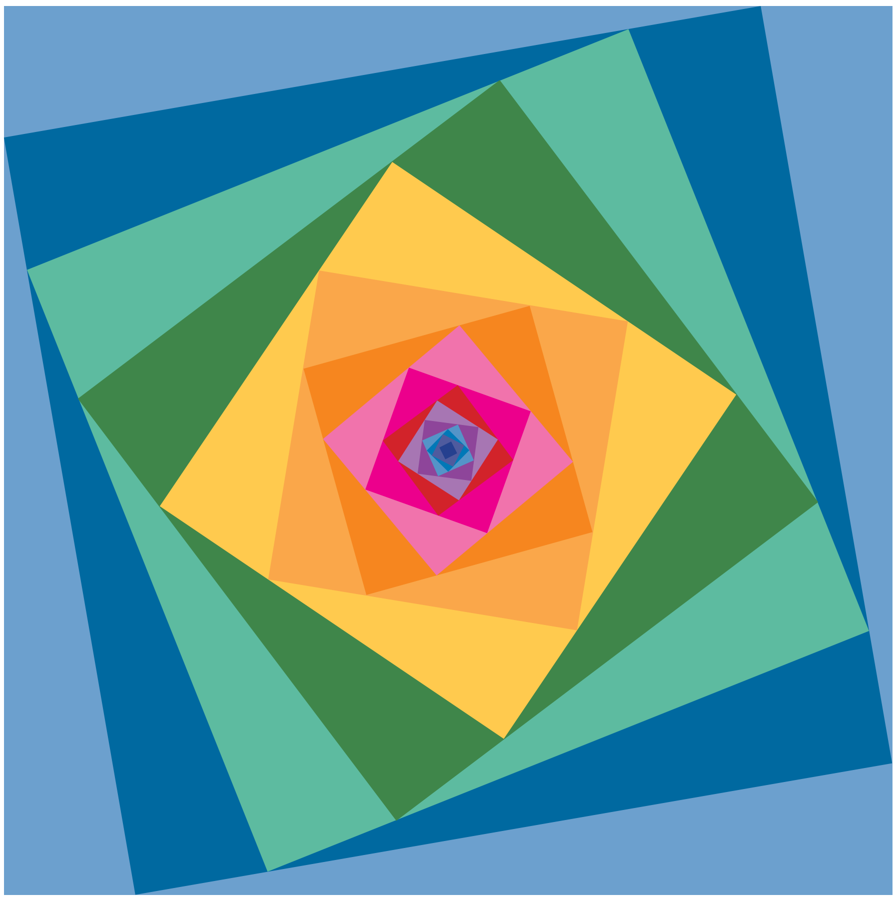
Tomo 2 8 Segunda edición Matemática Guía metodológica

GOBIERNO DE EL SALVADOR

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Matemática 8



Tomo 2

Guía metodológica

Segunda edición

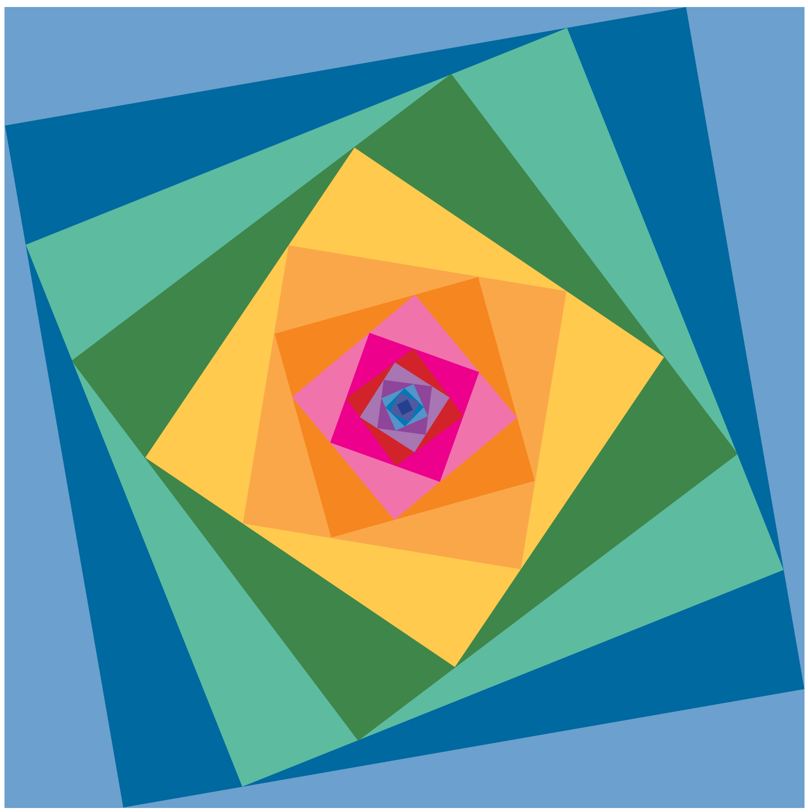
ESMATE

JICA

GOBIERNO DE EL SALVADOR

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Matemática 8



Tomo 2

Guía metodológica
Segunda edición

ESMATE

JICA

Equipo técnico autoral y de diagramación del Ministerio de Educación

Ana Ester Argueta Aranda
Erick Amílcar Muñoz Deras
Reina Maritza Pleitez Vásquez
Diana Marcela Herrera Polanco
Francisco Antonio Mejía Ramos
Norma Elizabeth Lemus Martínez
Salvador Enrique Rodríguez Hernández
César Omar Gómez Juárez

Diseño y revisión de diagramación

Francisco René Burgos Álvarez
Judith Samanta Romero de Ciudad Real

Corrección de estilo

Mónica Marlene Martínez Contreras
Marlene Elizabeth Rodas Rosales
Ana Esmeralda Quijada Cárdenas

Cooperación Técnica de Japón a través de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA).

Primera edición © 2018.
Segunda edición © 2020.

Imagen de portada con fines educativos, esta se construye a partir de una secuencia de cuadrados. En cada uno de ellos se forman cuatro triángulos rectángulos congruentes.

372.7
M425 Matemática 8 [recurso electrónico] : guía metodológica: tomo 2 / Ana Ester Argueta, Aranda ... [et al] ;
Diagramación Francisco René Burgos Álvarez, Judith Samanta Romero de Ciudad Real,. -- 2ª. ed.. -
San Salvador, El salv. : Ministerio de Educación (MINED), 2020.
s/v 1 recurso electrónico (224 p. ; ilus. ; 28 cm. – (Esmate)

Datos electrónicos (1 archivo : pdf, 10.3 mb) . -- http://www.mined.gob.sv
ISBN 978-99961-355-6-9 (E-Book)

1. Matemáticas-Libros de texto. 2. Matemáticas-Enseñanza -- Guías I.
Argueta Aranda Ana Ester, coaut.
II. Título.
BINA/jmh

Estimados docentes:

Reciban un cordial saludo, por medio del cual les expresamos nuestro agradecimiento por la importante labor que realizan en beneficio de la ciudadanía salvadoreña.

Como Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología (MINEDUCYT) a través del Proyecto de Mejoramiento de los Aprendizajes de Matemática en Educación Básica y Educación Media (ESMATE) hemos diseñado para ustedes la Guía metodológica para la asignatura de Matemática, que se convertirá en una herramienta importante para la labor docente que realizan día con día.

El objetivo principal de este recurso es brindarles orientaciones concretas para el desarrollo de las clases de esta asignatura y lograr así una mejora significativa en los aprendizajes de los estudiantes salvadoreños.

Es importante destacar que la Guía metodológica está en correspondencia con las clases propuestas en el Libro de texto y Cuaderno de ejercicios diseñados para los estudiantes, concretizando de esta manera lo establecido en el Programa de estudio de Matemática.

No dudamos que aprovecharán al máximo este recurso y estamos seguros de que pondrán todo su esfuerzo y dedicación para seguir contribuyendo al desarrollo de nuestro querido país.

Atentamente,

Carla Evelyn Hananía de Varela
Ministra de Educación, Ciencia y Tecnología

Ricardo Cardona Alvarenga
Viceministro de Educación y de Ciencia y Tecnología Ad Honorem

Índice

Unidad 5. Criterios de congruencia de triángulos

Competencia de la Unidad

Utilizar los criterios para determinar la congruencia entre triángulos, caracterizar algunas figuras planas y resolver situaciones matemáticas de la vida cotidiana.

Relación y desarrollo

Primero y segundo ciclo

- Construcción de ángulos usando el transportador
- Clasificación y construcción de triángulos
- Clasificación y construcción de cuadriláteros
- Clasificación de cuerpos geométricos
- Figuras simétricas
- Perímetro y área de triángulos y cuadriláteros
- Patrones de cubos y prismas rectangulares y triangulares
- Longitud de la circunferencia y área del círculo
- Longitud y área de sectores circulares notables
- Volumen del prisma
- Traslaciones, giros y simetría rotacional

Séptimo grado

Unidad 8: Figuras planas y construcción de cuerpos geométricos
- Movimiento de figuras en el plano
- Círculos, segmentos y ángulos
- Planos, cuerpos geométricos y área total del prisma, pirámide y cilindro

Octavo grado

Unidad 4: Paralelismo y ángulos de un polígono
- Suma de los ángulos internos y externos de un polígono
- Rectas paralelas y ángulos

Unidad 5: Criterios de congruencia de triángulos
- Congruencia de triángulos

Unidad 6: Características de los triángulos y cuadriláteros
- Triángulos
- Paralelogramos

Unidad 7: Área y volumen de sólidos geométricos
- Características y elementos de los sólidos geométricos
- Cálculo del volumen de sólidos geométricos
- Aplicaciones de volúmenes
- Áreas de sólidos geométricos
- Aplicaciones de áreas

Noveno grado

Unidad 5: Figuras semejantes
- Semejanza
- Semejanza de triángulos
- Semejanza y paralelismo
- Aplicación de semejanza y triángulos semejantes

Unidad 6: Teorema de Pitágoras
- Teorema de Pitágoras
- Aplicación del teorema de Pitágoras

Unidad 7: Ángulo inscrito y central
- Ángulo central e inscrito
- Aplicación de ángulos central e inscrito

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Congruencia de triángulos	1	1. Sentido de la congruencia de dos figuras
	1	2. Congruencia de triángulos
	1	3. Primer criterio de congruencia de triángulos
	1	4. Segundo criterio de congruencia de triángulos
	1	5. Tercer criterio de congruencia de triángulos
	1	6. Aplicación de los criterios de congruencia de triángulos
	1	7. Aplicación de criterios de congruencia de triángulos
	1	8. Aplicación de la congruencia de triángulos, parte 1
	1	9. Aplicación de la congruencia de triángulos, parte 2
	1	Prueba de la Unidad 5

9 horas clase + prueba de la Unidad 5

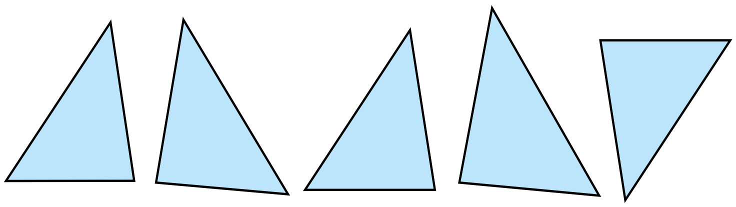
Puntos esenciales de la lección

Lección 1: Congruencia de triángulos
Se inicia la unidad con la introducción del sentido de la congruencia de figuras planas, luego se define la congruencia de triángulos estableciendo relaciones entre sus elementos; seguidamente se introducen los criterios de congruencia de triángulos haciendo énfasis en el proceso de construcción de figuras, y para finalizar se presenta una serie de aplicaciones de los criterios de congruencia a diferentes contextos.

1.1 Sentido de la congruencia de dos figuras

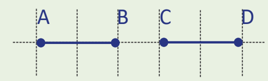
P

De los triángulos 2 al 5, identifica los que coinciden cuando se sobreponen con el triángulo 1 (puedes voltearlo al sobreponer).

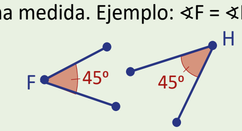


Triángulo 1 Triángulo 2 Triángulo 3 Triángulo 4 Triángulo 5

Dos segmentos son congruentes si sus longitudes son iguales. Ejemplo: AB = CD.

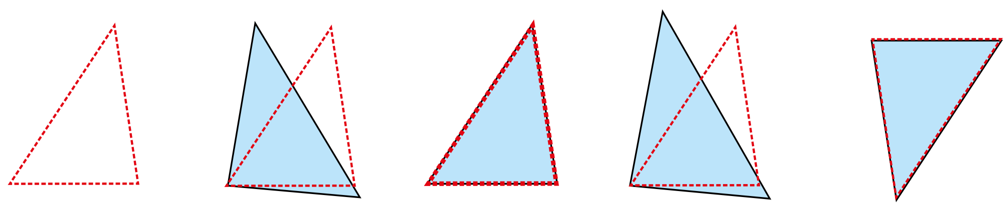


Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida. Ejemplo: ∢F = ∢H.



S

Al recortar el triángulo 1 y sobreponerlo uno a uno se tiene que únicamente coincide en todos sus lados y ángulos con el triángulo 3 y el 5.



Triángulo 1 Triángulo 2 Triángulo 3 Triángulo 4 Triángulo 5

C

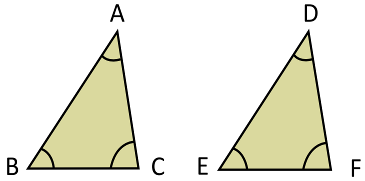
Dos figuras que coinciden cuando se sobreponen de manera directa o volteando al revés una de ellas si es necesario, se llaman **congruentes**.

Los vértices, lados y ángulos que coinciden al sobreponer dos figuras congruentes se llaman **correspondientes**.

A los elementos **correspondientes** de una figura también se les llama **homólogos**.

E

Los triángulos son congruentes. Identifica los vértices, lados y ángulos correspondientes.



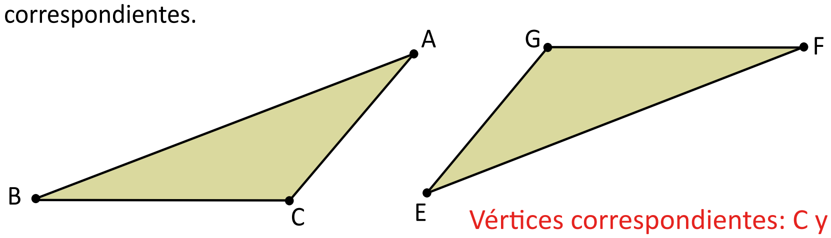
Triángulo 1 Triángulo 2

Vértices correspondientes: A y D, B y E, C y F.

Lados correspondientes: AB y DE, BC y EF, CA y FD.

Ángulos correspondientes: ∢A y ∢D, ∢B y ∢E, ∢C y ∢F.

Los siguientes triángulos son congruentes. Compáralos e identifica los vértices, lados y ángulos correspondientes.



Aunque los triángulos estén en distinta posición son congruentes, puedes girarlos o darles vuelta para que coincidan.

Vértices correspondientes: C y G, A y E, B y F.
Lados correspondientes: CA y GE, CB y GF, AB y EF.
Ángulos correspondientes: ∢C y ∢G, ∢A y ∢E, ∢B y ∢F.

Indicador de logro

1.1 Determina cuando dos figuras son congruentes.

Secuencia

En la unidad anterior se trabajó con ángulos internos y externos de un polígono, en esta clase se compararán figuras; uno de los elementos a considerar en ese proceso de comparación son los ángulos internos; luego se establecerá una correspondencia entre cada uno de los elementos comparados en una figura plana. Cuando se comparan figuras es importante considerar que si es necesario la figura se debe rotar o voltear.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Comparar figuras sobreponiéndolas, con el objeto de identificar las que coinciden en todos sus elementos y abstraer del proceso el concepto de **figuras congruentes**.

Ⓒ Identificar los lados homólogos en dos triángulos congruentes, utilizando las definiciones dadas en la Conclusión.

Solución de algunos ítems:

Vértices correspondientes:
C y G, A y E, B y F.

Lados correspondientes:
CA y GE, CB y GF, AB y EF.

Ángulos correspondientes:
∢C y ∢G, ∢A y ∢E, ∢B y ∢F.

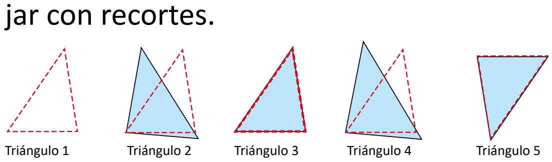
Posibles dificultades:
Es posible que los cortes no se realicen con precisión, lo que puede hacer que las figuras no coincidan, para evitar esto es importante hacer énfasis sobre el tipo de corte al momento en que se realice la actividad.

Fecha: **U5 1.1**

P

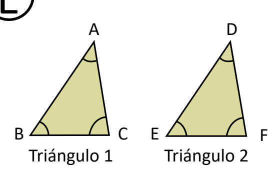
De los triángulos 2 al 5, identifica los que coinciden cuando se sobreponen con el triángulo 1 (puedes voltearlo al sobreponer).
Observación: Ver ilustración en el LT y trabajar con recortes.

S



Al recortar el triángulo 1 y sobreponerlo uno a uno se tiene que únicamente coincide en todos sus lados y ángulos con el triángulo 3 y el 5.

E



Vértices correspondientes:
A y D, B y E, C y F.
Lados correspondientes:
AB y DE, BC y EF, CA y FD.
Ángulos correspondientes:
∢A y ∢D, ∢B y ∢E, ∢C y ∢F.

R

Vértices correspondientes:
C y G, A y E, B y F.

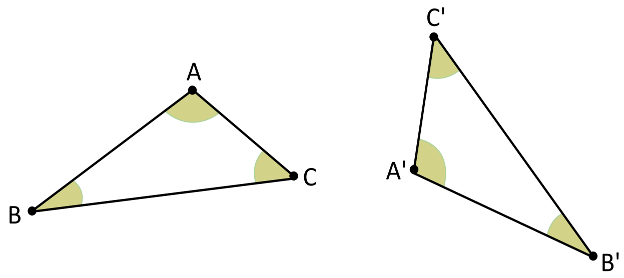
Lados correspondientes:
CA y GE, CB y GF, AB y EF.

Ángulos correspondientes:
∢C y ∢G, ∢A y ∢E, ∢B y ∢F.

Tarea: página 108 del Cuaderno de Ejercicios.

1.2 Congruencia de triángulos

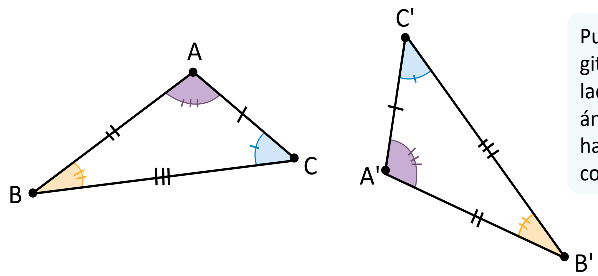
P Si los ΔABC y ΔA'B'C' son congruentes, compara las medidas de sus lados y ángulos correspondientes.



La notación A', B', y C', se lee "A prima", "B prima" y "C prima" y se utiliza para representar puntos que son diferentes, pero que se corresponden con los puntos A, B y C.

S Al comparar la longitud de los lados correspondientes y la medida de los ángulos correspondientes se obtiene que

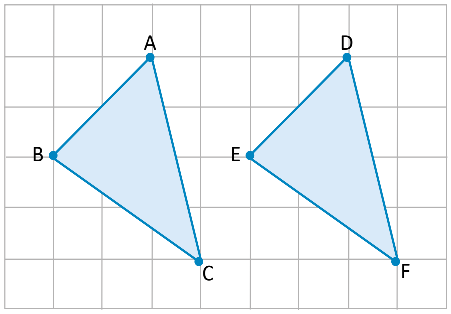
AB = A'B'	∢A = ∢A'
AC = A'C'	∢B = ∢B'
BC = B'C'	∢C = ∢C'

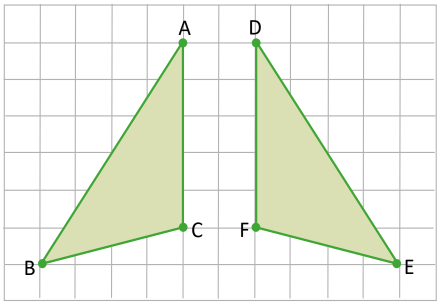


Puedes comparar la longitud de cada uno de sus lados y amplitud de sus ángulos respectivamente, haciendo uso de regla, compás y transportador.

C En los triángulos congruentes, las medidas de los lados y los ángulos correspondientes son iguales.
Para indicar que los triángulos ΔABC y ΔA'B'C' son congruentes se utiliza el símbolo ≅; es decir:
ΔABC ≅ ΔA'B'C', que se lee **el triángulo ABC es congruente con el triángulo A'B'C'.**

Dado que los siguientes triángulos son congruentes, identifica los lados y ángulos correspondientes y representa la congruencia de los triángulos usando el símbolo ≅.





AB = DE ∢A = ∢D
BC = EF ∢B = ∢E
AC = DF ∢C = ∢F

Por tanto, ΔABC ≅ ΔDEF.

Cuando se escribe la congruencia de triángulos, es necesario tomar en cuenta que se deben escribir las letras en orden de los vértices correspondientes.

AB = DE ∢A = ∢D
BC = EF ∢B = ∢E
AC = DF ∢C = ∢F

Por tanto, ΔABC ≅ ΔDEF.

Unidad 5

Indicador de logro

1.2 Identifica cuando dos triángulos son congruentes.

Secuencia

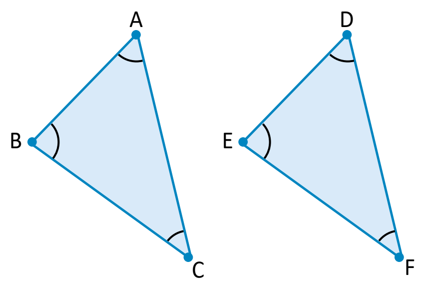
En la clase anterior se introdujo el concepto de congruencia, para esta clase se estudiará la congruencia de triángulos como un caso particular de congruencia de figuras, es importante hacer énfasis en que los elementos a comparar deben ser correspondientes.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Comparar la medida de los elementos correspondientes en dos triángulos congruentes, para establecer la relación de igualdad que se da entre ellos.

Ⓒ Introducir la notación que se utiliza para representar la congruencia de triángulos.

Solución de algunos ítems:



1. En los triángulos:

AB = DE   ∢A = ∢D
BC = EF   ∢B = ∢E
AC = DF   ∢C = ∢F

Por tanto, ΔABC ≅ ΔDEF.

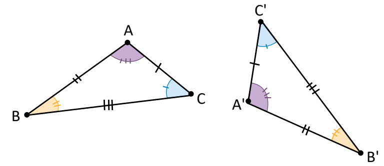
Posibles dificultades:
La falta de precisión en la medida de las figuras geométricas, puede dificultar la identificación de los lados o ángulos iguales. En ese caso es necesario dar orientaciones generales sobre el uso de los instrumentos de medida.

Materiales:
Cada estudiante y el profesor deben contar con regla y transportador.

Fecha: **U5 1.2**

Ⓟ Si los ΔABC y ΔA'B'C' son congruentes, compara las medidas de sus lados y ángulos correspondientes.
Observación: Ver los triángulos en el LT.

Ⓢ Al comparar la longitud de los lados y la medida de los ángulos se obtiene:



AB = A'B'   ∢A = ∢A'
AC = A'C'   ∢B = ∢B'
BC = B'C'   ∢C = ∢C'

Ⓡ 1. En los triángulos:

AB = DE   ∢A = ∢D
BC = EF   ∢B = ∢E
AC = DF   ∢C = ∢F

Por tanto, ΔABC ≅ ΔDEF.

2. En los triángulos:

AB = DE   ∢A = ∢D
BC = EF   ∢B = ∢E
AC = DF   ∢C = ∢F

Por tanto, ΔABC ≅ ΔDEF.

Tarea: página 109 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 1

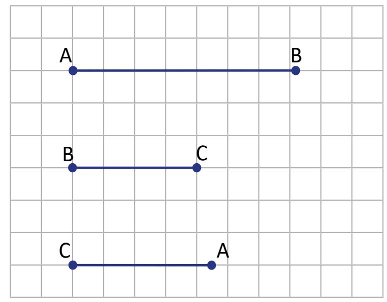
1.3 Primer criterio de congruencia de triángulos

P

Utilizando compás y regla, realiza lo siguiente:

a) Construye un triángulo utilizando los tres segmentos de la derecha como lados.

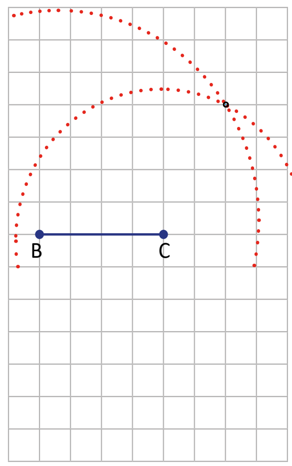
b) Compara tus resultados con los obtenidos por tus compañeros, ¿cómo son los triángulos?

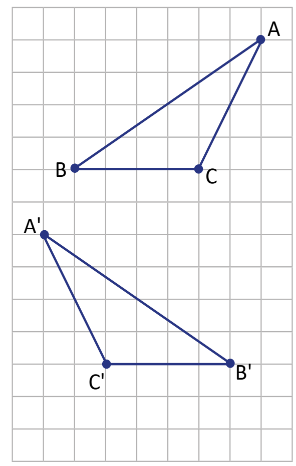


S

a) Para construir el triángulo se realiza lo siguiente:
- Construye un segmento de longitud BC.
- Traza una circunferencia de radio BA y centro en B y otra con centro en C y radio CA.
- Identifica la intersección de los dos arcos.
- Une los puntos y construye el triángulo ABC.

b) Al comparar los triángulos se observa que coinciden en todas las medidas; es decir, tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales sin importar la posición.





C

Primer criterio de congruencia:

Dos triángulos que tienen sus tres lados iguales, son congruentes. Este criterio se conoce como **Lado, Lado, Lado (LLL);** es decir, $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ dado que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ y $BC = B'C'$.

Identifica los pares de triángulos congruentes:

a) ΔABC; $AB = 5$, $BC = 7$, $CA = 6$

b) ΔDEF; $DE = 2$, $EF = 4$, $FD = 3$

c) ΔGHI; $GH = 4$, $HI = 5$, $IH = 3$

d) ΔJKL; $JK = 5$, $KL = 7$, $LJ = 8$

e) ΔMNO; $MN = 3$, $NO = 4$, $OM = 5$

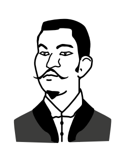
f) ΔPQR; $PQ = 5$, $QR = 8$, $RP = 7$

g) ΔSTU; $ST = 7$, $TU = 5$, $US = 6$

h) ΔXYZ; $XY = 4$, $YZ = 3$, $ZX = 2$

El tratado *Los Elementos*, de Euclides, ha sido durante 2300 años un documento insuperado. Como toda obra maestra puede ser leído una y otra vez, suministrando nuevos aspectos del genio de su creador. Aún hoy, estos viejos escritos constituyen una fuente ilimitada de goce para los que disfrutan con la ingeniosidad y el artificio de un argumento matemático elegante. Dunham, W. (1992). *Viaje a través de los genios.* p.116.

En la proposición I.22. del tratado *Los Elementos*, Euclides hace referencia a la congruencia de triángulos estableciendo: “Construir un triángulo con tres segmentos iguales a otros tres dados. Pero es necesario que dos de ellos tomados juntos de cualquier manera sean mayores que el restante”.



a) y g); b) y h); c) y e); d) y f)

Indicador de logro

1.3 Determina el mínimo de elementos necesarios que deben ser iguales para que dos triángulos sean congruentes.

Secuencia

Luego de haber introducido el símbolo que representa la congruencia, así como el concepto de congruencia de triángulos, se analizará cuál debe ser el número mínimo de elementos que deben tener iguales dos triángulos para que sean congruentes; en ese sentido en esta clase introduce el **primer criterio de congruencia** “Lado, Lado, Lado (LLL)”.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Construir un triángulo dada la longitud de sus tres lados. Para esta actividad es importante que no se les indique la posición del triángulo, para que luego puedan comparar y determinar que no importa la posición en que dibujen los triángulos, siempre serán congruentes si las medidas de sus lados son iguales.

Ⓒ Utilizar el criterio de congruencia que se ha definido en la Conclusión, en este apartado no es necesario que dibujen los triángulos, basta con que vayan comparando las longitudes de los lados; pero si se dispone de tiempo puede dibujarse para que practiquen el uso del compás.

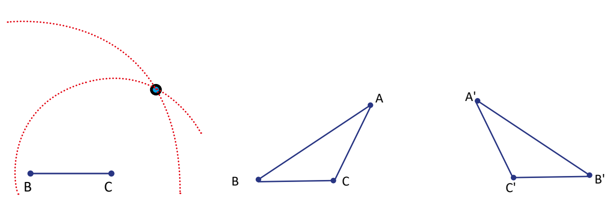
Posibles dificultades:
El uso inadecuado del compás, podría impedir que se realicen los trazos sugeridos; en ese caso es importante dar una orientación general al respecto y dejar como tarea que complementen el trazo de los triángulos de la fijación.

