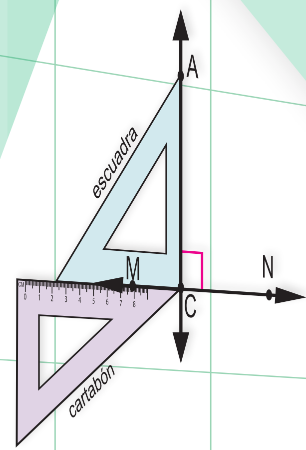
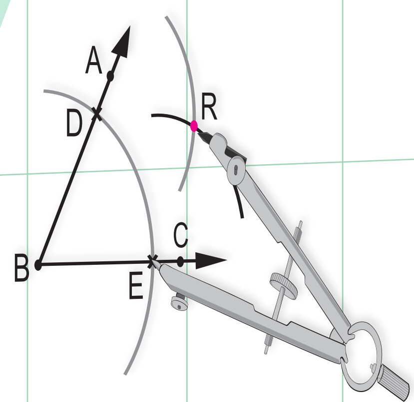
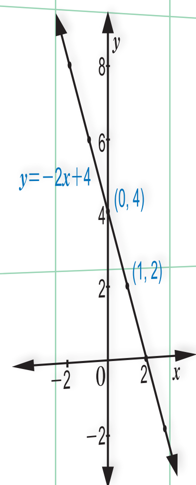
MATEMÁTICA 8

Octavo grado







Guía para Docentes

Educación Secundaria

Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional
El Pueblo, Presidente!
UNIDA, NICARAGUA TRIUNFA!

MINED
Un Ministerio en la Comunidad

jica

COORDINACIÓN GENERAL

Profesora Melba López Montenegro
Profesor Julio César Canelo Castillo

AUTORES

Armando José Huete Fuentes
Nubia Aracelly Barreda Rodríguez
Célfida del Rosario López Sánchez
Juan Carlos Caballero López
Primitivo Herrera Herrera
Anastacio Benito González Funes
Melissa Lizbeth Velásquez Castillo

COLECTIVO DE AUTORES

MINED	UNAN - MANAGUA	UNAN - LEÓN
Francisco Emilio Díaz Vega	Nubia Aracelly Barreda Rodríguez	Anastacio Benito González Funes
Humberto Antonio Jarquín López	Melissa Lizbeth Velásquez Castillo	Domingo Felipe Aráuz Chévez
Gregorio Isabel Ortiz Hernández	Armando José Huete Fuentes	Célfida del Rosario López Sánchez
Juan Carlos Caballero López	Primitivo Herrera Herrera	Orlando Antonio Ruiz Álvarez
Alberto Leonardo García Acevedo	Marlon José Espinoza Espinoza	Hilario Ernesto Gallo Cajina

INSTITUTOS QUE PARTICIPARON EN LA VALIDACIÓN

Colegio Clementina Cabezas, Managua, Managua
Colegio Fernando Gordillo, Managua, Managua
Colegio Tomas Borge, Mateare, Managua
Colegio San Cayetano, San Rafael del Sur, Managua
Instituto Nacional La Salle, Diriamba, Carazo
Instituto Juan José Rodriguez, Jinotepe, Carazo
San Benito #1, Chinandega, Chinandega
Instituto Nacional Rubén Darío, Posoltega, Chinandega
Jhon F. Kenedy, León, León
Salomón de la Selva, León, León

EQUIPO DE DIAGRAMACIÓN

Maribel del Socorro Cuarezma López

Primera Edición, 2019.

La presente publicación ha sido reproducida con el apoyo de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA) a través del Proyecto para el Aprendizaje Amigable de matemática en Educación Secundaria (NICAMATE).

Índice

I. Introducción

Este documento es un material educativo llamado “Guía para Docentes”, que está dirigido a los docentes de matemática de Nicaragua, y tiene como objetivos:

- Brindar una propuesta de programación anual estándar de enseñanza.
- Brindar sugerencias sobre el uso de los Libros de Texto y el tiempo de trabajo independiente del estudiante.
- Mostrar la secuencialidad que existe entre los contenidos del currículo de matemática en Educación Secundaria.
- Indicar los aspectos esenciales de cada clase (pre saberes, posibles errores, aspectos del nuevo contenido en que se debe hacer énfasis, etc.).
- Promover el uso adecuado de la pizarra.
- Ofrecer los solucionarios de los ejercicios con sus procedimientos.
- Fomentar la evaluación formativa a través de las pruebas de unidad.

La Guía para Docentes se elaboró atendiendo al análisis de las observaciones de clase que se realizó en los centros educativos de validación, concluyendo que es importante:

- Tener claro el aprendizaje esperado en cada clase y la secuencialidad entre los contenidos del currículo.
- Hacer uso adecuado de la pizarra, escribiendo lo necesario para que el estudiante comprenda.
- Dar tiempo para que los estudiantes trabajen de forma independiente.

El Ministerio de Educación (MINED) pone a disposición de los docentes este recurso, considerando que la implementación del mismo y el uso del Libro de Texto, cambiará la experiencia de los estudiantes al aprender matemática en la escuela, y promoverá la creatividad en la búsqueda de soluciones y la argumentación cuando se enfrenten a un problema. Para dicha implementación es necesario considerar algunos aspectos esenciales:

Enseñanza basada en el aprendizaje de los estudiantes. Para enseñar matemática se deben utilizar situaciones problemáticas que despierten el interés de los estudiantes y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver problemas y a argumentar sus respuestas. En estas situaciones se deben considerar los conocimientos y habilidades que se pretenden desarrollar.

Rol del estudiante en el aprendizaje. Los estudiantes deben utilizar los conocimientos previos que le permitan reorganizar lo que ya sabe, y aplicarlos en una nueva situación. Este proceso de estudio se apoya más en la reflexión del estudiante, que en la simple memorización tradicional.

Rol del docente en el aula. La acción del docente es un factor clave, porque es el encargado de generar ambientes propicios para el aprendizaje e involucrarlos en actividades que permitan el logro de los aprendizajes esperados. Ante esto, el verdadero desafío para los docentes consiste en ayudar a sus estudiantes a analizar y socializar sus resultados.

Retos de los estudiantes y docentes en las clases de matemática. Cambio de actitud frente a ideas diferentes sobre lo que significa enseñar y aprender matemática. No se trata de que el docente busque las explicaciones más sencillas y amenas, sino que ayude a formarles la capacidad de pensar y aprender por sí mismos, para que ellos sientan la satisfacción de poder resolver problemas.

II. Estructura del Libro de Texto para estudiantes

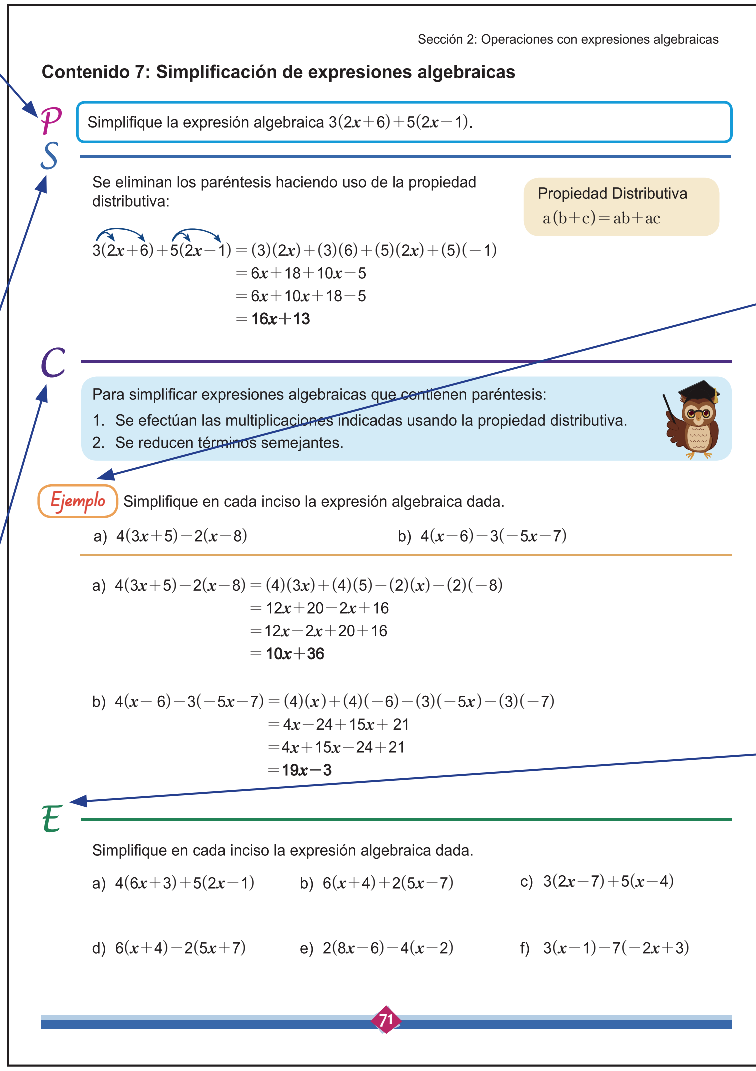
El Libro de Texto consta de introducción y unidades. En la introducción se detallan los momentos del desarrollo de un contenido, los cuales son: problema de la clase, solución del problema, conclusión y ejercicios. En algunos contenidos, por sus características, se han agregado ejemplos después de la conclusión.

Cada unidad del Libro de Texto se ha estructurado por sección, estas contienen una secuencia de contenidos contemplados en la malla curricular de matemática para Educación Secundaria.

P Representa el problema inicial, el cual se debe leer y analizar identificando las condiciones que plantea y lo que se pregunta.

S Representa la solución del problema inicial explicada paso a paso.

C Representa la conclusión de la clase, donde se propone el esquema de solución del problema inicial, en algunos casos también se presentan conceptos importantes usados en el problema.



Sección 2: Operaciones con expresiones algebraicas

Contenido 7: Simplificación de expresiones algebraicas

P Simplifique la expresión algebraica $3(2x+6)+5(2x-1)$.

S

Se eliminan los paréntesis haciendo uso de la propiedad distributiva:

Propiedad Distributiva $a(b+c)=ab+ac$

$$\begin{aligned}3(2x+6)+5(2x-1) &= (3)(2x)+(3)(6)+(5)(2x)+(5)(-1)\\ &= 6x+18+10x-5\\ &= 6x+10x+18-5\\ &= \mathbf{16x+13}\end{aligned}$$

C

Para simplificar expresiones algebraicas que contienen paréntesis:

1. Se efectúan las multiplicaciones indicadas usando la propiedad distributiva.
2. Se reducen términos semejantes.

Ejemplo Simplifique en cada inciso la expresión algebraica dada.

a) $4(3x+5)-2(x-8)$ b) $4(x-6)-3(-5x-7)$

a) $$\begin{aligned}4(3x+5)-2(x-8) &= (4)(3x)+(4)(5)-(2)(x)-(2)(-8)\\ &= 12x+20-2x+16\\ &= 12x-2x+20+16\\ &= \mathbf{10x+36}\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}4(x-6)-3(-5x-7) &= (4)(x)+(4)(-6)-(3)(-5x)-(3)(-7)\\ &= 4x-24+15x+21\\ &= 4x+15x-24+21\\ &= \mathbf{19x-3}\end{aligned}$$

E

Simplifique en cada inciso la expresión algebraica dada.

a) $4(6x+3)+5(2x-1)$ b) $6(x+4)+2(5x-7)$ c) $3(2x-7)+5(x-4)$

d) $6(x+4)-2(5x+7)$ e) $2(8x-6)-4(x-2)$ f) $3(x-1)-7(-2x+3)$

71

Ejemplo

Los ejemplos que se presentan son variantes del problema inicial.

E Representa los ejercicios propuestos, es importante que los estudiantes los intenten resolver por sí mismos.

En **Comprobemos lo aprendido** se presentan una serie de ejercicios representativos de contenidos anteriores, el objetivo de estas clases es asegurar un tiempo de ejercitación que permita afianzar los conocimientos adquiridos y aclarar cualquier duda que puedan tener de los contenidos estudiados.

En algunos grados hay un contenido denominado **Desafío** en el que se presentan casos especiales o contenidos más complejos. El desafío se puede tratar en su clase si tiene suficiente horas de clase y sus estudiantes tienen una buena capacidad para entenderlo. De lo contrario, es mejor omitir este contenido para dedicar más tiempo a los contenidos básicos.

1. Propuesta de programación anual de 8vo grado

Semestre	Mes	Unidad (Horas)	Pág. del LT	Sección
I	Febrero Marzo	1. Operaciones con Polinomios (15 H/C)	1-16	1. Adición y sustracción de polinomios 2. Multiplicación de polinomios 3. División de polinomios
I	Marzo Abril	2. Sistemas de Ecuaciones de Primer Grado (21 H/C)	17-40	1. Ecuaciones de primer grado 2. Método de sustitución 3. Método de reducción 4. Sistemas de ecuaciones con paréntesis, fracciones y decimales 5. Aplicaciones de los sistemas de ecuaciones de primer grado
I	Abril Mayo Junio	3. Funciones de Primer Grado (26 H/C)	41-70	1. Función de primer grado 2. Gráfica de la función de primer grado 3. Expresión de la función de primer grado utilizando la pendiente 4. Gráfica de ecuaciones de primer grado con dos variables 5. Aplicaciones de la función de primer grado
I / II	Junio Julio Agosto	4. Radicales (18 H/C)	71-88	1. Raíz Cuadrada 2. Operaciones con raíces cuadradas
II	Agosto	5. Paralelismo (15 H/C)	89-104	1. Resta de ángulos 2. Ángulos entre rectas cortadas por una transversal 3. Ángulos internos y externos de un triángulo
II	Septiembre Octubre	6. Congruencia (18 H/C)	105-124	1. Criterios de congruencia de triángulos 2. Introducción a la demostración 3. Triángulo isósceles 4. Congruencia de triángulos rectángulos
II	Octubre	7. Paralelogramos (12 H/C)	125-138	1. Propiedades de los paralelogramos 2. Condiciones para ser paralelogramo 3. Paralelogramos especiales
II	Noviembre	8. Sólidos (15 H/C)	139-154	1. Poliedros 2. Cuerpos redondos

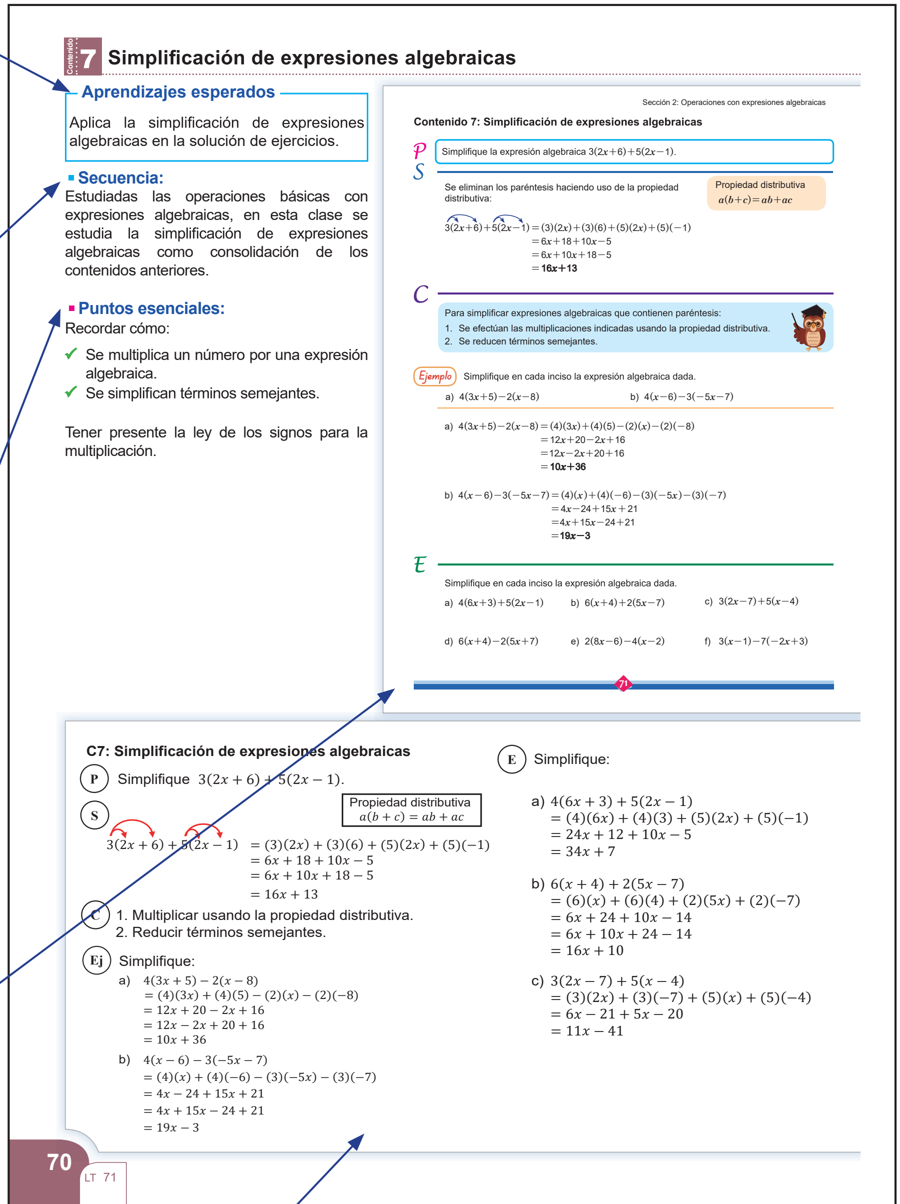
2. Elementos de una página de la Guía para Docentes

Aprendizajes esperados:
Es el elemento que define lo que se espera que logren los estudiantes en cada clase, expresado en forma concreta, precisa y visualizable.

Secuencia:
Se indican los conocimientos previos que el estudiante posee para la comprensión del nuevo contenido y la relación con contenidos posteriores.

Puntos esenciales:
Se orienta sobre procedimientos o conceptos en los que se debe enfatizar, así como las posibles dificultades y errores que podrían presentarse.

Página del Libro de Texto:
Tiene como propósito ubicar y relacionar el contenido de aprendizaje con el proceso de la clase.



Contenido 7 Simplificación de expresiones algebraicas

Aprendizajes esperados
Aplica la simplificación de expresiones algebraicas en la solución de ejercicios.

Secuencia:
Estudiadas las operaciones básicas con expresiones algebraicas, en esta clase se estudia la simplificación de expresiones algebraicas como consolidación de los contenidos anteriores.

Puntos esenciales:
Recordar cómo:
- ✓ Se multiplica un número por una expresión algebraica.
- ✓ Se simplifican términos semejantes.

Tener presente la ley de los signos para la multiplicación.

Sección 2: Operaciones con expresiones algebraicas

Contenido 7: Simplificación de expresiones algebraicas

P Simplifique la expresión algebraica $3(2x+6)+5(2x-1)$.

S Se eliminan los paréntesis haciendo uso de la propiedad distributiva:

Propiedad distributiva $a(b+c)=ab+ac$

$$\begin{aligned}3(2x+6)+5(2x-1)&=(3)(2x)+(3)(6)+(5)(2x)+(5)(-1)\\&=6x+18+10x-5\\&=6x+10x+18-5\\&=\mathbf{16x+13}\end{aligned}$$

C Para simplificar expresiones algebraicas que contienen paréntesis:
1. Se efectúan las multiplicaciones indicadas usando la propiedad distributiva.
2. Se reducen términos semejantes.

Ejemplo Simplifique en cada inciso la expresión algebraica dada.

a) $4(3x+5)-2(x-8)$ b) $4(x-6)-3(-5x-7)$

a) $$\begin{aligned}4(3x+5)-2(x-8)&=(4)(3x)+(4)(5)-(2)(x)-(2)(-8)\\&=12x+20-2x+16\\&=12x-2x+20+16\\&=\mathbf{10x+36}\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}4(x-6)-3(-5x-7)&=(4)(x)+(4)(-6)-(3)(-5x)-(3)(-7)\\&=4x-24+15x+21\\&=4x+15x-24+21\\&=\mathbf{19x-3}\end{aligned}$$

E Simplifique en cada inciso la expresión algebraica dada.

a) $4(6x+3)+5(2x-1)$ b) $6(x+4)+2(5x-7)$ c) $3(2x-7)+5(x-4)$

d) $6(x+4)-2(5x+7)$ e) $2(8x-6)-4(x-2)$ f) $3(x-1)-7(-2x+3)$

71

C7: Simplificación de expresiones algebraicas

P Simplifique $3(2x+6)+5(2x-1)$.

S Propiedad distributiva $a(b+c)=ab+ac$

$$\begin{aligned}3(2x+6)+5(2x-1)&=(3)(2x)+(3)(6)+(5)(2x)+(5)(-1)\\&=6x+18+10x-5\\&=6x+10x+18-5\\&=16x+13\end{aligned}$$

C 1. Multiplicar usando la propiedad distributiva.
2. Reducir términos semejantes.

Ej Simplifique:

a) $$\begin{aligned}4(3x+5)-2(x-8)&=(4)(3x)+(4)(5)-(2)(x)-(2)(-8)\\&=12x+20-2x+16\\&=12x-2x+20+16\\&=10x+36\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}4(x-6)-3(-5x-7)&=(4)(x)+(4)(-6)-(3)(-5x)-(3)(-7)\\&=4x-24+15x+21\\&=4x+15x-24+21\\&=19x-3\end{aligned}$$

E Simplifique:

a) $$\begin{aligned}4(6x+3)+5(2x-1)&=(4)(6x)+(4)(3)+(5)(2x)+(5)(-1)\\&=24x+12+10x-5\\&=34x+7\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}6(x+4)+2(5x-7)&=(6)(x)+(6)(4)+(2)(5x)+(2)(-7)\\&=6x+24+10x-14\\&=6x+10x+24-14\\&=16x+10\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}3(2x-7)+5(x-4)&=(3)(2x)+(3)(-7)+(5)(x)+(5)(-4)\\&=6x-21+5x-20\\&=11x-41\end{aligned}$$

70

LT 71

Plan de Pizarra

En la pizarra se presenta de forma ordenada el problema de la clase, el proceso de solución, la conclusión central de la clase derivada del problema central y la indicación del ítem de evaluación, con su correspondiente solución. En algunas clases se presenta un ejemplo después de la conclusión y previo al ítem de evaluación. Este tiene como propósito consolidar el aprendizaje o ampliar el contenido en desarrollo. Lo que se plasma en la pizarra permitirá a los estudiantes llevar un registro ordenado de sus apuntes para estudiarlos posteriormente.

3. Prueba de cada Unidad

Se presenta una propuesta de la prueba por unidad para evaluar el nivel de comprensión de los estudiantes. Los docentes deben orientar con anticipación la fecha de aplicación de la prueba de la unidad a los estudiantes para que ellos repasen y consoliden lo que aprendieron en la unidad. Si el rendimiento es bajo en algunos problemas, los docentes deben tomar medidas para mejorarlo y a la vez asegurar que este bajo rendimiento no obstaculice el siguiente aprendizaje.

De esta manera, los docentes pueden utilizar esta prueba para discusión sobre los resultados obtenidos y posibles estrategias didácticas a implementar con sus colegas de la misma institución o en los Encuentros Pedagógicos de Interaprendizaje (EPI).

* Vea “VII. 1. Uso de las pruebas de unidad” para una descripción más detallada sobre la evaluación.

4. Solucionarios

Se presentan las soluciones de los ejercicios del Libro de Texto de acuerdo a la unidad, sección y contenido. En este se muestran más detalles en el proceso de solución que los brindados en el solucionario del Libro de Texto.

IV. Orientaciones metodológicas para el mejoramiento de los aprendizajes del área de Matemática

Enseñar matemática en base a actividades de aprendizaje que desarrollen en los estudiantes formas de pensar y que permitan formular conjeturas y procedimientos para resolver problemas, argumentando sus resultados, significa que ellos deben:

(1) Leer y analizar los enunciados del problema.

(2) Pensar por sí mismos la solución al problema.

(3) Expresar sus soluciones.

(4) Comparar sus ideas unos con otros.

(5) Comprender las ideas de los demás.

(6) Aprender unos de otros.

V. Recomendaciones para el desarrollo de una clase según los momentos P, S, C, EJ, E

Para lograr los aprendizajes esperados de una clase, se debe tener en cuenta que el centro del proceso de aprendizaje es el estudiante, por lo que deben participar de forma activa en cada momento de la clase. En este proceso, el rol principal del docente es asistir en su aprendizaje a los estudiantes. A continuación, se presentan algunas recomendaciones a considerar en los diferentes momentos de la clase:

Momentos de la clase	Actividades del Docente	Actividades del Estudiante
P	Indicar que lean el problema. Escribir el problema en la pizarra, mientras los estudiantes leen. Indicar a los estudiantes que copien el problema en su cuaderno. Explicar el problema de forma clara, si es necesario.	Leer el problema. Escribir el problema en su cuaderno. Comprender el problema.
S	Orientar que resuelvan el problema en su cuaderno. No dar mucho tiempo si los estudiantes no muestran posibles respuestas al problema planteado. Monitorear el avance de los estudiantes identificando soluciones interesantes, errores, etc., mientras se recorre el salón de clase. Indicar a los estudiantes que atiendan a las explicaciones que hará. Explicar la solución del texto en la pizarra, cuando todos los estudiantes estén poniendo atención. Indicar a los estudiantes que copien la solución en su cuaderno y revisar que lo hagan.	Intentar dar solución al problema, escribiendo sus apuntes en el cuaderno. Hacer silencio y poner atención al docente. Observar la explicación del docente y hacer preguntas si es necesario. Escribir la solución en su cuaderno.

Momentos de la clase	Actividades del Docente	Actividades del Estudiante
C	Orientar lectura de la conclusión. Explicar la conclusión a partir del proceso de solución del problema.	Leer la conclusión planteada en el Libro de Texto. Relacionar la conclusión con el proceso de solución del problema. Anotar la conclusión en su cuaderno.
Ej (En el caso de presentarse un ejemplo)	Indicar que lean el ejemplo. Indicar que copien el ejemplo en su cuaderno. Explicar el ejemplo, haciendo hincapié en la aplicación de la conclusión.	Analizar la solución del ejemplo, de forma conjunta con el docente. Aplicar la conclusión en la solución del ejemplo.
E	Orientar el o los ejercicios a ser resueltos. Asignar tiempo prudencial para que los estudiantes resuelvan los ejercicios. Recorrer el salón mientras los estudiantes resuelven el ítem. Monitorear cuántos estudiantes resuelven al menos el primer ejercicio propuesto. Si hay muchos estudiantes que no han resuelto el ítem de evaluación, explicar este en la pizarra sin esperar mucho tiempo y dar la oportunidad de resolver el siguiente ítem. Brindar oportunidad de que algunos estudiantes expliquen la solución de al menos el primer ejercicio. Revisar y explicar el procedimiento y respuesta en la pizarra.	Resolver de forma individual cada ejercicio. Aplicar la conclusión aprendida. Si termina todos los ejercicios propuestos, brindar apoyo a aquellos que no han concluido. Socializar la solución de ejercicios.

VI. Puntos importantes a considerar en la facilitación del aprendizaje

a) Usar adecuadamente el tiempo

Alcanzar el aprendizaje esperado no es una tarea sencilla, por lo que, a continuación, se sugieren algunas técnicas para asegurar el aprendizaje en el tiempo establecido:

- Ubicación de los pupitres de los estudiantes en filas, todos los estudiantes dirigidos hacia la pizarra.
- Disposición del LT antes de iniciar la clase: orientar a los estudiantes tener preparados los recursos o materiales antes del inicio de la clase.
- Tiempo a dedicar para el recordatorio o repaso: Si se destina más de 3 minutos en la parte inicial donde se recuerdan los presaberes, en la mayoría de los casos se produce un desfase que afectará las clases posteriores.

b) Evaluar y brindar orientación necesaria desplazándose en el aula

Mientras los estudiantes resuelven el problema o el ítem de evaluación, el docente debe desplazarse en el aula para evaluar el nivel de comprensión del contenido, revisando el trabajo de los estudiantes y observando si han comprendido el enunciado.

c) Dar explicaciones claras a los estudiantes

Las instrucciones y explicaciones a los estudiantes deben ser claras y concretas, en este sentido es importante hablar cuando se capte la atención de los estudiantes. Para captar la atención el docente debe llamar a los estudiantes con frases como “Miren a la pizarra”, “Atención por favor”, entre otras. En caso de que en el aula persista la indisciplina, el docente puede dejar de explicar o bajar el volumen de la voz.

Es importante durante la explicación observar a los estudiantes para suponer su nivel de comprensión, esto significa que en ocasiones es necesario repetir la explicación cambiando expresiones, hablar más despacio, invitar a estudiantes para que expliquen con sus palabras, etc.

d) Aprovechar el rendimiento de los estudiantes que resuelven rápido los ejercicios

Para aprovechar el rendimiento de los estudiantes que resuelven los ejercicios más rápido, el docente puede establecer el siguiente compromiso: cuando terminen todos los problemas y los hayan revisado, entonces ellos pueden orientar a los demás compañeros. Así mismo, el docente puede preparar otra serie de problemas para la fijación del contenido u otro tipo de problemas que tienen carácter de desafío.

e) Revisar los cuadernos de apunte

Si no se brinda un monitoreo continuo sobre el uso del cuaderno, eventualmente se puede utilizar de manera desordenada, por lo que es necesario que se revise periódicamente, de modo que los estudiantes sientan que están siendo monitoreados. Y también es recomendable chequear cuadernos de los estudiantes durante la etapa de ejercicio para animar a los estudiantes (marcar ✓ , firmar o sellar)

f) Formar el hábito de estudio en el hogar

Formar el hábito de estudio de los estudiantes en el hogar es tarea no solamente del docente, sino también de los padres de familia y no es nada fácil. Por lo que, al inicio, se podría formar el hábito de estudio a través de la asignación de tareas y orientar que estas se revisarán periódicamente.

g) Usar adecuadamente la pizarra

La pizarra tiene la función de un cuaderno común entre el docente y los estudiantes, por lo cual debe ordenarse el desarrollo del aprendizaje del contenido en ella. En esta Guía se propone utilizar la siguiente estructura en la pizarra, de acuerdo con el proceso de aprendizaje de matemática establecido en este mismo documento:

Se escribe el problema inicial de forma resumida.

Se resuelve, como mínimo, el primero de cada serie de ejercicios propuestos.

Se presenta la solución del problema

Se establece en forma resumida la conclusión a partir de la solución del problema.

C7: Simplificación de expresiones algebraicas

P Simplifique $3(2x+6)+5(2x-1)$.

S

Propiedad distributiva
$a(b+c)=ab+ac$

$$\begin{aligned}3(2x+6)+5(2x-1) &= (3)(2x)+(3)(6)+(5)(2x)+(5)(-1)\\ &= 6x+18+10x-5\\ &= 6x+10x+18-5\\ &= 16x+13\end{aligned}$$

C 1. Multiplicar usando la propiedad distributiva.
2. Reducir términos semejantes.

Ej Simplifique:

a) $$\begin{aligned}&4(3x+5)-2(x-8)\\ &=(4)(3x)+(4)(5)-(2)(x)-(2)(-8)\\ &=12x+20-2x+16\\ &=12x-2x+20+16\\ &=10x+36\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}&4(x-6)-3(-5x-7)\\ &=(4)(x)+(4)(-6)-(3)(-5x)-(3)(-7)\\ &=4x-24+15x+21\\ &=4x+15x-24+21\\ &=19x-3\end{aligned}$$

E Simplifique:

a) $$\begin{aligned}&4(6x+3)+5(2x-1)\\ &=(4)(6x)+(4)(3)+(5)(2x)+(5)(-1)\\ &=24x+12+10x-5\\ &=34x+7\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}&6(x+4)+2(5x-7)\\ &=(6)(x)+(6)(4)+(2)(5x)+(2)(-7)\\ &=6x+24+10x-14\\ &=6x+10x+24-14\\ &=16x+10\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}&3(2x-7)+5(x-4)\\ &=(3)(2x)+(3)(-7)+(5)(x)+(5)(-4)\\ &=6x-21+5x-20\\ &=11x-41\end{aligned}$$

Se resuelve el ejemplo para consolidación o ampliación del contenido.

En este documento se propone el uso de la pizarra de forma ordenada:

- En caso de que el problema sea de enunciado extenso, se debe escribir un resumen comprensible de dicho enunciado.
- En el proceso de solución no debe repetirse cada palabra de la solución planteada en el Libro de Texto, pero sí debe escribirse cada paso imprescindible del proceso.
- La conclusión también puede mostrarse de forma resumida (cuando esta es extensa).
- Debe brindarse espacio suficiente para resolver al menos el primero de cada serie de ejercicios propuestos.
- Si no puede seguir escribiendo en la pizarra debido a su pequeño tamaño, puede borrar los contenidos que los estudiantes ya han terminado de copiar y escribir la continuación. Debe procurarse dividir la pizarra en dos columnas con el mismo espacio en cada una.

VII. Uso de las Pruebas de Unidad

1. Propuesta sobre el uso de las Pruebas de Unidad

El propósito de esta propuesta es sugerir el uso efectivo de las pruebas de unidad que están incluidas en los Libros de Texto y Guías para Docentes desarrolladas por NICAMATE, y cómo estas podrían usarse para evaluar a los estudiantes en la asignatura de Matemática.

Se espera que las pruebas se realicen después de terminar cada unidad del Libro de Texto para que los docentes puedan conocer el alcance de los aprendizajes esperados en los contenidos de la unidad y, lo que es más importante, darles retroalimentación. En este sentido, el enfoque principal de las pruebas de unidad es brindar a los docentes una herramienta para administrar y mejorar efectivamente el aprendizaje de sus estudiantes. Dado que las pruebas se insertan en la parte de anexo al final de los Libros de Texto, los docentes podrían preguntarse si los estudiantes pueden ver las pruebas con anticipación y esto arruinaría el propósito de las pruebas. Sin embargo, las pruebas se incorporan en los Libros de Texto basándose en la idea de que estas contribuirán a mejorar el aprendizaje de los estudiantes siempre que las pruebas los alienten a estudiar y prepararse.

Las pruebas, además de eso, también podrían usarse para evaluar el desempeño de los estudiantes. Se espera que un sistema de evaluación eficaz, junto con los nuevos Libros de Texto y Guías para Docentes, contribuyan a mejorar aún más el aprendizaje de los estudiantes en matemática. Es en este contexto que, siguiendo la solicitud del MINED, el Proyecto NICAMATE sugiere 2 opciones sobre el uso de las pruebas individuales para la evaluación. Al hacer esta sugerencia, el Proyecto consideró el “Manual de Planeamiento Didáctico y Evaluación de los Aprendizajes en Educación Secundaria” escrito por el MINED.

2. Opciones sobre el uso de las Pruebas de Unidad para evaluación

(1) Opción 1

Total: 100 Puntos

Pruebas de Unidades (PU): 50 Puntos

Prueba Escrita o Trabajo Escrito Durante el Corte de Evaluación: 50 Puntos

Tabla de Ejemplo para la Opción 1 en Caso de 7mo Grado

No.	Nombre	Prueba de Unidad (20 Puntos para Cada Unidad)							Total de PU Acumulado (140 Puntos)	[A] Puntos de PU Ajustados (50 Puntos)*	[B] Prueba Escrita o Trabajo Escrito (50 Puntos)	Valoración Cuantitativa (100 Puntos) A+B	Valoración Cualitativa
		U1	U2	U3	U4	U5	U6	U7					
1	María	10	5	10	8	14	13	10	70	25	40	65	AE
2	Juan	18	16	20	15	12	16	20	117	42	40	82	AS

* [A] Puntos de PU Ajustados (50 Puntos) = Total de PU Acumulado × 50/140

La primera opción es tener dos criterios principales para la evaluación, las pruebas de unidad (50 puntos) y Prueba o Trabajo Escrito Durante el Corte de Evaluación (50 puntos). Los puntos asignados a cada criterio podrían ajustarse teniendo en cuenta la situación de cada centro educativo. La tabla anterior toma el caso del 7mo grado como ejemplo y, por lo tanto, tiene 7 pruebas de unidad, cada una de las cuales toma hasta 20 puntos. El total de puntos de las pruebas acumuladas, en este caso máximo 140 puntos, debe ajustarse a unos 50 puntos. La fórmula para este ajuste será Puntos de PU Ajustados $=$ Total de PU Acumulado $\times$ 50/140.

La suma de la Evaluación de Puntos de PU Ajustados y Prueba o Trabajo Escrito Durante el Corte será la marca cuantitativa final para los estudiantes. La calificación cualitativa se otorga en base a la marca cuantitativa. Los criterios para el grado cualitativo en el ejemplo son los mismos que en el manual:

Aprendizaje Avanzado (AA): 90-100 puntos

Aprendizaje Satisfactorio (AS): 76-89 puntos

Aprendizaje Elemental (AE): 60-75 puntos

Aprendizaje Inicial (AI): Menos de 60.

También es posible asignar menos puntos a las pruebas de unidad para la evaluación. Es importante que al revisar las pruebas se dé retroalimentación en la solución de los ejercicios en lo que los estudiantes cometieron errores. Después de recibir los comentarios, los estudiantes pueden volver a realizar los ejercicios en los que fallaron. Es en este proceso donde los estudiantes aprenden matemáticas cada vez mejor.

(2) Opción 2

Total: 100 Puntos

Pruebas de Unidades: 30 Puntos

Evaluación de Actitud: 30 Puntos

Prueba o Trabajo Escrito Durante Corte Evaluación: 40 Puntos

Tabla de Ejemplo para Opción 2 en Caso de 7mo Grado

No.	Nombre	Pruebas de Unidad (20 Puntos para Cada Unidad)									Evaluación de Actitud (10 Puntos para Cada Indicador)						
		U1	U2	U3	U4	U5	U6	U7	Total de PU Acumulado (140 Puntos)	**[A]** Puntos de PU Ajustados (30 Puntos)*	EA 1	EA 2	EA 3	**[B]** Total de EA Acumulado (30 Puntos)	**[C]** Prueba Escrita o Trabajo Escrito (50 Puntos)	Valoración Cuantitativa (100 Puntos) **A+B+C**	Valoración Cualitativa
1	María	10	5	10	8	14	13	10	70	15	10	9	8	27	30	72	AE
2	Juan	18	16	10	8	12	16	10	90	19	2	1	2	5	40	64	AE

* [A] Puntos de PU Ajustados (30 Puntos) = Total de PU Acumulado × 30/140

En esta opción, además de la evaluación mediante pruebas o trabajos escritos durante el corte, los docentes también deben considerar los resultados de las pruebas de unidad y las actitudes de los estudiantes hacia el aprendizaje de la matemática. Si bien los docentes podrían seleccionar los indicadores para evaluar las actitudes de los estudiantes, el Proyecto sugiere que se incluyan los siguientes indicadores:

- Entrega de tareas
- Puntualidad
- Asistencia
- Trabaja en el aula de clases
- Atiende las explicaciones del docente

La ventaja de la Opción 2 es que, como lo muestra el ejemplo en la tabla, incluso si un estudiante no pudo obtener una buena calificación en las pruebas de unidad y en las pruebas o trabajos escritos durante el corte, puede obtener una buena calificación, siempre y cuando demuestre una buena actitud hacia el estudio de la matemática. Esto requiere que los docentes observen cuidadosamente a cada estudiante.

** Si el MINED emite una nueva instrucción sobre la evaluación, deben seguirla.*

Unidad 1

Operaciones con Polinomios

Contenido 1 Clasificación de polinomios

Aprendizajes esperados

Clasifica polinomios de acuerdo al número de términos.

Secuencia:

En séptimo grado se estudió qué es una expresión algebraica, el concepto de término algebraico y sus elementos (variable, coeficiente y exponente).

En esta clase se estudian las expresiones algebraicas conocidas como polinomios, especialmente: monomios, binomios y trinomios. También se trabajará el concepto de grado de un polinomio.

Puntos esenciales:

Recordar qué es un término, y sus partes (coeficiente, variable y exponente).

Hacer notar que un término es un monomio y viceversa.

Indicar que los monomios, binomios y trinomios son casos particulares de polinomios, y que hay polinomios de cuatro términos o más.

Enfatizar que el grado de un polinomio es el mayor grado que este tenga entre sus términos.

Abordar en la conclusión el concepto de grado (de un monomio o polinomio) a través de ejemplos.

Unidad 1: Operaciones con Polinomios

Sección 1: Adición y sustracción de polinomios

Contenido 1: Clasificación de polinomios

P Escriba en la casilla correspondiente de la tabla la información solicitada respecto de las expresiones algebraicas:

a) $3x$ b) x^2+5x+6 c) $4x^3+2x^2$

MET significa mayor exponente entre los términos.

	Expresión algebraica	Número de términos	MET
a)	$3x$		
b)	x^2+5x+6		
c)	$4x^3+2x^2$		

S

	Expresión algebraica	Número de términos	MET
a)	$3x$	1	1
b)	x^2+5x+6	3	2
c)	$4x^3+2x^2$	2	3

Elementos de un monomio

Coeficiente numérico — $3x^2$ — Exponente

Variable

La expresión algebraica $3x$, por tener un término se llama monomio, $4x^3+2x^2$, con dos términos, se llama binomio y x^2+5x+6 es un trinomio.

C **Monomio** y **polinomio** son expresiones algebraicas. Un monomio tiene solo un término y un polinomio es una suma finita de términos. Si tiene dos o tres términos, se llama **binomio** y **trinomio** respectivamente.

El **grado de un monomio** es la suma de los exponentes de las variables que contiene. Por ejemplo, el grado de x^2y^3 es $2+3=5$.

El **grado de un polinomio** es el mayor grado entre sus términos.

Término independiente es un término que no contiene variables, es decir, solamente aparece un número. Por ejemplo, el término independiente de x^2+5x+6 es 6.

Ejemplo Dados los siguientes polinomios, identifique el grado y clasifíquelos de acuerdo al número de términos:

a) x^4+3x^2 b) $xyz+xy+z$

a) $\underbrace{x^4}_{\substack{x\cdot x\cdot x\cdot x\\4}}+\underbrace{3x^2}_{\substack{x\cdot x\\2}}$, el grado del polinomio es **4** y **es un binomio**.

b) $\underbrace{xyz}_{\substack{x\cdot y\cdot z\\3}}+\underbrace{xy}_{\substack{x\cdot y\\2}}+\underbrace{z}_{\substack{z\\1}}$, el grado del polinomio es **3** y **es un trinomio**.

Se observa que el exponente representa el número de veces que se multiplica una variable.

E Dados los siguientes polinomios, identifique el grado y clasifíquelos de acuerdo al número de términos:

a) $4x^2$ b) $2a^2+5a$ c) x^3+x^2+x d) $xy+y+x$

2

U1: Operaciones con polinomios
S1: Adición y sustracción de polinomios
C1: Clasificación de polinomios

P Escriba la información solicitada en la tabla respecto de las expresiones algebraicas.

S

Expresión	Número de términos	MET	
a) $3x$	1	1	← Monomio
b) x^2+5x+6	3	2	← Trinomio
c) $4x^3+2x^2$	2	3	← Binomio

C Monomio: Tiene solo un término

Exponentes $x^{②}\ y^{③}$ $\quad \underbrace{2+3}_{\text{suma de exponentes}} = \underbrace{5}_{\text{grado del monomio}}$

Polinomio: Suma finita de términos.

Binomio (2 términos), Trinomio (3 términos)

$\underbrace{\underbrace{x^2}_{\text{grado 2}} + \underbrace{5x}_{\text{grado 1}} + \underbrace{6}_{\text{grado 0}}}_{\text{Mayor de los grados es 2}}$ ← Grado del polinomio es 2

Ej Clasifique los siguientes polinomios y diga su grado.

a) $\underbrace{x^4}_{4}+\underbrace{3x^2}_{2}$ ← Binomio de grado 4

b) $\underbrace{xyz}_{3}+\underbrace{xy}_{2}+\underbrace{z}_{1}$ ← Trinomio de grado 3

E a) $\underbrace{4x^2}_{2}$ ← Monomio de grado 2

b) $\underbrace{2a^2}_{2}+\underbrace{5a}_{1}$ ← Binomio de grado 2

c) $\underbrace{x^3}_{3}+\underbrace{x^2}_{2}+\underbrace{x}_{1}$ ← Trinomio de grado 3

d) $\underbrace{xy}_{2}+\underbrace{y}_{1}+\underbrace{x}_{1}$ ← Trinomio de grado 2

Contenido 2 Simplificación de términos semejantes

Contenido 2: Simplificación de términos semejantes

P

Reduzca cada uno de los polinomio dados, sumando o restando los términos con las mismas variables elevadas al mismo exponente:

a) $3x+5y+8x+10y$ b) $6x^2+8x-12x^2-5x$

S

a) $3x+5y+8x+10y$ $=3x+8x+5y+10y$ Se aplica la conmutatividad de la suma

Términos con las mismas variables y exponentes

$=(3+8)x+(5+10)y$ Se usa la distributividad

$=11x+15y$ Se efectúan las sumas indicadas

b) $6x^2+8x-12x^2-5x$ $=6x^2-12x^2+8x-5x$ Se aplica la propiedad conmutativa

Términos con las mismas variables y exponentes

$=(6-12)x^2+(8-5)x$ Se usa la distributividad

$=-6x^2+3x$ Se efectúan las sustracciones indicadas

En a), $3x$ y $8x$ se pudieron simplificar en $11x$; igualmente, en b) $6x^2$ y $-12x^2$ se simplificaron en $-6x^2$. Se dice entonces que $3x$ y $8x$ son términos semejantes; lo mismo sucede con $6x^2$ y $-12x^2$ de b).

C

Términos semejantes son aquellos términos que tienen las mismas letras o variables elevadas a los mismos exponentes.

Simplificar términos semejantes significa sumar o restar sus coeficientes y escribir a continuación las mismas variables elevadas a los mismos exponentes.

Ejemplo Simplifique la expresión $9a-8b+10a-9b$.

Se agrupan y simplifican términos semejantes:

$$9a-8b+10a-9b=9a+10a-8b-9b$$
$$=(9+10)a+(-8-9)b$$
$$=19a-17b$$

E

Simplifique las siguientes expresiones:

a) $4x+6y+10x+3y$ b) $9x+6y+7x+5y$ c) $3a-5b+10a+3b$

d) $2a-4b+8a-b$ e) $-4x^2-10x-4x-8x^2$ f) $7x^2-9x-2x+6x^2$

3

Aprendizajes esperados

Simplifica expresiones algebraicas reduciendo términos semejantes.

Secuencia:

En séptimo grado se estudió la simplificación de términos semejantes y expresiones algebraicas.

Esta clase es para recordar cómo se simplifican términos semejantes, pues es la herramienta fundamental para la suma y resta de polinomios.

Puntos esenciales:

Recordar qué son términos semejantes y cómo se simplifican estos.

Señalar que los coeficientes de términos semejantes, pueden ser iguales o diferentes.

Explicar cómo se utiliza la propiedad distributiva al simplificar términos semejantes.

Tener cuidado con el signo de los coeficientes de los términos que se están agrupando.

Recordar el procedimiento para sumar o restar números de iguales o diferentes signos.

C2: Simplificación de términos semejantes

(P) Reduzca los polinomios:

(S) a) $\underline{3x}+5y+\underline{8x}+10y=3x+8x+5y+10y$
$=(3+8)x+(5+10)y$
$=11x+15y$

b) $\underline{6x^2}+8x-\underline{12x^2}-5x=6x^2-12x^2+8x-5x$
$=(6-12)x^2+(8-5)x$
$=-6x^2+3x$

(C) Términos semejantes: términos con las mismas variables elevadas a los mismos exponentes.

$3x$ y $8x$ son términos semejantes.

Simplificar términos semejantes: es sumar o restar sus coeficientes y escribir las variables con sus exponentes.

$$3x+8x=(3+8)x=11x$$

(Ej) Simplifique:

$9a-8b+10a-9b$
$=9a+10a-8b-9b$
$=(9+10)a+(-8-9)b$
$=19a-17b$

(E) a) $4x+6y+10x+3y=4x+10x+6y+3y$
$=(4+10)x+(6+3)y$
$=14x+9y$

c) $3a-5b+10a+3b=3a+10a-5b+3b$
$=(3+10)a+(-5+3)b$
$=13a-2b$

f) $7x^2-9x-2x+6x^2=7x^2+6x^2-9x-2x$
$=(7+6)x^2+(-9-2)x$
$=13x^2-11x$

Contenido 3 Adición de polinomios

Aprendizajes esperados

Aplica la adición de polinomios en la solución de ejercicios.

Secuencia:

En la clase anterior se estudió la simplificación de la simplificación de términos semejantes en expresiones polinómicas.

En esta clase se estudia la suma de polinomios de forma horizontal y vertical. En ambos casos se utiliza la simplificación de términos semejantes.

Puntos esenciales:

Identificar que, para sumar polinomios de forma horizontal, se quitan los paréntesis y luego se simplifica el polinomio resultante.

Recordar la simplificación de términos semejantes.

Indicar que en la suma vertical se escribe término semejante debajo de término semejante, para luego efectuar las reducciones respectivas.

