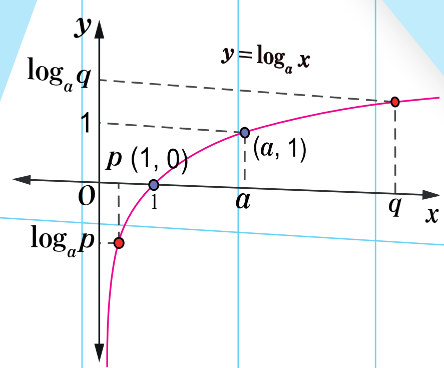
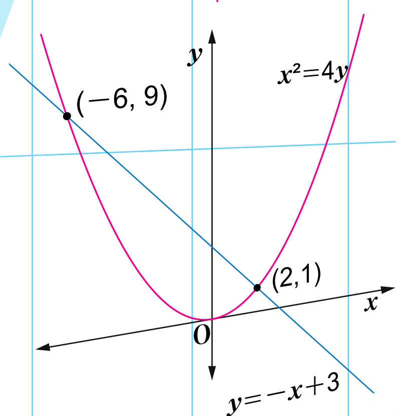
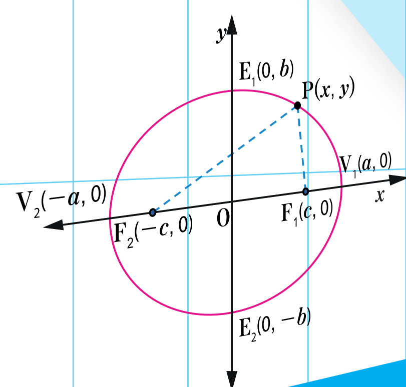
MATEMÁTICA 11

Undécimo grado







Guía para Docentes

Educación Secundaria

Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional
El Pueblo, Presidente!
UNIDA, NICARAGUA TRIUNFA!

MINED
Un Ministerio en la Comunidad

JICA

11mo

COORDINACIÓN GENERAL

Profesora Melba López Montenegro
Profesor Julio César Canelo Castillo

AUTORES

Marlon José Espinoza Espinoza
Humberto Antonio Jarquín López
Domingo Felipe Aráuz Chévez
Primitivo Herrera Herrera
Francisco Emilio Díaz Vega
Armando José Huete Fuentes

COLECTIVO DE AUTORES

MINED	UNAN - MANAGUA	UNAN - LEÓN
Francisco Emilio Díaz Vega	Nubia Aracelly Barreda Rodríguez	Anastacio Benito González Funes
Humberto Antonio Jarquín López	Melissa Lizbeth Velásquez Castillo	Domingo Felipe Aráuz Chévez
Gregorio Isabel Ortiz Hernández	Armando José Huete Fuentes	Célfida del Rosario López Sánchez
Juan Carlos Caballero López	Primitivo Herrera Herrera	Orlando Antonio Ruiz Álvarez
Alberto Leonardo García Acevedo	Marlon José Espinoza Espinoza	Hilario Ernesto Gallo Cajina

INSTITUTOS QUE PARTICIPARON EN LA VALIDACIÓN

Colegio Clementina Cabezas, Managua, Managua
Colegio Fernando Gordillo, Managua, Managua
Colegio Tomas Borge, Mateare, Managua
Colegio San Cayetano, San Rafael del Sur, Managua
Instituto Nacional La Salle, Diriamba, Carazo
Instituto Juan José Rodriguez, Jinotepe, Carazo
San Benito #1, Chinandega, Chinandega
Instituto Nacional Rubén Darío, Posoltega, Chinandega
Jhon F. Kenedy, León, León
Salomón de la Selva, León, León

EQUIPO DE DIAGRAMACIÓN

María José López Samqui

Primera Edición, 2019.

La presente publicación ha sido reproducida con el apoyo de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA) a través del Proyecto para el Aprendizaje Amigable de matemática en Educación Secundaria (NICAMATE).

Índice

Introducción I

Estructura del Libro de Texto para estudiantes II

Estructura de la Guía para Docentes III

1. Propuesta de programación anual de 11mo grado III
2. Elementos de una página de la Guía para Docentes IV
3. Prueba de la Unidad V
4. Solucionarios V

Orientaciones metodológicas para el mejoramiento de los aprendizajes del área de Matemática V

Recomendaciones para el desarrollo de una clase según los momentos P, S, C, EJ, E VI

Puntos importantes a considerar en la facilitación del aprendizaje VIII

Uso de las Pruebas de Unidad X

1. Propuesta sobre el uso de las Pruebas de Unidad X
2. Opciones sobre el uso de las Pruebas de Unidad para evaluación X

Unidad 1: Sucesiones 1

Sección 1: Sucesiones, notación y término general 2

Sección 2: Sucesiones aritméticas 4

Sección 3: Sucesiones geométricas 12

Sección 4: Notación de sumatoria 18

Prueba de Unidad 1 22

Unidad 2: Potenciación y Funciones Exponenciales 25

Sección 1: Potenciación y radicación 26

Sección 2: Funciones exponenciales 37

Prueba de Unidad 2 45

Unidad 3: Logaritmo y Funciones Logarítmicas 47

Sección 1: Logaritmo 48

Sección 2: Funciones logarítmicas 55

Prueba de Unidad 3 62

Unidad 4: Geometría Analítica 65

Sección 1: Punto y segmento **66**

Sección 2: La recta **73**

Sección 3: La circunferencia **82**

Prueba de Unidad 4 .... **88**

Unidad 5: Cónicas 91

Sección 1: La parábola **92**

Sección 2: La elipse **97**

Sección 3: La hipérbola **101**

Prueba de Unidad 5 .... **105**

Unidad 6: Técnicas de Conteo y Probabilidades 107

Sección 1: Técnicas de conteo **108**

Sección 2: Probabilidades **119**

Prueba de Unidad 6 .... **132**

ANEXOS

Anexo 1: Solucionarios de las pruebas de cada unidad **136**

Anexo 2: Solucionarios del libro de texto **139**

Anexo 3: Diferencias del LT entre la versión para docentes y para estudiantes **152**

Introducción

Este documento es un material educativo llamado “Guía para Docentes”, que está dirigido a los docentes de matemática de Nicaragua, y tiene como objetivos:

- Brindar una propuesta de programación anual estándar de enseñanza.
- Brindar sugerencias sobre el uso de los Libros de Texto y el tiempo de trabajo independiente del estudiante.
- Mostrar la secuencialidad que existe entre los contenidos del currículo de matemática en Educación Secundaria.
- Indicar los aspectos esenciales de cada clase (pre saberes, posibles errores, aspectos del nuevo contenido en que se debe hacer énfasis, etc.).
- Promover el uso adecuado de la pizarra.
- Ofrecer los solucionarios de los ejercicios con sus procedimientos.
- Fomentar la evaluación formativa a través de las pruebas de unidad.

La Guía para Docentes se elaboró atendiendo al análisis de las observaciones de clase que se realizó en los centros educativos de validación, concluyendo que es importante:

- Tener claro el aprendizaje esperado en cada clase y la secuencialidad entre los contenidos del currículo.
- Hacer uso adecuado de la pizarra, escribiendo lo necesario para que el estudiante comprenda.
- Dar tiempo para que los estudiantes trabajen de forma independiente.

El Ministerio de Educación (MINED) pone a disposición de los docentes este recurso, considerando que la implementación del mismo y el uso del Libro de Texto, cambiará la experiencia de los estudiantes al aprender matemática en la escuela, y promoverá la creatividad en la búsqueda de soluciones y la argumentación cuando se enfrenten a un problema. Para dicha implementación es necesario considerar algunos aspectos esenciales:

Enseñanza basada en el aprendizaje de los estudiantes. Para enseñar matemática se deben utilizar situaciones problemáticas que despierten el interés de los estudiantes y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver problemas y a argumentar sus respuestas. En estas situaciones se deben considerar los conocimientos y habilidades que se pretenden desarrollar.

Rol del estudiante en el aprendizaje. Los estudiantes deben utilizar los conocimientos previos que le permitan reorganizar lo que ya sabe, y aplicarlos en una nueva situación. Este proceso de estudio se apoya más en la reflexión del estudiante, que en la simple memorización tradicional.

Rol del docente en el aula. La acción del docente es un factor clave, porque es el encargado de generar ambientes propicios para el aprendizaje e involucrarlos en actividades que permitan el logro de los aprendizajes esperados. Ante esto, el verdadero desafío para los docentes consiste en ayudar a sus estudiantes a analizar y socializar sus resultados.

Retos de los estudiantes y docentes en las clases de matemática. Cambio de actitud frente a ideas diferentes sobre lo que significa enseñar y aprender matemática. No se trata de que el docente busque las explicaciones más sencillas y amenas, sino que ayude a formarles la capacidad de pensar y aprender por sí mismos, para que ellos sientan la satisfacción de poder resolver problemas.

Estructura del Libro de Texto para estudiantes

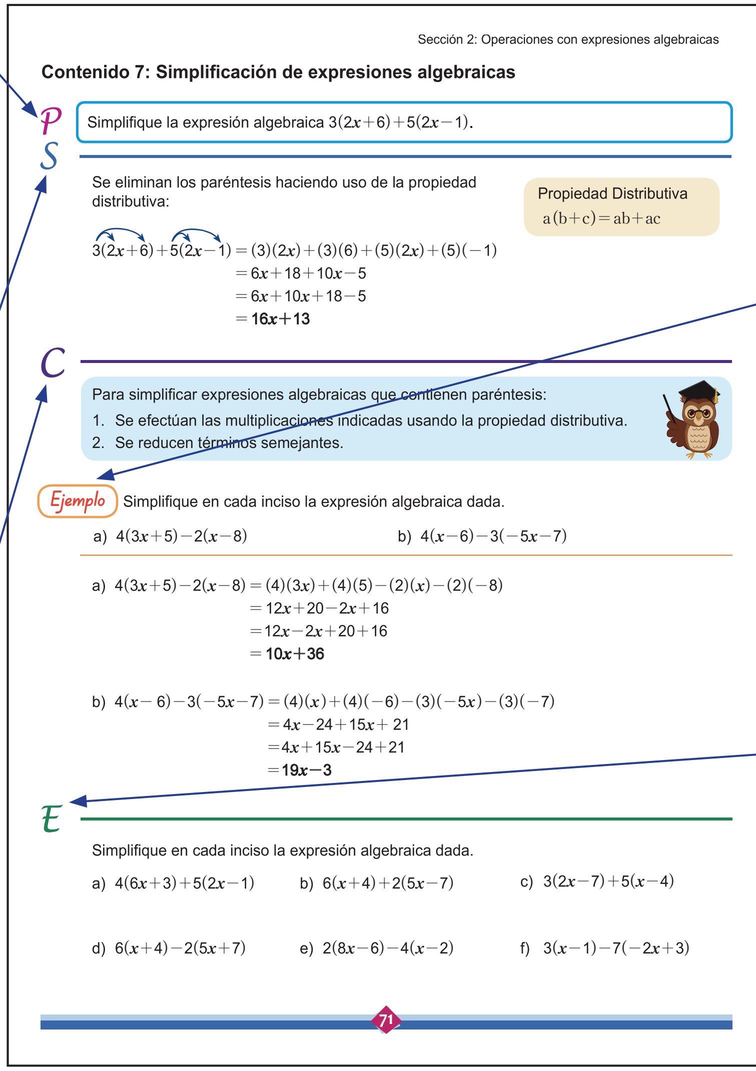
El Libro de Texto consta de introducción y unidades. En la introducción se detallan los momentos del desarrollo de un contenido, los cuales son: problema de la clase, solución del problema, conclusión y ejercicios. En algunos contenidos, por sus características, se han agregado ejemplos después de la conclusión.

Cada unidad del Libro de Texto se ha estructurado por sección, estas contienen una secuencia de contenidos contemplados en la malla curricular de matemática para Educación Secundaria.

P Representa el problema inicial, el cual se debe leer y analizar identificando las condiciones que plantea y lo que se pregunta.

S Representa la solución del problema inicial explicada paso a paso.

C Representa la conclusión de la clase, donde se propone el esquema de solución del problema inicial, en algunos casos también se presentan conceptos importantes usados en el problema.



Sección 2: Operaciones con expresiones algebraicas

Contenido 7: Simplificación de expresiones algebraicas

P

Simplifique la expresión algebraica $3(2x+6)+5(2x-1)$.

S

Se eliminan los paréntesis haciendo uso de la propiedad distributiva:

Propiedad Distributiva
$a(b+c)=ab+ac$

$$\begin{aligned} 3(2x+6)+5(2x-1) &= (3)(2x)+(3)(6)+(5)(2x)+(5)(-1)\\ &= 6x+18+10x-5\\ &= 6x+10x+18-5\\ &= \mathbf{16x+13} \end{aligned}$$

C

Para simplificar expresiones algebraicas que contienen paréntesis:

1. Se efectúan las multiplicaciones indicadas usando la propiedad distributiva.
2. Se reducen términos semejantes.

Ejemplo Simplifique en cada inciso la expresión algebraica dada.

a) $4(3x+5)-2(x-8)$ b) $4(x-6)-3(-5x-7)$

a) $$\begin{aligned} 4(3x+5)-2(x-8) &= (4)(3x)+(4)(5)-(2)(x)-(2)(-8)\\ &= 12x+20-2x+16\\ &= 12x-2x+20+16\\ &= \mathbf{10x+36} \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 4(x-6)-3(-5x-7) &= (4)(x)+(4)(-6)-(3)(-5x)-(3)(-7)\\ &= 4x-24+15x+21\\ &= 4x+15x-24+21\\ &= \mathbf{19x-3} \end{aligned}$$

E

Simplifique en cada inciso la expresión algebraica dada.

a) $4(6x+3)+5(2x-1)$ b) $6(x+4)+2(5x-7)$ c) $3(2x-7)+5(x-4)$

d) $6(x+4)-2(5x+7)$ e) $2(8x-6)-4(x-2)$ f) $3(x-1)-7(-2x+3)$

71

Ejemplo
Los ejemplos que se presentan son variantes del problema inicial.

E Representa los ejercicios propuestos, es importante que los estudiantes los intenten resolver por sí mismos.

En **Comprobemos lo aprendido** se presentan una serie de ejercicios representativos de contenidos anteriores, el objetivo de estas clases es asegurar un tiempo de ejercitación que permita afianzar los conocimientos adquiridos y aclarar cualquier duda que puedan tener de los contenidos estudiados.

En algunos grados hay un contenido denominado **Desafío** en el que se presentan casos especiales o contenidos más complejos. El desafío se puede tratar en su clase si tiene suficiente horas de clase y sus estudiantes tienen una buena capacidad para entenderlo. De lo contrario, es mejor omitir este contenido para dedicar más tiempo a los contenidos básicos.

Estructura de la Guía para Docentes

1. Propuesta de programación anual de 11mo grado

Semestre	Mes	Unidad (Horas)	Pág. del LT	Sección
I	Febrero Marzo Abril	1. Sucesiones (29 H/C)	1 ~ 28	1. Sucesiones, notación y término general 2. Sucesiones aritméticas 3. Sucesiones geométricas 4. Notación de sumatoria
	Abril Mayo	2. Potenciación y funciones Exponenciales (23 H/C)	29 ~ 50	1. Potenciación y radicación 2. Funciones exponenciales
	Mayo Junio	3. Logaritmo y Funciones Logarítmicas (18 H/C)	51 ~ 68	1. Logaritmo 2. Funciones logarítmicas
II	Julio Agosto Septiembre	4. Geometría Analítica (27 H/C)	69 ~ 96	1. Punto y segmento 2. La recta 3. La circunferencia
	Septiembre Octubre	5. Cónicas (21 H/C)	97 ~ 116	1. La parábola 2. La elipse 3. La hipérbola
	Octubre Noviembre	6. Técnicas de Conteo y Probabilidades (22 H/C)	117 ~ 143	1. Técnicas de conteo 2. Probabilidades

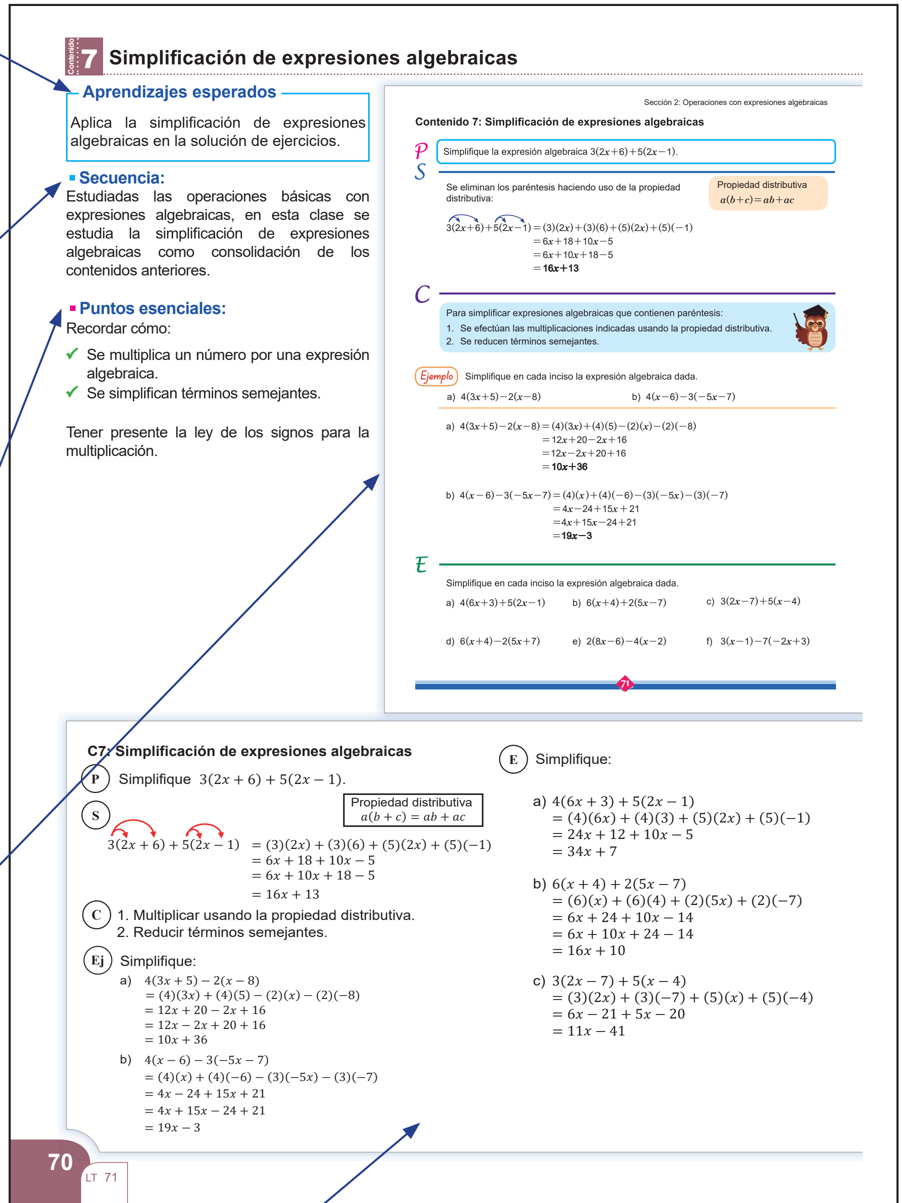
2. Elementos de una página de la Guía para Docentes

Aprendizajes esperados: Es el elemento que define lo que se espera que logren los estudiantes en cada clase, expresado en forma concreta, precisa y visualizable.

Secuencia: Se indican los conocimientos previos que el estudiante posee para la comprensión del nuevo contenido y la relación con contenidos posteriores.

Puntos esenciales: Se orienta sobre procedimientos o conceptos en los que se debe enfatizar, así como las posibles dificultades y errores que podrían presentarse.

Página del Libro de Texto: Tiene como propósito ubicar y relacionar el contenido de aprendizaje con el proceso de la clase.



Contenido 7 Simplificación de expresiones algebraicas

Aprendizajes esperados

Aplica la simplificación de expresiones algebraicas en la solución de ejercicios.

Secuencia:

Estudiadas las operaciones básicas con expresiones algebraicas, en esta clase se estudia la simplificación de expresiones algebraicas como consolidación de los contenidos anteriores.

Puntos esenciales:

Recordar cómo:

- ✓ Se multiplica un número por una expresión algebraica.
- ✓ Se simplifican términos semejantes.

Tener presente la ley de los signos para la multiplicación.

Sección 2: Operaciones con expresiones algebraicas

Contenido 7: Simplificación de expresiones algebraicas

P Simplifique la expresión algebraica $3(2x+6)+5(2x-1)$.

S Se eliminan los paréntesis haciendo uso de la propiedad distributiva:

Propiedad distributiva $a(b+c)=ab+ac$

$$\begin{aligned}3(2x+6)+5(2x-1)&=(3)(2x)+(3)(6)+(5)(2x)+(5)(-1)\\&=6x+18+10x-5\\&=6x+10x+18-5\\&=\mathbf{16x+13}\end{aligned}$$

C Para simplificar expresiones algebraicas que contienen paréntesis:

1. Se efectúan las multiplicaciones indicadas usando la propiedad distributiva.
2. Se reducen términos semejantes.

Ejemplo Simplifique en cada inciso la expresión algebraica dada.

a) $4(3x+5)-2(x-8)$ b) $4(x-6)-3(-5x-7)$

a) $$\begin{aligned}4(3x+5)-2(x-8)&=(4)(3x)+(4)(5)-(2)(x)-(2)(-8)\\&=12x+20-2x+16\\&=12x-2x+20+16\\&=\mathbf{10x+36}\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}4(x-6)-3(-5x-7)&=(4)(x)+(4)(-6)-(3)(-5x)-(3)(-7)\\&=4x-24+15x+21\\&=4x+15x-24+21\\&=\mathbf{19x-3}\end{aligned}$$

E Simplifique en cada inciso la expresión algebraica dada.

a) $4(6x+3)+5(2x-1)$ b) $6(x+4)+2(5x-7)$ c) $3(2x-7)+5(x-4)$

d) $6(x+4)-2(5x+7)$ e) $2(8x-6)-4(x-2)$ f) $3(x-1)-7(-2x+3)$

71

C7: Simplificación de expresiones algebraicas

(P) Simplifique $3(2x+6)+5(2x-1)$.

(S) Propiedad distributiva $a(b+c)=ab+ac$

$$\begin{aligned}3(2x+6)+5(2x-1)&=(3)(2x)+(3)(6)+(5)(2x)+(5)(-1)\\&=6x+18+10x-5\\&=6x+10x+18-5\\&=16x+13\end{aligned}$$

(C) 1. Multiplicar usando la propiedad distributiva.
2. Reducir términos semejantes.

(Ej) Simplifique:

a) $$\begin{aligned}&4(3x+5)-2(x-8)\\&=(4)(3x)+(4)(5)-(2)(x)-(2)(-8)\\&=12x+20-2x+16\\&=12x-2x+20+16\\&=10x+36\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}&4(x-6)-3(-5x-7)\\&=(4)(x)+(4)(-6)-(3)(-5x)-(3)(-7)\\&=4x-24+15x+21\\&=4x+15x-24+21\\&=19x-3\end{aligned}$$

(E) Simplifique:

a) $$\begin{aligned}&4(6x+3)+5(2x-1)\\&=(4)(6x)+(4)(3)+(5)(2x)+(5)(-1)\\&=24x+12+10x-5\\&=34x+7\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}&6(x+4)+2(5x-7)\\&=(6)(x)+(6)(4)+(2)(5x)+(2)(-7)\\&=6x+24+10x-14\\&=6x+10x+24-14\\&=16x+10\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}&3(2x-7)+5(x-4)\\&=(3)(2x)+(3)(-7)+(5)(x)+(5)(-4)\\&=6x-21+5x-20\\&=11x-41\end{aligned}$$

70

LT 71

Plan de Pizarra

En la pizarra se presenta de forma ordenada el problema de la clase, el proceso de solución, la conclusión central de la clase derivada del problema central y la indicación del ítem de evaluación, con su correspondiente solución. En algunas clases se presenta un ejemplo después de la conclusión y previo al ítem de evaluación. Este tiene como propósito consolidar el aprendizaje o ampliar el contenido en desarrollo. Lo que se plasma en la pizarra permitirá a los estudiantes llevar un registro ordenado de sus apuntes para estudiarlos posteriormente.

3. Prueba de cada Unidad

Se presenta una propuesta de la prueba por unidad para evaluar el nivel de comprensión de los estudiantes. Los docentes deben orientar con anticipación la fecha de aplicación de la prueba de la unidad a los estudiantes para que ellos repasen y consoliden lo que aprendieron en la unidad. Si el rendimiento es bajo en algunos problemas, los docentes deben tomar medidas para mejorarlo y a la vez asegurar que este bajo rendimiento no obstaculice el siguiente aprendizaje.

De esta manera, los docentes pueden utilizar esta prueba para discusión sobre los resultados obtenidos y posibles estrategias didácticas a implementar con sus colegas de la misma institución o en los Encuentros Pedagógicos de Interaprendizaje (EPI).

* Vea “1. Uso de las pruebas de unidad” en la página X, para una descripción más detallada sobre la evaluación.

4. Solucionarios

Se presentan las soluciones de los ejercicios del Libro de Texto de acuerdo a la unidad, sección y contenido. En este se muestran más detalles en el proceso de solución que los brindados en el solucionario del Libro de Texto.

Orientaciones metodológicas para el mejoramiento de los aprendizajes del área de Matemática

Enseñar matemática en base a actividades de aprendizaje que desarrollen en los estudiantes formas de pensar y que permitan formular conjeturas y procedimientos para resolver problemas, argumentando sus resultados, significa que ellos deben:

(1) Leer y analizar los enunciados del problema.

(2) Pensar por sí mismos la solución al problema.

(3) Expresar sus soluciones.

(4) Comparar sus ideas unos con otros.

(5) Comprender las ideas de los demás.

(6) Aprender unos de otros.

Recomendaciones para el desarrollo de una clase según los momentos P, S, C, EJ, E

Para lograr los aprendizajes esperados de una clase, se debe tener en cuenta que el centro del proceso de aprendizaje es el estudiante, por lo que deben participar de forma activa en cada momento de la clase. En este proceso, el rol principal del docente es asistir en su aprendizaje a los estudiantes. A continuación, se presentan algunas recomendaciones a considerar en los diferentes momentos de la clase:

Momentos de la clase	Actividades del Docente	Actividades del Estudiante
P	Indicar que lean el problema.	Leer el problema.
	Escribir el problema en la pizarra, mientras los estudiantes leen.	
	Indicar a los estudiantes que copien el problema en su cuaderno.	Escribir el problema en su cuaderno.
	Explicar el problema de forma clara, si es necesario.	Comprender el problema.
S	Orientar que resuelvan el problema en su cuaderno. No dar mucho tiempo si los estudiantes no muestran posibles respuestas al problema planteado.	Intentar dar solución al problema, escribiendo sus apuntes en el cuaderno.
	Monitorear el avance de los estudiantes identificando soluciones interesantes, errores, etc., mientras se recorre el salón de clase.	
	Indicar a los estudiantes que atiendan a las explicaciones que hará.	
	Explicar la solución del texto en la pizarra, cuando todos los estudiantes estén poniendo atención.	Hacer silencio y poner atención al docente.
	Indicar a los estudiantes que copien la solución en su cuaderno y revisar que lo hagan.	Observar la explicación del docente y hacer preguntas si es necesario.
		Escribir la solución en su cuaderno.

Momentos de la clase	Actividades del Docente	Actividades del Estudiante
C	Orientar lectura de la conclusión. Explicar la conclusión a partir del proceso de solución del problema.	Leer la conclusión planteada en el Libro de Texto. Relacionar la conclusión con el proceso de solución del problema. Anotar la conclusión en su cuaderno.
Ej (En el caso de presentarse un ejemplo)	Indicar que lean el ejemplo. Indicar que copien el ejemplo en su cuaderno. Explicar el ejemplo, haciendo hincapié en la aplicación de la conclusión.	Analizar la solución del ejemplo, de forma conjunta con el docente. Aplicar la conclusión en la solución del ejemplo.
E	Orientar el o los ejercicios a ser resueltos. Asignar tiempo prudencial para que los estudiantes resuelvan los ejercicios. Recorrer el salón mientras los estudiantes resuelven el ítem. Monitorear cuántos estudiantes resuelven al menos el primer ejercicio propuesto. Si hay muchos estudiantes que no han resuelto el ítem de evaluación, explicar este en la pizarra sin esperar mucho tiempo y dar la oportunidad de resolver el siguiente ítem. Brindar oportunidad de que algunos estudiantes expliquen la solución de al menos el primer ejercicio. Revisar y explicar el procedimiento y respuesta en la pizarra.	Resolver de forma individual cada ejercicio. Aplicar la conclusión aprendida. Si termina todos los ejercicios propuestos, brindar apoyo a aquellos que no han concluido. Socializar la solución de ejercicios.

Puntos importantes a considerar en la facilitación del aprendizaje

a) Usar adecuadamente el tiempo

Alcanzar el aprendizaje esperado no es una tarea sencilla, por lo que, a continuación, se sugieren algunas técnicas para asegurar el aprendizaje en el tiempo establecido:

- Ubicación de los pupitres de los estudiantes en filas, todos los estudiantes dirigidos hacia la pizarra.
- Disposición del LT antes de iniciar la clase: orientar a los estudiantes tener preparados los recursos o materiales antes del inicio de la clase.
- Tiempo a dedicar para el recordatorio o repaso: Si se destina más de 3 minutos en la parte inicial donde se recuerdan los presaberes, en la mayoría de los casos se produce un desfase que afectará las clases posteriores.

b) Evaluar y brindar orientación necesaria desplazándose en el aula

Mientras los estudiantes resuelven el problema o el ítem de evaluación, el docente debe desplazarse en el aula para evaluar el nivel de comprensión del contenido, revisando el trabajo de los estudiantes y observando si han comprendido el enunciado.

c) Dar explicaciones claras a los estudiantes

Las instrucciones y explicaciones a los estudiantes deben ser claras y concretas, en este sentido es importante hablar cuando se capte la atención de los estudiantes. Para captar la atención el docente debe llamar a los estudiantes con frases como “Miren a la pizarra”, “Atención por favor”, entre otras. En caso de que en el aula persista la indisciplina, el docente puede dejar de explicar o bajar el volumen de la voz.

Es importante durante la explicación observar a los estudiantes para suponer su nivel de comprensión, esto significa que en ocasiones es necesario repetir la explicación cambiando expresiones, hablar más despacio, invitar a estudiantes para que expliquen con sus palabras, etc.

d) Aprovechar el rendimiento de los estudiantes que resuelven rápido los ejercicios

Para aprovechar el rendimiento de los estudiantes que resuelven los ejercicios más rápido, el docente puede establecer el siguiente compromiso: cuando terminen todos los problemas y los hayan revisado, entonces ellos pueden orientar a los demás compañeros. Así mismo, el docente puede preparar otra serie de problemas para la fijación del contenido u otro tipo de problemas que tienen carácter de desafío.

e) Revisar los cuadernos de apunte

Si no se brinda un monitoreo continuo sobre el uso del cuaderno, eventualmente se puede utilizar de manera desordenada, por lo que es necesario que se revise periódicamente, de modo que los estudiantes sientan que están siendo monitoreados. Y también es recomendable chequear cuadernos de los estudiantes durante la etapa de ejercicio para animar a los estudiantes (marcar ✓ , firmar o sellar)

f) Formar el hábito de estudio en el hogar

Formar el hábito de estudio de los estudiantes en el hogar es tarea no solamente del docente, sino también de los padres de familia y no es nada fácil. Por lo que, al inicio, se podría formar el hábito de estudio a través de la asignación de tareas y orientar que estas se revisarán periódicamente.

g) Usar adecuadamente la pizarra

La pizarra tiene la función de un cuaderno común entre el docente y los estudiantes, por lo cual debe ordenarse el desarrollo del aprendizaje del contenido en ella. En esta Guía se propone utilizar la siguiente estructura en la pizarra, de acuerdo con el proceso de aprendizaje de matemática establecido en este mismo documento:

Se escribe el problema inicial de forma resumida.

Se resuelve, como mínimo, el primero de cada serie de ejercicios propuestos.

Se presenta la solución del problema

Se establece en forma resumida la conclusión a partir de la solución del problema.

C7: Simplificación de expresiones algebraicas

P Simplifique $3(2x+6)+5(2x-1)$.

S

Propiedad distributiva
$a(b+c)=ab+ac$

$$\begin{aligned}3(2x+6)+5(2x-1) &= (3)(2x)+(3)(6)+(5)(2x)+(5)(-1)\\ &= 6x+18+10x-5\\ &= 6x+10x+18-5\\ &= 16x+13\end{aligned}$$

C 1. Multiplicar usando la propiedad distributiva.
2. Reducir términos semejantes.

Ej Simplifique:

a) $$\begin{aligned}&4(3x+5)-2(x-8)\\ &=(4)(3x)+(4)(5)-(2)(x)-(2)(-8)\\ &=12x+20-2x+16\\ &=12x-2x+20+16\\ &=10x+36\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}&4(x-6)-3(-5x-7)\\ &=(4)(x)+(4)(-6)-(3)(-5x)-(3)(-7)\\ &=4x-24+15x+21\\ &=4x+15x-24+21\\ &=19x-3\end{aligned}$$

E Simplifique:

a) $$\begin{aligned}&4(6x+3)+5(2x-1)\\ &=(4)(6x)+(4)(3)+(5)(2x)+(5)(-1)\\ &=24x+12+10x-5\\ &=34x+7\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}&6(x+4)+2(5x-7)\\ &=(6)(x)+(6)(4)+(2)(5x)+(2)(-7)\\ &=6x+24+10x-14\\ &=6x+10x+24-14\\ &=16x+10\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}&3(2x-7)+5(x-4)\\ &=(3)(2x)+(3)(-7)+(5)(x)+(5)(-4)\\ &=6x-21+5x-20\\ &=11x-41\end{aligned}$$

Se resuelve el ejemplo para consolidación o ampliación del contenido.

En este documento se propone el uso de la pizarra de forma ordenada:

- En caso de que el problema sea de enunciado extenso, se debe escribir un resumen comprensible de dicho enunciado.
- En el proceso de solución no debe repetirse cada palabra de la solución planteada en el Libro de Texto, pero sí debe escribirse cada paso imprescindible del proceso.
- La conclusión también puede mostrarse de forma resumida (cuando esta es extensa).
- Debe brindarse espacio suficiente para resolver al menos el primero de cada serie de ejercicios propuestos.
- Si no puede seguir escribiendo en la pizarra debido a su pequeño tamaño, puede borrar los contenidos que los estudiantes ya han terminado de copiar y escribir la continuación. Debe procurarse dividir la pizarra en dos columnas con el mismo espacio en cada una.

Uso de las Pruebas de Unidad

1. Propuesta sobre el uso de las Pruebas de Unidad

El propósito de esta propuesta es sugerir el uso efectivo de las pruebas de unidad que están incluidas en los Libros de Texto y Guías para Docentes desarrolladas por NICAMATE, y cómo estas podrían usarse para evaluar a los estudiantes en la asignatura de Matemática.

Se espera que las pruebas se realicen después de terminar cada unidad del Libro de Texto para que los docentes puedan conocer el alcance de los aprendizajes esperados en los contenidos de la unidad y, lo que es más importante, darles retroalimentación. En este sentido, el enfoque principal de las pruebas de unidad es brindar a los docentes una herramienta para administrar y mejorar efectivamente el aprendizaje de sus estudiantes. Dado que las pruebas se insertan en la parte de anexo al final de los Libros de Texto, los docentes podrían preguntarse si los estudiantes pueden ver las pruebas con anticipación y esto arruinaría el propósito de las pruebas. Sin embargo, las pruebas se incorporan en los Libros de Texto basándose en la idea de que estas contribuirán a mejorar el aprendizaje de los estudiantes siempre que las pruebas los alienten a estudiar y prepararse.

Las pruebas, además de eso, también podrían usarse para evaluar el desempeño de los estudiantes. Se espera que un sistema de evaluación eficaz, junto con los nuevos Libros de Texto y Guías para Docentes, contribuyan a mejorar aún más el aprendizaje de los estudiantes en matemática. Es en este contexto que, siguiendo la solicitud del MINED, el Proyecto NICAMATE sugiere 2 opciones sobre el uso de las pruebas individuales para la evaluación. Al hacer esta sugerencia, el Proyecto consideró el "Manual de Planeamiento Didáctico y Evaluación de los Aprendizajes en Educación Secundaria" escrito por el MINED.

2. Opciones sobre el uso de las Pruebas de Unidad para evaluación

(1) Opción 1

Total: 100 Puntos

Pruebas de Unidades (PU): 50 Puntos

Prueba Escrita o Trabajo Escrito Durante el Corte de Evaluación: 50 Puntos

Tabla de Ejemplo para la Opción 1 en Caso de 7mo Grado

No.	Nombre	Prueba de Unidad (20 Puntos para Cada Unidad)							Total de PU Acumulado (140 Puntos)	[A] Puntos de PU Ajustados (50 Puntos)*	[B] Prueba Escrita o Trabajo Escrito (50 Puntos)	Valoración Cuantitativa (100 Puntos) A+B	Valoración Cualitativa
		U1	U2	U3	U4	U5	U6	U7					
1	María	10	5	10	8	14	13	10	70	25	40	65	AE
2	Juan	18	16	20	15	12	16	20	117	42	40	82	AS

* [A] Puntos de PU Ajustados (50 Puntos) = Total de PU Acumulado × 50/140

La primera opción es tener dos criterios principales para la evaluación, las pruebas de unidad (50 puntos) y Prueba o Trabajo Escrito Durante el Corte de Evaluación (50 puntos). Los puntos asignados a cada criterio podrían ajustarse teniendo en cuenta la situación de cada centro educativo. La tabla anterior toma el caso del 7mo grado como ejemplo y, por lo tanto, tiene 7 pruebas de unidad, cada una de las cuales toma hasta 20 puntos. El total de puntos de las pruebas acumuladas, en este caso máximo 140 puntos, debe ajustarse a unos 50 puntos. La fórmula para este ajuste será Puntos de PU Ajustados = Total de PU Acumulado × 50/140.

La suma de la Evaluación de Puntos de PU Ajustados y Prueba o Trabajo Escrito Durante el Corte será la marca cuantitativa final para los estudiantes. La calificación cualitativa se otorga en base a la marca cuantitativa. Los criterios para el grado cualitativo en el ejemplo son los mismos que en el manual:

Aprendizaje Avanzado (AA): 90-100 puntos

Aprendizaje Satisfactorio (AS): 76-89 puntos

Aprendizaje Elemental (AE): 60-75 puntos

Aprendizaje Inicial (AI): Menos de 60.

También es posible asignar menos puntos a las pruebas de unidad para la evaluación. Es importante que al revisar las pruebas se dé retroalimentación en la solución de los ejercicios en lo que los estudiantes cometieron errores. Después de recibir los comentarios, los estudiantes pueden volver a realizar los ejercicios en los que fallaron. Es en este proceso donde los estudiantes aprenden matemáticas cada vez mejor.

(2) Opción 2

Total: 100 Puntos

Pruebas de Unidades: 30 Puntos

Evaluación de Actitud: 30 Puntos

Prueba o Trabajo Escrito Durante Corte Evaluación: 40 Puntos

Tabla de Ejemplo para Opción 2 en Caso de 7mo Grado

No.	Nombre	Pruebas de Unidad (20 Puntos para Cada Unidad)									Evaluación de Actitud (10 Puntos para Cada Indicador)						
		U1	U2	U3	U4	U5	U6	U7	Total de PU Acumulado (140 Puntos)	**[A]** Puntos de PU Ajustados (30 Puntos)*	EA 1	EA 2	EA 3	**[B]** Total de EA Acumulado (30 Puntos)	**[C]** Prueba Escrita o Trabajo Escrito (50 Puntos)	Valoración Cuantitativa (100 Puntos) **A+B+C**	Valoración Cualitativa
1	María	10	5	10	8	14	13	10	70	15	10	9	8	27	30	72	AE
2	Juan	18	16	10	8	12	16	10	90	19	2	1	2	5	40	64	AE

* [A] Puntos de PU Ajustados (30 Puntos) = Total de PU Acumulado × 30/140

En esta opción, además de la evaluación mediante pruebas o trabajos escritos durante el corte, los docentes también deben considerar los resultados de las pruebas de unidad y las actitudes de los estudiantes hacia el aprendizaje de la matemática. Si bien los docentes podrían seleccionar los indicadores para evaluar las actitudes de los estudiantes, el Proyecto sugiere que se incluyan los siguientes indicadores:

- Entrega de tareas
- Puntualidad
- Asistencia
- Trabaja en el aula de clases
- Atiende las explicaciones del docente

La ventaja de la Opción 2 es que, como lo muestra el ejemplo en la tabla, incluso si un estudiante no pudo obtener una buena calificación en las pruebas de unidad y en las pruebas o trabajos escritos durante el corte, puede obtener una buena calificación, siempre y cuando demuestre una buena actitud hacia el estudio de la matemática. Esto requiere que los docentes observen cuidadosamente a cada estudiante.

** Si el MINED emite una nueva instrucción sobre la evaluación, deben seguirla.*

Unidad 1

Sucesiones

Sección 1 Sucesiones, notación y término general

Sección 2 Sucesiones aritméticas

Sección 3 Sucesiones geométricas

Sección 4 Notación de sumatoria

Contenido 1 Concepto de sucesión

Aprendizajes esperados

Determina términos de una sucesión dada.

Secuencia:

Desde primaria los estudiantes se han puesto en contacto con el orden establecido en cada conjunto numérico a medida que estos han sido estudiados, ellos deben recordar el orden que se estableció en los números naturales para facilitar el aprendizaje del concepto de sucesión y el nombramiento de sus términos.

Puntos esenciales:

Reconocer patrones o regularidades para completar secuencias de números.

Destacar que la definición de sucesión establece implícitamente una correspondencia entre los números naturales y los términos de una sucesión, de ahí que estos se nombren utilizando el orden establecido en los números naturales.

Nombrar correctamente cada término de acuerdo con la posición que ocupe en la sucesión.

Insistir en la diferenciación de la posición de un término y el valor del mismo.

Sección 1: Sucesiones, notación y término general

Contenido 1: Concepto de sucesión

P

Complete los espacios en blanco

2, 4, __, 8, 10, __, 14, 16, …

S

Se observa que cada número en la secuencia, excepto el primero, se obtiene sumando 2 al anterior, es decir:

2, 4, __, 8, 10, __, 14, 16, …
+2 +2 +2 +2 +2 +2 +2

Por tanto, la secuencia es 2, 4, **6**, 8, 10, **12**, 14, 16, …

C

Una sucesión es una secuencia de números ordenados de la forma $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$
A cada uno de estos se les llama términos de la sucesión.

Término	Se lee	En la sucesión se le llama
a_1	a sub 1	Primer término
a_2	a sub 2	Segundo término
a_3	a sub 3	Tercer término
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_n	a sub n	n-ésimo término o término general

Para la sucesión anterior se tiene

$a_1 = 2,$
$a_2 = 4,$
$a_3 = 6,$
$a_4 = 8,$
$\vdots$

E

Complete los espacios en blanco.

a) 3, 6, ___, 12, 15, ___, 21, …

b) 5, ___, 15, 20, ___, 30, 35, ___, …

c) 1, ___, 5, 7,___,11, 13, ___, …

d) −1, ___,−1, 1,___,1, −1, ___, …

e) 1, $\frac{1}{2}$, ___, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ____, …

f) 1, 2, 4, ___, 11, 16, ____, …

2

U1: Sucesiones
S1: Sucesiones, notación y término general
C1: Concepto de sucesión

(P) Complete los espacios en blanco:

$$\underset{+2}{2,\ 4},\ \underline{6},\ 8,\ 10,\ \underline{12},\ 14,\ 16,\ \ldots$$
+2 +2 +2 +2 +2 +2 +2

(S) Una sucesión es una secuencia de números ordenados de la forma $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

Término	Se lee	En la sucesión se le llama
a_1	a sub 1	Primer término
a_2	a sub 2	Segundo término
a_3	a sub 3	Tercer término
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_n	a sub n	n-ésimo término o término general

En la sucesión anterior
$a_1 = 2, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 6, \quad a_4 = 8, \ldots$

(E) Complete los espacios en blanco.

a) 3, 6, $\underline{9}$, 12, 15, $\underline{18}$, 21, …
+3 +3 +3 +3 +3 +3

b) 5, $\underline{10}$, 15, 20, $\underline{25}$, 30, 35, $\underline{40}$, …
+5 +5 +5 +5 +5 +5 +5

c) 1, $\underline{3}$, 5, 7, $\underline{9}$, 11, 13, $\underline{15}$, …

d) −1, $\underline{1}$, −1, 1, $\underline{-1}$, 1, −1, $\underline{1}$, …

e) 1, $\frac{1}{2}$, $\underline{\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\underline{\frac{1}{6}}$, …

f) 1, 2, 4, $\underline{7}$, 11, 16, $\underline{22}$, …

Contenido 2

Término general de una sucesión y su aplicación

Contenido 2: Término general de una sucesión y su aplicación

P

Deduzca una fórmula para el término general de la sucesión 3, 6, 9, 12, 15, …

S

Se identifica cada término de la sucesión dada

$a_1=3,\quad a_2=6,\quad a_3=9,\quad a_4=12,\quad a_5=15,\quad \ldots$

Se expresa cada término en función de la posición correspondiente que ocupa en la sucesión, así

$$\begin{aligned} a_1&=(3)(1)=3\\ a_2&=(3)(2)=6\\ a_3&=(3)(3)=9\\ a_4&=(3)(4)=12\\ a_5&=(3)(5)=15\\ &\vdots\\ a_n&=(3)(n)=3n \end{aligned}$$

Es decir, el término general es $a_n=3n$.

C

Para determinar el término general de una sucesión dada se debe establecer una relación entre cada término y su posición correspondiente en la sucesión. Este se denota por a_n.

E1

Deduzca una fórmula para el término general de cada una de las sucesiones.

a) 2, 4, 6, 8, 10, … b) 5, 10, 15, 20, 25, … c) 1, 2, 3, 4, 5, …

Ejemplo Dada la sucesión con término general $a_n=5n-1$.

a) Calcule los primeros 5 términos de la sucesión b) Encuentre a_{10}

a) Para obtener los primeros 5 términos de la sucesión, se hace $n=1, 2, 3, 4, 5$ en la fórmula del término general, así

$a_1=(5)(1)-1=4$ $a_2=(5)(2)-1=9$ $a_3=(5)(3)-1=14$

$a_4=5(4)-1=19$ $a_5=(5)(5)-1=24$

Por tanto, la sucesión es **4, 9, 14, 19, 24, …**

b) En este caso $n=10$, así que $a_{10}=(5)(10)-1=49$.

Por tanto, $a_{10}=49$.

E2

Calcule los primeros 5 términos y a_{10} de las sucesiones que tienen el término general

a) $a_n=2n+1$ b) $a_n=3n-2$ c) $a_n=n^2$

3

Aprendizajes esperados

Determina y utiliza el término general para encontrar cualquier término de una sucesión.

Secuencia:

En la clase anterior se estudió la definición de sucesión y se nombraron algunos de sus términos. Ahora nos interesa determinar el llamado n-ésimo término o término general (a_n) que nos servirá como término genérico de una sucesión.

Puntos esenciales:

Determinar el término general de una sucesión (en el caso que sea posible) se hace en el sentido de deducir una fórmula para dicho término, la cual se obtendrá expresando cada término en función de la posición correspondiente que ocupa en la sucesión.

El hecho de deducir una fórmula para el término general de una sucesión facilita la obtención de cualquiera de sus términos, ya que esto sólo conlleva a sustituir el valor que toma n en la expresión para a_n y efectuar las operaciones indicadas.

Recordar el orden de aplicación de las operaciones para el cálculo correcto de un término a partir de la expresión de a_n.