Materiales:
Cada estudiante y el profesor deben contar con estuche de geometría y compás.

Fecha: **U5 1.3**

Ⓟ a) Construye un triángulo usando la longitud de los segmentos mostrados en el LT, utiliza regla y compás.
b Compara los resultados con tus compañeros, ¿cómo son los triángulos?

Ⓢ



Al comparar los triángulos se observa que coinciden en todas las medidas; es decir, son congruentes.

Ⓡ Utilizando el criterio de congruencia LLL, son congruentes las siguientes parejas de triángulos:

a) y g)
b) y h)
c) y e)
d) y f)

Tarea: página 110 del Cuaderno de Ejercicios.

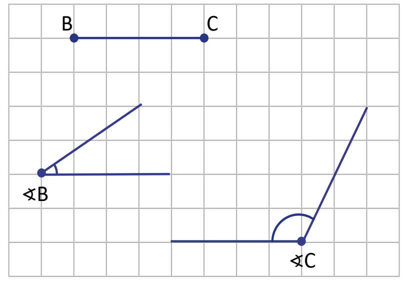
1.4 Segundo criterio de congruencia de triángulos

P

Utilizando regla y transportador, realiza lo siguiente:

a) Construye un triángulo utilizando el segmento y los dos ángulos de la derecha, como dos ángulos y el lado comprendido entre ellos.

b) Compara tus resultados con los obtenidos por tus compañeros, ¿cómo son los triángulos?

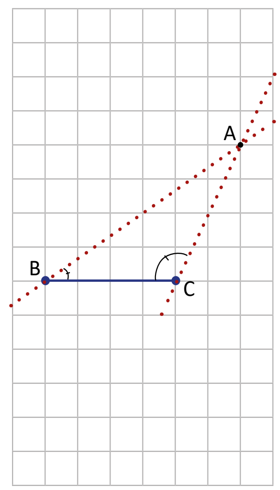


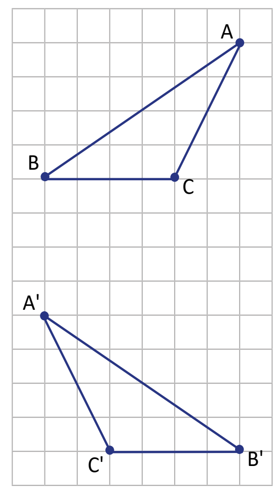
S

a) Para construir el triángulo usando la medida de dos ángulos y el lado comprendido entre ellos.

- Construye un segmento de longitud BC.
- Mide el ángulo B y el ángulo C en los respectivos extremos del segmento BC.
- Identifica la intersección de los rayos de los ángulos trazados ∢B y ∢C.
- Une los puntos y forma el ΔABC.

b) Al comparar los triángulos, puedes ver que coinciden en todas las medidas; es decir, tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales sin importar la posición.





C

Segundo criterio de congruencia:

Dos triángulos que tienen dos ángulos iguales, así como el lado comprendido entre ellos respectivamente igual, son congruentes. Este criterio se conoce como **Ángulo, Lado, Ángulo (ALA)**.
ΔABC ≅ ΔA'B'C' dado que ∢B = ∢B', BC = B'C' *y* ∢C = ∢C'.

Identifica los pares de triángulos congruentes:

a) ΔABC; BC = 5, ∢B = 35°, ∢C = 100°

b) ΔDEF; EF = 6, ∢E = 50°, ∢F = 70°

c) ΔGHI; GH = 6, ∢G = 40°, ∢H = 110°

d) ΔJKL; JK = 5, ∢J = 60°, ∢K = 50°

e) ΔMNO; MO = 5, ∢M = 100°, ∢O = 35°

f) ΔPQR; PR = 6, ∢P = 110°, ∢R = 40°

g) ΔSTU; ST = 5, ∢T = 50°, ∢U = 60°

h) ΔXYZ; XZ = 6, ∢X = 60°, ∢Y = 50°

Son congruentes los siguientes triángulos: a) y e); b) y h); c) y f)

Indicador de logro

1.4 Identifica los diferentes casos que se tienen para determinar si dos triángulos son congruentes.

Secuencia

En la clase anterior se trabajó con el primer criterio de congruencia, en esta clase se trabajará el segundo criterio, proporcionando tres elementos del triángulo para que ellos realicen el trazo; a diferencia de la anterior, en esta clase es importante el orden en que se colocan los elementos.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Construir un triángulo dados dos ángulos y el lado comprendido entre ellos; a partir de la comparación de los trazos, introducir el **segundo criterio de congruencia** "Ángulo, Lado, Ángulo (ALA)". Es importante que cuando se comparen los resultados se haga énfasis en la posición de los ángulos respecto al segmento dado.

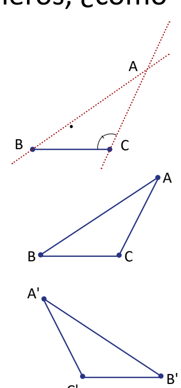
Ⓒ Practicar el proceso de identificación de triángulos congruentes utilizando el criterio visto en esta clase.

Materiales:
El profesor y cada uno de los estudiantes deben contar con estuche de geometría.

Fecha: **U5 1.4**

Ⓟ a) Construye un triángulo utilizando el segmento y los dos ángulos mostrados en el LT, utiliza regla y transportador.
b) Compara los resultados con tus compañeros, ¿cómo son los triángulos?

Ⓢ Al comparar los triángulos, se puede ver que coinciden en todas las medidas; es decir, tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales sin importar la posición.



Ⓡ Utilizando el criterio de congruencia ALA, son congruentes las siguientes parejas de triángulos:

a) y e)
b) y h)
c) y f)

Tarea: página 111 del Cuaderno de Ejercicios.

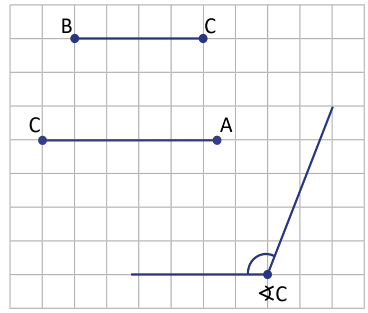
1.5 Tercer criterio de congruencia de triángulos

P

Utilizando regla, transportador y compás, realiza lo siguiente:

a) Construye un triángulo utilizando los dos segmentos y el ángulo de la derecha, como dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

b) Compara tus resultados con los obtenidos por tus compañeros, ¿cómo son los triángulos?

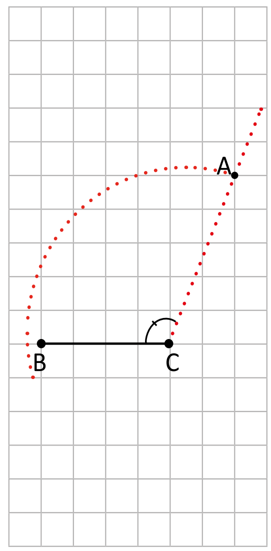


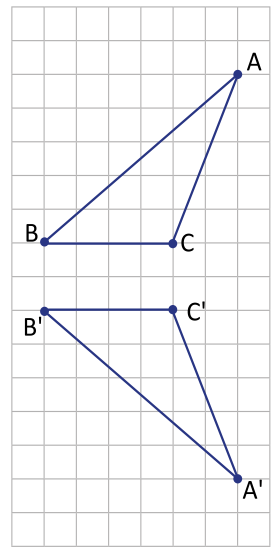
S

a) Para construir el triángulo a partir de la medida de dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, se realiza lo siguiente:

- Traza un segmento de longitud BC.
- Mide el ángulo C.
- Traza una circunferencia de radio CA.
- Marca la intersección de la circunferencia y el rayo del ∢C.
- Une los puntos y construye el triángulo ABC.

b) Al comparar los triángulos se observa que coinciden en todas las medidas; es decir, tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales sin importar la posición.





C

Tercer criterio de congruencia:

Dos triángulos que tienen dos de sus lados iguales, así como el ángulo comprendido entre ellos también igual, son congruentes. Este criterio es conocido como **Lado, Ángulo, Lado (LAL);** ΔABC ≅ ΔA'B'C' dado que BC = B'C', ∢C = ∢C' y CA = C'A'.

Identifica los pares de triángulos congruentes:

a) ΔABC; BC = 3, CA = 4, ∢C = 50°

b) ΔDEF; EF = 3, FD = 5, ∢F = 60°

c) ΔGHI; GH = 4, HI = 3, ∢H = 60°

d) ΔJKL; JK = 5, KL = 4, ∢K = 50°

e) ΔMNO; OM = 3, MN = 4, ∢M = 60°

f) ΔPQR; RP = 4, PQ = 5, ∢P = 50°

g) ΔSTU; US = 4, TU = 3, ∢U = 50°

h) ΔXYZ; YX = 5, XZ = 3, ∢X = 60°

Son congruentes los siguientes triángulos: a) y g); b) y h); c) y e)

Indicador de logro

1.5 Identifica los diferentes casos que se tienen para determinar si dos triángulos son congruentes.

Secuencia

En las dos clases anteriores se ha trabajado con dos criterios, con los cuales se puede determinar si dos triángulos son congruentes; en esta clase se presentarán tres elementos distintos a los analizados para introducir el **tercer criterio de congruencia** "Lado, Ángulo, Lado (LAL)".

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Construir un triángulo con los elementos dados y luego compararlo con los obtenidos por sus compañeros. Es necesario considerar que el orden en que se colocan los elementos es importante.

Ⓒ Fijar el proceso de comparación de los triángulos utilizando el criterio de congruencia estudiado en esta clase.

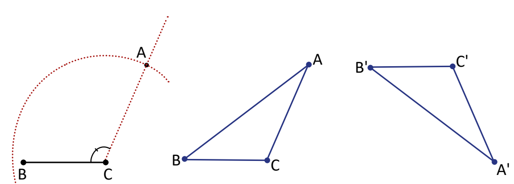
Observación:
Es importante señalar que la suma de los ángulos externos de un polígono es siempre 360°, puede permitirse el cálculo en esta clase únicamente para efectos de fijación.

Fecha: **U5 1.5**

Ⓟ a) Construye un triángulo utilizando los dos segmentos y el ángulo mostrado en el LT, utiliza regla, compás y transportador.

b) Compara los resultados obtenidos con otros estudiantes de tu grado, ¿cómo son los triángulos?

Ⓢ



Al comparar los triángulos, se puede ver que coinciden en todas las medidas; es decir, tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales sin importar la posición.

Ⓡ Utilizando el criterio de congruencia LAL, son congruentes las siguientes parejas de triángulos:

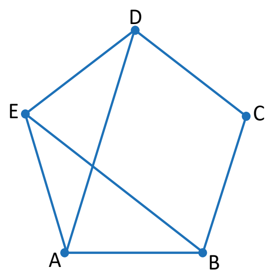
a) y g)
b) y h)
c) y e)

Tarea: página 112 del Cuaderno de Ejercicios.

1.6 Aplicación de los criterios de congruencia de triángulos

P

Dado el pentágono regular, explica por qué ΔABE ≅ ΔEDA.



En el pentágono regular la medida de sus lados y ángulos internos son iguales.

S

Afirmaciones	Justificaciones
EA = AE	Lado común a ambos triángulos.
AB = ED	Por ser lados de un pentágono regular.
∢EAB = ∢DEA	Son ángulos internos del pentágono regular.
ΔABE ≅ ΔEDA	Por criterio LAL.

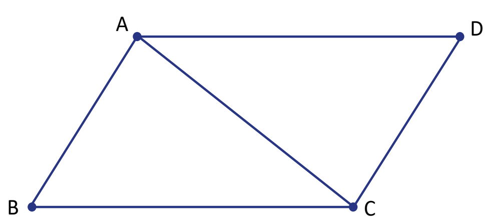
C

A la serie de argumentos, donde cada uno sigue de manera lógica los anteriores y cada argumento es fundamentado por otros ya comprobados se le llama **Demostración.**

En el problema mostrado anteriormente, las características de los lados y ángulos internos del pentágono regular y los criterios de congruencia de triángulos son asuntos comprobados y la solución mostrada es la *demostración*.

Realiza las siguientes demostraciones:

1. Dado que el cuadrilátero ABCD es un romboide y AC es diagonal, demuestra que ΔABC ≅ ΔCDA.

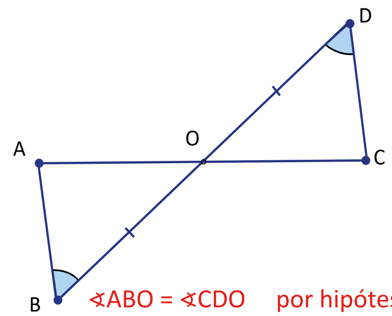


∢CAB = ∢ACD
∢CAD = ∢ACB por ser alternos internos,

AC = CA por ser el mismo segmento,

ΔABC ≅ ΔCDA por criterio ALA.

2. Dado que AB ∥ CD y DO = BO.
   Demuestra que ΔABO ≅ ΔCDO.



∢ABO = ∢CDO por hipótesis,
∢AOB = ∢COD por ser opuestos,

OB = OD por hipótesis,

ΔABO ≅ ΔCDO por criterio ALA.

Unidad 5

Indicador de logro

1.6 Aplica criterios de congruencia para demostrar relaciones entre triángulos formados a partir de polígonos.

Secuencia

En las últimas tres clases se han estudiado los tres criterios de congruencia, por lo que en esta clase se utilizarán para demostrar propiedades de los polígonos.

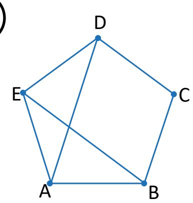
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Demostrar relaciones entre los triángulos que se forman con los lados y diagonales de un pentágono regular.

Ⓒ Utilizar los criterios de congruencia para determinar si dos triángulos dados son congruentes.

Fecha: **U5 1.6**

Ⓟ



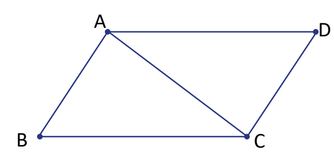
Dado un pentágono regular, explica por qué $\Delta ABE \cong \Delta EDA$.

Observación: entregar recortes del pentágono del LT, o ver imagen en LT.

Ⓢ

Afirmaciones	Justificaciones
$EA = AE$	Lado común a ambos triángulos.
$AB = ED$	Por ser lados de un pentágono regular.
$\sphericalangle EAB = \sphericalangle DEA$	Son ángulos internos del pentágono regular.
$\Delta ABE \cong \Delta EDA$	Por criterio LAL.

Ⓡ



$\sphericalangle CAB = \sphericalangle ACD$ $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACB$	Por ser alternos internos.
$AC = CA$	Por ser el mismo segmento.
$\Delta ABC \cong \Delta CDA$	Por criterio ALA.

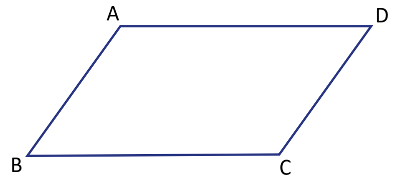
Tarea: página 113 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 1

1.7 Aplicación de criterios de congruencia de triángulos

P

Dado que en el cuadrilátero ABCD, AD ∥ BC, y BC = DA, demuestra que AB = CD.

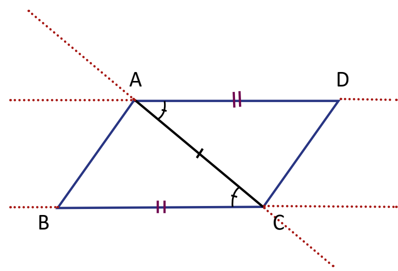


Utiliza congruencia de triángulos que contenga AB y DC, para demostrar la igualdad de lados.

S

Para los triángulos ΔABC ≅ ΔCDA.

Afirmación	Justificación
BC = DA	Por hipótesis.
CA = AC	Por ser lado común a ambos triángulos.
∢BCA = ∢DAC	Por ser alternos internos entre paralelas.
ΔABC ≅ ΔCDA	Por criterio LAL.



De donde se concluye que AB = CD, por ser lados correspondientes de dos triángulos congruentes.

C

La demostración está estructurada de la siguiente manera:

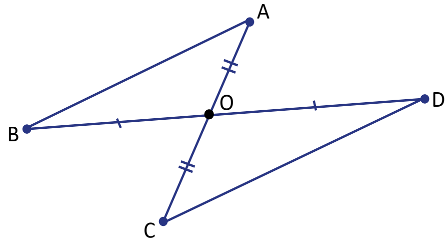
BC = DA, argumento dado en el enunciado y se le denomina **hipótesis**.

CA = AC
∢BCA = ∢DAC, resultados ya comprobados.
ΔABC ≅ ΔCDA

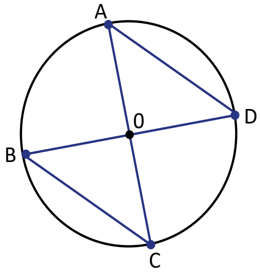
AB = CD, argumento o asunto a demostrar, **conclusión**.

En matemática se usa el lenguaje:
Si ☐, entonces ◯.
☐ corresponde a la hipótesis y
◯, corresponde a la conclusión.

1. Dos segmentos AC y BD se cortan en el punto O. Considerando que BO = DO y AO = CO, demuestra que AB = CD, luego escribe la hipótesis y la conclusión.



2. En un círculo, dos diámetros AC y BD se intersectan en el centro O del círculo. Demuestra que AD = CB.



Indicador de logro

1.7 Aplica criterios de congruencia para demostrar relaciones entre triángulos formados a partir de polígonos.

Secuencia

En la clase anterior se utilizaron los criterios de congruencia para demostrar si dos triángulos dados son congruentes, en esta clase nuevamente se utilizarán los criterios de congruencia así como lo aprendido sobre paralelismo para demostrar que dos triángulos son congruentes.

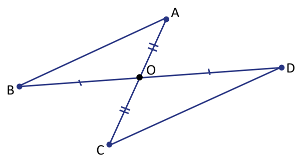
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Demostrar que en un cuadrilátero, al trazar una diagonal, se forman dos triángulos congruentes.

Ⓒ Demostrar si dos triángulos dados son congruentes, para ello es necesario utilizar los criterios de congruencia y lo aprendido sobre triángulos.

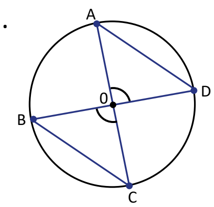
Solución de algunos ítems:

1.



Afirmación	**Justificación**
BO = DO	Por hipótesis.
AO = CO	Por hipótesis.
∢AOB = ∢COD	Por ser opuestos por el vértice.
ΔABO ≅ ΔCDO	Por criterio LAL.

2.



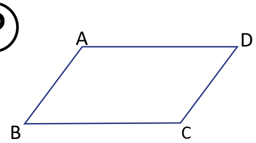
Afirmación	**Justificación**
BO = DO	Por ser radios.
AO = CO	Por ser radios.
∢AOD = ∢COB	Por ser opuestos por el vértice.
ΔAOD ≅ ΔCOB	Por criterio LAL.

De donde se concluye que AD = CB.

Posibles dificultades:
Al igual que en la clase anterior puede ser que no se logren hacer las justificaciones que permitan realizar la demostración, en ese caso se pueden poner a trabajar por parejas.

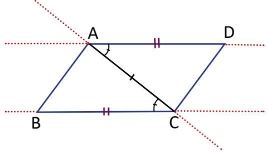
Fecha: **U5 1.7**

Ⓟ



Dado que en el cuadrilátero ABCD, AD ∥ BC, y BC = DA, demuestra que AB = CD.

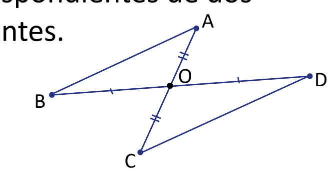
Ⓢ Para los triángulos ΔABC ≅ ΔCDA.



Afirmación	**Justificación**
BC = DA	Por hipótesis.
CA = AC	Por ser lado común a ambos triángulos.
∢BCA = ∢DAC	Por ser alternos internos entre paralelas.
ΔABC ≅ ΔCDA	Por criterio LAL.

De donde se concluye que AB = CD, por ser lados correspondientes de dos triángulos congruentes.

Ⓡ



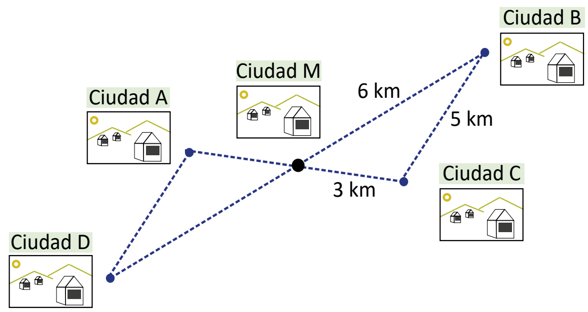
Afirmación	**Justificación**
BO = DO AO = CO	Por hipótesis.
∢AOB = ∢COD	Por ser opuestos por el vértice.
ΔABO ≅ ΔCDO	Por criterio LAL.

Tarea: página 114 del Cuaderno de Ejercicios.

1.8 Aplicación de la congruencia de triángulos, parte 1

P

El mapa siguiente muestra 5 ciudades. La ciudad M debe su nombre al hecho de que se ubica exactamente a la mitad del camino entre dos pares de ciudades: la ciudad A y la ciudad C; y las otras dos son las ciudades B y D. ¿Qué distancia separa a la ciudad A de la D?



S

Al comparar las distancias entre cada una de las ciudades se observa que se forman dos triángulos, cuyos elementos se relacionan de la siguiente manera:

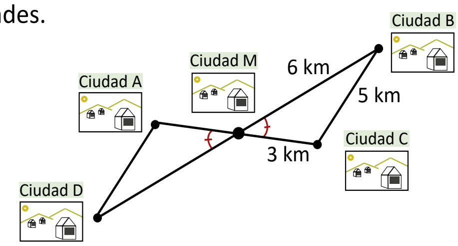
AM = CM = 3 km, por referencia de ubicación de las ciudades.

MD = MB = 6 km, por referencia de ubicación de las ciudades.

∢AMD = ∢CMB, por ser opuestos por el vértice.

ΔAMD ≅ ΔCMB, por criterio LAL.

DA = BC, por ser lados correspondientes de dos triángulos congruentes.



Por tanto, la distancia entre la ciudad A y la ciudad D es 5 km.

Analiza y realiza lo que se pide en cada caso.

1. En la figura 1, BC = EC, CA = CD y AB = DE.

   a) Identifica si hay triángulos congruentes y justifica indicando el criterio de congruencia.
   b) Calcula el valor de θ.

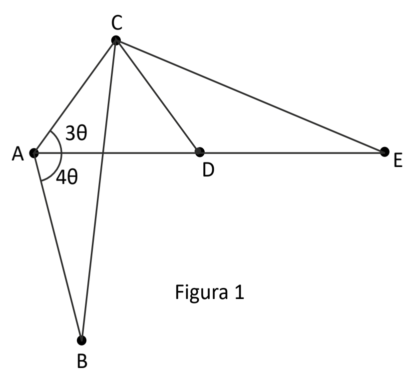


Figura 1

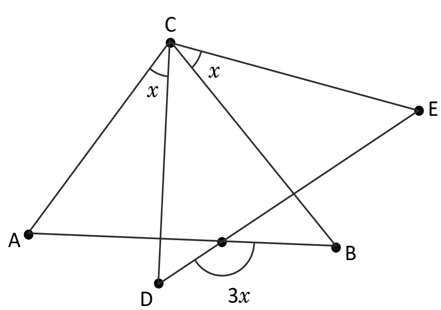


Figura 2

2. En la figura 2, AC = DC, BC = EC.

   a) Identifica si hay triángulos congruentes y justifica indicando el criterio de congruencia.
   b) Calcula el valor de x.

Indicador de logro

1.8 Aplica criterios de congruencia para resolver situaciones del entorno.

Secuencia

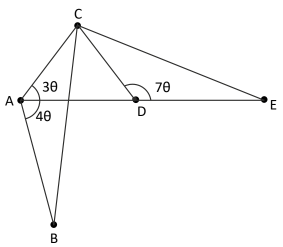
En las dos clases anteriores, se han utilizado los criterios de congruencia para demostrar que dos triángulos dados son congruentes, esto considerando la posición en una figura dada; ahora se utilizarán para resolver situaciones cotidianas.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizar la congruencia de triángulos para determinar la longitud de uno de los lados de un triángulo que corresponde a la distancia entre dos ciudades.

Solución de algunos ítems:

1.

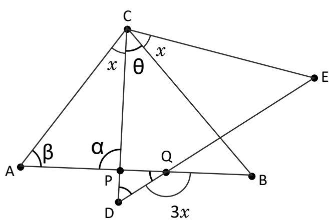


a) BC = EC; CA = CD y AB = DE; por hipótesis.
$\Delta ABC \cong \Delta CDE$ por criterio LLL.

b) Calculando el valor θ

$$10\theta = 180°$$
$$\theta = 18°$$

2.



a)
AC = DC y BC = EC, por hipótesis.
$\sphericalangle ACB = \sphericalangle DCE = x + \theta$
$\Delta ABC \cong \Delta CDE$ por criterio LAL.

b)
En el ΔPQD, $\sphericalangle D = \sphericalangle A = \beta$, por definición de congruencia, $\sphericalangle DPB = \sphericalangle APC = \alpha$, por ser opuestos por el vértice.
Además, $\sphericalangle Q = 180° - 3x$; entonces:

$$\beta + \alpha + (180° - 3x) = 180°$$
$$\beta + 180° - (\beta + x) + (180° - 3x) = 180°$$
$$2 \times 180° - 4x = 180°$$
$$-4x = -180°$$
$$x = 45°$$

Fecha: **U5 1.8**

Ⓟ En el mapa mostrado en el LT, la ciudad M se ubica a la mitad del camino entre dos pares de ciudades: ciudad A y C; y ciudad B y D. ¿Qué distancia separa a la ciudad A de la D?

Ⓢ AM = CM = 3 km, por referencia de ubicación de las ciudades.
MD = MB = 6 km, por referencia de ubicación de las ciudades.
$\sphericalangle AMD = \sphericalangle CMB$, por ser opuestos por el vértice.

$\Delta AMD \cong \Delta CMB$, por criterio LAL.
DA = BC, por ser lados correspondientes de dos triángulos congruentes.
Por tanto, la distancia entre la ciudad A y la ciudad D es 5 km.

Ⓡ 1. BC = EC, CA = CD y AB = DE; por hipótesis.
$\Delta ABC \cong \Delta CDA$ por criterio LLL

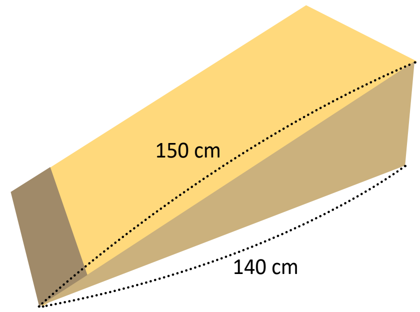
$$10\theta = 180°$$
$$\theta = 18°$$

Tarea: página 115 del Cuaderno de Ejercicios.

1.9 Aplicación de la congruencia de triángulos, parte 2

P

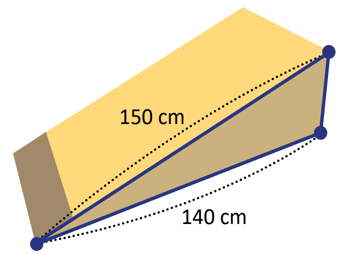
Carlos participará en una competencia de patinaje que se realizará los próximos días y ya tiene lista su rampa para practicar; su primo José, se ha motivado y quiere construir una rampa similar a la de Carlos, pues también quiere participar en la competencia. Carlos le envía una fotografía con la información que se muestra en la figura y le comenta que la medida del ángulo entre los dos lados proporcionados es 13°.



¿Cómo podría hacer José para elaborar la rampa con los tres datos proporcionados por Carlos?

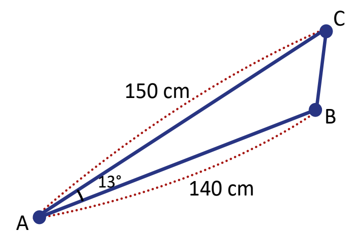
S

1. Recordar las condiciones del problema:
   - Identificar los lados conocidos que se indican en la figura.
   - Indicar el ángulo entre los lados conocidos; es decir, 13°.
   - Observar que en el costado se forma un triángulo.



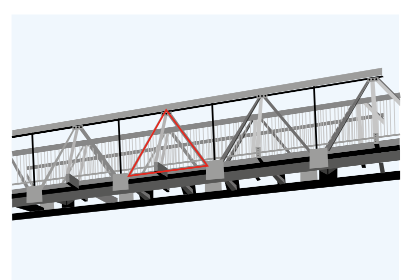
2. Aplicar un criterio de congruencia de triángulos.
   Como se conocen dos lados y el ángulo entre ellos, entonces por criterio LAL, se puede construir la nueva rampa.

3. Extraer los datos y construir la rampa.
   - Medir y cortar las piezas según las medidas indicadas en el triángulo.
   - Colocar las piezas cortadas la primera como base y la segunda de tal manera que en la intersección de ambas formen un ángulo de 13°.



