L'angle inscrit et l'angle au centre

Module 7

Μαθηματικη Συνταξιζ

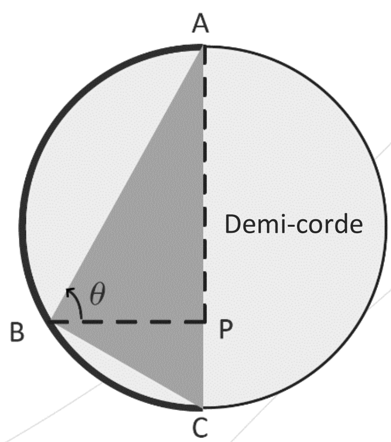
Κλαυδιοζ Πτολεμαιοζ

τὸν μὲν ὁμόκεντρον τῷ διὰ μέσων τῶν ζῳδίων κύκλον τὸν ΑΒΓΔ περὶ κέντρον τὸ Ε καὶ διάμετρον τὴν ΑΕΓ, τὸν δ' ἐπ' αὐτοῦ φερόμενον ἐπίκυκλον, ἐφ' οὗ κινεῖται ὁ ἀστήρ, τὸν ΖΗΘΚ περὶ κέντρον τὸ Α, φανερὸν καὶ οὕτως αὐτόθεν ἔσται, διότι τοῦ ἐπικύκλου ὁμαλῶς διερχομένου τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ὡς ἀπὸ τοῦ Α λόγου ἕνεκα ἐπὶ τὸ Β καὶ τοῦ ἀστέρος τὸν ἐπίκυκλον, ὅταν μὲν κατὰ τῶν Ζ καὶ Θ γένηται ὁ ἀστήρ, ἀδιαφόρως φανήσεται τῷ Α κέντρῳ τοῦ ἐπικύκλου, ὅταν δὲ κατὰ ἄλλων, οὐκέτι, ἀλλὰ κατὰ μὲν τοῦ Η φέρε εἰπεῖν γινόμενος πλείονα δόξει πεποιῆσθαι κίνησιν τῆς ὁμαλῆς τῇ ΑΗ περιφερείᾳ, κατὰ δὲ τοῦ Κ ἐλάσσονα ὁμοίως τῇ ΑΚ περιφερείᾳ.

Une page du traité d'astronomie, l'Almageste

Les civilisations anciennes utilisaient l'astronomie pour prédire une chasse abondante, le moment propice pour planter ou l'arrivée de l'hiver.

Dans le traité d'astronomie connu sous le nom *d'Almageste*, le mathématicien gréco-égyptien Claude Ptolémée (II^{e} siècle) fit une description mathématique du système géocentrique (les planètes tournent autour de la terre). Une de ses contributions aux mathématiques est un théorème sur les quadrilatères cycliques, utilisant les propriétés essentielles des angles inscrits.



L'angle inscrit ABC est droit. Cette construction permet d'obtenir d'importantes relations.

La trigonométrie, qui étudie la relation entre les côtés et les angles d'un triangle, a été développée par des études astronomiques. Au V^{e} et VI^{e} siècles, les mathématiciens indiens Varahamihira et Brahmagupta ont formulé de nombreuses propriétés trigonométriques en utilisant la demi-corde (un triangle inscrit dans le cercle dont un des côtés représente le diamètre du cercle). En outre, les quadrilatères cycliques sont basés sur l'étude des angles inscrits.

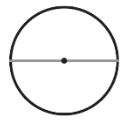
Les sujets abordés dans ce module traitent de l'angle inscrit, de sa définition au théorème qui établit une relation avec l'angle au centre. Vous étudierez également la construction des droites tangentes sur le cercle, ainsi que la définition de l'angle semi-inscrit et la relation entre les cordes et les arcs de cercle.

1.1 Les éléments du cercle

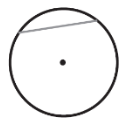
Les éléments du cercle sont :

Le rayon : le segment qui va du centre à un point sur la circonférence du cercle.

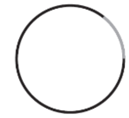
Le diamètre : le segment qui va d'un point de la circonférence à un autre en passant par le centre du cercle.



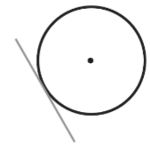
Le corde : le segment qui va d'un point de la circonférence du cercle à un autre.



L'arc : toute portion de la circonférence du cercle.



La tangente : la droite qui touche la circonférence du cercle en un point.

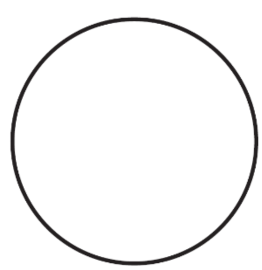


1. Écris dans les parenthèses la lettre désignant l'élément du cercle correspondant à la définition donnée. Certains éléments peuvent avoir plusieurs définitions.

a) La corde	( )	Un élément dont la taille est la moitié de celle du diamètre.
b) La tangente	( )	Un segment tracé entre deux points différents sur la circonférence du cercle.
c) Le rayon	( )	Un élément perpendiculaire au rayon à un point de la circonférence du cercle.
d) L'arc	( )	Le segment qui va du centre à un point sur la circonférence du cercle.
e) Le diamètre	( )	Un élément de la circonférence déterminé par l'ouverture d'un angle au centre.
	( )	Un élément dont la longueur est le double de celle du rayon.
	( )	La corde la plus longue dans un cercle.
	( )	Une partie de la circonférence du cercle délimitée par deux points.

2. Utilise le cercle fourni et trace les éléments en utilisant la couleur indiquée.

a) La corde : rouge
b) La tangente : bleu
c) Le rayon : vert
d) L'arc : jaune
e) Le diamètre : bleu-ciel



Combien de temps t'a-t-il fallu pour résoudre les problèmes ?

1.2 Définition et mesure des angles inscrits

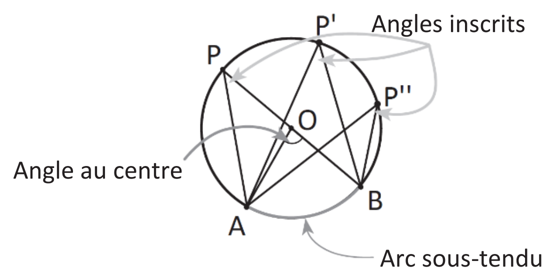
Relie les éléments du cercle avec leur définition.

