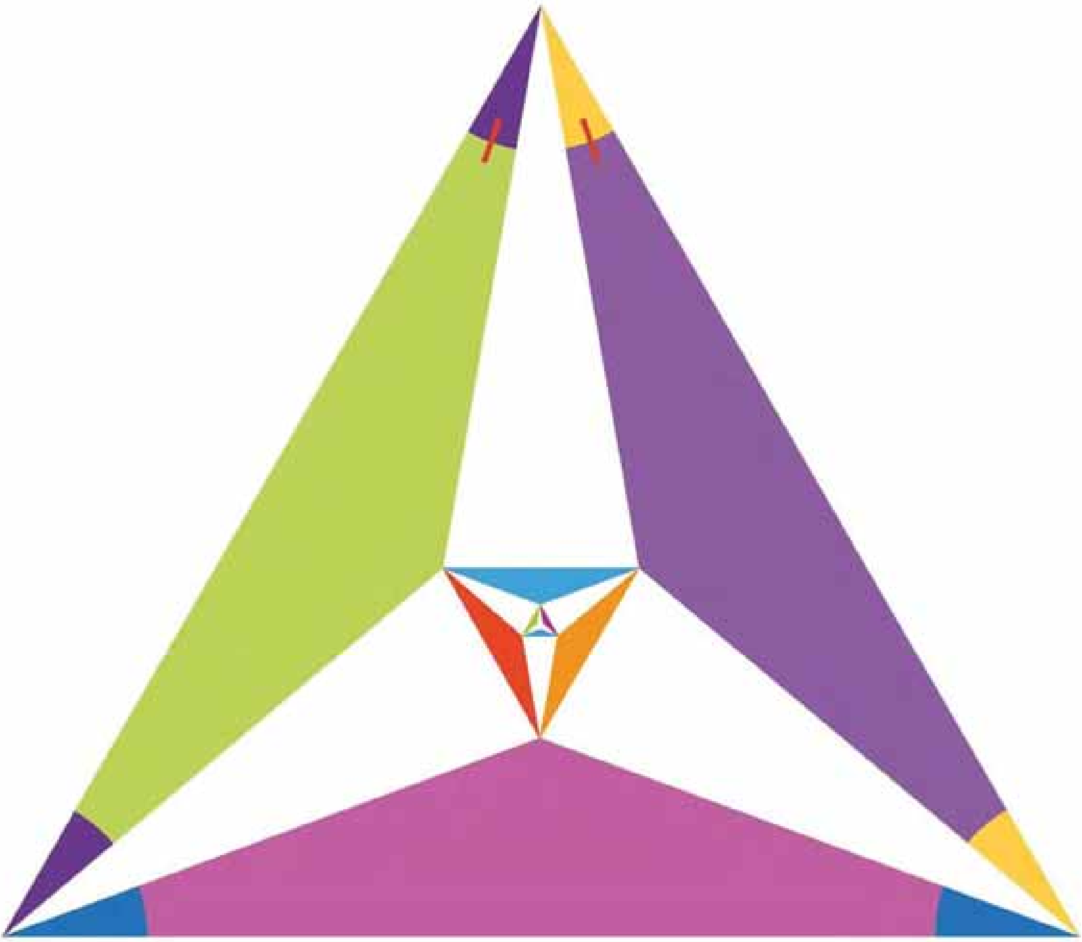
エルサルバドル政府

教育省

算数

高校1年



第2巻

指導案

第二版

ESMATE

JICA

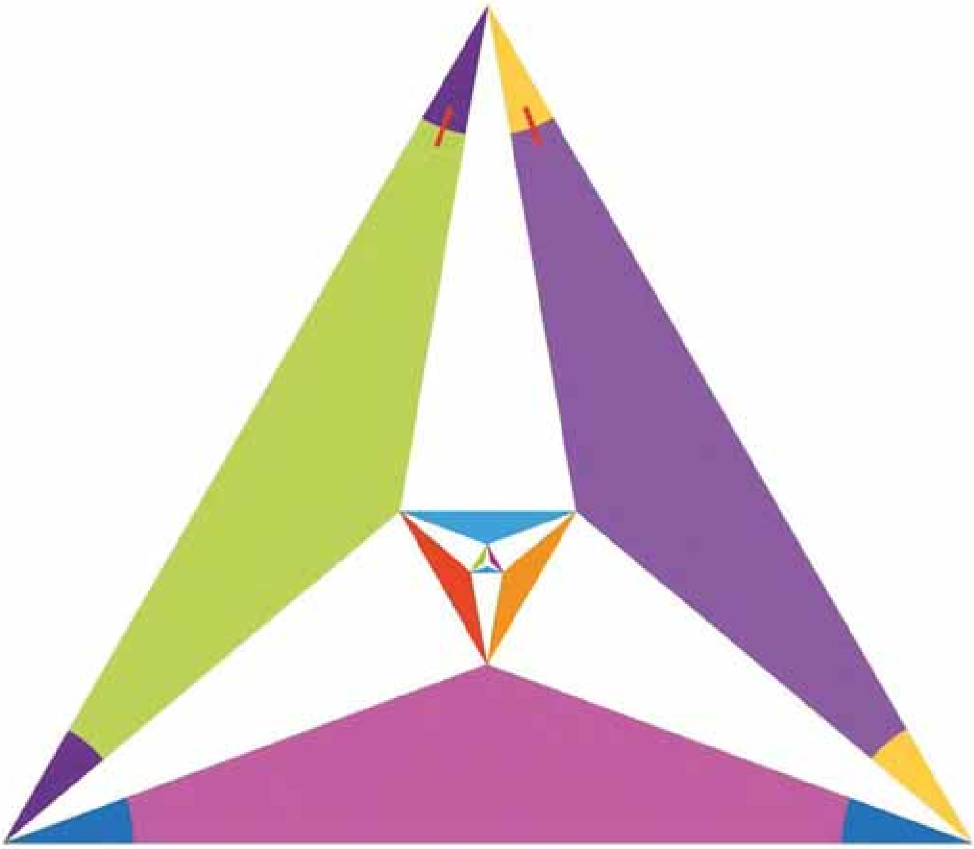
高校 1 第2版 算数 第2巻 指導案

エルサルバドル政府

教育省

算数

高校1年



第2巻

指導案

第二版

調整および技術的校正
César Omar Gómez Juárez

教育省の執筆及びレイアウトチーム
Ana Ester Argueta Aranda
Diana Marcela Herrera Polanco
César Omar Gómez Juárez
Francisco Antonio Mejía Ramos

デザイン及びレイアウトの校正
Francisco René Burgos Álvarez
Judith Samanta Romero de Ciudad Real

文体修正
Marlene Elizabeth Rodas Rosales
Ana Esmeralda Quijada Cárdenas

国際協力機構（JICA）を通じた日本の技術協力

表紙の画像は教育的見地から、正三角形の内角を三等分し、それによりその中にできる最も大きい三角形の辺の値を求めることができる図を用いています。
答えは裏表紙にあります。

510
M425 算数：高校1年［電子資料］：、
指導案 第2巻／Ana Ester Argueta Aranda、Diana Marcela Herrera Polanco、César Omar Gómez Juárez、Francisco Antonio Mejía Ramos；
監修 レイアウト Judith Samanta Romero de Ciudad Real, Francisco René Burgos Álvarez. -- 第2版 --
サンサルバドル、エルサルバドル：教育省（MINED）、2020年。
電子資料 1ファイル（240ページ；図解入り；28 cm -（Esmate）
電子データ（1ファイル：pdf、11 MB）-- www.mined.gob.sv.
ISBN 978-99961-355-8-3（印刷）
1. 算数－教科書。2. 算数－ 教授 -- 方法論
I. Argueta Aranda、Ana Ester、共著。II. タイトル。
BINA

教師のみなさん

心からご挨拶を申し上げ、エルサルバドルの全国民のために重要な仕事をされていることに感謝します。

教育科学技術省（MINEDUCYT）は初中等教育算数・数学指導力向上プロジェクト（ESMATE）を通じて、みなさんのために算数・数学科目の教師用指導案を作成しました。この指導書は日常の指導活動で重要なツールとなるでしょう。

この資料は、当科目の授業を展開する方法を具体的に指導し、その結果エルサルバドルの生徒たちの学びを大きく向上させることを主な目的としています。

この指導案は生徒用の教科書に対応する授業内容の提案となっていることから、算数学習プログラムの規程を具体的に実現するものであると言えます。

みなさんがこの資料を最大限に活用し、私たちの愛する国の発展に貢献し続けるべく、全力で努力し献身されると確信しています。

敬具

Carla Evelyn Hananía de Varela
教育科学技術大臣

Ricardo Cardona Alvarenga
教育科学技術副大臣

目次

ユニット5
斜三角形の解法 5
レッスン1：鋭角の三角比 8
レッスン1のテスト 34
レッスン2：一般角の三角比 38
レッスン3：斜三角形の解法 60
レッスン2と3のテスト 83

ユニット6
三角関数の公式と三角方程式 87
レッスン1：三角関数の公式 89
レッスン2：三角方程式 107
ユニット6のテスト 120
3学期末テスト 123

ユニット7
ベクトルと複素数 131
レッスン1：ベクトル 134
レッスン2：ベクトルの内積 150
レッスン1と2のテスト 162
レッスン3：複素数 166
レッスン4：GeoGebraを使った演習 185
レッスン3のテスト 191

ユニット8
記述統計 193
レッスン1：標本抽出、統計量、パラメータ 195
レッスン2：位置の測定 214
レッスン3：GeoGebraを使った演習 228
ユニット8のテスト 231
4学期末テスト 234

ユニット 5.　斜三角形の解法

ユニットのねらい

測量法を用いて三角形を求め、日常の様々な場面で応用する。

関連と展開

中学3年

ユニット 5：相似な図形（第9学年）
- 相似
- 三角形の相似
- 相似と平行
- 相似の応用と相似三角形

ユニット 6：ピタゴラスの定理（第9学年）
- ピタゴラスの定理
- ピタゴラスの定理の応用

高校 1 年

ユニット 5：斜三角形の解法
- 鋭角の三角比
- 一般角の三角比
- 斜三角形の解法

ユニット 6：三角関数の公式と三角方程式
- 三角関数の公式
- 三角方程式

ユニット 7：ベクトル
- ベクトル
- ベクトルの点乗積
- 複素数
- GeoGebra を使った演習

高校 2 年

ユニット 5：超越関数 II
- 全単射関数と逆関数
- 対数関数
- 三角関数
- GeoGebra を使った演習

ユニットの学習計画

レッスン	時間	授業
1. 鋭角の三角比	1	1. 三角比
	1	2. 直角三角形における三角比
	1	3. 基本直角三角形
	1	4. 直角三角形の三角比
	1	5. 一辺と一角が分っている直角三角形
	1	6. 二辺が分っている直角三角形
	1	7. 復習問題
	1	8. 三角比の応用
	1	9. 俯角
	1	10. 仰角
	1	11. 演習：クリノメーターの作成
	1	12. 三角比の応用
	1	レッスン 1 のテスト
2. 一般角の三角比	1	1. 2点間の距離
	1	2. 座標平面上での対称性
	1	3. 角
	1	4. 360° より大きい角と -360° より小さい角
	1	5. 任意の角度の三角関数の比率（第一部）
	1	6. 任意の角度の三角関数の比率（第二部）
	1	7. 任意の角度の三角関数の比率（第三部）
	1	8. 任意の角度の三角関数の比率（第四部）
	1	9. ピタゴラスの公式

レッスン	時間	授業
	1	10. 復習問題
3. 斜三角形の解法	1	1. 三角形の面積
	1	2. サインの公式
	1	3. 辺が分っている三角形の計算角度、第一部
	1	4. 2 辺が分っている三角形の計算角度、第二部
	1	5. コサインの公式
	1	6. 3 つが分っている三角形の角度の計算辺
	1	7. 復習問題
	1	8. サイン、コサインの公式の応用
	1	9. 復習問題
	1	10. ユニットの問題
	1	11. ユニットの問題
	1	レッスン 2 とレッスン 3 のテスト

全33コマ + レッスン 1 のテスト + レッスン 2 とレッスン 3 のテスト

各レッスンの要点

レッスン1：鋭角の三角比
このユニットは、角度のみの、辺の長さに依存しない直角系の三角比の証明から始めます。基本三角形の三角比を定着させ、あらゆる鋭角や直角の側辺にある角度から三角比を計算します。最終的には、三角比の使用が求められる問題を解きます。

レッスン 2：一般角の三角比
一般角の三角比は座標、また前課の内容（角度 30°, 45° と 60° の三角比）特別な角度の三角比の計算（前述の角度での計算ができるものは）を用いて計算します。必ずしも特殊角度になるとは限らない角度を計算します。

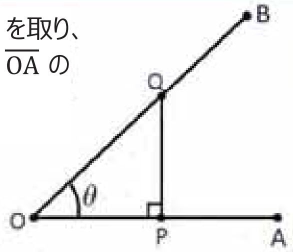
レッスン 3：斜三角形の解法
斜三角形と出された問題の解法のためのサインとコサインの公式を定着させます。

レッスン 1 鋭角の三角比

1.1 三角比*

導入問題

直線の線分$\overline{OA}$及び$\overline{OB}$を取り、その間に出来た角の大きさをθとします。$\overline{OB}$ 上に 点 Q を取り、垂直な線分を $\overline{OA}$ まで引き Q を通るようにします。図が示すように、この垂直の線分と $\overline{OA}$ の間の交点は P ということになります。



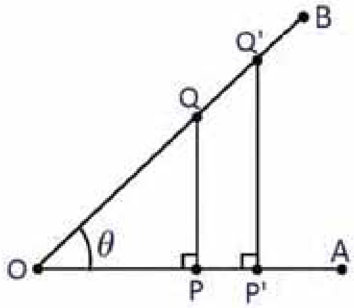
直角三角形 OPQ の比は以下のようになります。$\frac{PQ}{OQ}, \frac{OP}{OQ}, \frac{PQ}{OP}$.

定義された比が直角三角形 OPQ の辺の長さに依存しないことを証明しましょう。

解法

$\overline{OB}$上に Q とは別に任意の点 Q′ を取ります。図が示すように、$\overline{OA}$ に垂直で Q′ を通る線分を引き、この垂直線分と $\overline{OA}$ の交点が P' になるようにします。そして、条件 AA (ΔOPQ ~ ΔOP'Q′ で表される)により、三角形 OPQ と OP'Q' は相似であるので、次のことが言えます。

$$\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{OP}{OP'} = \frac{OQ}{OQ'}.$$



$\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{OQ}{OQ'}$ から、$\frac{PQ}{OQ} = \frac{P'Q'}{OQ'}$ と導かれます。

$\frac{OP}{OP'} = \frac{OQ}{OQ'}$ から、$\frac{OP}{OQ} = \frac{OP'}{OQ'}$ と導かれます。

$\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{OP}{OP'}$ から、$\frac{PQ}{OP} = \frac{P'Q'}{OP'}$ と導かれます。

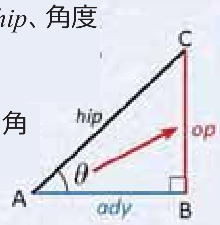
> 比例式が $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ の時、$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ が成り立ちます。

よって、$\frac{PQ}{OQ} = \frac{P'Q'}{OQ'}$, $\frac{OP}{OQ} = \frac{OP'}{OQ'}$, $\frac{PQ}{OP} = \frac{P'Q'}{OP'}$ となります。

よって、比 $\frac{PQ}{OQ}, \frac{OP}{OQ}, \frac{PQ}{OP}$ は三角形の辺の長さに依存しないと言えます。

定義

ABC が直角三角形で、B が直角、ΔABC の鋭角の一つの角度が θ とします。三角形の斜辺を hip、角度に相対する辺を op、角度の隣接する辺を ady と定義します。



三角形の中の相対する辺と隣接する辺は、どの角度に対してなのかによって異なりますので、三角形が図に示されているのとは違う置き方になっている場合には特に注意が必要です。

比 sen θ, cos θ, tan θ は sen $\theta = \frac{op}{hip}$, cos $\theta = \frac{ady}{hip}$, tan $\theta = \frac{op}{ady}$ と定義され、それぞれ “シータのサイン”、“シータのコサイン”、“シータのタンジェント” と読みます。

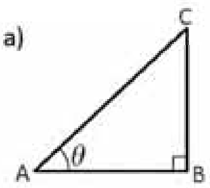
比 sen θ、cos θ、tan θ を角度 θ の**三角比**と言います。

問題

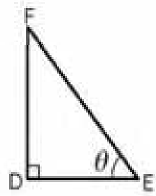
> 直角三角形において、90°の角に相対する辺を**斜辺**と言い、直角を作る二つの辺のことを**隣辺**と言います。さらに、斜辺は最も長い辺です。

斜辺、角度 θ に相対する辺と隣接する辺を見つけましょう。そして、それぞれの場合の三角比を表しましょう。

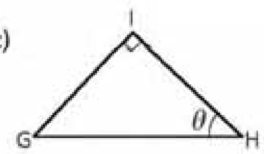
a)



b)



c)



達成の目安

1.1 直角三角形における一つの鋭角の三角比を、斜辺、その鋭角に相対する辺と隣接する辺について定義することができる。

学習の流れ：

このユニットでは三角法の初歩的学習をします。角度の理論、直角三角形、三角形の相似性などを主なベースとしてこのユニットを展開していきます。さらに、垂直線分や比例式、またその性質の知識も必要とされます。
この授業は、教師がよりしっかり支援しながら展開していかねばなりません。

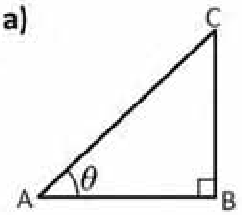
ねらい：

この授業の主な目的は、三角比は角度にのみ依存するもので、当該直角三角形の辺の長さに依存するものではないことを証明することです。

問題のセクションは、直角三角形の斜辺、ある角に相対する辺及び隣接する辺を正しく見つけ出すということを生徒にしっかりと身に着けさせることを目指しています。

問題の解答：

a)



斜辺が hip = AC、相対する辺が op = BC、隣接する辺が ady = AB です。

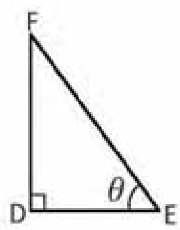
三角形 ABC の三角比は以下の通りです。

$$\text{sen}\ \theta = \frac{op}{hip} = \frac{BC}{AC},$$

$$\cos\theta = \frac{ady}{hip} = \frac{AB}{AC},$$

$$\tan\theta = \frac{op}{ady} = \frac{BC}{AB}.$$

b)



斜辺が hip = EF、相対する辺が op = DF、隣接する辺が ady = DE です。

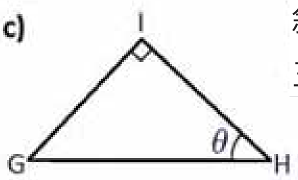
三角形 DEF の三角比は以下の通りです。

$$\text{sen}\ \theta = \frac{op}{hip} = \frac{DF}{EF},$$

$$\cos\theta = \frac{ady}{hip} = \frac{DE}{EF},$$

$$\tan\theta = \frac{op}{ady} = \frac{DF}{DE}.$$

c)



斜辺が hip = GH、相対する辺が op = GI、隣接する辺が ady = HI です。

三角形 GHI の三角比は以下の通りです。

$$\text{sen}\ \theta = \frac{op}{hip} = \frac{GI}{GH},$$

$$\cos\theta = \frac{ady}{hip} = \frac{HI}{GH},$$

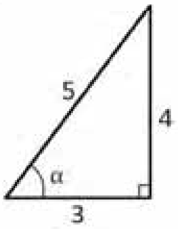
$$\tan\theta = \frac{op}{ady} = \frac{GI}{HI}.$$

1.2 直角三角形における三角比

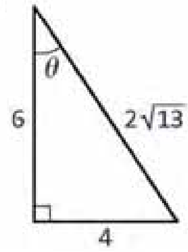
導入問題

角 α 及び θ の三つの三角比を求めましょう。

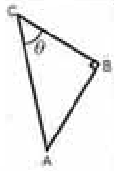
a)



b)



角に対応する辺と隣接する辺を選ぶ際に注意が必要です。例えば、三角形 ABC では、θ に相対する辺は $\overline{AB}$ で、θ に隣接する辺は $\overline{BC}$ です。



解法

a) 角 α の斜辺、相対する辺、隣接する辺を見つけ出します。この場合、hip = 5、op = 4、ady = 3 なので、以下のようになります。

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{op}{hip} = \frac{4}{5},\quad \cos\alpha = \frac{ady}{hip} = \frac{3}{5},\quad \tan\alpha = \frac{op}{ady} = \frac{4}{3}.$$

b) 角 θ の斜辺、相対する辺、隣接する辺を見つけ出します。この場合、$hip = 2\sqrt{13}$、op = 4、ady = 6 なので、以下のようになります。

- $\text{sen}\,\theta = \frac{op}{hip} = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \times \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ と、分母の有理化を行います。
- $\cos\theta = \frac{ady}{hip} = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ と、分母の有理化を行います。
- $\tan\theta = \frac{op}{ady} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$

復習しよう。分数を有理化するには、分数の分母にある平方根で、分子と分母に掛けます。

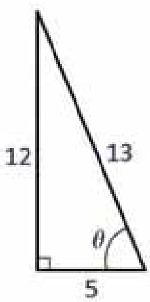
定義

直角三角形の辺の長さがわかっていれば、その鋭角の一つの三角比正弦（サイン）、余弦（コサイン）、正接（タンジェント）は、その角の斜辺、相対する辺、隣接する辺の長さを見つけ、授業1.1で定義した比を計算することによって算定することができます。

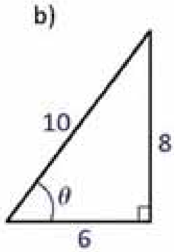
問題

1. 以下の三角形それぞれについて、三角比 sen θ、cos θ、tan θ を計算しましょう。
   可能なところは、約分あるいは有理化してください。

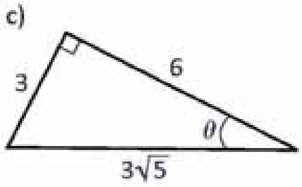
a)



b)

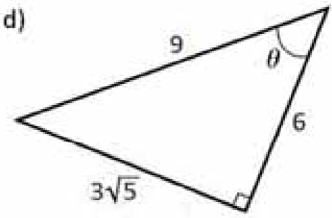


c)

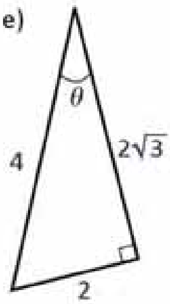


ユニット5

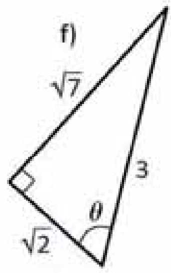
d)



e)

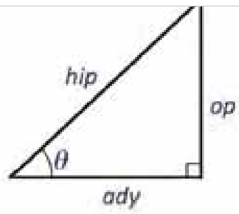


f)



2. csc θ、sec θ、cot θ と表される鋭角 θ の三角比余割（コセカント）、小割（セカント）、余接（コタンジェント）が以下のように定義されます。

$$\csc\theta = \frac{hip}{op},$$
$$\sec\theta = \frac{hip}{ady},$$
$$\cot\theta = \frac{ady}{op}.$$



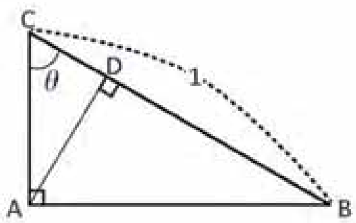
問題 1 の三角形について、三角比 csc θ、sec θ、cot θ を求めましょう。

3. 問題 2 の定義に基づき、$\csc\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta}$ であることを証明しましょう。

4. 問題 2 の定義に基づき、$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ であることを証明しましょう。

5. 問題 2 の定義に基づき、$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ であることを証明しましょう。

6. 次の図で、ABC は直角三角形で、$\measuredangle CAB = 90°$、$\measuredangle BCA = \theta$、BC = 1 です。線分 AC、AB、AD、BD、CD の値を 角 θ を使って表しましょう。



三角法 という名称はギリシャ語の「三角形」と「測る」という言葉から来ています。その始まりが、主に「三角形を解く」（三辺と三角のうち、いくつかは分かっている場合にこのすべての寸法を計算する）という問題に関係していることから、そのように呼ばれています。

三角法は三角形を解く必要性から生まれましたが、現在では物理学（振り子の動きの計測）、天文学（恒星間距離の計測）、地図作成法（二点間距離の計測）など多くの分野で使われています。

紀元前 2 世紀頃、ギリシャの天文学者の中で最も著名とされる小アジアのニカイアに生まれた数学者ヒッパルコス（紀元前 180～125 年）は、ある意味では正弦値の初歩的な表に相当する円周の弦の数表を使い始めました。

アボット、B.A. (1967).『独学三角法』

達成の目安

1.2 鋭角の三角比サイン、コサイン、タンジェントを計算することができる。

学習の流れ：

直角三角形の鋭角の斜辺、隣接する辺、相対する辺を特定できるようになったら、この授業では、辺の長さがわかっている直角三角形を使って鋭角の三角比を定めます。

ねらい：

直角三角形の斜辺と隣辺の長さを特定し、その三角形の鋭角の 1 つについて三角比を定められるようになることです。

問題の解答：

1a) $hip = 13$, $op = 12$、$ady = 5$ であるので、したがって、
$\text{sen }\theta = \frac{op}{hip} = \frac{12}{13}$, $\cos\theta = \frac{ady}{hip} = \frac{5}{13}$, $\tan\theta = \frac{op}{ady} = \frac{12}{5}$
となります。

1b) $hip = 10$、$op = 8$、$ady = 6$ であるので、したがって、
$\text{sen }\theta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, $\tan\theta = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$
となります。

1c) $hip = 3\sqrt{5}$、$op = 3$、$ady = 6$ であるので、したがって、
$\text{sen }\theta = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\theta = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\tan\theta = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
となります。

1d) $hip = 9$、$op = 3\sqrt{5}$ 、$ady = 6$ であるので、したがって、
$\text{sen }\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\cos\theta = \frac{2}{3}$, $\tan\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$
となります。

1e) $hip = 4$、$op = 2$、$ady = 2\sqrt{3}$ であるので、したがって、
$\text{sen }\theta = \frac{1}{2}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$
となります。

1f) $hip = 3$、$op = \sqrt{7}$、$ady = \sqrt{2}$ であるので、したがって、
$\text{sen }\theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\tan\theta = \frac{\sqrt{14}}{2}$
となります。

2a) $\csc\theta = \frac{hip}{op} = \frac{13}{12}$, $\sec\theta = \frac{hip}{ady} = \frac{13}{5}$, $\cot\theta = \frac{ady}{op} = \frac{5}{12}$.

2b) $\csc\theta = \frac{5}{4}$, $\sec\theta = \frac{5}{3}$, $\cot\theta = \frac{3}{4}$.

2c) $\csc\theta = \sqrt{5}$, $\sec\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\cot\theta = 2$.

2d) $\csc\theta = \frac{3\sqrt{5}}{5}$, $\sec\theta = \frac{3}{2}$, $\cot\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

2e) $\csc\theta = 2$, $\sec\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\cot\theta = \sqrt{3}$.

2f) $\csc\theta = \frac{3\sqrt{7}}{7}$, $\sec\theta = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\cot\theta = \frac{\sqrt{14}}{7}$.

3. $\frac{1}{\text{sen }\theta} = 1 \div \frac{op}{hip} = 1 \times \frac{hip}{op} = \frac{hip}{op} = \csc\theta$

4. $\frac{1}{\cos\theta} = 1 \div \frac{ady}{hip} = 1 \times \frac{hip}{ady} = \frac{hip}{ady} = \sec\theta$

5. $\frac{1}{\tan\theta} = 1 \div \frac{op}{ady} = 1 \times \frac{ady}{op} = \frac{ady}{op} = \cot\theta$

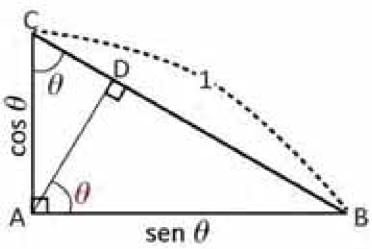
6. ΔABC について、以下がわかっています。

$\cos\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{1} \Rightarrow AC = \cos\theta$、$\text{sen }\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{1} \Rightarrow AB = \text{sen }\theta$.

ΔADCについて、∢DAC = 90° – θ と導くことができ、よって、∢DAB = θとなります。

すると、ΔABD については、以下がわかっています。

$\cos\theta = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{\text{sen }\theta} \Rightarrow AD = \cos\theta\ \text{sen }\theta$、$\text{sen }\theta = \frac{BD}{AB} = \frac{BD}{\text{sen }\theta} \Rightarrow BD = \text{sen}^2\theta$.



よって、$CD = BC - BD = 1 - \text{sen}^2\theta$ となります。

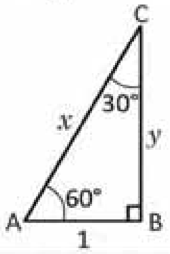
レッスン 1

1.3 特殊な直角三角形

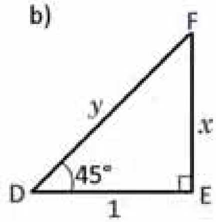
導入問題

次の直角三角形において、x と y の値を求めましょう。

a)

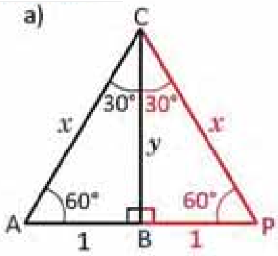


b)



解法

a)



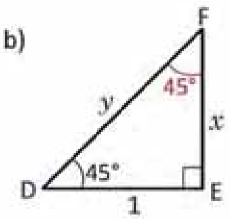
三角形 ABC を $\overline{BC}$を軸に反転させると三角形 APC が得られます。∢BCA = 30° であるので、∢PCA = 60° でなくてはなりません。結果的に三角形 APC は正三角形となるので、x = AP = 2 となります。

よって、y 値を求めるには、ピタゴラスの定理を三角形 ABC に適用します。 $x^2 = 1^2 + y^2$ つまり、

$$y^2 = x^2 - 1^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3.$$

$y > 0$であるので、$y = \sqrt{3}$

b)



三角形 DEF において、角 FDE と角 DFE は余角の関係にあります。つまり、∢FDE + ∢EFD = 90° したがって、∢EFD = 45° になります。それで、三角形 DEF は二等辺三角形であることがわかるので、x = 1 となります。

y 値を求めるには、ピタゴラスの定理を三角形 DEF に適用します。

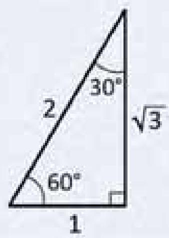
$$y^2 = 1^2 + x^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

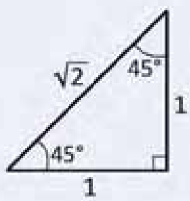
$y > 0$,であるので、$y = \sqrt{2}$

定義

鋭角が 30° と 60°の直角三角形と、その二つの鋭角が 45° の直角三角形のことを**特殊な三角形**と呼びます。

このような三角形のことを指して、30, 60 の三角形、また 45 の三角形という呼び方がよく使われます。

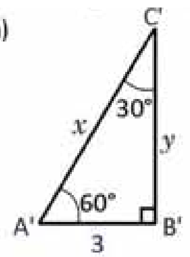




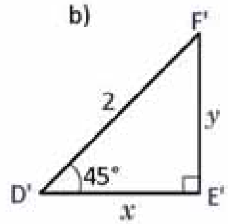
例

次の三角形において、x と y の値を求めましょう。

a)

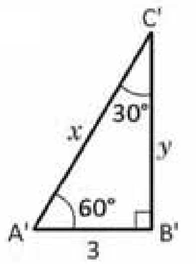


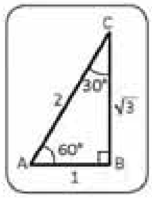
b)



a) ΔA'B'C' ~ ΔABC であることに注目すると、以下が成り立ちます。

$\frac{x}{2} = \frac{3}{1} \Rightarrow x = 3(2) = 6$ と $\frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{3}{1} \Rightarrow y = 3\sqrt{3}.$

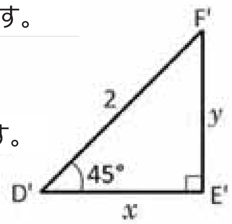


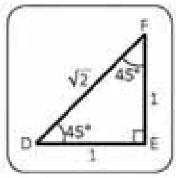


b) a) と同様に、ΔD'E'F' ~ ΔDEF であるので、以下が成り立ちます。

$\frac{x}{1} = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$

よって、ΔD'E'F' は二等辺三角形なので、$y = \sqrt{2}$ とわかります。

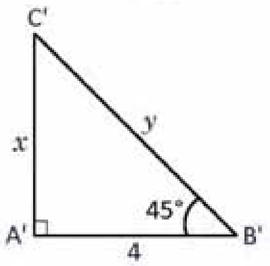




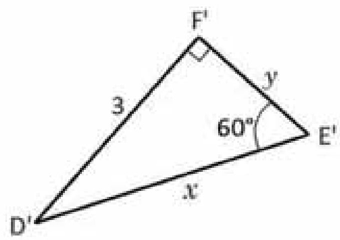
問題

それぞれの三角形について x と y の値を求めてみましょう。

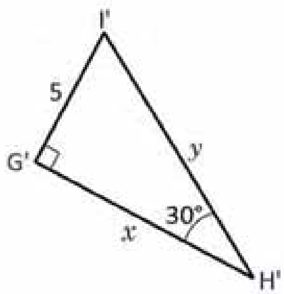
a)



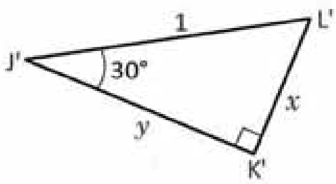
b)



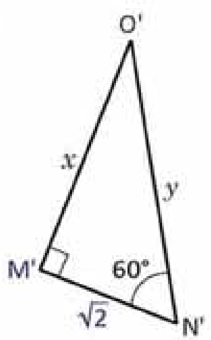
c)



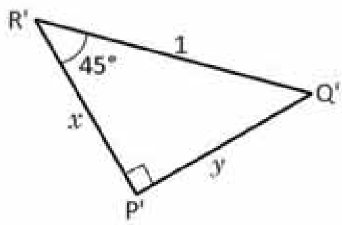
d)



e)



f)



達成の目安

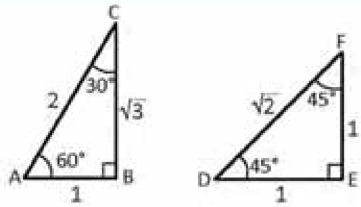
1.3 特殊な三角形と相似条件を使って直角三角形の辺の長さを求めることができる。

学習の流れ：

与えられた直角三角形からある鋭角の三角比を計算して、特殊な三角形を定義し、辺の一つの長さがわかっている時に、残りの辺の長さを求めます。

ねらい：

30°、60° の直角三角形と 45° の直角三角形の一つの辺の長さがわかっている時に残りの辺の長さを計算します。例では、導入問題と類似した問題を解きますが、結論で定めた三角形との相似条件を用いて行います。

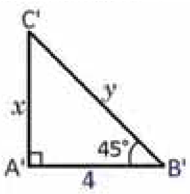


問題の解答：

この問題を解くには、導入問題の解答と同じやり方、例で行ったように相似条件を使うやり方、どちらで解いても構いません。

相似の図の呼び方については中学三年生の教科書ユニット 5 の 授業1.3 (127 ページ) を参照のこと。

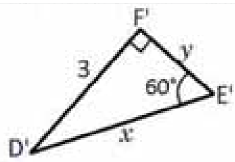
a) ΔA'B'C' ~ ΔEFD であるので、



$\frac{x}{1} = \frac{4}{1} \Rightarrow x = 4,$

$\frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{4}{1} \Rightarrow y = 4\sqrt{2}.$

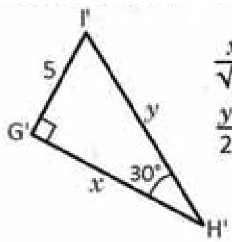
b) ΔD'E'F' ~ ΔCAB であるので、



$\frac{x}{2} = \frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3},$

$\frac{y}{1} = \frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$

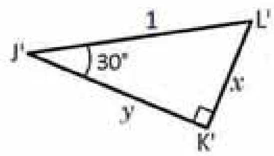
c) ΔI'G'H' ~ ΔABC であるので、



$\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{5}{1} \Rightarrow x = 5\sqrt{3},$

$\frac{y}{2} = \frac{5}{1} \Rightarrow y = 10.$

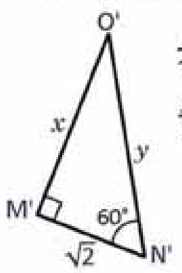
d) ΔL'K'J' ~ ΔABC であるので、



$\frac{x}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2},$

$\frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

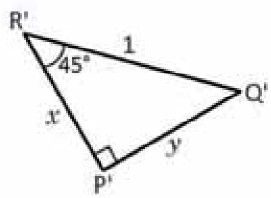
e) ΔN'M'O' ~ ΔABC であるので、



$\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{1} \Rightarrow x = \sqrt{6},$

$\frac{y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{1} \Rightarrow y = 2\sqrt{2}.$

f) ΔR'P'Q' ~ ΔDEF であるので、



$\frac{x}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$

$y = x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

レッスン 1

1.4 特殊な直角三角形の三角比

導入問題

角度30°、45°、60° の三角比を三つとも求めましょう。

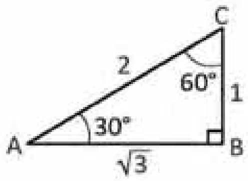
解法

a) 角度 30° の三角比を計算するには、図に示されている三角形を使います。角度 30° の相対の辺と隣接する辺を特定すると、$ady = \sqrt{3}$ 、$op = 1$ であることがわかります。よって

$$\text{sen } 30° = \frac{1}{2},$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

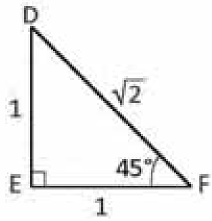


b) 角度 45° の三角比を計算するには、図に示されている三角形を使います。角度 45° の相対の辺と隣接する辺を特定すると、$ady = op = 1$ であることがわかります。よって

$$\text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\tan 45° = \frac{1}{1} = 1.$$



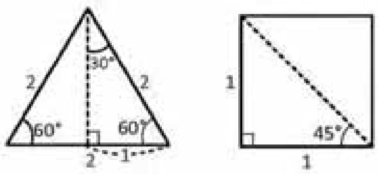
c) 角度 60° の三角比を求めるには、a) で使ったのと同じ三角形 ABC を使います。この場合、$ady = 1$、$op = \sqrt{3}$ です。よって

$$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2},$$

$$\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$

角度 30°、45°、60° の三角比を覚える方法の一つとして、 次のような 30°、 60° の三角形と 45° の三角形の作り方を覚えておくという方法があります。



まとめ

次の表は角度30°、45°、60° の三角比をまとめたものです。

θ	30°	45°	60°
sen θ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos θ	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan θ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

角度 30°、45°、60° の三角比を計算するには、表の枠内に示されている値を使わなくてはなりません。

問題

三角比セカント、コセカント、コタンジェントを角度 30°、45°、60° について求めましょう。

ユニット5

達成の目安

1.4 角度 30°、45°、60° の三角比を求められる。

学習の流れ：

この前の授業では、特殊な三角形の辺の長さを導いたので、この課では角度 30°、45°、60° の三角比を定めます。

ねらい：

ユニットの今後の展開の重要な基礎となる角度 30°、45°、60° の三角比を定めます。

問題の解答：

問題の解き方は二つあります。

• 方法 *1.* コセカント、セカント、コタンジェントの比を使う方法
• 方法 *2.* 上記の三角比とサイン、コサイン、タンジェントの三角比との関係を使う方法

