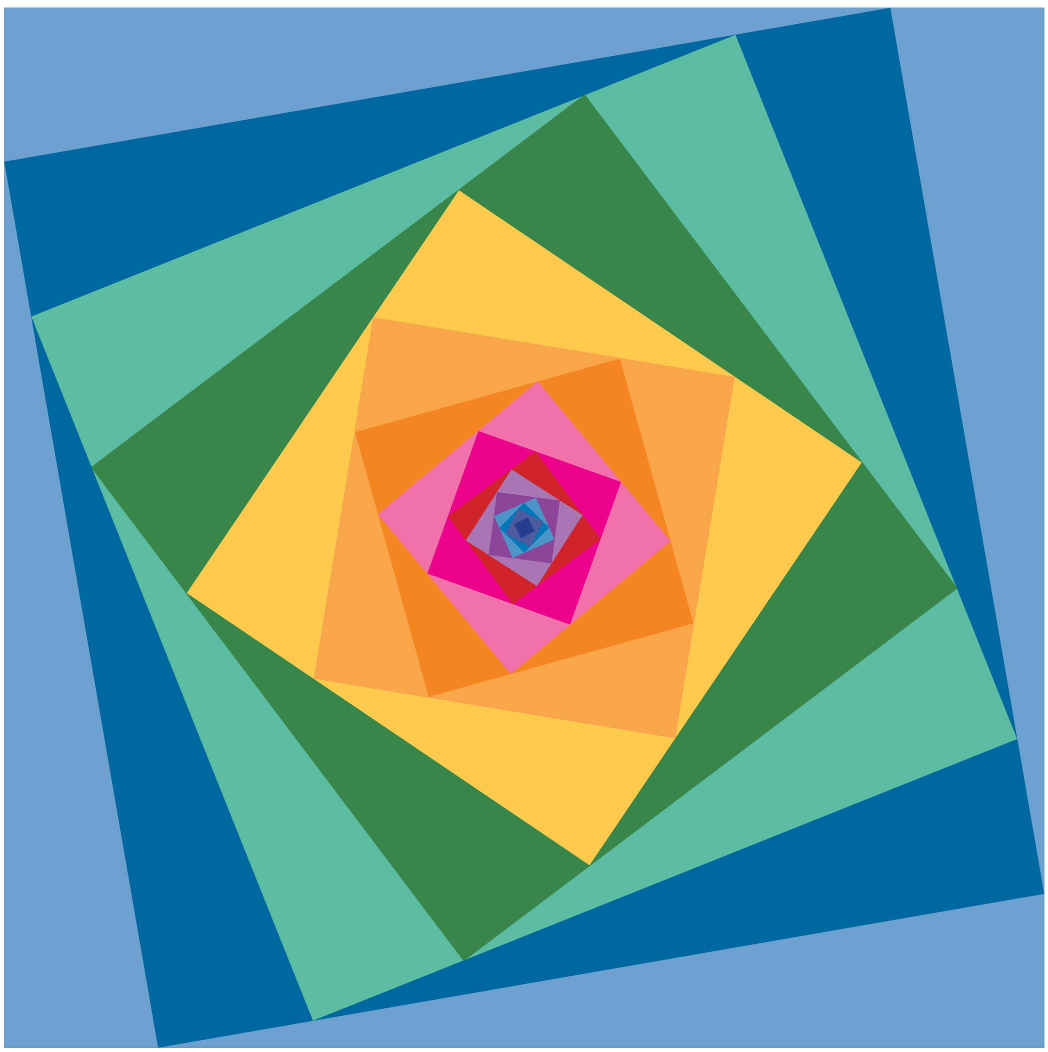
GOBIERNO DE
EL SALVADOR

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

# Matemática 8



Cuaderno de ejercicios
Primera edición

ESMATE

JICA

8 Cuaderno de ejercicios Matemática Primera edición

Equipo técnico autoral y de diagramación del Ministerio de Educación

Ana Ester Argueta Aranda
Erick Amílcar Muñoz Deras
Diana Marcela Herrera Polanco
Reina Maritza Pleitez Vásquez
Francisco Antonio Mejía Ramos
Norma Elizabeth Lemus Martínez
Salvador Enrique Rodríguez Hernández
César Omar Gómez Juárez

Equipo de diagramación
Francisco René Burgos Álvarez

Corrección de estilo
Marlene Elizabeth Rodas Rosales
Ana Esmeralda Quijada Cárdenas

Cooperación Técnica de Japón a través de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA).



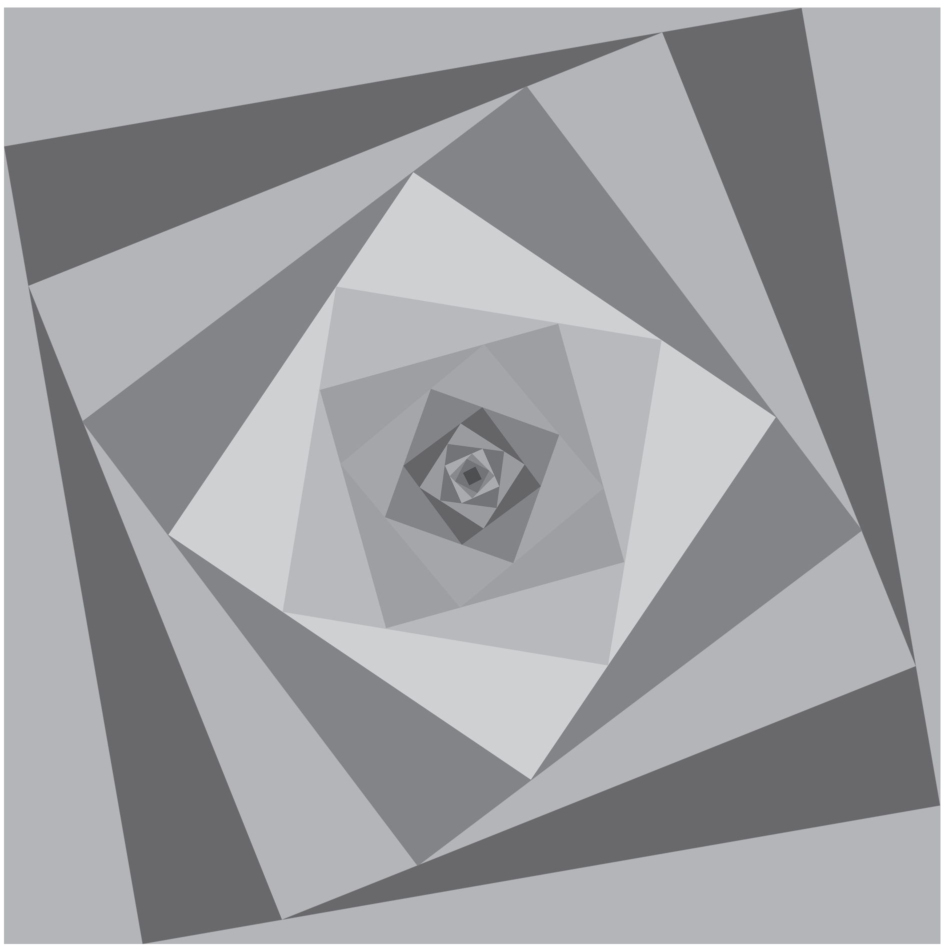
Imagen de portada con fines educativos, esta se construye a partir de una secuencia de cuadrados. En cada uno de ellos se forman cuatro triángulos rectángulos congruentes.

372.704 5
M425 Matemática 8° : cuaderno de ejercicios / equipo autoral Ana Ester Argueta, Erick Amílcar Muñoz, Diana Marcela Herrera, Reina Maritza Pleitez, Francisco Antonio Mejía, Norma Elizabeth Lemus, Salvador Enrique Rodríguez, César Omar Gómez ; diagramación Francisco René Burgos Álvarez ; corrección de estilo Marlene Elizabeth Rodas. -- 1ª ed. -- San Salvador, El Salv. : MINED, 2018.
185 p. : il. ; 28 cm. -- (Esmate)
ISBN 978-99961-70-68-3 (impreso)
1. Matemáticas-Problemas, ejercicios, etc. 2. Matemáticas-Libros de texto. 3. Matemáticas-enseñanza. I. Argueta Aranda, Ana Ester, 1991- coaut. II. Título.
BINA/jmh

GOBIERNO DE EL SALVADOR

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

# Matemática 8



Cuaderno de ejercicios

Primera edición

ESMATE

JICA

Estimados estudiantes:

Nos complace darles la bienvenida a un nuevo año escolar y a una nueva oportunidad de adquirir muchos conocimientos matemáticos.

Como Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología (MINEDUCYT) a través del Proyecto de Mejoramiento de los Aprendizajes de Matemática en Educación Básica y Educación Media (ESMATE) hemos creado para ustedes diversos materiales educativos, uno de ellos es el Cuaderno de Ejercicios que tienen en sus manos.

Este libro contiene múltiples problemas y actividades con los que podrán desarrollar su razonamiento y mejorar las capacidades matemáticas que les serán muy útiles para resolver situaciones de la vida diaria.

Por ello, les invitamos a abordar cada actividad que contiene este libro como un reto a vencer y contamos con que pondrán todo su esfuerzo y dedicación para convertirse en ciudadanos ejemplares que contribuyan al desarrollo de nuestro querido país.

Carla Evelyn Hananía de Varela
Ministra de Educación, Ciencia y Tecnología

Ricardo Cardona Alvarenga
Viceministro de Educación

# Presentación del Cuaderno de Ejercicios

El Cuaderno de Ejercicios (CE) es un documento complementario al Libro de Texto (LT), con la diferencia que el CE es para que el estudiante practique todos los días en su casa lo que aprendió en la escuela con el LT, con el objetivo de que el estudiante consolide los conocimientos matemáticos y desarrolle las competencias establecidas oficialmente por el Ministerio de Educación.

Por la relación que existe entre el LT y el CE, se tiene que para cada clase del LT, corresponde una clase del CE.

## Íconos

R La letra R representa el **Recuerda**. En esta sección se proponen problemas y ejercicios de las dos clases anteriores para que el estudiante repase antes de trabajar el contenido de la clase que le corresponde.

C Con la C de **Conclusión** se presenta la explicación del contenido. En la mayoría de casos, la conclusión será la misma que la del Libro de texto, en otras ocasiones se agregarán ejemplos con sus respectivas soluciones para brindar mayor orientación al estudiante.

El lápiz representa la sección de problemas y ejercicios.

## Información complementaria

En el libro se utiliza un recurso que facilita el aprendizaje de los contenidos como presaberes, pistas e información adicional, esto se representa de la siguiente manera:

Información complementaria

## Distribución de las clases

El libro está compuesto por 8 unidades didácticas, cada una está formada por diferentes lecciones y cada lección está compuesta por diferentes clases. En la numeración del título de cada clase, el primer número indica la lección y el segundo número indica la clase. Por ejemplo, el título de la clase 1 de la lección 2 de la unidad 3 de este libro se representa de la siguiente manera:

**Indica el número de la lección**

**2.1 Trazo de la gráfica de una ecuación de primer grado con dos incógnitas**

**Indica el número de la clase**

El número de la unidad aparece en una etiqueta en la parte lateral de las páginas impares.

# Índice

# Unidad 1

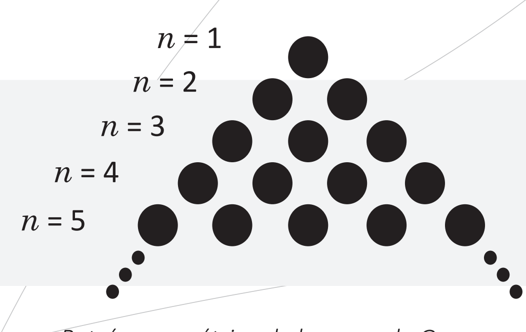
# Operaciones algebraicas

Si un fenómeno ocurre una vez puede ser un accidente, si ocurre dos veces tal vez sea casualidad; pero si ocurre tres o más veces, genera un patrón. La búsqueda de patrones en la naturaleza ha sido una necesidad humana, esto debido a la constante búsqueda por explicar su entorno; por ejemplo, la posibilidad de comprender el cambio de las estaciones, los movimientos de los cuerpos celestes, la trayectoria de un objeto, qué es el fuego o cómo crear luz manipulando electrones. Todo esto hizo comprender que la única magia que permite predecir cualquier fenómeno es la de los modelos matemáticos.


*Objetos que emiten ondas electromagnéticas en la vida cotidiana.*

Los modelos matemáticos están relacionados a través de dos procesos: la abstracción y la interpretación, y se utilizan para modelar fenómenos naturales, sociales o características y propiedades de los números y sus operaciones, como por ejemplo, patrones de ocurrencia de terremotos, las ondas electromagnéticas que emiten y reciben los aparatos electrónicos. El modelaje matemático de un fenómeno busca encontrar un patrón básico o reglas para identificar su ordenamiento interno y sus regularidades. Estas reglas son representadas por símbolos y letras que se conocen como expresiones algebraicas.

En esta unidad aprenderás sobre operaciones con expresiones algebraicas y su uso para modelar propiedades con los números y sus operaciones, así como para resolver situaciones cotidianas.




*Patrón geométrico de la suma de Gauss.*

# 1.1 Comunicación con símbolos

1. Identifica los coeficientes y las variables en los siguientes términos:

a) $4t$ b) $-8z$ c) $-10xy$

2. Identifica los términos en las siguientes expresiones algebraicas:

a) $7b - 8$ b) $-2x + 7y + 1$ c) $6xy + 4y - 3$

3. Sustituye el valor numérico indicado en cada expresión algebraica:

a) $8t + 3$, si $t = 3$ b) $y - 5$ , si $y = -5$ c) $3a - 2$, si $a = \frac{1}{3}$ d) $7z - 2$, si $z = -\frac{4}{7}$

4. Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $(2a + 5) \times 4$ b) $(3n - 1) \times 6$ c) $-4(2m - 7)$ d) $-9(t$ □ $5)$

5. Realiza las siguientes divisiones:

a) $(15t + 50) \div 5$ b) $(24y - 36) \div 6$ c) $(12x + 42) \div (-3)$ d) $(-32b + 8) \div (-4)$

6. Efectúa las siguientes operaciones y reduce términos semejantes:

a) $(-7a + 4) \times (-3) + (-a - 7) \times 5$ b) $(8x + 3) \times (-6) + (6x - 10) \div 2$



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# 1.2 Definición de monomio, polinomio y grado

La expresión algebraica formada por una o más variables con exponentes y un número llamado **coeficiente**, y que además solo hay operaciones de multiplicación se conoce como **término.**

$$\text{Coeficiente} \longrightarrow 7x^2 \begin{array}{l} \longleftarrow \text{Exponente} \\ \longleftarrow \text{Variable} \end{array}$$

Por ejemplo: $5x$, $y$, $2ay$, $\frac{3}{5}x^2$, $b^2y$, $-7$.

Las expresiones formadas por la suma de dos o más términos se conocen como **polinomios.**

Por ejemplo: $5a + 5x$, $4y - 2$, $2x^2 - 3ax + 5$.

Se define el **monomio** como el polinomio formado por un solo término.

Se define **el grado de un término** como la suma de todos los exponentes de las variables.

Por ejemplo: El grado del término $-4xy^2$ es 3, porque $-4 \times \overbrace{x \times x \times y}^{\text{Grado 3}}$, la suma de los exponentes es 3.

Se define **el grado de un polinomio** como el mayor grado de los términos que conforman dicho polinomio.

Por ejemplo: El grado del polinomio $6x^3 + 5x^2 - 7x$ es 3, porque $\underbrace{6x^3}_{\text{Grado 3}} + \overbrace{5x^2}^{\text{Grado 2}} + (\underbrace{-7x}_{\text{Grado 1}})$ y el mayor grado de todos los términos es 3.

1. Identifica los términos que conforman los siguientes polinomios:

a) $-4x + 6y$ b) $-2t - 6z - 1$ c) $-3a^3 + \frac{3}{5}w + \frac{3}{4}$ d) $-4ab^2 + ab$

2. Determina el grado de los siguientes monomios:

a) $7t^4$ b) $-4ab$ c) $\frac{5}{6}y^3z^3$ d) $-\frac{2}{7}s^2tw^3$

3. Determina el grado de los siguientes polinomios:

a) $x - 5y$ b) $-6stu$ c) $3x^2 - 3z$ d) $5y^3 - 2y^2 - y$

e) $\frac{1}{6}a^2b^3 + a^3b$ f) $\frac{3}{4}xy^2 - y^2$ g) $-t^2u^2 + t^3 - \frac{t^2}{3}$ h) $\frac{x^4}{3} - xyz^2 + xy^2$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.3 Reducción de términos semejantes en un polinomio

R

1. Identifica los términos que conforman los siguientes polinomios:

a) $a - 5x$ b) $2b - t - 8$ c) $-3s^3 + \frac{5}{8}s + \frac{2}{3}$ d) $3x^2y^2 - xy^2$

2. Determina el grado de los siguientes polinomios:

a) $10s - t$ b) $5a^2 + a$ c) $\frac{1}{8}x^2 - ay^2$ d) $-2t^2 + u^2 - \frac{b^2}{3}$

C

Para reducir términos semejantes en un polinomio puedes seguir los pasos:

Por ejemplo: $7c^2 + 2c - 4c^2 + 3c$.

1. Se ordenan los términos semejantes.
2. Se reducen los términos semejantes.

1. $7c^2 + 2c - 4c^2 + 3c = 7c^2 - 4c^2 + 2c + 3c$

2. $= (7 - 4)c^2 + (2 + 3)c$

$= 3c^2 + 5c$

Además considera que si las variables de dos términos están elevadas a potencias diferentes, entonces los términos **NO** son semejantes.

Por ejemplo, $5x^2$ y $5x$ **NO** son términos semejantes.

1. Reduce los términos semejantes en los siguientes polinomios:

a) $2x + 5x$ b) $6y + 5a - 4y + 4a$ c) $5t - 6s - 7s + 9t$ d) $4b^3 + b^2 - 8b^3 + 4b^2$

e) $4x - 6x^2 - 4x^2 + 2x$ f) $w^2 + 8 - 3w^2 + 4$ g) $ab + \frac{5}{6}a - 2a - \frac{2}{5}ab$ h) $3z^2 - 4z - \frac{1}{2}z - \frac{2}{5}z^2$

2. Explica por qué el siguiente procedimiento para reducir términos semejantes en un polinomio es incorrecto.

$7a - 7a^2 + 4a + 4a^2$ ____________________

$= 4a^2 - 7a^2 + 7a + 4a$ ____________________

$= (4 - 7)a^2 + (7 + 4)a$ ____________________

$= -3a^2 + 11a$ ____________________

$= 8a^2$



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.4 Suma y resta de polinomios

R

1. Determina el grado de los siguientes polinomios:

a) $3x + 5y$ b) $-2z^2 - z$ c) $\frac{2}{3}b^3 - a^2b^2$ d) $5xy^2 + 2y^2 - \frac{x^3}{2}$

2. Reduce los términos semejantes en los siguientes polinomios:

a) $3b - 7b$ b) $6x - 3y - 4y + 8x$ c) $7t^2 + 5t + t - 2t^2$ d) $s + \frac{4}{9}st - 2s + \frac{5}{9}st$

C

Para efectuar sumas y restas de polinomios puedes seguir los pasos:

Por ejemplo: $(3a + 5b) - (4a - 3b)$.

1. Se utiliza la ley de los signos para expresar sin paréntesis.
2. Se reducen los términos semejantes.

1. $(3a + 5b) - (4a - 3b) = 3a + 5b - 4a + 3b$
2. $= 3a - 4a + 5b + 3b$

$= -a + 8b$

Efectúa las siguientes operaciones con polinomios:

a)
$$\begin{array}{r} 9s + 7t \\ (+)\ \underline{-6s + 2t} \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 9x + 5y \\ (-)\ \underline{2x - 7y} \end{array}$$

c) $(3a + 5b) + (a - 4b)$

d) $(2y + z) + (-2y + 6z)$ e) $(5yz + 3y) - (-2yz + 8y)$ f) $(6st - 2s) - (5st - 7s)$

g) $(-2m + 7) - (5m - 5)$ h) $(5x^2 + 6x) - (8x^2 - 3x)$ i) $(-m + n) - (m + n)$

j) $(2a - 3b + 6) + (7a - 2b + 9)$ k) $(7mn - 2n - 11) - (10mn - n + 1)$ l) $(-6y^2 + y - 4) - (2y^2 - 9y - 7)$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# 1.5 Multiplicación de un polinomio por un número

1. Reduce los términos semejantes en los siguientes polinomios:

a) $8x - 3x$ b) $t - 3s + 6s - 2t$ c) $4t^2 - 2t + 5t - 7t^2$ d) $a + \frac{3}{4}ab - 2a + \frac{5}{6}ab$

2. Efectúa las siguientes operaciones con polinomios:

a) $\begin{array}{rr} & 3a + 4b \\ (-) & a - 7b \\ \hline \end{array}$ b) $(5x - 2y) + (2x - 5y)$ c) $(-4st + 9t) - (-st + 6t)$ d) $(-3a^2 - 2a + 9) - (-7a^2 + 3a - 7)$

Para realizar la multiplicación de polinomio por un número, se multiplica el número por cada término del polinomio.

Por ejemplo: $-3(4x - 3y - 2)$.

$$-3(4x - 3y - 2) = (-3) \times 4x + (-3) \times (-3y) + (-3) \times (-2)$$

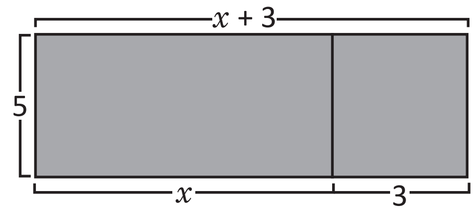
$$= -12x + 9y + 6$$

Además, utilizando áreas se puede calcular la operación $5(x + 3)$ de la siguiente manera:

Área 1: $5 \times x = 5x$

Área 2: $5 \times 3 = 15$

Entonces, el área total es: $5(x + 3) = 5x + 15$.




Realiza las siguientes multiplicaciones de un número por polinomio:

a) $5(3a + 2b)$ b) $-4(2s - 5t)$ c) $2(-x - 7y + 5)$ d) $-6(-m + 3n + 2)$

e) $2(3x - 2y) - (5x - 2y)$ f) $-3(5a^2 - 3a) - 5(4a^2 - 2a)$ g) $-3\left(\frac{t^2}{12} - \frac{t}{15}\right)$ h) $(5a - 25b - 45) \times \frac{1}{5}$



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# 1.6 División de polinomio por un número



R

1. Efectúa las siguientes operaciones con polinomios:

a) $\begin{array}{r} 3m + 3n \\ (-)\ \underline{4m - 4n} \end{array}$

b) $(7t + 5u) + (3t - 3u)$

c) $(-4yz + 3z) - (-2yz + 5z)$

2. Realiza las siguientes multiplicaciones de un número por polinomio:

a) $6(4a - 6b)$

b) $-4m - 2(3m + 8)$

c) $3(2t^2 - 3t) - 6(-7t^2 - t)$

d) $(12a - 42b - 54) \times \frac{1}{6}$

C

Para realizar la división de polinomio por un número, se multiplica el recíproco del número por cada término del polinomio.

Por ejemplo: $(15x - 6y - 9) \div (-3)$.

$$\begin{aligned} (15x - 6y - 9) \div (-3) &= (15x - 6y - 9) \times (-\tfrac{1}{3}) \\ &= 15x \times (-\tfrac{1}{3}) - 6y \times (-\tfrac{1}{3}) - 9 \times (-\tfrac{1}{3}) \\ &= -5x + 2y + 3 \end{aligned}$$

Realiza las siguientes divisiones de polinomio por un número:

a) $(15b - 9y) \div 3$

b) $(-15n - 40) \div 5$

c) $(8st - 30t) \div (-2)$

d) $(-20a^2 + 12a) \div (-4)$

e) $(36x^2 - 54x + 12) \div 6$

f) $(-16m - 36n - 6) \div 2$

g) $(21m - 49n + 14) \div (-7)$

h) $(27x - 18y - 42) \div (-3)$

i) $(-32x - 48y - 24) \div (-4)$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.7 Operaciones combinadas de polinomios con división por un número

R

1. Realiza las siguientes multiplicaciones de un número por polinomio:

a) $4(-6x-2)$ b) $-6(4a+3b-2)$ c) $4(n^2-5n)-5(4n^2-3n)$ d) $(21a-27b-9)\times\frac{1}{3}$

2. Realiza las siguientes divisiones de polinomio por un número:

a) $(15x-35z)\div 5$ b) $(18mn-30m)\div(-6)$ c) $(16b^2+72b-32)\div 8$ d) $(-16m+8n-36)\div(-4)$

C

Para realizar operaciones de polinomios con denominadores diferentes, puedes utilizar cualquiera de las dos formas siguientes:

1. Utilizar el mínimo común denominador y reducir términos semejantes.

2. Expresar los denominadores como multiplicación por un número y luego reducir términos semejantes.

Por ejemplo $\frac{5m-3n}{3}-\frac{2m-n}{5}$: Forma 1:

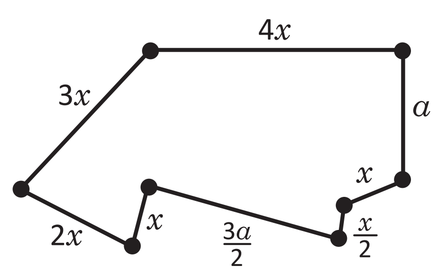
$$\frac{5m-3n}{3}-\frac{2m-n}{5}=\frac{5(5m-3n)}{15}-\frac{3(2m-n)}{15}$$
$$=\frac{5(5m-3n)-3(2m-n)}{15}$$
$$=\frac{25m-15n-6m+3n}{15}$$
$$=\frac{19m-12n}{15}$$

1. Efectúa las operaciones y reduce términos semejantes:

a) $\frac{2a-3b}{10}+\frac{-2a+b}{5}$ b) $\frac{4s+2t}{5}+\frac{-2s+t}{3}$ c) $\frac{9m+5n}{3}-\frac{m+3n}{18}$

d) $\frac{v-5w}{4}-\frac{2v-3w}{3}$ e) $a-b+\frac{5a+b}{3}$ f) $x-y-\frac{6x-4y}{7}$

2. Para la siguiente figura:
   a) Determina el perímetro
   b) Reduce términos semejantes
   c) Si $x$ = 4 y $a$ =2, calcula el valor del perímetro






¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.8 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

| Ítem | Sí | Podría mejorar | No | Comentario |
|---|---|---|---|---|
| 1. Identifico los términos que forman polinomios como $-2t-6z-1$, $-4ab^2+ab$. | | | | |
| 2. Determino el grado de monomios como $7t^4$, $-\frac{2}{7}s^2tw^3$. | | | | |
| 3. Determino el grado de polinomios como $5y^3-2y^2-y$, $\frac{x^3}{3}-xyz^2+xy^2$. | | | | |
| 4. Reduzco los términos semejantes de polinomios como $6y+5a-4y+4a$, $ab+\frac{5}{6}a-2a-\frac{2}{5}ab$ | | | | |
| 5. Efectúo sumas y restas de polinomios como $(2y+z)+(-2y+6z)$, $(5x^2+6x)-(8x^2-3x)$. | | | | |
| 6. Realizo multiplicaciones de un número con un polinomio como $-4(2s-5t)$, $-3(5a^2-3a)$, $-5(4a^2-2a)$. | | | | |
| 7. Realizo divisiones de un polinomio con un número como $(15b-9y)\div 3$, $(27x-18y-42)\div(-3)$. | | | | |
| 8. Puedo efectuar operaciones combinadas de números con polinomios como $\frac{4s+2t}{5}+\frac{-2s+t}{2}$, $x-y-\frac{6x-4y}{7}$. | | | | |

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.9 Multiplicación de un monomio por un monomio

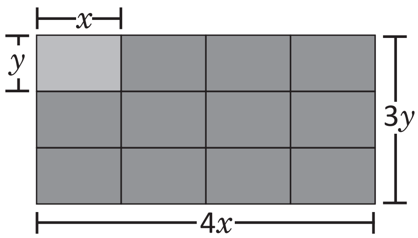
Para multiplicar dos monomios, se multiplican los coeficientes de los monomios y luego se multiplican las variables. Por ejemplo: $7x \times (-5)y$.

$$7x \times (-5)y = 7 \times (-5) \times x \times y$$
$$= -35xy$$

Además utilizando áreas es posible calcular la operación $4x \times 3y$ de la siguiente manera:

El área del rectángulo será el resultado de la multiplicación $4x \times 3y$.

Dividiendo el rectángulo en rectángulos de $y$ cm de ancho y $x$ cm de largo.




El área de cada rectángulo pequeño es $x \times y = xy$. (base x altura)

Hay 4 rectángulos de área $xy$ a lo largo y 3 a lo ancho.

Por lo tanto el área del rectángulo que tiene $4x$ cm de largo y $3y$ cm de ancho es la suma del área de los 12 (4 × 3) rectángulos de área $xy$, así:

$$A = 4x \times 3y = 4 \times 3 \times x \times y = 12xy$$

1. Realiza las siguientes multiplicaciones de monomios:

a) $5r \times 7t$ b) $9x \times (-7y)$ c) $-5m \times (-8n)$ d) $10a \times 5a^3$

e) $-9t^2 \times 3t^2$ f) $(-4x)^3$ g) $-6yz \times (-8y^2z^2)$ h) $-9st \times 5(-s)^3$

2. Explica si el siguiente procedimiento es correcto o incorrecto:

$-6ab \times (-8a^2b)$ ________________________

$= +(6 \times 8 \times ab \times a^2b)$ ________________________

$= 48\ a^2b$ ________________________



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# 1.10 División de un monomio por un monomio

**R** Realiza las siguientes multiplicaciones de monomios:

a) $4a \times 9b$ b) $3t \times (-5s)$ c) $-7x \times (-8y)$ d) $4a^2 \times 7a^3$

e) $-12y \times 2y^2$ f) $(-3a)^4$ g) $-9ab \times (-4a^2b)$ h) $-7wy \times 4(-y)^5$

**C** Para dividir dos monomios se expresa como división de fracciones, se utiliza la multiplicación por el recíproco y se simplifica a la mínima expresión.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 20b^3 \div (-5b) &= 20b^3 \times \frac{1}{-5b} \\ &= -\frac{20b^3}{5b} \\ &= -\frac{\overset{4}{\cancel{20}} \times \overset{1}{\cancel{b}} \times b \times b}{\underset{1}{\cancel{5}} \times \underset{1}{\cancel{b}}} \\ &= -4b^2 \end{aligned}$$

Realiza las siguientes divisiones de monomios:

a) $32st \div 4t$ b) $35b^4 \div (-5b)$ c) $18x^2y \div (-12y)$ d) $-32y^2z^2 \div 40yz$

e) $5ab \div \frac{2}{3}b$ f) $18ab \div \frac{6}{7}ab^2$ g) $-\frac{5}{7}s^2t^3 \div \frac{5}{14}st$ h) $-\frac{5}{18}x^4 \div \frac{2}{3}x$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# 1.11 Multiplicación y división combinadas de monomios con monomios

1. Realiza las siguientes multiplicaciones de monomios:

a) $7x \times 8y$ b) $-5t \times (-5a)$ c) $-7y \times 7y$ d) $(-5z)^3$ e) $-2ab \times 15(-a)^3$

2. Realiza las siguientes divisiones de monomios:

a) $42yz \div 14z$ b) $32ab^3 \div (-24b)$ c) $36st^2 \div \frac{6}{7}t$ d) $-\frac{6}{35}t^3 \div \frac{2}{7}t^2$

Para operar multiplicaciones y divisiones combinadas de monomios primero se determina el signo (utilizando la ley de los signos), y luego se expresa como una sola fracción hasta simplificar a la mínima expresión.

Por ejemplo: $(-2a)^3 \times (-4a^2) \div \left(-\frac{2a}{3}\right)$

$$(-2a)^3 \times (-4a^2) \div \left(-\frac{2a}{3}\right) = -\ 8a^3 \times 4a^2 \times \frac{3}{2a}$$

$$= -\frac{\overset{4\,a^2}{\cancel{8}\cancel{a^3}} \times 4a^2 \times 3}{\underset{1\ 1}{\cancel{2}\cancel{a}}}$$

$$= -\frac{4a^2 \times 4a^2 \times 3}{1}$$

$$= -48a^4$$

Realiza las siguientes operaciones, simplifica el resultado a su mínima expresión.

a) $4t^3 \times 3t^2 \div 6t^4$ b) $15ab \div 4b^2 \times (-6b^3)$ c) $xy^3 \div (-y) \times (-x^2)$

d) $-m^2n^2 \times (-n^2) \div (-mn^3)$ e) $(-3z)^2 \div 18x^2z \times 6x^2$ f) $-bc^2 \div (-4b)^2 \times (-4c)$

g) $10y^4 \times 4y^2 \div (-2y^2)^2$ h) $(2a^2b^2)^2 \div ab^3 \times 3a$ i) $(-2n^2)^3 \times (-2mn) \div (-4n^2)^2$

j) $\frac{1}{2}xy^2 \times 3y \div \frac{3}{4}y^3$ k) $(-\frac{2}{3}ab)^2 \div 4(ab)^2 \times (-3a)^2$ l) $-\frac{3}{7}t \div (-t)^3 \times (-\frac{14}{27}t^4)$



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.12 Sustitución y valor numérico de polinomios

R

1. Realiza las siguientes divisiones de monomios:

a) $32ab \div 16b$  b) $48y^3z \div (-36y^2)$  c) $56mn^2 \div (-\frac{14}{3}m)$  d) $-\frac{4}{15}y^2 \div \frac{2}{9}y$

2. Realiza las siguientes operaciones, simplifica el resultado a su mínima expresión.

a) $9x^2 \times 5x^3 \div 15x^4$  b) $-m^2 \times (-n)^2 \div (-mn^2)$  c) $-4w^2x \div (-2w)^3 \times (-4x)$  d) $(-\frac{4}{5}xy)^2 \div 2xy \times (-5x)^2$

C

El proceso en el cual se sustituyen las variables de un polinomio por números particulares se llama **sustitución de las variables**, y el resultado de efectuar todas las operaciones en el polinomio con las variables sustituidas se conoce como **valor numérico del polinomio**.

Por ejemplo: $4x - 5y$, si $x = 6$, $y = 4$.

Sustituyendo el valor de las variables en cada polinomio:

$$\begin{aligned} 4x - 5y &= 4 \times 6 - 5 \times 4 \\ &= 24 - 20 \\ &= 4 \end{aligned}$$

1. Determina el valor numérico de cada polinomio utilizando los valores de las variables indicadas.

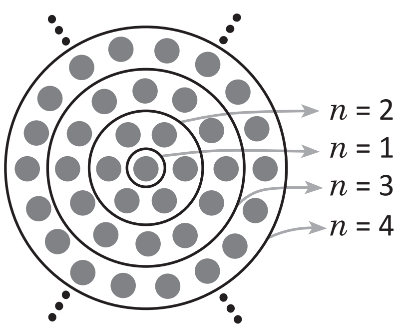
a) $-s + 4t$ , si $s = 7$, $t = -2$  b) $a - 2b + 5$, si $a = 8$, $b = -4$  c) $2x^3 + x^2 + 15$, si $x = -3$

2. Completa la siguiente tabla sustituyendo los valores de las variables indicados en cada caso, (ver columna 1) en cada uno de los polinomios de la primera fila.

| | $m^2 - n$ | $-mn$ | $(-m)^2 + 5$ |
|---|---|---|---|
| $m = 2$, $n = -3$ | | | |
| $m = 5$, $n = 6$ | | | |

3. Analiza y determina cuál de los siguientes polinomios representa la suma de los puntos dentro de las circunferencias en la siguiente figura, $n$ representa el número de circunferencias. Auxíliate del gráfico.

a) $3n - 2$  b) $3n(n - 1) + 1$




¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.13 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

| Ítem | Sí | Podría mejorar | No | Comentario |
|---|---|---|---|---|
| 1. Identifico los términos que forman polinomios como $2b - t - 8$, $\frac{5}{8}s - 3s^3 + \frac{2}{3}$. | | | | |
| 2. Efectúo operaciones con polinomios como $(5yz + 3y) - (8y - 2yz)$, $(-m + n) - (m + n)$. | | | | |
| 3. Realizo multiplicaciones y divisiones de número con polinomio como $-3(5a^2 - 3a) - 5(4a^2 - 2a)$, $(-15n - 40) \div 5$. | | | | |
| 4. Efectúo las operaciones y reduzco términos semejantes como $\frac{2a - 3b}{10} + \frac{-2a + b}{5}$, $x - y - \frac{6x - 4y}{7}$. | | | | |

## 1.14 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

| Ítem | Sí | Podría mejorar | No | Comentario |
|---|---|---|---|---|
| 1. Realizo correctamente multiplicaciones de monomios como $9x \times (-7y)$, $-6yz \times (-8y^2z^2)$. | | | | |
| 2. Realizo correctamente divisiones de monomios como $35b^4 \div (-5b)$, $18ab \div \frac{6}{7}ab^2$. | | | | |
| 3. Realizo operaciones combinadas y reduzco hasta la mínima expresión como $4t^3 \times 3t^2 \div 6t^4$, $-m^2n^2 \times (-n^2) \div (-mn^3)$. | | | | |
| 4. Sustituyo el valor de las variables y determino el valor numérico de polinomios como $-s + 4t$, si $s = 7$, $t = -2$; $a - 2b + 5$, si $a = 8$, $b = -4$. | | | | |



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.1 Suma de números consecutivos

Para resolver el problema de la suma de 5 números consecutivos, fue necesario aplicar suma de monomios, para determinar sumas específicas bastará con sustituir el valor de $n$ en el polinomio $5n + 10$, donde $n$ es el primer término de la suma. Por ejemplo:

En la suma 21 + 22 + 23 + 24 + 25, $n = 21$, entonces la suma resulta $5 \times (21) + 10 = 115$.

Y para determinar el polinomio $5n + 10$, fue necesario hacer el análisis siguiente:

Tomando $n$ como el primer término de una suma de 5 términos.

$$\begin{array}{ccccc}
13, & 14, & 15, & 16, & 17 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
13, & 13+1, & 13+2, & 13+3, & 13+4 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
n, & n+1, & n+2, & n+3, & n+4
\end{array}$$

Entonces, la suma de 5 términos consecutivos en general será:

$$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) = 5n + 10 = 5(n + 2).$$

1. Aplica el valor numérico del polinomio $5n + 10$ para determinar las siguientes sumas:

   a) 5 + 6 + 7 + 8 + 9 b) 43 + 44 + 45 + 46 + 47 c) 53 + 52 + 51 + 50 + 49 d) 28 + 31 + 29 + 32 + 30

2. ¿Cuál es la diferencia en el polinomio que resulta al sumar 5 números consecutivos si $n$ representa al número mayor?

3. Determina un procedimiento para sumar 3 números consecutivos, tomando $n$ como el número del centro.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.2 Suma de un número con su invertido

1. Aplica el valor numérico del polinomio $5n + 10$ para determinar las siguientes sumas.

a) 17 + 18 + 19 + 20 + 21

b) 56 + 57 + 58 + 59 + 60

c) 72 + 71 + 70 + 69 + 68

d) 39 + 41 + 37 + 40 + 38

2. ¿Cuál es la diferencia en el polinomio que resulta al sumar 5 números consecutivos, si $n$ representa al segundo número, ordenados de menor a mayor?

Para resolver el problema de la suma de un número con su invertido, fue necesario aplicar suma de monomios, y luego se concluyó que el polinomio resultante representa un número múltiplo de 11.

Para comprobar este resultado fue necesario realizar el siguiente análisis:

Tomando $y$ como el dígito de las unidades y $x$ como el dígito de las decenas.

Utilizando la expresión de los números base 10.

$$\begin{aligned} 63 &= 10 \times \underset{\downarrow}{6} + \underset{\downarrow}{3} \\ &= 10 \times x + y \end{aligned}$$

Entonces, expresando la suma de un número con su invertido utilizando las variables $x$, $y$:

$$\begin{aligned} 10x + y + 10y + x &= 11x + 11y \\ &= 11(x + y) \end{aligned}$$

1. Utiliza el polinomio $11(x + y)$ para determinar las siguientes sumas:

a) 45 + 54

b) 32 + 23

c) 71 + 17

d) 2 + 20

2. ¿Consideras posible que la suma de un número de 3 cifras con su invertido sea siempre múltiplo de 11? Explica por qué.

3. ¿Qué condición darías al número de cifras de un número para que sumado con su invertido sea siempre múltiplo de 11?



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.3 Sumas de días del calendario

1. Determina el polinomio que resulta al sumar 5 números consecutivos, si $n$ representa al penúltimo número ordenado de menor a mayor.

2. Demuestra que la suma de un número de 6 cifras con su invertido es múltiplo de 11.

Para resolver el problema de la suma de los días del calendario, fue necesario aplicar suma de polinomios, y luego se concluyó que esta suma es 5 veces el número que queda al centro.

Para comprobar este resultado fue necesario realizar el siguiente análisis:

Febrero 2017

| L | M | M | J | V | S | D |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 27 | 28 | | | | | |

Tomando $n$ como el término del centro de la parte sombreada.

Entonces un día después será denotado por $n + 1$ y un día antes por $n - 1$.

Además, para denotar el mismo día pero la semana anterior será $n - 7$ y el mismo día la semana siguiente será $n + 7$.

La suma de los 5 días sombreados estará dado por

$$21 + 20 + 22 + 14 + 28$$

$$21 + 21 - 1 + 21 + 1 + 21 - 7 + 21 + 7$$

$$n + n - 1 + n + 1 + n - 7 + n + 7 = 5n$$

Por lo tanto, la suma de los días sombreados en esta forma en el calendario es 5 veces el número que queda al centro.

Utiliza polinomios para determinar la suma de los días sombreados en los siguientes calendarios, sigue las indicaciones de cada literal.

1.

Febrero 2017

| L | M | M | J | V | S | D |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 27 | 28 | | | | | |

a) $n$ el número mayor

b) $n$ el número menor

2.

Febrero 2017

| L | M | M | J | V | S | D |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 27 | 28 | | | | | |

a) $n$ el número del centro

b) $n$ el número mayor

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.4 Resolución de problemas utilizando polinomios

R

1. Demuestra que la suma de un número de 2 cifras con su invertido es múltiplo de 11.

2. Utiliza polinomios para determinar la suma de los días sombreados en el siguiente calendario, tomando como referencia el número del centro.

| Febrero 2017 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| L | M | M | J | V | S | D |
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 27 | 28 | | | | | |

C

Para resolver problemas utilizando polinomios se pueden seguir los pasos:

1. Se identifican las variables del problema.
2. Se plantea una ecuación con las variables identificadas en el paso anterior.
3. Se despeja la variable que soluciona el problema planteado.
4. Se sustituye el valor numérico de una variable en el polinomio que resulta después de despejar.

1. Despeja la variable indicada y sustituye el valor numérico que se indica entre corchetes [ ].

   a) $2a - 8b = 12$ $[a, b = 5]$ b) $1.2y + x = 7$ $[x, y = 5]$ c) $\frac{2}{3}tr = 14$ $[t, r = 3]$

2. Una moto se conduce por una calle recta a 80 km/h, y un automóvil la alcanza después que la moto ha conducido 2 horas. Tomando $x$ como la distancia que recorre la moto, y $y$ la distancia que recorre el automóvil, establece el polinomio que representa la situación. Luego responde, ¿cuánto tiempo se condujo el automóvil a 100 km/h para alcanzar la moto?

3. La cantidad de viajeros que consideran al Hotel San Carlos como primera opción, puede modelarse mediante la expresión $M(t) = t^2 - 5t + 35$, donde $t$ es el número de años transcurridos a partir del año 2000.
   a) Por medio de la función, determina el número de viajeros que consideraron San Carlos como primera opción para el año 2018.
   b) Si la tendencia continúa, estima el procentaje de viajeros que considerarán como primera opción el hotel San Carlos en 2020.



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.5 Autoevaluación de lo aprendido

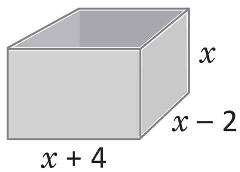
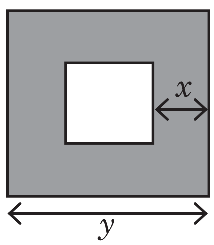
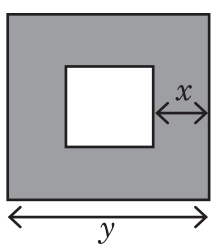
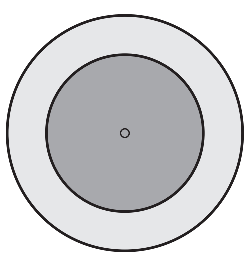
Resuelve en el espacio en blanco y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

| Ítem | Sí | Podría mejorar | No | Comentario |
|---|---|---|---|---|
| 1. Determino y utilizo polinomios para sumar 3, 5 o 7 números consecutivos. | | | | |
| 2. Utilizo polinomios para demostrar que la suma de un número de 2 o 4 cifras con su invertido es múltiplo de 11. | | | | |
| 3. Utilizo polinomios para encontrar sumas de números que cumplen patrones sombreados en un calendario, tomando un número de ellos como referencia. | | | | |
| 4. Utilizo polinomios para resolver problemas de la vida cotidiana, planteando el polinomio y sustituyendo por un valor numérico adecuado. | | | | |

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.6 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve en el espacio en blanco y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

| Ítem | Sí | Podría mejorar | No | Comentario |
|---|---|---|---|---|
| 1. Expreso el volumen de la pila mediante un polinomio. Luego calculo el volumen, cuando $x = 6$.   | | | | |
| 2. Expreso el área del cuadrado interno con un polinomio, luego calculo el área para $x = 4$ y $y = 10$.   | | | | |
| 3. Determino el área sombreada de la figura, considerando que la figura externa e interna es un cuadrado.   | | | | |
| 4. Utilizo polinomios para determinar el área punteada de la figura, considerando que el radio mayor es de $x$ cm y el menor de 4 cm.  | | | | |

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

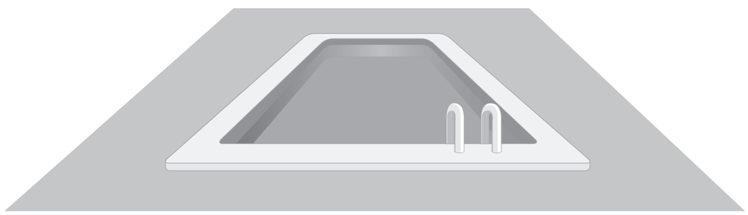
## Problemas de aplicación

Los polinomios se aplican a los problemas de la construcción o la planificación de materiales. Una ecuación polinómica se puede utilizar en cualquier situación de la construcción 2-D para planificar la cantidad de materiales necesarios. Por ejemplo, los polinomios pueden ser usados para determinar la cantidad de área de superficie de un jardín que puede ser cubierto con una cierta cantidad de suelo. El mismo método se aplica a muchos proyectos de la superficie plana, incluyendo calzada, acera y la construcción del patio.

**Construcción de una piscina**

Se construirá una piscina rectangular rodeada por un pasillo enlosado de 1.5 m de ancho. Si la piscina debe ser 5 m más larga que ancha, determina:

a) La expresión que representa el área de la piscina.
b) La expresión que representa el área del pasillo enlosado.
c) Considerando que los azulejos tienen un costo $12.00 por metro cuadrado y $7.00 de mano de obra, determina el costo total del pasillo enlosado.

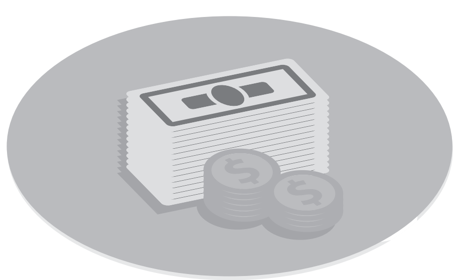


Los polinomios son útiles cuando se trata de presupuestos o la planificación de gastos. Cuando necesitas obtener una determinada cantidad de dinero dentro de un cierto período de tiempo, los polinomios pueden ayudarte a determinar la cantidad exacta de tiempo que necesitas para ganar esa cantidad. Al predecir tus gastos y saber tu tasa de ingreso, puedes fácilmente determinar la cantidad de tiempo que necesitas trabajar.

**Presupuesto de gastos**

Antonio necesita ahorrar $6,000 para comprarse un carro. Él tiene un ingreso semanal de $275.00 y un gasto promedio de $200.00.

a) ¿Cuánto puede ahorrar Antonio por semana?
b) Escribe una expresión que permita determinar el número de semanas que deben transcurrir para que Antonio ahorre el total que necesita para comprar el carro.

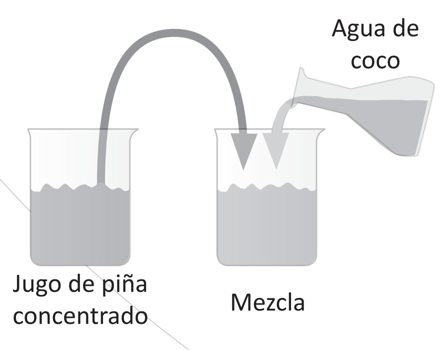


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Unidad 2

# Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

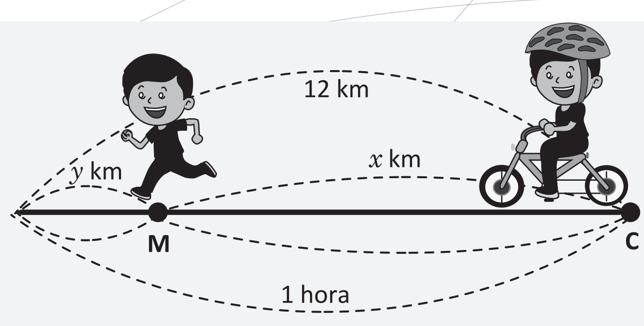
Los sistemas de ecuaciones lineales fueron resueltos por los babilonios, los cuales llamaban a las incógnitas con palabras tales como longitud y anchura, sin que tuvieran relación con problemas de medida. La matemática comienza a interesarse por las operaciones que pueden realizarse con cualquier número, y esta idea permite dar el salto desde la Aritmética al Álgebra. En este contexto, Diofanto introdujo símbolos y dio soluciones algebraicas de las ecuaciones especiales de primer grado con dos y tres incógnitas, como $x + y = 100$, $x - y = 40$.




*Preparación de una mezcla.*

Los sistemas de ecuaciones se utilizan para modelar situaciones de diferentes contextos, por ejemplo analizar el flujo de tráfico en una red de calles que se cruzan unas con otras, calcular el presupuesto de un proyecto, analizar la oferta y demanda mediante el equilibrio parcial, determinar la proporción de elementos para una mezcla, optimizar procesos de producción, etc.

Durante las clases siguientes estudiarás las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, los métodos de solución de los sistemas y sus aplicaciones para resolver situaciones de la vida cotidiana en diferentes contextos, por ejemplo: geometría, ciencias naturales, economía, etc.




*Uso de los modelos matemáticos para representar la velocidad.*

## 1.1 Solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

1. Determina el valor de $x$ que satisface las siguientes ecuaciones:

a) $x + 3 = 5$

b) $x - 4 = 2$

c) $2x = 5$

d) $2x - 7 = 3$

e) $-3x - 8 = -17$

f) $4x - 4 = -2x + 8$

g) $10x + 15 = -12 + x$

h) $2(x + 3) = 5(x - 4) + 8$

i) $3(2x - 5) - 9 = -4x + 6$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $0.7x + 1.2 = 0.3x + 2.8$

b) $2 + 0.6x = 2.4 + 0.8x$

c) $0.3x - 0.06 = 0.15x + 0.24$

d) $1.25x + 0.05 = 1.45x - 0.05$

3. Resuelve los siguientes ejercicios:

a) $\frac{1}{3}x - 2 = \frac{1}{6}x$

b) $\frac{x - 3}{2} = \frac{1}{5}x$

c) $\frac{x + 3}{10} = \frac{x + 2}{15}$

d) $-\left(\frac{x + 2}{3}\right) - \frac{x}{2} = \frac{5}{3}$

e) $-\frac{x + 2}{3} = \frac{3}{4}$

f) $-\frac{1}{2} = \frac{2}{3}x + \frac{5}{4}$



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.2 Aplicación de las ecuaciones de primer grado con una incógnita

R

1. Resuelve las ecuaciones:

a) $x + 7 = 8$ b) $4x = -12$ c) $4x - 2 = 3x - 5$ d) $2x = 5x + 15$

2. Sigue resolviendo:

a) $2(x + 3) - 5 = 5x + 13$ b) $5(2x + 3) - (7x - 6) = 0$

Unidad 2

1. Tengo $\frac{2}{3}$ de lo que cuesta una computadora. ¿Cuánto vale la computadora si me faltan solo 318 dólares para comprarla?

2. Tres hermanos trabajan juntos y tienen que repartirse $3,000 de beneficios. ¿Cuánto le tocará a cada uno, si el primero tiene que recibir 3 veces más que el segundo y el tercero dos veces más que el primero?

3. Carlos sale en bicicleta desde Santa Tecla hacia Santa Ana con una velocidad de 25 km/h, 3 horas más tarde sale Ana en un carro a una velocidad de 125 km/h. ¿Cuánto tiempo tardará Ana en alcanzar a Carlos?

4. ¿Qué número tengo que sumar a los dos términos de la fracción $\frac{15}{135}$ para que se convierta en $\frac{3}{11}$?

5. La suma de dos números enteros pares consecutivos es 154. Encuentra el número par mayor.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.3 Sentido de la ecuación de primer grado con dos incógnitas

R

1. Resuelve las ecuaciones:
   a) $0.2x - 3 = 1.2x - 7$  b) $0.5\,x + 0.8 = 3.3$  c) $\frac{5}{4}x = -15$

2. El perímetro de un triángulo isósceles es 54 cm y la base excede en 3 cm a uno de los lados iguales del triángulo. Determina la medida de los lados del triángulo.

C

En la situación de Carlos, en la que acertó 7 tiros entre tiros libres y de 2 puntos, obteniendo 10 puntos. Para saber cuántos tiros libres y cuántos de 2 puntos acertó, escribe dos ecuaciones para las condiciones "acertó 7 tiros" y "obtuvo 10 puntos"; luego encuentra la solución completando la tabla.

| Tiros libres: $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | **4** | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tiros de dos puntos: $y$ | 7 | 6 | 5 | 4 | **3** | 2 | 1 | 0 |
| **Total acertado: $x + y$** | 7 | 7 | 7 | 7 | **7** | 7 | 7 | 7 |
| **Total de puntos: $x + 2y$** | 14 | 13 | 12 | 11 | **10** | 9 | 8 | 7 |

Las ecuaciones de la forma $x + y = 7$ se llaman **ecuaciones de primer grado con dos incógnitas** y tal como se muestra en el ejemplo, para estas ecuaciones existe más de un par de valores que las satisface. A fin de encontrar el valor de $x$ y de $y$ que satisfaga las dos condiciones, se plantean las dos ecuaciones de forma simultánea: $\begin{cases} x + y = 7 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$

A la combinación de dos o más ecuaciones se le llama **sistema de ecuaciones** y la solución del sistema será el par de valores que satisfacen las dos ecuaciones. En el ejemplo, la solución del sistema es $x = 4$, $y = 3$.

Lee las siguientes situaciones:

1. Carlos pagó una cuenta de $30 con billetes de $2 y de $5. En total empleó 9 billetes para hacer el pago. ¿Cuántos billetes de cada valor utilizó?
   a) Escribe ecuaciones que representen las condiciones "pagó una cuenta de $30" y "empleó 9 billetes."
   b) Completa la tabla y encuentra la solución del sistema de ecuaciones.

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| **Total de billetes:** | 9 | | | | | | | | | 9 |
| **Total de dinero:** | | | | | | | | | | |

2. En un almacén hay dos tipos de lámparas, las de tipo A, que utilizan 2 bombillos y las de tipo B, que utilizan 3 bombillos. Si en total, en el almacén hay 9 lámparas y 22 bombillos, ¿cuántas lámparas hay de cada tipo?
   a) Escribe ecuaciones que representen las condiciones "hay 9 lámparas" y "hay 22 bombillos".
   b) Completa la tabla y encuentra la solución del sistema de ecuaciones.

| $x$ | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | | | | | | | | |
| **Total de lámparas:** | | | | | | | | | | |
| **Total de bombillos:** | | | | | | | | | | |



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.4 Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

R

1. Hallar el perímetro del cuadrado ABCD tal que AB = $5x + 5$, CD = $7x - 19$.

2. Lee y responde:

En la feria de las fiestas patronales de mi pueblo, subir a la Chicago cuesta $2 y subir a la Montaña Rusa $3. Julia sube un total de 7 veces y gasta $16. ¿Cuántas veces subió a cada atracción?

a) Escribe ecuaciones que representen las condiciones "sube un total de 7 veces" y "gasta $16".

b) Completa la tabla y encuentra la solución del sistema de ecuaciones.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Total de veces que subió a la Chicago: $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Total de veces que subió a la M. Rusa: $y$ | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| **Total de veces que se subió:** | | | | | | | | |
| **Total de gasto:** | | | | | | | | |

C

En la tienda Vida Sana, 1 libra de uvas y 1 de manzanas cuesta $5, y 1 libra de uvas y 3 de manzanas cuesta $11. ¿Cuál es el precio de 1 libra de uvas y 1 libra de manzanas?

a) Considera como $x$ el precio de la libra de uvas y como $y$ el precio de la libra de manzanas.

1 libra de uvas + 1 libra de manzanas $\longrightarrow$ $x + y = 5$

1 libra de uvas + 3 libras de manzanas $\longrightarrow$ $x + 3y = 11$

b) Se considera las dos condiciones $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$ para elaborar la tabla.

| $x$ | 0 | 1 | **2** | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 5 | 4 | **3** | 2 | 1 | 0 |
| $x + y$ | 5 | 5 | **5** | 5 | 5 | 5 |
| $x + 3y$ | 15 | 13 | **11** | 9 | 7 | 5 |

Los valores para $x$ y $y$ que cumplen las dos condiciones son $x = 2$, $y = 3$; entonces, 1 libra de uvas es de $2 y la de manzanas $3.

Los valores que cumplen las dos condiciones del problema se les llama **solución del sistema**, entonces **resolver un sistema de ecuaciones** es encontrar los valores que satisfacen las dos ecuaciones.

1. De los siguientes pares de valores, ¿cuál es la solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$?

a) $x = 2$, $y = 4$ b) $x = 3$, $y = 2$ c) $x = 4$, $y = 2$

2. ¿De cuál sistema es solución los valores $x = -2$; $y = 3$?

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = -5 \\ x + y = 11 \end{cases}$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.5 Sentido del método de reducción

R

1. Lee la siguiente situación:
   Con \$21 se compraron 2 lapiceros y 3 cajas de colores, y con \$8 se compró 1 lapicero y 1 caja de colores. ¿Cuál es el costo de un lapicero y el de una caja de colores?
   a) Escribe las ecuaciones para cada condición.
   b) Completa la tabla y encuentra la solución del sistema de ecuaciones.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Costo de un lapicero: $x$ | | | | | | | | |
| Costo de una caja de colores: $y$ | | | | | | | | |
| **Condicion 1:** | | | | | | | | |
| **Condición 2:** | | | | | | | | |

2. De los siguientes pares de valores, ¿cuál es la solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$?

   a) $x = 5, y = 2$ b) $x = 3, y = 2$ c) $x = 2, y = 4$

3. ¿De cuál sistema es la solución $x = 5, y = -1$?

   a) $\begin{cases} x - y = 6 \\ -2x + 3y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases}$

C

Para resolver un sistema de ecuaciones en el que los coeficientes de una de las incógnitas tienen igual signo e igual valor absoluto:

1. Se encuentra la diferencia restando los miembros izquierdos y derechos de las dos ecuaciones respectivamente.
2. Se obtiene una nueva ecuación con una incógnita, que se estudió en 7° grado.
3. Se resuelve la ecuación obtenida.
4. Se sustituye el valor obtenido en 3 en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema.

Al proceso descrito se le llama **reducción.**
Por ejemplo, para el sistema resuelto, $x$ tiene coeficientes de igual valor absoluto e igual signo.

Por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 12 & ① \\ 2x + 3y = 8 & ② \end{cases}$$

$$\begin{array}{rr} & 2x + 5y = 12 \\ (-) & \underline{2x + 3y = 8} \\ & 2y = 4 \\ & y = 2 \end{array}$$

Sustituyendo $y = 2$ en la ecuación ②:

$$\begin{aligned} 2x + 3(2) &= 8 \\ 2x + 6 &= 8 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando reducción.

a) $\begin{cases} 2x + 7y = 22 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 5x - 2y = 25 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y = 4 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y = 8 \end{cases}$



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.6 Método de reducción por adición

R 1. De los siguientes pares de valores, ¿cuál es la solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y = 1 \\ 4x + 8y = 7 \end{cases}$?

a) $x = \frac{1}{4},\ y = \frac{3}{4}$ b) $x = 2,\ y = -1$ c) $x = \frac{2}{5},\ y = \frac{2}{5}$

2. ¿De cuál sistema es solución los valores $x = 3$, $y = -3$?

a) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x + 3y = -3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 2x - 3y = -3 \end{cases}$

3. Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando reducción.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ 2x + 5y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 4y = -2 \\ 3x - 4y = -6 \end{cases}$

C

Para resolver un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, aplicando reducción, es necesario considerar siempre los coeficientes de las incógnitas.

Si los coeficientes de una de ellas tienen igual valor absoluto pero distinto signo, se suman respectivamente los términos en ambos miembros de las dos ecuaciones.

Por ejemplo: al sumar los miembros izquierdo y derecho, respectivamente, de las dos ecuaciones se obtiene:

$$\begin{array}{rr} & 3x - 5y = 25 \quad ① \\ (+) & \underline{5x + 5y = 15} \quad ② \\ & 8x = 40 \\ & x = 5 \end{array}$$

Sustituye $x = 5$ en ② y encuentra el valor de $y$

$$\begin{aligned} 5x + 5y &= 15 \\ 5(5) + 5y &= 15 \\ 5y &= 15 - 25 \\ 5y &= -10 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando reducción.

a) $\begin{cases} 2x - 7y = -16 \\ 3x + 7y = 11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 5x - 3y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + 5y = 12 \\ -\frac{1}{3}x + 2y = 2 \end{cases}$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# 1.7 Método de reducción por adición o sustracción, parte 1

R

1. Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando reducción.

a) $\begin{cases} 9x + 5y = 8 \\ 9x - 4y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 2y = -5 \\ 4x + 2y = -6 \end{cases}$

2. Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando reducción.

a) $\begin{cases} 10x - 3y = 1 \\ 5x + 3y = 14 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 4y = 3 \\ 6x + 4y = 1 \end{cases}$

C

Para resolver el sistema de ecuaciones donde ninguna de las incógnitas tiene coeficiente con igual valor absoluto, pero al analizar los coeficientes para una de las incógnitas, uno es múltiplo del otro:

1. Identificar la incógnita que conviene reducir.
2. Multiplicar por un número igual al coeficiente con que aparece la incógnita en la otra ecuación.
3. Determinar qué operación realizar: suma o resta.
4. Resolver la ecuación reducida.
5. Sustituir el valor encontrado en 4 en cualquiera de las ecuaciones del sistema.

Por ejemplo, para resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + 3y = -4 & ① \\ 4x + 2y = 4 & ② \end{cases}$$

$$\begin{array}{lcr} ① \times 4 & \longrightarrow & 4x + 12y = -16 \\ ② & \longrightarrow & (-)\underline{4x + 2y = 4} \\ & & 10y = -20 \\ & & y = -2 \end{array}$$

Sustituyendo $y$ en ①

$$\begin{aligned} x + 3y &= -4 \\ x + 3(-2) &= -4 \\ x - 6 &= -4 \\ x &= -4 + 6 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 2$, $y = -2$.

Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando reducción.

a) $\begin{cases} 3x + y = -1 \\ 5x + 3y = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 3x + 5y = 19 \end{cases}$



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# 1.8 Método de reducción por adición o sustracción, parte 2

R 1. Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando reducción.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ -3x - 7y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 9x + 5y = -12 \\ 4x - 5y = -27 \end{cases}$

2. Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando reducción.

a) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 7x + 3y = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 5y = 4 \\ 6x + 3y = 0 \end{cases}$



C Para resolver el sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas aplicando reducción, es necesario:

1. Identificar la incógnita que se va a reducir.
2. Multiplicar las ecuaciones por un número de tal manera que la incógnita que se va a reducir tenga coeficientes de igual valor absoluto.
3. Identificar si se suma o resta para reducir.
4. Resolver la ecuación reducida.
5. Sustituir el valor obtenido en 4, en una de las ecuaciones del sistema.

Por ejemplo, resolver el sistema:

$\begin{cases} 3x - 4y = 3 & ① \\ 2x - 3y = 1 & ② \end{cases}$

$$\begin{array}{lcr} ① \times 2 & \longrightarrow & 6x - 8y = 6 \\ ② \times 3 & \longrightarrow & (-)\ 6x - 9y = 3 \\ \hline & & y = 3 \end{array}$$

Sustituyendo $y$ en ②

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 1 \\ 2x - 3(3) &= 1 \\ 2x - 9 &= 1 \\ 2x &= 1 + 9 \\ 2x &= 10 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 5$, $y = 3$.

Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando reducción.

a) $\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 7x + 5y = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ 3x - 5y = -7 \end{cases}$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.9 Sentido del método de sustitución

R 1. Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando reducción.

a) $\begin{cases} 6x + 5y = 7 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 4y = 8 \\ 5x + 8y = 6 \end{cases}$

2. Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando reducción.

a) $\begin{cases} 4x + 5y = -1 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 7x + 3y = -1 \end{cases}$

C

Cuando en una de las dos ecuaciones del sistema se sustituye una de las incógnitas $x$ o $y$ por su expresión equivalente, se obtiene una nueva ecuación con una incógnita, resolviendo esa ecuación se determina el valor de una incógnita que permitirá determinar el valor de la otra incógnita; tal como se muestra en el ejemplo.

El método que reduce en una incógnita al sustituir una de las incógnitas por su expresión equivalente, se llama **sustitución**.

Por ejemplo, para resolver el sistema que representa las dos condiciones sobre el precio del quintal de maíz y del quintal de frijol, se tiene:

$$\begin{cases} x + 7y = 440 & ① \\ x = 2y - 10 & ② \end{cases}$$

Al sustituir ② en ①, se obtiene:

$$\begin{aligned} (2y - 10) + 7y &= 440 \\ 2y - 10 + 7y &= 440 \\ 9y &= 440 + 10 \\ 9y &= 450 \\ y &= 50 \end{aligned}$$

Sustituyendo $y = 50$ en la ecuación ②

$x = 2(50) - 10$

$x = 100 - 10$

$x = 90$

Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando sustitución.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x = 2y + 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + 2y = -1 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ x = 5y + 13 \end{cases}$



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# 1.10 Método de sustitución

1. Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando reducción.

a) $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ -2x + 3y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$

2. Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando sustitución.

a) $\begin{cases} x = 9 - 3y \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$

Para resolver un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, aplicando **sustitución**, es necesario considerar:

1. Identificar la incógnita que resulta más fácil despejar.
2. Realizar el despeje.
3. Sustituir la incógnita despejada en ② en la otra ecuación.
4. Resolver la ecuación obtenida.

Por ejemplo, resolver: $\begin{cases} 5x + y = 14 & ① \\ 2x + 3y = 16 & ② \end{cases}$

Despejar $y$ en la ecuación ① y se obtiene $y = 14 - 5x$

• Sustituir $y$ por $14 - 5x$ en la ecuación ②

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 16 \\ 2x + 3(14 - 5x) &= 16 \\ 2x + 42 - 15x &= 16 \\ -13x + 42 &= 16 \\ -13x &= 16 - 42 \\ -13x &= -26 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

• Al sustituir $x = 2$ en $y = 14 - 5x$

$$\begin{aligned} y &= 14 - 5x \\ y &= 14 - 5(2) \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando sustitución.

a) $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x + 5y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 7x + 2y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3y = 4x \square 11 \end{cases}$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# 1.11 Solución de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas

R

1. Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando sustitución.

a) $\begin{cases} x = 3y - 5 \\ 5x + 2y = -8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ y = 3x + 2 \end{cases}$

2. Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando sustitución.

a) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = -6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + 3y = -9 \\ y = 2x + 8 \end{cases}$

C

Para resolver un sistema de ecuaciones, se puede seleccionar un método según los tipos de ecuaciones.

- Cuando las incógnitas tienen coeficientes del mismo valor absoluto o uno de sus coeficientes es múltiplo del otro es más fácil aplicar el método de reducción.
- Cuando una ecuación tiene despejada una incógnita o la incógnita tiene coeficiente ± 1, es fácil aplicar **sustitución.**

Por ejemplo, dado el sistema:

$$\begin{cases} 8x - 9y = 7 & (1) \\ 9y = 7x - 5 & (2) \end{cases}$$

- Sustituye $9y$ en la ecuación (1)

$$8x - 9y = 7$$
$$8x - (7x - 5) = 7$$
$$8x - 7x + 5 = 7$$
$$x = 7 - 5$$
$$x = 2$$

- Sustituye $x = 2$ en:

$$9y = 7(2) - 5$$
$$9y = 14 - 5$$
$$9y = 9$$
$$y = 1$$

Resuelve los sistemas de ecuaciones, aplicando el método que consideres más adecuado.

a) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 3x = 2y - 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 5y = -3 \\ 2x - 9 = 5y \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 7 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# 1.12 Sistemas de ecuaciones con coeficientes decimales

R 1. Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando sustitución.

a) $\begin{cases} x = 2y - 5 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - 9 = y \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$



2. Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando el método que consideres más adecuado.

a) $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 2x = 5 - 3y \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 5x - 4 = 3y \end{cases}$

C

Para resolver el sistema de ecuaciones cuyos coeficientes son decimales, se multiplica cada ecuación por un número tal que los coeficientes se conviertan en números enteros, luego se aplica el método que se considere más adecuado.

Por ejemplo, resolver $\begin{cases} 1.5x + 0.5y = 10 & ① \\ 0.1x + 0.2y = 1 & ② \end{cases}$

1. Se convierten en ecuaciones con coeficientes enteros:

$$① \times 10 \longrightarrow 15x + 5y = 100$$
$$② \times 10 \longrightarrow x + 2y = 10$$

2. Se despeja $x$ en ②:

$$x + 2y = 10$$
$$x = 10 - 2y$$

3. Se sustituye $x$ en la ecuación ①:

$$15(10 - 2y) + 5y = 100$$
$$150 - 30y + 5y = 100$$
$$-25y = 100 - 150$$
$$y = 2$$

4. Se sustituye $y = 2$

$$x = 10 - 2(2)$$
$$x = 6$$

Resuelve los sistemas de ecuaciones, aplicando el método que consideres más adecuado.

a) $\begin{cases} 0.1x + 0.2y = 0 \\ x + y = 15 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 0.25x + 0.2y = 2 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 0.4x + 0.1y = 3 \\ 0.2x + 0.5y = 6 \end{cases}$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.13 Sistemas de ecuaciones con coeficientes fraccionarios

R

1. Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando el método que consideres más adecuado.

a) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ 4x = 2y + 3 \end{cases}$

2. Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando el método que consideres más adecuado.

a) $\begin{cases} 0.3x + 0.8y = 2 \\ 3x - 8y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 0.5x + 0.3y = 2 \\ 6x - 3y = -9 \end{cases}$

C

Para resolver el sistema de ecuaciones cuyo coeficiente es un número fraccionario, se multiplica cada ecuación por un número tal que los coeficientes fraccionarios se conviertan en números enteros, luego se aplica el método de solución que se considere más adecuado.

Por ejemplo, resolver el sistema:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y = 12 & ① \\ \frac{7}{9}x + y = 15 & ② \end{cases}$$

1. Se convierten en ecuaciones con coeficientes enteros:

① $\times 12 \longrightarrow 8x + 9y = 144$

② $\times 9 \longrightarrow 7x + 9y = 135$

2. Se reduce en $y$, restando ② de ①:

$$\begin{array}{rr} & 8x + 9y = 144 \\ (-) & \underline{7x + 9y = 135} \\ & x = 9 \end{array}$$

3. Se sustituye $x = 9$ en la ecuación ② del sistema dado:

$$\frac{7}{9}x + y = 15$$
$$\frac{7}{9}(9) + y = 15$$
$$7 + y = 15$$
$$y = 8$$

Resuelve los sistemas de ecuaciones, aplicando el método que consideres más adecuado.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 5 \\ \frac{3}{4}x - \frac{1}{3}y = 0 \end{cases}$



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# 1.14 Sistemas de ecuaciones que contienen signos de agrupación

R

1. Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando el método que consideres más adecuado.

a) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 0.2x + 0.2y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 0.5x - 0.5y = -4 \\ 3x + 5y = 0 \end{cases}$

2. Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando el método que consideres más adecuado.

a) $\begin{cases} x + \frac{1}{3}y = 2 \\ 3x - \frac{2}{3}y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - \frac{1}{2}y = 1 \\ 2x + \frac{1}{2}y = 2 \end{cases}$

C

Para resolver un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas que contiene signos de agrupación, como el que se muestra en el ejemplo, es necesario:

- Suprimir los signos de agrupación, efectuar las operaciones indicadas.
- Resolver el sistema aplicando el método que se considere más adecuado.

Por ejemplo, resolver el sistema:

$$\begin{cases} 8x - 3(x - y) = 50 & ① \\ 3(x + y) - (6y - 5x) = 41 & ② \end{cases}$$

1. Realiza las operaciones indicadas:

$$① \longrightarrow 8x - 3x + 3y = 50 \longrightarrow 5x + 3y = 50$$
$$② \longrightarrow 3x + 3y - 6y + 5x = 41 \longrightarrow 8x - 3y = 41$$

2. Sumando ① y ②

$$\begin{array}{rr} & 5x + 3y = 50 \\ (+) & \underline{8x - 3y = 41} \\ & 13x = 91 \\ & x = 7 \end{array}$$

3. Sustituye $x$ en la ecuación ①

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 50 \\ 5(7) + 3y &= 50 \\ 3y &= 50 - 35 \\ 3y &= 15 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

Resuelve los sistemas de ecuaciones, aplicando el método que consideres más adecuado.

a) $\begin{cases} 5x - 3(x - y) = 7 \\ 6y - 3(y - x) = 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2(y - x) = -9 \\ 2(x - y) + 3y = 0 \end{cases}$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.15 Sistemas de ecuaciones de la forma $ax + by + c = 0$

R

1. Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando el método que consideres más adecuado.

a) $\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y = 3 \\ \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{2}{5}x + \frac{1}{2}y = 1 \\ \frac{3}{5}x - \frac{1}{2}y = -6 \end{cases}$

2. Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando el método que consideres más adecuado.

a) $\begin{cases} 6x - 2y = 3(x + 2) \\ 3x - 3y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 10x + 7y = 4(x - 1) + 8 \\ 8x + 7y = 10 \end{cases}$

C

Para resolver un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, cuya forma es $ax + by + c = 0$, como el que se muestra en el ejemplo es necesario:

- Llevar las ecuaciones a la forma $ax + by = c$, efectuando la transposición de términos.
- Se resuelve el sistema aplicando el método que se considere más adecuado.

