Unidad 5

Cónicas

Sección 1 La parábola

Sección 2 La elipse

Sección 3 La hipérbola

Contenido 1 Parábola con foco en el eje x

Aprendizajes esperados

Determina elementos de parábolas cuyo foco está sobre el eje x.

Secuencia:

En esta unidad se estudiarán curvas de especial importancia en Geometría Analítica, denominadas cónicas, las cuales son: parábola, elipse e hipérbola.

El estudio de la parábola no es completamente nuevo, puesto que esta curva corresponde a la gráfica de una función de segundo grado, siempre que esta abra hacia arriba o hacia abajo.

Puntos esenciales:

Tener en cuenta para la deducción de la ecuación $y^2=4px$:

1. Aplicación de la distancia entre dos puntos.
2. Desarrollo de productos notables: $(a+b)^2$ y $(a-b)^2$.
3. Reducción de términos, ley cancelativa y transposición de términos.

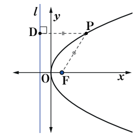
Explicar el significado de $|p|$: distancia del vértice al foco de la parábola.

Recordar que ecuaciones de la forma $x=p$ representan rectas verticales.

Sección 1: La parábola

Contenido 1: Parábola con foco en el eje x

Definición



Parábola es el conjunto de puntos P en un plano que equidistan de un punto fijo F (foco) y una recta fija l (directriz). En la figura de la izquierda, los puntos P de la parábola deben cumplir que $PF=PD$, donde D es el pie de la perpendicular a l trazada desde P.

Ecuación de la parábola con foco en el eje x

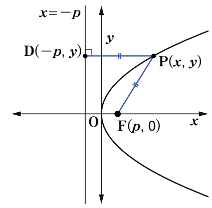
Se deduce la ecuación de la parábola con foco $F(p, 0)$ y directriz en $x=-p$ ($p>0$) de la siguiente manera:

Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la parábola, entonces $PD=PF$, cuya expresión en coordenadas es

$$\left[\sqrt{(x-(-p))^2+(y-y)^2}\right]^2=\left[\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2}\right]^2$$

Reduciendo y elevando al cuadrado

$$(x+p)^2=(x-p)^2+y^2$$
$$x^2+2px+p^2=x^2-2px+p^2+y^2$$
$$y^2=4px$$



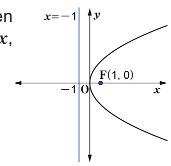
Elementos de la parábola $y^2=4px$, con $p\neq 0$

1. Tiene foco $F(p, 0)$ y directriz $x=-p$.
2. El eje de simetría es eje x.
3. El vértice es (0, 0).
4. Si $p>0$, la parábola se abre hacia la derecha y si $p<0$, la parábola se abre hacia la izquierda.

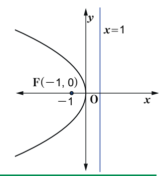
Ejemplo Determine en cada inciso la ecuación de la parábola con los siguientes elementos:

a) Vértice en el origen, foco $F(1, 0)$ y directriz $x=-1$.
b) Vértice en el origen, foco $F(-1, 0)$ y directriz $x=1$.

a) Se sustituye $p=1$ en la ecuación $y^2=4px$, resultando $y^2=(4)(1)x$, entonces $y^2=4x$



b) Se sustituye $p=-1$ en la ecuación $y^2=4px$, resultando $y^2=(4)(-1)x$, entonces $y^2=-4x$



E

Determine en cada inciso la ecuación de la parábola con los elementos dados:

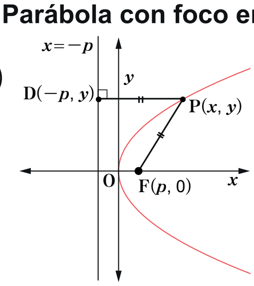
a) Foco $F(2, 0)$ y directriz en $x=-2$
b) Foco $F(3, 0)$ y directriz en $x=-3$
c) Foco $F(-3, 0)$ y directriz en $x=3$
c) Foco $F(-4, 0)$ y directriz en $x=4$

98

S1: La Parábola

C1: Parábola con foco en el eje x

D



Foco: punto fijo F
Directriz: recta fija l
Los puntos P de la parábola están a la misma distancia de F y de l.

Ecuación de la parábola con foco en x y vértice (0, 0)

Foco: $F(p, 0)$
Directriz: $x=-p$ $(p>0)$
Ecuación: $y^2=4px$

Ej Determine la ecuación de la parábola con:
a) Foco en $F(1,0)$ y directriz $x=-1$

Se sustituye $p=1$ en $y^2=4px$
$$y^2=(4)(1)x$$
$$y^2=4x$$

b) Foco en $F(-1,0)$ y directriz $x=1$

Se sustituye $p=-1$ en $y^2=4px$
$$y^2=(4)(-1)x$$
$$y^2=-4x$$

E Determine la ecuación de la parábola con:
a) Foco en $F(2,0)$ y directriz $x=-2$.

Se sustituye $p=2$ en $y^2=4px$
$$y^2=(4)(2)x$$
$$y^2=8x$$

b) Foco en $F(3,0)$ y directriz $x=-3$

Se sustituye $p=3$ en $y^2=4px$
$$y^2=(4)(3)x$$
$$y^2=12x$$

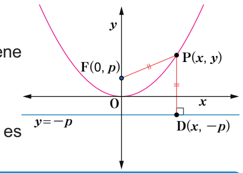
Contenido 2 Parábola con foco en el eje y

Contenido 2: Parábola con foco en el eje y

La parábola que tiene foco $F(0,p)$ y directriz $y=-p$, $p\neq 0$, tiene como ecuación:

$$x^2=4py.$$

De acuerdo con la figura, el eje de simetría de esta parábola es el eje y.



P

Encuentre las ecuaciones de las parábolas con los siguientes elementos:

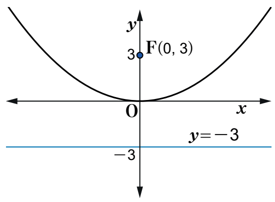
a) Vértice en el origen, foco $F(0, 3)$ y directriz $y=-3$.

b) Vértice en el origen, foco $F(0, -3)$ y directriz $y=3$.

S

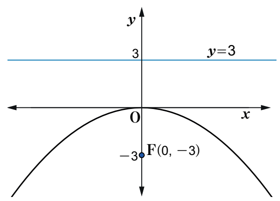
a) Como el foco $F(0, 3)$ está sobre el eje y y la directriz es $y=-3$, entonces la parábola correspondiente tiene la ecuación $x^2=4py$, con $p=3$, es decir:

$$x^2=(4)(3)y$$
$$x^2=12y$$



b) Como el foco $F(0, -3)$ está sobre el eje y y la directriz es $y=3$, entonces la parábola correspondiente tiene la ecuación $x^2=4py$, con $p=-3$, es decir:

$$x^2=(4)(-3)y$$
$$x^2=-12y$$



C

Elementos de la parábola $x^2=4py$, con $p\neq 0$:

1. Tiene foco $F(0,p)$ y directriz $y=-p$.
2. El eje de simetría es eje y.
3. El vértice es $(0,0)$.
4. Si $p>0$, la parábola se abre hacia arriba, y si $p<0$, la parábola se abre hacia abajo.

E

Determine en cada inciso la ecuación de la parábola con los elementos dados:

a) Foco $F(0, 2)$ y directriz $y=-2$

b) Foco $F(0, -2)$ y directriz $y=2$

c) Foco $F(0, 4)$ y directriz $y=-4$

d) Foco $F(0, -4)$ y directriz $y=4$

99

Aprendizajes esperados

Determina elementos de parábolas cuyo foco está sobre el eje y.

Secuencia:

En el contenido anterior se estudiaron parábolas cuyo eje es x, las cuales abren hacia la izquierda o hacia la derecha. Ahora se abordan las parábolas cuyo eje es y, de modo que estas abrirán hacia arriba o hacia abajo.

Puntos esenciales:

Iniciar con la comparación entre las ecuaciones $y^2=4px$ y $x^2=4py$. La obtención de esta última puede plantearse como un desafío para los estudiantes (no se sugiere abordar en el desarrollo de este contenido).

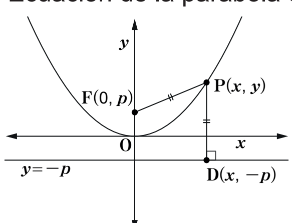
Explicar que las directrices son rectas de la forma $y=\pm p$, que son rectas horizontales.

Explicar que el a partir del valor de p, se determinan elementos como ecuación de la directriz y si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.

Inducir al análisis de similitudes y diferencias entre las parábolas determinadas por $y^2=4px$ y $x^2=4py$.

C2: Parábola con foco en el eje y

Ecuación de la parábola con foco en y y vértice (0, 0)



Foco: $F(0,p)$

Directriz: $y=-p$

Ecuación: $x^2=4py$

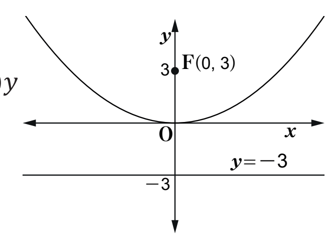
P Determine la ecuación de la parábola con:

S a) Foco en $F(0,3)$ y directriz $y=-3$

El foco está sobre el eje y y

$p=3$, así que:

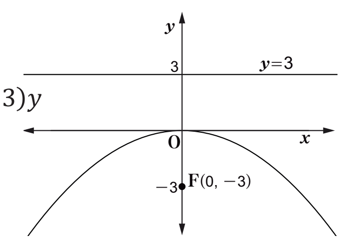
$$x^2=4py$$
$$x^2=(4)(3)y$$
$$x^2=12y$$



b) Foco en $F(0,-3)$ y directriz $y=3$

$p=-3$ por lo cual:

$$x^2=4py$$
$$x^2=(4)(-3)y$$
$$x^2=-12y$$



E Determine la ecuación de la parábola con:

a) Foco en $F(0,2)$ y directriz $y=-2$

Sustituir $p=2$, en $x^2=4py$

$$x^2=(4)(2)y$$
$$x^2=8y$$

b) Foco en $F(0,-2)$ y directriz $y=2$

Sustituir $p=-2$, en $x^2=4py$

$$x^2=(4)(-2)y$$
$$x^2=-8y$$

Contenido 3 Elementos de la parábola

Aprendizajes esperados

Determina elementos de parábolas cuyo foco está sobre el eje x o el eje y.

Secuencia:

El estudio de las parábolas cuyo eje sea x o y se conjuga en este contenido, en el que se resumen las principales características de estas cónicas. En esta sección las ecuaciones $y^2 = 4px$ y $x^2 = 4py$ serán utilizadas para la determinación de interceptos de parábolas y rectas dadas en la forma $y = mx + b$.

Puntos esenciales:

Recordar que ecuaciones de la forma $y^2 = 4px$ corresponden a parábolas cuyo eje es x y $x^2 = 4py$ a parábolas cuyo eje es y. De modo que, si se brinda la ecuación de una parábola, el coeficiente en el lado derecho debe ser de la forma $4p$, lo que permite determinar el valor de p.

Tener en cuenta que el término de segundo grado permite decidir cuál es el eje de la parábola:

✓ Si es y^2, el eje es x.

✓ Si es x^2, el eje es y.

Determinando el valor de p y el eje de la parábola, se pueden conocer los restantes elementos.

Contenido 3: Elementos de la parábola

P Encuentre el vértice, eje de simetría, foco y directriz de cada parábola:

a) $y^2 = 8x$ b) $x^2 = -4y$

S

a) La parábola $y^2 = 8x$ tiene **vértice (0, 0)**. Se utiliza la ecuación $y^2 = 4px$ para encontrar p:

$$y^2 = 8x = (4)(2)x$$

Entonces, $p = 2$

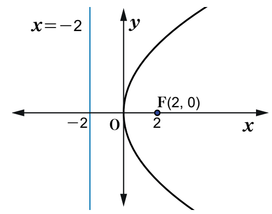
Por lo tanto, el eje de simetría de la parábola es el **eje x**, **el foco $F(2, 0)$** y **la directriz $x = -2$**, como se observa abajo.

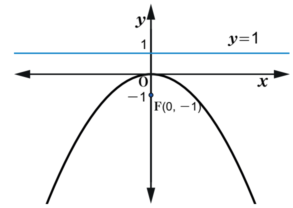
b) La parábola $x^2 = -4y$, tiene **vértice (0, 0)**. Se utiliza la ecuación $x^2 = 4py$ para encontrar p:

$$x^2 = -4y = (4)(-1)y$$

Entonces, $p = -1$.

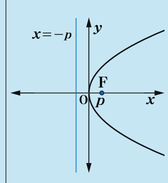
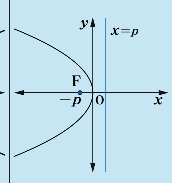
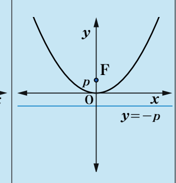
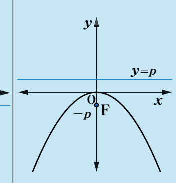
Por lo tanto, el eje de simetría es el **eje y**, **el foco $F(0, -1)$** y la directriz $y = 1$, como se observa en la gráfica de abajo.





C

Resumen de propiedades de la parábola ($p > 0$):

Forma	$y^2 = 4px$	$y^2 = -4px$	$x^2 = 4py$	$x^2 = -4py$
Gráfica				
Vértice	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
Foco	$F(p, 0)$	$F(-p, 0)$	$F(0, p)$	$F(0, -p)$
Directriz	$x = -p$	$x = p$	$y = -p$	$y = p$

E Encuentre el vértice, eje, foco, y directriz de las siguientes parábolas:

a) $y^2 = 4x$ b) $x^2 = -8y$

C3: Elementos de la parábola

P Encuentre el vértice, eje de simetría, foco y directriz de la parábola:

a) $y^2 = 8x$

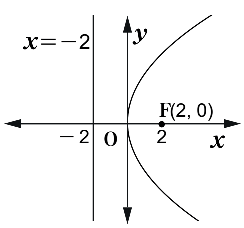
S Vértice $(0, 0)$

Eje de simetría es el eje x

Se utiliza la ecuación $y^2 = 4px$

$$y^2 = 8x = (4)(2)x$$

Como $p = 2$, el foco es $F(2,0)$ y la directriz es $x = -2$



b) $x^2 = -4y$

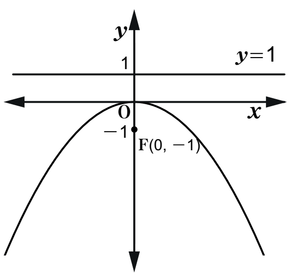
Vértice $(0, 0)$

Eje de simetría es el eje y

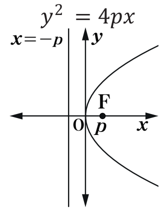
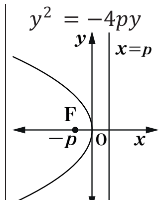
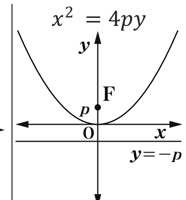
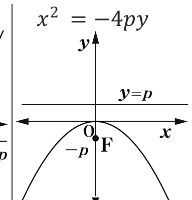
Se utiliza la ecuación $x^2 = 4py$

$$x^2 = -4y = (4)(-1)x$$

Como $p = -1$, el foco es $F(0, -1)$ y la directriz $x = 1$



C Propiedades de la parábola, $p > 0$

$y^2 = 4px$	$y^2 = -4py$	$x^2 = 4py$	$x^2 = -4py$
			
Vértice $(0, 0)$	Vértice $(0, 0)$	Vértice $(0, 0)$	Vértice $(0, 0)$
Foco$(p, 0)$	Foco$(-p, 0)$	Foco$(0, p)$	Foco $(0, -p)$
Directriz $x = -p$	Directriz $x = p$	Directriz $y = -p$	Directriz $y = p$

E Encuentre el vértice, eje, foco, y directriz de la parábola:

a) $y^2 = 4x$

$y^2 = 4x = (4)(1)x,$ $p = 1$

Eje de simetría: eje x Foco: $F(1,0)$ Directriz $x = -1$

b) $x^2 = -8y$

$x^2 = -4y = (4)(-1)x,$ $p = -1$ Eje de simetría: eje y

Foco: $F(0, -1)$ Directriz $x = 1$

Contenido 4 Puntos de intersección de una parábola y una recta (1)

Contenido 4: Puntos de intersección de una parábola y una recta (1)

P Encuentre los puntos de intersección de la recta $y=-x+3$ con la parábola $x^2=4y$.

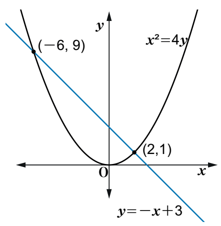
S

Para determinar los puntos de intersección de la recta $y=-x+3$ con la parábola, se resuelve el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y=-x+3 \\ x^2=4y \end{cases}$$

A continuación se sustituye el valor de y en $x^2=4y$,

$$x^2=4(-x+3)$$
$$x^2=-4x+12$$
$$x^2+4x-12=0$$



Se resuelve la ecuación anterior por factorización y se obtiene:

$(x+6)(x-2)=0$, luego $x=-6$, $x=2$

Finalmente, en $y=-x+3$, se sustituyen los valores encontrados,

Para $x=-6$, $y=-(-6)+3=9$

Para $x=2$, $y=-2+3=1$

Por tanto, los puntos de intersección son: **(−6, 9)** y **(2, 1)**.

C

Los puntos de intersección de una parábola $x^2=4py$ y una recta $y=mx+b$, se encuentran resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y=mx+b \\ x^2=4py \end{cases}$$

E

Encuentre los puntos de intersección de:

a) La recta $y=3x-2$ con la parábola $x^2=y$.

b) La recta $y=2x-9$ con la parábola $x^2=-3y$.

101

Aprendizajes esperados

Determina los puntos de intersección entre una recta y una parábola cuyo foco está sobre el eje y.

▪ Secuencia:

En la unidad anterior se calcularon puntos comunes de una circunferencia y una recta. En este contenido se efectúa un procedimiento similar para determinar la intersección de una parábola y una recta, atendiendo a si esta curva abre hacia arriba o abajo, hacia la izquierda o a la derecha.

▪ Puntos esenciales:

Recordar que la ecuación $x^2=4py$ corresponde a parábolas cuyo eje es y, de modo que abrirán hacia arriba o hacia abajo, de acuerdo al signo de p.

Hacer notar que, dado que la recta está en la forma $y=mx+b$, al sustituir y por $mx+b$ en $x^2=4py$ se tendrá una ecuación de segundo grado, la cual ha de resolverse.

Recordar los métodos de resolución de ecuaciones de segundo grado. Si esta tiene dos soluciones distintas, existen dos puntos comunes entre la recta y la parábola. Si hay una solución, la intersección es un único punto, y si esta careciese de solución, la recta no tendría punto en común con la parábola.

Hacer notar que la representación gráfica de las parábolas, rectas y puntos comunes entre estas, facilita la comprensión del contenido abordado.

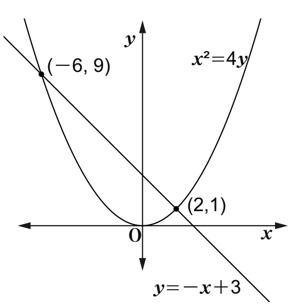
C4: Puntos de intersección de una parábola y una recta (1)

P Encuentre los puntos de intersección de $y=-x+3$, con la parábola $x^2=4y$.

S Se forma y resuelve el sistema:

$$\begin{cases} y=-x+3 \\ x^2=4y \end{cases}$$

$$x^2=4(-x+3)$$
$$x^2=-4x+12$$
$$x^2+4x-12=0$$
$$(x+6)(x-2)=0$$
$$x=-6;\ x=2$$



Se sustituye estos valores en $y=-x+3$:

Para $x=-6$, $y=-(-6)+3=9$

Para $x=2$, $y=-(2)+3=1$

Los puntos de intersección son $(-6,9)$ y $(2,1)$.

C Los puntos de intersección de una parábola y una recta se encuentran resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

E Encuentre los puntos de intersección de:

a) La recta $y=3x-2$, con la parábola $x^2=y$.

Se forma y resuelve el sistema:

$$\begin{cases} y=3x-2 \\ x^2=y \end{cases}$$

$$x^2=3x-2$$
$$x^2-3x+2=0$$
$$(x-1)(x-2)=0$$
$$x=1;\ x=2$$

Se sustituyen estos valores en $y=3x-2$:

Para $x=1$, $y=3(1)-2=1$

Para $x=2$, $y=3(2)-2=4$

Los puntos de intersección son $(1,1)$ y $(2,4)$.

Contenido 5 Puntos de intersección de una parábola y una recta (2)

Aprendizajes esperados

Determina los puntos de intersección entre una recta y una parábola cuyo foco está sobre el eje x.

Secuencia:

Se ha calculado la intersección de una recta y una parábola que abre hacia arriba o hacia abajo. En este contenido se determina la intersección de rectas y parábolas, pero conociendo que estas últimas abren hacia la derecha o hacia la izquierda.

Puntos esenciales:

Explicar que la ecuación $y^2 = 4px$ corresponde a parábolas cuyo eje es x, de modo que se abrirán hacia la izquierda o hacia la derecha, de acuerdo al signo de p.

Hacer notar que, dado que la recta está en la forma $y = mx + b$, al sustituir y por $mx + b$ en $y^2 = 4px$ se tendrá una ecuación de segundo grado, la cual ha de resolverse.

Recordar los métodos de resolución de ecuaciones de segundo grado: factorización y fórmula general. Si esta ecuación tiene dos soluciones distintas, existen dos puntos comunes entre la recta y la parábola. Si hay una solución, la intersección es un único punto, y si esta carece de solución, la recta no tiene punto en común con la parábola.

Contenido 5: Puntos de intersección de una parábola y una recta (2)

P Encuentre los puntos de intersección de la recta $y = x - 2$ con la parábola $y^2 = x$.

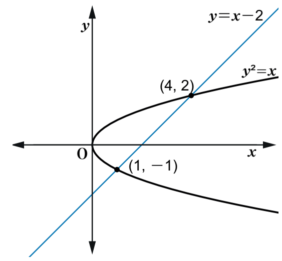
S

Para determinar los puntos de intersección se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y^2 = x \end{cases}$$

Se sustituye el valor de y en $y^2 = x$,

$$(x-2)^2 = x$$
$$x^2 - 4x + 4 = x$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$



Al resolver la ecuación $x^2 - 5x + 4 = 0$ por factorización se obtiene:

$$(x-1)(x-4) = 0, \text{ luego } x = 1, x = 4$$

Finalmente en $y = x - 2$ se sustituyen los valores encontrados

Para $x = 1$, $y = 1 - 2 = -1$

Para $x = 4$, $y = 4 - 2 = 2$

Por tanto, los puntos de intersección son: **(1, −1)** y **(4, 2)**.

C

Los puntos de intersección de una parábola $y^2 = 4px$ y una recta $y = mx + b$, se encuentran resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y = mx + b \\ y^2 = 4px \end{cases}$$

E

Encuentre los puntos de intersección de:

a) La recta $y = x - 3$ con la parábola $y^2 = 4x$.

b) La recta $y = 2x + 4$ con la parábola $y^2 = -4x$.

102

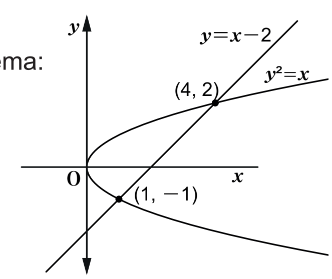
C5: Puntos de intersección de una parábola y una recta (2)

P Encuentre los puntos de intersección de $y = x - 2$, con la parábola $y^2 = x$.

S Se forma y resuelve el sistema:

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y^2 = x \end{cases}$$

$(x-2)^2 = x$
$x^2 - 4x + 4 = x$
$x^2 - 5x + 4 = 0$
$(x-1)(x-4) = 0$
$x = 1;\ x = 4$



Se sustituyen estos valores en $y = x - 2$:
Para $x = 1$, $y = 1 - 2 = -1$
Para $x = 4$, $y = 4 - 2 = 2$

Los puntos de intersección son $(1, -1)$ y $(4, 2)$.

C Los puntos de intersección de una parábola y una recta se encuentran resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

E Encuentre los puntos de intersección de:

a) La recta $y = x - 3$, con la parábola $y^2 = 4x$.
Se forma y resuelve el sistema:

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ y^2 = 4x \end{cases}$$

$(x-3)^2 = 4x$
$x^2 - 6x + 9 = 4x$
$x^2 - 10x + 9 = 0$
$(x-1)(x-9) = 0$
$x = 1;\ x = 9$

Se sustituye estos valores en $y = x - 3$:

Para $x = 1$, $y = 1 - 3 = -2$
Para $x = 9$, $y = 9 - 3 = 6$

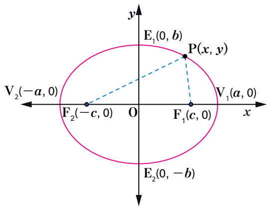
Los puntos de intersección son $(1, -2)$ y $(9, 6)$.

Contenido 1 Elipse con focos en el eje x

Sección 2: La elipse

Contenido 1: Elipse con focos en el eje x

Definición



Elipse es el conjunto de todos los puntos P del plano tales que la suma de las distancias de P a los dos puntos fijos F_1 y F_2 (focos) es constante, es decir

$$PF_1 + PF_2 = 2a, \text{ donde } a > 0$$

El punto medio del segmento V_1V_2 se llama centro de la elipse. El eje mayor es el segmento V_1V_2, el eje menor es el segmento E_1E_2.

La ecuación de la elipse con eje mayor en x y centro en el origen (0, 0) es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ donde } a > b > 0.$$

(En la página 109 está la demostración de esta ecuación.)

Elementos de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a > b > 0$

1. Tiene dos vértices $V_1(a, 0)$ y $V_2(-a, 0)$ y dos extremos $E_1(0, b)$ y $E_2(0, -b)$.
2. El eje mayor y el eje menor están ubicados en los ejes x y y respectivamente, teniendo el primero longitud $2a$ y el segundo longitud $2b$.
3. El eje mayor contiene los dos focos $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$, con $c > 0$.
4. Se da la relación $c^2 = a^2 - b^2$ entre a, b y c. Por tanto $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

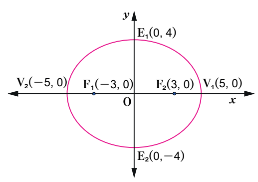
Ejemplo Determine la ecuación de la elipse cuyos focos son $F_1(3, 0)$ y $F_2(-3, 0)$ y vértices $V_1(5, 0)$ y $V_2(-5, 0)$.

Los focos y vértices están ubicados en el eje x, entonces el eje mayor también está ubicado en este, observándose que $c = 3$ y $a = 5$.

Se sustituye $a = 5$ y $c = 3$ en $c^2 = a^2 - b^2$ y se tiene

$$\begin{aligned} 3^2 &= 5^2 - b^2 \\ 9 &= 25 - b^2 \\ b^2 &= 25 - 9 \\ b^2 &= 16 \\ b &= 4, \ (b > 0) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de la elipse es $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.



E

Determine la ecuación de cada elipse, de acuerdo con los siguientes datos.

a) Focos $F_1(5, 0)$ y $F_2(-5, 0)$, vértices $V_1(8, 0)$ y $V_2(-8, 0)$.

b) Focos $F_1(2, 0)$ y $F_2(-2, 0)$, vértices $V_1(9, 0)$ y $V_2(-9, 0)$.

104

Aprendizajes esperados

Determina elementos de elipses cuyo eje mayor está sobre el eje x.

Secuencia:

Ahora se estudia una cónica totalmente nueva para el estudiante: la elipse. En el estudio de esta se deducirán algunos elementos similares a los de la parábola, y otros totalmente diferentes. Sin embargo, los elementos de esta cónica tienen más similitud con la cónica que se estudiará posteriormente: la hipérbola.

Puntos esenciales:

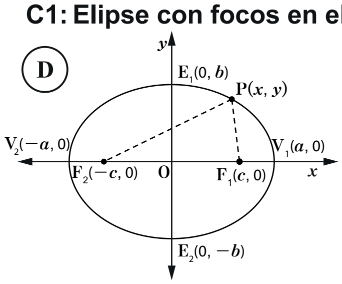
Explicar que la constante $2a$ mostrada en la igualdad $PF_1 + PF_2 = 2a$ se justifica mediante el uso de la gráfica y la definición brindada de elipse: si el punto P es uno de los vértices, por ejemplo, V_1, es evidente que $V_1F_1 + V_1F_2 = 2a$.

Mostrar que la prueba de la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ se plantea como un desafío, el cual tiene similitud en complejidad a la obtención de las ecuaciones de las parábolas en la sección anterior.

Inducir a la familiarización con los elementos de la elipse cuyo eje focal es x, de manera que pueda determinar los valores de a, b y c para obtener la ecuación de una elipse.

S2: La elipse
C1: Elipse con focos en el eje x

D



Focos: puntos fijos F_1 y F_2
Vértices: V_1 y V_2
Eje mayor: segmento V_1V_2
Extremos: E_1 y E_2
Eje menor: segmento E_1E_2

Los puntos P de la elipse verifican que la suma de las distancias de P a los focos es una constante.

Ecuación de la elipse con focos en el eje x y centro $(0, 0)$

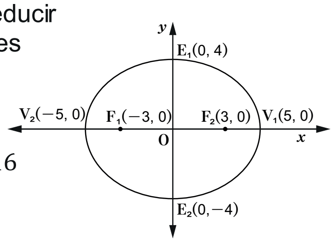
Vértices: $V_1(a, 0)$ y $V_2(-a, 0)$
Extremos: $E_1(0, b)$ y $E_2(0, -b)$
Focos: $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$
$c^2 = a^2 - b^2$
Ecuación: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Ej Determine la ecuación de la elipse cuyos focos son $F_1(3, 0)$ y $F_2(-3, 0)$ y vértices $V_1(5, 0)$ y $V_2(-5, 0)$.

De los focos se puede deducir que $c = 3$ y por los vértices que $a = 5$.

$$\begin{aligned} (3)^2 &= (5)^2 - b^2 \\ 9 &= 25 - b^2 \\ b^2 &= 25 - 9 = 16 \\ b &= 4 \ (b > 0) \end{aligned}$$

Por tanto, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.



E Determine la ecuación de la elipse, si tiene:

a) Focos $F_1(5, 0)$ y $F_2(-5, 0)$ y vértices $V_1(8, 0)$ y $V_2(-8, 0)$.

De los focos se deduce que $c = 5$ y por los vértices que $a = 8$.

$$\begin{aligned} 5^2 &= 8^2 - b^2 \\ 25 &= 64 - b^2 \\ b^2 &= 64 - 25 = 39 \\ b &= \sqrt{39} \ (b > 0) \end{aligned}$$

Por tanto, $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$

Contenido 2 Elipse con focos en el eje y

Aprendizajes esperados

Determina elementos de elipses cuyo eje mayor está sobre el eje y.

Secuencia:

La ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ define una elipse cuyo eje focal (eje que contiene a sus focos) es x. En este contenido se estudia la elipse cuya ecuación es $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, cuyo eje focal es y. Si se brindan algunos elementos de una elipse se puede determinar la ecuación de esta. En contenidos posteriores se analizarán los casos recíprocos: dada la ecuación de la elipse, determinar sus principales elementos.

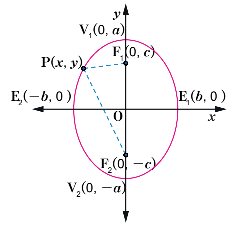
Puntos esenciales:

Inducir a la familiarización con los elementos de la elipse cuyo eje es y, de manera que pueda determinar los valores de a, b y c para obtener la ecuación de una elipse.

Hacer notar que si los focos y vértices tienen abscisa 0, el eje focal es y, este es el indicador de que la ecuación a determinar es de la forma $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$. La relación pitagórica $c^2=a^2-b^2$ es fundamental para este propósito.

Contenido 2: Elipse con focos en el eje y

La ecuación de la elipse con eje mayor sobre el eje y, y centro en el origen (0, 0) es:



$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, donde $a>b>0$.

Elementos de la elipse $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, donde $a>b>0$

1. Tiene dos vértices $V_1(0, a)$ y $V_2(0, -a)$ y dos extremos $E_1(b, 0)$ y $E_2(-b, 0)$.
2. El eje mayor y el eje menor están ubicados en los ejes y y x respectivamente, teniendo el primero longitud $2a$ y el segundo longitud $2b$.
3. El eje mayor contiene los focos $F_1(0, c)$ y $F_2(0, -c)$, con $c>0$.
4. Se da la relación $c^2=a^2-b^2$ entre a, b y c. Por tanto $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

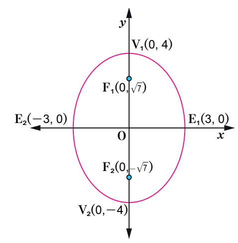
Ejemplo Determine la ecuación de la elipse con focos $F_1(0, \sqrt{7})$ y $F_2(0, -\sqrt{7})$ y vértices $V_1(0, 4)$ y $V_2(0, -4)$.

Como los focos y vértices están ubicados en el eje y, el eje mayor está sobre este eje.

De los focos se deduce que $c=\sqrt{7}$ y por los vértices que $a=4$.