C2: Término general de una sucesión y su aplicación

P Deduzca una fórmula para el término general de la sucesión $3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ \ldots$

S

$$\begin{aligned} a_1&=(3)(1)=3\\ a_2&=(3)(2)=6\\ a_3&=(3)(3)=9\\ a_4&=(3)(4)=12\\ a_5&=(3)(5)=15\\ &\vdots\\ a_n&=(3)(n)=3n. \end{aligned}$$

C *Leer en el libro de texto.*

E1 Deduzca el término general de las sucesiones:

a) $2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots$

$$\begin{aligned} a_1&=(2)(1)=2\\ a_2&=(2)(2)=4\\ a_3&=(2)(3)=6\\ a_4&=(2)(4)=8\\ &\vdots\\ a_n&=(2)(n)=2n \end{aligned}$$

b) $5,\ 10,\ 15,\ 20,\ \ldots$

$$\begin{aligned} a_1&=(5)(1)=5\\ a_2&=(5)(2)=10\\ a_3&=(5)(3)=15\\ a_4&=(5)(4)=20\\ &\vdots\\ a_n&=(5)(n)=5n \end{aligned}$$

Ej Dada la sucesión con término general

$$a_n=5n-1.$$

a) Calcule los primeros 5 términos.

$$\begin{aligned} a_1&=(5)(1)-1=4\\ a_2&=(5)(2)-1=9\\ a_3&=(5)(3)-1=14\\ a_4&=(5)(4)-1=19\\ a_5&=(5)(5)-1=24 \end{aligned}$$

b) Encuentre a_{10}.

$$a_{10}=(5)(10)-1=49$$

E2 Calcule los primeros 5 términos y a_{10} sabiendo que:

a) $a_n=2n+1$

$$\begin{aligned} a_1&=(2)(1)+1=3\\ a_2&=(2)(2)+1=5\\ a_3&=(2)(3)+1=7\\ a_4&=(2)(4)+1=9\\ a_5&=(2)(5)+1=11\\ a_{10}&=(2)(10)+1=21 \end{aligned}$$

b) $a_n=3n-2$

$$\begin{aligned} a_1&=(3)(1)-2=1\\ a_2&=(3)(2)-2=4\\ a_3&=(3)(3)-2=7\\ a_4&=(3)(4)-2=10\\ a_5&=(3)(5)-2=13\\ a_{10}&=(3)(10)-2=28 \end{aligned}$$

Contenido 1 Sucesión aritmética

Aprendizajes esperados

Determina la diferencia común en sucesiones aritméticas.

Secuencia:

En la sección anterior los estudiantes se familiarizaron con el concepto de sucesión, la notación utilizada para identificar sus términos y el proceso de determinar su término general (a_n).

Aquí comienza una clasificación de las sucesiones según la manera en que se obtiene un término a partir de su anterior inmediato. En esta clase se estudian las sucesiones aritméticas.

Puntos esenciales:

Destacar el hecho de que en algunas sucesiones es posible determinar cada término sumándole al anterior inmediato una cantidad constante. Estas son las llamadas sucesiones aritméticas.

Para determinar la diferencia común en una sucesión aritmética se debe identificar la cantidad constante que se suma a cada término para obtener el siguiente. También se puede obtener si se toma cualquier término distinto del primero y se le resta su anterior inmediato notando que tales diferencias dan el mismo resultado.

Sección 2: Sucesiones aritméticas

Contenido 1: Sucesión aritmética

P Complete el espacio en blanco 1, 4, 7, 10, _____, …

S Cada término de la sucesión después del primero se obtiene de la siguiente manera:

$$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ \_\_\ \ldots \quad (+3\ \ +3\ \ +3\ \ +3)$$

Es decir, un término de la sucesión queda determinado sumando tres a su inmediato anterior. Además, cada término se identifica así:

$$a_1=1$$
$$a_2=4$$
$$a_3=7$$
$$a_4=10$$
$$a_5=13$$
$$\vdots$$

La sucesión que resulta es 1, 4, 7, 10, **13**, … A este tipo de sucesión se le llama sucesión aritmética.

C Una sucesión en la que cada término después del primero se obtiene sumándole al anterior inmediato una cantidad constante se llama **sucesión aritmética**. Esta cantidad constante recibe el nombre de **diferencia común** y la denotaremos con la letra d.

Ejemplo ¿Cuál es la diferencia común en la sucesión dada en el problema?

En la sucesión dada en el problema la diferencia común d es 3, que también se obtiene a partir de

$$d=a_2-a_1=4-1=3$$
$$d=a_3-a_2=7-4=3$$
$$d=a_4-a_3=10-7=3$$

E Dadas las siguientes sucesiones aritméticas, encuentre d y complete los espacios en blanco:

a) 5, 7, 9, 11, ____, …
b) 7, 10, 13, ____, ____, …
c) 6, 4, ____, 0, ____, …
d) −1, −2, −3, ____, −5, ____, …
e) 10, ____, ____, 4, 2, ____, ….
f) ____, 5, 10, ____, ____,…

5

S2: Sucesiones aritméticas

C1: Sucesión aritmética

(P) Complete el espacio en blanco

(S)
$$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ \underline{13},\ \ldots \quad (+3\ \ +3\ \ +3\ \ +3)$$

(C) Una sucesión en la que cada término se obtiene sumándole al anterior inmediato una cantidad constante se llama <u>sucesión aritmética</u>. Esta cantidad constante recibe el nombre de <u>diferencia común</u> d.

(Ej) ¿Cuál es la diferencia común en la sucesión dada en el problema?

$$a_2-a_1 = 4-1=3$$
$$a_3-a_2 = 7-4=3$$
$$a_4-a_3 = 10-7=3.$$
$$d=3$$

(E) Encuentre d y complete los espacios en blanco.

a) $5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \underline{13},\ \ldots$ $\quad d=2$
$$a_2-a_1 = 7-5=2$$
$$a_3-a_2 = 9-7=2$$
$$a_4-a_3 = 11-9=2$$
$$a_5-a_4 = 13-11=2$$

b) $7,\ 10,\ 13,\ \underline{16},\ \underline{19},\ \ldots$ $\quad d=3$
$$a_2-a_1 = 10-7=3$$
$$a_3-a_2 = 13-10=3$$
$$a_4-a_3 = 16-13=3$$
$$a_5-a_4 = 19-16=3$$

c) $6,\ 4,\ \underline{2},\ 0,\ \underline{-2},\ \ldots$ $\quad d=-2$

d) $-1,\ -2,\ -3,\ \underline{-4},\ -5,\ \underline{-6},\ \ldots$ $\quad d=-1$

e) $10,\ \underline{8},\ \underline{6},\ 4,\ 2,\ \underline{0},\ \ldots.$ $\quad d=-2$

f) $\underline{0},\ 5,\ 10,\ \underline{15},\ \underline{20},\ldots$ $\quad d=5$

Contenido 2 Término general de una sucesión aritmética

Contenido 2: Término general de una sucesión aritmética

P
Dada la sucesión aritmética 2, 6, 10, 14, …
a) Encuentre a_1 y d.
b) Determine a_n.

S
a) En esta sucesión aritmética, $a_1=2$ y la diferencia común d se obtiene haciendo

$a_2-a_1 = 6-2=4 \qquad a_3-a_2 = 10-6=4 \qquad a_4-a_3=14-10=4$

Luego, la diferencia común es $d=4$.

b) En este caso,

$$\begin{aligned}
&a_1 &&=2 &&=2+(1-1)(4)\\
&a_2=a_1+4 &&=2+4 &&=2+(2-1)(4)\\
&a_3=a_2+4 &&=2+\underbrace{4+4}_{2\text{ veces }4} &&=2+(3-1)(4)\\
&a_4=a_3+4 &&=2+\underbrace{4+4+4}_{3\text{ veces }4} &&=2+(4-1)(4)\\
&\vdots && &&\vdots\\
&a_n=a_{n-1}+4 &&=2+\underbrace{4+4+4+\cdots+4}_{(n-1)\text{ veces }4} &&=2+(n-1)(4)=4n-2
\end{aligned}$$

Por tanto, $a_n=4n-2$.

C
El término general a_n de una sucesión aritmética se expresa en función de a_1 y d en la forma siguiente

$$\begin{aligned}
&a_1=a_1 &&=a_1+(1-1)\,d\\
&a_2=a_1+d &&=a_1+(2-1)\,d\\
&a_3=a_1+\underbrace{d+d}_{2d} &&=a_1+(3-1)\,d\\
&a_4=a_1+\underbrace{d+d+d}_{3d} &&=a_1+(4-1)\,d\\
&\vdots &&\vdots\\
&a_n=a_1+\underbrace{d+d+\cdots+d}_{(n-1)d} &&=a_1+(n-1)d
\end{aligned}$$

Es decir, $a_n=a_1+(n-1)\,d$

Ejemplo Dada una sucesión aritmética con $a_1=1$ y $d=5$, determine a_n y a_6.

Al sustituir $a_1=1$ y $d=5$ en la expresión $a_n= a_1+(n-1)\,d$, resulta

$a_n=1+(n-1)(5)=5n-4$; es decir, $a_n=5n-4$.

Para encontrar a_6 se sustituye n por 6 en la expresión anterior así $a_6=(5)(6)-4=26$.

E
Dadas las siguientes sucesiones aritméticas, determine a_n y el término que se indica:
a) 7, 11, 15, 19, … a_6 b) 13, 20, 27, … a_8
c) −6, −2, 2, 6, … a_9 d) −1, −3, −5, −7, … a_{11}

6

Aprendizajes esperados

Determina el término general de una sucesión aritmética.

Secuencia:

En la clase anterior se estudió la definición de sucesión aritmética y el proceso para determinar la diferencia común. Esto facilita la determinación del término general de una sucesión de este tipo.

En esta clase se deduce una fórmula para el término general (a_n) de una sucesión aritmética conocidos el primer término (a_1) y la diferencia común (d).

Puntos esenciales:

Hacer uso de la propiedad distributiva del producto respecto a la suma y de la reducción de términos semejantes para expresar de manera más simplificada el término general de una sucesión aritmética.

Deducir la fórmula para el cálculo del término general de una sucesión aritmética estableciendo una relación de recurrencia.

Sustituir correctamente los valores para las variables involucradas en la fórmula al momento de desarrollar ejemplos y ejercicios.

Aplicar correctamente las operaciones entre números enteros.

C2: Término general de una sucesión aritmética

(P) Dada la sucesión aritmética 2, 6, 10, 14, …
a) Encuentre a_1 y d b) Determine a_n

(S) a) $a_1=2$

$$\begin{aligned}
a_2-a_1&=6-2=4\\
a_3-a_2&=10-6=4\\
a_4-a_3&=14-10=4
\end{aligned} \qquad \boxed{d=4}$$

b)

$$\begin{aligned}
a_1&=2 &&=2+(1-1)(4)\\
a_2&=2+4 &&=2+(2-1)(4)\\
a_3&=2+\underbrace{4+4}_{2\ veces\ 4} &&=2+(3-1)(4)\\
a_4&=2+\underbrace{4+4+4}_{3\ veces\ 4} &&=2+(4-1)(4)\\
&\vdots &&\vdots\\
a_n&=2+\underbrace{4+4+\cdots+4}_{(n-1)\ veces\ 4} &&=2+(n-1)(4)=4n-2.
\end{aligned}$$

$a_n=4n-2$

Primer término Diferencia

(C) Término general de una sucesión aritmética

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

(Ej) Dada una sucesión aritmética con $a_1=1$ y $d=5$, determine a_n y a_6.

Sustituyendo $a_1=1$ y $d=5$ en

$a_n=a_1+(n-1)d$ resulta

$a_n=1+(n-1)5=1+5n-5=5n-4$

$a_6=5(6)-4=26$

(E) Determine a_n y el término que se indica:

a) 7, 11, 15, 19, … a_6

$a_1=7,\ d=4$

$a_n=a_1+(n-1)d$

$a_n=7+(n-1)4=7+4n-4=4n+3$

$a_6=(4)(6)+3=27$

b) 13, 20, 27, … a_8

$a_1=13,\ d=7$

$a_n=a_1+(n-1)d$

$$\begin{aligned}
a_n&=13+(n-1)7=13+7n-7\\
&=7n+6
\end{aligned}$$

$a_8=(7)(8)+6=62$

Contenido 3 Aplicación de la fórmula del término general de una sucesión aritmética (1)

Aprendizajes esperados

Aplica la fórmula para el término general de una sucesión aritmética en la determinación del primer término a_1 o de la diferencia común d.

Secuencia:

Como en la clase anterior se dedujo formalmente la fórmula del término general de una sucesión aritmética, en esta clase se aplica para determinar el primer término o la diferencia común conocido un término cualquiera, estableciendo así una ecuación de primer grado.

Puntos esenciales:

Recordar la fórmula del término general de una sucesión aritmética.

Sustituir correctamente los valores para las variables involucradas en dicha fórmula.

Resolver la ecuación de primer grado que resulte.

Contenido 3: Aplicación de la fórmula del término general de una sucesión aritmética (1)

P Dada una sucesión aritmética con $d=2$ y $a_4=13$, calcule a_1.

S

Se sustituye $n=4$ en la fórmula del término general y resulta

$$a_4=a_1+(4-1)\,d=a_1+3d$$

Se sustituye $a_4=13$ y $d=2$ en la expresión anterior y se obtiene

$$a_1+(3)(2)=13$$
$$a_1=13-6$$
$$\mathbf{a_1=7}$$

La sucesión aritmética es **7**, 9, 11, 13, 15, …

> Término general de una sucesión aritmética
> $a_n=a_1+(n-1)\,d$

E1

Calcule a_1 para cada una de las sucesiones aritméticas con:

a) $d=2$ y $a_4=12$ b) $d=3$ y $a_6=20$ c) $d=-2$ y $a_7=3$

Ejemplo Dada una sucesión aritmética con $a_1=-5$ y $a_5=3$, calcule d.

Si n toma el valor de 5 en la fórmula del término general, se tiene $a_5=a_1+(5-1)\,d=a_1+4d$.

Al sustituir $a_1=-5$ y $a_5=3$ en la expresión anterior se obtiene

$$-5+4d=3$$
$$4d=3+5$$
$$4d=8$$
$$\mathbf{d=2}$$

Así, la sucesión aritmética es -5, -3, -1, 1, …

E2

Calcule d para cada sucesión aritmética con:

a) $a_1=2$ y $a_4=14$ b) $a_1=-10$ y $a_7=2$ c) $a_1=-7$ y $a_{10}=-34$

C3: Aplicación de la fórmula del término general de una sucesión aritmética (1)

P Sabiendo que $d=2$ y $a_4=13$, calcule a_1.

Sustituyendo $n=4$ en $a_n=a_1+(n-1)d$:

$$a_4=a_1+(4-1)d=a_1+3d.$$

Al sustituir $a_4=13$ y $d=2$ se obtiene

$$a_1+3(2)=13$$
$$a_1=7$$

E1 Calcule a_1 para una sucesión aritmética con:

a) $d=2$ y $a_4=12$

$$a_4=a_1+(4-1)d=a_1+3d$$
$$a_1+(3)(2)=12$$
$$a_1=6$$

b) $d=3$ y $a_6=20$

$$a_6=a_1+(6-1)d=a_1+5d$$
$$a_1+(5)(3)=20$$
$$a_1=5$$

Ej Sabiendo que $a_1=-5$ y $a_5=3$, calcule d.

Si $n=5$ en $a_n=a_1+(n-1)d$ resulta

$$a_5=a_1+(5-1)d=a_1+4d.$$

Al hacer $a_1=-5$ y $a_5=3$ se obtiene

$$-5+4d=3$$
$$4d=8$$
$$d=2$$

E2 Calcule d para una sucesión aritmética con:

a) $a_1=2$ y $a_4=14$

$$a_4=a_1+(4-1)d=a_1+3d$$
$$2+3d=14$$
$$3d=12$$
$$d=4$$

b) $a_1=-10$ y $a_7=2$

$$a_7=a_1+(7-1)d=a_1+6d$$
$$-10+6d=2$$
$$6d=12$$
$$d=2$$

Contenido 4 Aplicación de la fórmula del término general de una sucesión aritmética (2)

Contenido 4: Aplicación de la fórmula del término general de una sucesión aritmética (2)

P

Utilizando el término general de una sucesión aritmética, calcule a_1 y d, sabiendo que $a_3=5$ y $a_6=20$.

S

Se sustituye $n=3$ y $n=6$ en la fórmula del término general de una sucesión aritmética, obteniéndose respectivamente:

$$a_3=a_1+(3-1)\,d=a_1+2d$$
$$a_6=a_1+(6-1)\,d=a_1+5d$$

Término general de una sucesión aritmética
$a_n=a_1+(n-1)\,d$

Al sustituir $a_3=5$ y $a_6=20$ se obtiene

$$\begin{cases} a_1+2d=5 & ① \\ a_1+5d=20 & ② \end{cases}$$

Se multiplica por -1 la ecuación ① se obtiene

$$-a_1-2d=-5 \quad ③$$

Se suman ② y ③ para obtener

$$\begin{array}{rr} & a_1+5d=20 \\ +) & -a_1-2d=-5 \\ \hline & 3d=15 \\ & d=5 \end{array}$$

Se sustituye $d=5$ en ① y se obtiene

$$a_1+(2)(5)=5$$
$$a_1=5-10$$
$$a_1=-5$$

Por tanto, $\boldsymbol{a_1=-5}$ y $\boldsymbol{d=5}$.

La sucesión aritmética es -5, 0, 5, 10, 15, 20, 25, …

C

Para determinar a_1 y d en una sucesión aritmética conocidos dos términos cualesquiera de la misma, se utiliza la fórmula $a_n=a_1+(n-1)\,d$ y se forma así un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas cuya solución corresponde a los valores de a_1 y d.

E

A partir de los términos que se indican de una sucesión aritmética, calcule a_1 y d.

a) $a_3=10$ y $a_6=16$

b) $a_4=3$ y $a_7=21$

c) $a_5=-1$ y $a_9=-13$

d) $a_2=-2$ y $a_{10}=-10$

8

Aprendizajes esperados

Aplica la fórmula para el término general de una sucesión aritmética al determinar su primer término a_1 y la diferencia común d.

Secuencia:

En la clase anterior se aplicó la fórmula del término general de una sucesión aritmética para determinar a_1 o d, ahora lo haremos para determinar ambos valores conocidos dos de sus términos formando así un SEL 2×2. La resolución de dicho sistema se hará usando los métodos estudiados en grados anteriores.

Puntos esenciales:

Recordar la fórmula del término general de una sucesión aritmética.

Observar que la hipótesis de que la sucesión es aritmética, permite la aplicación de la fórmula $a_n=a_1+(n-1)d$.

Notar que al sustituir correctamente los valores para las variables involucradas en dicha fórmula se obtienen dos ecuaciones formando así un SEL 2×2 cuya solución son los valores a determinar.

Emplear correctamente cualquiera de los métodos estudiados para la resolución de SEL 2×2 .

C4: Aplicación de la fórmula del término general de una sucesión aritmética (2)

P Calcule a_1 y d, sabiendo que $a_3=5$ y $a_6=20$.
Sugerencia: Utilice la fórmula del término general.

S Sustituyendo $n=3$ y $n=6$, en $a_n=a_1+(n-1)d$:

$$a_3=a_1+(3-1)d=a_1+2d$$
$$a_6=a_1+(6-1)d=a_1+5d$$

Como $a_3=5$ y $a_6=20$, se forma:

$$\begin{cases} a_1+2d=5 & ① \\ a_1+5d=20 & ② \end{cases}$$

$$(-1)\times ① \qquad -a_1-2d=-5 \quad ③$$

$$② + ③ \qquad \begin{array}{r} a_1+5d=20 \\ -a_1-2d=-5 \\ \hline 3d=15 \\ \boldsymbol{d=5} \end{array}$$

Se sustituye $d=5$ en ①, resulta

$$a_1+(2)(5)=5$$
$$a_1+10=5$$
$$\boldsymbol{a_1=-5}$$

C *Leer en el libro de texto.*

E Calcule a_1 y d, sabiendo que:

a) $a_3=10$ y $a_6=16$

$$\begin{cases} a_1+2d=10 & ① \\ a_1+5d=16 & ② \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} a_1+2d=10 \\ -a_1-5d=-16 \\ \hline 3d=6 \\ \boldsymbol{d=2} \end{array}$$

Sustituyendo $d=2$ en ①, resulta

$$a_1+(2)(2)=10$$
$$a_1+4=10$$
$$\boldsymbol{a_1=6}$$

b) $a_4=3$ y $a_7=21$

c) $a_5=-1$ y $a_9=-13$

d) $a_2=-2$ y $a_{10}=-10$

Contenido 6 Suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética (1)

Aprendizajes esperados

Determina la suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética.

Secuencia:

En clases anteriores se dedujo y se aplicó la fórmula del término general de una sucesión aritmética. Ahora, ¿es posible deducir alguna fórmula para determinar la suma de cierto número de términos de una sucesión aritmética? Este es el principal propósito de esta clase.

Puntos esenciales:

Recordar cómo se obtiene cierto término de una sucesión aritmética conocidos a_1 y d haciendo uso de la fórmula del término general.

Notar que, al sumar cierto número de términos de una sucesión aritmética, la suma del primer y último término es igual a la del segundo y penúltimo, a la del tercero y antepenúltimo y así sucesivamente. Es decir, la suma de dos términos equidistantes de los extremos, es igual a la suma de dichos extremos.

Hacer uso del hecho anterior al momento de deducir formalmente la fórmula para la suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética S_n.

Hacer notar que no es necesario conocer el valor de cada uno de los n primeros términos de una sucesión aritmética para determinar su suma.

Contenido 6: Suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética (1)

P Dada la sucesión aritmética 1, 5, 9, 13, 17,..., determine la suma de los 5 primeros términos realizando los siguientes pasos:
a) Indique la suma S de los primeros 5 términos partiendo del primero al quinto.
b) Indique la suma S de los primeros 5 términos partiendo del quinto al primero.
c) Indique la suma de ambas sumas.
d) Calcule la suma S.

S a) $S=1+5+9+13+17$ b) $S=17+13+9+5+1$

c) Al sumar ambas igualdades lado a lado, se tiene

$$\begin{array}{rl} & S = 1+5+9+13+17 \\ +) & S = 17+13+9+5+1 \\ \hline & 2S = (1+17)+(5+13)+\ldots+(17+1) \\ & 2S = 18+18+18+18+18 \\ & 2S = (5)(18) \\ & 2S = 90 \end{array}$$

d) Como $2S=90$, así $\mathbf{S=45}$.

C En una sucesión aritmética conocidos a_1 y d, la suma de los n primeros términos, S_n, se obtiene como sigue

$$S_n = a_1 + \underbrace{(a_1+d)}_{a_2} + \underbrace{(a_1+2d)}_{a_3} + \cdots + \underbrace{(a_n-d)}_{a_{n-1}} + a_n \quad ①$$

que además se puede reescribir como

$$S_n = a_n + \underbrace{(a_n-d)}_{a_{n-1}} + \underbrace{(a_n-2d)}_{a_{n-2}} + \cdots + \underbrace{(a_1+d)}_{a_2} + a_1 \quad ②$$

Sumando ① y ② se tiene

$$\begin{array}{rl} & S_n = a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + \cdots + (a_n-d) + a_n \\ +) & S_n = a_n + (a_n-d) + (a_n-2d) + \cdots + (a_1+d) + a_1 \\ \hline & 2S_n = \underbrace{(a_1+a_n) + (a_1+a_n) + (a_1+a_n) + \cdots + (a_1+a_n) + (a_1+a_n)}_{n \text{ veces}} \end{array}$$

$$2S_n = n\,(a_1+a_n)$$

$$\mathbf{S_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n)}$$

Ejemplo Calcule la suma S_8 de los primeros ocho términos de una sucesión aritmética con $a_1=-1$ y $a_8=13$.

En este caso $n=8$, $a_1=-1$ y $a_8=13$. Al sustituir estos valores en la fórmula para S_n, resulta:
$S_8=\frac{8}{2}(-1+13)=(4)(12)=48$, es decir, $\mathbf{S_8=48}$.

E Dadas las sucesiones aritméticas con los términos dados, encuentre las sumas indicadas.
a) $a_1=1$ y $a_6=16$, S_6 b) $a_1=5$ y $a_8=26$, S_8
c) $a_1=-10$ y $a_7=2$, S_7 d) $a_1=-1$ y $a_9=-33$, S_9

10

C6: Suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética (1)

P Dada la sucesión aritmética $1, 5, 9, 13, 17, \ldots$
Determine la suma de los 5 primeros términos realizando los siguientes pasos:
a) Indique la suma S partiendo del primero al quinto.
b) Indique la suma S partiendo del quinto al primero.
c) Indique la suma de ambas sumas.
d) Determine la suma S.

S a) $S = 1+5+9+13+17$
b) $S = 17+13+9+5+1$
c)
$$\begin{array}{rl} & S = 1+5+9+13+17 \\ +) & S = 17+13+9+5+1 \\ \hline & 2S = 18+18+18+18+18 \\ & 2S = 5(18) \end{array}$$
d) Como $2S = \underset{\text{Número de términos}}{5}\underset{\text{Suma del primer y último término}}{(18)} = 90$ $\quad \mathbf{S=45}$

C La suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética, S_n, se obtiene con la fórmula:
$$S_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

Ej Calcule S_8 sabiendo que $a_1=-1$ y $a_8=13$.
Sustituyendo $n=8$, $a_1=-1$ y $a_8=13$ en $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$ resulta
$$S_8 = \frac{8}{2}(-1+13) = 4(12) = 48$$

E Dada una sucesión aritmética con
a) $a_1=1$ y $a_6=16$, determine S_6.
$$S_6 = \frac{6}{2}(1+16) = 3(17) = 51$$
b) $a_1=5$ y $a_8=26$, determine S_8.
$$S_8 = \frac{8}{2}(5+26) = 4(31) = 124$$
c) $a_1=-10$ y $a_7=2$, determine S_7.
$$S_7 = \frac{7}{2}(-10+2) = \frac{7}{2}(-8) = -28$$

Contenido 7 Suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética (2)

Contenido 7: Suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética (2)

P

Exprese la suma S_n de los n primeros términos de una sucesión aritmética en función de a_1 y d.

S

Dado que $a_n = a_1 + (n-1)d$, la fórmula $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

puede reescribirse como

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + \underbrace{a_1 + (n-1)d}_{a_n}]$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]}$$

C

La suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética, conocidos a_1 y d, está dada por:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]}$$

Ejemplo Dada una sucesión aritmética con $a_1 = 11$ y $d = 5$, determine S_{10}.

Al sustituir $n = 10$, $a_1 = 11$ y $d = 5$ en la expresión $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$, se obtiene

$$S_{10} = \frac{10}{2}[(2)(11) + (10-1)(5)].$$

$$S_{10} = (5)(22 + 45)$$

$$S_{10} = (5)(67)$$

$$S_{10} = 335$$

Por tanto, $\boldsymbol{S_{10} = 335}$.

E

Dadas las sucesiones aritméticas con a_1 y d conocidos, calcule las sumas indicadas.

a) $a_1 = 1$ y $d = 5$, S_6

b) $a_1 = 2$ y $d = 6$, S_8

c) $a_1 = -20$ y $d = 2$, S_5

d) $a_1 = -3$ y $d = -5$, S_7

11

Aprendizajes esperados

Deduce una fórmula para la suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética en función del primer término a_1 y de la diferencia común d.

Secuencia:

En la clase anterior se dedujo formalmente la fórmula para la suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética S_n. Aquí expresaremos dicha fórmula en función de a_1 y d.

Puntos esenciales:

Recordar la fórmula del término general de una sucesión aritmética.

Recordar la fórmula para la suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética.

Expresar la suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética en función del a_1 y d.

Aplicar correctamente la expresión para S_n en el cálculo de suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética.

Explicar que la expresión deducida en la clase anterior se usa conociendo a_1 y a_n, mientras que la de esta clase si se conocen los valores de a_1 y d.

C7: Suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética (2)

(P) Exprese S_n en función de a_1 y d.

(S) Dado que $a_n = a_1 + (n-1)d$,

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

puede reescribirse como

$$S_n = \frac{n}{2}\left[a_1 + \underbrace{a_1 + (n-1)d}_{a_n}\right]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

(C) Dado el primer término a_1 y la diferencia común d,

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

(Ej) Dada una sucesión aritmética con $a_1 = 11$ y $d = 5$, determine S_{10}.

Haciendo $n = 10$, $a_1 = 11$ y $d = 5$ en $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ resulta

$$S_{10} = \frac{10}{2}[2(11) + (10-1)5] = 5(22+45) = 5(67)$$

$$S_{10} = 335$$

(E) Dada una sucesión aritmética con:

a) $a_1 = 1$ y $d = 5$, determine S_6

$$S_6 = \frac{6}{2}[2(1) + (6-1)5] = (3)(2+25) = 81$$

b) $a_1 = 2$ y $d = 6$, determine S_8

$$S_8 = \frac{8}{2}[2(2) + (8-1)6] = (4)(4+42) = 184$$

c) $a_1 = -20$ y $d = 2$, determine S_5

$$S_5 = \frac{5}{2}[2(-20) + (5-1)2] = \left(\frac{5}{2}\right)(-40+8) = -80$$

d) $a_1 = -3$ y $d = -5$, determine S_7

$$S_7 = \frac{7}{2}[2(-3) + (7-1)(-5)] = \left(\frac{7}{2}\right)(-6-30) = -126$$

Contenido 8 Aplicación de la fórmula para encontrar la suma de términos de una sucesión aritmética (1)

Aprendizajes esperados

Aplica la fórmula de la suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética.

Secuencia:

Anteriormente se mostraron las dos formas de expresar la fórmula para la suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética.

En esta clase se aplica una de estas expresiones conocidos:

- ✓ el primer término y la suma de ciertos términos.
- ✓ el primer y último término de una sucesión finita.

Puntos esenciales:

Recordar la fórmula para la suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética conocidos el primer y último término.

Al sustituir el primer término y la suma de cierto número de términos en dicha fórmula se obtiene una ecuación de primer grado cuya solución determina el último término que se suma.

Explicar el concepto de sucesión finita.

Para calcular S_n conocidos el primer y último término de una sucesión finita, primero se determina el número de términos para luego encontrar la suma de ellos sustituyendo acertadamente los valores de las variables involucradas en S_n.

Contenido 8: Aplicación de la fórmula para encontrar la suma de términos de una sucesión aritmética (1)

P1 Dada la sucesión aritmética con $a_1 = 3$ y $S_6 = 48$, calcule el término a_6.

S Se sustituye $a_1 = 3$, $n = 6$ y $S_6 = 48$ en la expresión $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ se sigue que

$$48 = \frac{6}{2}(3 + a_6)$$
$$48 = 3(3 + a_6)$$
$$\frac{48}{3} = \frac{\cancel{3}(3 + a_6)}{\cancel{3}}$$
$$3 + a_6 = 16$$
$$a_6 = 16 - 3$$
$$\mathbf{a_6 = 13}$$

E1 A partir del término y la suma que se indican para cada sucesión aritmética con:

a) $a_1 = 5$ y $S_6 = 75$. Determine a_6.
b) $a_1 = 1$ y $S_8 = 64$. Determine a_8.
c) $a_1 = 4$ y $S_7 = 70$. Determine a_7.
d) $a_1 = 10$ y $S_9 = -36$. Determine a_9.

Si en una sucesión se identifica un primer y un último término, esta se denomina **finita**.

P2 Dada la sucesión aritmética finita 2, 5, 8, …, 17.
a) Determine la posición n del número 17 en la sucesión.
b) Calcule la suma de sus términos.

S

a) Se observa que cada término de la sucesión se obtiene como sigue $2, \underset{+3}{\frown} 5, \underset{+3}{\frown} 8, \ldots, 17$

En consecuencia, la diferencia común d es 3. Se sustituye $a_1 = 2$, $d = 3$ y $a_n = 17$ en $a_n = a_1 + (n - 1)d$, resultando:

$$17 = 2 + (n - 1)3$$
$$17 = 3n - 1$$
$$3n = 18$$
$$\mathbf{n = 6}$$

Es decir, **17 es el sexto término** de la sucesión. Así, $a_6 = 17$.

b) Para determinar la suma requerida, se sustituye $n = 6$, $a_1 = 2$ y $a_6 = 17$ en la expresión
$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n),$$
obteniendo $S_6 = \frac{6}{2}(2 + 17) = (3)(19) = 57$, es decir, $\mathbf{S_6 = 57}$.

E2 Dadas las siguientes sucesiones aritméticas finitas, calcule la suma de sus términos:

a) 1, 3, 5, …, 19
b) 3, 6, 9, …, 24
c) 2, 6, 10, …, 26
d) −1, −2, −3, …, −16

12

C8: Aplicación de la fórmula para encontrar la suma de términos de una sucesión aritmética (1)

P1 Sabiendo que $a_1 = 3$ y $S_6 = 48$, calcule a_6.

Haciendo $a_1 = 3$, $n = 6$ y $S_6 = 48$ en $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ resulta

$$48 = \frac{6}{2}(3 + a_6)$$
$$48 = 3(3 + a_6)$$
$$16 = 3 + a_6$$
$$a_6 = 13$$

E1 a) Si $a_1 = 5$ y $S_6 = 75$, determine a_6.

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$
$$75 = \frac{6}{2}(5 + a_6)$$
$$75 = 3(5 + a_6)$$
$$25 = 5 + a_6$$
$$a_6 = 20$$

P2 Dada la sucesión aritmética 2, 5, 8, …, 17.
a) Determine la posición n que ocupa $a_n = 17$
b) Calcule la suma de sus términos.

a) Como $2, \underset{+3}{\frown} 5, \underset{+3}{\frown} 8, \ldots$ Así que $d = 3$.

Se sustituye $a_1 = 2$, $d = 3$ y $a_n = 17$ en $a_n = a_1 + (n - 1)d$

$$17 = 2 + (n - 1)3 = 2 + 3n - 3$$
$$17 = 3n - 1$$
$$3n = 18$$
$$n = 6$$

b) Si $n = 6$, $a_1 = 2$ y $a_6 = 17$ en $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ se tiene

$$S_6 = \frac{6}{2}(2 + 17) = 3(19) = 57$$

E2 Determine la suma de los términos de: a) 1, 3, 5, …, 19

Haciendo $a_1 = 2$, $d = 2$ y $a_n = 19$ en $a_n = a_1 + (n - 1)d$

$$19 = 1 + (n - 1)2 = 1 + 2n - 2$$
$$19 = 2n - 1$$
$$2n = 20$$
$$n = 10$$

Luego, $S_{10} = \frac{10}{2}(1 + 19) = (5)(20) = 100$

Contenido 9 Aplicación de la fórmula para encontrar la suma de términos de una sucesión aritmética (2)

Contenido 9: Aplicación de la fórmula para encontrar la suma de términos de una sucesión aritmética (2)

P

Se colocan 60 pupitres en un aula, de tal manera que la primera fila tenga 6, la segunda 9, la tercera 12 y así sucesivamente.
a) Forme una sucesión aritmética con el número de pupitres dispuestos en cada fila.
b) Calcule la diferencia común.
c) Encuentre el número de filas que se forman.

S

a) Sea n el número de filas que se forman. Se identifica el número de pupitres dispuestos en cada fila como sigue

Primera fila: $a_1 = 6$

Segunda fila: $a_2 = 9$

Tercera fila: $a_3 = 12$

y así sucesivamente, formando de esta manera la sucesión aritmética **6, 9, 12, …**

b) Es obvio que la diferencia común es **3** y que cada término de la sucesión, excepto el primero, se obtiene sumando la diferencia común al anterior inmediato, como se muestra en el diagrama

$$6, \underbrace{\;}_{+3} 9, \underbrace{\;}_{+3} 12, \ldots$$

c) El número total de pupitres representa la suma de los primeros n términos de la sucesión, es decir, $S_n = 60$. Utilizando la fórmula $S_n = \frac{n}{2}[2a_1+(n-1)\,d]$

y se sustituye en esta $S_n = 60$, $a_1 = 6$ y $d = 3$ se tiene

$$60 = \frac{n}{2}\,[(2)(6)+(n-1)\,3]$$
$$120 = n(3n+9)$$
$$120 = 3n^2+9n$$
$$3n^2+9n-120 = 0$$
$$n^2+3n-40 = 0$$
$$(n+8)(n-5) = 0$$
$$n = -8, \quad n = 5$$

Como $n > 0$, $n = 5$. Por tanto, **se forman 5 filas.**

E

Resuelva el siguiente problema:

Un entrenador de gimnasia tiene 45 gimnastas y quiere acomodarlas en filas de modo que la primera fila tenga 1 gimnasta, la segunda 2 gimnastas, la tercera 3 gimnastas y así sucesivamente ¿en cuántas filas se distribuirán las gimnastas?

13

Aprendizajes esperados

Aplica la fórmula de la suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética en situaciones de la vida real.

Secuencia:

En la clase anterior se aplicó la fórmula para la suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética conocidos su primer y último término. Aquí la aplicaremos en situaciones de la vida real.

Puntos esenciales:

Comprender la situación problemática que se plantea resolver.

Formar una sucesión aritmética (de ser posible) con los datos brindados.

Determinar cuál fórmula de las estudiadas conviene aplicar para obtener posibles respuestas al problema.

Recordar el proceso de resolución de una ecuación de segundo grado mediante factorización.

Seleccionar de las posibles respuestas aquellas que respondan al contexto planteado en el problema.

C9: Aplicación de la fórmula para encontrar la suma de términos de una sucesión aritmética (2)

P Se colocan 60 pupitres en el aula.
En la primera fila hay 6, segunda 9, tercera 12, …
a) Forme una sucesión aritmética con el número de pupitres dispuestos en cada fila.
b) Calcule la diferencia común.
c) Encuentre el número de filas que se formaron.

S a) n: número de filas que se forman

Primera fila	Segunda fila	Tercera fila
$a_1 = 6$	$a_2 = 9$	$a_3 = 12$

b) Como $6, \underbrace{\;}_{+3} 9, \underbrace{\;}_{+3} 12, \ldots$ Así que $d = 3$

c) Sustituyendo $S_n = 60$, $a_1 = 6$ y $d = 3$ en $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

$$60 = \frac{n}{2}[2(6) + (n-1)3]$$
$$120 = n(3n+9) = 3n^2 + 9n$$
$$3n^2 + 9n - 120 = 0$$
$$n^2 + 3n - 40 = 0$$
$$(n+8)(n-5) = 0$$
$$n = -8, \quad n = 5.$$

Como $n > 0$, $n = 5$. Se formaron 5 filas.

E Un entrenador de gimnasia tiene 45 gimnastas y quiere acomodarlas en filas de modo que la primera fila tenga 1 gimnasta, la segunda 2 gimnastas, la tercera 3 gimnastas y así sucesivamente ¿en cuántas filas se distribuirán las gimnastas?

Sea n el número de filas que se forman, así que $n > 0$.

Primera fila: $a_1 = 1$
Segunda fila: $a_2 = 2$
Tercer fila: $a_3 = 3$

Como $1, \underbrace{\;}_{+1} 2, \underbrace{\;}_{+1} 3, \ldots$ $d = 1$

Sustituyendo $S_n = 45$, $a_1 = 1$ y $d = 1$ en $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ resulta

$$90 = n(n+1) = n^2 + n$$
$$n^2 + n - 90 = 0$$
$$(n+10)(n-9) = 0$$
$$n = -10, \quad n = 9.$$

Como $n > 0$, $n = 9$. Se formaron 9 filas.

Contenido 1 Sucesión geométrica

Aprendizajes esperados

Determina la razón común de sucesiones geométricas.

Secuencia:

En la sección anterior se estudió lo referente a las sucesiones aritméticas. Con esta clase comienza el estudio de aquellas, en las que cada término se obtiene multiplicándole a su anterior inmediato una constante, llamadas sucesiones geométricas.

Puntos esenciales:

Explicar que las sucesiones en las que cada término se obtiene multiplicándole a su anterior inmediato una constante son llamadas sucesiones geométricas.

Para determinar la razón común en una sucesión geométrica se debe identificar la cantidad constante que se multiplica a cada término para obtener el siguiente. También se puede obtener si se toma cualquier término distinto del primero y se divide por su anterior inmediato notando que tales cocientes dan el mismo resultado.

Establecer diferencias entre las sucesiones aritméticas y geométricas.

Aplicar correctamente la multiplicación y división de números enteros, además de la simplificación de fracciones.

Sección 3: Sucesiones geométricas

Contenido 1: Sucesión geométrica

P Complete el espacio en blanco en la sucesión 1, 2, 4, 8, ___, 32, 64, … y establezca una relación entre cada dos términos consecutivos.

S De acuerdo con el diagrama

1, 2, 4, 8, ___, 32, 64, …

×2 ×2 ×2 ×2 ×2 ×2

cada término, excepto el primero, se obtiene multiplicando por 2 el anterior inmediato, así que

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = (1)(2) = 2$$
$$a_3 = (2)(2) = 4$$
$$a_4 = (4)(2) = 8$$
$$a_5 = (8)(2) = \mathbf{16}$$
$$\vdots$$

Por tanto, resulta la sucesión 1, 2, 4, 8, **16**, 32, 64, …, que se conoce como sucesión geométrica.

C Una sucesión en la que cada término después del primero se obtiene multiplicando el anterior inmediato por una cantidad constante se llama **sucesión geométrica**. Esta cantidad constante recibe el nombre de **razón común** y se denota con la letra r.

Ejemplo ¿Cuál es la razón común en la sucesión dada en el problema?

En la sucesión del problema dado la razón común r es 2, ya que esta es la constante por la cual se multiplica cada término para obtener el siguiente. También se puede calcular la razón obteniendo los cocientes

$$r = a_2 \div a_1 = 2 \div 1 = 2$$
$$r = a_3 \div a_2 = 4 \div 2 = 2$$
$$r = a_4 \div a_3 = 8 \div 4 = 2$$

Por lo tanto, la razón común es $r = 2$.

E Dadas las siguientes sucesiones geométricas, complete los espacios en blanco y calcule r:

a) 3, 6, 12, ____, 48, 96, …

b) 2, 6, 18, ____, ____, …

c) 5, 10, ____, 40, ____, …

d) ____, ____, 8, 4, ____, …

e) 1, ____, ____, 27, 81, ____, , ….

f) ____, ____, 4, −8, ____, …

15

S3: Sucesiones geométricas
C1: Sucesión geométrica

P Complete el espacio en blanco y establezca una relación entre dos términos consecutivos.

S 1, 2, 4, 8, <u>16</u>, 32, 64, …

× 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2

C Una sucesión en la que cada término se obtiene multiplicando el anterior inmediato por una cantidad constante se llama <u>sucesión geométrica</u>. Esta cantidad constante recibe el nombre de <u>razón común r.</u>

Ej ¿Cuál es la razón común en la sucesión dada en el problema?

$$\begin{aligned} a_2 \div a_1 &= 2 \div 1 = 2 \\ a_3 \div a_2 &= 4 \div 2 = 2 \\ a_4 \div a_3 &= 8 \div 4 = 2 \end{aligned}$$

$r = 2$

E Complete las siguientes sucesiones geométricas y calcule la razón común.

a) 3, 6, 12, <u>24</u>, 48, 96, … $r = 2$

$$\begin{aligned} a_2 \div a_1 &= 6 \div 3 = 2 \\ a_3 \div a_2 &= 12 \div 6 = 2 \\ a_4 \div a_3 &= 24 \div 12 = 2 \end{aligned}$$

b) 2, 6, 18, <u>54</u>, <u>162</u>, … $r = 3$

$$\begin{aligned} a_2 \div a_1 &= 6 \div 2 = 3 \\ a_3 \div a_2 &= 18 \div 6 = 3 \\ a_4 \div a_3 &= 54 \div 18 = 3 \end{aligned}$$

c) 5, 10, <u>20</u>, 40, <u>80</u> … $r = 2$

d) <u>32</u>, <u>16</u>, 8, 4, <u>2</u>, … $r = \frac{1}{2}$

e) 1, <u>3</u>, <u>9</u>, 27, 81, <u>243</u>, …. $r = 3$

f) <u>1</u>, <u>−2</u>, 4, −8, <u>16</u>, … $r = -2$

Contenido 2 Término general de una sucesión geométrica

Contenido 2: Término general de una sucesión geométrica

P Dada la sucesión geométrica 1, 3, 9, 27, …
a) Calcule a_1 y r.
b) Determine a_n.

S

a) En la sucesión dada vemos que $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 9$, $a_4 = 27$ y calculando los cocientes sucesivos

$a_2 \div a_1 = 3 \div 1 = 3$ $\quad a_2 \div a_1 = 9 \div 3 = 3$ $\quad a_2 \div a_1 = 27 \div 9 = 3$

se constata que la sucesión es geométrica con razón común $r = 3$.

b) En este caso

Recuerde que $3^0 = 1$

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 &&= (1)(3^{1-1})\\
a_2 = a_1(3) &= (1)(3) &&= (1)(3^{2-1})\\
a_3 = a_2(3) &= (1)\underbrace{(3)(3)}_{2\text{ veces }3} &&= (1)(3^{3-1})\\
a_4 = a_3(3) &= (1)\underbrace{(3)(3)(3)}_{3\text{ veces }3} &&= (1)(3^{4-1})\\
&\vdots\\
a_n = a_{n-1}(3) &= (1)\underbrace{(3)(3)\cdots(3)}_{(n-1)\text{ veces }3} &&= (1)(3^{n-1}) = 3^{n-1}
\end{aligned}$$

En conclusión, el término general de la sucesión dada es $a_n = 3^{n-1}$.

C

El término general a_n de una sucesión geométrica se puede expresar en función de a_1 y r como sigue

$r^0 = 1$, $r \neq 0$

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1 &&= a_1 r^{1-1}\\
a_2 &= a_1 r &&= a_1 r^{2-1}\\
a_3 &= a_1 \underbrace{r \cdot r}_{r^2} &&= a_1 r^{3-1}\\
a_4 &= a_1 \underbrace{r \cdot r \cdot r}_{r^3} &&= a_1 r^{4-1}\\
&\vdots\\
a_n &= a_1 \underbrace{r \cdots r}_{(n-1)\text{ veces } r} &&= a_1 r^{n-1}
\end{aligned}$$

En conclusión, el término general es $a_n = a_1 r^{n-1}$.

Este contenido tiene 2 páginas (ver en el LT)

Aprendizajes esperados

Determina el término general de una sucesión geométrica.

Secuencia:

En la clase anterior se estudió la definición de sucesión geométrica y el proceso para determinar la razón común. Esto facilita la determinación del término general de una sucesión de este tipo.

En esta clase se deduce una fórmula para el término general (a_n) de una sucesión geométrica conocidos el primer término (a_1) y la razón común (r).

Puntos esenciales:

Usar la definición de potenciación para indicar el término general de una sucesión geométrica.

Deducir la fórmula para el cálculo del término general de una sucesión geométrica estableciendo una relación de recurrencia. Dicha fórmula debe derivarse mediante la explicación de la solución del problema.

Sustituir correctamente los valores para las variables involucradas en la fórmula al momento de desarrollar ejemplos y ejercicios.

C2: Término general de una sucesión geométrica

P Dada la sucesión geométrica $1, 3, 9, 27, \ldots$
a) Encuentre a_1 y r.
b) Determine el término general a_n.

S a) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 9$, $a_4 = 27$

$$a_2 \div a_1 = 3 \div 1 = 3 \qquad \boxed{r = 3}$$
$$a_3 \div a_2 = 9 \div 3 = 3$$
$$a_4 \div a_3 = 27 \div 9 = 3$$

b)
$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 &&= (1)(3^{1-1})\\
a_2 &= (1)(3) &&= (1)(3^{2-1})\\
a_3 &= (1)\underbrace{(3)(3)}_{2\ veces\ 3} &&= (1)(3^{3-1})\\
&\vdots &&\vdots\\
a_n &= (1)\underbrace{(3)(3)\cdots(3)}_{n-1\ veces\ 3} &&= (1)(3^{n-1}) = 3^{n-1}
\end{aligned}$$

$a_n = 3^{n-1}$.

Primer término Razón

C Término general de una sucesión geométrica

$a_n = a_1 r^{n-1}$

Ej Determine el término general a_n de una sucesión geométrica con $a_1 = 2$ y $r = 3$. Calcule a_4.

Haciendo $a_1 = 2$ y $r = 3$ en $a_n = a_1 r^{n-1}$ resulta
$$a_n = (2)(3^{n-1}).$$
Para $n = 4$,
$$a_4 = (2)(3^{4-1}) = (2)(3^3) = (2)(27) = 54$$

E Determine a_n y el término que se indica:

a) $2, 4, 8, \ldots$ $\quad a_6$

Sustituyendo $a_1 = 2$ y $r = 2$ en $a_n = a_1 r^{n-1}$ resulta
$$a_n = (2)(2^{n-1}) = 2^n.$$
Para $n = 6$, $a_6 = 2^6 = 64$.

b) $5, 10, 20, \ldots$ $\quad a_7$

Haciendo $a_1 = 5$ y $r = 2$ en $a_n = a_1 r^{n-1}$ resulta
$$a_n = (5)(2^{n-1}).$$
Para $n = 7$, $a_7 = (5)(2^{7-1}) = (5)(2^6) = 320$.

