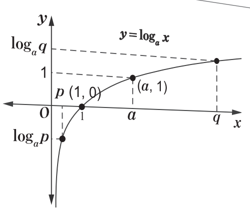
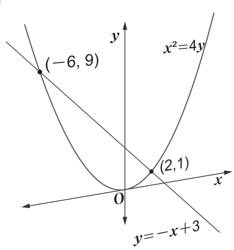
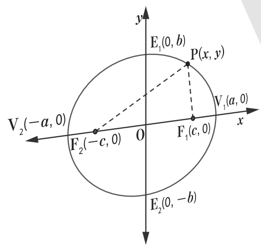
MATEMÁTICA 11

Undécimo grado







Cuaderno de Actividades

Educación Secundaria

Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional
El Pueblo, Presidente!

MINED
Un Ministerio en la Comunidad

JICA

11mo

COORDINACIÓN GENERAL

Profesora Melba López Montenegro

Profesor Julio César Canelo Castillo

AUTORES

Marlon José Espinoza Espinoza

Domingo Felipe Aráuz Chévez

COLECTIVO DE AUTORES

MINED

Francisco Emilio Díaz Vega

Humberto Antonio Jarquín López

Gregorio Isabel Ortiz Hernández

Juan Carlos Caballero López

Alberto Leonardo García Acevedo

UNAN - MANAGUA

Nubia Aracelly Barreda Rodríguez

Melissa Lizbeth Velásquez Castillo

Armando José Huete Fuentes

Primitivo Herrera Herrera

Marlon José Espinoza Espinoza

UNAN - LEÓN

Anastacio Benito González Funes

Domingo Felipe Aráuz Chévez

Célfida del Rosario López Sánchez

Orlando Antonio Ruiz Álvarez

Hilario Ernesto Gallo Cajina

EQUIPO DE DIAGRAMACIÓN

María José López Samqui

Primera Edición, 2019.

Derechos reservados. Prohibida su venta y/o reproducción con fines comerciales por cualquier medio, sin previa autorización del Ministerio de Educación (MINED), de la República de Nicaragua.

La presente publicación ha sido reproducida con el apoyo de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA) a través del Proyecto para el Aprendizaje Amigable de matemática en Educación Secundaria (NICAMATE).

Introducción

El Cuaderno de Actividades es un material complementario al Libro de Texto (LT). Fue diseñado con la intención de consolidar sus aprendizajes adquiridos en el aula, a través del estudio independiente en casa. Los ejercicios que se proponen están pensados para que usted trabaje al menos 20 minutos en su casa cada día.

Estructura

Al iniciar una nueva sección, generalmente se presenta un resumen de los aspectos claves que se estudian en la sección, y que le serán de utilidad al momento de resolver los ejercicios que se proponen. Dichos aspectos dependen de cada sección.

Ejercicios

Los ejercicios que aquí se proponen son básicos, es decir, son ejercicios similares al problema, ejemplos y ejercicios brindados en el Libro de Texto y que han sido resueltos en el aula.

El objetivo de estos ejercicios es afianzar los aprendizajes adquiridos en el aula y deben ser resueltos por todos los y las estudiantes. La numeración de estos ejercicios es continua para hacer más fácil la identificación de su solución en los solucionarios. Antes del enunciado de cada ejercicio se escribe el número de página del contenido correspondiente en el Libro de Texto.

Ejercicios Avanzados

Los ejercicios aquí propuestos tienen un mayor grado de complejidad y son diferentes a los modelos mostrados en el problema, ejemplos y ejercicios del libro de texto, sin embargo, los aspectos teóricos necesarios para poder resolverlos han sido estudiados en clase. El objetivo de estos ejercicios es aplicar los aprendizajes que se han consolidado en situaciones que generen un mayor análisis y reflexión.

Solucionarios

Aquí se muestran las soluciones de cada uno de los ejercicios que se han propuesto y se brindan los puntos más esenciales del proceso de solución de los ejercicios.

Los solucionarios deben ser consultados únicamente para comparar las respuestas obtenidas. Se brinda primero la solución de todos los ejercicios de las unidades y después se encuentran las soluciones de los ejercicios avanzados.

ÍNDICE

Unidad 1: Sucesiones

Sección 1: Sucesiones, notación y término general

Término	Se lee	En la sucesión se llama
a_1	a sub 1	Primer término
a_2	a sub 2	Segundo término
a_3	a sub 3	Tercer término
⋮	⋮	⋮
a_n	a sub n	n-ésimo término o término general

Ejercicios

1. (P.2) Complete los espacios en blanco.

   a) 2, 4, ____, 8, 10, _____, 14, 16, …
   b) 2, 5, ____, 11, 14, _____, 21, …

   c) 5, 15, ____, 35, _____, 55, 65, …
   d) 20, 18, ____, 14, 12, _____, 8, …

   e) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4},$ _____, $\frac{1}{16}$, _____, $\frac{1}{64}, \ldots$
   f) $-6, -4,$ ____, 0, 2, _____, 6, …

   g) 18, ____, 22, 24, _____, 28, …
   h) $-24, -18,$ ____, -6, _____, 6, …

2. (P.3) Deduzca una fórmula para el término general de cada uno de las sucesiones.

   a) 3, 6, 9, 12, 15, 18, …
   b) 7, 14, 21, 28, 35, 42, …

   c) 10, 100, 1000, 10000, …
   d) 2, 6, 10, 14, 18, 22, …

   e) $2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \ldots$
   f) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6} \ldots$

   g) 18, 20, 22, 24, 26, 28,…
   h) $-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots$

3. (P.3) Calcule los primeros 5 términos y a_{10} de las sucesiones cuyo término general es:

   a) $a_n = 5n - 1$
   b) $a_n = 2n - 1$

   c) $a_n = n^2 - 1$
   d) $a_n = 10 - n$

   e) $a_n = 2^n - 10$
   f) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

   g) $a_n = n(-1)^n$

Sección 2: Sucesiones aritméticas

✓ El término general a_n de una sucesión aritmética se puede expresar en función de a_1 (primer término) y d (diferencia común) como sigue

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

✓ La suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética, conocidos a_1 y d, está dada por:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

Ejercicios

4. (P. 5) Dadas las siguientes sucesiones aritméticas, encuentre d y complete los espacios en blanco.

a) 1, 4, 7, 10, ____...
b) 2, 6, ____, 14, 18, ____, …
c) 15, 19, ____, 27,____, …
d) 1, 8, ____, 22, ____, …
e) −7, ____, −21, −28, ...
f) 15, 7, −1, −9, ____, …
g) ____, 12, 15, ____, 21, …
h) 8, ____, ____, 23, 28, …

5. (P. 6) Dadas las siguientes sucesiones aritméticas, determine a_n y el término que se indica:

a) 2, 6, 10, 14,... a_{10}
b) 5, 9,13, 17,... a_7
c) 6, 10, 14, 18,... a_9
d) −12,−6,0,6,... a_6
e) −1,−4,−7,−10,... a_{11}
f) 20,16,12,8,... a_{12}

6. (P. 7) Calcule a_1 para cada una de las sucesiones aritmética con:

a) $d = 2$ y $a_4 = 13$
b) $d = 3$ y $a_5 = 21$
c) $d = -2$ y $a_6 = 10$
d) $d = -4$ y $a_8 = -10$

7. (P. 7) Calcule d para cada una de las sucesiones aritméticas con:

a) $a_1 = -5$ y $a_5 = 3$
b) $a_1 = -2$ y $a_6 = 3$
c) $a_1 = -4$ y $a_8 = 14$
d) $a_1 = 10$ y $a_5 = 18$

8. (P. 8) A partir de los términos que se indican de una sucesión aritmética, calcule a_1 y d.

a) $a_3 = 5$ y $a_6 = 20$
b) $a_3 = 13$ y $a_5 = 23$
c) $a_2 = 2$ y $a_7 = 17$
d) $a_3 = -26$ y $a_6 = -35$
e) $a_2 = -15$ y $a_5 = -27$
f) $a_2 = 40$ y $a_6 = 140$

9. (P. 10) Dadas las sucesiones aritméticas con los términos dados, encuentre las sumas indicadas.

a) $a_1 = 1$ y $a_5 = 17$, S_5
b) $a_1 = -1$ y $a_8 = 13$, S_8
c) $a_1 = -1$ y $a_6 = 14$, S_6
d) $a_1 = -20$ y $a_6 = -35$, S_6
e) $a_1 = -8$ y $a_5 = -26$, S_5
f) $a_1 = -20$ y $a_7 = -140$, S_7

10. (P. 11) Dadas las sucesiones aritméticas con a_1 y d conocidos, calcule las sumas indicadas:

a) $a_1 = 11$ y $d = 5$, S_{10}
b) $a_1 = 8$ y $d = 3$, S_8
c) $a_1 = 12$ y $d = 8$, S_9
d) $a_1 = 11$ y $d = -3$, S_6
e) $a_1 = -9$ y $d = -3$, S_7
f) $a_1 = -20$ y $d = 6$, S_8

11. (P. 12) A partir del primer término y suma que se indican para cada sucesión aritmética, calcule el término indicado:

a) $a_1 = 3$ y $S_6 = 48$, a_6
b) $a_1 = -1$ y $S_6 = 39$, a_6
c) $a_1 = -8$ y $S_5 = -85$, a_5
d) $a_1 = -20$ y $S_6 = -561$, a_6

12. (P. 12) Dadas las siguientes sucesiones aritméticas finitas, calcule la suma de sus términos:

a) 2, 5, 8,…, 17
b) 4, 9, 14, …, 29
c) $-3, -9, -15, \ldots, -27$
d) $-4, -11, -18, \ldots, -46$

13. (P. 13) Resuelva los siguientes problemas:

a) En un estante hay 136 libros, de tal manera que en el primer depósito hay 10, en el segundo 12, en el tercero 14 y así sucesivamente. ¿Cuántos depósitos tiene el estante?

b) En un Instituto se bachilleraron 130 estudiantes. Si el día de la graduación los ordenaron en sucesión aritmética con 20 en la primera fila y en la última 32. ¿Cuántas filas se formaron?

Sección 3: Sucesiones geométricas

✓ El término general a_n de una sucesión geométrica se puede expresar en función de a_1 (primer término) y r (razón común) como sigue,

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

✓ La suma de los primeros n términos de una sucesión geométrica conocidos a_1 y r, está dada por:

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

con $r \neq 1$.

Ejercicios

14\. (P. 15) Dadas las siguientes sucesiones geométricas, complete los espacios en blanco y calcule r:

a) 1, 2, 4, 8,____, 32, 64,...
b) 4, 8, 16,____, 64,...
c) 3, 9, 27, ____, 243,...
d) 5, 15,____, 135,...
e) 2, −6, ____, −54,...
f) ____,____,75, 375,...
g) ____,____, 16, 64,____,...
h) 80, 40, ____,10, 5,...
i) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$,____, $\frac{8}{3}, \frac{16}{3}, \ldots$
j) ____,____, $\frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \ldots$

15\. (P.16) Dadas las siguientes sucesiones geométricas, determine a_n y el término particular indicado:

a) 1, 3, 9, 27,..., a_6
b) 2, 6, 18,..., a_5
c) 1, 5, 25, 125,..., a_6
d) 1, −4, 16, −64,..., a_6
e) 3, −6, 12, −24, ..., a_8
f) −1,3, −9,27,..., a_6
g) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{16}{3}, \ldots$ a_6
h) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \ldots$ a_8

16\. (P.18) Calcule a_1 para cada sucesión geométrica con:

a) $r = 2$ y $a_4 = 24$
b) $r = 2$ y $a_5 = -32$
c) $r = -3$ y $a_4 = -54$
d) $r = -2$ y $a_4 = -24$
e) $r = 4$ y $a_3 = 48$
f) $r = -2$ y $a_4 = -40$
g) $r = \frac{1}{2}$ y $a_3 = \frac{1}{6}$
h) $r = -\frac{1}{4}$ y $a_4 = -\frac{5}{64}$

17\. (P.19) Calcule a_1 y r para cada sucesión geométrica, sabiendo que:

a) $a_2 = 10$ y $a_4 = 40$
b) $a_3 = 6$ y $a_5 = 24$
c) $a_3 = 5$ y $a_5 = 80$
d) $a_3 = 32$ y $a_5 = 128$
e) $a_2 = 2$ y $a_4 = 32$
f) $a_3 = 18$ y $a_4 = -54$
g) $a_2 = 3$ y $a_4 = \frac{16}{3}$
h) $a_4 = -\frac{8}{5}$ y $a_6 = -\frac{32}{5}$

18\. (P.20) Calcule la suma indicada para cada sucesión geométrica con:

a) $a_1 = 1$ y $r = 3$ determine S_5
b) $a_1 = 2$ y $r = 2$ determine S_8
c) $a_1 = -1$ y $r = 3$ determine S_4
d) $a_1 = -2$ y $r = -1$ determine S_{10}
e) $a_1 = 4$ y $r = -3$ determine S_4
f) $a_1 = 10$ y $r = -2$ determine S_5

19. (P.21) Determine a_1 para cada sucesión geométrica con:

a) $r=2$ y $S_6=126$ b) $r=3$ y $S_4=160$

c) $r=5$ y $S_3=124$ d) $r=-2$ y $S_5=-22$

e) $r=2$ y $S_6=315$ f) $r=3$ y $S_4=240$

g) $r=2$ y $S_4=-\dfrac{15}{2}$ h) $r=-2$ y $S_5=-\dfrac{22}{5}$

Sección 4: Notación de sumatoria

✓ $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$

✓ Si c es una constante que no depende de k se tienen las siguientes propiedades

$\sum_{k=1}^{n}ck=c\sum_{k=1}^{n}k$ en particular $\sum_{k=1}^{n}c=nc$.

$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

✓ La suma de los n primeros números naturales está dada por

$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n}{2}(n+1)$

✓ La suma de los cuadrados de los n primeros números naturales está dada por

$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

Ejercicios

20. (P.23) Escriba las expresiones dadas como una suma extendida, sustituyendo sucesivamente los valores de k desde 1 hasta el límite superior indicado.

a) $\sum_{k=1}^{n}2k$ b) $\sum_{k=1}^{7}k^2$ c) $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$

d) $\sum_{k=1}^{n}6k$ e) $\sum_{k=1}^{4}k^2$ f) $\sum_{k=1}^{n}(4-k)$

21. (P.23) Exprese las siguientes sumas extendidas usando la notación sumatoria $\sum$.

a) $1+2+3+4+\cdots+n$ b) $2+2^2+2^3+2^4+2^5$

c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ d) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}$

e) $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+1+\frac{4}{3}+\frac{5}{3}$

22. (P.24) Reescriba las siguientes expresiones utilizando las propiedades estudiadas en la página 24 del libro de texto.

a) $\sum_{k=1}^{10} 2k$ b) $\sum_{k=1}^{10} (k+k^2)$

c) $\sum_{k=1}^{10} 6$ d) $\sum_{k=1}^{8} 9$

e) $\sum_{k=1}^{10} (k^3+3k)$ f) $\sum_{k=1}^{5} (k^2+4k)$

23. (P.25) Calcule el valor de las siguientes sumatorias:

a) $\sum_{k=1}^{20} k$ b) $\sum_{k=1}^{9} k$ c) $\sum_{k=1}^{12} k$

d) $\sum_{k=1}^{25} k$ e) $\sum_{k=1}^{24} k$ f) $\sum_{k=1}^{40} k$

24. (P.26) Calcule el valor de las siguientes sumas:

a) $\sum_{k=1}^{7} k^2$ b) $\sum_{k=1}^{12} k^2$ c) $\sum_{k=1}^{16} k^2$

d) $\sum_{k=1}^{13} k^2$ e) $\sum_{k=1}^{20} k^2$ f) $\sum_{k=1}^{22} k^2$

25. (P.26) Calcule el valor de las siguientes sumatorias:

a) $\sum_{k=1}^{5} (2k^2+k)$ b) $\sum_{k=1}^{4} (3k^2+2k)$ c) $\sum_{k=1}^{3} (k^2+k+2)$

d) $\sum_{k=1}^{4} (k^2+4k)$ e) $\sum_{k=1}^{3} \left(\frac{1}{2}k^2+k\right)$ f) $\sum_{k=1}^{4} (k^2-k-1)$

Ejercicios Avanzados

EA1. Dado la sucesión aritmética a, b, c, tal que la suma de sus términos es 3, y la suma de sus cuadrados es 53. Calcule los valores de a, b y c.

EA2. Dada una sucesión aritmética con $a_{10} = 26$ y $a_{30} = 66$:

a) Calcule el valor de n, si $a_n = 200$.

b) Calcule el valor mínimo de n, si S_n es mayor que 200.

EA3. Si 6, x, y son los términos de una sucesión aritmética y x, y,16 son los términos de una sucesión geométrica. Encuentre los valores de x y y.

EA4. Dada una sucesión geométrica con $a_2 = 2$ y $S_3 = 7$. Calcule a_1 y r.

EA5. Dada la sucesión 1, $1+2$, $1+2+3$,......, $1+2+3+\cdots+n$,...:

a) Exprese el k-ésimo término $1+2+3+\cdots+k$ de manera simplificada sin utilizar el símbolo de sumatoria.

b) Encuentre la suma de los n primeros términos de la sucesión.

Unidad 2: Potenciación y Funciones Exponenciales

Sección 1: Potenciación y radicación

Propiedades de la potenciación:

✓ Si $a \neq 0$ y n es un número natural, entonces:

1) $a^0 = 1$ 2) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

✓ Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ y m, n son números enteros, entonces:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 2) $(a^m)^n = a^{mn}$ 3) $(ab)^n = a^n b^n$

4) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

✓ Si $a > 0$, $b > 0$ y r, s son números racionales, entonces:

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ 2) $(a^r)^s = a^{rs}$ 3) $(ab)^r = a^r b^r$

4) $a^r \div a^s = a^{r-s}$

✓ Radicación Potenciación

$b = \sqrt[n]{a}$ $\longleftrightarrow$ $b^n = a$

✓ **Propiedades de los radicales:**

Si $a > 0$, $b > 0$ y m, n son números naturales, entonces,

1) $(\sqrt[n]{a})(\sqrt[n]{b}) = \sqrt[n]{ab}$ 2) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ 3) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

4) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

✓ Si $a > 0$, m es entero y n es un número natural, entonces, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

En el caso de $m = 1$ se obtiene $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Por lo tanto, $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$.

Ejercicios

26. (P. 30) Exprese los siguientes productos en la forma a^n.

a) $(2)(2)(2)$ b) $(-5)(-5)(-5)(-5)(-5)$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)$ d) $(1,2)(1,2)(1,2)(1,2)(1,2)(1,2)$

27. (P. 30) Calcule el valor de las siguientes expresiones:

a) 5^3 b) $(-5)^2$ c) $(-2)^3$

d) $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$ e) $(0,5)^4$ f) $\left(-\frac{1}{4}\right)^5$

28. (P. 31) Aplique las propiedades de la potenciación según corresponda:

a) $a^2 \cdot a^5$ b) $(a^2)^5$ c) $(ab)^3$

d) $a^5 \div a^3$ e) $a^4 \cdot a^3$ f) $(a^5)^3$

g) $(ab)^5$ h) $a^7 \div a^5$ i) $b^5 \cdot b^4$

j) $(a^2 b)^3$ k) $(a^2 b^3)^2$ l) $a^7 b^5 \div a^5 b^3$

29. (P. 32) Calcule los valores de siguientes potencias:

a) 5^0 b) 3^{-2} c) $(0,2)^0$ d) 5^{-2}

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^0$ f) $(-3)^{-2}$ g) $(-1,4)^0$ h) $(-2)^{-4}$

i) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ j) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ k) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$ l) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$

30. (P. 33) Aplique la propiedad de potenciación según corresponda, si $a \neq 0$, $b \neq 0$.

a) $a^3 \cdot a^{-2}$ b) $(a^3)^{-2}$ c) $(ab)^{-2}$ d) $a^{-3} \div a^{-5}$

e) $a^5 \cdot a^{-4}$ f) $(b^2)^{-4}$ g) $(a^2b^3)^{-2}$ h) $b^{-5} \div b^{-8}$

31. (P. 33) Calcule el valor de las siguientes expresiones:

a) $(5^5)(5^{-3})$ b) $(3^2)^{-3}$ c) $(5^{-2})^0$ d) $2^3 \div 2^5$

e) $(2^4)(2^{-2})$ f) $(2^3)^{-2}$ g) $(4^{-3})^0$ h) $3^8 \div 3^5$

32. (P. 34) Complete la tabla utilizando la relación entre potenciación y radicación.

	Potenciación	Radicación	La radicación se lee
a)	$2^6 = 64$		
b)	$(-2)^5 = -32$		
c)		$-3 = \sqrt[3]{-27}$	
d)	$3^4 = 81$		
e)		$-5 = \sqrt[3]{(-125)}$	
f)	$10^3 = 1000$		

33. (P. 35) Calcule los valores de los siguientes radicales

a) $\sqrt[4]{16}$ b) $-\sqrt[4]{16}$ c) $\sqrt[3]{8}$ d) $\sqrt[3]{-8}$

e) $\sqrt[6]{64}$ f) $-\sqrt[3]{27}$ g) $\sqrt[3]{27}$ h) $-\sqrt[3]{-27}$

i) $\sqrt[5]{-32}$ j) $-\sqrt[3]{1000}$ k) $\sqrt[7]{-1}$ l) $-\sqrt[11]{-1}$

34. (P. 36) Calcule los valores de los siguientes productos de radicales.

a) $(\sqrt[3]{9})(\sqrt[3]{3})$ b) $(\sqrt[4]{1000})(\sqrt[4]{10})$ c) $(\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{16})$ d) $(\sqrt[8]{16})(\sqrt[8]{16})$

e) $(\sqrt[4]{8})(\sqrt[4]{2})$ f) $(\sqrt[5]{27})(\sqrt[5]{9})$ g) $(\sqrt[6]{81})(\sqrt[6]{9})$ h) $(\sqrt[5]{125})(\sqrt[5]{25})$

35. (P. 37) Calcule los valores de los siguientes cocientes de radicales:

a) $\frac{\sqrt[3]{189}}{\sqrt[3]{7}}$ b) $\frac{\sqrt[5]{5}}{\sqrt[5]{160}}$ c) $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{625}}$ d) $\frac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[4]{64}}$

e) $\frac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{9}}$ f) $\frac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt[4]{9}}$ g) $\frac{\sqrt[3]{4000}}{\sqrt[3]{4}}$ h) $\frac{\sqrt[5]{256}}{\sqrt[5]{8}}$

36. (P. 37) Calcule los valores de las siguientes expresiones:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ b) $(\sqrt[4]{16})^2$ c) $\sqrt[4]{\sqrt{256}}$ d) $(\sqrt[4]{25})^2$

37. (P. 38) Convierte las siguientes expresiones de la forma radical a potencia o viceversa:

a) $a^{\frac{2}{3}}$ b) $a^{-\frac{3}{5}}$ c) $a^{\frac{4}{3}}$ d) $a^{-\frac{5}{7}}$

e) $a^{\frac{5}{4}}$ f) $a^{-\frac{11}{3}}$ g) $\sqrt[6]{a}$ h) $\sqrt[5]{a^3}$

i) $\sqrt[7]{b}$ j) $\sqrt[7]{a^2}$ k) $\sqrt[4]{b}$ l) $\sqrt[5]{a^4}$

38. (P. 39) Calcule los valores de las siguientes potencias con exponentes racionales:

a) $4^{\frac{1}{2}}$ b) $8^{\frac{1}{3}}$ c) $27^{\frac{2}{3}}$ d) $25^{-\frac{1}{2}}$

e) $100^{\frac{1}{2}}$ f) $8^{-\frac{1}{3}}$ g) $8^{\frac{2}{3}}$ h) $25^{\frac{3}{2}}$

39. (P. 40) Calcule los valores de las siguientes expresiones:

a) $\left(2^{\frac{4}{3}}\right)\left(16^{\frac{1}{6}}\right)$ b) $\sqrt{27} \div \sqrt[6]{27}$ c) $(\sqrt[3]{3})(\sqrt{3}) \div \sqrt[6]{243}$

d) $\left(3^{\frac{4}{3}}\right)\left(81^{\frac{1}{6}}\right)$ e) $\sqrt{8}(\sqrt[6]{32}) \div \sqrt[3]{16}$ f) $(\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}) \div \sqrt[6]{32}$

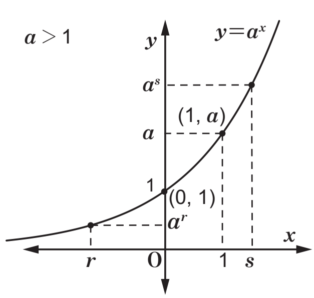
Sección 2: Funciones exponenciales

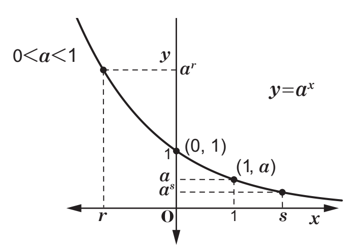
✓ Propiedades de la gráfica de $y = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$:

1. La gráfica pasa por los puntos (0, 1) y (1, a)
2. El eje x es asíntota horizontal.
3. Dominio: números reales. Rango: números reales positivos.

La gráfica es creciente, cuando $a > 1$, es decir, si $r < s$ con $a > 1$, entonces $a^r < a^s$

La gráfica es decreciente, cuando $0 < a < 1$, es decir, si $r < s$ con $0 < a < 1$, entonces $a^r > a^s$





✓ Dadas dos potencias a^p y a^q, con $a \neq 0, 1, -1$,

$$a^p = a^q \longleftrightarrow p = q$$

Ejercicios

40. (P. 42) Dada la siguiente tabla de valores asociada a la función $y = 2^x$, realice lo siguiente:
   a) Complete las casillas vacías y los pares en la tabla.
   b) Ubique los puntos **B**, **C**, **D**, **E** y **F** en el plano cartesiano.
   c) Una los puntos con una curva suave.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$			1			8
Punto	$\mathbf{A}\left(-3, \frac{1}{8}\right)$	**B**$(-2, \quad)$	**C**$(-1, \quad)$	**D**$(0, 1)$	**E**$(1, \quad)$	**F**$(2, \quad)$	**G**$(3, 8)$

41. (P. 42) Trace la gráfica de $y = 4^x$.

42. (P. 43) Dada la siguiente tabla de valores asociada a la función $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, realice lo siguiente:
   a) Complete las casillas vacías y los pares.
   b) Ubique los puntos **B**, **C**, **D**, **E** y **F** en el plano cartesiano.
   c) Una los puntos con una curva suave.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8			1			8
Punto	**A**$(-3, 8)$	**B**$(-2, \quad)$	**C**$(-1, \quad)$	**D**$(0, 1)$	**E**$(1, \quad)$	**F**$(2, \quad)$	$\mathbf{G}\left(3, \frac{1}{8}\right)$

43. P. 43) Trace la gráfica de $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

44. (P. 44) Ordene las siguientes secuencias numéricas de forma creciente:
   a) $2^3, 2^5$
   b) $3^{-3}, 3^{-5}$
   c) $5^3, 5^5$
   d) $2^{-2}, 2^{\frac{3}{2}}, 2^0$
   e) $3^{-3}, 3^{-\frac{1}{2}}, 3^{-2}$
   f) $5^2, 5^{-\frac{3}{4}}, 5^{\frac{1}{2}}$

45. (P. 45) Ordene las siguientes secuencias numéricas de forma creciente.
   a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^5$
   b) $\left(\frac{1}{3}\right)^3, \left(\frac{1}{3}\right)^4$
   c) $\left(\frac{1}{5}\right)^2, \left(\frac{1}{5}\right)^5$
   d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}, \left(\frac{1}{2}\right)^3$
   e) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}, \left(\frac{1}{3}\right)^4, \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$
   f) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}, \left(\frac{1}{5}\right)^{-4}, \left(\frac{1}{5}\right)^0$

46. (P. 46) Encuentre la solución de cada ecuación exponencial.

a) $2^x = 8$ b) $3^{2x} = 9$ c) $7^{-x} = \frac{1}{49}$

d) $5^x = 25$ e) $2^{-2x} = 4$ f) $5^{-x} = \frac{1}{25}$

g) $4^x = 8$ h) $4^{-x} = \frac{1}{16}$ i) $10^{-3x} = \frac{1}{1000}$

47. (P. 47) Encuentre la solución de cada ecuación exponencial.

a) $9^{2x} = 81$ b) $64^x = 4^{4x+1}$

c) $125^{x-1} = 25^{x+3}$ d) $5^{x-2} = \left(\frac{1}{125}\right)^{2-x}$

e) $27^{2x+2} = 9^{x+5}$ f) $2^{-3x} = \left(\frac{1}{8}\right)^{2-x}$

48. (P. 48) Encuentre la solución de cada ecuación exponencial.

a) $3^{x^2-10} = 3^{3x}$ b) $2^{x^2-3x} = 16$

c) $3^{x^2-3x} = \frac{1}{9}$ d) $5^{x^2-8} = 25^x$

e) $8^{x-3} = 2^{x^2-3x}$ f) $5^{x^2+4x} = \frac{1}{125}$

49. (P. 49) Encuentre la solución de cada ecuación exponencial.

a) $9^x - 3^x - 6 = 0$ b) $4^x - 4(2^x) + 4 = 0$

c) $25^x - 6(5^x) + 5 = 0$ d) $9^x + 2(3^x) - 15 = 0$

Ejercicios Avanzados

EA6. Ordene de forma ascendente

$\sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[6]{6}$

EA7. Grafique las funciones exponenciales.

a) $y = 2^x - 1$ b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 1$

EA8. Resuelva el sistema de ecuaciones exponenciales.

$$\begin{cases} 3^x + 3^y = 12 \\ 3^{x+y} = 27 \end{cases}$$

Unidad 3: Logaritmo y Funciones Logarítmicas

Sección 2: Logaritmo

Si a, b, c, M y N son números positivos con $a \neq 1$, $b \neq 1$, $c \neq 1$, y p y k son números reales se tiene:

✓ Definición de logaritmo: $M = a^p \longleftrightarrow \log_a M = p$

$\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$

✓ Propiedades de los logaritmos

1) $\log_a N^k = k \log_a N$ 2) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

3) $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$ 4) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ (fórmula de cambio de base)

Ejercicios

50. (P. 52) Convierta de la forma exponencial a logarítmica o viceversa.