Por ejemplo, resolver el sistema:

$$\begin{cases} 0.8x + 1.2y - 14 = 0 & ① \\ 0.4x - 0.3y - 2.5 = 0 & ② \end{cases}$$

1. Transponer el término independiente $c$ para llevar a la forma $ax + by = c$ y convertir a coeficientes enteros:

$$① \longrightarrow 0.8x + 1.2y = 14 \longrightarrow 8x + 12y = 140$$
$$② \longrightarrow 0.4x - 0.3y = 2.5 \longrightarrow 4x - 3y = 25$$

2. Restando ② de ①:

$$\begin{array}{lcr} ① & \longrightarrow & 8x + 12y = 140 \\ ② \times 2 & \longrightarrow & (-)\ \underline{8x - 6y = 50} \\ & & 18y = 90 \\ & & y = 5 \end{array}$$

3. Sustituye $y = 5$ en la ecuación ②:

$$\begin{aligned} 4x - 3(5) &= 25 \\ 4x - 15 &= 25 \\ 4x &= 25 + 15 \\ 4x &= 40 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Resuelve los sistemas de ecuaciones, aplicando el método que consideres más adecuado.

a) $\begin{cases} x + 2y + 5 = 0 \\ 3x + 2y - 9 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ 3x - y - 15 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y - 5 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.16 Autoevaluación de lo aprendido



Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

| Ítem | Sí | Podría mejorar | No | Comentario |
|---|---|---|---|---|
| 1. Identifico la diferencia entre estas ecuaciones: $3x + 2y = 5$, $2x + 5 = 9$, $2(x - 3) = 10$, $2(x - y) = 4$ | | | | |
| 2. Identifico la diferencia entre resolver una ecuación con dos incógnitas como esta: $2x + y = 5$ y resolver una como esta: $x - 2 = 0$ | | | | |
| 3. Resuelvo ecuaciones como $2x + y = 5$, mediante el uso de tablas. | | | | |
| 4. Resuelvo un sistema de ecuaciones mediante el uso de tablas, por ejemplo: $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ | | | | |
| 5. Resuelvo un sistema de ecuaciones haciendo uso del método de reducción, por ejemplo: $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$ | | | | |
| 6. Resuelvo un sistema de ecuaciones haciendo uso del método de sustitución, por ejemplo: $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 7x + 2y = 3 \end{cases}$ | | | | |
| 7. Determino qué método resulta más adecuado aplicar para resolver un sistema de ecuaciones con dos incógnitas, por ejemplo: $\begin{cases} x + y = 7 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$ | | | | |

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.17 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

| Ítem | Sí | Podría mejorar | No | Comentario |
|---|---|---|---|---|
| 1. Resuelvo sistemas de ecuaciones de primer grado con coeficientes decimales, por ejemplo: $\begin{cases} 0.8x - 0.2y = 1.4 \\ 0.4x + 2y = 2.8 \end{cases}$ | | | | |
| 2. Resuelvo sistemas de ecuaciones de primer grado con coeficientes fraccionarios, por ejemplo: $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y = 2 \\ \frac{1}{3}x - y = -4 \end{cases}$ | | | | |
| 3. Resuelvo sistemas de ecuaciones de primer grado con coeficientes decimales y fraccionarios, por ejemplo: $\begin{cases} 0.2x + 0.4y + 0.6 = 0 \\ \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}y - \frac{5}{2} = 0 \end{cases}$ | | | | |
| 4. Resuelvo sistemas de ecuaciones de primer grado de la forma $ax + by + c = 0$, por ejemplo: $\begin{cases} 6x - 5y - 17 = 0 \\ 14x + 25y - 3 = 0 \end{cases}$ | | | | |



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.1 Aplicación de sistemas de ecuaciones en geometría

R Expresa en lenguaje algebraico:

1. Un número aumentado en trece.

2. El doble de un número.

3. Un número que es aumentado en cuatro es igual a nueve.

4. Un número disminuido en nueve es igual a tres.

5. La suma de dos números es igual a quince.

C Para resolver problemas mediante el uso de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, es necesario:

1. Definir las cantidades que se representan con las incógnitas.
2. Escribir las ecuaciones que corresponden a las condiciones del problema para plantear el sistema.
3. Resolver el sistema de ecuaciones.
4. Verificar si la solución es pertinente a la situación.

1. Una parcela rectangular tiene un perímetro de 240 m, si mide el triple de largo que de ancho, ¿cuáles son las dimensiones de la parcela?

2. El Hotel La Esperanza tiene una piscina rectangular cuyo perímetro mide 40 m y el largo es 4 m menos que el doble del ancho. ¿Cuánto mide de largo y ancho la piscina?

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.2 Aplicación de sistemas de ecuaciones en ciencias naturales

R

1. El perímetro de un rectángulo es 64 cm y la diferencia entre el largo y el ancho es 6 cm. Calcula las dimensiones de dicho rectángulo.

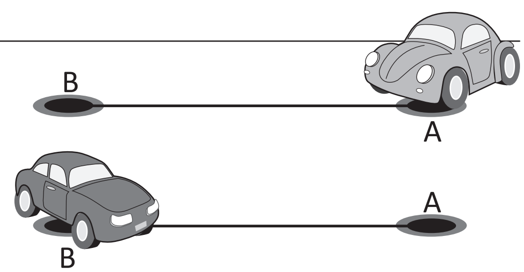
2. Calcula las dimensiones del escritorio de Ana, cuyo perímetro es 400 cm y el ancho es $\frac{2}{3}$ de su largo.

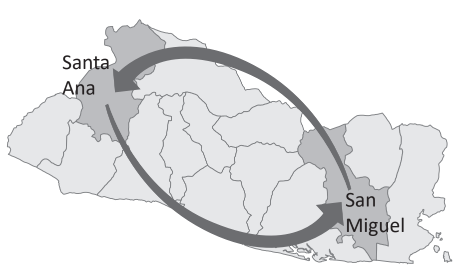
C

Para resolver problemas mediante el uso de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, es necesario:

1. Definir las cantidades que se representan con las incógnitas.
2. Escribir las ecuaciones que corresponden a las condiciones del problema para plantear el sistema.
3. Resolver el sistema de ecuaciones.
4. Verificar si la solución es pertinente a la situación.

1. La distancia entre dos ciudades A y B es de 255 km. Un automóvil sale de A hacia B a una velocidad de 90 km/h. Al mismo tiempo, sale otro automovil de B hacia A a una velocidad de 80 km/h. Suponiendo su velocidad constante, calcula la distancia que ha recorrido cada uno hasta el momento del encuentro.




2. La distancia entre Santa Ana y San Miguel es de 200 km aproximadamente. Carlos sale de San Miguel hacia Santa Ana a una velocidad de 60 km/h. A la misma hora sale Carmen de Santa Ana hacia San Miguel, a una velocidad de 100 km/h. Suponiendo su velocidad constante y una misma ruta, determina la distancia recorrida por cada uno al momento del encuentro.



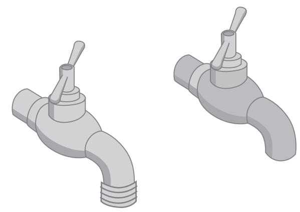
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# 2.3 Aplicación de sistemas de ecuaciones en aritmética, parte 1

R

1. Calcula las dimensiones de la pantalla de televisión de la casa de Carlos, cuyo perímetro es 140 cm y el ancho es $\frac{3}{4}$ de su largo.

2. En la casa de Mario tienen dos grifos A y B. Si se abre el grifo A durante 3 minutos y el grifo B durante 1 minuto, salen en total 50 litros de agua. En cambio, al abrir el grifo A durante 1 minuto y el B durante 2 minutos, entonces salen en total 40 litros. ¿Cuántos litros de agua por 1 minuto salen en cada grifo?





C

Para resolver problemas mediante el uso de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, es necesario:

1. Definir las cantidades que se representan con las incógnitas.
2. Escribir las ecuaciones que corresponden a las condiciones del problema para plantear el sistema.
3. Resolver el sistema de ecuaciones.
4. Verificar si la solución es pertinente a la situación.

1. Carlos ha comprado un pantalón y un par de zapatos. Los precios de estas prendas suman \$190.00, pero le han hecho un descuento del 10% en el pantalón y un 20% en los zapatos, pagando en total \$158.00. ¿Cuál es el precio sin descuento de cada prenda?

2. Antonio dispone de un capital de \$9, 000. 00 dólares, del que una parte la deposita en una cuenta al 4% de interés anual y otra al 5% anual. Calcula ambas partes sabiendo que el capital acumulado al cabo de un año es de \$9, 400.00 dólares.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.4 Aplicación de sistemas de ecuaciones en aritmética, parte 2

R

1. Una señora pagó 26.40 dólares por 20 libras de tomates y cebollas. Si los tomates costaron \$1.20 la libra, y las cebollas \$1.50 la libra, ¿qué cantidad compró de cada verdura?

2. Juan compró una computadora y una pantalla de televisión por 2,000 dólares y los vendió por 2,260 dólares, ¿cuánto le costó cada objeto, sabiendo que en la venta de la computadora ganó el 10% y en la venta de la pantalla de televisión ganó el 15%?

C

En el zoológico tienen avestruces y cebras a razón de 7 a 8, si entre todas se cuentan 92 patas, ¿cuántas avestruces y cuántas cebras hay?

1. Llamando $y$ al número de avestruces y $x$ al número de cebras, representa las condiciones:

"a razón de 7 a 8" $y : x = 7 : 8 \longrightarrow 8y = 7x$
"se cuentan 92 patas" $4x + 2y = 92 \longrightarrow 4x + 2y = 92$

2. Se plantea el sistema $\begin{cases} 8y = 7x & (1) \\ 4x + 2y = 92 & (2) \end{cases}$

3. Se resuelve el sistema

• Despejar $y$ de la ecuación (1)

$$y = \frac{7}{8}x$$

• Sustituir $y = \frac{7}{8}x$ de la ecuación (2)

$$4x + 2\left(\frac{7}{8}x\right) = 92$$
$$4x + \frac{7}{4}x = 92$$
$$16x + 7x = 368$$
$$23x = 368$$
$$x = \frac{368}{23}$$
$$x = 16$$

• Sustituye el valor $x = 16$, en (2)

$$y = \frac{7}{8}(16)$$
$$y = 7(2)$$
$$y = 14$$

4. Hay 14 avestruces y 16 cebras.

Lee las siguientes situaciones y resuélvelas.

1. En la granja del tío de Carlos se han acomodado 525 huevos en cartones pequeños y grandes a razón de $\frac{3}{2}$. Si en los cartones pequeños se acomodaron 15 huevos y en los grandes 30, ¿cuántos cartones pequeños y cuántos grandes se utilizaron?

2. En la Hacienda Pueblo Viejo se cultivaron 35 manzanas de frijol y maíz, a razón de $\frac{3}{4}$. ¿Cuántas manzanas de frijol y cuántas de maíz se cultivaron?



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.5 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.



| Ítem | Sí | Podría mejorar | No | Comentario |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. Resuelvo problemas como el siguiente:<br>El perímetro de un terreno rectangular es de 40 metros. Si se duplica el largo del terreno y se aumenta en 6 metros el ancho, el perímetro queda en 76 metros. ¿Cuáles son las medidas del terreno? | | | | |
| 2. Puedo resolver problemas como<br>María y sus amigos pagaron $109 por 5 pizzas y 7 sodas. Si la semana anterior compraron 8 pizzas y 11 sodas por $173, ¿cuánto cuesta cada pizza y cada soda? | | | | |
| 3. Puedo resolver problemas como<br>Ana es costurera y quiere aprovechar una oferta de botones. El paquete de botones blancos cuesta $15 y el de botones negros $10. Si con $180.00 compró en total 14 paquetes, ¿cuánto gastó en botones blancos? | | | | |
| 4. Puedo resolver problemas como<br>La suma de las tres cifras de un número capicúa es igual a 12. La cifra de las decenas excede en 4 unidades al doble de la cifra de las centenas. Halla dicho número.<br><br>**Nota:** Un número capicúa tiene las cifras de las centenas igual a la de las unidades. | | | | |

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.6 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

| Ítem | Sí | Podría mejorar | No | Comentario |
|---|---|---|---|---|
| 1. Puedes resolver problemas como Don José y don Antonio fueron a comprar semillas para sembrar. Don José compró cuatro sacos de maíz y tres sacos de frijol, y don Antonio compró tres sacos de maíz y dos de frijol. La carga de don José fue de 480 kilogramos y la de don Antonio de 340. ¿Cuánto pesaba cada saco de maíz y cada saco de frijol? | | | | |
| 2. Puedo resolver problemas como Don Miguel invierte en una empresa A una cantidad de dinero, obteniendo un 5% de beneficio. Por otra inversión en una segunda empresa B, obtiene un beneficio del 3.5%. Sabiendo que en total invirtió \$10,000, y que los beneficios de la primera inversión superan en \$300 a los de la segunda, ¿cuánto dinero invirtió en cada empresa? | | | | |
| 3. Puedo resolver problemas como Carmen y Carlos hacen pizzas para vender. La materia prima necesaria para hacer una pizza grande les cuesta \$5.00 y para una pizza pequeña \$3.00. Si disponen de \$570.00 y quieren hacer 150 pizzas, ¿cuántas pizzas de cada tamaño podrán hacer? | | | | |
| 4. Puedo resolver problemas como Industrias Doña Mary, tiene dos camiones cuyas capacidades de carga son respectivamente de 3 y 4 toneladas, se está transportando café hacia el beneficio para procesarlo y se hicieron 23 viajes para transportar un total de 80 toneladas de café, ¿cuantos viajes realizó cada camión? | | | | |



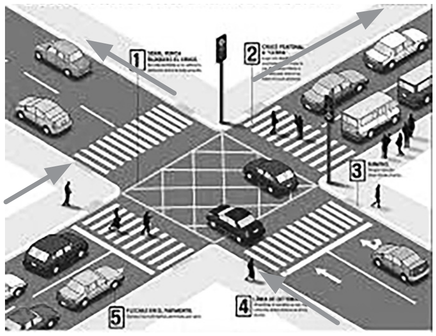
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Conociendo el porcentaje de vehículos que suelen pasar de una calle a otra en cada intersección, se puede utilizar un sistema de ecuaciones lineales que, siendo resuelto, permita hacer un cálculo de la cantidad de tráfico que soportará cada calle y tomar las medidas oportunas de temporización de los semáforos, colocación de pasos de cebra, señales de alto y/o para su remodelación o reorganización del tráfico.



**Analizar el flujo de tráfico en una red de calles que se cruzan**
Supóngase que se tiene un segmento de la red vial de una determinada ciudad. Se quiere analizar el flujo de tráfico en la intersección de la calle A con la avenida M. La dirección del tráfico en cada una de las calles está dada en la figura de la derecha.

Considerando que por la intersección pasan 1 400 vehículos por hora y que la cantidad de vehículos que circulan por la avenida es el 75% de los que circulan por la calle, determina:



a) La cantidad de vehículos que circulan por la calle y los que circulan por la avenida.
b) Considerando el flujo vehicular de la calle y avenida, haz una programación de tiempo para los semáforos de esa intersección.

Los sistemas de ecuaciones permiten modelar situaciones cotidianas de diferentes contextos, entre ellos calcular el presupuesto de un proyecto para una empresa, sea cual sea su ámbito, considerando que hay muchos factores interrelacionados: el tamaño del proyecto, los materiales a utilizar, las horas de trabajo que se necesitan, el número de personas que lo realizarán, entre otras cosas. Con todos estos factores, se puede formar matemáticamente un sistema de ecuaciones lineales que pueden ser resueltos con un ordenador. Asi también modelar situaciones cotidianas como la siguiente:

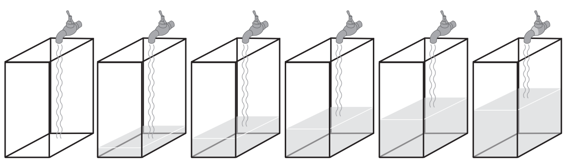
**Salarios devengados por empleados en una empresa.**
Dos empleados de una empresa trabajan 8 horas diarias. El primero gana \$5 diarios menos que el segundo; pero ha trabajado durante 30 días; mientras que el segundo solo ha trabajado 24 días. Si el primero ha ganado \$330.00, más que el segundo calcula el salario diario de cada obrero.

a) Calcula el salario diario de cada empleado.
b) Determina el salario total devengado por cada uno de los empleados.

# Función lineal

Unidad 3

El término función fue usado por primera vez en el año 1637, por el matemático francés René Descartes, para designar una potencia $n$ de la variable $x$. En 1694, el matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz utilizó el término para referirse a varios aspectos de una curva, como su pendiente. Hasta recientemente, su uso más generalizado ha sido definido en 1829 por el matemático alemán Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), quien escribió una definición de función donde relaciona la variable $x$ y $y$ mediante alguna regla o correspondencia que le asigna automáticamente un valor a $y$.



*Para modelar el tiempo de llenado de una pila se puede utilizar la función lineal.*

Las funciones permiten describir el mundo real en términos matemáticos, como por ejemplo, las variaciones de la temperatura, el movimiento de los planetas, las ondas cerebrales, los ciclos comerciales, el ritmo cardíaco, el crecimiento poblacional, etc.

Sobre las funciones, en este grado conocerás las más usuales en la modelización de fenómenos de las distintas ciencias y de la vida diaria, así como sus características generales, tanto analíticas como gráficas. Específicamente se revisará la función lineal y sus elementos, que utilizarás para resolver situaciones en diferentes contextos; por ejemplo, determinar el total a pagar en una factura, a partir del análisis de consumo mensual y los cargos fijos.


*El total a pagar en una factura se puede determinar mediante una función lineal.*

## 1.1 Recordando el sentido de la proporcionalidad directa

Un corredor de maratón ha avanzado 2 km en los 8 primeros minutos de su recorrido. Si mantiene la velocidad después de los 8 minutos:

1. Encuentra la constante de proporcionalidad.
2. Representa la distancia recorrida $y$, después de $x$ minutos.
3. ¿Cuánto tiempo tardará en completar los 42 km del recorrido?

Solución.

Sea $a$ la constante de proporcionalidad:

1. $y = ax$, cuando $x = 8$, $y = 2$

$$2 = a(8)$$

$$\frac{2}{8} = a$$

$$\frac{1}{4} = a \text{ , } a = \frac{1}{4}$$

2. Al expresar la distancia $y$, después de $x$ minutos, se tiene:

$$y = \frac{1}{4}x$$

3. Para determinar en cuánto tiempo completa los 42 km de recorrido, se sustituye el valor de $y = 42$, en $y = \frac{1}{4}x$

$$42 = \frac{1}{4}x \text{ , entonces } x = 168 \text{ minutos.}$$

Por tanto, para completar los 42 km, necesita 2 horas con 48 minutos.

1. Determina si $y$ es directamente proporcional a $x$, expresando $y = ax$ e indica la constante de proporcionalidad.

   Cuando un ciclista se desplaza a 90 kilómetros por hora, el tiempo es $x$ horas y la distancia recorrida es $y$ kilómetros.

| $x$ (horas) | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $y$ (kilómetros) | 90 | | |

2. Si $y$ es directamente proporcional a $x$, encuentra el valor de la constante $a$ en $y = ax$, para cada uno de los siguientes casos:

   a) $x = 2$, $y = 16$  b) $x = 4$, $y = 12$  c) $x = 3$, $y = 6$

3. Identifica las situaciones en las que la variable $y$ es función de $x$.

   a) Para una persona que camina 60 metros por minuto, el tiempo es $x$ minutos y la distancia recorrida es $y$ metros.

   b) Cuando un metro de varilla de hierro pesa 5 libras, la longitud es $x$ metros y el peso $y$ libras.



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.2 Aplicaciones de la proporcionalidad directa

**R** Si $y$ es directamente proporcional a $x$, encuentra el valor de la constante $a$ en $y = ax$, para cada uno de los siguientes casos:

a) $x = 4$, $y = 2$  b) $x = 3$, $y = 12$  c) $x = 2$, $y = 5$

**C**

La tabla muestra la relación entre la longitud del lado de un cuadrado y su perímetro. Complétala y realiza lo siguiente:

| Lado $x$ ($cm$) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Perímetro $y$ ($cm$) | | 4 | 8 | | |

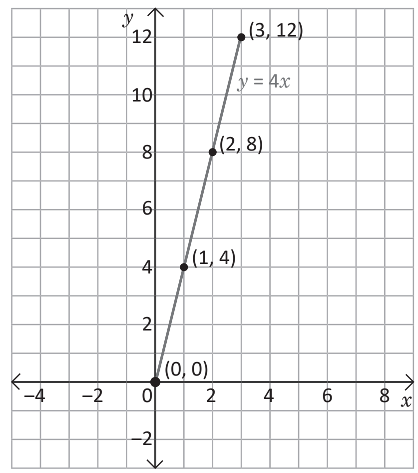
1. Determina si existe proporcionalidad directa entre la medida del lado del cuadrado $x$ y su respectivo perímetro $y$.
2. Representa el perímetro $y$, cuando el lado del cuadrado mide $x$.
3. Representa gráficamente la relación entre la medida del lado de un cuadrado y su perímetro.

Solución.

| Lado $x$ ($cm$) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Perímetro $y$ ($cm$) | 0 | 4 | 8 | 12 | 16 |

Si $x = 1$, $y = 4$, entonces $4 = a(1)$, $a = \frac{4}{1} = 4$

Si $x = 3$, $y = 12$, entonces $12 = a(3)$, $a = \frac{12}{3} = 4$




- Como el valor de $a$ en $y = ax$ es el mismo en ambos casos, entonces el perímetro del cuadrado es proporcional a la medida de su lado.
- Como la constante de proporcionalidad es 4, entonces $y = 4x$.
- Se determinan algunos pares de valores y se representan en la gráfica.
- Para elaborar la gráfica de proporcionalidad directa, $y = ax$, se toma el punto de origen (0, 0) y otro punto, luego se traza la línea recta que pasa por esos puntos.

1. Elabora la gráfica de $y = 3x$ a partir de la siguente tabla:

| $x$ | ... | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | ... | -12 | -9 | -6 | -3 | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | ... |

2. Elabora la gráfica de las siguientes proporcionalidades directas:

a) $y = -3x$  b) $y = 2x$  c) $y = 1.5x$  d) $y = -\frac{2}{3}x$

3. A un triángulo equilátero de lado 2 cm le corresponde un perímetro de 6 cm; uno de 3 cm de lado tiene un perímetro de 9 cm.
   a) Determina si existe proporcionalidad directa entre la medida del lado del triángulo $x$ y su respectivo perímetro $y$, justifica tu respuesta utilizando la relación $y = ax$.
   b) Representa el perímetro $y$, cuando el lado del triángulo mide $x$.
   c) Representa gráficamente la relación entre la medida del lado de un triángulo y su perímetro.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.3 Sentido de la función lineal

R

1. Si $y$ es directamente proporcional a $x$, encuentra el valor de la constante $a$ en $y = ax$, para cada uno de los siguientes casos:
   a) $x = 6$, $y = 3$ b) $x = 4$, $y = 16$ c) $x = 3$, $y = 5$

2. Un recipiente, en el cual caben 100 litros, está lleno de agua, pero tiene una fuga en la que se pierden 4 litros por minuto. Dado que el tiempo se expresa como $x$ minutos y la cantidad de agua que queda en el recipiente por $y$ litros, determina si existe proporcionalidad directa entre el tiempo $x$ y la cantidad de agua que queda en el recipiente $y$, justifica tu respuesta utilizando la relación $y = ax$.

C

Si se tienen dos variables $x$ y $y$, donde $y$ se puede escribir como una expresión de primer grado en $x$, **se dice que $y$ es una función lineal de $x$**, generalmente se expresa de la forma $\boldsymbol{y = ax + b}$, donde $a$ indica que es una relación de proporcionalidad entre las variables, y $\boldsymbol{b}$ es una constante, y recibe el nombre de **ecuación de la función.** Se puede obtener el valor de $b$ observando la tabla donde $x = 0$. Cuando la constante $b$ toma el valor de cero, la función lineal coincide con la proporcionalidad directa y se expresa como $\boldsymbol{y = ax}$.

Por ejemplo, en la función $y = 3x + 5$, se tiene que $a = 3$ y $b = 5$. No representa una relación de proporcionalidad entre las variables.

El dueño de una mueblería paga a los carpinteros un sueldo base de $ 250.00, más $ 10.00 adicionales por cada mueble terminado.

a) Completa en la siguiente tabla los valores para el salario que se debe pagar al carpintero, donde $x$ es el número de muebles terminados y $y$ el salario del carpintero.

| **$x$ (número de muebles)** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **$y$ (dólares)** | 250 | 260 | 270 | 280 | | | | | ... |

b) ¿Cuál es el pago que recibe el carpintero por 2 muebles terminados? ¿Y por 4?

c) Determina el pago en dólares para $x$ muebles terminados.

d) Escribe una ecuación donde $y$ esté en términos de $x$.



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.4 Función lineal

R

1. Un recipiente en el cual caben 60 litros, está vacio y desea llenarse con una manguera por donde le ingresan 2 litros por minuto. Dado que el tiempo se expresa como $x$ minutos y la cantidad de agua que tiene el recipiente por $y$ litros; determina si existe proporcionalidad directa entre el tiempo $x$ y la cantidad de agua que tiene el recipiente $y$, justifica tu respuesta utilizando la relación $y = ax$.

2. Una casa comercial paga a los vendedores un sueldo base de $200.00, más una comisión de $10 adicionales por cada cama vendida. Completa en la siguiente tabla los valores para el salario que se debe pagar a los vendedores, donde $x$ es el número de camas vendidas y $y$ el salario del vendedor.

| **$x$ (número de camas)** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **$y$ (dólares)** | 200 | 210 | 220 | 230 | | | | | ... |

a) Determina el pago en dólares cuando se han vendido $x$ camas.

b) Escribe una ecuación donde $y$ esté en términos de $x$.

C

La expresión $y = ax + b$, para $a < 0$ y la expresión de proporcionalidad directa $y = ax$, también son casos de la función lineal.

- La expresión $y = ax + b$, para $a < 0$, a medida que $x$ aumenta, $y$ disminuye.
- La expresión $y = ax$, corresponde a la función lineal cuando $b = 0$.

1. Identifica las ecuaciones que corresponden a una función lineal.

a) $y = 3x + 1$ b) $y = 4x$ c) $y = -2x + 3$ d) $y = \frac{2}{x}$

2. Escribe $y$ en función de $x$, luego analiza si corresponde a una función lineal.

a) Perímetro $y$ de un triángulo equilátero cuyo lado mide $x$.

b) Altura $y$ de un rectángulo de base $x$ y su área 32 cm$^2$.

c) Cantidad $y$ de agua después de $x$ minutos en un recipiente al que ingresan $a$ litros de agua por minuto.

Unidad 3

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.5 Sentido de la razón de cambio

R

1. Una empleada de una maquila recibe un sueldo base de $ 150.00 más $1 adicional por cada pieza terminada. Completa en la siguiente tabla los valores para el salario que se debe pagar a una empleada donde $x$ es el número de piezas terminadas y $y$ el salario.

| $x$ **(Número de piezas)** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ **(Dólares)** | 150 | 151 | 152 | 153 | | | | | ... |

a) Determina el pago en dólares por $x$ piezas terminadas.

b) Escribe una ecuación donde $y$ esté en términos de $x$.

2. Identifica las ecuaciones que corresponden a una función lineal.

a) $y = 3x - 2$ b) $y = 5x^2$ c) $y = -2x - 1$ d) $y = \frac{1}{x}$

C

Al comparar la variación de la variable $y$ respecto a la variación de $x$ en una función lineal, a esa razón se le llama razón de cambio; es decir,

$$\textbf{\textit{Razón de cambio}} = \frac{\textit{Variación en } y}{\textit{Variación en } x}$$

Una empresa de taxis establece la tarifa de la siguiente manera: la suma del costo fijo por subir al taxi es de $5.00 más un costo de $2 por cada kilómetro recorrido.

a) Llamando $x$ a la cantidad de kilómetros recorridos y $y$ al costo de la carrera, completa en la tabla los datos que hacen falta.

| $x$ **(kilómetros)** | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ **(dólares)** | 5 | | | | 45 | | | | ... |

b) ¿Cuánto se tendría que pagar por una carrera en la que se recorren 100 kilómetros? ¿Y por una de 150 kilómetros?

c) Determina la razón de cambio tomando los resultados del literal b.

d) Expresa $y$ como una función lineal de $x$.



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.6 Razón de cambio

R 1. Identifica las ecuaciones que corresponden a una función lineal.

a) $y = -2x - 3$ b) $y = -3x$ c) $y = 2x^2 - 3$ d) $y = -\frac{1}{x}$

2. Un empleado de una venta de celulares tiene un salario base de $100 mensuales más una comisión de $5 por cada celular vendido (el salario total del empleado es el salario base más la comisión).

a) Llamando $x$ al número de celulares vendidos y $y$ al salario del empleado, completa en la tabla los datos que hacen falta.

| **$x$ (número de celulares)** | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **$y$ (dólares)** | 100 | | | | 140 | | | | ... |

b) ¿Cuánto recibiría de salario si vende 15 celulares? ¿Y si vende 20?

c) Determina la razón de cambio tomando los resultados del literal b.

d) Expresa $y$ como una función lineal de $x$.

C En la función lineal $y = ax + b$, la razón de cambio es constante y es equivalente al valor de $a$; es decir,

$$\textbf{\textit{Razón de cambio}} = \frac{\textit{Variación en } y}{\textit{Variación en } x} = a$$

Considerando la expresión para determinar la razón de cambio se tiene:
- ***Variación en y = a × (variación en x)***; es decir, que el aumento en $y$ es proporcional al aumento en $x$.
- El valor de $a$ es equivalente al aumento de $y$ cuando $x$ aumenta una unidad.

Para cada una de las siguientes funciones lineales:

1. Identifica la razón de cambio.

2. Determina el valor de $y$, cuando $x = 4$.

a) $y = 2x - 3$ b) $y = -2x + 3$ c) $y = 3x - 5$

d) $y = \frac{1}{2}x + 3$ e) $y = \frac{3}{2}x + 1$ f) $y = -\frac{3}{5}x - 1$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.7 Características de la función $y = ax + b$

R

1. Ana trabaja en una tienda donde se venden maletas, ella tiene un salario base de $80 mensuales más una comisión de $10 por cada maleta vendida.

a) Llamando $x$ al número de maletas vendidas y $y$ al salario de Ana, completa en la tabla los datos que hacen falta.

| $x$ (número de maletas) | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ (dólares) | 80 | | | | | | | | ... |

b) ¿Cuánto recibiría de salario si vende 20 maletas? ¿Y si vende 25?

c) Determina la razón de cambio tomando los resultados del literal b.

d) Expresa $y$ como una función lineal de $x$.

2. Para cada una de las siguientes funciones lineales, identifica la razón de cambio y determina el valor de $y$, cuando $x = 5$.

a) $y = 3x - 2$

b) $y = -2x + 5$

c) $y = \frac{2}{5}x + 1$

C

La gráfica de la función $y = ax + b$ es una línea recta, que se puede graficar conociendo los valores de las variables $x$ y $y$ para al menos dos pares ordenados.

Todas las funciones lineales $y = ax + b$ tienen una línea recta como gráfica, y siempre pasan por el punto $(0, b)$; y en el caso que $b = 0$, pasan por el origen del sistema de coordenadas cartesianas.

En tu cuaderno, completa la tabla siguiendo la secuencia planteada.

| $x$ | ... | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = 2x + 3$ | ... | 3 | 5 | | | | | ... |

a) Grafica los pares ordenados $(x, y)$ en el plano.

b) Estima otros valores para $y$ asignándole otros valores a la variable $x$.

c) Completa la gráfica de la función.



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# 1.8 Relación entre la gráfica de la función $y = ax + b$ y la de $y = ax$



1. Para cada una de las siguientes funciones lineales, identifica la razón de cambio y determina el valor de $y$, cuando $x = 6$.

a) $y = 2x - 5$

b) $y = -3x + 5$

c) $y = -\frac{2}{3}x + 1$

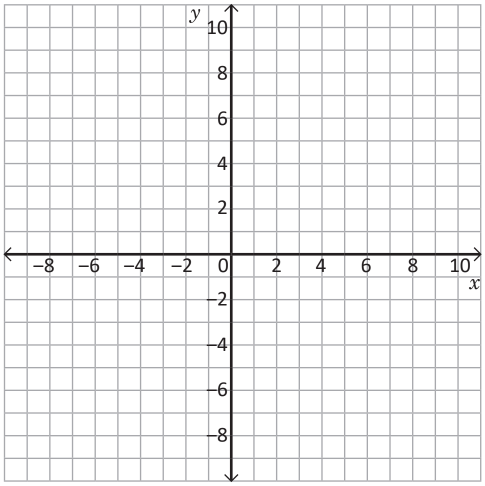
2. Completa la tabla, siguiendo la secuencia planteada.

| $x$ | ... | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = 2x - 3$ | ... | $-3$ | $-1$ | | | | | ... |

a) Grafica los pares ordenados $(x, y)$ en el plano.

b) Estima otros valores para $y$ asignándole otros valores a la variable $x$.

c) Completa la gráfica de la función.




La gráfica de la función $y = ax + b$, pasa por el punto $(0, b)$ y es paralela a la gráfica de la función $y = ax$, entonces la gráfica de $y = ax + b$ corresponde a la gráfica de $y = ax$, desplazada $b$ unidades sobre el eje $y$.

- La constante $b$ es el valor de $y$ cuando $x = 0$, y se le llama intercepto de la función lineal con el eje $y$.
- En el caso de las funciones de la forma $y = ax$, donde $b = 0$, el intercepto corresponde al origen del sistema de coordenadas cartesianas, donde $x = 0$ y $y = 0$.
- La gráfica de la función $y = ax + b$ es una recta paralela a la gráfica de la función $y = ax$.

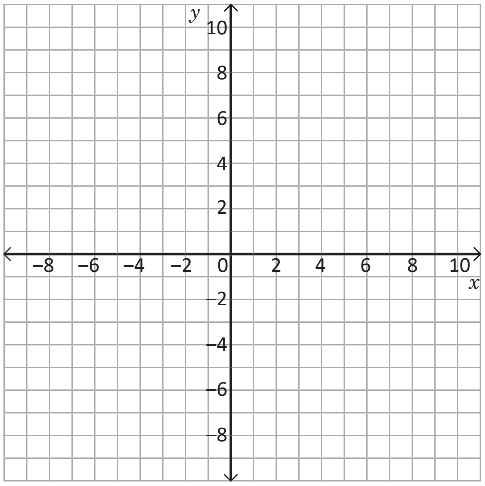
Sobre las siguientes funciones lineales, completa la tabla y luego grafica.

a) $y = 3x$

b) $y = 3x - 3$

c) $y = 3x + 2$

| Funciones | ... | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a) $y = 3x$ | | | | | | | | | |
| b) $y = 3x - 3$ | | | | | | | | | |
| c) $y = 3x + 2$ | | | | | | | | | |

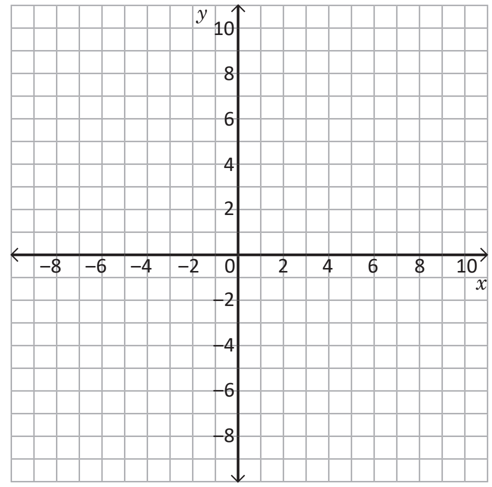



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# 1.9 Análisis gráfico de la pendiente positiva

1. Completa la tabla, siguiendo la secuencia planteada.

| $x$ | ... | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = -2x + 3$ | ... | 7 | 5 | | | | | ... |



a) Grafica los pares ordenados $(x, y)$ en el plano.

b) Estima otros valores para $y$, asignándole otros valores a la variable $x$.

c) Completa la gráfica de la función.

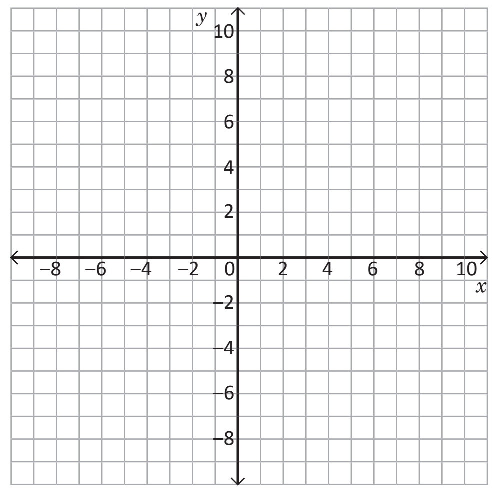
2. Sobre las siguientes funciones lineales, completa la tabla y luego grafica.

a) $y = -2x$

b) $y = -2x + 3$

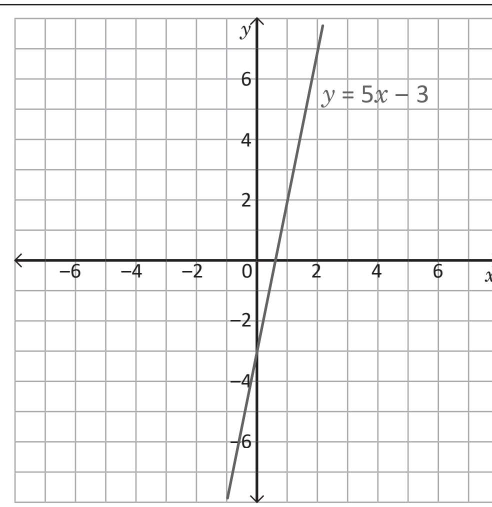
c) $y = -2x - 3$

| Funciones | ... | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **a)** $y = -2x$ | | | | | | | | | |
| **b)** $y = -2x + 3$ | | | | | | | | | |
| **c)** $y = -2x - 3$ | | | | | | | | | |



La inclinación de la gráfica de una función lineal $y = ax + b$, depende del valor de la razón de cambio; entonces, cada vez que $a$ aumenta, también aumenta la inclinación de la recta y viceversa. Por tanto, si se quiere cambiar la inclinación de una línea recta, se modifica únicamente el valor de $a$ en la función $y = ax + b$.

Observa la gráfica de la función y responde:




a) ¿Qué sucede con el valor de $y$ cuando el valor de $x$ aumenta una unidad?

b) ¿Qué valor le corresponde a $y$ cuando $x$ vale 5?

c) Determina la razón de cambio.



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# 1.10 Análisis gráfico de la pendiente negativa



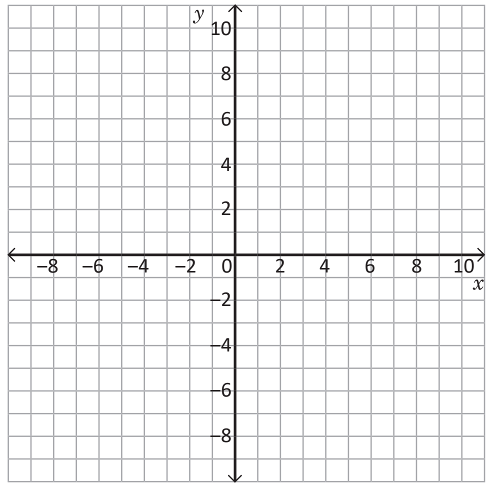
R

1. Sobre las siguientes funciones lineales, completa la tabla y luego grafica.

   a) $y = \frac{1}{2}x$

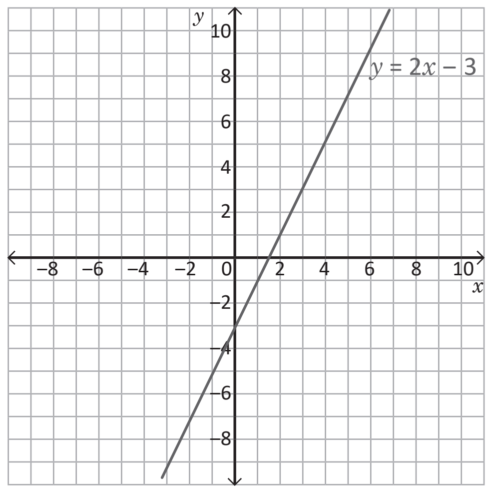
   b) $y = \frac{1}{2}x + 3$

   c) $y = \frac{1}{2}x - 3$




| Funciones | ... | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a) $y = \frac{1}{2}x$ | | | | | | | | | |
| b) $y = \frac{1}{2}x + 3$ | | | | | | | | | |
| c) $y = \frac{1}{2}x - 3$ | | | | | | | | | |

2. Observa la gráfica de la función y responde:




   a) ¿Qué sucede con el valor de $y$ cuando el valor de $x$ aumenta 1 unidad?

   b) ¿Qué valor le corresponde a $y$ cuando $x$ vale −5?

   c) Determina la razón de cambio.

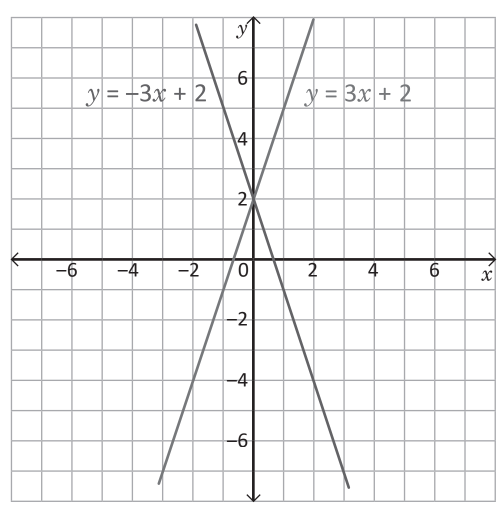
C

Cuando al aumentar la variable $x$, la variable $y$ disminuye, entonces la razón de cambio es negativa; es decir, cada vez que se desplaza una unidad a la derecha en la dirección del eje $x$, la línea recta que corresponde a la gráfica de la función se desplaza hacia abajo tantas unidades como el valor de la razón de cambio.

Por tanto, para una función $y = ax + b$ se tiene que

- Si $a > 0$, al aumentar 1 unidad en $x$, $y$ aumenta $a$ unidades.
  Ejemplo: para $y = 3x + 2$, $a > 0$, entonces cuando $x$ aumenta 1 unidad, $y$ aumenta 3 unidades.

- Si $a < 0$, al aumentar 1 unidad en $x$, $y$ disminuye $-a$ unidades.
  Ejemplo: para $y = -3x + 2$, $a < 0$, entonces cuando $x$ aumenta 1 unidad, $y$ disminuye 3 unidades.

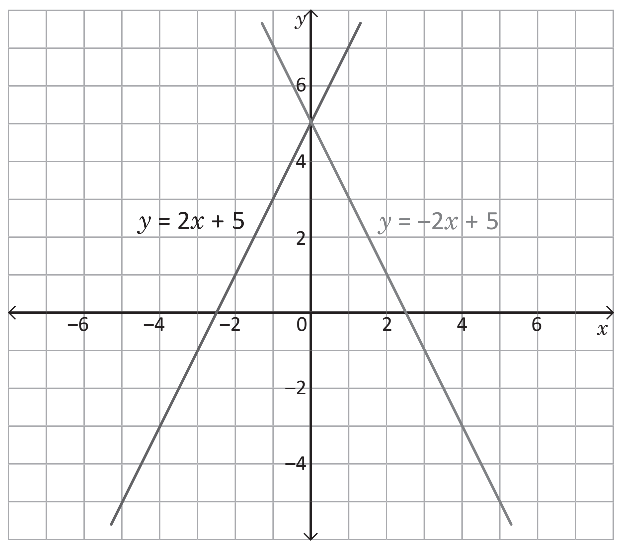


Observa la gráfica de las funciones y para cada caso responde:

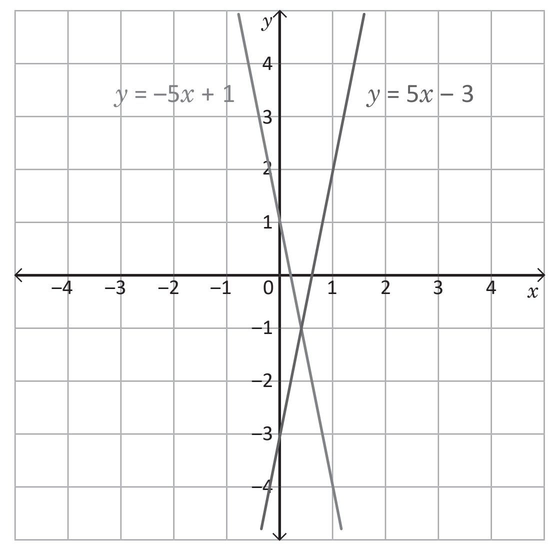
a) ¿Qué sucede con el valor de $y$ cuando el valor de $x$ aumenta una unidad?

b) Determina la razón de cambio.

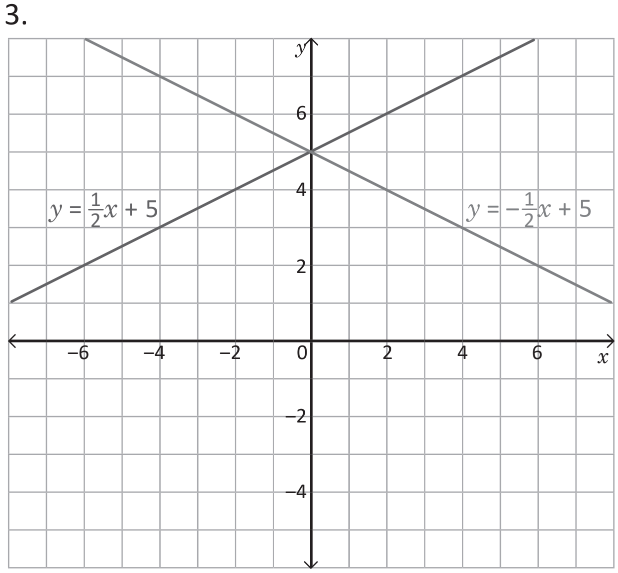
1.



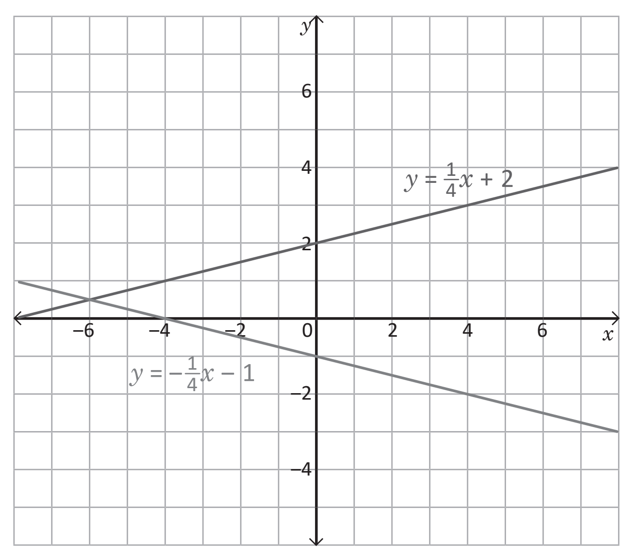

2.




3.




4.






¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# 1.11 Relación entre la razón de cambio y pendiente de la gráfica de $y = ax + b$

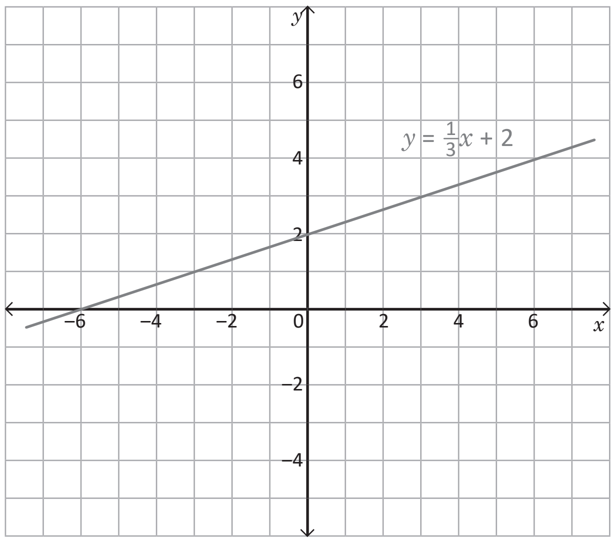
**R** Observa la gráfica de las funciones y responde:

a) ¿Qué sucede con el valor de $y$ cuando el valor de $x$ aumenta una unidad?

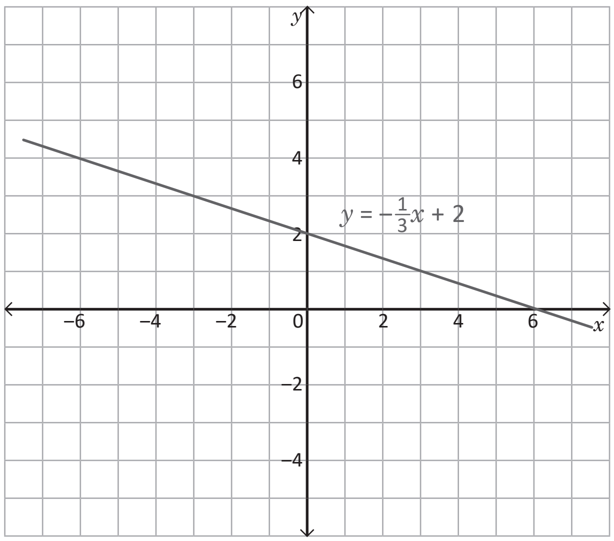
b) ¿Qué valor le corresponde a $y$, cuando $x$ vale 5?

c) Determina la razón de cambio.

1.




2.




Unidad 3

**C** En la función lineal $y = ax + b$, la razón de cambio coincide con el valor de la pendiente y se puede determinar mediante el cálculo del cociente del incremento para cada una de las coordenadas $x$ y $y$ de dos puntos dados.

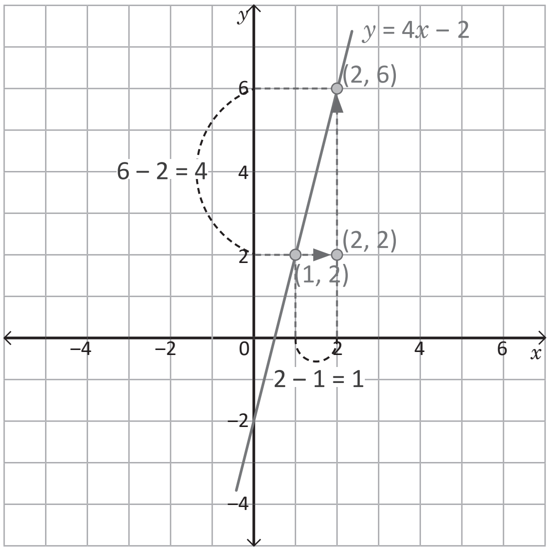
Por ejemplo, para una función $y = 4x - 2$, que pasa por los puntos (1, 2) y (2, 6), se tiene:

**Razón de cambio = Pendiente = $\frac{6-2}{2-1} = \frac{4}{1} = 4$.**

- Para cualquier función que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, la pendiente se calcula mediante la fórmula:

$$\textbf{Pendiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- El coeficiente $\boldsymbol{a}$ en la función $y = ax + b$, corresponde a la **pendiente de la línea recta** de la gráfica de la función, la cual tiene el mismo valor que la razón de cambio.



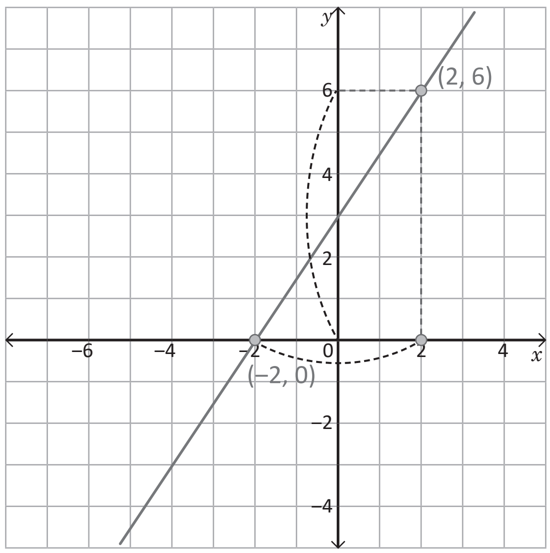

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Para la función de la gráfica, realiza lo que se indica a continuación:

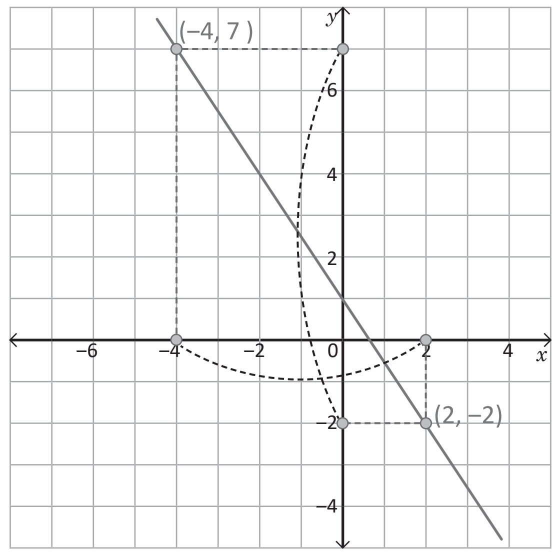
a) Calcula el incremento en $x$ y $y$, considerando las coordenadas de los puntos indicados.

b) Calcula la pendiente de la función de cada gráfica.

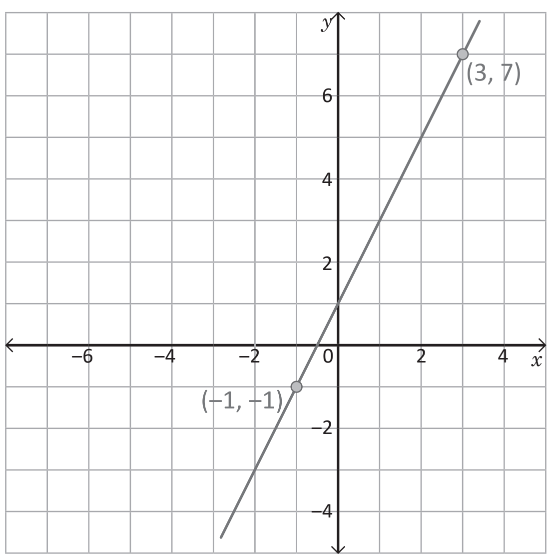
1.



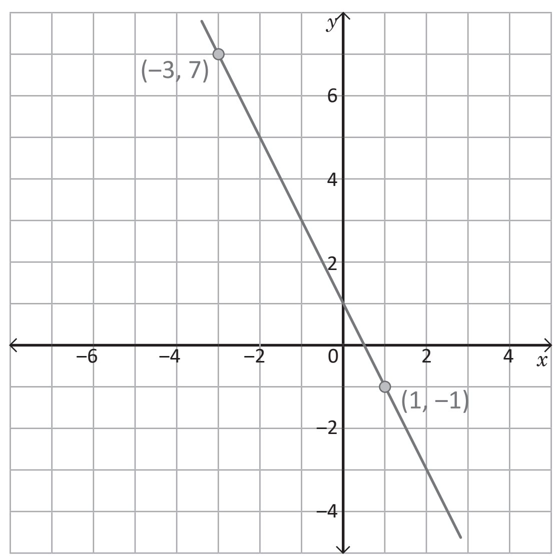

2.




3.




4.





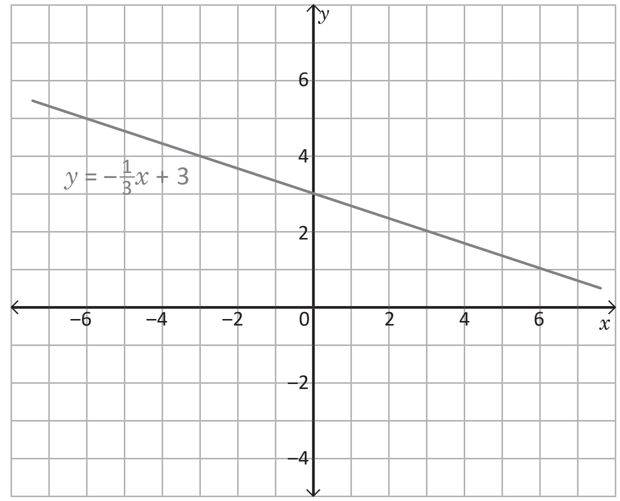

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

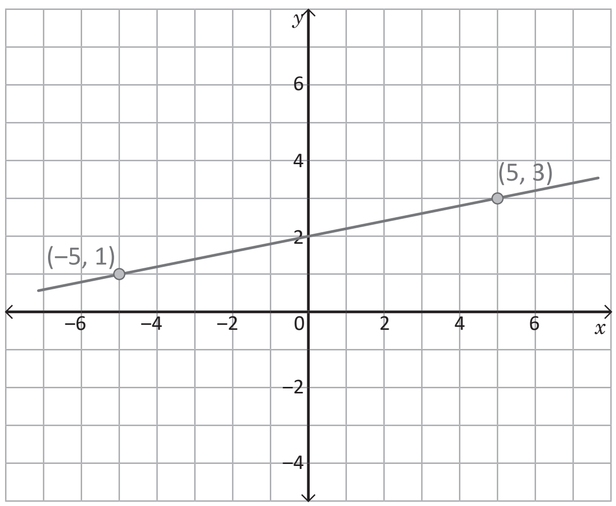
# 1.12 Pendiente e intercepto de la gráfica de la función $y = ax + b$

1. Observa la gráfica de la función $y = -\frac{1}{3}x + 3$ y responde.

   a) ¿Qué sucede con el valor de $y$ cuando el valor de $x$ aumenta una unidad?

   b) Determina la razón de cambio.



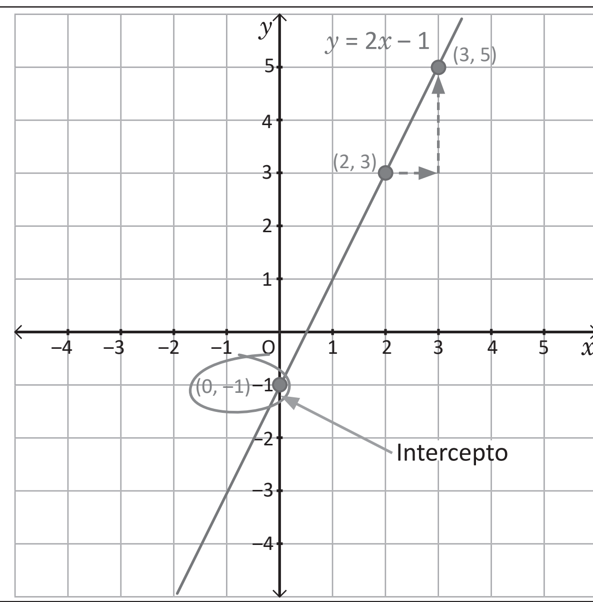

2. Para la función de la gráfica, realiza lo que se indica a continuación:

   a) Calcula el incremento en $x$ y $y$, considerando las coordenadas de los puntos indicados.

   b) Calcula la pendiente de la función de la gráfica.

Para identificar la pendiente y el punto de corte de la gráfica de la función $y = ax + b$ con el eje $y$, únicamente es necesario considerar que el valor del coeficiente $a$ indica la pendiente, y la constante $b$ corresponde al valor de $y$ donde la gráfica corta al eje $y$. El valor donde la gráfica corta el eje $y$ se llama **intercepto**.

- Así, la función $y = ax + b$, tiene:
  Pendiente: $a$ Intercepto con el eje $y$: $b$
- Por ejemplo, la gráfica de la función $y = 2x - 1$, tiene:
  Pendiente: 2 Intercepto con el eje $y$: −1




Para cada una de las funciones, identifica la pendiente y el intercepto con el eje $y$.

a) $y = -3x + 2$ b) $y = 4x - 1$ c) $y = 2x - 3$ d) $y = -2x$

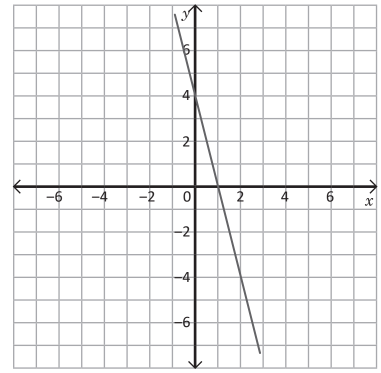
e) $y = -x + 2$ f) $y = x - 6$ g) $y = -5x + \frac{1}{2}$ h) $y = -\frac{1}{2}x - 3$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# 1.13 Relación entre tabla, ecuación y gráfica de función lineal

**R**

1. Para la función de la gráfica, realiza lo que se indica a continuación:



   a) Calcula el incremento en $x$ y $y$.

   b) Calcula la pendiente de la función de la gráfica.

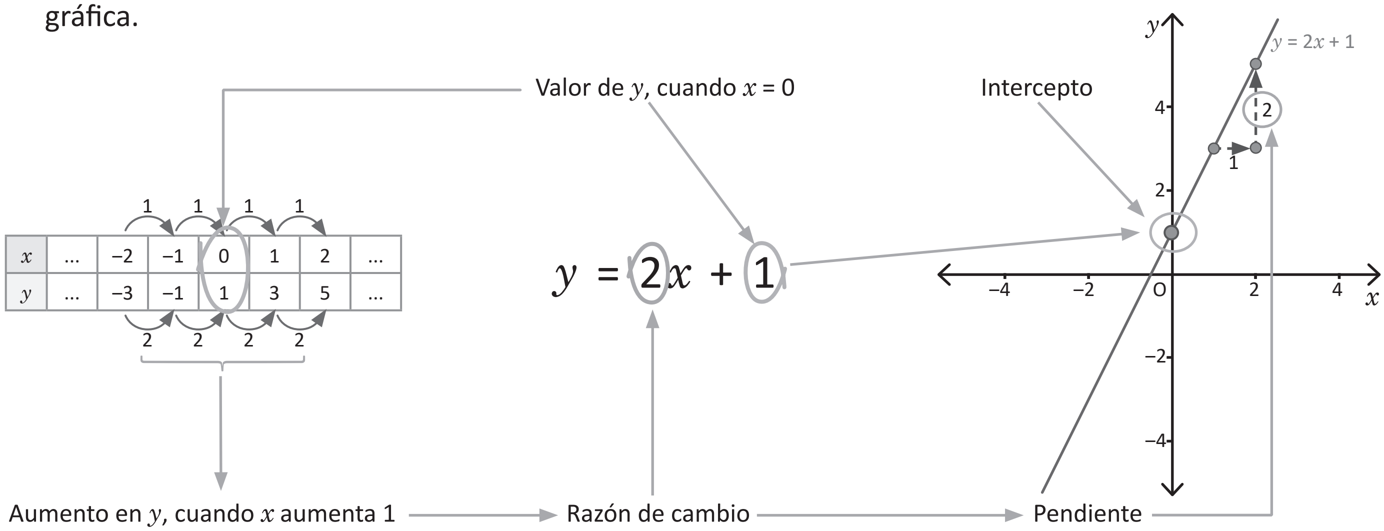
2. Para cada una de las funciones, identifica la pendiente y el intercepto con el eje $y$.

   a) $y = -4x + 3$ b) $y = -2x + 3$ c) $y = -x + 5$ d) $y = 3x - 5$

   e) $y = -3x + \frac{1}{2}$ f) $y = \frac{1}{2}x + 5$ g) $y = 3x + \frac{1}{4}$ h) $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

**C**

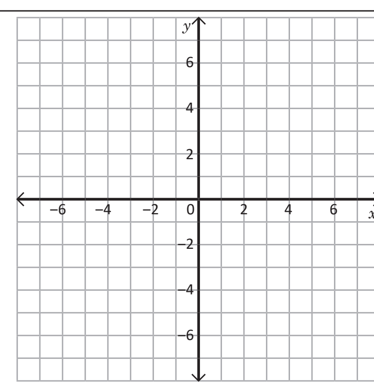
Para la función $y = 2x + 1$, observa la relación entre las siguientes representaciones: tabla, ecuación y gráfica.




Al observar el diagrama que relaciona la tabla, ecuación y gráfica de la función $y = ax + b$, se puede concluir que

| Tabla | Ecuación | Gráfica |
|---|---|---|
| **Valor de $y$, cuando $x = 0$** | $b$ | Intercepto con el eje $y$ |
| **Aumento en $y$, al aumentar 1 unidad en $x$** | $a$ | Pendiente |

Para la función $y = 2x + 5$, realiza lo siguiente:



a) Completa la tabla.

| $x$ | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | −1 | | | | | | |

b) Grafica la función.
c) Compara los datos de la tabla, la ecuación y gráfica de la función.



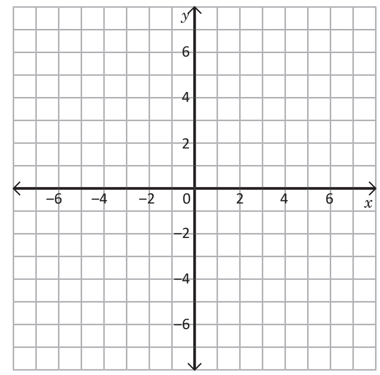
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# 1.14 Trazo de la gráfica de la función lineal dada la pendiente y el intercepto

1. Para cada una las funciones, identifica la pendiente y el intercepto con el eje $y$.

a) $y = -4x + 5$ b) $y = -x + 7$ c) $y = x - 4$ d) $y = \frac{5}{3}x + \frac{1}{2}$

2. Para la función $y = -x + 2$, realiza lo siguiente:




a) Completa la tabla.

| $x$ | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 5 | | | | | | |

b) Grafica la función.
c) Compara los datos de la tabla, la ecuación y la gráfica de la función.

Para graficar una función $y = ax + b$, dado el valor de $a$ y $b$, se coloca el punto (0, $b$), luego se determina un nuevo punto por donde pasa la gráfica a partir de la pendiente, considerando la variación en $x$ y la variación en $y$.

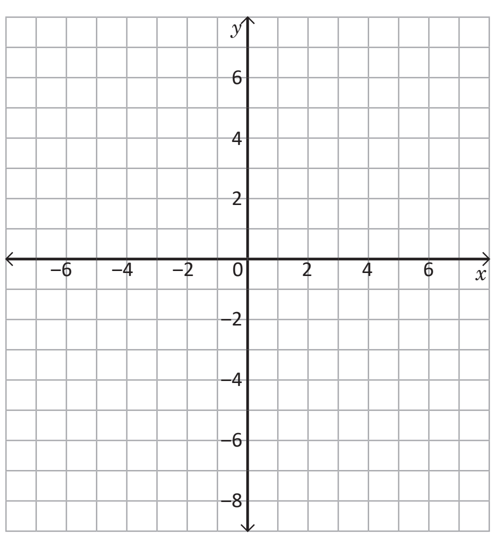
1. Traza el gráfico de la función $y = ax + b$, en cada caso.

a) Si $a = -3$ y $b = 2$. b) Si $a = 2$ y $b = -1$.

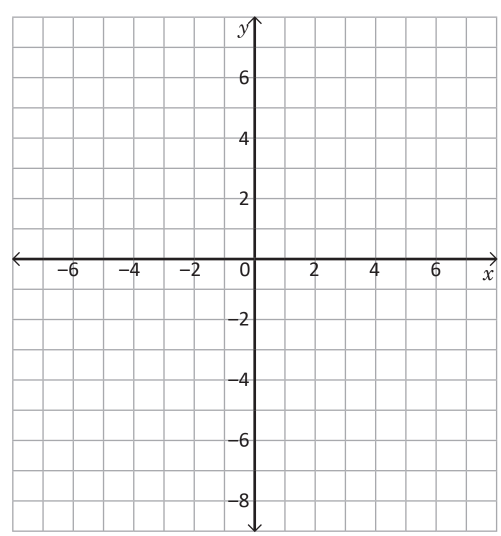
2. Para cada una de las funciones, identifica el valor de $a$ y $b$, luego grafícalas.

a) $y = -x + 4$ b) $y = x + 3$ c) $y = 2x$ d) $y = \frac{1}{5}x + 1$

1.



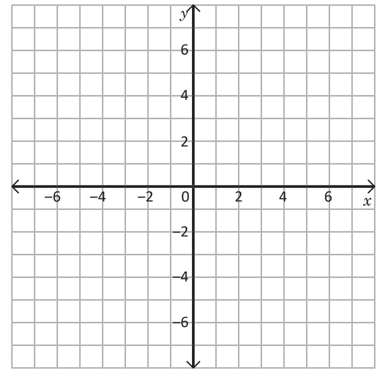

2.




¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# 1.15 Relación entre la ecuación y gráfica de la función lineal

1. Para la función $y = \frac{1}{3}x + 1$, realiza lo siguiente:

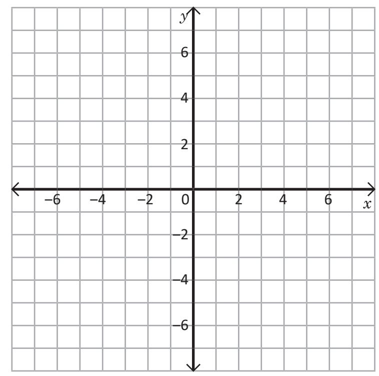



a) Completa la tabla.

| $x$ | −9 | −6 | −3 | 0 | 3 | 6 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | −2 | | | | | | |

b) Grafica la función.
c) Compara los datos de la tabla, la ecuación y la función.

2. Traza el gráfico de la función $y = ax + b$, en cada caso.




a) Si $a = -3$ y $b = 4$.

b) Si $a = 5$ y $b = 0$.

c) $y = -2x + 7$

d) $y = -\frac{1}{2}x + 3$

Para relacionar la gráfica de una función lineal con la respectiva ecuación, únicamente se debe relacionar:

- El valor de $b$ con el punto de intersección de la gráfica con el eje $y$.
- El valor de $a$ con la variación de $y$ así cuando $x$ aumenta una unidad.

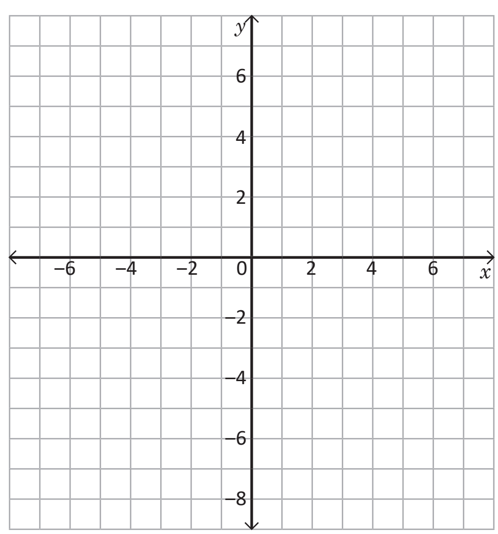
Grafica las siguientes funciones lineales.

a) $y = 5x + 2$

b) $y = 5x - 2$

c) $y = -5x + 2$

d) $y = -5x - 2$






¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# 1.16 Valores de $y$ cuando se delimitan los valores de $x$

R

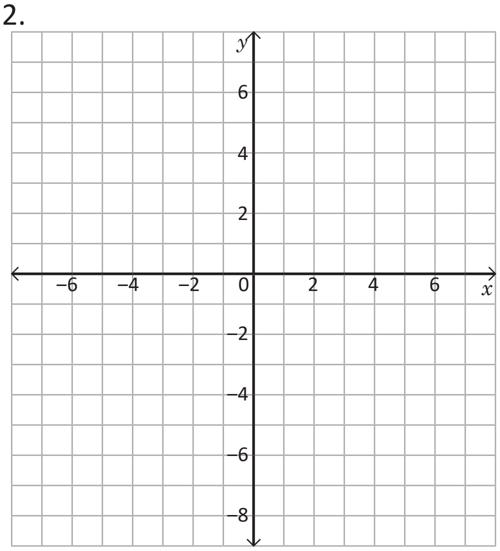
1. En los casos que sea necesario, identifica el valor de $a$ y $b$, luego traza la gráfica para cada función.

a) $a = -1$ y $b = 2$ b) $y = -x + 1$ c) $y = \frac{1}{3}x + 1$ d) $y = -\frac{1}{2}x$

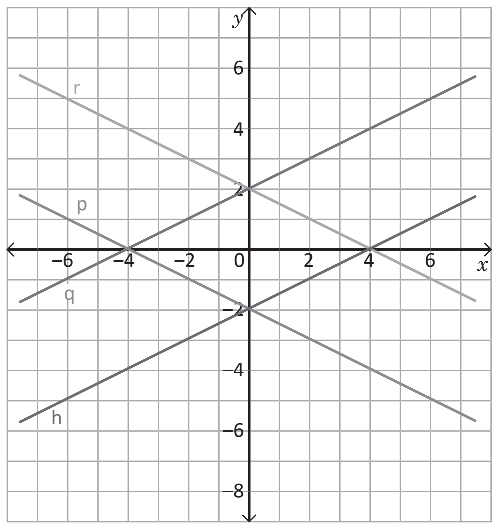
2. Relaciona cada función con su respectiva gráfica entre r, p, q, y h, considera el valor de $a$ y $b$ para justificar tu respuesta.

a) $y = \frac{1}{2}x + 2$ b) $y = \frac{1}{2}x - 2$ c) $y = -\frac{1}{2}x + 2$ d) $y = -\frac{1}{2}x - 2$

1 y 2.




3.




C

Para determinar entre qué valores se encuentra $y$, cuando se conocen los valores de $x$, se puede utilizar cualquiera de las opciones siguientes:

- A partir de la ecuación: sustituyendo los valores de $x$ de los extremos, se encuentran los valores de $y$ de los extremos.
- A partir de la gráfica: identifica las coordenadas de $x$, se buscan las correspondientes coordenadas de $y$.