Contenido 3 Aplicación de la fórmula del término general de una sucesión geométrica (1)

Aprendizajes esperados

Aplica la fórmula para el término general de una sucesión geométrica en la determinación de a_1 o de la razón común r.

Secuencia:

Como en la clase anterior se dedujo formalmente la fórmula del término general de una sucesión geométrica, en esta clase se aplica para determinar el primer término o la razón común conocido un término cualquiera estableciendo así una ecuación de primer grado.

Puntos esenciales:

Recordar la fórmula del término general de una sucesión geométrica.

Sustituir correctamente los valores para las variables involucradas en dicha fórmula.

Resolver la ecuación lineal que resulte.

Aplicar la descomposición de un número en factores primos al momento de determinar la razón común.

Aplicar correctamente la propiedad: Si $x^3 = y^3$, entonces $x = y$. Esta es válida para potencias de grado 3, no siéndolo para las de grado 2.

Contenido 3: Aplicación de la fórmula del término general de una sucesión geométrica (1)

P Dada una sucesión geométrica con $r=2$ y $a_4=24$, calcule a_1.

S Al sustituir $n=4$ en la fórmula del término general $a_n=a_1r^{n-1}$, resulta

$$a_4=a_1r^{4-1}=a_1r^3$$

Se sustituye $a_4=24$ y $r=2$ en la expresión anterior y se sigue que

$$a_1(2^3)=24$$
$$a_1=\frac{24}{8}$$
$$\mathbf{a_1=3}$$

La sucesión geométrica es 3, 6, 12, 24, …

E Calcule a_1 para cada sucesión geométrica con:

a) $r=3$ y $a_4=81$ b) $r=-2$ y $a_5=64$ c) $r=-1$ y $a_9=5$

Desafío

Ejemplo Dada una sucesión geométrica tal que $a_1=4$ y $a_4=108$, determine r.

Al sustituir $n=4$ en la fórmula del término general, se obtiene

$$a_4=a_1r^{4-1}=a_1r^3$$

Al sustituir $a_1=4$ y $a_4=108$ en la expresión anterior se obtiene

$$4r^3=108$$
$$r^3=\frac{108}{4}$$
$$r^3=27$$
$$r^3=3^3$$
$$\mathbf{r=3}$$

Descomposición de 27 en factores

27	3
9	3
3	3
1	

$27=(3)(3)(3)=3^3$

Así, la sucesión geométrica es 4, 12, 36, 108, …

E Calcule r para cada sucesión geométrica con:

a) $a_1=1$ y $a_4=125$ b) $a_1=4$ y $a_6=128$ c) $a_1=2$ y $a_8=-256$

C3: Aplicación de la fórmula del término general de una sucesión geométrica (1)

(P) Dada una sucesión geométrica con $r=2$ y $a_4=24$, calcule a_1.

(S) Sustituyendo $a_4=24$, $r=2$ y $n=4$ en $a_n=a_1r^{n-1}$ resulta

$$24=a_1(2^{4-1})=a_1(2^3)=8a_1$$
$$a_1=\frac{24}{8}=3$$

(E) Calcule a_1 para una sucesión geométrica con:

a) $r=3$ y $a_4=81$

Sustituyendo $a_4=81$, $r=3$ y $n=4$ en $a_n=a_1r^{n-1}$ resulta

$$81=a_1(3^{4-1})=a_1(3^3)=27a_1$$
$$a_1=\frac{81}{27}=3$$

b) $r=-2$ y $a_5=64$

Sustituyendo $a_5=64$, $r=-2$ y $n=5$ en $a_n=a_1r^{n-1}$ resulta

$$64=a_1[(-2)^{5-1}]=a_1(-2)^4=16a_1$$
$$a_1=\frac{64}{16}=4$$

c) $r=-1$ y $a_9=5$

Sustituyendo $a_9=5$, $r=-1$ y $n=9$ en $a_n=a_1r^{n-1}$ resulta

$$5=a_1[(-1)^{9-1}]=a_1(-1)^8=a_1$$
$$a_1=5$$

Contenido 4 Aplicación de la fórmula del término general de una sucesión geométrica (2)

Contenido 4: Aplicación de la fórmula del término general de una sucesión geométrica (2)

P Determine a_1 y r para una sucesión geométrica, sabiendo que $a_2 = 10$ y $a_4 = 40$.

S Se sabe que $a_2 = a_1 r$ y $a_4 = a_1 r^3$. Si se calcula $a_4 \div a_2$ y se sustituye $a_2 = 10$ y $a_4 = 40$ resulta

$$\frac{a_1 r^3}{a_1 r} = \frac{40}{10}$$
$$r^2 = 4$$
$$r = \pm 2$$

Se sustituye $\boldsymbol{r = 2}$ en $a_2 = a_1 r$, y se encuentra que $a_1(2) = 10$, es decir, $\boldsymbol{a_1 = 5}$.

De igual manera, si se sustituye $\boldsymbol{r = -2}$ en $a_2 = a_1 r$, se tiene $a_1(-2) = 10$, es decir, $\boldsymbol{a_1 = -5}$.

E Calcule a_1 y r para cada sucesión geométrica, sabiendo que:

a) $a_2 = 3$ y $a_4 = 27$

b) $a_3 = 12$ y $a_5 = 48$

Desafío

Ejemplo Calcule a_1 y r para una sucesión geométrica, sabiendo que $a_2 = 10$ y $a_5 = 80$.

Como $a_2 = a_1 r$ y $a_5 = a_1 r^4$, si se calcula el cociente $a_5 \div a_2$ resulta

$$\frac{a_5}{a_2} = \frac{a_1 r^4}{a_1 r} = r^3 \quad ①$$

También $a_2 = 10$ y $a_5 = 80$, así que

$$\frac{a_5}{a_2} = \frac{80}{10} = 8 \quad ②$$

Igualando ① y ② se tiene

$$r^3 = 8$$
$$r^3 = 2^3$$
$$r = 2$$

Descomposición de 8 en factores

8	2
4	2
2	2
1	

$8 = (2)(2)(2) = 2^3$

Se sustituye $a_2 = 10$ y $r = 2$, en la expresión $a_2 = a_1 r$, resultando

$$10 = a_1(2)$$
$$a_1 = \frac{10}{2} = 5$$

En consecuencia, $\boldsymbol{a_1 = 5}$ y $\boldsymbol{r = 2}$.

E Calcule a_1 y r de cada sucesión geométrica, sabiendo que:

a) $a_2 = 6$ y $a_5 = 48$

b) $a_2 = 6$ y $a_5 = -162$

Aprendizajes esperados

Aplica la fórmula para el término general de una sucesión geométrica al determinar su primer término a_1 y la razón común r.

Secuencia:

En la clase anterior se aplicó la fórmula del término general de una sucesión geométrica para determinar a_1 o r, ahora lo haremos para determinar ambos valores conocidos dos de sus términos.

Puntos esenciales:

Usar la fórmula del término general de una sucesión geométrica para expresar cada término conocido en función del primer término y de la razón común.

A partir de los términos conocidos se debe lograr establecer una ecuación que involucre únicamente a la razón común como variable.

Para resolver dicha ecuación se debe aplicar la descomposición de un número en factores primos.

Sustituir acertadamente los valores de las variables involucradas al momento de determinar el primer término.

C4: Aplicación de la fórmula del término general de una sucesión geométrica (2)

P Determine a_1 y r para una sucesión geométrica, sabiendo que $a_2 = 10$ y $a_4 = 40$.

S Sustituyendo $a_2 = 10$ y $a_4 = 40$, resulta

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{a_1 r^3}{a_1 r} = \frac{40}{10}$$
$$r^2 = 4$$
$$r = \pm 2$$

Al hacer $r = 2$ en $a_2 = a_1 r$, resulta
$a_1(2) = 10$, es decir, $a_1 = 5$.

Al hacer $r = -2$, en $a_2 = a_1 r$, resulta

$a_1(-2) = 10$, es decir, $a_1 = -5$.

E Calcule a_1 y r para cada sucesión geométrica, sabiendo que

a) $a_2 = 3$ y $a_4 = 27$

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{a_1 r^3}{a_1 r} = \frac{27}{3}$$
$$r^2 = 9$$
$$r = \pm 3$$

Al hacer $r = 3$ en $a_2 = a_1 r$, resulta
$a_1(3) = 3$, es decir, $a_1 = 1$.

Al hacer $r = -3$, en $a_2 = a_1 r$, resulta
$a_1(-3) = 3$, es decir, $a_1 = -1$.

b) $a_3 = 12$ y $a_5 = 48$

Contenido 5 Suma de los n primeros términos de una sucesión geométrica

Aprendizajes esperados

Determina la suma de los primeros n términos de una sucesión geométrica.

Secuencia:

En clases anteriores se dedujo y se aplicó la fórmula del término general de una sucesión geométrica, la que será nuevamente utilizada. A como se estableció para las sucesiones aritméticas, en esta clase determinaremos la suma de cierto número de términos de una sucesión geométrica.

Puntos esenciales:

Recordar cómo se obtiene cierto término de una sucesión geométrica conocidos a_1 y r haciendo uso de la fórmula del término general.

Al multiplicar los términos de una sucesión geométrica por su razón común obtenemos una nueva sucesión geométrica cuyo primer término es el segundo de la primera sucesión y la razón común es la misma.

Deducir la fórmula para la suma de los n primeros términos de una sucesión geométrica S_n destacando el hecho que esta es válida siempre que $r \neq 1$. Esta fórmula puede derivarse a partir de la solución del problema. Debe orientarse la lectura comparativa entre la solución y la conclusión planteada.

Contenido 5: Suma de los n primeros términos de una sucesión geométrica

P Dada la sucesión geométrica 1, 3, 9, 27, 81, …, calcule la suma de los primeros 5 términos mediante los siguientes pasos:
a) Indique la suma S de los primeros 5 términos.
b) Multiplique por 3 la suma anterior.
c) De la expresión obtenida en b) reste la expresión obtenida en a) y calcule el valor de la suma S.

S
a) $S = 1 + 3 + 9 + 27 + 81$
b) $3S = 3 + 9 + 27 + 81 + 243$
c) Se expresa $3S - S$

$$\begin{aligned} 3S &= 3 + 9 + 27 + 81 + 243 \\ -S &= -1 - 3 - 9 - 27 - 81 \\ \hline 2S &= -1 \qquad\qquad\qquad + 243 \\ 2S &= 242 \\ S &= \frac{242}{2}, \text{ es decir, } \mathbf{S = 121}. \end{aligned}$$

C En una sucesión geométrica conocidos a_1 y r se establece la suma de sus n primeros términos S_n, de la siguiente manera:

$$S_n = a_1 + \underbrace{(a_1 r)}_{a_2} + \underbrace{(a_1 r^2)}_{a_3} + \cdots + \underbrace{(a_1 r^{n-2})}_{a_{n-1}} + \underbrace{(a_1 r^{n-1})}_{a_n} \qquad ①$$

la multiplicación de la expresión anterior por r se transforma en

$$rS_n = \underbrace{(a_1 r)}_{a_2} + \underbrace{(a_1 r^2)}_{a_3} + \cdots + \underbrace{(a_1 r^{n-2})}_{a_{n-1}} + \underbrace{(a_1 r^{n-1})}_{a_n} + a_1 r^n \qquad ②$$

La sustracción ② − ① da lugar a lo siguiente:

$$\begin{aligned} rS_n &= (a_1 r) + (a_1 r^2) + \cdots + (a_1 r^{n-2}) + (a_1 r^{n-1}) + a_1 r^n \\ -S_n &= -a_1 - (a_1 r) - (a_1 r^2) - \cdots - (a_1 r^{n-2}) - (a_1 r^{n-1}) \\ \hline rS_n - S_n &= -a_1 \qquad\qquad\qquad\qquad + a_1 r^n \\ (r-1)\, S_n &= a_1(r^n - 1) \end{aligned}$$

Si $r \neq 1$, se escribe $S_n = \dfrac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$ o equivalentemente $S_n = \dfrac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$.

Ejemplo Compruebe el resultado obtenido en la solución del problema aplicando la fórmula anterior.

De acuerdo con el problema, $a_1 = 1$, $r = 3$ y $n = 5$, al sustituir estos valores en la fórmula anterior se sigue que

$$S_5 = \frac{1(3^5 - 1)}{3 - 1} = \frac{242}{2} = \mathbf{121}$$

Obteniendo de esta manera la misma respuesta dispuesta en la solución del problema.

E Calcule la suma indicada para cada sucesión geométrica con:
a) $a_1 = 2$ y $r = 4$, determine S_3
b) $a_1 = 8$ y $r = 2$, determine S_5
c) $a_1 = -9$ y $r = 3$, determine S_4
d) $a_1 = -3$ y $r = -1$, determine S_7

20

C5: Suma de los n primeros términos de una sucesión geométrica

P Dada la sucesión geométrica $1, 3, 9, 27, 81, \ldots$
Determine la suma de los primeros 5 términos mediante los siguientes pasos:
a) Indique la suma S de los primeros 5 términos.
b) Multiplique por 3 la suma anterior.
c) De la expresión obtenida en b) reste la expresión obtenida en a) y determine el valor de S.

S
a) $S = 1 + 3 + 9 + 27 + 81$
b) $3S = 3 + 9 + 27 + 81 + 243$
c)
$$\begin{aligned} 3S &= 3 + 9 + 27 + 81 + 243 \\ -)\ S &= 1 + 3 + 9 + 27 + 81 \\ \hline (3-1)S &= -1 \qquad\qquad\qquad + 243 \\ 2S &= 242 \\ S &= 121 \end{aligned}$$

Observe que: $2 = 3 - 1 = r - 1$
$242 = 1(243 - 1) = 1(3^5 - 1) = a_1(r^5 - 1)$

C Suma de n primeros términos de una sucesión geométrica:

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

Ej Aplique la fórmula anterior para comprobar la solución obtenida en el problema.

Sustituyendo $a_1 = 1$, $r = 3$ y $n = 5$ resulta:

$$S_5 = \frac{1(3^5 - 1)}{3 - 1} = \frac{242}{2} = 121$$

E Dada una sucesión geométrica con

a) $a_1 = 2$ y $r = 4$, determine S_3.

$$S_3 = \frac{2(4^3 - 1)}{4 - 1} = \frac{126}{3} = 42$$

b) $a_1 = 8$ y $r = 2$, determine S_5.

$$S_5 = \frac{8(2^5 - 1)}{2 - 1} = (8)(31) = 248$$

c) $a_1 = -9$ y $r = 3$, determine S_4.

$$S_4 = \frac{-9(3^4 - 1)}{3 - 1} = \frac{-720}{2} = -360$$

Contenido 6 Aplicación de la fórmula para la suma de términos de una sucesión geométrica

Contenido 6: Aplicación de la fórmula para la suma de términos de una sucesión geométrica

P

Dada la sucesión geométrica con $r=2$ y $S_6=126$, calcule a_1.

S

Al sustituir $r=2$, $n=6$ y $S_6=126$ en la expresión $S_n=\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$ se sigue que

$$126=\frac{a_1(2^6-1)}{2-1}$$
$$126=a_1(63)$$
$$a_1=\frac{126}{63}$$
$$\mathbf{a_1=2}$$

E

Determine a_1 para cada sucesión geométrica con:

a) $r=2$ y $S_5=93$

b) $r=5$ y $S_3=155$

c) $r=-2$ y $S_4=5$

d) $r=-4$ y $S_4=204$

21

Aprendizajes esperados

Aplica la fórmula de la suma de los n primeros términos de una sucesión geométrica en el cálculo del primer término.

Secuencia:

En la clase anterior se dedujo la fórmula para la suma de los n primeros términos de una sucesión geométrica. Aquí se aplica para determinar el primer término conocidas la razón común y la suma de cierto número de términos.

Puntos esenciales:

Recordar la fórmula para la suma de los n primeros términos de una sucesión geométrica.

Al sustituir la razón común y la suma de cierto número de términos en dicha fórmula se obtiene una ecuación lineal cuya solución determina el primer término.

Recordar el concepto de potenciación y el orden de las operaciones para calcular correctamente el valor de a_n.

C6: Aplicación de la fórmula para la suma de términos de una sucesión geométrica

P Dada la sucesión geométrica con $r=2$ y $S_6=126$, calcule a_1.

S Sustituyendo $r=2$, $n=6$ y $S_6=126$ en $S_n=\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$ resulta

$$126=\frac{a_1(2^6-1)}{2-1}$$
$$126=a_1(63)$$
$$a_1=\frac{126}{63}$$
$$a_1=2$$

E Determine a_1 para cada sucesión geométrica con:

a) $r=2$ y $S_5=93$

Como $n=5$, al sustituir en la fórmula de la suma, resulta:

$$93=\frac{a_1(2^5-1)}{2-1}$$
$$93=a_1(31)$$
$$a_1=3$$

b) $r=5$ y $S_3=155$

Como $n=3$, resulta:

$$155=\frac{a_1(5^3-1)}{5-1}$$
$$620=a_1(124)$$
$$a_1=5$$

Contenido 1 Símbolo de sumatoria $\sum$

Aprendizajes esperados

Expresa sumas utilizando el símbolo de sumatoria $\sum$.

Secuencia:

Hasta este momento los estudiantes han determinado sumas de cierto número de términos tanto para sucesiones aritméticas como geométricas. A partir de esta clase se introduce un nuevo símbolo para denotar sumas.

Puntos esenciales:

Introducir el símbolo de sumatoria (Sigma: $\sum$) para denotar sumas.

Hacer notar que con el uso de este símbolo no es necesario enumerar todos los sumandos para expresar determinada suma.

Identificar los elementos que intervienen en la notación adoptada al momento de escribir:

- ✓ Expresiones dadas con el símbolo Sigma: $\sum$ como sumas.
- ✓ Sumas indicadas usando la notación de sumatoria.

Sección 4: Notación de sumatoria

Contenido 1: Símbolo de sumatoria $\sum$

La suma extendida $a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n$ de los primeros n términos de una sucesión puede expresarse con el símbolo Sigma $\sum$ como sigue

Suma extendida	En notación de sumatoria	Se lee
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$	$\sum_{k=1}^{n} a_k$	Sumatoria desde $k=1$ hasta n de a_k

Nótese que k indica la posición del término que se suma.

Se observa además que para expresar la suma con el uso de este símbolo, no es necesario enumerar todos los sumandos.

Más concretamente, se pueden puntualizar los elementos que intervienen en la notación de sumatoria $\sum$ de la siguiente manera:

$$\sum_{k=\boxed{1}}^{\boxed{n}} \boxed{a_k}$$

$\boxed{n} \rightarrow$ Límite superior

$\boxed{a_k} \rightarrow$ Argumento o k-ésimo elemento

$k=\boxed{1} \rightarrow$ Límite inferior

Ejemplo 1 Escriba las expresiones dadas como una suma extendida sustituyendo sucesivamente los valores de k desde 1 hasta el límite superior indicado.

a) $\sum_{k=1}^{n} 2k$ b) $\sum_{k=1}^{5} k^2$ c) $\sum_{k=3}^{6} k^3$ d) $\sum_{k=1}^{n} (3k+1)$

a) $\sum_{k=1}^{n} 2k = 2+4+6+\cdots+2n$ b) $\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$

c) $\sum_{k=3}^{6} k^3 = 3^3+4^3+5^3+6^3$ d) $\sum_{k=1}^{n} (3k+1) = 4+7+10+\cdots+(3n+1)$

E_1 Escriba las expresiones dadas como una suma extendida sustituyendo los valores de k desde 1 hasta el límite superior indicado.

a) $\sum_{k=1}^{n} 3k$ b) $\sum_{k=1}^{6} k^2$ c) $\sum_{k=4}^{7} 2^k$

Ejemplo 2 Exprese las siguientes sumas dadas en forma extendida usando la notación sumatoria $\sum$.

a) $1+2+3+4+\cdots+n$ b) $3+3^2+3^3+3^4+3^5$

a) $1+2+3+4+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k$ b) $3+3^2+3^3+3^4+3^5=\sum_{k=1}^{5} 3^k$

E_2 Exprese las siguientes sumas extendidas usando la notación sumatoria $\sum$.

a) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ b) $1+2+3+4+\cdots+20$ c) $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$

23

S4: Notación Sigma

C1: Símbolo de sumatoria $\sum$

Suma	Notación sigma	Se lee
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$	$\sum_{k=1}^{n} a_k$	Sumatoria desde $k=1$ hasta n de a_k

Elementos que intervienen en la notación de sumatoria Sigma $\sum$

$\boxed{n} \longrightarrow$ Límite superior

$\sum a_k \longrightarrow$ Argumento

$k=\boxed{1} \longrightarrow$ Límite inferior

(Ej) Escriba la expresión dada como una suma extendida:

a) $\sum_{k=1}^{n} 2k = 2+4+6+\cdots+2n$

b) $\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$

c) $\sum_{k=3}^{6} k^3 = 3^3+4^3+5^3+6^3$

d) $\sum_{k=1}^{n} (3k+1) = 4+7+10+\cdots+(3n+1)$

(E1) a) $\sum_{k=1}^{n} 3k = 3+6+9+\cdots+3n$

b) $\sum_{k=1}^{6} k^2 = 1+4+9+16+25+36$

(Ej) Exprese las sumas dadas usando la notación sumatoria $\sum$

a) $1+2+3+4+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k$

b) $3+3^2+3^2+3^4+3^5=\sum_{k=1}^{5} 3^k$

(E2) a) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n} k^2$

b) $1+2+3+4+\cdots+20=\sum_{k=1}^{20} k$

Contenido 2 Propiedades de sumatoria

Contenido 2: Propiedades de sumatoria

P En cada uno de los incisos escriba las siguientes expresiones como sumas extendidas y establezca una relación entre ellas:

a) $\sum_{k=1}^{10} 2k$ y $2\sum_{k=1}^{10} k$ b) $\sum_{k=1}^{10}(k+k^2)$ y $\sum_{k=1}^{10} k+\sum_{k=1}^{10} k^2$

S

a) $\sum_{k=1}^{10} 2k=(2)(1)+(2)(2)+(2)(3)+\cdots+(2)(10)=2(1+2+3+\cdots+10)$

$2\sum_{k=1}^{10} k=2(1+2+3+\cdots+10)$

Por tanto, $\sum_{k=1}^{10} 2k=2\sum_{k=1}^{10} k$

b) $\sum_{k=1}^{10}(k+k^2)=(1+1^2)+(2+2^2)+(3+3^2)+\cdots+(10+10^2)$

$=(1+2+3+\cdots+10)+(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)$

y $\sum_{k=1}^{10} k=1+2+3+\cdots+10$, $\sum_{k=1}^{10} k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2$

Así, $\sum_{k=1}^{10} k+\sum_{k=1}^{10} k^2=(1+2+3+\cdots+10)+(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)$

Por tanto, $\sum_{k=1}^{10}(k+k^2)=\sum_{k=1}^{10} k+\sum_{k=1}^{10} k^2$

C

En general, si c es una constante, se tienen las siguientes propiedades:

a) $\sum_{k=1}^{n} ck=c\sum_{k=1}^{n} k$, en particular $\sum_{k=1}^{n} c=nc$.

b) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n} a_k+\sum_{k=1}^{n} b_k$

$\sum_{k=1}^{n} c=\underbrace{c+c+\cdots+c}_{n\text{ veces}}=nc$

Ejemplo:

$\sum_{k=1}^{5} 3=3+3+3+3+3=(5)(3)=15$

E

Reescriba las siguientes expresiones utilizando las propiedades estudiadas:

a) $\sum_{k=1}^{5} 5k$ b) $\sum_{k=1}^{15} 2$

c) $\sum_{k=1}^{4}(k^2+k^3)$ d) $\sum_{k=1}^{6}(2k+k^2)$

24

Aprendizajes esperados

Expresa sumas utilizando las propiedades de sumatoria.

Secuencia:

En la clase anterior se introdujo el símbolo de sumatoria (Sigma: ∑) para denotar sumas. Aquí se establecen algunas de las propiedades de las sumatorias.

Puntos esenciales:

Recordar los elementos que conforman la expresión $\sum_{k=1}^{n} a_k$ y la importancia de la buena identificación de estos.

Inducir las propiedades que se pretenden estudiar a partir de ejemplos concretos.

Expresar verbalmente la lectura de las propiedades que se estudian.

Usar dichas propiedades en la reescritura de expresiones que involucran el símbolo de sumatoria.

C2: Propiedades de sumatoria

P Escriba las siguientes expresiones como sumas extendidas y establezca una relación entre ellas.

a) $\sum_{k=1}^{10} 2k$ y $2\sum_{k=1}^{10} k$ b) $\sum_{k=1}^{10}(k+k^2)$ y $\sum_{k=1}^{10} k+\sum_{k=1}^{10} k^2$

S a) $\sum_{k=1}^{10} 2k=(2)(1)+(2)(2)+(2)(3)+\cdots+(2)(10)$

$=2(1+2+3+\cdots+10)$

$2\sum_{k=1}^{10} k=2(1+2+3+\cdots+10)$

Por tanto, $\sum_{k=1}^{10} 2k=2\sum_{k=1}^{10} k$

b) $\sum_{k=1}^{10}(k+k^2)=(1+1^2)+(2+2^2)+\cdots+(10+10^2)$

$=(1+2+\cdots+10)+(1^2+2^2+\cdots+10^2)$

$\sum_{k=1}^{10} k+\sum_{k=1}^{10} k^2=(1+2+\cdots+10)+(1^2+2^2+\cdots+10^2)$

Por tanto, $\sum_{k=1}^{10}(k+k^2)=\sum_{k=1}^{10} k+\sum_{k=1}^{10} k^2$

C Si c es una constante que no depende de k entonces:

a) $\sum_{k=1}^{n} ck=c\sum_{k=1}^{n} k$ en particular $\sum_{k=1}^{n} c=nc$

b) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n} a_k+\sum_{k=1}^{n} b_k$

E Reescriba las siguientes expresiones utilizando las propiedades estudiadas.

a) $\sum_{k=1}^{5} 5k=5\sum_{k=1}^{5} k$ b) $\sum_{k=1}^{15} 2=15(2)$

c) $\sum_{k=1}^{4}(k^2+k^3)=\sum_{k=1}^{4} k^2+\sum_{k=1}^{4} k^3$

d) $\sum_{k=1}^{6}(2k+k^2)=2\sum_{k=1}^{6} k+\sum_{k=1}^{6} k^2$

Contenido 3 Suma de los n primeros números naturales

Aprendizajes esperados

Deduce una fórmula para la suma de los n primeros números naturales.

Secuencia:

En las clases anteriores se han expresado sumas utilizando el símbolo de sumatoria Sigma: $\sum$. En esta clase, deduciremos una fórmula para la suma de los n primeros números naturales.

Puntos esenciales:

Determinar la diferencia común de la sucesión aritmética que se forma al tomar los n primeros números naturales.

Recordar la fórmula para la suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética.

Expresar la suma de los n primeros números naturales usando el símbolo Sigma: $\sum$. La expresión para esta suma requiere de la identificación del último sumando n.

Deducir la fórmula para la suma de los n primeros números naturales.

Usar dicha fórmula para determinar el valor numérico de ciertas sumatorias.

Contenido 3: Suma de los n primeros números naturales

P Deduzca una expresión para la suma de los términos de la sucesión 1, 2, 3, 4,…, n.

S

La diferencia común d es 1 ya que

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots \quad (+1,\ +1,\ +1)$$

Ahora bien, se sustituye $a_1 = 1$ y $a_n = n$ en la fórmula para la suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética para obtener

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$$S_n = \frac{n}{2}(1+n)$$

Pero, $S_n = 1+2+3+\cdots+n = \sum_{k=1}^{n} k$, así que utilizando sumatoria se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1)$$

C

La suma de los n primeros números naturales está dada por

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1)$$

Ejemplo Calcule el valor de la sumatoria $\sum_{k=1}^{20} k$

Sustituyendo $n = 20$ en la fórmula anterior resulta

$$\sum_{k=1}^{20} k = \left(\frac{20}{2}\right)(20+1) = (10)(21) = 210$$

E

Calcule el valor de las siguientes sumatorias:

a) $\sum_{k=1}^{10} k$ b) $\sum_{k=1}^{15} k$ c) $\sum_{k=1}^{30} k$

25

C3: Suma de los n primeros números naturales

P Deduzca una expresión para la suma de los términos de la sucesión $1, 2, 3, 4, \ldots, n$.

$$1,\ 2,\ 3\ \ 4,\ldots \quad (+1\ \ +1\ \ +1)$$

S Sustituyendo $d = 1$, $a_1 = 1$ y $a_n = n$ en $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ resulta

$$S_n = \frac{n}{2}(1+n)$$

Pero $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k$

Así que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1)$

C La suma de los n primeros números naturales está dada por

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1)$$

Ej Calcule el valor de la sumatoria:

$$\sum_{k=1}^{20} k = \frac{20}{2}(20+1) = 10(21) = 210$$

E Calcule el valor de la sumatoria:

a) $\sum_{k=1}^{10} k = \frac{10}{2}(10+1) = 5(11) = 55$

b) $\sum_{k=1}^{15} k = \frac{15}{2}(15+1) = 15(8) = 120$

c) $\sum_{k=1}^{30} k = \frac{30}{2}(30+1) = 15(31) = 465$

Contenido 4 Suma de los cuadrados de los n primeros números naturales

Contenido 4: Suma de los cuadrados de los n primeros números naturales

La suma de los cuadrados de los n primeros números naturales está dada por

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1+4+9+\cdots+n^2$

Ejemplo 1 Calcule el valor de la sumatoria $\sum_{k=1}^{7} k^2$.

Aplicando la fórmula anterior para $n=7$ se sigue

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{7} k^2 &= \left(\frac{1}{6}\right)(7)(7+1)[(2)(7)+1]\\ &= \left(\frac{1}{6}\right)(7)(8)(15)\\ &= 140\end{aligned}$$

Por tanto, $\sum_{k=1}^{7} k^2 = \mathbf{140}$.

E_1

Calcule el valor de las siguientes sumas:

a) $\sum_{k=1}^{5} k^2$ b) $1+4+9+16+25+36+49+64$ c) $\sum_{k=1}^{10} k^2$

Ejemplo 2 Calcule el valor de la sumatoria $\sum_{k=1}^{5} (2k^2+k)$.

La suma dada puede ser reescrita como

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5} (2k^2+k) &= \sum_{k=1}^{5} 2k^2 + \sum_{k=1}^{5} k\\ &= 2\sum_{k=1}^{5} k^2 + \sum_{k=1}^{5} k\end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^{n} (a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$

Dado que $\sum_{k=1}^{5} k^2 = \left(\frac{1}{6}\right)(5)(5+1)[(2)(5)+1] = 55$ y $\sum_{k=1}^{5} = \left(\frac{1}{2}\right)(5)(5+1) = 15$, entonces

$2\sum_{k=1}^{5} k^2 + \sum_{k=1}^{5} k = (2)(55)+15 = 125$

Por tanto, $\sum_{k=1}^{5} (2k^2+k) = \mathbf{125}$.

E_2

Calcule el valor de las siguientes sumatorias:

a) $\sum_{k=1}^{5} (3k^2+k)$ b) $\sum_{k=1}^{7} \left(\frac{1}{2}k^2+5\right)$ c) $\sum_{k=1}^{6} (2k^2+3k)$

26

Aprendizajes esperados

Aplica la fórmula para la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales.

Secuencia:

En la clase anterior se estableció una fórmula para la suma de los n primeros números naturales. Aquí se pretende conocer una fórmula para la suma de sus cuadrados para luego aplicarla.

Puntos esenciales:

Expresar la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales usando el símbolo Sigma: $\sum$.

Mostrar la fórmula para la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales.

Usar las propiedades estudiadas y dicha fórmula para determinar el valor numérico de ciertas sumatorias.

Recordar el orden de aplicación de las operaciones en el cálculo de expresiones numéricas.

C4: Suma de los cuadrados de los n primeros números naturales

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Ej1 Calcule el valor de la sumatoria:

$$\sum_{k=1}^{7} k^2 = \frac{1}{6}(7)(7+1)[2(7)+1] = \frac{1}{6}(7)(8)(15) = 140$$

E1 Calcule el valor de las siguientes sumas.

a) $\sum_{k=1}^{5} k^2 = \frac{1}{6}(5)(5+1)[2(5)+1] = \frac{1}{6}(5)(6)(11) = 55$

b) $1+4+9+\cdots+49+64 = \frac{1}{6}(8)(9)(17) = 204$

c) $\sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{1}{6}(10)(10+1)[2(10)+1] = \frac{1}{6}(10)(11)(21) = 385$

Ej2 Calcule el valor de la sumatoria:

$$\sum_{k=1}^{5} (2k^2+k) = \sum_{k=1}^{5} 2k^2 + \sum_{k=1}^{5} k = 2\sum_{k=1}^{5} k^2 + \sum_{k=1}^{5} k$$

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = \frac{1}{6}(5)(5+1)[2(5)+1] = 55$$

$$\sum_{k=1}^{5} k = \frac{1}{2}(5)(5+1) = 15$$

$$2\sum_{k=1}^{5} k^2 + \sum_{k=1}^{5} k = (2)(55)+15 = 125$$

$$\sum_{k=1}^{5} (2k^2+k) = 125$$

E2 Determine el valor de las siguientes sumas.

a) $\sum_{k=1}^{5} (3k^2+k) = 180$ b) $\sum_{k=1}^{7} \left(\frac{1}{2}k^2+5\right) = 105$

c) $\sum_{k=1}^{6} (2k^2+3k) = 245$

Prueba de Matemática 11mo (30 min.)   Fecha: ____________

Unidad 1: Sucesiones

/ 20

Nombre: ______________________________ Sección: __________
Sexo: M / F

1. Calcule los primeros 5 términos de una sucesión con término general $a_n = 3n + 1$.
(2 puntos)

2. Dada la sucesión aritmética 5, 11, 17, 23,…

   a) Encuentre el primer término (1 punto)

   $a_1 =$

   b) Encuentre la diferencia común (1 punto)

   $d =$

   c) Determine el término general (2 puntos)

   $a_n =$

3. Dada una sucesión aritmética con $d = 2$ y $a_4 = 13$, calcule a_1 (2 puntos)

4. Dada una sucesión aritmética con $a_1 = -1$ y $a_8 = 13$, determine S_8.

(2 puntos)

5. Dada la sucesión geométrica 7, 14, 28, 56, ...

(2 puntos × 2 = 4)

a) Encuentre la razón común
$r =$

b) Determine el término general
$a_n =$

6. Dada una sucesión geométrica con $r = 2$ y $a_4 = 24$, calcule a_1.

(2 puntos)

7. Dada la sucesión geométrica con $a_1 = 3$ y $r = 4$, calcule S_4.

(2 puntos)

8. Expresa la suma dada en forma extendida usando la notación sumatoria $\sum$.

(2 puntos)

$3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 =$

Nombre: ___________________________________

Unidad 2

Potenciación y Funciones Exponenciales

Sección 1 Potenciación y radicación

Sección 2 Funciones exponenciales

Contenido 1 Definición de potencia con base racional y exponente un número natural

Aprendizajes esperados

Aplica el concepto de potencia identificando sus componentes en el cálculo de productos numéricos.

Secuencia:

En los estudios de primaria y de séptimo grado los estudiantes han manipulado la definición de potenciación, por lo que se debe introducir realizando un breve recordatorio.

Puntos esenciales:

Expresar productos indicados de factores repetidos como potencias.

Identificar los términos que intervienen en una potencia.

Notar que:

- ✓ Si el exponente es par, la potencia será siempre positiva.
- ✓ Si el exponente es impar y la base es negativa, la potencia será siempre negativa.

Aplicar correctamente la ley de los signos para la multiplicación.

Recordar la multiplicación de números decimales y de fracciones.

Sección 1: Potenciación y radicación

Contenido 1: Definición de potencia con base racional y exponente un número natural

P Escriba en el espacio en blanco el número que hace verdadera la expresión.

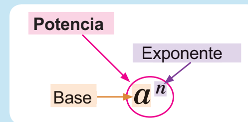
a) $(2)(2) = 2^{\square}$ b) $(2)(2)(2) = 2^{\square}$ c) $(2)(2)(2)(2)(2)(2)(2) = 2^{\square}$

S

a) $(2)(2) = 2^2$ b) $(2)(2)(2) = 2^3$ c) $(2)(2)(2)(2)(2)(2)(2) = 2^7$

C

Si n es un número natural, entonces: $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n\text{-veces}} = a^n$



Potenciación es la operación que consiste en repetir como factor un número llamado **base**, tantas veces como lo indique el **exponente**. Una expresión del tipo a^n se llama **potencia**.

E1

Exprese los siguientes productos en la forma a^n:

a) (3)(3)(3) b) (4)(4)(4)(4) c) (10)(10)(10)(10)(10)

d) (1,2)(1,2) e) $\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$

Ejemplo Calcule el valor de las siguientes expresiones:

a) 5^3 b) $(-5)^2$ c) $(-2)^3$

a) $5^3 = (5)(5)(5) = \mathbf{125}$

b) $(-5)^2 = (-5)(-5) = \mathbf{25}$

c) $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = \mathbf{-8}$

Cuando la base a es positiva, a^n es positiva.

Si la base a es negativa $\begin{cases} a^n \text{ es positivo si } n \text{ es par} \\ a^n \text{ es negativo si } n \text{ es impar} \end{cases}$

E2

Calcule el valor de las siguientes expresiones:

a) 3^5 b) $(-2)^4$ c) $(-3)^3$ d) $(0,2)^2$ e) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$

30

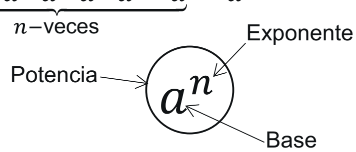
U2: Potenciación y Funciones Exponenciales
S1: Potenciación y radicación
C1: Definición de potencia con base racional y exponente un número natural

P Escribe en el espacio en blanco el número que hace verdadera la expresión.

S a) $(2)(2) = 2^{\boxed{2}}$ b) $(2)(2)(2) = 2^{\boxed{3}}$
c) $(2)(2)(2)(2)(2)(2)(2) = 2^{\boxed{7}}$

C Potenciación

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n\text{−veces}} = a^n$$



E1 Exprese los siguientes productos en la forma a^n:

a) $(3)(3)(3) = 3^3$

b) $(4)(4)(4)(4) = 4^4$

c) $(10)(10)(10)(10)(10) = 10^5$

d) $(1{,}2)(1{,}2) = (1{,}2)^2$

e) $\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3$

Ej Calcule el valor de las siguientes expresiones:

a) $5^3 = (5)(5)(5) = 125$

b) $(-5)^2 = (-5)(-5) = 25$

c) $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$

E2 Calcule el valor de las siguientes expresiones:

a) $3^5 = 243$ b) $(-2)^4 = 16$

c) $(-3)^3 = -27$ d) $(0{,}2)^2 = 0{,}04$

e) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$

Contenido 2 Propiedades de la potenciación con exponente un número natural

Contenido 2: Propiedades de la potenciación con exponente un número natural

P

Exprese los productos y divisiones indicadas como una sola potencia y establezca una relación entre los exponentes.

a) $a^2 \cdot a^5$ b) $(a^2)^5$ c) $(ab)^3$ d) $a^5 \div a^3$

S

a) $a^2 \cdot a^5 = \underbrace{\underbrace{(a \cdot a)}_{2\text{ veces}}\underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a)}_{5\text{ veces}}}_{7\text{ veces}} = a^7$ Se observa $a^2 \cdot a^5 = a^{2+5}$

b) $(a^2)^5 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = \underbrace{\underbrace{(a \cdot a)}_{2\text{ veces}}\underbrace{(a \cdot a)}_{2\text{ veces}}\underbrace{(a \cdot a)}_{2\text{ veces}}\underbrace{(a \cdot a)}_{2\text{ veces}}\underbrace{(a \cdot a)}_{2\text{ veces}}}_{10\text{ veces}} = a^{10}$ Se observa $(a^2)^5 = a^{(2)(5)}$

c) $(ab)^3 = (ab)(ab)(ab) = (a \cdot a \cdot a)(b \cdot b \cdot b) = a^3 b^3$

d) $a^5 \div a^3 = a^5 \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{a^5}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = a^2$ Se observa $a^5 \div a^3 = a^{5-3}$

C

Propiedades de la potenciación

Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ y m, n son números naturales;

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 2) $(a^m)^n = a^{mn}$

3) $(ab)^n = a^n b^n$ 4) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (si $m > n$)

Ejemplo Aplique las propiedades de potenciación según corresponda.

a) $a^7 \cdot a^4$ b) $(a^2)^6$ c) $(ab)^2$ d) $a^6 \div a^4$

a) $a^7 \cdot a^4 = a^{7+4} = a^{11}$

b) $(a^2)^6 = a^{(2)(6)} = a^{12}$

c) $(ab)^2 = a^2 b^2$

d) $a^6 \div a^4 = a^{6-4} = a^2$

E

Aplique las propiedades de la potenciación según corresponda.

a) $a^4 \cdot a^3$ b) $a^4 \cdot a$

c) $(a^5)^4$ d) $(a^4)^2$

e) $(ab)^5$ f) $(a^2 b)^3$

g) $a^6 \div a^2$ h) $a^3 \div a^2$

31

Aprendizajes esperados

Deduce y aplica las propiedades de potenciación con exponente un número natural en la solución de ejercicios.

Secuencia:

En la clase anterior se estudió la definición de potenciación que servirá para establecer algunas propiedades de la potenciación con base real y exponente natural que serán estudiadas en esta sesión.

Puntos esenciales:

Recordar la definición de potenciación.

Establecer las propiedades de la potenciación a través de ejemplos concretos.

Expresar verbalmente las propiedades de la potenciación establecidas.

Identificar en cada ejercicio la(s) propiedad(es) de potenciación a utilizar.

C2: Propiedades de la potenciación con exponente un número natural

P Exprese los productos y divisiones como una sola potencia y establezca una relación entre los exponentes.

a) $a^2 \cdot a^5$ b) $(a^2)^5$ c) $(ab)^3$ d) $a^5 \div a^3$

S a) $a^2 \cdot a^5 = \underbrace{\underbrace{(a \cdot a)}_{2\text{ veces}}\underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a)}_{5\text{ veces}}}_{7\text{ veces}} = a^7$ $a^2 \cdot a^5 = a^{2+5}$

b) $(a^2)^5 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2$
$= \underbrace{\underbrace{(a \cdot a)}_{2\text{ veces}}\underbrace{(a \cdot a)}_{2\text{ veces}}\underbrace{(a \cdot a)}_{2\text{ veces}}\underbrace{(a \cdot a)}_{2\text{ veces}}\underbrace{(a \cdot a)}_{2\text{ veces}}}_{10\text{ veces}} = a^{10}$ $(a^2)^5 = a^{(2)(5)}$

c) $(ab)^3 = (ab)(ab)(ab) = (a \cdot a \cdot a)(b \cdot b \cdot b) = a^3 b^3$

d) $a^5 \div a^3 = a^5 \times \frac{1}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = a^2 = a^{5-3}$

C Propiedades de la potenciación
Si $a \neq 0, b \neq 0$ y m, n son números natural
1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 2) $(a^m)^n = a^{mn}$
3) $(ab)^n = a^n b^n$ 4) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ si $m > n$

Ej Aplique las propiedades de la potenciación según corresponda.
a) $a^7 \cdot a^4 = a^{7+4} = a^{11}$
b) $(a^2)^6 = a^{(2)(6)} = a^{12}$
c) $(ab)^2 = a^2 b^2$
d) $a^6 \div a^4 = a^{6-4} = a^2$

E Aplique las propiedades de la potenciación según corresponda
a) $a^4 \cdot a^3 = a^{4+3} = a^7$
b) $a^4 \cdot a = a^{4+1} = a^5$
c) $(a^5)^4 = a^{(5)(4)} = a^{20}$
d) $(a^4)^2 = a^{(4)(2)} = a^8$
e) $(ab)^5 = a^5 b^5$
f) $(a^2 b)^3 = a^6 b^3$
g) $a^6 \div a^2 = a^{6-2} = a^4$
h) $a^3 \div a^2 = a^{3-2} = a$

Contenido 3 Potencia con exponente cero o número negativo y base un número racional

Aprendizajes esperados

Aplica las propiedades de potencia con exponente cero o número negativo y base un número racional en la solución de ejercicios.

Secuencia:

En la clase anterior se estudiaron algunas propiedades de la potenciación. Aquí se establecen dos propiedades para potencias con exponentes enteros no positivos.

Puntos esenciales:

Inducir estas nuevas propiedades a través de ejemplos concretos.

Tener presente la restricción para la base $(a \neq 0)$ en las dos nuevas propiedades que se estudian.

Expresar verbalmente dichas propiedades.

Aplicar correctamente las propiedades deducidas en el cálculo de potencias.

Contenido 3: Potencia con exponente cero o número negativo y base un número racional

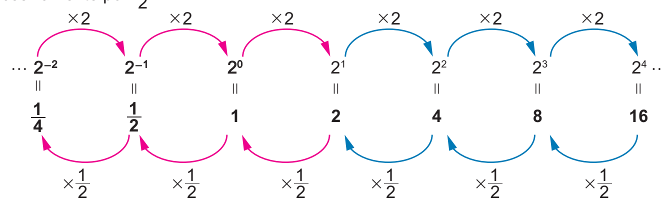
P

Calcule los valores de las siguientes potencias:

a) 2^3 b) 2^0 c) 2^{-1} d) 2^{-2}

S

Se observa en el dibujo que las potencias de 2 con exponente positivo se encuentran multiplicando por 2 sucesivamente; para las potencias con exponentes negativos se multiplica sucesivamente por $\frac{1}{2}$.



Por lo dicho anteriormente,

a) $2^3 = \mathbf{8}$ b) $2^0 = \mathbf{1}$ c) $2^{-1} = \mathbf{\frac{1}{2}}$ d) $2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \mathbf{\frac{1}{4}}$

C

Si $a \neq 0$ y n es un número natural, entonces

1) $a^0 = 1$ 2) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Ejemplo

Calcule los valores de las siguientes potencias:

a) 5^0 b) 3^{-2}

a) $5^0 = 1$ b) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

E

Calcule los valores de las siguientes potencias:

a) 3^0 b) 4^0

c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^0$ d) 5^{-1}

e) 4^{-2} f) $(-2)^{-3}$

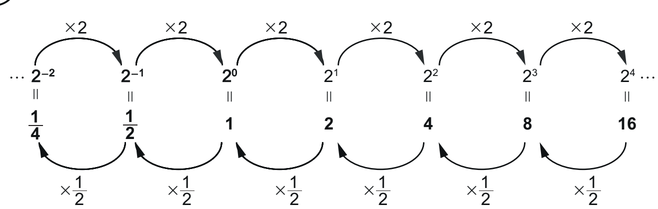
32

C3: Potencia con exponente cero o número negativo y base un número racional

(P) Calcule los valores de las siguientes potencias:

a) 2^3 b) 2^0 c) 2^{-1} d) 2^{-2}

(S) Se observa:



Por tanto:

a) $2^3 = 8$ b) $2^0 = 1$

c) $2^{-1} = \frac{1}{2}$ d) $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

(C) Si $a \neq 0$ y n es un número natural, entonces

1) $a^0 = 1$ 2) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

(Ej) Calcule los valores de las siguientes potencias:

a) $5^0 = 1$

b) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

(E) Calcule los valores de las siguientes potencias:

a) $3^0 = 1$

b) $4^0 = 1$

c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

d) $5^{-1} = \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5}$

e) $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$

f) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$

Contenido 4 Propiedades de una potencia cuando el exponente es un número entero

Contenido 4: Propiedades de una potencia cuando el exponente es un número entero

P Exprese los productos y división indicados como una sola potencia y establezca relaciones entre los exponentes, si $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

a) $a^3 \cdot a^{-2}$ b) $(a^3)^{-2}$ c) $(ab)^{-2}$ d) $a^{-3} \div a^{-5}$

S

a) $a^3 \cdot a^{-2} = a^3 \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a^1 = a$ Se observa $a^3 \cdot a^{-2} = a^{3+(-2)}$

b) $(a^3)^{-2} = \frac{1}{(a^3)^2} = \frac{1}{a^6} = a^{-6}$ Se observa $(a^3)^{-2} = a^{(3)(-2)}$

c) $(ab)^{-2} = \frac{1}{(ab)^2} = \frac{1}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} = a^{-2}b^{-2}$

d) $a^{-3} \div a^{-5} = \frac{1}{a^3} \div \frac{1}{a^5} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{a^5}{1} = \frac{a^5}{a^3} = a^2$ Se observa $a^{-3} \div a^{-5} = a^{-3-(-5)}$

C

Propiedades de la potenciación cuando el exponente es un número entero

Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ y m, n son números enteros, entonces:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 2) $(a^m)^n = a^{mn}$ 3) $(ab)^n = a^n b^n$ 4) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

E1 Aplique la propiedad de potenciación según corresponda, si $a \neq 0$, $b \neq 0$.

a) $a^5 \cdot a^{-2}$ b) $(a^2)^{-3}$ c) $(ab)^{-3}$ d) $a^2 \div a^4$ e) $(a^{-2}b^4)^5$

Ejemplo Calcule el valor de las siguientes expresiones:

a) $(5^5)(5^{-3})$ b) $(3^2)^{-3}$ c) $(5^{-2})^0$ d) $2^3 \div 2^5$

a) $(5^5)(5^{-3}) = 5^{5+(-3)} = 5^2 = \mathbf{25}$

b) $(3^2)^{-3} = 3^{(2)(-3)} = 3^{-6} = \frac{1}{3^6} = \mathbf{\frac{1}{729}}$

c) $(5^{-2})^0 = 5^{(-2)(0)} = 5^0 = \mathbf{1}$

d) $2^3 \div 2^5 = 2^{3-5} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \mathbf{\frac{1}{4}}$

E2 Calcule el valor de las siguientes expresiones:

a) $(2^5)(2^{-2})$ b) $(3^{-1})^4$

c) $3^4 \div 3^7$ d) $(10^{-5})(10^2)$

e) $(7^{-4})^0$

33

Aprendizajes esperados

Deduce y aplica las propiedades de potenciación con exponente un número entero en la solución de ejercicios.

