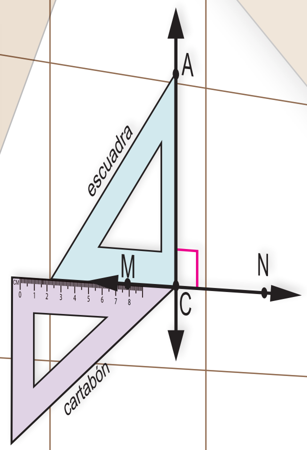
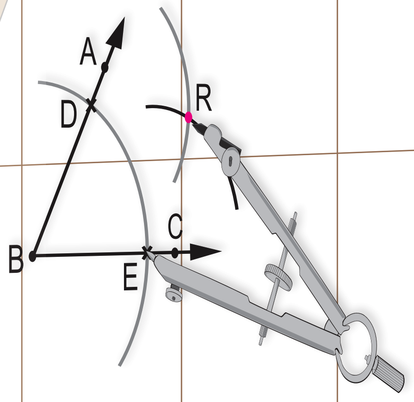
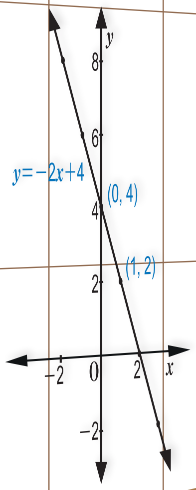
MATEMÁTICA 9

Noveno grado







Guía para Docentes

Educación Secundaria

Gobierno de Reconciliación
y Unidad Nacional
El Pueblo, Presidente!
UNIDA, NICARAGUA TRIUNFA!

MINED
Un Ministerio en la Comunidad

JICA

COORDINACIÓN GENERAL

Profesora Melba López Montenegro
Profesor Julio César Canelo Castillo

AUTORES

Primitivo Herrera Herrera
Armando José Huete Fuentes
Célfida del Rosario López Sánchez
Orlando Antonio Ruiz Álvarez
Melissa Lizbeth Velásquez Castillo
Domingo Felipe Aráuz Chévez
Nubia Aracelly Barreda Rodríguez
Juan Carlos Caballero López
Anastacio Benito González Funes

COLECTIVO DE AUTORES

MINED

Francisco Emilio Díaz Vega
Humberto Antonio Jarquín López
Gregorio Isabel Ortiz Hernández
Juan Carlos Caballero López
Alberto Leonardo García Acevedo

UNAN - MANAGUA

Nubia Aracelly Barreda Rodríguez
Melissa Lizbeth Velásquez Castillo
Armando José Huete Fuentes
Primitivo Herrera Herrera
Marlon José Espinoza Espinoza

UNAN - LEÓN

Anastacio Benito González Funes
Domingo Felipe Aráuz Chévez
Célfida del Rosario López Sánchez
Orlando Antonio Ruiz Álvarez
Hilario Ernesto Gallo Cajina

INSTITUTOS QUE PARTICIPARON EN LA VALIDACIÓN

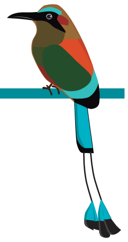
Colegio Clementina Cabezas, Managua, Managua
Colegio Fernando Gordillo, Managua, Managua
Colegio Tomas Borge, Mateare, Managua
Colegio San Cayetano, San Rafael del Sur, Managua
Instituto Nacional La Salle, Diriamba, Carazo
Instituto Juan José Rodriguez, Jinotepe, Carazo
San Benito #1, Chinandega, Chinandega
Instituto Nacional Rubén Darío, Posoltega, Chinandega
Jhon F. Kenedy, León, León
Salomón de la Selva, León, León

EQUIPO DE DIAGRAMACIÓN

Lissette Margina Serrano Vallecillo • Maribel del Socorro Cuarezma López

Primera Edición, 2019.

La presente publicación ha sido reproducida con el apoyo de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA) a través del Proyecto para el Aprendizaje Amigable de matemática en Educación Secundaria (NICAMATE).



Índice

Introducción I

Estructura del Libro de Texto para estudiantes II

Estructura de la Guía para Docentes..............III

1. Propuesta de programación anual de 10mo grado III
2. Elementos de una página de la Guía para Docentes IV
3. Prueba de la Unidad V
4. Solucionarios V

Orientaciones metodológicas para el mejoramiento de los aprendizajes del área de Matemática..V

Recomendaciones para el desarrollo de una clase según los momentos P, S, C, EJ, E VI

Puntos importantes a considerar en la facilitación del aprendizaje VIII

Uso de las Pruebas de Unidad.........................X

1. Propuesta sobre el uso de las Pruebas de Unidad...X
2. Opciones sobre el uso de las Pruebas de Unidad para evaluación.............................X

Unidad 1: Productos Notables y Factorización....................................1

Sección 1: Multiplicación de polinomios............. 2

Sección 2: Productos notables.............................. 6

Sección 3: Factorización.......................................14

Prueba de Unidad 1 23

Unidad 2: Ecuaciones de Segundo Grado.....25

Sección 1: Introducción a las ecuaciones de segundo grado.....................................26

Sección 2: Solución de ecuaciones de segundo grado.....................................31

Sección 3: Aplicaciones de las ecuaciones de segundo grado..........................38

Prueba de Unidad 2 43

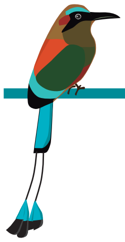
Unidad 3: Funciones de Segundo Grado..45

Sección 1: Introducción a las funciones de segundo grado.......................... 46

Sección 2: Función de segundo grado........... 54

Sección 3: Valor máximo o mínimo de una función de segundo grado y su aplicación....................................... 61

Prueba de Unidad 3 66



Unidad 4: Proporcionalidad Entre Segmentos 69

Sección 1: Razón entre segmentos............... 70

Sección 2: División de un segmento............. 73

Prueba de Unidad 4 77

Unidad 5: Semejanza....................................79

Sección 1: Criterios de semejanza de triángulos..............80

Sección 2: Semejanza de triángulos rectángulos y paralelismo..............87

Prueba de Unidad 5 96

Unidad 6: Teorema de Pitágoras..............99

Sección 1: Teorema de Pitágoras...................100

Sección 2: Aplicaciones del Teorema de Pitágoras en geometría.................104

Prueba de Unidad 6 109

Unidad 7: Circunferencia..........................111

Sección 1: Ángulos inscritos..........................112

Sección 2: Aplicaciones de ángulos inscritos...117

Prueba de Unidad 7 120

Unidad 8: Estadística................................123

Sección 1: Presentación de tablas y gráficas................124

Prueba de Unidad 8 131

Anexos...133

Anexo 1: Solucionarios de las pruebas de cada unidad................134

Anexo 2: Solucionarios del libro de texto....138

Anexo 3: Diferencias del LT entre la versión para docentes y para estudiantes.........163

Introducción

Este documento es un material educativo llamado “Guía para Docentes”, que está dirigido a los docentes de matemática de Nicaragua, y tiene como objetivos:

- Brindar una propuesta de programación anual estándar de enseñanza.
- Brindar sugerencias sobre el uso de los Libros de Texto y el tiempo de trabajo independiente del estudiante.
- Mostrar la secuencialidad que existe entre los contenidos del currículo de matemática en Educación Secundaria.
- Indicar los aspectos esenciales de cada clase (pre saberes, posibles errores, aspectos del nuevo contenido en que se debe hacer énfasis, etc.).
- Promover el uso adecuado de la pizarra.
- Ofrecer los solucionarios de los ejercicios con sus procedimientos.
- Fomentar la evaluación formativa a través de las pruebas de unidad.

La Guía para Docentes se elaboró atendiendo al análisis de las observaciones de clase que se realizó en los centros educativos de validación, concluyendo que es importante:

- Tener claro el aprendizaje esperado en cada clase y la secuencialidad entre los contenidos del currículo.
- Hacer uso adecuado de la pizarra, escribiendo lo necesario para que el estudiante comprenda.
- Dar tiempo para que los estudiantes trabajen de forma independiente.

El Ministerio de Educación (MINED) pone a disposición de los docentes este recurso, considerando que la implementación del mismo y el uso del Libro de Texto, cambiará la experiencia de los estudiantes al aprender matemática en la escuela, y promoverá la creatividad en la búsqueda de soluciones y la argumentación cuando se enfrenten a un problema. Para dicha implementación es necesario considerar algunos aspectos esenciales:

Enseñanza basada en el aprendizaje de los estudiantes. Para enseñar matemática se deben utilizar situaciones problemáticas que despierten el interés de los estudiantes y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver problemas y a argumentar sus respuestas. En estas situaciones se deben considerar los conocimientos y habilidades que se pretenden desarrollar.

Rol del estudiante en el aprendizaje. Los estudiantes deben utilizar los conocimientos previos que le permitan reorganizar lo que ya sabe, y aplicarlos en una nueva situación. Este proceso de estudio se apoya más en la reflexión del estudiante, que en la simple memorización tradicional.

Rol del docente en el aula. La acción del docente es un factor clave, porque es el encargado de generar ambientes propicios para el aprendizaje e involucrarlos en actividades que permitan el logro de los aprendizajes esperados. Ante esto, el verdadero desafío para los docentes consiste en ayudar a sus estudiantes a analizar y socializar sus resultados.

Retos de los estudiantes y docentes en las clases de matemática. Cambio de actitud frente a ideas diferentes sobre lo que significa enseñar y aprender matemática. No se trata de que el docente busque las explicaciones más sencillas y amenas, sino que ayude a formarles la capacidad de pensar y aprender por sí mismos, para que ellos sientan la satisfacción de poder resolver problemas.

Estructura del Libro de Texto para estudiantes

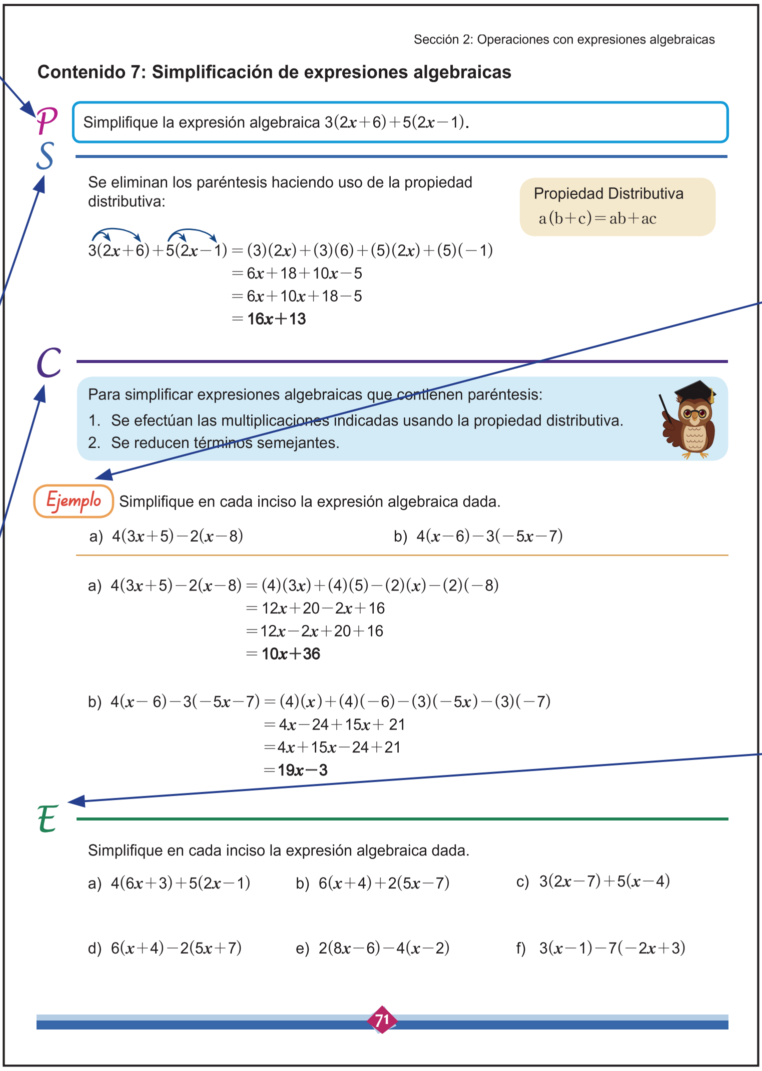
El Libro de Texto consta de introducción y unidades. En la introducción se detallan los momentos del desarrollo de un contenido, los cuales son: problema de la clase, solución del problema, conclusión y ejercicios. En algunos contenidos, por sus características, se han agregado ejemplos después de la conclusión.

Cada unidad del Libro de Texto se ha estructurado por sección, estas contienen una secuencia de contenidos contemplados en la malla curricular de matemática para Educación Secundaria.

P Representa el problema inicial, el cual se debe leer y analizar identificando las condiciones que plantea y lo que se pregunta.

S Representa la solución del problema inicial explicada paso a paso.

C Representa la conclusión de la clase, donde se propone el esquema de solución del problema inicial, en algunos casos también se presentan conceptos importantes usados en el problema.



Sección 2: Operaciones con expresiones algebraicas

Contenido 7: Simplificación de expresiones algebraicas

P

Simplifique la expresión algebraica $3(2x+6)+5(2x-1)$.

S

Se eliminan los paréntesis haciendo uso de la propiedad distributiva:

Propiedad Distributiva
$a(b+c)=ab+ac$

$$\begin{aligned} 3(2x+6)+5(2x-1) &= (3)(2x)+(3)(6)+(5)(2x)+(5)(-1) \\ &= 6x+18+10x-5 \\ &= 6x+10x+18-5 \\ &= \mathbf{16x+13} \end{aligned}$$

C

Para simplificar expresiones algebraicas que contienen paréntesis:

1. Se efectúan las multiplicaciones indicadas usando la propiedad distributiva.
2. Se reducen términos semejantes.

Ejemplo Simplifique en cada inciso la expresión algebraica dada.

a) $4(3x+5)-2(x-8)$ b) $4(x-6)-3(-5x-7)$

a) $$\begin{aligned} 4(3x+5)-2(x-8) &= (4)(3x)+(4)(5)-(2)(x)-(2)(-8) \\ &= 12x+20-2x+16 \\ &= 12x-2x+20+16 \\ &= \mathbf{10x+36} \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 4(x-6)-3(-5x-7) &= (4)(x)+(4)(-6)-(3)(-5x)-(3)(-7) \\ &= 4x-24+15x+21 \\ &= 4x+15x-24+21 \\ &= \mathbf{19x-3} \end{aligned}$$

E

Simplifique en cada inciso la expresión algebraica dada.

a) $4(6x+3)+5(2x-1)$ b) $6(x+4)+2(5x-7)$ c) $3(2x-7)+5(x-4)$

d) $6(x+4)-2(5x+7)$ e) $2(8x-6)-4(x-2)$ f) $3(x-1)-7(-2x+3)$

71

Ejemplo Los ejemplos que se presentan son variantes del problema inicial.

E Representa los ejercicios propuestos, es importante que los estudiantes los intenten resolver por sí mismos.

En **Comprobemos lo aprendido** se presentan una serie de ejercicios representativos de contenidos anteriores, el objetivo de estas clases es asegurar un tiempo de ejercitación que permita afianzar los conocimientos adquiridos y aclarar cualquier duda que puedan tener de los contenidos estudiados.

En algunos grados hay un contenido denominado **Desafío** en el que se presentan casos especiales o contenidos más complejos. El desafío se puede tratar en su clase si tiene suficiente horas de clase y sus estudiantes tienen una buena capacidad para entenderlo. De lo contrario, es mejor omitir este contenido para dedicar más tiempo a los contenidos básicos.

III. Estructura de la Guía para Docentes

1. Propuesta de programación anual de 9no grado

Semestre	Mes	Unidad (Horas)	Pág. del LT	Sección
I	Febrero	1. Productos Notables y Factorización (28 H/C)	1-32	1. Multiplicación de polinomios 2. Productos notables 3. Factorización
	Marzo			
	Abril			
	Abril	2. Ecuaciones de Segundo Grado (23 H/C)	33-56	1. Introducción a las ecuaciones de segundo grado 2. Solución de ecuaciones de segundo grado 3. Aplicaciones de las ecuaciones de segundo grado
	Mayo			
	Mayo	3. Funciones de Segundo Grado (24 H/C)	57-84	1. Introducción a las funciones de segundo grado 2. Función de segundo grado 3. Valor máximo o mínimo de una función de segundo grado y su aplicación
	Junio			
II	Julio			
	Julio	4. Proporcionalidad entre Segmentos (9 H/C)	85-94	1. Razón entre segmentos 2. División de un segmento
	Agosto			
	Agosto	5. Semejanza (21 H/C)	95-122	1. Criterios de semejanza de triángulos 2. Semejanza de triángulos rectángulos y paralelismo
	Septiembre			
	Septiembre	6. Teorema de Pitágoras (13 H/C)	123-134	1. Teorema de Pitágoras 2. Aplicaciones del Teorema de Pitágoras en geometría
	Octubre			
	Octubre	7. Circunferencia (12 H/C)	135-148	1. Ángulos inscritos 2. Aplicaciones de ángulos inscritos
	Noviembre			
	Noviembre	8. Estadística (10 H/C)	149-158	1. Presentación de tablas y gráficas

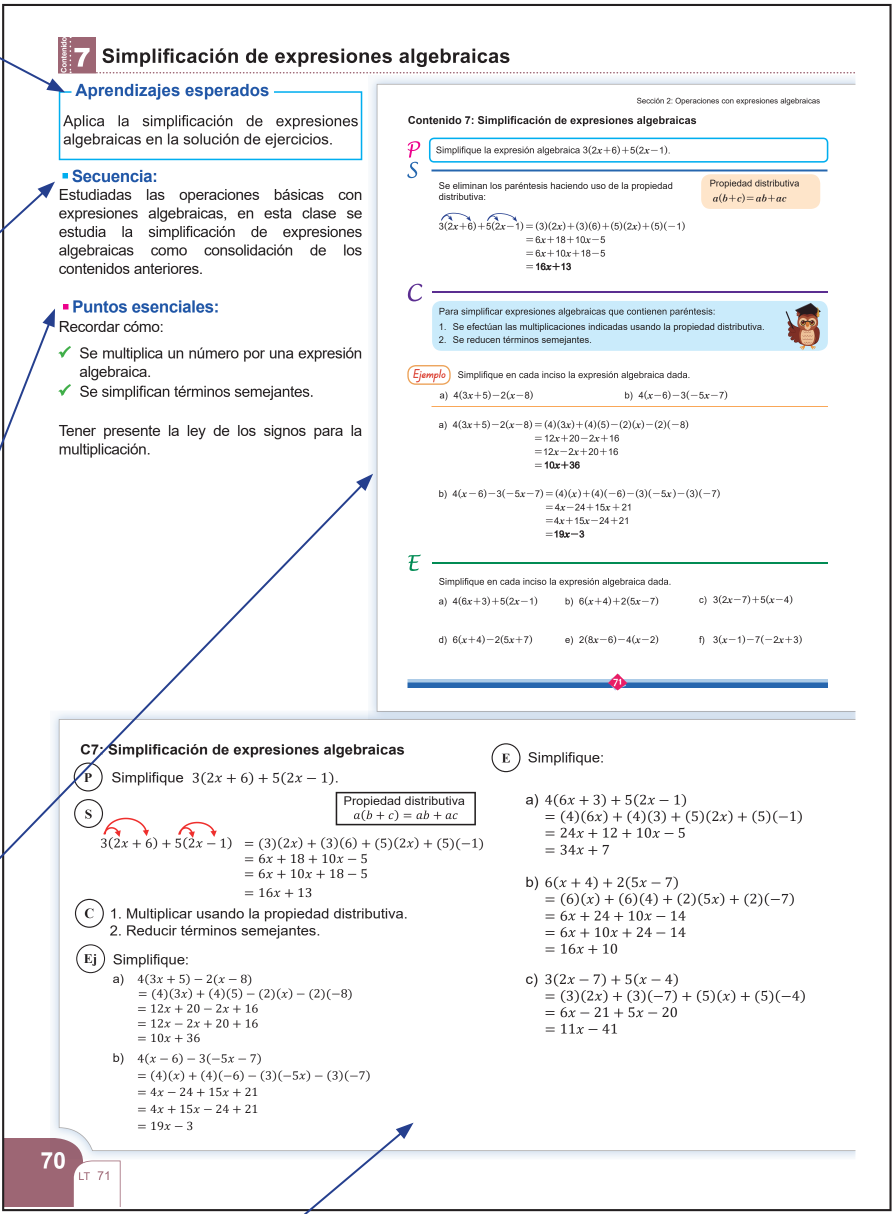
2. Elementos de una página de la Guía para Docentes

Aprendizajes esperados:
Es el elemento que define lo que se espera que logren los estudiantes en cada clase, expresado en forma concreta, precisa y visualizable.

Secuencia:
Se indican los conocimientos previos que el estudiante posee para la comprensión del nuevo contenido y la relación con contenidos posteriores.

Puntos esenciales:
Se orienta sobre procedimientos o conceptos en los que se debe enfatizar, así como las posibles dificultades y errores que podrían presentarse.

Página del Libro de Texto:
Tiene como propósito ubicar y relacionar el contenido de aprendizaje con el proceso de la clase.



Contenido **7** **Simplificación de expresiones algebraicas**

Aprendizajes esperados

Aplica la simplificación de expresiones algebraicas en la solución de ejercicios.

Secuencia:
Estudiadas las operaciones básicas con expresiones algebraicas, en esta clase se estudia la simplificación de expresiones algebraicas como consolidación de los contenidos anteriores.

Puntos esenciales:
Recordar cómo:
- ✓ Se multiplica un número por una expresión algebraica.
- ✓ Se simplifican términos semejantes.

Tener presente la ley de los signos para la multiplicación.

Sección 2: Operaciones con expresiones algebraicas

Contenido 7: Simplificación de expresiones algebraicas

P Simplifique la expresión algebraica $3(2x+6)+5(2x-1)$.

S Se eliminan los paréntesis haciendo uso de la propiedad distributiva:

Propiedad distributiva
$a(b+c)=ab+ac$

$$\begin{aligned}3(2x+6)+5(2x-1)&=(3)(2x)+(3)(6)+(5)(2x)+(5)(-1)\\&=6x+18+10x-5\\&=6x+10x+18-5\\&=\mathbf{16x+13}\end{aligned}$$

C Para simplificar expresiones algebraicas que contienen paréntesis:
1. Se efectúan las multiplicaciones indicadas usando la propiedad distributiva.
2. Se reducen términos semejantes.

Ejemplo Simplifique en cada inciso la expresión algebraica dada.

a) $4(3x+5)-2(x-8)$ b) $4(x-6)-3(-5x-7)$

a) $$\begin{aligned}4(3x+5)-2(x-8)&=(4)(3x)+(4)(5)-(2)(x)-(2)(-8)\\&=12x+20-2x+16\\&=12x-2x+20+16\\&=\mathbf{10x+36}\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}4(x-6)-3(-5x-7)&=(4)(x)+(4)(-6)-(3)(-5x)-(3)(-7)\\&=4x-24+15x+21\\&=4x+15x-24+21\\&=\mathbf{19x-3}\end{aligned}$$

E Simplifique en cada inciso la expresión algebraica dada.

a) $4(6x+3)+5(2x-1)$ b) $6(x+4)+2(5x-7)$ c) $3(2x-7)+5(x-4)$

d) $6(x+4)-2(5x+7)$ e) $2(8x-6)-4(x-2)$ f) $3(x-1)-7(-2x+3)$

71

C7: Simplificación de expresiones algebraicas

P Simplifique $3(2x+6)+5(2x-1)$.

S Propiedad distributiva
$a(b+c)=ab+ac$

$$\begin{aligned}3(2x+6)+5(2x-1)&=(3)(2x)+(3)(6)+(5)(2x)+(5)(-1)\\&=6x+18+10x-5\\&=6x+10x+18-5\\&=16x+13\end{aligned}$$

C 1. Multiplicar usando la propiedad distributiva.
2. Reducir términos semejantes.

Ej Simplifique:

a) $$\begin{aligned}&4(3x+5)-2(x-8)\\&=(4)(3x)+(4)(5)-(2)(x)-(2)(-8)\\&=12x+20-2x+16\\&=12x-2x+20+16\\&=10x+36\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}&4(x-6)-3(-5x-7)\\&=(4)(x)+(4)(-6)-(3)(-5x)-(3)(-7)\\&=4x-24+15x+21\\&=4x+15x-24+21\\&=19x-3\end{aligned}$$

E Simplifique:

a) $$\begin{aligned}&4(6x+3)+5(2x-1)\\&=(4)(6x)+(4)(3)+(5)(2x)+(5)(-1)\\&=24x+12+10x-5\\&=34x+7\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}&6(x+4)+2(5x-7)\\&=(6)(x)+(6)(4)+(2)(5x)+(2)(-7)\\&=6x+24+10x-14\\&=6x+10x+24-14\\&=16x+10\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}&3(2x-7)+5(x-4)\\&=(3)(2x)+(3)(-7)+(5)(x)+(5)(-4)\\&=6x-21+5x-20\\&=11x-41\end{aligned}$$

70 LT 71

Plan de Pizarra
En la pizarra se presenta de forma ordenada el problema de la clase, el proceso de solución, la conclusión central de la clase derivada del problema central y la indicación del ítem de evaluación, con su correspondiente solución. En algunas clases se presenta un ejemplo después de la conclusión y previo al ítem de evaluación. Este tiene como propósito consolidar el aprendizaje o ampliar el contenido en desarrollo. Lo que se plasma en la pizarra permitirá a los estudiantes llevar un registro ordenado de sus apuntes para estudiarlos posteriormente.

3. Prueba de cada Unidad

Se presenta una propuesta de la prueba por unidad para evaluar el nivel de comprensión de los estudiantes. Los docentes deben orientar con anticipación la fecha de aplicación de la prueba de la unidad a los estudiantes para que ellos repasen y consoliden lo que aprendieron en la unidad. Si el rendimiento es bajo en algunos problemas, los docentes deben tomar medidas para mejorarlo y a la vez asegurar que este bajo rendimiento no obstaculice el siguiente aprendizaje.

De esta manera, los docentes pueden utilizar esta prueba para discusión sobre los resultados obtenidos y posibles estrategias didácticas a implementar con sus colegas de la misma institución o en los Encuentros Pedagógicos de Interaprendizaje (EPI).

** Vea "VII. 1. Uso de las pruebas de unidad" para una descripción más detallada sobre la evaluación.*

4. Solucionarios

Se presentan las soluciones de los ejercicios del Libro de Texto de acuerdo a la unidad, sección y contenido. En este se muestran más detalles en el proceso de solución que los brindados en el solucionario del Libro de Texto.

IV. Orientaciones metodológicas para el mejoramiento de los aprendizajes del área de Matemática

Enseñar matemática en base a actividades de aprendizaje que desarrollen en los estudiantes formas de pensar y que permitan formular conjeturas y procedimientos para resolver problemas, argumentando sus resultados, significa que ellos deben:

(1) Leer y analizar los enunciados del problema.

(2) Pensar por sí mismos la solución al problema.

(3) Expresar sus soluciones.

(4) Comparar sus ideas unos con otros.

(5) Comprender las ideas de los demás.

(6) Aprender unos de otros.

V. Recomendaciones para el desarrollo de una clase según los momentos P, S, C, EJ, E

Para lograr los aprendizajes esperados de una clase, se debe tener en cuenta que el centro del proceso de aprendizaje es el estudiante, por lo que deben participar de forma activa en cada momento de la clase. En este proceso, el rol principal del docente es asistir en su aprendizaje a los estudiantes. A continuación, se presentan algunas recomendaciones a considerar en los diferentes momentos de la clase:

Momentos de la clase	Actividades del Docente	Actividades del Estudiante
Ⓟ	Indicar que lean el problema.	Leer el problema.
	Escribir el problema en la pizarra, mientras los estudiantes leen.	
	Indicar a los estudiantes que copien el problema en su cuaderno.	Escribir el problema en su cuaderno.
	Explicar el problema de forma clara, si es necesario.	Comprender el problema.
Ⓢ	Orientar que resuelvan el problema en su cuaderno. No dar mucho tiempo si los estudiantes no muestran posibles respuestas al problema planteado.	Intentar dar solución al problema, escribiendo sus apuntes en el cuaderno.
	Monitorear el avance de los estudiantes identificando soluciones interesantes, errores, etc., mientras se recorre el salón de clase.	
	Indicar a los estudiantes que atiendan a las explicaciones que hará.	
	Explicar la solución del texto en la pizarra, cuando todos los estudiantes estén poniendo atención.	Hacer silencio y poner atención al docente.
	Indicar a los estudiantes que copien la solución en su cuaderno y revisar que lo hagan.	Observar la explicación del docente y hacer preguntas si es necesario.
		Escribir la solución en su cuaderno.

Momentos de la clase	Actividades del Docente	Actividades del Estudiante
C	Orientar lectura de la conclusión.	Leer la conclusión planteada en el Libro de Texto.
	Explicar la conclusión a partir del proceso de solución del problema.	Relacionar la conclusión con el proceso de solución del problema.
		Anotar la conclusión en su cuaderno.
Ej (En el caso de presentarse un ejemplo)	Indicar que lean el ejemplo.	Analizar la solución del ejemplo, de forma conjunta con el docente.
	Indicar que copien el ejemplo en su cuaderno.	
	Explicar el ejemplo, haciendo hincapié en la aplicación de la conclusión.	Aplicar la conclusión en la solución del ejemplo.
E	Orientar el o los ejercicios a ser resueltos.	Resolver de forma individual cada ejercicio.
	Asignar tiempo prudencial para que los estudiantes resuelvan los ejercicios.	Aplicar la conclusión aprendida.
	Recorrer el salón mientras los estudiantes resuelven el ítem.	Si termina todos los ejercicios propuestos, brindar apoyo a aquellos que no han concluido.
	Monitorear cuántos estudiantes resuelven al menos el primer ejercicio propuesto.	
	Si hay muchos estudiantes que no han resuelto el ítem de evaluación, explicar este en la pizarra sin esperar mucho tiempo y dar la oportunidad de resolver el siguiente ítem.	
	Brindar oportunidad de que algunos estudiantes expliquen la solución de al menos el primer ejercicio.	Socializar la solución de ejercicios.
	Revisar y explicar el procedimiento y respuesta en la pizarra.	

VI. Puntos importantes a considerar en la facilitación del aprendizaje

a) Usar adecuadamente el tiempo

Alcanzar el aprendizaje esperado no es una tarea sencilla, por lo que, a continuación, se sugieren algunas técnicas para asegurar el aprendizaje en el tiempo establecido:

- Ubicación de los pupitres de los estudiantes en filas, todos los estudiantes dirigidos hacia la pizarra.
- Disposición del LT antes de iniciar la clase: orientar a los estudiantes tener preparados los recursos o materiales antes del inicio de la clase.
- Tiempo a dedicar para el recordatorio o repaso: Si se destina más de 3 minutos en la parte inicial donde se recuerdan los presaberes, en la mayoría de los casos se produce un desfase que afectará las clases posteriores.

b) Evaluar y brindar orientación necesaria desplazándose en el aula

Mientras los estudiantes resuelven el problema o el ítem de evaluación, el docente debe desplazarse en el aula para evaluar el nivel de comprensión del contenido, revisando el trabajo de los estudiantes y observando si han comprendido el enunciado.

c) Dar explicaciones claras a los estudiantes

Las instrucciones y explicaciones a los estudiantes deben ser claras y concretas, en este sentido es importante hablar cuando se capte la atención de los estudiantes. Para captar la atención el docente debe llamar a los estudiantes con frases como “Miren a la pizarra”, “Atención por favor”, entre otras. En caso de que en el aula persista la indisciplina, el docente puede dejar de explicar o bajar el volumen de la voz.

Es importante durante la explicación observar a los estudiantes para suponer su nivel de comprensión, esto significa que en ocasiones es necesario repetir la explicación cambiando expresiones, hablar más despacio, invitar a estudiantes para que expliquen con sus palabras, etc.

d) Aprovechar el rendimiento de los estudiantes que resuelven rápido los ejercicios

Para aprovechar el rendimiento de los estudiantes que resuelven los ejercicios más rápido, el docente puede establecer el siguiente compromiso: cuando terminen todos los problemas y los hayan revisado, entonces ellos pueden orientar a los demás compañeros. Así mismo, el docente puede preparar otra serie de problemas para la fijación del contenido u otro tipo de problemas que tienen carácter de desafío.

e) Revisar los cuadernos de apunte

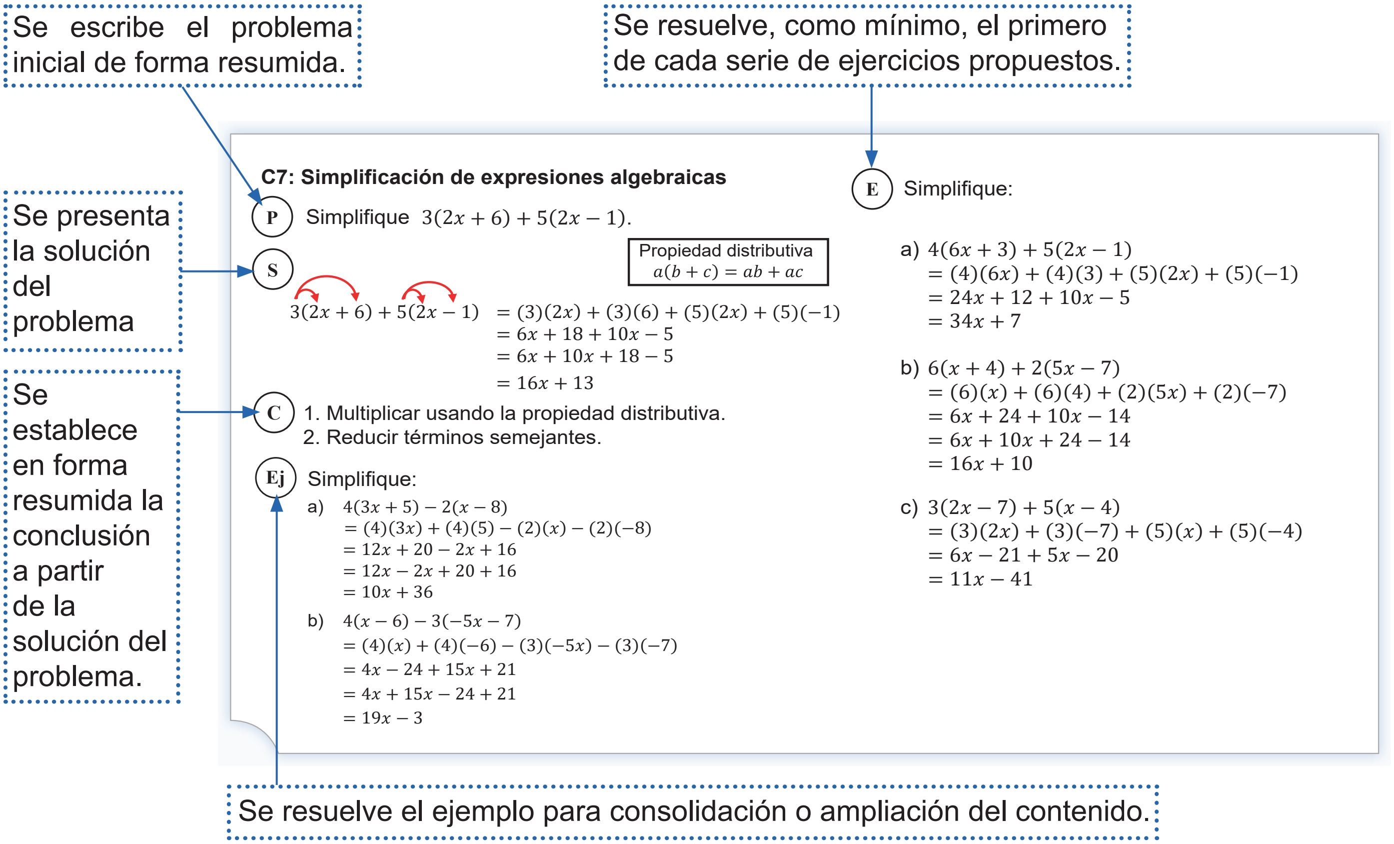
Si no se brinda un monitoreo continuo sobre el uso del cuaderno, eventualmente se puede utilizar de manera desordenada, por lo que es necesario que se revise periódicamente, de modo que los estudiantes sientan que están siendo monitoreados. Y también es recomendable chequear cuadernos de los estudiantes durante la etapa de ejercicio para animar a los estudiantes (marcar ✓ , firmar o sellar)

f) Formar el hábito de estudio en el hogar

Formar el hábito de estudio de los estudiantes en el hogar es tarea no solamente del docente, sino también de los padres de familia y no es nada fácil. Por lo que, al inicio, se podría formar el hábito de estudio a través de la asignación de tareas y orientar que estas se revisarán periódicamente.

g) Usar adecuadamente la pizarra

La pizarra tiene la función de un cuaderno común entre el docente y los estudiantes, por lo cual debe ordenarse el desarrollo del aprendizaje del contenido en ella. En esta Guía se propone utilizar la siguiente estructura en la pizarra, de acuerdo con el proceso de aprendizaje de matemática establecido en este mismo documento:



Se escribe el problema inicial de forma resumida.

Se resuelve, como mínimo, el primero de cada serie de ejercicios propuestos.

Se presenta la solución del problema

Se establece en forma resumida la conclusión a partir de la solución del problema.

C7: Simplificación de expresiones algebraicas

P Simplifique $3(2x+6)+5(2x-1)$.

S

Propiedad distributiva
$a(b+c)=ab+ac$

$$\begin{aligned} 3(2x+6)+5(2x-1) &= (3)(2x)+(3)(6)+(5)(2x)+(5)(-1)\\ &= 6x+18+10x-5\\ &= 6x+10x+18-5\\ &= 16x+13 \end{aligned}$$

C 1. Multiplicar usando la propiedad distributiva.
2. Reducir términos semejantes.

Ej Simplifique:

a) $4(3x+5)-2(x-8)$
$= (4)(3x)+(4)(5)-(2)(x)-(2)(-8)$
$= 12x+20-2x+16$
$= 12x-2x+20+16$
$= 10x+36$

b) $4(x-6)-3(-5x-7)$
$= (4)(x)+(4)(-6)-(3)(-5x)-(3)(-7)$
$= 4x-24+15x+21$
$= 4x+15x-24+21$
$= 19x-3$

E Simplifique:

a) $4(6x+3)+5(2x-1)$
$= (4)(6x)+(4)(3)+(5)(2x)+(5)(-1)$
$= 24x+12+10x-5$
$= 34x+7$

b) $6(x+4)+2(5x-7)$
$= (6)(x)+(6)(4)+(2)(5x)+(2)(-7)$
$= 6x+24+10x-14$
$= 6x+10x+24-14$
$= 16x+10$

c) $3(2x-7)+5(x-4)$
$= (3)(2x)+(3)(-7)+(5)(x)+(5)(-4)$
$= 6x-21+5x-20$
$= 11x-41$

Se resuelve el ejemplo para consolidación o ampliación del contenido.

En este documento se propone el uso de la pizarra de forma ordenada:

- En caso de que el problema sea de enunciado extenso, se debe escribir un resumen comprensible de dicho enunciado.
- En el proceso de solución no debe repetirse cada palabra de la solución planteada en el Libro de Texto, pero sí debe escribirse cada paso imprescindible del proceso.
- La conclusión también puede mostrarse de forma resumida (cuando esta es extensa).
- Debe brindarse espacio suficiente para resolver al menos el primero de cada serie de ejercicios propuestos.
- Si no puede seguir escribiendo en la pizarra debido a su pequeño tamaño, puede borrar los contenidos que los estudiantes ya han terminado de copiar y escribir la continuación. Debe procurarse dividir la pizarra en dos columnas con el mismo espacio en cada una.

VII. Uso de las Pruebas de Unidad

1. Propuesta sobre el uso de las Pruebas de Unidad

El propósito de esta propuesta es sugerir el uso efectivo de las pruebas de unidad que están incluidas en los Libros de Texto y Guías para Docentes desarrolladas por NICAMATE, y cómo estas podrían usarse para evaluar a los estudiantes en la asignatura de Matemática.

Se espera que las pruebas se realicen después de terminar cada unidad del Libro de Texto para que los docentes puedan conocer el alcance de los aprendizajes esperados en los contenidos de la unidad y, lo que es más importante, darles retroalimentación. En este sentido, el enfoque principal de las pruebas de unidad es brindar a los docentes una herramienta para administrar y mejorar efectivamente el aprendizaje de sus estudiantes. Dado que las pruebas se insertan en la parte de anexo al final de los Libros de Texto, los docentes podrían preguntarse si los estudiantes pueden ver las pruebas con anticipación y esto arruinaría el propósito de las pruebas. Sin embargo, las pruebas se incorporan en los Libros de Texto basándose en la idea de que estas contribuirán a mejorar el aprendizaje de los estudiantes siempre que las pruebas los alienten a estudiar y prepararse.

Las pruebas, además de eso, también podrían usarse para evaluar el desempeño de los estudiantes. Se espera que un sistema de evaluación eficaz, junto con los nuevos Libros de Texto y Guías para Docentes, contribuyan a mejorar aún más el aprendizaje de los estudiantes en matemática. Es en este contexto que, siguiendo la solicitud del MINED, el Proyecto NICAMATE sugiere 2 opciones sobre el uso de las pruebas individuales para la evaluación. Al hacer esta sugerencia, el Proyecto consideró el "Manual de Planeamiento Didáctico y Evaluación de los Aprendizajes en Educación Secundaria" escrito por el MINED.

2. Opciones sobre el uso de las Pruebas de Unidad para evaluación

(1) Opción 1

Total: 100 Puntos

Pruebas de Unidades (PU): 50 Puntos

Prueba Escrita o Trabajo Escrito Durante el Corte de Evaluación: 50 Puntos

Tabla de Ejemplo para la Opción 1 en Caso de 7mo Grado

No.	Nombre	Prueba de Unidad (20 Puntos para Cada Unidad)							Total de PU Acumulado (140 Puntos)	[A] Puntos de PU Ajustados (50 Puntos)*	[B] Prueba Escrita o Trabajo Escrito (50 Puntos)	Valoración Cuantitativa (100 Puntos) A+B	Valoración Cualitativa
		U1	U2	U3	U4	U5	U6	U7					
1	María	10	5	10	8	14	13	10	70	25	40	65	AE
2	Juan	18	16	20	15	12	16	20	117	42	40	82	AS

* [A] Puntos de PU Ajustados (50 Puntos) = Total de PU Acumulado × 50/140

La primera opción es tener dos criterios principales para la evaluación, las pruebas de unidad (50 puntos) y Prueba o Trabajo Escrito Durante el Corte de Evaluación (50 puntos). Los puntos asignados a cada criterio podrían ajustarse teniendo en cuenta la situación de cada centro educativo. La tabla anterior toma el caso del 7mo grado como ejemplo y, por lo tanto, tiene 7 pruebas de unidad, cada una de las cuales toma hasta 20 puntos. El total de puntos de las pruebas acumuladas, en este caso máximo 140 puntos, debe ajustarse a unos 50 puntos. La fórmula para este ajuste será Puntos de PU Ajustados $=$ Total de PU Acumulado $\times$ 50/140.

La suma de la Evaluación de Puntos de PU Ajustados y Prueba o Trabajo Escrito Durante el Corte será la marca cuantitativa final para los estudiantes. La calificación cualitativa se otorga en base a la marca cuantitativa. Los criterios para el grado cualitativo (por ejemplo, AE, AS) en el ejemplo son los mismos que en el manual.

También es posible asignar menos puntos a las pruebas de unidad para la evaluación. Es importante que al revisar las pruebas se dé retroalimentación en la solución de los ejercicios en lo que los estudiantes cometieron errores. Después de recibir los comentarios, los estudiantes pueden volver a realizar los ejercicios en los que fallaron. Es en este proceso donde los estudiantes aprenden matemáticas cada vez mejor.

(2) Opción 2

Total: 100 Puntos

Pruebas de Unidades: 30 Puntos

Evaluación de Actitud: 30 Puntos

Prueba o Trabajo Escrito Durante Corte Evaluación: 40 Puntos

Tabla de Ejemplo para Opción 2 en Caso de 7mo Grado

No.	Nombre	Pruebas de Unidad (20 Puntos para Cada Unidad)									Evaluación de Actitud (10 Puntos para Cada Indicador)						
		U1	U2	U3	U4	U5	U6	U7	Total de PU Acumulado (140 Puntos)	**[A]** Puntos de PU Ajustados (30 Puntos)*	EA 1	EA 2	EA 3	**[B]** Total de EA Acumulado (30 Puntos)	**[C]** Prueba Escrita o Trabajo Escrito (50 Puntos)	Valoración Cuantitativa (100 Puntos) **A+B+C**	Valoración Cualitativa
1	María	10	5	10	8	14	13	10	70	15	10	9	8	27	30	72	AE
2	Juan	18	16	10	8	12	16	10	90	19	2	1	2	5	40	64	AE

* [A] Puntos de PU Ajustados (30 Puntos) = Total de PU Acumulado × 30/140

En esta opción, además de la evaluación mediante pruebas o trabajos escritos durante el corte, los docentes también deben considerar los resultados de las pruebas de unidad y las actitudes de los estudiantes hacia el aprendizaje de la matemática. Si bien los docentes podrían seleccionar los indicadores para evaluar las actitudes de los estudiantes, el Proyecto sugiere que se incluyan los siguientes indicadores:

- Entrega de tareas
- Trabaja en el aula de clases
- Puntualidad
- Atiende las explicaciones del docente
- Asistencia

La ventaja de la Opción 2 es que, como lo muestra el ejemplo en la tabla, incluso si un estudiante no pudo obtener una buena calificación en las pruebas de unidad y en las pruebas o trabajos escritos durante el corte, puede obtener una buena calificación, siempre y cuando demuestre una buena actitud hacia el estudio de la matemática. Esto requiere que los docentes observen cuidadosamente a cada estudiante.

** Si el MINED emite una nueva instrucción sobre la evaluación, deben seguirla.*

Unidad 1

Productos Notables y Factorización

Sección 1 Multiplicación de polinomios

Sección 2 Productos notables

Sección 3 Factorización

Contenido 1 Multiplicación de monomio por binomio

Aprendizajes esperados

Efectúa la multiplicación de monomio por binomio.

Secuencia:

Continuando con el estudio del álgebra que se comenzó en séptimo grado, en esta unidad se abordan los productos notables y la factorización de polinomios.

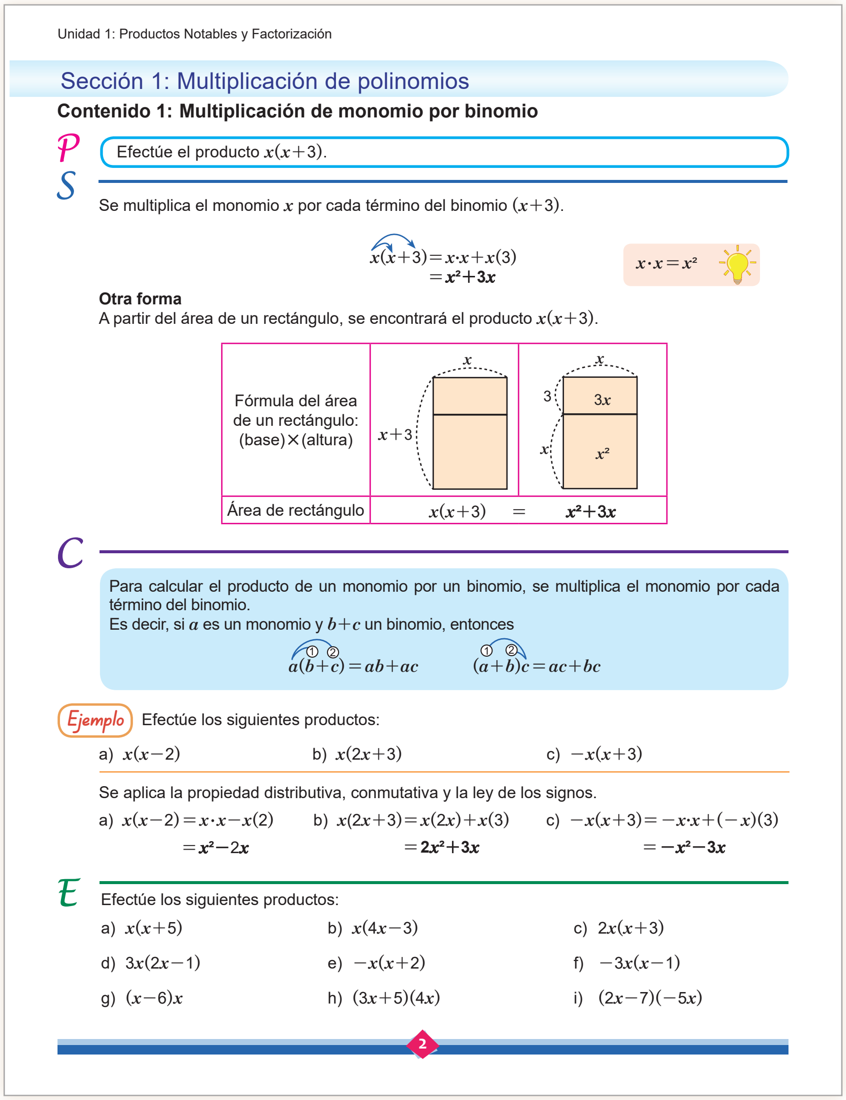
Se comienza con un repaso sobre la multiplicación de polinomios. En esta clase se aborda la multiplicación de monomio por binomio.

Puntos esenciales:

Recordar:

- ✓ La propiedad distributiva del producto respecto a la suma.
- ✓ La ley de los signos para la multiplicación.
- ✓ La propiedad conmutativa de la multiplicación.

Interpretar geométricamente el producto de un monomio por un binomio como el área de un rectángulo de base el monomio y altura el binomio.



Unidad 1: Productos Notables y Factorización

Sección 1: Multiplicación de polinomios

Contenido 1: Multiplicación de monomio por binomio

P Efectúe el producto $x(x+3)$.

S Se multiplica el monomio x por cada término del binomio $(x+3)$.

$$\begin{aligned} x(x+3) &= x\cdot x+x(3) \\ &= \boldsymbol{x^2+3x} \end{aligned}$$

$x\cdot x=x^2$

Otra forma
A partir del área de un rectángulo, se encontrará el producto $x(x+3)$.

Fórmula del área de un rectángulo: (base)×(altura)	x $x+3$	x 3 $3x$ x x^2
Área de rectángulo	$x(x+3)$ =	$\boldsymbol{x^2+3x}$

C Para calcular el producto de un monomio por un binomio, se multiplica el monomio por cada término del binomio.
Es decir, si a es un monomio y $b+c$ un binomio, entonces

$$\overset{①\ ②}{a(b+c)}=ab+ac \qquad \overset{①\ ②}{(a+b)c}=ac+bc$$

Ejemplo Efectúe los siguientes productos:

a) $x(x-2)$ b) $x(2x+3)$ c) $-x(x+3)$

Se aplica la propiedad distributiva, conmutativa y la ley de los signos.

a) $x(x-2)=x\cdot x-x(2)$
$=\boldsymbol{x^2-2x}$

b) $x(2x+3)=x(2x)+x(3)$
$=\boldsymbol{2x^2+3x}$

c) $-x(x+3)=-x\cdot x+(-x)(3)$
$=\boldsymbol{-x^2-3x}$

E Efectúe los siguientes productos:

a) $x(x+5)$ b) $x(4x-3)$ c) $2x(x+3)$
d) $3x(2x-1)$ e) $-x(x+2)$ f) $-3x(x-1)$
g) $(x-6)x$ h) $(3x+5)(4x)$ i) $(2x-7)(-5x)$

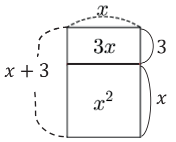
2

U1: Productos notables y factorización
S1: Multiplicación de polinomios
C1: Multiplicación de monomio por binomio

P Efectúe el producto $x(x+3)$

S $x(x+3)=x\cdot x+x(3)$
$=x^2+3x$

Otra forma: A partir del área del rectángulo, se encontrará el producto $x(x+3)$.



Área del rectángulo $x(x+3)\ =\ x^2+3x$

C $\overset{②\,①}{\boldsymbol{a(b+c)}}=\boldsymbol{ab+ac}$ $\qquad$ $\overset{①\,②}{\boldsymbol{(a+b)c}}=\boldsymbol{ac+bc}$

Ej Efectúe los siguientes productos:

a) $x(x-2)\ =x\cdot x-x(2)$
$=x^2-2x$

b) $x(2x+3)=x(2x)+x(3)$
$=2x^2+3x$

c) $-x(x+3)=-x\cdot x+(-x)(3)$
$=-x^2-3x$

E Efectúe los siguientes productos:

a) $x(x+5)=x\cdot x+x(5)$
$=x^2+5x$

b) $x(4x-3)=x(4x)-3x$
$=\ 4x^2-3x$

c) $2x(x+3)=2x^2+6x$

d) $3x(2x-1)=6x^2-3x$

e) $-x(x+2)=-x^2-2x$

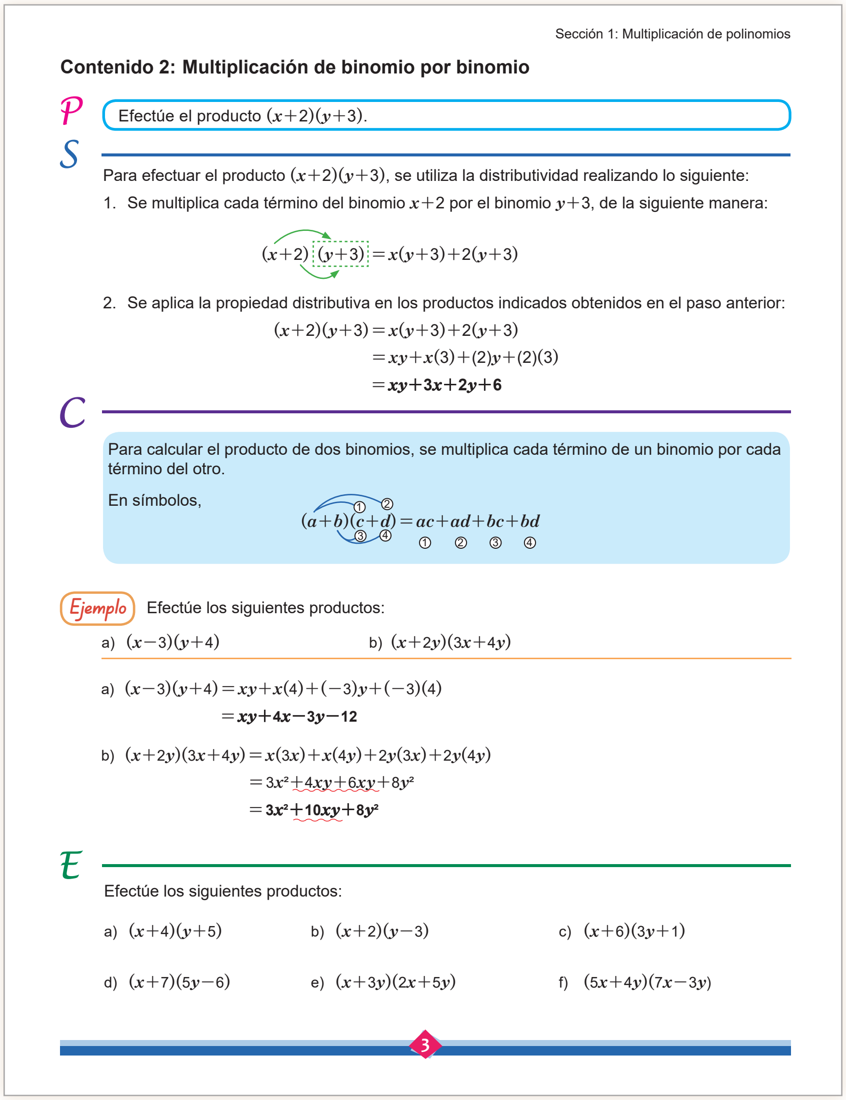
f) $-3x(x-1)=-3x^2+3x$

g) $(x-6)x=x^2-6x$

h) $(3x+5)(4x)=12x^2+20x$

i) $(2x-7)(-5x)=-10x^2+35x$

Contenido 2 Multiplicación de binomio por binomio



Contenido 2: Multiplicación de binomio por binomio

P Efectúe el producto $(x+2)(y+3)$.

S

Para efectuar el producto $(x+2)(y+3)$, se utiliza la distributividad realizando lo siguiente:

1. Se multiplica cada término del binomio $x+2$ por el binomio $y+3$, de la siguiente manera:

$$(x+2)\boxed{(y+3)}=x(y+3)+2(y+3)$$

2. Se aplica la propiedad distributiva en los productos indicados obtenidos en el paso anterior:

$$\begin{aligned}(x+2)(y+3)&=x(y+3)+2(y+3)\\&=xy+x(3)+(2)y+(2)(3)\\&=\mathbf{xy+3x+2y+6}\end{aligned}$$

C

Para calcular el producto de dos binomios, se multiplica cada término de un binomio por cada término del otro.

En símbolos,

$$(a+b)(c+d)=\underset{①}{ac}+\underset{②}{ad}+\underset{③}{bc}+\underset{④}{bd}$$

Ejemplo Efectúe los siguientes productos:

a) $(x-3)(y+4)$ b) $(x+2y)(3x+4y)$

a) $(x-3)(y+4)=xy+x(4)+(-3)y+(-3)(4)$
$=\mathbf{xy+4x-3y-12}$

b) $(x+2y)(3x+4y)=x(3x)+x(4y)+2y(3x)+2y(4y)$
$=3x^2+4xy+6xy+8y^2$
$=\mathbf{3x^2+10xy+8y^2}$

E

Efectúe los siguientes productos:

a) $(x+4)(y+5)$ b) $(x+2)(y-3)$ c) $(x+6)(3y+1)$

d) $(x+7)(5y-6)$ e) $(x+3y)(2x+5y)$ f) $(5x+4y)(7x-3y)$

Aprendizajes esperados

Efectúa la multiplicación de binomio por binomio.

Secuencia:

En la clase anterior se abordó la multiplicación de monomio por binomio. Ahora se estudia la multiplicación de binomio por binomio.

Puntos esenciales:

Recordar cómo se multiplica un monomio por un binomio.

Destacar que el producto de dos binomios puede ser desarrollado aplicando la propiedad distributiva, es decir, se multiplica cada término del primer binomio por los términos del segundo binomio y por último se suman los resultados teniendo en cuenta la simplificación de términos semejantes.

C2: Multiplicación de binomio por binomio

P Efectúe el producto $(x+2)(y+3)$

S
$$\begin{aligned}(x+2)\boxed{(y+3)}&=x(y+3)+2(y+3)\\&=xy+x(3)+(2)y+(2)(3)\\&=xy+3x+2y+6\end{aligned}$$

C Para multiplicar un binomio por un binomio, se multiplica cada uno de los términos del primer binomio por cada término del otro.

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$
① ② ③ ④

Ej

a) $(x-3)(y+4)\quad=xy+x(4)+(-3)y+(-3)(4)$
$=xy+4x-3y-12$

b) $(x+2y)(3x+4y)\quad=x(3x)+x(4y)+2y(3x)+2y(4y)$
$=3x^2+4xy+6xy+8y^2$
$=3x^2+10xy+8y^2$

E

a) $(x+4)(y+5)$
$=xy+x(5)+(4)y+(4)(5)$
$=xy+5x+4y+20$

b) $(x+2)(y-3)$
$=xy+x(-3)+(2)y+(2)(-3)$
$=xy-3x+2y-6$

c) $(x+6)(3y+1)$
$=3xy+x+18y+6$

d) $(x+7)(5y-6)$
$=5xy-6x+35y-42$

e) $(x+3y)(2x+5y)$
$=2x^2+11xy+15y^2$

f) $(5x+4y)(7x-3y)$
$=35x^2+13xy-12y^2$

Contenido 3 Multiplicación de binomio por trinomio de forma horizontal

Aprendizajes esperados

Efectúa la multiplicación de binomio por trinomio de forma horizontal.

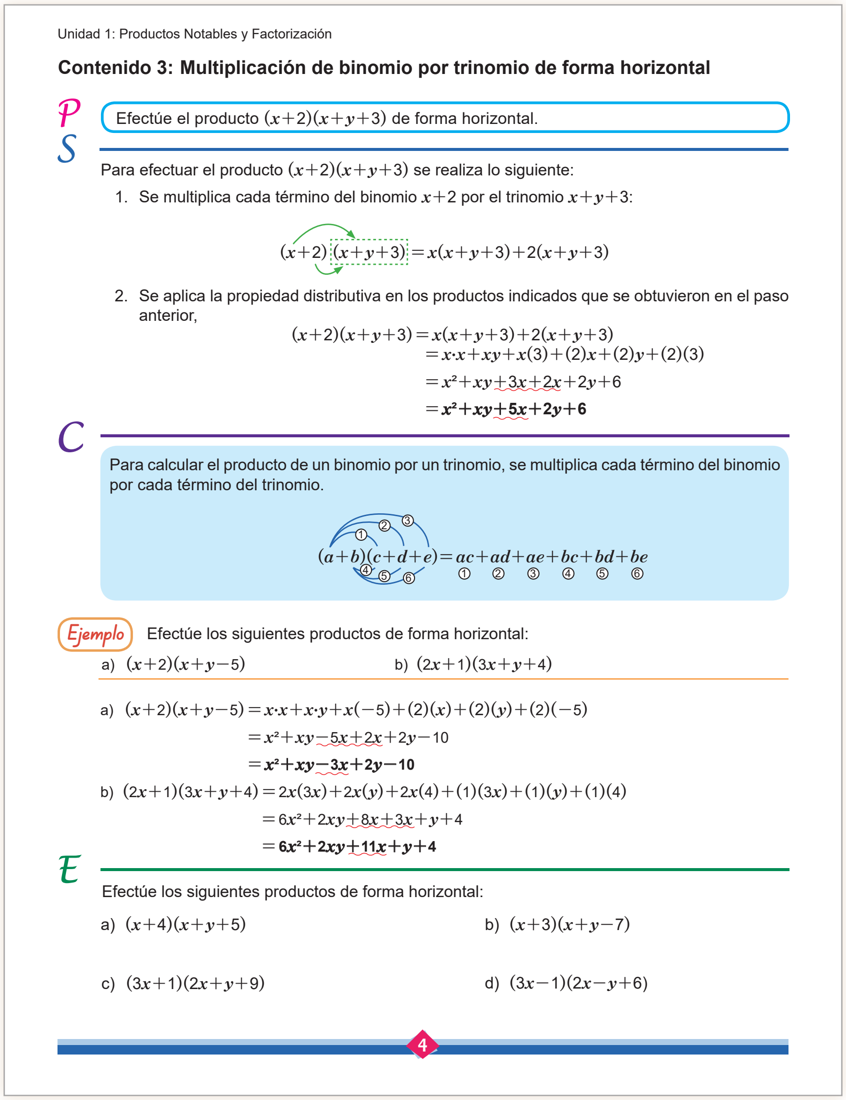
Secuencia:

En la clase anterior se estudió la multiplicación de binomio por binomio. Aquí se estudia la multiplicación de binomio por trinomio de forma horizontal.

Puntos esenciales:

Recordar cómo se multiplica un monomio por un binomio.

Explicar cómo se utiliza la propiedad distributiva, conmutativa y la simplificación de términos semejantes al efectuar el producto de un binomio por un trinomio en forma horizontal.



Unidad 1: Productos Notables y Factorización

Contenido 3: Multiplicación de binomio por trinomio de forma horizontal

P
Efectúe el producto $(x+2)(x+y+3)$ de forma horizontal.

S
Para efectuar el producto $(x+2)(x+y+3)$ se realiza lo siguiente:

1. Se multiplica cada término del binomio $x+2$ por el trinomio $x+y+3$:

$$(x+2)\boxed{(x+y+3)}=x(x+y+3)+2(x+y+3)$$

2. Se aplica la propiedad distributiva en los productos indicados que se obtuvieron en el paso anterior,

$$\begin{aligned}(x+2)(x+y+3)&=x(x+y+3)+2(x+y+3)\\&=x\cdot x+xy+x(3)+(2)x+(2)y+(2)(3)\\&=x^2+xy+3x+2x+2y+6\\&=\boldsymbol{x^2+xy+5x+2y+6}\end{aligned}$$

C
Para calcular el producto de un binomio por un trinomio, se multiplica cada término del binomio por cada término del trinomio.

$$(a+b)(c+d+e)=\underset{①}{ac}+\underset{②}{ad}+\underset{③}{ae}+\underset{④}{bc}+\underset{⑤}{bd}+\underset{⑥}{be}$$

Ejemplo Efectúe los siguientes productos de forma horizontal:

a) $(x+2)(x+y-5)$ b) $(2x+1)(3x+y+4)$

a) $(x+2)(x+y-5)=x\cdot x+x\cdot y+x(-5)+(2)(x)+(2)(y)+(2)(-5)$
$=x^2+xy-5x+2x+2y-10$
$=\boldsymbol{x^2+xy-3x+2y-10}$

b) $(2x+1)(3x+y+4)=2x(3x)+2x(y)+2x(4)+(1)(3x)+(1)(y)+(1)(4)$
$=6x^2+2xy+8x+3x+y+4$
$=\boldsymbol{6x^2+2xy+11x+y+4}$

E
Efectúe los siguientes productos de forma horizontal:

a) $(x+4)(x+y+5)$ b) $(x+3)(x+y-7)$

c) $(3x+1)(2x+y+9)$ d) $(3x-1)(2x-y+6)$

4

C3: Multiplicación de binomio por trinomio de forma horizontal

P Efectúe de forma horizontal el producto
$(x+2)(x+y+3)$

S

1. Multiplicar cada término del primer polinomio por el segundo polinomio

$$(x+2)\boxed{(x+y+3)}=x(x+y+3)+2(x+y+3)$$

2. Se aplica la propiedad distributiva

$$\begin{aligned}(x+2)(x+y+3)&=x(x+y+3)+2(x+y+3)\\&=x\cdot x+xy+x(3)+(2)x+(2)y+(2)(3)\\&=x^2+xy+3x+2x+2y+6\\&=x^2+xy+5x+2y+6\end{aligned}$$

$(x+2)(x+y+3)=x^2+xy+5x+2y+6$

C

$$\boldsymbol{(a+b)(c+d+e)=ac+ad+ae+bc+bd+be}$$

① ② ③ ④ ⑤ ⑥

Ej Efectúe los siguientes productos de forma horizontal:

a) $(x+2)(x+y-5)=x\cdot x+x\cdot y+x(-5)+(2)(x)+(2)(y)+(2)(-5)$
$=x^2+xy-5x+2x+2y-10$
$=x^2+xy-3x+2y-10$

b) $(2x+1)(3x+y+4)=2x(3x)+2x(y)+2x(4)+(1)(3x)+(1)(y)+(1)(4)$
$=6x^2+2xy+8x+3x+y+4$
$=6x^2+2xy+11x+y+4$

E

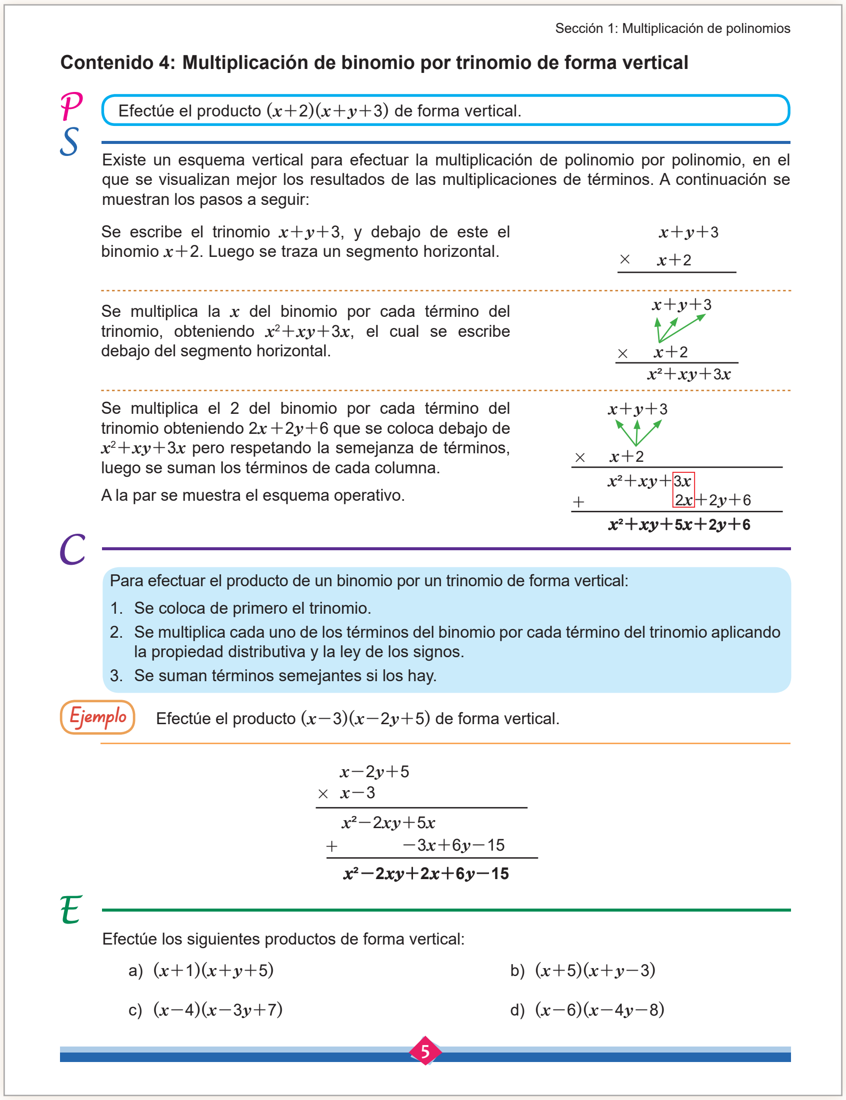
a) $(x+4)(x+y+5)\ =x^2+xy+9x+4y+20$

b) $(x+3)(x+y-7)\ =x^2+xy-4x+3y-21$

c) $(3x+1)(2x+y+9)\ =6x^2+3xy+29x+y+9$

d) $(3x-1)(2x-y+6)\ =6x^2-3xy+16x+y-6$

Contenido 4 Multiplicación de binomio por trinomio de forma vertical



Contenido 4: Multiplicación de binomio por trinomio de forma vertical

P Efectúe el producto $(x+2)(x+y+3)$ de forma vertical.

S

Existe un esquema vertical para efectuar la multiplicación de polinomio por polinomio, en el que se visualizan mejor los resultados de las multiplicaciones de términos. A continuación se muestran los pasos a seguir:

Se escribe el trinomio $x+y+3$, y debajo de este el binomio $x+2$. Luego se traza un segmento horizontal.

$$\begin{array}{r} x+y+3 \\ \times \quad x+2 \\ \hline \end{array}$$

Se multiplica la x del binomio por cada término del trinomio, obteniendo $x^2+xy+3x$, el cual se escribe debajo del segmento horizontal.

$$\begin{array}{r} x+y+3 \\ \times \quad x+2 \\ \hline x^2+xy+3x \end{array}$$

Se multiplica el 2 del binomio por cada término del trinomio obteniendo $2x+2y+6$ que se coloca debajo de $x^2+xy+3x$ pero respetando la semejanza de términos, luego se suman los términos de cada columna.

A la par se muestra el esquema operativo.

$$\begin{array}{rrr} x+y+3 & & \\ \times \quad x+2 & & \\ \hline x^2+xy+ & \boxed{3x} & \\ + \qquad & \boxed{2x} & +2y+6 \\ \hline x^2+xy+ & 5x & +2y+6 \end{array}$$

C

Para efectuar el producto de un binomio por un trinomio de forma vertical:

1. Se coloca de primero el trinomio.
2. Se multiplica cada uno de los términos del binomio por cada término del trinomio aplicando la propiedad distributiva y la ley de los signos.
3. Se suman términos semejantes si los hay.

Ejemplo Efectúe el producto $(x-3)(x-2y+5)$ de forma vertical.

$$\begin{array}{rrr} x-2y+5 & & \\ \times \quad x-3 & & \\ \hline x^2-2xy+ & 5x & \\ + \qquad & -3x & +6y-15 \\ \hline x^2-2xy+ & 2x & +6y-15 \end{array}$$

E

Efectúe los siguientes productos de forma vertical:

a) $(x+1)(x+y+5)$

b) $(x+5)(x+y-3)$

c) $(x-4)(x-3y+7)$

d) $(x-6)(x-4y-8)$

Aprendizajes esperados

Efectúa la multiplicación de binomio por trinomio de forma vertical.

Secuencia:

En las clases anteriores se efectuaron productos de forma horizontal. Ahora se efectúan productos de forma vertical.

Puntos esenciales:

Recordar cómo se multiplica binomio por trinomio.

Destacar que para efectuar el producto indicado de binomio por trinomio de forma vertical, la multiplicación se hace de izquierda a derecha colocando términos semejantes en una misma columna y por último se suman estos.

Resaltar que el arreglo que se hace de colocar términos semejantes en una misma columna facilita su simplificación.

C4: Multiplicación de binomio por trinomio de forma vertical

Ⓟ Efectúe el producto indicado $(x+2)(x+y+3)$ de forma vertical.

Ⓢ

$$\begin{array}{rrr} x+y+3 & & \\ \times \quad x+2 & & \\ \hline x^2+xy+ & \boxed{3x} & \\ + & \boxed{2x} & +2y+6 \\ \hline x^2+xy+ & 5x & +2y+6 \end{array}$$

Ⓒ Para efectuar el producto de un binomio por un trinomio de forma vertical:

1. Se coloca de primero el trinomio.
2. Se multiplica cada uno de los términos del binomio por cada término del trinomio aplicando la propiedad distributiva.
3. Se suman términos semejantes si los hay.

Ⓔⓙ

$$\begin{array}{rrr} x-2y+5 & & \\ \times \quad x-3 & & \\ \hline x^2-2xy+ & 5x & \\ & -3x & +6y-15 \\ \hline x^2-2xy+ & 2x & +6y-15 \end{array}$$

Ⓔ

a)

$$\begin{array}{rrr} x+y+5 & & \\ \times \quad x+1 & & \\ \hline x^2+xy+ & 5x & \\ + & x & +y+5 \\ \hline x^2+xy+ & 6x & +y+5 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rrr} x+y-3 & & \\ \times \quad x+5 & & \\ \hline x^2+xy & -3x & \\ & +5x & +5y-15 \\ \hline x^2+xy & +2x & +5y-15 \end{array}$$

Contenido 1 Producto de dos binomios de la forma $(x+a)(x+b)$ (1)

Aprendizajes esperados

Efectúa productos de dos binomios de la forma $(x+a)(x+b)$ por simple inspección.

Secuencia:

En clases anteriores se han desarrollado productos de forma horizontal y vertical. Ahora se estudian los productos notables, nombre que reciben aquellos productos con expresiones algebraicas fáciles de reconocer, que cumplen ciertas reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, sin verificar las sumas y multiplicaciones indicadas. Su aplicación significa ahorro en cuanto al número de operaciones a realizar.

Se comienza con el producto de dos binomios de la forma $(x+a)(x+b)$.

Puntos esenciales:

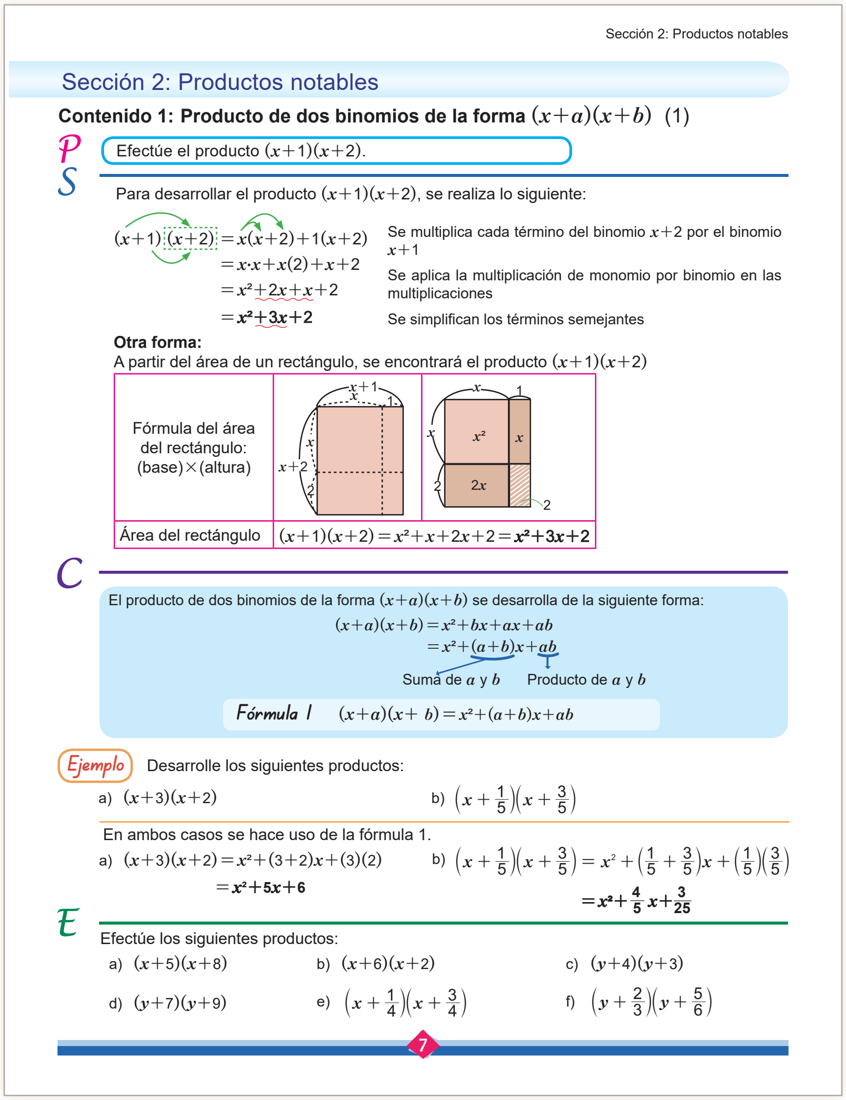
Recordar cómo se multiplica binomio por binomio.

Establecer la regla:

$$(x+a)(x+b)= x^2+(a+b)x+ab$$

Expresar verbalmente lo que indica la regla anterior para efectuar un producto de la forma $(x+a)(x+b)$.

Aplicar dicha regla al efectuar productos de la forma $(x+a)(x+b)$ por simple inspección.



Sección 2: Productos notables

Sección 2: Productos notables

Contenido 1: Producto de dos binomios de la forma $(x+a)(x+b)$ (1)

P Efectúe el producto $(x+1)(x+2)$.

