値が一般化されます。

問題の解き方：

a) 関数 $f(x) = \sqrt{3x}$ のグラフの形状は，半放物線に似ています。$a = 3$ が正 であるから、これは正の x 軸上にあります。関数のグラフを描くために $f(x)$ のいくつかの特定の値を計算することができます。

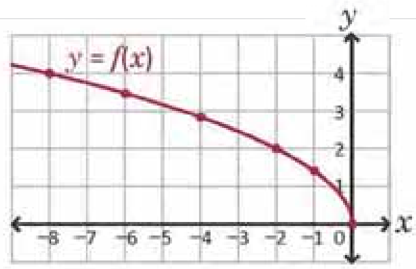
x	0	1	3	6	9	12
$f(x)$	0	1.73	3	4.24	5.20	6



すると、$D_f = [0、\infty[$ と $R_f = [0, \infty[$ となります。

b) 前項と同様に、関数 $f(x) = \sqrt{-2x}$ のグラフの形は半放物線に似ていますが、今回は $a < 0$ なので負の x 軸上になります。関数のグラフを描くために $f(x)$ のいくつかの特定の値を計算します。

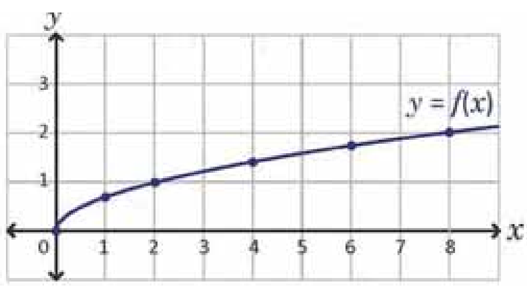
x	0	−1	−2	−4	−6	−8
$f(x)$	0	1.41	2	2.83	3.46	4



すると、$D_f =]-\infty, 0]$ と $R_f = [0, \infty[$ となります。

c) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x}$ のように、グラフは正の x 軸上にあります。$f(x)$ のいくつかの特定の値を計算して：

x	0	1	2	4	6	8
$f(x)$	0	0.71	1	1.41	1.73	2

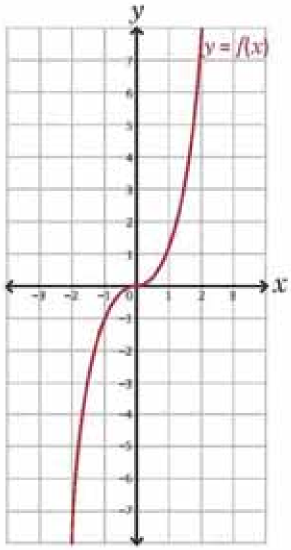


すると、$D_f=[0,\infty[$ と $R_f = [0, \infty[$ となります。

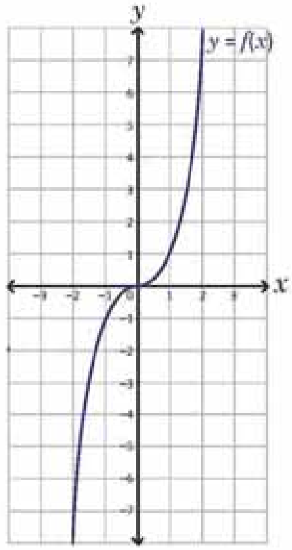
4.9 復習問題

1. $f(x) = x^3$ のグラフを使って、関数 g をグラフ化し、その定義域と域値を求めなさい。

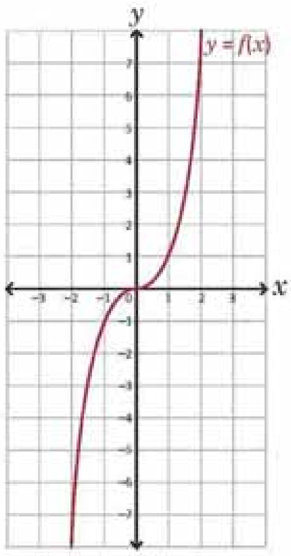
a) $g(x) = 4x^3$



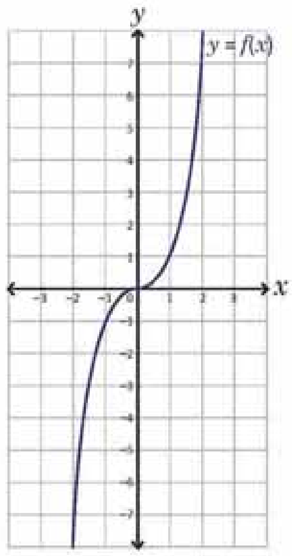
b) $g(x) = \frac{1}{4}x^3$



c) $g(x) = -4x^3$



d) $g(x) = -\frac{1}{4}x^3$



2. 各問で、関数をグラフ化し、定義域と域値を求めなさい。

a) $f(x) = \frac{-2x}{x-2}$

b) $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

3. 各問で、関数をグラフ化し、定義域と域値を求めなさい。

a) $f(x) = -3\sqrt{x}$

b) $f(x) = 4\sqrt{x}$

c) $f(x) = \sqrt{-3x}$

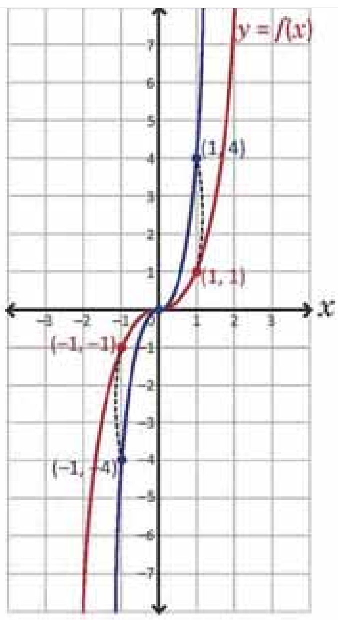
d) $f(x) = \sqrt{4x}$

達成の目安

4.9 三次関数、有理関数、無理関数に関する問題を解きなさい。

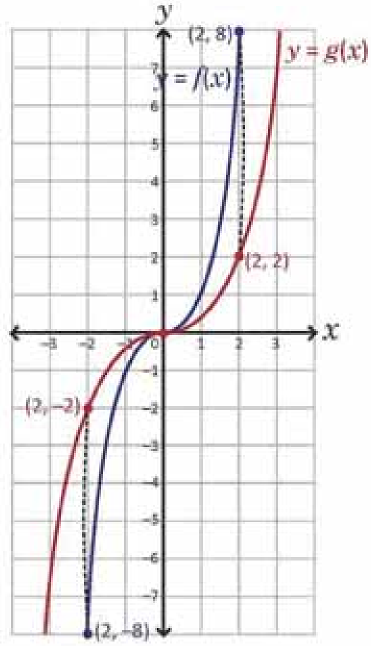
問題の解き方：

1a) グラフ $g(x) = 4x^3$ は次のようになります。



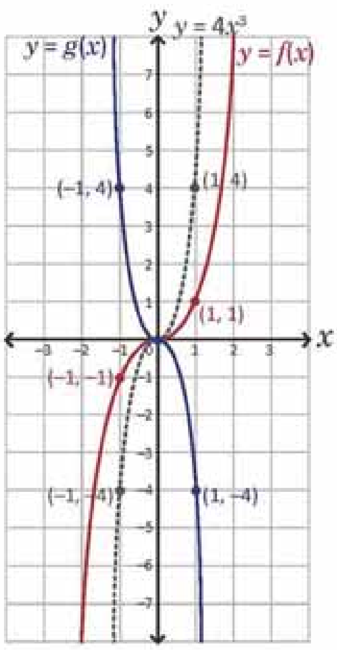
$D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = \mathbb{R}$.