Secuencia:

En clases anteriores se estudiaron las propiedades de la potenciación de base real con exponente entero, por lo que en esta sesión se aplican en ejemplos y ejercicios.

Puntos esenciales:

Recordar las propiedades de la potenciación de base real con exponente entero.

Deducir las propiedades de potenciación a partir de la solución del problema.

Hacer uso de las propiedades en la simplificación de potencias.

C4: Propiedades de una potencia cuando el exponente es un número entero

P Expresе los productos y divisiones indicados como una sola potencia y establezca relaciones entre los exponentes, si $a \neq 0, b \neq 0$.

a) $a^3 \cdot a^{-2}$ b) $(a^3)^{-2}$ c) $(ab)^{-2}$ d) $a^{-3} \div a^{-5}$

S a) $a^3 \cdot a^{-2} = a^3 \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a^1 = a$

b) $(a^3)^{-2} = \frac{1}{(a^3)^2} = \frac{1}{a^6} = a^{-6}$

c) $(ab)^{-2} = \frac{1}{(ab)^2} = \frac{1}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} = a^{-2}b^{-2}$

d) $a^{-3} \div a^{-5} = \frac{1}{a^3} \div \frac{1}{a^5} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{a^5}{1} = \frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$

C Propiedades de la potenciación cuando el exponente es un número entero. Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ y m, n son números enteros,

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 2) $(a^m)^n = a^{mn}$
3) $(ab)^n = a^n b^n$ 4) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

E1 Aplique la propiedad de potenciación según corresponda, si $a \neq 0$, $b \neq 0$

a) $a^5 \cdot a^{-2} = a^{5+(-2)} = a^3$

b) $(a^2)^{-3} = a^{(2)(-3)} = a^{-6}$

c) $(ab)^{-3} = a^{-3}b^{-3}$

d) $a^2 \div a^4 = a^{2-4} = a^{-2}$

e) $(a^{-2}b^4)^5 = a^{-10}b^{20}$

Ej Calcule el valor de las siguientes expresiones:

a) $(5^5)(5^{-3}) = 5^{5+(-3)} = 5^2 = 25$

b) $(3^2)^{-3} = 3^{(2)(-3)} = 3^{-6} = \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729}$

c) $(5^{-2})^0 = 5^{(-2)(0)} = 5^0 = 1$

d) $2^3 \div 2^5 = 2^{3-5} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

E2 Calcule el valor de las siguientes expresiones:

a) $(2^5)(2^{-2}) = 2^3 = 8$ b) $(3^{-1})^4 = 3^{-4} = \frac{1}{81}$.

c) $3^4 \div 3^7 = 3^{-3} = \frac{1}{27}$ d) $(10^{-5})(10^2) = \frac{1}{1\,000}$

Contenido 5 Raíz enésima y la relación entre potenciación y radicación

Aprendizajes esperados

Define la raíz n−ésima estableciendo la relación entre esta y la potencia.

Secuencia:

Anteriormente se estudiaron las propiedades de la potenciación con base real y exponente entero. Además, en 8vo grado se definió la raíz cuadrada de un número positivo que se utiliza para estudiar el concepto de raíz n-ésima como su generalización. Posteriormente se concluirá que la expresión $\sqrt[n]{a}$ equivale a una potencia con exponente racional (siendo n un número natural).

Puntos esenciales:

Recordar la definición de raíz cuadrada.

Definir raíz n–ésima como generalización de la definición de raíz cuadrada.

Indicar los términos que intervienen en la radicación.

Establecer la equivalencia entre la radicación y la potenciación.

Contenido 5: Raíz enésima y la relación entre potenciación y radicación

P

a) Calcule el valor de $\sqrt{4}$.

b) Reescriba las igualdades $2^3 = 8$ y $3^4 = 81$ utilizando radicales.

S

a) $\sqrt{4} = 2$, porque $2^2 = 4$. Se lee "la raíz cuadrada de 4 es 2".

b) $\sqrt[3]{8} = 2$ por que $2^3 = 8$ y se lee "la raíz cúbica de 8 es 2".

$\sqrt[4]{81} = 3$ por que $3^4 = 81$ y se lee "la raíz cuarta de 81 es 3".

C

Relación entre potenciación y radicación

Potenciación		Radicación
$b^n = a$	si y solo si	$b = \sqrt[n]{a}$

En el caso $n=2$ se omite el índice de la raíz cuadrada

$\sqrt[2]{a}$ se escribe $\sqrt{a}$

Elementos de la raíz enésima:

$\sqrt[n]{a}$

Índice

Signo radical

Subradical

Raíz enésima

Se dice que b es raíz enésima de a si y solo si $b^n = a$. Es decir, $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Al sustituir b por $\sqrt[n]{a}$ en $b^n = a$:

$(\sqrt[n]{a})^n = a$

Ejemplo Observe la relación entre potenciación y radicación en la siguiente tabla:

Potenciación	Radicación	La radicación se lee
$2^6 = 64$	$2 = \sqrt[6]{64}$	Dos es igual a la **raíz sexta** de sesenta y cuatro
$(-2)^5 = -32$	$-2 = \sqrt[5]{-32}$	Menos dos es igual a la **raíz quinta** de menos treinta y dos

E

Complete la tabla utilizando la relación entre potenciación y radicación.

Potenciación	Radicación	La radicación se lee
$2^4 = 16$		
$3^2 = 9$		
$(-3)^3 = -27$		
	$3 = \sqrt[4]{81}$	

34

C5: Raíz enésima y la relación entre potenciación y radicación

P a) Calcule el valor de $\sqrt{4}$.

b) Reescriba las igualdades $2^3 = 8$ y $3^4 = 81$ utilizando radicales.

S a) $\sqrt{4} = 2$, porque $2^2 = 4$. Se lee "la raíz cuadrada de 4 es 2"

b) $\sqrt[3]{8} = 2$ por que $2^3 = 8$ y se lee "la raíz cúbica de 8 es 2"

$\sqrt[4]{81} = 3$ por que $3^4 = 81$ y se lee "la raíz cuarta de 81 es 3"

C Relación entre potenciación y radicación:

Potenciación Radicación

$$b^n = a \leftrightarrow b = \sqrt[n]{a}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{a}}$$

Índice

Signo radical

Sub-radical

Raíz enésima

Ej Observe la relación entre potenciación y radicación en siguiente tabla.

Potenciación	Radicación	La radicación se lee
$2^6 = 64$	$2 = \sqrt[6]{64}$	Dos es igual a raíz sexta de sesenta y cuatro
$(-2)^5 = -32$	$-2 = \sqrt[5]{-32}$	Menos dos es igual a raíz quinta de menos treinta y dos

E Complete la tabla utilizando la relación entre potenciación y radicación.

Potenciación	Radicación	La radicación se lee
$2^4 = 16$	$\sqrt[4]{16} = 2$	La raíz cuarta de 16 es igual a 2.
$(-3)^3 = -27$	$-3 = \sqrt[3]{-27}$	Menos tres es igual a raíz cúbica de menos veintisiete
$3^4 = 81$	$\sqrt[4]{81} = 3$	La raíz cuarta de 81 es igual a 3.

Contenido 6 Simplificación de radicales

Contenido 6: Simplificación de radicales

P

Calcule los valores de los siguientes radicales:

a) $\sqrt[4]{16}$ b) $-\sqrt[4]{16}$ c) $\sqrt[3]{8}$ d) $\sqrt[3]{-8}$

S

a) $16=2^4$, así que $\sqrt[4]{16}=\mathbf{2}$.
Al sustituir 16 por 2^4 se obtiene $\sqrt[4]{2^4}=2$

b) Utilizando la respuesta de a), $\sqrt[4]{16}=2$, luego $-\sqrt[4]{16}=\mathbf{-2}$.

c) La igualdad $8=2^3$ implica que $\sqrt[3]{8}=\mathbf{2}$.
Al sustituir 8 por 2^3 se obtiene $\sqrt[3]{2^3}=2$.

d) De la igualdad $-8=(-2)^3$ se tiene que $\sqrt[3]{-8}=\mathbf{-2}$ y sustituyendo -8 por $(-2)^3$ resulta $\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$.

C

En el caso en el que el índice de la raíz es igual al exponente del subradical se cumple que

$$\sqrt[n]{a^n}=a$$

Ejemplo Calcule el valor de $\sqrt[5]{32}$.

$\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2$

E

Calcule los valores de los siguientes radicales:

a) $\sqrt[4]{81}$ b) $-\sqrt[4]{81}$

c) $\sqrt[3]{125}$ d) $\sqrt[3]{-27}$

e) $\sqrt[3]{1000}$ f) $-\sqrt[4]{10000}$

Aprendizajes esperados

Simplifica radicales aplicando la propiedad $\sqrt[n]{a^n}=a$.

Secuencia:

En la clase anterior se estudió la definición de raíz n–ésima, la que se aplica en esta sesión para determinar el valor de algunas raíces.

Puntos esenciales:

Recordar la definición de raíz n–ésima.

Establecer la propiedad $\sqrt[n]{a^n}=a$ a través de la definición de raíz n–ésima.

Determinar el valor de ciertas raíces aplicando dicha propiedad.

Destacar el hecho de que si el índice es par, la cantidad subradical debe ser no negativa para que dicha raíz esté definida.

C6: Simplificación de radicales

(P) Calcule los valores de los siguientes radicales:

a) $\sqrt[4]{16}$ b) $-\sqrt[4]{16}$ c) $\sqrt[3]{8}$ d) $\sqrt[3]{-8}$

(S) a) $16=2^4$, así que $\sqrt[4]{16}=2$
Al sustituir 16 por 2^4 se obtiene $\sqrt[4]{2^4}=2$

b) Como $\sqrt[4]{16}=2$ de la respuesta de a), $-\sqrt[4]{16}=-2$

c) La igualdad $8=2^3$ implica que $\sqrt[3]{8}=2$
Al sustituir 8 por 2^3 se obtiene $\sqrt[3]{2^3}=2$.

d) Como $-8=(-2)^3$ entonces $\sqrt[3]{-8}=-2$,
y sustituyendo -8 por $(-2)^3$ resulta $\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$

(C) Cuando el índice de la raíz es igual al exponente del subradical se cumple que:

$$\sqrt[n]{a^n}=a$$

(Ej) Calcule el valor de $\sqrt[5]{32}$.

$$\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2$$

(E) Determine los valores de los siguientes radicales:

a) $\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$

b) $-\sqrt[4]{81}=-\sqrt[4]{3^4}=-3$

c) $\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5^3}=5$

d) $\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{(-3)^3}=-3$

e) $\sqrt[3]{1000}=\sqrt[3]{10^3}=10$

f) $-\sqrt[4]{10000}=-\sqrt[4]{10^4}=-10$

Contenido 7 Multiplicación de radicales de igual índice

Aprendizajes esperados

Efectúa multiplicaciones de radicales de igual índice aplicando la propiedad $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$.

Secuencia:

En 8vo grado se estudió la propiedad para el producto de raíces cuadradas la que será generalizada en esta clase.

Puntos esenciales:

Recordar la propiedad $(\sqrt{a})(\sqrt{b})=\sqrt{ab}$ con a y b positivos.

Generalizar dicha propiedad considerando como índice de las raíces un entero positivo cualquiera.

Expresar verbalmente dicha propiedad.

Determinar el valor de ciertas raíces aplicando dicha propiedad.

Aplicar la descomposición de números naturales en factores primos para expresarlos como potencias de un número dado.

Aplicar la propiedad $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ en la solución de ejercicios.

Contenido 7: Multiplicación de radicales de igual índice

Repaso

Escriba en el recuadro el número que hace verdadera la igualdad.

$(\sqrt{2})(\sqrt{3})=\sqrt{\square}$

Utilizando la propiedad de la raíz cuadrada, $(\sqrt{a})(\sqrt{b})=\sqrt{ab}$, se tiene que

$(\sqrt{2})(\sqrt{3})=\sqrt{(2)(3)}=\sqrt{6}$

En el caso de la raíz enésima se cumplen las mismas propiedades de la raíz cuadrada, siendo una de estas la siguiente:

C

Propiedad de la raíz enésima:

Si $a>0$, $b>0$ y n un número entero positivo, entonces:

$$(\sqrt[n]{a})(\sqrt[n]{b})=\sqrt[n]{ab}$$

Ejemplo Calcule los valores de los siguientes productos de radicales:

a) $(\sqrt[3]{9})(\sqrt[3]{3})$ b) $(\sqrt[6]{2})(\sqrt[6]{32})$ c) $(\sqrt[5]{125})(\sqrt[5]{25})$

a) $(\sqrt[3]{9})(\sqrt[3]{3})=\sqrt[3]{(9)(3)}=\sqrt[3]{(3^2)(3^1)}=\sqrt[3]{3^{2+1}}=\sqrt[3]{3^3}=3$

b) $(\sqrt[6]{2})(\sqrt[6]{32})=\sqrt[6]{(2)(32)}=\sqrt[6]{(2^1)(2^5)}=\sqrt[6]{2^{1+5}}=\sqrt[6]{2^6}=2$

c) $(\sqrt[5]{125})(\sqrt[5]{25})=\sqrt[5]{(125)(25)}=\sqrt[5]{(5^3)(5^2)}=\sqrt[5]{5^{3+2}}=\sqrt[5]{5^5}=5$

E

Calcule los valores de los siguientes productos de radicales:

a) $(\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{4})$ b) $(\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{25})$

c) $(\sqrt[4]{3})(\sqrt[4]{27})$ d) $(\sqrt[5]{27})(\sqrt[5]{9})$

e) $(\sqrt[7]{16})(\sqrt[7]{8})$

36

C7: Multiplicación de radicales de igual índice

(R) Repaso

Escriba en el recuadro el número que hace verdadera la igualdad

$$(\sqrt{2})(\sqrt{3})=\sqrt{(2)(3)}=\sqrt{\boxed{6}}$$

Se ha usado la propiedad $(\sqrt{a})(\sqrt{b})=\sqrt{ab}$

En la raíz enésima se cumplen las mismas propiedades de la raíz cuadrada, siendo una de estas la siguiente.

(C) Propiedad de la raíz enésima:

Si $a>0, b>0$ y n un número entero positivo, entonces:

$$(\sqrt[n]{\boldsymbol{a}})\,(\sqrt[n]{\boldsymbol{b}})=\sqrt[n]{\boldsymbol{ab}}$$

(Ej) Calcule los valores de los siguientes productos de radicales:

a) $(\sqrt[3]{9})(\sqrt[3]{3})=\sqrt[3]{(9)(3)}=\sqrt[3]{(3^2)(3^1)}$
$=\sqrt[3]{3^{2+1}}=\sqrt[3]{3^3}=3$

b) $(\sqrt[6]{2})(\sqrt[6]{32})=\sqrt[6]{(2)(32)}=\sqrt[6]{(2^1)(2^5)}$
$=\sqrt[6]{2^{1+5}}=\sqrt[6]{2^6}=2$

c) $(\sqrt[5]{125})\,(\sqrt[5]{25})=\sqrt[5]{(125)(25)}=\sqrt[5]{(5^3)(5^2)}$
$=\sqrt[5]{5^{3+2}}=\sqrt[5]{5^5}=5$

(E) a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{(2)(4)}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$

b) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{25}=\sqrt[3]{(5)(25)}=\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5^3}=5$

c) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{(3)(27)}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$

d) $\sqrt[5]{27}\cdot\sqrt[5]{9}=\sqrt[5]{(27)(9)}=\sqrt[5]{243}=\sqrt[5]{3^5}=3$

e) $\sqrt[7]{16}\cdot\sqrt[7]{8}=\sqrt[7]{(16)(8)}=\sqrt[7]{128}=\sqrt[7]{2^7}=2$

Contenido 8 División de radicales de igual índice y propiedades de los radicales

Contenido 8: División de radicales de igual índice y propiedades de los radicales

Repaso

Escriba en los recuadros los números que hacen verdaderas las tres igualdades.

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\square}{\square}} = \sqrt{\square}$$

Utilizando la propiedad de la raíz cuadrada $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, se tiene $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{3}$

La raíz enésima cumple las mismas propiedades de la raíz cuadrada, siendo una de ellas la siguiente:

C1

Propiedad de los radicales

Si $a>0$, $b>0$ y n es un número natural, entonces

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Ejemplo 1 Calcule los valores de los siguientes cocientes de radicales:

a) $\frac{\sqrt[3]{189}}{\sqrt[3]{7}}$ b) $\frac{\sqrt[5]{5}}{\sqrt[5]{160}}$

a) $\frac{\sqrt[3]{189}}{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[3]{\frac{189}{7}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$ b) $\frac{\sqrt[5]{5}}{\sqrt[5]{160}} = \sqrt[5]{\frac{\cancel{5}^1}{\cancel{160}_{32}}} = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \sqrt[5]{\frac{1}{2^5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^5} = \frac{1}{2}$

E1

Calcule los valores de los siguientes cocientes de radicales:

a) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}}$ d) $\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{162}}$ e) $\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{486}}$

C2

Propiedades de los radicales

Si $a>0$, m, n son números naturales, entonces

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} \qquad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplo 2 Calcule los valores de las siguientes expresiones:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ b) $(\sqrt[4]{16})^2$

a) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[(3)(2)]{64} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$ b) $(\sqrt[4]{16})^2 = \sqrt[4]{16^2} = \sqrt[4]{(4^2)^2} = \sqrt[4]{4^{(2)(2)}} = \sqrt[4]{4^4} = 4$

E2

Calcule los valores de las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{729}}$ c) $(\sqrt[6]{27})^2$

37

Aprendizajes esperados

Simplifica expresiones con radicales aplicando las propiedades:

1) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ 2) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

3) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

Secuencia:

En 8vo grado se estudió la propiedad para el cociente de raíces cuadradas la que será generalizada en esta clase. Además, se estudiarán las propiedades raíz de una raíz y raíz de una potencia.

Puntos esenciales:

Recordar la propiedad $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ con a y b positivos y la definición de raíz n–ésima.

Generalizar dicha propiedad considerando como índice de las raíces un entero positivo cualquiera.

Expresar verbalmente dicha propiedad.

Determinar el valor de ciertas raíces aplicando dicha propiedad.

Conocer las propiedades: raíz de una raíz y raíz de una potencia y aplicarlas en la simplificación de radicales y aplicarlas en el cálculo de los valores de expresiones con radicales.

C8: División de radicales de igual índice y propiedades de los radicales

(R) Escriba en los recuadros los números que hacen verdaderas las tres igualdades.

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\boxed{6}}{\boxed{2}}} = \sqrt{\boxed{3}}$$

Se ha usado la propiedad $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

(C1) Propiedad de los radicales

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

(Ej1) Calcule los valores de los siguientes cocientes de radicales.

a) $\frac{\sqrt[3]{189}}{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[3]{\frac{189}{7}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

b) $\frac{\sqrt[5]{5}}{\sqrt[5]{160}} = \sqrt[5]{\frac{5}{160}} = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \sqrt[5]{\frac{1}{2^5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^5} = \frac{1}{2}$

(E1) Calcule los valores de los siguientes cocientes de radicales:

a) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

b) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

(C2) Propiedades de los radicales

Si $a>0, m, n$ son números naturales, entonces

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

(Ej2) Calcule los valores de las siguientes expresiones:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[(3)(2)]{64} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

b) $\left(\sqrt[4]{16}\right)^2 = \sqrt[4]{16^2} = \sqrt[4]{(4^2)^2} = \sqrt[4]{4^{(2)(2)}} = \sqrt[4]{4^4} = 4$

(E2) a) $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[6]{729} = \sqrt[6]{3^6} = 3$

Contenido 9 Potencias con exponentes racionales (1)

Aprendizajes esperados

Define potencia con exponente un número racional.

Secuencia:

En clases anteriores se estudiaron propiedades para la radicación y potenciación que serán utilizadas para expresar la raíz de una potencia como una potencia con exponente fraccionario.

Puntos esenciales:

Recordar las propiedades

$$(a^n)^m = a^{nm}$$
$$\sqrt[n]{a^n} = a$$
$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Establecer la igualdad

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Expresar raíces de potencias como potencias con exponentes fraccionarios.

Expresar potencias con exponentes fraccionarios como expresiones radicales, identificando correctamente numerador, denominador y la ubicación de estos en el radical.

Contenido 9: Potencias con exponentes racionales (1)

P Exprese $\sqrt[3]{a^2}$ en forma de potencia con base a y exponente racional.

S

Al sustituir $n = \frac{2}{3}$ y $m = 3$ en $(a^n)^m = a^{nm}$, resulta:

$$\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3 = a^{\left(\frac{2}{3}\right)(3)} = a^2 \qquad ①$$

Si $a > 0$ y m, n son números racionales, entonces $(a^m)^n = a^{mn}$

La sustitución de $n = 3$ en $(\sqrt[n]{a})^n = a$, da lugar a $(\sqrt[3]{a})^3 = a$ y si se reemplaza en esta última igualdad a por a^2 se obtiene:

$$(\sqrt[3]{a^2})^3 = a^2 \qquad ②$$

El lado derecho en ① y en ② es a^2, así que

$$\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3 = (\sqrt[3]{a^2})^3$$
$$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$$

Es decir, $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$

C

Si $a > 0$, m es entero y n es un número natural, entonces

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

En el caso de $m = 1$ se obtiene:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Ejemplo Convierta las siguientes expresiones de la forma radical a potencia o viceversa:

a) $a^{\frac{2}{3}}$ b) $a^{-\frac{3}{5}}$ c) $\sqrt[6]{a}$ d) $\sqrt[5]{a^3}$

a) $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$ b) $a^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{a^3}}$ c) $\sqrt[6]{a} = a^{\frac{1}{6}}$ d) $\sqrt[5]{a^3} = a^{\frac{3}{5}}$

E

Convierta las siguientes expresiones de la forma radical a potencia o viceversa:

a) $a^{\frac{3}{5}}$ b) $a^{\frac{1}{4}}$

c) $a^{\frac{5}{2}}$ d) $a^{\frac{3}{4}}$

e) $a^{-\frac{2}{3}}$ f) $\sqrt[4]{a}$

g) $\sqrt{a^3}$ h) $\sqrt[7]{a^4}$

i) $\sqrt[5]{a^4}$ j) $\sqrt[3]{a^8}$

C9: Potencias con exponentes racionales (1)

P Exprese $\sqrt[3]{a^2}$ en forma de potencia con base a y exponente racional.

S Al sustituir $n = \frac{2}{3}$ y $m = 3$ en $(a^n)^m = a^{nm}$:

$$\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3 = a^{\left(\frac{2}{3}\right)(3)} = a^2 \qquad (1)$$

Se sustituye $n = 3$ en $(\sqrt[n]{a})^n = a$: $(\sqrt[3]{a})^3 = a$

Se reemplaza en esta igualdad a por a^2:

$$(\sqrt[3]{a^2})^3 = a^2 \qquad (2)$$

El lado derecho en (1) y (2) es a^2, así que:

$$\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{a^2}\right)^3 \leftrightarrow a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$$

Es decir,

$$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$$

C Si $a > 0$, m es entero, n es un número natural entonces:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Si $m = 1$, entonces $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Ej Convierta de la forma radical a potencia o viceversa:

a) $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$ b) $a^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{a^3}}$

c) $\sqrt[6]{a} = a^{\frac{1}{6}}$ d) $\sqrt[5]{a^3} = a^{\frac{3}{5}}$

E Convierta las siguientes expresiones de la forma radical a potencia o viceversa.

a) $a^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{a^3}$ f) $\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$

b) $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$ g) $\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$

c) $a^{\frac{5}{2}} = \sqrt{a^5}$ h) $\sqrt[7]{a^4} = a^{\frac{4}{7}}$

d) $a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$ i) $\sqrt[5]{a^4} = a^{\frac{4}{5}}$

e) $a^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ j) $\sqrt[3]{a^8} = a^{\frac{8}{3}}$

Contenido 10 Potencias con exponentes racionales (2)

Contenido 10: Potencias con exponentes racionales (2)

Ejemplo Calcule los valores de las siguientes potencias con exponentes racionales:

a) $4^{\frac{1}{2}}$ b) $8^{\frac{1}{3}}$ c) $27^{\frac{2}{3}}$ d) $25^{-\frac{1}{2}}$

Se procede con los cálculos haciendo uso de las propiedades de los radicales.

a) $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = \mathbf{2}$

Otra forma de resolver este ejercicio es la siguiente:

$$4^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2^{(2)\left(\frac{1}{2}\right)} = \mathbf{2}$$

b) En este caso se utiliza la descomposición prima de 8 y las propiedades de los radicales.

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

De otra forma $8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{(3)\left(\frac{1}{3}\right)} = 2$

c) De nuevo se necesita usar la descomposición en factores primos y las propiedades de los radicales.

$$27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{(3^3)^2} = \sqrt[3]{(3^2)^3} = 3^2 = \mathbf{9}$$

Análogamente, $27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^{(3)\left(\frac{2}{3}\right)} = 3^2 = 9$

d) $25^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{25^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \mathbf{\frac{1}{5}}$

O de manera equivalente, $25^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\frac{1}{5}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{(2)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{5}$

E

Calcule los valores de las siguientes potencias con exponentes racionales:

a) $9^{\frac{1}{2}}$

b) $16^{\frac{1}{4}}$

c) $64^{\frac{2}{3}}$

d) $125^{-\frac{1}{3}}$

39

Aprendizajes esperados

Calcula potencias con exponente un número racional aplicando la escritura equivalente como radicales.

Secuencia:

En clases anteriores se estudiaron las propiedades para la potenciación y radicación que en esta sesión serán aplicadas para determinar el valor de potencias con exponentes fraccionarios.

Puntos esenciales:

Recordar las propiedades estudiadas tanto para la potenciación como para la radicación.

Determinar el valor de potencias con exponentes fraccionarios aplicando dichas propiedades.

C10: Potencias con exponentes racionales (2)

Ej Calcule los valores de las siguientes potencias con exponentes racionales:

a) $4^{\frac{1}{2}}$ b) $8^{\frac{1}{3}}$ c) $27^{\frac{2}{3}}$ d) $25^{-\frac{1}{2}}$

Uso de las propiedades de los radicales:

a) $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$

Otra forma $4^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2^{(2)\left(\frac{1}{2}\right)} = 2$

b) Se utiliza la descomposición prima de 8

$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

Otra forma $8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{(3)\left(\frac{1}{3}\right)} = 2$

c) $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{(3^3)^2} = \sqrt[3]{(3^2)^3} = 3^2 = 9$

Otra forma $27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^{(3)\left(\frac{2}{3}\right)} = 3^2 = 9$

d) $25^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{25^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$

Otra forma

$$25^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\frac{1}{5}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{(2)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{5}$$

E Calcule los valores de las siguientes potencias con exponentes racionales:

a) $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

b) $16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

c) $64^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{64^2} = \sqrt[3]{(2^6)^2} = \sqrt[3]{(2^4)^3} = 16$

d) $125^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{125^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5}$

Contenido 11 Potencias con exponentes racionales (3)

Aprendizajes esperados

Calcula valores de expresiones numéricas conformadas por potencias con exponente un número racional y radicales.

Secuencia:

En clases anteriores se estudiaron las propiedades para la potenciación y radicación que en esta sesión serán aplicadas para efectuar productos o cocientes de potencias y radicales.

Puntos esenciales:

Recordar las propiedades estudiadas tanto para la potenciación como para la radicación.

Determinar el valor de productos o cocientes de potencias con exponentes fraccionarios y radicales aplicando dichas propiedades.

Aplicar correctamente la suma o resta de fracciones.

Contenido 11: Potencias con exponentes racionales (3)

Ejemplo Calcule los valores de las siguientes expresiones:

a) $(2^{\frac{4}{3}})(16^{\frac{1}{6}})$ b) $\sqrt{27} \div \sqrt[6]{27}$ c) $\sqrt[3]{3}(\sqrt{3}) \div \sqrt[6]{243}$

a) $(2^{\frac{4}{3}})(16^{\frac{1}{6}}) = (2^{\frac{4}{3}})(2^4)^{\frac{1}{6}}$ Se expresa 16 como una potencia de 2

$= (2^{\frac{4}{3}})(2^{\frac{2}{3}})$ Se eleva una potencia a un exponente

$= 2^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}$

$= 2^{\frac{6}{3}}$

$= 2^2$

$= 4$

Si $a > 0$ y m, n son números racionales, entonces $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

b) $\sqrt{27} \div \sqrt[6]{27} = 27^{\frac{1}{2}} \div 27^{\frac{1}{6}}$ Se expresan los radicales como potencias

$= (3^3)^{\frac{1}{2}} \div (3^3)^{\frac{1}{6}}$ Se expresa 27 como una potencia de 3

$= 3^{\frac{3}{2}} \div 3^{\frac{1}{2}}$ Se eleva una potencia a un exponente

$= 3^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}$

$= 3^1$

$= 3$

Si $a > 0$ y m, n son números racionales, entonces $a^m \div a^n = a^{m-n}$.

c) $\sqrt[3]{3}(\sqrt{3}) \div \sqrt[6]{243} = (3^{\frac{1}{3}})(3^{\frac{1}{2}}) \div (3^5)^{\frac{1}{6}}$ Se expresan los radicales como potencia

$= (3^{\frac{1}{3}})(3^{\frac{1}{2}}) \div 3^{\frac{5}{6}}$ Se eleva una potencia a un exponente

$= 3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}}$ Se efectúa el producto y la división de potencias

$= 3^0$

$= 1$ Se aplica la propiedad $a^0 = 1$

E

Calcule los valores de las siguientes expresiones:

a) $(3^{\frac{2}{3}})(3^{\frac{1}{3}})$

b) $\sqrt[3]{81} \div \sqrt[6]{9}$

c) $(\sqrt[6]{25})(\sqrt[3]{25})$

d) $\sqrt[3]{3}(\sqrt{243}) \div 3^{\frac{5}{6}}$

40

C11: Potencias con exponentes racionales (3)

Calcule los valores de las siguientes expresiones:

Ej a) $\left(2^{\frac{4}{3}}\right)\left(16^{\frac{1}{6}}\right)$ b) $\sqrt{27} \div \sqrt[6]{27}$ c) $\sqrt[3]{3}\left(\sqrt{3}\right) \div \sqrt[6]{243}$

a) $\left(2^{\frac{4}{3}}\right)\left(16^{\frac{1}{6}}\right) = \left(2^{\frac{4}{3}}\right)(2^4)^{\frac{1}{6}}$
$= \left(2^{\frac{4}{3}}\right)\left(2^{\frac{2}{3}}\right)$
$= 2^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}$
$= 2^{\frac{6}{3}}$
$= 2^2 = 4$

b) $\sqrt{27} \div \sqrt[6]{27} = 27^{\frac{1}{2}} \div 27^{\frac{1}{6}}$
$= (3^3)^{\frac{1}{2}} \div (3^3)^{\frac{1}{6}}$
$= 3^{\frac{3}{2}} \div 3^{\frac{1}{2}}$
$= 3^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}$
$= 3^1 = 3$

c) $\sqrt[3]{3}(\sqrt{3}) \div \sqrt[6]{243} = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)\left(3^{\frac{1}{2}}\right) \div 3^{\frac{5}{6}}$
$= 3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}}$
$= 3^0$
$= 1$

E Calcule los valores de las siguientes expresiones:

a) $\left(3^{\frac{2}{3}}\right)\left(3^{\frac{1}{3}}\right) = 3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^1 = 3$

b) $\sqrt[3]{81} \div \sqrt[6]{9} = 81^{\frac{1}{3}} \div 9^{\frac{1}{6}}$
$= (3^4)^{\frac{1}{3}} \div (3^2)^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{4}{3}} \div 3^{\frac{1}{3}}$
$= 3^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3}{3}} = 3$

c) $(\sqrt[6]{25})(\sqrt[3]{25}) = \left(25^{\frac{1}{6}}\right)\left(25^{\frac{1}{3}}\right) = 25^{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}} = 25^{\frac{3}{6}}$
$= 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$

Contenido 1 Gráfica de la función exponencial creciente

Sección 2: Funciones exponenciales

Contenido 1: Gráfica de la función exponencial creciente

P Dada la siguiente tabla de valores asociada a la función $y=2^x$, realice lo siguiente:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$			1			8
Punto	$A\left(-3,\frac{1}{8}\right)$	$B(-2,\ \ )$	$C(-1,\ \ )$	$D(0,1)$	$E(1,\ \ )$	$F(2,\ \ )$	$G(3,8)$

a) Complete las casillas vacías y los pares.
b) Ubique los puntos A, B, C, D, E, F y G en el plano cartesiano.
c) Trace una curva suave sobre la trayectoria que indican los puntos y prolónguela más allá de A y G.

S

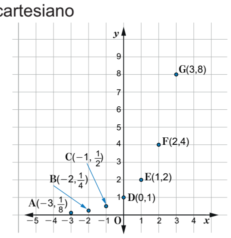
a) Se calculan los valores de y para $x=-2,\ -1,$ 1 y 2.

Para $x=-2$; $y=2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$ Para $x=-1$; $y=2^{-1}=\frac{1}{2^1}=\frac{1}{2}$

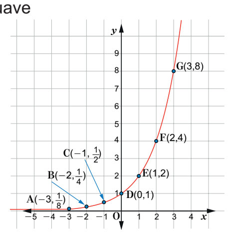
Para $x=1$; $y=2^1=2$ Para $x=2$; $y=2^2=4$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
Punto	$A\left(-3,\frac{1}{8}\right)$	$B\left(-2,\frac{1}{4}\right)$	$C\left(-1,\frac{1}{2}\right)$	$D(0,1)$	$E(1,2)$	$F(2,4)$	$G(3,8)$

b) Se ubican los puntos en el plano cartesiano



c) Se unen los puntos con una curva suave



E Dada la siguiente tabla de valores asociada a la función $y=3^x$, realice lo siguiente:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{27}$			1			27
Punto	$A\left(-3,\frac{1}{27}\right)$	$B(-2,\ \ )$	$C(-1,\ \ )$	$D(0,1)$	$E(1,\ \ )$	$F(2,\ \ )$	$G(3,27)$

a) Complete las casillas vacías y los pares.
b) Ubique los puntos B, C, D, E y F en el plano cartesiano.
c) Una los puntos con una curva suave.

42

Aprendizajes esperados

Grafica funciones exponenciales crecientes.

Secuencia:

En clases anteriores se calcularon valores de potencias utilizando las propiedades que se estudiaron para las mismas. Además, en grados anteriores se han graficado funciones de primer grado, de segundo grado y trigonométricas en el plano cartesiano.

En esta sección se utilizará la potenciación con base positiva diferente de la unidad y exponente real para definir funciones exponenciales y graficarlas en el plano cartesiano.

Puntos esenciales:

Determinar mediante la tabulación algunos valores para la función exponencial $y=2^x$ aclarando que x puede tomar cualquier valor real. Para ello, deben aplicarse correctamente las propiedades de potenciación.

Graficar en el plano cartesiano la función exponencial $y=2^x$ uniendo los puntos determinados en la tabulación con una curva suave.

Hacer notar la noción de función creciente a partir de la gráfica.

S2: Funciones exponenciales
C1: Gráfica de la función exponencial creciente

P Dada la siguiente tabla de valores asociada a la función $y=2^x$:

a) Complete las casillas vacías y los pares.
b) Ubique los puntos A, B, C, D, E, F y G en el plano cartesiano.
c) Trace una curva suave sobre la trayectoria que indican los puntos y prolónguela más allá de A y G

S

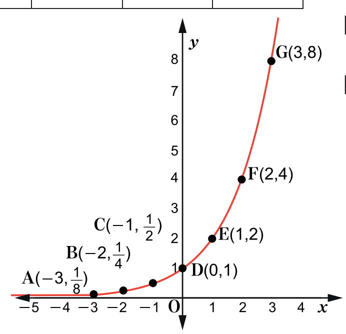
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
punto	$A(-3,\frac{1}{8})$	$B(-2,\frac{1}{4})$	$C(-1,\frac{1}{2})$	$D(0,1)$	$E(1,2)$	$F(2,4)$	$G(3,8)$

Para $x=-2,\ y=2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$

Para $x=-1,\ y=2^{-1}=\frac{1}{2^1}=\frac{1}{2}$

Para $x=1,\ y=2^1=2$

Para $x=2,\ y=2^2=4$



E Dada la siguiente tabla de valores asociada a la función $y=3^x$, determine lo que se le pide.

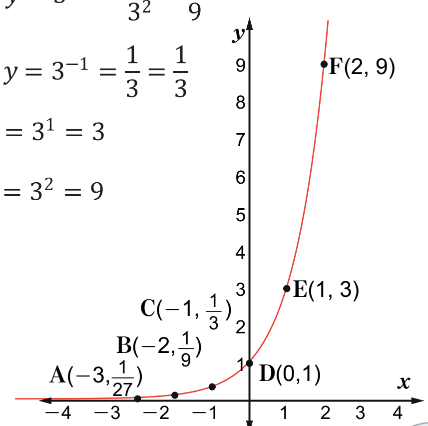
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
punto	$A(-3,\frac{1}{27})$	$B(-2,\frac{1}{9})$	$C(-1,\frac{1}{3})$	$D(0,1)$	$E(1,3)$	$F(2,9)$	$G(3,27)$

Para $x=-2,\ y=3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$

Para $x=-1,\ y=3^{-1}=\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

Para $x=1,\ y=3^1=3$

Para $x=2,\ y=3^2=9$



Contenido 2 Gráfica de la función exponencial decreciente

Aprendizajes esperados

Grafica funciones exponenciales decrecientes.

Secuencia:

En la clase anterior se graficó la función exponencial $y = 2^x$. Ahora se graficará la función $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Puntos esenciales:

Determinar mediante la tabulación algunos valores para la función exponencial $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ aclarando que x puede tomar cualquier valor real. Para ello, deben aplicarse correctamente las propiedades de potenciación.

Graficar en el plano cartesiano la función exponencial $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ uniendo los puntos determinados en la tabulación con una curva suave.

Hacer notar a partir de las gráficas, la noción de función decreciente.

Contenido 2: Gráfica de la función exponencial decreciente

P Dada la siguiente tabla de valores asociada a la función $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, realice lo siguiente:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8			1			$\frac{1}{8}$
Punto	A$(-3, 8)$	B$(-2,\ \ )$	C$(-1,\ \ )$	D$(0, 1)$	E$(1,\ \ )$	F$(2,\ \ )$	G$\left(3, \frac{1}{8}\right)$

a) Complete las casillas vacías y los pares.
b) Ubique los puntos A, B, C, D, E, F y G en el plano cartesiano.
c) Trace una curva suave sobre la trayectoria que indican los puntos y prolónguela más allá de A y G.

S a) Se calculan los valores de y para $x = -2, -1, 1$ y 2.

Para $x = -2$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = (2^{-1})^{-2} = 2^2 = 4$

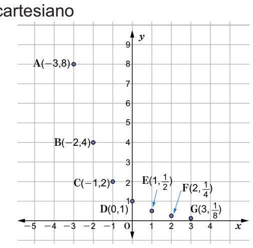
Para $x = -1$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = (2^{-1})^{-1} = 2^1 = 2$

Para $x = 1$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$

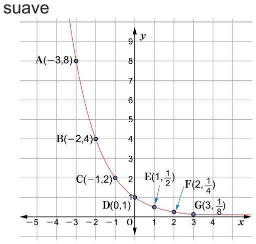
Para $x = 2$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	**4**	**2**	1	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{\frac{1}{4}}$	$\frac{1}{8}$
Punto	A$(-3, 8)$	B$(-2, \mathbf{4})$	C$(-1, \mathbf{2})$	D$(0, 1)$	E$\left(1, \mathbf{\frac{1}{2}}\right)$	F$\left(2, \mathbf{\frac{1}{4}}\right)$	G$\left(3, \frac{1}{8}\right)$

b) Se ubican los puntos en el plano cartesiano



c) Se unen los puntos con una curva suave



E Dada la siguiente tabla de valores asociada a la función $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, realice lo siguiente:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	27			1			$\frac{1}{27}$
Punto	A$(-3, 27)$	B$(-2,\ \ )$	C$(-1,\ \ )$	D$(0, 1)$	E$(1,\ \ )$	F$(2,\ \ )$	G$\left(3, \frac{1}{27}\right)$

a) Complete las casillas vacías y los pares.
b) Ubique los puntos B, C, D, E y F en el plano cartesiano.
c) Una los puntos con una curva suave.

43

C2: Gráfica de la función exponencial decreciente

P Dada la siguiente tabla de valores asociada a la función $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, determine lo que se le pide.

S a) Complete la tabla.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
punto	A$(-3, 8)$	B$(-2, 4)$	C$(-1, 2)$	D$(0, 1)$	E$\left(1, \frac{1}{2}\right)$	F$\left(2, \frac{1}{4}\right)$	G$\left(3, \frac{1}{8}\right)$

b) Ubique los puntos en el plano cartesiano.

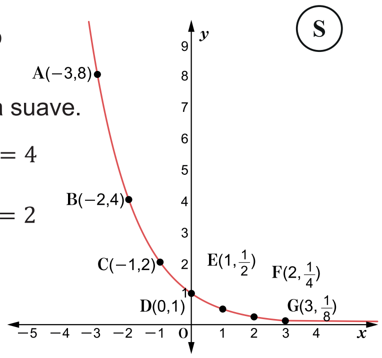
c) Una los puntos con una curva suave.

Para $x = -2, y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$

Para $x = -1, y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2^1 = 2$

Para $x = 1, y = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$

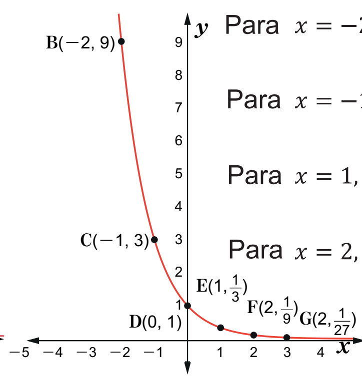
Para $x = 2, y = \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$



E Dada la siguiente tabla de valores a la función $y = \left(\frac{1}{3}\right)$ realice lo siguiente: *(Leerlo en LT)*

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$
punto	A(3, 7)	B(-2, 9)	C(-1, 3)	D(0,1)	E$\left(1, \frac{1}{3}\right)$	F$\left(2, \frac{1}{9}\right)$	G$\left(3, \frac{1}{27}\right)$

S



Para $x = -2, y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$

Para $x = -1, y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3^1 = 3$

Para $x = 1, y = \left(\frac{1}{3}\right)^{1} = \frac{1}{3}$

Para $x = 2, y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2} = \frac{1}{9}$

Contenido 3 Gráfica y propiedades de la función exponencial creciente

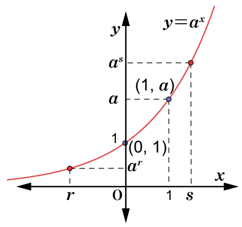
Contenido 3: Gráfica y propiedades de la función exponencial creciente

Propiedades de la gráfica de $y=a^x$, $a>1$:

1. La gráfica pasa por los puntos (0, 1) y (1, a), ya que $a^0=1$ y $a^1=a$.
2. El eje x es asíntota horizontal, es decir la gráfica no toca a la parte negativa de este eje, aunque se acerca indefinidamente a este.

Observando la gráfica se concluye que esta es creciente, es decir, si $r<s$, entonces $a^r<a^s$.

3. Dominio: números reales
   Rango: números reales positivos.



Asíntota de la gráfica de una función es una línea recta a la que se aproxima continuamente la gráfica de tal función.

P Escriba $<$ o $>$ en el espacio en blanco: 2^3 ☐ 2^5

S 2^3 $\boxed{<}$ 2^5 Dado que la base es $2(2>1)$, sucede que $3<5$ implica $2^3<2^5$.

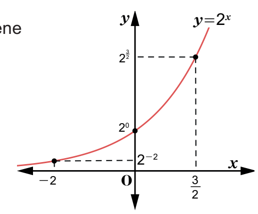
E₁ Escriba $<$ o $>$ en el espacio en blanco, según corresponda:

a) 2^2 ☐ 2^3 b) 3^5 ☐ 3^7 c) 4^3 ☐ 4^2

Ejemplo Ordene la siguiente secuencia numérica de forma creciente: 2^{-2}, $2^{\frac{3}{2}}$, 2^0.

Dado que la base es 2 $(2>1)$, de $-2<0<\frac{3}{2}$, se obtiene

$$2^{-2}<2^0<2^{\frac{3}{2}}$$



E₂ Ordene las siguientes secuencias numéricas de forma creciente:

a) $2^{-3}, 2^{\frac{1}{2}}, 2^2$ b) $5^{\frac{1}{2}}, 5^{-1}, 5^2$

Aprendizajes esperados

Deduce y aplica propiedades de la función exponencial creciente.

▪ Secuencia:

En clases anteriores se graficaron las funciones exponenciales $y=2^x$ y $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. En esta clase se caracterizan las funciones exponenciales del tipo $y=a^x$ con $a>1$ tomando como referencia la función $y=2^x$.

▪ Puntos esenciales:

Recordar el comportamiento de la gráfica de la función $y=2^x$ y notar que:

- ✓ Dicha función toma únicamente valores positivos.
- ✓ No corta al eje x.
- ✓ El eje x es una asíntota horizontal.
- ✓ Corta al eje y en el punto (0, 1).
- ✓ A medida que los valores de x aumentan los valores de y también lo hacen. Es decir, es una función creciente.

De ahí que las funciones exponenciales de la forma $y=a^x$ con $a>1$ cumplen con las mismas propiedades.

Desde un inicio se considera que la base sea un número positivo $(a>0)$ para garantizar que a^x esté definido.

Recordar los conceptos de dominio y rango de una fracción.

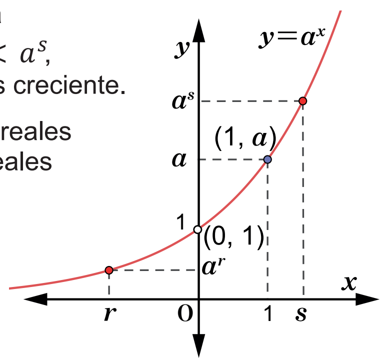
C3: Gráfica y propiedades de la función exponencial creciente

(D) Propiedades de la gráfica de $y=a^x(a>1)$:

1. Pasa por el punto $(0,1)$ y $(1,a)$ ya que $a^0=1$, y $a^1=a$
2. El eje x es asíntota

Si $r<s$ entonces $a^r<a^s$, es decir, la función es creciente.

3. Dominio: números reales
   Rango: números reales positivos



(P1) Escriba "<" o ">" el espacio en blanco:

$2^3 < 2^5$

Porque la base es 2 $(2>1)$, orden de exponentes es igual a orden de potencias

(E1) *Leer en el libro de texto.*

a) $2^2 < 2^3$ b) $3^5 < 3^7$ c) $4^3 > 4^2$

(Ej2) Ordene la siguiente secuencia numérica en orden creciente;

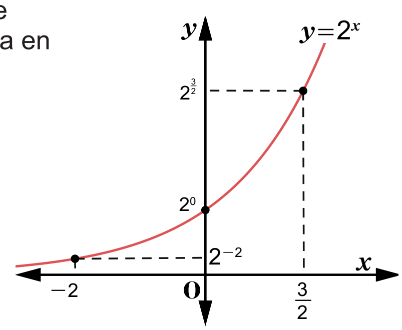
$2^{-2}, 2^{\frac{3}{2}}, 2^0$

Como: La base es 2(2>1), así

$-2<0<\frac{3}{2}$

entonces:

$2^{-2}<2^0<2^{\frac{3}{2}}$



(E2) Ordene las siguientes secuencias numéricas en orden creciente:

a) $2^{-3}, 2^{\frac{1}{2}}, 2^2$ $\quad 2^{-3}<2^{\frac{1}{2}}<2^2$

b) $5^{\frac{1}{2}}, 5^{-1}, 5^2$ $\quad 5^{-1}<5^{\frac{1}{2}}<5^2$

Contenido 4 Gráfica y propiedades de la función exponencial decreciente

Aprendizajes esperados

Deduce y aplica propiedades de la función exponencial decreciente.