S Para desarrollar el producto $(x+1)(x+2)$, se realiza lo siguiente:

$$\begin{aligned}(x+1)\boxed{(x+2)} &= x(x+2)+1(x+2) && \text{Se multiplica cada término del binomio } x+2 \text{ por el binomio } x+1\\ &= x\cdot x+x(2)+x+2 && \text{Se aplica la multiplicación de monomio por binomio en las multiplicaciones}\\ &= x^2+\underline{2x+x}+2 && \text{Se simplifican los términos semejantes}\\ &= \mathbf{x^2+3x+2}\end{aligned}$$

Otra forma:

A partir del área de un rectángulo, se encontrará el producto $(x+1)(x+2)$

Fórmula del área del rectángulo: (base)×(altura)	$x+1$, x, 1, x, $x+2$, 2	x, 1, x, x^2, x, 2, $2x$, 2
Área del rectángulo	$(x+1)(x+2)=x^2+x+2x+2=\mathbf{x^2+3x+2}$	

C El producto de dos binomios de la forma $(x+a)(x+b)$ se desarrolla de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b) &= x^2+bx+ax+ab\\ &= x^2+\underbrace{(a+b)}_{\text{Suma de } a \text{ y } b}x+\underbrace{ab}_{\text{Producto de } a \text{ y } b}\end{aligned}$$

Fórmula 1 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

Ejemplo Desarrolle los siguientes productos:

a) $(x+3)(x+2)$

b) $\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(x+\frac{3}{5}\right)$

En ambos casos se hace uso de la fórmula 1.

a) $(x+3)(x+2)=x^2+(3+2)x+(3)(2)$
$=\mathbf{x^2+5x+6}$

b) $\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(x+\frac{3}{5}\right)=x^2+\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\right)x+\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)$
$=\mathbf{x^2+\frac{4}{5}x+\frac{3}{25}}$

E Efectúe los siguientes productos:

a) $(x+5)(x+8)$

b) $(x+6)(x+2)$

c) $(y+4)(y+3)$

d) $(y+7)(y+9)$

e) $\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)$

f) $\left(y+\frac{2}{3}\right)\left(y+\frac{5}{6}\right)$

7

S2: Productos notables

C1: Producto de dos binomios de la forma $(x+a)(x+b)$ (1)

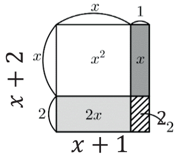
P Efectúe el producto $(x+1)(x+2)$

S
$$\begin{aligned}(x+1)\boxed{(x+2)} &= x(x+2)+1(x+2)\\ &= x\cdot x+x(2)+x+2\\ &= x^2+\underline{2x+x}+2\\ &= x^2+\underline{3x}+2\end{aligned}$$

Otra forma:

A partir del área del rectángulo desarrolle el producto

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \text{Base}\times\text{Altura}\\ &= (x+1)(x+2)\\ &= x^2+x+2x+2\\ &= x^2+3x+2\end{aligned}$$



C

Fórmula 1: $(x+a)(x+b)= x^2+(a+b)x+ab$

Ej Desarrolle los siguientes productos:

a) $(x+3)(x+2)=x^2+(3+2)x+(3)(2)$
$=x^2+5x+6$

b) $\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(x+\frac{3}{5}\right)=x^2+\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\right)x+\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)$
$=x^2+\frac{4}{5}x+\frac{3}{25}$

E a) $(x+5)(x+8)=x^2+(5+8)x+(5)(8)$
$=x^2+13x+40$

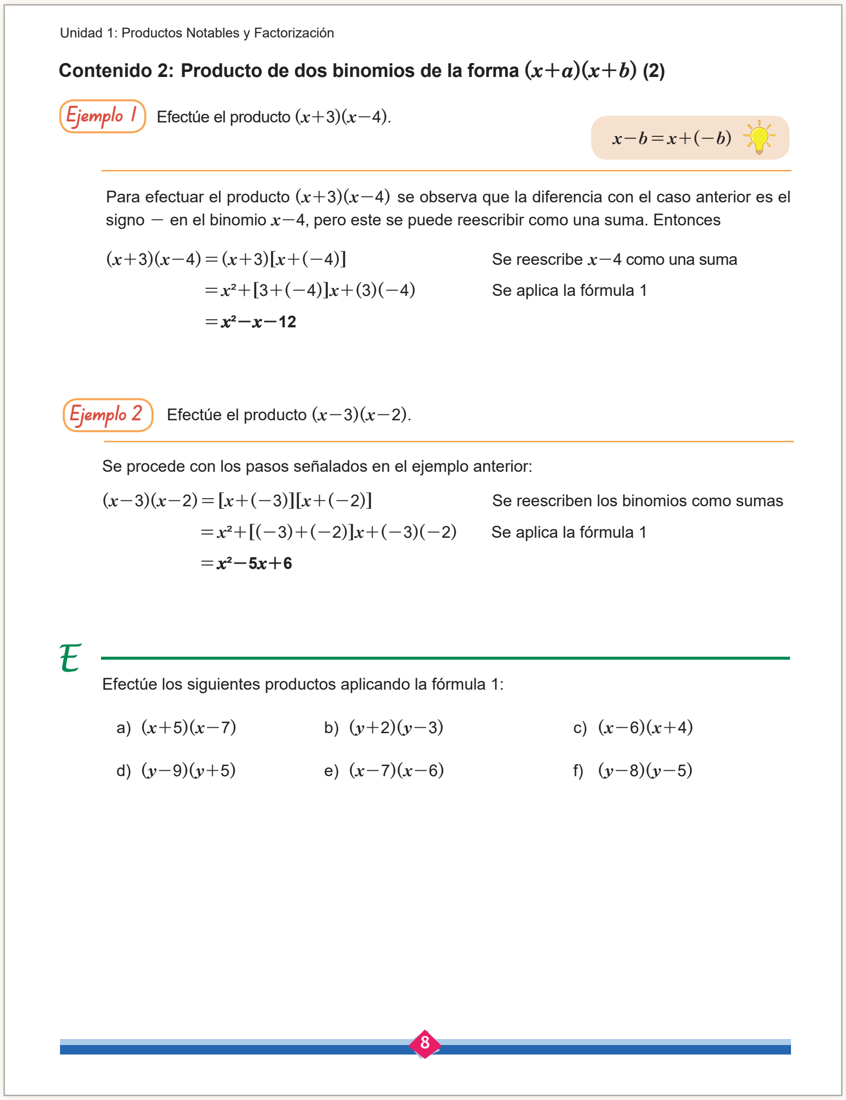
b) $(x+6)(x+2)=x^2+(6+2)x+(6)(2)$
$=x^2+8x+12$

c) $(y+4)(y+3)=y^2+(4+3)y+(4)(3)$
$=y^2+7y+12$

d) $(y+7)(y+9)=y^2+(7+9)y+(7)(9)$
$=y^2+16y+63$

e) $\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)=x^2+\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)x+\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=x^2+x+\frac{3}{16}$

Contenido 2 Producto de dos binomios de la forma $(x+a)(x+b)$ (2)



Unidad 1: Productos Notables y Factorización

Contenido 2: Producto de dos binomios de la forma $(x+a)(x+b)$ (2)

Ejemplo 1 Efectúe el producto $(x+3)(x-4)$.

$x-b=x+(-b)$

Para efectuar el producto $(x+3)(x-4)$ se observa que la diferencia con el caso anterior es el signo $-$ en el binomio $x-4$, pero este se puede reescribir como una suma. Entonces

$(x+3)(x-4)=(x+3)[x+(-4)]$ Se reescribe $x-4$ como una suma

$=x^2+[3+(-4)]x+(3)(-4)$ Se aplica la fórmula 1

$=\mathbf{x^2-x-12}$

Ejemplo 2 Efectúe el producto $(x-3)(x-2)$.

Se procede con los pasos señalados en el ejemplo anterior:

$(x-3)(x-2)=[x+(-3)][x+(-2)]$ Se reescriben los binomios como sumas

$=x^2+[(-3)+(-2)]x+(-3)(-2)$ Se aplica la fórmula 1

$=\mathbf{x^2-5x+6}$

E

Efectúe los siguientes productos aplicando la fórmula 1:

a) $(x+5)(x-7)$ b) $(y+2)(y-3)$ c) $(x-6)(x+4)$

d) $(y-9)(y+5)$ e) $(x-7)(x-6)$ f) $(y-8)(y-5)$

8

Aprendizajes esperados

Efectúa productos de dos binomios de la forma $(x+a)(x+b)$ por simple inspección.

Secuencia:

En la clase anterior se estableció la regla para efectuar el producto de la forma $(x+a)(x+b)$ con a y b positivos, pero ¿qué sucede si ambos son negativos?, ¿y si tienen signos contrarios? En este contenido se da respuesta a dichas interrogantes.

Puntos esenciales:

Recordar:

- ✓ Que $x-b=x+(-b)$.
- ✓ Cómo se suman números de igual o diferentes signos.

Aplicar la regla para efectuar el producto de la forma $(x+a)(x+b)$.

Destacar que en el producto de la forma $(x+a)(x+b)$ si a y b tienen signos contrarios o ambos son negativos se sigue la regla estudiada en la clase anterior resaltando que la suma que se hace de ellos debe indicarse con sus respectivos signos.

Efectuar productos indicados de la forma $(x+a)(x+b)$ por simple inspección.

C2: Producto de dos binomios de la forma $(x+a)(x+b)$ (2)

Ej1 Efectúe el producto: $(x+3)(x-4)$

$\boxed{x-a=x+(-a)}$

$(x+3)(x-4)=(x+3)[x+(-4)]$

$=x^2+[3+(-4)]x+(3)(-4)$

$=x^2-x-12$

$\boxed{\text{Fórmula 1: } (x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab}$

Ej2 Desarrolle: $(x-3)(x-2)$.

$(x-3)(x-2)=[(x+(-3)][x+(-2)]$

$=x^2+[(-3)+(-2)]x+(-3)(-2)$

$=x^2-5x+6$

E Efectúe los siguientes productos aplicando la fórmula 1:

a) $(x+5)(x-7)=x^2+[5+(-7)]x+(5)(-7)$

$=x^2-2x-35$

b) $(y+2)(y-3)=y^2+[2+(-3)]y+(2)(-3)$

$=y^2-y-6$

c) $(x-6)(x+4)=x^2+[(-6)+4]x+(-6)(4)$

$=x^2-2x-24$

d) $(y-9)(y+5)=y^2+[(-9)+5]y+(-9)(5)$

$=y^2-4y-45$

e) $(x-7)(x-6)=x^2+[(-7)+(-6)]x+(-7)(-6)$

$=x^2-13x+42$

f) $(y-8)(y-5)=y^2+[(-8)+(-5)]y+(-8)(-5)$

$=y^2-13y+40$

Contenido 3 Producto de dos binomios de la forma $(ax+b)(cx+d)$

Aprendizajes esperados

Efectúa productos de dos binomios de la forma $(ax+b)(cx+d)$ por simple inspección.

Secuencia:

En las clases anteriores se desarrollaron productos de la forma $(x+a)(x+b)$. Ahora se estudia el caso general $(ax+b)(cx+d)$.

Puntos esenciales:

Recordar cómo se desarrolla el producto de la forma $(x+a)(x+b)$.

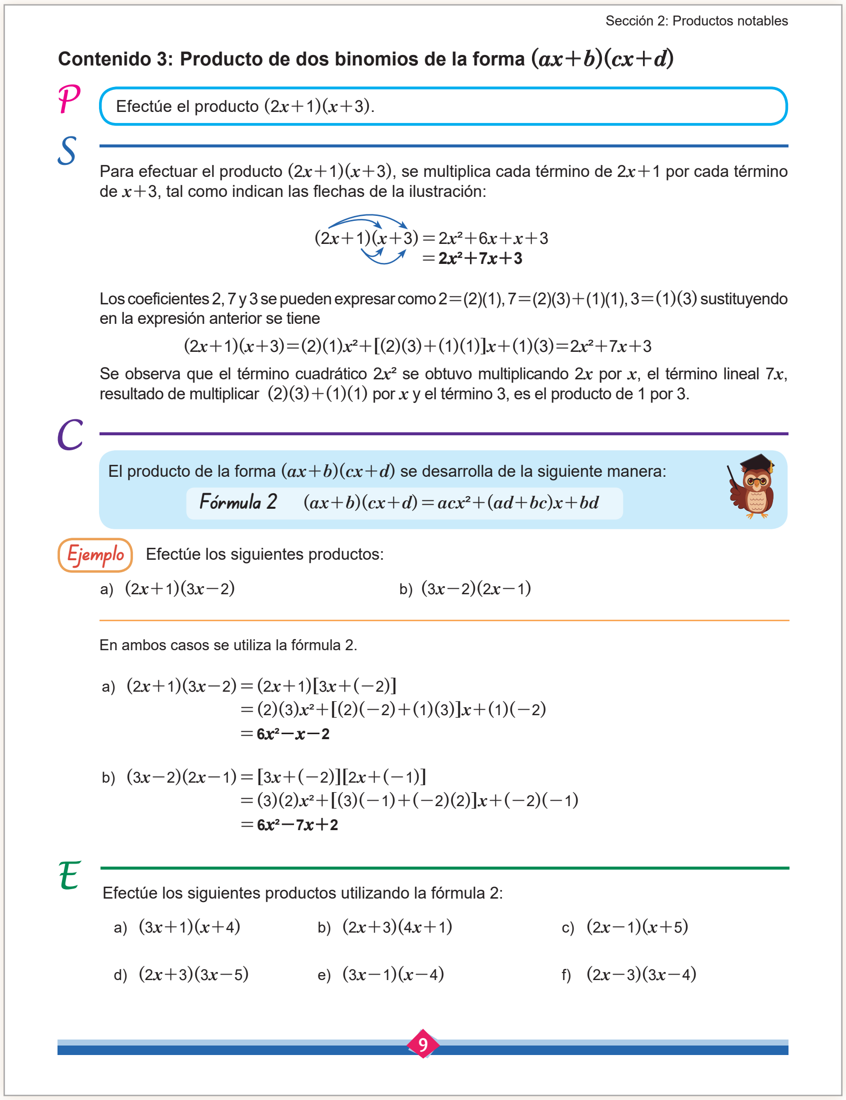
Explicar cada uno de los pasos descritos para el desarrollo del producto

$$(ax+b)(cx+d).$$

Establecer la regla

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd.$$

Aplicar dicha regla al efectuar productos de la forma $(ax+b)(cx+d)$ por simple inspección.



Contenido 3: Producto de dos binomios de la forma $(ax+b)(cx+d)$

P Efectúe el producto $(2x+1)(x+3)$.

S Para efectuar el producto $(2x+1)(x+3)$, se multiplica cada término de $2x+1$ por cada término de $x+3$, tal como indican las flechas de la ilustración:

$$(2x+1)(x+3)=2x^2+6x+x+3$$
$$=\mathbf{2x^2+7x+3}$$

Los coeficientes 2, 7 y 3 se pueden expresar como $2=(2)(1)$, $7=(2)(3)+(1)(1)$, $3=(1)(3)$ sustituyendo en la expresión anterior se tiene

$$(2x+1)(x+3)=(2)(1)x^2+[(2)(3)+(1)(1)]x+(1)(3)=2x^2+7x+3$$

Se observa que el término cuadrático $2x^2$ se obtuvo multiplicando $2x$ por x, el término lineal $7x$, resultado de multiplicar $(2)(3)+(1)(1)$ por x y el término 3, es el producto de 1 por 3.

C El producto de la forma $(ax+b)(cx+d)$ se desarrolla de la siguiente manera:

Fórmula 2 $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

Ejemplo Efectúe los siguientes productos:

a) $(2x+1)(3x-2)$ b) $(3x-2)(2x-1)$

En ambos casos se utiliza la fórmula 2.

a) $(2x+1)(3x-2)=(2x+1)[3x+(-2)]$
$=(2)(3)x^2+[(2)(-2)+(1)(3)]x+(1)(-2)$
$=\mathbf{6x^2-x-2}$

b) $(3x-2)(2x-1)=[3x+(-2)][2x+(-1)]$
$=(3)(2)x^2+[(3)(-1)+(-2)(2)]x+(-2)(-1)$
$=\mathbf{6x^2-7x+2}$

E Efectúe los siguientes productos utilizando la fórmula 2:

a) $(3x+1)(x+4)$ b) $(2x+3)(4x+1)$ c) $(2x-1)(x+5)$

d) $(2x+3)(3x-5)$ e) $(3x-1)(x-4)$ f) $(2x-3)(3x-4)$

C3: Producto de dos binomios de la forma $(ax+b)(cx+d)$

P Efectúe el producto $(2x+1)(x+3)$

S

$$(2x+1)(x+3)=2x^2+6x+x+3$$
$$=2x^2+7x+3$$

(2)(1) (2)(3)+(1)(1) (1)(3)

C Fórmula 2:
$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

Ej Efectúe los productos

a) $(2x+1)(3x-2)=(2x+1)[3x+(-2)]$
$=(2)(3)x^2+[(2)(-2)+(1)(3)]x+(1)(-2)$
$=6x^2-x-2$

b) $(3x-2)(2x-1)=[3x+(-2)][2x+(-1)]$
$=(3)(2)x^2+[(3)(-1)+(-2)(2)]x+(-2)(-1)$
$=6x^2-7x+2$

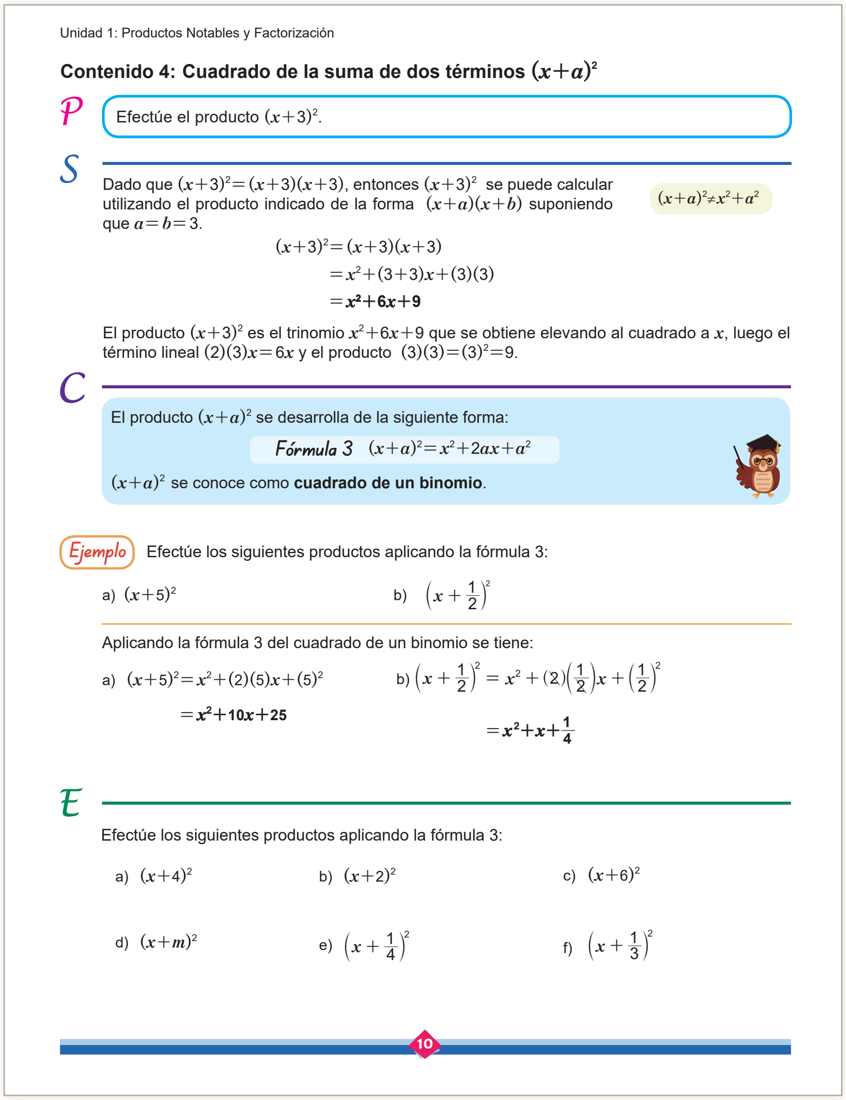
E

a) $(3x+1)(x+4)=(3)(1)x^2+[(3)(4)+(1)(1)]x+(1)(4)$
$=3x^2+13x+4$

b) $(2x+3)(4x+1)=(2)(4)x^2+[(2)(1)+(3)(4)]x+(3)(1)$
$=8x^2+14x+3$

c) $(2x-1)(x+5)=[2x+(-1)](x+5)$
$=(2)(1)x^2+[(2)(5)+(-1)(1)]x+(-1)(5)$
$=2x^2+9x-5$

Contenido 4 Cuadrado de la suma de dos términos $(x+a)^2$



Contenido 4: Cuadrado de la suma de dos términos $(x+a)^2$

P Efectúe el producto $(x+3)^2$.

S

Dado que $(x+3)^2=(x+3)(x+3)$, entonces $(x+3)^2$ se puede calcular utilizando el producto indicado de la forma $(x+a)(x+b)$ suponiendo que $a=b=3$.

$(x+a)^2 \neq x^2+a^2$

$$\begin{aligned}(x+3)^2&=(x+3)(x+3)\\&=x^2+(3+3)x+(3)(3)\\&=\mathbf{x^2+6x+9}\end{aligned}$$

El producto $(x+3)^2$ es el trinomio x^2+6x+9 que se obtiene elevando al cuadrado a x, luego el término lineal $(2)(3)x=6x$ y el producto $(3)(3)=(3)^2=9$.

C

El producto $(x+a)^2$ se desarrolla de la siguiente forma:

Fórmula 3 $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$

$(x+a)^2$ se conoce como **cuadrado de un binomio**.

Ejemplo Efectúe los siguientes productos aplicando la fórmula 3:

a) $(x+5)^2$

b) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

Aplicando la fórmula 3 del cuadrado de un binomio se tiene:

a) $(x+5)^2=x^2+(2)(5)x+(5)^2$

$=\mathbf{x^2+10x+25}$

b) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=x^2+(\cancel{2})\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)x+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=\mathbf{x^2+x+\frac{1}{4}}$

E

Efectúe los siguientes productos aplicando la fórmula 3:

a) $(x+4)^2$

b) $(x+2)^2$

c) $(x+6)^2$

d) $(x+m)^2$

e) $\left(x+\frac{1}{4}\right)^2$

f) $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$

Aprendizajes esperados

Desarrolla productos de la forma $(x+a)^2$ por simple inspección.

Secuencia:

En la clase anterior se desarrollaron productos de la forma $(ax+b)(cx+d)$. Aquí se presenta el desarrollo del cuadrado de la suma de dos términos $(x+a)^2$.

Puntos esenciales:

Recordar cómo se desarrolla el producto de la forma $(x+a)(x+b)$.

Aplicar tal desarrollo para establecer la regla

$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2.$$

Expresar verbalmente lo que indica la regla anterior para el desarrollo del cuadrado de la suma de dos términos $(x+a)^2$.

Aplicar dicha regla al desarrollar el cuadrado de la suma de dos términos $(x+a)^2$.

Destacar que $(x+a)^2 \neq x^2+a^2$.

C4: Cuadrado de la suma de dos términos $(x+a)^2$

P Efectúe el producto $(x+3)^2$

S

$$\begin{aligned}(x+3)^2&=(x+3)(x+3)\\&=x^2+(3+3)x+(3)(3)\\&=x^2+6x+9\end{aligned}$$

C

$$\begin{aligned}(x+a)^2&=(x+a)(x+a)\\&=x^2+(a+a)x+a\cdot a\\&=x^2+2ax+a^2\end{aligned}$$

Fórmula 3: $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$

Ej

a) $(x+5)^2=x^2+(2)(5)x+(5)^2$

$=x^2+10x+25$

b) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=x^2+(\cancel{2})\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)x+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=x^2+x+\frac{1}{4}$

E

a) $(x+4)^2=x^2+(2)(4)x+(4)^2$

$=x^2+8x+16$

b) $(x+2)^2=x^2+(2)(2)x+(2)^2$

$=x^2+4x+4$

c) $(x+6)^2=x^2+(2)(6)x+(6)^2$

$=x^2+12x+36$

e) $\left(x+\frac{1}{4}\right)^2=x^2+2\left(\frac{1}{4}\right)x+\left(\frac{1}{4}\right)^2$

$=x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}$

Contenido 5 Cuadrado de la diferencia de dos términos $(x-a)^2$

Aprendizajes esperados

Desarrolla productos de la forma $(x-a)^2$ por simple inspección.

Secuencia:

En la clase anterior se desarrolló el cuadrado de la suma de dos términos. Ahora se presenta el desarrollo del cuadrado de la diferencia de dos términos $(x-a)^2$.

Puntos esenciales:

Recordar cómo se desarrolla el producto de la forma $(x+a)^2$.

Aplicar tal desarrollo para establecer la regla

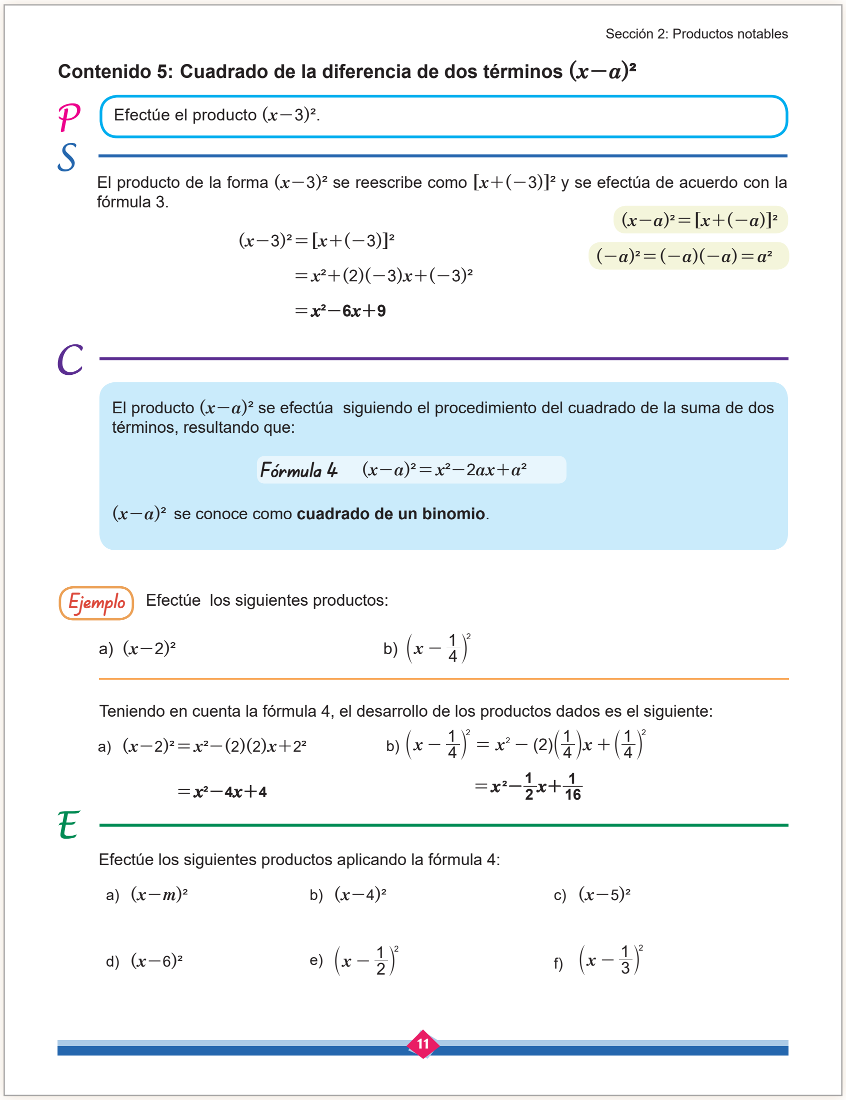
$$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2.$$

Expresar verbalmente lo que indica la regla anterior para el desarrollo del cuadrado de la diferencia de dos términos $(x-a)^2$.

Aplicar dicha regla al desarrollar el cuadrado de la diferencia de dos términos por simple inspección.

Resaltar que $(x-a)^2 \neq x^2-a^2$.

Destacar que a $(x+a)^2$ y $(x-a)^2$ se les conoce como el cuadrado de un binomio.



Sección 2: Productos notables

Contenido 5: Cuadrado de la diferencia de dos términos $(x-a)^2$

P Efectúe el producto $(x-3)^2$.

S

El producto de la forma $(x-3)^2$ se reescribe como $[x+(-3)]^2$ y se efectúa de acuerdo con la fórmula 3.

$(x-a)^2=[x+(-a)]^2$

$(-a)^2=(-a)(-a)=a^2$

$$(x-3)^2=[x+(-3)]^2$$
$$=x^2+(2)(-3)x+(-3)^2$$
$$=x^2-6x+9$$

C

El producto $(x-a)^2$ se efectúa siguiendo el procedimiento del cuadrado de la suma de dos términos, resultando que:

Fórmula 4 $(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$

$(x-a)^2$ se conoce como **cuadrado de un binomio**.

Ejemplo Efectúe los siguientes productos:

a) $(x-2)^2$

b) $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2$

Teniendo en cuenta la fórmula 4, el desarrollo de los productos dados es el siguiente:

a) $(x-2)^2=x^2-(2)(2)x+2^2$
$=x^2-4x+4$

b) $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2=x^2-(2)\left(\frac{1}{4}\right)x+\left(\frac{1}{4}\right)^2$
$=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}$

E

Efectúe los siguientes productos aplicando la fórmula 4:

a) $(x-m)^2$

b) $(x-4)^2$

c) $(x-5)^2$

d) $(x-6)^2$

e) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

f) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$

11

C5: Cuadrado de la diferencia de dos términos $(x-a)^2$

$$\boxed{\begin{aligned}(x-a)^2&=[x+(-a)]^2\\(-a)^2&=(-a)(-a)=a^2\end{aligned}}$$

P Efectúe el producto $(x-3)^2$

S

$$(x-3)^2=[x+(-3)]^2$$
$$=x^2+(2)(-3)x+(-3)^2$$
$$=x^2-6x+9$$

C Fórmula 4: $(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$

Ej a) $(x-2)^2=x^2-(2)(2)x+(2)^2$
$=x^2-4x+4$

b) $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2=x^2-(2)\left(\frac{1}{4}\right)x+\left(\frac{1}{4}\right)^2$
$=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}$

E

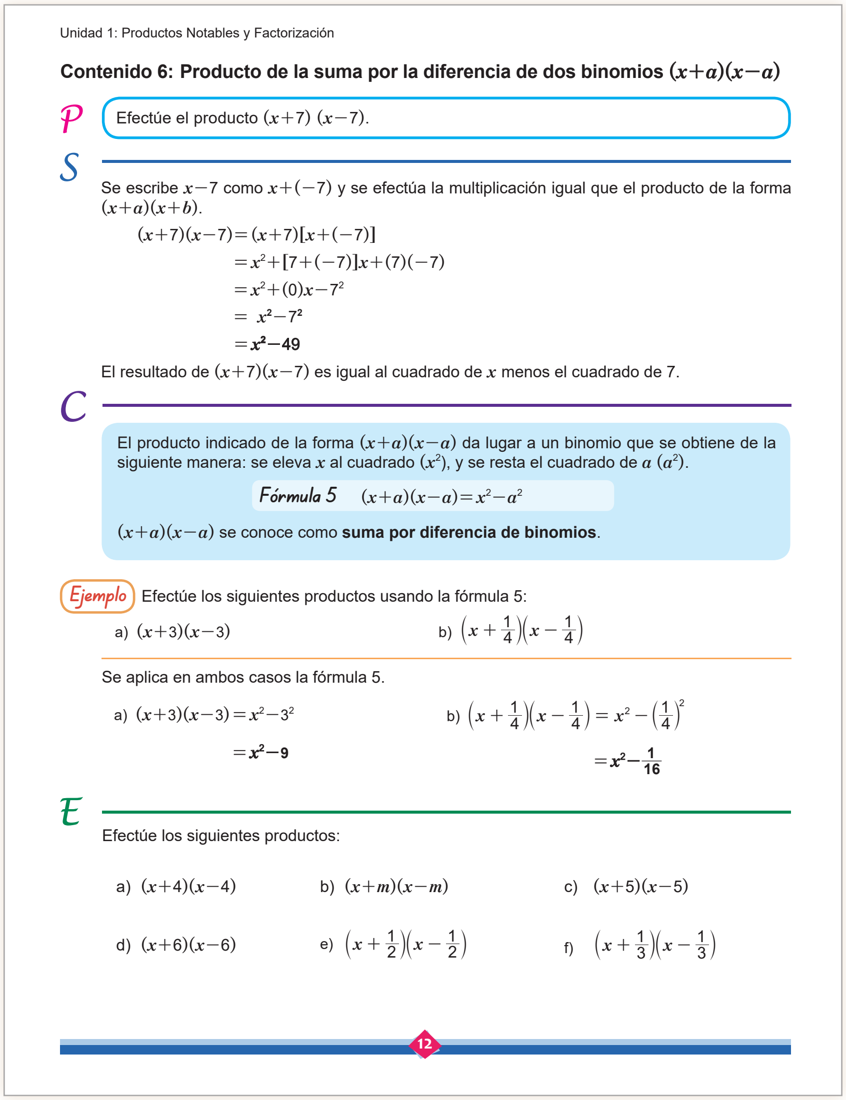
a) $(x-m)^2=x^2-2mx+m^2$

b) $(x-4)^2=x^2-(2)(4)x+(4)^2$
$=x^2-8x+16$

c) $(x-5)^2=x^2-(2)(5)x+(5)^2$
$=x^2-10x+25$

e) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=x^2-(2)\left(\frac{1}{2}\right)x+\left(\frac{1}{2}\right)^2$
$=x^2-x+\frac{1}{4}$

Contenido 6 Producto de la suma por la diferencia de dos binomios $(x+a)(x-a)$



Unidad 1: Productos Notables y Factorización

Contenido 6: Producto de la suma por la diferencia de dos binomios $(x+a)(x-a)$

P Efectúe el producto $(x+7)(x-7)$.

S

Se escribe $x-7$ como $x+(-7)$ y se efectúa la multiplicación igual que el producto de la forma $(x+a)(x+b)$.

$$\begin{aligned}(x+7)(x-7)&=(x+7)[x+(-7)]\\&=x^2+[7+(-7)]x+(7)(-7)\\&=x^2+(0)x-7^2\\&=x^2-7^2\\&=\mathbf{x^2-49}\end{aligned}$$

El resultado de $(x+7)(x-7)$ es igual al cuadrado de x menos el cuadrado de 7.

C

El producto indicado de la forma $(x+a)(x-a)$ da lugar a un binomio que se obtiene de la siguiente manera: se eleva x al cuadrado (x^2), y se resta el cuadrado de a (a^2).

Fórmula 5 $(x+a)(x-a)=x^2-a^2$

$(x+a)(x-a)$ se conoce como **suma por diferencia de binomios**.

Ejemplo Efectúe los siguientes productos usando la fórmula 5:

a) $(x+3)(x-3)$ b) $\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)$

Se aplica en ambos casos la fórmula 5.

a) $(x+3)(x-3)=x^2-3^2$

$=\mathbf{x^2-9}$

b) $\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)=x^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2$

$=\mathbf{x^2-\frac{1}{16}}$

E

Efectúe los siguientes productos:

a) $(x+4)(x-4)$ b) $(x+m)(x-m)$ c) $(x+5)(x-5)$

d) $(x+6)(x-6)$ e) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$ f) $\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$

12

Aprendizajes esperados

Desarrolla productos de la forma $(x+a)(x-a)$ por simple inspección.

Secuencia:

En las clases anteriores se desarrolló el cuadrado de un binomio. Ahora se presenta el producto de la suma por la diferencia de dos binomios como otro caso de producto que se puede obtener por simple inspección.

Puntos esenciales:

Recordar cómo se desarrolla el producto de la forma $(x+a)(x+b)$.

Aplicar tal desarrollo para establecer la regla

$$(x+a)(x-a)=x^2-a^2.$$

Expresar verbalmente lo que indica la regla anterior para el desarrollo del producto de la suma por la diferencia de dos binomios.

Aplicar dicha regla al desarrollar productos de la suma por la diferencia de dos binomios por simple inspección.

Destacar que $(x+a)(x-a)\neq(x-a)^2$.

C6: Producto de la suma por la diferencia de dos binomios $(x+a)(x-a)$

$$\boxed{(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab}$$

P Efectúe el producto: $(x+7)(x-7)$

S

$$\begin{aligned}(x+7)(x-7)&=x^2+[7+(-7)]x+(7)(-7)\\&=x^2+(0)x-7^2\\&=x^2-7^2\\&=x^2-49\end{aligned}$$

C $\boxed{\text{Fórmula 5:}\quad (x+a)\,(x-a)=x^2-a^2}$

Ej a) $(x+3)(x-3)=x^2-3^2$

$=x^2-9$

b) $\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)=x^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2$

$=x^2-\frac{1}{16}$

E a) $(x+4)(x-4)=x^2-4^2$

$=x^2-16$

b) $(x+m)(x-m)=x^2-m^2$

c) $(x+5)(x-5)=x^2-5^2$

$=x^2-25$

d) $(x+6)(x-6)=x^2-6^2$

$=x^2-36$

e) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=x^2-\frac{1}{4}$

Contenido 8 Producto de binomios con radicales

Aprendizajes esperados

Efectúa productos de binomios con radicales.

Secuencia:

Anteriormente se desarrolló el cuadrado de un binomio y el producto de la suma por la diferencia. Ahora se presenta una aplicación de ellos cuando los términos de los binomios son radicales.

Puntos esenciales:

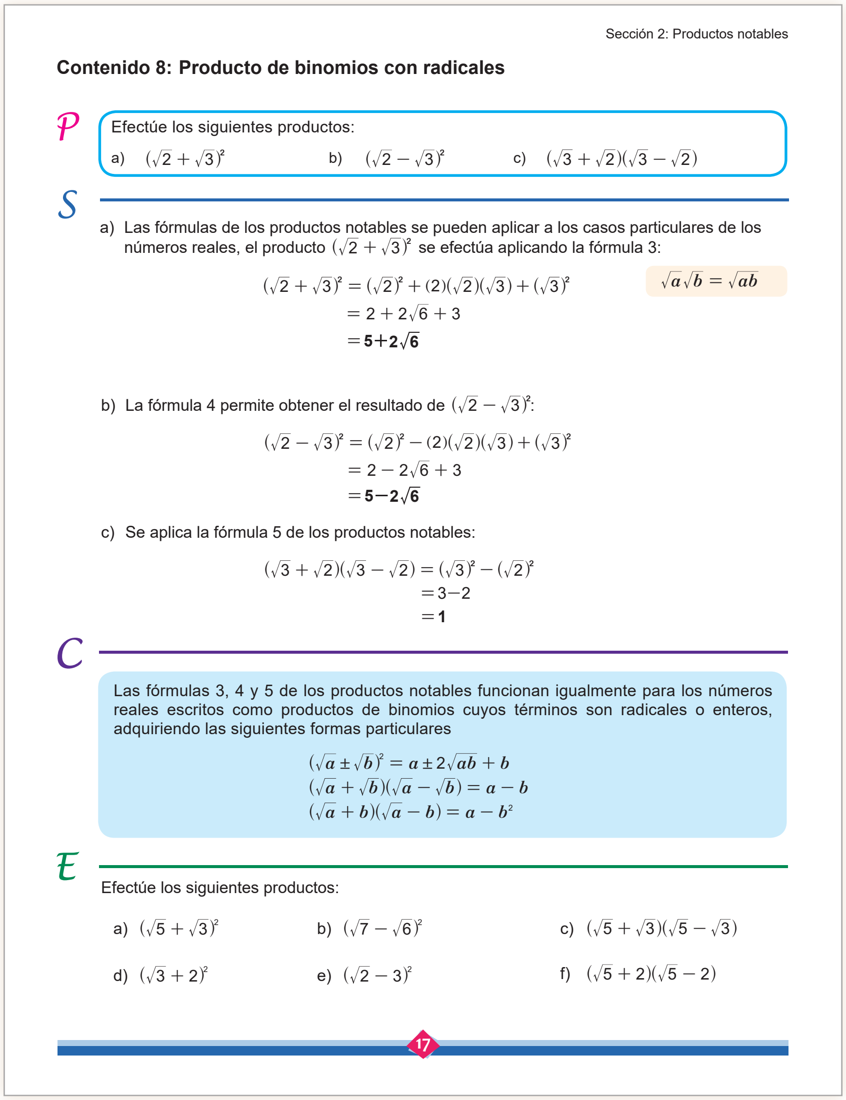
Recordar cómo:

- ✓ Se desarrolla el cuadrado de un binomio y el producto de la suma por la diferencia.
- ✓ Se efectúa la multiplicación de radicales.

Establecer las fórmulas

$$(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2 = a \pm 2\sqrt{ab} + b$$
$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$$
$$(\sqrt{a} + b)(\sqrt{a} - b) = a - b^2$$

Aplicar dichas fórmulas al desarrollar productos indicados de esa forma.



Sección 2: Productos notables

Contenido 8: Producto de binomios con radicales

P Efectúe los siguientes productos:

a) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$ b) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ c) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

S

a) Las fórmulas de los productos notables se pueden aplicar a los casos particulares de los números reales, el producto $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$ se efectúa aplicando la fórmula 3:

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 &= (\sqrt{2})^2 + (2)(\sqrt{2})(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2\\ &= 2+2\sqrt{6}+3\\ &= \mathbf{5+2\sqrt{6}}\end{aligned}$$

$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

b) La fórmula 4 permite obtener el resultado de $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$:

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 &= (\sqrt{2})^2 - (2)(\sqrt{2})(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2\\ &= 2-2\sqrt{6}+3\\ &= \mathbf{5-2\sqrt{6}}\end{aligned}$$

c) Se aplica la fórmula 5 de los productos notables:

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) &= (\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2\\ &= 3-2\\ &= \mathbf{1}\end{aligned}$$

C

Las fórmulas 3, 4 y 5 de los productos notables funcionan igualmente para los números reales escritos como productos de binomios cuyos términos son radicales o enteros, adquiriendo las siguientes formas particulares

$$(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2 = a \pm 2\sqrt{ab}+b$$
$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$$
$$(\sqrt{a}+b)(\sqrt{a}-b) = a-b^2$$

E

Efectúe los siguientes productos:

a) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$ b) $(\sqrt{7}-\sqrt{6})^2$ c) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

d) $(\sqrt{3}+2)^2$ e) $(\sqrt{2}-3)^2$ f) $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)$

17

C8: Productos de binomios con radicales

P Efectúe los siguientes productos:

a) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$ b) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ c) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

S a) $\boxed{(x+a)^2 = x^2+2ax+a^2}$

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 &= (\sqrt{2})^2 + (2)(\sqrt{2})(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2\\ &= 2+2\sqrt{6}+3\\ &= 5+2\sqrt{6}\end{aligned}$$

b) $\boxed{(x-a)^2 = x^2-2ax+a^2}$

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 &= (\sqrt{2})^2 - (2)(\sqrt{2})(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2\\ &= 2-2\sqrt{6}+3\\ &= 5-2\sqrt{6}\end{aligned}$$

c) $\boxed{(x+a)(x-a) = x^2-a^2}$

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) &= (\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2\\ &= 3-2\\ &= 1\end{aligned}$$

E Efectúe los siguientes productos:

a) $$\begin{aligned}(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2 &= 5+2\sqrt{(5)(3)}+3\\ &= 5+2\sqrt{15}+3\\ &= 8+2\sqrt{15}\end{aligned}$$

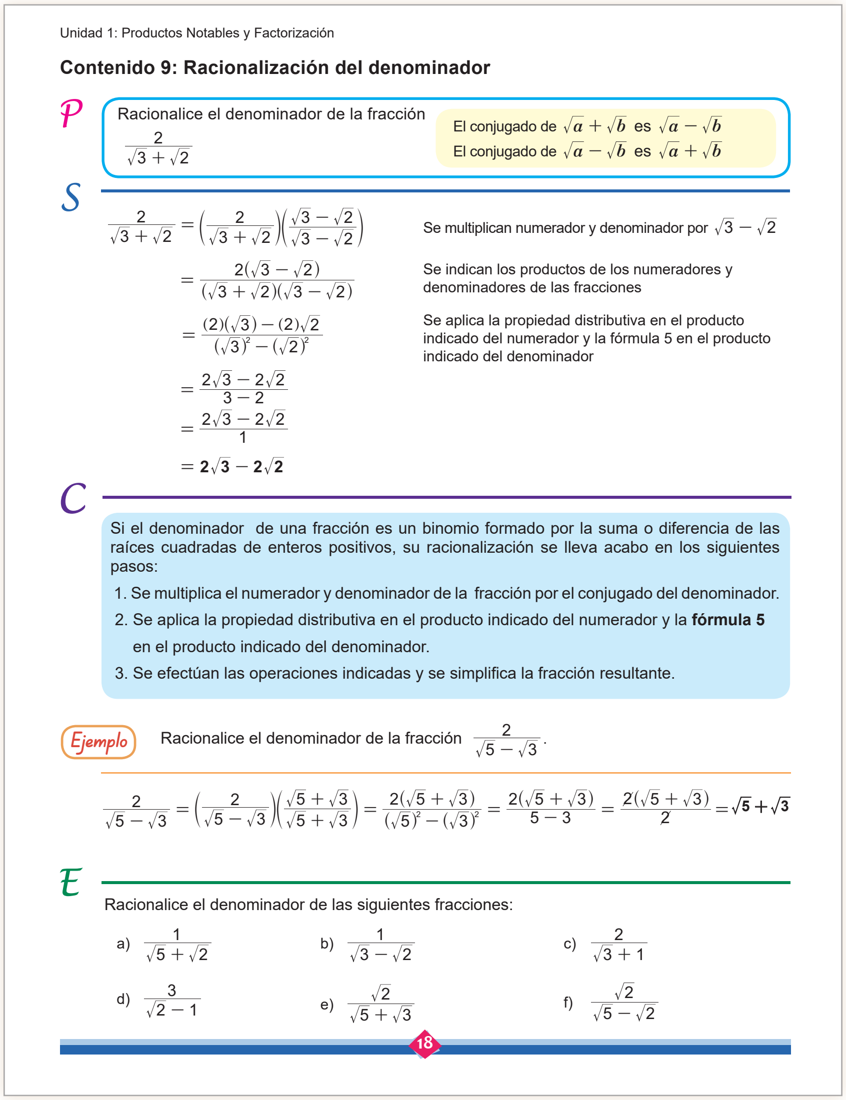
b) $$\begin{aligned}(\sqrt{7}-\sqrt{6})^2 &= \sqrt{7}-2\sqrt{(7)(6)}+6\\ &= 7-2\sqrt{42}+6\\ &= 13-2\sqrt{42}\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3}) &= 5-3\\ &= 2\end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned}(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2) &= 5-2^2\\ &= 5-4\\ &= 1\end{aligned}$$

Contenido

9 Racionalización del denominador



Unidad 1: Productos Notables y Factorización

Contenido 9: Racionalización del denominador

P Racionalice el denominador de la fracción $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

El conjugado de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ es $\sqrt{a}-\sqrt{b}$
El conjugado de $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ es $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

S

$$\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\left(\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)$$

Se multiplican numerador y denominador por $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$$=\frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$

Se indican los productos de los numeradores y denominadores de las fracciones

$$=\frac{(2)(\sqrt{3})-(2)\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}$$

Se aplica la propiedad distributiva en el producto indicado del numerador y la fórmula 5 en el producto indicado del denominador

$$=\frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3-2}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{1}$$

$$=\mathbf{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$$

C

Si el denominador de una fracción es un binomio formado por la suma o diferencia de las raíces cuadradas de enteros positivos, su racionalización se lleva acabo en los siguientes pasos:

1. Se multiplica el numerador y denominador de la fracción por el conjugado del denominador.
2. Se aplica la propiedad distributiva en el producto indicado del numerador y la **fórmula 5** en el producto indicado del denominador.
3. Se efectúan las operaciones indicadas y se simplifica la fracción resultante.

Ejemplo Racionalice el denominador de la fracción $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

$$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\right)=\frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3}=\frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}=\mathbf{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

E

Racionalice el denominador de las siguientes fracciones:

a) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ c) $\frac{2}{\sqrt{3}+1}$

d) $\frac{3}{\sqrt{2}-1}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

18

Aprendizajes esperados

Racionaliza el denominador de una fracción utilizando expresiones conjugadas.

Secuencia:

Anteriormente se mostraron aplicaciones donde se requiere del desarrollo del cuadrado de un binomio o el producto de la suma por la diferencia. Ahora se estudia la racionalización de una fracción cuyo denominador es una suma o diferencia de radicales.

Puntos esenciales:

Recordar cómo se desarrolla el producto de la suma por la diferencia.

Destacar que las expresiones $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ y $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ se dicen conjugadas una de la otra.

Explicar cada uno de los pasos que se siguen para racionalizar el denominador de una fracción de este tipo.

C9: Racionalización del denominador

P Racionalice el denominador de la fracción

$$\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

S

$$\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\left(\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)$$

$$=\frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}\quad\boxed{(x+a)(x-a)=x^2-a^2}$$

$$=\frac{(2)(\sqrt{3})-(2)(\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3-2}$$

$$=2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$$

C Si el denominador de una fracción es una suma o diferencia de raíces cuadradas, se multiplica el numerador y denominador de la fracción por el conjugado del denominador para racionalizar el denominador.

Ej

$$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3}=\frac{\cancel{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{\cancel{2}}$$

$$=\sqrt{5}+\sqrt{3}$$

E

a) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\right)$

$$=\frac{1(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{1(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$$

Contenido 1 Factorización de polinomios

Aprendizajes esperados

Establece la factorización como el proceso inverso de la multiplicación de polinomios.

Secuencia:

Cuando se estudiaron los productos notables se conocían los factores y se obtenía el desarrollo, ahora se estudia el proceso inverso: dado el desarrollo obtener los factores. A este proceso se le llama factorización.

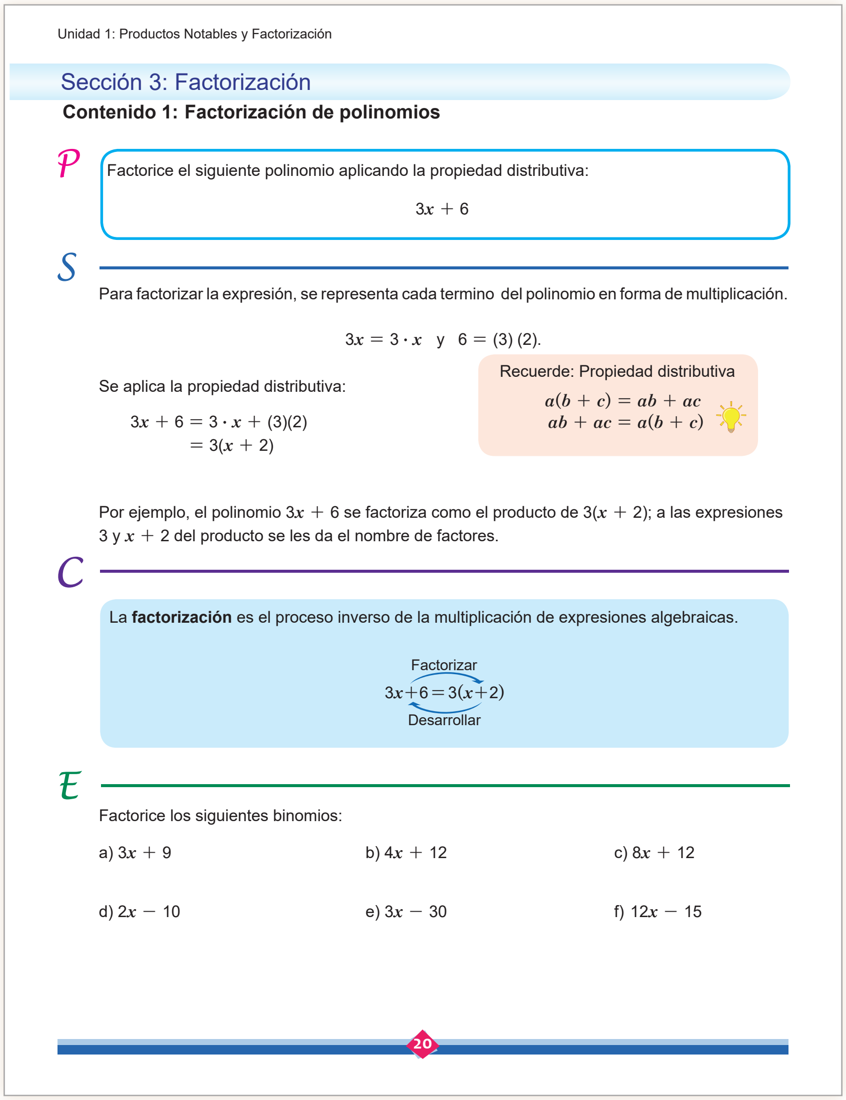
Puntos esenciales:

Recordar la propiedad distributiva del producto respecto a la suma.

Establecer una relación entre los productos notables y la factorización como procesos inversos.

Destacar que factorizar un polinomio significa escribirlo como producto de dos o más factores simples cuyo desarrollo es igual a la expresión inicial propuesta. Este proceso es una herramienta muy útil para resolver ecuaciones y reducir expresiones fraccionarias.

Factorizar binomios en donde se pueda aplicar la propiedad distributiva.



Unidad 1: Productos Notables y Factorización

Sección 3: Factorización

Contenido 1: Factorización de polinomios

P

Factorice el siguiente polinomio aplicando la propiedad distributiva:

$3x + 6$

S

Para factorizar la expresión, se representa cada termino del polinomio en forma de multiplicación.

$3x = 3 \cdot x$ y $6 = (3)(2)$.

Se aplica la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned} 3x + 6 &= 3 \cdot x + (3)(2) \\ &= 3(x + 2) \end{aligned}$$

Recuerde: Propiedad distributiva

$a(b + c) = ab + ac$

$ab + ac = a(b + c)$

Por ejemplo, el polinomio $3x + 6$ se factoriza como el producto de $3(x + 2)$; a las expresiones 3 y $x + 2$ del producto se les da el nombre de factores.

C

La **factorización** es el proceso inverso de la multiplicación de expresiones algebraicas.

Factorizar

$3x+6=3(x+2)$

Desarrollar

E

Factorice los siguientes binomios:

a) $3x + 9$

b) $4x + 12$

c) $8x + 12$

d) $2x - 10$

e) $3x - 30$

f) $12x - 15$

20

S3: Factorización
C1: Factorización de polinomios

P Factorice el siguiente polinomio aplicando la propiedad distributiva: $3x + 6$.

S $3x = 3 \cdot x$ y $6 = (3)(2)$

$$\begin{aligned} 3x + 6 &= 3 \cdot x + (3)(2) \\ &= \underbrace{3(x + 2)}_{\text{Factores}} \end{aligned}$$

Propiedad distributiva:

$a(b + c) = ab + ac$

$ab + ac = a(b + c)$

C

Factorizar

$3x + 6 = 3(x + 2)$

Desarrollar

E Factorice los siguientes binomios:

a) $$\begin{aligned} 3x + 9 &= 3 \cdot x + (3)(3) \\ &= 3(x + 3) \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 4x + 12 &= 4 \cdot x + (4)(3) \\ &= 4(x + 3) \end{aligned}$$

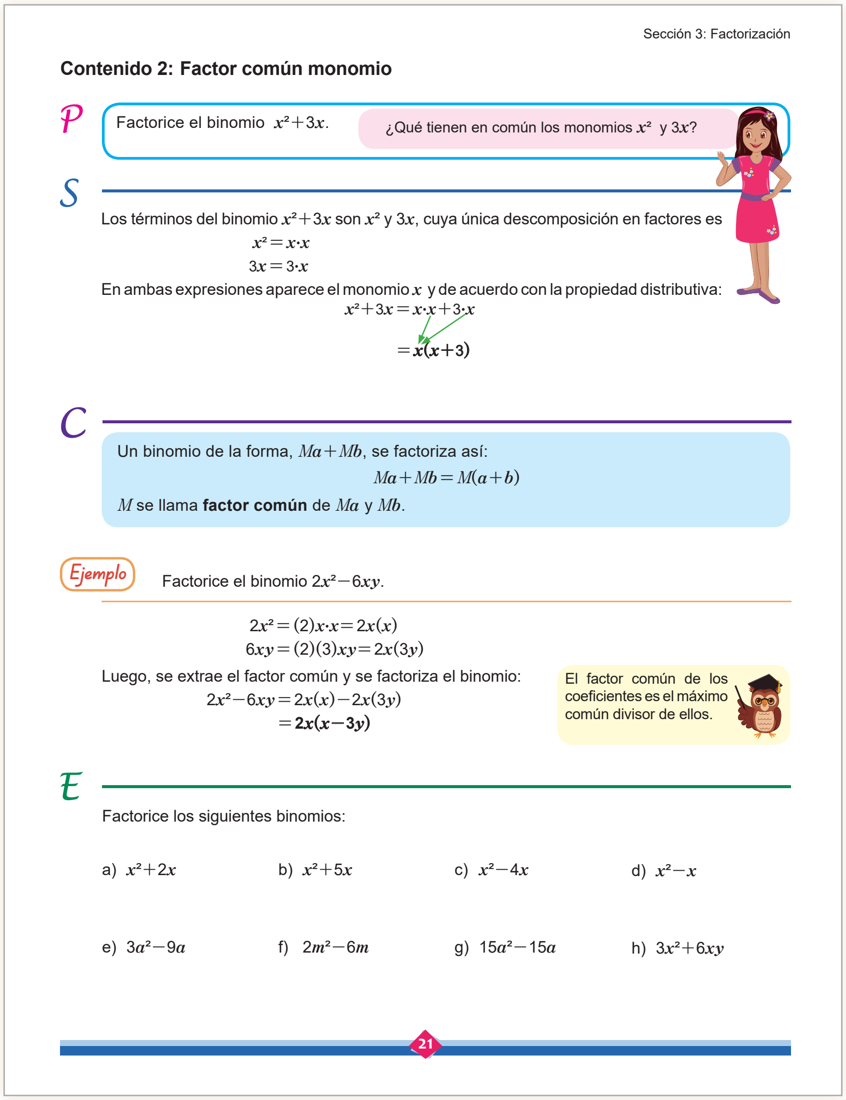
c) $$\begin{aligned} 8x + 12 &= 4(2x) + (4)(3) \\ &= 4(2x + 3) \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 2x - 10 &= 2 \cdot x + (2)(-5) \\ &= 2(x - 5) \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} 3x - 30 &= 3 \cdot x + (3)(-10) \\ &= 3(x - 10) \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} 12x - 15 &= 3(4x) + (3)(-5) \\ &= 3(4x - 5) \end{aligned}$$

Contenido 2 Factor común monomio



Sección 3: Factorización

Contenido 2: Factor común monomio

P

Factorice el binomio x^2+3x.

¿Qué tienen en común los monomios x^2 y $3x$?

S

Los términos del binomio x^2+3x son x^2 y $3x$, cuya única descomposición en factores es

$$x^2=x\cdot x$$
$$3x=3\cdot x$$

En ambas expresiones aparece el monomio x y de acuerdo con la propiedad distributiva:

$$x^2+3x=x\cdot x+3\cdot x$$
$$=\mathbf{x(x+3)}$$

C

Un binomio de la forma, $Ma+Mb$, se factoriza así:

$$Ma+Mb=M(a+b)$$

M se llama **factor común** de Ma y Mb.

Ejemplo Factorice el binomio $2x^2-6xy$.

$$2x^2=(2)x\cdot x=2x(x)$$
$$6xy=(2)(3)xy=2x(3y)$$

Luego, se extrae el factor común y se factoriza el binomio:

$$2x^2-6xy=2x(x)-2x(3y)$$
$$=\mathbf{2x(x-3y)}$$

El factor común de los coeficientes es el máximo común divisor de ellos.

E

Factorice los siguientes binomios:

a) x^2+2x
b) x^2+5x
c) x^2-4x
d) x^2-x

e) $3a^2-9a$
f) $2m^2-6m$
g) $15a^2-15a$
h) $3x^2+6xy$

21

Aprendizajes esperados

Identifica cuando una expresión algebraica de dos o más términos tiene un factor común monomio y la factoriza.

Secuencia:

En la clase anterior se aplicó la propiedad distributiva para factorizar binomios. Ahora se factorizan binomios aplicando factor común monomio.

Puntos esenciales:

Recordar:

- ✓ Qué significa factorizar un polinomio.
- ✓ Cómo se aplica la propiedad distributiva para factorizar polinomios en aquellos casos que se puede hacer.

Establecer similitudes entre el caso anterior y el factor común monomio para factorizar binomios.

Indicar que el factor común monomio debe escribirse como el primer factor en la factorización.

Destacar que el factor común de los coeficientes de los términos del binomio es el máximo común divisor de ellos.

Identificar el factor común monomio de los términos de un binomio.

Factorizar binomios aplicando factor común monomio.

C2: Factor común monomio

Ⓟ Factorice el binomio x^2+3x.

Ⓢ
$$x^2 = x\cdot x$$
$$3x = 3\cdot x$$

$$x^2+3x = x\cdot x+3\cdot x$$
$$= x\,(x+3)$$

Ⓒ $Ma+Mb=M(a+b)$

(Ej) Factorice el binomio $2x^2-6xy$

$$2x^2 = (2)x\cdot x = 2x(x)$$
$$6xy = (2)(3)xy = 2x(3y)$$

$$2x^2-6xy = 2x(x)-2x(3y)$$
$$= 2x(x-3y)$$

Ⓔ Factorice los siguientes binomios:

a) $x^2+2x \quad = x\cdot x+2\cdot x$
$= x(x+2)$

b) $x^2+5x \quad = x\cdot x+5\cdot x$
$= x(x+5)$

c) $x^2-4x \quad = x\cdot x-4\cdot x$
$= x(x-4)$

d) $x^2-x= \quad = x\cdot x-x$
$= x(x-1)$

e) $3a^2-9a \quad = (3)a\cdot a-(3)(3)a$
$= 3a(a-3)$

f) $2m^2-6m \quad = (2)m\cdot m-(2)(3)m$
$= 2m(m-3)$

g) $15a^2-15a \quad = (15)a\cdot a-15\cdot a$
$= 15a(a-1)$

Contenido 3 Factor común polinomio

Aprendizajes esperados

Factoriza expresiones algebraicas aplicando factor común polinomio.

Secuencia:

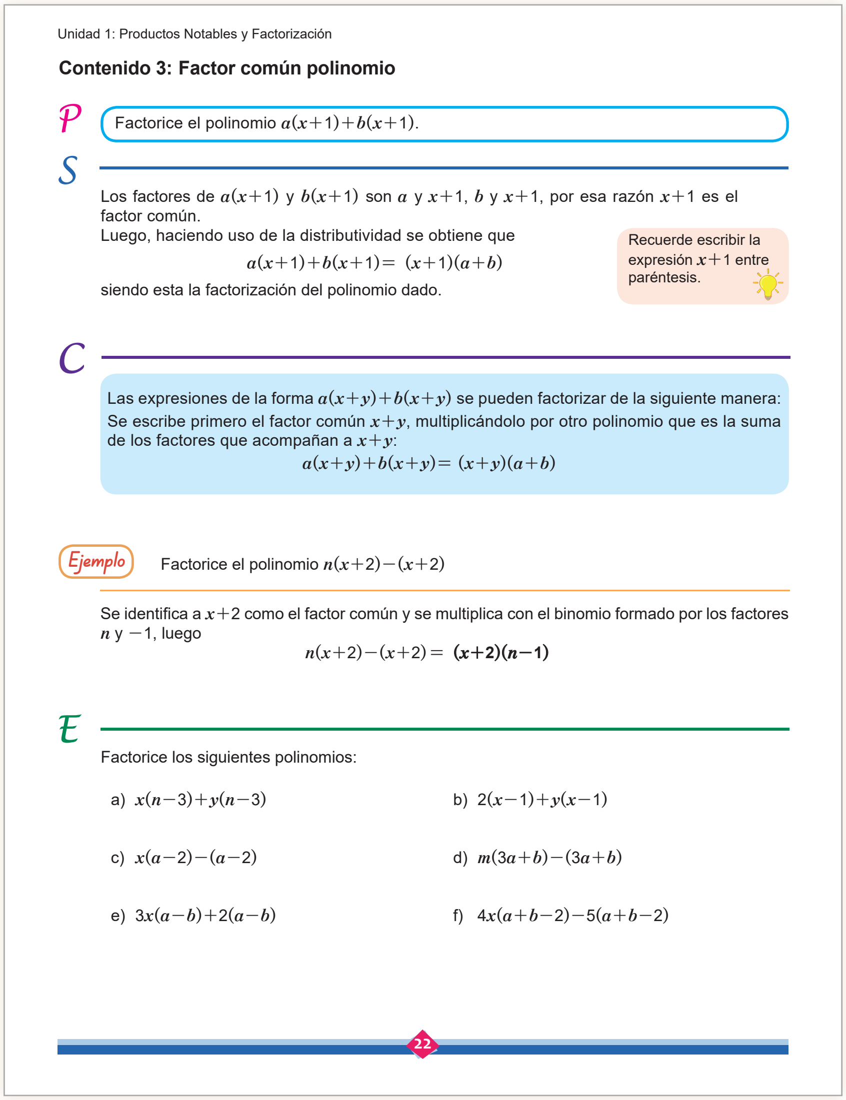
En la clase anterior se factorizaron binomios aplicando factor común monomio. Aquí se factorizan polinomios con factor común un binomio.

Puntos esenciales:

Recordar cómo se factorizan binomios aplicando factor común monomio.

Identificar el factor común de los términos de un polinomio.

Factorizar polinomios aplicando factor común.



Unidad 1: Productos Notables y Factorización

Contenido 3: Factor común polinomio

P Factorice el polinomio $a(x+1)+b(x+1)$.

S

Los factores de $a(x+1)$ y $b(x+1)$ son a y $x+1$, b y $x+1$, por esa razón $x+1$ es el factor común.
Luego, haciendo uso de la distributividad se obtiene que

$$a(x+1)+b(x+1)= (x+1)(a+b)$$

siendo esta la factorización del polinomio dado.

Recuerde escribir la expresión $x+1$ entre paréntesis.

C

Las expresiones de la forma $a(x+y)+b(x+y)$ se pueden factorizar de la siguiente manera: Se escribe primero el factor común $x+y$, multiplicándolo por otro polinomio que es la suma de los factores que acompañan a $x+y$:

$$a(x+y)+b(x+y)= (x+y)(a+b)$$

Ejemplo Factorice el polinomio $n(x+2)-(x+2)$

Se identifica a $x+2$ como el factor común y se multiplica con el binomio formado por los factores n y -1, luego

$$n(x+2)-(x+2)= \mathbf{(x+2)(n-1)}$$

E

Factorice los siguientes polinomios:

a) $x(n-3)+y(n-3)$

b) $2(x-1)+y(x-1)$

c) $x(a-2)-(a-2)$

d) $m(3a+b)-(3a+b)$

e) $3x(a-b)+2(a-b)$

f) $4x(a+b-2)-5(a+b-2)$

22

C3: Factor común polinomio

Ⓟ Factorice el polinomio $a(x+1)+b(x+1)$.

Ⓢ

$$a\underline{(x+1)}+b\underline{(x+1)} = (x+1)(a+b)$$

factor común

Ⓒ $a(x+y)+b(x+y) = (a+b)(x+y)$

Ej Factorice el polinomio: $n(x+2)-(x+2)$

$$n\underline{(x+2)}-\underline{(x+2)} = (x+2)(n-1)$$

factor común

Ⓔ Factorice los siguientes polinomios:

a) $x(n-3)+y(n-3) = (n-3)(x+y)$

b) $2(x-1)+y(x-1) = (x-1)(2+y)$

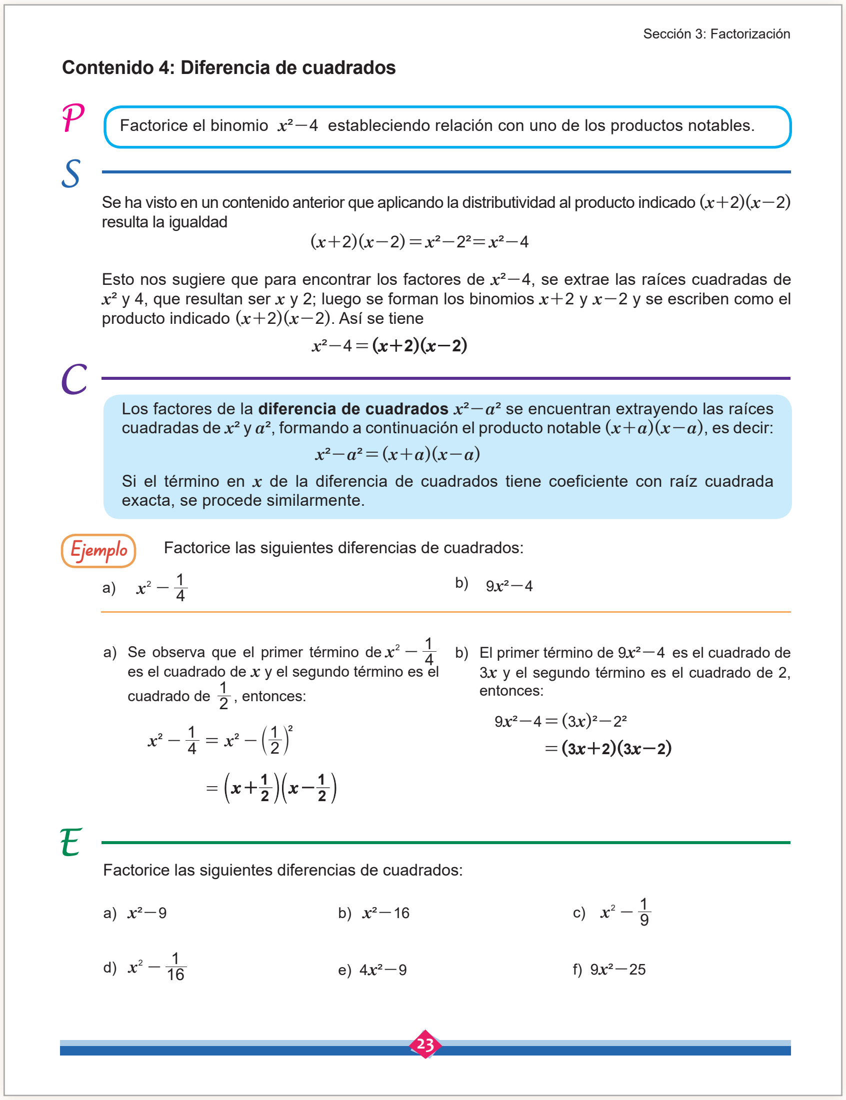
c) $x(a-2)-(a-2) = (a-2)(x-1)$

d) $m(3a+b)-(3a+b) = (3a+b)(m-1)$

e) $3x(a-b)+2(a-b) = (a-b)(3x+2)$

f) $4x(a+b-2)-5(a+b-2) = (a+b-2)(4x-5)$

Contenido 4 Diferencia de cuadrados



Contenido 4: Diferencia de cuadrados

P

Factorice el binomio x^2-4 estableciendo relación con uno de los productos notables.

S

Se ha visto en un contenido anterior que aplicando la distributividad al producto indicado $(x+2)(x-2)$ resulta la igualdad

$$(x+2)(x-2)=x^2-2^2=x^2-4$$

Esto nos sugiere que para encontrar los factores de x^2-4, se extrae las raíces cuadradas de x^2 y 4, que resultan ser x y 2; luego se forman los binomios $x+2$ y $x-2$ y se escriben como el producto indicado $(x+2)(x-2)$. Así se tiene

$$x^2-4=\mathbf{(x+2)(x-2)}$$

C

Los factores de la **diferencia de cuadrados** x^2-a^2 se encuentran extrayendo las raíces cuadradas de x^2 y a^2, formando a continuación el producto notable $(x+a)(x-a)$, es decir:

$$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$$

Si el término en x de la diferencia de cuadrados tiene coeficiente con raíz cuadrada exacta, se procede similarmente.

Ejemplo Factorice las siguientes diferencias de cuadrados:

a) $x^2-\frac{1}{4}$

b) $9x^2-4$

a) Se observa que el primer término de $x^2-\frac{1}{4}$ es el cuadrado de x y el segundo término es el cuadrado de $\frac{1}{2}$, entonces:

$$x^2-\frac{1}{4}=x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=\mathbf{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}$$

b) El primer término de $9x^2-4$ es el cuadrado de $3x$ y el segundo término es el cuadrado de 2, entonces:

$$9x^2-4=(3x)^2-2^2$$
$$=\mathbf{(3x+2)(3x-2)}$$

E

Factorice las siguientes diferencias de cuadrados:

a) x^2-9

b) x^2-16

c) $x^2-\frac{1}{9}$

d) $x^2-\frac{1}{16}$

e) $4x^2-9$

f) $9x^2-25$

Aprendizajes esperados

Factoriza un binomio aplicando diferencia de cuadrados.

Secuencia:

Anteriormente se factorizaron polinomios aplicando factor común. Ahora se estudia cómo se factoriza una diferencia de cuadrados.

Puntos esenciales:

Recordar cómo se desarrolla el producto de la suma por la diferencia.

Indicar que al desarrollar un producto de esa forma se obtiene como resultado una diferencia de cuadrados.

Explicar los pasos que se siguen para factorizar una diferencia de cuadrados, debiendo recordar la extracción de raíces cuadradas a números positivos.

C4: Diferencia de cuadrados

(P) Factorice el binomio x^2-4 estableciendo relación con uno de los productos notables.

(S) Recuerde que el producto

$$(x+2)(x-2)=x^2-2^2=x^2-4$$

$$x^2-4=\underset{\underset{\sqrt{x^2}=x}{\uparrow}}{x^2}-\underset{\underset{\sqrt{2^2}=2}{\uparrow}}{2^2}=(x+2)(x-2)$$

(C) $x^2-a^2=(x+a)(x-a)$

(Ej) Factorice las siguientes diferencias de cuadrados

a) $x^2-\frac{1}{4}=x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

b) $9x^2-4=(3x)^2-2^2=(3x+2)(3x-2)$

(E) Factorice las siguientes diferencias de cuadrados:

a) $x^2-9=x^2-3^2=(x+3)(x-3)$

b) $x^2-16=x^2-4^2=(x+4)(x-4)$

c) $x^2-\frac{1}{9}=x^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$

d) $x^2-\frac{1}{16}=x^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)$

e) $4x^2-9=(2x)^2-(3)^2=(2x+3)(2x-3)$

Contenido 6 Trinomio cuadrado perfecto

Aprendizajes esperados

Identifica cuando una expresión algebraica es un trinomio cuadrado perfecto y la factoriza.

Secuencia:

En la clase anterior se factorizaron diferencias de cuadrados. Ahora se estudia cómo factorizar un trinomio cuadrado perfecto.

Puntos esenciales:

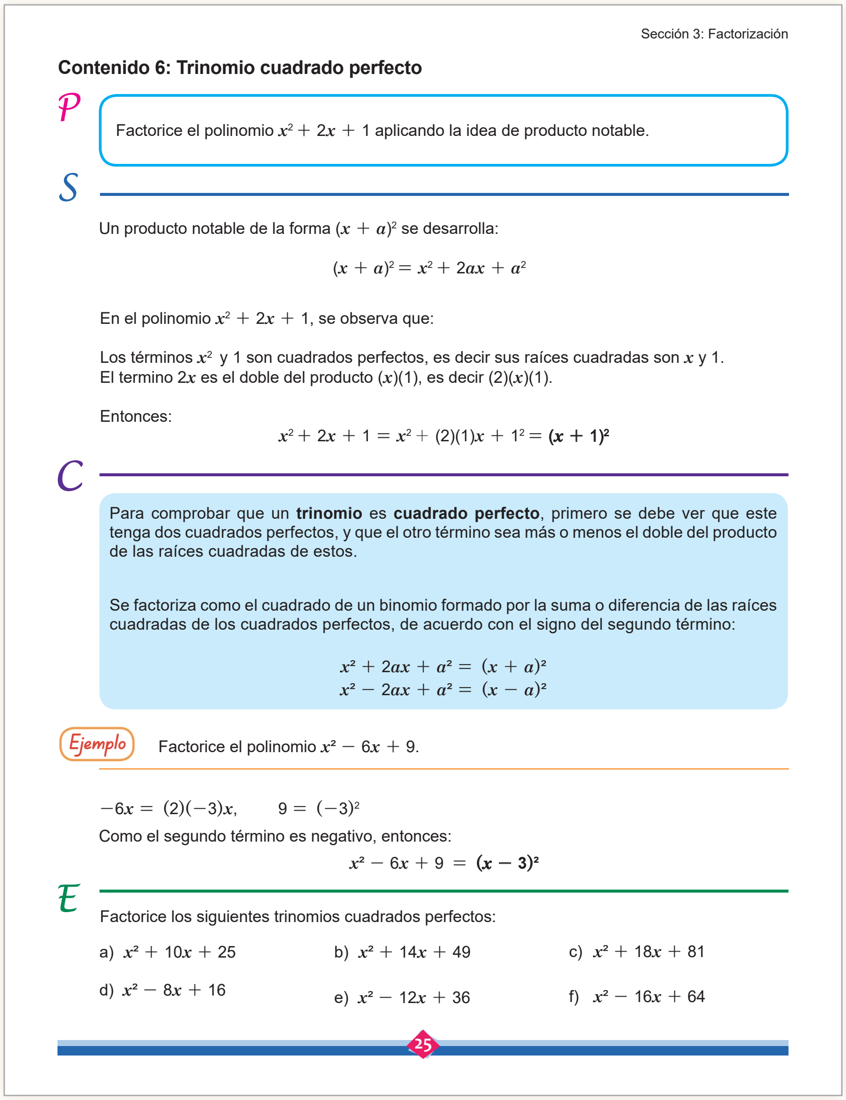
Recordar cómo se desarrolla el cuadrado de un binomio.

Indicar que al desarrollar dicho producto se obtiene como resultado un trinomio cuadrado perfecto.

Explicar los pasos que se siguen para factorizar un trinomio cuadrado perfecto.

Destacar que un trinomio es cuadrado perfecto si tiene dos cuadrados perfectos y el otro término es el doble producto de las raíces cuadradas de estos.

Notar que al escribir la factorización, el signo que separa a los términos está en dependencia del signo del doble producto de las raíces cuadradas de los cuadrados perfectos.



Sección 3: Factorización

Contenido 6: Trinomio cuadrado perfecto

P Factorice el polinomio $x^2 + 2x + 1$ aplicando la idea de producto notable.

S

Un producto notable de la forma $(x + a)^2$ se desarrolla:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

En el polinomio $x^2 + 2x + 1$, se observa que:

Los términos x^2 y 1 son cuadrados perfectos, es decir sus raíces cuadradas son x y 1.
El termino $2x$ es el doble del producto $(x)(1)$, es decir $(2)(x)(1)$.

Entonces:

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + (2)(1)x + 1^2 = \mathbf{(x + 1)^2}$$

C

Para comprobar que un **trinomio** es **cuadrado perfecto**, primero se debe ver que este tenga dos cuadrados perfectos, y que el otro término sea más o menos el doble del producto de las raíces cuadradas de estos.

Se factoriza como el cuadrado de un binomio formado por la suma o diferencia de las raíces cuadradas de los cuadrados perfectos, de acuerdo con el signo del segundo término:

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

Ejemplo Factorice el polinomio $x^2 - 6x + 9$.

$-6x = (2)(-3)x, \qquad 9 = (-3)^2$

Como el segundo término es negativo, entonces:

$$x^2 - 6x + 9 = \mathbf{(x - 3)^2}$$

E

Factorice los siguientes trinomios cuadrados perfectos:

a) $x^2 + 10x + 25$
b) $x^2 + 14x + 49$
c) $x^2 + 18x + 81$
d) $x^2 - 8x + 16$
e) $x^2 - 12x + 36$
f) $x^2 - 16x + 64$

25

C6: Trinomio cuadrado perfecto

P Factorice el polinomio $x^2 + 2x + 1$ aplicando la idea de producto notable.

S $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

En el polinomio $x^2 + 2x + 1$,

x^2 y 1, son cuadrados perfectos por que

x y 1, son las raíces cuadradas

$2x$ es el doble del producto $(x)(1)$

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + (2)(1)x + 1^2$$
$$= (x + 1)^2$$

C $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$
$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$

Ej Factorice el polinomio $x^2 - 6x + 9$.