Tener cuidado con los signos al sumar o restar los coeficientes.

Señalar que tanto en la suma de forma vertical, como en la suma de forma horizontal, es necesario identificar los términos semejantes y luego simplificarlos.

Contenido 3: Adición de polinomios

P Efectúe la suma indicada $(3x+2y)+(5x+3y)$ de forma horizontal y vertical.

S

Forma horizontal:

$$\begin{aligned}(3x+2y)+(5x+3y)&=3x+2y+5x+3y && \text{Se eliminan paréntesis}\\ &=3x+5x+2y+3y && \text{Se agrupan términos semejantes}\\ &=\mathbf{8x+5y} && \text{Se simplifican términos semejantes}\end{aligned}$$

Forma vertical:

$$\begin{array}{rrl} & 3x+2y & \text{Se escribe un sumando}\\ +) & 5x+3y & \text{Se coloca el otro sumando}\\ \hline & \mathbf{8x+5y} & \text{Se simplifican términos semejantes}\end{array}$$

C

Para sumar dos polinomios de forma horizontal, se agrupan los términos semejantes y se simplifican.

Para sumar dos polinomios de forma vertical se escribe uno de los sumandos y debajo de este el otro, colocando los términos semejantes, uno bajo el otro y se simplifican.

Ejemplo Efectúe la suma indicada $(4x^2+2x)+(10x^2-11x)$ de forma horizontal y vertical.

Forma horizontal:

$$\begin{aligned}(4x^2+2x)+(10x^2-11x)&=4x^2+2x+10x^2-11x\\ &=4x^2+10x^2+2x-11x\\ &=\mathbf{14x^2-9x}\end{aligned}$$

Forma Vertical:

$$\begin{array}{rr} & 4x^2+\ \ 2x\\ +) & 10x^2-11x\\ \hline & \mathbf{14x^2-\ \ 9x}\end{array}$$

E

Efectúe las siguientes sumas de forma horizontal y vertical:

a) $(3x+2y)+(5x+4y)$ b) $(4x+5y)+(6x-2y)$ c) $(8x-10y)+(7x+9y)$

d) $(-x-7y)+(x-8y)$ e) $(5y^2+2y)+(4y^2-8y)$ f) $(2x^2-6x)+(x^2-8x)$

C3: Adición de polinomios

P Efectúe $(3x + 2y) + (5x + 3y)$.

S Forma horizontal

$$\begin{aligned}(3x+2y)+(5x+3y)&=3x+2y+5x+3y\\ &=3x+5x+2y+3y\\ &=8x+5y\end{aligned}$$

Forma vertical

$$\begin{array}{rr} & 3x+2y\\ +) & 5x+3y\\ \hline & 8x+5y\end{array}$$

C Para sumar dos polinomios deben simplificarse los términos que sean semejantes.

Ej Efectúe $(4x^2 + 2x) + (10x^2 - 11x)$.

Solución horizontal

$$\begin{aligned}&(4x^2+2x)+(10x^2-11x)\\ &=4x^2+2x+10x^2-11x\\ &=4x^2+10x^2+2x-11x\\ &=14x^2-9x\end{aligned}$$

Solución vertical

$$\begin{array}{rr} & 4x^2+2x\\ +) & 10x^2-11x\\ \hline & 14x^2-9x\end{array}$$

E a) $(3x+2y)+(5x+4y)$

$$\begin{aligned}&=3x+2y+5x+4y\\ &=3x+5x+2y+4y\\ &=8x+6y\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rr} & 3x+2y\\ +) & 5x+4y\\ \hline & 8x+6y\end{array}$$

b) $(4x+5y)+(6x-2y)$

$$\begin{aligned}&=4x+5y+6x-2y\\ &=4x+6x+5y-2y\\ &=10x+3y\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rr} & 4x+5y\\ +) & 6x-2y\\ \hline & 10x+3y\end{array}$$

c) $(8x-10y)+(7x+9y)$

$$\begin{aligned}&=8x-10y+7x+9y\\ &=8x+7x-10y+9y\\ &=15x-y\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rr} & 8x-10y\\ +) & 7x+9y\\ \hline & 15x-y\end{array}$$

Contenido 4 Sustracción de polinomios

Contenido 4: Sustracción de polinomios

P Efectúe la sustracción indicada $(8x+7y)-(6x+3y)$ de forma horizontal y vertical.

S

Forma horizontal:

$(8x+7y)-(6x+3y)=(8x+7y)+(-6x-3y)$ Se cambian signos a los términos del sustraendo
$=8x+7y-6x-3y$ Se eliminan paréntesis
$=8x-6x+7y-3y$ Se agrupan términos semejantes
$=\mathbf{2x+4y}$ Se simplifican términos semejantes

Forma vertical:

$$\begin{array}{r r} & 8x+7y \\ +) & -6x-3y \\ \hline & \mathbf{2x+4y} \end{array}$$

Se escribe el minuendo
Se escribe el sustraendo con los signos de los términos cambiados
Se simplifican términos semejantes

C

En la **sustracción de polinomios** de forma horizontal, se escribe el minuendo y se le suma el **sustraendo** con los signos de sus términos cambiados, luego se simplifica.

Para efectuar la **sustracción de dos polinomios** en forma vertical, se escribe primero el minuendo y debajo de este el sustraendo, cambiando los signos a sus términos y haciendo corresponder verticalmente los términos semejantes, luego se simplifica.

Ejemplo Efectúe la sustracción indicada $(6x-5y)-(-8x+7y)$ de forma horizontal y vertical.

Forma horizontal:

$(6x-5y)-(-8x+7y)=(6x-5y)+(8x-7y)$
$=6x-5y+8x-7y$
$=6x+8x-5y-7y$
$=\mathbf{14x-12y}$

Forma Vertical:

$$\begin{array}{r r} & 6x-5y \\ +) & 8x-7y \\ \hline & \mathbf{14x-12y} \end{array}$$

E Efectúe las siguientes sustracciones de forma horizontal y vertical:

a) $(7x+8y)-(2x+7y)$ b) $(9x-4y)-(5x-10y)$ c) $(3x+8y)-(-9x+5y)$

d) $(9x^2-y^2)-(-6x^2+3y^2)$ e) $(-12x-5y^2)-(5x+10y^2)$ f) $(6x^2-11y)-(-2x^2-6y)$

Aprendizajes esperados

Aplica la sustracción de polinomios en la solución de ejercicios.

Secuencia:

En la clase anterior se estudió la suma de polinomios.

En esta clase se estudia la resta de polinomios de forma horizontal y vertical. En ambos casos se utiliza la suma de polinomios.

Puntos esenciales:

Inducir a observar que, para restar polinomios, se cambian los signos al sustraendo.

Señalar que se debe cambiar el signo de cada término del sustraendo.

Indicar que la resta se realiza sumando el minuendo con el polinomio que se obtiene de cambiar de signos los términos del sustraendo.

Resaltar el cuido que se debe tener al operar con los coeficientes de los términos.

C4: Sustracción de polinomios

(P) Efectúe $(8x+7y)-(6x+3y)$.

(S) Forma horizontal

$(8x+7y)-(6x+3y)$
$=(8x+7y)+(-6x-3y)$
$=8x+7y-6x-3y$
$=8x-6x+7y-3y$
$=2x+4y$

Forma vertical

$$\begin{array}{r r} & 8x+7y \\ +) & -6x-3y \\ \hline & 2x+4y \end{array}$$

(C) Para restar dos polinomios de forma horizontal o vertical, se le suman al minuendo los términos del sustraendo pero con signos cambiados.

(Ej) Efectúe $(6x-5y)-(-8x+7y)$.

Solución horizontal

$(6x-5y)-(-8x+7y)$
$=(6x-5y)+(8x-7y)$
$=6x-5y+8x-7y$
$=6x+8x-5y-7y$
$=14x-12y$

Solución vertical

$$\begin{array}{r r} & 6x-5y \\ +) & 8x-7y \\ \hline & 14x-12y \end{array}$$

(E) a) $(7x+8y)-(2x+7y)=(7x+8y)+(-2x-7y)$
$=7x+8y-2x-7y$
$=7x-2x+8y-7y$
$=5x+y$

$$\begin{array}{r r} & 7x+8y \\ +) & -2x-7y \\ \hline & 5x+y \end{array}$$

b) $(9x-4y)-(5x-10y)=(9x-4y)+(-5x+10y)$
$=9x-4y-5x+10y$
$=9x-5x-4y+10y$
$=4x+6y$

$$\begin{array}{r r} & 9x-4y \\ +) & -5x+10y \\ \hline & 4x+6y \end{array}$$

c) $(3x+8y)-(-9x+5y)=(3x+8y)+(9x-5y)$
$=3x+8y+9x-5y$
$=3x+9x+8y-5y$
$=12x+3y$

$$\begin{array}{r r} & 3x+8y \\ +) & 9x-5y \\ \hline & 12x+3y \end{array}$$

Contenido 1 Multiplicación de monomio por monomio

Aprendizajes esperados

Aplica la multiplicación de monomio por monomio en la solución de ejercicios.

Secuencia:

En séptimo grado se estudió la multiplicación de un número por un término, y la potenciación.

En esta clase se estudia la multiplicación de dos monomios (términos).

Puntos esenciales:

Recordar la multiplicación de un número por un término, y como expresar el producto de dos cantidades iguales en forma de potencia.

Mencionar que cuando los factores formados por potencia de una variable son de diferente base, el producto de estos queda indicado. Solamente se multiplican los coeficientes.

Indicar que cuando hay factores literales de una misma variable, debe utilizarse el concepto de potenciación.

Insistir en la aplicación correcta de la ley de los signos de la multiplicación.

Hacer hincapié en que $(-a)^2 \neq -a^2$, para evitar errores de cálculo numérico.

Sección 2: Multiplicación de polinomios

Contenido 1: Multiplicación de monomio por monomio

P Efectúe la multiplicación indicada $(3x)(2y)$.

S Para encontrar el producto de los monomios $3x$ y $2y$ se multiplican los coeficientes y las partes literales, haciendo uso de la conmutatividad y la asociatividad.

$$\begin{aligned}(3x)(2y) &= (3)(x)(2)(y)\\ &= (3)(2)xy\\ &= \mathbf{6xy}\end{aligned}$$

coeficiente
$5\,x^2y$
parte literal

C Para multiplicar dos monomios, se multiplican sus coeficientes (tomando en cuenta sus signos) y partes literales.

Ejemplo Efectúe las siguientes multiplicaciones de monomios:

a) $(3x)(-4y)$ b) $(-6x)(-9x)$ c) $(-3x)^2$

Para efectuar las siguientes multiplicaciones se hace uso de la asociatividad, conmutatividad y por último se efectúan las operaciones indicadas.

a) $(3x)(-4y) = (3)(-4)xy$
$= -12xy$

b) $(-6x)(-9x) = (-6)(-9)x \cdot x$
$= 54x^2$

c) $(-3x)^2 = (-3x)(-3x)$
$= (-3)(-3)x \cdot x$
$= 9x^2$

Observe que:
$(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$
$-3^2 = -(3)(3) = -9$
Luego, $(-3)^2 \neq -3^2$.

E Efectúe las siguientes multiplicaciones de monomios:

a) $(7x)(6x)$ b) $(-8x)(9x)$ c) $(-3a)(-2b)$ d) $(-6x)^2$ e) $(2x)(3x^2)$

7

S2: Multiplicación de polinomios
C1: Multiplicación de monomio por monomio

P Efectúe la multiplicación $(3x)(2y)$.

S $(3x)(2y) = (3)(x)(2)(y)$
$= (3)(2)xy$
$= 6xy$

coeficiente parte literal

C Para multiplicar dos monomios, se multiplican sus coeficientes y partes literales.

Ej Efectúe las multiplicaciones:

a) $(3x)(-4y) = (3)(x)(-4)(y)$
$= (3)(-4)xy$
$= -12xy$

b) $(-6x)(-9x) = (-6)(x)(-9)(x)$
$= (-6)(-9)x \cdot x$
$= 54x^2$

c) $(-3x)^2 = (-3x)(-3x)$
$= (-3)(-3)x \cdot x$
$= 9x^2$

E a) $(7x)(6x) = (7)(x)(6)(x)$
$= (7)(6)x \cdot x$
$= 42x^2$

b) $(-8x)(9x) = (-8)(x)(9)(x)$
$= (-8)(9)x \cdot x$
$= -72x^2$

c) $(-3a)(-2b) = (-3)(a)(-2)(b)$
$= (-3)(-2)ab$
$= 6ab$

d) $(-6x)^2 = (-6x)(-6x)$
$= (-6)(-6)x \cdot x$
$= 36x^2$

Contenido 2 Multiplicación de monomio por polinomio

Unidad 1: Operaciones con Polinomios

Contenido 2: Multiplicación de monomio por polinomio

P

Efectúe la multiplicación indicada $3(x+2)$.

S

Se efectúa la multiplicación utilizando la propiedad distributiva

$3(x+2)=3x+(3)(2)$
$= \mathbf{3x+6}$

Se observa que se multiplica 3 por cada sumando del binomio $x+2$ y se efectúan las operaciones indicadas.

Propiedad distributiva

②
$a(b+c)=ab+ac$
① ① ②

①
$(b+c)a=ab+ac$
② ① ②

C

Para multiplicar un monomio por un polinomio, se multiplica el monomio por cada término del polinomio.

Ejemplo Efectúe las siguientes multiplicaciones indicadas:

a) $5(x-3)$ b) $a(-4a+b)$ c) $(2a-10)(-4b)$ d) $2(x+y+3)$

a) $5(x-3)=5x+(5)(-3)$
$= \mathbf{5x-15}$

b) $a(-4a+b)=a(-4a)+ab$
$= \mathbf{-4a^2+ab}$

c) $(2a-10)(-4b)=(2a)(-4b)+(-10)(-4b)$
$= \mathbf{-8ab+40b}$

d) $2(x+y+3)=2x+2y+(2)(3)$
$= \mathbf{2x+2y+6}$

E

Efectúe las siguientes multiplicaciones:

a) $6(x+4)$ b) $3(y-5)$ c) $3x(x-2y)$ d) $(4a-2)(-6b)$ e) $5(x+y-7)$

8

Aprendizajes esperados

Aplica la multiplicación de monomio por polinomio en la solución de ejercicios.

Secuencia:

En la clase anterior se estudió la multiplicación de monomios, y en séptimo grado se multiplicó un número por un binomio.

En esta clase se estudia la multiplicación de un monomio por un binomio.

Puntos esenciales:

Indicar que cuando se distribuya hay que multiplicar por los dos términos del binomio.

Insistir en la manipulación correcta de la ley de los signos de la multiplicación.

La distributividad se utiliza mucho en otros momentos, por lo tanto, se espera que los estudiantes se acostumbren a distribuir en esta sección.

Señalar que la propiedad distributiva también es válida cuando hay tres o más sumandos.

C2: Multiplicación de monomio por polinomio

P Efectúe la multiplicación $3(x+2)$.

S $3(x+2) = 3\cdot x + (3)(2)$ $\boxed{a(b+c) = ab + ac}$
$= 3x + 6$

C Para multiplicar un monomio por un polinomio se multiplica el monomio por cada término del polinomio.

Ej Efectúe las siguientes multiplicaciones:

a) $5(x-3) = 5x + (5)(-3)$
$= 5x - 15$

b) $a(-4a+b) = a(-4a) + ab$
$= -4a^2 + ab$

$\boxed{(b+c)a = ab + ac}$

c) $(2a-10)(-4b) = (2a)(-4b) + (-10)(-4b)$
$= -8ab + 40b$

d) $2(x+y+3) = 2x + 2y + (2)(3)$
$= 2x + 2y + 6$

E Efectúe

a) $6(x+4) = 6x + (6)(4)$
$= 6x + 24$

b) $3(y-5) = 3y + (3)(-5)$
$= 3y - 15$

c) $3x(x-2y) = (3x)(x) + (3x)(-2y)$
$= 3x^2 - 6xy$

d) $(4a-2)(-6b) = (4a)(-6b) + (-2)(-6b)$
$= -24ab + 12b$

e) $5(x+y-7) = 5x + 5y + (5)(-7)$
$= 5x + 5y - 35$

Contenido 3 Multiplicación de dos binomios (1)

Aprendizajes esperados

Aplica la multiplicación de binomios sin términos en común de manera horizontal en la solución de ejercicios.

Secuencia:

En la clase anterior se estudió la multiplicación de un monomio por un polinomio.

En esta clase se estudia la multiplicación horizontal de dos binomios que no tienen términos en común.

Puntos esenciales:

Aclarar que cada término del primer binomio debe ser multiplicado por cada término del segundo binomio.

Indicar que se aplica dos veces la propiedad distributiva.

Recordar el cuido que se debe tener con los signos al distribuir y multiplicar los monomios.

Señalar que no es necesario memorizar la igualdad que aparece en la conclusión.

Contenido 3: Multiplicación de dos binomios (1)

P

Efectúe el producto indicado $(x+2)(y+5)$.

S

Para efectuar el producto $(x+2)(y+5)$, se siguen los siguientes pasos:

1. Se usa la propiedad distributiva, multiplicando cada término de $x+2$ por el binomio $y+5$

$$(x+2)(y+5)=x(y+5)+2(y+5)$$

2. Se aplica la multiplicación de un monomio por un binomio y se realizan los productos indicados

$$\begin{aligned}(x+2)(y+5)&=x(y+5)+2(y+5)\\&=xy+x(5)+2y+(2)(5)\\&=xy+5x+2y+10\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbf{(x+2)(y+5)=xy+5x+2y+10}$.

C

Para multiplicar dos binomios, se multiplica cada término de uno de los binomios por el otro binomio y se realizan los productos indicados.

$$(x+a)(y+b)=\underset{①}{xy}+\underset{②}{bx}+\underset{③}{ay}+\underset{④}{ab}$$

Ejemplo Efectúe el producto indicado $(x+2)(y-3)$.

$$\begin{aligned}(x+2)(y-3)&=x(y-3)+2(y-3)\\&=xy+x(-3)+2y+2(-3)\\&=\mathbf{xy-3x+2y-6}\end{aligned}$$

E

Efectúe los siguientes productos:

a) $(x+5)(y+4)$ b) $(x+2)(y+4)$ c) $(x+6)(y+1)$

d) $(x+7)(y-6)$ e) $(x-3)(y+2)$ f) $(x-4)(y-3)$

C3: Multiplicación de dos binomios (1)

P Efectúe el producto $(x+2)(y+5)$.

S

$$\begin{aligned}(x+2)\boxed{(y+5)}&=x(y+5)+2(y+5)\\&=xy+x(5)+2y+(2)(5)\\&=xy+5x+2y+10\end{aligned}$$

C Para multiplicar dos binomios, se multiplica cada término de uno por cada término del otro.

Ej

$$\begin{aligned}(x+2)(y-3)&=x(y-3)+2(y-3)\\&=xy+x(-3)+2y+2(-3)\\&=xy-3x+2y-6\end{aligned}$$

E

a) $(x+5)(y+4)=x(y+4)+5(y+4)$
$=xy+x(4)+5y+(5)(4)$
$=xy+4x+5y+20$

b) $(x+2)(y+4)=x(y+4)+2(y+4)$
$=xy+x(4)+2y+(2)(4)$
$=xy+4x+2y+8$

c) $(x+6)(y+1)=x(y+1)+6(y+1)$
$=xy+x+6y+6$

d) $(x+7)(y-6)=x(y-6)+7(y-6)$
$=xy-6x+7y-42$

e) $(x-3)(y+2)=x(y+2)-3(y+2)$
$=xy+2x-3y-6$

f) $(x-4)(y-3)=x(y-3)-4(y-3)$
$=xy-3x-4y+12$

Contenido 4 Multiplicación de dos binomios (2)

Contenido 4: Multiplicación de dos binomios (2)

P

Efectúe la multiplicación indicada $(x+2)(x+3)$ de manera horizontal.

S

Para multiplicar $x+2$ por $x+3$ de manera horizontal se usa la propiedad distributiva. Es decir

$$\begin{aligned}(x+2)(x+3) &= \underset{①}{x\cdot x} + \underset{②}{x(3)} + \underset{③}{2x} + \underset{④}{(2)(3)}\\ &= x^2+3x+2x+6\\ &= x^2+(3+2)x+6\\ &= \mathbf{x^2+5x+6}\end{aligned}$$

Se observa que el producto de los binomios $x+2$ y $x+3$ que tienen en común el término x, es igual a este término elevado al cuadrado más la suma de los términos independientes 3 y 2 multiplicada por x, más el producto de los términos independientes 3 y 2.

C

Para multiplicar dos binomios de la forma $x+a$ y $x+b$ se usa la propiedad distributiva, siendo su producto igual al término común x elevado al cuadrado más la suma de los términos a y b multiplicada por el término común más el producto de los términos a y b. Es decir,

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

Ejemplo

Efectúe las siguientes multiplicaciones de binomios de forma horizontal:

a) $(x-9)(x+2)$ b) $(x+8)(x-4)$ c) $(x-7)(x-1)$

Se aplica la conclusión anterior:

a) $(x-9)(x+2)=x^2+(-9+2)x+(-9)(2)$
$=\mathbf{x^2-7x-18}$

b) $(x+8)(x-4)=x^2+(8-4)x+(8)(-4)$
$=\mathbf{x^2+4x-32}$

c) $(x-7)(x-1)=x^2+(-7-1)x+(-7)(-1)$
$=\mathbf{x^2-8x+7}$

E

Efectúe las siguientes multiplicaciones de binomios de forma horizontal:

a) $(x+2)(x+7)$ b) $(x-3)(x+7)$ c) $(x+3)(x-8)$ d) $(x-4)(x-9)$

Aprendizajes esperados

Aplica la multiplicación de binomios con un término en común de manera horizontal en la solución de ejercicios.

Secuencia:

En la clase anterior se estudió la multiplicación de forma horizontal de dos binomios que no tienen términos en común. En esta clase se estudia la multiplicación horizontal de dos binomios que tienen un término en común.

Puntos esenciales:

Recordar que cada término del primer binomio debe ser multiplicado por cada término del segundo binomio.

Aplicar correctamente sumas y restas de números con iguales o diferentes signos, así como la ley de signos de la multiplicación.

Señalar que en la solución de ejercicios de esta clase, se necesitará del concepto de potenciación.

Indicar que, al multiplicar dos veces el mismo término, este queda elevado al cuadrado.

Explicar que la ejercitación será de ayuda para familiarizarse con la igualdad que se muestra en la conclusión.

C4: Multiplicación de dos binomios (2)

P Efectúe $(x+2)(x+3)$ de manera horizontal.

S
$$\begin{aligned}(x+2)(x+3) &= \underset{①}{x\cdot x} + \underset{②}{x(3)} + \underset{③}{2x} + \underset{④}{(2)(3)}\\ &= x^2+3x+2x+6\\ &= x^2+(3+2)x+6\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

C $\boxed{(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab}$

Ej Efectúe de forma horizontal.

a) $(x-9)(x+2) = x^2+(-9+2)x+(-9)(2)$
$= x^2-7x-18$

b) $(x+8)(x-4) = x^2+(8-4)x+(8)(-4)$
$= x^2+4x-32$

c) $(x-7)(x-1) = x^2+(-7-1)x+(-7)(-1)$
$= x^2-8x+7$

E a) $(x+2)(x+7) = x^2+(2+7)x+(2)(7)$
$= x^2+9x+14$

b) $(x-3)(x+7) = x^2+(-3+7)x+(-3)(7)$
$= x^2+4x-21$

c) $(x+3)(x-8) = x^2+(3-8)x+(3)(-8)$
$= x^2-5x-24$

d) $(x-4)(x-9) = x^2+(-4-9)x+(-4)(-9)$
$= x^2-13x+36$

Contenido 5 Multiplicación de dos binomios (3)

Aprendizajes esperados

Aplica la multiplicación de binomios con un término en común de manera vertical en la solución de ejercicios.

Secuencia:

En la clase anterior se aprendió a multiplicar de forma horizontal, dos binomios que tienen un término en común.

En esta clase se estudiará la multiplicación vertical de dos binomios que tienen un término en común.

Puntos esenciales:

Indicar que, para multiplicar dos binomios de forma vertical, se debe escribir un binomio debajo del otro.

Explicar que primero se multiplica el término de la izquierda del binomio de abajo, por cada término del binomio de arriba.

Este proceso se realiza con el término de la derecha, y se escribe término semejante debajo de término semejante.

Señalar el cuido que debe tenerse con los signos al operar con los coeficientes de los términos.

Explicar los pasos que aparecen en la conclusión, utilizando la solución dada al problema.

Sección 2: Multiplicación de polinomios

Contenido 5: Multiplicación de dos binomios (3)

P Efectúe la multiplicación indicada $(x+3)(x+5)$ de forma vertical.

S Para multiplicar el binomio $x+3$ por $x+5$ de forma vertical, se siguen los siguientes pasos:

① Se escribe el binomio $x+5$ debajo del binomio $x+3$ y se traza una línea horizontal debajo del binomio $x+5$.
② Se multiplica la x del binomio $x+5$ por el binomio $x+3$, obteniéndose x^2+3x, resultado que se escribe debajo de la horizontal trazada.
③ Se multiplica el 5 del binomio $x+5$ por $x+3$, dando el resultado $5x+15$ que se coloca debajo de x^2+3x, pero respetando la semejanza de términos.
④ Se simplifican términos semejantes.

① $$\begin{array}{rrrrr} & x & + & 3 & \\ \times & x & + & 5 & \\ \hline \end{array}$$

② $$\begin{array}{rrrrr} & x & + & 3 & \\ \times & x & + & 5 & \\ \hline & x^2 & + & 3x & \end{array}$$

③ $$\begin{array}{rrrrrrr} & x & + & 3 & & \\ \times & x & + & 5 & & \\ \hline & x^2 & + & 3x & & \\ & & + & 5x & + & 15 \\ \hline \end{array}$$

④ $$\begin{array}{rrrrrrr} & x & + & 3 & & \\ \times & x & + & 5 & & \\ \hline & x^2 & + & 3x & & \\ & & + & 5x & + & 15 \\ \hline & x^2 & + & 8x & + & 15 \end{array}$$

C Procedimiento para multiplicar los binomios $x+a$ y $x+b$

1. Se escribe $x+b$ debajo de $x+a$ y se traza una línea horizontal debajo de $x+b$.
2. Se multiplica el primer término x de $x+b$ por los dos términos del binomio $x+a$. El resultado obtenido se coloca debajo de la horizontal trazada.
3. Se multiplica b por $x+a$. El resultado se coloca debajo del binomio encontrado en 2., pero respetando la semejanza de términos.
4. Se simplifican los términos semejantes.

Ejemplo Efectúe la multiplicación indicada $(x+9)(x-7)$ de forma vertical.

Para efectuar la multiplicación $(x+9)(x-7)$ se siguen los pasos de la conclusión anterior.

$$\begin{array}{rrrrrrr} & x & + & 9 & & \\ \times & x & - & 7 & & \\ \hline & x^2 & + & 9x & & \\ & & - & 7x & - & 63 \\ \hline & x^2 & + & 2x & - & 63 \end{array}$$

E Efectúe las siguientes multiplicaciones de binomios de forma vertical:

a) $(x+3)(x+4)$ b) $(x-3)(x+2)$ c) $(x+5)(x-2)$ d) $(x-6)(x-7)$

11

C5: Multiplicación de dos binomios (3)

P Efectúe $(x+3)(x+5)$ de forma vertical.

S

$$\begin{array}{rrrrrrl} & x & + & 3 & & & \\ \times & x & + & 5 & & & \\ \hline & x^2 & + & 3x & & & \longleftarrow x \text{ por } x+3 \\ & & + & 5x & + & 15 & \longleftarrow 5 \text{ por } x+3 \\ \hline & x^2 & + & 8x & + & 15 & \end{array}$$

C *Leer en el libro de texto*

Ej $(x+9)(x-7)$

$$\begin{array}{rrrrrrr} & x & + & 9 & & \\ \times & x & - & 7 & & \\ \hline & x^2 & + & 9x & & \\ & & - & 7x & - & 63 \\ \hline & x^2 & + & 2x & - & 63 \end{array}$$

E a) $(x+3)(x+4)$

$$\begin{array}{rrrrrrr} & x & + & 3 & & \\ \times & x & + & 4 & & \\ \hline & x^2 & + & 3x & & \\ & & + & 4x & + & 12 \\ \hline & x^2 & + & 7x & + & 12 \end{array}$$

b) $(x-3)(x-2)$

$$\begin{array}{rrrrrrr} & x & - & 3 & & \\ \times & x & + & 2 & & \\ \hline & x^2 & - & 3x & & \\ & & + & 2x & - & 6 \\ \hline & x^2 & - & x & - & 6 \end{array}$$

c) $(x+5)(x-2)$

$$\begin{array}{rrrrrrr} & x & + & 5 & & \\ \times & x & - & 2 & & \\ \hline & x^2 & + & 5x & & \\ & & - & 2x & - & 10 \\ \hline & x^2 & + & 3x & - & 10 \end{array}$$

d) $(x-6)(x-7)$

$$\begin{array}{rrrrrrr} & x & - & 6 & & \\ \times & x & - & 7 & & \\ \hline & x^2 & - & 6x & & \\ & & - & 7x & + & 42 \\ \hline & x^2 & - & 13x & + & 42 \end{array}$$

Contenido 1 División de monomio por monomio

Sección 3: División de polinomios

Contenido 1: División de monomio por monomio

P

Efectúe la división indicada $24a^2b^2 \div 3ab$.

Recuerde:
$A \div B = \frac{A}{B}$
$a^2b^2 = a \cdot a \cdot b \cdot b$

S

$24a^2b^2 \div 3ab = \frac{24a^2b^2}{3ab}$ Se expresa la división como una fracción

$= \frac{(8)(3)\cancel{a}\cdot a \cdot \cancel{b} \cdot b}{(3)\cdot \cancel{a} \cdot \cancel{b}}$ Se descompone el 24 en (8)(3) y a^2 y b^2 en $a \cdot a$ y $b \cdot b$ respectivamente

$= 8ab$ Se simplifica numerador y denominador cancelando sus factores comunes

Por tanto $24a^2b^2 \div 3ab = \mathbf{8ab}$.

C

Para dividir un monomio entre otro:

1. Se expresa la división de monomios como una fracción.
2. Se descomponen los coeficientes del numerador y denominador de manera conveniente.
3. Se descomponen las partes literales del numerador y denominador en factores de exponente 1 si es necesario.
4. Se simplifican los factores comunes numéricos y literales que aparecen en el numerador y el denominador.

Ejemplo

Efectúe las siguientes divisiones de monomios.

a) $20xy \div 5y$ b) $16a^2 \div 4a$ c) $-12a^2 \div 3a$ d) $15x^2 \div (-5x^2)$

a) $20xy \div 5y = \frac{20xy}{5y} = \frac{(4)(\cancel{5})x \cdot \cancel{y}}{\cancel{5}\cancel{y}} = 4x$ b) $16a^2 \div 4a = \frac{16a^2}{4a} = \frac{(4)(\cancel{4})\cancel{a} \cdot a}{\cancel{4}\cancel{a}} = 4a$

c) $-12a^2 \div 3a = \frac{-12a^2}{3a} = \frac{(-4)(3)\cancel{a} \cdot a}{3\cancel{a}} = -4a$ d) $15x^2 \div (-5x^2) = \frac{15x^2}{-5x^2} = \frac{(\cancel{5})(3)\cancel{x} \cdot \cancel{x}}{-\cancel{5}\cancel{x} \cdot \cancel{x}} = -3$

E

Efectúe las siguientes divisiones de monomios:

a) $10ab \div 2a$ b) $12x^2 \div 6x$ c) $50m^2 \div (-10m)$ d) $-15p^2 \div 3p^2$

13

Aprendizajes esperados

Aplica la división de monomio por monomio en la solución de ejercicios.

Secuencia:

En séptimo grado se estudió la división de un término por un número.

En esta clase se estudia la división de un monomio por un monomio.

Puntos esenciales:

Recordar la división de un término por un número.

Indicar que los coeficientes deben descomponerse de manera conveniente.

Identificar que las potencias cuya base es una variable, deben expresarse como producto, y luego simplificarse.

Insistir en la manipulación correcta de la ley de los signos para la división.

Explicar los pasos que aparecen en la conclusión, utilizando la solución dada al problema.

S3: División de polinomios
C1: División de monomio por monomio

(P) Efectúe: $24a^2b^2 \div 3ab$

(S) $24a^2b^2 \div 3ab = \frac{24a^2b^2}{3ab}$

$= \frac{(8)(\cancel{3})\cancel{a}\cdot a \cdot \cancel{b} \cdot b}{(\cancel{3}) \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{b}} = 8ab$

(C) *Leer en el libro de texto*

(Ej) Efectúe las divisiones:

a) $20xy \div 5y = \frac{20xy}{5y} = \frac{(4)(\cancel{5})x \cdot \cancel{y}}{\cancel{5} \cdot \cancel{y}} = 4x$

b) $16a^2 \div 4a = \frac{16a^2}{4a} = \frac{(\cancel{4})(4)\cancel{a} \cdot a}{\cancel{4} \cdot \cancel{a}} = 4a$

c) $-12a^2 \div 3a = \frac{-12a^2}{3a} = \frac{(-4)(\cancel{3})\cancel{a} \cdot a}{\cancel{3} \cdot \cancel{a}} = -4a$

d) $15x^2 \div (-5x^2) = \frac{15x^2}{-5x^2} = \frac{(\cancel{5})(3)\cancel{x} \cdot \cancel{x}}{-\cancel{5} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}} = -3$

(E) a) $10ab \div 2a = \frac{10ab}{2a} = \frac{(5)(\cancel{2})\cancel{a} \cdot b}{\cancel{2} \cdot \cancel{a}} = 5b$

b) $12x^2 \div 6x = \frac{12x^2}{6x} = \frac{(\cancel{6})(2)\cancel{x} \cdot x}{\cancel{6} \cdot \cancel{x}} = 2x$

c) $50m^2 \div (-10m) = \frac{50m^2}{-10m} = \frac{(\cancel{10})(5)\cancel{m} \cdot m}{-\cancel{10} \cdot \cancel{m}} = -5m$

d) $-15p^2 \div 3p^2 = \frac{-15p^2}{3p^2} = \frac{(-5)(\cancel{3})\cancel{p} \cdot \cancel{p}}{\cancel{3} \cdot \cancel{p} \cdot \cancel{p}} = -5$

Contenido 2 División de binomio por monomio

Aprendizajes esperados

Aplica la división de binomio por monomio en la solución de ejercicios.

Secuencia:

En la clase anterior se estudió la división de monomio por monomio.

En esta clase se estudia la división de un binomio por un monomio.

Puntos esenciales:

Indicar que cada término del binomio debe dividirse por el monomio, respetando la operación indicada en el binomio.

Insistir en el cuido que se debe tener con los signos al dividir los monomios.

La simplificación de fracciones se utiliza mucho en otros momentos, por lo tanto, se espera que los estudiantes lo asimilen en esta sección.

Recordar que los coeficientes deben descomponerse de forma conveniente, para poder simplificar.

Explicar la conclusión del libro de texto, utilizando la solución dada al problema.

Unidad 1: Operaciones con Polinomios

Contenido 2: División de binomio por monomio

P Efectúe las divisiones indicadas.

a) $(4x-12y)\div 4$ b) $(-15x+18xy)\div 3x$

Recuerde que:
$\frac{x+y}{a}=\frac{x}{a}+\frac{y}{a}$

S

a) $(4x-12y)\div 4=\frac{4x-12y}{4}$ Se expresa la división como fracción

$=\frac{4x}{4}-\frac{12y}{4}$ Se divide cada término del numerador por el denominador común

$=\frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}}-\frac{\cancel{(4)}(3)y}{\cancel{4}}$ Se descompone 12

$=x-3y$ Se simplifica

b) $(-15x+18xy)\div 3x=\frac{-15x+18xy}{3x}$ Se expresa la división como fracción

$=\frac{-15x}{3x}+\frac{18xy}{3x}$ Se divide cada término del numerador por el denominador común

$=\frac{(-\cancel{3})(5)\cancel{x}}{\cancel{3x}}+\frac{\cancel{(3)}(6)\cancel{x}y}{\cancel{3x}}$ Se descompone -15 y 18

$=-5+6y$ Se simplifica

C

Para dividir un binomio por un monomio:
1. Se expresa la división como una fracción, cuyo numerador es el binomio dado y denominador el monomio divisor.
2. Se expresa la fracción anterior como una suma o diferencia de fracciones con igual denominador.
3. En cada fracción se lleva acabo la división de un monomio por otro.
4. Se escribe la suma o diferencia de fracciones simplificadas.

Ejemplo Efectúe la división de binomio por monomio indicada $(9x^2y-18y)\div(-3y)$.

Para efectuar $(9x^2y-18y)\div(-3y)$ se siguen los pasos de la conclusión anterior.

$$(9x^2y-18y)\div(-3y)=\frac{9x^2y-18y}{-3y}=\frac{9x^2y}{-3y}-\frac{18y}{-3y}$$

$$=\frac{\cancel{(3)}(3)x^2\cancel{y}}{-\cancel{3y}}-\frac{(6)\cancel{(3)}\cancel{y}}{-\cancel{3y}}=-3x^2+6$$

E Efectúe las siguientes divisiones de binomio por monomio:

a) $(16x-8y)\div 8$ b) $(20y^2+15y)\div(-10y)$

14

C2: División de binomio por monomio

(P) Efectúe las divisiones indicadas:

a) $(4x-12y)\div 4$ b) $(-15x+18xy)\div 3x$

(S)

$$=\frac{4x-12y}{4} \qquad =\frac{-15x+18xy}{3x}$$

$$=\frac{4x}{4}-\frac{12y}{4} \qquad =\frac{-15x}{3x}+\frac{18xy}{3x}$$

$$=\frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}}-\frac{\cancel{(4)}(3)y}{\cancel{4}} \qquad =\frac{(-\cancel{3})(5)\cancel{x}}{\cancel{3x}}+\frac{\cancel{(3)}(6)\cancel{x}\cdot y}{\cancel{3x}}$$

$$=x-3y \qquad =-5+6y$$

(C) *Leer en el libro de texto.*

(Ej) a) $(9x^2y-18y)\div(-3y)=\frac{9x^2y-18y}{-3y}$

$$=\frac{9x^2y}{-3y}-\frac{18y}{-3y}$$

$$=\frac{\cancel{(3)}(3)x^2\cdot\cancel{y}}{-\cancel{3}\cdot\cancel{y}}-\frac{(6)\cancel{(3)}\cancel{y}}{-\cancel{3}\cdot\cancel{y}}$$

$$=-3x^2+6$$

(E) a) $(16x-8y)\div 8=\frac{16x-8y}{8}$

$$=\frac{16x}{8}-\frac{8y}{8}$$

$$=\frac{\cancel{(8)}(2)x}{\cancel{8}}-\frac{\cancel{8}\cdot y}{\cancel{8}}$$

$$=2x-y$$

b) $(20y^2+15y)\div(-10y)=\frac{20y^2+15y}{-10y}$

$$=\frac{20y^2}{-10y}+\frac{15y}{-10y}$$

$$=\frac{\cancel{(10)}(2)\cdot\cancel{y}\cdot y}{-\cancel{10}\cdot\cancel{y}}+\frac{(3)\cancel{(5)}\cancel{y}}{(-2)\cancel{(5)}\cdot\cancel{y}}$$

$$=-2y-\frac{3}{2}$$

Contenido 3 División de un polinomio por un binomio

Contenido 3: División de trinomio por binomio

P Efectúe la división indicada $(x^2+7x+12)\div(x+3)$.

S La división se efectúa de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^2 & + & 7x & + & 12 & x+3 \\ \cline{6-6} -x^2 & & -3x & & & x+4 \\ \cline{1-5} & & 4x & + & 12 & \\ & & -4x & - & 12 & \\ \cline{1-5} & & & & 0 & \end{array}$$

Recuerde

Dividendo → a | b ← Divisor

Residuo → r c ← Cociente

Entonces, la división da como resultado **el cociente $x+4$ y residuo cero.**

C Para dividir un trinomio entre un binomio se siguen los siguientes pasos:

1. Se divide el término de mayor grado del dividendo entre el término de mayor grado del divisor. El resultado es el primer término del cociente y se escribe debajo del divisor.
2. Se multiplica el término obtenido en el paso anterior por el divisor, se escribe el producto debajo del dividendo y se resta de este.
3. Se repiten los pasos 1 y 2 hasta que el residuo sea cero.

Ejemplo Efectúe la división indicada $(x^2-9x+20)\div(x-4)$.

La división se realiza siguiendo los pasos de la conclusión.

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^2 & - & 9x & + & 20 & x-4 \\ \cline{6-6} -x^2 & + & 4x & & & x-5 \\ \cline{1-5} & & -5x & + & 20 & \\ & & 5x & - & 20 & \\ \cline{1-5} & & & & 0 & \end{array}$$

Entonces, la división da como resultado **el cociente $x-5$** y **residuo cero**.

E Efectúe las siguientes divisiones de trinomio por binomio:

a) $(x^2+13x+30)\div(x+3)$ b) $(6x^2-7x-20)\div(2x-5)$ c) $(12x^2-x-6)\div(3x+2)$

15

Aprendizajes esperados

Aplica la división de polinomio por binomio en la solución de ejercicios.

Secuencia:

En la clase anterior se aprendió a dividir un binomio por un monomio. En esta clase se divide un trinomio por un binomio, y las dos clases anteriores y la multiplicación de un monomio por un binomio son importantes para la comprensión de este contenido.

Puntos esenciales:

Indicar que siempre se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor. El resultado se escribe en el cociente.

Mencionar que el producto del término que se escribe en el cociente por el divisor, se resta al dividendo. Todo lo anterior debe repetirse con la diferencia resultante.

Resaltar que el proceso termina cuando el residuo sea cero, o cualquier constante.

Señalar que en este grado el residuo de las divisiones es cero.

Explicar la conclusión del libro de texto utilizando la solución dada al problema.

Señalar que al dividir entre un binomio, el procedimiento no es el expuesto en el contenido anterior, es decir, no se escribe la división como fracción.

C3: División de trinomoni por binomio

(P) Efectúe la división $(x^2+7x+12)\div(x+3)$.

(S)

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^2 & + & 7x & + & 12 & x+3 \\ \cline{6-6} -x^2 & - & 3x & & & x+4 \longleftarrow \text{Cociente} \\ \cline{1-5} & & 4x & + & 12 & \\ & & -4x & - & 12 & \\ \cline{3-5} & & & & 0 & \longleftarrow \text{Residuo} \end{array}$$

$(x^2+7x+12)\div(x+3)=x+4$

(C) *Leer en el libro de texto*

(Ej) $(x^2-9x+20)\div(x-4)$

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^2 & - & 9x & + & 20 & x-4 \\ \cline{6-6} -x^2 & + & 4x & & & x-5 \\ \cline{1-5} & & -5x & + & 20 & \\ & & 5x & - & 20 & \\ \cline{3-5} & & & & 0 & \end{array}$$

(E) a) $(x^2+13x+30)\div(x+3)$

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^2 & + & 13x & + & 30 & x+3 \\ \cline{6-6} -x^2 & - & 3x & & & x+10 \longleftarrow \text{Cociente} \\ \cline{1-5} & & 10x & + & 30 & \\ & & -10x & - & 30 & \\ \cline{3-5} & & & & 0 & \longleftarrow \text{Residuo} \end{array}$$

b) $(6x^2-7x-20)\div(2x-5)$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 6x^2 & - & 7x & - & 20 & 2x-5 \\ \cline{6-6} -6x^2 & + & 15x & & & 3x+4 \longleftarrow \text{Cociente} \\ \cline{1-5} & & 8x & - & 20 & \\ & & -8x & + & 20 & \\ \cline{3-5} & & & & 0 & \longleftarrow \text{Residuo} \end{array}$$

c) $(12x^2-x-6)\div(3x+2)$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 12x^2 & - & x & - & 6 & 3x+2 \\ \cline{6-6} -12x^2 & - & 8x & & & 4x-3 \longleftarrow \text{Cociente} \\ \cline{1-5} & & -9x & - & 6 & \\ & & +9x & + & 6 & \\ \cline{3-5} & & & & 0 & \longleftarrow \text{Residuo} \end{array}$$

Prueba de Matemática 8vo (30 min.) Fecha: ____________

Unidad 1: Operaciones con polinomios

/ 20

Nombre: ______________________________ **Sección:** __________

Sexo: M / F

1. Escriba en la casilla correspondiente de la tabla la información solicitada respecto a las expresiones algebraicas (1 punto×4=4)

	Expresión algebraica	Número de términos	Grado
a)	$3x$		
b)	$x^4 + 3x^2$		

2. Simplifique: (1 punto×2=2)

a) $3a + 8b + 10a - 6b$

b) $9x - 8y + 10x - 9y$

3. Efectúe las siguientes operaciones: (1 punto×14=14)

a) $(3x + 2y) + (5x + 3y)$
Forma horizontal:

b) $(4x^2 + 2x)+(10x^2 - 11x)$
Forma vertical:

c) $(6x - 5y)-(-8x + 7y)$
Forma horizontal:

d) $(8x + 5y)-(6x + 3y)$
Forma vertical:

e) $(2x)(3y)$

f) $(-3x)^2$

g) $6(x + 4)$

h) $-2x(4x - 3y)$

i) $(x + 2)(y + 5)$

j) $(x + 3)(x + 2)$

k) $(x - 3)(x + 2)$

l) $20xy \div 5y$

m) $(4x - 12y) \div 4$

n) $(x^2 - 9x + 20) \div (x - 4)$

Nombre: ________________________________

Unidad 2

Sistemas de Ecuaciones de Primer Grado

Contenido 1 Ecuaciones de la forma $x + b = c$ y $ax = c$

Aprendizajes esperados

Aplica la transposición de términos en la solución de ecuaciones de primer grado con una variable.

Secuencia:

En séptimo grado se aprendió a resolver ecuaciones de primer grado en una variable. En esta clase se recuerda cómo resolver una ecuación de este tipo.

Puntos esenciales:

Aclarar en qué consiste la transposición de términos.

Indicar que cuando se divida el lado izquierdo de una ecuación por un número, también se debe dividir el lado derecho. El número usado debe ser diferente de cero.

Recordar cómo se suman, restan o dividen números enteros.

La transposición de términos se utiliza mucho en otras secciones del texto, por lo tanto se espera que los estudiantes se acostumbren a transponer en esta clase y la próxima.

Unidad 2: Sistema de Ecuaciones de Primer Grado

Sección 1: Ecuaciones de primer grado

Contenido 1: Ecuaciones de la forma $x+b=c$ y $ax=c$

P1

Dadas las ecuaciones

a) $x+7=13$ b) $3x=6$ c) $x-5=3$

Encuentre por simple inspección el respectivo valor de x que las satisface.

A $ax+b=c$, $a\neq 0$, se le llama **ecuación de primer grado en la variable x.**

S1

a) $6+7=13$, por tanto $x=6$

b) $(3)(2)=6$, por tanto $x=2$

c) $8-5=3$, por tanto $x=8$

Solución de una ecuación de primer grado es el valor de x que satisface la igualdad.

P2

Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $x+5=7$

b) $x-4=3$

c) $4x=12$

Resolver una ecuación de primer grado significa encontrar su solución.

S2

a) Transponiendo el 5 se obtiene:

$x+5=7$

$x=7-5$

$x=2$

b) Transponiendo el -4 se obtiene:

$x-4=3$

$x=3+4$

$x=7$

c) Se divide por 4:

$4x=12$

$\frac{4x}{4}=\frac{12}{4}$

$x=3$

C

Para resolver una ecuación de primer grado:

- Si es de la forma $x+b=c$ se transpone el término sin variable al lado derecho. El valor de x resultará de la reducción numérica hecha en el lado derecho.
- Si es de la forma $ax=b$, con $a\neq 0$, se dividen ambos lados de la ecuación por a, obteniendo el valor de la variable.

E

Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $x+6=10$ b) $x-3=2$ c) $4x=24$ d) $x-2=8$

e) $10x=50$ f) $x+9=4$ g) $x-8=-1$ h) $-2x=6$

18

U2: Sistemas de ecuaciones de primer grado
S1: Ecuaciones de primer grado
C1: Ecuaciones de la forma $x+b=c$ y $ax=c$

P1 Encuentre el respectivo valor de x que satisface:

a) $x+7=13$ b) $3x=6$ c) $x-5=3$

S a) $6+7=13$, por tanto $x=6$

b) $(3)(2)=6$, por tanto $x=2$

c) $8-5=3$, por tanto $x=8$

P2 Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado

a) $x+5=7$

Transponiendo 5:

$x+5=7$

$x=7-5$

$x=2$

b) $x-4=3$

Transponiendo -4:

$x-4=3$

$x=3+4$

$x=7$

c) $4x=12$

$\frac{4x}{4}=\frac{12}{4}$ Dividiendo por 4

$x=3$

C Para resolver:

- $x+b=c$ se transpone b.
- $ax=c$ se dividen ambos lados por a, $a\neq 0$.

E Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado.

a) $x+6=10$
$x=10-6$
$x=4$

b) $x-3=2$
$x=2+3$
$x=5$

c) $4x=24$
$\frac{4x}{4}=\frac{24}{6}$
$x=6$

d) $x-2=8$
$x=8+2$
$x=10$

e) $10x=50$
$\frac{10x}{10}=\frac{50}{10}$
$x=5$

f) $x+9=4$
$x=4-9$
$x=-5$

Contenido 2 Ecuaciones de la forma $ax + b = c$, con $a \neq 0, 1$

Sección 1: Ecuaciones de primer grado

Contenido 2: Ecuaciones de la forma $ax+b=c$ con $a\neq 0, 1$

P

Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $3x+2=14$ b) $4x-3=17$ c) $-3x+5=8$ d) $-5x-8=-13$

S

a) Se transpone 2, y luego se divide por 3:

$$3x+2=14$$
$$3x=14-2$$
$$3x=12$$
$$\frac{3x}{3}=\frac{12}{3}$$
$$x=4$$

b) Se transpone -3, y luego se divide por 4:

$$4x-3=17$$
$$4x=17+3$$
$$4x=20$$
$$\frac{4x}{4}=\frac{20}{4}$$
$$x=5$$

c) Se transpone 5, y luego se divide por -3:

$$-3x+5=8$$
$$-3x=8-5$$
$$-3x=3$$
$$\frac{-3x}{-3}=\frac{3}{-3}$$
$$x=-1$$

d) Se transpone -8, y luego se divide por -5:

$$-5x-8=-13$$
$$-5x=-13+8$$
$$-5x=-5$$
$$\frac{-5x}{-5}=\frac{-5}{-5}$$
$$x=1$$

C

Una ecuación de la forma $ax+b=c$ con $a\neq 0$, 1, se resuelve de la siguiente manera:

1. Se transpone b al lado derecho de la ecuación teniendo $ax=c-b$.
2. Se divide ambos lados de la ecuación $ax=c-b$ por a resultando el valor de la variable $x=\frac{c-b}{a}$.

E

Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $2x+5=11$ b) $5x-3=12$ c) $-4x+1=9$ d) $-3x-2=-8$

e) $6x+1=7$ f) $3x-5=10$ g) $-7x+8=22$ h) $-5x-6=9$

19

Aprendizajes esperados

Aplica la transposición de términos en la solución de ecuaciones de primer grado con una variable.

Secuencia:

En la clase anterior se estudiaron ecuaciones de primer grado de la forma $x+b=c$ y $ax=c$. Lo aprendido en esa clase, será de mucha utilidad en este contenido, ya que los procedimientos se conjugan para resolver ecuaciones de primer grado de la forma $ax+b=c$.

Puntos esenciales:

Recordar qué es el grado de un monomio.

Señalar que para resolver ecuaciones de este tipo primero se transpone el número que acompaña al término de grado 1, y luego se divide por el coeficiente de dicho término.

Mencionar que se deben cuidar los signos al momento de transponer términos.

Indicar que se deben tener presente los signos de los coeficientes al momento de efectuar operaciones aritméticas.

C2: Ecuaciones de la forma $ax + b = c$, con $a \neq 0, 1$

P Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado:

S

a) $3x + 2 = 14$
$$3x = 14 - 2$$
$$3x = 12$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$$
$$x = 4$$

b) $4x - 3 = 17$
$$4x = 17 + 3$$
$$4x = 20$$
$$\frac{4x}{4} = \frac{20}{4}$$
$$x = 5$$

c) $-3x + 5 = 8$
$$-3x = 8 - 5$$
$$-3x = 3$$
$$\frac{-3x}{-3} = \frac{3}{-3}$$
$$x = -1$$

d) $-5x - 8 = -13$
$$-5x = -13 + 8$$
$$-5x = -5$$
$$\frac{-5x}{-5} = \frac{-5}{-5}$$
$$x = 1$$

C Para resolver $ax + b = c$:

- Se transpone b y se efectúa la operación.
- Se divide por a ambos lados de la ecuación.

E

a) $2x + 5 = 11$
$$2x = 11 - 5$$
$$2x = 6$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$$
$$x = 3$$

b) $5x - 3 = 12$
$$5x = 12 + 3$$
$$5x = 15$$
$$\frac{5x}{5} = \frac{15}{5}$$
$$x = 3$$

c) $-4x + 1 = 9$
$$-4x = 9 - 1$$
$$-4x = 8$$
$$\frac{-4x}{-4} = \frac{8}{-4}$$
$$x = -2$$

d) $-3x - 2 = -8$
$$-3x = -8 + 2$$
$$-3x = -6$$
$$\frac{-3x}{-3} = \frac{-6}{-3}$$
$$x = 2$$

Contenido 3 Ecuaciones de primer grado con dos variables

Aprendizajes esperados

Representa situaciones del entorno mediante una ecuación de primer grado con dos variables.

Secuencia:

En séptimo grado se representaron expresiones del lenguaje común en lenguaje algebraico. En esta sección, se han recordado las ecuaciones de primer grado en una variable.

En esta clase se estudian las ecuaciones de primer grado en dos variables, las cuales se introducen a partir de situaciones del entorno.

Puntos esenciales:

Señalar que se deben identificar las cantidades desconocidas para representarlas con variables.

Indicar que se debe de cuidar la operación a realizar al traducir al lenguaje algebraico.

Reforzar la habilidad de representación de situaciones del entorno mediante una ecuación en dos variables, pues se utiliza en otras secciones del texto.

Explicar que en el LT se ha decidido trabajar las ecuaciones de primer grado en dos variables utilizando las letras x y y.

Unidad 2: Sistema de Ecuaciones de Primer Grado

Contenido 3: Ecuaciones de primer grado con dos variables

P

Marcos tiene en su refrigeradora 10 frutas entre bananos y naranjas.

a) ¿Qué cantidades son desconocidas?, ¿Cómo se representan?

b) Escriba la igualdad que representa la expresión:
La suma de la cantidad de bananos y la cantidad de naranjas es igual a 10.

Una **cantidad desconocida** se representa con una letra.

S

a) Se desconoce cuántos bananos y cuántas naranjas hay en la refrigeradora.
Se pueden representar estas cantidades desconocidas utilizando las letras x y y:
Cantidad de bananos: x
Cantidad de naranjas: y

b) La igualdad que representa el enunciado "la suma de la cantidad de bananos y la cantidad de naranjas es igual a 10", es: $x+y=10$.

Este tipo de igualdad se llama **ecuación de primer grado con dos variables.**

C

La igualdad $ax+by=c$ donde a, b y c son constantes y a, b no son cero simultáneamente y las letras x y y representan cantidades desconocidas, se llama **ecuación de primer grado con dos variables**.

Ejemplo Siguiendo la misma idea del problema anterior: si el doble de la cantidad de bananos y la cantidad de naranjas suman 12 frutas, ¿Cuál es la ecuación que representa esta expresión?

Doble cantidad de bananos: $2x$
Cantidad de naranjas: y
La ecuación que representa la expresión es:
$2x+y=12$.

E

Exprese los siguientes enunciados mediante una ecuación de primer grado con las variables x y y.

a) Julio tiene 13 frutas entre melones y sandías.

b) La suma de la edad de Luis con la de Francis es 18 años.

c) El triple de la cantidad de lapiceros más la cantidad de cuadernos que tiene Juan es 20.

d) Carlos pagó C$ 700 por la compra de dos camisas y un pantalón.

e) El costo de tres lapiceros y dos cuadernos es C$ 70.

20

C3: Ecuaciones de primer grado con dos variables

P Marcos tiene en su refrigeradora 10 frutas entre bananos y naranjas

S a) Cantidades desconocidas y representación
Cantidad de bananos: x
Cantidad de naranjas: y

b) Igualdad que representa la expresión
$x+y=10$

C $ax+by=c$ ⟵ Ecuación de primer grado en dos variables

Ej El doble de la cantidad de bananos y la cantidad de naranjas suman 12 frutas, ¿cuál es la ecuación que representa esta expresión?

Doble de bananos: $2x$
Cantidad de naranjas: y
Ecuación: $2x+y=12$

E a) Julio tiene 13 frutas entre melones y sandías.

Cantidad de melones: x
Cantidad de sandías: y
Ecuación: $x+y=13$

b) La suma de la edad de Luis con la de Francis es 18 años.

Edad de Luis: x
Edad de Francis: y
Ecuación: $x+y=18$

c) El triple de la cantidad de lapiceros, más la cantidad de cuadernos de Juan es 20.

Cantidad de lapiceros: x ⟶ El triple: $3x$
Cantidad de cuadernos: y
Ecuación: $3x+y=20$

Contenido 4 Solución de ecuaciones de primer grado con dos variables

Contenido 4: Solución de ecuaciones de primer grado con dos variables

P

Complete la tabla sabiendo que $2x+y=12$.

x	0	1	2	3	4	5	6
y							

S

Al sustituir cada valor de x en la ecuación, se obtiene el valor respectivo de y:

Para $x=0$ — Para $x=1$ ⋯ Para $x=6$

$$(2)(0)+y=12 \quad (2)(1)+y=12 \quad (2)(6)+y=12$$
$$0+y=12 \quad 2+y=12 \quad 12+y=12$$
$$y=12 \quad y=10 \quad y=0$$

La tabla completa es:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	**12**	**10**	**8**	**6**	**4**	**2**	**0**

Cada par de números (0, 12), (1, 10), (2, 8), etc., satisface la ecuación $2x+y=12$, por ejemplo (6, 0), es solución de esta porque $(2)(6)+0=12$.

C

Se llama **solución de la ecuación** $ax+by=c$ a todo par ordenado de números (x, y) que satisface dicha ecuación.

Ejemplo Verifique que el par ordenado $(5, 2)$ es solución de $2x+y=12$.

Al sustituir $x=5$ y $y=2$ en $2x+y$, resulta

$$(2)(5)+2=10+2=12$$

En consecuencia, el par ordenado **$(5, 2)$ es solución** de $2x+y=12$.

E

a) Complete la tabla sabiendo que $x+y=10$.

x	0	1	2	3	4	5	6
y							

b) Muestre que un par ordenado de la tabla completada es solución de la ecuación dada.

Aprendizajes esperados

Comprende el concepto de solución de una ecuación de primer grado con dos variables.

Secuencia:

Anteriormente se ha estudiado cómo resolver una ecuación de primer grado en una variable, y qué es una ecuación de primer grado en dos variables.

En esta clase se estudia qué es una solución de una ecuación de primer grado en dos variables.

Puntos esenciales:

Señalar que dada una ecuación de primer grado en dos variables y el valor de una de las variables, el valor de la otra variable se encuentra sustituyendo el valor conocido, y resolviendo la ecuación resultante. Esta idea se utiliza más adelante en otras secciones.

Notar que una ecuación de primer grado con 2 variables puede tener infinitas soluciones.

Indicar que para verificar si un par ordenado es solución de una ecuación de primer grado en dos variables, se deben sustituir los respectivos valores de x y y en la expresión algebraica, y observar si el resultado coincide con el número de la derecha.

C4: Solución de ecuaciones de primer grado con dos variables

(P) Complete la tabla sabiendo que $2x+y=12$.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	12	10	8	6	4	2	0

(S) Al sustituir cada valor de x en $2x+y=12$, se tiene:

Para $x=0$ — Para $x=1$ — Para $x=6$

$$(2)(0)+y=12 \quad (2)(1)+y=12 \quad (2)(6)+y=12$$
$$0+y=12 \quad 2+y=12 \quad 12+y=12$$
$$y=12 \quad y=10 \quad y=0$$

(C) El par ordenado de números (x, y) es solución de $ax+by=c$ porque la satisface.

(Ej) Verifique que $(x, y)=(5, 2)$ es solución de $2x+y=12$.

Al sustituir $x=5$ y $y=2$ en $2x+y$, resulta:
$(2)(5)+2=10+2=12$

$(5, 2)$ es solución de $2x+y=12$.

(E) a) Complete la tabla sabiendo que $x+y=10$.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	10	9	8	7	6	5	4

Si $x=0$ — Si $x=1$ — Si $x=2$

$$0+y=10 \quad 1+y=10 \quad 2+y=10$$
$$y=10 \quad y=9 \quad y=8$$

b) Muestre un par ordenado que sea solución de $x+y=10$.

$(x, y)=(0, 10), (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6)$ etc.

Contenido 5 Concepto y solución de sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos variables

Aprendizajes esperados

Comprende el concepto y solución de un sistema de ecuaciones de primer grado con dos variables.

Secuencia:

En la clase anterior se estudiaron las soluciones de una ecuación de primer grado en dos variables.

En esta clase se estudia qué es un sistema de ecuaciones de primer grado (2×2), y su solución.

Puntos esenciales:

Mostrar cómo se representa un sistema de ecuaciones de primer grado.

Indicar que la solución de un sistema de ecuaciones es una solución común de ambas ecuaciones.

Señalar que dado un sistema de ecuaciones de primer grado en dos variables y un par ordenado, este es solución del sistema, si al sustituir los respectivos valores de x y y en las expresiones algebraicas correspondientes en cada ecuación, cada resultado coincide con el número de la derecha de la respectiva ecuación.

Mencionar que se deben cuidar los signos al realizar las operaciones entre números enteros.

Contenido 5: Concepto y solución de sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos variables

P

Encuentre la solución que tienen en común las ecuaciones $x+y=10$ y $2x+y=12$, haciendo uso de las tablas del contenido anterior.

S

Tabla de $x+y=10$

x	0	1	2	3	4	5	6
y	10	9	8	7	6	5	4

Tabla de $2x+y=12$

x	0	1	2	3	4	5	6
y	12	10	8	6	4	2	0

Puede verse que el par ordenado **(2, 8)** es la solución que tienen en común las dos ecuaciones.

C

Una colección de dos ecuaciones de primer grado con dos variables se llama **sistema de ecuaciones de primer grado**, y el par ordenado de números que satisface a ambas ecuaciones recibe el nombre de **solución del sistema.**

Representación de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos variables

$$\begin{cases} x+y=10 \\ 2x+y=12 \end{cases}$$

Ejemplo Verifique que el par ordenado $(2,\ 8)$ es la solución del sistema $\begin{cases} x+y=10 \\ 2x+y=12 \end{cases}$

Al sustituir $x=2$ y $y=8$, en los lados izquierdos de las ecuaciones, se obtiene:

$$x+y=2+8=10$$
$$2x+y=(2)(2)+8=4+8=12$$

El par ordenado $\mathbf{(2,\ 8)}$ es la solución.

E

Verifique cuál de los siguientes pares ordenados $(4,\ 3)$, $(-1,\ 4)$ y $(2,\ 1)$ es la solución del sistema

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+2y=4 \end{cases}$$

22

C5: Concepto y solución de sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos variables

P Encuentre la solución común de $x+y=10$ y $2x+y=12$.

S Tabla de $x+y=10$

x	0	1	2	3	4	5	6
y	10	9	8	7	6	5	4

Tabla de $2x+y=12$

x	0	1	2	3	4	5	6
y	12	10	8	6	4	2	0

$(2,8)$ es la solución común de las dos ecuaciones.

C Solución de un sistema de ecuaciones, es el par ordenado que satisface ambas ecuaciones.

Ej Verifique que $(2,8)$ es la solución de

$$\begin{cases} x+y=10 \\ 2x+y=12 \end{cases}$$

$x=2$ y $y=8$ luego:

$x+y=2+8=10$

$2x+y=(2)(2)+8=4+8=12$

$(2,8)$ es la solución del sistema

E Verifique cuál de los pares ordenados $(4,3)$, $(-1,4)$ y $(2,1)$ es la solución de

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+2y=4 \end{cases}$$

$x=4, y=3$	$x=-1, y=4$	$x=2, y=1$
$4-3=1$	$-1-4=-5$	$2-1=1$
$4+(2)(3)=10$	$-1+(2)(4)=7$	$2+(2)(1)=4$
No cumple	No Cumple	Cumple

$(2,1)$ es la solución del sistema

Contenido 1 Sistemas con una variable despejada en una de las ecuaciones

Sección 2: Método de sustitución

Contenido 1: Sistemas con una variable despejada en una de las ecuaciones

P

El doble de la edad de Luis más la edad de Carlos es 11 años. Si Carlos es dos años mayor que Luis, encuentre las edades de Luis y Carlos respectivamente.

S

Edad de Luis: x años
Edad de Carlos: y años

Se forma el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x+y=11 & ① \\ y=x+2 & ② \end{cases}$

Una variable que está aislada en un lado de la igualdad, se dirá que está despejada.

1. Se sustituye $y=x+2$ en ①, y se resuelve la ecuación de primer grado obtenida:

$$\begin{aligned} 2x+(x+2)&=11 \\ 3x+2&=11 \\ 3x&=11-2 \\ \frac{3x}{3}&=\frac{9}{3} \\ x&=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x+y&=11 \\ y&=x+2 \\ 2x+(x+2)&=11 \end{aligned}$$

2. Se sustituye $x=3$ en ② para encontrar el valor de y:

$$y=3+2=5$$

Edad de Luis: 3 años   Edad de Carlos: 5 años

C

La solución de un sistema de ecuaciones de primer grado con dos variables en las que una de ellas aparece despejada, se encuentra así:

1. Se sustituye la expresión de la variable despejada en la otra ecuación, y se resuelve esta en la otra variable.
2. Se sustituye el valor encontrado en el paso 1., en la ecuación con la variable despejada y se efectúan las operaciones indicadas. El par ordenado formado por los valores encontrados, es la solución del sistema.

Este método se conoce como **método de sustitución**.

Ejemplo Resuelva el sistema $\begin{cases} 3x+y=20 & ① \\ x=y+4 & ② \end{cases}$

1. Se sustituye $x=y+4$ en ① y se encuentra la solución de la ecuación obtenida:

$$\begin{aligned} 3(y+4)+y&=20 \\ 3y+12+y&=20 \\ 4y&=8 \\ \frac{4y}{4}&=\frac{8}{4} \\ y&=2 \end{aligned}$$

Resolver un sistema de ecuaciones significa encontrar su solución.

2. Se sustituye $y=2$ en ②:

$$x=2+4=6$$

El par ordenado **(6, 2)** es la solución del sistema.

E

Resuelva los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 4x+y=13 \\ y=x+3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y=13 \\ x=y+2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+5y=18 \\ x=y-2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y=x-3 \\ 2x-3y=2 \end{cases}$

Aprendizajes esperados

Aplica el método de sustitución en la solución de sistemas en el que una variable está despejada en una de las ecuaciones.

Secuencia:

En la sección anterior se encontró la solución de un sistema de ecuaciones dados algunos pares ordenados. Pero ¿qué ocurre si no se dan esos pares ordenados? Conviene pues, aprender una manera de cómo encontrar tal solución.

Aquí se estudian 2 métodos para resolver un sistema de ecuaciones. Estos son: método de sustitución y método de reducción. En ambos métodos se elimina una variable y se obtiene una ecuación de primer grado en una variable, la cual se resuelve utilizando transposición de términos.

Puntos esenciales:

Aclarar:

✓ Qué significa que una variable está despejada.
✓ Que el objetivo de sustituir, es eliminar una variable.

Indicar que cuando se sustituya se debe utilizar paréntesis y cuidar los signos cuando se quiten estos.

Mencionar que se debe identificar la variable despejada.

Señalar que al realizar la sustitución se obtiene una ecuación en una variable.

S2: Método de sustitución
C1: Sistemas con una variable despejada en una de las ecuaciones

(P) Doble de edad de Luis más edad de Carlos: 11. Carlos es dos años mayor que Luis. Encuentre las edades de Luis y Carlos.

(S) Edad de Luis: x años
Edad de Carlos: y años
$\begin{cases} 2x+y=11 & ① \\ y=x+2 & ② \end{cases}$

Sustituyendo $y=x+2$, en ①:

$$\begin{aligned} 2x+(x+2)&=11 \\ 3x+2&=11 \\ 3x&=11-2 \\ \frac{3x}{3}&=\frac{9}{3} \\ x&=3 \end{aligned}$$

Sustituir $x=3$ en ②:

$$\begin{aligned} y&=x+2 \\ &=3+2=5 \end{aligned}$$

Luis: 3 años
Carlos: 5 años

(C) Método de sustitución
1. Sustituir la expresión de la variable despejada en la otra ecuación y resolver la ecuación resultante.
2. Sustituir el valor obtenido en la ecuación más conveniente.

(Ej) Resuelva el sistema $\begin{cases} 3x+y=20 & ① \\ x=y+4 & ② \end{cases}$

Sustituyendo $x=y+4$ en ①

$$\begin{aligned} 3(y+4)+y&=20 \\ 3y+12+y&=20 \\ 4y&=8 \\ \frac{4y}{4}&=\frac{8}{4} \\ y&=2 \end{aligned}$$

Sustituir $y=2$ en ②:

$$\begin{aligned} x&=y+4 \\ &=2+4 \\ &=6 \end{aligned}$$

Resp. $(6, 2)$

(E) a) $\begin{cases} 4x+y=13 & ① \\ y=x+3 & ② \end{cases}$

Sustituir $y=x+3$ en ①:

$$\begin{aligned} 4x+(x+3)&=13 \\ 5x+3&=13 \\ 5x&=10 \\ x&=2 \end{aligned}$$

Sustituir $x=2$ en ②:

$$y=2+3=5$$

Resp. $(2, 5)$

Contenido 2 Sistemas de dos ecuaciones sin ninguna variable despejada

Aprendizajes esperados

Aplica el método de sustitución en la solución de sistemas en el que ninguna variable está despejada.

Secuencia:

En la clase anterior se resolvieron sistemas de ecuaciones en el que una variable está despejada.

En esta clase se resuelven sistemas de ecuaciones en donde debe despejarse una de las variables.

Puntos esenciales:

Mencionar que se debe identificar cuál variable conviene despejar.

Utilizar la transposición de términos para despejar una de las variables.

Señalar que, ya despejada la variable, se utiliza el método de sustitución para resolver el sistema de ecuaciones.

Indicar que se deben cuidar los signos al operar con enteros y cuando se aplica la resta de polinomios.

Notar que, al sustituir la expresión de la variable despejada debe usarse paréntesis, ya que esta expresión será parte de un producto que deberá efectuarse.

Contenido 2: Sistemas de dos ecuaciones sin ninguna variable despejada

P Resuelva el sistema despejando la variable y en una de las ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x+y=20 & ① \\ x-y=4 & ② \end{cases}$$

S

1. Se transpone $2x$ en la ecuación ①:

$y=20-2x$ ③

2. Se sustituye $y=20-2x$ en ② y se resuelve la ecuación resultante:

$2x+y=20$

$y=20-2x$

$$\begin{aligned} x-(20-2x)&=4 \\ x-20+2x&=4 \\ x+2x&=4+20 \\ 3x&=24 \\ \frac{3x}{3}&=\frac{24}{3} \\ x&=8 \end{aligned}$$

3. Se sustituye $x=8$ en ③:

$y=20-(2)(8)=20-16=4$

El par ordenado $(8,\ 4)$ es la solución del sistema.

C Un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos variables donde ninguna de estas aparece despejada se resuelve de la siguiente manera:

1. Se despeja una de las variables en la ecuación más conveniente.
2. Se sustituye la expresión de la variable despejada en la otra ecuación y se resuelve la ecuación obtenida.
3. Se sustituye el valor encontrado en el paso 2., en la ecuación con la variable despejada y se efectúan las operaciones indicadas. El par ordenado formado por los valores encontrados, es la solución del sistema.

Este es un método más general de sustitución.

E Resuelva los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ x-y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-7y=20 \\ x-3y=4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+y=6 \\ 3x+2y=11 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x+2y=16 \\ 3x+y=9 \end{cases}$

25

C2: Sistemas de dos ecuaciones sin ninguna variable despejada

P Resuelva el sistema $\begin{cases} 2x+y=20 & ① \\ x-y=4 & ② \end{cases}$

S Se transpone $2x$ en ①:

$y=20-2x$ ③

Sustituyendo $y=20-2x$ en ②:

$$\begin{aligned} x-(20-2x)&=4 \\ x-20+2x&=4 \\ x+2x&=4+20 \\ 3x&=24 \\ x&=8 \end{aligned}$$

Sustituyendo $x=8$ en ③:

$y=20-(2)(8)=20-16=4$

Resp. $(8,4)$

C 1. Despejar la variable que más conviene.
2. Aplicar el método de sustitución.

E Resuelva los sistemas:

a) $\begin{cases} 2x+y=7 & ① \\ x-y=2 & ② \end{cases}$

Se transpone $2x$ en ①:

$y=7-2x$ ③

Sustituyendo ③ en ②:

$$\begin{aligned} x-(7-2x)&=2 \\ x-7+2x&=2 \\ x+2x&=2+7 \\ 3x&=9 \\ x&=3 \end{aligned}$$

Sustituyendo $x=3$ en ③:

$y=7-2(3)$

$y=1$

Resp. $(3,1)$

b) $\begin{cases} 3x-7y=20 & ① \\ x-3y=4 & ② \end{cases}$

$x=4+3y$ ③

Sustituyendo ③ en ①:

$$\begin{aligned} 3(4+3y)-7y&=20 \\ 12+9y-7y&=20 \\ 2y&=8 \\ y&=4 \end{aligned}$$

Sustituyendo $y=4$ en ③:

$x=4+(3)(4)$

$x=16$

Resp. $(16,4)$

Contenido 1 Sistemas de dos ecuaciones con una variable que tiene coeficientes opuestos

Sección 3: Método de reducción

Contenido 1: Sistemas de dos ecuaciones con una variable que tiene coeficientes opuestos

P

Resuelva el sistema sin utilizar el método de sustitución.
$$\begin{cases} 2x+y=20 & ① \\ x-y=4 & ② \end{cases}$$

S

1. Se suman las ecuaciones ① y ②, para eliminar la variable y y se resuelve la ecuación en x.

$$\begin{array}{rl} 2x+y=20 & ① \\ +)\quad x-y=4 & ② \\ \hline 3x \quad =24 & \end{array}$$
$$\frac{3x}{3}=\frac{24}{3}$$
$$x=8$$

2. Se sustituye $x=8$ en ① y se resuelve para y:

$$(2)(8)+y=20$$
$$16+y=20$$
$$y=20-16$$
$$y=4$$

El par ordenado $(8,\ 4)$ es la solución del sistema.

C

Para resolver un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos variables, donde una de estas aparece con coeficientes opuestos, se procede así:

1. Se suman las ecuaciones lado a lado para eliminar una variable y se resuelve la ecuación que resulta en la otra variable.
2. Se sustituye en cualquiera de las ecuaciones del sistema el valor encontrado en 1., y se resuelve la ecuación resultante. El par ordenado formado por los valores encontrados, es la solución del sistema.

Este procedimiento se conoce como **método de reducción.**

E

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ x-y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x+2y=20 \\ 5x-2y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+3y=1 \\ -x+2y=4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x+7y=50 \\ -5x+3y=0 \end{cases}$

Aprendizajes esperados

Aplica el método de reducción en la solución de sistemas con una variable que tiene coeficientes opuestos.

Secuencia:

En la primera unidad se estudió la suma de polinomios, y en la sección anterior se resolvieron sistemas de ecuaciones de primer grado, utilizando el método de sustitución.

En esta clase se estudia cómo resolver un sistema de ecuaciones cuyos coeficientes de una misma variable son opuestos.

Puntos esenciales:

Recordar la suma de polinomios y el concepto de números opuestos.

Aclarar que el objetivo de sumar las ecuaciones es eliminar una variable.

Señalar que para resolver un sistema con el método de reducción, lo primero es identificar la variable a eliminar.

Indicar que la suma de los lados izquierdos de dos ecuaciones, se realiza como la suma de polinomios estudiada en la primera unidad de este LT.

Destacar que se tiene que sustituir la solución de la ecuación en una variable, en la ecuación que más conviene en el sistema.

S3: Método de reducción
C1: Sistemas de dos ecuaciones con una variable que tiene coeficientes opuestos

(P) Resuelva el sistema $\begin{cases} 2x+y=20 & ① \\ x-y=4 & ② \end{cases}$

(S)
$$\begin{array}{rl} 2x+y=20 & ① \\ +)\quad x-y=4 & ② \\ \hline 3x \quad =24 & \end{array}$$
$$\frac{3x}{3}=\frac{24}{3}$$
$$x=8$$

Sustituyendo $x=8$ en ①:
$$(2)(8)+y=20$$
$$16+y=20$$
$$y=20-16$$
$$y=4$$
Resp. $(8,4)$

(C) Método de reducción
1. Sumar las ecuaciones lado a lado y resolver la ecuación resultante.
2. Sustituir en la ecuación más conveniente el valor encontrado en 1.

(E) a) $\begin{cases} 2x+y=7 & ① \\ x-y=2 & ② \end{cases}$

$$\begin{array}{rl} 2x+y=7 & ① \\ +)\quad x-y=2 & ② \\ \hline 3x \quad =9 & \end{array}$$
$$\frac{3x}{3}=\frac{9}{3}$$
$$x=3$$

Sustituyendo $x=3$ en ①:
$$2(3)+y=7$$
$$6+y=7$$
$$y=7-6$$
$$y=1$$
Resp. $(3,1)$

b) $\begin{cases} 4x+2y=20 & ① \\ 5x-2y=7 & ② \end{cases}$

$$\begin{array}{rl} 4x+2y=20 & ① \\ +)\quad 5x-2y=7 & ② \\ \hline 9x \quad =27 & \end{array}$$
$$\frac{9x}{9}=\frac{27}{9}$$
$$x=3$$

Sustituyendo $x=3$ en ①:
$$4(3)+2y=20$$
$$2y=20-12=8$$
$$y=4$$
Resp. $(3,4)$

Contenido 2 Sistemas de dos ecuaciones con una variable que tiene coeficientes iguales

Aprendizajes esperados

Aplica el método de reducción en la solución de sistemas con una variable que tiene coeficientes iguales.

Secuencia:

En la clase anterior se resolvieron sistemas de ecuaciones cuyos coeficientes de una misma variable eran opuestos.

En esta clase se estudia cómo resolver un sistema de ecuaciones cuyos coeficientes de una misma variable son iguales.

Puntos esenciales:

Recordar que un sistema se reduce a una sola ecuación si los coeficientes de una variable son opuestos.

Aclarar que el objetivo de multiplicar por -1 es obtener un sistema cuyos coeficientes de una misma variable sean opuestos.

Indicar que cuando se multiplique por -1, se cuide el cambio de signo de todos los términos involucrados en la ecuación.

Señalar que se debe identificar la variable que más conviene eliminar y cuál ecuación es la que más conviene multiplicar por -1.

Insistir en el cuido que se debe tener con los signos cuando se opere con los coeficientes.

Sección 3: Método de reducción

Contenido 2: Sistemas de dos ecuaciones con una variable que tiene coeficientes iguales

P

Resuelva el sistema $\begin{cases} 2x+5y=12 & ① \\ 2x+\ \ y=4 & ② \end{cases}$

S

1. Se multiplica por -1 ambos lados de la ecuación ② para que los coeficientes de x sean opuestos.

$$-2x-y=-4 \quad ③$$

$$(-1)(2x+y)=(-1)(4)$$
$$-2x-y=-4$$

2. Se suman las ecuaciones ① y ③ y se resuelve la ecuación obtenida:

$$\begin{array}{rrl} & 2x+5y=12 & ① \\ +) & -2x-\ \ y=-4 & ③ \\ \hline & 4y=8 & \end{array}$$

$$\frac{4y}{4}=\frac{8}{4}$$
$$y=2$$

3. Se sustituye $y=2$ en la ecuación ②:

$$2x+2=4$$
$$2x=4-2$$
$$\frac{2x}{2}=\frac{2}{2}$$
$$x=1$$

También se puede sustituir $y=2$ en la ecuación ①.

El par ordenado **(1, 2)** es la solución del sistema.

C

Para resolver un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos variables, donde una de estas tiene coeficientes iguales, se efectúan los siguientes pasos:

1. Se multiplican por -1 los lados de una de las ecuaciones para lograr que una variable en ambas ecuaciones tenga coeficientes opuestos.
2. Se suma la ecuación que resulta en 1., con la que no se ha transformado y se resuelve la ecuación obtenida.
3. Se sustituye el valor encontrado en 2., en cualquiera de las ecuaciones del sistema original y se resuelve la ecuación resultante. El par ordenado formado por los valores encontrados, es la solución del sistema.

E

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x+4y=19 \\ 3x+2y=11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+2y=16 \\ 3x+2y=12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+y=3 \\ x+y=9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x-y=1 \end{cases}$

27

C2: Sistemas de dos ecuaciones con una variable que tiene coeficientes iguales

P Resuelva $\begin{cases} 2x+5y=12 & ① \\ 2x+y=4 & ② \end{cases}$

S $(-1)(2x+y)=(-1)(4) \qquad -1\times②$

$-2x-y=-4 \quad ③$

$$\begin{array}{rrl} & 2x+5y=12 & ① \\ +) & -2x-\ \ y=-4 & ③ \\ \hline & 4y=8 & \end{array}$$

$$\frac{4y}{4}=\frac{8}{4}$$
$$y=2$$

Sustituyendo $y=2$ en ②:

$2x+2=4$

$2x=4-2$

$\frac{2x}{2}=\frac{2}{2}$

$x=1$

Resp. $(1,2)$

C
1. Multiplicar por -1 ① o ②.
2. Sumar las ecuaciones con coeficientes opuestos y resolver la ecuación resultante.
3. Sustituir en la ecuación más conveniente el valor obtenido en 2.

E a) $\begin{cases} 3x+4y=19 & ① \\ 3x+2y=11 & ② \end{cases}$

$(-1)(3x+2y)=(-1)(11)$

$-3x-2y=-11 \quad ③$

$$\begin{array}{rrl} & 3x+4y=19 & ① \\ +) & -3x-2y=-11 & ③ \\ \hline & 2y=8 & \end{array}$$

$y=4$

Sustituyendo $y=4$ en ②:

$3x+(2)(4)=11$

$3x=11-8=3$

$\frac{3x}{3}=\frac{3}{3}$

$x=1$

Resp. $(1,4)$

b) $\begin{cases} 5x+2y=16 & ① \\ 3x+2y=12 & ② \end{cases}$

$(-1)(3x+2y)=(-1)(12)$

$-3x-2y=-12 \quad ③$

$$\begin{array}{rrl} & 5x+2y=16 & ① \\ +) & -3x-2y=-12 & ③ \\ \hline & 2x\qquad=4 & \end{array}$$

$x=2$

Sustituyendo $x=2$ en ①:

$(5)(2)+2y=16$

$2y=16-10=6$

$y=3$

Resp. $(2,3)$

Contenido 3 Sistemas de dos ecuaciones donde una variable en una ecuación tiene coeficiente -1

Contenido 3: Sistemas de dos ecuaciones donde una variable en una ecuación tiene coeficiente -1

P

Resuelva el sistema $\begin{cases} 4x+3y=15 & ① \\ 2x-\ \ y=\ 5 & ② \end{cases}$

S

1. Se multiplica por 3 ambos lados de la ecuación ② para tener un sistema de ecuaciones donde la variable y tenga coeficientes opuestos.

$$(3)(2x-y)=(3)(5)$$
$$6x-3y=15 \quad ③$$

2. Se suman las ecuaciones ① y ③ y se resuelve la ecuación obtenida:

$$\begin{array}{rrl} & 4x+3y=15 & ① \\ +) & 6x-3y=15 & ③ \\ \hline & 10x \quad\ \ =30 & \end{array}$$
$$\frac{10x}{10}=\frac{30}{10}$$
$$x=3$$

3. Se sustituye $x=3$ en ① y se resuelve la ecuación resultante:

$$(4)(3)+3y=15$$
$$12+3y=15$$
$$3y=15-12$$
$$3y=3$$
$$y=1$$

El par ordenado $(3,1)$ es la solución del sistema.

C

Un sistema de dos ecuaciones donde el coeficiente de una de las variables en una de las ecuaciones es -1, se resuelve así:

1. Se multiplica la ecuación que tiene la variable con coeficiente -1 por el coeficiente de la misma variable en la otra ecuación, para obtener un nuevo sistema de ecuaciones donde una misma variable tiene coeficientes opuestos.
2. Se suman las dos ecuaciones del nuevo sistema y se resuelve la ecuación resultante.
3. Se sustituye el valor encontrado en 2., en cualquiera de las ecuaciones originales y se resuelve la ecuación resultante. El par ordenado formado por los valores encontrados, es la solución del sistema.

E

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x+2y=17 \\ 2x-\ \ y=\ 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-\ \ y=\ 1 \\ 5x+3y=25 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x+3y=5 \\ -x+2y=7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x-4y=8 \\ 2x-\ \ y=5 \end{cases}$

Aprendizajes esperados

Aplica el método de reducción en la solución de sistemas donde una variable en una ecuación tiene coeficiente -1

Secuencia:

En la clase anterior se resolvieron sistemas en los que se debe multiplicar una de las ecuaciones por -1.

En esta clase se estudia cómo resolver un sistema de ecuaciones cuyo coeficiente de una variable es -1.

Puntos esenciales:

Aclarar que el objetivo de multiplicar por el coeficiente de la misma variable en la otra ecuación, es obtener un sistema cuyos coeficientes de una misma variable sean opuestos.

Indicar que cuando se realice la multiplicación, se cuide: la distributividad en el lado izquierdo de la ecuación y la multiplicación en el lado derecho.

Señalar que se debe identificar la variable a eliminar, y la ecuación a multiplicar.

Destacar que se debe sustituir la solución de la ecuación en una variable, en la ecuación más conveniente del sistema.

C3: Sistemas de dos ecuaciones donde una variable en una ecuación tiene coeficiente -1

P Resuelva $\begin{cases} 4x+3y=15 & ① \\ 2x-y=5 & ② \end{cases}$

S

$$3(2x-y)=(3)(5)$$
$$6x-3y=15 \quad ③$$

$$\begin{array}{rrl} & 4x+3y=15 & ① \\ +) & 6x-3y=15 & ③ \\ \hline & 10x \quad\ \ =30 & \\ & x=3 & \end{array}$$

Sustituyendo $x=3$ en ①:

$$(4)(3)+3y=15$$
$$3y=15-12$$
$$3y=3$$
$$y=1$$

Resp. $(3,1)$

C

1. Multiplicar la ecuación cuya variable tiene coeficiente -1 por el coeficiente de esta en la otra ecuación.
2. Sumar las ecuaciones con coeficientes opuestos y resolver la ecuación.
3. Sustituir en la ecuación más conveniente el valor obtenido en 2.

E

a) $\begin{cases} 3x+2y=17 & ① \\ 2x-y=2 & ② \end{cases}$

$$2(2x-y)=(2)(2)$$
$$4x-2y=4 \quad ③$$

$$\begin{array}{rrl} & 3x+2y=17 & ① \\ +) & 4x-2y=4 & ③ \\ \hline & 7x \quad\ \ =21 & \end{array}$$
$$\frac{7x}{7}=\frac{21}{7}$$
$$x=3$$

Sustituyendo $x=3$ en ①:

$$(3)(3)+2y=17$$
$$2y=17-9$$
$$2y=8$$
$$\frac{2y}{2}=\frac{8}{2}$$
$$y=4$$

Resp. $(3,4)$

b) $\begin{cases} 3x-y=1 & ① \\ 5x+3y=25 & ② \end{cases}$

$$3(3x-y)=(3)(1)$$
$$9x-3y=3 \quad ③$$

$$\begin{array}{rrl} & 9x-3y=3 & ③ \\ +) & 5x+3y=25 & ② \\ \hline & 14x \quad\ \ =28 & \\ & x=2 & \end{array}$$

Sustituyendo $x=2$ en ①:

$$(3)(2)-y=1$$
$$-y=1-6$$
$$-y=-5$$
$$y=5$$

Resp. $(2,5)$

Contenido 4 Sistemas de dos ecuaciones donde una variable en una ecuación tiene coeficiente 1

Aprendizajes esperados

Aplica el método de reducción en la solución de sistemas donde una variable en una ecuación tiene coeficiente 1.

Secuencia:

En la clase anterior se resolvieron sistemas cuyo coeficiente de una variable era -1.

En esta clase se estudia cómo resolver un sistema de ecuaciones en el que una de las variables posee un coeficiente igual a 1.

Puntos esenciales:

Aclarar que el objetivo de multiplicar por el opuesto del coeficiente de la misma variable en la otra ecuación, es obtener un sistema cuyos coeficientes de una misma variable sean opuestos.

Indicar que cuando se realice la multiplicación, se tenga en cuenta la ley de los signos al aplicar la distributividad en el lado izquierdo de la ecuación.

Señalar que se debe identificar la variable a eliminar, y la ecuación a multiplicar por el número apropiado.

Sección 3: Método de reducción

Contenido 4: Sistemas de dos ecuaciones donde una variable en una ecuación tiene coeficiente 1

P

Resuelva el sistema $\begin{cases} x+3y=9 & ① \\ 2x+9y=24 & ② \end{cases}$

S

1. Se multiplica por -2 ambos lados de la ecuación ① para tener un sistema de ecuaciones donde la variable x tenga coeficientes opuestos.

$$(-2)(x+3y)=(-2)(9)$$
$$-2x-6y=-18 \quad ③$$

2. Se suman ③ y ② y se resuelve la ecuación obtenida:

$$\begin{array}{rrl} & -2x-6y=-18 & ③ \\ +) & 2x+9y=\ \ 24 & ② \\ \hline & 3y=6 & \\ & y=2 & \end{array}$$

3. Se sustituye $y=2$ en ①:

$$x+(3)(2)=9$$
$$x+6=9$$
$$x=9-6$$
$$x=3$$

El par ordenado $(3,\ 2)$ es la solución del sistema.

C

Para resolver un sistema de dos ecuaciones donde el coeficiente de una de las variables en una de las ecuaciones es 1, se concretan los pasos siguientes:

1. Se multiplica la ecuación que tiene la variable con coeficiente 1 por el opuesto del coeficiente de la misma variable en la otra ecuación, para obtener un nuevo sistema de ecuaciones donde una misma variable tiene coeficientes opuestos.
2. Se suman las dos ecuaciones del nuevo sistema y se resuelve la ecuación resultante.
3. Se sustituye el valor encontrado en 2., en cualquiera de las ecuaciones originales y se resuelve la ecuación resultante. El par ordenado formado por los valores encontrados, es la solución del sistema.

E

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x+2y=7 \\ 3x+8y=27 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 9x+2y=26 \\ 3x+y=10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -2x+3y=-8 \\ x-5y=-3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x+y=10 \\ 7x-4y=5 \end{cases}$

29

C4: Sistemas de dos ecuaciones donde una variable en una ecuación tiene coeficiente 1

P Resuelva $\begin{cases} x+3y=9 & ① \\ 2x+9y=24 & ② \end{cases}$

S

$$(-2)(x+3y)=(-2)(9)$$
$$-2x-6y=-18 \quad ③$$

$$\begin{array}{rrl} & -2x-6y=-18 & ③ \\ +) & 2x+9y=24 & ② \\ \hline & 3y=6 & \\ & y=2 & \end{array}$$

Sustituyendo $y=2$ en ①:

$$x+(3)(2)=15$$
$$x+6=9$$
$$x=9-6$$
$$x=3$$

Resp. $(3, 2)$

C

1. Multiplicar la ecuación cuya variable tiene coeficiente 1, por el opuesto del coeficiente de esta en la otra ecuación.
2. Sumar las ecuaciones con coeficientes opuestos y resolver la ecuación.
3. Sustituir en la ecuación más conveniente el valor obtenido en 2.

E

a) $\begin{cases} x+2y=7 & ① \\ 3x+8y=27 & ② \end{cases}$

$$(-3)(x+2y)=(-3)(7)$$
$$-3x-6y=-21 \quad ③$$

$$\begin{array}{rrl} & -3x-6y=-21 & ③ \\ +) & 3x+8y=27 & ① \\ \hline & 2y=6 & \\ & y=3 & \end{array}$$

Sustituyendo $y=3$ en ①:

$$x+(2)(3)=7$$
$$x=7-6$$
$$x=1$$

Resp. $(1, 3)$

b) $\begin{cases} 9x+2y=26 & ① \\ 3x+y=10 & ② \end{cases}$

$$-2(3x+y)=(-2)(10)$$
$$-6x-2y=-20 \quad ③$$

$$\begin{array}{rrl} & -6x-2y=-20 & ③ \\ +) & 9x+2y=26 & ① \\ \hline & 3x\ \ \ \ =6 & \\ & x=2 & \end{array}$$

Sustituyendo $x=2$ en ①:

$$(3)(2)+y=10$$
$$y=10-6$$
$$y=4$$

Resp. $(2, 4)$

Contenido 5 Sistemas de dos ecuaciones donde todos los coeficientes de las variables no tienen igual valor absoluto y son diferentes de ± 1

Unidad 2: Sistema de Ecuaciones de Primer Grado

Contenido 5: Sistemas de dos ecuaciones donde todos los coeficientes de las variables no tienen igual valor absoluto y son diferentes de ±1

P

Resuelva el sistema eliminando la variable y.

$$\begin{cases} 2x+3y=13 & ① \\ 5x-2y=4 & ② \end{cases}$$

S

1. Se multiplica por 2 ambos lados de la ecuación ①:

$$(2)(2x+3y)=(2)(13)$$
$$4x+6y=26 \quad ③$$

2. Se multiplica por 3 la ecuación ②:

$$(3)(5x-2y)=(3)(4)$$
$$15x-6y=12 \quad ④$$

3. Se suman las ecuaciones ③ y ④ y se resuelve la ecuación obtenida:

$$\begin{array}{rrl} & 4x+6y=26 & ③ \\ +) & 15x-6y=12 & ④ \\ \hline & 19x \quad =38 & \\ & x=2 & \end{array}$$

4. Se sustituye $x=2$ en ①:

$$\begin{aligned} (2)(2)+3y&=13 \\ 4+3y&=13 \\ 3y&=13-4 \\ y&=3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el par ordenado **(2, 3)** es la solución del sistema.

Otra manera

$$\begin{array}{rrl} & 10x+15y=65 & 5\times ① \\ +) & -10x+4y=-8 & (-2)\times ② \\ \hline & 19y=57 & \\ & y=3 & \end{array}$$

C

Un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos variables, donde todos los coeficientes de estas no tienen igual valor absoluto y son diferentes de ±1, se resuelve de la siguiente manera:

1. Se multiplica una ecuación por el opuesto del coeficiente que acompaña a la variable a eliminar en la otra ecuación.
2. Se multiplica la ecuación que no fue transformada, por el coeficiente que acompañaba a la variable a eliminar en la ecuación que se transformó en 1.
3. Se suman las ecuaciones obtenidas en los pasos 1. y 2., y se resuelve la ecuación resultante.
4. Se sustituye el valor encontrado en 3., en cualquiera de las ecuaciones originales y se resuelve la ecuación resultante. El par ordenado formado por los valores encontrados, es la solución del sistema.

E

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ 4x-3y=-2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+3y=1 \\ 3x+4y=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-4y=3 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -2x+3y=0 \\ 5x-4y=7 \end{cases}$

30

Aprendizajes esperados

Aplica el método de reducción en la solución de sistemas de ecuaciones de primer grado donde los coeficientes de las variables no tienen igual valor absoluto y son diferentes de ±1.

Secuencia:

En la clase anterior se resolvieron sistemas cuyo coeficiente de una variable era 1.

En esta clase se estudia cómo resolver un sistema de ecuaciones en el que ambas ecuaciones deben ser multiplicadas por números convenientes.

Puntos esenciales:

Aclarar que el objetivo de multiplicar ambas ecuaciones, es obtener un sistema cuyos coeficientes de una misma variable sean opuestos.

Señalar que se debe identificar la variable que más conviene eliminar, y la respectiva cantidad por la que hay que multiplicar cada ecuación.

Indicar que cuando se realice la multiplicación, se tenga en cuenta la ley de los signos al aplicar la distributividad en el lado izquierdo de la ecuación.

C5: Sistemas de dos ecuaciones donde todos los coeficientes de las variables no tienen igual valor absoluto y son diferentes de ±1

P Resuelva $\begin{cases} 2x+3y=13 & ① \\ 5x-2y=4 & ② \end{cases}$

S

$(2)(2x+3y)=(2)(13)$ $\quad (3)(5x-2y)=(3)(4)$

$4x+6y=26$ ③ $\quad 15x-6y=12$ ④

$$\begin{array}{rrl} & 4x+6y=26 & ③ \\ +) & 15x-6y=12 & ④ \\ \hline & 19x \quad =38 & \\ & x=2 & \end{array}$$

Sustituyendo $x=2$ en ①:

$$\begin{aligned} (2)(2)+3y&=13 \\ 3y&=13-4 \\ 3y&=9 \\ y&=3 \end{aligned}$$

Resp. $(2, 3)$

C

1. Utilizar los coeficientes de la ecuación a eliminar para multiplicar las ecuaciones de forma conveniente.
2. Sumar las ecuaciones con coeficientes opuestos y resolver las ecuaciones resultantes.