Secuencia:

En la clase anterior se estudiaron las propiedades de las funciones exponenciales del tipo $y = a^x$ con $a > 1$. Ahora caracterizaremos las funciones exponenciales del tipo $y = a^x$ con $0 < a < 1$ tomando como referencia la función $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Puntos esenciales:

Recordar el comportamiento de la gráfica de la función $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y notar que:

- ✓ Dicha función toma únicamente valores positivos.
- ✓ No corta al eje x.
- ✓ El eje x es una asíntota horizontal.
- ✓ Corta al eje y en el punto (0,1).
- ✓ A medida que los valores de x aumentan, los valores de y disminuyen. Es decir, es una función decreciente.

De ahí que las funciones exponenciales de la forma $y = a^x$ con $0 < a < 1$ cumplen con las mismas propiedades.

Hcer notar que números como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ son positivos menores que 1.

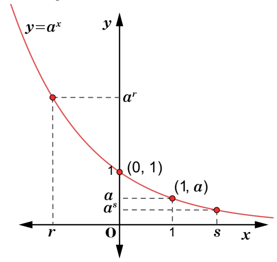
Contenido 4: Gráfica y propiedades de la función exponencial decreciente

Propiedades de la gráfica de $y=a^x$, $0<a<1$:

1. La gráfica pasa por los puntos (0, 1) y (1, a), ya que $a^0=1$ y $a^1=a$.
2. El eje x es asíntota horizontal, es decir la gráfica no toca a la parte positiva de este eje, aunque se acerca indefinidamente a este.

Observando la gráfica se concluye que esta es decreciente, es decir, si $r<s$, entonces $a^r>a^s$.

3. Dominio: números reales
   Rango: números reales positivos.



P Escriba < o > en el espacio en blanco: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \square \left(\frac{1}{2}\right)^5$

S

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \boxed{>} \left(\frac{1}{2}\right)^5$

Como la base es $\frac{1}{2}\left(0<\frac{1}{2}<1\right)$, sucede que $3<5$ implica que $\left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^5$.

E1

Escriba < o > en el espacio en blanco:

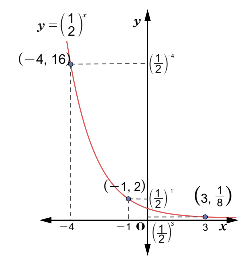
a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \square \left(\frac{1}{2}\right)^6$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \square \left(\frac{1}{3}\right)^4$ c) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 \square \left(\frac{1}{4}\right)^2$

Ejemplo Ordene la siguiente secuencia numérica de forma creciente: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

Como la base es $\frac{1}{2}\left(0<\frac{1}{2}<1\right)$,

y $-4<-1<3$, entonces

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$



E2

Ordene las siguientes secuencias numéricas de manera creciente:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^2$

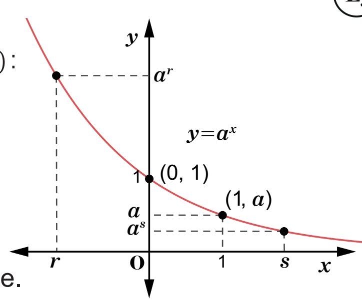
C4: Gráfica y propiedades de la función exponencial decreciente

Propiedades de $y = a^x (0 < a < 1)$:

1. La gráfica pasa por los puntos (0,1) y (1, a), ya que $a^0 = 1$ y $a^1 = a$
2. El eje x es asíntota horizontal.

Si $r < s$ entonces $a^r > a^s$, es decir, la función es decreciente.

3. Dominio: números reales.
   Rango: números reales positivos.



P Escriba "<" o ">" en el espacio en blanco: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \boxed{>} \left(\frac{1}{2}\right)^5$

S Como la base es $\frac{1}{2}\left(0<\frac{1}{2}<1\right)$

E1 Como $3 < 5$, entonces $\left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^5$

(*Leer en LT*)

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^6$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 > \left(\frac{1}{3}\right)^4$ c) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 < \left(\frac{1}{4}\right)^2$

Ej Ordene la siguiente secuencia numérica en orden creciente;

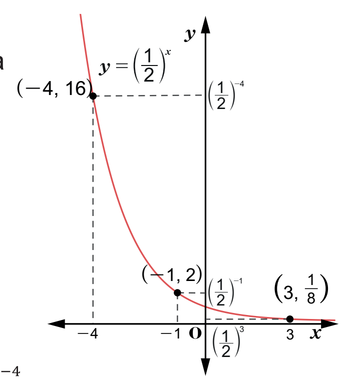
$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

Como la base $0<\frac{1}{2}<1$:

$-4<-1<3$,

entonces:

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$



E2 Ordene las siguientes secuencias numéricas en orden creciente:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ $\qquad \left(\frac{1}{3}\right)^3 < \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^2$ $\qquad \left(\frac{1}{5}\right)^2 < \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} < \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

Contenido 5 Ecuaciones exponenciales (1)

Contenido 5: Ecuaciones exponenciales (1)

Propiedad

Dos potencias a^p y a^q, con $a \neq 0, 1, -1$, son iguales si y solo si $p = q$.
En símbolos,

$$a^p = a^q \text{ si y solo si } p = q$$

Potencia: base $\rightarrow$ a^p $\leftarrow$ exponente

P Encuentre la solución de cada ecuación exponencial.

a) $2^x = 8$ b) $3^{2x} = 9$ c) $7^{-x} = \frac{1}{49}$

S

a) $2^x = 8$ — Se descompone 8 en factores para obtener potencias con igual base

$x=3$ — Se usa la propiedad $a^p = a^q$ implica $p = q$

Descomposición de 8 en factores

8	2
4	2
2	2
1	

$8 = (2)(2)(2) = 2^3$

b) $3^{2x} = 9$ — Se descompone 9 en factores para obtener potencias con igual base

$3^{2x} = 3^2$

$2x = 2$ — Se usa la propiedad $a^p = a^q$ implica $p = q$

$\frac{2x}{2} = \frac{2}{2}$ — Se resuelve la ecuación de primer grado

$x=1$

Descomposición de 9 en factores

9	3
3	3
1	

$9 = (3)(3) = 3^2$

c) $7^{-x} = \frac{1}{49}$ — Se descompone 49 en factores para obtener potencias con igual base

$7^{-x} = \frac{1}{7^2}$

$7^{-x} = 7^{-2}$ — Se utiliza la propiedad $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

$-x = -2$ — Se usa la propiedad $a^p = a^q$ implica $p = q$

$x=2$

E Encuentre las soluciones de las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3^x = 9$ b) $2^{2x} = 16$

c) $5^{2x} = 125$ d) $2^x = \frac{1}{32}$

e) $6^{-x} = \frac{1}{216}$

46

Aprendizajes esperados

Resuelve ecuaciones exponenciales sencillas.

Secuencia:

En las clases anteriores se establecieron las propiedades que determinan el comportamiento de las funciones exponenciales. Aquí se usa una nueva propiedad que facilita la resolución de ecuaciones de este tipo.

Puntos esenciales:

Explicar el concepto de ecuación exponencial (la variable figura como exponente).

La propiedad:

si $a^p = a^q$ entonces $p = q$.

es conocida formalmente como la inyectividad de la función exponencial $y = a^x$, esto es, a valores distintos de x le corresponden valores distintos de y.

Usar dicha propiedad para resolver ecuaciones exponenciales.

Aclarar que aquellas ecuaciones en las que las variables aparecen como exponentes son llamadas ecuaciones exponenciales.

C5: Ecuaciones exponenciales (1)

Propiedad:

Si $a \neq 0, 1, -1$, se tiene

$a^p = a^q$ si y solo si $p = q$

Potencia: a^p — base, exponente

P Encuentre la solución de cada ecuación exponencial.

S

a) $2^x = 8$

8	2
4	2
2	2
1	

$8 = (2)(2)(2) = 2^3$

$2^x = 2^3$

$x = 3$

b) $3^{2x} = 9$

9	3
3	3
1	

$9 = (3)(3) = 3^2$

$3^{2x} = 3^2$

$2x = 2$

$\frac{2x}{2} = \frac{2}{2}$

$x = 1$

c) $7^{-x} = \frac{1}{49}$

$7^{-x} = \frac{1}{7^2}$

$7^{-x} = 7^{-2}$

$-x = -2$

$x = 2$

E *Leer en el libro de texto.*

a) $3^x = 9$

$3^x = 3^2$

$x = 3$

b) $2^{2x} = 16$

$2^{2x} = 2^4$

$2x = 4$

$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$

$x = 2$

c) $5^{2x} = 125$

$5^{2x} = 5^3$

$2x = 3$

$\frac{2x}{2} = \frac{3}{2}$

$x = \frac{3}{2}$

d) $2^x = \frac{1}{32}$

$2^x = \frac{1}{2^5}$

$2^x = 2^{-5}$

$x = -5$

e) $6^{-x} = \frac{1}{216}$

$6^{-x} = \frac{1}{6^3}$

$6^{-x} = 6^{-3}$

$-x = -3$

$x = 3$

Contenido 6 Ecuaciones exponenciales (2)

Aprendizajes esperados

Resuelve ecuaciones exponenciales sencillas.

Secuencia:

En la clase anterior se comenzó el estudio de las ecuaciones exponenciales, pero se trataron aquellas que resultan sencillas de resolver. Ahora se resuelven ecuaciones exponenciales cuyas bases difieren, por lo que se hace necesario (de ser posible) expresarlas en una base común y resolver ecuaciones de primer grado.

Puntos esenciales:

Recordar la propiedad que se utiliza para resolver ecuaciones exponenciales.

Tener en cuenta las propiedades de potenciación estudiadas.

Recordar los métodos estudiados para resolver ecuaciones de primer grado.

Hacer notar que cuando las bases de las potencias involucradas difieren, de ser posible, hay que expresarlas en una base común para luego aplicar la propiedad estudiada.

Contenido 6: Ecuaciones exponenciales (2)

P Encuentre las soluciones de las ecuaciones exponenciales.

a) $9^{2x}=81$ b) $64^{x}=4^{4x+1}$ c) $125^{x-1}=25^{x+3}$

S

a) $9^{2x}=81$

$(3^2)^{2x}=3^4$ — Se descomponen 9 y 81 en factores para obtener potencias con la misma base con la misma base 3

$3^{4x}=3^4$ — Se aplica la propiedad $(a^m)^n=a^{mn}$

$4x=4$ — Se usa la propiedad $a^p=a^q$ implica $p=q$

$\frac{4x}{4}=\frac{4}{4}$ — Se resuelve la ecuación de primer grado

$x=1$

Otra forma de resolver la ecuación es

Se descompone 81 en factores para obtener potencias de base 9.

$9^{2x}=81$

$9^{2x}=9^2$

$2x=2$

$x=1$

b) $64^{x}=4^{4x+1}$

$(2^6)^x=(2^2)^{4x+1}$ — Se descomponen 64 y 4 en factores para obtener potencias con la base común 2

$2^{6x}=2^{2(4x+1)}$ — Se aplica la propiedad $(a^m)^n=a^{mn}$

$6x=8x+2$ — Se usa la propiedad $a^p=a^q$ implica $p=q$

$6x-8x=2$ — Se resuelve la ecuación de primer grado

$\frac{-2x}{-2}=\frac{2}{-2}$

$x=-1$

c) $125^{x-1}=25^{x+3}$

$(5^3)^{x-1}=(5^2)^{x+3}$ — Se descomponen 125 y 25 en factores para obtener potencias con la base común 5

$5^{3(x-1)}=5^{2(x+3)}$ — Se aplica la propiedad $(a^m)^n=a^{mn}$

$3(x-1)=2(x+3)$ — Se usa la propiedad $a^p=a^q$ implica $p=q$

$3x-3=2x+6$ — Se resuelve la ecuación de primer grado

$3x-2x=6+3$

$x=9$

E Encuentre la solución de cada ecuación exponencial.

a) $4^{2x}=16$ b) $2^{x+1}=256$

c) $27^{x}=3^{2x+3}$ d) $27^{x-1}=9^{x+3}$

e) $10^{3-x}=1$ f) $9^{x+1}=\left(\frac{1}{27}\right)^{1-x}$

47

C6: Ecuaciones exponenciales (2)

P Encuentre las soluciones de las ecuaciones exponenciales.

S

Potencias con la misma base

$\boxed{(a^m)^n=a^{mn}}$

$\boxed{a^p=a^q\rightarrow p=q}$

a) $9^{2x}=81$

$(3^2)^{2x}=3^4$

$3^{4x}=3^4$

$4x=4$

$\frac{4x}{4}=\frac{4}{4}$

$x=1$

b) $64^{x}=4^{4x+1}$

$(2^6)^x=(2^2)^{4x+1}$

$2^{6x}=2^{2(4x+1)}$

$6x=8x+2$

$6x-8x=2$

$-2x=2$

$\frac{-2x}{-2}=\frac{2}{-2}$

$x=-1$

c) $125^{x-1}=25^{x+3}$

$(5^3)^{x-1}=(5^2)^{x+3}$

$5^{3(x-1)}=5^{2(x+3)}$

$3x-3=2x+6$

$3x-2x=6+3$

$x=9$

E *Leer en el libro de texto.*

a) $4^{2x}=16$

$(2^2)^{2x}=2^4$

$2^{4x}=2^4$

$4x=4$

$\frac{4}{4}x=\frac{4}{4}$

$x=1$

b) $2^{x+1}=256$

$2^{x+1}=2^8$

$x+1=8$

$x=8-1$

$x=7$

c) $27^{x}=3^{2x+3}$

$(3^3)^x=3^{2x+3}$

$3^{3x}=3^{2x+3}$

$3x=2x+3$

$3x-2x=3$

$x=3$

d) $27^{x-1}=9^{x+3}$

$(3^3)^{x-1}=(3^2)^{x+3}$

$(3)^{3x-3}=(3)^{2x+6}$

$3x-3=2x+6$

$3x-2x=6+3$

$x=9$

e) $10^{3-x}=1$

$10^{3-x}=10^0$

$3-x=0$

$-x=-3$

$x=3$

Contenido 7 Ecuaciones exponenciales (3)

Contenido 7: Ecuaciones exponenciales (3)

Ejemplo Encuentre la solución de cada ecuación exponencial.

a) $3^{x^2-10} = 3^{3x}$ b) $2^{x^2-3x} = 16$

a) $3^{x^2-10} = 3^{3x}$

$x^2 - 10 = 3x$ — Se usa la propiedad $a^p = a^q$ implica $p = q$

$x^2 - 3x - 10 = 0$ — Se escribe la ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$

$(x-5)(x+2) = 0$ — Se resuelve la ecuación de segundo grado con el método de factorización

$x - 5 = 0, \quad x + 2 = 0$

$\mathbf{x = 5, \quad x = -2}$

b) $2^{x^2-3x} = 16$

$2^{x^2-3x} = 2^4$ — Se descompone 16 en factores para obtener potencias con base común 2

$x^2 - 3x = 4$ — Se aplica la propiedad $a^p = a^q$ implica $p = q$

$x^2 - 3x - 4 = 0$ — Se transpone el 4 al lado izquierdo

$(x-4)(x+1) = 0$ — Se resuelve la ecuación de segundo grado con el método de factorización

$x - 4 = 0, \quad x + 1 = 0$

$\mathbf{x = 4, \quad x = -1}$

E

Encuentre la solución de cada ecuación exponencial.

a) $2^{x^2-5} = 2^{4x}$

b) $3^{x^2-2x} = 27$

c) $2^{x^2+6x} = 32^x$

d) $5^{x^2+2x+4} = 125$

e) $9^{x^2} = 3^{3x+2}$

48

Aprendizajes esperados

Resuelve ecuaciones exponenciales sencillas que conducen a la solución de ecuaciones de segundo grado.

Secuencia:

En la clase anterior se resolvieron ecuaciones exponenciales que llevaban a resolver una ecuación lineal. Aquí se resuelven aquellas que llevan a resolver una ecuación cuadrática.

Puntos esenciales:

Recordar la propiedad que se utiliza para resolver ecuaciones exponenciales.

Recordar los métodos estudiados para resolver ecuaciones cuadráticas, especialmente resolución por factorización.

Usar el proceso estudiado para resolver ecuaciones exponenciales cuyas bases difieren.

C7: Ecuaciones exponenciales (3)

Ej Encuentre la solución de cada ecuación exponencial.

S a)

$$\begin{aligned} 3^{x^2-10} &= 3^{3x} \\ x^2 - 10 &= 3x \\ x^2 - 3x - 10 &= 0 \\ (x-5)(x+2) &= 0 \\ x - 5 = 0,\ & x + 2 = 0 \\ x = 5,\ & x = -2 \end{aligned}$$

$\boxed{a^p = a^q \rightarrow p = q}$

Ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

b)

$$\begin{aligned} 2^{x^2-3x} &= 16 \\ 2^{x^2-3x} &= 2^4 \\ x^2 - 3x &= 4 \\ x^2 - 3x - 4 &= 0 \\ (x-4)(x+1) &= 0 \\ x - 4 = 0,\ & x + 1 = 0 \\ x = 4,\ & x = -1 \end{aligned}$$

Descomponer el 16 para bases iguales

c)

$$\begin{aligned} 2^{x^2+6x} &= 32^x \\ 2^{x^2+6x} &= 2^{5x} \\ x^2 + 6x &= 5x \\ x^2 + 6x - 5x &= 0 \\ x^2 + x &= 0 \\ x(x+1) &= 0 \\ x = 0,\ & x + 1 = 0 \\ x = 0,\ & x = -1 \end{aligned}$$

E a)

$$\begin{aligned} 2^{x^2-5} &= 2^{4x} \\ x^2 - 5 &= 4x \\ x^2 - 4x - 5 &= 0 \\ (x-5)(x+1) &= 0 \\ x - 5 = 0,\ & x + 1 = 0 \\ x = 5,\ & x = -1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 3^{x^2-2x} &= 27 \\ 3^{x^2-2x} &= 3^3 \\ x^2 - 2x &= 3 \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ (x-3)(x+1) &= 0 \\ x - 3 = 0,\ & x + 1 = 0 \\ x = 3,\ & x = -1 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} 5^{x^2+2x+4} &= 125 \\ 5^{x^2+2x+4} &= 5^3 \\ x^2 + 2x + 4 &= 3 \\ x^2 + 2x + 4 - 3 &= 0 \\ x^2 + 2x + 1 &= 0 \\ (x+1)^2 &= 0 \\ x + 1 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} 9^{x^2} &= 3^{3x+2} \\ 3^{2x^2} &= 3^{3x+2} \\ 2x^2 &= 3x + 2 \\ 2x^2 - 3x - 2 &= 0 \\ (2x+1)(x-2) &= 0 \\ 2x + 1 = 0,\ & x - 2 = 0 \\ x = -\tfrac{1}{2},\ & x = 2 \end{aligned}$$

Contenido 8 Ecuaciones exponenciales (4)

Aprendizajes esperados

Resuelve ecuaciones exponenciales reducibles a modelos de segundo grado.

Secuencia:

Hasta este momento se han resuelto ecuaciones exponenciales que llevan a resolver una ecuación lineal o cuadrática. En esta clase se resuelven ecuaciones exponenciales que pueden ser expresadas como una ecuación cuadrática haciendo un cambio de variable.

Puntos esenciales:

Decidir acertadamente el cambio de variable que se hará para la resolución de la ecuación exponencial.

Recordar los métodos estudiados para resolver ecuaciones cuadráticas.

Recordar que las funciones exponenciales solo toman valores positivos. Este hecho se usará para decidir cuál de las soluciones de la ecuación cuadrática lleva a soluciones de la ecuación original.

Usar la propiedad que permite resolver ecuaciones exponenciales al momento de regresar a la variable inicial.

Contenido 8: Ecuaciones exponenciales (4)

P Encuentre la solución de la ecuación $9^x - 3^x - 6 = 0$.

Para encontrar la solución de la ecuación dada se realizan los siguientes pasos:

1. Se expresa la ecuación tomando como variable a 3^x.
2. Se hace un cambio de variable t por 3^x y se escribe la ecuación con t.
3. Se resuelve la ecuación de segundo grado para $t>0$.
4. Se regresa a la variable original y se escribe la solución.

S

Paso 1:

$9^x - 3^x - 6 = 0$

$(3^2)^x - 3^x - 6 = 0$ Se transpone el 6 al lado izquierdo

$(3^x)^2 - 3^x - 6 = 0$ Se sustituye $(3^2)^x$ por $(3^x)^2$

Paso 2:

$t^2 - t - 6 = 0$ Se realiza el cambio de variable t por 3^x

Paso 3:

$(t-3)(t+2) = 0$ Se factoriza el trinomio

$t-3=0 \ , \ t+2=0$ Se resuelve la ecuación de segundo grado

$t=3 \ , \ t=-2$

Como $t > 0$ entonces $t=3$

Paso 4:

$3^x = 3$ Se regresa a la variable original

$3^x = 3^1$ Se aplica la propiedad que aparece a la derecha

$x = 1$

La solución de la ecuación $9^x - 3^x - 6 = 0$ es $x = 1$.

Propiedad
$a^p = a^q$
es equivalente a $p=q$

E Encuentre la solución de cada ecuación.

a) $9^x - 2(3^x) - 3 = 0$

b) $9^x - 4(3^x) + 3 = 0$

49

C8: Ecuaciones exponenciales (4)

P Encuentre la solución de la ecuación $9^x - 3^x - 6 = 0$.

S Tome en cuenta los pasos siguientes:

Paso 1: Exprese la ecuación con 3^x.

$$(3^2)^x - 3^x - 6 = 0$$
$$(3^x)^2 - 3^x - 6 = 0$$

Paso 2: Haga un cambio de variable $t = 3^x$

$$t^2 - t - 6 = 0$$

Paso 3: Resuelva la ecuación de segundo grado para $t > 0$

$$(t-3)(t+2) = 0$$
$$t-3=0 \quad , \quad t+2=0$$
$$t=3 \quad , \quad t=-2$$

Paso 4: Regrese a la variable original y escriba la solución

$$3^x = 3$$
$$3^x = 3^1$$
$$x = 1$$

Propiedad: $a^p = a^q \rightarrow p = q$

La solución de la ecuación $9^x - 3^x - 6 = 0$ es $x = 1$

E Encuentre la solución de la ecuación.

a) $9^x - 2(3^x) - 3 = 0$

$$(3^2)^x - 2(3^x) - 3 = 0$$
$$(3^x)^2 - 2(3^x) - 3 = 0$$
$$t^2 - 2t - 3 = 0$$
$$(t-3)(t+1) = 0$$
$$t-3=0 \ , \ t+1=0$$
$$t=3 \ , \ t=-1$$
$$3^x = 3$$
$$3^x = 3^1$$
$$x = 1$$

La solución de la ecuación $9^x - 2(3^x) - 3 = 0$ es

$x = 1$

b) $9^x - 4(3^x) + 3 = 0$

$$(3^2)^x - 4(3^x) + 3 = 0$$
$$(3^x)^2 - 4(3^x) + 3 = 0$$
$$t^2 - 4t + 3 = 0$$
$$(t-3)(t-1) = 0$$
$$t-3=0 \ , \ t-1=0$$
$$t=3 \ , \ t=1$$

$3^x = 3$; $3^x = 1$

$3^x = 3^1$; $3^x = 3^0$

$x = 1$; $x = 0$

Las soluciones de la ecuación $9^x - 4(3^x) + 3 = 0$ son

$x = 1 \ , \ x = 0$

Prueba de Matemática 11mo (30 min.)   Fecha: ____________

Unidad 2: Potenciación y funciones exponenciales

/ 20

Nombre: ______________________________ Sección: __________
Sexo: M / F

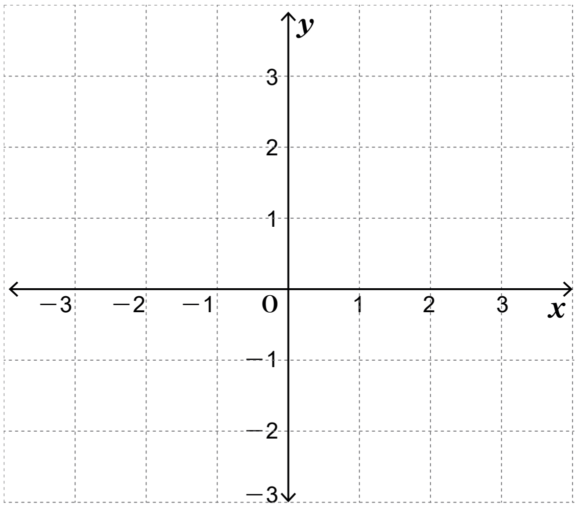
1. Calcule el valor de las siguientes expresiones: (2 puntos × 6 = 12)

a) $(-3)^4$ b) 5^{-1}

c) $(-7)^0$ d) $\sqrt[5]{32}$

e) $8^{\frac{1}{3}}$ f) $(3^{\frac{2}{3}})(3^{\frac{1}{3}})$

2. Grafique la función $y = 2^x$. (2 puntos)



3. Escriba $<$ o $>$ en el espacio en blanco: (1 punto ×2 = 2)

a) 3^5 ___ 3^7 b) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ ____ $\left(\frac{1}{3}\right)^4$

4. Encuentre la solución de cada una de las siguientes ecuaciones exponenciales:
(2 puntos × 2 = 4)

a) $2^{x+1} = 4$ b) $9^{x+1} = \left(\frac{1}{81}\right)^{1-x}$

Unidad 3

Logaritmo y Funciones Logarítmicas

Sección 1 Logaritmo

Sección 2 Funciones logarítmicas

Contenido 1 Definición de logaritmo

Aprendizajes esperados

Aplica la definición de logaritmo en la solución de ejercicios.

Secuencia:

En la unidad anterior se estudiaron las funciones exponenciales. Esta unidad comienza con la definición del logaritmo de un número positivo, contenido que se desarrolla en esta clase.

Puntos esenciales:

Definir el logaritmo en la base a ($a>0$ y $a\neq 1$) de un número positivo M como el exponente p al que debe elevarse la base para obtener dicho número. Es decir,

$$\log_a M = p \text{ si y solo si } a^p = M.$$

Esta es una equivalencia entre el logaritmo de un número positivo y una expresión exponencial.

Determinar los elementos que intervienen en expresiones logarítmicas.

Usar la definición de logaritmo para convertir expresiones de la forma exponencial a la logarítmica o viceversa.

Sección 1: Logaritmo

Contenido 1: Definición de logaritmo

Definición

El logaritmo del número $M>0$ en la base a, con $a>0$ y $a\neq 1$, es el exponente p al que debe elevarse la base a para obtener el número M. En símbolos

Argumento

$$\log_a M = p \quad \text{si y solo si} \quad M = a^p$$

Base Logaritmo

- $\log_a M = p$ se lee: "p es el logaritmo de M en la base a".
- log es una abreviatura de la palabra logaritmo.

Ejemplo 1 Convierta de la forma exponencial a la logarítmica o viceversa.

Forma exponencial $M=a^p$	$8=2^3$	$81=3^4$	$\frac{1}{9}=3^{-2}$	
Forma logarítmica $\log_a M=p$				$\log_{10}100=2$

Utilizando el hecho de que $a^p=M$ es equivalente a $\log_a M=p$ se completa la tabla dada.

Forma exponencial $M=a^p$	$8=2^3$	$81=3^4$	$\frac{1}{9}=3^{-2}$	$100=10^2$
Forma logarítmica $\log_a M=p$	$\log_2 8=3$	$\log_3 81=4$	$\log_3\frac{1}{9}=-2$	$\log_{10}100=2$

E_1 Convierta de la forma exponencial a la logarítmica o viceversa.

Forma exponencial $M=a^p$	$144=12^2$	$7=7^1$		
Forma logarítmica $\log_a M=p$			$\log_3 9=2$	$\log_3\frac{1}{243}=-5$

Ejemplo 2 Encuentre el valor de x y el de b empleando la definición de logaritmo.

a) $\log_4 x=2$ b) $\log_b 100=2$

Utilizando que $\log_a M=p$ es equivalente a $M=a^p$ se tiene:

a) Se expresa $\log_4 x=2$ como $x=4^2$
$x=16$

b) La ecuación $\log_b 100=2$ se lleva a la forma $100=b^2$
$b=\sqrt{100}$ (base $b>0$)
$b=\sqrt{10^2}=10$

E_2 Encuentre el valor de x y el de b empleando la definición de logaritmo.

a) $\log_2 x=2$ b) $\log_3 x=2$ c) $\log_b 16=2$
d) $\log_2 x=-3$ e) $\log_b 25=2$ f) $\log_b 10^{-3}=-3$

52

S1: Logaritmo

C1: Definición de logaritmo

(D) Logaritmo

Argumento

$$\log_a M = p \quad \leftrightarrow \quad M = a^p$$

Base Logaritmo

$\log_a M = p$ se lee: p es el logaritmo de M en la base a

(Ej) Convierta de la forma exponencial a la logarítmica o viceversa.

Forma $M=a^p$	$8=2^3$	$81=3^4$	$\frac{1}{9}=3^{-2}$	$100=10^2$
Forma $\log_a M=p$	$\log_2 8=3$	$\log_3 81=4$	$\log_3\frac{1}{9}=-2$	$\log_{10}100=2$

(E1) Convierta de la forma exponencial a la logarítmica o viceversa.

Forma $M=a^p$	$144=12^2$	$7=7^1$	$9=3^2$	$\frac{1}{243}=3^{-5}$
Forma $\log_a M=p$	$\log_{12}144=2$	$\log_7 7=1$	$\log_3 9=2$	$\log_3\frac{1}{243}=-5$

(Ej) Encuentre el valor de x y el de b empleando la definición de logaritmo.

$\log_4 x = 2$
$\log_4 x = 2 \leftrightarrow x = 4^2$
$x = 16$

b) $\log_b 100 = 2$
$\log_b 100 = 2 \leftrightarrow 100 = b^2$
$b^2 = 100$
$b = \sqrt{100},\quad b>0$
$b = \sqrt{10^2}$
$b = 10$

(E2) a) $\log_2 x = 2 \leftrightarrow x = 2^2$
$x = 4$

b) $\log_3 x = 2 \leftrightarrow x = 3^2$
$x = 9$

c) $\log_b 16 = 2 \leftrightarrow 16 = b^2$
$b = \sqrt{16}$
$b = 4$

d) $\log_2 x = -3 \leftrightarrow x = 2^{-3}$
$x = \frac{1}{8}$

Contenido 2 Propiedades básicas de los logaritmos (1)

Contenido 2: Propiedades básicas de los logaritmos (1)

P

Calcule los valores de los siguientes logaritmos:

a) $\log_{10}10^5$ b) $\log_2 1$ c) $\log_3 3$

S

a) Sea $\log_{10}10^5 = p$. Entonces se utiliza la definición de logaritmo y se tiene, en forma exponencial,

$$10^5 = 10^p$$

como ambas potencias con la misma base son iguales, los exponentes son iguales. Por tanto $p = 5$, de donde $\mathbf{\log_{10}10^5 = p = 5}$.

b) Sea $\log_2 1 = p$. Al sustituir 1 por 2^0 se obtiene

$$\log_2 2^0 = p,$$

lo que en forma exponencial se escribe $2^0 = 2^p$. De aquí se obtiene $p = 0$.

Por tanto $\mathbf{\log_2 1 = 0}$.

c) Sea $\log_3 3 = p$. Entonces $3 = 3^p$, es decir $3^1 = 3^p$, de donde $1 = p$.

Por tanto $\mathbf{\log_3 3 = p = 1}$.

C

Propiedades de los logaritmos

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces

$\log_a a^p = p$ $\log_a 1 = 0$ $\log_a a = 1$

Ejemplo Encuentre los valores de los siguientes logaritmos:

a) $\log_6 36$ b) $\log_2 \frac{1}{4}$

a) $\log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$ b) $\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$

E

Encuentre los valores de los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 2^5$ b) $\log_3 1$

c) $\log_7 7$ d) $\log_5 25$

e) $\log_{10} \frac{1}{10}$ f) $\log_3 \sqrt{3}$

53

Aprendizajes esperados

Calcula valores de logaritmos aplicando propiedades básicas de logaritmos.

Secuencia:

En la clase anterior se estudió la definición del logaritmo de un número positivo, la que sirve para establecer algunas propiedades de los mismos que se estudian en esta sección.

Puntos esenciales:

Recordar la definición de logaritmo.

Establecer las propiedades $\log_a a^p = p$, $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$ de los logaritmos que aquí se estudian a partir de la definición.

Expresar verbalmente las propiedades de los logaritmos.

Indicar cada una de las propiedades que se aplican en la resolución de ejemplos y ejercicios.

Recordar las propiedades de potenciación:

✓ $a^0 = 1$, $a \neq 0$

✓ $a^1 = a$

C2: Propiedades básicas de los logaritmos (1)

(P) Calcule los valores de los siguientes logaritmos:

a) $\log_{10} 10^5$ b) $\log_2 1$ c) $\log_3 3$

(S) a) Sea $\log_{10} 10^5 = p$

$\boxed{\log_a M = p \leftrightarrow M = a^p}$

$\log_{10} 10^5 = p \quad \leftrightarrow \quad 10^5 = 10^p$

Por lo tanto, $p = 5$, de donde $\log_{10} 10^5 = 5$

b) Sea $\log_2 1 = p$, como $2^0 = 1$, entonces

$$\log_2 2^0 = p$$

$$2^0 = 2^p$$

$\boxed{a^0 = 1}$

Así, $p = 0$, entonces $\log_2 1 = 0$

c) Sea $\log_3 3 = p$. Entonces

$$3 = 3^p$$

$$3^1 = 3^p$$

$\boxed{a^1 = a}$

Por lo tanto, $p = 1$, entonces $\log_3 3 = 1$

(C) Propiedades de los logaritmos

Si $a > 0, a \neq 1$, entonces

$\mathbf{\log_a a^p = p}$ $\mathbf{\log_a 1 = 0}$ $\mathbf{\log_a a = 1}$

(Ej) Encuentre los valores de los siguientes logaritmos:

a) $\log_6 36$

$\log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$

b) $\log_2 \frac{1}{4}$

$\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 \frac{1}{2^2} = \log_2 2^{-2} = -2$

(E) a) $\log_2 2^5 = 5$

b) $\log_3 1 = 0$

c) $\log_7 7 = 1$

d) $\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$

e) $\log_{10} \frac{1}{10} = \log_{10} 10^{-1} = -1$

f) $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$

Contenido 3 Propiedades básicas de los logaritmos (2)

Aprendizajes esperados

Reescribe expresiones logarítmicas aplicando la propiedad $\log_a N^k = k\log_a N$.

Secuencia:

En la clase anterior se estudiaron algunas propiedades de los logaritmos. Aquí se establece una nueva propiedad para los logaritmos.

Puntos esenciales:

Recordar la definición de logaritmo.

Establecer la propiedad $\log_a N^k = k\log_a N$ de los logaritmos que se estudia en esta clase a partir de la definición.

Expresar verbalmente dicha propiedad.

Aplicar la propiedad establecida para reescribir expresiones logarítmicas.

Reescribir números como potencias para aplicar la propiedad en estudio.

Contenido 3: Propiedades básicas de los logaritmos (2)

P Demuestre que $\log_a 2^3 = 3\log_a 2$.

S Sea $\log_a 2 = r$. Esto se puede escribir de manera exponencial como

$$2 = a^r$$

Elevando al cubo ambos lados de esta igualdad, se obtiene

$$2^3 = (a^r)^3$$
$$2^3 = a^{3r}$$

Pasando a la forma logarítmica se tiene,

$$\log_a 2^3 = 3r$$

y sustituyendo $r = \log_a 2$, resulta

$$\log_a 2^3 = 3\log_a 2$$

C Propiedad de los logaritmos

Si $a > 0$, $a \neq 1$, $N > 0$ y k es un número real, entonces,

$$\log_a N^k = k\log_a N$$

Ejemplo Exprese las siguientes expresiones logaritmos en la forma $k\log_a N$.

a) $\log_2 3^4$ b) $\log_3 25$ c) $\log_5 \frac{1}{2}$

Se aplica la propiedad anterior

a) $\log_2 3^4 = 4\log_2 3$ b) $\log_3 25 = \log_3 5^2 = 2\log_3 5$ c) $\log_5 \frac{1}{2} = \log_5 2^{-1} = -\log_5 2$

E Exprese las siguientes expresiones logarítmicas en la forma $k\log_a N$:

a) $\log_3 7^2$

b) $\log_{10} 5^{-2}$

c) $\log_2 9$

d) $\log_5 27$

e) $\log_7 \frac{1}{9}$

C3: Propiedades básicas de los logaritmos (2)

P Demuestre que $\log_a 2^3 = 3\log_a 2$

S Sea $\log_a 2 = r$. Entonces,

$$2 = a^r$$
$$2^3 = (a^r)^3$$
$$2^3 = a^{3r}$$

Pasando a la forma logarítmica,

$$\log_a 2^3 = 3r$$

Se sustituye $r = \log_a 2$

$$\log_a 2^3 = 3\log_a 2$$

C Propiedad de los logaritmos

Si $a > 0, a \neq 1, N > 0$ y k es un número real,

$$\boxed{\log_a N^k = k\log_a N}$$

Ej Expresse las siguientes expresiones logarítmicas en la forma de $k\log_a N$.

a) $\log_2 3^4 = 4\log_2 3$

b) $\log_3 25 = \log_3 5^2 = 2\log_3 5$

c) $\log_5 \frac{1}{2} = \log_5 2^{-1} = -\log_5 2$

E a) $\log_3 7^2 = 2\log_3 7$

b) $\log_{10} 5^{-2} = -2\log_{10} 5$

c) $\log_2 9 = \log_2 3^2 = 2\log_2 3$

d) $\log_5 27 = \log_5 3^3 = 3\log_5 3$

e) $\log_7 \frac{1}{9} = \log_7 \left(\frac{1}{3^2}\right) = \log_7 3^{-2} = -2\log_7 3$

Contenido 4 Propiedades básicas de los logaritmos (3)

Contenido 4: Propiedades básicas de los logaritmos (3)

P Demuestre que $\log_a(2)(3)=\log_a 2+\log_a 3$.

S

Sea $\log_a 2=r$ y $\log_a 3=s$. De forma exponencial

$$2=a^r \text{ y } 3=a^s$$

Se multiplica lado a lado ambas ecuaciones y se aplica la propiedad $a^m\, a^n=a^{m+n}$ dando como resultado

$$(2)(3)=a^r\, a^s$$
$$(2)(3)=a^{r+s}$$

Se aplica la definición de logaritmo en base a

$$\log_a(2)(3)=r+s$$

Se sustituye $r=\log_a 2$, $s=\log_a 3$. Entonces se obtiene

$$\mathbf{\log_a(2)(3)=\log_a 2+\log_a 3}$$

C

Propiedad de los logaritmos

Si $a>0$, $a\neq 1$, $M>0$ y $N>0$, entonces

$$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$$

Ejemplo Calcule los valores de las siguientes expresiones logarítmicas, usando la propiedad anterior:

a) $\log_4 8+\log_4 2$ b) $\log_3 10+\log_3\frac{6}{5}+\log_3\frac{9}{4}$

a) $\log_4 8+\log_4 2=\log_4(8)(2)$
$=\log_4 16$
$=\log_4 4^2$
$=2$

b) $\log_3 10+\log_3\frac{6}{5}+\log_3\frac{9}{4}=\log_3(10)\left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{9}{4}\right)$
$=\log_3 27$
$=\log_3 3^3$
$=3$

E

Calcule los valores de las siguientes expresiones logarítmicas:

a) $\log_6 12+\log_6 3$ b) $\log_6 2+\log_6 3$

c) $\log_8 32+\log_8 2$ d) $\log_{10} 5+\log_{10} 2$

55

Aprendizajes esperados

Deduce y aplica la propiedad de logaritmos: $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$.

Secuencia:

En las clases anteriores se estudiaron algunas propiedades de los logaritmos. En esta clase se establece a qué es igual el logaritmo de un producto.

Puntos esenciales:

Recordar la definición de logaritmo.

Aplicar dicha definición en ejemplos concretos para establecer que

$$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$$

Expresar verbalmente esta propiedad.

Tener mucho cuidado al aplicarla ya que

$$\log_a(MN)\neq\log_a M\cdot\log_a N$$
$$\log_a M+\log_a N\neq\log_a(M+N)$$

Aplicar la propiedad establecida, en el cálculo de suma de logaritmos.

C4: Propiedades básicas de los logaritmos (3)

P Demuestre que $\log_a(2)(3)=\log_a 2+\log_a 3$

S Sea $\log_a 2=r$ y $\log_a 3=s$. De forma exponencial

$$2=a^r \qquad 3=a^s$$
$$(2)(3)=a^r a^s$$
$$(2)(3)=a^{r+s} \qquad \boxed{a^r a^s=a^{r+s}}$$
$$\log_a(2)(3)=r+s \qquad \text{Por definición de logaritmo}$$

Se sustituye $r=\log_a 2$ y $s=\log_a 3$, entonces

$$\log_a(2)(3)=\log_a 2+\log_a 3$$

C Propiedades de los logaritmos

Si $a>0, a\neq 1, M>0,\ N>0,$ entonces

$$\boxed{\log_a MN=\log_a M+\log_a N}$$

Ej Calcule los valores de las siguientes expresiones logarítmicas, usando la propiedad anterior.

a) $\log_4 8+\log_4 2 = \log_4(8)(2)$
$=\log_4 16$
$=\log_4 4^2$
$=2$

b) $\log_3 10+\log_3\frac{6}{5}+\log_3\frac{9}{4}=\log_3(10)\left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{9}{4}\right)$
$=\log_3 27$
$=\log_3 3^3$
$=3$

E a) $\log_6 12+\log_6 3=\log_6(12)(3)$
$=\log_6 36=\log_6 6^2=2$

b) $\log_6 2+\log_6 3=\log_6(2)(3)=\log_6 6=1$

c) $\log_8 32+\log_8 2=\log_8(32)(2)$
$=\log_8 64=\log_8 8^2=2$

d) $\log_{10}5+\log_{10}2=\log_{10}(5)(2)=\log_{10}10=1$

Contenido 5 Propiedades básicas de los logaritmos (4)

Aprendizajes esperados

Deduce y aplica la propiedad de logaritmos: $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$.

Secuencia:

En la clase anterior se estudió la propiedad que establece a qué es igual el logaritmo de un producto. Aquí estableceremos a qué es igual el logaritmo de un cociente.

Puntos esenciales:

Recordar la definición de logaritmo.

Aplicar dicha definición en ejemplos concretos para establecer que

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$$

Expresar verbalmente esta propiedad.

Tener mucho cuidado al aplicarla ya que

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) \neq \frac{\log_a M}{\log_a M}$$

$$\log_a M - \log_a N \neq \log_a (M - N)$$

Aplicar la propiedad establecida, en el cálculo de restas de logaritmos.

Contenido 5: Propiedades básicas de los logaritmos (4)

P Demuestre que $\log_a \frac{2}{3} = \log_a 2 - \log_a 3$

S Sea $\log_a 2 = r$ y $\log_a 3 = s$. Estas expresiones se escriben de manera exponencial como

$$2 = a^r \quad \text{y} \quad 3 = a^s$$

Se dividen lado a lado estas ecuaciones y se aplica la propiedad $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$,

$$\frac{2}{3} = \frac{a^r}{a^s}$$

$$\frac{2}{3} = a^{r-s}$$

Ahora se aplica logaritmo de base a en ambos lados de la última igualdad

$$\log_a \frac{2}{3} = \log_a a^{r-s} = r - s$$

De lo que resulta $\log_a \frac{2}{3} = r - s$. Finalmente se sustituye $r = \log_a 2$ y $s = \log_a 3$, obteniendo,

$$\log_a \frac{2}{3} = \log_a 2 - \log_a 3.$$

C

Propiedad de los logaritmos
Si $a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$, entonces

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

Ejemplo Calcule el valor de la siguiente expresión logarítmica:

$\log_4 8 - \log_4 2$

Aplicando la propiedad anterior se tiene

$$\log_4 8 - \log_4 2 = \log_4 \frac{8}{2} = \log_4 4 = 1$$

E Calcule los valores de las siguientes expresiones logarítmicas:

a) $\log_8 16 - \log_8 2$ b) $\log_3 54 - \log_3 2$

c) $\log_4 3 - \log_4 48$ d) $\log_3 324 - \log_3 4$

56

C5: Propiedades básicas de los logaritmos (4)

P Demuestre que $\log_a \frac{2}{3} = \log_a 2 - \log_a 3$

S Sea $\log_a 2 = r$ y $\log_a 3 = s$,

$2 = a^r$ $\quad$ $3 = a^s$

$$\frac{2}{3} = \frac{a^r}{a^s}$$

$$\frac{2}{3} = a^{r-s} \qquad \boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

$\log_a \frac{2}{3} = r - s$ Por definición de logaritmo

Se sustituye $r = log_a 2$, $s = log_a 3$, entonces

$$\log_a \frac{2}{3} = \log_a 2 - \log_a 3$$

C Propiedades de los logaritmos

Si $a > 0, a \neq 1, M > 0,\ N > 0$, entonces

$$\boxed{\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N}$$

Ej Calcule el valor de la siguiente expresión logarítmica:

$$\log_4 8 - \log_4 2 = \log_4 \frac{8}{2} = \log_4 4 = 1$$

E a) $\log_8 16 - \log_8 2 = \log_8 \frac{16}{2} = \log_8 8 = 1$

b) $\log_3 54 - \log_3 2 = \log_3 \frac{54}{2} = \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$

c) $\log_4 3 - \log_4 48 = \log_4 \frac{3}{48} = \log_4 \frac{1}{16} = -2$

Contenido 6 Propiedades básicas de los logaritmos (5)

Contenido 6: Propiedades básicas de los logaritmos (5)

Ejemplo Calcule los valores de las siguientes expresiones logarítmicas:
a) $\log_5 2+\log_5 50-\log_5 4$ b) $\log_6 9-\log_6 15+\log_6 10$

Se procede con los cálculos usando las propiedades reunidas en el cuadro de la derecha.

Si $a>0,\ a\neq1,\ M>0$ y $N>0$

1) $\log_a a^p=p$ 2) $\log_a 1=0$ 3) $\log_a a=1$

4) $\log_a N^k=k\log_a N$ (k es número real)

5) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

6) $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

a) $\log_5 2+\log_5 50-\log_5 4=(\log_5 2+\log_5 50)-\log_5 4$ Se asocian los dos primeros términos
$=\log_5 (2)(50)-\log_5 4$ Se usa la propiedad 5
$=\log_5 \frac{(2)(50)}{4}$ Se utiliza la propiedad 6
$=\log_5 25$ Se simplifica el argumento
$=\log_5 5^2$ Se expresa el 25 como potencia
$=2$ Se aplica la propiedad 1

b) $\log_6 9-\log_6 15+\log_6 10=(\log_6 9-\log_6 15)+\log_6 10$ Se asocian los dos primeros logaritmos
$=\log_6 \frac{9}{15}+\log_6 10$ Se usa la propiedad 6
$=\log_6 \left(\frac{9}{15}\right)(10)$ Se utiliza la propiedad 5
$=\log_6 \frac{90}{15}$ Se opera en el argumento
$=\log_6 6$ Se simplifica el argumento
$=1$ Se usa la propiedad 3

E

Calcule los valores de las siguientes expresiones logarítmicas:

a) $\log_2 8+\log_2 5-\log_2 20$

b) $2\log_3 6+\log_3 5-\log_3 20$

c) $\log_{10} 24-2\log_{10} 6+\log_{10} 15$

Aprendizajes esperados

Aplica las propiedades básicas de los logaritmos en el cálculo de valores de expresiones logarítmicas.

Secuencia:

En las clases anteriores se estudiaron las principales propiedades de los logaritmos. En esta clase aplicaremos dichas propiedades en la simplificación de expresiones logarítmicas.

Puntos esenciales:

Recordar las propiedades de los logaritmos estudiadas anteriormente.