Se sustituye $a=4$ y $c=\sqrt{7}$ en $c^2=a^2-b^2$

$$(\sqrt{7})^2=4^2-b^2$$
$$7=16-b^2$$
$$b^2=16-7$$
$$b^2=9$$
$$b=3,\ (b>0)$$



Por lo tanto, la ecuación es $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$.

E

Determine en cada inciso la ecuación de la elipse con los datos dados.

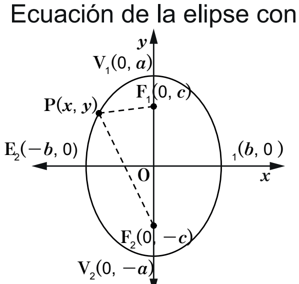
a) Focos $F_1(0, 3)$ y $F_2(0, -3)$, vértices $V_1(0, 4)$ y $V_2(0, -4)$.

b) Focos $F_1(0, 1)$ y $F_2(0, -1)$, vértices $V_1(0, 3)$ y $V_2(0, -3)$.

105

C2: Elipse con focos en el eje y

Ecuación de la elipse con focos en el eje y y centro $(0, 0)$



Vértices: $V_1(0, a)$ y $V_2(0, -a)$

Extremos: $E_1(b, 0)$ y $E_2(-b, 0)$

Focos: $F_1(0, c)$ y $F_2(0, -c)$

$c^2=a^2-b^2$

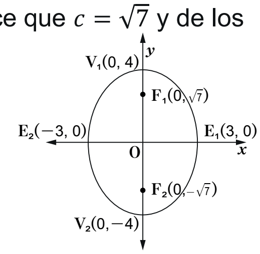
Ecuación: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

Ej Encuentre la ecuación de la elipse cuyos focos son $F_1(0, \sqrt{7})$ y $F_2(-\sqrt{7}, 0)$ y vértices $V_1(0, 4)$ y $V_2(0, -4)$.

Como los focos están en el eje y, entonces el eje mayor es el eje y. De los focos se deduce que $c=\sqrt{7}$ y de los vértices que $a=4$.

$$7=16-b^2$$
$$b^2=16-7$$
$$b^2=9$$
$$b=3,\ (b>0)$$

Por lo tanto, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$



E Determine la ecuación de la elipse, si tiene:

a) Focos $F_1(0, 3)$ y $F_2(0, -3)$ y vértices $V_1(0, 4)$ y $V_2(0, -4)$.

De los focos se deduce que $c=3$ y por los vértices que $a=4$.

$$(3)^2=(4)^2-b^2$$
$$9=16-b^2$$
$$b^2=16-9=7$$
$$b=\sqrt{7}\ (b>0)$$

Por tanto, $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$

b) Focos $F_1(0, 1)$ y $F_2(0, -1)$ y vértices $V_1(0, 3)$ y $V_2(0, -3)$.

De los focos se deduce que $c=1$ y por los vértices que $a=3$.

$$1^2=3^2-b^2$$
$$1=9-b^2$$
$$b^2=9-1=8$$
$$b=\sqrt{8}\ (b>0)$$

Por tanto, $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{9}=1$

Contenido 3 Elementos de la elipse con focos en el eje x

Contenido 3: Elementos de la elipse con focos en el eje x

P

Dada la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$, encuentre su centro, focos, vértices y extremos.

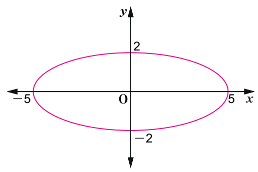
S

La ecuación $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ se escribe en la forma $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$,
y como $0<2<5$, entonces $a=5$ y $b=2$.

Se utiliza la expresión $c^2=a^2-b^2$, se tiene que:

$$c^2=25-4=21$$

Por lo tanto, $c=\sqrt{21}$, $(c>0)$,
siendo los elementos de la elipse los siguientes:
Centro **(0, 0)**
Focos $\mathbf{F_1}$ **$(\sqrt{21}, 0)$** y $\mathbf{F_2}$ **$(-\sqrt{21}, 0)$**
Vértices $\mathbf{V_1}$ **(5, 0)** y $\mathbf{V_2}$ **(−5, 0)** y extremos $\mathbf{E_1}$ **(0, 2)** y $\mathbf{E_2}$ **(0, −2)**



C

Para encontrar los elementos de una elipse cuyos focos se encuentran en el eje x, se identifican a y b a partir de la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, con $a>b>0$, calculándose después c mediante la fórmula $c^2=a^2-b^2$. De esta forma se obtienen:
focos: F_1 $(c, 0)$ y F_2 $(-c, 0)$, vértices: V_1 $(a, 0)$ y V_2 $(-a, 0)$, extremos: E_1 $(0, b)$ y E_2 $(0, -b)$.

E1

Encuentre los vértices, focos y extremos de las elipses dadas por las ecuaciones siguientes:

a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ b) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

Ejemplo Dada la ecuación de la elipse $4x^2+100y^2=100$, obtenga sus vértices, focos y extremos.

La ecuación dada se transforma en la forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dividiendo ambos lados por 100

$$\frac{4x^2}{100}+\frac{100y^2}{100}=\frac{100}{100}, \text{ es decir } \frac{x^2}{25}+y^2=1$$

de donde se obtiene $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$, luego, $a=5$ y $b=1$.
Utilizando la expresión $c^2=a^2-b^2$, se tiene que:

$$c^2=25-1=24$$

Por lo tanto $c=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$, $(c>0)$.
Su centro es **(0, 0)**, los focos $\mathbf{F_1}$ **$(2\sqrt{6}, 0)$** y $\mathbf{F_2}$ **$(-2\sqrt{6}, 0)$**,
los vértices $\mathbf{V_1}$ **(5, 0)** y $\mathbf{V_2}$ **(−5, 0)** y los extremos $\mathbf{E_1}$ **(0, 1)** y $\mathbf{E_2}$ **(0, −1)**.

E2

Encuentre vértices, focos y extremos de las elipses dadas por las siguientes ecuaciones:

a) $3x^2+27y^2=27$ b) $x^2+9y^2=36$

106

Aprendizajes esperados

Determina elementos de elipses cuyo eje mayor está sobre el eje x a partir de su ecuación.

Secuencia:

En contenidos anteriores de esta sección se determinaron ecuaciones de elipses a partir de elementos de estas, tales como vértices y focos. En este contenido y el próximo se abordará el caso recíproco: dada la ecuación de una elipse, determinar sus principales elementos.

Puntos esenciales:

Identificar, a partir de la ecuación brindada, que la elipse tiene como eje focal a x analizando los denominadores de los términos cuadráticos.

Hacer notar que la relación pitagórica $c^2=a^2-b^2$ se utiliza para conocer las coordenadas de los focos.

Explicar que en los casos en los que el lado derecho de la ecuación de la elipse no sea 1, ambos lados deben dividirse por la constante que se muestre en dicho lado.

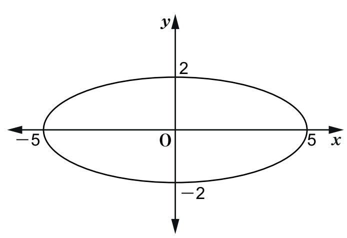
Recordar cómo están definidas las coordenadas de los vértices, focos y extremos de la elipse.

C3: Elementos de la elipse con focos en el eje x

(P) Dada la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$,
encuentre su centro, focos, vértices y extremos.

(S) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1 \leftrightarrow \frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-4}$$
$$=\sqrt{21}, (c>0),$$



Elementos de la elipse:
Centro: $(0,0)$
Focos: $F_1(\sqrt{21},0)$ y $F_2\ (-\sqrt{21},0)$
Vértices: $V_1(5,0)$ y $V_2\ (-5,0)$
Extremos: $E_1(0,2)$ y $E_2\ (0,-2)$

(C) Para encontrar los elementos de una elipse dada su ecuación, se identifican a y b, y se calcula c.

(E1) Obtenga vértices, focos y extremos de:
a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$ de donde $a=3$ y $b=2$
$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}, (c>0)$
Focos: $F_1(\sqrt{5},0)$ y $F_2\ (-\sqrt{5},0)$
Vértices: $V_1(3,0)$ y $V_2\ (-3,0)$
Extremos: $E_1(0,2)$ y $E_2\ (0,-2)$

(Ej) Dada la ecuación $4x^2+100y^2=100$, obtenga sus vértices, focos y extremos.

$\frac{4x^2}{100}+\frac{100y^2}{100}=\frac{100}{100}$ de donde $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-1}=2\sqrt{6}, (c>0)$$

Focos: $F_1(2\sqrt{6},0)$ y $F_2\ (-2\sqrt{6},0)$
Vértices $V_1(5,0)$ y $V_2\ (-5,0)$
Extremos $E_1(0,1)$ y $E_2\ (0,-1)$

(E2) Encuentre vértices, focos y extremos de la elipse con ecuación: a) $3x^2+27y^2=27$.

Contenido 4 Elementos de la elipse con focos en el eje y

Aprendizajes esperados

Determina elementos de elipses cuyo eje mayor está sobre el eje y a partir de su ecuación.

Secuencia:

En el contenido anterior se determinaron los elementos principales de una elipse con eje focal x, a partir de su ecuación. En este se consideran elipses cuyo eje focal es y, y a partir de su ecuación se determinan focos, vértices y extremos de esta cónica.

Puntos esenciales:

Identificar, a partir de la ecuación brindada, que la elipse tiene como eje focal a y analizando los denominadores de los términos cuadráticos.

Hacer notar que la relación pitagórica $c^2 = a^2 - b^2$ se utiliza para conocer las coordenadas de los focos.

Explicar que en los casos en los que el lado derecho de la ecuación de la elipse no sea 1, ambos lados deben dividirse por la constante que se muestre en dicho lado.

Recordar cómo están definidas las coordenadas de los vértices, focos y extremos de la elipse.

Insistir en que las raíces cuadradas que se extraigan para determinar los valores de a, b o c serán positivas puesto que estos representan longitudes de segmentos.

Contenido 4: Elementos de la elipse con focos en el eje y

P Dada la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$, encuentre su centro, focos, vértices y extremos.

S

La ecuación $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$ se escribe en la forma $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$, y como $0<2<4$, entonces $a=4$ y $b=2$.

Se utiliza la expresión $c^2=a^2-b^2$, se tiene que

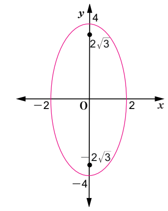
$$c^2 = 16-4 = 12$$

Por lo tanto $c=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, ($c>0$), siendo los elementos de la elipse los siguientes:

Centro **(0, 0)**

Focos $\mathbf{F_1}$ **(0, $2\sqrt{3}$)** y $\mathbf{F_2}$ **(0, $-2\sqrt{3}$)**

Vértices $\mathbf{V_1}$ **(0, 4)** y $\mathbf{V_2}$ **(0, −4)** y extremos $\mathbf{E_1}$ **(2, 0)** y $\mathbf{E_2}$ **(−2, 0)**.



C

Para encontrar los elementos de una elipse cuyos focos se encuentran en el eje y, se identifican a y b a partir de la ecuación $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, con $a>b>0$, calculándose después c mediante la fórmula $c^2=a^2-b^2$, De esta forma se obtienen:

focos: $F_1\,(0, c)$ y $F_2\,(0, -c)$, vértices: $V_1\,(0, a)$ y $V_2\,(0, -a)$, extremos: $E_1\,(b, 0)$ y $E_2\,(-b, 0)$.

Ejemplo Dada la ecuación de la elipse $25x^2+9y^2=225$, obtenga sus vértices, focos y extremos.

La ecuación dada se transforma en la forma $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ dividiendo ambos lados por 225

$$\frac{25x^2}{225}+\frac{9y^2}{225}=\frac{225}{225},\ \text{es decir}\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1,$$

de donde se obtiene $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$. Luego, $a=5$ y $b=3$

Utilizando la expresión $c^2=a^2-b^2$, se tiene que

$$c^2 = 25-9 = 16$$

Por lo tanto $c=\sqrt{16}=4$, ($c>0$).

En conclusión, su centro es **(0, 0)**, los focos $\mathbf{F_1}$ **(0, 4)** y $\mathbf{F_2}$ **(0, −4)**, vértices $\mathbf{V_1}$ **(0, 5)** y $\mathbf{V_2}$ **(0, −5)** y extremos $\mathbf{E_1}$ **(3, 0)** y $\mathbf{E_2}$ **(−3, 0)**.

E

Encuentre vértices, focos y extremos de las elipses dadas por las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1$ b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{49}=1$ c) $9x^2+4y^2=36$

107

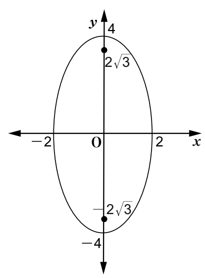
C4: Elementos de la elipse con focos en el eje y

P Dada la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$, encuentre su centro, focos, vértices y extremos.

S $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1 \leftrightarrow \frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$

$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{16-4}$

$=2\sqrt{3}, (c>0)$



Elementos de la elipse:

Centro: $(0,0)$

Focos: $F_1(0,2\sqrt{3})$ y $F_2\ (0,-2\sqrt{3})$

Vértices: $V_1(0,4)$ y $V_2\ (0,-4)$

Extremos: $E_1(2,0)$ y $E_2\ (-2,0)$

C Para encontrar los elementos de una elipse dada su ecuación, se identifican a y b, y se calcula c.

Ej Dada la ecuación $25x^2+9y^2=225$, obtenga sus vértices, focos y extremos.

$\frac{25x^2}{225}+\frac{9y^2}{225}=\frac{225}{225}$ de donde $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$

$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=4, (c>0)$

Focos: $F_1(0,4)$ y $F_2\ (0,-4)$

Vértices $V_1(0,5)$ y $V_2\ (0,-5)$

Extremos $E_1(3,0)$ y $E_2\ (-3,0)$

E Obtenga vértices, focos y extremos de: a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1$

$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$ de donde $a=6$ y $b=3$

$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-9}=3\sqrt{3}, (c>0)$

Focos: $F_1(0,3\sqrt{3})$ y $F_2(0,-3\sqrt{3})$

Vértices $V_1(0,6)$ y $V_2\ (0,-6)$

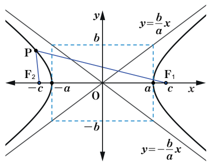
Extremos $E_1(3,0)$ y $E_2\ (-3,0)$

1 Hipérbola con focos en el eje x

Sección 3: La hipérbola

Contenido 1: Hipérbola con focos en el eje x

Definición



Hipérbola es el conjunto de todos los puntos P del plano con la propiedad de que el valor absoluto de la diferencia de las distancias de P a los puntos fijos F_1 y F_2 (focos), es constante, es decir, $|PF_1 - PF_2| = 2a$, donde $a > 0$.

El punto medio del segmento que une a F_1 y F_2 se llama **centro** O de la hipérbola, V_1 y V_2 son los vértices de esta.

La ecuación de la hipérbola con centro en el origen (0, 0) y focos ubicados en el eje x es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ donde } a > 0 \text{ y } b > 0.$$

(En la página 115 está la demostración de esta ecuación)

Elementos de la Hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a > 0$ y $b > 0$

1. Tiene dos focos $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$, donde $c > 0$; dos vértices $V_1(a, 0)$ y $V_2(-a, 0)$ y dos extremos $E_1(0, b)$ y $E_2(0, -b)$. Los focos y vértices están sobre el eje x.
2. La relación entre a, b y c queda establecida con la expresión $c^2 = a^2 + b^2$.
3. Tiene dos asíntotas, determinadas por las ecuaciones $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$.

Ejemplo Determine la ecuación de la hipérbola y sus asíntotas, si tiene por focos $F_1(5, 0)$ y $F_2(-5, 0)$ y vértices $V_1(4, 0)$ y $V_2(-4, 0)$.

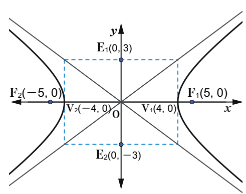
Dado que los focos y vértices están en el eje x, la ecuación de la hipérbola es de la forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. De los focos se deduce que $c = 5$ y por los vértices que $a = 4$.

Se sustituye $a = 4$ y $c = 5$ en $c^2 = a^2 + b^2$

$$5^2 = 4^2 + b^2$$
$$25 = 16 + b^2$$
$$b^2 = 25 - 16 = 9$$
$$b = 3, \quad (b > 0)$$

Por lo tanto, la ecuación de la hipérbola es $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

Las asíntotas son: $y = \frac{3}{4}x$ y $y = -\frac{3}{4}x$



E

Determine para cada inciso la ecuación de la hipérbola y sus asíntotas si tiene:

a) Focos $F_1(10, 0)$ y $F_2(-10, 0)$, vértices $V_1(6, 0)$ y $V_2(-6, 0)$.

b) Focos $F_1(\sqrt{5}, 0)$ y $F_2(-\sqrt{5}, 0)$, vértices $V_1(1, 0)$ y $V_2(-1, 0)$.

110

Aprendizajes esperados

Determina elementos de hipérbolas cuyos focos están sobre el eje x.

Secuencia:

Ahora se estudia la última cónica: la hipérbola. En el estudio de esta se deducirán algunos elementos muy similares a los de la elipse: vértices, focos, eje focal, lado mayor y lado menor.

Puntos esenciales:

Explicar que la constante $2a$ mostrada en la igualdad $|PF_1 - PF_2| = 2a$ se justifica mediante el uso de la gráfica y la definición brindada de hipérbola: si el punto P es uno de los vértices, por ejemplo, V_1, es evidente que $V_1F_2 - V_1F_1 = 2a$.

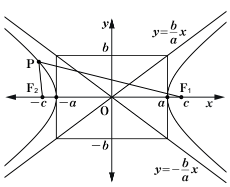
Notar que la prueba de la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ se plantea como un desafío, el cual tiene similitud en complejidad a la obtención de las ecuaciones de las parábolas y elipses.

Inducir a la familiarización con los elementos de la hipérbola cuyo eje focal es x, de manera que pueda determinar los valores de a, b y c para obtener la ecuación de una hipérbola.

Recordar el concepto de asíntota.

S3: La hipérbola
C1: Hipérbola con focos en el eje x

D



Focos: puntos fijos F_1 y F_2
Vértices: V_1 y V_2
Extremos: E_1 y E_2

Los puntos P de la hipérbola verifican que el valor absoluto de la diferencia de las distancias de P a los focos es una constante.

Ecuación de la hipérbola con focos en el eje x y centro $(0, 0)$

Vértices: $V_1(a, 0)$ y $V_2(-a, 0)$
Extremos: $E_1(0, b)$ y $E_2(0, -b)$
Focos: $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$
$c^2 = a^2 + b^2$

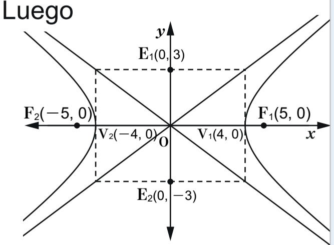
Ecuación: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Asíntotas: $y = \frac{b}{a}x \qquad y = -\frac{b}{a}x$

Ej Determine la ecuación de la hipérbola y sus asíntotas, si tiene $F_1(5, 0)$ y $F_2(-5, 0)$ y $V_1(4, 0)$ y $V_2(-4, 0)$.

De los focos se deduce que $c = 5$ y de los vértices que $a = 4$. Luego

$$(5)^2 = (4)^2 + b^2$$
$$25 = 16 + b^2$$
$$b^2 = 25 - 16 = 9$$
$$b = 3, (b > 0)$$



Ecuación: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

Asíntotas: $y = \frac{3}{4}x, y = -\frac{3}{4}x$

E Determine la ecuación y asíntotas de la hipérbola si tiene:

a) Focos $F_1(10,0)$ y $F_2(-10,0)$ y vértices $V_1(6,0)$ y $V_2(-6,0)$

De los focos se deduce que $c = 10$ y de los vértices que $a = 6$. Luego

$$(10)^2 = (6)^2 + b^2$$
$$100 = 36 + b^2$$
$$b^2 = 100 - 36 = 64$$
$$b = 8 \ (b > 0)$$

Ecuación: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ Asíntotas: $y = \frac{4}{3}x, y = -\frac{4}{3}x$

Contenido 2 Hipérbola con focos en el eje y

Aprendizajes esperados

Determina elementos de hipérbolas cuyos focos están sobre el eje y.

Secuencia:

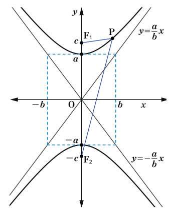
La ecuación $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ define una hipérbola cuyo eje focal (eje que contiene a sus focos) es x. En este contenido se estudia la hipérbola cuya ecuación es $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$, cuyo eje focal es y. Si se brindan algunos elementos se puede determinar la ecuación de la hipérbola correspondiente. En contenidos posteriores se analizarán los casos recíprocos.

Puntos esenciales:

Inducir a la familiarización con los elementos de la hipérbola cuyo eje focal es y, de manera que pueda identificar o determinar los valores de a, b y c para obtener la ecuación de una hipérbola.

Explicar que si los focos y vértices tienen abscisa 0, el eje focal es y, este es el indicador de que la ecuación a determinar es de la forma $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$. La relación pitagórica $c^2=a^2+b^2$ es fundamental para esto.

Contenido 2: Hipérbola con focos en el eje y



Ecuación de la hipérbola con centro en el origen (0, 0) y focos ubicados en el eje y

La ecuación de la hipérbola con centro en el origen (0, 0) y focos ubicados en el eje y es:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1,\text{ donde } a>0 \text{ y } b>0.$$

Elementos de la hipérbola $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$, donde $a>0$ y $b>0$

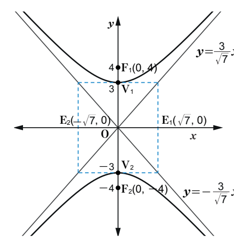
1. Tiene dos focos $F_1(0, c)$ y $F_2(0, -c)$, donde $c>0$; dos vértices $V_1(0, a)$ y $V_2(0, -a)$ y dos extremos $E_1(b, 0)$ y $E_2(-b, 0)$. Los focos y vértices están en el eje y.
2. La relación entre a, b y c queda establecida con la expresión $c^2=a^2+b^2$.
3. Tiene dos asíntotas, determinadas por las ecuaciones $y=\frac{a}{b}x$ y $y=-\frac{a}{b}x$.

Ejemplo Determine la ecuación de la hipérbola y sus asíntotas, si tiene por focos $F_1(0, 4)$ y $F_2(0, -4)$ y vértices $V_1(0, 3)$ y $V_2(0, -3)$.

Dado que los focos y vértices están en el eje y, la ecuación de la hipérbola es de la forma $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$. De los focos se deduce que $c=4$ y por los vértices que $a=3$.

Sustituyendo $a=3$ y $c=4$ en $c^2=a^2+b^2$

$$4^2=3^2+b^2$$
$$16=9+b^2$$
$$b^2=16-9=7$$
$$b=\sqrt{7},\quad (b>0)$$



Por lo tanto, la ecuación de la hipérbola es $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$

Las asíntotas son: $y=\frac{3}{\sqrt{7}}x$ y $y=-\frac{3}{\sqrt{7}}x$

E

Determine en cada inciso la ecuación de la hipérbola y sus asíntotas si tiene:

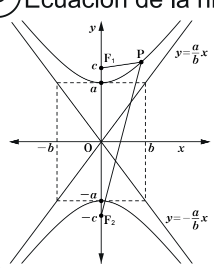
a) Focos $F_1(0, 5)$ y $F_2(0, -5)$ y vértices $V_1(0, 3)$ y $V_2(0, -3)$.

b) Focos son $F_1(0, \sqrt{8})$ y $F_2(0, -\sqrt{8})$ y vértices $V_1(0, 2)$ y $V_2(0, -2)$.

111

C2: Hipérbola con focos en el eje y

D Ecuación de la hipérbola con focos en el eje y y centro $(0, 0)$



Vértices: $V_1(0, a)$ y $V_2(0, -a)$

Extremos: $E_1(b, 0)$ y $E_2(-b, 0)$

Focos: $F_1(0, c)$ y $F_2(0, -c)$

$c^2=a^2+b^2$

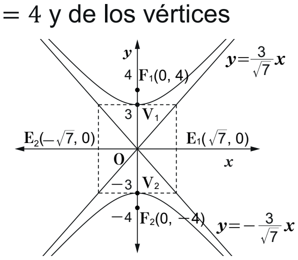
Ecuación: $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

Asíntotas: $y=\frac{a}{b}x \quad y=-\frac{a}{b}x$

Ej Determine la ecuación de la hipérbola y sus asíntotas, si tiene $F_1(0, 4)$ y $F_2(0, -4)$ y $V_1(0, 3)$ y $V_2(0, -3)$.

De los focos se deduce que $c=4$ y de los vértices que $a=3$. Luego

$$(4)^2 = (3)^2+b^2$$
$$16 = 9+b^2$$
$$b^2 = 16-9=7$$
$$b = \sqrt{7},\ (b>0)$$



Ecuación: $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$

Asíntotas: $y=\frac{3}{\sqrt{7}}x, y=-\frac{3}{\sqrt{7}}x$

E Determine la ecuación y asíntotas de la hipérbola si tiene:

a) Focos $F_1(0, 5)$ y $F_2(0, -5)$ y vértices $V_1(0, 3)$ y $V_2(0, -3)$

$c=5$ y $a=3$, luego

$$(5)^2 = (3)^2+b^2$$
$$25 = 9+b^2$$
$$b^2 = 25-9=16$$
$$b = 4,\ (b>0)$$

Ecuación: $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$

Asíntotas: $y=\frac{3}{4}x, y=-\frac{3}{4}x$

b) Focos $F_1(0, \sqrt{8})$ y $F_2(0, -\sqrt{8})$ y vértices $V_1(0, 2)$ y $V_2(0, -2)$

$c=\sqrt{8}$ y $a=2$, luego

$$(\sqrt{8})^2 = (2)^2+b^2$$
$$8 = 4+b^2$$
$$b^2 = 8-4=4$$
$$b = 2,\ (b>0)$$

Ecuación: $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{4}=1$

Asíntotas: $y=x, y=-x$

Contenido 3 Elementos de la hipérbola con focos en el eje x

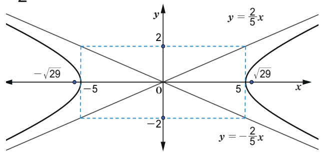
Contenido 3: Elementos de la hipérbola con focos en el eje x

P Dada la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1$, obtenga su centro, focos, vértices y extremos.

S La ecuación $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1$ se escribe en la forma $\frac{x^2}{5^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$, de donde $a=5$ y $b=2$.

Se utiliza la expresión $c^2=a^2+b^2$, se tiene que $c^2=25+4=29$.

Por lo tanto $c=\sqrt{29}$, $(c>0)$ siendo los elementos de la hipérbola los siguientes:



Centro: **(0, 0)**

Focos: $\mathbf{F_1}$ **($\sqrt{29}$, 0)** y $\mathbf{F_2}$ **($-\sqrt{29}$, 0)**

Vértices: $\mathbf{V_1}$ **(5, 0)** y $\mathbf{V_2}$ **(−5, 0)** y extremos: $\mathbf{E_1}$ **(0, 2)** y $\mathbf{E_2}$ **(0, −2)**.

C Para encontrar los elementos de una hipérbola cuyos focos están en el eje x, se identifican a y b a partir de la ecuación $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, calculándose después c mediante la fórmula $c^2=a^2+b^2$, con $c>0$. De esta forma se obtienen:

Focos: $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$, vértices: $V_1(a, 0)$ y $V_2(-a, 0)$, extremos: $E_1(0, b)$ y $E_2(0, -b)$.

E1 Dada la ecuación de la hipérbola obtenga sus vértices, focos y extremos.

a) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$

b) $\frac{x^2}{25}-y^2=1$

Ejemplo Dada la ecuación de la hipérbola $9x^2-4y^2=36$, obtenga centro, vértices, focos y extremos.

La ecuación dada se transforma en la forma $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, dividiendo ambos lados por 36.

$$\frac{9x^2}{36}-\frac{4y^2}{36}=\frac{36}{36},\quad \text{es decir}\quad \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1,$$

de donde se obtiene $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$, luego $a=2$ y $b=3$.

Utilizando la expresión $c^2=a^2+b^2$, se obtiene que:

$$c^2=4+9=13,$$

por lo tanto $c=\sqrt{13}$, $(c>0)$.

Su centro es **(0, 0)**, los focos $\mathbf{F_1}$ **($\sqrt{13}$, 0)** y $\mathbf{F_2}$ **($-\sqrt{13}$, 0)**, vértices $\mathbf{V_1}$ **(2, 0)** y $\mathbf{V_2}$ **(−2, 0)** y extremos $\mathbf{E_1}$ **(0, 3)** y $\mathbf{E_2}$ **(0, −3)**.

E2 Dada las ecuaciones de las hipérbolas encuentre sus vértices, focos y extremos.

a) $4x^2-y^2=4$

b) $9x^2-16y^2=144$

Aprendizajes esperados

Determina elementos de hipérbolas cuyos focos están sobre el eje x a partir de su ecuación.

Secuencia:

En contenidos anteriores de esta sección se determinaron ecuaciones de hipérbolas a partir de elementos de estas. En este contenido y el próximo se abordará el caso recíproco: dada la ecuación de una hipérbola, determinar sus principales elementos.

En este contenido se consideran hipérbola cuyo eje focal es x, en el siguiente se tratarán hipérbola cuyo eje focal es y.

Puntos esenciales:

Identificar, a partir de la ecuación brindada, que la hipérbola tiene como eje focal a x analizando los denominadores de los términos cuadráticos.

Hacer notar que la relación pitagórica $c^2=a^2+b^2$ se utiliza para conocer las coordenadas de los focos.

Explicar que en los casos en los que el lado derecho de la ecuación de la hipérbola no sea 1, ambos lados deben dividirse por la constante que se muestre en dicho lado.

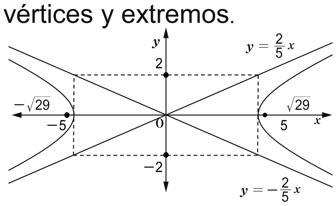
Recordar cómo están definidas las coordenadas de los vértices, focos y extremos de la hipérbola.

C3: Elementos de la hipérbola con focos en el eje x

P Dada la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1$, encuentre su centro, focos, vértices y extremos.

S $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1 \leftrightarrow \frac{x^2}{5^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$

$c=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{25+4}$
$=\sqrt{29}, (c>0)$



Elementos de la hipérbola:

Centro: $(0,0)$

Focos: $F_1(\sqrt{29},0)$ y $F_2(-\sqrt{29},0)$

Vértices: $V_1(5,0)$ y $V_2(-5,0)$

Extremos: $E_1(0,2)$ y $E_2(0,-2)$

C Para encontrar los elementos de una hipérbola dada su ecuación, se identifican a y b, y se calcula c.

E1 Obtenga vértices, focos y extremos de:

a) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$

$\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$ de donde $a=3$ y $b=2$

$c=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}, (c>0)$

Focos: $F_1(\sqrt{13},0)$ y $F_2(-\sqrt{13},0)$

Vértices: $V_1(3,0)$ y $V_2(-3,0)$

Extremos: $E_1(0,2)$ y $E_2(0,-2)$

Ej Dada la ecuación $9x^2-4y^2=36$, obtenga sus vértices, focos y extremos.

$\frac{9x^2}{36}-\frac{4y^2}{36}=\frac{36}{36}$ de donde $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$

$c=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}, (c>0)$

Focos: $F_1(\sqrt{13},0)$ y $F_2(-\sqrt{13},0)$

Vértices $V_1(2,0)$ y $V_2(-2,0)$

Extremos $E_1(0,3)$ y $E_2(0,-3)$

E2 Encuentre vértices, focos y extremos de la hipérbola: a) $4x^2-y^2=4$.

Contenido 4

Elementos de la hipérbola con focos en el eje y

Aprendizajes esperados

Determina elementos de hipérbolas cuyos focos están sobre el eje y a partir de su ecuación.

Secuencia:

En el contenido anterior se determinaron los elementos principales de una hipérbola con eje focal x, a partir de su ecuación. En este se consideran hipérbolas cuyo eje focal es y, y a partir de su ecuación se determinan focos, vértices y extremos de esta cónica.

Puntos esenciales:

Identificar, a partir de la ecuación brindada, que la hipérbola tiene como eje focal a y analizando los denominadores de los términos cuadráticos.

Hacer ver que nuevamente la relación pitagórica $c^2 = a^2 + b^2$ se utiliza para conocer las coordenadas de los focos.

Insistir en que en los casos en los que el lado derecho de la ecuación de la hipérbola no sea 1, ambos lados deben dividirse por la constante que se muestre en dicho lado.

Recordar cómo están definidas las coordenadas de los vértices, focos y extremos de la hipérbola, para así completar estos elementos satisfactoriamente.

Observar que las raíces cuadradas que se extraigan para determinar los valores de a, b o c serán positivas.

Contenido 4: Elementos de la hipérbola con focos en el eje y

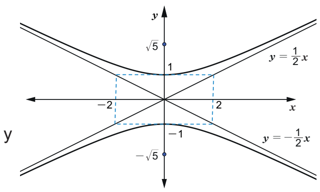
P

Dada la ecuación de la hipérbola $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$, obtenga su centro, focos, vértices y extremos.