次の解法では二つ目の方法を使います。

授業1.2 の問題 3、4、5 から次のことがわかっています。

$$\csc\theta = \frac{1}{\text{sen }\theta} = 1 \div \text{sen }\theta,\ \ \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = 1 \div \cos\theta,\ \ \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = 1 \div \tan\theta.$$

よって、

$$\csc 30° = 1 \div \text{sen } 30° = 1 \div \frac{1}{2} = 2,$$

$$\sec 30° = 1 \div \cos 30° = 1 \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\cot 30° = 1 \div \tan 30° = 1 \div \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

$$\csc 45° = 1 \div \text{sen } 45° = 1 \div \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

$$\sec 45° = 1 \div \cos 45° = 1 \div \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$$

$$\cot 45° = 1 \div \tan 45° = 1 \div 1 = 1.$$

$$\csc 60° = 1 \div \text{sen } 60° = 1 \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

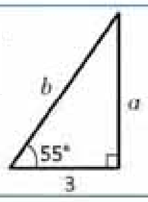
$$\sec 60° = 1 \div \cos 60° = 1 \div \frac{1}{2} = 2,$$

$$\cot 60° = 1 \div \tan 60° = 1 \div \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

1.5 一辺と一鋭角が分っている直角三角形

導入問題

次の三角形がある場合、残りの二辺の長さを求めましょう。小数点第1位までの概数で求めてください。



解法

三角形の鋭角の一つの値がわかっているため、三角比を使って残りの二辺の長さを計算することができます。

$\tan 55° = \frac{a}{3}$ であることがわかっているので、$a = 3\tan 55°$ になります。55° は特殊な三角形の角ではないため、$\tan 55°$ の値の計算には電卓を使いますが、その前に次のステップで角度が度数で計測されるように電卓を設定する必要があります。

キー MODE を二回押し、キー 1 を押します。

これで電卓の設定ができたので、次の示すように $\tan 55°$ を入力します。

tan 5 5 = ⇒ 電卓の画面: tan 55 → 1.428148007

少数点第1位までの概数にすると、$a = 3\tan 55° \approx 3(1.4) = 4.2$ となるはずです。
b の値を計算するには、次のことを念頭にに置きます。

$$\cos 55° = \frac{3}{b} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{3}{\cos 55°}$$

3 ÷ cos 5 5 = ⇒ 電卓の画面: 3÷cos 55 → 5.230340387

よって、$a \approx 4.2$、$b \approx 5.2$ となります。

> 電卓の型式によって、MODE キーの表示は二種類あります。
> MODE CLR　MODE SETUP
> 電卓に二つ目のオプションがある場合、次のキーを押します。
> SHIFT　MODE SETUP
> それから 3 キーを押します。

> 電卓上では、サインの機能は sin として表されます。

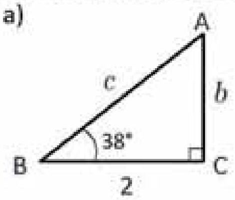
まとめ

直角三角形の一片の長さと鋭角の一つの角度が与えられている場合、鋭角の三角比を使って残りの辺の長さも求めることができます。

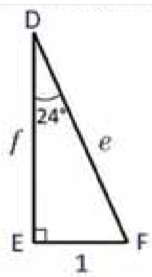
問題

それぞれの三角形の残りの辺の長さを求めましょう。

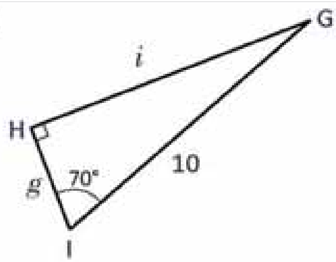
a)



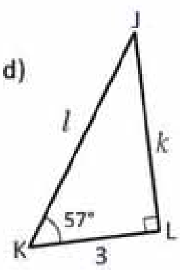
b)



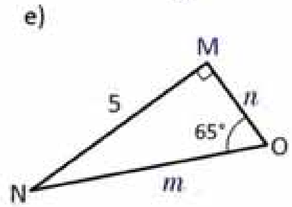
c)



d)



e)



達成の目安

1.5 一片の長さと鋭角の一つの角度が与えられている場合、三角比を使って直角三角形の辺の長さを求めることができる。

学習の流れ：

角度 30°、45°、60° の三角比を定められたら、一片の長さと鋭角の一つの角度が分かっている場合の直角三角形の辺の長さを三角比を使って計算します。さらに、角度 30°、45°、60° の三角比とは違う三角比における関数電卓を使っての計算を導入します。

つまづきやすい点：

関数電卓を使うと授業の展開がしにくくなるので、 電卓の正しい使い方を指導し、ラジアンやグラードでなく度で設定するようにくり返し忘れないように注意することが重要です。教科書 160 ページ参照。

問題の解答：

a) $\tan 38° = \frac{b}{2} \Rightarrow b = 2\tan 38° \approx 1.6.$

$\cos 38° = \frac{2}{c} \Rightarrow c = \frac{2}{\cos 38°} \approx 2.5.$

したがって、$b \approx 1.6$、$c \approx 2.5$ となります。

b) $\operatorname{sen} 24° = \frac{1}{e} \Rightarrow e = \frac{1}{\operatorname{sen} 24°} \approx 2.5.$

$\tan 24° = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \frac{1}{\tan 24°} \approx 2.2.$

したがって、$e \approx 2.5$、$f \approx 2.2$ となります。

c) $\cos 70° = \frac{g}{10} \Rightarrow g = 10\cos 70° \approx 3.4.$

$\operatorname{sen} 70° = \frac{i}{10} \Rightarrow i = 10\operatorname{sen} 70° \approx 9.4.$

したがって、$g \approx 3.4$ 、$i \approx 9.4$ となります。

d) $\tan 57° = \frac{k}{3} \Rightarrow k = 3\tan 57° \approx 4.6.$

$\cos 57° = \frac{3}{l} \Rightarrow l = \frac{3}{\cos 57°} \approx 5.5.$

したがって、$k \approx 4.6$、$l \approx 5.5$ となります。

e) $\operatorname{sen} 65° = \frac{5}{m} \Rightarrow m = \frac{5}{\operatorname{sen} 65°} \approx 5.5.$

$\tan 65° = \frac{5}{n} \Rightarrow n = \frac{5}{\tan 65°} \approx 2.3.$

したがって、$m \approx 5.5$、$n \approx 2.3$ となります。

三角形の辺の長さを計算するのに、必ずしもタンジェントとコサインを使わなければいけないわけではありません。 つまり、サイン比を使ってもいいわけです。未知数の数値を求めやすくなるため、可能な限り、求める値が分子になる三角比を一つ使うことが推奨されます。

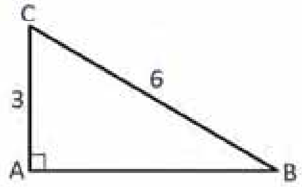
レッスン 1

1.6 二辺が分っている直角三角形

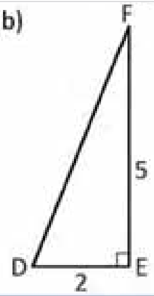
導入問題

次の三角形について、鋭角の角度を求めましょう。

a)



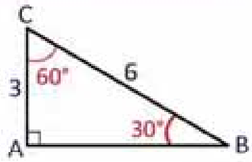
b)



三角形 ABC において、角 C の角度は通常 C (斜体)で表記します。

解法

a) $\cos C = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ であることに注目します。この条件を満たす角は 60° の角であるので、C = 60°、B = 30° となります。

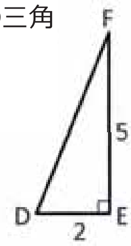


b) この三角形から $\tan D = \frac{5}{2}$ であることがわかります。この条件を満たす角度 D を求めるには、その三角比が特殊な三角形の比ではないので電卓を使います。

⇒

電卓の画面

tan⁻¹(5÷2)
68.19859051



小数点第 1 位までの概数を求めると、$D \approx 68.2°$ であることがわかります。
よって $F \approx 90° - 68.2° = 21.8°$ となります。

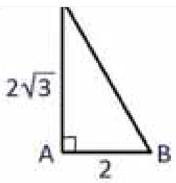
電卓の $\tan^{-1}$ 関数を使うと、指定した条件を満たす角度を割り出すことができます。例えば、$\tan^{-1}\frac{5}{2}$ では、$\tan\theta = \frac{5}{2}$ 、θ が –90° と 90° の間であるという条件を満たす角度 θ を割り出すことができます。

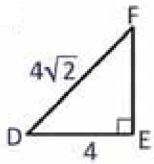
まとめ

直角三角形の二辺が与えられている場合、三角比を使って鋭角を求めることができます。

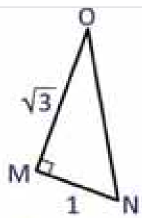
問題

直角三角形の鋭角の角度を求めましょう。

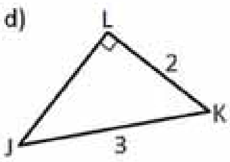




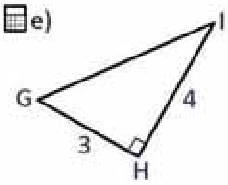
c)



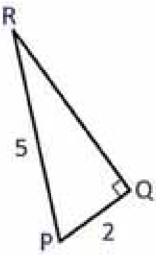
d)



e)



f)



ユニット5

達成の目安

1.6 二辺が与えられている場合に、直角三角形の鋭角の角度を三角比サイン、コサイン、タンジェントを使って求められる。

学習の流れ：

この授業では、二辺の長さがわかっている場合の直角三角形の鋭角を三角比を使って計算します。ここでも電卓を使いますが、今回は角度を計算します。
逆三角比は、高校二年生で学習する主題である全単射や逆三角関数の知識が求められるので、深く掘り下げません。

ねらい：

導入問題では、直角三角形の鋭角を計算します。aでは、 既知の三角比が得られるので、すなわち、電卓を使わなくても角度を求めることができます。一方、bでは、三角比はわからないので、電卓の逆三角関数を使って角度を計算します。

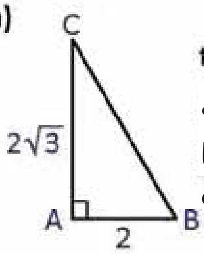
つまづきやすい点：

電卓が角度に設定されているため、三角比の値が分かっている時に角度を求めるために電卓を使うこと。生徒は練習して、sen^{-1}、$\cos^{-1}$ 、$\tan^{-1}$ のキーは角度を割り出すということを理解するようにしなければいけません。

電卓のアイコンが表示されている時にだけ電卓を使うようにします。

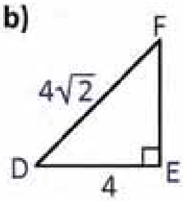
問題の解答：

a)



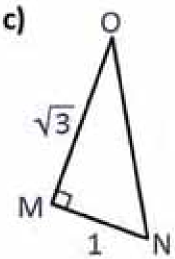
$\tan B = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow B = 60°.$
よって、$C = 30°$となります。
したがって、$B = 60°$、$C = 30°$となります。

b)



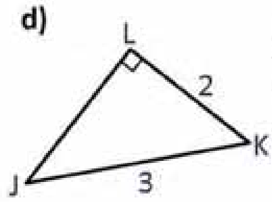
$\cos D = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\Rightarrow D = 45°.$
したがって、$D = F = 45°$となります。

c)



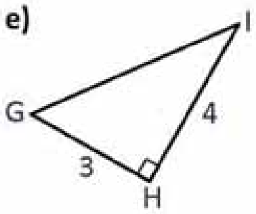
$\tan N = \sqrt{3} \Rightarrow N = 60°.$
したがって、$N = 60°$、$O = 30°$となります。

d)



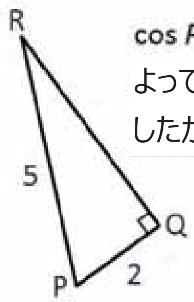
$\cos K = \frac{2}{3} \Rightarrow K \approx 48.2°.$
よって、$J \approx 90° - 48.2° = 41.8°$となります。
したがって、$J \approx 41.8°$、$K \approx 48.2°$となります。

e)



$\tan G = \frac{4}{3} \Rightarrow G = 53.1°.$
よって、$I \approx 90° - 53.1° = 36.9°$ となります。
したがって、$G \approx 53.1°$ 、$I \approx 36.9°$ となります。

f)

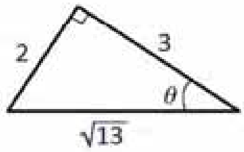


$\cos P = \frac{2}{5} \Rightarrow P \approx 66.4°.$
よって、$R \approx 90° - 66.4° = 23.6°$ となります。
したがって、$P \approx 66.4°$、$R \approx 23.6°$ となります。

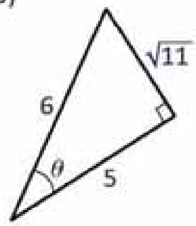
1.7 復習問題

1. 以下の三角形それぞれについて、三角比 sen θ、cos θ、tan θ を求めましょう。

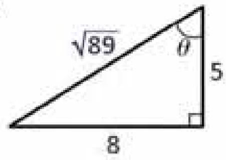
a)



b)

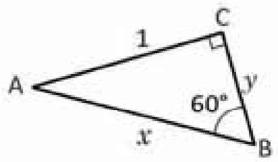


c)

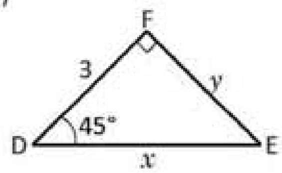


2. それぞれの三角形について x と y の値を求めてみましょう。

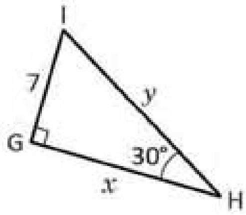
a)



b)

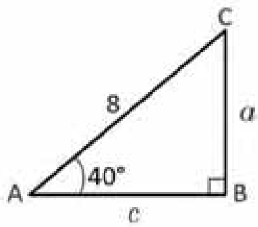


c)

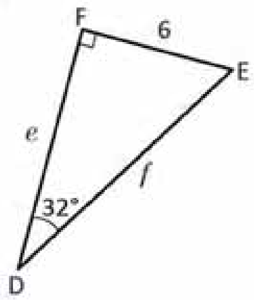


3. それぞれの三角形の残りの辺の長さを計算しましょう。小数点第 1 位までの概数で解答してください。

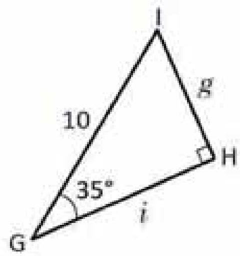
a)



b)

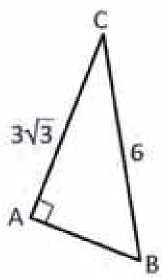


c)

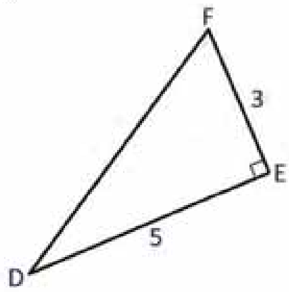


4. 直角三角形の鋭角の角度を小数点第 1 位まで計算しましょう。

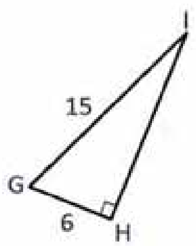
a)



b)



c)



達成の目安

1.7 直角三角形の鋭角の三角比についての問題が解ける。

問題の解答：

1a) この場合、$hip = \sqrt{13}$、$op = 2$、$ady = 3$ なので、以下のようになります。

$$\text{sen}\ \theta = \frac{op}{hip} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13},\ \cos\theta = \frac{ady}{hip} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13},\ \tan\theta = \frac{op}{ady} = \frac{2}{3}.$$

1b) この場合、$hip = 6$、$op = \sqrt{11}$、$ady = 5$ なので、以下のようになります。

$$\text{sen}\ \theta = \frac{\sqrt{11}}{6},\ \cos\theta = \frac{5}{6},\ \tan\theta = \frac{\sqrt{11}}{5}.$$

1c) この場合、$hip = \sqrt{89}$、$op = 8$、$ady = 5$ なので、以下のようになります。

$$\text{sen}\ \theta = \frac{8}{\sqrt{89}} = \frac{8\sqrt{89}}{89},\ \cos\theta = \frac{5}{\sqrt{89}} = \frac{5\sqrt{89}}{89},\ \tan\theta = \frac{8}{5}.$$

2a) 30°、60° の三角形との相似条件を使うと、以下のようになります。

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$
$$\frac{y}{1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2b) ΔDEFは二等辺三角形、$y = 3$ です。一方、45° の三角形との相似条件を使うと、以下のようになります。

$$\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{3}{1} \Rightarrow x = 3\sqrt{2}.$$

この問題は、相似条件のみを使って、つまり、三角形が二等辺三角形であるという事実を使う、あるいはピタゴラスの定理を適用せずに、解くこともできます。

2c) 30°、60° の三角形との相似条件を使うと、以下のようになります。

$$\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{7}{1} \Rightarrow x = 7\sqrt{3},\quad \frac{y}{2} = \frac{7}{1} \Rightarrow y = 14.$$

3a) $\cos 40° = \frac{c}{8} \Rightarrow c = 8\cos 40° \approx 6.1,$

$\text{sen}\ 40° = \frac{a}{8} \Rightarrow a = 8\ \text{sen}\ 40° \approx 5.1.$

したがって、$c \approx 6.1$、$a \approx 5.1$ となります。

3b) $\tan 32° = \frac{6}{e} \Rightarrow e = \frac{6}{\tan 32°} \approx 9.6,$

$\text{sen}\ 32° = \frac{6}{f} \Rightarrow f = \frac{6}{\text{sen}\ 32°} \approx 11.3.$

したがって、$e \approx 9.6$、$f \approx 11.3$ となります。

3c) $\cos 35° = \frac{i}{10} \Rightarrow i = 10\cos 35° \approx 8.2$, $\text{sen}\ 35° = \frac{g}{10} \Rightarrow g = 10\ \text{sen}\ 35° \approx 5.7.$

したがって、i ≈ 8.2、g ≈ 5.7 となります。

4a) $C = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow C = 30°$ とわかります。

したがって、$B = 60°$、$C = 30°$ となります。

4b) この場合、$D = \frac{3}{5} \Rightarrow D = 31°$ です。

よって、$F \approx 90° - 31° = 59°$ となります。

したがって、$D \approx 31°$、$F \approx 59°$ となります。

4c) この場合、$\cos G = \frac{6}{15} \Rightarrow G = 66.4°$ です。よって、$I \approx 90° - 66.4° = 23.6°$ となります。

したがって、$G \approx 66.4°$、$I \approx 23.6°$となります。

1.8 三角比の応用

導入問題

大工が 25 フィートのはしごを購入しましたが、使用説明書には、はしごの足が壁から 6 フィートの位置にある時が最も安全な位置であると書かれています。
地面とはしごの間の角度は何度になりますか。

解法

図が示すように直角三角形を描くことができます。三角比を適用すると、以下のようになります。

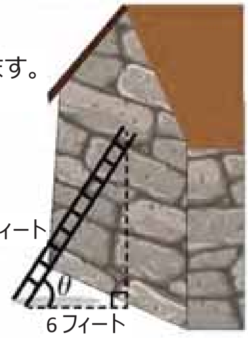
$$\cos\theta = \frac{6}{25}.$$

電卓を使って角度を計算すると、以下のようになります。

SHIFT cos (6 ÷ 2 5) = ⇒

電卓の画面

cos⁻¹(6÷25)
76.11345964



よって、はしごと地面の間の角度は約 76° になります。

まとめ

三角比は、平面を持ついくつかの物体によって形成される傾斜角を計算したり、2 つの物体間の距離や建物や樹木の高さを計算したりするために使用することができます。

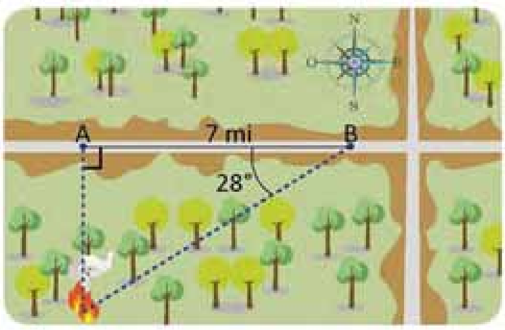
問題

1. あるスケート選手が、2 メートルの長さのランプでピルエットを行います。
ランプの高さが 1 メートルの時、ランプの傾斜角は何度になりますか。

2. 野球選手が通過すべき 3 つの塁は、図のように辺が 90 フィートの正方形上にあります。ピッチャーはバッターからどれくらいの距離にいるでしょうか。

3. 壁に 20 フィートのはしごがかかっていて、16 フィートの高さまで届いています。
地面に対するはしごの傾斜角は何度になるでしょうか。

4. A 地点にいるあるレンジャーが真南に火事を目撃しています。最初のレンジャーから 7 マイル離れた B 地点にいる 2 人目のレンジャーが、南西 28 度で同じ火事を目撃しています。最初のレンジャーから火事までの距離はどのくらいですか？



達成の目安

1.8 直角三角形と三角比を使い身近な問題を解くことができる。

学習の流れ：

直角三角形の角度や辺の長さの計算に三角比の適用を必要とする問題が解けたら、直角三角形と三角比を用いて解くことができる身近な問題に取り組みます。

ねらい：

導入問題で、三角比を使い身近な問題を解く方法を学びます。ここでは、問題を解くための視覚的な補助として簡単な図を作成することが重要です。

問題の解答：

1. 図に示される情報から、$\tan\theta = \frac{1}{2}$ だということがわかります。よって、$\theta \approx 26.6°$。したがって、ランプの傾斜角は、約 26.6° です。

2. d はピッチャーとバッターの間の距離とします。$\text{sen } 45° = \frac{d}{90}$ だということがわかるので、

$d = 90 \text{ sen } 45° = 90\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45\sqrt{2}$ です。つまり、$d \approx 63.6$ となります。

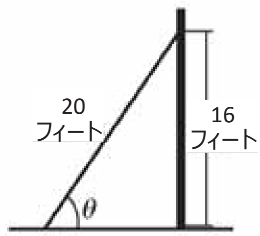
したがって、ピッチャーのバッターからの距離は、約 63.6 フィートです。

3. 図を作成し情報を当てはめていきます。

わかっている情報から以下が成り立つことがわかります。

$$\text{sen } \theta = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}.$$

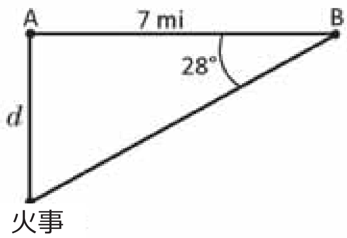
つまり、$\theta \approx 53.1°$ になります。したがって、地面に対するはしごの傾斜角は約 53.1° となります。



4. 次の図にわかっている情報が示されています。わかっている情報から以下が成り立つことがわかります。

$$\tan 28° = \frac{d}{7} \Rightarrow d = 7\tan 28° \approx 3.7.$$

したがって、一人目のレンジャーは火事から約 3.7 マイルの地点にいることになります。



1.9 俯角

導入問題

プロのカメラマンが、地上約 475 m の熱気球から 850 m 離れている所に見えている農場を、撮影したいと考えています。
点線が水平であるとしたら、角 θ は何度になりますか。

解法

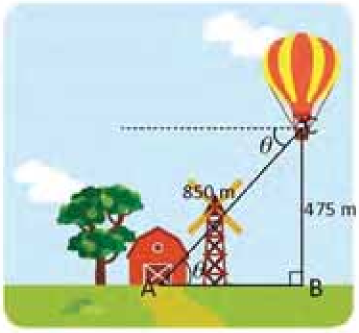
図のように、形成された三角形の頂点を A、B、C とします。よって、点線は $\overline{AB}$ に水平なので、$\measuredangle CAB = \theta$ となります。三角比を使うと、以下のようになります。

$$\text{sen } \theta = \frac{475}{850}.$$

電卓を使うと、以下のようになります。

電卓の画面

```
sen⁻¹(475÷850)
        33.97447595
```



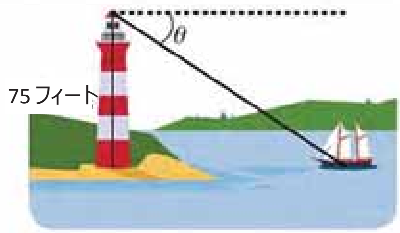
したがって、$\theta \approx 34°$ となります。

定義

観察者が物体よりも上にいる場合、仮想の水平線と物体への視線との間に形成される角度を**俯角**と言います。例えば、導入問題に出てくる角θ は俯角です。

問題

1. 灯台の高さは 75 フィートで、その先端から船が見え、俯角のコサインが $\frac{4}{5}$ となります。灯台から船までどれくらいの距離がありますか。



2. 古い建物の上から、子どもが道にいる犬を見ており、俯角は 37° です。建物の高さが 9 m なら、犬は建物の下からどのくらいの距離にいるでしょうか。

3. 高さ 100 m の建物があり、最も高い地点からある人が地上でリスが餌を食べている様子を眺めています。この人の俯角のタンジェントは $\frac{5}{4}$ です。リスは建物の下からどれくらいの距離にいるでしょうか。

4. 海面から 3.5 m の高さの桟橋に、身長 1.5 m の人が立っています。この人は俯角 10° で船を見ています。船は桟橋からどのくらいの距離にあるのでしょうか。

達成の目安

1.9 身近な問題について、三角比を使って俯角を計算できる。

学習の流れ：

この授業では、引き続き三角法の応用問題を扱います。今回は、俯角に関する問題に取り組みます。ここでも、問題を解くために簡単な図を作成することが重要です。

ねらい：

導入問題では俯角の定義を学ばせ、身近な問題を解くために三角比を使う方法を引き続きしっかりと身につけさせます。

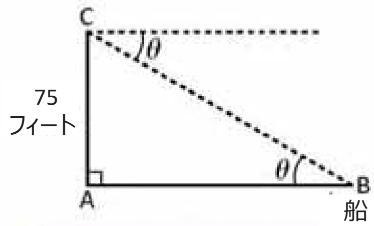
問題の解答：

1. 図を作成し、わかっている情報を当てはめると、右のような図になります。
平行線間の錯角であるので、角 ABC は θ に等しくなります。
よって、

$$\cos\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5} \Rightarrow \theta \approx 36.9°.$$

そして、$\tan\theta = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \tan 36.9° \approx \frac{75}{AB} \Rightarrow AB \approx \frac{75}{\tan 36.9°} \approx 99.9$.

したがって、船は灯台から約 99.9 マイルの距離にあります。

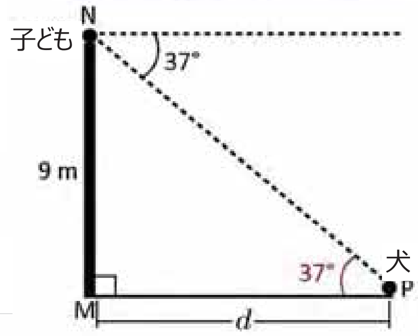


図の作成法は様々です。図を作成する目的は、問題を解くに当たり視覚的な補助とすることです。

2. 図を作成し、情報を当てはめると、右のような図になります。
平行線間の錯角であるので、角 MPN は 37° に等しいということになります。
よって、

$$\tan 37° = \frac{9}{d} \Rightarrow d = \frac{9}{\tan 37°} \approx 11.9.$$

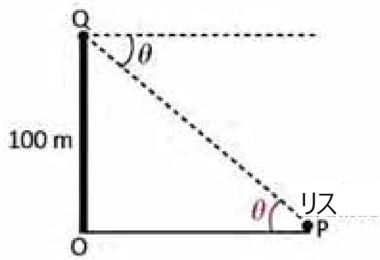
したがって、犬は建物の下から約 11.9m の距離にいます。



3. 右の図のような図を作成すると、平行線間の錯角であるので、角 OPQ は θ に等しいと導くことができます。よって、

$$\tan\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{100}{OP} = \frac{5}{4} \Rightarrow OP = \frac{4(100)}{5} = 80.$$

したがって、リスは建物の下から 80 m の所にいます。

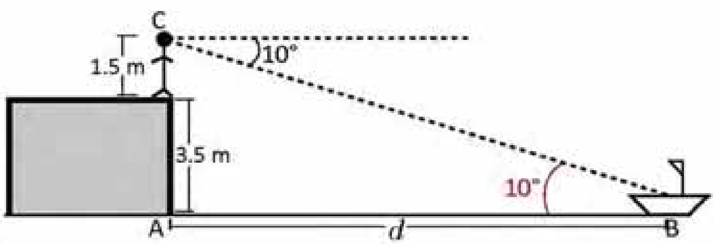


4. 右の図のように、図を作成し、情報を当てはめます。
錯角であるので、角 ABC は 10° に等しくなります。

よって、

$$\tan 10° = \frac{3.5 + 1.5}{d} = \frac{5}{d} \Rightarrow d = \frac{5}{\tan 10°} \approx 28.4.$$

したがって、船は桟橋から約 28.4 m の距離にあります。



1.10 仰角

導入問題

レンジャーが木の高さを計算しようとしていますが、そのために、木の根元から 7 m のところに立ち、木の先端を 74° の角度で眺めています。レンジャーの背の高さが 1.6 m なら、木の高さはどれくらいになりますか。

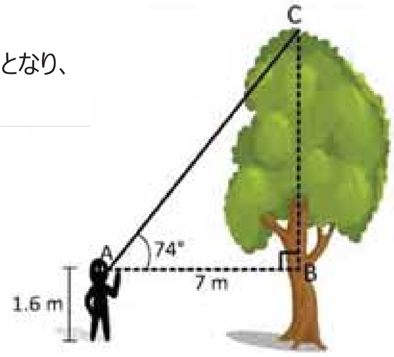
解法

図が示すように補助的な直角三角形 ABC ができます。すると、$\tan 74° = \frac{BC}{7}$ となり、$BC = 7\tan 74°$となります。電卓を使って BC を求めることができます。

電卓の画面

[7] [×] [tan] [7] [4] [=] ⟹ 7×tan 74 24.41190111

BC の値にレンジャーの身長を加算し なければなりませんので、木の高さは約 24.4 + 1.6 = 26 m となります。



定義

観察者が物体よりも下にいる場合、仮想の水平線と物体への視線との間に形成される角度を**仰角**と言います。例えば、導入問題の図では、仰角は ∢CAB となります。

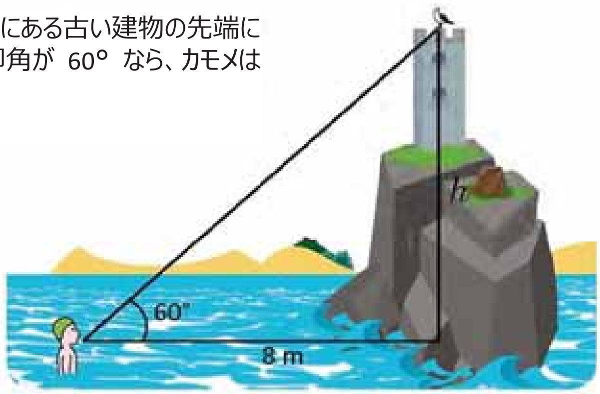
問題

1. あるレンジャーは、新しい木材業者のチームを木の高さの計算について訓練しなくてはなりません。例として、レンジャーは木の根元から 12 m の所まで歩き、地面から木の先端までの仰角は 70° であると、推測します。木の高さを計算してみましょう。

2. 夜間にある雲の高度を計算するため、垂直光線を雲のある一点に向けます。光線を発射している地点から 135 フィートにある地表のどこかの点で、光の頂点への仰角が 65° であると定まっています。雲の高度はいくらあるでしょう。

3. 子どもが木から 2 m 離れた所にいて、木の頂点に取り残された猫を眺めています。子どもの身長が 1 m で、仰角が 60° なら、猫は地上からどれくらいの高さにいるのでしょうか。

4. 岩場から 8 m のところを泳いでいる人が、岩場の上にある古い建物の先端に留まっているカモメを眺めています。泳いでいる人の仰角が 60° なら、カモメは海面からどれくらいの高さにいるでしょうか。



達成の目安

1.10 身近な問題について、三角比を使って仰角を計算できる。

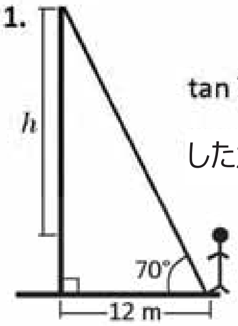
学習の流れ：

俯角を学んだ後、仰角を学び、それを含む身近な問題を解かせます。

問題の解答：

設問に絵がない場合、問題を解きやすくするため、簡単な図を作成します。

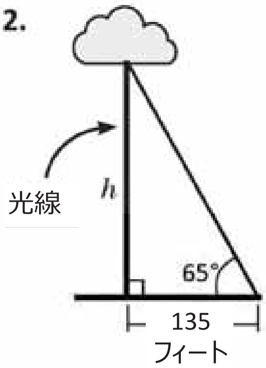
1.



$$\tan 70° = \frac{h}{12} \Rightarrow h = 12 \tan 70° \approx 33.$$

したがって、木の高さは約 33 m です。

2.

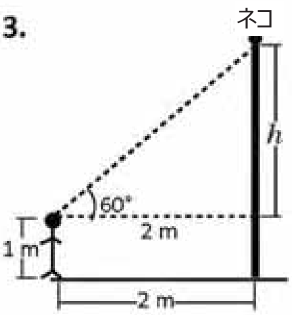


$$\tan 65° = \frac{h}{135} \Rightarrow h = 135 \tan 65° \approx 289.5.$$

したがって、雲は地上約 289.5 フィートの高さにあります。

人とその身長が含まれる問題では、目と頭の頂点間の距離は無視します。

3.



$$\tan 60° = \frac{h}{2} \Rightarrow h = 2 \tan 60° = 2\sqrt{3} \approx 3.5.$$

よって、ネコがいる高さは 3.5 + 1 = 約 4.5 m です。

4. 問題で与えられた情報と絵から、以下がわかります。

$$\tan 60° = \frac{h}{8} \Rightarrow h = 8 \tan 60° = 8\sqrt{3} \approx 13.9.$$

したがって、カモメは海面から約 13.9 m の高さにいます。

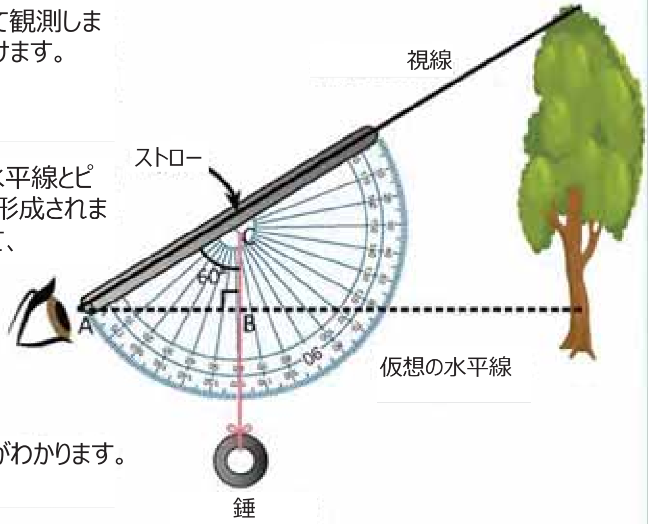
レッスン 1

1.11 課題クリノメーターの作成

クリノメーターとは、表面の傾きを測定するための装置ですが、建物や樹木、電柱などの高さを計算するためにも使用されます。業務用のクリノメーターは使いやすく、本課題ではその作り方を紹介しています。

クリノメーターの仕組み

観測者は図のようにクリノメーターを配置し、管を通して観測します。錘をひもに結び付け、このひもを分度器に結び付けます。



図のようにクリノメーターを配置すると、視線と仮想の水平線とピンと張ったひもの一片との間に直角三角形 (ΔABC) が形成されます。ひもが分度器上に示す角度は角 BCA です。よって、三角形 ΔABC について、以下が成り立ちます。

$$\sphericalangle CAB = 90^\circ - \sphericalangle BCA = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

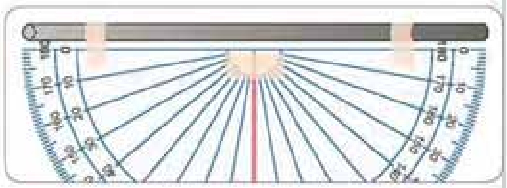
この手順を踏めば、計算した角度が仰角にあたることがわかります。

材料

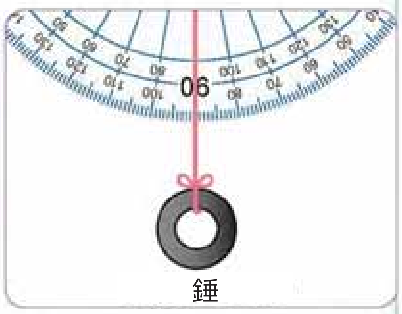
- 分度器一個
- ストロー一本
- 粘着テープ
- 毛糸またはひも一片
- はさみ
- 錘、20 mm のナットでもよい

課題

1. 分度器の中には、中心に穴が開いているものがあり、その穴にひもを結べます。穴がなければ、粘着テープで分度器の中心に貼り付けてもよいでしょう。ひもの長さは分度器の半径より長くなければなりません。



2. ストローを、分度器の直径と同じ長さ切り取ります。中をのぞきこむためのものなので、つぶさないように注意しながら、ストローの一片を粘着テープで貼り付けます。
3. 空いている方のひもの端に錘を結び付けます。



これでクリノメーターの準備が完了しました。

問題

1. クリノメーターを使って仰角を特定し、身近にある木の高さを計算してみましょう。
2. 課題 1.11 で作成したクリノメーターを使って、俯角を計算できるでしょうか。できるとすれば、どのようにしたらいいか、説明してみましょう。

達成の目安

1.11 手作りクリノメーターを作成し、仰角の測定ができる。

学習の流れ：

俯角と仰角を計算できたら、身近にある仰角を測定する道具としてのクリノメーターを作成します。

ねらい：

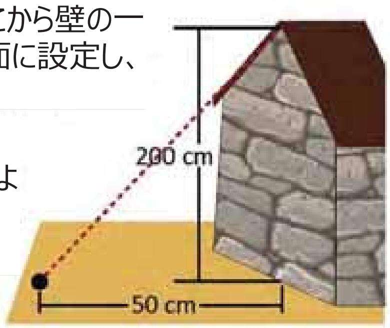
仰角を測定するのに役立つ道具を作成させ、角度を使ってこの道具がどんなことに使えるかを導き出します。

問題の解答：

1. 例えばバスケットボールのゴールリングの頂点の高さを見上げた時の仰角のように、他にも仰角を測定してみてもよいでしょう。

ものの高さを測るのにクリノメーターが使えるのだということを確認するのが主旨ですから、事前にメジャーを使って壁の高さを測っておいてもよいでしょう。その後、ここから壁の一番高いところを測るという地点を、例えば 50 cm 離れた所というように地面に設定し、そこから仰角を測定します。

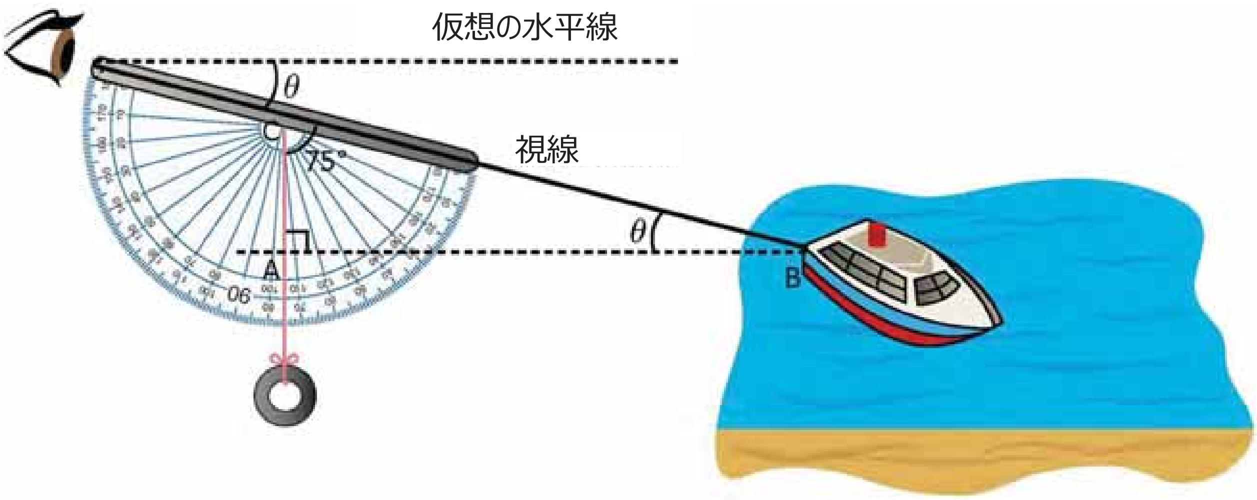
仰角を測定するにあたり、角のタンジェントを使って壁の高さを計算してもよいでしょう。その後、求めた値と元々の壁の高さを比較します。



しかし、これは一例に過ぎず、壁の高さがこれより低くても、地面に定める地点がこれより遠くても近くても構いません。

仰角は、測定をする人の身長によって変わってきます。

2. 仮想の水平線より下にある物体を眺めてみてもよく、その時、以下のような構造になります。



仰角を測定した時と似たような分析を行うと、ひもが示す角度は三角形 ABC の角 BCA に等しいということが成り立ちます。さらに、三角形の角 ABC は俯角 θ に等しくなります。よって、直角三角形 ABC について、$\theta = 90° - 75° = 15°$ となります。

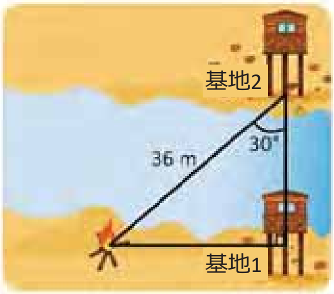
したがって、クリノメーターを使って俯角を計測することができ、俯角はそのひもが示す角度の余角に等しくなります。

1.12 三角比の応用

1. 猟師が東方向にある船から 12 km 離れたところにいて、その船に対する視線から 60° の位置にある灯台を眺めています。灯台が船の南方向にある場合、船は灯台からどれくらいの距離にあるでしょうか。

2. 気球が岩に 20 m のロープで繋がれています。ロープと地面の間にできる角のサインは $\frac{3}{4}$ です。気球の高さはどれだけありますか。

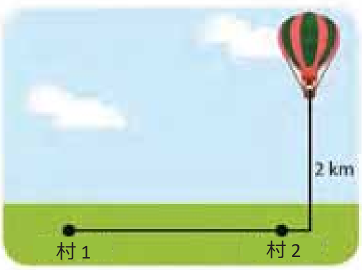
3. 図について、基地 1 とたき火の間にはどれだけの距離がありますか。



4. ある男性が灯台の一番上から漁船を眺めており、俯角は 25° と推測します。灯台の高さが 40 m の時、漁船は灯台からどれだけの距離にありますか。

5. 男性がある建物から 100 m の距離にある別の建物を眺めています。建物の一番上への仰角は 30° で建物の下への俯角は 15° です。眺めている建物の高さはどれだけありますか。男性の身長は無視します。

6. 高さ 2 km にある気球から二つの村が見えています。二つの村への俯角は 80° と 20° です。村同士の距離はどれだけありますか。

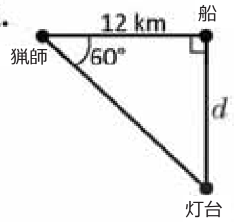


達成の目安

1.12 身近なものに三角比を応用する問題を解くことができる。

問題の解答：

1.