1. Le diamètre — a) Un segment tracé entre deux points différents sur la circonférence du cercle.
2. La tangente — b) Le segment qui va du centre à un point sur la circonférence du cercle.
3. Le rayon — c) Une partie de la circonférence du cercle délimitée par deux points.
4. L'arc — d) Une droite qui touche la circonférence du cercle en un point unique.
5. La corde — e) Le segment tracé entre deux points de la circonférence et qui passe par le centre du cercle.

Les angles dont le sommet se trouve sur la circonférence du cercle sont appelés des **angles inscrits**.

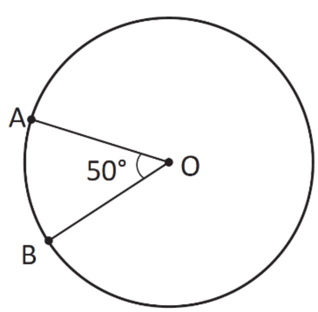
Dans un cercle, la mesure de l'angle au centre qui sous-tend le même arc que n'importe quel angle inscrit est le double de la mesure de n'importe quel angle inscrit qui sous-tend le même arc.

Souviens-toi que « sous-tendre » signifie « partager le même arc ».

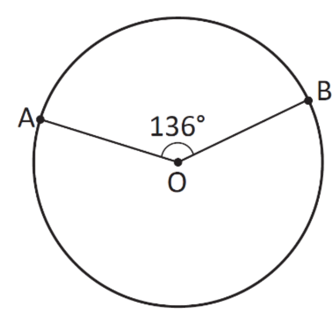


Trace trois angles inscrits différents dans les cercles suivants et calcule leur mesure.

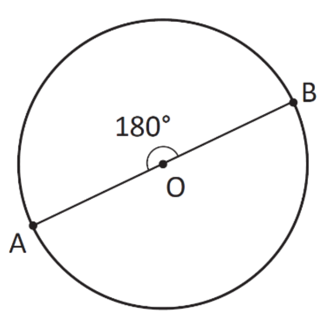
a)



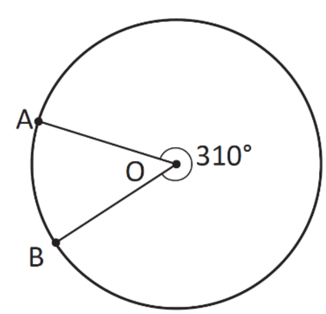
b)



c)



d)



Combien de temps t'a-t-il fallu pour résoudre les problèmes ?

1.3 Les angles inscrits, 1re partie

R

1. Donne la définition des éléments du cercle.

a) Le diamètre : ____

____

b) La tangente : ____

____

c) Le rayon : ____

____

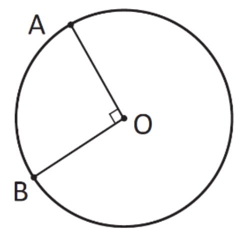
d) L'arc : ____

____

e) La corde : ____

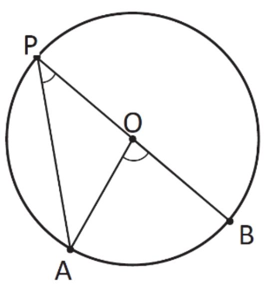
____

2. Trace trois angles inscrits différents dans le cercle et détermine leur mesure.

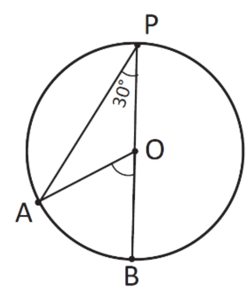


C

Dans un cercle, pour tout angle inscrit, il est vrai de dire que **la mesure de l'angle au centre est le double de celle de l'angle inscrit qui sous-tend le même arc.** Par exemple :



∢BOA = 2∢BPA

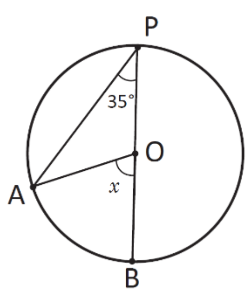


Comme ∢BOA = 2∢BPA

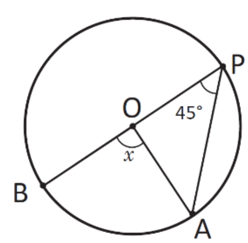
∢BOA = 2(30) = 60°

Détermine la valeur de x dans chaque cas.

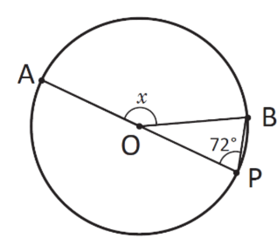
a)



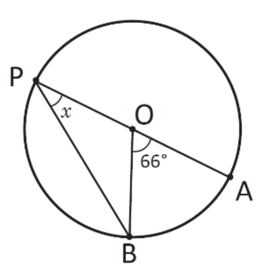
b)



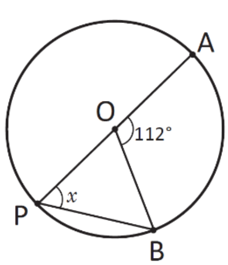
c)



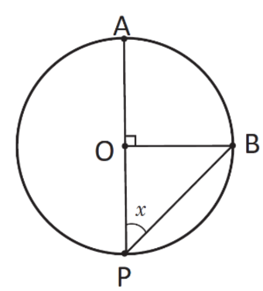
d)



e)



f)

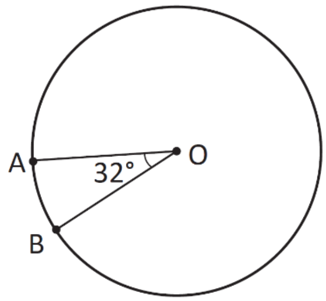


Combien de temps t'a-t-il fallu pour résoudre les problèmes ?