Aplicar dichas propiedades en la simplificación de expresiones logarítmicas teniendo presente posibles errores en los que se pueden caer.

Recordar la jerarquía de las operaciones.

Notar que las sumas y restas de logaritmos de igual base se reducen a un solo logaritmo.

C6: Propiedades básicas de los logaritmos (5)

Ej Calcule los valores de las siguientes expresiones logarítmicas:

a) $\log_5 2+\log_5 50-\log_5 4$

b) $\log_6 9-\log_6 15+\log_6 10$

Recuerde las propiedades:

Para $a>0, a\neq 1, M>0, N>0$ y k es cualquier número

1) $\log_a a^p=p$ 2) $\log_a 1=0$

3) $\log_a a=1$ 4) $\log_a N^k=k\log_a N$

5) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

6) $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

a) $\log_5 2+\log_5 50-\log_5 4=(\log_5 2+\log_5 50)-\log_5 4$
$=\log_5(2)(50)-\log_5 4$
$=\log_5 \frac{(2)(50)}{4}$
$=\log_5 25$
$=\log_5 5^2=2$

b) $\log_6 9-\log_6 15+\log_6 10=(\log_6 9-\log_6 15)+\log_6 10$
$=\log_6 \frac{9}{15}+\log_6 10$
$=\log_6\left(\frac{9}{15}\right)(10)$
$=\log_6 \frac{90}{15}$
$=\log_6 6=1$

E

a) $\log_2 8+\log_2 5-\log_2 20=(\log_2 8+\log_2 5)-\log_2 20$
$=\log_2(8)(5)-\log_2 20$
$=\log_2 \frac{(8)(5)}{20}=\log_2 2=1$

b) $2\log_3 6+\log_3 5-\log_3 20=\log_3 6^2+\log_3 5-\log_3 20$
$=(\log_3 36+\log_3 5)-\log_3 20$
$=\log_3(36)(5)-\log_3 20$
$=\log_3 \frac{(36)(5)}{20}=\log_3 9=2$

Contenido 7 Propiedades básicas de los logaritmos (6)

Aprendizajes esperados

Aplica la fórmula de cambio de base para el cálculo de logaritmos.

Secuencia:

En las clases anteriores se estudiaron y se aplicaron propiedades de los logaritmos. En esta clase se establece una propiedad que resultará útil más adelante llamada fórmula de cambio de base.

Puntos esenciales:

Recordar la definición de logaritmo.

Aplicar dicha definición en ejemplos concretos para deducir que

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Expresar verbalmente dicha propiedad.

Es válido aclarar que la propiedad

si $M = N$ entonces $\log_a M = \log_a N$

se sigue del hecho que $\log_a$ es una función.

Aplicar la fórmula de cambio de base para calcular el valor de expresiones logarítmicas.

Contenido 7: Propiedades básicas de los logaritmos (6)

P

Deduzca una fórmula que utilice logaritmo en base 2 para calcular el valor de $\log_8 4$.

S

Sea $\log_8 4 = p$ que en forma exponencial es

$$4 = 8^p$$

Aplicando logaritmo de base 2 en ambos lados de la ecuación anterior se tiene

$$\log_2 4 = \log_2 8^p$$

y utilizando la propiedad $\log_a N^k = k\log_a N$ se obtiene

$$\log_2 4 = p\log_2 8, \text{ de donde } \frac{\log_2 4}{\log_2 8} = p.$$

Luego, sustituyendo p por $\frac{\log_2 4}{\log_2 8}$ en $\log_8 4 = p$ resulta

$$\log_8 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 8}$$

C

Fórmula de cambio de base

Si $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a \neq 1$, $c \neq 1$,

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Ejemplo Calcule los valores de las siguientes expresiones logarítmicas usando la fórmula de cambio de base:

a) $\log_{16} 8$ b) $\log_3 2 \cdot \log_2 9$

a) $\log_{16} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 16}$

$= \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^4}$

$= \frac{3\cancel{\log_2 2}}{4\cancel{\log_2 2}}$

$= \frac{3}{4}$

b) $\log_3 2 \cdot \log_2 9 = \cancel{\log_3 2} \cdot \frac{\log_3 9}{\cancel{\log_3 2}}$

$= \log_3 9$

$= \log_3 3^2$

$= 2$

E

Calcule los valores de las siguientes expresiones logarítmicas usando la fórmula de cambio de base:

a) $\log_9 27$ b) $\log_4 32$

c) $\log_{25} 5$ d) $\log_3 5 \cdot \log_5 9$

e) $\log_2 11 \cdot \log_{11} 16$

58

C7: Propiedades básicas de los logaritmos (6)

P Deduzca una fórmula que utilice logaritmo en base 2 para calcular el valor de $\log_8 4$.

S Sea $\log_8 4 = p$, así que

$$4 = 8^p$$

$$\log_2 4 = \log_2 8^p$$

$$\log_2 4 = p\log_2 8$$

$$p = \frac{\log_2 4}{\log_2 8}$$

Se sustituye p por $\log_8 4$:

$$\log_8 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 8}$$

C Fórmula de cambio de base

Si $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a \neq 1$, $c \neq 1$,

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

Ej Calcule los valores de las siguientes expresiones logarítmicas usando la fórmula de cambio de base:

a) $\log_{16} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 16}$

$= \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^4}$

$= \frac{3\cancel{\log_2 2}}{4\cancel{\log_2 2}}$

$= \frac{3}{4}$

b) $\log_3 2 \cdot \log_2 9 = \log_3 2 \cdot \frac{\log_3 9}{\log_3 2}$

$= \log_3 9$

$= \log_3 3^2$

$= 2$

E

a) $\log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9}$

$= \frac{\log_3 3^3}{\log_3 3^2}$

$= \frac{3\log_3 3}{2\log_3 3}$

$= \frac{3}{2}$

c) $\log_4 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 4}$

$= \frac{\log_2 2^5}{\log_2 2^2}$

$= \frac{5\log_2 2}{2\log_2 2}$

$= \frac{5}{2}$

b) $\log_{25} 5 = \frac{\log_5 5}{\log_5 25}$

$= \frac{\log_5 5^1}{\log_5 5^2}$

$= \frac{1}{2}$

Contenido 1 Gráfica de la función logarítmica creciente

Sección 2: Funciones logarítmicas

Contenido 1: Gráfica de la función logarítmica creciente

P Dada la siguiente tabla de valores asociada a la función $y = \log_2 x$, realice lo siguiente:

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	-3			0			3
Punto	$A\left(\frac{1}{8}, -3\right)$	$B\left(\frac{1}{4},\ \right)$	$C\left(\frac{1}{2},\ \right)$	D(1, 0)	E(2,)	F(4,)	G(8,)

a) Complete las casillas vacías y los pares.
b) Ubique los puntos A, B, C, D, E, F y G en el plano cartesiano.
c) Trace una curva suave sobre la trayectoria indicada por los puntos ubicados y prolónguela más allá de A y G.

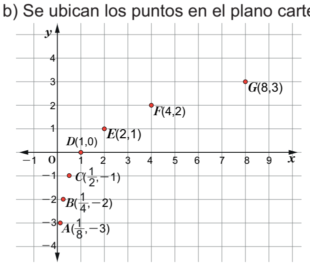
S a) Se calculan los valores de y para $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$, 2 y 4.

Para $x = \frac{1}{4}$; $y = \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$ Para $x = \frac{1}{2}$; $y = \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$

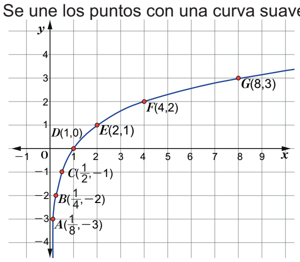
Para $x = 2$; $y = \log_2 2 = \log_2 2^1 = 1$ Para $x = 4$; $y = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	-3	-2	-1	0	1	2	3
Punto	$A\left(\frac{1}{8}, -3\right)$	$B\left(\frac{1}{4}, -2\right)$	$C\left(\frac{1}{2}, -1\right)$	D(1, 0)	E(2 , 1)	F(4, 2)	G(8, 3)

b) Se ubican los puntos en el plano cartesiano.



c) Se une los puntos con una curva suave.



E Dada la siguiente tabla de valores asociada a la función $y = \log_3 x$, determine lo que se le pide.

x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
y	-3			0			3
Punto	$A\left(\frac{1}{27}, -3\right)$	$B\left(\frac{1}{9},\ \right)$	$C\left(\frac{1}{3},\ \right)$	D(1, 0)	E(3,)	F(9,)	G(27, 3)

a) Complete la tabla.
b) Ubique los puntos B, C, D, E y F en el plano cartesiano.
c) Una los puntos con una curva suave.

Aprendizajes esperados

Grafica funciones logarítmicas crecientes.

Secuencia:

En clases anteriores se calcularon valores de logaritmos utilizando las propiedades de los mismos. También, en la unidad anterior se graficaron funciones exponenciales en el plano cartesiano.

En esta sección se sigue un tratamiento similar para graficar funciones logarítmicas.

Puntos esenciales:

Recordar la definición de logaritmo.

Determinar mediante la tabulación algunos valores para la función logarítmica $y = \log_2 x$ aclarando que x toma únicamente valores positivos.

Explicar que en la solución del problema se han asignado valores convenientes a x (potencias de la base 2) para simplificar los cálculos.

Observar gráficamente el crecimiento de esta función logarítmica.

Graficar en el plano cartesiano la función logarítmica $y = \log_2 x$ uniendo los puntos determinados en la tabulación con una curva suave.

S2: Funciones logarítmicas

C1: Gráfica de la función logarítmica creciente

P La tabla muestra valores asociados a la función $y = \log_2 x$

S a) Complete la tabla.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	-3	-2	-1	0	1	2	3
Punto	$A\left(\frac{1}{8}, -3\right)$	$B\left(\frac{1}{4}, -2\right)$	$C\left(\frac{1}{2}, -1\right)$	$D(1, 0)$	$E(2, 1)$	$F(4, 2)$	$G(8, 3)$

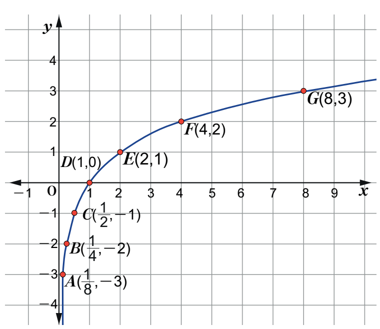
b) Ubique los puntos en el plano cartesiano.
c) Una los puntos con una curva suave.

Para $x = \frac{1}{4}$; $y = \log_2 \left(\frac{1}{4}\right) = \log_2 2^{-2} = -2$

Para $x = \frac{1}{2}$; $y = \log_2 \left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 2^{-1} = -1$

Para $x = 2$; $y = \log_2 2 = 1$

Para $x = 4$; $y = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$



Nota: La cuadrícula mostrada en la gráfica no se trazará en la pizarra.

E La tabla de la función $y = \log_3 x$

x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
y	-3	-2	-1	0	1	2	3
Punto	$A\left(\frac{1}{27}, -3\right)$	$B\left(\frac{1}{9}, -2\right)$	$C\left(\frac{1}{3}, -1\right)$	$D(1, 0)$	$E(3, 1)$	$F(9, 2)$	$G(27, 3)$

Para $x = \frac{1}{9}$; $y = \log_3 \left(\frac{1}{9}\right) = \log_3 3^{-2} = -2$

Para $x = \frac{1}{3}$; $y = \log_3 \left(\frac{1}{3}\right) = \log_3 3^{-1} = -1$

Contenido 2 Gráfica de la función logarítmica decreciente

Aprendizajes esperados

Grafica funciones logarítmicas decrecientes.

Secuencia:

En la clase anterior se graficó la función logarítmica $y = \log_2 x$. Ahora se grafica la función $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Puntos esenciales:

Recordar la definición de logaritmo.

Determinar mediante la tabulación algunos valores para la función logarítmica $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ recordando que x toma únicamente valores positivos.

Graficar en el plano cartesiano la función logarítmica $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ uniendo los puntos determinados en la tabulación con una curva suave.

Observar gráficamente el decrecimiento de la función logarítmica estudiada.

Contenido 2: Gráfica de la función logarítmica decreciente

P

Dada la siguiente tabla de valores asociada a la función $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, determine lo que se le pide.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	3			0			−3
Punto	$A\left(\frac{1}{8}, 3\right)$	$B\left(\frac{1}{4}, \ \right)$	$C\left(\frac{1}{2}, \ \right)$	$D(1, 0)$	$E(2, \ )$	$F(4, \ )$	$G(8, -3)$

a) Complete la tabla.
b) Ubique los puntos en el plano cartesiano.
c) Trace una curva suave sobre la trayectoria indicada por los puntos ubicados y prolónguela más allá de A y G.

S

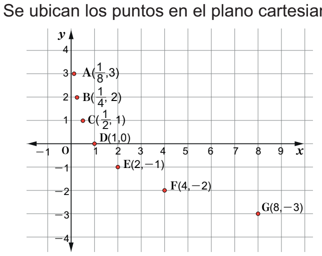
a) Se calculan los valores de y para $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$, 2 y 4.

Para $x = \frac{1}{4}$; $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2$ Para $x = \frac{1}{2}$; $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 1$

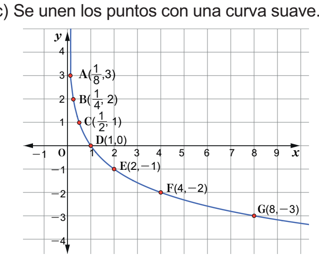
Para $x = 2$; $y = \log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -1$ Para $x = 4$; $y = \log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -2$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	3	2	1	0	−1	−2	−3
Punto	$A\left(\frac{1}{8}, 3\right)$	$B\left(\frac{1}{4}, 2\right)$	$C\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	$D(1, 0)$	$E(2, -1)$	$F(4, -2)$	$G(8, -3)$

b) Se ubican los puntos en el plano cartesiano.



c) Se unen los puntos con una curva suave.



E

Dada la siguiente tabla de valores asociada a la función $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, determine lo que se le pide.

x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
y	3			0			−3
Punto	$A\left(\frac{1}{27}, 3\right)$	$B\left(\frac{1}{9}, \ \right)$	$C\left(\frac{1}{3}, \ \right)$	$D(1, 0)$	$E(3, \ )$	$F(9, \ )$	$G(27, -3)$

a) Complete las casillas vacías y los pares
b) Ubique los puntos B, C, D, E y F en el plano cartesiano.
c) Una los puntos con curva suave.

C2: Gráfica de la función logarítmica decreciente

P La tabla muestra los valores asociados a la función $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

S a) Complete la tabla.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	3	**2**	**1**	0	**−1**	**−2**	−3
Punto	$A\left(\frac{1}{8}, 3\right)$	$B\left(\frac{1}{4}, \mathbf{2}\right)$	$C\left(\frac{1}{2}, \mathbf{1}\right)$	$D(1, 0)$	$E(2, \mathbf{-1})$	$F(4, \mathbf{-2})$	$G(8, -3)$

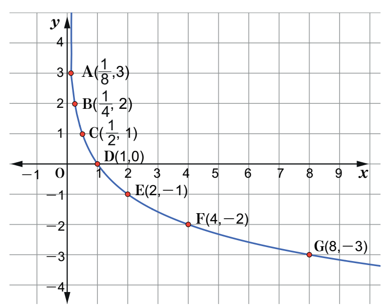
b) Ubique los puntos en el plano cartesiano.
c) Una los puntos con una curva suave.

Para $x = \frac{1}{4}$; $y = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2$

Para $x = \frac{1}{2}$; $y = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right) = 1$

Para $x = 2$; $y = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -1$

Para $x = 4$; $y = \log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -2$



Nota: La cuadrícula mostrada en la gráfica no se trazará en la pizarra.

E La función $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
y	3	2	1	0	−1	−2	−3
Punto	$A\left(\frac{1}{27}, -3\right)$	$B\left(\frac{1}{9}, 2\right)$	$C\left(\frac{1}{3}, 1\right)$	$D(1, 0)$	$E(3, -1)$	$F(9, -2)$	$G(27, 3)$

Para $x = \frac{1}{9}$; $y = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{9}\right) = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2$

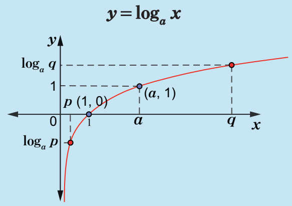
Para $x = \frac{1}{3}$; $y = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right) = 1$

Contenido 3 Propiedades básicas de la función logarítmica creciente

Contenido 3: Propiedades básicas de la función logarítmica creciente

Propiedades de la gráfica de $y = \log_a x$, $a > 1$:

1. La gráfica pasa por los puntos (1, 0) y (a, 1) ya que $\log_a 1 = 0$ y $\log_a a = 1$.
2. El eje y es asíntota vertical, es decir, la gráfica no toca a la parte negativa de este eje, aunque se acerca indefinidamente a este.
3. Observando la gráfica se concluye que esta es creciente, es decir si $p < q$, $\log_a p < \log_a q$.
4. Dominio: Números reales positivos.
   Rango: Números reales.



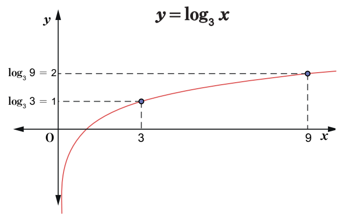
P Ordene los logaritmos de forma creciente.

a) $\log_3 9$, $\log_3 3$ b) $\log_2 7$, $\log_2 \frac{1}{3}$, $\log_2 5$

S

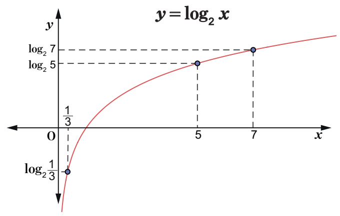
a) Puesto que $3 < 9$ y la base 3 es mayor que 1, por la propiedad 3 se tiene

$$\log_3 3 < \log_3 9.$$



b) Puesto que $\frac{1}{3} < 5 < 7$ y la base 2 es mayor que 1 por la propiedad 3 se tiene

$$\log_2 \frac{1}{3} < \log_2 5 < \log_2 7$$



E Ordene los logaritmos de forma creciente.

a) $\log_2 5$, $\log_2 3$ b) $\log_3 2$, $\log_3 \frac{1}{2}$, $\log_3 4$

Aprendizajes esperados

Deduce y aplica propiedades de la función logarítmica creciente.

Secuencia:

En clases anteriores se graficaron las funciones logarítmicas $y = \log_2 x$ y $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. En esta clase se caracterizan las funciones logarítmicas del tipo $y = \log_a x$ con $a > 1$ tomando como referencia la función $y = \log_2 x$.

Puntos esenciales:

Recordar el comportamiento de la gráfica de la función $y = \log_2 x$ y notar que:

- ✓ Dicha función está definida únicamente para valores positivos.
- ✓ No corta al eje y.
- ✓ El eje y es una asíntota vertical.
- ✓ Corta al eje x en el punto (1, 0).
- ✓ A medida que los valores de x aumentan los valores de y también lo hacen. Es decir, es una función creciente.

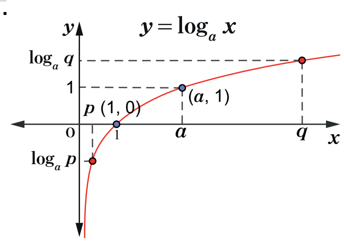
De ahí que las funciones logarítmicas $y = \log_a x$ con $a > 1$ cumplen con las mismas propiedades.

Comparar valores de logaritmos a partir de la comparación de sus argumentos (números a los que se les calcula logaritmo).

C3: Propiedades básicas de la función logarítmica creciente

Propiedades de la gráfica de $y = \log_a x$, $a > 1$:

1. La gráfica pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(a, 1)$
2. El eje y es asíntota vertical.
3. Es creciente:
   Si $p < q$, $\log_a p < \log_a q$
4. Dominio:
   Números reales positivos
   Rango:
   Números reales

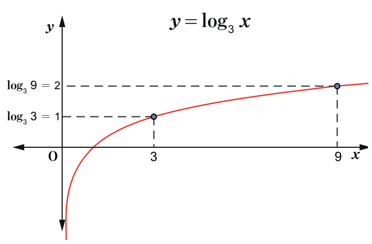


P Ordene los logaritmos de forma creciente.

a) $\log_3 9$, $\log_3 3$

S Como $3 < 9$ y la base 3 es mayor que 1, por la propiedad 3:

$$\log_3 3 < \log_3 9$$



b) $\log_2 7$, $\log_2 \frac{1}{3}$, $\log_2 5$

Puesto que

$\frac{1}{3} < 5 < 7$

y la base 2 es mayor que 1, por la propiedad 3:

$$\log_2 \frac{1}{3} < \log_2 5 < \log_2 7$$

E a) $\log_2 5$, $\log_2 3$

Como $3 < 5$ y la base 2 es mayor que 1, por la propiedad 3:

$$\log_2 3 < \log_2 5$$

b) $\log_3 2$, $\log_3 \frac{1}{2}$, $\log_3 4$

Puesto que $\frac{1}{2} < 2 < 4$ y la base 3 es mayor que 1, por la propiedad 3:

$$\log_3 \frac{1}{2} < \log_3 2 < \log_3 4$$

Contenido 4 Propiedades básicas de la función logarítmica decreciente

Aprendizajes esperados

Deduce y aplica propiedades de la función logarítmica decreciente.

Secuencia:

En la clase anterior se estudiaron las propiedades de las funciones logarítmicas del tipo $y=\log_a x$ con $a>1$. Aquí se caracterizan las funciones logarítmicas del tipo $y=\log_a x$ con $0<a<1$ tomando como referencia la función $y=\log_{\frac{1}{2}} x$.

Puntos esenciales:

Recordar el comportamiento de la gráfica de la función $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ y notar que:

- ✓ Dicha función está definida únicamente para valores positivos.
- ✓ No corta al eje y.
- ✓ El eje y es una asíntota vertical.
- ✓ Corta al eje x en el punto (1, 0).
- ✓ A medida que los valores de x aumentan los valores de y disminuyen. Es decir, es una función decreciente.

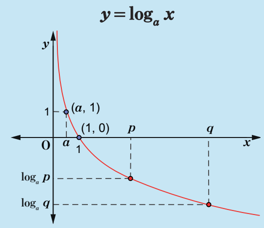
De ahí que las funciones logarítmicas $y=\log_a x$ con $0<a<1$ cumplen con las mismas propiedades.

Comparar valores de logaritmos a partir de la comparación de sus argumentos.

Contenido 4: Propiedades básicas de la función logarítmica decreciente

Propiedades de la gráfica de $y=\log_a x$, $0<a<1$:

1. La gráfica pasa por los puntos (1, 0) y $(a, 1)$ ya que $\log_a 1=0$ y $\log_a a=1$
2. El eje y es asíntota vertical, es decir, la gráfica no toca a la parte positiva de este eje, aunque se acerca indefinidamente a este.
3. Observando la gráfica puede notarse que $p<q$; no obstante, $\log_a p>\log_a q$, siendo la gráfica decreciente.
4. Dominio: Números reales positivos. Rango: Números reales.



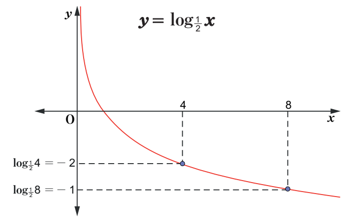
P Ordene los logaritmos de forma creciente.

a) $\log_{\frac{1}{2}} 8$, $\log_{\frac{1}{2}} 4$ b) $\log_{\frac{1}{3}} 2$, $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$, $\log_{\frac{1}{3}} 4$

S

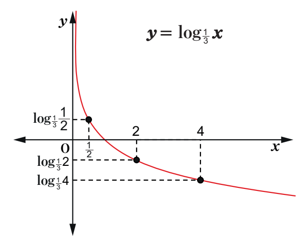
a) Puesto que $4<8$ y la base $\frac{1}{2}$ es menor que 1, por la propiedad 3 se tiene que

$$\log_{\frac{1}{2}} 8<\log_{\frac{1}{2}} 4$$



b) Puesto que $\frac{1}{2}<2<4$ y la base $\frac{1}{3}$ es menor que 1 y, por la propiedad 3, se tiene

$$\log_{\frac{1}{3}} 4<\log_{\frac{1}{3}} 2<\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$$



E Ordene los logaritmos de forma creciente.

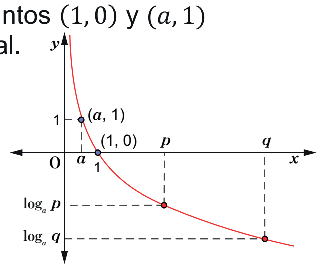
a) $\log_{\frac{1}{2}} 3$, $\log_{\frac{1}{2}} 5$ b) $\log_{\frac{1}{3}} 4$, $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4}$, $\log_{\frac{1}{3}} 8$

63

C4: Propiedades básicas de la función logarítmica decreciente

Propiedades de la gráfica de $y=\log_a x$, $0<a<1$:

1. La gráfica pasa por los puntos $(1,0)$ y $(a,1)$
2. El eje y es asíntota vertical.
3. Es decreciente: Si $p<q$, $\log_a p>\log_a q$
4. Dominio: Números reales positivos. Rango: Números reales

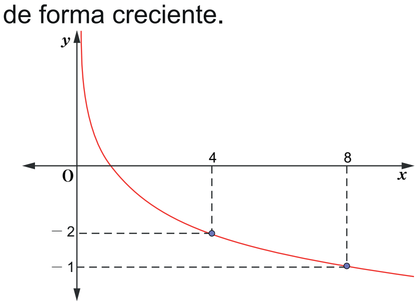


P Ordene los logaritmos de forma creciente.

a) $\log_{\frac{1}{2}} 8$, $\log_{\frac{1}{2}} 4$

S Como $4<8$ y la base $\frac{1}{2}$ es menor que 1, por la propiedad 3:

$$\log_{\frac{1}{2}} 8<\log_{\frac{1}{2}} 4$$



b) $\log_{\frac{1}{3}} 2$, $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$, $\log_{\frac{1}{3}} 4$

Puesto que

$$\frac{1}{2}<2<4$$

y la base $\frac{1}{3}$ es menor que 1, por la propiedad 3:

$$\log_{\frac{1}{3}} 4<\log_{\frac{1}{3}} 2<\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$$

E Ordene los logaritmos de forma creciente.

a) $\log_{\frac{1}{2}} 3$, $\log_{\frac{1}{2}} 5$

Como $3<5$ y la base $\frac{1}{2}$ es menor que 1,

$$\log_{\frac{1}{2}} 3>\log_{\frac{1}{2}} 5$$

b) $\log_{\frac{1}{3}} 2$, $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4}$, $\log_{\frac{1}{3}} 8$

Puesto que $\frac{1}{4}<2<8$ y la base $\frac{1}{3}$ es menor que 1,

$$\log_{\frac{1}{3}} 8<\log_{\frac{1}{3}} 2<\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4}$$

Contenido 5 Ecuaciones logarítmicas (1)

Contenido 5: Ecuaciones logarítmicas (1)

P

Encuentre la solución de cada una de las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_2 x = 5$ b) $\log_5(2x+7) = 2$

S

a) $\log_2 x = 5$ se pasa a la forma exponencial

$$x = 2^5 = 32$$

Este valor satisface la condición de que el argumento debe ser positivo. Por tanto la solución es

$$\boldsymbol{x = 32}$$

b) Igualmente, la ecuación $\log_5(2x+7) = 2$ se escribe en forma exponencial

$$2x+7 = 5^2$$

es decir

$$2x+7 = 25$$

Resolviendo esta ecuación se tiene

$$2x = 25-7$$
$$2x = 18$$
$$x = \frac{18}{2} = 9$$

Los valores x del argumento de la función deben cumplir la condición

$$2x+7 > 0$$
$$x > -\frac{7}{2}$$

Esto quiere decir que $\boldsymbol{x = 9}$ cumple con lo exigido, siendo entonces la solución.

E

Encuentre las soluciones de las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_3 x = 2$

b) $\log_7(3x+4) = 2$

c) $2\log_2 x = 4$

Aprendizajes esperados

Resuelve ecuaciones logarítmicas sencillas aplicando la definición de logaritmo.

Secuencia:

En las clases anteriores se ha aplicado constantemente la definición de logaritmo. Aquí la utilizaremos para la resolución de ecuaciones logarítmicas.

Puntos esenciales:

Recordar la definición de logaritmo.

Aclarar que las ecuaciones logarítmicas son ecuaciones en las que la variable aparece como argumento del logaritmo.

Usar la definición de logaritmo para resolver ecuaciones logarítmicas en las que la variable aparece como argumento del logaritmo.

Notar que, en este caso, al aplicar la definición de logaritmo, se obtiene una ecuación de primer grado a resolver.

Hacer énfasis en la condición que debe satisfacer el argumento de un logaritmo, para determinar la solución de la ecuación.

C5: Ecuaciones logarítmicas (1)

(P) Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log_2 x = 5$

(S) Se pasa a la forma exponencial:

$$x = 2^5 = 32$$
$$x = 32$$

b) $\log_5(2x+7) = 2$

Se pasa a la forma exponencial:

$$2x+7 = 5^2$$
$$2x+7 = 25$$
$$2x = 25-7$$
$$2x = 18$$
$$x = \frac{18}{2} = 9$$

Los valores x del argumento deben cumplir

$$2x+7 > 0$$
$$x > -\frac{7}{2}$$

Así, $x = 9$ es la solución de la ecuación.

(E) a) $\log_3 x = 2$

Se pasa a la forma exponencial:

$$x = 2^3 = 8$$
$$x = 8$$

b) $\log_7(3x+4) = 2$

Se pasa a la forma exponencial:

$$3x+4 = 7^2$$
$$3x+4 = 49$$
$$3x = 45$$
$$x = \frac{45}{3} = 15$$

Los valores x del argumento deben cumplir

$$3x+4 > 0$$
$$3x > -4$$
$$x > -\frac{4}{3}$$

Así, $x = 15$ es la solución de la ecuación.

Contenido 6 Ecuaciones logarítmicas (2)

Aprendizajes esperados

Resuelve ecuaciones logarítmicas aplicando definición y propiedades del logaritmo.

Secuencia:

En esta clase se siguen resolviendo ecuaciones logarítmicas, pero ahora son ecuaciones en las que se requiere aplicar las propiedades estudiadas para resolverlas.

Puntos esenciales:

Recordar las propiedades de los logaritmos.

Recordar los métodos de resolución de ecuaciones cuadráticas, en especial, por factorización.

Mostrar la propiedad

si $\log_a M = \log_a N$, entonces $M = N$

conocida como inyectividad de la función logarítmica y que se utiliza en la resolución de ecuaciones logarítmicas.

La función logaritmo está definida únicamente para valores positivos. Este hecho debe considerarse para determinar cuál de las posibles respuestas es solución de la ecuación.

Contenido 6: Ecuaciones logarítmicas (2)

P

Encuentre la solución de cada una de las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_2 x + \log_2 (x+3) = 2\log_2 2$ b) $\log_9 (x+1) + \log_9 (x-7) = 1$

S

a) $\log_2 x + \log_2 (x+3) = 2\log_2 2$

Se aplica las propiedades del logaritmo

$\log_2 x(x+3) = \log_2 2^2$ $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$ y $k\log_a N = \log_a N^k$

$x(x+3) = 2^2$ $\log_a p = \log_a q$ si y solo si $p = q$

$x^2 + 3x = 4$

$x^2 + 3x - 4 = 0$

Se resuelve la ecuación de segundo grado

$(x+4)(x-1) = 0$

$x+4=0$, $x-1=0$

$x=-4$, $x=1$

para $x>0$, $\boldsymbol{x=1}$

En el logaritmo $\log_a M$, el argumento es $M>0$.
Por lo tanto, en las expresiones: $\log_2 x$ y $\log_2 (x+3)$, los argumentos verifican
$x>0$ y $x+3>0$
$x>0$ y $x>-3$
Es decir, las soluciones serán: $x>0$

b) $\log_9 (x+1) + \log_9 (x-7) = 1$

Aplicando las propiedades del logaritmo se tiene

$\log_9 (x+1)(x-7) = \log_9 9$ $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$ y $1 = \log_a a$

$(x+1)(x-7) = 9$ $\log_a p = \log_a q$ si y solo si $p = q$

$x^2 - 6x - 7 = 9$

Se resuelve la ecuación de segundo grado

$x^2 - 6x - 16 = 0$

$(x-8)(x+2) = 0$

$x-8=0$, $x+2=0$

$x=8$, $x=-2$

para $x>7$, $\boldsymbol{x=8}$

En la expresiones: $\log_9 (x+1)$ y $\log_9 (x-7)$, los argumentos cumplen que
$x+1>0$ y $x-7>0$
$x>-1$ y $x>7$
Es decir, las soluciones serán: $x>7$

E

Encuentre las soluciones de las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_2 x + \log_2 (x-1) = 1$

b) $\log_{10} (x+2)(x+5) = 1$

c) $\log_2 (x-2) + \log_2 (x+1) = 2$

65

C6: Ecuaciones logarítmicas (2)

(P) Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_2 x + \log_2 (x+3) = 2\log_2 2$

b) $\log_9 (x+1) + \log_9 (x-7) = 1$

$\log_a M + \log_a N = \log_a MN$, $\log_a a = 1$
$\log_a p = \log_a q$ si y solo si $p = q$

(S) a) $\log_2 x + \log_2 (x+3) = 2\log_2 2$

$$\log_2 x(x+3) = \log_2 2^2$$
$$x(x+3) = 2^2$$
$$x^2 + 3x = 4$$
$$x^2 + 3x - 4 = 0$$
$$(x+4)(x-1) = 0$$
$$x+4=0, \quad x-1=0$$
$$x=-4, \quad x=1$$

para $x>0$, $x=1$

Argumentos:
$x>0$, $x+3>0$
$x>0$, $x>-3$
Soluciones deben cumplir $x>0$

b) $\log_9 (x+1) + \log_9 (x-7) = 1$

$$\log_9 (x+1)(x-7) = \log_9 9$$
$$(x+1)(x-7) = 9$$
$$x^2 - 6x - 7 = 9$$
$$x^2 - 6x - 7 - 9 = 0$$
$$x^2 - 6x - 16 = 0$$
$$(x-8)(x+2) = 0$$
$$x-8=0, \quad x+2=0$$
$$x=8, \quad x=-2$$

para $x>7$, $x=8$

Argumentos:
$x+1>0$, $x-7>0$
$x>-1$, $x>7$
Soluciones deben cumplir $x>7$

(E) Encuentre la solución de la ecuación

a) $\log_2 x + \log_2 (x-1) = 1$

$$\log_2 x(x-1) = 1 = \log_2 2$$
$$x(x-1) = 2$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x-2)(x+1) = 0$$
$$x=2, \quad x=-1$$

para $x>1$, $x=2$

$x>0$ y $x-1>0$
Soluciones deben cumplir $x>1$

Contenido 7 Cálculo de logaritmos de base 10

Contenido 7: Cálculo de logaritmos de base 10

P

Calcule el valor de cada uno de los siguientes logaritmos si $\log_{10} 2 = 0{,}3010$ y $\log_{10} 3 = 0{,}4771$:

a) $\log_{10} 9$ b) $\log_{10} 6$ c) $\log_{10} 12$

S

a) $\log_{10} 9 = \log_{10} 3^2$ Se descompone el 9 en factores primos

$= 2\log_{10} 3$ Se utiliza la propiedad $\log_{10} M^k = k\log_{10} M$

$= (2)(0{,}4771)$ Se sustituye el valor de $\log_{10} 3$

$= 0{,}9542$ Se multiplican ambos factores

b) $\log_{10} 6 = \log_{10} (2)(3)$ Se descompone el 6 en factores primos

$= \log_{10} 2 + \log_{10} 3$ Se utiliza la propiedad $\log_{10} MN = \log_{10} M + \log_{10} N$

$= 0{,}3010 + 0{,}4771$ Se sustituyen los valores para $\log_{10} 2$ y $\log_{10} 3$

$= 0{,}7781$ Se realiza la suma

c) $\log_{10} 12 = \log_{10}(4)(3)$ Se descompone el 12 en los factores 4 y 3

$= \log_{10} 4 + \log_{10} 3$ Se aplica la propiedad $\log_a MN = \log_{10} M + \log_{10} N$

$= \log_{10} 2^2 + \log_{10} 3$ Se expresa el 4 como potencia de 2

$= 2\log_{10} 2 + \log_{10} 3$ Se aplica la propiedad $\log_{10} N^k = k\log_{10} N$

$= (2)(0{,}3010) + (0{,}4771)$ Se sustituyen los valores para $\log_{10} 2$ y $\log_{10} 3$

$= 1{,}0791$ Se realizan las operaciones indicadas

E

Calcule los valores de los siguientes logaritmos si $\log_{10} 2 = 0{,}3010$ y $\log_{10} 3 = 0{,}4771$:

a) $\log_{10} 4$ b) $\log_{10} 18$

c) $\log_{10} 24$ d) $\log_{10} 27$

e) $\log_{10} 32$ f) $\log_{10} 36$

66

Aprendizajes esperados

Calcula los valores de logaritmos de base 10.

Secuencia:

En clases anteriores se resolvieron ecuaciones logarítmicas. En esta clase se determina el valor de logaritmos en base diez para algunos múltiplos de 2 o 3.

Puntos esenciales:

Conocer la aproximación decimal del valor de $\log_{10} 2$ y $\log_{10} 3$.

Recordar las propiedades de los logaritmos.

Aplicar dichas propiedades para determinar el valor de logaritmos en base diez de algunos múltiplos de 2 y de 3.

Recordar la multiplicación de un número natural por un decimal.

Notar que se debe expresar el logaritmo a ser calculado como combinación de los logaritmos conocidos (en este caso $\log_{10} 2$ y $\log_{10} 3$)

C7: Cálculo de logaritmos de base 10

(P) Calcule el valor de cada uno de los siguientes logaritmos si $\log_{10} 2 = 0{,}3010$ y $\log_{10} 3 = 0{,}4771$.

a) $\log_{10} 9$ b) $\log_{10} 6$ c) $\log_{10} 12$

$\log_a M + \log_a N = \log_a MN$
$\log_a N^k = k\log_a N$

(S) a) $\log_{10} 9 = \log_{10} 3^2$

$= 2\log_{10} 3$

$= 2(0{,}4771)$

$= 0{,}9542$

b) $\log_{10} 6 = \log_{10}(2)(3)$

$= \log_{10} 2 + \log_{10} 3$

$= 0{,}3010 + 0{,}4771$

$= 0{,}7781$

c) $\log_{10} 12 = \log_{10}(4)(3)$

$= \log_{10} 4 + \log_{10} 3$

$= \log_{10} 2^2 + \log_{10} 3$

$= 2\log_{10} 2 + \log_{10} 3$

$= 2(0{,}3010) + 0{,}4771$

$= 1{,}0791$

(E) Calcule los valores de los siguientes logaritmos si $\log_{10} 2 = 0{,}3010$ y $\log_{10} 3 = 0{,}4771$

a) $\log_{10} 4 = \log_{10} 2^2$

$= 2\log_{10} 2$

$= 2(0{,}3010)$

$= 0{,}6020$

b) $\log_{10} 18 = \log_{10}(2)(9)$

$= \log_{10} 2 + \log_{10} 9$

$= \log_{10} 2 + \log_{10} 3^2$

$= \log_{10} 2 + 2\log_{10} 3$

$= 0{,}3010 + 2(0{,}4771)$

$= 1{,}2552$

Prueba de Matemática 11mo (30 min.)   Fecha: ____________

Unidad 3: Logaritmo y Funciones Logarítmicas

Nombre: ______________________________ Sección: __________

Sexo: M / F

/ 20

1. Calcule el valor de las siguientes expresiones logarítmicas: (2 puntos × 6 = 12)

a) $\log_3 9$

b) $\log_4 \frac{1}{16}$

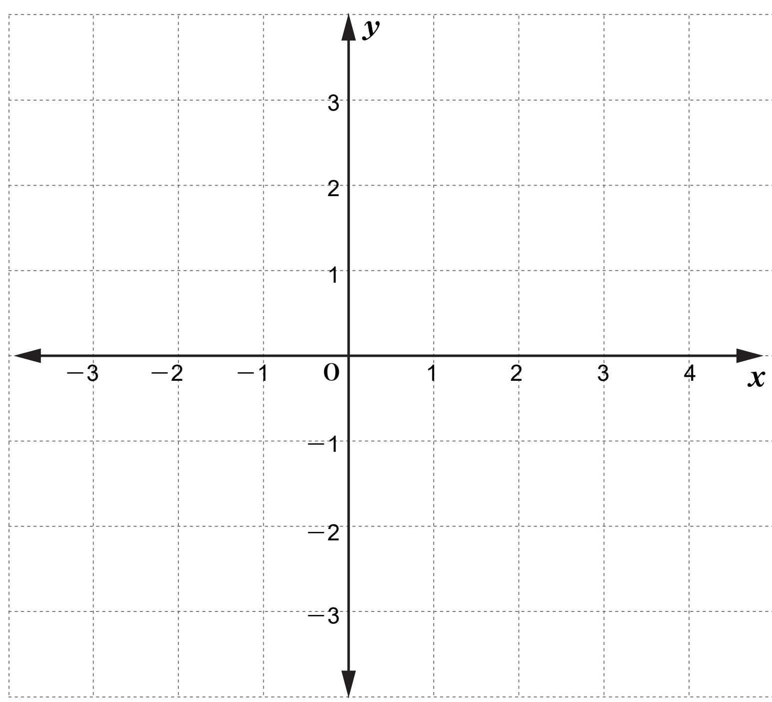
c) $\log_{10} 1$

d) $\log_4 8 + \log_4 2$

e) $\log_4 8 - \log_4 2$

f) $\log_2 5 \cdot \log_5 8$

2. Grafique la función $y = \log_2 x$. (2 puntos)



3. Escriba $<$ o $>$ en el espacio en blanco. (1 punto × 2 = 2)

a) $\log_2 5$ ____ $\log_2 3$ b) $\log_{\frac{1}{3}} 2$ ____ $\log_{\frac{1}{3}} 6$

4. Encuentre la solución de cada una de las siguientes ecuaciones logarítmicas: (2 puntos × 2 = 4)

a) $\log_5(2x+7)=2$

b) $\log_2 x+\log_2(x+3)=2\log_2 2$

Nombre: ______________________________

Unidad 4

Geometría Analítica

Sección 1 Punto y segmento

Sección 2 La recta

Sección 3 La circunferencia

Contenido 1 Distancia entre dos puntos de la recta numérica

Aprendizajes esperados

Calcula la distancia entre dos puntos de la recta numérica.

Secuencia:

En la recta numérica se pueden trazar segmentos, cuya longitud ha de determinarse a partir de las coordenadas de sus extremos. Esta longitud será la distancia entre los puntos extremos. Para el cálculo de esta será necesario recordar el concepto de valor absoluto de un número real, aprendido en grados anteriores.

La noción de distancia entre dos puntos no se limitará para puntos sobre los ejes coordenados, ya que esta será calculada para puntos cualesquiera del plano cartesiano.

Puntos esenciales:

Comprender la correspondencia entre cada número real y los puntos de la recta numérica.

Recordar que el valor absoluto de un número real es no negativo, lo que corresponde con la noción de longitud de un segmento (que también es un número no negativo).

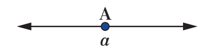
Recordar las reglas para efectuar resta de números reales.

Sección 1: Punto y segmento

Contenido 1: Distancia entre dos puntos de la recta numérica

Repaso

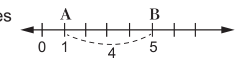
Sistema de coordenadas en la recta numérica
En la recta numérica, cada punto A de esta se identifica con un único número real a el cual se denomina coordenada de dicho punto. Se usará la notación $\mathrm{A}(a)$ para referirnos al punto y su coordenada asociada.



P Dados $\mathrm{A}(1)$, $\mathrm{B}(5)$, $\mathrm{C}(-2)$ y $\mathrm{D}(3)$ calcule la distancia entre A y B y entre C y D.

S

En la gráfica de la derecha se observa que hay 4 unidades desde A hasta B, esto es



$\mathrm{AB} = 5 - 1 = 4$

Coordenada de B — Coordenada de A

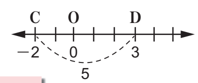
Es decir, si se utiliza valor absoluto,

$\mathrm{AB} = 4 = |4| = |5-1|$
$= |\text{coordenada de B} - \text{coordenada de A}|$

Valor absoluto de x
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ahora se calcula la distancia entre C y D.

Hay 5 unidades entre los puntos $\mathrm{C}(-2)$, $\mathrm{D}(3)$, de modo que



$\mathrm{CD} = 3 - (-2) = 5$

Coordenada de D — Coordenada de C

Utilizando valor absoluto para calcular la distancia se tiene
$\mathrm{CD} = |\text{coordenada de D} - \text{coordenada de C}| = |3-(-2)| = |5| = 5$

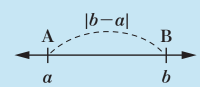
C

La distancia entre dos puntos cualesquiera A y B de la recta numérica, cuyas coordenadas son a y b, respectivamente, es la longitud del $\overline{\mathrm{AB}}$ y está dada por

$$\mathrm{AB} = |b-a|$$

La distancia entre los puntos A y B se denotará como d, de modo que

$$d = \mathrm{AB}$$



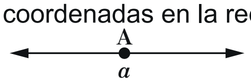
E

1. Calcule la distancia entre cada pareja de puntos.
   a) $\mathrm{A}(3)$, $\mathrm{B}(7)$ b) $\mathrm{C}(-5)$, $\mathrm{D}(0)$ c) $\mathrm{M}(0)$, $\mathrm{F}(-7)$
   d) $\mathrm{F}(-7)$, $\mathrm{H}(-2)$ e) $\mathrm{R}(-5)$, $\mathrm{Q}(1, 5)$
2. Dados los puntos $\mathrm{A}(-5)$, $\mathrm{B}(-2)$, $\mathrm{C}(10)$, verifique que $\mathrm{AB}+\mathrm{BC} = \mathrm{AC}$.

70

U4: Geometría Analítica
S1: Punto y segmento
C1: Distancia entre dos puntos de la recta numérica

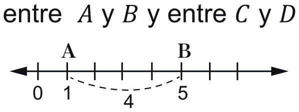
Sistema de coordenadas en la recta numérica



$A(a)$ denota el punto y su coordenada asociada.

P Dados $A(1)$, $B(5)$, $C(-2)$ y $D(3)$, calcule la distancia entre A y B y entre C y D.

S

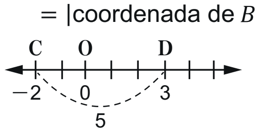


$AB = 5 - 1 = 4$

Coordenada de B — Coordenada de A

$AB = 4 = |4| = |5-1|$

$= |\text{coordenada de } B - \text{coordenada de } A|$



$CD = 3 - (-2) = 5$

Coordenada de D — Coordenada de C

$CD = |\text{coordenada de } D - \text{coordenada de } C|$
$= |3-(-2)| = |5| = 5$

C La distancia entre $A(a)$ y $B(b)$ es la longitud de $\overline{AB}$:
$d = AB = |b-a|$

E 1. Determine la distancia entre cada pareja de puntos.

a) $A(3),\ B(7)$
$AB = |7-3| = 4$

b) $C(-5),\ D(0)$
$C = |0-(-5)| = 5$

c) $M(0),\ F(-7)$
$MF = |-7-0| = 7$

d) $F(-7),\ (-2)$
$HF = |-2-(-7)| = 5$

2. Dados $A(-5),\ B(-2), C(10)$, verifique que $AB + BC = AC$.
$AB = |-2-(-5)| = 3,\ BC = |10-(-2)| = 12,$
$AC = |10-(-5)| = 15; \quad AB + BC = 3 + 12 = 15 = AC$

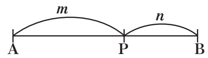
Contenido 2 División de un segmento de la recta numérica en una razón dada

Contenido 2: División de un segmento de la recta numérica en una razón dada

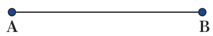
Repaso

División de un segmento por un punto en una razón dada

Recuerde que un punto P en el interior de $\overline{AB}$ divide a este en la razón $m:n$ si P se ubica a m unidades de A y a n unidades de B, esto es AP: PB $= m:n$.

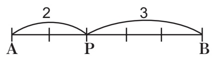


P Represente gráficamente la división del segmento AB por el punto P en la razón 2:3, dividiendo a este en 5 partes iguales.

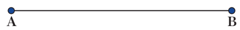


S El segmento dado se divide en 5 partes iguales puesto que $2+3=5$.