S

La ecuación $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$, se lleva a la forma $\frac{y^2}{1^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1$, lo cual permite afirmar que $a = 1$ y $b = 2$. Se utiliza la expresión $c^2 = a^2 + b^2$, para obtener c, así se tiene

$c^2 = 1 + 4 = 5$, luego $c = \sqrt{5}$, $(c > 0)$



Por tanto, los elementos de la hipérbola dada son:

Centro: **(0, 0)**

Focos: $\mathbf{F_1}$ **(0, $\sqrt{5}$)** y $\mathbf{F_2}$ **(0, $-\sqrt{5}$)**

Vértices: $\mathbf{V_1}$**(0, 1)** y $\mathbf{V_2}$ **(0, −1)** y extremos: $\mathbf{E_1}$ **(2, 0)** y $\mathbf{E_2}$ **(−2, 0)**.

C

Para encontrar los elementos de una hipérbola cuyos focos están en el eje y, se identifican a y b a partir de la ecuación $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, calculándose después c mediante la fórmula, con $c > 0$. De esta forma se obtienen:

Focos: F_1 $(0, c)$ y F_2 $(0, -c)$, vértices: V_1 $(0, a)$ y V_2 $(0, -a)$, extremos: E_1 $(b, 0)$ y E_2 $(-b, 0)$.

E_1

Dada la ecuación de la hipérbola obtenga sus vértices, focos y extremos.

a) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$ b) $\frac{y^2}{25} - x^2 = 1$

Ejemplo

Dada la ecuación de la hipérbola $25y^2 - 4x^2 = 100$, obtenga centro, vértices, focos y extremos.

Para transformar la ecuación dada a la forma $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, se divide por 100 cada lado.

$$\frac{25y^2}{100} - \frac{4x^2}{100} = \frac{100}{100},$$

es decir $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{25} = 1$, transformándose esta en $\frac{y^2}{2^2} - \frac{x^2}{5^2} = 1$ luego $a = 2$ y $b = 5$.

Utilizando la expresión $c^2 = a^2 + b^2$, se tiene $c^2 = 4 + 25 = 29$ por lo tanto $c = \sqrt{29}$, $(c > 0)$

Su centro es **(0, 0)**, focos $\mathbf{F_1}$ **(0, $\sqrt{29}$)** y $\mathbf{F_2}$ **(0, $-\sqrt{29}$)**, vértices $\mathbf{V_1}$ **(0, 2)** y $\mathbf{V_2}$ **(0, −2)** y extremos $\mathbf{E_1}$ **(5, 0)** y $\mathbf{E_2}$ **(−5, 0)**.

E_2

Dadas las ecuaciones de la hipérbola encuentre sus vértices, focos y extremos.

a) $9y^2 - x^2 = 9$ b) $25y^2 - 16x^2 = 400$

113

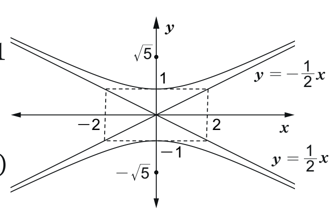
C4: Elementos de la hipérbola con focos en el eje y

(P) Dada la ecuación de la hipérbola $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$, encuentre su centro, focos, vértices y extremos.

(S) $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1 \leftrightarrow \frac{y^2}{1^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1$

$c = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4}$

$= \sqrt{5}, (c > 0)$



Elementos de la hipérbola:

Centro: $(0, 0)$

Focos: $F_1(0, \sqrt{5})$ y F_2 $(0, -\sqrt{5})$

Vértices: $V_1(0, 1)$ y V_2 $(0, -1)$

Extremos: $E_1(2, 0)$ y E_2 $(-2, 0)$

(C) Para encontrar los elementos de una hipérbola dada su ecuación, se identifican a y b, y se calcula c.

(E1) Obtenga vértices, focos y extremos de:

a) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$

$\frac{y^2}{3^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1$ de donde $a = 3$ y $b = 2$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}, (c > 0)$

Focos: $F_1(0, \sqrt{13})$ y F_2 $(0, -\sqrt{13})$

Vértices $V_1(0, 3)$ y V_2 $(0, -3)$

Extremos $E_1(2, 0)$ y $E_2(-2, 0)$

(Ej) Dada la ecuación $25y^2 - 4x^2 = 100$, obtenga sus vértices, focos y extremos.

$\frac{25y^2}{100} - \frac{4x^2}{100} = \frac{100}{100}$ de donde $\frac{y^2}{2^2} - \frac{x^2}{5^2} = 1$

$c = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}, (c > 0)$

Focos: $F_1(0, \sqrt{29})$ y F_2 $(0, -\sqrt{29})$

Vértices $V_1(0, 2)$ y V_2 $(0, -2)$

Extremos $E_1(5, 0)$ y E_2 $(-5, 0)$

(E2) Encuentre vértices, focos y extremos de la hipérbola con ecuación: a) $9y^2 - x^2 = 9$.

Prueba de Matemática 11mo (30 min.) Fecha: ____________

Unidad 5: Cónicas

Nombre: ______________________________ Sección: __________
Sexo: M / F

/ 20

1. Determine la ecuación de la parábola con: (2 puntos)

   Foco $F(5, 0)$ y directriz $x = -5$

2. Encuentre el vértice, eje de simetría, foco y directriz de la parábola $y^2 = 8x$.
   (1 punto × 4 = 4)

   Vértice:

   Eje de simetría:

   Foco:

   Directriz:

3. Determine la ecuación de la elipse con focos $F_1(3,0)$ y $F_2(-3,0)$, y vértices $V_1(5,0)$ y $V_2(-5,0)$. (2 puntos)

4. Encuentre vértices, focos y extremos de la elipse $25x^2 + 9y^2 = 225$.
   (1 punto × 3 = 3)

   Vértices:

   Focos:

   Extremos:

5. Determine la ecuación de la hipérbola y sus asíntotas, con focos $\mathrm{F}_1(5,0)$ y $\mathrm{F}_2(-5,0)$ y vértices $\mathrm{V}_1(4,0)$ y $\mathrm{V}_2(-4,0)$. (2 puntos × 2 = 4)

Ecuación de la hipérbola:

Asíntotas:

6. Dada la ecuación de la hipérbola $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$, encuentre su centro, focos, vértices, extremos y asíntotas. (1 puntos × 5 = 5)

Centro:

Focos:

Vértices:

Extremos:

Asíntotas:

Nombre: ______________________________

Unidad 6

Técnicas de Conteo y Probabilidades

Sección 1 Técnicas de conteo

Sección 2 Probabilidades

Contenido 1

Diagrama de árbol

Aprendizajes esperados

Diseña diagramas de árbol para la resolución de problemas.

Secuencia:

En muchas situaciones del entorno interesa determinar cuántas son las posibilidades de darse una acción programada. En matemática, la determinación de estas cantidades muchas veces se logra mediante las denominadas técnicas de conteo, en las que se encuentran combinaciones, permutaciones y algunas reglas (principios) de útil y fácil manejo.

En el estudio de las técnicas de conteo se partirá de un recurso gráfico que muestra todas las posibles ocurrencias de una determinada acción, el diagrama de árbol.

Puntos esenciales:

Inducir a la comprensión de que en el diagrama de árbol deben mostrarse todas las posibles ocurrencias de la acción programada, sin faltar alguna.

Insistir en que el orden de las posibilidades en el diagrama de árbol es importante: contemplar las posibilidades de una primera forma referida a la acción, a partir de estas continuar con las posibilidades de una segunda forma, luego con las de una tercera, hasta agotar las posibilidades referidas a la acción.

Sección 1: Técnicas de conteo

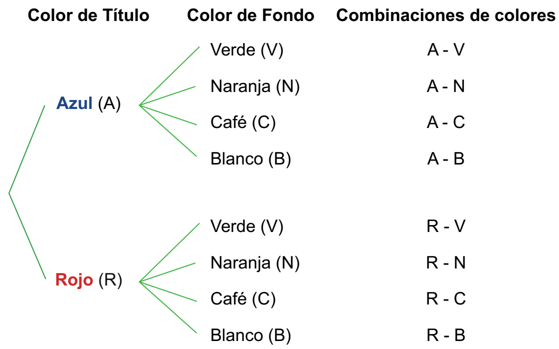
Contenido 1: Diagrama de árbol

P

Elías quiere diseñar la carátula de un libro cuyo título puede ser de color azul o rojo y el fondo verde, naranja, café o blanco. ¿Cuántas combinaciones de colores posibles hay para la carátula?

S

Una posible combinación para la carátula es el título en azul y fondo verde. Todas las posibles combinaciones se muestran en el siguiente diagrama:



En conclusión, se pueden realizar 8 combinaciones de colores para diseñar la carátula del libro.

C

Un diagrama de árbol es un recurso gráfico donde se muestran todas las posibles combinaciones de una acción programada, las cuales pueden llevarse a cabo en un número finito de formas. Se coloca una "rama" por cada posibilidad.

E1

Utilice un diagrama de árbol para resolver el siguiente problema:

Misael tiene una camisa azul y otra blanca y 3 corbatas de color amarillo, verde y café, respectivamente.

¿Cuántas formas de combinar una camisa y una corbata tiene Misael?

118

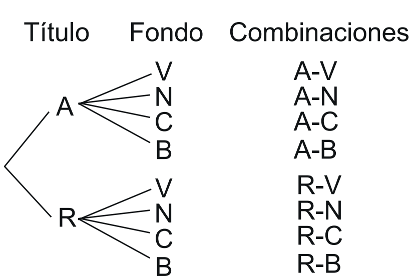
U6: Técnicas de conteo y probabilidad
S1: Técnicas de conteo
C1: Diagrama de árbol

P Título puede ser azul o rojo

Fondo puede ser verde, naranja, café o blanco

S Combinaciones para la carátula:

Azul: A Rojo: R Verde: V
Café: C Blanco: B Naranja: N

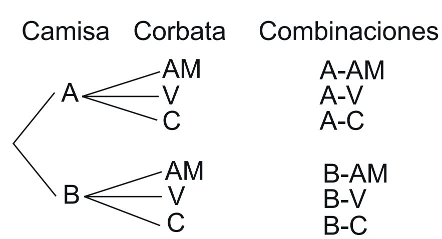


8 combinaciones para la carátula

C *Leer en el libro de texto.*

E1 Misael tiene una camisa azul y otra blanca y 3 corbatas de colores amarillo, verde y café. ¿Cuántas formas de combinar una camisa y una corbata tiene él?

Azul: A Blanco: B
Amarillo: AM Verde: V Café: C



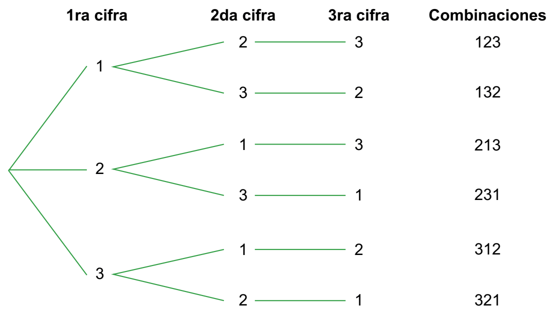
6 juegos puede usar

Contenido 1 Diagrama de árbol

Ejemplo Se requiere la formación de un solo número de tres cifras con los dígitos 1, 2, 3, sin repetición de alguno de estos, para abrir una cerradura de combinación instalada en una puerta. Encuentre el total de números de tres cifras que se deben formar si no se conoce la combinación correcta.

Si la primera cifra del número fuese 1, la segunda cifra sería 2 o 3. Si escogemos el 2, la tercera cifra es 3 obteniendo el arreglo 123. Pero si la segunda cifra fuese el número 3, la tercera cifra tendría que ser 2, es decir, formando el número 132.

En el siguiente diagrama de árbol se muestran las 6 cifras posibles dentro de las cuales se encuentra la combinación correcta para abrir la cerradura.



En conclusión, el total de arreglos posibles es **6**.

E2

Resuelva la siguiente situación utilizando un diagrama de árbol:
Rubén tiene 2 pantalones, 2 camisetas y 2 gorras, de colores azul y negro en cada caso.
¿Cuántos trajes de un pantalón, una camiseta y una gorra puede formar?

Aprendizajes esperados

Diseña diagramas de árbol para la resolución de problemas.

Secuencia:

En muchas situaciones del entorno interesa determinar cuántas son las posibilidades de darse una acción programada. En matemática, la determinación de estas cantidades muchas veces se logra mediante las denominadas técnicas de conteo, en las que se encuentran combinaciones, permutaciones y algunas reglas (principios) de útil y fácil manejo.

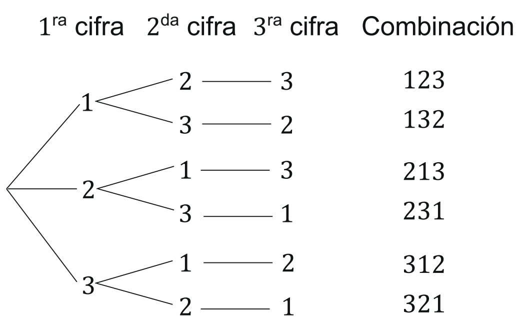
En el estudio de las técnicas de conteo se partirá de un recurso gráfico que muestra todas las posibles ocurrencias de una determinada acción, el diagrama de árbol.

Puntos esenciales:

Inducir a la comprensión de que en el diagrama de árbol deben mostrarse todas las posibles ocurrencias de la acción programada, sin faltar alguna.

Insistir en que el orden de las posibilidades en el diagrama de árbol es importante: contemplar las posibilidades de una primera forma referida a la acción, a partir de estas continuar con las posibilidades de una segunda forma, luego con las de una tercera, hasta agotar las posibilidades referidas a la acción.

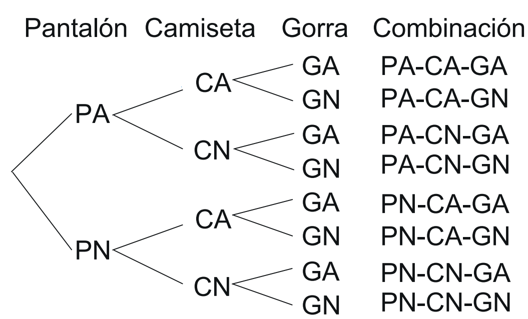
Ej ¿Cuántos números de tres cifras diferentes se pueden formar con las cifras $1, 2$ y 3 ?



Total de números: 6

E2 Rubén tiene 2 pantalones, 2 camisetas y 2 gorras, de colores azul y negro en cada caso. ¿Cuántos trajes puede formar?

Pantalón Azul: PA — Pantalón Negro: PN
Camiseta Azul: CA — Camiseta Negra: CN
Gorra Azul: GA — Gorra Negra: GN



8 trajes pueden formar

Contenido 2 Principio del conteo de la suma

Aprendizajes esperados

Aplica el principio de conteo de la suma en la resolución de problemas.

Secuencia:

En este contenido se enuncia una regla de conteo: Principio de conteo de suma, que puede utilizarse bajo la condición de que las formas de ocurrencia de las acciones en cuestión sean distintas. La comprensión de este será de utilidad en el estudio de eventos mutuamente excluyentes (sección 2 de esta unidad) y el cálculo de la probabilidad correspondiente a la unión de eventos de este tipo.

Puntos esenciales:

Explicar en la situación del problema la interpretación correcta de los pares ordenados de la tabla: la primera componente representa el número mostrado en la cara superior de uno de los dados y la segunda indica lo obtenido en la cara superior del otro.

Insistir en que el principio de suma debe aplicarse cuando las formas de ocurrencia para la situación A no forman parte de las que definen a la situación B, y viceversa.

Hacer notar que la suma al final de la solución del problema, da lugar a la que se muestra en la conclusión, atendiendo a las condiciones que deben satisfacerse.

Contenido 2: Principio del conteo de la suma

P Determine los posibles pares de números cuya suma sea 6 o 9, que se pueden obtener al lanzar 2 dados A y B.

S

A la derecha se muestran todos los resultados posibles al lanzar dos dados, representados como pares. Así, (1, 2) indica que el dado A cae en 1 y el dado B muestra 2 en la cara superior.

A \ B	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2,1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3,1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4,1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5,1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6,1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Suman 6

Suman 9

Hay 5 pares en los que la suma de los valores que aparecen en las caras es 6. Estos son:

(5,1), (4, 2), (3, 3), (2, 4) y (1, 5).

También, los pares cuyos componentes suman 9 son 4:

(6, 3), (5, 4), (4, 5) y (3, 6).

Se observa que los pares cuyos componentes suman 6 son diferentes de los que suman 9. Luego, el número de pares con componentes que suman 6 o 9 es

$$5+4=\mathbf{9}.$$

C

Si la acción A se puede realizar de m formas distintas y la acción B se puede realizar de n maneras distintas, y si las formas en las que puede ocurrir A son distintas de las de B, entonces se puede realizar la acción A o B de $m+n$ formas distintas.

Ejemplo Un cierto tipo de repuesto de automóvil se vende en 6 tiendas de Masaya y en 8 tiendas de Granada. Diga en cuántas tiendas se puede comprar el repuesto.

Se define la situación A: obtener el repuesto en Masaya, la cual puede ocurrir de 6 maneras, y B: obtener el repuesto en Granada, que puede darse de 8 formas, entonces el número total de tiendas en las que se puede obtener el repuesto es

$$6+8=\mathbf{14}.$$

E

Utilice el principio de conteo de la suma para resolver los siguientes ejercicios:

a) Si se lanzan dos dados, determine el número de casos posibles en los que la suma de los números de las caras es 7 u 11.

b) Un grupo escolar formado por 12 niñas y 14 niños desean elegir su presidente. ¿De cuántas maneras pueden hacer la elección?

c) Los grupos de décimo A y décimo B de un determinado Instituto constan de 43 y 38 alumnos respectivamente. ¿De cuántas maneras puede seleccionarse un estudiante de décimo A o de décimo B?

120

C2: Principio del conteo de la suma

P De cuántas maneras puede obtener un total de 6 o 9 en el lanzamiento de dos dados A y B.

S Pares cuya suma es 6

$$(5,1), (4,2), (3,3), (2,4) \text{ y } (1,5)$$

Pares cuya suma es 9

$$(6,3), (5,4), (4,5) \text{ y } (3,6)$$

El número de resultados sumando 6 o 9 es

$$5+4=9$$

C Principio de conteo de la suma

m formas de darse A

n formas de darse B

Si las formas en que ocurre A son distintas de las de B, entonces hay $m+n$ formas de darse A o B.

Ej De cuántas maneras puede obtener un repuesto que se vende en 6 tiendas en Masaya y 8 en Granada.

Total de formas para obtener el repuesto es:

$$6+8=14$$

E *Resuelva los ejercicios del LT.*

a) Lanzar dos dados. La suma es 7 u 11.
Casos cuya suma es 7: (6,1), (5,2), (4,3), (3,4), (2,5), (1,6)
Casos cuya suma es 11: (6,5), (5,6)
El número de resultados sumando 7 o 11 es

$$6+2=8$$

b) Cantidad de niñas: 12 Cantidad de niños: 14
Número de formas de elegir el presidente:

$$12+14=26$$

Contenido 3 Principio de conteo de la multiplicación

Contenido 3: Principio de conteo de la multiplicación

P ¿De cuántas maneras se puede escoger una vocal y una consonante de la palabra "canto"?

S La palabra "canto" tiene las vocales: a y o, y las consonantes c, n y t, es decir hay dos posibilidades de escoger una vocal:

a
o

Después de haber seleccionado una vocal, hay tres posibilidades de escoger una consonante:

c
n
t

Vocal	Consonante	Arreglos
a	c	a - c
	n	a - n
	t	a - t
o	c	o - c
	n	o - n
	t	o - t

El diagrama de árbol de la derecha muestra las 6 maneras de escoger primero una vocal y después una consonante. Este número coincide con el producto del número de formas de obtener una vocal (2) y el número de formas de obtener una consonante (3), es decir, (número de formas de escoger vocal) (número de formas de escoger consonante) = (2)(3) = 6.

C Si un suceso o evento A puede ocurrir de m maneras, y luego otro suceso B puede ocurrir de n maneras, entonces el total de formas en que ambos pueden ocurrir es $\boldsymbol{mn}$.

Si se tienen 3 o más sucesos, el número de formas en que estos pueden ocurrir simultáneamente es el producto de las formas de ocurrencia de cada uno.

Ejemplo Una heladería ofrece cono de sorbete con un solo sabor entre fresa, vainilla y chocolate y un único baño que puede ser caramelo o maní. Si Luis quiere comprar un cono de sorbete, ¿de cuántas maneras puede combinar sabores y baños?

Luis tiene 3 formas de elegir el sabor y 2 para escoger el baño del helado, de modo que cuenta con

$$(3)(2) = 6$$

formas de escoger sabores y baños.

E Utilice el principio de conteo de la multiplicación para resolver los siguientes problemas:

a) Un menú del día permite seleccionar un plato fuerte entre 5 y una bebida entre 3. ¿De cuántas formas distintas se puede solicitar una comida y bebida?

b) En una fábrica de zapatos de Masaya se elaboran 8 estilos de zapatos de mujer en 6 numeraciones distintas. ¿Qué cantidad debe comprar un comerciante para tener en su negocio de todos los estilos y tamaños?

121

Aprendizajes esperados

Aplica el principio de conteo de la multiplicación en la resolución de problemas.

Secuencia:

Esta unidad se inició con el estudio de diagramas de árbol. El orden establecido para el diseño de estos da lugar a deducir una expresión para la cantidad de posibilidades mostradas en el diagrama: el principio de conteo de la multiplicación, denominado así porque dicha expresión no es más que una multiplicación. Claro, no es necesario diseñar un diagrama de árbol para aplicar el principio de conteo de multiplicación.

Puntos esenciales:

Recordar la formación de diagramas de árboles.

Establecer la relación entre la cantidad total de posibilidades que brinda el diagrama de árbol y el total que corresponde a cada etapa (una multiplicación).

Insistir en que el principio de conteo ha de aplicarse cuando se tienen dos o más sucesos y para cada uno el total de ocurrencias correspondientes.

Procurar definir correctamente en cada ejercicio propuesto los sucesos implicados y la cantidad total de ocurrencias correspondiente.

C3: Principio de conteo de multiplicación

P De cuántas maneras se puede escoger una vocal y una consonante de la palabra "canto".

S Vocales: a, o Consonantes: c, n, t

Vocal	Consonante	Arreglos
a	c	a-c
	n	a-n
	t	a-t
o	c	o-c
	n	o-n
	t	o-t

Resp. De $2 \times 3 = 6$ maneras

C Principio de conteo de la multiplicación

m formas de darse A n formas de darse B

Formas en que ambas pueden ocurrir es $\boldsymbol{mn}$

Ej Sabores: fresa, vainilla o chocolate $\Longrightarrow$ 3 formas
Recubrimiento: caramelo o maní $\Longrightarrow$ 2 formas

Total de formas para hacer el helado es:
$$3 \times 2 = 6$$

E a) Hay 5 tipos de comida y 3 tipos de bebida. ¿De cuántas formas se puede solicitar una comida y bebida?

$5 \times 3 = 15$

b) Hay 8 estilos de zapato y 6 numeraciones. ¿Qué cantidad debe comprar el comerciante para tener todos los estilos y tamaños?

$$8 \times 6 = 48$$

Contenido 4 Factorial de un número natural

Aprendizajes esperados

Aplica el concepto de factorial de un número en la resolución de ejercicios.

Secuencia:

En este contenido se introduce la noción de número factorial de un número natural, el cual se emplea en el cálculo del total de permutaciones y combinaciones, que son técnicas de conteo que se estudiarán en contenidos posteriores en esta unidad.

El número $n!$ se identificará posteriormente con el total de permutaciones posibles cuando se toman n objetos.

Puntos esenciales:

Explicar la definición de número factorial estableciendo que solo deben calcularse multiplicaciones con factores que parten desde el número dado hasta 1, decreciendo cada factor en una unidad.

Inducir a la comprensión de que 0! y 1! son casos especiales en los que no hay que efectuar multiplicaciones, sino simplemente recordar que el valor de ambos es 1.

Recordar, si es necesario con más de un ejemplo, el valor posicional para las cifras de un número natural: centenas, decenas, unidades.

Insistir que en los arreglos del problema central o los planteados como ejercicios, importa el orden de los objetos que se combinen.

Contenido 4: Factorial de un número natural

Definición

Factorial de un número natural

El factorial de un número natural n, denotado por $n!$, se define como

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1).$$

El símbolo $n!$ se lee "n factorial". En particular,

$$0! = 0 \quad \text{y} \quad 1! = 1$$

Ejemplo Complete las casillas con los factoriales restantes:

$1! = 1$	$2! = (2)(1) = 2$	$3! =$	$4! =$	$5! =$

Al calcular 3! , 4! y 5! se obtiene

$3! = (3)(2)(1) = 6$ $\quad$ $4! = (4)(3)(2)(1) = 24$ $\quad$ $5! = (5)(4)(3)(2)(1) = 120$

De modo que la tabla completa es

$1! = 1$	$2! = (2)(1) = 2$	$3! = \mathbf{6}$	$4! = \mathbf{24}$	$5! = \mathbf{120}$

E1

Calcule 6! y 7!

P

¿Cuáles y cuántos números de tres cifras diferentes se pueden formar utilizando los dígitos 1, 2 y 3?, ¿importa el lugar que ocupa cada cifra en los arreglos encontrados? Recuerde la escritura de un número de tres cifras en centenas, decenas y unidades: | C | D | U |

S

Arreglos que inician con 1: 123, 132 $\quad$ Arreglos que inician con 2: 213, 231 $\quad$ Arreglos que inician con 3: 312, 321

Se tienen 6 números de tres cifras, lo cual se verifica aplicando el principio de la multiplicación: Se puede ubicar cualquiera de los 3 dígitos en la posición de las centenas, ocupada esta posición quedan 2 para las decenas, y luego de esto solamente 1 para las unidades:

Centenas		Decenas		Unidades	
3	$\times$	2	$\times$	1	$= \mathbf{6}$

$3! = (3)(2)(1) = 6$

El lugar que ocupa cada dígito es importante porque se generan diferentes arreglos.

C

El total de arreglos que se pueden hacer con n elementos distintos, en los que importa el orden, es $n!$.

E2

a) ¿Cuántos y cuáles arreglos pueden obtenerse con las letras de la palabra "paz"?
b) En una clase de danza participan 5 bailarines. ¿De cuántas maneras pueden colocarse en fila?
c) ¿De cuántas formas se puede confeccionar una bandera de 4 franjas de distinto color cada una?
d) El dueño de una librería desea exponer en un escaparate 6 banderines correspondientes a 6 países. ¿De cuántas maneras puede hacerlo si los quiere colocar en fila?

C4: Factorial de un número natural

Def. $n! = n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)$

$0! = 0 \quad 1! = 1$

$n!$ Se lee "n factorial"

Ej Encuentre $3! \quad 4! \quad 5!$

$3! = (3)(2)(1) = 6$

$4! = (4)(3)(2)(1) = 24$

$5! = (5)(4)(3)(2)(1) = 120$

E1 Encuentre: $6! \quad 7!$

$6! = (6)(5)(4)(3)(2)(1) = 720$

$7! = (7)(6)(5)(4)(3)(2)(1) = 5040$

P ¿Cuáles y cuántos números de tres cifras diferentes puede formar utilizando los dígitos $1, 2$ y 3?

S Se coloca cualquiera de los 3 dígitos en las centenas. Quedan 2 posibilidades para las decenas. Queda 1 posibilidad para las unidades.

C		D		U	
3	$\times$	2	$\times$	1	$= 6$

$\boxed{3! = (3)(2)(1) = 6}$

Arreglos: 123 , 132 , 213 ,231 ,312 ,321

C El total de arreglos con n elementos distintos, en los que importa el orden es $n!$

E2 *Resuelva los ejercicios del libro de texto.*

a) $3! = 6$

Arreglos: paz, pza, zap, zpa, azp, apz

b) $5! = 120$ $\quad$ c) $4! = 24$ $\quad$ d) $6! = 720$

Contenido 5 Permutaciones

Contenido 5: Permutaciones

P ¿Cuántos números de 3 cifras diferentes se pueden formar 1, 2, 3, 4 y 5, si no se permite la repetición de estos?

S Se aplica el principio de la multiplicación:

	Centenas		Decenas		Unidades	
5 dígitos pueden ubicarse →	5	×	4	×	3	= 60
		Solo 4 pueden ubicarse			Solo 3 pueden ubicarse	

Se pueden formar 60 números de tres cifras con los dígitos dados. Cada número que se obtiene representa una permutación de 3 dígitos tomados de un total de 5. Luego, el número de arreglos es

$$_5P_3 = \underbrace{(5)(4)(3)}_{\text{Se toman 3 factores}} = 60.$$

C Una permutación es un arreglo sin repeticiones de todos o parte de los elementos de un conjunto para el cual importa el orden.
El número de permutaciones de n objetos distintos tomando r a la vez es

$$_nP_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{ factores}}$$

También podemos calcular $_nP_r$ mediante $_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Cuando $n = r$, $_nP_n = n!$

Ejemplo 1 Calcule $_6P_4$.

En este caso $n = 6$, $r = 4$. De modo que

$$_6P_4 = (6)(5)(4)(3) = 360.$$

E1 Calcule $_6P_2$, $_5P_4$ y $_8P_5$.

Ejemplo 2 Es necesario elegir al presidente, vicepresidente, secretario y vocal de un comité sindical formado por 8 personas. ¿De cuántas formas se puede efectuar esta elección si cada miembro del comité puede ocupar solo un cargo?

Se debe hallar el número de arreglos sin repetición de 8 elementos tomados de a 4. Es importante saber que cada cargo es ocupado por exactamente una de las ocho personas. De modo que, siendo $n = 8$ y $r = 4$ se tiene

$$_8P_4 = (8)(7)(6)(5) = 1680.$$

Luego, hay **1 680** formas en que se puede efectuar la elección.

E2

a) ¿Cuántos arreglos de 3 letras se pueden formar con las letras S, A, M, K, si no se permite la repetición de estas?

b) ¿De cuántas formas se puede confeccionar una bandera de 4 franjas de distintos colores si se tiene telas de 5 colores distintos?

123

Aprendizajes esperados

Aplica el concepto de permutación en la resolución de ejercicios.

Secuencia:

En el contenido anterior se abordó un problema referido a la cantidad de números de 3 cifras diferentes que se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3 y el resultado se asoció a $n!$. En este contenido se aborda una situación similar, pero considerando un mayor número de dígitos disponibles, para dar lugar al concepto de permutación de n objetos tomando r a la vez.

Este concepto requiere del factorial de un número natural y también está asociado al cálculo de combinaciones que se abordará luego.

Puntos esenciales:

Inducir a la comprensión del uso de $_nP_r$, explicando que, partiendo del número n, se multiplicarán r factores en decrecimiento de una unidad.

Insistir, para el concepto de permutación en una situación dada, que el orden de los objetos es importante.

Inducir a la familiarización con este concepto primeramente con el cálculo de $_nP_r$ y luego aplicar esta expresión en la solución de problemas.

C5: Permutaciones

P ¿Cuántos números de 3 cifras diferentes se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5?

S Principio de multiplicación

Centenas		Decenas		Unidades	
5	×	4	×	3	= 60
5 dígitos pueden ubicarse		4 pueden ubicarse		3 pueden ubicarse	

$$_5P_3 = (5)(4)(3) = 60$$

Se pueden formar 60 números de tres cifras.

C *Leer concepto de permutación*

$$_nP_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{ factores}}$$

También puede usar: $_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

Ej1 Calcule $_6P_4$

$n = 6,\ r = 4 \Longrightarrow {}_6P_4 = (6)(5)(4)(3) = 360$

E1 a) $_6P_2$ b) $_5P_4$

a) $n = 6,\ r = 2 \Longrightarrow {}_6P_2 = (6)(5) = 30$

b) $n = 5,\ r = 4 \Longrightarrow {}_5P_4 = (5)(4)(3)(2) = 120$

Ej2 *Leer ejemplo*

$n = 8,\quad r = 4 \Longrightarrow {}_8P_4 = (8)(7)(6)(5) = 1680$

1680 formas en que se puede efectuar la elección

E2 a) ¿Cuántos arreglos de 3 letras se pueden formar con S, A, M, K, si no se permite la repetición de estas?

$n = 4,\quad r = 3 \Longrightarrow {}_4P_3 = (4)(3)(2) = 24$

24 arreglos se pueden formar

Contenido 6 Permutaciones circulares

Aprendizajes esperados

Aplica el concepto de permutación circular en la resolución de ejercicios.

Secuencia:

En el contenido anterior se dio inicio al estudio de permutaciones, las cuales representan un concepto fundamental en las técnicas de conteo. Entre las permutaciones existen algunas especiales, las denominadas circulares, en las que los arreglos precisamente están sujetos a la formación de una situación u objeto circular.

Para el cálculo del número de permutaciones circulares nuevamente se requerirá el uso del factorial de un número natural.

Puntos esenciales:

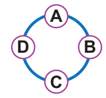
Aclarar que en los casos de permutaciones circulares no existe un primer o último elemento, porque el arreglo es circular. También debe auxiliarse de los diagramas dados en la solución del problema para poder identificar cuáles son realmente las formas o arreglos distintos posibles en permutaciones circulares.

Explicar adecuadamente la relación entre el total de permutaciones circulares y la cantidad de objetos dados mediante la expresión $(n-1)!$, derivándose de la solución del problema.