E

a) $\begin{cases} 3x+2y=7 & ① \\ 4x-3y=-2 & ② \end{cases}$

$(3)(3x+2y)=(3)(7)$ $\quad (2)(4x-3y)=(2)(-2)$

$9x+6y=21$ ③ $\quad 8x-6y=-4$ ④

$$\begin{array}{rrl} & 9x+6y=21 & ③ \\ +) & 8x-6y=-4 & ④ \\ \hline & 17x \quad =17 & \\ & x=1 & \end{array}$$

Sustituyendo $x=1$ en ①:

$$\begin{aligned} (3)(1)+2y&=7 \\ 2y&=7-3=4 \\ y&=2 \end{aligned}$$

Resp. $(1, 2)$

b) $\begin{cases} 5x+3y=1 & ① \\ 3x+4y=5 & ② \end{cases}$

$(4)(5x+3y)=(4)(1)$ $\quad (-3)(3x+4y)=(-3)(5)$

$20x+12y=4$ ③ $\quad -9x-12y=-15$ ④

$$\begin{array}{rrl} & 20x+12y=4 & ③ \\ +) & -9x-12y=-15 & ④ \\ \hline & 11x \quad =-11 & \\ & x=-1 & \end{array}$$

Sustituyendo $x=-1$ en ①:

$$\begin{aligned} (5)(-1)+3y&=1 \\ -5+3y&=1 \\ 3y&=1+5=6 \\ y&=2 \end{aligned}$$

Resp. $(-1, 2)$

Contenido 1 Sistemas de dos ecuaciones de primer grado que contienen paréntesis

Aprendizajes esperados

Aplica los métodos de reducción y sustitución en la solución de sistemas de ecuaciones de primer grado que contienen paréntesis.

Secuencia:

En la sección anterior se resolvieron sistemas de ecuaciones (con coeficientes enteros), utilizando el método de sustitución o el de reducción.

En esta clase se estudian sistemas de ecuaciones en el que una ecuación tiene paréntesis.

Puntos esenciales:

Indicar que se cuiden los signos cuando se aplique la propiedad distributiva.

Mencionar que después de distribuir, se debe transponer el término constante que esté a la izquierda.

Señalar que se debe identificar el método más conveniente para resolver el sistema de ecuaciones, y la variable que más conviene eliminar.

Explicar la conclusión del libro de texto utilizando la solución dada al problema.

Unidad 2: Sistema de Ecuaciones de Primer Grado

Sección 4: Sistemas de dos ecuaciones con paréntesis, fracciones y decimales

Contenido 1: Sistemas de dos ecuaciones de primer grado que contienen paréntesis

P Resuelva el sistema $\begin{cases} 7x-3y=5 & ① \\ 4x+3(y-1)=14 & ② \end{cases}$

S

1. Se aplica la propiedad distributiva en ② y luego se transponen términos:

$$4x+3(y-1)=14$$
$$4x+3y-3=14$$
$$4x+3y=17 \quad ③$$

2. Se suman las ecuaciones ① y ③ y se resuelve la ecuación obtenida:

$$\begin{array}{rl} 7x-3y=5 & ① \\ +)\ \ 4x+3y=17 & ③ \\ \hline 11x \quad\quad =22 & \\ x=2 & \end{array}$$

Se sustituye $x=2$ en ③ para encontrar el valor de y:

$$(4)(2)+3y=17$$
$$8+3y=17$$
$$3y=17-8$$
$$3y=9$$
$$y=3$$

El par ordenado **(2, 3)** es la solución del sistema.

C

Para resolver un sistema de dos ecuaciones de primer grado en el cual una de ellas contiene paréntesis se procede así:

1. Se eliminan los paréntesis en esta ecuación utilizando la propiedad distributiva y luego se transponen términos.
2. Se resuelve el sistema formado por la ecuación obtenida en el paso 1., y la ecuación sin paréntesis del sistema inicial.

E

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones de primer grado:

a) $\begin{cases} 3x-2y=10 \\ 5x+2(y+4)=30 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -5x+2y=-1 \\ 5(x+2)+3y=46 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y=2x+4 \\ 3(x+y)-2y=9 \end{cases}$

32

S4: Sistemas de dos ecuaciones con paréntesis, fracciones y decimales
C1: Sistemas de dos ecuaciones de primer grado que contienen paréntesis

P Resuelva $\begin{cases} 7x-3y=5 & ① \\ 4x+3(y-1)=14 & ② \end{cases}$

S

$$4x+3(y-1)=14$$
$$4x+3y-3=14$$
$$4x+3y=17 \quad ③$$

$$\begin{array}{rl} 7x-3y=5 & ① \\ +)\ \ 4x+3y=17 & ③ \\ \hline 11x \quad\quad =22 & \\ x=2 & \end{array}$$

Sustituyendo $x=2$ en ③

$$(4)(2)+3y=17$$
$$3y=17-8$$
$$3y=9$$
$$y=3$$

Resp. $(2, 3)$

C *Leer en el libro del texto*

E a) $\begin{cases} 3x-2y=10 & ① \\ 5x+2(y+4)=30 & ② \end{cases}$

$$5x+2(y+4)=30$$
$$5x+2y+8=30$$
$$5x+2y=22 \quad ③$$

$$\begin{array}{rl} 3x-2y=10 & ① \\ +)\ 5x+2y=22 & ③ \\ \hline 8x \quad\quad =32 & \\ x=4 & \end{array}$$

Sustituyendo $x=4$ en ①:

$$12-2y=10$$
$$-2y=10-12=-2$$
$$y=1$$

Resp. $(4, 1)$

b) $\begin{cases} -5x+2y=-1 & ① \\ 5(x+2)+3y=46 & ② \end{cases}$

$$5(x+2)+3y=46$$
$$5x+10+3y=46$$
$$5x+3y=36 \quad ③$$

$$\begin{array}{rl} -5x+2y=-1 & ① \\ +)\ \ 5x+3y=36 & ③ \\ \hline 5y=35 & \\ y=7 & \end{array}$$

Sustituyendo $y=7$ en ①:

$$-5x+14=-1$$
$$-5x=-1-14=-15$$
$$x=3$$

Resp. $(3, 7)$

Contenido 2 Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con coeficientes fraccionarios

Contenido 2: Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con coeficientes fraccionarios

P

Resuelva el sistema $\begin{cases} \frac{x}{4}+\frac{y}{2}=7 & ① \\ 3x-2y=4 & ② \end{cases}$

S

1. Se multiplica la ecuación ① por el mínimo común múltiplo de 2 y 4, es decir por 4, para eliminar denominadores:

$$\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{2}\right)(4)=(7)(4)$$
$$x+2y=28 \quad ③$$

2	4	2
1	2	2
	1	

$mcm\ (2,\ 4)=(2)(2)=4$

2. Se suman las ecuaciones ② y ③ y se resuelve la ecuación obtenida:

$$\begin{array}{rl} 3x-2y=4 & ② \\ +)\quad x+2y=28 & ③ \\ \hline 4x \quad\quad =32 & \\ x=8 & \end{array}$$

Se sustituye $x=8$ en ③ para encontrar el valor de y:

$$8+2y=28$$
$$2y=20$$
$$y=10$$

El par ordenado **(8, 10)** es la solución del sistema.

C

Para resolver un sistema de dos ecuaciones de primer grado en el que una de ellas tiene coeficientes fraccionarios, se procede así:

1. Se multiplica esta ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores de los coeficientes para obtener una ecuación con coeficientes enteros.
2. Se resuelve el sistema formado por la ecuación obtenida en el paso 1., y la ecuación con coeficientes enteros del sistema inicial.

E

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones de primer grado:

a) $\begin{cases} \frac{x}{10}+\frac{y}{5}=1 \\ 3x-2y=22 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{2}{3}x-\frac{3}{4}y=1 \\ x+9y=42 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{6}=3 \\ x=y-2 \end{cases}$

Aprendizajes esperados

Aplica los métodos de reducción y sustitución en la solución de sistemas de ecuaciones de primer grado con coeficientes fraccionarios.

Secuencia:

En primaria se aprendió a calcular el mcm de dos o más números, y a multiplicar fracciones. En la sección anterior se utilizó el método de reducción para resolver un sistema de ecuaciones.

En esta clase se resuelven sistemas de ecuaciones en el que una de ellas tiene fracciones.

Puntos esenciales:

Recordar cómo se calcula el mcm de dos números naturales.

Indicar que la ecuación con coeficientes fraccionarios debe multiplicarse por el mcm de los denominadores. Tienen que cuidarse los signos al aplicar la propiedad distributiva.

Aclarar que el objetivo de multiplicar por el mcm es formar un sistema con coeficientes enteros.

Señalar que el método más sencillo para resolver el sistema es el de reducción, y que debe identificar cuál es la variable que conviene eliminar.

Explicar la conclusión del libro de texto utilizando la solución dada al problema.

C2: Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con coeficientes fraccionarios

(P) Resuelva $\begin{cases} \frac{x}{4}+\frac{y}{2}=7 & ① \\ 3x-2y=4 & ② \end{cases}$ $\quad$ mcm $(4, 2)=4$

(S) $\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{2}\right)(4)=(7)(4)$

$$x+2y=28 \quad ③$$

$$\begin{array}{rl} 3x-2y=4 & ② \\ +)\quad x+2y=28 & ③ \\ \hline 4x \quad\quad =32 & \\ x=8 & \end{array}$$

Sustituyendo $x=8$ en ③:

$$8+2y=28$$
$$2y=20$$
$$y=10$$

Resp. $(8,\ 10)$

(C) *Leer en el libro de texto*

(E) a) $\begin{cases} \frac{x}{10}+\frac{y}{5}=1 & ① \\ 3x-2y=22 & ② \end{cases}$ $\quad$ mcm $(10, 5)=10$

$$\left(\frac{x}{10}+\frac{y}{5}\right)(10)=(1)(10)$$
$$x+2y=10 \quad ③$$

$$\begin{array}{rl} 3x-2y=22 & ② \\ +)\quad x+2y=10 & ③ \\ \hline 4x \quad\quad =32 & \\ x=8 & \end{array}$$

Sustituyendo $x=8$ en ③:

$$8+2y=10$$
$$2y=10-8=2$$
$$y=1$$

Resp. $(8,\ 1)$

b) $\begin{cases} \frac{2}{3}x-\frac{3}{4}y=1 & ① \\ x+9y=42 & ② \end{cases}$ $\quad$ mcm $(3, 4)=12$

$$\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}y\right)(12)=(1)(12)$$
$$8x-9y=12 \quad ③$$

$$\begin{array}{rl} x+9y=42 & ② \\ +)\ 8x-9y=12 & ③ \\ \hline 9x \quad\quad =54 & \\ x=6 & \end{array}$$

Sustituyendo $x=6$ en ②:

$$6+9y=42$$
$$9y=36$$
$$y=4$$

Resp. $(6,\ 4)$

Contenido 3 Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con coeficientes decimales

Aprendizajes esperados

Aplica los métodos de reducción y sustitución en la solución de sistemas de ecuaciones de primer grado con coeficientes decimales.

Secuencia:

En la clase anterior se resolvieron sistemas de ecuaciones con fracciones.

En esta clase se resuelven sistemas de ecuaciones en el que una de ellas tiene decimales.

Puntos esenciales:

Señalar que se debe identificar que la ecuación con coeficientes decimales, debe ser multiplicada por una potencia de 10 de tal forma que se obtenga una ecuación con coeficientes enteros.

Indicar que la potencia de 10 por la que hay que multiplicar depende de la mayor cifra de decimales de los coeficientes.

Mencionar que el método más sencillo para resolver el sistema es el de reducción, y que debe identificar cuál es la variable que conviene eliminar.

Recordar la ley de los signos al aplicar la propiedad distributiva.

Unidad 2: Sistema de Ecuaciones de Primer Grado

Contenido 3: Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con coeficientes decimales

P

Resuelva el sistema $\begin{cases} x + 2y = 4 & ① \\ 0{,}2x + 0{,}5y = 0{,}9 & ② \end{cases}$

S

1. Se multiplica por 10 la ecuación ② para obtener otra con coeficientes enteros:

$$(10)(0{,}2x + 0{,}5y) = (10)(0{,}9)$$

$$2x + 5y = 9 \quad ③$$

2. Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones ① y ③.

Se multiplica por -2 la ecuación ①:

$$-2x - 4y = -8 \quad ④$$

Se suman las ecuaciones ③ y ④:

$$\begin{array}{rl} 2x + 5y = 9 & ③ \\ +)\ -2x - 4y = -8 & ④ \\ \hline y = 1 & \end{array}$$

Se sustituye $y = 1$ en ① y se resuelve para x:

$$x + (2)(1) = 4$$
$$x + 2 = 4$$
$$x = 2$$

La solución del sistema es el par ordenado **(2,1)**.

C

Un sistema de dos ecuaciones de primer grado en el que una ecuación tiene coeficientes decimales, se resuelve así:

1. Se multiplica esta ecuación por 10 si el mayor número de cifras decimales de los coeficientes es uno, por 100 si el mayor número de cifras decimales es dos, y así sucesivamente.
2. Se resuelve el sistema formado por la ecuación obtenida en el paso 1., y la ecuación del sistema inicial que no tiene coeficientes decimales.

E

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x + 3y = 9 \\ 0{,}4x + 0{,}3y = 1{,}8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 0{,}7x + 0{,}2y = 2{,}9 \\ x + y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 0{,}5x + 0{,}2y = 0{,}3 \end{cases}$

34

C3: Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con coeficientes decimales

P Resuelva $\begin{cases} x + 2y = 4 & ① \\ 0{,}2x + 0{,}5y = 0{,}9 & ② \end{cases}$

S $(10)(0{,}2x + 0{,}5y) = (10)(0{,}9)$

$2x + 5y = 9$ ③

$-2(x + 2y) = (-2)(4)$

$-2x - 4y = -8$ ④

$$\begin{array}{rl} 2x + 5y = 9 & ③ \\ +)\ -2x - 4y = -8 & ④ \\ \hline y = 1 & \end{array}$$

Sustituyendo $y = 1$ en ①:

$x + (2)(1) = 4$

$x = 4 - 2$

$x = 2$

Resp. $(2, 1)$

C *Leer en el libro de texto*

E a) $\begin{cases} x + 3y = 9 & ① \\ 0{,}4x + 0{,}3y = 1{,}8 & ② \end{cases}$

$(10)(0{,}4x + 0{,}3y) = (10)(1{,}8)$

$4x + 3y = 18$ ③

$-1(x + 3y) = (-1)(9)$

$-x - 3y = -9$ ④

$$\begin{array}{rl} 4x + 3y = 18 & ③ \\ +)\ -x - 3y = -9 & ④ \\ \hline x \quad = 9 & \\ x = 3 & \end{array}$$

Sustituyendo $x = 3$ en ①:

$3 + 3y = 9$

$3y = 6$

$y = 2$

Resp. $(3, 2)$

b) $\begin{cases} 0{,}7x + 0{,}2y = 2{,}9 & ① \\ x + y = 7 & ② \end{cases}$

$(10)(0{,}7x + 0{,}2y) = (10)(2{,}9)$

$7x + 2y = 29$ ③

$-2(x + y) = (-2)(7)$

$-2x - 2y = -14$ ④

$$\begin{array}{rl} 7x + 2y = 29 & ③ \\ +)\ -2x - 2y = -14 & ④ \\ \hline 5x \quad = 15 & \\ x = 3 & \end{array}$$

Sustituyendo $x = 3$ en ①:

$3 + y = 7$

$y = 4$

Resp. $(3, 4)$

Contenido 1 Aplicación de los sistemas de dos ecuaciones de primer grado (1)

Unidad 2: Sistema de Ecuaciones de Primer Grado

Sección 5: Aplicaciones de los sistemas de dos ecuaciones de primer grado

Contenido 1: Aplicación de los sistemas de ecuaciones de primer grado (1)

P

Por la compra de dos pantalones y tres camisas se pagan C$ 1 200. Sabiendo que el costo de un pantalón excede en C$ 100 al de una camisa, ¿cuál es el costo de cada artículo?

S

Costo de un pantalón: x
Costo de una camisa: y

Se forma el sistema $\begin{cases} 2x+3y=1\,200 & ① \\ x-y=100 & ② \end{cases}$

y se resuelve aplicando el método de reducción, para eso se multiplica por 3 ambos lados de la ecuación ②

$$(3)(x-y)=(3)(100)$$
$$3x-3y=300 \quad ③$$

Se suman las ecuaciones ① y ③:

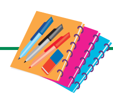
$$\begin{array}{rl} 2x+3y=1\,200 & ① \\ +)\ 3x-3y=\ \ 300 & ③ \\ \hline 5x \qquad =1\,500 & \\ x=\ \ 300 & \end{array}$$

Se sustituye $x=300$ en ② para encontrar el valor de y:

$$300-y=100$$
$$-y=100-300$$
$$-y=-200$$
$$y=200$$

El costo de un pantalón es **C$ 300** y el de una camisa es **C$ 200**.

E



Resuelva los siguientes problemas:

a) Por la compra de tres marcadores y un borrador se pagaría C$ 78, pero si se compraran dos marcadores y un borrador se tendría que pagar C$ 58. ¿Cuál es el costo de cada artículo?

b) Un estudiante paga C$ 100 por la compra de dos artículos escolares. Sabiendo que el costo de un artículo excede en C$ 60 al otro, ¿Cuál es el valor de cada uno?

36

Aprendizajes esperados

Aplica los métodos de solución de un sistema de ecuaciones para resolver situaciones de la vida cotidiana.

Secuencia:

En la primera sección de esta unidad se escribieron ecuaciones en dos variables a partir de situaciones del entorno.

En esta clase se resuelven situaciones de la vida cotidiana, utilizando sistemas de ecuaciones de primer grado.

Puntos esenciales:

Señalar que se debe identificar:

- ✓ Las cantidades desconocidas para representarlas con variables.
- ✓ Los datos útiles para la formación de las dos ecuaciones.

Guiar el proceso de traducir del lenguaje común al lenguaje algebraico.

Mencionar que al formar el sistema, se debe identificar cuál es la variable que más conviene eliminar y por qué número hay que multiplicar.

S5: Aplicaciones de los sistemas de dos ecuaciones de primer grado
C1: Aplicación de los sistemas de dos ecuaciones de primer grado (1)

(P) Por la compra de dos pantalones y tres camisas se pagan $C\$\,1200$. El costo de un pantalón excede en $C\$\,100$ al de una camisa. ¿Cuál es el costo de cada artículo?

(S) Costo de un pantalón: x
Costo de una camisa: y

$\begin{cases} 2x+3y=1200 & ① \\ x-y=100 & ② \end{cases}$

$$(3)(x-y)=(3)(100)$$
$$3x-3y=300 \quad ③$$

$$\begin{array}{rl} 2x+3y=1200 & ① \\ +)\ 3x-3y=300 & ③ \\ \hline 5x \qquad =1500 & \\ x=300 & \end{array}$$

Sustituyendo $x=300$ en ②
$300-y=100$
$y=200$

Pantalón: $C\$\,300$; Camisa: $C\$\,200$

(E) a) Por la compra de tres marcadores y un borrador se pagaría $C\$\,78$, pero si se compraran dos marcadores y un borrador se tendría que pagar $C\$\,58$. ¿Cuál es el costo de cada artículo?

Costo de un marcador: x
Costo de un borrador: y

$\begin{cases} 3x+y=78 & ① \\ 2x+y=58 & ② \end{cases}$

$$(-1)(2x+y)=(-1)(58)$$
$$-2x-y=-58 \quad ③$$

$$\begin{array}{rl} 3x+y=78 & ① \\ +)\ -2x-y=-58 & ③ \\ \hline x \qquad =20 & \end{array}$$

Sustituyendo $x=20$ en ②
$40+y=58$
$y=18$

Marcador: $C\$\,20$
Borrador: $C\$\,18$

b) *Leer problema en el libro de texto.*

Costo de un artículo: x
Costo del otro artículo: y

$\begin{cases} x+y=100 & ① \\ x=y+60 & ② \end{cases}$

Sust. $x=y+60$ en ①
$y+y+60=100$
$2y=40$
$y=20$

Sust. $y=20$ en ②
$x=20+60=80$

Costo de artículos:
$C\$\,20$ y $C\$\,80$

Contenido 2 Aplicación de los sistemas de dos ecuaciones de primer grado (2)

Aprendizajes esperados

Aplica los métodos de solución de un sistema de ecuaciones para resolver situaciones geométricas.

Secuencia:

En la primera sección de esta unidad se escribieron ecuaciones en dos variables a partir de situaciones del entorno.

En esta clase se resuelven situaciones geométricas, utilizando sistemas de ecuaciones de primer grado.

Puntos esenciales:

Recordar cómo se calcula el perímetro de un rectángulo.

Señalar que se debe identificar:

- ✓ Las cantidades desconocidas para representarlas con variables.
- ✓ Los datos útiles para la formación de las dos ecuaciones.

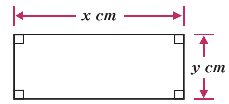
Mencionar que al formar el sistema, se debe identificar cuál es la variable que más conviene eliminar y por qué número hay que multiplicar.

Interpretar la solución del sistema respecto al problema planteado.

Contenido 2: Aplicación de los sistemas de dos ecuaciones de primer grado (2)

P

En un rectángulo cuyo perímetro es 70 cm, el doble de la base excede en 20 cm al triple de la altura. ¿Cuáles son las medidas de la base y la altura?



S

Medida de la base: x cm
Medida de la altura: y cm

El sistema es $\begin{cases} 2x+2y=70 & ① \\ 2x-3y=20 & ② \end{cases}$

Para resolverlo se utiliza el método de reducción.

Se multiplica por -1 la ecuación ②, y luego se suma a esta la ecuación ①:

$$\begin{array}{rrl} & 2x+2y= \ \ 70 & ① \\ +) & -2x+3y=-20 & (-1)\times ② \\ \hline & 5y= \ \ 50 & \\ & y= \ \ 10 & \end{array}$$

Se sustituye $y=10$ en ② para encontrar el valor de x:

$$\begin{aligned} 2x-(3)(10)&=20 \\ 2x-30&=20 \\ 2x&=30+20 \\ 2x&=50 \\ x&=25 \end{aligned}$$

La base del rectángulo mide **25 cm** y la altura **10 cm**.

E

Resuelva los siguientes problemas:

a) El perímetro de un rectángulo es 14 cm. Si la base excede en 1 cm a la altura, ¿cuáles son las medidas de la base y la altura?

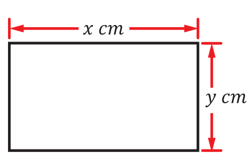
b) El perímetro de un terreno rectangular es 60 m. Si el triple de la base es el doble de la altura, ¿cuáles son las medidas de la base y la altura?

37

C2: Aplicación de los sistemas de dos ecuaciones de primer grado

P En un rectángulo cuyo perímetro es 70 cm, el doble de la base excede en 20 cm al triple de la altura. ¿Cuáles son las medidas de la base y la altura?

S Base: x cm
Altura: y cm



$\begin{cases} 2x+2y=70 & ① \\ 2x-3y=20 & ② \end{cases}$

$$\begin{array}{rrl} & 2x+2y=70 & ① \\ +) & -2x+3y=-20 & -1\times ② \\ \hline & 5y=50 & \\ & y=10 & \end{array}$$

Sust. $y=10$ en ②

$$\begin{aligned} 2x-3(10)&=20 \\ 2x&=20+30 \\ 2x&=50 \\ x&=25 \end{aligned}$$

La base mide 25 cm y la altura 10 cm.

E a) El perímetro de un rectángulo es 14 cm. Si la base excede en 1 cm a la altura, ¿cuáles son las medidas de la base y la altura?

Base: x cm
Altura: y cm

$\begin{cases} 2x+2y=14 & ① \\ x-y=1 & ② \end{cases}$

$$\begin{array}{rrl} & 2x+2y=14 & ① \\ +) & 2x-2y=2 & 2\times ② \\ \hline & 4x \quad =16 & \\ & x \quad =4 & \end{array}$$

Sustituyendo $x=4$ en ②

$$\begin{aligned} 4-y&=1 \\ -y&=-3 \\ y&=3 \end{aligned}$$

La base mide 4 cm y la altura 3 cm.

Prueba de Matemática 8vo (30 min.) Fecha: ____________
Unidad 2: Sistemas de Ecuaciones de Primer Grado

Nombre: _____________________________ Sección: __________
Sexo: M / F

/ 20

1. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones de primer grado:

(3puntos×5=15)

a) $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ y = x + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 5y = 12 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 0{,}2x + 0{,}5y = 0{,}9 \end{cases}$

2. Resuelva el problema aplicando sistemas de ecuaciones de primer grado.

Por la compra de dos pantalones y tres camisas se pagan $C\$\ 1\ 200$. Sabiendo que el costo de un pantalón excede en $C\$\ 100$ al de una camisa, ¿cuál es el costo de cada artículo?

a) Plantee el sistema de ecuaciones. (2 puntos)

b) Resuelva el sistema de ecuaciones del inciso anterior (2puntos)

c) Escriba la respuesta del problema. (1 punto)

Nombre: ________________________________

Unidad 3

Funciones de Primer Grado

Contenido 1 Función de la forma $y=ax$

Aprendizajes esperados

Determina la función que modela una situación de proporcionalidad directa.

Secuencia:

En séptimo grado se estableció una relación de proporcionalidad directa entre dos variables, mediante una función.

En esta clase se recuerda cómo se hace.

Puntos esenciales:

Recordar el concepto de función.

Aclarar que hay una variable que depende de la otra.

Identificar que los valores de y son múltiplos de una cantidad constante.

Indicar que la variable dependiente se iguala al producto de la constante por la otra variable.

Unidad 3: Funciones de Primer Grado

Sección 1: Función de primer grado

Contenido 1: Función de la forma $y=ax$

P

Un ciclista sale de un parque y avanza 3 m cada segundo. Sabiendo que y es la distancia recorrida después de x segundos:

a) Complete la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y									

Describa la relación que existe entre los valores de x y y.

b) Escriba la función que muestra la correspondencia entre los valores de x y y.

S

a) Puesto que el ciclista avanza 3 m cada segundo, se puede calcular los valores de y segundo a segundo partiendo de los valores iniciales $x=0$ y $y=0$ sumando 3 unidades a y cada vez que x aumenta una unidad. Así, para $x=0, 1, 2, ..., 8$ los valores correspondientes de y son:

0, $0+3=3$, $3+3=6$, $6+3=9$, $9+3=12$,
$12+3=15$, $15+3=18$, $18+3=21$, $21+3=24$

De esta manera se completa la tabla:

x (tiempo)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y (distancia)	0	3	6	9	12	15	18	21	24

x 3

y se observa que cada valor de y es el triple del valor de x.

b) La función que muestra la correspondencia entre las variables x y y es $y=3x$.

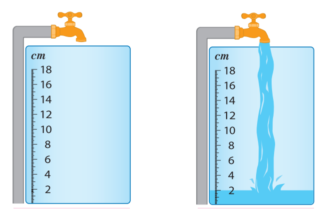
E

Al abrir un grifo para llenar un tanque, la altura del nivel del agua aumenta 2 cm cada minuto.

En la tabla, y representa la altura en cm del nivel del agua a los x minutos de haber abierto el grifo.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0	2	4	6	8	10	12	14	16

Exprese y como una función en x.



En el minuto 0 En el minuto 1

42

U3: Función de primer grado
S1: Función de primer grado
C1: Función de la forma $y = ax$

(P) Un ciclista avanza 3 m cada segundo. Sabiendo que y es la distancia recorrida después de x segundos:

(S) a) Complete la tabla. Describa la relación entre x y y.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0	3	6	9	12	15	18	21	24

$\times 3$

+3 +3 +3

b) Exprese y como una función en x.

El valor de y es el triple del valor de x.

$$y = 3x$$

(E) Al abrir un grifo, la altura que alcanza cada minuto el nivel del agua es 2 cm más que la altura en el minuto anterior.

En la tabla, y es la altura (en cm) que alcanza el nivel del agua a los x minutos de abrir el grifo.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0	2	4	6	8	10	12	14	16

$\times 2$

Exprese y como una función en x.

El valor de y es el doble del valor de x.

$$y = 2x$$

Contenido 2 Definición de función de primer grado

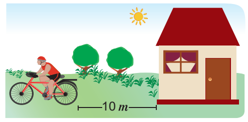
Contenido 2: Definición de función de primer grado

P

Un ciclista sale de un punto que se encuentra a 10 m de su casa, y se aleja 3 m cada segundo. Si y es la distancia a la que se encuentra de su casa después de x segundos:

a) Complete la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y									



b) Determine la función que representa la correspondencia entre los valores de x y y.

S

a) En cualquier punto del recorrido la distancia a la casa es igual a la distancia recorrida más la distancia inicial de 10m. Luego, para los valores dados de x se tiene:

Tiempo	Distancia recorrida	Distancia a la casa
$x=0$	$(3)(0)$	$(3)(0)+10=10$
$x=1$	$(3)(1)$	$(3)(1)+10=13$
⋮	⋮	⋮
$x=8$	$(3)(8)$	$(3)(8)+10=34$

La totalidad de los resultados se muestra en la tabla:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	10	13	16	19	22	25	28	31	34

b) Se observa que cada valor de y se obtiene multiplicando por 3 el valor asignado a x y sumando 10 a este producto, es decir $y=3x+10$.

C

Si y es una función de x que se representa como

$$y=ax+b, \quad \text{con } a, b \text{ constantes y } a\neq 0$$

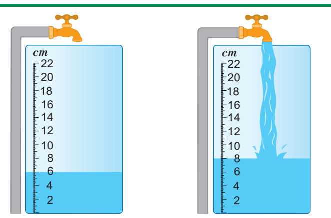
se dice que y es una **función de primer grado o función lineal** en x.

E

El nivel del agua en un tanque es de 6 cm respecto del fondo y aumenta 2 cm cada minuto si se abre el grifo. En la tabla, y representa la altura que alcanza el nivel del agua a los x minutos de abrir el grifo.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	6	8	10	12	14	16	18	20	22

Exprese y como una función de primer grado en x.



En el minuto 0

Al concluir 1 minuto

Aprendizajes esperados

Establece la correspondencia entre dos valores mediante una función de primer grado.

Secuencia:

En la clase anterior se estudiaron funciones determinadas por una relación de proporcionalidad.

En esta clase se estudia qué es una función de primer grado directa.

Puntos esenciales:

Señalar que se debe identificar cuál es la cantidad constante que se suma o resta a la parte variable y el coeficiente que multiplica a la variable.

Indicar que una función de primer grado está dada por un polinomio de grado 1.

Señalar que en el LT se trabajan las funciones de primer grado utilizando las variables x y y.

C2: Definición de función de primer grado

(P) El ciclista se encuentra a 10 m de su casa. Desde ese punto avanza 3 m cada segundo. y es la distancia a la que está de su casa después de x segundos:

(S) a) Complete la tabla.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	10	13	16	19	22	25	28	31	34

$10+3x$

$x=0 \Longrightarrow y=(3)(0)+10=10$

$x=1 \Longrightarrow y=(3)(1)+10=13$

⋮

$x=7 \Longrightarrow y=(3)(2)+10=31$

$x=8 \Longrightarrow y=(3)(2)+10=34$

b) Exprese y como una función en x.

Cada valor de y se obtiene multiplicando por 3 el correspondiente valor de x y sumando 10. Luego

$$y=3x+10.$$

(C) Si y es una función en x que se representa como

$$y=ax+b, \ (a, b \text{ constantes, } a\neq 0)$$

se dice que y es una <u>función de primer grado o función lineal</u> en x.

(E) y es la altura que alcanza el nivel del agua a los x minutos de abrir el grifo.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	6	8	10	12	14	16	18	20	22

$6+2x$

Exprese y como una función en x.

Cada valor de y se obtiene multiplicando por 2 el correspondiente valor de x y sumando 6.

$$y=2x+6.$$

Contenido 3 Relación entre proporcionalidad y función de primer grado

Aprendizajes esperados

Identifica expresiones que son funciones de primer grado y su porción que es proporcional a x.

Secuencia:

En séptimo grado se representaron relaciones de proporcionalidad, mediante una función. En esta sección, se ha estudiado qué es una función de primer grado.

En esta clase se estudia la relación entre proporcionalidad y función de primer grado.

Puntos esenciales:

Recordar la fórmula para calcular el área de un rectángulo y el perímetro de un cuadrado.

Señalar que una función que relaciona parejas de valores directamente proporcionales, es una función de primer grado donde la constante es cero.

Indicar que la parte variable es siempre proporcional a la variable.

Señalar que en una función de primer grado, la variable x no puede estar como denominador.

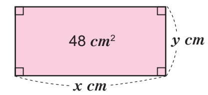
Unidad 3: Funciones de Primer Grado

Contenido 3: Relación entre proporcionalidad y función de primer grado

P1 Sabiendo que un rectángulo tiene un área igual a 48 cm^2:

a) Exprese su altura y (en cm) en función de su base x (en cm). ¿Qué tipo de proporcionalidad hay entre las variables x y y?

b) ¿Es y una función de primer grado en x?



S1 a) Como x es la base y y la altura del rectángulo de la figura, entonces:

$48 = xy$

$xy = 48$

Por tanto,

$y = \frac{48}{x}$

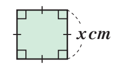
El área de un rectángulo es el producto de su base por la altura.

y las variables x y y son inversamente proporcionales.

b) Se observa que x está como denominador, por lo cual la expresión para y no es una función de primer grado.

P2 a) Exprese el perímetro y (en cm) de un cuadrado en función de su lado x (en cm). ¿Qué tipo de proporcionalidad hay entre las variables x y y?

b) ¿Es y una función de primer grado en x?



S2 a) El perímetro del cuadrado de la figura es cuatro veces la longitud x de su lado, es decir

$y = 4x$

luego $\frac{y}{x} = 4$, por tanto las variables x y y son directamente proporcionales con una constante de proporcionalidad igual a 4.

b) En efecto, $y = 4x$ es una función de primer grado, donde $b = 0$.

C

La función de primer grado $y = ax$ expresa la proporcionalidad directa entre las variables x y y, mientras que la función no lineal $y = \frac{a}{x}$ pone en evidencia la proporcionalidad inversa entre x y y.

En general, la función de primer grado $y = ax + b$ indica la suma de su parte proporcional ax y una constante b.

Parte proporcional

$y = ax + b$

Constante

E

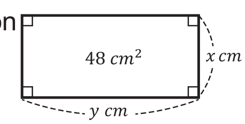
Las expresiones siguientes indican que y es una función de x. Diga cuáles son funciones de primer grado y para las que lo sean muestre la parte proporcional a x y la constante.

a) $y = 3x$ b) $y = \frac{2}{x}$ c) $y = 4x + 1$ d) $y = 3 - 2x$

44

C3: Relación entre proporcionalidad y función de primer grado

P1 a) Exprese y (en cm) en función de x (en cm). ¿Qué tipo de proporcionalidad hay entre x e y?



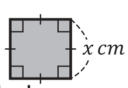
b) ¿Es y una función de primer grado en x?

S1 a) $48 = xy \rightarrow xy = 48$

Por tanto, $y = \frac{48}{x}$ x e y son inversamente proporcionales

b) x está como denominador. No es función de primer grado.

P2 a) Exprese el perímetro y (en cm) de un cuadrado en función de su lado x (en cm). Diga el tipo de proporcionalidad.



b) ¿Es y una función de primer grado?

S2 a) Como x es la longitud del lado del cuadrado: $y = 4x$ La proporcionalidad es directa.

b) $y = 4x$ es una función de primer grado, $b = 0$.

C $y = ax$ es una función de primer grado con $b = 0$.

$y = \frac{a}{x}$ no es función de primer grado.

$y = \underbrace{ax}_{\text{Parte proporcional}} + b \leftarrow$ Constante

E Diga cuáles de las funciones son de primer grado y muestre la porción que es proporcional a x y la constante.

a) $y = 3x$

Función de primer grado
Porción proporcional $3x$

Constante: 0

b) $y = \frac{2}{x}$

No es función de primer grado

c) $y = 4x + 1$

Función de primer grado
Porción proporcional $4x$

Constante: 1

d) $y = 3 - 2x$

Función de primer grado
Porción proporcional $-2x$

Constante: 3

Contenido 1 Gráfica de las funciones de primer grado $y=ax$ y $y=ax+b$ por tabulación

Unidad 3: Funciones de Primer Grado

Sección 2: Gráfica de la función de primer grado

Contenido 1: Gráfica de las funciones de primer grado $y=ax$ y $y=ax+b$ por tabulación

P

Dadas las funciones $y=2x$ y $y=2x+1$.

a) Complete en la tabla los valores de $2x$ y $2x+1$ que corresponden a los valores dados de x.

x	-2	-1	0	1	2
$2x$					
$2x+1$					

b) Trace en el plano cartesiano las gráficas de las funciones dadas.

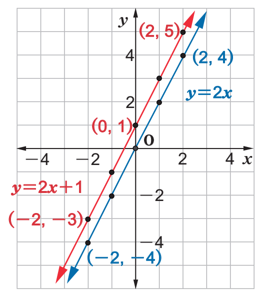
S

a) Cada valor de x se multiplica por 2, obteniendo como resultado $2x$, luego a este se le suma 1 para conseguir el valor de $2x+1$. Así resulta la tabla

x	-2	-1	0	1	2
$2x$	-4	-2	0	2	4
$2x+1$	-3	-1	1	3	5

x 2

+1



b) Los puntos $(-2, -4)$, $(-1, -2)$, $(0, 0)$, $(1, 2)$ y $(2, 4)$ de la forma $(x, 2x)$ están en la recta con ecuación $y=2x$ que aparece en color azul en la figura de la derecha. La gráfica de $y=2x+1$ es la recta de color rojo que contiene los puntos $(-2, -3)$, $(-1, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$ y $(2, 5)$ de la forma $(x, 2x+1)$.

C

La **gráfica de una función de primer grado** $y=ax+b$, con $a\neq 0$ es una recta.

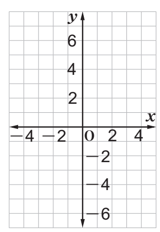
E

Dadas las funciones de primer grado $y=3x$ y $y=3x+1$.

a) Complete la tabla con los valores de $3x$ y $3x+1$ que corresponden a los valores dados de x.

x	-2	-1	0	1	2
$3x$					
$3x+1$					

b) Trace en el plano cartesiano las gráficas de las funciones dadas.



46

Aprendizajes esperados

Grafica funciones de la forma $y=ax$ y $y=ax+b$ por tabulación.

Secuencia:

En séptimo grado se graficaron funciones determinadas por una relación de proporcionalidad directa o inversa, por tabulación.

En esta clase se grafican en un mismo plano cartesiano, pares de funciones de primer grado que difieren solamente por la constante.

Puntos esenciales:

Indicar que primero deben completarse las tablas para luego graficar los pares ordenados. Se debe cuidar los signos cuando se realicen las operaciones al sustituir los valores de x.

Recordar cómo ubicar puntos en el plano cartesiano.

Señalar que la gráfica de una función de primer grado es una recta que se obtiene al unir los puntos.

Mencionar que para graficar una recta solo se necesitan dos puntos de esta.

S2: Gráfica de la función de primer grado
C1: Gráfica de las funciones de primer grado $y = ax$ y $y = ax + b$ por tabulación

(P) Dadas las funciones $y = 2x$ e $y = 2x + 1$.

(S) a) Complete en la tabla los valores de $2x$ y $2x + 1$.

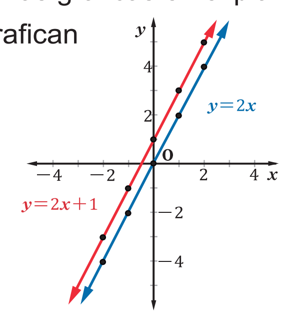
x	-2	-1	0	1	2
$2x$	-4	-2	0	2	4
$2x+1$	-3	-1	1	3	5

$\times 2$

$+1$

b) Trace las gráficas en el plano cartesiano.

Se grafican



(C) La gráfica de una función de primer grado $y = ax + b$ con $a \neq 0$ es una recta.

(E) Dadas las funciones $y = 3x$ e $y = 3x + 1$.

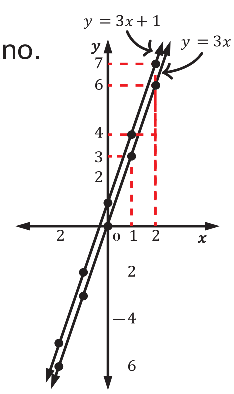
a) Complete la tabla

x	-2	-1	0	1	2
$3x$	-6	-3	0	3	6
$3x+1$	-5	-2	1	4	7

$\times 3$

$+1$

b) Trace las gráficas en el plano cartesiano.



Contenido 2 Relación entre las gráficas de las funciones $y=ax+b$ y $y=ax$

Aprendizajes esperados

Determina cómo graficar $y=ax+b$ a partir de $y=ax$.

Secuencia:

En la clase anterior los estudiantes graficaron funciones de primer grado.

En esta clase se grafica una función de primer grado, a partir de la gráfica de la función dada por la porción proporcional a x.

Puntos esenciales:

Indicar que la gráfica se traslada hacia arriba si la constante es positiva o hacia abajo si es negativa.

Explicar el uso de la cuadrícula en el cuaderno para trasladar los puntos de la gráfica.

Señalar que en esta clase no se debe tabular para hacer la gráfica.

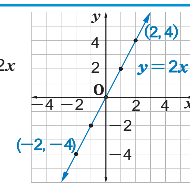
Explicar la conclusión del libro de texto utilizando las gráficas mostradas en las soluciones a los problemas de la clase.

Sección 2: Gráfica de la función de primer grado

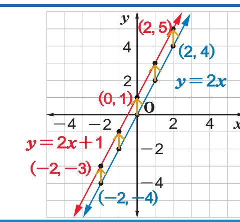
Contenido 2: Relación entre las gráficas de las funciones $y=ax+b$ y $y=ax$

P1 Trace la gráfica de $y=2x+1$ a partir de la gráfica de $y=2x$ que se muestra en la figura de la derecha.
En la siguiente tabla se muestran los valores que toman $y=2x$ y $y=2x+1$ que corresponden a los valores dados de x.

x	-2	-1	0	1	2
$2x$	-4	-2	0	2	4
$2x+1$	-3	-1	1	3	5



S1 Se observa que para un valor determinado de x, se tiene que $2x+1$ es una unidad mayor que $2x$. Esto significa que el punto $(x,\ 2x+1)$ se encuentra una unidad por encima del punto $(x,\ 2x)$ en la dirección vertical.
Por tanto, la gráfica de $y=2x+1$ se obtiene trasladando la gráfica de $y=2x$ una unidad hacia arriba, tal como se muestra a la derecha.

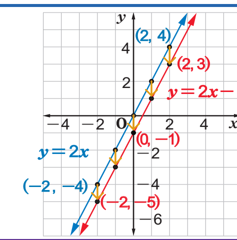


P2 Trace la gráfica de $y=2x-1$ a partir de la gráfica de $y=2x$.

S2 Primero se traza la gráfica $y=2x$ y se obtiene la recta de color azul en la figura de la derecha.

Cada valor de $y=2x-1$ se halla restando 1 al valor de $y=2x$, esto significa que la gráfica de $y=2x-1$ se obtiene trasladando la gráfica de $y=2x$ una unidad hacia abajo.

En la figura se muestra en color rojo la gráfica de $y=2x-1$, obtenida a partir de la de $y=2x$.

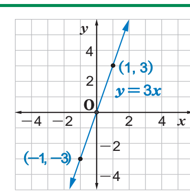


C La gráfica de $y=ax+b$ se obtiene a partir de la gráfica de $y=ax$, trasladando a esta paralelamente b unidades hacia arriba si $b>0$, o $|b|$ unidades hacia abajo si $b<0$.

E A partir de la gráfica de $y=3x$ mostrada a la derecha, trace la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y=3x+2$

b) $y=3x-2$



47

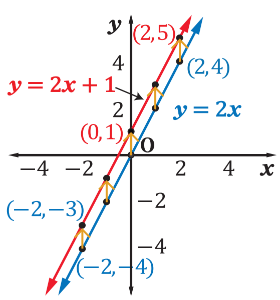
C2: Relación entre las gráficas de $y = ax + b$ y $y = ax$

P1 Trace la gráfica de $y = 2x + 1$ a partir de la gráfica de $y = 2x$.

x	-2	-1	0	1	2
$2x$	-4	-2	0	2	4
$2x+1$	-3	-1	1	3	5

S2 El punto $(x, 2x + 1)$ se encuentra una unidad por encima del punto $(x, 2x)$ en la dirección vertical.

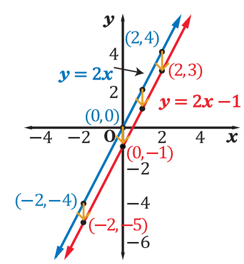
La gráfica de $y=2x+1$ se obtiene trasladando la de $y=2x$ una unidad hacia arriba.



P2 Trace la gráfica de $y = 2x - 1$ a partir de la gráfica de $y = 2x$.

S2 Los valores de $y = 2x - 1$ se obtienen de restar 1 a $y = 2x$.

La gráfica de $y = 2x - 1$ se obtiene trasladando la gráfica de $y = 2x$ una unidad hacia abajo.

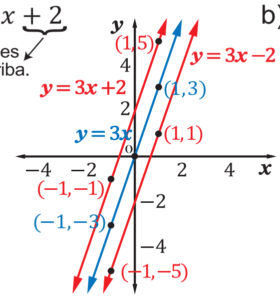


C *Leer conclusión.*

E Trace a partir de la gráfica de $y = 3x$ la gráfica de:

a) $y = 3x \underbrace{+ 2}$ 2 unidades hacia arriba.

b) $y = 3x \underbrace{- 2}$ 2 unidades hacia abajo.



Contenido 3 Razón de cambio

Unidad 3: Funciones de Primer Grado

Contenido 3: Razón de cambio

P

Dada la función de primer grado $y=3x+9$, la tabla muestra algunos valores de x y los valores que toma y en función de los valores de x.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	9	12	15	18	21	24	27	30	33

Cuando x varía de 0 a 2:
la variación de x es $2-0=2$
la variación de y es $15-9=6$

Calcule la variación del valor de y cuando:

a) x varía de 2 a 3
b) x varía de 3 a 6
c) En ambos incisos, ¿qué relación hay entre el valor de la variación de x y el valor de la variación de y?

S

a) Cuando x varía de 2 a 3
la variación de x es $3-2=1$
y la variación de $y=3x+9$, es $18-15=3$, según puede verse en las evaluaciones de la derecha.

x	2	3
y	15	18

Si $x=2$, $y=(3)(2)+9=15$
Si $x=3$, $y=(3)(3)+9=18$

b) Cuando x varía de 3 a 6 en $y=3x+9$,
la variación de x es $6-3=3$
la variación de $y=3x+9$, es $27-18=9$

x	3	...	6
y	18	...	27

Si $x=6$, $y=(3)(6)+9=27$

c) De los incisos a) y b) se tiene que:

$$\frac{\text{Variación de } y}{\text{Variación de } x}=\frac{3}{1}=3 \quad \text{y} \quad \frac{\text{Variación de } y}{\text{Variación de } x}=\frac{9}{3}=3$$

En ambos casos, **la variación de los valores de y es el triple de la variación de los valores de x.**

C

En las funciones de primer grado $y=ax+b$, con $a\neq 0$, el cociente entre la variación de y y la variación de x es una constante que se llama **razón de cambio.**

$$\textbf{Razón de cambio} = \frac{\textbf{Variación de } y}{\textbf{Variación de } x}$$

E

Si $y=3x+9$, calcule la razón de cambio cuando:

a) x varía de 4 a 8.
b) x varía de 3 a 7.

48

Aprendizajes esperados

Comprende la noción de razón de cambio a partir de la tabla de valores.

Secuencia:

En esta clase se estudia qué es la razón de cambio, y para ello primero se familiariza con lo que es la variación de x y de y.

Puntos esenciales:

Cuidar el orden en que se colocan los números cuando se calcula la variación de x o y.

Indicar que la razón de cambio es el cociente entre la variación de y y la variación de x.

Señalar que la razón de cambio de una función de primer grado es una constante.

Mencionar que en cada ejercicio debe calcularse el respectivo valor de y para cada x.

C3: Razón de cambio

(P) La tabla muestra algunas parejas de valores x y y que satisfacen $y = 3x + 9$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	9	12	15	18	21	24	27	30	33

Calcule la variación de x e y cuando:
a) x va de 2 a 3
b) x va de 3 a 6
c) ¿Qué relación hay entre la variación de x y la de y?

(S) a) la variación de x es $3-2=1$
la variación de y es $18-15=3$
b) la variación de x es $6-3=3$
la variación de y es $27-18=9$

$$\frac{\text{variación de } y}{\text{variación de } x} \rightarrow \frac{3}{1}=3, \quad \frac{9}{3}=3$$

La variación de y es el triple de la variación de x.

(C) $$\text{razón de cambio} = \frac{\text{variación de } y}{\text{variación de } x}$$

La razón de cambio es una constante.