La razón 2:3 nos indica que el punto P se ubica a 2 unidades de A y a 3 unidades de B.



E1 Represente gráficamente la división del segmento AB por el punto P en la razón 3:7.

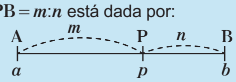


C

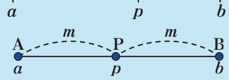
Coordenadas del punto que divide a un segmento en una razón dada

Recuerde también que si A(a) y B(b) son los extremos de $\overline{AB}$, la coordenada p del punto P en el interior de dicho segmento que lo divide en la razón AP:PB $= m:n$ está dada por:

$$p = \frac{na+mb}{m+n}$$



Si $m=n$, entonces P es el punto medio de $\overline{AB}$ y su coordenada es $p = \frac{a+b}{2}$



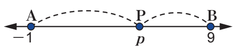
Ejemplo Los puntos A(−1) y B(9) son los extremos de $\overline{AB}$. Calcule la coordenada del punto P en $\overline{AB}$, tal que:

a) P divide a $\overline{AB}$ en la razón 3:2

b) P es punto medio de $\overline{AB}$

a) Se usa la fórmula $p = \frac{na+mb}{m+n}$; siendo $a=-1$, $b=9$, $m=3$, $n=2$.

$$p = \frac{(2)(-1)+(3)(9)}{3+2} = \frac{25}{5} = 5$$

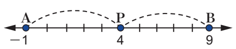


La coordenada de P es 5.

b) Como P es el punto medio de $\overline{AB}$, se usa la fórmula $p = \frac{a+b}{2}$, siendo $a=-1$, $b=9$:

$$p = \frac{-1+9}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

De manera que el punto medio de $\overline{AB}$ tiene coordenada $p=4$.



E2 Encuentre la coordenada de cada punto P del segmento dado $\overline{AB}$, sabiendo que:

a) Los extremos de $\overline{AB}$ son A(5) y B(15), además P divide este segmento en la razón 2:3.

b) Los extremos de $\overline{AB}$ son A(−7) y B(14), además P divide este segmento en la razón 4:3.

c) Los extremos de $\overline{AB}$ son A(15) y B(45), además P es punto medio de $\overline{AB}$.

71

Aprendizajes esperados

Aplica la división de un segmento en una razón dada en la resolución de ejercicios.

Secuencia:

En 9no grado se planteó la división de un segmento por un punto en una razón dada, con el fin de aplicarla en ejercicios y problemas de semejanza de triángulos. Dicha división dio lugar al cálculo de la coordenada del punto medio de un segmento.

En esta clase se retoma esto, para ser aplicado considerando segmentos en la recta numérica. Posteriormente se analizará la situación para segmentos arbitrarios en el plano cartesiano.

Puntos esenciales:

Comprender que dividir un segmento mediante un punto en una razón puede representarse gráficamente, lo cual abonará a la comprensión de las componentes m y n de dicha razón.

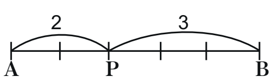
Recordar las fórmulas ya aprendidas $p = \frac{na+mb}{m+n}$ y $p = \frac{a+b}{2}$, según las condiciones que definen a cada una de estas.

Efectuar las sustituciones apropiadas en las fórmulas anteriores.

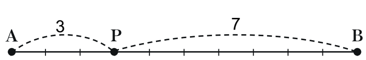
C2: División de un segmento de la recta numérica en una razón dada

P Represente gráficamente la división del segmento AB por el punto P en la razón $2:3$, dividiendo a este en 5 partes iguales.

S

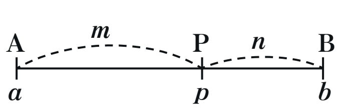


E1 La división del segmento AB por el punto P en la razón $3:7$.



C Si los extremos de $\overline{AB}$ son $A(a)$ y $B(b)$, $P(p)$ está en el interior de dicho segmento y lo divide en la razón $AP:PB = m:n$ entonces:

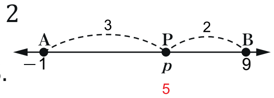
$$p = \frac{na+mb}{m+n}$$



Ej $A(-1)$, $B(9)$ son los extremos de $\overline{AB}$. Calcule la coordenada del punto P en $\overline{AB}$, tal que:

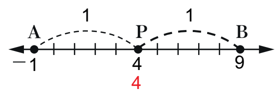
a) P divide a $\overline{AB}$ en la razón $3:2$

$$p = \frac{(2)(-1)+(3)(9)}{3+2} = \frac{25}{5} = 5.$$



b) P es punto medio de $\overline{AB}$

$$p = \frac{-1+9}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$



E2 Encuentre la coordenada P de $\overline{AB}$.

a) $A(5)$, $B(15)$ y P divide a $\overline{AB}$ en la razón $2:3$.

$$p = \frac{(3)(5)+(2)(15)}{2+3} = \frac{45}{5} = 9.$$

b) $A(-7)$, $B(14)$ y P divide al $\overline{AB}$ en la razón $4:3$.

$$p = \frac{(3)(-7)+(4)(14)}{4+3} = \frac{35}{7} = 5.$$

c) $A(15)$, $B(45)$ y P es punto medio de $\overline{AB}$.

$$p = \frac{15+45}{2} = \frac{60}{2} = 30.$$

Contenido 3 Distancia entre dos puntos del plano cartesiano

Aprendizajes esperados

Calcula la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano.

Secuencia:

Esta unidad se inició con el cálculo de la distancia de puntos sobre la recta numérica. En esta ocasión, como un caso más general, se determina la distancia entre dos puntos del plano cartesiano.

La deducción de la fórmula de la distancia se da mediante la aplicación del Teorema de Pitágoras, estudiado en 9no grado.

Puntos esenciales:

Recordar el enunciado del Teorema de Pitágoras para ser aplicado en la deducción de la fórmula de la distancia entre dos puntos.

Explicar la formación del triángulo rectángulo concebido en la ubicación de los pares ordenados del problema.

Identificar la distancia entre dos puntos como la longitud del segmento cuyos extremos son los puntos en cuestión, de modo que la raíz cuadrada en la fórmula deducida es siempre positiva.

Contenido 3: Distancia entre dos puntos del plano cartesiano

P

Calcule la distancia entre los puntos $A(1, 2)$ y $B(6, 5)$ del plano cartesiano.

S

La distancia entre A y B es la longitud de $\overline{AB}$.

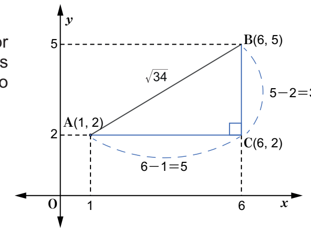
Si se traza una recta paralela al eje x, pasando por A y una recta paralela al eje y pasando por B, estas se cortan en C, formando el triángulo rectángulo ABC.

La longitud de $\overline{AC}$ es

$$AC = 6 - 1 = 5,$$

y la longitud de $\overline{BC}$ es

$$BC = 5 - 2 = 3.$$



La distancia a determinar es la longitud de la hipotenusa del $\triangle ABC$, de modo que, aplicando el Teorema de Pitágoras se tiene

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$$

$$AB = \sqrt{(6-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$$

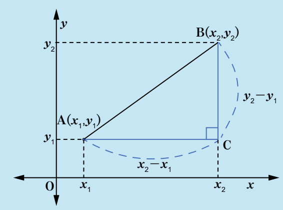
Luego, la distancia entre los puntos $A(1, 2)$ y $B(6, 5)$ es $\sqrt{34}$.

C

Distancia entre dos puntos del plano cartesiano

La distancia entre dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ del plano, denotada por d, es la longitud del segmento AB y se determina con:

$$d = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



E

Calcule la distancia entre dos puntos:

a) $A(2, -3)$, $B(5, 1)$

b) $M(0, 0)$, $Q(-4, 2)$

c) $R(-2, 1)$, $S(2, 4)$

d) $F(3, -2)$, $T(3, -9)$

C3: Distancia entre dos puntos del plano cartesiano

P Calcule la distancia entre los puntos $A(1, 2)$ y $B(6, 5)$.

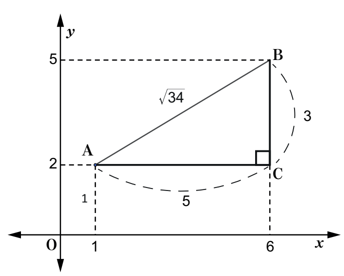
S Por el Teorema de Pitágoras:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$$

$$AB = \sqrt{(6-1)^2 + (5-2)^2}$$

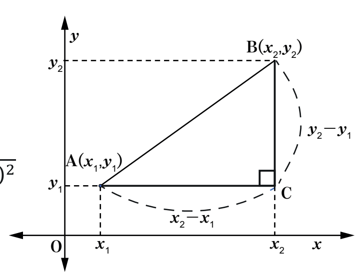
$$= \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$$



C La distancia entre dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es

$$d = AB$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



E Calcule la distancia entre dos puntos:

a) $A(2, -3)$, $B(5, 1)$

$$d = \sqrt{(5-2)^2 + (1-(-3))^2}$$

$$= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

b) $M(0, 0)$, $Q(-4, 2)$

$$d = \sqrt{(-4-0)^2 + (2-0)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

c) $R(-2, 1)$, $S(2, 4)$

$$d = \sqrt{(2-(-2))^2 + (4-1)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

d) $F(3, -2)$, $T(3, -9)$

$$d = \sqrt{(3-3)^2 + (-9-(-2))^2}$$

$$= \sqrt{0 + 49} = \sqrt{49} = 7$$

Contenido 4 División de un segmento en una razón dada

Contenido 4: División de un segmento en una razón dada

Definición

Coordenadas de un punto que divide a un segmento del plano en una razón dada

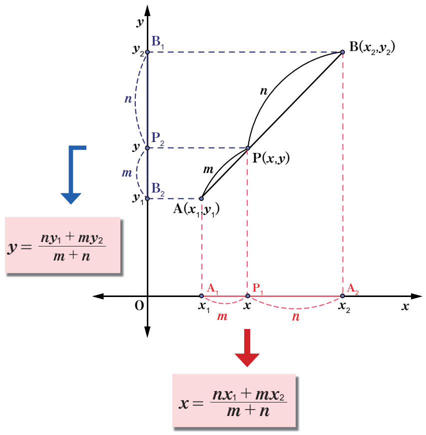
Las coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide a $\overline{AB}$, con extremos $A(x_1, y_1)$, y $B(x_2, y_2)$, en la razón $m:n$ son

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \quad y = \frac{ny_1 + my_2}{m+n}.$$

Esto se confirma a partir del siguiente gráfico, en el que se muestra que sobre el eje x se forman segmentos cuyas longitudes están también en la razón $m:n$, lo cual ocurre a su vez sobre el eje y:

Al proyectar el segmento AB sobre el eje x se forma el segmento A_1A_2 cuyos extremos son $A_1\ (x_1, 0)$ y $A_2\ (x_2, 0)$. El punto $P_1\ (x, 0)$ es la proyección de P sobre el eje x y este divide al segmento A_1A_2 también en la razón $m:n$, de manera que

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n}$$



Al proyectar el segmento AB sobre el eje y se forma el segmento B_1B_2 cuyos extremos son $B_1\ (0, y_1)$ y $B_2\ (0, y_2)$. El punto $P_2\ (0, y)$ es la proyección de P sobre el eje y y este divide al segmento B_1B_2 también en la razón $m:n$, de manera que

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{m+n}$$

Es decir, las coordenadas de P son

$$P\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n}\right).$$

73

Aprendizajes esperados

Aplica la división de un segmento en una razón dada en el plano cartesiano en la solución de ejercicios.

Secuencia:

En la recta numérica se abordó la división de un segmento por un punto en una razón dada. Esta noción se generaliza ahora considerando un segmento cualquiera del plano cartesiano, obteniendo fórmulas para las coordenadas del punto que divide al segmento.

Posteriormente se verá que, nuevamente, la división de un segmento en una razón dada permite la obtención de fórmulas para las coordenadas del punto medio de un segmento.

Puntos esenciales:

Inducir a la comprensión de que los ejes coordenados son rectas numéricas en las que los puntos son de la forma $(x, 0)$ o $(0, y)$, según se ubiquen en el eje x o en el eje y. Sobre dichos ejes y ante tales coordenadas se aplican las fórmulas aprendidas en la división de un segmento por un punto en una razón dada, de forma respectiva.

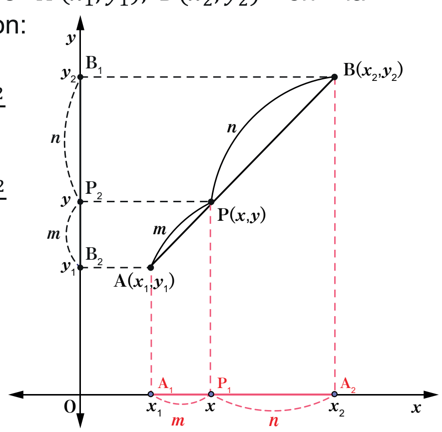
Explicar apropiadamente que el concepto de proyección de un punto y de un segmento sobre una recta se forman a partir de rectas perpendiculares.

C4: División de un segmento en una razón dada

D Las coordenadas del punto P que divide a $\overline{AB}$ con extremos $A\,(x_1, y_1)$, $B\,(x_2, y_2)$ en la razón $m:n$ son:

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n}$$

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{m+n}$$

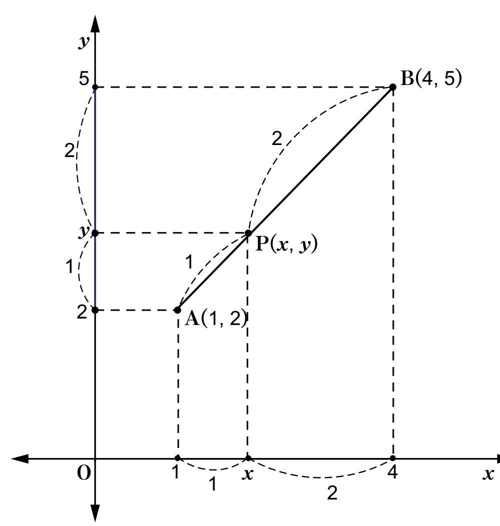


Ej Calcule las coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide a $\overline{AB}$ con extremos $A(1, 2)$ y $B(4, 5)$ en la razón $1:2$.

$x_1 = 1,\ x_2 = 4,\ \ y_1 = 2,\ \ y_2 = 5,\ m = 1,\ n = 2.$

$$x = \frac{(2)(1) + (1)(4)}{1+2} = \frac{6}{3} = 2, \quad y = \frac{(2)(2) + (1)(5)}{1+2} = \frac{9}{3} = 3.$$

Por tanto, $P(2, 3)$.



Contenido 4 División de un segmento en una razón dada

Aprendizajes esperados

Aplica la división de un segmento en una razón dada en el plano cartesiano en la solución de ejercicios.

Secuencia:

En la recta numérica se abordó la división de un segmento por un punto en una razón dada. Esta noción se generaliza ahora considerando un segmento cualquiera del plano cartesiano, obteniendo fórmulas para las coordenadas del punto que divide al segmento.

Posteriormente se verá que, nuevamente, la división de un segmento en una razón dada permite la obtención de fórmulas para las coordenadas del punto medio de un segmento.

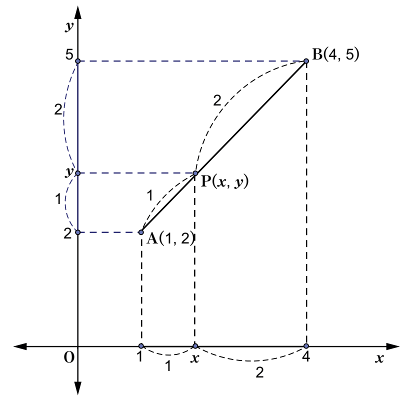
Puntos esenciales:

Inducir a la comprensión de que los ejes coordenados son rectas numéricas en las que los puntos son de la forma $(x, 0)$ o $(0, y)$, según se ubiquen en el eje x o en el eje y. Sobre dichos ejes y ante tales coordenadas se aplican las fórmulas aprendidas en la división de un segmento por un punto en una razón dada, de forma respectiva.

Explicar apropiadamente el concepto de proyección de un punto y de un segmento sobre una recta, estos se forman a partir de rectas perpendiculares.

Ejemplo Calcule las coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide al segmento AB cuyos extremos son $A(1, 2)$ y $B(4, 5)$ en la razón 1:2.

En la gráfica de abajo se muestra $\overline{AB}$ y el punto P que lo divide en la razón 1:2.



Para el uso de las fórmulas anteriores se identifica

$$x_1 = 1,\quad x_2 = 4,\quad y_1 = 2,$$
$$y_2 = 5,\quad m = 1,\quad n = 2.$$

Así,

$$x = \frac{(2)(1)+(1)(4)}{1+2} = \frac{6}{3} = 2$$

$$y = \frac{(2)(2)+(1)(5)}{1+2} = \frac{9}{3} = 3$$

Por tanto, el punto buscado es $P(2, 3)$.

E

a) Encuentre las coordenadas del punto P que divide al segmento con extremos $A(2, 1)$ y $B(9, 8)$ en la razón 3:4.

b) Encuentre las coordenadas del punto P que divide al segmento con extremos $A(-1, 6)$ y $B(6, -1)$ en la razón 4:3.

74

E a) Encuentre las coordenadas del punto P que divide al segmento con extremos $A(2,1)$ y $B(9,8)$ en la razón $3:4$.

$$x = \frac{(4)(2)+(3)(9)}{3+4} = \frac{35}{7} = 5,$$

$$y = \frac{(4)(1)+(3)(8)}{3+4} = \frac{28}{7} = 4.$$

Por tanto, $P(5,4)$.

b) Encuentre las coordenadas del punto P que divide al segmento con extremos $A(-1,6)$ y $B(6,-1)$ en la razón $4:3$.

$$x = \frac{(3)(-1)+(4)(6)}{4+3} = \frac{21}{7} = 3,$$

$$y = \frac{(3)(6)+(4)(-1)}{4+3} = \frac{14}{7} = 2.$$

Por tanto, $P(3,2)$.

Contenido 5 Coordenadas del punto medio de un segmento

Contenido 5: Coordenadas del punto medio de un segmento

P Determine las coordenadas del punto P que divide al segmento con extremos A(1, 2) y B(3, 6) en la razón 1:1.

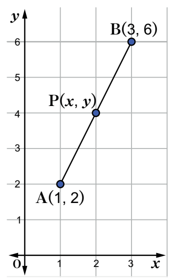
S

Las coordenadas de P son:

$$x=\frac{(1)(1)+(1)(3)}{1+1}=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2,\quad y=\frac{(1)(2)+(1)(6)}{1+1}=\frac{2+6}{2}=\frac{8}{2}=4.$$

Luego, el punto buscado es **P(2, 4)**.

Se observa que en este caso, $m=n=1$, lo que indica que P es punto medio de $\overline{AB}$.



C

Punto medio de un segmento del plano

Las coordenadas del punto medio $P(x, y)$ de $\overline{AB}$ con extremos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ son

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

Es decir,

$$P\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Aprendizajes esperados

Determina las coordenadas del punto medio de un segmento en el plano cartesiano.

Secuencia:

Las expresiones correspondientes a la abscisa y ordenada del punto medio de un segmento del plano cartesiano se deducen de un caso particular de la división de un segmento mediante un punto en una razón dada: en la razón $m:n$, se considera el caso $m=n$.

Puntos esenciales:

Inducir a la comprensión de que el punto medio de un segmento divide a este en una razón $m:m$, puesto que dicho punto se ubica a igual distancia de los extremos del segmento.

Hacer notar que las expresiones de las coordenadas del punto medio de un segmento requieren del uso de las coordenadas respectivas de los extremos, de modo que se deben identificar correctamente los valores correspondientes de abscisas y de ordenadas.

Explicar que en aquellos casos en los que se desconozcan las coordenadas de uno de los extremos pero se cuente con las del punto medio y las del otro extremo, se requerirá resolver ecuaciones de primer grado.

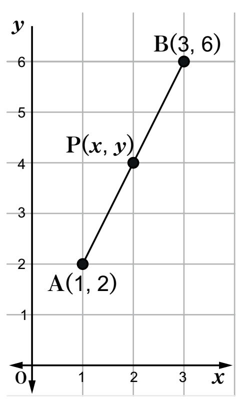
C5: Coordenadas del punto medio de un segmento

(P) Determine las coordenadas del punto P que divide al segmento con extremos $A(1,2)$ y $B(3,6)$ en la razón $1:1$.

(S) Las coordenadas de P son:

$$x=\frac{(1)(1)+(1)(3)}{1+1}=\frac{4}{2}=2,\quad y=\frac{(1)(2)+(1)(6)}{1+1}=\frac{8}{2}=4.$$

El punto $P(2,4)$ es punto medio de $\overline{AB}$.



(C) El punto medio de $\overline{AB}$ con extremos $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$ son

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

(Ej) a) Encuentre el punto medio de $\overline{AB}$ con extremos $A(1,3)$ y $B(-2,5)$.

$$x=\frac{1+(-2)}{2}=-\frac{1}{2},\quad y=\frac{3+5}{2}=\frac{8}{2}=4.$$

El punto es $P\left(-\frac{1}{2},4\right)$.

b) Si $(0,3)$ es el punto medio de $\overline{AB}$ y $A(-2,4)$ y $B(x_2,y_2)$, determine las coordenadas de B.

$$0=\frac{-2+x_2}{2},\qquad 3=\frac{4+y_2}{2}$$

$$0=-2+x_2,\qquad 6=4+y_2$$

$$x_2=2,\qquad y_2=2$$

El punto es $B(2,2)$

Contenido 5 Coordenadas del punto medio de un segmento

Aprendizajes esperados

Determina las coordenadas del punto medio de un segmento en el plano cartesiano.

Secuencia:

Las expresiones correspondientes a la abscisa y ordenada del punto medio de un segmento del plano cartesiano se deducen de un caso particular de la división de un segmento mediante un punto en una razón dada: en la razón $m:n$, se considera el caso $m=n$.

Puntos esenciales:

Inducir a la comprensión de que el punto medio de un segmento divide a este en una razón $m:m$, puesto que dicho punto se ubica a igual distancia de los extremos del segmento.

Hacer notar que las expresiones de las coordenadas del punto medio de un segmento requieren del uso de las coordenadas respectivas de los extremos, de modo que se deben identificar correctamente los valores correspondientes de abscisas y de ordenadas.

Explicar que en aquellos casos en los que se desconozcan las coordenadas de uno de los extremos pero se cuente con las del punto medio y las del otro extremo, se requerirá resolver ecuaciones de primer grado.

Ejemplo

a) Encuentre las coordenadas del punto medio del segmento con extremos $A(1, 3)$ y $B(-2, 5)$.

b) Si $(0, 3)$ son las coordenadas del punto medio de $\overline{AB}$ con extremos $A(-2, 4)$ y $B(x_2, y_2)$, determine las coordenadas de B.

a) Como $x_1=1$, $x_2=-2$, $y_1=3$, $y_2=5$, el punto medio tiene coordenadas

$$x=\frac{1+(-2)}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$y=\frac{3+5}{2}=\frac{8}{2}=4$$

De manera que el punto medio es $\mathbf{P}\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$.

b) Esta vez se sabe que $x=0$, $y=3$, $x_1=-2$, $y_1=4$, valores que se sustituyen en las expresiones para las coordenadas del punto medio:

$$0=\frac{-2+x_2}{2}, \quad 3=\frac{4+y_2}{2}$$

$$0=-2+x_2, \quad 6=4+y_2$$

$$x_2=2, \quad y_2=2$$

De manera que el extremo buscado es $\mathbf{B(2, 2)}$.

E

1. Encuentre en cada caso el punto medio de $\overline{AB}$ cuyos extremos son:

a) $A(2, 4)$, $B(5, 8)$

b) $A(4, -1)$, $B(7, 3)$

c) $A(-2, 3)$, $B(5, 1)$

d) $A(0, 3)$, $B(3, 0)$

2. Uno de los extremos de un segmento es el punto $(7, 8)$ y su punto medio es $(4, 3)$. Encuentre las coordenadas del otro extremo.

76

E 1. Determine el punto medio de $\overline{AB}$:

a) $A(2,4),\ B(5,8)$

$$x=\frac{2+5}{2}=\frac{7}{2},\ y=\frac{4+8}{2}=\frac{12}{2}=6. \quad \left(\frac{7}{2},6\right).$$

d) $A(0,3),\ B(3,0)$

$$x=\frac{0+3}{2}=\frac{3}{2},\ y=\frac{3+0}{2}=\frac{3}{2}. \quad \left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$$

2. Un extremo es $(7,8)$ y su punto medio $(4,3)$. Determine el otro extremo.

Sea (x_2,y_2) el otro extremo:

$$4=\frac{7+x_2}{2}, \qquad 3=\frac{8+y_2}{2}.$$

$$8=7+x_2, \qquad 6=8+y_2$$

$$x_2=1, \qquad y_2=-2$$

El otro extremo es $(1,-2)$.

Contenido 1 Ecuación de la recta (pendiente y el intercepto con el eje y)

Sección 2: La recta

Contenido 1: Ecuación de la recta: pendiente y el intercepto con el eje y

Repaso

La gráfica de la ecuación $y=mx+b$ es una recta que tiene **pendiente m** y pasa por el punto $(0,\ b)$. **El punto $(0,\ b)$ es el intercepto con eje y.**

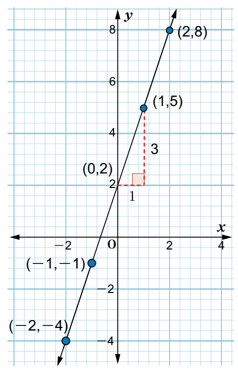
P

Dada la recta $y=3x+2$ responda a los incisos propuestos.
a) Encuentra la pendiente y el intercepto con el eje y.
b) Trace la gráfica de la ecuación dada.

S

a) A partir de la forma de la ecuación $y=3x+2$, $m=3$ y $b=2$: la pendiente de la recta $y=3x+2$ es **3** y el intercepto con el eje y es el punto **(0, 2)**.

b) Para trazar la gráfica de esta recta se necesita otro punto diferente de (0, 2) y como la pendiente es 3, el otro punto que se obtiene a partir de este es (1, 5).



E

Para cada inciso, identifique la pendiente de la recta dada y el intercepto con el eje y. Trace la gráfica.

a) $y=2x+2$

b) $y=-3x+4$

c) $y=5x$

d) $x+y=3$

Aprendizajes esperados

Determina la ecuación de una recta a partir de su pendiente y el intercepto con el eje y.

Secuencia:

En octavo grado se estudió la gráfica de funciones de primer grado, definidas por ecuaciones de la forma $y=mx+b$, explicándose el significado a expresiones como m (pendiente) o el punto $(0,\ b)$ (intercepto con el eje y).

La ecuación anterior representa una recta y esta será utilizada para la deducción de la ecuación de una recta de la cual se conoce su pendiente y un punto de la misma.

Puntos esenciales:

Recordar que en la expresión $y=mx+b$, m es la pendiente o razón de cambio, de modo que si x varía en 1 unidad, y lo hace en m unidades.

Explicar que con el valor de b se formará el punto $(0,\ b)$, que está sobre la recta a trazar. Y, recordando que dos puntos distintos determinan una única recta, solo se debe determinar un punto más de dicha recta, el cual se obtendrá aplicando el concepto de pendiente.

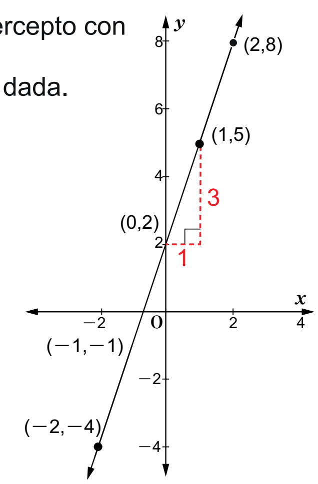
S2: La recta
C1: Ecuación de la recta (pendiente y el intercepto con el eje y)

(R) La gráfica de $y = mx + b$ es una recta que tiene pendiente m e intercepta al eje y en $(0, b)$.

(P) Dada la recta $y = 3x + 2$:
a) Encuentre la pendiente y el intercepto con el eje y.
b) Trace la gráfica de la ecuación dada.

(S) a) $y = 3x + 2 \Rightarrow \ m = 3$ y $b = 2$.
La pendiente: 3
El intercepto con el eje y: $(0, 2)$.

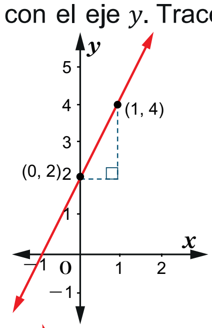
b) Otro punto de la recta es $(1, 5)$ ya que la pendiente es 3.



(E) Para cada inciso, identifique la pendiente de la recta dada y el intercepto con el eje y. Trace la gráfica.

a) $y = 2x + 2$
Pendiente: $m = 2$
Intercepto con el eje y: $(0, 2)$

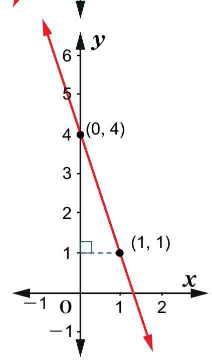
Otro punto: $(1, 4)$



b) $y = -3x + 4$

Pendiente: $m = 2$
Intercepto con el eje y: $(0, 4)$

Otro punto: $(1, 1)$



Contenido 2 Ecuación punto - pendiente de la recta

Aprendizajes esperados

Deduce y aplica la ecuación punto - pendiente de una recta en ejercicios.

Secuencia:

La ecuación $y = mx + b$ se utiliza para deducir la ecuación de una recta de la cual se conocen la pendiente y las coordenadas de un punto de esta. Esta es una de las expresiones para la ecuación de una recta, que se conocerán en esta unidad.

Puntos esenciales:

Inducir a la comprensión de que las coordenadas de un punto satisfacen una ecuación si al reemplazar dichas coordenadas en esta ecuación se tiene una igualdad cierta; particularmente, para la ecuación $y = mx + b$ y el punto (x_1, y_1) se reemplaza x por x_1 y y por y_1.

Recordar que decimos "restar dos ecuaciones" cuando se efectúa la sustracción de términos correspondientes en cada lado de ambas ecuaciones.

Explicar que si se cuenta con (x_1, y_1) y m, el uso de la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$ se resume a sustituir x_1, y_1 y m, y reducir la expresión a la forma $y = mx + b$, con la cual se facilita la representación gráfica.

Contenido 2: Ecuación punto – pendiente de la recta

Demostración

Sea $A(x_1, y_1)$ un punto de la recta que tiene pendiente m cuya ecuación es

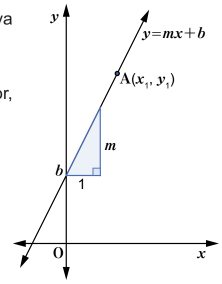
$$y = mx + b \quad ①$$

Las coordenadas de este punto satisfacen la ecuación anterior, es decir,

$$y_1 = mx_1 + b \quad ②$$

Al restar ② de ① se obtiene

$$\begin{aligned} y &= mx + b \\ +)\ -y_1 &= -mx_1 - b \\ \hline y - y_1 &= mx - mx_1 \\ y - y_1 &= m(x - x_1) \end{aligned}$$



C

La ecuación de la recta que tiene pendiente m y pasa por el punto $A(x_1, y_1)$ es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

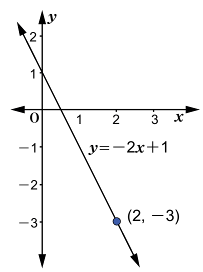
se llama **ecuación punto - pendiente** de la recta.

Ejemplo Determine la ecuación y trace la gráfica de la recta que pasa por $A(2, -3)$ y su pendiente es -2.

Como $x_1 = 2$, $y_1 = -3$ y $m = -2$, al sustituirlos en la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$ se tiene

$$y - (-3) = -2(x - 2)$$
$$y + 3 = -2x + 4$$
$$y = -2x + 1$$

La ecuación de la recta es $y = -2x + 1$ y su gráfica se muestra a la derecha.



E

1. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, 3) y tiene la pendiente indicada:
   a) $m = 2$ b) $m = -3$ c) $m = 0$
2. Determine la ecuación de la recta que pasa por $(4, -1)$ y su pendiente es -4.

79

C2: Ecuación punto - pendiente de la recta

Sea $A(x_1, y_1)$ un punto de

$$y = mx + b.$$

Así,

$$y_1 = mx_1 + b.$$

Restamos

$$\begin{aligned} y &= mx + b \\ +)\ -y_1 &= -mx_1 - b \\ \hline y - y_1 &= mx - mx_1 \\ y - y_1 &= m(x - x_1) \end{aligned}$$

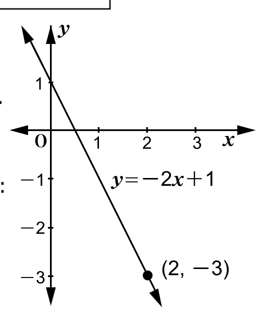
C Ecuación punto - pendiente de la recta
Pendiente: m Pasa por $A(x_1, y_1)$
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ej Determine la ecuación y trace la gráfica de la recta que pasa por $A(2, -3)$ y su pendiente es $m = -2$.

Se tiene $x_1 = 2$, $y_1 = -3$ y $m = -2$.

Se sustituyen en $y - y_1 = m(x - x_1)$:

$$y - (-3) = -2(x - 2)$$
$$y + 3 = -2x + 4$$
$$y = -2x + 1$$



E 1-(a). Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, 3)$ y cuya pendiente es $m = 2$

$$x_1 = 2,\ \ y_1 = 3,\ \ m = 2$$

Se sustituyen en $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 3 = 2(x - 2)$$
$$y - 3 = 2x - 4$$
$$y = 2x - 1$$

2. Determine la ecuación de la recta que pasa por $(4, -1)$ y su pendiente es -4.

$$x_1 = 4,\ \ y_1 = -1,\ \ m = -4$$

Se sustituyen estos valores en $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - (-1) = -4(x - 4)$$
$$y + 1 = -4x + 16$$
$$y = -4x + 15$$

Contenido 3 Expresión para la pendiente de una recta

Contenido 3: Expresión para la pendiente de una recta

P

La siguiente tabla muestra las coordenadas de algunos puntos de la recta $y = 3x + 2$:

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-1	2	5	8
Punto	$A(-2,\ -4)$	$B(-1,\ -1)$	$C(0,\ 2)$	$D(1,\ 5)$	$E(2,\ 8)$

a) Determine los valores $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ para las siguientes parejas de puntos:

- A y B
- B y E
- C y D

b) Compare los resultados obtenidos en a) con la pendiente de la recta.

S

a) Para los puntos $A(-2,\ -4)$ y $B(-1,\ -1)$ se tiene

$x_1 = -2$, $y_1 = -4$, $x_2 = -1$ y $y_2 = -1$, así

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-(-4)}{-1-(-2)} = \frac{3}{1} = \mathbf{3}.$$

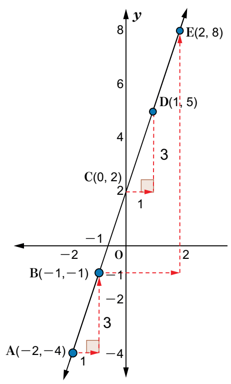
En el caso de $B(-1,\ -1)$ y $E(2,\ 8)$ se tiene

$x_1 = -1$, $y_1 = -1$, $x_2 = 2$ y $y_2 = 8$, de modo que

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-(-1)}{2-(-1)} = \frac{9}{3} = \mathbf{3}.$$

Y, para $C(0,\ 2)$ y $D(1,\ 5)$, $x_1 = 0$, $y_1 = 2$, $x_2 = 1$ y $y_2 = 5$, de manera que

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-2}{1-0} = \frac{3}{1} = \mathbf{3}.$$



b) La pendiente de la recta $y = 3x + 2$ es 3, la cual coincide con el valor obtenido en los cocientes de a).

C

La pendiente de la recta $y = mx + b$ que pasa por dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es la razón

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2$$

E

Calcule para cada inciso la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

a) $A(3,\ 4)$ y $B(1,\ -2)$

b) $M(-5,\ 3)$ y $P(2,\ -3)$

c) $F(1,\ 3)$ y $J(7,\ 1)$

d) $Q(3,\ 4)$ y $C(0,\ 4)$

Aprendizajes esperados

Calcula la pendiente de una recta a partir de las coordenadas de dos de sus puntos.

Secuencia:

Desde 8vo grado se concibió la pendiente como la razón de cambio considerada entre las tasas de cambio respectivas para abscisas y ordenadas de puntos de una recta. En esta clase se obtiene una expresión que no requiere de las tasas de cambio mencionadas, sino tan solo las coordenadas de dos puntos cualesquiera de la recta.

Puntos esenciales:

Procurar que la deducción de la expresión

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2,$$

se realice enfatizando que este cociente será siempre el mismo, tomando dos puntos cualesquiera de la recta.

Explicar que para el uso de la expresión anterior debe identificarse en cada punto los valores correspondientes de abscisas y ordenadas, esto es, cuál es el valor de x_1 y_1, x_2 y y_2.

Hacer notar que los cocientes que se obtienen en el problema central de la clase y el coeficiente de x en la ecuación $y = 3x + 2$, dan el mismo valor.

C3: Expresión para la pendiente de una recta

P La tabla muestra algunos puntos de $y = 3x + 2$:

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-1	2	5	8
Punto	$A(-2,-4)$	$B(-1,-1)$	$C(0,2)$	$D(1,5)$	$E(2,8)$

a) Determine los valores $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ para A y B, B y E, y C y D.

b) Compare los resultados de a) con la pendiente de la recta.

S a) Para $A(-2,-4)$ y $B(-1,-1)$:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-(-4)}{-1-(-2)} = \frac{3}{1} = 3.$$

Para $B(-1,-1)$ y $E(2,8)$:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-(-1)}{2-(-1)} = \frac{9}{3} = 3.$$

Y para $C(0,2)$ y $D(1,5)$:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-2}{1-0} = \frac{3}{1} = 3.$$

b) La pendiente de $y = 3x + 2$ es 3, la cual coincide con los cocientes de a)

C Pendiente de la recta $y = mx + b$ que pasa por $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2.$$

E Calcule la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

a) $A(3,4)$ y $B(1,-2)$

$$m = \frac{-2-4}{1-3} = \frac{-6}{-2} = 3.$$

b) $M(-5,3)$ y $P(2,-3)$

$$m = \frac{-3-3}{2-(-5)} = -\frac{6}{7}.$$

c) $F(1,3)$ y $J(7,1)$

$$m = \frac{1-3}{7-1} = -\frac{1}{3}.$$

d) $Q(3,4)$ y $C(0,4)$

$$m = \frac{4-4}{0-3} = \frac{0}{-3} = 0.$$

Contenido 4 Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Aprendizajes esperados

Deduce y aplica la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

Secuencia:

En clases anteriores se obtuvieron las expresiones

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},\ x_1\neq x_2,$$

y $y-y_1=m(x-x_1)$, que corresponden a la pendiente de la recta que pasa por dos puntos y la ecuación de la recta con pendiente m, y que pasa por (x_1, y_1), respectivamente. La combinación de estas, da lugar a la ecuación de la recta que pasa por dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

Puntos esenciales:

Explicar que para el uso de la expresión

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

debe identificarse en cada punto los valores correspondientes de abscisas y ordenadas, esto es, cuál es el valor de x_1, y_1, x_2 y y_2, de modo que, al efectuarse la sustitución se realicen las operaciones aritméticas necesarias y se reduzca a la forma $y=mx+b$, con la cual se facilita la representación gráfica.

Contenido 4: Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

P Determine la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos A(1, 3) y B(2, 4).

S

La pendiente m dada por

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-3}{2-1}.$$

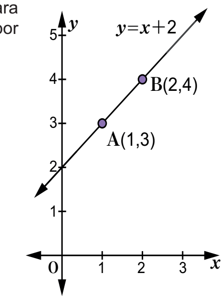
Se utiliza la ecuación punto – pendiente $y-y_1=m(x-x_1)$, para la cual se requiere de uno de los puntos de la recta, tómese por ejemplo A(1, 3) toma la forma.

$$y-\overset{y_1}{3}=\overbrace{\frac{4-3}{2-1}}^{\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}(x-\underset{x_1}{1})$$

Es decir,

$$y-3=1(x-1)$$
$$y-3=x-1$$
$$y=x+2.$$

La ecuación encontrada es por tanto $y=x+2$.



C

La ecuación de la recta que pasa por los dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ siendo $x_1\neq x_2$, es

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

Ejemplo Determine la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos A(2, 1) y B(3, −1).

Como $x_1=2$, $y_1=1$, $x_2=3$ y $y_2=-1$, usando la ecuación para la recta que pasa por dos puntos se tiene

$$y-1=\frac{-1-1}{3-2}(x-2)$$
$$y-1=-2(x-2)$$
$$y-1=-2x+4$$
$$y=-2x+5$$

La ecuación encontrada es $y=-2x+5$.

E

Determine la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos:

a) A(−2, 3) y B(1, 9)
b) Q(2, 1) y H(4, 7)
c) F(2, 5) y M(−7, 5)
d) W(1, −2) y J(−4, 5)

81

C4: Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

(P) Determine la ecuación de la recta que pasa por $A(1,3)$ y $B(2,4)$.

(S) Se usa $y-y_1=m(x-x_1)$ para la cual se requiere la pendiente: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-3}{2-1}$.

$x_1=1,\ y_1=3,\ x_2=2$ y $y_2=4$

$$y-\overset{y_1}{3}=\overbrace{\left(\frac{4-3}{2-1}\right)}^{m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}(x-\underset{x_1}{1})$$

$$y-3=(1)(x-1)$$
$$y-3=x-1$$
$$y=x+2.$$

(C) Ecuación de la recta que pasa por $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$: $\quad y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),\quad x_1\neq x_2$.

(Ej) Determine la ecuación de la recta que pasa por $A(2,1)$, $B(3,-1)$.

Se identifica $x_1=2,\ y_1=1,\ x_2=3$ y $y_2=-1$.

$$y-1=\frac{-1-1}{3-2}(x-2)$$
$$y-1=-2(x-2)$$
$$y-1=-2x+4$$
$$y=-2x+5$$

(E) Determine la ecuación de la recta que pasa por:

a) $A(-2,3)$ y $B(1,9)$

$$y-3=\frac{9-3}{1-(-2)}(x-(-2))$$
$$y-3=2(x+2)$$
$$y-3=2x+4$$
$$y=2x+7$$

b) $Q(2,1)$ y $H(4,7)$

$$y-1=\frac{7-1}{4-2}(x-2)$$
$$y-1=3(x-2)$$
$$y-1=3x-6$$
$$y=3x-5$$

c) $F(2,5)$ y $M(-7,5)$

$$y-5=\frac{5-5}{-7-2}(x-2)$$
$$y-5=0(x-2)$$
$$y-5=0$$
$$y=5$$

Contenido 5 Ecuación general de la recta

Contenido 5: Ecuación general de la recta

P Exprese la ecuación de la recta $y=\frac{2}{3}x+1$ en la forma $Ax+By+C=0$ con $A\neq 0$ o $B\neq 0$.

S

Se observa que en la expresión $Ax+By+C=0$ el lado derecho es igual a cero, de modo que se efectúa una transposición de términos en $y=\frac{2}{3}x+1$, ordenándolos adecuadamente

$$y=\frac{2}{3}x+1$$
$$-\frac{2}{3}x+y-1=0 \quad ①$$
$$2x-3y+3=0$$

Se multiplica la ecuación ① por -3 para simplificar el denominador.

La ecuación $y=\frac{2}{3}x+1$ se puede escribir como $2x-3y+3=0$ o también de la forma $\frac{2}{3}x-y+1=0$.

C

La ecuación de una recta en su forma general es $Ax+By+C=0$, siendo A, B, C números cualesquiera con $A\neq 0$ o $B\neq 0$.

Ejemplo Identifique los números A, B y C para que la ecuación de la recta $x=2$ tenga la forma general con $A\neq 0$ o $B\neq 0$.

En vista de que $x=2$ se escribe como

$$x+0y-2=0,$$

se tienen los números $A=1$, $B=0$, $C=-2$.

E

1. Escriba cada ecuación dada en la forma $Ax+By+C=0$ con $A\neq 0$ o $B\neq 0$:

a) $y=-2x+3$ b) $x=10$

c) $y-1=-\frac{3}{5}x$ d) $y=2$

2. Dada la recta $3x-5y+1=0$, determine la ecuación de la forma $y=mx+b$ que le corresponde.

82

Aprendizajes esperados

Deduce y aplica la ecuación general de una recta en la solución de ejercicios.

Secuencia:

En clases anteriores se han estudiado formas de la ecuación de una recta: Ecuación pendiente - intercepto con el eje y, ecuación punto - pendiente, ecuación de la recta que pasa por dos puntos. Agregamos a la lista la ecuación general.

Esta se obtiene fácilmente de la ecuación pendiente - intercepto con el eje y, y viceversa.

Puntos esenciales:

Procurar que en la obtención de la ecuación general de una recta se tenga en cuenta que el lado derecho de esta es 0, lo que requiere de transposición de términos; y además, que los términos en el lado izquierdo están ordenados: primero el término en x, luego el término en y, y posteriormente la constante.

Inducir a la comprensión de que en ecuaciones de la forma $x=x_1$ la ausencia de y indica que el coeficiente de esta es 0, y no que dicha variable tome el valor 0.

C5: Ecuación general de la recta

P Exprese la ecuación de la recta $y=\frac{2}{3}x+1$ en la forma $Ax+By+C=0$.

S

$$y=\frac{2}{3}x+1$$
$$-\frac{2}{3}x+y-1=0 \quad \text{Multiplicar por } -3$$
$$2x-3y+3=0$$

Así, $y=\frac{2}{3}x+1$ puede escribirse como

$$2x-3y+3=0$$

o también como

$$\frac{2}{3}x-y+1=0$$

C Ecuación General de la recta

$$Ax+By+C=0 \quad (x\neq 0,\ y\neq 0)$$

Ej Identifique A, B y C para la ecuación en la forma general de la recta $x=2$, con $A\neq 0$ o $B\neq 0$.
$x=2$ se escribe como
$$x+0y-2=0,$$
De modo que $A=1,\ B=0,\ C=-2$.

E 1. Escriba cada ecuación dada en la forma $Ax+By+C=0$, con $A\neq 0$ o $B\neq 0$.

a) $y=-2x+3$
$$2x+y-3=0.$$

b) $x=10$
$$x+0y-10=0 \Rightarrow x-10=0$$

c) $y-1=-\frac{3}{5}x$
$$5y-5=-3x$$
$$3x+5y-5=0 \text{ o } \frac{3}{5}x+y-1=0$$

2. Dada la recta $3x-5y+1=0$, determine la ecuación de la forma $y=mx+b$ que le corresponde.

$$3x-5y+1=0$$
$$-5y=-3x-1$$
$$y=-\frac{1}{5}(-3x-1)$$
$$y=\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}$$

Contenido 6 Ecuaciones de rectas paralelas a los ejes coordenados

Aprendizajes esperados

Determinar la ecuación de rectas paralelas a los ejes.

Secuencia:

Además de las expresiones de la ecuación de una recta, estudiadas en contenidos anteriores, se pueden establecer expresiones para los casos particulares de rectas paralelas a los ejes coordenados (rectas verticales u horizontales).

Puntos esenciales:

Explicar que la ecuación $y = y_1$ se puede deducir a partir de la expresión correspondiente a la recta que pasa por dos puntos. Del uso de esta se puede deducir que la pendiente de rectas horizontales, es decir, rectas paralelas al eje x, es 0.

Hacer notar que en el caso de las rectas verticales no podemos utilizar las expresiones para la ecuación de una recta, salvo la ecuación general; esto se debe a que la pendiente juega un papel primordial en dichas expresiones. Sin embargo, las rectas verticales poseen puntos cuyas abscisas son iguales, de modo que carecen de pendiente.

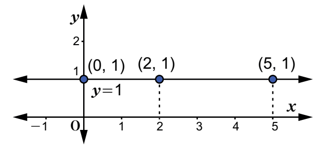
Inducir a la identificación de que puntos con iguales abscisas corresponden a rectas verticales y aquellos con iguales ordenadas a rectas horizontales.

Contenido 6: Ecuaciones de rectas paralelas a los ejes coordenados

P_1 Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2, 1) y (5, 1). Trace su gráfica.