$-6x = (2)(-3)x, \qquad 9 = (-3)^2$

Como el segundo término es negativo, entonces:

$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

E Factorice los siguientes trinomios cuadrados perfectos:

a) $x^2 + 10x + 25 = x^2 + (2)(5)x + (5)^2 = (x + 5)^2$

b) $x^2 + 14x + 49 = x^2 + (2)(7)x + (7)^2 = (x + 7)^2$

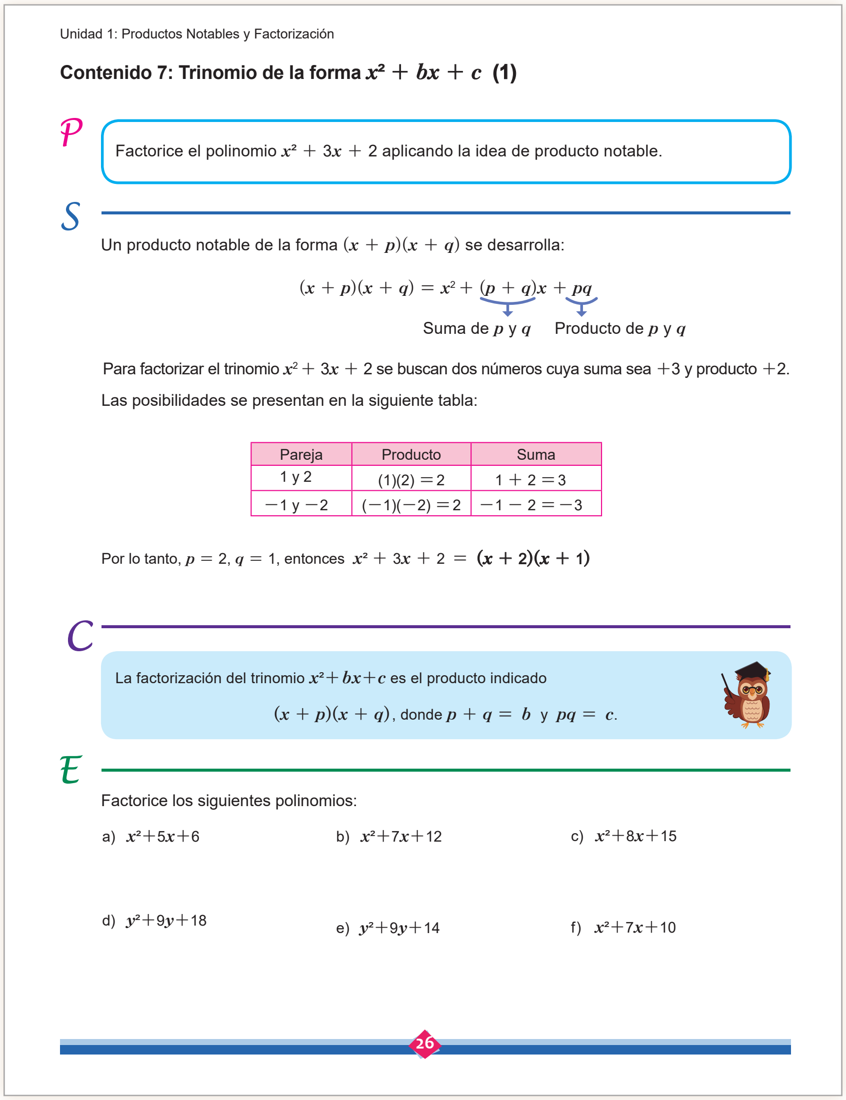
c) $x^2 + 18x + 81 = x^2 + (2)(9)x + (9)^2 = (x + 9)^2$

d) $x^2 - 8x + 16 = x^2 - (2)(4)x + (4)^2 = (x - 4)^2$

e) $x^2 - 12x + 36 = x^2 - (2)(6)x + (6)^2 = (x - 6)^2$

f) $x^2 - 16x + 64 = x^2 - (2)(8)x + (8)^2 = (x - 8)^2$

Contenido 7 Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ (1)



Contenido 7: Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ (1)

P

Factorice el polinomio $x^2 + 3x + 2$ aplicando la idea de producto notable.

S

Un producto notable de la forma $(x + p)(x + q)$ se desarrolla:

$$(x + p)(x + q) = x^2 + \underbrace{(p + q)}_{\text{Suma de } p \text{ y } q}x + \underbrace{pq}_{\text{Producto de } p \text{ y } q}$$

Para factorizar el trinomio $x^2 + 3x + 2$ se buscan dos números cuya suma sea $+3$ y producto $+2$.

Las posibilidades se presentan en la siguiente tabla:

Pareja	Producto	Suma
1 y 2	$(1)(2) = 2$	$1 + 2 = 3$
-1 y -2	$(-1)(-2) = 2$	$-1 - 2 = -3$

Por lo tanto, $p = 2$, $q = 1$, entonces $x^2 + 3x + 2 =$ $\mathbf{(x + 2)(x + 1)}$

C

La factorización del trinomio $x^2 + bx + c$ es el producto indicado

$(x + p)(x + q)$, donde $p + q = b$ y $pq = c$.

E

Factorice los siguientes polinomios:

a) x^2+5x+6

b) $x^2+7x+12$

c) $x^2+8x+15$

d) $y^2+9y+18$

e) $y^2+9y+14$

f) $x^2+7x+10$

Aprendizajes esperados

Factoriza trinomios de la forma x^2+bx+c.

Secuencia:

En la clase anterior se factorizaron trinomios cuadrados perfectos, aquí se factorizan trinomios de la forma x^2+bx+c.

Puntos esenciales:

Recordar cómo se desarrolla el producto de la forma $(x+p)(x+q)$.

Indicar que al desarrollar un producto de la forma $(x+p)(x+q)$ se obtiene como resultado un trinomio de la forma x^2+bx+c.

Destacar que en esta clase solo se presentan trinomios de la forma x^2+bx+c tales que para factorizarlos se buscan dos números cuyo producto sea c y cuya suma sea b. Es decir $b=p+q$, $c=pq$.

Factorizar trinomios de la forma x^2+bx+c.

C7: Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ (1)

Ⓟ Factorice el polinomio $x^2 + 3x + 2$ aplicando la idea de producto notable.

Ⓢ $(x + p)(x + q) = x^2 + (p + q)x + pq$

Para el trinomio $x^2 + 3x + 2$, se buscan dos números cuya suma es $+3$ y producto $+2$.

$p = 2,\ q = 1$, entonces $x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$

Ⓒ $x^2 + bx + c = (x + p)(x + q)$

donde $p + q = b$ y $pq = c$

Ⓔ Factorice los siguientes polinomios:

a) $x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$

b) $x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$

c) $x^2 + 8x + 15 = (x + 3)(x + 5)$

d) $y^2 + 9y + 18 = (y + 3)(y + 6)$

e) $y^2 + 9y + 14 = (y + 2)(y + 7)$

f) $x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$

Contenido 8 Trinomio de la forma x^2+bx+c (2)

Aprendizajes esperados

Factoriza trinomios de la forma x^2+bx+c.

Secuencia:

Esta clase es continuación de la anterior, con la diferencia que el trinomio x^2+bx+c posee algunos términos con signos negativos.

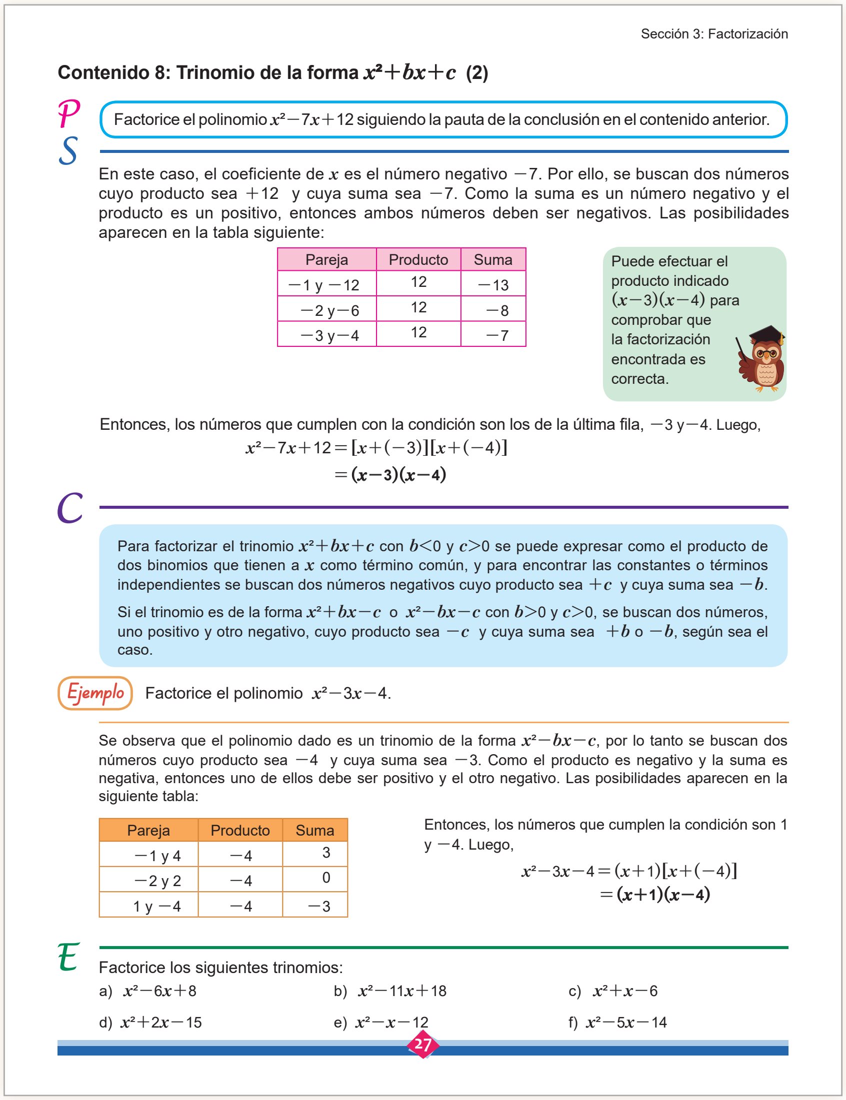
Puntos esenciales:

Recordar que:

- ✓ La suma de dos números negativos es negativa.
- ✓ El producto de dos números negativos es positivo.
- ✓ El producto de dos números con signos contrarios siempre es negativo.

Destacar la relevancia que tienen los signos del término constante y del término lineal para factorizar trinomios de esta forma.

Notar que la idea en la factorización es la misma del caso anterior manipulando correctamente los signos de los factores que se buscan.



Sección 3: Factorización

Contenido 8: Trinomio de la forma x^2+bx+c (2)

P Factorice el polinomio $x^2-7x+12$ siguiendo la pauta de la conclusión en el contenido anterior.

S

En este caso, el coeficiente de x es el número negativo -7. Por ello, se buscan dos números cuyo producto sea $+12$ y cuya suma sea -7. Como la suma es un número negativo y el producto es un positivo, entonces ambos números deben ser negativos. Las posibilidades aparecen en la tabla siguiente:

Pareja	Producto	Suma
-1 y -12	12	-13
-2 y -6	12	-8
-3 y -4	12	-7

Puede efectuar el producto indicado $(x-3)(x-4)$ para comprobar que la factorización encontrada es correcta.

Entonces, los números que cumplen con la condición son los de la última fila, -3 y -4. Luego,

$$\begin{aligned} x^2-7x+12 &= [x+(-3)][x+(-4)] \\ &= \mathbf{(x-3)(x-4)} \end{aligned}$$

C

Para factorizar el trinomio x^2+bx+c con $b<0$ y $c>0$ se puede expresar como el producto de dos binomios que tienen a x como término común, y para encontrar las constantes o términos independientes se buscan dos números negativos cuyo producto sea $+c$ y cuya suma sea $-b$.

Si el trinomio es de la forma x^2+bx-c o x^2-bx-c con $b>0$ y $c>0$, se buscan dos números, uno positivo y otro negativo, cuyo producto sea $-c$ y cuya suma sea $+b$ o $-b$, según sea el caso.

Ejemplo Factorice el polinomio x^2-3x-4.

Se observa que el polinomio dado es un trinomio de la forma x^2-bx-c, por lo tanto se buscan dos números cuyo producto sea -4 y cuya suma sea -3. Como el producto es negativo y la suma es negativa, entonces uno de ellos debe ser positivo y el otro negativo. Las posibilidades aparecen en la siguiente tabla:

Pareja	Producto	Suma
-1 y 4	-4	3
-2 y 2	-4	0
1 y -4	-4	-3

Entonces, los números que cumplen la condición son 1 y -4. Luego,

$$\begin{aligned} x^2-3x-4 &= (x+1)[x+(-4)] \\ &= \mathbf{(x+1)(x-4)} \end{aligned}$$

E

Factorice los siguientes trinomios:

a) x^2-6x+8

b) $x^2-11x+18$

c) x^2+x-6

d) $x^2+2x-15$

e) x^2-x-12

f) $x^2-5x-14$

27

C8: Trinomio de la forma x^2+bx+c (2)

P Factorice el polinomio $x^2-7x+12$.

S

Pareja	Producto	Suma
-1 y -12	12	-13
-2 y -6	12	-8
-3 y -4	12	-7

$$\begin{aligned} x^2-7x+12 &= [x+(-3)][x+(-4)] \\ &= (x-3)(x-4) \end{aligned}$$

C Trinomio x^2+bx+c con $b<0$ y $c>0$:
Buscar dos enteros cuyo producto sea $+c$ y su suma $-b$.

Trinomio x^2+bx-c o x^2-bx-c con $b>0$ y $c>0$: Buscar dos enteros cuyo producto sea $-c$ y su suma $+b$ o $-b$ según sea el caso

Ej Factorice el polinomio x^2-3x-4.

Pareja	Producto	Suma
-1 y 4	-4	3
-2 y 2	-4	0
1 y -4	-4	-3

$$\begin{aligned} x^2-3x-4 &= (x+1)[x+(-4)] \\ &= (x+1)(x-4) \end{aligned}$$

E Factorice los siguientes polinomios:

a) $x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$

b) $x^2-11x+18=(x-2)(x-9)$

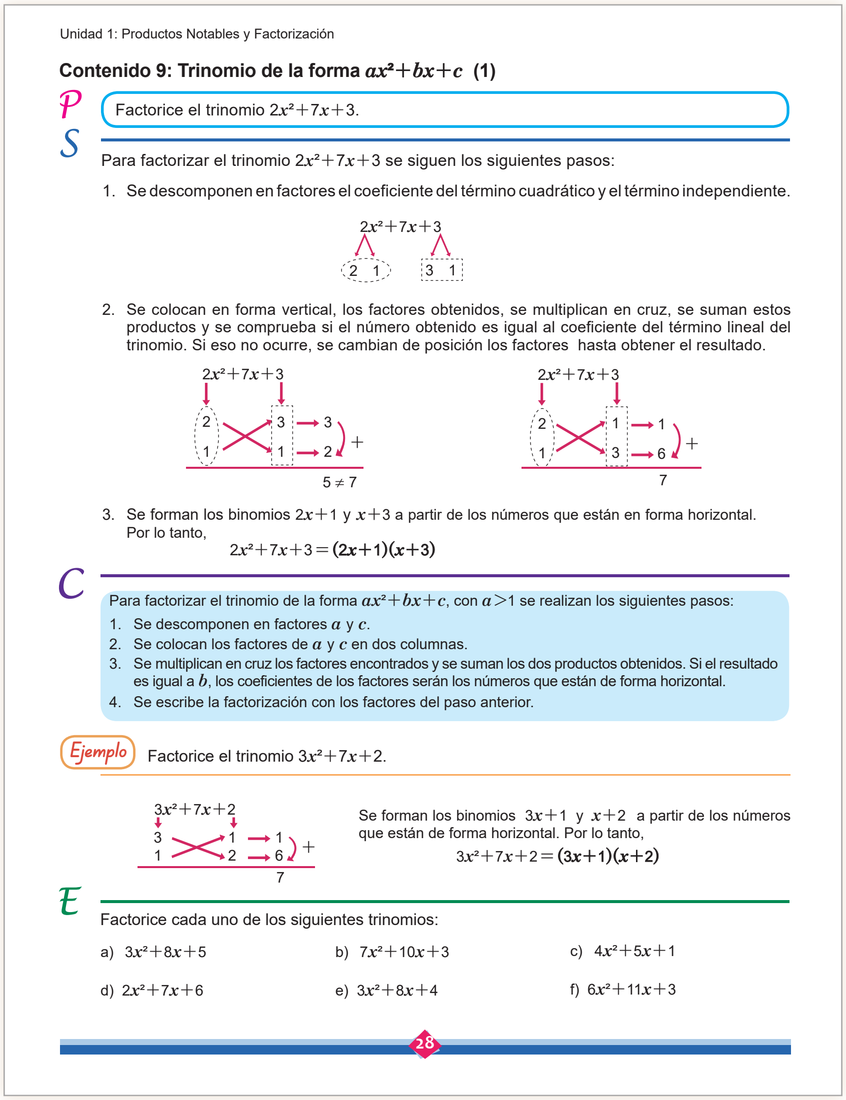
c) $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$

d) $x^2+2x-15=(x+5)(x-3)$

e) $x^2-x-12=(x-4)(x+3)$

f) $x^2-5x-14=(x-7)(x+2)$

Contenido 9 Trinomio de la forma ax^2+bx+c (1)



Unidad 1: Productos Notables y Factorización

Contenido 9: Trinomio de la forma ax^2+bx+c (1)

P Factorice el trinomio $2x^2+7x+3$.

S Para factorizar el trinomio $2x^2+7x+3$ se siguen los siguientes pasos:

1. Se descomponen en factores el coeficiente del término cuadrático y el término independiente.
2. Se colocan en forma vertical, los factores obtenidos, se multiplican en cruz, se suman estos productos y se comprueba si el número obtenido es igual al coeficiente del término lineal del trinomio. Si eso no ocurre, se cambian de posición los factores hasta obtener el resultado.
3. Se forman los binomios $2x+1$ y $x+3$ a partir de los números que están en forma horizontal. Por lo tanto,

$$2x^2+7x+3=(2x+1)(x+3)$$

C Para factorizar el trinomio de la forma ax^2+bx+c, con $a>1$ se realizan los siguientes pasos:

1. Se descomponen en factores a y c.
2. Se colocan los factores de a y c en dos columnas.
3. Se multiplican en cruz los factores encontrados y se suman los dos productos obtenidos. Si el resultado es igual a b, los coeficientes de los factores serán los números que están de forma horizontal.
4. Se escribe la factorización con los factores del paso anterior.

Ejemplo Factorice el trinomio $3x^2+7x+2$.

Se forman los binomios $3x+1$ y $x+2$ a partir de los números que están de forma horizontal. Por lo tanto,

$$3x^2+7x+2=(3x+1)(x+2)$$

E Factorice cada uno de los siguientes trinomios:

a) $3x^2+8x+5$ b) $7x^2+10x+3$ c) $4x^2+5x+1$

d) $2x^2+7x+6$ e) $3x^2+8x+4$ f) $6x^2+11x+3$

28

Aprendizajes esperados

Factoriza trinomios de la forma ax^2+bx+c.

Secuencia:

En las clases anteriores se factorizaron trinomios de la forma x^2+bx+c. Ahora se estudia un método para factorizar un trinomio de la forma ax^2+bx+c.

Puntos esenciales:

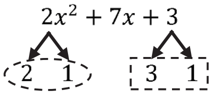
Explicar cada uno de los pasos que se siguen para factorizar un trinomio de la forma ax^2+bx+c.

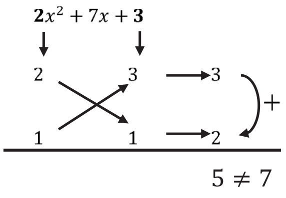
Destacar que en esta clase solo se presentan trinomios de la forma ax^2+bx+c con a, b y c positivos.

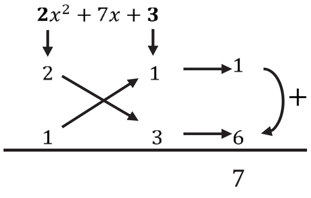
C9: Trinomio de la forma ax^2+bx+c (1)

P Factorice $2x^2+7x+3$.

S



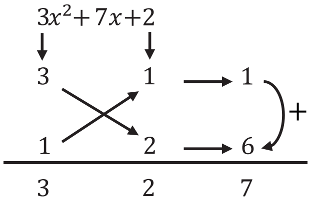




$$2x^2+7x+3=(2x+1)(x+3)$$

C *Leer en el libro de texto*

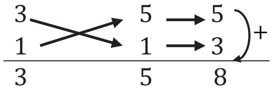
Ej Factorice el trinomio $3x^2+7x+2$.



$$3x^2+7x+2=(3x+1)(x+2)$$

E Factorice cada uno de los siguientes trinomios

a) $3x^2+8x+5$



$3x^2+8x+5=(3x+5)(x+1)$

b) $7x^2+10x+3=(7x+3)(x+1)$

c) $4x^2+5x+1=(4x+1)(x+1)$

d) $2x^2+7x+6=(2x+3)(x+2)$

e) $3x^2+8x+4=(3x+2)(x+2)$

f) $6x^2+11x+3=(2x+3)(3x+1)$

Contenido 10 Trinomio de la forma ax^2+bx+c (2)

Aprendizajes esperados

Factoriza trinomios de la forma ax^2+bx+c.

Secuencia:

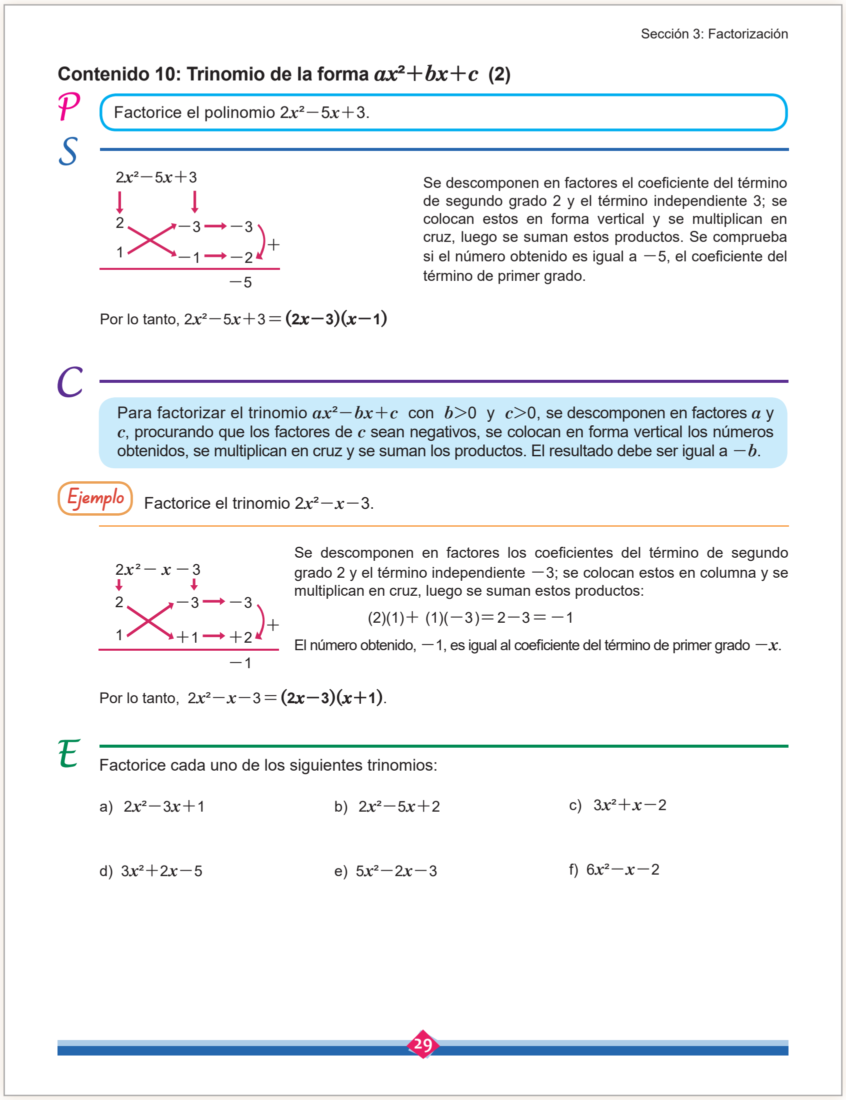
En la clase anterior se factorizaron trinomios de la forma ax^2+bx+c con a, b y c positivos. Ahora se estudia la factorización de un trinomio de la forma ax^2+bx+c con al menos uno de los coeficientes b o c negativos.

Puntos esenciales:

Explicar cada uno de los pasos que se siguen para factorizar un trinomio de la forma ax^2+bx+c con las condiciones expuestas para b o c.

Destacar las similitudes que guarda este caso con el anterior.

Factorizar trinomios de la forma ax^2+bx+c.



Sección 3: Factorización

Contenido 10: Trinomio de la forma ax^2+bx+c (2)

P Factorice el polinomio $2x^2-5x+3$.

S

Se descomponen en factores el coeficiente del término de segundo grado 2 y el término independiente 3; se colocan estos en forma vertical y se multiplican en cruz, luego se suman estos productos. Se comprueba si el número obtenido es igual a −5, el coeficiente del término de primer grado.

Por lo tanto, $2x^2-5x+3=$ **$(2x-3)(x-1)$**

C

Para factorizar el trinomio ax^2-bx+c con $b>0$ y $c>0$, se descomponen en factores a y c, procurando que los factores de c sean negativos, se colocan en forma vertical los números obtenidos, se multiplican en cruz y se suman los productos. El resultado debe ser igual a $-b$.

Ejemplo Factorice el trinomio $2x^2-x-3$.

Se descomponen en factores los coeficientes del término de segundo grado 2 y el término independiente −3; se colocan estos en columna y se multiplican en cruz, luego se suman estos productos:

$(2)(1)+(1)(-3)=2-3=-1$

El número obtenido, −1, es igual al coeficiente del término de primer grado $-x$.

Por lo tanto, $2x^2-x-3=$ **$(2x-3)(x+1)$**.

E Factorice cada uno de los siguientes trinomios:

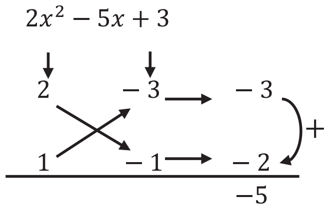
a) $2x^2-3x+1$
b) $2x^2-5x+2$
c) $3x^2+x-2$
d) $3x^2+2x-5$
e) $5x^2-2x-3$
f) $6x^2-x-2$

29

C10: Trinomio de la forma ax^2+bx+c (2)

P Factorice el polinomio $2x^2-5x+3$

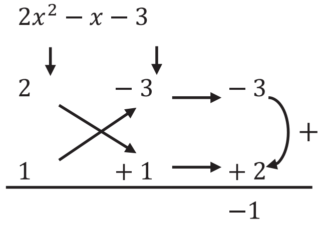
S



Por lo tanto, $2x^2-5x+3=(2x-3)(x-1)$

C Trinomio ax^2-bx+c, con $b>0$ y $c>0$, se descomponen en factores a y c, procurando que los factores de c sean negativos.

Ej Factorice el trinomio $2x^2-x-3$.



Por lo tanto, $2x^2-x-3=(2x-3)(x+1)$

E Factorice los siguientes trinomios

a) $2x^2-3x+1=(x-1)(2x-1)$

b) $2x^2-5x+2=(x-2)(2x-1)$

c) $3x^2+x-2=(x+1)(3x-2)$

d) $3x^2+2x-5=(3x+5)(x-1)$

e) $5x^2-2x-3=(x-1)(5x+3)$

f) $6x^2-x-2=(3x-2)(2x+1)$

Prueba de Matemática 9no (30min) Fecha:_______

Unidad 1: Productos Notables y Factorización (1) para Sección 1 y 2

Nombre:________________________________ **Sección:**____________

Sexo: M / F

/20

1. Efectúe los siguientes productos: (2 punto×9=18)

a) $x(x+3)$

b) $(x-3)(y+4)$

c) $(x+2)(x+y+3)$
Forma vertical:

d) $(x-3)(x-2)$

e) $(2x+1)(3x-2)$

f) $(x+5)^2$

g) $(x-5)^2$

h) $(x+3)(x-3)$

i) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2$

2. Racionalice el denominador de la siguiente fracción: (2 puntos)

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

Prueba de Matemática 9no (30min) Fecha:_______

Unidad 1: Productos Notables y Factorización (2) para Sección 3

/20

Nombre:_______________________________ **Sección:**___________

Sexo: **M / F**

1. Factorice los siguientes polinomios: (2 puntos×10=20)

a) $x^2 + 3x$

b) $n(x + 2) - (x + 2)$

c) $x^2 - 4$

d) $x^2 + 2x + 1$

e) $x^2 - 12x + 36$

f) $x^2 + 3x + 2$

g) $x^2 - 7x + 12$

h) $x^2 + 2x - 15$

i) $2x^2 + 7x + 3$

j) $2x^2 - x - 3$

Unidad 2

Ecuaciones de Segundo Grado

Sección 1 Introducción a las ecuaciones de segundo grado

Sección 2 Solución de ecuaciones de segundo grado

Sección 3 Aplicaciones de las ecuaciones de segundo grado

Contenido 1 Ecuaciones de primer grado

Aprendizajes esperados

Recuerda el método utilizado para resolver ecuaciones de primer grado.

Secuencia:

En séptimo grado se resolvieron ecuaciones de primer grado. Esta clase muestra un repaso de dicho contenido.

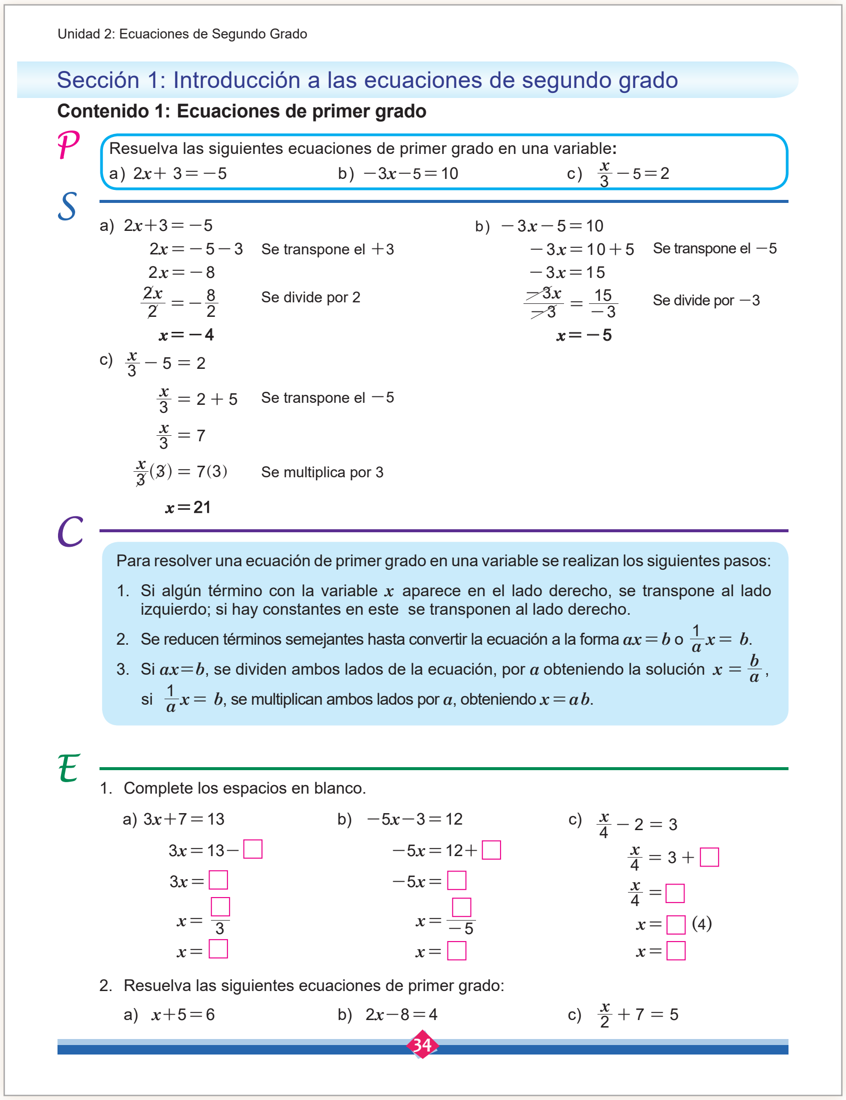
Puntos esenciales:

Recordar:

- ✓ La transposición de términos.
- ✓ Las propiedades de la igualdad.
- ✓ La simplificación de términos semejantes.

Resaltar los pasos que se siguen para resolver ecuaciones de primer grado.

Indicar que el ejercicio 1 lo copien del LT para que observen donde deben completar.



Unidad 2: Ecuaciones de Segundo Grado

Sección 1: Introducción a las ecuaciones de segundo grado

Contenido 1: Ecuaciones de primer grado

P Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado en una variable:

a) $2x+3=-5$ b) $-3x-5=10$ c) $\frac{x}{3}-5=2$

S

a) $2x+3=-5$

$2x=-5-3$ Se transpone el $+3$

$2x=-8$

$\frac{2x}{2}=-\frac{8}{2}$ Se divide por 2

$x=-4$

b) $-3x-5=10$

$-3x=10+5$ Se transpone el -5

$-3x=15$

$\frac{\cancel{-3}x}{\cancel{-3}}=\frac{15}{-3}$ Se divide por -3

$x=-5$

c) $\frac{x}{3}-5=2$

$\frac{x}{3}=2+5$ Se transpone el -5

$\frac{x}{3}=7$

$\frac{x}{\cancel{3}}(\cancel{3})=7(3)$ Se multiplica por 3

$x=21$

C

Para resolver una ecuación de primer grado en una variable se realizan los siguientes pasos:

1. Si algún término con la variable x aparece en el lado derecho, se transpone al lado izquierdo; si hay constantes en este se transponen al lado derecho.
2. Se reducen términos semejantes hasta convertir la ecuación a la forma $ax=b$ o $\frac{1}{a}x=b$.
3. Si $ax=b$, se dividen ambos lados de la ecuación, por a obteniendo la solución $x=\frac{b}{a}$, si $\frac{1}{a}x=b$, se multiplican ambos lados por a, obteniendo $x=ab$.

E

1. Complete los espacios en blanco.

a) $3x+7=13$

$3x=13-\square$

$3x=\square$

$x=\frac{\square}{3}$

$x=\square$

b) $-5x-3=12$

$-5x=12+\square$

$-5x=\square$

$x=\frac{\square}{-5}$

$x=\square$

c) $\frac{x}{4}-2=3$

$\frac{x}{4}=3+\square$

$\frac{x}{4}=\square$

$x=\square(4)$

$x=\square$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $x+5=6$ b) $2x-8=4$ c) $\frac{x}{2}+7=5$

34

U2: Ecuaciones de Segundo grado
S1: Introducción a las ecuaciones de segundo grado
C1: Ecuaciones de primer grado

Ⓟ Resuelva las siguientes ecuaciones:

Ⓢ

a) $2x+3=-5$

$2x=-5-3$

$2x=-8$

$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}=-\frac{8}{2}$

$x=-4$

b) $-3x-5=10$

$-3x=10+5$

$-3x=15$

$\frac{\cancel{-3}x}{\cancel{-3}}=\frac{15}{-3}$

$x=-5$

c) $\frac{x}{3}-5=2$

$\frac{x}{3}=2+5$

$\frac{x}{3}=7$

$\frac{x}{\cancel{3}}(\cancel{3})=7(3)$

$x=21$

Ⓒ *Leer en libro de texto*

Ⓔ 1. Complete:

a) $3x+7=13$

$3x=13-7$

$3x=6$

$x=\frac{6}{3}$

$x=2$

b) $-5x-3=12$

$-5x=12+3$

$-5x=15$

$x=\frac{15}{-5}$

$x=-3$

c) $\frac{x}{4}-2=3$

$\frac{x}{4}=3+2$

$\frac{x}{4}=5$

$x=5(4)$

$x=20$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $x+5=6$

$x=6-5$

$x=1$

b) $2x-8=4$

$2x=4+8$

$2x=12$

$x=\frac{12}{2}$

$x=6$

c) $\frac{x}{2}+7=5$

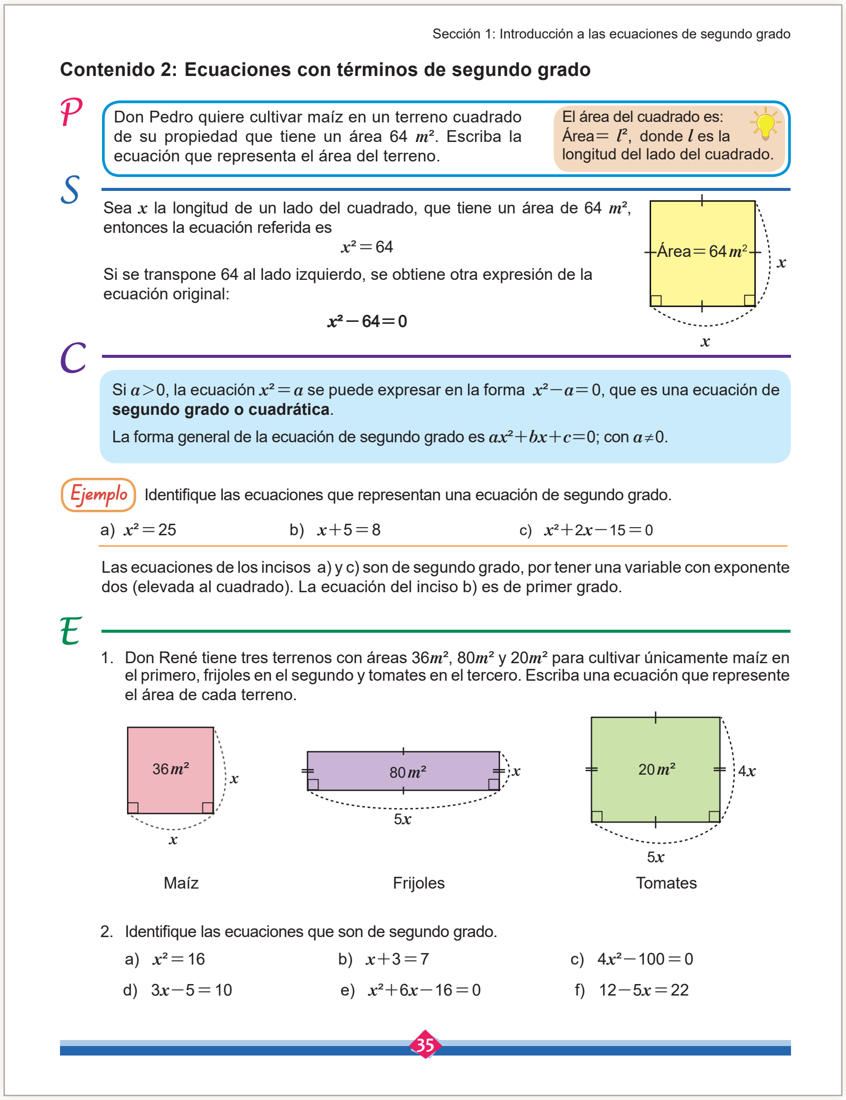
$\frac{x}{2}=5-7$

$\frac{x}{2}=-2$

$x=-2(2)$

$x=-4$

Contenido 2 Ecuaciones con términos de segundo grado



Sección 1: Introducción a las ecuaciones de segundo grado

Contenido 2: Ecuaciones con términos de segundo grado

P

Don Pedro quiere cultivar maíz en un terreno cuadrado de su propiedad que tiene un área 64 m^2. Escriba la ecuación que representa el área del terreno.

El área del cuadrado es: Área$=l^2$, donde l es la longitud del lado del cuadrado.

S

Sea x la longitud de un lado del cuadrado, que tiene un área de 64 m^2, entonces la ecuación referida es

$$x^2=64$$

Si se transpone 64 al lado izquierdo, se obtiene otra expresión de la ecuación original:

$$x^2-64=0$$

C

Si $a>0$, la ecuación $x^2=a$ se puede expresar en la forma $x^2-a=0$, que es una ecuación de **segundo grado o cuadrática**.

La forma general de la ecuación de segundo grado es $ax^2+bx+c=0$; con $a\neq0$.

Ejemplo Identifique las ecuaciones que representan una ecuación de segundo grado.

a) $x^2=25$ b) $x+5=8$ c) $x^2+2x-15=0$

Las ecuaciones de los incisos a) y c) son de segundo grado, por tener una variable con exponente dos (elevada al cuadrado). La ecuación del inciso b) es de primer grado.

E

1. Don René tiene tres terrenos con áreas 36m^2, 80m^2 y 20m^2 para cultivar únicamente maíz en el primero, frijoles en el segundo y tomates en el tercero. Escriba una ecuación que represente el área de cada terreno.

Maíz Frijoles Tomates

2. Identifique las ecuaciones que son de segundo grado.

a) $x^2=16$ b) $x+3=7$ c) $4x^2-100=0$

d) $3x-5=10$ e) $x^2+6x-16=0$ f) $12-5x=22$

35

Aprendizajes esperados

Identifica cuándo una ecuacion es de segundo grado.

Secuencia:

En la clase anterior se recordó cómo se resuelven ecuaciones de primer grado. Ahora se estudian las ecuaciones de segundo grado o cuadráticas.

Puntos esenciales:

Recordar cómo se obtiene el área de un cuadrado y de un rectángulo.

Representar áreas de cuadrados o rectángulos mediante ecuaciones de segundo grado.

Explicar por qué $a\neq0$ en la definición de ecuación de segundo grado.

Identificar cuando una ecuación es de segundo grado.

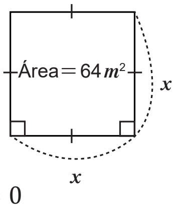
C2: Ecuaciones con términos de segundo grado

P Don Pedro tiene un terreno cuadrado. El área del terreno es de $64m^2$. Escriba la ecuación que representa el área de dicho terreno.

S x representa el lado del terreno.

El área del terreno es $64m^2$.

La ecuación referida es $x^2=64$.



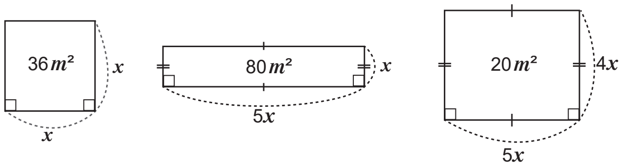
También,
se puede expresar como $x^2-64=0$

C Si $a>0$, la ecuación $x^2=a$ se puede expresar en la forma $x^2-a=0$ que es una ecuación de segundo grado o cuadrática de la forma $ax^2+bx+c=0$; con $a\neq0$.

Ej ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones son cuadráticas?

a) $x^2=25$ b) $x+5=8$ c) $x^2+2x-15=0$
a) y c) son ecuaciones de segundo grado.
b) es una ecuación de primer grado.

E 1. Escriba una ecuación que representa el área de cada terreno.



Maíz $x^2=36$ Frijoles $5x^2=80$ Tomates $20x^2=20$

2. Identifique las ecuaciones que son de segundo grado.

a) $x^2=16$ b) $x+3=7$ c) $4x^2-100=0$
d) $3x-5=10$ e) $x^2+6x-16=0$ f) $12-5x=22$

Respuesta: a), c) y e)

Contenido 3 Soluciones de una ecuación de segundo grado

Aprendizajes esperados

Determina mediante sustitución cuándo un número dado es solución de una ecuación de segundo grado.

Secuencia:

En la clase anterior se estudió el concepto de ecuación de segundo grado. Ahora se estudian las soluciones de ecuaciones de este tipo.

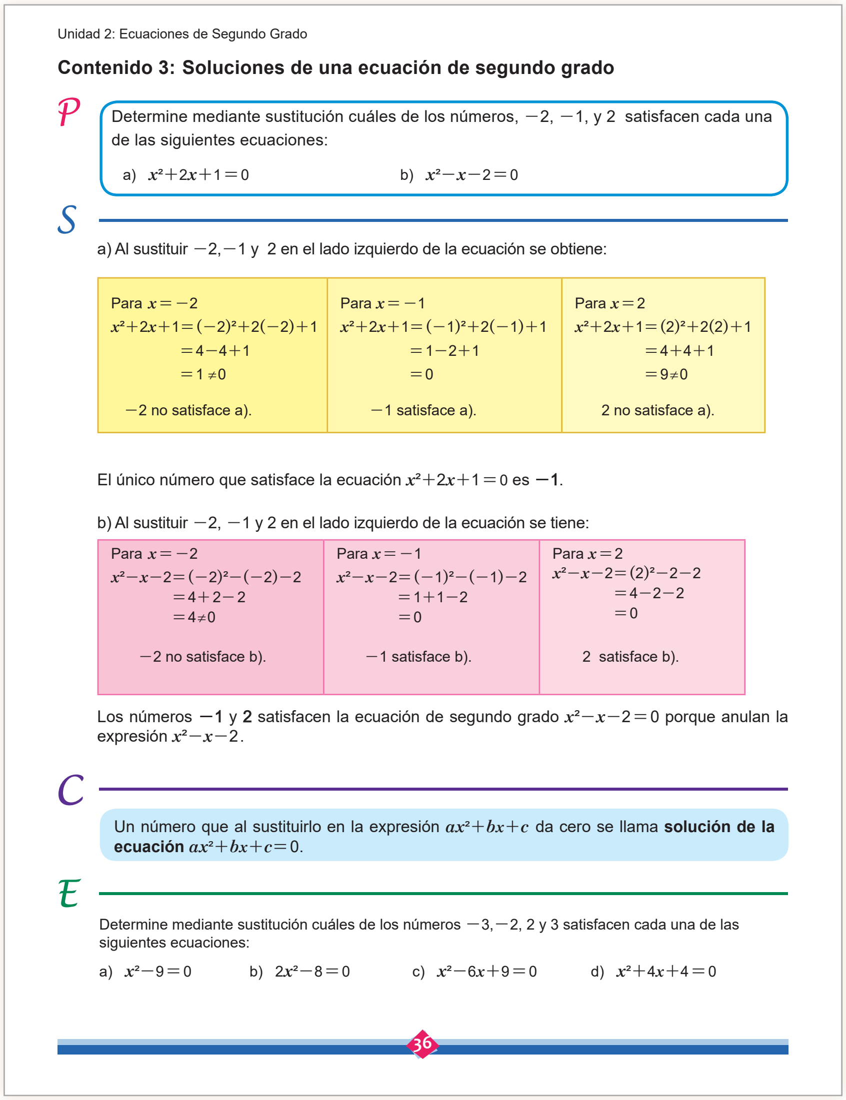
Puntos esenciales:

Recordar a que se le llama solución de una ecuación.

Determinar las soluciones de una ecuación de segundo grado mediante sustituciones.

Resaltar que un número es solución de una ecuación de segundo grado si al sustituirlo en lugar de la variable satisface dicha igualdad.

Destacar que una ecuación de segundo grado admite a lo sumo dos soluciones.



Unidad 2: Ecuaciones de Segundo Grado

Contenido 3: Soluciones de una ecuación de segundo grado

P Determine mediante sustitución cuáles de los números, -2, -1, y 2 satisfacen cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2+2x+1=0$ b) $x^2-x-2=0$

S

a) Al sustituir $-2, -1$ y 2 en el lado izquierdo de la ecuación se obtiene:

Para $x=-2$ $x^2+2x+1=(-2)^2+2(-2)+1$ $=4-4+1$ $=1\neq 0$ -2 no satisface a).	Para $x=-1$ $x^2+2x+1=(-1)^2+2(-1)+1$ $=1-2+1$ $=0$ -1 satisface a).	Para $x=2$ $x^2+2x+1=(2)^2+2(2)+1$ $=4+4+1$ $=9\neq 0$ 2 no satisface a).

El único número que satisface la ecuación $x^2+2x+1=0$ es $\mathbf{-1}$.

b) Al sustituir -2, -1 y 2 en el lado izquierdo de la ecuación se tiene:

Para $x=-2$ $x^2-x-2=(-2)^2-(-2)-2$ $=4+2-2$ $=4\neq 0$ -2 no satisface b).	Para $x=-1$ $x^2-x-2=(-1)^2-(-1)-2$ $=1+1-2$ $=0$ -1 satisface b).	Para $x=2$ $x^2-x-2=(2)^2-2-2$ $=4-2-2$ $=0$ 2 satisface b).

Los números $\mathbf{-1}$ y $\mathbf{2}$ satisfacen la ecuación de segundo grado $x^2-x-2=0$ porque anulan la expresión x^2-x-2.

C

Un número que al sustituirlo en la expresión ax^2+bx+c da cero se llama **solución de la ecuación** $ax^2+bx+c=0$.

E

Determine mediante sustitución cuáles de los números $-3, -2$, 2 y 3 satisfacen cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2-9=0$ b) $2x^2-8=0$ c) $x^2-6x+9=0$ d) $x^2+4x+4=0$

36

C3: Soluciones de una ecuación de segundo grado

P Cuáles de los números, $-2, -1$ y 2 satisfacen cada una de las siguientes ecuaciones:

S a) $x^2+2x+1=0$

Para $x=-2$, $x^2+2x+1 = (-2)^2+2(-2)+1$
$= 4-4+1$
$= 1\neq 0$

Para $x=-1$, x^2+2x+1
$= (-1)^2+2(-1)+1$
$= 1-2+1$
$= 0$

Para $x=2$, x^2+2x+1
$= (2)^2+2(2)+1$
$= 4+4+1$
$= 9\neq 0$

-1 satisface la ecuación $x^2+2x+1=0$.

b) $x^2-x-2=0$

Para $x=-2$, $x^2-x-2 = (-2)^2-(-2)-2$
$= 4+2-2$
$= 4\neq 0$

Para $x=-1$, x^2-x-2
$= (-1)^2-(-1)-2$
$= 1+1-2$
$= 0$

Para $x=2$, x^2-x-2
$= (2)^2-(2)-2$
$= 4-2-2$
$= 0$

-1 y 2 satisfacen la ecuación $x^2-x-2=0$

C *Leer en libro de texto*

E Cuáles de los números, $-3, -2, 2$ y 3 satisfacen cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2-9=0$

$x^2-9=(-3)^2-9$
$=9-9$
$=0$

$x^2-9=(-2)^2-9$
$=4-9$
$=-5\neq 0$

$x^2-9=(2)^2-9$
$=4-9$
$=-5\neq 0$

$x^2-9=(3)^2-9$
$=9-9$
$=0$

-3 y 3 satisfacen la ecuación.

b) $2x^2-8=0$

$2x^2-8=2(-3)^2-8$
$=2(9)-8$
$=18-8$
$=10\neq 0$

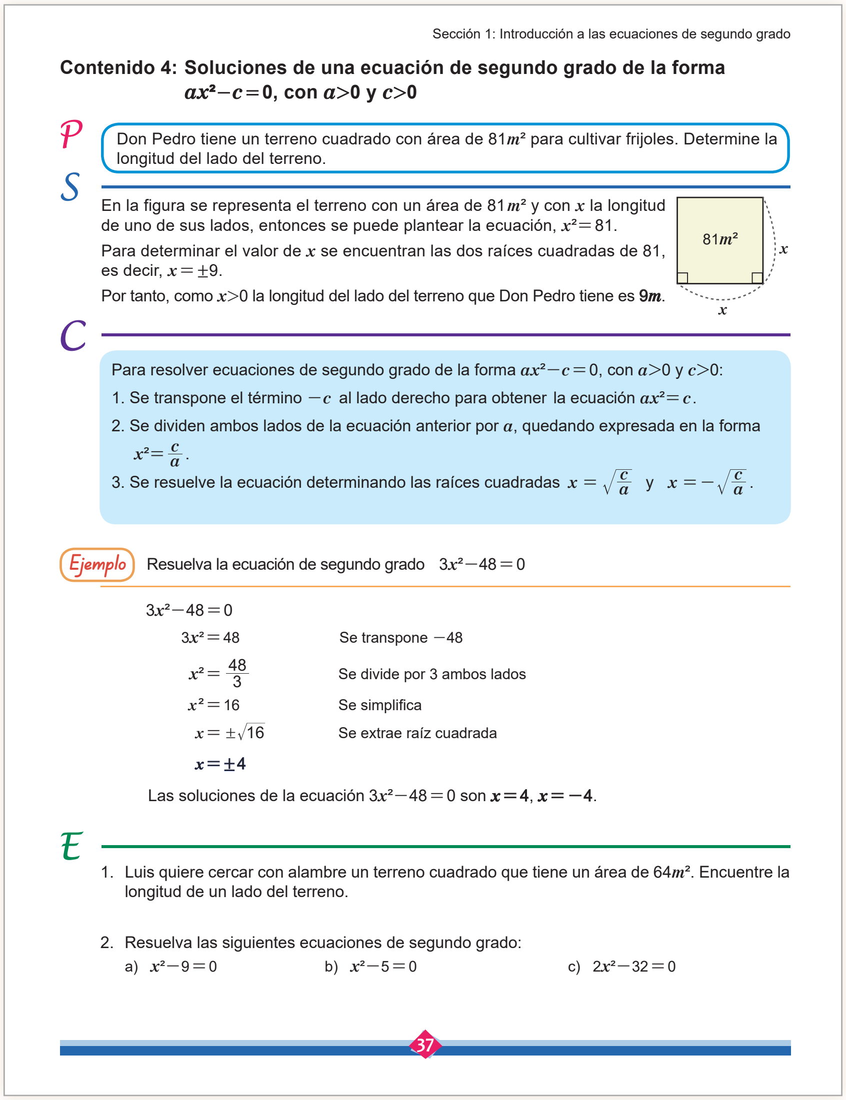
$2x^2-8=2(-2)^2-8$
$=2(4)-8$
$=8-8=0$

$2x^2-8=2(2)^2-8$
$=2(4)-8$
$=8-8=0$

$2x^2-8=2(3)^2-8$
$=2(9)-8$
$=18-8$
$=10\neq 0$

-2 y 2 satisfacen la ecuación.

Contenido 4 Soluciones de una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2-c=0$, con $a>0$ y $c>0$



Sección 1: Introducción a las ecuaciones de segundo grado

Contenido 4: Soluciones de una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2-c=0$, con $a>0$ y $c>0$

P Don Pedro tiene un terreno cuadrado con área de $81m^2$ para cultivar frijoles. Determine la longitud del lado del terreno.

S En la figura se representa el terreno con un área de $81m^2$ y con x la longitud de uno de sus lados, entonces se puede plantear la ecuación, $x^2=81$.

Para determinar el valor de x se encuentran las dos raíces cuadradas de 81, es decir, $x=\pm 9$.

Por tanto, como $x>0$ la longitud del lado del terreno que Don Pedro tiene es **9m**.

C Para resolver ecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2-c=0$, con $a>0$ y $c>0$:

1. Se transpone el término $-c$ al lado derecho para obtener la ecuación $ax^2=c$.
2. Se dividen ambos lados de la ecuación anterior por a, quedando expresada en la forma $x^2=\frac{c}{a}$.
3. Se resuelve la ecuación determinando las raíces cuadradas $x=\sqrt{\frac{c}{a}}$ y $x=-\sqrt{\frac{c}{a}}$.

Ejemplo Resuelva la ecuación de segundo grado $3x^2-48=0$

$3x^2-48=0$	
$3x^2=48$	Se transpone -48
$x^2=\frac{48}{3}$	Se divide por 3 ambos lados
$x^2=16$	Se simplifica
$x=\pm\sqrt{16}$	Se extrae raíz cuadrada
$x=\pm 4$	

Las soluciones de la ecuación $3x^2-48=0$ son $x=4$, $x=-4$.

E

1. Luis quiere cercar con alambre un terreno cuadrado que tiene un área de $64m^2$. Encuentre la longitud de un lado del terreno.
2. Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado:
   a) $x^2-9=0$ b) $x^2-5=0$ c) $2x^2-32=0$

37

Aprendizajes esperados

Resuelve ecuaciones de la forma $ax^2-c=0$, con $a>0$ y $c>0$.

Secuencia:

En la clase anterior se determinaron las soluciones de una ecuación de segundo grado sustituyendo valores dados para la variable. Ahora se resuelven ecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2-c=0$, con $a>0$ y $c>0$.

Puntos esenciales:

Recordar:

- ✓ Cómo se representa el área de un cuadrado o rectángulo utilizando ecuaciones de segundo grado.
- ✓ El concepto de raíz cuadrada.

Contextualizar las soluciones de una ecuación de segundo grado a la situación planteada.

Explicar los pasos que se siguen para resolver ecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2-c=0$, con $a>0$ y $c>0$.

Resolver ecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2-c=0$, con $a>0$ y $c>0$.

C4: Soluciones de una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2-c=0$, con $a>0$ y $c>0$

P Pedro tiene un terreno cuadrado con área de $81m^2$. Determine la longitud del lado del terreno.

S x es la longitud del lado del terreno, siendo $x>0$.
Área del cuadrado es $81m^2$, entonces
Área$=x^2=81m^2$
$x=+9$
La longitud del lado es $9m$.

C Para resolver la ecuación de la forma $ax^2-c=0$ con $a>0$ y $c>\quad 0$

1. Se transpone c, resultando $ax^2=c$.
2. Se despeja x^2: $x^2=\frac{c}{a}$
3. Se resuelve la ecuación determinando las raíces cuadradas: $x=\pm\sqrt{\frac{c}{a}}$.

Ej Resuelva la ecuación $3x^2-48=0$.

$$\begin{aligned} 3x^2-48 &= 0\\ 3x^2 &= 48\\ x^2 &= \frac{48}{3}=16\\ x &= \pm\sqrt{16},\\ x &= \pm 4 \end{aligned}$$

E 1. Luis quiere cercar con alambre un terreno cuadrado que tiene un área de $64m^2$.
Determine la longitud del lado del terreno .
x: longitud del lado del terreno.
Área $=x^2=64$
$x=\pm 8$
Como $x>0$, $x=8m$ La longitud del lado es $8m$.

2. Resuelva

a) $x^2-9=0$
$x^2=9$
$x=\pm\sqrt{9}$
$x=\pm 3$

c) $2x^2-32=0$
$2x^2=32$
$x^2=\frac{32}{2}=16$
$x=\pm\sqrt{16}=\pm 4$

Contenido 5 Soluciones de una ecuación de segundo grado de la forma $(x+p)^2=q$ con $q>0$

Aprendizajes esperados

Resuelve ecuaciones de la forma $(x+p)^2=q$ con $q>0$.

Secuencia:

En la clase anterior se resolvieron ecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2-c=0$, con $a>0$ y $c>0$. Aquí se resuelven ecuaciones de segundo grado de la forma $(x+p)^2=q$, con $q>0$.

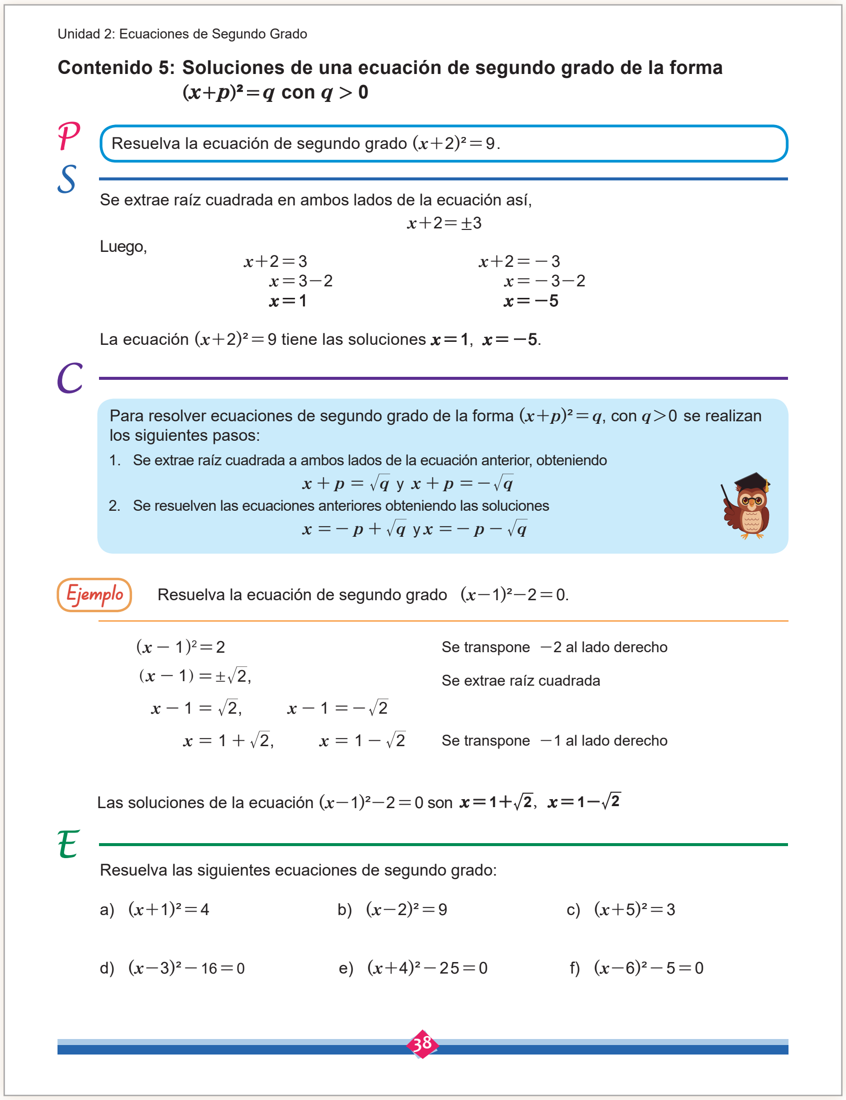
Puntos esenciales:

Recordar el concepto de raíz cuadrada.

Explicar los pasos que se siguen para resolver ecuaciones de segundo grado de la forma $(x+p)^2=q$, con $q>0$.

Destacar que el hecho de extraer raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación dada, conduce a resolver dos ecuaciones de primer grado.

Aplicar los pasos explicados para resolver ecuaciones de segundo grado de la forma $(x+p)^2=q$, con $q>0$.



Unidad 2: Ecuaciones de Segundo Grado

Contenido 5: Soluciones de una ecuación de segundo grado de la forma $(x+p)^2=q$ con $q>0$

P Resuelva la ecuación de segundo grado $(x+2)^2=9$.

S Se extrae raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación así,

$$x+2=\pm 3$$

Luego,

$$x+2=3 \qquad x+2=-3$$
$$x=3-2 \qquad x=-3-2$$
$$\mathbf{x=1} \qquad \mathbf{x=-5}$$

La ecuación $(x+2)^2=9$ tiene las soluciones $\mathbf{x=1}$, $\mathbf{x=-5}$.

C

Para resolver ecuaciones de segundo grado de la forma $(x+p)^2=q$, con $q>0$ se realizan los siguientes pasos:

1. Se extrae raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación anterior, obteniendo
$$x+p=\sqrt{q} \text{ y } x+p=-\sqrt{q}$$
2. Se resuelven las ecuaciones anteriores obteniendo las soluciones
$$x=-p+\sqrt{q} \text{ y } x=-p-\sqrt{q}$$

Ejemplo Resuelva la ecuación de segundo grado $(x-1)^2-2=0$.

$(x-1)^2=2$ Se transpone -2 al lado derecho

$(x-1)=\pm\sqrt{2}$, Se extrae raíz cuadrada

$x-1=\sqrt{2}$, $\quad x-1=-\sqrt{2}$

$x=1+\sqrt{2}$, $\quad x=1-\sqrt{2}$ Se transpone -1 al lado derecho

Las soluciones de la ecuación $(x-1)^2-2=0$ son $\mathbf{x=1+\sqrt{2}}$, $\mathbf{x=1-\sqrt{2}}$

E

Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $(x+1)^2=4$ b) $(x-2)^2=9$ c) $(x+5)^2=3$

d) $(x-3)^2-16=0$ e) $(x+4)^2-25=0$ f) $(x-6)^2-5=0$

38

C5: Soluciones de una ecuación de segundo grado de la forma $(x+p)^2=q$ con $q>0$

P Resuelva $(x+2)^2=9$

S Se extrae raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación

$$(x+2)^2=9$$
$$x+2=\pm\sqrt{9}=\pm 3$$
$$x+2=3 \qquad x+2=-3$$
$$x=3-2 \qquad x=-3-2$$
$$x=1 \qquad x=-5$$

Las soluciones de $(x+2)^2=9$ son $x=1$, $x=-5$

C Para resolver la ecuación $(x+p)^2=q$, con $q>0$:

1. Se extrae raíz cuadrada
$$x+p=\sqrt{q} \quad \text{y} \quad x+p=-\sqrt{q}$$
2. Se resuelven las ecuaciones
$$x=-p+\sqrt{q} \quad \text{y} \quad x=-p-\sqrt{q}$$

Ej Resuelva

$$(x-1)^2-2=0$$
$$(x-1)^2=2$$
$$x-1=\pm\sqrt{2}$$
$$x-1=\sqrt{2}, \qquad x-1=-\sqrt{2}$$
$$x=1+\sqrt{2}, \qquad x=1-\sqrt{2}$$

Las soluciones de $(x-1)^2-2=0$ son $x=1+\sqrt{2}$, $x=1-\sqrt{2}$,

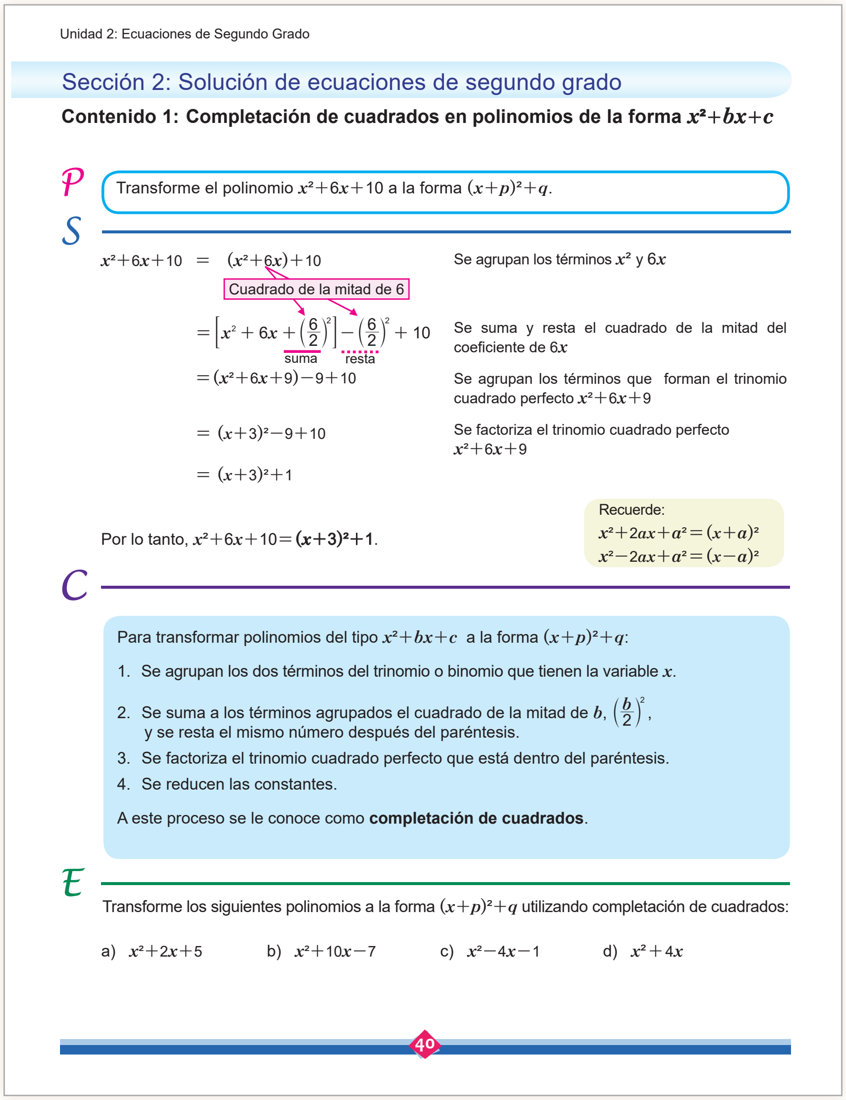
E

a) $(x+1)^2=4$
$$x+1=\pm\sqrt{4}=\pm 2$$
$$x+1=2, \qquad x+1=-2$$
$$x=2-1, \qquad x=-2-1$$
$$x=1, \qquad x=-3$$

b) $(x-2)^2=9$
$$x-2=\pm\sqrt{9}=\pm 3$$
$$x-2=3, \qquad x-2=-3$$
$$x=3+2, \qquad x=-3+2$$
$$x=5 \qquad x=-1$$

c) $(x+5)^2=3$
$$x+5=\pm\sqrt{3}$$
$$x+5=\sqrt{3}, \qquad x+5=-\sqrt{3}$$
$$x=-5+\sqrt{3}, \qquad x=-5-\sqrt{3}$$

Contenido 1 Completación de cuadrados en polinomios de la forma x^2+bx+c



Unidad 2: Ecuaciones de Segundo Grado

Sección 2: Solución de ecuaciones de segundo grado

Contenido 1: Completación de cuadrados en polinomios de la forma x^2+bx+c

P Transforme el polinomio $x^2+6x+10$ a la forma $(x+p)^2+q$.

S

$x^2+6x+10 = (x^2+6x)+10$ Se agrupan los términos x^2 y $6x$

Cuadrado de la mitad de 6

$= \left[x^2+6x+\underbrace{\left(\frac{6}{2}\right)^2}_{\text{suma}}\right]-\underbrace{\left(\frac{6}{2}\right)^2}_{\text{resta}}+10$ Se suma y resta el cuadrado de la mitad del coeficiente de $6x$

$=(x^2+6x+9)-9+10$ Se agrupan los términos que forman el trinomio cuadrado perfecto x^2+6x+9

$=(x+3)^2-9+10$ Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto x^2+6x+9

$=(x+3)^2+1$

Por lo tanto, $x^2+6x+10=$ **$(x+3)^2+1$**.

Recuerde:
$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$
$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$

C

Para transformar polinomios del tipo x^2+bx+c a la forma $(x+p)^2+q$:

1. Se agrupan los dos términos del trinomio o binomio que tienen la variable x.
2. Se suma a los términos agrupados el cuadrado de la mitad de b, $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, y se resta el mismo número después del paréntesis.
3. Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto que está dentro del paréntesis.
4. Se reducen las constantes.

A este proceso se le conoce como **completación de cuadrados**.

E Transforme los siguientes polinomios a la forma $(x+p)^2+q$ utilizando completación de cuadrados:

a) x^2+2x+5 b) $x^2+10x-7$ c) x^2-4x-1 d) x^2+4x

40

Aprendizajes esperados

Reescribe polinomios de la forma x^2+bx+c a la forma $(x+p)^2+q$ utilizando completación de cuadrados.

Secuencia:

En la clase anterior se resolvieron ecuaciones de segundo grado de la forma $(x+p)^2=q$, con $q>0$. Ahora se reescriben polinomios de la forma x^2+bx+c y x^2+bx a la forma $(x+p)^2+q$, utilizando completación de cuadrados.

Puntos esenciales:

Recordar que

$$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$$
$$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$$

Explicar el procedimiento que se sigue para completar cuadrados y llegar a expresar polinomios de la forma x^2+bx+c y x^2+bx a la forma $(x+p)^2+q$.

Expresar polinomios de la forma x^2+bx+c y x^2+bx a la forma $(x+p)^2+q$ utilizando completación de cuadrados.

S2:Solución de ecuaciones de segundo grado
C1:Completación de cuadrados en polinomios de forma x^2+bx+c

$\boxed{x^2+2ax+a^2=(x+a)^2}$ $\boxed{x^2-2ax+a^2=(x-a)^2}$

Ⓟ Transforme el polinomio $x^2+6x+10$ a la forma $(x+p)^2+q$

Ⓢ $x^2+6x+10=(x^2+6x)+10$

Cuadrado de la mitad de 6

$$=\left[x^2+6x+\underbrace{\left(\frac{6}{2}\right)^2}_{\text{Suma}}\right]-\underbrace{\left(\frac{6}{2}\right)^2}_{\text{Resta}}+10$$
$$=[x^2+6x+3^2]-3^2+10$$
$$=(x^2+6x+9)-9+10$$
$$=(x+3)^2-9+10$$
$$=(x+3)^2+1$$

Por lo tanto, $x^2+6x+10=(x+3)^2+1$

Ⓒ *Leer en el libro de texto*

Ⓔ Transforme los siguientes polinomios a la forma $(x+p)^2+q$:

a) $x^2+2x+5=(x^2+2x)+5$
$$=\left[x^2+2x+\left(\frac{2}{2}\right)^2\right]-\left(\frac{2}{2}\right)^2+5$$
$$=[x^2+2x+1^2]-1^2+5$$
$$=(x^2+2x+1)-1+5$$
$$=(x+1)^2-1+5$$
$$=(x+1)^2+4$$

b) $x^2+10x-7=(x^2+10x)-7$
$$=\left[x^2+10x+\left(\frac{10}{2}\right)^2\right]-\left(\frac{10}{2}\right)^2-7$$
$$=[x^2+10x+5^2]-5^2-7$$
$$=(x^2+10x+25)-25-7$$
$$=(x+5)^2-25-7$$
$$=(x+5)^2-32$$

Contenido 2 Completación de cuadrados en polinomios de la forma ax^2+bx+c con $a>1$

Aprendizajes esperados

Reescribe polinomios de la forma ax^2+bx+c con $a>1$ a la forma $a(x+p)^2+q$ utilizando completación de cuadrados.

Secuencia:

En la clase anterior se reescribieron polinomios de la forma x^2+bx+c y x^2+bx a la forma $(x+p)^2+q$, utilizando completación de cuadrados. Ahora se utiliza tal procedimiento para reescribir polinomios de la forma ax^2+bx+c, con $a>1$ a la forma $a(x+p)^2+q$.

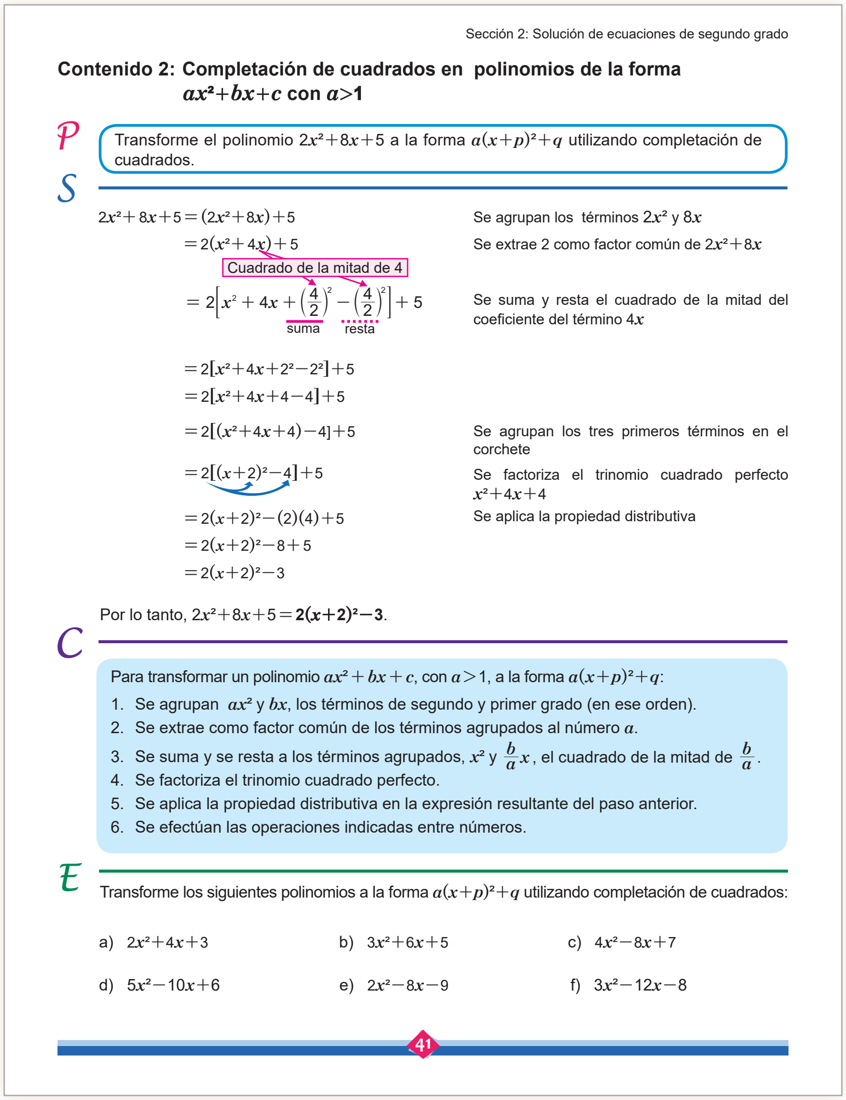
Puntos esenciales:

Recordar cómo:

- ✓ Extraer factor común.
- ✓ Completar cuadrados para reescribir polinomios de la forma x^2+bx a la forma $(x+p)^2+q$.

Explicar el procedimiento que se sigue para completar cuadrados y llegar a expresar polinomios de la forma ax^2+bx+c, con $a>1$ a la forma $a(x+p)^2+q$.

Expresar polinomios de la forma ax^2+bx+c, con $a>1$ a la forma $a(x+p)^2+q$ utilizando completación de cuadrados.



Sección 2: Solución de ecuaciones de segundo grado

Contenido 2: Completación de cuadrados en polinomios de la forma ax^2+bx+c con $a>1$

P Transforme el polinomio $2x^2+8x+5$ a la forma $a(x+p)^2+q$ utilizando completación de cuadrados.

S

$2x^2+8x+5=(2x^2+8x)+5$ Se agrupan los términos $2x^2$ y $8x$

$=2(x^2+4x)+5$ Se extrae 2 como factor común de $2x^2+8x$

Cuadrado de la mitad de 4

$=2\left[x^2+4x+\underbrace{\left(\frac{4}{2}\right)^2}_{\text{suma}}-\underbrace{\left(\frac{4}{2}\right)^2}_{\text{resta}}\right]+5$ Se suma y resta el cuadrado de la mitad del coeficiente del término $4x$

$=2[x^2+4x+2^2-2^2]+5$

$=2[x^2+4x+4-4]+5$

$=2[(x^2+4x+4)-4]+5$ Se agrupan los tres primeros términos en el corchete

$=2[(x+2)^2-4]+5$ Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto x^2+4x+4

$=2(x+2)^2-(2)(4)+5$ Se aplica la propiedad distributiva

$=2(x+2)^2-8+5$

$=2(x+2)^2-3$

Por lo tanto, $2x^2+8x+5=\mathbf{2(x+2)^2-3}$.

C

Para transformar un polinomio ax^2+bx+c, con $a>1$, a la forma $a(x+p)^2+q$:

1. Se agrupan ax^2 y bx, los términos de segundo y primer grado (en ese orden).
2. Se extrae como factor común de los términos agrupados al número a.
3. Se suma y se resta a los términos agrupados, x^2 y $\frac{b}{a}x$, el cuadrado de la mitad de $\frac{b}{a}$.
4. Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto.
5. Se aplica la propiedad distributiva en la expresión resultante del paso anterior.
6. Se efectúan las operaciones indicadas entre números.