Forma exponencial; $M = a^p$	$144 = 12^2$	$7 = 7^1$		
Forma Logarítmica; $\log_a M = p$			$\log_3 81 = 4$	$\log_2 \dfrac{1}{64} = -6$

51. (P. 52) Encuentre el valor de x y el de b empleando la definición de logaritmo.

a) $\log_4 x = 2$ b) $\log_3 x = 4$ c) $\log_5 x = 4$

d) $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$ e) $\log_b 100 = 2$ f) $\log_b 27 = -3$

g) $\log_b 25 = -2$ h) $\log_b \dfrac{1}{81} = -4$ i) $\log_b \dfrac{1}{32} = -5$

52. (P. 53) Encuentre el valor de siguientes logaritmos:

a) $\log_6 36$ b) $\log_3 81$ c) $\log_5 125$

d) $\log_7 49$ e) $\log_3 \dfrac{1}{27}$ f) $\log_2 \dfrac{1}{32}$

g) $\log_4 \dfrac{1}{64}$ h) $\log_{\frac{1}{6}} 36$ i) $\log_{\frac{1}{5}} 125$

53. (P. 54) Exprese las siguientes expresiones logarítmicas en la forma $k \log_a N$:

a) $\log_2 3^4$ b) $\log_3 5^4$ c) $\log_{11} 2^7$

d) $\log_5 2^4$ e) $\log_7 2^7$ f) $\log_4 3^{-6}$

g) $\log_5 3^{-4}$ h) $\log_7 6^{-2}$ i) $\log_{\frac{1}{2}} 2^3$

j) $\log_2 \left(\dfrac{3}{4}\right)^5$ k) $\log_8 \left(\dfrac{1}{6}\right)^{-3}$ l) $\log_7 2^{\frac{1}{3}}$

54. (P. 55) Calcule los valores de las siguientes expresiones logarítmicas, usando la propiedad $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$:

a) $\log_4 8 + \log_4 2$ b) $\log_2 8 + \log_2 2$

c) $\log_3 9 + \log_3 27$ d) $\log_5 125 + \log_5 25$

e) $\log_2 8 + \log_2 2 + \log_2 4$ f) $\log_5 25 + \log_5 5 + \log_5 125$

g) $\log_3 \dfrac{1}{9} + \log_3 \dfrac{1}{27}$ h) $\log_6 10 + \log_6 \dfrac{9}{4} + \log_6 \dfrac{8}{5}$

55. (P. 56) Calcule los valores de las siguientes expresiones logarítmicas, usando la propiedad $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$:

a) $\log_4 8 - \log_4 2$
b) $\log_2 16 - \log_2 4$
c) $\log_3 81 - \log_3 9$
d) $\log_5 625 - \log_5 125$
e) $\log_3 \frac{3}{2} - \log_3 \frac{1}{6}$
f) $\log_2 \frac{14}{3} - \log_2 \frac{7}{6}$
g) $\log_5 1000 - \log_5 5 - \log_5 8$
h) $\log_2 125 - \log_5 \frac{2}{5} - \log_5 \frac{1}{2}$

56. (P. 57) Calcule los valores de las siguientes expresiones logarítmicas:

a) $\log_5 2 + \log_5 50 - \log_5 4$
b) $\log_3 45 + \log_3 15 - 2\log_3 5$
c) $\log_7 14 - \log_7 6 + \log_7 21$
d) $\log_5 50 + \log_5 11 - \log_5 22$
e) $\log_3 18 - \log_3 24 + \log_3 12$
f) $\log_2 24 - \log_2 36 + \log_2 12$
g) $\log_6 9 - \log_6 4 + \log_6 16$
h) $\log_{13} 26 - \log_{13} 2 + \log_{13} 13$

57. (P. 58) Calcule los valores de las siguientes expresiones logarítmicas usando la fórmula de cambio de base:

a) $\log_{16} 8$
b) $\log_{32} 8$
c) $\log_{49} 7$
d) $\log_{25} 125$
e) $\log_3 2 \cdot \log_2 9$
f) $\log_5 3 \cdot \log_3 25$
g) $\log_5 2 \cdot \log_2 5$
h) $\log_4 3 \cdot \log_3 16$

Sección 2: Funciones logarítmicas

✓ Propiedades de la gráfica de $y = \log_a x$:

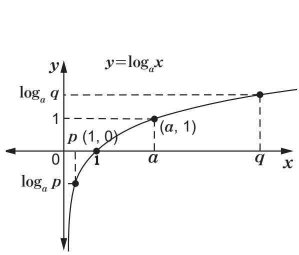
1 La gráfica pasa por los puntos (**1, 0**) y (***a*, 1**), ya que $\log_a 1 = 0$ y $\log_a a = 1$.

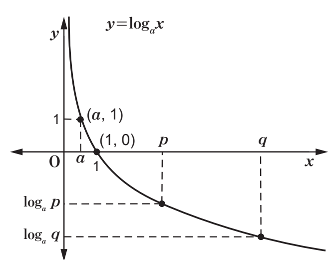
2. El eje y es asíntota vertical.

3. Dominio: números reales positivos. Rango: números reales.

La gráfica es creciente, si $a > 1$, es decir, si $p < q$, entonces $\log_a p < \log_a q$

La gráfica es decreciente, si $0 < a < 1$, es decir, si $p < q$, entonces $\log_a p > \log_a q$





Ejercicios

58. (P. 60) Dada la siguiente tabla de valores asociada a la función $y = \log_2 x$, realice lo siguiente:

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	-3			0			3
Punto	$A\left(\frac{1}{8}, -3\right)$	$B\left(\frac{1}{4}, \quad\right)$	$C\left(\frac{1}{2}, \quad\right)$	D(1, 0)	E(2,)	F(4,)	G(8, 3)

a) Complete las casillas vacías y los pares.

b) Ubique los puntos B, C, D, E y F en el plano cartesiano.

c) Una los puntos con una curva suave.

59. (P. 60) Trace la gráfica de $y = \log_4 x$.

60. (P. 61) Dada la siguiente tabla de valores asociada a la función $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, realice lo siguiente:

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	3			0			-3
Punto	$A\left(\frac{1}{8}, 3\right)$	$B\left(\frac{1}{4}, \quad\right)$	$C\left(\frac{1}{2}, \quad\right)$	D(1, 0)	E(2,)	F(4,)	G(8, −3)

a) Complete las casillas vacías y los pares.

b) Ubique los puntos B, C, D, E y F en el plano cartesiano.

c) Una los puntos con una curva suave.

61. (P. 61) Trace la gráfica de $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.

62. (P. 62) Ordene los siguientes logaritmos de forma creciente.

a) $\log_3 9,\ \log_3 3$

b) $\log_5 25,\ \log_5 5$

c) $\log_2 9,\ \log_2 16$

d) $\log_2 7,\ \log_2 \frac{1}{3},\ \log_2 5$

e) $\log_3 8,\ \log_3 \frac{1}{2},\ \log_3 \frac{1}{4}$

f) $2\log_5 7,\ 3\log_5 3,\ 2\log_5 5^{-2}$

63. (P. 63) Ordene los siguientes logaritmos de forma creciente.

a) $\log_{\frac{1}{2}} 8,\ \log_{\frac{1}{2}} 4$

b) $\log_{\frac{1}{3}} 9,\ \log_{\frac{1}{3}} 27$

c) $\log_{\frac{1}{5}} 25,\ \log_{\frac{1}{5}} 125$

d) $\log_{\frac{1}{3}} 2,\ \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2},\ \log_{\frac{1}{3}} 4$

e) $\log_{\frac{1}{4}} 5,\ \log_{\frac{1}{4}} \frac{3}{2},\ \log_{\frac{1}{4}} 7$

f) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{2}{3},\ \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{2},\ \log_{\frac{1}{5}} \frac{4}{5}$

64. (P. 64) Encuentre las soluciones de las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_2 x = 5$
b) $\log_2 x = 3$
c) $\log_5 x = 2$
d) $\log_7 x = 3$
e) $\log_9 x = 2$
f) $\log_4 x = 3$
g) $\log_5(2x+7) = 2$
h) $\log_3(4x+1) = 2$
i) $\log_5(2x-3) = 2$

65. (P. 65) Encuentre las soluciones de las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_2 x + \log_2(x+3) = 2\log_2 2$
b) $\log_3(x-2) + \log_3 x = 3\log_3 2$
c) $\log_2(x+2) + \log_2 x = 3$
d) $\log_3(x-3) + \log_3(x+5) = 2$

66. (P. 66) Calcule el valor de los siguientes logaritmos:
Si $\log_{10} 2 = 0{,}3010$ y $\log_{10} 3 = 0{,}4771$.

a) $\log_{10} 6$
b) $\log_{10} 8$
c) $\log_{10} 54$
d) $\log_{10} 48$
e) $\log_{10} 72$
f) $\log_{10} 96$
g) $\log_{10} 144$
h) $\log_{10} 288$
i) $\log_{10} 432$

Ejercicios Avanzados

EA9. Simplifique la siguiente expresión:

$$\log_5 5\sqrt{2} + \frac{1}{2}\log_5 \frac{25}{24} - \frac{3}{2}\log_5 \frac{1}{\sqrt[3]{12}}$$

EA10. Grafique las siguientes funciones logarítmicas.

a) $y = \log_2(x+1)$
b) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-3)$

EA11. Calcule el valor de $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d \cdot \log_d a$

EA12. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

Unidad 4: Geometría Analítica

Sección 1: Punto y segmento

- ✓ Distancia entre dos puntos $A(a)$ y $B(b)$ de la recta numérica: $d = |b - a|$
- ✓ Distancia entre dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ del plano cartesiano: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- ✓ Coordenada(s) del punto que divide a un segmento en una razón dada:

  En la recta numérica: $p = \dfrac{na + mb}{m + n}$

  En el plano cartesiano: $x = \dfrac{nx_1 + mx_2}{m + n}$, $y = \dfrac{ny_1 + my_2}{m + n}$

Ejercicios

67. (P.70) Calcule la distancia entre cada pareja de puntos.
    a) $A(1)$, $B(5)$ b) $C(-2)$, $D(3)$ c) $M(0)$, $N(7)$
    d) $Q(-3)$, $T(-1)$ e) $L(12)$, $P(-20)$ f) $M(-6)$, $A(-10)$
    g) $T(1{,}5)$, $W(-5{,}3)$ h) $I\left(\frac{7}{2}\right)$, $J\left(-\frac{1}{3}\right)$

68. (P.70) Para los puntos dados, verifique que $AB + BC = AC$.
    a) $A(-7)$, $B(0)$, $C(7)$ b) $A(-15)$, $B(1)$, $C(5)$
    c) $A(9)$, $B(13)$, $C(15)$ d) $A(-3{,}5)$, $B(1)$, $C\left(\frac{5}{2}\right)$

69. (P.71) Efectúe lo que se le pide:
    a) Dibuje un segmento AB cuya longitud sea 5 cm y represente gráficamente la división de dicho segmento por el punto P en la razón 2:3.
    b) Dibuje un segmento AB cuya longitud sea 11 cm y represente gráficamente la división de dicho segmento por el punto P en la razón 4:7.

70. (P. 71) Encuentre la coordenada de cada punto P del segmento dado $\overline{AB}$, sabiendo que:
    a) Los extremos de $\overline{AB}$ son $A(-1)$ y $B(9)$, además P divide este segmento en la razón 3:2.
    b) Los extremos de $\overline{AB}$ son $A(-1)$ y $B(9)$, además P es punto medio de $\overline{AB}$.
    c) Los extremos de $\overline{AB}$ son $A(3)$ y $B(6)$, además P divide este segmento en la razón 2:4.
    d) Los extremos de $\overline{AB}$ son $A(-6)$ y $B(2)$, además P divide este segmento en la razón 3:5.
    e) Los extremos de $\overline{AB}$ son $A(-9)$ y $B(2)$, además P es punto medio de $\overline{AB}$.
    f) Los extremos de $\overline{AB}$ son $A(1{,}5)$ y $B(-7{,}3)$, además P es punto medio de $\overline{AB}$.

71. (P. 72) Calcule la distancia entre dos puntos:

a) $\mathbf{A}(1, 2)$, $\mathbf{B}(6, 5)$
b) $\mathbf{M}(8, 12)$, $\mathbf{O}(4, 9)$
c) $\mathbf{T}(7, 3)$, P(1, 1)
d) $\mathbf{S}(-6, 7)$, $\mathbf{V}(-4, 3)$
e) $\mathbf{A}(1,-6)$, $\mathbf{D}(1,1)$
f) $\mathbf{E}\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $\mathbf{H}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

72. (P. 73) Efectúe lo que se le pide:

a) Encuentre las coordenadas del punto $\mathbf{P}$ que divide al segmento con extremos $\mathbf{A}(1, 2)$ y $\mathbf{B}(4, 5)$ en la razón 1:2.
b) Encuentre las coordenadas del punto $\mathbf{P}$ que divide al segmento con extremos $\mathbf{F}(-6, 10)$ y $\mathbf{K}(4, 4)$ en la razón 4:3.

73. (P. 75) Encuentre en cada caso el punto medio $\mathbf{P}$ de $\overline{\mathbf{AB}}$ cuyos extremos son:

a) $\mathbf{A}(1, 3)$, $\mathbf{B}(-2, 5)$
b) $\mathbf{A}(5,-6)$, $\mathbf{B}(5, 8)$
c) $\mathbf{A}(9, 4)$, $\mathbf{B}(-2, 8)$
d) $\mathbf{A}(-2,-4)$, $\mathbf{B}(-2, 6)$

74. (P. 75) Uno de los extremos de un segmento es el punto (6, 8) y su punto medio es (−2, 7). Encuentre las coordenadas del otro extremo.

Sección 2: La recta

✓ Ecuación de la recta con pendiente m e intercepto $(0,b)$ con el eje y:
$y = mx + b$

✓ Ecuación punto-pendiente de la recta:
$y - y_1 = m(x - x_1)$

✓ Ecuación de la recta que pasa por los puntos $\mathbf{A}(x_1, y_1)$, $\mathbf{B}(x_2, y_2)$:
$y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

✓ Ecuación general de la recta:
$Ax + By + C = 0$

✓ Distancia del punto $\mathbf{O}(0,0)$ a la recta $\mathbf{A}x + \mathbf{B}y + \mathbf{C} = 0$
$d = \dfrac{|\mathbf{C}|}{\sqrt{\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2}}$

Ejercicios

75. (P. 78) Para cada inciso, identifique la pendiente de la recta dada y el intercepto con el eje y. Trace la gráfica.

a) $y = 3x + 2$
b) $y = -3x + 1$
c) $y = -x - 6$
d) $y = \frac{4}{3}x + 2$
e) $y = -\frac{1}{2}x$
f) $-2x + y = 1$

76. (P. 79) Determine la ecuación y trace la gráfica de la recta que pasa por $\mathbf{A}(2,-3)$ y su pendiente es −2.

77. (P. 79) Determine en cada caso la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,-1)$ y tiene la pendiente indicada:

a) $m=-4$ b) $m=\frac{1}{3}$ c) $m=-\frac{7}{2}$

78. (P. 80) Calcule para cada inciso la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

a) $A(0, 2)$ y $B(1, 5)$ b) $H(2, 7)$ y $K(1, 3)$

c) $P(-3,-6)$ y $Q(-5, 8)$ d) $O(0, 0)$ y $L(1, 5)$

e) $X(6,-2)$ y $Z(-6,-2)$ f) $R(1,9)$ y $G(4,-1)$

79. (P. 81) Determine la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos:

a) $A(2, 1)$ y $B(3,-1)$ b) $P(2, 4)$ y $F(4, 8)$

c) $T(5, 18)$ y $D(-15,-2)$ d) $M(4,0)$ y $L(1, 0)$

e) $X(9,-6)$ y $H(7,3)$ f) $G(7,4)$ y $R(-8, 1)$

80. (P. 82) Escriba cada ecuación dada en la forma $Ax+By+C=0$, con $A\neq 0$ o $B\neq 0$:

a) $y=\frac{2}{3}x+1$ b) $2y=-4x+1$ c) $y-5=0$

d) $x=-12$ e) $y=\frac{7}{4}x-11$ f) $-7y=\frac{1}{4}x+1$

81. (P. 82)

a) Dada la recta $7x-4y-6=0$, determine la ecuación de la forma $y=mx+b$ que le corresponde.

b) Dada la recta $-5x+\frac{y}{2}-4=0$, determine la ecuación de la forma $y=mx+b$ que le corresponde.

82. (P. 83) Determine para cada inciso la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados:

a) $(2, 1)$ y $(5, 1)$ b) $(-7, 1)$ y $(-7, 4)$

c) $(0, 1)$ y $(0, 4)$ d) $(-3,-3)$ y $(5,-3)$

e) $(-4, 1)$ y $(-4, 2)$ f) $(6,-12)$ y $(7,-12)$

83. (P. 83) Determine la ecuación de la recta que cumple:

a) Pasa por $(3, 1)$ y tiene pendiente cero.

b) Es paralela al eje x y su intercepto con el eje y es $(0, 3)$.

c) Pasa por los puntos $(1,-1)$ y $(1, 10)$.

84. (P. 84) Investigue si las parejas de rectas dadas son paralelas:

a) $y=-7x-1$
$y=7x+12$

b) $y+11=-x$
$x=1-y$

c) $4x-5y+1=0$
$2x-1{,}2y+1=0$

d) $x+y=1$
$2x+2y=0$

85. (P. 84)

a) Determine la ecuación de la recta que pasa por $(3, -2)$ y es paralela a la recta $2x + y - 2 = 0$.

b) Determine la ecuación de la recta que pasa por (1, 1) y es paralela a la recta $x + y + 3 = 0$.

c) Determine la ecuación de la recta que pasa por (0, 0) y es paralela a la recta $-x + 1 = -y$.

86. (P. 85) Para cada recta calcule la pendiente de una recta perpendicular a esta:

a) $y = -6x + 1$ b) $y = 2x$ c) $y - 2x = 1$

d) $-4x + 6y = 3$ e) $3x - 7y + 1 = 0$ f) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$

87. (P. 86) Calcule la distancia del origen $O(0,0)$ a cada recta dada:

a) $3x + 4y + 15 = 0$ b) $-8x + 6y - 5 = 0$

c) $7x + \sqrt{15}\,y + 2 = 0$ d) $3x - 2y + 1 = 0$

e) $x + 3y - 10 = 0$ f) $-x + 5y = 0$

Sección 3: La circunferencia

✓ Forma canónica de la ecuación de una circunferencia de centro $O(0,0)$ y radio r:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

✓ Forma ordinaria de la ecuación de una circunferencia de centro $C(h, k)$ y radio r:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

✓ Forma general de la ecuación de una circunferencia:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Ejercicios

88. (P. 89) Determine en cada caso la ecuación de la circunferencia con centro en (0,0) y radio dado:

a) $r = 3$ b) $r = 9$ c) $r = \sqrt{2}$ d) $r = \sqrt{8}$

89. (P. 89) Encuentre el centro y radio de la circunferencia:

a) $x^2 + y^2 = 4$ b) $x^2 + y^2 = 16$ c) $x^2 + y^2 = 12$ d) $x^2 + y^2 = 21$

90. (P. 90) Determine la ecuación de cada circunferencia sabiendo que tiene:

a) Centro $C(2, -1)$ y radio $r = 1$.

b) Centro $C(7, 4)$ y radio $r = 4$

c) Centro $C(-2, -1)$ y radio $r = \sqrt{13}$.

d) Centro $C(-1, 1)$ y radio $r = \sqrt{17}$.

91. (P. 90) Encuentre el centro y el radio de cada circunferencia:

a) $(x-1)^2+(y-2)^2=5$ b) $(x+7)^2+(y-1)^2=9$

b) $(x+5)^2+(y+1)^2=8$ d) $(x+1)^2+(y+3)^2=\frac{9}{4}$

92. (P. 91) Determine la forma general de la ecuación de cada circunferencia:

a) $(x-1)^2+(y+2)^2=6$ b) $(x+3)^2+(y-5)^2=12$

c) $(x-4)^2+(y-1)^2=16$ d) $(x-9)^2+(y-5)^2=18$

93. (P. 92) Determine la forma ordinaria para cada circunferencia:

a) $x^2+y^2+6x-10y+23=0$ b) $x^2+y^2-4x-8y+8=0$

c) $x^2+y^2-10x-14y+58=0$ d) $x^2+y^2-12x-8y+37=0$

94. (P. 93) Encuentre las intersecciones de cada circunferencia con la recta secante dada.

a) $x^2+y^2=5, \quad y=2x$ b) $x^2+y^2=9, \quad y=x-3$

c) $x^2+y^2=4, \quad y=x-2$ d) $x^2+y^2=16, \quad y=x-4$

95. (P. 94) Encuentre las intersecciones de cada circunferencia con la recta tangente dada.

a) $x^2+y^2=2, \quad y=x+2$ b) $x^2+y^2=8, \quad y=x-4$

c) $x^2+y^2=18, \quad y=x+6$ d) $x^2+y^2=32, \quad y=x-8$

Ejercicios Avanzados

EA13. Dados los puntos $\mathbf{A}(-2, 0)$, $\mathbf{B}(6, 0)$, $\mathbf{C}(x,y)$. Determine las coordenadas de $\mathbf{C}$, de manera que el triángulo $\mathbf{ABC}$ sea equilátero.

EA14. Las coordenadas del punto $\mathbf{P}$ que divide al segmento $\overline{\mathbf{AB}}$ en la razón 5:2 son (3, 4). Si los extremos de dicho segmento son $\mathbf{A}(x_1, y_1)$ y $\mathbf{B}(4, 8)$, determine las coordenadas de $\mathbf{A}$.

EA15. Determine la ecuación de la mediatriz del segmento cuyos extremos son $\mathbf{A}(1, 3)$ y $\mathbf{B}(4, 2)$.

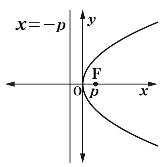
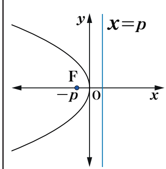
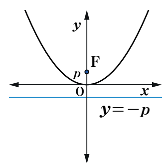
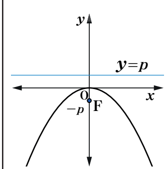
EA16. Calcule la longitud de la cuerda de la circunferencia $x^2+y^2=8$ determinada por la recta secante $y=-x+1$.

EA17. Determine la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2+y^2-6x-6y+10=0$ en el punto (1, 1).

Unidad 5: Cónicas

Sección 1: La parábola

- ✓ Parábola es el conjunto de puntos P en un plano que equidistan de un punto fijo F (foco) y una recta fija l (directriz).
- ✓ Elementos de la parábola:

Ecuación	$y^2 = 4px$	$y^2 = -4px$	$x^2 = 4py$	$x^2 = -4py$
Gráfica				
Vértice	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
Foco	$\mathrm{F}(p, 0)$	$\mathrm{F}(-p, 0)$	$\mathrm{F}(0, p)$	$\mathrm{F}(0, -p)$
Directriz	$x = -p$	$x = p$	$y = -p$	$y = p$

Ejercicios

96. (P.98) Determine en cada inciso la ecuación de la parábola con vértice en el origen y los elementos dados:
   a) Foco $\mathrm{F}(1, 0)$ y directriz en $x = -1$
   b) Foco $\mathrm{F}(5, 0)$ y directriz en $x = -5$
   c) Foco $\mathrm{F}(3, 0)$ y directriz en $x = -3$
   d) Foco $\mathrm{F}(-1, 0)$ y directriz en $x = 1$
   e) Foco $\mathrm{F}\left(\frac{7}{2}, 0\right)$ y directriz en $x = -\frac{7}{2}$
   f) Foco $\mathrm{F}\left(-\frac{11}{4}, 0\right)$ y directriz en $x = \frac{11}{4}$

97. (P.99) Determine en cada inciso la ecuación de la parábola con vértice en el origen y los elementos dados:
   a) Foco $\mathrm{F}(0, 3)$ y directriz en $y = -3$
   b) Foco $\mathrm{F}(0, 5)$ y directriz en $y = -5$
   c) Foco $\mathrm{F}(0, -6)$ y directriz en $y = 6$
   d) Foco $\mathrm{F}(0, -1)$ y directriz en $y = 1$
   e) Foco $\mathrm{F}\left(0, \frac{4}{5}\right)$ y directriz en $y = -\frac{4}{5}$
   f) Foco $\mathrm{F}\left(0, -\frac{10}{7}\right)$ y directriz en $y = -\frac{10}{7}$

98. (P.100) Encuentre el vértice, eje de simetría, foco y directriz de las siguientes parábolas:
   a) $y^2 = 8x$ b) $x^2 = 12y$ c) $y^2 + 8x = 0$
   d) $x^2 + 2y = 0$ e) $y^2 = -14x$ f) $x^2 + 15y = 0$

99. (P. 101) Encuentre los puntos de intersección de:

a) La recta $y=-x+3$ con la parábola $x^2=4y$

b) La recta $y=x+4$ con la parábola $x^2=2y$

c) La recta $y=-\frac{4}{3}x+1$ con la parábola $x^2=-3y$

100. (P. 102) Encuentre los puntos de intersección de:

a) La recta $y=x-2$ con la parábola $y^2=x$

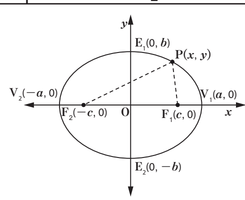
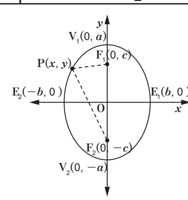
b) La recta $y=2x$ con la parábola $y^2=8x$

c) La recta $y=2x-4$ con la parábola $y^2=4x$

Sección 2: La elipse

✓ **Elipse** es el conjunto de todos los puntos P del plano tal que la suma de las distancias de P a los dos puntos fijos F_1 y F_2 (focos) es constante.

✓ Elementos de la elipse:

<table>
<tr><td>Ecuación</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$</td><td>$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$</td></tr>
<tr><td>Vértice</td><td>$V_1(a, 0)$ y $V_2(-a, 0)$</td><td>$V_1(0,a)$ y $V_2(0,-a)$</td></tr>
<tr><td>Foco</td><td>$F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$,</td><td>$F_1(0,c)$ y $F_2(0,-c)$</td></tr>
<tr><td>Gráfica</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="3">Eje mayor contiene a F_1 y F_2</td></tr>
<tr><td colspan="3">Se cumple la relación $c^2=a^2-b^2$</td></tr>
</table>

Ejercicios

101. (P. 104). Determine la ecuación de cada elipse, de acuerdo con los siguientes datos:

a) Focos $F_1(3, 0)$ y $F_2(-3, 0)$, vértices $V_1(5, 0)$ y $V_2(-5, 0)$

b) Focos $F_1(4, 0)$ y $F_2(-4, 0)$, vértices $V_1(6, 0)$ y $V_2(-6, 0)$

c) Focos $F_1(2, 0)$ y $F_2(-2, 0)$, vértices $V_1(4, 0)$ y $V_2(-4, 0)$

d) Focos $F_1(6, 0)$ y $F_2(-6,0)$, vértices $V_1(8, 0)$ y $V_2(-8, 0)$

102. (P. 105) Determine la ecuación de cada elipse, con los datos dados.

a) Focos $F_1(0,\sqrt{7})$ y $F_2(0,-\sqrt{7})$, vértices $V_1(0, 4)$ y $V_2(0,-4)$

b) Focos $F_1(0, 3)$ y $F_2(0,-3)$, vértices $V_1(0, 5)$ y $V_2(0,-5)$

c) Focos $F_1(0, 8)$ y $F_2(0,-8)$, vértices $V_1(0, 10)$ y $V_2(0,-10)$

d) Focos $F_1(0, 2)$ y $F_2(0,-2)$, vértices $V_1(0, 4)$ y $V_2(0,-4)$

103. (P. 106) Encuentre los vértices, focos y extremos de las elipses dadas por las ecuaciones siguientes:

a) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1$ b) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ c) $\dfrac{x^2}{27}+\dfrac{y^2}{6}=1$

104. (P. 106) Encuentre vértices, focos y extremos de las elipses dadas por las siguientes ecuaciones:

a) $4x^2+100y^2=100$ b) $4x^2+9y^2=36$ c) $x^2+3y^2=6$

105. (P. 107) Encuentre los vértices, focos y extremos de las elipses dadas por las ecuaciones siguientes:

a) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$ b) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$ c) $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{100}=1$

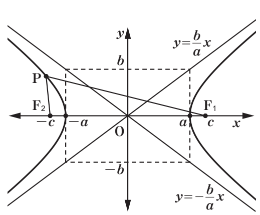
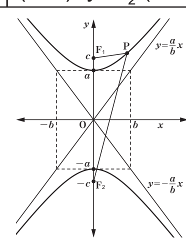
106. (P. 107) Encuentre vértices, focos y extremos de las elipses dadas por las siguientes ecuaciones:

a) $25x^2+9y^2=225$ b) $16x^2+4y^2=64$ c) $16x^2+25y^2=400$

Sección 3: La hipérbola

✓ **Hipérbola** es el conjunto de todos los puntos P del plano con la propiedad de que el valor absoluto de la diferencia de las distancias de P a los dos puntos fijos F_1 y F_2 (focos) es constante.

✓ Elementos de la hipérbola:

Ecuación	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$
Vértice	$\mathrm{V}_1\,(a, 0)$ y $\mathrm{V}_2\,(-a, 0)$	$\mathrm{V}_1\,(0, a)$ y $\mathrm{V}_2\,(0, -a)$
Focos	$\mathrm{F}_1\,(c, 0)$ y $\mathrm{F}_2\,(-c, 0)$,	$\mathrm{F}_1\,(0, c)$ y $\mathrm{F}_2\,(0, -c)$
Gráfica		
Asíntotas	$y=\pm\dfrac{b}{a}x$	$y=\pm\dfrac{a}{b}x$
Se cumple la relación $c^2=a^2+b^2$		

Ejercicios

107. (P. 110) Determine para cada inciso la ecuación de la hipérbola y sus asíntotas, si tiene:

a) Focos $\mathrm{F}_1(5, 0)$ y $\mathrm{F}_2\,(-5,0)$, vértices $\mathrm{V}_1\,(4,0)$ y $\mathrm{V}_2(-4,0)$

b) Focos $\mathrm{F}_1(8, 0)$ y $\mathrm{F}_2\,(-8,0)$, vértices $\mathrm{V}_1(6,0)$ y $\mathrm{V}_2(-6,0)$

c) Focos $\mathrm{F}_1\,(\sqrt{8},0)$ y $\mathrm{F}_2\,(-\sqrt{8},0)$, vértices $\mathrm{V}_1\,(2, 0)$ y $\mathrm{V}_2(-2, 0)$

d) Focos $\mathrm{F}_1(5, 0)$ y $\mathrm{F}_2(-5, 0)$, vértices $\mathrm{V}_1(3, 0)$ y $\mathrm{V}_2(-3, 0)$

108. (P. 111) Determine en para cada inciso la ecuación de la hipérbola y sus asíntotas, si tiene:
a) Focos $\mathbf{F}_1\ (0, 4)$ y $\mathbf{F}_2\ (0, -4)$, vértices $\mathbf{V}_1(0, 3)$ y $\mathbf{V}_2\ (0, -3)$
b) Focos $\mathbf{F}_1\ (0, 10)$ y $\mathbf{F}_2\ (0, -10)$, vértices $\mathbf{V}_1(0, 5)$ y $\mathbf{V}_2(0, -5)$
c) Focos $\mathbf{F}_1\ (0, 9)$ y $\mathbf{F}_2\ (0, -9)$, vértices $\mathbf{V}_1(0, 4)$ y $\mathbf{V}_2\ (0, -4)$
d) Focos $\mathbf{F}_1\left(0, \sqrt{20}\right)$ y $\mathbf{F}_2\left(0, -\sqrt{20}\right)$, vértices $\mathbf{V}_1(0, 3)$ y $\mathbf{V}_2(0, -3)$

109. (P. 112) Dadas las ecuaciones de las hipérbolas, encuentre sus vértices, focos y extremos.
a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$ b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ c) $\frac{x^2}{27} - \frac{y^2}{16} = 1$

110. (P. 112) Dadas las ecuaciones de las hipérbolas, encuentre sus vértices, focos y extremos.
a) $9x^2 - 4y^2 = 36$ b) $x^2 - 4y^2 = 4$ c) $4x^2 - 25y^2 = 100$

111. (P. 113) Encuentre los vértices, focos y extremos de las elipses dadas por las ecuaciones siguientes:
a) $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$ b) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$ c) $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{10} = 1$

112. (P. 113) Encuentre vértices, focos y extremos de las elipses dadas por las siguientes ecuaciones:
a) $25y^2 - 4x^2 = 100$ b) $16y^2 - 4x^2 = 64$ c) $9y^2 - 2x^2 = 18$

Ejercicios Avanzados

EA18. Una circunferencia cuyo centro es el punto $(4, -1)$ pasa por el foco de la parábola $x^2 + 16y = 0$. Demuestre que dicha circunferencia es tangente a la directriz de la parábola.