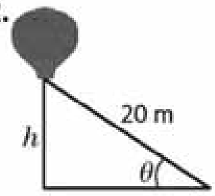


$$\tan 60° = \frac{d}{12}$$

$$\Rightarrow d = 12 \tan 60° = 12\sqrt{3} \approx 20.8.$$

したがって、船は灯台から約 20.8 km の距離にあります。

2.



$$\text{sen}\ \theta = \frac{3}{4} = \frac{h}{20} \Rightarrow h = \frac{3(20)}{4} = 15.$$

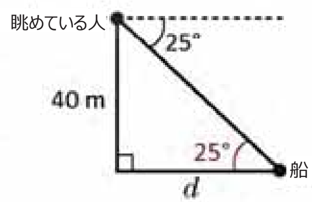
したがって、気球は地面から 15 m の高さにあります。

3. 基地 1 とたき火の間の距離を d とします。すると $30° = \frac{d}{36} \Rightarrow d = 36\ \text{sen}\ 30° = 36\left(\frac{1}{2}\right) = 18$ となります。

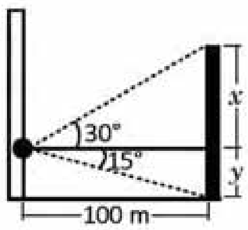
したがって、基地 1 はたき火から 18 m の距離にあります。

4. $\tan 25° = \frac{40}{d} \Rightarrow d = \frac{40}{\tan 25°} \approx 85.8.$

したがって、漁船は灯台から約 85.8 m の距離にあります。



5.



$$\tan 30° = \frac{x}{100}$$

$$\Rightarrow x = 100 \tan 30°$$

$$\tan 15° = \frac{y}{100}$$

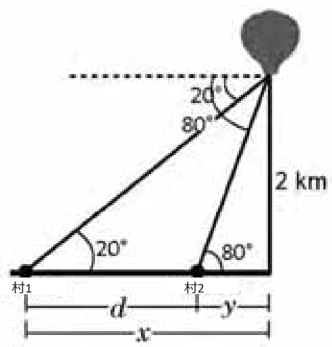
$$\Rightarrow y = 100 \tan 15°$$

男性が眺めている建物の高さは以下のようになります。

$$\begin{aligned} x + y &= 100 \tan 30° + 100 \tan 15° \\ &= 100(\tan 30° + \tan 15°) \\ &\approx 84.5. \end{aligned}$$

したがって、男性が眺めている建物の高さは、84.5 m です。

6.



$$\tan 20° = \frac{2}{x}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{\tan 20°}$$

$$\tan 80° = \frac{2}{y}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{\tan 80°}$$

よって、$d = x - y = \frac{2}{\tan 20°} - \frac{2}{\tan 80°} \approx 5.1$ となります。

したがって、村同士の距離は約 5.1 km です。

よりよい近似値を得られるよう、最後まで計算するとよいでしょう。

問題 6 の設問に混乱する場合は、村と村の間の距離のことだと、明確にしてあげなければなりません。

2.1 2 点間の距離

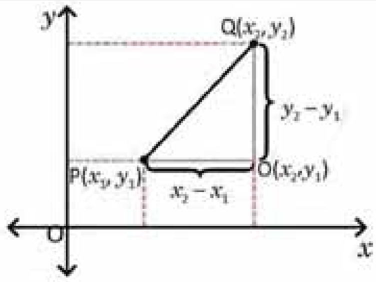
導入問題

座標平面上にある点 P (x_1, y_1) と点 Q (x_2, y_2) の 2 点間の距離を求めなさい。

2 点間の距離は、2 点を結ぶ直線の長さで定義されます。

解法

$x_1 \neq x_2$、$y_1 \neq y_2$ と仮定します。図のように点 P と点 Q を通る軸に対して直角に交わる直線を引くと、点 O の座標は (x_2, y_1) となります。ここから OP = $x_2 - x_1$、そして QO = $y_2 - y_1$ であることが分かります。ゆえに、ピタゴラスの定理に従い三角形 POQ は次のようになります。



$$(PQ)^2 = (OP)^2 + (QO)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

ただし距離のため PQ > 0 となるので、

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

もし $x_1 = x_2$、$y_1 \neq y_2$ であれば、PQ 間の距離は次のようになります。

$$\Rightarrow \quad PQ = \sqrt{(x_2 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|.$$

同様に、もし $x_1 \neq x_2$、$y_1 = y_2$ であれば、PQ間の距離は次のようになります。

$$\Rightarrow \quad PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|.$$

すべての実数に対し
a は次のようになります。
$\sqrt{a^2} = |a|$.

定義

d (P, Q) で示される、平面上における点 P (x_1, y_1) と点 Q (x_2, y_2) の 2 点間の距離は次のように表します。

$$d(P, Q) = PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

例

点 P (-1, 3) と点 Q (2, 1) 間の距離を求めなさい。

距離は、

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \sqrt{(2-(-1))^2 + (1-3)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{9+4} \\ &= \sqrt{13}. \end{aligned}$$

問題

1. 点 P と点 Q 間の距離を求めなさい。

a) P(−2, −1), Q(2, 2)	b) P(7, 2), Q(4, −2)	c) P(2, −2), Q(−8, 4)
d) P(1, 1), Q(9, 2)	e) P(0, 1), Q(3, 5)	f) P(−3, 5), Q(7, −9)
g) P(−1, 4), Q(2, 4)	h) P(3, 2), Q(3, 2)	i) P(−1, 0), Q(−1, 0)

2. 点 P (x_1, y_1)、点 Q (x_2, y_2) において d (P, Q) = d (Q, P) であることを証明しなさい。

達成の目安

2.1 座標平面上の2点間の距離を計算できる。

学習の流れ：

まず、座標平面上の 2 点間の距離の計算式を導き出し、これを応用することから始めます。

ねらい：

導入問題では、座標平面上の 2 点間の距離を求める計算式を導き出します。続いて「例」ではその計算式の応用方法を示します。
「問題」のセクションでは、問題 1 は計算式を使う練習、問題 2 では点 P と点 Q の 2 点間の距離は点 Q と点 P の 2 点間の距離と同等であることが示されています。

問題の解き方：

1a) $d(\text{P, Q}) = \sqrt{(2-(-2))^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$

1b) $d(\text{P, Q}) = \sqrt{(4-7)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$

1c) $d(\text{P, Q}) = \sqrt{(-8-2)^2 + (4-(-2))^2} = \sqrt{(-10)^2 + 6^2} = \sqrt{100+36} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}.$

1d) $d(\text{P, Q}) = \sqrt{(9-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}.$

1e) $d(\text{P, Q}) = \sqrt{(3-0)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$

1f) $d(\text{P, Q}) = \sqrt{(7-(-3))^2 + (-9-5)^2} = \sqrt{10^2 + (-14)^2} = \sqrt{100+196} = \sqrt{296} = 2\sqrt{74}.$

1g) $d(\text{P, Q}) = \sqrt{(2-(-1))^2 + (4-4)^2} = \sqrt{3^2 + 0^2} = \sqrt{3^2} = 3.$

点 Q の座標を求めてから点 P の座標を求めても、距離は計算できます。順番を守ることだけ気をつけましょう。

1h) $d(\text{P, Q}) = \sqrt{(3-3)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0.$

1i) $d(\text{P, Q}) = \sqrt{(-1-(-1))^2 + (0-0)^2} = 0.$

2. 次のことが分かっています。

$$d(\text{P, Q}) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

一方、$(d(\text{Q, P}))^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = [-(x_2 - x_1)]^2 + [-(y_2 - y_1)]^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$。

ただし $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = [d(\text{P, Q})]^2$。よって、

$$d(\text{P, Q}) = d(\text{Q, P})。$$

2.2 座標平面上での対称性*

導入問題

座標平面上の点を点 P (a, b) とします。点 P について以下を求めなさい。

a) x 軸を基準とした対称点の座標。

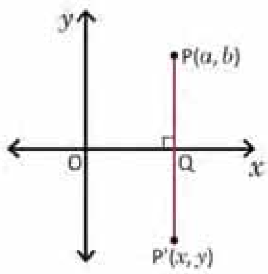
b) y 軸を基準とした対称点の座標。

c) 原点を基準とした対称点の座標。

d) 直線 $y = x$ を基準とした対称点の座標。

解法

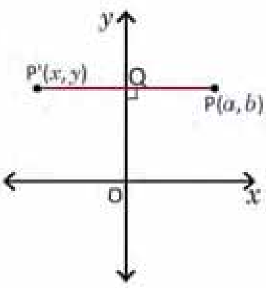
a) x 軸を基準とした点 P の対称点を点 P'(x, y) とします。対称性により、線分 PP' は x 軸に対して垂直、そして点 Q が線分 PP' と x 軸の交点であれば、PQ = P'Q を満たすことになります。



線分 PP' は垂直のため、2 つ目の座標である点 P' のみが変化します。x 軸から点 P と点 P' までの距離は同じため、2 つ目の座標である点 P' が点 b の対称点 $-b$ となります。

よって、x 軸を基準とした点 P(a, b) の対称点は点 P'$(a, -b)$ となります。

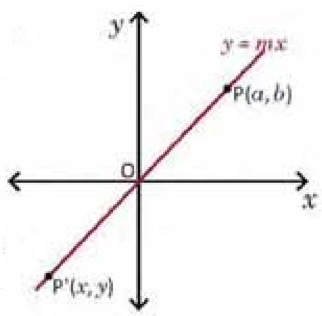
b) y 軸を基準とした点 P の対称点を点 P'(x, y) とします。対称性により、線分 PP' は y 軸に対して垂直、そして点 Q が線分 PP' と y 軸の交点であれば、PQ = P'Q を満たすことになります。



線分 PP' は水平のため、1 つ目の座標である点 P' のみが変化します。y 軸から点 P と点 P' までの距離は同じため、1 つ目の座標である点 P' が、点 a の対称点 $-a$ となります。

よって、y 軸を基準とした点 P(a, b) の対称点は点 P'$(-a, b)$ となります。

c) 原点 O を基準とした点 P の対称点を点 P'(x, y) とします。点に対する対称の定義により OP = OP'、すなわち



$$(OP)^2 = (OP')^2$$
$$\Rightarrow \quad (x-0)^2 + (y-0)^2 = (a-0)^2 + (b-0)^2$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \quad \text{------------------- (1)}$$

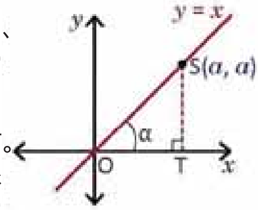
ただし点 P と点 P' は直線 $y = mx$ 上にあるため、$b = ma$ も満たすことになります。(1) の y と b を置換すると

$$x^2 + m^2x^2 = a^2 + m^2a^2$$
$$\Rightarrow \quad x^2(1 + m^2) = a^2(1 + m^2);$$

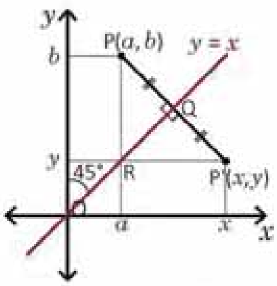
$1 + m^2 \neq 0$ なので $\Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = a$ もしくは $x = -a$ となります。

$x = a$ の場合、$y = mx = ma = b$。よって点 P' は点 P と同じとなります。$x = -a$ の場合、$y = mx = -ma = -b$。よって点 P'$(-a, -b)$ は原点を基準とした点 P の対称点となります。よって点 P'$(-a, -b)$ となります。

d) まず、直線 $y = x$上の点を点 S(a, a) として三角形 OTS を描くと、tan α = 1 であることから、α = 45° となります。すなわち、直線 $y = x$ は座標平面 I と III を二等分していることになります。



座標平面上の点を点 P(a, b)、直線 $y = x$ を基準としたその対称点を点 P'(x, y) とします。点 P が直線 $y = x$上にある場合、結果に影響はありません。点 Q を線分 PP' と直線 $y = x$ の交点とします。対称性により、線分 PP' はこの直線 PQ = P'Q に対して垂直となります。



垂直線 PR を描きます。PQ = P'Q、QR は共通する辺、さらに $\sphericalangle$PQR = $\sphericalangle$P'QR = 90° であることから、三角形PQRとP'QRは合同といえます（三角形の合同条件）。よって、

PR = P'R y $\sphericalangle$PRQ = $\sphericalangle$P'RQ. ------------------- (2)

ただし PR は y 軸に対して平行のため、$\sphericalangle$PRQ = 45°。ゆえに $\sphericalangle$P'RQ = 45°、よって $\sphericalangle$P'RP = 90°、したがって P'R は PR に対して垂直であり、P'R = $x - a$ そして PR = $b - y$。

(2) より PR = P'R、ただし PR = $b - a$、よって $b - a$ = P'R = $x - a$、つまり $x = b$ となります。同様に $b - a$ = PR = $b - y$、すなわち $y = a$。よって点 P' の座標は (b, a) となります。

定理

点 P(a, b) が座標平面上にある場合、
- 点 P'(a, $-b$) は x 軸を基準とした点 P の対称点。
- 点 P'($-a$, b) は y 軸を基準とした点 P の対称点。
- 点 P'($-a$, $-b$) は原点を基準とした点 P の対称点。
- 点 P'(b, a) は直線 $y = x$ を基準とした点 P の対称点。

方程式 $y = x$ を有する直線は、**恒等関数**と呼ばれます。

例

平面上に点 P(–1, 3)、点 Q(–2, –3) の 2 点があります。x 軸、y 軸、原点、恒等関数を基準とした場合の点 P と点 Q の対称点を求めなさい。

a) x 軸を基準とした点 P の対称点は P_1(–1, –3)。
　y 軸を基準とした点 P の対称点は P_2(1, 3)。
　原点を基準とした点 P の対称点は P_3(1, –3)。
　恒等関数を基準とした点 P の対称点は P_4(3, –1)。

b) x 軸を基準とした点 Q の対称点は Q_1(–2, 3)。
　y 軸を基準とした点 Q の対称点はQ_2(2, –3)。
　原点を基準とした点Q の対称点は Q_3(2, 3)。
　恒等関数を基準とした点 Q の対称点は Q_4(–3, –2)。

問題

1. x 軸、y 軸、原点、直線 $y = x$ を基準とした場合の各点の対称点を求めなさい。

a) P(1, 4)	b) P(3, –2)	c) P(–3, –1)
d) P(–5, 4)	e) P(2, 0)	f) P(0, –3)

2. x 軸を基準として対称点を求め、その後 y 軸を基準として対称点を求めると、点 P の原点を基準とした対称点を求めることができますか？解答の理由も述べなさい。

達成の目安

2.2 座標平面上にある点について、x 軸、y 軸、原点、恒等関数を基準とした対称点の座標を求められる。

学習の流れ：

この授業では、座標平面上にある点の対称点の座標を読み解きます。座標軸、原点、恒等関数$y = x$を基準とした対称を求めていきます。

ねらい：

この授業と授業2.1の目的は、鈍角の三角関数の比率の計算に必要なツールを身に着けることです。特に対称はレッスン2全体を通して使用します。

問題の解き方：

	点	x 軸を基準として	y 軸を基準として	原点を基準として	恒等関数を基準として
1a)	(1, 4)	$P_1(1, -4)$	$P_2(-1, 4)$	$P_3(-1, -4)$	$P_4(4, 1)$
1b)	(3, −2)	$P_1(3, 2)$	$P_2(-3, -2)$	$P_3(-3, 2)$	$P_4(-2, 3)$
1c)	(−3, −1)	$P_1(-3, 1)$	$P_2(3, -1)$	$P_3(3, 1)$	$P_4(-1, -3)$
1d)	(−5, 4)	$P_1(-5, -4)$	$P_2(5, 4)$	$P_3(5, -4)$	$P_4(4, -5)$
1e)	(2, 0)	$P_1(2, 0)$	$P_2(-2, 0)$	$P_3(-2, 0)$	$P_4(0, 2)$
1f)	(0, −3)	$P_1(0, 3)$	$P_2(0, -3)$	$P_3(0, 3)$	$P_4(-3, 0)$

2. 座標平面上に点 P(x, y) があります。点 P の原点を基準とした対称点の座標は $(-x, -y)$ です。

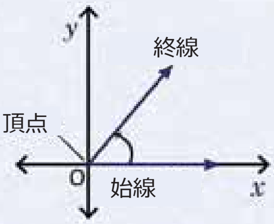
一方、点 P の x 軸を基準とした対称点の座標は $(x, -y)$ です。次に、$(x, -y)$ の y 軸を基準とした対称点の座標は $(-x, -y)$ です。

よって、ある点の x 軸と y 軸を基準とした対称点の座標を順に計算すると、その点の原点を基準とした対称点の座標を求めることができます。

2.3 角

定義

座標平面上の原点を起点とし、x軸上に矢印を書き、原点を中心に回転させます。最初の矢印と最後の矢印の間の部分を **角** 、最初の矢印を **始線** 、最後の矢印を **終線**と呼びます。始線が正の x 軸上、そして頂点が原点上にある場合、角は**標準位置**にあると言います。 角は角度で測ります。角度の単位は円を360等分割したもので、1°（1 度）です。



矢印を反時計回りに回転させてできた角は正、時計回りに回転させてできた角は負の角となります。

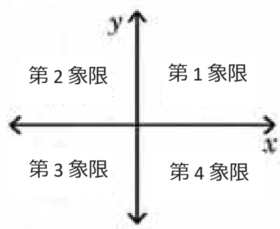
終線がある象限が、その角の象限となります。

例

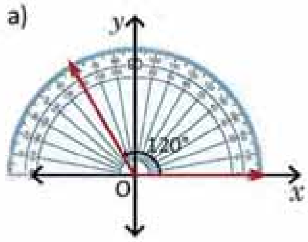
それぞれの角を標準位置に描き、属する象限を特定しなさい。

a) 120°　　b) –70°　　c) –150°

座標平面は象限と呼ばれる 4 つの部分で構成されます。右上から反時計回りに番号が割り当てられています。



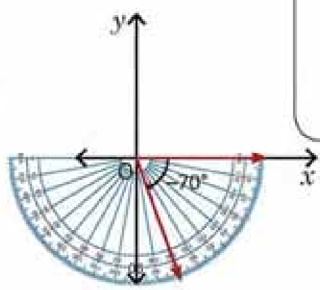
a)



終線が第 2 象限にあるため、120° は第 2 象限に属します。

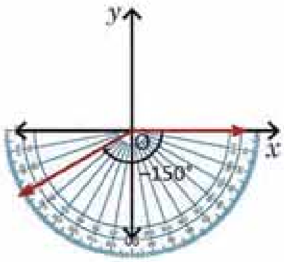
b) この角を描くには時計回りに回転させるため、分度器を下側において 70° を測定します。

終線が第 4 象限にあることから、–70° は第 4 象限に属します。



c) この角を描くには時計回りに回転させるため、分度器を下側において150°を測定します。

終線が第 3 象限にあることから、–150° は第 3 象限に属します。



問題

それぞれの角を標準位置に描き、属する象限を特定しなさい。

a) 80°　　b) 310°　　c) –170°

達成の目安

2.3 角度の正負と、属する座標平面上の象限が判断できる。

学習の流れ：

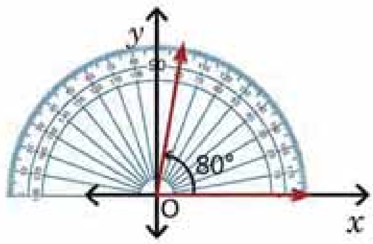
この授業は導入部分となります。正の x 軸上の矢印と、座標平面の原点を中心に回転する矢印 2 本の間の角を定義します。角を構成する要素については、すでに基礎教育で学習済みです。この授業では角の概念を広げていきます。さらに、矢印が時計回りか反時計回りかによって角の正負も定義するほか、角が座標平面のどの象限に属するかも定義します。

ねらい：

90° 以上もしくは 0° 以下の角度を教え、角が属する象限も分かるようにします。象限の概念は三角関数の比率の計算や正負の判断、座標平面上の位置を見極める際に重要となります。

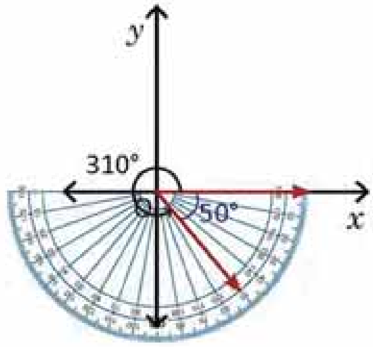
問題の解き方：

a) 正の角度のため、時計と反対回りに描きます。終線が第 1 象限にあるため、80° は第 1 象限に属します。

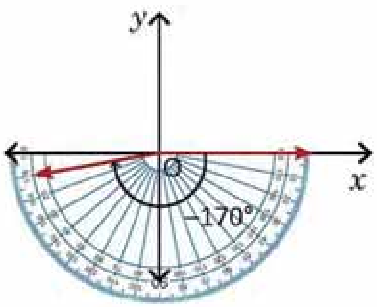


b) 分度器は 180° までしか測れないため、この場合は1周分に足りない角度を測定します。360° には 50° 足りないため、分度器を置いて 1 周分に足りない 50° を測定します。

正の角度のため、時計と反対回りに測定します。終線が第 4 象限にあるため、310° は第 4 象限に属します。



c) 負の角度のため、時計回りに測定します。終線が第 3 象限にあるため、-170° は第 3 象限に属します。



分度器が円形の場合は、回転させる必要はありません。

2.4 360°より大きい角と -360°より小さい角

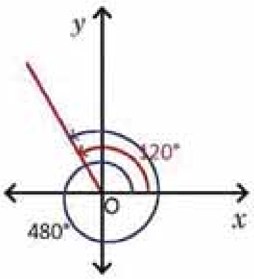
導入問題

480°、930°、2 150°、−1 150° の角を描きなさい。

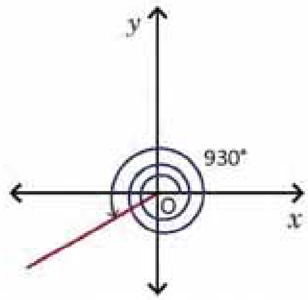
解法

角を描く際には、（前回の授業で習った）円が360等分された単位が1°であること、すなわち360°の角は1周回を意味することを復習しましょう。

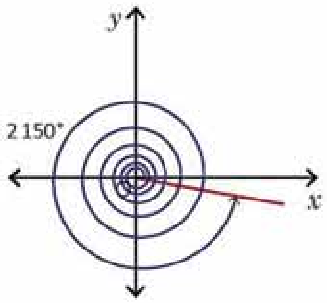
a) 480° は360° + 120° であるため、この角は次のように描きます。



b) 930° = 360°(2) + 210° であるため、この角は次のように描きます。

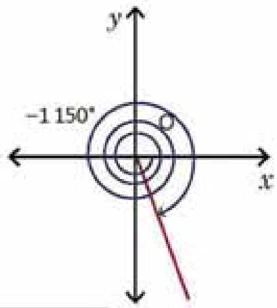


c) 2150° = 360°(5) + 350° であるため、この角は次のように描きます。



d) 負の角のため、時計回りに測定します。さらに以下の式から、この角は次のように描きます。

−1 150° = −360°(3) − 70°



-1150° は次のように書くこともできます。
360°(−3) − 70° = 360°(−3) − 70° + 360° − 360° = 360°(−4) + 290。
こうすると負の角ではなくなるので便利です。

まとめ

360°より大きい角を描く場合は、その角に何周回含まれるか計算します。終線の位置が、角を分解した後に残る360°未満の角度となります。

例えば、$\theta = 360°n + \theta'$、そして n はゼロ以外の整数の場合、n はその角が含む周回数となります。そして $0 \leq \theta' < 360°$ となることから、θ の終線は角 θ' の終線と同じとなります。$n > 0$ の場合、角は時計と反対回りに測定します。$n < 0$ の場合、角は時計回りに測定します。

問題

それぞれの角を描きなさい。

a) 1000°　b) 990°　c) 1480°
d) −1500°　e) −1315°　f) −1880°

達成の目安

2.4 座標平面上に 360° より大きい角や-360°未満の角を描ける。

学習の流れ：

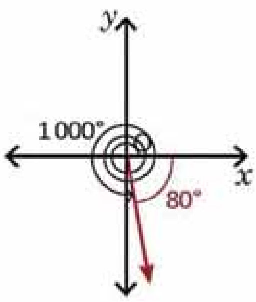
360° より大きい角や -360° 未満の角は、含まれる周回数を計算してから描きます。

つまづきやすい点：

角に含まれる周回数を特定する段階で、特に負の角の場合はつまづく生徒が現れる可能性があります。この段階ではわり算を使えます。

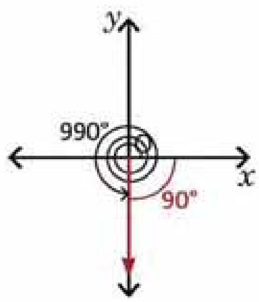
問題の解き方：

a) $1000° = 360°(2) + 280°$.

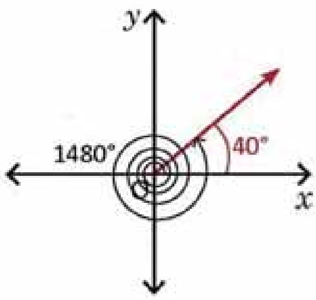


360° を上回る角もしくは -360° 未満の角を描く場合、最初の角を分解して残った 360° 未満の角だけ描きます。

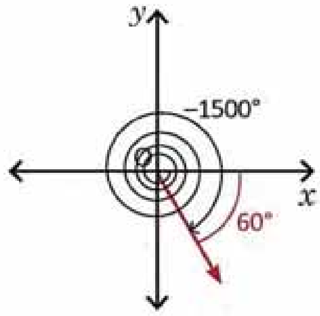
b) $990° = 360°(2) + 270°$.



c) $1480° = 360°(4) + 40°$.

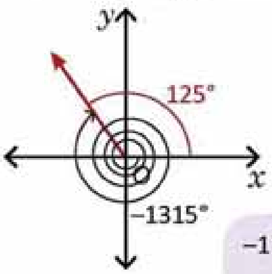


d) $-1500° = -360°(4) - 60°$.



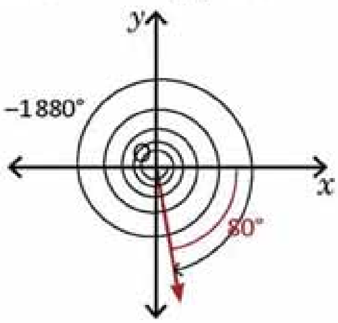
負の角を描く場合は、正の x 軸から描き始めます。

e) $-1315° = -360°(3) - 235°$.



$$-1315° = -360°(3) - 235° + 360° - 360°$$
$$= -360°(4) + 125°$$

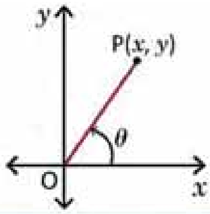
f) $-1880° = -360°(5) - 80°$.



2.5 任意の角の三角関数の比率（パート 1）

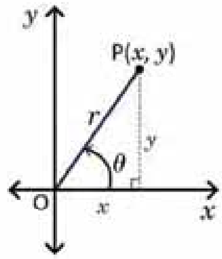
導入問題

図の角 θ について考えてみます。x と y を使って、角 θ のサイン、コサイン、タンジェントを表しなさい。



解法

直角三角形は図のように、斜辺が角の終線となり、辺のうち 1 つが x 軸上にくるように描きます。終線の終点は点 P(x, y) で決まります。よって、三角形の二辺の長さはそれぞれ x、y となります。



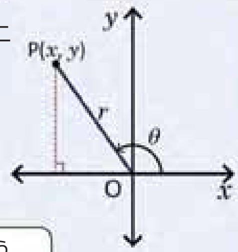
直角三角形の場合、x は隣接する辺の長さ、y は θ と反対側の辺の長さです。斜線の長さ r はピタゴラスの定理を適用すると次のようになります。$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ よって、

$$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r},\ \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

定義

いかなる角 θ の三角関数の比率も次のように定義します。角θを標準位置に置き、終線上に点 P(x, y) を取ります。これで $r = \text{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$ となるため、次のようになります。

$$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r},\ \tan\theta = \frac{y}{x}.$$



$\tan\theta$ は $x \neq 0$ の場合に限り定義します。

三角関数の比率の定義に従い、次のように導くことができます。

$$y = r\text{sen}\,\theta、\quad x = r\cos\theta。$$

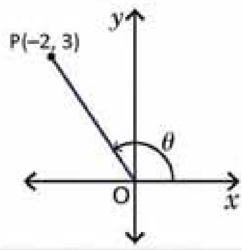
さらに $\text{sen}(360°n + \theta) = \text{sen}\,\theta$、$\cos(360°n + \theta) = \cos\theta$ となります。

確認しましょう。

$\tan\theta = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$.

例

図の角 θ のサイン、コサイン、タンジェントを求めなさい。



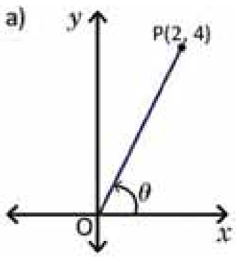
この場合、 $r = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$ となるので、

$$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{r} = \frac{3}{\sqrt{13}},\ \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{\sqrt{13}} = -\frac{2}{\sqrt{13}},\ \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}.$$

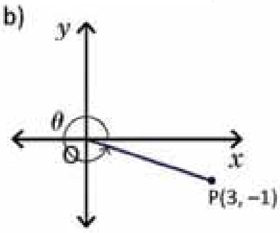
問題

それぞれの角のサイン、コサイン、タンジェントを求めなさい。

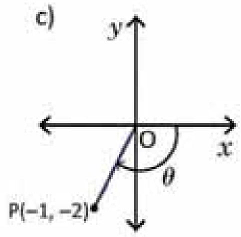
a)



b)



c)



達成の目安

2.5 正の x 軸と直線 $\overline{\mathrm{OP}}$（点 P は座標平面上の点）からなる角について、三角関数の比率を導き出せる。

学習の流れ：

座標平面上の1点の座標について、三角関数の比率を定義します。

ねらい：

鋭角ではない角に対しては直角三角形を描けないため、座標平面上の1点の座標に関して三角関数の比率を定義します。三角関数の比率と座標の関係を観察してみると、この新しい定義は、以前学習した鋭角についての定義と一致します。

問題の解き方：

a) $r = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, よって、

$$\text{sen}\ \theta = \frac{y}{r} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

そして　$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{2} = 2$

b) $r = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$, よって、

$$\text{sen}\ \theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

そして　$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$

c) $r = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$, よって、

$$\text{sen}\ \theta = \frac{y}{r} = \frac{-2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5},$$

そして　$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2}{-1} = 2$

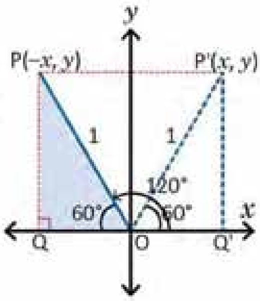
2.6 任意の角の三角関数の比率（パート 2）

導入問題

sen 120°、cos 120°、tan 120° の値を求めなさい。

解法

角を標準位置に置き、図のように OP = 1 となるように三角形 OPQ を描きます。図のとおり ∢QOP は 180°- 120° = 60° と同じであることから、sen 120°、cos 120°、tan 120° はそれぞれ sen 60°、cos 60°、tan 60° の値を参考にして計算できることが分かります。



ΔOPQ を y 軸を基準として反転させると、三角形 OP'Q' となります。点 P' の座標は (cos 60°, sen 60°)、そして点 P は点 P' の対称であることから点 P の座標は (−cos 60°, sen 60°)、よって次のようになります。

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{r\,\mathrm{sen}\,\theta}{r\cos\theta} = \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta}$$

$$\mathrm{sen}\ 120^\circ = \mathrm{sen}\ 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

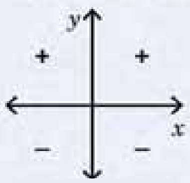
$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2},$$

$$\tan 120^\circ = \frac{\mathrm{sen}\ 120^\circ}{\cos 120^\circ} = \frac{\mathrm{sen}\ 60^\circ}{-\cos 60^\circ} = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}.$$

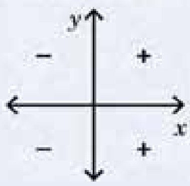
まとめ

角が 0°、90°、180°、270° のいずれでもない場合、**基準三角形**は直角三角形と定義されます。その際、長さ 1 の斜辺は角の終線となり、いずれかの辺が x 軸上にきます。導入問題の解答では、三角形 OPQ が基準三角形です。
90°より大きい角の三角関数の比率は、次のように計算します。

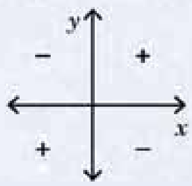
1. 角を標準位置に置きます。
2. 可能な場合には必ず基準三角形を描きます。
3. 基準三角形の鋭角（角の終線と x 軸の間）を使い、三角関数の比率を計算します。この段階で、角が属する象限に基づいて三角関係の比率の正負が分かります。サインの正負は y、コサインの正負は x、タンジェントの正負は $\frac{y}{x}$ の比率で決まります。



サインの正負



コサインの正負



タンジェントの正負

三角関数の比率の計算に使用される鋭角は、**参照角**と呼ばれます。

問題

すべての角の三角関数の比率を計算し、表を完成させなさい。比率が定義されない場合は、/ を記入してください。

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sen θ																	
cos θ																	
tan θ																	

0°、90°、270°、360° の角の三角関数の比率を計算する際には、座標平面上の角を構成する x と y の座標を確認します。

達成の目安

2.6 基本三角形の角を使って座標平面上の三角関数の比率を計算できる。

学習の流れ：

この授業では三角形と鈍角の参照角について定義し、360° 以下の鈍角について三角関数の比率の計算に使用します。比率は基本三角形の角を使って計算できます。さらにサイン、コサイン、タンジェントの正負についても、角がどの象限にあるかで判断できるようになります。
導入問題を解くのが難しい場合は、教師がサポートしてあげてください。

問題の解き方：

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan θ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

ここからはいくつかの比率の計算方法について詳しく説明していきます。

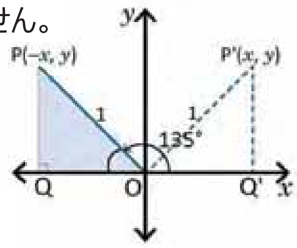
0°、90°、180°、270° の角についても同様で、それぞれの座標は $(x, 0)$、$(0, y)$、$(-x, 0)$、$(0, -y)$ となります ($x > 0$、$y > 0$)。

- 0° の角の比率は、点 P の座標が (1, 0) のため $r = 1$ となります。

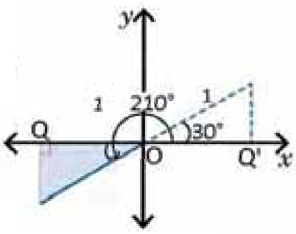
$$\text{sen } 0° = \frac{0}{1} = 0,\quad \cos 0° = \frac{1}{1} = 1,\quad \tan 0° = \frac{0}{1} = 0.$$

- 90° も同様で、点 P の座標は (0, 1) となります。よって $r = 1$。

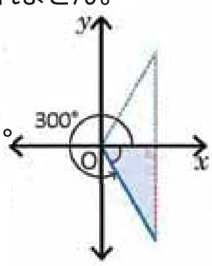
$\text{sen } 90° = \frac{1}{1} = 1,\ \cos 90° = \frac{0}{1} = 0,\quad \tan 90° = \frac{1}{0} \Rightarrow$ についてはタンジェントは定義されません。