E Transforme los siguientes polinomios a la forma $a(x+p)^2+q$ utilizando completación de cuadrados:

a) $2x^2+4x+3$
b) $3x^2+6x+5$
c) $4x^2-8x+7$
d) $5x^2-10x+6$
e) $2x^2-8x-9$
f) $3x^2-12x-8$

41

C2: Completación de cuadrados en polinomios de la forma ax^2+bx+c con $a>1$

(P) Transforme $2x^2+8x+5$ a la forma $a(x+p)^2+q$

(S) $2x^2+8x+5=(2x^2+8x)+5$

$=2(x^2+4x)+5$

Cuadrado de la mitad de 4

$=2\left[x^2+4x+\left(\boxed{\frac{4}{2}}\right)^2-\left(\boxed{\frac{4}{2}}\right)^2\right]+5$ Extraer el coeficiente del término cuadrático

$=2[x^2+4x+2^2-2^2]+5$

$=2[x^2+4x+4-4]+5$

$=2[(x^2+4x+4)-4]+5$

$=2[(x+2)^2-4]+5$

$=2(x+2)^2-(2)(4)+5$

$=2(x+2)^2-8+5$

$=2(x+2)^2-3$

Por lo tanto, $2x^2+8x+5=2(x+2)^2-3$

(C) *Leer en el libro de texto*

(E) Transforme utilizando completación de cuadrados:

a) $2x^2+4x+3=(2x^2+4x)+3$

$=2(x^2+2x)+3$

$=2[x^2+2x+\left(\frac{2}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{2}\right)^2]+3$

$=2[x^2+2x+1^2-1^2]+3$

$=2[(x^2+2x+1)-1]+3$

$=2[(x+1)^2-1]+3$

$=2(x+1)^2-(2)(1)+3$

$=2(x+1)^2+1$

Por lo tanto, $2x^2+4x+3=2(x+1)^2+1$

c) $4x^2-8x+7=(4x^2-8x)+7$

$=4(x^2-2x)+7$

$=4\left[x^2-2x+\left(\frac{2}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{2}\right)^2\right]+7$

$=4[(x^2-2x+1)-1]+7$

$=4[(x-1)^2-1]+7$

$=4(x-1)^2-(4)(1)+7$

$=4(x-1)^2+3$

$4x^2-8x+7=4(x-1)^2+3$

e) $2x^2-8x-9=2(x^2-4x)-9$

$=2[x^2-4x+\left(\frac{4}{2}\right)^2-\left(\frac{4}{2}\right)^2]-9$

$=2[x^2-4x+2^2-2^2]-9$

$=2[(x^2-4x+4)-4]-9$

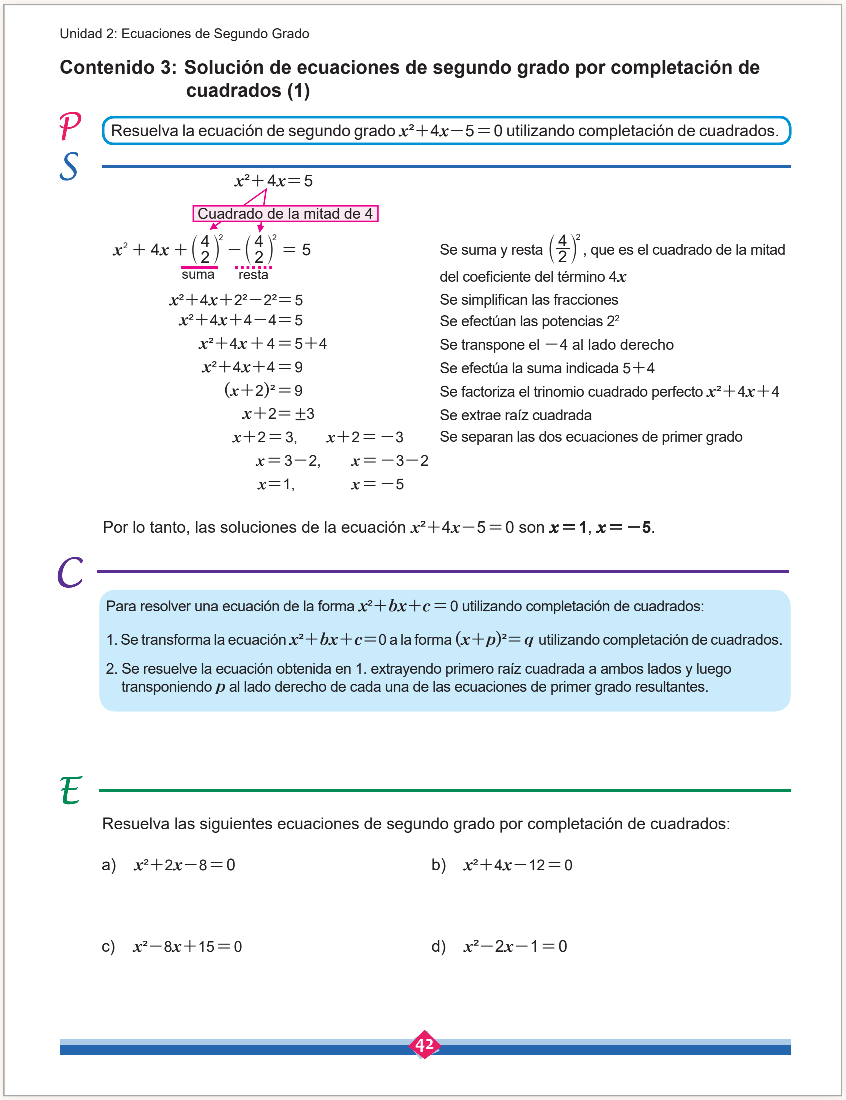
$=2[(x-2)^2-4]-9$

$=2(x-2)^2-(2)(4)-9$

$=2(x-2)^2-17$

$2x^2-8x-9=2(x-2)^2-17$

Contenido 3 Solución de ecuaciones de segundo grado por completación de cuadrados (1)



Unidad 2: Ecuaciones de Segundo Grado

Contenido 3: Solución de ecuaciones de segundo grado por completación de cuadrados (1)

P Resuelva la ecuación de segundo grado $x^2+4x-5=0$ utilizando completación de cuadrados.

S

$$x^2+4x=5$$

Cuadrado de la mitad de 4

$x^2+4x+\underbrace{\left(\frac{4}{2}\right)^2}_{\text{suma}}-\underbrace{\left(\frac{4}{2}\right)^2}_{\text{resta}}=5$	Se suma y resta $\left(\frac{4}{2}\right)^2$, que es el cuadrado de la mitad del coeficiente del término $4x$
$x^2+4x+2^2-2^2=5$	Se simplifican las fracciones
$x^2+4x+4-4=5$	Se efectúan las potencias 2^2
$x^2+4x+4=5+4$	Se transpone el -4 al lado derecho
$x^2+4x+4=9$	Se efectúa la suma indicada $5+4$
$(x+2)^2=9$	Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto x^2+4x+4
$x+2=\pm3$	Se extrae raíz cuadrada
$x+2=3,\quad x+2=-3$	Se separan las dos ecuaciones de primer grado
$x=3-2,\quad x=-3-2$	
$x=1,\quad x=-5$	

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $x^2+4x-5=0$ son $\boldsymbol{x=1}$, $\boldsymbol{x=-5}$.

C

Para resolver una ecuación de la forma $x^2+bx+c=0$ utilizando completación de cuadrados:

1. Se transforma la ecuación $x^2+bx+c=0$ a la forma $(x+p)^2=q$ utilizando completación de cuadrados.
2. Se resuelve la ecuación obtenida en 1. extrayendo primero raíz cuadrada a ambos lados y luego transponiendo p al lado derecho de cada una de las ecuaciones de primer grado resultantes.

E

Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado por completación de cuadrados:

a) $x^2+2x-8=0$

b) $x^2+4x-12=0$

c) $x^2-8x+15=0$

d) $x^2-2x-1=0$

42

Aprendizajes esperados

Resuelve ecuaciones de segundo grado por completación de cuadrados.

Secuencia:

En la clase anterior se reescribieron polinomios de la forma ax^2+bx+c, con $a>1$ a la forma $a(x+p)^2+q$ utilizando completación de cuadrados. Aquí se utiliza la completación de cuadrados para resolver ecuaciones de segundo grado de la forma $x^2+bx+c=0$.

Puntos esenciales:

Recordar:

- ✓ El procedimiento que se sigue para completar cuadrados y llegar a expresar polinomios de la forma x^2+bx+c a la forma $(x+p)^2+q$.
- ✓ Cómo se resuelven ecuaciones de la forma $(x+p)^2=q$.

Explicar los pasos que se siguen para resolver ecuaciones de la forma $x^2+bx+c=0$ utilizando completación de cuadrados.

Resolver ecuaciones de la forma $x^2+bx+c=0$ utilizando completación de cuadrados.

C3: Solución de ecuaciones de segundo grado, por completación de cuadrados (1)

Ⓟ Resuelva $x^2+4x-5=0$ utilizando completación de cuadrados

Ⓢ $x^2+4x=5$

$$x^2+4x+\left(\frac{4}{2}\right)^2-\left(\frac{4}{2}\right)^2=5$$

$$x^2+4x+2^2-2^2=5$$
$$x^2+4x+4-4=5$$
$$x^2+4x+4=5+4$$
$$x^2+4x+4=9$$
$$(x+2)^2=9$$
$$x+2=\pm3$$
$$x+2=3 \qquad x+2=-3$$
$$x=3-2, \qquad x=-3-2$$
$$x=1 \qquad x=-5$$

Ⓒ Para resolver la ecuación $x^2+bx+c=0$

1. Se transforma a la forma $(x+p)^2=q$
2. Se extrae raíz cuadrada

Ⓔ Resuelva por completación de cuadrados

a) $x^2+2x-8=0$

$$x^2+2x=8$$
$$x^2+2x+\left(\frac{2}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{2}\right)^2=8$$
$$x^2+2x+1^2-1^2=8$$
$$x^2+2x+1-1=8$$
$$x^2+2x+1=8+1$$
$$(x+1)^2=9$$
$$x+1=\pm3$$
$$x+1=3, \qquad x+1=-3$$
$$x=3-1, \qquad x=-3-1$$
$$x=2, \qquad x=-4$$

c) $x^2-8x+15=0$

$$x^2-8x=-15$$
$$x^2-8x+\left(\frac{8}{2}\right)^2-\left(\frac{8}{2}\right)^2=-15$$
$$x^2-8x+4^2-4^2=-15$$
$$x^2-8x+16-16=-15$$
$$x^2-8x+16=-15+16$$
$$x^2-8x+16=1$$
$$(x-4)^2=1$$
$$x-4=\pm1$$
$$x-4=1, \qquad x-4=-1$$
$$x=1+4, \qquad x=-1+4$$
$$x=5, \qquad x=3$$

Contenido 4 Solución de ecuaciones de segundo grado por completación de cuadrados (2)

Aprendizajes esperados

Resuelve ecuaciones de segundo grado por completación de cuadrados.

Secuencia:

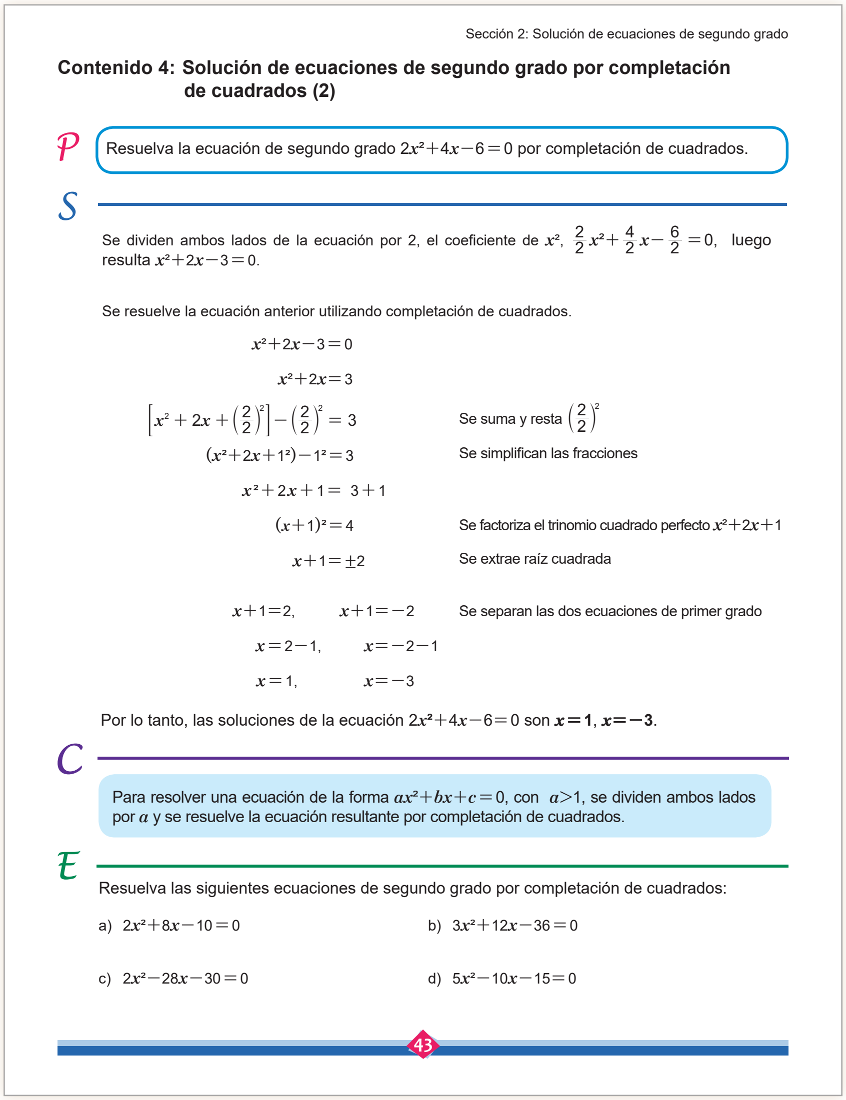
En la clase anterior se resolvieron ecuaciones de la forma $x^2+bx+c=0$ por completación de cuadrados. Ahora se utiliza la completación de cuadrados para resolver ecuaciones de la forma $ax^2+bx+c=0$.

Puntos esenciales:

Destacar que al dividir la ecuación $ax^2+bx+c=0$ por el coeficiente a se obtiene una ecuación reducida de la misma.

Recordar los pasos que se siguen para resolver ecuaciones de la forma $x^2+bx+c=0$ utilizando completación de cuadrados.

Resolver ecuaciones de la forma $ax^2+bx+c=0$ utilizando completación de cuadrados.



Contenido 4: Solución de ecuaciones de segundo grado por completación de cuadrados (2)

P Resuelva la ecuación de segundo grado $2x^2+4x-6=0$ por completación de cuadrados.

S

Se dividen ambos lados de la ecuación por 2, el coeficiente de x^2, $\frac{2}{2}x^2+\frac{4}{2}x-\frac{6}{2}=0$, luego resulta $x^2+2x-3=0$.

Se resuelve la ecuación anterior utilizando completación de cuadrados.

$x^2+2x-3=0$

$x^2+2x=3$

$\left[x^2+2x+\left(\frac{2}{2}\right)^2\right]-\left(\frac{2}{2}\right)^2=3$ Se suma y resta $\left(\frac{2}{2}\right)^2$

$(x^2+2x+1^2)-1^2=3$ Se simplifican las fracciones

$x^2+2x+1=3+1$

$(x+1)^2=4$ Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto x^2+2x+1

$x+1=\pm 2$ Se extrae raíz cuadrada

$x+1=2,\quad x+1=-2$ Se separan las dos ecuaciones de primer grado

$x=2-1,\quad x=-2-1$

$x=1,\quad x=-3$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $2x^2+4x-6=0$ son $\mathbf{x=1}$, $\mathbf{x=-3}$.

C

Para resolver una ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$, con $a>1$, se dividen ambos lados por a y se resuelve la ecuación resultante por completación de cuadrados.

E

Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado por completación de cuadrados:

a) $2x^2+8x-10=0$

b) $3x^2+12x-36=0$

c) $2x^2-28x-30=0$

d) $5x^2-10x-15=0$

C4: Solución de ecuaciones de segundo grado por completación de cuadrados (2)

Ⓟ Resuelva la ecuación $2x^2+4x-6=0$

Ⓢ

$$2x^2+4x-6=0$$
$$x^2+2x=3$$
$$\left[x^2+2x+\left(\frac{2}{2}\right)^2\right]-\left(\frac{2}{2}\right)^2=3$$
$$(x^2+2x+1^2)-1^2=3$$
$$x^2+2x+1=3+1$$
$$(x+1)^2=4$$
$$x+1=\pm 2$$
$$x+1=2,\qquad x+1=-2$$
$$x=2-1,\qquad x=-2-1$$
$$x=1,\qquad x=-3$$

Las soluciones de $2x^2+4x-6=0$ son $x=1,\ x=-3$.

Ⓒ Para resolver la ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$ con $a>1$

1. Se dividen ambos lados por a
2. Se resuelve la ecuación resultante utilizando completación de cuadrados.

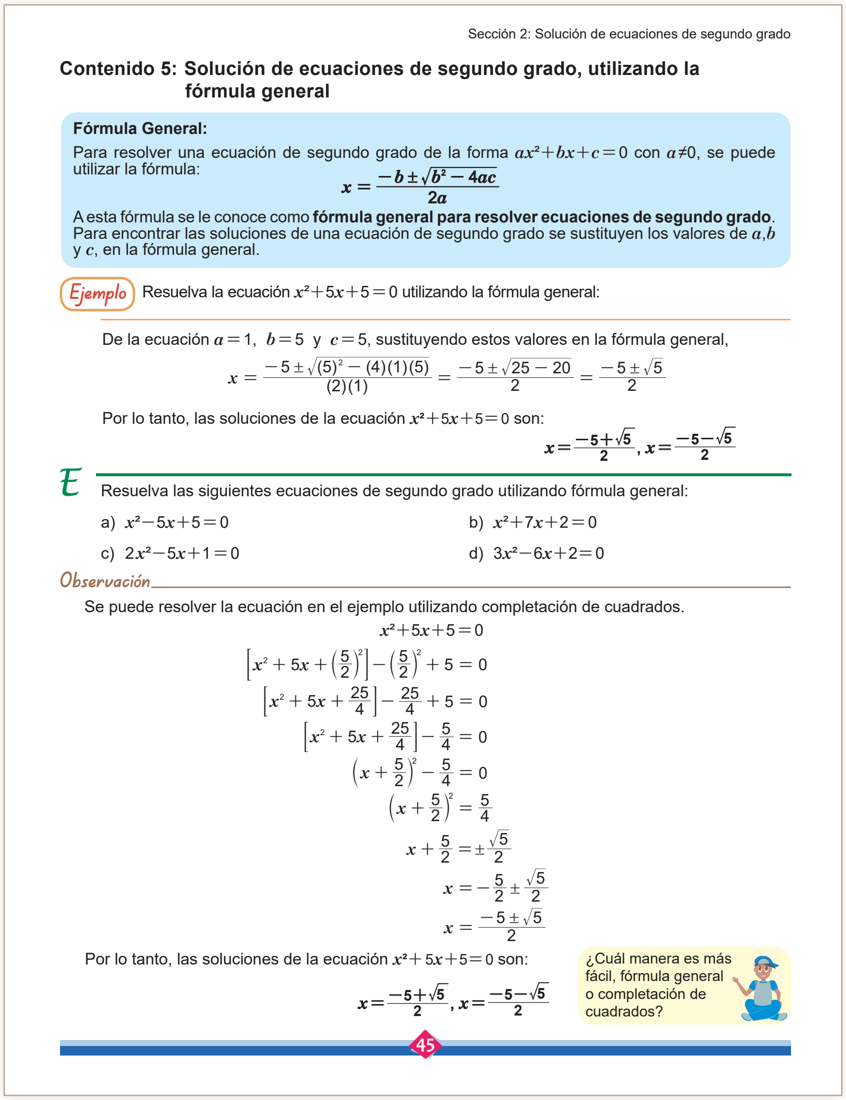
Ⓔ a) $2x^2+8x-10=0$

$$x^2+4x=5$$
$$\left[x^2+4x+\left(\frac{4}{2}\right)^2\right]-\left(\frac{4}{2}\right)^2=5$$
$$(x^2+4x+2^2)-2^2=5$$
$$x^2+4x+4-4=5$$
$$x^2+4x+4=5+4$$
$$(x+2)^2=9$$
$$x+2=\pm 3$$
$$x+2=3\qquad x+2=-3$$
$$x=1\qquad x=-5$$

b) $3x^2+12x-36=0$

$$x^2+4x=12$$
$$\left[x^2+4x+\left(\frac{4}{2}\right)^2\right]-\left(\frac{4}{2}\right)^2=12$$
$$(x^2+4x+2^2)-2^2=12$$
$$x^2+4x+4-4=12$$
$$(x+2)^2=16$$
$$x+2=\pm 4$$
$$x+2=4\qquad x+2=-4$$
$$x=2\qquad x=-6$$

Contenido 5 Solución de ecuaciones de segundo grado, utilizando la fórmula general



Contenido 5: Solución de ecuaciones de segundo grado, utilizando la fórmula general

Fórmula General:

Para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c=0$ con $a\neq0$, se puede utilizar la fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

A esta fórmula se le conoce como **fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado**. Para encontrar las soluciones de una ecuación de segundo grado se sustituyen los valores de a,b y c, en la fórmula general.

Ejemplo Resuelva la ecuación $x^2+5x+5=0$ utilizando la fórmula general:

De la ecuación $a=1$, $b=5$ y $c=5$, sustituyendo estos valores en la fórmula general,

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{(5)^2-(4)(1)(5)}}{(2)(1)}=\frac{-5\pm\sqrt{25-20}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $x^2+5x+5=0$ son:

$$x=\frac{-5+\sqrt{5}}{2},\ x=\frac{-5-\sqrt{5}}{2}$$

E Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando fórmula general:

a) $x^2-5x+5=0$ b) $x^2+7x+2=0$

c) $2x^2-5x+1=0$ d) $3x^2-6x+2=0$

Observación

Se puede resolver la ecuación en el ejemplo utilizando completación de cuadrados.

$$x^2+5x+5=0$$
$$\left[x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]-\left(\frac{5}{2}\right)^2+5=0$$
$$\left[x^2+5x+\frac{25}{4}\right]-\frac{25}{4}+5=0$$
$$\left[x^2+5x+\frac{25}{4}\right]-\frac{5}{4}=0$$
$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{5}{4}=0$$
$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$
$$x+\frac{5}{2}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$
$$x=-\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$
$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $x^2+5x+5=0$ son:

$$x=\frac{-5+\sqrt{5}}{2},\ x=\frac{-5-\sqrt{5}}{2}$$

¿Cuál manera es más fácil, fórmula general o completación de cuadrados?

Aprendizajes esperados

Resuelve ecuaciones de segundo grado utilizando la fórmula general.

Secuencia:

Anteriormente se resolvieron ecuaciones de la forma $ax^2+bx+c=0$ por completación de cuadrados. Ahora se resuelven este tipo de ecuaciones por fórmula general.

Puntos esenciales:

Recordar cómo se resuelven ecuaciones de la forma $ax^2+bx+c=0$ utilizando completación de cuadrados.

Mostrar la fórmula general

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

para resolver ecuaciones de este tipo.

Destacar que la fórmula general expresa las soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ en función de sus coeficientes.

Resaltar que no importa el método que se utilice para resolver este tipo de ecuaciones las soluciones son las mismas.

Resolver ecuaciones de la forma $ax^2+bx+c=0$ utilizando la fórmula general.

C5: Solución de ecuaciones de segundo grado, utilizando la fórmula general

Si $ax^2+bx+c=0$, con $a\neq0$:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ej Resuelva utilizando la fórmula general.

$x^2+5x+5=0$

Sustituir $a=1,\ b=5$ y $c=5$ en la fórmula general.

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{(5)^2-(4)(1)(5)}}{(2)(1)}$$
$$=\frac{-5\pm\sqrt{25-20}}{2}$$
$$=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$$

Las soluciones son $x=\frac{-5+\sqrt{5}}{2}$ y $x=\frac{-5-\sqrt{5}}{2}$

E Resuelva utilizando fórmula general

a) $x^2-5x+5=0$ $a=1,\ b=-5$ y $c=5$

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-(4)(1)(5)}}{2(1)}$$
$$=\frac{5\pm\sqrt{25-20}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}\qquad x=\frac{5+\sqrt{5}}{2},\ x=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

b) $x^2+7x+2=0$ $a=1,\ b=7$ y $c=2$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{(7)^2-(4)(1)(2)}}{(2)(1)}$$
$$=\frac{-7\pm\sqrt{49-8}}{2}$$
$$=\frac{-7\pm\sqrt{41}}{2}\qquad x=\frac{-7+\sqrt{41}}{2},\ x=\frac{-7-\sqrt{41}}{2}$$

c) $2x^2-5x+1=0$ $a=2,\ b=-5$ y $c=1$

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-(4)(2)(1)}}{2(2)}$$
$$=\frac{5\pm\sqrt{25-8}}{4}$$
$$=\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}\qquad x=\frac{5+\sqrt{17}}{4},\ x=\frac{5-\sqrt{17}}{4}$$

Contenido 6 Solución de ecuaciones de segundo grado por factorización (1)

Aprendizajes esperados

Resuelve ecuaciones de segundo grado por factorización.

Secuencia:

En la clase anterior se resolvieron ecuaciones de la forma $ax^2+bx+c=0$ utilizando la fórmula general. Ahora se resuelven ecuaciones de la forma $(x+a)(x+b)=0$ y $x^2+(a+b)x+ab=0$ por factorización.

Puntos esenciales:

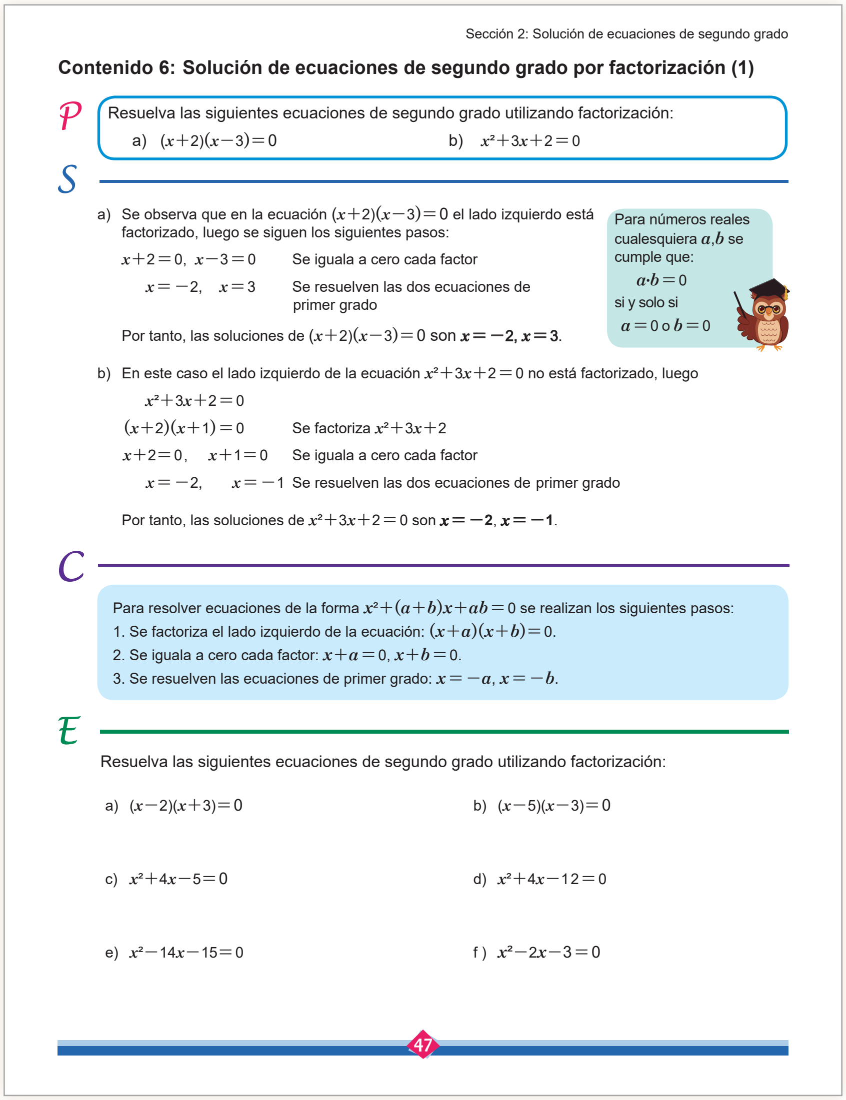
Recordar que

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b).$$

Destacar que un producto es cero si al menos uno de sus factores es cero.

Resaltar la importancia que tiene esta propiedad al resolver ecuaciones de la forma $x^2+bx+c=0$ una vez factorizado el polinomio x^2+bx+c.

Resolver ecuaciones de la forma $x^2+bx+c=0$ por factorización.



Sección 2: Solución de ecuaciones de segundo grado

Contenido 6: Solución de ecuaciones de segundo grado por factorización (1)

P

Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando factorización:

a) $(x+2)(x-3)=0$ b) $x^2+3x+2=0$

S

a) Se observa que en la ecuación $(x+2)(x-3)=0$ el lado izquierdo está factorizado, luego se siguen los siguientes pasos:

$x+2=0,\ x-3=0$ Se iguala a cero cada factor

$x=-2,\ x=3$ Se resuelven las dos ecuaciones de primer grado

Por tanto, las soluciones de $(x+2)(x-3)=0$ son $\mathbf{x=-2,\ x=3}$.

Para números reales cualesquiera a,b se cumple que:
$a{\cdot}b=0$
si y solo si
$a=0$ o $b=0$

b) En este caso el lado izquierdo de la ecuación $x^2+3x+2=0$ no está factorizado, luego

$x^2+3x+2=0$

$(x+2)(x+1)=0$ Se factoriza x^2+3x+2

$x+2=0,\ x+1=0$ Se iguala a cero cada factor

$x=-2,\ x=-1$ Se resuelven las dos ecuaciones de primer grado

Por tanto, las soluciones de $x^2+3x+2=0$ son $\mathbf{x=-2,\ x=-1}$.

C

Para resolver ecuaciones de la forma $x^2+(a+b)x+ab=0$ se realizan los siguientes pasos:
1. Se factoriza el lado izquierdo de la ecuación: $(x+a)(x+b)=0$.
2. Se iguala a cero cada factor: $x+a=0,\ x+b=0$.
3. Se resuelven las ecuaciones de primer grado: $x=-a,\ x=-b$.

E

Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando factorización:

a) $(x-2)(x+3)=0$ b) $(x-5)(x-3)=0$

c) $x^2+4x-5=0$ d) $x^2+4x-12=0$

e) $x^2-14x-15=0$ f) $x^2-2x-3=0$

47

C6: Solución de ecuaciones de segundo grado por factorización (1)

Ⓟ Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando factorización:

Ⓢ a) $(x+2)(x-3)=0$

$x+2=0\ ,\ x-3=0$

$x=-2,\ x=3$

Las soluciones son $x=-2,\ x=3$

b) $x^2+3x+2=0$

$(x+2)(x+1)=0$

$x+2=0\ ,\ x+1=0$

$x=-2,\ x=-1$

Las soluciones son $x=-2,\ x=-1$

Ⓒ Si $x^2+(a+b)x+ab=0$, se tiene:

1. $(x+a)(x+b)=0$
2. $x+a=0,\ x+b=0$
3. $x=-a,\ x=-b$

Ⓔ Resuelva por factorización

a) $(x-2)(x+3)=0$

$x-2=0,\ x+3=0$

$x=2,\ x=-3$

b) $(x-5)(x-3)=0$

$x-5=0,\ x-3=0$

$x=5,\ x=3$

c) $x^2+4x-5=0$

$(x+5)(x-1)=0$

$x+5=0\ ,\ x-1=0$

$x=-5,\ x=1$

d) $x^2+4x-12=0$

$(x+6)(x-2)=0$

$x+6=0\ ,\ x-2=0$

$x=-6,\ x=2$

e) $x^2-14x-15=0$

$(x-15)(x+1)=0$

$x-15=0\ ,\ x+1=0$

$x=15,\ x=-1$

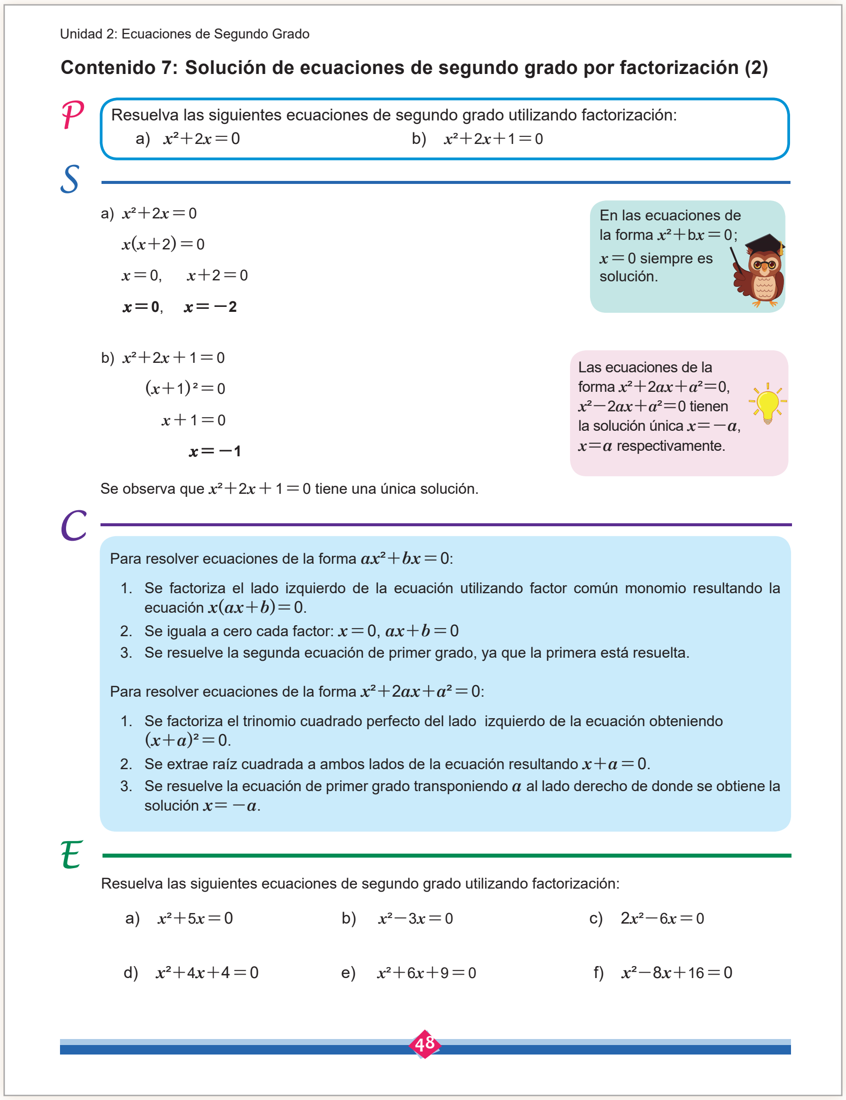
f) $x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$x-3=0,\ x+1=0$

$x=3,\ x=-1$

Contenido 7 Solución de ecuaciones de segundo grado por factorización (2)



Unidad 2: Ecuaciones de Segundo Grado

Contenido 7: Solución de ecuaciones de segundo grado por factorización (2)

P

Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando factorización:

a) $x^2+2x=0$ b) $x^2+2x+1=0$

S

a) $x^2+2x=0$

$x(x+2)=0$

$x=0,\quad x+2=0$

$\mathbf{x=0,\quad x=-2}$

En las ecuaciones de la forma $x^2+bx=0$; $x=0$ siempre es solución.

b) $x^2+2x+1=0$

$(x+1)^2=0$

$x+1=0$

$\mathbf{x=-1}$

Las ecuaciones de la forma $x^2+2ax+a^2=0$, $x^2-2ax+a^2=0$ tienen la solución única $x=-a$, $x=a$ respectivamente.

Se observa que $x^2+2x+1=0$ tiene una única solución.

C

Para resolver ecuaciones de la forma $ax^2+bx=0$:

1. Se factoriza el lado izquierdo de la ecuación utilizando factor común monomio resultando la ecuación $x(ax+b)=0$.
2. Se iguala a cero cada factor: $x=0$, $ax+b=0$
3. Se resuelve la segunda ecuación de primer grado, ya que la primera está resuelta.

Para resolver ecuaciones de la forma $x^2+2ax+a^2=0$:

1. Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto del lado izquierdo de la ecuación obteniendo $(x+a)^2=0$.
2. Se extrae raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación resultando $x+a=0$.
3. Se resuelve la ecuación de primer grado transponiendo a al lado derecho de donde se obtiene la solución $x=-a$.

E

Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando factorización:

a) $x^2+5x=0$ b) $x^2-3x=0$ c) $2x^2-6x=0$

d) $x^2+4x+4=0$ e) $x^2+6x+9=0$ f) $x^2-8x+16=0$

48

Aprendizajes esperados

Resuelve ecuaciones de segundo grado por factorización.

Secuencia:

Anteriormente se resolvieron ecuaciones de la forma $(x+a)(x+b)=0$ y $x^2+(a+b)x+ab=0$ por factorización. Ahora se utiliza la factorización para resolver ecuaciones de la forma $x^2+bx=0$ y $x^2+2ax+a^2=0$.

Puntos esenciales:

Recordar cómo se extrae factor común y cómo se factoriza un trinomio cuadrado perfecto.

Destacar que:

- ✓ Las ecuaciones de la forma $x^2+bx=0$ siempre admiten como solución a $x=0$.
- ✓ Las ecuaciones de la forma $x^2+2ax+a^2=0$ tienen solución única $x=-a$, dado que $x^2+2ax+a^2$ es un trinomio cuadrado perfecto.

Resolver ecuaciones de la forma $x^2+bx=0$ y $x^2+2ax+a^2=0$ por factorización.

C7: Solución de ecuaciones de segundo grado por factorización (2)

Ⓟ Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando factorización:

Ⓢ a) $x^2+2x=0$

$x(x+2)=0$

$x=0,\ x+2=0$

$x=0,\qquad x=-2$

b) $x^2+2x+1=0$

$(x+1)^2=0$

$x+1=0$

$x=-1$

Ⓒ Para resolver ecuaciones de la forma $ax^2+bx=0$

1. Factorizar: $x(ax+b)=0$
2. Igualar a cero: $x=0, ax+b=0$
3. Resolver la ecuación de primer grado.

Para resolver ecuaciones de la forma $x^2+2ax+a^2$

1. Factorizar: $(x+a)^2=0$
2. Extraer raíz cuadrada: $x+a=0$
3. Resolver la ecuación de primer grado: $x=-a$

Ⓔ a) $x^2+5x=0$

$x(x+5)=0$

$x=0,\qquad x+5=0$

$x=0,\qquad x=-5$

b) $x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$

$x=0,\qquad x-3=0$

$x=0,\qquad x=3$

c) $2x^2-6x=0$

$2x(x-3)=0$

$2x=0,\qquad x-3=0$

$x=0,\qquad x=3$

d) $x^2+4x+4=0$

$(x+2)^2=0$

$x+2=0$

$x=-2$

e) $x^2+6x+9=0$

$(x+3)^2=0$

$x+3=0$

$x=-3$

f) $x^2-8x+16=0$

$(x-4)^2=0$

$x-4=0$

$x=4$

Contenido 1 Naturaleza de las soluciones de una ecuación de segundo grado

Aprendizajes esperados

Determina la naturaleza de las soluciones de una ecuación de segundo grado a partir del valor del discriminante.

Secuencia:

Hasta este momento se han resuelto ecuaciones de segundo grado por completación de cuadrados, por fórmula general y por factorización. Ahora se estudia la naturaleza de las soluciones de una ecuación de este tipo.

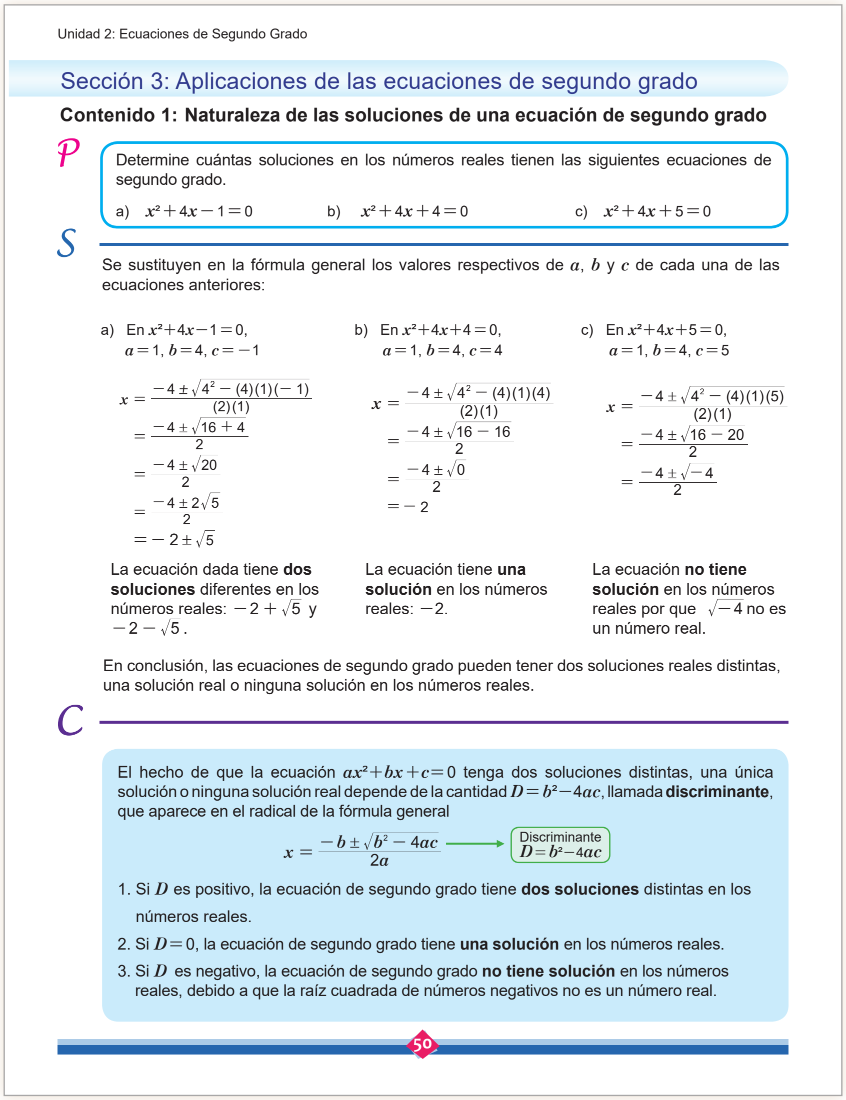
Puntos esenciales:

Recordar cómo se resuelve una ecuación de segundo grado utilizando la fórmula general.

Destacar que una ecuación de segundo grado admite a lo sumo dos soluciones distintas.

Indicar que al manipular la fórmula general a la cantidad subradical $D = b^2 - 4ac$ se le llama discriminante y en función de este indicador se determina la naturaleza de las soluciones de la ecuación de segundo grado:

- ✓ $D > 0$, dos soluciones reales distintas
- ✓ $D = 0$, una única solución real.
- ✓ $D < 0$, ninguna solución real



Unidad 2: Ecuaciones de Segundo Grado

Sección 3: Aplicaciones de las ecuaciones de segundo grado

Contenido 1: Naturaleza de las soluciones de una ecuación de segundo grado

P

Determine cuántas soluciones en los números reales tienen las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 + 4x - 1 = 0$ b) $x^2 + 4x + 4 = 0$ c) $x^2 + 4x + 5 = 0$

S

Se sustituyen en la fórmula general los valores respectivos de a, b y c de cada una de las ecuaciones anteriores:

a) En $x^2+4x-1=0$, $a=1$, $b=4$, $c=-1$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2-(4)(1)(-1)}}{(2)(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$$

La ecuación dada tiene **dos soluciones** diferentes en los números reales: $-2+\sqrt{5}$ y $-2-\sqrt{5}$.

b) En $x^2+4x+4=0$, $a=1$, $b=4$, $c=4$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2-(4)(1)(4)}}{(2)(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2} = -2$$

La ecuación tiene **una solución** en los números reales: -2.

c) En $x^2+4x+5=0$, $a=1$, $b=4$, $c=5$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2-(4)(1)(5)}}{(2)(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

La ecuación **no tiene solución** en los números reales por que $\sqrt{-4}$ no es un número real.

En conclusión, las ecuaciones de segundo grado pueden tener dos soluciones reales distintas, una solución real o ninguna solución en los números reales.

C

El hecho de que la ecuación $ax^2+bx+c=0$ tenga dos soluciones distintas, una única solución o ninguna solución real depende de la cantidad $D=b^2-4ac$, llamada **discriminante**, que aparece en el radical de la fórmula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Discriminante}\\ D=b^2-4ac\end{array}}$$

1. Si D es positivo, la ecuación de segundo grado tiene **dos soluciones** distintas en los números reales.
2. Si $D=0$, la ecuación de segundo grado tiene **una solución** en los números reales.
3. Si D es negativo, la ecuación de segundo grado **no tiene solución** en los números reales, debido a que la raíz cuadrada de números negativos no es un número real.

50

S3: Aplicaciones de las ecuaciones de segundo grado
C1: Naturaleza de las soluciones de una ecuación de segundo grado.

(P) Determine cuántas soluciones en los números reales tienen las siguientes ecuaciones de segundo grado.

(S) a) $x^2 + 4x - 1 = 0$

$a = 1,\quad b = 4,\quad c = -1$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$$

Tiene dos soluciones

b) $x^2 + 4x + 4 = 0$

$a = 1,\quad b = 4,\quad c = 4$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2} = -2$$

Tiene una solución

c) $x^2 + 4x + 5 = 0 \qquad a = 1,\ b = 4,\ c = 5$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

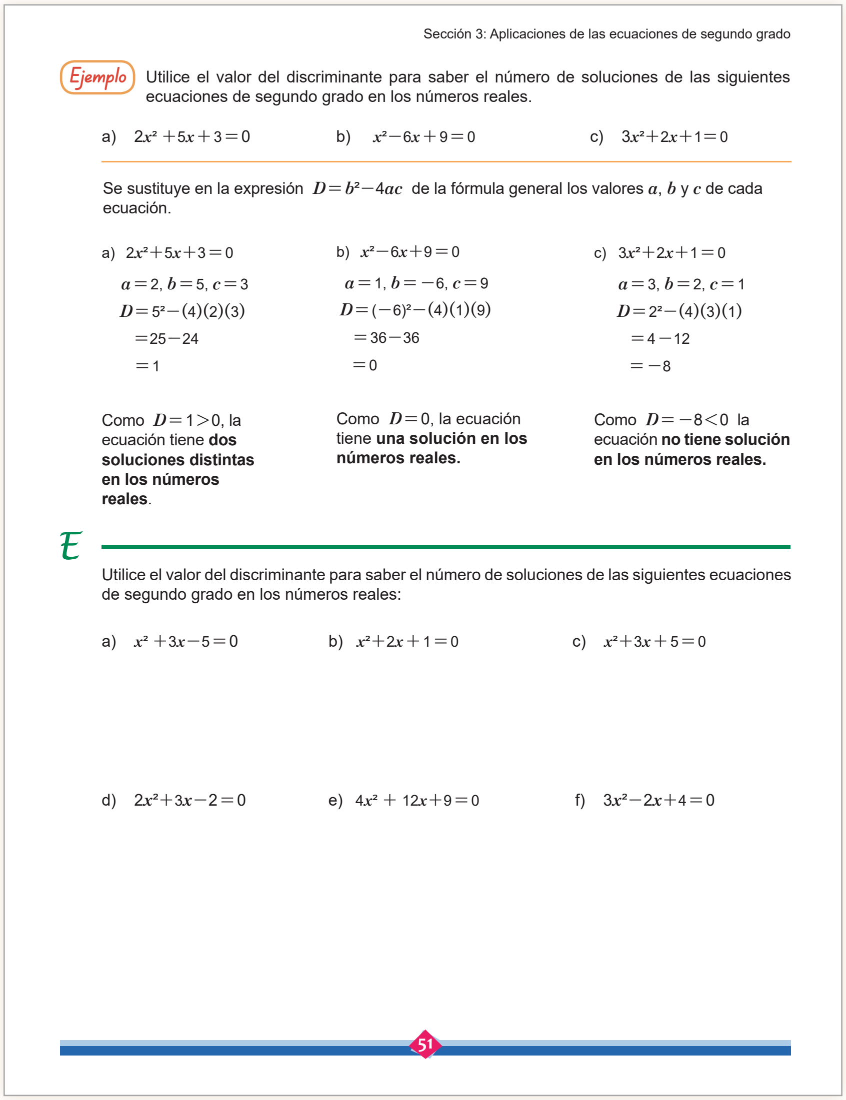
No tiene solución en los números reales

(C)

$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow$ Discriminante $D = b^2 - 4ac$

1. $D > 0$, tiene dos soluciones en los números reales
2. $D = 0$, tiene una solución en los números reales
3. $D < 0$, no tiene solución en los números reales

Contenido 1 Naturaleza de las soluciones de una ecuación de segundo grado



Sección 3: Aplicaciones de las ecuaciones de segundo grado

Ejemplo Utilice el valor del discriminante para saber el número de soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo grado en los números reales.

a) $2x^2+5x+3=0$ b) $x^2-6x+9=0$ c) $3x^2+2x+1=0$

Se sustituye en la expresión $D=b^2-4ac$ de la fórmula general los valores a, b y c de cada ecuación.

a) $2x^2+5x+3=0$

$a=2$, $b=5$, $c=3$

$D=5^2-(4)(2)(3)$

$=25-24$

$=1$

Como $D=1>0$, la ecuación tiene **dos soluciones distintas en los números reales**.

b) $x^2-6x+9=0$

$a=1$, $b=-6$, $c=9$

$D=(-6)^2-(4)(1)(9)$

$=36-36$

$=0$

Como $D=0$, la ecuación tiene **una solución en los números reales.**

c) $3x^2+2x+1=0$

$a=3$, $b=2$, $c=1$

$D=2^2-(4)(3)(1)$

$=4-12$

$=-8$

Como $D=-8<0$ la ecuación **no tiene solución en los números reales.**

E

Utilice el valor del discriminante para saber el número de soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo grado en los números reales:

a) $x^2+3x-5=0$ b) $x^2+2x+1=0$ c) $x^2+3x+5=0$

d) $2x^2+3x-2=0$ e) $4x^2+12x+9=0$ f) $3x^2-2x+4=0$

51

Aprendizajes esperados

Determina la naturaleza de las soluciones de una ecuación de segundo grado a partir del valor del discriminante.

Secuencia:

Hasta este momento se han resuelto ecuaciones de segundo grado por completación de cuadrados, por fórmula general y por factorización. Ahora se estudia la naturaleza de las soluciones de una ecuación de este tipo.

Puntos esenciales:

Recordar cómo se resuelve una ecuación de segundo grado utilizando la fórmula general.

Destacar que una ecuación de segundo grado admite a lo sumo dos soluciones distintas.

Indicar que al manipular la fórmula general, a la cantidad subradical $D=b^2-4ac$ se le llama discriminante y en función de este indicador se determina la naturaleza de las soluciones de la ecuación de segundo grado:

- ✓ $D>0$, dos soluciones reales distintas.
- ✓ $D=0$, una única solución real.
- ✓ $D<0$, ninguna solución real.

Ej Determine el número de soluciones de las ecuaciones utilizando el discriminante.

a) $2x^2+5x+3=0$

$a=2, b=5, c=3$

$D=(5)^2-(4)(2)(3)$

$=25-24=1$

Como $D>0$,
tiene dos soluciones.

b) $x^2-6x+9=0$

$a=1, b=-6, c=9$

$D=(-6)^2-(4)(1)(9)$

$=36-36=0$

Como $D=0$,
tiene una solución.

c) $3x^2+2x+1=0$

$a=3,\quad b=2,\quad c=1$

$D=(2)^2-(4)(3)(1)$

$=4-12$

$=-8$

Como $D<0$, no tiene solución en los números reales.

E a) $x^2+3x-5=0$

$a=1,\quad b=3,\quad c=-5$

$D=(3)^2-4(1)(-5)$

$=9+20$

$=29$

Como $D>0$,
tiene dos soluciones.

b) $x^2+2x+1=0$

$a=1,\quad b=2,\quad c=1$

$D=(2)^2-4(1)(1)$

$=4-4=0$

Como $D=0$,
tiene una solución.

Contenido 2 Construcción de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2+bx+c=0$, a partir de sus soluciones

Aprendizajes esperados

Determina la ecuación de segundo grado a partir de sus soluciones.

Secuencia:

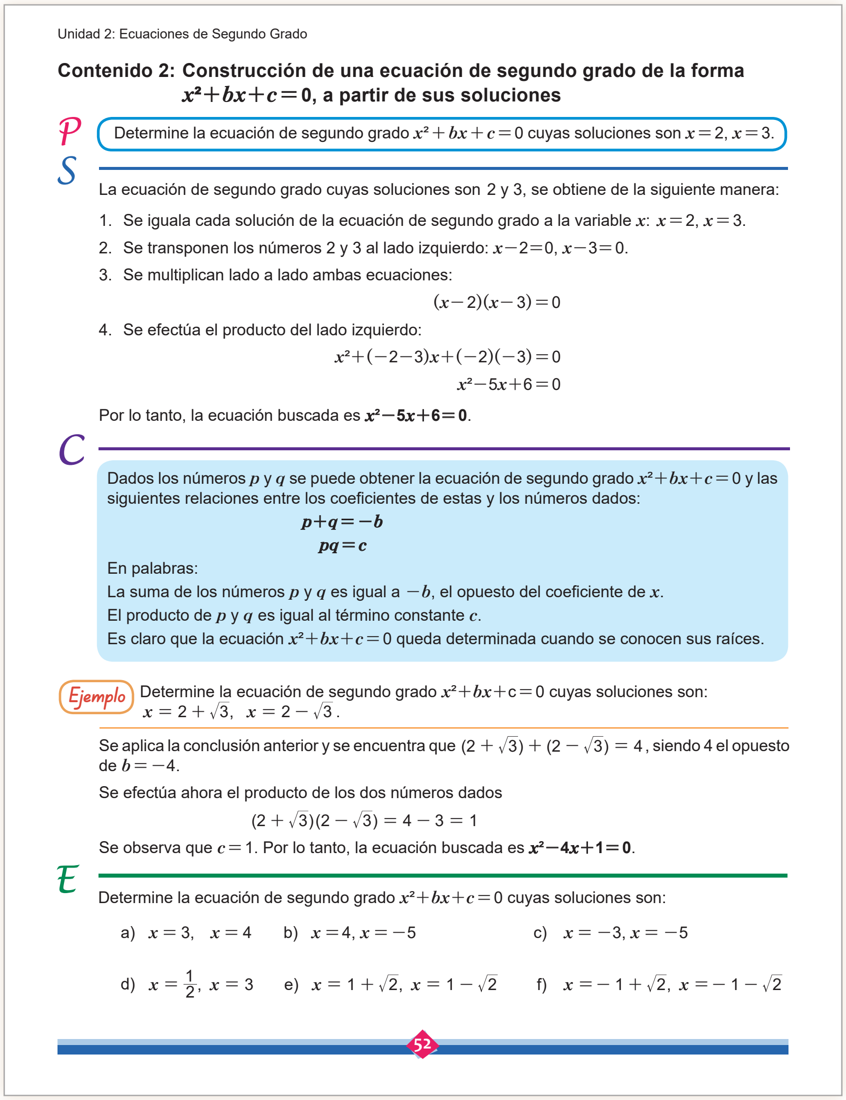
En la clase anterior se estudió la naturaleza de las soluciones de una ecuación de segundo grado. Ahora se determina una ecuación de segundo grado a partir de sus soluciones.

Puntos esenciales:

Explicar cada uno de los pasos que se siguen para determinar una ecuación de segundo grado a partir de sus soluciones.

Resaltar que las soluciones p y q y los coeficientes de una ecuación de la forma $x^2+bx+c=0$ guardan las siguientes relaciones:

$$p+q=-b$$
$$pq=c.$$



Unidad 2: Ecuaciones de Segundo Grado

Contenido 2: Construcción de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2+bx+c=0$, a partir de sus soluciones

P Determine la ecuación de segundo grado $x^2+bx+c=0$ cuyas soluciones son $x=2$, $x=3$.

S La ecuación de segundo grado cuyas soluciones son 2 y 3, se obtiene de la siguiente manera:

1. Se iguala cada solución de la ecuación de segundo grado a la variable x: $x=2$, $x=3$.
2. Se transponen los números 2 y 3 al lado izquierdo: $x-2=0$, $x-3=0$.
3. Se multiplican lado a lado ambas ecuaciones:
$$(x-2)(x-3)=0$$
4. Se efectúa el producto del lado izquierdo:
$$x^2+(-2-3)x+(-2)(-3)=0$$
$$x^2-5x+6=0$$

Por lo tanto, la ecuación buscada es $\mathbf{x^2-5x+6=0}$.

C Dados los números p y q se puede obtener la ecuación de segundo grado $x^2+bx+c=0$ y las siguientes relaciones entre los coeficientes de estas y los números dados:

$$\mathbf{p+q=-b}$$
$$\mathbf{pq=c}$$

En palabras:
La suma de los números p y q es igual a $-b$, el opuesto del coeficiente de x.
El producto de p y q es igual al término constante c.
Es claro que la ecuación $x^2+bx+c=0$ queda determinada cuando se conocen sus raíces.

Ejemplo Determine la ecuación de segundo grado $x^2+bx+c=0$ cuyas soluciones son: $x=2+\sqrt{3}$, $x=2-\sqrt{3}$.

Se aplica la conclusión anterior y se encuentra que $(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$, siendo 4 el opuesto de $b=-4$.
Se efectúa ahora el producto de los dos números dados
$$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$$
Se observa que $c=1$. Por lo tanto, la ecuación buscada es $\mathbf{x^2-4x+1=0}$.

E Determine la ecuación de segundo grado $x^2+bx+c=0$ cuyas soluciones son:

a) $x=3$, $x=4$ b) $x=4$, $x=-5$ c) $x=-3$, $x=-5$

d) $x=\frac{1}{2}$, $x=3$ e) $x=1+\sqrt{2}$, $x=1-\sqrt{2}$ f) $x=-1+\sqrt{2}$, $x=-1-\sqrt{2}$

52

C2: Construcción de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2+bx+c=0$, a partir de sus soluciones

(P) Determine la ecuación de segundo grado $x^2+bx+c=0$ cuyas soluciones son $x=2$, $x=3$.

(S) $x=2,3$ y $a=1$
-Igualar cada solución a la variable x: $x=2, x=3$
-Se transpone 2 y 3
$$x-2=0, \quad x-3=0$$
-Se multiplica ambas ecuaciones
$$(x-2)(x-3)=0$$
-Se efectúa el producto
$$x^2+(-2-3)x+(-2)(-3)=0$$
$$x^2-5x+6=0$$
La ecuación buscada es: $x^2-5x+6=0$

(C) Dadas las soluciones p y q de la ecuación $x^2+bx+c=0$ esta se obtiene haciendo:
1. $p+q=-b$, el opuesto del coeficiente de x
2. $pq=c$, el término constante.

(Ej) Determine la ecuación de segundo grado $x^2+bx+c=0$ cuyas soluciones son: $x=2+\sqrt{3}$, $x=2-\sqrt{3}$
Suma $(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4 \rightarrow \quad -b=4,\ b=-4$
Producto $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1 \rightarrow c=1$
La ecuación es $x^2-4x+1=0$

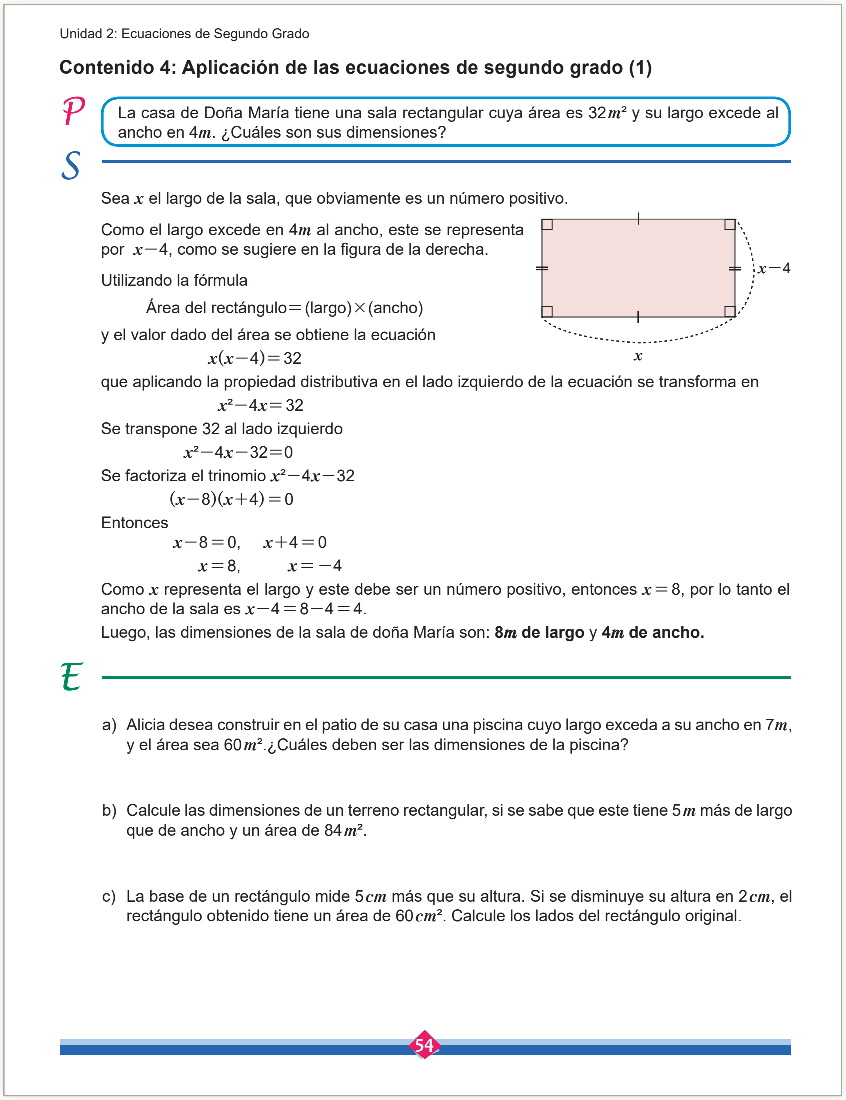
(E) Determine la ecuación de segundo grado $x^2+bx+c=0$ cuyas soluciones son:

a) $x=3,\ 4$
Suma $3+4=7 \ \rightarrow -b=7, b=-7$ La ecuación es
Producto $(3)(4)=12 \rightarrow c=12$ $x^2-7x+12=0$

b) $x=4,-5$
Suma $4+(-5)=-1 \rightarrow -b=-1, b=1$ La ecuación es
Producto $(4)(-5)=-20 \rightarrow \ c=-20$ $x^2+x-20=0$

d) $x=\frac{1}{2},\ 3$
Suma $\frac{1}{2}+3=\frac{1+6}{2}=\frac{7}{2} \rightarrow -b=\frac{7}{2}, b=-\frac{7}{2}$ La ecuación es
Producto $\left(\frac{1}{2}\right)(3)=\frac{3}{2} \ \rightarrow \ c=\frac{3}{2}$ $x^2-\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}=0$

Contenido 4 Aplicación de las ecuaciones de segundo grado (1)



Unidad 2: Ecuaciones de Segundo Grado

Contenido 4: Aplicación de las ecuaciones de segundo grado (1)

P La casa de Doña María tiene una sala rectangular cuya área es $32m^2$ y su largo excede al ancho en $4m$. ¿Cuáles son sus dimensiones?

S

Sea x el largo de la sala, que obviamente es un número positivo.

Como el largo excede en $4m$ al ancho, este se representa por $x-4$, como se sugiere en la figura de la derecha.

Utilizando la fórmula

Área del rectángulo = (largo) × (ancho)

y el valor dado del área se obtiene la ecuación

$$x(x-4)=32$$

que aplicando la propiedad distributiva en el lado izquierdo de la ecuación se transforma en

$$x^2-4x=32$$

Se transpone 32 al lado izquierdo

$$x^2-4x-32=0$$

Se factoriza el trinomio $x^2-4x-32$

$$(x-8)(x+4)=0$$

Entonces

$$x-8=0, \quad x+4=0$$

$$x=8, \quad x=-4$$

Como x representa el largo y este debe ser un número positivo, entonces $x=8$, por lo tanto el ancho de la sala es $x-4=8-4=4$.

Luego, las dimensiones de la sala de doña María son: **$8m$ de largo** y **$4m$ de ancho.**

E

a) Alicia desea construir en el patio de su casa una piscina cuyo largo exceda a su ancho en $7m$, y el área sea $60m^2$.¿Cuáles deben ser las dimensiones de la piscina?

b) Calcule las dimensiones de un terreno rectangular, si se sabe que este tiene $5m$ más de largo que de ancho y un área de $84m^2$.

c) La base de un rectángulo mide $5cm$ más que su altura. Si se disminuye su altura en $2cm$, el rectángulo obtenido tiene un área de $60cm^2$. Calcule los lados del rectángulo original.

54

Aprendizajes esperados

Resuelve situaciones aplicando ecuaciones de segundo grado.

Secuencia:

En la clase anterior se establecieron las relaciones que guardan las soluciones y los coeficientes de una ecuación de segundo grado. Ahora se presentan algunas aplicaciones.

Puntos esenciales:

Comprender la situación planteada.

Declarar la variable que se manipula.

Traducir del lenguaje común al algebraico la información proporcionada en la situación.

Construir un gráfico para tal situación.

Recordar cómo se calcula el área de un rectángulo.

Plantear la ecuación de segundo grado que representa tal situación.

Resolver dicha ecuación.

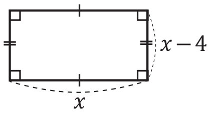
Contextualizar las posibles soluciones a dicha situación.

C4: Aplicaciones de las ecuaciones de segundo grado (1)

(P) El largo de la sala de la casa de María excede a su ancho en $4\ m$. Si el área de la sala es de $32m^2$, ¿Cuáles son sus dimensiones?

(S) largo: x

ancho: $x-4$



Área= base×altura=(largo)×(ancho)

$$x(x-4)=32$$

$$x^2-4x=32$$

$$x^2-4x-32=0$$

Resolviendo la ecuación

$$x^2-4x-32=0$$

$$(x-8)(x+4)=0$$

$$x-8=0 \quad , \quad x+4=0$$

$$x=8 \quad , \quad x=-4$$

Largo: $x=8\ (m)$ por que $x>0$

Ancho: $x-4=8-4=4\ (m)$

(E) a) Alicia construirá una piscina cuyo largo excede a su ancho en $7m$. Si el área de la piscina es de $60m^2$, ¿cuáles son las dimensiones?

x es el largo, $x>0$,

$x-7$ es el ancho

Área=(largo)×(ancho)

$$x(x-7)=60$$

$$x^2-7x=60$$

$$x^2-7x-60=0$$

$$(x-12)(x+5)=0$$

$$x-12=0 \quad , \quad x+5=0$$

$$x=12 \quad , \quad x=-5$$

Largo: $x=12\ (m)$ por que $x>0$

Ancho: $x-7=12-7=5\ (m)$

Contenido 5 Aplicación de las ecuaciones de segundo grado (2)

Aprendizajes esperados

Resuelve situaciones aplicando ecuaciones de segundo grado.

Secuencia:

Siguiendo con el estudio de las aplicaciones de las ecuaciones de segundo grado, aquí se muestra otra aplicación.

Puntos esenciales:

Comprender cada situación.

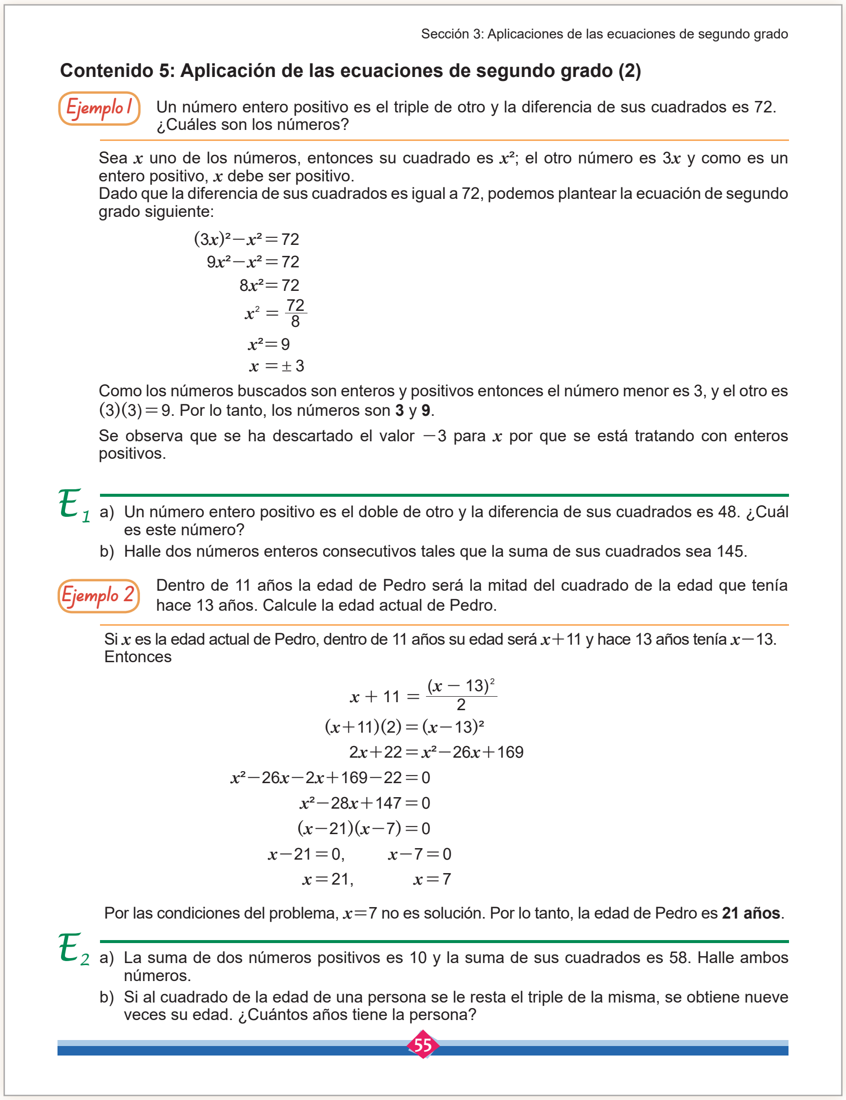
Traducir del lenguaje común al algebraico la información proporcionada en cada situación.

Plantear las ecuaciones de segundo grado que representan a cada situación.

Resolver dichas ecuaciones.

Destacar las condiciones dadas en cada situación.

Contextualizar las posibles soluciones a dicha situación.



Sección 3: Aplicaciones de las ecuaciones de segundo grado

Contenido 5: Aplicación de las ecuaciones de segundo grado (2)

Ejemplo 1 Un número entero positivo es el triple de otro y la diferencia de sus cuadrados es 72. ¿Cuáles son los números?

Sea x uno de los números, entonces su cuadrado es x^2; el otro número es $3x$ y como es un entero positivo, x debe ser positivo.
Dado que la diferencia de sus cuadrados es igual a 72, podemos plantear la ecuación de segundo grado siguiente:

$$\begin{aligned} (3x)^2-x^2&=72\\ 9x^2-x^2&=72\\ 8x^2&=72\\ x^2&=\frac{72}{8}\\ x^2&=9\\ x&=\pm 3 \end{aligned}$$

Como los números buscados son enteros y positivos entonces el número menor es 3, y el otro es $(3)(3)=9$. Por lo tanto, los números son **3** y **9**.

Se observa que se ha descartado el valor -3 para x por que se está tratando con enteros positivos.

E1
a) Un número entero positivo es el doble de otro y la diferencia de sus cuadrados es 48. ¿Cuál es este número?
b) Halle dos números enteros consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 145.

Ejemplo 2 Dentro de 11 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcule la edad actual de Pedro.

Si x es la edad actual de Pedro, dentro de 11 años su edad será $x+11$ y hace 13 años tenía $x-13$. Entonces

$$\begin{aligned} x+11&=\frac{(x-13)^2}{2}\\ (x+11)(2)&=(x-13)^2\\ 2x+22&=x^2-26x+169\\ x^2-26x-2x+169-22&=0\\ x^2-28x+147&=0\\ (x-21)(x-7)&=0\\ x-21=0,\quad & x-7=0\\ x=21,\quad & x=7 \end{aligned}$$

Por las condiciones del problema, $x=7$ no es solución. Por lo tanto, la edad de Pedro es **21 años**.

E2
a) La suma de dos números positivos es 10 y la suma de sus cuadrados es 58. Halle ambos números.
b) Si al cuadrado de la edad de una persona se le resta el triple de la misma, se obtiene nueve veces su edad. ¿Cuántos años tiene la persona?

55

C5: Aplicación de las ecuaciones de segundo grado (2)

Ej1 Un número entero positivo es el triple de otro, y la diferencia de sus cuadrados es 72. ¿Cuáles son los números?

S Sea x uno de los números. El otro número es $3x$
Diferencia de sus cuadrados:

$$\begin{aligned} (3x)^2-x^2&=72\\ 9x^2-x^2&=72\\ 8x^2&=72\\ x^2&=9\\ x&=\pm\sqrt{9}=\pm 3 \end{aligned}$$

El número menor es 3 ($x>0$), el otro es (3)(3) = 9.

E1 a) Sea x uno de los números. El otro número es $2x$

$$\begin{aligned} (2x)^2-x^2&=48\\ 3x^2&=48\\ x^2&=16\\ x&=\pm\sqrt{16}=\pm 4 \end{aligned}$$

Como $x>0$, el número menor es 4, el otro es (2)(4) = 8.

Ej2 Sea x la edad de Pedro, dentro de 11 años su edad será $x+11$ y hace 13 años su edad era $x-13$.

$$\begin{aligned} x+11&=\frac{(x-13)^2}{2}\\ (2)(x+11)&=(x-13)^2\\ x^2-28x+147&=0\\ (x-21)(x-7)&=0\\ x=21,\quad & x=7 \end{aligned}$$

Como $x>13$, la edad de Pedro es 21 años

E2 Sea x el primer número. El otro número es $10-x$.

$$\begin{aligned} x^2+(10-x)^2&=58\\ 2x^2-20x+100&=58\\ 2x^2-20x+42&=0\\ x^2-10x+21&=0\\ (x-7)(x-3)&=0\\ x-7=0,\quad & x-3=0\\ x=7,\quad & x=3 \end{aligned}$$

Los números son 7 y 3.

Prueba de Matemática 9no (30min) **Fecha:_______**

Unidad 2: Ecuaciones de Segundo Grado

/20

Nombre:______________________________ **Sección:___________**

Sexo: M / F

1. Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado: (2 puntos×2=4)

   a) $x^2 - 9 = 0$ b) $(x-1)^2 - 2 = 0$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando la fórmula general (2 puntos×2=4)

   a) $x^2 + 5x + 5 = 0$ b) $2x^2 - 5x + 1 = 0$

3. Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado por factorización: (2 puntos× 3=6)

   a) $x^2 + 3x + 2 = 0$ b) $x^2 + 5x = 0$

c) $x^2 - 8x + 16 = 0$

4. Determine cuántas soluciones en los números reales tienen las siguientes ecuaciones de segundo grado. (2 puntos×2=4)

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$

b) $x^2 + 4x - 1 = 0$

5. Determine la ecuación de segundo grado $x^2 + bx + c = 0$, cuyas soluciones son $x = 2, x = \ \ 3$. (2 puntos)

Nombre:________________________________

Unidad 3

Funciones de Segundo Grado

Sección 1	Introducción a las funciones de segundo grado
Sección 2	Función de segundo grado
Sección 3	Valor máximo o mínimo de una función de segundo grado y su aplicación

Contenido 1 Cuadrantes del plano cartesiano

Aprendizajes esperados

Determina el cuadrante en el que se ubica un punto dado a partir del signo de cada una de sus coordenadas.

Secuencia:

En los grados anteriores se ubicaron puntos en el plano y se estudió el concepto de función y función de primer grado. En esta unidad se estudia el concepto de función de segundo grado y sus características. Aquí se determina el cuadrante en el que se ubica un punto dado a partir de los signos de sus coordenadas.

Puntos esenciales:

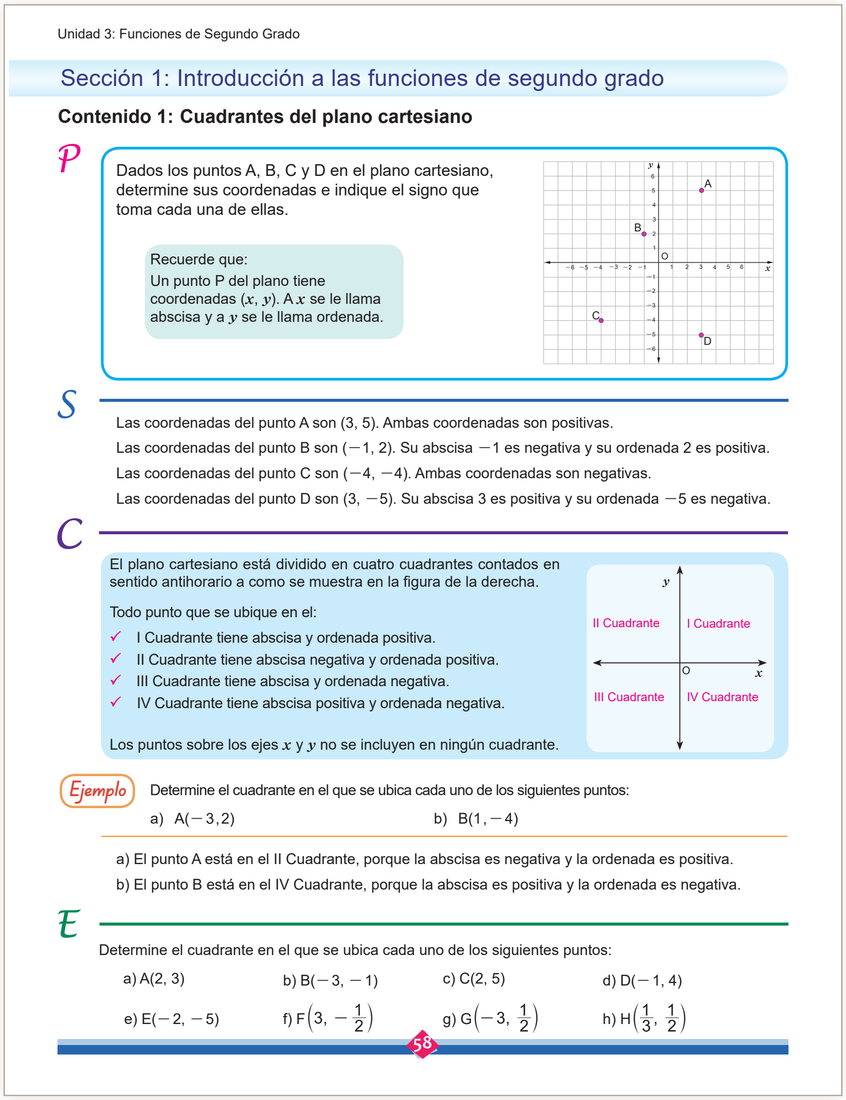
Recordar:

- ✓ Que cada punto P del plano se identifica con un par de números reales (x, y).
  A x se le llama abscisa y a y se le llama ordenada.
- ✓ Cómo se ubican los puntos en el plano cartesiano.

Señalar las cuatro regiones en las que está dividido el plano cartesiano llamadas cuadrantes.

Identificar los signos que toman las coordenadas de un punto dado en cada uno de los cuadrantes.

Destacar que los puntos sobre los ejes x y y no se incluyen en ningún cuadrante.



Unidad 3: Funciones de Segundo Grado

Sección 1: Introducción a las funciones de segundo grado

Contenido 1: Cuadrantes del plano cartesiano

P

Dados los puntos A, B, C y D en el plano cartesiano, determine sus coordenadas e indique el signo que toma cada una de ellas.

Recuerde que:
Un punto P del plano tiene coordenadas (x, y). A x se le llama abscisa y a y se le llama ordenada.

S

Las coordenadas del punto A son (3, 5). Ambas coordenadas son positivas.

Las coordenadas del punto B son (−1, 2). Su abscisa −1 es negativa y su ordenada 2 es positiva.

Las coordenadas del punto C son (−4, −4). Ambas coordenadas son negativas.

Las coordenadas del punto D son (3, −5). Su abscisa 3 es positiva y su ordenada −5 es negativa.

C

El plano cartesiano está dividido en cuatro cuadrantes contados en sentido antihorario a como se muestra en la figura de la derecha.

Todo punto que se ubique en el:

- ✓ I Cuadrante tiene abscisa y ordenada positiva.
- ✓ II Cuadrante tiene abscisa negativa y ordenada positiva.
- ✓ III Cuadrante tiene abscisa y ordenada negativa.
- ✓ IV Cuadrante tiene abscisa positiva y ordenada negativa.

Los puntos sobre los ejes x y y no se incluyen en ningún cuadrante.

Ejemplo Determine el cuadrante en el que se ubica cada uno de los siguientes puntos:

a) A(−3,2) b) B(1, −4)

a) El punto A está en el II Cuadrante, porque la abscisa es negativa y la ordenada es positiva.

b) El punto B está en el IV Cuadrante, porque la abscisa es positiva y la ordenada es negativa.