EA19. Determine la ecuación de la elipse que pasa por $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, 3\right)$, su eje mayor es el eje x, y $a = 2b$.

EA20. Determine la ecuación de la hipérbola que pasa por los puntos $(3, -2)$ y $(7, 6)$, además sus focos se ubican sobre el eje x.

EA21. Calcule los puntos de intersección de la recta $2x - 9y + 12 = 0$ con las asíntotas de la hipérbola $4x^2 - 9y^2 = 36$.

EA22. Demuestre que si las asíntotas de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ son perpendiculares, entonces $a = b$ (en este caso se dice que la hipérbola es equilátera).

Unidad 6: Técnicas de conteo y probabilidades

Sección 1: Técnicas de conteo

- ✓ Principio de conteo de la suma: Si la acción A se puede realizar de m formas distintas y la acción B de n formas distintas (siendo estas diferentes a las de A), entonces la acción A o B puede ocurrir de $m+n$ formas distintas.
- ✓ Principio de conteo de la multiplicación: Si un suceso A puede ocurrir de m maneras, y luego otro suceso B puede ocurrir de n maneras, entonces el total de formas en que ambos pueden ocurrir es mn.
- ✓ Total de permutaciones:
  - De n objetos distintos tomados todos: $n!$
  - De n objetos distintos tomando r a la vez: ${}_nP_r = n(n-1)\cdots(n-r+1)$
  - Circulares: $(n-1)!$
  - Con repetición: $\dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}$
- ✓ Total de combinaciones de n objetos distintos tomando r a la vez: ${}_nC_r = \dfrac{{}_nP_r}{r!}$

Ejercicios

113. (P.118) Utilice un diagrama de árbol para resolver los siguientes problemas:

a) Elías quiere diseñar la carátula de un libro cuyo título puede ser de color azul o rojo y el fondo verde, naranja, café o blanco. ¿Cuántas combinaciones de colores posibles hay para la carátula?

b) Un señor tiene 3 corbatas y 4 camisas ¿Cuántos arreglos de camisas y corbatas diferentes puede vestir?

c) María tiene 3 blusas y 5 faldas. ¿Cuántos arreglos de blusas y camisas diferentes podría usar?

114. (P.120) Utilice el principio de conteo de la suma para resolver los siguientes ejercicios:

a) Determine los posibles pares de números cuya suma sea 6 o 9, que se pueden obtener al lanzar 2 dados A y B.

b) Una persona saldrá a pasear y puede elegir entre ir al cine donde hay 3 películas en cartelera o al teatro donde hay 4 obras disponibles. ¿De cuántas formas distintas puede elegir el paseo?

c) En una universidad de Managua ofrecen tres cursos diferentes de Matemáticas, cuatro diferentes de Física y dos diferentes de Administración. ¿Cuántas opciones se tienen para la elección de uno de estos cursos?

115. (P.121) Utilice el principio de conteo de la multiplicación para resolver los siguientes problemas:

a) ¿De cuántas maneras se puede escoger una vocal y una consonante de la palabra “canto”?

b) ¿Cuántos posibles resultados se obtienen cuando se lanza un par de dados una sola vez?

c) ¿Cuántos menús que consisten de sopa, emparedado, postre y un refresco existen si se puede seleccionar entre 4 sopas diferentes, 3 clases de emparedados, 5 postres y 4 refrescos?

116. (P. 122) Determine el valor de cada expresión:

a) $3!$ b) $4!$ c) $8!$ d) $(5!)(3!)$

117. (P. 122) Resuelva los siguientes problemas:

a) ¿Cuáles y cuántos números de tres cifras puede formar utilizando los dígitos 1, 2 y 3?

b) ¿De cuántas maneras se pueden formar 4 personas en una fila de atención al cliente en un banco?

c) En el proceso de empaque de zapatos en una zapatería de Masaya se deben ordenar cajas para este fin. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar 6 cajas distintas?

118. (P. 123) Calcule:

a) ${}_6P_2$ b) ${}_5P_3$ c) ${}_7P_4$ d) ${}_9P_3$

119. (P. 123) Responda las siguientes preguntas:

a) Es necesario elegir al presidente, vicepresidente, secretario y vocal de un comité sindical formado por 8 personas. ¿De cuántas formas se puede efectuar esta elección si cada miembro del comité puede ocupar solo un cargo?

b) ¿Cuántos códigos diferentes de tres letras se pueden formar con las letras **A**, **B**, **C**, **D**, **E** si ninguna de ellas puede usarse más de una vez?

c) Se van a ubicar en un estante 5 libros de Matemática tomados de 8 distintos. ¿Cuántos arreglos son posibles?

120. (P. 124) Resuelva los siguientes problemas:

a) ¿De cuántas maneras se pueden sentar 4 personas alrededor de una mesa circular?

b) ¿De cuántas maneras se pueden acomodar 7 llaves en un llavero circular, si las llaves pueden deslizarse por completo alrededor del anillo del mismo?

c) Un grupo de 6 amigos decide realizar una excursión. ¿De cuántas formas pueden sentarse alrededor de una fogata construida en dicho paseo?

121. (P. 125) Calcule el total de combinaciones en cada caso:

a) ${}_5C_3$ b) ${}_4C_3$ c) ${}_7C_4$ d) ${}_8C_5$

122. (P. 126) Resuelva los siguientes problemas:

a) ¿Cuántos comités distintos, integrados por 3 personas, se pueden formar a partir de un grupo de 6 personas?

b) Un estudiante puede seleccionar 6 preguntas cualesquiera de las 10 que componen un examen. ¿De cuántas formas puede hacer su selección?

c) ¿De cuántas formas pueden mezclarse los siete colores del arcoíris de tres en tres?

123. (P. 126) Resuelva los siguientes problemas:

a) ¿De cuántas maneras puede integrarse un concejo municipal formado por 3 hombres y 2 mujeres, si estos deben ser escogidos entre 6 hombres y 5 mujeres?

b) Una urna contiene 7 pelotas blancas y 3 rojas. ¿De cuántas maneras pueden ser extraídas 2 blancas y 1 roja?

c) Un equipo de béisbol tiene 15 miembros. Cuatro jugadores son pitcher y los 11 miembros restantes pueden jugar cualquier posición. ¿Cuántos equipos distintos de 9 jugadores se forman?

d) Encuentre el número de comités que pueden formarse a partir de 4 químicos y 3 físico, si debe integrase por 2 químicos y 1 físico.

124. (P. 127) En cada caso calcule el total de combinaciones solicitado usando las fórmulas ${}_nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ y ${}_nC_r = \dfrac{{}_nP_r}{r!}$.

a) ${}_4C_2$ b) ${}_5C_3$ c) ${}_7C_4$

125. (P. 127) Resuelva los siguientes problemas:

a) Juan quiere regalar a Lucía 3 libros y elegirlos entre 6 que ella quiere leer. ¿De cuántas maneras puede escoger los tres libros?

b) Encuentre el número de formas en las cuales pueden asignarse 6 profesores de Matemática en cuatro secciones de un colegio de secundaria, si ninguno cubre más de una sección.

c) En una clase de 10 alumnos, van a distribuirse 3 premios. ¿De cuántas formas puede hacerse la distribución si los premios son iguales?

126. (P. 128) Resuelva los siguientes problemas:

a) Dos hermanos han decidido repartirse una propiedad que heredaron de su padre, para ello sembrarán en la línea divisoria árboles frutales en las siguientes cantidades: 2 de mango, 3 de aguacate y 2 de guayaba. ¿De cuántas maneras pueden plantarse los árboles?

b) ¿Cuántas permutaciones diferentes pueden obtenerse con las letras de la palabra RECONOZCO?

c) Denotemos por las letras M y H el nacimiento de una niña y un niño, respectivamente. Para una familia de dos niños y dos niñas, un orden posible de nacimiento es "M M H H" . ¿Cuántos órdenes de nacimiento son posibles para estos cuatro hijos?

Sección 2: Probabilidades

- ✓ Probabilidad de un evento $\mathbf{A}$:
$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \frac{n(\mathbf{A})}{n(\mathbf{E})} = \frac{\text{número de resultados favorables}}{\text{númerodecasosposibles}}$$
- ✓ Eventos mutuamente excluyentes: Son eventos que no tienen elementos en común.
- ✓ Eventos independientes: La ocurrencia de uno de los eventos no afecta la del otro, y viceversa.
- ✓ Propiedades de la probabilidad
  1. $0 \le \mathbf{P}(\mathbf{A}) \le 1$
  2. Si $\mathbf{E}$ es un evento seguro, entonces $\mathbf{P}(\mathbf{E}) = 1$.
  3. Si ϕ representa un evento imposible, $P(\phi) = 0$.
  4. $\mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{B}) - \mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$
  5. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son eventos mutuamente excluyentes, $\mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{B})$.
  6. La probabilidad de $\overline{\mathbf{A}}$ (complemento de $\mathbf{A}$) es $\mathbf{P}(\overline{\mathbf{A}}) = 1 - \mathbf{P}(\mathbf{A})$.
  7. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son eventos independientes, $\mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{B})$.
  8. La probabilidad del evento $\mathbf{B}$, condicionado por la ocurrencia del evento $\mathbf{A}$ es $\mathbf{P}(\mathbf{B}/\mathbf{A}) = \dfrac{\mathbf{n}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})}{\mathbf{n}(\mathbf{A})} = \dfrac{\mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})}{\mathbf{P}(\mathbf{A})}$.

Ejercicios

127. (P. 130) Resuelva los siguientes problemas aplicando la definición de probabilidad:

a) En el lanzamiento de un dado, ¿qué es más probable obtener: un número impar o un múltiplo de 4?

b) Si se selecciona al azar 1 libro de un estante que contiene 5 novelas, 3 libros de poemas y 2 diccionarios, ¿cuál es la probabilidad de seleccionar uno de poemas?

c) Una bolsa contiene 2 bolas negras, 3 blancas, 4 rojas y 5 verdes. Se extrae una bola de la bolsa; ¿cuál es la probabilidad de que esta sea de color rojo?

d) Determine la probabilidad de que al lanzar al aire dos monedas, se obtengan dos escudos.

128. (P. 132) Resuelva los siguientes problemas de aplicación:

a) Calcule la probabilidad de que la suma de los números que aparecen en las caras superiores de dos dados que se lanzan sea 7.

b) En un sobre hay 20 páginas, ocho llevan dibujado un coche y las restantes están en blanco. Encuentre la probabilidad de extraer una página en blanco.

c) Si una canasta está llena de peras y manzanas, de las cuales 20 son peras y 10 manzanas, ¿qué fruta es más probable sacar al azar de la canasta?

d) Determine la probabilidad de obtener tres veces número en el lanzamiento de tres monedas al aire.

129. (P. 133) Resuelva los siguientes problemas:

a) Si se lanza un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número par o un múltiplo de 3?

b) En un grupo de 10 estudiantes, 4 juegan béisbol, 6 fútbol, y 8 practica alguno de los dos deportes. Si se selecciona uno de estos jóvenes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que practique los dos deportes?

c) Los resultados académicos de cierto grupo de 11mo grado muestran que la probabilidad de aprobar Matemática es 0,6 y la de aprobar Física 0,7. Además, la probabilidad de aprobar las dos asignaturas es 0,45. Si en este grupo se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe alguna de las dos asignaturas?

d) Si se selecciona aleatoriamente una letra del abecedario, ¿cuál es la probabilidad de que esta sea una vocal o una letra ubicada antes de la g? (Recuerde que el abecedario español tiene 27 letras).

130. (P. 135) Resuelva los siguientes problemas:

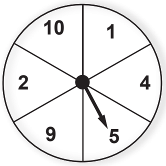
a) Para el experimento de lanzar un dado, calcule la probabilidad de obtener un número par o un múltiplo de 5.

b) Se tienen cinco libros de distintas materias: Matemática, Química, Biología, Física y Lengua y Literatura. Si se toma uno de ellos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que este sea de matemática o de física?

c) En una bolsa se tienen 7 bolas rojas, 9 azules y 4 verdes. Si se extrae una bola de la bolsa, ¿cuál es la probabilidad de que sea roja o azul?

d) Si las probabilidades de que una persona, al comprar un automóvil nuevo, seleccione el color blanco o el azul son, respectivamente, 0,15 y 0,23, ¿cuál es la probabilidad de que un comprador adquiera un automóvil en uno de estos colores?

131. (P. 136) Imagine que hace girar en sentido horario la aguja de la ruleta de la derecha. Calcule la probabilidad de cada evento:



a) A: obtener un número entero.

b) B: obtener un número negativo.

c) C: obtener un múltiplo de 5.

132. (P. 136) Resuelva los siguientes problemas:

a) En una bolsa se han metido 4 fichas amarillas, 4 azules, 4 verdes y 4 rojas. Determine la probabilidad de los siguientes eventos:

A: obtener una ficha amarilla

B: obtener una ficha negra

C: extraer ficha azul o una verde

b) En una urna se tienen fichas enumeradas del 1 al 20. Determine la probabilidad de los siguientes eventos:

A: obtener una ficha que muestra un múltiplo de 4.

B: extraer una ficha que muestra un número par o impar.

C: obtener una ficha con número mayor a 50.

D: obtener una ficha que muestra un múltiplo de 10 o un número impar.

133. (P. 137) Resuelva los siguientes problemas usando la relación $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$:

a) Considere el lanzamiento de un dado y determine la probabilidad del evento no obtener un múltiplo de 3.

b) En una bolsa hay bolas de igual tamaño pero de distintos colores: 3 blancas, 4 negras y 5 rojas. Si se extrae una bola y se mira el color, ¿cuál es la probabilidad de que no sea negra?

c) En el lanzamiento de dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los números que muestran las caras superiores no sea mayor que 10?

134. (P. 139) Resuelva los siguientes ejercicios, identificando en cada caso eventos independientes:

a) Si de una baraja de 52 cartas, se extrae una de ellas, se coloca de nuevo en el paquete y se toma una segunda carta. Para los eventos A: se extrae 7 y B: se extrae un corazón rojo, determine si son independientes y calcule $P(A \cap B)$.

b) Se extrae una carta de una baraja de 52 naipes. Si se repone y se extrae una segunda carta, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean as?

c) Se lanza un dado dos veces. ¿Cuál es la probabilidad de que en el primer lanzamiento resulte 3 y en el segundo lanzamiento un número impar?

d) Se tiene una caja de bombillos que contiene 20 piezas, de las cuales 5 están defectuosas. Si se seleccionan 2 al azar y se sacan de la caja en sucesión sin reemplazo del primero, ¿cuál es la probabilidad de que ambos bombillos resulten defectuosos?

135. (P. 141) Resuelva los siguientes ejercicios:

a) Se lanza un par de dados. Calcule la probabilidad de que solo en uno de los dados aparezca un 2, sabiendo que la suma de los puntos es 6.

b) De una baraja de 52 naipes se ha tomado una carta. Calcule la probabilidad de que la carta sea de corazón sabiendo que se tomó un as.

c) En una cadena de televisión se hizo una encuesta a 2 500 personas para saber la audiencia de un debate y de una película que se emitieron en horas distintas: 2 100 personas vieron la película, 1 500 vieron el debate y 1 450 vieron ambos. Si se elige al azar a uno de los encuestados, ¿cuál es la probabilidad de que este viera la película, sabiendo que vio el debate?

Ejercicios Avanzados

EA23. ¿De cuántas maneras pueden sentarse en línea recta 5 hombres y 4 mujeres, si todas las mujeres deben sentarse primero?

EA24. ¿Cuántos números pares diferentes de cuatro cifras se pueden formar con los números del 0 al 9 si se permite repetición? (el cero no puede ir al principio de cada número).

EA25. Obtenga el número de diagonales de un hexágono utilizando combinaciones. Recuerde que las diagonales de un polígono se obtienen uniendo dos vértices no consecutivos.

EA26. Se va a formar un comité de cinco personas de un grupo de 20, de los cuales tres son hermanos, ¿de cuántas maneras se puede formar el comité, si deben estar por lo menos dos de los hermanos?

EA27. Si Pedro tiene un llavero con 4 llaves y solo una de ellas abre una puerta, ¿cuál es la probabilidad de que si prueba las llaves, logre abrir la puerta al tercer intento sin usar una llave más de una vez?

Unidad 1: Sucesiones

Sección 1: Sucesiones, notación y término general

1.

a) $2,\ 4,\ \underline{\mathbf{6}},\ 8,\ 10,\ \underline{\mathbf{12}},\ 14,\ 16, \ldots$

b) $2,\ 5,\ \underline{\mathbf{8}},\ 11,\ 14,\ \underline{\mathbf{17}},\ 21, \ldots$

c) $5,\ 15,\ \underline{\mathbf{25}},\ 35,\ \underline{\mathbf{45}},\ 55,\ 65, \ldots$

d) $20,\ 18,\ \underline{\mathbf{16}},\ 14,\ 12,\ \underline{\mathbf{10}},\ 8, \ldots$

e) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \underline{\mathbf{\frac{1}{8}}},\ \frac{1}{16},\ \underline{\mathbf{\frac{1}{32}}},\ \frac{1}{64}, \ldots$

f) $-6,\ -4,\ \underline{\mathbf{-2}},\ 0,\ 2,\ \underline{\mathbf{4}},\ 6, \ldots$

g) $18,\ \underline{\mathbf{20}},\ 22,\ 24,\ \underline{\mathbf{26}},\ 28, \ldots$

h) $-24,\ -18,\ \underline{\mathbf{-12}},\ -6,\ \underline{\mathbf{0}},\ 6, \ldots$

2.

a) $a_n = 3n$ b) $a_n = 7n$

c) $a_n = 10^n$ d) $a_n = 4n - 2$

e) $a_n = \dfrac{2}{n}$ f) $a_n = \dfrac{n+1}{n}$

g) $a_n = 2n + 16$ h) $a_n = 2n - 8$

3. Se hace $n = 1, 2, 3, 4, 5\ y\ 10$ en la fórmula del término general.

a) $a_n = 5n - 1$
$a_1 = (5)(1) - 1 = \mathbf{4}$
$a_2 = (5)(2) - 1 = \mathbf{9}$
$a_3 = (5)(3) - 1 = \mathbf{14}$
$a_4 = (5)(4) - 1 = \mathbf{19}$
$a_5 = (5)(5) - 1 = \mathbf{24}$
$a_{10} = (5)(10) - 1 = \mathbf{49}$

b) $a_n = 2n - 1$
$a_1 = (2)(1) - 1 = \mathbf{1}$
$a_2 = (2)(2) - 1 = \mathbf{3}$
$a_3 = (2)(3) - 1 = \mathbf{5}$
$a_4 = (2)(4) - 1 = \mathbf{7}$
$a_5 = (2)(5) - 1 = \mathbf{9}$
$a_{10} = (2)(10) - 1 = \mathbf{19}$

c) $a_n = n^2 - 1$
$a_1 = (1)^2 - 1 = \mathbf{0}$
$a_2 = (2)^2 - 1 = \mathbf{3}$
$a_3 = (3)^2 - 1 = \mathbf{8}$
$a_4 = (4)^2 - 1 = \mathbf{15}$
$a_5 = (5)^2 - 1 = \mathbf{24}$
$a_{10} = (10)^2 - 1 = \mathbf{99}$

d) $a_n = 10 - n$
$a_1 = 10 - 1 = \mathbf{9}$
$a_2 = 10 - 2 = \mathbf{8}$
$a_3 = 10 - 3 = \mathbf{7}$
$a_4 = 10 - 4 = \mathbf{6}$
$a_5 = 10 - 5 = \mathbf{5}$
$a_{10} = 10 - 10 = \mathbf{0}$

e) $a_n = 2^n - 10$
$a_1 = 2^1 - 10 = \mathbf{-8}$
$a_2 = 2^2 - 10 = \mathbf{-6}$
$a_3 = 2^3 - 10 = \mathbf{-2}$
$a_4 = 2^4 - 10 = \mathbf{6}$
$a_5 = 2^5 - 10 = \mathbf{22}$
$a_{10} = 2^{10} - 10 = \mathbf{1014}$

f) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \mathbf{\frac{1}{2}}$

$a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \mathbf{\frac{1}{4}}$

$a_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \mathbf{\frac{1}{8}}$

$a_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \mathbf{\frac{1}{16}}$

$a_5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \mathbf{\frac{1}{32}}$

$a_{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \mathbf{\frac{1}{1024}}$

g) $a_n = n(-1)^n$

$a_1 = 1(-1)^1 = \mathbf{-1}$

$a_2 = 2(-1)^2 = \mathbf{2}$

$a_3 = 3(-1)^3 = \mathbf{-3}$

$a_4 = 4(-1)^4 = \mathbf{4}$

$a_5 = 5(-1)^5 = \mathbf{-5}$

$a_{10} = 10(-1)^{10} = \mathbf{10}$

Sección 2: Sucesiones aritméticas

4.

a) $d = \mathbf{3}$, $1,\ 4,\ 7,\ 10,\ \underline{\mathbf{13}}$...

b) $d = \mathbf{2}$, $2,\ 6,\ \underline{\mathbf{10}},\ 14,\ 18,\ \underline{\mathbf{20}}$...

c) $d = \mathbf{4}$, $15,\ 19,\ \underline{\mathbf{23}},\ 27,\ \underline{\mathbf{31}}$,...

d) $d = \mathbf{7}$, $1,\ 8,\ \underline{\mathbf{15}},\ 22,\ \underline{\mathbf{29}}\ldots$

e) $d = \mathbf{-7}$, $-7,\ \underline{\mathbf{-14}}\ -21, -28$,...

f) $d = \mathbf{-8}$, $15,\ 7,\ -1,\ -9,\ \underline{\mathbf{-17}},\ \ldots$

g) $d = \mathbf{3}$, $\underline{9},\ 12,\ 15,\ \underline{\mathbf{18}},\ 21, \ldots$

h) $d = \mathbf{5}$, $8,\ \underline{\mathbf{13}},\ \underline{\mathbf{18}},\ 23,\ 28, \ldots$

5. $a_n = a_1 + (n-1)d$

a) $a_1 = 2$ y $d = 4$, entonces

$a_n = 2 + (n-1)(4) = \mathbf{4n - 2}$

$a_{10} = (4)(10) - 2 = \mathbf{38}$

b) $a_1 = 5$ y $d = 4$, entonces

$a_n = 5 + (n-1)(4) = \mathbf{4n + 1}$

$a_7 = (4)(7) + 1 = \mathbf{29}$

c) $a_1 = 6$ y $d = 4$, entonces

$a_n = 6 + (n-1)(4) = \mathbf{4n + 2}$

$a_9 = (4)(9) + 2 = \mathbf{38}$

d) $a_1 = -12$ y $d = 6$, entonces

$a_n = -12 + (n-1)(6) = \mathbf{6n - 18}$

$a_6 = (6)(6) - 18 = \mathbf{18}$

e) $a_1 = -1$ y $d = -3$, entonces

$a_n = -1 + (n-1)(-3) = \mathbf{-3n+2}$

$a_{11} = -3(11) + 2 = \mathbf{-31}$

f) $a_1 = 20$ y $d = -4$, entonces

$a_n = 20 + (n-1)(-4) = -\mathbf{4n}+24$

$a_{12} = -4(12) + 24 = \mathbf{-24}$

6. $a_n = a_1 + (n-1)d$

a) $a_4 = a_1 + (4-1)d = a_1 + 3d$

$d = 2$ y $a_4 = 13$, entonces

$a_1 + (3)(2) = 13$

$a_1 = 13 - 6 = \mathbf{7}$

b) $a_5 = a_1 + (5-1)d = a_1 + 4d$

$d = 3$ y $a_5 = 21$, entonces

$a_1 + (4)(3) = 21$

$a_1 = 21 - 12 = \mathbf{9}$

c) $a_6 = a_1 + (6-1)d = a_1 + 5d$

$d = -2$ y $a_6 = 10$, entonces

$a_1 + (5)(-2) = 10$

$a_1 = 10 + 10 = \mathbf{20}$

d) $a_8 = a_1 + (8-1)d = a_1 + 7d$

$d = -4$ y $a_8 = -10$, entonces

$a_1 + (7)(-4) = -10$

$a_1 = -10 + 28 = \mathbf{18}$

7. $a_n = a_1 + (n-1)d$

a) $a_5 = a_1 + (5-1)d = a_1 + 4d$

$a_1 = -5$ y $a_5 = 3$, entonces

$-5 + 4d = 3$

$4d = 8$

$d = \mathbf{2}$

b) $a_6 = a_1 + (6-1)d = a_1 + 5d$

$a_1 = -2$ y $a_6 = 3$, entonces

$-2 + 5d = 3$

$5d = 5$

$d = \mathbf{1}$

c) $a_8 = a_1 + (8-1)d = a_1 + 7d$

$a_1 = -4$ y $a_8 = 14$, entonces

$-4 + 7d = 14$

$7d = 18$

$d = \frac{18}{7}$

d) $a_5 = a_1 + (5-1)d = a_1 + 4d$

$a_1 = 10$ y $a_5 = 18$, entonces

$10 + 4d = 18$

$4d = 8$

$d = \mathbf{2}$

8. $a_n = a_1 + (n-1)d$

a) $a_3 = a_1 + 2d,\ a_6 = a_1 + 5d$

$a_3 = 5$ y $a_6 = 20$, por lo tanto

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 5 \\ a_1 + 5d = 20 \end{cases}$$

Se resuelve el sistema de arriba.

$$\begin{array}{rr} & a_1 + 5d = 20 \\ +) & -a_1 - 2d = -5 \\ \hline & 3d = 15 \\ & d = 5 \end{array}$$

Se sustituye $d = 5$ en $a_1 + 2d = 5$,

entonces $a_1 + (2)(5) = 5$

$$a_1 = 5 - 10 = -5$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{a_1 = -5}$ y $\boldsymbol{d = 5}$

b) $a_3 = a_1 + 2d,\ a_5 = a_1 + 4d$

$a_3 = 13$ y $a_5 = 23$, por lo tanto

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 13 \\ a_1 + 4d = 23 \end{cases}$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones de arriba.

$$\begin{array}{rr} & a_1 + 4d = 23 \\ +) & -a_1 - 2d = -13 \\ \hline & 2d = 10 \\ & d = 5 \end{array}$$

Se sustituye $d = 5$ en $a_1 + 2d = 13$,

entonces $a_1 + (2)(5) = 13$

$$a_1 = 13 - 10 = 3$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{a_1 = 3}$ y $\boldsymbol{d = 5}$

c) $a_2 = a_1 + d,\ a_7 = a_1 + 6d$

$a_2 = 2$ y $a_7 = 17$, por lo tanto

$$\begin{cases} a_1 + d = 2 \\ a_1 + 6d = 17 \end{cases}$$

Se resuelve el sistema de arriba.

$$\begin{array}{rr} & a_1 + 6d = 17 \\ +) & -a_1 - d = -2 \\ \hline & 5d = 15 \\ & d = 3 \end{array}$$

Se sustituye $d = 3$ en $a_1 + d = 2$,

entonces $a_1 + 3 = 2$

$$a_1 = 2 - 3 = -1$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{a_1 = -1}$ y $\boldsymbol{d = 3}$

d) $a_3 = a_1 + 2d,\ a_6 = a_1 + 5d$

$a_3 = -26$ y $a_6 = -35$, por lo tanto

$$\begin{cases} a_1 + 2d = -26 \\ a_1 + 5d = -35 \end{cases}$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones de arriba.

$$\begin{array}{rr} & a_1 + 5d = -35 \\ +) & -a_1 - 2d = 26 \\ \hline & 3d = -9 \\ & d = -3 \end{array}$$

Se sustituye $d = -3$ en $a_1 + 2d = -26$,

entonces $a_1 + (2)(-3) = -26$

$$a_1 = -26 + 6$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{a_1 = -20}$ y $\boldsymbol{d = -3}$.

e) $a_2 = a_1 + d,\ a_5 = a_1 + 4d$

$a_2 = -15$ y $a_5 = -27$, por lo tanto

$$\begin{cases} a_1 + d = -15 \\ a_1 + 4d = -27 \end{cases}$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones de arriba.

$$\begin{array}{rr} & a_1 + 4d = -27 \\ +) & -a_1 - d = 15 \\ \hline & 3d = -12 \\ & d = -4 \end{array}$$

Se sustituye $d = -4$ en $a_1 + d = -15$,

entonces $a_1 + (-4) = -15$

$$a_1 = -15 + 4 = -11$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{a_1 = -11}$ y $\boldsymbol{d = -4}$

f) $a_2 = a_1 + d,\ a_6 = a_1 + 5d$

$a_2 = 40$ y $a_6 = 140$, por lo tanto

$$\begin{cases} a_1 + d = 40 \\ a_1 + 5d = 140 \end{cases}$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones de arriba.

$$a_1 + 5d = 140$$
$$+) \quad -a_1 - d = -40$$
$$4d = 100$$
$$d = 25$$

Se sustituye $d = 25$ en $a_1 + d = 40$, entonces $a_1 + 25 = 40$

$$a_1 = 40 - 25 = 15$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{a_1 = 15}$ y $\boldsymbol{d = 25}$

9. $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

a) $S_5 = \frac{5}{2}(1 + 17) = \left(\frac{5}{2}\right)(18)$

$= (5)(9) = \mathbf{45}$

b) $S_8 = \frac{8}{2}(-1 + 13) = (4)(12) = \mathbf{48}$

c) $S_6 = \frac{6}{2}(-1 + 14) = (3)(13) = \mathbf{39}$

d) $S_6 = \frac{6}{2}[-20 + (-35)] = (3)(-55)$

$= \mathbf{-165}$

e) $S_5 = \frac{5}{2}(-8 - 26) = (5)(-17)$

$= \mathbf{-85}$

f) $S_7 = \frac{7}{2}(-20 - 140) = (7)(-80)$

$= \mathbf{-560}$

10. $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$

a) $S_{10} = \left(\frac{10}{2}\right)[(2)(11) + (10 - 1)(5)]$

$= (5)(22 + 45) = (5)(67) = \mathbf{335}$

b) $S_8 = \left(\frac{8}{2}\right)[(2)(8) + (8 - 1)(3)]$

$= (4)(16 + 21)$

$= \mathbf{148}$

c) $S_9 = \left(\frac{9}{2}\right)[(2)(12) + (9 - 1)(8)]$

$= \left(\frac{9}{2}\right)(24 + 64) = \left(\frac{9}{2}\right)(88)$

$= \mathbf{396}$

d) $S_6 = \left(\frac{6}{2}\right)[(2)(11) + (6 - 1)(-3)]$

$= (3)(22 - 15) = (3)(7) = \mathbf{21}$

e) $S_7 = \left(\frac{7}{2}\right)[(2)(-9) + (7 - 1)(-3)]$

$= \left(\frac{7}{2}\right)(-18 - 18) = \left(\frac{7}{2}\right)(-36)$

$= \mathbf{-126}$

f) $S_8 = \left(\frac{8}{2}\right)[(2)(-20) + (8 - 1)(6)]$

$= (4)(-40 + 42) = (4)(2) = \mathbf{8}$

11. $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

a) $a_1 = 3,\ n = 6$ y $S_6 = 48$

$48 = \frac{6}{2}(3 + a_6)$

$48 = 3(3 + a_6)$

$3 + a_6 = 16$

$\boldsymbol{a_6 = 13}$

b) $a_1 = -1,\ n = 6$ y $S_6 = 39$

$39 = \frac{6}{2}(-1 + a_6)$

$39 = 3(-1 + a_6)$

$-1 + a_6 = 13$

$\boldsymbol{a_6 = 14}$

c) $a_1 = -8,\ n = 5$ y $S_5 = -85$

$-85 = \frac{5}{2}(-8 + a_5)$

$-170 = 5(-8 + a_5)$

$-8 + a_5 = -34$

$\boldsymbol{a_5 = -26}$

d) $a_1 = -20,\ n = 6$ y $S_6 = -561$

$-561 = \frac{6}{2}(-20 + a_6)$

$-561 = 3(-20 + a_6)$

$-20 + a_6 = -187$

$\boldsymbol{a_6 = -167}$

12. $a_n = a_1 + (n-1)d,\ S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

a) $a_1 = 2,\ d = 3$ y $a_n = 17$

$17 = 2 + (n-1)(3)$

$17 = 3n - 1$

$3n = 18$

$n = 6$, entonces $a_6 = 17$.