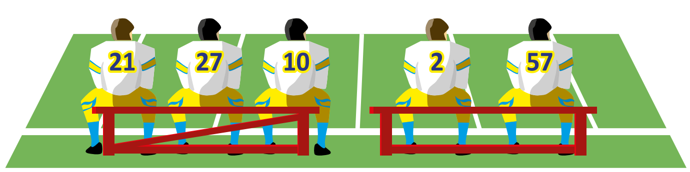
Analiza y realiza lo que se pide en cada caso.

1. Se necesita reemplazar unas piezas en la pasarela cuyo diseño se muestra en la figura. Antonio está a cargo de construir las piezas a reemplazar; para ello necesita elaborar una réplica, tomando como referencia las piezas que están colocadas.



a) ¿Cuántas y cuáles medidas debe tomar Antonio como mínimo para replicar exactamente las piezas que se indican en la figura?

b) ¿Las medidas indicadas en el numeral anterior son una manera única de replicar las piezas? Justifica tu respuesta.



2. Observa la imagen y responde. ¿Por qué la banca con el apoyo diagonal es más estable que la otra? Justifica tu respuesta.

Indicador de logro

1.9 Aplica criterios de congruencia para resolver situaciones del entorno.

Secuencia

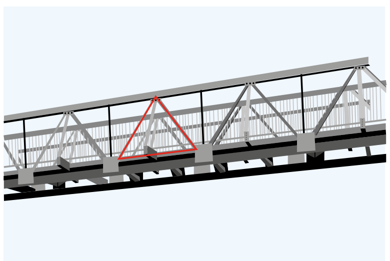
En la clase anterior, se resolvieron situaciones utilizando la congruencia de triángulos y la relación entre los ángulos; para esta clase se utilizará nuevamente la congruencia de triángulos para resolver situaciones del entorno.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Resolver la situación planteada en el Problema inicial, esta información puede usarse para crear la rampa y servir como una actividad integradora.

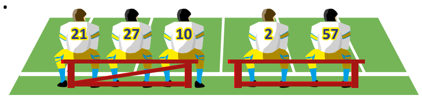
Solución de algunos ítems:

1.



a) Puede tomar la medida de los 3 segmentos.
b) Puede tomar también cualquiera de las siguientes opciones de medida de:
- Un segmento y dos ángulos.
- Dos ángulos y un segmento entre ellos.
  Porque se forma un triángulo y se consideran los casos de congruencia.

2.

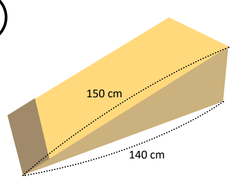


Porque si se definen los tres lados, el triángulo es una figura que no se deforma y eso hace que soporte mayor peso. Por esa razón en la mayoría de estructuras se utilizan figuras triangulares.

Posibles dificultades:
Si los estudiantes no pueden resolver las situaciones de manera individual, se pueden organizar por parejas.

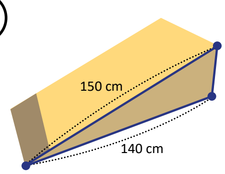
Fecha: **U5 1.9**

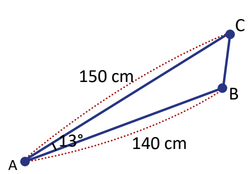
Ⓟ



¿Cómo podría hacer José para elaborar la rampa con los tres datos proporcionados por Carlos?

Ⓢ





Como se conocen dos lados y el ángulo entre ellos, entonces por criterio LAL, se puede construir la nueva rampa.

Extraer los datos y construir la rampa, midiendo y cortando las piezas según las medidas indicadas en el triángulo.

Ⓡ

a) Puede tomar la medida de los 3 segmentos.
b) Puede tomar también cualquiera de las siguientes opciones de medida de:
   - Un segmento y dos ángulos.
   - Dos ángulos y un segmento.
     Porque se forma un triángulo y se consideran los casos de congruencia.

Tarea: página 116 del Cuaderno de Ejercicios.

Unidad 6. Características de los triángulos y cuadriláteros

Competencia de la Unidad

Identifica figuras planas utilizando criterios de congruencias para obtener características de triángulos y cuadriláteros.

Relación y desarrollo

Primero y segundo ciclo

- Construcción de ángulos usando el transportador
- Clasificación y construcción de triángulos
- Clasificación y construcción de cuadriláteros
- Clasificación de cuerpos geométricos
- Figuras simétricas
- Perímetro y área de triángulos y cuadriláteros
- Patrones de cubos y prismas rectangulares y triangulares
- Longitud de la circunferencia y área del círculo
- Longitud y área de sectores circulares notables
- Volumen del prisma
- Traslaciones, giros y simetría rotacional

Séptimo grado

Unidad 8: Figuras planas y construcción de cuerpos geométricos
- Movimiento de figuras en el plano
- Círculos, segmentos y ángulos
- Planos, cuerpos geométricos y área total de prisma, pirámide y cilindro

Octavo grado

Unidad 4: Paralelismo y ángulos de un polígono
- Suma de los ángulos internos y externos de un polígono
- Rectas paralelas y ángulos

Unidad 5: Criterios de congruencia de triángulos
- Congruencia de triángulos

Unidad 6: Características de los triángulos y cuadriláteros
- Triángulos
- Paralelogramos

Unidad 7: Área y volumen de sólidos geométricos
- Características y elementos de los sólidos geométricos
- Cálculo del volumen de sólidos geométricos
- Aplicaciones de volúmenes
- Áreas de sólidos geométricos
- Aplicaciones de áreas

Noveno grado

Unidad 5: Figuras semejantes
- Semejanza
- Semejanza de triángulos
- Semejanza y paralelismo
- Aplicación de semejanza y triángulos semejantes

Unidad 6: Teorema de Pitágoras
- Teorema de Pitágoras
- Aplicación del teorema de Pitágoras

Unidad 7: Ángulo inscrito y central
- Ángulo central e inscrito
- Aplicación de ángulos central e inscrito

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Triángulos	1	1. Triángulos isósceles
	1	2. Teorema del triángulo isósceles
	1	3. Bisectriz de un triángulo isósceles
	1	4. Triángulos equiláteros
	1	5. Teorema sobre triángulos isósceles y equiláteros
	1	6. Recíproco y contraejemplo de un teorema
	1	7. Primer criterio de congruencia de triángulos rectángulos
	1	8. Segundo criterio de congruencia de triángulos rectángulos
	1	9. Condiciones necesarias y suficientes
	1	10. Uso de las condiciones necesarias y suficientes
	1	11. Características de las bisectrices de un triángulo
	2	12. Practica lo aprendido
	1	Prueba del segundo trimestre
2. Paralelogramos	1	1. El paralelogramo
	1	2. Características de los paralelogramos
	1	3. Diagonales de un paralelogramo
	1	4. Condiciones de los lados de un cuadrilátero para que sea paralelogramo
	1	5. Condiciones de los ángulos de un cuadrilátero para que sea paralelogramo
	1	6. Condiciones suficientes para que un cuadrilátero sea paralelogramo
	1	7. Características del rectángulo y el rombo
	1	8. Aplicación de las caraterísticas de las diagonales de un rectángulo

	1	9. Recíproco de características de rectángulos
	1	10. Relación entre líneas paralelas y áreas
	1	11. Aplicación de la relación entre líneas paralelas y áreas
	2	12. Practica lo aprendido
	1	Prueba de la Unidad 6

26 horas clase + prueba de la Unidad 6 + prueba del segundo trimestre

Puntos esenciales de cada lección

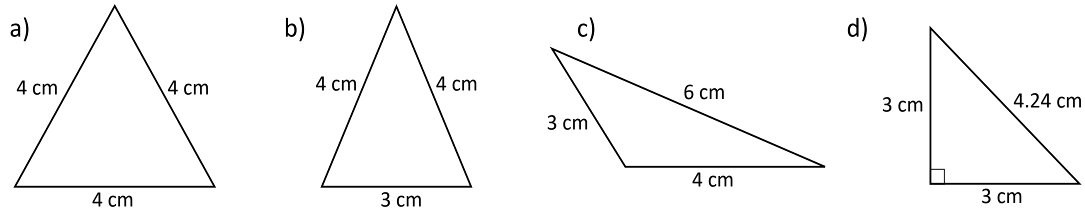
Lección 1: Triángulos
A partir del proceso de triangulación de un polígono, lo cual se estudió en Educación Básica, se deduce la fórmula para el cálculo de la suma de los ángulos internos de un polígono de n lados, luego utilizando este hecho, se deduce la suma de los ángulos externos de un polígono. Además se hace énfasis en el caso particular de los polígonos regulares.

Lección 2: Paralelogramos
Esta lección se inicia con el estudio de los ángulos opuestos estudiados en Educación Básica, se establecen las relaciones entre cada par de ángulos opuestos, además para determinar el valor de cada ángulo dado, se hace uso de la relación entre los ángulos suplementarios; luego se analiza la relación entre los ángulos entre paralelas que es utilizada para demostrar uno de los más importantes teoremas matemáticos y para resolver situaciones del entorno.

1.1 Triángulos isósceles

P

Clasifica los siguientes triángulos según la longitud de sus lados, y menciona la característica de los triángulos isósceles.



S

a) Tiene los 3 lados de igual longitud, entonces es un **triángulo equilátero.**
b) Tiene 2 lados de igual longitud, entonces es un **triángulo isósceles.**
c) Tiene los 3 lados de diferente longitud, entonces es un **triángulo escaleno.**
d) Tiene 2 lados de igual longitud, entonces es un **triángulo isósceles.**

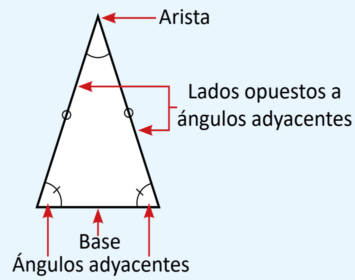
Observa que también cada triángulo se puede clasificar por sus ángulos:

a) Es acutángulo (3 ángulos agudos).
b) También es acutángulo.
c) Es obtusángulo (un ángulo es obtuso).
d) Es rectángulo (un ángulo recto).

C

La definición de los triángulos isósceles es que dos de sus lados son de igual longitud y se caracterizan porque la medida de dos de sus ángulos es igual.

Las partes de un triángulo isósceles son:
Arista: Es el vértice donde concurren los lados de igual longitud.
Base: Es el lado opuesto a la arista.
Ángulos adyacentes: Son los ángulos formados por la base y los otros dos lados del triángulo.
Lados opuestos a ángulos adyacentes: Son los lados de igual longitud en un triángulo isósceles.



E

Verifica la construcción de un triángulo isósceles utilizando papel y comprueba que dos de sus lados y ángulos son iguales. Realiza los siguientes pasos:
1. Toma una hoja de papel y dóblala formando un rectángulo tal como se muestra en la figura 1.
2. Señala la diagonal de ese rectángulo y corta con la tijera exactamente en la diagonal (figura 2).
3. El triángulo que queda en medio, divídelo por la mitad tomando punta a punta y comprueba que es isósceles viendo que sus ángulos y lados coinciden (figura 3).

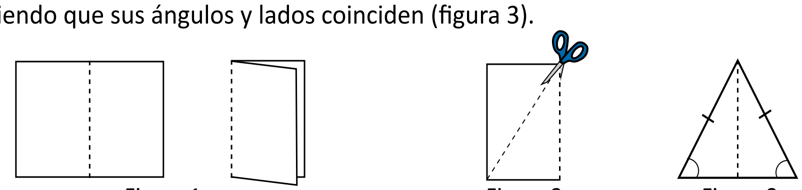
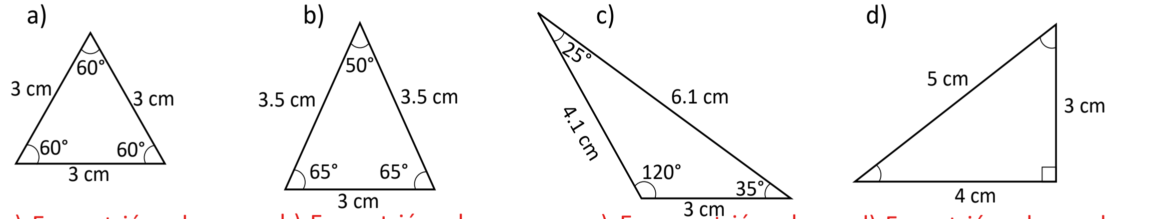


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Clasifica los siguientes triángulos, argumenta tu respuesta y señala las partes de los triángulos isósceles.



a) Es un triángulo equilátero.
b) Es un triángulo isósceles.
c) Es un triángulo escaleno.
d) Es un triángulo escaleno.

116

Indicador de logro

1.1 Caracteriza los triángulos isósceles.

Secuencia

En segundo ciclo de Educación Básica, se estudió la clasificación de los triángulos considerando la relación entre la medida de los lados y sus ángulos; en esta clase se identifican los elementos de un triángulo isósceles y su caracterización. También se analiza el proceso de construcción de un triángulo isósceles a partir de un rectángulo de papel.

Propósito

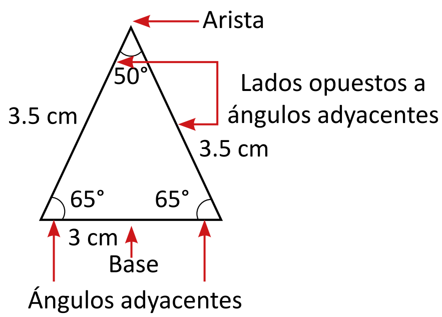
Ⓟ, Ⓢ Caracterizar los triángulos para recordar lo aprendido en Educación Básica y así introducir los nombres de cada uno de los elementos de un triángulo isósceles que es un caso particular de triángulos.

Ⓒ Sistematizar los elementos y caracterización de un triángulo isósceles, introduciendo así el lenguaje matemático.

Ⓔ Construir un triángulo isósceles para verificar sus características mediante el uso de dobleces.

Solución de algunos ítems:

b) Es un **triángulo isósceles,** porque tiene 2 lados de igual longitud.

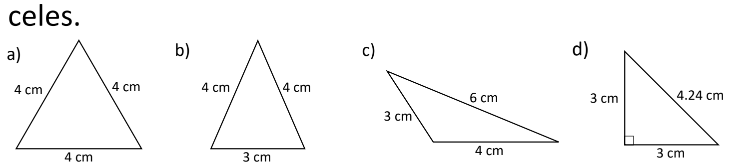


c) Es un **triángulo escaleno**, porque tiene los 3 lados de diferente longitud; pero también es obtusángulo.

d) Es un **triángulo escaleno**, porque tiene los 3 lados de diferente longitud; pero también es rectángulo.

Fecha: **U6 1.1**

Ⓟ Clasifica los siguientes triángulos según la longitud de sus lados, y menciona la característica de los triángulos isósceles.



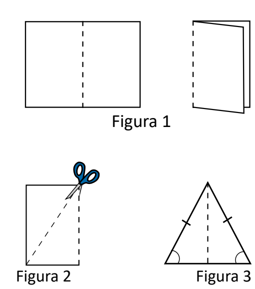
Ⓢ a) Tiene los 3 lados de igual longitud, entonces es un **triángulo equilátero.**

b) Tiene 2 lados de igual longitud, entonces es un **triángulo isósceles.**

c) Tiene los 3 lados de diferente longitud, entonces es un **triángulo escaleno.**

d) Tiene 2 lados de igual longitud, entonces es un **triángulo isósceles.**

Ⓔ Construcción de un triángulo isósceles:



Ⓡ a) Es un triángulo equilátero, porque tiene los 3 lados de igual longitud.

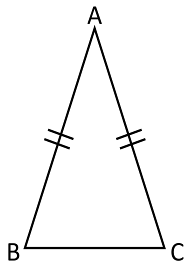
Tarea: página 120 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 1

1.2 Teorema del triángulo isósceles

P

Demuestra que, si el ΔABC es isósceles con lados AB = AC, entonces ∢ABC = ∢ACB.



Como aplicación de los criterios de congruencia de triángulos, se tiene la demostración de un teorema clásico, conocido como el *Pons Asinorum*, o puente de los burros, que establece que "En un triángulo isósceles, los ángulos de la base son congruentes" (un triángulo isósceles es aquel que tiene dos lados congruentes y el tercer lado se le llama base). Pinasco, J. (2009). *Las Geometrías*.

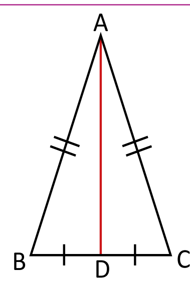
S

Se traza el segmento AD con D, el punto medio de BC.

DB = DC (por construcción).

Entonces, ΔABD ≅ ΔACD (por criterio LLL, AD es común, y AB = AC por hipótesis).

Por lo tanto, ∢ABC = ∢ACB (por la congruencia de los triángulos).

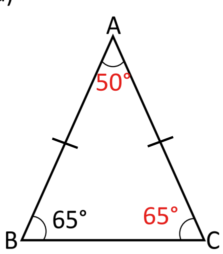


C

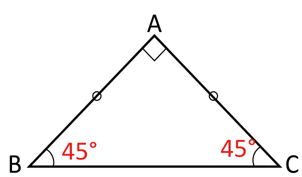
En un triángulo isósceles, los ángulos de la base son congruentes.

1. Determina la medida de los ángulos restantes de cada triángulo aplicando el teorema demostrado.

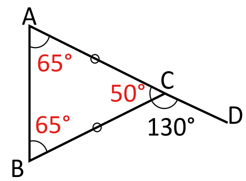
a)



b)



c)



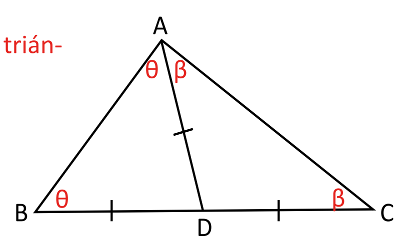
2. En la siguiente figura considera que BD = CD = AD. Justifica las igualdades planteadas en cada literal dejando constancia de lo realizado.

a) ∢DAB = ∢DBA — Por ser ángulos de la base de un triángulo isósceles.

b) ∢DAC = ∢DCA — De la misma manera del a).

c) ∢DBA + ∢ACB = 90° — Como 2∢θ + 2∢β = 180°, entonces ∢θ + ∢β = 90°.

d) ∢CAB = 90° — Como ∢CAB = ∢θ + ∢B = 90°.



Indicador de logro

1.2 Demuestra el teorema del triángulo isósceles: "A lados iguales corresponden ángulos iguales", utilizando la congruencia de triángulos.

Secuencia

En la clase anterior se identificaron los elementos de un triángulo isósceles caracterizando cada uno de ellos; en esta clase, se hará la demostración de uno de los teoremas clásicos, para ello es importante recordar lo aprendido sobre demostraciones y congruencia de triángulos.

Propósito

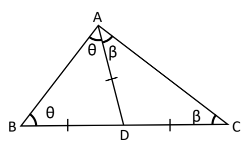
Ⓟ, Ⓢ Demostrar el teorema y recordar el proceso de demostración haciendo énfasis en las afirmaciones matemáticas utilizadas que corresponden a conocimientos previos adquiridos en unidades anteriores.

Ⓒ En el numeral 1, utilizar el teorema demostrado para determinar la medida de los ángulos restantes; además se utilizará el teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo y ángulos suplementarios.

En el numeral dos, justificar las afirmaciones planteadas, siempre utilizando lo aprendido sobre ángulos y triángulos.

Solución de algunos ítems:

2.



a) $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DBA$, por ser los ángulos de la base de un triángulo isósceles.

b) $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DCA$, de la misma manera del a).

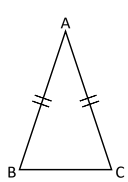
c) $\sphericalangle DBA + \sphericalangle ACB = 90°$.
Como $2\sphericalangle\theta + 2\sphericalangle\beta = 180°$, entonces
$\sphericalangle\theta + \sphericalangle\beta = 90°$.

d) $\sphericalangle CAB = 90°$.
Como $\sphericalangle CAB = \sphericalangle\theta + \sphericalangle B = 90°$.

Posibles dificultades:
Justificar las afirmaciones que se indican en el numeral 2 de la fijación, en ese caso se puede indicar que trabajen por parejas; y si en algún caso extremo nadie puede resolverlo, se pueden dar pistas para orientarles.

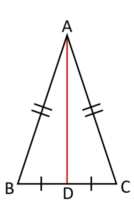
Fecha: **U6 1.2**

Ⓟ



Demuestra que, si el ΔABC es isósceles con lados $AB = AC$, entonces $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$.

Ⓢ Se traza el segmento AD con D, el punto medio de BC.



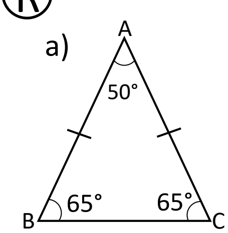
$DB = DC$. (Por construcción).

Entonces, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$. (Por criterio LLL, AD es común, y $AB = AC$ por hipótesis).

Por lo tanto, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$. (Por la congruencia de los triángulos).

Ⓡ

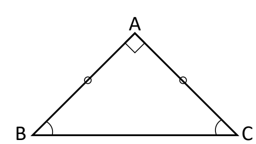
a)



$\sphericalangle C = \sphericalangle B = 65°$, por ser ángulos de la base de un triángulo isósceles.

Como $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$, entonces $\sphericalangle A = 50°$.

b)



$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180$, $\sphericalangle A = 90°$ y $\sphericalangle B = \sphericalangle C$

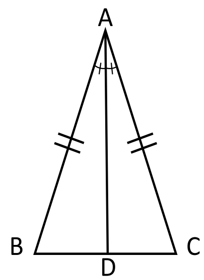
$\sphericalangle B = \sphericalangle C = 45°$, por ser ángulos de la base de un triángulo rectángulo isósceles.

Tarea: página 121 del Cuaderno de Ejercicios.

1.3 Bisectriz de un triángulo isósceles

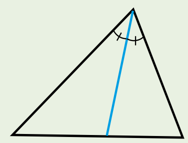
P

Demuestra que en un triángulo isósceles ABC, la bisectriz del ángulo comprendido entre dos lados de igual longitud es mediatriz del lado opuesto.

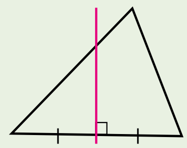


La bisectriz de un triángulo: es el segmento que divide a cualquiera de sus tres ángulos en dos partes iguales y termina en el correspondiente lado opuesto.

La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular a dicho segmento y que lo divide a la mitad.



Bisectriz



Mediatriz

S

En la figura ΔABD ≅ ΔACD (por criterio LAL, AB = AC, AD es compartido y ∢BAD = ∢CAD por hipótesis).

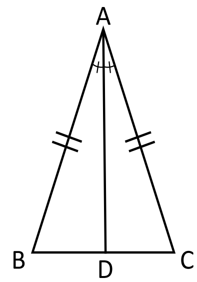
Entonces DB = DC (por la congruencia de triángulos).

∢ADB = ∢ADC (por la congruencia de triángulos) . . . (1)

∢ADB + ∢ADC = 180° (por ser ángulos suplementarios) . . . (2)

Entonces, 2∢ADB = 180° (por (1) y (2)).

Y ∢ADB = 90°, y entonces AD ⊥BC.



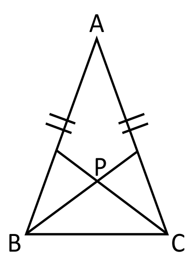
Por lo tanto, AD es mediatriz de BC (DB = DC y AD ⊥ BC).

C

En un triángulo isósceles se cumple que la bisectriz del ángulo comprendido entre los dos lados de igual longitud del triángulo es mediatriz del lado opuesto.

Observa que por este resultado se puede concluir que la bisectriz del ángulo comprendido entre los lados de igual longitud, también es altura y mediana del triángulo isósceles.

Demuestra que si el ΔABC es isósceles y si se trazan las bisectrices de los ángulos adyacentes, siendo P el punto de intersección entre las dos bisectrices, entonces el ΔPBC es isósceles.



Indicador de logro

1.3 Deduce y utiliza la característica que posee la bisectriz de un triángulo isósceles.

Secuencia

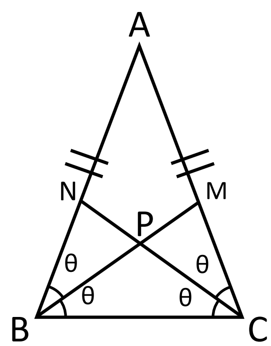
En la clase anterior se demostró el teorema que relaciona los ángulos de la base de un triángulo isósceles; en esta clase se demostrará el teorema que relaciona la mediatriz de la base de un triángulo isósceles con la bisectriz del ángulo opuesto a la base.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Demostrar el teorema y recordar el concepto de bisectriz y mediatriz, además de hacer conciencia de la importancia de los teoremas en la construcción del conocimiento matemático.

Ⓡ Utilizar los criterios de congruencia y relación entre ángulos internos para demostrar propiedades de las bisetrices de un triángulo isósceles.

Solución de algunos ítems:



Como AB = AC, entonces ∢B = ∢C, por ser ángulos de la base de un triángulo isósceles.

$\theta = \frac{1}{2}$ ∢B $= \frac{1}{2}$ ∢C

ΔBCN ≅ ΔCBM, por criterio ALA.

Posibles dificultades:
Es posible que a los estudiantes se les dificulte estructurar la demostración, por lo que se pueden dar pistas para que se orienten y así poco a poco ir desarrollando la habilidad para realizar demostraciones matemáticas.

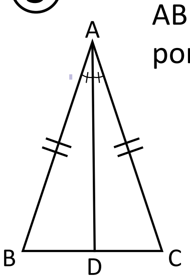
De donde ∢BNC = ∢CMB, entonces también por ALA ΔBPN ≅ ΔCPM.

Por tanto, BP = CP, de donde se concluye que ΔPBC es isósceles.

Fecha: **U6 1.3**

Ⓟ Demuestra que en un triángulo isósceles ABC, la bisectriz del ángulo comprendido entre dos lados de igual longitud es mediatriz del lado opuesto.

Ⓢ



En la figura ΔABD ≅ ΔACD. (Por criterio LAL, AB = AC, AD es compartido y ∢BAD = ∢CAD por hipótesis).

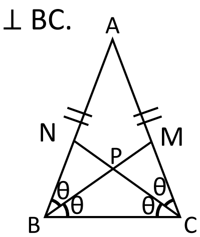
Entonces DB = DC. (Por la congruencia de triángulos).

∢ADB = ∢ADC. (Por la congruencia de triángulos) ... (1)

∢ADB + ∢ADC = 180°. (Por ser ángulos suplementarios) ... (2)

Entonces, 2∢ADB = 180° (por [1] y [2])
Y ∢ADB = 90°, y entonces AD ⊥ BC.

Ⓡ



Como AB = AC,
entonces ∢B = ∢C

ΔBCN ≅ ΔCBM, por criterio ALA.
De donde ∢BNC = ∢CMB, entonces
ΔBPN ≅ ΔCPM, por criterio ALA.

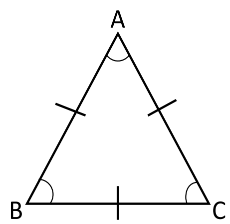
Por tanto BP = CP, de donde se concluye que ΔPBC es isósceles.

Tarea: página 122 del Cuaderno de Ejercicios.

1.4 Triángulos equiláteros

P

Demuestra que los ángulos del triángulo equilátero ABC son de igual medida, y cada uno mide 60°.



Un triángulo equilátero es aquel cuyos tres lados tienen igual longitud.

S

$\measuredangle ABC = \measuredangle BCA$ (ya que AB = AC) . . . (1)

$\measuredangle BCA = \measuredangle CAB$ (ya que BC = BA) . . . (2)

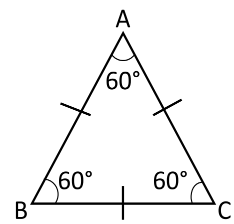
Por lo tanto, $\measuredangle ABC = \measuredangle BCA = \measuredangle CAB$ (por (1) y (2)).

Sea x la medida del ángulo:

$3x = 180°$ (por la suma de los ángulos internos de un triángulo).

Entonces, $x = 60°$ (resolviendo la ecuación).

Por lo tanto, cada uno de los ángulos de un triángulo equilátero mide 60°.

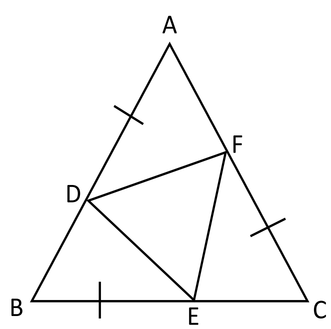


A un triángulo que posee sus tres ángulos de igual medida se le puede llamar **equiangular**.

C

En un triángulo equilátero cada uno de los ángulos internos mide 60°.

Sea el ΔABC equilátero, y además BE = CF = AD. Demuestra que el ΔDEF es equilátero.



Indicador de logro

1.4 Demuestra el teorema “un triángulo equilátero es equiángulo”.

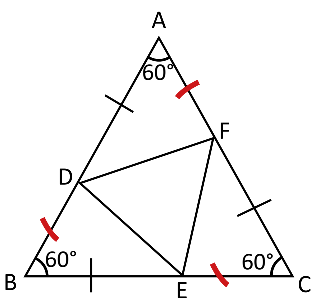
Secuencia

En las dos clases anteriores se han caracterizado los triángulos isósceles, en esta clase se demuestra que cada uno de los ángulos internos del triángulo equilátero mide 60°.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Determinar la medida de cada uno de los ángulos internos de un triángulo equilátero.