A partir de la ecuación de cada función, determina entre qué valores se encuentra $y$, conociendo los respectivos valores de $x$.

a) Si $y = 5x - 3$, ¿entre qué valores está $y$, si $x$ está entre −3 y 5?

b) Si $y = -x + 4$, ¿entre qué valores está $y$, si $x$ está entre 2 y 5?

c) Si $y = 2x - 5$, ¿entre qué valores está $y$, si $x$ está entre 0 y 4?

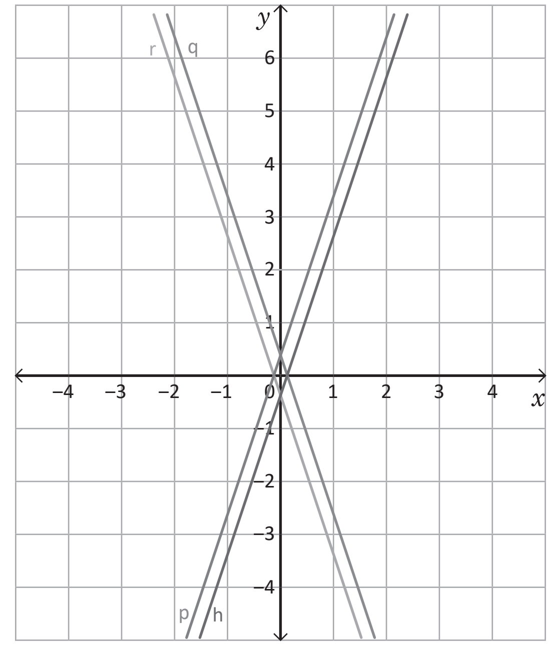
d) Si $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ , ¿entre qué valores está $y$, si $x$ está entre 2 y 5?

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# 1.17 Expresión de la función en $y = ax + b$ mediante la lectura de la gráfica

R

1. Relaciona cada función con su respectiva gráfica entre r, p, q y h, considera el valor de $a$ y $b$ para justificar tu respuesta.




a) $y = 3x + \frac{1}{2}$

b) $y = 3x - \frac{1}{2}$

c) $y = -3x + \frac{1}{2}$

d) $y = -3x - \frac{1}{2}$

2. A partir de la ecuación de cada función, determina entre qué valores se encuentra $y$, conociendo los respectivos valores de $x$.

a) Si $y = 7x - 9$, ¿entre qué valores está $y$, si $x$ está entre $-1$ y 5?

b) Si $y = -\frac{3}{4}x - 2$, ¿entre qué valores está $y$, si $x$ está entre $-8$ y 8?

c) Si $y = 2x + \frac{1}{3}$, ¿entre qué valores está $y$, si $x$ está entre 0 y $\frac{7}{3}$?

C

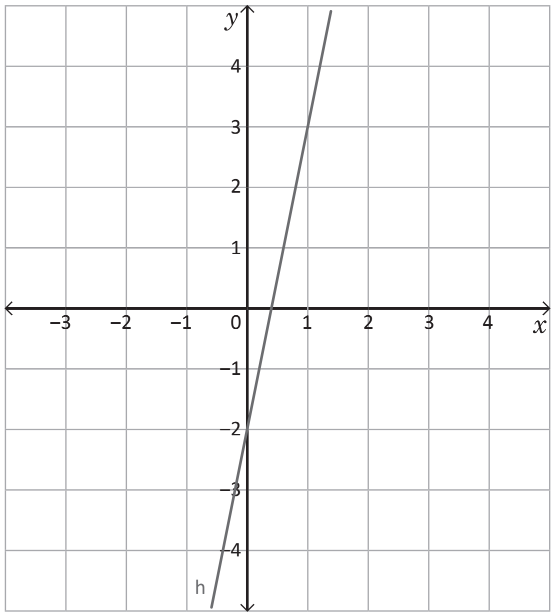
Para escribir la ecuación de una función de la forma $y = ax + b$ a partir del gráfico, es necesario identificar el intercepto con el eje $y$, y determinar la pendiente de la recta.



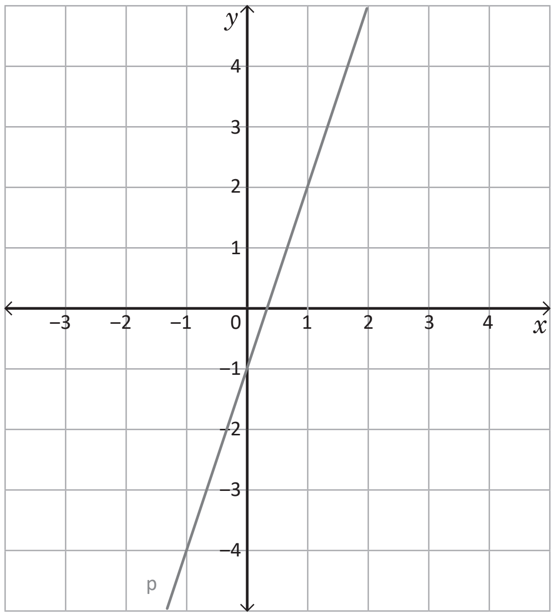
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Escribe la ecuación de cada una de las funciones cuyas gráficas se muestran a continuación.

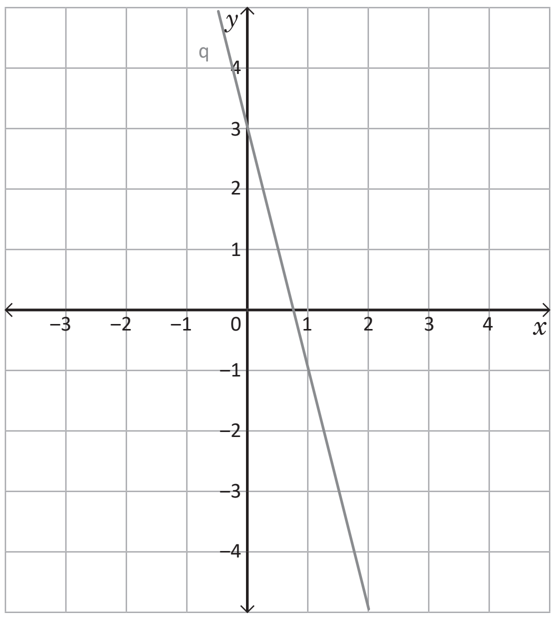
a)



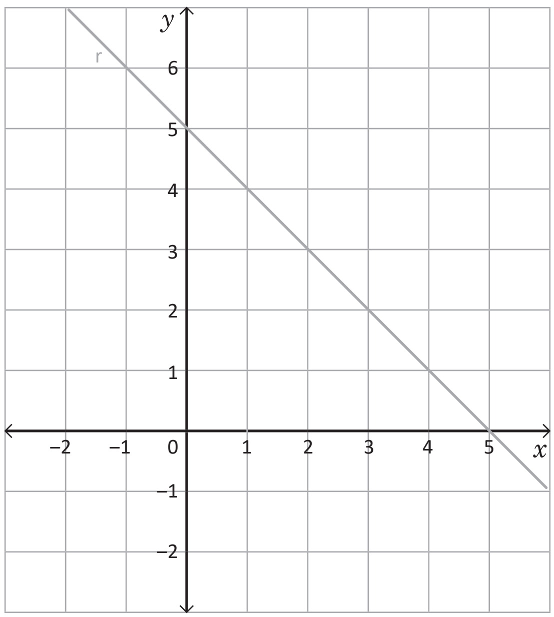

b)




c)




d)




¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.18 Ecuación de la función a partir de un punto de la gráfica y la pendiente

R

1. A partir de la ecuación de cada función, determina entre qué valores se encuentra $y$, conociendo los respectivos valores de $x$.

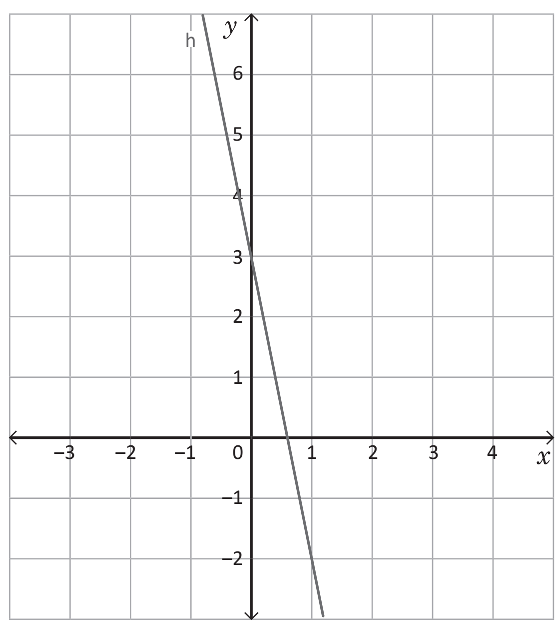
   a) Si $y = 10x - 8$, ¿entre qué valores está $y$, si $x$ está entre 1 y 7?

   b) Si $y = \frac{3}{5}x - 4$, ¿entre qué valores está $y$, si $x$ está entre $-5$ y 10?

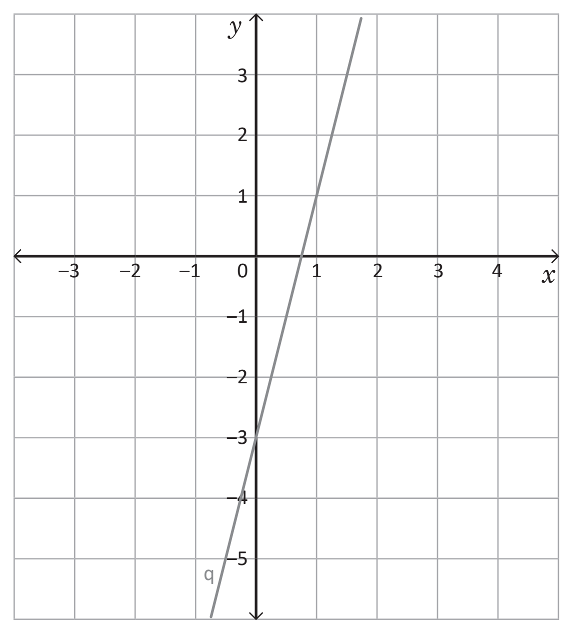
   c) Si $y = -3x + \frac{1}{2}$, ¿entre qué valores está $y$, si $x$ está entre $-\frac{1}{2}$ y $\frac{7}{2}$?

2. Escribe la ecuación de cada una de las funciones cuyas gráficas se muestran a continuación.

a)




b)




C

Para determinar la ecuación de la función lineal, dada la pendiente y las coordenadas $(x, y)$ de un punto por donde pasa la gráfica, se realiza lo siguiente:

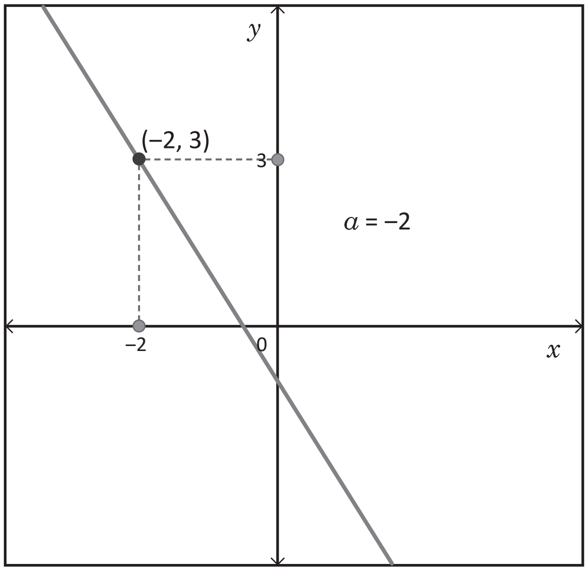
1. Sustituir la pendiente en la forma $y = ax + b$.
2. Sustituir los valores de las coordenadas del punto $(x, y)$ en $y = ax + b$ y calcular el valor de $b$.
3. Escribir la ecuación $y = ax + b$ con los valores $a$ y $b$ encontrados.



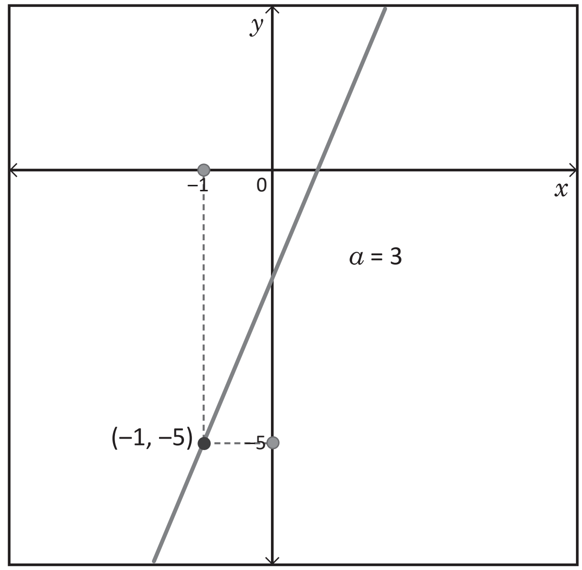
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Escribe la ecuación para cada una de las funciones cuyas gráficas se muestran a continuación:

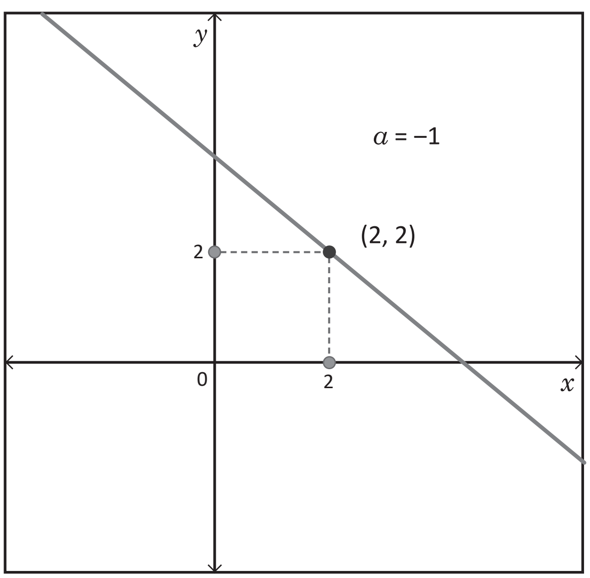
a)



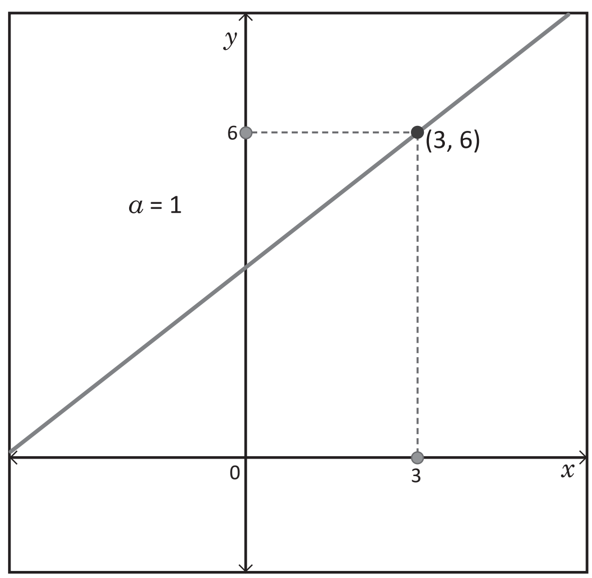

b)




c)




d)




Unidad 3

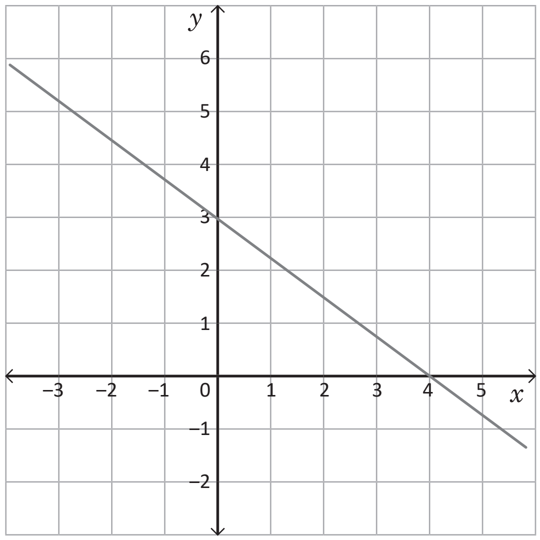
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# 1.19 Ecuación de la función a partir de dos puntos de la gráfica

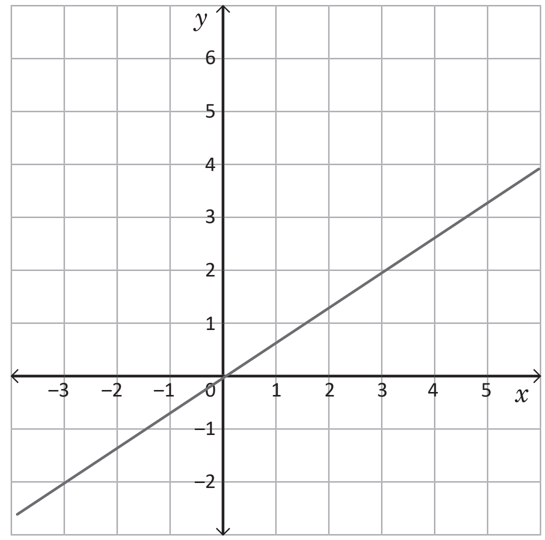
**R** Escribe la ecuación para cada una de las funciones cuyas gráficas se muestran a continuación:

1.

a)

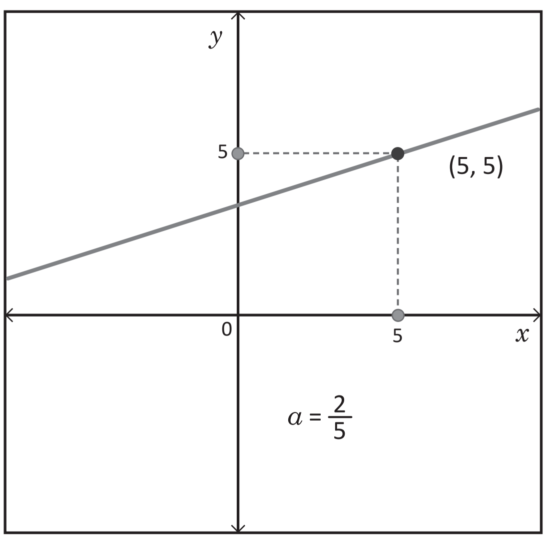


b)

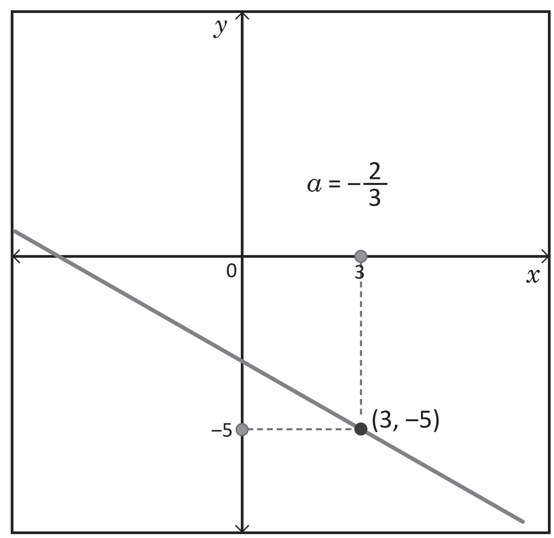


2.

a)




b)




**C**

Para determinar la ecuación de una función cuando se conocen las coordenadas de dos puntos $A(x_A, y_A)$, y $B(x_B, y_B)$ de la gráfica, puedes:

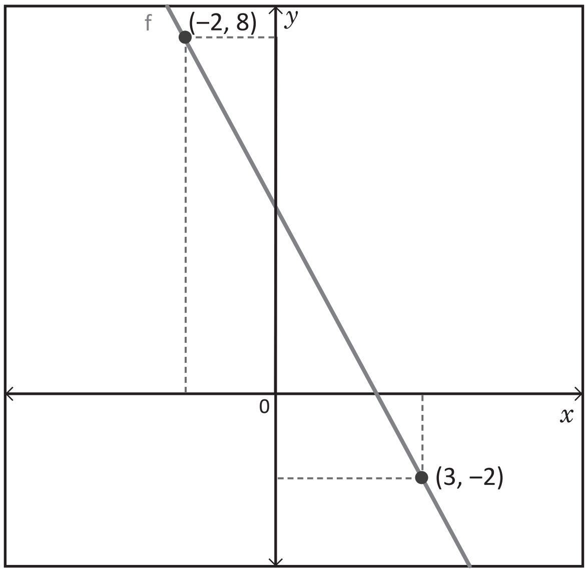
1. Determinar la pendiente $a$ utilizando la fórmula $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

2. Sustituyendo en $y = ax + b$ el valor de $a$ calculado en 1 y las coordenadas de uno de los puntos dados, para encontrar el valor de $b$.

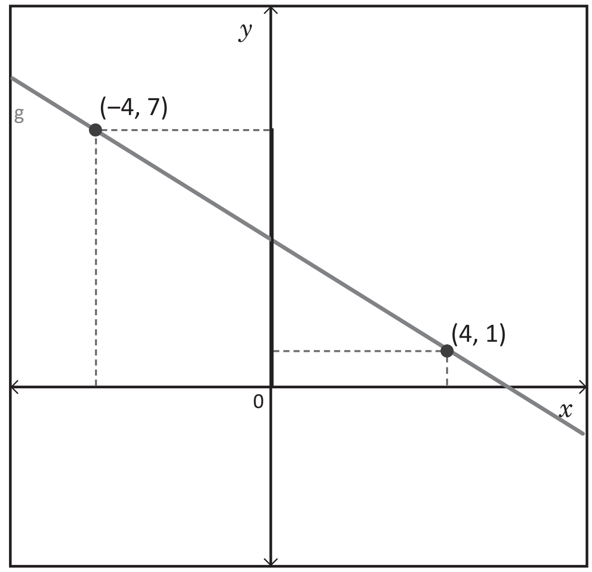
3. Escribir la ecuación $y = ax + b$ sustituyendo los valores $a$ y $b$ encontrados.

En cada caso, escribe la ecuación de la función lineal a partir de los puntos dados.

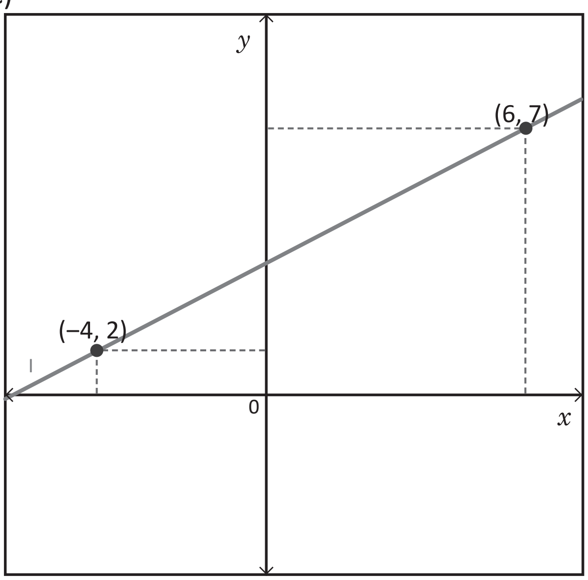
a)



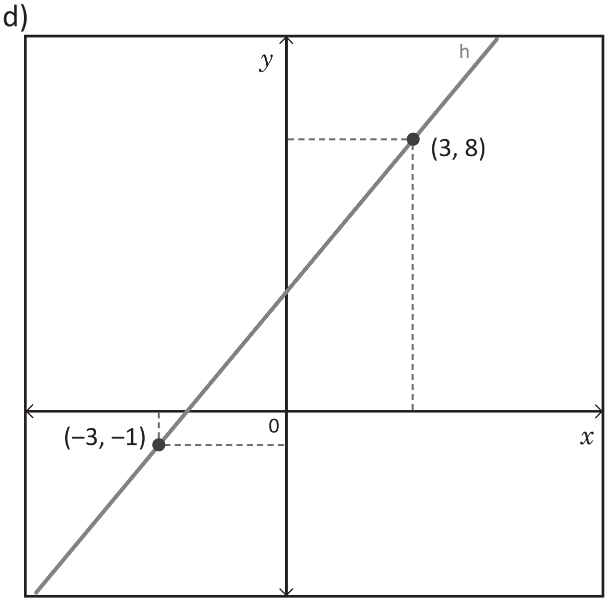

b)




c)




d)

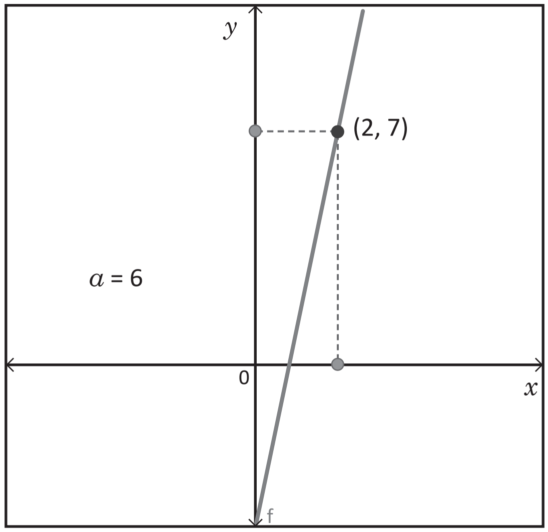



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

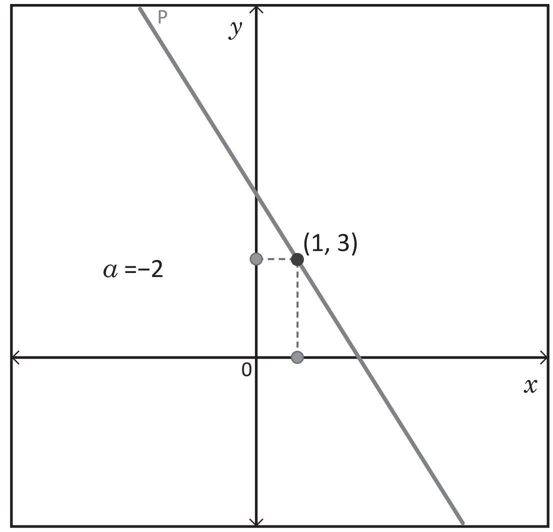
# 1.20 Ecuación de la función a partir de los interceptos con los ejes

1. Escribe la ecuación para cada una de las funciones cuyas gráficas se muestran a continuación:

a)

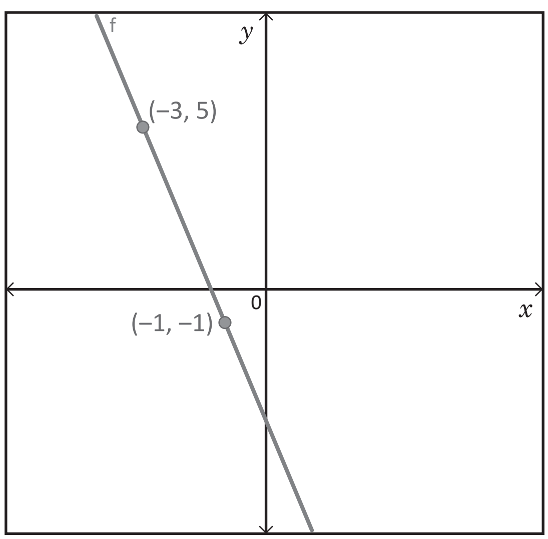



b)

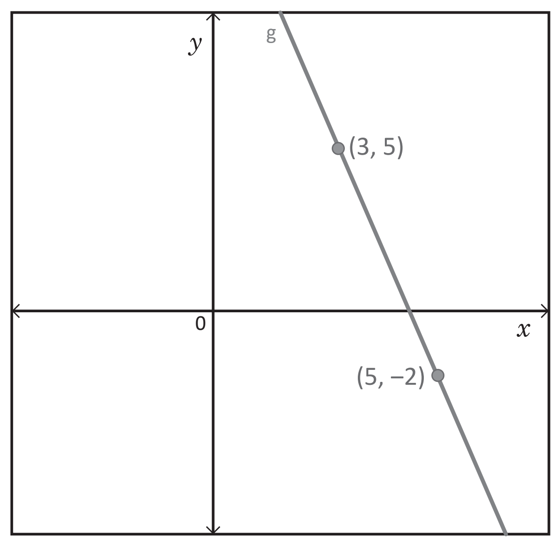



2. Escribe la ecuación de la función lineal en cada caso, a partir de los datos proporcionados.

a)




b)




Cuando se conocen las coordenadas de dos puntos de la forma ($x$, 0), (0, $y$) de la gráfica de una función lineal, se puede determinar la ecuación considerando que

1. Para (0, $y$) $\Rightarrow$ $y = b$ corresponde al intercepto con el eje $y$.

2. La pendiente $a = \frac{y-0}{0-x} = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x}$

Se escribe la ecuación sustituyendo los valores calculados de $a$ y $b$ en la expresión $y = ax + b$.



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1. Escribe la ecuación para la función lineal en cada caso:

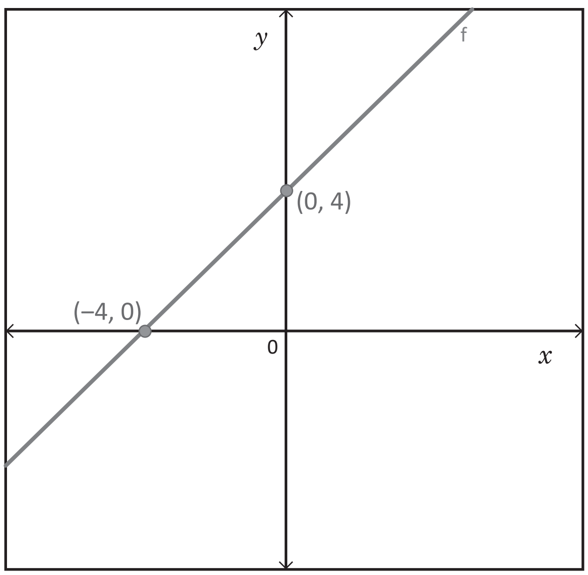
a) Pasa por los puntos (0, –3) y (4, 0)

b) Pasa por los puntos (2, 0) y (0, –4)

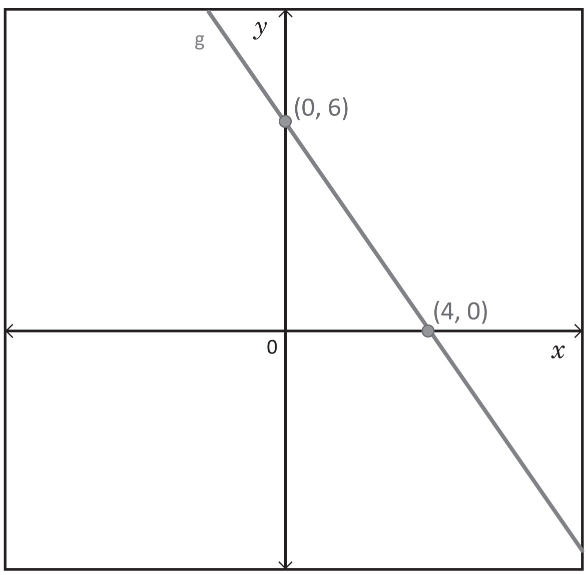
c) Pasa por los puntos (–3, 0) y (0, 6)

2. Considerando las coordenadas de los puntos que se muestran en la gráfica de la función, escribe la respectiva ecuación.

a)




b)




Unidad 3

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.21 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

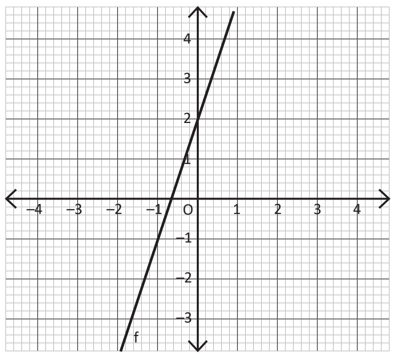
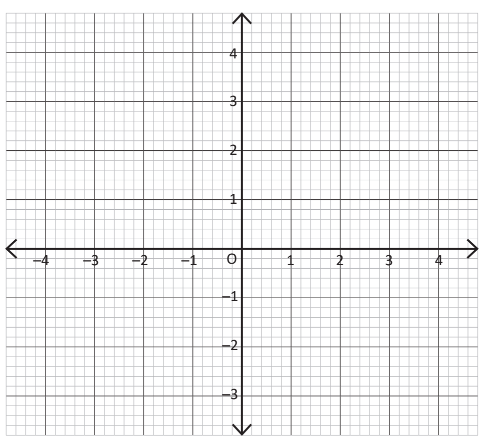
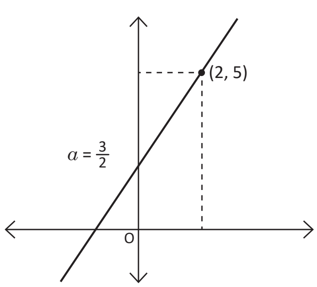
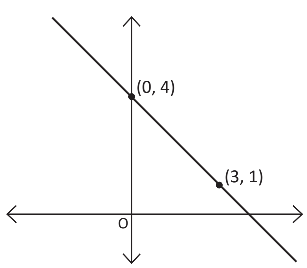
| Ítem | Sí | Podría mejorar | No | Comentario |
|---|---|---|---|---|
| 1. Determino si una ecuación corresponde a una función lineal, por ejemplo<br>a) $y = \frac{3}{4}x + 1$<br>b) $y = -\frac{7}{x} + 5$ | | | | |
| 2. Identifico la pendiente e indico el intercepto con el eje $y$, conociendo la ecuación de una función lineal, por ejemplo:<br>a) $y = 7x - \frac{2}{3}$<br>b) $y = -5x$ | | | | |
| 3. Trazo el gráfico de la función $y = ax + b$, si $a = -3$ y $b = 2$. | | | | |
| 4. Determino entre qué valores está $y$, si $x$ está entre $-1$ y 4; para la función $y = 5x - 3$. | | | | |
| 5. Escribo la ecuación de una función lineal de $x$ que tiene pendiente 2 y pasa por el punto (5, 3). | | | | |
| 6. Escribo la ecuación de la función lineal, que pasa por los puntos:<br>a) (−2, 0) y (0, 5)<br>b) (3, 5) y (2, 8) | | | | |



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.22 Autoevaluación de lo aprendido

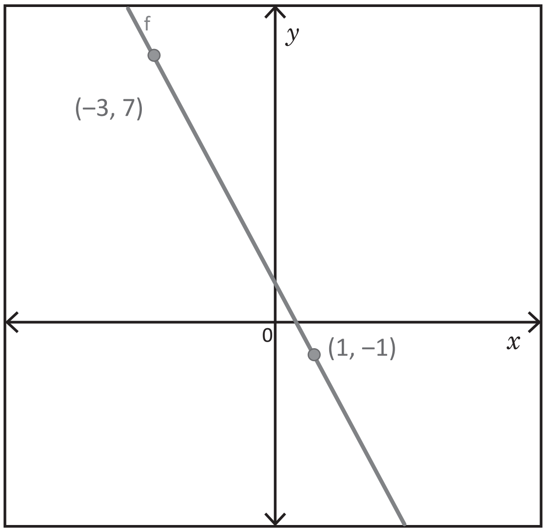
Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

<table>
<tr><th>Ítem</th><th>Sí</th><th>Podría mejorar</th><th>No</th><th>Comentario</th></tr>
<tr><td>1. Determino a) Intercepto con el eje $y$, b) razón de cambio y c) ecuación para la función de la gráfica:<br></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2. Grafico las dos funciones en un solo plano, identifico el intercepto y razón de cambio, luego comparo sus valores, de donde concluyo que las rectas son___________________________, por tener igual pendiente.<br>a) $y = 2x - 1$<br>b) $y = 2x + 3$<br></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3. Escribo la ecuación de la función a partir de la gráfica y los datos que se muestran en ella:<br></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

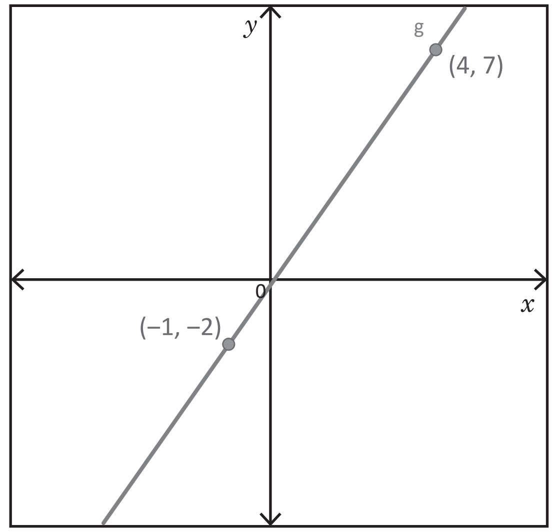
## 2.1 Trazo de la gráfica de una ecuación de primer grado con dos incógnitas

1. Escribe la ecuación de la función lineal para cada caso, a partir de los puntos dados.

a)



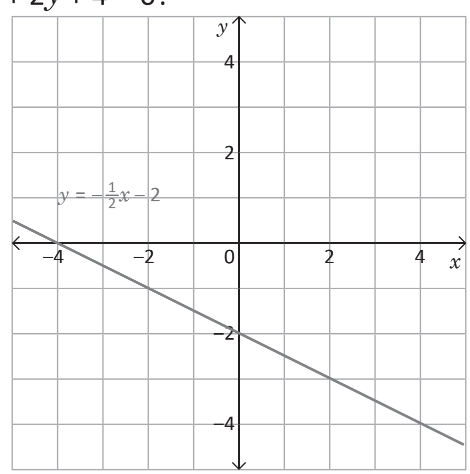

b)




2. Escribe la ecuación de una función lineal cuya gráfica pasa por los puntos (2, 0) y (0, 5).

Para representar gráficamente la ecuación de la forma $ax + by + c = 0$, es necesario determinar algunos valores para $x$ y $y$ que hacen cierta la ecuación y representarlos como pares ordenados en el plano. Por ejemplo, ¿cómo puedes representar gráficamente la ecuación $x + 2y + 4 = 0$?

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | ... | −4 | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
| $y$ | ... | 0 | $-\frac{1}{2}$ | −1 | $-\frac{3}{2}$ | −2 | $-\frac{5}{2}$ | −3 | $-\frac{7}{2}$ | −4 | ... |

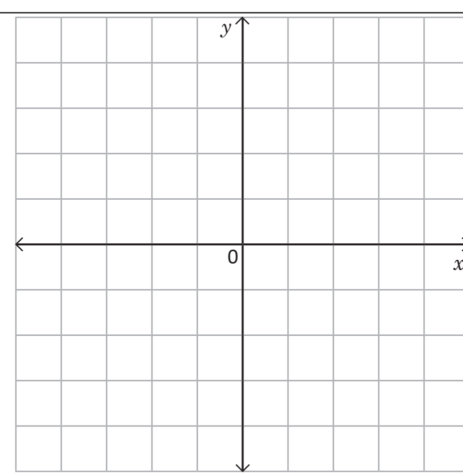



Al comparar la representación gráfica de la ecuación de la forma $ax + by + c = 0$, con la gráfica de la función lineal, se puede concluir que en ambos casos la gráfica es una línea recta y que para graficar la ecuación $ax + by + c = 0$, es necesario encontrar el valor de $y$ correspondiente a $x$.

Para cada una de las ecuaciones, realiza lo siguiente:

- Determina el valor de $y$ correspondiente a $x$.
- Elabora la tabla para organizar los pares ordenados.
- Represéntalas gráficamente.

a) $-2x + y - 3 = 0$
b) $4x - y - 3 = 0$
c) $3x + 2y - 6 = 0$

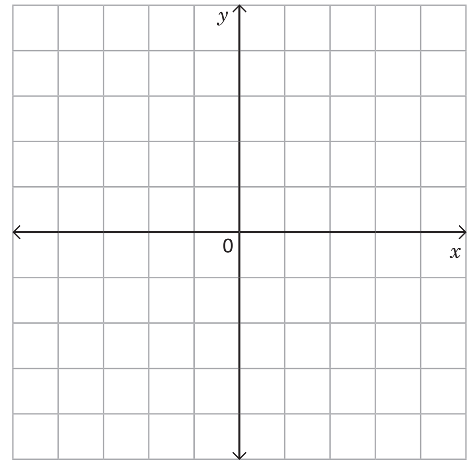





¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.2 Relación entre la gráfica de la ecuación $ax + by + c = 0$ y la función $y = ax + b$

1. Escribe la ecuación para una función lineal cuya gráfica pasa por los puntos (7, 0) y (0, –1).




2. Para cada una de las ecuaciones, realiza lo siguiente:
   - Determina el valor de $y$ correspondiente a $x$.
   - Elabora la tabla para organizar los pares ordenados.
   - Represéntalas gráficamente.

   a) $-2x + y + 4 = 0$
   b) $2x + 3y - 12 = 0$

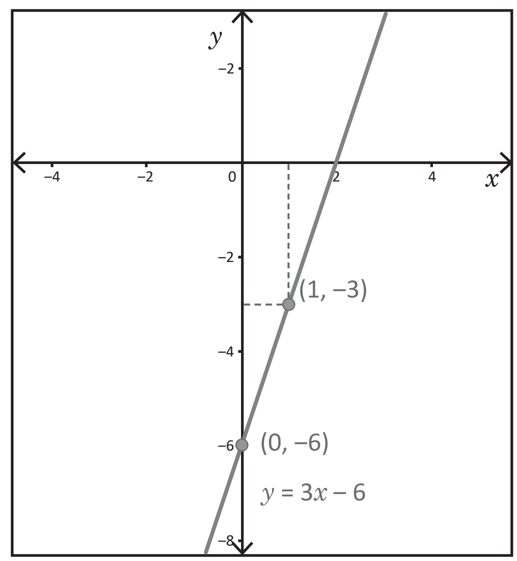
Para llevar la ecuación de primer grado con dos incógnitas a la forma $y = ax + b$ de la línea recta, y luego graficarla, es necesario:

1. Resolver la ecuación, sobre $y$.
2. Identificar la pendiente $a$ y el intercepto $b$.
3. A partir de la pendiente y el intercepto, encontrar las coordenadas de otro punto de la gráfica.
4. Trazar la línea recta que pasa por los dos puntos determinados.

Por ejemplo:
¿Cómo puedes llevar la ecuación $-3x + y + 6 = 0$, a la forma $y = ax + b$? Luego grafícala.

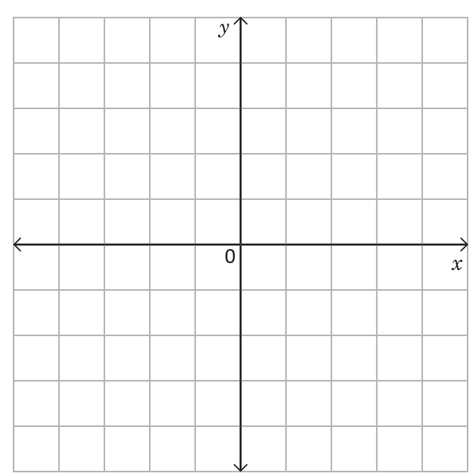
- Al llevar la ecuación $-3x + y + 6 = 0$ a la forma $y = ax + b$, se tiene $y = 3x - 6$.
- Ahora, para graficar, se identifica la pendiente, $a = 3$, y el intercepto $b = -6$; es decir, pasa por el punto (0, 6).
- Se determina otro punto de la gráfica:
  si $x = 1$ $\qquad$ $y = 3(1) - 6 = -3$

También pasa por el punto (1, –3).




Para cada una de las ecuaciones, realiza lo siguiente:
- Lleva la ecuación a la forma $y = ax + b$, resolviendo sobre $y$.
- Determina otro punto por donde pasa la gráfica.
- Traza la gráfica.

a) $-2x + y = 6$ $\qquad$ b) $4x + y = 8$




¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.3 Gráfica de la ecuación $ax + by + c = 0$ a partir de los interceptos

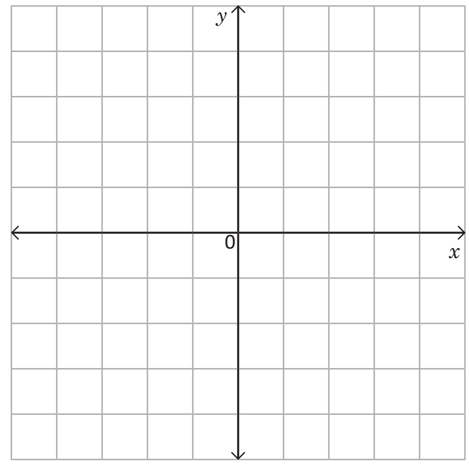
R

1. Para cada una de las ecuaciones, realiza lo siguiente:
   - Determina el valor de $y$ correspondiente a $x$.
   - Elabora la tabla para organizar los pares ordenados.
   - Represéntalas gráficamente.

   a) $x + 2y - 4 = 0$ b) $5x + y + 2 = 0$

2. Para cada una de las ecuaciones, realiza lo siguiente:
   - Lleva la ecuación a la forma $y = ax + b$, resolviendo sobre $y$.
   - Determina otro punto por donde pasa la gráfica.
   - Traza la la gráfica.

   a) $-5x + y + 7 = 0$ b) $3x + y = 2$



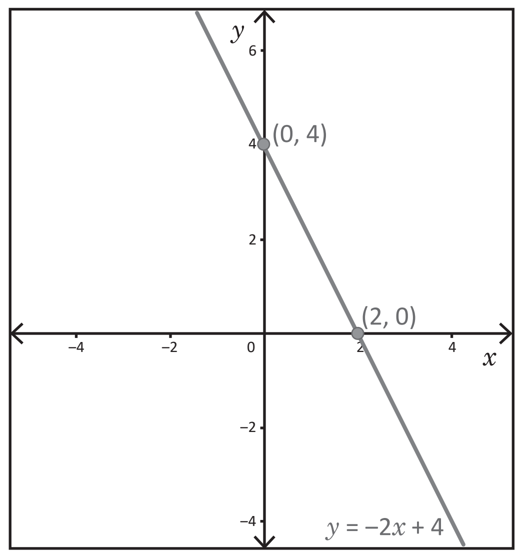

C

Para trazar la gráfica de la ecuación $ax + by + c = 0$, a partir de los interceptos con los ejes $x$ y $y$, es necesario:

1. Identificar el intercepto con el eje $y$, $(0, b)$
2. Determinar el intercepto con el eje $x$, haciendo $y = 0$ y calculando el respectivo valor de $x$, obteniendo el punto $(x, 0)$.
3. Representar los interceptos y trazar la gráfica.

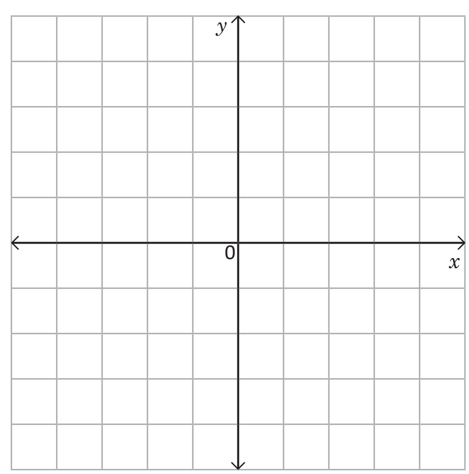
Por ejemplo, para la ecuación $2x + y - 4 = 0$, realiza lo siguiente:
**Los interceptos con los ejes son:**
1. El intercepto con el eje $y$, como $x = 0$, se tiene:
   $2(0) + y - 4 = 0$, $y = 4$, se obtiene el punto $(0, 4)$.

2. El intercepto con el eje $x$, $y = 0$, entonces sustituyendo en la expresión $2x + y - 4 = 0$:
   $2x + 0 - 4 = 0$, $x = 2$, se obtiene el punto $(2, 0)$.




Para cada una de las ecuaciones, realiza lo siguiente:
1. Determina el valor de los interceptos de la gráfica con los ejes $y$ y $x$.
2. Traza la gráfica de la ecuación.

   a) $x - 3y = 6$ b) $2x - y = -4$



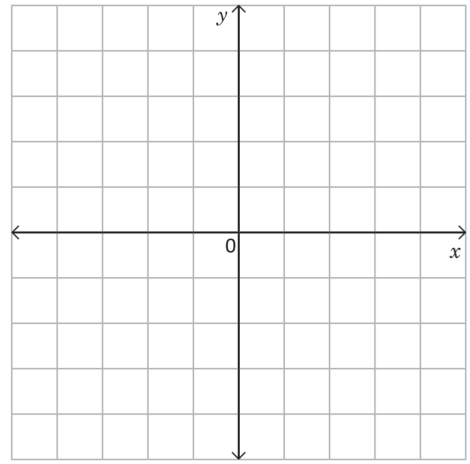



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.4 Trazo de la gráfica de la ecuación de la forma $ax + by + c = 0$, cuando $a = 0$

1. Para cada una de las ecuaciones, realiza lo siguiente:
   - Lleva la ecuación a la forma $y = ax + b$, resolviendo sobre $y$.
   - Determina otro punto por donde pasa la gráfica.
   - Traza la la gráfica.

   a) $5x - y = 3$　　　　b) $2x + y + 4 = 0$



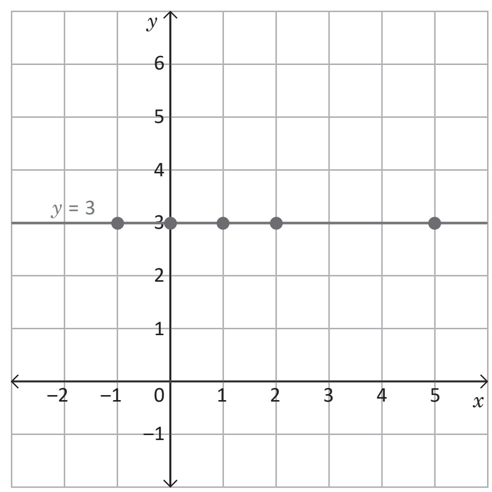

2. Para cada una de las ecuaciones, realiza lo siguiente:
   - Determina el valor de los interceptos de la gráfica con los ejes $y$ y $x$ .
   - Traza la gráfica de la ecuación.

   a) $2x + 3y = 6$　　　　b) $-x + 2y = 4$



Para representar gráficamente la ecuación $by + c = 0$, únicamente se traza una recta horizontal en $y = -\frac{c}{b}$, pues $x$ puede tomar cualquier valor; por tanto, la gráfica será una recta paralela al eje $x$.

Ejemplo: para la ecuación $3y - 9 = 0$.
1. Al resolver la ecuación en $y$, se tiene $3y = 9$; entonces $y = 3$.
2. Al representar gráficamente se tiene:



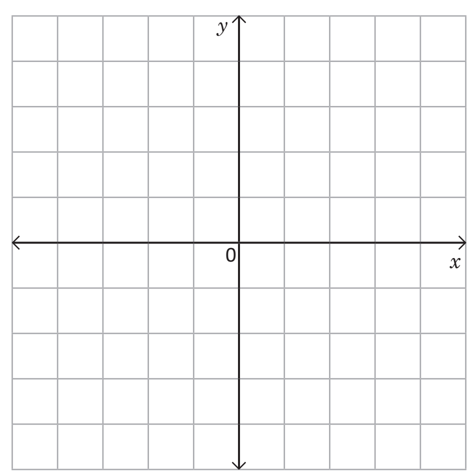

En cada una de las siguientes ecuaciones de la forma $by + c = 0$:

- Despeja la incógnita $y$.
- Represéntala gráficamente.

  a) $-3y - 12 = 0$

  b) $\frac{2}{3}y - 4 = 0$

  c) $-\frac{1}{2}y - 1 = 0$

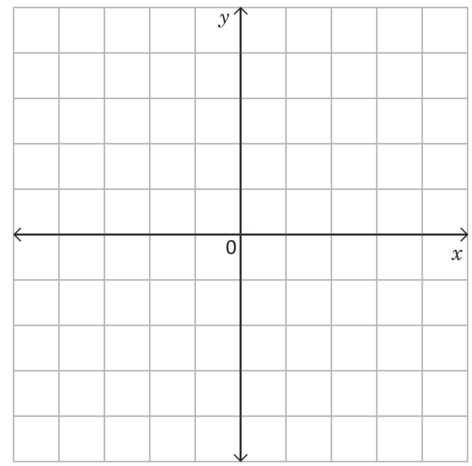



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# 2.5 Trazo de la gráfica de la ecuación $ax + by + c = 0$, cuando $b = 0$

1. Para cada una de las ecuaciones, realiza lo siguiente:
   - Determina el valor de los interceptos de la gráfica con los ejes $y$ y $x$.
   - Traza la gráfica de la ecuación.

   a) $x - y = 2$ b) $-\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 2$



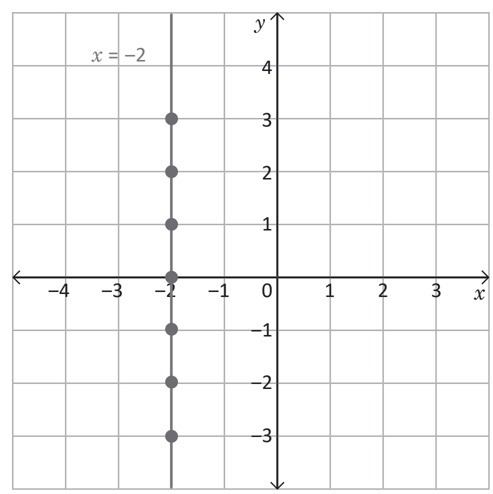

2. En cada una de las ecuaciones de la forma $by + c = 0$, realiza lo siguiente:
   - Despeja la incógnita $y$.
   - Represéntala gráficamente.

   a) $3y + 12 = 0$ b) $\frac{2}{5}y - 2 = 0$

Para representar gráficamente la ecuación $ax + c = 0$, únicamente se traza una recta vertical en $x = -\frac{c}{a}$ pues $y$ puede tomar cualquier valor; por tanto, la gráfica será una recta paralela al eje $y$, tal como se muestra en el ejemplo desarrollado.

Por ejemplo: para la ecuación $3x + 6 = 0$.

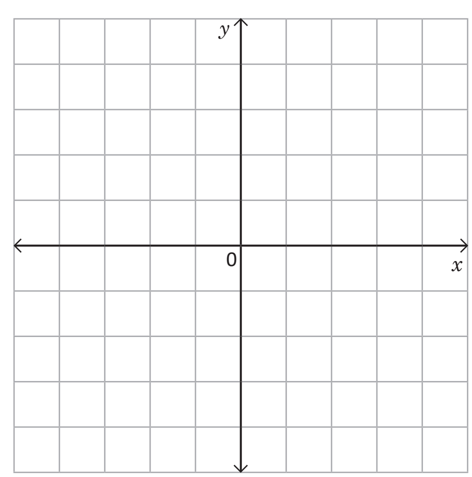
1. Al resolver la ecuación en $x$, se tiene $3x = -6$; entonces $x = -2$.
2. Entonces, al representar gráficamente se tiene:




En cada una de las siguientes ecuaciones de la forma $ax + c = 0$:

- Despeja la incógnita $x$.
- Represéntala gráficamente.

a) $x - 3 = 0$ b) $3x - 6 = 0$ c) $\frac{1}{2}x + 2 = 0$






¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

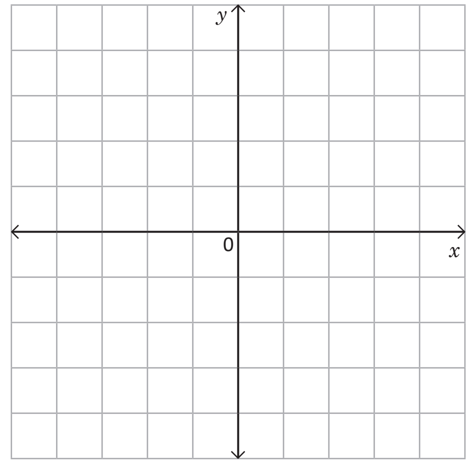
# 2.6 Intercepto de la gráfica de dos ecuaciones de la forma $ax + by + c = 0$



**R**

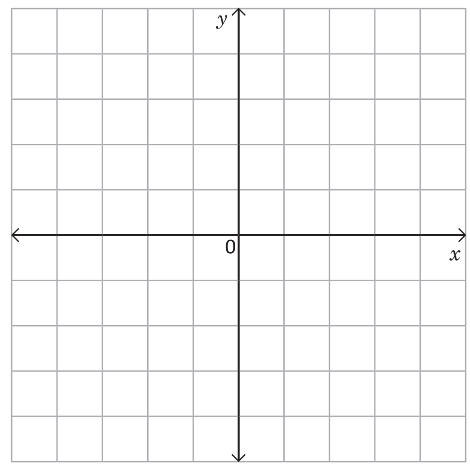
1. En cada una de las siguientes ecuaciones de la forma $by + c = 0$, realiza lo siguiente:
   - Despeja la incógnita $y$.
   - Represéntala gráficamente.

   a) $8y - 4 = 0$ b) $\frac{1}{3}y - \frac{1}{2} = 0$




2. En cada una de las ecuaciones $ax + c = 0$, realiza lo siguiente:
   - Despeja la incógnita $x$.
   - Represéntala gráficamente.

   a) $4x + 8 = 0$ b) $\frac{1}{3}x - 1 = 0$



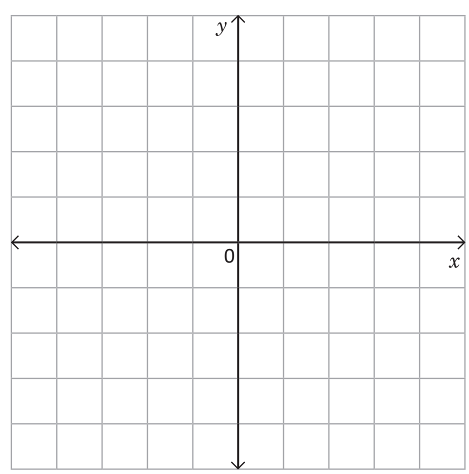

**C**

Cuando se grafica un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en un solo plano, las coordenadas del punto en que se intersecan las dos gráficas, corresponden a la solución del sistema; por tanto, un sistema de ecuaciones también se puede resolver de manera gráfica, representando las dos gráficas en un solo plano e identificando las coordenadas que corresponden al punto de intersección.

Para cada uno de los sistemas de ecuaciones, realiza lo siguiente:

1. Lleva las dos ecuaciones a la forma pendiente intercepto.
2. Grafica las dos ecuaciones en un mismo plano.
3. Identifica las coordenadas del punto donde se intersectan las dos rectas.
4. Resuelve el sistema aplicando cualquier método conocido.

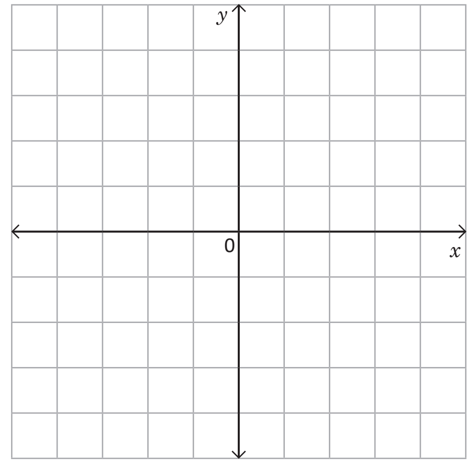
a) $\begin{cases} 2x + y = 3 & ① \\ -2x + y = -1 & ② \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 4 & ① \\ x - y = 2 & ② \end{cases}$



# 2.7 Solución gráfica de un sistema de ecuaciones de la forma $ax + by + c = 0$

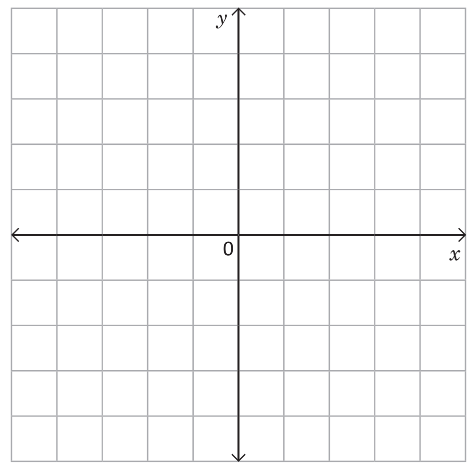
1. En cada una de las ecuaciones de la forma $ax + c = 0$, realiza lo siguiente:
   - Despeja la incógnita $x$.
   - Represéntala gráficamente.

   a) $6x - 24 = 0$ b) $10x + 20 = 0$




2. Para cada uno de los sistemas de ecuaciones, realiza lo siguiente:
   - Lleva las dos ecuaciones a la forma pendiente intercepto.
   - Grafica las dos ecuaciones en un mismo plano.
   - Identifica las coordenadas del punto donde se intersectan las dos rectas.

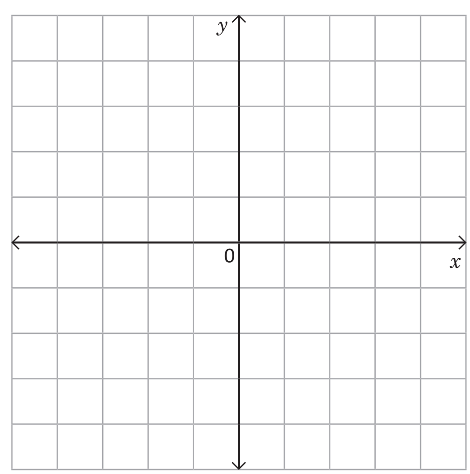
   a) $\begin{cases} x + y = 4 & (1) \\ 2x - y = -1 & (2) \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 4 & (1) \\ 2x + y = 5 & (2) \end{cases}$




Para determinar la solución de un sistema de ecuaciones de manera gráfica, es necesario:
1. Determinar el intercepto con cada uno de los ejes $x$ y $y$.
2. Representar los interceptos en el plano y construir la gráfica.
3. Identificar los valores de $x$ y $y$ que corresponden al punto de intersección de las rectas.

Determina la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones, de forma gráfica.

a) $\begin{cases} 2x - y = 2 & (1) \\ x + 2y = 6 & (2) \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 6 & (1) \\ 2x - y = 2 & (2) \end{cases}$

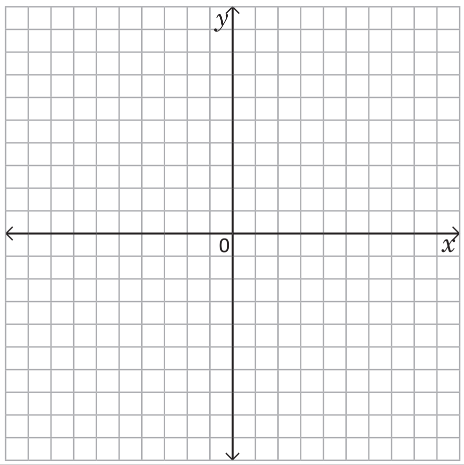
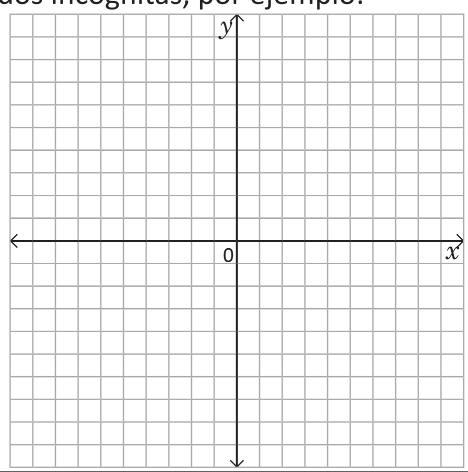
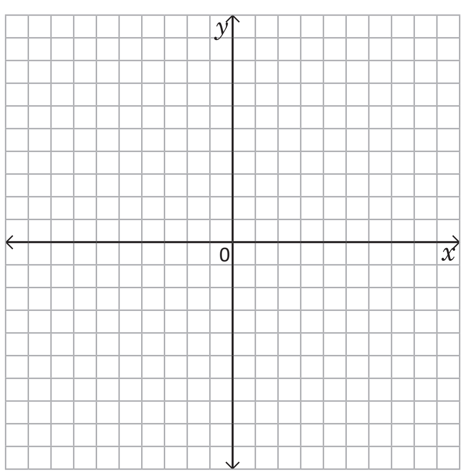





¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.8 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

| Ítem | Sí | Podría mejorar | No | Comentario |
|---|---|---|---|---|
| 1. Grafico en el plano ecuaciones de la forma $ax + by + c = 0$, por ejemplo:<br>a) $x - 3y - 6 = 0$ ①<br>b) $2x - y - 3 = 0$ ②<br> | | | | |
| 2. Determino la solución gráfica de un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, por ejemplo:<br>$\begin{cases} 2x + y = 3 & ① \\ -3x + 2y = 6 & ② \end{cases}$<br> | | | | |
| 3. Determino si un sistema tiene o no solución, por ejemplo:<br>a) $\begin{cases} x + 3y = 5 & ① \\ x + 3y = -2 & ② \end{cases}$<br>b) $\begin{cases} 3x + 4y = 18 & ① \\ 4x - 3y = -1 & ② \end{cases}$<br> | | | | |

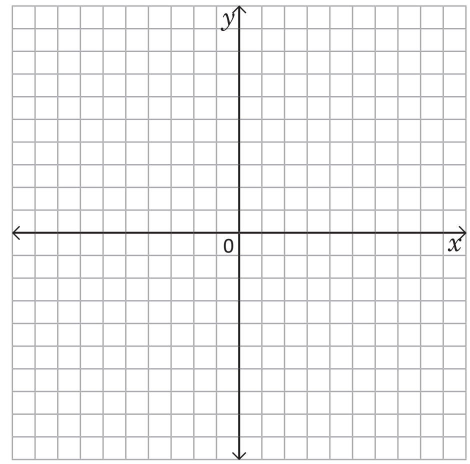
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# 3.1 Aplicaciones de la función lineal, parte 1

R

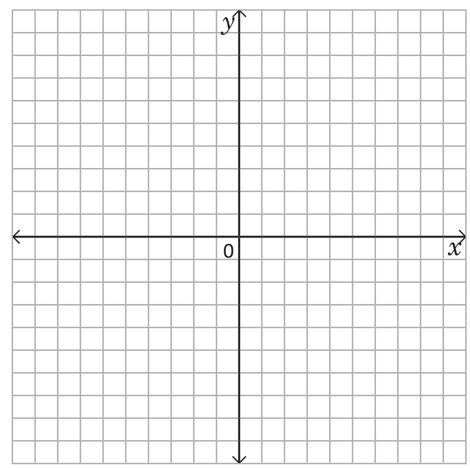
1. Para cada uno de los sistemas de ecuaciones, realiza lo siguiente:

   - Lleva las dos ecuaciones a la forma pendiente intercepto.
   - Grafica las dos ecuaciones en un mismo plano.
   - Identifica las coordenadas del punto donde se intersectan las dos rectas.
   - Comprueba la solución encontrada aplicando un método conocido.




a) $\begin{cases} x + y = 5 & ① \\ x - 2y = -1 & ② \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 3 & ① \\ -2x + y = 9 & ② \end{cases}$

2. Determina la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones, de forma gráfica.




a) $\begin{cases} 2x + y = 5 & ① \\ 3x + y = 5 & ② \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 10 & ① \\ 3x - y = 5 & ② \end{cases}$

C

Para resolver problemas aplicando la función lineal, únicamente se necesita identificar las dos variables $x$ y $y$, y pensar en $y$ como una función lineal de $x$, luego dar respuesta a la situación planteada.

La relación entre la escala Kelvin (K) y la escala Celsius (C) es la siguiente:

- 0° C es equivalente a 273° K y 100° C a 373° K.
- Si $x$° C equivalen a $y$° K, $y$ es una función lineal de $x$, encuentra la ecuación que relaciona las dos variables.

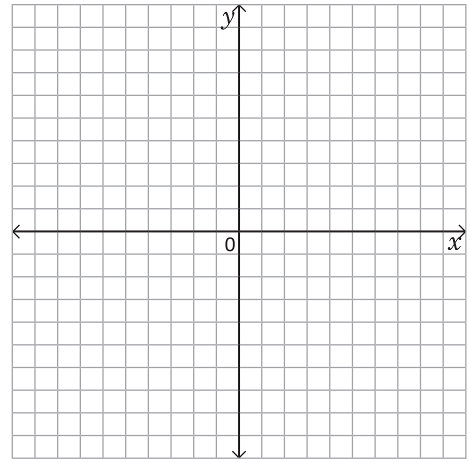
a) Determina la variación térmica de un día de invierno en que se registra una temperatura mínima de 0° C y una máxima de 18° C, exprésala en grados Kelvin.
b) ¿A qué temperatura un termómetro Kelvin marca numéricamente el cuádruple que el de Celsius?



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 3.2 Aplicaciones de la función lineal, parte 2

1. Determina la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones de forma gráfica.




a) $\begin{cases} 2x + y = 7 & ① \\ 3x + y = 9 & ② \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 3y = -4 & ① \\ x + 2y = 5 & ② \end{cases}$

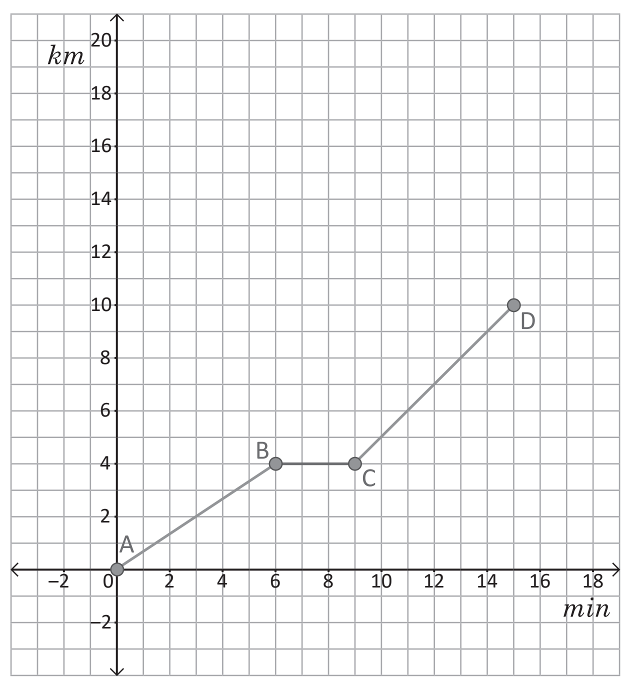


2. La relación entre el colón salvadoreño ₡ y el dólar americano $ es la siguiente: $1 es equivalente a ₡8.75 y $10 a ₡87.5.
   a) Si $x$ $ equivalen a $y$ ₡, $y$ es una función lineal de $x$, encuentra la ecuación que relaciona las dos variables.
   b) Carmen tenía ₡175.00 y como regalo, su tío le dio $40.00. ¿Cuánto dinero tiene Carmen en total? Expresa tu respuesta en dólares.

---

Ana participó en una carrera de atletismo. Después de 6 minutos hizo una parada para beber agua, luego de 3 minutos retomó la carrera; para recuperar el tiempo perdido aumentó la velocidad. Considerando $y$ kilómetros recorridos en $x$ minutos, responde:

1. ¿A qué distancia del punto de partida bebió agua Ana?
2. Expresa la distancia recorrida $y$ después de transcurridos $x$ minutos en el recorrido, tanto antes como después de la parada.
3. ¿Cuál es la distancia total recorrida por Ana?



## 3.3 Aplicaciones de la función lineal, parte 3

1. La relación entre yardas y metros es la siguiente: 1 yarda ($yd$) es equivalente a 0.9 metros ($m$) aproximadamente y 10 $yd$ equivale a 9 $m$.
   a) Si $x$ ($yd$) equivalen a $y$ ($m$), $y$ es una función lineal de $x$, encuentra la regla de correspondencia que relaciona las dos variables.

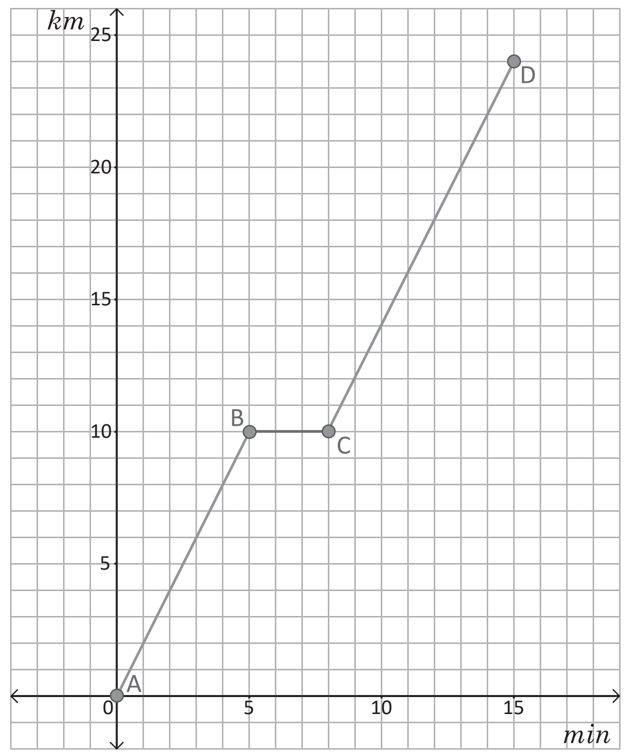
   b) Carlos compró un bollo de cordel de 900 $yd$ para elevar piscuchas, ¿para cuántas piscuchas le alcanza el cordel si para cada una utiliza 10 metros?

2. Antonio participó en una carrera de caballos, a los 5 minutos tuvo problemas y necesitó apoyo para revisar la montura; luego de 3 minutos retomó la carrera, y aumentó la velocidad. Considerando $y$ kilómetros recorridos en $x$ minutos, responde:

   a) ¿A qué distancia del punto de partida se hizo la revisión del estado de la montura?

   b) Expresa la distancia recorrida $y$, después de transcurridos $x$ minutos en el recorrido tanto antes como después de revisar la montura.

   c) ¿Cuál es la distancia total recorrida por Antonio?