- 135° の場合、参照角は ∢QOP = 180° − 135° = 45°となります。サインの値は正、コサインとタンジェントの値は負、よって、
  $\text{sen } 135° = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \tan 135° = -\tan 45° = -1$
  となります。
- 180°の場合、点 P の座標は (-1, 0)、よって sen 180° = 0、cos 180° = −1、tan 180° = 0 となります。



- 210°の場合、参照角は210° − 180° = 30°となります。この場合、サインとコサインの値は負、タンジェントの値は正となるため、
  $\text{sen } 210° = -\text{sen } 30° = -\frac{1}{2},\quad \cos 210° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \tan 210° = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$
  となります。
- 270° の場合、点 P の座標は (0, -1)、よって sen 270° = −1、cos 270° = 0、tan 270° は定義されません。
- 300°の場合、参照角は360° − 300° = 60°となります。サインとタンジェントの値は負、コサインの値は正となるため、
  $\text{sen } 300° = -\text{sen } 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 300° = \cos 60° = \frac{1}{2},\quad \tan 300° = -\tan 60° = -\sqrt{3}$ となります。



- 360° は 1 周回を意味するため、値は 0° の値と同じとなります。

コサインが 0 の場合、タンジェントは定義されません。

2.7 任意の角の三角関数の比率（パート 3）

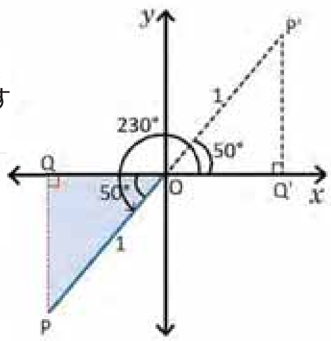
導入問題

a) sen 230°、cos 230°、tan 230° の値を鋭角を使って表しなさい。
b) sen 320°、cos 320°、tan 320° の値を鋭角を使って表しなさい。

解法

a) 参照角を描きます。図のとおり ∢POQ = 230° − 180° = 50°、よって sen 230°、cos 230°、tan 230° の比率は sen 50°、cos 50°、tan 50° の値を参考にして示すことができます。

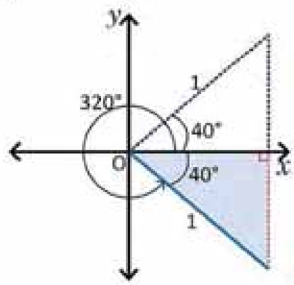
サインとコサインの値は負、タンジェントの値は正、よって sen 230° = −sen 50°、cos 230° = −cos 50°、tan 230° = tan 50° となります。



b) この場合、参照角は 360° – 320° = 40° となります。この計算方法については右の図を参照してください。

第 4 象限にあるためサインとタンジェントの値は負、コサインの値は正、よって、

sen 320° = – sen 40°、cos 320° = cos 40°、tan 320° = – tan 40°
となります。



まとめ

90° より大きい角の三角関数の比率を計算する際には、参照角が役立ちます。

参照角の計算方法は、その角が属する象限によって変わってきます。 θ が 360° 未満とすると、

- θ が第 1 象限に属する場合、参照角は角そのものとなります。
- θ が第 2 象限に属する場合、参照角は 180°– θ となります。
- θ が第 3 象限に属する場合、参照角は θ - 180° となります。
- θ が第 4 象限に属する場合、参照角は 360°– θ となります。

例

cos(-400°) の値を鋭角を使って表しなさい。

–400° = –360° – 40°、よって参照角は 40°。角は第 4 象限に属するため、cos(–400°) の値は正。
よって、cos(–400°) = cos 40°。

問題

以下について、三角関数の比率の値を sen θ、cos θ、tan θ を使って表しなさい。ただし $0 \leq \theta < 90°$ とします。

a) 100°	b) 175°	c) 220°
d) 250°	e) 290°	f) 310°
g) 405°	h) 570°	i) 630°
j) –780°	k) –940°	l) –1 000°

達成の目安

2.7 鈍角の三角関数の比率を 0° - 90° の角を使って表すことができる。

学習の流れ：

基本三角形を使って三角関数の比率を計算した後は、参照角を使って鋭角の三角関数の比率を示します。

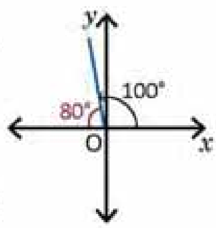
ねらい：

参照角の使用、そして角が属する象限や三角関数の比率の正負の特定を訓練します。三角関数の比率は計算せず、鋭角で示すのみとします。

つまづきやすい点：

参照角の可視化と参照角の計算。参照角が角の終線と x 軸の間にできる角であることを覚えておくことが重要です（ここでは x 軸の正負どちらの側も含まれます）。

問題の解き方：

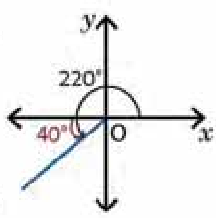


a) 100° の参照角は 180° – 100° = 80°。100° は第 2 象限に属するため、サインの値は正、コサインとタンジェントの値は負。よって、

sen 100° = sen 80°、cos 100° = – cos 80°、tan 100° = – tan 80°。

b) 参照角は 180° – 175° = 5°。175° は第 2 象限に属するため、サインの値は正、コサインとタンジェントの値は負。よって、

sen 175° = sen 5°、cos 175° = – cos 5°、tan 175° = – tan 5°。

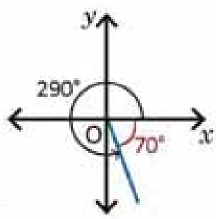


c) 220° の参照角は 220° – 180° = 40°。220° は第 3 象限に属するため、サインとコサインの値は負、タンジェントの値は正。よって、

sen 220° = – sen 40°、cos 220° = – cos 40°、tan 220° = tan 40°。

d) 参照角は 250° – 180° = 70°。250° は第 3 象限に属するため、サインとコサインの値は負、タンジェントの値は正。よって、

sen 250° = – sen 70°、cos 250° = – cos 70°、tan 250° = tan 70°。



e) 290° の参照角は 360° – 290° = 70°。290° は第4象限に属するため、サインとタンジェントの値は負、コサインの値は正。よって、

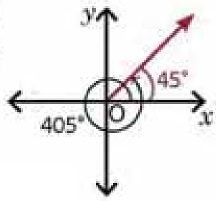
sen 290° = – sen 70°、cos 290° = cos 70°、tan 290° = – tan 70°。

f) 参照角は 360° – 310° = 50°。310° は第 4 象限に属するため、サインとタンジェントの値は負、コサインの値は正。よって、

sen 310° = – sen 50°、cos 310° = cos 50°、tan 310° = – tan 50°。

g) 角が 360° より大きいため 405° = 360° + 45°、すなわち参照角は 45°。45° は第 1 象限に属するため、405° も同様に第 1 象限に属します。よってすべての値が正。したがって、

sen 405° = sen 45°、cos 405° = cos 45°、tan 405° = tan 45°。



h) 570° = 360° + 210° のため 210° の参照角を求めると、210° – 180° = 30°。
よって、

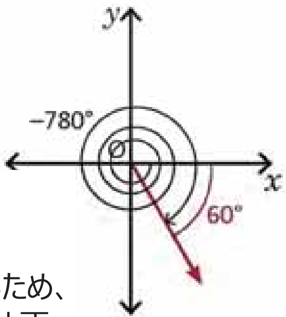
sen 570° = sen 210° = – sen 30°、
cos 570° = cos 210° = – cos 30°、
tan 570° = tan 210° = tan 30°。

i) 630° = 360° + 270°、そして 270° の参照角は 90°。よって、

sen 630° = sen 270° = – sen 90°、cos 630° = cos 270° = cos 90°、tan 630° は定義されません。

j) –780° = –360°(2) – 60° のため参照角は60°。-60° は第 4 象限に属するため、コサインの値は正、サインとタンジェントの値は負。よって、

sen(–780°) = – sen 60°、cos(–780°) = cos 60°、tan(–780°) = – tan 60°。



k) –940° = –360°(2) – 220°。そして正の角の値を求めるためにこの角を書き換えると

–940° = –360°(2) – 220° = –360°(2) – 220° + 360° – 360° = –360°(3) + 140°。

ここからは参照角 140° で計算します。180° – 140° = 40°。140° は第 2 象限に属するため、-940° も第 2 象限に属します。よってコサインとタンジェントの値は負、サインの値は正。したがって、

sen(–940°) = sen 140° = sen 40°、
cos(–940°) = cos 140° = – cos 40°、
tan(–940°) = tan 140° = – tan 40°。

l) –1 000° = –360°(2) – 280° = –360°(2) – 280° + 360° – 360° = –360°(3) + 80°。よって参照角は 80°。80° は第 1 象限に属するため、すべての値は正。よって

sen(–1 000°) = sen 80°、cos(–1 000°) = cos 80°、tan(–1 000°) = tan 80°。

2.8 任意の角の三角関数の比率（パート 4*）

導入問題

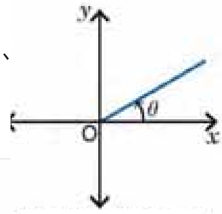
θ が 0° から 360° の場合について、それぞれの値を計算しなさい。

a) $\text{sen}\ \theta = \frac{1}{2}$　　　　b) $\cos\theta = -\frac{3}{4}$

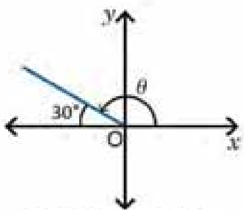
解法

a) 与えられた条件によると sen θ の値は正。サインは第 1、第 2 象限においてその値が正となります。さらに $\text{sen}\ 30° = \frac{1}{2}$ なので、θ の値が 0° から 360° の間にある場合、可能性のある値は 2 つあります。

すなわち θ = 30° または θ = 180° − 30° = 150°です。



θ が第 1 象限にある場合



θ 第 2 象限にある場合

b) 与えられた条件によると cos θ の値は負。コサインは第 2、第 3 象限においてその値が負となります。θ の値を求めるためには電卓を使用します。数のままではなく、$-\frac{3}{4}$ の絶対値を使用します。

参照角を α とすると、$\cos\alpha = \frac{3}{4}$ となります。

電卓の $\cos^{-1}$ 機能を使うと、$\cos\alpha = \frac{3}{4}$ を満たす角 α が計算されます。つまり $\cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = \alpha$ ということになります。

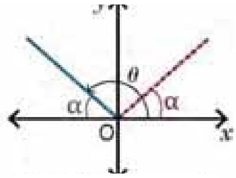
ただし α は参照角、そして θ は第 2 象限にあるため、

$$\theta = 180° - \alpha = 180° - \cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 138.6°.$$

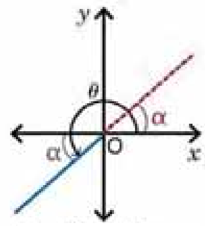
同様に、θ が第 3 象限にある場合は、

$$\theta = 180° + \cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 221.4°.$$

電卓で角を計算する場合、サインとタンジェントについては -90° から 90°、コサインについては 0° から 180° の間の角が出ますので特に注意してください。



θ が第 2 象限にある場合



θ が第 3 象限にある場合

まとめ

角を計算する際、三角関数の比率のいずれかが分かっている場合は参照角を使用します。さらに、角が 0° から 360° の場合、与えられる条件を満たす角は一般的に 2 つ存在します。

問題

θ が 0° から 360° の場合について、それぞれの値を計算しなさい。

a) $\text{sen}\ \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　b) $\tan\theta = \sqrt{3}$

c) $\text{sen}\ \theta = \frac{2}{3}$　　　　d) $\cos\theta = -\frac{4}{7}$

達成の目安

2.8 三角関数の比率が 1 つ分かれば角を計算できる

学習の流れ：

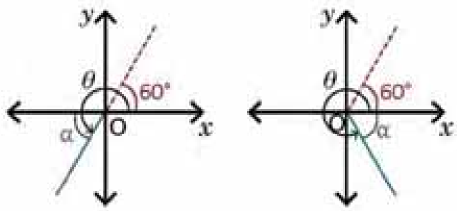
三角関数の比率が 1 つ分かる場合の角の計算方法について学びます。これは三角関数の比率を求めるのと逆の手順で、電卓に逆三角関数の機能が付いている場合はこれを使用します。
導入問題を解くのが難しい場合は、教師がサポートしてあげてください。

問題の解き方：

a) 角のサインの値は負、よって θ は第 3 象限もしくは第 4 象限にあることが分かります。与えられた式は

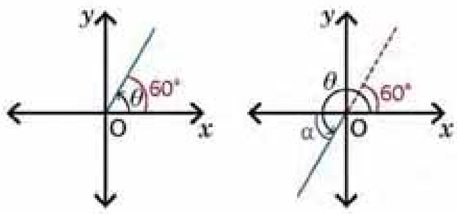
$$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

よって $\theta = 180° + 60° = 240°$ もしくは $\theta = 360° - 60° = 300°$。



b) 角が第 1 象限もしくは第 3 象限にある場合、そのタンジェントの値は正となります。与えられた式は $\tan 60° = \sqrt{3}$、よって

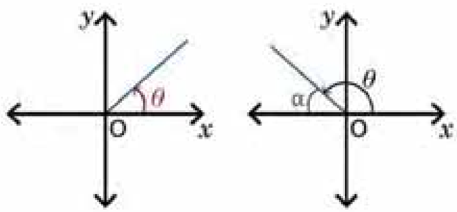
$$\theta = 60° \text{ もしくは } \theta = 180° + 60° = 240°。$$



c) 角が第 1 象限もしくは第 4 象限にある場合、そのサインの値は正となります。

参照角を α とすると、$\text{sen } \alpha = \frac{2}{3}$。

電卓で sen^{-1} 機能を使うと、$\text{sen } \alpha = \frac{2}{3}$ を満たす角、すなわち $\text{sen}^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = \alpha$ の値が出てきます。ただし α は参照角のため、θ が第 1 象限にある場合は、



$$\theta = \alpha = \text{sen}^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 41.8°,$$

そして θ が第 2 象限にある場合は、

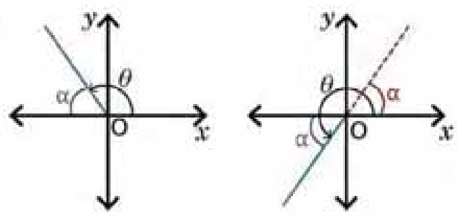
$$\theta = 180° - \alpha = 180° - \text{sen}^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 138.2°.$$

電卓の単位は必ず°（度）に設定してください。

d) 角が第 2 象限もしくは第 3 象限にある場合、コサインの値は負となります。

参照角を α とすると、$\cos \alpha = \frac{4}{7}$。

電卓で $\cos^{-1}$ 機能を使うと、$\cos \alpha = \frac{4}{7}$ を満たす角、すなわち $\cos^{-1}\left(\frac{4}{7}\right) = \alpha$ の値が出てきます。ただし α は参照角のため、θ が第 2 象限にある場合は、



$$\theta = 180° - \alpha = 180° - \cos^{-1}\left(\frac{4}{7}\right) \approx 124.8°.$$

そして θ が第 3 象限にある場合は、

$$\theta = 180° + \alpha = 180° + \cos^{-1}\left(\frac{4}{7}\right) \approx 235.2°.$$

レッスン 2

2.9 ピタゴラスの公式

導入問題

$(\text{sen}\,\theta)^2$、$(\cos\theta)^2$ といった三角関数の比率の二乗は $\text{sen}^2\theta$、$\cos^2\theta$ のように表します。いかなる角 θ においても $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ となることを証明しなさい。

解法

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とすると、$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{r}$、$\cos\theta = \frac{x}{r}$、$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ となります。よって、

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1.$$

まとめ

$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ は**ピタゴラスの公式**として知られており、いかなる角 θ にも有効です。

例 1

$\text{sen}\,\theta = \frac{5}{13}$ で第 1 象限にある場合の、$\cos\theta$ と $\tan\theta$ を求めなさい。

ピタゴラスの公式 $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を使用すると、

$$\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2\theta = \frac{25}{169} + \cos^2\theta = 1.$$

よって、$\cos^2\theta = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169 - 25}{169} = \frac{144}{169}$。すなわち $\cos\theta = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$ または $\cos\theta = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$。ただし、もう 1 つの条件として θ は第 1 象限にあり、第 1 象限にあるコサインの値は正のため、$\cos\theta = \frac{12}{13}$。

$\tan\theta$ の計算については、$\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$ のため、

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \frac{5}{13} \div \frac{12}{13} = \frac{5}{13} \times \frac{13}{12} = \frac{5}{12}.$$

よって、$\cos\theta = \frac{12}{13}$、$\tan\theta = \frac{5}{12}$。

例2

あらゆる角 θ において、$1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\text{sen}^2\theta}$ であることを証明しなさい。

平面上の座標 (x, y) おいて、$\tan\theta = \frac{y}{x}$ のため、$\cot\theta = \frac{x}{y}$。

$$1 + \cot^2\theta = 1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{y^2 + x^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2}.$$

一方、$\frac{1}{\text{sen}^2\theta} = 1 \div \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1 \times \frac{r^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2}$。よって、$1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\text{sen}^2\theta}$。

問題

1. $\cos\theta = -\frac{4}{5}$ で、θ が第 3 象限にある場合の $\text{sen}\,\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めなさい。
2. $\cos\theta = -\frac{7}{9}$、$\tan\theta < 0$ の場合の $\text{sen}\,\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めなさい。
3. $\text{sen}\,\theta = \frac{2}{3}$ で、θ が第 1 象限にはない場合の $\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めなさい。
4. あらゆる角 θ において、$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ であることを証明しなさい。
5. $\tan\theta = -\frac{1}{2}$、$\text{sen}\,\theta > 0$ の場合の $\text{sen}\,\theta$、$\cos\theta$ の値を求めなさい。
6. $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta \csc\theta$ であることを証明しなさい。
7. $\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta\,\text{sen}\,\theta$ であることを証明しなさい。

導入問題の解答で使った方法を応用しましょう。

5 問目は、4 問目の解答を使えます。

ユニット 5

147

達成の目安

2.9 三角関数のいずれかが分かっている場合にピタゴラスの公式を使ってその比率を計算できる。

学習の流れ：

ピタゴラスの公式を学び、ある角について三角関数の比率のいずれかが分かっている場合、この公式を使って他の比率を計算します。導入問題の解答に見られる方法を使い、いくつか他の公式も証明します。

ねらい：

導入問題では、ピタゴラスの公式を導き出しました。例 1 では、問題を解くためにピタゴラスの公式を適用する方法を具体的に示しています。例 2 では導入問題を解く際に使った方法と同じ方法で別の公式を証明しています。

問題の解き方：

1. ピタゴラスの公式を用いて、$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$: $\Rightarrow \text{sen}^2\theta + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\theta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$。

第 3 象限におけるサインの値は負のため、$\text{sen}\ \theta = -\frac{3}{5}$ 。よって、

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\ \theta}{\cos\theta} = \left(-\frac{3}{5}\right) \div \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4}.$$

したがって、$\text{sen}\ \theta = -\frac{3}{5}$、$\tan\theta = \frac{3}{4}$。

2. $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\theta + \left(-\frac{7}{9}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\theta = 1 - \frac{49}{81} = \frac{32}{81}$.

$\cos\theta < 0$、$\tan\theta < 0$ であることから θ は第 2 象限にあるため、$\text{sen}\ \theta > 0$。すなわち、$\theta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$。
よって、

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\ \theta}{\cos\theta} = \frac{4\sqrt{2}}{9} \div \left(-\frac{7}{9}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9} \times \frac{9}{7} = -\frac{4\sqrt{2}}{7}.$$

したがって、$\text{sen}\ \theta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ 、$\tan\theta = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$。

3. $\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ 、$\tan\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$。

4. $1 + \tan^2\theta = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2}$.

一方、$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 \div \left(\frac{x}{r}\right)^2 = 1 \times \frac{r^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2}$。よって、$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ 。

5. タンジェントの値は負、サインの値は正のため、角は第 2 象限にあり、コサインの値は負となります。前の問題の公式を使うと、

$$1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = \frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

次に、$\tan\theta = \frac{\text{sen}\ \theta}{\cos\theta} \Rightarrow \text{sen}\ \theta = \tan\theta\cos\theta = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 。

すなわち、$\text{sen}\ \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 。

sen θ、cos θ、tan θ のうち 2 つの値が分かる場合、もう 1 つの値を求めるには $\tan\theta = \frac{\text{sen}\ \theta}{\cos\theta}$ の式を用いるのが適しています。

6. $\tan\theta + \cot\theta = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{y^2+x^2}{xy} = \frac{r^2}{xy}$。一方、$\sec\theta\csc\theta = \left(\frac{r}{x}\right)\left(\frac{r}{y}\right) = \frac{r^2}{xy}$ 。

よって、$\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta\csc\theta$。

7. $\sec\theta - \cos\theta = \frac{r}{x} - \frac{x}{r} = \frac{r^2-x^2}{xr} = \frac{x^2+y^2-x^2}{xr} = \frac{y^2}{xr}$ 。一方、$\tan\theta\ \text{sen}\ \theta = \left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{y}{r}\right) = \frac{y^2}{xr}$ 。

よって、$\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta\ \text{sen}\ \theta$。

レッスン 2

2.10 学んだことで練習しましょう

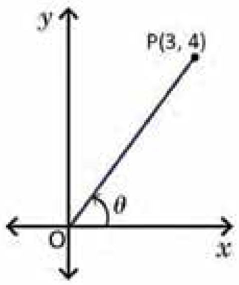
1. それぞれの角を描きなさい。

a) 530°　　b) 780°　　c) 855°

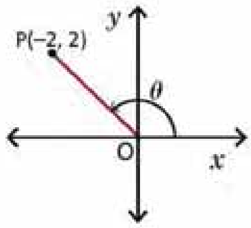
d) −1 360°　　e) −1 210°　　f) −630°

2. それぞれの角について、三角関数のサイン、コサイン、タンジェントの比率を求めなさい。

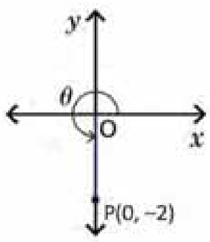
a)



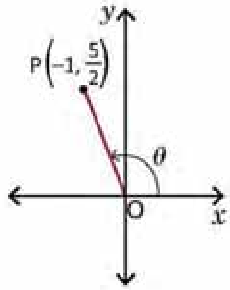
b)



c)



d)



3. 以下について、三角関数の比率の値を sen θ、cos θ、tan θ を使って表しなさい。ただし $0 \leq \theta < 90°$ とします。

a) 165°　　b) 855°　　c) 2 385°

d) −140°　　e) −840°　　f) −2 190°

4. $0° \leq \theta < 360°$ の場合について、それぞれθの値を計算しなさい。

a) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$　　b) $\tan\theta = 1$　　c) $\operatorname{sen}\theta = -\frac{7}{9}$

5. $\cos\theta = \frac{5}{6}$ で θ が第 1 象限にない場合の、sen θ を求めなさい。

6. $\tan\theta = -\frac{1}{3}$ で θ が第 2 象限にある場合の、sen θ、cos θ を求めなさい。

7. $\sec^2\theta + \csc^2\theta = \sec^2\theta\csc^2\theta$ であることを証明しなさい。

8. $(\tan\theta + \cot\theta)\tan\theta = \sec^2\theta$ であることを証明しなさい。

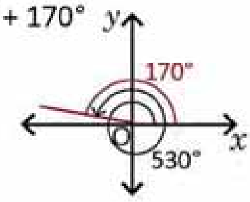
148

達成の目安

2.10 鈍角の三角関数の比率の計算についての問題が解ける。

問題の解き方：

1a) $530° = 360° + 170°$



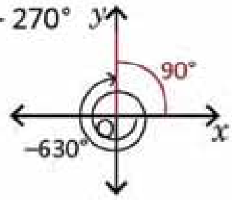
1b) $780° = 360°(2) + 60°$.

1c) $855° = 360°(2) + 135°$.

1d) $-1\,360° = -360°(3) - 280°$.

1e) $-1\,210° = -360°(3) - 130°$.

1f) $-630° = -360° - 270°$



2a) $r = \sqrt{9+16} = 5$、よって、

$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{r} = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{5}$, $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{3}$.

2b) $r = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$、よって、

$\text{sen}\,\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\theta = \frac{2}{-2} = -1$.

2c) $r = 2$, 、よって、$\text{sen}\,\theta = \frac{-2}{2} = -1$, $\cos\theta = \frac{0}{2} = 0$

$\tan\theta$ は定義されません。

2d) $r = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{29}{4}} = \frac{\sqrt{29}}{2}$、よって、

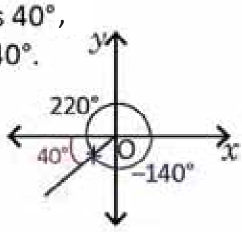
$\text{sen}\,\theta = \frac{5\sqrt{29}}{29}$, $\cos\theta = -\frac{2\sqrt{29}}{29}$, $\tan\theta = -\frac{5}{2}$.

3a) $\text{sen}\,165° = \text{sen}\,15°$, $\cos 165° = -\cos 15°$, $\tan 165° = -\tan 15°$

3b) $\text{sen}\,855° = \text{sen}\,135° = \text{sen}\,45°$, $\cos 855° = \cos 135° = -\cos 45°$, $\tan 855° = \tan 135° = -\tan 45°$

3c) $\text{sen}\,2\,385° = \text{sen}\,225° = -\text{sen}\,45°$, $\cos 2\,385° = \cos 225° = -\cos 45°$, $\tan 2\,385° = \tan 225° = \tan 45°$

3d) $\text{sen}(-140°) = -\text{sen}\,40°$,
$\cos(-140°) = -\cos 40°$,
$\tan(-140°) = \tan 40°$.

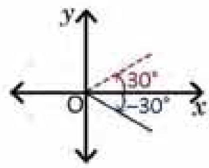


3e) $-840° = -360°(2) - 120° = -360°(3) + 240°$

240°の参照角は $240° - 180° = 60°$。
よって、

$\text{sen}(-840°) = \text{sen}\,240° = -\text{sen}\,60°$,
$\cos(-840°) = \cos 240° = -\cos 60°$,
$\tan(-840°) = \text{sen}\,240° = \tan 60°$.

3f) $-2190° = -360°(6) - 30°$。$-30°$ の参照角は、x 軸に対してこれを反転することで得られます。
サインとコサインの値は負、コサインの値は正。よって、
$\text{sen}(-30°) = -\text{sen}\,30°$、$\cos(-30°) = \cos 30°$、$\tan(-30°) = -\tan 30°$。



4a) コサインは第 2、第 3 象限においてその値が負となります。よって、

$\theta = 180° - \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 180° - 30° = 150°$、もしくは $\theta = 180° + \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 180° + 30° = 210°$。

4b) タンジェントの値は第 1、第 3 象限において正となります。さらに $\tan 45° = 1$、よって、

$\theta = \tan^{-1}(1) = 45°$、もしくは $\theta = 180° + \tan^{-1}(1) = 180° + 45° = 225°$。

4c) $\theta = 180° + \text{sen}^{-1}\left(\frac{7}{9}\right) \approx 231.1°$、もしくは $\theta = 360° - \text{sen}^{-1}\left(\frac{7}{9}\right) \approx 308.9°$。

5. $\text{sen}\,\theta = -\sqrt{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = -\frac{\sqrt{11}}{6}$

6. $\text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{10}}{10}$ $\cos\theta = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$

7. $\sec^2\theta + \csc^2\theta = \frac{r^2}{x^2} + \frac{r^2}{y^2} = \frac{r^2y^2 + r^2x^2}{x^2y^2} = \frac{r^2(y^2+x^2)}{x^2y^2} = \frac{r^4}{x^2y^2}$.

一方、$\sec^2\theta\csc^2\theta = \left(\frac{r^2}{x^2}\right)\left(\frac{r^2}{y^2}\right) = \frac{r^4}{x^2y^2}$ よって、$\sec^2\theta + \csc^2\theta = \sec^2\theta\csc^2\theta$。

8. $(\tan\theta + \cot\theta)\tan\theta = \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right)\frac{y}{x} = \frac{r^2}{x^2}$. 一方、$\sec^2\theta = \frac{r^2}{x^2}$。よって、$(\tan\theta + \cot\theta)\tan\theta = \sec^2\theta$。

レッスン 3 斜三角形の解法

3.1 三角形の面積

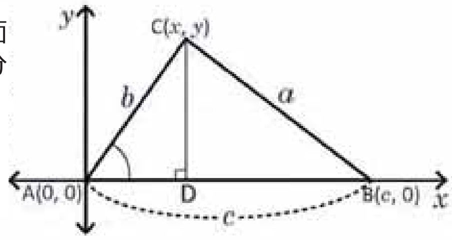
導入問題

三角形 ABC について、辺 AC = b、辺 AB = c の長さ、および角 A の大きさが分かっています。三角比を使って三角形の面積を求める式を立てましょう。

復習しよう。三角形では通常、頂点に記されている文字は角を指します。

解法

A(0, 0)、B(c, 0) ただし $c > 0$ 、C(x, y) ただし $y > 0$ となるように座標平面に三角形 ABC を作図します。三角形の面積は底辺と高さの積の半分に等しいので、点 C の y 座標の値を求めなければなりません。つまり、$y = b\text{sen}A$ です。



ここでは底辺は AB = c なので、

$$\Delta\text{ABCの面積} = \frac{\text{底辺 x 高さ}}{2} = \frac{(\text{AB})(y)}{2} = \frac{c(b\text{sen }A)}{2} = \frac{bc\text{sen }A}{2}.$$

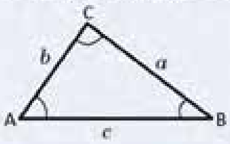
定理

三角形 ABC の面積は (ABC) で表されます。三角形の 2 つの辺の長さとその間の角の大きさが分かっているとき、面積は三角比を使って次のように計算できます。

$$(\text{ABC}) = \frac{ab\text{sen }C}{2} = \frac{bc\text{sen }A}{2} = \frac{ca\text{sen }B}{2}.$$

これから先は、次の表記を使用します。

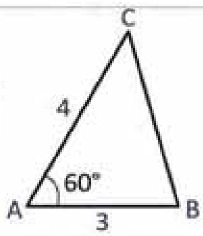
$$(\text{ABC}) = \frac{1}{2}ab\text{sen }C = \frac{1}{2}bc\text{sen }A = \frac{1}{2}ca\text{sen }B.$$



三角形には 3 つの高さがあります。これらは、頂点から始まり、向かい合う辺に垂直に引いた線です。

例1

図に示されている三角形 ABC の面積を求めなさい。



2 つの辺の長さとその間の角の大きさが分かっているので、面積の公式がそのまま使えます。よって、

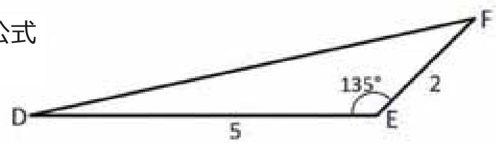
$$(\text{ABC}) = \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{4})(3)\text{sen }60° = (2)(3)\text{sen }60° = (\cancel{2})(3)\left(\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right) = 3\sqrt{3}.$$

例2

図に示されている三角形 DEF の面積を求めなさい。

2 つの辺の長さとその間の角の大きさが分かっているので、面積の公式がそのまま使えます。よって、

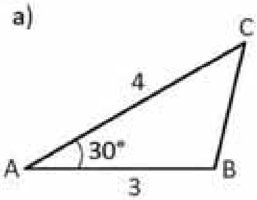
$$(\text{DEF}) = \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2})(5)\text{sen }135° = 5\text{sen }135° = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$



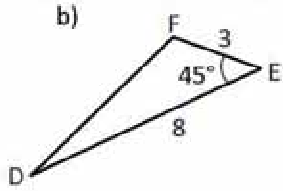
問題

1. 次の三角形の面積を求めなさい。

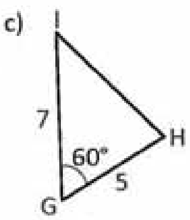
a)



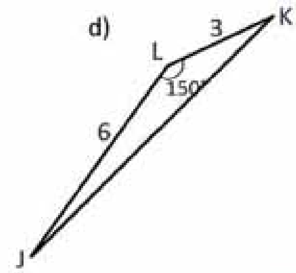
b)



c)



d)



2. 点 C が座標 (x, y) にあり、$x < 0$ 、$y > 0$ のとき、導入問題の三角形 ABC の面積の式を立てなさい。

ユニット 5

達成の目安

3.1　三角比を使って斜三角形の面積を求める。

学習の流れ：

前課では、鋭角ではない三角形の三角比を求め、参照角を使って鋭角に対する比を求めました。また、これらの三角比の値が分かっているときは、角の大きさを求めました。本課では、三角比を使い、正弦定理と余弦定理を利用して斜三角形の問題を解きます。

ねらい：

三角比を使って、三角形の面積を求める式を導き出します。この式は、2 つの辺の長さとその間の角の大きさ分かっているときにのみ使用できます。

問題の解答：

1a) $(ABC) = \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{4}^{2})(3)\text{sen } 30° = (2)(3)\text{sen } 30° = (\cancel{2})(3)\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) = 3.$

1b) $(DEF) = \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{8}^{4})(3)\text{sen } 45° = (4)(3)\text{sen } 45° = (\cancel{4}^{2})(3)\left(\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right) = 6\sqrt{2}.$

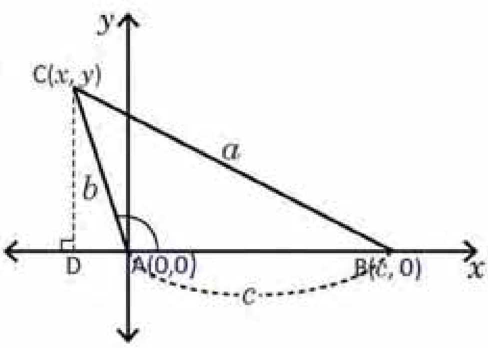
1c) $(GHI) = \frac{1}{2}(5)(7)\text{sen } 60° = \frac{1}{2}(35) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{35\sqrt{3}}{4}.$

解答は根号や分数で表したほうがよいですが、小数でも構いません。

1d) $(JKL) = \frac{1}{\cancel{2}}(3)(\cancel{6}^{3})\text{sen } 150° = 9 \text{ sen } 150° = 9\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2} = 4.5.$

値には単位がないので、解答でも単位はつけません。

2. C(x, y) で $x < 0$、$y > 0$ のとき、点 C は第 2 象限にあるため、角 A は 90° より大きくなります。右図参照。



高さは y です。角 BAC の正弦（三角形 ABC の内角 A）は、角 DAC の正弦、つまり $\frac{CD}{b}$ と等しくなります。

よって、$y = CD = b \text{ sen A}$。

三角形 ABC の底辺は AB = c なので、

$$\Delta ABC \text{ の面積} = \frac{\text{底辺 x 高さ}}{2} = \frac{(AB)(y)}{2} = \frac{c(b\text{sen } A)}{2} = \frac{bc\text{sen } A}{2}.$$

レッスン 3

3.2 正弦定理*

導入問題

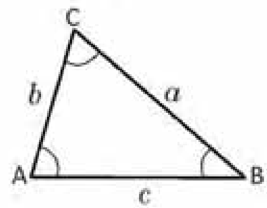
どんな三角形 ABC も、$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$ となることを証明しなさい。

解法

三角形の面積を求めるには、次の 3 つの方法があります。$\frac{1}{2}ab\text{sen } C$、$\frac{1}{2}bc\text{sen } A$、$\frac{1}{2}ca\text{sen } B$ 。

けれども、どのように求めても面積は同じになるため、

$$\frac{1}{2}ab\text{sen } C = \frac{1}{2}bc\text{sen } A = \frac{1}{2}ca\text{sen } B.$$



2 を掛けて、

$$bc\text{sen } A = ac\text{sen } B = ab\text{sen } C,$$

abc で割り、

$$\frac{bc\text{sen } A}{abc} = \frac{ac\text{sen } B}{abc} = \frac{ab\text{sen } C}{abc} \Rightarrow \frac{\cancel{bc}\text{sen } A}{a\cancel{bc}} = \frac{\cancel{ac}\text{sen } B}{\cancel{a}b\cancel{c}} = \frac{\cancel{ab}\text{sen } C}{\cancel{ab}c},$$

$$\Rightarrow \frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c}, \quad \text{-------------------- (1)}$$

逆数にします $\Rightarrow \frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}.$

面積の比は、辺とその向かい合う角の正弦に関連していることに着目しましょう。

定理（正弦定理）

三角形 ABC において、$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$ が成り立ちます 。

上の等式は (1) の等式と同じなので、必要に応じて 2 つのいずれかを使用することができます。

例

三角形 ABC において、$c = 12$、$B = 120°$、$C = 45°$ のときの b の値を求めます。

三角形 ABC を作図して値を書き入れます。正弦定理を使うと、

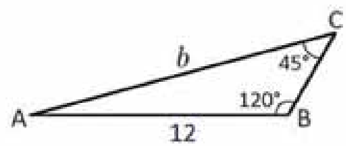
$$\frac{b}{\text{sen } 120°} = \frac{12}{\text{sen } 45°} \Rightarrow b = \frac{12\text{sen } 120°}{\text{sen } 45°} = 12\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \div \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{12\sqrt{3}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{12\sqrt{6}}{2}$$

$$= 6\sqrt{6}.$$



したがって、 $b = 6\sqrt{6}.$

問題

三角形 ABC の次の値を求めなさい。

a) $a = 3$、$A = 30°$、$B = 45°$のとき、b の値。

b) $a = 9$、$A = 60°$、$B = 45°$のとき、b の値。

c) $a = 6$、$A = 30°$、$C = 135°$のとき、c の値。

d) $c = 8$、$B = 55°$、$C = 100°$のとき、b の値。

e) $a = 6$、$A = 60°$、$B = 75°$のとき、c の値。

達成の目安

3.2　正弦定理を使って、2 つの角とその一方の角と向かい合う辺が分かっている三角形の辺の長さを求める。

学習の流れ：

必ずしも直角三角形ではない三角形の角の大きさや辺の長さを求めることから始めます。正弦定理が導入されます。正弦定理を推論した後、2　つの角の大きさとその一方の角と向かい合う辺の長さが分かっている三角形の 1 辺の長さを求める問題に使用します。
正弦定理の推論は、授業 3.1 で取り上げる三角形の面積を求める式を使って行われます。
この授業は、教師のサポートがよりいっそう必要となります。

ねらい：

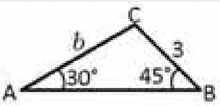
三角形の値のいくつかを知ることにより、三角形の辺の長さと角の大きさを求めるための方法を確立します。個々の角を求めるのに、電卓は必要ありません。

つまずきやすい点：

角と向かい合う辺を特定します。個々の三角比は、このユニットの授業　2.6　の問題　1　の表で確認できます。

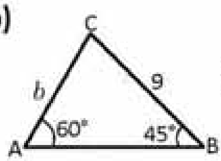
問題の解答：

a） 2 つの角が分かっているので、その一方の角と向かい合う辺と求めなければならない辺が、向かい合います。そこで、正弦定理を使用することができます。



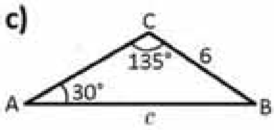
$$\frac{b}{\text{sen } 45°} = \frac{3}{\text{sen } 30°} \Rightarrow b = \frac{3 \text{ sen } 45°}{\text{sen } 30°} = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \div \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{\cancel{2}} \times \cancel{2} = 3\sqrt{2}$$

b)