(E) Si $y=3x+9$, calcule la razón de cambio cuando:

a) x varía de 4 a 8

variación de x es $8-4=4$
variación de y es $33-21=12$
razón de cambio $=\frac{12}{4}=3$

Para $x=4$
$y=3(4)+9$
$y=21$
Para $x=8$
$y=3(8)+9$
$y=33$

b) x varía de 3 a 7

variación de x es $7-3=4$
variación de y es $30-18=12$
razón de cambio $=\frac{12}{4}=3$

Para $x=3$
$y=3(3)+9$
$y=18$
Para $x=7$
$y=3(7)+9$
$y=30$

Contenido 4 Razón de cambio de una función de primer grado

Aprendizajes esperados

Comprende el concepto de razón de cambio de funciones de primer grado.

Secuencia:

En la clase anterior se estudió qué es la razón de cambio.

En esta clase se estudia la razón de cambio de una función de primer grado y su relación con el coeficiente que multiplica a x.

Puntos esenciales:

Aclarar que la razón de cambio de una función de primer grado es siempre constante.

Indicar que la razón de cambio representa la cantidad que aumenta o disminuye y, cada vez que x aumenta una unidad.

Señalar que en una función de primer grado la razón de cambio es el coeficiente que multiplica a la variable x.

Insistir en el cuido de los signos cuando se realicen operaciones aritméticas.

Contenido 4: Razón de cambio de una función de primer grado

P

Dada la función $y=-2x+1$, calcule la razón de cambio cuando:

a) x varía de 2 a 5 b) x varía de -7 a -3

S

a) Si x varía de 2 a 5,

la variación de x es $5-2=3$

la variación de y es $-9-(-3)=-6$

Luego,

Razón de cambio $= \frac{-6}{3} = -2$

Si $x=2$, $y=(-2)(2)+1=-3$
Si $x=5$, $y=(-2)(5)+1=-9$

b) Cuando x varía de -7 a -3, se tiene:

la variación de x es $-3-(-7)=4$

la variación de y es $7-15=-8$

Por lo cual,

Razón de cambio $= \frac{-8}{4} = -2$

Si $x=-7$, $y=(-2)(-7)+1=15$
Si $x=-3$, $y=(-2)(-3)+1=7$

La razón de cambio en ambos casos coincide con el valor de la constante $a=-2$ que multiplica a la variable x en la expresión $y=-2x+1$.

C

Dada la función de primer grado $y=ax+b$, la razón de cambio para cualquier variación de x siempre coincide con la constante a.

$$\textbf{Razón de cambio} = \frac{\textbf{Variación de } y}{\textbf{Variación de } x} = a$$

Esta constante se llama razón de cambio de la función $y=ax+b$.

Ejemplo Identifique la razón de cambio de la función de primer grado $y=3x+2$.

La razón de cambio de la función $y=ax+b$ es a, así que la razón de cambio de la función $y=3x+2$ es 3.

E

Identifique la razón de cambio de cada una de las siguientes funciones de primer grado:

a) $y=3x-1$ b) $y=-5x+3$ c) $y=\frac{1}{2}x+4$ d) $y=-\frac{4}{3}x+6$

C4: Razón de cambio de una función de primer grado

(P) Dada la función $y=-2x+1$, calcule la razón de cambio cuando:

a) x varía de 2 a 5

b) x varía de -7 a -3

(S) a) variación de x es $5-2=3$

variación de y es $-9-(-3)=-6$

razón de cambio $=\frac{-6}{3}=-2$

Para $x=2$
$y=-2(2)+1$
$y=-3$

Para $x=5$
$y=-2(5)+1$
$y=-9$

b) variación de x es $-3-(-7)=4$

variación de y es $7-15=-8$

razón de cambio $=\frac{-8}{4}=-2$

Para $x=-7$
$y=-2(-7)+1$
$y=15$

Para $x=-3$
$y=(-2)(-3)+1$
$y=7$

La razón de cambio coincide con $a=-2$.

(C) Dada la función de primer grado $y=ax+b$

$$\text{razón de cambio} = \frac{\text{variación } y}{\text{variación } x} = a$$

(Ej) Identifique la razón de cambio de la función de primer grado $y=3x+2$.

$a=3$, así la razón de cambio es 3.

(E) a) $y=3x-1$
$a=3$

b) $y=-5x+3$
$a=-5$

c) $y=\frac{1}{2}x+4$
$a=\frac{1}{2}$

d) $y=-\frac{4}{3}x+6$
$a=-\frac{4}{3}$

Contenido 6 Gráfica de $y=ax+b$ si $a>0$ utilizando el intercepto con el eje y y su pendiente

Contenido 6: Gráfica de $y=ax+b$ si $a>0$ utilizando el intercepto con el eje y y su pendiente

P

Dada la función $y=2x+1$, responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el intercepto de su gráfica con el eje y?

b) ¿Cuál es la razón de cambio de esta función?

c) ¿Cómo traza la gráfica de $y=2x+1$ utilizando el intercepto con y y su razón de cambio?

S

a) Los puntos del eje y tienen abscisa $x=0$. Al sustituir este valor de x en $y=2x+1$, resulta

$$y=(2)(0)+1=1$$

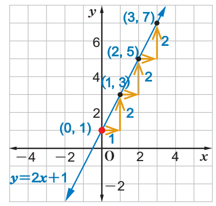
Por lo tanto, el intercepto de la gráfica de $y=2x+1$ con el eje y es **(0, 1)**.

$y=ax+b$ ↑ La razón de cambio

b) La razón de cambio de esta función es **2**.

c) Como la razón de cambio es 2, entonces y aumenta 2 unidades cada vez que x aumenta 1 unidad, luego, dado que (0, 1) es un punto de la gráfica, entonces $(0+1,\ 1+2)=(1,\ 3)$ también es un punto de ella.

La gráfica se construye trazando la recta que pasa por (0, 1) y (1, 3). Se muestra esta recta en la figura de la derecha. En la gráfica se observa que y aumenta 2 unidades cada vez que x aumenta una.



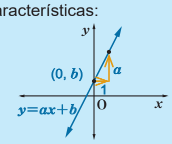
C

La función de primer grado $y=ax+b$, con $a>0$ tiene las siguientes características:

a) Su gráfica tiene intercepto con el eje y en $(\mathbf{0},\ \boldsymbol{b})$.

b) La razón de cambio $\boldsymbol{a}$ de la función, se llama **pendiente** de la recta $y=ax+b$ y es la cantidad que aumenta y cuando x crece una unidad.

c) Los valores de y aumentan a medida que x también aumenta.

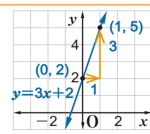


Ejemplo Trace la gráfica de $y=3x+2$ utilizando su intercepto con el eje y y la pendiente.

En este caso $a=3$ y $b=2$, así que la pendiente es 3 y el intercepto con el eje y es $(0,\ 2)$.

Otro punto de la gráfica que se necesita es $(0+1,\ 2+3)=(1,\ 5)$.

Con esta información se obtiene la gráfica de la derecha.



E

a) Trace la gráfica de $y=2x+3$ utilizando su intercepto con el eje y y la pendiente.

b) Trace la gráfica de $y=3x-1$ utilizando su intercepto con el eje y y la pendiente.

Aprendizajes esperados

Grafica funciones de la forma $y=ax+b$, $(a>0)$ utilizando su intercepto con el eje y y su pendiente.

Secuencia:

En esta sección se han graficado funciones de primer grado mediante tabulación y por traslado vertical. En la clase anterior se estudió qué es la razón de cambio de una función de primer grado.

En esta clase se graficarán funciones de primer grado utilizando la pendiente y el intercepto con el eje y.

Puntos esenciales:

Aclarar que el objetivo de determinar la pendiente (razón de cambio) y el intercepto con el eje y, es poder encontrar otro punto de la recta.

Identificar que en esta clase la razón de cambio es positiva, por tal motivo cada vez que x aumenta los valores de y también lo hacen.

Indicar que la gráfica de $y=ax+b$ es una recta que pasa por $(0,\ b)$ y $(1,\ b+a)$.

Señalar que identificando la pendiente y el intercepto con y, el otro punto también puede determinarse gráficamente como se muestra en el problema.

Explicar la conclusión utilizando la gráfica mostrada en la solución del problema.

C6: Gráfica de $y=ax+b$ si $a>0$ utilizando el intercepto con y y su pendiente

(P) Dada la función $y=2x+1$:

a) ¿Cuál es el intercepto con el eje y?

b) ¿Cuál es la razón de cambio?

c) Trace la gráfica de $y=2x+1$ utilizando el intercepto con y y su razón de cambio.

(S) a) En los puntos sobre el eje y, $x=0$.

$y=(2)(0)+1=1$

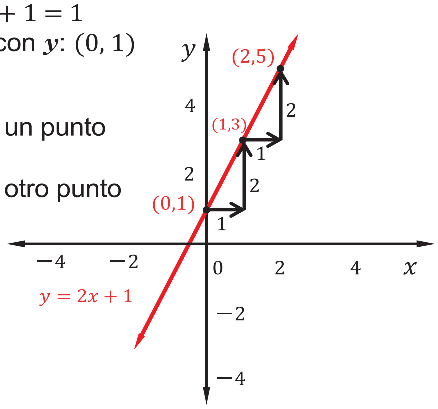
Intercepto con y: $(0,1)$

b) $a=2$

c) $(0,1)$ es un punto

$+1\downarrow\ \downarrow+2$

$(1,3)$ es otro punto



(C) *Leer en el libro de texto.*

(Ej) Trace la gráfica de $y=3x+2$ utilizando su intercepto con el eje y y la pendiente.

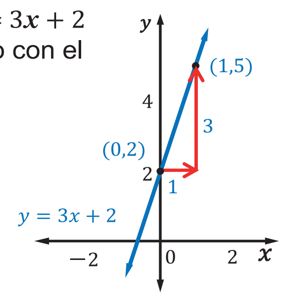
Pendiente: $a=3$

Intercepto con y:

$(0,2)$

$+1\downarrow\ \downarrow+3$

$(1,5)$ otro punto



(E) a) Trace la gráfica de $y=2x+3$ utilizando su intercepto con el eje y y la pendiente.

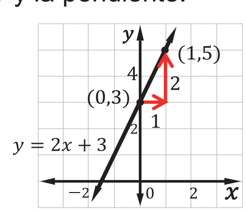
Pendiente: $a=2$

Intercepto con y:

$(0,3)$

$+1\downarrow\ \downarrow+2$

$(1,5)$ otro punto



Contenido 7 Gráfica de $y=ax+b$ si $a<0$ utilizando el intercepto con el eje y y su pendiente

Aprendizajes esperados

Grafica funciones de la forma $y=ax+b$, ($a<0$) utilizando su intercepto con el eje y y su pendiente.

Secuencia:

En la clase anterior se han graficado funciones de primer grado con pendiente positiva.

En esta clase los estudiantes aprenderán a graficar funciones de primer grado con pendiente negativa.

Puntos esenciales:

Recordar qué valor determina la pendiente y qué valor se usa para determinar el intercepto con y.

Identificar que la pendiente (razón de cambio) es negativa, por tal motivo cada vez que x aumenta los valores de y disminuyen.

Indicar que la gráfica de $y = ax + b$ es una recta que pasa por $(0, b)$ y $(1, b + a)$.

Señalar que con el intercepto con y y la pendiente puede determinarse el otro punto para trazar la gráfica.

Explicar la conclusión utilizando la gráfica mostrada en la solución del problema.

Unidad 3: Funciones de Primer Grado

Contenido 7: Gráfica de $y=ax+b$ si $a<0$ utilizando el intercepto con el eje y y su pendiente

P Dada la función $y=-2x+1$,

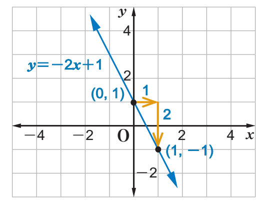
a) Encuentre el intercepto con el eje y.
b) Identifique la razón de cambio de esta función.
c) Trace la gráfica de $y=-2x+1$ utilizando el punto de intersección con y y su razón de cambio.

S

a) Los puntos sobre el eje y tienen abscisa $x=0$.
Al sustituir x por 0 en $y=-2x+1$, se obtiene
$$y=(-2)(0)+1=1$$
El intercepto de la gráfica $y=-2x+1$ con el eje y es entonces $(0, 1)$.

b) La razón de cambio de $y=-2x+1$ es -2.

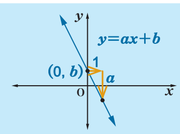
c) Como la razón de cambio es -2, entonces y disminuye 2 unidades cada vez que x aumenta 1 unidad, esto significa que, como $(0, 1)$ es un punto de la gráfica, $(0+1,\ 1+(-2))=(1, -1)$ también lo es.



La gráfica se construye trazando la recta que pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(1, -1)$. Esta recta se muestra en la figura de la derecha. Se observa que disminuye 2 unidades cuando x aumenta una.

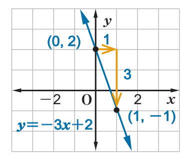
C La función de primer grado $y=ax+b$, con $a<0$ presenta las siguientes características:

a) Su intercepto con el eje y es el punto $(0, b)$.
b) La **pendiente** de la recta $y=ax+b$ es a e indica que y disminuye $|a|$ unidades cada vez que x aumenta una.
c) Los valores de y disminuyen a medida que x aumenta.



Ejemplo Trace la gráfica de $y=-3x+2$ utilizando su intercepto con el eje y y la pendiente.

La pendiente es -3 y el intercepto con el eje y es $(0, 2)$.
Otro punto de la gráfica es
$$(0+1,\ 2+(-3))=(1, -1).$$
Con esta información se obtiene la gráfica de la figura de la derecha.



E

a) Trace la gráfica de $y=-2x+3$ utilizando su intercepto con el eje y y la pendiente.
b) Trace la gráfica de $y=-2x-1$ utilizando su intercepto con el eje y y la pendiente.

52

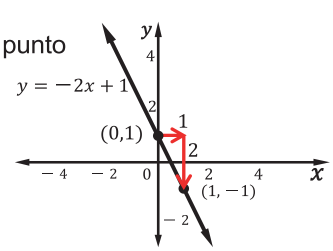
C7: Gráfica de $y=ax+b$ si $a<0$ utilizando el intercepto con el eje y y su pendiente

(P) Dada la función $y=-2x+1$:
a) Encuentre el intercepto con el eje y.
b) ¿Cuál es la razón de cambio?
c) Trace la gráfica de $y=-2x+1$ utilizando el intercepto con y y su razón de cambio.

(S) a) En los puntos sobre el eje y, $x=0$.
$y=(-2)(0)+1=1$
Intercepto con y: $(0, 1)$

b) $a=-2$

c) $(0,1)$ es un punto
$+1\downarrow\ \downarrow+(-2)$
$(1,-1)$ es otro punto

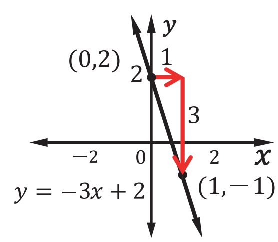


(C) *Leer en el libro de texto.*

(Ej) Trace la gráfica de $y=-3x+2$ utilizando su intercepto con el eje y y la pendiente.

Pendiente: $a=-3$

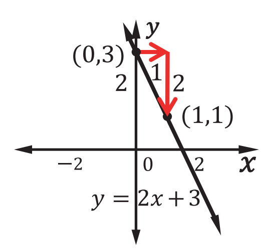
Intercepto con y:
$(0,2)$
$+1\downarrow\ \downarrow+(-3)$
$(1,-1)$ otro punto



(E) a) Trace la gráfica de $y=-2x+3$ utilizando su intercepto con el eje y y la pendiente.

Pendiente: $a=-2$

Intercepto con y:
$(0,3)$
$+1\downarrow\ \downarrow+(-2)$
$(1,1)$ otro punto



Contenido 8 Dominio y rango de una función de primer grado

Contenido 8: Dominio y rango de una función de primer grado

P

a) Trace la gráfica de $y = 2x + 1$, para $1 \leq x \leq 3$.

b) Usando la gráfica trazada en el inciso a) determine los valores que toma y si $1 \leq x \leq 3$.

S

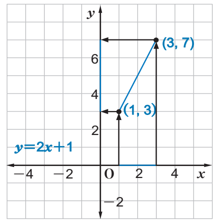
Se calculan los valores de y para valores particulares de x:

Si $x = 1$, $y = (2)(1) + 1 = 3$

Si $x = 3$, $y = (2)(3) + 1 = 7$

Se ubican en el plano cartesiano los puntos (1, 3) y (3, 7) y se traza el segmento que los une, tal como puede verse en la figura de la derecha. Puede observarse que los valores de y oscilan entre 3 y 7 incluídos estos, es decir

$$3 \leq y \leq 7$$



C

Dada la función de primer grado $y = ax + b$, el conjunto de valores que toma la variable x se llama **dominio de la función**, mientras que el conjunto de valores que toma la variable y se llama **rango de la función**.

Ejemplo Dada la función de primer grado $y = -2x + 8$. Si se considera como dominio a $2 < x < 6$, ¿cuál es el rango de la función?

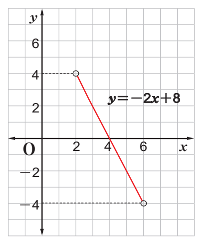
Se calculan los valores de y para $x = 2$ y $x = 6$:

Si $x = 2$, $y = (-2)(2) + 8 = 4$

Si $x = 6$, $y = (-2)(6) + 8 = -4$

Se ubican en el plano cartesiano los puntos (2, 4) y (6, −4) y se traza el segmento que los une, este se muestra en la figura de la derecha desprovisto de los extremos puesto que 2 y 6 no pertenecen al dominio. Por tanto el rango es

$$-4 < y < 4$$



E

Encuentre el rango de cada una de las funciones dadas en el dominio indicado.

a) $y = 2x + 3$ para $-1 \leq x \leq 4$

b) $y = -3x + 4$ para $1 < x < 4$

Aprendizajes esperados

Determina el rango de una función de primer grado para una parte del dominio.

Secuencia:

En séptimo grado se determinó el rango de una función (de proporcionalidad directa).

En esta clase se recuerda el concepto de dominio y rango de una función, y se determina el rango de funciones de primer grado.

Puntos esenciales:

Recordar que el dominio de una función es el conjunto de valores que toma x, y el rango el conjunto de valores que toma y.

Aclarar que el objetivo de mostrar la gráfica en esta clase es poder visualizar los valores que toma y, dados algunos valores de x.

Explicar por qué en los extremos hay un círculo hueco o relleno.

Escribir correctamente el rango (entre qué valores se encuentra y) cuando la función tiene razón de cambio negativa.

C8: Dominio y rango de una función de primer grado

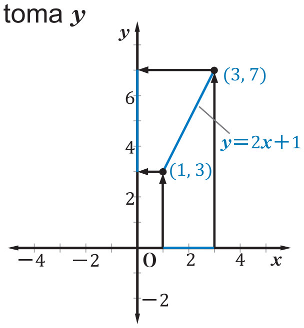
P a) Trace la gráfica de $y = 2x + 1$, para $1 \leq x \leq 3$.

b) Si $1 \leq x \leq 3$, ¿qué valores toma y en este intervalo?

S $x = 1 \Rightarrow y = (2)(1) + 1 = 3$

$x = 3 \Rightarrow y = (2)(3) + 1 = 7$

$3 \leq y \leq 7$



C Dada la función $y = ax + b$,

<u>Dominio de la función:</u> el conjunto de valores que toma la variable x.

<u>Rango de la función:</u> el conjunto de valores que toma la variable y.

Ej Dada la función $y = -2x + 8$. Si $2 < x < 6$, ¿cuál es el rango de la función?

$x = 2 \Rightarrow y = (-2)(2) + 8 = 4$

$x = 6 \Rightarrow y = (-2)(6) + 8 = -4$

El rango es $-4 < y < 4$.

E Encuentre el rango de la función:

a) $y = 2x + 3$ para $-1 \leq x \leq 4$

$x = -1 \Rightarrow y = (2)(-1) + 3 = 1$

$x = 4 \Rightarrow y = (2)(4) + 3 = 11$

El rango es $1 \leq y \leq 11$.

b) $y = -3x + 4$ para $1 < x < 4$

$x = 1 \Rightarrow y = (-3)(1) + 4 = 1$

$x = 4 \Rightarrow y = (-3)(4) + 4 = -8$

El rango es $-8 < y < 1$.

Contenido 1 Expresión de la función de primer grado dada la pendiente y el intercepto con el eje y

Aprendizajes esperados

Determina la función de primer grado conociendo la pendiente y el intercepto de su gráfica con el eje y.

Secuencia:

En la sección anterior se graficaron funciones de primer grado.

En esta clase se determina la expresión de una función de primer grado, conociendo la pendiente y el intercepto con el eje y de su gráfica.

Puntos esenciales:

Indicar que para poder determinar la expresión de una función de primer grado, se tiene que conocer la pendiente y el intercepto de su gráfica.

Recordar que la pendiente es el coeficiente del término de grado 1, mientras que la ordenada del intercepto con y es el término constante.

Señalar que se debe usar correctamente los signos al hacer la sustitución de valores.

Aclarar que en el libro se muestra la gráfica de las funciones del problema y el ejemplo, pero no se necesitan graficar.

Sección 3: Expresión de la función de primer grado utilizando la pendiente

Contenido 1: Expresión de la función de primer grado dada la pendiente y el intercepto con el eje y

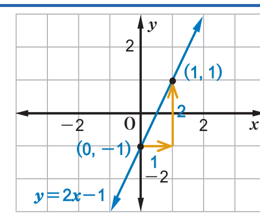
P Encuentre la función de primer grado cuya gráfica tiene pendiente 2 e intercepto con el eje y en $(0, -1)$.

S Se considera la expresión general $y=ax+b$. De acuerdo a la información la pendiente es $a=2$ y el intercepto con el eje y es $(0, -1)$, luego $b=-1$.

Se sustituyen estos valores en $y=ax+b$ resultando

$$y=2x+(-1)=2x-1$$

Por tanto, $y=2x-1$ es la función de primer grado buscada.



C Para encontrar la función de primer grado $y=ax+b$, conociendo la pendiente de su gráfica y el intercepto con el eje y:

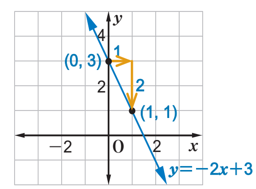
1. Se sustituye a por el valor de la pendiente.
2. Se sustituye b por la ordenada del intercepto con el eje y.

Ejemplo Encuentre la función de primer grado cuya gráfica tiene pendiente -2 e intercepto con el eje y en $(0, 3)$.

En este caso como $a=-2$ y $b=3$, se sustituyen a por -2 y b por 3 en $y=ax+b$, obteniéndose

$$y=-2x+3,$$

cuya gráfica puede observarse a la derecha.



E Encuentre la función de primer grado cuya gráfica tiene:

a) Pendiente 3 e intercepto $(0, 2)$ con el eje y.
b) Pendiente 5 e intercepto $(0, 1)$ con el eje y.
c) Pendiente -2 e intercepto $(0, 4)$ con el eje y.
d) Pendiente -4 e intercepto $(0, -5)$ con el eje y.

55

S3: Expresión de la función de primer grado utilizando la pendiente
C1: Expresión de la función de primer grado dada la pendiente y el intercepto con el eje y

P Encuentre la función de primer grado cuya gráfica tiene pendiente 2 e intercepto con el eje y en $(0, -1)$.

S Sustituyendo $a = 2$ y $b = -1$ en $y = ax + b$:

$y = 2x + (-1) = 2x - 1$

Por tanto, la función de primer grado es $y = 2x - 1$.

C Para encontrar la función de primer grado $y = ax + b$, conociendo la pendiente de su gráfica y el intercepto con el eje y:

1. Sustituya el valor de la pendiente en a.
2. Sustituya la ordenada del intercepto en b.

Ej Encuentre la expresión de la función de primer grado cuya gráfica tiene pendiente -2 e intercepta al eje y en $(0, 3)$.

$a = -2$ y $b = 3$, al sustituir en $y = ax + b$ resulta: $y = -2x + 3$

E Encuentre la función de primer grado cuya gráfica tiene:

a) Pendiente 3; intercepto con el eje y en $(0, 2)$
$a = 3$, $b = 2$, por lo cual: $y = 3x + 2$

b) Pendiente 5; intercepto con el eje y en $(0, 1)$
$a = 5$, $b = 1$, por lo cual: $y = 5x + 1$

c) Pendiente -2; intercepto con el eje y en $(0, 4)$
$a = -2$, $b = 4$, por lo cual: $y = -2x + 4$

d) Pendiente -4; intercepto con el eje y en $(0, -4)$
$a = -4$, $b = -5$, por lo cual: $y = -4x - 5$

Contenido 2 Expresión de la función de primer grado dada la pendiente y un punto de la gráfica

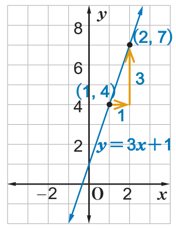
Contenido 2: Expresión de la función de primer grado dada la pendiente y un punto de la gráfica

P Encuentre la función de primer grado cuya gráfica tiene pendiente 3 y pasa por el punto (1, 4).

S

1. Se considera la expresión general $y = ax + b$ y se sustituye a por el valor de la pendiente
$$y = 3x + b$$
2. Luego, se sustituye $x = 1$ y $y = 4$ en la ecuación anterior
$$4 = (3)(1) + b$$
$$4 = 3 + b$$
$$1 = b$$
$$b = 1$$
3. Ahora se sustituye $b = 1$ en la ecuación $y = 3x + b$ obteniendo $y = 3x + 1$.

Por tanto, la función buscada es $\boldsymbol{y = 3x + 1}$.



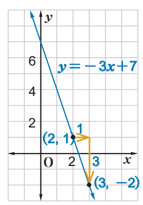
C Para encontrar la función de primer grado $y = ax + b$, conociendo la pendiente de su gráfica y un punto de ella:

1. Se sustituye a por el valor de la pendiente.
2. Se sustituye las variables x y y por la abscisa y la ordenada del punto conocido y se resuelve la ecuación resultante para encontrar b.
3. Se sustituye el valor de b en la ecuación que resulta en el paso 1.

Ejemplo Encuentre la función de primer grado cuya gráfica tiene pendiente -3 y pasa por el punto $(2, 1)$.

1. Se sustituye $a = -3$ en $y = ax + b$,
$$y = -3x + b$$
2. Se sustituye $x = 2$ y $y = 1$ en $y = -3x + b$
$$1 = (-3)(2) + b$$
$$1 = -6 + b$$
$$7 = b$$
$$b = 7$$
3. Por último se sustituye $b = 7$ en $y = -3x + b$, de donde resulta $y = -3x + 7$.

Por tanto, la función buscada es $\boldsymbol{y = -3x + 7}$ y su gráfica aparece a la derecha.



E Encuentre la función de primer grado cuya gráfica:

a) Tiene pendiente 4 y pasa por el punto $(2, 5)$.
b) Tiene pendiente -2 y pasa por el punto $(1, 3)$.
c) Tiene pendiente 3 y pasa por el punto $(-2, 3)$.

Aprendizajes esperados

Determina la función de primer grado conociendo la pendiente y un punto de su gráfica.

Secuencia:

En la clase anterior, se estudió cómo encontrar la expresión de una función de primer grado, conociendo la pendiente y el intercepto de su gráfica con el eje y.

En esta clase se determina la expresión de una función de primer grado, conociendo la pendiente y un punto cualquiera de su gráfica.

Puntos esenciales:

Indicar que la pendiente y las coordenadas del punto deben sustituirse en la expresión general de la función de primer grado.

Aclarar que el objetivo de sustituir la pendiente y las coordenadas del punto, es obtener una ecuación para encontrar el término constante (b).

Insistir en la manipulación correcta de los signos al hacer la sustitución de valores.

Explicar la conclusión del libro de texto utilizando la solución dada al problema.

C2: Expresión de la función de primer grado dada la pendiente y un punto de la gráfica

P Encuentre la función de primer grado cuya gráfica tiene pendiente 3 y pasa por el punto $(1, 4)$.

S Se sustituye la pendiente $a = 3$ en $y = ax + b$:
$$y = 3x + b$$
Se sustituye $x = 1$ y $y = 4$ en $y = 3x + b$:
$$4 = (3)(1) + b$$
$$4 = 3 + b$$
$$1 = b$$
$$b = 1$$
Se sustituye $b = 1$ en $y = 3x + b$:
$$y = 3x + 1$$

C *Leer en el libro de texto.*

Ej Encuentre la función de primer grado cuya gráfica tiene pendiente -3 y pasa por el punto $(2, 1)$.

Se sustituye $a = -3$, $x = 2$ y $y = 1$ en $y = ax + b$.
$$1 = (-3)(2) + b$$
$$1 = -6 + b \rightarrow 7 = b \rightarrow b = 7$$
Por tanto, la función de primer grado es $y = -3x + 7$.

E Encuentre la función de primer grado cuya gráfica:

a) Tiene pendiente 4 y pasa por el punto $(2, 5)$
$$5 = (4)(2) + b$$
$$5 = 8 + b \qquad \rightarrow b = -3$$
Luego, $y = 4x - 3$.

b) Tiene pendiente -2 y pasa por el punto $(1, 3)$
$$3 = (-2)(1) + b$$
$$3 = -2 + b \qquad \rightarrow b = 5$$
Luego, $y = -2x + 5$.

c) Tiene pendiente 3 y pasa por el punto $(-2, 3)$
$$3 = (3)(-2) + b$$
$$3 = -6 + b \qquad \rightarrow b = 9$$
Luego, $y = 3x + 9$.

Contenido 3 Expresión de la función de primer grado dados dos puntos

Aprendizajes esperados

Determina la función de primer grado dados dos puntos de su gráfica.

Secuencia:

En la clase anterior se estudió cómo encontrar la expresión de una función de primer grado, conociendo la pendiente y un punto de su gráfica.

En esta clase se determina la expresión de una función de primer grado, conociendo dos puntos de su gráfica.

Puntos esenciales:

Explicar cómo calcular la pendiente basados en la fórmula de cálculo de razón de cambio.

Se debe indicar que primero deben calcular la pendiente (razón de cambio).

Identificar que ya conociendo la pendiente, el proceso es el mismo estudiado en la clase anterior (seleccionando cualquiera de los dos puntos).

Manipular correctamente los signos al hacer la sustitución de valores.

Contenido 3: Expresión de la función de primer grado dados dos puntos

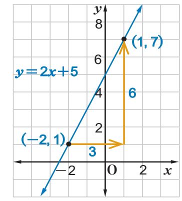
P Encuentre la función de primer grado cuya gráfica pasa por los puntos $(-2, 1)$ y $(1, 7)$.

La pendiente de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

S

1. Se calcula la pendiente de la recta:
$$a = \frac{7-1}{1-(-2)} = \frac{6}{3} = 2$$
2. Se sustituye la pendiente $a = 2$ en $y = ax + b$:
$$y = 2x + b$$
3. Se sustituye $x = 1$ y $y = 7$ en $y = 2x + b$:
$$7 = (2)(1) + b$$
$$7 = 2 + b$$
$$5 = b$$
$$b = 5$$
4. Se sustituye $b = 5$ en $y = 2x + b$, resultando $y = 2x + 5$.
Por tanto, la función de primer grado buscada es $\mathbf{y = 2x + 5}$. Ver gráfica.

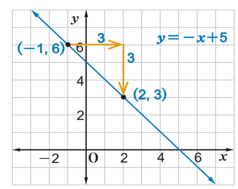


C Para encontrar la función de primer grado $y = ax + b$, conociendo dos puntos de su gráfica:

1. Se calcula la pendiente de la recta.
2. Se sustituye a por el valor de la pendiente.
3. Se sustituyen las coordenadas de alguno de los puntos conocidos en $y = ax + b$ y se resuelve la ecuación resultante para encontrar b.
4. Se sustituye el valor de b en $y = ax + b$.

Ejemplo Encuentre la función de primer grado cuya gráfica pasa por los puntos $(-1, 6)$ y $(2, 3)$.

1. Se calcula la pendiente de la recta:
$$a = \frac{3-6}{2-(-1)} = \frac{-3}{3} = -1$$
2. Se sustituye $a = -1$ en $y = ax + b$:
$$y = -1x + b = -x + b$$
3. Se sustituye $x = 2$ y $y = 3$ en $y = -x + b$:
$$3 = -2 + b$$
$$3 + 2 = b$$
$$5 = b$$
$$b = 5$$
4. Se sustituye $b = 5$ en $y = -x + b$, resultando $y = -x + 5$.
Por tanto, la función de primer grado es $\mathbf{y = -x + 5}$. Su gráfica aparece a la derecha.



E Encuentre en cada inciso la función de primer grado cuya gráfica pasa por los puntos:

a) $(1, 2)$ y $(4, 8)$
b) $(1, 3)$ y $(2, -1)$

C3: Expresión de la función de primer grado dados dos puntos

Pendiente de la recta que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2)

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

P Encuentre la función de primer grado cuya gráfica pasa por los puntos $(-2, 1)$ y $(1, 7)$.

S Se calcula la pendiente de la recta.

$$a = \frac{7-1}{1-(-2)} = \frac{6}{3} = 2$$

Se sustituye $a = 2$ en $y = ax + b$:

$y = 2x + b$

Se sustituye $x = 1$ y $y = 7$ en $y = 2x + b$:

$7 = (2)(1) + b$

$7 = 2 + b \quad \rightarrow 5 = b \quad \rightarrow b = 5$

La función de primer grado es $y = 2x + 5$.

C *Leer en el libro de texto.*

Ej Encuentre la función cuya gráfica pasa por $(-1, 6)$ y $(2, 3)$.

Se calcula la pendiente de la recta.

$$a = \frac{3-6}{2-(-1)} = \frac{-3}{3} = -1$$

Se sustituye $a = -1$, $x = 2$ e $y = 3$ en $y = ax + b$:

$3 = -2 + b \quad \rightarrow 3 + 2 = b \quad \rightarrow 5 = b \quad \rightarrow b = 5$

La función de primer grado es $y = -x + 5$.

E Encuentre la función cuya gráfica pasa por:

a) $(1, 2)$ y $(4, 8)$

$$a = \frac{8-2}{4-1} = \frac{6}{3} = 2$$

$2 = (2)(1) + b \quad \rightarrow 2 = 2 + b \quad \rightarrow b = 0$

Luego, $y = 2x$.

b) $(1, 3)$ y $(2, -1)$

$$a = \frac{-1-3}{2-1} = \frac{-4}{1} = -4$$

$3 = (-4)(1) + b \quad \rightarrow 3 = -4 + b \quad \rightarrow b = 7$

Luego, $y = -4x + 7$.

Contenido 1 Gráfica de una ecuación de primer grado de la forma $ax + by = c$

Sección 4: Gráfica de ecuaciones de primer grado con dos variables

Contenido 1: Gráfica de una ecuación de primer grado de la forma $ax+by=c$

P

a) Calcule y escriba en la tabla los valores correspondientes de x o y para que los pares (x, y) sean soluciones de $2x+y=4$.

Si $x=-2$, $(2)(-2)+y=4$
$-4+y=4$
$y=4+4$
$y=8$

x	−2	−1		1	2	3
y	8		4			

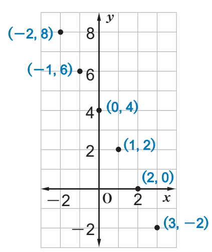
b) Ubique en el plano cartesiano los pares (x, y) encontrados. ¿Qué figura se forma al unir estos puntos?

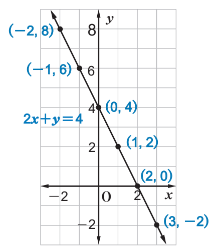
S

a) Se calculan los valores restantes de la tabla mediante la ecuación $2x+y=4$.

x	−2	−1	0	1	2	3
y	8	6	4	2	0	−2

b) En la figura de abajo a la izquierda, se muestran los pares ordenados (x, y) de la tabla, que al unirlos determinan la recta de la derecha.





Esta recta es la gráfica de $2x+y=4$. Toda solución de $2x+y=4$ se encuentra en la recta y cada punto de esta es solución de la ecuación.

C

La recta formada por las soluciones de la ecuación de primer grado $ax+by=c$ con a y b no simultáneamente nulos se llama **gráfica de la ecuación**. Se cumple también que cada punto de esta recta es solución de la ecuación $ax+by=c$.

E

Calcule y escriba en la tabla los valores correspondientes de x o y para que los pares (x, y) sean soluciones de $2x+y=3$. Trace la gráfica de la ecuación.

x	−1		1
y		3	

59

Aprendizajes esperados

Grafica una ecuación de primer grado en dos variables.

Secuencia:

En la segunda unidad se estudiaron las ecuaciones de primer grado en dos variables y que una solución de la misma es un par ordenado.

En esta clase se grafican ecuaciones de primer grado en dos variables.

Puntos esenciales:

Indicar que, como cada solución de la ecuación es un par ordenado, este puede ser graficado en el plano cartesiano.

Insistir en la manipulación correcta de los signos al sustituir valores y al realizar las operaciones indicadas; asimismo en la transposición de términos cuando tenga que resolverse alguna ecuación.

Identificar que los puntos graficados (soluciones de la ecuación) están sobre una recta, así la gráfica de toda ecuación de primer grado en dos variables es una recta.

S4: Gráfica de ecuaciones de primer grado en dos variables
C1: Gráfica de una ecuación de primer grado de la forma $ax + by = c$

P a) Calcule y escriba los valores correspondientes de x o y para que los pares (x, y) sean solucionesde $2x + y = 4$.

x	−2	−1	0	1	2	3
y	8	6	4	2	0	−2

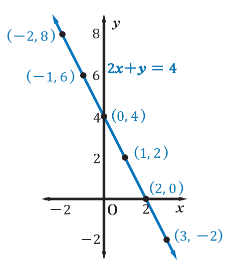
b) Ubique en el plano cartesiano los pares (x, y).

S a) Para $x = -1$
$2(-1) + y = 4$
$-2 + y = 4$
$y = 6$

Para $x = 1$
$2(1) + y = 4$
$2 + y = 4$
$y = 2$

Para $y = 4$
$2x + 4 = 4$
$2x = 4 - 4$
$2x = 0$
$x = 0$

b)

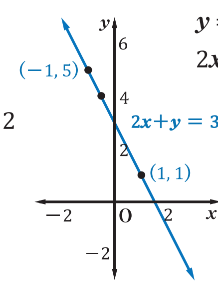


C Las soluciones de la ecuación $ax + by = c$ forman una recta que se llama gráfica de la ecuación.

E Calcule y escriba los valores correspondientes de x o y, para que (x, y) sea solución de $2x + y = 3$. Trace la gráfica de dicha ecuación

x	−1	−0. 5	1
y	5	4	1

$x = -1$
$2(-1) + y = 3$
$-2 + y = 3$
$y = 3 + 2$
$y = 5$



$y = 4$
$2x + 4 = 3$
$2x = 3 - 4$
$2x = -1$
$x = \frac{-1}{2}$
$x = -0{,}5$

Contenido 2 Relación entre la gráfica de la ecuación $ax + by = c$ y la función de primer grado $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, con $a, b \neq 0$

Aprendizajes esperados

Comprende que la gráfica de la ecuación de primer grado $ax + by = c$ es la gráfica de la función de primer grado $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.

Secuencia:

En la clase anterior se graficó una ecuación de primer grado, y en la sección 2 de esta unidad se graficaron funciones de primer grado.

En esta clase se estudia la relación entre la gráfica de la ecuación y la función de primer grado.

Puntos esenciales:

Señalar que la gráfica de una ecuación, se puede trazar utilizando la función que se obtiene al despejar la variable y en dicha ecuación.

Recordar la transposición de términos.

Indicar que la gráfica de la función obtenida al despejar la variable y en una ecuación de primer grado en dos variables, coincide con la gráfica de dicha ecuación.

Mencionar en la solución del problema que las rectas son iguales porque tienen todos sus puntos en común (Ejemplificar dos puntos de ambas rectas).

Unidad 3: Funciones de Primer Grado

Contenido 2: Relación entre la gráfica de la ecuación $ax+by=c$ y la función de primer grado $y=-\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ con $a, b\neq 0$

P

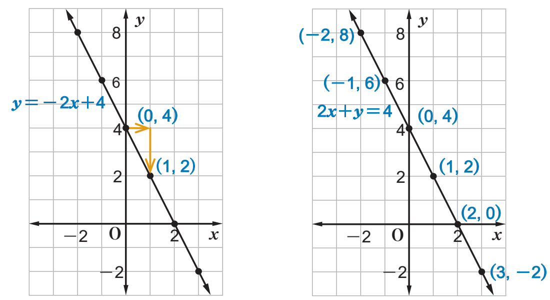
a) Despeje la variable y en la ecuación $2x+y=4$. ¿Qué tipo de función se obtiene?

b) Trace la gráfica de la función obtenida.
¿Qué relación existe entre la gráfica de $y=-2x+4$ y la gráfica de $2x+y=4$?

S

a) Se transpone el término $2x$ en la ecuación dada, para obtener $y=-2x+4$. Se observa que esta es una función de primer grado.

b) Como la pendiente de la recta $y=-2x+4$ es -2 y el intercepto con el eje y es $(0, 4)$, otro punto de la gráfica es $(0+1, 4+(-2))=(1, 2)$, obteniéndose la recta de la izquierda que es igual a la gráfica de $2x+y=4$, situada a la derecha en la figura.



C

Si la ecuación de primer grado $ax+by=c$ se lleva a la forma $y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$, ambas ecuaciones tienen la misma gráfica.

E

Trace la gráfica de $3x+y=1$ utilizando la pendiente y el intercepto con el eje y de la recta que se obtiene al expresar y en función de x.

60

C2: Relación entre la gráfica de la ecuación $ax + by = c$ y la función de primer grado $y = \frac{-a}{b}x + \frac{c}{b}$, con $a, b \neq 0$

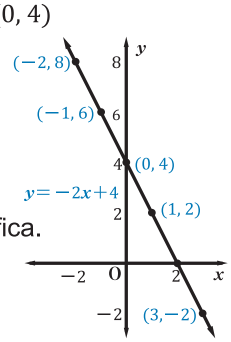
(P) a) Despeje la variable y en la ecuación $2x + y = 4$.
¿Qué tipo de función se obtiene?
b) Trace la gráfica de la función obtenida.
¿Qué relación existe entre la gráfica de $y = -2x + 4$ y la gráfica de $2x + y = 4$?

(S) a) $2x + y = 4 \Longrightarrow y = -2x + 4$
Función de primer grado.

b) Si $x = 0$; $y = -2(0) + 4$, $y = 4$. El intercepto con el eje y es $(0, 4)$

Otro punto de la gráfica es:
$\big(0 + 1, 4 + (-2)\big) = (1, 2)$

Las ecuaciones $2x + y = 4$ y $y = -2x + 4$ tienen la misma grafica.



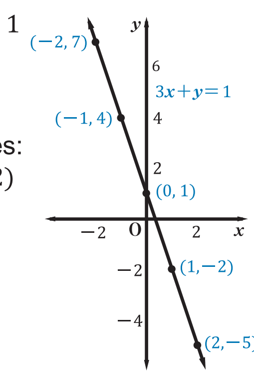
(C) Si la ecuación $ax + by = c$ se lleva a la forma $y = \frac{-a}{b}x + \frac{c}{b}$, ambas ecuaciones tienen la misma grafica

(E) Trace la gráfica de $3x + y = 1$ utilizando la pendiente y el intercepto con el eje y de la recta que se obtiene al expresar y en función de x.

$3x + y = 1 \Longrightarrow y = -3x + 1$

Intercepto en y es $(0, 1)$

Otro punto de la gráfica es:
$(0 + 1, 1 + (-3)) = (1, -2)$



Contenido 3 Interceptos con los ejes coordenados de la gráfica de la ecuación de primer grado $ax + by = c$

Contenido 3: Interceptos con los ejes coordenados de la gráfica de la ecuación de primer grado $ax+by=c$

P

a) Encuentre los interceptos de la gráfica de $3x-2y=6$ con los ejes coordenados.

b) Grafique la ecuación $3x-2y=6$.

(x, y) es un punto del eje x, si $y=0$; y del eje y si $x=0$.

S

a) Se buscan los interceptos de la recta $3x-2y=6$ con los ejes x y y. Como un punto del eje x tiene ordenada 0, se sustituye $y=0$ en $3x-2y=6$.

$$3x-(2)(0)=6$$
$$3x=6$$
$$x=2$$

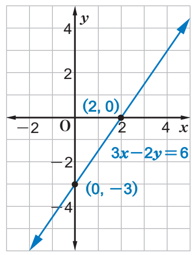
El intercepto con el eje x es el punto **(2, 0)**.

El intercepto con y tiene abscisa 0. Se sustituye $x=0$ en $3x-2y=6$, resultando:

$$(3)(0)-2y=6$$
$$-2y=6$$
$$y=-3$$

El intercepto con el eje y es **(0, −3)**.

b) Ahora se ubican los puntos (2, 0) y (0, −3) en el plano cartesiano y se traza la recta que pasa por ellos. La recta que se muestra en la figura de la derecha es la gráfica de $3x-2y=6$.



C

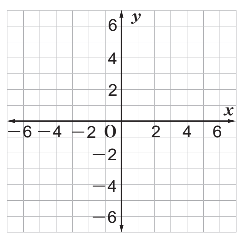
Para graficar la ecuación $ax+by=c$ ($a\neq0$, $b\neq0$) se encuentran los interceptos con los ejes y se traza la recta que pasa por estos.

E

Encuentre los interceptos de las siguientes rectas con los ejes y grafíquelas:

a) $x-2y=4$

b) $3x-4y=-12$



61

Aprendizajes esperados

Grafica ecuaciones de primer grado en dos variables utilizando los interceptos con los ejes coordenados.

Secuencia:

En la clase anterior se graficó una ecuación de primer grado, utilizando la función que se obtiene al despejar la variable y.

En esta clase se grafican ecuaciones de primer grado, utilizando los interceptos con los ejes.

Puntos esenciales:

Aclarar que el objetivo de encontrar los interceptos con los ejes, es determinar dos puntos para trazar la gráfica de la ecuación. Hay que indicar cómo encontrar los interceptos con cada eje.

Recordar la transposición de términos.

Señalar que se debe ubicar correctamente los interceptos en el plano cartesiano.

Indicar que para encontrar el intercepto con y se hace $x = 0$, y el intercepto con x se encuentra haciendo $y = 0$.

C3: Interceptos con los ejes coordenados de la gráfica de la ecuación de primer grado $ax + by = c$

P a) Encuentre los interceptos de la gráfica $3x - 2y = 6$ con los ejes coordenados.

b) Grafique la ecuación $3x - 2y = 6$.

S a) Intercepto con el eje x, entonces $y = 0$.

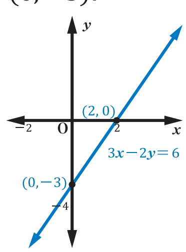
$$3x - (2)(0) = 6$$
$$3x = 6$$
$$x = 2$$

El intercepto con el eje x es: $(2, 0)$.

Intercepto con el eje y, entonces $x = 0$

$$(3)(0) - 2y = 6$$
$$-2y = 6$$
$$y = -3$$

El intercepto con el eje y es: $(0, -3)$.



C *Leer en el libro de texto*

E Encuentre los interceptos de las siguientes rectas con los ejes y grafíquelas.

a) $x - 2y = 4$

Intercepto con el eje x:

$y = 0$; $x - (2)(0) = 4$

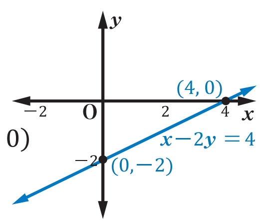
$x = 4 \Longrightarrow (4, 0)$

Intercepto con y:

$x = 0$; $(0) - 2y = 4$

$-2y = 4$

$y = -2 \Longrightarrow (0, -2)$



b) $3x - 4y = -12$

Intercepto con el eje x:

$y = 0 \Longrightarrow 3x - (4)(0) = -12$

$3x = -12$

$x = -4$

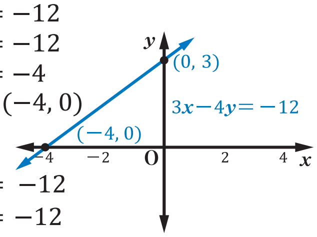
$\Longrightarrow (-4, 0)$

Intercepto con el eje y

$x = 0 \Longrightarrow (3)(0) - 4y = -12$

$-4y = -12$

$y = 3 \Longrightarrow (0, 3)$



Contenido 4 Gráfica de la ecuación $y=k$

Aprendizajes esperados

Grafica ecuaciones de la forma $y=k$.

Secuencia:

En esta sección se graficaron ecuaciones de primer grado en dos variables.

En esta clase se grafican ecuaciones de primer grado en dos variables, cuyo coeficiente que acompaña a la variable x es cero.

Puntos esenciales:

Aclarar que siempre debe estar despejada la variable y.

Indicar que la ordenada de los puntos de la gráfica es constante, y que solo varía la abscisa.

Señalar que la gráfica es una recta paralela al eje x.

Mencionar que la ordenada del intercepto con y, es el valor al que está igualada esta variable en la ecuación.