En el cuadrado ABCD, el punto E se mueve sobre el borde desde el punto A hasta D, pasando por el punto B y C. Cuando el punto E se ha movido $x$ cm, se toma el área del triángulo AED como $y$ cm$^2$. Observa las figuras y responde:

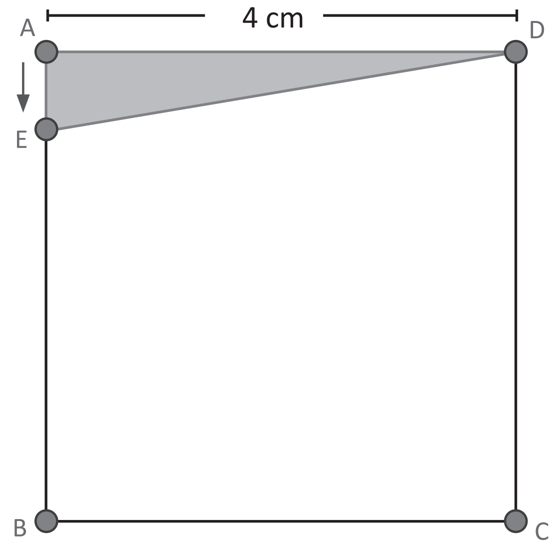
1. Explica qué sucede con el área del triángulo AED cuando:

   a) E se desplaza sobre el AB, es decir $0 \leq x \leq 4$.
   b) E se desplaza sobre el BC, es decir $4 \leq x \leq 8$.
   c) E se desplaza sobre el CD, es decir $8 \leq x \leq 12$.



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

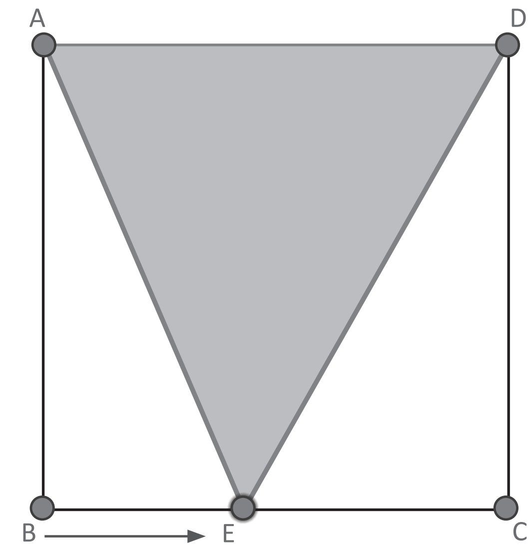
2. Expresa el área $y$ del triángulo AED, cuando E se mueve de A hasta B.



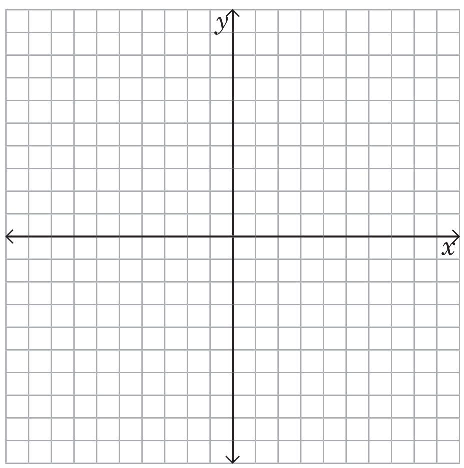

3. Determina el área $y$ del triángulo AED, cuando E se mueve de B hasta C.

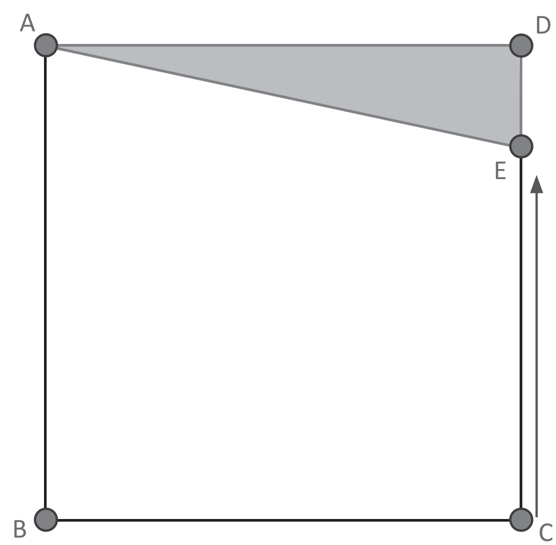
4. Expresa el área $y$ del triángulo AED, cuando E se mueve de C hasta D.






5. Representa gráficamente en un mismo plano el área del triángulo AED , cuando:
   a) E se mueve sobre el lado AB.
   b) E se mueve sobre el lado BC.
   c) E se mueve sobre el lado CD.

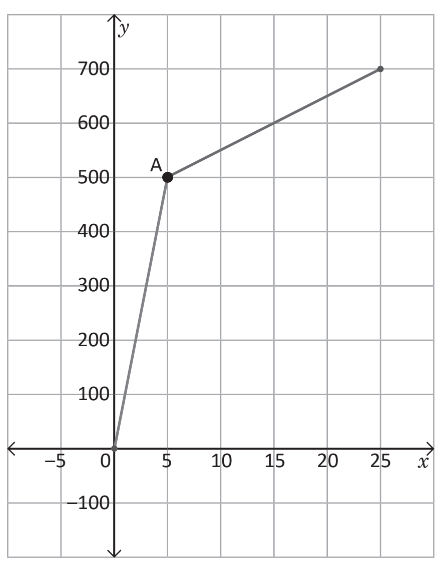



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 3.4 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

| Item | Sí | Podría mejorar | No | Comentario |
|---|---|---|---|---|
| 1. Resuelvo situaciones que impliquen equivalencia de unidades que se relacionan linealmente como la siguiente:<br>La relación entre los grados Fahrenheit (F) y los Celsius (C) es la siguiente: 0° C es equivalente a 32° F, y 100° C a 212° F.<br>a) Si $x$° C equivalen a $y$° F, $y$ es una función lineal de $x$, escribe la ecuación que relaciona las dos variables.<br>b) Determina la variación térmica de un día de invierno en que se registra una temperatura mínima de 10° C y una máxima de 20° C, exprésala en grados Fahrenheit.<br>c) ¿A qué temperatura un termómetro Fahrenheit marca numéricamente el triple que el de Celsius? | | | | |
| 2. Resuelvo situaciones que impliquen interpretación de gráficas como la siguiente:<br>Miguel salió de su casa hacia la escuela que dista 1 500 m de su casa.<br>De la casa hasta el punto A se desplazó en bicicleta y a partir de ahí se fue caminando. La gráfica muestra la relación entre el tiempo $x$ (minutos) transcurridos desde que sale de la casa y la distancia recorrida $y$ (metros).<br>a) Determina la velocidad en metros por minuto mientras se desplaza en bicicleta.<br>b) Expresa la relación entre el tiempo transcurrido $x$ minutos y la distancia recorrida $y$ metros, desde 0 a 5 minutos.<br>c) Determina la velocidad de Miguel cuando se desplaza caminando.<br><br><br>d) Expresa la relación entre los $x$ minutos transcurridos y la distancia $y$ recorrida desde 5 a 25 minutos. | | | | |



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 3.5 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

| Ítem | Sí | Podría mejorar | No | Comentario |
|---|---|---|---|---|
| 1. En el recibo del consumo mensual de energía eléctrica de la casa de María, aparecen reflejados los siguientes conceptos: costo mensual de comercialización y distribución aproximadamente de \$6.00 y \$0.35 por kilowatt (kw/h) de energía consumida.<br><br>a) ¿Cuánto deberá pagar en un mes que haya consumido 15 kw/h?<br><br>b) Escribe el total $y$ a pagar, cuando se consumen $x$ kw/h de energía eléctrica.<br><br>c) Representa gráficamente la función que relaciona el consumo de energía con el costo total a pagar. | | | | |
| 2. En un negocio de reparación de llantas un trabajador tiene un sueldo diario formado por la suma de una base fija más \$2 por cada llanta reparada. En cierto día del mes, después de que había reparado 12 llantas, el empleado calculó que su sueldo diario era de \$44.<br><br>a) ¿Cuál es el sueldo diario fijo del trabajador?<br><br>b) ¿Cuál es la función que representa el sueldo $y$ del trabajador cuando arregla $x$ llantas?<br><br>c) Grafica la función lineal obtenida. | | | | |

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## Problemas de aplicación

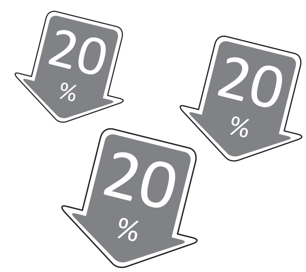
El 1 de septiembre de 1992, entró en vigencia la LEY DE IMPUESTO A LA TRANSFERENCIA DE BIENES MUEBLES Y A LA PRESTACIÓN DE SERVICIOS (IVA), con una tasa del 10% por medio del Decreto Legislativo número 296, aprobado el 27 de julio de 1992 y publicado en el Diario Oficial N° 143 tomo 316 del 31 de julio de 1992; que tiene como objeto aplicar el impuesto a la transferencia, importación, exportación y al consumo de los bienes muebles corporales; y a la prestación, importación, internación, exportación y el autoconsumo de servicios. Posteriormente, según Decreto Legislativo número 370 del 8 de junio de 1995, la tasa se incrementó del 10% al 13%.

**Trabajos de fontanería**

a) Si un fontanero hace una reparación de \$240, ¿a cuánto ascenderá el costo al agregar el IVA?
b) Si la reparación costara \$50, ¿cuánto se deberá pagar?
c) Obtener la regla de correspondencia de la función del precio del trabajo del fontanero y la cantidad total que se paga.

**Descuentos por cambio de temporada**

En uno de los centros comerciales de Soyapango, las tiendas A y B ofrecen una mochila a un precio de \$50 sin IVA, pero para atraer clientes tienen disponible la oferta siguiente:




Tienda A: descuento del 20% sobre precio original (0.8) (\$50), y sobre este aplica el IVA, es decir, tú pagarías por la mochila (1.13) (0.8) (\$50).

Tienda B: aplica el IVA (1.13) (\$50), y sobre este costo hace un descuento del 20%; es decir tú pagarías por la mochila (0.8) (1.13) (\$50).

a) Considerando las condiciones, ¿en cuál tienda comprarías la mochila? ¿Por qué?
b) Si el precio de la mochila es $x$ dólares, escribe una función lineal que modele el costo a pagar por la mochila considerando el descuento del 20% y el IVA.

**Crecimiento del bebé durante el período de gestación**

Un estudio de un ginecólogo muestra cómo crece un bebé antes de nacer según el mes de gestación en que se encuentre su madre, de acuerdo con la siguiente tabla:

| Edad (meses) | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Longitud (cm) | 4 | 8 | 15 | 24 | 29 | 34 | 38 | 42 |

a) Representar la función "longitud" en función de la edad del bebé.
b) Determinar la razón de cambio del crecimiento del bebé para al menos 3 meses.
c) La función "longitud", ¿es una función lineal?



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Unidad 4

# Paralelismo y ángulos de un polígono

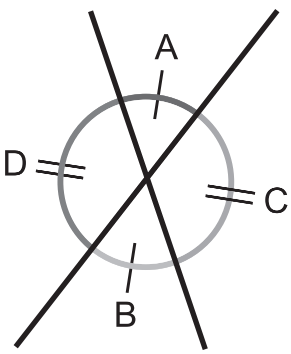



Ilustración que demuestra que los ángulos opuestos por el vértice son iguales; según Pinasco, Juan Pablo (2009) Las Geometrías.

Tales de Mileto (Miletus, Turquía; 620 a. C. - 545 a. C.) fue el primer matemático a quien se le atribuyó una serie de resultados teóricos generales, es decir, de teoremas. Si bien no se sabe cómo los demostró originalmente, hoy son parte de la geometría básica, entre ellos se tienen:

- Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.
- Dadas dos paralelas y una transversal, los ángulos alternos internos son congruentes.

Los ángulos y rectas paralelas se utilizan en diferentes contextos, entre los que se pueden mencionar: la construcción de edificios, puentes, escaleras, vías férreas y carreteras; en el diseño de los instrumentos musicales, cables del tendido eléctrico, diseño de pisos, etc.

Bulevar Monseñor Romero

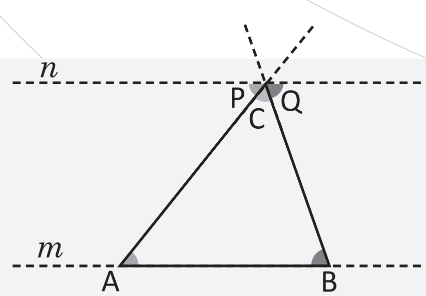


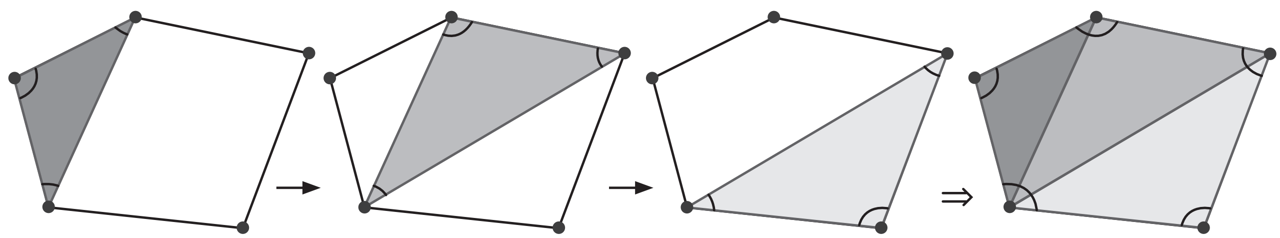

Ilustración de la demostración pitagórica de los ángulos internos de un triángulo.

En el desarrollo de los contenidos de esta unidad recordarás la relación entre los ángulos internos de un triángulo, que te servirá de base para el estudio de los ángulos internos y externos de un polígono, así como la relación entre los ángulos que se forman entre paralelas y sus aplicaciones en situaciones cotidianas.

## 1.1 Suma de los ángulos internos de un polígono, parte 1

En todo polígono, al trazar las diagonales se forma un total de triángulos igual al número de lados menos 2; por tanto, la suma de los ángulos internos de un polígono de $n$ lados es $180° \times (n - 2)$.

Por ejemplo, determinando la suma de los ángulos internos de un pentágono se realizó el siguiente análisis:



180° + 180° + 180° = 180° × 3

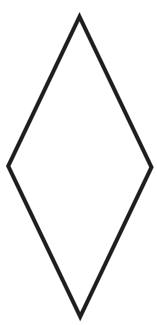
El pentágono queda divido en 3 triángulos. Como la suma de los ángulos internos de un trángulo es 180°, entonces:

**Suma de ángulos internos del pentágono** = 180° + 180° + 180° = 180° × 3.

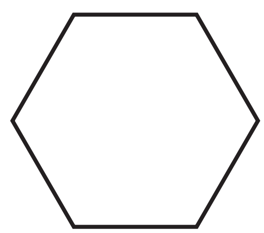
La diferencia entre el número de lados y el número de triángulos que se forman es: 5 – 3 = 2. Y además, los ángulos internos del pentágono suman 180° × (5 – 2).

Determina la suma de los ángulos internos de las siguientes figuras:

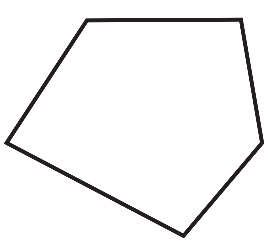
a)



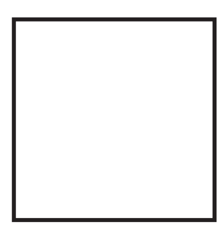
b)



c)



d)



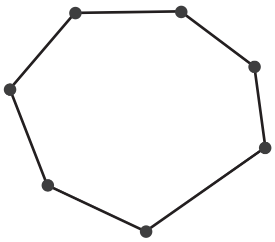


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

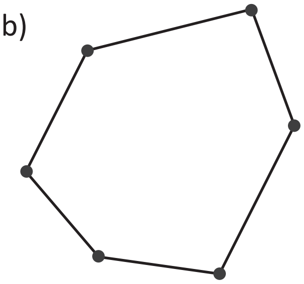
## 1.2 Suma de los ángulos internos de un polígono, parte 2

**R** Determina la suma de los ángulos internos de las siguientes figuras:

a)



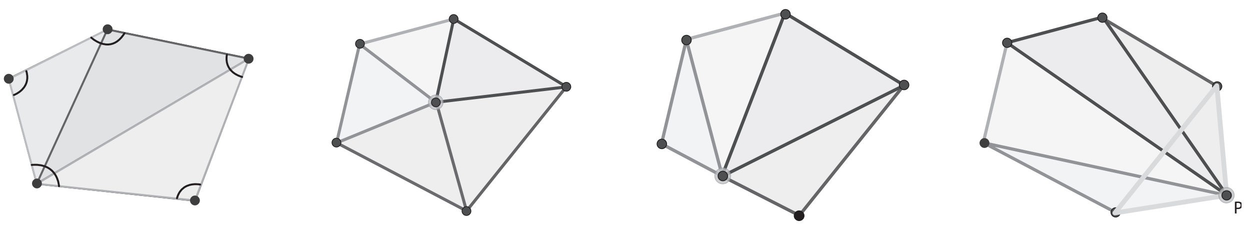
b)



**C** La suma de los ángulos internos de un polígono se puede determinar utilizando distintas estrategias de triangulación, esto puede ser:

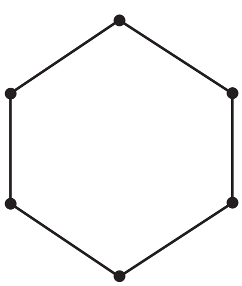
a) Desde un vértice cualquiera cuidando que las diagonales que se trazan no se corten entre sí.
b) Triangulando desde un punto interno al polígono.
c) Triangulando desde un punto sobre el borde del polígono.
d) Triangulando desde un punto externo del polígono.

Por ejemplo, el pentágono se puede triangular utilizando cualquiera de las siguientes formas:

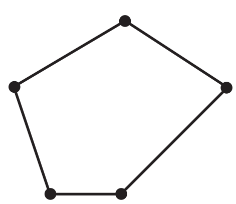



Determina la suma de los ángulos internos de los siguientes polígonos, utiliza al menos dos de las estrategias de triangulación.

a)



b)

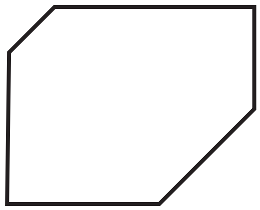


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.3 Suma de los ángulos externos de un polígono

Determina la suma de los ángulos internos de las siguientes figuras mediante la estrategia de triangulación, luego utiliza la fórmula vista en la clase 1.1.

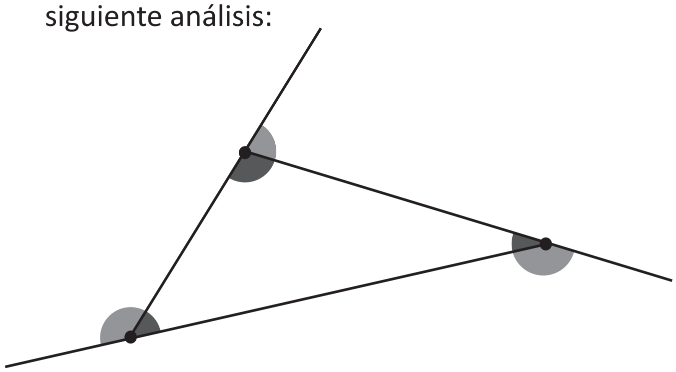
a)



b)

La suma de los ángulos externos de un triángulo es 360°.

Por ejemplo, para determinar la suma de los ángulos externos de un triángulo fue necesario realizar el siguiente análisis:

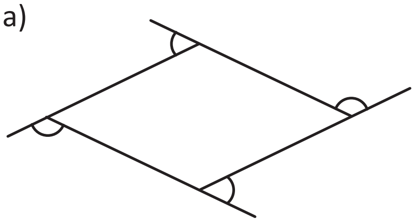


En cada uno de los vértices del triángulo se forma un ángulo de 180°, al sumar su ángulo interno con el repectivo ángulo externo. Cuando se agrega la suma de los ángulos internos y externos de los otros vértices, se tiene 180° × 3 = 540°.

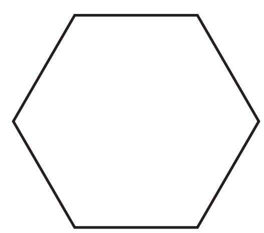
Pero 540° contiene la suma de los ángulos internos 180° × (3 – 2) = 180°; por tanto, la suma de los ángulos externos de un triángulo es 540° – 180° = 360.

Determina la suma de los ángulos externos de las siguientes figuras:

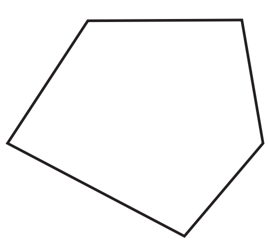
a)



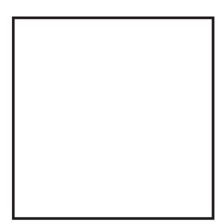
b)



c)



d)





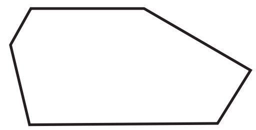
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# 1.4 Suma de los ángulos internos de un polígono regular

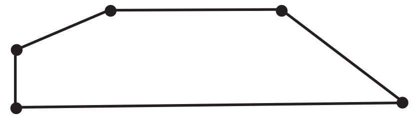
R

1. Determina la suma de los ángulos internos de las siguientes figuras:

a)

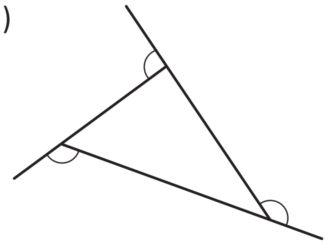


b)

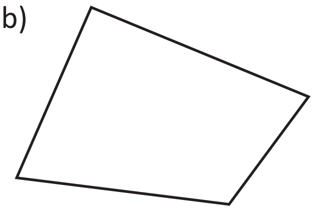


2. Determina la suma de los ángulos externos de las siguientes figuras:

a)



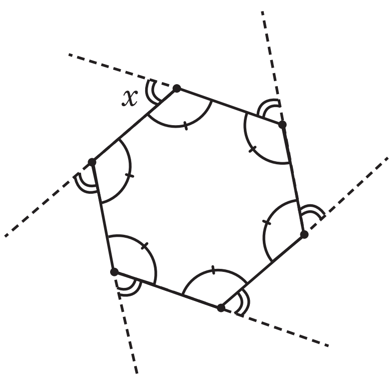
b)



C

En un polígono regular todos los ángulos internos son iguales y la suma es igual a $180° \times (n - 2)$. Además, todos los ángulos externos, también son iguales entre sí.

Por ejemplo para calcular el valor $x$:




Los ángulos internos del hexágono suman $180° (6 - 2) = 720°$.

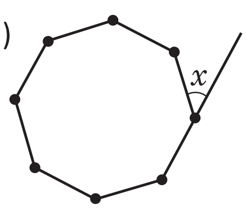
Entonces cada ángulo interno mide $\frac{720°}{6} = 120°$.

A partir de lo anterior, se tiene que cada ángulo interno mide 120°. Como $x$ es un ángulo externo, entonces $x + 120° = 180°$.

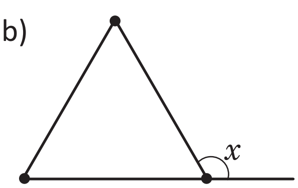
Por tanto, $x = 60°$.

1. Determina el valor de $x$ en los siguientes polígonos regulares:

a)

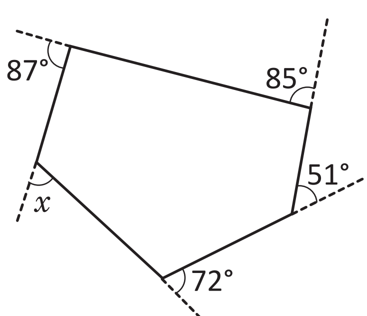



b)

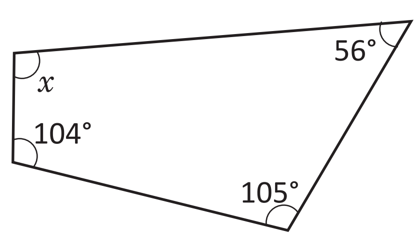



2. Encuentra la medida del ángulo $x$ en cada caso.

a)




b)

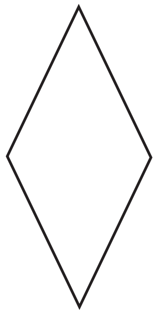



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

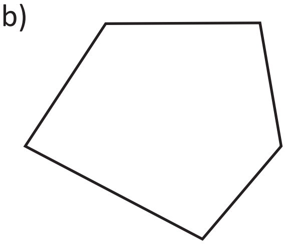
# 2.1 Ángulos opuestos por el vértice

1. Determina la suma de los ángulos externos de las siguientes figuras:

a)

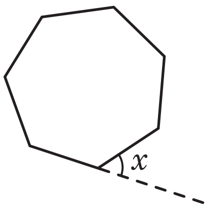


b)

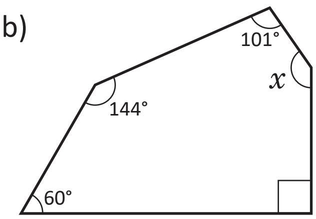


2. Determina el valor de $x$ en los siguientes polígonos:

a)



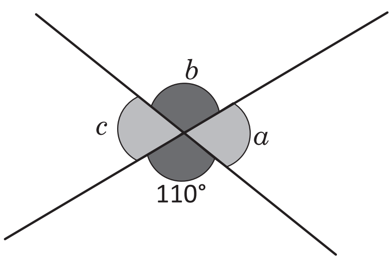

b)



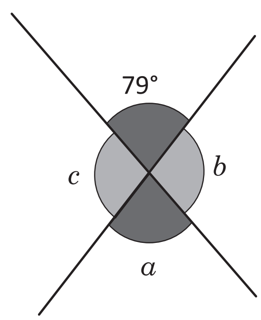

Un ángulo es opuesto por el vértice cuando los lados son la prolongación de los lados de otro ángulo, estos ángulos tienen igual medida. Además los ángulos cuyas medidas suman 180° se llaman suplementarios.

Determina el valor de los ángulos que se indican en cada literal.

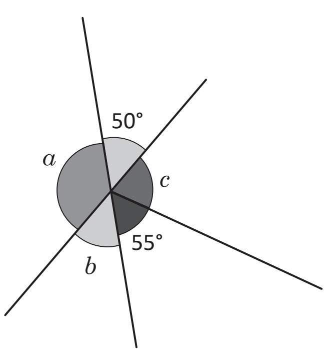
a)



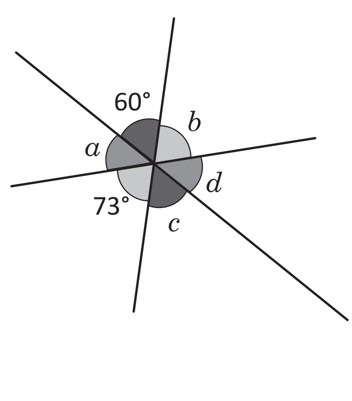

b)




c)




d)



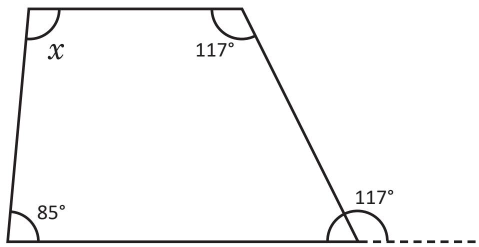



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

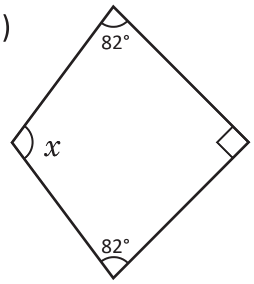
## 2.2 Ángulos correspondientes y ángulos alternos

1. Encuentra la medida del ángulo $x$ en cada caso.

a)

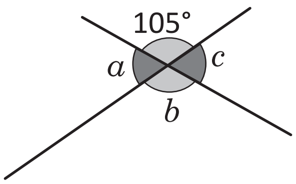



b)

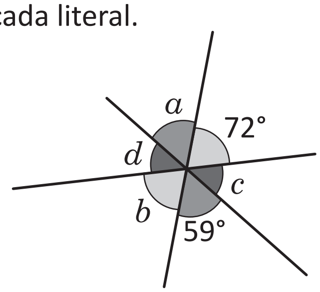



2. Determina el valor de los ángulos que se indican en cada literal.

a)

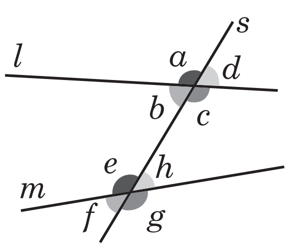



b)






Cuando se tienen dos rectas cortadas por una secante se pueden identificar los siguientes tipos de ángulos:




Internos:
$\sphericalangle b$, $\sphericalangle c$, $\sphericalangle e$ y $\sphericalangle h$

Externos:
$\sphericalangle a$, $\sphericalangle d$, $\sphericalangle f$ y $\sphericalangle g$

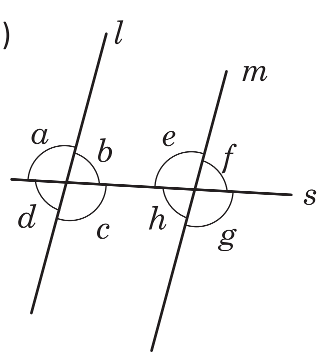
Alternos internos:
$\sphericalangle b$ y $\sphericalangle h$, $\sphericalangle c$ y $\sphericalangle e$

Alternos externos:
$\sphericalangle a$ y $\sphericalangle g$, $\sphericalangle d$ y $\sphericalangle f$

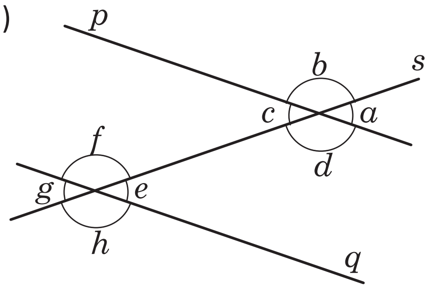
Correspondientes:
$\sphericalangle a$ y $\sphericalangle e$, $\sphericalangle d$ y $\sphericalangle h$,
$\sphericalangle b$ y $\sphericalangle f$ , $\sphericalangle c$ y $\sphericalangle g$

Para cada uno de los siguientes literales indica cuáles ángulos son internos, externos, alternos internos, alternos externos y correspondientes.

a)




b)

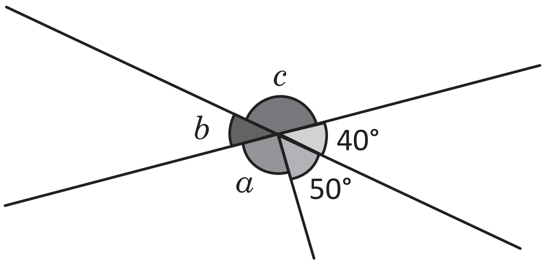



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

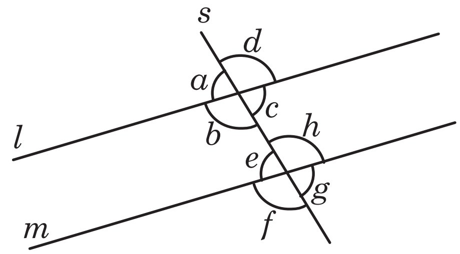
## 2.3 Caracterización de los ángulos correspondientes

**R**

1. Determina el valor de los ángulos que se indican en cada literal.



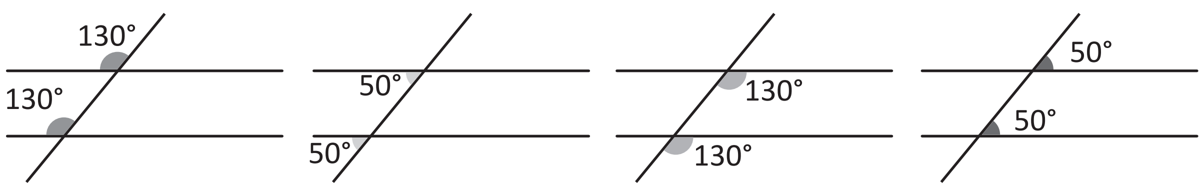

2. Para cada uno de los siguientes literales indica cuáles ángulos son internos, externos, alternos internos, alternos externos y correspondientes.




**C**

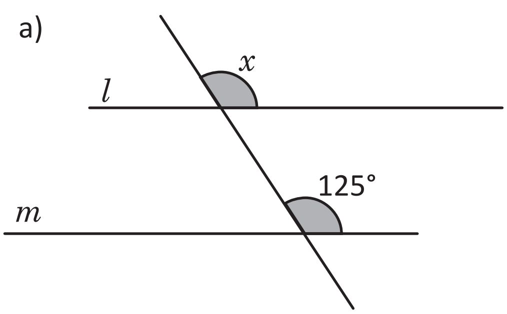
Si dos rectas paralelas son cortadas por una recta secante, los ángulos correspondientes son iguales. Esta afirmación se cumple también en sentido contrario; es decir, si los ángulos correspondientes que se forman entre dos rectas cortadas por una secante son iguales, entonces las rectas son paralelas.

Por ejemplo, se puede medir con transportador los siguientes ángulos y verificar la igualdad:

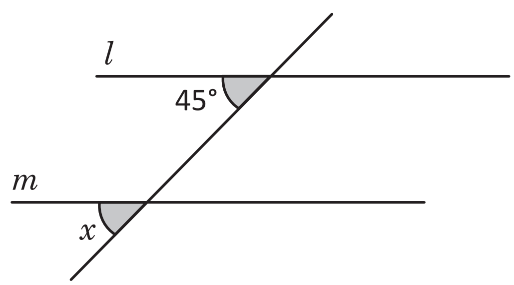



Dado que $l \parallel m$. Determina el valor de $x$.

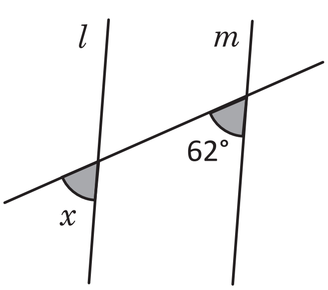
a)



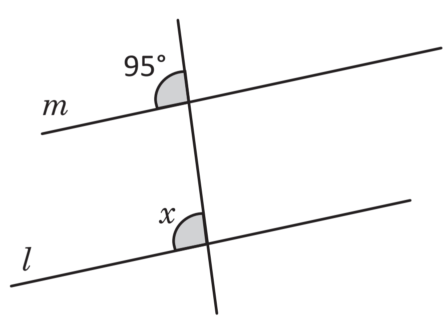

b)




c)




d)



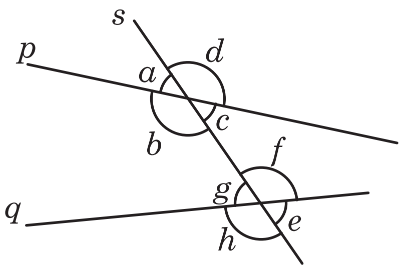



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

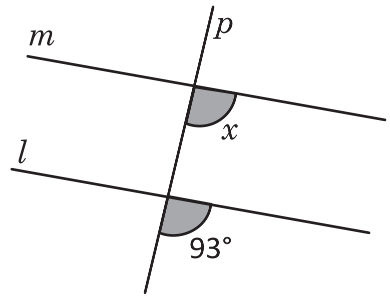
## 2.4 Caracterización de los ángulos alternos

R

1. Para cada uno de los siguientes literales indica cuáles ángulos son internos, externos, alternos internos, alternos externos y correspondientes.



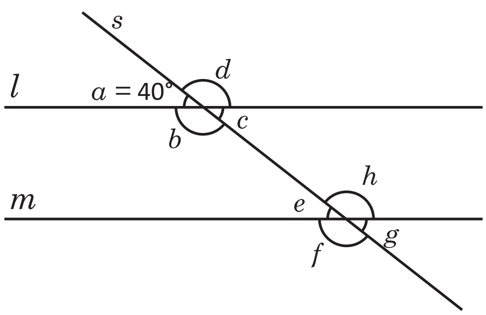

2. Dado que $l \parallel m$. Determina el valor de $x$.




C

Si dos rectas paralelas son cortadas por una recta secante, entonces los ángulos alternos internos y los alternos externos son iguales. Esta afirmación se cumple también en sentido contrario; es decir, si los ángulos alternos internos o los alternos externos que se forman entre dos rectas cortadas por una secante son iguales, entonces las rectas son paralelas.

Por ejemplo:




$\sphericalangle b$ y $\sphericalangle h$, $\sphericalangle c$ y $\sphericalangle e$ son alternos internos y tienen igual medida entre sí;

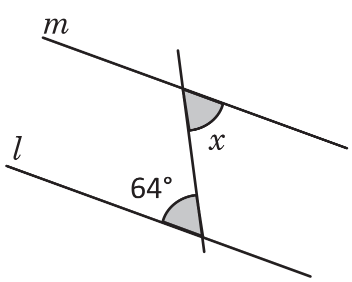
$\sphericalangle b = \sphericalangle h = 140°$ y $\sphericalangle c = \sphericalangle e = 40°$

$\sphericalangle a$ y $\sphericalangle g$, $\sphericalangle d$ y $\sphericalangle f$ son alternos externos y tienen igual medida entre sí;

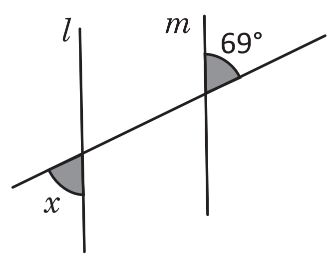
$\sphericalangle a = \sphericalangle g = 40°$ y $\sphericalangle d = \sphericalangle f = 140°$

Dado que $l \parallel m$. Determina el valor de $x$.

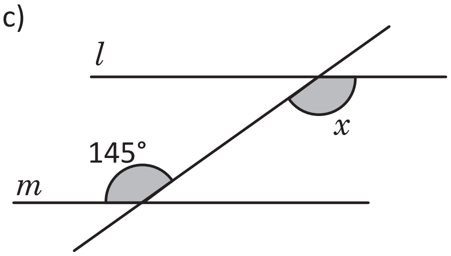
a)



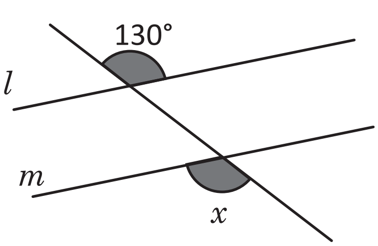

b)




c)




d)

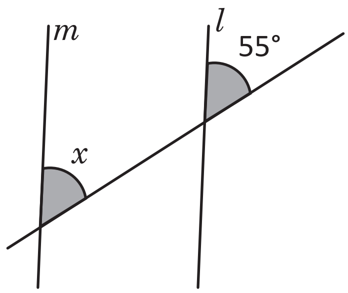



Unidad 4

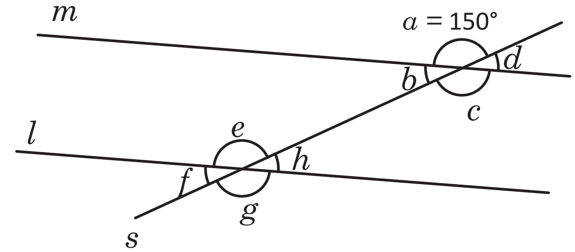
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.5 Demostración del teorema de ángulos internos de un triángulo

1. Dado que $l \parallel m$. Determina el valor de $x$.




2. Dado que $l \parallel m$. Identifica los pares de ángulos alternos internos y alternos externos y determina sus respectivas medidas.



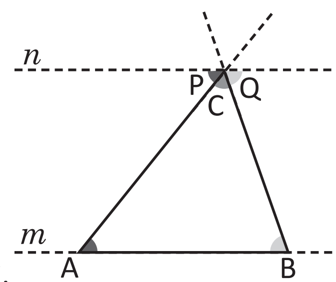

Para demostrar que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, ha sido necesario construir una recta paralela y utilizar las propiedades de los ángulos entre paralelas, tal como se muestra a continuación:

$\measuredangle$P + $\measuredangle$C + $\measuredangle$Q = 180° (por formar un ángulo llano).

$\measuredangle$P = $\measuredangle$A; $\measuredangle$Q = $\measuredangle$B (por ser ángulos alternos internos entre paralelas).

Entonces, $\measuredangle$A + $\measuredangle$B + $\measuredangle$C = 180° (sustituyendo).

Por tanto, la suma de los ángulos internos de un triángulo cualquiera es 180°.




1. Llena los espacios en blanco y demuestra que la medida del ángulo externo del vértice B, es igual a la suma de los otros dos ángulos internos del triángulo ABC; es decir, $\measuredangle$CBD = $\measuredangle$BCA + $\measuredangle$CAB.

Solución.

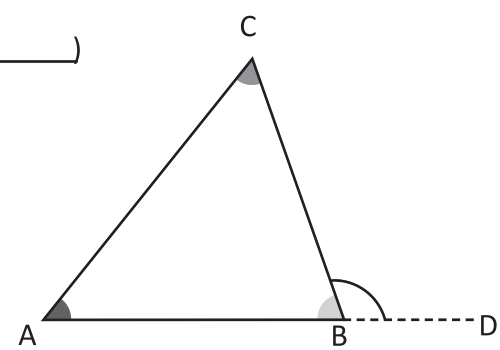
$\measuredangle$ABC + $\measuredangle$CBD = ____________ . . . (1) (por ser suplementarios)

$\measuredangle$ABC + $\measuredangle$BCA + $\measuredangle$CAB = 180° . . . (2) ( ________________________________ )

$\measuredangle$CBD = 180° – $\measuredangle$ABC .. (por 1)

$\measuredangle$BCA + $\measuredangle$CAB = ____________________ . (por 2)

Por lo tanto ______________________________________________




2. Define con tus palabras qué entiendes por demostración matemática.______________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

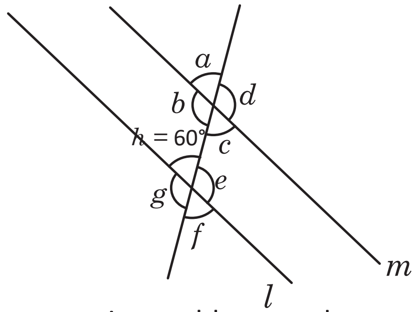


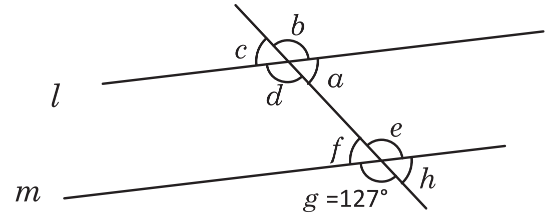
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.6 Elementos de una demostración

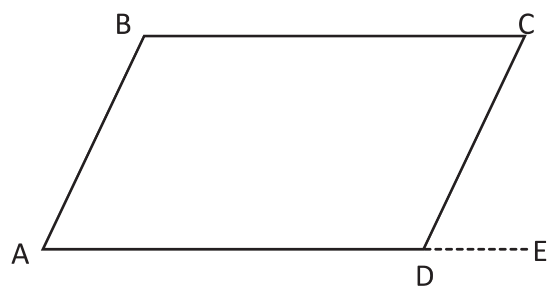
**R**

1. Dado que $l \parallel m$, identifica los pares de ángulos alternos internos, alternos externos y determina sus respectivas medidas.




2. Llena los espacios en blanco y demuestra que en un paralelogramo, los ángulos opuestos son de igual medida.




Solución.

Prolongando el lado AD hasta el punto E.

∢BAD = ________ (porque AB ∥ DC)

Entonces ∢CDE = ∢DCB ( ____________________ )

Por lo tanto, ∢BAD = ∢DCB.

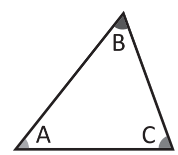
**C**

A la expresión de la forma “si ☐ , entonces ◯”, se le llama **proposición**.
A la parte representada por ☐ se le llama **hipótesis**; y la representada por ◯ se llama **conclusión**.

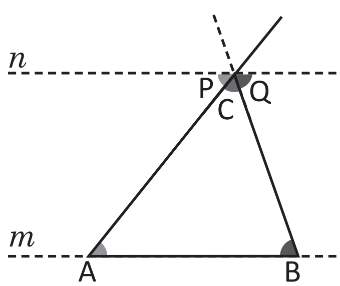
Analiza el siguiente ejemplo de demostración:

Si ∢A, ∢B y ∢C , son ángulos internos de un triángulo, entonces:

∢A + ∢B + ∢C = 180°




∢A, ∢B y ∢C, son ángulos internos del triángulo ABC. → **Hipótesis**




| Afirmación | Justificación | |
|---|---|---|
| 1. $n \parallel m$. | Por construcción. | → **Afirmaciones justificadas** |
| 2. ∢P + ∢C + ∢Q = 180° | Por formar un ángulo llano. | |
| 3. ∢P = A; ∢Q = ∢B. | Por ser alternos internos entre paralelas. | |
| 4. ∢A + ∢B + ∢C = 180° | Por 2 y 3. | → **Conclusión** |

Encierra en un cuadrado la hipótesis y en un óvalo las conclusiones de los siguientes enunciados:

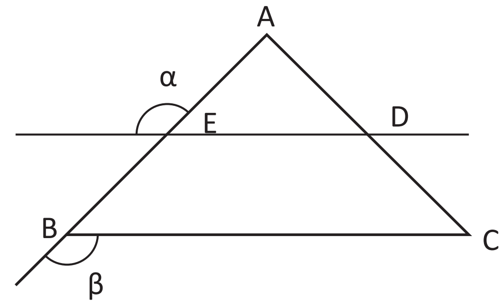
a) Si un número es divisible por 4 entonces es par.
b) Un triángulo es isósceles, si tiene dos lados de igual longitud.
c) Si ABC es un triángulo, entonces sus ángulos interiores suman 180°.
d) Si $n \parallel m$, entonces los ángulos correspondientes tienen igual medida.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.7 Aplicación de las características de los ángulos entre rectas paralelas

1. Llena los espacios en blanco y demuestra si la recta ED es paralela a la recta BC, los ángulos α y β son iguales.

Solución.




Considerando BA como una recta secante que corta a las dos paralelas.

∢α = ________ (por ser opuestos por el vértice)

Entonces ∢BED = ∢β ( ______________________ )

Por lo tanto, ∢α = ∢β.

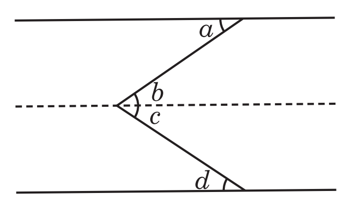
2. Encierra en un cuadrado la hipótesis y en un óvalo las conclusiones de los siguientes enunciados.

a) Si un número es divisible por 5 entonces su último dígito es 0 o 5.

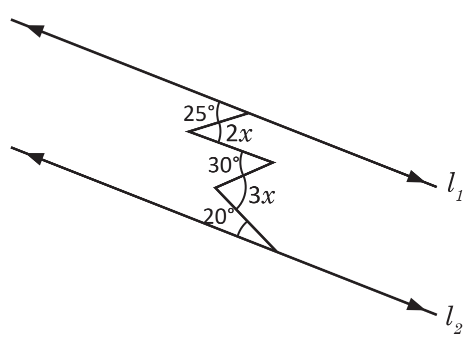
b) Si un triángulo es equilátero, entonces es isósceles.

Es posible aplicar las características de los ángulos entre paralelas para resolver problemas de la vida cotidiana que requieran el cálculo de ángulos desconocidos.

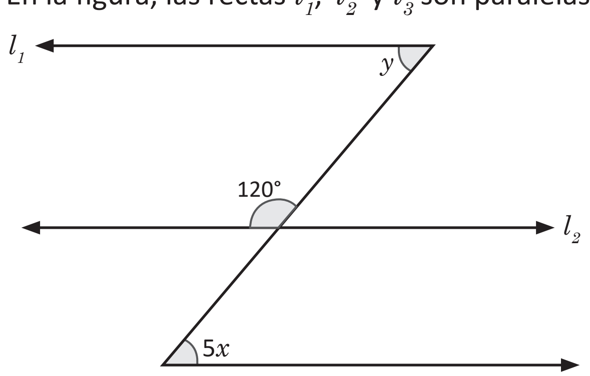
Recuerda para ángulos entre rectas paralelas como los de la figura, se cumple que
$\sphericalangle a + \sphericalangle d = \sphericalangle b + \sphericalangle c$




1. En la figura, $l_1$ es paralela a $l_2$, hallar el valor de $x$.




2. En la figura, las rectas $l_1$, $l_2$ y $l_3$ son paralelas, determina el valor de $x$ y $y$.






¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

**Calles y avenidas**

La figura muestra parte del mapa de la Ciudad de Santa Tecla, observa con atención y responde:

a) Escribe el nombre de dos calles que sean paralelas a la Calle Daniel Hernández.
b) Escribe el nombre de dos avenidas que son perpendiculares a la Avenida Manuel Gallardo.
c) Identifica una calle o avenida que sea oblicua al Paseo Concepción.
d) Si te encuentras con un turista en la intersección de la 3.ª Calle Poniente y la 10.ª Avenida Norte, ¿cómo le explicarías para que llegue al Palacio Tecleño de la Cultura y las Artes?


**Plaza Morazán**

Fue inaugurada el 15 de marzo de 1882. Está ubicada en el Centro Histórico de San Salvador frente al Teatro Nacional, cuna de la cultura y el arte. En el centro de la plaza se encuentra la estatua de mármol en honor al expresidente Francisco Morazán creada por el arquitecto italiano Francisco Durini.

Observa la fotografía y responde:

a) Identifica todos los polígonos en la Plaza Morazán y clasifícalos por sus lados.
b) Determina la suma de los ángulos internos y externos de los polígonos que encontraste.
c) ¿En qué otras partes de la fotografía puedes identificar polígonos?, márcalos y compara con tus compañeros.

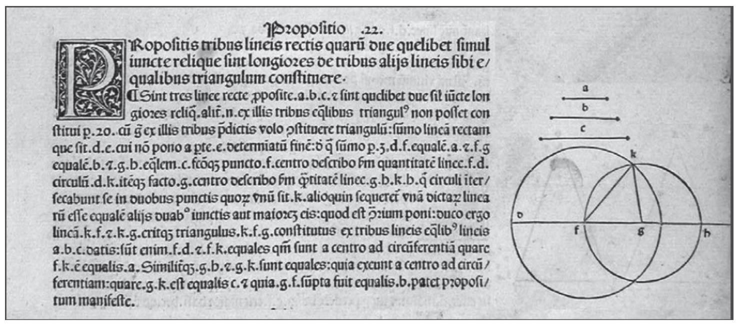


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# Unidad 5

# Criterios de congruencia de triángulos

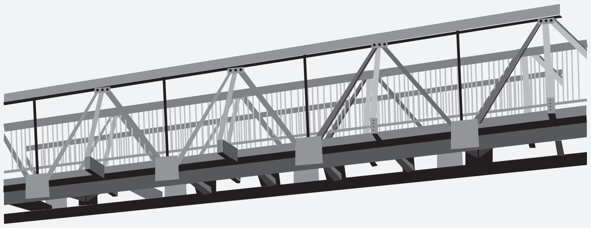
El texto *Los Elementos* de Euclides, es el tratado de matemáticas que mayor influencia ha tenido a lo largo de toda la historia de la cultura, incluso mucho más allá de la propia matemática y ciencias afines. Desde la proposición 16 hasta la 26 del libro I, Euclides presenta resultados generales acerca de los triángulos; por ejemplo, construcciones elementales con regla y compás, congruencias de triángulos y cuadriláteros, desigualdades relativas a ángulos y lados de un triángulo, etc.


Propositio .22.
Propositis tribus lineis rectis quarũ due quelibet simul iuncte relique sint longiores de tribus alijs lineis sibi equalibus triangulum constituere.
Sint tres linee recte ꝓposite.a.b.c.ꝛ sint quelibet due sil iũcte longiores reliq̃.alit̃.n.ex illis tribus eq̃libus triangul⁹ non posset constitui p.20. cũ g̃ ex illis tribus p̃dictis volo ꝯstituere triangulũ:sũmo lineã rectam que sit.d.e.cui nõ pono a pte.e.determiatũ finẽ:d q̃ sũmo p.3.d.f.equalẽ.a.ꝛ.f.g equalẽ.b.ꝛ.g.b.eq̃lem.c.fcõq3 puncto.f.centro describo ſm quantitatẽ linee.f.d. circulũ.d.k.iteq3 facto.g.centro describo ſm q̃titatẽ linee.g.b.k.b.q̃ circuli iter/secabunt se in duobus punctis quoꝝ vnũ sit.k.alioquin sequeret̃ vnã dictaꝝ linearũ esse equalẽ alijs duab⁹ iunctis aut maiorẽ eis:quod est ꝯ̃rium poni:duco ergo lineã.k.f.ꝛ.k.g.eritq3 triangulus.k.f.g.constitutus ex tribus lineis eq̃lib⁹ lineis a.b.c.datis:sũt enim.f.d.ꝛ.f.k.equales q̃m sunt a centro ad circũferentiã quare f.k.ẽ equalis.a.Similit̃q3.g.b.ꝛ.g.k.sunt equales:quia exeunt a centro ad circũ/ferentiam:quare.g.k.est equalis c.ꝛ quia.g.f.sũpta fuit equalis.b.patet proposi/tum manifeste.

*Proposición I. 22 del texto* Los Elementos *de Euclides.*

La congruencia de figuras, es utilizada en la construcción arquitectónica, ensamble de equipo y mobiliario, diseño de interiores, fabricación de automóviles, reconstrucción de infraestructura, etc.


*La congruencia, se puede utilizar en el diseño de muebles en serie.*


*La congruencia de figuras se puede utilizar para el diseño de pasarelas.*

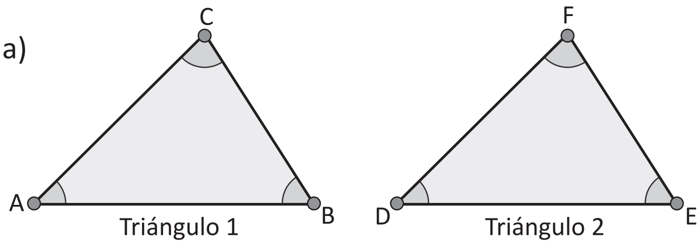
En esta unidad estudiarás el sentido de la congruencia de triángulos y los criterios que permiten determinar si dos o más triángulos son congruentes; así como sus aplicaciones para demostrar propiedades matemáticas o para resolver situaciones de la vida cotidiana.

# 1.1 Sentido de la congruencia de dos figuras

Dos figuras que coinciden cuando se sobreponen se llaman **congruentes**.
Los vértices, lados y ángulos que coinciden al sobreponer dos figuras congruentes se llaman **correspondientes**.

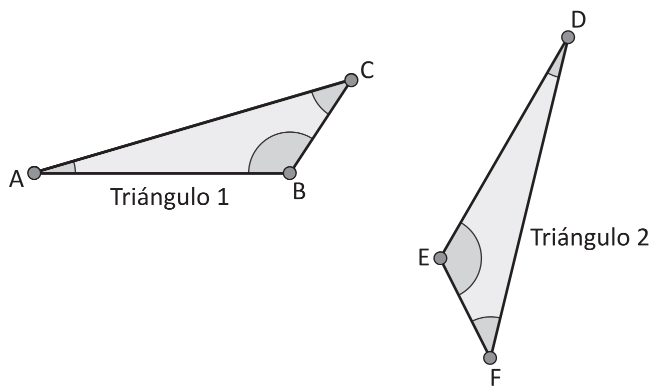
1. Los triángulos son congruentes. Identifica los vértices, lados y ángulos correspondientes.

a)



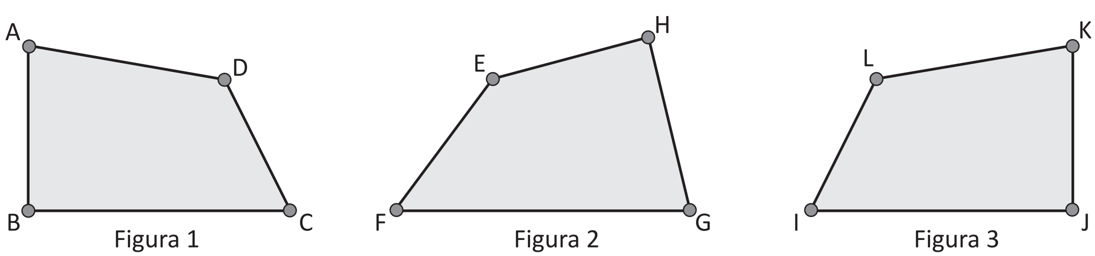

| Vértices correspondientes | Lados correspondientes | Ángulos correspondientes |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |

b)




| Vértices correspondientes | Lados correspondientes | Ángulos correspondientes |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |

2. Compara las siguientes figuras e identifica las que son congruentes; indica los lados y ángulos correspondientes.



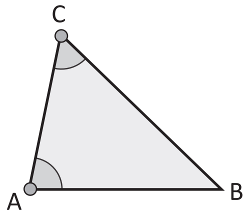

| Vértices correspondientes | Lados correspondientes | Ángulos correspondientes |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |



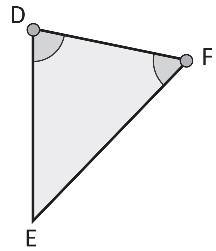
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.2 Congruencia de triángulos

Los triángulos son congruentes. Identifica los vértices, lados y ángulos correspondientes.



Triángulo 1



Triángulo 2

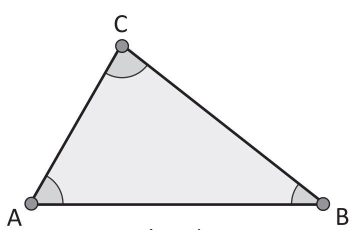
| Vértices correspondientes | Lados correspondientes | Ángulos correspondientes |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |

En los triángulos congruentes, las medidas de los lados y los ángulos correspondientes son iguales.

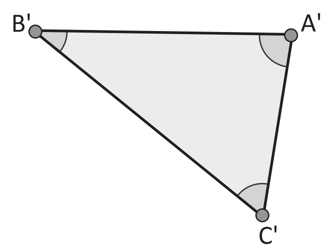
Para indicar que los triángulos ABC y A'B'C' son congruentes se utiliza el símbolo $\cong$; es decir, $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$, que se lee **el triángulo ABC es congruente con el triángulo A'B'C'.**

Si el $\Delta ABC$ y $\Delta A'B'C'$ son congruentes, compara las medidas de sus lados y ángulos correspondientes y representa la congruencia de los triángulos usando el símbolo $\cong$.

a)

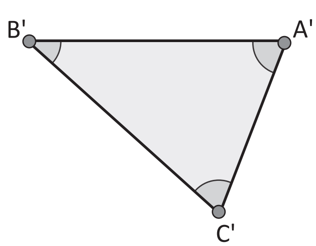


Triángulo 1

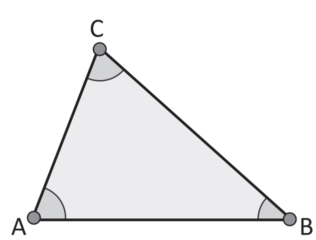


Triángulo 2

b)



Triángulo 1



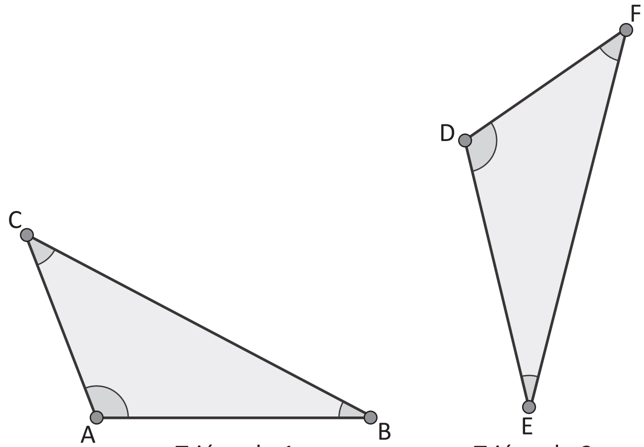
Triángulo 2



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.3 Primer criterio de congruencia de triángulos

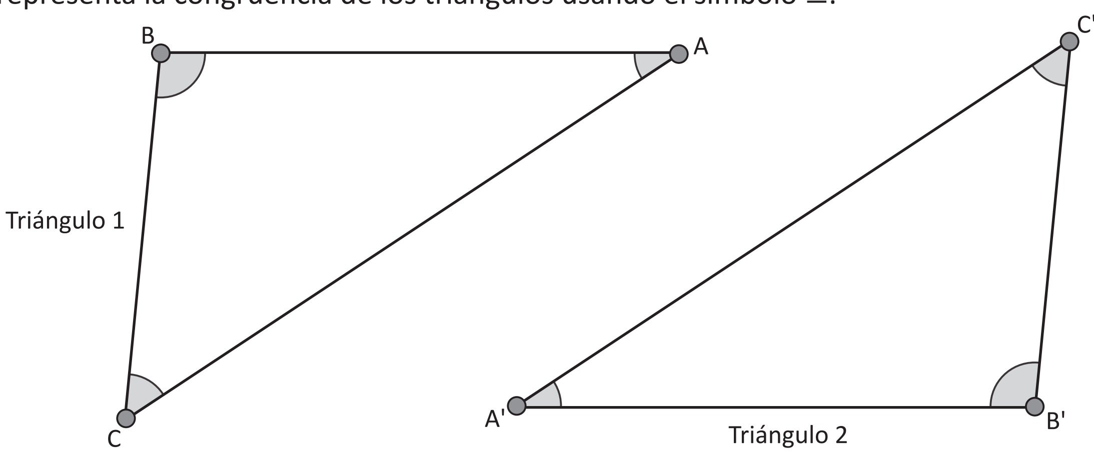
1. Los triángulos son congruentes. Identifica los vértices, lados y ángulos correspondientes.



Triángulo 1 Triángulo 2

| Vértices correspondientes | Lados correspondientes | Ángulos correspondientes |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |

2. Si el $\Delta ABC$ y $\Delta A'B'C'$ son congruentes, compara las medidas de sus lados y ángulos correspondientes y representa la congruencia de los triángulos usando el símbolo $\cong$.




Primer criterio de congruencia:

Dos triángulos que tienen sus tres lados iguales son congruentes. Este criterio se conoce como **Lado, Lado, Lado (LLL);** es decir, $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ dado que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ y $BC = B'C'$.

Identifica los pares de triángulos congruentes:

a) $\Delta ABC$; $AB = 6$, $BC = 5$, $CA = 8$

b) $\Delta DEF$; $DE = 5$, $EF = 4$, $FD = 7$

c) $\Delta GHI$; $GH = 5$, $HI = 6$, $IG = 3$

d) $\Delta JKL$; $JK = 6$, $LJ = 8$, $KL = 5$

e) $\Delta MNO$; $MN = 5$, $OM = 3$, $NO = 6$

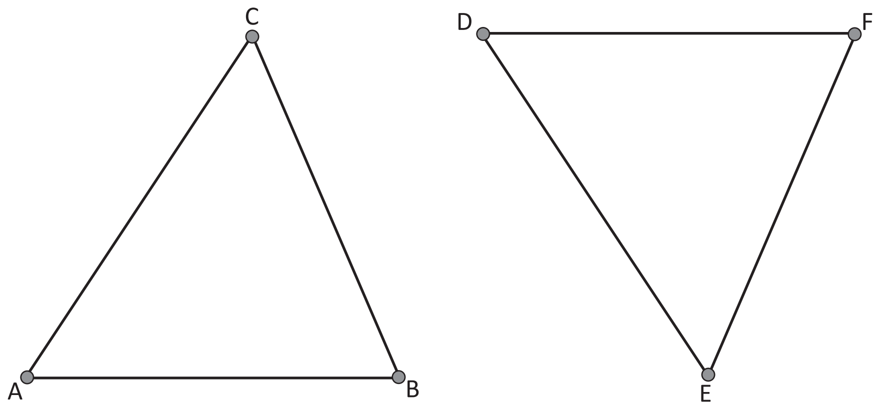
f) $\Delta PQR$; $PQ = 5$, $QR = 4$, $RP = 7$



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.4 Segundo criterio de congruencia de triángulos

R 1. Si los triángulos siguientes son congruentes, compara las medidas de sus lados y ángulos correspondientes y representa la congruencia de los triángulos usando el símbolo ≅.



Triángulo 1 Triángulo 2

2. Identifica los pares de triángulos congruentes:

a) ΔABC; AB = 8, BC = 4, CA = 9

b) ΔDEF; DE = 7, EF = 5, FD = 8

c) ΔGHI; GH = 8, IG = 7, IH = 5

d) ΔJKL; JK = 8, LJ = 4, KL = 9

C Segundo criterio de congruencia:

Dos triángulos que tienen dos ángulos iguales, así como el lado comprendido entre ellos respectivamente igual, son congruentes. Este criterio se conoce como **Ángulo, Lado, Ángulo (ALA)**.
ΔABC ≅ ΔA'B'C' dado que ∢B = ∢B', BC = B'C' *y* ∢C = ∢C'.

Identifica los pares de triángulos congruentes:

a) ΔABC; BC = 5, ∢B = 55°, ∢C = 85°

b) ΔDEF; EF = 6, ∢E = 35°, ∢F = 95°

c) ΔGHI; GH = 7, ∢G = 40°, ∢H = 80°

d) ΔJKL; JK = 6, ∢J = 35°, ∢K = 95°

e) ΔMNO; MO = 7, ∢M = 80°, ∢O = 40°

f) ΔPQR; PR = 5, ∢P = 85°, ∢R = 55°

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.5 Tercer criterio de congruencia de triángulos

1. Identifica los pares de triángulos congruentes:

a) $\Delta ABC$; $AB = 9$, $BC = 4$, $CA = 6$

b) $\Delta DEF$; $DE = 7$, $EF = 4$, $FD = 6$

c) $\Delta GHI$; $GH = 4$, $HI = 6$, $IH = 9$

d) $\Delta JKL$; $JK = 6$, $LJ = 7$, $KL = 4$

2. Identifica los pares de triángulos congruentes:

a) $\Delta ABC$; $BC = 12$, $\measuredangle B = 25°$, $\measuredangle C = 105°$

b) $\Delta DEF$; $EF = 8$, $\measuredangle E = 65°$, $\measuredangle F = 80°$

c) $\Delta GHI$; $GH = 8$, $\measuredangle G = 80°$, $\measuredangle H = 65°$

d) $\Delta JKL$; $JK = 12$, $\measuredangle J = 25°$, $\measuredangle K = 105°$

Tercer criterio de congruencia:

Dos triángulos que tienen dos de sus lados iguales, así como el ángulo comprendido entre ellos también igual, son congruentes. Este criterio es conocido como **Lado, Ángulo, Lado (LAL);** $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ dado que $BC = B'C'$, $\measuredangle C = \measuredangle C'$ y $CA = C'A'$.

Identifica los pares de triángulos congruentes:

a) $\Delta ABC$; $BC = 7$, $CA = 10$, $\measuredangle C = 80°$

b) $\Delta DEF$; $EF = 5$, $FD = 10$, $\measuredangle F = 55°$

c) $\Delta GHI$; $GH = 6$, $IG = 4$, $\measuredangle G = 105°$

d) $\Delta JKL$; $JK = 6$, $KL = 4$, $\measuredangle K = 105°$

e) $\Delta MNO$; $OM = 10$, $NO = 7$, $\measuredangle O = 80°$

f) $\Delta PQR$; $RP = 10$, $PQ = 5$, $\measuredangle P = 55°$

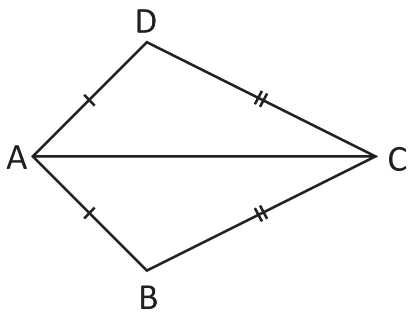


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.6 Aplicación de los criterios de congruencia de triángulos

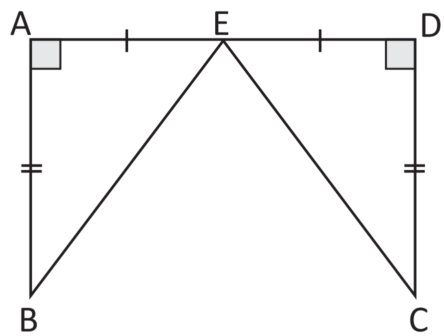
R Analiza si las condiciones dadas en cada caso son suficientes para que los triángulos sean congruentes, en caso de que lo sean, escribe el criterio que cumplen.

a)




AB = AD
BC = DC
ΔABC___ΔADC

b)

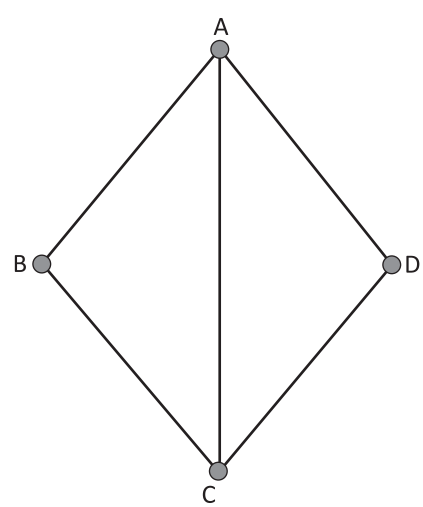



AB = DC
AE = DE
ΔABE ___ ΔDCE

C A la serie de argumentos, donde cada uno sigue de manera lógica los anteriores y cada argumento es fundamentado por otros ya comprobados se le llama **Demostración.**



Dado que el cuadrilátero ABCD es un rombo y AC es diagonal, demuestra que ΔABC ≅ ΔCDA.

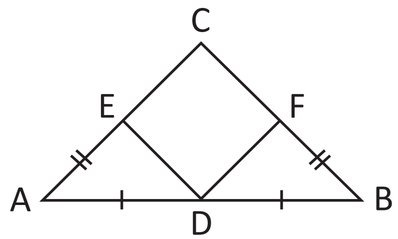



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.7 Aplicación de criterios de congruencia de triángulos

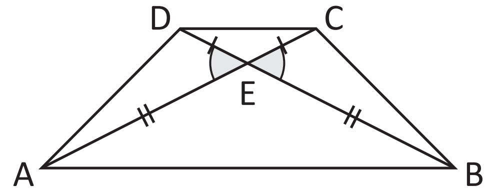
1. Analiza si las condiciones dadas son suficientes para que los triángulos sean congruentes, en caso de que lo sean, escribe el criterio que cumplen.

a)



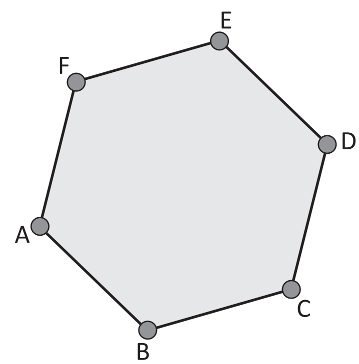

AC = BC, el cuadrilátero CEDF es un rombo
D es el punto medio del lado AB
ΔADE___ΔBDF

b)




AE = BE
DE = CE
ΔAED ___ ΔBEC

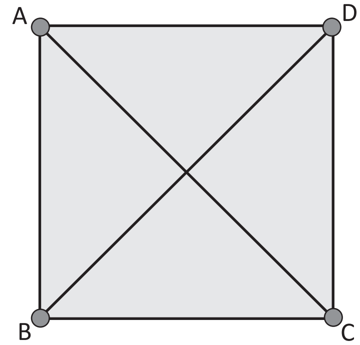
2. Dado el hexágono regular, justifica por qué ΔAEF ≅ ΔDFE.




En matemática se usa el lenguaje: Si ☐, entonces ◯.

☐ corresponde a la hipótesis y ◯, corresponde a la **conclusión**.

Los segmentos AC y DB son las diagonales del cuadrado ABCD. Demuestra que AC = DB, luego escribe la hipótesis y la conclusión.

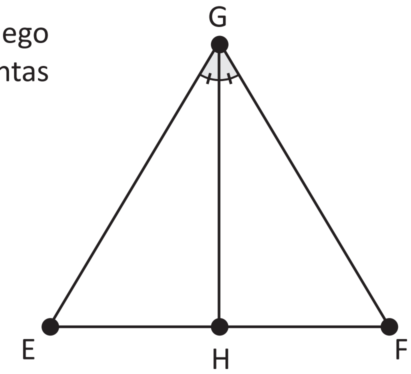




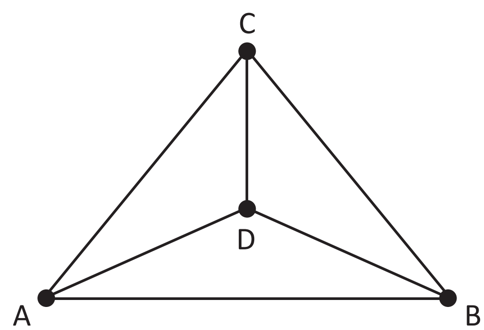

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.8 Aplicación de la congruencia de triángulos, parte 1

1. Dado el triángulo EFG isósceles, justifica por qué ΔEHG ≅ ΔFHG; luego analiza si la justificación es única, caso contrario escribe las distintas formas de justificar.

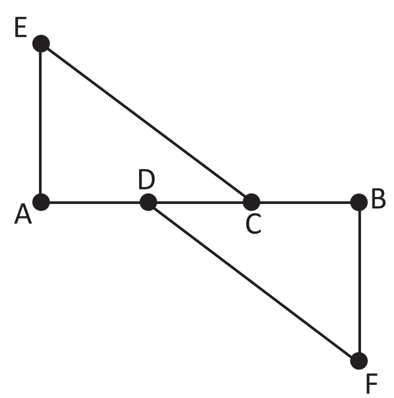



2. En la figura, los triángulos ABC y ABD son isósceles. Demuestra que ΔADC ≅ ΔBDC, luego escribe la hipótesis y la conclusión.

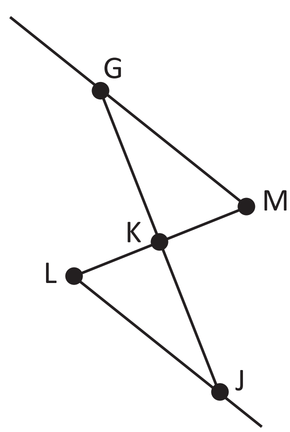



Unidad 5

1. En la figura, AD = BC y AE = BF, además AE ⊥ AB y BF ⊥ AB. Demuestra que ΔACE ≅ ΔBDF.




2. En la figura, GM ∥ LJ y K es el punto medio de GJ, demuestra que ΔKLJ ≅ ΔKMG.

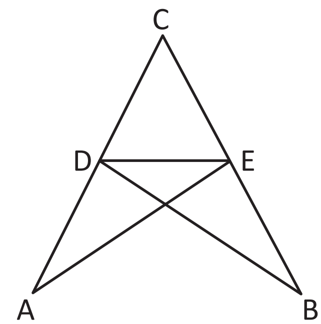



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

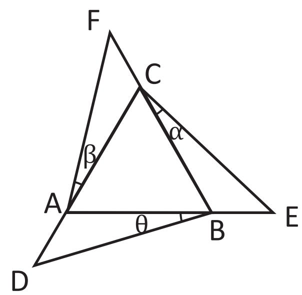
## 1.9 Aplicación de la congruencia de triángulos, parte 2

R

1. Si, AD = BE y DC = CE , demuestra que ΔACE ≅ ΔBCD; luego escribe la hipótesis y la conclusión.




2. El triángulo ABC es equilátero, $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ son prolongaciones de los lados del ΔABC. Además ∢α = ∢β = ∢θ, demuestra que ΔADB ≅ ΔBEC ≅ ΔCFA.