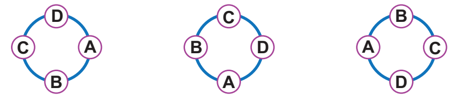
Contenido 6: Permutaciones circulares

P ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar 4 personas alrededor de una mesa circular?

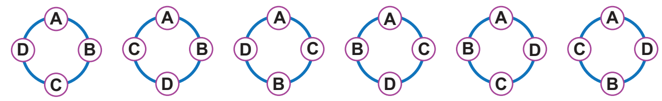
S Se denota por A, B, C, D las 4 personas. Una manera de que estas ocupen la mesa es



Sin embargo, este arreglo no difiere de los siguientes



ya que en esta situación no existe una primera o última posición, solo interesa quién se sienta a la "izquierda" y quién a la "derecha" de cada una de las personas. Por ejemplo, si se fija A en una misma posición, los 3 restantes pueden ubicarse de $3!=(3)(2)(1)=6$ maneras, de modo que las formas distintas en las que pueden sentarse 4 personas son 6:



Nótese que el total de arreglos diferentes para ubicar 4 personas en forma circular es

$$6=(3)(2)(1)=3!=(\underbrace{4}_{\text{Total de personas}}-1)!$$

Es decir, $(4-1)!=\mathbf{6}$.

C El número de permutaciones o arreglos circulares de n objetos distintos es igual a $(n-1)!$.

Ejemplo ¿De cuántas maneras pueden sembrarse 6 árboles de distintas especies alrededor de una rotonda de Managua?

Dado que los arreglos a formar son circulares, se calcula el número de permutaciones circulares con $n=6$:

$$(6-1)!=5!=(5)(4)(3)(2)(1)=120.$$

En total se tienen **120 formas** de sembrarse 6 árboles en torno a una rotonda de la capital.

E Resuelva los siguientes problemas:

a) Una familia de 3 personas almuerza diariamente en una mesa circular. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar alrededor de la mesa?

b) Juan, Pedro, Jesús y Alberto se reúnen a jugar dominó, ¿de cuántas maneras pueden sentarse a la mesa de juego, si esta es de forma circular?

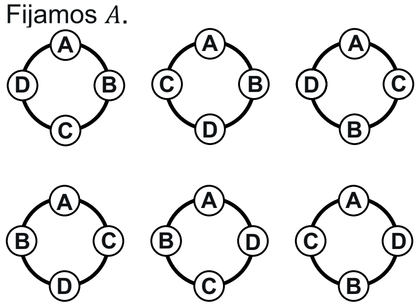
124

C6: Permutaciones circulares

P ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar 4 personas en una mesa circular?

S A, B, C, D las 4 personas

Fijamos A.



Se pueden sentar de $3!=(3)(2)(1)=6$ formas.

C El número de arreglos circulares de n objetos distintos es igual a $(n-1)!$.

Ej ¿De cuántas maneras pueden sembrarse 6 árboles distintos alrededor de una rotonda de Managua?

$n=6 \Longrightarrow (6-1)!=5!=120$

De 120 maneras diferentes pueden sembrarse.

E a) 3 personas almuerzan en una mesa circular. ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse?

$n=3 \Longrightarrow (3-1)!=2!=2$

De 2 maneras diferentes pueden sentarse a almorzar.

b) 4 personas juegan dominó en una mesa circular, ¿de cuántas maneras diferentes pueden sentarse?

$n=4 \Longrightarrow (4-1)!=3!=6$

De 6 maneras diferentes pueden sentarse a jugar.

Contenido 7 Combinaciones (1)

Contenido 7: Combinaciones (1)

P Se tienen 4 fichas de colores: Azul, Rojo, Verde y Café. ¿Cuántos arreglos diferentes se pueden realizar tomando tres de estas fichas?

S Se observa que el orden en los arreglos a efectuar no es importante, ya que, por ejemplo, no hay diferencia en los arreglos

Azul – Rojo – Verde y Azul – Verde – Rojo

Tomando 3 de los colores dados, se tienen 3! = 6 arreglos indistintos. Utilizando la notación Azul: A, Rojo: R, Verde: V y Café: C, se tiene que los arreglos diferentes son solamente 4: ARV, AVC, ARC, RVC. Cada uno de estos tiene asociados 6 arreglos indistintos:

4 arreglos diferentes	Arreglos indistintos							
ARV	3!	ARV	AVR	RAV	RVA	VAR	VRA	$24 = {}_4P_3$
AVC	3!	AVC	ACV	CAV	CVA	VAC	VCA	
ARC	3!	ARC	ACR	RAC	RCA	CAR	CRA	
RVC	3!	RVC	RCV	VRC	VCR	CRV	CVR	

Por lo anterior:

$$(4)(3!) = 24 = {}_4P_3.$$

Es decir,

$$\frac{{}_4P_3}{3!} = 4.$$

C Una combinación es un arreglo, en el que no importa el orden, de r objetos seleccionados sin repetir de entre n objetos distintos.

El número de combinaciones de n objetos distintos, tomando r a la vez, denotado por ${}_nC_r$, está dado por la fórmula

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}.$$

Ejemplo Calcule ${}_5C_3$.

En este caso $n = 5$, $r = 3$. De modo que

$${}_5C_3 = \frac{{}_5P_3}{3!} = \frac{(5)(4)(\cancel{3})}{(\cancel{3})(2)(1)} = \frac{20}{2} = 10.$$

E Calcule el total de combinaciones en cada caso:

a) ${}_6C_2$ b) ${}_6C_4$ c) ${}_7C_4$

125

Aprendizajes esperados

Deduce el concepto de combinación y la expresión para el cálculo del total de combinaciones posibles entre n objetos distintos.

Secuencia:

En contenidos anteriores se ha hecho estudio de las permutaciones, que son arreglos en los que sí importa el orden de los objetos. En este contenido se consideran otros arreglos en los que el orden de los objetos no es importante, denominados combinaciones.

El cálculo del total de combinaciones requiere de la ya conocida expresión ${}_nP_r$. Las combinaciones se aplican en muchas situaciones del entorno, lo cual se pondrá de manifiesto en contenidos posteriores.

Puntos esenciales:

Hacer notar que la solución del problema central requiere de:

- ✓ Comprensión de que muchos arreglos son indistintos aunque el orden de los objetos sea diferente.
- ✓ Por cada arreglo diferente existen arreglos indistintos.
- ✓ Los 24 arreglos (entre diferentes e iguales) equivale a ${}_4P_3$.
- ✓ Del esquema se debe deduce la igualdad $(4)(3!) = {}_4P_3$ y el factor 4 es el total de combinaciones diferentes que puede realizarse con las 4 fichas tomando 3.

C7: Combinaciones (1)

P 4 fichas de colores azul, rojo, verde y café. ¿Cuántos arreglos diferentes se pueden realizar tomando tres fichas?

S El orden de 3 fichas no es importante

Por cada arreglo hay $3! = 6$ arreglos indistintos

(ej. ARV AVR RAV RVA VAR VRA)

Solo existen 4 arreglos diferentes:

ARV ARC AVC RVC

Total de arreglos es $6 + 6 + 6 + 6 = 24$.

$$24 = (4)(3)(2) = {}_4P_3 = (4)(3!)$$

Arreglos diferentes $4 = \frac{{}_4P_3}{3!}$

C Una combinación es un arreglo, en el que no importa el orden, de r objetos seleccionados sin repetir de entre n objetos distintos.

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$$

Ej Calcule ${}_5C_3$.

$$n = 5, r = 3 \Longrightarrow {}_5C_3 = \frac{{}_5P_3}{3!} = \frac{(5)(4)(3)}{(3)(2)(1)} = 10$$

E Calcule: a) ${}_6C_2$ b) ${}_6C_4$

a) $n = 6, r = 2 \Longrightarrow {}_6C_2 = \frac{{}_6P_2}{2!} = \frac{(6)(5)}{(2)(1)} = 15$

b) $n = 6, r = 4 \Longrightarrow {}_6C_4 = \frac{{}_6P_4}{4!} = \frac{(6)(5)(4)(3)}{(4)(3)(2)(1)} = 15$

Contenido 8 Combinaciones (2)

Aprendizajes esperados

Aplica el concepto de combinación en la resolución de ejercicios.

Secuencia:

En el contenido anterior se dedujo la fórmula $_nC_r = \frac{_nP_r}{r!}$, para el cálculo de combinaciones diferentes de n objetos tomando r a la vez. Esta requiere del cálculo de permutaciones y del factorial de un número natural, estudiados en contenidos precedentes. Veremos en este contenido la aplicación de las combinaciones en situaciones del entorno.

Puntos esenciales:

Hacer notar que el primer ejemplo y los ejercicios propuestos a continuación de este requieren la deducción de que se calculará el total de combinaciones, y no el de permutaciones. Insístase en esta diferencia de conceptos.

El ejemplo 2 y los ejercicios propuestos a continuación de este requieren un análisis mayor puesto que en el total de objetos se identifican dos clases disjuntas y en cada una de ellas se calculan combinaciones. También, se debe recordar el enunciado del principio de conteo de la multiplicación.

Contenido 8: Combinaciones (2)

Ejemplo 1 ¿Cuántos comités distintos, integrados por 3 personas, se pueden formar a partir de un grupo de 6 personas?

El orden de selección para formar un comité no es relevante. Luego, se debe calcular el número de combinaciones de 6 objetos, tomando 3 a la vez:

$$_6C_3 = \frac{_6P_3}{3!} = \frac{(6)(5)(4)}{(3)(2)(1)} = \frac{120}{6} = 20.$$

Por tanto, se pueden formar **20 comités distintos** a partir de un grupo de 6 personas.

E1

Resuelva los siguientes problemas:

a) Se han seleccionado 7 personas para distribuirles 4 premios. ¿De cuántas maneras puede realizarse esta asignación, si cada persona puede recibir un solo premio?

b) Una señora tiene 10 vestidos y en su viaje de vacaciones quiere llevar consigo 6 de ellos. ¿De cuántas maneras puede seleccionarlos?

Ejemplo 2 ¿De cuántas maneras puede integrarse un concejo municipal formado por 3 hombres y 2 mujeres, si estos deben ser escogidos entre 6 hombres y 5 mujeres?

Se deben seleccionar 3 hombres de un total de 6, para ser miembros del concejo, lo cual se puede efectuar de $_6C_3$ formas. En el caso de las mujeres, se seleccionarán 2 de un total de 5, lo cual se puede efectuar de $_5C_2$ formas.

Por el principio de la multiplicación, el número de formas que puede integrarse el concejo es:

$$\underbrace{_6C_3}_{\text{Formas de seleccionar hombre}} \cdot \underbrace{_5C_2}_{\text{Formas de seleccionar mujer}} = \frac{_6P_3}{3!} \cdot \frac{_5P_2}{2!} = \frac{(6)(5)(4)}{(3)(2)(1)} \cdot \frac{(5)(4)}{(2)(1)} = (20)(10) = 200.$$

En conclusión, se tienen **200 maneras** de conformar el concejo.

E2

Resuelva los siguientes problemas:

a) En una estantería hay 6 libros diferentes de matemáticas y 3 de física, también diferentes. Si queremos seleccionar 2 de cada área, ¿de cuántas maneras se puede hacer?

b) En una fiesta escolar hay 8 niñas y 10 niños. ¿De cuántas maneras se pueden escoger de entre ellos 4 parejas de niños y niñas para un baile?

126

C8: Combinaciones (2)

Ej1 ¿Cuántos comités distintos de 3 personas, se forman a partir de un grupo de 6 personas?

$$n = 6, r = 3 \Longrightarrow {_6C_3} = \frac{_6P_3}{3!} = \frac{(6)(5)(4)}{(3)(2)(1)} = 20$$

Se pueden formar 20 comités.

E1 *Resuelva los ejercicios del E1*

a) $n = 7, r = 4 \Longrightarrow {_7C_4} = \frac{_7P_4}{4!} = \frac{(7)(6)(5)(4)}{(4)(3)(2)(1)} = 35$

De 35 maneras.

b) $n = 10, r = 6 \Longrightarrow {_{10}C_6} = \frac{_{10}P_6}{6!}$

$$= \frac{(10)(9)(8)(7)(6)(5)}{(6)(5)(4)(3)(2)(1)} = 210$$

De 210 maneras.

Ej2 Seleccionar 3 hombres de un total de 6: $_6C_3$

Seleccionar 2 mujeres de un total de 5: $_5C_2$

Por el principio de multiplicación

$$_6C_3 \cdot {_5C_2} = \frac{_6P_3}{3!} \cdot \frac{_5P_2}{2!} = \frac{(6)(5)(4)}{(3)(2)(1)} \cdot \frac{(5)(4)}{(2)(1)}$$
$$= (20)(10) = 200$$

200 maneras de conformar el comité

E2 *Resuelva el inciso a) del E2.*

a) Seleccionar 2 LM de un total de 6: $_6C_2$

Seleccionar 2 LF de un total de 3: $_3C_2$

$$_6C_2 \cdot {_3C_2} = \frac{_6P_2}{2!} \cdot \frac{_3P_2}{2!} = \frac{(6)(5)}{(2)(1)} \cdot \frac{(3)(2)}{(2)(1)}$$
$$= (15)(3) = 45$$

De 45 maneras puede hacerse.

Contenido 9 Combinaciones (3)

Contenido 9: Combinaciones (3)

Anteriormente se encontró que el número de combinaciones de r objetos seleccionados sin repetir entre n objetos distintos es

$$_nC_r = \frac{_nP_r}{r!}. \quad ①$$

Pero se sabe que

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}, \quad ②$$

de modo que, al sustituir ② en ①, se obtiene

$$_nC_r = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Luego, el total de combinaciones de r objetos tomados de n, está dado por

$$_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

P Calcule $_4C_2$ utilizando las expresiones $_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ y $_nC_r = \frac{_nP_r}{r!}$.

S En este caso $n = 4$, $r = 2$, de modo que

$$_4C_2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{(4)(3)\cancel{(2)}\cancel{(1)}}{(2)(1)\cancel{(2)}\cancel{(1)}} = \frac{12}{2} = 6.$$

Pero también

$$_4C_2 = \frac{_4P_2}{2!} = \frac{(4)(3)}{(2)(1)} = \frac{12}{2} = 6.$$

Con ambas fórmulas se obtiene **6** como resultado. Se observa que el cálculo del total de combinaciones se simplifica utilizando $_nC_r = \frac{_nP_r}{r!}$.

E1 En cada inciso calcule el total de combinaciones solicitado usando las fórmulas $_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ y $_nC_r = \frac{_nP_r}{r!}$.

a) $_4C_3$ b) $_5C_2$

Ejemplo Juan quiere regalar a Lucía 3 libros y elegirlos entre 6 que ella quiere leer. ¿De cuántas maneras puede escoger los tres libros?

Se debe calcular el total de combinaciones de los 6 libros tomando 3 a la vez, es decir:

$$_6C_3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{(6)(5)(4)\cancel{(3)}\cancel{(2)}\cancel{(1)}}{(3)(2)(1)\cancel{(3)}\cancel{(2)}\cancel{(1)}} = \frac{120}{6} = 20.$$

De manera que Juan tiene **20 formas** para elegir los libros a obsequiar.

E2 Resuelva los siguientes problemas sobre combinaciones:

a) ¿Cuántas opciones tiene Luis de escoger 2 asignaturas entre 6 optativas?

b) En un canal de televisión hay 7 presentadores de los cuales se deben escoger 3 para conducir un determinado programa. ¿De cuántas formas distintas se puede hacer esta escogencia?

127

Aprendizajes esperados

Resuelve problemas de aplicación utilizando el concepto de combinación.

Secuencia:

En este contenido se deduce una expresión para el cálculo de $_nC_r$ el cual se puede utilizar sin requerir el uso de $_nP_r$. Esta expresión se propone porque permitirá deducir la fórmula para el total de permutaciones de n objetos en los que hay repetición, las cuales se tratarán en el contenido siguiente.

Puntos esenciales:

Recordar que en la conclusión del contenido 5 se brindaron dos expresiones para el cálculo del total de permutaciones, una de estas es: $_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$. Esta fórmula permite deducir, mediante sustitución en $_nC_r = \frac{_nP_r}{r!}$ la igualdad $_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

Inducir a la comprensión de la equivalencia entre las fórmulas anteriores: con ambas obtendrá el mismo resultado.

Solicitar la comparación de la facilidad en los cálculos efectuados y aclarar que la expresión $_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ se usará esencialmente para deducir la fórmula de la conclusión en el contenido siguiente.

C9: Combinaciones (3)

Otra manera de calcular $_nC_r$.

$$_nC_r = \frac{_nP_r}{r!} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

(P) Calcule $_4C_2$ utilizando $_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ y $_nC_r = \frac{_nP_r}{r!}$.

(S) $$_4C_2 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{(4)(3)(2)(1)}{(2)(1)(2)(1)} = 6$$

$$_4C_2 = \frac{_4P_2}{2!} = \frac{(4)(3)}{(2)(1)} = 6$$

(E1) a) $_4C_3 = \frac{_4P_3}{3!} = \frac{(4)(3)(2)}{(3)(2)(1)} = 4$

$$_4C_3 = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = \frac{(4)(3)(2)(1)}{(3)(2)(1)(1)} = 4$$

(Ej) Regalar 3 libros de un total de 6 que le gustan. ¿De cuántas formas puede hacerlo?

$$_6C_3 = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = \frac{(6)(5)(4)(3)(2)(1)}{(3)(2)(1)(3)(2)(1)} = 20$$

De 20 maneras puede hacerlo.

(E2) a) Escoger 2 asignaturas entre 6 optativas. ¿De cuántas formas puede hacerlo?

$$_6C_2 = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{(6)(5)(4)(3)(2)(1)}{(2)(1)(4)(3)(2)(1)} = 15$$

De 15 maneras puede hacerlo.

b) Intervienen 3 presentadores de un total de 7. ¿De cuántas formas pueden presentar?

$$_7C_3 = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = \frac{(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1)}{(3)(2)(1)(4)(3)(2)(1)} = 35$$

De 35 maneras pueden presentar.

Contenido 10 Permutaciones con repetición

Aprendizajes esperados

Aplica la definición de permutación con repetición de elementos distintos en la resolución de problemas.

Secuencia:

En clases anteriores se dedujeron expresiones para el total de combinaciones y permutaciones, también se establecieron los llamados principios de conteo de suma y de multiplicación. Concluiremos el estudio de las técnicas de conteo considerando permutaciones de objetos en los que se permite repetición, es decir, al menos uno de estos aparece más de una vez. La fórmula que se muestra requiere de la expresión para las combinaciones: ${}_nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$.

Puntos esenciales:

Comparar en la explicación del problema a resolver, el que las permutaciones abordadas en contenidos anteriores se calculaban para objetos diferentes, y en este caso se permite repetición, pero siempre considerando el orden de los objetos.

Recordar el enunciado del principio de conteo de la multiplicación y la fórmula ${}_nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ estudiados en contenidos anteriores.

Contenido 10: Permutaciones con repetición

P Dos hermanos han decidido repartirse una propiedad que heredaron de su padre, para ello sembrarán en la línea divisoria árboles frutales en las siguientes cantidades: 2 de mango, 3 de aguacate y 2 de guayaba. ¿De cuántas maneras pueden plantarse los árboles?

S En la última columna de la tabla adjunta aparece el número de formas de colocar los árboles de cada especie frutal en la línea divisoria:

Árbol	Cantidad	Nro. de formas de colocarlos
Mango	2	${}_7C_2$
Aguacate	3	${}_5C_3$
Guayaba	2	${}_2C_2$

De los 7 espacios para plantar los árboles se seleccionan 2 para los mangos; esto puede hacerse de ${}_7C_2$ formas.

Quedan 5 posiciones, de las cuales se seleccionan 3 para los aguacates, de ${}_5C_3$ formas.

Quedan 2 espacios para las guayabas, que pueden ocuparse de ${}_2C_2$ formas.

Luego, aplicando el principio de la multiplicación se tiene

$$ {}_7C_2 \cdot {}_5C_3 \cdot {}_2C_2 = \frac{7!}{2!\cancel{5!}} \cdot \frac{\cancel{5!}}{3!2!} \cdot 1 \quad \longleftarrow {}_nC_n = 1$$

$$= \frac{7!}{2!3!2!} = \frac{(7)(6)(5)(4)\cancel{(3)}\cancel{(2)}\cancel{(1)}}{(2)\cancel{(1)}\cancel{(3)}(2)(1)(2)(1)} = \frac{840}{(2)(2)} = 210.$$

En conclusión, existen **210 formas** diferentes de plantar los 7 árboles.

C El número de permutaciones diferentes de n objetos de los cuales un objeto aparece n_1 veces, otro objeto aparece n_2 veces y así sucesivamente es

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}$$

siendo $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

Ejemplo ¿Cuántas secuencias de 8 letras se pueden formar con las letras x, x, x, y, y, y, c, c?

La cantidad de letras a considerar es 8, de las cuales, 3 son de un tipo, 3 de otro y 2 de un tercer tipo, de modo que el total de secuencias que se pueden formar es:

$$\frac{8!}{3!3!2!} = \frac{(8)(7)(6)(5)(4)\cancel{(3)}\cancel{(2)}\cancel{(1)}}{\cancel{(3)}\cancel{(2)}\cancel{(1)}(3)(2)(1)(2)(1)} = \frac{6\,720}{12} = \mathbf{560}.$$

E Resuelva los siguientes problemas:

a) ¿Cuántos números de 5 cifras se pueden formar en los cuales el 2 se repita 2 veces y el 3 aparezca 3 veces?

b) ¿De cuántas maneras se pueden alinear en un estante 2 libros de Matemáticas, 2 de Física y 3 de Historia si los libros de cada materia son iguales?

c) ¿Cuántas permutaciones diferentes se pueden formar utilizando las 8 letras de la palabra PARALELA?

128

C10: Permutaciones con repetición

P 2 de mango, 3 de aguacate y 2 de guayaba

Maneras de plantarse los árboles:

S Total de árboles: 7

Formas de colocar: los de mango es ${}_7C_2$

los de aguacate es ${}_5C_3$

los de guayaba es ${}_2C_2$

Principio de multiplicación

$$ {}_7C_2 \cdot {}_5C_3 \cdot {}_2C_2 = \frac{7!}{2!\,5!} \cdot \frac{5!}{3!\,2!} \cdot 1$$

$$= \frac{7!}{2!\,3!\,2!}$$

$$= \frac{(7)(6)(5)(4)\cancel{(3)(2)(1)}}{(2)(1)\cancel{(3)(2)(1)}(2)(1)}$$

$$= \frac{(7)(6)(5)(4)}{(2)(2)} = 210$$

C Objeto 1: n_1 veces, Objeto k: n_k $\quad n = n_1 + n_2 \cdots + n_k$

Número de permutaciones: $\dfrac{n!}{n_1!\,n_2! \cdots n_k!}$

Ej ¿Cuántas secuencias forma con x, x, x, y, y, y, c, c?

Total de elementos: 8

$$\frac{8!}{3!\,3!\,2!} = \frac{(8)(7)(6)(5)(4)\cancel{(3)(2)(1)}}{\cancel{(3)(2)(1)}(3)(2)(1)(2)(1)} = \frac{6720}{12} = 560$$

E a) El 2 aparece 2 veces y el 3 aparece 3 veces

Total de elementos: 5

$$\frac{5!}{2!\,3!} = \frac{(5)(4)(3)(2)(1)}{(2)(1)(3)(2)(1)} = \frac{120}{12} = 10$$

b) 2 de Matemática, 2 de física y 3 de historia

Total de elementos: 7

$$\frac{7!}{2!\,2!\,3!} = \frac{(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1)}{(2)(1)(2)(1)(3)(2)(1)} = \frac{5040}{24} = 210$$

Contenido 1 Definición de probabilidad teórica

Sección 2: Probabilidades

Contenido 1: Definición de probabilidad teórica

Definición

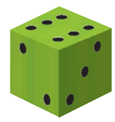
Espacio muestral y evento

Un espacio muestral E es un conjunto cuyos elementos son todos los resultados posibles de un experimento dado. Un evento A es cualquier subconjunto (*parte*) del espacio muestral.

P

En el lanzamiento de un dado no cargado se consideran los eventos
A: obtener un número impar y B: obtener un múltiplo de 4

a) Exprese como conjuntos los eventos A, B y el espacio muestral E asociado.
b) Encuentre las cardinalidades de los conjuntos.
c) ¿Qué es más probable obtener: un número impar o un múltiplo de 4?



S

a) Los resultados posibles en el lanzamiento de un dado son 1, 2, 3, 4, 5, 6, de modo que estos son los elementos del espacio muestral:

$$\mathrm{E}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Los números impares incluidos en el espacio muestral son 1, 3, 5 y múltiplo de 4 solo es el mismo 4. Luego, estos eventos quedan definidos respectivamente por

$$\mathrm{A}=\{1, 3, 5\} \quad \text{y} \quad \mathrm{B}=\{4\}.$$

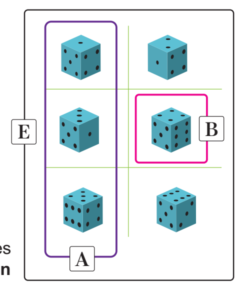
b) Hay 6 elementos en E, lo cual se representa como $n(\mathrm{E})=6$.

Hay 3 elementos en A y 1 elemento en B, lo cual se representa como $n(\mathrm{A})=3$ y $n(\mathrm{B})=1$.

Cardinalidad de conjuntos
$n(\mathrm{E})$: es la cantidad de elementos de E (Total de casos posibles)
$n(\mathrm{A})$: cantidad de elementos de A (Total de casos favorables)

c) Existen más casos favorables de ocurrencia de A que para B, luego, es más probable obtener un número impar. Esto se puede aclarar mediante los cocientes que aparecen en la última fila de la tabla siguiente:

	A: obtener un número impar	B: obtener un múltiplo de 4
Casos favorables	3	1
Total de casos	6	6
Cociente	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$



El cociente para la ocurrencia de A es mayor que el de B, es decir, es **más probable obtener un número impar que un múltiplo de 4** en el lanzamiento de un dado.

Aprendizajes esperados

Deduce y aplica la definición de probabilidad teórica en situaciones del entorno.

Secuencia:

En esta sección se estudia el concepto de probabilidad de un evento, deduciendo una definición para esto, y estableciendo luego propiedades para las probabilidades según se considere: eventos seguros, imposibles, unión e intersección de eventos, eventos independientes o mutuamente excluyentes, y el cálculo de la probabilidad de un evento, condicionado por la ocurrencia de otro.

Estos tópicos están vinculados con la teoría de conjuntos estudiada en 10mo grado.

Puntos esenciales:

Insistir en los siguientes hechos:

✓ El espacio muestral contiene todos los posibles resultados de un experimento.
✓ Los eventos forman parte del espacio muestral.
✓ Recuerde la notación de cardinalidad $n(\mathrm{A})$ estudiada en teoría de conjuntos.
✓ La expresión $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(E)}$ está sujeta a que todos los elementos de A tienen la misma oportunidad de ocurrir.
✓ Interprete siempre los resultados en el cálculo de probabilidades.

S2: Probabilidades
C1: Definición de probabilidad teórica

(D) Un espacio muestral E es un conjunto cuyos elementos son todos los resultados posibles de un experimento dado. Un evento A es cualquier subconjunto (*parte*) del espacio muestral.

(P) En el lanzamiento de un dado no cargado se consideran los eventos:
A: obtener u número impar
B: obtener un múltiplo de 4

(S) a) Exprese como conjuntos A, B y el espacio muestral E.

$$E=\{1,2,3,4,5,6\}$$

$$A=\{1,3,5\} \quad \text{y} \quad B=\{4\}$$

b) Encuentre las cardinalidades de los conjuntos.

$$n(E)=6, \quad n(A)=3 \quad \text{y} \quad n(B)=1.$$

c) ¿Qué es más probable obtener: un número impar o un múltiplo de 4?

Total de casos: 6

La razón para la ocurrencia de A y B : $\frac{3}{6}$ y $\frac{1}{6}$

Es más probable obtener un número impar que un múltiplo de 4.

(C) **Probabilidad de un evento A:**

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(E)}=\frac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número total de resultados posibles}}$$

(Ej) Una urna contiene 5 canicas blancas, 10 canicas verdes y 8 amarillas. Si se extrae una canica, determine la probabilidad de que sea verde.

$$n(E)=5+10+8=23$$

Para el evento A: extraer una canica verde,

$$n(A)=10$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(E)}=\frac{10}{23}.$$

Contenido 1 Definición de probabilidad teórica

Aprendizajes esperados

Deduce y aplica la definición de probabilidad teórica en situaciones del entorno.

Secuencia:

En esta sección se estudiará el concepto de probabilidad de un evento, deduciendo una definición para esto, y estableciendo luego propiedades para las probabilidades según se considere: eventos seguros, imposibles, unión e intersección de eventos, eventos independientes o mutuamente excluyentes, y el cálculo de la probabilidad de un evento, condicionado por la ocurrencia de otro.

Estos tópicos están vinculados con la teoría de conjuntos estudiada en 10mo grado.

Puntos esenciales:

Insistir en los siguientes hechos:

- ✓ El espacio muestral contiene todos los posibles resultados de un experimento.
- ✓ Los eventos forman parte del espacio muestral.
- ✓ Recuerde la notación de cardinalidad $n(A)$ estudiada en teoría de conjuntos.
- ✓ La expresión $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(E)}$ está sujeta a que todos los elementos de A tienen la misma oportunidad de ocurrir.
- ✓ Interprete siempre los resultados en el cálculo de probabilidades.

C

Definición de probabilidad
Dado el espacio muestral E asociado a un experimento en el que todos los elementos tienen la misma oportunidad de ocurrir, la probabilidad de que ocurra el evento A se denota por $P(A)$ y está dada por la razón

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(E)}=\frac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número de resultados posibles}}.$$

Ejemplo Una urna contiene 5 canicas blancas, 10 canicas verdes y 8 amarillas. Si se extrae una canica, calcule la probabilidad de que sea verde.

El espacio muestral lo constituyen todas las canicas, de modo que este posee $5+10+8=23$ elementos, es decir,

$$n(E)=23.$$

Se define el evento A: extraer una canica verde. Este consta de 10 casos favorables, de modo que

$$n(A)=10.$$

Por tanto,

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(E)}=\frac{10}{23}.$$

Es decir, la probabilidad de extraer una canica verde es $\mathbf{\frac{10}{23}}$.

E

Resuelva los siguientes problemas aplicando la definición de probabilidad.

a) En el lanzamiento de un dado, ¿qué es más probable obtener: un número par o un múltiplo de 3?

b) Una urna contiene 18 fichas marcadas cada una con un número de 1 a 18. Si se extrae una ficha, ¿cuál es la probabilidad de que esta muestre un múltiplo de 7?

c) Un recipiente consta de 9 pelotas de golf blancas, 8 verdes y 3 anaranjadas. Si se selecciona al azar una pelota del recipiente, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca?, ¿y de que una de estas sea verde?

131

E En el lanzamiento de un dado, ¿qué es más probable: obtener un número par o un múltiplo de 3?

Espacio muestral: $E=\{1,2,3,4,5,6\}$

Así, $n(E)=6$.

Sean

A: obtener un número par y
B: obtener un múltiplo de 3,

así,

$A=\{2,4,6\},\ n(A)=3,$ y
$B=\{3,6\},\ n(B)=2.$

De modo que,

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(E)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\qquad P(B)=\frac{n(B)}{n(E)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Es más probable obtener un número par.

Contenido 2 Aplicaciones del concepto de probabilidad teórica

Contenido 2: Aplicaciones del concepto de probabilidad teórica

Ejemplo 1 Calcule la probabilidad de que la suma de los números que aparecen en las caras superiores de dos dados que se lanzan sea 7.

Los 36 pares del espacio muestral E de este experimento se muestran en la tabla, es decir, $n(\mathrm{E}) = 36$

El evento definido como

A: la suma de los resultados es 7
consta de los 6 pares :
(6,1), (5, 2), (4, 3), (3, 4), (2, 5), (1, 6).

Así, $n(\mathrm{A}) = 6$ y

$$\mathrm{P(A)} = \frac{n(\mathrm{A})}{n(\mathrm{E})} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2,1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3,1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4,1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5,1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6,1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Suman 7

En conclusión, la probabilidad de obtener 7 como suma de los números de las caras en el lanzamiento de dos dados es $\frac{1}{6}$.

Ejemplo 2 Calcule la probabilidad de obtener 2 escudos y un número en el lanzamiento de tres monedas (N representa número en la moneda y E escudo).

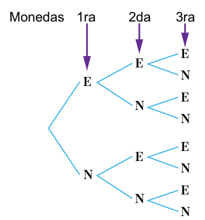
El diagrama de la derecha revela los 8 posibles resultados del experimento, de modo que el espacio muestral es

$$\mathrm{E} = \{\mathrm{EEE, EEN, ENE, ENN, NEE, NEN, NNE, NNN}\}.$$

Así, $n(\mathrm{E}) = 8$.

El evento A: obtener 2 escudos y 1 número, consta de los resultados: $\mathrm{EEN, ENE, NEE}$, de modo que $n(\mathrm{A}) = 3$.
Luego,

$$\mathrm{P(A)} = \frac{3}{8}.$$



Es decir, la probabilidad de obtener 2 escudos y 1 número es $\frac{3}{8}$.