1b) グラフ $g(x) = \frac{1}{4}x^3$ は次のようになります。



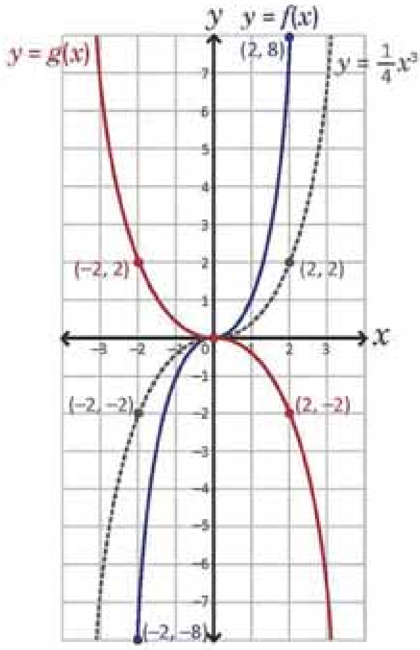
$D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = \mathbb{R}$.

1c) $y = 4x^3$ のグラフを x 軸に対して対称移動させることで、$g(x) = -4x^3$ のグラフを得ることができます。



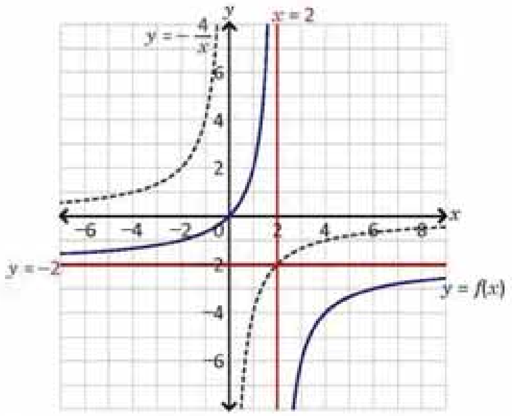
$D_g = \mathbb{R}$　$R_g = \mathbb{R}$.

1d) $y = \frac{1}{4}x^3$ のグラフを軸 x に対して対称移動させ、$g(x) = -\frac{1}{4}x^3$ のグラフを得ることができます。



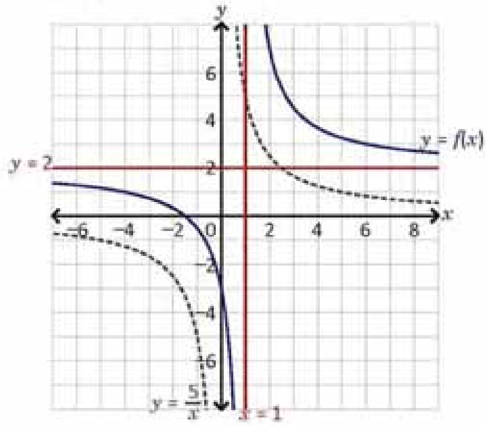
$D_g = \mathbb{R}$　$R_g = \mathbb{R}$.

2a) 関数の方程式は $f(x) = -\frac{4}{x-2} - 2$ と書き換えることができます。その漸近線は $y = -2$ と $x = 2$ であり、グラフ $y = -\frac{4}{x}$ で水平方向に 2 単位、垂直方向に -2 単位移動させて得られます。



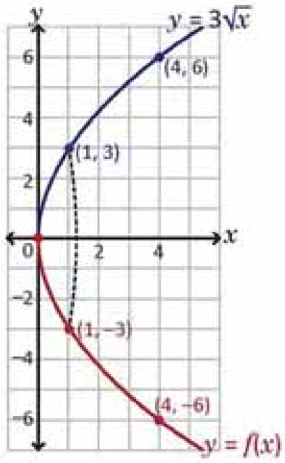
$D_f =]-\infty, 2[\cup]2, \infty[$, $R_f =]-\infty, -2[\cup]-2, \infty[$.

2 b) 関数の方程式は $f(x) = \frac{5}{x-1} + 2$ と書き換えることができます。その漸近線は $y = 2$ と $x = 1$ であり、グラフ $y = \frac{5}{x}$ で水平方向に 1 単位、垂直方向に 2 単位移動させて得られます。

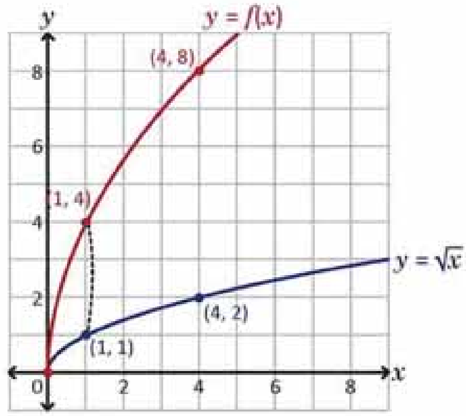


$D_f =]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$, $R_f =]-\infty, 2[\cup]2, \infty[$.

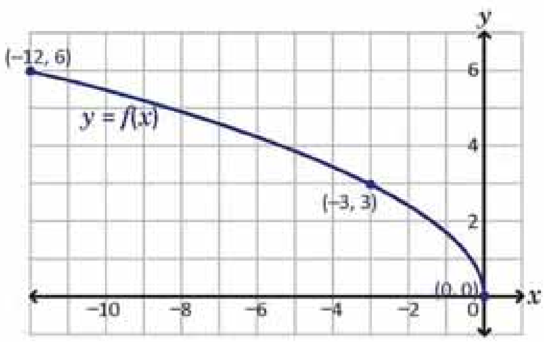
3a) $f(x) = -3\sqrt{x}$ の場合、$D_f = [0, \infty[$ と $R_f =]-\infty, 0]$ となります。$y = 3\sqrt{x}$ のグラフは 4.7 の授業で描きましたので、$f(x) = -3\sqrt{x}$ のグラフを x 軸に対称移動させて $y = 3\sqrt{x}$ のグラフを得ます。



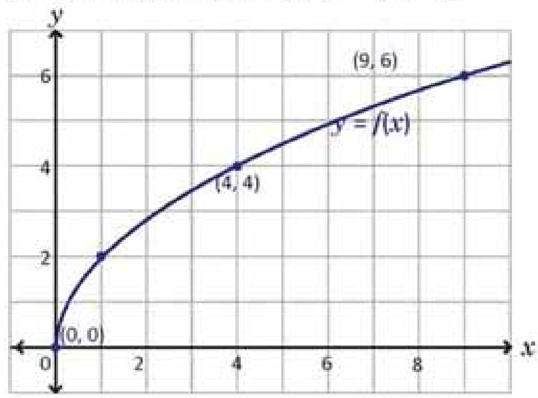
3b) $f(x) = 4\sqrt{x}$ の場合、$D_f = [0, \infty[$ と $R_f = [0, \infty[$ となります。f のグラフは x 軸の上にあり、$\sqrt{x}$ の値を 4 倍して得られます 。



3c) 関数 $f(x) = \sqrt{-3x}$ のグラフは、負の x 軸上になります。$Df = [0, \infty[$ と $Rf =]-\infty, 0]$ となります。



3d) 関数 $f(x) = \sqrt{4x}$ のグラフは、正の x 軸上になります。$Df = [0, \infty[$ と $Rf = [0, \infty[$ となります。