E

Determine el cuadrante en el que se ubica cada uno de los siguientes puntos:

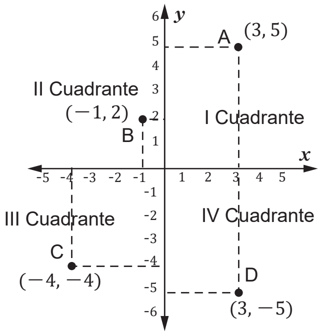
a) A(2, 3) b) B(−3, −1) c) C(2, 5) d) D(−1, 4)

e) E(−2, −5) f) F$\left(3, -\frac{1}{2}\right)$ g) G$\left(-3, \frac{1}{2}\right)$ h) H$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

58

U3: Funciones de segundo grado
S1: Introducción a las funciones de segundo grado
C1: Cuadrantes del plano cartesiano

P Dados los puntos A, B, C y D en el plano cartesiano, determine sus coordenadas e indique el signo que toma cada una de ellas.



$$P(\underset{\text{abscisa}}{\underset{\downarrow}{x}},\underset{\text{ordenada}}{\underset{\downarrow}{y}})$$

S Punto A: $(3,5)$, ambas son positivas.
Punto B: $(-1,2)$, abscisa negativa y ordenada positiva.
Punto C: $(-4,-4)$, abscisa negativa y ordenada negativa.
Punto D: $(3,-5)$, abscisa positiva y ordenada negativa.

C *Leer en LT*

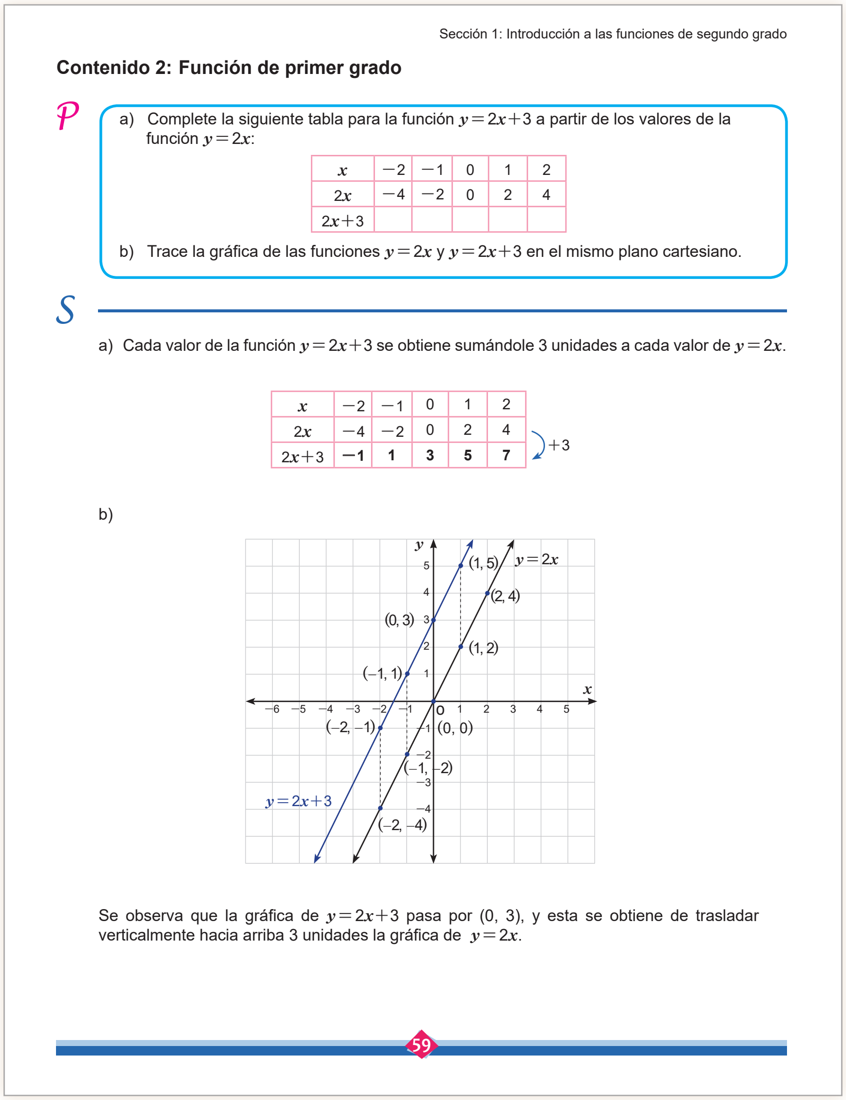
Ej Determine el cuadrante en el que se ubica cada uno de los siguientes puntos:

a) $A(-3,2)$, está en el II cuadrante
b) $B(1,-4)$, está en el IV cuadrante

E Determine el cuadrante en el que se ubica cada uno de los siguientes puntos:

a) $A(2,3)$, I cuadrante
b) $B(-3,-1)$, III cuadrante
c) $C(2,5)$, I cuadrante
d) $D(-1,4)$, II cuadrante
e) $E(-2,-5)$, III cuadrante
f) $F\left(3,-\frac{1}{2}\right)$, IV cuadrante
g) $G\left(-3,\frac{1}{2}\right)$, II cuadrante
h) $H\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$, I cuadrante

Contenido 2 Función de primer grado



Contenido 2: Función de primer grado

P

a) Complete la siguiente tabla para la función $y=2x+3$ a partir de los valores de la función $y=2x$:

x	-2	-1	0	1	2
$2x$	-4	-2	0	2	4
$2x+3$					

b) Trace la gráfica de las funciones $y=2x$ y $y=2x+3$ en el mismo plano cartesiano.

S

a) Cada valor de la función $y=2x+3$ se obtiene sumándole 3 unidades a cada valor de $y=2x$.

x	-2	-1	0	1	2
$2x$	-4	-2	0	2	4
$2x+3$	**-1**	**1**	**3**	**5**	**7**

+3

b)

Se observa que la gráfica de $y=2x+3$ pasa por (0, 3), y esta se obtiene de trasladar verticalmente hacia arriba 3 unidades la gráfica de $y=2x$.

Aprendizajes esperados

Recuerda cómo trazar la gráfica de una función de primer grado.

Secuencia:

En la clase anterior se determinó el cuadrante en el que se ubica un punto dado. Ahora se recuerda cómo trazar la gráfica de una función de primer grado.

Puntos esenciales:

Recordar:

- ✓ Qué es una función.
- ✓ Cómo se determinan los puntos del plano cartesiano que pertenecen a la gráfica de una función de primer grado.

Destacar que la gráfica de una función de primer grado es una recta.

Señalar que la gráfica de la función de primer grado $y=ax+b$ es una recta que se obtiene al trasladar la gráfica de $y=ax$ verticalmente b unidades hacia arriba, si $b>0$, y $|b|$ unidades hacia abajo cuando $b<0$, y pasa por el punto $(0, b)$.

C2: Función de primer grado

Ⓟ a) Complete la siguiente tabla para $y = 2x + 3$a partir de los valores de $y = 2x$.

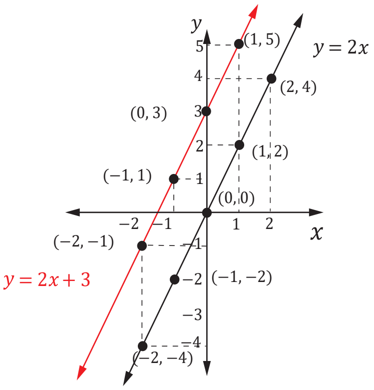
b) Trace la gráfica de las funciones $y = 2x$ y $y = 2x + 3$ en el mismo plano cartesiano.

Ⓢ a)

x	-2	-1	0	1	2
$2x$	-4	-2	0	2	4
$2x+3$	-1	1	3	5	7

+3

b)

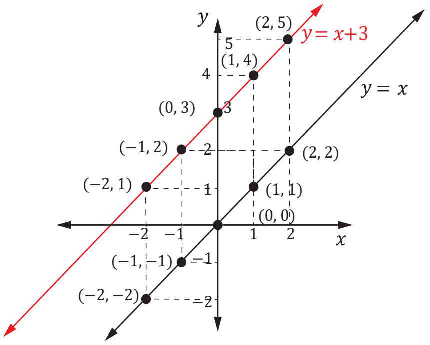


Ⓒ La gráfica de $y=ax+b$, con $a\neq 0$, es una recta que se obtiene al trasladar la gráfica de $y=ax$ verticalmente b unidades hacia arriba si $b>0$, y $|b|$ unidades hacia abajo si $b<0$, pasando por el punto $(0, b)$.

Ⓔ 1. Trace la gráfica de las funciones solicitadas a partir de las gráficas dadas:

a) $y = x + 3$

x	-2	-1	0	1	2
$x+3$	1	2	3	4	5



Contenido 2 Función de primer grado

Aprendizajes esperados

Recuerda cómo trazar la gráfica de una función de primer grado.

Secuencia:

En la clase anterior se determinó el cuadrante en el que se ubica un punto dado. Ahora se recuerda cómo trazar la gráfica de una función de primer grado.

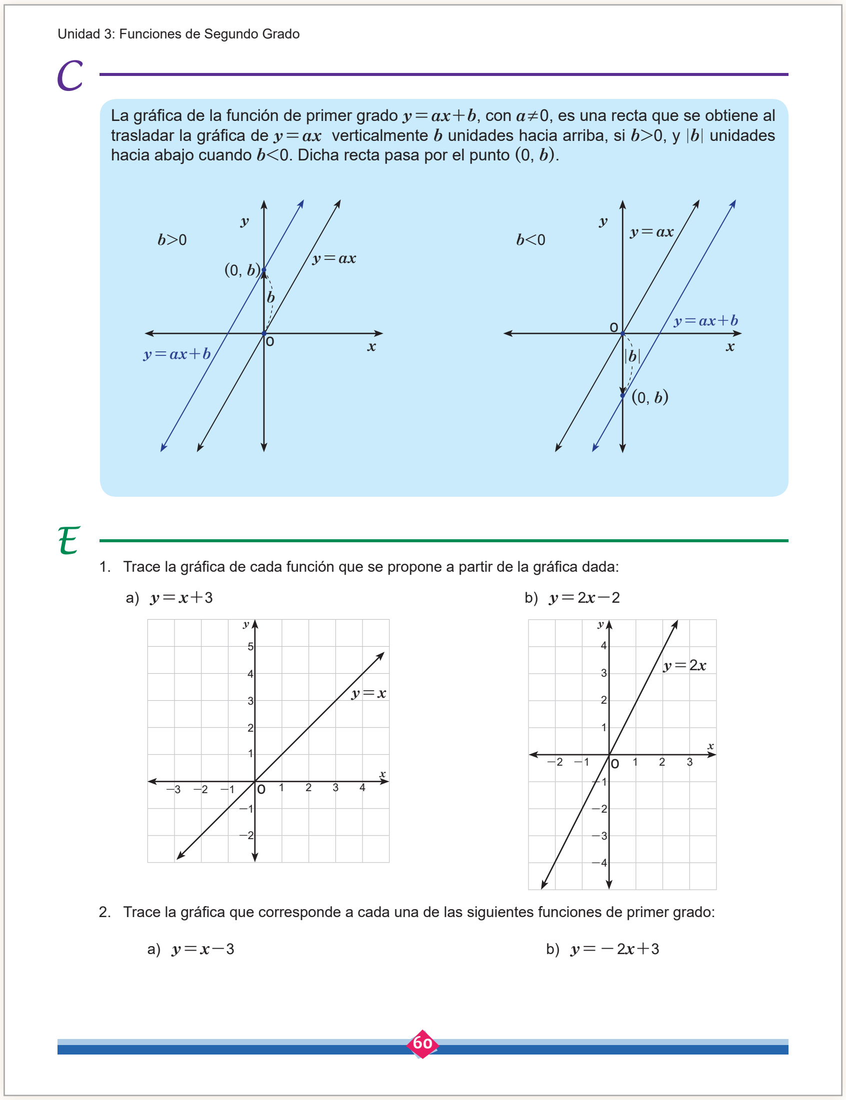
Puntos esenciales:

Recordar:

- ✓ Qué es una función.
- ✓ Cómo se determinan los puntos del plano cartesiano que pertenecen a la gráfica de una función de primer grado.

Destacar que la gráfica de una función de primer grado es una recta.

Señalar que la gráfica de la función de primer grado $y=ax+b$ es una recta que se obtiene al trasladar la gráfica de $y=ax$ verticalmente b unidades hacia arriba, si $b>0$, y $|b|$ unidades hacia abajo cuando $b<0$, y pasa por el punto $(0, b)$.



Unidad 3: Funciones de Segundo Grado

C

La gráfica de la función de primer grado $y=ax+b$, con $a\neq0$, es una recta que se obtiene al trasladar la gráfica de $y=ax$ verticalmente b unidades hacia arriba, si $b>0$, y $|b|$ unidades hacia abajo cuando $b<0$. Dicha recta pasa por el punto $(0, b)$.

E

1. Trace la gráfica de cada función que se propone a partir de la gráfica dada:

a) $y=x+3$

b) $y=2x-2$

2. Trace la gráfica que corresponde a cada una de las siguientes funciones de primer grado:

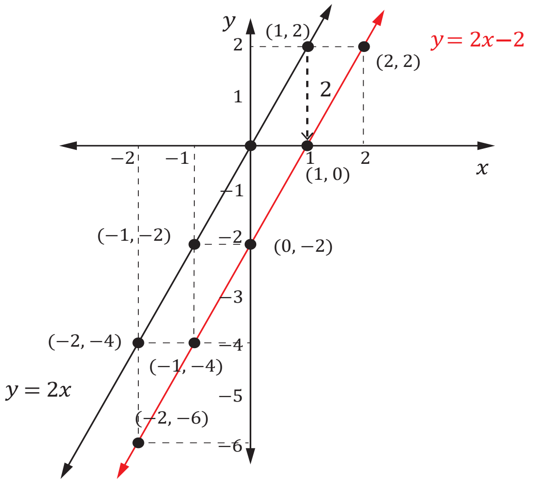
a) $y=x-3$

b) $y=-2x+3$

60

b) $y = 2x - 2$

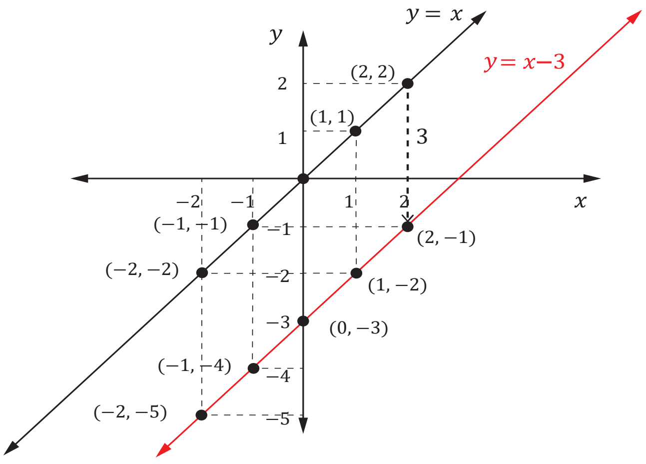
x	-2	-1	0	1	2
$2x$	-4	-2	0	2	4
$2x-2$	-6	-4	-2	0	2



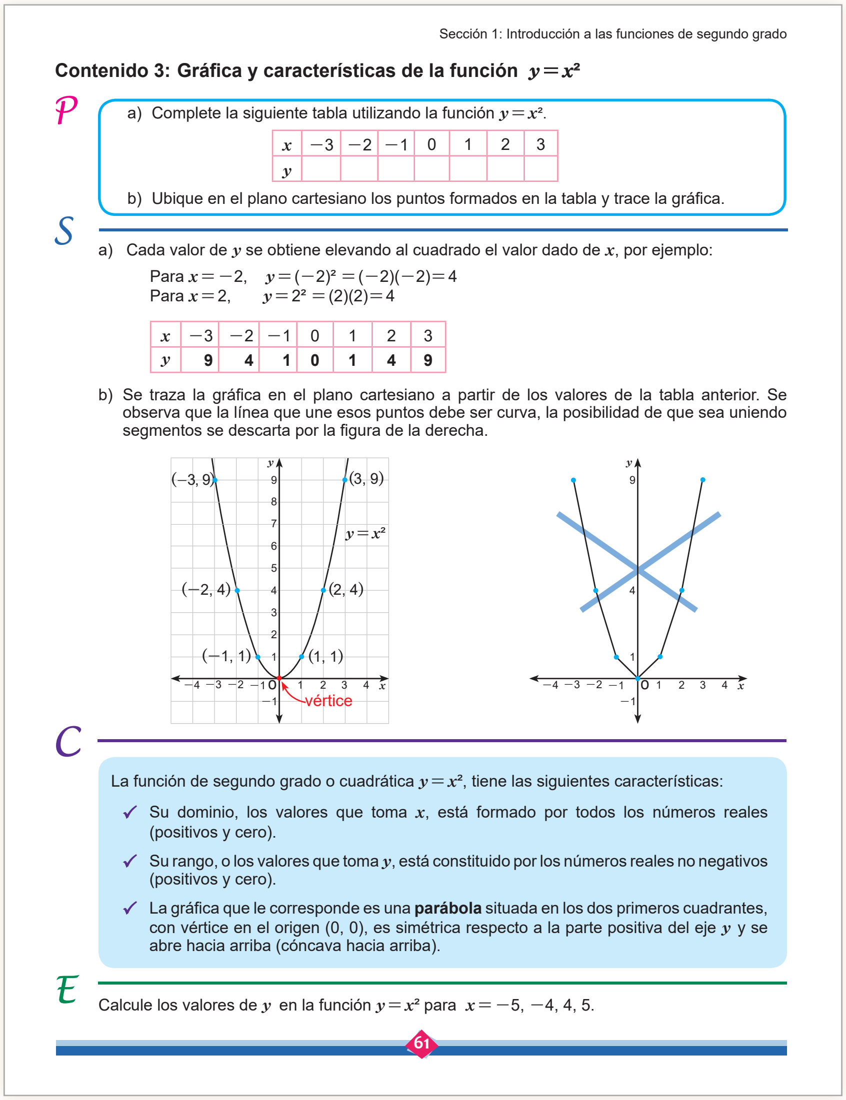
2. Trace la gráfica de

a) $y = x - 3$

x	-2	-1	0	1	2
$x-3$	-5	-4	-3	-2	-1



Contenido 3 Gráfica y características de la función $y=x^2$



Contenido 3: Gráfica y características de la función $y=x^2$

P

a) Complete la siguiente tabla utilizando la función $y=x^2$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

b) Ubique en el plano cartesiano los puntos formados en la tabla y trace la gráfica.

S

a) Cada valor de y se obtiene elevando al cuadrado el valor dado de x, por ejemplo:

Para $x=-2$, $y=(-2)^2=(-2)(-2)=4$
Para $x=2$, $y=2^2=(2)(2)=4$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	**9**	**4**	**1**	**0**	**1**	**4**	**9**

b) Se traza la gráfica en el plano cartesiano a partir de los valores de la tabla anterior. Se observa que la línea que une esos puntos debe ser curva, la posibilidad de que sea uniendo segmentos se descarta por la figura de la derecha.

C

La función de segundo grado o cuadrática $y=x^2$, tiene las siguientes características:

- ✓ Su dominio, los valores que toma x, está formado por todos los números reales (positivos y cero).
- ✓ Su rango, o los valores que toma y, está constituido por los números reales no negativos (positivos y cero).
- ✓ La gráfica que le corresponde es una **parábola** situada en los dos primeros cuadrantes, con vértice en el origen (0, 0), es simétrica respecto a la parte positiva del eje y y se abre hacia arriba (cóncava hacia arriba).

E

Calcule los valores de y en la función $y=x^2$ para $x=-5, -4, 4, 5$.

61

Aprendizajes esperados

Establece las características de la función de segundo grado $y=x^2$ y de su gráfica.

Secuencia:

En la clase anterior se recordó el concepto, gráfica y características de la función de primer grado. Ahora se estudian las características de la gráfica y de la función $y=x^2$.

Puntos esenciales:

Completar la tabla de valores de $y=x^2$ a partir de ciertos valores para x.

Destacar que para cada valor de x se obtiene un único valor correspondiente de y.

Ubicar los puntos, que se obtienen a partir de los valores de x y y, en el plano cartesiano.

Indicar que dichos puntos deben unirse con una curva suave.

Destacar que para la función $y=x^2$:

- ✓ El dominio está formado por los números reales.
- ✓ El rango está constituido por todos los reales no negativos.
- ✓ Su gráfica es una parábola que abre hacía arriba (cóncava hacia arriba), con vértice en el origen y eje de simetría el eje y.

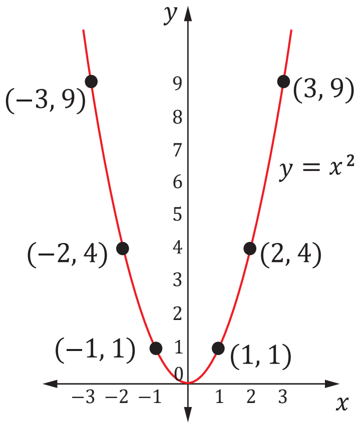
C3: Gráfica y características de la función $y=x^2$

P a) Complete la siguiente tabla utilizando la función $y=x^2$.
b) Trace la gráfica en el plano cartesiano.

S a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

b)



C La función de la forma $y=x^2$ tiene las siguientes características:

1) Su dominio (valores que toma x) son los números reales.
2) Su rango (valores que toma y) son los números reales no negativos.
3) La gráfica que le corresponde es una parábola con vértice en el origen $(0,0)$, es simétrica respecto a la parte positiva del eje y y abre hacia arriba.

E Calcule los valores de y en la función $y=x^2$ para $x=-5,-4,4,5$.

S

Si $x=-5$, $y=(-5)^2=25$,
Si $x=-4$, $y=(-4)^2=16$
Si $x=5$, $y=(5)^2=25$
Si $x=4$, $y=(4)^2=16$

Contenido 4 Gráfica y características de la función $y=ax^2$ con $a>0$

Aprendizajes esperados

Traza la gráfica de una función de segundo grado de la forma $y=ax^2$ para $a>0$ y determina sus características.

Secuencia:

En la clase anterior se estudiaron las características de la función $y=x^2$ y su gráfica. Ahora se estudian las características de la función $y=ax^2$ con $a>0$, y de su gráfica.

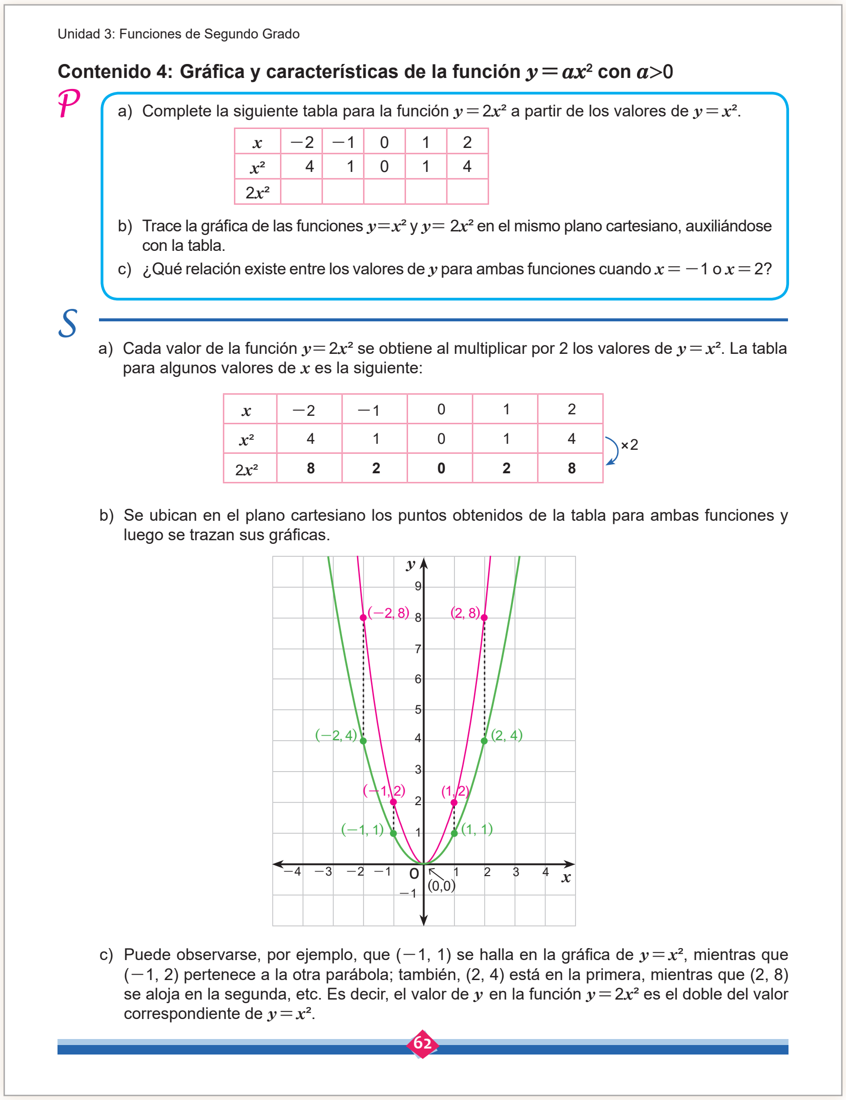
Puntos esenciales:

Completar la tabla de valores para $y=ax^2$, con $a>0$, a partir de ciertos valores para x y compararlos con los valores de $y=x^2$.

Destacar que los valores de $y=ax^2$ se obtienen multiplicando los valores de x^2 por la constante positiva a. Cuando $a>1$ la gráfica de $y=x^2$ se alarga verticalmente por un factor a y cuando $0<a<1$, se comprime verticalmente por un factor a.

Resaltar que:

- ✓ Como $a>0$, la parábola abre hacia arriba (cóncava hacia arriba).
- ✓ El dominio de la función son los números reales y su rango, todos los reales no negativos. Además, su eje de simetría es el eje y.



Unidad 3: Funciones de Segundo Grado

Contenido 4: Gráfica y características de la función $y=ax^2$ con $a>0$

P

a) Complete la siguiente tabla para la función $y=2x^2$ a partir de los valores de $y=x^2$.

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$2x^2$					

b) Trace la gráfica de las funciones $y=x^2$ y $y=2x^2$ en el mismo plano cartesiano, auxiliándose con la tabla.

c) ¿Qué relación existe entre los valores de y para ambas funciones cuando $x=-1$ o $x=2$?

S

a) Cada valor de la función $y=2x^2$ se obtiene al multiplicar por 2 los valores de $y=x^2$. La tabla para algunos valores de x es la siguiente:

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$2x^2$	**8**	**2**	**0**	**2**	**8**

×2

b) Se ubican en el plano cartesiano los puntos obtenidos de la tabla para ambas funciones y luego se trazan sus gráficas.

c) Puede observarse, por ejemplo, que $(-1, 1)$ se halla en la gráfica de $y=x^2$, mientras que $(-1, 2)$ pertenece a la otra parábola; también, $(2, 4)$ está en la primera, mientras que $(2, 8)$ se aloja en la segunda, etc. Es decir, el valor de y en la función $y=2x^2$ es el doble del valor correspondiente de $y=x^2$.

62

C4: Gráfica y características de la función $y = ax^2$ con $a > 0$

Ⓟ a) Complete la tabla para $y = 2x^2$ a partir de los valores de $y = x^2$.

b) Trace la gráfica de las funciones $y = x^2$ y $y = 2x^2$ en el mismo plano cartesiano.

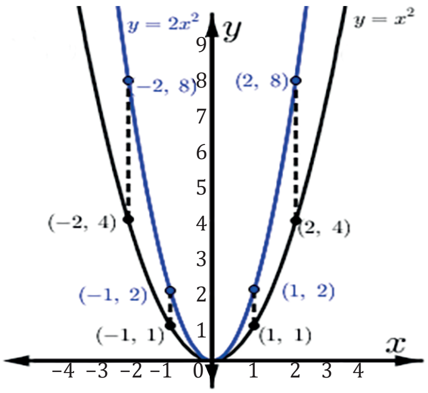
c) ¿Qué relación existe entre los valores de y para ambas funciones cuando $x = -1$ o $x = 2$?

Ⓢ a)

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$2x^2$	8	2	0	2	8

× 2

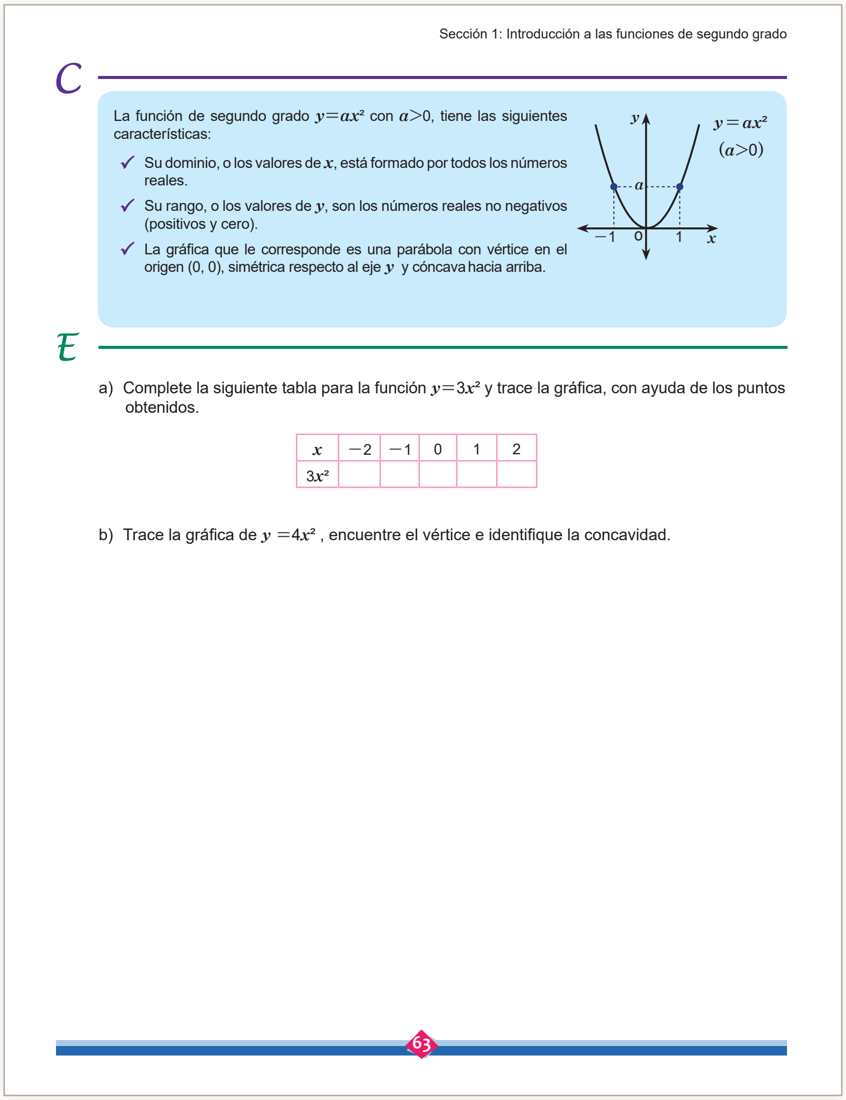
b)



c) El valor de y en $y = 2x^2$ es el doble del valor correspondiente en $y = x^2$

Ⓒ *Leer en LT.*

Contenido 4 Gráfica y características de la función $y=ax^2$ con $a>0$



Sección 1: Introducción a las funciones de segundo grado

C

La función de segundo grado $y=ax^2$ con $a>0$, tiene las siguientes características:

- ✓ Su dominio, o los valores de x, está formado por todos los números reales.
- ✓ Su rango, o los valores de y, son los números reales no negativos (positivos y cero).
- ✓ La gráfica que le corresponde es una parábola con vértice en el origen (0, 0), simétrica respecto al eje y y cóncava hacia arriba.

E

a) Complete la siguiente tabla para la función $y=3x^2$ y trace la gráfica, con ayuda de los puntos obtenidos.

x	−2	−1	0	1	2
$3x^2$					

b) Trace la gráfica de $y=4x^2$, encuentre el vértice e identifique la concavidad.

63

Aprendizajes esperados

Traza la gráfica de una función de segundo grado de la forma $y=ax^2$ para $a>0$ y determina sus características.

▪ Secuencia:

En la clase anterior se estudiaron las características de la función $y=x^2$ y su gráfica. Ahora se estudian las características de la función $y=ax^2$ con $a>0$, y de su gráfica.

▪ Puntos esenciales:

Completar la tabla de valores para $y=ax^2$, con $a>0$, a partir de ciertos valores para x y compararlos con los valores de $y=x^2$.

Destacar que los valores de $y=ax^2$ se obtienen multiplicando los valores de x^2 por la constante positiva a. Cuando $a>1$ la gráfica de $y=x^2$ se alarga verticalmente por un factor a y cuando $0<a<1$, se comprime verticalmente por un factor a.

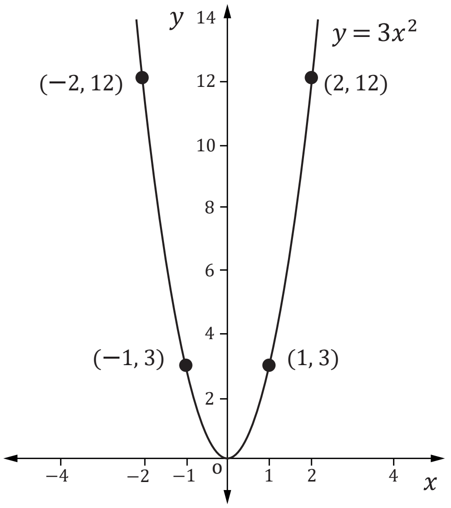
Resaltar que:

- ✓ Como $a>0$, la parábola abre hacia arriba (cóncava hacia arriba).
- ✓ El dominio de la función son los números reales y su rango, todos los reales no negativos. Además, su eje de simetría es el eje y.

E

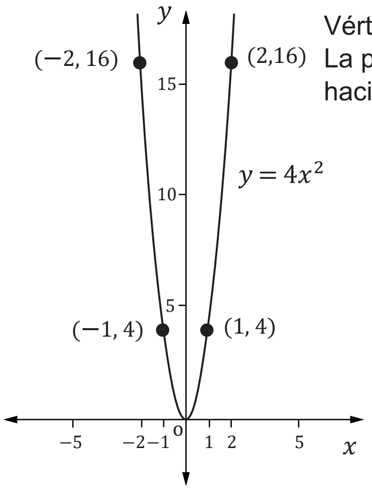
a) Complete la siguiente tabla para la función $y=3x^2$ y trace la gráfica.

x	-2	-1	0	1	2
$3x^2$	12	3	0	3	12



b) Trace la gráfica de $y=4x^2$, determine su vértice e identifique la concavidad.

x	-2	-1	0	1	2
$4x^2$	16	4	0	4	16



Vértice: $(0,0)$
La parábola es cóncava hacia arriba.

Contenido 5 Gráfica y características de la función $y=ax^2$ con $a<0$

Aprendizajes esperados

Traza la gráfica de una función de segundo grado de la forma $y=ax^2$ para $a<0$ y determina sus características.

Secuencia:

En la clase anterior se estudiaron las características de la gráfica y de la función $y=ax^2$ con $a>0$. Aquí se hace el mismo tratamiento, pero cuando $a<0$.

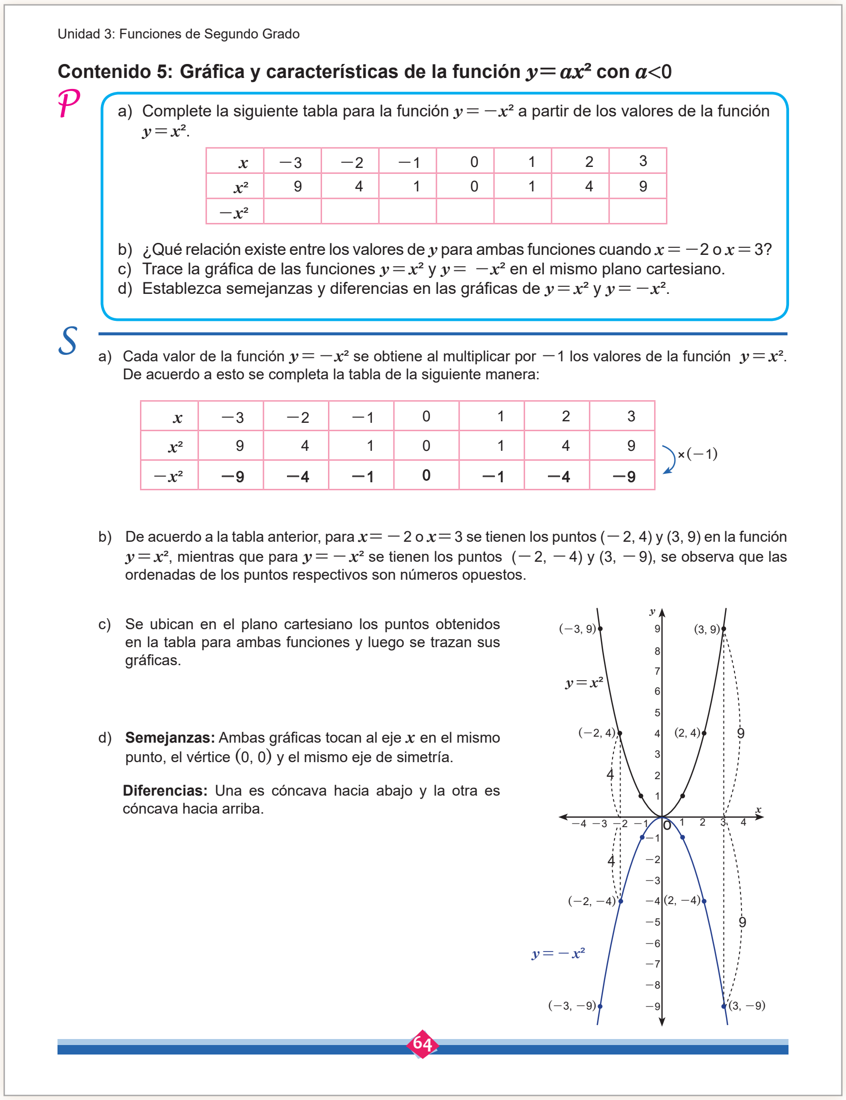
Puntos esenciales:

Completar la tabla de valores para $y=ax^2$, con $a<0$, a partir de ciertos valores para x y compararlos con los valores de $y=x^2$.

Destacar que los valores de $y=ax^2$ se obtienen multiplicando los valores de x^2 por la constante negativa a. De aquí que la gráfica de $y=ax^2$ con $a<0$ es una reflexión de la de $y=ax^2$ con $a>0$ a través del eje x.

Resaltar que:

- ✓ Como $a<0$, la parábola abre hacia abajo (cóncava hacia abajo).
- ✓ El dominio de la función son los números reales y su rango, todos los reales no positivos. Además, su eje de simetría es el eje y.



Unidad 3: Funciones de Segundo Grado

Contenido 5: Gráfica y características de la función $y=ax^2$ con $a<0$

P

a) Complete la siguiente tabla para la función $y=-x^2$ a partir de los valores de la función $y=x^2$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$-x^2$							

b) ¿Qué relación existe entre los valores de y para ambas funciones cuando $x=-2$ o $x=3$?
c) Trace la gráfica de las funciones $y=x^2$ y $y=\ -x^2$ en el mismo plano cartesiano.
d) Establezca semejanzas y diferencias en las gráficas de $y=x^2$ y $y=-x^2$.

S

a) Cada valor de la función $y=-x^2$ se obtiene al multiplicar por -1 los valores de la función $y=x^2$. De acuerdo a esto se completa la tabla de la siguiente manera:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$-x^2$	**−9**	**−4**	**−1**	**0**	**−1**	**−4**	**−9**

×(−1)

b) De acuerdo a la tabla anterior, para $x=-2$ o $x=3$ se tienen los puntos $(-2, 4)$ y $(3, 9)$ en la función $y=x^2$, mientras que para $y=-x^2$ se tienen los puntos $(-2, -4)$ y $(3, -9)$, se observa que las ordenadas de los puntos respectivos son números opuestos.

c) Se ubican en el plano cartesiano los puntos obtenidos en la tabla para ambas funciones y luego se trazan sus gráficas.

d) **Semejanzas:** Ambas gráficas tocan al eje x en el mismo punto, el vértice $(0, 0)$ y el mismo eje de simetría.

Diferencias: Una es cóncava hacia abajo y la otra es cóncava hacia arriba.

64

C5: Gráfica y características de la función $y = ax^2$ con $a < 0$

P

a) Complete la tabla para $y = -x^2$ a partir de la función $y = x^2$.

b) ¿Qué relación existe entre los valores de y para ambas funciones cuando $x = -2$ o $x = 3$?

c) Trace la gráfica de las funciones $y = x^2$ y $y = -x^2$en el mismo plano cartesiano.

d) Establezca semejanzas y diferencias en las gráficas de $y = x^2$ y $y = -x^2$.

S

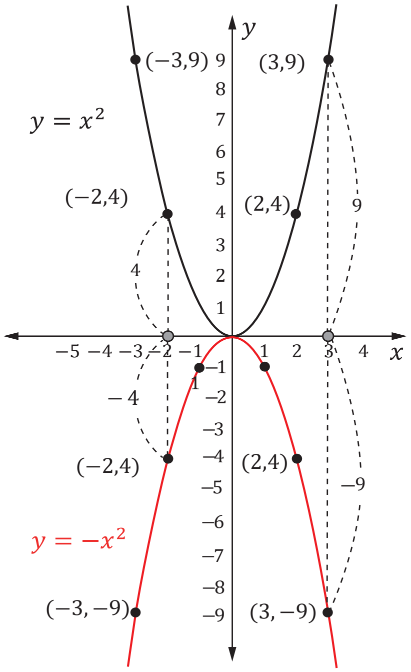
a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$-x^2$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9

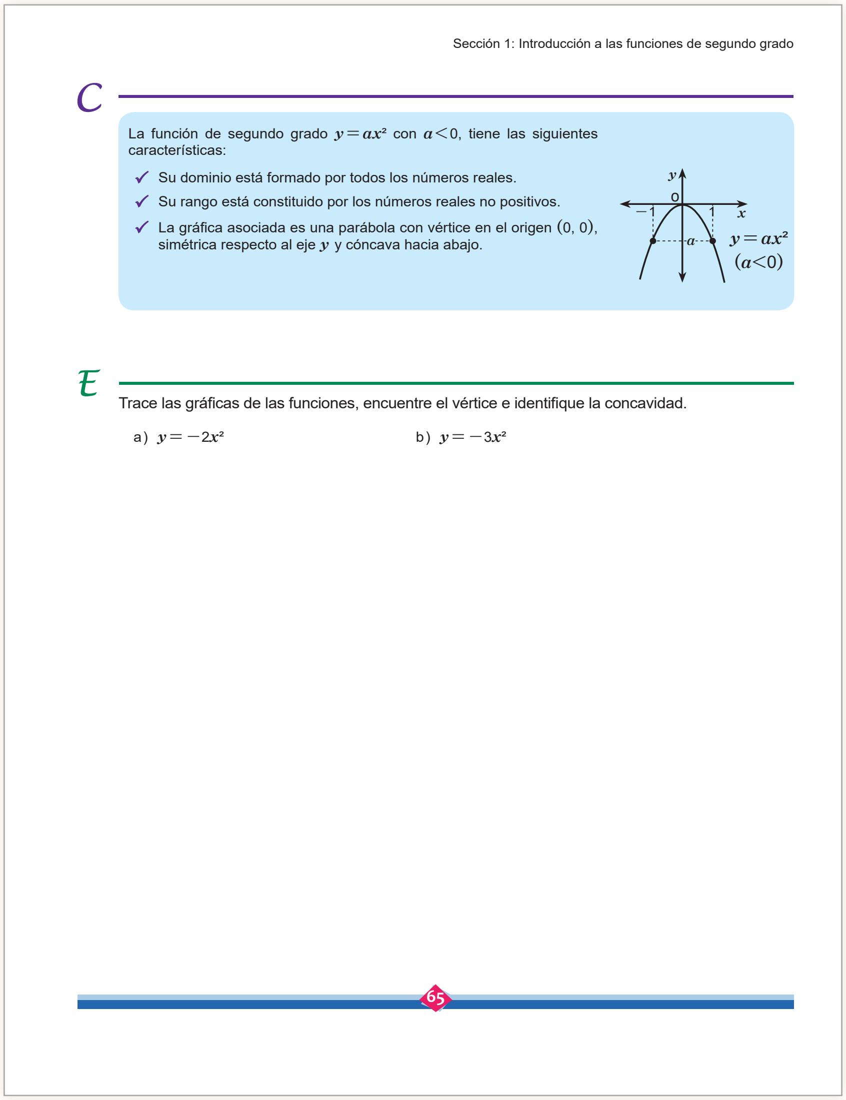
×−1

b) Las ordenadas de los puntos respectivos son números opuestos.

c)



Contenido 5 Gráfica y características de la función $y=ax^2$ con $a<0$



Sección 1: Introducción a las funciones de segundo grado

C

La función de segundo grado $y=ax^2$ con $a<0$, tiene las siguientes características:

- ✓ Su dominio está formado por todos los números reales.
- ✓ Su rango está constituido por los números reales no positivos.
- ✓ La gráfica asociada es una parábola con vértice en el origen $(0, 0)$, simétrica respecto al eje y y cóncava hacia abajo.

E

Trace las gráficas de las funciones, encuentre el vértice e identifique la concavidad.

a) $y=-2x^2$　　b) $y=-3x^2$

65

Aprendizajes esperados

Traza la gráfica de una función de segundo grado de la forma $y=ax^2$ para $a<0$ y determina sus características.

Secuencia:

En la clase anterior se estudiaron las características de la gráfica y de la función $y=ax^2$ con $a>0$. Aquí se hace el mismo tratamiento, pero cuando $a<0$.

Puntos esenciales:

Completar la tabla de valores para $y=ax^2$, con $a<0$, a partir de ciertos valores para x y compararlos con los valores de $y=x^2$.

Destacar que los valores de $y=ax^2$ se obtienen multiplicando los valores de x^2 por la constante negativa a. De aquí que la gráfica de $y=ax^2$ con $a<0$ es una reflexión de la de $y=ax^2$ con $a>0$ a través del eje x.

Resaltar que:

- ✓ Como $a<0$, la parábola abre hacia abajo (cóncava hacia abajo).
- ✓ El dominio de la función son los números reales y su rango, todos los reales no positivos. Además, su eje de simetría es el eje y.

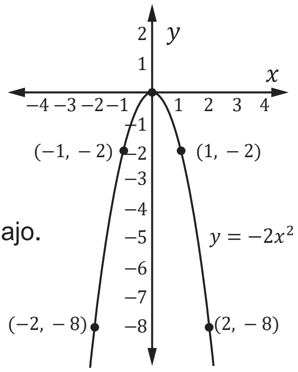
d) **Semejanzas:** Tienen vértice en $(0, 0)$ y el mismo eje de simetría.
Diferencias: Una es cóncava hacia abajo y la otra es cóncava hacia arriba.

C *Leer en LT.*

E Trace la gráfica de cada función, determine su vértice e identifique la concavidad.

S a) $y=-2x^2$

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$-2x^2$	-8	-2	0	-2	-8

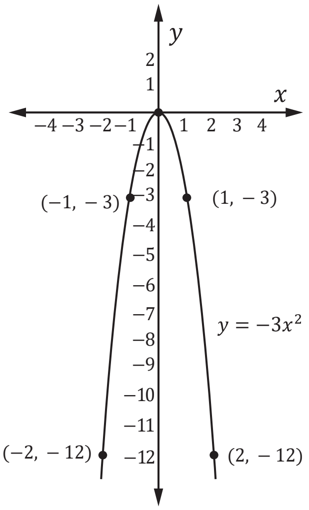


Vértice: $(0, 0)$

La parábola es cóncava hacia abajo.

b) $y=-3x^2$

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$-3x^2$	-12	-3	0	-3	-12



Vértice: $(0, 0)$

La parábola es cóncava hacia abajo.

Contenido 1 Gráfica y características de la función $y=ax^2+c$

Aprendizajes esperados

Traza la gráfica de funciones de la forma $y=ax^2+c$, con $a\neq 0$ y determina sus características.

Secuencia:

En la clase anterior se estudiaron las características de la gráfica y de la función $y=ax^2$ con $a<0$. Aquí se hace el mismo estudio con la función $y=ax^2+c$.

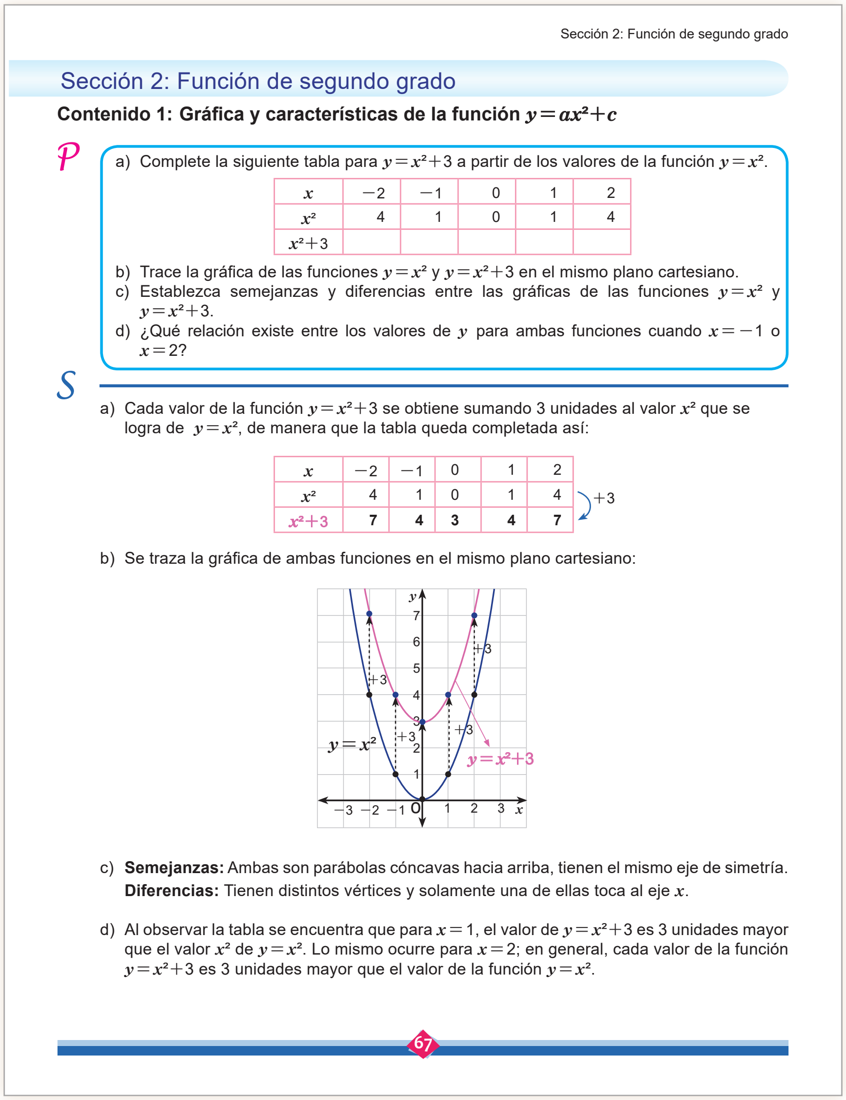
Puntos esenciales:

Completar la tabla de valores para $y=ax^2+c$ a partir de ciertos valores para x y compararlos con los valores de $y=x^2$.

Destacar que los valores de $y=ax^2+c$ se obtienen sumándole a los valores de ax^2 la constante c. De aquí que la gráfica de $y=ax^2+c$ es una traslación vertical de la gráfica de $y=ax^2$, c unidades hacia arriba si $c>0$, y $|c|$ unidades hacia abajo si $c<0$.

Resaltar que:

- ✓ Si $a>0$, la parábola tiene como vértice el punto $(0, c)$ y abre hacia arriba (cóncava hacia arriba). El dominio de la función son los números reales y el rango, todos los reales mayores o iguales a c.
- ✓ Si $a<0$, la parábola tiene como vértice el punto $(0, c)$ y abre hacia abajo (cóncava hacia abajo). El dominio de la función son los números reales y el rango, todos los reales menores o iguales a c.



Sección 2: Función de segundo grado

Sección 2: Función de segundo grado

Contenido 1: Gráfica y características de la función $y=ax^2+c$

P

a) Complete la siguiente tabla para $y=x^2+3$ a partir de los valores de la función $y=x^2$.

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
x^2+3					

b) Trace la gráfica de las funciones $y=x^2$ y $y=x^2+3$ en el mismo plano cartesiano.

c) Establezca semejanzas y diferencias entre las gráficas de las funciones $y=x^2$ y $y=x^2+3$.

d) ¿Qué relación existe entre los valores de y para ambas funciones cuando $x=-1$ o $x=2$?

S

a) Cada valor de la función $y=x^2+3$ se obtiene sumando 3 unidades al valor x^2 que se logra de $y=x^2$, de manera que la tabla queda completada así:

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
x^2+3	7	4	3	4	7

+3

b) Se traza la gráfica de ambas funciones en el mismo plano cartesiano:

c) **Semejanzas:** Ambas son parábolas cóncavas hacia arriba, tienen el mismo eje de simetría. **Diferencias:** Tienen distintos vértices y solamente una de ellas toca al eje x.

d) Al observar la tabla se encuentra que para $x=1$, el valor de $y=x^2+3$ es 3 unidades mayor que el valor x^2 de $y=x^2$. Lo mismo ocurre para $x=2$; en general, cada valor de la función $y=x^2+3$ es 3 unidades mayor que el valor de la función $y=x^2$.

67

S2: Función de segundo grado

C1: Gráfica y características de la función $y = ax^2 + c$

P a) Complete la siguiente tabla para $y = x^2 + 3$ a partir de la función $y = x^2$.

b) Trace la gráfica de las funciones $y = x^2$ y $y = x^2 + 3$ en el mismo plano cartesiano.

c) Establezca semejanzas y diferencias entre las gráficas de las funciones $y = x^2$ y $y = x^2 + 3$.

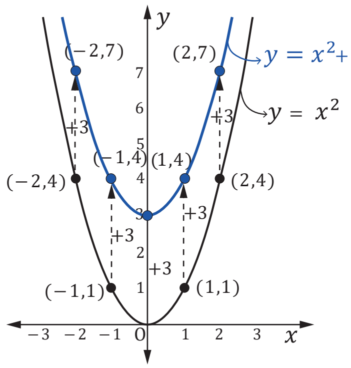
d) ¿Qué relación existe entre los valores de y para ambas funciones cuando $x = -1$ o $x = 2$?

S a)

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$-x^2+3$	7	4	3	4	7

+3

b)

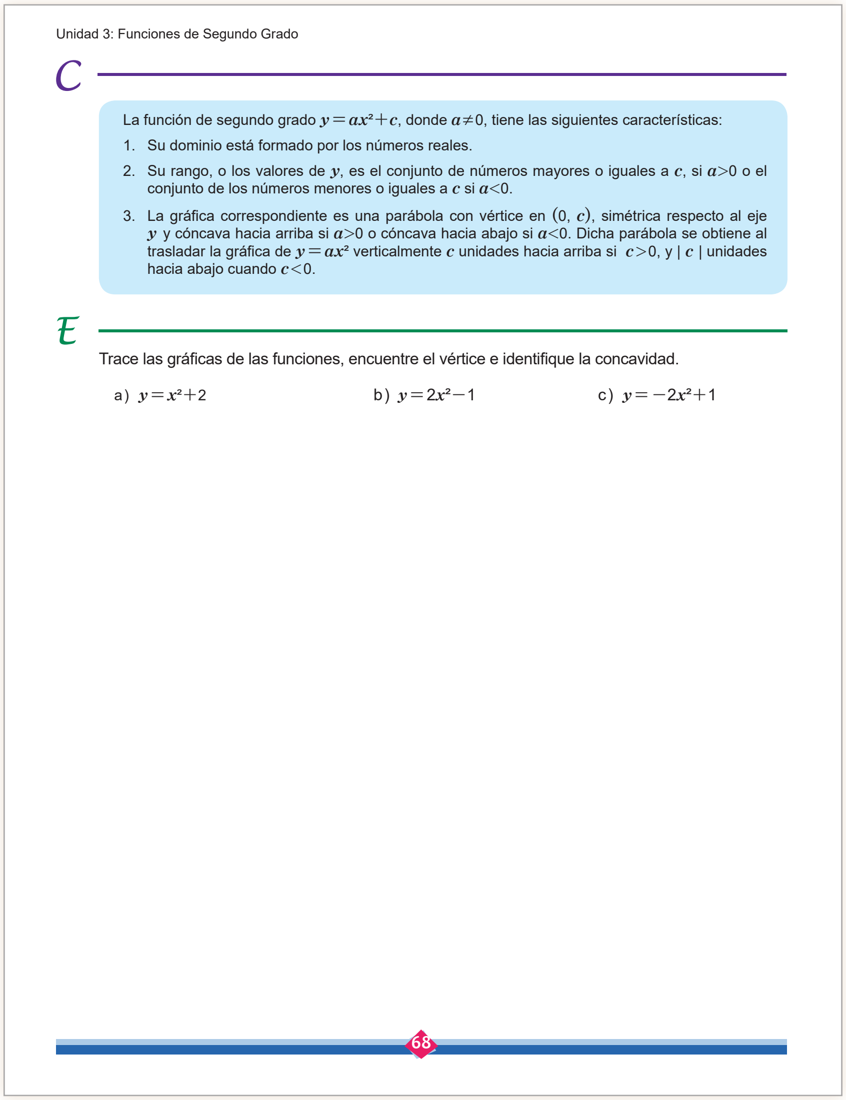


c) Semejanzas: Ambas son parábolas cóncavas hacia arriba y tienen el mismo eje de simetría.

Diferencias: Tienen distintos vértices y solamente una de ellas toca al eje x.

d) Cada valor de $y = x^2 + 3$ es 3 unidades mayor que el respectivo valor de la función $y = x^2$.

Contenido 1 Gráfica y características de la función $y = ax^2 + c$



C

La función de segundo grado $y = ax^2 + c$, donde $a \neq 0$, tiene las siguientes características:

1. Su dominio está formado por los números reales.
2. Su rango, o los valores de y, es el conjunto de números mayores o iguales a c, si $a > 0$ o el conjunto de los números menores o iguales a c si $a < 0$.
3. La gráfica correspondiente es una parábola con vértice en $(0, c)$, simétrica respecto al eje y y cóncava hacia arriba si $a > 0$ o cóncava hacia abajo si $a < 0$. Dicha parábola se obtiene al trasladar la gráfica de $y = ax^2$ verticalmente c unidades hacia arriba si $c > 0$, y $|c|$ unidades hacia abajo cuando $c < 0$.

E

Trace las gráficas de las funciones, encuentre el vértice e identifique la concavidad.

a) $y = x^2 + 2$ b) $y = 2x^2 - 1$ c) $y = -2x^2 + 1$

Aprendizajes esperados

Traza la gráfica de funciones de la forma $y = ax^2 + c$, con $a \neq 0$ y determina sus características.

Secuencia:

En la clase anterior se estudiaron las características de la gráfica y de la función $y = ax^2$ con $a < 0$. Aquí se hace el mismo estudio con la función $y = ax^2 + c$.

Puntos esenciales:

Completar la tabla de valores para $y = ax^2 + c$ a partir de ciertos valores para x y compararlos con los valores de $y = x^2$.

Destacar que los valores de $y = ax^2 + c$ se obtienen sumándole a los valores de ax^2 la constante c. De aquí que la gráfica de $y = ax^2 + c$ es una traslación vertical de la gráfica de $y = ax^2$, c unidades hacia arriba si $c > 0$, y $|c|$ unidades hacia abajo si $c < 0$.

Resaltar que:

- ✓ Si $a > 0$, la parábola tiene como vértice el punto $(0, c)$ y abre hacia arriba (cóncava hacia arriba). El dominio de la función son los números reales y el rango, todos los reales mayores o iguales a c.
- ✓ Si $a < 0$, la parábola tiene como vértice el punto $(0, c)$ y abre hacia abajo (cóncava hacia abajo). El dominio de la función son los números reales y el rango, todos los reales menores o iguales a c.

Ⓒ *Leer en LT.*

Ⓔ Grafique:

a) $y = x^2 + 2$

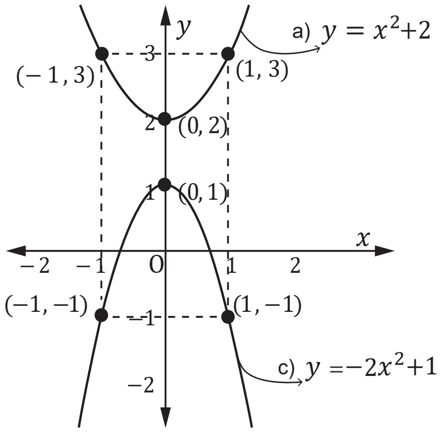
Vértice: $(0, 2)$.

La parábola es cóncava hacia arriba.

c) $y = -2x^2 + 1$

Vértice: $(0, 1)$.

La parábola es cóncava hacia abajo.



Contenido 2 Gráfica y características de la función $y=a(x-h)^2$

Aprendizajes esperados

Traza la gráfica de funciones de la forma $y=a(x-h)^2$, con $a\neq 0$ y determina sus características.

Secuencia:

En la clase anterior se estudiaron las características de la gráfica y de la función $y=ax^2+c$. Ahora se hace el mismo tratamiento para la función $y=a(x-h)^2$.

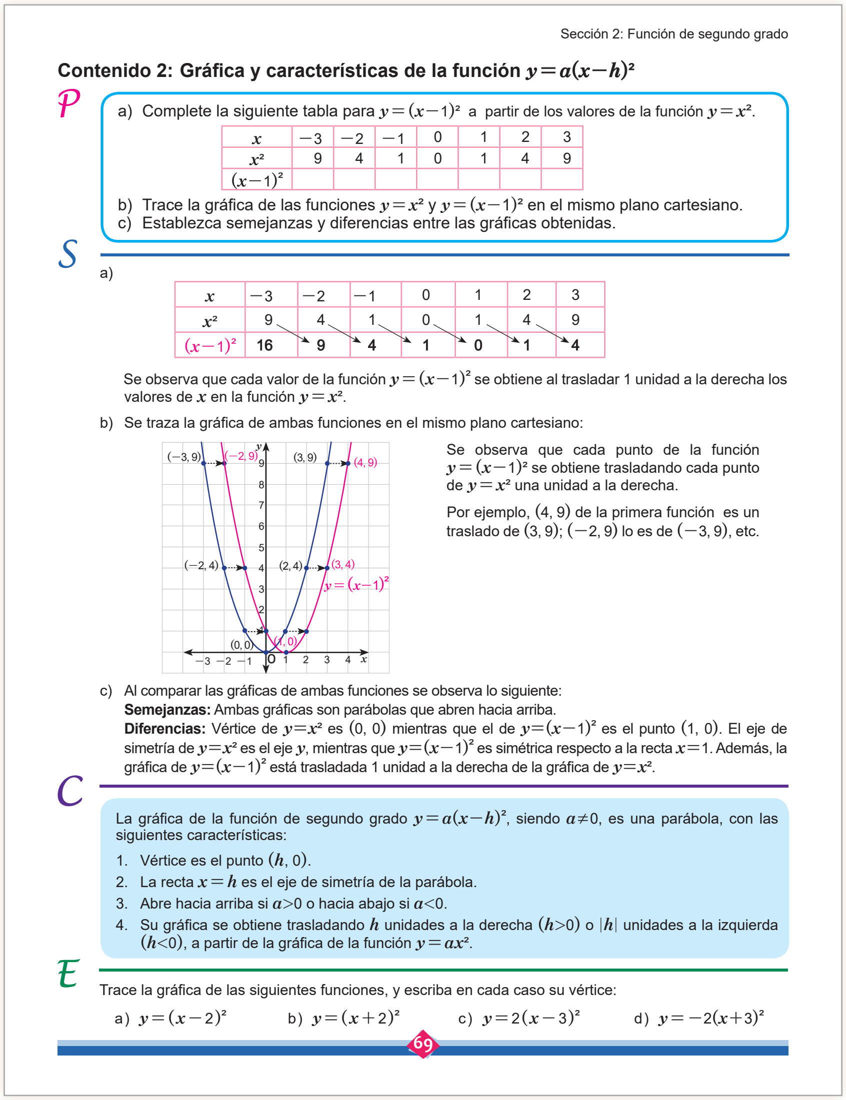
Puntos esenciales:

Completar la tabla de valores para $y=a(x-h)^2$ a partir de ciertos valores para x y compararlos con los valores de $y=x^2$.

Destacar que los valores de $y=a(x-h)^2$ se obtienen trasladando los valores de ax^2, h unidades. De aquí que la gráfica de $y=a(x-h)^2$ es una traslación horizontal de la gráfica de $y=ax^2$, h unidades hacia la derecha si $h>0$, y $|h|$ unidades hacia la izquierda, si $h<0$.

Resaltar que:

- ✓ Si $a>0$, la parábola abre hacia arriba (cóncava hacia arriba).
- ✓ Si $a<0$, la parábola abre hacia abajo (cóncava hacia abajo).
- ✓ En ambos casos el dominio de la función son los números reales, el vértice de la gráfica es el punto $(h, 0)$ y el eje de simetría es la recta $x=h$.



Sección 2: Función de segundo grado

Contenido 2: Gráfica y características de la función $y=a(x-h)^2$

P

a) Complete la siguiente tabla para $y=(x-1)^2$ a partir de los valores de la función $y=x^2$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$(x-1)^2$							

b) Trace la gráfica de las funciones $y=x^2$ y $y=(x-1)^2$ en el mismo plano cartesiano.
c) Establezca semejanzas y diferencias entre las gráficas obtenidas.

S

a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$(x-1)^2$	16	9	4	1	0	1	4

Se observa que cada valor de la función $y=(x-1)^2$ se obtiene al trasladar 1 unidad a la derecha los valores de x en la función $y=x^2$.

b) Se traza la gráfica de ambas funciones en el mismo plano cartesiano:

Se observa que cada punto de la función $y=(x-1)^2$ se obtiene trasladando cada punto de $y=x^2$ una unidad a la derecha.

Por ejemplo, $(4, 9)$ de la primera función es un traslado de $(3, 9)$; $(-2, 9)$ lo es de $(-3, 9)$, etc.

c) Al comparar las gráficas de ambas funciones se observa lo siguiente:
Semejanzas: Ambas gráficas son parábolas que abren hacia arriba.
Diferencias: Vértice de $y=x^2$ es $(0, 0)$ mientras que el de $y=(x-1)^2$ es el punto $(1, 0)$. El eje de simetría de $y=x^2$ es el eje y, mientras que $y=(x-1)^2$ es simétrica respecto a la recta $x=1$. Además, la gráfica de $y=(x-1)^2$ está trasladada 1 unidad a la derecha de la gráfica de $y=x^2$.

C

La gráfica de la función de segundo grado $y=a(x-h)^2$, siendo $a\neq 0$, es una parábola, con las siguientes características:

1. Vértice es el punto $(h, 0)$.
2. La recta $x=h$ es el eje de simetría de la parábola.
3. Abre hacia arriba si $a>0$ o hacia abajo si $a<0$.
4. Su gráfica se obtiene trasladando h unidades a la derecha ($h>0$) o $|h|$ unidades a la izquierda ($h<0$), a partir de la gráfica de la función $y=ax^2$.

E

Trace la gráfica de las siguientes funciones, y escriba en cada caso su vértice:

a) $y=(x-2)^2$ b) $y=(x+2)^2$ c) $y=2(x-3)^2$ d) $y=-2(x+3)^2$

69

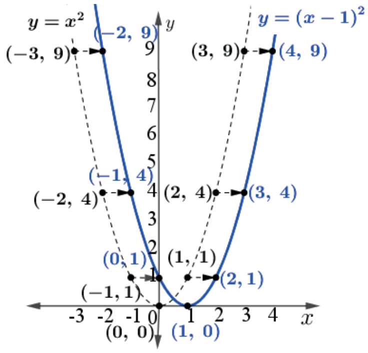
C2: Gráfica y características de la función $y = a(x - h)^2$

P a) Complete la tabla para $y = (x - 1)^2$ a partir de la función $y = x^2$.

S

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$(x-1)^2$	16	9	4	1	0	1	4

b) Trace la gráfica de las dos funciones.



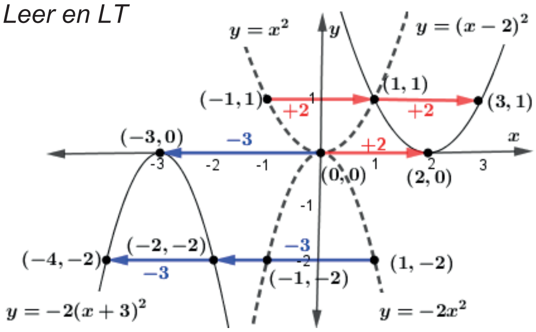
c) Establezca semejanzas y diferencias.
Semejanzas: Ambas gráficas son parábolas que abren hacia arriba.

Diferencias:

Función	Vértice	Eje de simetría
$y = x^2$	$(0,0)$	Eje y
$y = (x-1)^2$	$(1,0)$	Recta $x = 1$

C *Leer en LT*

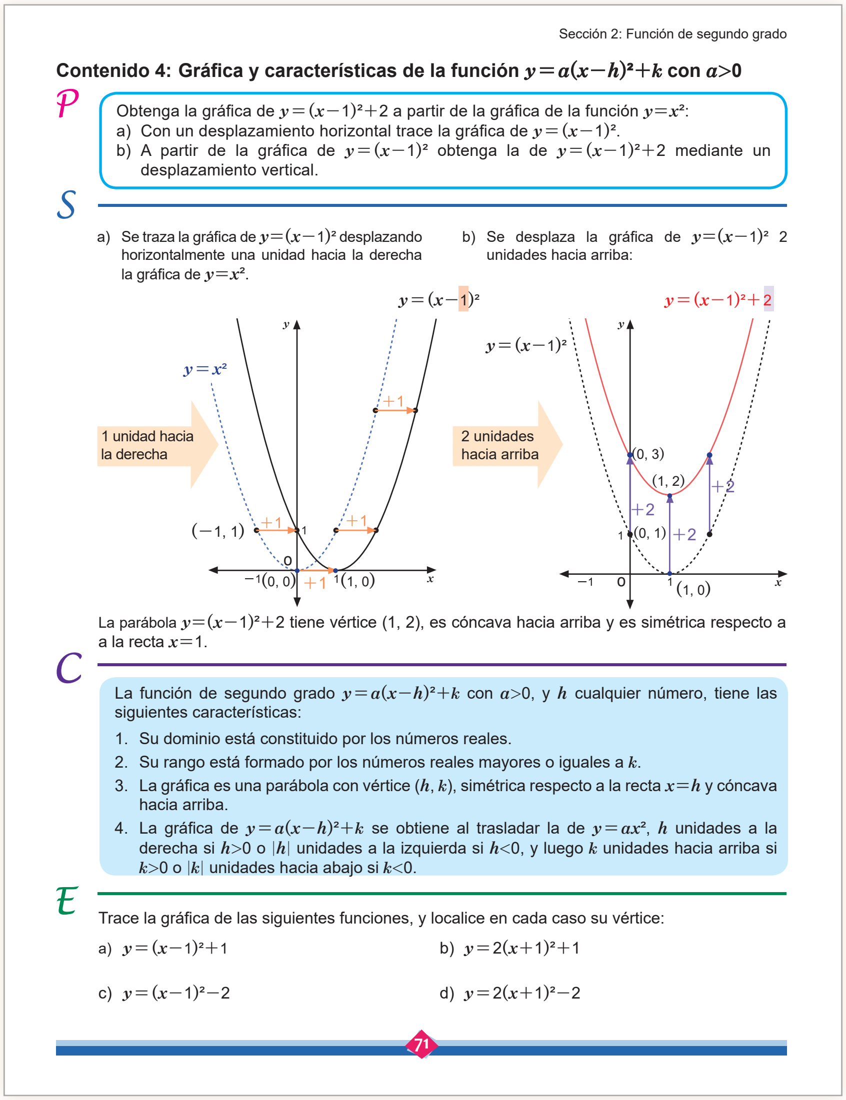
E *Leer en LT*



a) Vértice de $y = (x-2)^2$: $(2, 0)$.

d) Vértice de $y = -2(x+3)^2$: $(-3, 0)$

Contenido 4 Gráfica y características de la función $y=a(x-h)^2+k$ con $a>0$



Sección 2: Función de segundo grado

Contenido 4: Gráfica y características de la función $y=a(x-h)^2+k$ con $a>0$

P

Obtenga la gráfica de $y=(x-1)^2+2$ a partir de la gráfica de la función $y=x^2$:

a) Con un desplazamiento horizontal trace la gráfica de $y=(x-1)^2$.

b) A partir de $y=(x-1)^2$ obtenga la de $y=(x-1)^2+2$ mediante un desplazamiento vertical.

S

a) Se traza la gráfica de $y=(x-1)^2$ desplazando horizontalmente una unidad hacia la derecha la gráfica de $y=x^2$.

b) Se desplaza la gráfica de $y=(x-1)^2$ 2 unidades hacia arriba:

La parábola $y=(x-1)^2+2$ tiene vértice (1, 2), es cóncava hacia arriba y es simétrica respecto a a la recta $x=1$.

C

La función de segundo grado $y=a(x-h)^2+k$ con $a>0$, y h cualquier número, tiene las siguientes características:

1. Su dominio está constituido por los números reales.
2. Su rango está formado por los números reales mayores o iguales a k.
3. La gráfica es una parábola con vértice (h, k), simétrica respecto a la recta $x=h$ y cóncava hacia arriba.
4. La gráfica de $y=a(x-h)^2+k$ se obtiene al trasladar la de $y=ax^2$, h unidades a la derecha si $h>0$ o $|h|$ unidades a la izquierda si $h<0$, y luego k unidades hacia arriba si $k>0$ o $|k|$ unidades hacia abajo si $k<0$.

E

Trace la gráfica de las siguientes funciones, y localice en cada caso su vértice:

a) $y=(x-1)^2+1$

b) $y=2(x+1)^2+1$

c) $y=(x-1)^2-2$

d) $y=2(x+1)^2-2$

71

Aprendizajes esperados

Traza la gráfica de funciones de la forma $y=a(x-h)^2+k$, con $a>0$ y determina sus características.

Secuencia:

En la clase anterior se estudiaron las características de la gráfica y de la función $y=a(x-h)^2$. Ahora se hace el mismo tratamiento para la función $y=a(x-h)^2+k$ con $a>0$.

Puntos esenciales:

Explicar todas las transformaciones que se le hacen a la gráfica de la función $y=x^2$ para obtener la gráfica de $y=a(x-h)^2+k$ con $a>0$.

Destacar que para la función $y=a(x-h)^2+k$, con $a>0$:

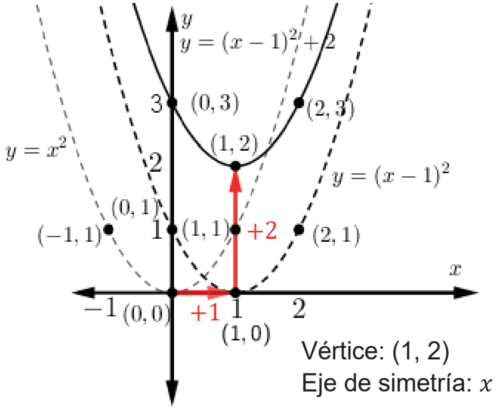
- ✓ El dominio son todos los números reales y su rango, todos los reales mayores o iguales a k.
- ✓ Su gráfica es una parábola cóncava hacia arriba con vértice (h, k) y eje de simetría la recta $x=h$.

C4: Gráfica y características de la función $y=a(x-h)^2+k$ con $a>0$

P Obtenga la gráfica de $y=(x-1)^2+2$ a partir de la función $y=x^2$:

S a) Con un desplazamiento horizontal trace la gráfica de $y=(x-1)^2$.

b) A partir de la gráfica de $y=(x-1)^2$ obtenga la de $y=(x-1)^2+2$ mediante un desplazamiento vertical.

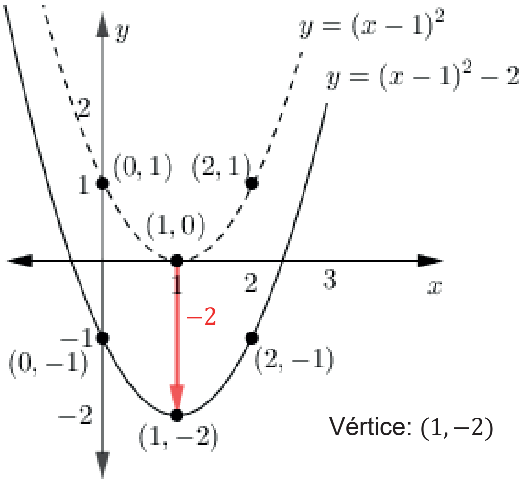


Vértice: (1, 2)
Eje de simetría: $x=1$

C (*Leer en LT*)

E Trace la gráfica de las siguientes funciones, y escriba su vértice.

c) $y=(x-1)^2-2$



Vértice: (1, −2)

Contenido 5 Gráfica y características de la función $y=a(x-h)^2+k$ con $a<0$

Aprendizajes esperados

Traza la gráfica de funciones de la forma $y=a(x-h)^2+k$, con $a<0$ y determina sus características.

Secuencia:

En la clase anterior se estudiaron las características de la gráfica y de la función $y=a(x-h)^2+k$ con $a>0$. Ahora se hace el mismo tratamiento para la función $y=a(x-h)^2+k$ con $a<0$.

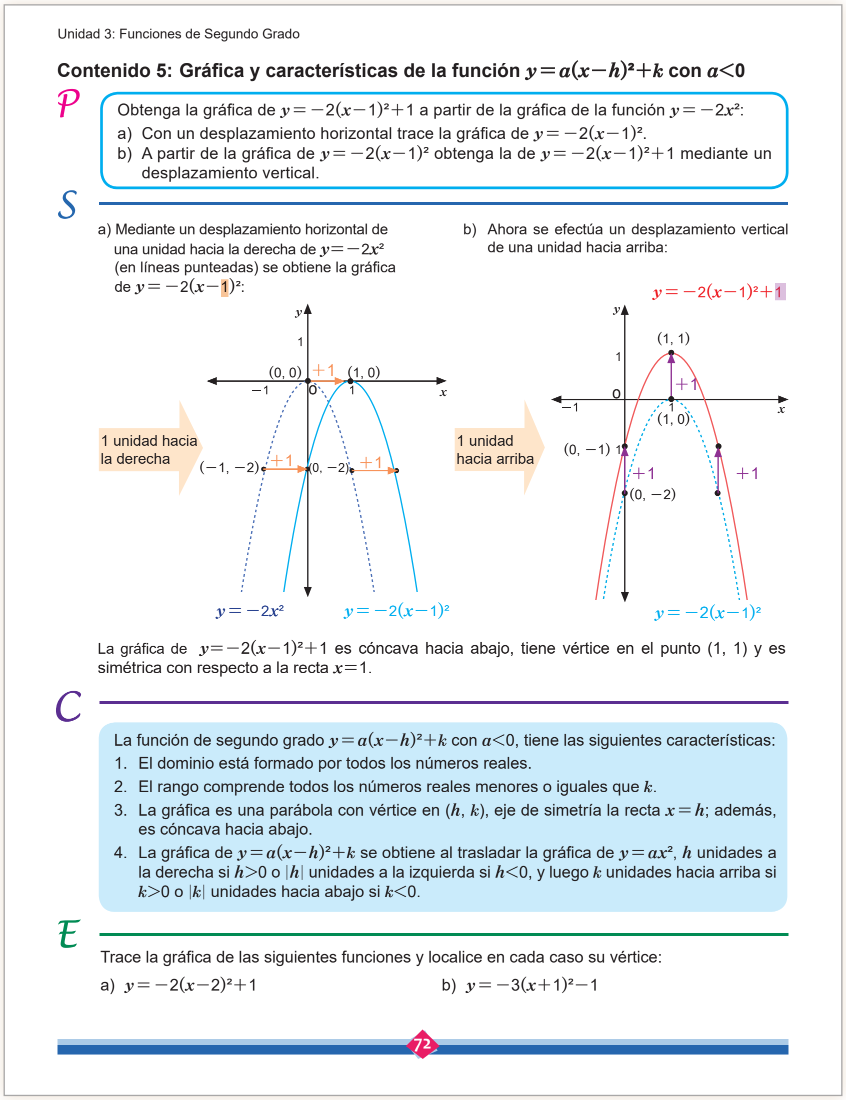
Puntos esenciales:

Explicar todas las transformaciones que se le hacen a la gráfica de la función $y=x^2$ para obtener la de $y=a(x-h)^2+k$ con $a<0$.