E

Resuelva los siguientes problemas de aplicación:

1. Si se lanzan dos dados, calcule la probabilidad de que:
   a) Las dos caras de los dados tengan el mismo número.
   b) La suma de los números de las caras sea 8.
2. Se escoge una carta de una baraja de 52 cartas, ¿cuál es la probabilidad de seleccionar un as?
3. Determine la probabilidad de obtener un escudo y dos veces número en el lanzamiento de 3 monedas.

132

Aprendizajes esperados

Aplica la definición de probabilidad teórica en la resolución de problemas del entorno.

Secuencia:

En este contenido se analizan aplicaciones del cálculo de probabilidades en situaciones del entorno mediante el uso de la igualdad $\mathrm{P(A)} = \frac{n(\mathrm{A})}{n(\mathrm{E})}$.

Puntos esenciales:

Inducir a la comprensión de que para utilizar la expresión $\mathrm{P(A)} = \frac{n(\mathrm{A})}{n(\mathrm{E})}$ debe definirse correctamente el espacio muestral E asociado al experimento, el evento A, y para cada uno la cardinalidad correspondiente.

Mostrar que la representación gráfica del espacio muestral mediante una tabla o un diagrama de árbol resulta de mucha utilidad para determinar las cardinalidades respectivas de E y A.

Insistir en que la ejercitación mediante la solución de los ejercicios planteados en este contenido permitirá la familiarización con el uso de la igualdad $\mathrm{P(A)} = \frac{n(\mathrm{A})}{n(\mathrm{E})}$.

C2: Aplicaciones del concepto de probabilidad teórica

Ej1 Calcule la probabilidad de que la suma de los resultados en el lanzamiento de dos dados sea 7.

	1	2	3	4	5	6
1	$(1,1)$	$(1,2)$	...		$(1,5)$	$(1,6)$
2	$(2,1)$				$(2,5)$	$(2,6)$
3	...			$(3,4)$		
4			$(4,3)$			
5		$(5,2)$				
6	$(6,1)$					$(6,6)$

Suman 7

Espacio muestral: $n(E) = 6 \times 6 = 36$
Evento A: la suma de los resultados es 7:
$(6,1),\ (5,2),\ (4,3),\ (3,4),\ (2,5),\ (1,6)$.
Así, $n(A) = 6$.

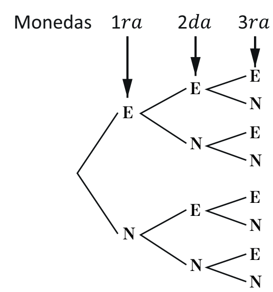
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Ej2 Calcule la probabilidad de obtener 2 escudos y un número en el lanzamiento de tres monedas (N representa número y E escudo).

Espacio muestral:

$$E = \begin{Bmatrix} EEE, EEN, ENE, ENN, \\ NEE, NEN, NNE, NNN \end{Bmatrix}.$$

Así, $n(E) = 8$.



Resultados para A: obtener 2 escudos y 1 número: $EEN,\ ENE,\ NEE$, de modo que $n(A) = 3$. Así,

$$P(A) = \frac{3}{8}.$$

E Si se lanzan dos dados, calcule la probabilidad de que los dados muestren el mismo resultado.

Resultados para A: los dados muestran el mismo resultado: $(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4),\ (5,5),\ (6,6)$. Así, $n(A) = 6$.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Contenido 3 Probabilidad de la unión de dos eventos

Aprendizajes esperados

Aplica la probabilidad de ocurrencia de la unión de dos eventos en la resolución de problemas del entorno.

Secuencia:

En el estudio de la teoría de conjuntos en décimo grado, se abordó la unión e intersección de conjuntos. En vista de que los eventos son subconjuntos de un espacio muestral asociado, a partir de estos se definen la unión e intersección de eventos, que dan lugar a las situaciones "obtener ____ y ____", y también "obtener ____ o ____", y por ende poder calcular la probabilidad correspondiente.

Puntos esenciales:

Hacer notar que la solución del problema planteado como un proceso, muestra la directriz que puede seguirse para la deducción y uso de la fórmula $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, primero calcular las probabilidades simples $P(A)$, $P(B)$ y luego la de la intersección $P(A\cap B)$ para luego sustituir en esta igualdad.

Tener en cuenta que un recurso gráfico de mucha utilidad es el diagrama de Venn para representar conjuntos y operaciones entre estos.

Sugerir que la igualdad anterior sea usada para determinar también $P(A\cap B)$ conocidos $P(A)$, $P(B)$ y $P(A\cup B)$ mediante un despeje y la sustitución pertinente.

Contenido 3: Probabilidad de la unión de dos eventos

P

Si se lanza un dado, calcule la probabilidad para cada evento dado:

a) A: obtener un número par.
b) B: obtener un múltiplo de 3.
c) $A\cap B$: obtener un número par y múltiplo de 3.
d) $A\cup B$: obtener un número par o un múltiplo de 3.

La intersección $A\cap B$ de A y B es el conjunto de los elementos comunes de A y B.

La unión $A\cup B$ es el conjunto de los elementos comunes y no comunes de A y B.

S

El espacio muestral de este experimento es $E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. De manera que $n(E)=6$.

a) Los números pares en E son 2, 4, 6, de modo que $A=\{2, 4, 6\}$, y por tanto $n(A)=3$. Entonces, la probabilidad de obtener un número par es

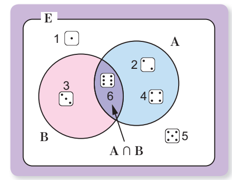
$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

b) Para el evento B: obtener un múltiplo de 3, se tienen 2 casos favorables: 3 y 6, de modo que $B=\{3, 6\}$ y por lo tanto $n(B)=2$. Luego,

$$P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

c) Nótese que hay un resultado común en los eventos A y B, que corresponde al evento: "número par y múltiplo de 3", esto es $A\cap B=\{6\}$. Por lo cual

$$P(A\cap B)=\frac{1}{6}.$$



d) El diagrama de la derecha muestra que para el evento $A\cup B$: "obtener un número par o un múltiplo de 3" se tiene 4 casos favorables: 2, 3, 4 y 6, de modo que $n(A\cup B)=4$,

$$P(A\cup B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Observe que

$$P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}=P(A\cup B)$$

es decir,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$

C

Regla de la adición (Probabilidad de la unión de dos eventos)

Dados dos eventos A y B cualesquiera,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$

133

C3: Probabilidad de la unión de dos eventos

(P) Si se lanza un dado, calcule la probabilidad de cada evento:

a) A: obtener un número par.
b) B: obtener un múltiplo de 3.
c) $A\cap B$: obtener un número par y múltiplo de 3.
d) $A\cup B$: obtener un número par o un múltiplo de 3.

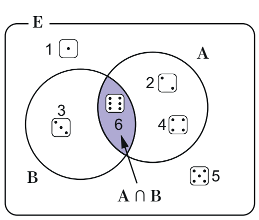
(S) $E=\{1,2,3,4,5,6\}$ y $n(E)=6$.

a) $A=\{2,4,6\}$, $n(A)=3$ así, $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$

b) $B=\{3,6\}$, $n(B)=2$ así, $P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$

d) $A\cap B=\{6\}$ y

$$P(A\cap B)=\frac{1}{6}.$$



c) $A\cup B=\{2,3,4,6\}$, $n(A\cup B)=4$. Así,

$$P(A\cup B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Nótese que

$$P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}=P(A\cup B)$$

(C) **Probabilidad de la unión de dos eventos**

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

(Ej) Si de una baraja de 52 cartas se extrae una al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esta sea un as o diamante?

$n(E)=52,$

A: seleccionar un as $\quad P(A)=\frac{4}{52}$

B: seleccionar carta de diamante $\quad P(B)=\frac{13}{52}$

$A\cap B$: seleccionar un as de diamante

$$P(A\cap B)=\frac{1}{52},$$

Contenido 3 Probabilidad de la unión de dos eventos

Ejemplo Si de una baraja de 52 cartas se extrae una al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esta sea un as o diamante?

El espacio muestral consta de 52 cartas, de las cuales 4 son ases, 13 de diamantes (entre estas hay una que es as de diamante), de modo que tenemos los siguientes eventos con sus respectivas probabilidades:

A: seleccionar un as $\quad \mathrm{P(A)} = \frac{4}{52}$

B: seleccionar carta de diamante $\quad \mathrm{P(B)} = \frac{13}{52}$

$\mathrm{A \cap B}$: seleccionar un as de diamante $\quad \mathrm{P(A \cap B)} = \frac{1}{52}$

De manera que para calcular la probabilidad del evento $\mathrm{A \cup B}$: seleccionar un as o diamante, se tiene:

$$\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$
$$= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}.$$

En conclusión, la probabilidad de seleccionar un as o diamante es $\frac{4}{13}$.

E

Resuelva los siguientes problemas:

a) Si se lanza un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número impar o un múltiplo de 3?

b) Se lanzan dos dados, ¿cuál es la probabilidad de obtener un 6 como suma de los resultados de las caras o números iguales en estas?

134

Aprendizajes esperados

Aplica la probabilidad de ocurrencia de la unión de dos eventos en la resolución de problemas del entorno.

Secuencia:

En el estudio de la teoría de conjuntos en décimo grado, se abordó la unión e intersección de conjuntos. En vista de que los eventos son subconjuntos de un espacio muestral asociado, a partir de estos se definen la unión e intersección de eventos, que dan lugar a las situaciones "obtener ____ y ____", y también "obtener ____ o ____", y por ende poder calcular la probabilidad correspondiente.

Puntos esenciales:

Hacer notar que la solución del problema planteado como un proceso, muestra la directriz que puede seguirse para la deducción y uso de la fórmula $\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$, primero calcular las probabilidades simples $\mathrm{P(A)}$, $\mathrm{P(B)}$ y luego la de la intersección $\mathrm{P(A \cap B)}$ para luego sustituir en esta igualdad.

Tener en cuenta que un recurso gráfico de mucha utilidad es el diagrama de Venn para representar conjuntos y operaciones entre estos.

Sugerir que la igualdad anterior sea usada para determinar también $\mathrm{P(A \cap B)}$ conocidos $\mathrm{P(A)}$, $\mathrm{P(B)}$ y $\mathrm{P(A \cup B)}$ mediante un despeje y la sustitución pertinente.

Para $A \cup B$: seleccionar un as o diamante, se tiene:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{4}{51} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}.$$

E Si se lanza un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número impar o un múltiplo de 3?

Se definen: A: obtener un número impar, y B: obtener un múltiplo de 3. Entonces

$A = \{1, 3, 5\}$, $n(A) = 3$, $B = \{3, 6\}$, $n(B) = 2$

$A \cap B = \{3\}$. Así:

$$P(A) = \frac{3}{6}, \qquad P(B) = \frac{2}{6}, \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

Para $A \cup B$: obtener un número par o un múltiplo de 3, se tiene:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Contenido 4 Eventos mutuamente excluyentes

Aprendizajes esperados

Aplica el concepto de eventos mutuamente excluyentes y la probabilidad de la unión de estos en la resolución de problemas.

Secuencia:

En la sección anterior se estableció el principio de conteo de la suma, que se aplica cuando las formas de ocurrencia de una acción A son distintas de las correspondientes a una acción B, y viceversa. Esta condición permite definir eventos mutuamente excluyentes, y la probabilidad $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$ en esta situación se efectúa de forma análoga a la establecida en dicho principio: sumar las correspondientes probabilidades.

Puntos esenciales:

Recordar el significado del símbolo ϕ en teoría de conjuntos.
Hacer notar que cuando los eventos son mutuamente excluyentes, estos no tienen elementos en común y por tanto $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \phi$.

Insistir en definir correctamente el espacio muestral asociado a la situación así como los eventos implicados y sus correspondientes probabilidades.

Orientar que la ejercitación permite la familiarización para la identificación de eventos mutuamente excluyentes y las probabilidades correspondientes.

Contenido 4: Eventos mutuamente excluyentes

P

Para el experimento de lanzar un dado calcule la probabilidad de cada evento:
a) A: obtener un número par.
b) B: obtener un múltiplo de 5.
c) $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$: obtener un número par o un múltiplo de 5.

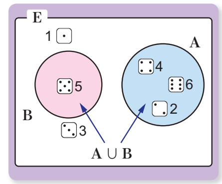
S

El espacio muestral de este experimento es $\mathrm{E} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, siendo $n(\mathrm{E}) = 6$.

a) Para el evento A: obtener un número par, se tienen los casos favorables 2, 4, 6, de modo que $\mathrm{A} = \{2, 4, 6\}$, y por tanto $n(\mathrm{A}) = 3$. Así,
$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

b) Para el evento B: obtener un múltiplo de 5, se tiene solo un caso favorable: 5, $\mathrm{B} = \{5\}$ de modo que $n(\mathrm{B}) = 1$. Luego,
$$\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{1}{6}.$$

c) El diagrama de la derecha muestra que para el evento $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$: obtener un número par o un múltiplo de 5 (se han coloreado ambos eventos) se tienen 4 casos favorables: 2, 4, 5 y 6, de modo que $n(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 4$,
$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$



Se observa que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$

Nótese que los eventos A y B no pueden ocurrir simultáneamente ya que el número en la cara del dado no puede ser par y múltiplo de 5 a la vez, esto es $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \phi$, siendo ϕ el conjunto vacío.

C

Eventos mutuamente excluyentes

Dos eventos A y B son mutuamente excluyentes si no tienen elementos en común, es decir $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \phi$, en este caso la ocurrencia de uno excluye la ocurrencia del otro (no ocurren de forma simultánea).
Si dos eventos A y B son mutuamente excluyentes, entonces
$$\mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{B}).$$

E

Resuelva los siguientes problemas:
a) Se tiene un libro de cada una de las materias: Matemática, Biología, Química, Física y Lengua y Literatura. Si se toma uno de ellos, ¿cuál es la probabilidad de que este sea de Matemática o de Física?
b) La probabilidad de que Juan asista a un bachillerato estatal es $\frac{2}{5}$ y la de que asista a un bachillerato privado es $\frac{1}{2}$. Si Juan no puede asistir a ambos simultáneamente, ¿cuál es la probabilidad de asistir a uno u otro bachillerato?
c) Si se escoge una carta de una baraja de 52 cartas, ¿cuál es la probabilidad de escoger un corazón o un diamante?
d) Si se arrojan dos dados, encuentre la probabilidad de que la suma de los dos números de las caras sea 5 u 11.

135

C4: Eventos mutuamente excluyentes

P En el lanzamiento de un dado, calcule la probabilidad de cada evento:

S $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, y $n(E) = 6$.

a) A: obtener un número par, es $A = \{2, 4, 6\}$, así,
$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

b) B: obtener un múltiplo de 5 es $B = \{5\}$, así,
$$P(B) = \frac{1}{6}.$$

c) $A \cup B$: obtener un número par o un múltiplo de 5 se tiene 4 casos favorables: $2, 4, 5$ y 6, de modo que $n(A \cup B) = 4$. Así,
$$P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

C Eventos mutuamente excluyentes:

Dos eventos A y B son mutuamente excluyentes si no tienen elementos en común, es decir, $A \cap B = \emptyset$.
Si dos eventos A y B son mutuamente excluyentes, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

E Se tiene un libro de cada una de las materias: Matemática, Biología, Química, Física y Lengua y Literatura. Si se toma uno de ellos, ¿cuál es la probabilidad de que este sea de Matemática o de Física?

Espacio muestral:
Los cinco libros. Así, $n(E) = 5$.

Sean los eventos: A: seleccionar libro de Matemática y B : seleccionar libro de Física. Entonces:
$$n(A) = 1, \quad n(B) = 1.$$
$$P(A) = \frac{1}{5}, \quad P(B) = \frac{1}{5}.$$

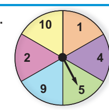
El libro a seleccionar no puede ser de Física y Matemática a la vez, así
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

Contenido 5

Propiedades de las probabilidades

Contenido 5: Propiedades de las probabilidades

P Imagine que hace girar en sentido horario la aguja de la ruleta de la derecha . Calcule la probabilidad de cada evento:
a) A: obtener un número entero.
b) B: obtener un número negativo.
c) C: obtener un múltiplo de 5.



S El total de resultados posibles es 6. Para cada inciso tenemos:

a) En este caso el número de casos favorables es 6, igual al número de elementos del espacio muestral, por lo cual:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{6}{6}=\mathbf{1}$$

b) Dado que en la ruleta no aparecen números negativos, hay 0 casos favorables a este hecho y

$$\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{0}{6}=\mathbf{0}$$

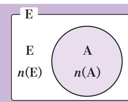
c) En la ruleta aparecen 2 múltiplos de 5: 5 y 10, de manera que $n(\mathrm{C})=2$ y su probabilidad es

$$\mathrm{P}(\mathrm{C})=\frac{2}{6}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

Observe que $\frac{1}{3}$ es un número no negativo y menor que 1, por lo cual se puede decir que

$$0\leq \mathrm{P}(\mathrm{C})\leq 1$$

El número de elementos de un evento cumple la relación:



$0\leq n(\mathrm{A})\leq n(\mathrm{E})$. ①

Al dividir ① entre $n(\mathrm{E})$ se tiene

$$\frac{0}{n(E)}\leq\frac{n(A)}{n(E)}\leq\frac{n(E)}{n(E)},$$

es decir, $0\leq \mathrm{P}(\mathrm{A})\leq 1$.

C **Propiedades de la Probabilidad**

1. $0\leq \mathrm{P}(\mathrm{A})\leq 1$, para cualquier evento A.
2. $\mathrm{P}(\mathrm{E})=1$, en cuyo caso E (considerado un evento), se denomina evento seguro.
3. Denotando un evento imposible con ϕ, se tiene que $\mathrm{P}(\phi)=0$.
4. $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$, si A y B son mutuamente excluyentes, entonces $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})$.

(*) La propiedad 4. fue verificada en contenidos anteriores.

E

1. En el experimento de lanzar un dado, verifique las propiedades de la probabilidad calculando P(A), P(B), P(C) y $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$ para los eventos siguientes:
   a) A: cae en número positivo.
   b) B: obtener un múltiplo de 3.
   c) C: cae en número par o impar.
2. Si se elige al azar un número natural del 1 al 10, calcule la probabilidad de cada evento:
   a) A: obtener número par.
   b) B: obtener número positivo.
   c) C: obtener un número mayor que 15.

136

Aprendizajes esperados

Aplica las propiedades de las probabilidades y los conceptos de evento seguro y evento imposible.

Secuencia:

En contenidos anteriores se han obtenido igualdades para la probabilidad de la unión de eventos, las cuales figurarán en una lista de propiedades de la probabilidad. También se usó el símbolo ϕ que representa el conjunto vacío, pero siendo este subconjunto de cualquier conjunto, también se considera un evento, el cual se denominará evento imposible.

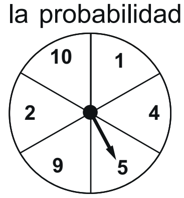
Puntos esenciales:

Explicar que los conceptos de evento seguro y evento imposible están asociados a los ya conocidos conjunto universal y conjunto vacío. En esta ocasión, en el contexto de las probabilidades, se determina la probabilidad correspondiente a estos, mostrando que estos valores son independientes de la situación.

Insistir en que la probabilidad de un evento siempre será un número ubicado entre 0 y 1, incluidos estos. Esta propiedad se puede analizar a partir de la ubicación de $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ en el intervalo definido por $0\leq x\leq 1$, es decir $0\leq \mathrm{P}(\mathrm{A})\leq 1$.

C5: Propiedades de las probabilidades.

P Imagine que hace girar en sentido horario la aguja de la ruleta de la derecha. Calcule la probabilidad de cada evento:
a) A: obtener un número entero.
b) B: obtener un número negativo.
c) C: obtener un múltiplo de 5



S a) El número de casos favorables es 6, igual al número de elementos del espacio muestral, así:

$$P(A)=\frac{6}{6}=1$$

b) Dado que en la ruleta no hay números negativos, hay 0 casos favorables a este hecho, y

$$P(B)=\frac{0}{6}=0$$

c) Múltiplos de 5: 5 y 10, de modo que $n(C)=2$ y

$$P(C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Observe que $0\leq P(C)\leq 1$.

C *Leer en el libro de texto.*

E En el experimento de lanzar un dado, verifique las propiedades de la probabilidad calculando $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ y $P(A\cup B)$ para los eventos:
a) A: cae en número positivo.
b) B: obtener un múltiplo de 3.
c) C: cae en número par o impar.

$E=\{1,2,3,4,5,6\}$, y $n(E)=6$.

a) A es evento seguro, $n(A)=6$, y

$$P(A)=\frac{6}{6}=1.$$

b) Los múltiplos de 3 son 3 y 6, de modo que, $n(B)=2$ y

$$P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Es decir, $0\leq P(B)\leq 1$.

c) Los elementos favorables para el evento son 1, 2, 3, 4, 5, 6, modo que

$$P(C)=\frac{6}{6}=1.$$

Y, $P(A\cup B)=1$ y también

$$P(A)+P(B)-P(A\cap B)=1+\frac{2}{6}-\frac{2}{6}=1$$

Contenido 6 Probabilidad de un evento complementario

Aprendizajes esperados

Determina probabilidades para eventos complementarios.

Secuencia:

Nuevamente encontramos la vinculación entre la teoría de conjuntos y el cálculo de probabilidades: dado un evento, definimos su evento complementario a como se definió el complemento de un conjunto en décimo grado. En este contenido se agrega una igualdad más a las ya establecidas en el cálculo de probabilidades: $P(\overline{A})=1-P(A)$.

Puntos esenciales:

Explicar que el diagrama de Venn permite la visualización de la división del espacio muestral en dos eventos complementarios en el sentido de que la unión de ellos es precisamente el espacio muestral y además no tienen elementos en común.

Reconocer que A y $\overline{A}$ son eventos mutuamente excluyentes, por lo cual se puede aplicar la igualdad $P(\overline{A})+P(A)=1$.

Identificar correctamente en cada situación a resolver, relacionada con eventos complementarios, dichos eventos para así poder usar la igualdad $P(\overline{A})=1-P(A)$.

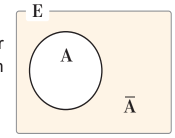
Aplicar correctamente la sustracción entre un natural y una fracción.

Contenido 6: Probabilidad de un evento complementario

Definición

Eventos complementarios

El complemento de un evento A, denotado por $\overline{A}$, está formado por todos los elementos del espacio muestral asociado E, que no están en A.



P Considere el lanzamiento de un dado y determine los elementos del espacio muestral que no forman parte del evento A: obtener un múltiplo de 3. ¿Cuál es la probabilidad del evento conformado por dichos elementos?

S

El espacio muestral es $E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. El evento A: obtener un múltiplo de 3, es $A=\{3, 6\}$, de modo que los elementos del espacio muestral que no están en A son 1, 2, 4 y 5.

Los elementos anteriores conforman el evento $\overline{A}=\{1, 2, 4, 5\}$ definido por

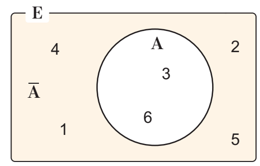
$\overline{A}$: no se obtiene un número múltiplo de 3.

Dado que $\overline{A}=\{1, 2, 4, 5\}$, su probabilidad es

$$P(\overline{A})=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Se observa que A y $\overline{A}$ no tienen elementos en común, como se muestra en la gráfica y su unión es el espacio muestral, de modo que si consideramos el evento $A\cup\overline{A}$: obtener un número que sea múltiplo de 3 o que no lo sea, este será un evento seguro, y así

$$P(A\cup\overline{A})=1$$
$$P(A)+P(\overline{A})=1$$
$$P(\overline{A})=1-P(A).$$



Con el resultado anterior, se puede calcular $P(\overline{A})$

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{2}{6}$$
$$=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

Los eventos A y $\overline{A}$ son complementarios.

Propiedades de eventos complementarios:
1. $A\cup\overline{A}=E$
2. $A\cap\overline{A}=\phi$

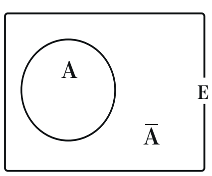
C La probabilidad de $\overline{A}$, complemento del evento A, está dada por

$$\mathbf{P(\overline{A})=1-P(A)}$$

137

C6: Probabilidad de un evento complementario

D Eventos complementarios:
Evento A,
$\overline{A}$: Complemento de A

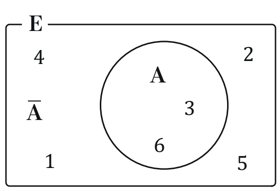


P El lanzamiento de un dado
El evento A: obtener un número múltiplo de 3.
El evento $\overline{A}$: no se obtiene un número múltiplo de 3

S $E=\{1,2,\ 3,4,5,6\}$

$A=\{3,6\}$

$\overline{A}=\{1,2,\ 4,5\}$



Dado que su probabilidad es

$P(\overline{A})=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$

Notar que A y $\overline{A}$ no tienen elementos en común, y su unión es el espacio muestral, así que

$$P(A\cup\overline{A})=1$$
$$P(A)+P(\overline{A})=1$$
$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

Así, en este problema

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{2}{6}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

Los eventos A y $\overline{A}$ son complementarios.

C Probabilidad de eventos complementarios:

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

Contenido 6 Probabilidad de un evento complementario

Ejemplo Si el experimento consiste en lanzar dos dados, calcule la probabilidad de cada evento:

a) A: la suma de los números que aparecen en las caras es 10.

b) $\overline{\mathrm{A}}$: la suma de los números que aparecen en las caras no es 10.

a) A la derecha se muestran los 36 posibles resultados de este experimento, es decir, $n(\mathrm{E}) = 36$.

El evento A: la suma de los números que aparecen en las caras es 10, tiene 3 casos favorables, coloreados en la tabla, de modo que

$$\mathrm{P(A)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2,1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3,1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4,1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5,1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6,1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Suman 10

b) La probabilidad de $\overline{\mathrm{A}}$ es

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \mathrm{P(A)} = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}.$$

E

Resuelva los siguientes problemas usando la relación $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \mathrm{P(A)}$.

1. Para el lanzamiento de dos dados, calcule la probabilidad de cada evento:
   a) A: la suma de los números que aparecen en las caras es 5.
   b) $\overline{\mathrm{A}}$: la suma de los números que aparecen en las caras no es 5.
2. Suponga que tiene un pequeño texto formado por 80 palabras del español, entre las cuales están 35 nombres y 45 verbos. Si se selecciona una palabra al azar, calcule la probabilidad de:
   a) A: escoger un verbo.
   b) $\overline{\mathrm{A}}$: no escoger un verbo.
3. En una bolsa se tienen 7 bolas rojas, 9 azules y 4 verdes. Si se extrae una bola, calcule la probabilidad de:
   a) A: la bola que se extrae es roja.
   b) $\overline{\mathrm{A}}$: la bola que se extrae no es roja.

138

Aprendizajes esperados

Determina probabilidades para eventos complementarios.

Secuencia:

Nuevamente encontramos la vinculación entre la teoría de conjuntos y el cálculo de probabilidades: dado un evento, definimos su evento complementario a como se definió el complemento de un conjunto en décimo grado. En este contenido se agrega una igualdad más a las ya establecidas en el cálculo de probabilidades: $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \mathrm{P(A)}$.

Puntos esenciales:

Explicar que el diagrama de Venn permite la visualización de la división del espacio muestral en dos eventos complementarios en el sentido de que la unión de ellos es precisamente el espacio muestral y además no tienen elementos en común.

Reconocer que A y $\overline{\mathrm{A}}$ son eventos mutuamente excluyentes, por lo cual se puede aplicar la igualdad $\mathrm{P(A)} + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1$.

Identificar correctamente en cada situación a resolver, relacionada con eventos complementarios, dichos eventos para así poder usar la igualdad $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \mathrm{P(A)}$.

Aplicar correctamente la sustracción entre un natural y una fracción.

Ej Si el experimento consiste en lanzar dos dados, determine la probabilidad de cada evento:

a) A: la suma de los números que aparecen en las caras es 10.

$n(E) = 36.$

La suma de los resultados es10: (4, 6), (5, 5), (6, 4)

$$P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

b) $\overline{A}$: la suma de los números que aparecen en las caras no es 10

La probabilidad de $\overline{A}$ es

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

E Para el lanzamiento de dos dados, calcule la probabilidad de cada evento:

a) A: la suma de los números que aparecen en las caras es 5.

La suma es 5: (1, 4), (4,1), (2, 3), (3, 2)

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9},$$

b) $\overline{A}$: la suma de los números que aparecen en las caras no es 5.

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

Contenido 7 Probabilidad de eventos independientes

Aprendizajes esperados

Determina probabilidades para eventos independientes.

Secuencia:

En las situaciones vinculadas a las probabilidades se presentan eventos que pueden recibir el nombre de eventos simples, seguros, imposibles, o mutuamente excluyentes (relacionado dos o más eventos), añadimos en este contenido a la clasificación los denominados eventos independientes y una expresión que permita calcular la probabilidad $P(A \cap B)$ para eventos A y B de este tipo.

Puntos esenciales:

Insistir en que si la ocurrencia de uno de los eventos no afecta la ocurrencia del otro, entonces son independientes.

Hacer ver que el orden de incisos señalados en el problema de este contenido se utiliza para la comparación de resultados que conducirá a la deducción de la igualdad $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Insistir en que, en la ejercitación, se tenga siempre la precaución de identificar que en las situaciones propuestas se definan eventos independientes, para así poder aplicar la igualdad anterior.

Contenido 7: Probabilidad de eventos independientes

P

Si de una baraja de 52 cartas, se extrae una de ellas, se coloca de nuevo en el paquete y se toma una segunda carta. Se consideran los eventos A: se extrae un 7 y B: se extrae un corazón rojo. Responda:

a) ¿La ocurrencia de cualquiera de los eventos afecta o depende de la ocurrencia del otro?

b) Calcule $P(A), P(B)$ y $P(A \cap B)$.

c) Compare $P(A \cap B)$ y $P(A) \cdot P(B)$.

S

a) El espacio muestral lo constituyen las 52 cartas de la baraja. Si, por ejemplo, en la primera extracción ocurriese el evento A, esto no afectaría que en la segunda extracción se dé el evento B, dado que la carta extraída se coloca de nuevo en la baraja. De igual forma se tendrá que la ocurrencia de B no ha de alterar o impedir la del evento A.

b) De las 52 cartas, 4 muestran el número 7, 13 son de corazón rojo y entre estas hay una que es 7 de corazón de rojo, esto se ilustra en la figura de abajo, de modo que $A \cap B = \{7 \text{ de corazón rojo}\}$, luego:

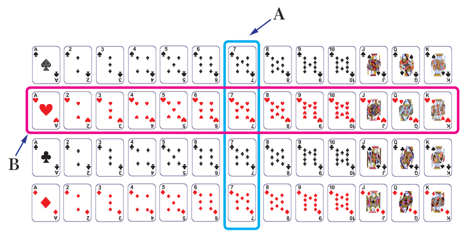
$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}, \qquad P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}, \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{52}$$

c) Por lo obtenido en el inciso anterior:

$$P(A) \cdot P(B) = \left(\frac{1}{13}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{52} = P(A \cap B)$$

Por tanto

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}.$$



C

Dos eventos A y B son independientes si la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del otro. En este caso se cumple que

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}.$$

Si A y B no son independientes, se dice que son dependientes.

C7: Probabilidad de eventos independientes

(P) Si de una baraja de 52 cartas, se extrae una de ellas, se coloca de nuevo en el paquete y se toma una segunda carta. Se consideran los eventos:
A: se extrae un 7
B: se extrae un corazón rojo

(S) a) ¿La ocurrencia de cualquiera de los eventos afecta o depende de la ocurrencia del otro?

No afectaría que en la segunda extracción, dado que la carta extraída se coloca de nuevo.
(Leer en el libro de texto)

b) Calcule $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \cap B)$.

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}, \quad P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{52}.$$

c) Compare $P(A \cap B)$ y $P(A) \cdot P(B)$

$$P(A) \cdot P(B) = \left(\frac{1}{13}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{52} = P(A \cap B).$$

Por tanto,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

(C) Dos eventos A y B son independientes si la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del otro.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

(Ej) En una cajita hay 3 fichas amarillas y 6 azules. ¿Cuál es la probabilidad de sacar 2 fichas amarillas si el experimento se hace con reposición?

Sea A: la primera ficha extraída es amarilla,

$$n(A) = 3, \qquad P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Contenido 7 Probabilidad de eventos independientes

Ejemplo En una cajita hay 3 fichas amarillas y 6 azules. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos fichas amarillas si el experimento se hace con reposición?

Se considera el evento A: la primera ficha extraída es amarilla, como hay 3 amarillas en la bolsa, entonces $n(\mathrm{A})=3$ y su probabilidad es

$$\mathrm{P(A)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Se define ahora el evento B: la segunda ficha extraída es amarilla. Dado que el experimento es con reposición, la primera ficha extraída se deposita nuevamente en la cajita, así, esta sigue teniendo 3 fichas amarillas, de modo que

$$\mathrm{P(B)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Los eventos A y B son independientes ya que se realiza reposición de la ficha extraída, entonces la probabilidad de $\mathrm{A \cap B}$: la primera y la segunda fichas son amarillas es

$$\mathrm{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \mathbf{\frac{1}{9}}$$

E

Resuelva los siguientes ejercicios, identificando en cada caso eventos independientes:

a) En una bolsa hay 4 canicas rojas y 3 verdes. ¿Cuál es la probabilidad de que, al sacar dos canicas con reposición, estas sean rojas?

b) Si se lanzan dos monedas, ¿cuál es la probabilidad de obtener dos escudos?

c) En el lanzamiento de dos dados, uno después del otro, ¿cuál es la probabilidad de que en el primer lanzamiento resulte 3 y en el segundo un número impar?