Solución de algunos ítems:



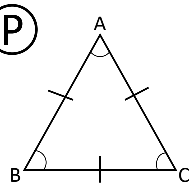
Como ΔABC es equilátero, entonces:
AB = BC = CA.

Pero AB = BC = CA, es igual a
AD + DB = BE + EC = CF + FA, de donde se tiene
DB = EC = FA, ya que
BE = CF = AD, por hipótesis.

ΔADF ≅ ΔBED ≅ ΔCFE, por criterio LAL.
De donde se tiene DE = EF = FD.
Por tanto, ΔDEF es equilátero.

Fecha: **U6 1.4**

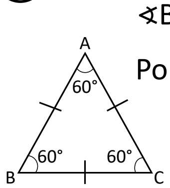
Ⓟ



Demuestra que los ángulos del triángulo equilátero ABC son de igual medida, y cada uno mide 60°.

Ⓢ

∢ABC = ∢BCA (ya que AB = AC) ... (1)
∢BCA = ∢CAB (ya que BC = BA) ... (2)

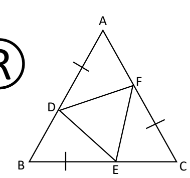


Por tanto, ∢ABC = ∢BCA = ∢CAB (Por [1] y [2]).

Sea x la medida del ángulo:

$3x = 180°$.
Entonces, $x = 60°$.

Ⓡ



Como el ΔABC es equilátero,
entonces
AB = BC = CA.

AD + DB = BE + EC = CF + FA, de donde se tiene:

DB = EC = FA, ya que BE = CF = AD, por hipótesis.

ΔADF ≅ ΔBED ≅ ΔCFE, por criterio LAL.

De donde se tiene DE = EF = FD.

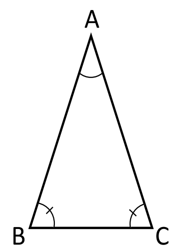
Por tanto, ΔDEF es equilátero.

Tarea: página 123 del Cuaderno de Ejercicios.

1.5 Teorema sobre triángulos isósceles y equiláteros

P

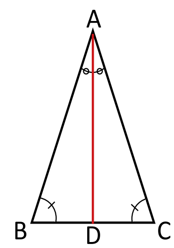
Demuestra que si la medida de dos ángulos de un triángulo es igual, entonces la longitud de los lados opuestos a estos ángulos es igual.



Este resultado se suele enunciar como "a ángulos de igual medida se oponen lados de igual longitud".

S

Trazando la bisectriz de ∢CAB, se tiene que



∢DBA = ∢DCA (por hipótesis) . . . (1)
∢DAB = ∢DAC (por construcción de la bisectriz) . . . (2)
∢BDA = 180° − (∢DBA + ∢DAB) (teorema de ángulos internos de triángulos).
= 180° − (∢DCA + ∢DAC) (por 1 y 2).
= ∢CDA

Entonces, ΔABD ≅ ΔACD (por criterio ALA, AD es común, ∢BDA = ∢CDA y ∢DAB = ∢DAC).

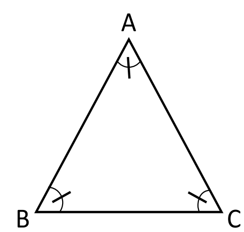
Por lo tanto, AB = AC (por la congruencia).

C

En un triángulo, si dos ángulos tienen igual medida entonces los lados opuestos tienen igual longitud.

E

Demuestra que si todos los ángulos de un triángulo son iguales, entonces es un triángulo equilátero.

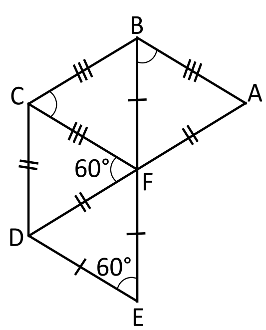


AB = AC (por ∢BCA = ∢ABC, aplicando el resultado demostrado). . . (1)

CA = BC (por ∢ABC = ∢CAB, aplicando el resultado demostrado). . . (2)

Por lo tanto, AB = BC = CA, y el triángulo es equilátero (por (1) y (2)).

Utilizando los datos en la siguiente figura, demuestra que ΔFAB, ΔFBC, ΔFCD y ΔFDE son equiláteros.



Indicador de logro

1.5 Demuestra teoremas que relacionan los lados y ángulos iguales de triángulos isósceles o equiláteros, con los respectivos lados opuestos.

Secuencia

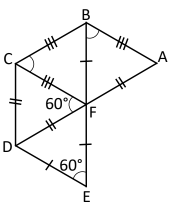
En la clase 1.2 se demostró el teorema sobre triángulos isósceles que establece que si dos lados de un triángulo son iguales, entonces los ángulos que se oponen a ellos también son iguales; en esta clase se demostrará un teorema sobre triángulos isósceles y equiláteros que relaciona los ángulos con los lados.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizar lo aprendido sobre congruencia de triángulos y ángulos, para demostrar el teorema sobre triángulos isósceles y equiláteros, es importante hacer énfasis en el uso de trazos auxiliares como un recurso en el proceso de demostración.

Ⓡ Utilizar el resultado obtenido, para demostrar que si un triángulo tiene los tres ángulos iguales, también todos sus lados son iguales, concluyendo que el triángulo es equilátero.

Solución de algunos ítems:



Continuación

Para los otros dos triángulos se tiene:

Como $\measuredangle EFD + \measuredangle DFC + \measuredangle CFB = 180°$, entonces $\measuredangle CFB = 60°$ y por hipótesis $CF = CB$, entonces $\measuredangle CFB = \measuredangle FBC = 60°$.
Por tanto el ΔCFB es equilátero, por tener sus tres ángulos iguales...(3)

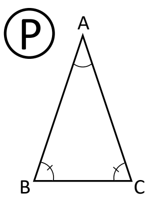
$AB = FC$, $AF = FD$, ambos son lados de ΔDFC, que es equilátero, $\measuredangle AFB = \measuredangle EFD = 60°$, por ser opuestos por el vértice.

$\measuredangle FBA = \measuredangle AFB = 60°$, entonces $\measuredangle BAF = 60°$ y por tener los 3 ángulos iguales, ΔFAB también es equilátero...(4)

Posibles dificultades:
En el caso de que los estudiantes no logren estructurar la demostración, se pueden organizar en parejas y si aún así no lo logran, se les puede dar pistas que orienten el proceso de demostración.

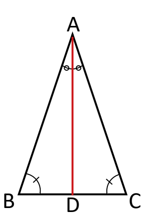
Fecha: **U6 1.5**

Ⓟ



Demuestra que si la medida de dos ángulos de un triángulo es igual, entonces la longitud de los lados opuestos a estos ángulos es igual.

Ⓢ Trazando la bisectriz de $\measuredangle CAB$, se tiene que:

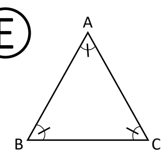


$\measuredangle DBA = \measuredangle DCA$ (por hipótesis) . . . (1)
$\measuredangle DAB = \measuredangle DAC$ (por construcción de la bisectriz) . . . (2)

$$\begin{aligned} \measuredangle BDA &= 180° - (\measuredangle DBA + \measuredangle DAB) \\ &= 180° - (\measuredangle DCA + \measuredangle DAC) \\ &= \measuredangle CDA \end{aligned}$$

Entonces, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$. Por lo tanto, $AB = AC$.

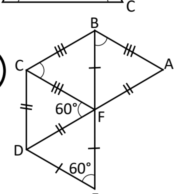
Ⓔ



$AB = AC$ (por $\measuredangle BCA = \measuredangle ABC$)
$CA = BC$ (por $\measuredangle ABC = \measuredangle CAB$)

Por lo tanto, $AB = BC = CA$, y el triángulo es equilátero.

Ⓡ



$ED = EF$, entonces $\measuredangle EDF = \measuredangle EFD = 60°$.
Por tanto ΔFDE es equilátero, por tener sus tres ángulos iguales...(1)

$DC = DF$, entonces
$\measuredangle DFC = \measuredangle FCD = 60°$, por teorema de ángulos internos $\measuredangle CDF = 60°$ y por tener los 3 ángulos iguales ΔFCD es equilátero...(2)
Observación: De igual manera demostrar para los otros dos triángulos restantes.
Tarea: página 124 del Cuaderno de Ejercicios.

1.6 Recíproco y contraejemplo de un teorema

P

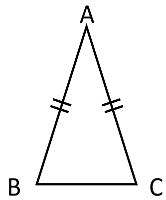
Compara y determina la diferencia entre los siguientes teoremas:

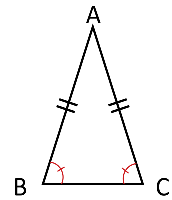
- Si un triángulo es isósceles, entonces el triángulo tiene dos ángulos de igual medida.
- Si un triángulo tiene dos ángulos de igual medida, entonces el triángulo es isósceles.

S

Analizando el primer teorema: "Si un triángulo es isósceles, entonces tiene dos ángulos de igual medida".

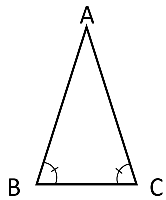
Condición cierta (hipótesis): El triángulo es isósceles (tiene dos lados de igual longitud). → Condición a demostrar (conclusión): El triángulo tiene dos ángulos de igual medida. Demostrado en la clase 2.

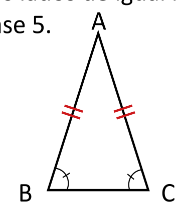




Analizando el segundo teorema: "Si un triángulo tiene dos ángulos de igual medida, entonces el triángulo es isósceles".

Condición cierta (hipótesis): El triángulo tiene dos ángulos de igual medida. → Condición a demostrar (conclusión): El triángulo es isósceles (tiene dos lados de igual longitud). Demostrado en la clase 5.





El primer teorema es diferente del segundo, pues la condición que se cumple en el primero es la que hay que demostrar en el segundo, y la condición que se cumple en el segundo es la que hay que demostrar en el primero.

C

El teorema que intercambia la hipótesis y la conclusión de otro teorema se conoce como **teorema recíproco**. El recíproco de un teorema puede que no se cumpla, en ese caso hay que presentar un ejemplo que muestre que no se cumple y se conoce como **contraejemplo**.

E

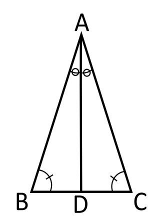
Escribe el recíproco del siguiente enunciado, en el caso de no ser cierto, dar un contraejemplo que lo justifique: "Todo triángulo equilátero es isósceles".

Recíproco: "Todo triángulo isósceles es equilátero". No se cumple, observa el contraejemplo.

Contraejemplo: El triángulo de lados 5 cm, 5 cm y 6 cm, es isósceles pero no es equilátero.

1. Determina el recíproco: "Si los 3 ángulos de un triángulo son iguales, entonces el triángulo es isósceles". Escribe el recíproco, demuestra si se cumple o proporciona un contraejemplo si no se cumple.

2. Determina el recíproco: "En el triángulo ABC, si AB = AC y AD es bisectriz de ∢CAB, entonces AD es mediatriz de BC". Escribe el recíproco, demuestra si se cumple o proporciona un contraejemplo si no se cumple.



Unidad 6

Indicador de logro

1.6 Identifica el recíproco o contraejemplo de un teorema.

Secuencia

En las clases 1.2 y 1.5, se han demostrado teoremas sobre triángulos isósceles; en esta clase se analizarán dichos teoremas para introducir los conceptos de **recíproco y contraejemplo**. Es importante hacer énfasis en las condiciones que tiene cada teorema, para que vayan familiarizándose con ellas y facilite próximas demostraciones.

Propósito

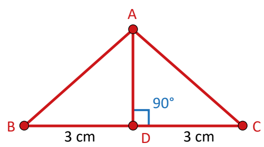
Ⓟ, Ⓢ Comparar dos teoremas demostrados analizando la hipótesis y la conclusión para definir a partir del análisis, el recíproco y el contraejemplo de un teorema.

Ⓒ Ilustrar un caso de teorema en el cual el recíproco no se cumple, en estos casos se pueden presentar contraejemplos para justificar su falsedad.

Ⓔ Practicar el proceso para identificar el recíproco y/o contraejemplo de un teorema. Es importante hacer énfasis en que los teoremas deben ser demostrados para ser aceptados como ciertos.

Solución de algunos ítems:

2.
Recíproco: "En el triángulo ABC, si AD es mediatriz de BC, entonces AB = AC y AD es bisectriz de ∢CAB".



Trazando la mediatriz de BC, se tiene que:
BD = DC (por construcción).
∢BDA = ∢CDA = 90° (por construcción de la mediatriz).

Entonces, ΔABD ≅ ΔACD (por criterio LAL, AD es común).
Luego, por definición de congruencia,
AB = AC y ∢BAD = ∢CAD.
Por tanto, AD es la bisectriz del ángulo ∢BAC.

Posibles dificultades:
Escribir el recíproco o contraejemplo, en ese caso se puede organizar el trabajo en parejas y como pista sugerir que identifiquen la hipótesis y la conclusión.

Fecha: **U6 1.6**

Ⓟ Determina la diferencia entre los siguientes teoremas:
- Si un triángulo es isósceles, entonces el triángulo tiene dos ángulos de igual medida.
- Si un triángulo tiene dos ángulos de igual medida, entonces el triángulo es isósceles.

Ⓢ Analizando el primer teorema:

Condición cierta	Condición a demostrar
El triángulo es isósceles.	El triángulo tiene dos ángulos de igual medida. Demostrado en la clase 2.

Analizando el segundo teorema:

Condición cierta	Condición a demostrar
El triángulo tiene dos ángulos de igual medida.	El triángulo es isósceles Demostrado en la clase 5.

Ⓔ Escribe el recíproco o el contraejemplo que lo justifique:
"Todo triángulo equilátero es isósceles".
Recíproco:
"Todo triángulo isósceles es equilátero". No se cumple, observa el contraejemplo.
Contraejemplo:
El triángulo de lados 5 cm, 5 cm y 6 cm, es isósceles pero no es equilátero.

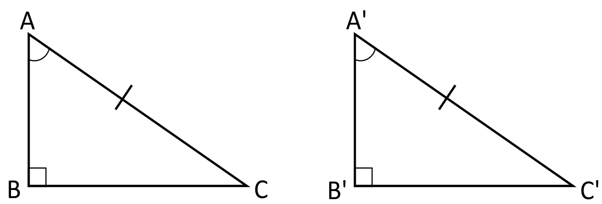
Ⓡ 1. **Recíproco:**
"Si un triángulo es isósceles, tiene sus tres ángulos iguales". No se cumple.
Contraejemplo:
El triángulo de lados 3 cm, 3 cm y 4 cm, es isósceles pero no tiene los 3 ángulos iguales.

Tarea: página 125 del Cuaderno de Ejercicios.

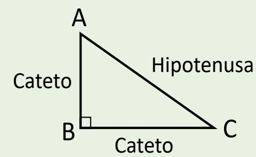
1.7 Primer criterio de congruencia de triángulos rectángulos

P

Demuestra que si en los triángulos rectángulos ΔABC y ΔA'B'C' se cumple que
∢CAB = ∢C'A'B', ∢ABC = ∢A'B'C' = 90° y AC = A'C'; entonces, ΔABC ≅ ΔA'B'C'.



Recuerda que los lados de un triángulo rectángulo tienen los siguientes nombres:

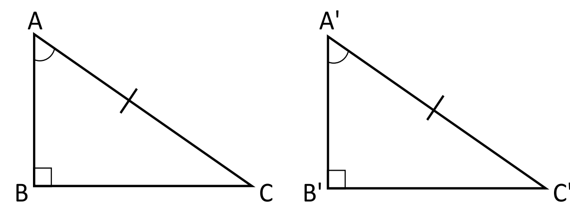


S

Los triángulos tienen los tres ángulos de igual medida porque son rectángulos.

Además, ∢CAB = ∢ C'A'B'.

Por lo tanto, ΔABC ≅ ΔA'B'C' (por criterio ALA).

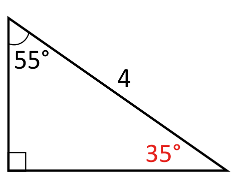


C

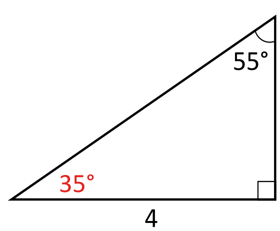
Si en un triángulo rectángulo se cumple que la hipotenusa y un ángulo agudo son respectivamente de igual medida, entonces los triángulos son congruentes.

En los siguientes triángulos rectángulos, identifica los congruentes entre sí. Justifica tu respuesta.

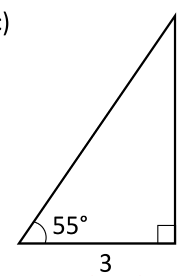
a)



b)



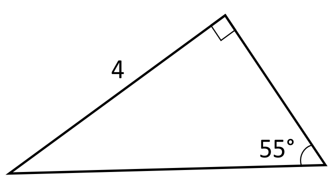
c)



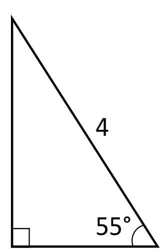
Son congruentes los triángulos del literal a) y e) pues tienen la hipotenusa y un ángulo agudo igual.

Son congruentes los triángulos del literal c) y f) por criterio ALA.

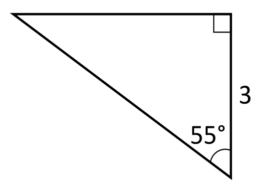
d)



e)



f)



Al calcular el valor del ángulo desconocido utilizando el teorema de los ángulos internos de un triángulo, se puede determinar que los triángulos del literal b) y d) son congruentes por criterio ALA.

Indicador de logro

1.7 Identifica la relación que debe existir entre los lados y ángulos de dos triángulos rectángulos.

Secuencia

En la Unidad 5 se trabajaron los criterios de congruencia de triángulos, para esta clase se estudiará la congruencia de triángulos rectángulos, introduciéndolos a partir de los conocimientos previos.

Es importante considerar que a pesar de que en la clase se trabaja el criterio de congruencia cuando la hipotenusa y un ángulo agudo son iguales, también se presentan ejercicios donde un cateto y un ángulo agudo son iguales, estos pueden resolverse con los conocimientos previos.

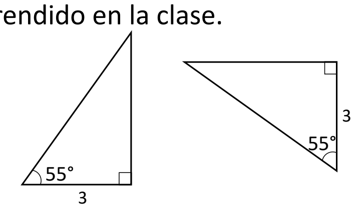
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Demostrar el primer criterio de congruencia de triángulos rectángulos, utilizando lo aprendido sobre congruencia de triángulos.

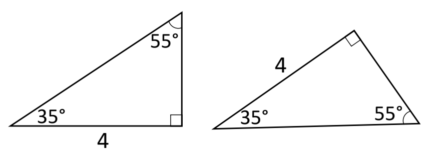
Ⓡ En uno de los casos identificar triángulos congruentes en un conjunto dado, en los otros casos será necesario utilizar lo aprendido en la Unidad 5. Luego de resolver los ejercicios hacer énfasis en el caso de que un cateto y un ángulo agudo son iguales; pues en esos casos también los triángulos son congruentes.

Solución de algunos ítems:

Numeral a) y e) pues tienen la hipotenusa y un ángulo agudo igual. Esto utilizando directamente lo aprendido en la clase.



Son congruentes los triángulos del literal c) y f) por criterio ALA; pues tienen un cateto y dos ángulos iguales. En este caso se considera el ángulo recto y el ángulo agudo dado.



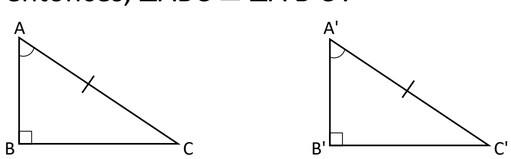
Al calcular el valor del ángulo desconocido utilizando el teorema de los ángulos internos de un triángulo, se puede determinar que los triángulos del literal b) y d) son congruentes por criterio ALA.

Fecha: **U6 1.7**

Ⓟ Demuestra que si en los triángulos ΔABC y ΔA'B'C' se cumple que:

∢CAB = ∢C’A’B’, ∢ABC = ∢A’B’C’ = 90° y AC = A’C’; entonces, ΔABC ≅ ΔA’B’C’.

Ⓢ



Como ∢CAB = ∢C’A’B’ y los triángulos son rectángulos, entonces tienen los 3 ángulos iguales.

Por lo tanto, ΔABC ≅ ΔA’B’C’ (por criterio ALA, porque AC = A’C’).

Ⓡ Son congruentes los triángulos del literal a) y e) pues tienen la hipotenusa y un ángulo agudo igual.

Son congruentes los triángulos del literal c) y f) por criterio ALA; pues tienen un cateto y dos ángulos iguales.

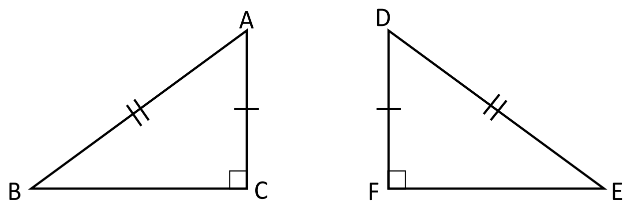
Al calcular el valor del ángulo desconocido utilizando el teorema de los ángulos internos de un triángulo, se puede determinar que los triángulos del literal b) y d) son congruentes por criterio ALA.

Tarea: página 126 del Cuaderno de Ejercicios.

1.8 Segundo criterio de congruencia de triángulos rectángulos

P

Demuestra que si AC = DF, AB = DE y ∢ACB = ∢DFE = 90°, entonces ΔABC ≅ ΔDEF.



S

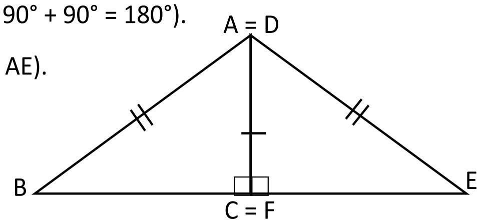
Haciendo coincidir los lados AC y DF.

Los puntos B, C, E están alineados (∢BCE = ∢BCA + ∢EFA = 90° + 90° = 180°).

Entonces, ΔABE es isósceles (B, C, E están alineados y AB = AE).

Luego, ∢ABE = ∢AEB (ΔABE es isósceles).

Por lo tanto, ΔABC ≅ ΔDEF (tienen un cateto e hipotenusa de igual medida).

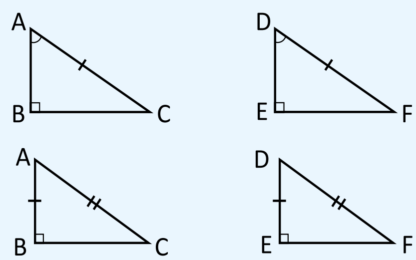


C

Criterios de congruencia de triángulos rectángulos

Dos triángulos rectángulos son congruentes si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

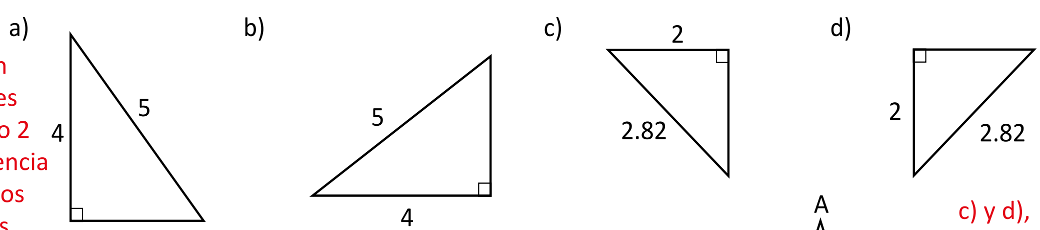
1. La hipotenusa y un ángulo agudo son respectivamente de igual medida.
2. La hipotenusa y un cateto son respectivamente de igual medida.



1. En los siguientes triángulos rectángulos, agrupa los que son congruentes. Justifica tu solución.

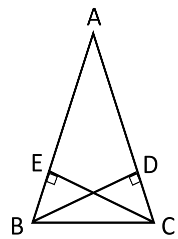
Observa que si dos catetos tienen igual medida también los triángulos son congruentes por criterio LAL.

a) y b), son congruentes por criterio 2 de congruencia de triángulos rectángulos.



c) y d), son congruentes por criterio 2 de congruencia de triángulos rectángulos.

2. En la figura AB = AC, BD ⊥ AC y CE ⊥ AB. Demuestra que
   a) ΔBCD ≅ ΔCBE
   b) AE = AD



Unidad 6

Indicador de logro

1.8 Identifica la relación que debe existir entre los lados de dos triángulos rectángulos para que sean congruentes.

Secuencia

En la clase anterior se estudió el primer criterio de congruencia de triángulos rectángulos que relaciona la hipotenusa y un ángulo agudo; para esta clase, se estudiará otro criterio de congruencia que relaciona la hipotenusa y un cateto.

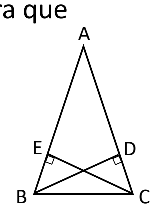
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Demostrar que dos triángulos rectángulos que tienen un cateto y la hipotenusa igual son congruentes, esto utilizando los criterios de congruencia estudiados en la Unidad 5.

Ⓡ En el numeral 1, utilizar los criterios de congruencia estudiados para determinar si dos o más triángulos dados son congruentes; mientras que en el numeral 2 utilizar los criterios de congruencia para demostrar que dos triángulos son congruentes.

Solución de algunos ítems:

2. En la figura AB = AC, BD ⊥ AC y CE ⊥ AB. Demuestra que



a) ΔBCD ≅ ΔCBE
b) AE = AD

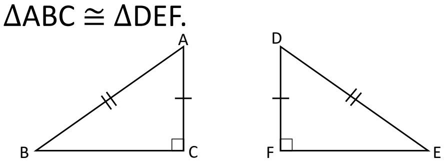
a) ∢CBA = ∢BCA (porque AB = AC).
Por tanto, ∢CBE = ∢BCD
BC = CB (es el mismo).
Entonces, ΔBCE ≅ ΔCBD, por criterio 1 de congruencia de triángulos rectángulos, tienen la hipotenusa y un ángulo agudo igual.

b) AB = AE + EB y AC = AD + DC
Como AB = AC por hipótesis, entonces: AE + EB = AD + DC.
Pero, EB = DC, por congruencia de triángulos demostrada en literal a); por tanto, AE = AD.

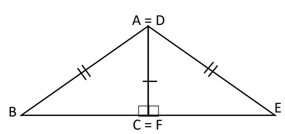
Posibles dificultades:
En el caso de que los estudiantes no puedan realizar la demostración, organizarlos por parejas, cuidando que siempre haya uno que tenga habilidades para que apoye al que tiene dificultades, y como pista se puede sugerir el uso de los criterios de congruencia de triángulos rectángulos.

Fecha: **U6 1.8**

Ⓟ Demuestra que si AC = DF, AB = DE y ∢ACB = ∢DFE = 90°, entonces ΔABC ≅ ΔDEF.

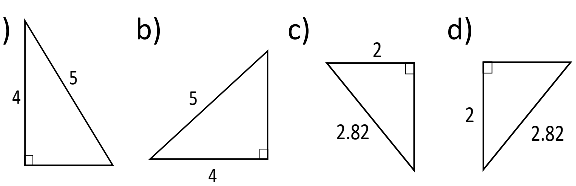


Ⓢ Haciendo coincidir los lados AC y DF.



Los puntos B, C, E están alineados.
(∢BCE = ∢BCA + ∢EFA = 90° + 90° = 180°)
Entonces, ΔABE es isósceles. (B, C, E están alineados y AB = AE).
Luego, ∢ABE = ∢AEB (ΔABE es isósceles).
Por lo tanto, ΔABC ≅ ΔDEF (tienen un cateto e hipotenusa de igual medida).

Ⓡ 1. a) b) c) d)



a) y b), son congruentes por criterio 2 de congruencia de triángulos rectángulos. Tienen iguales un cateto y la hipotenusa.
c) y d), son congruentes por criterio 2 de congruencias de triángulos rectángulos. Tienen iguales un cateto y la hipotenusa.

Tarea: página 127 del Cuaderno de Ejercicios.

1.9 Condiciones necesarias y suficientes

P

Considera dos condiciones A y B sobre un triángulo ABC:

A: ABC es un triángulo equilátero B: ABC es un triángulo isósceles

a) Si ΔABC cumple A, ¿también cumple B?

b) Si ΔABC cumple B, ¿también cumple A?

c) Si ΔABC no cumple B, ¿tampoco cumple A?

S

a) Si un triángulo ABC cumple la condición A, también cumple B; pues los triángulos equiláteros tienen los 3 lados iguales y para ser isósceles únicamente necesita 2 lados iguales; por tanto si se cumple A también se cumple B.

b) No se cumple siempre, pues que un triángulo sea isósceles no es suficiente para que sea equilátero; porque la medida del tercer lado (base), puede ser igual o distinta a la medida de los otros 2 lados.

c) Si un triángulo no es isósceles, tampoco puede ser equilátero; pues para ser isósceles necesita 2 lados iguales y para ser equilátero los 3 lados iguales.

C

Cuando se cumple la proposición "si A, entonces B", se dice que "A es suficiente para B" y que "B es necesaria para A".