4.10 ユニット問題

1. 関数 f のグラフを描き、関数の頂点の座標と、定義域と値域を求めましょう。

a) $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 3$

b) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^2 + 1$

c) $f(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$

d) $f(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$

2. 二次関数 g が点 (–12、0)、(–9、3)、(–7、–5) を通るとき、その方程式を求めましょう。

3. ホルへ "マヒコ"ゴンサレス国立競技場の一般太陽セクターは、1 万人のファンを収容することができます。ある試合では、そのセクターのチケットの価格は 10 ドルで、平均 3000 人のファンが参加しました。市場調査によると、チケットの価格を 1 ドル下げるごとに平均参加者数が 1000 人増えたといいます。一般太陽セクターのチケット販売で最大の利益を得るためには、価格はいくらにすべきでしたか。

4. 以下の不等式を解きましょう。

a) $12x^2 - 5x - 2 \leq 0$

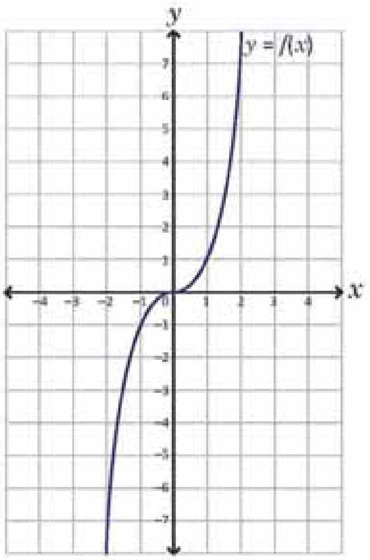
b) $4x > -4x^2 + 15$

c) $2x^2 - x \leq 1$

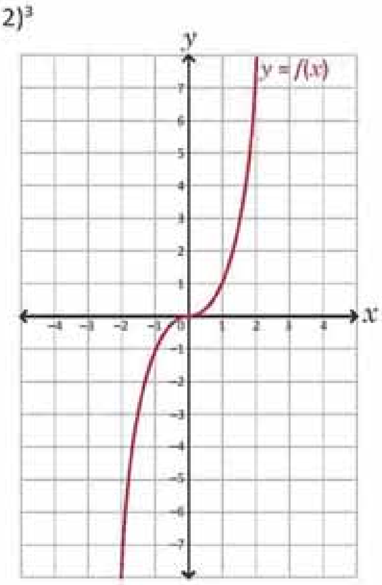
d) $x^2 - 4x - 1 \geq 0$

5. $f(x)=x^3$ のグラフを使って、関数 g をグラフ化し、その定義域と域値を求めなさい。

a) $g(x) = x^3 + 1$



b) $g(x) = (x - 2)^3$



6. 各問で、関数 f をグラフ化し、定義域と域値を求めなさい。

a) $f(x) = -\sqrt{-x}$

b) $f(x) = \sqrt{x} + 1$

c) $f(x) = \sqrt{-x} - 3$

d) $f(x) = \sqrt{x - 1}$

達成の目安

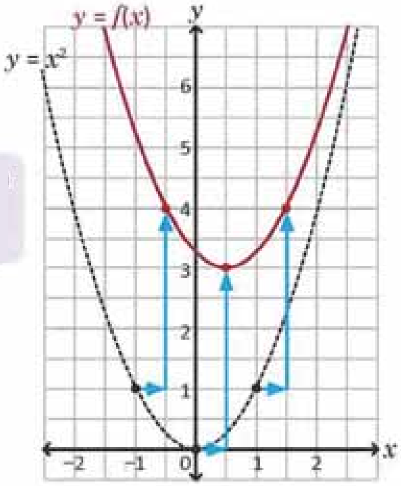
4.10 実関数に関する問題を解きなさい。

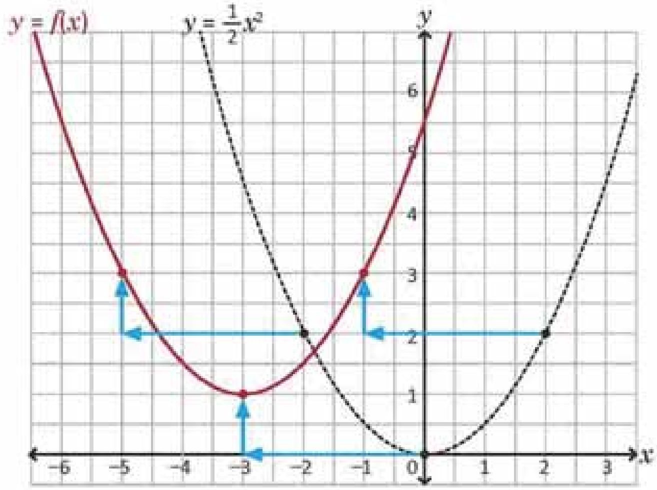
問題の解き方：

1a) $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 3$ のグラフは、$y = x^2$ のグラフを水平方向に $\frac{1}{2}$ 単位、垂直方向に 3 単位移動させて得られます。その頂点は $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ の点にあり、$D_f = \mathbb{R}$ と $R_f = [3, \infty[$ となります。

1b) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^2 + 1$ のグラフは、$y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフを水平方向に –3 単位、垂直方向に 1 単位移動させて得られます。その頂点は (–3、1) の点にあり、$Df = \mathbb{R}$ と $Rf = [1, \infty[$ となります。

方眼で使用されている縮尺は 0.5 cm × 0.5 cm です。

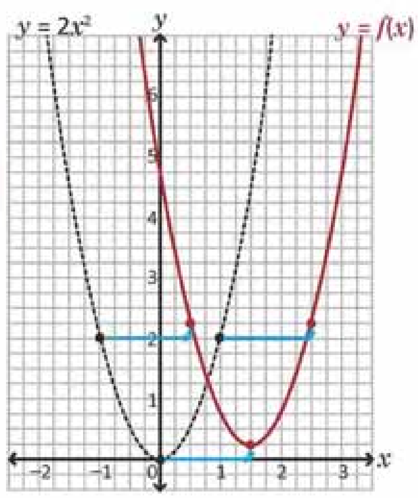


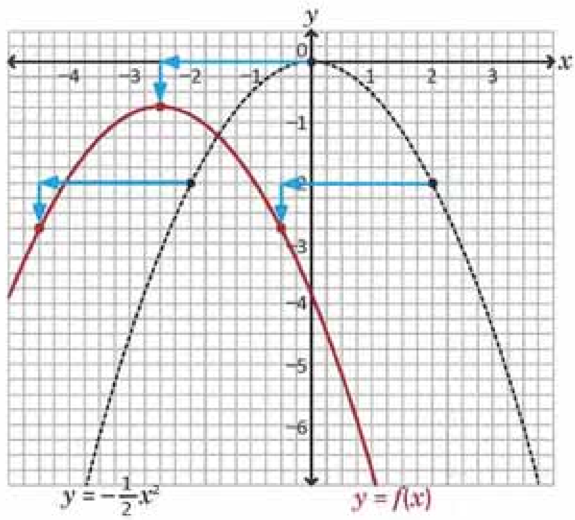


1c) $f(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ のグラフは、$y=2x^2$ のグラフを水平方向に $\frac{3}{2}$ 単位、垂直方向に $\frac{1}{4}$ 単位移動させて得られます。その頂点は $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $D_f = \mathbb{R}$ と $R_f = \left[\frac{1}{4}, \infty\right[$ です。