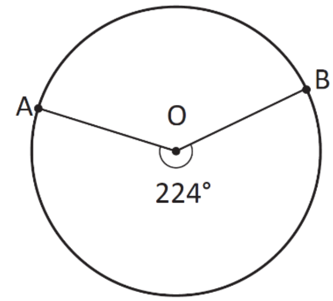
1.4 Les angles inscrits, 2^e partie

R 1. Trace trois angles inscrits différents dans les cercles suivants et détermine leur mesure :

a)

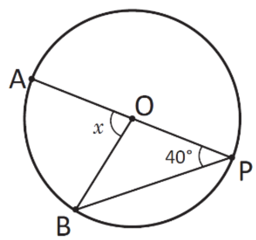


b)

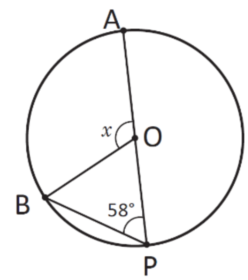


2. Détermine la valeur de x dans chaque cas :

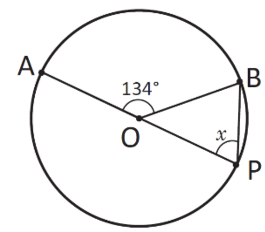
a)



b)

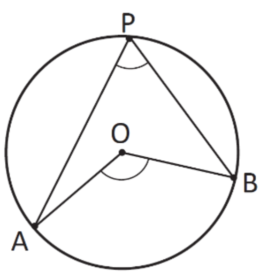


c)

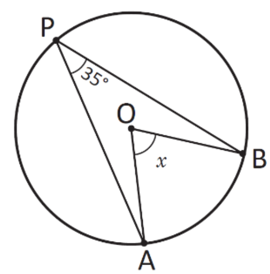


C

Dans les angles inscrits dans l'angle au centre, qui sous-tend le même arc, il est également vrai que **la mesure de l'angle au centre est le double de la mesure de l'angle inscrit**. Par exemple :



∢BOA = 2∢BPA

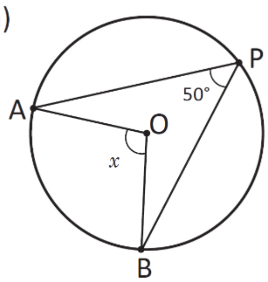


Comme ∢BOA = 2∢BPA

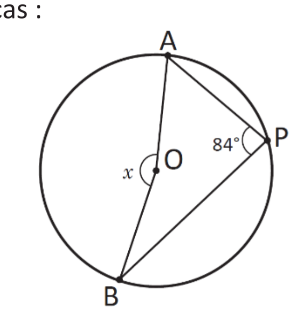
∢BOA = 2(35) = 70°

Détermine la valeur de x dans chaque cas :

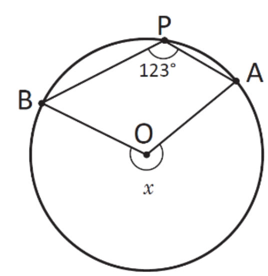
a)



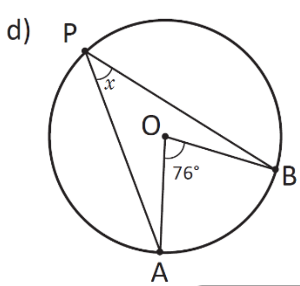
b)



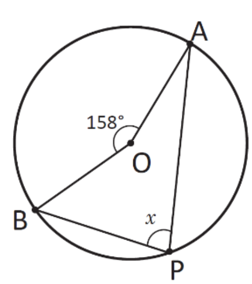
c)



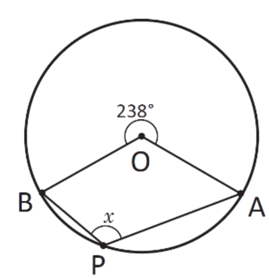
d)



e)



f)



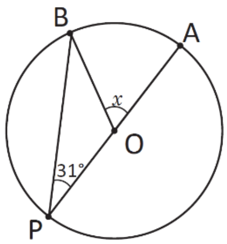
Combien de temps t'a-t-il fallu pour résoudre les problèmes ?

Module 7

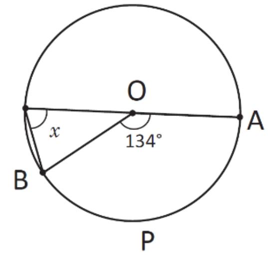
1.5 Le théorème de l'angle inscrit

1. Détermine la valeur de x dans chaque cas :

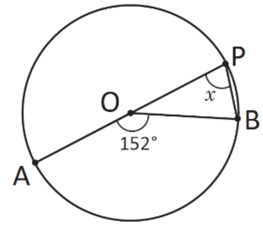
a)



b)

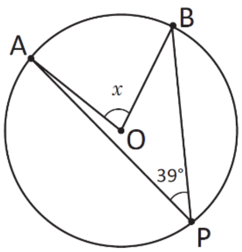


c)

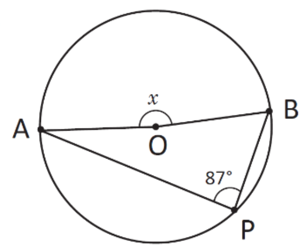


2. Détermine la valeur de x dans chaque cas :

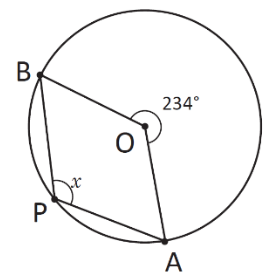
a)



b)



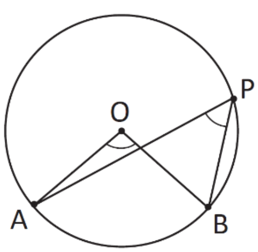
c)



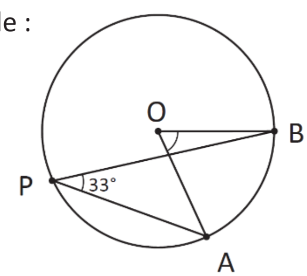
Dans un cercle, pour tout angle inscrit, il est vrai de stipuler que **la mesure de l'angle au centre est le double de la mesure de l'angle inscrit qui sous-tend le même arc**.
Ce résultat est connu sous le nom de théorème de l'angle inscrit.