Una condición es necesaria para otra si al no cumplirse, la otra tampoco se cumple.

Escribe N si A es necesaria para B y escribe S, si A es suficiente para B, para cada una de las situaciones siguientes:

a) Para un triángulo DEF: A: DEF es isósceles, B: DEF es equilátero.
N: A es necesaria para B.

b) Para un triángulo DEF: A: DEF es rectángulo, B: DEF es isósceles.
A no es necesaria ni suficiente para B.

c) Para un triángulo DEF: A: DEF tiene 3 ángulos iguales, B: DEF es isósceles.
S: A es suficiente para B.

d) Para un cuadrilátero DEFG: A: DEFG es cuadrado, B: DEFG es rectángulo.
S: A es suficiente para B.

Indicador de logro

1.9 Conoce el sentido de una condición necesaria y suficiente.

Secuencia

Anteriormente se ha trabajado con teoremas y proposiciones que establecen relaciones entre dos o más triángulos mediante los cuales se han generalizado características de los triángulos isósceles, equiláteros, entre otros. En esta clase se analizará la relación lógica entre las condiciones que forman una proposición.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Analizar la relación lógica entre dos proposiciones dadas. Para el caso, las condiciones son sobre triángulos isósceles y equiláteros, cuyas características han sido estudiadas en clases anteriores.

Ⓡ En cada uno de los literales, se debe utilizar lo aprendido en la clase para establecer la relación lógica entre las condiciones dadas.

Fecha: **U6 1.9**

Ⓟ Considera dos condiciones A y B sobre un triángulo ABC:

A: ABC es un triángulo equilátero.

B: ABC es un triángulo isósceles

a) Si ΔABC cumple A, ¿también cumple B?

b) Si ΔABC cumple B, ¿también cumple A?

c) Si ΔABC no cumple B, ¿tampoco cumple A?

Ⓢ a) Si ΔABC cumple la condición A, también cumple la B; pues los triángulos equiláteros también son isósceles.

b) No se cumple siempre, pues que un triángulo sea isósceles no es suficiente para que sea equilátero.

c) Si un triángulo no es isósceles, tampoco puede ser equilátero; pues para ser isósceles necesita 2 lados iguales y para ser equilátero los 3 lados iguales.

Ⓡ Para un triángulo DEF:

a) A es necesaria para B.

b) A no es necesaria ni suficiente para B.

c) A es suficiente para B.

d) A es suficiente para B.

Tarea: página 128 del Cuaderno de Ejercicios.

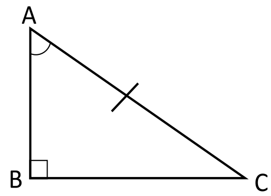
1.10 Uso de las condiciones necesarias y suficientes

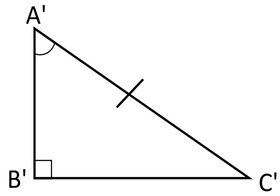
P

Determina si la condición A es necesaria o suficiente para B. Considera los triángulos ABC y A'B'C'.

A: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C' = 90°$, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$, $AC = A'C'$.

B: $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.





S

La condición A($\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C' = 90°$, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$, $AC = A'C'$) es suficiente para que se cumpla B; por criterio de congruencia de la clase anterior.

La condición A($\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C' = 90°$, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$, $AC = A'C'$) es necesaria para B; pues por definición de congruencia para que dos triángulos rectángulos sean congruentes, es necesario que sus lados y ángulos correspondientes sean iguales.

Por tanto, la condición A($\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C' = 90°$, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$, $AC = A'C'$) es necesaria y suficiente para B($\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$).

C

Una condición A es **necesaria y suficiente** para B, si A es tanto necesaria como suficiente para B.

Observa que la condición A es necesaria y suficiente para B, significa que se cumple la proposición "si A entonces B" y la recíproca "si B entonces A".

Para el ejemplo presentado, la proposición "si A entonces B", corresponde que para los dos triángulos rectángulos dados se cumple que $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C' = 90°$, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$, $AC = A'C'$, entonces los triángulos son congruentes; mientras que la recíproca "si B entonces A" corresponde a que si dos triángulos son congruentes, entonces tienen iguales sus lados y ángulos correspondientes.

1. En las siguientes condiciones sobre triángulos, determina si la condición A es necesaria y suficiente para B.

a) A: Isósceles	B: Tiene dos ángulos de igual medida	A es necesaria y suficiente para B.
b) A: Equilátero	B: Tiene tres ángulos de igual medida	A es necesaria y suficiente para B.
c) A: Isósceles	B: Equilátero	A es necesaria para B.
d) A: Rectángulo	B: Equilátero	A no es es necesaria ni suficiente para B.

2. Elabora enunciados sobre condiciones necesarias y suficientes.

En este numeral cada docente deberá analizar los enunciados dados por sus estudiantes y verificar si la condición A cumple con ser necesaria y suficiente para B.

Indicador de logro

1.11 Determina en enunciados si una condición es necesaria y suficiente.

Secuencia

En la clase anterior se analizó la relación entre dos condiciones dadas para determinar si A es necesaria o suficiente para B; en esta clase se analizará si una condición es necesaria y suficiente para otra. Este análisis se hará con una proposición para triángulos rectángulos ya demostrada.

Es importante considerar que en la condición B no se especifica que el triángulo debe ser rectángulo porque se ha dado la ilustración; pero es necesario hacer énfasis a los estudiantes para evitar que se genere confusión creyendo que se cumple para un triángulo cualquiera.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Analizar dos condiciones dadas para determinar si una es necesaria y suficiente para otra, con el objeto de definir una condición necesaria y suficiente.

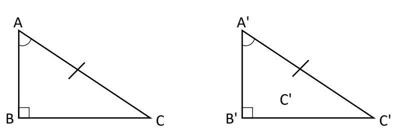
Ⓡ En el numeral 1, analizar cada condición para determinar si la condición A es necesaria y suficiente para B; mientras que en el numeral 2, cada estudiante o pareja de estudiantes escribirá enunciados donde se ejemplifique una relación necesaria y suficiente.

Fecha: **U6 1.10**

Ⓟ Determina si la condición A es necesaria o suficiente para B. Considera los triángulos ABC y A'B'C'.

A: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C' = 90°$, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$, $AC = A'C'$

B: $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$



Ⓢ La condición A($\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C' = 90°$, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$, $AC = A'C'$) es suficiente para que se cumpla B; por criterio de congruencia de la clase anterior.

La condición A($\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C' = 90°$, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$, $AC = A'C'$) es necesaria para B, pues por definición de congruencia para que dos triángulos rectángulos sean congruentes, es necesario que sus lados y ángulos correspondientes sean iguales.

Por tanto, A($\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C' = 90°$, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$, $AC = A'C'$) es necesaria y suficiente para B($\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$).

Ⓡ Para un triángulo dado:

a) A es necesaria y suficiente para B.

b) A es necesaria y suficiente para B.

c) A es necesaria para B.

d) A no es es necesaria ni suficiente para B.

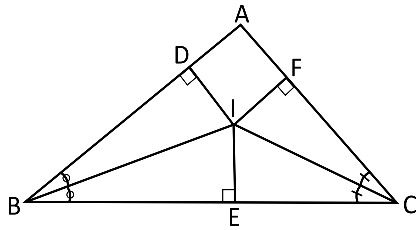
Tarea: página 129 del Cuaderno de Ejercicios.

1.11 Características de las bisectrices de un triángulo

P

En la siguiente figura, BI y CI son bisectrices del triángulo ABC, y se cumple que ID ⊥ AB, IE ⊥ BC y IF ⊥ CA. Demuestra lo siguiente:

a) ID = IE = IF
b) El segmento AI también es bisectriz del triángulo.



S

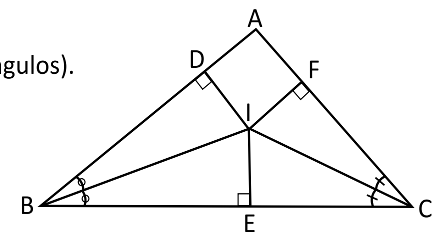
a) ΔEIB ≅ ΔDIB (por criterio 1 de congruencia de triángulos rectángulos).

Entonces, ID = IE (por la congruencia) . . . (1)

ΔCIE ≅ ΔCIF (por criterio 1 de congruencia de triángulos rectángulos).

Entonces, IE = IF (por la congruencia) . . . (2)

Por lo tanto, ID = IE = IF (por (1) y (2))

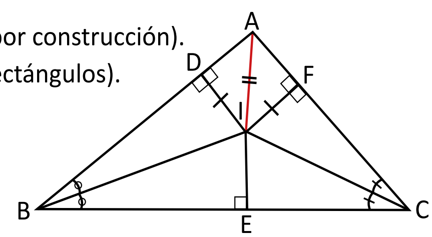


En b) para demostrar que ∢IAF = ∢IAD se necesita demostrar que ΔFIA ≅ ΔDIA.

b) En ΔFIA y ΔDIA, ID = IF, IA es compartido (por el literal **a** y por construcción).
ΔFIA ≅ ΔDIA (por criterio 2 de congruencia de triángulos rectángulos).

Entonces, ∢IAF = ∢IAD.

Por lo tanto, AI es bisectriz de ΔABC.



C

El punto "I" donde se intersecan dos bisectrices de un triángulo se conoce como **incentro**. La distancia del incentro a cualquiera de los lados del triángulo es la misma (la distancia es la longitud del segmento trazado desde el punto "I" perpendicular a un lado del triángulo). Además, la tercera bisectriz también debe pasar por el punto "I"; es decir, las 3 bisectrices se intersecan en el incentro.

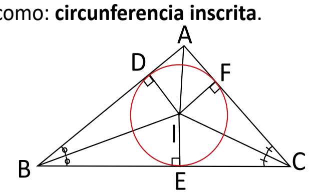
Comprueba utilizando un triángulo de papel que las tres bisectrices de un triángulo se intersecan en un mismo punto llamado **incentro**.

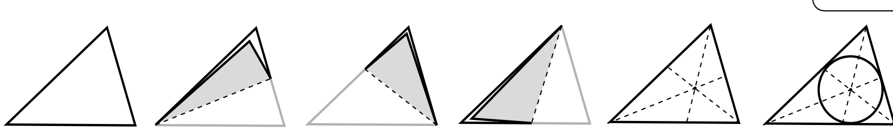
a) Dobla cada ángulo del triángulo por la mitad.

b) Marca el punto donde se intersecan las 3 bisectrices.

c) Dibuja la circunferencia inscrita.

Observa que si el incentro equidista de los tres lados, es posible trazar una circunferencia cuyo radio sea igual a la distancia del incentro a alguno de los lados. Dicha circunferencia se conoce como: **circunferencia inscrita**.





En este caso únicamente hay que orientar el trabajo para que puedan ilustrar con precisión la característica de las bisectrices, demostrada en clase.

Indicador de logro

1.11 Demuestra que la distancia del incentro a cualquiera de los lados de un triángulo son congruentes.

Secuencia

En la clase 2.11 de la Unidad 8 de séptimo grado, fue definido el incentro de un triángulo a partir del trazo de la bisectriz; en esta clase se analizarán las características de las bisectrices de un triángulo, pero a diferencia de séptimo grado, en esta clase se demostrará haciendo uso de la congruencia de triángulos.

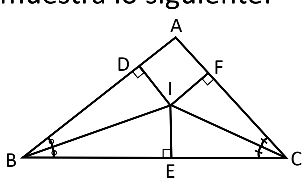
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Demostrar que los triángulos que se forman con la bisectriz son congruentes para concluir que las distancias del punto de intersección de las bisectrices a los lados del triángulo son iguales.

Ⓡ Ilustrar la propiedad del punto de intersección de las bisectrices mediante la geometría del papel.

Fecha: **U6 1.11**

Ⓟ En la siguiente figura, BI y CI son bisectrices del triángulo ABC, y se cumple que ID ⊥ AB, IE ⊥ BC y IF ⊥ CA. Demuestra lo siguiente:



a) ID = IE = IF
b) El segmento AI también es bisectriz del triángulo.

Ⓢ a) ΔEIB ≅ ΔDIB (por criterio 1 de congruencia de triángulos rectángulos).
Entonces, ID = IE (por la congruencia) ... (1)

ΔCIE ≅ ΔCIF (por criterio 1 de congruencia de triángulos rectángulos).
Entonces, IE = IF (por definición de congruencia) ... (2)

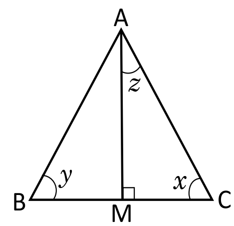
Por lo tanto, ID = IE = IF (por [1] y [2])
b) En ΔFIA y ΔDIA, ID = IF, IA es compartido. (Por literal a y por construcción).
ΔFIA ≅ ΔDIA (por criterio 2 de congruencia de triángulos rectángulos).
Entonces, ∢IAF = ∢IAD.

Por lo tanto, AI es bisectriz de ΔABC.
Observación: Ver imagen en el LT.

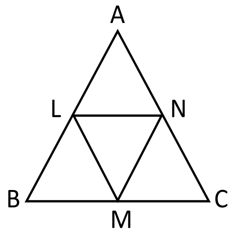
Tarea: página 130 del Cuaderno de Ejercicios.

1.12 Practica lo aprendido

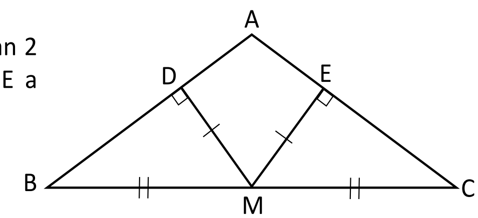
1. En el triángulo equilátero ABC, AM ⊥ BC, responde:



   a) ¿Cómo se llama el segmento AM? Altura.
   b) Determina el valor de los ángulos x, y, z.



2. En la siguiente figura L, M, N son puntos medios de los lados del triángulo equilátero ABC. Demuestra que el ΔLMN es equilátero.

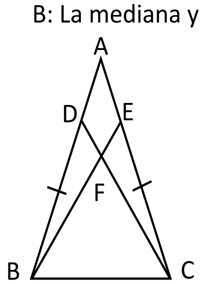


3. En el ΔABC, desde el punto medio M del lado BC se trazan 2 segmentos perpendiculares a AB y AC, e intersecan en D y E a AB y AC respectivamente, Si MD = ME, demuestra:
   a) ΔBDM ≅ ΔCEM
   b) ΔADM ≅ ΔAEM
   c) El ΔABC es isósceles.
   d) Si se traza el segmento DE, entonces DE ∥ BC.

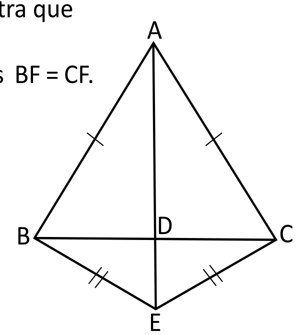
4. En los siguientes enunciados sobre triángulos determina si la condición A es necesaria y/o suficiente para B.
   a) A: Dos triángulos son congruentes.
      B: Los ángulos internos correspondientes de dos triángulos tienen igual medida.
      A es suficiente para B.
   b) En dos triángulos rectángulos:
      A: La hipotenusa y un ángulo agudo tienen igual medida. A es necesaria para B.
      B: Los ángulos internos correspondientes de dos triángulos tienen igual medida.

1.13 Practica lo aprendido

1. En los siguientes enunciados acerca de triángulos, determina si la condición A es necesaria y suficiente para B.
   a) A: Equilátero; B: La mediana y la altura coinciden en cada vértice. A es necesaria y suficiente para B.
   b) A: La mediana y la bisectriz coinciden en cada vértice.
      B: La mediana y la mediatriz coinciden en cada vértice. A es necesaria y suficiente para B.



2. En un triángulo isósceles ΔABC, hay dos puntos D y E en los lados de igual medida AB y AC. Si BD = CE. Demuestra que
   a) BE = CD
   b) Si F es el punto donde se cortan BE y CD entonces BF = CF.



3. En los triángulos isósceles ΔABC y ΔEBC, demuestra que AE ⊥ BC.
   Sugerencia: considera la mediatriz del segmento BC.

4. Elabora enunciados sobre condiciones necesarias y suficientes.

Indicador de logro

1.13 Resuelve problemas utilizando características de triángulos isósceles, equiláteros y rectángulos.

Solución de algunos ítems:

Clase 1.12

1. b) $\sphericalangle x$ = $\sphericalangle y$ = 60°, porque ΔABC es equilátero.
$\sphericalangle x + \sphericalangle z + 90° = 180°$
$60° + \sphericalangle z + 90° = 180°$; entonces $\sphericalangle z = 30°$.
Considerando los resultados, se puede concluir que el segmento AM además de ser altura es bisectriz, mediana y mediatriz.

2. AB = AC = BC, porque el ΔABC es equilátero.
BM = CM y BL = CN (por definición de punto medio).
∢MBL = ∢MCN (por ser ángulos internos de un triángulo equilátero).
Entonces ΔMBL ≅ ΔMCN, por criterio LAL.
Por tanto ML = MN (definición de congruencia) ... (1)

AL = LB y AN = BM (por definición de punto medio).
∢NAL = ∢LBM (por ser ángulos internos de un triángulo equilátero).
Entonces ΔMBL ≅ ΔLAN, por criterio LAL.
Por tanto, ML = LN (definición de congruencia) ... (2)
ML = MN = LN, de (1) y (2), por tanto ΔLMN es equilátero.

Clase 1.13

2.
a) BD = CE por hipótesis.
BC = CB por ser el mismo
∢CBA = ∢BCA (porque se oponen a lados iguales).
Entonces, ΔBCD ≅ ΔCBE, por criterio LAL.
BE = CD, por definición de congruencia.
b) BD = CE; ∢BDC = ∢BEC,
∢CBD = ∢BCE y ∢BCD = ∢CBE (por congruencia de triángulos BCD y CBE).
∢CBD = ∢CBE + ∢EBD y
∢BCE = ∢BCD + ∢DCE, como
∢CBD = ∢BCE, entonces
∢CBE + ∢EBD = ∢BCD + ∢DCE, pero
∢CBE = ∢BCD, por tanto,
∢EBD = ∢DCE, de donde se concluye que ΔBFD ≅ ΔCFE, por ALA.
Por tanto, BF = CF, por definición de congruencia de triángulos.

Tarea: páginas 131 y 132 del Cuaderno de Ejercicios.

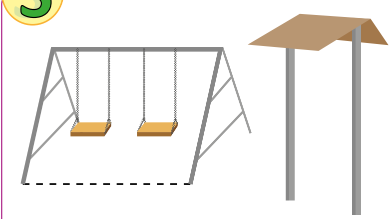
Lección 2 Paralelogramos

2.1 El paralelogramo

P

a) Encuentra en la siguiente imagen las figuras planas llamadas paralelogramos, explica la razón por la que se llaman así.
b) Luego menciona 3 ejemplos de tu alrededor donde encuentras paralelogramos.

S



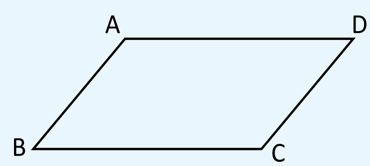
a) Los soportes de los columpios son cuadriláteros, tienen dos pares de lados opuestos paralelos, por tanto, son paralelogramos; al igual que el techo del deslizadero.

b) Ejemplo 1. La pizarra es un paralelogramo.
Ejemplo 2. Los vidrios de las ventanas.
Ejemplo 3. El escritorio de la profesora o algunos pupitres.

C

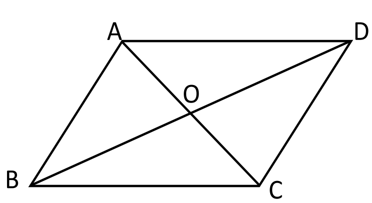
Un cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos paralelos se llama **paralelogramo**.

Recuerda que un rectángulo y un cuadrado también cumple la condición de ser un paralelogramo.



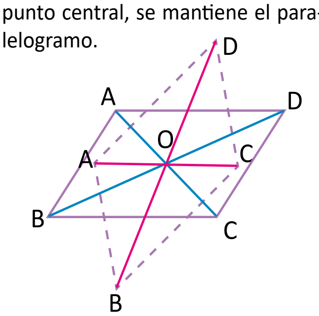
E

En el paralelogramo ABCD mostrado a continuación, tomando la intersección de las diagonales en el punto O, ¿cuáles pares de segmentos y ángulos son iguales?

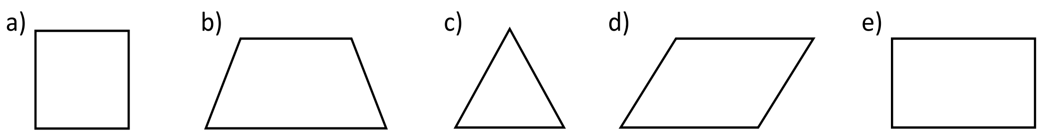


a) AB = DC, AD = BC
b) ∢ABC = ∢CDA, ∢BAD = ∢DCB
c) OA = OC, OB = OD
d) ∢AOB = ∢COD, ∢AOD = ∢COB
e) ∢ABO = ∢CDO, ∢BAO = ∢DCO
f) ∢ADO = ∢CBO, ∢DAO = ∢BCO

Aunque se gire un ángulo cualquiera con respecto al punto O como punto central, se mantiene el paralelogramo.



Identifica, en las siguientes figuras, cuáles son paralelogramos. Justifica cada caso.



Son paralelogramos: a), d) y e)

No son paralelogramos: b) y c)

Indicador de logro

2.1 Identifica las condiciones para que un cuadrilátero sea paralelogramo.

Secuencia

En cuarto grado de Educación Básica, fue definido el concepto de paralelogramo y sus características, para esta clase se recordarán esos conocimientos previos mediante la identificación de paralelogramos en el entorno, enlistando sus características.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Identificar paralelogramos en un lugar dado y en el entorno en que está recibiendo la clase, pero además de identificarlos deberá justificar por qué considera que es un paralelogramo.

Ⓡ Identificar los elementos que son iguales en un paralelogramo, para ello se utilizará lo aprendido en Educación Básica y en las unidades 4 y 5 de octavo grado.

Solución de algunos ítems:

Los cuadriláteros de los literales a), d) y e) son paralelogramos, tienen lados paralelos dos a dos.

Las figuras de los literales b) y c) no son paralelogramos, pues el b) solo tiene un par de lados paralelos y el c) es un triángulo.

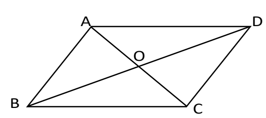
Posibles dificultades:
No comprender las relaciones de igualdad presentadas en el ejemplo adicional, en ese caso será necesario que el docente dé pistas o que asigne la revisión en parejas; para garantizar la comprensión puede pedir que justifiquen las igualdades presentadas en la solución.

Fecha: **U6 2.1**

Ⓟ a) Encuentra en la siguiente imagen las figuras planas llamadas paralelogramos, explica la razón por la que se llaman así.
b) Luego menciona 3 ejemplos en tu alrededor donde encuentras paralelogramos.
Observación: Ver imagen en LT.

Ⓢ a) Los soportes de los columpios son cuadriláteros pues tienen dos pares de lados opuestos paralelos, por tanto, son paralelogramos, al igual que los techos de los deslizaderos.
b) La respuesta en este caso dependerá del espacio donde estén los estudiantes.

Ⓔ



a) $AB = DC$, $AD = BC$
b) $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA$, $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DCB$
c) $OA = OC$, $OB = OD$
d) $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$, $\sphericalangle AOD = \sphericalangle COB$
e) $\sphericalangle ABO = \sphericalangle CDO$, $\sphericalangle BAO = \sphericalangle DCO$
f) $\sphericalangle ADO = \sphericalangle CBO$, $\sphericalangle DAO = \sphericalangle BCO$

Ⓡ Los cuadriláteros de los literales a), d) y e) son paralelogramos.

Los literales b) y c) no son paralelogramos.

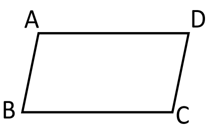
Tarea: página 133 del Cuaderno de Ejercicios.

2.2 Características de los paralelogramos

P

Para un paralelogramo, demuestra lo siguiente:

1. Tiene dos lados opuestos congruentes.
2. Tiene dos ángulos opuestos congruentes.
3. Tiene dos ángulos consecutivos suplementarios.

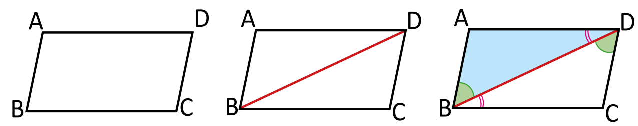


Observa que para demostrar que
1. AB = DC; AD = BC
2. ∢DAB = ∢BCD y ∢ABC = ∢CDA
Es suficiente demostrar que ΔDBA ≅ ΔBDC, trazando la diagonal BD.

S

Por hipótesis se tiene que AB∥ DC y AD∥ BC.

Se traza la diagonal BD, de lo cual se tiene:



∢ABD =∢ CDB (por ser alternos internos entre paralelas)...(1)

∢ADB = ∢CBD (por ser alternos internos entre paralelas)... (2)

ΔDBA ≅ ΔBDC (por criterio ALA, de (1), (2) y BD es común).

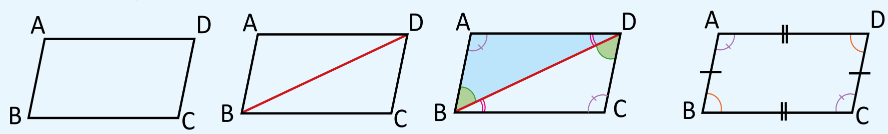
Observa que ∢ABC = ∢CDA porque en el paralelogramo se cumple que ∢ ABD + ∢CBD = ∢CDB + ∢ADB.

Entonces, AB = DC, AD = BC, ∢DAB =∢ BCD, ∢ABC =∢ CDA.

Finalmente, ∢ABC + ∢BCD = 180° (mitad de la suma de los ángulos interno de un cuadrilátero).

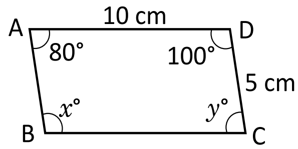
C

En un paralelogramo se cumple que los lados y los ángulos opuestos son congruentes y los ángulos consecutivos son suplementarios.



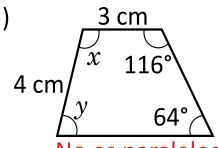
E

Encuentra los ángulos y lados según las características de los paralelogramos:

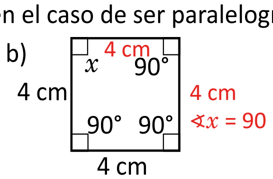


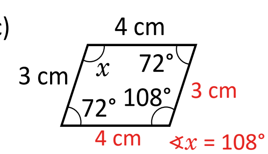
∢x = 100° y ∢y = 80° porque dos ángulos opuestos son iguales y el lado AB = 5 cm y el BC = 10 cm porque dos lados opuestos son iguales.

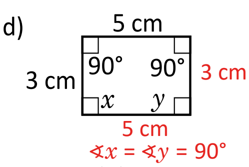
1. Dadas las siguientes figuras, explica si son paralelogramos según sus lados y ángulos, encuentra las medidas de lados y ángulos en el caso de ser paralelogramos.

a) 

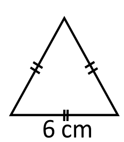
No es paralelogramo

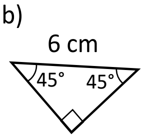
b) 

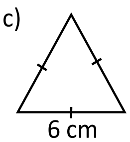
c) 

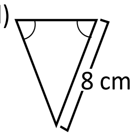
d) 

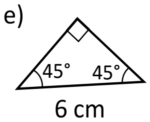
2. Dados los siguientes triángulos, selecciona las parejas de figuras que al unirse forman un paralelogramo y explica por qué son paralelogramos.

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Forman paralelogramos: a) y c); b) y e)

Unidad 6

Indicador de logro

2.2 Caracteriza los paralelogramos estableciendo la relación entre sus lados y ángulos.

Secuencia

En la clase anterior se recordó el concepto de paralelogramo y algunas características; en esta clase se utilizará la congruencia de triángulos para demostrar la relación que existe entre los lados y ángulos de un paralelogramo.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Demostrar que en un paralelogramo, sus lados opuestos son iguales así como los ángulos opuestos y además los ángulos consecutivos son suplementarios.

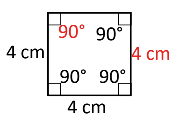
Ⓡ Utilizar el resultado de la demostración para determinar la medida de los ángulos de un paralelogramo.

Solución de algunos ítems:

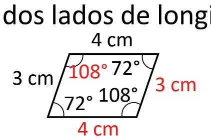
1.

a) No es paralelogramo.

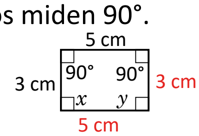
b) Es paralelogramo que tiene sus 4 lados de longitud 4 cm y $\sphericalangle x = 90°$.



c) Es paralelogramo, tiene dos lados de longitud 4 cm y dos lados de longitud 3 cm y $\sphericalangle x = 108°$.