$S_6 = \frac{6}{2}(2 + 17) = (3)(19) = \mathbf{57}$

b) $a_1 = 4,\ d = 5$ y $a_n = 29$

$29 = 4 + (n-1)(5)$

$5n = 30$

$n = 6$, entonces $a_6 = 29$.

$S_6 = \frac{6}{2}(4 + 29) = (3)(33) = \mathbf{99}$

c) $a_1 = -3,\ d = -6$ y $a_n = -27$

$-27 = -3 + (n-1)(-6)$

$-6n = -30$

$n = 5$, entonces $a_5 = -27$.

$S_5 = \frac{5}{2}(-3-27) = \left(\frac{5}{2}\right)(-30)$

$= \mathbf{-75}$

d) $a_1 = -4,\ d = -7$ y $a_n = -46$

$-46 = -4 + (n-1)(-7)$

$7n = 49$

$n = 7$, entonces $a_7 = -46$.

$S_7 = \frac{7}{2}(-4 - 46) = \left(\frac{7}{2}\right)(-50)$

$= \mathbf{-175}$

13. $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

a) $S_n = 136, a_1 = 10$ y $d = 2$, se tiene

$136 = \frac{n}{2}[(2)(10) + (n-1)(2)]$

$272 = n(2n + 18)$

$2n^2 + 18n - 272 = 0$

$n^2 + 9n - 136 = 0$

$(n+17)(n-8) = 0, n = 8, n = -17$

Como $n > 0, n = 8$.

Por lo tanto, tiene **8 depósitos**

b) $S_n = 130, a_1 = 20$ y $a_n = 32$, se tiene

$130 = \frac{n}{2}(20 + 32)$

$260 = 52n,\ \ n = 5$

Por lo tanto, se formaron **5 filas**

Sección 3: Sucesiones geométricas

14.

a) $1, 2, 4, 8, \mathbf{16},\ 32, 64, \ldots$ $r = \mathbf{2}$

b) $4, 8, 16, \mathbf{32}, 64, \ldots$ $r = \mathbf{2}$

c) $3, 9, 27, \mathbf{81},\ 243, \ldots$ $r = \mathbf{3}$

d) $5, 15, \mathbf{45}, 135, \ldots$ $r = \mathbf{3}$

e) $2, -6, \mathbf{18}, -54, \ldots$ $r = \mathbf{-3}$

f) $\underline{\mathbf{3}},\ \underline{\mathbf{15}},\ 75, 375, \ldots$ $r = \mathbf{5}$

g) $\underline{\mathbf{1}},\ \underline{\mathbf{4}},\ 16, 64, \mathbf{256}, \ldots$ $r = \mathbf{4}$

h) $80, 40, \mathbf{20}, 10, 5, \ldots$ $r = \mathbf{\frac{1}{2}}$

i) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \mathbf{\frac{4}{3}}, \mathbf{\frac{8}{3}}, \frac{16}{3}, \ldots$ $r = \mathbf{2}$

j) $\mathbf{\frac{1}{2}}, \mathbf{\frac{1}{3}}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \ldots$ $r = \mathbf{\frac{2}{3}}$

15. $a_n = a_1 r^{n-1}$

a) $a_n = (1)(3^{n-1}) = \mathbf{3^{n-1}}$,

$a_6 = 3^{6-1} = 3^5 = \mathbf{243}$

b) $a_n = \mathbf{(2)(3^{n-1})}$

$a_5 = (2)3^{5-1} = (2)(81) = \mathbf{162}$

c) $a_n = (1)(5^{n-1}) = \mathbf{5^{n-1}}$,

$a_6 = 5^{6-1} = 5^5 = \mathbf{3125}$

d) $a_n = (1)[(-4)^{n-1}] = \mathbf{(-4)^{n-1}}$,

$a_6 = (-4)^{6-1} = (-4)^5 = \mathbf{-1024}$

e) $a_n = (3)[(-2)^{n-1}] = (\mathbf{3})(-\mathbf{2})^{\boldsymbol{n-1}}$,
$a_8 = (3)(-2)^{8-1} = (3)(-2)^7$
$= -\mathbf{384}$

f) $a_n = (-1)[(-3)^{n-1}]$
$= (-\mathbf{1})(-\mathbf{3})^{\boldsymbol{n-1}}$,
$a_6 = (-1)(-3)^{6-1} = (-1)(-3)^5$
$= \mathbf{243}$

g) $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)[(2)^{n-1}] = \left(\frac{1}{3}\right)(\mathbf{2})^{\boldsymbol{n-1}}$,
$a_6 = \left(\frac{1}{3}\right)(2)^{6-1} = \left(\frac{1}{3}\right)(2)^5 = \mathbf{\frac{32}{3}}$

h) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right] = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)^{\boldsymbol{n-1}}$,
$a_8 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{8-1} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^7$
$= \mathbf{\frac{64}{2187}}$

16. $a_n = a_1 r^{n-1}$

a) $n = 4,\ r = 2$ y $a_4 = 24$,
entonces $a_1(2^{4-1}) = 24$
$8a_1 = 24$
$\boldsymbol{a_1} = \mathbf{3}$

b) $n = 5,\ r = 2$ y $a_5 = -32$,
entonces $a_1(2^{5-1}) = -32$
$16a_1 = -32$
$\boldsymbol{a_1} = -\mathbf{2}$

c) $n = 4,\ r = -3$ y $a_4 = -54$,
entonces $a_1[(-3)^{4-1}] = -54$
$-27a_1 = -54$
$\boldsymbol{a_1} = \mathbf{2}$

d) $n = 4,\ r = -2$ y $a_4 = -24$,
entonces $a_1[(-2)^{4-1}] = -24$
$-8a_1 = -24$
$\boldsymbol{a_1} = \mathbf{3}$

e) $n = 3,\ r = 4$ y $a_3 = 48$,
entonces $a_1(4^{3-1}) = 48$
$16a_1 = 48$
$\boldsymbol{a_1} = \mathbf{3}$

f) $n = 4,\ r = -2$ y $a_4 = -40$,
entonces $a_1[(-2)^{4-1}] = -40$
$-8a_1 = -40$
$\boldsymbol{a_1} = \mathbf{5}$

g) $n = 3,\ r = \frac{1}{2}$ y $a_3 = \frac{1}{6}$,
entonces $a_1\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}\right] = \frac{1}{6}$
$\frac{1}{4}a_1 = \frac{1}{6}$
$\boldsymbol{a_1} = \mathbf{\frac{2}{3}}$

h) $n = 4,\ r = -\frac{1}{4}$ y $a_4 = -\frac{5}{64}$,
entonces $a_1\left[\left(-\frac{1}{4}\right)^{4-1}\right] = -\frac{5}{64}$
$-\frac{1}{64}a_1 = -\frac{5}{64}$
$\boldsymbol{a_1} = \mathbf{5}$

17. $a_n = a_1 r^{n-1}$

a) $a_2 = a_1 r$ y $a_4 = a_1 r^3$,
entonces $a_1 r = 10,\quad a_1 r^3 = 40.$
Se tiene $\frac{a_1 r^3}{a_1 r} = \frac{40}{10}$
$r^2 = 4,\ r = \pm 2$
Se sustituye los valores de r en $a_2 = a_1 r$
Si $\boldsymbol{r} = \mathbf{2}, 10 = a_1(2)$, es decir
$\boldsymbol{a_1} = \mathbf{5}$
Si $\boldsymbol{r} = -\mathbf{2}, 10 = a_1(-2)$, es decir
$\boldsymbol{a_1} = -\mathbf{5}$

b) $a_3 = a_1 r^2$ y $a_5 = a_1 r^4$,
entonces $a_1 r^2 = 6,\ a_1 r^4 = 24.$
Se tiene $\frac{a_1 r^4}{a_1 r^2} = \frac{24}{6}$
$r^2 = 4,\ r = \pm 2$
Se sustituye los valores de r en $a_3 = a_1 r^2$

Si $\boldsymbol{r} = \mathbf{2}, 6 = a_1(2^2)$, es decir

$$\boldsymbol{a_1} = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$

Si $\boldsymbol{r} = -\mathbf{2}, \quad 6 = a_1(-2)^2$, es decir

$$\boldsymbol{a_1} = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$

c) $a_3 = a_1r^2$ y $a_5 = a_1r^4$,
entonces $a_1r^2 = 5,\ a_1r^4 = 80$.

Se tiene $\frac{a_1r^4}{a_1r^2} = \frac{80}{5}$

$$r^2 = 16, \ r = \pm 4$$

Se sustituye los valores de r en $a_3 = a_1r^2$

Si $\boldsymbol{r = 4}$, entonces $5 = a_1(4^2)$, es decir

$$\boldsymbol{a_1} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{16}}$$

Si $\boldsymbol{r} = -\mathbf{4},\ 5 = a_1(-4)^2$, es decir

$$\boldsymbol{a_1} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{16}}$$

d) $a_3 = a_1r^2$ y $a_5 = a_1r^4$,
entonces $a_1r^2 = 32,\ a_1r^4 = 128$.

Se tiene $\frac{a_1r^4}{a_1r^2} = \frac{128}{32}$

$$r^2 = 4, \ r = \pm 2$$

Se sustituye los valores de r en $a_3 = a_1r^2$

Si $\boldsymbol{r} = \mathbf{2},\ 32 = a_1(2^2)$, es decir

$$\boldsymbol{a_1} = \frac{\mathbf{32}}{\mathbf{4}} = \mathbf{8}$$

Si $\boldsymbol{r} = -\mathbf{2}, 32 = a_1(-2)^2$, es decir

$$\boldsymbol{a_1} = \frac{\mathbf{32}}{\mathbf{4}} = \mathbf{8}$$

e) $a_2 = a_1r$ y $a_4 = a_1r^3$,
entonces $a_1r = 2,\ a_1r^3 = 32$.

Se tiene $\frac{a_1r^3}{a_1r} = \frac{32}{2}$

$$r^2 = 16, \ r = \pm 4$$

Se sustituye los valores de r en $a_2 = a_1r$

Si $\boldsymbol{r} = \mathbf{4}, 2 = a_1(4)$, es decir

$$\boldsymbol{a_1} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

Si $\boldsymbol{r} = -\mathbf{4}, 2 = a_1(-4)$, es decir

$$\boldsymbol{a_1} = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{4}} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

f) $a_3 = a_1r^2$ y $a_4 = a_1r^3$,
entonces $a_1r^2 = 18,\ a_1r^3 = -54$.

Se tiene $\frac{a_1r^3}{a_1r^2} = \frac{-54}{18}$

$$r = -3$$

Se sustituye los valores de r en $a_3 = a_1r^2$

Si $\boldsymbol{r} = -\mathbf{3},\ 18 = a_1(-3)^2$, es decir

$$\boldsymbol{a_1} = \frac{\mathbf{18}}{\mathbf{9}} = \mathbf{2}$$

g) $a_2 = a_1r$ y $a_4 = a_1r^3$,

entonces $a_1r = 3,\ a_1r^3 = \frac{16}{3}$.

Se tiene $\frac{a_1r^3}{a_1r} = \frac{\frac{16}{3}}{3}$

$$r^2 = \frac{16}{9}, \ r = \pm\frac{4}{3}$$

Se sustituye los valores de r en $a_2 = a_1r$

Si $\boldsymbol{r} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}},\ 3 = a_1\left(\frac{4}{3}\right)$, es decir

$$\boldsymbol{a_1} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}}$$

Si $\boldsymbol{r} = -\frac{4}{3},\ 3 = a_1\left(-\frac{4}{3}\right)$, es decir

$$\boldsymbol{a_1} = -\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}}$$

h) $a_4 = a_1r^3$ y $a_6 = a_1r^5$,

entonces $a_1r^3 = -\frac{8}{5},\ a_1r^5 = -\frac{32}{5}$.

Se tiene $\frac{a_1r^5}{a_1r^3} = \frac{-\frac{32}{5}}{-\frac{8}{5}}$

$$r^2 = 4, \quad r = \pm 2$$

Se sustituye los valores de r en $a_4 = a_1 r^3$

Si $\boldsymbol{r} = \mathbf{2}, -\frac{8}{5} = a_1(2)^3$, es decir

$$\boldsymbol{a_1} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$$

Si $\boldsymbol{r} = -2, -\frac{8}{5} = a_1(-2)^3$, es decir

$$\boldsymbol{a_1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$$

18. $S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

a) $a_1 = 1,\ r = 3$

$$S_5 = \frac{(1)(3^5-1)}{3-1} = \frac{242}{2} = \mathbf{121}$$

b) $a_1 = 2,\ r = 2$

$$S_8 = \frac{(2)(2^8-1)}{2-1} = \mathbf{510}$$

c) $a_1 = -1, r = 3$

$$S_4 = \frac{(-1)(3^4-1)}{3-1} = \frac{-80}{2} = -\mathbf{40}$$

d) $a_1 = -2,\ r = -1$

$$S_{10} = \frac{(-2)\left[(-1)^{10}-1\right]}{-1-1} = \frac{0}{-2} = \mathbf{0}$$

e) $a_1 = 4,\ r = -3$

$$S_4 = \frac{(4)\left[(-3)^4-1\right]}{-3-1} = \frac{320}{-4} = \mathbf{80}$$

f) $a_1 = 10,\ r = -2$

$$S_5 = \frac{(10)\left[(-2)^5-1\right]}{-2-1} = \frac{-330}{-3}$$

$$= \mathbf{110}$$

19. $S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

a) $S_6 = 126,\ r = 2$ y $n = 6$

$$126 = \frac{a_1(2^6-1)}{2-1}$$

$$126 = 63a_1$$

$$a_1 = \frac{126}{63} = \mathbf{2}$$

b) $S_4 = 160,\ r = 3$ y $n = 4$

$$160 = \frac{a_1(3^4-1)}{3-1}$$

$$160 = 40a_1$$

$$a_1 = \frac{160}{40} = \mathbf{4}$$

c) $S_3 = 124\quad r = 5$ y $n = 3$

$$124 = \frac{a_1(5^3-1)}{5-1}$$

$$124 = 31a_1$$

$$a_1 = \frac{124}{31} = \mathbf{4}$$

d) $S_5 = -22,\ r = -2$ y $n = 5$

$$-22 = \frac{a_1\left[(-2)^5-1\right]}{-2-1}$$

$$-22 = 11a_1$$

$$a_1 = \frac{-22}{11} = -\mathbf{2}$$

e) $S_6 = 315,\ r = 2$ y $n = 6$

$$315 = \frac{a_1(2^6-1)}{2-1}$$

$$315 = 63a_1$$

$$a_1 = \frac{315}{63} = \mathbf{5}$$

f) $S_4 = 240, r = 3$ y $n = 4$

$$240 = \frac{a_1(3^4-1)}{3-1}$$

$$240 = 40a_1$$

$$a_1 = \frac{240}{40} = \mathbf{6}$$

g) $S_4 = -\frac{15}{2},\ r = 2$ y $n = 4$

$$-\frac{15}{2} = \frac{a_1(2^4-1)}{2-1}$$

$$-\frac{15}{2} = 15a_1$$

$$a_1 = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

h) $S_5 = -\frac{22}{5}, r = -2$ y $n = 5$

$$-\frac{22}{5} = \frac{a_1[(-2)^5 - 1]}{-2-1}$$

$$-\frac{22}{5} = 11a_1$$

$$a_1 = -\mathbf{\frac{2}{5}}$$

Sección 4: Notación de sumatoria

20.

a) $\sum_{k=1}^{n} 2k = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$

b) $\sum_{k=1}^{7} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2$

c) $\sum_{k=1}^{n} (2k+1) = 3+5+7+9+\cdots+(2n+1)$

d) $\sum_{k=1}^{n} 6k = 6 + 12 + 18 + 24 + \cdots + 6n$

e) $\sum_{k=1}^{4} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

f) $\sum_{k=1}^{n} (4-k) = 3+2+1+0+\cdots+(4-n)$

21.

a) $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k$

b) $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = \sum_{k=1}^{5} 2^k$

c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$

d) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \sum_{k=1}^{4} \frac{k}{(k+1)}$

e) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \sum_{k=1}^{5} \frac{k}{3}$

22.

a) $\sum_{k=1}^{10} 2k = 2\sum_{k=1}^{10} k$

b) $\sum_{k=1}^{10} (k + k^2) = \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} k^2$

c) $\sum_{k=1}^{10} 6 = (10)(6)$

d) $\sum_{k=1}^{8} 9 = (8)(9)$

e) $\sum_{k=1}^{10} (k^3 + 3k) = \sum_{k=1}^{10} k^3 + 3\sum_{k=1}^{10} k$

f) $\sum_{k=1}^{5} k^2 + 4k = \sum_{k=1}^{5} k^2 + 4\sum_{k=1}^{5} k$

23.

a) $\sum_{k=1}^{20} k = \left(\frac{20}{2}\right)(20+1) = (10)(21)$

$\mathbf{= 210}$

b) $\sum_{k=1}^{9} k = \left(\frac{9}{2}\right)(9+1) = \left(\frac{9}{2}\right)(10)$

$\mathbf{= 45}$

c) $\sum_{k=1}^{12} k = \left(\frac{12}{2}\right)(12+1) = (6)(13)$

$\mathbf{= 78}$

d) $\sum_{k=1}^{25} k = \left(\frac{25}{2}\right)(25+1) = \left(\frac{25}{2}\right)(26)$

$\mathbf{= 325}$

e) $\sum_{k=1}^{24} k = \left(\frac{24}{2}\right)(24+1) = (12)(25)$

$\mathbf{= 300}$

f) $\sum_{k=1}^{40} k = \left(\frac{40}{2}\right)(40+1) = (20)(41)$

$= \mathbf{820}$

24.

a) $\sum_{k=1}^{7} k^2 = \left(\frac{1}{6}\right)(7)(7+1)[(2)(7)+1]$

$= \left(\frac{1}{6}\right)(7)(8)(15) = \mathbf{140}$

b) $\sum_{k=1}^{12} k^2 = \left(\frac{1}{6}\right)(12)(12+1)[(2)(12)+1]$

$= \left(\frac{1}{6}\right)(12)(13)(25) = \mathbf{650}$

c) $\sum_{k=1}^{16} k^2 = \left(\frac{1}{6}\right)(16)(16+1)[(2)(16)+1]$

$= \left(\frac{1}{6}\right)(16)(17)(33) = \mathbf{1496}$

d) $\sum_{k=1}^{13} k^2 = \left(\frac{1}{6}\right)(13)(13+1)[(2)(13)+1]$

$= \left(\frac{1}{6}\right)(13)(14)(27) = \mathbf{819}$

e) $\sum_{k=1}^{20} k^2 = \left(\frac{1}{6}\right)(20)(20+1)[(2)(20)+1]$

$= \left(\frac{1}{6}\right)(20)(21)(41) = \mathbf{2870}$

f) $\sum_{k=1}^{22} k^2 = \left(\frac{1}{6}\right)(22)(23)[(2)(22)+1]$

$= \left(\frac{1}{6}\right)(22)(23)(45) = \mathbf{3795}$

25.

a) $\sum_{k=1}^{5} (2k^2+k) = 2\sum_{k=1}^{5} k^2 + \sum_{k=1}^{5} k$

$= (2)\left(\frac{1}{6}\right)(5)(5+1)[(2)(5)+1]$

$+\left(\frac{1}{2}\right)(5)(5+1)$

$= 110 + 15 = \mathbf{125}$

b) $\sum_{k=1}^{4} (3k^2+2k) = 3\sum_{k=1}^{4} k^2 + 2\sum_{k=1}^{4} k$

$= (3)\left(\frac{1}{6}\right)(4)(4+1)[(2)(4)+1]$

$+(2)\left(\frac{1}{2}\right)(4)(4+1)$

$= 90 + 20 = \mathbf{110}$

c) $\sum_{k=1}^{3} (k^2+k+2) = \sum_{k=1}^{3} k^2 + \sum_{k=1}^{3} k + \sum_{k=1}^{3} 2$

$= \left(\frac{1}{6}\right)(3)(3+1)[(2)(3)+1]$

$+\left(\frac{1}{2}\right)(3)(3+1) + (3)(2)$

$= 14 + 6 + 6 = \mathbf{26}$

d) $\sum_{k=1}^{4} (k^2+4k) = \sum_{k=1}^{4} k^2 + 4\sum_{k=1}^{4} k$

$= \left(\frac{1}{6}\right)(4)(4+1)[(2)(4)+1]$

$+ (4)\left(\frac{1}{2}\right)(4)(4+1)$

$= 30 + 40 = \mathbf{70}$

e) $\sum_{k=1}^{3} \left(\frac{1}{2}k^2+k\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} k^2 + \sum_{k=1}^{3} k$

$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{6}\right)(3)(3+1)[(2)(3)+1]$

$+\left(\frac{1}{2}\right)(3)(3+1)$

$= 7 + 6 = \mathbf{13}$

f) $\sum_{k=1}^{4} (k^2-k-1) = \sum_{k=1}^{4} k^2 - \sum_{k=1}^{4} k - \sum_{k=1}^{4} 1$

$= \left(\frac{1}{6}\right)(4)(4+1)[(2)(4)+1]$

$-\left(\frac{1}{2}\right)(4)(4+1) - (4)(1)$

$= 30 - 10 - 4 = 1\mathbf{6}$

Unidad 2: Potenciación y Funciones Exponenciales

Sección 1: Potenciación y radicación

26.

a) $(2)(2)(2) = \mathbf{2^3}$

b) $(-5)(-5)(-5)(-5)(-5) = (\mathbf{-5})^{\mathbf{5}}$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\boldsymbol{\frac{3}{4}}\right)^{\mathbf{4}}$

d) $(1,2)(1,2)(1,2)(1,2)(1,2)(1,2)$
$= (\mathbf{1,2})^{\mathbf{6}}$

27.

a) $5^3 = (5)(5)(5) = \mathbf{125}$

b) $(-5)^2 = (-5)(-5) = \mathbf{25}$

c) $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = \mathbf{-8}$

d) $\left(-\frac{3}{5}\right)^3 = \left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)$
$= \boldsymbol{-\frac{27}{125}}$

e) $(0,5)^4 = (0,5)(0,5)(0,5)(0,5)$
$= \mathbf{0,0625}$

f) $\left(-\frac{1}{4}\right)^5 = \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)$
$= \boldsymbol{-\frac{1}{1024}}$

28.

a) $a^2 \cdot a^5 = a^{2+5} = \boldsymbol{a^7}$

b) $(a^2)^5 = a^{(2)(5)} = \boldsymbol{a^{10}}$

c) $(ab)^3 = \boldsymbol{a^3 b^3}$

d) $a^5 \div a^3 = a^{5-3} = \boldsymbol{a^2}$

e) $a^4 \cdot a^3 = a^{4+3} = \boldsymbol{a^7}$

f) $(a^5)^3 = a^{(5)(3)} = \boldsymbol{a^{15}}$

g) $(ab)^5 = \boldsymbol{a^5 b^5}$

h) $a^7 \div a^5 = a^{7-5} = \boldsymbol{a^2}$

i) $b^5 \cdot b^4 = b^{5+4} = \boldsymbol{a^9}$

j) $(a^2 b)^3 = a^{(2)(3)} b^3 = \boldsymbol{a^6 b^3}$

k) $(a^2 b^3)^2 = a^{(2)(2)} b^{(3)(2)} = \boldsymbol{a^4 b^6}$

l) $a^7 b^5 \div a^5 b^3 = a^{7-5} b^{5-3} = \boldsymbol{a^2 b^2}$

29.

a) $5^0 = \mathbf{1}$

b) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \boldsymbol{\frac{1}{9}}$

c) $(0,2)^0 = \mathbf{1}$

d) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \boldsymbol{\frac{1}{25}}$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \mathbf{1}$

f) $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2}$
$= \boldsymbol{\frac{1}{9}}$

g) $(-1,4)^0 = \mathbf{1}$

h) $(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4}$
$= \boldsymbol{\frac{1}{16}}$

i) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = \mathbf{27}$

j) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{9}{4}}$

k) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{3}\right)^3$
$= \boldsymbol{\frac{125}{27}}$

l) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 3^4 = \mathbf{81}$

30.

a) $a^3 \cdot a^{-2} = a^3 \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = \boldsymbol{a}$

b) $(a^3)^{-2} = a^{(3)(-2)} = a^{-6} = \boldsymbol{\frac{1}{a^6}}$

c) $(ab)^{-2} = \frac{1}{(ab)^2} = \boldsymbol{\frac{1}{a^2 b^2}}$

d) $a^{-3} \div a^{-5} = a^{-3-(-5)} = a^{-3+5} = \boldsymbol{a^2}$

e) $a^5 \cdot a^{-4} = a^{5+(-4)} = \boldsymbol{a}$

f) $(b^2)^{-4} = b^{-8} = \boldsymbol{\frac{1}{b^8}}$

g) $(a^2 b^3)^{-2} = a^{(2)(-2)} b^{(3)(-2)} = a^{-4} b^{-6}$
$= \boldsymbol{\frac{1}{a^4 b^6}}$

h) $b^{-5} \div b^{-8} = b^{-5-(-8)} = b^{-5+8} = \boldsymbol{b^3}$

31.

a) $(5^5)(5^{-3}) = 5^{5+(-3)} = 5^2 = \mathbf{25}$

b) $(3^2)^{-3} = 3^{(2)(-3)} = 3^{-6} = \frac{1}{3^6}$
$= \boldsymbol{\frac{1}{729}}$

c) $(5^{-2})^0 = 5^{(-2)(0)} = 5^0 = \mathbf{1}$

d) $2^3 \div 2^5 = 2^{3-5} = 2^{-2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

e) $(2^4)(2^{-2}) = 2^{4+(-2)} = 2^2 = \mathbf{4}$

f) $(2^3)^{-2} = 2^{(3)(-2)} = 2^{-6} = \dfrac{1}{2^6} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{64}}$

g) $(4^{-3})^0 = 4^{(-3)(0)} = 4^0 = \mathbf{1}$

h) $3^8 \div 3^5 = 3^{8-5} = 3^3 = \mathbf{27}$

32.