1d) $f(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$ のグラフは、$y = -\frac{1}{2}x^2$ のグラフを水平方向に $-\frac{5}{2}$ 単位、垂直方向に $-\frac{3}{4}$ 単位移動させて得られます。その頂点は $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right)$, $D_f = \mathbb{R}$ と $R_f = \left]-\infty, -\frac{3}{4}\right]$ です。

方眼で使用されている縮尺は0.25 cm × 0.25cm です。





2. $g(x) = ax^2 + bx + c$ で、$g(-12) = 0$、$g(-9) = 3$ と $g(-7) = -5$ とします。これらの値を関数の式の中で代入し、代入法を用いて、すなわち、方程式の変数の 1 つを求めて次に代入します。

$$g(-12) = 0 \Rightarrow a(-12)^2 + b(-12) + c = 0 \Rightarrow 144a - 12b + c = 0 \Rightarrow c = -144a + 12b$$
$$g(-9) = 3 \Rightarrow a(-9)^2 + b(-9) + c = 3 \Rightarrow 81a - 9b - 144a + 12b = 3 \Rightarrow b = 21a + 1$$
$$g(-7) = -5 \Rightarrow a(-7)^2 + b(-7) + c = -5 \Rightarrow 49a - 7(21a + 1) - 144a + 12(21a + 1) = -5 \Rightarrow a = -1$$

そうすると、$a = -1$、$b = -20$ と $c = -96$（b と c の値は、前項の方程式に代入することで求められます）。したがって、$g(x) = -x^2 - 20x - 96$ となります。

3. スタジアムの一般太陽セクターのチケット価格で、初期価格は 10 ドル、元の価格から値下がりした額は $10 - x$ ドルだとします。市場調査によると、チケットの元の価格に引き下げられた 1 ドルごとに平均出席者が 1000 人増える、つまり出席した 3000 人に加えて、1000 $(10 - x)$ 人のファンが増えるということです。そうすると、ファンの数は $3000 + 1000(10 - x)$、つまり $-1000x + 13000$ 人ということになります。一般太陽セクターのチケット販売から得られる利益（ドル建て）を計算する関数を f とします。それを得るためには、試合に参加した人数にチケットの値段を掛けなければなりません。つまり：

$$\begin{aligned} f(x) &= (-1\,000x + 13\,000)x \\ &= -1\,000x^2 + 13\,000x \end{aligned}$$

この関数は頂点に最大値を持っているので、それを見つけるために正方形を完成させます。

$$\begin{aligned} f(x) &= -1\,000[x^2 - 13x + (6.5)^2 - (6.5)^2] \\ &= -1\,000[x^2 - 13x + (6.5)^2] + 1\,000\,(6.5)^2 \\ &= -1\,000(x - 6.5)^2 + 42\,250 \end{aligned}$$

したがって、一般太陽セクターのチケットの価格は、最大の利益を得るためには6.50ドルにするべきでした。

4a) $12x^2 - 5x - 2 = (4x + 1)(3x - 2)$ から $x = -\frac{1}{4}$ と $x = \frac{2}{3}$ の根が得られます。変動表を使って：$12x^2 - 5x - 2 \le 0$ は、$x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right]$ が成り立ちます。

4b) 不等式は、$4x^2 + 4x - 15 > 0$ に等しく、さらに $4x^2 + 4x - 15 = (2x + 5)(2x - 3)$ で、根は $x = -\frac{5}{2}$ と $x = \frac{3}{2}$ です。変動表を使って：$4x > -4x^2 + 15$ は $x \in \left]-\infty, -\frac{5}{4}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, \infty\right[$ に成り立ちます。

4 c) 不等式は、$2x^2 - x - 1 \le 0$ に等しく、さらに $2x^2 - x - 1 = (2x + 1)(x - 1)$ で、根は $x = -\frac{1}{2}$ と $x = 1$ です。変動表を使って：

	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		1	∞
$2x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$(2x+1)(x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

よって、$x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ が成り立つ場合は $2x^2 - x \le 1$ となります。

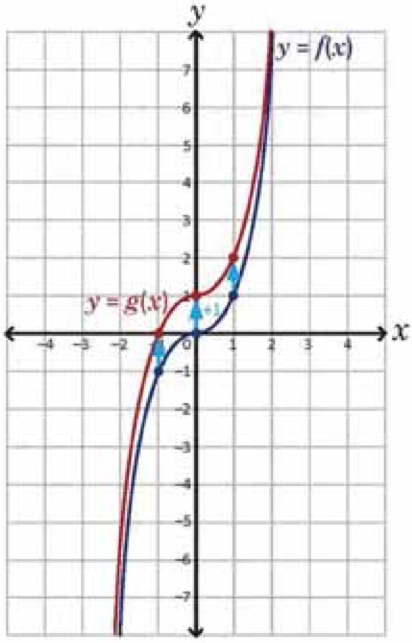
4d) $x^2 - 4x - 1 = [x - (2 - \sqrt{5})][x - (2 + \sqrt{5})]$ から $x = 2 - \sqrt{5}$ と $x = 2 + \sqrt{5}$ の根が得られます。変動表を使って：

	$-\infty$	$2-\sqrt{5}$		$2+\sqrt{5}$	∞
$x-(2-\sqrt{5})$	$-$	0	$+$		$+$
$x-(2+\sqrt{5})$	$-$		$-$	0	$+$
$[x-(2-\sqrt{5})][x-(2+\sqrt{5})]$	$+$	0	$-$	0	$+$

したがって、$x \in \left]-\infty, 2 - \sqrt{5}\right] \cup \left[2 + \sqrt{5}, \infty\right[$ が成り立つ場合は不等式は $x^2 - 4x - 1 \ge 0$ となります。

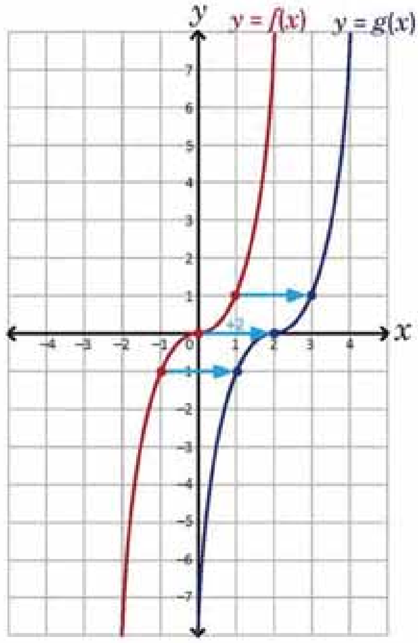
5a) 2.1 の授業の結論から、$g(x) = f(x) + 1 = x^3 + 1$ となるので、$f(x) = x^3$ のグラフを垂直方向に 1 単位ずらして g のグラフを求めます。

$D_g = \mathbb{R}$
$R_g = \mathbb{R}$

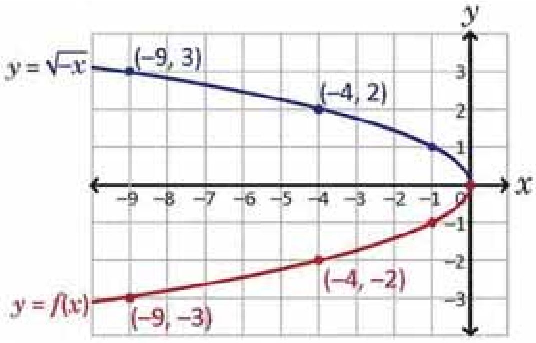


5b) 2.2 の授業で展開したのと同じように、$f(x) = x^3$ のグラフを水平方向に 2 単位移動させると、$g(x) = f(x - 2) = (x - 2)^3$ のグラフが得られます。