Aprendizajes esperados

Determina probabilidades para eventos independientes.

Secuencia:

En las situaciones vinculadas a las probabilidades se presentan eventos que pueden recibir el nombre de eventos simples, seguros, imposibles, o mutuamente excluyentes (relacionado dos o más eventos), añadimos en este contenido a la clasificación los denominados eventos independientes y una expresión que permita calcular la probabilidad $\mathrm{P(A \cap B)}$ para eventos A y B de este tipo.

Puntos esenciales:

Insistir en que si la ocurrencia de uno de los eventos no afecta la ocurrencia del otro, entonces son eventos independientes.

Hacer ver que el orden de incisos señalados en el problema de este contenido se utiliza para la comparación de resultados que conducirá a la deducción de la igualdad $\mathrm{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$.

Insistir en que, en la ejercitación, se tenga siempre la precaución de identificar que en las situaciones propuestas se definan eventos independientes, para así poder aplicar la igualdad anterior.

Sea B: la segunda ficha extraída es amarilla.

$n(B) = 3$ por la reposición,
$P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}.$$

E En una bolsa hay 4 canicas rojas y 3 verdes. ¿Cuál es la probabilidad de que, al sacar 2 canicas con reposición, estas sean rojas?

El espacio muestral lo constituyen las 7 canicas en la bolsa.

Se definen los eventos:

A: la primera canica extraída es roja y
B: la primera canica extraída es roja.

Estos eventos son independientes ya que el experimento se efectúa con reposición. Así,

$$P(A) = \frac{4}{7}, \qquad P(B) = \frac{4}{7},$$

y,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{16}{49}.$$

Contenido 8 Probabilidad condicional

Aprendizajes esperados

Determina la probabilidad de eventos condicionados por la ocurrencia de otros.

Secuencia:

El estudio de las probabilidades culmina con la probabilidad asociada a un evento cuya ocurrencia está condicionada por la de otro. En este caso hablamos de la denominada probabilidad condicional, en la cual se requiere el cálculo de $\mathrm{P(A \cap B)}$ y la correspondiente al evento que ha ocurrido.

Puntos esenciales:

Identificar que, cuando interesa la probabilidad de ocurrencia de un evento, habiéndose dado previamente otro, esto reduce el espacio muestral a tener en cuenta.

Hacer notar que la solución del problema de este contenido permite la deducción de la expresión para la probabilidad condicional: $\mathrm{P(B/A)} = \dfrac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(A)}}$. La solución a los ejercicios propuestos no debe seguir el esquema de solución de este problema, sino la simple identificación de las probabilidades requeridas y la sustitución en la fórmula anterior.

Insistir en la notación establecida: $\mathrm{P(B/A)}$, dentro del paréntesis no se indica división de eventos.

Contenido 8: Probabilidad condicional

P Se lanza un par de dados. Calcule:

a) La probabilidad del evento A: la suma de los puntos es 6.

b) Dado el evento B: en uno de los dados aparece 2, calcule la probabilidad de $\mathrm{A \cap B}$: La suma de los puntos es 6 y en uno de los dados aparece 2.

c) La probabilidad de que solo en uno de los dados aparezca un 2, sabiendo que la suma de los puntos es 6.

S a) El evento definido como

A: la suma de los resultados es 6

está definido por

$\mathrm{A} = \{(5,1), (4, 2), (3, 3), (2, 4), (1, 5)\}$

Así, $n(\mathrm{A}) = 5$ y,

$$\mathrm{P(A)} = \frac{5}{36}$$

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2,1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3,1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4,1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5,1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6,1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Suman 6

b) El evento B: en uno de los dados aparece 2, queda definido como

$$\mathrm{B} = \{(2,1),\ (1,2),\ (3,2),\ (2,3),\ (4,2),\ (2,4),\ (5,2),\ (2,5),\ (6,2),\ (2,6)\}$$

el cual tiene 2 elementos en común con A (coloreados anteriormente), de modo que para el evento $\mathrm{A \cap B}$ se tiene que $n(\mathrm{A \cap B}) = 2$ y

$$\mathrm{P(A \cap B)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

c) En vista de que el evento A ha ocurrido, se reduce el espacio muestral para B. Es decir, los casos posibles para B son ahora $\{(5,1),(4,2),(3,3),(2,4),(1,5)\}$, de los cuales hay 2 casos favorables: (4, 2), (2, 4).

Luego, la probabilidad de B, habiendo ocurrido el evento A es $\frac{2}{5}$.

Se puede expresar esta situación con la expresión siguiente

$$\mathrm{P(B/A)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(A)}}$$

En efecto:

$$\mathrm{P(B/A)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(A)}} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{36} \div \frac{5}{36} = \left(\frac{2}{\cancel{36}}\right)\left(\frac{\cancel{36}}{5}\right) = \frac{2}{5}$$

Es decir,

$$\mathrm{P(B/A)} = \frac{n(\mathrm{A \cap B})}{n(\mathrm{A})} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(A)}}$$

141

C8: Probabilidad condicional

P Se lanza un par de dados. Calcule:

a) La probabilidad del evento A: la suma de los puntos es 6.

b) Dado el evento B: en uno de los dados aparece 2, calcule la probabilidad de $A \cap B$: La suma de los puntos es 6 y en uno de los dados aparece 2.

c) La probabilidad de B, sabiendo que ha ocurrido A.

S a) $n(E) = 36$,

$A = \{(5,1),\ (4,2),\ (3,3),\ (2,4),\ (1,5)\}$

Así, $n(A) = 5$ y $P(A) = \frac{5}{36}$.

b) $B = \left\{\begin{matrix}(2,1),(1,2),(3,2),(2,3),\\(4,2),(2,4),(5,2),(2,5),(6,2),(2,6)\end{matrix}\right\}$,

Así, para $A \cap B$ se tiene $n(A \cap B) = 2$ y

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

b) Los casos posibles para B son ahora $\{(5,1),(4,2),(3,3),(2,4),(1,5)\}$, de los cuales se tienen 2 casos favorables: $(4,2)$, $(2,4)$.

Así, la probabilidad de B, habiendo ocurrido el evento A es $\frac{2}{5}$.

Esta situación puede expresarse con la expresión

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

En efecto,

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \left(\frac{2}{36}\right) \div \left(\frac{5}{36}\right) = \left(\frac{2}{36}\right)\left(\frac{36}{5}\right) = \frac{2}{5}.$$

Así que,

$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Contenido 8 Probabilidad condicional

C

Probabilidad condicional

La probabilidad del evento B, condicionado por la ocurrencia del evento A, denotada por $P(B/A)$, es

$$P(B/A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$P(A)>0$ y $P(B/A)$ se lee: "la probabilidad de B dado A".

E

Resuelva los siguientes ejercicios:

1. Se lanza un par de dados. Calcule:

   a) La probabilidad de A: La suma de los puntos es 7.

   b) Dado el evento B: En uno de los dados aparece 1, calcule la probabilidad de $A\cap B$: La suma de los puntos es 7 y en uno de los dados aparece 1.

   c) La probabilidad de que solo en uno de los dados aparezca un 1, sabiendo que la suma de los puntos es 7.

2. Para un bus interurbano de la ruta Managua-Chinandega, la probabilidad de A: sale a tiempo de su parada es de $P(A)=\frac{2}{5}$ y de B: llegue a tiempo a su destino es de $P(B)=\frac{3}{5}$, y la de $A\cap B$: salga de su parada y llegue a tiempo a su destino es de $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$. Encuentre la probabilidad de que llegue a tiempo dado que salió a tiempo, es decir, $P(B/A)$.

Aprendizajes esperados

Determina la probabilidad de eventos condicionados por la ocurrencia de otros.

Secuencia:

El estudio de las probabilidades culmina con la probabilidad asociada a un evento cuya ocurrencia está condicionada por la de otro. En este caso hablamos de la denominada probabilidad condicional, en la cual se requiere el cálculo de $P(A\cap B)$ y la correspondiente al evento que ha ocurrido.

Puntos esenciales:

Identificar que, cuando interesa la probabilidad de ocurrencia de un evento, habiéndose dado previamente otro, esto reduce el espacio muestral a tener en cuenta.

Hacer notar que la solución del problema de este contenido permite la deducción de la expresión para la probabilidad condicional: $P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$. La solución a los ejercicios propuestos no debe seguir el esquema de solución de este problema, sino la simple identificación de las probabilidades requeridas y la sustitución en la fórmula anterior.

Insistir en la notación establecida: $P(B/A)$, dentro del paréntesis no se indica división de eventos.

(C) Probabilidad condicional $\qquad P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

(E) Resuelva los siguientes ejercicios:

1. Se lanza un par de dados. Calcule:

   a) La probabilidad de A: La suma de los puntos es 7.

   $$A=\{(6,1),\ (5,2),\ (4,3),\ (3,4),\ (2,5),(1,6)\}$$

   $$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

   b) Dado el evento B: En uno de los dados aparece 1, calcule la probabilidad de $A\cap B$: La suma de los puntos es 7 y en uno de los dados aparece 1.

   $$B=\left\{\begin{matrix}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\\ (2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)\end{matrix}\right\},$$

   Así, $n(A\cap B)=2$ y

   $$P(A\cap B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}.$$

   c) La probabilidad de que solo en uno de los dados aparezca un 1, sabiendo que la suma de los puntos es 7.

   $$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$
   $$=\frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{6}}$$
   $$=\frac{1}{18}\div\frac{1}{6}$$
   $$=\left(\frac{1}{18}\right)(6)$$
   $$=\frac{1}{3}$$

Prueba de Matemática 11mo (30 min.)   Fecha: ____________

Unidad 6: Técnicas de Conteo y Probabilidades

/ 20

Nombre: ______________________________ Sección: __________
Sexo: M / F

1. Calcule: (2 puntos × 3 = 6)

   a) 5! b) ${}_5P_3$

   c) ${}_5C_3$

2. Resuelva los siguientes problemas: (2 puntos × 2 = 4)

   a) A un estudiante de Arquitectura se le ha pedido como trabajo final de curso diseñar 4 planos de modelos de casa diferentes en 6 tamaños distintos, ¿cuántos planos deberá entregar?

   b) ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar 4 personas alrededor de una mesa circular?

3. Calcule la probabilidad de que los números que aparecen en las caras superiores de dos dados que se lanzan sea 7. (2 puntos)

4. Para el experimento de lanzar un dado calcule la probabilidad de cada evento: (2 puntos × 3 = 6)

   a) $\mathbf{A}$: obtener un número par.

   b) $\mathbf{B}$: obtener un múltiplo de 3.

   c) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$: obtener un número par o un múltiplo de 3.

5. Si se lanzan dos monedas, ¿cuál es la probabilidad de obtener dos escudos? (2 puntos)

Nombre: ___________________________________

Anexos

Anexo 1	Solucionarios de las pruebas de cada unidad
Anexo 2	Solucionarios del Libro de Texto
Anexo 3	Diferencias del LT entre la versión para docentes y para estudiantes

Solucionarios de las pruebas de cada unidad

Unidad 1: Sucesiones

1. (2 puntos)

$a_n = 3n + 1$

$a_1 = (3)(1) + 1 = \mathbf{4}$

$a_2 = (3)(2) + 1 = \mathbf{7}$

$a_3 = (3)(3) + 1 = \mathbf{10}$

$a_4 = (3)(4) + 1 = \mathbf{13}$

$a_5 = (3)(5) + 1 = \mathbf{16}$

2. La sucesión aritmética $5, 11, 17, 23, \ldots$

a) (1 punto) $a_1 = \mathbf{5}$ b) (1 punto) $d = \mathbf{6}$

c) (2 puntos) $a_n = 5 + (n-1)(6) = \mathbf{6n - 1}$

3. (2 puntos)

$a_4 = a_1 + 3d,\ d = 2,\ a_4 = 13$

$13 = a_1 + (3)(2)$

$a_1 = \mathbf{7}$

4. (2 puntos)

$a_1 = -1,\ a_8 = 13$

$$S_8 = \frac{(8)(a_1 + a_8)}{2} = \frac{(8)(-1+13)}{2} = \mathbf{48}$$

5. (2 puntos $\times$ 2 = 4)

$7, 14, 28, 56, \ldots$

a) $r = \mathbf{2}$ b) $a_n = \mathbf{(7)(2^{n-1})}$

6. (2 puntos)

$a_4 = a_1 r^3,\ r = 2,\ a_4 = 24$

$24 = a_1(2^3)$

$8a_1 = 24$

$a_1 = \mathbf{3}$

7. (2 puntos)

$a_1 = 3,\ r = 4$

$$S_4 = \frac{a_1(r^4 - 1)}{4 - 1} = \frac{3(4^4 - 1)}{3} = \mathbf{255}$$

8. (2 puntos)

$$3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 = \sum_{k=1}^{5} 3^k$$

Unidad 2: Potenciación y Funciones Exponenciales

1. (2 puntos $\times$ 6 = 12)

a) $(-3)^4 = 81$ b) $5^{-1} = \frac{1}{5}$

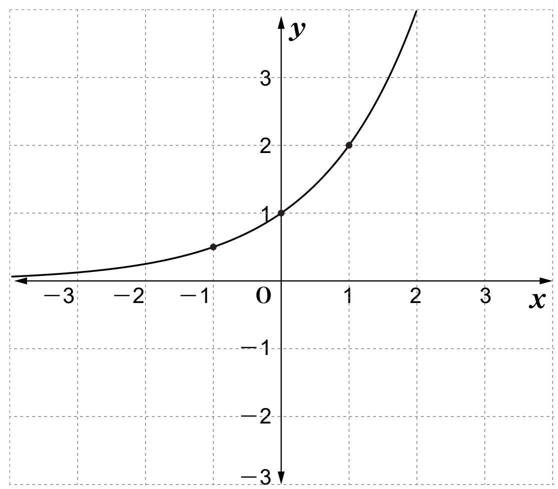
c) $(-7)^0 = 1$

d) $\sqrt[5]{32} = (2^5)^{\frac{1}{5}} = 2^{(5)\left(\frac{1}{5}\right)} = 2^1 = 2$

e) $8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{(3)\left(\frac{1}{3}\right)} = 2^1 = 2$

f) $\left(3^{\frac{2}{3}}\right)\left(3^{\frac{1}{3}}\right) = 3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = 3^1 = 3$

2. (2 puntos)



3. (1 punto $\times$ 2 = 2)

a) $3^5 \underline{\ <\ } 3^7$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \underline{\ >\ } \left(\frac{1}{3}\right)^4$

4. (2 puntos $\times$ 2 = 4)

a) $2^{x+1} = 4$, $2^{x+1} = 2^2$

$x + 1 = 2$

$\mathbf{x = 1}$

b) $9^{x+1} = \left(\frac{1}{81}\right)^{1-x}$, $9^{x+1} = (9^{-2})^{1-x}$

$9^{x+1} = 9^{-2+2x}$

$x + 1 = -2 + 2x$

$\mathbf{x = 3}$

Unidad 3: Logaritmos y Funciones Logarítmicas

1. (2 puntos × 6 = 12)

a) $\log_3 9 = \mathbf{2}$

b) $\log_4 \frac{1}{16} = \log_4 4^{-2} = \mathbf{-2}$

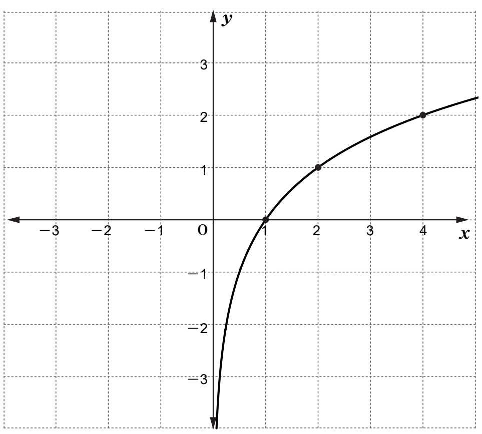
c) $\log_{10} 1 = \mathbf{0}$

d) $\log_4 8 + \log_4 2 = \log_4 (8)(2)$
$= \log_4 16$
$= \log_4 4^2 = \mathbf{2}$

e) $\log_4 8 - \log_4 2 = \log_4 \frac{8}{2} = \log_4 4 = \mathbf{1}$

f) $\log_2 5 \cdot \log_5 8 = \log_2 5 \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 5}$
$= \log_2 2^3 = \mathbf{3}$

2. (2 puntos)



3. (1 punto × 2 = 2)

a) $\log_2 5$ $\underline{\ >\ }$ $\log_2 3$

b) $\log_{\frac{1}{3}} 2$ $\underline{\ >\ }$ $\log_{\frac{1}{3}} 6$

4. (2 puntos × 2 = 4)

a) $\log_5 (2x + 7) = 2$
$2x + 7 = 5^2$
$2x + 7 = 25$
$2x = 18$
$x = 9$

Para $2x + 7 > 0$, es decir, $x > -\frac{7}{2}$

Por lo tanto, $\boldsymbol{x = 9}$

b) $\log_2 x + \log_2 (x + 3) = 2 \log_2 2$
$\log_2 x(x + 3) = \log_2 2^2$
$x(x + 3) = 4$
$x^2 + 3x - 4 = 0$
$(x + 4)(x - 1) = 0$
$x = -4,\ x = 1$
Para $x > 0$ y $x + 3 > 0$, es decir, $x > 0$
Por lo tanto, $\boldsymbol{x = 1}$

Unidad 4: Geometría Analítica

1. (2 puntos)

$$d = \sqrt{(2-6)^2 + (-1-2)^2} = \mathbf{5}$$

2. (2 puntos)

$$\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$$

3. (2 puntos × 4 = 8)

a) $\boldsymbol{y = 2x + 3}$

b) $y - 3 = -3(x - 2)$
$\boldsymbol{y = -3x + 9}$

c) $y - 1 = \frac{-1-1}{3-2}(x - 2)$
$y = -2x + 5$

d) $y = 1$

4. (2 puntos × 2 = 4)

a) $x^2 + y^2 = 9$

b) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$

5. (2 puntos × 2 = 4)

a) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$
$(x^2 - 4x) + (y^2 + 2y) = 4$
$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = 4 + 4 + 1$
$\boldsymbol{(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9}$

b) Centro: $(\mathbf{2}, \mathbf{-1})$
Longitud del radio: $\mathbf{3}$

Unidad 5: Cónicas

1. (2 puntos) $y^2 = 20x$

2. (1 punto × 4 = 4)
$y^2 = (4)(2)x$
Vértice: $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ Eje de simetría: **eje** $\boldsymbol{x}$
Foco: $(\mathbf{2}, \mathbf{0})$ Directriz: $\boldsymbol{x = -2}$

3. (2 puntos) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a=5,\ c=3$

$$c^2=a^2-b^2$$
$$3^2=5^2-b^2$$
$$b^2=5^2-3^2=16$$
$$\boldsymbol{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1}$$

4. (1 punto × 3 = 3) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

Vértices: $(\mathbf{0},\mathbf{5})$ y $(\mathbf{0},-\mathbf{5})$
Focos: $(\mathbf{0},\mathbf{4})$ y $(\mathbf{0},-\mathbf{4})$
Extremos: $(\mathbf{3},\mathbf{0})$ y $(-\mathbf{3},\mathbf{0})$

5. (2 puntos × 2 = 4) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $a=4$, $c=5$

$$c^2=a^2+b^2$$
$$5^2=4^2+b^2$$
$$b^2=5^2-4^2=9$$

Ecuación de la hipérbola: $\boldsymbol{\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1}$

Asíntotas: $\mathbf{y}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{x}$ y $\mathbf{y}=-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{x}$

6. (1 punto × 5 = 5)

$$\frac{y^2}{1}-\frac{x^2}{4}=1$$

$a=1,\ \ b=2,\ c=\sqrt{5}$

Centro: $(\mathbf{0},\mathbf{0})$

Focos: $(\mathbf{0},\sqrt{\mathbf{5}})$ y $(\mathbf{0},-\sqrt{\mathbf{5}})$

Vértice: $(\mathbf{0},\mathbf{1})$ y $(\mathbf{0},-\mathbf{1})$

Extremos: $(\mathbf{2},\mathbf{0})$ y $(-\mathbf{2},\mathbf{0})$

Asíntotas: $\mathbf{y}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}$ y $\mathbf{y}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}$

Unidad 6: Técnicas de Conteo y Probabilidades

1. (2 puntos × 3 = 6)
   a) $5!=\ (5)(4)(3)(2)(1)=\mathbf{120}$
   b) ${}_5P_3=(5)(4)(3)=\mathbf{60}$
   c) ${}_5C_3=\frac{{}_5P_3}{3!}=\frac{(5)(4)(3)}{(3)(2)(1)}=\mathbf{10}$
2. (2 puntos × 2 = 4)
   a) $(4)(6)=\mathbf{24}$
   b) $(4-1)!=\ (3)(2)(1)=\mathbf{6}$
3. (2 puntos)
   $(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$
   $$\frac{6}{36}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$$
4. (2 puntos × 3 = 6)
   a) $\mathrm{A}=\{2,4,6\}$
   $$\mathrm{P(A)}=\frac{3}{6}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$
   b) $\mathrm{B}=\{3,6\}$
   $$\mathrm{P(B)}=\frac{2}{6}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$
   c) $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}=\{2,3,4,6\}$
   $$\mathrm{P(A\cup B)}=\frac{4}{6}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$
5. (2 puntos)
   NN, NE, EN, EE
   $$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

Solucionarios del libro de texto

UNIDAD 1

Sección 1 Contenido 1 (S1C1)

a) $3, 6, \mathbf{9}, 12, 15, \mathbf{18}, 21, \ldots$

b) $5, \mathbf{10}, 15, 20, \mathbf{25}, 30, 35, \mathbf{40}, \ldots$

c) $1, \mathbf{3}, 5, 7, \mathbf{9}, 11, 13, \mathbf{15}, \ldots$

d) $-1, \mathbf{1}, -1, 1, \mathbf{-1}, 1, -1, \mathbf{1}, \ldots$

e) $1, \frac{1}{2}, \mathbf{\frac{1}{3}}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \mathbf{\frac{1}{6}}, \ldots$

f) $1, 2, 4, \mathbf{7}, 11, 16, \mathbf{22}, \ldots$

S1C2

E1

a) $a_n = 2n$ b) $a_n = 5n$

c) $a_n = n$

E2

a) $a_1 = (2)(1) + 1 = 3$

$a_2 = (2)(2) + 1 = 5$

$a_3 = (2)(3) + 1 = 7$

$a_4 = (2)(4) + 1 = 9$

$a_5 = (2)(5) + 1 = 11$

$a_{10} = (2)(10) + 1 = 21$

b) $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$, $a_4 = 10$, $a_5 = 13$, $a_{10} = 28$

c) $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 9$, $a_4 = 16$, $a_5 = 25$, $a_{10} = 100$

S1C3

E1

a) $4, 8, \mathbf{12}, 16, \mathbf{20}, 24, \ldots$

b) $10, \mathbf{20}, 30, 40, \mathbf{50}, 60 \ldots$

c) $100, 200, \mathbf{300}, 400, \mathbf{500}, \ldots$

d) $0, -1, \mathbf{-2}, -3, -4, \mathbf{-5}, \ldots$

e) $2, 4, \mathbf{8}, 16, 32, \mathbf{64}, \mathbf{128}, \ldots$

f) $3, 4, 6, 9, \mathbf{13}, 18, \mathbf{24}, \ldots$

E2

a) $a_n = 3n$ b) $a_n = 6n$

c) $a_n = -n$ d) $a_n = n - 1$

e) $a_n = n^2$ f) $a_n = \frac{n+1}{n}$

E3

a) $a_1 = -(1) = -1$, $a_2 = -(2) = -2$, $a_3 = -(3) = -3$, $a_4 = -(4) = -4$, $a_5 = -(5) = -5$, $a_{15} = -(15) = -15$

b) $a_1 = 4$, $a_2 = 7$, $a_3 = 10$, $a_4 = 13$, $a_5 = 16$, $a_9 = 28$

c) $a_1 = 0$, $a_2 = -1$, $a_3 = -2$, $a_4 = -3$, $a_5 = -4$, $a_{20} = -19$

d) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{8}$, $a_4 = \frac{1}{16}$, $a_5 = \frac{1}{32}$, $a_7 = \frac{1}{128}$

e) $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$, $a_4 = 1$, $a_5 = -1$, $a_{10} = 1$

f) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 7$, $a_4 = 15$, $a_5 = 31$, $a_7 = 127$

S2C1

a) $5, 7, 9, 11, \mathbf{13}, \ldots$ $d = 7 - 5 = 2$

b) $7, 10, 13, \mathbf{16}, \mathbf{19}, \ldots$ $d = 3$

c) $6, 4, \mathbf{2}, 0, \mathbf{-2}, \ldots$ $d = 4 - 6 = -2$

d) $-1, -2, -3, \mathbf{-4}, -5, \mathbf{-6}, \ldots$ $d = -1$

e) $10, \mathbf{8}, \mathbf{6}, 4, 2, \mathbf{0}, \ldots$ $d = -2$

f) $\mathbf{0}, 5, 10, \mathbf{15}, \mathbf{20}, \ldots$ $d = 5$

S2C2

a) $a_1 = 7, d = 11 - 7 = 4$

$a_n = 7 + (n-1)4 = 7 + 4n - 4 = 4n + 3$

$a_6 = (4)(6) + 3 = 27$

b) $a_n = 7n + 6$ $a_8 = 62$

c) $a_n = 4n - 10$ $a_9 = 26$

d) $a_n = -2n + 1$ $a_{11} = -21$

S2C3

E1

a) $a_4 = a_1 + (4-1)d = a_1 + 3d$

Sustituyendo

$a_4 = 12, d = 2 \rightarrow 12 = a_1 + 6$

$a_1 = 12 - 6 = 6$

b) $a_6 = a_1 + 5d$

$20 = a_1 + 15 \rightarrow a_1 = 5$

c) $a_7 = a_1 + 6d$

$3 = a_1 - 12 \rightarrow a_1 = 15$

E2

a) $a_4 = a_1 + 3d$

Sustituyendo $a_1 = 2, a_4 = 14$

$14 = 2 + 3d \rightarrow d = 4$

b) $a_7 = a_1 + 6d$

$2 = -10 + 6d \rightarrow d = 2$

c) $a_{10} = a_1 + 9d$

$-34 = -7 + 9d \rightarrow d = -3$

S2C4

a) $a_3 = a_1 + 2d$, $a_6 = a_1 + 5d$ $\rightarrow \begin{cases} 10 = a_1 + 2d \\ 16 = a_1 + 5d \end{cases}$

$a_1 = 6, d = 2$

b) $\begin{cases} 3 = a_1 + 3d \\ 21 = a_1 + 6d \end{cases}$ $a_1 = -15, d = 6$

c) $\begin{cases} -1 = a_1 + 4d \\ -13 = a_1 + 8d \end{cases}$ $a_1 = 11, d = -3$

d) $\begin{cases} -2 = a_1 + d \\ -10 = a_1 + 9d \end{cases}$ $a_1 = -1, d = -1$

S2C5

E1

a) $4, 6, 8, 10, \mathbf{12}, \ldots$

b) $12, 15, 18, \mathbf{21}, \mathbf{24}, \ldots$

c) $9, 7, \mathbf{5}, 3, \mathbf{1}, \ldots$

d) $-2, -4, -6, \mathbf{-8}, -10, \mathbf{-12}, \ldots$

e) $30, \mathbf{40}, \mathbf{50}, 60, 70, \mathbf{80}, \mathbf{90}, \ldots$

f) $\mathbf{5}, \mathbf{0}, -5, -10, \mathbf{-15}\ \mathbf{-20}, \ldots$

E2

a) $a_1 = 5, d = 11 - 5 = 6$

$a_n = 5 + (n-1)6 = 6n - 1$

$a_5 = (6)(5) - 1 = 29$

b) $a_n = 8n - 6$ $a_7 = 50$

c) $a_n = -3n + 2$ $a_6 = -16$

d) $a_n = -3n$ $a_{11} = -33$

E3

a) $a_4 = a_1 + (4-1)d = a_1 + 3d$

Sustituyendo

$a_4 = 5, d = 3 \rightarrow 5 = a_1 + 9$

$a_1 = 5 - 9 = -4$

b) $a_7 = a_1 + 6d$

$25 = a_1 - 12 \rightarrow a_1 = 37$

c) $a_9 = a_1 + 8d$

$90 = a_1 - 80 \rightarrow a_1 = 170$

d) $a_{11} = a_1 + 10d$

$35 = a_1 - 70 \rightarrow a_1 = 105$

E4

a) $a_3 = a_1 + 2d \quad a_1 = 4, a_3 = 16$

$16 = 4 + 2d \rightarrow d = 6$

b) $a_8 = a_1 + 7d$

$1 = -20 + 7d \rightarrow d = 3$

c) $a_9 = a_1 + 8d$

$-32 = 8 + 8d \rightarrow d = -5$

d) $a_5 = a_1 + 4d$

$-85 = -17 + 4d \rightarrow d = -17$

E5

a) $a_3 = a_1 + 2d$ $\longrightarrow \begin{cases} 12 = a_1 + 2d \\ 24 = a_1 + 5d \end{cases}$

$a_6 = a_1 + 5d$

$a_1 = 4, d = 4$

b) $\begin{cases} 5 = a_1 + d \\ 26 = a_1 + 4d \quad a_1 = -2, d = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -20 = a_1 + 5d \\ 55 = a_1 + 20d \quad a_1 = -45, d = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -20 = a_1 + d \\ -100 = a_1 + 9d \quad a_1 = -10,\ d = -10 \end{cases}$

S2C6

a) $S_6 = \frac{6}{2}(1 + 16) = (3)(17) = 51$

b) $S_8 = 124$ c) $S_7 = -28$

d) $S_9 = -153$

S2C7

a) $S_6 = \frac{6}{2}[(2)(1) + (6-1)(5)]$

$= (3)(2 + 25) = 81$

b) $S_8 = 184$ c) $S_5 = -80$

d) $S_7 = -126$

S2C8

E1

a) $75 = \frac{6}{2}(5 + a_6) \rightarrow 75 = 3(5 + a_6)$

$a_6 = 20$

b) $a_8 = 15$ c) $a_7 = 16$ d) $a_9 = -18$

E2

a) $a_n = a_1 + (n-1)d$

$19 = 1 + (n-1)(2) \rightarrow n = 10$

$S_{10} = \frac{10}{2}(1 + 19) = (5)(20) = 100$

b) $24 = 3 + (n-1)(3) \rightarrow n = 8$

$S_8 = \frac{8}{2}(3 + 24) = 108$

c) $26 = 2 + (n-1)(4) \rightarrow n = 7$

$S_7 = \frac{7}{2}(2 + 26) = 98$

d) $-16 = -1 + (n-1)(-1) \rightarrow n = 16$

$S_{16} = \frac{16}{2}[-1 + (-16)] = -136$

S2C9

La sucesión aritmética es $1, 2, 3, \ldots$

$S_n = \frac{n}{2}[(2)(a_1) + (n-1)(d)]$

$45 = \frac{n}{2}[(2)(1) + (n-1)(1)]$

$45 = \frac{n}{2}(n + 1) \rightarrow 90 = n^2 + n$

$n^2 + n - 90 = 0 \rightarrow (n+10)(n-9) = 0$

$n = 9, -10$

Como $n > 0, n = 9$

Por lo tanto, se distribuirán en 9 filas.

S2C10

E1

a) $S_8 = \frac{8}{2}(5 + 40) = (4)(45) = 180$

b) $S_{12} = 168$ c) $S_9 = -135$

d) $S_{11} = -330$

E2

a) $S_7 = \frac{7}{2}[(2)(4) + (7-1)(6)] = 154$

b) $S_5 = 115$ c) $S_{10} = -15$

d) $S_6 = -102$

E3

a) $50 = \frac{5}{2}(2 + a_5) \rightarrow 100 = 5(2 + a_5)$

$a_5 = 18$

b) $a_9 = 33$ c) $a_6 = 95$

d) $a_{10} = -34$

E4

a) $a_n = a_1 + (n-1)d$

$19 = 1 + (n-1)(3) \rightarrow n = 7$

$S_7 = \frac{7}{2}(1 + 19) = 70$

b) $58 = 2 + (n-1)(8) \rightarrow n = 8$

$S_8 = \frac{8}{2}(2 + 58) = 240$

c) $-23 = 10 + (n-1)(-3) \rightarrow n = 12$

$S_{12} = \frac{12}{2}[10 + (-23)] = -78$

d) $-30 = 10 + (n-1)(-5) \rightarrow n = 9$

$S_9 = \frac{9}{2}[10 + (-30)] = -90$

E5

a) La sucesión aritmética es

$26, 24, 22, \ldots, 12$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$12 = 26 + (n-1)(-2) \rightarrow n = 8$

Por lo tanto, se forman 8 filas.

b) $S_8 = \frac{8}{2}(26 + 12) = (4)(38) = 152$

Por lo tanto, coloca 152 ladrillos en total.