S_1 Se aplica la ecuación de la recta que pasa por dos puntos:

$$y-1=\frac{1-1}{5-2}(x-2)$$
$$y-1=\frac{0}{3}(x-2)$$
$$y-1=0$$
$$y=1$$



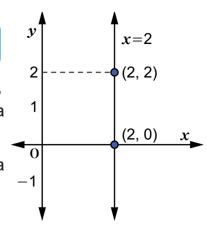
La ecuación obtenida indica que todos los puntos de esta recta tienen al 1 como ordenada. La recta trazada es paralela al eje x. En la gráfica se muestran algunos puntos.

C La ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_1)$ es

$$y=y_1$$

Esta es una recta paralela al eje x, cuya pendiente es 0.

P_2 Determine la ecuación de la recta que pasa por (2, 2) e intercepta al eje x en (2, 0).



S_2 La recta pasa por los puntos (2, 2) y (2, 0) y es paralela al eje y, a como se aprecia en la gráfica derecha.

Se observa que todos los puntos de esta recta tienen como abscisa $x=2$. Esto permite decir que la ecuación de la recta es

$$x=2.$$

C La ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_1, y_2)$ es

$$x=x_1$$

Esta es una recta paralela al eje y, la cual carece de pendiente.

E

1. Determine para cada inciso la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados:
   a) $T(-2, 1)$ y $R(2, 1)$ b) $M(1, 3)$ y $J(1, -3)$
   c) $Q(-1, 2)$ y $T(-1, 10)$ d) $H(0, 3)$ y $T(-6, 3)$
2. Determine la ecuación de la recta que pasa por (2, 3) y cuya pendiente es cero.

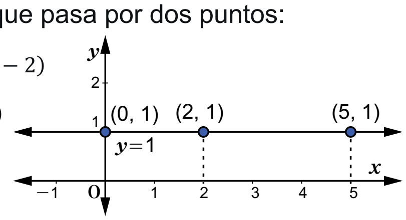
83

C6: Ecuaciones de rectas paralelas a los ejes coordenados

P1 Determine la ecuación de la recta que pasa por $(2, 1)$ y $(5, 1)$. Trace su gráfica.

S1 Ecuación de recta que pasa por dos puntos:

$$y-1=\frac{1-1}{5-2}(x-2)$$
$$y-1=\frac{0}{3}(x-2)$$
$$y-1=0$$
$$y=1$$



C Ecuación de recta que pasa por $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_1)$:

$$\boldsymbol{y = y_1}$$

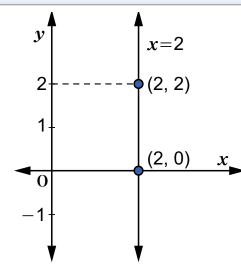
Recta paralela al eje x con pendiente 0.

P2 Determine la ecuación de la recta que pasa por $(2, 2)$ y corta al eje x en $(2, 0)$.

S2 Esta recta es paralela al eje y. Y todos sus puntos tienen primera coordenada $x = 2$.

Su ecuación es

$$x = 2$$



C Ecuación de recta que pasa por $A(x_1, y_1)$ y $B(x_1, y_2)$:

$$\boldsymbol{x = x_1}$$

Recta paralela al eje y, carece de pendiente.

E

1. Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados:
   a) $T(-2, 1)$ y $R(2, 1)$ $y = 1$
   b) $M(1, 3)$ y $J(1, -3)$ $x = 1$
2. Determine la ecuación de la recta que pasa por $(2, 3)$ y cuya pendiente es cero.
   Recta paralela a eje x Ecuación: $y = 3$

Contenido 7 Condición de paralelismo de dos rectas

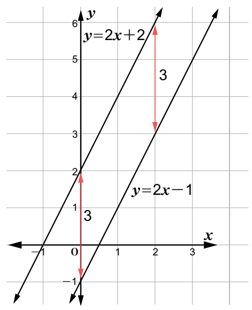
Contenido 7: Condición de paralelismo de dos rectas

P Verifique que las rectas $y=2x+2$ y $y=2x-1$ son paralelas.

S

En la gráfica de la derecha se observa una separación vertical constante de 3 unidades entre las dos rectas, lo que indica que estas no tienen puntos en común, es decir, son rectas paralelas.

Nótese que la pendiente de ambas rectas es $m=2$.



C

Las rectas $y=m_1x+n_1$, $y=m_2x+n_2$ son paralelas si sus pendientes son iguales.
Es decir, $m_1=m_2$

E_1

Investigue si las parejas de rectas dadas son paralelas:

a) $y=-3x+1$, $y=3x+6$ b) $y=10+3x$, $y=3x-1$ c) $y=-5x+1$, $5x+y+7=0$ d) $y=-5x+3$, $y=-3-5x$

Ejemplo Determine la ecuación de la recta que pasa por (3, −2) y es paralela a la recta $2x+y-2=0$.

La pendiente de la recta buscada es la misma que la de $2x+y-2=0$, esta última se lleva a la forma $y=mx+b$:

$$2x+y-2=0$$
$$y=-2x+2$$

De modo que la pendiente de ambas rectas es −2. Como el punto (3, −2) está en la recta a determinar, entonces

$$y-(-2)=-2(x-3)$$
$$y+2=-2x+6$$
$$y=-2x+4$$

La ecuación de la recta es $\boldsymbol{y=-2x+4}$.

E_2

a) Determine la ecuación de la recta que pasa por (−2, −3) y es paralela a la recta cuya ecuación es $4x+y-5=0$.

b) Determine la ecuación de la recta que pasa por (−3, 4) y es paralela a $6x+3y-3=0$.

84

Aprendizajes esperados

Determina y aplica la condición de paralelismo de dos rectas.

Secuencia:

Anteriormente se derivaron expresiones para la ecuación de una recta del plano, en las que la pendiente ha jugado un papel primordial. Esta también será de utilidad para determinar si dos rectas del plano son paralelas o perpendiculares.

Puntos esenciales:

Recordar el concepto de rectas paralelas en el plano: dos rectas son paralelas si no tienen puntos en común. Esto indica que hay una separación constante entre dos rectas paralelas.

Inducir a que para determinar si dos rectas son paralelas, basta conocer sus pendientes.

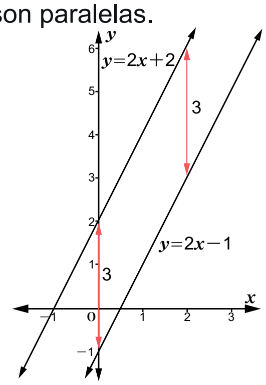
En aquellos casos en los que una de las rectas esté dada en su ecuación general, esta debe escribirse en la forma $y=mx+b$.

En la situación en la que se conozca un punto de una recta y el hecho que esta sea paralela a otra, conducirá al uso de la ecuación punto – pendiente de recta, para determinar su ecuación.

C7: Condición de paralelismo de dos rectas

(P) Verifique que las rectas $y=2x+2$ y $y=2x-1$ son paralelas.

(S)



En la gráfica se observa que hay una separación vertical de 3 unidades.

Ambas rectas tienen pendiente $m=2$.

(C) Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales.

(E1) Determine si las parejas de rectas dadas son paralelas.

a) $y=-3x+1$, $y=3x+6$ — Pendientes diferentes. No son paralelas

b) $y=10+3x$, $y=3x-1$ — Pendientes iguales $(m=3)$. Son paralelas

(Ej) Determine la ecuación de la recta que pasa por $(3,-2)$ y es paralela a $2x+y-2=0$

Pendiente igual a la de

$$2x+y-2=0$$
$$y=-2x+2$$

Así, $m=-2$ y la recta buscada pasa por $(3,-2)$:

$$y-(-2)=-2(x-3)$$
$$y+2=-2x+6$$
$$y=-2x+4$$

(E2) Determine la ecuación de la recta que pasa por $(-2,-3)$ y es paralela a $4x+y-5=0$.

Pendiente igual a la de

$$4x+y-5=0.$$
$$y=-4x+5.$$

La ecuación buscada es:

$$y-(-3)=-4(x-(-2))$$
$$y+3=-4x-8$$
$$y=-4x-11$$

Contenido 8 Condición de perpendicularidad de rectas

Aprendizajes esperados

Determina y aplica la condición de perpendicularidad de dos rectas.

Secuencia:

Así como se cuenta con un criterio para determinar si dos rectas del plano son paralelas, a partir de sus pendientes, también se pueden utilizar para saber si son perpendiculares.

Puntos esenciales:

Recordar que dos rectas del plano son perpendiculares si estas se interceptan en un punto, formando ángulos rectos.

Mostrar que el uso del transportador permitirá comprobar en este contenido que las rectas del problema planteado son perpendiculares.

Hacer ver que en aquellos casos en los que una de las rectas esté dada en su ecuación general, esta debe escribirse en la forma $y = mx + b$, para determinar su pendiente.

La expresión $m_1 m_2 = -1$ se debe usar como una ecuación en la que, generalmente, se conocerá una de las pendientes y se calculará el valor de la otra.

Contenido 8: Condición de perpendicularidad de rectas

P

Considere la recta que pasa por (0, 0) y $(-2, 1)$ y la recta $y = 2x$ y responda los siguientes incisos:

a) Determine la ecuación de la recta que pasa por (0, 0) y $(-2, 1)$.

b) Verifique con un transportador que las rectas dadas son perpendiculares.

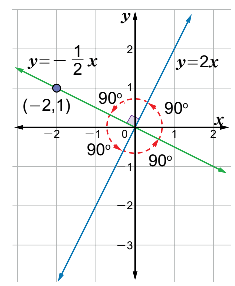
c) Establezca la relación existente entre las pendientes de dichas rectas.

S

a) La ecuación de la recta que pasa por (0, 0) y $(-2, 1)$ es

$$y - 0 = \frac{1-0}{-2-0}(x-0)$$

$$\mathbf{y = -\frac{1}{2}x}$$



b) La gráfica de la derecha muestra que los ángulos formados por las rectas $y = 2x$ y $y = -\frac{1}{2}x$ son de 90°, es decir, dichas rectas son perpendiculares.

c) Las pendientes de $y = 2x$ y $y = -\frac{1}{2}x$ son $m_1 = 2$ y $m_2 = -\frac{1}{2}$, respectivamente. De esta última igualdad se tiene

$$m_2 = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{m_1}$$

Es decir,

$$m_1 m_2 = -1.$$

C

Las rectas $y = m_1 x + n_1$, $y = m_2 x + n_2$ son perpendiculares si el producto de sus pendientes es -1.

Es decir, $m_1 m_2 = -1$

Ejemplo Calcule la pendiente de una recta perpendicular a la recta $y = -6x + 1$.

La pendiente de $y = -6x + 1$ es $m_1 = -6$. Si una recta con pendiente m_2 es perpendicular a la dada, $m_1 m_2 = -1$, esto es $(-6)\,m_2 = -1$. Luego,

$$m_2 = \frac{-1}{-6} = \mathbf{\frac{1}{6}}$$

E

Para cada recta calcule la pendiente de una recta perpendicular a esta:

a) $y = -4x$

b) $y = 5x + 1$

c) $y = \frac{1}{2}x + 1$

d) $6x + y - 1 = 0$

85

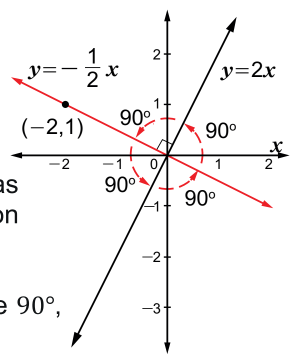
C8: Condición de perpendicularidad de rectas

(P) Una recta pasa por (0, 0) y $(-2, 1)$. Otra es $y = 2x$.

(S) a) Determine la ecuación de la recta que pasa por $(0, 0)$ y $(-2, 1)$:

$$y - 0 = \frac{1-0}{-2-0}(x-0)$$

$$y = -\frac{1}{2}x$$



b) Verifique que las rectas dadas son perpendiculares.

Rectas forman ángulos de 90°, es decir, las rectas son perpendiculares.

c) Establezca la relación existente entre las pendientes de dichas rectas.

Pendientes $m_1 = 2$ y $m_2 = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{m_1}$.

$$m_1 m_2 = -1$$

(C) Dos rectas $y = m_1 x + n_1$, $y = m_2 x + n_2$ son perpendiculares si el producto de sus pendientes es -1, es decir, $m_1 m_2 = -1$.

(Ej) Calcule la pendiente de una recta perpendicular a $y = -6x + 1$.

Pendiente de $y = -6x + 1$: $m_1 = -6$.

$$m_1 m_2 = (-6)m_2 = -1 \longrightarrow m_2 = \frac{-1}{-6} = \frac{1}{6}$$

(E) Para cada recta calcule la pendiente de una recta perpendicular a esta:

a) $y = -4x$

$$m_1 m_2 = (-4)m_2 = -1 \longrightarrow m_2 = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

b) $y = 5x + 1$

$$m_1 m_2 = 5m_2 = -1 \longrightarrow m_2 = \frac{-1}{5} = -\frac{1}{5}$$

c) $y = \frac{1}{2}x + 1$

$$m_1 m_2 = \frac{1}{2}m_2 = -1 \longrightarrow m_2 = (-1)(2) = -2$$

Contenido 9 Distancia del origen a una recta del plano

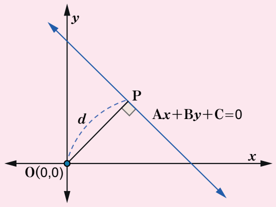
Contenido 9: Distancia del origen a una recta del plano

Distancia del punto $O(0, 0)$ a una recta

La distancia del punto $O(0, 0)$ a la recta $Ax+By+C=0$ es la longitud del segmento OP siendo P un punto de la recta de modo que $\overline{OP}$ es perpendicular a $Ax+By+C=0$.

La distancia de (0, 0) a la recta $Ax+By+C=0$ es

$$d=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$



Ejemplo

Calcule la distancia del origen $O(0, 0)$ a cada recta dada:

a) $3x+4y+15=0$ b) $2x-y-2=0$

a) En $3x+4y+15=0$, $A=3$, $B=4$, $C=15$, de modo que

$$d=\frac{|15|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{15}{\sqrt{9+16}}$$

$$=\frac{15}{\sqrt{25}}=\frac{15}{5}=3.$$

Así, la distancia de $O(0, 0)$ a $3x+4y+15=0$ es **3**.

$$d=\frac{\overset{15}{|C|}}{\sqrt{\underset{3}{A^2}+\underset{4}{B^2}}}$$

b) En el caso de $2x-y-2=0$ se tiene $A=2$, $B=-1$, $C=-2$, de modo que

$$d=\frac{|-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{4+1}}=\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{5}}}$$

Se racionaliza el valor encontrado:

$$\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2(\sqrt{5})}{\sqrt{5}(\sqrt{5})}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

De manera que la distancia de $O(0, 0)$ a $2x-y-2=0$ es $\mathbf{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$.

E

Calcule la distancia del origen $O(0, 0)$ a cada recta dada:

a) $4x+3y+5=0$ b) $x+2y+2=0$

c) $6x+8y-5=0$ d) $x+3y-7=0$

e) $5x+12y-13=0$ f) $2x+y=0$

86

Aprendizajes esperados

Aplica la expresión de la distancia del origen a una recta en el plano cartesiano.

Secuencia:

En clases anteriores se estudió la distancia entre dos puntos. Esta vez se estudiará distancia entre dos entes geométricos más diferentes: un punto (O (0, 0) en este caso) y una recta.

En el libro de texto se plantea como desafío la prueba de la expresión

$$d=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Puntos esenciales:

Explicar que para el uso de la fórmula

$$d=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

la recta debe presentarse en su ecuación general. De no estarlo, debe transformarse a esta forma.

Insistir en el significado del concepto de distancia entre un punto y una recta: la condición de perpendicular, principalmente.

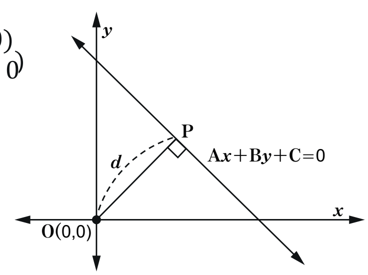
Procurar que en aquellos cocientes en los que el denominador no sea una raíz cuadrada exacta, se proceda a racionalizar.

Insistir en la identificación y sustitución correcta de los coeficientes A, B y C, para el cálculo preciso de la distancia.

C9: Distancia del origen a una recta del plano

Distancia del punto $O(0,0)$ a la recta: $Ax+By+C=0$

$$d=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$



(P) Calcule la distancia de $(0,0)$ a cada recta:

a) $3x+4y+15=0$

b) $2x-y-2=0$

(S) a) $A=3,\ B=4,\ C=15$

$$d=\frac{|15|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{15}{\sqrt{9+16}}=\frac{15}{\sqrt{25}}=\frac{15}{5}=3$$

b) $A=2,\ B=-1,\ C=-2$

$$d=\frac{|-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{4+1}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2(\sqrt{5})}{\sqrt{5}(\sqrt{5})}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(E) Determine la distancia de $(0,0)$ a:

a) $4x+3y+5=0$

$A=4,\ B=3,\ C=5$

$$d=\frac{|5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{5}{\sqrt{16+9}}=\frac{5}{\sqrt{25}}=\frac{5}{5}=1$$

b) $x+2y+2=0$

$A=1,\ B=2,\ C=2$

$$d=\frac{|2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{1+4}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2(\sqrt{5})}{\sqrt{5}(\sqrt{5})}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

c) $6x+8y-5=0$

$A=6,\ B=8,\ C=-5$

$$d=\frac{|-5|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{5}{\sqrt{36+64}}=\frac{5}{\sqrt{100}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}.$$

d) $x+3y-7=0$

$A=1,\ B=3,\ C=-7$

$$d=\frac{|-7|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{7}{\sqrt{1+9}}=\frac{7}{\sqrt{10}}=\frac{7(\sqrt{10})}{\sqrt{10}(\sqrt{10})}=\frac{7\sqrt{10}}{10}$$

Contenido 1 Ecuación de la circunferencia con centro en el origen

Aprendizajes esperados

Deduce y aplica la ecuación de la circunferencia en la forma canónica.

Secuencia:

En noveno grado se estudiaron elementos de una circunferencia. En esta ocasión se analizan las ecuaciones asociadas a una circunferencia. También la obtención de puntos de intersección de una circunferencia con rectas secantes o tangentes a estas.

En este contenido se aborda la forma canónica de una circunferencia, luego se estudiará la forma ordinaria.

Puntos esenciales:

Explicar que el concepto de circunferencia requiere de la distancia entre dos puntos. Esto justifica la deducción de la forma canónica.

Hacer notar que la raíz cuadrada de un número debe tenerse en cuenta en los casos en que se brinde la forma canónica de una circunferencia y se pida determinar la longitud del radio de la misma, puesto que la raíz cuadrada positiva del lado derecho de la ecuación será precisamente dicha longitud.

Se sugiere uso de compás para el trazado de circunferencias.

Sección 3: La circunferencia

Contenido 1: Ecuación de la circunferencia con centro en el origen

Definición

Circunferencia

Una circunferencia con centro C y radio r es el conjunto de todos los puntos P del plano que equidistan de C, es decir $CP = r$.

P Determine la ecuación de la circunferencia con centro el origen y radio 3. Grafíquela.

S

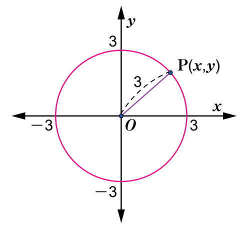
La distancia del centro $O(0, 0)$ a un punto arbitrario $P(x, y)$ de la circunferencia es $OP = 3$. Por la fórmula de la distancia entre dos puntos se tiene

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = 3,$$

es decir,

$$x^2+y^2 = 9$$

Luego, la ecuación de la circunferencia es $x^2+y^2=9$, y su gráfica se encuentra a la derecha.



C

La ecuación de la circunferencia con centro en $O(0, 0)$ y radio r es

$$x^2+y^2 = r^2.$$

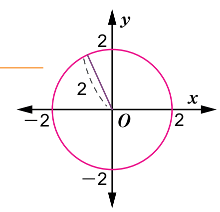
En este caso se dice que está en la **forma canónica**.

Ejemplo Encuentre el centro y el radio de la circunferencia $x^2+y^2=4$ y grafíquela.

La ecuación $x^2+y^2=4$ se reescribe en la forma canónica

$$x^2+y^2=2^2, \quad \boxed{4=2^2}$$

de modo que esta circunferencia tiene **centro en (0,0)** y radio $r=2$.



E

1. Determine en cada caso la ecuación de la circunferencia con centro en (0, 0) y radio dado.

a) $r=1$ b) $r=4$ c) $r=\sqrt{3}$ d) $r=7$ e) $r=5$

2. Encuentre el centro y radio de cada circunferencia:

a) $x^2+y^2=25$ b) $x^2+y^2=36$ c) $x^2+y^2=5$

89

S3: La circunferencia

C1: Ecuación de la circunferencia con centro en el origen

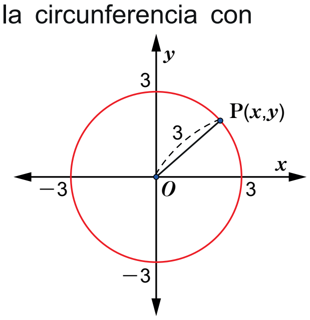
(D) **Circunferencia:** Una circunferencia con centro C y radio r es el conjunto de todos los puntos P del plano que equidistan de C, es decir, $CP = r$.

(P) Determine la ecuación de la circunferencia con centro el origen y radio 3.

(S) La distancia de $O(0,0)$ a un punto $P(x,y)$ de la circunferencia es $OP = 3$. Por distancia entre dos puntos:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = 3$$

$$x^2+y^2 = 9$$



(C) **Forma canónica de la ecuación de la circunferencia**

Centro $(0,0)$ y radio r: $x^2+y^2 = r^2$

(Ej) Determine centro y radio de la circunferencia $x^2+y^2=4$.

$$x^2+y^2 = 4 \Rightarrow x^2+y^2 = 2^2$$

Centro en $(0,0)$ y radio $r = 2$.

(E) 1. Determine la ecuación de la circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio dado:

a) $r = 1$

$x^2+y^2 = 1^2$

$x^2+y^2 = 1$

b) $r = 4$

$x^2+y^2 = 4^2$

$x^2+y^2 = 16$

2. Determine centro y radio de cada circunferencia.

a) $x^2+y^2 = 25$

$x^2+y^2 = 5^2$

$C(0,0) \quad r = 5$

b) $x^2+y^2 = 36$

$x^2+y^2 = 6^2$

$C(0,0) \quad r = 6$

c) $x^2+y^2 = 5$

$x^2+y^2 = (\sqrt{5})^2$

$C(0,0) \quad r = \sqrt{5}$

Contenido 2 Ecuación de la circunferencia con centro $C(h, k)$ y radio r

Contenido 2: Ecuación de la circunferencia con centro $C(h, k)$ y radio r

P Determine la ecuación de la circunferencia con centro $C(2, 1)$ y radio 2, y grafíquela.

S La distancia del centro $C(2, 1)$ a un punto arbitrario $P(x, y)$ de la circunferencia es $CP = 2$. Por la fórmula de la distancia entre dos puntos se tiene

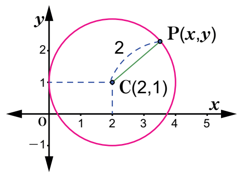
$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} = 2,$$

es decir,

$$(x-2)^2+(y-1)^2 = 4.$$

Luego, la ecuación de la circunferencia es

$$\mathbf{(x-2)^2+(y-1)^2 = 4}.$$



C La ecuación de la circunferencia con centro $C(h, k)$ y radio r es

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

Esta se denomina **forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia**.

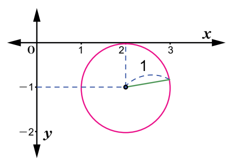
Ejemplo 1 Determine la ecuación de la circunferencia con centro $C(2, -1)$ y radio 1.

Las coordenadas del centro son $h = 2$, $k = -1$ y el radio es $r = 1$, de modo que la ecuación de la circunferencia es

$$(x-2)^2+[y-(-1)]^2 = 1^2,$$

es decir,

$$\mathbf{(x-2)^2+(y+1)^2 = 1}.$$



E1 Determine la ecuación de cada circunferencia sabiendo que:

a) Su centro es $C(3, 1)$ y radio $r = 2$.
b) Su centro es $C(2, 2)$ y radio $r = 3$.
c) Su centro es $C(-2, 1)$ y radio $r = 1$.
d) Su centro es $C(-1, -3)$ y radio $r = 5$.

Ejemplo 2 Encuentre el centro y el radio de la circunferencia $(x-1)^2+(y-2)^2 = 5$.

Se escribe $(x-1)^2+(y-2)^2 = 5$ en la forma ordinaria.

$(x-1)^2+(y-2)^2 = (\sqrt{5})^2$, $\boxed{5 = (\sqrt{5})^2}$

de modo que el centro es **C(1, 2)** y radio $\mathbf{r = \sqrt{5}}$.

E2 Encuentre el centro y el radio de cada circunferencia.

a) $(x-2)^2+(y-4)^2 = 9$
b) $(x-2)^2+(y+2)^2 = 1$
c) $(x-3)^2+(y+1)^2 = 10$
d) $x^2+(y-1)^2 = 25$

Aprendizajes esperados

Deduce y aplica la ecuación de la circunferencia en la forma ordinaria.

Secuencia:

En el contenido anterior se abordó la forma canónica de una circunferencia, caracterizada por el hecho que su centro es el origen $O(0, 0)$. Sin embargo, ¿qué forma toma la ecuación de una circunferencia cuyo centro no es el origen?

Aquí se aborda la forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia. Esta dará lugar, en contenidos posteriores, a la denominada ecuación general de la circunferencia.

Puntos esenciales:

Hacer notar que el centro y la longitud del radio son las condiciones que permiten la deducción de la ecuación de una circunferencia.

Explicar que en los casos en que se brinde la forma ordinaria de una circunferencia y se pida determinar la longitud del radio de la misma, la raíz cuadrada del lado derecho de la ecuación será precisamente la longitud del radio. Los valores de h y k serán aquellos que se restan a x y y, respectivamente, en los términos cuadráticos.

C2: Ecuación de la circunferencia con centro $C(h, k)$ y radio r

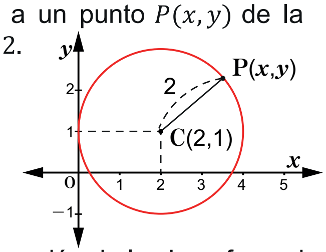
P Determine la ecuación de la circunferencia con centro $C(2, 1)$ y radio 2, y grafíquela.

S La distancia de $C(2, 1)$ a un punto $P(x, y)$ de la circunferencia es $CP = 2$.

Por distancia entre dos puntos:

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} = 2$$

$$(x-2)^2+(y-1)^2 = 4.$$



C Forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia

Centro (h, k), radio r: $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

Ej Determine la ecuación de la circunferencia con centro $C(2, -1)$ y radio 1.

Sustituir $h = 2$, $k = -1$, $r = 1$ en $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$.

$$(x-2)^2+[y-(-1)]^2 = 1^2$$

$$(x-2)^2+(y+1)^2 = 1$$

E1 Determine la ecuación de cada cicunferencia:

a) Su centro es $C(3, 1)$ y radio $r = 2$.

$$(x-3)^2+(y-1)^2 = 2^2$$
$$(x-3)^2+(y-1)^2 = 4$$

b) Su centro es $C(2, 2)$ y radio $r = 3$.

$$(x-2)^2+(y-2)^2 = 3^2$$
$$(x-2)^2+(y-2)^2 = 9$$

Ej Encuentre el centro y radio de la circunferencia $(x-1)^2+(y-2)^2 = 5$.

$$(x-1)^2+(y-2)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$$

$C(1, 2)$ y $r = \sqrt{5}$

E2 a) $(x-2)^2+(y-4)^2 = 9$
$(x-2)^2+(y-4)^2 = 3^2$
$C(2, 4)$ y $r = 3$

b) $(x-2)^2+(y+2)^2 = 1$
$(x-2)^2+(y+2)^2 = 1^2$
$C(2, -2)$ y $r = 1$

Contenido 3 Forma general de la ecuación de una circunferencia

Aprendizajes esperados

Deduce la forma general de la ecuación de la circunferencia y su obtención a partir de la forma ordinaria.

Secuencia:

La forma ordinaria de la ecuación de una circunferencia da paso a la obtención de la ecuación general de esta, para la cual se hace uso de los productos notables: cuadrado de la suma y de la diferencia de dos cantidades, estudiados en noveno grado.

Puntos esenciales:

Recordar el desarrollo de los productos notables $(a+b)^2$ y $(a-b)^2$, puesto que los sumandos del lado izquierdo de la forma ordinaria de la ecuación de una circunferencia serán de esta forma.

Recordar la transposición de términos en ecuaciones.

Insistir en que la ejercitación permitirá la familiarización por el estudiante en el paso de la forma ordinaria de la ecuación de una circunferencia a la forma general.

Insistir en que los términos del lado izquierdo de la forma general sean ordenados; términos de segundo grado, términos de primer grado y constantes.

Contenido 3: Forma general de la ecuación de una circunferencia

P Dada la circunferencia con ecuación $(x-1)^2+(y+2)^2=6$, efectúe en cada inciso para determinar la forma general de su ecuación.

a) Desarrolle los cuadrados de los binomios del lado izquierdo.

b) Efectúe la transposición de 6 al lado izquierdo.

c) Reúna primero los términos de segundo grado, después los de primer grado y por último las constantes y reduzca las constantes presentes.

S

a) Dado que $(x-1)^2=x^2-2x+1$ y $(y+2)^2=y^2+4y+4$, la ecuación $(x-1)^2+(y+2)^2=6$ se escribe como

$$x^2-2x+1+y^2+4y+4=6$$

b) Se transpone 6 al lado izquierdo

$$x^2-2x+1+y^2+4y+4-6=0$$

c) Se reúnen los términos de segundo grado, de primer grado y las constantes:

$$x^2+y^2-2x+4y+1+4-6=0$$
$$x^2+y^2-2x+4y-1=0.$$

Cuadrado de la suma y de la diferencia de dos términos:

$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$$
$$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$$

C

La ecuación $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ de una circunferencia puede escribirse como

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0,$$

siendo D, E, F, constantes determinadas. A esta ecuación se le denomina **forma general de la ecuación de la circunferencia**.

E

Determine la forma general de la ecuación de cada circunferencia.

a) $(x-1)^2+(y+3)^2=4$

b) $(x+2)^2+(y-4)^2=9$

c) $(x-2)^2+(y-2)^2=3$

d) $(x-4)^2+(y-5)^2=36$

91

C3: Forma general de la ecuación de una circunferencia

P Determine la forma general de la circunferencia $(x-1)^2+(y+2)^2=6$.

S Recordar:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

Así,

$(x-1)^2=x^2-2x+1$ y $(y+2)^2=y^2+4y+4$

Luego,

$$(x-1)^2+(y+2)^2=6$$
$$x^2-2x+1+y^2+4y+4=6$$
$$x^2+y^2-2x+4y+1+4-6=0$$
$$x^2+y^2-2x+4y-1=0$$

C Forma general de la ecuación de la circunferencia:

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ se puede escribir como

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

E Determine la forma general de la ecuación de cada circunferencia.

a) $(x-1)^2+(y+3)^2=4$

$$x^2-2x+1+y^2+6y+9=4$$
$$x^2+y^2-2x+6y+1+9-4=0$$
$$x^2+y^2-2x+6y+6=0$$

b) $(x+2)^2+(y-4)^2=9$

$$x^2+4x+4+y^2-8y+16=9$$
$$x^2+y^2+4x-8y+4+16-9=0$$
$$x^2+y^2+4x-8y+11=0$$

c) $(x-2)^2+(y-2)^2=3$

$$x^2-4x+4+y^2-4y+4=3$$
$$x^2+y^2-4x-4y+4+4-3=0$$
$$x^2+y^2-4x-4y+5=0$$

d) $(x-4)^2+(y-5)^2=36$

$$x^2-8x+16+y^2-10y+25=36$$
$$x^2+y^2-8x-10y+16+25-36=0$$
$$x^2+y^2-8x-10y+5=0$$

Contenido 4 Transformación de la forma general a la forma ordinaria de la ecuación de una circunferencia

Contenido 4: Transformación de la forma general a la forma ordinaria de la ecuación de una circunferencia

P

Dada la circunferencia $x^2+y^2-4x+2y-4=0$, responda a los siguientes incisos:

a) Determine su forma ordinaria.

b) A partir de lo obtenido en a), identifique las coordenadas del centro y la longitud del radio.

S

a) Para encontrar la forma ordinaria de la circunferencia se siguen los siguientes pasos:

1. Se agrupan los términos en la misma variable y se transpone la constante dada al lado derecho: $(x^2-4x)+(y^2+2y)=4$
2. Se completan los cuadrados en los términos agrupados, sumando en ambos lados el cuadrado de la mitad de los coeficientes de los términos de primer grado:

$$(x^2-4x) \quad + \quad (y^2+2y) \quad = \quad 4$$

$$(x^2-4x+2^2) \quad + \quad (y^2+2y+1^2) \quad = \quad 4+2^2+1^2$$

Trinomio cuadrado perfecto
$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$
$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$

3. Se factorizan los trinomios que están en paréntesis y se realizan las sumas indicadas del lado derecho: $(x-2)^2+(y+1)^2=9$

b) De la ecuación del paso anterior se observa que el centro de la circunferencia es $C(2, -1)$ y $r=3$.

C

Para obtener la forma ordinaria de la ecuación de una circunferencia a partir de su forma general $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ se siguen los siguientes pasos:

1. Se agrupan los términos en la misma variable y se transpone la constante dada al lado derecho.
2. Se completan los cuadrados en los términos agrupados, sumando en ambos lados el cuadrado de la mitad del coeficiente de los términos de primer grado.
3. Se factorizan los trinomios cuadrados perfectos del lado izquierdo y se efectúan las sumas indicadas del lado derecho.

La ecuación del paso 3. es la ecuación ordinaria de la circunferencia en la que se identifican el radio y las coordenadas del centro.

E

1. Determine la forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia dada por $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ completando los recuadros en cada uno de los pasos siguientes:
   a) $(x^2-4x)+(y^2+6y)=\boxed{}$
   b) $(x^2-4x+\boxed{})+(y^2+6y+\boxed{})=12+\boxed{}+\boxed{}$
   c) $(x-\boxed{})^2+(y+\boxed{})^2=\boxed{}$
   d) El centro tiene coordenadas $(\boxed{}, \boxed{})$ y el radio es $\boxed{}$.
2. Determine la forma ordinaria para cada circunferencia:
   a) $x^2+y^2+2x-8y+13=0$ b) $x^2+y^2+4x-2y-5=0$

Aprendizajes esperados

Obtiene la forma ordinaria de la ecuación de una circunferencia a partir de su forma general mediante completación de cuadrados.

Secuencia:

Anteriormente se obtuvo la forma general de la ecuación de una circunferencia, a partir de su forma ordinaria. En esta sesión se procede de forma inversa: conociendo la forma general, se determina la forma canónica, y por ende, el centro y radio de la circunferencia.

Puntos esenciales:

Enfatizar en la aplicación de completación de cuadrados para obtener trinomios cuadrados perfectos. Es por ello que se recomienda discutir en torno a la metodología que se sigue en el problema central de este contenido y la conclusión derivada.

Recordar que la completación de cuadrados se efectúa en una ecuación, de manera que si se agrega un término en un lado de esta, este debe agregarse en el otro lado, y así no alterar la ecuación.

Insistir en que la ejercitación permitirá la familiarización en el paso de la forma general de la ecuación de una circunferencia a la forma ordinaria.

C4: Transformación de la forma general a la forma ordinaria de la ecuación de una circunferencia

P Dada la circunferencia $x^2+y^2-4x+2y-4=0$.
a) Determine su forma ordinaria.
b) Identifique centro y longitud de radio de esta.

S a) Recordar que:
$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2, \quad a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

Se agrupan los términos con la misma variable:
$$(x^2-4x)+(y^2+2y)=4$$

Se completan cuadrados:
$$(x^2-4x) \quad + \quad (y^2+2y) \quad = \quad 4$$
$$(x^2-4x+2^2) \quad + \quad (y^2+2y+1^2) \quad = \quad 4+2^2+1^2$$

Se factorizan los trinomios de los paréntesis:
$$(x-2)^2+(y+1)^2=9$$

b) La circunferencia tiene: $C(2,-1)$ y $r=3$.

C *Leer en el libro de texto.*

E 1. Determine la forma ordinaria de la circunferencia $x^2+y^2-4x+6y-12=0$, completando:

$$(x^2-4x)+(y^2+6y)=\boxed{12}$$
$$(x^2-4x+\boxed{4})+(y^2+6y+\boxed{9})=12+\boxed{4}+\boxed{9}$$
$$(x-\boxed{2})^2+(y+\boxed{3})^2=\boxed{25}$$

El centro $(\boxed{2}, \boxed{-3})$ y el radio es $\boxed{r=5}$

2. Determine la forma ordinaria de:
$x^2+y^2+2x-8y+13=0$
$(x^2+2x)+(y^2-8y)=-13$
$(x^2+2x+4)+(y^2-8y+16)=-13+4+16$
$(x+2)^2+(y-4)^2=7$
El centro $C(-2,4)$ y $r=\sqrt{7}$.

Contenido 5 Intersecciones de una circunferencia y una recta secante a esta

Aprendizajes esperados

Determina las intersecciones de una circunferencia y una recta secante a esta.

Secuencia:

En este contenido se abordan circunferencias en la forma canónica, y rectas dadas por $y = mx + b$. Estas rectas serán secantes a la circunferencia si su intersección son dos puntos distintos.

Posteriormente se abordará el caso de rectas tangentes a una circunferencia.

Puntos esenciales:

Hacer notar que el hecho que la ecuación de la recta sea $y = mx + b$ permite la obtención de una ecuación de segundo grado.

Recordar que una ecuación de segundo grado tiene a lo más dos soluciones reales distintas. Si se tienen exactamente dos soluciones distintas, se obtendrán dos puntos de intersección de la recta y la circunferencia, concluyendo que esta recta es secante a la curva en cuestión.

Inducir a la comprensión clara del procedimiento requerido para determinar los puntos en común.

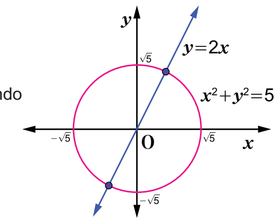
Representar gráficamente la recta y circunferencia en cada ejercicio para confirmación de cálculos.

Contenido 5: Intersecciones de una circunferencia y una recta secante a esta

P Encuentre las intersecciones de la circunferencia $x^2+y^2=5$ y la recta $y=2x$.

S

1. Las ecuaciones dadas forman el sistema
$$\begin{cases} x^2+y^2=5 & ① \\ y=2x & ② \end{cases}$$
2. Al sustituir ② en ① se obtiene una ecuación de segundo grado la cual se resuelve a continuación:
$$x^2+(2x)^2=5$$
$$x^2+4x^2=5$$
$$5x^2=5$$
$$x^2=1$$
$$x=-1,\ x=1$$
Obteniéndose 2 soluciones distintas.
3. Se sustituyen los valores de x en ②:
Si $x=1$, entonces $y=(2)(1)=2$.
Si $x=-1$, entonces $y=(2)(-1)=-2$.
4. Con los valores encontrados para x y y se forman los puntos **(1, 2)** y **(−1, −2)**, los cuales son las intersecciones de la circunferencia y la recta dada.



Recta secante a una circunferencia es aquella que la interseca en dos puntos.

C

Para determinar las intersecciones de una circunferencia y una recta secante a esta se siguen los siguientes pasos:
1. Se agrupan las ecuaciones de la circunferencia y la recta formando un sistema de ecuaciones.
2. Se sustituye la expresión para la recta en la ecuación de la circunferencia, dando lugar a una ecuación de segundo grado, la cual se resuelve. (El hecho de que esta ecuación tenga dos soluciones reales distintas indica que efectivamente la recta es secante a la circunferencia).
3. Se sustituyen las soluciones de la ecuación de segundo grado del paso anterior en la ecuación de la recta para obtener los valores de y.
4. Con los valores encontrados para x y y se forman las intersecciones (x, y) de la circunferencia y la recta secante dada.

E

Encuentre las intersecciones de cada circunferencia con la recta secante dada.

a) $x^2+y^2=8,\quad y=x$

b) $x^2+y^2=20,\quad y=2x$

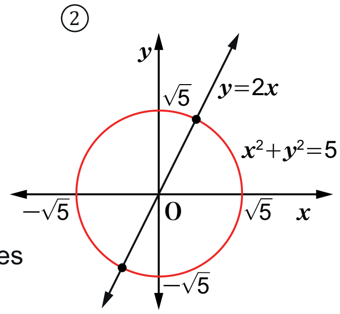
c) $x^2+y^2=30,\quad y=3x$

93

C5: Interceptos de una circunferencia y una recta secante a esta

P Encuentre las intersecciones de la circunferencia $x^2+y^2=5$ y la recta $y=2x$.

S Se forma el sistema
$$\begin{cases} x^2+y^2=5 & ① \\ y=2x & ② \end{cases}$$
Se sustituye ② en ①:
$$x^2+(2x)^2=5$$
$$x^2+4x^2=5$$
$$5x^2=5$$
$$x^2=1$$
$$x=-1,\ x=1$$



Se sustituyen los valores encontrados en ②:

Si $x=1,\quad y=2(1)=2$

Si $x=-1,\quad y=2(-1)=-2$

Los interceptos son $(1,2)$ y $(-1,-2)$.

C *Leer en el libro de texto.*

E Encuentre las intersecciones de cada circunferencia con la recta secante dada.

a) $x^2+y^2=8,\quad y=x$
Se forma el sistema
$$\begin{cases} x^2+y^2=8 & ① \\ y=x & ② \end{cases}$$
Se sustituye ② en ①
$$x^2+x^2=8$$
$$2x^2=8$$
$$x^2=4$$
$$x=-2,\quad x=2$$
Si $x=-2,\ y=-2$. Y si $x=2,\ y=2$.
Los puntos son $(-2,-2)$ y $(2,2)$.

b) $x^2+y^2=20,\quad y=2x$
$$\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ y=2x \end{cases}$$
$$x^2+(2x)^2=20$$
$$5x^2=20$$
$$x^2=4$$
$$x=-2,\ x=2$$
Si $x=-2,\ y=-4$. Y si $x=2,\ y=4$.
Los puntos son $(-2,-4)$ y $(2,4)$.

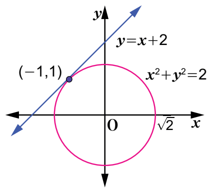
Contenido 6 Intersección de una circunferencia y una recta tangente a esta

Contenido 6: Intersección de una circunferencia y una recta tangente a esta

P Determine la intersección de la circunferencia $x^2+y^2=2$ y la recta $y=x+2$.

S

1. Con las ecuaciones dadas se forma el sistema
$$\begin{cases} x^2+y^2=2 & ① \\ y=x+2 & ② \end{cases}$$



2. Al sustituir ② en ① se obtiene una ecuación de segundo grado la cual se debe resolver:

$x^2+(x+2)^2=2$	
$x^2+x^2+4x+4=2$	Se desarrolla el cuadrado del binomio
$2x^2+4x+2=0$	Se reducen términos
$x^2+2x+1=0$	Se divide por 2 ambos lados
$(x+1)^2=0$	Se factoriza el trinomio
$x+1=0$	Se extrae raíz cuadrada
$x=-1$	Una única solución

Recta tangente a una circunferencia es aquella que la interseca en un único punto.

3. Se sustituye en ② el valor encontrado anteriormente. Como $x=-1$, entonces $y=-1+2=1$.
4. Con los valores anteriores se forma el punto **(−1, 1)**, el cual es la intersección de la circunferencia y la recta dada.

C

Para determinar la intersección de una circunferencia y una recta tangente a esta se siguen los siguientes pasos:

1. Se agrupan las ecuaciones de la circunferencia y la recta formando un sistema de ecuaciones.
2. Se sustituye la expresión para la recta en la ecuación de la circunferencia, dando lugar a una ecuación de segundo grado, la cual se resuelve. (El hecho de que esta ecuación tenga una única solución indica que efectivamente la recta es tangente a la circunferencia).
3. Se sustituye la solución de la ecuación de segundo grado del paso anterior en la ecuación de la recta para obtener el valor de y.
4. Con los valores encontrados para x y y se forma el punto intersección (x, y) de la circunferencia y la recta tangente dada.

E

Encuentre las intersecciones de cada circunferencia con la recta tangente dada:

a) $x^2+y^2=5,\quad y=2x+5$

b) $x^2+y^2=2\quad y=-x+2$

Aprendizajes esperados

Determina la intersección de una circunferencia y una recta tangente a esta.

Secuencia:

En este contenido se abordan circunferencias en la forma canónica, y rectas $y=mx+b$, las cuales serán tangentes a la circunferencia si tienen un único punto en común.

Puntos esenciales:

Hacer notar que el hecho que ecuación de la recta sea en la forma $y=mx+b$ permite la obtención de una ecuación de segundo grado.

Explicar que si para la ecuación de segundo grado obtenida se tiene exactamente una solución real, se obtendrá un único punto en común entre la recta y la circunferencia, concluyendo que la recta es tangente.

Explicar que el punto de intersección de una circunferencia y una recta tangente a esta se denomina punto de tangencia.

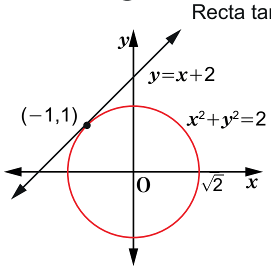
C6: Intersección de una circunferencia y una recta tangente a esta

P Determine la intersección de la circunferencia $x^2+y^2=2$ y la recta $y=x+2$.

S Se forma el sistema
$$\begin{cases} x^2+y^2=2 & ① \\ y=x+2 & ② \end{cases}$$
Se sustituye ② en ①:

$$x^2+(x+2)^2=2$$
$$x^2+x^2+4x+4=2$$
$$2x^2+4x+2=0$$
$$x^2+2x+1=0$$
$$(x+1)^2=0$$
$$x+1=0$$
$$x=-1$$

Recta tangente



Se sustituye $x=-1$ en ② : $y=-1+2=1$

El punto de intersección es $(-1,1)$.

C *Leer en el libro de texto.*

E Encuentre las intersecciones de cada circunferencia con la recta tangente dada.

a) $x^2+y^2=5,\quad y=2x+5$
$$\begin{cases} x^2+y^2=5 & ① \\ y=2x+5 & ② \end{cases}$$
Se sustituye ② en ①
$$x^2+(2x+5)^2=5$$
$$x^2+4x^2+20x+25=5$$
$$5x^2+20x+20=0$$
$$x^2+4x+4=0$$
$$(x+2)^2=0,\quad x+2=0,\quad x=-2$$
Se sustituye $x=-2$ en ②: $y=2(-2)+5=1$.
El intercepto es $(-2,1)$.

b) $x^2+y^2=2,\quad y=-x+2$
$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ y=-x+2 \end{cases}$$
$$x^2+(-x+2)^2=2 \qquad x^2-2x+1=0$$
$$x^2+x^2-4x+4=2 \qquad (x-1)^2=0$$
$$2x^2-4x+2=0 \qquad x=1$$
Se sustituye $x=1$ en $y=-x+2,\ y=-1+2=1$.
El intercepto es $(1,1)$.

Prueba de Matemática 11mo (30 min.)   Fecha: ____________

Unidad 4: Geometría Analítica

/ 20

Nombre: _____________________________ Sección: __________
Sexo: M / F

1. Determine la distancia entre los puntos $\mathrm{A}(6, 2)$ y $\mathrm{B}(2, -1)$ del plano cartesiano.
(2 puntos)

2. Encuentre las coordenadas del punto medio del segmento con extremos $\mathrm{A}(-2, 4)$ y $\mathrm{B}(2, -2)$.
(2 puntos)

3. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por: (2 puntos × 4 $=$ 8)

a) El punto (0, 3) y tiene pendiente $m=2$.

b) El punto (2, 3) y tiene pendiente $m=-3$.

c) Los puntos (2, 1) y (3, -1).

d) Los puntos (2, 1) y (5, 1).

4. Determine la ecuación de una circunferencia: (2 puntos × 2 = 4)
   a) Con centro $C(0, 0)$ y radio $r = 3$.

   b) Con centro (2, 3) y radio $r = 5$.

5. Dada la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$. (2 puntos × 2 = 4)
   a) Determine la forma ordinaria.

   b) Identifique las coordenadas del centro y la longitud del radio.

   Centro:

   Longitud del radio:

Nombre: ________________________________