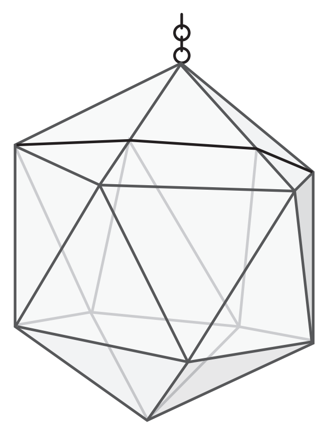



1. La empresa A elabora juegos de comedor triangulares, si un cliente quiere 6 iguales al de la imagen.

   a) ¿Cuántas y cuáles medidas debe tomar como mínimo para replicar la mesa y que todas sean iguales?

   b) Si se quiere que los tres lados de la mesa sean iguales, ¿cuáles serían las medidas de los ángulos?

2. Para decorar la casa, Ana ha diseñado un adorno para lámpara, si en su casa tiene 10 lámparas y quiere colocarles adornos iguales a todas, determina:



   a) ¿Qué medidas debe tomar como mínimo para que todas le queden iguales?

   b) Busca los materiales adecuados y elabora un adorno para lámpara como el de la figura.



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## Problemas de aplicación

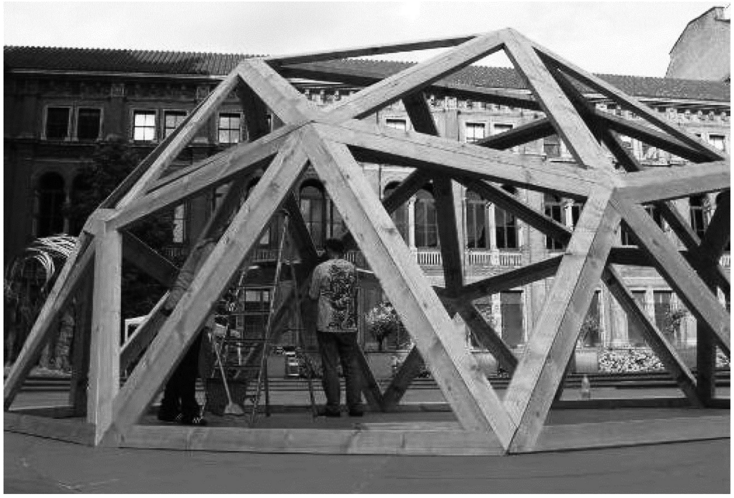
**Los triángulos en la industria**

El icosidodecaedro tiene 20 caras triangulares y 12 pentagonales está especialmente indicado para construir cúpulas desmontables por su esfericidad. Esta propiedad no ha pasado desapercibida para la industria: una vivienda desmontable muy eficaz es un hemiicosododecaedro.

a) ¿Qué características tienen los triángulos que forman el hemiicosododecaedro?

b) ¿En qué otras construcciones se evidencia el uso de triángulos? Escribe al menos 3 ejemplos.

c) ¿Qué medidas debes tomar para hacer una réplica exacta de la cúpula mostrada en la figura?
Escribe los diferentes casos.



**Organizando el salón de clases**

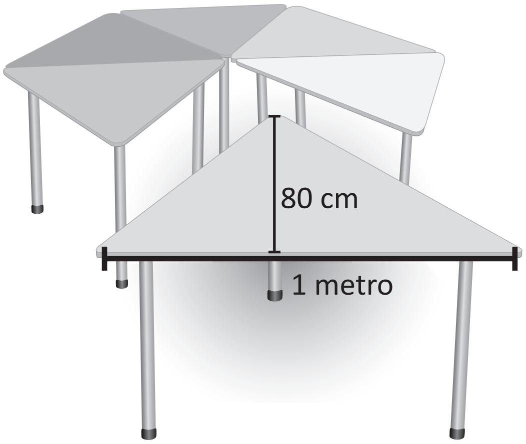
En Educación Inicial, el aula se organiza procurando que los niños y niñas tengan un ambiente agradable, afectivo, familiar, seguro atractivo, con imágenes y objetos que además de ser significativos sirvan para cultivar valores, conocimientos, actitudes y el desarrollo de habilidades. También los niños y niñas deben tener espacio para desplazarse así como para realizar diferentes actividades. En ese sentido la profesora Carmen quiere distribuir las mesas formando 5 hexágonos como el de la figura.
Observa la figura y realiza lo siguiente:

a) Calcula el área de cada mesa triangular.

b) ¿Qué tipo de triángulos deben ser las mesas para que sea factible formar las mesas hexagonales ?

c) Determina el área que ocupa cada mesa hexagonal.

d) ¿Cuánto espacio necesita la maestra para colocar las 5 mesas hexagonales?




Unidad 5

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# Unidad 6

# Características de los triángulos y cuadriláteros

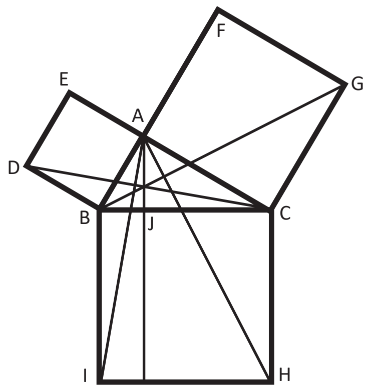
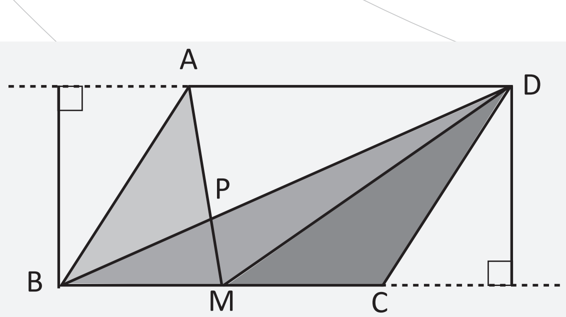



*Ilustración de la proposición I. 47, texto* Los Elementos *de Euclides.*

El matemático y geómetra griego Euclides, estableció relaciones entre paralelogramos y triángulos con la misma base, que se forman entre rectas paralelas; estas relaciones fueron utilizadas para demostrar otras como la mostrada en la imagen, que corresponde a la proposición I. 47 del libro *Los Elementos*.

Los triángulos son utilizados como base para construir puentes, ventanas, puertas, veleros, señales de tránsito, ganchos para colgar la ropa, etc. Esto debido a que el triángulo es la única figura que no se puede deformar, se haga lo que se haga, seguirá siendo un triángulo.

*Pasarela del Redondel Masferrer, San Salvador.*

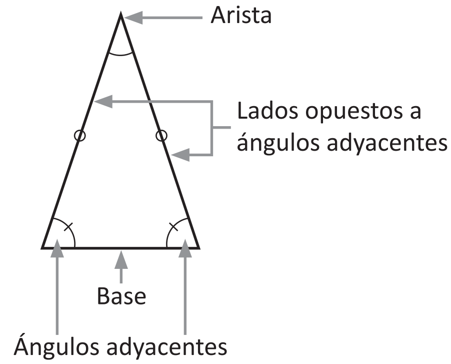



*Triángulos de igual base e igual altura.*

En el desarrollo de los contenidos de esta unidad, conocerás y demostrarás propiedades de triángulos y cuadriláteros, mediante el uso de los criterios de congruencia de triángulos, así como la relación entre las áreas de triángulos y cuadriláteros.

# 1.1 Triángulos isósceles

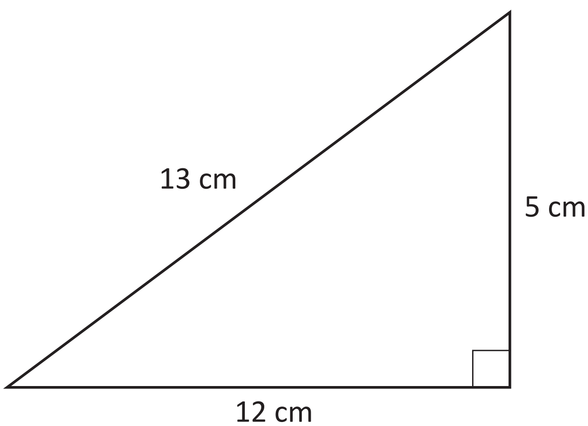
La definición de los triángulos isósceles es que dos de sus lados son de igual longitud y se caracterizan porque la medida de dos de sus ángulos es igual.



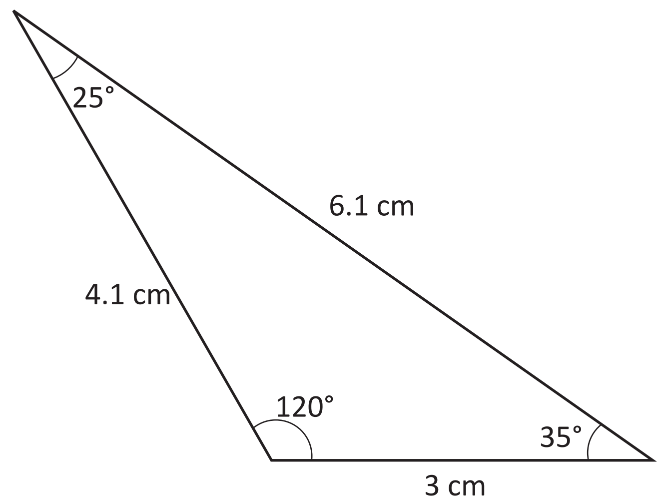

Las partes de un triángulo isósceles son:
**Arista:** Es el vértice donde concurren los lados de igual longitud.
**Base:** Es el lado opuesto de la arista.
**Ángulos adyacentes:** Son los ángulos formados por la base y los otros dos lados del triángulo.
**Lados opuestos a ángulos adyacentes:** Son los lados de igual longitud en un triángulo isósceles.

Clasifica los siguientes triángulos, argumenta tu respuesta y señala las partes de los triángulos isósceles.

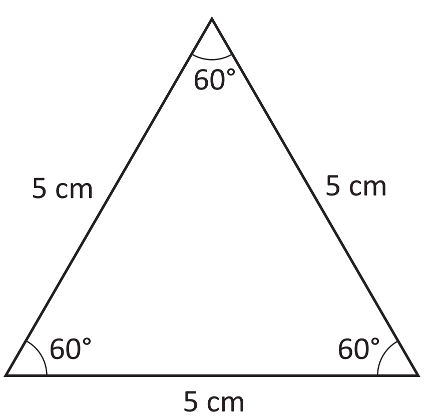
a)



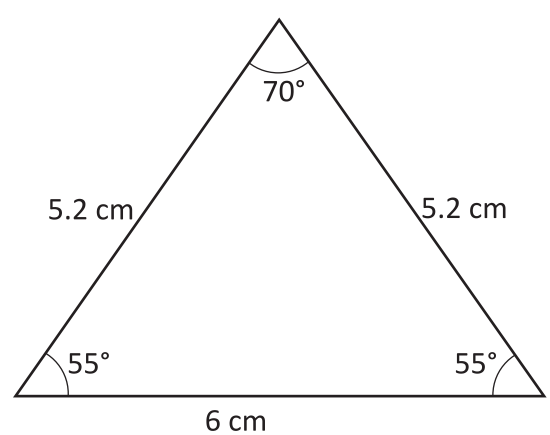

b)




c)




d)






¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.2 Teorema del triángulo isósceles

R

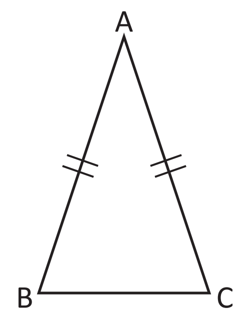
1. ¿Cuáles son las tres clasificaciones de triángulos según la longitud de sus lados?

2. Menciona las partes de un triángulo isósceles:

C

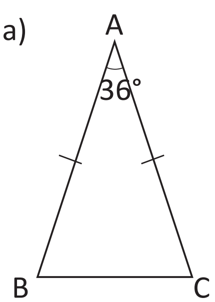
En un triángulo isósceles se cumple que los ángulos de la base son congruentes.

Ejemplo:
Si el ΔABC es isósceles con lados AB = AC, entonces ∢ABC = ∢ACB.

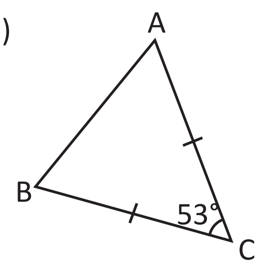



1. Determina la medida de los ángulos restantes de cada triángulo, aplicando el teorema demostrado.

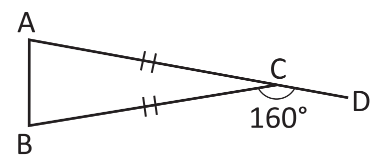
a)



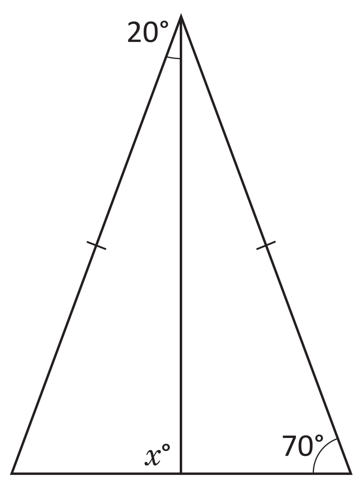

b)




c)



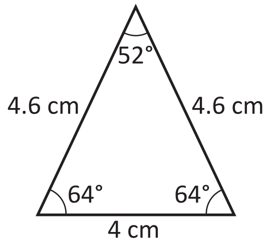

2. En la figura, encuentra la medida del ángulo $x$ aplicando el teorema demostrado en clase.

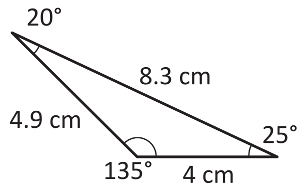



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

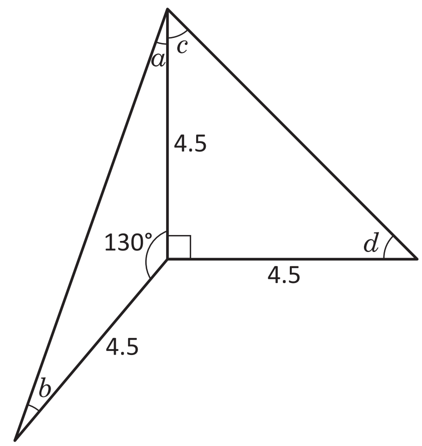
# 1.3 Bisectriz de un triángulo isósceles

1. Clasifica los siguientes triángulos y justifica tu respuesta.

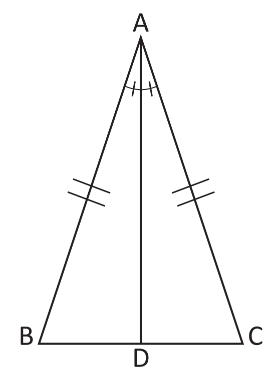



2. Encuentra los ángulos que faltan en la figura que se muestra, conociendo que los triángulos mostrados son isósceles, argumenta utilizando el teorema visto en la clase anterior.

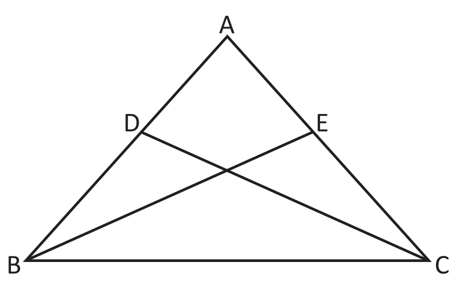



En un triángulo isósceles se cumple que la bisectriz del ángulo comprendido entre los dos lados de igual longitud del triángulo es mediatriz del lado opuesto.

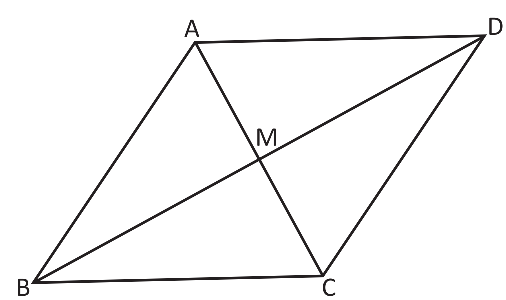



Observa que por este resultado se puede concluir que la bisectriz también es altura y mediana del triángulo isósceles.

1. En un triángulo isósceles ΔABC, los lados congruentes son AB y AC. BE y CD son bisectrices. Demuestra que el segmento BE = CD.




2. En el ΔABC, BA = BC y la bisectriz del ∢B, es el segmento BM, explica la razón por la que el segmento DM es mediana del triángulo ΔACD.



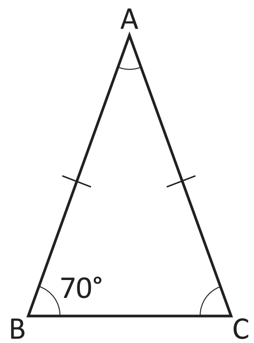



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

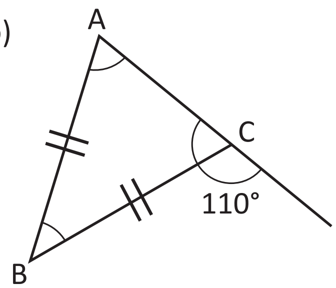
## 1.4 Triángulos equiláteros

1. Determina la medida de los ángulos restantes de cada triángulo aplicando el teorema de ángulos adyacentes, demostrado en la clase 1.2.

a)

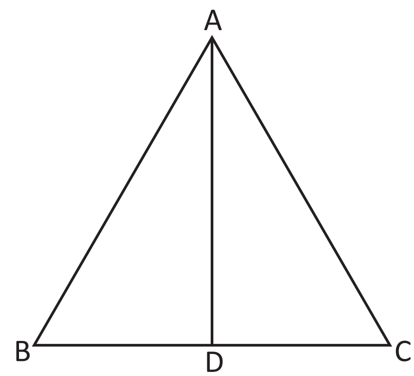



b)




2. En la figura, el segmento AD es mediatriz del lado BC. ¿Cuáles son las afirmaciones correctas? Justifica tu respuesta.

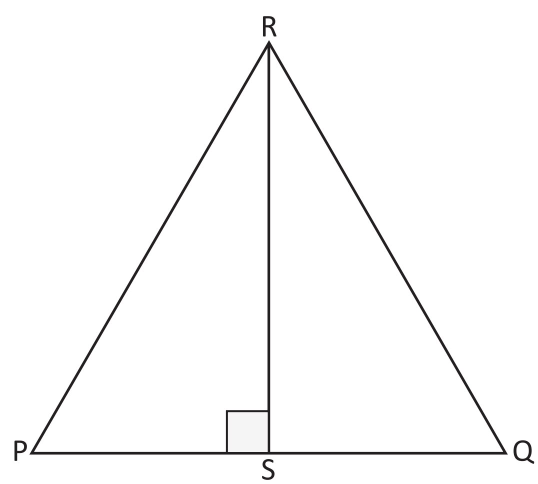
a) El triángulo es isósceles
b) BD = CD
c) AD es la bisectriz del ángulo A




Cada uno de los ángulos internos de un triángulo equilátero mide 60°.

Determina si en el triángulo equilátero PQR de la figura, se cumplen las condiciones de los literales a y b o solamente uno de los dos literales.

a) $\Delta PSR \cong \Delta QSR$
b) $\sphericalangle SPR = 60°$

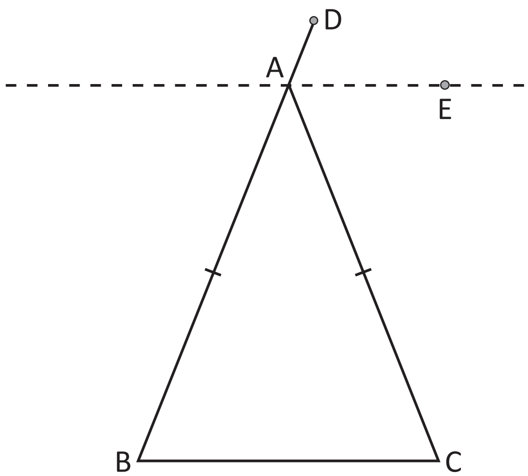



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

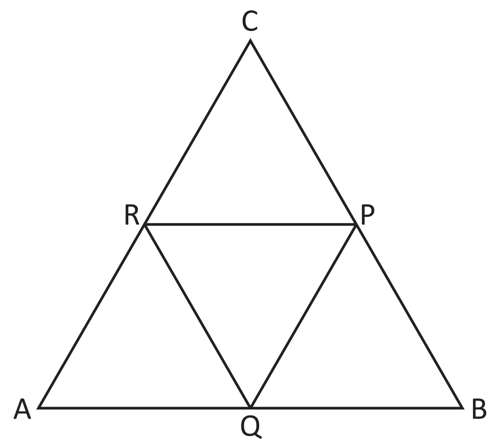
# 1.5 Teorema sobre triángulos isósceles y equiláteros

R

1. Demuestra que en todo triángulo isósceles, la bisectriz del ángulo externo opuesto a los ángulos congruentes es paralela a la base.



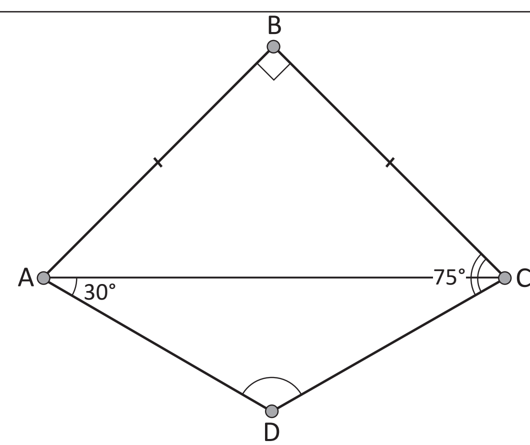

2. En la figura P, Q y R son puntos medios del triángulo equilátero ΔABC. Demuestra que ΔRQP es equilátero.



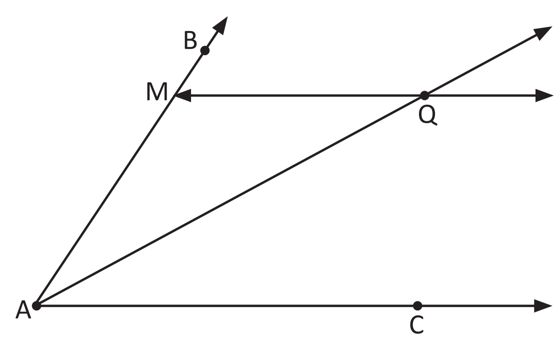

C

En un triángulo, si dos ángulos tienen igual medida, entonces los lados opuestos tienen igual longitud.

1. En la figura, AB = BC, el ∢B = 90°, el ∢DAC = 30°, y el ∢DCB = 75°. Demuestra que AD = DC.




2. Demuestra que, si por un punto Q de la bisectriz del ángulo ∢BAC se traza una paralela al lado AC, el ΔAQM es isósceles.



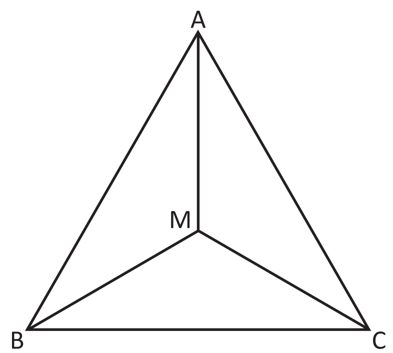



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

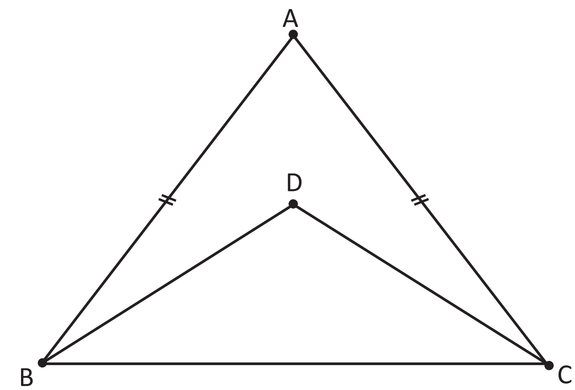
# 1.6 Recíproco y contraejemplo de un teorema

R

1. En la figura, el triángulo ABC es equilátero y se trazan las bisectrices de los ángulos ABC y BCA, se forman tres triángulos ΔABM, ΔAMC y ΔMBC. Encuentra los ángulos internos de dichos triángulos.




2. En la figura, el ΔABC es isósceles. Demuestra que el triángulo más pequeño es isósceles, siendo D el punto que se encuentra en la mediatriz del ΔABC.



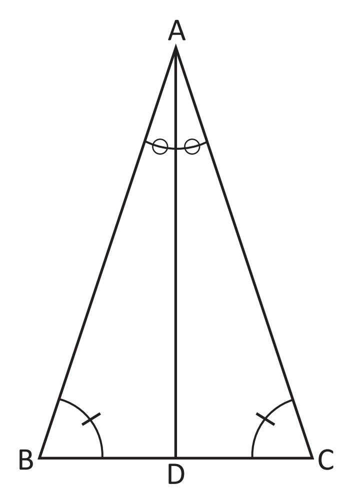

C

El teorema que intercambia la hipótesis y la conclusión de otro teorema se conoce como **teorema recíproco**.

El recíproco de un teorema puede que no se cumpla, en ese caso hay que presentar un ejemplo que muestre que no se cumple y se conoce como **contraejemplo**.

1. Determina el recíproco del siguiente enunciado: "Todo triángulo isósceles es un triángulo rectángulo"; en caso de no ser cierto, proporciona un contraejemplo.

2. Determina el recíproco de: "En el triángulo isósceles ΔABC, donde AB = AC, si AD es mediatriz; entonces, AD es bisectriz del ∢A. Escribe su recíproco, demuestra si se cumple y en caso de que no se cumpla, proporciona un contraejemplo.



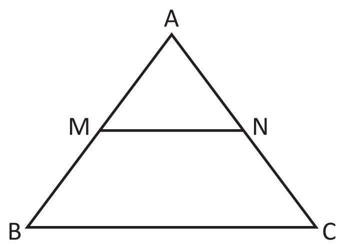

Unidad 6

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.7 Primer criterio de congruencia de triángulos rectángulos

R

1. En la figura AB = AC, BC ∥ MN, demuestra que el ΔAMN es isósceles.

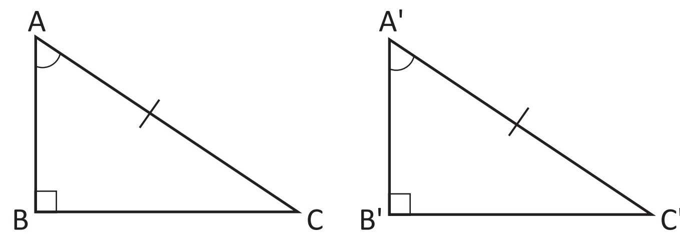



2. Determina el recíproco de "en el ΔABC, si ∢A = 90°, entonces ∢B < 90° y ∢C < 90°". Demuestra si se cumple o proporciona un ejemplo si no se cumple.

C

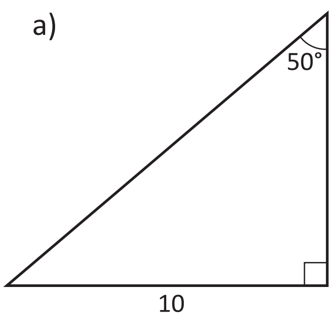
**Primer criterio de congruencia de triángulos rectángulos**

Si en dos triángulos rectángulos se cumple que la hipotenusa y un ángulo agudo son respectivamente de igual medida, entonces los triángulos son congruentes.

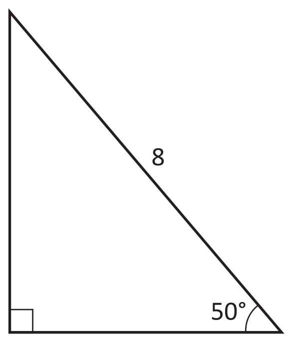



En los siguientes triángulos rectángulos, agrupa los que son congruentes. Justifica tu solución.

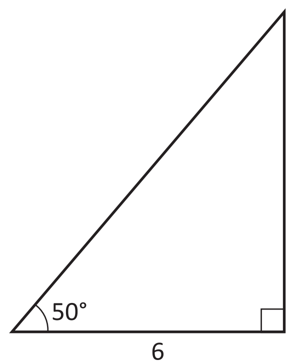
a)



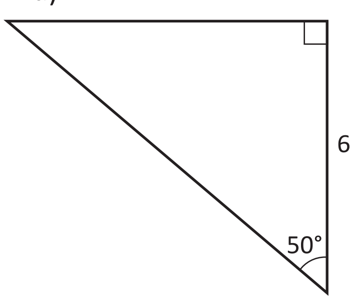

b)



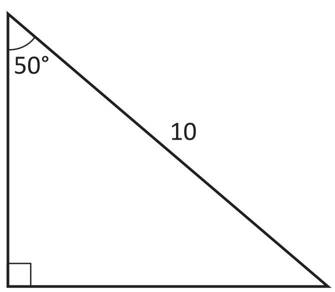

c)



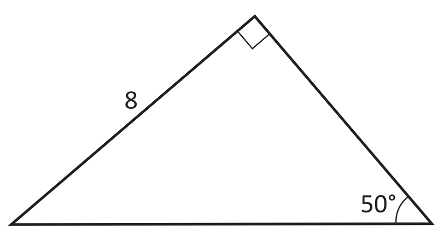

d)




e)




f)



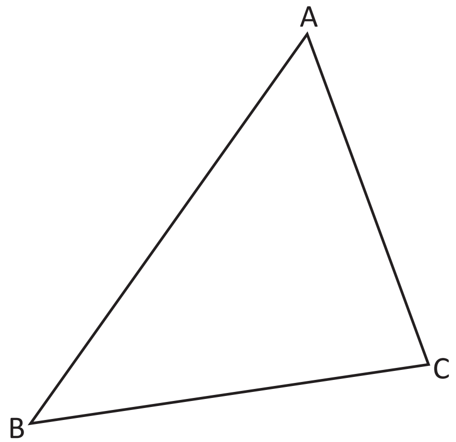



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# 1.8 Segundo criterio de congruencia de triángulos rectángulos

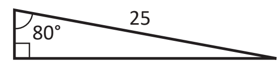
R

1. Determina el recíproco de "En el ΔABC, si AB > AC, entonces ∢B < ∢C".

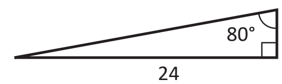



2. En los siguientes triángulos rectángulos, agrupa los que son congruentes. Justifica tu solución.

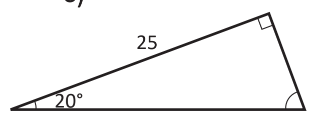
a)



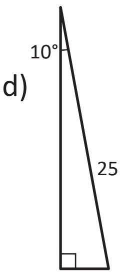

b)




c)




d)

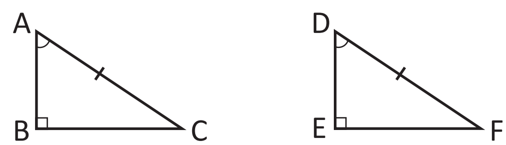



C

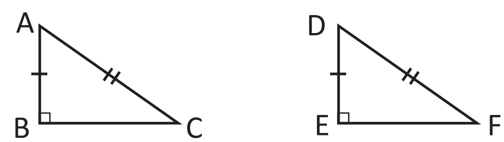
**Criterios de congruencia de triángulos rectángulos**

Dos triángulos rectángulos son congruentes si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

1. La hipotenusa y un ángulo agudo son respectivamente de igual medida.

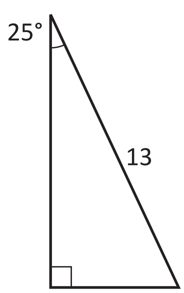



2. La hipotenusa y un cateto son respectivamente de igual medida.

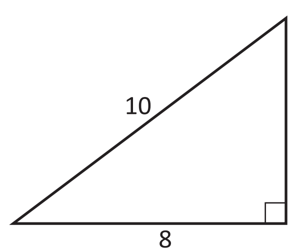



En los siguientes triángulos rectángulos, agrupa los que son congruentes. Justifica tu solución.

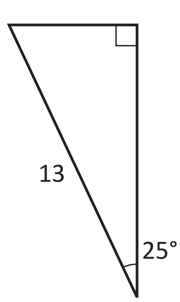
a)



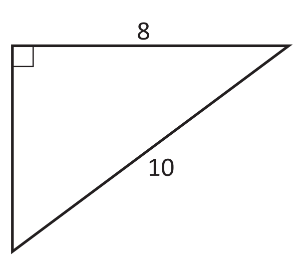

b)




c)

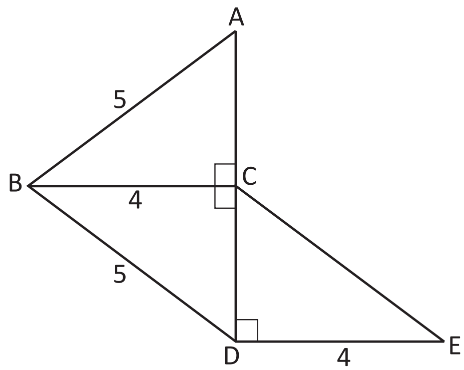



d)

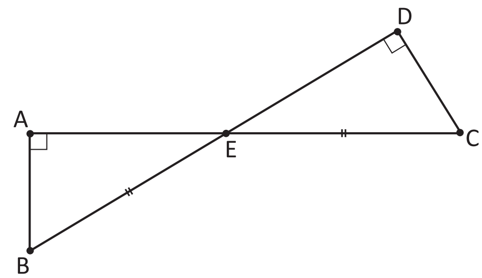


# 1.9 Condiciones necesarias y suficientes

1. En la figura, ¿con qué criterios puedes comprobar que los triángulos ΔABC, ΔDBC y ΔCED son congruentes?




2. En la figura, ¿qué criterios puedes utilizar para comprobar que el ΔABE y ΔDCE son congruentes?




Cuando se cumple la proposición "si A, entonces B", se dice que "A es suficiente para B" y que "B es necesaria para A".

Una condición es necesaria para otra si al no cumplirse, la otra tampoco se cumple.

En los siguientes enunciados, ¿cuáles de los literales de B son necesarios o suficientes para A?

A: En los isósceles ABC y DEF, se cumple que BC = EF.

a) B: La altura de los 2 triángulos mide lo mismo.

b) B: Los lados de los triángulos AB = DE y AC = DF son iguales.

c) B: Los triángulos ABC y DEF, son congruentes.



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.10 Uso de las condiciones necesarias y suficientes

R

1. Escribe los dos criterios que se utilizan cuando dos triángulos rectángulos son congruentes entre sí. Elabora un ejemplo.

2. Determina si en los siguientes enunciados la condición A es necesaria y/o suficiente para B.

   En los $\Delta ABC$ y $\Delta DEF$

   A: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

   B: $\measuredangle A = \measuredangle D$ y $\measuredangle B = \measuredangle E$

C

Una condición A es **necesaria y suficiente** para B, si A es tanto necesaria como suficiente para B.

Observa que la condición A es necesaria y suficiente para B, significa que se cumple la proposición "si A entonces B" y la recíproca "si B entonces A".

1. En las siguientes condiciones sobre triángulos, determina si la condición A es necesaria y suficiente para B.

| | |
|---|---|
| a) A: rectángulo | B: tiene dos ángulos agudos |
| b) A: isósceles | B: mediatriz y bisectriz son iguales |
| c) A: equilátero | B: Tiene dos ángulos de igual medida |

2. Elabora enunciados sobre condiciones necesarias y suficientes.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.11 Características de las bisectrices de un triángulo

En los siguientes enunciados, investiga si la condición A es necesaria, suficiente o necesaria y suficiente para la condición B.

a) A: Dos triángulos tienen sus tres lados respectivamente congruentes.
   B: Dos triángulos son congruentes.

b) A: Un triángulo es isósceles.
   B: La mediana correspondiente a la base del triángulo es la altura.

El punto "I" donde se interceptan dos bisectrices de un triángulo, se conoce como **incentro**. La distancia del incentro a cualquiera de los lados del triángulo es la misma (la distancia es la longitud del segmento trazado desde el punto "I" perpendicular a un lado del triángulo). Además, la tercera bisectriz también debe pasar por el punto "I", es decir, las 3 bisectrices se interceptan en el incentro.

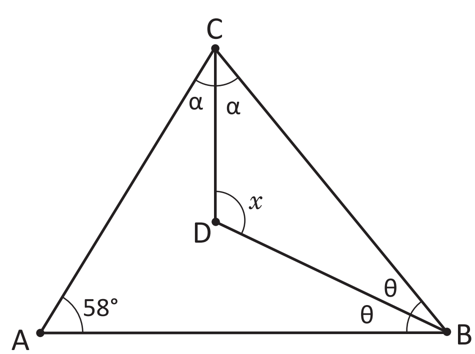
1. Con ayuda de una regla y un compás:

   a) Dibuja un triángulo cualquiera y etiqueta sus vértices con las letras A, B y C.

   b) Construye las tres bisectrices del triángulo.

   c) Comprueba sobre el triángulo construido que se cumple la siguiente propiedad: **"Los puntos de la bisectriz equidistan de los lados del ángulo"**.

2. En un triángulo ABC, ∢A = 58°, ¿cuánto mide el ∢BDC, donde D es el el punto de intercepción de las bisectrices de los ángulos ∢B y ∢C?

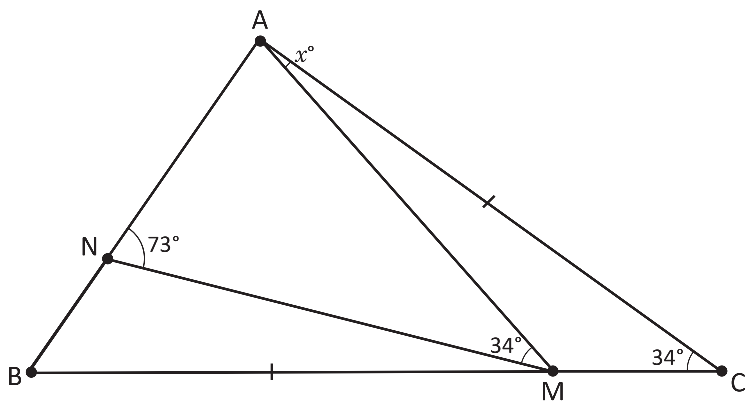
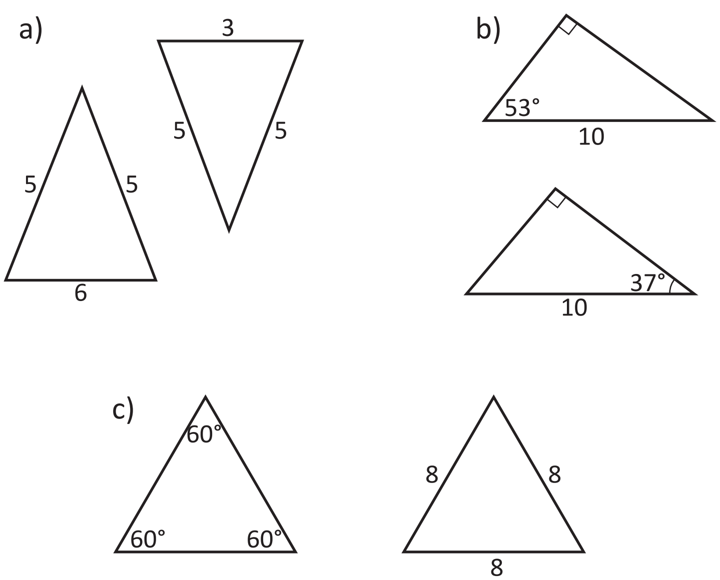





¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.12 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

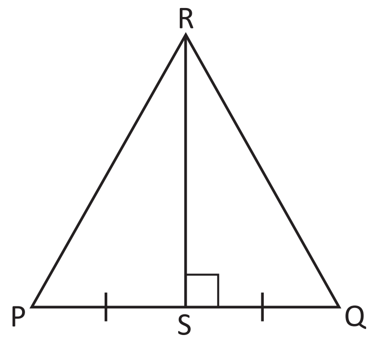
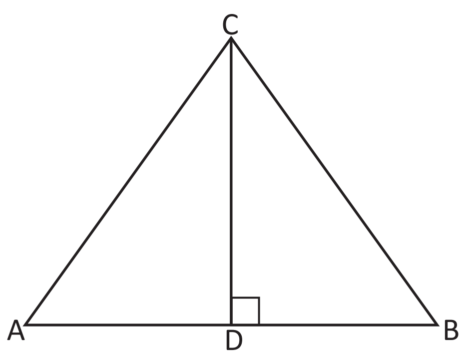
<table>
<tr><th>Ítem</th><th>Sí</th><th>Podría mejorar</th><th>No</th><th>Comentario</th></tr>
<tr><td>1. Utilizando los teoremas estudiados sobre triángulos, encuentro el ángulo $x$, si BM = AC.<br>
</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2. Identifico los triángulos congruentes y justifico mi respuesta utilizando los teoremas de triángulos:<br>
</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3. ¿En qué tipo de triángulo, al trazar cualquier bisectriz se forman dos triángulos congruentes?</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Unidad 6

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.13 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

| Ítem | Sí | Podría mejorar | No | Comentario |
|---|---|---|---|---|
| 1. En el triángulo ΔPQR, RS es altura y PS = SQ. ¿Bajo qué condiciones el ΔPQR es equilátero?  | | | | |
| 2. En el siguiente ΔABC, CD es la altura. ¿Qué condiciones nos permiten asegurar que los triángulos ΔDAC ≅ ΔDBC?  | | | | |
| 3. En los siguientes enunciados, determina si la condición A es necesaria o suficiente para B:<br>a) En dos triángulos rectángulos:<br>A: Tienen un cateto respectivamente congruente.<br>B: Los triángulos son congruentes.<br>b) En dos triángulos rectángulos:<br>A: Tienen la hipotenusa congruente.<br>B: Los triángulos son congruentes. | | | | |
| 4. De los siguientes enunciados, identifica los recíprocos de cada uno de ellos y demuestra si se cumple. Proporciona un contraejemplo si no se cumple.<br>a) En dos triángulos rectángulos, si tienen dos ángulos correspondientes congruentes, entonces son congruentes.<br>b) En dos triángulos rectángulos, si son congruentes, tienen los lados correspondientes iguales. | | | | |

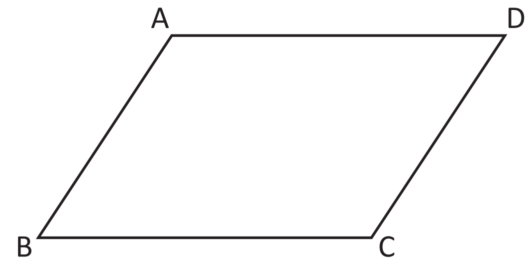


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.1 El paralelogramo

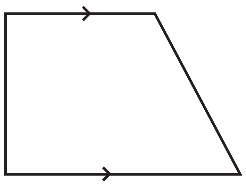
Un cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos se llama **paralelogramo**.

Recuerda que un rectángulo y un cuadrado también cumplen la condición de ser un paralelogramo.

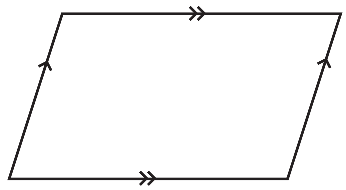



1. Identifica en las figuras, cuáles son paralelogramos y explica por qué lo son o por qué no lo son.

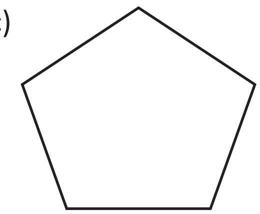
a)



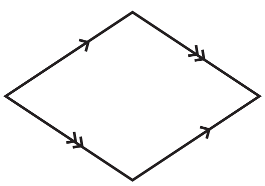
b)



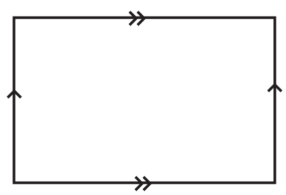
c)



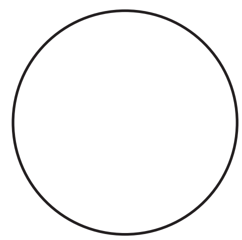
d)



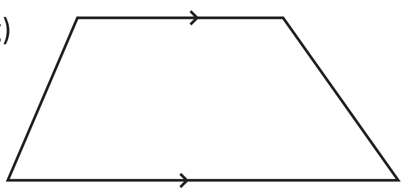
e)



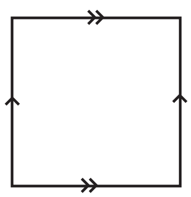
f)



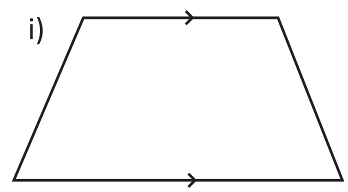
g)



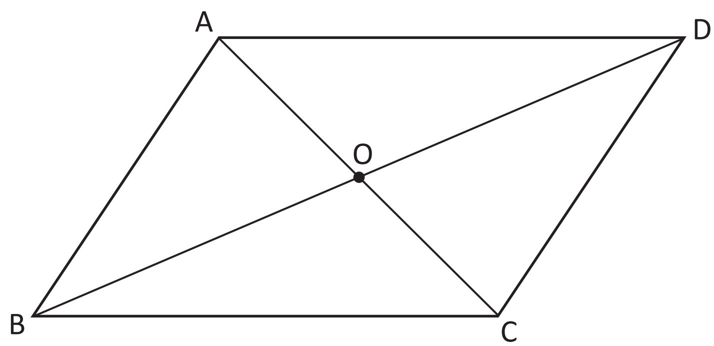
h)



i)



2. Si rotas 180° la figura que se muestra, con respecto al punto O como punto central, ¿qué sucede con las características del paralelogramo, se mantienen o cambian? Realiza la rotación y explica tu respuesta.




¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Unidad 6

## 2.2 Características de los paralelogramos

Escribe ejemplos de paralelogramos que observes en el entorno y clasifica además si son cuadrados o rectángulos.

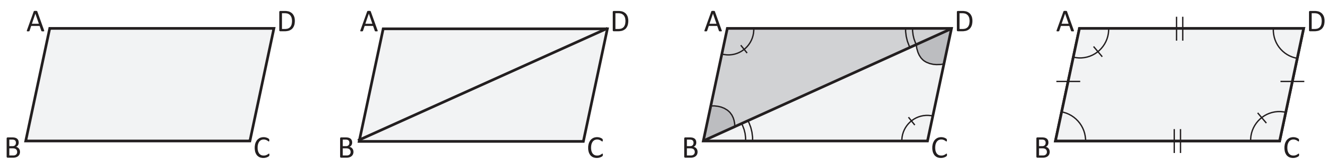
______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

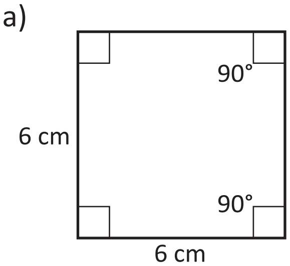
______________________________________________________________________________

En un paralelogramo se cumple que los lados y los ángulos opuestos son congruentes y los ángulos consecutivos son suplementarios.

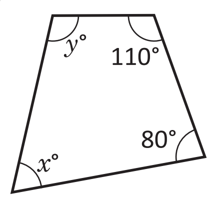



1. Dadas las figuras, explica si son paralelogramos caracterizando sus lados y ángulos, encuentra la medida de los lados y ángulos en el caso de ser paralelogramos.

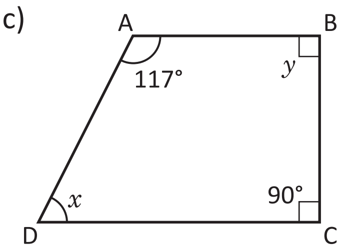
a)



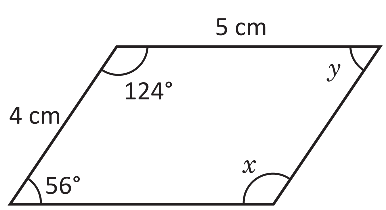

b)



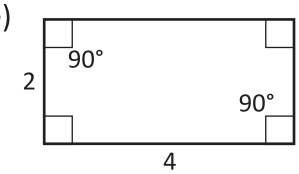

c)



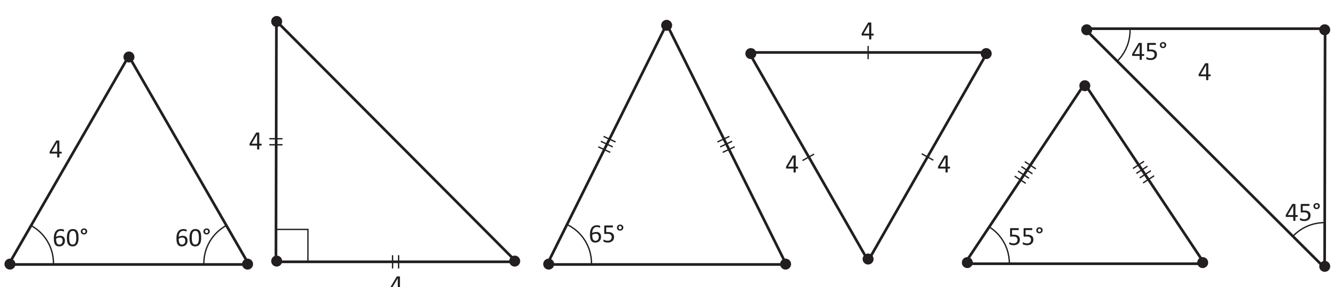

d)




e)




2. Dados los siguientes triángulos, selecciona las parejas de figuras que al unirlas forman paralelogramos y explica por qué son paralelogramos.




a) b) c) d) e) f)



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.3 Diagonales de un paralelogramo

1. Escribe la definición de un paralelogramo:

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

2. Menciona lo que se cumple cuando el cuadrilátero es un paralelogramo:

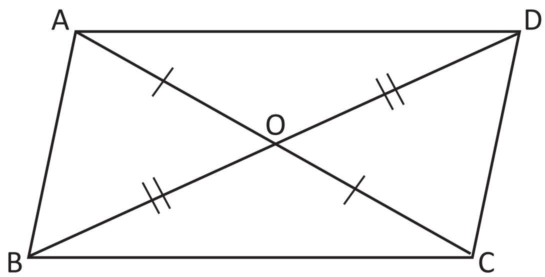
______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

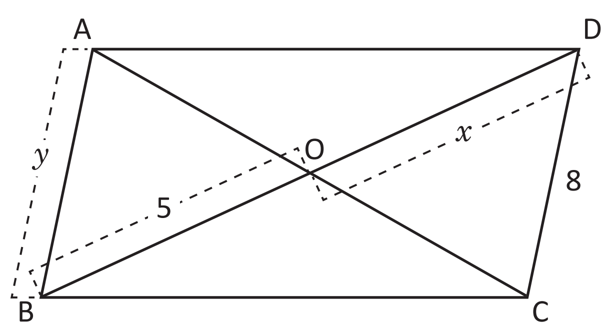
______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

En un paralelogramo se cumple que las diagonales se intersectan en su punto medio.




1. En el paralelogramo ABCD, encuentra el valor de $x$ y $y$ dejando constancia del proceso de cálculo.




2. Demuestra que si las diagonales de un paralelogramo son bisectrices de los ángulos opuestos, el paralelogramo es un rombo; es decir los 4 lados son congruentes.

Utiliza la definición de rombo que aprendiste en Educación Básica.

Unidad 6

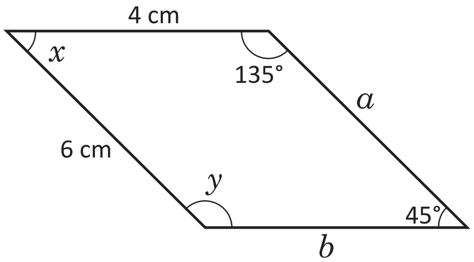
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# 2.4 Condiciones de los lados de un cuadrilátero para que sea paralelogramo

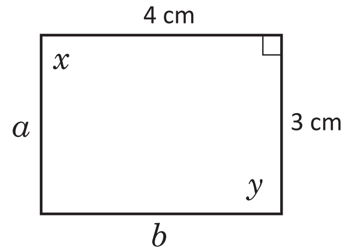
R

1. Dados los siguientes paralelogramos, encuentra las medidas faltantes de los lados y los ángulos.

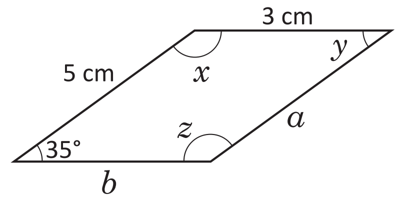
a)



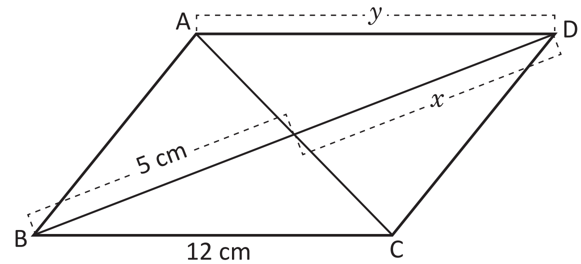

b)




c)




2. En el siguiente paralelogramo ABCD, encuentra el valor de $x$ y $y$.



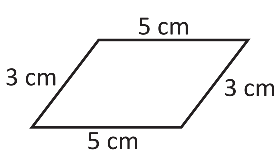

C

Si los lados opuestos de un cuadrilátero son de igual medida, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo. Este teorema es el recíproco de "En un paralelogramo, dos pares de lados opuestos son de igual medida".

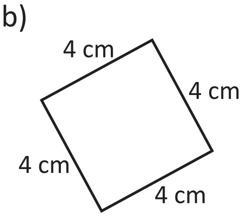
Observa que ser paralelogramo es una condición, necesaria y suficiente, para que un cuadrilátero tenga lados opuestos de igual medida.

1. En los siguientes cuadriláteros, describe los que son paralelogramos con base en la condición de paralelogramos.

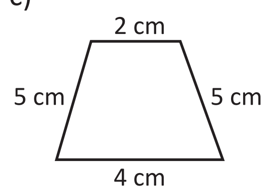
a)



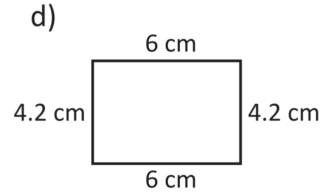

b)




c)




d)




2. Dibuja un par de triángulos que al unirlos, formen paralelogramos y explica las características que cumplen al ser paralelogramos.

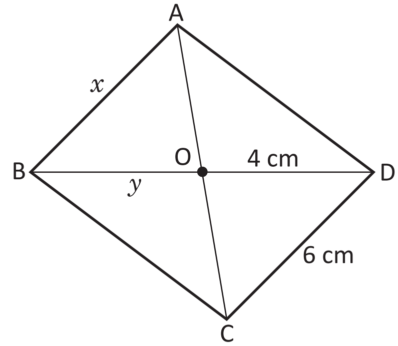


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

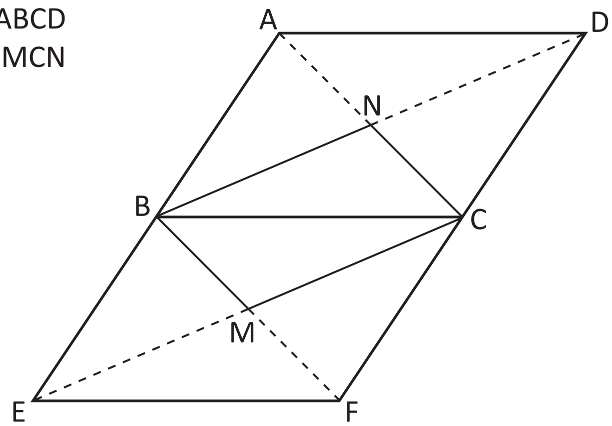
## 2.5 Condiciones de los ángulos de un cuadrilátero para que sea paralelogramo

R

1. La siguiente figura es un paralelogramo, encuentra la medida $x$ y $y$ utilizando los datos del gráfico.




2. Demuestra que en la figura, si los paralelogramos ABCD y BEFC son congruentes, entonces el cuadrilátero BMCN es un paralelogramo.



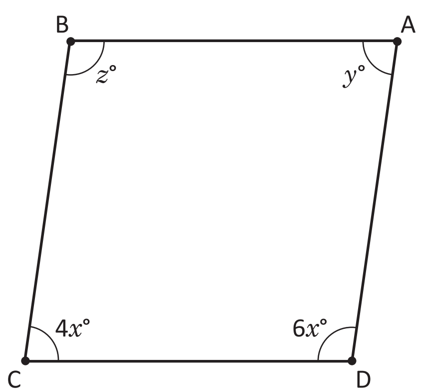

C

Si dos pares de ángulos opuestos son congruentes en un cuadrilátero, entonces es un paralelogramo. Este es el recíproco del teorema "En un paralelogramo dos pares de ángulos opuestos son congruentes".

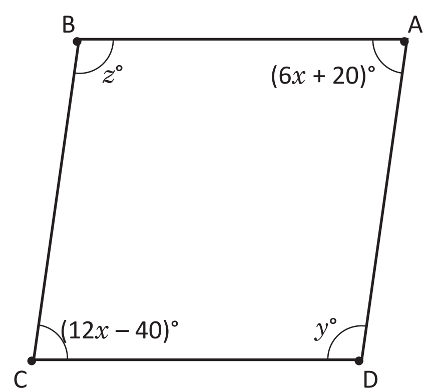
Ser paralelogramo es una condición, necesaria y suficiente, para que un cuadrilátero tenga ángulos opuestos de igual medida.

1. Determina la medida de $x$, $y$ y $z$ de manera que el cuadrilátero sea paralelogramo.

a)




b)



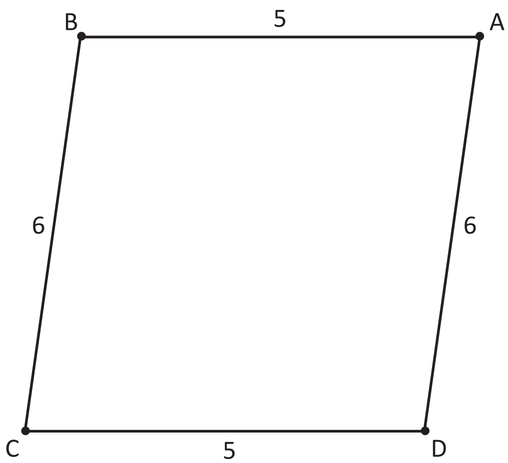

2. Los ángulos opuestos de un paralelogramo tienen por medida $(2x + 30)°$ y $(6x - 90)°$. Encuentra la medida (en grados) de cada uno de los ángulos del paralelogramo.

Unidad 6

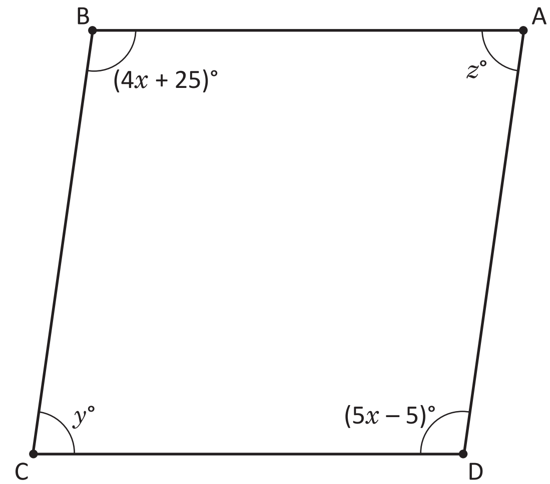
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.6 Condiciones suficientes para que un cuadrilátero sea paralelogramo

1. Determina por qué, el siguiente cuadrilátero es un paralelogramo.




2. Determina la medida de $x$, $y$ y $z$ de manera que el cuadrilátero sea paralelogramo.



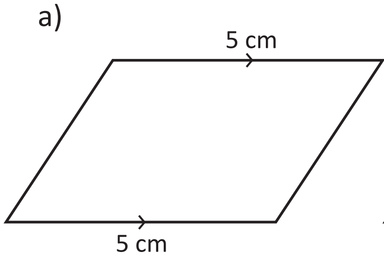

Cada una de las siguientes condiciones es necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea paralelogramo:

1. Dos pares de lados opuestos son paralelos.
2. Dos pares de lados opuestos son congruentes.
3. Dos pares de ángulos opuestos son congruentes.
4. Las diagonales se intersectan en su punto medio.
5. Dos lados opuestos son paralelos y congruentes.
6. Los ángulos consecutivos son suplementarios.

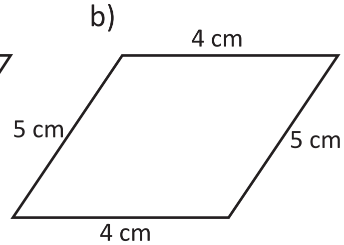
Donde el numeral 1 corresponde a la definición de paralelogramo.

1. Explica por qué se puede garantizar que los siguientes cuadriláteros son paralelogramos.

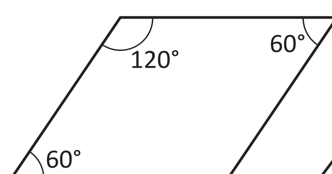
a)



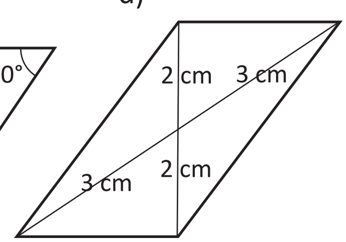

b)




c)




d)




2. Dos ángulos opuestos de un cuadrilátero tienen por medida $(x + 40)°$ y $(3x - 20)°$. Encuentra la medida (en grados) de cada uno de los ángulos para que sea paralelogramo.

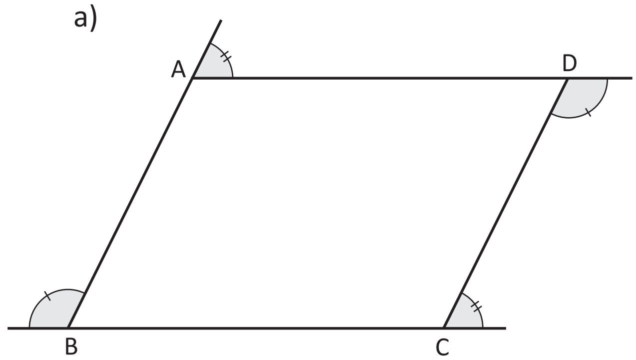


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

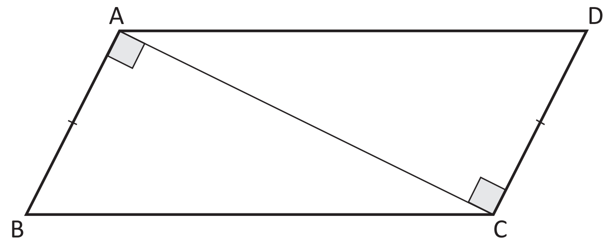
## 2.7 Características del rectángulo y el rombo

Explica por qué ABCD es un paralelogramo en cada una de las figuras:

a)

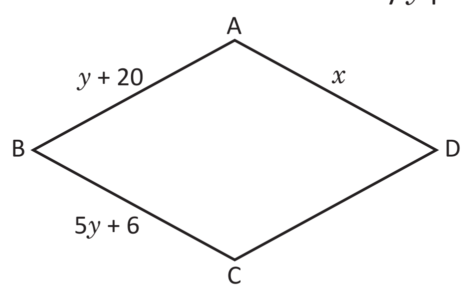



b)

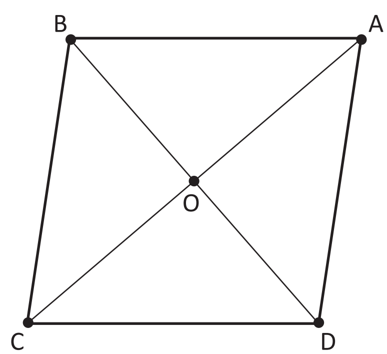



Por sus lados y ángulos, los rombos y rectángulos son respectivamente paralelogramos.

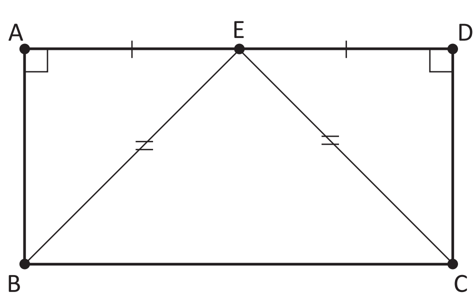
1. El cuadrilátero ABCD es un rombo. Calcula los valores de $x$ y $y$ para la figura:




2. Demuestra que las diagonales de un rombo son bisectrices de los ángulos correspondientes, sabiendo que AC y BD son diagonales que se intersectan en un punto O. (Hay que demostrar que AC es bisectriz de ∢A y ∢C y BD es bisectriz de ∢B y ∢D).




3. En el rectángulo ABCD, BE = CE:
   Demuestra que AE = DE. (Sugerencia: demuestra que ΔAEB ≅ ΔDEC).

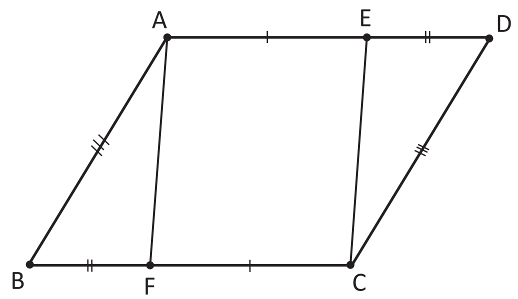



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

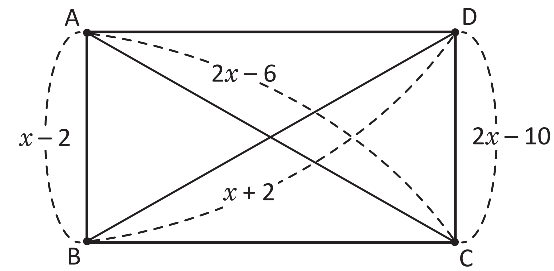
## 2.8 Aplicación de las características de las diagonales de un rectángulo

R

1. Explica por qué el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.



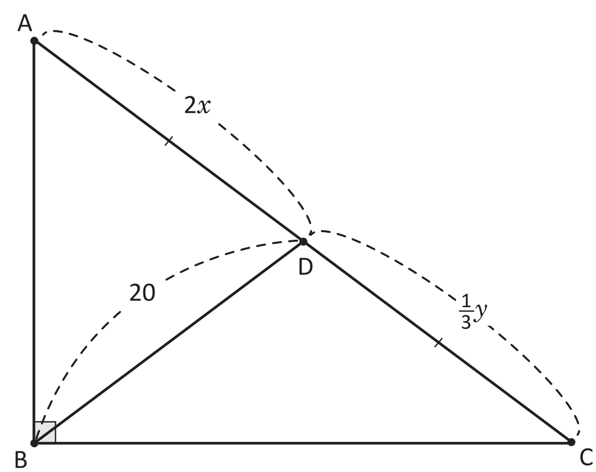

2. ABCD es un paralelogramo con las medidas AB = $x$ – 2, CD = 2$x$ – 10, AC = 2$x$ – 6 y BD = $x$ + 2. Demuestra que ABCD es un rectángulo.



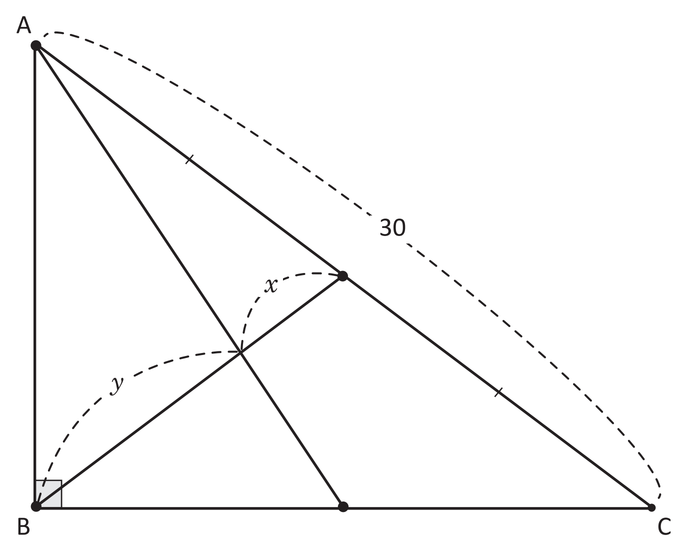

C

En todo triángulo rectángulo, la longitud del segmento que une el vértice opuesto a la hipotenusa con el punto medio de esta, es congruente a la mitad de la longitud de la hipotenusa.

1. Encuentra $x$ y $y$ en el siguiente triángulo rectángulo, explica el proceso y la propiedad que utilizas para encontrar la respuesta.



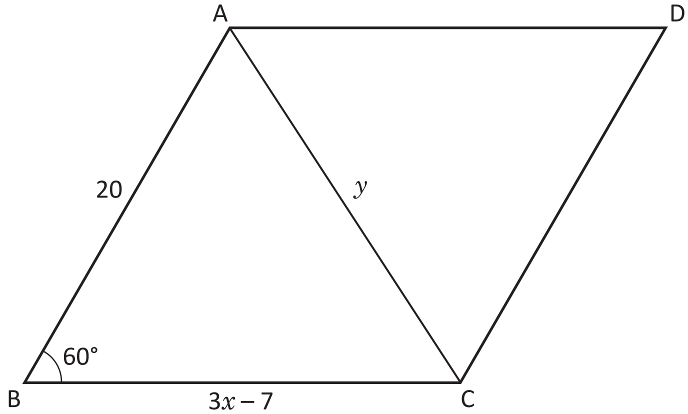

2. Encuentra el valor de $x$ y $y$ en el siguiente triángulo rectángulo, sabiendo que $x = \frac{1}{3}(x + y)$.



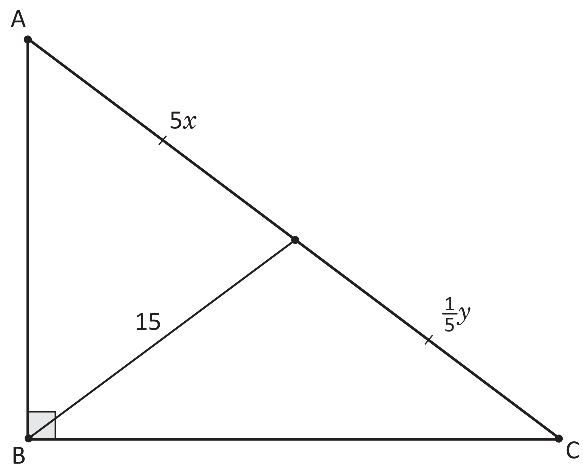

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.9 Recíproco de características de rectángulos

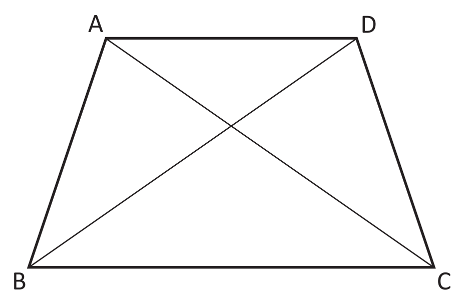
**R** 1. El cuadrilátero ABCD es un rombo. Calcula los valores de $x$ y $y$ indicados:




2. En el siguiente triángulo rectángulo, encuentra el valor de $x$ y $y$.




**C** El recíproco de "en un rectángulo las diagonales son iguales", es decir, "si las diagonales de un cuadrilátero son iguales, entonces es un rectángulo", no se cumple, por el contraejemplo de un trapecio isósceles, no es un paralelogramo, pero sus diagonales son iguales.




Encuentra el recíproco de los siguientes enunciados. Si no se cumple, proporciona un contraejemplo.