$D_g = \mathbb{R}$
$R_g = \mathbb{R}$

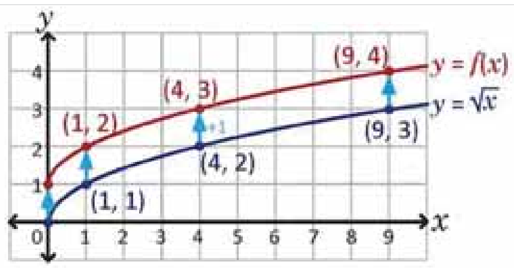


6a) グラフ $y = \sqrt{-x}$ は 4.8の授業 のグラフで描きました。$f(x) = -\sqrt{-x}$ をグラフ化するには、$y = \sqrt{-x}$ の値を –1 倍する必要があります。



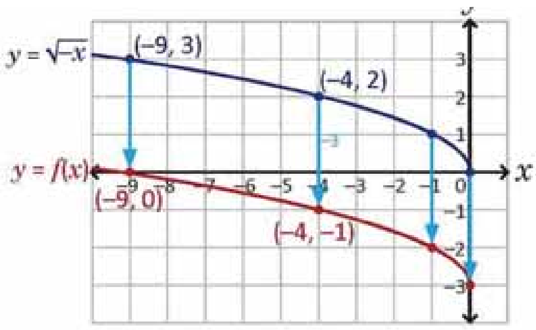
D_f =]–, 0] と R_f =]–∞, 0] です。

6b) 5a) のように、$f(x) = \sqrt{x} + 1$ のグラフは、$y = \sqrt{x}$ のグラフを垂直方向に 1 単位移動させると得られます（$y = \sqrt{x}$ のグラフは 4.7 の授業で描かれています）。



D_f = [0、∞[と R_f = [1, ∞[です。

6c) $f(x) = \sqrt{-x} - 3$ のグラフは、$y = \sqrt{-x}$ のグラフを垂直方向に-3単位移動させたものです。



D_f =]–∞, 0] と R_f = [–3, ∞[です。

6d) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ のグラフは、$y = \sqrt{x}$ のグラフを水平方向に 1 単位移動させたものです。

D_f = [1, ∞[と R_f = [0, ∞[です。

レッスン 5 GeoGebraを使った演習

5.1 GeoGebraを使った演習： 概要

GeoGebraは、あらゆる学年で使える動的数学ソフトウェアです。Geogebra には、簡単に使える数多くのツールが含まれているので、幾何学、代数、統計や計算に関する内容に取り組むことができます。

この授業では、GeoGebra の概要といくつかのコマンドの使用について理解するために、インターフェイスを探究します。パソコンで GeoGebra のアイコン（このページの右上角に表示されているもの）を探しましょう。もしPCにソフトウェアがなければ、次のリンクから無料でダウンロードできます。

GeoGebra https://goo.gl/jRmmdc

必ず「GeoGebra Clásico 5」をダウンロード（インストール）しましょう。また、以下のリンクからスマートフォン用のアプリをダウンロードしたり、「オンラインGeoGebra」を使ったりすることもできます。

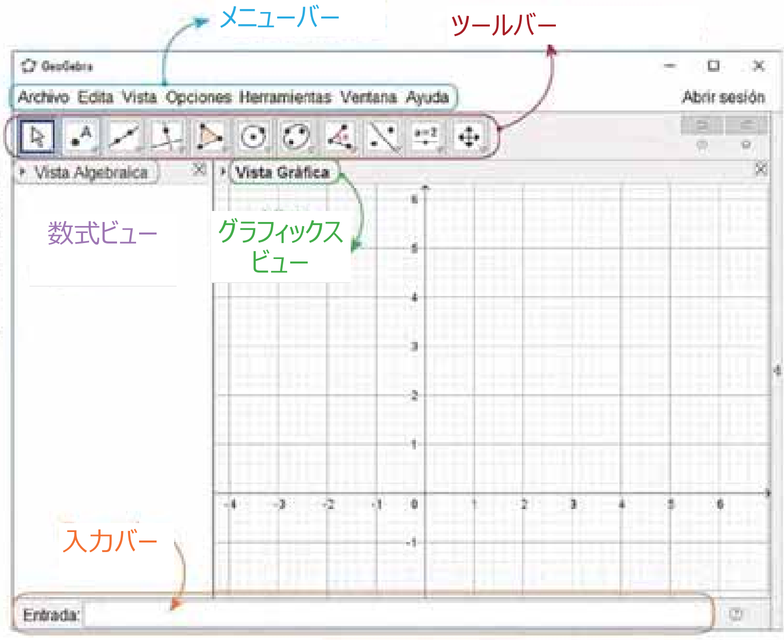
アプリ → https：//goo.gl/wf5mHx　**オンライン** → https：//goo.gl/ThXbeB

演習

以下のとおり行いましょう。

1. ソフトウェアのアイコンをクリックして GeoGebra の新規ファイルを開きます。

   ウィンドウには、次の各部が認識できます。 メニューバー、ツールバー、数式ビュー、グラフィックスビュー、入力バー。



2. グラフィックスビューの左にある三角形をクリックします。座標軸と方眼の非表示/表示ができます。

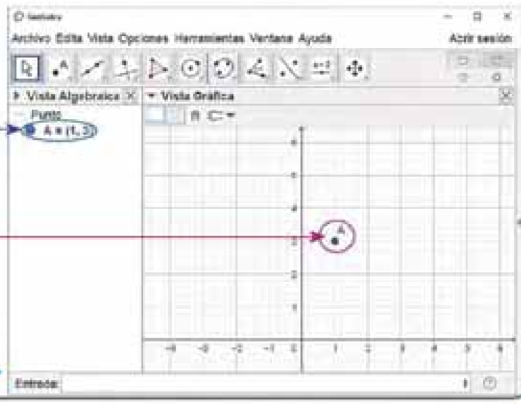
3. 平面上に点を配置するには、次のいずれかオプションを行います。

   a) 入力バーに (x, y) の形で点の座標を入力します。例えば、(1,3) と入力して Enterを押すと、自動的に数式ビューには点 A = (1,3) と表示され、グラフィックスビューの座標平面上に点が表示されます。

   入力： (1,3)

   GeoGebra では、点の名前を大文字でつけます。例えば、P(−2,5) のように特異な文字を使って点を示すには、次のように入力バーに 入力します。

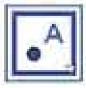
   入力： P=(−2,5)



ユニット4

レッスン5

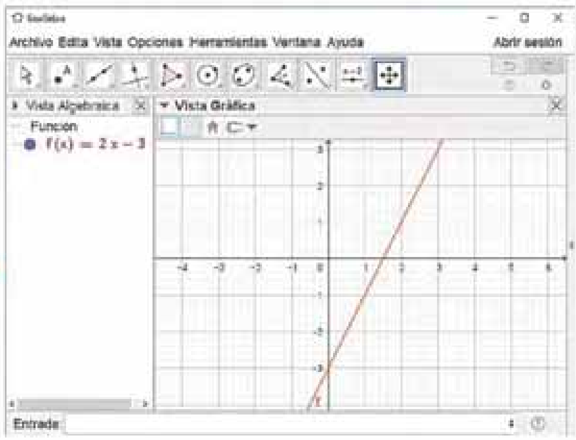
b) ツール「点」を選択します。グラフィックスビューの任意の位置にカーソルを置き、点を配置し、その後クリックします。点の座標が整数の場合は、このツールを用いて方眼を補助に使うのが簡単です。整数でない場合は、前項に示したように入力バーに座標を入力する方がよいでしょう。