Les angles inscrits qui sous-tendent le même arc sont également égaux.

Par exemple :



∢BOA = 2∢BPA

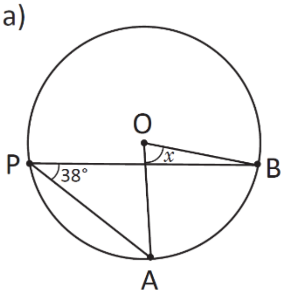


Comme ∢BOA = 2∢BPA.

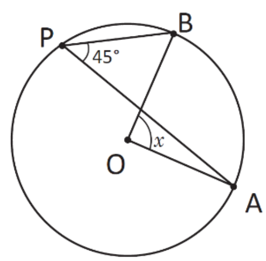
∢BOA = 2(33) = 66°.

Détermine la valeur de x, y et z dans chaque cas :

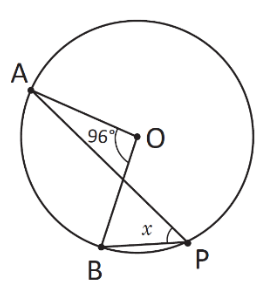
a)



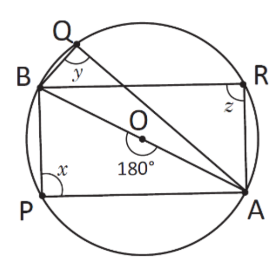
b)



c)



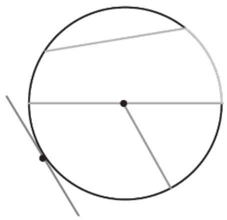
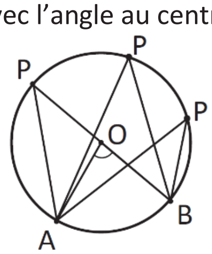
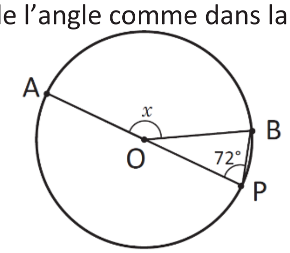
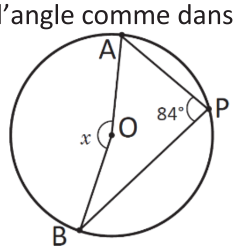
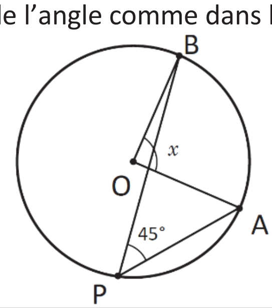
d)



Combien de temps t'a-t-il fallu pour résoudre les problèmes ?

1.6 Auto-évaluation

Résous les problèmes suivants et indique d’un « x » la case qui te semble appropriée en fonction de ce que tu as appris. Prête attention à tes réponses.

Sujet	Oui	Peux mieux faire	Non	Remarque
1. J’identifie les éléments du cercle dans la figure ci-dessous. 				
2. Je comprends la définition d’un angle inscrit et j’identifie son lien potentiel avec l’angle au centre de même arc. 				
3. J’applique le théorème de l’angle inscrit lorsque le centre est sur un côté de l’angle comme dans la figure. 				
4. J’applique le théorème de l’angle inscrit lorsque le centre est à l’intérieur de l’angle comme dans la figure. 				
5. J’applique le théorème de l’angle inscrit lorsque le centre est à l’extérieur de l’angle comme dans la figure. 				

Combien de temps t’a-t-il fallu pour résoudre les problèmes ?

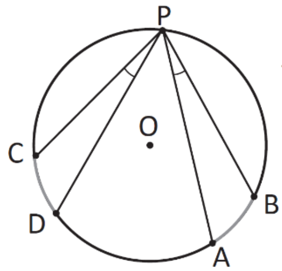
Module 7

1.7 Les arcs congruents

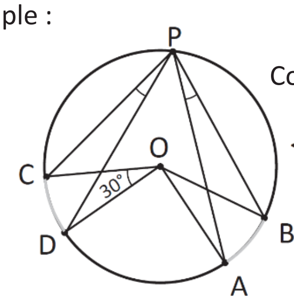
Dans un cercle, les angles inscrits qui sous-tendent des arcs égaux, ont la même mesure.

Il est également vrai que, si deux angles inscrits sont égaux, alors les arcs qu'ils sous-tendent sont également égaux.

Par exemple :



$\sphericalangle BPA = \sphericalangle DPC$

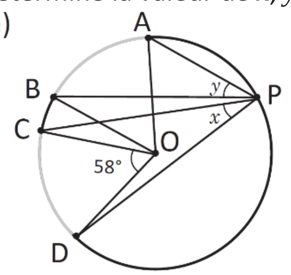


Comme $\sphericalangle BOA = \sphericalangle DOC$.

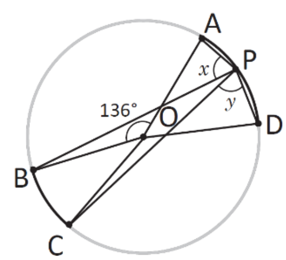
$\sphericalangle BPA = \sphericalangle DPC = \frac{30}{2} = 15°$.

1. Détermine la valeur de x, y et z dans chaque cas. Considère que l'arc $\overset{\frown}{CD}$ = l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

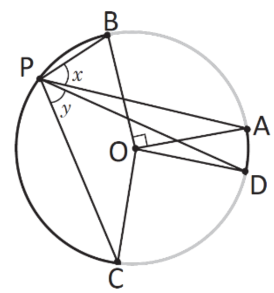
a)



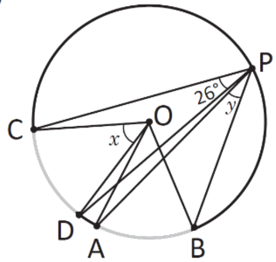
b)



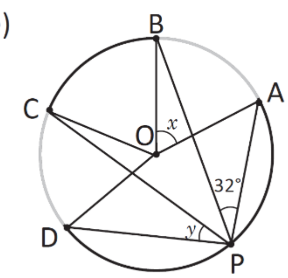
c)