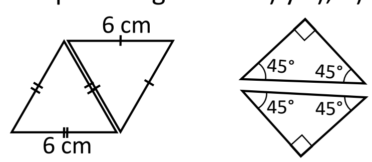


d) Es paralelogramo, tiene dos lados de longitud 5 cm y dos lados de longitud 3 cm y sus cuatro ángulos miden 90°.



2.

Forman paralelogramos: a) y c); b) y e).

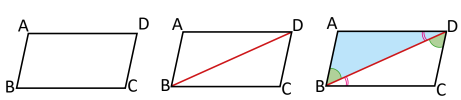


Porque los lados opuestos son paralelos, ya que los ángulos alternos internos son iguales.

Fecha: **U6 2.2**

Ⓟ Para un paralelogramo, demuestra lo siguiente:

1. Tiene dos lados opuestos congruentes.
2. Tiene dos ángulos opuestos congruentes.
3. Tiene dos ángulos consecutivos suplementarios.



Ⓢ Por hipótesis se tiene que AB ∥ DC y AD ∥ BC. Se traza la diagonal BD, de lo cual se tiene:
$\sphericalangle$ABD = $\sphericalangle$CDB (por ser alternos internos entre paralelas)...(1)
$\sphericalangle$ADB = $\sphericalangle$CBD (por ser alternos internos entre paralelas)... (2)

ΔDBA ≅ ΔBDC (por criterio ALA, de [1], [2] y BD es común). Entonces, AB = DC, AD = BC, $\sphericalangle$DAB = $\sphericalangle$BCD, $\sphericalangle$ABC = $\sphericalangle$CDA.
Finalmente, $\sphericalangle$ABC + $\sphericalangle$BCD = 180°.

Ⓔ $\sphericalangle x$ = 100° y $\sphericalangle y$ = 80° porque dos ángulos opuestos son iguales y el lado. AB = 5 cm y el BC = 10 cm porque dos lados opuestos son iguales.

Ⓡ a) No es paralelogramo

b) Es paralelogramo que tiene sus 4 lados de longitud 4 cm y $\sphericalangle x = 90°$

c) Es paralelogramo, tiene dos lados de longitud 4 cm y dos lados de longitud 3 cm y además $\sphericalangle x = 108°$.

Tarea: página 134 del Cuaderno de Ejercicios.

2.3 Diagonales de un paralelogramo

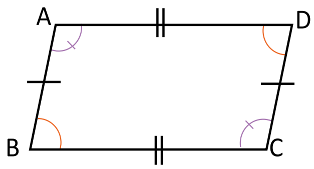
P

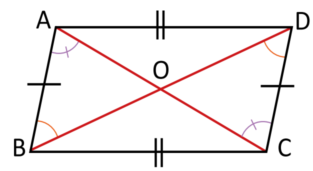
Demuestra que en un paralelogramo las diagonales se intersecan en su punto medio.

Recuerda que un cuadrilátero tiene 2 diagonales.

S

Por hipótesis se tiene que AB∥ DC y AD∥ BC.





Al trazar las diagonales del paralelogramo se tiene:

AB = DC (por ser paralelogramo) . . . (1)

∢ABO = ∢CDO (por ser alternos internos entre paralelas) . . .(2)

∢BAO = ∢DCO (por ser alternos internos entre paralelas) . . .(3)

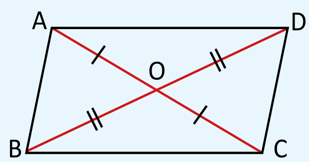
Para demostrar que OA = OC y OB = OD es suficiente demostrar que ΔOAB ≅ ΔOCD.

Entonces, ΔOAB ≅ ΔOCD (por criterio ALA, de (1), (2) y (3)).

Por lo tanto, OA = OC y OB = OD (por definición de congruencia).

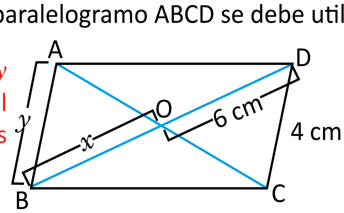
C

En un paralelogramo se cumple que las diagonales se intersecan en su punto medio.



1. Escribe qué característica del paralelogramo ABCD se debe utilizar para determinar el valor de x y y.

Para determinar el valor de y se utiliza la característica del paralelogramo, tiene sus lados opuestos paralelos e iguales.



Para determinar el valor de x se utiliza la propiedad de las diagonales; pues O es la intersección de las dos.

2. En el siguiente dibujo las diagonales AC y BD del paralelogramo ABCD se cortan en el punto O y el segmento PQ pasa por el punto O. Completa la demostración de que PO = QO colocando en los espacios en blanco lo que corresponde:

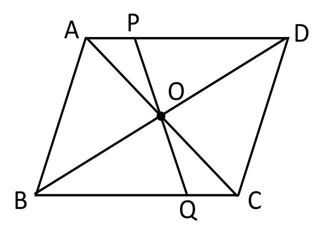
CO = AO (por propiedad de los paralelogramos) . . .(1)

∢QCO = ∢PAO (por ser ángulos alternos internos entre las paralelas) . . .(2)

∢QOC = ∢POA (son ángulos opuestos por el vértice) . . . (3)

ΔAOP ≅ ΔCOQ (por criterio de congruencia ALA, de (1), (2) y (3)).

Por lo tanto, PO = QO (Por definición de congruencia).



Indicador de logro

2.3 Caracteriza las diagonales de un paralelogramo.

Secuencia

Anteriormente se demostró la relación que existe entre los lados y ángulos de un paralelogramo; en esta clase se demuestra que al trazar las dos diagonales del paralelogramo, estas se intersecan en su punto medio.

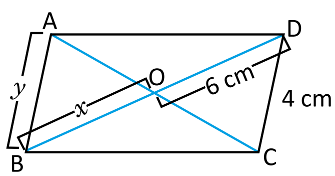
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Demostrar que el punto de intersección de las diagonales de un paralelogramo, es el punto medio de ambas, por lo que cada diagonal queda dividida en dos segmentos iguales.

Ⓡ En el numeral 1, utilizar el resultado demostrado en la clase para determinar la medida de dos segmentos indicados; mientras que en el numeral 2 complementar una demostración utilizando características de los paralelogramos.

Solución de algunos ítems:

1.



Para determinar el valor de x, se utiliza la propiedad de las diagonales; pues O es la intersección de las dos.

BO = DO (O es la intersección de las
x = 6 cm diagonales)

Para determinar el valor de y, se utiliza la característica de paralelogramo, tiene sus lados opuestos paralelos e iguales.

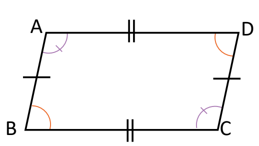
AB = CD (Lados opuestos del paralelogramo)
y = 4 cm

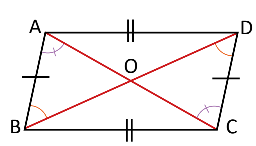
Posibles dificultades:
En el caso que algunos estudiantes no puedan complementar la demostración, en ese caso se puede indicar el trabajo en parejas.

Fecha: **U6 2.3**

Ⓟ Demuestra que en un paralelogramo las diagonales se intersecan en su punto medio.

Ⓢ

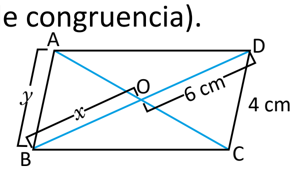




Por hipótesis se tiene que AB∥ DC y AD∥ BC.
Al trazar las diagonales del paralelogramo se tiene:
AB = DC (por ser paralelogramo) . . . (1)
∢ABO = ∢CDO (por ser alternos internos entre paralelas) ... (2)
∢BAO = ∢DCO (por ser alternos internos entre paralelas) ... (3)

Entonces, ΔOAB ≅ ΔOCD (por criterio ALA, de [1], [2] y [3]).
Por lo tanto, OA = OC y OB = OD (por definición de congruencia).

Ⓡ 1.



BO = DO (O es la intersección de las
x = 6 cm diagonales)

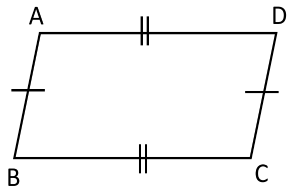
AB = CD (Lados opuestos del paralelo
y = 4 cm gramo)

Tarea: página 135 del Cuaderno de Ejercicios.

2.4 Condiciones de los lados de un cuadrilátero para que sea paralelogramo

P

Demuestra que un cuadrilátero cuyos pares de lados opuestos son congruentes es un paralelogramo.



Para demostrar que AD∥BC y AB∥DC es suficiente, demostrar que ΔABD ≅ ΔCDB, trazando la diagonal BD.

S

Se traza la diagonal BD.

Entonces, ΔABD≅ ΔCDB (por criterio LLL, AB = CD, AD = BC; por hipótesis y BD es común).

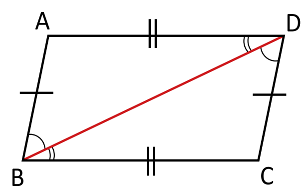
Entonces, ∢ABD = ∢CDB (por ser ángulos correspondientes en la congruencia).

Por lo tanto, AB∥DC (dado que ∢ABD = ∢CDB).

Análogamente, ∢ADB = ∢CBD (por la congruencia).

Por lo tanto, AD∥ BC (dado que ∢ADB = ∢CBD).

Finalmente el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

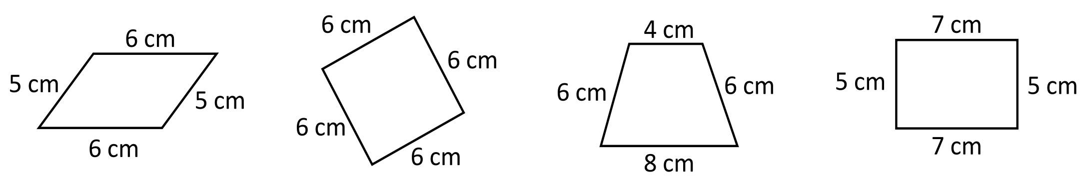


C

Si los lados opuestos de un cuadrilátero son de igual medida, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo. Este teorema es el recíproco de "en un paralelogramo los pares de lados opuestos son de igual medida".

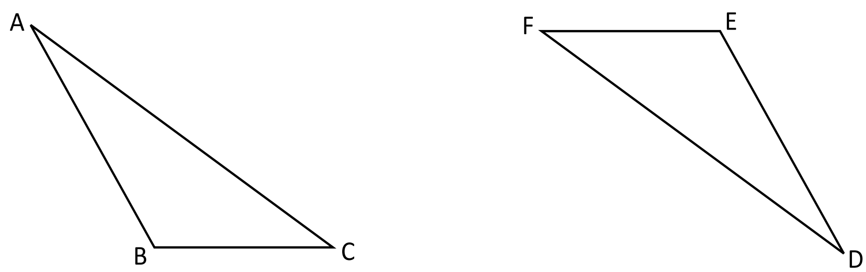
Observa que ser paralelogramo es una condición, necesaria y suficiente, para que un cuadrilátero tenga lados opuestos de igual medida.

1. En los siguientes cuadriláteros describe los que cumplen la condición de paralelogramos.



Cumplen con las condiciones de paralelogramos el 1, 2 y 4; tienen sus lados opuestos iguales dos a dos.

2. ΔABC y ΔDEF son congruentes. Explica por qué al unir estos triángulos se forma un paralelogramo.



Porque al unirlos se obtiene un cuadrilátero cuyos dos pares de lados opuestos son iguales.

Indicador de logro

2.4 Demuestra la relación que debe existir entre los lados de un cuadrilátero para que sea paralelogramo.

Secuencia

En la clase 2.2, se demostró que un paralelogramo tiene sus lados opuestos iguales; en esta clase se demostrará el recíproco, es decir, si se tiene un cuadrilátero cuyos pares de lados son iguales; entonces es un paralelogramo.

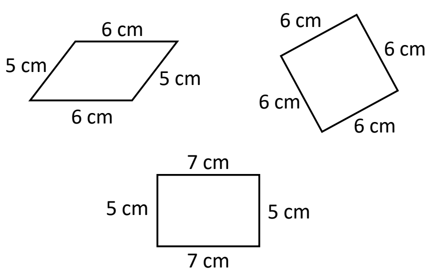
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Realizar la demostración utilizando lo aprendido sobre congruencia de triángulos y ángulos entre paralelas.

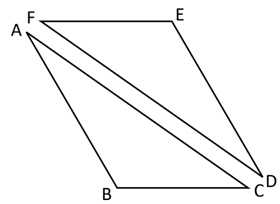
Ⓡ En el numeral 1, utilizar lo aprendido sobre paralelogramos para identificar cuáles de los cuadriláteros dados cumplen con las condiciones para ser paralelogramos; mientras que en el numeral 2, justificar por qué los triángulos forman un paralelogramo, esto siempre utilizando las características de los paralelogramos.

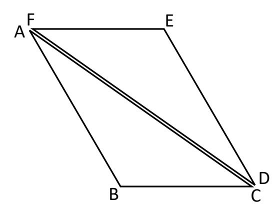
Solución de algunos ítems:

1. Cumplen con las condiciones de paralelogramos el 1, 2 y 4; tienen sus lados opuestos iguales dos a dos.



2. Porque al unirlos se obtiene un cuadrilátero cuyos dos pares de lados opuestos son iguales.

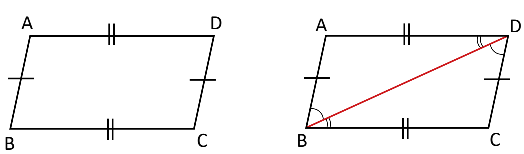




Fecha: **U6 2.4**

Ⓟ Demuestra que un cuadrilátero cuyos pares de lados opuestos son congruentes es un paralelogramo.

Ⓢ



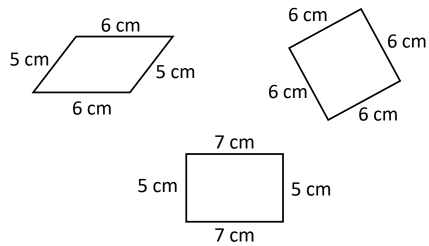
Se traza la diagonal BD.
Entonces, ΔABD ≅ ΔCDB. (por criterio LLL, AB = CD, AD = BC; por hipótesis y BD es común)
Entonces, ∢ABD = ∢CDB. (por ser ángulos correspondientes en la congruencia).

Por lo tanto, AB∥DC (dado que ∢ABD = ∢CDB).

Ⓡ Por lo tanto, AD∥ BC (dado que ∢ADB = ∢CBD).

Finalmente el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

Cumplen con las condiciones de paralelogramos el 1, 2 y 4; tienen sus lados opuestos iguales dos a dos.

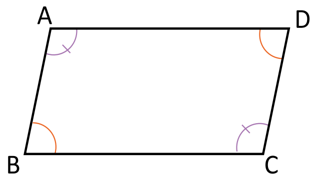


Tarea: página 136 del Cuaderno de Ejercicios.

2.5 Condiciones de los ángulos de un cuadrilátero para que sea paralelogramo

P

Demuestra que un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos pares de ángulos opuestos son de igual medida.



Estableciendo los puntos E y F sobre la prolongación de los lados BC y CD respectivamente. Para demostrar que AB ∥ DC y BC ∥ AD es suficiente, demostrar que $\measuredangle ABC = \measuredangle DCE$, $\measuredangle BCD = \measuredangle ADF$.

S

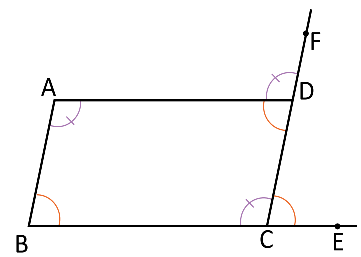
Prolongando los segmentos BC hasta E y CD hasta F;

$2\measuredangle ABC + 2\measuredangle BCD = 360°$ (suma de ángulos internos de un cuadrilátero, $\measuredangle DAB = \measuredangle BCD$ y $\measuredangle ABC = \measuredangle CDA$).

Entonces $\measuredangle ABC + \measuredangle BCD = 180°$ (dividiendo por 2) . . . (1)

También $\measuredangle BCD + \measuredangle DCE = 180°$ (por ángulos suplementarios) . . . (2)

Luego, $\measuredangle ABC = \measuredangle DCE$ (restando (2) de (1)).



Por lo tanto, AB ∥ DC (ángulos correspondientes de igual medida).

De la misma manera se procede para demostrar que BC ∥ AD.

Una vez se realiza la demostración se concluye que los lados opuestos del cuadrilátero son paralelos.

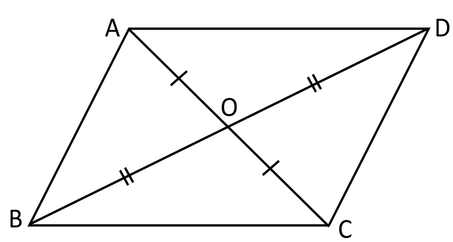
Por tanto, el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

C

Si dos pares de ángulos opuestos son congruentes en un cuadrilátero entonces es un paralelogramo, este es el recíproco del teorema: "En un paralelogramo dos pares de ángulos opuestos son congruentes".

Ser paralelogramo es una condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero tenga ángulos opuestos de igual medida.

Demuestra que un cuadrilátero cuyas diagonales se cortan en su punto medio es un paralelogramo.



Es suficiente comprobar que los lados opuestos son de igual medida para demostrar que ABCD es paralelogramo. Para ello, se puede pensar en los cuatro triángulos que se forman dentro del paralelogramo.

Indicador de logro

2.5 Demuestra que para que un cuadrilátero sea paralelogramo sus ángulos opuestos deben ser iguales.

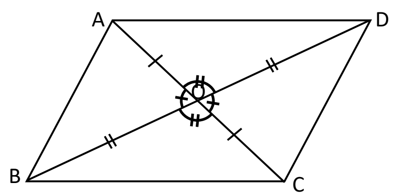
Secuencia

En la clase anterior se demostró que si un cuadrilátero tiene sus lados opuestos iguales, entonces es un paralelogramo; en esta clase se demuestra que si un cuadrilátero tiene sus ángulos opuestos iguales, entonces es un paralelogramo.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Demostrar que el cuadrilátero que tiene sus ángulos opuestos iguales es un paralelogramo, utilizando la hipótesis y los ángulos suplementarios.

Ⓡ Demostrar el recíproco del resultado de la clase 2.3, como una condición para que un cuadrilátero sea paralelogramo.



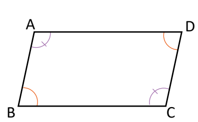
AO = CO y BO = DO; por hipótesis ... (1)
$\measuredangle$AOD = $\measuredangle$COB; por ser opuestos por el vértice ... (2)
Entonces, ΔAOD $\cong$ ΔCOB, por criterio LAL, de (1) y (2).
Por tanto, AD = CB; definición de congruencia ... (3)
$\measuredangle$AOB = $\measuredangle$COD; por ser opuestos por el vértice ... (4)

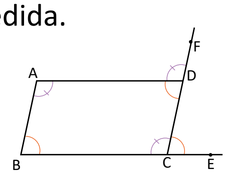
Entonces, ΔAOB $\cong$ ΔCOD; por criterio LAL, de (1) y (4).
Por tanto, AB = CD; definición de congruencia ... (5)
Por (3) y (5) se concluye que el cuadrilátero ABCD, es un paralelogramo por tener sus lados opuestos iguales.

Posibles dificultades:
En caso de que algunos estudiantes no puedan hacer la demostración, se puede indicar el trabajo por parejas y sugerirles que lean la pista.

Fecha: **U6 2.5**

Ⓟ Ⓢ Demuestra que un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos pares de ángulos opuestos son de igual medida.





Prolongando los segmentos BC hasta E y CD hasta F;
2$\measuredangle$ABC + 2$\measuredangle$BCD = 360° (suma de ángulos internos de un cuadrilátero, $\measuredangle$DAB = $\measuredangle$BCD y $\measuredangle$ABC = $\measuredangle$CDA)
Entonces $\measuredangle$ABC + $\measuredangle$BCD = 180° (dividiendo por 2) ... (1)
También $\measuredangle$BCD + $\measuredangle$DCE = 180° (por ángulos suplementarios) ... (2)

Luego, $\measuredangle$ABC = $\measuredangle$DCE (restando [2] de [1])
Por lo tanto, AB ∥ DC (ángulos correspondientes de igual medida).
De la misma manera, BC ∥ AD. Luego concluir que los lados opuestos son paralelos, y por tanto, el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

Ⓡ AO = CO y BO = DO; por hipótesis, ... (1)
$\measuredangle$AOD = $\measuredangle$COB; por ser opuestos por el vértice ... (2)
Entonces, ΔAOD $\cong$ ΔCOB (por criterio LAL, de (1) y (2); por tanto, AD = CB.
De forma análoga se demuestra que AB = CD.

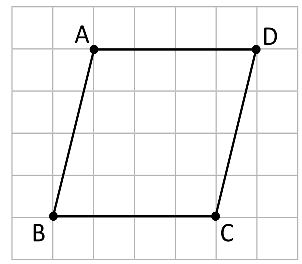
Tarea: página 137 del Cuaderno de Ejercicios.

2.6 Condiciones suficientes para que un cuadrilátero sea paralelogramo

P

Dibuja en tu cuaderno la figura, para ello realiza los siguientes pasos; luego responde:

1. Traza un segmento AD utilizando 4 cuadros de tu cuaderno o 4 cm de longitud.
2. Traza otro segmento BC utilizando 4 cuadros de tu cuaderno o 4 cm de longitud, 4 líneas más abajo de la primera.
3. Traza los segmentos AB y CD.



¿Es ABCD un paralelogramo? Argumenta tu respuesta utilizando las condiciones vistas en clases anteriores.

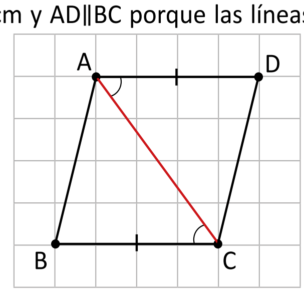
S

Por los pasos que se siguieron para construir la figura AD = BC = 4 cm y AD∥BC porque las líneas del cuaderno son paralelas.

Trazando la diagonal AC.

Entonces, ΔABC ≅ ΔCDA (∢ACB = ∢CAD por ser ángulos entre paralelas, AD = BC y AC es común).

Luego, AB = CD (por la congruencia).



Por lo tanto, ABCD es paralelogramo (dos pares de lados opuestos de igual medida).

C

Cada una de las siguientes condiciones es necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea paralelogramo:

1. Dos pares de lados opuestos son paralelos.
2. Dos pares de lados opuestos son congruentes.
3. Dos pares de ángulos opuestos son congruentes.
4. Las diagonales se intersecan en su punto medio.
5. Dos lados opuestos son paralelos y congruentes.
6. Los ángulos consecutivos son suplementarios.

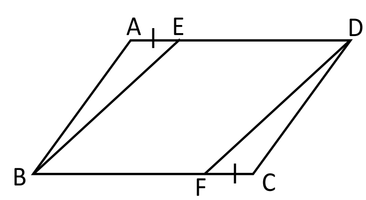
Donde el numeral 1 corresponde a la definición de paralelogramo.

E

Se toman los puntos E y F en los lados AD y BC respectivamente de un paralelogramo ABCD de modo que se cumple que AE = CF. Demuestra que el cuadrilátero EBFD es un paralelogramo.

ED ∥ BF

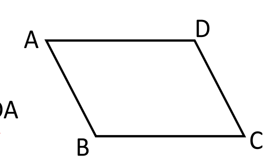
ED = AD – AE = BC – FC = BF



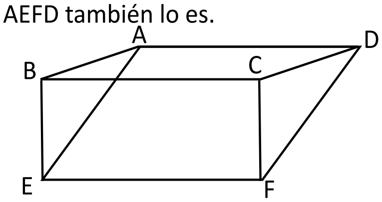
Por tanto, el cuadrilátero BFDE es paralelogramo (pues tiene dos lados opuestos paralelos y congruentes).

1. En el cuadrilátero ABCD determina cuáles de las siguientes condiciones son suficientes para que un cuadrilátero sea paralelogramo.

   a) BA = AD, BC = CD No
   b) AB = DC, AD = BC Sí
   c) ∢DAB = ∢BCD, ∢ABC = ∢CDA Sí



2. En el dibujo los cuadriláteros ABCD y BEFC son paralelogramos. Demuestra que el cuadrilátero AEFD también lo es.



Unidad 6

Indicador de logro

2.6 Enlista las condiciones suficientes para que un cuadrilátero sea paralelogramo.

Secuencia

En las dos clases anteriores, se demostró que si un cuadrilátero tiene sus lados opuestos o sus ángulos opuestos congruentes, entonces es un paralelogramo; en esta clase, se busca consolidar las condiciones que debe cumplir un cuadrilátero para ser paralelogramo, esto mediante una demostración a partir de una construcción bajo ciertas condiciones.

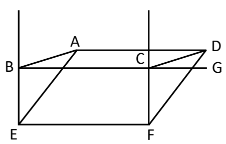
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Construir un cuadrilátero y luego demostrar que es un paralelogramo, esto con el objeto de enlistar las condiciones necesarias y suficientes para que un cuadrilátero sea paralelogramo.

Ⓡ En el numeral 1, utilizar el resultado demostrado en la clase para identificar cuáles de las condiciones dadas son suficientes para que el cuadrilátero sea paralelogramo.

Solución de algunos ítems:

ítem 2:



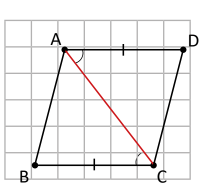
BC = DA y BC = EF, por tanto DA = EF.
Por ser lados de un paralelogramo ... (1)
Al mismo tiempo BC ∥ DA y BC ∥ EF, por tanto DA ∥ EF.
AEFD es un paralelogramo por tener un par de lados opuestos iguales.

Posibles dificultades:
En el caso de que no logren hacer la demostración del numeral dos de la fijación; se pueden dar pistas para orientarles.

Fecha: **U6 2.6**

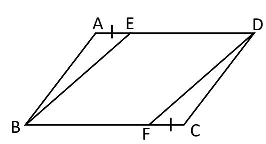
P Construir la figura, siguiendo los pasos indicados en el LT.
¿Es ABCD un paralelogramo? Argumenta tu respuesta utilizando las condiciones vistas en clases anteriores.

S Siguiendo los pasos indicados, se obtiene la figura AD = BC = 4 cm y AD ∥ BC porque las líneas del cuaderno son paralelas.



Trazando la diagonal AC.
Entonces, ΔABC ≅ ΔCDA (∢ACB = ∢CAD por ser ángulos entre paralelas, AD = BC y AC es común).
Luego, AB = CD (por la congruencia).
Por lo tanto, ABCD es paralelogramo.

E



ED ∥ BF
ED = AD – AE = BC – FC = BF
Por tanto, el cuadrilátero BFDE es paralelogramo (pues tiene dos lados opuestos paralelos y congruentes).

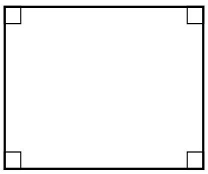
R 1. a) BA = AD, BC = CD. No
b) AB = DC, AD = BC. Sí, demostrada en clase 2.4.
c) ∢DAB = ∢BCD, ∢ABC = ∢CDA; sí, demostrada en clase 2.5.

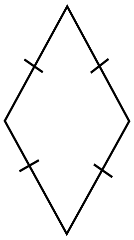
Tarea: página 138 del Cuaderno de Ejercicios.

2.7 Características del rectángulo y el rombo

P

Demuestra que un rectángulo y un rombo son paralelogramos. Utiliza las condiciones establecidas en la clase anterior.





Definición de un rectángulo: Es el cuadrilátero que tiene sus cuatro ángulos rectos congruentes.

Definición de rombo: Es el cuadrilátero que tiene sus cuatro lados congruentes.

S

- Rectángulo: tiene dos pares de ángulos opuestos congruentes, por la condición 3, es un paralelogramo.
- Rombo: tiene dos pares de lados opuestos congruentes, por la condición 2, es un paralelogramo.

C

El rectángulo es un paralelogramo por sus ángulos y por sus lados, el rombo también lo es.

E

Demuestra los siguientes resultados sobre las diagonales del rombo y el rectángulo.

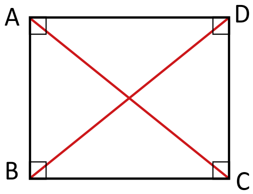
a) Las diagonales de un rectángulo son iguales.
b) Las diagonales de un rombo se intersecan perpendicularmente.

Para demostrar que AC = DB, es suficiente demostrar que $\Delta ABC \cong \Delta DCB$.

1. Trazando las diagonales AC y DB en el rectángulo ABCD.

   Entonces $\Delta ABC \cong \Delta DCB$ (por criterio LAL, AB = DC, BC es común y $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DCB = 90°$).

   Por lo tanto, AC = BD (por la congruencia).



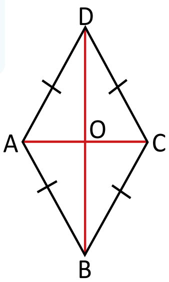
2. Trazando las diagonales AC y BD en el rombo ABCD y llamando O al punto donde se intersecan.

   Entonces, ΔACD es isósceles (por ser rombo DA = DC).

   Para demostrar que $BD \perp AC$, es suficiente demostrar que DO es la altura de ΔACD.