Unidad 3: Funciones de Primer Grado

Contenido 4: Gráfica de la ecuación $y=k$

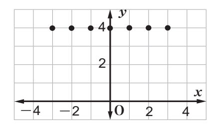
P

Grafique la ecuación $y=4$.

S

La ecuación $y=4$ se escribe también como $0x+y=4$.

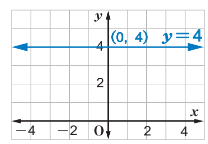
Todo punto de ordenada $y=4$, satisface esta ecuación sin importar el valor de la abscisa x, es decir que todos los puntos de la forma $(x, 4)$ son soluciones de la ecuación. Algunos de estos puntos son:



$(-3, 4), (-2, 4), (-1, 4), (0, 4), (1, 4), (2, 4), (3, 4)$

Se observa que al variar x, los puntos $(x, 4)$ forman una recta que pasa por $(0, 4)$ y es paralela al eje x.

La gráfica es la siguiente:



C

Toda ecuación de primer grado de la forma $y=k$ tiene por gráfica una **recta paralela al eje x que pasa por el punto $(0, k)$.**

E

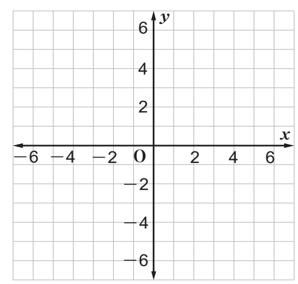
Grafique las siguientes ecuaciones:

a) $y=2$

b) $y=-3$

c) $y-1=0$

d) $5y=15$



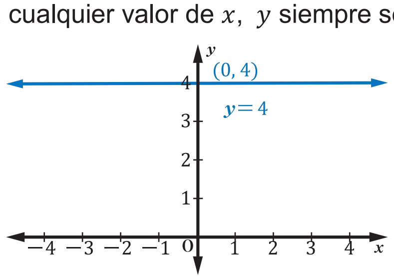
C4: Gráfica de la ecuación $y = k$

(P) Grafique la ecuación $y = 4$.

(S)
$y = 4$
$0x + y = 4$

Todos los puntos de la forma $(x, 4)$ son soluciones de la ecuación. Por ejemplo: $(-2,4), (-1,4), (0,4), (1,4), (2,4)$.

Para cualquier valor de x, y siempre será 4.



(C) La ecuación $y = k$ tiene por gráfica una recta paralela al eje x que pasa por el punto $(0, k)$.

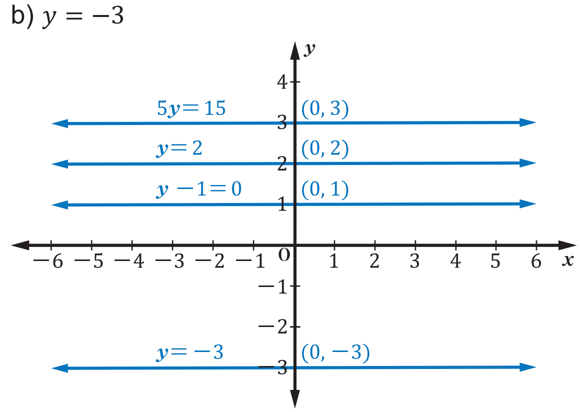
(E) Grafique las siguientes ecuaciones:

a) $y = 2$

b) $y = -3$

c) $y - 1 = 0$
$y = 1$

d) $5y = 15$
$y = 3$



Contenido 5 Gráfica de la ecuación $x = h$

Contenido 5: Gráfica de la ecuación $x = h$

P

Grafique la ecuación $x = 2$.

S

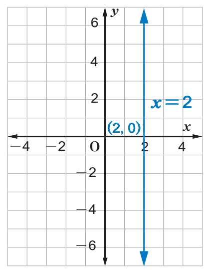
La ecuación $x = 2$ se escribe como $x + 0y = 2$.

Todo punto de abscisa $x = 2$ satisface esta ecuación sin importar el valor de la ordenada y, es decir que todos los puntos de la forma $(2,\ y)$ son soluciones de la ecuación. Algunos de estos puntos son:

$(2,\ -3),\ (2,\ -2),\ (2,\ -1),\ (2,\ 0),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3)$

Se observa que al variar y, los puntos $(2,\ y)$ forman una recta que pasa por $(2,\ 0)$ y es paralela al eje y.

La gráfica se muestra a la derecha.



C

Toda ecuación de primer grado de la forma $x = h$ tiene por gráfica una **recta paralela al eje y que pasa por el punto $(h,\ 0)$.**

E

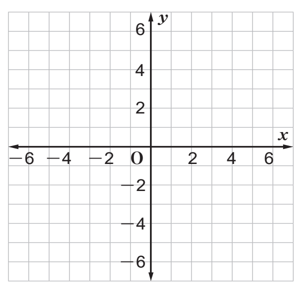
Grafique las siguientes ecuaciones:

a) $x = 4$

b) $x = -1$

c) $x - 1 = 0$

d) $5x = 15$



Aprendizajes esperados

Grafica ecuaciones de la forma $x = h$.

Secuencia:

En la clase anterior se graficaron ecuaciones de primer grado en dos variables, cuyo coeficiente que acompaña a la variable x es cero.

En esta clase se grafican ecuaciones de primer grado en dos variables, cuyo coeficiente que acompaña a la variable y es cero.

Puntos esenciales:

Aclarar que siempre debe estar despejada la variable x.

Indicar que la abscisa de los puntos de la gráfica es constante, y que solo varía la ordenada.

Señalar que la gráfica es una recta paralela al eje y.

Mencionar que la abscisa del intercepto con x, es el valor al que está igualada esta variable en la ecuación.

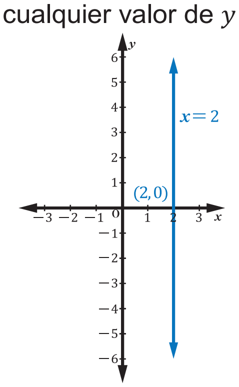
C5: Gráfica de la ecuación $x = h$

(P) Grafique la ecuación $x = 2$.

(S)
$$x = 2$$
$$x + 0y = 2$$

Los puntos de la forma $(2, y)$ son soluciones de la ecuación. Por ejemplo $(2, -2), (2, -1), (2, 0), (2, 1), (2, 2)$.

Para cualquier valor de y el valor de x, siempre será 2.



(C) La ecuación $x = h$ tiene por gráfica una recta paralela al eje y que pasa por el punto $(h, 0)$.

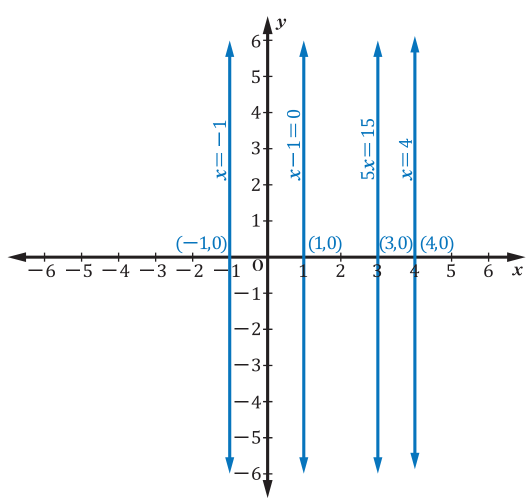
(E) Grafique las siguientes ecuaciones:

a) $x = 4$

b) $x = -1$

c) $x - 1 = 0$
$x = 1$

d) $5x = 15$
$x = 3$



Contenido 1 Aplicación de la función de primer grado (1)

Aprendizajes esperados

Modela situaciones de la vida cotidiana mediante una función de primer grado.

Secuencia:

En esta unidad se determinó la expresión de una función de primer grado, a partir de situaciones del entorno. Asimismo, se ha encontrado el rango para un dominio definido.

En esta clase se resuelven situaciones del entorno, utilizando funciones de primer grado.

Puntos esenciales:

Identificar cuál es la cantidad constante que se suma o resta a la parte variable, y cuál es el coeficiente del término de grado 1.

Indicar que el tiempo y la distancia no toman valores negativos.

Escribir correctamente el rango (entre qué valores se encuentra y) cuando la función tiene razón de cambio negativa.

Sección 5: Aplicaciones de la función de primer grado

Contenido 1: Aplicación de la función de primer grado (1)

P Carlos se encuentra a 30 m de su casa y se dirige hacia esta a una velocidad de 3 metros por segundo:

a) ¿A qué distancia de su casa se encuentra al transcurrir 4 segundos?

b) Exprese como una función de primer grado la distancia y (en m) a la que se encuentra después de x segundos.

c) ¿Qué valores puede tomar x?

d) Construya la gráfica de la función encontrada.

S En cualquier punto de su trayectoria a la casa la distancia a la que se encuentra Carlos después de cierto tiempo es igual a la distancia inicial (30 metros), menos la distancia recorrida. Esta última es igual a la velocidad por el tiempo transcurrido. Por tanto:

a) Al transcurrir 4 segundos, la distancia a la que se encuentra Carlos de su casa es $30-(3)(4)=\mathbf{18}$ metros.

b) La distancia recorrida por Carlos al finalizar los x segundos es $3x$. Por tanto, la expresión solicitada es

$$y=30-3x$$
$$\mathbf{y=-3x+30}$$

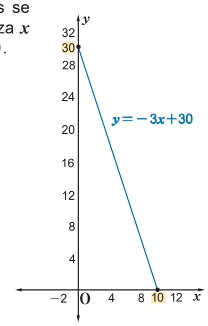
c) El tiempo inicial es $x=0$ y aumenta a medida que Carlos se dirige a su casa. Por tanto, $x\geq 0$. El mayor valor que alcanza x ocurre cuando Carlos llega a su casa, es decir cuando $y=0$.

Se sustituye $y=0$ en $y=-3x+30$ y se obtiene:

$$0=-3x+30$$
$$3x=30$$
$$\frac{3x}{3}=\frac{30}{3}$$
$$x=10$$

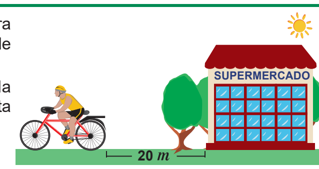
Luego, $\mathbf{0\leq x\leq 10}$.

d) La gráfica se construye utilizando los interceptos de la recta $y=-3x+30$ con los ejes. Estos puntos son (10, 0) y (0, 30). La gráfica es el tramo de la recta entre los puntos anteriores, inclusive ellos, tal como se muestra en la figura de la derecha.



E Un ciclista arranca desde un punto que se encuentra a 20 m de un supermercado, alejándose a razón de 4 m cada segundo.

Exprese como una función de primer grado la distancia y (en m) a la que se encuentra el ciclista del supermercado al transcurrir x segundos.



65

S5: Aplicaciones de la función de primer grado
C1: Aplicación de la función de primer grado (1)

(P) Carlos se encuentra a $30\,m$ de su casa y se dirige hacia esta a una velocidad de $3\,m$ por segundo:

(S) a) Distancia de su casa después de 4 segundos

$d = velocidad \times tiempo = (3)(4) = 12\ (m)$

Carlos está de su casa a $30-12=18\ (m)$

b) Exprese y en función de x.

$y=30-3x \quad \Rightarrow \quad y=-3x+30$

c) Valores que toma x. $x\geq 0$ (No hay tiempo negativo).

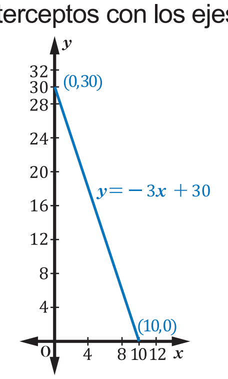
Cuando Carlos llega a su casa $(y=0)$, x será el mayor valor.

Sustituir y por 0 en $y=-3x+30$

$$0=-3x+30$$
$$-30=-3x$$
$$10=x$$
$$x=10$$

$0\leq x\leq 10$.

d) Los interceptos con los ejes son $(10,0)$ y $(0,30)$.



(E) Exprese la distancia y (en m) a la que se encuentra del supermercado después de x segundos con una función de primer grado.

El ciclista está a $20\ m$ del supermercado

La velocidad es $4\ m$ por segundo

La distancia recorrida después de x segundos es $4x$

La expresión solicitada es $y=4x+20$.

Contenido 2 Aplicación de la función de primer grado (2)

Contenido 2: Aplicación de la función de primer grado (2)

Ejemplo Un vendedor del mercado Oriental tiene un sueldo básico de C$ 1 000 al mes, y por la venta de cada artículo recibe una comisión de C$ 20.

a) Encuentre la función que exprese su salario mensual y (en córdobas), si ha vendido una cantidad x de artículos.

b) ¿Cuál es su salario total, si vendió 30 artículos en un mes?

a) Por la venta de cada artículo el vendedor recibe C$ 20, así que por la venta de x artículos recibirá como comisión una cantidad de C$ $20x$, sumando a esta cantidad el salario básico de C$ 1 000 se obtiene la función

$$y=20x+1\,000$$

que representa el salario mensual del vendedor en función de la cantidad x de artículos vendidos en ese período.

b) Como el número de artículos vendidos es 30, entonces $x=30$, así que:

$$y=(20)(30)+1\,000=600+1\,000=1\,600$$

Luego, el salario total del vendedor es **C$ 1 600**.

E

1. Edinson abre una cuenta de ahorros con C$ 1 000 y decide depositar C$ 100 cada mes.
   a) Encuentre la función que expresa la cantidad ahorrada y (en córdobas) a los x meses.
   b) Calcule la cantidad de dinero ahorrado en 5 meses. Utilice la función encontrada en el inciso anterior.

2. Ana recibe un préstamo de C$ 2 000 sin intereses y debe pagar C$ 100 al mes hasta cancelar la deuda.
   a) Encuentre la función que expresa la cantidad pendiente de pago y (en córdobas) a los x meses.
   b) ¿Cuánto debe a los 10 meses?
   c) ¿En cuántos meses cancelará la deuda?

Aprendizajes esperados

Modela situaciones de la vida cotidiana mediante una función de primer grado.

Secuencia:

En la clase anterior se resolvieron situaciones, utilizando funciones de primer grado.

En esta clase se resuelven situaciones de economía, utilizando sistemas de ecuaciones de primer grado.

Puntos esenciales:

Señalar que se debe identificar cuál es la cantidad constante que se suma o resta a la parte variable, y cuál es el coeficiente del término de grado 1.

Indicar que no hay cantidades de dinero negativas.

Insistir en la manipulación correcta de los signos al efectuar las operaciones.

C2: Aplicación de función de primer grado (2)

P Sueldo básico $C\$\ 1000$ y por la venta de cada artículo recibe $C\$\ 20$.

y: salario total
x: artículos vendidos

S a) Exprese y en función de x.
Comisión: $C\$\ 20x$ si vendió x artículos.
La función del salario mensual: $y=20x+1000$

b) Salario total si $x=30$

$$\begin{aligned} y &= (20)(30)+1000 \\ &= 600+1000 \\ &= 1600 \end{aligned}$$

El salario total es $C\$\ 1600$

E 1. Ahorro inicial: $C\$\ 1000$
Depósito mensual: $C\$\ 100$
Los meses de ahorro: x Total ahorrado: y

a) Exprese y en función de x.
$y=100x+1000$

b) Cantidad ahorrada en 5 meses
$y=(100)(5)+1\,000=1500 \Rightarrow C\$\ 1500$

2. Préstamo de $C\$\ 2000$ sin intereses, paga $C\$\ 100$ al mes.
Número de meses: x Cantidad que debe: y

a) Exprese y en función de x.
$y=2000-100x$

b) ¿Cuánto debe a los 10 meses?
$y=2000-(100)(10)=1000 \Rightarrow C\$\ 1000$

c) ¿En cuántos meses cancelará la deuda?
$0=2000-100x \Rightarrow 100x=2000$

$x=\dfrac{2000}{100} \Rightarrow x=20$ (meses)

Prueba de Matemática 8vo (30 min.) Fecha: ____________
Unidad 3: Funciones de Primer Grado

Nombre: ______________________________ **Sección:** __________

Sexo: M / F

/ 20

1. Un tanque contiene 9 litros de agua. Si se abre el grifo que vierte 3 litros de agua por minuto, y y es la cantidad de agua (en litros) que hay en el tanque después de x minutos: (2 puntos $\times$ 2 $=$ 4)

   a) Complete la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y									

   b) Expprese y como una función de primer grado en x.

2. Encuentre la pendiente y el intercepto con el eje y de la gráfica de cada una de las siguientes funciones de primer grado: (1 punto $\times$ 4 $=$ 4)

   a) $y = 2x + 1$

   Pendiente:

   Intercepto con el eje y:

   b) $y = -x + 2$

   Pendiente:

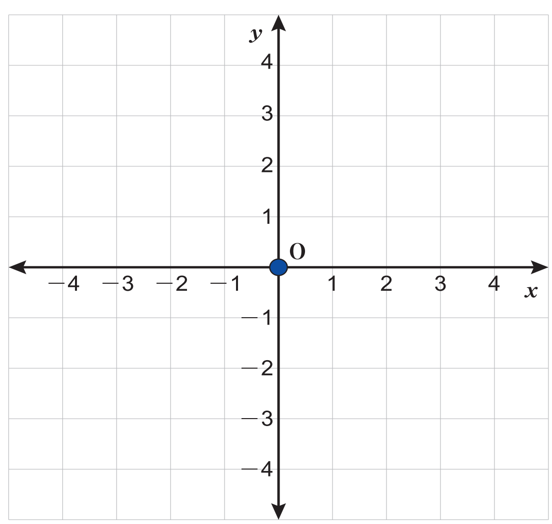
   Intercepto con el eje y:

3. Trace las gráficas de las siguientes funciones de primer grado: (2 puntos $\times$ 3 $=$ 6)

   a) $y = 2x + 1$

   b) $y = -2x + 2$

   c) $y = -3$



4. Dada la función de primer grado $y = 2x + 1$. Si se considera como domino a $1 \leq x \leq 3$, ¿cuál es el rango de la función? (2 puntos)

5. Encuentre la función de primer grado cuya gráfica tiene: (2 puntos $\times$ 2 $=$ 4)
   a) Pendiente 2 e intercepto $(0, -1)$ con el eje y.

   b) Pendiente 4 y pasa por el punto $(2, 4)$.

Nombre: ______________________________

Unidad 4

Radicales

1 Concepto de raíz cuadrada

Contenido

Aprendizajes esperados

Comprende el concepto de raíz cuadrada.

Secuencia:

En séptimo grado se estudió la potenciación, y se calculó el cuadrado de números enteros y fraccionarios.

En esta clase se estudia qué son las raíces cuadradas de un número no negativo, y se aclara que todo número cuyo cuadrado sea un número dado, se llama raíz cuadrada de dicho número.

Puntos esenciales:

Recordar que para encontrar el cuadrado de un número se debe multiplicar dos veces el mismo número.

Indicar que un número positivo tiene dos raíces cuadradas, y que ambas son números opuestos.

Señalar que la raíz cuadrada de un número, es todo número cuyo cuadrado sea el número dado.

Recordar la multiplicación de fracciones y el producto de números de signos iguales.

Unidad 4: Radicales

Sección 1: Raíz cuadrada

Contenido 1: Concepto de raíz cuadrada

P

¿Qué números elevados al cuadrado dan como resultado 9? $(\square)^2=9$

S

Hay dos números, **3** y **−3**, que al elevarse al cuadrado dan como resultado 9, los cuales son opuestos:

$$3^2=(3)(3)=9$$
$$(-3)^2=(-3)(-3)=9$$

C

El número cuyo cuadrado es a se llama **raíz cuadrada** de a.

La raíz cuadrada de un número no negativo a es el valor de x que satisface la igualdad $x^2=a$.

Un número positivo tiene dos raíces cuadradas. Ambas raíces son números opuestos.

Ejemplo Calcule las raíces cuadradas de:

a) 16 b) $\frac{4}{9}$

a) $(4)^2=(4)(4)=16$

$(-4)^2=(-4)(-4)=16$

Las raíces cuadradas de 16 son **4 y −4**.

$$\left.\begin{matrix}4\\-4\end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{Es el cuadrado de}]{\text{Son las raíces cuadradas de}} 16$$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}$

$\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}$

Las raíces cuadradas de $\frac{4}{9}$ son $\mathbf{\frac{2}{3}}$ y $-\mathbf{\frac{2}{3}}$.

E

Calcule las raíces cuadradas de:

a) 4 b) 25 c) 36 d) 49 e) $\frac{9}{16}$ f) $\frac{25}{36}$

72

U4: Radicales
S1: Raíz cuadrada
C1: Concepto de raíz cuadrada

(P) ¿Qué números elevados al cuadrado dan como resultado 9?

(S) $(3)^2=(3)(3)=9$

$(-3)^2=(-3)(-3)=9$

Resp. 3 y −3 (números opuestos)

(C) Un número cuyo cuadrado es a se llama <u>raíz cuadrada</u> de a.

Las raíces cuadradas de 9 son 3 y −3.

(Ej) Calcule las raíces de: a) 16 b) $\frac{4}{9}$

a) $(4)^2=(4)(4)=16$

$(-4)^2=(-4)(-4)=16$

Resp. 4 y −4

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}$

$\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}$

Resp. $\frac{2}{3}$ y $-\frac{2}{3}$

(E) Calcule las raíces de: a) 4 b) 25 c) 36 e) $\frac{9}{16}$

a) $(2)^2=(2)(2)=4$

$(-2)^2=(-2)(-2)=4$

Resp. 2 y −2

b) $(5)^2=(5)(5)=25$

$(-5)^2=(-5)(-5)=25$

Resp. 5 y −5

c) $(6)^2=(6)(6)=36$

$(-6)^2=(-6)(-6)=36$

Resp. 6 y −6

e) $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{16}$

$\left(-\frac{3}{4}\right)^2=\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{16}$

Resp. $\frac{3}{4}$ y $-\frac{3}{4}$

Contenido 2 El signo de radical

Contenido 2: El signo de radical

P ¿Cuál es el número positivo cuyo cuadrado es 2?

S

Se busca un número que elevado al cuadrado sea igual a 2. Se inicia la búsqueda con 1 y 2:

$$1^2 = 1 \qquad 2^2 = 4$$

Esto indica que el número buscado debe ser mayor que 1 y menor que 2. Si se continúa ensayando con 1,4 y 1,5 se tiene que

$$(1{,}4)^2 = 1{,}96 \qquad (1{,}5)^2 = 2{,}25$$

lo cual permite descartar 1,5 y continuar con 1,4, agregando a este decimales convenientes. Por ejemplo,

$$(1{,}41)^2 = 1{,}9881 \qquad (1{,}42)^2 = 2{,}0164$$

Luego, 1,41 es una aproximación del número buscado. Se puede seguir ensayando hasta encontrar que los decimales sucesivos

1,414, 1,4142, ... 1,4142135623,

elevados al cuadrado se acercan mucho a 2.

El número **1,4142135623...** se representa por $\sqrt{2}$ y se lee raíz cuadrada de 2.

C

$\sqrt{}$ se llama **signo de radical**.

Un número positivo a tiene dos raíces cuadradas: la raíz positiva $\sqrt{a}$ y la negativa $-\sqrt{a}$.

$\sqrt{a}$ se lee raíz cuadrada de a.

$\left.\begin{matrix}\sqrt{a}\\ -\sqrt{a}\end{matrix}\right\}$ Son las raíces cuadradas de a / Es el cuadrado de

Ejemplo Indique las raíces cuadradas de 3 usando el signo de radical.

Como $3 > 0$, las raíces cuadradas de 3 son:

Raíz cuadrada positiva: $\sqrt{3}$

Raíz cuadrada negativa: $-\sqrt{3}$

$(\sqrt{3})^2 = 3$

$(-\sqrt{3})^2 = 3$

Verifique con calculadora: $\sqrt{3} = 1{,}7320508075...$

E

1. Indique las raíces cuadradas de los siguientes números usando el signo de radical:

   a) 5 b) 11 c) 31

2. Escriba el valor aproximado de la raíz cuadrada positiva de los números anteriores usando 4 cifras decimales.

Aprendizajes esperados

Representa raíces cuadradas utilizando el signo de radical.

Secuencia:

En la clase anterior se estudió cómo encontrar las raíces cuadradas de un número. Pero, ¿qué ocurre si las raíces cuadradas no son fracciones, ni enteros? Se necesita una forma de simbolizarlas.

En esta clase se introduce el signo de radical, el cual se utilizará para representar raíces cuadradas, especialmente para dejar indicadas las raíces de aquellos números cuyas raíces cuadradas no son fracciones, ni enteros.

Puntos esenciales:

Explicar que en la búsqueda de una raíz cuadrada inexacta, se obtiene una aproximación a esta mediante ensayos, elevando al cuadrado números decimales convenientes y descartando aquellos cuyo cuadrado se aleja del número dado.

Indicar cómo se representarán las raíces cuadradas positivas y cómo las negativas, y que cuando las raíces no son entero o fracción, estas quedan indicadas usando el signo de radical.

Indicar el uso del símbolo ≈ para aproximaciones de las raíces cuadradas.

C2: El signo de radical

P ¿Cuál es el número positivo cuyo cuadrado es 2?

S

$1^2 = 1$, $2^2 = 4$ — Indica que es un número decimal entre 1 y 2

$1{,}4^2 = 1{,}96$, $1{,}5^2 = 2{,}25$ — Indica que es un número decimal entre 1,4 y 1,5

$1{,}41^2 = 1{,}9881$, $1{,}42^2 = 2{,}0164$ — Indica que es un número decimal entre 1,41 y 1,42

Resp. aproximada: 1,41

$\sqrt{2} = 1{,}4142135623...$

$\sqrt{2}$ se lee raíz cuadrada de 2

C $\sqrt{}$ se llama signo radical

Para $a > 0$, sus raíces cuadradas son:

$\sqrt{a}$: raíz cuadrada positiva

$-\sqrt{a}$: raíz cuadrada negativa

Ej Usando $\sqrt{}$ indique las raíces cuadradas de 3.

$3 > 0$

Raíces cuadradas de 3: $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$

E 1. Usando $\sqrt{}$ indique las raíces cuadradas de:

a) 5 b) 11 c) 31

a) $\sqrt{5}$ y $-\sqrt{5}$

b) $\sqrt{11}$ y $-\sqrt{11}$

c) $\sqrt{31}$ y $-\sqrt{31}$

2. Calcule con cuatro cifras decimales:

a) $\sqrt{5} \approx 2{,}2361$

b) $\sqrt{11} \approx 3{,}3166$

c) $\sqrt{31} \approx 5{,}5678$

Contenido 3 Raíces cuadradas exactas

Aprendizajes esperados

Escribe raíces cuadradas sin utilizar el signo de radical.

Secuencia:

En la clase anterior se introdujo el signo de radical para representar raíces cuadradas. Dichas raíces no eran número enteros ni fracciones.

En esta clase se calculan raíces cuadradas que se pueden expresar sin el signo de radical. Tales raíces cuadradas se llaman raíces cuadradas exactas.

Puntos esenciales:

Explicar que $\sqrt{(-4)^2} \neq -4$, porque -4 es un número negativo.

Indicar que $\sqrt{a^2} = a$ es válida solamente si a es un número no negativo.

Explicar que si $\sqrt{a^2} = a$, entonces $-\sqrt{a^2} = -a$.

Aclarar que el 0 tiene una sola raíz cuadrada, pues el opuesto de este es el mismo 0.

Unidad 4: Radicales

Contenido 3: Raíces cuadradas exactas

P

Calcule: a) $\sqrt{16}$ b) $\sqrt{(-4)^2}$ c) $-\sqrt{16}$ d) $\sqrt{0}$

S

a) Si $16 = 4^2$, entonces:

$$\sqrt{16} = \sqrt{4^2}$$
$$= \mathbf{4}$$

b) Igualmente, si $(-4)^2 = 16$, entonces:

$$\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16}$$
$$= \sqrt{4^2}$$
$$= \mathbf{4}$$

c) Si $16 = 4^2$, entonces:

$$-\sqrt{16} = -\sqrt{4^2}$$
$$= \mathbf{-4}$$

d) $0 = 0^2$, significa que:

$$\sqrt{0} = \sqrt{0^2}$$
$$= \mathbf{0}$$

Nótese que el 0 tiene una única raíz cuadrada.

Las dos raíces cuadradas de $a>0$, también se pueden escribir como $\pm\sqrt{a}$ y se lee más-menos raíz cuadrada de a.

Las dos raíces cuadradas de 16 son ± 4.

C

Las raíces cuadradas que se pueden expresar sin el signo de radical se llaman **raíces cuadradas exactas.**

Si $a>0$, entonces:

$$\sqrt{a^2} = a$$
$$-\sqrt{a^2} = -a$$

E

Calcule las siguientes raíces cuadradas:

a) $\sqrt{25}$ b) $\sqrt{(-6)^2}$ c) $-\sqrt{49}$

74

C3: Raíces cuadradas exactas

(P) Calcule:

(S) a) $\sqrt{16} = \sqrt{4^2}$
$= 4$

b) $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16}$
$= \sqrt{4^2}$
$= 4$

c) $-\sqrt{16} = -\sqrt{4^2}$
$= -4$

Las raíces cuadradas de 16 son $\pm\sqrt{16} = \pm 4$.

d) $\sqrt{0} = \sqrt{0^2}$
$= 0$

El 0 tiene una sola raíz cuadrada, y es el mismo 0.

(C) Raíces cuadradas exactas son aquellas que se pueden espresar sin el signo $\sqrt{\ }$.

Para $a > 0$, se tiene:

$$\sqrt{a^2} = a$$
$$-\sqrt{a^2} = -a$$

(E) Calcule:

a) $\sqrt{25} = \sqrt{5^2}$
$= 5$

b) $\sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36}$
$= \sqrt{6^2}$
$= 6$

c) $-\sqrt{49} = -\sqrt{7^2}$
$= -7$

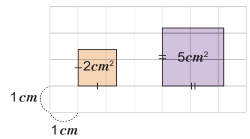
Contenido 4 Comparación de raíces cuadradas

Contenido 4: Comparación de raíces cuadradas

P En la figura de la derecha se muestran dos cuadrados con áreas respectivas de $2\,cm^2$ y $5\,cm^2$.

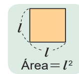
a) Encuentre la medida del lado de cada cuadrado.

b) Observe la figura y compare las raíces cuadradas obtenidas en el inciso anterior.



S a) Sea x el número positivo que representa la medida del lado del cuadrado de área $2\ cm^2$, entonces:

$$x^2 = 2$$
$$x = \sqrt{2}$$

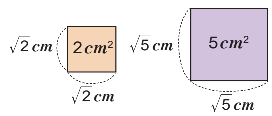


Sea y el número positivo que representa la medida del lado del cuadrado con área $5\ cm^2$, entonces:

$$y^2 = 5$$
$$y = \sqrt{5}$$

Medida del lado del cuadrado de área $2\ cm^2$: $\sqrt{2}\ cm$

Medida del lado del cuadrado de área $5\ cm^2$: $\sqrt{5}\ cm$



b) En la figura se observa que la medida del lado del cuadrado de menor área es menor que la medida del lado del cuadrado de mayor área. Esto significa que $\sqrt{2} < \sqrt{5}$.

C Si a y b son números positivos, entonces se verifica la siguiente propiedad:

Si $a < b$, entonces $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Ejemplo Escriba en el recuadro el signo $<$ o $>$ según corresponda.

a) $\sqrt{3}\ \square\ \sqrt{7}$ b) $-\sqrt{3}\ \square\ -\sqrt{7}$ c) $2\ \square\ \sqrt{5}$

a) Como se cumple que $3<7$, entonces $\sqrt{3}\ \boxed{<}\ \sqrt{7}$.

b) Puesto que $\sqrt{3}<\sqrt{7}$, entonces $-\sqrt{3}\ \boxed{>}\ -\sqrt{7}$.

c) De $4 < 5$, resulta que $\sqrt{4} < \sqrt{5}$.

Al ser $\sqrt{4}=2$, entonces $2\ \boxed{<}\ \sqrt{5}$.

> Si a y b son números positivos y $a<b$, entonces $-a>-b$.
> Ejemplo:
> Si $3 < 5$, entonces $-3 > -5$.

E Escriba en el recuadro el signo $<$ o $>$ según corresponda.

a) $\sqrt{5}\ \square\ \sqrt{2}$ b) $\sqrt{11}\ \square\ \sqrt{13}$ c) $3\ \square\ \sqrt{10}$ d) $-\sqrt{3}\ \square\ \sqrt{7}$

75

Aprendizajes esperados

Compara raíces cuadradas.

Secuencia:

En séptimo grado se compararon números enteros y fraccionarios.

En esta clase se comparan raíces cuadradas, y para ello deben compararse los números (enteros o fraccionarios) que estén dentro del signo de radical.

Puntos esenciales:

Resaltar que una raíz cuadrada es menor que otra, si el número dentro del signo de radical de esta es menor que el número dentro del signo de radical de la otra.

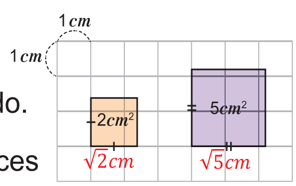
Indicar que cuando se compara una raíz cuadrada exacta con una raíz cuadrada que está expresada con el signo de radical, la raíz exacta debe expresarse usando el signo de radical para así comparar los números que están dentro del signo de radical.

Recordar que el opuesto del menor de dos números positivos, es el mayor de ambos opuestos; y que todo número negativo es menor que un positivo.

C4: Comparación de raíces cuadradas

P a) Encuentre la medida del lado de cada cuadrado.

b) Compare las raíces cuadradas obtenidas.



S a) Área $= l^2$, es decir $l = \sqrt{\text{Área}}$.

Lado del cuadrado de área $2\ cm^2$: $\sqrt{2}\ cm$

Lado del cuadrado de área $5\ cm^2$: $\sqrt{5}\ cm$

b) $\sqrt{2} < \sqrt{5}$

C Sean a y b números positivos.

Si $a < b$, entonces $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Ej Escriba en $\square$ el signo $<$ o $>$ según corresponda.

a) $\sqrt{3}\ \square\ \sqrt{7}$ b) $-\sqrt{3}\ \square\ -\sqrt{7}$ c) $2\ \square\ \sqrt{5}$

a) $3 < 7 \rightarrow \sqrt{3} < \sqrt{7}$

b) $\sqrt{3} < \sqrt{7} \rightarrow -\sqrt{3} > -\sqrt{7}$ $\boxed{a < b \rightarrow -a > -b}$

c) $4 < 5 \rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{5}$

$\rightarrow 2 < \sqrt{5}$

E a) $\sqrt{5}\ \boxed{>}\ \sqrt{2}$ b) $\sqrt{11}\ \boxed{<}\ \sqrt{13}$

c) $3\ \boxed{<}\ \sqrt{10}$ d) $-\sqrt{3}\ \boxed{<}\ \sqrt{7}$

Contenido 5 Decimales infinitos periódicos y no periódicos

Aprendizajes esperados

Clasifica números decimales infinitos en periódicos o no periódicos.

Secuencia:

En sexto grado se expresaron fracciones en forma decimal y se efectuaron operaciones con números decimales.

En esta clase se clasifican los números decimales en finitos e infinitos. Los infinitos a su vez se clasifican en decimales infinitos periódicos y no periódicos. Esta clasificación se utilizará en clases posteriores, en la confirmación de los números reales.

Puntos esenciales:

Indicar que toda fracción puede ser expresada como un número decimal finito o infinito.

Mencionar que el período de un número decimal infinito está formado por las cifras que se repiten.

Señalar que las raíces cuadradas que no se pueden expresar sin el signo de radical, son números decimales infinitos no periódicos.

Unidad 4: Radicales

Contenido 5: Decimales infinitos periódicos y no periódicos

P

Escriba en forma decimal los siguientes números fraccionarios:

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{7}{8}$ c) $\frac{5}{11}$ d) $\frac{4}{7}$

S

a) $\frac{2}{5}=0,4$ b) $\frac{7}{8}=0,875$

c) $\frac{5}{11}=0,45454545\ldots$ d) $\frac{4}{7}=0,571428571428\ldots$

$\frac{2}{5}$ se convierte en decimal, digitando en la calculadora $2 \div 5$

Observe que:

- los decimales en a) y b) tienen un número finito de cifras decimales.
- los decimales en c) y d) tienen infinitas cifras decimales.
- las cifras decimales en c) y d) tienen un período.

En c) el período es 45 y en d) el período es 571428.

Se llama **período** de un número decimal a la cifra decimal que se repite consecutivamente, lo cual se da de forma infinita.

Para indicar el período se escribe:

$$0,45454545\ldots=0,\overline{45}$$
$$0,571428571428\ldots=0,\overline{571428}$$

C

Un número decimal puede tener un número de cifras decimales finito o infinito.

Cuando un número decimal infinito tiene período este se llama **decimal infinito periódico**. En caso de que el decimal infinito no tenga período, se llamará **decimal infinito no periódico**.

Ejemplo Clasifique los números dados en periódicos o no periódicos, según corresponda.

a) 0,18181818… b) 0,285714285714… c) $\sqrt{2}=1,4142135623\ldots$

a) 0,18181818… es periódico, con período 18.

b) 0,285714285714… es periódico, cuyo período es 285714.

c) $\sqrt{2}=1,4142135623\ldots$ es no periódico.

E

Clasifique los siguientes números decimales infinitos en periódicos o no periódicos según corresponda:

a) $\sqrt{3}=1,7320508075\ldots$ b) $0,13131313\ldots$ c) $0,12341234\ldots$

76

C5: Decimales infinitos periódicos y no periódicos

P Escriba en forma decimal:

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{7}{8}$ c) $\frac{5}{11}$ d) $\frac{4}{7}$

S a) $\frac{2}{5}=0,4$

b) $\frac{7}{8}=0,875$

c) $\frac{5}{11}=0,45\ 45\ 45\ 45\ \ldots$

d) $\frac{4}{7}=0,571428\ 571428\ \ldots$

Leer en LT el concepto de período.

En c) el período es 45 y en d) el período es 571428.

$$0,45\ 45\ 45\ 45\ \ldots=0,\overline{45}$$
$$0,571428\ 571428\ \ldots=0,\overline{571428}$$

C Decimal infinito periódico: tiene período.
Decimal infinito no periódico: no tiene período.

Ej Clasifique en periódicos o no periódicos.

a) $0,18\ 18\ 18\ 18\ \ldots$ b) $0,285714\ 285714\ \ldots$

c) $\sqrt{2}=1,4142135623\ \ldots$

a) Periódico, cuyo período es 18.
b) Periódico, cuyo período es 285714.
c) No periódico.

E Clasifique en periódicos o no periódicos.

a) $\sqrt{3}=1,7320508075\ \ldots$ b) $0,13\ 13\ 13\ 13\ \ldots$

c) $0,1234\ 1234\ \ldots$

a) No periódico.
b) Periódico, cuyo período es 13.
c) Periódico, cuyo período es 1234.

Contenido 6 Números racionales, números irracionales y números reales

Sección 1: Raíz cuadrada

Contenido 6: Números racionales, números irracionales y números reales

P

Escriba como una fracción los siguientes números:
a) 5 b) -2 c) 1,7 d) 0,27

S

a) $5=\frac{5}{1}$ b) $-2=-\frac{2}{1}$

c) $1{,}7=\frac{17}{10}$ d) $0{,}27=\frac{27}{100}$

C

Los números que se pueden expresar como el cociente de dos números enteros se llaman **números racionales o fraccionarios**.
Los números que no son racionales se llaman **números irracionales**.
Los números racionales e irracionales forman los números reales.

Conjuntos Numéricos

Números Reales
- Números racionales
  - Números enteros
    - Enteros positivos (Naturales)
    - Cero
    - Enteros negativos
  - Fracciones no enteras
- Números irracionales

Ejemplo Clasifique los siguientes números en racional o irracional según corresponda:

a) $\sqrt{16}$ b) $\sqrt{2}$ c) π

Un decimal infinito no periódico no se puede expresar como el cociente de dos números enteros.

a) $\sqrt{16}=4=\frac{4}{1}$, por lo cual **es un número racional**.

b) $\sqrt{2}=1{,}4142135623\ldots$
$\sqrt{2}$ es número decimal infinito no periódico, es decir no se puede expresar como una fracción. Esto significa que $\sqrt{2}$ **es un número irracional**.

c) $\pi=3{,}1415926535\ldots$
π es número decimal infinito no periódico, así que no se puede expresar como una fracción. Esto significa que π **es un número irracional**.

E

Clasifique los siguientes números en racional o irracional según corresponda:

a) $\frac{1}{5}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{36}$ d) 3

77

Aprendizajes esperados

Clasifica números en racionales o irracionales.

Secuencia:

Desde primaria se trabajó con los números naturales, el cero y las fracciones positivas. En séptimo se han estudiado los números enteros, y las fracciones positivas y negativas.

En esta clase se estudian los números racionales e irracionales, los cuales forman al conjunto de los números reales.

Puntos esenciales:

Explicar cuándo un número es racional y cuándo es irracional.

Señalar que todo entero y decimal finito puede ser expresado como fracción.

Indicar que los números decimales infinitos no periódicos, no pueden ser expresados como una fracción.

Identificar que las raíces cuadradas no exactas son números irracionales.

Mencionar que los racionales e irracionales forman los números reales.

Recordar que el número π fue estudiado en 7mo grado, en el tratamiento de la circunferencia.

C6: Números racionales, números irracionales y números reales

P Escriba como una fracción:
a) 5 b) -2 c) 1,7 d) 0,27

S a) $5=\frac{5}{1}$ b) $-2=-\frac{2}{1}$
c) $1{,}7=\frac{17}{10}$ d) $0{,}27=\frac{27}{100}$

C Números que se pueden expresar como fracción se llaman números racionales.

Los números que no son racionales se llaman números irracionales.

Los números racionales e irracionales forman los números reales.

Ej Clasifique en racional o irracional.
a) $\sqrt{16}$ b) $\sqrt{2}$ c) π

a) $\sqrt{16}=4=\frac{4}{1}$, es racional.

b) $\sqrt{2}=1{,}4142135623\cdots$ es un decimal infinito no periódico, por lo cual es irracional.

c) $\pi=3{,}1415926535\cdots$ es irracional.

E Clasifique en racional o irracional.
a) $\frac{1}{5}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{36}$ d) 3

a) $\frac{1}{5}$ es racional.

b) $\sqrt{5}=2{,}2360679774\cdots$ es un decimal infinito no periódico, por lo cual es irracional.

c) $\sqrt{36}=6=\frac{6}{1}$ es racional.

d) $3=\frac{3}{1}$ es racional.

Contenido 1 Multiplicación de raíces cuadradas

Aprendizajes esperados

Aplica la multiplicación de raíces cuadradas en la solución de ejercicios.

Secuencia:

En séptimo grado se estudió la multiplicación de números enteros, la potenciación, y en la sección anterior se calcularon raíces cuadradas.

En esta clase se estudia la multiplicación de raíces cuadradas.

Puntos esenciales:

Recordar el concepto del cuadrado de un número, y las propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación.

Indicar que el cuadrado de una raíz cuadrada es el número dentro del signo de radical, $(\sqrt{a})^2 = a,\ a \geq 0$.

Resaltar cómo se usa el concepto de raíz cuadrada en el inciso b) del problema.

Señalar que para multiplicar dos raíces cuadradas, hay que calcular (si se puede) o dejar indicada la raíz cuadrada del producto de los números dentro del signo de radical.

Recordar que el producto de dos positivos o negativos es un positivo, y el producto de un positivo por un negativo es un negativo.

Sección 2: Operaciones con raíces cuadradas

Contenido 1: Multiplicación de raíces cuadradas

P

a) Escriba $[(\sqrt{3})(\sqrt{5})]^2$ como el producto de dos enteros positivos.

Si $a > 0$, entonces $(\sqrt{a})^2 = a$.

b) ¿Son iguales $(\sqrt{3})(\sqrt{5})$ y $\sqrt{(3)(5)}$?

S

a) Se aplica $a^2 = a \cdot a$, de modo que

$$\begin{aligned}[(\sqrt{3})(\sqrt{5})]^2 &= [(\sqrt{3})(\sqrt{5})][(\sqrt{3})(\sqrt{5})]\\ &= (\sqrt{3})(\sqrt{5})(\sqrt{3})(\sqrt{5})\\ &= (\sqrt{3})(\sqrt{3})(\sqrt{5})(\sqrt{5})\\ &= (\sqrt{3})^2(\sqrt{5})^2\\ &= (3)(5)\end{aligned}$$

Es decir, $[(\sqrt{\mathbf{3}})(\sqrt{\mathbf{5}})]^2 = (\mathbf{3})(\mathbf{5})$.

b) En a) se obtuvo que $[(\sqrt{3})(\sqrt{5})]^2 = (3)(5)$ así que, por definición de raíz cuadrada, $(\sqrt{3})(\sqrt{5})$ es la raíz cuadrada de (3)(5), es decir:

$$(\sqrt{\mathbf{3}})(\sqrt{\mathbf{5}}) = \sqrt{(\mathbf{3})(\mathbf{5})}$$

C

Si $a>0$ y $b>0$, entonces se verifica la siguiente propiedad:

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

Ejemplo Calcule:

a) $(\sqrt{18})(\sqrt{2})$ b) $(\sqrt{3})(\sqrt{7})$ c) $(-\sqrt{3})(\sqrt{7})$ d) $(-\sqrt{3})(-\sqrt{7})$

Se efectúan los productos aplicando la propiedad de la conclusión anterior:

a) $(\sqrt{18})(\sqrt{2}) = \sqrt{(18)(2)} = \sqrt{36} = \mathbf{6}$

b) $(\sqrt{3})(\sqrt{7}) = \sqrt{(3)(7)} = \sqrt{\mathbf{21}}$

c) $(-\sqrt{3})(\sqrt{7}) = -\sqrt{(3)(7)} = -\sqrt{\mathbf{21}}$

d) $(-\sqrt{3})(-\sqrt{7}) = \sqrt{(3)(7)} = \sqrt{\mathbf{21}}$

E

Calcule:

a) $(\sqrt{32})(\sqrt{2})$ b) $(\sqrt{5})(\sqrt{7})$ c) $(-\sqrt{27})(\sqrt{3})$ d) $(-\sqrt{7})(-\sqrt{6})$

79

S2: Operaciones con raíces cuadradas
C1: Multiplicación de raíces cuadradas

P a) Escriba $[(\sqrt{3})(\sqrt{5})]^2$ como el producto de dos enteros positivos.

b) ¿$(\sqrt{3})(\sqrt{5}) = \sqrt{(3)(5)}$?

S a)
$$\begin{aligned}[(\sqrt{3})(\sqrt{5})]^2 &= [(\sqrt{3})(\sqrt{5})][(\sqrt{3})(\sqrt{5})]\\ &= (\sqrt{3})(\sqrt{5})(\sqrt{3})(\sqrt{5})\\ &= (\sqrt{3})(\sqrt{3})(\sqrt{5})(\sqrt{5})\\ &= (\sqrt{3})^2(\sqrt{5})^2\\ &= (3)(5)\end{aligned}$$

b) $[(\sqrt{3})(\sqrt{5})]^2 = (3)(5)$ Resultado anterior

$$\sqrt{[(\sqrt{3})(\sqrt{5})]^2} = \sqrt{(3)(5)}$$
$$(\sqrt{3})(\sqrt{5}) = \sqrt{(3)(5)}$$

C Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces
$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

Ej Calcule:

a) $(\sqrt{18})(\sqrt{2}) = \sqrt{(18)(2)} = \sqrt{36} = 6$

b) $(\sqrt{3})(\sqrt{7}) = \sqrt{(3)(7)} = \sqrt{21}$

c) $(-\sqrt{3})(\sqrt{7}) = -\sqrt{21} = -\sqrt{(3)(7)} = -\sqrt{21}$

d) $(-\sqrt{3})(-\sqrt{7}) = \sqrt{(3)(7)} = \sqrt{21}$

E a) $(\sqrt{32})(\sqrt{2}) = \sqrt{(32)(2)} = \sqrt{64} = 8$

b) $(\sqrt{5})(\sqrt{7}) = \sqrt{(5)(7)} = \sqrt{35}$

c) $(-\sqrt{27})(\sqrt{3}) = -\sqrt{(27)(3)} = -\sqrt{81} = -9$

d) $(-\sqrt{7})(-\sqrt{6}) = \sqrt{(7)(6)} = \sqrt{42}$

Contenido 2 División de raíces cuadradas

Contenido 2: División de raíces cuadradas

P

a) Escriba $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2$ como el cociente de dos enteros positivos.

b) ¿Son iguales $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ y $\sqrt{\frac{3}{5}}$?

Si $a>0$, entonces $(\sqrt{a})^2=a$.