Destacar que para la función $y=a(x-h)^2+k$, con $a<0$:

- ✓ El dominio son todos los números reales y su rango, todos los reales menores o iguales a k.
- ✓ Su gráfica es una parábola cóncava hacia abajo con vértice (h, k) y eje de simetría la recta $x=h$.

Señalar que en general la forma $y=a(x-h)^2+k$ es conocida como ecuación canónica.



Unidad 3: Funciones de Segundo Grado

Contenido 5: Gráfica y características de la función $y=a(x-h)^2+k$ con $a<0$

P

Obtenga la gráfica de $y=-2(x-1)^2+1$ a partir de la gráfica de la función $y=-2x^2$:

a) Con un desplazamiento horizontal trace la gráfica de $y=-2(x-1)^2$.

b) A partir de la gráfica de $y=-2(x-1)^2$ obtenga la de $y=-2(x-1)^2+1$ mediante un desplazamiento vertical.

S

a) Mediante un desplazamiento horizontal de una unidad hacia la derecha de $y=-2x^2$ (en líneas punteadas) se obtiene la gráfica de $y=-2(x-1)^2$:

b) Ahora se efectúa un desplazamiento vertical de una unidad hacia arriba:

La gráfica de $y=-2(x-1)^2+1$ es cóncava hacia abajo, tiene vértice en el punto (1, 1) y es simétrica con respecto a la recta $x=1$.

C

La función de segundo grado $y=a(x-h)^2+k$ con $a<0$, tiene las siguientes características:

1. El dominio está formado por todos los números reales.
2. El rango comprende todos los números reales menores o iguales que k.
3. La gráfica es una parábola con vértice en (h, k), eje de simetría la recta $x=h$; además, es cóncava hacia abajo.
4. La gráfica de $y=a(x-h)^2+k$ se obtiene al trasladar la gráfica de $y=ax^2$, h unidades a la derecha si $h>0$ o $|h|$ unidades a la izquierda si $h<0$, y luego k unidades hacia arriba si $k>0$ o $|k|$ unidades hacia abajo si $k<0$.

E

Trace la gráfica de las siguientes funciones y localice en cada caso su vértice:

a) $y=-2(x-2)^2+1$

b) $y=-3(x+1)^2-1$

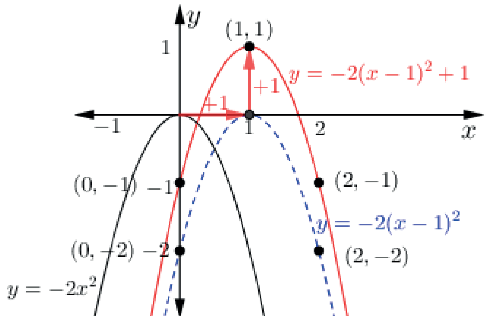
72

C5: Gráfica y características de la función $y=a(x-h)^2+k$ con $a<0$

P Obtenga la gráfica de $y=-2(x-1)^2+1$ a partir de la de $y=-2x^2$:

S a) Con un desplazamiento horizontal grafique $y=-2(x-1)^2$.

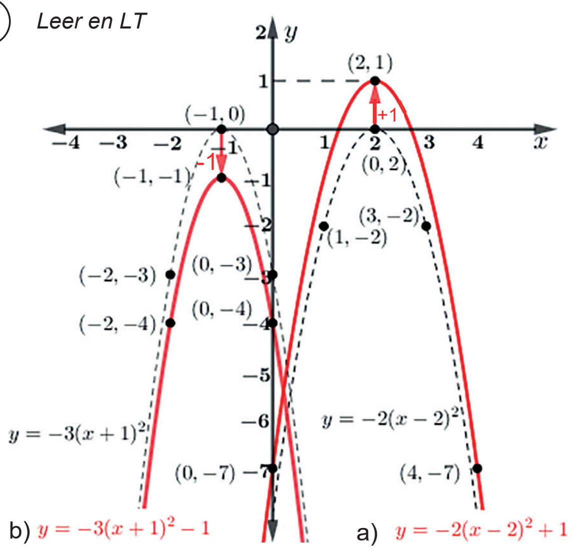
b) A partir de la gráfica de $=-2(x-1)^2$ obtenga la de $y=-2(x-1)^2+1$ mediante un desplazamiento vertical.



Vértice: $(1,1)$, Eje de simetría $x=1$

C *Leer en LT*

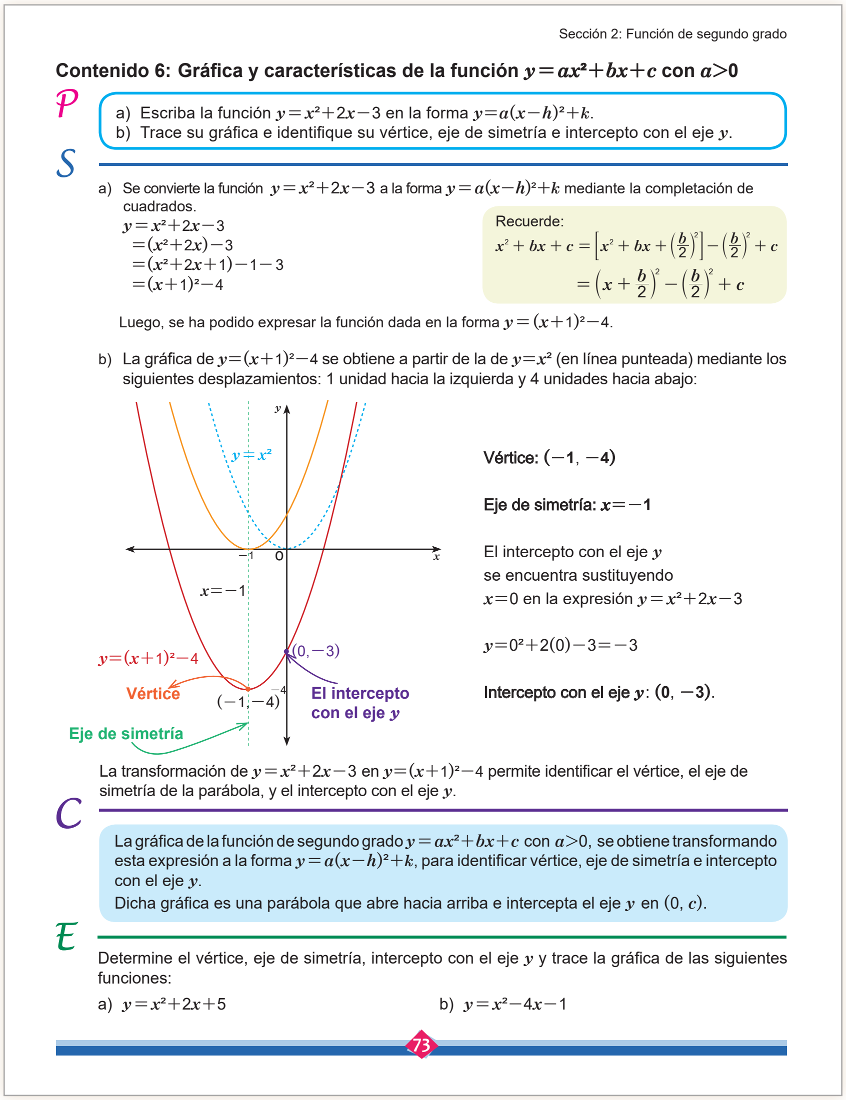
E *Leer en LT*



Vértice: $(-1,-1)$
Eje de simetría $x=-1$

Vértice: $(2,1)$
Eje de simetría $x=2$

Contenido 6 Gráfica y características de la función $y=ax^2+bx+c$ con $a>0$



Contenido 6: Gráfica y características de la función $y=ax^2+bx+c$ con $a>0$

P

a) Escriba la función $y=x^2+2x-3$ en la forma $y=a(x-h)^2+k$.
b) Trace su gráfica e identifique su vértice, eje de simetría e intercepto con el eje y.

S

a) Se convierte la función $y=x^2+2x-3$ a la forma $y=a(x-h)^2+k$ mediante la completación de cuadrados.

$$\begin{aligned} y&=x^2+2x-3\\ &=(x^2+2x)-3\\ &=(x^2+2x+1)-1-3\\ &=(x+1)^2-4 \end{aligned}$$

Recuerde:

$$x^2+bx+c=\left[x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2\right]-\left(\frac{b}{2}\right)^2+c$$
$$=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+c$$

Luego, se ha podido expresar la función dada en la forma $y=(x+1)^2-4$.

b) La gráfica de $y=(x+1)^2-4$ se obtiene a partir de la de $y=x^2$ (en línea punteada) mediante los siguientes desplazamientos: 1 unidad hacia la izquierda y 4 unidades hacia abajo:

Vértice: (−1, −4)

Eje de simetría: $x=-1$

El intercepto con el eje y se encuentra sustituyendo $x=0$ en la expresión $y=x^2+2x-3$

$y=0^2+2(0)-3=-3$

Intercepto con el eje y: (0, −3).

La transformación de $y=x^2+2x-3$ en $y=(x+1)^2-4$ permite identificar el vértice, el eje de simetría de la parábola, y el intercepto con el eje y.

C

La gráfica de la función de segundo grado $y=ax^2+bx+c$ con $a>0$, se obtiene transformando esta expresión a la forma $y=a(x-h)^2+k$, para identificar vértice, eje de simetría e intercepto con el eje y.
Dicha gráfica es una parábola que abre hacia arriba e intercepta el eje y en $(0, c)$.

E

Determine el vértice, eje de simetría, intercepto con el eje y y trace la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y=x^2+2x+5$

b) $y=x^2-4x-1$

Aprendizajes esperados

Traza la gráfica de funciones de la forma $y=ax^2+bx+c$ con $a>0$ y determina sus características.

Secuencia:

En la clase anterior se estudiaron las características de la gráfica y de la función $y=a(x-h)^2+k$ con $a<0$. Ahora se hace el mismo tratamiento para la función $y=ax^2+bx+c$ con $a>0$.

Puntos esenciales:

Recordar el procedimiento que se sigue para completar cuadrados.

Escribir la función $y=ax^2+bx+c$ en la forma $y=a(x-h)^2+k$, para así obtener su gráfica.

Repasar las características de la gráfica y de la función $y=a(x-h)^2+k$, con $a>0$.

Indicar las características de la gráfica y de la función $y=ax^2+bx+c$ a partir de las de $y=a(x-h)^2+k$.

Notar que dicha parábola corta al eje y en el punto $(0, c)$.

C6: Gráfica y características de la función $y=ax^2+bx+c$ con $a>0$

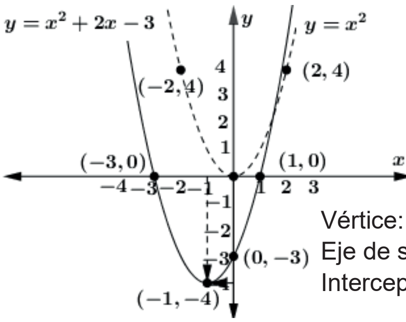
P a) Escriba la función $y=x^2+2x-3$ en la forma $y=a(x-h)^2+k$

S b) Trace la gráfica de esta e identifique vértice, eje de simetría e intercepto con el eje y.

a) $$\begin{aligned} y&=x^2+2x-3\\ &=(x^2+2x)-3\\ &=(x^2+2x+1)-1-3\\ &=(x+1)^2-4 \end{aligned}$$

$$x^2+bx+c=\left[x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2\right]-\left(\frac{b}{2}\right)^2+c$$
$$=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+c$$

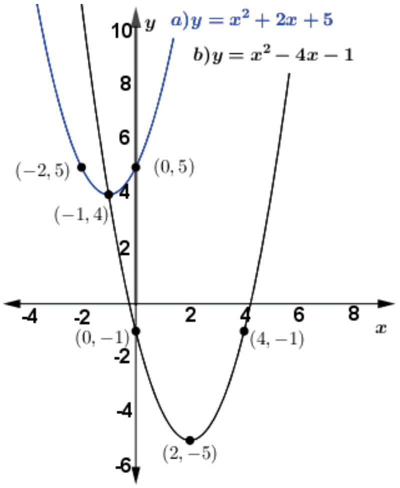
b) $y=x^2+2x-3$



Vértice: $(-1,-4)$
Eje de simetría: $x=-1$
Intercepto eje y: $(0,-3)$

C Leer en LT

E Leer en LT



a) $y=x^2+2x+5$
$=(x+1)^2+4$
Vértice: $(-1, 4)$
Eje simetría: $x=-1$
Intercepto eje y: $(0, 5)$

b) $y=x^2-4x-1$
$=(x-2)^2-5$
Vértice: $(2,-5)$
Eje simetría: $x=2$
Intercepto eje y: $(0, -1)$

Contenido 7 Gráfica y características de la función $y=ax^2+bx+c$ con $a<0$

Aprendizajes esperados

Traza la gráfica de funciones de la forma $y=ax^2+bx+c$ con $a<0$ y determina sus características.

Secuencia:

En la clase anterior se estudiaron las características de la gráfica y de la función $y=ax^2+bx+c$ con $a>0$. Ahora se hace el mismo tratamiento para la función $y=ax^2+bx+c$ con $a<0$.

Puntos esenciales:

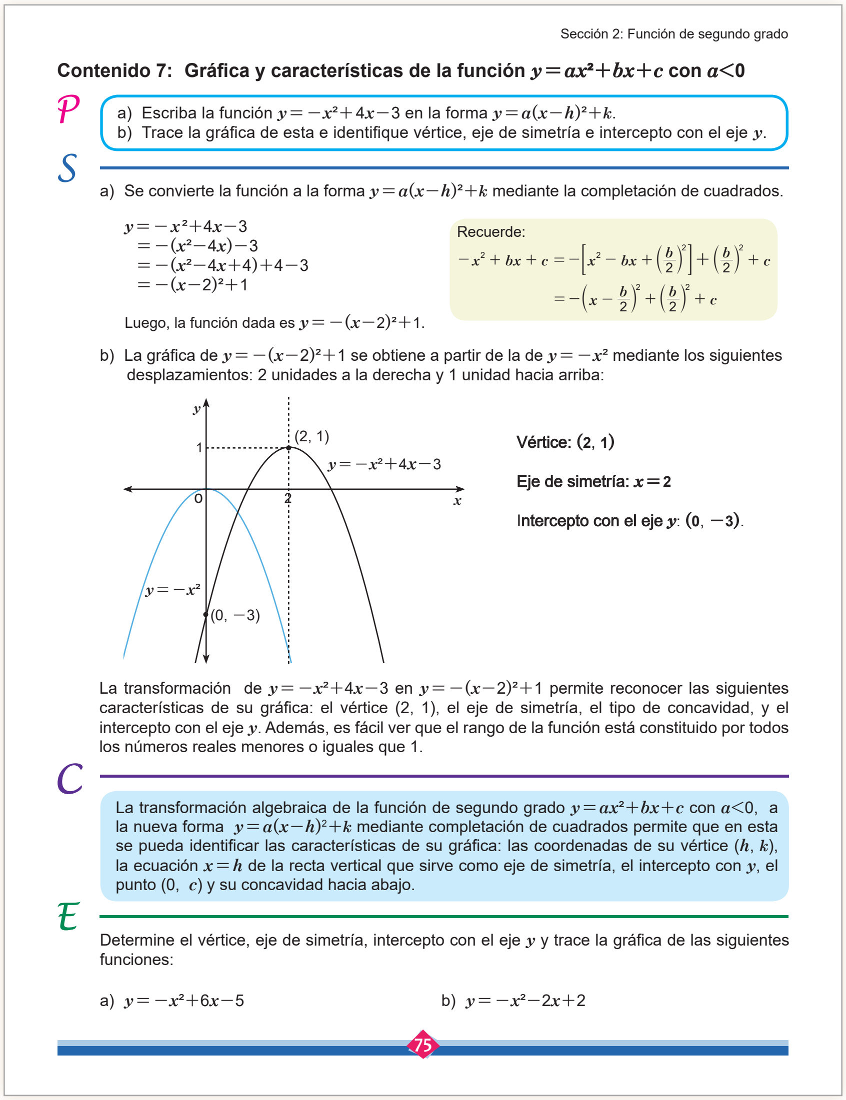
Recordar el procedimiento que se sigue para completar cuadrados.

Escribir la función $y=ax^2+bx+c$ en la forma $y=a(x-h)^2+k$, para así obtener su gráfica.

Repasar las características de la gráfica y de la función $y=a(x-h)^2+k$, con $a<0$.

Indicar las características de la gráfica y de la función $y=ax^2+bx+c$ a partir de las de $y=a(x-h)^2+k$.

Notar que dicha parábola corta al eje y en el punto $(0, c)$.



Sección 2: Función de segundo grado

Contenido 7: Gráfica y características de la función $y=ax^2+bx+c$ con $a<0$

P

a) Escriba la función $y=-x^2+4x-3$ en la forma $y=a(x-h)^2+k$.
b) Trace la gráfica de esta e identifique vértice, eje de simetría e intercepto con el eje y.

S

a) Se convierte la función a la forma $y=a(x-h)^2+k$ mediante la completación de cuadrados.

$$\begin{aligned} y&=-x^2+4x-3\\ &=-(x^2-4x)-3\\ &=-(x^2-4x+4)+4-3\\ &=-(x-2)^2+1 \end{aligned}$$

Recuerde:

$$\begin{aligned} -x^2+bx+c&=-\left[x^2-bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2\right]+\left(\frac{b}{2}\right)^2+c\\ &=-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+c \end{aligned}$$

Luego, la función dada es $y=-(x-2)^2+1$.

b) La gráfica de $y=-(x-2)^2+1$ se obtiene a partir de la de $y=-x^2$ mediante los siguientes desplazamientos: 2 unidades a la derecha y 1 unidad hacia arriba:

Vértice: (2, 1)

Eje de simetría: $x=2$

Intercepto con el eje y: (0, −3).

La transformación de $y=-x^2+4x-3$ en $y=-(x-2)^2+1$ permite reconocer las siguientes características de su gráfica: el vértice (2, 1), el eje de simetría, el tipo de concavidad, y el intercepto con el eje y. Además, es fácil ver que el rango de la función está constituido por todos los números reales menores o iguales que 1.

C

La transformación algebraica de la función de segundo grado $y=ax^2+bx+c$ con $a<0$, a la nueva forma $y=a(x-h)^2+k$ mediante completación de cuadrados permite que en esta se pueda identificar las características de su gráfica: las coordenadas de su vértice (h, k), la ecuación $x=h$ de la recta vertical que sirve como eje de simetría, el intercepto con y, el punto $(0, c)$ y su concavidad hacia abajo.

E

Determine el vértice, eje de simetría, intercepto con el eje y y trace la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y=-x^2+6x-5$

b) $y=-x^2-2x+2$

75

C7: Gráfica y características de la función $y=ax^2+bx+c$ con $a<0$

Ⓟ a) Escriba la función $y=-x^2+4x-3$ en la forma $y=a(x-h)^2+k$.

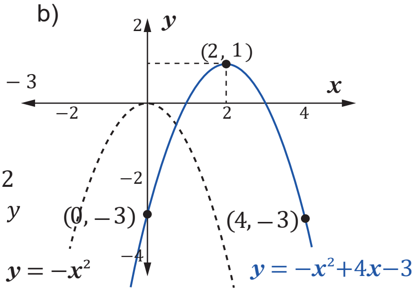
Ⓢ b) Trace la gráfica de esta e identifique vértice, eje de simetría e intercepto con el eje y.

$$\begin{aligned} -x^2+bx+c&=-\left[x^2-bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2\right]+\left(\frac{b}{2}\right)^2+c\\ &=-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+c \end{aligned}$$

a)
$$\begin{aligned} y&=-x^2+4x-3\\ &=-(x^2-4x)-3\\ &=-(x^2-4x+4)+4-3\\ &=-(x-2)^2+1 \end{aligned}$$

Vértice: $(2,1)$
Eje de simetría: $x=2$
El intercepto con eje y es $(0,-3)$.

b)



Ⓒ Leer en LT

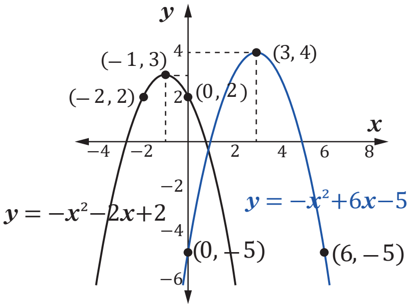
Ⓔ Leer en LT

a)
$$\begin{aligned} y&=-x^2+6x-5\\ &=-(x^2-6x)-5\\ &=-(x^2-6x+9)+9-5\\ &=-(x-3)^2+4 \end{aligned}$$

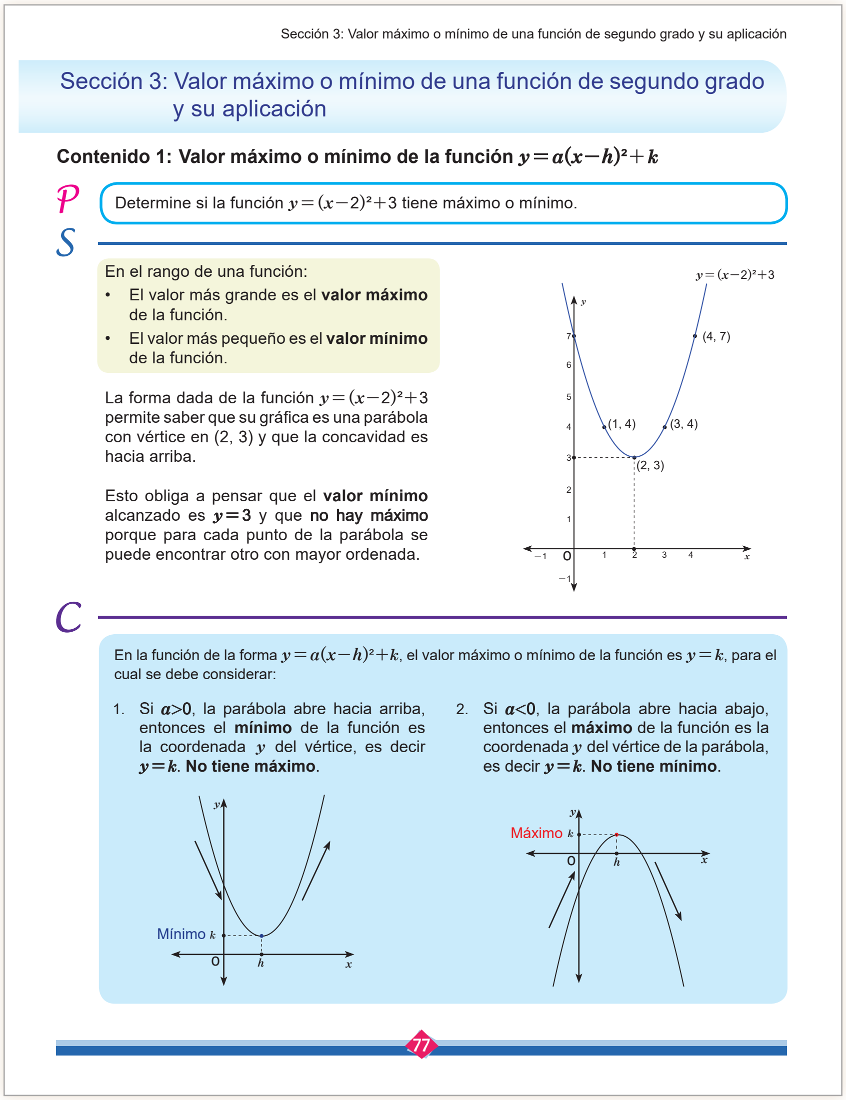
Vértice: $(3,4)$
Eje de simetría: $x=3$
El intercepto con eje y es $(0,-5)$.

b)
$$\begin{aligned} y&=-x^2-2x+2\\ &=-(x^2+2x)+2\\ &=-(x^2+2x+1)+1+2\\ &=-(x+1)^2+3 \end{aligned}$$

Vértice: $(-1,3)$
Eje de simetría: $x=-1$
El intercepto con eje y es $(0,2)$.



Contenido 1 Valor máximo o mínimo de la función $y=a(x-h)^2+k$



Sección 3: Valor máximo o mínimo de una función de segundo grado y su aplicación

Sección 3: Valor máximo o mínimo de una función de segundo grado y su aplicación

Contenido 1: Valor máximo o mínimo de la función $y=a(x-h)^2+k$

P Determine si la función $y=(x-2)^2+3$ tiene máximo o mínimo.

S

En el rango de una función:

- El valor más grande es el **valor máximo** de la función.
- El valor más pequeño es el **valor mínimo** de la función.

La forma dada de la función $y=(x-2)^2+3$ permite saber que su gráfica es una parábola con vértice en (2, 3) y que la concavidad es hacia arriba.

Esto obliga a pensar que el **valor mínimo** alcanzado es $y=3$ y que **no hay máximo** porque para cada punto de la parábola se puede encontrar otro con mayor ordenada.

C

En la función de la forma $y=a(x-h)^2+k$, el valor máximo o mínimo de la función es $y=k$, para el cual se debe considerar:

1. Si $a>0$, la parábola abre hacia arriba, entonces el **mínimo** de la función es la coordenada y del vértice, es decir $y=k$. **No tiene máximo.**
2. Si $a<0$, la parábola abre hacia abajo, entonces el **máximo** de la función es la coordenada y del vértice de la parábola, es decir $y=k$. **No tiene mínimo.**

77

Aprendizajes esperados

Determina el valor máximo o mínimo de una función de segundo grado.

Secuencia:

En las clases anteriores se han estudiado las características de la gráfica y de la función $y=ax^2+bx+c$. Ahora se determinan valores máximos o mínimos de la función $y=a(x-h)^2+k$.

Puntos esenciales:

Recordar las características de la gráfica y de la función $y=a(x-h)^2+k$.

Destacar que:

✓ Si $a>0$, la función alcanza un mínimo y este es el valor $y=k$.

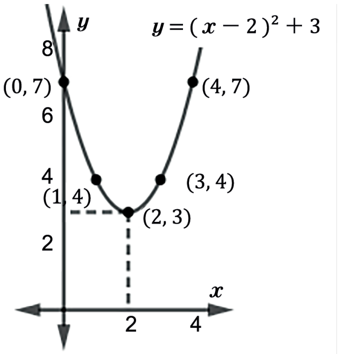
✓ Si $a<0$, la función alcanza un máximo y este es el valor $y=k$.

Determinar el valor máximo o mínimo de funciones de la forma $y=a(x-h)^2+k$ a partir del signo que tenga a.

S3: Valor máximo o mínimo de una función de segundo grado y su aplicación
C1: Valor máximo o mínimo de la función $y=a(x-h)^2+k$

P Determine si la función $y=(x-2)^2+3$ tiene máximo o mínimo.

S



El mínimo valor de y es 3, lo cual se da en el vértice.

Como la parábola abre hacia arriba, no hay un valor máximo para y.

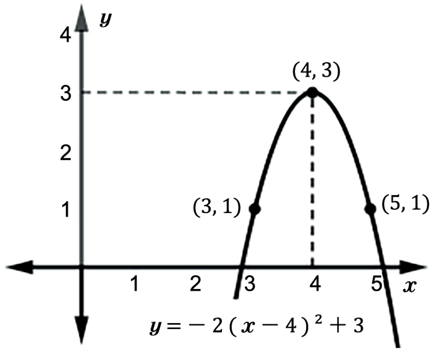
C $y=a(x-h)^2+k$

1. Si $a>0$, entonces $y=k$ es mínimo.

2. Si $a<0$, entonces $y=k$ es máximo.

Ej Determine si la función $y=-2(x-4)^2+3$ tiene máximo o mínimo.

S



El vértice es (4,3), la parábola abre hacia abajo; $y=3$ es el máximo y no existe el valor mínimo.

Contenido 1 Valor máximo o mínimo de la función $y=a(x-h)^2+k$

Aprendizajes esperados

Determina el valor máximo o mínimo de una función de segundo grado.

Secuencia:

En las clases anteriores se han estudiado las características de la gráfica y de la función $y=ax^2+bx+c$. Ahora se determinan valores máximos o mínimos de la función $y=a(x-h)^2+k$.

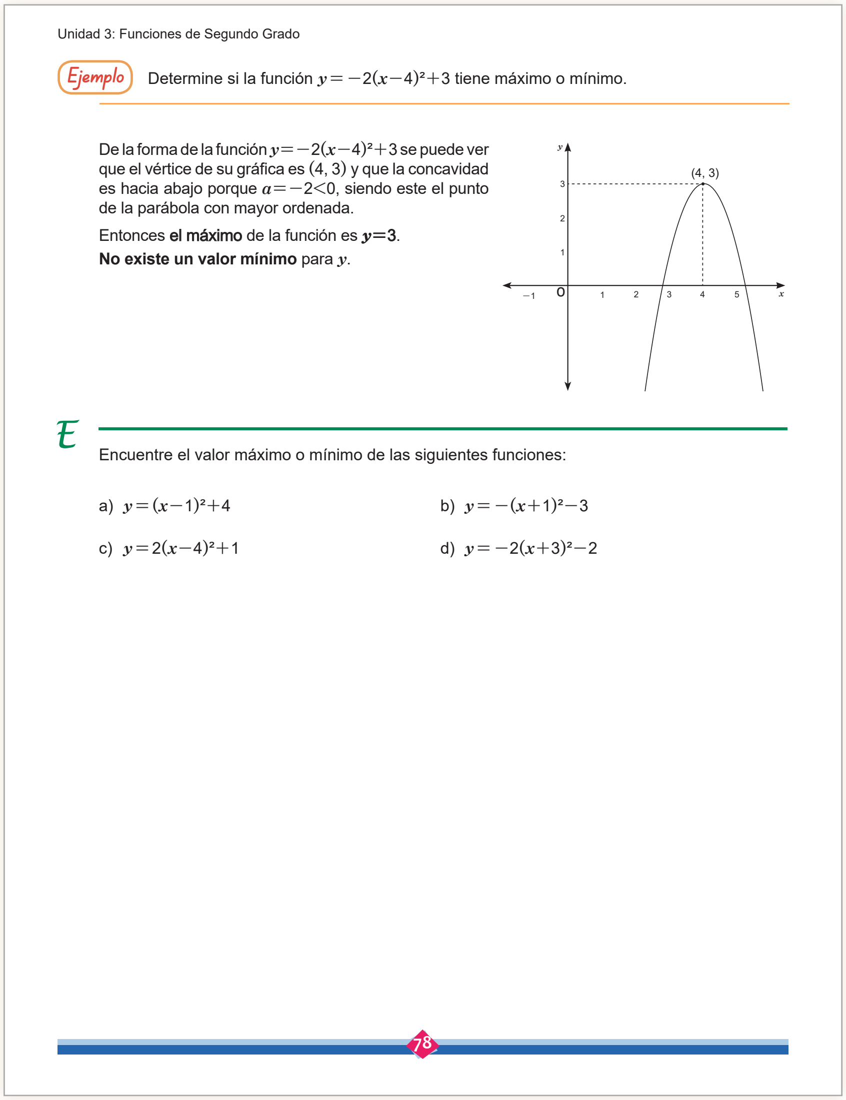
Puntos esenciales:

Recordar las características de la gráfica y de la función $y=a(x-h)^2+k$.

Destacar que:

- ✓ Si $a>0$, la función alcanza un máximo y este es el valor $y=k$.
- ✓ Si $a<0$, la función alcanza un mínimo y este es el valor $y=k$.

Determinar el valor máximo o mínimo de funciones de la forma $y=a(x-h)^2+k$ a partir del signo que tenga a.



Unidad 3: Funciones de Segundo Grado

Ejemplo Determine si la función $y=-2(x-4)^2+3$ tiene máximo o mínimo.

De la forma de la función $y=-2(x-4)^2+3$ se puede ver que el vértice de su gráfica es (4, 3) y que la concavidad es hacia abajo porque $a=-2<0$, siendo este el punto de la parábola con mayor ordenada.

Entonces **el máximo** de la función es $y=3$.

No existe un valor mínimo para y.

E

Encuentre el valor máximo o mínimo de las siguientes funciones:

a) $y=(x-1)^2+4$

b) $y=-(x+1)^2-3$

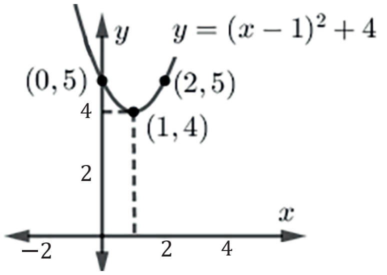
c) $y=2(x-4)^2+1$

d) $y=-2(x+3)^2-2$

78

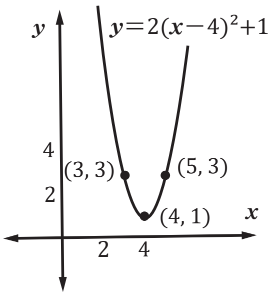
E Encuentre el valor máximo o mínimo de las siguientes funciones:

a) $y=(x-1)^2+4$



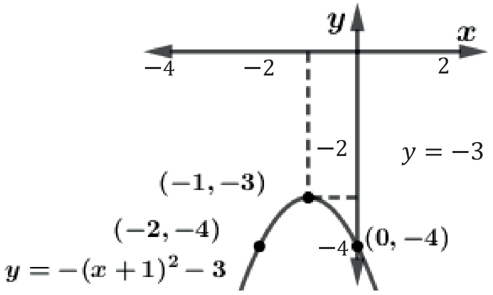
$y=4$ es el mínimo.

c) $y=2(x-4)^2+1$



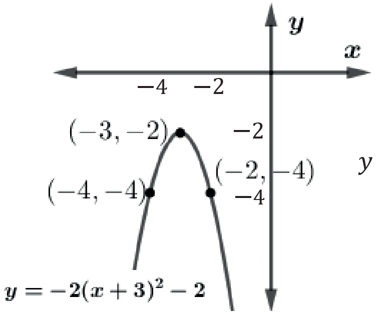
$y=1$ es el mínimo.

b) $y=-(x+1)^2-3$



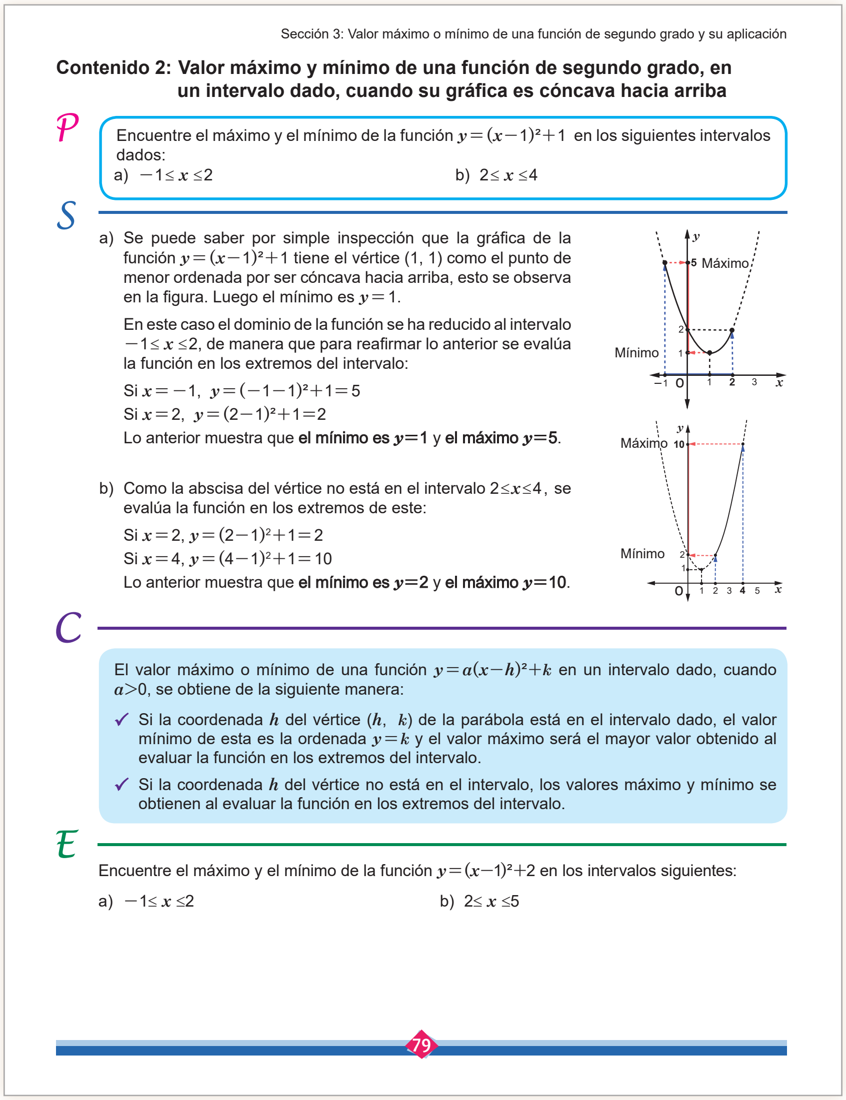
$y=-3$ es el máximo.

d) $y=-2(x+3)^2-2$



$y=-2$ es el máximo.

Contenido 2 Valor máximo y mínimo de una función de segundo grado, en un intervalo dado, cuando su gráfica es cóncava hacia arriba



Sección 3: Valor máximo o mínimo de una función de segundo grado y su aplicación

Contenido 2: Valor máximo y mínimo de una función de segundo grado, en un intervalo dado, cuando su gráfica es cóncava hacia arriba

P

Encuentre el máximo y el mínimo de la función $y=(x-1)^2+1$ en los siguientes intervalos dados:

a) $-1\leq x\leq 2$ b) $2\leq x\leq 4$

S

a) Se puede saber por simple inspección que la gráfica de la función $y=(x-1)^2+1$ tiene el vértice (1, 1) como el punto de menor ordenada por ser cóncava hacia arriba, esto se observa en la figura. Luego el mínimo es $y=1$.

En este caso el dominio de la función se ha reducido al intervalo $-1\leq x\leq 2$, de manera que para reafirmar lo anterior se evalúa la función en los extremos del intervalo:

Si $x=-1$, $y=(-1-1)^2+1=5$
Si $x=2$, $y=(2-1)^2+1=2$
Lo anterior muestra que **el mínimo es $y=1$** y **el máximo $y=5$**.

b) Como la abscisa del vértice no está en el intervalo $2\leq x\leq 4$, se evalúa la función en los extremos de este:

Si $x=2$, $y=(2-1)^2+1=2$
Si $x=4$, $y=(4-1)^2+1=10$
Lo anterior muestra que **el mínimo es $y=2$** y **el máximo $y=10$**.

C

El valor máximo o mínimo de una función $y=a(x-h)^2+k$ en un intervalo dado, cuando $a>0$, se obtiene de la siguiente manera:

- ✓ Si la coordenada h del vértice $(h,\ k)$ de la parábola está en el intervalo dado, el valor mínimo de esta es la ordenada $y=k$ y el valor máximo será el mayor valor obtenido al evaluar la función en los extremos del intervalo.
- ✓ Si la coordenada h del vértice no está en el intervalo, los valores máximo y mínimo se obtienen al evaluar la función en los extremos del intervalo.

E

Encuentre el máximo y el mínimo de la función $y=(x-1)^2+2$ en los intervalos siguientes:

a) $-1\leq x\leq 2$ b) $2\leq x\leq 5$

79

Aprendizajes esperados

Determina el valor máximo y mínimo de una función de segundo grado, en un intervalo dado, cuando su gráfica es cóncava hacia arriba.

Secuencia:

En la clase anterior se determinaron valores máximos o mínimos de funciones del tipo $y=a(x-h)^2+k$. Ahora se determinan valores máximos y mínimos restringiendo el dominio de funciones de segundo grado cuando su gráfica abre hacia arriba.

Puntos esenciales:

Explicar que al restringir el dominio de la función de segundo grado se obtiene una nueva función llamada restricción de la función original.

Destacar que al determinar el valor máximo y mínimo de una función de segundo grado de este tipo se presentan dos casos:

- ✓ Si la coordenada h del vértice está en el intervalo que funge como dominio de la función, el valor mínimo de esta es $y=k$ y el valor máximo es el mayor valor obtenido al evaluar la función en los extremos del intervalo.
- ✓ Si la coordenada h del vértice no está en el intervalo que funge como dominio de la función, los valores máximo y mínimo se obtienen al evaluar la función en los extremos del intervalo.

C2: Valor máximo y mínimo de una función de segundo grado, en un intervalo dado, cuando su gráfica es cóncava hacia arriba

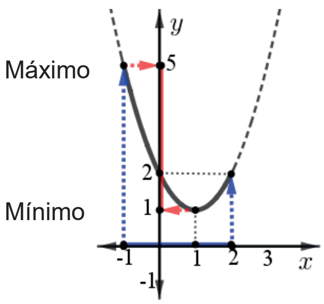
Ⓟ Encuentre el máximo y el mínimo de la función

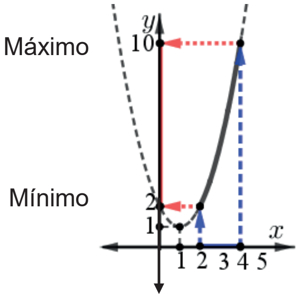
$y=(x-1)^2+1$ en los siguientes intervalos dados:

a) $-1\leq x\leq 2$ b) $2\leq x\leq 4$

Ⓢ Para $x=-1$, $y=(-1-1)^2+1=5$.
Para $x=2$, $y=(2-1)^2+1=2$.
Vértice (1,1) y h=1 está en el intervalo.
Mínimo: $y=1$, Máximo: $y=5$.

Para $x=2$, $y=(2-1)^2+1=2$.
Para $x=4$, $y=(4-1)^2+1=10$.
Vértice (1,1) y h=1 no está en el intervalo.
Mínimo: $y=2$, Máximo: $y=10$.

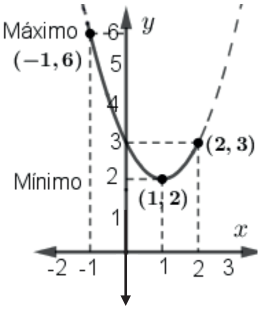


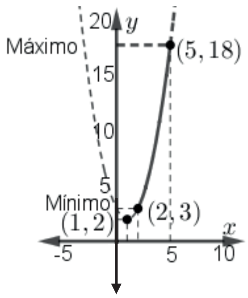


Ⓒ *Explicar verbalmente*

Ⓔ Encuentre el máximo y el mínimo de la función $y=(x-1)^2+2$ en los intervalos siguientes:

a) $-1\leq x\leq 2$ b) $2\leq x\leq 5$





$y=6$, es Máximo
$y=2$, es Mínimo

$y=3$, es Mínimo
$y=18$, es Máximo

Contenido 3 Valor máximo y mínimo de una función de segundo grado, en un intervalo dado, cuando su gráfica es cóncava hacia abajo

Aprendizajes esperados

Determina el valor máximo y mínimo de una función de segundo grado, en un intervalo dado, cuando su gráfica es cóncava hacia abajo.

Secuencia:

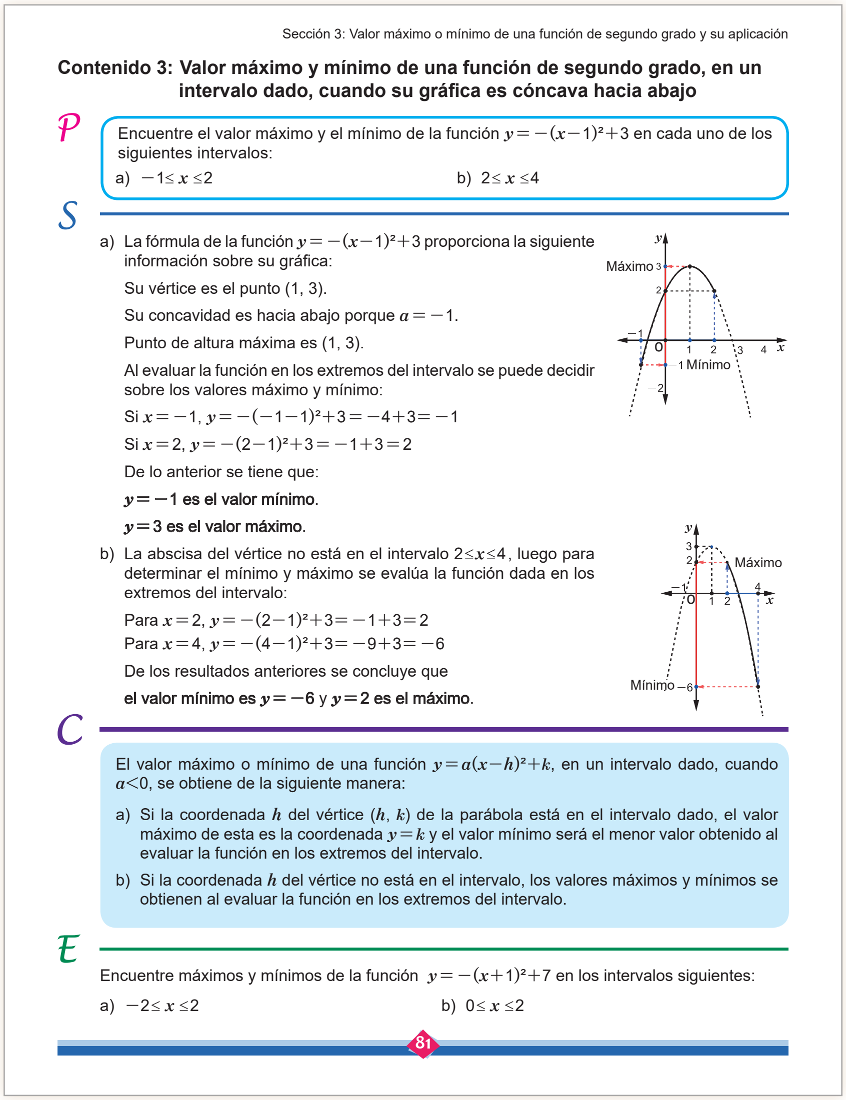
En la clase anterior se determinaron valores máximos y mínimos de funciones de segundo grado cuando su gráfica abre hacia arriba. Ahora se hace el mismo estudio cuando la parábola abre hacia abajo.

Puntos esenciales:

Destacar que al determinar el valor máximo y mínimo de una función de segundo grado de este tipo se presentan dos casos:

- ✓ Si la coordenada h del vértice está en el intervalo que funge como dominio de la función, el valor máximo de esta es $y = k$ y el valor mínimo es el menor valor obtenido al evaluar la función en los extremos del intervalo.
- ✓ Si la coordenada h del vértice no está en el intervalo que funge como dominio de la función, los valores máximo y mínimo se obtienen al evaluar la función en los extremos del intervalo.

Resaltar que los valores máximo y mínimo de una función definida en un intervalo son valores correspondientes a y.



Sección 3: Valor máximo o mínimo de una función de segundo grado y su aplicación

Contenido 3: Valor máximo y mínimo de una función de segundo grado, en un intervalo dado, cuando su gráfica es cóncava hacia abajo

P

Encuentre el valor máximo y el mínimo de la función $y = -(x-1)^2+3$ en cada uno de los siguientes intervalos:

a) $-1 \leq x \leq 2$ b) $2 \leq x \leq 4$

S

a) La fórmula de la función $y = -(x-1)^2+3$ proporciona la siguiente información sobre su gráfica:

Su vértice es el punto (1, 3).

Su concavidad es hacia abajo porque $a = -1$.

Punto de altura máxima es (1, 3).

Al evaluar la función en los extremos del intervalo se puede decidir sobre los valores máximo y mínimo:

Si $x = -1$, $y = -(-1-1)^2+3 = -4+3 = -1$

Si $x = 2$, $y = -(2-1)^2+3 = -1+3 = 2$

De lo anterior se tiene que:

$y = -1$ es el valor mínimo.

$y = 3$ es el valor máximo.

b) La abscisa del vértice no está en el intervalo $2 \leq x \leq 4$, luego para determinar el mínimo y máximo se evalúa la función dada en los extremos del intervalo:

Para $x = 2$, $y = -(2-1)^2+3 = -1+3 = 2$

Para $x = 4$, $y = -(4-1)^2+3 = -9+3 = -6$

De los resultados anteriores se concluye que

el valor mínimo es $y = -6$ y $y = 2$ es el máximo.

C

El valor máximo o mínimo de una función $y = a(x-h)^2+k$, en un intervalo dado, cuando $a<0$, se obtiene de la siguiente manera:

a) Si la coordenada h del vértice (h, k) de la parábola está en el intervalo dado, el valor máximo de esta es la coordenada $y = k$ y el valor mínimo será el menor valor obtenido al evaluar la función en los extremos del intervalo.

b) Si la coordenada h del vértice no está en el intervalo, los valores máximos y mínimos se obtienen al evaluar la función en los extremos del intervalo.

E

Encuentre máximos y mínimos de la función $y = -(x+1)^2+7$ en los intervalos siguientes:

a) $-2 \leq x \leq 2$ b) $0 \leq x \leq 2$

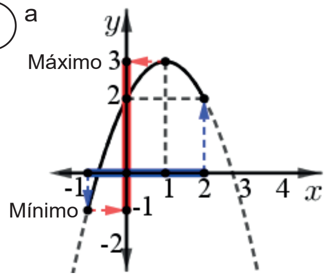
81

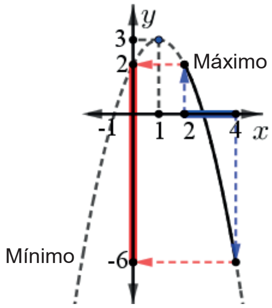
C3: Valore máximo y mínimo de una función de segundo grado, en un intervalo dado, cuando su gráfica es cóncava hacia abajo

Ⓟ Encuentre el valor máximo y el mínimo de la función $y = -(x-1)^2 + 3$ en los siguientes intervalos:

a) $-1 \leq x \leq 2$ b) $2 \leq x \leq 4$

Ⓢ a





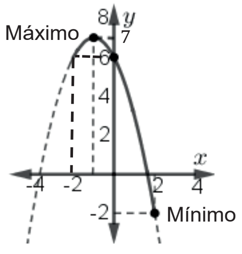
Para $x = -1$, $y = -(-1-1)^2 + 3 = -1$.
Para $x = 2$, $y = -(2-1)^2 + 3 = 2$.
El vértice $(1, 3)$ k=1 está en el intervalo.
Mínimo $y = -1$, Máximo $y = 3$.

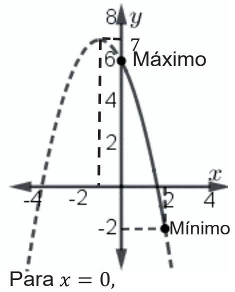
Para $x = 2$, $y = -(2-1)^2 + 3 = 2$.
Para $x = 4$, $y = -(4-1)^2 + 3 = -6$
El vértice $(1, 2)$ k=1 no esté en el intervalo.
Máximo $y = 2$, Mínimo $y = -6$.

Ⓒ *(Explicar verbalmente)*

Ⓔ Encuentre máximos y mínimos de la función $y = -(x+1)^2 + 7$ en los intervalos siguientes.

a) $-2 \leq x \leq 2$ b) $0 \leq x \leq 2$





Para $x = -2$,
$y = -(-2+1)^2 + 7 = 6$.
Para $x = 2$,
$y = -(2+1)^2 + 7 = -2$.
El vértice $(-1, 7)$ k=-1 está en el intervalo.

Máximo $y = 7$

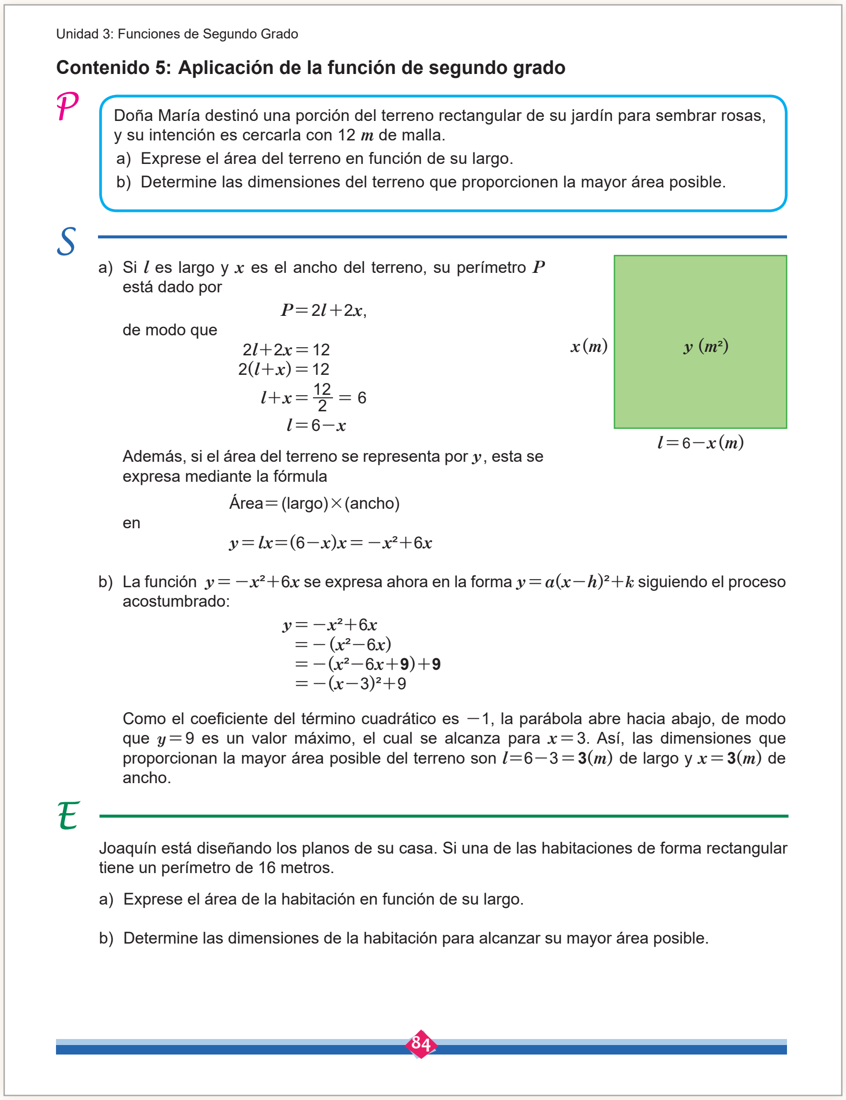
Mínimo $y = -2$

Para $x = 0$,
$y = -(0+1)^2 + 7 = 6$.
Para $x = 2$,
$y = -(2+1)^2 + 7 = -2$.
El vértice $(-1, 7)$ k=-1 no está en el intervalo.

Máximo $y = 6$

Mínimo $y = -2$

Contenido 5 Aplicación de la función de segundo grado



Unidad 3: Funciones de Segundo Grado

Contenido 5: Aplicación de la función de segundo grado

P Doña María destinó una porción del terreno rectangular de su jardín para sembrar rosas, y su intención es cercarla con 12 m de malla.

a) Exprese el área del terreno en función de su largo.

b) Determine las dimensiones del terreno que proporcionen la mayor área posible.

S

a) Si l es largo y x es el ancho del terreno, su perímetro P está dado por

$$P=2l+2x,$$

de modo que

$$\begin{aligned}2l+2x&=12\\2(l+x)&=12\\l+x&=\frac{12}{2}=6\\l&=6-x\end{aligned}$$

Además, si el área del terreno se representa por y, esta se expresa mediante la fórmula

Área = (largo) × (ancho)

en

$$y=lx=(6-x)x=-x^2+6x$$

b) La función $y=-x^2+6x$ se expresa ahora en la forma $y=a(x-h)^2+k$ siguiendo el proceso acostumbrado:

$$\begin{aligned}y&=-x^2+6x\\&=-(x^2-6x)\\&=-(x^2-6x+\mathbf{9})+\mathbf{9}\\&=-(x-3)^2+9\end{aligned}$$

Como el coeficiente del término cuadrático es -1, la parábola abre hacia abajo, de modo que $y=9$ es un valor máximo, el cual se alcanza para $x=3$. Así, las dimensiones que proporcionan la mayor área posible del terreno son $l=6-3=\mathbf{3}(m)$ de largo y $x=\mathbf{3}(m)$ de ancho.

E

Joaquín está diseñando los planos de su casa. Si una de las habitaciones de forma rectangular tiene un perímetro de 16 metros.

a) Exprese el área de la habitación en función de su largo.

b) Determine las dimensiones de la habitación para alcanzar su mayor área posible.

84

Aprendizajes esperados

Resuelve situaciones aplicando funciones de segundo grado.

Secuencia:

En las clases anteriores se determinaron valores máximos y mínimos para funciones de segundo grado con dominio restringido. Ahora se aplican para encontrar la solución óptima de una determinada situación.

Puntos esenciales:

Recordar:

- ✓ Cómo se expresa el perímetro y el área de un rectángulo.
- ✓ El procedimiento que se sigue para completar cuadrados.
- ✓ Cuándo una función de segundo grado alcanza un máximo o un mínimo y cuál es dicho valor.

Expresar el área de un rectángulo en función de su ancho o largo mediante una expresión de segundo grado.

Determinar la solución óptima de una determinada situación.

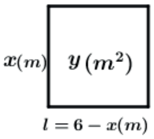
C5: Aplicaciones de la función de segundo grado

P El terreno para sembrar rosas se quiere cercar con 12 metros de malla.

a) Expese el área del terreno en función de su largo.

b) Determine las dimensiones del terreno que proporcionen la mayor área posible.

S a) Si l es el largo y x el ancho del terreno, su perímetro P está dado por:



$$\begin{aligned}P&=2l+2x\\2l+2x&=12\\2(l+x)&=12\\l+x&=\frac{12}{2}\\l&=6-x\end{aligned}$$

Área = (largo)×(ancho)

$y=lx=(6-x)x=-x^2+6x$

b) $$\begin{aligned}y&=-x^2+6x\\&=-(x^2-6x)\\&=-(x^2-6x+9)+9\\&=-(x-3)^2+9\end{aligned}$$

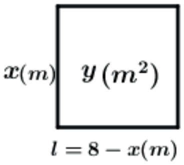
$y=9$ es un valor máximo, el cual se alcanza para $x=3$

Largo: $l=6-3=3\ (m)$

Ancho: $x=3\ (m)$

E *Leer en LT*

a) Sea l el largo, x el ancho, su perímetro está dado por



$$\begin{aligned}P&=2l+2x\\2l+2x&=16\\2(l+x)&=16\\l+x&=\frac{16}{2}\\l&=8-x\end{aligned}$$

Área del rectángulo.

$$\begin{aligned}y&=lx=(8-x)x\\&=-x^2+8x\\&=-(x^2-8x+16)+16\\&=-(x-4)^2+16\end{aligned}$$

b) $y=16$ es un valor máximo, el cual se alcanza para $x=4$. Dimensiones $l=8-4=4(m)$ de largo y $x=4\ (m)$ de ancho.

Prueba de Matemática 9no (30min) Fecha:_______

Unidad 3: Funciones de Segundo Grado

Nombre:___________________________ **Sección:**___________

Sexo: M / F

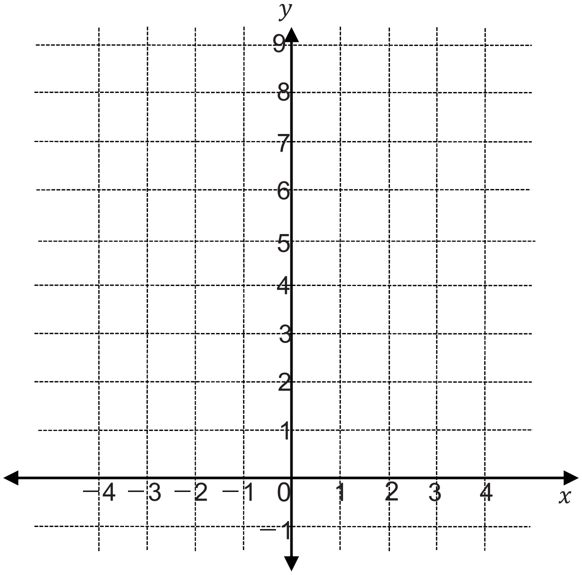
/20

1. Para la función $y = x^2$: (2 puntos×4=8)

   a) Complete la siguiente tabla:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

   b) Trace la gráfica de función $y = x^2$ en el plano cartesiano.



   c) Trace la gráfica de la función $y = x^2 - 1$ en el plano cartesiano a partir de la gráfica de b).

   d) Trace la gráfica de la función $y = (x-1)^2 + 2$ en el plano cartesiano a partir de la gráfica de b).

2. Para la función $y = x^2 + 2x - 3$:

   a) Escríbala en la forma $y = a(x-h)^2 + k$. (2 puntos)

b) Identifique vértice, eje de simetría e intercepto con el eje y.

(1 punto×3=3)

Vértice:

Eje de simetría:

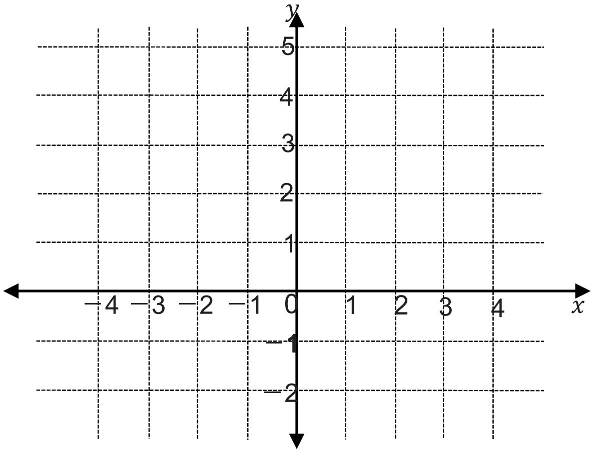
Intercepto con el eje y:

c) Encuentre los valores máximos o mínimos de la función. (2 puntos)

3. Para la función $y = -x^2 + 2x + 2$:

a) Escríbala en la forma $y = a(x-h)^2 + k$. (2 puntos)

b) Trace la gráfica en el plano cartesiano (1 punto)



c) Encuentre los valores máximos y mínimos de la función en el intervalo $-1 \leq x \leq 2$ (2 puntos)

Nombre:______________________________

Unidad 4

Proporcionalidad Entre Segmentos

Sección 1	Razón entre segmentos
Sección 2	División de un segmento

Contenido 1 Distancia entre dos puntos

Aprendizajes esperados

Calcula la distancia entre dos puntos dados en la recta numérica.

▪ Secuencia:

En los grados anteriores se utilizó la recta para establecer el orden en los distintos dominios numéricos.

En esta clase se define la distancia entre dos puntos cualesquiera de la recta.

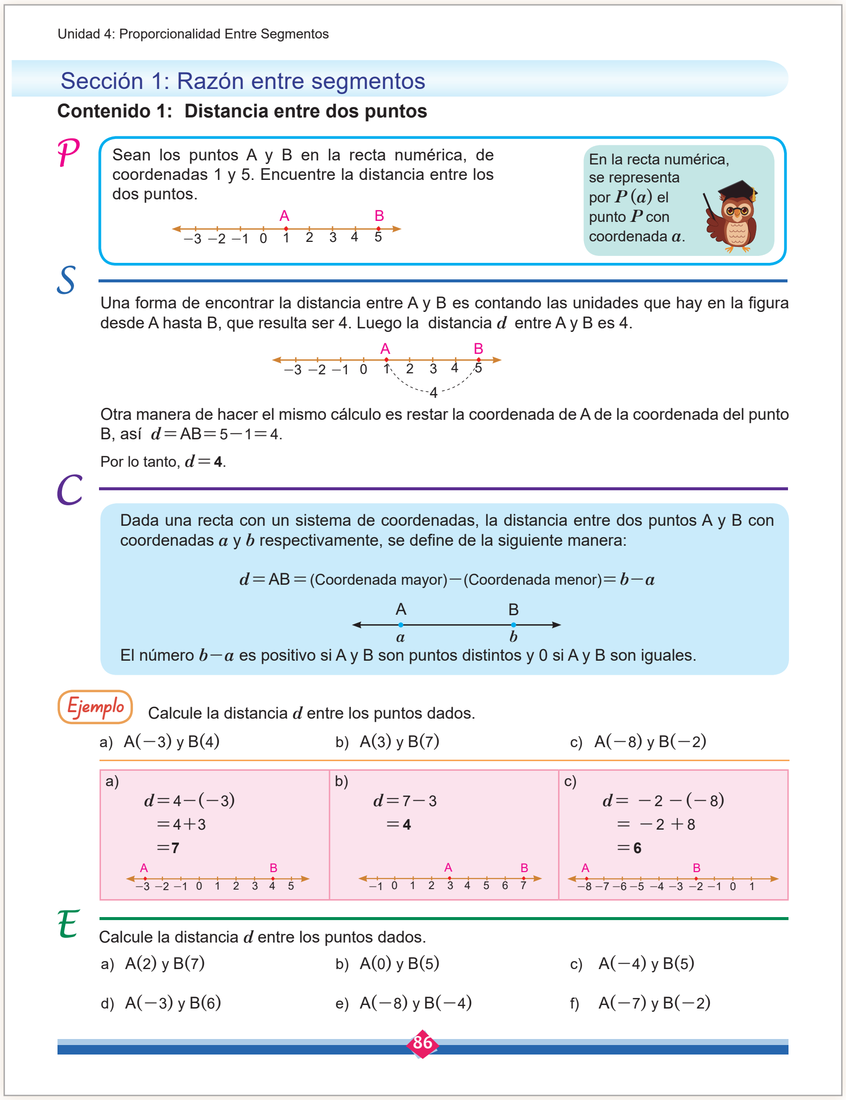
▪ Puntos esenciales:

Destacar que un sistema de coordenadas es una correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales tal que:

- ✓ A cada punto de la recta le corresponde exactamente un número real.
- ✓ A cada número real le corresponde exactamente un punto de la recta. El número correspondiente a un punto dado se llama coordenada del punto.
- ✓ La distancia entre dos puntos cualesquiera es el valor absoluto de la diferencia de sus coordenadas.

Recordar la definición de valor absoluto.

Usar la definición de distancia entre dos puntos para realizar cálculos.



Unidad 4: Proporcionalidad Entre Segmentos

Sección 1: Razón entre segmentos

Contenido 1: Distancia entre dos puntos

P

Sean los puntos A y B en la recta numérica, de coordenadas 1 y 5. Encuentre la distancia entre los dos puntos.

En la recta numérica, se representa por $P(a)$ el punto P con coordenada a.

S

Una forma de encontrar la distancia entre A y B es contando las unidades que hay en la figura desde A hasta B, que resulta ser 4. Luego la distancia d entre A y B es 4.

Otra manera de hacer el mismo cálculo es restar la coordenada de A de la coordenada del punto B, así $d = \text{AB} = 5 - 1 = 4$.

Por lo tanto, $d = \mathbf{4}$.

C

Dada una recta con un sistema de coordenadas, la distancia entre dos puntos A y B con coordenadas a y b respectivamente, se define de la siguiente manera:

$$d = \text{AB} = (\text{Coordenada mayor}) - (\text{Coordenada menor}) = b - a$$

El número $b - a$ es positivo si A y B son puntos distintos y 0 si A y B son iguales.

Ejemplo Calcule la distancia d entre los puntos dados.

a) A(−3) y B(4) b) A(3) y B(7) c) A(−8) y B(−2)

a) $d = 4 - (-3)$ $= 4 + 3$ $= \mathbf{7}$

b) $d = 7 - 3$ $= \mathbf{4}$

c) $d = -2 - (-8)$ $= -2 + 8$ $= \mathbf{6}$

E

Calcule la distancia d entre los puntos dados.

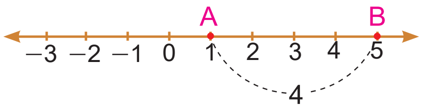
a) A(2) y B(7) b) A(0) y B(5) c) A(−4) y B(5)

d) A(−3) y B(6) e) A(−8) y B(−4) f) A(−7) y B(−2)

86

U4: Proporcionalidad entre segmentos
S1: Razón entre segmentos
C1: Distancia entre dos puntos

Ⓟ Dados los puntos A (1) y B (5).
Encuentre la distancia entre los dos puntos.



Ⓢ

$d = \text{AB}$
$= 5 - 1$
$= 4$

Ⓒ

$d = \text{AB}$

$= (\text{Coordenada mayor}) - (\text{Coordenada menor})$

$= b - a$

Ej Calcule la distancia d entre los puntos:

a) A(−3) y B(4)
$d = 4 - (-3) = 4 + 3 = 7$

b) A(3) y B(7)
$d = 7 - 3 = 4$

c) A(−8) y B(−2)
$d = -2 - (-8) = (-2) + 8 = 6$

Ⓔ Calcule la distancia d entre los puntos:

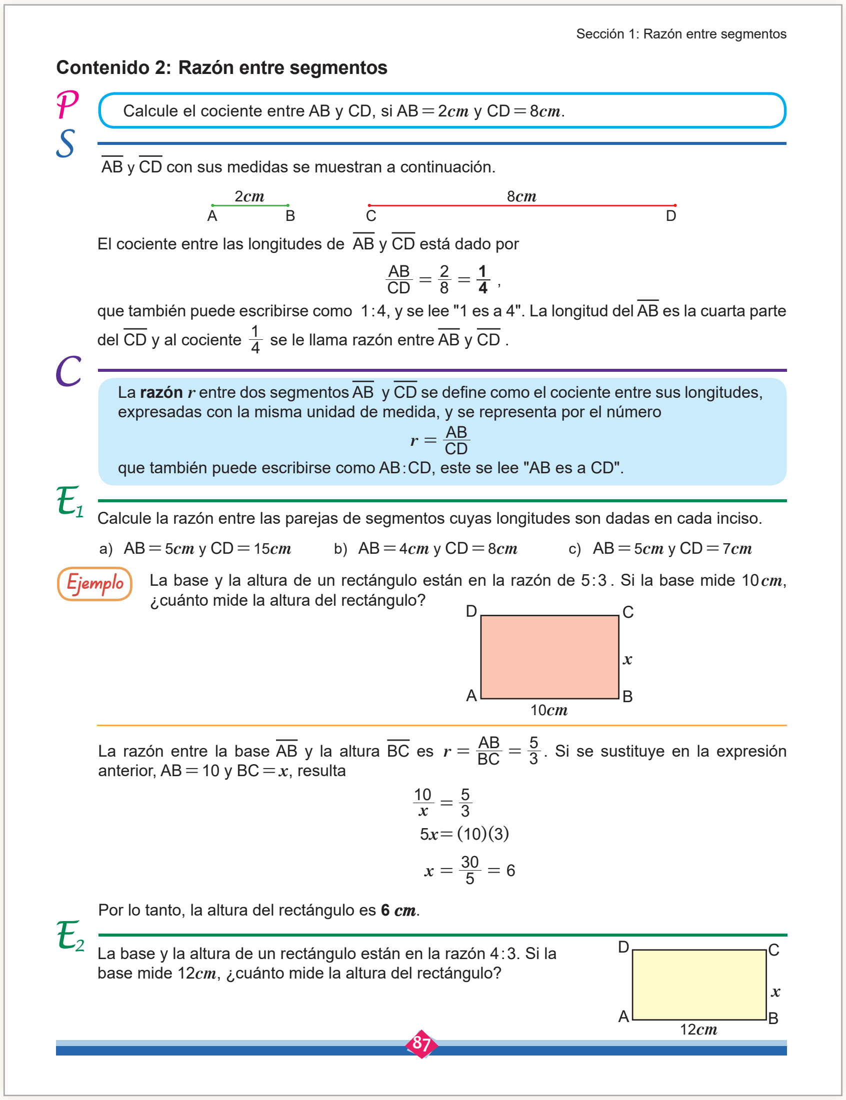
a) A(2) y B(7)
$d = 7 - 2 = 5$

b) A(0) y B(5)
$d = 5 - 0 = 5$

c) A(−4) y B(5)
$d = 5 - (-4) = 5 + 4 = 9$

e) A(−8) y B(−4)
$d = (-4) - (-8) = -4 + 8 = 4$

Contenido 2 Razón entre segmentos



Sección 1: Razón entre segmentos

Contenido 2: Razón entre segmentos

P Calcule el cociente entre AB y CD, si AB = $2cm$ y CD = $8cm$.

S $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ con sus medidas se muestran a continuación.

El cociente entre las longitudes de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ está dado por

$$\frac{AB}{CD}=\frac{2}{8}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}},$$

que también puede escribirse como 1:4, y se lee "1 es a 4". La longitud del $\overline{AB}$ es la cuarta parte del $\overline{CD}$ y al cociente $\frac{1}{4}$ se le llama razón entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

C La **razón** r entre dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se define como el cociente entre sus longitudes, expresadas con la misma unidad de medida, y se representa por el número

$$r=\frac{AB}{CD}$$

que también puede escribirse como AB:CD, este se lee "AB es a CD".

E1 Calcule la razón entre las parejas de segmentos cuyas longitudes son dadas en cada inciso.

a) AB = $5cm$ y CD = $15cm$ b) AB = $4cm$ y CD = $8cm$ c) AB = $5cm$ y CD = $7cm$

Ejemplo La base y la altura de un rectángulo están en la razón de 5:3. Si la base mide 10cm, ¿cuánto mide la altura del rectángulo?

La razón entre la base $\overline{AB}$ y la altura $\overline{BC}$ es $r=\frac{AB}{BC}=\frac{5}{3}$. Si se sustituye en la expresión anterior, AB = 10 y BC = x, resulta

$$\frac{10}{x}=\frac{5}{3}$$
$$5x=(10)(3)$$
$$x=\frac{30}{5}=6$$

Por lo tanto, la altura del rectángulo es **6 cm**.

E2 La base y la altura de un rectángulo están en la razón 4:3. Si la base mide 12cm, ¿cuánto mide la altura del rectángulo?

87

Aprendizajes esperados

Calcula la razón entre dos segmentos dados.

Secuencia:

En la clase anterior se estudió la distancia entre dos puntos cualesquiera de la recta. Aquí se define la razón entre dos segmentos.

Puntos esenciales:

Recordar que la longitud de un segmento no es más que la distancia entre sus extremos.

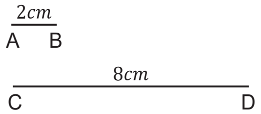
Adoptar la notación establecida para la razón entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ como $\frac{AB}{CD}$ o $AB\!:\!CD$ donde AB es llamado antecedente y CD consecuente.

Realizar lecturas e interpretaciones geométricas correctas de razones dadas entre segmentos.

C2: Razón entre segmentos

P Calcule el cociente entre AB y CD , si AB= $2cm$ y CD= $8cm$.

S



$$\frac{AB}{CD}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4} \text{ o } 1:4$$

(1 es a 4)

C La razón r entre dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$

$$r=\frac{AB}{CD} \text{ o } AB:CD$$

se lee “AB es a CD”.

E1 a) AB= 5 cm y CD = 15cm

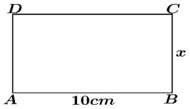
$$\frac{AB}{CD}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$$

b) AB= 4 cm y CD = 8cm

$$\frac{AB}{CD}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

Ej La base y la altura de un rectángulo están en razón de 5 : 3. Si la base mide 10 cm. ¿Cuánto mide la altura?

AB= 10, BC= x y $r=\frac{AB}{BC}=\frac{5}{3}$,



$$\frac{10}{x}=\frac{5}{3}$$

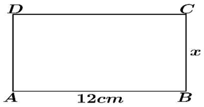
$$\frac{b}{a}\cancel{=}\frac{d}{c}\Rightarrow ad=bc$$

$$5x=(10)(3)$$

$x=\frac{30}{5}=6$ La altura mide 6 cm

E2 Base : Altura = 4 : 3. Si la base mide 12cm. ¿Cuánto mide la altura del rectángulo?

AB = 12, BC = x y $r=\frac{AB}{BC}=\frac{4}{3}$,



$$\frac{12}{x}=\frac{4}{3}$$

$$4x=(12)(3)$$

$x=\frac{36}{4}=9$ La altura mide 9 cm

Contenido 3 Segmentos proporcionales

Aprendizajes esperados

Determina cuándo dos o más parejas de segmentos dados son proporcionales.

Secuencia:

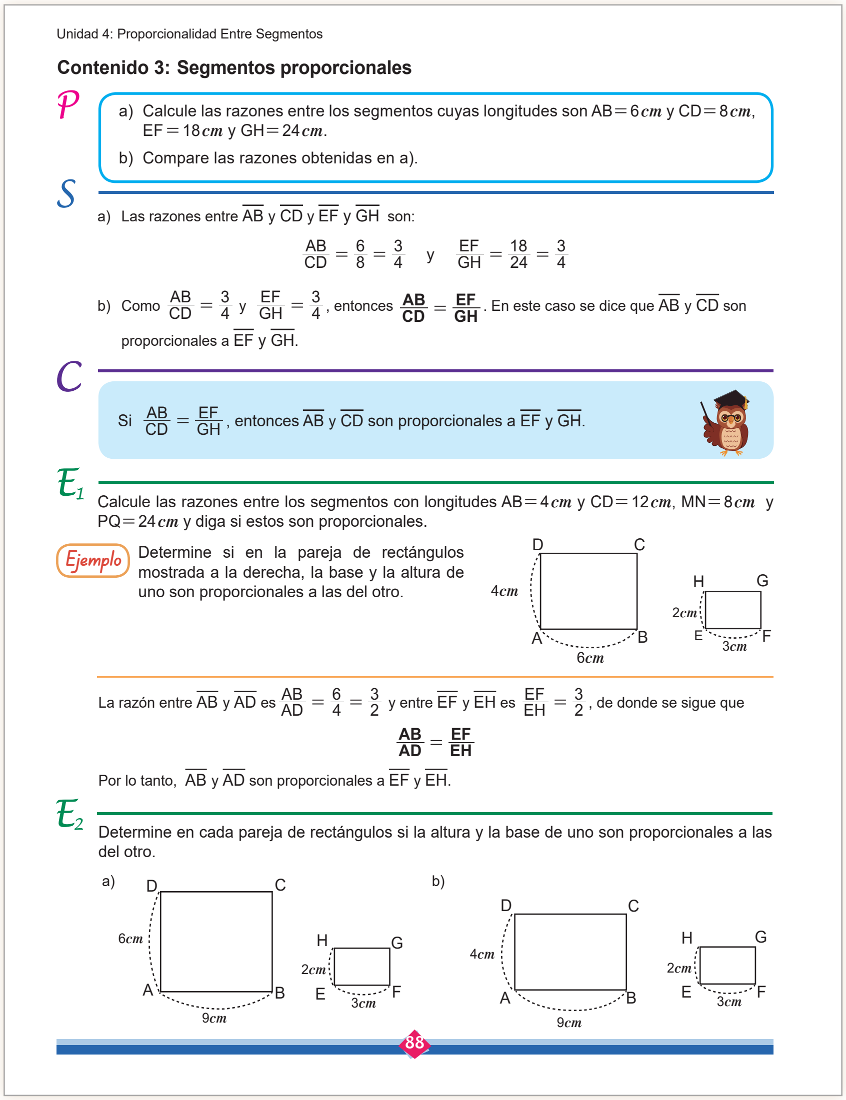
En la clase anterior se estudió la definición de razón entre dos segmentos. Este concepto se utilizará para determinar segmentos proporcionales.