Potenciación	Radicación	La radicación se lee
a) $2^6 = 64$	$\mathbf{2} = \sqrt[6]{\mathbf{64}}$	Dos es igual a la raíz sexta de sesenta y cuatro
b) $(-2)^5 = -32$	$-\mathbf{2} = \sqrt[5]{-\mathbf{32}}$	Menos dos es igual a la raíz quinta de menos treinta y dos
c) $(-\mathbf{3})^3 = -\mathbf{27}$	$-3 = \sqrt[3]{-27}$	Menos tres es igual a la raíz cúbica de menos veinte y siete
d) $3^4 = 81$	$\mathbf{3} = \sqrt[4]{\mathbf{81}}$	Tres es igual a la raíz cuarta de ochenta y uno
e) $(-\mathbf{5})^3 = -\mathbf{125}$	$-5 = \sqrt[3]{-125}$	Menos cinco es igual a la raíz cúbica de menos ciento veinticinco
f) $10^3 = 1000$	$\mathbf{10} = \sqrt[3]{\mathbf{1000}}$	Diez es igual a la raíz cúbica de mil

33.

a) $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = \mathbf{2}$

b) $-\sqrt[4]{16} = -\sqrt[4]{2^4} = -\mathbf{2}$

c) $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = \mathbf{2}$

d) $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -\mathbf{2}$

e) $\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = \mathbf{2}$

f) $-\sqrt[3]{27} = -\sqrt[3]{3^3} = -\mathbf{3}$

g) $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = \mathbf{3}$

h) $-\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{(-3)^3} = \mathbf{3}$

i) $\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -\mathbf{2}$

j) $-\sqrt[3]{1000} = -\sqrt[3]{10^3} = -\mathbf{10}$

k) $\sqrt[7]{-1} = \sqrt[7]{(-1)^7} = -\mathbf{1}$

l) $-\sqrt[11]{-1} = -\sqrt[11]{(-1)^{11}} = -(-1) = \mathbf{1}$

34.

a) $(\sqrt[3]{9})(\sqrt[3]{3}) = \sqrt[3]{(9)(3)} = \sqrt[3]{(3^2)(3^1)}$
$= \sqrt[3]{3^{2+1}} = \sqrt[3]{3^3} = \mathbf{3}$

b) $(\sqrt[4]{1000})(\sqrt[4]{10}) = \sqrt[4]{(10^3)(10^1)}$
$= \sqrt[4]{10^4} = \mathbf{10}$

c) $(\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{16}) = \sqrt[3]{(2^2)(2^4)} = \sqrt[3]{2^6}$
$= \sqrt[3]{(2^2)^3} = 2^2 = \mathbf{4}$

d) $(\sqrt[8]{16})(\sqrt[8]{16}) = \sqrt[8]{(2^4)(2^4)} = \sqrt[8]{2^8}$
$= \mathbf{2}$

e) $(\sqrt[4]{8})(\sqrt[4]{2}) = \sqrt[4]{(2^3)(2^1)} = \sqrt[4]{2^4} = \mathbf{2}$

f) $(\sqrt[5]{27})(\sqrt[5]{9}) = \sqrt[5]{(3^3)(3^2)} = \sqrt[5]{3^5}$
$= \mathbf{3}$

g) $(\sqrt[6]{81})(\sqrt[6]{9}) = \sqrt[6]{(3^4)(3^2)} = \sqrt[6]{3^6}$
$= \mathbf{3}$

h) $(\sqrt[5]{125})(\sqrt[5]{25}) = \sqrt[5]{(5^3)(5^2)} = \sqrt[5]{5^5}$
$= \mathbf{5}$

35.

a) $\dfrac{\sqrt[3]{189}}{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[3]{\dfrac{189}{7}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = \mathbf{3}$

b) $\dfrac{\sqrt[5]{5}}{\sqrt[5]{160}} = \sqrt[5]{\dfrac{5}{160}} = \sqrt[5]{\dfrac{1}{32}} = \sqrt[5]{\dfrac{1}{2^5}}$
$= \sqrt[5]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^5} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{625}} = \sqrt[3]{\dfrac{5}{625}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{125}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{5^3}}$
$= \sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{5}\right)^3} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$

d) $\dfrac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[4]{64}}=\sqrt[4]{\dfrac{4}{64}}=\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}}=\sqrt[4]{\dfrac{1}{2^4}}$

$=\sqrt[4]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^4}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

e) $\dfrac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{9}}=\sqrt[3]{\dfrac{243}{9}}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=\mathbf{3}$

f) $\dfrac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt[4]{9}}=\sqrt[4]{\dfrac{729}{9}}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=\mathbf{4}$

g) $\dfrac{\sqrt[3]{4000}}{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{\dfrac{4000}{4}}=\sqrt[3]{1000}$

$=\sqrt[3]{10^3}=\mathbf{10}$

h) $\dfrac{\sqrt[5]{256}}{\sqrt[5]{8}}=\sqrt[5]{\dfrac{256}{8}}=\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=\mathbf{2}$

36.

a) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[(3)(2)]{64}=\sqrt[6]{2^6}=\mathbf{2}$

b) $\left(\sqrt[4]{16}\right)^2=\sqrt[4]{16^2}=\sqrt[4]{(4^2)^2}$

$=\sqrt[4]{4^4}=\mathbf{4}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt{256}}=\sqrt[(4)(2)]{256}=\sqrt[8]{2^8}=\mathbf{2}$

d) $\left(\sqrt[4]{25}\right)^2=\sqrt[4]{25^2}=\sqrt[4]{(5^2)^2}$

$=\sqrt[4]{5^4}=\mathbf{5}$

37.

a) $a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\boldsymbol{a^2}}$ b) $a^{-\frac{3}{5}}=\dfrac{1}{a^{\frac{3}{5}}}=\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt[5]{\boldsymbol{a^3}}}$

c) $a^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{\boldsymbol{a^4}}$ d) $a^{-\frac{5}{7}}=\dfrac{1}{a^{\frac{5}{7}}}=\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt[7]{\boldsymbol{a^5}}}$

e) $a^{\frac{5}{4}}=\sqrt[4]{\boldsymbol{a^5}}$ f) $a^{-\frac{11}{3}}=\dfrac{1}{a^{\frac{11}{3}}}=\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt[3]{\boldsymbol{a^{11}}}}$

g) $\sqrt[6]{a}=\boldsymbol{a^{\frac{1}{6}}}$ h) $\sqrt[5]{a^3}=\boldsymbol{a^{\frac{3}{5}}}$

i) $\sqrt[7]{b}=\boldsymbol{b^{\frac{1}{7}}}$ j) $\sqrt[7]{a^2}=\boldsymbol{a^{\frac{2}{7}}}$

k) $\sqrt[4]{b}=\boldsymbol{b^{\frac{1}{4}}}$ l) $\sqrt[5]{a^4}=\boldsymbol{a^{\frac{4}{5}}}$

38.

a) $4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=\mathbf{2}$

b) $8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=\mathbf{2}$

c) $27^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{27^2}=\sqrt[3]{(3^3)^2}$

$=\sqrt[3]{(3^2)^3}=3^2=\mathbf{9}$

d) $25^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{25^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{5^2}}=\mathbf{\dfrac{1}{5}}$

e) $100^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10^2}=\mathbf{10}$

f) $8^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{8^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2^3}}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

g) $8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{(2^3)^2}=\sqrt[3]{(2^2)^3}$

$=2^2=\mathbf{4}$

h) $25^{\frac{3}{2}}=\sqrt{25^3}=\sqrt{(5^2)^3}=\sqrt{(5^3)^2}$

$=5^3=\mathbf{125}$

39.

a) $\left(2^{\frac{4}{3}}\right)\left(16^{\frac{1}{6}}\right)=\left(2^{\frac{4}{3}}\right)(2^4)^{\frac{1}{6}}=\left(2^{\frac{4}{3}}\right)\left(2^{\frac{2}{3}}\right)$

$=2^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}=2^{\frac{6}{3}}=2^2=\mathbf{4}$

b) $\sqrt{27}\div\sqrt[6]{27}=27^{\frac{1}{2}}\div 27^{\frac{1}{6}}$

$=(3^3)^{\frac{1}{2}}\div(3^3)^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{3}{2}}\div 3^{\frac{1}{2}}$

$=3^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}=3^1=\mathbf{3}$

c) $\left(\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt{3}\right)\div\sqrt[6]{243}=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)\left(3^{\frac{1}{2}}\right)\div(3^5)^{\frac{1}{6}}$

$=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)\left(3^{\frac{1}{2}}\right)\div 3^{\frac{5}{6}}$

$=3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}}$

$=3^0=\mathbf{1}$

d) $\left(3^{\frac{4}{3}}\right)\left(81^{\frac{1}{6}}\right)=\left(3^{\frac{4}{3}}\right)(3^4)^{\frac{1}{6}}=\left(3^{\frac{4}{3}}\right)\left(3^{\frac{2}{3}}\right)$

$=3^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}=3^2=\mathbf{9}$

e) $\left(\sqrt{8}\right)\left(\sqrt[6]{32}\right) \div \sqrt[3]{16} = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)\left(2^{\frac{5}{6}}\right) \div \left(2^{\frac{4}{3}}\right)$

$$= 2^{\frac{3}{2}+\frac{5}{6}-\frac{4}{3}} = 2^{1} = \mathbf{2}$$

f) $\left(\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{2}\right) \div \sqrt[6]{32} = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)\left(2^{\frac{1}{2}}\right) \div \left(2^{\frac{5}{6}}\right)$

$$= 2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}} = 2^{0} = \mathbf{1}$$

Sección 2: Funciones exponeciales

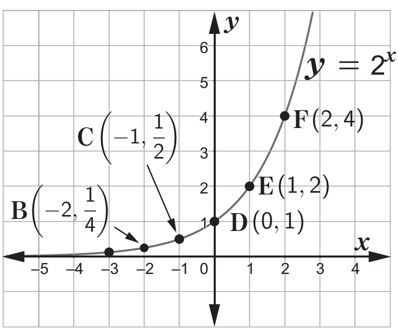
40.

a)

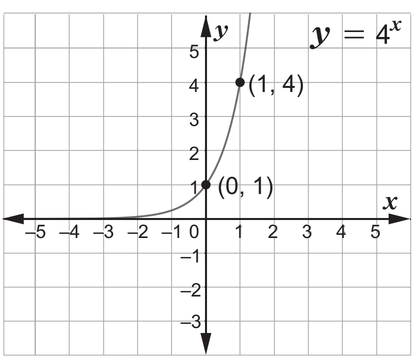
x	-3	-2	-1	0
y	$\frac{1}{8}$	$\mathbf{\frac{1}{4}}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	1
Punto	$A\left(-3, \frac{1}{8}\right)$	$B\left(-2, \mathbf{\frac{1}{4}}\right)$	$C\left(-1, \mathbf{\frac{1}{2}}\right)$	$D(0, 1)$

x	1	2	3
y	$\mathbf{2}$	$\mathbf{4}$	8
Punto	$E(1, \mathbf{2})$	$F(2, \mathbf{4})$	$G(3, 8)$

b) y c)



41.



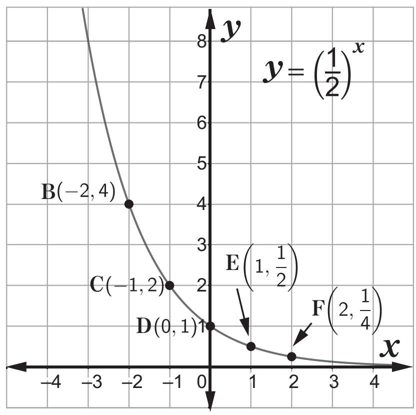
42.

a)

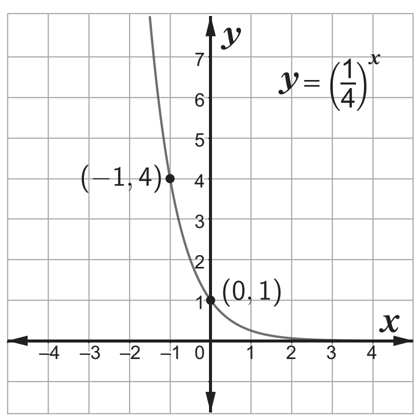
x	-3	-2	-1	0
y	8	$\mathbf{4}$	$\mathbf{2}$	1
Punto	$A(-3,8)$	$B(-2,\mathbf{4})$	$C(-1,\mathbf{2})$	$D(0,1)$

x	1	2	3
y	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{\frac{1}{4}}$	$\frac{1}{8}$
Punto	$E\left(1, \mathbf{\frac{1}{2}}\right)$	$F\left(2, \mathbf{\frac{1}{4}}\right)$	$G\left(3, \frac{1}{8}\right)$

b) y c)



43.



44.

a) $\mathbf{2^3 < 2^5}$

b) $\mathbf{3^{-5} < 3^{-3}}$

c) $\mathbf{5^3 < 5^5}$

d) $\mathbf{2^{-2} < 2^0 < 2^{\frac{3}{2}}}$

e) $\mathbf{3^{-3} < 3^{-2} < 3^{-\frac{1}{2}}}$

f) $\mathbf{5^{-\frac{3}{4}} < 5^{\frac{1}{2}} < 5^2}$

45.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 < \left(\frac{1}{2}\right)^3$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 < \left(\frac{1}{3}\right)^3$

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^5 < \left(\frac{1}{5}\right)^2$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$

e) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 < \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

f) $\left(\frac{1}{5}\right)^0 < \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} < \left(\frac{1}{5}\right)^{-4}$

46.

a) $2^x = 8$
$2^x = 2^3$
$\boldsymbol{x = 3}$

b) $3^{2x} = 9$
$3^{2x} = 3^2$
$\boldsymbol{x = 1}$

c) $7^{-x} = \frac{1}{49}$
$7^{-x} = 7^{-2}$
$\boldsymbol{x = 2}$

d) $5^x = 25$
$5^x = 5^2$
$\boldsymbol{x = 2}$

e) $2^{-2x} = 4$
$2^{-2x} = 2^2$
$\boldsymbol{x = -1}$

f) $5^{-x} = \frac{1}{25}$
$5^{-x} = 5^{-2}$
$\boldsymbol{x = 2}$

g) $4^x = 8$
$2^{2x} = 2^3$
$2x = 3$
$\boldsymbol{x = \frac{3}{2}}$

h) $4^{-x} = \frac{1}{16}$
$4^{-x} = 4^{-2}$
$\boldsymbol{x = 2}$

i) $10^{-3x} = \frac{1}{1000}$
$10^{-3x} = 10^{-3}$
$\boldsymbol{x = 1}$

47.

a) $9^{2x} = 81$
$(3^2)^{2x} = 3^4$
$3^{4x} = 3^4$
$4x = 4$
$\boldsymbol{x = 1}$

b) $64^x = 4^{4x+1}$
$(2^6)^x = 2^{2(4x+1)}$
$2^{6x} = 2^{8x+2}$
$6x = 8x + 2$
$6x - 8x = 2$
$-2x = 2$
$\boldsymbol{x = -1}$

c) $125^{x-1} = 25^{x+3}$
$5^{3(x-1)} = 5^{2(x+3)}$
$5^{3x-3} = 5^{2x+6}$
$3x - 3 = 2x + 6$
$3x - 2x = 6 + 3$
$\boldsymbol{x = 9}$

d) $5^{x-2} = \left(\frac{1}{125}\right)^{2-x}$
$5^{x-2} = 5^{-3(2-x)}$
$x - 2 = 3x - 6$
$x - 3x = -6 + 2$
$-2x = -4$
$\boldsymbol{x = 2}$

e) $27^{2x+2} = 9^{x+5}$
$3^{3(2x+2)} = 3^{2(x+5)}$
$3^{6x+6} = 3^{2x+10}$
$6x + 6 = 2x + 10$
$6x - 2x = 10 - 6$
$4x = 4$
$\boldsymbol{x = 1}$

f) $2^{-3x} = \left(\frac{1}{8}\right)^{2-x}$
$2^{-3x} = 2^{-3(2-x)}$
$2^{-3x} = 2^{3x-6}$
$-3x = 3x - 6$
$-3x - 3x = -6$
$-6x = -6$
$\boldsymbol{x = 1}$

48.

a) $3^{x^2-10} = 3^{3x}$

$x^2 - 10 = 3x$

$x^2 - 3x - 10 = 0$

$(x-5)(x+2) = 0$

$x - 5 = 0, x + 2 = 0$

$\boldsymbol{x = 5}, \ \boldsymbol{x = -2}$

b) $2^{x^2-3x} = 16$

$2^{x^2-3x} = 2^4$

$x^2 - 3x = 4$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x-4)(x+1) = 0$

$x - 4 = 0, \quad x + 1 = 0$

$\boldsymbol{x = 4}, \ \boldsymbol{x = -1}$

c) $3^{x^2-3x} = \frac{1}{9}$

$3^{x^2-3x} = 3^{-2}$

$x^2 - 3x = -2$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x-2)(x-1) = 0$

$x - 2 = 0, x - 1 = 0$

$\boldsymbol{x = 2}, \ \boldsymbol{x = 1}$

d) $5^{x^2-8} = 25^x$

$5^{x^2-8} = 5^{2x}$

$x^2 - 8 = 2x$

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$(x-4)(x+2) = 0$

$x - 4 = 0, \quad x + 2 = 0$

$\boldsymbol{x = 4}, \ \boldsymbol{x = -2}$

e) $8^{x-3} = 2^{x^2-3x}$

$2^{3(x-3)} = 2^{x^2-3x}$

$3x - 9 = x^2 - 3x$

$x^2 - 6x + 9 = 0$

$(x-3)^2 = 0$

$x - 3 = 0$

$\boldsymbol{x = 3}$

f) $5^{x^2+4x} = \frac{1}{125}$

$5^{x^2+4x} = 5^{-3}$

$x^2 + 4x = -3$

$x^2 + 4x + 3 = 0$

$(x+3)(x+1) = 0$

$x + 3 = 0, \quad x + 1 = 0$

$\boldsymbol{x = -3}, \ \boldsymbol{x = -1}$

49.

a) $9^x - 3^x - 6 = 0$

$(3^2)^x - 3^x - 6 = 0$

$(3^x)^2 - 3^x - 6 = 0$

$t^2 - t - 6 = 0$

$(t-3)(t+2) = 0$

$t = 3, \qquad t = -2$

Se realiza el cambio de variable t por 3^x

Como $t = 3^x > 0$, entonces $t = 3$

$3^x = 3 = 3^1$

$x = 1$ **La solución es $\boldsymbol{x = 1}$.**

b) $4^x - 4(2^x) + 4 = 0$

$(2^2)^x - 4(2^x) + 4 = 0$

$(2^x)^2 - 4(2^x) + 4 = 0$

$t^2 - 4t + 4 = 0$

$(t-2)^2 = 0$

$t - 2 = 0$

$t = 2$

Se realiza el cambio de variable t por 2^x

Como $t = 2^x > 0$, entonces $t = 2$

$2^x = 2 = 2^1$

$x = 1$ **La solución es $\boldsymbol{x = 1}$.**

c) $25^x - 6(5^x) + 5 = 0$

$(5^2)^x - 6(5^x) + 5 = 0$

$(5^x)^2 - 6(5^x) + 5 = 0$

$t^2 - 6t + 5 = 0$

$(t-5)(t-1) = 0$

$t - 5 = 0, \quad t - 1 = 0$

$t = 5, \quad t = 1$

Se realiza el cambio de variable t por 5^x

Como $t = 5^x > 0$, entonces $t = 5, \ t = 1$

$5^x = 5 = 5^1 \qquad 5^x = 1 = 5^0$

$x = 1 \qquad x = 0$

La solución es $\boldsymbol{x = 1}$, $\boldsymbol{x = 0}$.

d) $9^x + 2(3^x) - 15 = 0$

$(3^2)^x + 2(3^x) - 15 = 0$

$(3^x)^2 + 2(3^x) - 15 = 0$

$t^2 + 2t - 15 = 0$

$(t+5)(t-3) = 0$

$t + 5 = 0, \quad t - 3 = 0$

$t = -5, \quad t = 3$

Se realiza el cambio de variable t por 3^x

Como $t = 3^x > 0$, entonces $t = 3$

$3^x = 3 = 3^1$

$x = 1$

La solución es $\boldsymbol{x = 1}$.

Unidad 3: Logaritmo y Funciones Logarítmicas

Sección 1: Logaritmo

50.

Forma exponencial: $\boldsymbol{M = a^p}$	$144 = 12^2$	$7 = 7^1$
Forma Logarítmica: $\boldsymbol{\log_a M = p}$	$\boldsymbol{\log_{12} 144 = 2}$	$\boldsymbol{\log_7 7 = 1}$

Forma exponencial: $\boldsymbol{M = a^p}$	$\boldsymbol{81 = 3^4}$	$\boldsymbol{\frac{1}{64} = 2^{-6}}$
Forma Logarítmica: $\boldsymbol{\log_a M = p}$	$\log_3 81 = 4$	$\log_2 \frac{1}{64} = -6$

51.

a) $\log_4 x = 2$

$x = 4^2 = \mathbf{16}$

b) $\log_3 x = 4$

$x = 3^4$

$= \mathbf{81}$

c) $\log_5 x = 4$

$x = 5^4$

$= \mathbf{625}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$

$x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$= \mathbf{4}$

e) $\log_b 100 = 2$

$b^2 = 100 = 10^2$

$\boldsymbol{b = 10}$

f) $\log_b 27 = -3$

$b^{-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

$\boldsymbol{b = \frac{1}{3}}$

g) $\log_b 25 = -2$

$b^{-2} = 25 = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

$\boldsymbol{b = \frac{1}{5}}$

h) $\log_b \frac{1}{81} = -2$

$b^{-2} = \frac{1}{81} = 9^{-2}$

$\boldsymbol{b = 9}$

i) $\log_b \frac{1}{32} = -5$

$b^{-5} = \frac{1}{32} = 2^{-5}$

$\boldsymbol{b = 2}$

52.

a) $\log_6 36 = \log_6 6^2 = \mathbf{2}$

b) $\log_3 81 = \log_3 3^4 = \mathbf{4}$

c) $\log_5 125 = \log_5 5^3 = \mathbf{3}$

d) $\log_7 49 = \log_7 7^2 = \mathbf{2}$

e) $\log_3 \frac{1}{27} = \log_3 3^{-3} = \mathbf{-3}$

f) $\log_2 \frac{1}{32} = \log_2 2^{-5} = \mathbf{-5}$

g) $\log_4 \frac{1}{64} = \log_4 4^{-3} = \mathbf{-3}$

h) $\log_{\frac{1}{6}} 36 = \log_{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{6}\right)^{-2} = \mathbf{-2}$

i) $\log_{\frac{1}{5}} 125 = \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = \mathbf{-3}$

53.

a) $\log_2 3^4 = 4 \log_2 3$

b) $\log_3 5^4 = 4 \log_3 5$

c) $\log_{11} 2^7 = 7 \log_{11} 2$

d) $\log_5 2^4 = 4 \log_5 2$

e) $\log_7 2^7 = 7 \log_7 2$

f) $\log_4 3^{-6} = -6 \log_4 3$

g) $\log_5 3^{-4} = -4\log_5 3$

h) $\log_7 6^{-2} = -2\log_7 6$

i) $\log_{\frac{1}{2}} 2^3 = 3\log_{\frac{1}{2}} 2$

j) $\log_2 \left(\frac{3}{4}\right)^5 = 5\log_2 \frac{3}{4}$

k) $\log_8 \left(\frac{1}{6}\right)^{-3} = -3\log_8 \frac{1}{6}$

l) $\log_7 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log_7 2$

54.

a) $\log_4 8 + \log_4 2 = \log_4(8)(2)$
$= \log_4 16$
$= \log_4 4^2 = \mathbf{2}$

b) $\log_2 8 + \log_2 2 = \log_2(8)(2)$
$= \log_2 16$
$= \log_2 2^4 = \mathbf{4}$

c) $\log_3 9 + \log_3 27 = \log_3(9)(27)$
$= \log_3 243$
$= \log_3 3^5 = \mathbf{5}$

d) $\log_5 125 + \log_5 25 = \log_5(125)(25)$
$= \log_5 5^5 = \mathbf{5}$

e) $\log_2 8 + \log_2 2 + \log_2 4 = \log_2(8)(2)(4)$
$= \log_2 2^6 = \mathbf{6}$

f) $\log_5 25 + \log_5 5 + \log_5 125$
$= \log_5(25)(5)(125)$
$= \log_5 5^6 = \mathbf{6}$

g) $\log_3 \frac{1}{9} + \log_3 \frac{1}{27} = \log_3 \left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{27}\right)$
$= \log_3 3^{-5} = \mathbf{-5}$

h) $\log_6 10 + \log_6 \frac{9}{4} + \log_6 \frac{8}{5}$
$= \log_6(10)\left(\frac{9}{4}\right)\left(\frac{8}{5}\right)$
$= \log_6 36 = \log_6 6^2$
$= \mathbf{2}$

55.

a) $\log_4 8 - \log_4 2 = \log_4 \frac{8}{2} = \log_4 4$
$= \mathbf{1}$

b) $\log_2 16 - \log_2 4 = \log_2 \frac{16}{4}$
$= \log_2 2^2 = \mathbf{2}$

c) $\log_3 81 - \log_3 9 = \log_3 \frac{81}{9}$
$= \log_3 3^2 = \mathbf{2}$

d) $\log_5 625 - \log_5 125 = \log_5 \frac{625}{125}$
$= \log_5 5 = \mathbf{1}$

e) $\log_3 \frac{3}{2} - \log_3 \frac{1}{6} = \log_3 \left(\frac{3}{2} \div \frac{1}{6}\right)$
$= \log_3 \left(\frac{3}{2} \cdot 6\right)$
$= \log_3 9 = \log_3 3^2$
$= \mathbf{2}$

f) $\log_2 \frac{14}{3} - \log_2 \frac{7}{6} = \log_2 \left(\frac{14}{3} \div \frac{7}{6}\right)$
$= \log_2 \left(\frac{14}{3} \cdot \frac{6}{7}\right)$
$= \log_2 2^2 = \mathbf{2}$

g) $\log_5 1000 - \log_5 5 - \log_5 8$
$= \log_5 \frac{1000}{5 \cdot 8} = \log_5 \frac{1000}{40}$
$= \log_5 25 = \log_5 5^2 = \mathbf{2}$

h) $\log_5 125 - \log_5 \frac{2}{5} - \log_5 \frac{1}{2}$
$= \log_5 125 - \left(\log_5 \frac{2}{5} + \log_5 \frac{1}{2}\right)$
$= \log_5 \left(125 \div \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}\right)$
$= \log_5 \left(125 \div \frac{1}{5}\right)$
$= \log_5(125 \cdot 5) = \log_5 5^4 = \mathbf{4}$

56.

a) $\log_5 2 + \log_5 50 - \log_5 4$

$= \log_5 (2)(50) - \log_5 4$

$= \log_5 \dfrac{(2)(50)}{4} = \log_5 25$

$= \log_5 5^2 = \mathbf{2}$

b) $\log_3 45 + \log_3 15 - 2\log_3 5$

$= \log_3 45 + \log_3 15 - \log_3 25$

$= \log_3 \dfrac{45 \cdot 15}{25} = \log_3 27$

$= \log_3 3^3 = \mathbf{3}$

c) $\log_7 14 - \log_7 6 + \log_7 21$

$= \log_7 \dfrac{14 \cdot 21}{6} = \log_7 7^2 = \mathbf{2}$

d) $\log_5 50 + \log_5 11 - \log_5 22$

$= \log_5 \dfrac{50 \cdot 11}{22} = \log_5 25$

$= \log_5 5^2 = \mathbf{2}$

e) $\log_3 18 - \log_3 24 + \log_3 12$

$= \log_3 \dfrac{18 \cdot 12}{24} = \log_3 9 = \mathbf{2}$

f) $\log_2 24 - \log_2 36 + \log_2 12$

$= \log_2 \dfrac{24 \cdot 12}{36} = \log_2 8$

$= \log_2 2^3 = \mathbf{3}$

g) $\log_6 9 - \log_6 4 + \log_6 16$

$= \log_6 \dfrac{9 \cdot 16}{4} = \log_6 36$

$= \log_6 6^2 = \mathbf{2}$

h) $\log_{13} 26 - \log_{13} 2 + \log_{13} 13$

$= \log_{13} \dfrac{26 \cdot 13}{2} = \log_{13} 13^2 = \mathbf{2}$

57.

a) $\log_{16} 8 = \dfrac{\log_2 8}{\log_2 16} = \dfrac{\log_2 2^3}{\log_2 2^4} = \mathbf{\dfrac{3}{4}}$

b) $\log_{32} 8 = \dfrac{\log_2 8}{\log_2 32} = \dfrac{\log_2 2^3}{\log_2 2^5} = \mathbf{\dfrac{3}{5}}$

c) $\log_{49} 7 = \dfrac{\log_7 7}{\log_7 49} = \dfrac{\log_7 7}{\log_7 7^2} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

d) $\log_{25} 125 = \dfrac{\log_5 125}{\log_5 25} = \dfrac{\log_5 5^3}{\log_5 5^2} = \mathbf{\dfrac{3}{2}}$

e) $\log_3 2 \cdot \log_2 9 = \cancel{\log_3 2} \cdot \dfrac{\log_3 9}{\cancel{\log_3 2}}$

$= \log_3 9 = \log_3 3^2$

$= \mathbf{2}$

f) $\log_5 3 \cdot \log_3 25 = \cancel{\log_5 3} \cdot \dfrac{\log_5 25}{\cancel{\log_5 3}}$

$= \log_5 5^2 = \mathbf{2}$

g) $\log_5 2 \cdot \log_2 5 = \cancel{\log_5 2} \cdot \dfrac{\cancel{\log_5 5}}{\log_5 2} = \mathbf{1}$

h) $\log_4 3 \cdot \log_3 16 = \cancel{\log_4 3} \cdot \dfrac{\log_4 16}{\cancel{\log_4 3}}$

$= \log_4 4^2 = \mathbf{2}$

Sección 2: Funciones logarítmicas

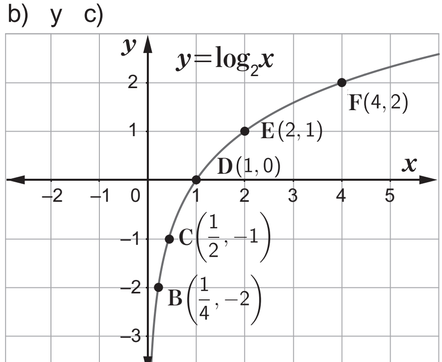
58.

a)

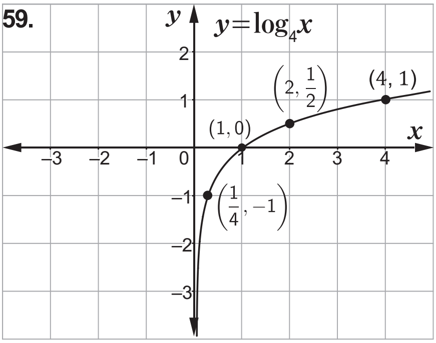
x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
y	-3	$\mathbf{-2}$	$\mathbf{-1}$	0
Punto	$A\left(\frac{1}{8}, -3\right)$	$B\left(\frac{1}{4}, \mathbf{-2}\right)$	$C\left(\frac{1}{2}, \mathbf{-1}\right)$	$D(1, 0)$

x	2	4	8
y	**1**	**2**	3
Punto	$E(2, \mathbf{1})$	$F(4, \mathbf{2})$	$G(8, 3)$

b) y c)



59.



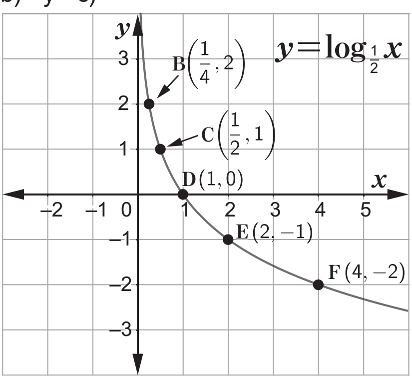
60.

a)

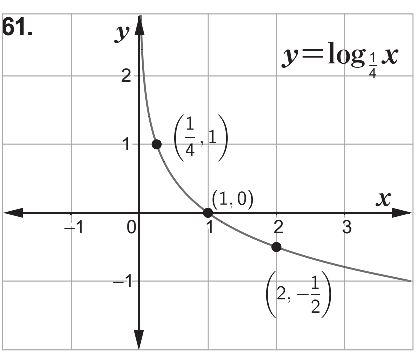
x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
y	3	$\mathbf{2}$	$\mathbf{1}$	0
Punto	$A\left(\frac{1}{8},3\right)$	$B\left(\frac{1}{4},\mathbf{2}\right)$	$C\left(\frac{1}{2},\mathbf{1}\right)$	$D(1,0)$

x	2	4	8
y	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{-2}$	-3
Punto	$E(2,\mathbf{-1})$	$F(4,\mathbf{-2})$	$G(8,-3)$

b) y c)



61.



62.

a) $\log_3 3 < \log_3 9$

b) $\log_5 5 < \log_5 25$

c) $\log_2 9 < \log_2 16$

d) $\log_2 \frac{1}{3} < \log_2 5 < \log_2 7$

e) $\log_3 \frac{1}{4} < \log_3 \frac{1}{2} < \log_3 8$

f) $2\log_5 5^{-2} < 3\log_5 3 < 2\log_5 7$

63.

a) $\log_{\frac{1}{2}} 8 < \log_{\frac{1}{2}} 4$

b) $\log_{\frac{1}{3}} 27 < \log_{\frac{1}{3}} 9$

c) $\log_{\frac{1}{5}} 125 < \log_{\frac{1}{5}} 25$

d) $\log_{\frac{1}{3}} 4 < \log_{\frac{1}{3}} 2 < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$

e) $\log_{\frac{1}{4}} 7 < \log_{\frac{1}{4}} 5 < \log_{\frac{1}{4}} \frac{3}{2}$

log log

f) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{4}{5} < \log_{\frac{1}{5}} \frac{2}{3} < \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{2}$

64.

a) $\log_2 x = 5$

$x = 2^5$

$= \mathbf{32}$

b) $\log_2 x = 3$

$x = 2^3$

$= \mathbf{8}$

c) $\log_5 x = 2$

$x = 5^2 = \mathbf{25}$

d) $\log_7 x = 3$

$x = 7^3$

$= \mathbf{343}$

e) $\log_9 x = 2$

$x = 9^2$

$= \mathbf{81}$

f) $\log_4 x = 3$

$x = 4^3$

$= \mathbf{64}$

g) $\log_5(2x + 7) = 2$

$2x + 7 = 5^2$

$2x + 7 = 25$

$2x = 25 - 7$

$2x = 18$

$\boldsymbol{x = 9}$

h) $\log_3(4x+1)=2$

$4x+1=3^2$

$4x+1=9$

$4x=9-1$

$4x=8$

$\boldsymbol{x=2}$

i) $\log_5(2x-3)=2$

$2x-3=5^2$

$2x-3=25$

$2x=25+3$

$2x=28$

$\boldsymbol{x=14}$

65.

a) $\log_2 x+\log_2(x+3)=2\ \log_2 2$

$\log_2 x(x+3)=\log_2 2^2$

$x(x+3)=2^2$

$x^2+3x-4=0$

$(x+4)(x-1)=0$

$x+4=0,\ x-1=0$

$x=-4,\qquad x=1$

como $x>0,\quad \boldsymbol{x=1}$.