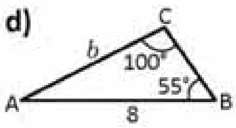
$$\frac{b}{\text{sen } 45°} = \frac{9}{\text{sen } 60°} \Rightarrow b = \frac{9 \text{ sen } 45°}{\text{sen } 60°} = 9\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}} = 9\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \overset{3}{\cancel{9}}\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{{}_{1}\cancel{3}} = 3\sqrt{6}$$

c)



$$\frac{c}{\text{sen } 135°} = \frac{6}{\text{sen } 30°} \Rightarrow c = \frac{6 \text{ sen } 135°}{\text{sen } 30°} = \overset{3}{\cancel{6}}\left(\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}_{1}}\right) \div \frac{1}{2} = 3\sqrt{2} \times 2 = 6\sqrt{2}$$

d)



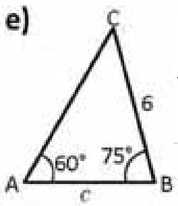
$$\frac{b}{\text{sen } 55°} = \frac{8}{\text{sen } 100°} \Rightarrow b = \frac{8 \text{ sen } 55°}{\text{sen } 100°} \approx 6.7$$

電卓の画面

```
8sin 55÷sin 10
        6.65431028
```

三角形を正確に描く必要はありません。視覚化して理解を促し、正弦定理の使い方を見つけるために、作図して値を記入します。

e)



この場合、辺 c と向かい合う角が分からないので、正弦定理を直接使用することはできません。けれども、2 つの角が分かっているので、次のように計算することができます。

$$C = 180° - 60° - 75° = 45°。$$

ここで正弦定理を使うことができます。よって、

$$\frac{c}{\text{sen } 45°} = \frac{6}{\text{sen } 60°} \Rightarrow c = \frac{6 \text{ sen } 45°}{\text{sen } 60°} = \overset{3}{\cancel{6}}\left(\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}_{1}}\right) \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \overset{2}{\cancel{6}}\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{{}_{1}\cancel{3}} = 2\sqrt{6}.$$

3.3 2 辺の長さと 1 つの角の大きさが分っている三角形の角の計算、その 1

導入問題

次のとき、三角形を作図することはできますか。作図できる場合は、指示された角の大きさを求めなさい。

a) $d = 16$、$e = 8$、$D = 30°$ の ΔDEF。角 E の値を求めなさい。

b) $n = 20$、$p = 8$、$P = 30°$ の ΔMNP。角 N の値を求めなさい。

解法

a) 三角形 DEF を作図して、分かっている値を書き入れます。2 つの辺とその一方の辺と向かい合う角が分かっているので、正弦定理が使用できます。便宜上、授業 3.2 の (1) を使用します。

$$\frac{\text{sen } E}{8} = \frac{\text{sen } 30°}{16} \Rightarrow \text{sen } E = \frac{8\text{sen } 30°}{16} = \frac{\cancel{8}\text{sen } 30°}{\cancel{16}} = \frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{4}.$$

$\text{sen } E = \frac{1}{4}$ のとき、$E \approx 14.5°$ または $E \approx 180° - 14.5° = 165.5°$。

三角形では $D + E + F = 180°$ となります。そこで、求めた E の値が正しいかどうかを確認しなければなりません。

角 E が 2 つの値を持つことができる理由は、このユニットの授業 2.7 で確認できます。

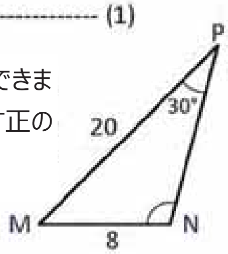
$E \approx 14.5°$ のとき、$D + E \approx 30° + 14.5° = 44.5° < 180°$。したがって、$E \approx 14.5°$。

$E \approx 165.5°$のとき、$D + E \approx 30° + 165.5 = 195.5° > 180°$。したがって、165.5° は E の値になることはできません。

よって、求めた値を使って $E \approx 14.5°$ の三角形を作図することができます。

b) 正弦定理を使うと次のようになります。

$$\frac{8}{\text{sen } 30°} = \frac{20}{\text{sen } N} \Rightarrow \text{sen } N = \frac{20 \text{ sen } 30°}{8} = \frac{\cancel{20} \text{ sen } 30°}{\cancel{8}} = 5\left(\frac{1}{2}\right) \div 2 = \frac{5}{4} \quad \text{-------------------- (1)}$$



$\text{sen } \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ のとき、この三角比は1より大きくしたり、−1 より小さくしたりすることはできません。任意の実数 x および y について、$y^2 \leq x^2 + y^2$ であることが分かります（正の数たす正の数）。したがって、$-\sqrt{x^2 + y^2} \leq y \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ となり、すべてを $\sqrt{x^2 + y^2}$ で割ると、

$$-1 \leq \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 1\text{、すなわち} -1 \leq \text{sen } \theta \leq 1.$$

よって、(1) から、$\text{sen } N = \frac{5}{4} > 1$。正弦は 1 を超えることはできないため、この条件を満たす角はありません。したがって、与えられた値で三角形を作図することはできません。

まとめ

2 つの辺の長さとその一方の辺と向かい合う角の大きさが分かっているとき、正弦定理を使って三角形を作図できるかどうかを判断できます。また、正弦定理を使うことにより、三角形のすべての角を求めることができます。

問題

次のとき、作図できる三角形ABCはいくつありますか。作図できる場合は、指示された角の大きさを求めなさい。

a) $b = 2$、$c = \sqrt{2}$、B = 45° のとき。C を求めなさい。

b) $a = \sqrt{3}$、$b = \sqrt{2}$、$A = 120°$ のとき。B を求めなさい。

c) $b = 3$、$c = \sqrt{2}$、C = 150° のとき。B を求めなさい。

d) $b = 6$、$c = \sqrt{3}$、$C = 135°$ のとき。B を求めなさい。

151

ユニット 5

達成の目安

3.3　正弦定理を用い、分かっている2つの辺とその一方の辺と向かい合う角を使って三角形の角の値を求める。

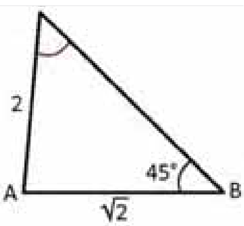
学習の流れ：

この授業では、引き続き正弦定理の使い方を学習します。今回は、2 つの辺とその向かい合う角が分かっている場合の角を求めます。求める角は、分かっている 2 つの辺の一方と向かい合っています。一方で、分かっている値では三角形を作図できない可能性があります。作図できるかどうかを判断する方法は、求める角の正弦の値が 1 以下であるかどうかを確認することです。その場合、求める角が三角形の内角の和の条件を満たしていることを確認する必要があります。

問題の解答：

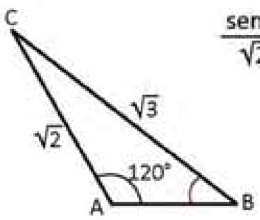
a) 三角形を作図して値を書き込むと、2 つの辺とその一方の辺と向かい合う角が分かっていることが確認できます。また、求める角はすでに分かっている辺と向かい合うため、正弦定理を使うことができます。

$$\frac{\text{sen } C}{\sqrt{2}} = \frac{\text{sen } 45°}{2} \Rightarrow \text{sen } C = \frac{\sqrt{2}\,\text{sen } 45°}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$



よって、正弦は 30° で $\frac{1}{2}$ に等しくなります。したがって、$C = 30°$ または $C = 180° - 30° = 150°$。
$C = 30°$ のとき、$B + C = 75° < 180°$。$C = 150°$ のとき、$B + C = 195° > 180°$。$A + B + C = 180°$ でなくてはならないので、これは不可能です。したがって、$C = 30°$ で三角形を作図できます。

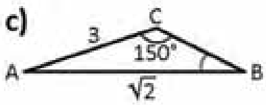
b)



$$\frac{\text{sen } B}{\sqrt{2}} = \frac{\text{sen } 120°}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{sen } B = \frac{\sqrt{2}\,\text{sen } 120°}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}\left(\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2}\right) \times \frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

すなわち、$B = 45°$ または $B = 180° - 45° = 135°$。B を 135° にすることができないのは明らかです ($A + B > 180°$)。したがって、$B = 45°$ のとき、三角形を作図できます。

c)

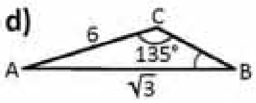


$$\frac{\text{sen } B}{3} = \frac{\text{sen } 150°}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{sen } B = \frac{3\,\text{sen } 150°}{\sqrt{2}} = 3\,\frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} > 1.$$

したがって、三角形を作図することはできません。

分子が分母よりも大きいとき、分数は 1 より大きくなります。
$(3\sqrt{2})^2 > 4^2$ なので、$3\sqrt{2} > 4$。
したがって、$\frac{3\sqrt{2}}{4} > 1$。

d)



$$\frac{\text{sen } B}{6} = \frac{\text{sen } 135°}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{sen } B = \frac{6\,\text{sen } 135°}{\sqrt{3}}$$
$$= \cancel{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right) \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$= \cancel{3}\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{\cancel{3}}$$
$$= \sqrt{6} > 1.$$

したがって、三角形を作図することはできません。

三角形を正確に作図する必要はありません。問題c では三角形を作図することはできませんが、正弦定理を正しく使用できるかどうかを判断するために、作図に取り組みます。

3.4 2 辺の長さと 1 つの角の大きさが分っている三角形の角の計算、その 2

導入問題

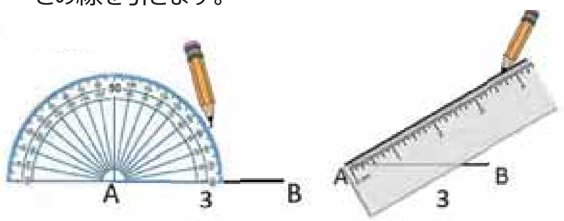
a = 2 cm、c = 3 cm、A = 30°の三角形があります。三角形を作図して、角 C の大きさを求めなさい。

解法

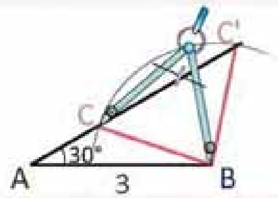
次の手順にしたがって、まず三角形を作図します。

1. 3 cm の線を引きます。A は描き始め、B は描き終わりを示しています。

2. 頂点を A にして 30° の角を決め、そこから適当な長さの線を引きます。



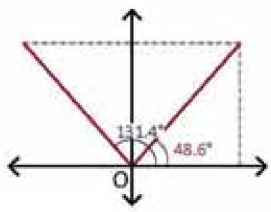
3. コンパスを使って 2 cm の幅を測定し、ステップ 2 で描いた線と交わるまで、B を中心とした弧を描きます。ここでは 2 か所で線が交わるため、与えられた値を使って 2 つの三角形を描くことができます。



角 C の値を計算するには、2 つの辺の長さとその辺と向かい合う角の大きさが分かっているので、正弦定理が使用できることに着目してください。

$$\frac{2}{\text{sen } 30°} = \frac{3}{\text{sen } C} \quad \Rightarrow \quad \text{sen} C = \frac{3\text{sen } 30°}{2} = 3\left(\frac{1}{2}\right) \div 2 = \frac{3}{4}.$$

$\text{sen } C = \frac{3}{4}$ のとき、$C \approx 48.6°$ または $C \approx 180° - 48.6° = 131.4°$。



C の両方の値が有効であることを確認しなければなりません。

- $C \approx 48.6°$ のとき、$A + C \approx 30° + 48.6° = 78.6° < 180°$。
- $C \approx 131.4°$ のとき、$A + C \approx 30° + 131.4° = 161.4° < 180°$。

よって、与えられた値を使って求めた角Cの値は、約 48.6° または 161.4° となります。

まとめ

三角形の 2 つの辺の長さとその一方の辺と向かい合う角の大きさが分かっているとき、場合によってはこれらの値を使って 2 つの三角形を作図できます。このような場合は、**一意に定まらない場合**と呼ばれます。

問題

次のとき、与えられた値でいくつの三角形を作図できますか。作図できる場合は、指示された角の大きさを求めなさい。

a) a = 3、b = 4、A = 30° のとき。B を求めなさい。

b) a = 2、c = 1、C = 20° のとき。A を求めなさい。

c) a = 4、b = 6、B = 60° のとき。A を求めなさい。

達成の目安

3.4　2 つの辺の長さとその一方と向かい合う角の大きさが分かっているときに作図できる三角形の数を求める。

学習の流れ：

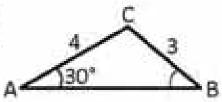
角の正弦が存在するための条件を確立した後、正弦定理を使って角の値を求めます。この場合、複数の三角形を作図することができます。

ねらい：

引き続き、正弦定理を使って三角形の角を求めます。2 つの辺とその向かい合う角を使って 2 つの三角形を作図できる問題にも取り組みます。

問題の解答：

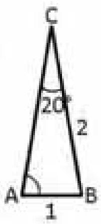
a)



$$\frac{\text{sen } B}{4} = \frac{\text{sen } 30°}{3} \Rightarrow \text{sen } B = \frac{4 \text{ sen } 30°}{3} = \cancel{4}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

よって、$B \approx 41.8°$ あるいは $B \approx 180° - 41.8° = 138.2°$。これら 2 つの値のいずれについても、$A + B$ は 180° 未満になります。したがって、2 つの三角形を作図できます。1 つは $B \approx 41.8°$、もう 1 つは $B \approx 138.2°$。

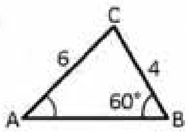
b)



$$\frac{\text{sen } A}{2} = \frac{\text{sen } 20°}{1} \Rightarrow \text{sen } A = 2 \text{ sen } 20° \Rightarrow A \approx 43.2° \text{ または } A \approx 180° - 43.2° = 136.8°.$$

A の 2 つの値について三角形を作図できます（$A \approx 43.2°$ のとき、$A + C \approx 63.2°$、$A \approx 136.8°$ のとき、$A + C \approx 156.8°$)。したがって、2 つの三角形を作図できます。

c)



$$\frac{\text{sen } A}{4} = \frac{\text{sen } 60°}{6} \Rightarrow \text{sen } A = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \text{ sen } 60°}{\underset{3}{\cancel{6}}} = \cancel{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\Rightarrow A = \text{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 35.3° \text{ または } A \approx 180° - 35.3° = 144.7°.$$

$A \approx 144.7°$ のとき、$A + B > 180°$。したがって、$A \approx 35.3°$ についてのみ三角形を作図できます。

誤字の訂正：解答における、角 C の可能な値は 48.6° と 131.4° です

3.5 余弦定理*

導入問題

どんな三角形 ABC も次のようになることを証明しなさい。

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

解法

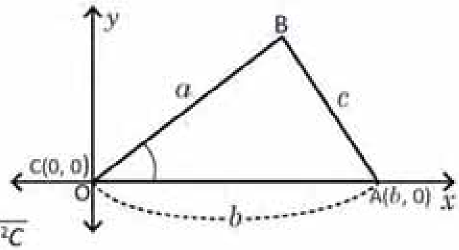
A(b, 0) と C(0, 0) となるように座標平面に三角形 ABC を作図します。

点 B の座標が (p, q) のとき、

$$\cos C = \frac{p}{a} \quad 、 \quad \operatorname{sen} C = \frac{q}{a}.$$

したがって、$p = a\cos C$ 、$q = a\operatorname{sen} C$。

ここでは点 A と点 B の距離は



$$\begin{aligned} d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) &= \sqrt{(b - a\cos C)^2 + (0 - a\operatorname{sen} C)^2} \\ &= \sqrt{b^2 - 2ab\cos C + a^2\cos^2 C + a^2\operatorname{sen}^2 C} \\ &= \sqrt{a^2(\operatorname{sen}^2 C + \cos^2 C) + b^2 - 2ab\cos C} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}. \end{aligned}$$

ただし、A から B までの距離は三角形の辺 AB の長さ、すなわち c。よって、

$$d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = c \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

定理（余弦定理）

三角形 ABC において、$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ が成り立ちます。

同様に、

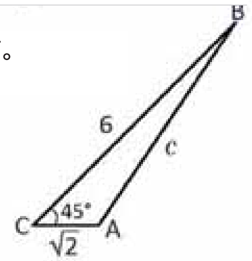
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B.$$

例

$a = 6$, $b = \sqrt{2}$, $C = 45°$ のとき、三角形 ABC の 3 つめの辺の長さを求めなさい。

三角形を作図して値を書き込むと、次のように余弦定理をそのまま使えることが分かります。

$$\begin{aligned} c^2 &= 6^2 + (\sqrt{2})^2 - 2(6)(\sqrt{2})\cos 45° \\ &= 36 + 2 - \cancel{12}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right) \\ &= 38 - 6(2) = 38 - 12 = 26. \end{aligned}$$



$c > 0$ なので、$c = \sqrt{26}$ 。

問題

次のとき、三角形の 3つめの辺の長さを求めなさい。

a) $a = \sqrt{3}$、$b = 5$、$C = 30°$ となる ΔABC。
b) $b = 6$、$c = 4$、$A = 120°$ となる ΔABC。
c) $a = 9$、$c = 9\sqrt{3}$ 、$B = 150°$ となる ΔABC。
d) $a = b = 4$、$C = 60°$ となる ΔABC。
e) $a = \sqrt{2}$ 、$c = 2$、$B = 135°$ となる ΔABC。

ユニット 5

達成の目安

3.5　2 つの辺の長さとその間の角の大きさが分かっているとき、余弦定理を使って三角形の辺の長さを求める。

学習の流れ：

余弦定理を推論した後、2　つの辺の長さとその間の角の大きさが分かっている場合に、三角形の残りの辺の長さを求めます。導入問題を解くのに生徒が非常に苦労している場合、教師はより手厚い指導をしなければなりません。

ねらい：

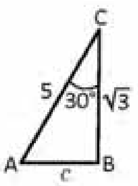
斜三角形の辺の長さと角の大きさを求めるための他の方法を考えます。例題は、余弦定理をそのまま使用する方法を示しています。

つまずきやすい点：

余弦定理の使い方を見つけること。

問題の解答：

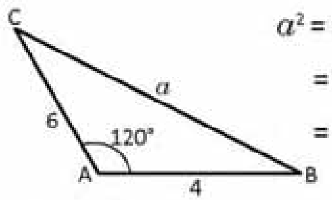
a)



$$c^2 = (\sqrt{3})^2 + 5^2 - 2(\sqrt{3})(5)\cos 30°$$
$$= 3 + 25 - \cancel{2}\sqrt{3}(5)\left(\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right)$$
$$= 28 - 15 = 13$$

$c > 0$ なので、$c = \sqrt{13}$ 。

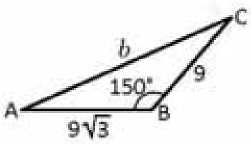
b)



$$a^2 = 6^2 + 4^2 - 2(6)(4)\cos 120°$$
$$= 52 - \cancel{2}(24)\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)$$
$$= 76$$

$a > 0$ なので、$a = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$。

c)



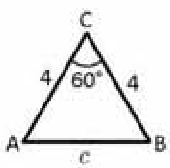
$$b^2 = 9^2 + (9\sqrt{3})^2 - 2(9)(9\sqrt{3})\cos 150°$$
$$= 81 + 81(3) - \cancel{2}(81\sqrt{3})\left(-\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right)$$
$$= 324 + 81(3) = 567$$

$b > 0$ なので、$b = \sqrt{567} = 9\sqrt{7}$。

いくつかの可除性は、数値を素因数分解するときに役立ちます。たとえば、3　で割り切れる場合、次のようになります。数字の合計が　3　の倍数である場合、数値は 3 で割り切れます。
したがって、5 + 6 + 7 = 18 は 3 で割り切れるので、567 は 3 で割り切れます。

567	3
189	3
63	3
21	3
7	7
1	

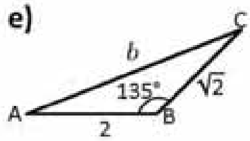
d)



$$c^2 = 4^2 + 4^2 - 2(4)(4)\cos 60°$$
$$= 32 - \cancel{2}(16)\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)$$
$$= 16$$

$c > 0$なので、$c = \sqrt{16} = 4$ 。

e)



$$b^2 = (\sqrt{2})^2 + 2^2 - 2(\sqrt{2})(2)\cos 135°$$
$$= 6 - 2(\sqrt{2})(\cancel{2})\left(-\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right)$$
$$= 6 + 4 = 10$$

$b > 0$ なので、$b = \sqrt{10}$。

概算する必要はありません。また、問題には電卓を使用する必要はありません。

3.6 3 つの辺の長さが分っている三角形の角度の計算

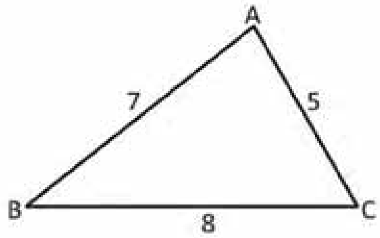
導入問題

$a = 8$、$b = 5$、$c = 7$ の三角形があります。三角形の 3 つの角の大きさを求めなさい。

解法

三角形の角を求めるために、余弦定理を使うことができます。$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ を使います。
よって：

$$7^2 = 8^2 + 5^2 - 2(8)(5)\cos C$$
$$2(8)(5)\cos C = 8^2 + 5^2 - 7^2$$
$$80\cos C = 64 + 25 - 49$$
$$80\cos C = 40$$
$$\cos C = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}.$$



$\cos C = \frac{1}{2}$ のとき、$C = 60°$。

別の角を求めるために、ここで再び余弦定理を使います。

$$5^2 = 7^2 + 8^2 - 2(7)(8)\cos B$$
$$2(7)(8)\cos B = 8^2 + 7^2 - 5^2$$
$$112\cos B = 64 + 49 - 25$$
$$112\cos B = 88$$
$$\cos B = \frac{88}{112} = \frac{11}{14}.$$

$\cos B = \frac{11}{14}$ のとき、$B \approx 38.2°$。

よって、$A = 180° - B - C \approx 180° - 38.2° - 60° = 81.8°$。
したがって、$A \approx 81.8°, B \approx 38.2°$，$C = 60°$。

正弦定理を使って 2 つめの角も求めることができることに着目しましょう。

$$\frac{7}{\text{sen } 60°} = \frac{5}{\text{sen } B} \Rightarrow \text{sen } B = \frac{5\text{sen } 60°}{7} = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \div 7 = \frac{5\sqrt{3}}{14}.$$

$\text{sen } B = \frac{5\sqrt{3}}{14}$ のとき、$B \approx 38.2°$ あるいは $B \approx 180° - 38.2° = 141.8°$。ただし、$B \approx 141.8°$ のときは $B + C \approx 141.8° + 60° = 201.8°$ となり、三角形を作図することはできません。したがって、$B \approx 38.2°$。余弦定理を使ったほうがいいのは、なぜでしょう？

定義

三角形の 3 つの辺の長さ分かっているとき、その 3 つの角の大きさは余弦定理を使って求めることができます。

問題

1. 次の三角形の 3 つの角の大きさを、可能であれば求めなさい。

a) ΔABC では、$a = \sqrt{3}, b = 1$，$c = 2$
b) ΔABC では、$a = 1, b = \sqrt{2}$，$c = \sqrt{5}$
c) ΔABC では、$a = 5, b = 3$，$c = 7$
d) ΔABC では、$a = 6, b = 10$，$c = 11$
e) ΔABC では、$a = \sqrt{3}, b = 12$，$c = 9$

2. ΔABC では、cos B を辺 a、b、c で表します。

達成の目安

3.6　3 つの辺の長さが分かっている三角形の角の大きさを求める。

学習の流れ：

引き続き、余弦定理の使い方を学習します。今回は、3 つの辺の長さが分かっているときの三角形の角を求めます。

問題の解答：

三角形の 3 つの辺の長さが分かっているため、これらの問題を解決するために、余弦定理を使って 3 つの角のいずれかを選んで求めることができます。

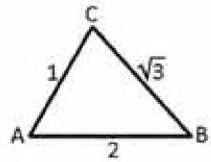
1a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ を考えます。

$$(\sqrt{3})^2 = 1^2 + 2^2 - 2(1)(2)\cos A \Rightarrow 4\cos A = 5 - 3 = 2 \Rightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 60°.$$

別の角を求めるために、$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ を考えます。

$$2^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 - 2(\sqrt{3})(1)\cos C \Rightarrow 2\sqrt{3}\cos C = 4 - 4 = 0 \Rightarrow \cos C = 0 \Rightarrow C = 90°.$$

よって、$A = 60°$、$C = 90°$ なので、$B = 180° - 60° - 90° = 30°$。



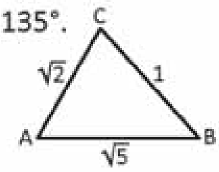
1b) 角 C の大きさを求めます。

$$(\sqrt{5})^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 - 2(1)(\sqrt{2})\cos C \Rightarrow 2\sqrt{2}\cos C = 3 - 5 = -2 \Rightarrow \cos C = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow C = 135°.$$

角 B の大きさを求めます。

$$(\sqrt{2})^2 = (\sqrt{5})^2 + 1^2 - 2(\sqrt{5})(1)\cos B \Rightarrow 2\sqrt{5}\cos B = 4 \Rightarrow \cos B = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow B \approx 26.6°.$$

よって、$A \approx 180° - 26.6° - 135° = 18.4°$。

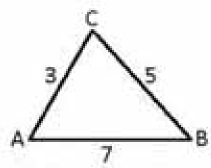


1c) 角 A の大きさを求めます。$5^2 = 3^2 + 7^2 - 2(3)(7)\cos A \Rightarrow \cos A = \frac{33}{42} = \frac{11}{14} \Rightarrow A \approx 38.2°.$

角 C の大きさを求めます。$7^2 = 5^2 + 3^2 - 2(5)(3)\cos C \Rightarrow \cos C = -\frac{15}{30} = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = 120°.$

よって、$B \approx 180° - 38.2° - 120° = 21.8°$。

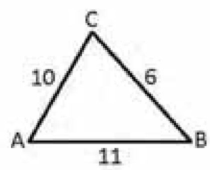
電卓で角度を計算するときは、分数を簡略化する必要はありません。



1d) 角 B の大きさを求めます。$10^2 = 6^2 + 11^2 - 2(6)(11)\cos B \Rightarrow \cos B = \frac{19}{44} \Rightarrow B \approx 64.4°.$

角 C の大きさを求めます。$11^2 = 6^2 + 10^2 - 2(6)(10)\cos C \Rightarrow \cos C = \frac{1}{8} \Rightarrow C \approx 82.8°.$

よって、$A \approx 180° - 64.4° - 82.8° = 32.8°$。



1e) 角 A の大きさを求めます。$(\sqrt{3})^2 = 12^2 + 9^2 - 2(12)(9)\cos A \Rightarrow \cos C = \frac{37}{36} > 1.$

したがって、三角形を作図することはできません。

2. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \Rightarrow 2ac\cos B = a^2 + c^2 - b^2 \Rightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

3.7 復習問題

1. 与えられた値を使って、三角形 ABC の面積を求めなさい。

a) $a = 7, c = 4$， $B = 45°$

b) $b = 10, c = 8$， $A = 30°$

c) $a = 1, b = 2$， $C = 45°$

d) $a = 4, b = 5$， $C = 60°$

e) $a = 6, c = \sqrt{3}$， $B = 120°$

2. 次のとき、三角形 ABC において指定された値を求め、答えが有効かどうかを考えなさい。

a) $b = 24$、$B = 38°$、$C = 120°$ のとき。c を求めなさい。

b) $c = 10$、$A = 135°$、$C = 30°$ のとき。a を求めなさい。

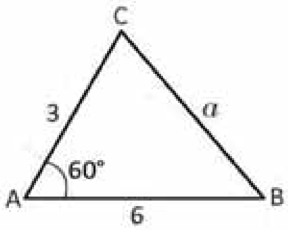
c) $a = 12$、$b = 16$、$A = 45°$ のとき。B を求めなさい。

d) $a = 3$、$b = 2$、$B = 30°$ のとき。A を求めなさい。

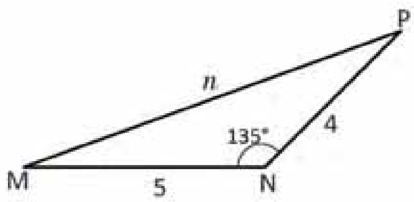
e) $b = 2$、$c = \sqrt{3}$、$C = 120°$ のとき。B を求めなさい。

3. 次のとき、3 つめの辺の長さを求めなさい。

a)



b)

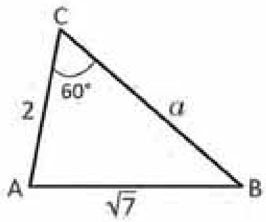


4. 次のとき、三角形 ABC の 3 つの角の大きさを求めなさい。

a) $a = 12$、$b = 7$ 、$c = 6$

b) $a = 2$、$b = 3$ 、$c = 4$

5. 図に示されている三角形ABCの3つめの辺の長さを求めなさい。



余弦定理を使い、そこから生じる二次方程式を解きます。

6. 正弦定理と余弦定理を使って、次の三角形を作図しなさい。

a) $b = 21, A = 60°, B = 12°$

b) $a = 15, c = 7, B = 65°$

c) $a = 3, b = 2, c = 2$

d) $c = 3, B = 110°, C = 45°$

三角形を作図するには、その辺と角のすべての値を求めなければなりません。

ユニット 5

達成の目安：

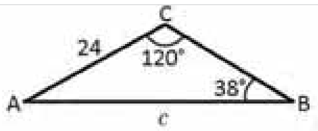
3.7　斜三角形に関する問題を解く。

問題の解答：

1a) $(ABC) = \frac{1}{\cancel{2}}(\overset{2}{\cancel{4}})(7)\text{sen } 45^\circ$
$= (\overset{1}{\cancel{2}})(7)\left(\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right) = 7\sqrt{2}$

1b) $(ABC) = 20$　**1c)** $(ABC) = \frac{\sqrt{2}}{2}$　**1d)** $(ABC) = 5\sqrt{3}$　**1e)** $(ABC) = \frac{9}{2}$

2a) 正弦定理を使います。



$$\frac{c}{\text{sen } 120^\circ} = \frac{24}{\text{sen } 38^\circ}$$
$$\Rightarrow c = \frac{24 \text{ sen } 120^\circ}{\text{sen } 38^\circ} \approx 33.8.$$

2b) $a = 10\sqrt{2}$　**2c)** $B \approx 70.5^\circ$　**2d)** $A \approx 48.6^\circ$

2e) 正弦定理を使うと、sen $B = 1$、すなわち $B = 90°$ となります。しかし、$B = 90°$、$B + C = 210° > 180°$。したがって、三角形を作図することはできません。

3a) $a^2 = 3^2 + 6^2 - 2(3)(6)\cos 60^\circ = 9 + 36 - \cancel{2}(18)\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) = 45 - 18 = 27 \Rightarrow a = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

3b) $n^2 = 5^2 + 4^2 - 2(5)(4)\cos 135^\circ = 41 + 20\sqrt{2} \Rightarrow n = \sqrt{41 + 20\sqrt{2}}$

4a) $12^2 = 7^2 + 6^2 - 2(7)(6)\cos A \Rightarrow \cos A = -\frac{59}{84} \Rightarrow A \approx 134.6^\circ.$

$7^2 = 12^2 + 6^2 - 2(12)(6)\cos B \Rightarrow \cos B = \frac{131}{144} \Rightarrow B \approx 24.5^\circ.$

よって、$C \approx 180° - 134.6° - 24.5° = 20.9°$。

4b) $2^2 = 3^2 + 4^2 - 2(3)(4)\cos A \Rightarrow \cos A = \frac{7}{8} \Rightarrow A \approx 29^\circ.$

$4^2 = 2^2 + 3^2 - 2(2)(3)\cos C \Rightarrow \cos C = -\frac{1}{4} \Rightarrow C \approx 104.5^\circ.$

よって、$B \approx 180° - 29° - 104.5° = 46.5°$。

5. $(\sqrt{7})^2 = a^2 + 2^2 - 2a(2)\cos 60^\circ \Rightarrow 7 = a^2 + 4 - \cancel{2}(2a)\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow (a-3)(a+1) = 0$

すなわち、$a = 3$ または $a = -1$。ただし、a は長さを表すため負の値にすることはできません。よって、$a = 3$。

6a) $C = 180° - 60° - 12° = 108°$。正弦定理を使うと $a \approx 87.5$。
もう一度正弦定理を使うと $c \approx 96.1$。

6b) 2 つの辺の長さとその間の角の大きさが分かっています。余弦定理を使って、b の値を求めることができます。

$$b^2 = 15^2 + 7^2 - 2(15)(7)\cos 65^\circ = 274 - 210 \cos 65^\circ \Rightarrow b \approx 13.6.$$

余弦定理を使って角 C を求めます。

$$7^2 \approx 15^2 + 13.6^2 - 2(15)(13.6)\cos C \Rightarrow \cos C = \frac{15^2 + 13.6^2 - 7^2}{2(15)(13.6)} \Rightarrow C \approx 27.8^\circ.$$

よって、$A \approx 180° - 65° - 27.8° = 87.2°$。したがって、$A \approx 87.2°$、$C \approx 27.8°$、$b \approx 13.6°$。

6c) 余弦定理を使うと $A \approx 97.2°$。この三角形は二等辺三角形です。
よって、$C = B$ となり、したがって、

$$A + B + C = 180^\circ \Rightarrow A + B + B = 180^\circ \Rightarrow 2B = 180^\circ - A \Rightarrow B = \frac{180^\circ - A}{2} \approx 41.4^\circ.$$

6a) $A = 180° - 110° - 45° = 25°$。よって、正弦定理を使っての b 値を求めることができ、$b \approx 4$。
もう一度正弦定理を使うと $a \approx 1.8$。

レッスン 3

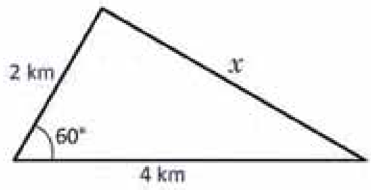
3.8 正弦定理、余弦定理の公式の応用

導入問題

アナは毎朝、三角形のブロックの周りを走りに行きます。最初に 4 km、次に 2 km 走り、おしまいに最後の通りを走って家に帰ります。ブロックを 1 周すると、アナは毎朝合計で何 km 走りますか？

解法

アナが毎朝合計で何 km 走っているかを知るには、ブロックの 3 つめの辺の距離を求めなければなりません。ブロックは三角形で、2 つの辺と求めなければならない辺と向かい合う角がわかっているので、正弦定理使って計算することができます。



$$x^2 = 4^2 + 2^2 - 2(4)(2)\cos 60° = 16 + 4 - 2(4)(\cancel{2})\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) = 20 - 8 = 12$$

すなわち、$x^2 = 12 \Longrightarrow x = \sqrt{12}$ または $x = -\sqrt{12}$。

ただし、x は長さを表すため、負の値にすることはできません。よって、$x \approx 3.5$ km。したがって、アナは毎朝およそ 4 km + 2 km + 3.5 km = 9.5 km を走っています。

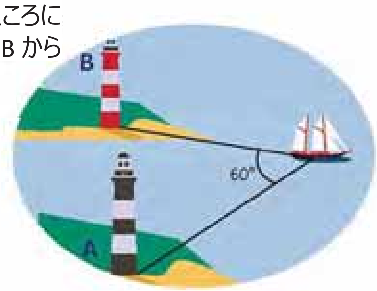
まとめ

正弦定理と余弦定理は、三角形に関係する身の回りの問題を解くために使用できます。

正弦定理を使ったほうがよい場合もあれば、余弦定理を使ったほうがよい場合もあるため、作図して、分かっている値と求める値を見つけ、2 つの定理のどちらを使うかを判断するようにしましょう。

問題

1. 船が灯台 A を出発し、5 km 航行します。この時点で、灯台 A から 7 km のところに灯台 B があります。両方の灯台への視線間の角度が 60° のとき、船は灯台 B からどのくらい離れていますか。



2. 三角形の庭つきの家があります。家主は庭の上に芝生をしこうと考えています。そこで、芝生を購入するために庭の面積を計算しなければなりません。庭の 2 つの辺は 40 m と 42 m で、42 m の辺と向かい合う角は 120° です。およそ何 m^2 の芝生を購入すればよいですか。

3. 鍛冶屋は、両端に 2 つの二等辺三角形の支えがついたブランコを作りたいと考えています。角度が 30° で、それと向かい合う辺が 1 m の支えを作りたい場合、他の 2 つの辺の長さはどのくらいにしなければなりませんか。

4. 平行四辺形の面積は、2 つの隣接する辺とその間の角の正弦の積であることを証明しなさい。

達成の目安

3.8　正弦定理と余弦定理を使って、斜三角形に関連する問題を解く。

学習の流れ：

正弦定理と余弦定理を推論し、使ってみたのちに、これらの定理を使う身の回りの問題を解きます。

ねらい：

身の回りの問題を解くときに、正弦定理と余弦定理を統合的に使用します。

つまずきやすい点：

応用問題を解く際に生徒がつまずきやすいのは、どの定理が使えるか、または使うべきかを判断することです。また、何を計算しているのか、何を計算する必要があるのか、そしてそれを問題にどのように関連付けるのかを判断することも、難しいと感じるかもしれません。

問題の解答：

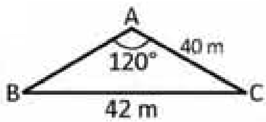
1. 船と灯台 B の間の距離を x とします。余弦定理を使って x をの値を求めます。

$$7^2 = 5^2 + x^2 - 2(5x)\cos 60° \Rightarrow 25 + x^2 - \cancel{2}(5x)\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) - 49 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x - 24 = 0$$

$$\Rightarrow (x-8)(x+3) = 0 \Rightarrow x = 8 \text{ o } x = -3.$$

x は距離を表すため、負の値にすることはできません。したがって、$x = 8$。すなわち、船からふたつめの灯台までの距離、8 km となります。

2. 分かっている値が条件を満たしていないため、面積の公式を直接使うことはできません。2 つの方法があります。辺 c の長さを求めるか、角 C の大きさを求めます。



方法 1： $42^2 = c^2 + 40^2 - 2c(40)\cos 120°$

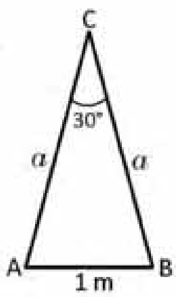
$$\Rightarrow c^2 + 40c - 164 = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{2}(-40 \pm \sqrt{40^2 + 4(164)}) = -20 \pm 2\sqrt{141}.$$

よって、$c = -20 + 2\sqrt{141}$。したがって、庭の面積は $(ABC) = \frac{1}{2}(40)(-20 + 2\sqrt{141})\text{sen } 120° \approx 64.9 \text{ m}^2$ 。

方法 2： $\frac{\text{sen } B}{40} = \frac{\text{sen } 120°}{42} \Rightarrow \text{sen } B = \frac{40 \text{ sen } 120°}{42} = \frac{10\sqrt{3}}{21} \Rightarrow B \approx 55.6°.$

よって、$C \approx 180° - 120° - 55.6° = 4.4°$。したがって、庭の面積は $(ABC) = \frac{1}{2}(40)(42)\text{sen } 4.4° \approx 64.4 \text{ m}^2$。

3. ブランコの端の支えを三角形で表すと、右の図のようになります。余弦定理を使って a の値を求めます。

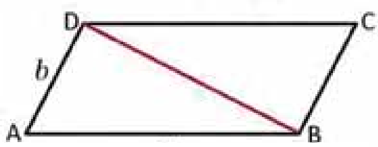


$$1^2 = a^2 + a^2 - 2(a)(a)\cos 30° \Rightarrow 1 = 2a^2 - \cancel{2}(a^2)\left(\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right) \Rightarrow 2a^2 - \sqrt{3}a^2 = 1 \Rightarrow a^2(2-\sqrt{3}) = 1.$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3} \Rightarrow a = \sqrt{2+\sqrt{3}} \approx 1.9.$$