S

a) $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)=\frac{(\sqrt{3})(\sqrt{3})}{(\sqrt{5})(\sqrt{5})}=\frac{(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5})^2}=\frac{3}{5}$

Es decir, $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{3}{5}$.

b) En a) se obtuvo que $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{3}{5}$, así que por definición de raíz cuadrada $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ es la raíz cuadrada de $\frac{3}{5}$, es decir:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{3}{5}}$$

C

Si $a>0$ y $b>0$, entonces es válida la igualdad:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Ejemplo Simplifique las siguientes expresiones:

a) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{12}}$ c) $\frac{-\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$

Se aplica la propiedad establecida en la conclusión anterior:

a) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{18}{2}}$
$=\sqrt{9}$
$=\mathbf{3}$

b) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{12}}=\sqrt{\frac{10}{12}}$
$=\sqrt{\frac{5}{6}}$

c) $\frac{-\sqrt{20}}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$
$=-\sqrt{\frac{20}{5}}$
$=-\sqrt{4}$
$=-\mathbf{2}$

E

Simplifique las siguientes expresiones:

a) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{10}}$ c) $\frac{-\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

Aprendizajes esperados

Aplica la división de raíces cuadradas en la solución de ejercicios.

Secuencia:

En séptimo grado se estudió la división de números enteros, la multiplicación de fracciones y la potenciación. En la sección anterior se calcularon raíces cuadradas y en la clase precedente el producto de estas.

En esta clase se estudia la división de raíces cuadradas.

Puntos esenciales:

Recordar el concepto del cuadrado de un número y la multiplicación de fracciones.

Indicar que el cuadrado de una raíz cuadrada es el número dentro del signo de radical.

Resaltar cómo se usa el concepto de raíz cuadrada en el inciso b) del problema.

Señalar que para dividir dos raíces cuadradas, hay que calcular (si se puede) o dejar indicada la raíz cuadrada del cociente (ya simplificado) de los números dentro del signo de radical (en el orden en que están).

Recordar que el cociente de dos positivos o negativos es un positivo, y el cociente de un positivo y un negativo es un negativo.

C2: División de raíces cuadradas

P a) Escriba $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2$ como el cociente de dos enteros.

b) ¿$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{3}{5}}$?

S a) $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$
$=\frac{(\sqrt{3})(\sqrt{3})}{(\sqrt{5})(\sqrt{5})}$
$=\frac{(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5})^2}$
$=\frac{3}{5}$

b) $\overbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{3}{5}}^{\text{Resultado anterior}}\Rightarrow\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{5}}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{3}{5}}$

C Si $a>0$ y $b>0$, entonces

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Ej Simplifique:

a) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{18}{2}}$
$=\sqrt{9}$
$=3$

b) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{12}}=\sqrt{\frac{10}{12}}$
$=\sqrt{\frac{5}{6}}$

c) $\frac{-\sqrt{20}}{\sqrt{5}}=-\sqrt{\frac{20}{5}}$
$=-\sqrt{4}$
$=-2$

E a) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{32}{2}}$
$=\sqrt{16}$
$=4$

b) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{10}}=\sqrt{\frac{15}{10}}$
$=\sqrt{\frac{3}{2}}$

c) $\frac{-\sqrt{45}}{\sqrt{5}}=-\sqrt{\frac{45}{5}}$
$=-\sqrt{9}$
$=-3$

Contenido 3 Introducción de factores naturales dentro del signo de radical

Aprendizajes esperados

Representa factores naturales dentro del signo radical.

Secuencia:

En la primera clase de esta sección se multiplicaron raíces cuadradas.

En esta clase se introducen factores naturales dentro del signo de radical, y la multiplicación de raíces cuadradas es indispensable para su comprensión.

Puntos esenciales:

Aclarar que el objetivo de introducir un factor natural dentro del signo de radical, es expresar el producto dado como la raíz cuadrada de un número.

Indicar que el número natural es la raíz cuadrada de su cuadrado.

Explicar que después de expresar el número natural usando el signo de radical, se realiza la multiplicación de raíces cuadradas.

Señalar que al ser $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$, entonces $-a\sqrt{b}=-\sqrt{a^2b}$.

Contenido 3: Introducción de factores naturales dentro del signo de radical

P Escriba en la forma $\sqrt{c}$ los siguientes números:

a) $3\sqrt{2}$ b) $5\sqrt{3}$

S

a) Se aplica la propiedad $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$:

$$3\sqrt{2}=(\sqrt{3^2})(\sqrt{2})=\sqrt{(3^2)(2)}=\sqrt{(9)(2)}=\sqrt{18}$$

$3=\sqrt{3^2}$

b) Se aplica la propiedad $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$:

$$5\sqrt{3}=(\sqrt{5^2})(\sqrt{3})=\sqrt{(5^2)(3)}=\sqrt{(25)(3)}=\sqrt{75}$$

$5=\sqrt{5^2}$

C

Si $a>0$ y $b>0$, entonces se cumple que:

$$a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$$

E₁ Escriba en la forma $\sqrt{c}$ los siguientes números:

a) $3\sqrt{5}$ b) $6\sqrt{2}$

Ejemplo Escriba en la forma $-\sqrt{c}$ el número $-3\sqrt{7}$.

Se introduce 3 dentro del signo radical aplicando la conclusión anterior.

$$-3\sqrt{7}=-\sqrt{(3^2)(7)}=-\sqrt{(9)(7)}=-\sqrt{63}$$

E₂ Escriba en la forma $-\sqrt{c}$ los siguientes números:

a) $-2\sqrt{7}$ b) $-4\sqrt{2}$

C3: Introducción de factores naturales dentro del signo de radical

P Escriba en la forma $\sqrt{c}$ los números:

a) $3\sqrt{2}$ b) $5\sqrt{3}$

S

a) $3\sqrt{2}=(\sqrt{3^2})(\sqrt{2})=\sqrt{(3^2)(2)}=\sqrt{(9)(2)}=\sqrt{18}$

b) $5\sqrt{3}=(\sqrt{5^2})(\sqrt{3})=\sqrt{(5^2)(3)}=\sqrt{(25)(3)}=\sqrt{75}$

C Si $a>0$ y $b>0$, entonces

$$a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$$

E Escriba en la forma $\sqrt{c}$ los números:

a) $3\sqrt{5}=(\sqrt{3^2})(\sqrt{5})=\sqrt{(3^2)(5)}=\sqrt{(9)(5)}=\sqrt{45}$

b) $6\sqrt{2}=(\sqrt{6^2})(\sqrt{2})=\sqrt{(6^2)(2)}=\sqrt{(36)(2)}=\sqrt{72}$

Ej Escriba en la forma $-\sqrt{c}$ el número $-3\sqrt{7}$.

$$-3\sqrt{7}=-\sqrt{(3^2)(7)}=-\sqrt{(9)(7)}=-\sqrt{63}$$

E

a) $-2\sqrt{7}=-\sqrt{(2^2)(7)}=-\sqrt{(4)(7)}=-\sqrt{28}$

b) $-4\sqrt{2}=-\sqrt{(4^2)(2)}=-\sqrt{(16)(2)}=-\sqrt{32}$

Contenido 4 Simplificación de raíces cuadradas

Unidad 4: Radicales

Contenido 4: Simplificación de raíces cuadradas

P

a) Exprese a 12 como el producto de sus factores primos.

b) Escriba $\sqrt{12}$ en la forma $a\sqrt{b}$, siendo a un número natural.

S

a) Se descompone 12 en sus factores primos.

12	2
6	2
3	3
1	

Así $12 = 2\times2\times3 = (2^2)(3)$

b) $\sqrt{12} = \sqrt{(2^2)(3)}$
$= (\sqrt{2^2})(\sqrt{3})$
$= \mathbf{2\sqrt{3}}$

- **Numero primo** es un número natural mayor que 1, cuyos divisores son únicamente 1 y él mismo.
- **Factores primos de un número** son los divisores primos de ese número.
- Si $a>0$ y $b>0$, entonces $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

C

Una raíz cuadrada está simplificada si el número dentro del signo de radical no tiene factores que sean potencias de exponente dos.

Ejemplo Simplifique: a) $-\sqrt{28}$ b) $\sqrt{32}$

a) $28 = (2^2)(7)$, por lo cual

$-\sqrt{28} = -\sqrt{(2^2)(7)}$
$= -(\sqrt{2^2})(\sqrt{7})$
$= -\mathbf{2\sqrt{7}}$

28	2
14	2
7	7
1	

b) $32 = (2^2)(2^2)(2)$, luego

$\sqrt{32} = \sqrt{(2^2)(2^2)(2)}$
$= (\sqrt{2^2})(\sqrt{2^2})(\sqrt{2})$
$= (2)(2)(\sqrt{2})$
$= \mathbf{4\sqrt{2}}$

32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

E

Simplifique:

a) $\sqrt{18}$ b) $\sqrt{45}$ c) $\sqrt{80}$ d) $-\sqrt{75}$ e) $-\sqrt{150}$

82

Aprendizajes esperados

Aplica la multiplicación de radicales en la simplificación de raíces cuadradas inexactas.

Secuencia:

En la clase anterior se introdujo un factor natural dentro del signo de radical.

En esta clase se estudia el proceso inverso, pues dada la raíz cuadrada de un número, esta se simplifica escribiéndola como el producto de un número natural por la raíz cuadrada de otro número.

Puntos esenciales:

Aclarar que el objetivo de simplificar, es expresar la raíz cuadrada del número dado como el producto de un número natural por la raíz cuadrada de otro número.

Indicar que el número dentro del signo de radical, se debe descomponer como el producto de sus factores primos.

Señalar cómo se utiliza la multiplicación de raíces cuadradas en este caso.

Aclarar por qué en el inciso b) del ejemplo, 32 se escribe como $(2^2)(2^2)(2)$ y no como 2^5.

Explicar qué significa simplificar una raíz cuadrada.

C4: Simplificación de raíces cuadradas

(P) a) Exprese a 12 como el producto de sus factores primos.

b) Escriba $\sqrt{12}$ en la forma $a\sqrt{b}$.

(S) a)

12	2
6	2
3	3
1	

$12 = 2\times2\times3 = (2^2)(3)$

b) $\sqrt{12} = \sqrt{(2^2)(3)}$
$= \left(\sqrt{2^2}\right)\left(\sqrt{3}\right)$
$= 2\sqrt{3}$

(C) Una raíz cuadrada se simplifica:

1. Descomponiendo el número.
2. Aplicando $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
3. Encontrando las raíces cuadradas que se puedan.

(Ej) Simplifique: a) $-\sqrt{28}$ b) $\sqrt{32}$

a)

28	2
14	2
7	7
1	

$-\sqrt{28} = -\sqrt{(2^2)\,(7)}$
$= -(\sqrt{2^2})(\sqrt{7})$
$= -2\sqrt{7}$

b)

32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$\sqrt{32} = \sqrt{(2^2)(2^2)(2)}$
$= (\sqrt{2^2})\,(\sqrt{2^2})(\sqrt{2})$
$= (2)(2)(\sqrt{2})$
$= 4\sqrt{2}$

(E) a) $\sqrt{18} = \sqrt{(2)\,(3^2)}$
$= (\sqrt{2})\left(\sqrt{3^2}\right)$
$= 3\sqrt{2}$

18	2
9	3
3	3
1	

b) $\sqrt{45} = \sqrt{(3^2)(5)}$
$= \left(\sqrt{3^2}\right)(\sqrt{5})$
$= 3\sqrt{5}$

45	3
15	3
5	5
1	

Contenido 5 Racionalización

Aprendizajes esperados

Racionaliza expresiones que contienen raíces cuadradas.

Secuencia:

En séptimo grado se estudió la multiplicación de fracciones y la potenciación. En esta unidad se ha estudiado que el cuadrado de una raíz cuadrada es igual al número dentro del signo de radical, y cómo multiplicar y dividir raíces cuadradas.

En esta clase se estudia la racionalización, y son herramientas indispensables los contenidos mencionados anteriormente.

Puntos esenciales:

Indicar que el cuadrado de una raíz cuadrada es el número dentro del signo de radical.

Aclarar por qué se multiplica el numerador y el denominador por la raíz cuadrada que aparece en el denominador.

Explicar qué significa racionalizar el denominador.

Indicar que se debe tener cuidado en no olvidar multiplicar el numerador, y simplificar las fracciones cuando se pueda.

Contenido 5: Racionalización

P Verifique que $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

S Se multiplica el numerador y el denominador del cociente $\frac{1}{\sqrt{2}}$ por $\sqrt{2}$.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{(1)(\sqrt{2})}{(\sqrt{2})(\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Se observa que el denominador de la fracción transformada es un número entero.

Racionalizar el denominador de una fracción cuyo denominador tiene una raíz cuadrada es reescribir esta fracción de forma que el denominador sea un número entero.

C Para racionalizar el denominador de una fracción cuyo denominador tiene una raíz cuadrada, se multiplica por esta raíz cuadrada el numerador y el denominador.

Ejemplo Racionalice el denominador: a) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{6}{7\sqrt{2}}$

Para racionalizar los denominadores respectivos se aplica la conclusión anterior y las propiedades de los radicales:

a) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5})(\sqrt{3})}{(\sqrt{3})(\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{(5)(3)}}{(\sqrt{3})^2} = \mathbf{\frac{\sqrt{15}}{3}}$

b) $\frac{6}{7\sqrt{2}} = \frac{(6)(\sqrt{2})}{(7\sqrt{2})(\sqrt{2})} = \frac{6\sqrt{2}}{(7)(\sqrt{2})^2} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}\sqrt{2}}{(7)\underset{1}{\cancel{(2)}}} = \mathbf{\frac{3\sqrt{2}}{7}}$

E Racionalice el denominador:

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{5}{4\sqrt{3}}$ d) $\frac{8}{\sqrt{10}}$

C5: Racionalización

(P) Verifique que $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(S) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{(1)(\sqrt{2})}{(\sqrt{2})(\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(C) Para racionalizar el denominador:
1. Se multiplica el numerador y denominador por la raíz en el denominador.
2. Se multiplican y simplifican las raíces cuadradas.

(Ej) Racionalice el denominador:

a) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5})(\sqrt{3})}{(\sqrt{3})(\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{(5)(3)}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{15}}{3}$

b) $\frac{6}{7\sqrt{2}} = \frac{(6)(\sqrt{2})}{(7\sqrt{2})(\sqrt{2})} = \frac{6\sqrt{2}}{(7)(\sqrt{2})^2} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}\sqrt{2}}{(7)\cancel{(2)}} = \frac{3\sqrt{2}}{7}$

(E) a) $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{(1)(\sqrt{5})}{(\sqrt{5})(\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3})(\sqrt{2})}{(\sqrt{2})(\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{(3)(2)}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Contenido 7 Adición y sustracción de raíces cuadradas simplificadas

Contenido 7: Adición y sustracción de raíces cuadradas simplificadas

P

Efectúe las siguientes operaciones:

a) $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{2}-5\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{3}+5\sqrt{2}$

$ab+cb=(a+c)b$
$ab-cb=(a-c)b$

S

a) En ambos sumandos aparece el factor $\sqrt{2}$, así por la propiedad distributiva y suma de números enteros se tiene:

$$3\sqrt{2}+5\sqrt{2}=(3+5)\sqrt{2}$$
$$=\mathbf{8\sqrt{2}}$$

b) Se aplica nuevamente la propiedad distributiva y diferencia de números enteros.

$$3\sqrt{2}-5\sqrt{2}=(3-5)\sqrt{2}$$
$$=\mathbf{-2\sqrt{2}}$$

c) Los números que están dentro del signo radical son diferentes, y cada raíz cuadrada ya está simplificada, por lo cual la suma queda indicada.

C

Las sumas o restas de raíces cuadradas simplificadas se pueden reducir cuando el número dentro del signo de radical es el mismo. Si los números dentro del signo de radical son diferentes la suma o resta queda indicada.

Ejemplo Efectúe las siguientes operaciones:

a) $6\sqrt{5}-4\sqrt{5}$ b) $6\sqrt{7}+8\sqrt{7}-5\sqrt{2}$ c) $2-5\sqrt{3}+4\sqrt{3}$

a) $6\sqrt{5}-4\sqrt{5}=(6-4)\sqrt{5}$
$=\mathbf{2\sqrt{5}}$

b) $6\sqrt{7}+8\sqrt{7}-5\sqrt{2}=(6+8)\sqrt{7}-5\sqrt{2}$
$=\mathbf{14\sqrt{7}-5\sqrt{2}}$

c) $2-5\sqrt{3}+4\sqrt{3}=2+(-5+4)\sqrt{3}$
$=\mathbf{2-\sqrt{3}}$

E

Efectúe las siguientes operaciones:

a) $3\sqrt{5}+7\sqrt{5}$ b) $6\sqrt{7}+8\sqrt{7}$ c) $7\sqrt{6}-\sqrt{6}$

d) $11\sqrt{8}-5\sqrt{8}$ e) $3\sqrt{7}+2\sqrt{7}-6$ f) $17\sqrt{13}+5\sqrt{11}-11\sqrt{13}$

Aprendizajes esperados

Aplica la adición y sustracción de raíces cuadradas con la misma cantidad dentro del signo de radical.

Secuencia:

En séptimo grado se estudió la suma y resta de números enteros, la propiedad distributiva, y en la primera unidad de este grado se sumaron y se restaron términos semejantes.

En esta clase se suman raíces cuadradas simplificadas, y los temas mencionados anteriormente son necesarios para su comprensión.

Puntos esenciales:

Recordar cómo se suman o restan términos semejantes.

Aclarar por qué la suma y resta de raíces cuadradas simplificadas funciona de la misma manera que la suma y resta de términos semejantes. (Uso de la propiedad distributiva)

Indicar que se debe tener cuidado con los signos al sumar y restar números enteros.

Señalar que cuando los números dentro del signo de radical son diferentes, entonces la suma o resta queda indicada.

C7: Adición y sustracción de raíces cuadradas simplificadas

(P) Efectúe las operaciones:

(S) a) $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}=(3+5)\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

b) $3\sqrt{2}-5\sqrt{2}=(3-5)\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$

c) $2\sqrt{3}+5\sqrt{2}$ La suma queda indicada.

(C) Se suman o restan raíces cuadradas simplificadas aplicando la propiedad distributiva.

Si los números dentro del signo de radical son diferentes la suma o resta queda indicada.

(Ej) Calcule:

a) $6\sqrt{5}-4\sqrt{5}=(6-4)\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

b) $6\sqrt{7}+8\sqrt{7}-5\sqrt{2}=(6+8)\sqrt{7}-5\sqrt{2}$
$=14\sqrt{7}-5\sqrt{2}$

c) $2-5\sqrt{3}+4\sqrt{3}=2+(-5+4)\sqrt{3}=2-\sqrt{3}$

(E) a) $3\sqrt{5}+7\sqrt{5}=(3+7)\sqrt{5}=10\sqrt{5}$

b) $6\sqrt{7}+8\sqrt{7}=(6+8)\sqrt{7}=14\sqrt{7}$

c) $7\sqrt{6}-\sqrt{6}=(7-1)\sqrt{6}=6\sqrt{6}$

e) $3\sqrt{7}+2\sqrt{7}-6=(3+2)\sqrt{7}-6=5\sqrt{7}-6$

Contenido 8 Adición y sustracción de raíces cuadradas no simplificadas

Aprendizajes esperados

Aplica la adición y sustracción de raíces cuadradas con cantidades diferentes dentro del signo de radical.

Secuencia:

En esta sección se ha estudiado la simplificación de raíces cuadradas, y la suma y resta de raíces cuadradas simplificadas.

En esta clase se estudia la suma y resta de raíces cuadradas que no están simplificadas.

Puntos esenciales:

Señalar que al simplificar raíces cuadradas, el número dentro del signo de radical, debe tener factores que sean potencias de exponente 2.

Notar que estos factores no necesariamente deben ser prímos.

Mencionar que algunas raíces cuadradas pueden estar simplificadas.

Indicar que todas las raíces cuadradas deben estar simplificadas.

Explicar que al tener las raíces cuadradas ya simplificadas, se realizan las sumas o restas, cuidando de los signos.

Contenido 8: Adición y sustracción de raíces cuadradas no simplificadas

P

Efectúe las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{18}+\sqrt{50}$ b) $3\sqrt{12}-\sqrt{3}$

$\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$

S

a) Se simplifica $\sqrt{18}$ y $\sqrt{50}$ y se reducen las raíces cuadradas que tengan el mismo número dentro del signo de radical:

$$\begin{aligned}\sqrt{18}+\sqrt{50}&=\sqrt{(3^2)(2)}+\sqrt{(5^2)(2)}\\&=3\sqrt{2}+5\sqrt{2}\\&=\mathbf{8\sqrt{2}}\end{aligned}$$

18	2
9	3
3	3
1	

50	2
25	5
5	5
1	

b) Se simplifica $\sqrt{12}$ y se procede como en a):

$$\begin{aligned}3\sqrt{12}-\sqrt{3}&=3\sqrt{(2^2)(3)}-\sqrt{3}\\&=(3)(2)\sqrt{3}-\sqrt{3}\\&=6\sqrt{3}-\sqrt{3}\\&=\mathbf{5\sqrt{3}}\end{aligned}$$

12	2
6	2
3	3
1	

C

Para sumar o restar expresiones que tienen raíces cuadradas no simplificadas, se simplifican dichas raíces y se suman o restan aquellas cuyos números dentro del signo de radical sean el mismo.

Ejemplo

Efectúe las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{40}+\sqrt{90}$ b) $\sqrt{48}-\sqrt{27}+\sqrt{3}$

a) Como $40=(2^2)(10)$ y $90=(3^2)(10)$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\sqrt{40}+\sqrt{90}&=\sqrt{(2^2)(10)}+\sqrt{(3^2)(10)}\\&=2\sqrt{10}+3\sqrt{10}\\&=\mathbf{5\sqrt{10}}\end{aligned}$$

b) Dado que $48=(4^2)(3)$ y $27=(3^2)(3)$ resulta:

$$\begin{aligned}\sqrt{48}-\sqrt{27}+\sqrt{3}&=\sqrt{(4^2)(3)}-\sqrt{(3^2)(3)}+\sqrt{3}\\&=4\sqrt{3}-3\sqrt{3}+\sqrt{3}\\&=\mathbf{2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

E

Efectúe las siguientes operaciones entre expresiones con radicales:

a) $\sqrt{20}+\sqrt{45}$ b) $\sqrt{125}-\sqrt{45}$ c) $7\sqrt{44}+\sqrt{99}$ d) $\sqrt{98}+\sqrt{50}+\sqrt{18}$

C8: Adición y sustracción de raíces cuadradas no simplificadas

P Efectúe las operaciones:

S a) $$\begin{aligned}\sqrt{18}+\sqrt{50}&=\sqrt{(3^2)(2)}+\sqrt{(5^2)(2)}\\&=3\sqrt{2}+5\sqrt{2}\\&=8\sqrt{2}\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}3\sqrt{12}-\sqrt{3}&=3\sqrt{(2^2)(3)}-\sqrt{3}\\&=(3)(2)\sqrt{3}-\sqrt{3}\\&=6\sqrt{3}-\sqrt{3}\\&=5\sqrt{3}\end{aligned}$$

C Se suman o restan raíces cuadradas no simplificadas, simplificando las raíces cuadradas, y luego sumando o restando las raíces simplificadas.

Ej Efectúe las operaciones:

a) $$\begin{aligned}\sqrt{40}+\sqrt{90}&=\sqrt{(2^2)(10)}+\sqrt{(3^2)(10)}\\&=2\sqrt{10}+3\sqrt{10}\\&=5\sqrt{10}\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}\sqrt{48}-\sqrt{27}+\sqrt{3}&=\sqrt{(4^2)(3)}-\sqrt{(3^2)(3)}+\sqrt{3}\\&=4\sqrt{3}-3\sqrt{3}+\sqrt{3}\\&=2\sqrt{3}\end{aligned}$$

E a) $$\begin{aligned}\sqrt{20}+\sqrt{45}&=\sqrt{(2^2)(5)}+\sqrt{(3^2)(5)}\\&=2\sqrt{5}+3\sqrt{5}\\&=5\sqrt{5}\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}\sqrt{125}-\sqrt{45}&=\sqrt{(5^2)(5)}-\sqrt{(3^2)(5)}\\&=5\sqrt{5}-3\sqrt{5}\\&=2\sqrt{5}\end{aligned}$$

Contenido 9 Producto de expresiones con raíces cuadradas

Contenido 9: Producto de expresiones con raíces cuadradas

P

Multiplique:

a) $(\sqrt{2})(\sqrt{2}+3)$ b) $\sqrt{3}(5\sqrt{2}+\sqrt{11})$

S

a) Se aplica la propiedad distributiva, y resulta:

$$\begin{aligned}(\sqrt{2})(\sqrt{2}+3) &= (\sqrt{2})(\sqrt{2})+(\sqrt{2})(3)\\ &= (\sqrt{2})^2+3\sqrt{2}\\ &= \mathbf{2+3\sqrt{2}}\end{aligned}$$

b) Se aplica la propiedad distributiva, y se obtiene:

$$\begin{aligned}\sqrt{3}(5\sqrt{2}+\sqrt{11}) &= (\sqrt{3})(5\sqrt{2})+(\sqrt{3})(\sqrt{11})\\ &= (5)(\sqrt{3})(\sqrt{2})+\sqrt{33}\\ &= \mathbf{5\sqrt{6}+\sqrt{33}}\end{aligned}$$

C

La multiplicación de expresiones con raíces cuadradas se realiza aplicando la propiedad distributiva (en algunos casos la propiedad conmutativa) y la multiplicación de radicales.

Ejemplo Multiplique $\sqrt{3}(\sqrt{28}-5)$.

$$\begin{aligned}\sqrt{3}(\sqrt{28}-5) &= (\sqrt{3})(\sqrt{28})-(\sqrt{3})(5)\\ &= (\sqrt{3})\left(\sqrt{(2^2)(7)}\right)-5\sqrt{3}\\ &= (\sqrt{3})(2\sqrt{7})-5\sqrt{3}\\ &= (2)(\sqrt{3})(\sqrt{7})-5\sqrt{3}\\ &= \mathbf{2\sqrt{21}-5\sqrt{3}}\end{aligned}$$

E

Multiplique:

a) $\sqrt{3}(\sqrt{3}+7)$ b) $\sqrt{7}(\sqrt{6}-\sqrt{7})$ c) $\sqrt{3}(2\sqrt{5}+\sqrt{2})$ d) $\sqrt{5}(7\sqrt{5}-\sqrt{6})$

Aprendizajes esperados

Desarrolla multiplicaciones de expresiones con radicales.

Secuencia:

En la primera unidad de este grado se estudió la multiplicación de un monomio por un binomio. En la presente unidad se ha aprendido que el cuadrado de una raíz cuadrada es igual al número dentro del signo de radical, y cómo multiplicar raíces cuadradas.

En esta clase se estudia la multiplicación de expresiones con raíces cuadradas, y son herramientas básicas para su comprensión los contenidos mencionados anteriormente.

Puntos esenciales:

Indicar que este tipo de multiplicaciones, funciona de la misma manera que la multiplicación de un monomio por un binomio. (Uso de la propiedad distributiva)

Recordar que el cuadrado de una raíz cuadrada es el número dentro del signo de radical.

Señalar que hay raíces cuadradas que deben ser simplificadas.

Explicar la conclusión del libro de texto, utilizando la solución dada a los incisos del problema.

C9: Producto de expresiones con raíces cuadradas

(P) Multiplique:

(S) a) $$\begin{aligned}(\sqrt{2})(\sqrt{2}+3) &= (\sqrt{2})(\sqrt{2})+(\sqrt{2})(3)\\ &= (\sqrt{2})^2+3\sqrt{2}\\ &= 2+3\sqrt{2}\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}\sqrt{3}(5\sqrt{2}+\sqrt{11}) &= (\sqrt{3})(5\sqrt{2})+(\sqrt{3})(\sqrt{11})\\ &= (5)(\sqrt{3})(\sqrt{2})+\sqrt{33}\\ &= 5\sqrt{6}+\sqrt{33}\end{aligned}$$

(C) *Leer en el libro de texto.*

(Ej) $$\begin{aligned}\sqrt{3}(\sqrt{28}-5) &= (\sqrt{3})(\sqrt{28})-(\sqrt{3})(5)\\ &= (\sqrt{3})\left(\sqrt{(2)^2(7)}\right)-5\sqrt{3}\\ &= (\sqrt{3})(2\sqrt{7})-5\sqrt{3}\\ &= (2)(\sqrt{3})(\sqrt{7})-5\sqrt{3}\\ &= 2\sqrt{21}-5\sqrt{3}\end{aligned}$$

(E) a) $$\begin{aligned}(\sqrt{3})(\sqrt{3}+7) &= (\sqrt{3})(\sqrt{3})+(\sqrt{3})(7)\\ &= (\sqrt{3})^2+7\sqrt{3}\\ &= 3+7\sqrt{3}\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}\sqrt{7}(\sqrt{6}-\sqrt{7}) &= (\sqrt{7})(\sqrt{6})-(\sqrt{7})(\sqrt{7})\\ &= \sqrt{(7)(6)}-(\sqrt{7})^2\\ &= \sqrt{42}-7\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}\sqrt{3}(2\sqrt{5}+\sqrt{2}) &= (\sqrt{3})(2\sqrt{5})+(\sqrt{3})(\sqrt{2})\\ &= (2)(\sqrt{3})(\sqrt{5})+\sqrt{(3)(2)}\\ &= 2\sqrt{15}+\sqrt{6}\end{aligned}$$

Prueba de Matemática 8vo (30 min.) Fecha: ____________

Unidad 4: Radicales

Nombre: ______________________________ Sección: __________

Sexo: M / F

/ 20

1. Calcule las raíces cuadradas de 25. (1 punto)

2. Indique las raíces cuadradas de 3 usando el signo radical. (1 punto)

3. Escriba en el espacio en blanco el signo $<$ o $>$ según correspoda.
(1 punto $\times$ 3 $=$ 3)

   a) $\sqrt{3}$ _____ $\sqrt{7}$ b) $-\sqrt{3}$ _____ $-\sqrt{7}$ c) 2 _____ $\sqrt{5}$

4. Clasifique los siguientes números en racional o irracional según corresponda.
(1 punto $\times$ 3 $=$ 3)

   a) $\sqrt{16}$ b) $\sqrt{2}$ c) π

5. Racionalice el denominador de las siguientes fracciones: (1 punto $\times$ 2 $=$ 2)

   a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

6. Efectúe las siguientes operaciones: (1 puntos $\times$ 10 $=$ 10)

a) $\left(\sqrt{18}\right)\left(\sqrt{2}\right)$

b) $\left(-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}\right)$

c) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$

d) $3\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$

e) $2 - 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$

f) $\sqrt{18} + \sqrt{50}$

g) $\sqrt{125} - \sqrt{45}$

h) $\sqrt{48} - \sqrt{27} + \sqrt{3}$

i) $\sqrt{2}\left(\sqrt{2} + 3\right)$

j) $\sqrt{3}\left(\sqrt{28} - 5\right)$

Nombre: ________________________________

Unidad 5

Paralelismo

Contenido 1 Ángulos complementarios

Aprendizajes esperados

Aplica el concepto de ángulos complementarios para determinar medidas de ángulos.

Secuencia:

En séptimo grado se clasificaron ángulos en agudo, recto y obtuso.

En esta clase se estudia cómo calcular la medida de uno de dos ángulos en que está dividido un ángulo recto, y qué son ángulos complementarios.

Puntos esenciales:

Recordar qué es un ángulo agudo y qué es un ángulo recto, y la simbología para ángulos y medida de ángulos.

Señalar que, al dividir un ángulo recto en dos ángulos, estos son agudos.

Indicar que al estar dividido un ángulo recto en dos ángulos agudos y conocer la medida de uno de ellos, la medida del otro se encuentra restándole la conocida a 90°.

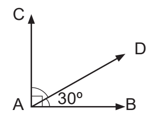
Aclarar que dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es 90°. La forma en cómo estén colocados no importa.

Unidad 5: Paralelismo

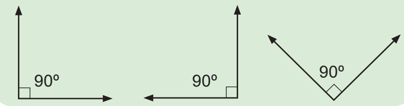
Sección 1: Resta de ángulos

Contenido 1: Ángulos complementarios

P Calcule la medida del ∠DAC.



Un ángulo que mide **90°** se llama **ángulo recto.**



S Se observa en la figura que ∡BAC = 90°, por lo cual ∡BAD + ∡DAC = 90°.

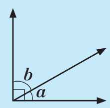
Como ∡BAD = 30°, entonces

$$30° + ∡DAC = 90°$$
$$∡DAC = 90° - 30°$$
$$∡DAC = 60°$$

Luego, **∡DAC = 60°**.

C En la figura de la derecha se cumple que:

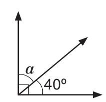
1. $a + b = 90°$
2. $a = 90° - b$
3. $b = 90° - a$

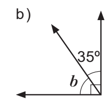


$∠a$: indica el ángulo con medida a

Dos ángulos cuyas medidas suman 90° se llaman **ángulos complementarios**.
Se observa en la figura que $∠a$ y $∠b$ son complementarios.

Ejemplo Dada la figura de la derecha, encuentre a y b.

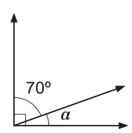
a) 

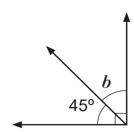
b) 

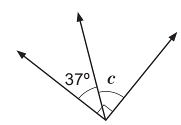
a) $a = 90° - 40° = 50°$
Luego, $\boldsymbol{a = 50°}$.

b) $b = 90° - 35° = 55°$
Luego, $\boldsymbol{b = 55°}$.

E Calcule a, b y c según corresponda.

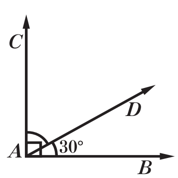
a) 

b) 

c) 

U5: Paralelismo
S1: Resta de ángulos
C1: Ángulos complementarios

P Calcule la medida del $∠DAC$

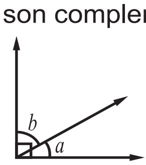


S $∡BAC = 90°$,
$∡BAD + ∡DAC = 90°$

$∡BAD = 30°$, así que

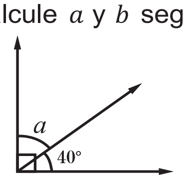
$$30° + ∡DAC = 90°$$
$$∡DAC = 90° - 30°$$
$$∡DAC = 60°$$

C Dos ángulos cuyas medidas suman 90° se llaman <u>ángulos complementarios</u>.
$∠a$ y $∠b$ son complementarios

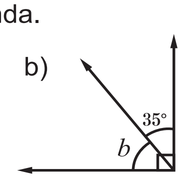


$$a + b = 90°$$
$$a = 90° - b$$
$$b = 90° - a$$

Ej Calcule a y b según corresponda.

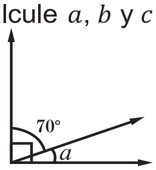
a) 

$$a = 90° - 40°$$
$$= 50°$$

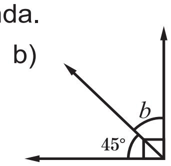
b) 

$$b = 90° - 35°$$
$$= 55°$$

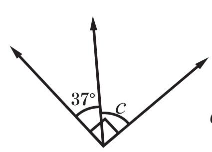
E Calcule a, b y c según corresponda.

a) 

$$a = 90° - 70°$$
$$= 20°$$

b) 

$$b = 90° - 45°$$
$$= 45°$$

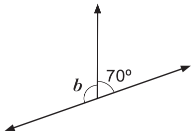
c) 

$$c = 90° - 37°$$
$$= 53°$$

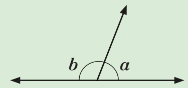
Contenido 2 Ángulos suplementarios

Contenido 2: Ángulos suplementarios

P Dada la figura de abajo, calcule b.



El $\angle a$ y el $\angle b$ forman un **par lineal**. La suma de sus medidas es 180°.



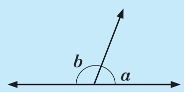
S Se observa en la figura dos ángulos que forman un par lineal, por lo cual:

$70° + b = 180°$
$b = 180° - 70°$
$= 110°$

Concluyendo que $\boldsymbol{b = 110°}$.

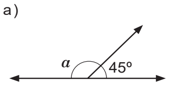
C En la figura, el $\angle a$ y el $\angle b$ forman un par lineal y por tanto se cumple que:

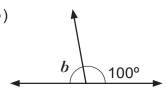
1. $a + b = 180°$
2. $a = 180° - b$
3. $b = 180° - a$



Dos ángulos cuyas medidas suman 180° se llaman **ángulos suplementarios**.
En la figura el $\angle a$ y el $\angle b$ son suplementarios.

Ejemplo Utilice la figura en cada caso para calcular a y b.

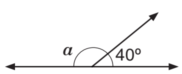
a) 

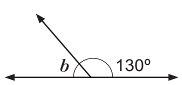
b) 

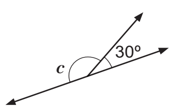
a) $a = 180° - 45°$
$= 135°$
Luego, $\boldsymbol{a = 135°}$.

b) $b = 180° - 100°$
$= 80°$
Por tanto, $\boldsymbol{b = 80°}$.

E Calcule a, b y c según corresponda.

a) 

b) 

c) 

Aprendizajes esperados

Aplica el concepto de ángulos suplementarios para determinar medidas de ángulos.

Secuencia:

En la clase anterior se estudió que si un ángulo recto está dividido en dos agudos, y se conoce la medida de uno de ellos, entonces la medida del otro se calcula restando la medida del conocido a 90°.

En esta clase se estudia cómo calcular la medida de uno de dos ángulos que forman un par lineal, y qué son ángulos suplementarios.

Puntos esenciales:

Indicar qué es un par lineal.

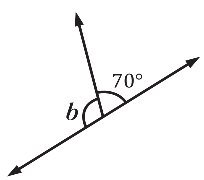
Señalar que la medida de uno de dos ángulos que forman un par lineal, se encuentra restándole la medida del otro a 180°.

Explicar que dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es 180°. La forma en cómo estén colocados no importa.

Aclarar que dos ángulos que forman un par lineal son suplementarios, pero dos ángulos suplementarios no siempre forman un par lineal.

C2: Ángulos suplementarios

(P) Dada la figura siguiente, calcule b



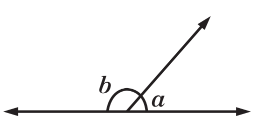
(S) $70° + b = 180°$

$b = 180° - 70°$

$b = 110°$

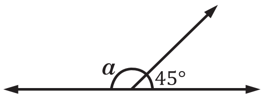
(C) Dos ángulos cuyas medidas suman 180° se llaman <u>ángulos suplementarios</u>.

$\angle a$ y $\angle b$ son suplementarios.

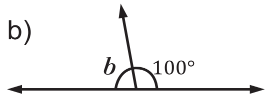


$a + b = 180°$
$a = 180° - b$
$b = 180° - a$

(Ej) Calcule a y b.

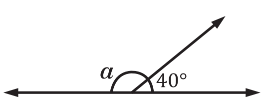
a) 

$a = 180° - 45°$
$= 135°$

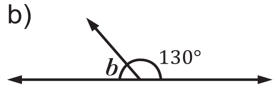
b) 

$b = 180° - 100°$
$= 80°$

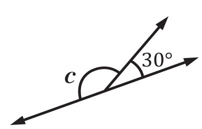
(E) Calcule a, b y c según corresponda.

a) 

$a = 180° - 40°$
$= 140°$

b) 

$b = 180° - 130°$
$= 50°$

c) 

$c = 180° - 30°$
$= 150°$

Contenido 3 Ángulos opuestos por el vértice

Aprendizajes esperados

Aplica el concepto de ángulos opuestos por el vértice y la propiedad de igualdad de sus medidas.

Secuencia:

En esta sección se calculó la medida de uno de dos ángulos complementarios, y la medida de uno de dos ángulos que forman un par lineal.

En esta clase se estudian los ángulos opuestos por el vértice, y se calculan medidas de ángulos haciendo uso de la propiedad de igualdad de medida de estos.

Puntos esenciales:

Recordar que dos ángulos que forman un par lineal son suplementarios.

Explicar cómo se forman los ángulos opuestos por el vértice.

Destacar que los ángulos opuestos por el vértice tienen la misma medida.

Identificar cuándo dos ángulos son opuestos por el vértice, y en qué caso forman un par lineal.

Diferenciar ángulos complementarios de ángulos suplementarios.

Unidad 5: Paralelismo

Contenido 3: Ángulos opuestos por el vértice

P

a) Si $a = 30°$, entonces

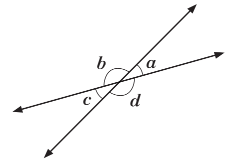
$b =$ ☐

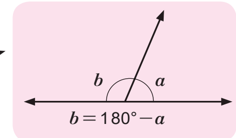
$c =$ ☐

$d =$ ☐

b) ¿Son iguales a y c?

¿Son iguales b y d?





S

a) Se observa en la figura que $\angle a$ y $\angle b$, $\angle b$ y $\angle c$, $\angle c$ y $\angle d$, forman pares lineales, por tal razón se calculan b, c y d así:

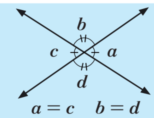
$b = 180° - a$	$c = 180° - b$	$d = 180° - c$
$= 180° - 30°$	$= 180° - 150°$	$= 180° - 30°$
$= 150°$	$= 30°$	$= 150°$

b) De los resultados anteriores se concluye que a y c son iguales. Similarmente, b y d son iguales.

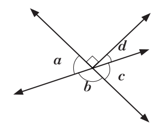
C

Dos ángulos son **opuestos por el vértice** si sus lados forman dos pares de rayos opuestos.

Ángulos opuestos por el vértice tienen la misma medida.



Ejemplo Calcule b, c y d, auxiliándose de la figura y sabiendo que $a = 60°$.



$c = a = 60°$, por ser ángulos opuestos por el vértice.
$d = 90° - 60° = 30°$, por ser ángulo complementario al $\angle c$.
$\angle b$ es opuesto por el vértice al ángulo con medida $d + 90°$.
Luego,

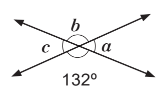
$$b = 30° + 90° = 120°$$

Otra manera de obtener b es: $b = 180° - 60° = 120°$, por ser ángulo suplementario al $\angle c$.
Por tanto, $\mathbf{b = 120°}$, $\mathbf{c = 60°}$ y $\mathbf{d = 30°}$.

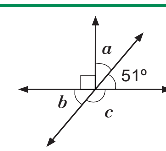
E

Calcule a, b y c en cada inciso.

a)



b)



92

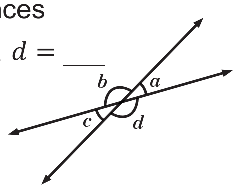
C3: Ángulos opuestos por el vértice

P a) Si $a = 30°$, entonces

$b =$ ___ ; $c =$ ___ ; $d =$ ___

b) ¿$a = c$?

¿$b = d$?



S a)

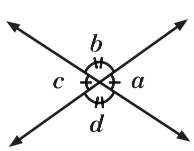
$b = 180° - a$
$= 180° - 30°$
$= 150°$

$c = 180° - b$
$= 180° - 150°$
$= 30°$

$d = 180° - c$
$= 180° - 30°$
$= 150°$

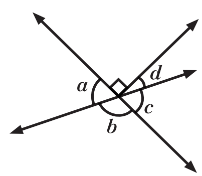
b) $a = c = 30°$ y $b = d = 150°$

C Ángulos opuestos por el vértice tienen la misma media.



$a = c$
$b = d$

Ej Calcule b, c y d, si $a = 60°$



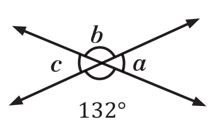
$c = a = 60°$ ángulos opuestos por el vértice

$d = 90° - 60° = 30°$ ángulo complementario al $\angle c$

$b = d + 90°$ ángulos opuestos por el vértice
$= 30° + 90°$
$= 120°$

E Calcule a, b y c

a)

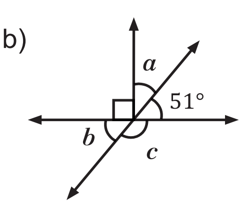


$a = 180° - 132°$
$= 48°$

$b = 132°$

$c = a = 48°$

b)

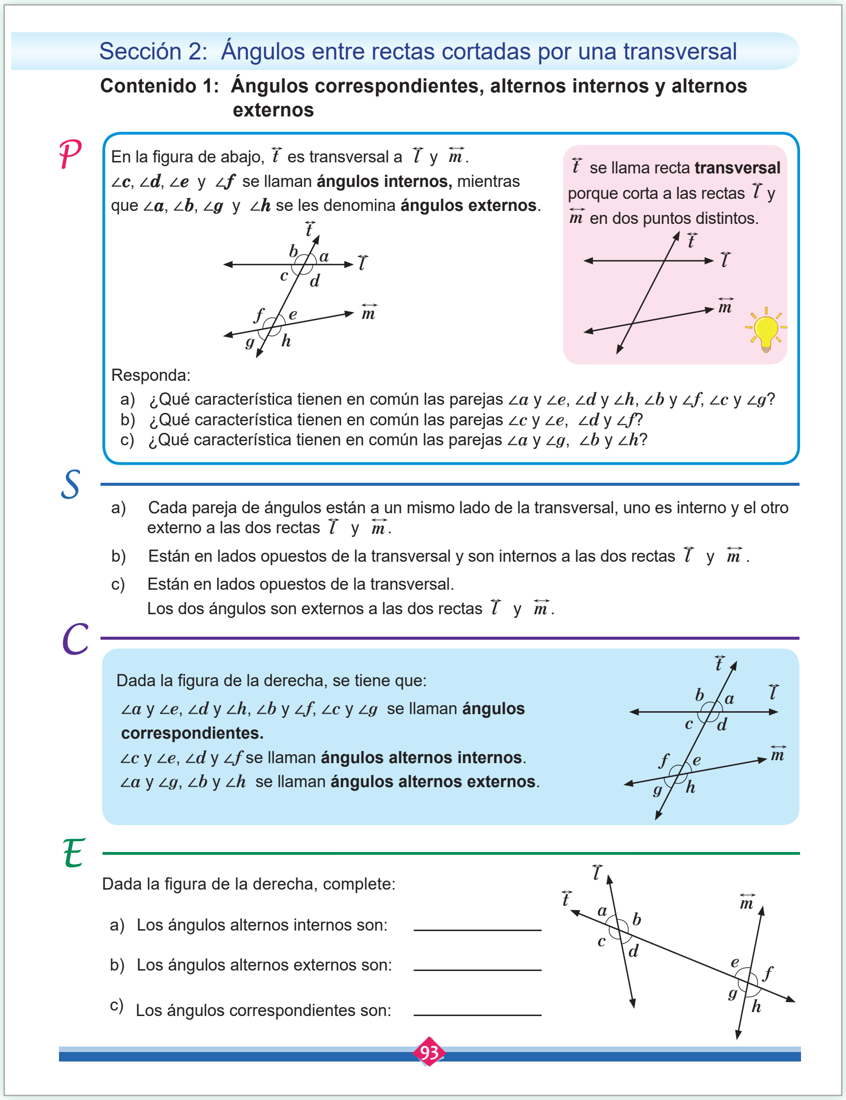


$a = 90° - 51°$
$= 39°$

$b = 51°$

$c = 180° - 51° = 129°$

Contenido 1 Ángulos correspondientes, alternos internos y alternos externos



Sección 2: Ángulos entre rectas cortadas por una transversal

Contenido 1: Ángulos correspondientes, alternos internos y alternos externos

P

En la figura de abajo, $\overleftrightarrow{t}$ es transversal a $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$.
$\angle c$, $\angle d$, $\angle e$ y $\angle f$ se llaman **ángulos internos,** mientras que $\angle a$, $\angle b$, $\angle g$ y $\angle h$ se les denomina **ángulos externos**.

$\overleftrightarrow{t}$ se llama recta **transversal** porque corta a las rectas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$ en dos puntos distintos.

Responda:
a) ¿Qué característica tienen en común las parejas $\angle a$ y $\angle e$, $\angle d$ y $\angle h$, $\angle b$ y $\angle f$, $\angle c$ y $\angle g$?
b) ¿Qué característica tienen en común las parejas $\angle c$ y $\angle e$, $\angle d$ y $\angle f$?
c) ¿Qué característica tienen en común las parejas $\angle a$ y $\angle g$, $\angle b$ y $\angle h$?

S

a) Cada pareja de ángulos están a un mismo lado de la transversal, uno es interno y el otro externo a las dos rectas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$.
b) Están en lados opuestos de la transversal y son internos a las dos rectas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$.
c) Están en lados opuestos de la transversal.
Los dos ángulos son externos a las dos rectas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$.

C

Dada la figura de la derecha, se tiene que:
$\angle a$ y $\angle e$, $\angle d$ y $\angle h$, $\angle b$ y $\angle f$, $\angle c$ y $\angle g$ se llaman **ángulos correspondientes.**
$\angle c$ y $\angle e$, $\angle d$ y $\angle f$ se llaman **ángulos alternos internos**.
$\angle a$ y $\angle g$, $\angle b$ y $\angle h$ se llaman **ángulos alternos externos**.