> Los argumentos verifican
> $x>0$ y $x+3>0$
> $x>0$ y $x>-3$
> Es decir, $x>0$

b) $\log_3(x-2)+\log_3 x=3\log_3 2$

$\log_3 x(x-2)=\log_3 2^3$

$x(x-2)=2^3$

$x^2-2x-8=0$

$(x+2)(x-4)=0$

$x+2=0,\ x-4=0$

$x=-2,\qquad x=4$

como $x>2,\quad \boldsymbol{x=4}$

> Los argumentos verifican
> $x-2>0$ y $x>0$
> $x>2$ y $x>0$
> Es decir, $x>2$

c) $\log_2(x+2)+\log_2 x=3$

$\log_2 x(x+2)=3$

$x(x+2)=2^3$

$x^2+2x-8=0$

$(x+4)(x-2)=0$

$x+4=0,\ x-2=0$

$x=-4,\qquad x=2$

como $x>0,\ \boldsymbol{x=2}$

> Los argumentos verifican
> $x+2>0$ y $x>0$
> $x>-2$ y $x>0$
> Es decir, $x>0$

d) $\log_3(x-3)+\log_3(x+5)=2$

$\log_3(x-3)(x+5)=2$

$(x-3)(x+5)=3^2$

$x^2+2x-15=9$

$x^2+2x-24=0$

$(x+6)(x-4)=0$

$x+6=0,\ x-4=0$

$x=-6,\qquad x=4$

como $x>3,\qquad \boldsymbol{x=4}$

> Los argumentos verifican
> $x>3$ y $x>-5$
> Es decir, $x>3$

66.

a) $\log_{10}6=\log_{10}(2)(3)$

$=\log_{10}2+\log_{10}3$

$=0{,}3010+0{,}4771$

$=\boldsymbol{0{,}7781}$

b) $\log_{10}8=\log_{10}2^3=3\log_{10}2$

$=(3)(0{,}3010)=\boldsymbol{0{,}9030}$

c) $\log_{10}54=\log_{10}2+\log_{10}3^3$

$=\log_{10}2+3\log_{10}3$

$=0{,}3010+(3)(0{,}4771)$

$=0{,}3010+1{,}4313$

$=\boldsymbol{1{,}7323}$

d) $\log_{10}48=\log_{10}2^4+\log_{10}3$

$=4\log_{10}2+\log_{10}3$

$=(4)(0{,}3010)+0{,}4771$

$=1{,}2040+0{,}4771$

$=\boldsymbol{1{,}6811}$

e) $\log_{10}72=\log_{10}2^3+\log_{10}3^2$

$=3\log_{10}2+2\log_{10}3$

$=(3)(0{,}3010)+(2)(0{,}4771)$

$=0{,}9030+0{,}9542$

$=\boldsymbol{1{,}8572}$

f) $\log_{10}96=\log_{10}2^5+\log_{10}3$

$=5\log_{10}2+\log_{10}3$

$=(5)(0{,}3010)+0{,}4771$

$=1{,}5050+0{,}4771$

$=\boldsymbol{1{,}9821}$

g) $\log_{10} 144 = \log_{10} 2^4 + \log_{10} 3^2$
$= 4\log_{10} 2 + 2\log_{10} 3$
$= 4(0{,}3010) + 2(0{,}4771)$
$= 1{,}2040 + 0{,}9542$
$= \mathbf{2,1582}$

h) $\log_{10} 288 = \log_{10} 2^5 + \log_{10} 3^2$
$= 5\log_{10} 2 + 2\log_{10} 3$
$= 5(0{,}3010) + 2(0{,}4771)$
$= 1{,}5050 + 0{,}9542$
$= \mathbf{2,4592}$

i) $\log_{10} 432 = \log_{10} 2^4 + \log_{10} 3^3$
$= 4\log_{10} 2 + 3\log_{10} 3$
$= 4(0{,}3010) + 3(0{,}4771)$
$= 1{,}2040 + 1{,}4313$
$= \mathbf{2,6353}$

Unidad 4: Geometría Analítica

Sección 1: Punto y segmento

67.

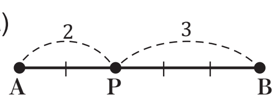
a) $d = AB = \mathbf{4}$
b) $d = CD = \mathbf{5}$
c) $d = MN = \mathbf{7}$
d) $d = QT = \mathbf{2}$
e) $d = LP = \mathbf{32}$
f) $d = MA = \mathbf{4}$
g) $d = TW = \mathbf{6,8}$
h) $d = IJ = \mathbf{\frac{23}{6}}$

68.

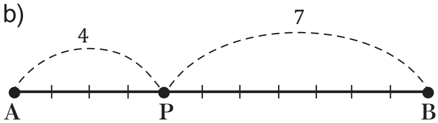
a) $AB + BC = 7 + 7 = 14 = AC$
b) $AB + BC = 16 + 4 = 20 = AC$
c) $AB + BC = 4 + 2 = 6 = AC$
d) $AB + BC = 4{,}5 + \frac{3}{2} = 6 = AC$

69.

a)



b)



70.

a) $p = \dfrac{(2)(-1)+(3)(9)}{3+2} = \mathbf{5}$

b) $p = \dfrac{-1+9}{2} = \mathbf{4}$

c) $p = \dfrac{(4)(3)+(2)(6)}{4+2} = \mathbf{4}$

d) $p = \dfrac{(5)(-6)+(3)(2)}{3+5} = \mathbf{-3}$

e) $p = \dfrac{-9+2}{2} = -\mathbf{\dfrac{7}{2}}$

f) $p = \dfrac{1{,}5+(-7{,}3)}{2} = -\dfrac{5{,}8}{2} = \mathbf{-2,9}$

71.

a) $d = AB = \sqrt{(6-1)^2 + (5-2)^2}$
$= \sqrt{25+9} = \sqrt{\mathbf{34}}$

b) $d = MO = \sqrt{(4-8)^2 + (9-12)^2}$
$= \sqrt{16+9} = \mathbf{5}$

c) $d = TP = \sqrt{(1-7)^2 + (1-3)^2}$
$= \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = \mathbf{2\sqrt{10}}$

d) $d = SV = \sqrt{(-4+6)^2 + (3-7)^2}$
$= \sqrt{4+16} = \mathbf{2\sqrt{5}}$

e) $d = AD = \sqrt{(1-1)^2 + (1+6)^2}$
$= \sqrt{0+49} = \mathbf{7}$

f) $d = AD = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\right)^2}$
$= \sqrt{9+4} = \sqrt{\mathbf{13}}$

72.

a) $x = \dfrac{(2)(1)+(1)(4)}{1+2} = 2,$

$y = \dfrac{(2)(2)+(1)(5)}{1+2} = 3$

$\boldsymbol{P(2,3)}$

b) $x = \dfrac{(3)(-6)+(4)(4)}{4+3} = -\dfrac{2}{7}$

$y = \dfrac{(3)(10)+(4)(4)}{4+3} = \dfrac{46}{7}$

$\boldsymbol{P\left(-\frac{2}{7}, \frac{46}{7}\right)}$

73.

a) $x = \dfrac{1+(-2)}{2} = -\dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{3+5}{2} = 4$

$\boldsymbol{P\left(-\frac{1}{2}, 4\right)}$

b) $x = \dfrac{5+5}{2} = 5$, $y = \dfrac{-6+8}{2} = 1$

$\boldsymbol{P(5, 1)}$

c) $x = \dfrac{9+(-2)}{2} = \dfrac{7}{2}$, $y = \dfrac{4+8}{2} = 6$

$\boldsymbol{P\left(\frac{7}{2}, 6\right)}$

d) $x = \dfrac{-2+(-2)}{2} = -2$, $y = \dfrac{-4+6}{2} = 1$

$\boldsymbol{P(-2, 1)}$

74. $A(6,8)$, $B(x_2, y_2)$ y punto medio de $\overline{AB}$ es $P(-2,7)$.

$-2 = \dfrac{6+x_2}{2}$ $\qquad 7 = \dfrac{8+y_2}{2}$

$-4 = 6 + x_2,$ $\qquad 14 = 8 + y_2$

$x_2 = -10,$ $\qquad y_2 = 6$

$\boldsymbol{B(-10, 6)}$

Sección 2: La recta

75.

a) $m = \mathbf{3}$, Intercepto con eje y: $(\mathbf{0}, \mathbf{2})$

b) $m = -\mathbf{3}$, Intercepto con eje y: $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$

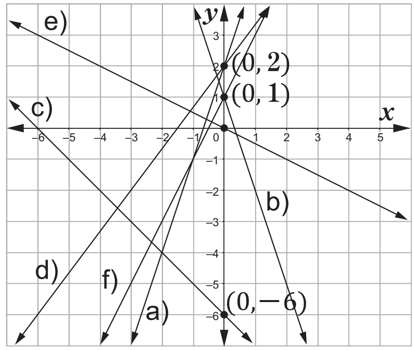
c) $m = -\mathbf{1}$, Intercepto con eje y: $(\mathbf{0}, -\mathbf{6})$

d) $m = \mathbf{\frac{4}{3}}$, Intercepto con eje y: $(\mathbf{0}, \mathbf{2})$

e) $m = -\mathbf{\frac{1}{2}}$, Intercepto con eje y: $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$

f) $m = \mathbf{2}$, Intercepto con eje y: $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$

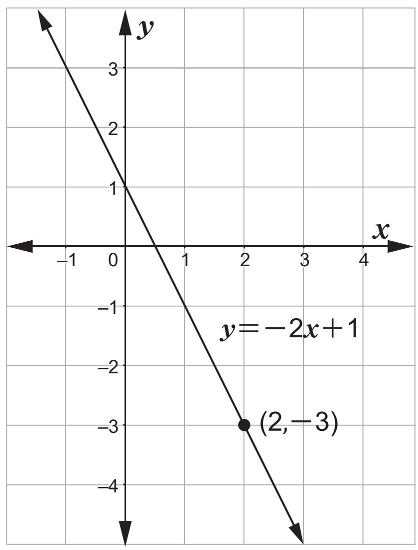
Gráficas:



76. Ecuación:

$\boldsymbol{y = -2x + 1}$

Gráfica:



77.

a) $y - (-1) = (-4)(x - 1)$

$y + 1 = -4x + 4$

$\boldsymbol{y = -4x + 3}$

b) $y - (-1) = \frac{1}{3}(x - 1)$

$y + 1 = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}$

$\boldsymbol{y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}}$

c) $y-(-1)=-\frac{7}{2}(x-1)$

$$y+1=-\frac{7}{2}x+\frac{7}{2}$$

$$\boldsymbol{y=-\frac{7}{2}x+\frac{5}{2}}$$

78.

a) Para la recta AB: $m=\frac{5-2}{1-0}=\mathbf{3}$

b) Para la recta HK: $m=\frac{3-7}{1-2}=\mathbf{4}$

c) Para la recta PQ: $m=\frac{8-(-6)}{-5-(-3)}=\mathbf{-7}$

d) Para la recta OL: $m=\frac{5-0}{1-0}=\mathbf{5}$

e) Para la recta XZ: $m=\frac{-2-(-2)}{-6-6}=\mathbf{0}$

f) Para la recta RG: $m=\frac{-1-9}{4-1}=-\mathbf{\frac{10}{3}}$

79.

a) $y-1=\frac{-1-1}{3-2}(x-2)$

$$y-1=-2(x-2)$$

$$\boldsymbol{y=-2x+5}$$

b) $y-4=\frac{8-4}{4-2}(x-2)$

$$y-4=2(x-2)$$

$$\boldsymbol{y=2x}$$

c) $y-18=\frac{-2-18}{-15-5}(x-5)$

$$y-18=x-5$$

$$\boldsymbol{y=x+13}$$

d) $y-0=\frac{0-0}{1-4}(x-4)$

$$\boldsymbol{y=0}$$

e) $y-(-6)=\frac{3-(-6)}{7-9}(x-9)$

$$y+6=-\frac{9}{2}(x-9)$$

$$\boldsymbol{y=-\frac{9}{2}x+\frac{69}{2}}$$

f) $y-4=\frac{1-4}{-8-7}(x-7)$

$$y-4=\frac{1}{5}(x-7)$$

$$\boldsymbol{y=\frac{1}{5}x+\frac{13}{5}}$$

80. Nótese que en casa inciso, la forma obtenida no es única.

a) $y=\frac{2}{3}x+1$

$$\boldsymbol{2x-3y+3=0}$$

b) $2y=-4x+1$

$$\boldsymbol{4x+2y-1=0}$$

c) $y-5=0$

$$\boldsymbol{0x+y-5=0}$$

d) $x=-12$

$$\boldsymbol{x+0y+12=0}$$

e) $y=\frac{7}{4}x-11$

$$4y=7x-44$$

$$\boldsymbol{-7x+4y+44=0}$$

f) $-7y=\frac{1}{4}x+1$

$$x+28y+4=0$$

81.

a) $7x-4y-6=0$

$$-4y=-7x+6$$

$$\boldsymbol{y=\frac{7}{4}x-\frac{3}{2}}$$

b) $-5x+\frac{y}{2}-4=0$

$$\frac{y}{2}=5x+4$$

$$\boldsymbol{y=10x+8}$$

82.

a) $\boldsymbol{y=1}$ b) $\boldsymbol{x=-7}$

c) $\boldsymbol{x=0}$ d) $\boldsymbol{y=-3}$

e) $\boldsymbol{x=-4}$ f) $\boldsymbol{y=-12}$

83.

a) $\boldsymbol{y=1}$ b) $\boldsymbol{y=3}$ c) $\boldsymbol{x=1}$

84.

a) Pendiente de $y=-7x-1$: $m_1=-7$

Pendiente de $y=7x+12$: $m_2=7$

No son paralelas

b) Pendiente de $y+11=-x$: $m_1=-1$

Pendiente de $x=1-y$: $m_2=-1$

Son paralelas

c) Pendiente de $4x-5y+1=0$: $m_1=\frac{4}{5}$

Pendiente de $2x-1{,}2y+1=0$:

$m_2=\frac{2}{1{,}2}=\frac{5}{3}$

No son paralelas

d) Pendiente de $x+y=1$: $m_1=-1$

Pendiente de $2x+2y=0$:

$m_2=-1$

Son paralelas

85.

a) Se reescribe $2x+y-2=0$:

$y=-2x+2$

Se determina la ecuación:

$y-(-2)=(-2)(x-3)$

$y+2=-2x+6$

$\boldsymbol{y=-2x+4}$

b) Se reescribe $x+y+3=0$:

$y=-x-3$

Se determina la ecuación:

$y-1=(-1)(x-1)$

$y-1=-x+1$

$\boldsymbol{y=-x+2}$

c) Se reescribe $-x+1=-y$:

$y=x-1$

Se determina la ecuación:

$y-0=(1)(x-0)$

$\boldsymbol{y=x}$

86.

a) $m_1=-6$, y $m_1m_2=-1$, así que

$$m_2=\frac{-1}{-6}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

b) $m_1=2$, y $m_1m_2=-1$, así que

$$m_2=\frac{-1}{2}=-\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

c) $m_1=2$, y $m_1m_2=-1$, así que

$$m_2=\frac{-1}{2}=-\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

d) $m_1=\frac{2}{3}$, y $m_1m_2=-1$, así que

$$m_2=\frac{-1}{\frac{2}{3}}=-\boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

e) $m_1=\frac{3}{7}$, y $m_1m_2=-1$, así que

$$m_2=\frac{-1}{\frac{3}{7}}=-\boldsymbol{\frac{7}{3}}$$

f) $m_1=-1$, y $m_1m_2=-1$, así que

$$m_2=\frac{-1}{-1}=\boldsymbol{1}$$

87.

a) $d=\frac{|15|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{15}{\sqrt{9+16}}=\frac{15}{5}=\boldsymbol{3}$

b) $d=\frac{|-5|}{\sqrt{(-8)^2+6^2}}=\frac{5}{\sqrt{64+36}}=\frac{5}{10}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

c) $d=\frac{|2|}{\sqrt{7^2+(\sqrt{15})^2}}=\frac{2}{\sqrt{49+15}}=\frac{2}{8}=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$

d) $d=\frac{|1|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{9+4}}=\frac{1}{\sqrt{13}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{13}}{13}}$

e) $d=\frac{|-10|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{10}{\sqrt{1+9}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\boldsymbol{\sqrt{10}}$

f) $d=\frac{|0|}{\sqrt{(-1)^2+5^2}}=\frac{0}{\sqrt{1+25}}=\boldsymbol{0}$

Sección 3: La circunferencia

88.

a) $\boldsymbol{x^2+y^2=9}$

b) $\boldsymbol{x^2+y^2=81}$

c) $\boldsymbol{x^2+y^2=2}$

d) $\boldsymbol{x^2+y^2=8}$

89.

a) Centro en $(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$ y radio $\boldsymbol{2}$.

b) Centro en $(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$ y radio $\boldsymbol{4}$.

c) Centro en $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ y radio $\mathbf{2\sqrt{3}}$.

d) Centro en $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ y radio $\sqrt{\mathbf{21}}$.

90.

a) $(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})^{\mathbf{2}}+(\boldsymbol{y}+\mathbf{1})^{\mathbf{2}}=\mathbf{1}$

b) $(\boldsymbol{x}-\mathbf{7})^{\mathbf{2}}+(\boldsymbol{y}-\mathbf{4})^{\mathbf{2}}=\mathbf{16}$

c) $(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})^{\mathbf{2}}+(\boldsymbol{y}+\mathbf{1})^{\mathbf{2}}=\mathbf{13}$

d) $(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})^{\mathbf{2}}+(\boldsymbol{y}-\mathbf{1})^{\mathbf{2}}=\mathbf{17}$

91.

a) Centro en $(\mathbf{1},\mathbf{2})$ y radio $\sqrt{\mathbf{5}}$

b) Centro en $(-\mathbf{7},\mathbf{1})$ y radio $\mathbf{3}$

c) Centro en $(-\mathbf{5},-\mathbf{1})$ y radio $\mathbf{2\sqrt{2}}$

d) Centro en $(-\mathbf{1},-\mathbf{3})$ y radio $\mathbf{\frac{3}{2}}$

92.

a) $(x-1)^2+(y+2)^2=6$

$x^2-2x+1+y^2+4y+4-6=0$

$\boldsymbol{x^2+y^2-2x+4y-1=0}$

b) $(x+3)^2+(y-5)^2=12$

$x^2+6x+9+y^2-10y+25-12=0$

$\boldsymbol{x^2+y^2+6x-10y+22=0}$

c) $(x-4)^2+(y-1)^2=16$

$x^2-8x+16+y^2-2y+2-16=0$

$\boldsymbol{x^2+y^2-8x-2y+2=0}$

d) $(x-9)^2+(y-5)^2=18$

$x^2-18x+81+y^2-10y+25-18=0$

$\boldsymbol{x^2+y^2-18x-10y+88=0}$

93.

a) $x^2+y^2+6x-10y+23=0$

$(x^2+6x)+(y^2-10y)=-23$

$(x^2+6x+3^2)+(y^2-10y+5^2)$

$=-23+9+25$

$\boldsymbol{(x+3)^2+(y-5)^2=11}$

b) $x^2+y^2-4x-8y+8=0$

$(x^2-4x)+(y^2-8y)=-8$

$(x^2-4x+2^2)+(y^2-8y+4^2)=12$

$\boldsymbol{(x-2)^2+(y-4)^2=12}$

c) $x^2+y^2-10x-14y+58=0$

$(x^2-10x)+(y^2-14y)=-58$

$(x^2-10x+5^2)+(y^2-14y+7^2)=16$

$\boldsymbol{(x-5)^2+(y-7)^2=16}$

d) $x^2+y^2-12x-8y+37=0$

$(x^2-12x)+(y^2-8y)=-37$

$(x^2-12x+6^2)+(y^2-8y+4^2)=15$

$\boldsymbol{(x+3)^2+(y-5)^2=15}$

94.

a) $x^2+y^2=5,\quad y=2x$

$x^2+(2x)^2=5$

$5x^2=5$

$x^2=\pm1$

$y=(2)(1)=2,$

$y=(2)(-1)=-2$

Puntos de intersección:

$(\mathbf{1},\mathbf{2}),\ (-\mathbf{1},-\mathbf{2})$.

b) $x^2+y^2=9,\quad y=x-3$

$x^2+(x-3)^2=9$

$2x^2-6x+9=9$

$2x^2-6x=0$

$x=0,\quad x=3$

$y=0-3=-3,$

$y=3-3=0$

Puntos de intersección:

$(\mathbf{0},-\mathbf{3}),\ (\mathbf{3},\mathbf{0})$.

c) $x^2+y^2=4,\quad y=x-2$

$x^2+(x-2)^2=4$

$2x^2-4x+4=4$

$2x^2-4x=0$

$x=0,\quad x=2$

$y=0-2=-2,$

$y=2-2=0$

Puntos de intersección:

$(\mathbf{0},-\mathbf{2}),\ (\mathbf{2},\mathbf{0})$.

d) $x^2+y^2=16,\quad y=x-4$

$x^2+(x-4)^2=16$

$2x^2-8x+16=16$

$$2x^2 - 8x = 0$$
$$x = 0, \quad x = 4$$
$$y = 0 - 4 = -4,$$
$$y = 4 - 4 = 0$$

Puntos de intersección:
$(\mathbf{0}, -\mathbf{4})$, $(\mathbf{4}, \mathbf{0})$.

95.

a) $x^2 + y^2 = 2, \quad y = x + 2$

$$x^2 + (x + 2)^2 = 2$$
$$2x^2 + 4x + 4 = 2$$
$$x^2 + 2x + 1 = 0$$
$$(x + 1)^2 = 0$$
$$x = -1$$
$$y = -1 + 2 = 1$$

Punto de intersección: $(-\mathbf{1}, \mathbf{1})$.

b) $x^2 + y^2 = 8, \quad y = x - 4$

$$x^2 + (x - 4)^2 = 8$$
$$2x^2 - 8x + 16 = 8$$
$$x^2 - 4x + 4 = 0$$
$$(x - 2)^2 = 0$$
$$x = 2$$
$$y = 2 - 4 = -2$$

Punto de intersección: $(\mathbf{2}, -\mathbf{2})$.

c) $x^2 + y^2 = 18, \quad y = x + 6$

$$x^2 + (x + 6)^2 = 18$$
$$2x^2 + 12x + 36 = 18$$
$$x^2 + 6x + 9 = 0$$
$$(x + 3)^2 = 0$$
$$x = -3$$
$$y = -3 + 6 = 3$$

Punto de intersección: $(-\mathbf{3}, \mathbf{3})$.

d) $x^2 + y^2 = 32, \quad y = x - 8$

$$x^2 + (x - 8)^2 = 32$$
$$2x^2 - 16x + 64 = 32$$
$$x^2 - 8x + 16 = 0$$
$$(x - 4)^2 = 0$$
$$x = 4$$
$$y = 4 - 8 = -4$$

Punto de intersección: $(\mathbf{4}, -\mathbf{4})$.

Unidad 5: Cónicas

Sección 1: La parábola

96.

a) Se sustituye $p = 1$ en $y^2 = 4px$:

$$y^2 = (4)(1)x$$
$$\boldsymbol{y^2 = 4x}$$

b) Se sustituye $p = 5$ en $y^2 = 4px$:

$$y^2 = (4)(5)x$$
$$\boldsymbol{y^2 = 20x}$$

c) Se sustituye $p = 3$ en $y^2 = 4px$:

$$y \ = (4)(3)x^2$$
$$\boldsymbol{y^2 = 12x}$$

d) Se sustituye $p = -1$ en $y^2 = 4px$:

$$y^2 = (4)(-1)x$$
$$\boldsymbol{y^2 = -4x}$$

e) Se sustituye $p = \frac{7}{2}$ en $y^2 = 4px$:

$$y^2 = (4)\left(\frac{7}{2}\right)x$$
$$\boldsymbol{y^2 = 14x}$$

f) Se sustituye $p = -\frac{11}{4}$ en $y^2 = 4px$:

$$y^2 = (4)\left(-\frac{11}{4}\right)x$$
$$\boldsymbol{y^2 = -11x}$$

97.

a) Se sustituye $p = 3$ en $x^2 = 4py$:

$$x^2 = (4)(3)y$$
$$\boldsymbol{x^2 = 12y}$$

b) Se sustituye $p = 5$ en $x^2 = 4py$:

$$x^2 = (4)(5)y$$
$$\boldsymbol{x^2 = 20y}$$

c) Se sustituye $p = -6$ en $x^2 = 4py$:

$$x^2 = (4)(-6)y$$
$$\boldsymbol{x^2 = -24y}$$

d) Se sustituye $p = -1$ en $x^2 = 4py$:

$$x^2 = (4)(-1)y$$

$$\boldsymbol{x^2 = -4y}$$

e) Se sustituye $p = \frac{4}{5}$ en $x^2 = 4py$:

$$x^2 = (4)\left(\frac{4}{5}\right)y$$

$$\boldsymbol{x^2 = \frac{16}{5}y}$$

f) Se sustituye $p = -\frac{10}{7}$ en $x^2=4py$:

$$x^2 = (4)\left(-\frac{10}{7}\right)y$$

$$\boldsymbol{x^2 = -\frac{40}{7}y}$$

98.

a) $y^2 = 8x = (4)(2)x$, así que $p = 2$ y:

Foco: $\boldsymbol{F(2,0)}$

Vértice: $\boldsymbol{(0,0)}$

Directriz: $\boldsymbol{x = -2}$

b) $x^2 = 12y = (4)(3)y$, así que $p = 3$ y:

Foco: $\boldsymbol{F(0,3)}$

Vértice: $\boldsymbol{(0,0)}$

Directriz: $\boldsymbol{y = -3}$

c) $y^2 + 8x = 0$

$y^2=-8x=(4)(-2)x$, así que $p = -2$ y:

Foco: $\boldsymbol{F(-2,0)}$

Vértice: $\boldsymbol{(0,0)}$

Directriz: $\boldsymbol{x = 2}$

d) $x^2 + 2y = 0$

$x^2= -2y = (4)\left(-\frac{1}{2}\right)x$, así, $p = -\frac{1}{2}$ y:

Foco: $\boldsymbol{F\left(0,-\frac{1}{2}\right)}$

Vértice: $\boldsymbol{(0,0)}$

Directriz: $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}}$

e) $y^2 = -14x = (4)\left(-\frac{7}{2}\right)x$,

así $p = -\frac{7}{2}$ y:

Foco: $\boldsymbol{F\left(-\frac{7}{2},0\right)}$

Vértice: $\boldsymbol{(0,0)}$

Directriz: $\boldsymbol{x = \frac{7}{2}}$

f) $x^2 = -15y = (4)\left(-\frac{15}{4}\right)y$, así,

$p = -\frac{15}{4}$ y:

Foco: $\boldsymbol{F\left(0,\frac{-15}{4}\right)}$

Vértice: $\boldsymbol{(0,0)}$

Directriz: $\boldsymbol{y = \frac{15}{4}}$

99.

a) Se sustituye $y=-x+3$ en $x^2= 4y$:

$$x^2 = 4(-x+3)$$

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$(x+6)(x-2) = 0$$

$$x = -6, \qquad x = 2$$

Si $x = -6$, $\quad y = -(-6) + 3 = 9$

Si $x = 2$, $\quad y = -2 + 3 = 1$

Puntos de intersección:
$\boldsymbol{(-6,9)}$ y $\boldsymbol{(2,1)}$.

b) Se sustituye $y = x + 4$ en $x^2= 2y$:

$$x^2 = 2(x+4)$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x-4)(x+2) = 0$$

$$x = 4, \qquad x = -2$$

Si $x = 4$, $\quad y = 4 + 4 = 8$

Si $x = -2$, $\quad y = -2 + 4 = 2$

Puntos de intersección:
$\boldsymbol{(4,8)}$ y $\boldsymbol{(-2,2)}$

c) Se sustituye $y = -\frac{4}{3}x + 1$
en $x^2= -3y$:

$$x^2 = -3\left(-\frac{4}{3}x + 1\right)$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-3)(x-1) = 0$$

$$x = 3, \qquad x = 1$$

Si $x = 3, \quad y = \left(-\frac{4}{3}\right)(3) + 1 = -3$

Si $x = 1, \quad y = \left(-\frac{4}{3}\right)(1) + 1 = -\frac{1}{3}$

Puntos de intersección:

$(\mathbf{3}, -\mathbf{3})$ y $\left(\mathbf{1}, -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)$

100.

a) Se sustituye $y = x - 2$ en $y^2 = x$

$$(x-2)^2 = x$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$
$$(x-4)(x-1) = 0$$
$$x = 4, \qquad x = 1$$

Si $x = 4, \quad y = 4 - 2 = 2$

Si $x = 1, \quad y = 1 - 2 = -1$

Puntos de intersección:

$(\mathbf{4}, \mathbf{2})$ y $(\mathbf{1}, -\mathbf{1})$

b) Se sustituye $y = 2x$ en $y^2 = 8x$

$$(2x)^2 = 8x$$
$$4x^2 - 8x = 0$$
$$4x(x-2) = 0$$
$$x = 0, \qquad x = 2$$

Si $x = 0, \quad y = (2)(0) = 0$

Si $x = 2, \quad y = (2)(2) = 4$

Puntos de intersección:

$(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ y $(\mathbf{2}, \mathbf{4})$

c) Se sustituye $y = 2x - 4$ en $y^2 = 4x$

$$(2x-4)^2 = 8x$$
$$4x^2 - 16x + 16 = 0$$
$$x^2 - 4x + 4 = 0$$
$$(x-2)^2 = 0$$
$$x = 2$$

Si $x = 2, \quad y = (2)(2) - 4 = 0$

Punto de intersección: $(\mathbf{2}, \mathbf{0})$

Sección 2: La elipse

101.

a) Focos y vértices en el eje x.

Además $c = 3$ y $a = 5$

Se usa $c^2 = a^2 - b^2$:

$$3^2 = 5^2 - b^2$$
$$9 = 25 - b^2$$
$$b^2 = 16$$

Ecuación: $\frac{\boldsymbol{x^2}}{\mathbf{25}} + \frac{\boldsymbol{y^2}}{\mathbf{16}} = \mathbf{1}$.

b) Focos y vértices en el eje x .

Además $c = 4$ y $a = 6$.

Se usa $c^2 = a^2 - b^2$:

$$4^2 = 6^2 - b^2$$
$$16 = 36 - b^2$$
$$b^2 = 20$$

Ecuación: $\frac{\boldsymbol{x^2}}{\mathbf{36}} + \frac{\boldsymbol{y^2}}{\mathbf{20}} = \mathbf{1}$.

c) Focos y vértices en el eje x.

Además $c = 2$ y $a = 4$

Se usa $c^2 = a^2 - b^2$:

$$2^2 = 4^2 - b^2$$
$$4 = 16 - b^2$$
$$b^2 = 12$$

Ecuación: $\frac{\boldsymbol{x^2}}{\mathbf{16}} + \frac{\boldsymbol{y^2}}{\mathbf{12}} = \mathbf{1}$

d) Focos y vértices en el eje x.

Además $c = 6$ y $a = 8$

Se usa $c^2 = a^2 - b^2$:

$$6^2 = 8^2 - b^2$$
$$36 = 64 - b^2$$
$$b^2 = 28$$

Ecuación: $\frac{\boldsymbol{x^2}}{\mathbf{64}} + \frac{\boldsymbol{y^2}}{\mathbf{28}} = \mathbf{1}$

102.

a) Focos y vértices en el eje y.