したがって、両端の支えの辺は約 1.9 m。

4. 辺が a と b となる平行四辺形 ABCD を作図し、対角線 BD を引きます。



三角形の ABD と CDB は、1 辺2 角の合同条件によって一致しています。

三角形 ABD の面積は $(ABD) = \frac{1}{2}ab \text{ sen } A$。

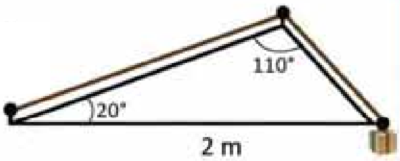
$\Delta ABD \cong \Delta CDB$ なので、ふたつの三角形の面積は等しくなります。よって、

$(ABCD) = (ABD) + (CDB) = 2(ABD) = ab\text{sen } A$。

したがって、平行四辺形の面積は、隣接する辺とその間の角度の正弦の積に等しくなります。

3.9 復習問題

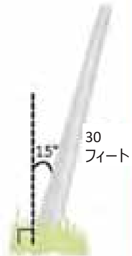
1. 図のようにロープで箱を支えています。ロープの長さを求めなさい。



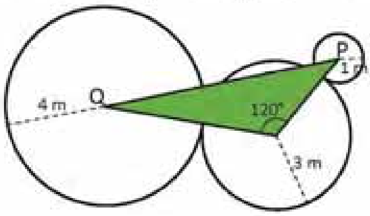
2. 船の船長は、航海中に 2 つの灯台を見ています。船は一方の灯台から 15 マイル、もう一方の灯台から 20 マイルのところにいます。船長が灯台までの 2 つの視線間の角度が 120° であると判断した場合、灯台間の距離を求めなさい。

3. 農場主は厩舎を持っています。そこにもうひとつ囲いを作らなければなりません。彼は手持ちの 38 m のロープを図のように厩舎に結びつけようと考えています。ロープの結び目と結び目の間が 4 メートル離れているとき、農場主の持っているロープで足りますか。

4. 30 フィートの長さの柱が、元の位置から約 15° 傾いています。
市長はワイヤーで柱を支えるつもりですが、必要なワイヤーの量を計算しなければなりません。柱の基部から 100 フィートのところにワイヤーを結ぶとき、ワイヤーはどのくらい必要か求めなさい。



5. 図のような三角形の庭飾りを作ります。三角形のそれぞれの頂点が、それが置かれている円の中心であるとき、PQ の長さを求めなさい。



6. 探検隊は、サバイバル旅行のために航海を学んでいます。彼らは地図上に訪問する 3 地点を記しました。各地点でどれだけ方向を変えなければならないかを把握するために、角度を知る必要があります。3 地点を訪れるために、彼らが向きを変えなければならない角度を求めなさい。

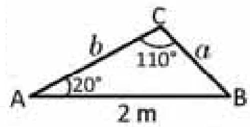
ユニット 5

達成の目安

3.9　正弦定理と余弦定理を使って、身の回りの問題を解く。

問題の解答：

1. 三角形を作図して値を書き込むと、右の図のようになります。角 B は $180° - 20° - 110° = 50°$。その後、正弦定理を使って a の値を求めます。



$$\frac{a}{\text{sen } 20°} = \frac{2}{\text{sen } 110°} \Rightarrow a = \frac{2 \text{ sen } 20°}{\text{sen } 110°} \approx 0.7.$$

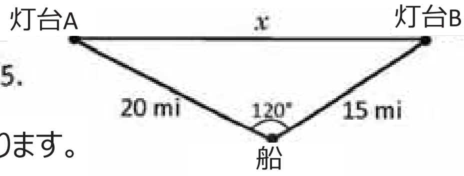
正弦定理をもう一度使い、b の値を求めます。

$$\frac{b}{\text{sen } 50°} = \frac{2}{\text{sen } 110°} \Rightarrow b = \frac{2 \text{ sen } 50°}{\text{sen } 110°} \approx 1.6.$$

辺の値を足して、3 つめの辺の近似値を求めることもできます。その場合、2.4　m となります。

その場合、ロープの長さは約 1.6m + 0.7m = 2.3m。

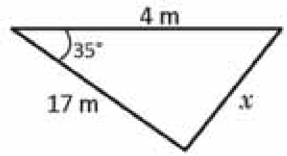
2. 作図して値を書き込むと、灯台間の距離を求めるために余弦定理が使えることがわかります。



$$x^2 = 20^2 + 15^2 - 2(20)(15)\cos 120° = 625 - \cancel{2}(300)\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right) = 625 + 300 = 925.$$

よって、$x = \sqrt{925} \approx 30.4$。すなわち、灯台間の距離は約 30.4 フィートとなります。

3. 形成された形が三角形であると考えると、次のようになります。

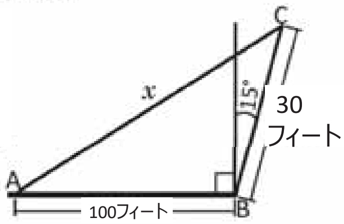


ロープの長さが足りるかどうかを知るには、x の値を計算してから $17 + x$ が 38 以下であるかどうかを確認する必要があります。余弦定理を使います。

$$x^2 = 4^2 + 17^2 - 2(4)(17)\cos 35° = 305 - 136 \cos 35° \approx 193.6.$$

よって、$x \approx 13.9$。17 + 13.9 = 30.9。したがって、農場主のロープは足ります。

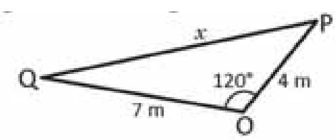
4. 角 B は $90° + 15° = 105°$。余弦定理より：



$$x^2 = 100^2 + 30^2 - 2(100)(30)\cos 105° \approx 12452.9.$$

よって、$x \approx 111.6$。すなわち、柱を結ぶのに約 111.6 フィートのワイヤーが必要になります。

5. 円は接しています。O を 3 つめの頂点とします。三角形の各頂点はそれぞれの円の中心にあるため、OQ = 4 + 3 = 7 および OP = 3 + 1 = 4 であることがわかります。三角形は次のようになります。

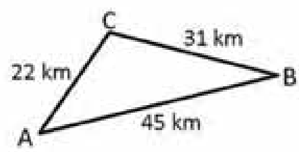


$\overline{PQ}$ の長さを求めたいので、余弦定理を使います。

$$x^2 = 7^2 + 4^2 - 2(7)(4)\cos 120° = 93.$$

よって、PQ の長さは約 9.6 m。

6. 三角形の 3 つの辺が分かっているので、余弦定理を使います。



$$31^2 = 22^2 + 45^2 - 2(22)(45)\cos A \Rightarrow \cos A = \frac{43}{55} \Rightarrow A \approx 38.6°.$$

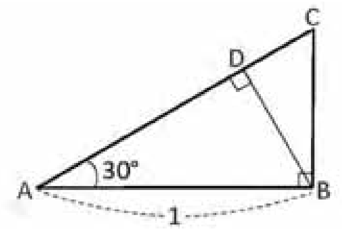
$$22^2 = 31^2 + 45^2 - 2(31)(45)\cos B \Rightarrow \cos B = \frac{1251}{1395} = \frac{139}{155} \Rightarrow B \approx 26.3°.$$

よって、$C \approx 180° - 38.6° - 26.3° = 115.1°$。

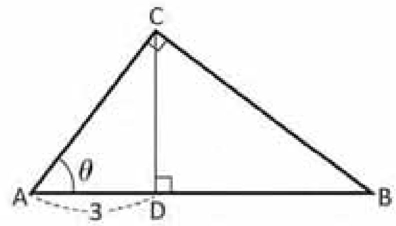
示された地点を訪れる順序にもよりますが、方向転換しなければならない角度は 38.6°、26.3°、115.1° です。

3.10 ユニットの問題

1. 次の図の辺 AD、DC、AC、BD、および BC の長さを求めなさい。必要に応じて有理化しなさい。



2. 次の図の辺 BC、AC、DB、および AB の長さを角 θ を使って表しなさい。

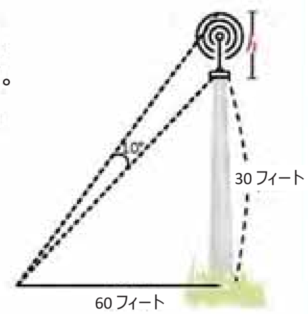


3. 半径 7 の円の中に正五角形があります。五角形の外周を求めなさい。

4. 30 フィートの長さのはしごが 70° の傾斜で壁にかかっています。はしごの足が壁からどれだけ離れているかを求めなさい。

5. 50 フィートの灯台のてっぺんから、11° の俯角にビンが見えます。ビンは灯台からどれくらい離れているか求めなさい。

6. 高さ 30 フィートの柱の上に垂直アンテナが取り付けられています。図のように柱の基部から 60 フィートの位置から見ると、アンテナは 10° の角度のところにあります。アンテナの長さ h を求めなさい。



7. 次のような直角三角形のとき、それぞれの値を求めなさい。

a) $\cos\theta = \frac{1}{3}$ のとき、sen θ を求めなさい。
a) $\text{sen}\ \theta = \frac{1}{4}$ のとき、$cos\,\theta$ を求めなさい。
c) $\tan\theta = 2$ のとき、cos θ と sen θ を求めなさい。
d) sic $\theta = 7$ のとき、cos θ と sen θ を求めなさい。

8. 次のとき、PQ 間の距離を求めなさい。

a) P(−1, 3)　Q(2, 5)　　b) P(2, 3)　Q(2, 6)

9. 頂点 A(−3, −1)、B(0, 3)、C(3, 4)、および D(4, 1) を持つ四辺形 ABCD の周囲を求めなさい。

達成の目安

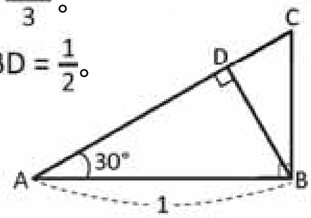
3.10　斜三角形に関する問題を解く。

問題の解答：

1. ΔABC について $\tan 30° = \frac{BC}{1} \Rightarrow BC = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$、$\cos 30° = \frac{1}{AC} \Rightarrow AC = \frac{1}{\cos 30°} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$。

すると、ΔABD については、$\cos 30° = \frac{AD}{1} \Rightarrow AD = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$、$\text{sen } 30° = \frac{BD}{1} \Rightarrow BD = \frac{1}{2}$。

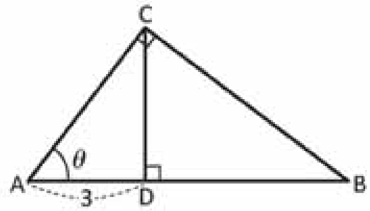
DC を求めるには：$DC = AC - AD = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$。



2. ΔADC について：$\cos\theta = \frac{3}{AC} \Rightarrow AC = \frac{3}{\cos\theta}$。

よって、ΔABC については：$\tan\theta = \frac{BC}{AC} \Rightarrow BC = AC\tan\theta = \frac{3\tan\theta}{\cos\theta}$、

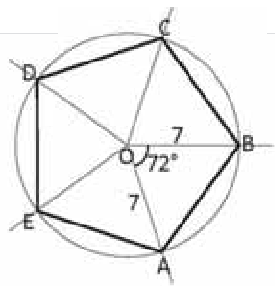
$\cos\theta = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB = \frac{AC}{\cos\theta} = \frac{3}{\cos^2\theta}$。



したがって、$DB = AB - AD = \frac{3}{\cos^2\theta} - 3 = \frac{3 - 3\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{3(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{3\,\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = 3\tan^2\theta.$

3. 正五角形は、円を等しく 5 つに分割することによって作ることができます。したがって、角 AOB、BOC、COD、DOE、EOA は 72° (360°÷5) に等しくなります。

円の内側に描かれた正五角形は、中心と五角形の頂点を結ぶ線が半径になります。よって、線 OA、OB、OC、OD、および OE のそれぞれの長さは 7 となります。



したがって、三角形 AOB、BOC、COD、DOE、および EOA は二等辺三角形です。ΔAOB について考えます。

$$(AB)^2 = 7^2 + 7^2 - 2(7)(7)\cos 72° = 2(7^2) - 2(7^2)\cos 72° = 2(7^2)(1 - \cos 72°)$$

よって、$AB = \sqrt{2(7^2)(1-\cos 72°)} = 7\sqrt{2(1-\cos 72°)}$。したがって、五角形の外周は

$$5AB = 35\sqrt{2(1-\cos 72°)}.$$

4. はしごの足から壁までの距離を d とします。

$\cos 70° = \frac{d}{30} \Rightarrow d = 30\cos 70° \approx 10.3.$

したがって、はしごの足から壁までは約 10.3 フィート。

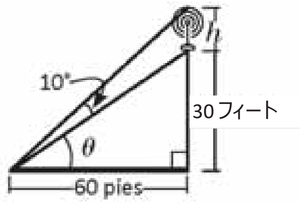
5. ビンと灯台の間の距離を d とします。

$\tan 11° = \frac{50}{d} \Rightarrow d = \frac{50}{\tan 11°} \approx 257.2.$

したがって、ビンは灯台から約 257.2 フィートの距離にあります。

6. 作図して値を書き入れると、次のようになります。よって、

$$\tan\theta = \frac{30}{60} \Rightarrow \theta \approx 26.6°.$$



一方、

$$\begin{aligned}\tan(\theta + 10°) &= \frac{30+h}{60}\\ \Rightarrow\ 30 + h &= 60\tan(\theta + 10°)\\ \Rightarrow\ h &= 60\tan(\theta+10°) - 30\\ &\approx 60\tan(26.6° + 10°) - 30\\ &= 60\tan 36.6° - 30\\ &\approx 14.6.\end{aligned}$$

したがって、アンテナの高さは約 14.6 フィート。

7a) $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

7b) $\cos\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$

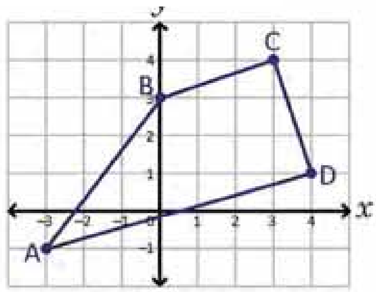
7c) $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

7d) $\cos\theta = \frac{1}{7}$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{4\sqrt{3}}{7}$

8a) $d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \sqrt{13}$.

8b) $d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = 3$

9. 座標平面上で四角形をグラフ化すると便利です。



周囲を求めるために、四角形の辺の長さを計算します。2 点間の距離の式を使います。

- $d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \sqrt{(0-(-3))^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
- $d(\mathrm{B}, \mathrm{C}) = \sqrt{10}$
- $d(\mathrm{C}, \mathrm{D}) = \sqrt{10}$
- $d(\mathrm{A}, \mathrm{D}) = \sqrt{53}$

よって、ABCD の周囲は $5 + \sqrt{10} + \sqrt{10} + \sqrt{53} = 5 + 2\sqrt{10} + \sqrt{53}$.

3.11 ユニットの問題

10. x 軸、y 軸、原点を基準としたとき、各点の対称点を求めなさい。それぞれの点をグラフ上に記しなさい。

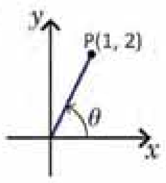
a) P(0, 3)　　b) $P\left(\frac{1}{2}, -1\right)$　　c) P(−2, 0)　　d) P(−1, −1)

11. 次の角を描き、どの象限にあるかを特定しなさい。

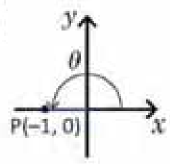
a) 800°　　b) −300°　　c) 1 050°　　d) −735°

12. θ のサイン、コサイン、タンジェントを求めなさい。

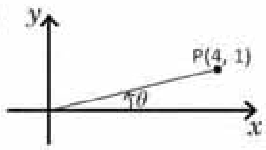
a)



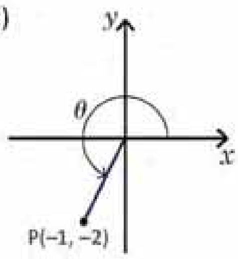
b)



c)



d)



13. 以下について、三角比の値を sen θ、cos θ、tan θ を使って表しなさい。ただし $0° \leq \theta < 90°$ とします。

a) 150°　　b) 370°　　c) 450°　　d) 535°

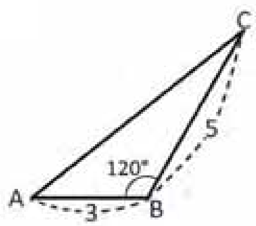
14. 次の値を求めなさい。

a) $\cos\theta = -\frac{1}{3}$、$90° < \theta < 180°$ のとき、sen θ と tan θ の値。

b) $\text{sen}\,\theta = \frac{3}{4}$ で θ が第 2 象限にあるとき、tan θ の値。

c) sen $\theta = 2$ で θ が第 1 象限にあるとき、cos θ と sen θ の値。

15. 三角形 ABC の面積を求めなさい。



16. 次の値を求めなさい。

a) $a = 3$、$A = 60°$、$C = 45°$ のとき、c の値。

b) $a = 1$、$b = \sqrt{3}$、$A = 30°$ のとき、B の値。

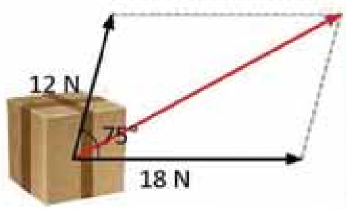
c) $b = 2$、$c = 2\sqrt{3}$、$A = 150°$ のとき、a の値。

d) $a = b = 2$、$c = \sqrt{3}$ のとき、3 つの角の大きさ。

e) $a = 4$、$b = 1$、$B = 60°$ のとき、A の値。

物体に作用する力の単位はニュートンで、**N** で表されます。

17. 異なる 2 方向の力が物体に作用するとき、それにより生じる力の大きさは、加えられた力によって作られる平行四辺形の対角線になります。12 ニュートンと 18 ニュートンの 2 つの力が 75° の角度で物体に作用するとき、合力の値は何ですか？



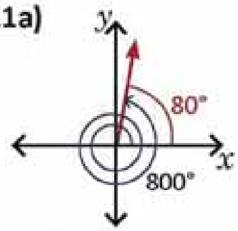
達成の目安

3.11　斜三角形に関する問題を解く。

問題の解答：

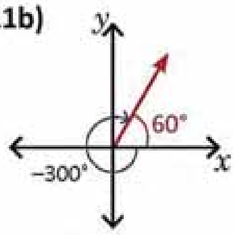
	x 軸基準	y 軸基準	原点基準	恒等関数基準
10a)	$P_1(0, -3)$	$P_2(0, 3)$	$P_3(0, -3)$	$P_4(3, 0)$
10b)	$P_1\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	$P_2\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$	$P_3\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$	$P_4\left(-1, \frac{1}{2}\right)$
10c)	$P_1(-2, 0)$	$P_2(2, 0)$	$P_3(2, 0)$	$P_4(0, -2)$
10d)	$P_1(-1, 1)$	$P_2(1, -1)$	$P_3(1, 1)$	$P_4(-1, -1)$

11a)

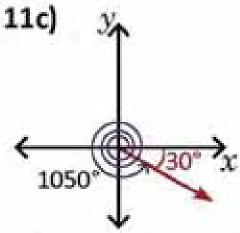


800° = 360°(2) + 80°

11b)

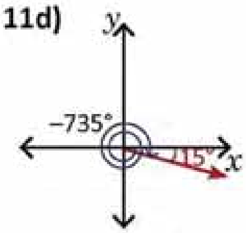


11c)



1050° = 360°(2) + 330°

11d)



−735° = −360°(2) − 15°

12a) $r = \sqrt{5}$、したがって、sen $\theta = \frac{y}{r} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$、cos $\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{5}}{5}$、tan $\theta = \frac{y}{x} = 2$。

12b) $r = 1$、したがって、sen $\theta = 0$、cos $\theta = -1$、tan $\theta = 0$。

12c) $r = \sqrt{17}$、したがって、sen $\theta = \frac{\sqrt{17}}{17}$、cos $\theta = \frac{4\sqrt{17}}{17}$、tan $\theta = \frac{1}{4}$。

12d) $r = \sqrt{5}$、したがって、sen $\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$、cos $\theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$、tan $\theta = 2$。

13a) 150° = 180° − 30°。よって、sen 150° = sen 30°、cos 150° = − cos 30°、tan 150° = − tan 30°。

13b) 370° = 360° + 10°。よって、sen 370° = sen 10°、cos 370° = cos 10°、tan 370° = tan 10°。

13c) 450° = 360° + 90°。よって、sen 450° = sen 90°, cos 450° = cos 90°、tan 450° は定義されません。

13d) 535° = 360° + 175°。175° の参照角は 180° − 175° = 5°。よって、

sen 535° = sen 175° = sen 5°、cos 535° = cos 175° = − cos 5°、tan 535° = tan 175° = − tan 5°。

14a) sen $\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$、tan $\theta = -2\sqrt{2}$　　**14b)** cos $\theta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$、tan $\theta = -\frac{3\sqrt{7}}{7}$　　**14c)** cos $\theta = \frac{1}{2}$、sen $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

15. $(ABC) = \frac{1}{2}(3)(5)\text{sen}120° = \frac{15\sqrt{3}}{4}$

16a) $c = \sqrt{6}$　　**16b)** $B = 60°$ または B = 120°　　**16c)** $a = 2\sqrt{7}$　　**16d)** $A = B \approx 64.34°$, $C \approx 51.32°$

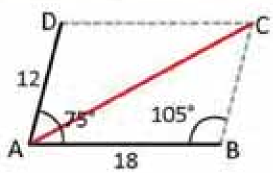
16d では、生徒に約 100 分の 1 まで求めるよう指示します。

16e) sen $A = 2\sqrt{3} > 1$. したがって、三角形を作図することはできません。

17. 平行四辺形の性質により、角 B は 180° − 75° = 105° に等しくなります。
さらに、BC = 12。対角 AC を求めるために、余弦定理を使うことができます。

$$(AC)^2 = 18^2 + 12^2 - 2(18)(12)\cos 105° \approx 579.8 \Rightarrow AC \approx 24.1$$

したがって、合力は約 24.1 ニュートン。



ユニット 6. 三角関数の公式と三角方程式

このユニットのねらい

平面上の対称性を用いることで基本的な三角関数の恒等式を導出して、三角比の正確な値を計算し、三角方程式を解く

関連と発展

中学3年

ユニット 5：相似図形（第 9 学年）
- 相似
- 三角形の相似
- 相似と平行
- 相似の応用と相似三角形

ユニット 6：ピタゴラスの定理（第 9 学年）
- ピタゴラスの定理
- ピタゴラスの定理の応用

高校 1 年

ユニット 5：斜三角形の解法
- 鋭角の三角比
- 一般角の三角比
- 斜三角形の解法

ユニット 6：三角関数の恒等式と方程式
- 三角関数の恒等式
- 三角方程式

高校 2 年

ユニット 5：超越関数 II
- 全単射関数と逆関数
- 対数関数
- 三角関数
- GeoGebraを使った演習

ユニットの学習計画

レッスン	時間	授業
1. 三角関数の恒等式	1	1. $-\theta$, $90° - \theta$, $180° - \theta$ との角度の三角関数の恒等式
	1	2. $\theta + 180°$, $\theta - 180°$, $90° + \theta$ の角度の三角関数の恒等式
	1	3. 角度加算
	1	4. 三角比の値、第一部
	1	5. 倍角
	1	6. 半角
	1	7. 三角比の値、第二部
	1	8. 復習問題
2. 三角方程式	1	1. 三角方程式、第一部
	1	2. 三角方程式、第二部（恒等式の使用　ピタゴラス)
	1	3. 三角方程式、第三部（倍角の使用　コサインの公式）
	1	4. 三角方程式、第四部（倍角の使用　サインの公式）
	1	5. 三角方程式、第五部
	1	6. 復習問題
	1	7. ユニットの問題
	1	ユニット 6 のテスト
	2	三学期テスト

全15コマ + ユニット 6 のテスト + 三学期テスト

各レッスンの要点

レッスン 1：三角関数の恒等式
この課では特に重要な三角関数の恒等式を定め、それらの恒等式を三角比の正確な値の計算に使用します。
レッスン 2：三角方程式
レッスン 1 で求めた恒等式、またピタゴラスの方式や因数分解を用いて、三角方程式を解いていきます。

レッスン 1 三角関数の公式

1.1 $-\theta$, $90° - \theta$ と $180° - \theta$ の角度の三角関数の公式

導入問題

証明してください。

1. $\cos(-\theta) = \cos\theta$ と $\mathrm{sen}(-\theta) = -\mathrm{sen}\,\theta$
2. $\cos(90° - \theta) = \mathrm{sen}\,\theta$ と $\mathrm{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$
3. $\cos(180° - \theta) = \cos\theta$ と $\mathrm{sen}(90° - \theta) = \mathrm{sen}\,\theta$

x 軸、直角と y 軸に対する対称を使いましょう。

解法

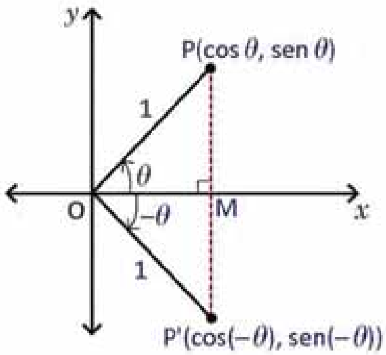
1. 授業 2.2 のユニット 5 から P が直交座標系に座標 (a, b) を持つ点であり、x 軸に対する P' の対称座標は $(a, -b)$ である事が分かります。

点 P(a, b) が OP = 1 と $\overline{\mathrm{OP}}$ になれば角度 θ と x 軸を構成します。P の座標は $(\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta)$。だとすれば、$x$ 軸に対する対称の座標は

$$\mathrm{P}'(\cos\theta, -\mathrm{sen}\,\theta) \quad \text{------------------ (1)}$$

そして $\overline{\mathrm{OP}'}$ が角度 $-\theta$ と x 軸とします。したがって、P' の座標は

$$(\cos(-\theta), \mathrm{sen}(-\theta)) \quad \text{------------------ (2)}$$



(1) と (2) を比較して $\cos(-\theta) = \cos\theta$ と $\mathrm{sen}(-\theta) = -\mathrm{sen}\,\theta$ だと証明されます。

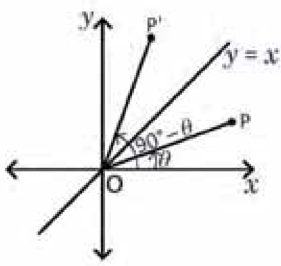
2. Pが (a, b) を座標に持つ直交座標系であれば、P' の対称座標がである恒等写像が (b, a) である事が分かります。

P$(\cos\theta, \ \mathrm{sen}\ \theta)$ を考慮すれば、それに対する恒等写像は

$$\mathrm{P}'(\mathrm{sen}\,\theta, \cos\theta) \quad \text{------------------ (3)}$$

P' は P の対称であるため、$\overline{\mathrm{OP}'}$ が $90° - \theta$ の角度を構成する事がわかります。
x 軸から P' の座標は

$$(\cos(90° - \theta), \mathrm{sen}(90° - \theta)) \quad \text{------------------ (4)}$$

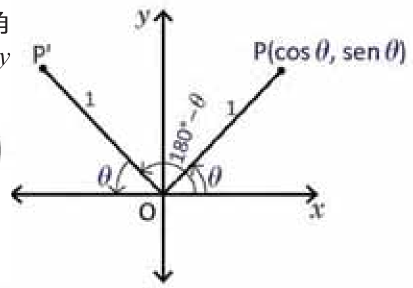


(3) と (4) から $\cos(90° - \theta) = \mathrm{sen}\,\theta$ と $\mathrm{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$ であることが証明されます。

3. P(a, b) が直交座標系上の点であれば、P'$(-a, b)$ は y 軸に対するその対称であることが分かります。

レッスン 1

P が直交座標系上での点であれば、OP = 1 と $\overline{OP}$ は x 軸とともに角度 θ を構成し、その座標は $(\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$ となります。そうであれば y 軸に対するその対称は



$$P'(-\cos\theta, \text{sen}\,\theta) \quad \text{-----------------} \ (5)$$

そして $\overline{OP'}$ が x 軸と角度 180° − θ を構成します。
したがって、P' の座標は

$$(\cos(180° - \theta), \text{sen}(180° - \theta)) \quad \text{-----------------} \ (6)$$

その後、(5) と (6) $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$ であり、$\text{sen}(180° - \theta) = \text{sen}\,\theta$ である事が証明されます。

まとめ

三角関数の公式は三角測量比が関与し、事実を指し示します。
三角関数の公式は三角比が関与する等式であり、どの角度の値に対しても真となります。

どの角度 θ でもコサインとサインにより対角の証明が出来ます。

a) $\cos(-\theta) = \cos\theta$　　b) $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$

どの角度 θ でも余角と相補角の証明が出来ます。
どの角度 θ でも、次のコサインおよびサインの余角公式と相補角公式が満たされます。

c) $\cos(90° - \theta) = \text{sen}\,\theta$　　d) $\text{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$

e) $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$　　f) $\text{sen}(180° - \theta) = \text{sen}\,\theta$

タンジェントについては次の証明が確認されます。

g) $\tan(-\theta) = -\tan\theta$　　h) $\tan(90° - \theta) = \frac{1}{\tan\theta}$　　i) $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$

例

各比率を角度で示し、角度 θ は $0° \le \theta < 90°$。

1. $\cos(-40°)$　　2. sen 120°　　3. tan 320°

1. 対角の証明を利用し、$\cos(-40°) = \cos 40°$。
2. 相補角の証明を利用し、$\text{sen}\,120° = \text{sen}(180° - 120°) = \text{sen}\,60°$。
3. この場合はまず相補角の証明を利用します。

$$\tan 320° = -\tan(180° - 320°) = -\tan(-140°) = \tan 140° = -\tan(180° - 140°) = -\tan 40°.$$

ですので、$\tan 320° = -\tan 40°$。

問題

1. 各三角比を角度で示し、角度 θ は $0° \le \theta < 90°$。どの様な証明を利用する必要があるかを説明してください。

a) $\cos(-30°)$　　b) sen 170°　　c) sen 110°

d) cos 250°　　e) $\tan(-60°)$　　f) $\tan(-100°)$

2. $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ であることを証明してください。

3. $\tan(90° - \theta) = \frac{1}{\tan\theta}$ であることを証明しなさい。

4. $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$ であることを証明してください。

163

ユニット 6

達成の目安

1.1 三角関数を利用して狭い角度の対角、余角と相補角を証明する事。

学習の流れ：

このユニットの冒頭部では、デカルト座標平面上の角と、座標軸、原点および高等関数に対する1点の対称を利用して三角関数の3つの恒等式を導出します。

ねらい：

対角、余角および相補角の三角関数の公式を学び、続いて鋭角に関して三角比を書き直すときに、それらの公式を利用します。

問題の解答：

1a) $\cos(-30°) = \cos 30°$

1b) $\text{sen } 170° = \text{sen}(180° - 170°) = \text{sen } 10°$

もしくは、

$\text{sen } 170° = \cos(90° - 170°) = \cos(-80°) = \cos 80°.$

1c) $\text{sen } 110° = \text{sen}(180° - 110°) = \text{sen } 70°$

もしくは、

$\text{sen } 110° = \cos(90° - 110°) = \cos(-20°) = \cos 20°.$

1d) $\cos 250° = -\cos(180° - 250°) = -\cos(-70°) = -\cos 70°$

余角の証明によって解答する事もできます。

$\cos 250° = \text{sen}(90° - 250°) = \text{sen}(-160°) = -\text{sen } 160° = -\text{sen}(180° - 160°) = -\text{sen}(20°).$

1e) $\tan(-60°) = -\tan 60°$

1f) $\tan(-100°) = -\tan 100° = -[-\tan(180° - 100°)] = \tan 80°.$

公式の使い方次第で、本項1のb、cおよびdで見られるように、異なる結果が得られることがあります。

2. $\tan(-\theta) = \dfrac{\text{sen}(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \dfrac{-\text{sen } \theta}{\cos \theta} = -\dfrac{\text{sen } \theta}{\cos \theta} = -\tan \theta$

3. $\tan(90° - \theta) = \dfrac{\text{sen}(90° - \theta)}{\cos(90° - \theta)} = \dfrac{\cos \theta}{\text{sen } \theta},$

その他には、

$$\frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos \theta}{\text{sen } \theta}$$

したがって、$\tan(90° - \theta) = \dfrac{1}{\tan \theta}$ となります。

4. $\tan(180° - \theta) = \dfrac{\text{sen}(180° - \theta)}{\cos(180° - \theta)} = \dfrac{\text{sen } \theta}{-\cos \theta} = -\dfrac{\text{sen } \theta}{\cos \theta} = -\tan \theta$

レッスン 1

1.2 $\theta + 180°$, $\theta - 180°$ と $90° + \theta$ の角度の三角関数の公式

導入問題

証明してください。

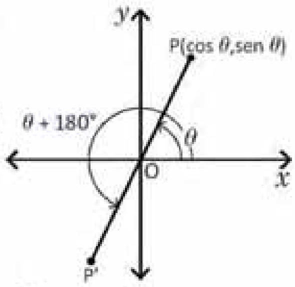
1. $\cos(\theta + 180°) = -\cos\theta$，$\text{sen}(\theta + 180°) = -\text{sen}\,\theta$
2. $\cos(\theta - 180°) = -\cos\theta$，$\text{sen}(\theta - 180°) = -\text{sen}\,\theta$
3. $\cos(90° + \theta) = -\text{sen}\,\theta$，$\text{sen}(90° + \theta) = \cos\theta$

原点に対する対称と証明を利用して下さい。
前回の授業で学んだ原点に対する対称と公式を利用します。

解法

a) 点 $P(a, b)$ が$OP = 1$ と $\overline{OP}$ になれば角度 θ と x 軸を構成します。P の座標は $(\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$。だとすれば、原点に対する対称の座標は

$$P'(-\cos\theta, -\text{sen}\,\theta) \quad \text{------------------- (1)}$$



しかし、$\overline{OP'}$ は x 軸と共に、$\theta + 180°$ という角度を構成します。ですので、P' の座標は

$$(\cos(\theta + 180°), \text{sen}(\theta + 180°)) \quad \text{------------------- (2)}$$

後に (1) と(2) より $\cos(\theta + 180°) = -\cos\theta$ と $\text{sen}(\theta + 180°) = -\text{sen}\,\theta$ である事が分かります。

b) $\theta - 180°$ の角度は $-(180° - \theta)$ と表現できます。よって、

$$\cos(\theta - 180°) = \cos(-(180° - \theta)) = \cos(180° - \theta) = -\cos\theta \text{ と}$$

$$\cos(\theta - 180°) = \cos(-(180° - \theta)) = \cos(180° - \theta) = -\cos\theta。$$

c) $90° + \theta$ の角度は $180° - (90° - \theta)$ と表現できます。よって、

$$\cos(90° + \theta) = \cos(180° - (90° - \theta)) = -\cos(90° - \theta) = -\text{sen}\,\theta \text{ と}$$

$$\cos(90° + \theta) = \cos(180° - (90° - \theta)) = -\cos(90° - \theta) = -\text{sen}\,\theta。$$

まとめ

θ の角度全てに言えることは

a) $\cos(\theta + 180°) = -\cos\theta$　　b) $\text{sen}(\theta + 180°) = -\text{sen}\,\theta$

c) $\cos(\theta - 180°) = -\cos\theta$　　d) $\text{sen}(\theta - 180°) = -\text{sen}\,\theta$

e) $\cos(90° + \theta) = -\text{sen}\,\theta$　　f) $\text{sen}(90° + \theta) = \cos\theta$

タンジェントについては次の証明が確認されます。

g) $\tan(\theta + 180°) = \tan\theta$　　h) $\tan(\theta - 180°) = \tan\theta$　　i) $\tan(90° + \theta) = -\dfrac{1}{\tan\theta}$

例

各比率を角度で示し、角度 θ は $0° \leq \theta < 90°$。

a) $\cos 200°$　　b) $\text{sen}\,130°$　　c) $\tan 250°$

a) $200° = 20° + 180°$ なので、$\cos 200° = -\cos 20°$ となります。
b) $130° = 90° + 40°$ なので、$\text{sen}\,130° = \text{sen}(90° + 40°) = \cos 40°$ となります。
c) $250° = 70° + 180°$ なので、$\tan 250° = \tan(70°)$ となります。

問題

各三角比を角度で示し、角度 θ は $0° \leq \theta < 90°$。

a) $\text{sen}\,100°$　　b) $\text{sen}\,215°$　　c) $\cos 160°$

d) $\cos 195°$　　e) $\tan 205°$　　f) $\tan 290°$

達成の目安

1.2　角$\theta + 180°$、$\theta - 180°$および$90° + \theta$の三角関数の公式を利用して、鋭角に関する三角比を表す。

学習の流れ：

引き続き基本となる三角関数の証明を続けます。この授業では前回に証明した内容を引用します。

ねらい：

角$\theta + 180°$、$\theta - 180°$および$90° + \theta$の三角関数の公式を学び、続いて鋭角に関して三角比を書き直すときに、それらの公式を利用します。

つまづきやすい点：

特に記号の変更がある場合には、公式の正しい使用方法を特定しましょう。この点について次の例を挙げることができます。　$\cos \underline{210°} = -\cos(\underline{210°} - 180°) = -\cos 30°$。

c の文字式の結論にて確認されている証明ではマイナス表記が$\cos(\theta - 180°)$ではなく、$\cos \theta$に置かれています。前回の例とは異なります。

問題の解答：

a) 方法 *1.* $\text{sen } 100° = -\text{sen}(100° - 180°) = -\text{sen}(-80°) = \text{sen } 80°$。
方法 *2.* $100° = 90° + 10°$ と確認できるので、$\text{sen } 100° = \text{sen}(90° + 10°) = \cos 10°$。

b) 方法 *1.* $\text{sen } 215° = \text{sen}(35° + 180°) = -\text{sen } 35°$。
方法 *2.* $\text{sen } 215° = -\text{sen}(215° - 180°) = -\text{sen } 35°$。

c) 方法 *1.* $\cos 160° = -\cos(160° - 180°) = -\cos(-20°) = -\cos 20°$。
方法 *2.* $\cos 160° = \cos(90° + 70°) = -\text{sen } 70°$。

d) 方法 *1.* $\cos 195° = -\cos(195° - 180°) = -\cos 15°$。
方法 *2.* $\cos 195° = \cos(90° + 105°) = -\text{sen } 105° = \text{sen}(105° - 180°) = \text{sen}(-75°) = -\text{sen } 75°$。

e) 方法 *1.* $\tan 205° = \tan(205° - 180°) = \tan 25°$。
方法 *2.* $\tan 205° = \tan(90° + 115°) = -\dfrac{1}{\tan 115°}$。しかし、$\tan 115° = -\tan(180° - 115°) = -\tan 65°$なので、

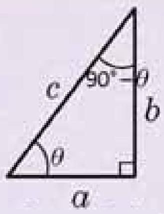
$$-\frac{1}{\tan 115°} = \frac{1}{\tan 65°}.$$

$\tan(90° + \theta) = -\dfrac{1}{\tan \theta}$ の証明を用いるが、虚数ではないもので作業する事が推奨されます。

したがって $\tan 205° = \dfrac{1}{\tan 65°}$.

f) 方法 *1.* $\tan 290° = \tan 110° = \tan(110° - 180°) = \tan(-70°) = -\tan 70°$。
方法 *2.* $\tan 290° = \tan(290° - 180°) = \tan 110° = \tan(90° + 20°) = -\dfrac{1}{\tan 20°}$。

a)、c) と d) では解決策が 2 つ見出されました。計算出来た狭い角度を足すと 90° になる事が分かります。



右の三角形を用いて角度 θ のサインを計算すると $\text{sen } \theta = \dfrac{b}{c}$ と割り出せます。角度 $90° - \theta$ のコサインを計算すると $\cos(90° - \theta) = \dfrac{b}{c}$ となります。

よって $\text{sen } \theta = \cos(90° - \theta)$。同様に $\text{sen}(90° - \theta)$ も割り出せます。これは余角を計算する別の方法です。しかし、これは狭い角度に限定されます。

1.3 角度加算*

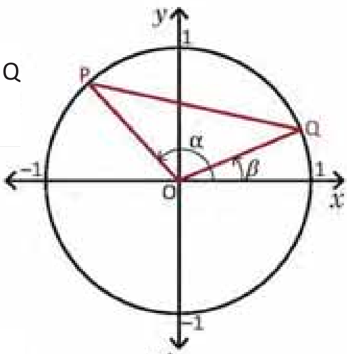
導入問題

証明してください。

a) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

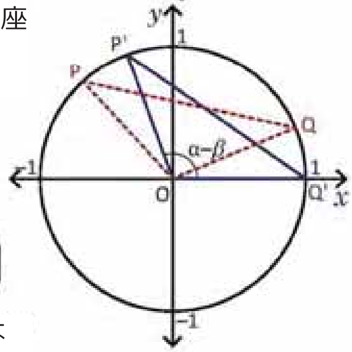
b) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

解法



a) 図の様に R1 の円周と OPQ の三角形を描きます。P の座標が $(\cos\alpha、\operatorname{sen}\alpha)$で Q が $(\cos\beta、\operatorname{sen}\beta)$ になります。P から Q の距離の自乗は

$$
\begin{aligned}
(PQ)^2 &= (\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta)^2\\
&= \cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\operatorname{sen}^2\alpha-2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}^2\beta\\
&= (\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha)+(\cos^2\beta+\operatorname{sen}^2\beta)\ -2\cos\alpha\cos\beta-2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\\
&= 2-2\cos\alpha\cos\beta-2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.
\end{aligned}
$$



OPQ の三角形における$-\beta$ 角を原点に対して回転させると、P と Q の回転した座標は $P'(\cos(\alpha-\beta)、\operatorname{sen}(\alpha-\beta))$ と $Q'(1, 0)$ です。P' から Q' の距離の自乗は

$$
\begin{aligned}
(P'Q')^2 &= (\cos(\alpha-\beta)-1)^2+(\operatorname{sen}(\alpha-\beta)-0)^2\\
&= \cos^2(\alpha-\beta)-2(1)\cos(\alpha-\beta)+1+\operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)\\
&= [\cos^2(\alpha-\beta)+\operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)]-2\cos(\alpha-\beta)+1\\
&= 1-2\cos(\alpha-\beta)+1\\
&= 2-2\cos(\alpha-\beta).
\end{aligned}
$$

ピタゴラスの公式により分かるのは
どの θ に対しても、$\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$。

しかし回転させても距離関係は保たれるので $d(P, Q)=d(P', Q')$ です。という事は

$$(d(P, Q))^2=(d(P', Q'))^2$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow\quad 2-2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta-2\cos\alpha\cos\beta=2-2\cos(\alpha-\beta)\\
&\Rightarrow\quad -2(\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta+\cos\alpha\cos\beta)=-2\cos(\alpha-\beta)\\
&\Rightarrow\quad \cos(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta+\cos\alpha\cos\beta.
\end{aligned}
$$

b) ここを証明するには $\operatorname{sen}\theta=\cos(90°-\theta)$ と $\cos\theta=\operatorname{sen}(90°-\theta)$ なので、

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \cos(90°-(\alpha+\beta))\\
&= \cos((90°-\alpha)-\beta)\\
&= \cos(90°-\alpha)\cos\beta+\operatorname{sen}(90°-\alpha)\operatorname{sen}\beta\\
&= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta.
\end{aligned}
$$

加算の定理

次の角度加算の証明が出来ます。

a) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

b) $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

c) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

d) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

そして、タンジェントについては次の証明が確認されます。

e) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

f) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

b、c、e と f の証明については宿題になります。

問題

加算定理の文字式 b、c、e と f を証明してください。

$\alpha+\beta=\alpha-(-\beta)$, $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$を確認してください。b) と c) の証明には a) と b)を 引用

授業： 1.1.