4. オブジェクトを削除するには、そのオブジェクト上（数式ビューでもグラフィックスビューでもよい）で右クリックして、「削除」を選びます。オブジェクトを非表示とするのみで削除したくないときは、コンテキストメニューで「オブジェクトの表示」を選びます。そうすると、オブジェクトはグラフィックスビューから消えますが、数式ビューには残ります。

5. 座標平面を移動させるには、ツール「グラフィックスビューの移動」を選択します。その後、グラフィックスビュー上で左クリックしたまま、座標平面を配置したい場所までドラッグします。

6. 座標平面を拡大/縮小するには、「グラフィックスビューの移動」というアイコンの右下角を選択し、「「ズームイン 」または「 ズームアウト」を選び、その後、グラフィックスビュー上でクリックします。



7. 関数のグラフを描くには、$f(x)$ という表記を使います。例えば、関数 $f(x) = 2x - 3$ のグラフを描くには、入力バーに f(x)=2x-3 と入力し、Enter を押します。数式ビューに関数式、グラフィックスビューにそのグラフが表示されます。

また、g(x)、h(x) 等も使えます。変数 x は必ず小文字でなければなりません。そうすると、GeoGebra はこれを変数として認識します。

8. GeoGebraで 二次関数のグラフを描くには、累乗 x^2 は x^2 と入力します。例えば、$f(x) = 3x^2$ のグラフを描くには
、
入力バーにf(x)=3x^2 と入力します。

課題

1. 入力バー、可能であればツール「点」を使って、次の点を座標平面上に配置しなさい。

a) $A(-3, 4)$　　b) $B(2, 7)$　　c) $P(-6, 0)$　　d) $Q\left(4, -\frac{1}{2}\right)$

GeoGebraでは、分数 $\frac{m}{n}$ は m/n と入力します。

2. 次の関数のグラフを描きなさい。

a) $f(x) = -x + 3$　　b) $g(x) = \frac{2}{3}x - 5$　　c) $h(x) = 4x^2$　　d) $p(x) = -x^2$　　e) $q(x) = \frac{x^2}{2}$

達成の目安

5.1 数学ソフトウェアのツールを探究して、座標平面上に点を配置して一次関数や二次関数のグラフを描画します。

学習の流れ

この授業では、ソフトウェア GeoGebra の基本的なツールを探究します。また、一次関数や 二次関数のグラフを描くためにも活用します。

ねらい

「課題」の問題 2 の 二次関数は、次の授業で、生徒が水平移動と垂直移動を視覚化できるように $f(x) = ax^2$ という形式とします。

問題の解き方：

1a) 入力バーを使って、次のように入力します。

入力： **A=(−3,4)**

点の座標が整数なので、ツール「点」も使用できます。

1b) 入力バーを使って、次のように入力します。

入力： **B=(2,7)**

点の座標が整数なので、ツール「点」も使用できます。

1c) 入力バーを使って、次のように入力します。

入力： **P=(−6,0)**

点の座標が整数なので、ツール「点」も使用できます。

1d) 入力バーを使って、次のように入力します。

入力： **Q=(4,-1/2)**

数式ビューに Q = (4, -0.5) と表示されることを確認します。

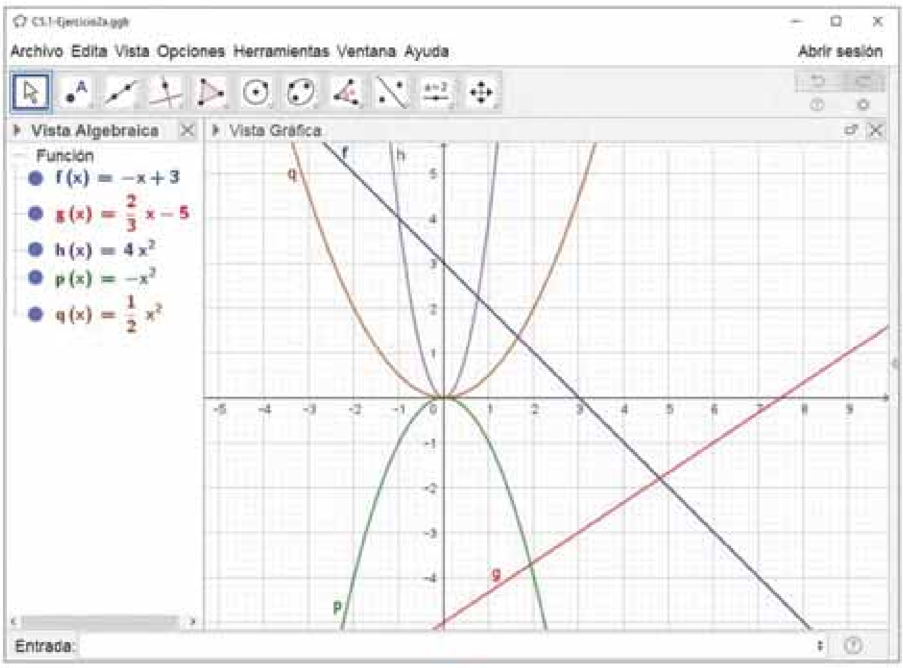
2a) 入力バーに f(x)=-x+3 と入力します。

2b) 入力バーに g(x)=2/3x-5 と入力します。

2c) 入力バーに h(x)=4x^2 と入力します。

2d) 入力バーに p(x)=-x^2 と入力します。

2e) 入力バーに q(x)=1/2x^2 と入力します。2a) から 2e) の各設問の関数のグラフは以下に示します。

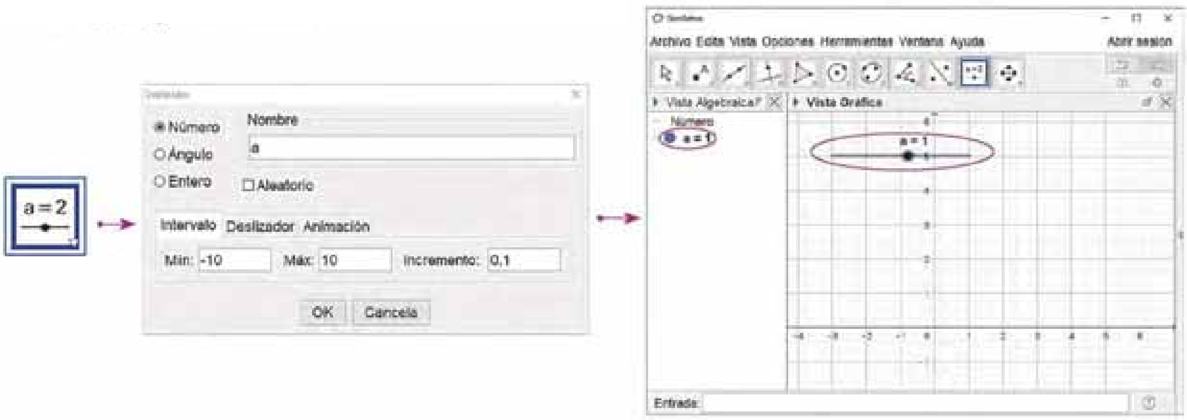


5.2 GeoGebra を使った演習 ： 垂直移動

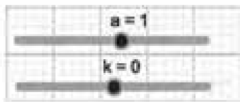
この演習は、ツール「スライダー」を使用して二次関数の垂直移動を視覚化する助けとなります。スライダーは、指示された区間の中で指定の値をとる変数です。