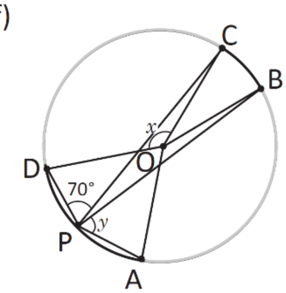
d)



e)

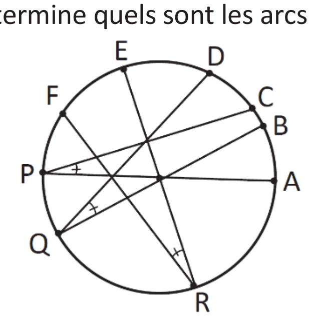


f)

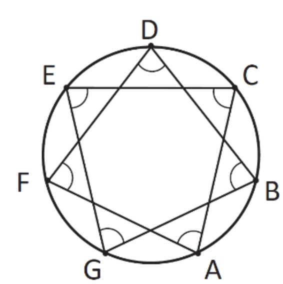


2. Détermine quels sont les arcs égaux, sur la circonférence des cercles ci-dessous.

a)



b)



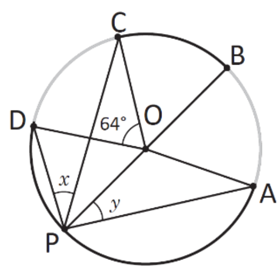
Combien de temps t'a-t-il fallu pour résoudre les problèmes ?

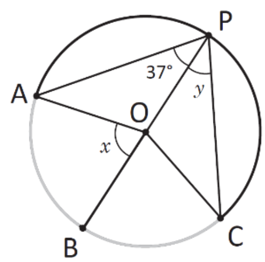
1.8 Auto-évaluation

Résous les problèmes suivants et indique d'un « × » la case qui te semble appropriée en fonction de ce que tu as appris. Prête attention à tes réponses.

<table>
<tr><th>Sujet</th><th>Oui</th><th>Peux mieux faire</th><th>Non</th><th>Remarque</th></tr>
<tr><td>

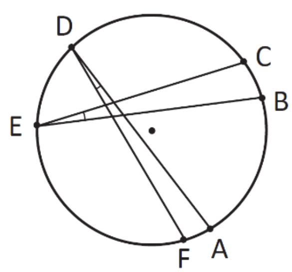
1. J'applique les propriétés des arcs égaux pour déterminer la taille des angles comme dans les figures.





</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>

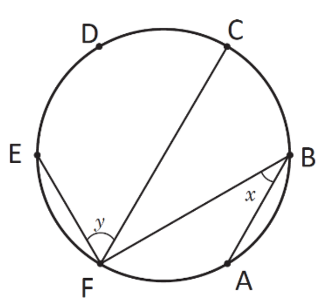
2. J'utilise les propriétés des angles inscrits de même mesure pour déterminer quels arcs sont égaux, comme dans la figure ci-dessous.



</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>

3. J'applique correctement les résultats du théorème de l'angle inscrit et sa réciproque pour résoudre des problèmes tels que celui qui suit :

Détermine la valeur de x et y si, dans la figure ci-dessous, les points A, B, C, D, E et F divisent la circonférence du cercle en six arcs égaux.



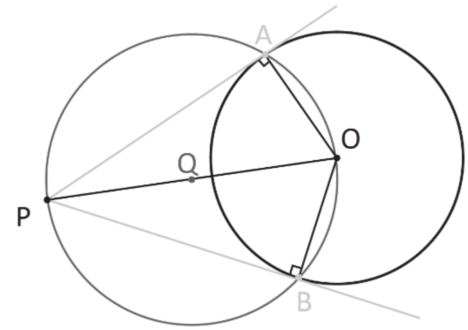
</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Combien de temps t'a-t-il fallu pour résoudre les problèmes ?

2.1 La constrution de tangentes à un cercle

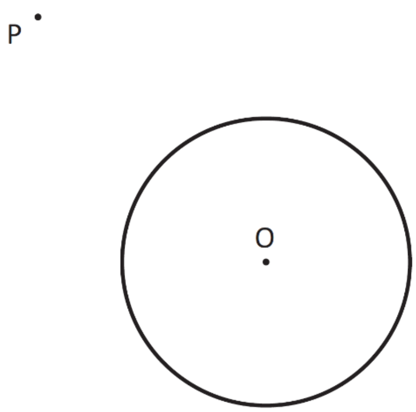
En utilisant les résultats de l’angle inscrit, il est possible de construire des droites passant par un point P et tangentes à un cercle donné, en suivant les étapes ci-dessous :

1. Détermine le centre du segment PO.
2. Trace le cercle dont le diamètre est PO.
3. Indique les points A et B où les cercles se croisent.

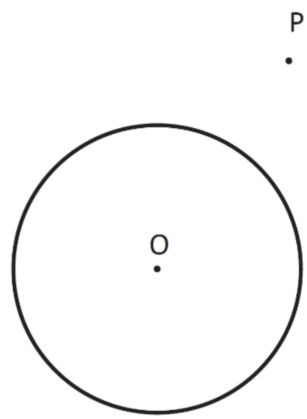


1. Construis les tangentes passant par le point P pour chacun des cercles suivants :

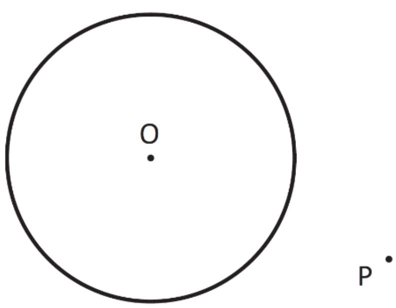
a)



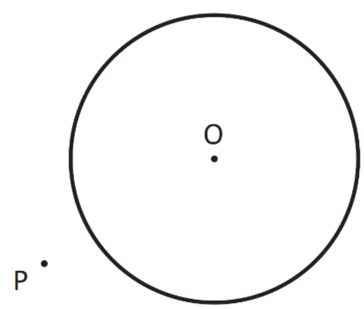
b)



c)



d)