S3C1

a) $3, 6,\ 12\ , \mathbf{24}, 48, 96, \ldots \quad r = 6 \div 3 = 2$

b) $2, 6, 18, \mathbf{54}, \mathbf{162}, \ldots \quad r = 3$

c) $5, 10, \mathbf{20}, 40, \mathbf{80}, \ldots \quad r = 2$

d) $\mathbf{32}, \mathbf{16}, 8, 4, \mathbf{2}, \ldots \quad r = \frac{1}{2}$

e) $1, \mathbf{3}, \mathbf{9}, 27, 81, \mathbf{243}, \ldots \quad r = 3$

f) $\mathbf{1}, -\mathbf{2}, 4, -8, \mathbf{16}, \ldots \quad r = -2$

S3C2

a) $a_1 = 2, r = 4 \div 2 = 2$

$a_n = a_1 r^{n-1} = (2)(2^{n-1}) = 2^n$

$a_6 = 2^6 = 64$

b) $a_n = (5)(2^{n-1}) \quad a_7 = 320$

c) $a_n = (2)(4^{n-1}) \quad a_5 = 512$

d) $a_n = (-2)(3^{n-1}) \quad a_4 = -54$

S3C3

a) $r = 3$ y $a_4 = 81$

$a_4 = a_1 r^{4-1} = a_1(3^3) = 27a_1$

$81 = 27a_1 \quad a_1 = \frac{81}{27} = 3$

b) $64 = a_1(-2)^4 \quad a_1 = 4$

c) $5 = a_1(-1)^8 \quad a_1 = 5$

Desafío

a) $a_4 = a_1 r^{4-1} = (1)(r^3) = r^3$

Como $a_4 = 125, r^3 = 125 \quad r = 5$

b) $128 = (4)(r^5) \quad r = 2$

c) $-256 = (2)(r^7) \quad r = -2$

S3C4

a) $\dfrac{a_4}{a_2} = \dfrac{a_1 r^3}{a_1 r} = r^2$

También $\dfrac{a_4}{a_2} = \dfrac{27}{3} = 9$

$r^2 = 9 \rightarrow r = \pm 3$

Para $r = 3 \rightarrow a_2 = a_1 r = 3a_1 = 3$
$\rightarrow a_1 = 1$

Para $r = -3 \rightarrow a_2 = a_1 r = -3a_1$
$= 3 \rightarrow a_1 = -1$

b) $\dfrac{a_5}{a_3} = \dfrac{a_1 r^4}{a_1 r^2} = r^2$

También $\dfrac{a_5}{a_3} = \dfrac{48}{12} = 4$

$r^2 = 4 \rightarrow r = \pm 2$

Para $r = 2 \rightarrow a_3 = a_1 r^2 = 4a_1$
$= 12 \rightarrow a_1 = 3$

Para $r = -2 \rightarrow a_3 = a_1 r^2 = 4a_1$
$= 12 \rightarrow a_1 = 3$

Desafío

a) $\dfrac{a_5}{a_2} = \dfrac{a_1 r^4}{a_1 r} = r^3$

También $\dfrac{a_5}{a_2} = \dfrac{48}{6} = 8$

$r^3 = 8 \rightarrow r = 2$

$a_2 = a_1 r = 2a_1 = 6 \rightarrow a_1 = 3$

b) $\dfrac{a_5}{a_2} = \dfrac{a_1 r^4}{a_1 r} = r^3$

También $\dfrac{a_5}{a_2} = \dfrac{-162}{6} = -27$

$r = -3, a_1 = -2$

S3C5

a) $S_3 = \dfrac{2(4^3 - 1)}{4 - 1} = \dfrac{(2)(63)}{3} = 42$

b) $S_5 = \dfrac{8(2^5 - 1)}{2 - 1} = (8)(31) = 248$

c) $S_4 = \dfrac{-9(3^4 - 1)}{3 - 1} = \dfrac{(-9)(80)}{2} = -360$

d) $S_7 = \dfrac{-3[(-1)^7 - 1]}{-1 - 1} = \dfrac{(-3)(-2)}{-2} = -3$

S3C6

a) $S_5 = \dfrac{a_1(2^5 - 1)}{2 - 1} = 93 \rightarrow a_1 = 3$

b) $S_3 = \dfrac{a_1(5^3 - 1)}{5 - 1} = 155 \rightarrow a_1 = 5$

c) $S_4 = \dfrac{a_1[(-2)^4 - 1]}{-2 - 1} = 5 \rightarrow a_1 = -1$

d) $S_4 = \dfrac{a_1[(-4)^4 - 1]}{-4 - 1} = 204 \rightarrow a_1 = -4$

S3C7

E1

a) $1, 4, 16, \mathbf{64}, \mathbf{256}, \ldots\ r = 4 \div 1 = 4$

b) $4, 12, \mathbf{36}, 108, \mathbf{324}, \ldots\ r = 3$

c) $\mathbf{-3}, \mathbf{-6}, -12, -24, \mathbf{-48}, \ldots\ r = 2$

d) $-81, \mathbf{27}, \mathbf{-9}, 3, -1, \mathbf{\dfrac{1}{3}}, \mathbf{-\dfrac{1}{9}}, \ldots\ r = -\dfrac{1}{3}$

E2

a) $a_1 = 1, r = 6 \div 1 = 6$

$a_n = a_1 r^{n-1} = (1)(6^{n-1}) = 6^{n-1}$

$a_4 = 6^3 = 216$

b) $a_n = (5)(3^{n-1})$ $\quad a_5 = 405$

c) $a_n = (-7)(-2)^{n-1}$ $\quad a_6 = 224$

d) $a_n = (-16)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\quad a_7 = -\dfrac{1}{4}$

E3

a) $a_4 = a_1 r^{4-1} = a_1(2^3) = 8a_1$

Como $a_4 = 64, 8a_1 = 64$

$\rightarrow a_1 = \dfrac{64}{8} = 8$

b) $324 = a_1(-3)^4$ $\quad a_1 = 4$

c) $-1 = a_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^5$ $\quad a_1 = -32$

E4

a) $a_4 = a_1 r^{4-1} = (5)(r^3) = 5r^3$

Como $a_4 = -40, 5r^3 = -40\ r = -2$

b) $288 = (9)(r^5)$ $\quad r = 2$

c) $\dfrac{a_7}{a_5} = \dfrac{a_1 r^6}{a_1 r^4} = r^2$

También $\dfrac{a_7}{a_5} = \dfrac{27}{3} = 9$

$r^2 = 9 \rightarrow r = \pm 3$

E5

a) $S_3 = \dfrac{1(4^3 - 1)}{4 - 1} = \dfrac{(1)(63)}{3} = 21$

b) $S_4 = \dfrac{3(4^4 - 1)}{4 - 1} = 255$

c) $S_3 = \dfrac{9[(-3)^3 - 1]}{-3 - 1} = \dfrac{(9)(-28)}{-4} = 63$

E6

a) $S_3 = \dfrac{a_1(2^3 - 1)}{2 - 1} = 63 \rightarrow a_1 = 9$

b) $S_4 = \dfrac{a_1(5^4 - 1)}{5 - 1} = 156 \rightarrow a_1 = 1$

c) $S_4 = \dfrac{a_1[(-2)^4 - 1]}{-2 - 1} = 10 \rightarrow a_1 = -2$

S4C1

E1

a) $\sum_{k=1}^{n} 3k = 3 + 6 + 9 + \cdots + 3n$

b) $\sum_{k=1}^{6} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$

c) $\sum_{k=4}^{7} 2^k = 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7$

E2

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$

b) $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 20 = \sum_{k=1}^{20} k$

c) $\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

S4C2

a) $\sum_{k=1}^{5} 5k = 5\sum_{k=1}^{5} k$ $\quad$ b) $\sum_{k=1}^{15} 2 = (15)(2)$

c) $\sum_{k=1}^{4} (k^2 + k^3) = \sum_{k=1}^{4} k^2 + \sum_{k=1}^{4} k^3$

d) $\sum_{k=1}^{6} (2k + k^2) = 2\sum_{k=1}^{6} k + \sum_{k=1}^{6} k^2$

S4C3

a) $\sum_{k=1}^{10} k = \dfrac{10}{2}(10 + 1) = 55$

b) $\sum_{k=1}^{15} k = 120$ $\quad$ c) $\sum_{k=1}^{30} k = 465$

S4C4

E1

a) $\sum_{k=1}^{5} k^2 = \dfrac{1}{6}(5)(5 + 1)[(2)(5) + 1] = 55$

b) $\sum_{k=1}^{8} k^2 = \dfrac{1}{6}(8)(8 + 1)[(2)(8) + 1] = 204$

c) $\sum_{k=1}^{10} k^2 = \dfrac{1}{6}(10)(10+1)[(2)(10) + 1] = 385$

E2

a) $\sum_{k=1}^{5} (3k^2 + k) = 3\sum_{k=1}^{5} k^2 + \sum_{k=1}^{5} k$

$= (3)\left(\dfrac{1}{6}\right)(5)(5 + 1)[(2)(5) + 1] + \dfrac{5}{2}(5 + 1)$

$= (3)\left(\dfrac{1}{6}\right)(5)(6)(11) + \dfrac{5}{2}(6)$

$= 165 + 15 = 180$

b) $\sum_{k=1}^{7}\left(\frac{1}{2}k^2+5\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{7}k^2+(7)(5)$

$= 70 + 35 = 105$

c) $\sum_{k=1}^{6}(2k^2+3k)= 2\sum_{k=1}^{6}k^2+3\sum_{k=1}^{6}k$

$= 182 + 63 = 245$

S4C5

E1

a) $\sum_{k=1}^{n}6k=6+12+18+\cdots+6n$

b) $\sum_{k=3}^{10}k^2=9+16+25+36+\cdots+81+100$

c) $\sum_{k=2}^{6}2^k= 4+8+16+32+64$

E2

a) $2^2+3^2+4^2+\cdots+18^2=\sum_{k=2}^{18}k^2$

b) $3+5+\cdots+(2n+1)=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$

c) $(-1)+1+\cdots+(-1)^n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$

E3

a) $\sum_{k=1}^{4}10k=10\sum_{k=1}^{4}k$

b) $\sum_{k=2}^{8}\frac{1}{5}k^2=\frac{1}{5}\sum_{k=2}^{8}k^2$

c) $\sum_{k=1}^{7}(3k+k^2)= \ 3\sum_{k=1}^{7}k+\sum_{k=1}^{7}k^2$

E4

a) $\sum_{k=1}^{25}k=\frac{25}{2}(25+1)=325$

b) $\sum_{k=1}^{8}10=(8)(10)=80$

c) $\sum_{k=1}^{7}k^2=\frac{1}{6}(7)(7+1)[(2)(7)+1]=140$

d) $\sum_{k=1}^{5}(3+k^2)=(5)(3)+\sum_{k=1}^{5}k^2$

$= 15 + 55 = 70$

e) $\sum_{k=1}^{6}[k+(-1)]=\sum_{k=1}^{6}k+(6)(-1)$

$= 21 - 6 = 15$

f) $\sum_{k=1}^{8}(k^2+2k+1)=\sum_{k=1}^{8}k^2+2\sum_{k=1}^{8}k+(8)(1)$

$= 204 + 72 + 8 = 284$

UNIDAD 2

Sección 1 Contenido 1 (S1C1)

E1

a) $(3)(3)(3)=3^3$ b) 4^4

c) 10^5 d) $1{,}2^2$ e) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$

E2

a) 243 b) 16 c) -27

d) $0{,}2\times 0{,}2=0{,}04$ e) $-\frac{1}{8}$

S1C2

a) a^7 b) a^5 c) a^{20} d) a^8

e) a^5b^5 f) a^6b^3 g) a^4 h) a

S1C3

a) 1 b) 1 c) 1

d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{16}$ f) $-\frac{1}{8}$

S1C4

E1

a) a^3 b) $a^{-6}=\frac{1}{a^6}$

c) $a^{-3}b^{-3}=\frac{1}{a^3b^3}$

d) $a^{-2}=\frac{1}{a^2}$ e) $a^{-10}b^{20}=\frac{b^{20}}{a^{10}}$

E2

a) $2^3=8$ b) $3^{-4}=\frac{1}{3^4}=\frac{1}{81}$

c) $3^{-3}=\frac{1}{3^3}=\frac{1}{27}$

d) $10^{-3}=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1000}$ e) $7^0=1$

S1C5

Potenciación	Radicación	La radicación se lee
$2^4=16$	$2=\sqrt[4]{16}$	Dos es igual a raíz cuarta de dieciséis
$3^2=9$	$3=\sqrt{9}$	Tres es igual a raíz cuadrada de nueve
$(-3)^3=-27$	$-3=\sqrt[3]{-27}$	Menos tres es igual a raíz cúbica de menos veintisiete
$3^4=81$	$3=\sqrt[4]{81}$	Tres es igual a raíz cuarta de ochenta y uno

S1C6

a) $\sqrt[4]{3^4}=3$ b) $-\sqrt[4]{3^4}=-3$

c) $\sqrt[3]{5^3}=5$ d) $\sqrt[3]{(-3)^3}=-3$

e) $\sqrt[3]{10^3}=10$ f) $-\sqrt[4]{10^4}=-10$

S1C7

a) $\sqrt[3]{(2^1)(2^2)}=\sqrt[3]{2^3}=2$ b) 5

c) 3 d) 3 f) 2

S1C8

E1

a) $\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$ b) 2 c) 4

d) $\frac{1}{\sqrt[4]{81}}=\frac{1}{\sqrt[4]{3^4}}=\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{3}$

E2

a) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[6]{2^6}=2$ b) 3

c) $\sqrt[3]{3^3}=3$

S1C9

a) $\sqrt[5]{a^3}$ b) $\sqrt[4]{a}$

c) $\sqrt{a^5}=\sqrt{a^2a^2a}=a^2\sqrt{a}$

d) $\sqrt[4]{a^3}$ e) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ f) $a^{\frac{1}{4}}$ g) $a^{\frac{3}{2}}$

h) $a^{\frac{4}{7}}$ i) $a^{\frac{4}{5}}$ j) $a^{\frac{8}{3}}$

S1C10

a) $9^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9}=3$ b) 2

c) $64^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{(4^3)^2}=\sqrt[3]{(4^2)^3}=16$

d) $\frac{1}{\sqrt[3]{5^3}}=\frac{1}{5}$

S1C11

a) $3^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)}=3^1=3$

b) $\sqrt[3]{3^4}\div\sqrt[6]{3^2}=3^{\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{6}\right)}=3^1=3$

c) $25^{\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)}=25^{\frac{1}{2}}=5$

d) $3^{\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{2}-\frac{5}{6}\right)}=3^2=9$

S1C12

E1

a) 7^4 b) $0{,}3^4$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$

E2

a) 512 b) 81 c) $\frac{1}{4}$ d) 1 e) 1

f) $\frac{1}{64}$ g) $-\frac{1}{125}$

h) $\left(-\frac{1}{10}\right)^{-2} = (-10)^2 = 100$

E3

a) 8 b) $\sqrt[3]{9^3} = 9$

c) $\left(\sqrt[4]{2^4}\right)^2 = 2^2 = 4$

d) $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

e) $\sqrt[12]{(2^3)^4} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2$

E4

a) $\sqrt{(8^3)^2} = 8^3 = 512$

b) $\sqrt[3]{(3^3)^4} = 3^4 = 81$

c) 100

d) 3

E5

a) $25^{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\right)} = 25^0 = 1$

b) $(2^3)^{-\frac{2}{3}}(2^2)^{\frac{3}{2}} \div 2 = 2^{(-2+3-1)}$

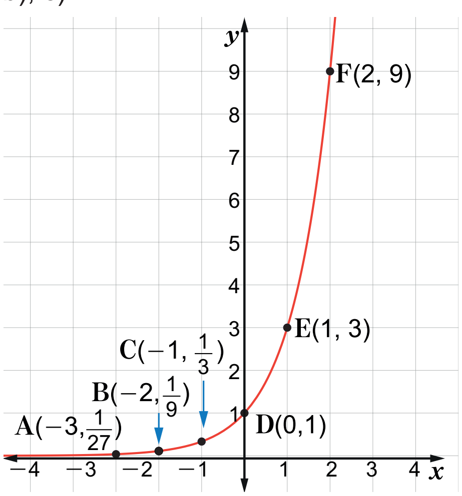
$= 2^0 = 1$

S2C1

a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
punto	$A\left(-3,\frac{1}{27}\right)$	$B\left(-2,\frac{1}{9}\right)$	$C\left(-1,\frac{1}{3}\right)$	$D(0,1)$	$E(1,3)$	$F(2,9)$	$G(3,27)$

b), c)

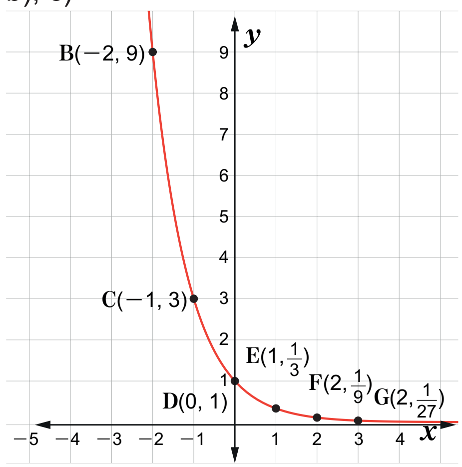


S2C2

a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$
punto	$A(-3,27)$	$B(-2,9)$	$C(-1,3)$	$D(0,1)$	$E\left(1,\frac{1}{3}\right)$	$F\left(2,\frac{1}{9}\right)$	$G\left(3,\frac{1}{27}\right)$

b), c)



S2C3

E1

a) $2^2 < 2^3$ b) $3^5 < 3^7$ c) $4^3 > 4^2$

E2

a) $2^{-3} < 2^{\frac{1}{2}} < 2^2$

La base $2 > 1$, el orden de exponentes $-3 < \frac{1}{2} < 2$

el orden de potencias es igual.

b) $5^{-1} < 5^{\frac{1}{2}} < 5^2$

La base $5 > 1$, el orden de exponentes $-1 < \frac{1}{2} < 2$

el orden de potencias es igual.

S2C4

E1

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^6$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 > \left(\frac{1}{3}\right)^4$

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 < \left(\frac{1}{4}\right)^2$

E2

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 < \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

La base $\frac{1}{3} < 1$, el orden de exponentes $-3 < -1 < 3$

es opuesto a orden de potencias

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^2 < \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} < \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

La base $\frac{1}{5} < 1$, el orden de exponentes $-2 < -1 < 2$

es opuesto a orden de potencias

S2C5

a) $3^x = 3^2$

$x = 2$

b) $2^{2x} = 2^4$

$x = 2$

c) $5^{2x} = 5^3$

$x = \frac{3}{2}$

d) $2^x = 2^{-5}$

$x = -5$

e) $6^{-x} = 6^{-3}$

$x = 3$

S2C6

a) $2^{4x} = 2^4$

$x = 1$

b) $2^{x+1} = 2^8$

$x = 7$

c) $3^{3x} = 3^{2x+3}$

$x = 3$

d) $3^{3(x-1)} = 3^{2(x+3)}$

$x = 9$

e) $10^{3-x} = 10^0$

$x = 3$

f) $3^{2(x+1)} = 3^{-3(1-x)}$

$x = 5$

S2C7

a)
$$\begin{aligned} 2^{x^2-5} &= 2^{4x} \\ x^2 - 5 &= 4x \\ x^2 - 4x - 5 &= 0 \\ (x-5)(x+1) &= 0 \\ x = 5 \ \text{o} \ x &= -1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3^{x^2-2x} &= 3^3 \\ x^2 - 2x &= 3 \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ (x-3)(x+1) &= 0 \\ x = 3 \ \text{o} \ x &= -1 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2^{x^2+6x} &= 2^{5x} \\ x^2 + x &= 0 \\ x(x+1) &= 0 \\ x = 0 \ \text{o} \ x &= -1 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 5^{x^2+2x+4} &= 5^3 \\ x^2 + 2x + 1 &= 0 \\ (x+1)^2 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} 3^{2x^2} &= 3^{3x+2} \\ 2x^2 - 3x - 2 &= 0 \\ (2x+1)(x-2) &= 0 \\ x = 2 \ \text{o} \ x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

S2C8

a)
$$\begin{aligned} (3^x)^2 - 2(3^x) - 3 &= 0 \\ t^2 - 2t - 3 &= 0 \ (t=3^x, t>0) \\ (t-3)(t+1) &= 0 \\ t = 3 \ \text{o} \ t &= -1 \end{aligned}$$

Como $t > 0, t = 3$

$3^x = 3 \leftrightarrow x = 1$

b) $(3^x)^2 - 4(3^x) + 3 = 0$

$t^2 - 4t + 3 = 0 \ (t{=}3^x, t{>}0)$

$(t-3)(t-1) = 0$

Como $t > 0, t = 1$ o $t = 3$

Para $t = 1,\quad 3^x = 1 \leftrightarrow \quad x = 0$

Para $t = 3,\quad 3^x = 3 \leftrightarrow \quad x = 1$

S2C9

E1

a) $3^{-3} < 3^{-2} < 3^0$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^4 < \left(\frac{1}{5}\right)^{3,5} < \left(\frac{1}{5}\right)^3$

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 < \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} < \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$

E2

a) $2^{2x+1} = 2^2$

$x = \frac{1}{2}$

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-1}$

$x = -\frac{1}{2}$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^4$

$x = 4$

d) $3^{2(x+1)} = 3^{-4(1-x)}$

$2x + 2 = -4 + 4x$

$x = 3$

e) $4^{2(1-x)} = 4^{-3(x+1)}$

$2 - 2x = -3x - 3$

$x = -5$

f) $(2^x)^2 + 2(2^x) - 8 = 0$

$t^2 + 2t - 8 = 0 \ (t{=}2^x, t{>}0)$

$(t+4)(t-2) = 0$

$t = 2 \ (t > 0)$

$2^x = 2,\ x = 1$

g) $(2^x)^2 - 5(2^x) - 24 = 0$

$t^2 - 5t - 24 = 0 \ (t{=}2^x, t{>}0)$

$(t+3)(t-8) = 0$

$t = 8 \ (t > 0)$

$2^x = 8,\quad x = 3$

UNIDAD 3

Sección 1 Contenido 1 (S1C1)

E1

Forma exponencial	$144 = 12^2$	$7 = 7^1$	$9 = 3^2$	$\frac{1}{243} = 3^{-5}$
Forma logarítmica	$\log_{12} 144 = 2$	$\log_7 7 = 1$	$\log_3 9 = 2$	$\log_3 \frac{1}{243} = -5$

E2

a) $\log_2 x = 2 \leftrightarrow x = 2^2 = 4$

b) $x = 9$

c) $\log_b 16 = 2 \leftrightarrow 16 = b^2$

$b = 4 \ (\text{base } b{>}0)$

d) $x = \frac{1}{8}$ e) $b = 5$ f) $b = 10$

S1C2

a) 5 b) 0 c) 1

d) 2 e) -1 f) $\frac{1}{2}$

S1C3

a) $2\log_3 7$ b) $-2\log_{10} 5$

c) $\log_2 3^2 = 2\log_2 3$

d) $3\log_5 3$ e) $-2\log_7 3$

S1C4

a) $\log_6(12)(3) = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$

b) 1 c) 2 d) 1

S1C5

a) $\log_8 \frac{16}{2} = \log_8 8 = 1$

b) 3 c) -2 d) 4

S1C6

a) $\log_2 \frac{(8)(5)}{20} = \log_2 2 = 1$

b) $\log_3 \frac{(6^2)(5)}{20} = \log_3 9 = 2$

c) $\log_{10} \frac{(24)(15)}{6^2} = \log_{10} 10 = 1$

S1C7

a) $\log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{\log_3 3^3}{\log_3 3^2} = \frac{3}{2}$

b) $\frac{5}{2}$ c) $\frac{1}{2}$

d) $\log_3 5 \cdot \frac{\log_3 9}{\log_3 5} = \log_3 9 = 2$ e) 4

S1C8

E1

a) $\log_3 3^2 = 2$ b) $\log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^3 = 3$

c) $\frac{1}{2}\log_2 2^5 = \frac{5}{2}$ d) $\log_4 4^{-2} = -2$

e) $\frac{\log_2 32}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^5}{\log_2 2^3} = \frac{5}{3}$

f) $\frac{\log_3 \frac{1}{3}}{\log_3 9} = -\frac{1}{2}$

g) $\log_2 3 \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 3} = 1$

h) $\frac{\log_2 5}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 5} = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2}$

E2

a) $\log_4 \frac{10}{5} = \log_4 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 4} = \frac{1}{2}$

b) 1

c) $\log_2 \left(8^{\frac{1}{3}}\right)\left(4^{\frac{1}{2}}\right) = \log_2 (2)(2) = 2$

d) $\log_{10} \frac{72}{(3^2)(2^3)} = \log_{10} 1 = 0$

E3

a) $\log_5 \frac{12}{(20)(15)} = \log_5 \frac{1}{25} = -2$

b) -2

c) $\log_5 \frac{12^3}{(300)(60^2)}$

$= \log_5 \frac{1}{(25)(5)(5)} = -4$

d) $\log_2 \frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{3^2}} = \log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$

e) $\log_2 7 \cdot \frac{\log_2 32}{\log_2 7} = \log_2 32 = 5$

f) $\frac{\log_3 8}{\log_3 9} \cdot \frac{\log_3 3}{\log_3 8} = \frac{\log_3 3}{\log_3 9} = \frac{1}{2}$

g) $\log_2 3 \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 7}{\log_2 5} \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 7}$

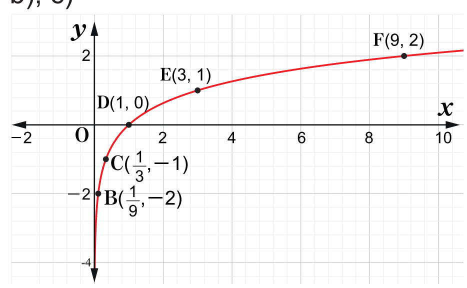
$= \log_2 8 = 3$

S2C1

a)

x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
y	-3	-2	-1	0	1	2	3
punto	$A\left(\frac{1}{27}, -3\right)$	$B\left(\frac{1}{9}, -2\right)$	$C\left(\frac{1}{3}, -1\right)$	$D(1,0)$	$E(3, 1)$	$F(9, 2)$	$G(27,3)$

b), c)

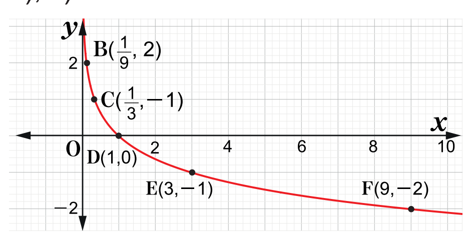


S2C2

a)

x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
y	3	2	1	0	-1	-2	-3
punto	$A\left(\frac{1}{27}, 3\right)$	$B\left(\frac{1}{9}, 2\right)$	$C\left(\frac{1}{3}, 1\right)$	$D(1,0)$	$E(3, -1)$	$F(9, -2)$	$G(27, -3$

b), c)



S2C3

a) $\log_2 3 < \log_2 5$

b) $\log_3 \frac{1}{2} < \log_3 2 < \log_3 4$

Como las bases son mayor que 1, el orden de los argumentos son iguales al orden del valor de los logaritmos.

S2C4

a) $\log_{\frac{1}{2}} 5 < \log_{\frac{1}{2}} 3$

b) $\log_{\frac{1}{3}} 8 < \log_{\frac{1}{3}} 4 < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4}$

Como las bases son menor que 1, el orden de los argumentos son iguales al orden del valor de los logaritmos.

S2C5

a) $\log_3 x = 2 \leftrightarrow x = 3^2 \qquad x = 9$

b) $3x + 4 = 7^2 \qquad x = 15$

c) $\log_2 x^2 = 4 \leftrightarrow x^2 = 2^4 \qquad x = \pm 4$

Como el argumento $x > 0, x = 4$

S2C6

a) Los argumentos x y $x - 1$ son mayor que $0 \rightarrow x > 1$

$$\log_2 x(x-1) = \log_2 2$$
$$x(x-1) = 2$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x+1)(x-2) = 0$$
$$x = -1 \text{ o } x = 2$$

Como $x > 1, x = 2$

b) Los argumentos $x + 2$ y $x + 5$ son mayor que $0. \rightarrow x > -2$

$$\log_{10}(x+2)(x+5) = \log_{10} 10$$
$$(x+2)(x+5) = 10$$
$$x = -7 \text{ o } x = 0.$$

Como $x > -2, x = 0.$

c) Los argumentos $x - 2$ y $x + 1$ son mayor que $0. \rightarrow x > 2$

$$\log_2(x-2)(x+1) = \log_2 4$$
$$(x-2)(x+1) = 4$$
$$x = -2 \text{ o } x = 3.$$

Como $x > 2, x = 3.$

S2C7

a) $\log_{10} 2^2 = 2\log_{10} 2 = (2)(0{,}3010)$
$= 0{,}6020$

b) $\log_{10}(2)(3^2) = \log_{10} 2 + 2\log_{10} 3$
$= 1{,}2552$

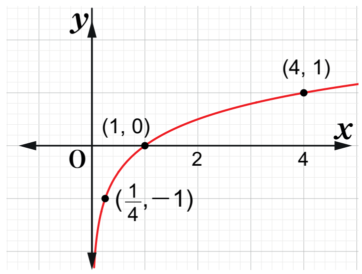
c) $1{,}3801$ d) $1{,}4313$

e) $1{,}505$ f) $1{,}5562$

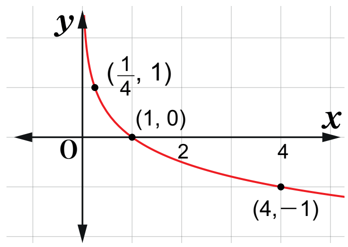
S2C8

E1

a)



b)



E2

a) $\log_2 \frac{1}{2} < \log_2 3 < \log_2 5$

Como la base es mayor que 1, el orden de los argumentos es igual al orden del valor de los logaritmos.

b) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} > \log_{\frac{1}{3}} 2 > \log_{\frac{1}{3}} 6$

Como la base es menorque 1, el orden de los argumentos es opuesto al orden del valor de los logaritmos.

E3

a) $\log_2 x = \log_2 2^{-5}$

$$x = \frac{1}{32}$$

b) $\log_4(x-3) = \log_4 4^{\frac{1}{2}}$

$$x - 3 = 2$$
$$x = 5$$

c) $3 - x = 2x + 18$

$$x = -5$$

d) $\log_8(x+2)^2 = \log_8 64$

$$(x+2)^2 = 64$$
$$x = -10 \text{ o } x = 6.$$

Como $x > -2, x = 6.$

e) $\log_3(x-2)(2x-7) = \log_3 9$

$$(x-2)(2x-7) = 9$$
$$x = \frac{1}{2} \text{ o } x = 5.$$

Como $x > \frac{7}{2}, \quad x = 5.$

E4

a) $\log_{10} 2^4 = 4\log_{10} 2 = (4)(0{,}3010)$
$= 1{,}204$

b) $\log_{10} 3^4 = 4\log_{10} 3 = 1{,}9084$

c) $\log_{10}(3)(2^4) = \log_{10} 3 + 4\log_{10} 2$
$= 1{,}6811$

UNIDAD 4

Sección 1 Contenido 1 (S1C1)

E1

a) $AB = 4$ b) $CD = 5$ c) $MF = 7$

d) $FH = 5$ e) $RQ = 6{,}5$

E2

$AB = |-2 - (-5)| = 3,$

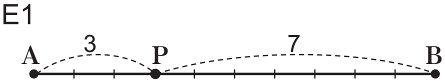
$BC = |10 - (-2)| = 12,$

$AC = |-5 - 10| = 15.$

$AB + BC = 3 + 12 = 15 = AC$

S1C2

E1



E2

a) $p = \frac{(3)(5) + (2)(15)}{2+3} = 9, \quad P(9)$

b) $p = \frac{(3)(-7) + (4)(14)}{4+3} = 5, \quad P(5)$

c) $p = \frac{15 + 45}{2} = 30, \quad P(30)$

S1C3

a) $AB = \sqrt{(5-2)^2 + [1-(-3)]^2}$
$= \sqrt{9 + 16} = 5$

b) $MQ = 2\sqrt{5}$ c) $RS = 5$ d) $FT = 7$

S1C4

a) $x = \frac{(4)(2) + (3)(9)}{3+4} = 5,$

$y = \frac{(4)(1) + (3)(8)}{3+4} = 4$

Por lo tanto, $P(5, 4)$

b) $P(3, 2)$

S1C5

E1

a) $x = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2}, \; y = \frac{4+8}{2} = 6$

Por lo tanto, el punto medio de $\overline{AB}$ es $\left(\frac{7}{2}, 6\right)$

b) $\left(\frac{11}{2}, 1\right)$ c) $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ d) $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

E2

Sean (x_2, y_2) las coordenadas del otro extremo.

$$\frac{x_2+7}{2}=4,\quad \frac{y_2+8}{2}=3$$

$$x_2+7=8,\ y_2+8=6$$

$$x_2=1,\ y_2=-2$$

Por lo tanto, $(1,-2)$ son las coordenadas del otro extremo.