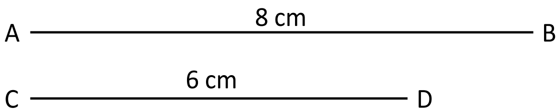
   Luego, DO es mediatriz de ΔACD (por ser paralelogramo las diagonales se intersecan en el punto medio).

   Por lo tanto, $DB \perp AC$ (porque en un triángulo isósceles coincide la bisectriz con la mediatriz, según la clase 1.3).



1. Demuestra que un cuadrilátero cuyas diagonales son congruentes y se cortan en el punto medio, es un rectángulo.

2. Construye un rombo cuyas diagonales sean congruentes con los segmentos AB y CD.



Indicador de logro

2.7 Caracteriza un rectángulo y un rombo.

Secuencia

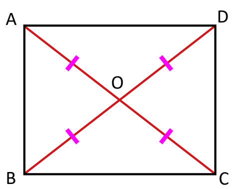
En la lección 2 de esta unidad, se han demostrado las propiedades de los paralelogramos y se han establecido las condiciones necesarias y suficientes para que un cuadrilátero sea paralelogramo; en esta clase, se demostrará que un rombo y un rectángulo también son paralelogramos utilizando las condiciones de la clase anterior.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizar las condiciones necesarias y suficientes para que un cuadrilátero sea paralelogramo para demostrar que el rombo y el rectángulo son paralelogramos.

Ⓡ En el numeral 1, utilizar la congruencia de triángulos para demostrar que si las diagonales son congruentes y se cortan en el punto medio, entonces es un rectángulo; mientras que en el numeral 2, es únicamente una construcción con regla y/o compás.

Solución de algunos ítems:

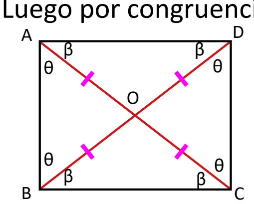
1. 

AC = BD; AO = CO y BO = DO; por hipótesis ... (1)

$\measuredangle$COD = $\measuredangle$AOB y $\measuredangle$BOC = $\measuredangle$DOA; por ser opuestos por el vértice ... (2)

Entonces, $\Delta AOB \cong \Delta COD$ y
$\Delta BOC \cong \Delta DOA$ y son isósceles; por criterio LAL, de (1) y (2).

Luego por congruencia de triángulos se tiene que:

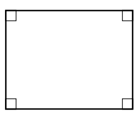


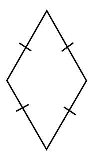
$$4\theta + 4\beta = 360°$$
$$\theta + \beta = 90°$$

Por tanto, el cuadrilátero ABCD es un rectángulo.

Fecha: **U6 2.7**

Ⓟ Demuestra que un rectángulo y un rombo son paralelogramos.

Ⓢ  **Rectángulo:** tiene dos pares de ángulos opuestos congruentes, por la condición 3, es un paralelogramo.

 **Rombo:** tiene dos pares de lados opuestos congruentes, por la condición 2, es un paralelogramo.

Ⓔ Demuestra:
a) Las diagonales de un rectángulo son iguales.
b) Las diagonales de un rombo se intersecan perpendicularmente.

1. Trazando AC y DB en el rectángulo ABCD.
   Entonces, $\Delta ABC \cong \Delta DCB$, por LAL
   Por lo tanto, AC = BD. (Por la congruencia).

2. Sea O el punto donde se intersecan las diagonales. Entonces, ΔACD es isósceles. (Por ser rombo DA = DC).

Luego, DO es mediatriz de ΔACD.

Por lo tanto, DB⊥AC (porque en un triángulo isósceles coincide la bisectriz con la mediana y la altura).

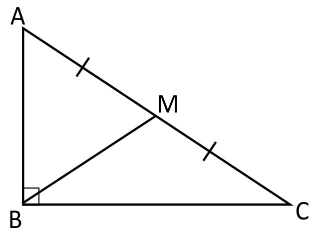
Ⓡ Copiar la solución del apartado "resolución de ítems".

Tarea: página 139 del Cuaderno de Ejercicios.

2.8 Aplicación de las características de las diagonales de un rectángulo

P

Dado el triángulo rectángulo ABC, donde se establece el punto medio de la hipotenusa AC como el punto M, demuestra que MA = MB = MC.



Recuerda que en un rectángulo las diagonales se intersecan en su punto medio.

S

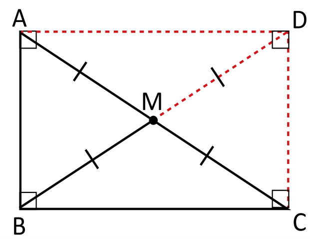
Construyendo un rectángulo ABCD de lados AB y BC; y diagonales AC y BD, que se intersecan en el punto medio, por ser paralelogramo M.

BM = $\frac{1}{2}$ BD (por ser diagonal del paralelogramo ABCD) . . . (1)

MA = MC = $\frac{1}{2}$ AC (por ser diagonal del paralelogramo ABCD) . . . (2)

Además AC = BD (ABCD es un rectángulo) . . . (3)

Por lo tanto, MA = MB = MC (de (1), (2) y (3)).



C

En todo triángulo rectángulo, el segmento que une el vértice opuesto a la hipotenusa con el punto medio de esta, tiene una longitud congruente a la mitad de la longitud de la hipotenusa.

E

¿El cuadrado es un paralelogramo?
Dado que el cuadrado tiene 4 lados congruentes entonces, los lados opuestos son congruentes y por tanto el cuadrado es paralelogramo.

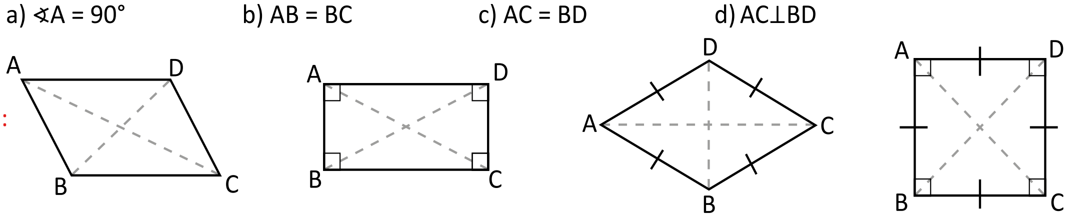
Recuerda que el cuadrado es el cuadrilátero que tiene cuatro ángulos rectos y 4 lados congruentes.

1. ¿Cuáles son las condiciones que se deben adicionar para que un paralelogramo sea rectángulo, rombo o cuadrado? Escoge del literal **a** al literal **d** las condiciones correspondientes.

a) ∢A = 90° b) AB = BC c) AC = BD d) AC⊥BD

Rectángulo: a) o c)

Rombo: b) o d)

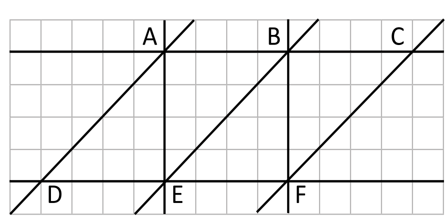


Paralelogramo Rectángulo Rombo Cuadrado

Cuadrado:
a) y b)
a) y d)
c) y b)
c) y d)

2. En la siguiente figura identifica los paralelogramos que se forman, luego clasificalos según sean rectángulos, cuadrados, rombos, o solamente paralelogramos.

ADEB, paralelogramo
BEFC, paralelogramo
ADFC, paralelogramo
AEFB, cuadrado



Indicador de logro

2.9 Utiliza las características de las diagonales de un rectángulo para demostrar relaciones con elementos de un triángulo rectángulo.

Secuencia

En la clase anterior se demostraron algunas características de los triángulos rectángulos; ahora se demostrará que el segmento que une el vértice opuesto a la hipotenusa con el punto medio de ella, es congruente con la mitad de la longitud de la hipotenusa.

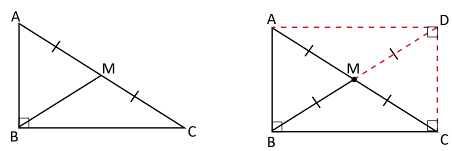
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Demostrar una de las propiedades de los triángulos rectángulos, tomando como recurso la construcción de un rectángulo y las características de sus diagonales.

Ⓡ Identificar las condiciones que debe cumplir un cuadrilátero para ser rectángulo, rombo o cuadrado, considerando los recursos dados.

Fecha: **U6 2.8**

Ⓟ Dado el triángulo rectángulo ABC, donde se establece el punto medio de la hipotenusa AC como el punto M, demuestra que MA = MB = MC.



Ⓢ Construyendo un rectángulo ABCD de lados AB y BC; y diagonales AC y BD.

BM = $\frac{1}{2}$ BD. (Por ser diagonal del paralelogramo ABCD) ... (1)

MA = MC = $\frac{1}{2}$ AC. (Por ser diagonal del paralelogramo ABCD) ... (2)

Además AC = BD. (ABCD es un rectángulo) . . . (3)

Por lo tanto, MA = MB = MC. De (1), (2) y (3).

Ⓔ Dado que el cuadrado tiene 4 lados congruentes, entonces los lados opuestos son congruentes y por tanto el cuadrado es paralelogramo.

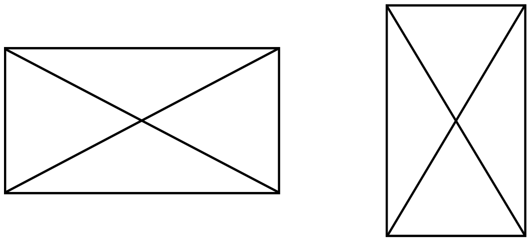
Ⓡ 1. Rectángulo: a) o c)
Rombo: b) o d)
Cuadrado: a) y b)
a) y d)
c) y b)
c) y d)

Tarea: página 140 del Cuaderno de Ejercicios.

2.9 Recíproco de características de rectángulos

P

¿Habrán cuadriláteros que tengan las diagonales congruentes pero no sean rectángulos?



Piensa en el recíproco de "en un rectángulo las diagonales son iguales".

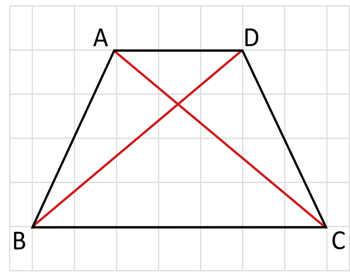
El trapecio es un cuadrilátero que tiene solo un par de lados paralelos.

S

Tomando un trapecio isósceles (AB = DC y AD ∥ BC).
Se puede demostrar que $\Delta ABC \cong \Delta DCB$ para determinar que AC = DB.

Por lo tanto, la respuesta es sí, hay otros cuadriláteros cuyas diagonales son congruentes; los trapecios son un ejemplo.

Esto significa que si en un cuadrilátero las diagonales son congruentes, no significa que el cuadrilátero es rectángulo, puede ser otro tipo de cuadrilátero.



C

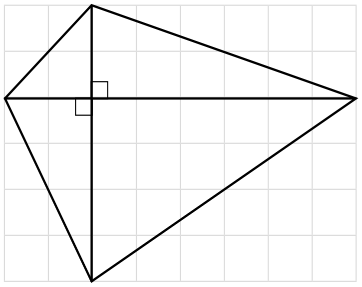
El recíproco del enunciado "en un rectángulo las diagonales son iguales", es decir, "si las diagonales de un cuadrilátero son iguales, entonces es un rectángulo", no se cumple, por el contraejemplo propuesto.

Para demostrar la veracidad del recíproco del teorema, en este caso, se utilizó un **contraejemplo**.

En este caso como no se cumple, también se puede decir que ser rectángulo es una condición **suficiente** para que las diagonales sean congruentes, pero **no es necesaria.**

E

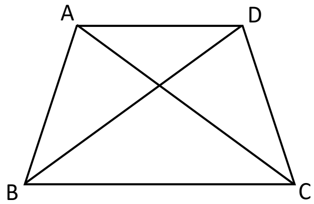
¿Un cuadrilátero cuyas diagonales se intersecan perperdicularmente, es un rombo?



Esto no es cierto ya que el cuadrilátero mostrado tiene sus diagonales perpendiculares, pero no es un rombo, ya que sus lados son desiguales.

Este enunciado es el recíproco de "en un rombo las diagonales se intersecan perperdicularmente".

1. Demuestra que las diagonales de un trapecio isósceles que no es un paralelogramo son congruentes.



2. Demuestra que un cuadrilátero cuyas diagonales son perpendiculares y se cortan en el punto medio es un rombo.

Indicador de logro

2.9 Analiza la veracidad del recíproco de las características de los rectángulos.

Secuencia

En la clase 2.7, se demostró que un rectángulo tiene sus diagonales congruentes y se cortan en el punto medio; en esta clase se demuestra que si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes, no siempre es un rectángulo.

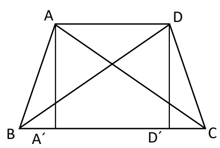
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Demostrar que el recíproco de “en un rectángulo las diagonales son iguales”, no se cumple, mediante la presentación de un contraejemplo.

Ⓔ En el numeral 1, demostrar que las diagonales de un trapecio isósceles son congruentes, este es el contraejemplo usado en el Problema inicial; mientras que en el numeral 2, demostrar la relación que existe entre las diagonales de un rombo.

Solución de algunos ítems:

1.



Se trazan dos alturas AA´ = DD´ ... (1)
AB = DC; por hipótesis ... (2)
∢AA´B = ∢DD´C = 90°.

Entonces, ΔAA´B ≅ ΔDD´C; por tener la hipotenusa y un cateto igual.

∢ABC = ∢DCB; por definición de congruencia ... (3)
BC = CB; por ser el mismo ... (4)

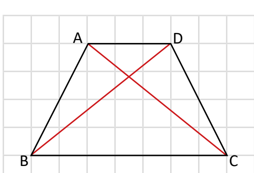
De donde se concluye que AC = BD por definición de congruencia.

Fecha: **U6 2.9**

Ⓟ ¿Habrán cuadriláteros que tengan las diagonales congruentes pero que no sean rectángulos?

Ⓢ Tomando un trapecio isósceles (AB = DC y AD ∥ BC).

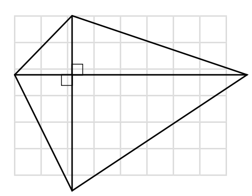
Se puede demostrar que ΔABC ≅ ΔDCB para determinar que AC = DB.



Por lo tanto, la respuesta es sí, hay otros cuadriláteros cuyas diagonales son congruentes; los trapecios son un ejemplo.

Esto significa que si en un cuadrilátero las diagonales son congruentes no siempre es rectángulo.

Ⓔ



Esto no siempre es cierto, por ejemplo el cuadrilátero mostrado tiene sus diagonales perpendiculares, y no es un rombo.

Ⓡ 1. La demostración está en la columna de solución de algunos ítems.

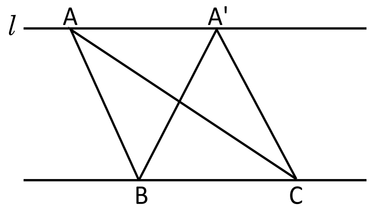
Tarea: página 141 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 2

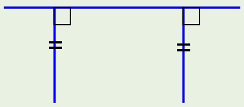
2.10 Relación entre líneas paralelas y áreas

P

En la siguiente figura, la línea l y BC son paralelas, explica por qué los triángulos ABC, A'BC, tienen la misma área.

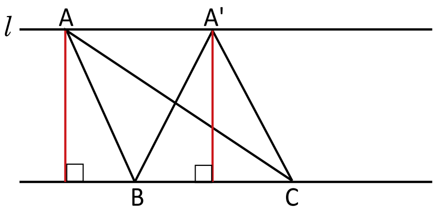


En un par de líneas paralelas, las líneas perpendiculares trazadas desde dos puntos de una línea paralela a la otra, tienen la misma longitud.



S

Observa en la figura los triángulos ABC y A'BC, tienen como base el segmento BC, y uno de sus vértices en recta l paralela a la base BC.



Estos triángulos tienen la misma base y al determinar la altura a cada uno de ellos, las dos son congruentes, dado que están entre dos rectas paralelas.

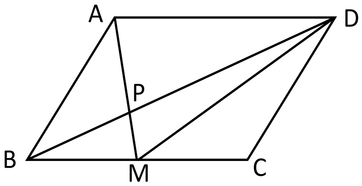
Por tanto, el área de los dos triángulos es igual.

C

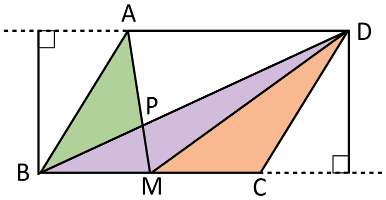
Cuando se tienen dos rectas paralelas, los segmentos perpendiculares trazados de una recta a otra, tienen igual longitud.

E

ABCD es un paralelogramo; M es el punto medio del segmento BC, P el punto de intersección del segmento BD y AM. Establece cuáles son los triángulos que tienen la misma área.

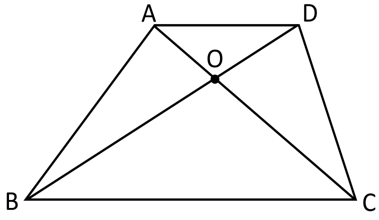


Los triángulos ABM, DBM y DMC son algunos de los que tienen igual área, además de los triángulos ABD, AMD y BDC; dado que tienen la misma base y la misma altura, dada la propiedad que entre líneas paralelas los segmentos perpendiculares tienen la misma longitud.



También se puede decir que las áreas de los triángulos ABP y DMP son iguales, puesto que las áreas de ABM y DBM son iguales y se les está restando la misma porción de área a ambos (MPB).

Si se establece como punto O la intersección de diagonales en el trapecio ABCD con AD∥BC, demuestra que las áreas de los triángulos AOB y DOC son iguales.



Unidad 6

137

Indicador de logro

2.10 Determina la relación entre los segmentos perpendiculares trazados entre rectas paralelas.

Secuencia

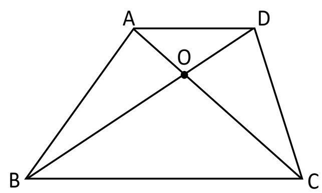
En las clases anteriores se ha trabajado con características de los cuadriláteros; en esta clase, se establecerá la relación entre los segmentos perpendiculares trazados entre dos rectas paralelas, tomando como recurso el área de dos triángulos de igual base y altura.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Demostrar que los segmentos perpendiculares trazados entre dos rectas paralelas tienen igual longitud.

Ⓔ Demostrar que las áreas de dos triángulos son iguales, utilizando como recurso el resultado de esta clase y el de la anterior.

Solución de algunos ítems:



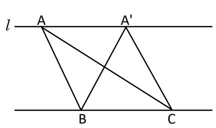
Los triángulos ABC y DCB tienen igual área porque tienen igual base y altura.

(ΔABC) = (ΔAOB) + (ΔOCB) ... (1)
(ΔDCB) = (ΔDOC) + ΔOCB ... (2)

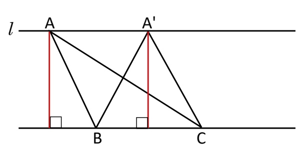
Como ΔABC y ΔDCB tienen igual área, entonces de (1) y (2) se obtiene que los triángulos AOB y DOC tienen igual área.

Fecha: **U6 2.10**

Ⓟ En la siguiente figura las líneas l y BC son paralelas, explica por qué los triángulos ABC, A'BC, tienen la misma área.



Ⓢ



Observa en la figura los triángulos ABC y A'BC, tienen como base el segmento BC, y uno de sus vértices en recta l paralela a la base BC.

Tienen igual base y alturas congruentes, por tanto, el área de los dos triángulos es igual.

Ⓔ Los triángulos ABM, DBM, DMC son algunos de los que tienen igual área, además de los triángulos ABD, AMD, BDC; dado que tienen la misma base y la misma altura.

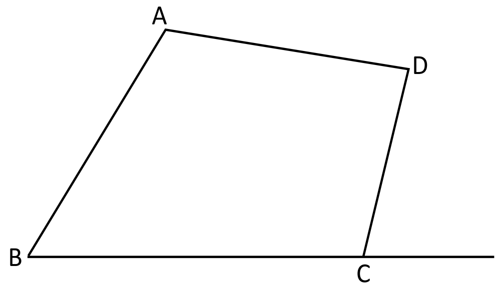
Ⓡ La demostración está en la columna de solución de algunos ítems.

Tarea: página 142 del Cuaderno de Ejercicios.

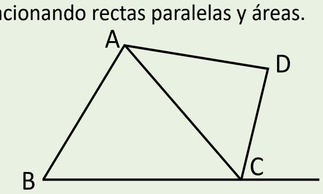
2.11 Aplicación de la relación entre líneas paralelas y áreas

P

En el cuadrilátero ABCD que se muestra a continuación, en la prolongación del segmento BC, se ubica el punto E, se forma el triángulo ABE, de tal manera que el ΔABE tenga la misma área que el cuadrilátero ABCD, ¿dónde se debe colocar el punto E?



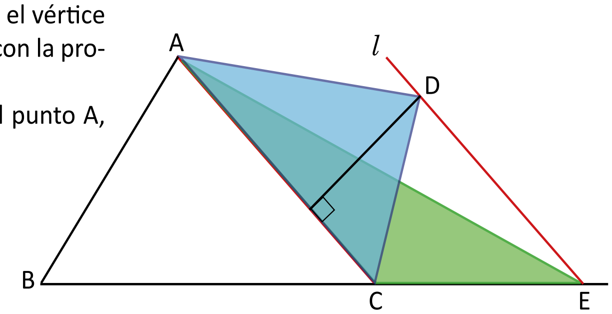
Puedes intentar encontrar el triángulo que tenga la misma área que el triángulo ACD, relacionando rectas paralelas y áreas.



S

Para elaborar el ΔABE que tenga la misma área que el cuadrilátero ABCD, puedes seguir los pasos:

1. Trazar la diagonal AC.
2. Trazar la paralela l, al lado AC y que pase por el vértice D, establecer el punto E donde se intersecta con la prolongación al lado BC.
3. Construir el ΔABE trazando un segmento del punto A, al punto E.



Con esta construcción se tiene que área de ΔDAC = área de ΔEAC (por estar entre paralelas y tener base común).

Área del cuadrilátero ABCD = área de ΔABC + área de ΔDAC.
Área de ΔABE = área de ΔABC + área de ΔEAC.

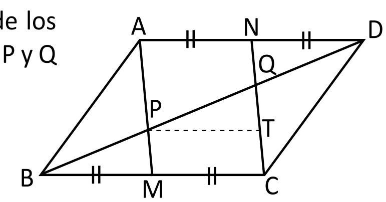
Por lo tanto, área de ΔABE = área del cuadrilátero ABCD (área de ΔDAC = área de ΔEAC).

C

Los triángulos con base común tienen igual área si la recta que une los vértices opuestos a la base, es paralela a la base.

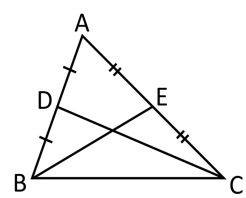
1. En un paralelogramo ABCD se ubican los puntos medios M y N de los lados BC y AD, el segmento BD intersecta a AM y CN en los puntos P y Q respectivamente, si BQ = 12, calcula la longitud de QD.

   Puedes establecer el punto T de modo que PT sea paralelo a MC.



2. En el triángulo ABC los puntos medios de los lados AB y AC se establecen como D y E respectivamente, se traza el segmento DE paralelo a BC y DE = $\frac{1}{2}$BC. Demuestra:

   a) El área de los triángulos DBE, ADE, DCE es igual.
   b) Dos veces el área del triángulo DBE es igual al área del triángulo ABE e igual al triángulo EBC.



Indicador de logro

2.11 Resuelve problemas de triángulos y paralelogramos aplicando la relación entre rectas paralelas y áreas.

Secuencia

Ya se ha demostrado que los triángulos que se forman entre dos paralelas y que tienen igual base, tienen igual área; en esta clase, se utilizará el resultado de la clase anterior para encontrar un triángulo que tenga igual área que un cuadrilátero dado, realizando trazos auxiliares.

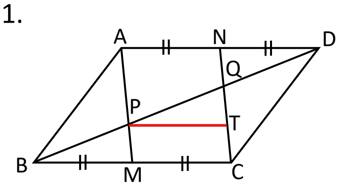
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Demostrar que existe un triángulo de igual área al cuadrilátero dado, construyendo trazos auxiliares, que permitan utilizar el resultado de la clase anterior.

Ⓡ En el numeral 1, utilizar lo aprendido sobre ángulos y triángulos para determinar la medida del segmento indicado.

Solución de algunos ítems:

1.



BM = MC, por hipótesis y MC = PT, por construcción, por tanto BM = PT ... (1)
∢PBM = ∢QPT; por ser correspondientes entre paralelas ... (2)

∢BMP = ∢MCT y ∢MCT = ∢PTQ; por ser correspondientes entre paralelas, entonces ∢BMP = ∢PTQ ... (3)
Entonces, ΔBMP ≅ ΔPTQ; por ALA de (1), (2) y (3).

Por tanto, BP = PQ de donde se tiene que cada uno mide 6 ... (4)
ΔABM ≅ ΔCDN; por LLL, pues
AB = CD, AM = CN y BM = DN ... (5)

Entonces ∢BMP = ∢DNQ, definición de congruencia ... (6)
Además ∢PBM = ∢NDQ, por ser alternos internos entre paralelas ... (7)

Entonces, ΔBMP ≅ ΔDNQ; por ALA de (5), (6) y (7).

Por tanto, BP = QD = 6, por definición de congruencia.

Fecha: **U6 2.11**

Ⓟ En el cuadrilátero, en la prolongación del segmento BC, se ubica el punto E, se forma el triángulo ABE, de tal manera que el ΔABE tenga la misma área que el cuadrilátero ABCD, ¿dónde se debe colocar el punto E?

Ⓢ **Observación:** Ver imágenes en LT.

1. Trazar la diagonal AC.
2. Se traza la paralela l, al lado AC y que pase por el vértice D, establecer el punto E donde se interseca con la prolongación al lado BC.
3. Construir el ΔABE trazando un segmento del punto A, al punto E.

Área de ΔDAC = Área de ΔEAC, (por estar entre paralelas y tener base común).

Área del cuadrilátero ABCD = Área de ΔABC + Área de ΔDAC.

Área de ΔABE = Área de ΔABC + Área de ΔEAC.

Ⓡ Por lo tanto, Área de ΔABE = Área del cuadrilátero ABCD (Área de ΔDAC = Área de ΔEAC).

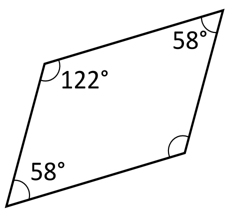
1. BP = QD = 6, (ver resultado completo en solución del primer ítem).

Tarea: página 143 del Cuaderno de Ejercicios.

2.12 Practica lo aprendido

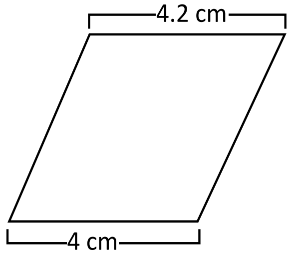
1. ¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros pueden ser paralelogramos? Menciona qué condición aprendida en la clase 6 de esta lección se aplica.

Paralelogramo



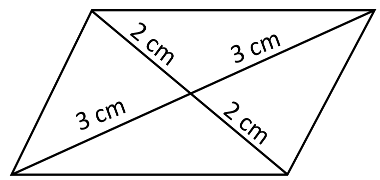
Dos ángulos consecutivos son suplementarios.

No es paralelogramo



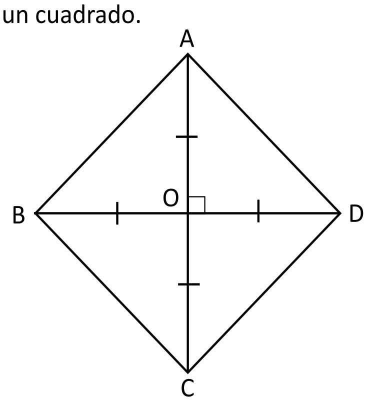
Dos lados opuestos no son congruentes.

Paralelogramo

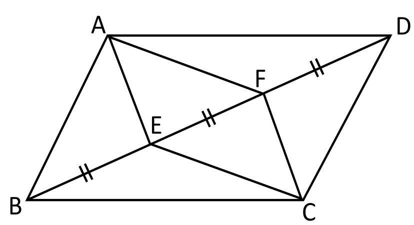


Las diagonales se intersecan en el punto medio.

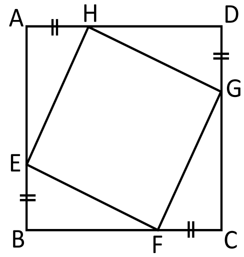
2. Demuestra que, si en un cuadrilátero las diagonales son perpendiculares congruentes y se cortan en el punto medio, entonces este es un cuadrado.



3. En el dibujo los puntos E y F están en la diagonal BD del paralelogramo ABCD y BE = EF = FD. Demuestra que el cuadrilátero AECF es un paralelogramo.