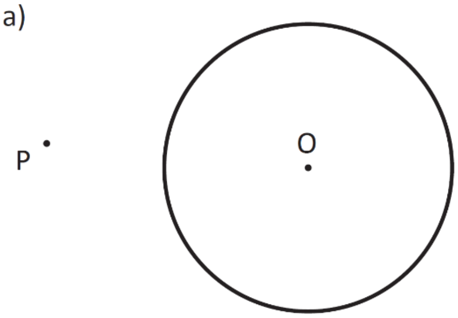


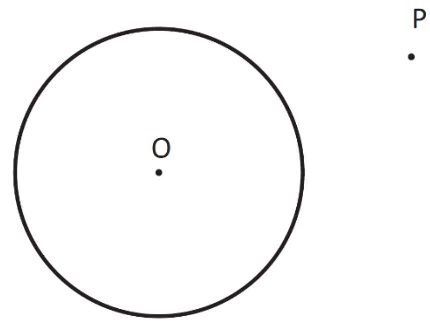
2. Pourquoi les segments des droites tangentes sont-ils égaux au point de tangence ?

Combien de temps t’a-t-il fallu pour résoudre les problèmes ?

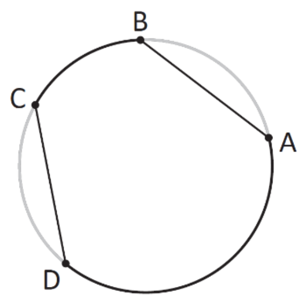
2.2 Les cordes et les arcs de cercle

Construis, pour chaque cercle, les tangentes passant par le point P.

a) 

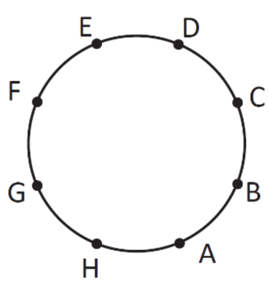
b) 

Dans un cercle, si deux arcs sont égaux, alors les cordes qui sous-tendent ces arcs sont égales.

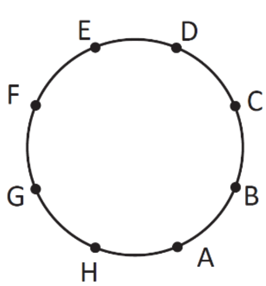


Si l'arc $\overset{\frown}{AB}$ = l'arc $\overset{\frown}{CD}$, alors AB = CD.

Les points A, B, C, D, E, F, G et H divisent la circonférence du cercle en huit arcs égaux. Classe les figures représentées dans chaque énoncé.



a) ACEG b) CEG c) CDGH d) BFGA



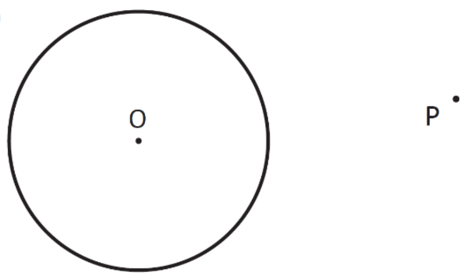
e) EGA f) BEH g) BCF h) ABCDEFGH

Combien de temps t'a-t-il fallu pour résoudre les problèmes ?

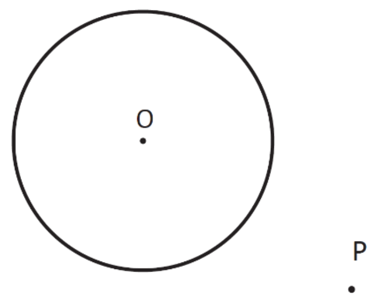
2.3 Application aux triangles semblables

1. Construis, pour chaque cercle, les tangentes passant par le point P.

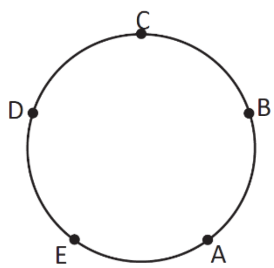
a)



b)



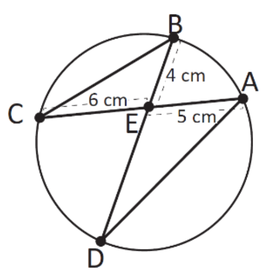
2. Les points A, B, C, D, E et F divisent la circonférence du cercle en six arcs égaux. Classe les figures correspondant à chaque énoncé. Observe l'exemple.



a) ABD b) CDE c) ABDE d) ABCDE

Il faut observer les angles inscrits qui sous-tendent le même arc pour déterminer si les triangles sont semblables. Cela permet également de déterminer la longueur de certains segments.

Par exemple :



ΔAED ~ ΔBEC. Puisqu'il y a deux angles opposés au sommet et que l'angle ∢DBC = l'angle ∢DAC. Conformément au critère AA, on en déduit que ΔAED ~ ΔBEC.

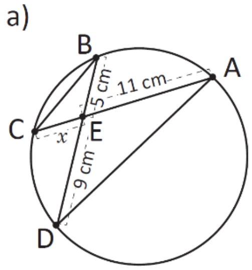
Comme ΔAED ~ ΔBEC, alors $\frac{ED}{CE} = \frac{AE}{BE}$.

Donc $ED = CE \times \frac{AE}{BE} = 6 \times \frac{5}{4} = 7.5$

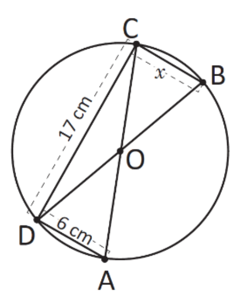
ED = 7.5 cm

Détermine x dans les figures suivantes :

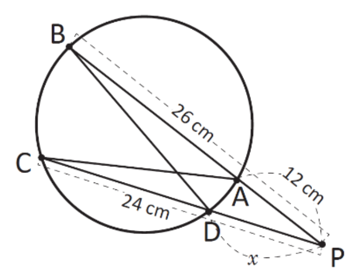
a)



b) Si $\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{DA}$



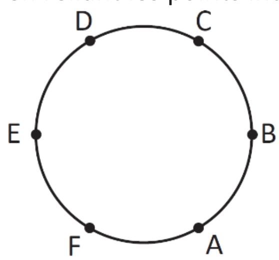
c)



Combien de temps t'a-t-il fallu pour résoudre les problèmes ?