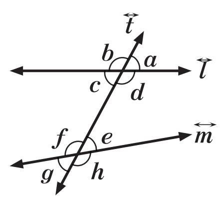
E

Dada la figura de la derecha, complete:
a) Los ángulos alternos internos son: ____________
b) Los ángulos alternos externos son: ____________
c) Los ángulos correspondientes son: ____________

93

S2: Rectas cortadas por una transversal
C1: Ángulos correspondientes, alternos internos y alternos externos

P $\overleftrightarrow{t}$ es transversal a $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$.
Ángulos internos: $\angle c$, $\angle d$, $\angle e$ y $\angle f$
Ángulos externos: $\angle a$, $\angle b$, $\angle g$ y $\angle h$

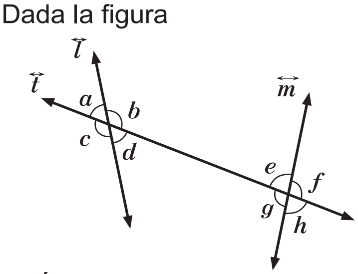


Nombre la característica común de:
a) $\angle a$ y $\angle e$, $\angle d$ y $\angle h$, $\angle b$ y $\angle f$, $\angle c$ y $\angle g$
b) $\angle c$ y $\angle e$, $\angle d$ y $\angle f$
c) $\angle a$ y $\angle g$, $\angle b$ y $\angle h$

S a) Cada pareja de ángulos están a un mismo lado de la transversal, uno es interno y el otro externo a $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$.
b) Están en lados opuestos de la transversal y son internos a $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$.
c) Están en lados opuestos de la transversal, y los dos ángulos son externos a $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$.

C En la figura del problema:
a) Ángulos correspondientes: $\angle a$ y $\angle e$, $\angle d$ y $\angle h$, $\angle b$ y $\angle f$, $\angle c$ y $\angle g$
b) Ángulos alternos internos: $\angle c$ y $\angle e$, $\angle d$ y $\angle f$
c) Ángulos alternos externos: $\angle a$ y $\angle g$, $\angle b$ y $\angle h$

E Dada la figura



a) Ángulos alternos internos:
$\angle b$ y $\angle g$; $\angle d$ y $\angle e$

b) Ángulos alternos externos:
$\angle a$ y $\angle h$; $\angle c$ y $\angle f$

c) Ángulos correspondientes:
$\angle a$ y $\angle e$; $\angle b$ y $\angle f$; $\angle c$ y $\angle g$; $\angle d$ y $\angle h$

Aprendizajes esperados

Identifica ángulos correspondientes, alternos internos y alternos externos.

Secuencia:

En la sección anterior se estudió qué son ángulos complementarios, suplementarios, par lineal, y opuestos por el vértice.

En esta clase se estudian los ángulos correspondientes, alternos internos y alternos externos, formados por dos rectas cortadas por una transversal.

Puntos esenciales:

Explicar qué es una recta transversal a dos rectas, y por qué se habla de ángulos internos o externos.

Señalar las características que identifican a los ángulos correspondientes, alternos internos y alternos externos.

Mencionar que hay cuatro pares de ángulos correspondientes, dos pares de ángulos alternos internos, y dos de alternos externos.

Aclarar que estos ángulos se forman dadas dos rectas cortadas por una transversal.

Contenido 2 Ángulos correspondientes formados por una transversal y dos rectas paralelas

Aprendizajes esperados

Determina la propiedad de igualdad de medidas de ángulos correspondientes entre paralelas.

Secuencia:

En la clase anterior se identificaron ángulos correspondientes y se supo que estos se forman a partir de dos rectas cortadas por una transversal.

En esta clase se estudian los ángulos correspondientes, con la particularidad que se forman a partir de dos rectas paralelas cortadas por una transversal.

Puntos esenciales:

Explicar cómo usar el transportador para medir ángulos.

Recordar cuándo dos rectas son paralelas, su simbolización, y cómo graficarlas.

Indicar que los ángulos correspondientes entre rectas paralelas tienen la misma medida.

Aclarar que esta propiedad es válida solo porque las rectas son paralelas.

Señalar que en los ejercicios se debe identificar ángulos que forman un par lineal y aquellos ángulos que son correspondientes.

Unidad 5: Paralelismo

Contenido 2: Ángulos correspondientes formados por una transversal y dos rectas paralelas

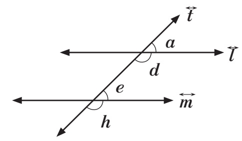
P

En la figura $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{t}$ es una transversal.

a) ¿Son correspondientes $\angle a$ y $\angle e$, $\angle d$ y $\angle h$?

b) Mida el $\angle a$ y el $\angle e$ utilizando un transportador. ¿Son iguales a y e?

c) ¿Son iguales d y h?



S

a) Según la figura, $\angle a$ con $\angle e$ y $\angle d$ con $\angle h$ son correspondientes.

b) Se mide con el transportador el $\angle a$ y se obtiene que $a = 45°$. Similarmente, $e = 45°$. Esto significa que $\boldsymbol{a = e}$.

c) Aplicando las propiedades de par lineal

$d = 180° - a$ | $h = 180° - e$
$= 180° - 45°$ | $= 180° - 45°$
$= 135°$ | $= 135°$

En consecuencia, $\boldsymbol{d = h}$.

C

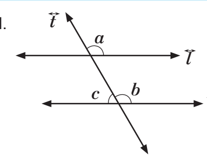
Los ángulos correspondientes formados por una recta transversal y dos rectas paralelas tienen la misma medida.

Ejemplo

En la figura $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{t}$ es una transversal. Si $a = 120°$, calcule:

a) b

b) c



a) De la figura se observa que $\angle a$ y $\angle b$ son correspondientes entre paralelas y como $a = 120°$, entonces debe cumplirse que $\boldsymbol{b = 120°}$.

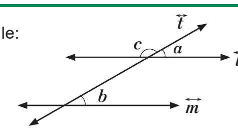
b) Dado que $\angle b$ y $\angle c$ forman un par lineal se tiene

$c = 180° - b$
$= 180° - 120° = \mathbf{60°}$

E

En la figura $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{t}$ es una transversal. Si $b = 30°$, calcule:

a) a b) c



94

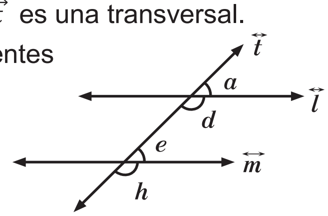
C2: Ángulos correspondientes formados por una trasversal y dos rectas paralelas.

(P) En la figura $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{t}$ es una transversal.

a) ¿Son correspondientes $\angle a$ y $\angle e$, $\angle d$ y $\angle h$?

b) Mida el $\angle a$ y el $\angle e$. ¿$a = e$?

c) ¿$d = h$?



(S) a) Son ángulos correspondientes.

b) $a = 45°$ y $e = 45°$.
$e = a$

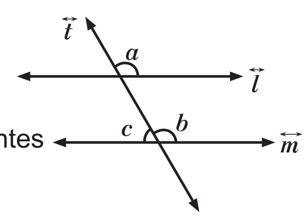
c) Aplicando las propiedades de par lineal:

$d = 180° - a$ | $h = 180° - e$
$= 180° - 45°$ | $= 180° - 45°$
$= 135°$ | $= 135°$ | $d = h$

(C) Ángulos correspondientes formados por una recta transversal y dos rectas paralelas tienen la misma medida.

(Ej) En la figura $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$. Si $a = 120°$. Calcule:

a) b b) c

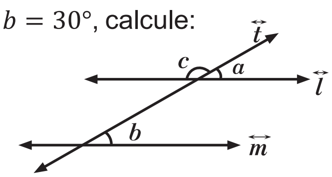


a) $b = 120°$, porque $b = a = 120°$, por ser ángulos correspondientes entre paralelas.

b) $c = 180° - b$
$= 180° - 120°$
$= 60°$

(E) En la figura $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$. Si $b = 30°$, calcule:

a) a b) c



a) $a = b = 30°$, por ser ángulos correspondientes entre paralelas.

b) $c = 180° - a$
$= 180° - 30°$
$= 150°$

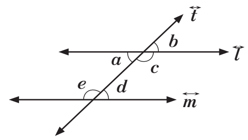
Contenido 3 Ángulos alternos internos formados por una transversal y dos rectas paralelas

Contenido 3: Ángulos alternos internos formados por una transversal y dos rectas paralelas

P

En la figura $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{t}$ es una transversal.
Si $a = 45°$:

a) Calcule b, c, d, e.
b) ¿Son iguales las medidas de los ángulos alternos internos?



S

a) Según la figura $\angle a$ y $\angle b$ son opuestos por el vértice, de lo que se infiere que tienen la misma medida, es decir **$b = 45°$**.
Como $\angle a$ y $\angle c$ forman un par lineal, se cumple la igualdad $c = 180° - a$. Luego,
$c = 180° - a$
$= 180° - 45°$
$= 135°$
En consecuencia, **$c = 135°$**.
En la misma figura, $\angle b$ y $\angle d$ son correspondientes entre una transversal y dos rectas paralelas, así que tienen la misma medida, es decir **$d = 45°$**.
Como $\angle d$ y $\angle e$ forman un par lineal, entonces
$e = 180° - d$
$= 180° - 45°$
$= 135°$
En consecuencia, **$e = 135°$**.

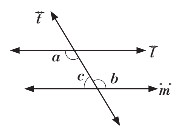
b) De la figura se obtiene que $\angle a$ y $\angle d$ son alternos internos; igualmente el par $\angle c$ y $\angle e$.
Además $\angle a$ y $\angle d$ tienen la misma medida; lo mismo sucede para $\angle c$ y $\angle e$.

C

Los ángulos alternos internos formados por una transversal y dos rectas paralelas tienen la misma medida.

Ejemplo En la figura $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{t}$ es una transversal.
Si $a = 120°$, calcule:

a) b
b) c



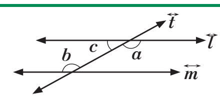
a) Según la figura, $\angle a$ y $\angle b$ son alternos internos entre paralelas y como $a = 120°$, entonces **$b = 120°$**.

b) Como $\angle b$ y $\angle c$ forman un par lineal, se cumple que
$c = 180° - b$
$= 180° - 120° = 60°$.
En consecuencia, **$c = 60°$**.

E

En la figura $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$. Si $b = 150°$, calcule:

a) a b) c



Aprendizajes esperados

Determina la propiedad de igualdad de medidas de ángulos alternos internos entre paralelas.

Secuencia:

En la clase anterior se aprendió que ángulos correspondientes entre rectas paralelas tienen la misma medida.

En esta clase se estudian ángulos alternos internos que se forman a partir de dos rectas paralelas cortadas por una transversal, los cuales cumplen la misma propiedad.

Puntos esenciales:

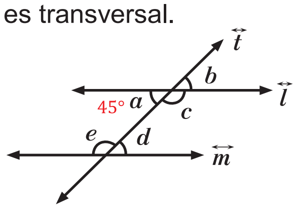
Señalar que las propiedades de los ángulos opuestos por el vértice, ángulos correspondientes entre paralelas, y cuándo dos ángulos forman un par lineal, se utilizan para deducir que ángulos alternos internos formados por una transversal y dos paralelas tienen la misma medida.

Explicar la conclusión a partir de la solución del problema planteado.

Aclarar que esta propiedad es válida solo porque las rectas son paralelas.

C3: Ángulos alternos internos formados por una transversal y dos rectas paralelas

(P) En la figura $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{t}$ es transversal.
Si $a = 45°$:
a) Calcule b, c, d, e.
b) ¿$a = d$?, ¿$c = e$?

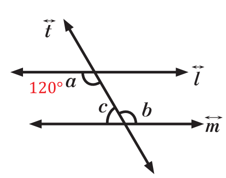


(S) a) a y b son opuestos por el vértice, $b = a = 45°$.
$\angle a$ y $\angle c$ forman un par lineal.
$c = 180° - a$
$= 180° - 45°$
$= 135°$
b y d son correspondientes entre paralelas.
$b = d = 45°$
$e = 180° - d$
$= 180° - 45°$
$= 135°$
$b = 45$, $c = 135°$, $d = 45°$, $e = 135°$

b) $a = d = 45°$, $c = e = 135°$

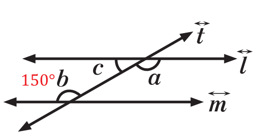
(C) Ángulos alternos internos formados por una transversal y dos rectas paralelas, tienen la misma medida.

(Ej) En la figura $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{t}$ es transversal.
Si $a = 120°$, calcule: a) b b) c



a) $b = a = 120°$, por ser ángulos alternos internos entre paralelas.
b) $c = 180° - b$
$= 180° - 120°$
$= 60°$

(E) En la figura $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$. Si $b = 150°$, calcule:
a) a b) c



a) $a = b = 150°$, por ser ángulos alternos internos entre paralelas.
b) $c = 180° - 150°$
$= 30°$

Contenido 4 Ángulos alternos externos formados por una transversal y dos rectas paralelas

Aprendizajes esperados

Determina la propiedad de igualdad de medidas de ángulos alternos externos entre paralelas.

Secuencia:

En la clase anterior se concluyó que ángulos alternos internos entre rectas paralelas tienen la misma medida.

En esta clase se estudian ángulos alternos externos que se forman a partir de dos rectas paralelas cortadas por una transversal.

Puntos esenciales:

Señalar que las propiedades de los ángulos opuestos por el vértice, ángulos correspondientes entre paralelas, y cuándo dos ángulos forman un par lineal, se utiliza para deducir que ángulos alternos externos formados por dos paralelas y una transversal, tienen igual medida.

Aclarar que esta propiedad es válida solo porque las rectas son paralelas.

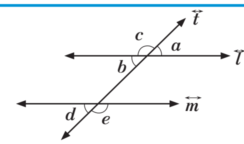
Unidad 5: Paralelismo

Contenido 4: Ángulos alternos externos formados por una transversal y dos rectas paralelas

P

En la figura $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{t}$ es una transversal. Si $a = 45°$:

a) Calcule b, c, d, e.
b) ¿Son iguales las medidas de los ángulos alternos externos?



S

a) Se observa en la figura que $\angle a$ y $\angle b$ son opuestos por el vértice, así que tienen la misma medida, es decir $\boldsymbol{b = 45°}$.
$\angle a$ y $\angle c$ forman un par lineal, luego se cumple la igualdad $c = 180° - a$, así que:
$c = 180° - a$
$= 180° - 45°$
$= 135°$
En consecuencia, $\boldsymbol{c = 135°}$.
De la figura se obtiene que $\angle b$ y $\angle d$ son correspondientes entre paralelas, así que tienen la misma medida, es decir $\boldsymbol{d = 45°}$.
$\angle d$ y $\angle e$ forman un par lineal, luego
$e = 180° - d$
$= 180° - 45°$
$= 135°$
En consecuencia, $\boldsymbol{e = 135°}$.

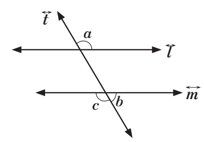
b) De acuerdo a la figura, $\angle a$ y $\angle d$; y $\angle c$ y $\angle e$ son alternos externos. Además cada pareja tiene la misma medida.

C

Los ángulos alternos externos formados por una transversal y dos rectas paralelas tienen la misma medida.

Ejemplo

En la figura $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{t}$ una transversal.
Si $a = 120°$, calcule:
a) c
b) b



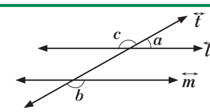
a) $\boldsymbol{c = 120°}$, porque $\angle a$ y $\angle c$ son alternos externos entre paralelas y $a = 120°$.

b) $b = 180° - c$
$= 180° - 120°$
$= 60°$
En consecuencia, $\boldsymbol{b = 60°}$.

E

En la figura $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{t}$ una transversal. Si $b = 150°$, calcule:

a) c b) a

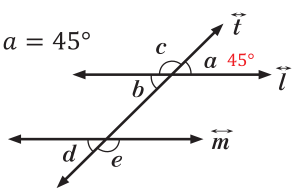


96

C4: Ángulos alternos externos formados por una transversal y dos rectas paralelas

(P) Si $\overleftrightarrow{t}$ es transversal y $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$, y $a = 45°$

a) Calcule b, c, d, e
b) ¿$a = d$?, ¿$c = e$?

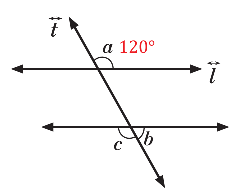


(S) a) $\angle a$ y $\angle b$ son opuestos por el vértice. $b = a = 45°$.
$\angle a$ y $\angle c$ forman par lineal.
$c = 180° - a$
$= 180° - 45°$
$= 135°$
$\angle b$ y $\angle d$ son correspondientes. $d = b = 45°$.
$\angle d$ y $\angle e$ forman par lineal:
$e = 180° - d$
$= 180° - 45°$
$= 135°$
$b = 45°$, $c = 135°$, $d = 45°$, $e = 135°$

b) $\angle a$ y $\angle d$ y $\angle c$ y $\angle e$ son ángulos alternos externos.
$a = d = 45°$, $c = e = 135°$.
Cada pareja tiene la misma medida.

(C) Ángulos alternos externos entre rectas paralelas tienen la misma medida.

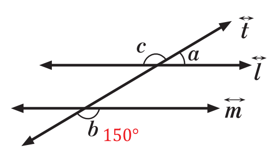
(Ej) En la figura $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$. Si $a = 120°$, calcule:
a) c b) b



a) $c = a = 120°$, por ser ángulos alt. ext., entre paralelas.

b) $b = 180° - c$
$= 180° - 120°$
$= 60°$

(E) En la figura $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$. Si $b = 150°$, calcule:
a) c b) a



a) $c = b = 150°$, por ser ángulos alternos externos entre paralelas.

b) $a = 180° - c$
$= 180° - 150°$
$= 30°$

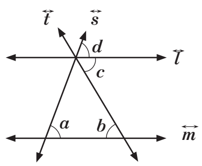
Contenido 5 Medidas de ángulos formados por una transversal y dos rectas paralelas

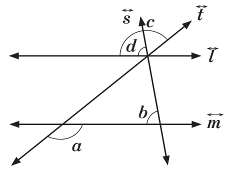
Contenido 5: Medidas de ángulos formados por una transversal y dos rectas paralelas

Ejemplo En las figuras de abajo $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ con transversales $\overleftrightarrow{s}$ y $\overleftrightarrow{t}$, calcule c y d para cada inciso, sabiendo que:

a) $a = 70°$ $b = 60°$

b) $a = 140°$ $b = 80°$





a) La transversal $\overleftrightarrow{s}$ con las rectas paralelas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$ forma los ángulos correspondientes $\angle a$ y $\angle d$. Como $a = 70°$ y ángulos correspondientes entre paralelas tienen la misma medida se concluye que $\boldsymbol{d = 70°}$.

Por otra parte, como $\angle b$ y $\angle c$ formados por la transversal $\overleftrightarrow{t}$ y las mismas paralelas son alternos internos y tienen la misma medida, entonces $\boldsymbol{c = 60°}$.

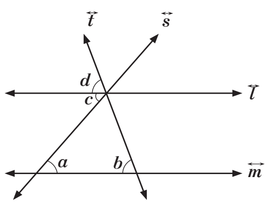
b) $\angle a$ y $\angle c$ son alternos externos formados por la transversal $\overleftrightarrow{t}$ y las paralelas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$, y como $a = 140°$, entonces $\boldsymbol{c = 140°}$.
$\angle b$ y $\angle d$ son correspondientes formados por la transversal $\overleftrightarrow{s}$ y las paralelas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$, por consiguiente tienen la misma medida, así que $\boldsymbol{d = 80°}$.

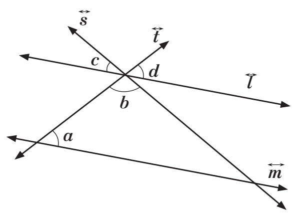
E

En las figuras de abajo $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ con transversales $\overleftrightarrow{t}$ y $\overleftrightarrow{s}$, calcule c y d, sabiendo que:

a) $a = 50°$ $b = 70°$

b) $a = 50°$ $b = 100°$





Aprendizajes esperados

Aplica las propiedades de ángulos correspondientes, ángulos alternos internos y ángulos alternos externos entre paralelas en el cálculo de medida de ángulos.

Secuencia:

En esta sección se estudió que los ángulos correspondientes, alternos internos y alternos externos entre paralelas, tienen la misma medida.

En esta clase se aplican estas propiedades para calcular la medida de ángulos de figuras en donde hay rectas paralelas.

Puntos esenciales:

Recordar que: a) los ángulos correspondientes, alternos internos y alternos externos entre paralelas tienen la misma medida. b) los ángulos opuestos por el vértice tienen la misma medida. c) concepto de ángulos suplementarios.

Señalar que se debe identificar:

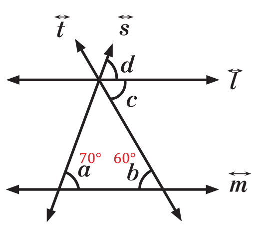
- Las transversales y las rectas paralelas.
- Los ángulos que son correspondientes, los que son alternos internos y los alternos externos.

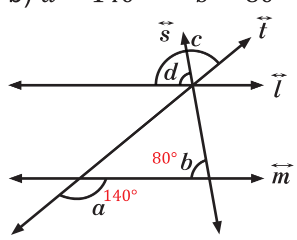
C5: Medidas de ángulos formados por una transversal y dos rectas paralelas

Ej Si $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ con transversales $\overleftrightarrow{s}$ y $\overleftrightarrow{t}$, calcule c y d

a) $a = 70°$ $b = 60°$

b) $a = 140°$ $b = 80°$





a) $c = b = 60°$, por ser ángulos alternos internos

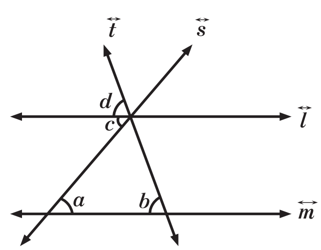
$d = a = 70°$, por ser ángulos correspondientes entre paralelas.

b) $c = a = 140°$, por ser ángulos alternos externos.

$d = b = 80°$, por ser ángulos correspondientes.

E Si $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ con transversales $\overleftrightarrow{s}$ y $\overleftrightarrow{t}$, calcule c y d.

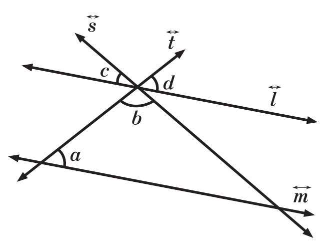
a) $a = 50°$ $b = 70°$



$c = a = 50°$, ángulos alternos internos

$d = b = 70°$, ángulos correspondientes

b) $a = 50°$ $b = 100°$



$d = a = 50°$, por ser ángulos correspondientes.

$$
\begin{aligned}
c &= 180° - d - b \\
&= 180° - 50° - 100° \\
&= 30°
\end{aligned}
$$

Contenido 6 Condiciones de paralelismo entre rectas

Aprendizajes esperados

Identifica rectas paralelas utilizando las propiedades de paralelismo entre rectas.

Secuencia:

En esta sección se estudió que los ángulos correspondientes, alternos internos y alternos externos entre paralelas, tienen la misma medida.

En esta clase se estudia que, si los ángulos correspondientes, alternos internos o alternos externos tienen la misma medida, entonces las rectas cortadas por la transversal son paralelas.

Puntos esenciales:

Señalar que los ángulos correspondientes, alternos internos o alternos externos deben tener la misma medida para que las rectas sean paralelas.

Tener cuidado cuando se identifique el ángulo correspondiente, alterno interno o alterno externo a un ángulo dado.

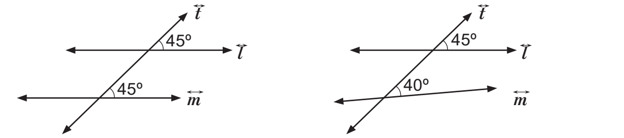
Explicar la conclusión del texto utilizando la solución dada al problema.

Indicar a los estudiantes que copien la conclusión en su cuaderno.

Unidad 5: Paralelismo

Contenido 6: Condiciones de paralelismo entre rectas

P ¿Qué nombre reciben los ángulos cuyas medidas se indican en cada figura? ¿En qué caso $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$? ¿Se cruzan en cada figura las rectas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$ al prolongarlas indefinidamente?

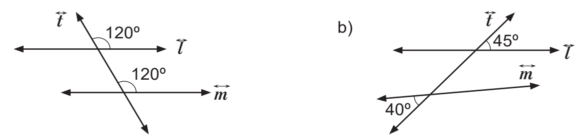


S Los ángulos se llaman ángulos correspondientes.
En la figura de la izquierda las rectas son paralelas por que al prolongarlas no se cruzan. En este caso los ángulos correspondientes tienen la misma medida.

C Dos rectas cortadas por una transversal son paralelas, en cualquiera de los siguientes casos:
1) Los ángulos correspondientes tienen la misma medida.
2) Los ángulos alternos internos tienen la misma medida.
3) Los ángulos alternos externos tienen la misma medida.

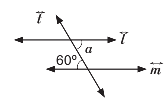
Ejemplo 1 Determine si $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ justificando su respuesta.

a) b)



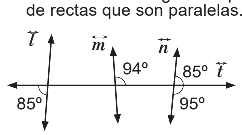
a) $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ porque los ángulos correspondientes tienen la misma medida.
b) $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$ no son paralelas porque los ángulos alternos externos tienen diferentes medidas.

Ejemplo 2 Calcule a en la figura de la derecha para que $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$.



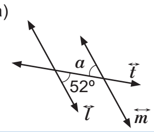
El $\angle a$ es alterno interno con el ángulo cuya medida es 60°, así que $a = 60°$ para que $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$.

E
1. Determine en la figura los pares de rectas que son paralelas.

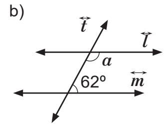


2. Determine a para que $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$.

a)



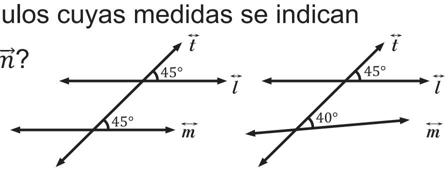
b)



98

C6: Condiciones de paralelismo entre rectas

P Nombre los ángulos cuyas medidas se indican
¿Se cruzan $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$?

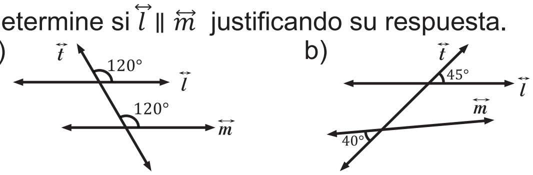


S Los ángulos se llaman ángulos correspondientes.
En la primera figura las rectas son paralelas porque al prolongarlas no se cruzan. En este caso los ángulos correspondientes tienen la misma medida.

C *Leer en el libro de texto.*

Ej Determine si $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ justificando su respuesta.

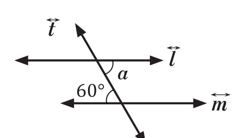
a) b)



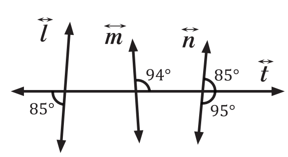
a) $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$, porque los ángulos correspondientes tienen la misma medida.

b) $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$ no son paralelas porque los ángulos alternos externos tienen diferentes medidas.

Ej En la figura, para que $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$
$a = 60°$.

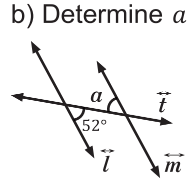


E a) Determine las rectas paralelas.

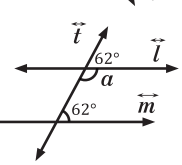


$\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{n}$ son paralelas, porque los ángulos alternos externos tienen la misma medida.

b) Determine a para que $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$.



Los ángulos alternos internos deben tener la misma medida, así $a = 52°$.



Los ángulos correspondientes deben tener la misma medida.
$a = 180° - 62°$
$= 118°$

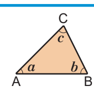
Contenido 1 Suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo

Sección 3: Ángulos internos y externos de un triángulo

Contenido 1: Suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo

P

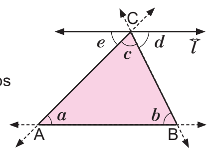
¿Cuánto suman las medidas de los ángulos internos del $\triangle ABC$?



S

Dado el $\triangle ABC$, para encontrar la suma de sus ángulos internos se siguen los pasos:

1. Se traza la recta que contiene al $\overleftrightarrow{AB}$.
2. Se construye la recta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ que pasa por C, y se etiqueta con $\overleftrightarrow{l}$.
3. Se etiquetan con d y e las medidas de los ángulos formados por $\overleftrightarrow{l}$ y las transversales $\overleftrightarrow{CB}$ y $\overleftrightarrow{CA}$ respectivamente.
4. Se observa que:
   i. $e+d+c=180°$
   ii. $e=a$, porque $\angle e$ y $\angle a$ son alternos internos formados por las paralelas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{AB}$ y la transversal $\overleftrightarrow{CA}$.
   iii. $b=d$, porque $\angle b$ y $\angle d$ son alternos internos formados por las paralelas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{AB}$ y la transversal $\overleftrightarrow{CB}$.
5. De i, ii y iii resulta que
   $a+b+c=180°$



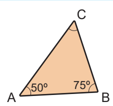
En conclusión, las medidas de los ángulos internos de un triángulo suman 180°.

C

La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

Ejemplo

Calcule $\measuredangle C$, sabiendo que $\measuredangle A=50°$ y $\measuredangle B=75°$.

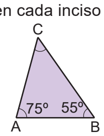


$\measuredangle A+\measuredangle B+\measuredangle C=180°$
$50°+75°+\measuredangle C=180°$
$125°+\measuredangle C=180°$
$\measuredangle C=180°-125°$
$\measuredangle C=$ **55°**

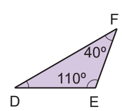
E

Calcule en cada inciso la medida del ángulo desconocido.

a)



b)



Aprendizajes esperados

Establece que la suma de las medidas de los ángulos internos de cualquier triángulo es 180°

Secuencia:

En la sección anterior se estudió que los ángulos alternos internos entre paralelas, tienen la misma medida.

En esta clase se estudia cuánto es la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo.

Puntos esenciales:

Recordar qué ocurre con las medidas de ángulos alternos internos entre paralelas.

Aclarar que el objetivo de trazar la paralela a uno de los lados y que pase por el vértice opuesto, es formar ángulos alternos internos a dos ángulos del triángulo.

Indicar que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

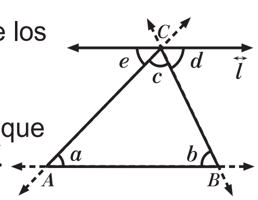
Explicar cómo se utiliza esta propiedad cuando se desconoce la medida de uno de los ángulos del triángulo.

Señalar que se tiene que resolver una ecuación de primer grado en una variable.

S3: Ángulos internos y externos de un triángulo
C1: Suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo

(P) ¿Cuánto suman las medidas de los ángulos internos del ΔABC?

(S) Se traza la recta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ que pasa por C, y se etiqueta con $\overleftrightarrow{l}$.

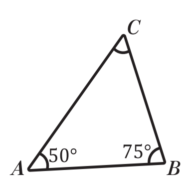


1. $e+d+c=180°$
2. $e=a$, porque $\angle e$ y $\angle a$ son alternos internos entre paralelas
3. $d=b$, porque $\angle d$ y $\angle b$ son alternos internos entre paralelas

$a+b+c=e+d+c=180°$

(C) La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.

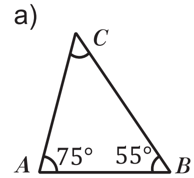
(Ej) Calcule $\measuredangle C$, sabiendo que $\measuredangle A=50°$ y $\measuredangle B=75°$.



$\measuredangle A+\measuredangle B+\measuredangle C=180°$
$50°+75°+\measuredangle C=180°$
$125°+\measuredangle C=180°$
$\measuredangle C=180°-125°$
$\measuredangle C=55°$

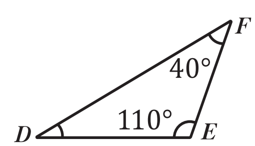
(E) Calcule la medida del ángulo desconocido.

a)



$\measuredangle A+\measuredangle B+\measuredangle C=180°$
$75°+55°+\measuredangle C=180°$
$130°+\measuredangle C=180°$
$\measuredangle C=50°$

b)



$\measuredangle D+\measuredangle E+\measuredangle F=180°$
$\measuredangle D+110°+40°=180°$
$\measuredangle D+150°=180°$
$\measuredangle D=30°$

Contenido 2 Teorema del ángulo externo

Aprendizajes esperados

Establece que la medida de los ángulos externos de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no adyacentes.

Secuencia:

En la clase anterior se estudió que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

En esta clase se estudia la relación entre un ángulo externo y los dos ángulos no adyacentes a este.

Puntos esenciales:

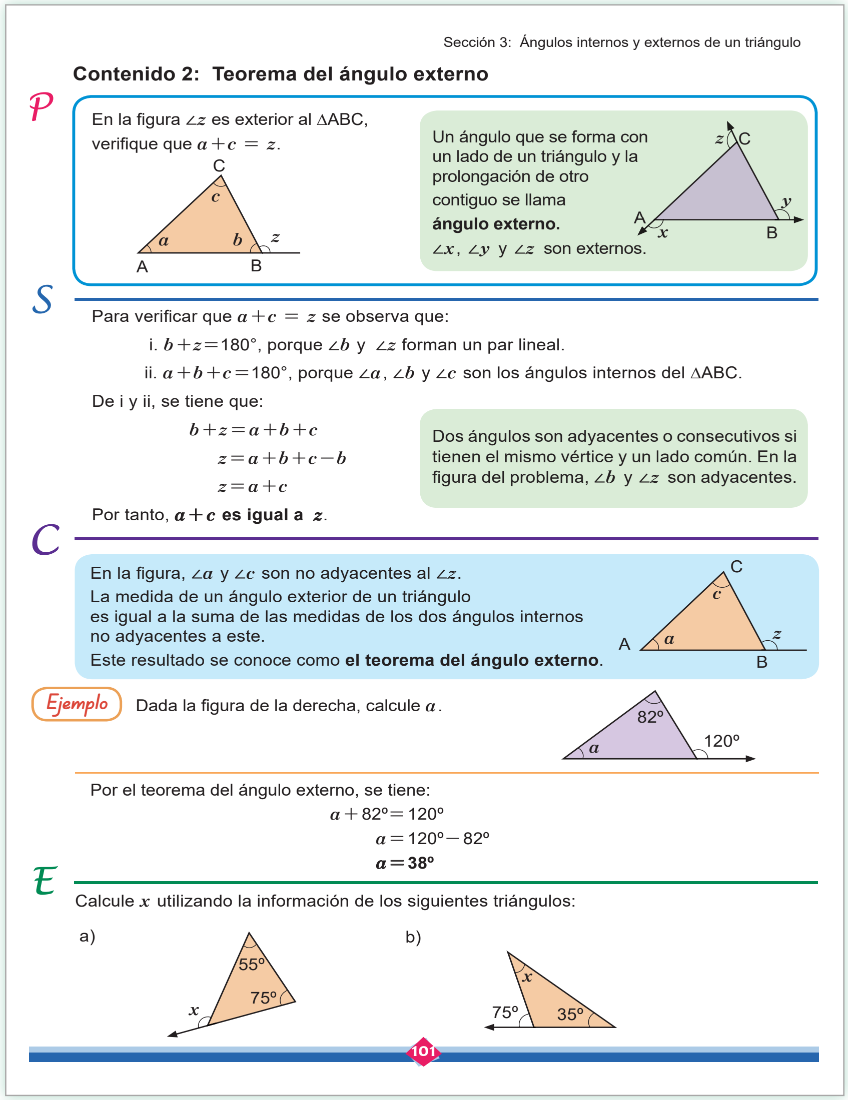
Diferenciar los conceptos de ángulo interno y ángulo externo de un triángulo.

Explicar cómo se forma un ángulo externo, y los estudiantes deben identificar que todo triángulo tiene seis ángulos externos.

Especificar que el teorema se deduce a partir de la propiedad de la clase anterior y de la propiedad de un par lineal.

Destacar las condiciones (datos) que deben tenerse, para utilizar el teorema del ángulo externo.

Identificar que en ocasiones tienen que resolver una ecuación de primer grado en una variable.


Sección 3: Ángulos internos y externos de un triángulo

Contenido 2: Teorema del ángulo externo

P

En la figura $\angle z$ es exterior al ΔABC, verifique que $a+c=z$.

Un ángulo que se forma con un lado de un triángulo y la prolongación de otro contiguo se llama **ángulo externo.** $\angle x$, $\angle y$ y $\angle z$ son externos.

S

Para verificar que $a+c=z$ se observa que:

i. $b+z=180°$, porque $\angle b$ y $\angle z$ forman un par lineal.

ii. $a+b+c=180°$, porque $\angle a$, $\angle b$ y $\angle c$ son los ángulos internos del ΔABC.

De i y ii, se tiene que:

$$b+z=a+b+c$$
$$z=a+b+c-b$$
$$z=a+c$$

Por tanto, **$a+c$ es igual a z**.

Dos ángulos son adyacentes o consecutivos si tienen el mismo vértice y un lado común. En la figura del problema, $\angle b$ y $\angle z$ son adyacentes.

C

En la figura, $\angle a$ y $\angle c$ son no adyacentes al $\angle z$.
La medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos internos no adyacentes a este.
Este resultado se conoce como **el teorema del ángulo externo**.

Ejemplo Dada la figura de la derecha, calcule a.

Por el teorema del ángulo externo, se tiene:

$$a+82°=120°$$
$$a=120°-82°$$
$$\boldsymbol{a=38°}$$

E

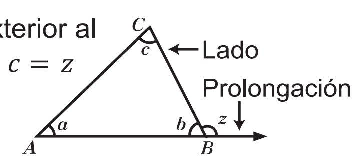
Calcule x utilizando la información de los siguientes triángulos:

a) b)

101

C2: Teorema del ángulo externo

P En la figura $\angle z$ es exterior al ΔABC, verifique que $a+c=z$

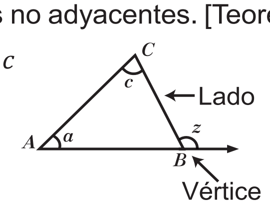


S $b+z=180°$, $\angle b$ y $\angle z$ forman un par lineal
$a+b+c=180°$, $\angle a$, $\angle b$ y $\angle c$ son los ángulos internos del ΔABC

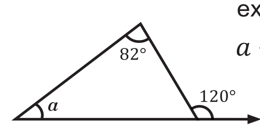
$$b+z=a+b+c$$
$$z=a+b+c-b$$
$$z=a+c$$

C La medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos internos no adyacentes. [Teorema del ángulo externo]

$z=a+c$



Ej Calcule a.

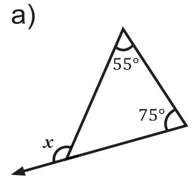


Por el teorema del ángulo externo

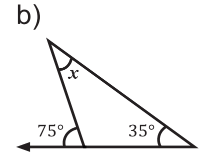
$$a+82°=120°$$
$$a=120°-82°$$
$$a=38°$$

E Calcule x.

a)



b)



Por el teorema del ángulo externo

$$x=55°+75°$$
$$=130°$$

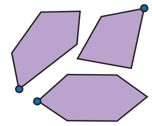
$$x+35°=75°$$
$$x=40°$$

Contenido 3 Suma de medidas de los ángulos internos de un polígono

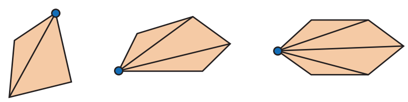
Unidad 5: Paralelismo

Contenido 3: Suma de medidas de los ángulos internos de un polígono

P
a) Trace las diagonales de cada polígono desde el vértice indicado.
b) ¿Cuántos triángulos se forman en cada polígono?
c) ¿Cuánto suman las medidas de los ángulos internos?
d) ¿Cuántos triángulos se forman en un polígono de n lados, al dibujar las diagonales desde un vértice fijo?



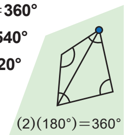
S
a) Trazando las diagonales en cada polígono desde el vértice indicado.



Número de lados	Número de triángulos
4	4−2
5	5−2
6	6−2

b) Se observa que en el cuadrilátero se forman 2 triángulos, en el pentágono se forman 3 y en el hexágono 4.

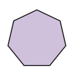
c) **Suma de los ángulos internos del cuadrilátero:** $(2)(180°)=(4-2)(180°)=$ **360°**
Suma de los ángulos internos del pentágono: $(3)(180°)=(5-2)(180°)=$ **540°**
Suma de los ángulos internos del hexágono: $(4)(180°)=(6-2)(180°)=$ **720°**
El factor 180° procede de la suma de los ángulos internos de un triángulo.



d) Se forman $n-2$ triángulos.

C
La suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono de n lados es $(n-2)(180°)$.

Ejemplo
Calcule la suma de las medidas de los ángulos internos de un heptágono.

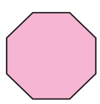


Se aplica la conclusión anterior con $n=7$.

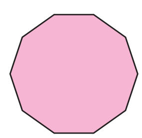
$$\begin{aligned}(n-2)(180°)&=(7-2)(180°)\\&=(5)(180°)\\&=\mathbf{900°}\end{aligned}$$

E
Calcule la suma de las medidas de los ángulos internos de un:

a) Octágono



b) Decágono



102

Aprendizajes esperados

Aplica la expresión para la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono.

Secuencia:

En la primera clase de esta sección, se estudió que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

En esta clase se estudia la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono.

Recordar qué es un pentágono, hexágono, heptágono, octágono, eneágono y decágono.

Puntos esenciales:

Explicar que una diagonal de un polígono es un segmento que une dos vértices no consecutivos del mismo.

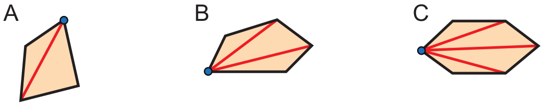
Especificar que la conclusión se deduce a partir de la propiedad de la clase uno de esta sección.

Aclarar que la suma depende únicamente del número de lados del polígono.

C3: Suma de medidas de los ángulos internos de un polígono

P
a) Trace las diagonales de cada polígono.
b) ¿Cuántos triángulos se forman en cada polígono?
c) ¿Cuánto suman las medidas de los ángulos internos?
d) ¿Cuántos triángulos se forman en un polígono de n lados?

S
a)



b) A: Cuadrilátero (4 lados)… 2 triángulos.
B: Pentágono (5 lados)… 3 triángulos.
C: Hexágono (6 lados)… 4 triángulos.

c) Suma de ángulos internos
A: $(2)(180°) = (4-2)(180°) = 360°$
B: $(3)(180°) = (5-2)(180°) = 540°$
C: $(4)(180°) = (6-2)(180°) = 720°$

d) Se forman $n-2$ triángulos.

C
La suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono de n lados:
$$(n-2)(180°)$$

Ej
Calcule la suma de las medidas de los ángulos internos de un heptágono.
$$\begin{aligned}(n-2)(180°) &= (7-2)(180°)\\ &= (5)(180°)\\ &= 900°\end{aligned}$$

E
Calcule la suma de las medidas de los ángulos internos de:

a) Octágono
$$\begin{aligned}(8-2)(180°) &= (6)(180°)\\ &= 1080°\end{aligned}$$

b) Decágono
$$\begin{aligned}(10-2)(180°) &= (8)(180°)\\ &= 1440°\end{aligned}$$

Contenido 4 Medida de los ángulos internos de un polígono regular

Aprendizajes esperados

Calcula la medida de los ángulos internos de un polígono regular.

Secuencia:

En la clase anterior se estudió una forma de cómo calcular la suma de las medidas de los ángulos internos de cualquier polígono.

En esta clase se estudia la medida de los ángulos internos de un polígono regular.

Puntos esenciales:

Recordar que en un polígono regular todos sus ángulos tienen la misma medida.

Explicar la conclusión a partir de la solución del problema.

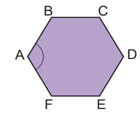
Señalar que primero debe conocerse la suma de las medidas de los ángulos internos, y luego dividir esta suma por el número de lados del polígono regular.

Aclarar que la medida de los ángulos de un polígono regular, depende únicamente del número de lados del mismo.

Contenido 4: Medida de los ángulos internos de un polígono regular

P

Dado el hexágono regular de la derecha, calcule ∡A.



S

La suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono es $(n-2)(180°)$.

En este caso $n=6$, así que la suma de las medidas de los ángulos internos del hexágono es $(4)(180°)=720°$.

Como el hexágono es regular, entonces sus ángulos internos tienen la misma medida, así que:

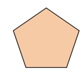
$$\measuredangle A = \frac{720°}{6}$$
$$=120°$$

En conclusión, cada ángulo interno de un hexágono regular mide **120°**.

C

En un polígono regular de n lados, cualquiera de sus ángulos internos mide $\frac{(n-2)(180°)}{n}$.

Ejemplo Calcule la medida de los ángulos internos de un pentágono regular.



Se utiliza la expresión $\frac{(n-2)(180°)}{n}$:

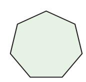
$$\frac{(5-2)\,180°}{5} = \frac{(3)(180°)}{5}$$
$$= \frac{540°}{5}$$
$$=108°$$

Por tanto, cada ángulo interno de un pentágono regular mide **108°**.

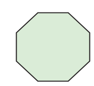
E

Calcule la medida de los ángulos internos de un:

a) Heptágono regular

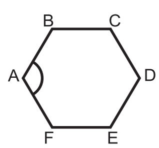


b) Octágono regular



C4: Medida de los ángulos internos de un polígono regular

(P) Dado el hexágono regular, calcule $\measuredangle A$.



(S) Suma de los ángulos internos de un polígono es $(n-2)(180°)$

Sust. $n = 6$.

$(6-2)(180°) = (4)(180°)$
$= 720°$

Los ángulos de un hexágono regular tienen la misma medida.

$$\measuredangle A = \frac{720°}{6}$$
$$= 120°$$

(C) En un polígono regular de n lados, sus ángulos miden:

$$\frac{(n-2)(180°)}{n}$$

(Ej) Calcule la medida de los ángulos internos de un pentágono regular.

$$\frac{(5-2)180°}{5} = \frac{(3)(180°)}{5}$$
$$= \frac{540°}{5}$$
$$= 108°$$

(E) Calcule la medida de los ángulos internos de:

a) Heptágono regular

$$\frac{(7-2)(180°)}{7} = \frac{(5)(180°)}{7}$$
$$= \frac{900°}{7}$$
$$\approx 128{,}57°$$

b) Octágono regular

$$\frac{(8-2)(180°)}{8} = \frac{(6)(180°)}{8} = \frac{1080°}{8}$$
$$= 135°$$

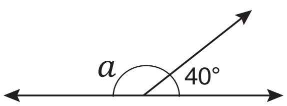
Prueba de Matemática 8vo (30 min.) Fecha: ____________
Unidad 5: Paralelismo

/ 20

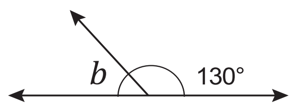
Nombre: ______________________________ **Sección:** __________
Sexo: M / F

1. Calcule a, b y c según corresponda. (2 puntos $\times$ 3 $=$ 6)

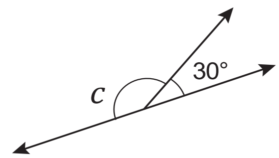
   a)



   b)



   c)



   $a =$

   $b =$

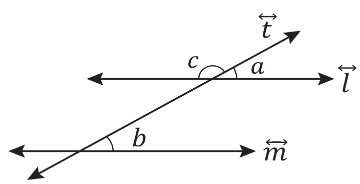
   $c =$

2. En la figura $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{t}$ es una transversal. Si $b = 30°$, calcule:

   (2 puntos $\times$ 2 $=$ 4)

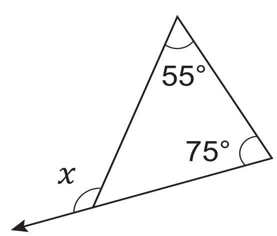
   a) $a =$

   b) $c =$



3. Calcule x utilizando la información del siguiente triángulo: (2 puntos)

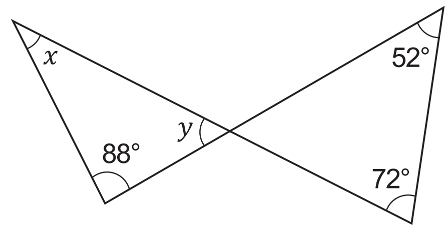
   $x =$



4. Calcule x y y de acuerdo con la figura. (2 puntos $\times$ 2 $=$ 4)

$x =$

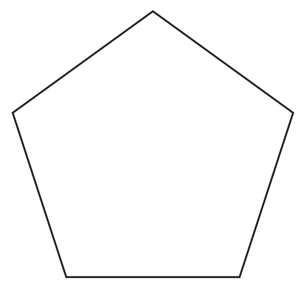
$y =$



5. Calcule: (2 puntos $\times$ 2 $=$ 4)

a) La suma de las medidas de los ángulos internos de un pentágono.

b) La medida de los ángulos interiores de un pentágono regular.



Nombre: ___________________________________