達成の目安

1.3 角度加算の関数証明をしてください。

学習の流れ：

三角関数の続きとして cos(α − β) と sen(α + β) を確認します。その他の証明に関しては生徒の宿題として残しておきます。

ねらい：

角度加算の三角関数を説明します。それは三角関数を正確に計算するため、倍角の証明に用います。この授業は先生により計算を遂行する必要があります。

問題の解答：

下記の問題に関しては授業での結論の出る順番を基にしています。

b) $\mathrm{sen}(\alpha - \beta) = \mathrm{sen}(\alpha + (-\beta))$
$= \mathrm{sen}\,\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha\,\mathrm{sen}(-\beta)$
$= \mathrm{sen}\,\alpha \cos\beta - \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$

角度 α − β を書き直し、
α + β の角度のサイン証明を適用して、
対角証明を適用します。

c) $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta))$
$= \cos\alpha \cos(-\beta) + \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}(-\beta)$
$= \cos\alpha \cos\beta - \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$

角度 α + βを書き直し、
α − β の角度のコサイン証明を適用して、
対角証明を適用します。

e) $$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$
$$= \frac{\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta}$$
$$= \frac{\dfrac{\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$
$$= \frac{\dfrac{\mathrm{sen}\,\alpha\,\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\,\cancel{\cos\beta}} + \dfrac{\cancel{\cos\alpha}\,\mathrm{sen}\,\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}} - \dfrac{\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$
$$= \frac{\dfrac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\mathrm{sen}\,\beta}{\cos\beta}}{1 - \left(\dfrac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}\right)\left(\dfrac{\mathrm{sen}\,\beta}{\cos\beta}\right)}$$
$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

f) $$\tan(\alpha-\beta) = \tan(\alpha + (-\beta))$$
$$= \frac{\tan\alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan\alpha\tan(-\beta)}$$
$$= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

導入問題を解く別の選択肢として、正弦定理において次の等式が満たされるときに具体的な事例を分析します。

$$\frac{a}{\mathrm{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\mathrm{sen}\,\beta} = \frac{c}{\mathrm{sen}\,\gamma} = 1$$

a) $\frac{a}{\mathrm{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\mathrm{sen}\,\beta} = \frac{c}{\mathrm{sen}\,\gamma} = 1$ の同一性より、ABCの三角形の側面の長さを求めてください。

b) α と β の角度を基に、セグメント AH と BH の長さを求めてください。

c) 三角形における角度をたし算とすると γ = 180° − (α + β) となります。そして AB = AH + BH。この情報を適用して結論として、sen (α + β) = sen α cos β + cos α sen β 。

1.4 三角関数の正確な値、パート1

導入問題

75° = 45° + 30° であるという事を引用して sen 75°、cos 75° と tan 75° の正確な値を求めてください。

解法

75° = 45° + 30° なので、

$$\begin{aligned}\text{sen } 75° = \text{sen}(45° + 30°) &= \text{sen } 45° \cos 30° + \cos 45° \text{ sen } 30°\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

ユニット 5 の授業 2.6 の表を利用してください。

cos 75° を計算するには同様にします。

$$\begin{aligned}\cos 75° = \cos(45° + 30°) &= \cos 45° \cos 30° - \text{sen } 45° \text{ sen } 30°\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

tan 75° を計算するには $\tan 75° = \dfrac{\text{sen}(75°)}{\cos(75°)}$ を利用して、

$$\tan 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \div \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{3}.$$

定義

角度加算の証明を利用し、三角関数の正確な値を求める事が出来ます。
加算角の公式を利用して、未知の角の三角比の正確な値を計算することができます。

問題

1. 角度加算の証明を利用し、次の特別な角度のサイン、コサイン、タンジェントの正確な値を求めてください。

   a) 15° b) 105°
   c) 165° d) 195°

特別な角度と言うのは三角関数が知られているものを指します。(0°、30°、45°、60°、90° と 180°)。
120°、135°、150°、210°、225°の角度 240°、270°、300°。315° と 330°の角度も特別ですが、先ほど記載した値で求める事が出来ます。

2. 角度加算の証明を利用して次を証明してください。

   a) $\cos(180° + \theta) = -\cos\theta$
   b) $\text{sen}(180° - \theta) = \text{sen }\theta$
   c) $\cos(270° + \theta) = \text{sen }\theta$
   d) $\text{sen}(270° + \theta) = -\cos\theta$
   e) $\cos(45° - \theta) = \text{sen}(45° + \theta)$
   f) $\tan(45° + \theta) = \dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$
   g) $\text{sen}(360° + \theta) = \text{sen }\theta$
   h) $\cos(360° + \theta) = \cos\theta$

166

達成の目安

1.4 特別な角度と角度加算の証明を利用して三角関数の正確な値を求めてください。
特別角および加算角の公式を利用して三角比の正確な値を計算する。

学習の流れ：

加算角の公式を定めたあとで、その公式を用いて三角比の正確な値を計算します。

ねらい：

加算角の公式および特別角を利用することで三角比の正確な値を計算できること学びます。

問題の解答：

1a) $15° = 45° - 30°$

- $\text{sen } 15° = \text{sen}(45° - 30°) = \text{sen } 45° \cos 30° - \cos 45° \text{ sen } 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
- $\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \text{sen } 45° \text{ sen } 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
- $\tan 15°$:

方法 *1.* $\tan 15° = \frac{\tan 45° - \tan 30°}{1 + \tan 45° \tan 30°} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + (1)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}.$

15° = 60° – 45°とも理解できます。

簡素化すると $\tan 15° = 2 - \sqrt{3}$.

方法 *2.* $\tan 15° = \frac{\text{sen } 15°}{\cos 15°} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \div \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}.$

簡素化すると $\tan 15° = 2 - \sqrt{3}$.

問 1 を解決するには一通り以上方法があります。特別な角度 2 つをたし算したりひき算する事で角度を確認する方法が一通り以上あるためです。例えば、
$15° = 75° - 60° = 45° - 30° = 60° - 45° = 135° - 120°$
以下同様です。

1b)
- $\text{sen } 105° = \text{sen}(60° + 45°) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$
- $\cos 105° = \cos(60° + 45°) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$
- $\tan 105° = -2 - \sqrt{3}.$

1c)
- $\text{sen } 165° = \text{sen}(180° - 15°) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$
- $\cos 165° = \cos(180° - 15°) = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$
- $\tan 165° = -2 + \sqrt{3}.$

1d)
- $\text{sen } 195° = \text{sen}(180° + 15°) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$
- $\cos 195° = \cos(180° + 15°) = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$
- $\tan 195° = 2 - \sqrt{3}.$

$105° = 90° + 15° = 150° - 45° = 180° - 75°$とその他

$165° = 90° + 75° = 120° + 45° = 150° + 15°$とその他

$195° = 90° + 75° = 120° + 45° = 150° + 15° = 180° - 15°$とその他

2a) $\cos(180° + \theta) = \cos 180° \cos \theta - \text{sen } 180° \text{ sen } \theta = (-1)\cos \theta - (0)\text{sen } \theta = -\cos \theta$

2b) $\text{sen}(180° - \theta) = \text{sen } 180° \cos \theta - \cos 180° \text{ sen } \theta = (0)\cos \theta - (-1)\text{sen } \theta = \text{sen } \theta$

2c) $\cos(270° + \theta) = \cos 270° \cos \theta - \text{sen } 270° \text{ sen } \theta = (0)\cos \theta - (-1)\text{sen } \theta = \text{sen } \theta$

2d) $\text{sen}(270° + \theta) = \text{sen } 270° \cos \theta + \cos 270° \text{ sen } \theta = (-1)\cos \theta + (0)\text{sen } \theta = -\cos \theta$

2e) $\cos(45° - \theta) = \cos 45° \cos \theta + \text{sen } 45° \text{ sen } \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos \theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen } \theta.$

他にも $\text{sen}(45° + \theta) = \text{sen } 45° \cos \theta + \cos 45° \text{ sen } \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos \theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen } \theta$

よって、$\cos(45° - \theta) = \text{sen}(45° + \theta)$。

2f) $\tan(45° + \theta) = \frac{\tan 45° + \tan \theta}{1 - \tan 45° \tan \theta} = \frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta}.$

2g) $\text{sen}(360° + \theta) = \text{sen } 360° \cos \theta + \cos 360° \text{ sen } \theta = (0)\cos \theta + (1)\text{sen } \theta = \text{sen } \theta$

2h) $\cos(360° + \theta) = \cos 360° \cos \theta - \text{sen } 360° \text{ sen } \theta = (1)\cos \theta - (0)\text{sen } \theta = \cos \theta$

レッスン 1

1.5 倍角

導入問題

証明してください。

a) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\text{sen}^2\theta$　　　b) $\text{sen}\ 2\theta = 2\text{sen}\ \theta \cos\theta$

解法

a) コサインの角度加算の方式を利用します。

$$\cos 2\theta = \cos(\theta+\theta) = \cos\theta\cos\theta - \text{sen}\ \theta\ \text{sen}\ \theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta。\qquad (1)$$

ピタゴラスの公式より $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ は $\cos^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta$ に簡略化できるため、(1) を代入することで、結果は、

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta - \text{sen}^2\theta = 1 - 2\text{sen}^2\theta。$$

ピタゴラスの方式より $\text{sen}^2\theta$ を取り除くと $\text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ となります。(1) に代入すると、結果は、

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = \cos^2\theta - (1-\cos^2\theta) = \cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta = 2\cos^2\theta - 1。$$

b) サインの角度加算の方式を利用します。

$$\text{sen}\ 2\theta = \text{sen}(\theta+\theta) = \text{sen}\ \theta\cos\theta + \cos\theta\ \text{sen}\ \theta = \text{sen}\ \theta\cos\theta + \text{sen}\ \theta\cos\theta = 2\text{sen}\ \theta\cos\theta。$$

倍角の定理

どの角度 θ でも次の倍角の証明が成り立ちます

a) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\text{sen}^2\theta$　　　b) $\text{sen}\ 2\theta = 2\text{sen}\ \theta\cos\theta$

さらにタンジェントには次の証明ができます

c) $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

例 1

$90° < \theta < 180°$ と $\text{sen}\ \theta = \frac{3}{5}$ ならば、sen 2θ とcos 2θ の値は何ですか？

サインとコサインの倍角の方式を確認すると cos θ を計算する必要がある事が分かります。θ は 90° と 180° の間に値するので、cos θ は負の数になります。ピタゴラスの公式より、

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1 \quad\Rightarrow\quad \cos^2\theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \quad\Rightarrow\quad \cos\theta = -\frac{4}{5}.$$

その後に $\text{sen}\ 2\theta = 2\text{sen}\ \theta\cos\theta = 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$ と $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$

例2

$\cos\theta = \frac{1}{4}$ であれば、cos 2θ の値は何ですか？

cos θ の値が分かっているので、$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ の証明を利用します。

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = 2\left(\frac{1}{16}\right) - 1 = \frac{1}{8} - 1 = -\frac{7}{8}.$$

問題

1. $0° < \theta < 90°$ と $\cos\theta = \frac{7}{9}$ であれば、sen 2θ と cos 2θ の値は何ですか？
2. $\text{sen}\ \theta = -\frac{\sqrt{7}}{3}$ であれば、cos 2θ の値を求めてください。
3. もし $\tan\theta = \frac{12}{5}$ と θ が第三象限に位置する場合、sen 2θ、cos 2θ と tan 2θ の値を求めてください。
4. $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ であることを証明しなさい。

ユニット6

167

達成の目安

1.5 倍角の三角関数を証明し、利用して下さい。

学習の流れ：

次は角度加算の証明を利用して、三角関数の倍角を学びます。そのほかにも (θ) の角度が分かっている場合の倍角 (2θ) の三角関数を計算します。

問題の解答：

1. cos θ の値が分かっているので、$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ の証明を利用します。

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(\frac{7}{9}\right)^2 - 1 = 2\left(\frac{49}{81}\right) - 1 = \frac{17}{81}.$$

sen 2θ を計算するには sen θ を計算します。

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\theta + \left(\frac{7}{9}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\theta = 1 - \frac{49}{81} = \frac{32}{81}.$$

$0° < \theta < 90°$ なので、sen θ は正の数になります。よって、$\theta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$。

その後、$\text{sen}\ 2\theta = 2\ \text{sen}\ \theta \cos\theta = 2\left(\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)\left(\frac{7}{9}\right) = \frac{56\sqrt{2}}{81}.$

2. sen θ の値が分かっているので、$\cos 2\theta = 1 - 2\ \text{sen}^2\theta$: $\cos 2\theta = 1 - 2\ \text{sen}^2\theta = 1 - 2\left(\frac{7}{9}\right) = -\frac{5}{9}$ を利用します。

3. まず sen θ と cos θ の値を求めます。θ が第 3 象限にあるので sen θ と cos θ はそれぞれ負の数になります。
ユニット 5 の授業 2.9 の 141 頁の問 4 により、

$$1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{144}{25} = \frac{169}{25} = \frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{25}{169} \Rightarrow \cos\theta = -\frac{5}{13}.$$

その後、$\tan\theta = \frac{\text{sen}\ \theta}{\cos\theta} = \frac{12}{5} \Rightarrow \text{sen}\ \theta = \frac{12}{5}\cos\theta = \frac{12}{5}\left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{12}{13}.$

したがって、

- $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = -\frac{119}{169},$
- $\text{sen}\ 2\theta = 2\ \text{sen}\ \theta\cos\theta = \frac{120}{169},$
- $\tan 2\theta = \frac{\text{sen}\ 2\theta}{\cos 2\theta} = -\frac{120}{119}.$

問 3 の tan 2θ の値を求めるには サインと 2θ のコサインの関係性を利用するか、c) の証明を授業の結論で用いる事が出来ます。

4. $\tan 2\theta = \tan(\theta + \theta)$

$$= \frac{\tan\theta + \tan\theta}{1 - \tan\theta\tan\theta}$$

$$= \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}.$$

1.6 半角

導入問題

証明してください。

a) $\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}$ b) $\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$

解法

a) 倍角の方式により分かっている事象としては

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$$

この際に $\alpha=\frac{\theta}{2}$ を確認するために、

$$\cos\left(2\frac{\theta}{2}\right)=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1,$$

$$\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1,$$

$$\Rightarrow \cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}$$ $\cos^2\frac{\theta}{2}$ を解きます。

b) a) と同様に、倍角の方式により理解できる事象としては

$$\cos 2\alpha = 1-2\mathrm{sen}^2\alpha.$$

$\alpha=\frac{\theta}{2}$ を確認するために、

$$\cos\left(2\frac{\theta}{2}\right)=1-2\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

$$\cos\theta=1-2\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2},$$

$$\Rightarrow \mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$$ $\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}$ を解きます。

半角の定理

θ の角度全てに言えることは、

a) $\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}$ b) $\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$

そしてタンジェントに対して証明できるのは、

c) $\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

問題

1. 半角の方式の文字式 c) を証明してください。
2. 問 1 の結果を用いて、$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}$ であることを証明して下さい。

問 2 には $\tan\frac{\theta}{2}$ と $\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}$ と $\cos\frac{\theta}{2}$ との関係性とサインの倍角の証明を利用しましょう。適当な1（分母と分子が同じ値の分数）を掛けましょう

3. $\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ に $\frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta}$ を掛けると $\tan\frac{\theta}{2}=\pm\frac{1-\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}$ という事が分かります。この最後のは表記を＋か－で選ばなければいけないという点で問 2 の結果と差異があります。＋表記のみを選ぶ理由を述べてください。

達成の目安

1.6　半角の三角関数の公式を導出し、応用する。

学習の流れ：

サインとコサインの半角を説明します。生徒に対する問題としてタンジェントの半角の証明を提議します。

ねらい：

三角関数の計算が必要になるまでルート自乗を回避するために、証明として定義するのは半角の三角関数の自乗です。
問題のセクションにおいて問 1 はタンジェントの半角の証明になります。問 2 ではタンジェントの半角の証明を別の方法にて実施します。これは先にある問題を解くのに利用する事も出来ます。

問題の解答：

1. $\tan^2\frac{\theta}{2} = \dfrac{\text{sen}^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \dfrac{1-\cos\theta}{2} \div \dfrac{1+\cos\theta}{2} = \dfrac{1-\cos\theta}{\cancel{2}} \times \dfrac{\cancel{2}}{1+\cos\theta} = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}.$

2. $\tan\frac{\theta}{2} = \dfrac{\text{sen}\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \dfrac{\text{sen}\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} \times \dfrac{2\,\text{sen}\frac{\theta}{2}}{2\,\text{sen}\frac{\theta}{2}} = \dfrac{2\,\text{sen}^2\frac{\theta}{2}}{2\,\text{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \dfrac{1-\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}.$

角度の証明
サインの倍

3. $\tan^2\frac{\theta}{2} = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ という事から、

$$\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \times \frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta} = \frac{(1-\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)} = \frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta} = \frac{(1-\cos\theta)^2}{\text{sen}^2\theta}。$$

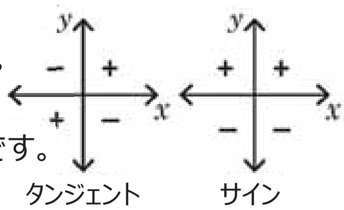
$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$
$\Rightarrow \text{sen}^2\theta = \cos^2\theta - 1$

そして、$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{(1-\cos\theta)^2}{\text{sen}^2\theta}} = \pm\dfrac{1-\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}.$

$\dfrac{1-\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$ の表記を解析するとどの θ に対しても $1-\cos\theta$ は負の数でない事がわかります。ですので、sen θ の表記のみに左右されます。そして、$\tan\frac{\theta}{2}$ とsen θ の表記は常に一致します。ですので、選ばれるべき表記は正 (+) です。$\tan\frac{\theta}{2}$ と sen θ の表記の解析をします。

$0° < \frac{\theta}{2} < 90° \Rightarrow 0° < \theta < 180°$ であれば。$\tan\frac{\theta}{2}$ と sen θ の表記は双方共に正です。

$90° < \frac{\theta}{2} < 180° \Rightarrow 180° < \theta < 360°$ であれば。$\tan\frac{\theta}{2}$ と sen θ の表記は双方共に負です。



次の問題に対しても同様の解析をしていきます。

$$180° < \frac{\theta}{2} < 270°,\ 270° < \frac{\theta}{2} < 360°.$$

ですので、正 (+) の表記を選ぶ必要があります。

1.7 三角関数の正確な値、パート 2

導入問題

1. sen 22.5°、cos 22.5° と tan 22.5° の正確な値を求めてください。
2. $\theta = \frac{3}{5}$、con θ が第 3 象限に位置しているのであれば、sen $\frac{\theta}{2}$、cos $\frac{\theta}{2}$ と tan $\frac{\theta}{2}$ の値を求めてください。

解法

1. $22.5° = \frac{45°}{2}$ であり、22.5° が第 1 象限に位置するのであれば、sen 22.5°、cos 22.5° と tan 22.5° はそれぞれ正の数です。

$$\text{sen}^2 22.5° = \text{sen}^2 \frac{45°}{2} = \frac{1-\cos 45°}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \text{sen } 22.5° = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

$$\cos^2 22.5° = \cos^2 \frac{45°}{2} = \frac{1+\cos 45°}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos 22.5° = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

$$\tan 22.5° = \frac{\text{sen } 22.5°}{\cos 22.5°} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \div \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

2. θ は第 4 象限に位置するので、$270° < \theta < 360°$ となります。　ですので、$135° < \frac{\theta}{2} < 180°$という事で、$\frac{\theta}{2}$ は第 2 象限に位置するという事になるので、 sen $\frac{\theta}{2}$ は正の数であり、cos $\frac{\theta}{2}$ と tan $\frac{\theta}{2}$ は負の数となります。ですので、

$$\text{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\frac{3}{5}}{2} = \frac{2}{5\times 2} = \frac{1}{5} \Rightarrow \text{sen}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\frac{3}{5}}{2} = \frac{\cancel{8}}{5\times \cancel{2}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \div \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{\cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{2\cancel{\sqrt{5}}} = -\frac{1}{2}.$$

まとめ

半角の公式が利用でき、それによって三角関数の正確な値を求める事が出来ます。

問題

1. 半角の証明を利用し、各角の三角関数を計算してください。

a) 67.5°　　b) 105°　　c) 112.5°　　d) 165°

2. cos θ の各値に対し、sen $\frac{\theta}{2}$、cos $\frac{\theta}{2}$ と tan $\frac{\theta}{2}$ を求めてください。

a) $\cos\theta = \frac{3}{4}$, $0° < \theta < 90°$　　b) $\cos\theta = -\frac{5}{12}$, $90° < \theta < 180°$

c) $\cos\theta = -\frac{1}{9}$, $180° < \theta < 270°$　　d) $\cos\theta = \frac{1}{8}$, $270° < \theta < 360°$

3. sen $\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ と $180° < \theta < 270°$ であれば、sen $\frac{\theta}{2}$、cos $\frac{\theta}{2}$ と tan $\frac{\theta}{2}$ の値を求めて下さい。

達成の目安

1.7　2倍角と半角の公式を利用して、三角比の正確な値を計算する。

学習の流れ：

半角の公式を導出したあと、その公式を用いて三角比の正確な値を計算します。また、半角のいずれかの比が分かっていて、かつその半角がどの象限に位置するか分かっている場合に、その半角の三角比を計算します。

問題の解答：

1a) $67.5° = \frac{135°}{2}$ は第 1 象限に位置します。

$\mathrm{sen}^2 67.5° = \mathrm{sen}^2\frac{135°}{2} = \frac{1-\cos 135°}{2} = \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \div 2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \mathrm{sen}\, 67.5° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$

$\cos^2 67.5° = \cos^2\frac{135°}{2} = \frac{1+\cos 135°}{2} = \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \div 2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos 67.5° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$

$\tan 67.5° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \div \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})^2}{4-2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}+1.$

授業 1.6 の問 2 の証明を利用する事も出来ます。

$\tan 67.5° = \frac{1-\cos 135°}{\mathrm{sen}\, 135°} = \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \div \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}+1.$

$\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\mathrm{sen}\, 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

授業 1.6 の結論の証明 c) よりも問 2 の証明を利用した方が便利です。なぜなら有利化と自乗の 2 つの工程を省くことが出来るからです。

1b) $\mathrm{sen}^2 105° = \mathrm{sen}^2\frac{210°}{2} = \frac{1-\cos 210°}{2} = \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \div 2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \mathrm{sen}\, 105° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$

$\cos^2 105° = \cos^2\frac{210°}{2} = \frac{1+\cos 210°}{2} = \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \div 2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos 105° = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$

$\tan 105° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \div \left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = -\sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{4-3}} = -\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{1}} = -2-\sqrt{3}.$

もし $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}$：$\tan 105° = \frac{1-\cos 210°}{\mathrm{sen}\, 210°} = \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \div \left(-\frac{1}{2}\right) = -2-\sqrt{3}$ の証明を利用した場合。

$\cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\mathrm{sen}\, 210° = -\frac{1}{2}$

問 1b) の結果を授業 1.4 の問 1b) と比較してください。

1c) $\mathrm{sen}^2 112.5° = \mathrm{sen}^2\frac{225°}{2} = \frac{1-\cos 225°}{2} = \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \div 2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \mathrm{sen}\, 112.5° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$

$\cos^2 112.5° = \cos^2\frac{225°}{2} = \frac{1+\cos 225°}{2} = \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \div 2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos 112.5° = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$

$\tan 112.5° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \div \left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = -\sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})^2}{4-2}} = -\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -(\sqrt{2}+1).$

$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}$: $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \div \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -(\sqrt{2}+1)$ の証明を利用した場合。

$\cos 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\mathrm{sen}\, 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 330° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\mathrm{sen}\, 330° = -\frac{1}{2}$

1d) $\mathrm{sen}^2 165° = \mathrm{sen}^2\frac{330°}{2} = \frac{1-\cos 330°}{2} = \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \div 2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \mathrm{sen}\, 165° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$

$\cos^2 165° = \cos^2\frac{330°}{2} = \frac{1+\cos 330°}{2} = \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \div 2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos 165° = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$

$\tan 165° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \div \left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right) = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = -\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{1}} = -2+\sqrt{3}.$

$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}$ の証明を利用すると $\tan 165° = -2+\sqrt{3}$ であるという事が分かります。

三角比の表記を決定する際には特に注意を払ってください。$\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}$か $\cos\frac{\theta}{2}$では無く、$\cos\theta$ の表記を誤って決定する可能性があります。

2a) $0° < \theta < 90°$ なので、$0° < \frac{\theta}{2} < 45°$ という事は全ての三角比が正の数となります。

$$\text{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} = \left(1-\frac{3}{4}\right) \div 2 = \frac{1}{8} \Rightarrow \text{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} = \left(1+\frac{3}{4}\right) \div 2 = \frac{7}{8} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\text{sen}\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \div \frac{\sqrt{14}}{4} = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}.$$

2b) $90° < \theta < 180°$ なので、$45° < \frac{\theta}{2} < 90°$ という事は全ての三角比が正の数となります。

$$\text{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} = \left(1+\frac{5}{12}\right) \div 2 = \frac{17}{24} \Rightarrow \text{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{17}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{102}}{12}.$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} = \left(1-\frac{5}{12}\right) \div 2 = \frac{7}{24} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{42}}{12}.$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{102}}{12} \div \frac{\sqrt{42}}{12} = \frac{\sqrt{102}}{\sqrt{42}} = \frac{\sqrt{119}}{7}.$$

2c) $180° < \theta < 270°$ なので、$90° < \frac{\theta}{2} < 135°$ という事は $\text{sen}\frac{\theta}{2}$ は正の数であり、$\cos\frac{\theta}{2}$ と $\tan\frac{\theta}{2}$ はそれぞれ負の数となります。

$$\text{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} = \left(1+\frac{1}{9}\right) \div 2 = \frac{5}{9} \Rightarrow \text{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} = \left(1-\frac{1}{9}\right) \div 2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = -\frac{2}{3}.$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{5}}{3} \div \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

2d) $270° < \theta < 360°$ なので、$135° < \frac{\theta}{2} < 180°$ という事は、$\text{sen}\frac{\theta}{2}$ は正の数であり、$\cos\frac{\theta}{2}$ と $\tan\frac{\theta}{2}$ はそれぞれ負の数となります。

$$\text{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} = \left(1-\frac{1}{8}\right) \div 2 = \frac{7}{16} \Rightarrow \text{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} = \left(1+\frac{1}{8}\right) \div 2 = \frac{9}{16} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = -\frac{3}{4}.$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{7}}{4} \div \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

3. $180° < \theta < 270°$ なので、$90° < \frac{\theta}{2} < 135°$ という事は、$\text{sen}\frac{\theta}{2}$ は正の数であり、$\cos\frac{\theta}{2}$ と $\tan\frac{\theta}{2}$ はそれぞれの負の数となります。

$\text{sen}\,\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ なので、$\cos\theta = -\sqrt{1-\frac{5}{9}} = -\frac{2}{3}$。よって、

$$\text{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} = \left(1+\frac{2}{3}\right) \div 2 = \frac{5}{6} \Rightarrow \text{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{30}}{6}.$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} = \left(1-\frac{2}{3}\right) \div 2 = \frac{1}{6} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{30}}{6} \div \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = -\sqrt{5}.$$

1.8 学んだことで練習しましょう

1. 各三角比を角度で示し、角度 θ は $0° \leq \theta < 90°$。

a) $\operatorname{sen}(-45°)$　b) $\operatorname{sen} 210°$　c) $\operatorname{sen} 350°$
d) $\cos(-130°)$　e) $\cos(-80°)$　f) $\tan 135°$

2. 証明してください。

a) $\sec(-\theta) = \sec$　b) $\csc(-\theta) = -\csc\theta$
c) $\cot(-\theta) = -\cot\theta$　d) $\sec(90° - \theta) = \csc\theta$
e) $\csc(90° - \theta) = \sec\theta$　f) $\tan(\theta + 45°)\tan(45° - \theta) = 1$

3. $\cot 75° = 2 - \sqrt{3}$ であることを確認します。

4. 証明してください。

a) $\tan(\theta + 180°) = \tan\theta$　b) $\tan(\theta - 180°) = \tan\theta$

5. $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$ を証明して下さい。

6. 各ケースにおいて $\operatorname{sen} 2\theta$、$\cos 2\theta$ と $\tan 2\theta$ を特定してください。

a) $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$、$0° < \theta < 90°$　b) $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{3}$、$180° < \theta < 270°$
c) $\sec\theta = \frac{\sqrt{13}}{2}$、$270° < \theta < 360°$　d) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$、$90° < \theta < 180°$

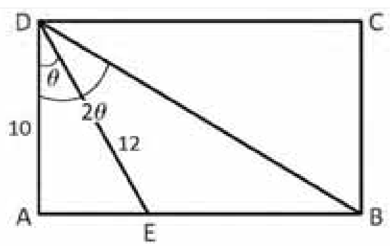
7. $\cos 480°$ と $\operatorname{sen} 480°$ の正確な値を求めてください。

8. $\operatorname{sen}\theta$ の各値については $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$、$\cos\frac{\theta}{2}$ と $\tan\frac{\theta}{2}$ を求めてください。

a) $\operatorname{sen}\theta = -\frac{4}{5}$、$180° < \theta < 270°$　b) $\operatorname{sen}\theta = \frac{5}{12}$、$90° < \theta < 180°$

9. 図において ABCD は長方形です。そして AD = 10、DE = 12 で、∢BDA = 2∢EDA をとっています。

a) $\cos\theta$ の値を求めてください。
b) $\cos 2\theta$ の値を求めてください。
c) BD の距離を求めてください。



達成の目安

1.8 三角関数の解決に関する問題を解いてください。

問題の解答：

1a) $\text{sen}(-45°) = -\text{sen } 45°$

1b) $\text{sen } 210° = -\text{sen}(210° - 180°) = -\text{sen } 30°$

1c) $\text{sen } 350° = -\text{sen}(350° - 180°) = -\text{sen } 170° = -\text{sen}(180° - 170°) = -\text{sen } 10° = -\cos 80°$

1d) $\cos(-130°) = \cos 130° = -\cos(180° - 130°) = -\cos 50° = -\text{sen } 40°$

1e) $\cos(-80°) = \cos 80°$

1f) $\tan 135° = -\tan(180° - 135°) = -\tan 45°$

もしくは $\tan 135° = \tan(180° - 45°) = -\tan 45°$

2a) $\sec(-\theta) = \frac{1}{\cos(-\theta)} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$

2b) $\csc(-\theta) = \frac{1}{\text{sen}(-\theta)} = \frac{1}{-\text{sen }\theta} = -\frac{1}{\text{sen }\theta} = -\csc\theta$

2c) $\cot(-\theta) = \frac{1}{\tan(-\theta)} = \frac{1}{-\tan\theta} = -\frac{1}{\tan\theta} = -\cot\theta$

2d) $\sec(90° - \theta) = \frac{1}{\cos(90° - \theta)} = \frac{1}{\text{sen }\theta} = \csc\theta$

2e) $\csc(90° - \theta) = \frac{1}{\text{sen}(90° - \theta)} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$

2f) $\frac{1}{\tan(\theta + 45°)} = \tan(90° - (\theta + 45°)) = \tan(45° - \theta)$

なので、$\tan(\theta + 45°)\tan(45° - \theta) = 1$。

3. $\tan 75° = 2 + \sqrt{3}$ と分かっているので、

$$\cot 75° = \frac{1}{\tan 75°} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2 - \sqrt{3}.$$

有利化すると

4a) $\tan(\theta + 180°) = \frac{\tan\theta + \cancel{\tan 180°}^{\,0}}{1 - \tan\theta\cancel{\tan 180°}_{\,0}} = \tan\theta$

4b) $\tan(\theta - 180°) = \frac{\tan\theta - \cancel{\tan 180°}^{\,0}}{1 + \tan\theta\cancel{\tan 180°}_{\,0}} = \tan\theta$

問 4a) と 4b) についてもタンジェント、サインとコサインの持つ関係性が活用できます。

5. $\text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta) = (\text{sen }\alpha\cos\beta + \cancel{\cos\alpha\,\text{sen }\beta}) + (\text{sen }\alpha\cos\beta - \cancel{\cos\alpha\,\text{sen }\beta}) = 2\,\text{sen }\alpha\cos\beta$

6a) $\cos 2\theta = 1 - 2\left(\frac{6}{9}\right) = -\frac{1}{3}.$

そして $\cos\theta = \sqrt{1 - \frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ なので、

$\text{sen } 2\theta = 2\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$

$\tan 2\theta = -2\sqrt{2}.$

6b) $\cos 2\theta = \frac{7}{9}$, $\text{sen } 2\theta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$, $\tan 2\theta = \frac{4\sqrt{2}}{7}$

6c) $\cos 2\theta = -\frac{5}{13}$, $\text{sen } 2\theta = -\frac{12}{13}$, $\tan 2\theta = \frac{12}{5}$

6d) $\cos 2\theta = -\frac{1}{3}$, $\text{sen } 2\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan 2\theta = 2\sqrt{2}$

7. 方法 *1.* 480° = 360° + 120° なので、授業 1.4 の問 2g) と 2h) から分かっているのは

$$\cos 480° = \cos 120° = -\frac{1}{2} \text{ で } \text{sen } 480° = \text{sen } 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

方法 *2.* 480° = 2(240°) なので、倍角の証明が活用できます。

8a) $\text{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ 、$\tan\frac{\theta}{2} = -2.$

8b) $\text{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{12+\sqrt{119}}{6}}$,

$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{12-\sqrt{119}}{6}}$,

$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{12+\sqrt{119}}{12-\sqrt{119}}} = \frac{\sqrt{263+24\sqrt{119}}}{5}.$

9a) ΔAED は長方形なので $\cos\theta = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ となります。

9b) $\cos\theta = \frac{5}{6}$ と $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ なので

$$\cos 2\theta = 2\left(\frac{5}{6}\right)^2 - 1 = \frac{7}{18}.$$

9c) ΔABD は長方形なので

$$\cos 2\theta = \frac{10}{BD} \Rightarrow BD = \frac{10}{\cos 2\theta} = 10 \div \frac{7}{18} = \frac{180}{7}.$$

レッスン 2 三角方程式

2.1 三角方程式、第一部*

導入問題

$\tan^2\theta = 1$ を解いて $0° \le \theta < 360°$ を答えてください。

解法

$\tan^2\theta = 1$ を解くために。自乗されているので、両側面のルート自乗を計算します。そうすると $\tan\theta = \pm 1$ となります。ですので、$\tan\ \theta = 1$ もしくは $\tan\ \theta = -1$。ですので、

> $\tan\theta$ が正の数であれば、角は第一もしくは第三象限に位置する事になります。$\tan\theta$ が負の数であれば、角は第二もしくは第四象限に位置する事になります。

- $\tan\ \theta = 1$ が成り立つのは $\theta = 45°$ もしくは $\theta = 180° + 45° = 225°$。
- $\tan\ \theta = -1$ が成り立つのは $\theta = 180° - 45° = 135°$ もしくは $\theta = 360° - 45° = 315°$ の時です。

よって $\tan^2\theta = 1$ の結果は θ が $0°$ から $360°$ の時に $\theta = 45°$、$135°$、$225°$、$315°$ となります。

定義

三角関数の方程式は未知数が三角関数の引数として示される方程式の事を指します。
三角方程式は、未知数が三角比の偏角として現れる方程式です。

三角関数を解き明かす事は等式の解き方を全て割り出す事に繋がります。

三角関数の答えの数は未知数の値によって決まります。例として、$\mathrm{sen}\,\theta = -\frac{1}{2}$ の方程式は $0° \le \theta < 180°$ からすれば解答できません。何故なら $\mathrm{sen}\,\theta$ は $0°$ から $180°$ の間に位置する角度に対し正の数となるからです。

例

$2\cos\theta - 6 = -4$ を解き $0° \le \theta < 360°$を答えて下さい。

解くには $\cos\theta$ を求め

$$
\begin{aligned}
& 2\cos\theta - 6 = -4 \\
\Rightarrow\quad & 2\cos\theta = -4 + 6 \\
\Rightarrow\quad & 2\cos\theta = 2 \\
\Rightarrow\quad & \cos\theta = 1
\end{aligned}
$$

$\cos\theta$ は $\theta = 0°$ の時 1 に等しいので、θ が $0°$ と $360°$ の間に位置する際に方程式 $2\cos\theta - 6 = -4$ は $\theta = 0°$ になります。

問題

$0° \le \theta < 360°$ の方程式を求めてください。

a) $\mathrm{sen}^2\theta = \frac{1}{4}$

b) $\cos^2\theta = \frac{3}{4}$

c) $\tan^2\theta = 3$

d) $\mathrm{sen}^2\theta = \frac{3}{4}$

e) $2\mathrm{sen}\ \theta - \sqrt{3} = 0$

f) $2\cos\ \theta + 3 = 4$

g) $4\mathrm{sen}\ \theta + 5 = 7$

h) $7\tan\ \theta = 2\sqrt{3} + \tan\ \theta$

ユニット6

達成の目安

2.1 既に知っている三角関数を利用して三角方程式を解いてみましょう。

学習の流れ：

レッスン 2 は三角方程式についてです。まずは高校一年のユニット 5 にて学んで修得した三角関数を利用して方程式を解いていきます。

ねらい：

高校一年のユニット 5 にて学んだ定義やツールを利用して三角方程式を解いていきます。この授業では電卓の使用は不要です。

つまづきやすい点：

既に知っている三角関数の説明をします。高校一年のユニット 5 のレッスン 2 を参考にする事も可能です。

問題の解答：

a) $\text{sen}^2\theta = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \pm\frac{1}{2}$.