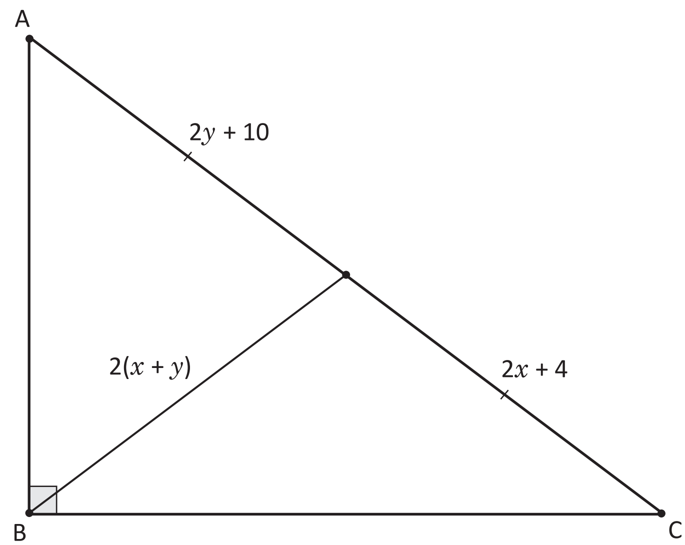
a) Todo rectángulo es un paralelogramo.
b) El rectángulo es un paralelogramo con ángulos iguales.
c) El rombo es un paralelogramo equilátero.
d) El cuadrado es rectángulo y rombo a la vez.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.10 Relación entre líneas paralelas y áreas

R

1. En el siguiente triángulo rectángulo, encuentra el valor de $x$ y $y$.

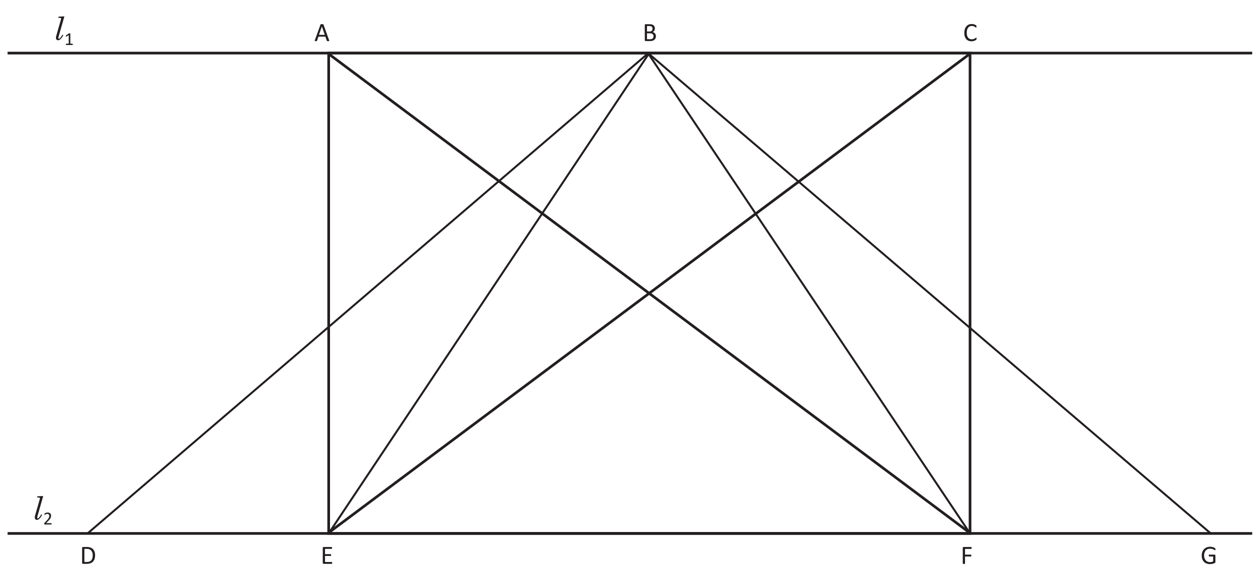



2. Encuentra el recíproco del siguiente enunciado y si no se cumple, proporciona un ejemplo:
   "Las diagonales del paralelogramo bisecan los ángulos opuestos".

C

Cuando se tienen dos rectas paralelas, los segmentos perpendiculares trazados de una recta a otra tienen igual longitud.

1. En la siguiente figura, las rectas $l_1 \parallel l_2$ y los segmentos de recta forman triángulos. Identifica cuál de los siguientes triángulos tiene la misma área. Argumenta tu respuesta.




2. Dibuja un par de figuras planas entre paralelas, de tal forma que sus áreas sean iguales.



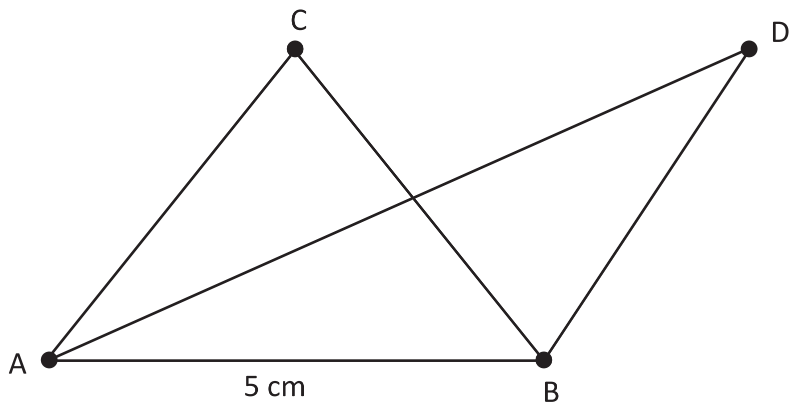
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.11 Aplicación de la relación entre líneas paralelas y áreas

R

1. Encuentra el recíproco del siguiente enunciado y si no se cumple, proporciona un ejemplo: "En un rectángulo, sus ángulos son rectos".

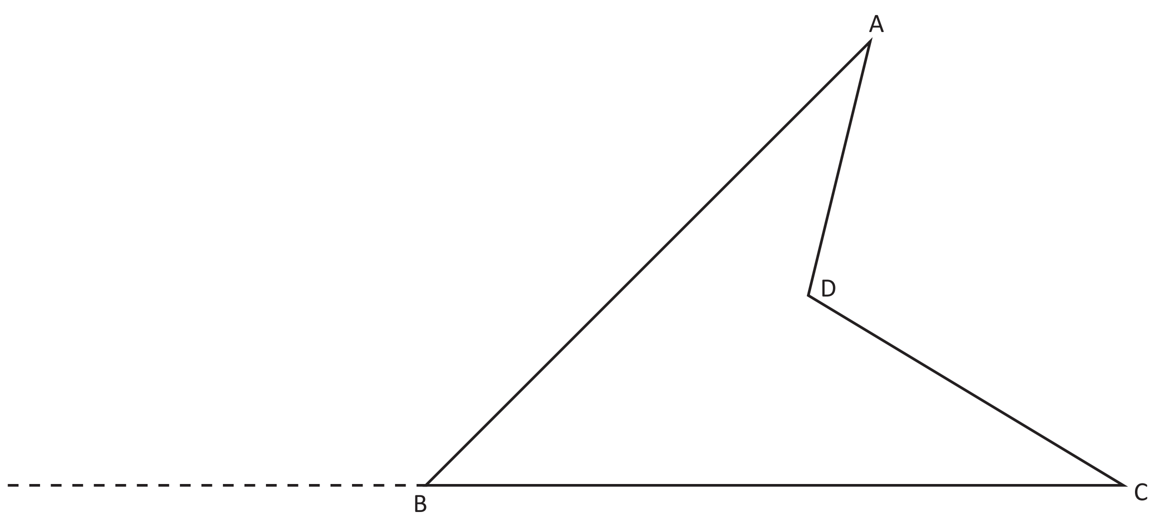
2. En la siguiente figura, AB ∥ CD y la altura del ΔABC es 3 cm. Determina el área del ΔABD.




C

Los triángulos con base común tienen igual área si la recta que une los vértices opuestos a la base, es paralela a la base.

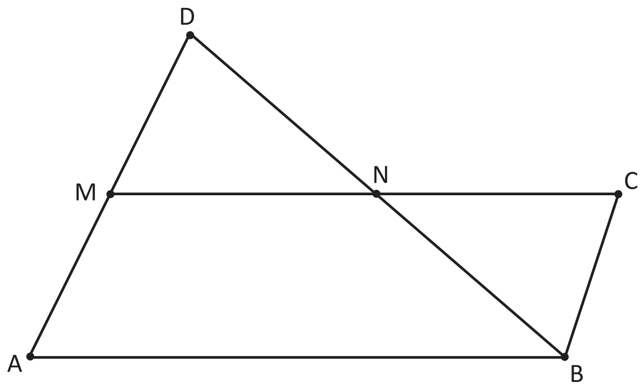
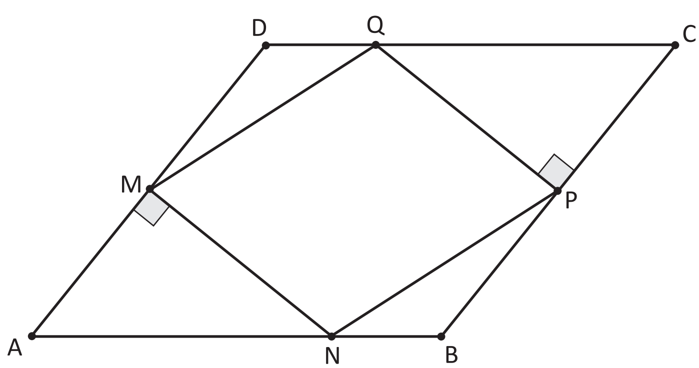
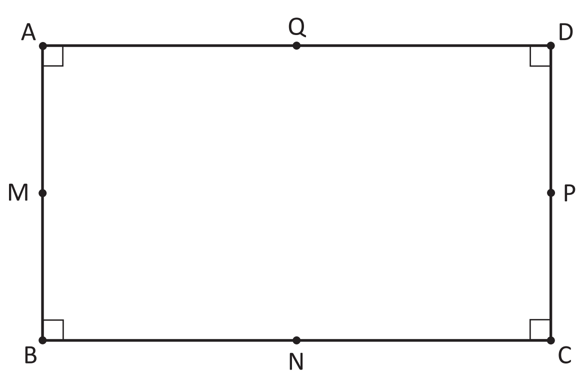
En la siguiente figura, en la prolongación del segmento BC, ubica un punto E de manera que el cuadrilátero ABCD y el triángulo DEC tenga la misma área.




¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.12 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

| Ítem | Siempre | Casi siempre | Casi nunca | Nunca |
|---|---|---|---|---|
| 1. En el triángulo ABD con M, punto medio de AD y N, punto medio de DB, M, N y C puntos de una misma recta, MN = NC, demuestro que ABCM es un paralelogramo.<br> | | | | |
| 2. En la figura, ABCD es paralelogramo, M es punto medio de AD, P es un punto medio de CB y MN ⊥ AD, PQ ⊥ BC. Demuestro que MNPQ es un paralelogramo.<br> | | | | |
| 3. En el rectángulo ABCD, M, N, P, Q, son los puntos medios de AB, BC, CD, CA. Demuestro que MNPQ es un rombo.<br> | | | | |

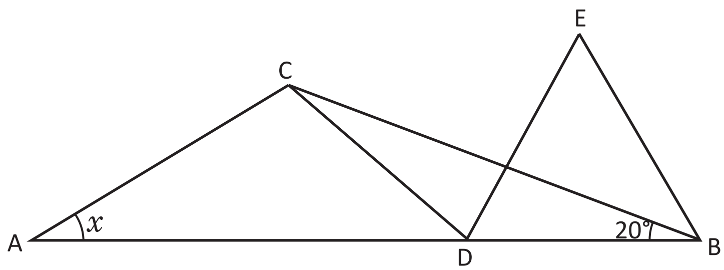
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.13 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

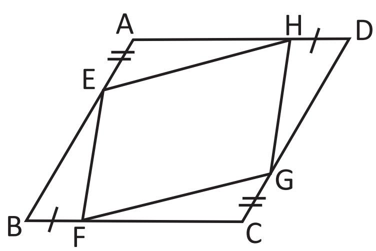
<table>
<tr><th>Ítem</th><th>Siempre</th><th>Casi siempre</th><th>Casi nunca</th><th>Nunca</th></tr>
<tr><td>

1. En la figura AD = BC, BD = CD y el $\Delta DBE$ es equilátero, determino el valor de $x$. Utilizando la definición de triángulos y los criterios de congruencia de triángulos.



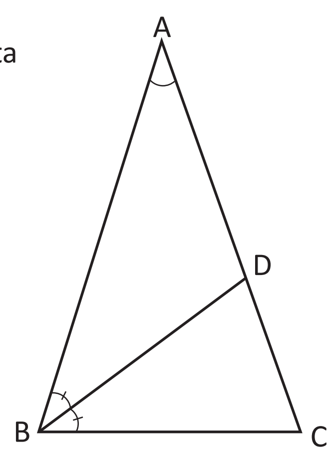

</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>

2. Si se toman 4 puntos E, F, G y H en los cuatro lados AB, BC, CD y DA del paralelogramo ABCD respectivamente, de modo que AE = CG y BF = DH. Demuestro que el cuadrilátero EFGH es un paralelogramo.




</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>

3. En el $\Delta ABC$, AB = AC y ∢CAB=36°.
DB es la bisectriz del ∢ABC que corta el lado AC en el punto D.
Demuestro que BC = BD = DA.




</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Unidad 6

## Problemas de aplicación

**Los triángulos y el diseño arquitectónico**

Los triángulos son herramientas eficaces para la arquitectura y se utilizan en el diseño de los edificios y otras estructuras, ya que proporcionan resistencia y estabilidad. Cuando se utilizan materiales de construcción para formar un triángulo, el diseño tiene una gran base y el pináculo de la parte superior es capaz de administrar el peso porque la energía se distribuye a través de todo el triángulo. En la actualidad existen muchas estructuras formadas a base de triángulos unidos entre sí.

Observa la fotografía y realiza lo siguiente:

a) ¿Qué tipos de figuras planas han utilizado en la estrucura de este templo?

b) Caracteriza los triángulos que se observan en la estructura del templo.

c) En nuestro país, ¿haz observado edificios donde se evidencie el uso de triángulos en su estructura?, ¿cuáles?

Templo del distrito de Santiago de Surco de la provincia de Lima, Perú

**Estilos Arquitectónicos**

La arquitectura es un arte que tiene estilos muy variados. Hay muchísimos, pero se mencionará uno de los estilos más importantes el Clasicismo.  En nuestro país el Clasicismo floreció entre 1750 y 1830, y  se le conoce como Neoclasicismo para distinguirlo de la arquitectura clásica de la antigua Roma del Renacimiento.

Este período se caracteriza por la grandilocuencia de escala, la geometría organizacional muy estricta, la simplicidad de las formas geométricas, el uso de detalles greco-romanos, el uso dramático de las columnas para articular los espacios interiores y una preferencia por las paredes desnudas de ornamentación y el contraste de volúmenes formales y texturas.

En el país un edificio neoclásico es el Palacio Nacional, el cual ha sido considerado un monumento arquitectónico de mucha importancia.

Observa la fotografía  y realiza lo siguiente:

a) Enlista las figuras planas que se visualizan en el exterior del Palacio Nacional.

b) ¿Qué tipo de triángulos se observan? y ¿qué relación hay entre todos los triángulos?

Palacio Nacional, San Salvador, El Salvador



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Unidad 7

# Área y volumen de sólidos geométricos

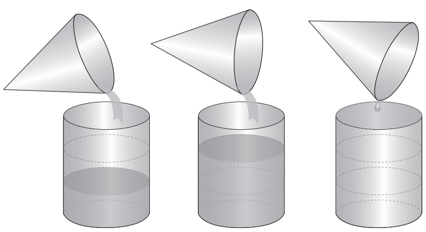
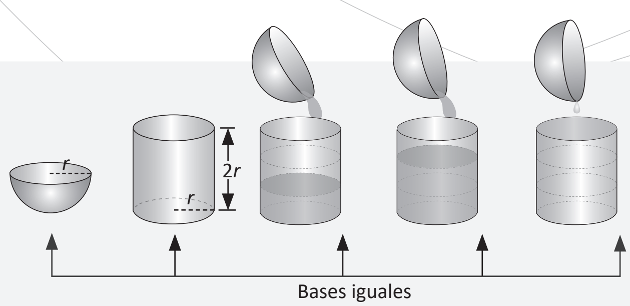


Ilustración de la relación entre volumen del cono y del cilindro.

El matemático y geómetra Euclides, relacionó los volúmenes de los prismas y pirámides, estableciendo en la proposición 10 del libro XII del texto *Los Elementos*, que el volumen del cono es un tercio comparado con el volumen del cilindro que tiene la misma base y altura; aunque es importante mencionar que él no fue el primero en dedicarse al estudio de los sólidos, pues ya Platón había estudiado los sólidos regulares: tetraedro, hexaedro (cubo), octaedro, dodecaedro e icosaedro conocidos en la actualidad como sólidos platónicos.

Edificio de la Lotería Nacional (1970)

En la vida cotidiana, los sólidos son utilizados como base para construir objetos decorativos, diseño de edificios, materiales deportivos, educativos, depósitos para almacenar diferentes productos medicinales, cosméticos, industriales, etc.




Deducción del volumen de la esfera a partir del volumen del cilindro.

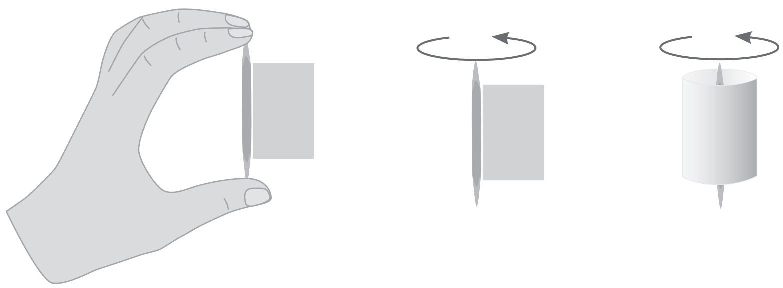
En esta unidad conocerás el origen de los sólidos más comunes, sus características, cálculo de áreas, volúmenes y relaciones que existen entre el volumen del cilindro, cono y esfera; así como su uso en diferentes contextos del entorno.

## 1.1 Sólidos de revolución

A los sólidos geométricos que pueden generarse girando una figura plana alrededor de un eje se les llama **sólidos de revolución**.

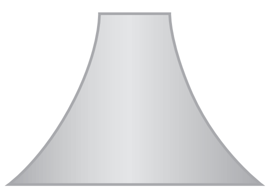
Por ejemplo, imagina que tienes un trozo de cartulina en forma de rectángulo, como muestra la figura. Si lo giras alrededor de un palillo de dientes, ¿qué puedes observar?, ¿se forma algún sólido geométrico que ya conoces?

Al mover el rectángulo de modo que gire, puedes observar lo siguiente:
El sólido que se forma es un cilindro.



1. Dibuja la figura plana y el eje que hace que se genere dicha figura.

Lámpara

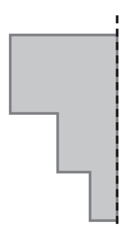


Vaso

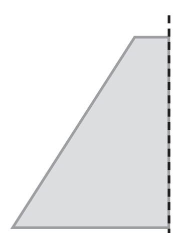
2. Dibuja el sólido que se genera al girar la figura alrededor del eje indicado:

a)

b)



c)



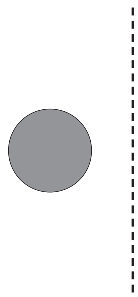


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

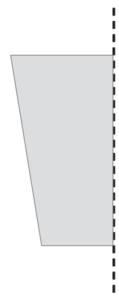
# 1.2 Características y elementos del cono y la esfera

1. Dibuja la figura al girar:

a)



b)



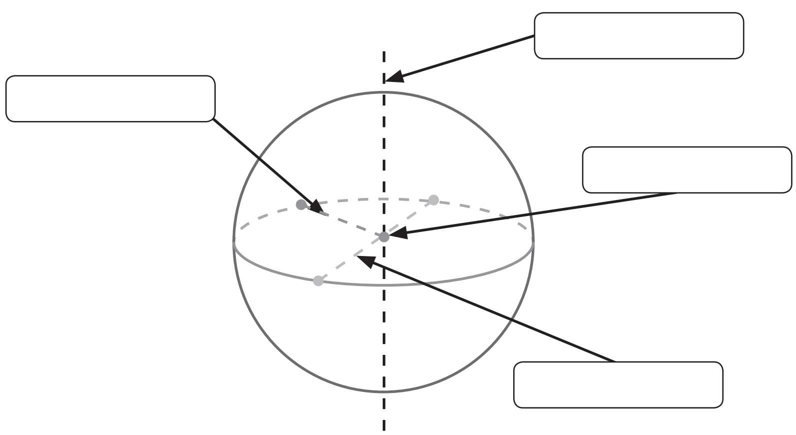
2. Dibuja la figura plana y el eje que hace que se genere dicha figura:

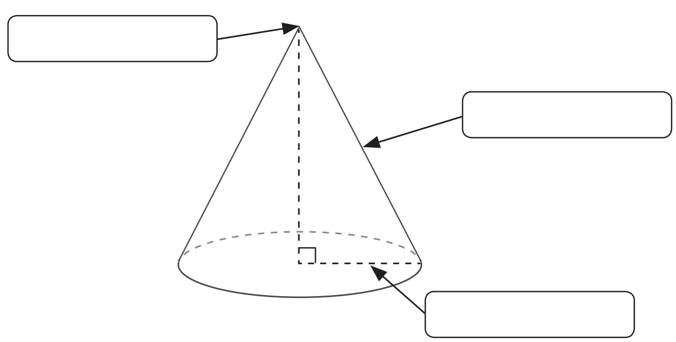
Pino de boliche

**El cono** es un sólido limitado por un círculo y por una superficie curva.
El cono puede verse como una superficie de revolución. La superficie plana que se gira para generar el cono es un triángulo rectángulo y el eje de rotación es uno de los catetos del triángulo.

**Una esfera** es un cuerpo redondo, formado por una sola superficie curva. Puede verse también como un sólido de revolución, haciendo girar un semicírculo alrededor de su diámetro.

Completa colocando los nombres de los elementos de la esfera y el cono, luego los elementos que hace falta señalar en la imagen con su respectivo nombre.





¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.1 Volumen del prisma y del cilindro

**R** Escribe los elementos de:

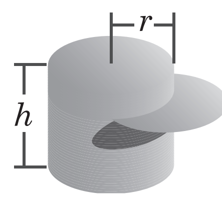
Cono: ____________________________________________
____________________________________________
____________________________________________

Esfera: ____________________________________________
____________________________________________
____________________________________________

**C**

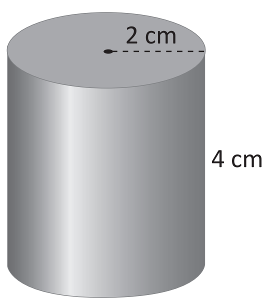
El volumen del cilindro se obtiene de una manera análoga al volumen de un prisma, es decir, el volumen de un cilindro es igual al producto del área de la base ($A_B = \pi r^2$) por la altura ($h$).

$$V_{cilindro} = A_B \times h = \pi r^2 h$$

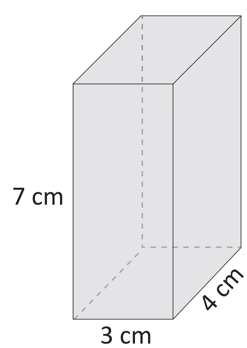



1. Encuentra el volumen de los siguientes sólidos utilizando el área de la base y la altura.

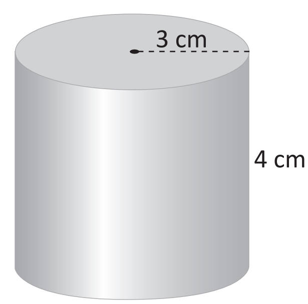
a)



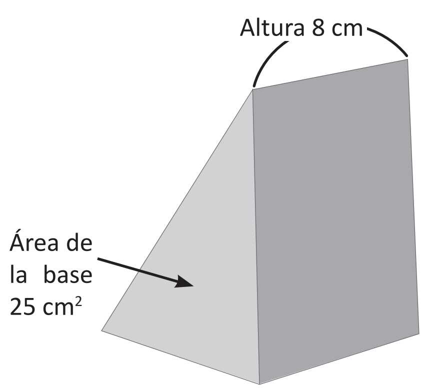

b)

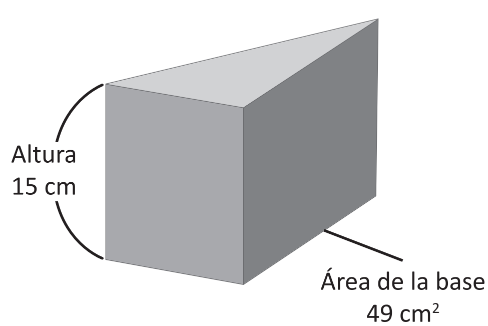



c)




2. Encuentra el volumen de los siguientes sólidos utilizando el área de la base y su altura.



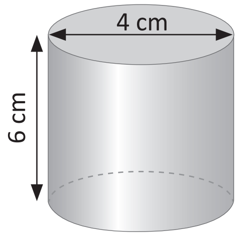



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

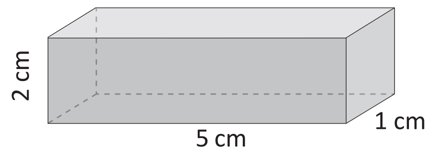
## 2.2 Comparación del volumen del prisma y la pirámide cuadrangular

**R** Encuentra el volumen de los siguientes sólidos:

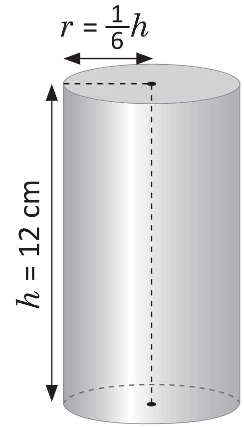
a)




b)




c)



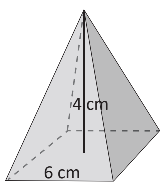

**C**

El volumen de la pirámide es igual a un tercio del producto del área de la base ($A_B$) por su altura ($h$):

$$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \times A_B \times h$$

Volumen es la cantidad de espacio que ocupa un cuerpo.

Ejemplo:
Encontrar el volumen de la pirámide que tiene un cuadrado de base de lado 6 cm y de altura 4 cm.

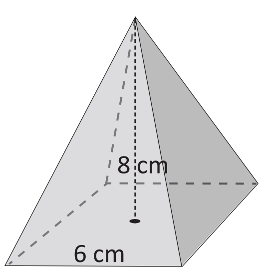



El área de la base como es un cuadrado: $A_{cuadrado} = 6 \times 6 = 36$ cm$^2$

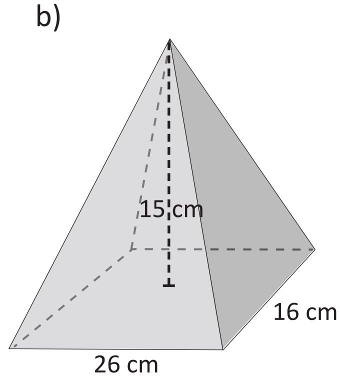
$$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \times A_B \times h = \frac{1}{3} \times 36 \times 4 = 48 \text{ cm}^3$$

1. Encuentra el volumen de las siguientes pirámides donde a) y c) tienen de base un cuadrado y b) tiene de base un rectángulo.

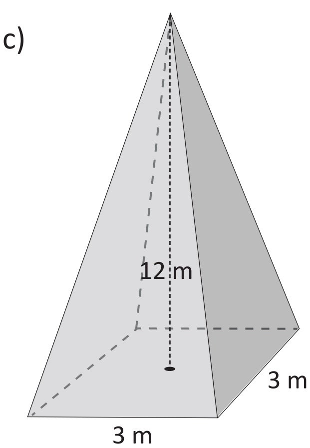
a)




b)




c)

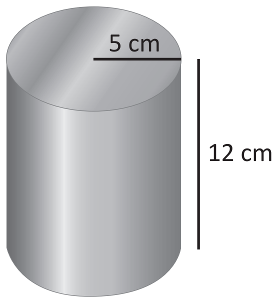



2. Encuentra la altura de una pirámide si se sabe que su volumen es 225 cm$^3$ y el área de la base es 25 cm$^2$.

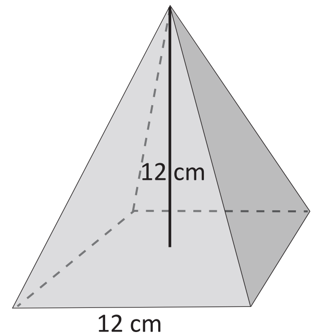
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.3 Volumen de la pirámide triangular

1. Encuentra el volumen del cilindro.




2. Encuentra el volumen de la siguiente pirámide cuadrangular.




3. Encuentra el área de la base de la pirámide, si su volumen es 100 $cm^3$ y la altura mide 12 cm.

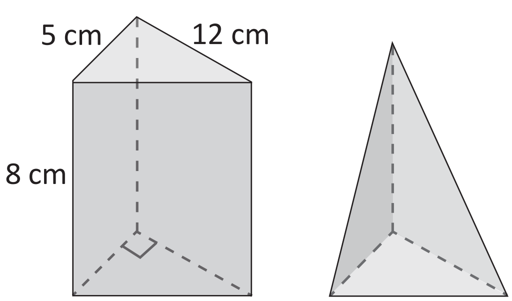
El volumen de una pirámide triangular es $V_{pirámide} = \frac{1}{3} \times A_B \times h$, que es igual a la de una pirámide cuadrangular, lo que cambia es el área de la base.

Ejemplo: Encuentra el volumen de una pirámide de área de base 12 $cm^2$ y altura 6 cm.

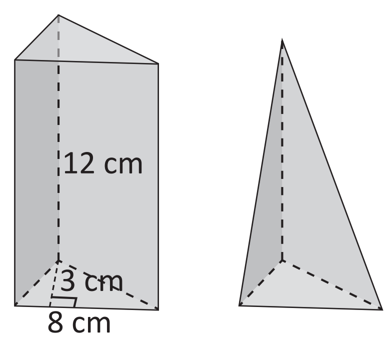
$$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \times A_B \times h = \frac{1}{3} \times 12 \times 6 = 72 \text{ cm}^3$$

1. Calcula el volumen de los siguientes prismas y luego relaciona cuál sería el volumen de las pirámides respectivas.

a)




b)



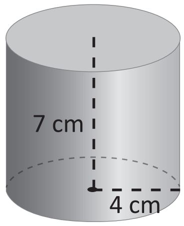

2. Encuentra el volumen de una pirámide triangular cuya base es 30 $cm^2$ y 5 cm de altura.



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

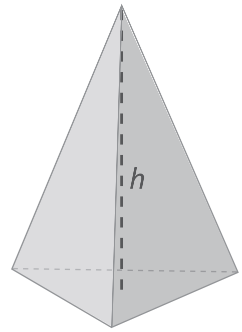
## 2.4 Volumen del cono

1. ¿Cuál es el volumen del siguiente cilindro?




2. ¿Cuál es el radio de un cilindro que tiene un volumen de 54 $\pi$ cm$^3$ si su altura es de 6 cm?

3. ¿Cuál es el volumen de una pirámide triangular que tiene por área de la base 48 cm$^2$ y tiene una altura de 7 cm?

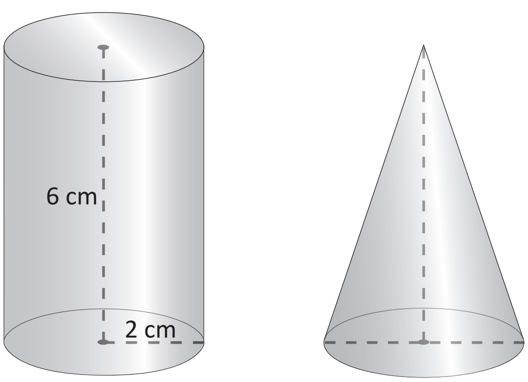



El volumen del cono es igual a un tercio del volumen del cilindro; es decir, es un tercio del producto del área de la base ($A_B$) por su altura ($h$).

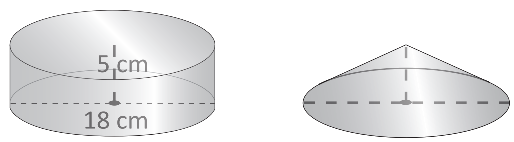
$$V_{cono} = \frac{1}{3} \times A_B \times h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

1. Encuentra el volumen del cilindro y luego compara el resultado para obtener el volumen del cono de la misma base y altura que el cilindro.

a)




b)




2. Encuentra el volumen de los siguientes conos:

a) Área de la base: $9\pi$ cm$^2$ y altura: 7 cm
b) Área de la base: $27\pi$ cm$^2$ y altura: 5 cm

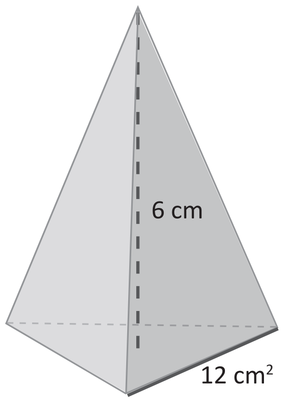
3. Encuentra la altura de un cono cuyo volumen es: $108\pi$ cm$^3$ y el área de la base es: $36\pi$ cm$^2$.



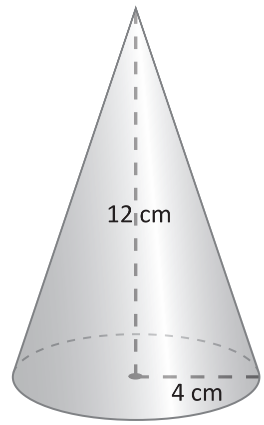
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.5 Volumen de la esfera

1. Encuentra el volumen de la pirámide triangular con área de la base 12 cm² y altura 6 cm.




2. Encuentra el volumen del cono de altura 12 cm y radio 4 cm.




El volumen de la esfera es igual a dos tercios del volumen de un cilindro que tenga el mismo radio y su altura sea igual al diámetro de la esfera.

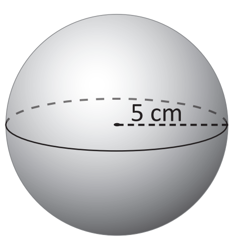
$$
\begin{aligned}
V_{esfera} &= \frac{2}{3}(V_{cilindro}) \\
&= \frac{2}{3}(\pi r^2 h) \\
&= \frac{2}{3}(\pi r^2(2r)) \\
&= \frac{2}{3}(2\pi r^3) \\
&= \frac{4}{3}\pi r^3
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\begin{aligned} V_{esfera} &= \frac{2}{3}(V_{cilindro}) \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}}
$$

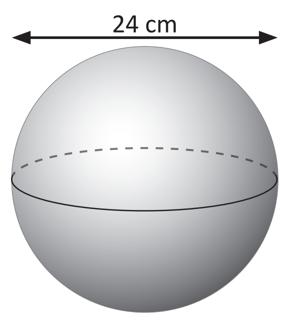
Ejemplo: Encuentra el volumen de una esfera de radio 3 cm.

$$
\begin{aligned}
V_{esfera} &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\
&= \frac{4}{3}\pi(3)^3 \\
&= \frac{4 \times 3 \times 3 \times \cancel{3}}{\cancel{3}}\pi \\
&= 36\pi \text{ cm}^3
\end{aligned}
$$

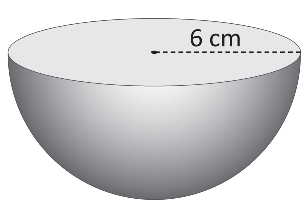
1. Calcula el volumen de una pelota de 5 cm de radio.




2. Calcula el volumen de una esfera con un diámetro de 24 cm como se muestra a continuación:




3. Encuentra el volumen de la semiesfera de radio 6 cm.



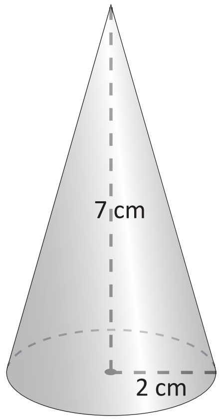



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

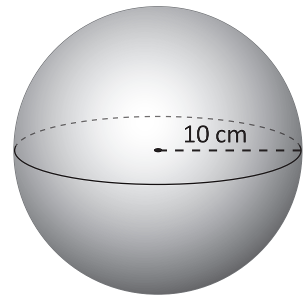
# 3.1 Volumen de sólidos compuestos

R

1. Encuentra el volumen del cono cuya altura es 7 cm y radio 2 cm.




2. Encuentra el volumen de la esfera de radio 10 cm.

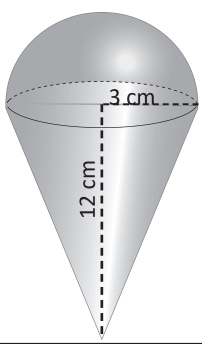



C

Para determinar el volumen de sólidos compuestos, se descompone el sólido en cuerpos geométricos conocidos, se calculan sus volúmenes y luego se suman.

Ejemplo: Calcula el volumen de la siguiente figura ($V_{figura}$):

Primero se encuentra el volumen de la semiesfera $\frac{1}{2}V_{esfera}$:



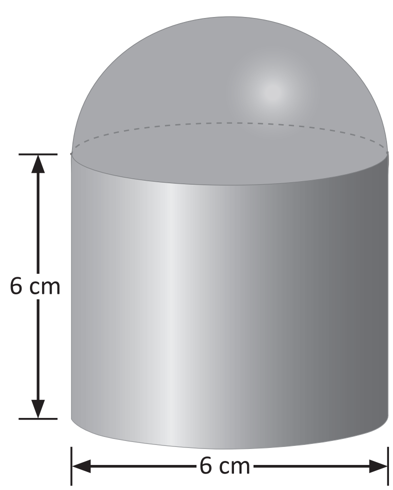

$$\frac{1}{2}V_{esfera} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$
$$= \frac{2}{3}(\pi \times 27)$$
$$= 18\pi \text{ cm}^2$$

Luego se encuentra el volumen del cono:

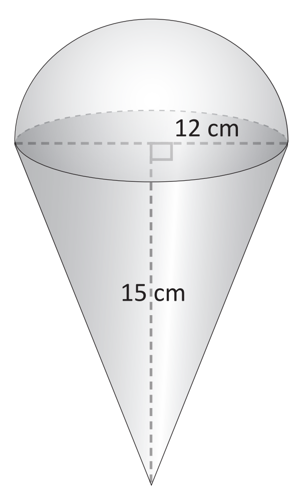
$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$
$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi \times 3^2 \times 12$$
$$= 36\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{figura} = \frac{1}{2}V_{esfera} + V_{cono}$$
$$= 18\pi + 36\pi$$
$$= 54\pi \text{ cm}^3$$

1. Encuentra el volumen de la siguiente figura:




2. Calcula el volumen y el área del sólido si el radio mide 12 cm y la altura 15 cm.

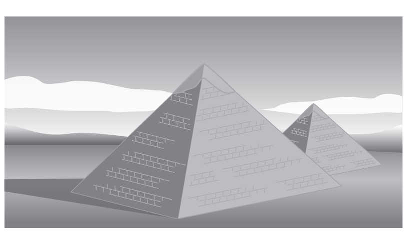



Unidad 7

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 3.2 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

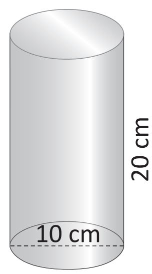
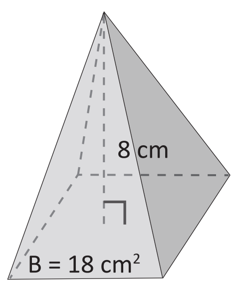
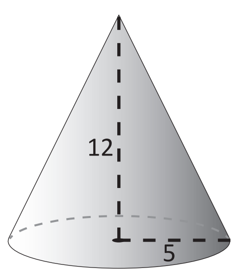
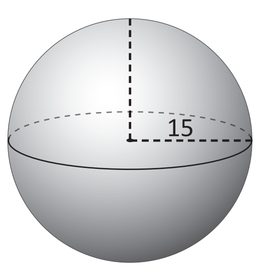
| Ítem | Sí | Podría mejorar | No | Comentario |
|---|---|---|---|---|
| 1. En un laboratorio farmacéutico se envasa el alcohol en frascos de forma cilíndrica, que miden 4 cm de diámetro y 10 cm de altura. Calculo la capacidad en centímetros cúbicos de cada frasco de alcohol.<br> | | | | |
| 2. Una empresa comercializa latas para refrescos. La lata estándar tiene forma cilíndrica de radio 3 cm y altura 10 cm. ¿Cuánto es la capacidad de líquido que dicha lata puede contener?<br> | | | | |
| 3. Una pirámide egipcia de base cuadrada tiene 150 metros de altura y 139 metros de arista de la base. ¿Cuál es el volumen de dicha pirámide?<br> | | | | |



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 3.3 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

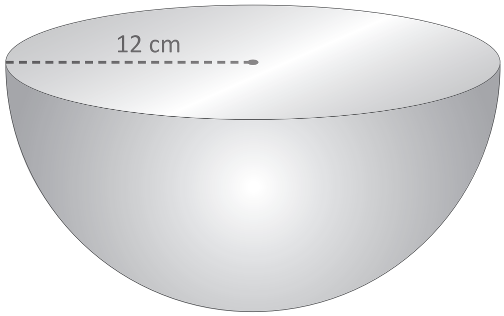
| Ítem | Sí | Podría mejorar | No | Comentario |
|---|---|---|---|---|
| 1. Encuentro el volumen del siguiente cilindro de altura 20 cm y diámetro 10.<br><br> | | | | |
| 2. Encuentro el volumen de la siguiente pirámide de base 18 cm$^2$ y altura 8 cm.<br><br> | | | | |
| 3. Encuentro el volumen del siguiente cono de altura 12 cm y radio 5 cm.<br><br> | | | | |
| 4. Encuentro el volumen de la esfera de radio 15 cm.<br><br> | | | | |



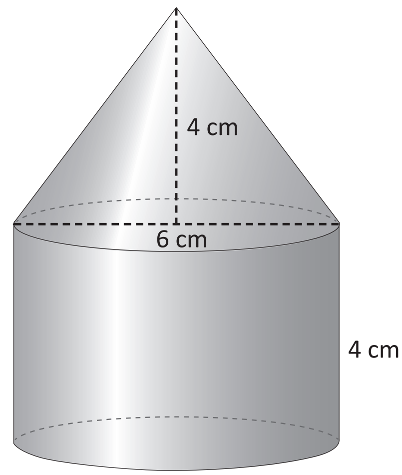
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# 4.1 Desarrollo del cono y longitud de arco

1. Encuentra el volumen de una semiesfera de radio 12 cm.




2. Encuentra el volumen de la siguiente figura.

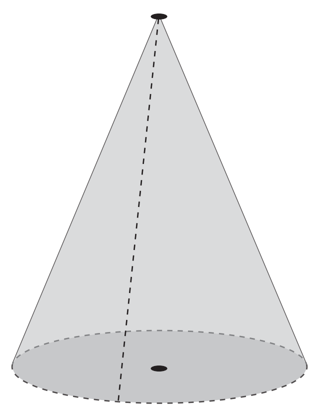


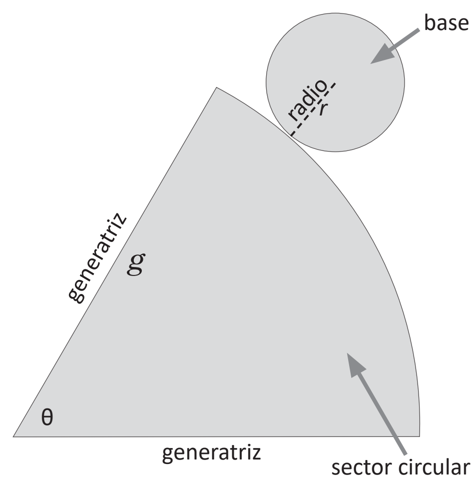

El patrón del cono está compuesto por un círculo de radio $r$, que es el radio del cono, y por un sector circular, cuyo radio es la generatriz del cono y el ángulo central □. Las fórmulas para calcular la longitud de arco *L*, de un sector circular son:

$L = 2\pi r$ ... ... (1)

$L = \frac{\theta}{180^\circ}\pi g$ ... ... (2)

Radio del cono: $r$
Ángulo central del sector circular: θ
Generatriz del cono: $g$
Arco del sector circular: L






1. Encuentra la longitud de arco del sector circular de un cono cuya generatriz mide $g$ = 6 cm y el ángulo central es de □ = 120°.

2. Encuentra la longitud de arco del sector circular de un cono, cuyo radio mide 8 cm.

3. Encuentra de dos maneras diferentes, la longitud de arco del sector circular L de un cono, si su generatriz mide $g$ = 9 cm, □ = 120° y el radio $r$ = 3 cm.



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 4.2 Relación entre los elementos del patrón del cono

R

1. Encuentra la longitud de arco del sector circular de un cono L, cuya generatriz mide $g$ = 3 cm y el ángulo central es de □ = 210°.

2. Encuentra la longitud de arco del sector circular de un cono L cuyo radio mide $r$ = 6 cm.

C

Las medidas del cono se pueden calcular cuando la relación de la circunferencia de la base es igual a la longitud del sector circular; es decir:

$$L = 2\pi r = \frac{□}{180°}\pi g$$

Ejemplo: encontrar el ángulo central del sector circular □, dada la generatriz $g$ = 30 cm y el radio del cono $r$ = 4 cm.

Solución.
Como $2\pi r = \frac{□}{180°}\pi g$, entonces $\theta = \frac{360°}{g} \times r = 48°$.

Sustituyendo: $\theta = \frac{360°}{30} \times 4 = 48°$.

1. Encuentra el ángulo □ del sector circular del plano desarrollado del cono, si la generatriz $g$ = 6 cm y el radio del cono es $r$ = 5 cm.

2. Encuentra el radio $r$ de un cono, si su generatriz $g$ = 8 cm y el ángulo del sector circular del desarrollo del cono es □ = 90°.

3. Encuentra la generatriz $g$ del cono, si su radio $r$ mide 8 cm y el ángulo □ mide 80°.

4. Encuentra la generatriz $g$ del cono, si su ángulo □ = 270° y su longitud de arco es $10\pi$.



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 4.3 Área superficial del cono

1. Encuentra la longitud de arco $L$ del sector circular de un cono, si $g$ = 15 cm y □ = 120°.

2. Encuentra el ángulo □ del sector circular del plano desarrollado del cono si la generatriz $g$ = 8 cm y el radio del cono es de $r$ = 2 cm.

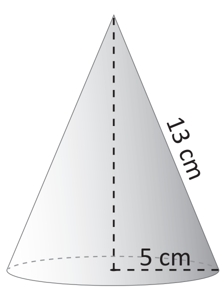
Se utiliza el plano desarrollado del cono para calcular su área lateral y total, cuando el radio del cono es $r$ y la generatriz es $g$:

**Área lateral $A_{Lateral}$:** Es el área del sector circular que aparece en el desarrollo del cono. Su área está dada por: $A_{Lateral} = \pi r g$

**Área total $A_{Total}$:** Es la suma del área lateral y el área de la base. Como la base del cono es un círculo, se tiene que el área total es:

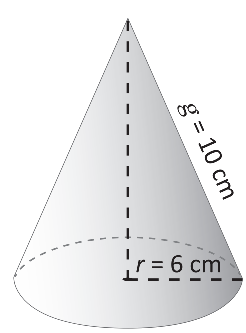
$$A_{Total} = A_{Lateral} + A_{Base} = \pi r g + \pi r^2 = \pi r(g + r)$$

1. Calcula el área lateral $A_{Lateral}$ y total $A_{Total}$ del cono que se muestra en la figura:




2. Encuentra la generatriz de un cono $g$ que tiene un radio de $r$ = 8 cm y un área lateral de $A_{Lateral}$ = $128\pi$ cm$^2$.

3. Calcula el área lateral $A_{Lateral}$ y total $A_{Total}$ del cono que se muestra en la figura:



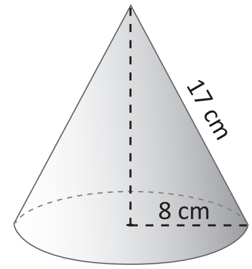



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 4.4 Área superficial de la esfera

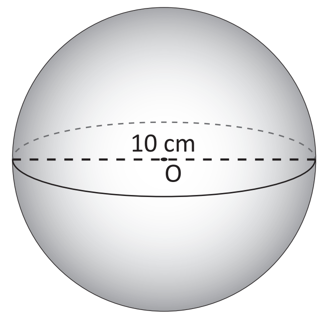
1. Encuentra la generatriz $g$ del cono, si su radio $r$ mide 16 cm y el ángulo □ mide 120°.

2. Calcula el área lateral $A_{Lateral}$ y total $A_{Total}$ del cono que se muestra en la figura:




Como el área de un círculo de radio $r$ es igual a $\pi r^2$, el área superficial de la esfera es: $A = 4\pi r^2$.

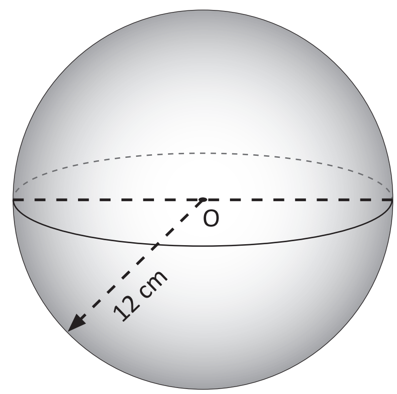
Ejemplo: Encuentra el área superficial de la esfera cuyo diámetro es 10 cm.




Primero se encuentra el radio, dado que el diámetro es 10 cm, el radio vale 5 cm; por tanto, el área de la esfera es:

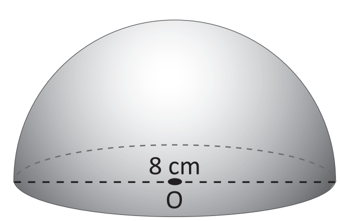
$$A = 4\pi r^2 = 4\pi(5)^2 = 100\pi \text{ cm}^2.$$

1. Encuentra el área superficial de la esfera que tiene radio 12 cm.




2. Calcular el radio de una esfera si su área superficial es $36\pi$ cm$^2$.

3. Encuentra el área superficial de la parte curva de una semiesfera cuyo diámetro es 8 cm.

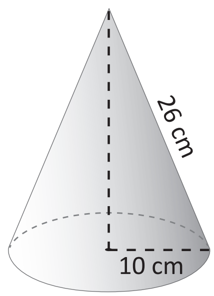



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

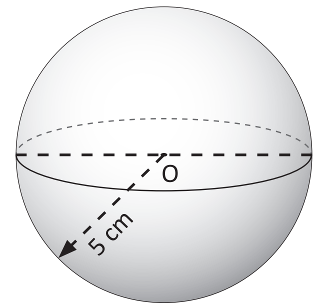
## 5.1 Áreas superficiales en sólidos compuestos

R

1. Calcula el área lateral $A_{Lateral}$ y total $A_{Total}$ del cono que se muestra en la figura:



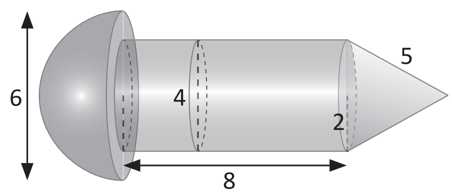

2. Encuentra el área de la esfera de radio 5 cm.




C

Para encontrar el área superficial de figuras compuestas, se suman o se restan las áreas de cada una de ellas en el problema.

Ejemplo.
Encuentra el área superficial de la siguiente figura:




Primero se encuentra el área de la semiesfera. Utilizando la fórmula se tiene:

$A_{semiesfera} = \frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2 \times \pi \times 3^2 = 18\pi \text{ cm}^2$

El área lateral del cono:

$A_{Lcono} = \pi r g = \pi \times 2 \times 5 = 10\pi \text{ cm}^2$

Luego se calcula el área lateral del cilindro:

$A_{Lateral} = 2\pi r h = 2\pi \times 2 \times 8 = 32\pi \text{ cm}^2$

Luego del área del círculo de la semiesfera se resta el círculo de la tapa del cilindro:

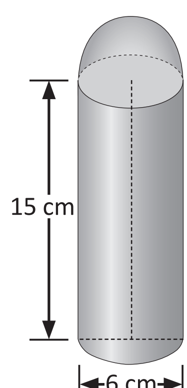
$A_{círculos} = \pi\left(\frac{6}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 9\pi - 4\pi = 5\pi \text{ cm}^2$

Por tanto, el área de la figura A:

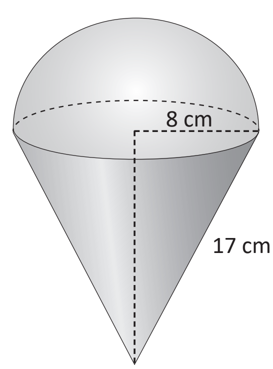
$A_{Figura} = A_{semiesfera} + A_{Lateral} + A_{Lcono} + A_{círculos} = 18\pi + 32\pi + 10\pi + 5\pi = 65\pi \text{ cm}^2$.

Encuentra el área de las siguientes figuras:

a)



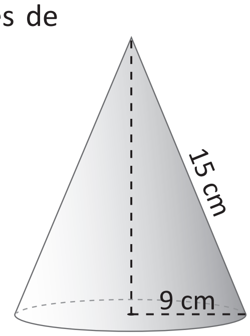
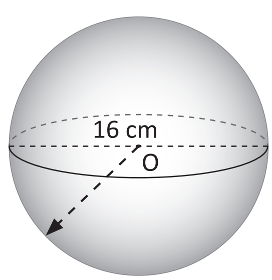

b)




¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 5.2 Autoevaluación de lo aprendido

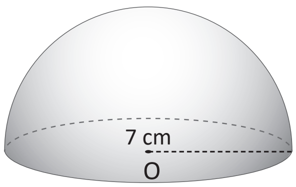
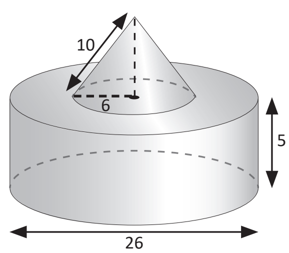
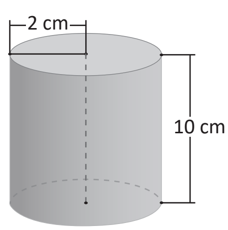
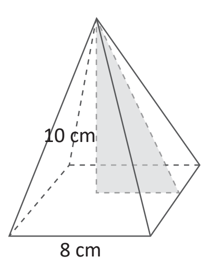
Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

| Ítem | Sí | Podría mejorar | No | Comentario |
|---|---|---|---|---|
| 1. Encuentro la longitud de arco L de un cono cuya generatriz mide $g$ = 10 cm y el ángulo central es de □ = 90°. | | | | |
| 2. Encuentro el radio $r$ de un cono, si su generatriz $g$ mide 15 cm y el ángulo central □ del sector circular del desarrollo del cono es 216°. | | | | |
| 3. Calculo el área lateral y total de un cono cuya altura mide 12 cm, la generatriz mide 15 cm y el radio de la base es de 9 cm.   | | | | |
| 4. Encuentro el área de una esfera de diámetro 16 cm.   | | | | |

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 5.3 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

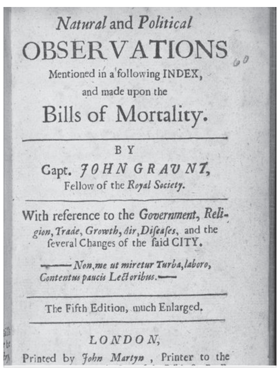
| Ítem | Sí | Podría mejorar | No | Comentario |
|---|---|---|---|---|
| 1. Encuentro el área de la semiesfera de radio 7 cm.<br> | | | | |
| 2. Encuentro el área superficial de la siguiente figura:<br> | | | | |
| 3. Calculo el volumen de un cilindro cuyo radio es de 2 cm y la altura es de 10 cm<br> | | | | |
| 4. Calculo el volumen de una pirámide cuadrangular cuyo lado de la base mide 8 cm y la altura 10 cm.<br> | | | | |



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# Unidad 8

# Organización y análisis de datos estadísticos


*Natural* and Political
OBSERVATIONS
Mentioned in a following INDEX,
and made upon the
Bills of Mortality.

BY
Capt. *JOHN GRAUNT*,
Fellow of the *Royal Society*.

With reference to the *Government*, *Religion*, *Trade*, *Growth*, *Air*, *Diseases*, and the several Changes of the said CITY.

—— *Non, me ut miretur Turba, laboro, Contentus paucis Lectoribus.*

The Fifth Edition, much Enlarged.

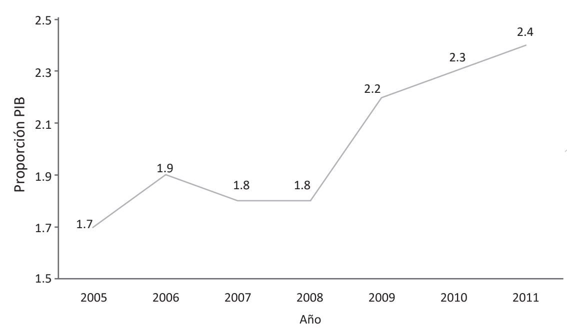
LONDON,
Printed by *John Martyn*, Printer to the

*Imagen del trabajo realizado por John Graunt en 1662.*

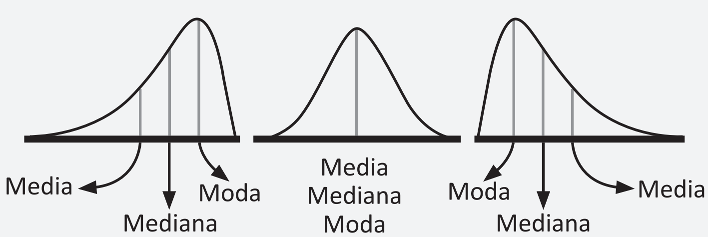
La estadística tuvo sus orígenes en actividades que estaban relacionadas directamente con la organización política, jurídica y administrativa de distintas civilizaciones, entre las que se pueden mencionar los egipcios, los babilónicos y los romanos; para ello, los funcionarios públicos tenían la obligación de anotar nacimientos, matrimonios y defunciones, sin olvidar los recuentos periódicos del ganado y de las riquezas que poseían los territorios conquistados; pero John Graunt (1620 - 1674) fue el primero que puso las bases de una estadística científica, realizando un trabajo a partir de las tablas de mortalidad de la ciudad de Londres.

La estadística juega un papel importante en distintas áreas; por ejemplo, en el sector educativo, económico, tecnológico, social y de la salud, proporcionando herramientas metodológicas que facilitan la recolección, comparación y análisis de datos, con el fin de generar modelos para hacer predicciones y facilitar la toma de decisiones. Por ejemplo, las redes sociales, se nutren de un continuo análisis estadístico en el desarrollo de sus aplicaciones internas.

Gráfico 2. Evolución del presupuesto del MINSAL como proporción del PIB, (2005 - 2011)




*MInisterio de Salud, Estudio de exclusión social en salud, diciembre 2011.*




*Relaciones entre las medidas de tendencia central.*

En el desarrollo de los contenidos de esta unidad aprenderás a organizar datos en tablas, representarlos mediante gráficas y determinar valores representativos que se conocen como medidas de tendencia central; así como algunas de sus propiedades y aplicaciones en situaciones cotidianas.

# 1.1 Agrupación de datos

Para organizar una serie de datos en grupos se realiza lo siguiente:

1. Se definen las categorías considerando el número de grupos a crear y los límites a considerar.
2. Se colocan los datos uno a uno, en el grupo al que pertenecen, teniendo cuidado que en cada grupo deben quedar los datos cuyo valor es igual o mayor al del límite menor, pero que sean menores que el límite mayor.

1. La siguiente serie de datos corresponde a los registros de ventas diarias en dólares que don Carlos registró en su panadería, durante el mes de abril.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 39 | 35 | 30 | 21 | 40 | 45 | 20 | 16 | 30 |
| 35 | 40 | 21 | 34 | 50 | 25 | 35 | 30 | 40 |
| 45 | 40 | 35 | 50 | 30 | 20 | 35 | 55 | 55 |
| 64 | 62 | 55 | | | | | | |

a) Clasifica los datos en 5 grupos de 10 en 10, inicia en 15 y termina en 65.
b) ¿En qué grupo se concentró el mayor número de días?
c) ¿Qué cantidad de días se tuvo una venta mayor o igual 51 dólares?
d) ¿Qué cantidad de días se tuvo una venta superior a 24 dólares e inferior a 52 dólares?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

2. La siguiente serie de datos corresponde al total de pupusas que un mesero despachó por día durante un período de tiempo determinado, en la pupusería San José.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 125 | 130 | 120 | 125 | 140 | 134 | 80 | 90 | 100 |
| 125 | 150 | 140 | 115 | 120 | 130 | 115 | 140 | 160 |
| 135 | 140 | 125 | 120 | 115 | 160 | 200 | 225 | 250 |
| 215 | 205 | 90 | | | | | | |

a) Clasifica los datos en 5 grupos de 35 en 35, que inicia en 80 y termina en 255.
b) ¿En qué grupo se concentró el mayor número de días?
c) ¿Qué cantidad de días se vendió un mayor número de pupusas?
d) ¿Qué cantidad de días se vendió una cantidad de pupusas igual o mayor a 185?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.2 Tabla de frecuencias

**R** La siguiente serie de datos corresponde a los registros de ingresos diarios en dólares que la Cooperativa de Taxis La Reserva, registró durante un mes.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,340 | 1,230 | 1,425 | 1,235 | 1,150 | 1,342 | 1,350 | 1,430 | 1,175 |
| 1,345 | 1,120 | 1,841 | 1,625 | 1,475 | 1,530 | 1,840 | 1,635 | 1,625 |
| 1,310 | 1,205 | 1,520 | 875 | 1,875 | 1,235 | 900 | 1,170 | 1,850 |

a) Clasifica los datos en 5 grupos de 205 en 205, inicia en 875 y termina en 1,900.
b) ¿En qué grupo se concentró el mayor número de días?
c) ¿Qué cantidad de días se tuvo un ingreso mayor o igual a 1,490 dólares?
d) ¿Qué cantidad de días se tuvo un ingreso mayor o igual que 1,080 dólares e inferior a 1,695?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

**C** La tabla en que se organizan los grupos de datos de una serie, se llama **tabla de distribución de frecuencias**, y a cada grupo de datos formados se le llama **clases**, de donde se puede decir que los datos del ejemplo han sido organizados en 5 clases. Además, el total de datos que corresponde a cada clase se llama **frecuencia**.

Por tanto, para organizar una serie de datos en una tabla de distribución de frecuencias, es necesario:
- Organizar los datos en tantas clases como sea necesario.
- Realizar el conteo de los datos que pertenecen a cada clase para determinar la frecuencia.

Julia y Miguel trabajan con diferentes secciones de primer grado, en el Centro Escolar El Castillo, y cada día toman nota del total de estudiantes que asisten a clases; en el último mes, los datos de la asistencia fueron los siguientes:

Julia

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | 27 | 30 |
| | | | 27 | 30 |
| | | | 27 | 30 |
| | | 24 | 27 | 29 |
| | | 24 | 26 | 29 |
| | 20 | 24 | 26 | 29 |
| | 19 | 23 | 25 | 29 |
| 18 | 21 | 24 | 26 | 28 |
| 16 | 20 | 22 | 27 | 28 |
| **De 16 a 19** | **De 19 a 22** | **De 22 a 25** | **De 25 a 28** | **De 28 a 31** |

Miguel

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | 28 |
| | | | 27 | 30 |
| | | 23 | 27 | 30 |
| | | 24 | 26 | 28 |
| | 21 | 23 | 26 | 28 |
| | 19 | 24 | 26 | 30 |
| | 19 | 23 | 27 | 30 |
| | 20 | 24 | 26 | 30 |
| 18 | 20 | 22 | 27 | 29 |
| **De 16 a 19** | **De 19 a 22** | **De 22 a 25** | **De 25 a 28** | **De 28 a 31** |

1. Ordena los datos en una tabla de distribución de frecuencias.
2. Compara los resultados y responde, ¿cuál sección tiene mayor asistencia?, ¿por qué?

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.3 Elementos de la tabla de frecuencias

A continuación se muestra el total de clientes atendidos por día por una cajera de un banco, durante el mes de enero.

a) Clasifica los datos en 5 grupos de 21 en 21, inicia en 90 y termina en 195.
b) ¿En qué grupo se concentró el mayor número de días?
c) ¿Qué cantidad de días se atendió un total de clientes mayor o igual a 153?
d) ¿Qué cantidad de días se atendió un total de clientes menor a 132?
e) Ordena los datos en una tabla de distribución de frecuencias.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 140 | 123 | 142 | 123 |
| 115 | 134 | 135 | 143 |
| 175 | 130 | 112 | 184 |
| 162 | 147 | 153 | 184 |
| 165 | 162 | 131 | 120 |
| 152 | 175 | 187 | 123 |
| 90 | 117 | 174 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

| | |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| Total | |

Al tamaño de una clase se le llama **ancho de clases** y a los valores extremos **límite de clases**; por ejemplo, para la primera clase, de 20 a 24, los límites de clase son 20 y 24, se tiene que

Límite inferior = extremo menor = 20
Límite superior = extremo mayor = 24 $\longrightarrow$ Ancho de clase = 24 – 20 = 4.

Para calcular el ancho de una clase cualquiera se utiliza la ecuación:
Ancho de clase = límite superior – límite inferior.

El número que está en el centro de cada clase se llama **punto medio** y se determina mediante la ecuación:

$$\text{Punto medio} = \frac{\textit{límite superior + límite inferior}}{2}.$$

La tabla contiene el registro del puntaje de los resultados de una prueba aplicada a una muestra de estudiantes de educación básica del Centro Escolar Pueblo Escondido, analiza los datos y responde:

a) Determina el ancho de las clases.
b) Calcula el punto medio de cada clase y colócalos en la tabla.
c) ¿Cuál es la frecuencia de la clase cuyo punto medio es 50?

| **Puntajes** | **Número de estudiantes** | **Punto medio** |
|---|---|---|
| | ***f*** | ***Pm*** |
| 0 - 20 | 15 | |
| 20 - 40 | 35 | |
| 40 - 60 | 25 | |
| 60 - 80 | 15 | |
| 80 - 100 | 10 | |
| **Total** | | |

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# 1.4 Gráficas estadísticas

**R**

A continuación se muestra el total de piezas producidas al día por un empleado de una empresa, durante 30 días.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | 218 | 249 |
| | | 185 | 215 | 249 |
| | 160 | 190 | 220 | 248 |
| | 175 | 195 | 210 | 230 |
| | 165 | 190 | 220 | 245 |
| 150 | 155 | 185 | 215 | 240 |
| 140 | 170 | 180 | 205 | 230 |
| 148 | 175 | 201 | 210 | 235 |
| 136 | 160 | 200 | 205 | 230 |
| **130 a 154** | **154 a 178** | **178 a 202** | **202 a 226** | **226 a 250** |

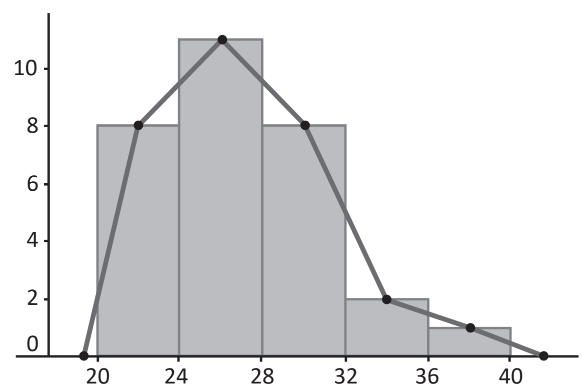
| **Piezas producidas** | **Número de días** | **Punto medio** |
|---|---|---|
| | ***f*** | ***Pm*** |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| **Total** | | |

1. Ordena los datos en una tabla de distribución de frecuencias.
2. ¿Qué cantidad de días produjo más de 178 piezas?
3. ¿Qué cantidad de días produjo una cantidad de piezas inferior a 202?
4. ¿En qué grupo o grupos se concentró el mayor número de días?
5. Determina el ancho de las clases.
6. Calcula el punto medio  de cada clase y colócalos en la tabla.
7. ¿Cuál es la frecuencia de la clase cuyo punto medio es 190?

**C**

La gráfica que se obtiene al representar las clases con sus respectivas frecuencias se llama **histograma** y para elaborarlo se realiza lo siguiente:

- Se coloca en el eje horizontal los límites de las clases.
- En el eje vertical se coloca la frecuencia, se busca una escala adecuada considerando los valores de la frecuencia de la distribución de los datos.
- Se  levantan rectángulos cuya base coincide con el ancho de clases y la altura con la frecuencia  de la respectiva clase.




Al observar el histograma se puede encontrar que

- Tiene forma parecida a la de una montaña donde la parte más alta indica dónde se encuentra concentrado el mayor número de datos.
- Los rectángulos que forman el histograma tienen un área proporcional a la frecuencia de su clase.

En algunos casos es importante resaltar la forma de la distribución de los datos, en ese caso se coloca un punto en el punto medio del lado superior de cada rectángulo, se unen con segmentos de recta los puntos identificados; luego el extremo izquierdo se conecta con el punto medio de una clase imaginaria anterior a la menor con frecuencia cero, y el extremo derecho se conecta con el punto medio de una clase imaginaria posterior a la mayor, también con frecuencia cero. A la gráfica que se obtiene se le llama polígono de frecuencia.



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Con la información organizada en cada una de las tablas, realiza lo siguiente:

a) Representa los datos mediante un histograma.
b) Calcula el punto medio de cada clase y colócalos en la tabla.
c) Determina qué características tiene la gráfica que muestra la distribución.
d) Grafica el polígono de frecuencia a partir del histograma.

1. Don Miguel tiene una pequeña empresa dedicada al comercio del café, cada día empaca una determinada cantidad de bolsas, la tabla muestra la cantidad de bolsas empacadas durante un año.

| **Cantidad de bolsas** | **Número de días** | **Punto medio** |
|---|---|---|
| | ***f*** | ***Pm*** |
| 200 - 240 | 70 | |
| 240 - 280 | 75 | |
| 280 - 320 | 65 | |
| 320 - 360 | 70 | |
| 360 - 400 | 85 | |
| **Total** | **365** | |

2. La tabla contiene el registro del puntaje de los resultados de una prueba aplicada a una muestra de estudiantes de educación básica del Centro Escolar Pueblo Escondido.

| **Puntajes** | **Número de estudiantes** | **Punto medio** |
|---|---|---|
| | ***f*** | ***Pm*** |
| 0 - 20 | 15 | |
| 20 - 40 | 35 | |
| 40 - 60 | 25 | |
| 60 - 80 | 15 | |
| 80 - 100 | 10 | |
| **Total** | **100** | |



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# 1.5 Uso del polígono de frecuencias

R La tabla muestra los kilómetros recorridos por un taxi durante un año, realiza lo siguiente:

1. Determina el ancho de las clases.
2. Calcula el punto medio de cada clase y colócalos en la tabla.
3. ¿Cuál es la frecuencia de la clase cuyo punto medio es 75?
4. Representa los datos mediante un histograma.
5. Determina qué características tiene la gráfica que muestra la distribución.
6. Grafica el polígono de frecuencia a partir del histograma.

| Kilómetros | Número de días | Punto medio |
|---|---|---|
| | ***f*** | ***Pm*** |
| 0 - 50 | 55 | |
| 50 - 100 | 65 | |
| 100 - 150 | 75 | |
| 150 - 200 | 90 | |
| 200 - 250 | 80 | |
| **Total** | **365** | |

C La comparación de datos estadísticos, generalmente no se puede realizar directamente con las frecuencias de cada clase, en estos casos, es necesario calcular la razón entre la frecuencia de cada clase y el total de la frecuencia, $\frac{frecuencia}{total\ de\ frecuencias}$, a este cociente se le llama **frecuencia relativa ($f_r$)**.

Considerando que el total de las frecuencias es igual al número de datos ($n$), entonces:

$$f_r = \frac{frecuencia}{total\ de\ frecuencias} = \frac{f}{n}.$$

Al producto que se obtiene al multiplicar la frecuencia relativa por 100 se le llama **frecuencia relativa porcentual** ($f_r\%$), es decir que $f_r\% = \frac{frecuencia}{total\ de\ frecuencias} \times 100 = \frac{f}{n} \times 100$, esta se utiliza para determinar los porcentajes de datos que corresponden a cada clase de la distribución para facilitar el análisis y/o comparación de una o más series de datos.

La tabla muestra los datos de la asistencia del mes de junio, de la sección A de los alumnos de primer grado del Centro Escolar El Castillo, con la información, realiza lo siguiente:

| Total de estudiantes | Sección A días | Frecuencia relativa | Frecuencia relativa Porcentual | Punto medio |
|---|---|---|---|---|
| | ***f*** | $f_r$ | $f_r\%$ | ***Pm*** |
| 16 - 19 | 2 | | | |
| 19 - 22 | 4 | | | |
| 22 - 25 | 6 | | | |
| 25 - 28 | 9 | | | |
| 28 - 31 | 9 | | | |
| **Total** | | | | |

1. Calcula las frecuencias relativas y las frecuencias relativas porcentuales.
2. Calcula el punto medio de cada clase y colócalos en la tabla.
3. Representa los datos en un polígono de frecuencia.

## 1.6 Interpretación de datos estadísticos

R 1. La siguiente información corresponde a las horas semanales que los estudiantes de octavo grado dedican para realizar sus tareas de matemática:

| Total de estudiantes | Número de horas | Punto medio | Frecuencia relativa | Frecuencia relativa porcentual |
|---|---|---|---|---|
| | ***f*** | ***Pm*** | $f_r$ | $f_r\%$ |
| 0 - 6 | 8 | | | |
| 6 - 12 | 12 | | | |
| 12 - 18 | 9 | | | |
| 18 - 24 | 5 | | | |
| 24 - 30 | 2 | | | |
| **Total** | | | | |

a) Representa los datos mediante un histograma.
b) ¿Qué características tiene la gráfica que muestra la distribución?
c) Calcula el punto medio de cada clase y colócalos en la tabla.
d) Grafica el polígono de frecuencia a partir del histograma.

---

2. La siguiente tabla muestra los casos sospechosos de chikungunya (CHIKV) por grupo de edad de la semana 01 a la 39 (SE01 - 39 ) de 2015, según Boletín Epidemiológico Semana 39 (del 27 de septiembre al 03 de octubre 2015) de la Dirección de Vigilancia Sanitaria del Ministerio de Salud.

| Edad (años) | Casos | Punto medio | Porcentaje de casos |
|---|---|---|---|
| | ***f*** | ***Pm*** | $f_r\%$ |
| 10 - 20 | 7092 | | |
| 20 - 30 | 11026 | | |
| 30 - 40 | 8554 | | |
| 40 - 50 | 5999 | | |
| 50 - 60 | 3190 | | |
| **Total** | | | |

Determina:

a) Porcentaje de casos de CHIKV para los cinco grupos de personas.
b) Porcentaje de casos sospechosos en personas de 40 años o más.
c) Porcentaje de casos sospechosos en personas menores de 30 años.
d) Edad promedio del grupo cuyo porcentaje de casos sospechosos es mayor.