2.4 Parallélisme

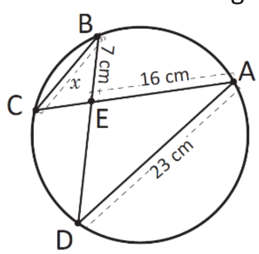
1. Les points A, B, C, D, E et F divisent la circonférence du cercle en six arcs égaux. Classe les figures formées en reliant les points indiqués pour chaque énoncé. Observe l'exemple.



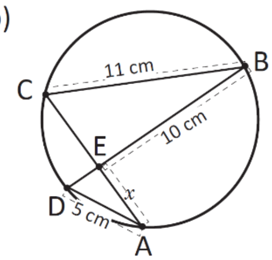
a) BDF b) ABDE c) CDEF d) ABCDEEF

2. Détermine x dans les figures suivantes :

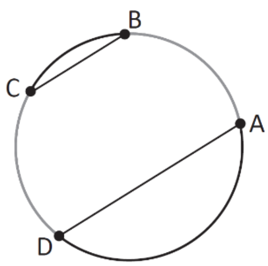
a)



b)



Si deux arcs de cercle sont égaux, alors les cordes formées par le début d'un arc et la fin de l'autre arc sont parallèles.



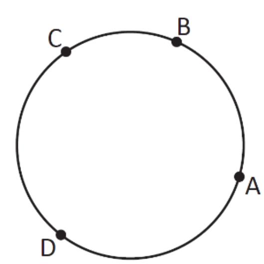
Si l'arc $\overset{\frown}{AB}$ = l'arc $\overset{\frown}{CD}$, alors AD ∥ BC.

Une condition A est suffisante pour une autre condition B, si la proposition « si A alors B » est satisfaite.

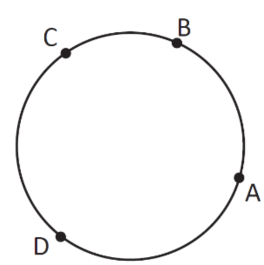
Détermine lesquels des énoncés suivants constituent une condition suffisante pour que les 4 points consécutifs A, B, C et D sur la circonférence du cercle, une fois reliés, forment au moins deux cordes parallèles.

$\overset{\frown}{ABC}$ désigne l'arc reliant A à C en passant par le point B.

a) $\overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{BCD}$ b) ∢DAC = ∢BDA c) CD = BA



d) AC = BD e) CB = BA f) ΔABC ≅ ΔDCB

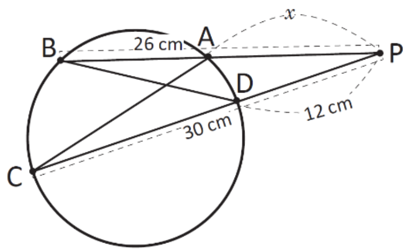


Combien de temps t'a-t-il fallu pour résoudre les problèmes ?

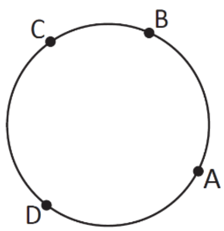
Module 7

2.5 Quatre points sur la circonférence d'un cercle

1. Détermine x dans la figure suivante :



2. Détermine lesquels des énoncés suivants constituent une condition suffisante pour que les quatre points consécutifs A, B, C et D sur la circonférence du cercle, une fois reliés, forment au moins deux cordes parallèles.



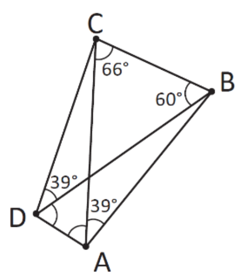
a) $\overset{\frown}{BA} = \overset{\frown}{DC}$

b) CB = BA

c) ΔABC ≅ ΔDCB

Si deux angles égaux ont en commun un segment à leur ouverture, alors les quatre points sont sur le même cercle.

Par exemple :

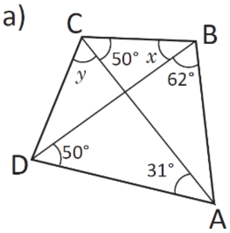


Comme l'angle ∢CAB = l'angle ∢CDB et que tous les deux ont en commun le segment CB, alors A, B, C et D sont sur le même cercle.

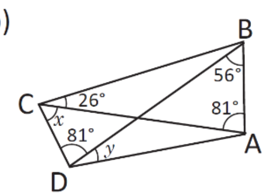
La condition ∢BDA = ∢BCA = 66° doit être satisfaite.
De plus, la condition ∢CAD = ∢CBD = 60° doit être satisfaite.

Détermine la valeur de x et y.

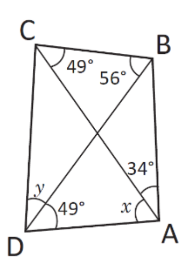
a)



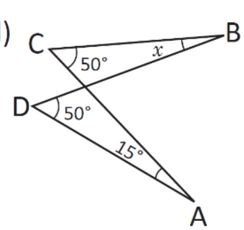
b)



c)



d)



Combien de temps t'a-t-il fallu pour résoudre les problèmes ?

L’angle semi-inscrit

Détermine lesquels des énoncés suivants constituent une condition suffisante pour que les quatre points consécutifs A, B, C et D sur la circonférence du cercle, une fois reliés, forment au moins deux cordes parallèles.

Détermine la valeur de x et y.

L’angle formé par une tangente et une corde du cercle est appelé : **angle semi-inscrit**.
Sur le cercle, **la mesure de l’angle semi-inscrit est égale à la moitié de la mesure de l’angle au centre, qui sous-tend le même arc que la corde**.

Par exemple :

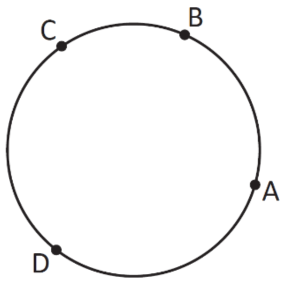
Comme

Détermine la valeur de x dans chaque cas :

Combien de temps t’a-t-il fallu pour résoudre les problèmes ?

2.6

1.