Puntos esenciales:

Recordar la definición de razón entre dos segmentos.

Destacar que la igualdad entre dos razones es llamada proporción.

Resaltar que dos segmentos son proporcionales a otros dos si y solo si se encuentran a una misma razón.



Unidad 4: Proporcionalidad Entre Segmentos

Contenido 3: Segmentos proporcionales

P a) Calcule las razones entre los segmentos cuyas longitudes son AB = $6cm$ y CD = $8cm$, EF = $18cm$ y GH = $24cm$.
b) Compare las razones obtenidas en a).

S a) Las razones entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$ son:

$$\frac{AB}{CD}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4} \quad y \quad \frac{EF}{GH}=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$$

b) Como $\frac{AB}{CD}=\frac{3}{4}$ y $\frac{EF}{GH}=\frac{3}{4}$, entonces $\mathbf{\frac{AB}{CD}=\frac{EF}{GH}}$. En este caso se dice que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son proporcionales a $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$.

C Si $\frac{AB}{CD}=\frac{EF}{GH}$, entonces $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son proporcionales a $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$.

E1 Calcule las razones entre los segmentos con longitudes AB = $4cm$ y CD = $12cm$, MN = $8cm$ y PQ = $24cm$ y diga si estos son proporcionales.

Ejemplo Determine si en la pareja de rectángulos mostrada a la derecha, la base y la altura de uno son proporcionales a las del otro.

La razón entre $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ es $\frac{AB}{AD}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ y entre $\overline{EF}$ y $\overline{EH}$ es $\frac{EF}{EH}=\frac{3}{2}$, de donde se sigue que

$$\mathbf{\frac{AB}{AD}=\frac{EF}{EH}}$$

Por lo tanto, $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ son proporcionales a $\overline{EF}$ y $\overline{EH}$.

E2 Determine en cada pareja de rectángulos si la altura y la base de uno son proporcionales a las del otro.

88

C3: Segmentos proporcionales

P a) Calcule las razones entre los segmentos con AB = $6cm$ y CD = $8cm$, EF = $18cm$ y GH = $24cm$.
b) Compare las razones obtenidas en a).

S a) $\frac{AB}{CD}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ y $\frac{EF}{GH}=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$

b) $\frac{AB}{CD}=\frac{EF}{GH}$

C Si $\frac{AB}{CD}=\frac{EF}{GH}$, entonces $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son proporcionales a $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$.

E1 Calcule las razones entre los segmentos con longitudes AB = $4cm$ y CD = $12cm$, MN = $8cm$ y PQ = $24cm$ y diga si estos son proporcionales.

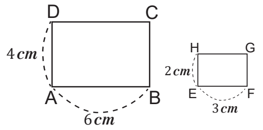
$\frac{AB}{CD}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ $\quad$ $\frac{MN}{PQ}=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$

Los segmentos involucrados son proporcionales

Ej Determine si en los rectángulos de la derecha, la base y la altura de uno son proporcionales a las del otro.

$\frac{AB}{AD}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ y $\frac{EF}{EH}=\frac{3}{2}$

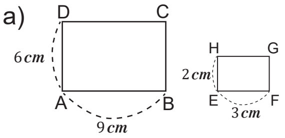
$\frac{AB}{AD}=\frac{EF}{EH}$



$\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ son proporcionales a $\overline{EF}$ y $\overline{EH}$.

E2

a)



$\frac{AD}{AB}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$ $\quad$ $\frac{EH}{EF}=\frac{2}{3}$

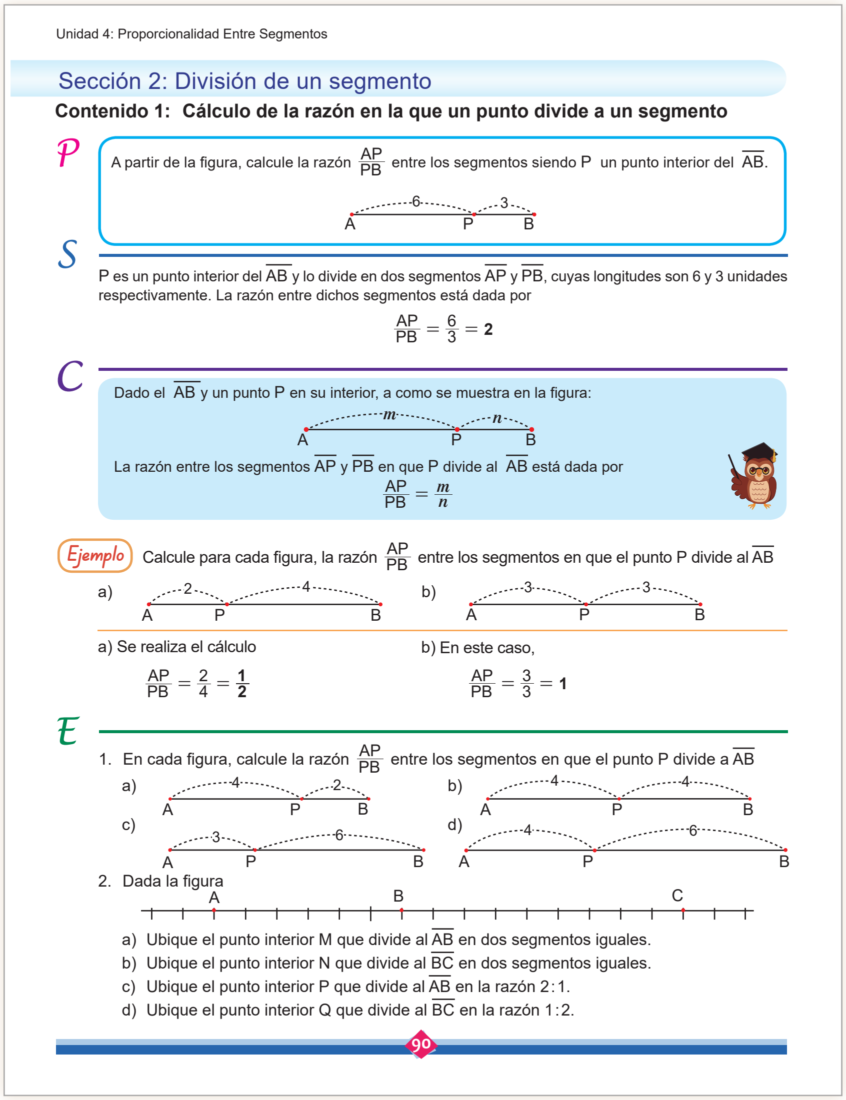
la altura y la base del rectángulo ABCD son proporcionales a las del EFGH.

b)

$\frac{AD}{AB}=\frac{4}{9}$ $\quad$ $\frac{EH}{EF}=\frac{2}{3}$

La altura y la base del rectángulo ABCD no son proporcionales a las del EFGH.

Contenido 1 Cálculo de la razón en la que un punto divide a un segmento



Unidad 4: Proporcionalidad Entre Segmentos

Sección 2: División de un segmento

Contenido 1: Cálculo de la razón en la que un punto divide a un segmento

P A partir de la figura, calcule la razón $\frac{AP}{PB}$ entre los segmentos siendo P un punto interior del $\overline{AB}$.

S P es un punto interior del $\overline{AB}$ y lo divide en dos segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$, cuyas longitudes son 6 y 3 unidades respectivamente. La razón entre dichos segmentos está dada por

$$\frac{AP}{PB}=\frac{6}{3}=\mathbf{2}$$

C Dado el $\overline{AB}$ y un punto P en su interior, a como se muestra en la figura:

La razón entre los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ en que P divide al $\overline{AB}$ está dada por

$$\frac{AP}{PB}=\frac{m}{n}$$

Ejemplo Calcule para cada figura, la razón $\frac{AP}{PB}$ entre los segmentos en que el punto P divide al $\overline{AB}$

a) Se realiza el cálculo $\frac{AP}{PB}=\frac{2}{4}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

b) En este caso, $\frac{AP}{PB}=\frac{3}{3}=\mathbf{1}$

E

1. En cada figura, calcule la razón $\frac{AP}{PB}$ entre los segmentos en que el punto P divide a $\overline{AB}$
2. Dada la figura
   - a) Ubique el punto interior M que divide al $\overline{AB}$ en dos segmentos iguales.
   - b) Ubique el punto interior N que divide al $\overline{BC}$ en dos segmentos iguales.
   - c) Ubique el punto interior P que divide al $\overline{AB}$ en la razón $2:1$.
   - d) Ubique el punto interior Q que divide al $\overline{BC}$ en la razón $1:2$.

90

Aprendizajes esperados

Calcula la razón en la que un punto divide a un segmento.

Secuencia:

En la clase anterior se estableció cuándo dos segmentos son proporcionales a otros dos haciendo uso del concepto de razón entre segmentos.

En esta clase se calcula la razón en la que un punto divide a un segmento.

Puntos esenciales:

Recordar la definición de razón entre segmentos.

Notar que la razón en la que un punto P divide a $\overline{AB}$ no es más que la razón entre $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$.

Destacar que si la razón en la que P divide a $\overline{AB}$ es 1, entonces P es el punto medio de $\overline{AB}$.

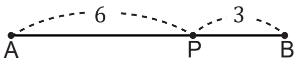
Indicar que una razón queda determinada por una fracción irreducible.

S2: División de un segmento

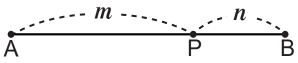
C1: Cálculo de la razón en la que un punto divide a un segmento

P Calcule la razón $\frac{AP}{PB}$ entre los segmentos en que el punto P divide al $\overline{AB}$.

S $\frac{AP}{PB}=\frac{6}{3}=2$

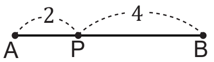


C $\frac{AP}{PB}=\frac{m}{n}$



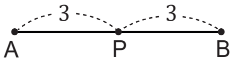
Ej En cada figura, calcule la razón $\frac{AP}{PB}$ entre los segmentos en que el punto P divide al $\overline{AB}$.

a)



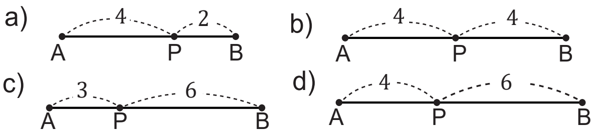
$\frac{AP}{PB}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

b)



$\frac{AP}{PB}=\frac{3}{3}=1$

E 1. Calcule la razón $\frac{AP}{PB}$



a) $\frac{AP}{PB}=\frac{4}{2}=2$

b) $\frac{AP}{PB}=\frac{4}{4}=1$

c) $\frac{AP}{PB}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

d) $\frac{AP}{PB}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

2.

a) Punto interior M que divide al $\overline{AB}$ en dos segmentos iguales.

b) Punto interior N que divide al $\overline{BC}$ en dos segmentos iguales

c) Punto interior P que divide al $\overline{AB}$ en razón $2:1$.

Contenido 2 Coordenada del punto interior

Aprendizajes esperados

Calcula la coordenada del punto interior que divide a un segmento en una razón dada.

Secuencia:

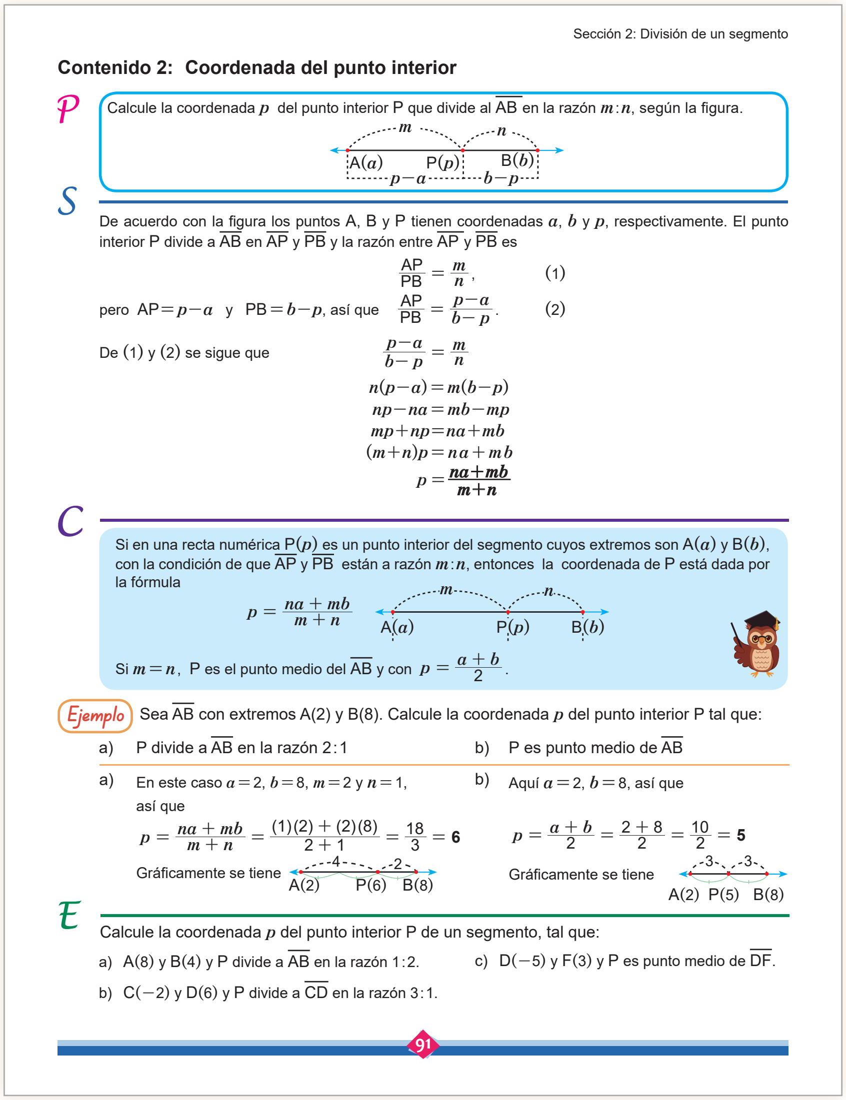
En la clase anterior se estudió la razón en la que un punto divide a un segmento. Aquí se calcula la coordenada del punto interior que divide a un segmento en una razón dada.

Puntos esenciales:

Recordar las definiciones de: coordenada de un punto, distancia entre dos puntos de la recta y razón entre segmentos.

Establecer la fórmula para la coordenada p del punto interior P que divide a $\overline{\text{AB}}$ en la razón $m:n$.

Usar dicha fórmula en el cálculo de coordenadas de puntos interiores que dividen a un segmento en una razón dada.



Sección 2: División de un segmento

Contenido 2: Coordenada del punto interior

P Calcule la coordenada p del punto interior P que divide al $\overline{\text{AB}}$ en la razón $m:n$, según la figura.

S De acuerdo con la figura los puntos A, B y P tienen coordenadas a, b y p, respectivamente. El punto interior P divide a $\overline{\text{AB}}$ en $\overline{\text{AP}}$ y $\overline{\text{PB}}$ y la razón entre $\overline{\text{AP}}$ y $\overline{\text{PB}}$ es

$$\frac{\text{AP}}{\text{PB}}=\frac{m}{n}, \qquad (1)$$

pero $\text{AP}=p-a$ y $\text{PB}=b-p$, así que $\frac{\text{AP}}{\text{PB}}=\frac{p-a}{b-p}$. (2)

De (1) y (2) se sigue que

$$\frac{p-a}{b-p}=\frac{m}{n}$$
$$n(p-a)=m(b-p)$$
$$np-na=mb-mp$$
$$mp+np=na+mb$$
$$(m+n)p=na+mb$$
$$p=\frac{na+mb}{m+n}$$

C Si en una recta numérica P(p) es un punto interior del segmento cuyos extremos son A(a) y B(b), con la condición de que $\overline{\text{AP}}$ y $\overline{\text{PB}}$ están a razón $m:n$, entonces la coordenada de P está dada por la fórmula

$$p=\frac{na+mb}{m+n}$$

Si $m=n$, P es el punto medio del $\overline{\text{AB}}$ y con $p=\frac{a+b}{2}$.

Ejemplo Sea $\overline{\text{AB}}$ con extremos A(2) y B(8). Calcule la coordenada p del punto interior P tal que:

a) P divide a $\overline{\text{AB}}$ en la razón 2:1

b) P es punto medio de $\overline{\text{AB}}$

a) En este caso $a=2$, $b=8$, $m=2$ y $n=1$, así que

$$p=\frac{na+mb}{m+n}=\frac{(1)(2)+(2)(8)}{2+1}=\frac{18}{3}=\mathbf{6}$$

Gráficamente se tiene

b) Aquí $a=2$, $b=8$, así que

$$p=\frac{a+b}{2}=\frac{2+8}{2}=\frac{10}{2}=\mathbf{5}$$

Gráficamente se tiene

E Calcule la coordenada p del punto interior P de un segmento, tal que:

a) A(8) y B(4) y P divide a $\overline{\text{AB}}$ en la razón 1:2.

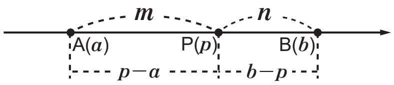
b) C(−2) y D(6) y P divide a $\overline{\text{CD}}$ en la razón 3:1.

c) D(−5) y F(3) y P es punto medio de $\overline{\text{DF}}$.

91

C2: Coordenada del punto interior

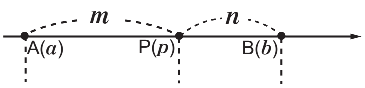
P Calcule la coordenada p del punto interior P que divide al $\overline{\text{AB}}$ en la razón $m : n$.



S $\frac{\text{AP}}{\text{PB}}=\frac{m}{n}$, AP $= p-a$ y PB $= b-p$

$$\frac{p-a}{b-p}=\frac{m}{n}$$
$$n(p-a)=m(b-p)$$
$$np-na=mb-mp$$
$$mp+np=na+mb$$
$$(m+n)p=na+mb$$
$$p=\frac{na+mb}{m+n}$$

C $p=\frac{na+mb}{m+n}$



Si $m=n$, P es el punto medio del $\overline{\text{AB}}$ y con

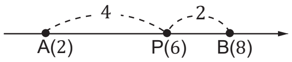
$$p=\frac{a+b}{2}$$

Ej Sea $\overline{\text{AB}}$ con extremos A(2) y B(8). Calcule la coordenada p del punto interior P tal que:

a) P divide al $\overline{\text{AB}}$ en la razón 2: 1

Sustituyendo $a=2$, $b=8$, $m=2$ y $n=1$ en $p=\frac{na+mb}{m+n}$ resulta

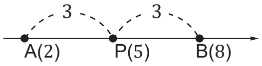
$$p=\frac{(1)(2)+(2)(8)}{2+1}=\frac{18}{3}=6$$



b) P es punto medio de $\overline{\text{AB}}$

Sustituyendo $a=2$ y $b=8$ en $p=\frac{a+b}{2}$ resulta

$$p=\frac{2+8}{2}=\frac{10}{2}=5$$



E Calcule la coordenada p del punto interior P

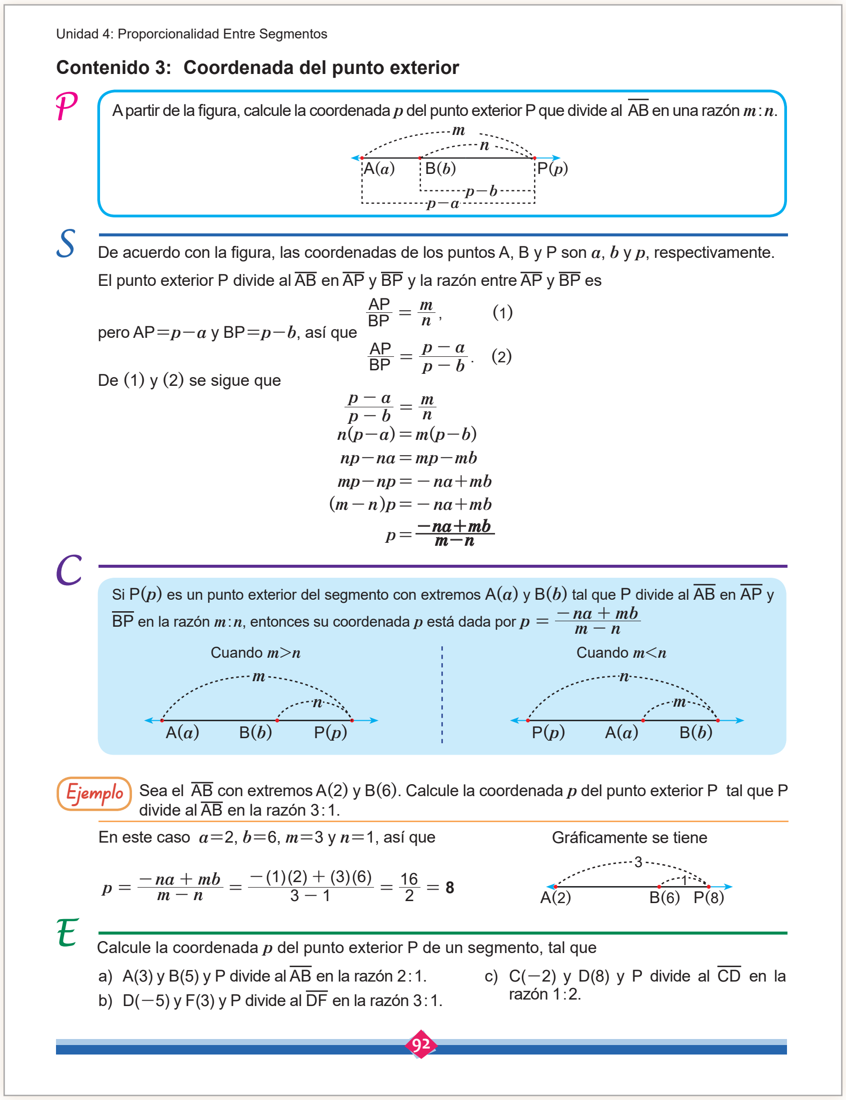
a) A(8) y B(4) y P divide al $\overline{\text{AB}}$ en la razón 1 : 2.

$$p=\frac{(2)(8)+(1)(4)}{1+2}=\frac{20}{3}$$

b) C(−2) y D(6) y P divide al $\overline{\text{CD}}$ en la razón 3 : 1.

$$p=\frac{(1)(-2)+(3)(6)}{3+1}=\frac{16}{4}=4$$

Contenido 3 Coordenada del punto exterior



Unidad 4: Proporcionalidad Entre Segmentos

Contenido 3: Coordenada del punto exterior

P A partir de la figura, calcule la coordenada p del punto exterior P que divide al $\overline{\text{AB}}$ en una razón $m:n$.

S De acuerdo con la figura, las coordenadas de los puntos A, B y P son a, b y p, respectivamente.
El punto exterior P divide al $\overline{\text{AB}}$ en $\overline{\text{AP}}$ y $\overline{\text{BP}}$ y la razón entre $\overline{\text{AP}}$ y $\overline{\text{BP}}$ es

$$\frac{\text{AP}}{\text{BP}}=\frac{m}{n}, \qquad (1)$$

pero AP$=p-a$ y BP$=p-b$, así que

$$\frac{\text{AP}}{\text{BP}}=\frac{p-a}{p-b}. \qquad (2)$$

De (1) y (2) se sigue que

$$\frac{p-a}{p-b}=\frac{m}{n}$$
$$n(p-a)=m(p-b)$$
$$np-na=mp-mb$$
$$mp-np=-na+mb$$
$$(m-n)p=-na+mb$$
$$p=\frac{-na+mb}{m-n}$$

C Si P(p) es un punto exterior del segmento con extremos A(a) y B(b) tal que P divide al $\overline{\text{AB}}$ en $\overline{\text{AP}}$ y $\overline{\text{BP}}$ en la razón $m:n$, entonces su coordenada p está dada por $p=\dfrac{-na+mb}{m-n}$

Ejemplo Sea el $\overline{\text{AB}}$ con extremos A(2) y B(6). Calcule la coordenada p del punto exterior P tal que P divide al $\overline{\text{AB}}$ en la razón 3:1.

En este caso $a=2$, $b=6$, $m=3$ y $n=1$, así que

$$p=\frac{-na+mb}{m-n}=\frac{-(1)(2)+(3)(6)}{3-1}=\frac{16}{2}=\mathbf{8}$$

Gráficamente se tiene

E Calcule la coordenada p del punto exterior P de un segmento, tal que

a) A(3) y B(5) y P divide al $\overline{\text{AB}}$ en la razón 2:1.
b) D(−5) y F(3) y P divide al $\overline{\text{DF}}$ en la razón 3:1.
c) C(−2) y D(8) y P divide al $\overline{\text{CD}}$ en la razón 1:2.

92

Aprendizajes esperados

Calcula la coordenada del punto exterior que divide a un segmento en una razón dada.

Secuencia:

En la clase anterior se calculó la coordenada del punto interior que divide a un segmento en una razón dada. Ahora se estudia el caso en el que el punto no está en el segmento.

Puntos esenciales:

Recordar las definiciones de: coordenada de un punto, distancia entre dos puntos de la recta y razón entre segmentos.

Establecer la fórmula para la coordenada p del punto exterior P que divide a $\overline{\text{AB}}$ en la razón $m:n$.

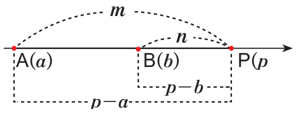
Notar que cuando la coordenada del punto A es menor que la del punto B:

- ✓ si $m>n$, el punto P está a la derecha de B.
- ✓ si $m<n$, el punto P está a la izquierda de A.

Usar dicha fórmula en el cálculo de coordenadas de puntos exteriores que dividen a un segmento en una razón dada.

C3: Coordenada del punto exterior

P Calcule la coordenada p del punto exterior P que divide al $\overline{\text{AB}}$ en una razón $m:n$.



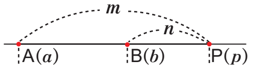
S $\dfrac{\text{AP}}{\text{BP}}=\dfrac{m}{n}$, AP$=p-a$ y BP$=p-b$

Así que, $\dfrac{p-a}{p-b}=\dfrac{m}{n}$

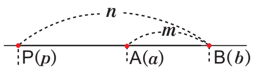
$$n(p-a)=m(p-b)$$
$$np-na=mp-mb$$
$$mp-np=-na+mb$$
$$(m-n)p=-na+mb$$
$$p=\frac{-na+mb}{m-n}$$

C Si P (p) es un punto exterior del segmento con extremos A(a) y B(b) tal que P divide al $\overline{\text{AB}}$ en $\overline{\text{AP}}$ y $\overline{\text{BP}}$ en la razón $m: n$,

$$p=\frac{-na+mb}{m-n}$$



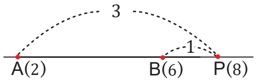
Cuando $m>n$



Cuando $m<n$

Ej Sea $\overline{\text{AB}}$ con extremos A(2) y B(6). Calcule la coordenada p del punto exterior P que divide a $\overline{\text{AB}}$ en la razón 3 : 1.

Sustituyendo $a=2$, $b=6$, $m=3$ y $n=1$ en $p=\dfrac{-na+mb}{m-n}$ resulta



$$p=\frac{-(1)(2)+(3)(6)}{3-1}=\frac{16}{2}=8$$

E Calcule la coordenada p del punto exterior P de un segmento, tal que

a) A(3) y B(5) y P divide a $\overline{\text{AB}}$ en la razón 2 : 1.

$$p=\frac{-(1)(3)+(2)(5)}{2-1}=7$$

b) D(−5) y F(3) y P divide a $\overline{\text{DF}}$ en la razón 3 : 1.

$$p=\frac{-(1)(-5)+(3)(3)}{3-1}=7$$

Contenido 4 Longitudes de las partes en las que un punto divide a un segmento en una razón dada

Aprendizajes esperados

Determina las longitudes de las partes en las que un punto divide a un segmento en una razón dada.

Secuencia:

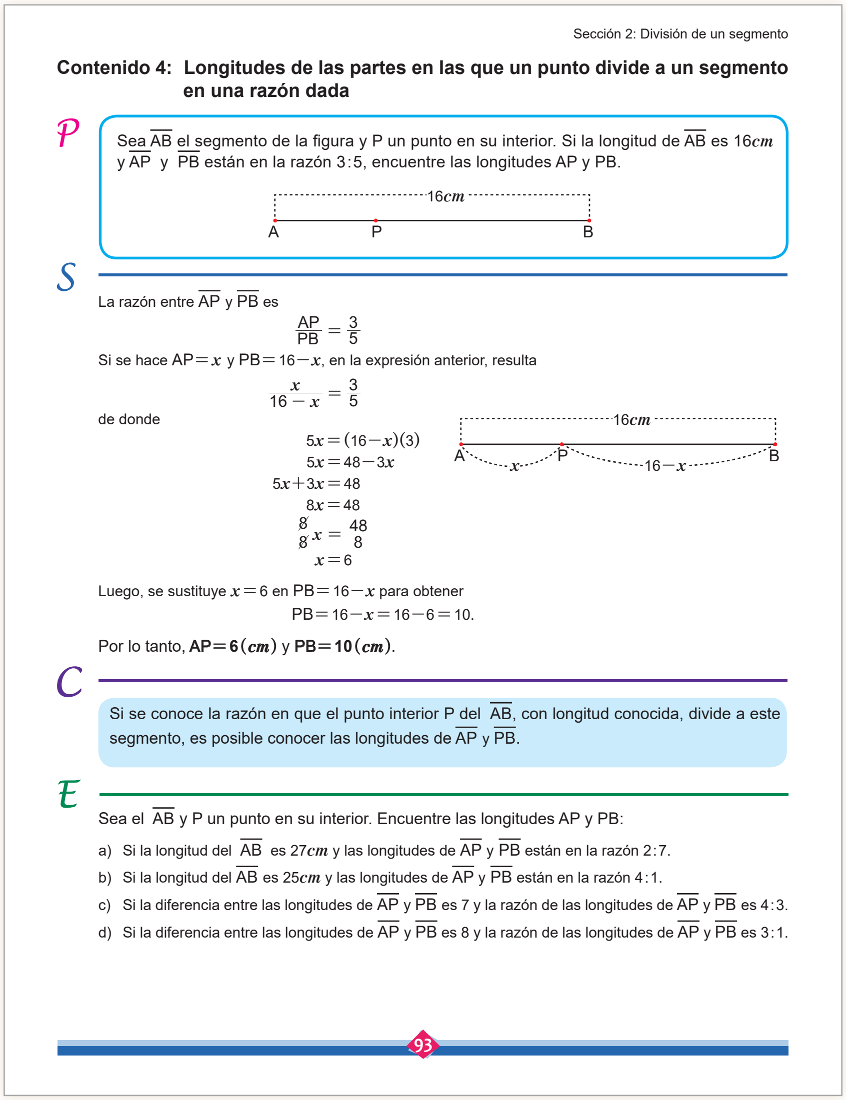
En las clases anteriores se estudiaron las coordenadas en las que un punto, tanto interior como exterior, divide a un segmento en una razón dada.

En esta clase se determinan las longitudes de las partes en las que un punto interior divide a un segmento en una razón dada.

Puntos esenciales:

Recordar las definiciones de: coordenada de un punto, distancia entre dos puntos de la recta y razón entre segmentos.

Encontrar las longitudes de las partes en las que un punto interior divide a un segmento en una razón dada.



Sección 2: División de un segmento

Contenido 4: Longitudes de las partes en las que un punto divide a un segmento en una razón dada

P

Sea $\overline{AB}$ el segmento de la figura y P un punto en su interior. Si la longitud de $\overline{AB}$ es 16cm y $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ están en la razón 3:5, encuentre las longitudes AP y PB.

S

La razón entre $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ es

$$\frac{AP}{PB}=\frac{3}{5}$$

Si se hace AP$=x$ y PB$=16-x$, en la expresión anterior, resulta

$$\frac{x}{16-x}=\frac{3}{5}$$

de donde

$$5x=(16-x)(3)$$
$$5x=48-3x$$
$$5x+3x=48$$
$$8x=48$$
$$\frac{\cancel{8}}{\cancel{8}}x=\frac{48}{8}$$
$$x=6$$

Luego, se sustituye $x=6$ en PB$=16-x$ para obtener

PB$=16-x=16-6=10$.

Por lo tanto, **AP=6(cm)** y **PB=10(cm)**.

C

Si se conoce la razón en que el punto interior P del $\overline{AB}$, con longitud conocida, divide a este segmento, es posible conocer las longitudes de $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$.

E

Sea el $\overline{AB}$ y P un punto en su interior. Encuentre las longitudes AP y PB:

a) Si la longitud del $\overline{AB}$ es 27cm y las longitudes de $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ están en la razón 2:7.

b) Si la longitud del $\overline{AB}$ es 25cm y las longitudes de $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ están en la razón 4:1.

c) Si la diferencia entre las longitudes de $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ es 7 y la razón de las longitudes de $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ es 4:3.

d) Si la diferencia entre las longitudes de $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ es 8 y la razón de las longitudes de $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ es 3:1.

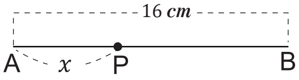
93

C4: Longitudes de las partes en las que un punto divide a un segmento en una razón dada

Ⓟ Sea $\overline{AB}$ y P un punto en su interior.
Si AB = 16 cm y $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ están en razón 3:5,
encuentre las longitudes AP y PB.

Ⓢ $\frac{AP}{PB}=\frac{3}{5}$, Si se hace AP$=x$ y AP$=16-x$

$$\frac{x}{16-x}=\frac{3}{5}$$



$$5x=(16-x)(3)$$
$$5x=48-3x$$
$$5x+3x=48$$
$$8x=48$$
$$x=6$$

PB $=16-x=16-6=10$

AP $=6cm$ y PB$=10cm$.

Ⓒ *Leer en el libro de texto*

Ⓔ Sea $\overline{AB}$ y P un punto en su interior. Encuentre las longitudes AP y PB:

a) Si AB $=27cm$ y AP : PB $=2:7$.
Si se hace AP $=x$ y PB $=27-x$

$$\frac{AP}{PB}=\frac{x}{27-x}=\frac{2}{7}$$
$$7x=(2)(27-x)$$
$$7x=54-2x$$
$$9x=54$$
$$x=6$$

PB$=27-x=27-6=21$

Por tanto, AP $=6\,cm$ y PB$=21\,cm$.

b) Si AB $=25cm$ y AP : PB $=4:1$.
Si se hace AP $=x$ y PB$=25-x$

$$\frac{AP}{PB}=\frac{x}{25-x}=\frac{4}{1}$$
$$x=(4)(25-x)$$
$$x=100-4x$$
$$x=20$$

PB$=25-x=25-20=5$

Por tanto, AP$=20\,cm$ y PB$=5\,cm$.

Prueba de Matemática 9no (30min) Fecha:_______
Unidad 4: Proporcionalidad entre Segmentos

Nombre:________________________________ **Sección:** __________

Sexo: M / F .

/20

1. Calcule la distancia d entre los puntos dados; con las coordenadas asignadas.

(2 puntos×3=6)

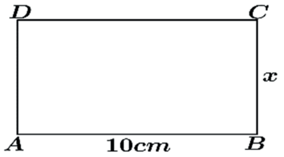
a) $\mathrm{A}(3)$ y $\mathrm{B}(7)$

b) $\mathrm{A}(-8)$ y $\mathrm{B}(-2)$

c) $\mathrm{A}(-3)$ y $\mathrm{B}(4)$

2. Calcule el cociente entre AB y CD, si $\mathrm{AB}=2\,cm$ y $\mathrm{CD}=8\,cm$. (2 puntos)

3. La base y la altura de un rectángulo están en la razón de $5:3$. Si la base mide $10\ cm$, ¿Cuánto mide la altura del rectángulo? (2 puntos)



4. Sea $\overline{\mathrm{AB}}$ con extremos $\mathrm{A}(2)$ y $\mathrm{B}(8)$. Calcule la coordenada p del punto interior P tal que:

(2 puntos×2=4)

a) P divide a $\overline{\mathrm{AB}}$ en la razón 2:1 b) P es un punto medio de $\overline{\mathrm{AB}}$

5. Sea el $\overline{\mathrm{AB}}$ y P un punto en su interior . Encuentre las longitudes AP y PB:

(3 puntos×2=6)

a) Si la longitud del $\overline{\mathrm{AB}}$ es $16cm$ y las longitudes de $\overline{\mathrm{AP}}$ y $\overline{\mathrm{PB}}$ están en la razón 3:5.

b) Si la diferencia entre las longitudes de $\overline{\mathrm{AP}}$ y $\overline{\mathrm{PB}}$ es 8 y la razón de las longitudes de $\overline{\mathrm{AP}}$ y $\overline{\mathrm{PB}}$ es 3:1.

Nombre:______________________________

Unidad 5

Semejanza

Sección 1 Criterios de semejanza de triángulos

Sección 2 Semejanza de triángulos rectángulos y paralelismo

Contenido 1 Definición de semejanza de triángulos

Aprendizajes esperados

Establece cuándo dos triángulos son semejantes.

Secuencia:

En octavo grado se estudió la congruencia entre triángulos, y que ángulos correspondientes y alternos internos entre paralelas tienen la misma medida. Estos tópicos son herramientas necesarias para la comprensión de esta unidad.

En esta clase se estudia el concepto de triángulos semejantes.

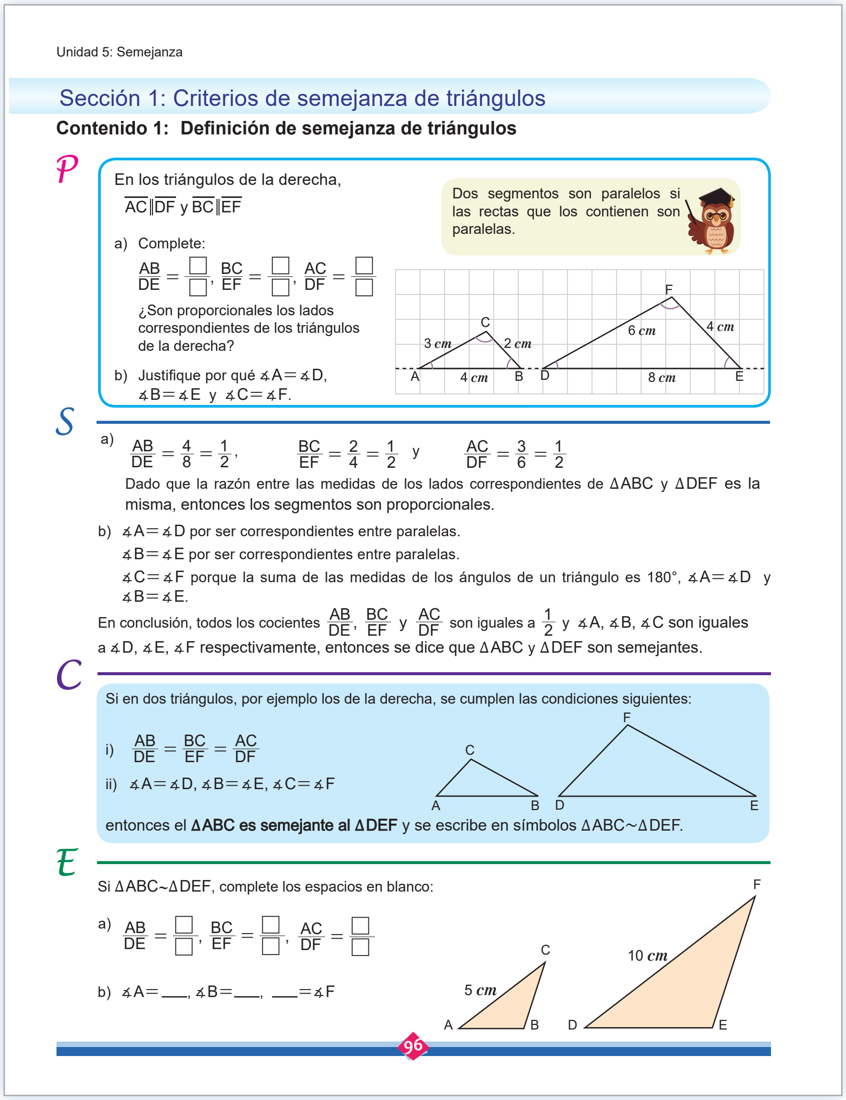
Puntos esenciales:

Destacar la correspondencia que se ha establecido de ante mano, entre los vértices, lados y ángulos de los triángulos del problema.

Identificar que los lados de los triángulos son proporcionales, y los ángulos correspondientes tienen igual medida.

Indicar que dos triángulos son semejantes, si los lados correspondientes son proporcionales y los ángulos correspondientes son de igual medida.

Señalar que el orden en que se escriben los vértices de triángulos semejantes, debe respetar las relaciones establecidas entre lados y ángulos.



Unidad 5: Semejanza

Sección 1: Criterios de semejanza de triángulos

Contenido 1: Definición de semejanza de triángulos

P

En los triángulos de la derecha,
$\overline{AC} \parallel \overline{DF}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$

a) Complete:
$\frac{AB}{DE} = \frac{\square}{\square}$, $\frac{BC}{EF} = \frac{\square}{\square}$, $\frac{AC}{DF} = \frac{\square}{\square}$

¿Son proporcionales los lados correspondientes de los triángulos de la derecha?

b) Justifique por qué $\measuredangle A = \measuredangle D$, $\measuredangle B = \measuredangle E$ y $\measuredangle C = \measuredangle F$.

Dos segmentos son paralelos si las rectas que los contienen son paralelas.

S

a) $\frac{AB}{DE} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $\frac{BC}{EF} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ y $\frac{AC}{DF} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Dado que la razón entre las medidas de los lados correspondientes de ΔABC y ΔDEF es la misma, entonces los segmentos son proporcionales.

b) $\measuredangle A = \measuredangle D$ por ser correspondientes entre paralelas.
$\measuredangle B = \measuredangle E$ por ser correspondientes entre paralelas.
$\measuredangle C = \measuredangle F$ porque la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180°, $\measuredangle A = \measuredangle D$ y $\measuredangle B = \measuredangle E$.

En conclusión, todos los cocientes $\frac{AB}{DE}$, $\frac{BC}{EF}$ y $\frac{AC}{DF}$ son iguales a $\frac{1}{2}$ y $\measuredangle A$, $\measuredangle B$, $\measuredangle C$ son iguales a $\measuredangle D$, $\measuredangle E$, $\measuredangle F$ respectivamente, entonces se dice que ΔABC y ΔDEF son semejantes.

C

Si en dos triángulos, por ejemplo los de la derecha, se cumplen las condiciones siguientes:

i) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

ii) $\measuredangle A = \measuredangle D$, $\measuredangle B = \measuredangle E$, $\measuredangle C = \measuredangle F$

entonces el **ΔABC es semejante al ΔDEF** y se escribe en símbolos ΔABC~ΔDEF.

E

Si ΔABC~ΔDEF, complete los espacios en blanco:

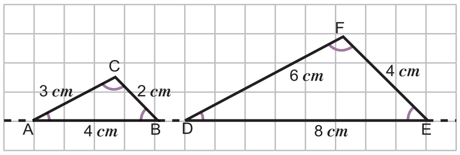
a) $\frac{AB}{DE} = \frac{\square}{\square}$, $\frac{BC}{EF} = \frac{\square}{\square}$, $\frac{AC}{DF} = \frac{\square}{\square}$

b) $\measuredangle A =$ ___, $\measuredangle B =$ ___, ___ $= \measuredangle F$

96

U5: Semejanza
S1: Criterios de semejanza de triángulos
C1: Definición de semejanza de triángulos

Ⓟ



$\overline{AC} \parallel \overline{DF}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$

a) $\frac{AB}{DE} = \frac{\square}{\square}$ $\frac{BC}{EF} = \frac{\square}{\square}$ $\frac{AC}{DF} = \frac{\square}{\square}$

¿Son proporcionales los lados correspondientes?

b) ¿Por qué $\measuredangle A = \measuredangle D$, $\measuredangle B = \measuredangle E$ y $\measuredangle C = \measuredangle F$?

Ⓢ a) $\frac{AB}{DE} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ $\frac{BC}{EF} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\frac{AC}{DF} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

b) $\measuredangle A = \measuredangle D$ y $\measuredangle B = \measuredangle E$ por ser correspondientes entre paralelas.
$\measuredangle C = \measuredangle F$ porque la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es $180°$.

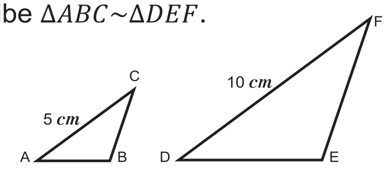
Ⓒ Si en dos triángulos, se cumplen las condiciones siguientes:

i) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

ii) $\measuredangle A = \measuredangle D$, $\measuredangle B = \measuredangle E$, $\measuredangle C = \measuredangle F$

entonces el ΔABC es <u>semejante</u> al ΔDEF y se escribe $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Ⓔ



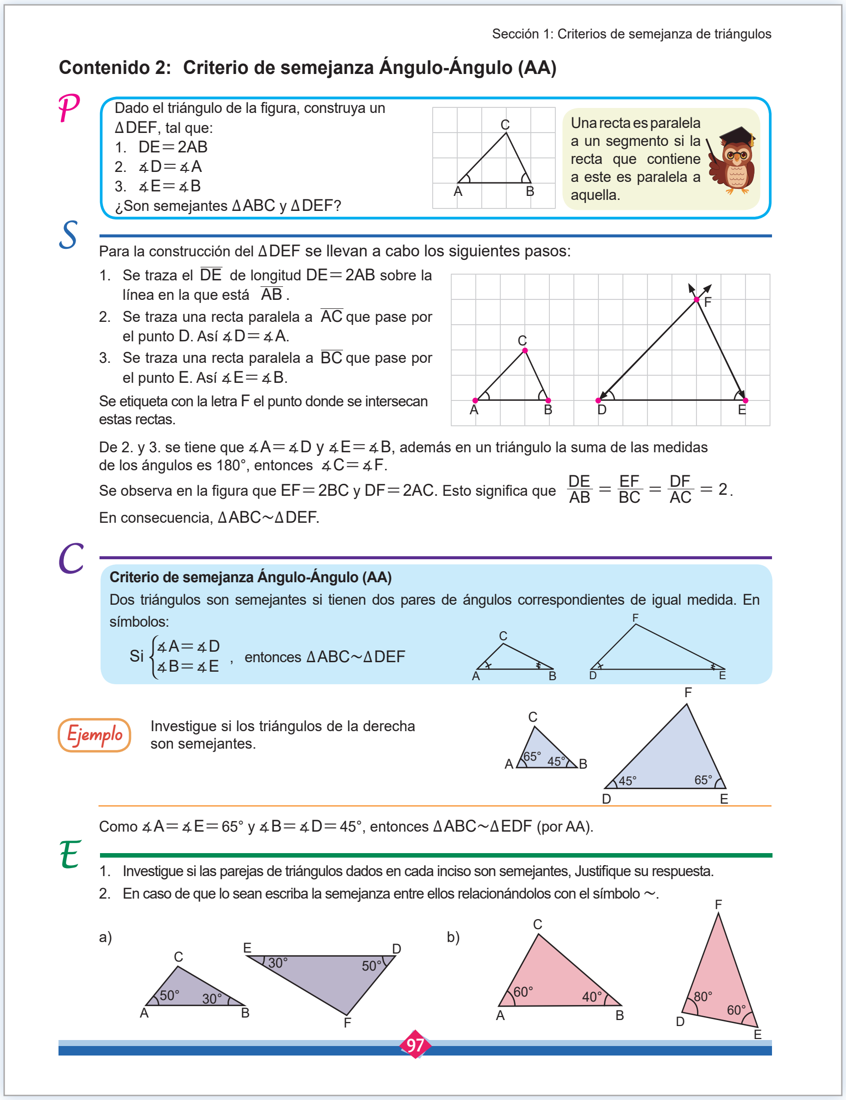
Si $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, entonces:

a) $\frac{AB}{DE} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$ $\frac{BC}{EF} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$ $\frac{AC}{DF} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$

b) $\measuredangle A = \boxed{\measuredangle D}$ $\measuredangle B = \boxed{\measuredangle E}$ $\boxed{\measuredangle C} = \measuredangle F$

Nota: *No es necesario que escriba la cuadrícula en la pizarra, pero explique a los estudiantes usando la cuadrícula de su cuaderno.*

Contenido 2 Criterio de semejanza Ángulo-Ángulo (AA)



Contenido 2: Criterio de semejanza Ángulo-Ángulo (AA)

P

Dado el triángulo de la figura, construya un ΔDEF, tal que:

1. $DE = 2AB$
2. $\measuredangle D = \measuredangle A$
3. $\measuredangle E = \measuredangle B$

¿Son semejantes ΔABC y ΔDEF?

Una recta es paralela a un segmento si la recta que contiene a este es paralela a aquella.

S

Para la construcción del ΔDEF se llevan a cabo los siguientes pasos:

1. Se traza el $\overline{DE}$ de longitud $DE = 2AB$ sobre la línea en la que está $\overline{AB}$.
2. Se traza una recta paralela a $\overline{AC}$ que pase por el punto D. Así $\measuredangle D = \measuredangle A$.
3. Se traza una recta paralela a $\overline{BC}$ que pase por el punto E. Así $\measuredangle E = \measuredangle B$.

Se etiqueta con la letra F el punto donde se intersecan estas rectas.

De 2. y 3. se tiene que $\measuredangle A = \measuredangle D$ y $\measuredangle E = \measuredangle B$, además en un triángulo la suma de las medidas de los ángulos es 180°, entonces $\measuredangle C = \measuredangle F$.

Se observa en la figura que $EF = 2BC$ y $DF = 2AC$. Esto significa que $\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC} = 2$.

En consecuencia, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

C

Criterio de semejanza Ángulo-Ángulo (AA)

Dos triángulos son semejantes si tienen dos pares de ángulos correspondientes de igual medida. En símbolos:

Si $\begin{cases} \measuredangle A = \measuredangle D \\ \measuredangle B = \measuredangle E \end{cases}$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Ejemplo

Investigue si los triángulos de la derecha son semejantes.

Como $\measuredangle A = \measuredangle E = 65°$ y $\measuredangle B = \measuredangle D = 45°$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta EDF$ (por AA).

E

1. Investigue si las parejas de triángulos dados en cada inciso son semejantes, Justifique su respuesta.
2. En caso de que lo sean escriba la semejanza entre ellos relacionándolos con el símbolo ~.

a) b)

97

Aprendizajes esperados

Determina si dos triángulos dados son semejantes aplicando el criterio de semejanza AA.

Secuencia:

En la clase anterior se estudió que dos triángulos cuyos lados son proporcionales, y ángulos correspondientes tienen la misma medida, se llaman triángulos semejantes.

En esta clase se estudia un criterio más sencillo para saber si dos triángulos son semejantes. Este es el criterio de semejanza Ángulo-Ángulo (AA).

Puntos esenciales:

Resaltar que lo que se quiere construir es un triángulo que tenga un par de ángulos de igual medida a dos ángulos del triángulo dado.

Identificar que el objetivo de trazar rectas paralelas a los lados del triángulo dado, es formar ángulos correspondientes entre paralelas de igual medida.

Indicar que los triángulos descritos son semejantes.

Explicar en qué consiste AA, y recordar que se cuide el orden en que se escriben los vértices de los triángulos al establecer la semejanza.

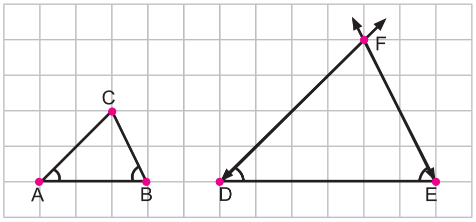
C2: Criterio de semejanza Ángulo-Ángulo (AA)

Ⓟ Construya un ΔDEF, tal que:

a) $DE = 2AB$ b) $\measuredangle D = \measuredangle A$ c) $\measuredangle E = \measuredangle B$

¿Son semejantes ΔABC y ΔDEF?

Ⓢ



$\measuredangle C = \measuredangle F$, $\quad \frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC} = 2.$

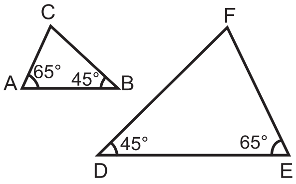
Luego, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Ⓒ Criterio AA

Dos triángulos son semejantes si tienen dos pares de ángulos correspondientes de igual medida.

$$\left.\begin{matrix} \measuredangle A = \measuredangle D \\ \measuredangle B = \measuredangle E \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

(Ej) Investigue si los triángulos son semejantes.



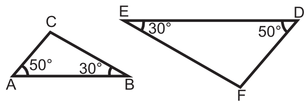
$\measuredangle A = \measuredangle E = 65°$

$\measuredangle B = \measuredangle D = 45°$

Por AA, $\Delta ABC \sim \Delta EDF$

Ⓔ Investigue si los triángulos son semejantes.

a)



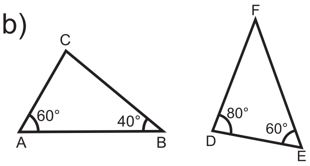
$\measuredangle A = \measuredangle D = 50°$

$\measuredangle B = \measuredangle E = 30°$

Por AA:

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

b)



$\measuredangle A = \measuredangle E = 60°$

$\measuredangle B = \measuredangle F = 40°$

Por AA:

$\Delta ABC \sim \Delta EFD$

Nota: *No es necesario que escriba la cuadrícula en la pizarra, pero explique a los estudiantes usando la cuadrícula de su cuaderno.*

Contenido 3 Criterio de semejanza Lado-Lado-Lado (LLL)

Aprendizajes esperados

Determina si dos triángulos dados son semejantes aplicando el criterio de semejanza LLL.

Secuencia:

En la clase anterior se estudió un criterio sencillo para saber si dos triángulos son semejantes. Este es el criterio de semejanza Ángulo-Ángulo (AA).

En esta clase se estudia el criterio de semejanza Lado-Lado-Lado (LLL).

Puntos esenciales:

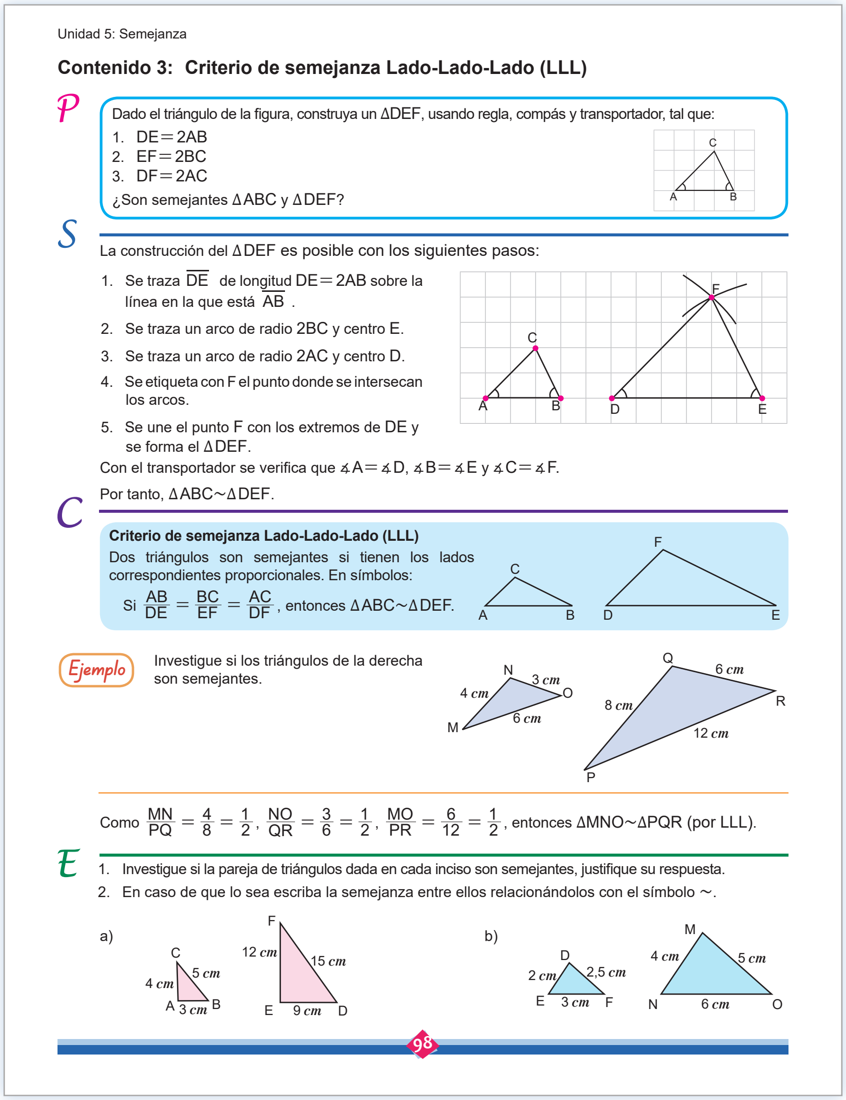
Recordar cómo construir un arco de una circunferencia, dado un radio y el centro, utilizando compás.

Resaltar que lo que se quiere es construir un triángulo cuyos lados correspondientes sean proporcionales a los lados del triángulo dado.

Notar que el objetivo de trazar arcos de circunferencias con radios iguales al doble de los lados del triángulo dado, es formar lados correspondientes proporcionales.

Indicar que los ángulos correspondientes tienen la misma medida.

Explicar en qué consiste LLL, y recordar que se cuide el orden en que se escriben los vértices de los triángulos al establecer la semejanza.



Unidad 5: Semejanza

Contenido 3: Criterio de semejanza Lado-Lado-Lado (LLL)

P Dado el triángulo de la figura, construya un ΔDEF, usando regla, compás y transportador, tal que:

1. DE = 2AB
2. EF = 2BC
3. DF = 2AC

¿Son semejantes ΔABC y ΔDEF?

S La construcción del ΔDEF es posible con los siguientes pasos:

1. Se traza $\overline{DE}$ de longitud DE = 2AB sobre la línea en la que está $\overline{AB}$.
2. Se traza un arco de radio 2BC y centro E.
3. Se traza un arco de radio 2AC y centro D.
4. Se etiqueta con F el punto donde se intersecan los arcos.
5. Se une el punto F con los extremos de DE y se forma el ΔDEF.

Con el transportador se verifica que ∡A = ∡D, ∡B = ∡E y ∡C = ∡F.

Por tanto, ΔABC∼ΔDEF.

C **Criterio de semejanza Lado-Lado-Lado (LLL)**

Dos triángulos son semejantes si tienen los lados correspondientes proporcionales. En símbolos:

Si $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$, entonces ΔABC∼ΔDEF.

Ejemplo Investigue si los triángulos de la derecha son semejantes.

Como $\frac{MN}{PQ} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $\frac{NO}{QR} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $\frac{MO}{PR} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, entonces ΔMNO∼ΔPQR (por LLL).

E
1. Investigue si la pareja de triángulos dada en cada inciso son semejantes, justifique su respuesta.
2. En caso de que lo sea escriba la semejanza entre ellos relacionándolos con el símbolo ∼.

a) b)

98

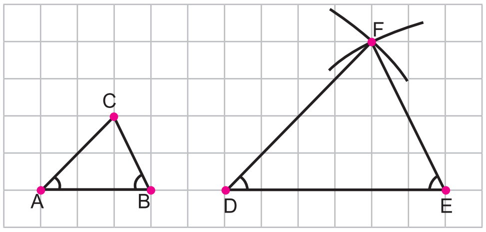
C3: Criterio de semejanza Lado-Lado-Lado (LLL)

Ⓟ Construya un ΔDEF, tal que:

a) $DE = 2AB$ b) $EF = 2BC$ c) $DF = 2AC$

¿Son semejantes ΔABC y ΔDEF?

Ⓢ



$\measuredangle A = \measuredangle D$, $\measuredangle B = \measuredangle E$ y $\measuredangle C = \measuredangle F$

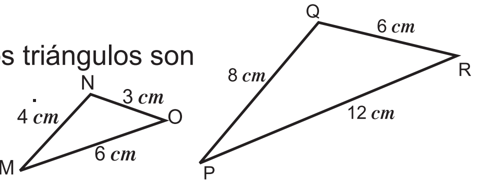
Por lo tanto, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Ⓒ Criterio LLL

Dos triángulos son semejantes si tienen lados correspondientes proporcionales.

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

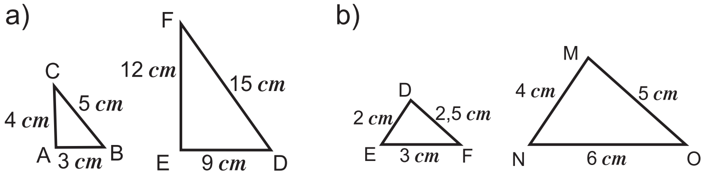
Ⓔⓙ Investigue si los triángulos son semejantes.



$$\left.\frac{MN}{PQ} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \frac{NO}{QR} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \frac{MO}{PR} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}\right\} \overset{\text{LLL}}{\Longrightarrow} \Delta MNO \sim \Delta PQR$$

Ⓔ Investigue si los triángulos son semejantes.

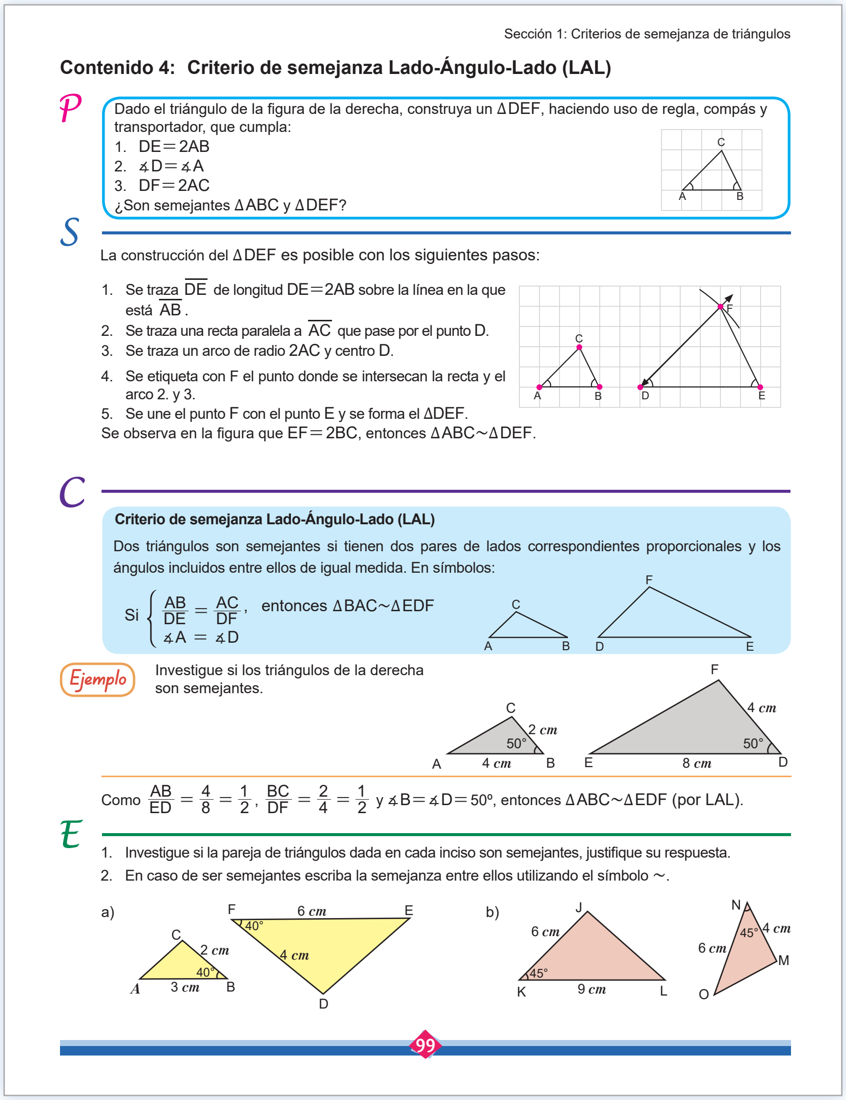
a) b)



$$\text{a) } \left.\frac{AB}{ED} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad \frac{BC}{DF} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \quad \frac{AC}{EF} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}\right\} \overset{\text{LLL}}{\Longrightarrow} \Delta ABC \sim \Delta EDF$$

$$\text{b) } \left.\frac{DE}{MN} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \frac{EF}{NO} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \frac{DF}{MO} = \frac{2{,}5}{5} = \frac{1}{2}\right\} \overset{\text{LLL}}{\Longrightarrow} \Delta DEF \sim \Delta MNO$$

Contenido 4 Criterio de semejanza Lado-Ángulo-Lado (LAL)



Sección 1: Criterios de semejanza de triángulos

Contenido 4: Criterio de semejanza Lado-Ángulo-Lado (LAL)

P

Dado el triángulo de la figura de la derecha, construya un ΔDEF, haciendo uso de regla, compás y transportador, que cumpla:

1. DE=2AB
2. ∡D=∡A
3. DF=2AC

¿Son semejantes ΔABC y ΔDEF?

S

La construcción del ΔDEF es posible con los siguientes pasos:

1. Se traza $\overline{DE}$ de longitud DE=2AB sobre la línea en la que está $\overline{AB}$.
2. Se traza una recta paralela a $\overline{AC}$ que pase por el punto D.
3. Se traza un arco de radio 2AC y centro D.
4. Se etiqueta con F el punto donde se intersecan la recta y el arco 2. y 3.
5. Se une el punto F con el punto E y se forma el ΔDEF.

Se observa en la figura que EF=2BC, entonces ΔABC~ΔDEF.

C

Criterio de semejanza Lado-Ángulo-Lado (LAL)

Dos triángulos son semejantes si tienen dos pares de lados correspondientes proporcionales y los ángulos incluidos entre ellos de igual medida. En símbolos:

$$\text{Si}\left\{\begin{matrix}\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF},\\ \measuredangle A=\measuredangle D\end{matrix}\right. \text{ entonces } \Delta BAC\sim\Delta EDF$$

Ejemplo

Investigue si los triángulos de la derecha son semejantes.

Como $\frac{AB}{ED}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$, $\frac{BC}{DF}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ y ∡B=∡D=50º, entonces ΔABC~ΔEDF (por LAL).

E

1. Investigue si la pareja de triángulos dada en cada inciso son semejantes, justifique su respuesta.
2. En caso de ser semejantes escriba la semejanza entre ellos utilizando el símbolo ~.

a)

b)

99

Aprendizajes esperados

Determina si dos triángulos dados son semejantes aplicando el criterio de semejanza LAL.

▪ Secuencia:

En clases anteriores los estudiantes aprendieron los criterios de semejanza AA y LLL.

En esta clase se estudia un tercer criterio de semejanza. Este es el criterio de semejanza Lado-Ángulo -Lado (LAL).

▪ Puntos esenciales:

Resaltar que lo que se quiere construir es un triángulo que tenga dos lados proporcionales a sus correspondientes en el otro triángulo, y el ángulo entre ellos de igual medida a su correspondiente en el triángulo dado.

Identificar que el objetivo de trazar la paralela, es formar ángulos correspondientes entre paralelas de igual medida. Asimismo el objetivo de trazar el arco es formar un lado proporcional a un lado del otro triángulo.

Explicar en qué consiste LAL, y recordar que se cuide el orden en que se escriben los vértices de los triángulos al establecer la semejanza.

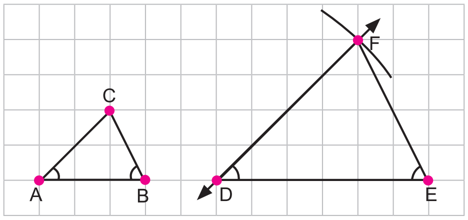
C4: Criterio de semejanza Lado-Ángulo-Lado (LAL)

P Construya un ΔDEF, tal que:

a) $DE = 2AB$ b) $\measuredangle D = \measuredangle A$ c) $DF = 2AC$

¿Son semejantes ΔABC y ΔDEF?

S



$DE = 2AB \quad DF = 2AC \quad EF = 2BC$

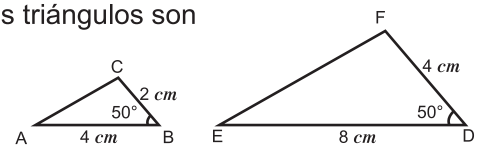
Por LLL, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

C Criterio LAL

Dos triángulos son semejantes si tienen dos pares de lados correspondientes proporcionales y los ángulos incluidos entre ellos de igual medida.

$$\left.\begin{matrix}\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}\\ \measuredangle A=\measuredangle D\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \Delta BAC\sim\Delta EDF$$

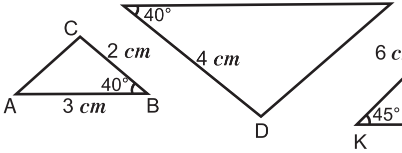
Ej Investigue si los triángulos son semejantes.



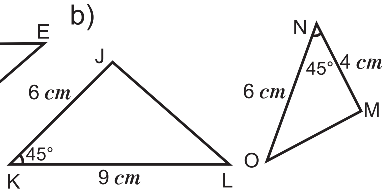
$$\frac{AB}{ED}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2} \quad \frac{BC}{DF}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \quad \left.\measuredangle B=\measuredangle D=50°\right\}\overset{\text{LAL}}{\Longrightarrow}\Delta ABC\sim\Delta EDF$$

E Investigue si los triángulos son semejantes.

a)



b)



a) $\frac{AB}{EF}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \quad \frac{BC}{FD}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \quad \left.\measuredangle B=\measuredangle F=40°\right\}\overset{\text{LAL}}{\Longrightarrow}\Delta ABC\sim\Delta EFD$

b) $\frac{LK}{ON}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2} \quad \frac{KJ}{NM}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2} \quad \left.\measuredangle K=\measuredangle N=45°\right\}\overset{\text{LAL}}{\Longrightarrow}\Delta LKJ\sim\Delta ONM$

Contenido 6 Demostración de la semejanza de triángulos utilizando AA

Aprendizajes esperados

Demuestra que dos triángulos son semejantes utilizando AA.

Secuencia:

En esta sección se ha estudiado la semejanza entre triángulos y tres criterios para establecer tal relación.

En esta clase se aplica el criterio de semejanza AA, para demostrar que dos triángulos son semejantes.

Puntos esenciales:

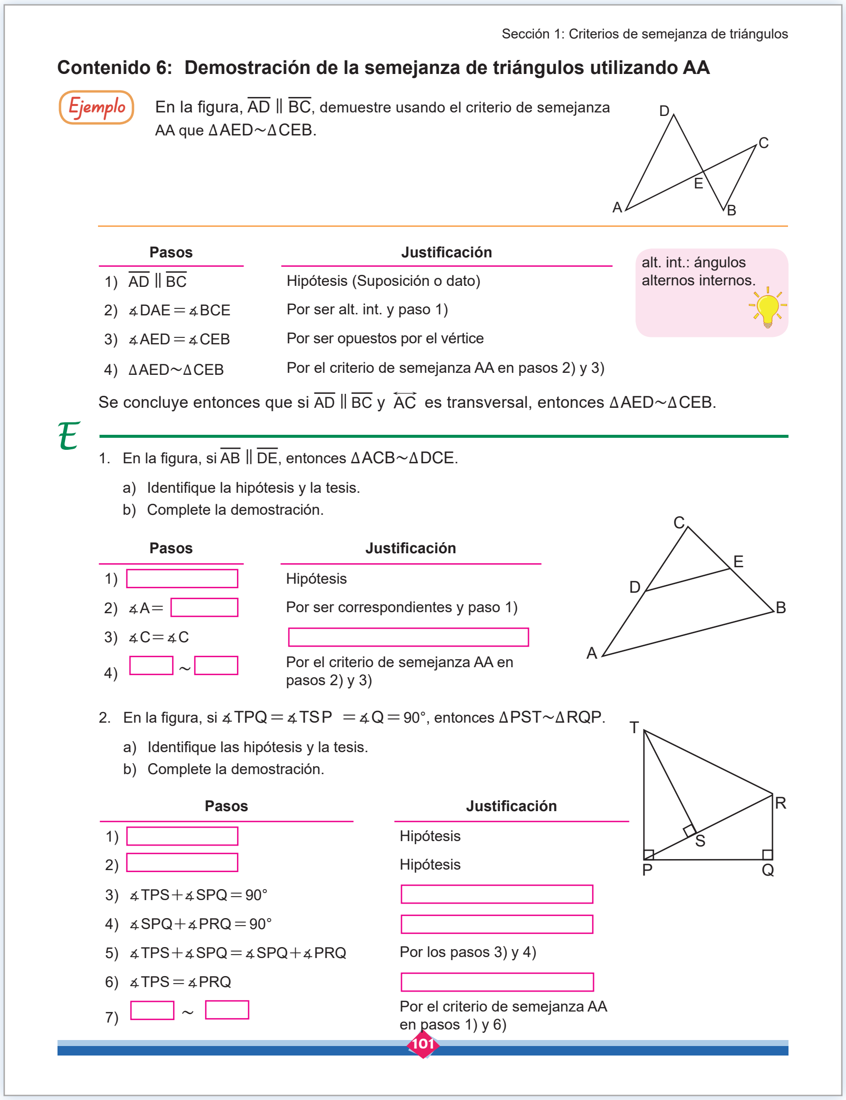
Recordar:

- ✓ En qué consiste el criterio de semejanza AA.
- ✓ Cómo son las medidas de ángulos opuestos por el vértice, y alternos internos entre paralelas.

Identificar la hipótesis y la tesis en el enunciado del problema y de los ejercicios.

Utilizar la figura como recurso auxiliar para identificar cada afirmación.

Señalar la importancia del orden en que se escriben los vértices de los triángulos al establecer la semejanza.



Sección 1: Criterios de semejanza de triángulos

Contenido 6: Demostración de la semejanza de triángulos utilizando AA

Ejemplo En la figura, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, demuestre usando el criterio de semejanza AA que $\Delta AED \sim \Delta CEB$.

Pasos	Justificación
1) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	Hipótesis (Suposición o dato)
2) $\measuredangle DAE = \measuredangle BCE$	Por ser alt. int. y paso 1)
3) $\measuredangle AED = \measuredangle CEB$	Por ser opuestos por el vértice
4) $\Delta AED \sim \Delta CEB$	Por el criterio de semejanza AA en pasos 2) y 3)

alt. int.: ángulos alternos internos.

Se concluye entonces que si $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{AC}$ es transversal, entonces $\Delta AED \sim \Delta CEB$.

E

1. En la figura, si $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, entonces $\Delta ACB \sim \Delta DCE$.
   a) Identifique la hipótesis y la tesis.
   b) Complete la demostración.

Pasos	Justificación
1) ☐	Hipótesis
2) $\measuredangle A =$ ☐	Por ser correspondientes y paso 1)
3) $\measuredangle C = \measuredangle C$	☐
4) ☐ ~ ☐	Por el criterio de semejanza AA en pasos 2) y 3)

2. En la figura, si $\measuredangle TPQ = \measuredangle TSP = \measuredangle Q = 90°$, entonces $\Delta PST \sim \Delta RQP$.
   a) Identifique las hipótesis y la tesis.
   b) Complete la demostración.

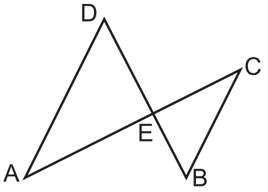
Pasos	Justificación
1) ☐	Hipótesis
2) ☐	Hipótesis
3) $\measuredangle TPS + \measuredangle SPQ = 90°$	☐
4) $\measuredangle SPQ + \measuredangle PRQ = 90°$	☐
5) $\measuredangle TPS + \measuredangle SPQ = \measuredangle SPQ + \measuredangle PRQ$	Por los pasos 3) y 4)
6) $\measuredangle TPS = \measuredangle PRQ$	☐
7) ☐ ~ ☐	Por el criterio de semejanza AA en pasos 1) y 6)

101

C6: Demostración de la semejanza de triángulos utilizando AA

Ej En la figura, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. Demuestre que $\Delta AED \sim \Delta CEB$.

Hipótesis

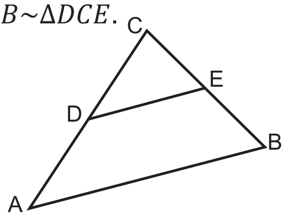


Pasos	Justificación
1. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	Hipótesis
2. $\measuredangle DAE = \measuredangle BCE$	Por ser alt. int. y paso 1
3. $\measuredangle AED = \measuredangle CEB$	Por ser opuestos por el vértice
4. $\Delta AED \sim \Delta CEB$	AA en pasos 2 y 3

E 1. Si $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, entonces $\Delta ACB \sim \Delta DCE$.

Hipótesis: $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$

Tesis: $\Delta ACB \sim \Delta DCE$

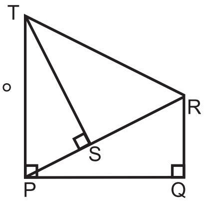


Pasos	Justificación
1. $\underline{\overline{AB}} \parallel \underline{\overline{DE}}$	Hipótesis
2. $\measuredangle A = \underline{\measuredangle D}$	Por ser correspondientes y paso 1
3. $\measuredangle C = \measuredangle C$	$\underline{\angle C \text{ es común en } \Delta ACB \text{ y } \Delta DCE}$
4. $\underline{\Delta ACB} \sim \underline{\Delta DCE}$	AA en pasos 2 y 3

2. Si $\measuredangle TPQ = \measuredangle S = \measuredangle Q = 90°$, entonces $\Delta PST \sim \Delta RQP$.

Hipótesis: $\measuredangle TPQ = \measuredangle S = \measuredangle Q = 90°$

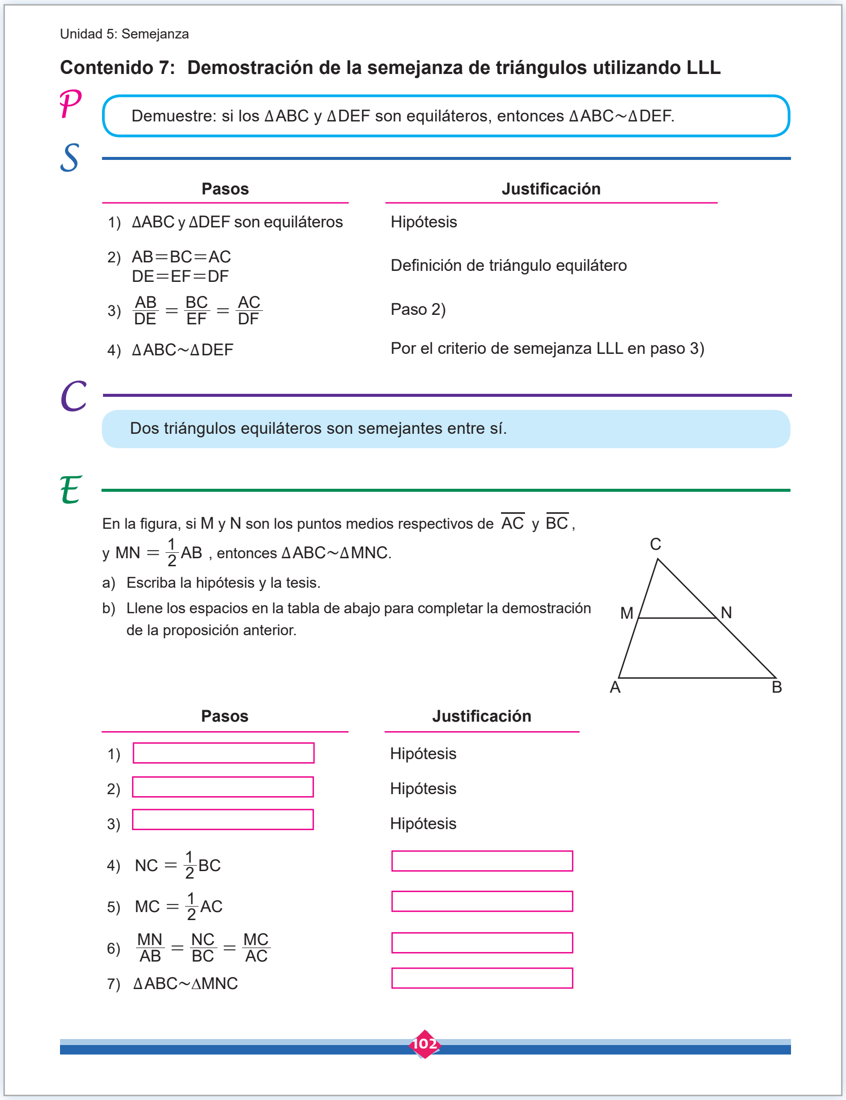
Tesis: $\Delta PST \sim \Delta RQP$



Pasos	Justificación
1. $\underline{\measuredangle S = \measuredangle Q = 90°}$	Hipótesis
2. $\underline{\measuredangle TPQ = 90°}$	Hipótesis
3. $\measuredangle TPS + \measuredangle SPQ = 90°$	Suma de ángulos y paso 2
4. $\measuredangle SPQ + \measuredangle PRQ = 90°$	Prop. áng. int. triáng.
5. $\measuredangle TPS + \measuredangle SPQ = \measuredangle SPQ + \measuredangle PRQ$	Por 3 y 4
6. $\measuredangle TPS = \measuredangle PRQ$	Cancelando $\measuredangle SPQ$ en 5
7. $\underline{\Delta PST} \sim \underline{\Delta RQP}$	AA en pasos 1 y 6

Contenido

7 Demostración de la semejanza de triángulos utilizando LLL



Unidad 5: Semejanza

Contenido 7: Demostración de la semejanza de triángulos utilizando LLL

P Demuestre: si los ΔABC y ΔDEF son equiláteros, entonces ΔABC~ΔDEF.