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.7 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

| Ítem | Sí | Podría mejorar | No | Comentario |
|---|---|---|---|---|
| Puedo ordenar y clasificar series de datos como la del ejemplo:<br>En una Unidad de Salud, se lleva el registro de las tallas en cm de una muestra de niños, a continuación se presentan las tallas cuando cumplieron 4 años de edad. | | | | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 78 | 72 | 78 | 87 | 67 | 77 | 90 | 76 |
| 66 | 87 | 70 | 86 | 68 | 77 | 89 | 81 |
| 74 | 88 | 71 | 79 | 89 | 77 | 70 | 71 |
| 88 | 74 | 87 | 95 | 70 | 89 | 84 | 74 |
| 80 | 86 | 79 | 87 | 77 | 89 | 70 | 87 |

a) Identifica la talla menor y la talla mayor.
b) Organiza los datos en 5 grupos.
c) Construye una tabla con los datos agrupados en 5 clases de ancho 5.
d) ¿En qué grupo quedan clasificados la mayor cantidad de niños y niñas?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 1.8 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

| Ítem | Sí | Podría mejorar | No | Comentario |
|---|---|---|---|---|
| 1. Organizo información en tablas y represento gráficamente, tal como en el ejemplo: | | | | |

Los datos siguientes muestran el total de piezas ensambladas por día por un empleado de una fábrica de equipos electrónicos, con ellos:

a) Ordena los datos en una tabla de distribución de frecuencias.
b) ¿Qué cantidad de días produjo una cantidad igual o mayor a 94 piezas?
c) ¿Qué cantidad de días produjo una cantidad de piezas inferior a 86?
d) ¿En qué grupo se concentró el mayor número de días?
e) Determina el ancho de las clases.
f) Calcula el punto medio de cada clase y colócalos en la tabla.
g) ¿Cuál es la frecuencia de la clase cuyo punto medio es 90?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 92 | | |
| | | 87 | 95 | 105 |
| | | 90 | 98 | 102 |
| | 81 | 91 | 101 | 107 |
| 75 | 85 | 90 | 98 | 108 |
| 70 | 79 | 86 | 94 | 102 |
| 74 | 78 | 93 | 97 | 104 |
| 76 | 84 | 89 | 99 | 109 |
| 77 | 80 | 90 | 97 | 103 |
| **70 a 78** | **78 a 86** | **86 a 94** | **94 a 102** | **102 a 110** |

| | **Número de días** | **Punto medio** |
|---|---|---|
| | ***f*** | ***Pm*** |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| **Total** | | |



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2. Represento información mediante polígonos de frecuencias porcentuales, tal como el siguiente ejemplo:

La tabla muestra los datos de la asistencia desde el mes de enero a junio de la sección B de los alumnos de primer grado del Centro Escolar El Castillo, con esta información, realiza lo siguiente:

| Días asistidos | Total de niños | Punto medio | Frecuencia relativa | Frecuencia relativa porcentual |
|---|---|---|---|---|
| | $f$ | $Pm$ | $f_r$ | $f_r\%$ |
| 1 - 20 | 1 | | | |
| 20 - 40 | 4 | | | |
| 40 - 60 | 10 | | | |
| 60 - 80 | 15 | | | |
| 80 - 100 | 10 | | | |
| **Total** | **40** | | | |

a) Construye el respectivo histograma.
b) A partir del histograma, construye el polígono de frecuencias.
c) Calcula las frecuencias relativas y las frecuencias relativas porcentuales, colócalas en la tabla.
d) Calcula los puntos medios y colócalos en la tabla.
e) ¿Cuántos niños asistieron 65 días en promedio?
f) ¿Cuántos niños asistieron menos de 80 días?
g) ¿Qué porcentaje de niños asistieron 60 días o más?



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.1 Sentido de las medidas de tendencia central

Tal como se aprendió en sexto grado, se pueden calcular valores representativos que pueden describir una serie de datos, los cuales se detallan a continuación:

**La mediana**, es el valor que ocupa la posición central en una serie de datos, cuando ya han sido ordenados de menor a mayor. Para determinar el valor de la mediana, se consideran los siguientes casos:

a) Cuando el número de datos $n$ es impar, la mediana es el dato $x$ que ocupa la posición central. En este caso, para determinar la posición central se utiliza la fórmula $\frac{n+1}{2}$, por ejemplo si $n = 11$, entonces la posición de la mediana es: $\frac{11+1}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

b) Cuando el número de datos $n$ es par, la mediana es el número que se encuentra entre los dos datos centrales, pues al determinar la posición de la mediana, se obtiene un valor que no corresponde a la posición de ningún dato de la serie; por ejemplo, si $n = 12$, entonces, al determinar la posición de la mediana, $\frac{12+1}{2} = \frac{13}{2} = 6.5$, lo que indica que la mediana es el número que está entre el dato 6 y el dato 7. En este caso, la *Mediana = Punto medio de los dos datos centrales*.

**La Moda**, es el valor que aparece la mayor cantidad de veces en una serie, es decir, la moda es el dato que tiene la mayor frecuencia. En casos en que todos los datos aparecen igual cantidad de veces, se dice que la serie no tiene moda o que carece de moda.

**La media aritmética (μ)** es el número que resulta de dividir la suma de todos los datos $x$ entre el número de datos $n$ y que se conoce también como **promedio**. Media aritmética = $\frac{\textit{Suma de todos los datos } x}{n}$.

Las siguientes series de datos corresponden a los ingresos diarios generados por dos taxis de la Cooperativa Correcamino en los últimos 10 días:

**Unidad 1**: 150, 135, 150, 140, 180, 100, 170, 150, 125, 175

**Unidad 2**: 100, 175, 150, 180, 160, 140, 170, 175, 140, 190

Con los datos de cada unidad, realiza lo siguiente:

a) Ordena los datos de menor a mayor.

b) Identifica el mínimo y el máximo.

c) Determina la mediana.

d) Identifica el valor de la moda.

e) Calcula la media aritmética.

f) ¿Es posible determinar cuál unidad genera mayores ingresos?



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.2 Media aritmética

R Las siguientes series de datos corresponden al número de estudiantes de tercer ciclo que realizaron la prueba mensual de matemática durante el año recién pasado:

**Turno matutino**: 150, 145, 130, 125, 150, 140, 135, 150, 145, 150

**Turno vespertino**: 100, 105, 95, 100, 103, 105, 107, 104, 100, 105

Con los datos de cada turno, realiza lo siguiente:

a) Ordena los datos de menor a mayor.

b) Identifica el mínimo y el máximo.

c) Determina la mediana.

d) Identifica el valor de la moda.

e) Calcula la media aritmética.

C Para determinar la media aritmética de una serie de datos organizados en una distribución de frecuencias, se utiliza la ecuación: *Media aritmética* = $\frac{\textit{Suma de los productos de } Pm \times f}{\textit{Número de datos}}$.

La tabla contiene el registro de la asistencia de la sección A y B de primer grado del Centro Escolar El Castillo, con la información realiza lo siguiente:

| Asistencia sección A | Número de días $f$ | Punto medio $Pm$ | $f \times Pm$ |
|---|---|---|---|
| 16 - 19 | 2 | | |
| 19 - 22 | 4 | | |
| 22 - 25 | 6 | | |
| 25 - 28 | 9 | | |
| 28 - 31 | 9 | | |
| **Total** | | | |

| Asistencia sección B | Número de días $f$ | Punto medio $Pm$ | $f \times Pm$ |
|---|---|---|---|
| 16 - 19 | 1 | | |
| 19 - 22 | 5 | | |
| 22 - 25 | 7 | | |
| 25 - 28 | 8 | | |
| 28 - 31 | 9 | | |
| **Total** | | | |

a) Completa la tabla.
b) Calcula la media aritmética.
c) Compara la asistencia media de las dos secciones, ¿es posible determinar en cuál de las dos hay mayor asistencia?

# 2.3 Propiedades de la media aritmética

R

1. Los datos de la tabla corresponden a las notas obtenidas por Carmen en séptimo grado, con estos datos, realiza lo siguiente:

   a) Ordena los datos de menor a mayor.
   b) Identifica el mínimo y el máximo.
   c) Determina la mediana.
   d) Identifica el valor de la moda.
   e) Calcula la media aritmética.

| Ene | Feb | Mar | Abr | May | Jun | Jul | Ago | Sep | Oct |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 8 | 6 | 9 | 10 | 7 | 8 | 6 | 7 | 10 |

2. Don Miguel tiene una pequeña empresa dedicada al comercio del café, cada día empaca una determinada cantidad de bolsas, la tabla muestra la cantidad de bolsas empacadas durante un año; con la información, realiza lo siguiente:

   a) Completa la tabla.
   b) Calcula la media aritmética aproximada.

| Cantidad de bolsas | Número de días | Punto medio | $f \times Pm$ |
|---|---|---|---|
| | $f$ | $Pm$ | |
| 200 - 240 | 70 | | |
| 240 - 280 | 75 | | |
| 280 - 320 | 65 | | |
| 320 - 360 | 70 | | |
| 360 - 400 | 85 | | |
| **Total** | **365** | | |

C

A partir de la definición de la media aritmética, se obtiene que la suma de los datos de una serie es igual a $n$ veces la media aritmética, es decir $\mu = \frac{\text{Suma de todos los datos } x}{n}$, de donde $n\mu$ = *Suma de todos los datos* $x$.

La media aritmética posee algunas propiedades, entre las cuales se tienen:

- Si a todos los valores de la variable se les suma una cantidad, la media aritmética queda aumentada en dicha cantidad. Por ejemplo, la serie 3, 4, 5, 4, 9 tiene $\mu = 5$, si a cada dato se le suma 2, se obtiene la serie 5, 6, 7, 6, 11; cuya media es $\mu = 5 + 2 = 7$.

- Si todos los valores de la variable se multiplican por una misma constante, la media aritmética queda multiplicada por dicha constante. Por ejemplo, la serie 3, 4, 5, 4, 9 tiene $\mu = 5$, si a cada dato se multiplica por 2, se obtiene la serie 6, 8, 10, 8, 18; cuya media es $\mu = 5(2) = 10$.

Analiza la siguiente situación, luego realiza lo que se pide en cada caso.

En la tienda La Esquina, con motivo de la celebración de su aniversario, al realizar una compra, si el monto a pagar es igual o mayor a 25 dólares, todos sus clientes pueden escoger una de las siguientes opciones:

- Descuento del 20% sobre el costo total al momento de realizar el pago.
- Descuento de 10 dólares sobre el monto a pagar.

a) Si tú fueses un cliente de la tienda, ¿cuál opción preferirías?, ¿por qué?

b) ¿A partir de qué monto conviene seleccionar la primera opción?



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.4 Mediana y moda

R

1. La tabla contiene el registro del puntaje de los resultados de una prueba aplicada a una muestra de estudiantes de educación básica del Centro Escolar Pueblo Escondido. Con la información, realiza lo siguiente:

   a) Completa la tabla.
   b) Calcula la media aritmética.

| Puntajes | Número de estudiantes | Punto medio | $f \times Pm$ |
|---|---|---|---|
| | $f$ | $Pm$ | |
| 0 - 20 | 15 | | |
| 20 - 40 | 35 | | |
| 40 - 60 | 25 | | |
| 60 - 80 | 15 | | |
| 80 - 100 | 10 | | |
| **Total** | | | |

2. En el Banco del Pueblo, cada cajero al final del turno entrega un promedio de $2,800.00; con el objetivo de mejorar los ingresos, el gerente propone a todos los cajeros/as las siguientes opciones:

   - Aumentar las ventas en un 9% sobre el total que entregan en este momento.
   - Entregar 250 dólares más del entregado en este momento.

   Para los cajeros, ¿cuál opción crees que es más viable? Justifica tu respuesta.

C

Cuando se tiene una distribución de frecuencias, existen distintos métodos para determinar el valor de la mediana y la moda, en este caso se ha considerado únicamente el método que se conoce como **aproximado**, donde:

**Para determinar la mediana:**
- Se identifica la clase donde queda ubicado el dato que ocupa la posición central $\frac{n}{2}$ **clase mediana**.
- El valor aproximado de la mediana será el punto medio de la clase mediana.

**Para determinar la moda:**
- Se identifica la clase cuya frecuencia sea mayor **clase modal**.
- El valor aproximado de la moda será el punto medio de la clase modal.

Don Miguel tiene una pequeña empresa dedicada al comercio del café, cada día empaca una determinada cantidad de bolsas, la tabla muestra la cantidad de bolsas empacadas durante un año, con la información realiza lo siguiente:

a) Determina la moda.

b) Determina el valor de la mediana.

| Cantidad de bolsas | Número de días | Datos acumulados |
|---|---|---|
| | $f$ | |
| 200 - 240 | 70 | |
| 240 - 280 | 75 | |
| 280 - 320 | 60 | |
| 320 - 360 | 70 | |
| 360 - 400 | 85 | |
| **Total** | **360** | |

## 2.5 Propiedades de las medidas de tendencia central

R

1. El profesor de matemática de séptimo grado les asignó una tarea a sus estudiantes para ser entregada el día del examen, con el objetivo de darles cierta ponderación sobre el examen y les propuso las siguientes opciones:

   a) Aumentar en un 10% sobre la nota obtenida en el examen.
   b) Aumentar en un punto la nota obtenida en el examen.

¿Cuál opción crees que les favorece más a los estudiantes? ¿Por qué?

2. La tabla contiene el registro del puntaje de los resultados de una prueba aplicada a una muestra de estudiantes de educación básica del Centro Escolar Pueblo Escondido, con la información realiza lo siguiente:

   a) Determina la moda.
   b) Determina el valor de la mediana.

| Puntajes | Número de estudiantes $f$ | Datos acumulados |
|---|---|---|
| 0 - 20 | 15 | |
| 20 - 40 | 35 | |
| 40 - 60 | 25 | |
| 60 - 80 | 15 | |
| 80 - 100 | 10 | |
| **Total** | | |

C

La moda, mediana y media aritmética son llamadas medidas de tendencia central debido a que cuando los datos se ordenan de menor a mayor o viceversa, estas tienden a quedar ubicadas en el centro de la serie.

- **La moda y la mediana** se pueden utilizar para series de datos cualitativos (no numéricos) y cuantitativos (numéricos), además no se ven afectadas por los valores extremos de una serie de datos.

- **La media aritmética** se utiliza únicamente para series de datos cuantitativos (numéricos), aunque la media es confiable en el sentido de que toma en cuenta todos los valores del conjunto de datos, puede verse afectada por valores extremos que no son representativos del resto de los datos, tal como se muestra en el numeral 2 del ejemplo anterior.

Determina la moda, mediana y la media aritmética para cada una de las siguientes series de datos:

A: 10, 8, 6, 4, 5, 3, 7, 9, 2
B: 4, 12, 16, 6, 8, 20, 18, 14, 10
C: 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13

a) Compara los resultados obtenidos, ¿qué concluyes?

b) ¿Qué sucedería con las tres medidas de tendencia central si cada dato de la serie A se multiplicara por 5?



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.6 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

| Ítem | Sí | Podría mejorar | No | Comentario |
|---|---|---|---|---|
| 1. Organizo datos y determino las medidas de tendencia central, tal como se muestra en el ejemplo:<br>Las siguientes series de datos corresponden a los kilómetros recorridos por día por dos taxis de la Cooperativa Santa Fe, en los últimos 10 días:<br>**Unidad 1**: 350, 335, 250, 440, 580, 300, 370, 450, 325, 450.<br>**Unidad 2**: 300, 275, 450, 380, 560, 390, 470, 375, 340, 490.<br><br>Con los datos de cada sucursal, realiza lo siguiente:<br>a) Ordena los datos de menor a mayor.<br>b) Identifica el mínimo y el máximo.<br>c) Determina la mediana.<br>d) Identifica el valor de la moda.<br>e) Calcula la media aritmética.<br><br>¿Es posible determinar cuál unidad genera mayores ingresos? | | | | |
| 2. Determino las medidas de tendencia central para datos organizados en distribuciones de clases y frecuencias tal como el ejemplo:<br><br>En una fábrica se ha medido la longitud de 1 000 clavos para determinar si la máquina cortadora está ajustada y se han obtenido los siguientes datos: (ver tabla)<br><br>a) Calcula la longitud promedio de los clavos.<br>b) Determina el valor modal.<br>c) Calcula el valor de la mediana de la serie. | | | | |

| Longitud en mm | Número de tornillos | Punto medio | *F* × *Pm* | Datos aculmulados |
|---|---|---|---|---|
| | *f* | *Pm* | | |
| 45 - 55 | 15 | | | |
| 55 - 65 | 55 | | | |
| 65 - 75 | 850 | | | |
| 75 - 85 | 75 | | | |
| 85 - 95 | 5 | | | |
| **Total** | **1000** | | | |

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Unidad 8

# 2.7 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "x" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

<table>
<tr><th>Ítem</th><th>Sí</th><th>Podría mejorar</th><th>No</th><th>Comentario</th></tr>
<tr><td>1. Puedo resolver situaciones como la del ejemplo siguiente:<br><br>Se han exprimido 38 naranjas de cierta plantación y se ha medido la cantidad de jugo obtenido expresada en centilitros (cl). Los resultados fueron:<br>55, 60, 48, 39, 40, 39, 55, 38, 46, 50, 51, 59, 56, 55, 49, 47, 48, 49, 56, 53, 47, 50, 52, 57, 58, 52, 60, 65, 46, 51 60, 75, 45, 50, 40, 35, 65, 74.<br><br>a) Agrupa los datos en 5 intervalos de amplitud 8 cl comenzando por la clase de 35 a 43.<br>b) Elabora la tabla de frecuencias y represéntala en un polígono de frecuencias.<br>c) Halla el valor de la mediana, media y moda.<br>
<table>
<tr><th></th><th></th><th></th><th></th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2. Aplico propiedades de la media aritmética para resolver situaciones como la del ejemplo:<br><br>Doña Carmen pagaba mensualmente un promedio de 15 dólares en concepto de energía eléctrica, pero a partir de marzo de 2017, no recibió el subsidio, el recibo de la luz ha reflejado un aumento mensual de 20% sobre el monto promedio que pagaba, determina:<br><br>a) El nuevo promedio que pagará en concepto de energía eléctrica a partir de marzo de 2017.<br>b) El monto total que doña Carmen invertirá este año en concepto de energía eléctrica.<br>c) El costo aproximado del kWh de energía eléctrica en El Salvador es de 0.25 centavos de dólar y una lavadora gasta en promedio 900 Wh por hora cuando está encendida; si doña Carmen utiliza la lavadora 3 horas en promedio, por semana, ¿cuánto ahorraría en el pago de energía si deja de usar la lavadora?</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 2.8 Relación entre media, moda y mediana

R

1. La tabla contiene el registro de la asistencia de la sección A y B de primer grado del Centro Escolar El Castillo, para cada sección determina la moda y la mediana, luego compara los resultados.

| Total de estudiantes Sección A | Número de días $f$ | Datos acumulados |
|---|---|---|
| 16 - 19 | 2 | |
| 19 - 22 | 4 | |
| 22 - 25 | 6 | |
| 25 - 28 | 9 | |
| 28 - 31 | 9 | |
| **Total** | | |

| Total de estudiantes Sección B | Número de días $f$ | Datos acumulados |
|---|---|---|
| 16 - 19 | 1 | |
| 19 - 22 | 5 | |
| 22 - 25 | 7 | |
| 25 - 28 | 8 | |
| 28 - 31 | 9 | |
| **Total** | | |

2. Los datos que se muestran a continuación corresponden a los montos de ventas diarias de tres empleados del almacén El Paso.

| | Lun | Mar | Mié | Jue | Vie | Sáb | Dom |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Carmen | 300 | 250 | 400 | 350 | 400 | 600 | 550 |
| Miguel | 250 | 300 | 450 | 400 | 450 | 580 | 600 |
| Ana | 400 | 350 | 250 | 500 | 450 | 650 | 600 |

Aproxima los resultados a las décimas.

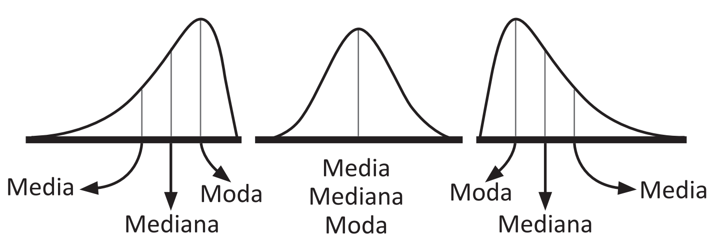
Determina:

a) La venta promedio de cada empleado.
b) La venta promedio por día.
c) La moda y mediana de la venta de cada empleado.
d) Compara los resultados obtenidos del literal a) y c), ¿qué concluyes?

C

Para una distribución de frecuencias, la forma del gráfico depende de la relación que existe entre el valor de la moda, mediana y media aritmética, es decir:

1. Si en una distribución de frecuencias, la moda, mediana y media aritmética, tienen igual valor, se dice que es una distribución simétrica.
2. Si en una distribución de frecuencias, la moda, mediana y media aritmética, tienen la siguiente relación: media > mediana > moda, se dice que la distribución es **asimétrica** o **con cola a la derecha** (sesgada a la derecha).
3. Si en una distribución de frecuencias, la moda, mediana y media aritmética, tienen la siguiente relación: media < mediana < moda, se dice que la distribución es **asimétrica** o **con cola a la izquierda** (sesgada a la izquierda).



Asimétrica hacia la izquierda

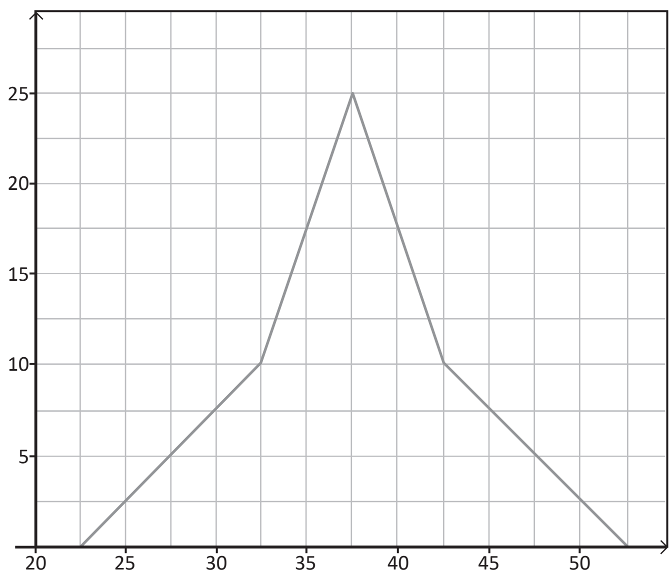
Asimétrica hacia la derecha

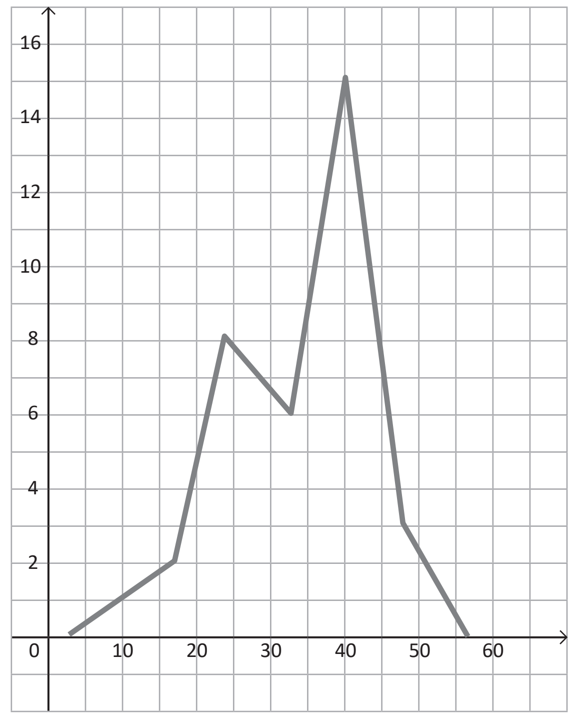


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1. Observa la forma de cada una de las siguientes gráficas que corresponden a una distribución de datos, luego realiza lo siguiente para cada caso:

a) Identifica el valor aproximado de la moda.
b) Determina la relación entre media, moda y mediana a partir de la forma del gráfico.




2. La distribución de los salarios de una empresa dedicada a la manufactura tiene los siguientes valores representativos: media aritmética 400, moda 350 y mediana 375 dólares.

A partir de la relación entre los tres valores representativos describe el tipo de distribución y elabora un boceto del polígono de frecuencias que le corresponde.



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 3.1 Valor aproximado

Cuando se calcula un cociente aplicando un proceso de división o mediante el uso de una calculadora, se pueden obtener hasta ocho o más dígitos. Para redondear a 2 o 3 cifras significativas se aplican las reglas de redondeo aprendidas en educación básica.

- Si el primer dígito que se eliminará es menor que 5, ese dígito y todos los dígitos que le siguen, simplemente se eliminan.

- Si el primer dígito que se eliminará es mayor de 5 o si es 5 seguido de dígitos diferentes de cero, todos los dígitos siguientes se suprimen y el valor del último dígito que se conserva se aumenta en una unidad.

El número obtenido después de aplicar redondeo se llama **valor aproximado** y al resultado con todos los dígitos se le llama **valor real o valor exacto**. A la diferencia entre el valor real y el aproximado se le llama **margen de error**.

El valor absoluto del margen de error puede ser como máximo la mitad de la unidad a la que se aproxima un número, por ejemplo:

Si se tiene como resultado 12 redondeado hasta las unidades, el valor absoluto del margen de error puede ser como máximo 0.5, por tanto el valor real puede estar entre 11.5 y 12.5; es decir:

$$11.5 \leq 12 < 12.5$$

Si el resultado fuese 8.4 redondeado hasta las décimas, el valor absoluto del margen de error puede ser como máximo 0.05, por tanto el valor real puede estar entre 8.35 y 8.45; es decir, $8.35 \leq 8.4 < 8.45$.

Para cada una de las siguientes cantidades, determina:

1. Valor aproximado, según se indica en cada caso.
2. El valor absoluto del margen de error.
3. Rango del valor absoluto del valor real.

**Redondear a las décimas:**

a) 7.6597 b) 8.3254 c) 9.4375 d) 4.578

**Calcular y redondear a las centésimas:**

e) $17 \div 3$ f) $20 \div 6$ g) $52 \div 22$ h) $37 \div 13$

Unidad 8

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 3.2 Dígitos significativos

R Para cada una de las siguientes cantidades, determina:

1. Valor aproximado según se indica en cada caso.
2. El valor absoluto del margen de error.
3. Rango del valor absoluto del valor real.

**Redondear a las décimas:**

a) 4.3527 b) 12.3957

**Calcular y redondear a las centésimas:**

c) $107 \div 13$ d) $205 \div 11$

C Cuando se aproxima una cantidad o cuando se realiza cualquier medición o cálculo, los dígitos que tienen un significado real y que por tanto aportan alguna información para determinar el valor real, se les llama **dígitos significativos** o **cifras significativas**. Para determinar la cantidad de dígitos significativos, se consideran ciertas reglas, entre las que se tienen:

1. En números que no contienen ceros, todos los dígitos son significativos; por ejemplo, 345, tiene 3 dígitos significativos.
2. Todos los ceros entre dígitos significativos son significativos; por ejemplo, 2 109, tiene 4 cifras significativas.
3. Los ceros a la izquierda del primer dígito, que no es cero, sirven solamente para fijar la posición del punto decimal y no son significativos; por ejemplo, 0.048, tiene solamente 2 cifras significativas.
4. En un número con dígitos a la derecha del punto decimal, los ceros a la derecha del último número diferente de cero son significativos; por ejemplo, $3.20000 \times 10^5$ tiene 6 cifras significativas.
5. En un número que no tiene punto decimal y que termina con uno o más ceros (como 4 700), los ceros con los cuales termina el número pueden ser o no significativos. El número es ambiguo en términos de cifras significativas. Para especificar el número de cifras significativas, se requiere información adicional acerca de cómo se obtuvo el número. Si el número es resultado de una medición, los ceros probablemente no son significativos. Si el número ha sido contado o definido, todos los dígitos son significativos (suponiendo que el recuento haya sido perfecto).

Para evitar la ambigüedad sobre el número de cifras significativas de un número, se expresan como el producto de un número por una potencia de 10 (un número que tenga un solo dígito en la parte entera) × (por potencia de 10), tal como se muestra en el numeral 2 del ejemplo desarrollado. Cuando un número está expresado de esta forma, se dice que está en **notación científica**.

La notación científica se utiliza para expresar fácilmente números muy grandes o muy pequeños, en este grado se trabajará únicamente para números muy grandes.

Expresa las siguientes cantidades en notación científica con 4 cifras significativas.

a) 705.23 b) 84 500 c) 540 297 d) 5 967 000 000



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## 3.3 Cantidades en notación científica

R 1. Para cada una de las siguientes cantidades, determina:

a) Valor aproximado según se indica en cada caso.
b) El valor absoluto del margen de error.
c) Rango del valor absoluto del valor real.

| **Redondear a las décimas:** | | **Calcular y redondear a las centésimas:** | |
|---|---|---|---|
| i) 0.9527 | ii) 23.7954 | iii) $47 \div 11$ | iv) $137 \div 19$ |

2. Expresa las siguientes cantidades en notación científica con 4 cifras significativas.

a) 507.43 b) 697 500 c) 980 315 d) 796 300 000

---

En cada una de las situaciones siguientes, realiza lo que se indica en cada literal.

a) Identifica las cantidades que aparecen en negrilla.
b) Redondea cada una a 4 cifras significativas.
c) Exprésala en notación científica (número que tenga un solo dígito en la parte entera) × (potencia de 10).

1. Plutón es un planeta enano muy lejano del sol. Su distancia promedio al sol es de **5 934 456 500** kilómetros.

2. La tierra es uno de los planetas que forman el sistema solar y su estrella más cercana es el sol, cuyo diámetro es de **1 392 000** km. González, E.(2006). *Génesis y características de las Rocas*. UCLM - 2006).

Unidad 8

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

## Problemas de aplicación

La estadística es una ciencia de aplicación práctica casi universal en los campos científicos:

- Ciencias naturales: se emplea con profunsión en la descripción de modelos termodinámicos complejos en física cuántica, en teoría cinética de los gases, entre otros.
- Ciencias sociales y económicas: es un pilar básico del desarrollo de la demografía y la sociología aplicada.
- Economía: suministra los valores que ayudan a descubrir interrelaciones entre múltiples parámetros macro y microeconómicos.
- Ciencias médicas: permite establecer pautas sobre la evolución de las enfermedades y los enfermos, el grado de eficacia de un medicamento, entre otros.

**Promedio de vida de las mujeres salvadoreñas**

Según datos de la Dirección de Estadísticas y Censos (DIGESTYC), en el marco del proyecto "Fortalecimiento de la capacidad institucional para la producción de información estadística e indicadores para monitorear el cumplimiento de derechos de los niños y adolescentes", la esperanza de vida al nacer ha incrementado tal como se detalla a continuación:

| Año | 2 000 | 2 005 | 2 010 |
|---|---|---|---|
| Esperanza de vida al nacer | 74.9 | 75.9 | 76.9 |

Observación: se entiende la esperanza de vida al nacer como la edad media en años que viviría un recién nacido si los patrones de mortalidad vigentes al momento de su nacimiento no cambian a lo largo de toda su vida.

a) ¿Cuánto aumentó la esperanza de vida del año 2 000 al 2 010?

b) Si la tendencia de aumento de la esperanza de vida continua tal como lo ha hecho en los dos períodos mostrados, ¿cuál será la esperanza de vida para las personas que nazcan en el 2020?

c) Investiga la esperanza de vida para los hombres, luego compara con la de las mujeres, ¿cuál es mayor?

**Promedio de ingresos y gastos familiares**

Consulta con las personas que viven contigo o con tus familiares más cercanos:
1. Ingresos diarios o mensuales
2. Gastos diarios o mensuales

Luego realiza lo siguiente:

a) Ingreso mínimo e ingreso máximo.
b) Calcula ingresos y gastos promedios.
c) Investiga cómo hacer un presupuesto familiar y considerando los ingresos y gastos elabora uno para tu familia.



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

# Autoevaluación de los trimestres

En esta sección se presenta una autoevaluación que se debe realizar al finalizar cada trimestre, donde debes evaluar aspectos relacionados con tu estudio diario para esta asignatura, además, debes plantear tu compromiso para el próximo trimestre o para el próximo grado según corresponda. Existe también, un apartado donde tus padres y tu maestro de matemática pueden escribir un breve comentario sobre tu rendimiento en cada trimestre.

## Autoevaluación del primer trimestre

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

| Ítem | Siempre | Casi siempre | Casi nunca | Nunca |
|---|---|---|---|---|
| 1. Tengo un horario diario para hacer mis tareas y estudiar. | | | | |
| 2. Expreso mis dudas a mi profesor, familiares, compañeros o conocidos. | | | | |
| 3. Me esfuerzo en cada tarea que me asignan en la escuela. | | | | |
| 4. La matemática, así como todas las materias, es importante para mi desarrollo integral como ciudadano. | | | | |
| 5. Cumplo con las fechas indicadas de mis actividades. | | | | |
| 6. Ayudo a mis compañeros a estudiar y comprender los contenidos. | | | | |
| 7. Pongo atención en clases. | | | | |
| 8. Respeto a mi profesor o profesora. | | | | |
| 9. Me esfuerzo por comprender los contenidos. | | | | |
| 10. Soy puntual para llegar a mi escuela. | | | | |

Escribe tu compromiso para el próximo trimestre: ____________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________

Comentario de los padres de familia: _________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________

Comentario del docente: ________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________

## Autoevaluación del segundo trimestre

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

| Ítem | Siempre | Casi siempre | Casi nunca | Nunca |
|---|---|---|---|---|
| 1. Tengo un horario diario para hacer mis tareas y estudiar. | | | | |
| 2. Expreso mis dudas a mi profesor, familiares, compañeros o conocidos. | | | | |
| 3. Me esfuerzo en cada tarea que me asignan en la escuela. | | | | |
| 4. La matemática, así como todas las materias, es importante para mi desarrollo integral como ciudadano. | | | | |
| 5. Cumplo con las fechas indicadas de mis actividades. | | | | |
| 6. Ayudo a mis compañeros a estudiar y comprender los contenidos. | | | | |
| 7. Pongo atención en clases. | | | | |
| 8. Respeto a mi profesor o profesora. | | | | |
| 9. Me esfuerzo por comprender los contenidos. | | | | |
| 10. Soy puntual para llegar a mi escuela. | | | | |

Escribe tu compromiso para el próximo trimestre: ____________________________________________
________________________________________________________________________________
________________________________________________________________________________
________________________________________________________________________________

Comentario de los padres de familia: ______________________________________________________
________________________________________________________________________________
________________________________________________________________________________
________________________________________________________________________________

Comentario del docente: ______________________________________________________________
________________________________________________________________________________
________________________________________________________________________________
________________________________________________________________________________

## Autoevaluación del tercer trimestre

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

| Ítem | Siempre | Casi siempre | Casi nunca | Nunca |
|---|---|---|---|---|
| 1. Tengo un horario diario para hacer mis tareas y estudiar. | | | | |
| 2. Expreso mis dudas a mi profesor, familiares, compañeros o conocidos. | | | | |
| 3. Me esfuerzo en cada tarea que me asignan en la escuela. | | | | |
| 4. La matemática, así como todas las materias, es importante para mi desarrollo integral como ciudadano. | | | | |
| 5. Cumplo con las fechas indicadas de mis actividades. | | | | |
| 6. Ayudo a mis compañeros a estudiar y comprender los contenidos. | | | | |
| 7. Pongo atención en clases. | | | | |
| 8. Respeto a mi profesor o profesora. | | | | |
| 9. Me esfuerzo por comprender los contenidos. | | | | |
| 10. Soy puntual para llegar a mi escuela. | | | | |

Escribe tu compromiso para el próximo grado: ______________________________________________
_____________________________________________________________________________
_____________________________________________________________________________
_____________________________________________________________________________

Comentario de los padres de familia: ____________________________________________________
_____________________________________________________________________________
_____________________________________________________________________________
_____________________________________________________________________________

Comentario del docente: _____________________________________________________________
_____________________________________________________________________________
_____________________________________________________________________________
_____________________________________________________________________________

# Solucionario

En la siguiente sección se presentan las soluciones de todos los ítems, separados por unidad, número de página y número de clase, en algunos casos se detallan solo las respuestas y en otros se escribe también un procedimiento posible para llegar a ella. Además, se utilizan los siguientes símbolos:

R Se plantea la solución de los ítems que corresponden a una o dos clases anteriores.

Se plantea la solución de los ítems correspondientes a la clase del día.

# Unidad 1

## Página 2, Clase 1.1

1. a) C: 4, V: $t$ b) C: −8, V: $z$
   c) C: −10, V: $x$, $y$
2. a) $7b$, −8 b) $-2x$, $7y$, 1
   c) $6xy$, $4y$, −3
3. a) 27 b) −10 c) −1 d) −6
4. a) $8a + 20$ b) $18n - 6$
   c) $-8m + 28$ d) $-9t + 45$
5. a) $3t + 10$ b) $4y - 6$
   c) $-4x - 14$ d) $8b - 2$
6. a) $16a - 47$ b) $-45x - 23$

## Página 3, Clase 1.2

1. a) $-4x$, $6y$ b) $-2t$, $-6z$, −1
   c) $-3a^3$, $\frac{3}{5}w$, $\frac{3}{4}$ d) $-4ab^2$, $ab$
2. a) 4 b) 2 c) 6 d) 6
3. a) 1 b) 3
   c) 2 d) 3
   e) 5 f) 3
   g) 4 h) 4

## Página 4, Clase 1.3

1. a) $a$, $-5x$ b) $2b$, $-t$, −8
   c) $-3s^3$, $\frac{5}{8}s$, $\frac{2}{3}$ d) $3x^2y^2$, $-xy^2$
2. a) 1 b) 2
   c) 3 d) 2

1. a) $7x$ b) $2y + 9a$
   c) $14t - 13s$ d) $-4b^3 + 5b^2$
   e) $-10x^2 + 6x$ f) $-2w^2 + 12$
   g) $-\frac{7}{6}a + \frac{3}{5}ab$ h) $\frac{13}{5}z^2 - \frac{9}{2}z$

3. El procedimiento no es correcto porque en la última operación realizada, se reducen términos que no son semejantes, el resultado final debe ser $-3a^2 + 11a$.

## Página 5, Clase 1.4

1. a) 1 b) 2
   c) 4 d) 3
2. a) $-4b$ b) $14x - 7y$
   c) $5t^2 + 6t$ d) $-s + st$

a) $3s + 9t$ b) $7x + 12y$
c) $4a + b$ d) $7z$
e) $7yz - 5y$ f) $st + 5s$
g) $-7m + 12$ h) $-3x^2 + 9x$
i) $-2m$ j) $9a - 5b + 15$
k) $-3mn - n - 12$
l) $-8y^2 + 10y + 3$

## Página 6, Clase 1.5

1. a) $5x$ b) $-t + 3s$
   c) $-3t^2 + 3t$ d) $-a + \frac{19}{12}ab$
2. a) $2a + 11b$ b) $7x - 7y$
   c) $-3st + 3t$ d) $4a^2 - 5a + 16$

1. a) $15a + 10b$ b) $-8s + 20t$
   c) $-2x - 14y + 10$
   d) $6m - 18n - 12$ e) $x - 2y$
   f) $-35a^2 + 19a$ g) $-\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{5}t$
   h) $a - 5b - 9$

## Página 7, Clase 1.6

1. a) $-m + 7n$ b) $10t + 2u$
   c) $-2yz - 2z$
2. a) $24a - 36b$ b) $-10m - 16$
   c) $48t^2 - 3t$ d) $2a - 7b - 9$

a) $5b - 3y$ b) $-3n - 8$
c) $-4st + 15t$ d) $5a^2 - 3a$
e) $6x^2 - 9x + 2$ f) $-8m - 18n - 3$
g) $-3m + 7n - 2$ h) $-9x + 6y + 14$
i) $8x + 12y + 6$

## Página 8, Clase 1.7

1. a) $-24x - 8$ b) $-24a - 18b + 12$
   c) $-16n^2 - 5n$ d) $7a - 9b - 3$
2. a) $3x - 7z$ b) $-3mn + 5m$
   c) $2b^2 + 9b - 4$ d) $4m - 2n + 9$

1. a) $\frac{2a - 3b}{10} + \frac{-2a + b}{5}$

   $= \frac{2a - 3b - 4a + 2b}{10} = \frac{-2a - b}{10}$

   b) $\frac{2s + 11t}{15}$ c) $\frac{53m + 27n}{18}$

   d) $\frac{-5v - 3w}{12}$ e) $\frac{8a - 2b}{3}$

   f) $\frac{x - 3y}{7}$

2. Perímetro = $3x + 4x + x + \frac{1}{2}x + x + 2x + (a + \frac{3}{2}a)$

   Perímetro = $\frac{23}{2}x + \frac{5}{2}a$

   Al sustituir el valor de $x$ y $a$, se obtiene que, Perímetro = 51.

## Página 10, Clase 1.9

1. a) $35rt$ b) $-63xy$
   c) $40mn$ d) $50a^4$
   e) $-27t^4$ f) $-64x^3$
   g) $48y^3z^3$ h) $45s^4t$

2. Porque los exponentes no se sumaron.

**Página 11, Clase 1.10**

1. a) $36ab$ b) $-15st$
   c) $56xy$ d) $28a^5$
   e) $-24y^3$ f) $81a^4$
   g) $36a^3b^2$ h) $28y^6w$

a) $8s$ b) $-7b^3$
c) $\frac{3}{2}x^2$ d) $-\frac{4}{5}yz$
e) $\frac{15}{2}a$ f) $\frac{21}{b}$
g) $-2st^2$ h) $-\frac{5}{12}x^3$

**Página 12, Clase 1.11**

1. a) $56xy$ b) $25at$
   c) $-49y^2$ d) $-125z^3$
   e) $30a^4b$
2. a) $3y$ b) $\frac{4}{3}ab^2$
   c) $42st$ d) $-\frac{3}{5}t$

a) $2t$

b) $15ab \div 4b^2 \times (-6b^3)$

$= 15ab \times \frac{1}{4b^2} \times (-6b^3) = -\frac{45}{2}ab^2$

c) $x^3y^2$ d) $-mn$

e) $3z$ f) $\frac{c^3}{4b}$

g) $10y^2$ h) $12a^4b$

i) $mn^3$ j) $2x$

k) $a^2$ l) $-\frac{2}{9}t^2$

**Página 13, Clase 1.12**

1. a) $2a$ b) $-\frac{4}{3}yz$
   c) $-12n^2$ d) $-\frac{6}{5}y$

2. a) $3x$ b) $m$
   c) $-\frac{2x^2}{w}$ d) $8x^3y$

1. a) $-s + 4t = -7 + 4(-2) = -15$
   b) 21 c) $-30$
2.

| | $m^2 - n$ | $-mn$ | $(-m)^2 + 5$ |
|---|---|---|---|
| $m = 2$, $n = -3$ | 7 | 6 | 9 |
| $m = 5$, $n = 6$ | 19 | $-30$ | 30 |

3. El literal b)

**Página 15, Clase 2.1**

1. a) $5(5 + 2) = 5(7) = 35$
   b) 225 c) 275 d) 150
2. $(n - 4) + (n - 3) + (n - 2) + (n - 1) + n = 5n - 10 = 5(n - 2)$
3. Los tres números son:
   $(n - 1)$, $n$, $(n + 1)$, entonces,
   $(n - 1) + n + (n + 1) = 3n$.

**Página 16, Clase 2.2**

1. a) $5(17 + 2) = 5(19) = 95$
   b) 290 c) 350 d) 195
2. $(n - 1)$, $n$, $(n + 1)$, $(n + 2)$, $(n + 3)$
   Suma: $5n + 5 = 5(n + 1)$

1. a) $11(4 + 5) = 11(9) = 99$
   b) 55 c) 88 d) 22

2. No es posible, ver contraejemplo: $235 + 532 = 767 = 11 \times 69 + 8$, no es múltiplo de 11.

3. El número de cifras debe ser par. Se puede verificar como en el caso de dos cifras.

**Página 17, Clase 2.3**

1. $(n - 3) + (n - 2) + (n - 1) + n + (n + 1) = 5n - 5 = 5(n - 1)$

2. $(100\,000u + 10\,000v + 1\,000w + 100x + 10y + z) + (100\,000z + 10\,000y + 1\,000x + 100w + 10v + u)$
   $= (100\,001u + 10\,010v + 1\,100w + 1100x + 10\,010y + 100\,001z)$
   $= (11 \times 9091u + 11 \times 910v + 11 \times 100w + 11 \times 100x + 11 \times 910y + 11 \times 9091z)$
   $= 11\,(9091u + 910v + 100w + 100x + 910y + 9091z)$

1. Para $8 + 10 + 16 + 22 + 24$
   a) $n$ el número mayor
      $8 + 10 + 16 + 22 + 24$
      $(n - 16) + (n - 14) + (n - 8) + (n - 2) + n$
      $= 5n - 40 = 5(n - 8)$
   b) $n$ el número menor: $5(n + 8)$

2. Para $3 + 11 + 19$
   a) $n$ el número del centro: $3n$
   b) $n$ el número mayor: $3(n - 8)$

**Página 18, Clase 2.4**

1. Sea el número $10a + b$, el invertido es $10b + a$.
   $(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b$
   $= 11(a + b)$

2. 9 + 15 + 21

$(n - 6) + (n) + (n + 6) = 3n$

Suma: $3n$

1. a) $2a - 8b = 12$, despejando $a = 4b + 6$, al sustituir el valor de $b = 5$, se obtiene $a = 26$
   b) $x = -1.2y + 7$, $x = 1$
   c) $x = \frac{21}{r}$, $t = 7$
2. El carro alcanza a la moto cuando recorren igual distancia, entonces: $x = y$ y sea $t$ el tiempo que se conduce a 100km/h.
   $x = 80$ km/h × 2 h = 160 km
   $y = 100$ km/h × $t$ h = 160 km
   Al sustituir las expresiones equivalentes en la igualdad $x = y$, se tiene: 160 km = 100 km/h × $t$ h, de donde se concluye que $t = \frac{8}{5}$ h; es decir una hora y 36 minutos.

3. a) $M(t) = t^2 - 5t + 35$
   $M(18) = (18)^2 - 5(18) + 35$
   $= 269$
   b) $M(20) = (20)^2 - 5(20) + 35$
   $= 335$

### Página 24, Clase 1.1

1. a) $x = 2$ b) $x = 2$ c) $x = \frac{5}{2}$
   d) $x = 5$ e) $x = 3$ f) $x = 2$
   g) $x = -3$ h) $x = 6$ i) $x = 3$

2. Dos soluciones:
   a) $0.7x + 1.2 = 0.3x + 2.8$
   $0.7x - 0.3x = 2.8 - 1.2$
   $0.4x = 1.6$
   $x = 4$
   a) $0.7x + 1.2 = 0.3x + 2.8$
   $7x + 12 = 3x + 28$
   $7x - 3x = 28 - 12$
   $4x = 16$
   $x = 4$
   Cualquiera de las dos formas es válida.
   b) $x = -2$ c) $x = 2$ d) $x = \frac{1}{2}$

3. Dos soluciones:
   a) $\frac{1}{3}x - 2 = \frac{1}{6}x$
   $\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}x = 2$
   $\frac{1}{6}x = 2$
   $x = 12$
   a) $\frac{1}{3}x - 2 = \frac{1}{6}x$
   $2x - 12 = x$
   $2x - x = 12$
   $x = 12$
   Cualquiera de las dos formas es válida.
   b) $x = 5$ c) $x = -5$ d) $x = -\frac{14}{5}$
   e) $x = -\frac{17}{4}$ f) $x = -\frac{21}{8}$

### Página 25, Clase 1.2

1. a) $x = 1$ b) $x = 3$
   c) $x = -3$ d) $x = -5$
2. a) $x = -4$ b) $x = -7$

1. $x$, precio de la computadora
   $x$ = $954.00.

2. $x$, lo que recibirá el segundo hermano, $x$ = $300, el primero recibirá $900 y el tercero $1,800.

3. $25x + 75 = 125x$, Ana tarda $\frac{3}{4}$ de hora para alcanzar a Carlos; es decir, 45 minutos.

4. Se debe sumar 30, tanto al numerador como al denominador.

5. El número mayor es 78.

### Página 26, Clase 1.3

1. a) $x = 4$ b) $x = 5$ c) $x = -12$

2. Los lados iguales miden 17 cm y la base 20 cm.

1. $\begin{cases} x + y = 9 \\ 2x + 5y = 30 \end{cases}$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | **5** | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | **4** | 3 | 2 | 1 | 0 |
| $x + y$ | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | **9** | 9 | 9 | 9 | 9 |
| $2x + 5y$ | 45 | 42 | 39 | 36 | 33 | **30** | 27 | 24 | 21 | 18 |

2. $\begin{cases} x + y = 9 \\ 2x + 3y = 22 \end{cases}$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | **5** | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | **4** | 3 | 2 | 1 | 0 |
| $x + y$ | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | **9** | 9 | 9 | 9 | 9 |
| $2x + 3y$ | 27 | 26 | 25 | 24 | 23 | **22** | 21 | 20 | 19 | 18 |

### Página 27, Clase 1.4

1. $x = 12$, AB = 65, P = 260.

2. $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases}$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | **5** | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | **2** | 1 | 0 |
| $x + y$ | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | **7** | 7 | 7 |
| $2x + 3y$ | 21 | 20 | 19 | 18 | 18 | **16** | 15 | 14 |

1. El literal b), $x = 3$, $y = 2$

2. El literal b)

## Página 28, Clase 1.5

1. $\begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ x + y = 8 \end{cases}$

| $x$ | 1 | 2 | **3** | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 7 | 6 | **5** | 4 | 3 | 2 | 1 |
| $2x + 3y$ | 23 | 22 | **21** | 20 | 19 | 18 | 17 |
| $x + y$ | 8 | 8 | **8** | 8 | 8 | 8 | 8 |

2. El literal b), $x = 3$, $y = 2$

3. El literal c)

a) $x = 4$, $y = 2$ b) $x = 7$, $y = 5$
c) $x = 14$, $y = -4$

## Página 29, Clase 1.6

1. El literal a), $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{3}{4}$

2. El literal c)

3. a) $x = -4$, $y = 2$ b) $x = 2$, $y = 3$

a) $x = -1$, $y = 2$ b) $x = 1$, $y = \frac{1}{3}$
c) $x = 6$, $y = 2$

## Página 30, Clase 1.7

1. a) $x = \frac{1}{3}$, $y = 1$ b) $x = -1$, $y = -1$
2. a) $x = 1$, $y = 3$ b) $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$

a) $x = \frac{1}{4}$, $y = -\frac{7}{4}$ b) $x = -2$, $y = 1$
c) $x = 3$, $y = 2$

## Página 31, Clase 1.8

1. a) $x = 2$, $y = -2$ b) $x = -3$, $y = 3$
2. a) $x = 2$, $y = -1$ b) $x = -\frac{1}{2}$, $y = 1$

a) $x = 3$, $y = 1$ b) $x = 1$, $y = -2$
c) $x = 1$, $y = 2$

## Página 32, Clase 1.9

1. a) $x = 2$, $y = -1$ b) $x = 2$, $y = -\frac{1}{2}$
2. a) $x = 1$, $y = -1$ b) $x = -1$, $y = 2$

a) $x = 3$, $y = -2$ b) $x = -1$, $y = 2$
c) $x = 3$, $y = -2$

## Página 33, Clase 1.10

1. a) $x = -1$, $y = 2$ b) $x = 1$, $y = 3$
2. a) $x = 3$, $y = 2$ b) $x = 2$, $y = 1$

a) $x = 5$, $y = -1$ b) $x = -1$, $y = 5$
c) $x = 5$, $y = 3$

## Página 34, Clase 1.11

1. a) $x = -2$, $y = 1$ b) $x = 0$, $y = 2$
2. a) $x = -1$, $y = 3$ b) $x = -3$, $y = 2$

a) $x = 1$, $y = 2$ b) $x = 2$, $y = -1$
c) $x = 3$, $y = 4$

## Página 35, Clase 1.12

1. a) $x = -1$, $y = 2$ b) $x = 2$, $y = 1$
2. a) $x = -2$, $y = 3$ b) $x = 1$, $y = \frac{1}{3}$

a) $x = 30$, $y = -15$ b) $x = 4$, $y = 5$
c) $x = 5$, $y = 10$

## Página 36, Clase 1.13

1. a) $x = 2$, $y = 0$ b) $x = \frac{1}{4}$, $y = -1$
2. a) $x = 4$, $y = 1$ b) $x = 1$, $y = 5$

a) $x = 2, y = -2$ b) $x = \frac{20}{11}, y = \frac{51}{11}$
c) $x = 4, y = 9$

**Página 37, Clase 1.14**

1. a) $x = 3, y = 2$ b) $x = -5, y = 3$
2. a) $x = 1, y = 3$ b) $x = \frac{1}{2}, y = 2$

a) $x = 2, y = 1$ b) $x = -1, y = 2$

**Página 38, Clase 1.15**

1. a) $x = 3, y = -3$ b) $x = -5, y = 6$
2. a) $x = 4, y = 3$ b) $x = 3, y = -2$

a) $x = 7, y = -6$ b) $x = 10, y = 15$
c) $x = 1, y = -1$

**Página 41, Clase 2.1**

1. $x + 13$, 2. $2x$ 3. $x + 4 = 9$
4. $x - 9 = 3$ 5. $x + y = 15$

1. $x$ medida de ancho, $y$ medida de largo, $x = 30$ m, $y = 90$ m.
2. $y$ medida de ancho, $x$ medida de largo, $x = 12$ m, $y = 8$ m.

**Página 42, Clase 2.2**

1. $x$ medida de ancho, $y$ medida de largo, $x = 13$ cm, $y = 19$ cm.
2. $x$ medida de largo, $y$ medida de ancho, $x = 120$ cm, $y = 80$ cm.

1. La distancia recorrida por el automóvil que sale de B es 120 km y la del que sale de A es 135 km.
2. La distancia recorrida por Carlos es 75 km y la recorrida por Carmen 125 km.

**Página 43, Clase 2.3**

1. $x$ medida de largo, $y$ medida de ancho, $x = 40$ cm, $y = 30$ cm
2. $x$ litros de agua por minuto del grifo A, $y$ litros de agua por minuto del grifo B, $x = 12$ $l$/min, $y =$ 14 $l$/min.

1. $x$ precio del pantalón, $y$ precio del par de zapatos, $x = \$60$, $y = \$130$ cm.
2. $x$ capital depositado a un interés del 4% anual, $y$ capital depositado a un interés del 5% anual, $x = \$5000$, $y = \$4000$.

**Página 44, Clase 2.4**

1. $x$ libras de tomate, $y$ libras de cebollas, $x = 12$, $y = 8$.
2. $x$ costo de la computadora, $y$ costo de la pantalla, $x = \$800$, $y = \$1200$.

1. $x$ cantidad de cartones pequeños, $y$ cantidad de cartones grandes, $x = 15$, $y = 10$.
2. $x$ manzanas de frijol, $y$ manzanas de maíz, $x = 15$, $y = 20$.

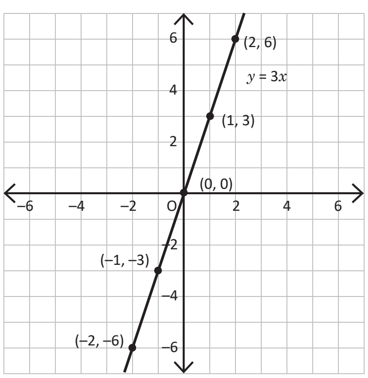
## Página 50, Clase 1.1

1. $y = 90x$ , por lo que $y$ es directamente proporcional a $x$.
2. a) $a = 8$  b) $a = 3$  c) $a = 2$
3. a) $y$ es una función de $x$, se puede escribir como $y = 60x$.
   b) $y$ es una función de $x$, se puede escribir como $y = 5x$**,** cuanto más larga sea la varilla, tendrá más peso.

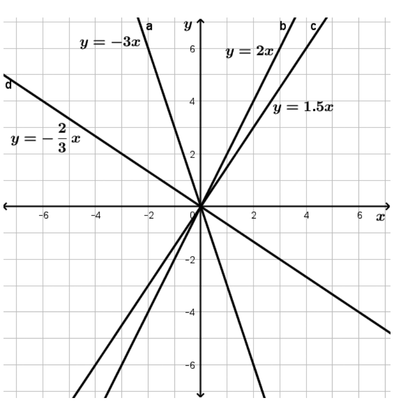
## Página 51, Clase 1.2

a) $a = \frac{1}{2}$  b) $a = 4$  c) $a = \frac{5}{2}$

1.

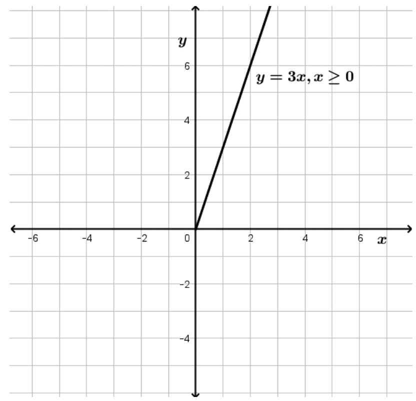



2.




3. a) Si existe, $a = 3$  b) $y = 3x$

c)




## Página 52, Clase 1.3

1. a) $a = \frac{1}{2}$  b) $a = 4$  c) $a = \frac{5}{3}$
2. El tiempo ($x$) y la cantidad de agua restante $y$ no son directamente proporcionales, pues no es de la forma $y = ax$**,** dado que la ecuación es $y = 100 - 4x$.

1. a) Los datos restantes de la tabla, son: 290, 300, 310 y 320.
   b) Por 2 muebles terminados recibe $20.00 y por 4, recibe $40.00
   c) Por $x$ muebles terminados recibe $10x$ dólares.
   d) $y = 250 + 10x$.

## Página 53, Clase 1.4

1. La cantidad de agua $y$ que tiene el recipiente, es directamente proporcional al tiempo transcurrido $x$, pues se puede escribir de la forma $y = ax$**,** dado que $y = 2x$.
2. Los datos restantes de la tabla, son: 240, 250, 260 y 270.
   a) $10x$ dólares.
   b) $y = 200 + 10x$.

1. a) $a = 3$, $b = 1$, es función lineal.
   b) $a = 4$, $b = 0$, es función lineal.
   c) $a = -2$, $b = 3$, es función lineal.
   d) No es función lineal
2. a) $y = 3x$, es función lineal.
   b) $y = \frac{32}{x}$, no es función lineal.
   c) $y = ax$, es función lineal.

## Página 54, Clase 1.5

1. Los datos restantes de la tabla, son: 154, 155, 156 y 157.
   a) $x$ dólares por $x$ piezas terminadas.
   b) $y = 150 + x$
2. a) $a = 3$, $b = -2$, es función lineal.
   b) No es función lineal.
   c) $a = -2$, $b = -1$, es función lineal.
   d) No es función lineal.

a) Los datos de la segunda fila de la tabla, son: 5, 15, 25, 35, 45, 55, 55, 65 y 75.
b) Por 100 km recorridos se debe pagar $205. 00 y por 150 km, se debe pagar $305.00
c) Razón de cambio es 2.
d) $y = 2x + 5$.

## Página 55, Clase 1.6

1. a) $a = -2$, $b = -3$, es función lineal.
   b) $a = -3$, $b = 0$ , es función lineal.
   c) No es función lineal.
   d) No es función lineal.

2. a) Los datos que complementan la tabla son: 110, 120, 130, 150, 160 y 170.
   b) \$175 por vender 15 celulares y \$200 por vender 20.
   c) Razón de cambio = 5.
   d) $y = 5x + 100$.

a) $a = 2, y = 5$ b) $a = -2, y = -5$

c) $a = 3, y = 7$ d) $a = \frac{1}{2}, y = 5$

e) $a = \frac{3}{2}, y = 7$ f) $a = -\frac{3}{5}, y = -\frac{17}{5}$

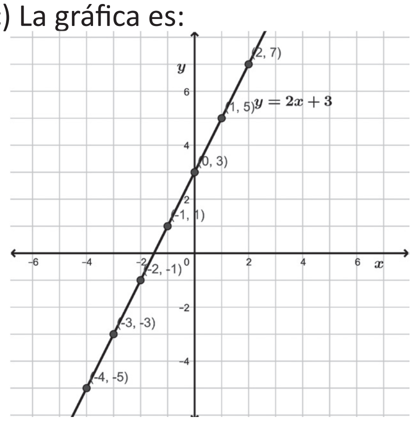
## Página 56, Clase 1.7

1. a) Los datos que complementan la tabla son: 100, 120, 140, 160, 180, 200 y 220
   b) \$280 por vender 20 maletas y \$330 por vender 25.
   c) Razón de cambio = 10.
   d) $y = 10x + 80$

2. a) $a = 3, y = 13$ b) $a = -2, y = -5$

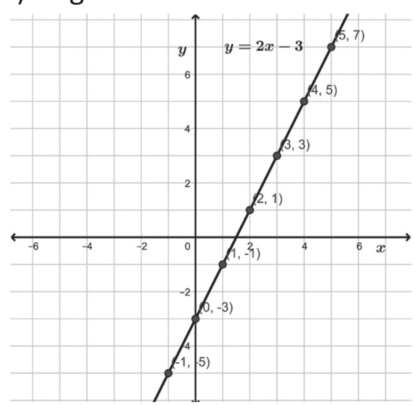
   c) $a = \frac{2}{5}, y = 3$

a) La gráfica de los puntos se puede ver en c).
b) Otros pares estimados,
$x = -1, y = 1$; $x = -2, y = -1$
$x = -3, y = -3$; $x = -4, y = -5$
c) La gráfica es:

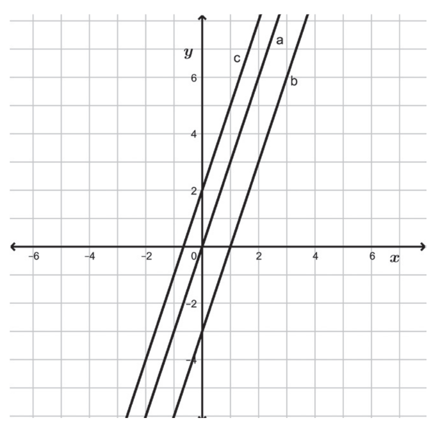



## Página 57, Clase 1.8

1. a) $a = 2, y = 7$ b) $a = -3, y = -13$
   c) $a = -\frac{2}{3}, y = -3$
2. a) La gráfica de los puntos se puede ver en c).
   b) Otros pares estimados,
   $x = -1, y = -5$; $x = -2, y = -7$
   c) La gráfica es:

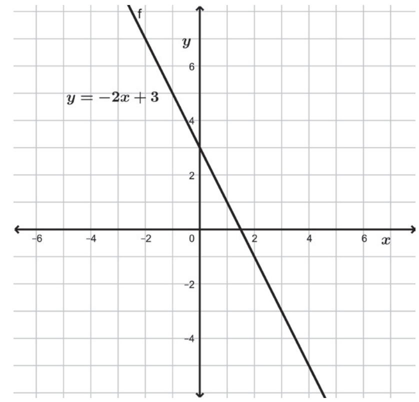



| Funciones | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| a) $y = 3x$ | -6 | -3 | 0 | 3 | 6 |
| b) $y = 3x - 3$ | -9 | -6 | -3 | 0 | 3 |
| c) $y = 3x + 2$ | -4 | -1 | 2 | 5 | 8 |



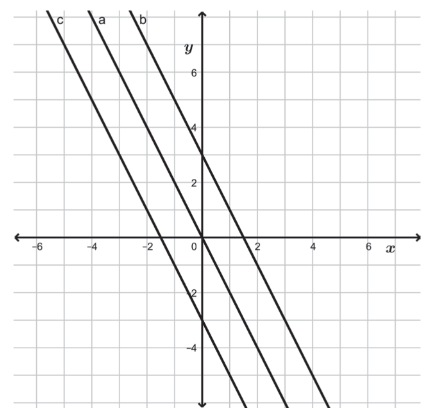

## Página 58, Clase 1.9

1. La gráfica de los pares ordenados y la función es:




2.

| Funciones | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| a) $y = -2x$ | 4 | 2 | 0 | −2 | −4 |
| b) $y = -2x + 3$ | 7 | 5 | 3 | 1 | −1 |
| c) $y = -2x - 3$ | 1 | −1 | −3 | −5 | −7 |

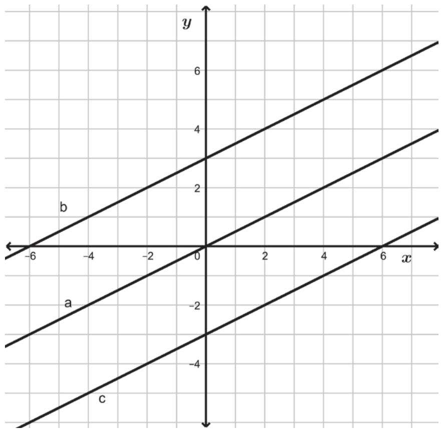



a) $y$ aumenta 5 unidades
b) $y = 22$, c) $a = 5$

## Página 59, Clase 1.10

1. Los datos que complementan la tabla, son: 3, 1, −1 y −3

| Funciones | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| a) $y = \frac{1}{2}x$ | −1 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 |
| b) $y = \frac{1}{2}x + 3$ | 2 | $\frac{5}{2}$ | 3 | $\frac{7}{2}$ | 4 |
| c) $y = \frac{1}{2}x - 3$ | −4 | $-\frac{7}{2}$ | −3 | $-\frac{5}{2}$ | −2 |




2. a) $y$ aumenta 2 unidades
   b) $y = -13$, c) $a = 2$

1. a) $y$ aumenta 2 unidades, $a = 2$
   b) $y$ disminuye 2 unidades, $a = -2$
2. a) $y$ aumenta 5 unidades, $a = 5$
   b) $y$ disminuye 5 unidades, $a = -5$
3. a) $y$ aumenta $\frac{1}{2}$ unidad, $a = \frac{1}{2}$
   b) $y$ disminuye $\frac{1}{2}$ unidad, $a = -\frac{1}{2}$
4. a) $y$ aumenta $\frac{1}{4}$ unidad, $a = \frac{1}{4}$
   b) $y$ disminuye $\frac{1}{4}$ unidad, $a = -\frac{1}{4}$

## Página 61, Clase 1.11

1. a) $y$ aumenta $\frac{1}{3}$ unidad,
   b) $y = \frac{11}{3}$ c) $a = \frac{1}{3}$
2. a) $y$ disminuye $\frac{1}{3}$ unidad,
   b) $y = \frac{1}{3}$ c) $a =- \frac{1}{3}$

1. a) $x_2 - x_1 = 4$; $y_2 - y_1 = 6$
   b) Pendiente = $\frac{3}{2}$.
2. a) $x_2 - x_1 = 6$; $y_2 - y_1 = -9$
   b) Pendiente = $-\frac{3}{2}$.
3. a) $x_2 - x_1 = 4$; $y_2 - y_1 = 8$
   b) Pendiente = 2
4. a) $x_2 - x_1 = 4$; $y_2 - y_1 = -8$
   b) Pendiente = −2

## Página 63, Clase 1.12

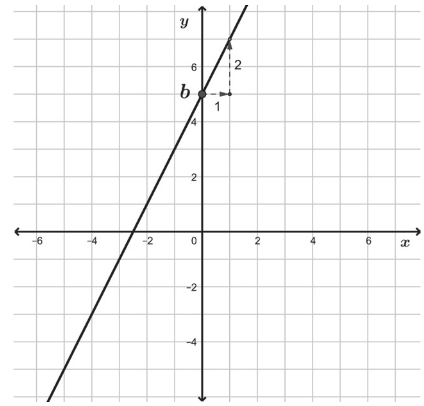
1. a) $y$ disminuye $\frac{1}{3}$ unidad,
   b) $a = -\frac{1}{3}$
2. a) $x_2 - x_1 = 10$; $y_2 - y_1 = 2$
   b) Pendiente = $\frac{1}{5}$

a) $a = -3$, $b = 2$ b) $a = 4$, $b = -1$
c) $a = 2$, $b = -3$ d) $a = -2$, $b = 0$
e) $a = -1$, $b = 2$ f) $a = 1$, $b = -6$
g) $a = -5$, $b = \frac{1}{2}$
h) $a = -\frac{1}{2}$, $b = -3$

## Página 64, Clase 1.13

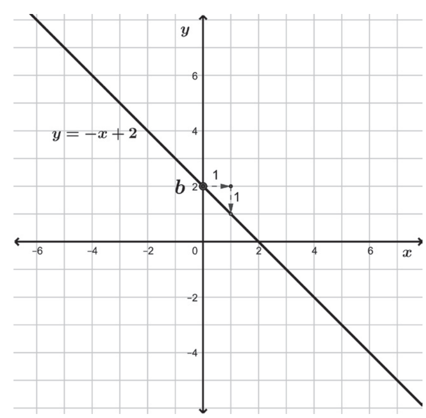
1. a) $x_2 - x_1 = -2$; $y_2 - y_1 = 8$
   b) Pendiente = −4
2. a) $a = -4$, $b = 3$ b) $a = -2$, $b = 3$
   c) $a = -1$, $b = 5$ d) $a = 3$, $b = -5$
   e) $a = -3$, $b = \frac{1}{2}$ f) $a = \frac{1}{2}$, $b = 5$
   g) $a = 3$, $b = \frac{1}{4}$
   h) $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{3}{4}$

a) Los datos que complementan la tabla, son: 1, 3, 5, 7, 9 y 11.
b) y c) Al comparar la gráfica con la tabla y la ecuación de la función, se observa que el intercepto con el eje $y$, es $b = 5$ y que el incremento de $y$ cuando $x$ aumenta una unidad es $a = 2$.

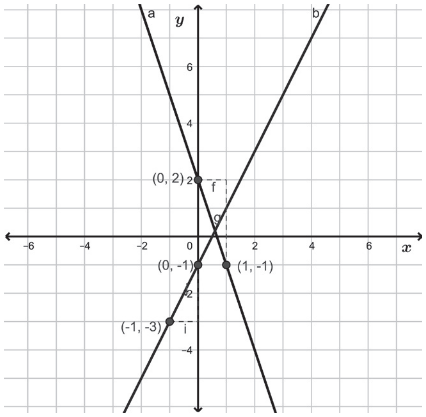



## Página 65, Clase 1.14

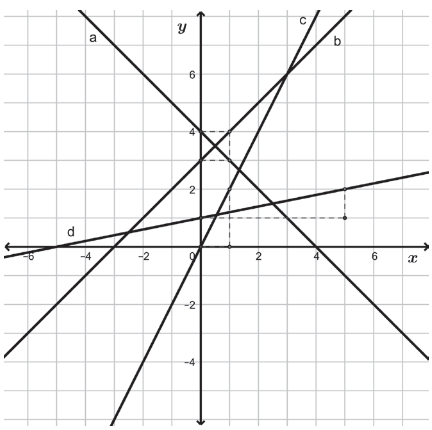
1. a) $a = -4$, $b = 5$ b) $a = -1$, $b = 7$
   c) $a = 1$, $b = -4$ d) $a = \frac{5}{3}$, $b = \frac{1}{2}$
2. a) Los datos que complementan la tabla, son: 4, 3, 2, 1, 0 y −1.
   b) y c) Al comparar la gráfica con la tabla y la ecuación de la función, se observa que el intercepto con el eje $y$, es $b = 2$ y que el incremento de $y$ cuando $x$ aumenta una unidad es $a = -1$.




1. a) Pasa por el punto (0, 2) que es el intercepto.
   b) Pasa por el punto (0, −1) que es el intercepto.
   Ver gráficas en página siguiente.

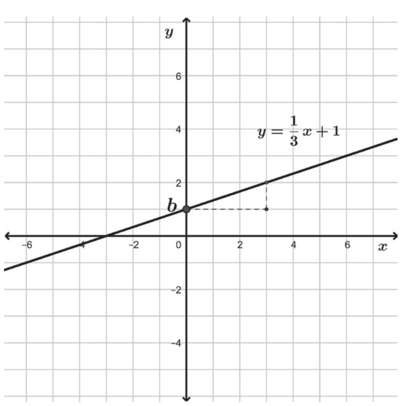



2. a) $a = -1$, $b = 4$ b) $a = 1$, $b = 3$
c) $a = 2$, $b = 0$ d) $a = \frac{1}{5}$, $b = 1$

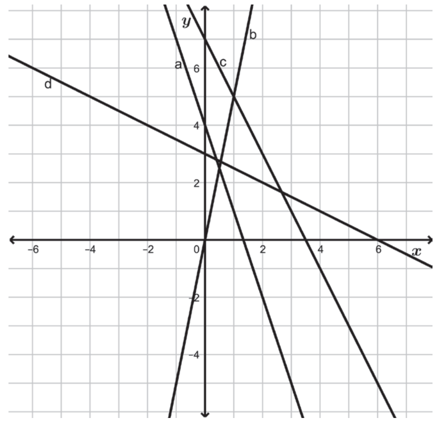


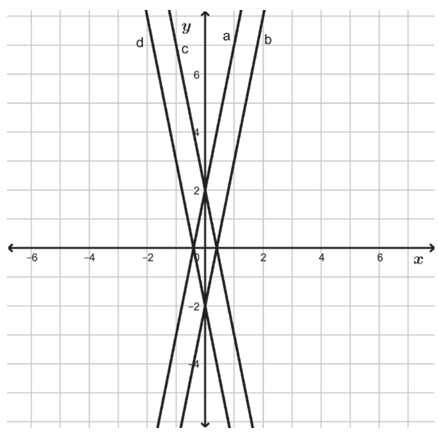
**Página 66, Clase 1.15**

1. a) Los datos que complementan la tabla, son: −1, 0, 1, 2, 3 y 4.
c) Al comparar la gráfica con la tabla y la ecuación de la función, se observa que el intercepto con el eje $y$, es $b = 1$ y que el incremento de $y$ cuando $x$ aumenta una unidad es $a = \frac{1}{3}$.