S1C6

E1

a) $AB=3$ b) $PQ=17$ c) $MT=3$

E2

a) $p=\dfrac{(1)(1)+(3)(9)}{3+1}=7,\ P(7)$

b) $P(4)$

c) $p=\dfrac{-10+14}{2}=2,\ P(2)$

E3

a) $PQ=\sqrt{(4-0)^2+(3-0)^2}$

$=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

b) $FN=5$ c) $HK=3\sqrt{10}$

d) $WU=5$

E4

$x=\dfrac{(2)(2)+(5)(9)}{5+2}=7,$

$y=\dfrac{(2)(4)+(5)(-3)}{5+2}=-1$

Por lo tanto, $P(7,-1)$

E5

Sean $P_2(x_2, y_2)$ las coordenadas del otro extremo.

$$\frac{x_2+(-5)}{2}=1,\quad \frac{y_2+4}{2}=1$$

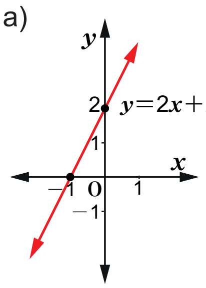
$$x_2-5=2,\ y_2+4=2$$

$$x_2=7,\ y_2=-2$$

Por lo tanto, $(7,-2)$ son las coordenadas del otro extremo.

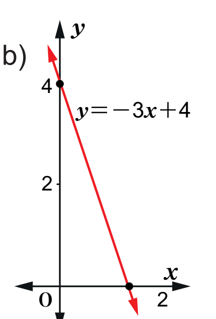
S2C1

a)



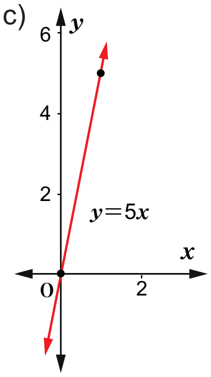
Intercepto con eje y: (0,2)
Pendiente: $m=2$

b)



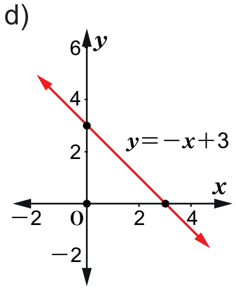
Intercepto con eje y: (0,4)
Pendiente: $m=-3$

c)



Intercepto con eje y: (0,0)
Pendiente: $m=5$

d)



Intercepto con eje y: (0,3)
Pendiente: $m=-1$

S2C2

E1

a) $y-3=2(x-2)$
$y=2x-1$

b) $y-3=-3(x-2)$
$y=-3x+9$

c) $y-3=0(x-2)$
$y=3$

E2

a) $y-(-1)=-4(x-4)$
$y=-4x+15$

S2C3

a) $m=\dfrac{-2-4}{1-3}=\dfrac{-6}{-2}=3$

b) $-\dfrac{6}{7}$ c) $-\dfrac{1}{3}$ d) 0

S2C4

a) $y-3=\dfrac{9-3}{1-(-2)}[x-(-2)]$
$y=2(x+2)+3$
$y=2x+7$

b) $y-1=\dfrac{7-1}{4-2}(x-2)$
$y=3x-5$

c) $y-5=\dfrac{5-5}{-7-2}(x-2)\leftrightarrow y=5$

d) $y-(-2)=\dfrac{5-(-2)}{-4-1}(x-1)$

$y=-\dfrac{7}{5}x-\dfrac{3}{5}$

S2C5

E1

a) $2x+y-3=0$

b) $x-10=0$

c) $\dfrac{3}{5}x+y-1=0$
$3x+5y-5=0$

d) $y-2=0$

E2

$3x-5y+1=0$

$-5y=-3x-1$

$5y=3x+1$

$\dfrac{5}{5}y=\dfrac{3}{5}x+\dfrac{1}{5}$

$y=\dfrac{3}{5}x+\dfrac{1}{5}$

S2C6

E1

a) $y=1$ b) $x=1$

c) $x=-1$ d) $y=3$

E2 $y=3$

S2C7

E1

a) Las pendientes son -3 y 3.
No son paralelas

b) Las pendientes son 3 y 3.
Sí son paralelas

c) Las pendientes son -5 y -5.
Sí son paralelas

d) Las pendientes son -5 y -5.
Sí son paralelas

E2

a) La pendiente de $4x+y-5=0$ es -4.
Entonces,
$y-(-3)=-4[x-(-2)]$
$y=-4x-11$

b) La pendiente de $6x+3y-3=0$ es -2.
Entonces, $y-4=-2[x-(-3)]$
$y=-2x-2$

S2C8

a) La pendiente de $y=-4x$ es $m_1=-4$.
$m_1m_2=-1$, entonces,
$m_2=-\frac{1}{-4}=\frac{1}{4}$

b) $m_1=5$, entonces,
$m_2=-\dfrac{1}{5}$

c) $m_1=\frac{1}{2}$, entonces,
$m_2=-2$

d) $m_1=-6$, entonces,
$m_2=\dfrac{1}{6}$

S2C9

a) $d = \dfrac{|5|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \dfrac{5}{5} = 1$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ c) $\dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{7}{\sqrt{10}} = \dfrac{7\sqrt{10}}{10}$

e) 1 f) 0

S2C10

a) $y - 3 = 2(x - 0)$, $y = 2x + 3$

b) $\dfrac{-1-2}{3-1} = -\dfrac{3}{2}$

c) $y - 1 = \dfrac{4-1}{3-(-2)}[x - (-2)]$

$y = \dfrac{3}{5}x + \dfrac{11}{5}$

d) $2x + 3y - 1 = 0$ e) $x = 5$

f) $y - 1 = 2(x - 3)$, $y = 2x - 5$

g) $m_1 = -3$, entonces, $m_2 = \dfrac{1}{3}$

h) $d = \dfrac{|1|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{13}} = \dfrac{\sqrt{13}}{13}$

S3C1

E1

a) $x^2 + y^2 = 1$ b) $x^2 + y^2 = 16$

c) $x^2 + y^2 = 3$ d) $x^2 + y^2 = 49$

e) $x^2 + y^2 = 25$

E2

a) $C(0,0), r = 5$

b) $C(0,0), r = 6$

c) $C(0,0), r = \sqrt{5}$

S3C2

E1

a) $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$

b) $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 9$

c) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$

d) $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 25$

E2

a) $C(2,4), r = 3$

b) $C(2,-2), r = 1$

c) $C(3,-1), r = \sqrt{10}$

d) $C(0,1), r = 5$

S3C3

a) $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 4$

$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 + 9 - 4 = 0$

$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 11 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 5 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 5 = 0$

S3C4

E1

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

a) $(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) = \mathbf{12}$

b) $(x^2 - 4x + \mathbf{4}) + (y^2 + 6y + \mathbf{9})$

$= 12 + \mathbf{4} + \mathbf{9}$

c) $(x - \mathbf{2})^2 + (y + \mathbf{3})^2 = \mathbf{25}$

d) El Centro: $(\mathbf{2}, -\mathbf{3})$, el radio: $\mathbf{5}$

E2

a) $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 4$

b) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 10$

S3C5

a) $x^2 + x^2 = 8 \leftrightarrow x = 2, x = -2$

Entonces, $(2,2)$ y $(-2,-2)$

b) $x^2 + (2x)^2 = 20 \leftrightarrow x = 2, x = -2$

Entonces, $(2,4)$ y $(-2,-4)$

c) $x^2 + (3x)^2 = 30$

$\leftrightarrow x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$

Entonces, $(\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ y

$(-\sqrt{3}, -3\sqrt{3})$

S3C6

a) $x^2 + (2x+5)^2 = 5$

$x^2 + 4x + 4 = 0 \leftrightarrow x = -2$

Entonces, $(-2,1)$

b) $x^2 + (-x+2)^2 = 2$

$x^2 - 2x + 1 = 0 \leftrightarrow x = 1$

Entonces, $(1,1)$

S3C7

E1

a) $x^2 + y^2 = 64$

b) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$

c) $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 7$

E2

a) $C(0,0), r = 3$ b) $C(1,2), r = 2$

E3

$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$

E4

$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$

a) $(x^2 + 4x) + (y^2 - 2y) = \mathbf{4}$

b) $(x^2 + 4x + \mathbf{4}) + (y^2 - 2y + \mathbf{1})$

$= 4 + \mathbf{4} + \mathbf{1}$

c) $(x + \mathbf{2})^2 + (y - \mathbf{1})^2 = \mathbf{9}$

d) El centro: $(-\mathbf{2}, \mathbf{1})$, el radio: $\mathbf{3}$

E5

$x^2 + (x-3)^2 = 9$

$x^2 - 3x = 0 \leftrightarrow x = 0, x = 3$

Entonces, $(0,-3)$ y $(3,0)$

E6

$x^2 + (x+6)^2 = 18$

$x^2 + 6x + 9 = 0 \leftrightarrow x = -3$

Entonces, $(-3,3)$

UNIDAD 5

Sección 1 Contenido 1 (S1C1)

a) $p = 2$, $y^2 = (4)(2)x \leftrightarrow y^2 = 8x$

b) $y^2 = 12x$ c) $y^2 = -12x$

d) $y^2 = -16x$

S1C2

a) $p = 2$, $x^2 = (4)(2)y \leftrightarrow x^2 = 8y$

b) $x^2 = -8y$ c) $x^2 = 16y$

d) $x^2 = -16y$

S1C3

	a) $y^2 = 4x$	b) $x^2 = -8y$
Vértice	$(0,0)$	$(0,0)$
Foco	$(1,0)$	$(0,-2)$
Eje	x	y
Directriz	$x = -1$	$y = 2$

S1C4

a) $x^2 = 3x - 2$, $x = 1, x = 2$

Entonces, $(1,1)$ y $(2,4)$

b) $x^2 = -3(2x - 9)$, $x = 3, x = -9$

Entonces, $(3,-3)$ y $(-9,-27)$

S1C5

a) $(x-3)^2 = 4x$ $x = 1, x = 9$

Entonces, $(1,-2)$ y $(9,6)$

b) $(2x+4)^2 = -4x$, $x = -1, x = -4$

Entonces, $(-1,2)$ y $(-4,-4)$

S1C6

E1

a) $y^2 = 16x$ b) $y^2 = 20x$

c) $y^2 = -20x$ d) $y^2 = -24x$

e) $x^2 = 4y$ f) $x^2 = 24y$

g) $x^2 = -12y$

E2

a) $x^2 = -16y$ b) $y^2 = -20x$

E3

	a) $y^2 = 12x$	b) $x^2 = -16y$
Vértice	$(0,0)$	$(0,0)$
Foco	$(3,0)$	$(0,-4)$
Eje	x	y
Directriz	$x=-3$	$y=4$

E4

a) $x^2 = -4(x-3)$, $x=-6, x=2$

Entonces, $(-6,-9)$ y $(2,-1)$

b) $(-x+4)^2 = 2x$, $x=2, x=8$

Entonces, $(2,2)$ y $(8,-4)$

S2C1

Los focos y vértices están en el eje x

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

a) $5^2 = 8^2 - b^2$, $b^2 = 39$

Entonces, $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{39}=1$

b) $2^2 = 9^2 - b^2 \leftrightarrow b^2 = 77$

Entonces, $\dfrac{x^2}{81}+\dfrac{y^2}{77}=1$

S2C2

Los focos y vértices están en el eje y

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

a) $3^2 = 4^2 - b^2 \leftrightarrow b^2 = 7$

Entonces, $\dfrac{x^2}{7}+\dfrac{y^2}{16}=1$

b) $1^2 = 3^2 - b^2 \leftrightarrow b^2 = 8$

Entonces, $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{9}=1$

S2C3

E1

	a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$	b) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$
Vértice	$(3,0),(-3,0)$	$(5,0),(-5,0)$
Foco	$(\sqrt{5},0),(-\sqrt{5},0)$	$(3,0),(-3,0)$
Extremos	$(0,2),(0,-2)$	$(0,4),(0,-4)$

E2

	a) $3x^2+27y^2=27$ $\frac{x^2}{9}+y^2=1$	b) $x^2+9y^2=36$ $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$
Vértice	$(3,0),(-3,0)$	$(6,0),(-6,0)$
Foco	$(2\sqrt{2},0),(-2\sqrt{2},0)$	$(4\sqrt{2},0),(-4\sqrt{2},0)$
Extremos	$(0,1),(0,-1)$	$(0,2),(0,-2)$

S2C4

	a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1$	b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{49}=1$
Vértice	$(0,6),(0,-6)$	$(0,7),(0,-7)$
Foco	$(0,3\sqrt{3}),(0,-3\sqrt{3})$	$(0,2\sqrt{10}),(0,-2\sqrt{10})$
Extremos	$(3,0),(-3,0)$	$(3,0),(-3,0)$

	c) $9x^2+4y^2=36$ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$
Vértice	$(0,3),(0,-3)$
Foco	$(0,\sqrt{5}),(0,-\sqrt{5})$
Extremos	$(2,0),(-2,0)$

	e) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$	f) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$
Vértice	$(0,4),(0,-4)$	$(0,5),(0,-5)$
Foco	$(0,2\sqrt{3}),(0,-2\sqrt{3})$	$(0,3),(0,-3)$
Extremos	$(2,0),(-2,0)$	$(4,0),(-4,0)$

	g) $2x^2+9y^2=18$ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1$
Vértice	$(3,0),(-3,0)$
Foco	$(\sqrt{7},0),(-\sqrt{7},0)$
Extremos	$(0,\sqrt{2}),(0,-\sqrt{2})$

S2C5

E1

Los focos y vértices están en el eje x

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

a) $1^2 = 3^2 - b^2 \leftrightarrow b^2 = 8$

Entonces, $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$

b) $3^2 = 4^2 - b^2 \leftrightarrow b^2 = 7$

Entonces, $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$

Los focos y vértices están en el eje y

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

c) $2^2 = 5^2 - b^2$, $b^2 = 21$

Entonces, $\dfrac{x^2}{21}+\dfrac{y^2}{25}=1$

d) $5^2 = 7^2 - b^2$, $b^2 = 24$

Entonces, $\dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y^2}{49}=1$

E2

	a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1$	b) $\frac{x^2}{16}+y^2=1$
Vértice	$(0,6),(0,-6)$	$(4,0),(-4,0)$
Foco	$(0,\sqrt{11}),(0,-\sqrt{11})$	$(\sqrt{15},0),(-\sqrt{15},0)$
Extremos	$(5,0),(-5,0)$	$(0,1),(0,-1)$

	c) $3x^2+4y^2=48$ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$	d) $4x^2+16y^2=64$ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$
Vértice	$(4,0),(-4,0)$	$(4,0),(-4,0)$
Foco	$(2,0),(-2,0)$	$(2\sqrt{3},0),(-2\sqrt{3},0)$
Extremos	$(0,2\sqrt{3}),(0,-2\sqrt{3})$	$(0,2),(0,-2)$

S3C1

Los focos y vértices están en el eje x

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

a) $10^2 = 6^2 + b^2$, $b^2 = 64$

Entonces, $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{64}=1$

Las asíntotas: $y=\dfrac{4}{3}x$, $y=-\dfrac{4}{3}x$

b) $(\sqrt{5})^2 = 1^2 + b^2$, $b^2 = 4$

Entonces, $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$

Las asíntotas: $y=2x$, $y=-2x$

S3C2

Los focos y vértices están en el eje y

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

a) $5^2 = 3^2 + b^2$, $b^2 = 16$

Entonces, $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{16}=1$

Las asíntotas: $y=\dfrac{3}{4}x$, $y=-\dfrac{3}{4}x$

b) $(\sqrt{8})^2 = 2^2 + b^2$, $b^2 = 4$

Entonces, $\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{4}=1$

Las asíntotas: $y=x$, $y=-x$

S3C3

E1

	a) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$	b) $\frac{x^2}{25}-y^2=1$
Vértice	$(3,0),(-3,0)$	$(5,0),(-5,0)$
Foco	$(\sqrt{13},0),(-\sqrt{13},0)$	$(\sqrt{26},0),(-\sqrt{26},0)$
Extremos	$(0,2),(0,-2)$	$(0,1),(0,-1)$

E2

	a) $4x^2-y^2=4$ $x^2-\frac{y^2}{4}=1$	b) $9x^2-16y^2=144$ $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$
Vértice	$(1,0),(-1,0)$	$(4,0),(-4,0)$
Foco	$(\sqrt{5},0),(-\sqrt{5},0)$	$(5,0),(-5,0)$
Extremos	$(0,2),(0,-2)$	$(0,3),(0,-3)$

S3C4

E1

	a) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$	b) $\frac{y^2}{25} - x^2 = 1$
Vértice	$(0,3), (0,-3)$	$(0,5), (0,-5)$
Foco	$(0,\sqrt{13}), (0,-\sqrt{13})$	$(0,\sqrt{26}), (0,-\sqrt{26})$
Extremos	$(2,0), (-2,0)$	$(1,0), (-1,0)$

E2

	a) $9y^2 - x^2 = 9$ $y^2 - \frac{x^2}{9} = 1$	b) $25y^2 - 16x^2 = 400$ $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{25} = 1$
Vértice	$(0,1), (0,-1)$	$(0,4), (0,-4)$
Foco	$(0,\sqrt{10}), (0,-\sqrt{10})$	$(0,\sqrt{41}), (0,-\sqrt{41})$
Extremos	$(3,0), (-3,0)$	$(5,0), (-5,0)$

S3C5

E1

Los focos y vértices están en el eje x

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a) $5^2 = 4^2 + b^2, \quad b^2 = 9$

Entonces, $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

Las asíntotas: $y = \frac{3}{4}x, \quad y = -\frac{3}{4}x$

b) $3^2 = 1^2 + b^2, \quad b^2 = 8$

Entonces, $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$

Las asíntotas:

$y = 2\sqrt{2}x, \quad y = -2\sqrt{2}x$

Los focos y vértices están en el eje y

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

c) $10^2 = 6^2 + b^2, \quad b^2 = 64$

Entonces, $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1$

Las asíntotas: $y = \frac{3}{4}x, \quad y = -\frac{3}{4}x$

d) $5^2 = 2^2 + b^2, \quad b^2 = 21$

Entonces, $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{21} = 1$

Las asíntotas:

$y = \frac{2}{\sqrt{21}}x, \quad y = -\frac{2}{\sqrt{21}}x$

E2

	a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$	b) $\frac{x^2}{36} - y^2 = 1$
Vértice	$(4,0), (-4,0)$	$(6,0), (-6,0)$
Foco	$(5,0), (-5,0)$	$(\sqrt{37},0), (-\sqrt{37},0)$
Extremos	$(0,3), (0,-3)$	$(0,1), (0,-1)$

	c) $16x^2 - y^2 = 16$ ${}^2 - \frac{y^2}{16} = 1$	d) $4x^2 - 36y^2 = 144$ $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$
Vértice	$(1,0), (-1,0)$	$(6,0), (-6,0)$
Foco	$(\sqrt{17},0), (-\sqrt{17},0)$	$(2\sqrt{10},0), (-2\sqrt{10},0)$
Extremos	$(0,4), (0,-4)$	$(0,2), (0,-2)$

E3

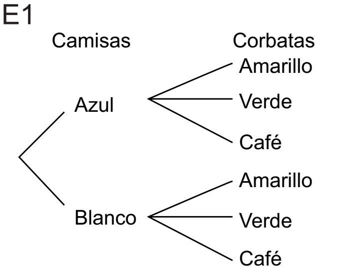
	a) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{25} = 1$	b) $\frac{y^2}{49} - x^2 = 1$
Vértice	$(0,4), (0,-4)$	$(0,7), (0,-7)$
Foco	$(0,\sqrt{41}), (0,-\sqrt{41})$	$(0,5\sqrt{2}), (0,-5\sqrt{2})$
Extremos	$(5,0), (-5,0)$	$(1,0), (-1,0)$

	c) $25y^2 - x^2 = 25$ $y^2 - \frac{x^2}{25} = 1$	d) $4y^2 - 9x^2 = 36$ $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$
Vértice	$(0,1), (0,-1)$	$(0,3), (0,-3)$
Foco	$(0,\sqrt{26}), (0,-\sqrt{26})$	$(0,\sqrt{13}), (0,-\sqrt{13})$
Extremos	$(5,0), (-5,0)$	$(2,0), (-2,0)$

UNIDAD 6

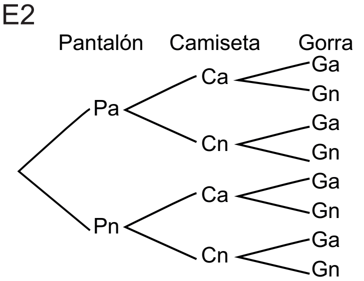
Sección 1 Contenido 1 (S1C1)

E1



6 juegos de 1 camisa y 1 corbata.

E2



8 trajes de 1 pantalón, 1 camiseta y 1 gorra.

S1C2

a) Obtener 7: $(6,1), (5,2), (4,3),$
$(3,4), (2,5), (1,6)$

Obtener 11: $(5,6), (6,5)$

Casos posibles: $6 + 2 = 8$

b) $12 + 14 = 26$ c) $43 + 38 = 81$

S1C3

a) $(5)(3) = 15$ b) $(8)(6) = 24$

S1C4

E1

$6! = (6)(5)(4)(3)(2)(1) = 720$

$7! = (7)(6)(5)(4)(3)(2)(1) = 5040$

E2

a) $3! = (3)(2)(1) = 6$

b) $5! = (5)(4)(3)(2)(1) = 120$

c) $4! = (4)(3)(2)(1) = 24$

d) $6! = (6)(5)(4)(3)(2)(1) = 720$

S1C5

E1

${}_6P_2 = (6)(5) = 30$

${}_5P_3 = (5)(4)(3) = 60$

${}_8P_5 = (8)(7)(6)(5)(4) = 6720$

E2

a) ${}_4P_3 = (4)(3)(2) = 24$

b) ${}_5P_4 = (5)(4)(3)(2) = 120$

c) ${}_6P_4 = (6)(5)(4)(3) = 360$

S1C6

a) $(3-1)! = 2! = (2)(1) = 2$

b) $(4-1)! = 3! = (3)(2)(1) = 6$

S1C7

a) ${}_6C_2 = \frac{(6)(5)}{(2)(1)} = 15$

b) ${}_6C_4 = \frac{(6)(5)(4)(3)}{(4)(3)(2)(1)} = 15$

c) ${}_7C_4 = \frac{(7)(6)(5)(4)}{(4)(3)(2)(1)} = 35$

S1C8

E1

a) ${}_7C_4 = \frac{(7)(6)(5)(4)}{(4)(3)(2)(1)} = 35$

b) ${}_{10}C_6 = \frac{(10)(9)(8)(7)(6)(5)}{(6)(5)(4)(3)(2)(1)} = 210$

E2

a) ${}_6C_2 \cdot {}_3C_2 = \frac{(6)(5)}{(2)(1)} \cdot \frac{(3)(2)}{(2)(1)}$

$= (15)(3) = 45$

b) ${}_{10}C_4 \cdot {}_8C_4 = \frac{(10)(9)(8)(7)}{(4)(3)(2)(1)} \cdot \frac{(8)(7)(6)(5)}{(4)(3)(2)(1)}$

$= (210)(70) = 14700$

S1C9

E1

a) ${}_4C_3 = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = \frac{(4)(3)(2)(1)}{(3)(2)(1)(1)} = 4$

${}_4C_3 = \frac{(4)(3)(2)}{(3)(2)(1)} = 4$

b) ${}_5C_2 = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{(5)(4)(3)(2)(1)}{(2)(1)(3)(2)(1)}$

$= 10$

${}_5C_2 = \frac{(5)(4)}{(2)(1)} = 10$

E2

a) ${}_6C_2 = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{(6)(5)(4)(3)(2)(1)}{(2)(1)(4)(3)(2)(1)}$

$= 15$

b) ${}_7C_3 = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = 35$

S1C10

a) $\frac{5!}{2!\,3!} = \frac{(5)(4)(3)(2)(1)}{(2)(1)(3)(2)(1)} = \frac{20}{2} = 10$

b) $\frac{7!}{2!\,2!\,3!} = \frac{(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1)}{(2)(1)(2)(1)(3)(2)(1)}$

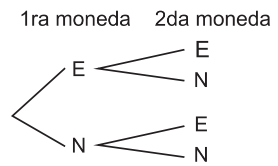
$= \frac{840}{4} = 210$

c) $\frac{8!}{3!\,2!} = \frac{(8)(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1)}{(3)(2)(1)(2)(1)}$

$= 3360$

S1C11

a)



b) $(4)(6) = 24$

c) $6! = (6)(5)(4)(3)(2)(1) = 720$

d) ${}_3P_2 = (3)(2) = 6$

e) $(4-1)! = 3! = (3)(2)(1) = 6$

No es posible que se sienten de manera diferente toda una semana, porque el número de los días de una semana es mayor que 6.

f) ${}_6C_4 = \frac{(6)(5)(4)(3)}{(4)(3)(2)(1)} = \frac{30}{2} = 15$

g) ${}_{15}C_2 \cdot {}_8C_3 = \frac{(15)(14)}{(2)(1)} \cdot \frac{(8)(7)(6)}{(3)(2)(1)}$

$= 5880$

h) ${}_4C_2 \cdot {}_3C_1 = \frac{(4)(3)}{(2)(1)} \cdot 3 = 18$

i) $\frac{8!}{3!\,2!} = \frac{(8)(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1)}{(3)(2)(1)(2)(1)}$

$= 3360$

S2C1

a) A: Obtener un número par:

$2, 4$ o 6

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

B: Obtener un múltiplo de 3:

3 o 6

$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Es más probable el evento A.

b) Seleccionar múltiplo de 7: 7 o 14

$\frac{2}{18} = \frac{1}{9}$

c) Seleccionar pelota blanca

$\frac{9}{9+8+3} = \frac{9}{20}$

Seleccionar pelota verde

$\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

S2C2

E1

a) Resultados iguales,

$(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)$

$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

b) Resultados suman 8,

$(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)$

$\frac{5}{36}$

E2

$\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

E3

$ENN, NEN, NNE \rightarrow \frac{3}{8}$

S2C3

a) A: Obtener un número impar;

$1, 3$ o 5

B: Obtener un múltiplo de 3;

3 o 6

$A \cap B$: Obtener el número 3

$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

b) A: Resultados suman 6,

$(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)$

B: Resultados iguales,

$(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)$

$A \cap B: \{(3,3)\}$

$P(A \cup B) = \frac{5}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{5}{18}$

S2C4

a) $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

b) $\frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{9}{10}$

c) $\frac{13}{52} + \frac{13}{52} = \frac{1}{2}$

d) A: Resultados suman 5,

$(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)$

A: Resultados suman 11,

$(5,6), (6,5)$

$P(A \cup B) = \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{1}{6}$

S2C5

E1

$P(A) = 1 \quad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad P(C) = 1$

$P(A \cup B) = 1$

E2

$P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \quad P(B) = 1$

$P(C) = 0$

S2C6

E1

a) Resultados suman 5,

$(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)$

$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

b) $P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

E2

a) $P(A) = \frac{45}{80} = \frac{9}{16}$

b) $P(\bar{A}) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$

E3

a) $P(A) = \frac{7}{20}$ b) $P(\bar{A}) = 1 - \frac{7}{20} = \frac{13}{20}$

S2C7

a) $\left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{16}{49}$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

c) $\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}$

S2C8

E1

a) Resultados suman 7,

$(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)$

$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

b) $A \cap B: \{(1,6), (1,6)\}$

$P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

c) $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{6}}$

$= \frac{1}{18} \div \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

E2

$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{3} \div \frac{2}{5} = \frac{5}{6}$

S2C9

E1

a) $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ b) $P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

c) $P(C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

E2

$EEN, ENE, NEE \rightarrow \frac{3}{8}$

E3

$P(A \cup B) = \frac{5}{10} + \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$

E4

a) $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

b) $P(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

c) $P(C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$

d) $P(M) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}, P(\overline{M}) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

E5 $\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{12}$

E6

a) $A: (1,1), (2,2), (3,3), (4,4),$
$(5,5), (6,6)$

$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

b) $B:\ (1,3), (2,2), (3,1)$

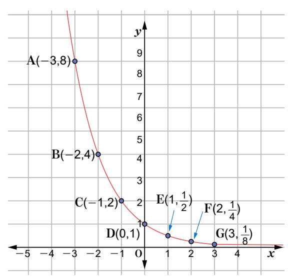
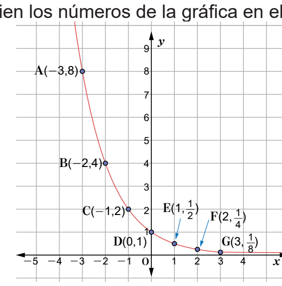
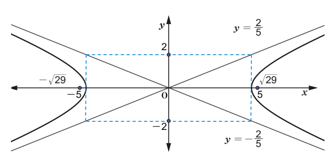
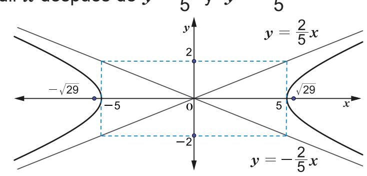
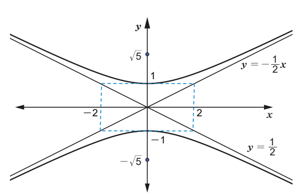
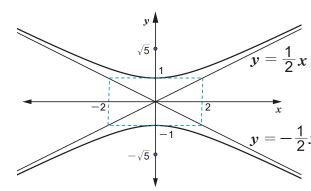
$A \cap B: (2,2)$

$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$

c) $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}}$

$= \frac{1}{36} \div \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

Diferencias del LT entre la versión para docentes y para estudiantes

No.	Página	Unidad	Sección	Contenido		Versión para docentes	Versión para estudiantes
1	2	1	1	1	Conclusión	En la tabla, el título de la columna: "En la sucesión le llamaremos"	"En la sucesión se llama"
2	6	4	2	2	Problema	a) Encuentre el a_1 y d	Quitar "el". Queda así: a) Encuentre a_1 y d
3	11	1	2	7	Ejercicio	"..., calcule la suma indicada."	Pasar del singular al plural. Queda así: "..., calcule las sumas indicadas."
4	17	1	3	2		"..., determine el término general a_n ..."	Quitar: " el término general". Queda así: "..., determine a_n ..."
5	31	2	1	2	Solución	c) $(ab)^3 = (a\cdot a\cdot a)(b\cdot b\cdot b) = (ab)(ab)(ab)$	c) $(ab)^3 = (ab)(ab)(ab) = (a\cdot a\cdot a)(b\cdot b\cdot b) = a^3b^3$
6	38	2	1	9	Solución	Recuerde: $(a^m)^n = a^{mn}$ $(\sqrt[n]{a})^n = a$	Si $a > 0$ y m, n son números racionales, entonces $(a^m)^n = a^{mn}$
7	38	2	1	9	Solución	Recuerde: $b^n = a$ si y solo si $b = \sqrt[n]{a}$	Eliminar el recuadro
8	40	2	1	11	Ejemplo a)	Se multiplican potencias Se efectúa la suma indicada de exponentes	Reemplazar las 2 líneas de la versión de los docentes con lo siguiente: Si $a > 0$ y m, n son números racionales, entonces $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
9	40	2	1	11	Ejemplo b)	Se efectúa la división de potencias Se efectúa la suma indicada de exponentes	Reemplazar las 2 líneas de la versión de los docentes con lo siguiente: Si $a > 0$ y m, n son números racionales, entonces $a^m \div a^n = a^{m-n}$.
10	43	2	2	2	Solución incisos b) y c)		Ubicar bien los números de la gráfica en el eje y. 
11	57	3	1	6	Ejemplo	4) $\log_a N^k = k\log_a N$ 5) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$ (k es número real)	4) $\log_a N^k = k\log_a N$ (k es número real) 5) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
12	58	3	1	7	Ejemplo	a) $\log_{16} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 16} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^4} = \frac{3\cancel{\log_2 2}}{4\cancel{\log_2 2}} = \mathbf{\frac{3}{4}}$ b) $\log_3 2 \cdot \log_2 9 = \cancel{\log_3 2} \cdot \frac{\log_3 9}{\cancel{\log_3 2}} = \log_3 9 = \log_3 3^2 = \mathbf{2}$	Alinear con las soluciones. a) $\log_{16} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 16} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^4} = \frac{3\cancel{\log_2 2}}{4\cancel{\log_2 2}} = \mathbf{\frac{3}{4}}$ b) $\log_3 2 \cdot \log_2 9 = \cancel{\log_3 2} \cdot \frac{\log_3 9}{\cancel{\log_3 2}} = \log_3 9 = \log_3 3^2 = \mathbf{2}$
13	112	5	3	3	Solución		Añadir x después de $y = \frac{2}{5}$ y $y = -\frac{2}{5}$ 
14	113	5	3	4	Solución		Corregir las ecuaciones de la asíntota 
15	122	6	1	4	Problema	"¿Cuáles y cuántos números de tres cifras puede formar utilizando... "	Añadir "diferentes se pueden" después de la palabra cifras. Queda así: "¿Cuáles y cuántos números de tres cifras **diferentes se pueden** formar utilizando... "
16	123	6	1	5	Problema	"¿Cuántos números de 3 cifras se puede formar con los dígitos... "	Añadir "diferentes" después de la palabra "cifras". Queda así: "¿Cuántos números de 3 cifras **diferentes** se pueden formar: ..."