演習

1. ツール「スライダー」 を選択します。グラフィックスビュー上でクリックします。そうすると、スライダーの名前、タイプ（数値、角度、整数）、区間、増分を指定するダイアログ画面が表示されます。スライダーに **a** という名前をつけ、区間には最小値 –10、最大値10、増分は0.1と入力します。その後、OKを選択します。



2. 同じように、 **k** という名前で別のスライダーを作成し、 **a** と同じ特性（区間と増分）を指定します。スライダー上にある点にカーソルを当て、**k** の値が0になるまでドラッグします。



3. 入力バーに f(x)=ax^2 と入力します。そうすると、数式ビューに関数 $f(x) = 1x^2$ 、グラフィックスビューにこれに対応する放物線が表示されます。スライダー **a** を、まず正の値になるように、次に負の値になるように動かします。f のグラフはどうなるでしょうか。気づいたことをノートに書きましょう。

4. 入力バーに g(x)=f(x)+k と入力します。

5. g のグラフの頂点を特定するには、入力バーに extremum と入力します。Extremum(<多項式>)というオプションを選択します。次に、<多項式> というところに y=g(x) と入力します。そうすると、数式ビューに頂点の座標、グラフィックスビューに点が表示されます。

6. スライダー **k** を、まず正の数になるように、次に負の数になるように動かします。**k** が正の値のとき、または負の値のとき、関数のグラフと頂点はどうなるでしょうか。気づいたことをノートに書きましょう。

課題

今度は、別のツールを使い、9年生（中3）でやったように点をもとにして $f(x) = x^2$ のグラフを作成してみましょう。

1. 新規ウィンドウを開きます。スライダーを作成し、区間を –5 から 5、増分を 0.001 として「**n**」と名前をつけます。**n** の値が –5 になるまでスライダーを動かし、グラフィックスビューをズームアウトします。
2. 入力バーに点 P=(n,n^2) を入力します。次に、P の上で右クリックし、「残像表示」というオプションを選びます。
3. 「**n** 」の上で右クリックし、「アニメーション」を選びます。気づいたことをノートに書きましょう。

達成の目安

5.2 ソフトウェアのツールを使って、二次関数の垂直移動と点をもとにした $f(x) = x^2$ の放物線の作成を視覚化します。

学習の流れ

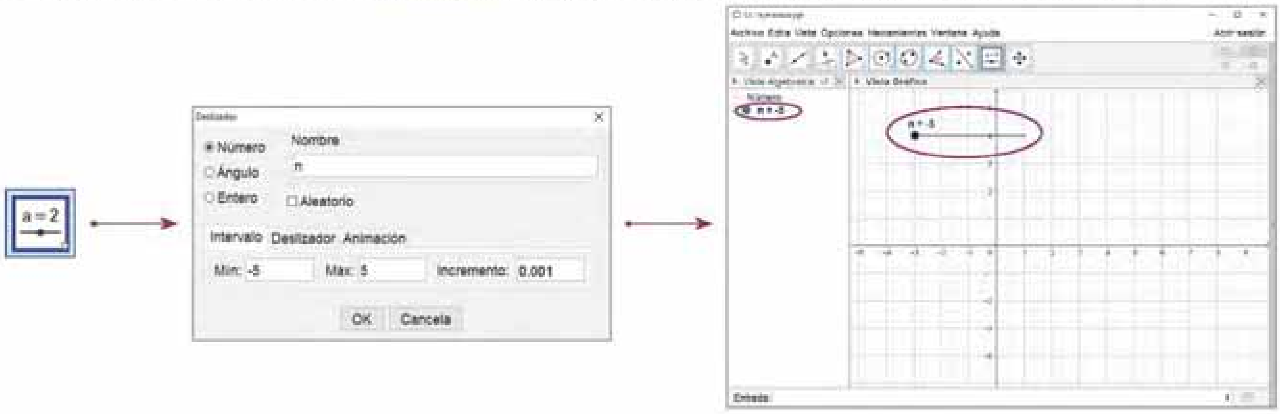
この授業では、ソフトウェア GeoGebra のツール「スライダー」を用いて、$f(x) = ax^2$ と $g(x) = f(x) + k$ のグラフの関係を検証します。

ねらい

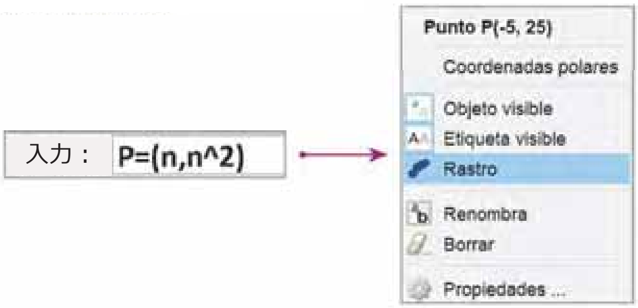
「課題」のところでは、$f(x) = x^2$ のグラフをツール「スライダー」とオプション「アニメーション」を用いて作成することを確認します。

問題の解き方：

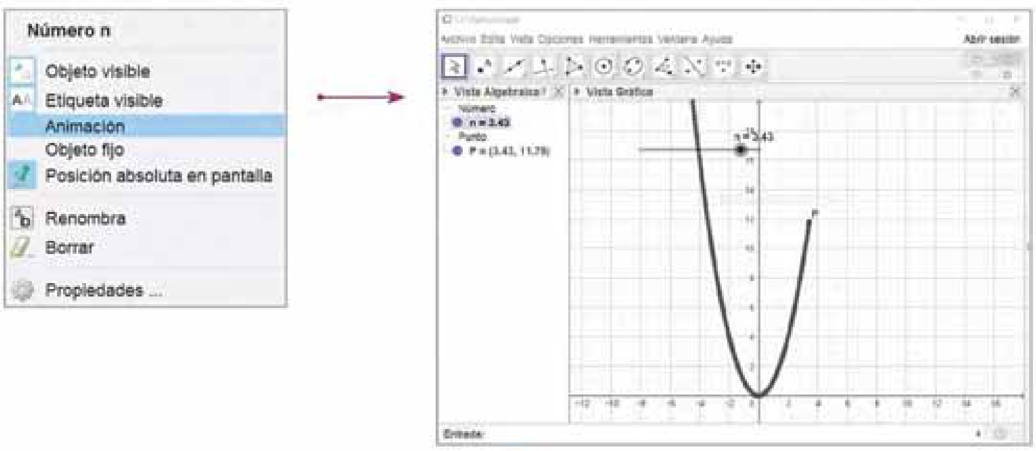
1. ツール「スライダー」を選択して、次に、グラフィックスビューの中のどこかでクリックします。



2. 入力バーに P(n, n^2) という座標を入力します。その後、数式ビューの点Pの上で右クリックし、オプション「残像表示」を選びます。



3. 数式ビューの数値 **n** の上で右クリックし、オプション「アニメーション」を選びます（アニメーションを停止するには、数値 **n** の上で再び右クリックしてオプション「アニメーション」のチェックを外します）。