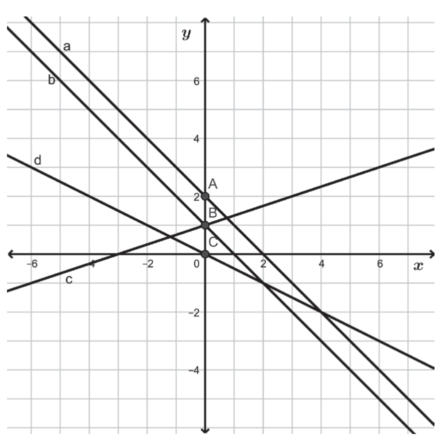

2. a) $a = -3$, $b = 4$ b) $a = 5$, $b = 0$
c) $a = -2$, $b = 7$ d) $a = -\frac{1}{2}$, $b = 3$





**Página 67, Clase 1.16**

1. a) $a = -1$, $b = 2$ b) $a = -1$, $b = 1$
c) $a = \frac{1}{3}$, $b = 1$ d) $a = -\frac{1}{2}$, $b = 0$




2. a) Gráfica q: $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$
b) Gráfica h: $a = \frac{1}{2}$, $b = -2$
c) Gráfica r: $a = -\frac{1}{2}$, $b = 2$
d) Gráfica p: $a = -\frac{1}{2}$, $b = -2$

a) $y$ está entre −18 y 22
b) $y$ está entre −1 y 2
c) $y$ está entre −5 y 3
d) $y$ está entre 1 y 3

**Página 68, Clase 1.17**

1. a) Gráfica p: $a = 3$, $b = \frac{1}{2}$
b) Gráfica h: $a = 3$, $b = -\frac{1}{2}$
c) Gráfica q: $a = -3$, $b = \frac{1}{2}$
d) Gráfica r: $a = -3$, $b = -\frac{1}{2}$
2. a) $y$ está entre −16 y 26
b) $y$ está entre −8 y 4
c) $y$ está entre −5 y 3
d) $y$ está entre $\frac{1}{3}$ y 5

1. a) $y = 5x - 2$ b) $y = 3x - 1$
c) $y = -4x + 3$ d) $y = -x + 5$

**Página 70, Clase 1.18**

1. a) $y$ está entre 2 y 62
b) $y$ está entre −7 y 2
c) $y$ está entre −10 y 2
2. a) $y = -5x + 3$ b) $y = 4x - 3$

a) $3 = -2(-2) + b$
$3 = 4 + b$
$-1 = b$, entonces $y = -2x - 1$
b) $y = 3x - 2$ c) $y = -x + 4$
d) $y = x + 3$

## Página 72, Clase 1.19

1. a) $a = -\frac{3}{4}$, $b = 3$; $y = -\frac{3}{4}x + 3$
   b) $a = \frac{2}{3}$, $b = 0$; $y = \frac{2}{3}x$
2. a) $b = 3$; $y = \frac{2}{5}x + 3$
   b) $b = -3$; $y = -\frac{2}{3}x - 3$

a) $a = \frac{8-(-2)}{-2-3} = -2$; $8 = -2(-2) + b$
$8 = -2(-2) + b$
$8 = 4 + b$
$4 = b$

Entonces $y = -2x + 4$,

b) $y = -\frac{3}{4}x + 4$   c) $y = \frac{1}{2}x + 4$

d) $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$

## Página 74, Clase 1.20

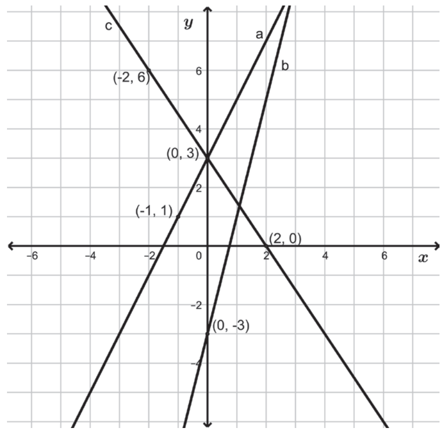
1. a) $b = -5$; $y = 6x - 5$
   b) $b = 5$; $y = -2x + 5$
2. a) $y = -3x - 4$
   b) $y = -\frac{7}{2}x + \frac{31}{2}$

1. a) $a = \frac{3}{4}$, $b = -3$; $y = \frac{3}{4}x - 3$
   b) $a = 2$, $b = -4$; $y = 2x - 4$
   c) $a = 2$, $b = 6$; $y = 2x + 6$
2. a) $a = 1$, $b = 4$; $y = x + 4$
   b) $a = -\frac{3}{2}$, $b = 6$; $y = -\frac{3}{2}x + 6$

## Página 78, Clase 2.1

1. a) $y = -2x + 1$  b) $y = \frac{9}{5}x - \frac{1}{5}$
2. $a = -\frac{5}{2}$, $b = 5$; $y = -\frac{5}{2}x + 5$

| Ecuaciones | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| a) $y = 2x + 3$ | −1 | 1 | 3 | 5 | 7 |
| b) $y = 4x - 3$ | -11 | −7 | −3 | 1 | 5 |
| c) $y = -\frac{3}{2}x + 3$ | 6 | $\frac{9}{2}$ | 3 | $\frac{3}{2}$ | 0 |

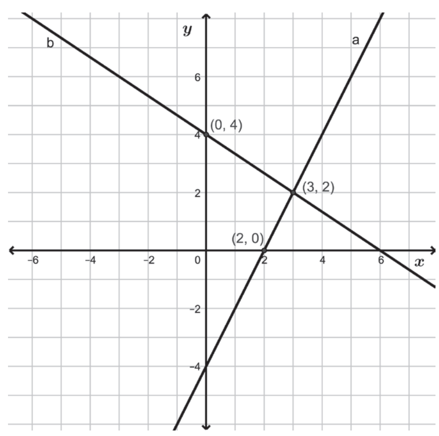



## Página 79, Clase 2.2

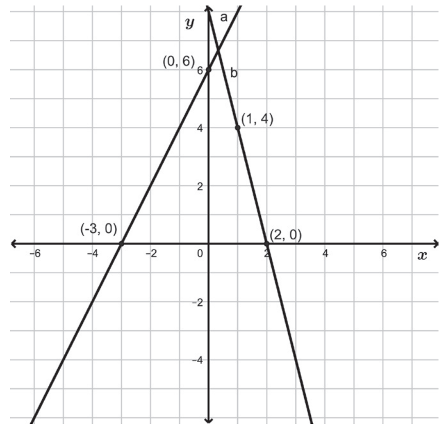
1. $y = \frac{1}{7}x - 1$

2.

| Ecuaciones | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| a) $y = 2x - 4$ | −6 | −4 | −2 | 0 | 2 |
| b) $y = -\frac{2}{3}x + 4$ | $\frac{14}{3}$ | 4 | $\frac{10}{3}$ | $\frac{8}{3}$ | 2 |



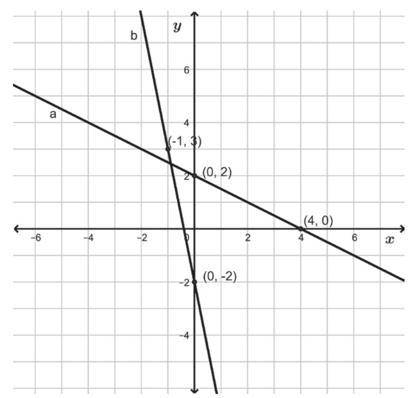

a) $y = 2x + 6$   b) $y = -4x + 8$
(0, 6) y (−3, 0)   (0, 8) y (2, 0)
(1, 8)   (1, 4)
Por ejemplo.   Por ejemplo.



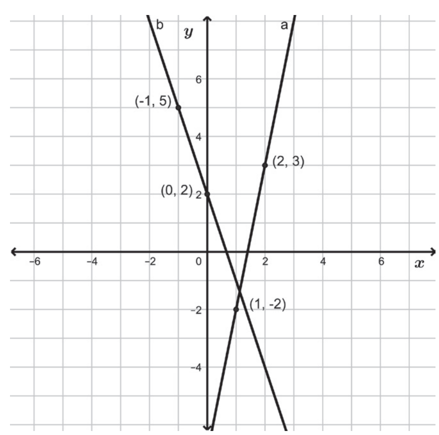

## Página 80, Clase 2.3

1.

| Ecuaciones | −2 | 0 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| a) $y = -\frac{1}{2}x + 2$ | 3 | 2 | 1 | 0 |
| b) $y = -5x - 2$ | 8 | −2 | −12 | −22 |

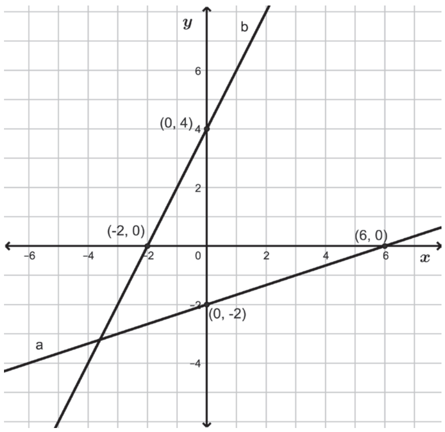



2. a) $y = 5x - 7$   b) $y = -3x + 2$
(1, −2) y (2, 3)   (0, 2) y (−1, 5)



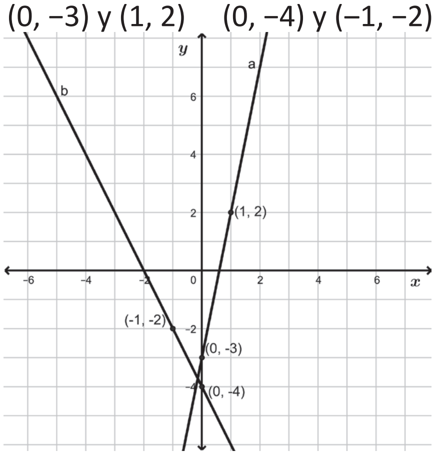
1. a) Intercepto con el eje $x$: (6, 0); intercepto con el eje $y$: (0, −2).
   b) Intercepto con el eje $x$: (−2, 0); intercepto con el eje $y$: (0, 4).

2.

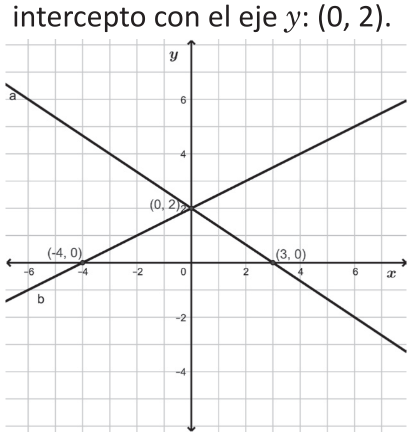



## Página 81, Clase 2.4

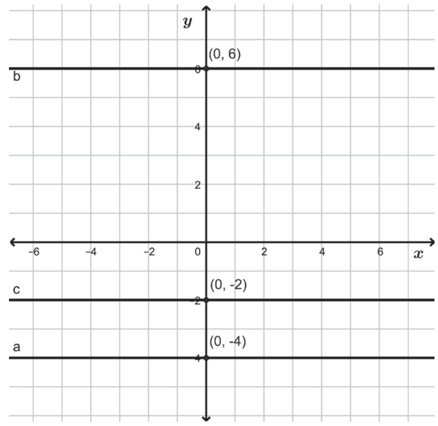
1. a) $y = 5x - 3$ (0, −3) y (1, 2)    b) $y = -2x - 4$ (0, −4) y (−1, −2)




2. a) Intercepto con el eje $x$: (3, 0); intercepto con el eje $y$: (0, 2).
   b) Intercepto con el eje $x$: (−4, 0); intercepto con el eje $y$: (0, 2).

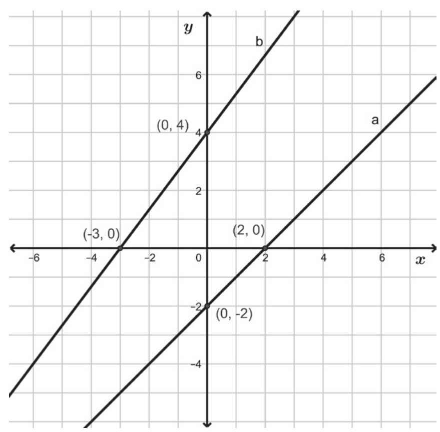



a) $y = -4$    b) $y = 6$    c) $y = -2$

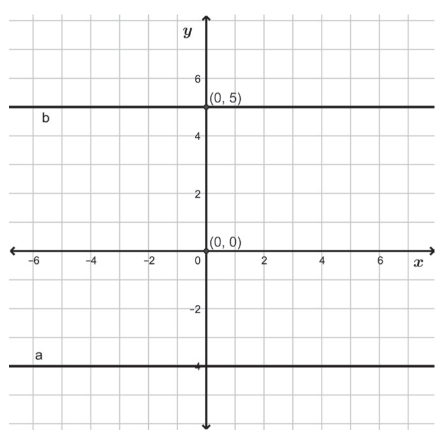



## Página 82, Clase 2.5

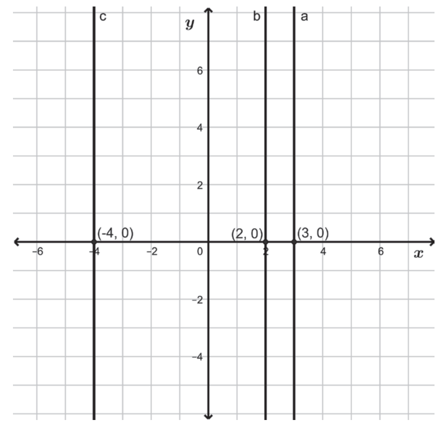
1. a) Intercepto con el eje $x$: (2, 0); intercepto con el eje $y$: (0, −2).
   b) Intercepto con el eje $x$: (−3, 0); intercepto con el eje $y$: (0, 4).




2. a) $y = -4$    b) $y = 5$



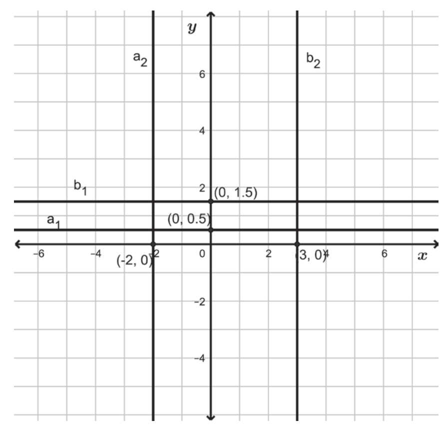

a) $x = 3$    b) $x = 2$    c) $x = -4$




## Página 83, Clase 2.6

1. a) $y = \frac{1}{2}$    b) $y = \frac{3}{2}$

2. a) $x = -2$    b) $x = 3$



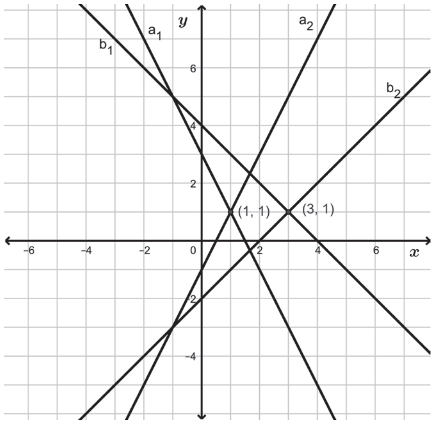

a) $\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

Solución: $x = 1$, $y = 1$

b) $\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = x - 2 \end{cases}$

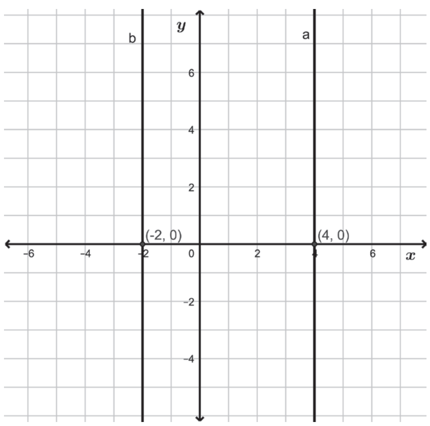
Solución: $x = 3$, $y = 1$

Ver gráfica en página siguiente.




## Página 84, Clase 2.7

1. a) $x = 4$ b) $x = -2$

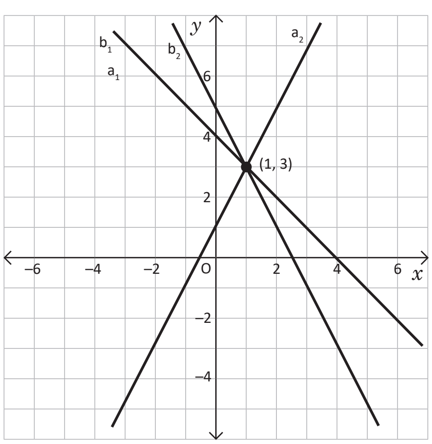



2. a) $\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$

Solución: $x = 1$, $y = 3$

b) $\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = -2x + 5 \end{cases}$

Solución: $x = 1$, $y = 3$

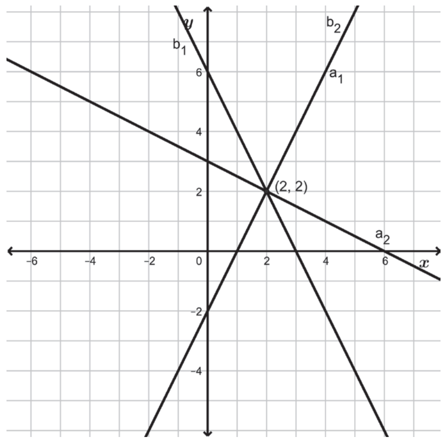



a) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = -\frac{1}{2}x + 3 \end{cases}$

Solución: $x = 2$, $y = 2$

b) $\begin{cases} y = -2x + 6 \\ y = 2x - 2 \end{cases}$

Solución: $x = 2$, $y = 2$



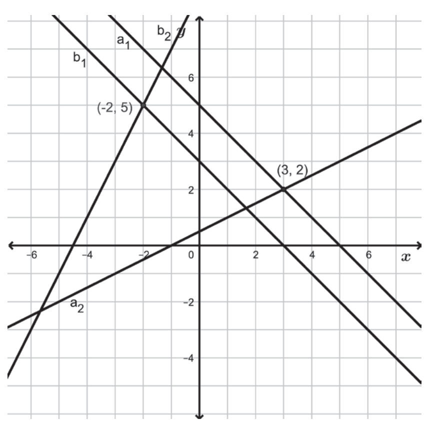

## Página 86, Clase 3.1

1. a) $\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$

Solución: $x = 3$, $y = 2$

b) $\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = 2x + 9 \end{cases}$

Solución: $x = -2$, $y = 5$

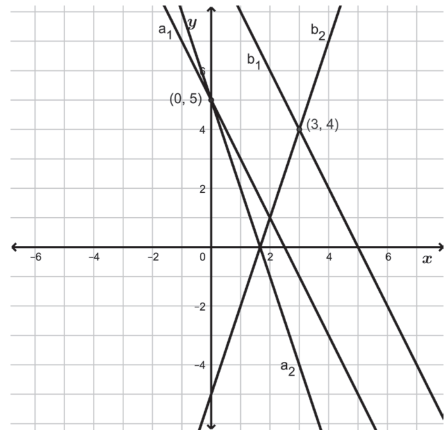



2. a) $\begin{cases} y = -2x + 5 \\ y = -3x + 5 \end{cases}$

Solución: $x = 0$, $y = 5$

b) $\begin{cases} y = -2x + 10 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$

Solución: $x = 3$, $y = 4$

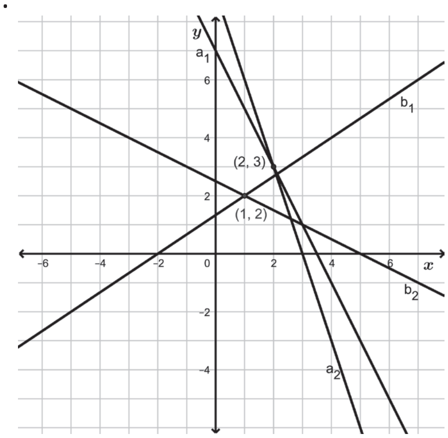



a) $y = x + 273$,
mínima: 273 k, máxima: 291 k.

b) A la temperatura de 364 k que equivale a 91°C.

## Página 87, Clase 3.2

1.




a) La solución es: $x = 2$, $y = 3$

b) La solución es: $x = 1$, $y = 2$

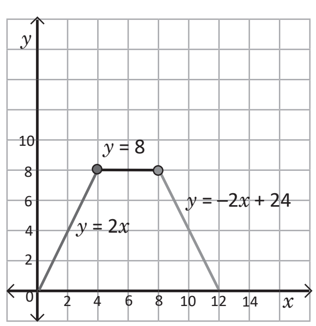
2. a) $y = 8.75x$
   b) 525 colones que equivalen a 60 dólares.

1. 4 kilómetros.
2. Antes de la parada: $y = \frac{2}{3}x$ y después de la parada: $y = \; x - 5$.
3. 10 kilómetros.

**Página 88, Clase 3.3**

1. a) $y = 0.9x$
   b) 900 yardas equivalen a 810 metros, por tanto le alcanza para 81 piscuchas.
2. a) 10 kilómetros
   b) Antes de la parada: $y = 2x$ y después de la parada: $y = 2x - 6$.
   c) 24 kilómetros.

1. a) El área del triángulo aumenta de 0 a 18 cm$^2$.
   b) El área del triángulo se mantiene constante igual a 18 cm$^2$.
   c) El área del triángulo disminuye de 18 cm$^2$ a 0.
2. $y = 2x$, para $2 \leq x \leq 6$.
3. $y = 18$, para $6 \leq x \leq 12$.
4. $y = 54 - 3x$, para $12 \leq x \leq 18$.
5.



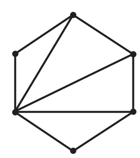

**Página 94, Clase 1.1**

a) 180° × (4 – 2) = 360°
b) 180° × (6 – 2) = 720°
c) 180° × (5 – 2) = 540°
d) 180° × (4 – 2) = 360°

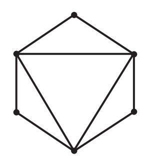
**Página 95, Clase 1.2**

a) 180° × (7 – 2) = 900°
b) 180° × (6 – 2) = 720°

a)

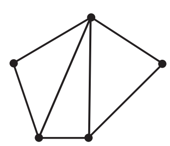


180° × 4 = 720°

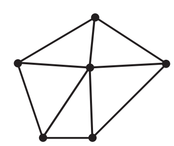


180° × 4 = 720°

b)



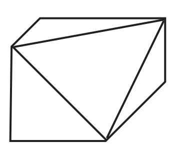
180° × 3 = 540°



180° × 5 − 360° = 540°

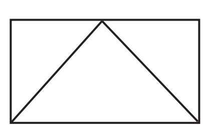
**Página 96, Clase 1.3**

a)



180° × 4 = 720°
180° × (6 – 2) = 720°

b)



180° × 3 – 180° = 360°
180° × (4 – 2) = 360°

a) 180° × 4 − 180° × (4 – 2) = 360°
b) 180° × 6 − 180° × (6 – 2) = 360°
c) 180° × 5 − 180° × (5 – 2) = 360°
d) 180° × 4 − 180° × (4 – 2) = 360°

**Página 97, Clase 1.4**

1. a) 180° × (6 – 2) = 720°
   b) 180° × (5 – 2) = 540°
2. a) 180° × 3 − 180° × (3 – 2) = 360°
   b) 180° × 4 − 180° × (4 – 2) = 360°

1. a) Ángulos internos:
   180° × (8 – 2) = 1080°
   Cada ángulo interno mide:
   1080° ÷ 8 = 135°
   $x$ = 180° − 135° = 45°.
   b) $x$ = 180° − 60° = 120°
2. a) $x$ = 65° b) $x$ = 95°

**Página 98, Clase 2.1**

1. a) 360° b) 360°
2. a) $180° - 180° \times (7-2) \div 7 = \frac{360°}{7}$
   b) 145°

a) $a$ = 180° − 110° = 70°
   $b$ = 110°, $c$ = 70°

b) $b$ = 180° − 79° = 101°
   $a$ = 79°, $c$ = 101°

c) $c$ = 180° − (50° + 55°) = 75°
   $a$ = 130°, $b$ = 50°

d) $a$ = 180° − (60° + 73°) = 47°
   $d$ = 47°, $b$ = 73°, $c$ = 60°

**Página 99, Clase 2.2**

1. a) $x$ = 360° − 117° − 85° − (180° − 117°) = 95°
   b) $x$ = 106°

2. a) $a$ = 180° − 105° = 75°
$b$ = 105°, $c$ = 75°,
b) $c$ = 180° − (59° + 72°) = 49°
$a$ = 59°, $b$ = 72°, $d$ = 49°

Ángulos internos:
a) $b$, $c$, $e$ y $h$ b) $c$, $d$, $e$ y $f$
Ángulos externos:
a) $a$, $d$, $f$ y $g$ b) $a$, $b$, $g$ y $h$
Ángulos alternos internos:
a) $b$ y $h$, $c$ y $e$ b) $c$ y $e$, $d$ y $f$
Ángulos alternos externos:
a) $a$ y $g$, $d$ y $f$ b) $a$ y $g$, $h$ y $b$
Ángulos correspondientes:
a) $a$ y $e$, $b$ y $f$, $d$ y $h$, $c$ y $g$
b) $a$ y $e$, $d$ y $h$, $b$ y $f$, $c$ y $g$

## Página 100, Clase 2.3

1. $a$ = 180°− (50°+ 40°) = 90°
$b$ = 40°, $c$ = 140°
2. Ángulos internos: $b$, $c$, $e$ y $h$
Ángulos externos: $a$, $d$, $f$ y $g$
Alternos internos: $b$ y $h$, $c$ y $e$
Alternos externos: $a$ y $g$, $d$ y $f$
Ángulos correspondientes:
$a$ y $e$, $b$ y $f$, $d$ y $h$, $c$ y $g$

a) $x$ = 125° b) $x$ = 45°
c) $x$ = 62° d) $x$ = 95°

## Página 101, Clase 2.4

1. Ángulos internos: $b$, $c$, $f$ y $g$
Ángulos externos: $a$, $d$, $e$ y $h$
Alternos internos: $b$ y $f$, $c$ y $g$
Alternos externos: $a$ y $e$, $d$ y $h$
Ángulos correspondientes:
$a$ y $g$, $b$ y $h$, $d$ y $f$, $c$ y $e$

2. $x$ = 93°

a) $x$ = 64° b) $x$ = 69°
c) $x$ = 145° d) $x$ = 130°

## Página 102, Clase 2.5

1. $x$ = 55°
2. Alternos internos: $b$ y $h$, $c$ y $e$
Alternos externos: $a$ y $g$, $d$ y $f$
$a = c = e = g$ = 150°
$d = b = h = f$ = 30°

1. (1) 180°
(2) La suma de los ángulos internos del triángulo.
(3) 180° − ∢ABC
(4) ∢CBD = ∢BCA + ∢CAB
2. Es una cadena de inducción utilizando los hechos dados y ya demostrados.

## Página 103, Clase 2.6

1. Izquierda
Alternos internos: $b$ y $e$, $c$ y $h$
Alternos externos: $a$ y $f$, $d$ y $g$
$a = c = f = h$ = 60°
$d = b = e = g$ = 180°− 60° = 120°
Derecha
Alternos internos: $a$ y $f$, $d$ y $e$
Alternos externos: $b$ y $g$, $c$ y $h$
$b = d = e = g$ = 127°
$a = c = f = h$ = 180° − 127° = 53°

2. (1) ∢CDE
(2) Porque BC ∥ AD

a) Si un número es divisible por 4 entonces es par.

b) Un triángulo es isósceles, si tiene dos lados de igual longitud.

c) Si ABC es un triángulo, entonces sus ángulos interiores suman 180°

d) Si $n \parallel m$ entonces los ángulos correspondientes tienen igual medida.

## Página 104, Clase 2.7

1. ∢BED
Porque DE ∥ CB

2. a) Si un número es divisible por 5 entonces su último dígito es 0 o 5.

b) Si un triángulo es equilátero, entonces es isósceles.

1. $2x + 3x$ = 25° + 30° + 20°
$5x$ = 75°
$x$ = 15°

2. $5x$ = 180° − 120°, $x$ = 12°

$y = 5x$, por ser alternos internos entre paralelas, $y$ = 60°

## Página 108, Clase 1.1

1. a)

| Vértices C | Lados C | Ángulos C |
|---|---|---|
| A y D | AB y DE | ∢A y ∢D |
| B y E | BC y EF | ∢B y ∢E |
| C y F | CA y FD | ∢C y ∢F |

b)

| Vértices C | Lados C | Ángulos C |
|---|---|---|
| A y D | AB y DE | ∢A y ∢D |
| B y E | BC y EF | ∢B y ∢E |
| C y F | CA y FD | ∢C y ∢F |

2. La figura 1 y la figura 3 son congruentes.

| Vértices C | Lados C | Ángulos C |
|---|---|---|
| A y K | AB y KJ | ∢A y ∢K |
| B y J | BC y JI | ∢B y ∢J |
| C y I | CD y IL | ∢C y ∢I |
| D y L | DA y LK | ∢D y ∢L |

## Página 109, Clase 1.2

| Vértices C | Lados C | Ángulos C |
|---|---|---|
| A y D | AB y DE | ∢A y ∢D |
| B y E | BC y EF | ∢B y ∢E |
| C y F | CA y FD | ∢C y ∢F |

a) AB = C'B', BC = B'A' y CA = A'C'
∢A = ∢C', ∢B = ∢B' y ∢C = ∢A'
ΔABC ≅ ΔC'B'A'

b) AB = A'B', BC = B'C' y CA = C'A'
∢A = ∢A', ∢B = ∢B' y ∢C = ∢C'
ΔABC ≅ ΔA'B'C'

## Página 110, Clase 1.3

1.

| Vértices C | Lados C | Ángulos C |
|---|---|---|
| A y D | AB y DE | ∢A y ∢D |
| B y E | BC y EF | ∢B y ∢E |
| C y F | CA y FD | ∢C y ∢F |

2. AB = A'B', BC = B'C' y CA = C'A'
∢A = ∢A', ∢B = ∢B' y ∢C = ∢C'
ΔABC ≅ ΔA'B'C'

Son congruentes:
- a) y d)
- b) y f)
- c) y e)

## Página 111, Clase 1.4

1. AC = DE, BC = EF y AB = DF
∢A = ∢D, ∢B = ∢F y ∢C = ∢E
ΔABC ≅ ΔDFE
2. Son congruentes:
   - a) y d)
   - b) y c)

Son congruentes:
- a) y f)
- b) y d)
- c) y e)

## Página 112, Clase 1.5

1. Son congruentes:
   - a) y c)
   - b) y d)
   - c) y e)
2. Son congruentes:
   - a) y d)
   - b) y c)

Son congruentes:
- a) y e)
- b) y f)
- c) y d)

## Página 113, Clase 1.6

1. a) ΔABC ≅ ΔADC, criterio LLL
   b) ΔABC ≅ ΔDCE, criterio LAL

Como el cuadrilátero es un rombo, AB = BC = CD = DA, entonces en los ΔABC y ΔCDA; AB = CD,
BC = DA y CA = AC, por tanto
ΔABC ≅ ΔCDA por criterio LLL.

## Página 114, Clase 1.7

1. a) ΔADE ≅ ΔBDF, criterio LLL
   b) ΔAED ≅ ΔBEC, criterio LAL
2. Porque en los ΔAEF y ΔDFE;
   EF = FE, FA = ED,∢EFA = ∢FED,
   por tanto son congruentes por criterio LAL.

En los ΔABC y ΔBCD;
AB = BC, DC = CD, ∢ABC = ∢BCD,
por criterio LAL; ΔABC ≅ ΔBCD,
luego AC = BD

## Página 115, Clase 1.8

1. En los ΔEHG y ΔFHG;
   GE = GF, porque ΔEFG es isósceles
   HG = HG, es el mismo.
   ∢HGE = ∢HGF, la figura lo indica,
   por tanto ΔEHG ≅ ΔFHG por criterio LAL. Con la figura es la única justificación.
2. En los ΔADC y ΔBDC;
   CA = CB, porque ΔABC es isósceles
   AD = BD, porque ΔABD es isósceles DC = DC, por tanto por el criterio LLL, ΔADC ≅ ΔBD.

Hipótesis: los triángulos ABC y ABD son isósceles.
Conclusión: ΔADC ≅ ΔBDC.

1. En los ΔACE y ΔBDF;
   AC = AD + DC = BC + CD = BD, porque AD = BC.
   AE = BF, es hipótesis
   ∢EAC = 90° = ∢FBD, es hipótesis
   por criterio LAL; ΔACE ≅ ΔBDF.
2. En los ΔKLJ y ΔKMG;
   ∢KLJ = ∢KMG, porque GM ∥ LJ
   ∢JKL = ∢GKM, porque son opuestos por el vértice.
   KL = KM, es hipótesis
   por criterio ALA; ΔAKLJ ≅ ΔKMG.

**Página 116, Clase 1.9**

1. En los ΔACE y ΔBCD;
   AC = AD + DC = BE + EC = BC, porque AD = BE y DC = EC por hipótesis.
   CE = CD, por hipótesis
   ∢ACE = ∢BCD,
   por tanto por criterio LAL,
   ΔACE ≅ ΔBCD
   Hipótesis: en la figura AD = BE y DC = CE
   Conclusión: ΔACE ≅ ΔBCD.

2. ΔBCD y ΔCAE; por criterio ALA
   BC = CA, porque ΔABC es equilátero.
   ∢BCD = 60°= ∢CAE, porque ΔABC es equilátero.
   ∢DBC = 60°+ θ = 60° +α = ∢CAE, porque ΔABC es equilátero y θ = α, ...(1)

   ΔADB ≅ ΔBEC; por criterio LAL, porque DB = EC, por (1)
   BA = CB, porque ΔABC es equilátero.
   θ = α, por hipótesis ... (2)

De la misma manera se demuestra que ΔBEC ≅ ΔCFA.

1.
a) Las medidas de dos lados y el ángulo comprendido entre ellos o la medida de dos ángulos y el lado comprendido entre ellos o la medida de los tres lados.

b) Todos deberán medir 60°

2.
a) Para un triángulo se debe considerar cualquiera de los tres casos: Las medidas de dos lados y el ángulo comprendido entre ellos o la medida de dos ángulos y el lado comprendido entre ellos o la medida de los tres lados y construirlos todos iguales.

**Página 120, Clase 1.1**

a) Rectángulo y escaleno.
b) Escaleno y obtusángulo.
c) Equilátero, isósceles y acutángulo.
d) Isósceles y acutángulo.
   Base: 6 cm
   Arista: vértice de ángulo 70°
   Ángulos adyacentes: 55° c/u
   Lados opuestos a ángulos adyacentes: 5.2 cm c/u.

**Página 121, Clase 1.2**

1. Escaleno, isósceles y equilátero.
2. Arista, base, ángulos adyacentes, lados opuestos a ángulos adyacentes.

1. a) ∢B = ∢C = 72°
   b) ∢A = ∢B = 65°
   c) ∢A = ∢B = 80°
2. $x$ = 90°

**Página 122, Clase 1.3**

1. Izquierda: isósceles porque tiene dos lados de igual medida.
   Derecha: escaleno porque no tiene lados de igual medida.
2. ∢a = ∢b = 25°, ∢c = ∢d = 45°.

1. En los ΔABC y ΔBCD;
   AB = AC ... (1) por hipótesis
   ∢ABE = $\frac{1}{2}$∢ABC,
   ∢ACD = $\frac{1}{2}$∢ACB ... (2), porque BE y CD son bisectrices.

∢ABC = ∢ACB ... (3)
porque AB= AC
∢ABE =∢ACD ... (4) de (2) y (3)
∢EAB =∢DAC ... (5)
ΔABE ≅ ΔACD, de (1), (4) y (5) por criterio ALA.
De donde BE = CD, por definición de congruencia.

2. En los ΔBAM y ΔBCM;
BA = BC, por hipótesis
MB = MB, por hipótesis
∢MBA =∢MBC, BM es bisectriz.
De donde ΔBAM ≅ ΔBCM por criterio LAL, entonces AM = CM.

**Página 123, Clase 1.4**

1. a) ∢C = ∢B = 70°, ∢A = 40°
b) ∢A = ∢BCA = 70°, ∢B = 40°
2. a) Porque ΔADB ≅ ΔADC, por criterio LAL
b) Porque AD es mediatriz
c) Por definición de mediatriz

1. Se necesita que cumpla ambas condiciones.

**Página 124, Clase 1.5**

1. ∢C + ∢B = ∢DAC ... (1), propiedad del ángulo externo de un triángulo.
∢B =∢C ... (2), porque AB = AC
2∢C = ∢DAC ... (3), de (1) y (2)
∢C = $\frac{1}{2}$∢DAC ... (4), de (3)
$\frac{1}{2}$ ∢DAC = ∢EAC ... (5), porque AE es bisectriz de ∢DAC
∢C = ∢EAC, de (5) y (4)
Luego AE ∥ BC, porque los ángulos alternos internos son iguales.

2. AB = AC ... (1), por hipótesis.
AQ = $\frac{1}{2}$AB y AR = $\frac{1}{2}$AC ... (2) porque Q y R son puntos medios.
AQ = AR ... (3), de (1) y (2)
∢A = 60° ... (4), ΔABC es equilátero.
ΔAQR es equilátero ... (5), de (3) y (4)
Entonces QR = AQ ... (6) de (4)
De la misma manera
PQ = BP y RP = CR ... (7)
AQ = BP = CR ... (8), P, Q y R son puntos medios de los lados del triángulo equilátero.
QR = PQ = RP ... de (6), (7) y (8)

1. En el ΔABC
∢BAC + ∢BCA = 180° − 90°
= 90° ... (1), teorema de ángulos internos del triángulo.
∢BAC = ∢BCA ... (2), dado que BA = BC.
∢BCA = 45° ... (3) de (1) y (2)
∢DCA = 75° − 45° = 30° ... (4)
∢DCA = 30° = ∢DAC ... (5)
Por tanto, AD = DC.

2. En el ΔAQM
∢AQM = ∢QAC ... (1) porque MQ ∥ AC.
∢MAQ = ∢QAC ... (2) dado que AQ es bisectriz.
∢AQM = ∢MAQ, de (1) y (2), luego MA = MQ, por tanto ΔAQM es isósceles.

**Página 125, Clase 1.6**

1. ∢ABM = ∢MBC = ∢BCM = ∢MCA = 30°
ΔAMB ≅ ΔAMC, por criterio LLL
MB = MC, porque en el ΔMBC, ∢MBC = ∢MCB
AM = AM
BA = CA, el ΔABC es equilátero.
Por tanto, AM es la bisectriz del ∢BAC, luego ∢MAB = ∢MAC = 30°
∢AMB = 180° − 30° × 2 = 120°
∢BMC = ∢CMA.

1. En los ΔABD y ΔACD
∢DAB = ∢DAC, porque AB = AC, la mediatriz AD coincide con la bisectriz.
AB = AC, por hipótesis
DA = DA
Luego ΔABD ≅ ΔACD por criterio LAL, por tanto BD = CD.

1. Recíproco: todo triángulo rectángulo es triángulo isósceles.
Contraejemplo: ΔABC, donde ∢A = 30°, ∢60°, y ∢C = 90°.
2. Recíproco: en el triángulo isósceles ΔABC donde AB = AC, si AD es bisectriz del ∢A, entonces AD es mediatriz.
Demostración: ya fue demostrado en clase 1.3 de U6 (ver demostración).

**Página 126, Clase 1.7**

1. ∢AMN = ∢ABC y
∢ANM = ∢ACB ... (1), porque MN ∥ BC.
∢ABC = ∢ACB ... (2), AB = AC
∢AMN = ∢ANM, de (1) y (2)
Luego AM = AN, por tanto ΔAMN es isósceles.
2. Recíproco: en ΔABC, si ∢B < 90° y ∢C < 90°, entonces ∢A = 90°
Contraejemplo: ΔABC, donde ∢B = 40° = ∢C , ∢A = 100°.

c) y d) son congruentes, por el criterio ALA.

**Página 127, Clase 1.8**

1. Recíproco: en ΔABC, si ∢B < ∢C, entonces, AB > AC.
2. a) y d) son congruentes, por el criterio "hipotenusa y un ángulo agudo".

a) y c) son congruentes, por el criterio "hipotenusa y un ángulo agudo".
b) y d) son congruentes, por el criterio "un cateto y la hipotenusa".

**Página 128, Clase 1.9**

1. ΔABC ≅ ΔDBC, por el criterio "un cateto y la hipotenusa".
   ΔDBC ≅ ΔCED, por el criterio LAL
2. ΔABE ≅ ΔDCE, por el criterio "un ángulo agudo y la hipotenusa".

Condición necesaria: no hay
Condición suficiente: no hay

**Página 129, Clase 1.10**

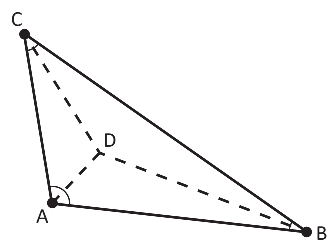
1. La hipotenusa y un ángulo agudo de igual medida, y la hipotenusa y un cateto de igual medida.
   Ej. ΔABC y ΔDEF, ∢C = ∢F = 90°.
2. A es suficiente para B, pero no es necesaria.

a) A es suficiente para B, pero no es necesaria.
b) A es necesaria y suficiente para B.
c) A es suficiente para B, pero no es necesaria.

2. a) ΔABC es equilátero es una condición suficiente para que ΔABC sea isósceles.
   b) ΔABC es isósceles es una condición necesaria para que ΔABC sea equilátero.

**Página 130, Clase 1.11**

a) Necesaria y suficiente
b) Necesaria y suficiente

1.



2. $x$ = 119°

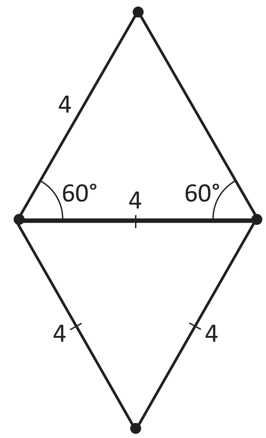
**Página 133, Clase 2.1**

1. Paralelogramo: b), d), e), h) tienen dos pares de lados opuestos paralelos.
2. Parece que coincide con la figura original, lo que significa que AO = CO y BO = DO.

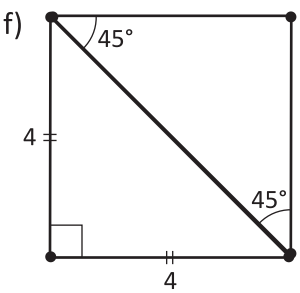
**Página 134, Clase 2.2**

1. La pizarra es un rectángulo, las ventanas son rectángulos, los ladrillos del piso son cuadrados, etc.

1. Paralelogramos:
   a) todos los ángulos miden 90° y todos los lados miden 6 cm.
   d) $x$ = 124°, $y$ = 56°; los lados horizontales miden 5 cm y los otros lados 4 cm.
   e) Todos los ángulos miden 90°, los lados horizontales 4 cm y los verticales 2 cm.
2. a) y d)



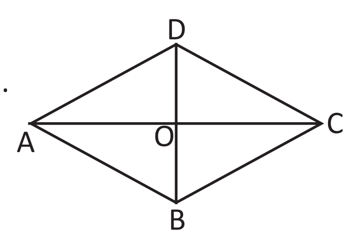

b) y f)




**Página 135, Clase 2.3**

1. Es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos paralelos.
2. Los lados y los ángulos opuestos son iguales, los ángulos consecutivos son suplementarios.

1. $x$ = BO = 5, $y$ = CD = 8

2.


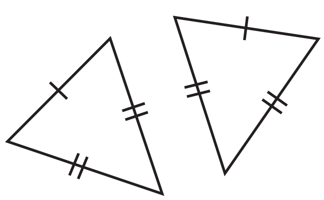
Sea ABCD paralelogramo y AC la bisectriz del $\sphericalangle A$ y $\sphericalangle C$,
$\sphericalangle A = \sphericalangle C$ ... (1), porque ABCD es paralelogramo.
$\sphericalangle DAC = \frac{1}{2}\sphericalangle A$ y $\sphericalangle DCA = \frac{1}{2}\sphericalangle C$ ... (2) dado que AC es bisectriz.
$\sphericalangle DAC = \sphericalangle DCA$ ... (3) de (1) y (2)
DA = DC ... (4) de (3)
AB = CD, DA = BC ... (5), porque ABCD es un paralelogramo.
Luego CB = DA = DC = AB, de (4) y (5); de donde se concluye que ABCD tiene sus cuatro lados iguales y por tanto es un rombo.

**Página 136, Clase 2.4**

1. a) $x = 45°$, $y = 135°$, $a = 6$ cm y $b = 4$ cm.
   b) $x = y = 90°$, $a = 3$ cm, $b = 4$ cm
   c) $x = 145°$, $y = 35°$, $a = 5$ cm y $b = 3$ cm.
2. $x = 5$ cm, $y = 12$ cm.

1. Son paralelogramos: a), b), d) todos tienen lados opuestos de igual medida.

2.



Estos dos triángulos son congruentes, al unirlos se forma un paralelogramo cuyos lados opuestos son de igual medida.

**Página 137, Clase 2.5**

1. $x$ = CD = 6 cm, $y$ = OD = 4 cm
2. CN = $\frac{1}{2}$A ... (1), propiedad de diagonales
   NC = $\frac{1}{2}$BF ... (2), dado que ABCD y BEFC son congruentes.
   CN = BM.
   De igual manera se justifica que BN = CM, de donde se concluye que BMCN es un paralelogramo por tener sus lados opuestos iguales.

1.
a) $y = 4x$ y $6x = z$,
   $6x + 4x = 180°$, por tanto $x = 18°$
   $y = 72°$, $z = 108°$.
b) $6x + 20° = 12x - 40°$, $y = z$,
   $6x + 20° + y = 180°$, por tanto,
   $x = 10°$, $y = z = 100°$.
2. $2x + 30° = 6x - 90°$, $x = 30°$, cada ángulo mide 90°.

**Página 138, Clase 2.6**

1. Porque los lados opuestos tienen la misma medida respectivamente.
2. $5x - 5° = 4x + 25°$, $y = z$,
   $5x - 5° + y = 180°$, por tanto,
   $x = 30°$, $y = z = 150°$.

1. a) Por condición 5.
   b) Por condición 2.
   c) Por condición 3 o 6.
   d) Por condición 4.
2. $x + 40° = 3x - 20°$, entonces $x = 30°$, por tanto las medidas de los ángulos del cuadrilátero son: 70°, 110°, 70° y 110°.

**Página 139, Clase 2.7**

a) Porque los ángulos opuestos son iguales respectivamente.
b) Porque dos lados opuestos son paralelos y congruentes.

1. $5y + 6 = x$, $5y + 6 = y + 20$, por tanto $x = \frac{47}{2}$, $y = \frac{7}{2}$.

2. En los $\Delta ABO$ y $\Delta ADO$,
   OA = OA
   BO = DO, porque ABCD es paralelogramo.
   AB = AD, porque ABCD es un rombo.
   Por lo tanto $\Delta ABO \cong \Delta ADO$ por criterio LLL; entonces
   $\sphericalangle BAO = \sphericalangle DAO$
   De la misma manera demostrar la congruencia de los pares de ángulos para cada uno de los vértices restantes.
3. En los $\Delta AEB$ y $\Delta DEC$,
   $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, ABCD es un rectángulo.
   BA = CD, porque ABCD es un paralelogramo.
   EB = EC, por hipótesis
   $\Delta AEB \cong \Delta DEC$, por criterio hipotenusa y cateto de triángulo rectángulo, de donde se concluye que AE = DE.

**Página 140, Clase 2.8**

1. AB = DC, y
   AD = AE + ED = CF + FB = CB, por lo que tiene dos pares de lados opuestos iguales, de donde se concluye que es un paralelogramo.
2. $x - 2 = 2x - 10$, por ser paralelogramo, por tanto $x = 8$.

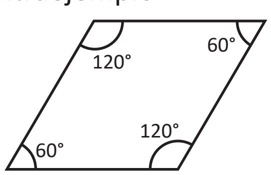
AC = 10 = BD ... (1)
En los ΔABC y ΔDCB,
AB = DC, ya se justificó antes
BC = CB, es el mismo
CA = BD, de (1)
ΔABC ≅ ΔDCB, por criterio LLL
Luego ∢ABC =∢DCB ... (2)
∢ABC + ∢DCB = 180° ... (3), porque ABCD es un paralelogramo,
∢ABC = ∢DCB = 90°, de (2) y (3) de la misma manera se demuesta que ∢BAD = ∢CDA = 90°.

1. D es el punto medio de la hipotenusa, por lo tanto AD = DC = BD, luego $2x = \frac{1}{3}y = 20$, de donde se obtiene que $x = 10$, $y = 60$.
2. $x + y = 15$, $x = \frac{1}{3}(x + y)$, de donde se obtiene que $x = 5$, $y = 10$.

## Página 141, Clase 2.9

1. Como BA = BC y ∢B = 60°, ΔABC es equilátero, entonces
   $3x - 7 = y = 20$, de donde se tiene que $x = 9$, $y = 20$.
2. $5x = \frac{1}{5}y = 15$, de donde se tiene que $x = 3$, $y = 75$.

a) Un paralelogramo es rectángulo.
   Contraejemplo



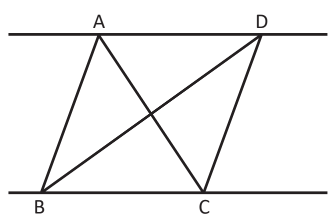

b) Un paralelogramo con ángulos iguales es rectángulo. Cierto.
c) Un paralelogramo equilátero es un rombo. Cierto.
d) Un cuadrilátero que es rectángulo y rombo, a la vez es un cuadrado. Cierto.

## Página 142, Clase 2.10

1. $2y + 10 = 2x + 4 = 2(x + y)$, de donde se tiene que $x = 5$, $y = 2$.
2. Un cuadrilátero cuyas diagonales bisecan los ángulos opuestos es un paralelogramo.

1. Los triángulos que tienen la misma base
   Base EF: ΔAEF, ΔBEF y ΔCEF
   Base AB: ΔEAB y ΔFAB
   Base BC: ΔEBC y ΔFBC
   Base AC: ΔEAC y ΔFAC

2.

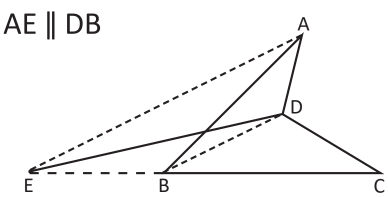



Base BC: ΔABC y ΔDBC

## Página 143, Clase 2.11

1. El cuadrilátero cuyos ángulos son rectos es un rectángulo.
2. El área del ΔABD es igual al área de ΔABC igual $\frac{15}{2}$ cm.

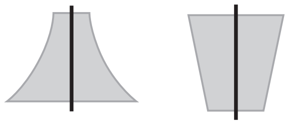
AE ∥ DB



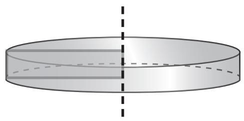
# Unidad 7

## Página 148, Clase 1.1

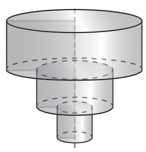
1.



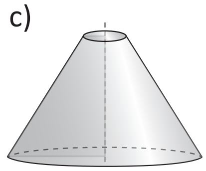
2. a)



b)

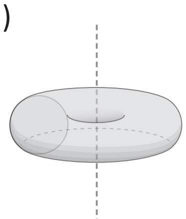


c)

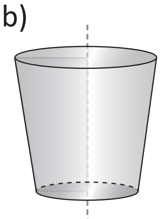


## Página 149, Clase 1.2

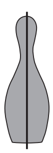
1. a)

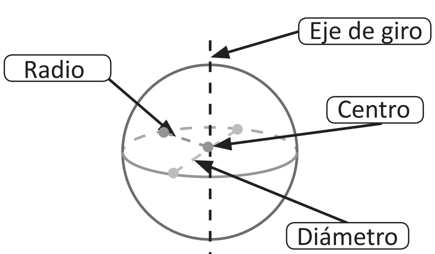


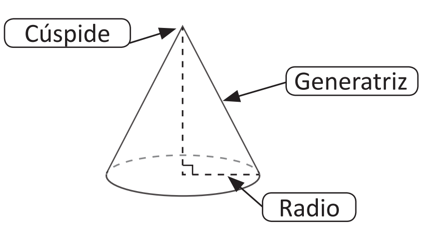
b)



2.






## Página 150, Clase 2.1

Cono: generatriz, base, radio, cúspide, altura.
Esfera: centro, radio, cuerda, diámetro, polo.

1. a) $V = 16\pi$ cm$^3$  b) $V = 84$ cm$^3$
   c) $V = 36\pi$ cm$^3$
2. a) $V = 200$ cm$^3$  b) $V = 735$ cm$^3$

## Página 151, Clase 2.2

1. a) $V = 24\pi$ cm$^3$  b) $V = 10$ cm$^3$
   c) $V = 48$ cm$^3$

1. a) $V = 96$ cm$^3$  b) $V = 2\,080$ cm$^3$
   c) $V = 36$ cm$^3$
2. $V = 27$ cm

## Página 152, Clase 2.3

1. $V = 300\pi$ cm$^3$
2. $V = 576$ cm$^3$
3. $A_B = 25$ cm$^2$

1. a) $V = 240$ cm$^3$, $V_{\text{pirámide}} = 160$ cm$^3$
   b) $V = 144$ cm$^3$, $V_{\text{pirámide}} = 96$ cm$^3$
2. $V = 50$ cm$^3$

## Página 153, Clase 2.4

1. $V = 112\ \pi$ cm$^3$
2. $r = 3$ cm
3. $V = 112$ cm$^3$

1. a) $V = 24\pi$ cm$^3$  $V_{\text{cono}} = 8\pi$ cm$^3$
   b) $V = 405\pi$ cm$^3$  $V_{\text{cono}} = 135\pi$ cm$^3$
2. a) $V = 21\pi$ cm$^3$  b) $V = 45\pi$ cm$^3$
3. $h = 9$ cm

## Página 154, Clase 2.5

1. $V = 24$ cm$^3$
2. $V = 64\pi$ cm

1. $V = \frac{500}{3}\pi$ cm$^3$
2. $V = 2304\pi$ cm$^3$
3. $V = 144\pi$ cm$^3$

## Página 155, Clase 3.1

1. $V = \frac{28}{3}\pi$ cm$^3$
2. $V = \frac{4\,000}{3}\pi$ cm$^3$

1. $V = 72\pi$ cm$^3$
2. $V = 1\,872\pi$ cm$^3$

## Página 158, Clase 4.1

1. $V = 1\,152\pi$ cm$^3$
2. $V = 48\pi$ cm$^3$

1. $L = 4\pi$ cm
2. $L = 16\pi$ cm
3. $L = 6\pi$ cm

## Página 159, Clase 4.2

1. $L = \frac{7}{2}\pi$ cm
2. $L = 12\pi$ cm

1. $\Theta = 300°$
2. $r = 2$ cm
3. $g = 36$ cm
4. $g = \frac{20}{3}$ cm o 6.67 cm

## Página 160, Clase 4.3

1. $L = 10\pi$ cm
2. $\Theta = 90°$

1. $A_{Lateral} = 65\pi\ cm^2$, $A_{\textbf{Total}} = 90\pi\ cm^2$
2. $g = 16$ cm
3. $A_{Lateral} = 60\pi\ cm^2$, $A_{\textbf{Total}} = 96\pi\ cm^2$

## Página 161, Clase 4.4

1. $g = 48$ cm
2. $A_{Lateral} = 136\pi\ cm^2$, $A_{\textbf{Total}} = 200\pi\ cm^2$

1. $A_{superficial} = 576\pi\ cm^2$
2. $r = 3$ cm
3. $A_{superficial} = 32\pi\ cm^2$ (parte curva de la semiesfera)

## Página 162, Clase 5.1

1. $A_{Lateral} = 260\pi\ cm^2$,
   $A_{\textbf{Total}} = 360\pi\ cm^2$
2. $A_{superficial} = 100\pi\ cm^2$

1. $A_{semiesfera} = 18\pi\ cm^2$
   $A_{Lateral} = 90\pi\ cm^2$, $A_{base} = 9\pi\ cm^2$
   $A_{\textbf{Total}} = 117\pi\ cm^2$
2. $A_{semiesfera} = 128\pi\ cm^2$
   $A_{cono} = 136\pi\ cm^2$
   $A_{\textbf{Total}} = 264\pi\ cm^2$

## Página 166, Clase 1.1

1. a)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 40 | | |
| | | 35 | | |
| | | 35 | | |
| | | 40 | | |
| | 25 | 35 | | |
| 16 | 34 | 40 | | 55 |
| 20 | 30 | 40 | 45 | 55 |
| 20 | 30 | 35 | 50 | 55 |
| 21 | 30 | 35 | 50 | 62 |
| 21 | 30 | 39 | 45 | 64 |
| 15-25 | 25-35 | 35-45 | 45-55 | 55-65 |

b) En el grupo de 35 a 45.
c) 5 días
d) 20 días

2. a)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | 120,115 | | | |
| | 140,125 | | | |
| | 140,135 | | | |
| | 130,115 | | | |
| | 115,120 | | | |
| 100 | 125,140 | | | |
| 90 | 140,134 | 160 | 200 | |
| 80 | 120,125 | 160 | 205 | 250 |
| 90 | 125,130 | 150 | 215 | 225 |
| 80-115 | 115-150 | 150-185 | 185-220 | 220-255 |

b) En el grupo de 115 a 150.
c) 1 día, se vendieron 250 pupusas.
d) 5 días

## Página 167, Clase 1.2

1. a) En la siguiente página.
   b) En el grupo de \$1, 080 - 1, 285 y \$1, 285 - \$1, 490.
   c) 9 días.
   d) 21 días.

a)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | 1,175 | 1,430 | | |
| | 1,170 | 1,350 | | |
| | 1,235 | 1,342 | | |
| | 1,150 | 1,475 | 1,625 | |
| | 1,235 | 1,425 | 1,635 | 1,850 |
| | 1,205 | 1,310 | 1,530 | 1,840 |
| 900 | 1,120 | 1,345 | 1,625 | 1,875 |
| 875 | 1,230 | 1,340 | 1,520 | 1,841 |
| 875 a 1,080 | 1,080 1,285 | 1,285 1,490 | 1,490 1,695 | 1,695 1,900 |

1.

| Asistencia | Julia | Miguel |
|---|---|---|
| 16 - 19 | 2 | 1 |
| 16 - 22 | 4 | 5 |
| 22 - 25 | 6 | 7 |
| 25 - 28 | 9 | 8 |
| 28 - 31 | 9 | 9 |
| Total | 30 | 30 |

2. La sección de Julia tiene mayor asistencia, se evidencia en las últimas 2 clases.

## Página 168, Clase 1.3

R

a)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 130 | | | |
| | 117 | 152 | | |
| | 120 | 147 | | |
| | 123 | | | 174 |
| | 131 | 143 | | 187 |
| | 112 | 135 | 162 | 175 |
| | 115 | 134 | 165 | 184 |
| | 123 | 142 | 153 | 184 |
| 90 | 123 | 140 | 162 | 175 |
| 90-111 | 111-132 | 132-153 | 153-174 | 174-195 |

b) En el grupo de 111 - 132.
c) Durante 10 días.
d) Durante 10 días.

e)

| Clientes | Días |
|---|---|
| 90 - 111 | 1 |
| 111 - 132 | 9 |
| 132 - 153 | 7 |
| 153 - 174 | 4 |
| 174 - 195 | 6 |
| Total | 27 |

1. a) 20
b) Punto medio = $\frac{20 + 0}{2}$ = 10.

| Puntajes | Número de estudiantes | Punto medio |
|---|---|---|
| | *f* | *Pm* |
| 0 - 20 | 15 | 10 |
| 20 - 40 | 35 | 30 |
| 40 - 60 | 25 | 50 |
| 60 - 80 | 15 | 70 |
| 80 - 100 | 10 | 90 |
| **Total** | **100** | |

c) La frecuencia es 25.

## Página 169, Clase 1.4

R

1.

| Piezas producidas | Número de días | Punto medio |
|---|---|---|
| | *f* | *Pm* |
| 130 - 154 | 4 | 142 |
| 154 - 178 | 7 | 166 |
| 178 - 202 | 8 | 190 |
| 202 - 226 | 9 | 214 |
| 226 - 250 | 9 | 238 |
| **Total** | **37** | |

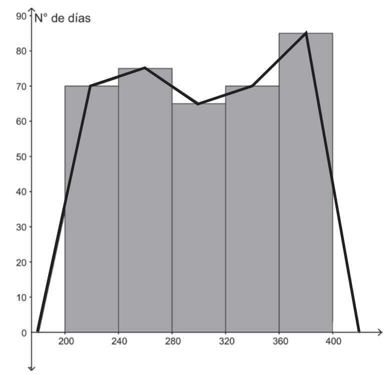
2. 26 días.
3. 19 días.
4. En los grupos 202 - 226 y 226 - 250.
5. Ancho de clases: 24.
7. La frecuencia es 8.

1. c) Hay 70 días que empacó 220 bolsas en promedio y también 70 días empacó un promedio de 340 bolsas.

b)

| Cantidad de bolsas | Número de días | Punto medio |
|---|---|---|
| | *f* | *Pm* |
| 200 - 240 | 70 | 220 |
| 240 - 280 | 75 | 260 |
| 280 - 320 | 65 | 300 |
| 320 - 360 | 70 | 340 |
| 360 - 400 | 85 | 380 |
| **Total** | **365** | |

a) y d)

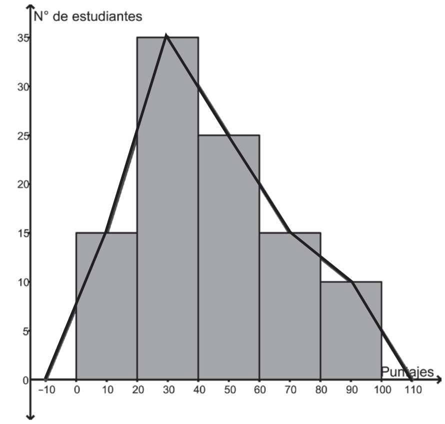



2. b)

| Puntajes | Número de estudiantes | Punto medio |
|---|---|---|
| | *f* | *Pm* |
| 0 - 20 | 15 | 10 |
| 20 - 40 | 35 | 30 |
| 40 - 60 | 25 | 50 |
| 60 - 80 | 15 | 70 |
| 80 - 100 | 10 | 90 |
| **Total** | **100** | |

c) Hay 35 estudiantes que obtuvieron un promedio de 30 puntos.

a) y d)

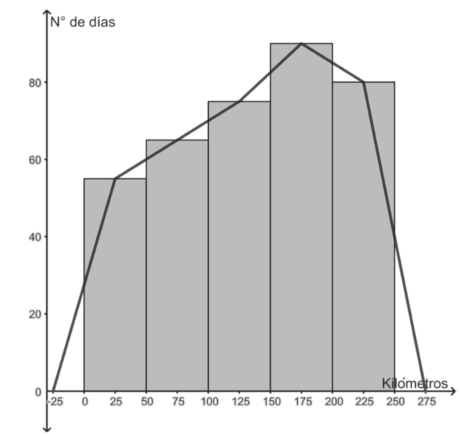


## Página 171, Clase 1.5

1. Ancho de clases: 50
2.

| Kilómetros | Número de días | Punto medio |
|---|---|---|
| | *f* | *Pm* |
| 0 - 50 | 55 | 25 |
| 50 - 100 | 65 | 75 |
| 100 - 150 | 75 | 125 |
| 150 - 200 | 90 | 175 |
| 200 - 250 | 80 | 225 |
| **Total** | **365** | |

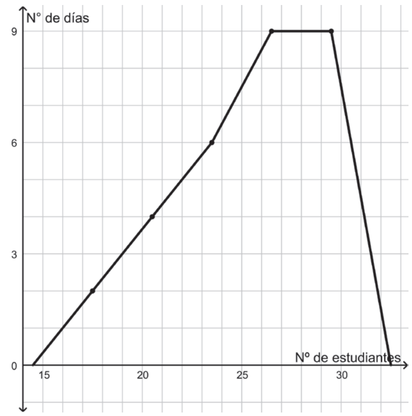
3. Frecuencia: 65
5. Los datos son bastante dispersos hay distancias cortas y largas que ha recorrido el taxi.
4. y 6.




1. y 2.

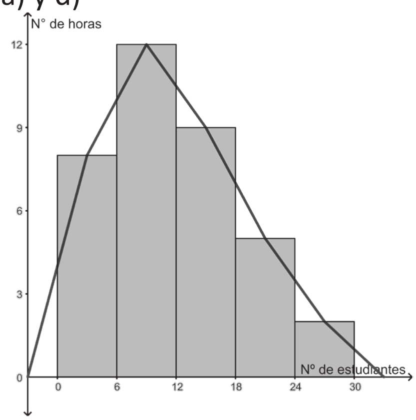
| Total de estud. | Sección A días | Frec. relat. | Frec. relat. Porc. | Punto medio |
|---|---|---|---|---|
| | *f* | $f_r$ | $f_{r\%}$ | *Pm* |
| 16 - 19 | 2 | 0.07 | 7% | 17.5 |
| 19 - 22 | 4 | 0.13 | 13% | 20.5 |
| 22 - 25 | 6 | 0.20 | 20% | 23.5 |
| 25 - 28 | 9 | 0.30 | 30% | 26.5 |
| 28 - 31 | 9 | 0.30 | 30% | 29.5 |
| **Total** | | | | |

3.




## Página 172, Clase 1.6

1. a) y d)




b) El gráfico tiene la forma de una montaña con una colina hacia un lado, lo que indica que los datos se concentran a la izquierda de la distribución.

c)

| Total de estud. | N° de horas | Punto med. | Frec. rel. | Frec. rel. porc. |
|---|---|---|---|---|
| | *f* | *Pm* | $f_r$ | $f_r\%$ |
| 0 - 6 | 8 | 3 | 0.22 | 22% |
| 6 - 12 | 12 | 9 | 0.33 | 33% |
| 12 - 18 | 9 | 15 | 0.25 | 25% |
| 18 - 24 | 5 | 21 | 0.14 | 14% |
| 24 - 32 | 2 | 28 | 0.06 | 6% |
| **Total** | **36** | | **1.0** | **100%** |

2. a) Ver la tabla.
   b) 26%
   c) 51%
   d) 25 años

| Edad (años) | Casos | Punto medio | Porcentaje de casos |
|---|---|---|---|
| | *f* | *Pm* | $f_r\%$ |
| 10 - 19 | 7092 | 15 | 20% |
| 20 - 29 | 11026 | 25 | 31% |
| 30 - 39 | 8554 | 35 | 24% |
| 40 - 49 | 5999 | 45 | 17% |
| 50 - 59 | 3190 | 55 | 9% |
| **Total** | | | **100%** |

## Página 176, Clase 2.1

Unidad 1:
a) 100, 125, 135, 140, 150, 150, 150, 170, 175, 180.
b) Min: 100, Máx: 180
c) 150
d) 150 e) 147.5

Unidad 2:
a) 100, 140, 140, 150, 160, 170, 175, 175, 180, 190
b) Mín: 100 Máx: 190
c) 165
d) 140 y 175, aparecen igual cantidad de veces.
e) 158
f) Sí, la unidad 2 ha generado un mayor ingreso promedio.

## Página 177, Clase 2.2

Turno matutino:
a) 125, 130, 135, 140, 145, 145, 150, 150, 150, 150.
b) Mín: 125, Máx: 150 c) 145
d) 150 e) 142

Turno vespertino:
a) 95, 100, 100, 100, 103, 104, 105, 105, 105, 107
b) Mín: 95, Máx: 107
c) 103.5
d) 100 y 105
e) 102.4

Sección A

a)

| Asistencia sección A | N° de días $f$ | Punto medio $Pm$ | $f \times Pm$ |
|---|---|---|---|
| 16 - 19 | 2 | 17.5 | 35 |
| 19 - 22 | 4 | 20.5 | 82 |
| 22 - 25 | 6 | 23.5 | 141 |
| 25 - 28 | 9 | 26.5 | 238.5 |
| 28 - 31 | 9 | 29.5 | 265.5 |
| **Total** | **30** | | **762** |

b) Media aritmética = 25.4

Sección B

a)

| Asistencia sección B | N° de días $f$ | Punto medio $Pm$ | $f \times Pm$ |
|---|---|---|---|
| 16 - 19 | 1 | 17.5 | 17.5 |
| 19 - 22 | 5 | 20.5 | 102.5 |
| 22 - 25 | 7 | 23.5 | 164.5 |
| 25 - 28 | 8 | 26.5 | 212 |
| 28 - 31 | 9 | 29.5 | 265.5 |
| **Total** | **30** | | **762** |

b) Media aritmética = 25.4

c) La asistencia media es igual.

## Página 178, Clase 2.3

1. a) 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 10, 10
   b) Mínimo: 6, Máximo: 10
   c) 7.5 d) 7 e) 7.8

2. a)

| Cantidad de bolsas | N° de días $f$ | Punto medio $Pm$ | $f \times Pm$ |
|---|---|---|---|
| 200 - 240 | 70 | 220 | 15 400 |
| 240 - 280 | 75 | 260 | 19 500 |
| 280 - 320 | 65 | 300 | 19 500 |
| 320 - 360 | 70 | 340 | 23 800 |
| 360 - 400 | 85 | 380 | 32 300 |
| **Total** | **365** | | **110 500** |

b) Media aritmética = 302.74

a) Depende del monto a pagar, si es mayor a 50 dólares conviene el descuento del 20%, y si es menor entonces el descuento de 10 dólares.

b) A partir de 50 dólares.

## Página 179, Clase 2.4

1. a)

| Puntajes | N° de estud. $f$ | Punto medio $Pm$ | $f \times Pm$ |
|---|---|---|---|
| 0 - 20 | 15 | 10 | 150 |
| 20 - 40 | 35 | 30 | 1 050 |
| 40 - 60 | 25 | 50 | 1 250 |
| 60 - 80 | 15 | 70 | 1 050 |
| 80 - 100 | 10 | 90 | 900 |
| **Total** | **100** | | **4 400** |

b) Media aritmética = 44.

2. Entregar 250 dólares más, pues si les aumentan el 9% deberán entregar en promedio 252 dólares adicionales, lo que implica un mayor esfuerzo para ellos y más ganancias para el banco.

| Cantidad de bolsas | N°de días $f$ | Datos acumulados |
|---|---|---|
| 200 - 240 | 70 | 70 |
| 240 - 280 | 75 | 145 |
| 280 - 320 | 60 | 205 |
| 320 - 360 | 70 | 275 |
| 360 - 400 | 85 | 360 |
| **Total** | **360** | |

a) Moda: 380

b) Mediana: 300

## Página 180, Clase 2.5

1. Aumentar un punto, pues con el 10%, solamente si se saca 10, tendrá un punto.

2.

| Puntajes | N° de estud. $f$ | Datos acumulados |
|---|---|---|
| 0 - 20 | 15 | 15 |
| 20 - 40 | 35 | 50 |
| 40 - 60 | 25 | 75 |
| 60 - 80 | 15 | 90 |
| 80 - 100 | 10 | 100 |
| **Total** | **100** | |

a) Moda: 30

b) Mediana: 30

Serie A: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
Mediana: 6, $\mu = 6$
Serie B: 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16,18, 20
Mediana: 12, $\mu = 12$
Serie C: 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13
Mediana: 9, $\mu = 9$
Todas las series carecen de moda; pues todos los datos aparecen una vez.

a) La mediana y la media aritmética coinciden y las tres series tienen la característica de estar formadas por números sucesivos, y para el caso de la serie B también son pares.

b) $5 \times$ A: 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50
Mediana: 30, $\mu = 30$
La mediana y la media aritmética también quedan multiplicadas por 5.

**Página 183, Clase 2.8**

1.

| Total de estudiantes Sección A | N° de días $f$ | Datos acumulados |
|---|---|---|
| 16 - 19 | 2 | 2 |
| 19 - 22 | 4 | 6 |
| 22 - 25 | 6 | 12 |
| 25 - 28 | 9 | 21 |
| 28 - 31 | 9 | 30 |
| **Total** | **30** | |

a) Moda: 26.5 y 29.5, ambas clases tienen igual frecuencia.
b) Mediana: 26.5.

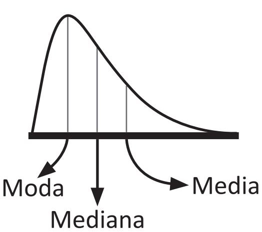
| Total de estudiantes Sección B | N° de días $f$ | Datos acumulados |
|---|---|---|
| 16 - 19 | 1 | 1 |
| 19 - 22 | 5 | 6 |
| 22 - 25 | 7 | 13 |
| 25 - 28 | 8 | 21 |
| 28 - 31 | 9 | 30 |
| **Total** | **30** | |

a) Moda: 29.5 b) Mediana: 26.5
Ambas secciones tienen igual mediana y moda con la diferencia que la sección A es bimodal.

2. a) Ventas promedio por empleados:
Carmen: 407.1
Miguel: 432.9
Ana: 457.1
b) Venta promedio por día
lun: 316.7, mar: 300, mier: 366.7, juev: 416.7, vier: 433.3, sab: 610, dom: 583.3
c) Carmen:
moda = 400, med = 400
Miguel:
moda = 450, med = 450
Ana:
No tiene moda, med = 450
d) Para Carmen y Miguel la moda coincide con la mediana, y ninguno de los 3 coincide con la media aritmética.

1. Gráfica 1
a) Valor apróximado de la moda 37.5
b) Como el polígono de frecuencia es simétrico, los valores de la media, moda y mediana coinciden.
Gráfica 2
a) Valor apróximado de la moda 40
b) Como el polígono de frecuencia es asimétrico con cola a la izquierda, se puede concluir que media < mediana < moda

2. media > mediana > moda, que es equivalente a
moda < mediana < media




**Página 185, Clase 3.1**

1. a) 7.7 b) 8.3
c) 9.4 d) 4.6
e) 5.67 f) 3.33
g) 2.36 h) 2.85

2. Del a) hasta el d), el valor absoluto del margen de error es 0.05, y del e) al h) es de 0.005.
3. a) $7.65 \leq 7.7 < 7.75$
b) $8.25 \leq 8.3 < 8.35$
c) $9.35 \leq 9.4 < 9.45$
d) $4.55 \leq 4.6 < 4.65$
e) $5.665 \leq 5.67 < 5.675$
f) $3.325 \leq 3.33 < 3.335$
g) $2.355 \leq 2.36 < 2.365$
h) $2.845 \leq 2.85 < 2.855$

**Página 186, Clase 3.2**

1. a) 4.4 b) 12.4
c) 8.23 d) 18.64
2. Del a) y b), el valor absoluto del margen de error es 0.05
y del c) al d) es de 0.005
3. a) $4.35 \leq 4.4 < 4.45$
b) $12.35 \leq 12.4 < 12.45$
c) $8.225 \leq 8.23 < 8.235$
d) $18.635 \leq 18.64 < 18.645$

a) $7.052 \times 10^2$ b) $8.45 \times 10^4$
c) $5.4 \times 10^5$ d) $5.967 \times 10^9$

**Página 187, Clase 3.3**

1. a) i) 1.0 ii) 23.8
iii) 4.27 iv) 7.21
b) Del i) y ii), el valor absoluto del margen de error es 0.05, y del iii) al iv) es de 0.005.
c)
i) $0.95 \leq 1.0 < 1.05$
ii) $23.75 \leq 23.8 < 23.85$
iii) $4.265 \leq 4.27 < 4.275$
iv) $7.205 \leq 7.21 < 7.215$

2. a) $5.074 \times 10^2$ b) $6.975 \times 10^5$
c) $9.8 \times 10^5$ d) $7.963 \times 10^8$

1. a) 5 934 456 500
b) 5 934 000 000
c) $5.934 \times 10^9$
2. a) 1 392 000
b) 1 392 000
c) $1.392 \times 10^6$

REPÚBLICA DE EL SALVADOR EN LA AMÉRICA CENTRAL

Cuaderno de ejercicios Matemática Primera edición

8