S

Pasos	Justificación
1) ΔABC y ΔDEF son equiláteros	Hipótesis
2) AB=BC=AC DE=EF=DF	Definición de triángulo equilátero
3) $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}$	Paso 2)
4) ΔABC~ΔDEF	Por el criterio de semejanza LLL en paso 3)

C

Dos triángulos equiláteros son semejantes entre sí.

E

En la figura, si M y N son los puntos medios respectivos de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, y $MN=\frac{1}{2}AB$, entonces ΔABC~ΔMNC.

a) Escriba la hipótesis y la tesis.

b) Llene los espacios en la tabla de abajo para completar la demostración de la proposición anterior.

Pasos	Justificación
1)	Hipótesis
2)	Hipótesis
3)	Hipótesis
4) $NC=\frac{1}{2}BC$	
5) $MC=\frac{1}{2}AC$	
6) $\frac{MN}{AB}=\frac{NC}{BC}=\frac{MC}{AC}$	
7) ΔABC~ΔMNC	

102

Aprendizajes esperados

Demuestra que dos triángulos son semejantes utilizando LLL.

Secuencia:

En la clase anterior los estudiantes demostraron semejanza entre triángulos, utilizando el criterio AA.

En esta clase se aplica el criterio de semejanza LLL, para seguir demostrando semejanza entre triángulos.

Puntos esenciales:

Recordar en qué consiste el criterio de semejanza LLL.

Identificar la hipótesis y la tesis en el enunciado del problema y de los ejercicios.

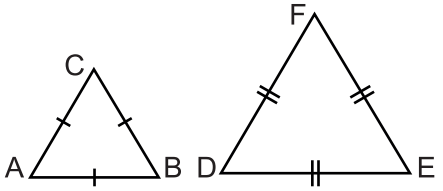
Utilizar la figura como recurso auxiliar para identificar cada afirmación.

Señalar la importancia del orden en que se escriben los vértices de los triángulos al establecer la semejanza.

Destacar que dos triángulos equiláteros cualesquiera son semejantes entre sí.

C7: Demostración de la semejanza de triángulos utilizando LLL

P Si ΔABC y ΔDEF son equiláteros, demuestre que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.



S

Pasos	Justificación
1. ΔABC y ΔDEF son equiláteros	Hipótesis
2. $AB=BC=AC$ $DE=EF=DF$	Def. de triángulo equilátero
3. $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}$	Paso 2
4. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$	LLL en paso 3

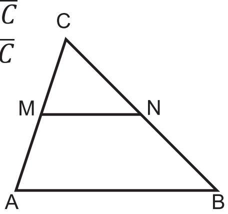
C Dos triángulos equiláteros son semejantes entre sí.

E Hipótesis: M punto medio de $\overline{AC}$

N punto medio de $\overline{BC}$

$MN=\frac{1}{2}AB$

Tesis: $\Delta ABC \sim \Delta MNC$



Pasos	Justificación
1. M punto medio de $\overline{AC}$	Hipótesis
2. N punto medio de $\overline{BC}$	Hipótesis
3. $MN=\frac{1}{2}AB$	Hipótesis
4. $NC=\frac{1}{2}BC$	Paso 2
5. $MC=\frac{1}{2}AC$	Paso 1
6. $\frac{MN}{AB}=\frac{NC}{BC}=\frac{MC}{AC}$	Pasos 3, 4 y 5
7. $\Delta ABC \sim \Delta MNC$	LLL en paso 6

Contenido 8 Demostración de la semejanza de triángulos utilizando LAL

Aprendizajes esperados

Demuestra que dos triángulos son semejantes utilizando LAL.

Secuencia:

En la clase anterior se demostraron semejanzas entre triángulos, utilizando el criterio LLL.

En esta clase se aplica el criterio de semejanza LAL, para seguir demostrando semejanza entre triángulos.

Puntos esenciales:

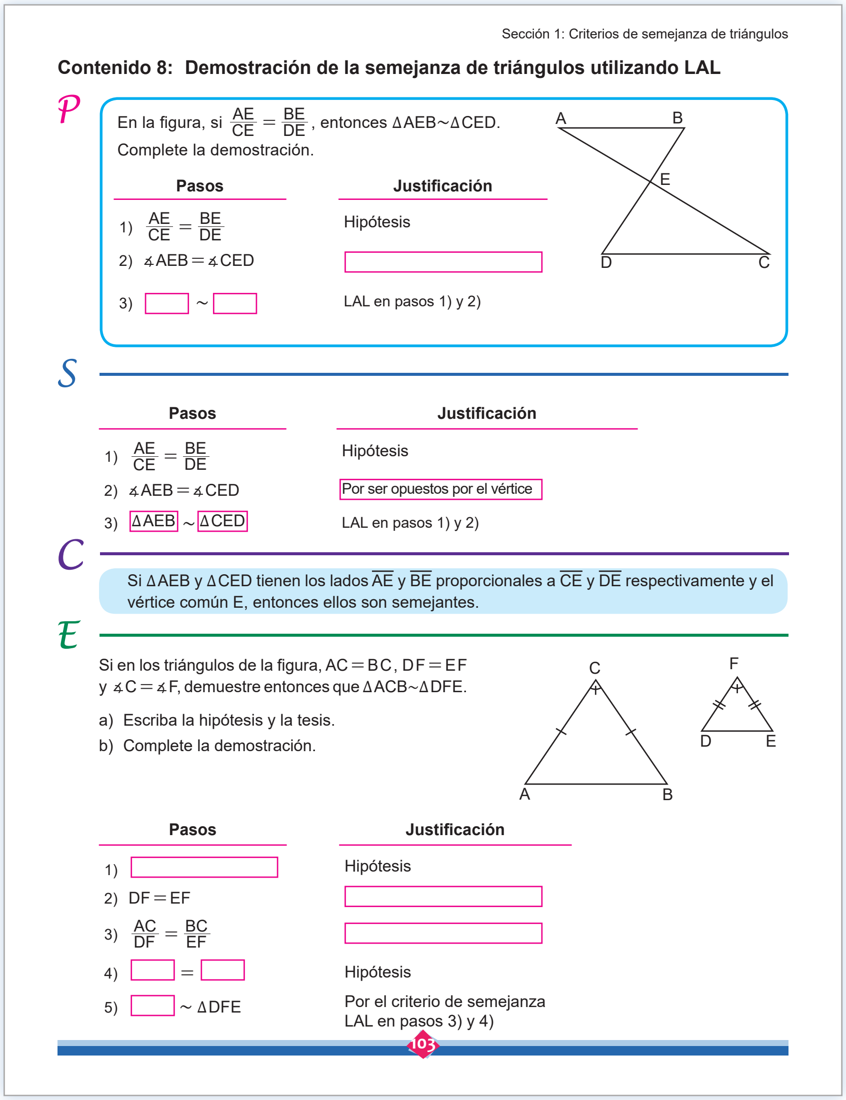
Recordar:

- ✓ En qué consiste el criterio de semejanza LAL.
- ✓ Qué ángulos opuestos por el vértice tienen la misma medida.

Identificar la hipótesis y la tesis en el enunciado del problema y de los ejercicios.

Utilizar la figura como recurso auxiliar para identificar cada afirmación.

Señalar la importancia del orden en que se escriben los vértices de los triángulos al establecer la semejanza.



Sección 1: Criterios de semejanza de triángulos

Contenido 8: Demostración de la semejanza de triángulos utilizando LAL

P

En la figura, si $\frac{AE}{CE}=\frac{BE}{DE}$, entonces $\Delta AEB \sim \Delta CED$.
Complete la demostración.

Pasos	Justificación
1) $\frac{AE}{CE}=\frac{BE}{DE}$	Hipótesis
2) $\measuredangle AEB=\measuredangle CED$	☐
3) ☐ ~ ☐	LAL en pasos 1) y 2)

S

Pasos	Justificación
1) $\frac{AE}{CE}=\frac{BE}{DE}$	Hipótesis
2) $\measuredangle AEB=\measuredangle CED$	Por ser opuestos por el vértice
3) $\Delta AEB \sim \Delta CED$	LAL en pasos 1) y 2)

C

Si ΔAEB y ΔCED tienen los lados $\overline{AE}$ y $\overline{BE}$ proporcionales a $\overline{CE}$ y $\overline{DE}$ respectivamente y el vértice común E, entonces ellos son semejantes.

E

Si en los triángulos de la figura, $AC=BC$, $DF=EF$ y $\measuredangle C=\measuredangle F$, demuestre entonces que $\Delta ACB \sim \Delta DFE$.

a) Escriba la hipótesis y la tesis.
b) Complete la demostración.

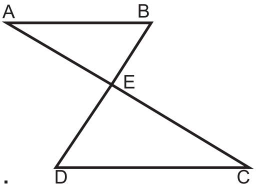
Pasos	Justificación
1) ☐	Hipótesis
2) $DF=EF$	☐
3) $\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}$	☐
4) ☐ = ☐	Hipótesis
5) ☐ $\sim \Delta DFE$	Por el criterio de semejanza LAL en pasos 3) y 4)

103

C8: Demostración de semejanza de triángulos utilizando LAL

P Hipótesis

Si $\frac{AE}{CE}=\frac{BE}{DE}$,
entonces $\Delta AEB \sim \Delta CED$.
Complete la demostración.

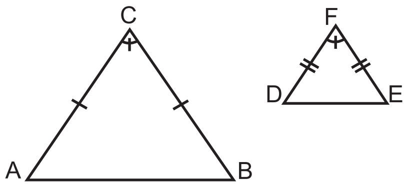


S

Pasos	Justificación
1. $\frac{AE}{EC}=\frac{BE}{ED}$	Hipótesis
2. $\measuredangle AEB=\measuredangle CED$	Son opuestos por el vértice
3. $\Delta AEB \sim \Delta CED$	LAL en pasos 1 y 2

C *Leer en el libro de texto.*

E

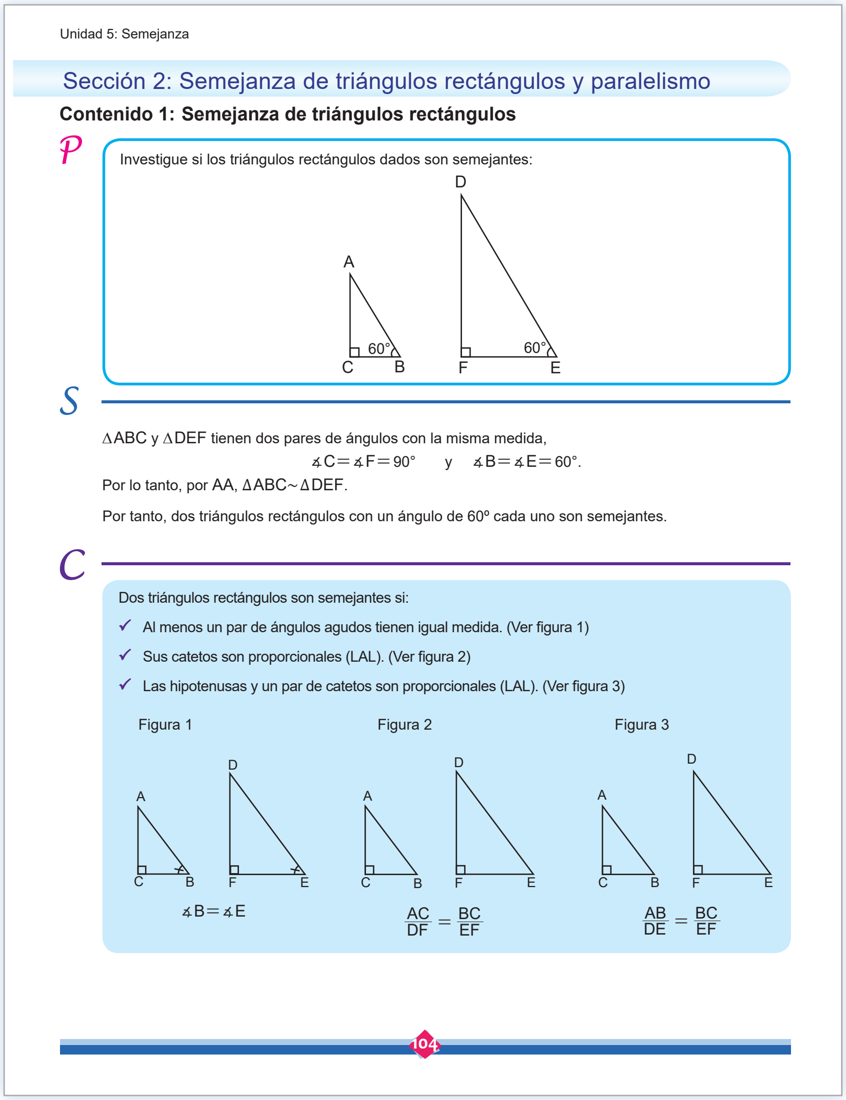


a) Hipótesis: $AC=BC$ $DF=EF$ $\measuredangle C=\measuredangle F$
Tesis: $\Delta ACB \sim \Delta DFE$

b)

Pasos	Justificación
1. $AC=BC$	Hipótesis
2. $DF=EF$	Hipótesis
3. $\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}$	Pasos 1 y 2
4. $\measuredangle C=\measuredangle F$	Hipótesis
5. $\Delta ACB \sim \Delta DFE$	LAL en pasos 3 y 4

Contenido 1 Semejanza de triángulos rectángulos



Unidad 5: Semejanza

Sección 2: Semejanza de triángulos rectángulos y paralelismo

Contenido 1: Semejanza de triángulos rectángulos

P

Investigue si los triángulos rectángulos dados son semejantes:

S

ΔABC y ΔDEF tienen dos pares de ángulos con la misma medida,

$$\measuredangle C = \measuredangle F = 90° \quad y \quad \measuredangle B = \measuredangle E = 60°.$$

Por lo tanto, por AA, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Por tanto, dos triángulos rectángulos con un ángulo de 60º cada uno son semejantes.

C

Dos triángulos rectángulos son semejantes si:

- ✓ Al menos un par de ángulos agudos tienen igual medida. (Ver figura 1)
- ✓ Sus catetos son proporcionales (LAL). (Ver figura 2)
- ✓ Las hipotenusas y un par de catetos son proporcionales (LAL). (Ver figura 3)

Figura 1

$\measuredangle B = \measuredangle E$

Figura 2

$\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

Figura 3

$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$

Aprendizajes esperados

Establece cuándo dos triángulos rectángulos son semejantes.

Secuencia:

En la primera sección se estudiaron tres criterios para saber si dos triángulos son semejantes. Pero, ¿existirá una manera más sencilla, para saber si dos triángulos rectángulos son semejantes?

En esta clase se estudian tres criterios de semejanza de triángulos rectángulos, consecuencias de los criterios estudiados anteriormente.

Puntos esenciales:

Destacar que dos triángulos rectángulos son semejantes, si:

- ✓ Dos ángulos agudos correspondientes tienen la misma medida.
- ✓ Los catetos correspondientes son proporcionales.
- ✓ Las hipotenusas y dos catetos correspondiente son proporcionales.

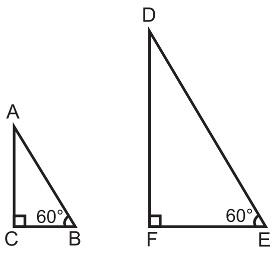
Aclarar que estos criterios son consecuencia de los criterios estudiados anteriormente.

Señalar la importancia del orden en que se escriben los vértices de los triángulos al establecer la semejanza.

S2: Semejanza de triángulos rectángulos y paralelismo

C1: Semejanza de triángulos rectángulos

Ⓟ Investigue si los triángulos rectángulos son semejantes.



Ⓢ $\measuredangle C = \measuredangle F = 90°$

$\measuredangle B = \measuredangle E = 60°$

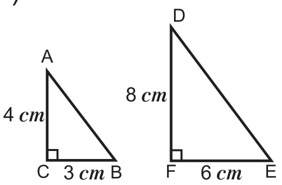
Por AA, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Ⓒ Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen:

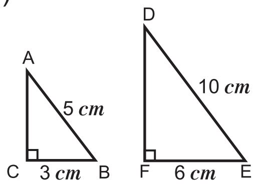
- Un par de ángulos agudos de igual medida.
- Los catetos proporcionales.
- Las hipotenusas y un par de catetos proporcionales.

(Ej) Investigue si los triángulos son semejantes.

a)



b)



a) $\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$

b) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$

Ⓔ a) $\measuredangle A = \measuredangle D = 37° \Longrightarrow \Delta ACB \sim \Delta DFE$

b) $\frac{AC}{DF} = \frac{CB}{FE} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \Delta ACB \sim \Delta DFE$

c) $\frac{CA}{FD} = \frac{AB}{DE} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \Delta CAB \sim \Delta FDE$

Contenido 2 Teorema del cateto

Aprendizajes esperados

Aplica el teorema del cateto en el cálculo de las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo.

Secuencia:

En la clase anterior se estudiaron tres criterios para saber si dos triángulos rectángulos son semejantes.

En esta clase se demuestra que en un triángulo rectángulo el cuadrado de un cateto es igual al producto de la hipotenusa por la proyección del cateto sobre la misma. A esta afirmación se le conoce como teorema del cateto.

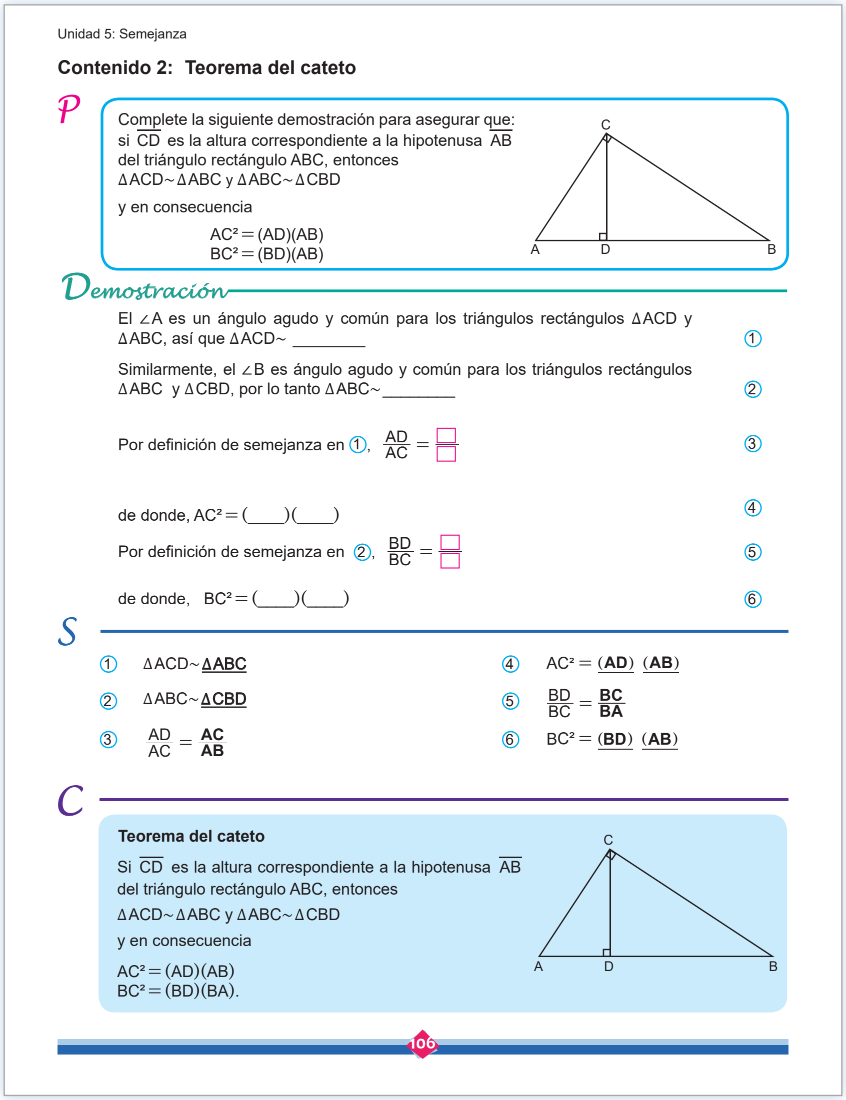
Puntos esenciales:

Identificar la hipótesis y la tesis del enunciado del problema.

Indicar que la altura correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo divide al triángulo en dos triángulos semejantes entre sí y semejantes al triángulo dado.

Señalar la importancia del orden en que se escriben los vértices de los triángulos al establecer la semejanza.

Explicar cómo se aplica la definición de semejanza en la demostración.
Expresar verbalmente lo que garantiza el teorema del cateto.



Unidad 5: Semejanza

Contenido 2: Teorema del cateto

P

Complete la siguiente demostración para asegurar que: si $\overline{CD}$ es la altura correspondiente a la hipotenusa $\overline{AB}$ del triángulo rectángulo ABC, entonces
$\Delta ACD \sim \Delta ABC$ y $\Delta ABC \sim \Delta CBD$
y en consecuencia
$AC^2 = (AD)(AB)$
$BC^2 = (BD)(AB)$

Demostración

El ∠A es un ángulo agudo y común para los triángulos rectángulos ΔACD y ΔABC, así que $\Delta ACD \sim$ ________ ①

Similarmente, el ∠B es ángulo agudo y común para los triángulos rectángulos ΔABC y ΔCBD, por lo tanto $\Delta ABC \sim$ ________ ②

Por definición de semejanza en ①, $\frac{AD}{AC} = \frac{\square}{\square}$ ③

de donde, $AC^2 = (\_\_\_)(\_\_\_)$ ④

Por definición de semejanza en ②, $\frac{BD}{BC} = \frac{\square}{\square}$ ⑤

de donde, $BC^2 = (\_\_\_)(\_\_\_)$ ⑥

S

①	$\Delta ACD \sim \underline{\Delta ABC}$	④	$AC^2 = \underline{(AD)}\ \underline{(AB)}$
②	$\Delta ABC \sim \underline{\Delta CBD}$	⑤	$\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{BA}$
③	$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$	⑥	$BC^2 = \underline{(BD)}\ \underline{(AB)}$

C

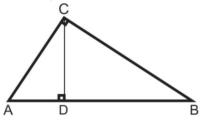
Teorema del cateto

Si $\overline{CD}$ es la altura correspondiente a la hipotenusa $\overline{AB}$ del triángulo rectángulo ABC, entonces
$\Delta ACD \sim \Delta ABC$ y $\Delta ABC \sim \Delta CBD$
y en consecuencia
$AC^2 = (AD)(AB)$
$BC^2 = (BD)(BA)$.

106

C2: Teorema del cateto

P Si $\overline{CD}$ es la altura correspondiente a $\overline{AB}$. Demuestre
$\Delta ACD \sim \Delta ABC$ y
$\Delta ABC \sim \Delta CBD$



$$AC^2 = (AD)(AB)$$
$$BC^2 = (BD)(AB)$$

D El $\angle A$ es común, $\Delta ACD \sim \underline{\Delta ABC}$. ①
El $\angle B$ es común, $\Delta ABC \sim \underline{\Delta CBD}$. ②

Por def. de semejanza en ①, $\frac{AD}{AC} = \frac{\boxed{AC}}{\boxed{AB}}$ ③

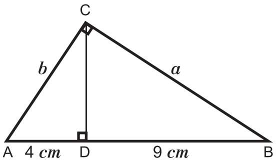
$AC^2 = \underline{(AD)(AB)}$ ④

Por def. de semejanza en ②, $\frac{BD}{BC} = \frac{\boxed{BC}}{\boxed{AB}}$ ⑤

$BC^2 = \underline{(BD)(AB)}$ ⑥

C Si $\overline{CD}$ es la altura correspondiente a la hipotenusa $\overline{AB}$, entonces $\Delta ACD \sim \Delta ABC$ y $\Delta ABC \sim \Delta CBD$. Además
$$AC^2 = (AD)(AB)$$
$$BC^2 = (BD)(AB)$$

Ej Calcule el valor de b y a.

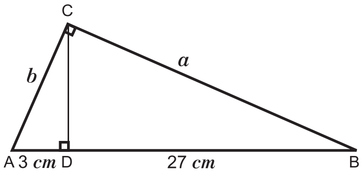


$AC = b,\ CB = a,\ AD = 4,\ DB = 9$
$AB = 4 + 9 = 13$
Por el teorema del cateto:

$b^2 = (4)(13) = 52$ $\qquad b = \sqrt{(2^2)(13)} = 2\sqrt{13}$

$a^2 = (9)(13) = 117$ $\qquad a = \sqrt{(3^2)(13)} = 3\sqrt{13}$

E

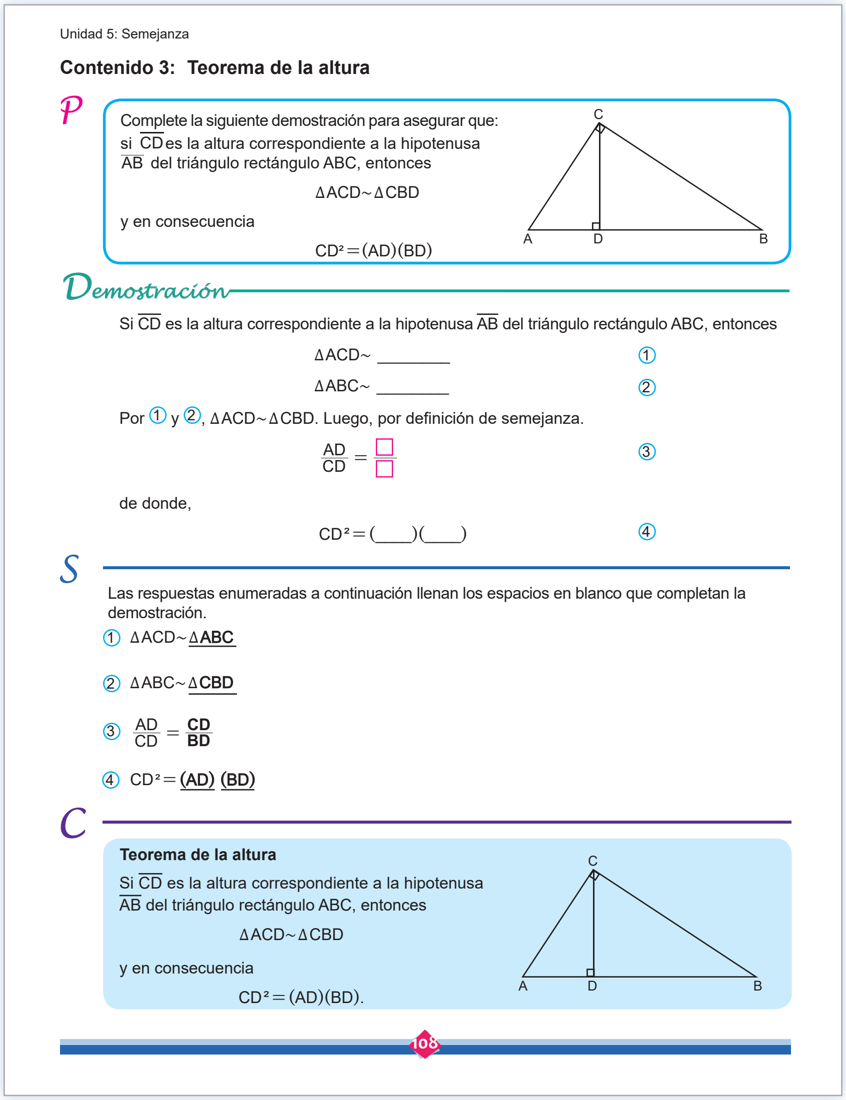


$AC = b,\ CB = a,\ AD = 3,\ DB = 27,\ AB = 3 + 27 = 30$
Por el teorema del cateto:

$b^2 = (3)(30) = 90$ $\qquad b = \sqrt{(3^2)(10)} = 3\sqrt{10}$

$a^2 = (27)(30) = 810$ $\qquad a = \sqrt{(9^2)(10)} = 9\sqrt{10}$

Contenido 3 Teorema de la altura



Unidad 5: Semejanza

Contenido 3: Teorema de la altura

P

Complete la siguiente demostración para asegurar que:
si $\overline{CD}$ es la altura correspondiente a la hipotenusa $\overline{AB}$ del triángulo rectángulo ABC, entonces

$\Delta ACD \sim \Delta CBD$

y en consecuencia

$CD^2 = (AD)(BD)$

Demostración

Si $\overline{CD}$ es la altura correspondiente a la hipotenusa $\overline{AB}$ del triángulo rectángulo ABC, entonces

$\Delta ACD \sim$ ________ ①

$\Delta ABC \sim$ ________ ②

Por ① y ②, $\Delta ACD \sim \Delta CBD$. Luego, por definición de semejanza.

$\frac{AD}{CD} = \frac{\square}{\square}$ ③

de donde,

$CD^2 = (\_\_\_)(\_\_\_)$ ④

S

Las respuestas enumeradas a continuación llenan los espacios en blanco que completan la demostración.

① $\Delta ACD \sim$ **ΔABC**

② $\Delta ABC \sim$ **ΔCBD**

③ $\frac{AD}{CD} = \frac{\mathbf{CD}}{\mathbf{BD}}$

④ $CD^2 =$ **(AD) (BD)**

C

Teorema de la altura

Si $\overline{CD}$ es la altura correspondiente a la hipotenusa $\overline{AB}$ del triángulo rectángulo ABC, entonces

$\Delta ACD \sim \Delta CBD$

y en consecuencia

$CD^2 = (AD)(BD)$.

108

Aprendizajes esperados

Aplica el teorema de la altura en el cálculo de la altura de un triángulo rectángulo o de la longitud de su proyección sobre la hipotenusa.

Secuencia:

En la clase anterior se demostró el teorema del cateto.

En esta clase se demuestra que en un triángulo rectángulo el cuadrado de la altura correspondiente a la hipotenusa es igual al producto de las dos proyecciones de los catetos sobre la misma. A esta afirmación se le conoce como teorema de la altura.

Puntos esenciales:

Identificar la hipótesis y la tesis del enunciado del problema.

Recordar que la altura correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo divide al triángulo en dos triángulos semejantes entre sí y semejantes al triángulo dado.

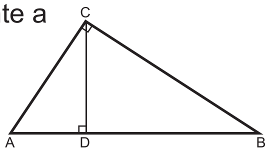
Aplicar la definición de semejanza, y demostrar que los triángulos rectángulos pequeños tienen dos ángulos agudos con la misma medida, es decir son semejantes.

Indicar que de la semejanza de dichos triángulos se deduce la tesis.

Expresar verbalmente lo que garantiza el teorema de la altura.

C3: Teorema de la altura

Ⓟ $\overline{CD}$ altura correspondiente a $\overline{AB}$. Demuestre:
$\Delta\, ACD \sim \Delta\, CBD$ y
$CD^2 = (AD)(BD)$



Ⓓ $\Delta\, ACD \sim \underline{\Delta\, ABC}$ ①

$\Delta\, ABC \sim \underline{\Delta\, CBD}$ ②

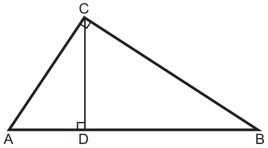
Por ① y ②, $\Delta\, ACD \sim \Delta\, CBD$

$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$ ③

$CD^2 = (AD)(BD)$ ④

Ⓒ Si $\overline{CD}$ es la altura correspondiente a la hipotenusa $\overline{AB}$ del triángulo rectángulo ABC entonces:

- $\Delta\, ACD \sim \Delta\, CBD$
- $CD^2 = (AD)(BD)$



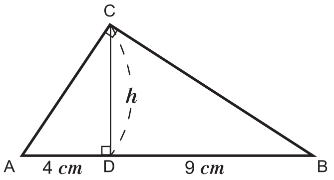
(Ej) Determine el valor de h.

$CD = h,\ AD = 4,\ DB = 9$

$h^2 = (4)(9) = 36$

$h = \sqrt{6^2} = 6$

Como $h > 0,\ h = 6\ cm$



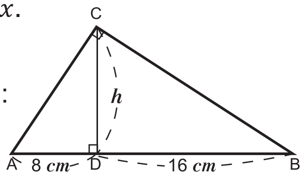
Ⓔ Determine el valor de h y x.

$CD = h,\ AD = 8,\ BD = 16$

Por el teorema de la altura:

$h^2 = (8)(16) = 128$

$h = \sqrt{(8^2)(2)} = 8\sqrt{2}$

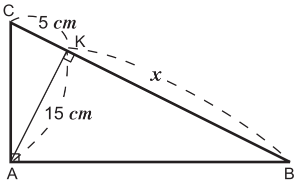


$AK = 15,\ CK = 5,\ BK = x$

Por el teorema de la altura:

$15^2 = 5x$

$x = 225 \div 5 = 45$



Contenido 4 Rectas paralelas y segmentos proporcionales (1)

Aprendizajes esperados

Establece que cualquier recta que corta a dos lados de un triángulo y es paralela al tercer lado determina un triángulo semejante al triángulo dado.

Secuencia:

En la clase anterior se demostró el teorema de la altura.

En esta clase se demuestra que un segmento que corta a dos lados de un triángulo y es paralelo al tercero, forma un triángulo cuyos lados son proporcionales a los lados del triángulo dado.

Puntos esenciales:

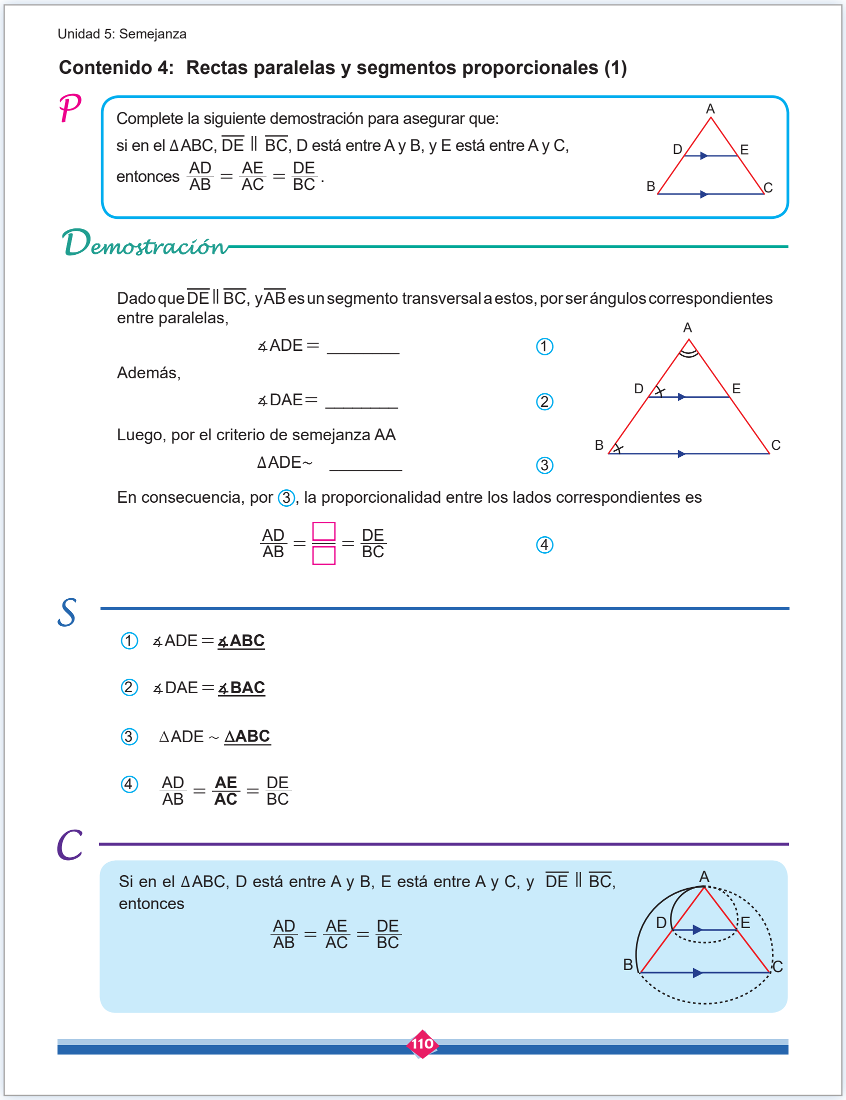
Utilizar la figura como un recurso auxiliar para identificar cada afirmación.

Recordar que ángulos correspondientes entre paralelas, tienen la misma medida.

Identificar cuándo dos ángulos son iguales.

Explicar cómo aplicar esta propiedad en la solución de ejercicios.

Respetar la semejanza entre dos triángulos al establecer la proporcionalidad entre sus lados.



Unidad 5: Semejanza

Contenido 4: Rectas paralelas y segmentos proporcionales (1)

P

Complete la siguiente demostración para asegurar que:
si en el Δ ABC, $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, D está entre A y B, y E está entre A y C,
entonces $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$.

Demostración

Dado que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, y $\overline{AB}$ es un segmento transversal a estos, por ser ángulos correspondientes entre paralelas,

$\measuredangle ADE =$ ________ ①

Además,

$\measuredangle DAE =$ ________ ②

Luego, por el criterio de semejanza AA

$\Delta ADE \sim$ ________ ③

En consecuencia, por ③, la proporcionalidad entre los lados correspondientes es

$\frac{AD}{AB} = \frac{\square}{\square} = \frac{DE}{BC}$ ④

S

① $\measuredangle ADE = \underline{\measuredangle \mathbf{ABC}}$

② $\measuredangle DAE = \underline{\measuredangle \mathbf{BAC}}$

③ $\Delta ADE \sim \underline{\Delta \mathbf{ABC}}$

④ $\frac{AD}{AB} = \frac{\mathbf{AE}}{\mathbf{AC}} = \frac{DE}{BC}$

C

Si en el Δ ABC, D está entre A y B, E está entre A y C, y $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, entonces

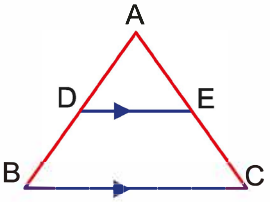
$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

110

C4: Rectas paralelas y segmentos proporcionales (1)

P En la figura $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.
Demuestre

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$



D Por $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, $\measuredangle ADE = \underline{\measuredangle ABC}$ ①

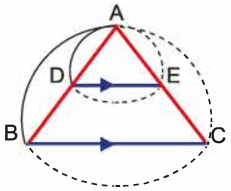
$\measuredangle DAE = \underline{\measuredangle BAC}$ ②

Por el criterio AA, $\Delta ADE \sim \underline{\Delta ABC}$ ③

Por la semejanza anterior,

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$ ④

C Dado el ΔABC, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$,
entonces $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

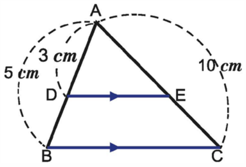


Ej Si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, encuentre AE.

$$\frac{3}{5} = \frac{AE}{10}$$

$$5AE = (3)(10)$$

$$AE = \frac{30}{5} = 6$$



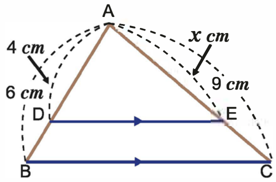
E Si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, calcule:

a) x

$$\frac{4}{6} = \frac{x}{9}$$

$$6x = (4)(9)$$

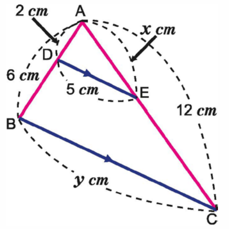
$$x = 6(cm)$$



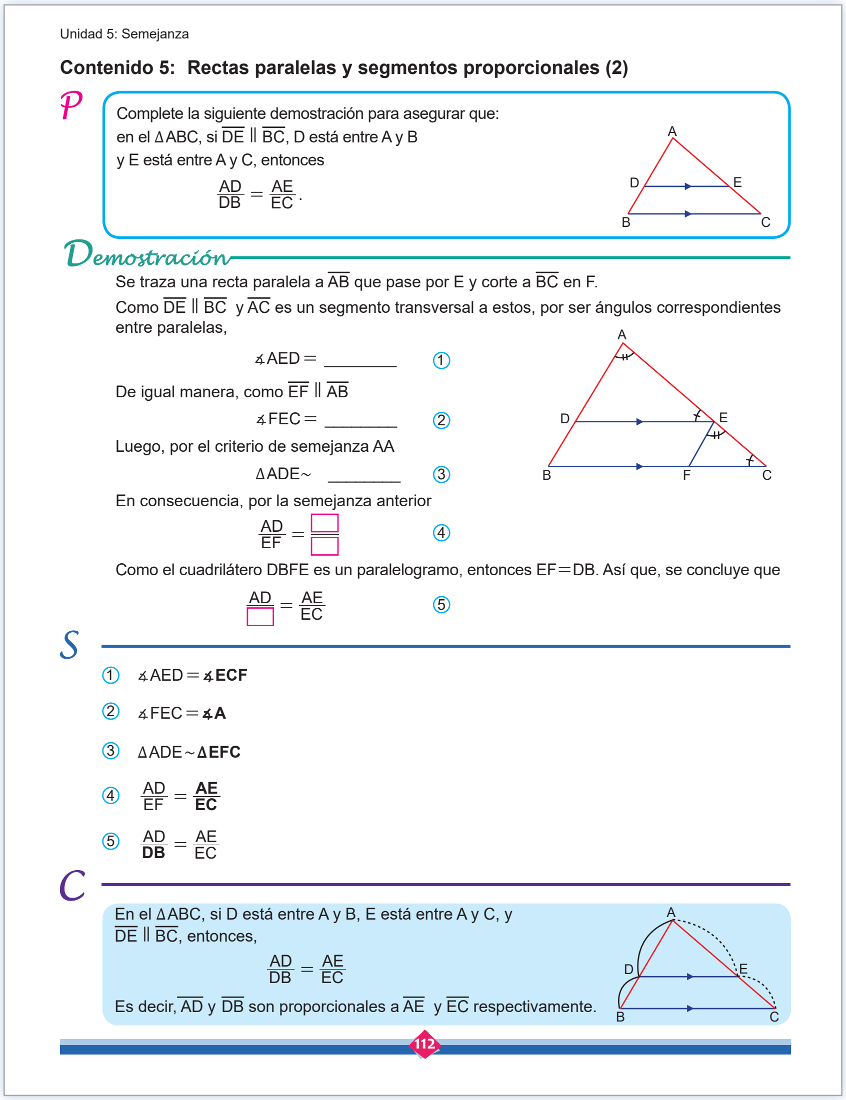
b) x y y

$$\frac{2}{6} = \frac{x}{12} \rightarrow x = \frac{(2)(12)}{6} = 4\ (cm)$$

$$\frac{2}{6} = \frac{5}{y} \rightarrow y = \frac{(5)(6)}{2} = 15\ \ (cm)$$



Contenido 5 Rectas paralelas y segmentos proporcionales (2)



Unidad 5: Semejanza

Contenido 5: Rectas paralelas y segmentos proporcionales (2)

P

Complete la siguiente demostración para asegurar que:
en el ΔABC, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, D está entre A y B
y E está entre A y C, entonces

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

Demostración

Se traza una recta paralela a $\overline{AB}$ que pase por E y corte a $\overline{BC}$ en F.

Como $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{AC}$ es un segmento transversal a estos, por ser ángulos correspondientes entre paralelas,

$\measuredangle AED =$ ________ ①

De igual manera, como $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$

$\measuredangle FEC =$ ________ ②

Luego, por el criterio de semejanza AA

$\Delta ADE \sim$ ________ ③

En consecuencia, por la semejanza anterior

$\frac{AD}{EF} = \frac{\square}{\square}$ ④

Como el cuadrilátero DBFE es un paralelogramo, entonces EF = DB. Así que, se concluye que

$\frac{AD}{\square} = \frac{AE}{EC}$ ⑤

S

① $\measuredangle AED = \measuredangle$**ECF**

② $\measuredangle FEC = \measuredangle$**A**

③ $\Delta ADE \sim$ **ΔEFC**

④ $\frac{AD}{EF} = \frac{\mathbf{AE}}{\mathbf{EC}}$

⑤ $\frac{AD}{\mathbf{DB}} = \frac{AE}{EC}$

C

En el ΔABC, si D está entre A y B, E está entre A y C, y $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, entonces,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

Es decir, $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$ son proporcionales a $\overline{AE}$ y $\overline{EC}$ respectivamente.

112

Aprendizajes esperados

Establece que cualquier recta que corta a dos lados de un triángulo y es paralela al tercer lado determina segmentos proporcionales.

Secuencia:

En la clase anterior se demostró que un segmento que corta a dos lados de un triángulo y es paralelo al tercero, forma un triángulo cuyos lados son proporcionales a los lados del triángulo dado.

En esta clase se demuestra que un segmento que corta a dos lados de un triángulo y es paralelo al tercero, los divide en cuatro segmentos que son proporcionales.

Puntos esenciales:

Aclarar que el objetivo de trazar $\overline{EF}$ es formar un triángulo semejante al ΔADE.

Utilizar la figura como un recurso auxiliar para identificar cada afirmación.

Recordar que ángulos correspondientes entre paralelas, tienen la misma medida.

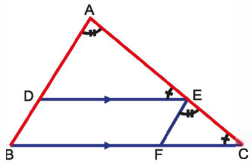
Explicar cómo aplicar esta propiedad en la solución de ejercicios, y resaltar la diferencia con el resultado estudiado en la clase anterior.

Respetar la semejanza entre dos triángulos al establecer la proporcionalidad entre sus lados.

C5: Rectas paralelas y segmentos proporcionales (2)

P En la figura $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.
Demuestre

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$



D Traza $\overline{EF}$ paralelo a $\overline{AB}$, y forma el paralelogramo $BDEF$

Como $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, $\measuredangle AED = \measuredangle ECF$ ①

Como $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$, $\measuredangle FEC = \measuredangle A$ ②

Por el criterio AA, $\Delta\, ADE \sim \Delta\, EFC$ ③

Por la semejanza anterior

$\frac{AD}{EF} = \frac{AE}{EC}$ ④

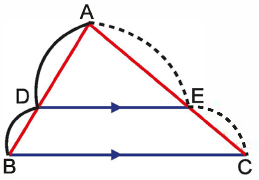
Como $BDEF$ es un paralelogramo, $EF = DB$

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ⑤

C Dado el $\Delta\, ABC$, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$,

entonces $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

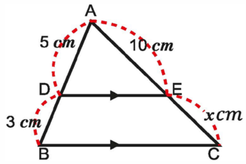
Es decir, $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$ son proporcionales a $\overline{AE}$ y $\overline{EC}$.



Ej Si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, calcule x.

$\frac{5}{3} = \frac{10}{x}$

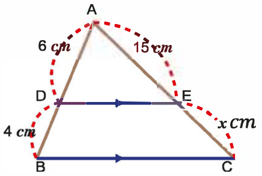
$x = \frac{(3)(10)}{5} = 6\ (cm)$



E a) Calcule x

$\frac{6}{4} = \frac{15}{x}$

$x = \frac{(4)(15)}{6} = 10\ (cm)$



Contenido 6 Rectas paralelas y segmentos proporcionales (3)

Aprendizajes esperados

Demuestra que si una recta corta a dos lados de un triángulo y determina segmentos proporcionales, entonces esta es paralela al tercer lado.

Secuencia:

En la clase anterior se demostró que un segmento que corta a dos lados de un triángulo y es paralelo al tercero, los divide en cuatro segmentos que son proporcionales.

En esta clase se demuestra que un segmento que corta a dos lados de un triángulo y los divide en cuatro segmentos proporcionales, es paralelo al tercer lado.

Puntos esenciales:

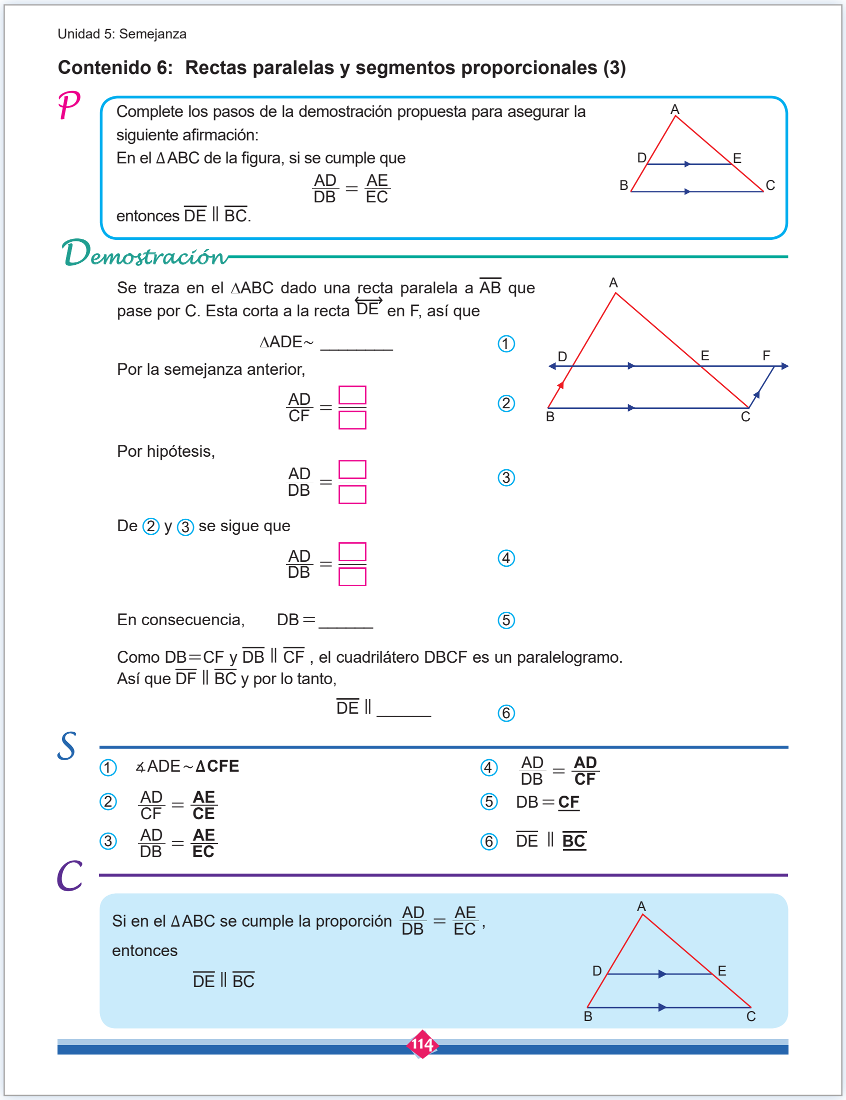
Aclarar que el objetivo de trazar $\overline{CF}$ de esa manera, es formar un triángulo semejante al ΔADE.

Utilizar la figura como un recurso auxiliar para identificar cada afirmación.

Recordar que un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos y con la misma medida es un paralelogramo.

Explicar cómo aplicar la propiedad que aquí se demuestra en la solución de ejercicios.

Respetar la semejanza entre dos triángulos al establecer la proporcionalidad entre sus lados.



Unidad 5: Semejanza

Contenido 6: Rectas paralelas y segmentos proporcionales (3)

P

Complete los pasos de la demostración propuesta para asegurar la siguiente afirmación:
En el ΔABC de la figura, si se cumple que

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

Demostración

Se traza en el ΔABC dado una recta paralela a $\overline{AB}$ que pase por C. Esta corta a la recta $\overleftrightarrow{DE}$ en F, así que

$\Delta ADE\sim$ ________ ①

Por la semejanza anterior,

$\frac{AD}{CF}=\frac{\square}{\square}$ ②

Por hipótesis,

$\frac{AD}{DB}=\frac{\square}{\square}$ ③

De ② y ③ se sigue que

$\frac{AD}{DB}=\frac{\square}{\square}$ ④

En consecuencia, DB = ______ ⑤

Como DB = CF y $\overline{DB} \parallel \overline{CF}$, el cuadrilátero DBCF es un paralelogramo.
Así que $\overline{DF} \parallel \overline{BC}$ y por lo tanto,

$\overline{DE} \parallel$ ______ ⑥

S

① $\measuredangle ADE\sim\mathbf{\Delta CFE}$

② $\frac{AD}{CF}=\frac{\mathbf{AE}}{\mathbf{CE}}$

③ $\frac{AD}{DB}=\frac{\mathbf{AE}}{\mathbf{EC}}$

④ $\frac{AD}{DB}=\frac{\mathbf{AD}}{\mathbf{CF}}$

⑤ DB = **CF**

⑥ $\overline{DE} \parallel \overline{\mathbf{BC}}$

C

Si en el ΔABC se cumple la proporción $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$,
entonces

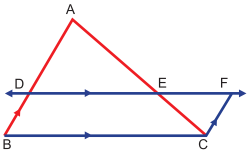
$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

114

C6: Rectas paralelas y segmentos proporcionales (3)

P En la figura si $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$,

Demuestre $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.



D Traza una recta paralela a $\overline{AB}$ que pasa por C, tal que F está en $\overleftrightarrow{DE}$

$\Delta\, ADE \sim \Delta\, CFE$ (AA) ①

Así que, $\frac{AD}{CF}=\frac{AE}{CE}$ ②

Por hipótesis, $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ ③

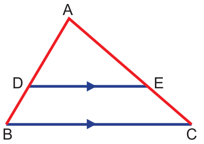
Por② y ③, $\frac{AD}{DB}=\frac{AD}{CF}$ ④

Luego, $DB = CF$ ⑤

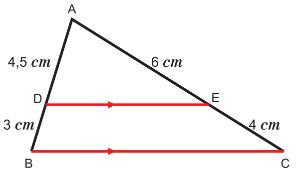
$DBCF$ es paralelogramo, así que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

C Dado el $\Delta\, ABC$, si $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$,

entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.



Ej En la figura, ¿es $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$?

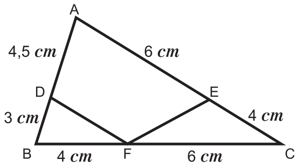


$$\frac{AD}{DB}=\frac{4{,}5}{3}=\left(\frac{9}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

$$\frac{AE}{EC}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

Como $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

E Determine si $\overline{EF}$ o $\overline{FD}$ es paralelo a uno de los lados del $\Delta\, ABC$.

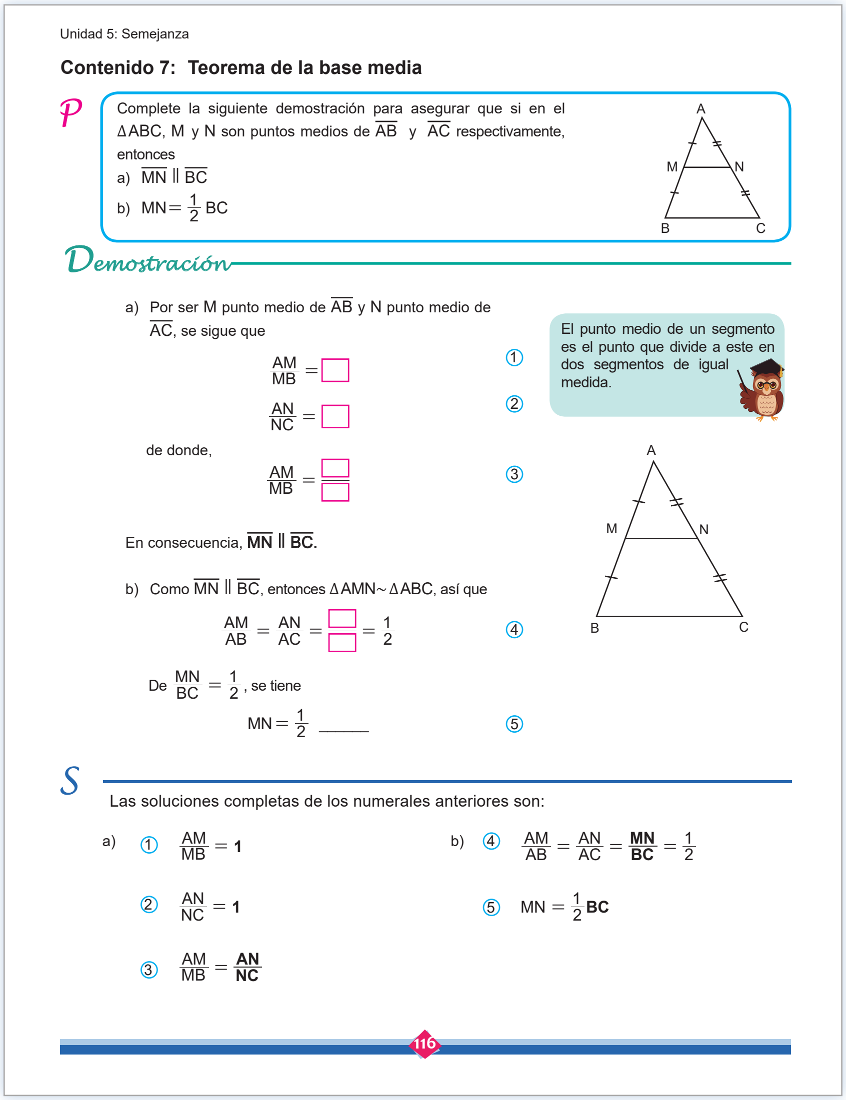


$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ $\overline{EF}$ no es paralelo a $\overline{AB}$

$\frac{3}{4{,}5}=\frac{2}{3}$ $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ $\overline{DF} \parallel \overline{AC}$

Contenido 7

Teorema de la base media



Unidad 5: Semejanza

Contenido 7: Teorema de la base media

P Complete la siguiente demostración para asegurar que si en el ΔABC, M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, entonces

a) $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$

b) $MN = \frac{1}{2} BC$

Demostración

a) Por ser M punto medio de $\overline{AB}$ y N punto medio de $\overline{AC}$, se sigue que

$\frac{AM}{MB} = \square$ ①

$\frac{AN}{NC} = \square$ ②

de donde,

$\frac{AM}{MB} = \frac{\square}{\square}$ ③

En consecuencia, $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$.

El punto medio de un segmento es el punto que divide a este en dos segmentos de igual medida.

b) Como $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$, entonces $\Delta AMN \sim \Delta ABC$, así que

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{\square}{\square} = \frac{1}{2}$ ④

De $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$, se tiene

$MN = \frac{1}{2}$ _____ ⑤

S Las soluciones completas de los numerales anteriores son:

a) ① $\frac{AM}{MB} = \mathbf{1}$

② $\frac{AN}{NC} = \mathbf{1}$

③ $\frac{AM}{MB} = \frac{\mathbf{AN}}{\mathbf{NC}}$

b) ④ $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{\mathbf{MN}}{\mathbf{BC}} = \frac{1}{2}$

⑤ $MN = \frac{1}{2}\mathbf{BC}$

Aprendizajes esperados

Aplica el teorema de la base media en la resolución de ejercicios.

Secuencia:

En la clase anterior se demostró que un segmento que corta a dos lados de un triángulo y los divide en cuatro segmentos proporcionales, es paralelo al tercero.

En esta clase se demuestra que el segmento que corta a dos lados de un triángulo en sus puntos medios respectivamente, es paralelo al tercero y mide la mitad de este. A esta afirmación se le conoce como teorema de la base media.

Puntos esenciales:

Utilizar la figura como un recurso auxiliar para identificar cada afirmación.

Identificar que el segmento que corta a los puntos medios de dos lados de un triángulo, los divide en cuatro segmentos proporcionales. Esto significa que este segmento es paralelo al tercer lado.

Explicar cómo se deduce que el segmento que une los puntos medios mide la mitad del tercer lado.

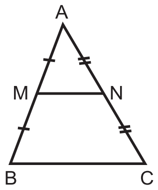
Exponer cómo se aplica esta propiedad en la solución de ejercicios.

C7: Teorema de la base media

P En el ΔABC, M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

Demuestre:

a) $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ b) $MN = \frac{1}{2}BC$



D a) Por $AM = MB$, $\frac{AM}{MB} = 1$ ①

Por $AN = NC$ $\frac{AN}{NC} = 1$ ②

$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ ③

$\overline{MN} \parallel \overline{BC}$

b) Por $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$, $\Delta AMN \sim \Delta ABC$

Así, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ ④

Por ④, $MN = \frac{1}{2}BC$ ⑤

C Teorema de la base media

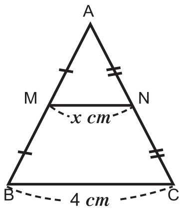
Si en el ΔABC, M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$,

- $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$
- $MN = \frac{1}{2}BC$

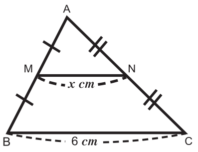
Ej M es punto medio de $\overline{AB}$ y N de $\overline{AC}$. Calcule x.

$MN = \frac{1}{2}BC$

$x = \left(\frac{1}{2}\right)(4) = 2(cm)$

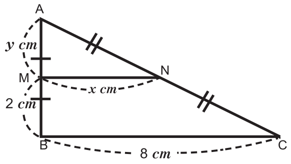


E a)



$x = \left(\frac{1}{2}\right)(6) = 3(cm)$

b)



$x = \left(\frac{1}{2}\right)(8) = 4(cm)$

$y = 2(cm)$

Contenido 8 Teorema de Tales

Aprendizajes esperados

Aplica el Teorema de Tales en la resolución de ejercicios.

Secuencia:

En la clase anterior se demostró que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo, es paralelo al tercer lado y mide la mitad de su longitud.

En esta clase se demuestra que tres o más rectas paralelas cortadas por dos transversales, determinan segmentos proporcionales. Este es el llamado teorema de Tales.

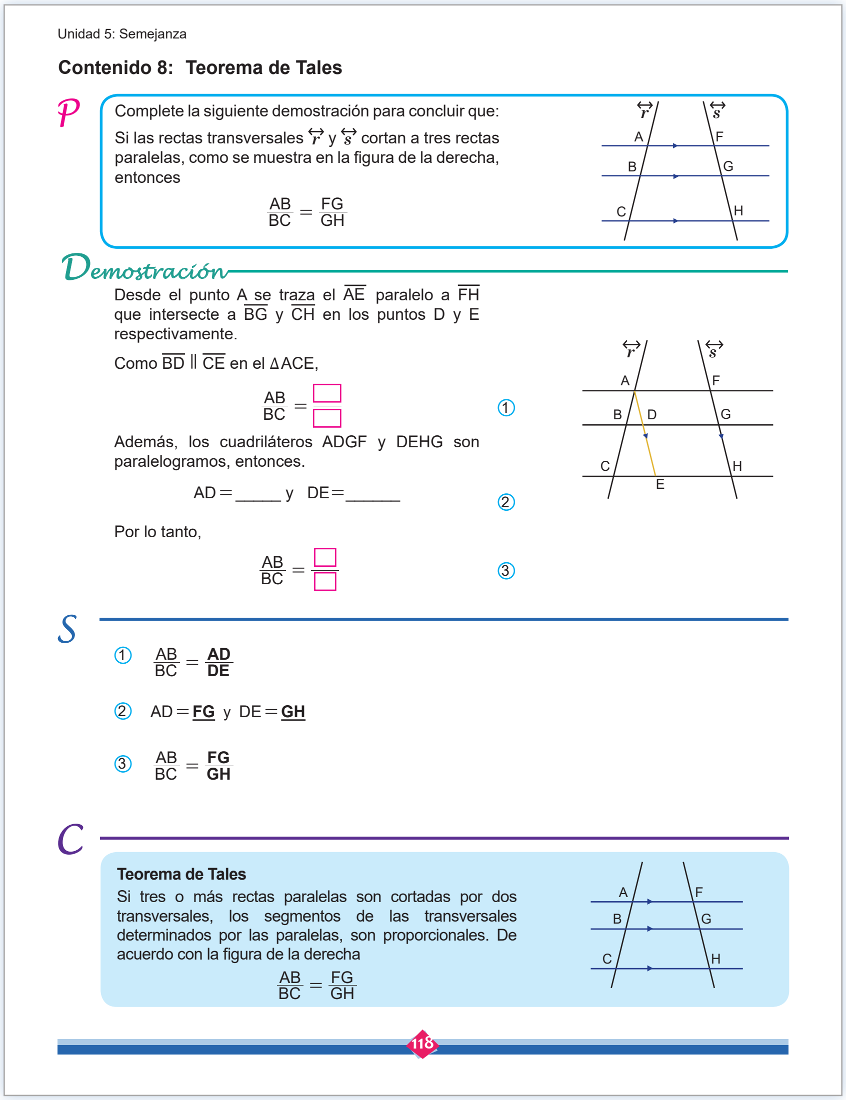
Puntos esenciales:

Aclarar que $\overleftrightarrow{AE}$ se traza de esa manera porque se quieren formar dos paralelogramos, y aplicar las propiedades demostradas en esta sección referentes a paralelismo.

Utilizar la figura como un recurso auxiliar para identificar cada afirmación.

Explicar cómo se aplica esta propiedad en la solución de ejercicios.

Respetar el orden en que se escriben las medidas de los segmentos cuando se quiere calcular una medida desconocida.



Unidad 5: Semejanza

Contenido 8: Teorema de Tales

P Complete la siguiente demostración para concluir que:

Si las rectas transversales $\overleftrightarrow{r}$ y $\overleftrightarrow{s}$ cortan a tres rectas paralelas, como se muestra en la figura de la derecha, entonces

$$\frac{AB}{BC}=\frac{FG}{GH}$$

Demostración

Desde el punto A se traza el $\overline{AE}$ paralelo a $\overline{FH}$ que intersecte a $\overline{BG}$ y $\overline{CH}$ en los puntos D y E respectivamente.

Como $\overline{BD} \parallel \overline{CE}$ en el ΔACE,

$$\frac{AB}{BC}=\frac{\square}{\square} \qquad ①$$

Además, los cuadriláteros ADGF y DEHG son paralelogramos, entonces.

AD = _____ y DE = ______ ②

Por lo tanto,

$$\frac{AB}{BC}=\frac{\square}{\square} \qquad ③$$

S

① $\frac{AB}{BC}=\frac{\mathbf{AD}}{\mathbf{DE}}$

② AD = **FG** y DE = **GH**

③ $\frac{AB}{BC}=\frac{\mathbf{FG}}{\mathbf{GH}}$

C

Teorema de Tales

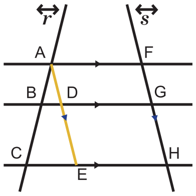
Si tres o más rectas paralelas son cortadas por dos transversales, los segmentos de las transversales determinados por las paralelas, son proporcionales. De acuerdo con la figura de la derecha

$$\frac{AB}{BC}=\frac{FG}{GH}$$

118

C8: Teorema de Tales

P Si las rectas transversales $\overleftrightarrow{r}$ y $\overleftrightarrow{s}$ cortan a tres rectas paralelas, demuestre $\frac{AB}{BC}=\frac{FG}{GH}$.



D Se traza $\overline{AE}$ paralelo a $\overline{FH}$ que intersecte a $\overline{BG}$ y $\overline{CH}$ en D y E respectivamente.

$ADGF$ y $DEHG$ son paralelogramos

Como $\overline{BD} \parallel \overline{CE}$, $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DE}$ ①

$ADGF$ y $DEHG$ son paral., $AD=\underline{FG}$ y $DE=\underline{GH}$ ②

Por lo tanto, $\frac{AB}{BC}=\frac{FG}{GH}$ ③

C Tres o más rectas paralelas cortadas por dos transversales, determinan segmentos proporcionales.

$$\frac{AB}{BC}=\frac{FG}{GH}$$

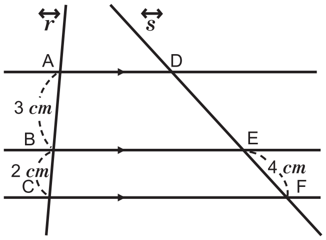
Ej $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CF}$

Calcule DE.

$$\frac{3}{2}=\frac{DE}{4}$$

$$(2)DE=(3)(4)$$

$$DE=\frac{12}{2}=6\ (cm)$$

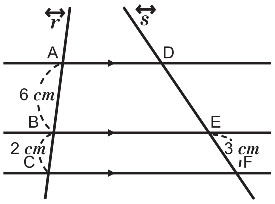


E a) Calcule DE

$$\frac{6}{2}=\frac{DE}{3}$$

$$(2)DE=(6)(3)$$

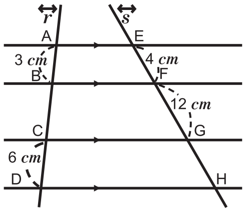
$$DE=\frac{18}{2}=9\ (cm)$$



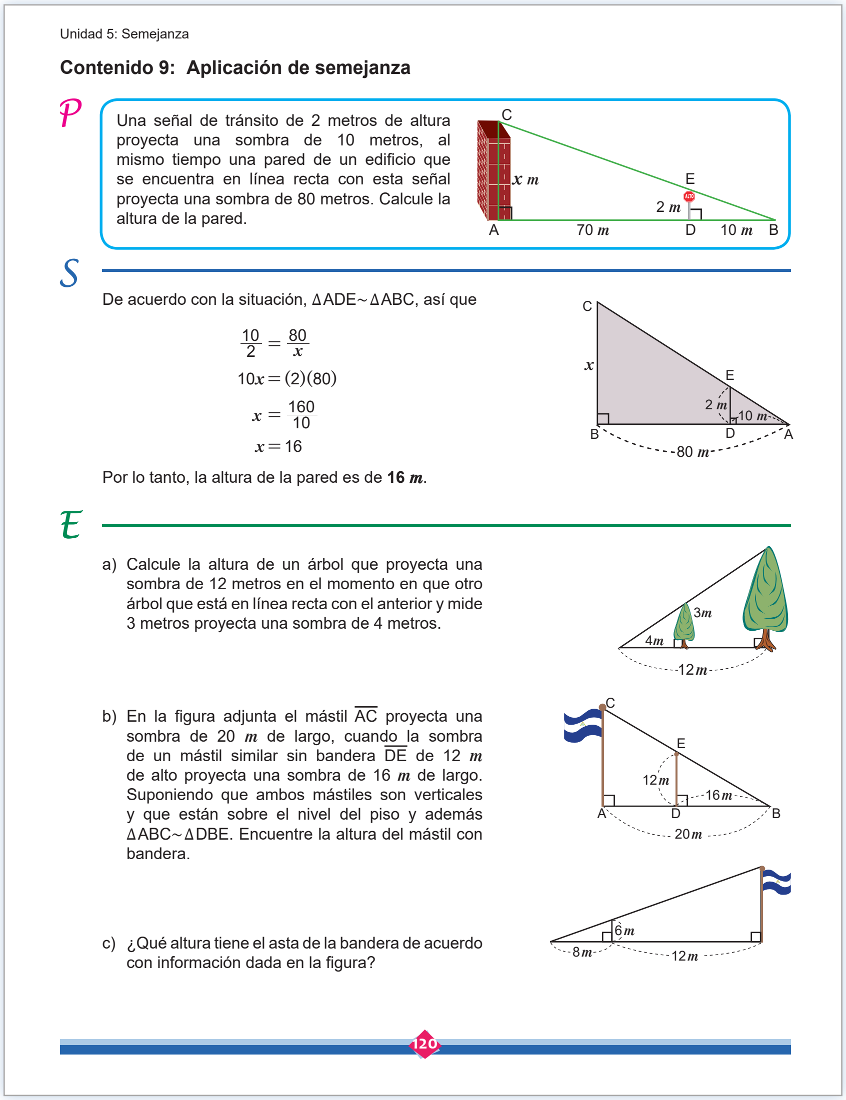
b) Calcule BC y GH.

$$\frac{3}{BC}=\frac{4}{12} \Longrightarrow BC=\frac{(3)(12)}{4}=9\ (cm)$$

$$\frac{9}{6}=\frac{12}{GH} \Longrightarrow GH=\frac{(6)(12)}{9}=8\ (cm)$$



Contenido 9 Aplicación de semejanza



Unidad 5: Semejanza

Contenido 9: Aplicación de semejanza

P

Una señal de tránsito de 2 metros de altura proyecta una sombra de 10 metros, al mismo tiempo una pared de un edificio que se encuentra en línea recta con esta señal proyecta una sombra de 80 metros. Calcule la altura de la pared.

S

De acuerdo con la situación, $\Delta ADE \sim \Delta ABC$, así que

$$\frac{10}{2}=\frac{80}{x}$$
$$10x=(2)(80)$$
$$x=\frac{160}{10}$$
$$x=16$$

Por lo tanto, la altura de la pared es de **16 *m***.

E

a) Calcule la altura de un árbol que proyecta una sombra de 12 metros en el momento en que otro árbol que está en línea recta con el anterior y mide 3 metros proyecta una sombra de 4 metros.

b) En la figura adjunta el mástil $\overline{AC}$ proyecta una sombra de 20 *m* de largo, cuando la sombra de un mástil similar sin bandera $\overline{DE}$ de 12 *m* de alto proyecta una sombra de 16 *m* de largo. Suponiendo que ambos mástiles son verticales y que están sobre el nivel del piso y además $\Delta ABC \sim \Delta DBE$. Encuentre la altura del mástil con bandera.

c) ¿Qué altura tiene el asta de la bandera de acuerdo con información dada en la figura?

120

Aprendizajes esperados

Resuelve situaciones concretas donde se aplica la semejanza de triángulos rectángulos.

Secuencia:

En esta sección se han estudiado tres criterios para saber si dos triángulos rectángulos son semejantes, el teorema del cateto y de la altura, y algunas propiedades sobre paralelismo.

En esta clase se aplica la semejanza de triángulos rectángulos, en la solución de situaciones.

Puntos esenciales:

Hacer un gráfico que refleje la información brindada en el problema, para determinar aquellos triángulos que son semejantes.

Identificar cuál es el valor desconocido en el gráfico.

Respetar el orden en que se escriben las medidas de los lados cuando se calcule el valor desconocido.

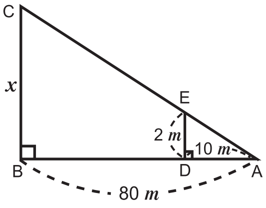
C9: Aplicación de semejanza

(P) *Leer en el libro de texto.*

(S) $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ porque $\measuredangle DAE = \measuredangle BAC$.

$$\frac{10}{2}=\frac{80}{x} \Longrightarrow 10x=(2)(80)$$
$$x=\frac{160}{10}=16$$

Altura de la pared: $16\ m$

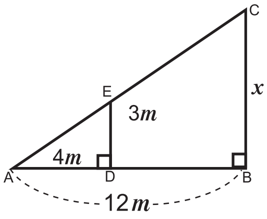


(E) a) Calcule la altura del árbol más grande.

$\Delta ADE \sim \Delta ABC$ porque $\measuredangle DAE = \measuredangle BAE$.

$$\frac{4}{3}=\frac{12}{x} \Longrightarrow 4x=(3)(12)$$
$$x=\frac{(3)(12)}{4}=9$$

Altura del árbol: $9\ m$

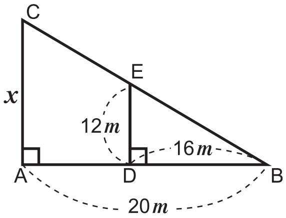


b) Calcule la altura del mástil más grande.

Como $\Delta ABC \sim \Delta DBE$, entonces:

$$\frac{16}{12}=\frac{20}{x} \Longrightarrow 16x=(12)(20)$$
$$x=\frac{240}{16}=15$$

Altura del mástil: $15\ m$

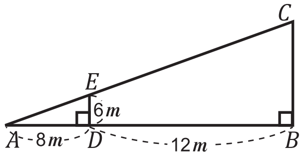


3. Calcule la altura del asta de bandera.

$\Delta ADE \sim \Delta ABC$ porque $\measuredangle DAE = \measuredangle BAC$.

$$\frac{8}{6}=\frac{20}{x} \Longrightarrow 8x=(6)(20)$$
$$x=\frac{120}{8}=15$$

Altura del asta: $15\ m$



Prueba de Matemática 9no (30min) Fecha:______

Unidad 5: Semejanza

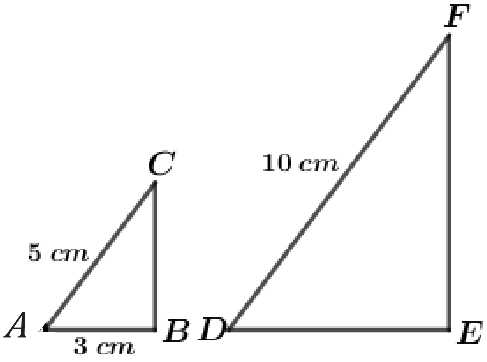
Nombre:_________________________________**Sección:** __________ /20

Sexo: M / F .

Sección:

1. Complete los espacios en blanco considerando que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

(2 puntos×4=8)



$$\frac{AC}{DF} = \frac{1}{\boxed{}}$$

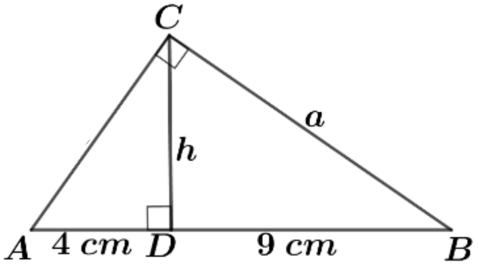
$$DE = \boxed{} \text{ cm}$$

$$\measuredangle A = \measuredangle D\ ,\ \measuredangle B = \boxed{}\ ,\ \boxed{} = \measuredangle F$$

2. A partir de la figura, calcule:

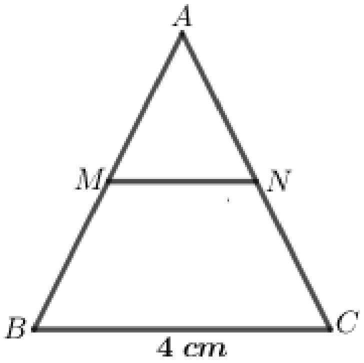
(3 puntos×2=6)

a) El valor de h.

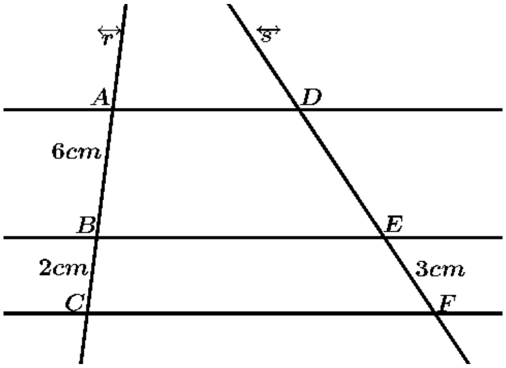


b) El valor de a.

3. En la figura, si M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, calcule la longitud del lado $\overline{MN}$. (3 puntos)



4. En la figura $\overleftrightarrow{r}$ y $\overleftrightarrow{s}$ cortan a las tres rectas paralelas. Si AB $= 6\ cm$, BC $= 2\ cm$ y $\mathrm{EF} = 3\ cm$. Calcule la longitud de $\overline{\mathrm{DE}}$. (3 puntos)



Nombre____.