Además $c = \sqrt{7}$ y $a = 4$

Se usa $c^2 = a^2 - b^2$:

$$(\sqrt{7})^2 = 4^2 - b^2$$
$$7 = 16 - b^2$$
$$b^2 = 9$$

Ecuación: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1.$

b) Focos y vértices en el eje y.

Además $c=3$ y $a=5$

Se usa $c^2=a^2-b^2$:

$$(3)^2=5^2-b^2$$
$$9=25-b^2$$
$$b^2=16$$

Ecuación: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1.$

c) Focos y vértices en el eje y.

Además $c=8$ y $a=10$

Se usa $c^2=a^2-b^2$:

$$(8)^2=10^2-b^2$$
$$64=100-b^2$$
$$b^2=36$$

Ecuación: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{100}=1$

d) Focos y vértices en el eje y.

Además $c=2$ y $a=4$

Se usa $c^2=a^2-b^2$:

$$(2)^2=4^2-b^2$$
$$4=16-b^2$$
$$b^2=12$$

Ecuación: $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$

103.

a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ se escribe como

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$$

Así, $a=5$, $b=2$. Además,

$$c^2=5^2-2^2=21$$
$$c=\sqrt{21}$$

Focos: $F_1(\sqrt{21},0)$ y $F_2(-\sqrt{21},0)$

Vértices: $V_1(5,0)$ y $V_2(-5,0)$

Extremos: $E_1(0,2)$ y $E_2(0,-2)$

b) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ se escribe como

$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$$

Así, $a=4$, $b=3$. Además,

$$c^2=4^2-3^2=7$$
$$c=\sqrt{7}$$

Focos: $F_1(\sqrt{7},0)$ y $F_2(-\sqrt{7},0)$

Vértices: $V_1(4,0)$ y $V_2(-4,0)$

Extremos: $E_1(0,3)$ y $E_2(0,-3)$

c) $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{6}=1$ se escribe como

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{27}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2}=1$$

Así, $a=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$, $b=\sqrt{6}$.

Además, $c^2=\left(\sqrt{27}\right)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2=21$

$$c=\sqrt{21}$$

Focos: $F_1(\sqrt{21},0)$ y $F_2(-\sqrt{21},0)$

Vértices: $V_1(3\sqrt{3},0)$ y $V_2(-3\sqrt{3},0)$

Extremos: $E_1(0,\sqrt{6})$ y $E_2(0,-\sqrt{6})$

104.

a) Se dividen los lados de

$4x^2+100y^2=100$ por 100:

$$\frac{4x^2}{100}+\frac{100y^2}{100}=\frac{100}{100}$$
$$\frac{x^2}{25}+y^2=1$$

Así, $a=5$, $b=1$ y

$$c^2=5^2-1^2=24$$
$$c=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$$

Focos: $F_1(2\sqrt{6},0)$ y $F_2(-2\sqrt{6},0)$

Vértices: $V_1(5,0)$ y $V_2(-5,0)$

Extremos: $E_1(0,1)$ y $E_2(0,-1)$

b) Se dividen los lados de

$4x^2+9y^2=36$ por 36:

$$\frac{4x^2}{36}+\frac{9y^2}{36}=\frac{36}{36}$$
$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

Así, $a=3,\ b=2$ y

$$c^2=3^2-2^2=5$$
$$c=\sqrt{5}$$

Focos: $\boldsymbol{F_1(\sqrt{5},0)}$ y $\boldsymbol{F_2(-\sqrt{5},0)}$

Vértices: $\boldsymbol{V_1(3,0)}$ y $\boldsymbol{V_2(-3,0)}$

Extremos: $\boldsymbol{E_1(0,2)}$ y $\boldsymbol{E_2(0,-2)}$

c) Se dividen los lados de $x^2+3y^2=6$ por 6:

$$\frac{x^2}{6}+\frac{3y^2}{6}=\frac{6}{6}$$
$$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$$

Así, $a=\sqrt{6},\ b=\sqrt{2}$ y

$$c^2=\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=4$$
$$c=2$$

Focos: $\boldsymbol{F_1(2,0)}$ y $\boldsymbol{F_2(-2,0)}$

Vértices: $\boldsymbol{V_1(\sqrt{6},0)}$ y $\boldsymbol{V_2(-\sqrt{6},0)}$

Extremos: $\boldsymbol{E_1(0,\sqrt{2})}$ y $\boldsymbol{E_2(0,-\sqrt{2})}$

105.

a) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$ se escribe como

$$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$$

Así, $a=4,\ b=2$. Además,

$$c^2=4^2-2^2=12$$
$$c=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

Focos: $\boldsymbol{F_1(0,2\sqrt{3})}$ y $\boldsymbol{F_2(0,-2\sqrt{3})}$

Vértices: $\boldsymbol{V_1(0,4)}$ y $\boldsymbol{V_2(0,-4)}$

Extremos: $\boldsymbol{E_1(2,0)}$ y $\boldsymbol{E_2(-2,0)}$

b) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ se escribe como

$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$$

Así, $a=5,\ b=4$. Además,

$$c^2=5^2-4^2=9$$
$$c=3$$

Focos: $\boldsymbol{F_1(0,3)}$ y $\boldsymbol{F_2(0,-3)}$

Vértices: $\boldsymbol{V_1(0,5)}$ y $\boldsymbol{V_2(0,-5)}$

Extremos: $\boldsymbol{E_1(4,0)}$ y $\boldsymbol{E_2(-4,0)}$

c) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$ se escribe como

$$\frac{x^2}{8^2}+\frac{y^2}{10^2}=1$$

Así, $a=10,\ b=8$. Además,

$$c^2=10^2-8^2=36$$
$$c=6$$

Focos: $\boldsymbol{F_1(0,6)}$ y $\boldsymbol{F_2(0,-6)}$

Vértices: $\boldsymbol{V_1(0,10)}$ y $\boldsymbol{V_2(0,-10)}$

Extremos: $\boldsymbol{E_1(8,0)}$ y $\boldsymbol{E_2(-8,0)}$

106.

a) Se dividen los lados de $25x^2+9y^2=225$ por 225:

$$\frac{25x^2}{225}+\frac{9y^2}{225}=\frac{225}{225}$$
$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$$

Así, $a=5,\ b=3$ y

$$c^2=5^2-3^2=16$$
$$c=4$$

Focos: $\boldsymbol{F_1(0,4)}$ y $\boldsymbol{F_2(0,-4)}$

Vértices: $\boldsymbol{V_1(0,5)}$ y $\boldsymbol{V_2(0,-5)}$

Extremos: $\boldsymbol{E_1(3,0)}$ y $\boldsymbol{E_2(-3,0)}$

b) Se dividen los lados de $16x^2+4y^2=64$ por 64:

$$\frac{16x^2}{64}+\frac{4y^2}{64}=\frac{64}{64}$$
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$$

Así, $a=4,\ b=2$ y

$$c^2=4^2-2^2=12$$
$$c=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

Focos: $\boldsymbol{F_1(0,2\sqrt{3})}$ y $\boldsymbol{F_2(0,-2\sqrt{3})}$

Vértices: $\boldsymbol{V_1(0,4)}$ y $\boldsymbol{V_2(0,-4)}$

Extremos: $\boldsymbol{E_1(2,0)}$ y $\boldsymbol{E_2(-2,0)}$

c) Se dividen los lados de

$25x^2 + 16y^2 = 400$ por 400:

$$\frac{25x^2}{400} + \frac{16y^2}{400} = \frac{400}{400}$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Así, $a = 5$, $b = 4$ y

$$c^2 = 5^2 - 4^2 = 9$$

$$c = 3$$

Focos: $\boldsymbol{F_1(0,3)}$ y $\boldsymbol{F_2(0,-3)}$

Vértices: $\boldsymbol{V_1(0,5)}$ y $\boldsymbol{V_2(0,-5)}$

Extremos: $\boldsymbol{E_1(4,0)}$ y $\boldsymbol{E_2(-4,0)}$

Sección 3: La hipérbola

107.

a) Focos y vértices en el eje x.

Además $c = 5$ y $a = 4$

.Se usa $c^2 = a^2 + b^2$:

$$5^2 = 4^2 + b^2$$

$$25 = 16 + b^2$$

$$b^2 = 9$$

$$b = 3$$

Ecuación: $\boldsymbol{\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1}$.

Asíntotas: $\boldsymbol{y = \frac{3}{4}x}$ y

$\boldsymbol{y = -\frac{3}{4}x}$

b) Focos y vértices en el eje x.

Además $c = 8$ y $a = 6$

Se usa $c^2 = a^2 + b^2$:

$$8^2 = 6^2 + b^2$$

$$64 = 36 + b^2$$

$$b^2 = 28$$

$$b = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

Ecuación: $\boldsymbol{\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{28} = 1}$.

Asíntotas: $\boldsymbol{y = \frac{\sqrt{7}}{3}x}$ y

$\boldsymbol{y = -\frac{\sqrt{7}}{3}x}$

c) Focos y vértices en el eje x.

Además $c = \sqrt{8}$ y $a = 2$

Se usa $c^2 = a^2 + b^2$:

$$\left(\sqrt{8}\right)^2 = 2^2 + b^2$$

$$8 = 4 + b^2$$

$$b^2 = 4$$

$$b = 2$$

Ecuación: $\boldsymbol{\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1}$

Asíntotas: $\boldsymbol{y = x}$ y $\boldsymbol{y = -x}$

d) Focos y vértices en el eje x.

Además $c = 5$ y $a = 3$

Se usa $c^2 = a^2 + b^2$:

$$5^2 = 3^2 + b^2$$

$$25 = 9 + b^2$$

$$b^2 = 16$$

$$b = 4$$

Ecuación: $\boldsymbol{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1}$

Asíntotas: $\boldsymbol{y = \frac{4}{3}x}$ y $\boldsymbol{y = -\frac{4}{3}x}$

108.

a) Focos y vértices en el eje y.

Además $c = 4$ y $a = 3$

Se usa $c^2 = a^2 + b^2$:

$$4^2 = 3^2 + b^2$$

$$16 = 9 + b^2$$

$$b^2 = 7$$

$$b = \sqrt{7}$$

Ecuación: $\boldsymbol{\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1}$.

Asíntotas: $\boldsymbol{y = \frac{3}{\sqrt{7}}x}$ y $\boldsymbol{y = -\frac{3}{\sqrt{7}}x}$

b) Focos y vértices en el eje y.

Además $c = 10$ y $a = 5$

Se usa $c^2 = a^2 + b^2$:

$$10^2 = 5^2 + b^2$$

$$100 = 25 + b^2$$

$$b^2 = 75$$

$b = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

Ecuación: $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{75} = 1.$

Asíntotas: $y = \frac{5}{5\sqrt{3}}x$ y $y = -\frac{5}{5\sqrt{3}}x$

c) Focos y vértices en el eje y.

Además $c = 9$ y $a = 4$

Se usa $c^2 = a^2 + b^2$:

$$9^2 = 4^2 + b^2$$
$$81 = 16 + b^2$$
$$b^2 = 65$$
$$b = \sqrt{65}$$

Ecuación: $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{65} = 1.$

Asíntotas: $y = \frac{4}{\sqrt{65}}x$ y $y = -\frac{4}{\sqrt{65}}x$

d) Focos y vértices en el eje y

Además $c = \sqrt{20}$ y $a = 3$

Se usa $c^2 = a^2 + b^2$:

$$(\sqrt{20})^2 = 3^2 + b^2$$
$$20 = 9 + b^2$$
$$b^2 = 11$$
$$b = \sqrt{11}$$

Ecuación: $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{11} = 1.$

Asíntotas: $y = \frac{3}{\sqrt{11}}x$ y $y = -\frac{3}{\sqrt{11}}x$

109.

a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$ se escribe como

$$\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$$

Así, $a = 5$, $b = 2$. Además,

$$c^2 = 5^2 + 2^2 = 29$$
$$c = \sqrt{29}$$

Focos: $F_1(\sqrt{29}, 0)$ y $F_2(-\sqrt{29}, 0)$

Vértices: $V_1(5, 0)$ y $V_2(-5, 0)$

Extremos: $E_1(0, 2)$ y $E_2(0, -2)$

b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$se escribe como

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$$

Así, $a = 3$, $b = 2$. Además,

$$c^2 = 3^2 + 2^2 = 13$$
$$c = \sqrt{13}$$

Focos: $F_1(\sqrt{13}, 0)$ y $F_2(-\sqrt{13}, 0)$

Vértices: $V_1(3, 0)$ y $V_2(-3, 0)$

Extremos: $E_1(0, 2)$ y $E_2(0, -2)$

c) $\frac{x^2}{27} - \frac{y^2}{16} = 1$ se escribe como

$$\frac{x^2}{(\sqrt{27})^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$$

Así, $a = 3\sqrt{3}$, $b = 4$. Además,

$$c^2 = (\sqrt{27})^2 + 4^2 = 43$$
$$c = \sqrt{43}$$

Focos: $F_1(\sqrt{43}, 0)$ y $F_2(-\sqrt{43}, 0)$

Vértices: $V_1(3\sqrt{3}, 0)$ y $V_2(-3\sqrt{3}, 0)$

Extremos: $E_1(0, 4)$ y $E_2(0, -4)$

110.

a) Se dividen los lados de $9x^2 - 4y^2 = 36$ por 36:

$$\frac{9x^2}{36} - \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36}$$
$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Así, $a = 2$, $b = 3$ y

$$c^2 = 2^2 + 3^2 = 13$$
$$c = \sqrt{13}$$

Focos: $F_1(\sqrt{13}, 0)$ y $F_2(-\sqrt{13}, 0)$

Vértices: $V_1(2, 0)$ y $V_2(-2, 0)$

Extremos: $E_1(0, 3)$ y $E_2(0, -3)$

b) Se dividen los lados de $x^2 - 4y^2 = 4$ por 4:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{4y^2}{4} = \frac{4}{4}$$

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$$

Así, $a = 2,\ b = 1$ y

$$c^2 = 2^2 + 1^2 = 5$$

$$c = \sqrt{5}$$

Focos: $\boldsymbol{F_1}(\sqrt{5}, \mathbf{0})$ y $\boldsymbol{F_2}(-\sqrt{5}, \mathbf{0})$

Vértices: $\boldsymbol{V_1}(\mathbf{2}, \mathbf{0})$ y $\boldsymbol{V_2}(-\mathbf{2}, \mathbf{0})$

Extremos: $\boldsymbol{E_1}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ y $\boldsymbol{E_2}(\mathbf{0}, -\mathbf{1})$

c) Se dividen los lados de

$4x^2 - 25y^2 = 100$ por 100:

$$\frac{4x^2}{100} - \frac{25y^2}{100} = \frac{100}{100}$$

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Así, $a = 5,\ b = 2$ y

$$c^2 = 5^2 + 2^2 = 29$$

$$c = \sqrt{29}$$

Focos: $\boldsymbol{F_1}(\sqrt{29}, \mathbf{0})$ y $\boldsymbol{F_2}(-\sqrt{29}, \mathbf{0})$

Vértices: $\boldsymbol{V_1}(\mathbf{5}, \mathbf{0})$ y $\boldsymbol{V_2}(-\mathbf{5}, \mathbf{0})$

Extremos: $\boldsymbol{E_1}(\mathbf{0}, \mathbf{2})$ y $\boldsymbol{E_2}(\mathbf{0}, -\mathbf{2})$

111.

a) $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$ se escribe como

$$\frac{y^2}{1^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1$$

Así, $a = 1,\ b = 2$. Además,

$$c^2 = 1^2 + 2^2 = 5$$

$$c = \sqrt{5}$$

Focos: $\boldsymbol{F_1}(\mathbf{0}, \sqrt{5})$ y $\boldsymbol{F_2}(\mathbf{0}, -\sqrt{5})$

Vértices: $\boldsymbol{V_1}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ y $\boldsymbol{V_2}(\mathbf{0}, -\mathbf{1})$

Extremos: $\boldsymbol{E_1}(\mathbf{2}, \mathbf{0})$ y $\boldsymbol{E_2}(-\mathbf{2}, \mathbf{0})$

b) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$ se escribe como

$$\frac{y^2}{5^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1$$

Así, $a = 5,\ b = 3$. Además,

$$c^2 = 5^2 + 3^2 = 34$$

$$c = \sqrt{34}$$

Focos: $\boldsymbol{F_1}(\mathbf{0}, \sqrt{34})$ y $\boldsymbol{F_2}(\mathbf{0}, -\sqrt{34})$

Vértices: $\boldsymbol{V_1}(\mathbf{0}, \mathbf{5})$ y $\boldsymbol{V_2}(\mathbf{0}, -\mathbf{5})$

Extremos: $\boldsymbol{E_1}(\mathbf{3}, \mathbf{0})$ y $\boldsymbol{E_2}(-\mathbf{3}, \mathbf{0})$

c) $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{10} = 1$ se escribe como

$$\frac{y^2}{6^2} - \frac{x^2}{\left(\sqrt{10}\right)^2} = 1$$

Así, $a = 6,\ b = \sqrt{10}$. Además,

$$c^2 = 6^2 + (\sqrt{10})^2 = 46$$

$$c = \sqrt{46}$$

Focos: $\boldsymbol{F_1}(\mathbf{0}, \sqrt{46})$ y

$\boldsymbol{F_2}(\mathbf{0}, -\sqrt{46})$

Vértices: $\boldsymbol{V_1}(\mathbf{0}, \mathbf{6})$ y $\boldsymbol{V_2}(\mathbf{0}, -\mathbf{6})$

Extremos: $\boldsymbol{E_1}(\sqrt{10}, \mathbf{0})$ y

$\boldsymbol{E_2}(-\sqrt{10}, \mathbf{0})$

112.

a) Se dividen los lados de

$25y^2 - 4x^2 = 100$ por 100:

$$\frac{25y^2}{100} - \frac{4y^2}{100} = \frac{100}{100}$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{25} = 1$$

Así, $a = 2,\ b = 5$ y

$$c^2 = 2^2 + 5^2 = 29$$

$$c = \sqrt{29}$$

Focos: $\boldsymbol{F_1}(\mathbf{0}, \sqrt{29})$ y $\boldsymbol{F_2}(\mathbf{0}, -\sqrt{29})$

Vértices: $\boldsymbol{V_1}(\mathbf{0}, \mathbf{2})$ y $\boldsymbol{V_2}(\mathbf{0}, -\mathbf{2})$

Extremos: $\boldsymbol{E_1}(\mathbf{5}, \mathbf{0})$ y $\boldsymbol{E_2}(-\mathbf{5}, \mathbf{0})$

b) Se dividen los lados de

$16y^2 - 4x^2 = 64$ por 64:

$$\frac{16y^2}{64} - \frac{4y^2}{64} = \frac{64}{64}$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$$

Así, $a = 2,\ b = 4$ y

$$c^2 = 2^2 + 4^2 = 20$$

$$c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Focos: $\boldsymbol{F_1(0, 2\sqrt{5})}$ y $\boldsymbol{F_2(0, -2\sqrt{5})}$
Vértices: $\boldsymbol{V_1(0, 2)}$ y $\boldsymbol{V_2(0, -2)}$
Extremos: $\boldsymbol{E_1(4, 0)}$ y $\boldsymbol{E_2(-4, 0)}$

c) Se dividen los lados de
$9y^2 - 2x^2 = 18$ por 18:

$$\frac{9y^2}{18} - \frac{2y^2}{18} = \frac{18}{18}$$

$$\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{9} = 1$$

Así, $a = \sqrt{2}$, $b = 3$ y

$$c^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 3^2 = 11$$

$$c = \sqrt{11}$$

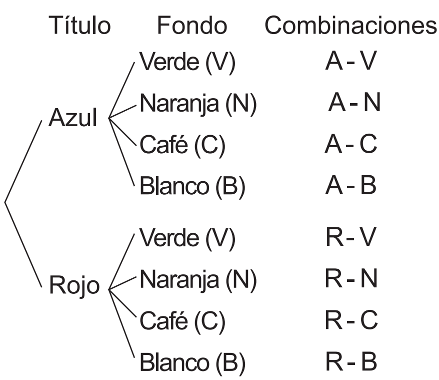
Focos: $\boldsymbol{F_1(0, \sqrt{11})}$ y $\boldsymbol{F_2(0, -\sqrt{11})}$
Vértices: $\boldsymbol{V_1(0, \sqrt{2})}$ y $\boldsymbol{V_2(0, -\sqrt{2})}$
Extremos: $\boldsymbol{E_1(3, 0)}$ y $\boldsymbol{E_2(-3, 0)}$

Unidad 6: Técnicas de conteo y Probabilidades

Sección 1: Técnicas de conteo

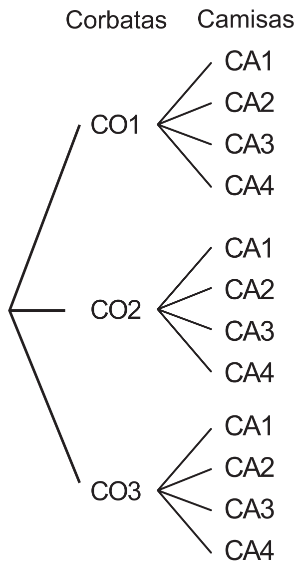
113.

a) Todas las posibles combinaciones para la carátula:

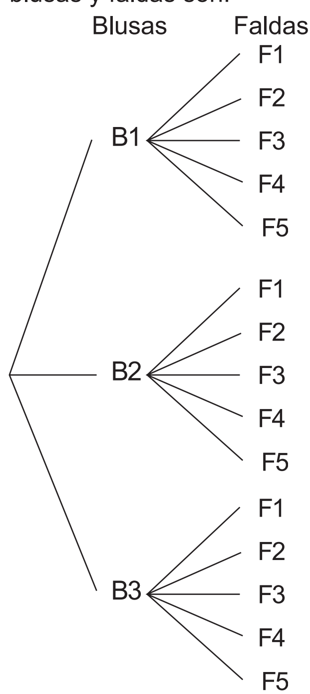


En total, **8 combinaciones.**

b) Denótese por CO1, CO2 y CO3 las corbatas que el señor posee, así mismo, las camisas como CA1, CA2, CA3 y CA4.
Las **12 combinaciones** diferentes de camisas y corbatas son:



c) Denótese por B1, B2 y B3 las blusas de María, así mismo, las faldas como F1, F2, F3, F4 y F5. Las combinaciones diferentes de blusas y faldas son:



Un total de **15 combinaciones**.

114.

a) Número de pares cuyas componentes suman $6 : 5$. Y número de pares cuyas componentes suman $9 : 4$. Así, el número de pares con componentes que suman 6 o 9:

$$5 + 4 = \mathbf{9}$$

b) Total de formas de elegir una película: 3, y total de formas de elegir una obra de teatro: 4

Las formas de elegir una película son diferentes de las opciones para una obra de teatro. Así, las formas de elegir una película o una obra de teatro es:

$$3 + 4 = \mathbf{7}.$$

c) Las formas de el egir un curso de:

Matemáticas: 3

Física: 4

Administración: 2

El total de formas de elección de uno de estos cursos es:

$$3 + 4 + 2 = \mathbf{9}.$$

115.

a) Para la palabra “canto”:

Total de formas de escoger una vocal: 2

Total de formas de escoger una consonante: 3

Así, el total de formas de escoger una vocal y una consonante:

$$(2)(3) = \mathbf{6}$$

b) Para el lanzamiento del primer dado se tienen 6 resultados posibles, igual número para el segundo dado. De modo que, el total de resultados posibles es:

$$(6)(6) = 36$$

c) Número de formas para elegir:

Sopas: 4

Postres: 5

Emparedados: 3

Refrescos: 4

Así, el total de combinaciones de una sopa, un emparedado, un postre y un refresco es:

$$(4)(3)(5)(4) = \mathbf{240}$$

116.

a) $3! = (3)(2)(1) = \mathbf{6}$

b) $4! = (4)(3)(2)(1) = \mathbf{24}$

c) $8! = (8)(6)(5)(4)(3)(2)(1)$

$= \mathbf{40\ 320}$

d) $(5!)(3!) = (5)(4)(3)(2)(1)(3)(2)(1)$

$= (120)(6) = \mathbf{720}$

117.

a) Total de números de tres cifras con los dígitos 1, 2, 3 sin repetición de estos:

$$3! = (3)(2)(1) = \mathbf{6}$$

b) Las 4 personas se pueden ubicar en la fila en un total de

$$4! = (4)(3)(2)(1) = \mathbf{24}$$

formas diferentes.

c) Notar que el orden de las cajas es importante: La primera posición de las cajas puede ser ocupada por cualquiera de las 6, habiendo ubicado una de ellas, para la siguiente posición quedan 5 cajas que pueden ocupar esta, luego de esto, la tercera posición puede ser ocupado por 4 cajas (ya han sido ubicadas 2), y así sucesivamente.

De manera que, el total de formas para ordenar las 6 cajas es:

$$6! = (6)(5)(4)(3)(2)(1) = \mathbf{720}$$

118.

a) ${}_6P_2 = (6)(5) = \mathbf{30}$

b) ${}_5P_3 = (5)(4)(3) = \mathbf{60}$

c) ${}_7P_4 = (7)(6)(5)(4) = \mathbf{840}$

d) ${}_9P_3 = (9)(8)(7) = \mathbf{504}$

119.

a) Se usa ${}_nP_r$, con $n = 8,\ r = 4$:

$${}_8P_4 = (8)(7)(6)(5) = \mathbf{1\,680}$$

Hay 1 680 formas para la elección del comité.

b) Se usa ${}_nP_r$, con $n = 5,\ r = 3$:

$${}_5P_3 = (5)(4)(3) = \mathbf{60}$$

Existen 60 códigos diferentes de 3 letras, formados a partir de las letras A, B, C, D, E.

c) Se usa ${}_nP_r$, con $n = 8,\ r = 5$:

$${}_8P_5 = (8)(7)(6)(5)(4) = \mathbf{6\,720}$$

Existen un total de 6 720 arreglos posibles de los libros.

120.

a) Se calcula el total de permutaciones circulares de 4 elementos:

$$(4-1)! = 3! = \mathbf{6}$$

b) Dado que el llavero es circular, se calcula el total de permutaciones circulares de $n = 7$ objetos:

$$(7-1)! = 6! = \mathbf{720}$$

c) El total de formas de sentarse los 6 amigos en torno a la fogata es

$$(6-1)! = 5! = \mathbf{120}$$

121.

a) ${}_5C_3 = \frac{{}_5P_3}{3!} = \frac{(5)(4)(3)}{(3)(2)(1)} = \mathbf{10}$

b) ${}_4C_3 = \frac{{}_4P_3}{3!} = \frac{(4)(3)(2)}{(3)(2)(1)} = \mathbf{4}$

c) ${}_7C_4 = \frac{{}_7P_3}{4!} = \frac{(7)(6)(5)(4)}{(4)(3)(2)(1)} = \mathbf{35}$

d) ${}_8C_5 = \frac{{}_8P_5}{5!} = \frac{(8)(7)(6)(5)(4)}{(5)(4)(3)(2)(1)} = \mathbf{56}$

122.

a) Se calcula ${}_nC_r$, con $n = 6,\ r = 3$:

$${}_6C_3 = \frac{{}_6P_3}{3!} = \frac{(6)(5)(4)}{(3)(2)(1)} = \mathbf{20}$$

b) Se calcula ${}_nC_r$, con $n = 10,\ r = 6$:

$${}_{10}C_6 = \frac{{}_{10}P_6}{6!} = \frac{(10)(9)(8)(7)(6)(5)}{(6)(5)(4)(3)(2)(1)} = \mathbf{210}$$

c) Se calcula ${}_nC_r$, con $n = 7,\ r = 3$:

$${}_7C_3 = \frac{{}_7P_3}{3!} = \frac{(7)(6)(5)}{(3)(2)(1)} = \mathbf{35}$$

123.

a) Total de formas de seleccionar 3 hombres de 6: ${}_6C_3$.

Total de formas de seleccionar 2 mujeres de 5: ${}_5C_2$.

Por el principio de la multiplicación, el número de formas de integrase el concejo es:

$$({}_6C_3)({}_5C_2) = (20)(10) = \mathbf{200}$$

b) Total de formas de seleccionar 2 pelotas blancas de 7: ${}_7C_2$.

Total de formas de seleccionar 1 pelota roja de 3: ${}_3C_1$

Así, el total de formas de extraer 2 blancas y una roja es:

$$({}_7C_2)({}_3C_1) = (21)(3) = \mathbf{69}$$

c) Total de formas de seleccionar 1 pitcher de 4: ${}_4C_1$.

Total de formas de seleccionar 8 jugadores de 11: ${}_{11}C_8$.

Así, el total de equipos de 9 jugadores es:

$$({}_4C_1)({}_{11}C_8) = (4)(165) = \mathbf{660}$$

d) Total de formas de seleccionar 2 químicos de 4: ${}_4C_2$.

Total de formas de seleccionar 1 físico de 3: ${}_3C_1$.

Así, el total de comités posible es:

$$({}_4C_2)({}_3C_1) = (6)(3) = \mathbf{18}$$

124.

a) $_4C_2 = \frac{_4P_2}{2!} = \frac{(4)(3)}{(2)(1)} = \mathbf{6}$

$$_4C_2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{(4)(3)(2)(1)}{(2)(2)} = \mathbf{6}$$

b) $_5C_3 = \frac{_5P_3}{3!} = \frac{(5)(4)(3)}{(3)(2)(1)} = \mathbf{10}$

$$_5C_3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{(5)(4)(3)(2)(1)}{(3)(2)(1)(2)(1)} = \mathbf{10}$$

c) $_7C_4 = \frac{_7P_4}{4!} = \frac{(7)(6)(5)(4)}{(4)(3)(2)(1)} = \mathbf{35}$

$$_7C_4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1)}{(4)(3)(2)(1)(3)(2)(1)}$$

$$= \mathbf{35}$$

125.

a) Se calcula $_nC_r$, con $n = 6,\ r = 3$:

$$_6C_3 = \frac{6!}{3!\,(6-3)!}$$

$$= \frac{(6)(5)(4)(3)(2)(1)}{(3)(2)(1)(3)(2)(1)} = \mathbf{20}$$

Juan tiene **20 formas** para elegir los libros.

b) Se calcula $_nC_r$, con $n = 6,\ r = 4$:

$$_6C_4 = \frac{6!}{4!\,(6-4\ )!}$$

$$= \frac{(6)(5)(4)(3)(2)(1)}{(4)(3)(2)(1)(2)(1)} = \mathbf{15}$$

Existen **15 formas** para asignar a los profesores.

c) Se calcula $_nC_r$, con $n = 10,\ r = 3$:

$$_{10}C_3 = \frac{10!}{3!\,(10-3\ )!}$$

$$= \frac{(10)(9)(8)(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1)}{(3)(2)(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1)}$$

$$= \mathbf{120}$$

Existen **120 formas** para distribuir los premios.