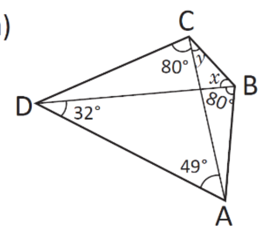
a) $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$

b) $\sphericalangle BDA = \sphericalangle DBC$

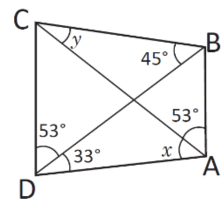
c) $\Delta BCD \sim \Delta BCA$

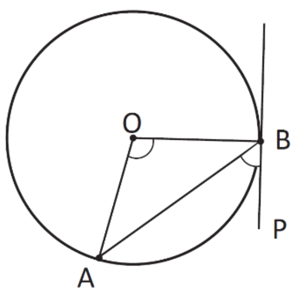
2.

a)

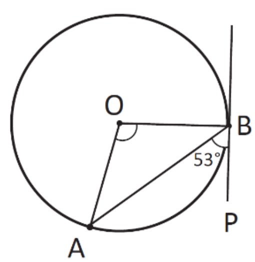


b)





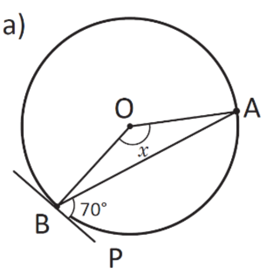
$\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle PBA$



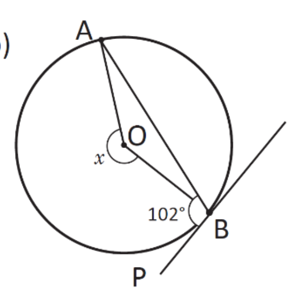
$\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle PBA$

$\sphericalangle BOA = 2(53) = 106°$

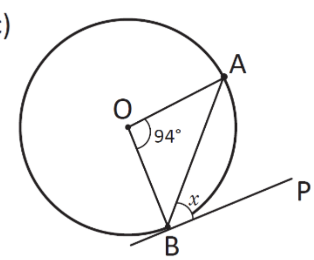
a)



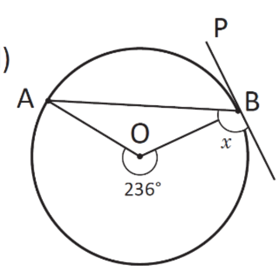
b)



c)



d)



2.7 Auto-évaluation

Résous les problèmes suivants et indique d'un « × » la case qui te semble appropriée en fonction de ce que tu as appris. Prête attention à tes réponses.

Sujet	Oui	Peux mieux faire	Non	Remarque
1. Je construis correctement des tangentes à un cerclepassant par un point P.				
2. J'applique correctement le fait que les cordes sont égales lorsque deux arcs sont égaux, pour déterminer quel type de figure est formé dans un cercle dont la circonférence est divisée en arcs égaux.				
3. J'utilise l'angle inscrit pour trouver des triangles semblables et déterminer la longueur des côtés.				
4. Je peux déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour avoir deux cordes parallèles à partir de quatre points sur la circonférence d'un cercle.				

2.8 Auto-évaluation

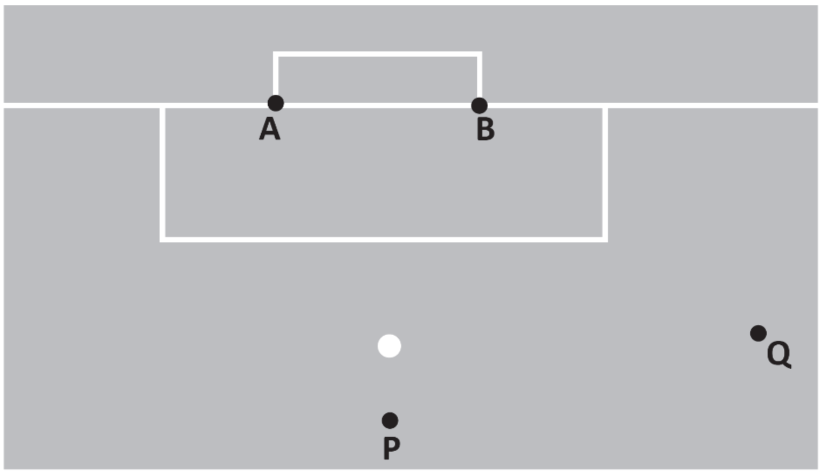
Résous les problèmes suivants et indique d'un « × » la case qui te semble appropriée en fonction de ce que tu as appris. Prête attention à tes réponses.

Sujet	Oui	Peux mieux faire	Non	Remarque
1. Je détermine correctement quand quatre points sont sur un cercleet j'utilise le résultat pour trouver la mesure d'autres angles.				
2. Je détermine la relation entre un angle semi-inscrit et l'angle au centre qui sous-tend le même arc.				
3. J'applique le théorème de l'arc inscrit pour résoudre des problèmes avec des angles à l'intérieur du cercle.				
4. J'applique le théorème de l'arc inscrit pour résoudre des problèmes avec des angles à l'extérieur du cercle.				

Combien de temps t'a-t-il fallu pour résoudre les problèmes ?

Problèmes

1. **L’angle de tir.** Dans un jeu de lancer-franc, un joueur se trouve au point P et un autre au point Q. Calcule des angles ∢APB et ∢AQB ; et réponds aux questions suivantes :
   a) En fonction de l’angle de tir, lequel des deux joueurs a le plus de chance de marquer ?
   b) Indique un autre point P' correspondant au même angle de tir que le point P.



Ensuite, trace un cercle passant par A, B et P et considère l’arc $\overset{\frown}{AB}$ et les angles inscrits ayant la même mesure que l’angle ∢APB

2. **La carte.** Un touriste a une carte à l’échelle représentée sur le dessin ci-dessous. Il a besoin de connaître certaines informations manquantes. Aide le touriste en suivant les étapes suivantes :

   a) À l’aide d’un rapporteur, vérifie que les angles ∢VPA et ∢VQA mesurent 45°.
   b) Trouve la distance entre le grand arbre et le volcan.
   c) Justifie que les points P, Q, A et V sont sur un cercle sur la carte.
   d) Quelle est la distance entre la communauté Q et le volcan ?