- $\theta = 30°$ か $\theta = 180° - 30° = 150°$ の時、$\text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}$ 。
- $\text{sen}\,\theta = -\frac{1}{2}$ が成り立つのは $\theta = 180° + 30° = 210°$ もしくは $\theta = 360° - 30° = 330°$ の時です。

$\text{sen}^2\theta = \frac{1}{4}$ の解答は $\theta = 30°$、$150°$、$210°$、$330°$ になります。

b) $\cos^2\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- $\theta = 30°$ か $\theta = 360° - 30° = 330°$ の時、$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。
- $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ が成り立つのは $\theta = 180° - 30° = 150°$ もしくは $\theta = 180° + 30° = 210°$ の時です。

その後、$\cos^2\theta = \frac{3}{4}$ の解答は $\theta = 30°$、$150°$、$210°$、$330°$ になります。

c) $\tan^2\theta = 3 \Rightarrow \tan\theta = \pm\sqrt{3}$.

- $\tan\theta = \sqrt{3}$ が成り立つのは $\theta = 60°$ もしくは $\theta = 180° + 60° = 240°$ の時です。
- $\tan\theta = -\sqrt{3}$ が成り立つのは $\theta = 180° - 60° = 120°$ もしくは $\theta = 360° - 60° = 300°$ の時です。

$\tan^2\theta = 3$ の解答は $\theta = 60°$、$120°$、$240°$、$300°$ になります。

d) $\text{sen}^2\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\text{sen}^2\theta = \frac{3}{4}$ の解答は $\theta = 60°$、$120°$、$240°$、$300°$ になります。

e) $2\,\text{sen}\,\theta - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \theta = 60°$ または $\theta = 120°$

f) $2\cos\theta + 3 = 4 \Rightarrow 2\cos\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta = 60°$ または $\theta = 300°$

g) $4\,\text{sen}\,\theta + 5 = 7 \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta = 30°$ または $\theta = 150°$

h) $7\tan\theta = 2\sqrt{3} + \tan\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \theta = 30°$ または $\theta = 210°$

2.2 三角方程式、第二部（ピタゴラスの公式の使用）

導入問題

$2\cos^2\theta - \mathrm{sen}\,\theta - 1 = 0$ を解き $0° \le \theta < 360°$ を答えて下さい。

解法

sen θ のみになるように方程式を解きます。その際にピタゴラスの公式を利用します。

$$\begin{aligned} & 2\cos^2\theta - \mathrm{sen}\,\theta - 1 = 0 \\ \Rightarrow\ & 2(1 - \mathrm{sen}^2\theta) - \mathrm{sen}\,\theta - 1 = 0 \\ \Rightarrow\ & 2 - 2\mathrm{sen}^2\theta - \mathrm{sen}\,\theta - 1 = 0 \\ \Rightarrow\ & -2\mathrm{sen}^2\theta - \mathrm{sen}\,\theta + 1 = 0 \\ \Rightarrow\ & 2\mathrm{sen}^2\theta + \mathrm{sen}\,\theta - 1 = 0 \end{aligned}$$

ピタゴラスより $\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta = 1$ を利用し、$\cos^2\theta = 1 - \mathrm{sen}^2\theta$ もしくは $\mathrm{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ だと確認できます。

$y = \mathrm{sen}\,\theta$ に変換すると、方程式が $2y^2 + y - 1 = 0$ となります。

たすき掛けにて多項式を因数分解すると $2y^2 + y - 1 = (2y - 1)(y + 1) = 0$ となります。しかし、$y = \mathrm{sen}\,\theta$ なので三角方程式が二つになります。

- $\theta = 30°$ もしくは $\theta = 180° - 30° = 150°$ の時、$2\mathrm{sen}\,\theta - 1 = 0 \Rightarrow \mathrm{sen}\,\theta = \frac{1}{2}$ となります。
- $\theta = 270°$ の時、$\mathrm{sen}\,\theta + 1 = 0 \Rightarrow \mathrm{sen}\,\theta = -1$ となります。

方程式も利用できます。
$2y^2 + y - 1 = 0$ を解くために。

よって $2\cos^2\theta - \mathrm{sen}\,\theta - 1 = 0$ の結果は $0° \le \theta < 360°$ の時に $\theta = 30°$、$150°$、$270°$ となります。

まとめ

ピタゴラスの公式により二次方程式になる三角方程式もあります。そうする事によりサインかコサインのみの証明が可能になります。

例

$2\mathrm{sen}^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$ を解き $0° \le \theta < 360°$ を答えて下さい。

$\cos\theta$ のみになるように方程式を解きます。その際にピタゴラスの公式を利用します。

$$\begin{aligned} & 2\mathrm{sen}^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0 \\ \Rightarrow\ & 2(1 - \cos^2\theta) + 3\cos\theta - 3 = 0 \\ \Rightarrow\ & 2 - 2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0 \\ \Rightarrow\ & -2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 1 = 0 \\ \Rightarrow\ & 2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0 \end{aligned}$$

たすき掛けにより $2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1$ を因数分解します。

$2\cos\theta$	-1	$-\cos\theta$
$\cos\theta$	-1	$-2\cos\theta$
$2\cos^2\theta$	1	$-3\cos\theta$

未知数の $\cos\theta$ を計算すると $2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = (2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 1) = 0$ となります。

よって、$2\cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$、という事は $\theta = 60°$ もしくは $\theta = 360° - 60° = 300°$。

もしくは $\cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1$ という事は $\theta = 0°$。

よって $2\mathrm{sen}^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$ の解答は $0° \le \theta < 360°$ となり、$\theta = 0°$、$60°$、$300°$ が分かります。

問題

$0° \le \theta < 360°$ の方程式を求めてください。

a) $2\cos^2\theta + \mathrm{sen}\,\theta - 1 = 0$

b) $-3\mathrm{sen}\,\theta + \cos^2\theta = 3$

c) $4\cos^2\theta + 4\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\theta - 7 = 0$

d) $2\mathrm{sen}^2\theta - 3 = \cos\theta - 2$

復習しよう。
$-1 \le \mathrm{sen}\,\theta \le 1$ と
$-1 \le \cos\theta \le 1$。

172

達成の目安

2.2 ピタゴラスの公式を用いて三角方程式を解き、三角関数の結果が一通りになる二次方程式にしてください。

学習の流れ：

三角方程式の問題が続きます。今回はピタゴラスの公式を用いて三角方程式を解き、角度θの三角関数の結果が一通りになる二次方程式にします。

問題の解答：

方程式は変換を実施する事で解くことが可能ですが、今回は直接解く事を試みましょう。
直接。

a)

$$\begin{aligned}
2\cos^2\theta + \text{sen}\,\theta - 1 &= 0\\
2(1 - \text{sen}^2\theta) + \text{sen}\,\theta - 1 &= 0\\
2 - 2\,\text{sen}^2\theta + \text{sen}\,\theta - 1 &= 0\\
2\,\text{sen}^2\theta - \text{sen}\,\theta - 1 &= 0\\
(2\,\text{sen}\,\theta + 1)(\text{sen}\,\theta - 1) &= 0
\end{aligned}$$

よって $2\,\text{sen}\,\theta + 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}\,\theta = -\frac{1}{2}$。

$\Rightarrow \theta = 210°$ もしくは $\theta = 330°$.

または $\text{sen}\,\theta - 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}\,\theta = 1 \Rightarrow \theta = 90°$。

したがって、解は $\theta = 90°$、$210°$、$330°$。

b)

$$\begin{aligned}
-3\,\text{sen}\theta + \cos^2\theta &= 3\\
-3\,\text{sen}\theta + 1 - \text{sen}^2\theta - 3 &= 0\\
\text{sen}^2\theta + 3\,\text{sen}\theta + 2 &= 0\\
(\text{sen}\,\theta + 2)(\text{sen}\,\theta + 1) &= 0
\end{aligned}$$

よって $\text{sen}\,\theta + 2 = 0 \Rightarrow \text{sen}\,\theta = -2 < -1$。ですので、この問題に解答はありません。
もしくは $\text{sen}\,\theta + 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}\,\theta = -1 \Rightarrow \theta = 270°$。
よって $-3\,\text{sen}\theta + \cos^2\theta = 3$ の回答は $\theta = 270°$ となります。

c)

$$\begin{aligned}
4\cos^2\theta + 4\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta - 7 &= 0\\
4 - 4\,\text{sen}^2\theta + 4\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta - 7 &= 0\\
4\,\text{sen}^2\theta - 4\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta + 3 &= 0\\
(2\,\text{sen}\,\theta - \sqrt{3})^2 &= 0
\end{aligned}$$

よって $2\,\text{sen}\,\theta - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \theta = 60°$ もしくは $\theta = 120°$。

問 c) について分かる事は
$4\,\text{sen}^2\theta - 4\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta + 3 = (2\,\text{sen}\,\theta)^2 - 2(2\,\text{sen}\,\theta)(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2$
ですので、完全な自乗三項式となります。
また下記のことが分かります。

$$\begin{array}{cccc}
2\,\text{sen}\,\theta & & -\sqrt{3} & -2\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta\\
\downarrow & \times & \downarrow & \\
2\,\text{sen}\,\theta & & -\sqrt{3} & +\ -2\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta\\
\hline
4\,\text{sen}^2\theta & & 3 & -4\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta
\end{array}$$

d)

$$\begin{aligned}
2\,\text{sen}^2\theta - 3 &= \cos\theta - 2\\
2 - 2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 &= 0\\
2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 &= 0\\
(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) &= 0
\end{aligned}$$

なので $2\cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta = 60°$ もしくは $\theta = 300°$。

もしくは $\cos\theta + 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = 180°$。

したがって、解は $\theta = 60°$、$180°$、$300°$。

レッスン 2

2.3 三角方程式、第三部（コサインの倍角の使用）

導入問題

三角方程式 $\cos 2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 2 = 0$ を解き、$0° \leq \theta < 360°$ を求めましょう。

復習しよう。
$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\mathrm{sen}^2\theta.$

解法

コサインの倍角の証明を利用し、

$$
\begin{aligned}
& \cos 2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 2 = 0 \\
\Rightarrow\ & (2\cos^2\theta - 1) - 2\sqrt{2}\cos\theta + 2 = 0 \\
\Rightarrow\ & 2\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0
\end{aligned}
$$

この方程式を解くには解の公式を利用できます。ですが、ある事が分かればたすき掛けで解く事も可能です。

$$
\begin{array}{ccc}
\sqrt{2}\cos\theta & -1 & -\sqrt{2}\cos\theta \\
\sqrt{2}\cos\theta & -1 & -\sqrt{2}\cos\theta \\
\hline
2\cos^2\theta & 1 & -2\sqrt{2}\cos\theta
\end{array}
$$

つまり、$2\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 1 = (\sqrt{2}\cos\theta - 1)(\sqrt{2}\cos\theta - 1) = (\sqrt{2}\cos\theta - 1)^2$ 。ですので、ここから

$$\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

θ が 45° と 315° になる時、$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ となる事が分かります。よって元の方程式の解は θ が 0° と 360° になる時、$\theta = 45°$、315° となる事が分かります。

まとめ

$\cos 2\theta$ という表現が三角方程式にて出題される際、コサインの倍角の証明を利用し、角度 θ のみの結果が出る方程式に変換する必要があります。そうする事で同一の結果にします。通常解くには因数分解をし、求められた解を 0 と同一にし、三角方程式を割り出し解く必要があります。

例

方程式 $\cos 2\theta + 6\mathrm{sen}^2\theta - 1 + (2\sqrt{2} - 2)\mathrm{sen}\,\theta - \sqrt{2} = 0$ を解き $0° \leq \theta < 360°$を求めてください。

$\cos 2\theta = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2\theta$ の証明を代替し、$4\mathrm{sen}^2\theta + (2\sqrt{2} - 2)\mathrm{sen}\,\theta - \sqrt{2} = 0$ を求めます。

導入問題と同様に、この方程式は一般式で解くことができますが、右記のことが指摘されます。

$$
\begin{array}{ccc}
2\mathrm{sen}\,\theta & \sqrt{2} & 2\sqrt{2}\mathrm{sen}\,\theta \\
2\mathrm{sen}\,\theta & -1 & -2\mathrm{sen}\,\theta \\
\hline
4\mathrm{sen}^2\theta & -\sqrt{2} & 2\sqrt{2}\mathrm{sen}\,\theta - 2\mathrm{sen}\,\theta
\end{array}
$$

よって $4\mathrm{sen}^2\theta + (2\sqrt{2} - 2)\mathrm{sen}\theta - \sqrt{2} = (2\mathrm{sen}\,\theta + \sqrt{2})(2\mathrm{sen}\,\theta - 1) = 0$ 。よって、
$\mathrm{sen}\,\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ θ が 225° と 315° の時、もしくは $\mathrm{sen}\,\theta = \frac{1}{2}$ の時、θ の値は 30° と 150°。したがって
$\cos 2\theta + 6\mathrm{sen}^2\theta - 1 + (2\sqrt{2} - 2)\mathrm{sen}\,\theta - \sqrt{2} = 0$ の方程式の解は $\theta = 30°$、150°、225°、315°。

問題

$0° \leq \theta < 360°$ の方程式を求めてください。

a) $\cos 2\theta + \cos\theta = 0$
b) $\cos 2\theta + 3\mathrm{sen}\,\theta - 2 = 0$
c) $\cos 2\theta + \mathrm{sen}\,\theta = 0$
d) $\cos 2\theta + 4\cos\theta = -3$
e) $\cos 2\theta - \sqrt{3}\cos\theta - 2 = 0$

ユニット6

173

達成の目安

2.3 コサインの倍角の証明を用いて三角方程式を解き、角度θの三角関数の結果が一通りになる二次方程式にします。

学習の流れ：

倍角のコサインが出現する三角方程式を解き、変換します。
そうする事で角度 θ のみ出るようにします。

問題の解答：

a)
$$\cos 2\theta + \cos\theta = 0$$
$$(2\cos^2\theta - 1) + \cos\theta = 0$$
$$2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$$
$$(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) = 0$$
$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$ または $\cos\theta = -1$

したがって θ = 60°、180°、300°。

b)
$$\cos 2\theta + 3\,\mathrm{sen}\,\theta - 2 = 0$$
$$(1 - 2\,\mathrm{sen}^2\theta) + 3\,\mathrm{sen}\,\theta - 2 = 0$$
$$2\,\mathrm{sen}^2\theta - 3\,\mathrm{sen}\,\theta + 1 = 0$$
$$(2\,\mathrm{sen}\,\theta - 1)(\mathrm{sen}\,\theta - 1) = 0$$
$\Rightarrow \mathrm{sen}\,\theta = \frac{1}{2}$ または $\mathrm{sen}\,\theta = 1$

したがって θ = 30°、90°、150°。

c)
$$\cos 2\theta + \mathrm{sen}\,\theta = 0$$
$$(1 - 2\,\mathrm{sen}^2\theta) + \mathrm{sen}\,\theta = 0$$
$$2\,\mathrm{sen}^2\theta - \mathrm{sen}\,\theta - 1 = 0$$
$$(2\,\mathrm{sen}\,\theta + 1)(\mathrm{sen}\,\theta - 1) = 0$$
$\Rightarrow \mathrm{sen}\,\theta = -\frac{1}{2}$ または $\mathrm{sen}\,\theta = 1$

したがって θ = 90°、210°、330°。

d)
$$\cos 2\theta + 4\cos\theta = -3$$
$$(2\cos^2\theta - 1) + 4\cos\theta + 3 = 0$$
$$2\cos^2\theta + 4\cos\theta + 2 = 0$$
$$\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = 0$$
$$(\cos\theta + 1)^2 = 0$$
$\Rightarrow \cos\theta = -1$

したがって、θ = 180°。

e)
$$\cos 2\theta - \sqrt{3}\cos\theta - 2 = 0$$
$$(2\cos^2\theta - 1) - \sqrt{3}\cos\theta - 2 = 0$$
$$2\cos^2\theta - \sqrt{3}\cos\theta - 3 = 0$$
$$(2\cos\theta + \sqrt{3})(\cos\theta - \sqrt{3}) = 0$$
$\Rightarrow \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ または $\cos\theta = \sqrt{3}$

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ の時、θ = 150° もしくは θ = 210° となります。

$\cos\theta = \sqrt{3}$ の時、$\sqrt{3} > 1$ のため解くことができません。

したがって θ = 150°、210°。

2.4 三角方程式、第四部（サインの倍角の使用）

導入問題

三角方程式 sen 2θ + cos θ = 0 を解き、$0° \leq \theta < 360°$ を求めましょう。

解法

サインの倍角の証明を利用し、分かる事は

$$\begin{aligned} & \text{sen}\,2\theta + \cos\theta = 0 \\ \Rightarrow\ & 2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + \cos\theta = 0 && \text{倍角の証明を利用し、} \\ \Rightarrow\ & \cos\theta(2\,\text{sen}\,\theta + 1) = 0 && \text{因数分解し、} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \cos\theta = 0$ もしくは $2\,\text{sen}\,\theta + 1 = 0$。

- $\cos\theta = 0$ であれば $\theta = 90°$ もしくは $\theta = 270°$ となります。
- $2\,\text{sen}\,\theta + 1 = 0 \Rightarrow 2\,\text{sen}\,\theta = -1 \Rightarrow \text{sen}\,\theta = -\frac{1}{2}$ であれば、その後、$\text{sen}\,\theta = -\frac{1}{2}$ が成り立つのは $\theta = 180° + 30° = 210°$ もしくは $\theta = 360° - 30° = 330°$ の時です。

よって sen 2θ + cos θ = 0 の解答は $0° \leq \theta < 360°$ となり、θ = 90°、210°、270°、330° が分かります。

まとめ

sen 2θ という表現が三角方程式にて出題される際、サインの倍角の証明、sen 2θ = 2 cos θ sen θ を利用し、角度 θ のみの結果が出る方程式に変換する必要があります。通常解くには因数分解し、二通りの三角関数の値を求めるのですが、そのためには満足する角度を求める必要があります。

例

方程式 sen 2θ + 2sen θ = 0 を解き $0° \leq \theta < 360°$ を求めてください。

サインの倍角の証明を利用して分かる事は

$$\begin{aligned} & \text{sen}\,2\theta + 2\,\text{sen}\,\theta = 0 \\ \Rightarrow\ & 2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + 2\,\text{sen}\,\theta = 0 \\ \Rightarrow\ & 2\,\text{sen}\,\theta(\cos\theta + 1) = 0 \end{aligned}$$

ここで分かる事は $\text{sen}\,\theta = 0$ もしくは $\cos\theta + 1 = 0$。

- $\text{sen}\,\theta = 0$ であれば、θ は 0° もしくは180° となります。
- $\cos\theta + 1 = 0$ であれば、$\cos\theta = -1$ となるので、$\theta = 180°$。

したがって、方程式 sen 2θ + 2sen θ = 0 の解は θ = 0°、180°。

問題

$0° \leq \theta < 360°$ の方程式を求めてください。

a) $\text{sen}\,2\theta + \text{sen}\,\theta = 0$

b) $\text{sen}\,2\theta - \sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta = 0$

c) $\text{sen}\,2\theta = \text{sen}\,\theta$

d) $\text{sen}\,2\theta + \sqrt{2}\cos\theta = 0$

e) $\text{sen}\,2\theta - \cos\theta = 0$

f) $\text{sen}\,2\theta + 2\,\text{sen}\,\theta = 0$

達成の目安

2.4 サインの倍角の証明を用いて三角方程式を解き、角度 θ の三角関数の結果が一通りになる二次方程式にします。

学習の流れ：

倍角のサインが出現する三角方程式を解き、変換します。
そうする事で角度 θ のみ出るようにします。

問題の解答：

a)

$$\text{sen } 2\theta + \text{sen } \theta = 0$$
$$2 \cos \theta \text{ sen } \theta + \text{sen } \theta = 0$$
$$\text{sen } \theta(2 \cos \theta + 1) = 0$$

$\Rightarrow$ $\text{sen } \theta = 0$ または $\cos \theta = -\frac{1}{2}$

したがって $\theta = 0°$、$120°$、$180°$、$240°$。

b)

$$\text{sen } 2\theta - \sqrt{3}\text{sen } \theta = 0$$
$$2 \cos \theta \text{ sen } \theta - \sqrt{3}\text{sen } \theta = 0$$
$$\text{sen } \theta(2 \cos \theta - \sqrt{3}) = 0$$

$\Rightarrow$ $\text{sen } \theta = 0$ または $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

したがって $\theta = 0°$、$30°$、$180°$、$330°$。

c)

$$\text{sen } 2\theta = \text{sen } \theta$$
$$2 \cos \theta \text{ sen } \theta - \text{sen } \theta = 0$$
$$\text{sen } \theta(2 \cos \theta - 1) = 0$$

$\Rightarrow$ $\text{sen } \theta = 0$ または $\cos \theta = \frac{1}{2}$

したがって $\theta = 0°$、$60°$、$180°$、$300°$。

d)

$$\text{sen } 2\theta + \sqrt{2}\cos \theta = 0$$
$$2 \cos \theta \text{ sen } \theta + \sqrt{2}\cos \theta = 0$$
$$\cos \theta(2 \text{ sen } \theta + \sqrt{2}) = 0$$

$\Rightarrow$ $\cos \theta = 0$ または $\text{sen } \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

したがって $\theta = 90°$、$225°$、$270°$、$315°$。

e)

$$\text{sen } 2\theta - \cos \theta = 0$$
$$2 \cos \theta \text{ sen } \theta - \cos \theta = 0$$
$$\cos \theta(2 \text{ sen } \theta - 1) = 0$$

$\Rightarrow$ $\cos \theta = 0$ または $\text{sen } \theta = \frac{1}{2}$

したがって $\theta = 30°$、$90°$、$150°$、$270°$。

f)

$$\text{sen } 2\theta + 2 \text{ sen } \theta = 0$$
$$2 \cos \theta \text{ sen } \theta + 2 \text{ sen } \theta = 0$$
$$2 \text{ sen } \theta(\cos \theta + 1) = 0$$

$\Rightarrow$ $\text{sen } \theta = 0$ または $\cos \theta = -1$

したがって $\theta = 0°$、$180°$。

2.5 三角方程式、第五部*

導入問題

方程式 $\tan 2\theta = \cot\theta$ を解き $0° \le \theta < 360°$ を求めてください。

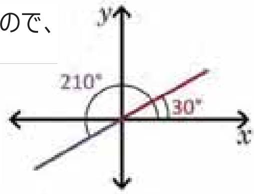
解法

タンジェントの倍角証明と $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ を利用します。

$$\tan 2\theta = \cot\theta \Rightarrow \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$$
$$\Rightarrow (2\tan\theta)(\tan\theta) = 1 - \tan^2\theta$$
$$\Rightarrow 2\tan^2\theta = 1 - \tan^2\theta$$
$$\Rightarrow 3\tan^2\theta = 1 \Rightarrow \tan^2\theta = \frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow \tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

その後、二つの式が確認されます。$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ の時と、$\tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ の時です。ですので、

- $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ であれば $\theta = 30°$ もしくは $\theta = 180° + 30° = 210°$。
- $\tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ であれば、$\theta = 180° - 30° = 150°$ もしくは $\theta = 360° - 30° = 330°$。



よって、三角方程式 $\tan 2\theta = \cot\theta$ の解は $0° \le \theta < 360°$ となるので、$\theta = 30°$、$150°$、$210°$、$330°$。

まとめ

三角方程式にセカント、コセカント、コタンジェントが確認される場合、これらとコサイン、サイン、タンジェントの関係性を利用し、後者の3点のみが残る方程式に変換します。

例

$\sec\theta\csc\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sec\theta = 0$ を解いて、$0° \le \theta < 360°$ を求めてください。

共通因数 $\sec\theta$ が確認されます。ですので、因数分解によって解くことができます。

$$\sec\theta\csc\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sec\theta = 0 \Rightarrow \sec\theta\left(\csc\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 0$$

このことから、$\sec\theta = 0$ もしくは $\csc\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3} = 0$ という事がわかります。ですので、

- $\sec\theta = 0$ という事は $\frac{1}{\cos\theta} = 0$。しかしこれは可能ではありません。何故ならば分子が0の場合のみに分数が 0 となるからです。よってこの方程式は解くことができません。
- もしくは $\csc\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3} = 0$ なので、$\csc\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$。しかし、$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$。
  これが起こるのは θ の値が $60°$ と $120°$ になる場合です。

よって $\sec\theta\csc\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sec\theta = 0$ の結果は $0° \le \theta < 360°$ の時に $\theta = 60°$、$120°$ となります。

問題

$0° \le \theta < 360°$ の方程式を求めてください。

a) $2\sec\theta + 3 = \sec\theta + 5$

b) $\sec\theta\csc\theta + \sqrt{2}\csc\theta = 0$

c) $2\operatorname{sen}\theta + 1 = \csc\theta$

d) $3\csc\theta + 5 = \csc\theta + 9$

e) $4(\cot\theta + 1) = 2(\cot\theta + 2)$ $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

f) $\sec\theta + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

ユニット6

175

達成の目安

2.5 セカント、コセカント、コタンジェントとコサイン、サイン、タンジェントの関係性を利用し、三角方程式を解いてみましょう。

学習の流れ：

コセカント、セカント、コタンジェントを含む三角方程式を学習してユニットが終わります。サイン、コサインとタンジェントと持つ関係性を利用し解いていきます。

問題の解答：

a) $2\sec\theta + 3 = \sec\theta + 5$

$\sec\theta = 2$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$

したがって $\theta = 60°$、$300°$。

b) $\sec\theta\csc\theta + \sqrt{2}\csc\theta = 0$

$\csc\theta(\sec\theta + \sqrt{2}) = 0$

$\csc\theta = 0$ o $\sec\theta = -\sqrt{2}$

$\csc\theta = 0$ の時、$\frac{1}{\text{sen}\,\theta} = 0$という事になるので、不可能となります。ですので、この問題に解答はありません。

$\sec\theta = -\sqrt{2}$であれば、$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ですので、$\theta = 135°$もしくは$\theta = 225°$。

ですので、$\theta = 135°$ もしくは $\theta = 225°$。

c) $2\,\text{sen}\,\theta + 1 = \csc\theta$

$2\,\text{sen}\,\theta + 1 = \frac{1}{\text{sen}\,\theta}$

$2\,\text{sen}^2\theta + \text{sen}\,\theta - 1 = 0$

$(2\,\text{sen}\,\theta - 1)(\text{sen}\,\theta + 1) = 0$

$\Rightarrow\ \text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}$ o $\text{sen}\,\theta = -1$

したがって $\theta = 30°$、$150°$、$270°$。

d) $3\csc\theta + 5 = \csc\theta + 9$

$2\csc\theta = 4$

$\csc\theta = 2$

$\text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}$

したがって $\theta = 30°$、$150°$。

e) $4(\cot\theta + 1) = 2(\cot\theta + 2)$

$2\cot\theta = 0$

$\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} = 0$

$\Rightarrow\ \cos\theta = 0$

したがって $\theta = 90°$、$270°$。

f) $\sec\theta + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$\sec\theta = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

したがって $\theta = 45°$、$315°$。

2.6 学んだことをやってみましょう

各方程式を解き $0° \leq \theta < 360°$ を求めてください。

a) $5(\cos\theta + 1) = 5$

b) $4\mathrm{sen}\,\theta - 1 = 2\mathrm{sen}\,\theta + 1$

c) $3(\tan\theta - 2) = 2\tan\theta - 7$

d) $3\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

e) $\tan^2\theta - 3 = 0$

f) $\cos^2\theta + \mathrm{sen}\,\theta = 1$

g) $1 + \mathrm{sen}\,\theta - \cos^2\theta = 0$

h) $\cos^3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta = 0$

i) $\cos 2\theta + \mathrm{sen}^2\theta = 1$

j) $3\cos 2\theta - 4\cos^2\theta + 2 = 0$

k) $\mathrm{sen}\,2\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta = 0$

l) $\mathrm{sen}\,2\theta = \tan\theta$

m) $2\tan\theta = 1 + \tan^2\theta$

n) $\tan\theta - 3\cot\theta = 0$

問 1 には $\mathrm{sen}(\alpha + \beta)$ の値を求め、角度加算の証明を利用します。

2.7 ユニットの問題

1. $0° < \alpha < 90°$, $\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$ と $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{4}{5}$ であれば、$\mathrm{sen}\,\beta$、$\cos\beta$、$\tan\beta$ の値を求めてください。

2. $0° \leq \theta < 360°$ であれば、各方程式を解いてください。

   a) $\mathrm{sen}\,2\theta - 3\cos\theta = 0$

   b) $\cos 2\theta - \mathrm{sen}\,\theta - 1 = 0$

3. $A + B + C = 180°$ であれば、$\mathrm{sen}(B + C) = \mathrm{sen}\,A$ という事を証明してください。

4. $\tan 35° = x$ であれば、証明してください

$$\frac{\tan 145° - \tan 125°}{1 + \tan 145° \tan 215°} = \frac{1}{x}.$$

5. 角度 θ は $\mathrm{sen}(\theta + 30°) = \frac{3\sqrt{3}+4}{10}$ と $\mathrm{sen}(\theta - 30°) = \frac{3\sqrt{3}-4}{10}$ となります。$\mathrm{sen}\,\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めてください。

達成の目安

2.6 三角方程式に関する問題を解いてください。

問題の解答：

a) $5(\cos\theta + 1) = 5 \Rightarrow \cos\theta = 0$

したがって $\theta = 90°$、$270°$。

b) $4\text{sen}\,\theta - 1 = 2\text{sen}\,\theta + 1 \Rightarrow \text{sen}\,\theta = 1 \Rightarrow \theta = 90°$

したがって、$\theta = 90°$。

c) $3(\tan\theta - 2) = 2\tan\theta - 7 \Rightarrow \tan\theta = -1$

したがって $\theta = 135°$、$315°$。

d) $3\tan\theta + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

したがって $\theta = 150°$、$330°$。

e) $\tan^2\theta - 3 = 0 \Rightarrow \tan\theta = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \theta = 60°, 120°, 240°, 300°$

したがって $\theta = 60°$、$120°$、$240°$、$300°$。

f) $\cos^2\theta + \text{sen}\,\theta = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\theta - \text{sen}\,\theta = 0$

$\Rightarrow \text{sen}\,\theta(\text{sen}\,\theta - 1) = 0$

$\Rightarrow \text{sen}\,\theta = 0 \text{ o } \text{sen}\,\theta = 1$

したがって $0°$、$90°$、$180°$。

g) $1 + \text{sen}\,\theta - \cos^2\theta = 0 \Rightarrow \text{sen}^2\theta + \text{sen}\,\theta = 0$

$\Rightarrow \text{sen}\,\theta(\text{sen}\,\theta + 1) = 0$

$\Rightarrow \text{sen}\,\theta = 0 \text{ o } \text{sen}\,\theta = -1$

したがって $\theta = 0°$、$180°$、$270°$。

h) $\cos^3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta\left(\cos^2\theta - \frac{3}{4}\right) = 0$

$\Rightarrow \cos\theta = 0 \text{ o } \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

したがって$\theta = 30°$、$90°$、$150°$、$210°$、$270°$、$330°$。

i) $\cos 2\theta + \text{sen}^2\theta = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\theta = 0$

$\Rightarrow \text{sen}\,\theta = 0$

したがって $\theta = 0°$、$180°$。

j) $3\cos 2\theta - 4\cos^2\theta + 2 = 0$

$3(2\cos^2\theta - 1) - 4\cos^2\theta + 2 = 0$

$2\cos^2\theta - 1 = 0$

$\cos^2\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

したがって$\theta = 45°$、$135°$、$225°$、$315°$

k) $\text{sen}\,2\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta = 0$

$2\,\text{sen}\,\theta\cos^2\theta + 2\cos^2\theta = 0$

$2\cos^2\theta(\text{sen}\,\theta + 1) = 0$

$\Rightarrow \cos\theta = 0 \text{ o } \text{sen}\,\theta = -1$

したがって $\theta = 90°$、$270°$。

l) $\text{sen}\,2\theta = \tan\theta$

$2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$

$2\,\text{sen}\,\theta\cos^2\theta = \text{sen}\,\theta$

$\text{sen}\,\theta(2\cos^2\theta - 1) = 0$

$\Rightarrow \text{sen}\,\theta = 0 \text{ o } \cos^2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

したがって$\theta = 0°$、$45°$、$135°$、$180°$、$225°$、$315°$。

m) $2\tan\theta = 1 + \tan^2\theta \Rightarrow \tan^2\theta - 2\tan\theta + 1 = 0$

$\Rightarrow (\tan\theta - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow \tan\theta = 1$

したがって $\theta = 45°$、$225°$。

m) もタンジェントとサイン、コサインの関係性を利用し解くことが出来ますが、手順としてはより長くなります。

n) $\tan\theta - 3\cot\theta = 0 \Rightarrow \tan\theta - \frac{3}{\tan\theta} = 0, \tan\theta \neq 0 \Rightarrow \tan^2\theta = 3 \Rightarrow \tan\theta = \pm\sqrt{3}$

したがって$\theta = 60°$、$120°$、$240°$、$300°$。

達成の目安

2.7 証明と三角方程式に関する問題を解いてください。

1. $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$ と $0° < \alpha < 90°$ なので、$\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$ となります。一方、

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{4}{5}\cos\beta - \frac{3}{5}\text{sen}\,\beta = -\frac{4}{5} \Rightarrow 4\cos\beta - 3\,\text{sen}\,\beta = -4 \Rightarrow \cos\beta = \frac{3}{4}\text{sen}\,\beta - 1.$$

$\text{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1$ なので、

$$\text{sen}^2\beta + \left(\frac{3}{4}\text{sen}\,\beta - 1\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\beta + \frac{9}{16}\text{sen}^2\beta - \frac{3}{2}\text{sen}\,\beta + 1 = 1$$
$$\Rightarrow \frac{25}{16}\text{sen}^2\beta - \frac{3}{2}\text{sen}\,\beta = 0$$
$$\Rightarrow \text{sen}\,\beta\left(\frac{25}{16}\text{sen}\,\beta - \frac{3}{2}\right) = 0$$
$$\Rightarrow \text{sen}\,\beta = 0 \text{ o } \text{sen}\,\beta = \frac{24}{25}$$

- $\text{sen}\,\beta = 0$ であれば、$\cos\beta = -1$ と $\tan\beta = 0$。
- $\text{sen}\,\beta = \frac{24}{25}$ であれば、$\cos\beta = -\frac{7}{25}$ と $\tan\beta = -\frac{24}{7}$ 。

2a) $\text{sen}\,2\theta - 3\cos\theta = 0 \Rightarrow 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - 3\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta(2\,\text{sen}\,\theta - 3) = 0$
という事は $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = 90°$ もしくは $\theta = 270°$ もしくは $2\,\text{sen}\,\theta - 3 = 0 \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{3}{2}$なのでこの方程式は解くことができません。したがって、解は $\theta = 90°$、$270°$。

2b) $\cos 2\theta - \text{sen}\,\theta - 1 = 0 \Rightarrow 1 - 2\,\text{sen}^2\theta - \text{sen}\,\theta - 1 = 0 \Rightarrow 2\,\text{sen}^2\theta + \text{sen}\,\theta = 0 \Rightarrow \text{sen}\,\theta(2\,\text{sen}\,\theta + 1) = 0$
という事は $\text{sen}\,\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0°$ もしくは $\theta = 180°$ もしくは $2\,\text{sen}\,\theta + 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}\,\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 210°$ もしくは $\theta = 330°$。したがって、解は $\theta = 0°$、$180°$、$210°$、$330°$。

3. $A + B + C = 180°$ なので、$B + C = 180° - A$。したがって、

$$\text{sen}(B+C) = \text{sen}(180° - A) = \text{sen}\,A.$$

4. $145° = 180° - 35°$、$125° = 90° + 35°$ と $215° = 180° + 35°$ という事が分かります。
後に $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta \Rightarrow \tan 145° = \tan(180° - 35°) = -\tan 35° = -x$ となります。
同様に $\tan(90° + \theta) = -\frac{1}{\tan\theta} \Rightarrow \tan 125° = \tan(90° + 35°) = -\frac{1}{\tan 35°} = -\frac{1}{x}$
最終的に $\tan(180° + \theta) = \tan\theta \Rightarrow \tan 215° = \tan(180° + 35°) = \tan 35° = x$ となります。
$\frac{\tan 145° - \tan 125°}{1 + \tan 145° \tan 215°}$ に代入すると結果は、

$$\frac{\tan 145° - \tan 125°}{1 + \tan 145° \tan 215°} = \frac{-x - \left(-\frac{1}{x}\right)}{1 + (-x)x} = \frac{-x^2 + 1}{x(1-x^2)} = \frac{1 - x^2}{x(1-x^2)} = \frac{1}{x}.$$

5. サインの角度加算の証明を利用して分かる事は

$$\text{sen}(\theta + 30°) = \text{sen}\,\theta\cos 30° + \cos\theta\,\text{sen}\,30° = \text{sen}\,\theta\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \cos\theta\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta}{2} + \frac{\cos\theta}{2} = \frac{3\sqrt{3}+4}{10},$$
$$\text{sen}(\theta - 30°) = \text{sen}\,\theta\cos 30° - \cos\theta\,\text{sen}\,30° = \text{sen}\,\theta\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \cos\theta\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta}{2} - \frac{\cos\theta}{2} = \frac{3\sqrt{3}-4}{10}.$$

双方の結果を足すと $\frac{2\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{10} \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{3}{5}$。

そのほかにもひき算をすると、$\frac{2\cos\theta}{2} = \frac{8}{10} \Rightarrow \cos\theta = \frac{4}{5}$ となります。