5.3 GeoGebraを使った演習 ： 水平移動

この演習によって、水平移動、水平移動と垂直移動の組み合わせ、二次関数でない他の関数のグラフを視覚化します。

演習

水平移動：

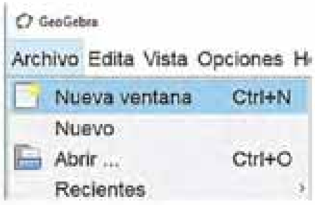
1. スライダーを 2 つ作成します。1 つ目には **a** という名前をつけて区間は –10 から 10、増分は 0.1 とし、2 つ目は **h** という名前で 特性（区間と増分）は **a** と同じにします。スライダー **h** の値が 0 になるまで動かします。

2. 関数 f(x)=ax^2 と g(x)=f(x-h) を作成し、g のグラフの頂点を求めます。

3. スライダー **a** の値が 1 以外になるように動かします。その後、スライダー **h** に対してアニメーションをオンにします。**h** が正の値のとき、g のグラフと頂点はどうなるでしょうか。負の値のときはどうでしょうか。結果をノートに描きましょう。

水平移動と垂直移動の組み合わせ：

1. メニューの「ファイル」から「新規ウィンドウ」を選び、GeoGebra の新規ウィンドウを開きます。



2. スライダーを3つ作成します。それぞれ **a**、**h**、**k** という名前をつけ、区間を –10から10、増分を0.1とする特性を指定します。スライダー **h** とスライダー **k** の値が0になるように動かします。

3. 関数 f(x)=ax^2 と g(x)=f(x-h)+k を作成します。さらに、g のグラフの頂点を求めます。

4. スライダー **a** の値が1以外になるように動かします。その後、スライダー **h** 、スライダー **k** という順で動かします。アニメーションはオンにはしません。f に対して g のグラフと頂点がどうなったのか書き留めましょう。

二次関数でない他の関数のグラフ：

1. GeoGebraの新規ウィンドウを開きます。

2. スライダー **m** を作成し、区間を –4から4、増分を0.001とする特性を指定します。スライダーの値が –4 になるように動かします。

3. 点「P=(m,m^3)」を作成し、残像表示をオンにします。その後、スライダー **m** のアニメーションをオンにします。今作成しているグラフに似たグラフの関数はどれでしょうか。

4. 区間を0から30、増分を 0.001 としてスライダー **n** を作成します。スライダーの値が 0 になるように動かします。

5. 点「Q=(n, sqrt(n))」を作成し、残像表示をオンにします。その後、スライダー **n** のアニメーションをオンにします。今作成しているグラフに似たグラフの関数はどれでしょうか。コマンド「sqrt」の機能は何でしょうか。

課題

1. GeoGebra を使って、授業 2.1 から 2.8 までの問題のグラフが正しく作成できたかどうか確認しなさい。

2. 授業 4.9 のグラフと授業 4.10 の問題 5 と 6 の結果を確認しなさい。

達成の目安

5.3 ソフトウェアのツールを使って、二次関数の水平移動と点をもとにした他の関数の作成を視覚化します。

学習の流れ

この授業では、ソフトウェアGeoGebraのツール「スライダー」を用いて、$f(x) = ax^2$ のグラフと $g(x) = f(x - h)$ および $h(x) = f(x - h) + k$ のグラフの間の関係を検証します。

ねらい

「課題」のところで、生徒は、このユニットのいくつかの問題の解答を検証するために、演習で学んだことを活用しなければなりません。

問題の解き方：

1.入力バーに、以下のように関数を入力します。

授業2.1 （各設問の関数にはそれぞれ異なる文字を設定します）。

a) f(x)=x+1　b) g(x)=-2x-3　c) h(x)=x^2+2　d) p(x)=-x^2-3

授業 2.2：

a) f(x)=(x-2)^2　b) g(x)=-(x-1)^2　c) h(x)=2(x-2)^2　d) p(x)=-2(x-3)^2

授業 2.3：

a) f(x)=(x+2)^2　b) g(x)=-(x+1)^2　c) h(x)=2(x+2)^2　d) p(x)=-2(x+3)^2

授業 2.4：

a) f(x)=(x-2)^2+3　b) g(x)=-(x-1)^2+2　c) h(x)=2(x+2)^2-1　d) p(x)=-2(x+3)^2-4

授業 2.5：

a) f(x)=(x+1)^2+2　b) g(x)=-(x+3)^2-3　c) h(x)=3(x-2)^2+1　d) p(x)=-3(x-4)^2-2

授業 2.6 （各設問にあるとおりに関数式を入力できます）。

a) f(x)=x^2-4x　b) g(x)=-x^2+2x　c) h(x)=3x^2+6x

授業 2.7：

a) f(x)=x^2+2x-2　b) g(x)=x^2+4x+5　c) h(x)=x^2-6x+7　d) p(x)=x^2-8x+18

授業 2.8：

a) f(x)=-x^2+8x-13　b) g(x)=3x^2+12x+11　c) h(x)=2x^2-20x+44　d) p(x)=-1/2x^2+x+3/2

2. 入力バーに、以下のように関数を入力します。

授業 4.9 （各設問の関数にはそれぞれ異なる文字を設定します）。

1a) f(x)=4x^3　1b) g(x)=1/4x^3　1c) h(x)=-4x^3　1d) p(x)=-1/4x^3

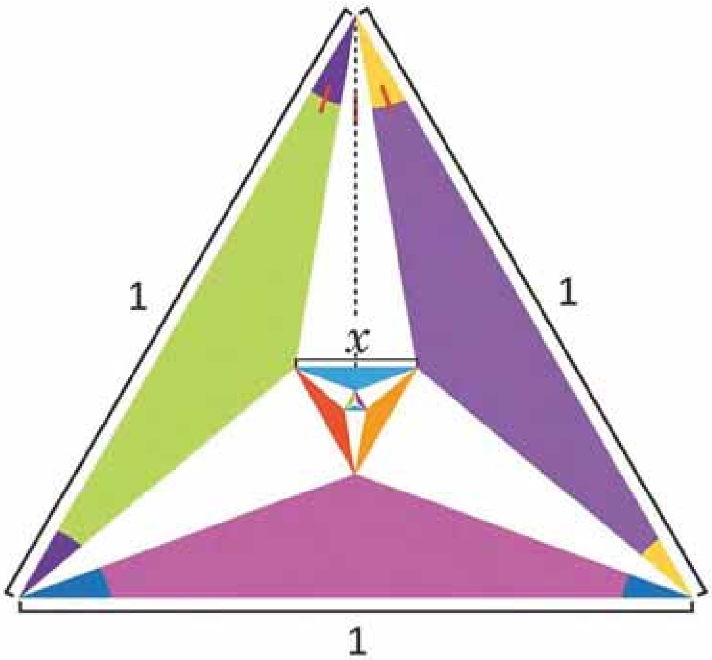
2a) f(x)=(-2x)/(x-2)　2b) g(x)=(2x+3)/(x-1)

3a) f(x)=-3sqrt(x)　3b) g(x)=4sqrt(x)　3c) h(x)=sqrt(-3x)　3d) p(x)=sqrt(4x)

授業4.10 （各設問の関数にはそれぞれ異なる文字を設定します）。

5a) f(x)=x^3+1　5b) g(x)=(x-2)^3

6a) f(x)=-sqrt(-x)　6b) g(x)=sqrt(x)+1　6c) h(x)=sqrt(-x)-3　6d) p(x)=sqrt(x-1)



$x =$?

それぞれの角は 20° です。高さを示す点線を引くと、$h = \dfrac{1}{2\cos 20°}$ なので、
$\sin 10° = x \cos 20°$ が成立し、よって、$x = \dfrac{\sin 10°}{\cos 20°}$ となります。

REPÚBLICA DE EL SALVADOR EN LA AMÉRICA CENTRAL