126.

a) Se calcula el total de permutaciones con repetición:

$$\frac{7!}{2!3!2!} = \mathbf{210}$$

b) Se tiene un total de 9 letras, de las cuales 1 es R, 1 es E, 2 son C, 3 son O, 1 es N y 1 es Z. Así, el total de permutaciones es:

$$\frac{9!}{1!1!2!3!1!1!} = \mathbf{30\ 240}$$

c) En este problema debe determinarse el total de permutaciones de 4 elementos, de los cuales 2 son de un tipo (masculino) y los restantes 2 son de otro tipo (femenino):

$$\frac{4!}{2!2!} = \frac{(4)(3)(2)(1)}{(2)(1)(2)(1)} = \mathbf{6}$$

Sección 2: Probabilidades

127.

a) Espacio muestral: $E = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Para el evento A : obtener un número impar, $A = \{1,3,5\}$.

$$P(A) = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{6}}$$

Para el evento B: obtener un múltiplo de 4, $B = \{4\}$.

$$P(B) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$$

Es más probable obtener un número impar.

b) Sea el evento B: seleccionar un libro de poema. En total se tienen 10 libros y de estos, 3 son de poemas. Así que

$$P(B) = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}.$$

c) Se define el evento M: extraer una bola de color rojo. En la bolsa se tiene un total de 14 bolas, de las cuales 4 son rojas, de modo que

$$P(M) = \frac{4}{14} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}}$$

d) El espacio muestral es

$$E = \{\text{EE, EN, NE, NN}\}$$

De los resultados anteriores, el evento

A: obtener dos escudos, tiene un caso favorable, así que

$$P(A) = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

128.

a) El espacio muestral tiene 36 elementos. De estos, 6 pares presentan suma igual a 7, así que

$$P(A) = \frac{6}{36} = \mathbf{\frac{1}{6}}$$

b) De las 20 páginas, 12 están en blanco, de manera que, para el evento B: extraer una página en blanco, se tiene

$$P(B) = \frac{12}{20} = \mathbf{\frac{3}{5}}$$

c) El espacio muestral consta de 30 futas (manzanas y peras), de las cuales se tienen más peras, así que la probabilidad de A: extraer pera es mayor que la de B: extraer manzana:

$$P(A) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} > P(B) = \frac{10}{30} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

d) El espacio muestral es:

$E = \{\text{EEE,EEN,ENE,NEE,NEN,ENN,NNE, NNN}\}$

Para el evento A : obtener tres veces número se tiene:

$$P(A) = \mathbf{\frac{1}{8}}$$

129.

a) Espacio muestra: $E = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Para los eventos

A: obtener un número par

B: obtener un número múltiplo de 3

$A \cap B$: obtener un número par y múltiplo de 3

$A \cup B$: obtener un número par o múltiplo de 3

Se tiene:

$$P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{1}{3},\ P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

b) Para los eventos

A: seleccionar un jugador de béisbol

B: seleccionar un jugador de fútbol

$A \cap B$: seleccionar un jugador de ambos deportes

$A \cup B$: seleccionar un jugador de alguno de los deportes,

se tiene

$$P(A) = \frac{2}{5},\ P(B)= \frac{3}{5},\ P(A \cup B) = \frac{4}{5}$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{3}{5} - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

c) Se definen:

A: Aprobar Matemática

B: Aprobar Física

$A \cap B$: Aprobar ambas asignaturas

$A \cup B$: Aprobar Matemática o Física.

Las probabilidades de estos son:

$$P(A) = 0{,}6 \quad P(B) = 0{,}7,$$

$$P(A \cap B) = 0{,}45$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0{,}6 + 0{,}7 - 0{,}45 = \mathbf{0{,}85}$$

d) Se definen los eventos:

A: seleccionar una vocal

B: seleccionar una letra anterior a la g

$A \cap B$: seleccionar una vocal anterior a la g

$A \cup B$: seleccionar una vocal o una letra anterior a la g:

$$P(A) = \frac{5}{27} \quad P(B) = \frac{6}{27},$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{27}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{5}{27} + \frac{6}{27} - \frac{2}{27} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

130.

a) Para los eventos:

A: obtener un número par

B: obtener un múltiplo de 5

$A \cup B$: obtener número par o múltiplo de 5 se tiene

$$P(A) = \tfrac{1}{2} \quad P(B) = \tfrac{1}{6},$$

$P(A \cap B)=0$ ya que no hay un número par y múltiplo de 5 en el espacio muestral.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

b) Se definen:

A: seleccionar de Matemática

B: seleccionar de Física

Se tiene que $A \cap B = \phi$, así que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$$
$$= \mathbf{\frac{2}{5}}$$

c) Se definen:

A: extraer una bola roja

B: extraer una bola azul

Se tiene que $A \cap B = \phi$, así que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
$$= \frac{7}{20} + \frac{9}{20} = \frac{16}{20} = \mathbf{\frac{4}{5}}$$

d) Para los eventos

B: seleccionar color blanco

A: seleccionar color azul

se tiene que $A \cap B = \phi$, y

$$P(B \cup A) = P(B) + P(A)$$
$$= 0{,}15 + 0{,}23 = \mathbf{0{,}38}$$

131.

a) $P(A) = \frac{6}{6} = \mathbf{1}$ b) $P(B) = \frac{0}{6} = \mathbf{0}$

c) $P(C) = \frac{2}{6} = \mathbf{\frac{1}{3}}$

132.

a) Se tienen 4 fichas amarillas, así que

$$P(A) = \frac{4}{16} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

Entre las fichas, no hay alguna de color negro, de modo que

$$P(B) = \frac{0}{16} = \mathbf{0}$$

Las fichas azules y las verdes totalizan 8, de manera que

$$P(C) = \frac{8}{16} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

b) En el espacio muestral son múltiplos de 4: 4, 8, 12, 16, 20, y por tanto

$$P(A) = \frac{5}{20} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

Todos los elementos del espacio muestral son pares o son impares, así que

$$P(B) = \frac{20}{20} = \mathbf{1}$$

En las fichas no aparecen números mayores a 50, por lo cual

$$P(C) = \frac{0}{20} = \mathbf{0}$$

Casos favorables para el evento ***D***: 1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 15, 17, 19, 20, por lo cual

$$P(D) = \frac{12}{20} = \mathbf{\frac{3}{5}}$$

133.

a) Espacio muestral $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ Y, $A = \{3,6\}$,

Así,

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{6} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

b) El espacio muestral consta de 12 elementos. La probabilidad de $\boldsymbol{A}$: seleccionar una que sea negra es:

$$P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Así, la probabilidad de que no sea negra es

$$P(\bar{A}) = 1- \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

c) El espacio muestral posee 36 elementos, de los cuales 3 muestran suma mayor a 10: $(6,5),(5,6),(6,6)$.

Así, la probabilidad de $\boldsymbol{A}$: la suma es mayor a 10 es

$$P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Por tanto, la probabilidad de que la suma no sea mayor que 10 es

$$P(\bar{A}) = 1- \frac{1}{12} = \mathbf{\frac{11}{12}}$$

134.

a) Los eventos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son independientes ya que la primera de las cartas extraídas se coloca de nuevo el paquete, así, el espacio muestral para la segunda extracción es el mismo que el asociado a la primera. También,

$$P(A) = \frac{1}{13}, \quad P(B) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$= \left(\frac{1}{13}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \mathbf{\frac{1}{52}}$$

b) Dado que la extracción se realiza con reposición, los eventos $\boldsymbol{A}$: la primera carta extraída es un as, y $\boldsymbol{B}$: la segunda carta extraída es un as, son independientes y,

$$P(A) = \frac{1}{52}, \quad P(B) = \frac{1}{52}$$

De modo que, la probabilidad de que ambas sean as es:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$= \left(\frac{1}{52}\right)\left(\frac{1}{52}\right) = \mathbf{\frac{1}{2\,704}}$$

c) Los eventos $\boldsymbol{A}$: en el primer lanzamiento se obtiene 3 y $\boldsymbol{B}$: en el segundo lanzamiento un número impar, son independientes pues la ocurrencia de uno no altera la del otro. Así,

$$P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Así, la probabilidad de que ocurran ambos eventos es

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \mathbf{\frac{1}{12}}$$

d) En este caso, como la ocurrencia de $\boldsymbol{A}$: en la primera elección se obtiene un bombillo defectuoso, modifica el número de casos favorables del evento y $\boldsymbol{B}$: en la segunda elección se obtiene un bombillo defectuoso, entonces

$$P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}, \quad P(B) = \frac{4}{19}$$

Luego,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{19}\right) = \mathbf{\frac{1}{9}}$$

135.

a) Se usa $P(B\,/\,A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ para los eventos $\boldsymbol{A}$: la suma de los puntos es 6 y el evento condicionado $\boldsymbol{B}$: en uno de los dados aparece 2. Para ello, nótese que

$$P(A) = \frac{5}{36}, \qquad P(A \cap B) = \frac{2}{36}$$

De modo que, la probabilidad de que solo en uno de los dados aparezca un 2, sabiendo que la suma de los puntos es 6

$$P(B\,/\,A) = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \mathbf{\frac{2}{5}}$$

b) Nuevamente se hace uso de

$$P(B\ /\ A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Se tiene que

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13},$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52}$$

Así,

$$P(B\ /\ A) = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{4}{52}} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

c) Se definen los eventos

A: el individuo seleccionado vio el debate,

B: el individuo seleccionado vio la película.

$A \cap B$: el individuo seleccionado vio la película y el debate.

Entonces

$$P(A) = \frac{2\,100}{2\,500} = \frac{21}{25},$$

$$P(A \cap B) = \frac{1\,450}{2\,500} = \frac{29}{50}$$

Así, la probabilidad de que el individuo viera la película, sabiendo que vio el debate es

$$P(B\ /\ A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{29}{50}}{\frac{21}{25}} = \mathbf{\frac{29}{42}}$$

Unidad 1: Sucesiones

EA1.

$a+b+c=3$

$a^2+b^2+c^2=53$

Sea d la diferencia común de la sucesión aritmética

$b=a+d, \qquad c=a+2d$

Entonces $a+a+d+a+2d=3$

$3a+3d=3$

$a+d=1$

$d=1-a$

$a^2+(a+d)^2+(a+2d)^2=53$

$a^2+a^2+2ad+d^2+a^2+4ad+4d^2=53$

$3a^2+6ad+5a^2=53$

$3a^2+6a(1-a)+5(1-a)^2=53$

$3a^2+6a-6a^2+5(1-2a+a^2)=53$

$(3-6+5)a^2+(6-10)a+5-53=0$

$2a^2-4a-48=0$

$a^2-2a-24=0$

$(a-6)(a+4)=0$

$a=6, \qquad a=-4$

Si $a=6,\quad d=1-6=-5$ y

$\boldsymbol{a=6},\quad \boldsymbol{b=1},\quad \boldsymbol{c=-4}$

Si $a=-4,\quad d=1-(-4)=5$ y

$\boldsymbol{a=-4},\quad \boldsymbol{b=1},\qquad \boldsymbol{c=6}$

EA2.

a) Sea a_1 el primer término d la diferencia común

$a_1+9d=26 \quad (1)$

$a_1+29d=66 \quad (2)$

(2) menos (1)

$20d=40 \qquad d=2$

$a_1+18=26 \qquad a_1=8$

$a_n=8+(n-1)(2)=2n+6$

$2n+6=200$

$2n=194 \qquad \boldsymbol{n=97}$

b) $S_n=\frac{n\{2a_1+(n-1)d\}}{2}=\frac{n\{2(8)+(n-1)2\}}{2}$

$=\frac{16n+2n^2-2n}{2}=\frac{2n^2+14n}{2}$

$=n^2+7n=n(n+7)$

Si $n=10,\ S_{10}=(10)(17)=170$

Si $n=11,\ S_{11}=(11)(18)=198$

Si $n=12,\ S_{12}=(12)(19)=228$

$\boldsymbol{n=12}$

EA3.

$6,x,y$ en sucesión aritmética

$x,y,16$ en sucesión geométrica

Sea d la diferencia común de la sucesión aritmética

$x=6+d \qquad y=x+d$

$d=x-6 \qquad d=y-x$

$x-6=y-x$

$2x=y+6 \qquad y=2x-6 \quad (1)$

Sea r la razón común de la sucesión geométrica

$y=rx \qquad 16=ry$

$r=\frac{y}{x} \qquad r=\frac{16}{y}$

$\frac{y}{x}=\frac{16}{y} \qquad y^2=16x \quad (2)$

Sustituyendo (1) en (2)

$(2x-6)^2=16x$

$4x^2-24x+36=16x$

$4x^2-40x+36=0$

$x^2-10x+9=0$

$(x-1)(x-9)=0$

$x=1, \qquad x=9$

Por tanto

Si $\boldsymbol{x=1},\ \boldsymbol{y=-4}$

Si $\boldsymbol{x=9},\ \boldsymbol{y=12}$

EA4.

$a_2=2$ entonces $a_1r=2 \qquad (1)$

$S_3=7$ entonces $a_1+a_1r+a_1r^2=7$

$a_1(1+r+r^2)=7$

Se multiplica r a ambos lados

$$a_1 r(1 + r + r^2) = 7r$$

$$2(1 + r + r^2) = 7r$$

$$2r^2 + 2r + 2 - 7r = 0$$

$$2r^2 - 5r + 2 = 0$$

$$(2r - 1)(r - 2) = 0$$

$$r = \frac{1}{2}, \qquad r = 2$$

Se sustituye $r = \frac{1}{2}$ en (1)

$\frac{1}{2} a_1 = 2, \;\; a_1 = 4$

Se sustituye $r = 2$ en (1)

$2a_1 = 2, \;\; a_1 = 1$

Por tanto

$\boldsymbol{a_1 = 4}$, si $\quad \boldsymbol{r = \frac{1}{2}}$

$\boldsymbol{a_1 = 1}$, si $\quad \boldsymbol{r = 2}$

EA5.

a) $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{1}{2} k(k + 1)$

b) $1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \cdots + (1 + 2 + 3 + \cdots + n)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} k(k + 1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (k^2 + k)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1) + \frac{1}{2} n(n + 1)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{6}\right) n(n + 1)[(2n + 1) + 3]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{6}\right) n(n + 1)(2n + 4)$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{6} n(n + 1)(n + 2)}$$

Unidad 2: Potenciación y Funciones Exponenciales

EA6.

$$\left(\sqrt{2}\right)^6 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6 = 2^3 = 8$$

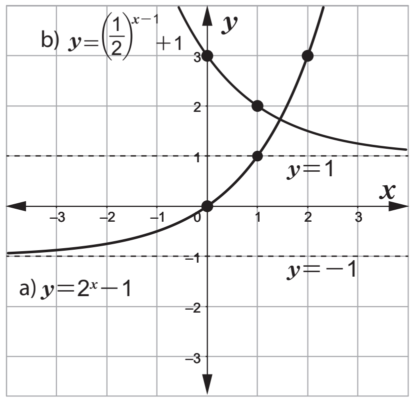
$$\left(\sqrt[3]{3}\right)^6 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6 = 3^3 = 9$$

$$\left(\sqrt[6]{6}\right)^6 = \left(6^{\frac{1}{6}}\right)^6 = 6$$

$$6 < 8 < 9$$

Por lo tanto, $\sqrt[6]{6} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

EA7.



EA8.

$$\begin{cases} 3^x + 3^y = 12 \\ 3^{x+y} = 27 \end{cases}$$

Se hace

$3^x = X, \qquad 3^y = Y$

$$\begin{cases} \mathrm{X} + \mathrm{Y} = 12 \\ \mathrm{X} \cdot \mathrm{Y} = 27 \end{cases}$$

Se sustituye $\mathrm{X} = 12 - \mathrm{Y}$ en $\mathrm{X} \cdot \mathrm{Y} = 27$

$$(12 - \mathrm{Y}) \cdot \mathrm{Y} = 27$$

$$Y^2 - 12Y + 27 = 0$$

$$(Y - 3)(Y - 9) = 0$$

$$Y = 3, \quad Y = 9$$

En consecuencia:

Si $Y = 3, \; \mathrm{X} = 9$

Si $Y = 9, \; \mathrm{X} = 3$

Regresando a la variable original:

Si $\mathrm{X} = 9, \;\; Y = 3,$

entonces $3^x = 9, \; 3^y = 3.$

Es decir, $x = 2, \; y = 1.$

Si $X = 3,\ \ Y = 9,$

entonces $3^x = 3,\ 3^y = 9.$

Es decir, $x = 1,\quad y = 2$

Solución: $\begin{cases} \boldsymbol{x = 2} \\ \boldsymbol{y = 1} \end{cases},\quad \begin{cases} \boldsymbol{x = 1} \\ \boldsymbol{y = 2} \end{cases}$

Unidad 3: Logaritmo y Funciones Logarítmicas

EA9.

$$\log_5 5\sqrt{2} + \frac{1}{2}\log_5 \frac{25}{24} - \frac{3}{2}\log_5 \frac{1}{\sqrt[3]{12}}$$

$$= \log_5(5\sqrt{2})\left(\frac{25}{24}\right)^{\frac{1}{2}} - \log_5\left[\left(\frac{1}{12}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}$$

$$= \log_5 \frac{5\sqrt{2}\cdot 5}{\sqrt{24}} - \log_5\left(\frac{1}{12}\right)^{\frac{1}{2}}$$

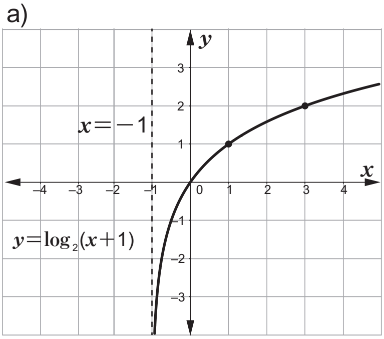
$$= \log_5 \frac{25\sqrt{2}}{\sqrt{24}} - \log_5 \frac{1}{\sqrt{12}}$$

$$= \log_5 \frac{25\sqrt{2}}{\sqrt{24}} \cdot \sqrt{12}$$

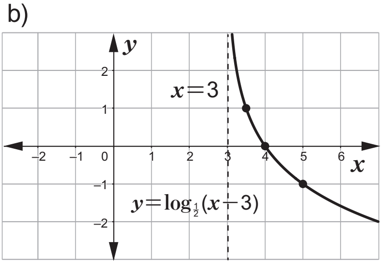
$$= \log_5\left(\frac{25\sqrt{24}}{\sqrt{24}}\right) = \log_5 5^2 = 2$$

EA10.

a)



b)



EA11.

Utilizando la fórmula de cambio de base:

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d \cdot \log_d a$$

$$= \frac{\log_a b}{\log_a a} \cdot \frac{\log_a c}{\log_a b} \cdot \frac{\log_a d}{\log_a c} \cdot \frac{\log_a a}{\log_a d} = \mathbf{1}$$

EA12.

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

$\log_2 x + \log_2 y = 4$

$\log_2 x \cdot y = 4$

$xy = 2^4 = 16$

$$\begin{cases} x \cdot y = 16 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

Se sustituye $x = 10 - y$ en $x \cdot y = 16$

$(10 - y)\cdot y = 16$

$y^2 - 10y + 16 = 0$

$(y - 2)(y - 8) = 0$

$y = 2,$

En consecuencia:

Si $y = 2,\ x = 8$

Si $y = 8,\ x = 2$

Solución:

$\begin{cases} \boldsymbol{x = 8} \\ \boldsymbol{y = 2} \end{cases},\quad \begin{cases} \boldsymbol{x = 2} \\ \boldsymbol{y = 8} \end{cases}$

Unidad 4: Geometría Analítica

EA13.

Dado que el triángulo ABC debe ser equilátero,

$$AB = BC = CA,$$

es decir, $AB^2 = BC^2 = CA^2$, y, por la expresión para la distancia:

$$AB^2 = BC^2$$

$[6 - (-2)]^2 + 0^2 = (x - 6)^2 + y^2$

la cual equivale a $(x - 6)^2 + y^2 = 64$

También, por $BC^2 = CA^2$ se tiene

$$(x - 6)^2 + y^2 = (x + 2)^2 + y^2$$

$$x^2 - 12x + 36 = x^2 + 4x + 4$$

$$16x = 32$$

$$x = \frac{32}{16} = 2$$

Sustituyendo el valor de x en $(x-6)^2 + y^2 = 64$:

$$(2-6)^2 + y^2 = 64$$
$$16 + y^2 = 64$$
$$y = \pm\sqrt{48} = \pm 4\sqrt{3}$$

De manera que las coordenadas de C con la condición de ser vértice de un triángulo equilátero con A y B son: $(\mathbf{2}, \mathbf{4\sqrt{3}})$ y $(\mathbf{2}, \mathbf{-4\sqrt{3}})$. (Dos triángulos posibles).

EA14.

$m = 5,\ n = 2,\ x_2 = 4,\ y_2 = 8,$

$x = 3,\ y = 4.$

$$3 = \frac{(2)x_1 + (5)(4)}{5+2}$$
$$21 = 2x_1 + 20$$
$$x_1 = \frac{21-20}{2} = \frac{1}{2}$$
$$4 = \frac{(2)y_1 + (5)(8)}{5+2}$$
$$28 = 2y_1 + 40$$
$$y_1 = \frac{28-40}{2} = -6$$

El punto es $\boldsymbol{A\left(\frac{1}{2}, -6\right)}$.

EA15.

La recta solicitada es perpendicular a la que contiene a $A(1,3)$ y $B(4,2)$, cuya ecuación es:

$$y - 3 = \frac{2-3}{4-1}(x-1)$$
$$y - 3 = -\frac{1}{3}(x-1)$$
$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$$

La pendiente de esta es $m_1 = -\frac{1}{3}$, así que

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-\frac{1}{3}} = 3$$

También, la recta a determinar contiene al punto medio de $\overline{AB}$, cuyas coordenadas son:

$$x = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}, \quad y = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}$$

De modo que la ecuación de la recta es

$$y - \frac{5}{2} = (3)\left(x - \frac{5}{2}\right)$$
$$y = 3x - \frac{15}{2} + \frac{5}{2}$$
$$y = 3x - 5$$

La ecuación de la mediatriz de $\overline{AB}$ es

$$\boldsymbol{y = 3x - 5}.$$

EA16.

Para determinar la longitud de la cuerda, se determinan los extremos de esta, esto es, los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$ y la recta $y = -x + 1$:

$$x^2 + (-x+1)^2 = 8$$
$$2x^2 - 2x + 1 = 8$$
$$2x^2 - 2x - 7 = 0$$

Las soluciones de la ecuación anterior son:

$$x = \frac{1+\sqrt{15}}{2}, \quad x = \frac{1-\sqrt{15}}{2}$$

Los valores correspondientes de y son:

$$y = \frac{-1-\sqrt{15}}{2} + 1 = \frac{1-\sqrt{15}}{2},$$
$$y = \frac{-1+\sqrt{15}}{2} + 1 = \frac{1+\sqrt{15}}{2}$$

Los puntos de intersección son

$$A\left(\frac{1+\sqrt{15}}{2}, \frac{1-\sqrt{15}}{2}\right),$$
$$B\left(\frac{1-\sqrt{15}}{2}, \frac{1+\sqrt{15}}{2}\right)$$

La longitud de la cuerda $\overline{AB}$ es

$$d=\sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{15}}{2}-\frac{1+\sqrt{15}}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{15}}{2}-\frac{1-\sqrt{15}}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(-\sqrt{15}\right)^2+(\sqrt{15})^2}$$

$$=\sqrt{15+15}=\sqrt{\mathbf{30}}$$

EA17.

Se obtiene la ecuación ordinaria de la circunferencia:

$$x^2+y^2-6x-6y+10=0$$

$$(x^2-6x)+(y^2-6y)=-10$$

$$(x^2-6x+3^2)+(y^2-6y+3^2)=8$$

$$(x-3)^2+(y-3)^2=8$$

Así, el centro de la circunferencia es $(3,3)$. La recta que pasa por $(3,3)$ y $(1,1)$ tiene por ecuación

$$y-3=\frac{1-3}{1-3}(x-3)$$

$$y-3=1(x-3)$$

$$y=x$$

Así, la pendiente de esta es $m_1=1$ y es perpendicular a la recta tangente requerida.

De manera que, la recta tangente pasa por $(1,1)$ y tiene pendiente

$$m_2=-\frac{1}{m_1}=-\frac{1}{1}=-1.$$

Su ecuación es

$$y-1=(-1)(x-1)$$

$$y-1=-x+1$$

$$\boldsymbol{y=-x+2}$$

Unidad 5: Cónicas

EA18.

$x^2+16y=0$ se reescribe como $x^2=-16y$, de donde $p=-4$ y el foco de esta es $F(0,-4)$.

Así que el radio de la circunferencia es

$$r=\sqrt{(0-4)^2+(-4+1)^2}=5$$

La ecuación de la circunferencia es

$$(x-4)^2+(y+1)^2=25$$

Y la directriz de la parábola es $y=4$.

Se determinan los puntos de intersección de la directriz de la parábola y la circunferencia al sustituir $y=4$ en $(x-4)^2+(y+1)^2=25$:

$$(x-4)^2+(4+1)^2=25$$

$$(x-4)^2+25=25$$

$$(x-4)^2=0$$

$$x=4$$

El punto de intersección es $(4,4)$ un único punto, de modo que la directriz de la parábola dada es tangente a la circunferencia.

EA19.

La ecuación de la elipse es de la forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Y contiene al punto $\left(\frac{\sqrt{7}}{2},3\right)$, así que

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}{a^2}+\frac{(3)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{\frac{7}{4}}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1$$

$$\frac{7}{4a^2}+\frac{9}{b^2}=1$$

Como $a=2b$, entonces $4a^2=16b^2$, y al sustituir esta expresión en la igualdad precedente se tiene

$$\frac{7}{16b^2}+\frac{9}{b^2}=1$$

$$\frac{\frac{7}{16}}{b^2}+\frac{9}{b^2}=1$$

$$\frac{7}{16}+9=b^2$$

$$b^2=\frac{151}{16}$$

Y, $a^2=4b^2=4\left(\frac{151}{16}\right)=\frac{151}{4}$.

La ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{\frac{151}{4}}+\frac{y^2}{\frac{151}{16}}=\mathbf{\frac{4x^2}{151}+\frac{16y^2}{151}=1}$$

EA20.

La ecuación de la hipérbola buscada es de la forma $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Como esta contiene a $(3,-2)$, entonces

$$\frac{(3)^2}{a^2}-\frac{(-2)^2}{b^2}=1$$

Es decir,

$$\frac{9}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1 \qquad (1)$$

También contiene a $(7,6)$, así que

$$\frac{(7)^2}{a^2}-\frac{(6)^2}{b^2}=1$$

Es decir,

$$\frac{49}{a^2}-\frac{36}{b^2}=1 \qquad (2)$$

De (1) se obtiene

$$\frac{4}{b^2}=\frac{9}{a^2}-1=\frac{-a^2+9}{a^2}$$

De modo que,

$$\frac{36}{b^2}=\frac{(4)(9)}{b^2}=\frac{-9a^2+81}{a^2} \qquad (3)$$

Al sustituir (3) en (2) se tiene:

$$\frac{49}{a^2}-\frac{-9a^2+81}{a^2}=1$$

$$\frac{49+9a^2-81}{a^2}=1$$

$$49+9a^2-81=a^2$$

$$8a^2-32=0$$

$$a^2=4$$

Y,

$$\frac{4}{b^2}=\frac{9}{4}-1=\frac{5}{4}$$

$$b^2=\frac{16}{5}$$

La ecuación de la hipérbola es por tanto,

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{\frac{16}{5}}=1$$

$$\mathbf{\frac{x^2}{4}-\frac{5y^2}{16}}=1$$

EA21.

La hipérbola $4x^2-9y^2=36$ se reescribe como

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$$

De modo que, $a=3$, $b=2$ y las asíntotas de esta son

$$y=\frac{2}{3}x, \qquad y=-\frac{2}{3}x$$

Se obtiene ahora el punto de intersección de la recta $2x-9y+12=0$ con $y=\frac{2}{3}x$ mediante sustitución:

$$2x-(9)\left(\frac{2}{3}x\right)+12=0$$

$$2x-6x+12=0$$

$$x=3$$

De modo que,

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)(3)=2$$

Obteniéndose el punto $(\mathbf{3},\mathbf{2})$.

El punto de intersección de la recta $2x-9y+12=0$ con $y=-\frac{2}{3}x$ se obtiene de forma similar:

$$2x-9\left(-\frac{2}{3}x\right)+12=0$$

$$2x + 6x + 12 = 0$$
$$x = -\frac{3}{2}$$

De modo que,

$$y = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = 1$$

Obteniéndose el punto $\left(-\frac{3}{2},\ \mathbf{1}\right)$.

EA22.

Las asíntotas de $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ son

$$y = \frac{b}{a}x, \qquad y = -\frac{b}{a}x$$

cuyas pendientes son

$$m_1 = \frac{b}{a}, \quad m_2 = -\frac{b}{a}$$

Si dichas rectas son perpendiculares, entonces

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Es decir,

$$\left(\frac{b}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right) = -1$$

$$\frac{b^2}{a^2} = 1$$

$$b^2 = a^2$$

De la igualdad anterior se obtiene que $b = a$ (recuérdese que a y b son números positivos), y por tanto $a = b$.

Unidad 6: Técnicas de conteo y Probabilidades

EA23.

Como las mujeres deben sentarse primero, ellas solas se pueden sentar de

$$(4)(3)(2)(1) = 4! = 24$$

formas, mientras que los hombres pueden sentarse de

$$5! = 120$$

maneras. Por el principio de multiplicación, el total de arreglos en que pueden sentarse es:

$$(4!)(5!) = (24)(120) = \mathbf{2\,880}.$$

EA24.

El primer dígito escrito puede ser cualquiera entre los números 1 a 9. Para las siguientes posiciones, la segunda y tercera puede ser ocupada por cualquiera de los 10 dígitos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,9), pero la última puede ser ocupada solamente por 5 dígitos: 0, 2, 4, 6, 8, luego,

$$(9)(10)(10)(5) = \mathbf{4\,500}$$

es el total de números pares de cuatro cifras que puede formarse con los dígitos del 0 al 9.

EA25.

El total de segmentos cuyos extremos son dos vértices diferentes cualesquiera del hexágono es

$${}_6C_2 = \frac{{}_6P_2}{2!} = \frac{(6)(5)}{(2)(1)} = 15$$

De este número, quitamos el correspondiente a aquellos segmentos cuyos extremos son vértices consecutivos (en cuyo caso, estos segmentos son lados, no diagonales); de modo que, el total de diagonales es:

$$15 - 6 = \mathbf{9}$$

EA26.

Nótese que, la expresión “por lo menos dos de los hermanos” es referida a los arreglos en los que están dos de los hermanos o están los 3.

En los arreglos de este problema, el orden no es importante. Así, el total de arreglos en los que se incluyen a dos de los tres hermanos es:

$$\left({}_3C_2\right)\left({}_{17}C_3\right) = (3)(680) = 2\,040$$

También, el total de arreglos para conformar el comité, incluyendo a los 3 hermanos, es

$$\left({}_3C_3\right)\left({}_{17}C_2\right) = (1)(136) = 136$$

Por el principio de la suma, el total de maneras en que puede conformarse el comité es

$$\left({}_3C_2\right)\left({}_{17}C_3\right) + \left({}_3C_3\right)\left({}_{17}C_2\right)$$

$$= 2\,040 + 136 = \mathbf{2\,176}$$

EA27.

En el primer y segundo intento falla, por lo que hay que considerar solo como casos favorables aquellos en que la llave no es correcta:

A: Falla en el primer intento, $P(A) = \frac{3}{4}$

B: Falla en el segundo intento. Este evento ha sido condicionado por A, así que,

$$P(B\,/\,A) = \frac{2}{3}$$

En el tercer intento hay que considerar caso favorable únicamente el caso en que la llave es correcta. Como además no se repite ninguna llave, de un intento a otro habrá una llave menos. La probabilidad de C: acierta en el tercer intento es

$$P(C) = \frac{1}{2}$$

La probabilidad del evento M: abre en el tercer intento es el producto de las probabilidades anteriores:

$$P(M) = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \mathbf{\frac{1}{4}}$$