4. ABCD es un cuadrado y los lados señalados son congruentes. Demuestra que EFGH también es un cuadrado.



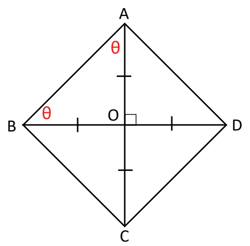
Unidad 6

Indicador de logro

2.13 Resuelve problemas utilizando características y teoremas de triángulos y paralelogramos.

Solución de algunos ítems:

2.



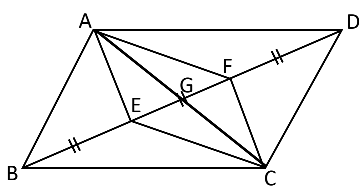
DO = BO y AO lo comparten.
$\measuredangle BOA = \measuredangle DOA = 90°$.
Entonces $\Delta BOA \cong \Delta DOA$, por criterio LAL.
Por tanto, AB = DA (definición de congruencia) ... (1)

AO = CO y DO lo comparten.
$\measuredangle DOC = \measuredangle DOA = 90°$.
Entonces $\Delta DOC \cong \Delta DOA$, por criterio LAL.
Por tanto, CD = DA (definición de congruencia) ... (2)
BO = DO y CO lo comparten.
$\measuredangle BOC = \measuredangle DOC = 90°$.

Entonces $\Delta BOC \cong \Delta DOC$, por criterio LAL.
Por tanto, BC = CD (definición de congruencia) ... (3)
AB = CD = BC = DA; por (1), (2) y (3).

Como los 4 triángulos BOA, DOA, DOC y BOC son congruentes isósceles, entonces se cumple que
$8\theta = 180°(4 - 2)$.
$8\theta = 360°$, de donde $\theta = 45°$; luego
$\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C = \measuredangle D = 90° = 2\theta$.

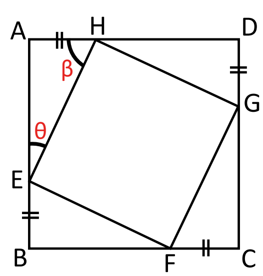
3.



Sea G el punto de intersección de AC y BD,
AG = CG y EG = BG − BE = DG − DF = FG por características de las diagonales del paralelogramo.

Por lo tanto, el cuadrilátero AECF, es un paralelogramo.

4.

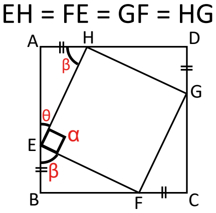


DA = AB
DH + HA = AE + EB; pero HA = EB.
Entonces DH = AE ... (1)
DA = BC
DH + HA = BF + FC; pero HA = FC.

Entonces DH = BF ... (2)
CD = DA
CG + GD = DH + HA; pero GD = HA.
Entonces CG = DH ... (3)
AE = DH = BF = CG; por (1), (2) y (3).
Entonces $\Delta AHE \cong \Delta BEF \cong \Delta CFG \cong \Delta DGH$, por LAL.

De donde se tiene EH = FE = GF = HG.

$\theta + \beta = 90°$
$\theta + \beta + \alpha = 180°$
$\alpha = 90°$



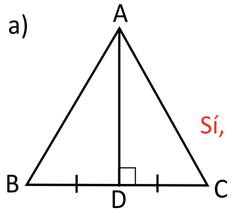
Por tanto, el cuadrilátero EFGH es un cuadrado, pues tiene sus lados iguales y sus ángulos miden 90°.

Tarea: página 144 del Cuaderno de Ejercicios.

2.13 Practica lo aprendido

1. Según la información mostrada, determina si los triángulos indicados son congruentes o no. Explica tu respuesta.

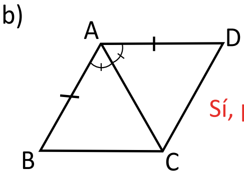
a)



Sí, por criterio LAL.

ΔABD y ΔACD

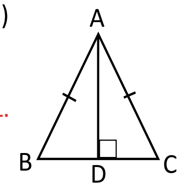
b)



Sí, por criterio LAL.

ΔABC y ΔACD

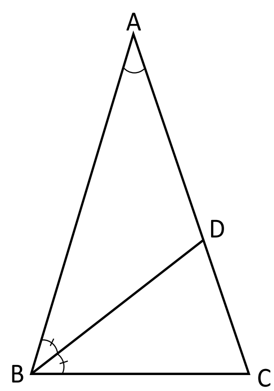
c)



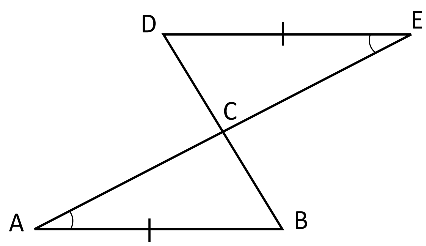
ΔABD y ΔACD

Sí, es triángulo rectángulo y tiene un cateto y la hipotenusa iguales.

2. En el ΔABC, AB = AC y ∢CAB=36°. DB es la bisectriz del ∢ABC que corta el lado AC en el punto D. Demuestra que BC = BD = DA.

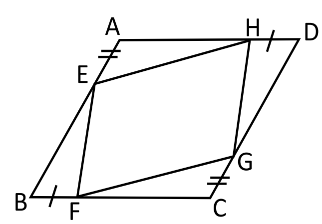


3. En la siguiente figura DE = AB y ∢DEC= ∢BAC, demuestra que AD = BE.



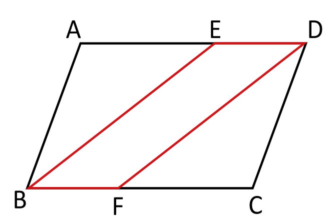
4. Se toman 4 puntos E, F, G y H en los cuatro lados AB, BC, CD y DA del paralelogramo ABCD respectivamente, de modo que AE = CG y BF = DH. Demuestra que el cuadrilátero EFGH es un paralelogramo.

   [Sugerencia: Observa que AH = CF, deduce que ΔAEH ≅ ΔCGF]



5. En la figura el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, se tiene que BE y DF son bisectrices de ∢ABC y ∢CDA, respectivamente.

   Demuestra que BE ∥ DF. Utiliza la condición 3 de los paralelogramos.



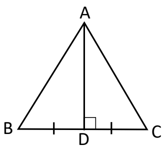
Indicador de logro

2.13 Resuelve problemas utilizando características y teoremas de triángulos y paralelogramos.

Solución de algunos ítems:

1.

a)

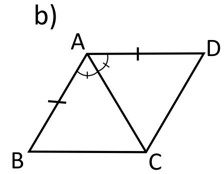


$\sphericalangle CDA = \sphericalangle BDA = 90^\circ$

BD = CD y AD lo comparten.

Entonces $\Delta CDA \cong \Delta BDA$, por criterio LAL.

b)

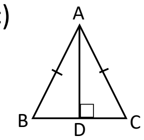


$\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC$

AB = DA y AC lo comparten.

Entonces $\Delta BAC \cong \Delta DAC$, por criterio LAL.

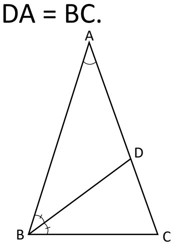
c)



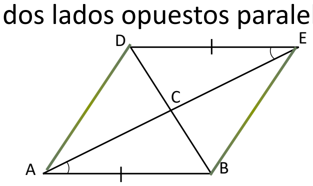
AB = AC y AD lo comparten.

Entonces $\Delta DAB \cong \Delta DAC$, por tener la hipotenusa y un cateto igual.

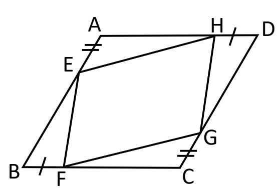
2. Como AB = AC, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$. $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB = 180^\circ - \sphericalangle A = 144^\circ$; entonces $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = 72^\circ$ y $\sphericalangle ABD = 36^\circ = \sphericalangle A$, por propiedad de bisectriz, luego BD = DA ... (1)
   Además $\sphericalangle BDC = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ = \sphericalangle BCD$, de donde se obtiene que BD = BC ... (2)
   Por tanto, BD = DA = BC.



3. Como $\sphericalangle DEC = \sphericalangle BAC$, DE ∥ AB; además DE = AB.
   Por tanto, el cuadrilátero ABED, es un paralelogramo, tiene dos lados opuestos paralelos e iguales.

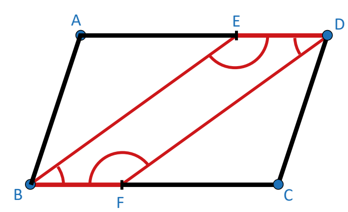


4. AD = BC, por ser lados opuestos del paralelogramo; entonces AH = AD − HD = BC − FB = CF.
   AE = CG por hipótesis y $\sphericalangle A = \sphericalangle C$, por ser ángulos opuestos del paralelogramo.
   De donde se tiene que $\Delta AEH \cong \Delta CGF$.
   Por tanto, el cuadrilátero EFGH es un paralelogramo.



Tarea: página 145 del Cuaderno de Ejercicios.

5.



$\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA$, por ser ángulos opuestos del paralelogramo.

Como BE y DF son bisectrices de $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA$, se tiene que
$\sphericalangle ABE = \sphericalangle EBC = \sphericalangle ADF = \sphericalangle CDF$ ... (1)

AB = CD por lados opuestos del paralelogramo ... (2)
Entonces $\Delta ABE \cong \Delta CDF$, por criterio ALA.

De donde se tiene $\sphericalangle AEB = \sphericalangle CFD$, por definición de congruencia de triángulos ... (3)
$\sphericalangle AEB + \sphericalangle BED = 180^\circ$ y
$\sphericalangle CFD + \sphericalangle DFB = 180^\circ$; entonces
$\sphericalangle AEB + \sphericalangle BED = \sphericalangle CFD + \sphericalangle DFB$.
Al utilizar (3), se tiene $\sphericalangle BED = \sphericalangle DFB$ ... (4)

El cuadrilátero BFDE es un paralelogramo; pues tiene 2 pares de ángulos opuestos iguales; de (1) y (4).

Unidad 7. Área y volumen de sólidos geométricos

Competencia de la Unidad

Utilizar el área y el volumen de cuerpos geométricos para proponer soluciones a situaciones del entorno.

Relación y desarrollo

Primero y segundo ciclo

- Construcción de ángulos usando el transportador
- Clasificación y construcción de triángulos
- Clasificación y construcción de cuadriláteros
- Clasificación de cuerpos geométricos
- Figuras simétricas
- Perímetro y área de triángulos y cuadriláteros
- Patrones de cubos y prismas rectangulares y triangulares
- Longitud de la circunferencia y área del círculo
- Longitud y área de sectores circulares notables
- Volumen del prisma
- Traslaciones, giros y simetría rotacional

Séptimo grado

Unidad 8: Figuras planas y construcción de cuerpos geométricos
- Movimiento de figuras en el plano
- Círculos, segmentos y ángulos
- Planos, cuerpos geométricos y área total de prisma, pirámide y cilindro

Octavo grado

Unidad 4: Paralelismo y ángulos de un polígono
- Suma de los ángulos internos y externos de un polígono
- Rectas paralelas y ángulos

Unidad 5: Criterios de congruencia de triángulos
- Congruencia de triángulos

Unidad 6: Características de los triángulos y cuadriláteros
- Triángulos
- Paralelogramos

Unidad 7: Área y volumen de sólidos geométricos
- Características y elementos de los sólidos geométricos
- Cálculo del volumen de sólidos geométricos
- Aplicaciones de volúmenes
- Áreas de sólidos geométricos
- Aplicaciones de áreas

Noveno grado

Unidad 5: Figuras semejantes
- Semejanza
- Semejanza de triángulos
- Semejanza y paralelismo
- Aplicación de semejanza y triángulos semejantes

Unidad 6: Teorema de Pitágoras
- Teorema de Pitágoras
- Aplicación del teorema de Pitágoras

Unidad 7: Ángulo inscrito y central
- Ángulo central e inscrito
- Aplicación de ángulos central e inscrito

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Características y elementos de los sólidos geométricos	1	1. Sólidos de revolución
	1	2. Características y elementos del cono y la esfera
2. Cálculo del volumen de sólidos geométricos	1	1. Volumen del prisma y del cilindro
	1	2. Comparación del volumen del prisma y la pirámide cuadrangular
	1	3. Volumen de la pirámide triangular
	1	4. Volumen del cono
	1	5. Volumen de la esfera
3. Aplicaciones de volúmenes	1	1. Volumen de sólidos compuestos
	2	2. Practica lo aprendido
4. Áreas de sólidos geométricos	1	1. Desarrollo del cono y longitud del arco
	1	2. Relación entre los elementos del patrón del cono
	1	3. Área superficial del cono
	1	4. Área superficial de la esfera
5. Aplicaciones de áreas	1	1. Áreas superficiales en sólidos compuestos
	2	2. Practica lo aprendido
	1	Prueba de la Unidad 7

17 horas clase + prueba de la Unidad 7

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Características y elementos de los sólidos geométricos
A partir de giros de algunas figuras planas al rededor de su eje se pueden generar los sólidos de revolución, se encuentran las características que puedan diferenciar a cada uno de estos, así como de manera particular se identifican las características y los elementos de la esfera y el cono.

Lección 2: Cálculo del volumen de sólidos geométricos
En esta lección se deduce el volumen del prisma y el cilindro por medio del apilamiento de figuras. Tomando como referencia el volumen del prisma se encuentra el de la pirámide cuadrangular. Por último se deduce el volumen del cono y de la esfera utilizando el del cilindro.

Lección 3: Aplicaciones de volúmenes
Luego de haber deducido y encontrado los volúmenes de algunos sólidos, se estudia el volumen de sólidos compuestos, y se práctica el cálculo del volumen de cada uno de los sólidos estudiados en las lecciones anteriores.

Lección 4: Áreas de sólidos geométricos
Se inicia estudiando el patrón o plano desarrollado del cono y sus elementos. Luego se calcula el área superficial del cono y de la esfera.

Lección 5: Aplicaciones de áreas
En la lección anterior se encontraron las áreas superficiales y laterales del cono y la esfera, para que en esta lección se calculen las áreas superficiales de sólidos compuestos. Además se realizarán problemas y ejercicios donde los estudiantes comprendan el algoritmo y en qué situaciones se debe utilizar.

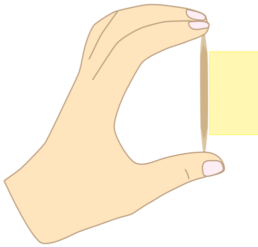
Lección 1 Características y elementos de sólidos geométricos

1.1 Sólidos de revolución

P

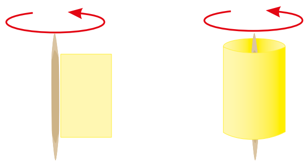
Se tiene un trozo de cartulina en forma de rectángulo, como muestra la figura.

Si se gira alrededor de un palillo de dientes, ¿qué se puede observar? ¿Se forma algún sólido geométrico que ya conoces?



S

Al doblar el rectángulo a modo que gire, se puede ver que el sólido que se forma es un cilindro.



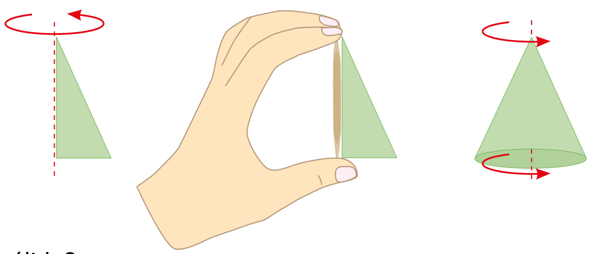
C

A los sólidos geométricos que pueden generarse girando una figura plana alrededor de un eje se les llama **sólidos de revolución**.

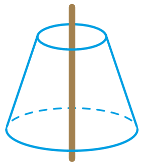
E

1. ¿Qué sólido se genera si se gira un triángulo rectángulo alrededor de un cateto?

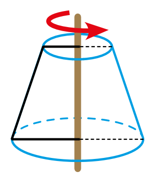
   El sólido que se forma es un cono.



2. ¿Con qué figura se ha generado el siguiente sólido?

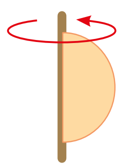


Para generar el sólido, la figura plana que se ha rotado es la mitad de un trapecio isósceles, como se puede ver a la derecha.

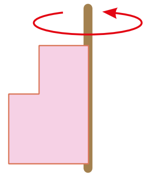


1. Dibuja el sólido que se forma al girar:

   a) Un semicírculo

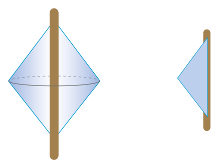


   b) Dos rectángulos

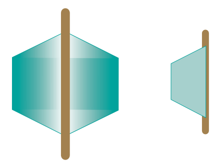


2. ¿Cuál es la figura plana que se ha girado para obtener los siguientes cuerpos geométricos?

   a)



   b)



Indicador de logro

1.1 Identifica el sólido que se genera al girar una figura plana alrededor de un eje.

Secuencia

En la Unidad 2 de cuarto grado se trabajaron las características de los sólidos mediante la observación de figuras en el entorno. Para esta clase se busca que el estudiante descubra los sólidos que se generan al hacer girar figuras planas sobre un eje.

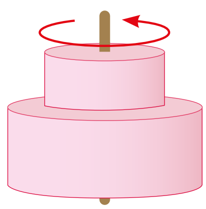
Propósito

Ⓟ, Ⓢ El estudiante debe manipular la cartulina en forma de rectángulo con el palillo de dientes y observar que al girar dicho rectángulo se generará el cilindro.

Ⓔ Se presentan dos casos en los que se puede trabajar con cartulina o simplemente deducir que al girar el triángulo rectángulo se genera el cono y para el caso del cono truncado el estudiante puede notar que solo observando un lado del eje, el sólido es generado por un trapecio isósceles.

Solución de algunos ítems:

1. b) Dos rectángulos forman dos cilindros de diferente radio.



2. a) Es un triángulo isósceles.
2. b) Es un trapecio isósceles.

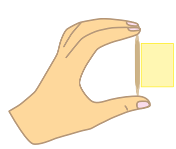
Posibles dificultades:
Para visualizar los sólidos de revolución que se generan, se necesita hacer uso del razonamiento espacial, si los estudiantes presentan muchas dificultades, el docente debe orientarles.

Materiales:
Cartulina, palillo de dientes, pegamento.

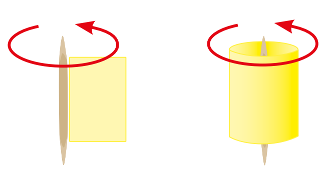
Fecha: **U7 1.1**

Ⓟ Realiza lo siguiente:
Gira alrededor del palillo el rectángulo y contesta:

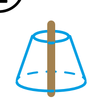
¿Qué se puede observar?
¿Se forma algún sólido que ya conoces?



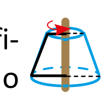
Ⓢ Al doblar el rectángulo a modo que gire, se puede ver que el sólido que se forma es un cilindro.



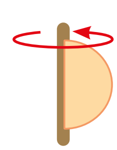
Ⓔ 2.



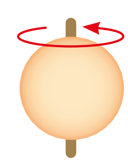
Para generar el sólido, la figura plana que se ha rotado es la mitad de un trapecio isósceles, como se puede ver a la derecha.



Ⓡ 1. a)



Es una esfera



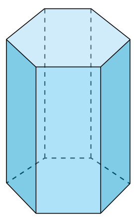
Tarea: página 148 del Cuaderno de Ejercicios.

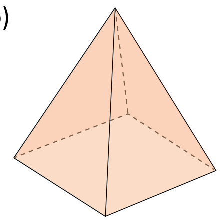
Lección 1

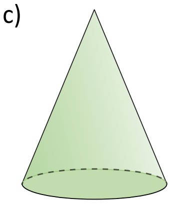
1.2 Características y elementos del cono y la esfera

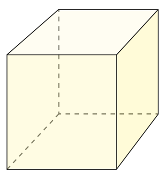
P

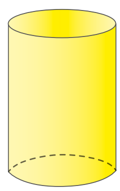
Escribe las características de los siguientes cuerpos geométricos:

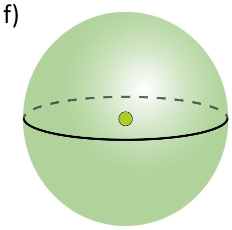
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

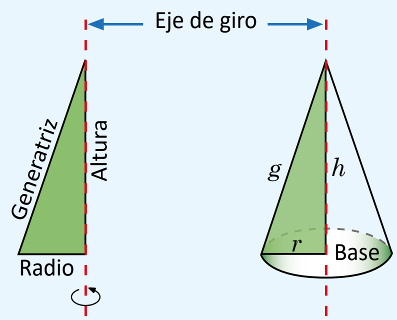
S

a) Tiene dos bases poligonales y sus caras son planas.
b) Tiene una sola base y una cúspide, además sus caras son planas.
c) Está formado por una sola cara plana círcular, un vértice y su cara lateral es curva.
d) Todas sus caras son planas y cuadradas.
e) Tiene dos bases circulares y su cara lateral es curva.
f) Es una superficie totalmente curva, no tiene caras laterales ni bases.

C

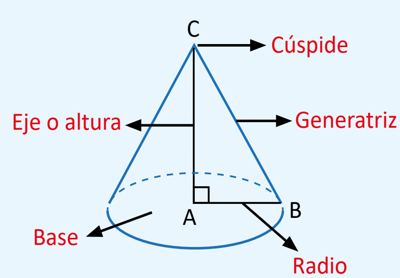
El **cono** es un sólido limitado por un círculo y por una superficie curva.

El cono puede verse como una superficie de revolución. La figura plana que se gira para generar el cono es un triángulo rectángulo y el eje de rotación es uno de los catetos del triángulo.



Los elementos que componen un cono son:

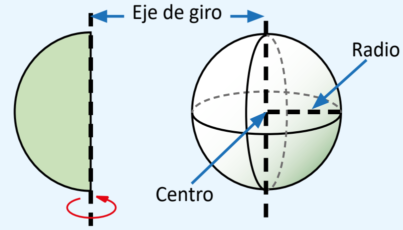
- Generatriz (g): es la línea que mediante la rotación genera el cono.
- Base: cara circular sobre la cual se apoya el cono.
- Radio (r): radio de la base.
- Vértice o cúspide.
- Altura (h): segmento que une el vértice y el centro de la base. La altura está contenida en el eje de giro.



Unidad 7

Lección 1

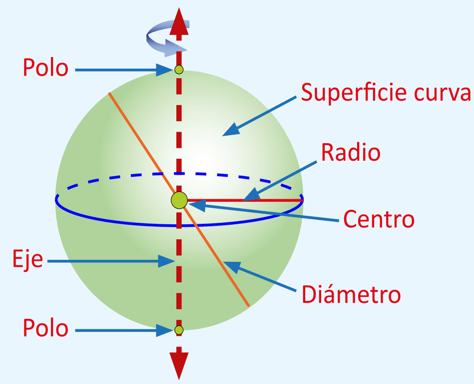
Una **esfera** es un cuerpo redondo formado por una sola superficie curva. Puede verse también como un sólido de revolución, haciendo girar un semicírculo alrededor de su diámetro.



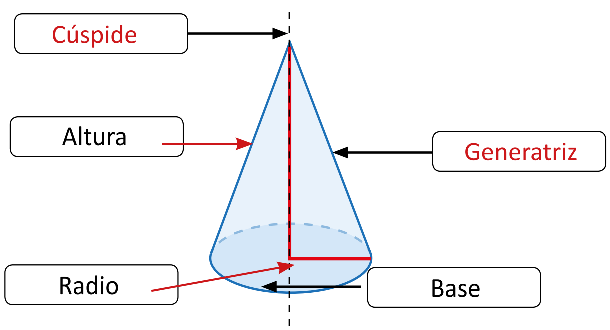
Todo punto sobre la superficie curva equidista de un punto llamado **centro**.

Los elementos de una esfera son:

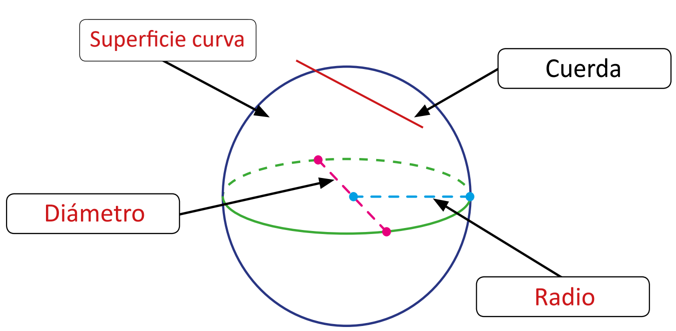
- Centro: punto interior de la esfera que equidista de cualquier punto de la esfera.
- Radio: distancia del centro a un punto cualquiera de la esfera.
- Cuerda: segmento que une dos puntos cualesquiera de la esfera.
- Diámetro: cuerda que pasa por el centro de la esfera.
- Polos: puntos donde la esfera corta al eje de rotación.



1. Dibuja en tu cuaderno los siguientes sólidos, luego escribe el nombre a los elementos que se indican con los espacios en blanco y donde sea necesario, traza una flecha para relacionar el nombre con el respectivo elemento.



2. Completa colocando los nombres de los elementos de la esfera o dibujando lo que falte, donde corresponda.



Indicador de logro

1.2 Identifica características y elementos del cono y la esfera.

Secuencia

En la Unidad 3 de tercer grado se abordó la definición de una esfera y algunos de sus elementos con objetos del entorno, en la Unidad 2 de cuarto grado fueron definidas algunas características de los conos, pirámides, prisma rectangular y cilindro, en esta clase se identificarán algunas características y elementos del cono y la esfera.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Identificar los elementos de cada una de las figuras según lo estudiado en años anteriores, para poder deducir características de cada uno de los sólidos geométricos.

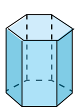
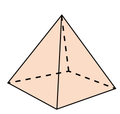
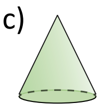
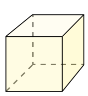
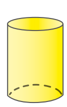
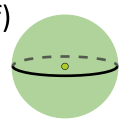
Ⓒ El estudiante leerá la conclusión junto con el docente para conocer las características y elementos del cono y la esfera, no es necesario escribirlo en la pizarra, puesto que en la parte de ejercicios ellos podrán realizar el dibujo y colocar los elementos de dichos cuerpos geométricos.

Posibles dificultades:
No recordar las características de los sólidos geométricos debido a que los estudiaron hace varios años, en tal caso el docente debe orientarles.

Materiales:
Llevar un cartel con las figuras que se presentan en el Problema inicial.

Fecha: **U7 1.2**

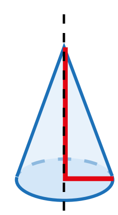
Ⓟ Escribe las características de los siguientes cuerpos geométricos.

a) 
b) 
c) 
d) 
e) 
f) 

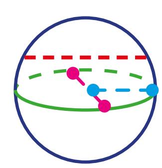
Ⓢ a) Tiene dos bases poligonales y sus caras son planas.
b) Tiene una sola base y una cúspide, además sus caras son planas.
c) Está formado por una sola cara plana circular, un vértice y su cara lateral es curva.
d) Todas sus caras son planas y cuadradas.
e) Tiene dos bases circulares y su cara lateral es curva.
f) Es una superficie totalmente curva, no tiene caras laterales ni bases.

Ⓡ

1.
- Cúspide
- Altura
- Radio
- Generatriz
- Base



- Superficie curva
- Diámetro
- Cuerda
- Radio

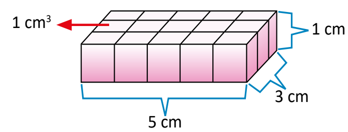


Tarea: página 149 del Cuaderno de Ejercicios.

2.1 Volumen del prisma y del cilindro

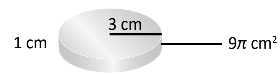
P

Observa las siguientes situaciones, luego contesta:



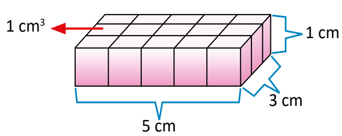
1) Con cubitos de 1 cm^3 se forma una base como se muestra:
   a) ¿Qué sólido se obtiene si se apilan 4 bloques?
   b) Deduce el volumen del sólido formado.

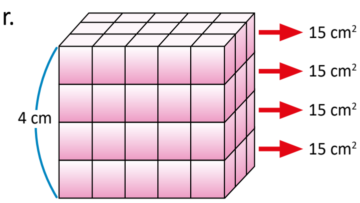
2) Se tiene un disco de radio 3 cm y altura 1 cm
   a) ¿Qué sólido se obtiene si se apilan 5 discos?
   b) Deduce el volumen del sólido formado.



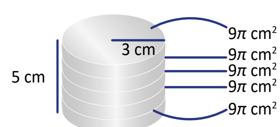
S

1. a) Se obtiene un prisma rectangular.
   b) $V = 15\ cm^2 \times 4\ cm$





2. a) Se obtiene un cilindro.
   b) $V = 9\pi\ cm^2 \times 5\ cm$



Un cilindro es un sólido limitado por dos caras circulares y por una superficie curva. La superficie curva se llama cara lateral y las dos caras circulares se llaman bases.

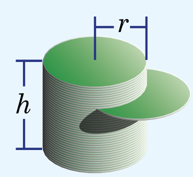
El volumen de un prima es:
V_{Prisma} = Área de base × altura

El área de un círculo de radio r está dado por la fórmula:
$A_{círculo} = \pi r^2$

C

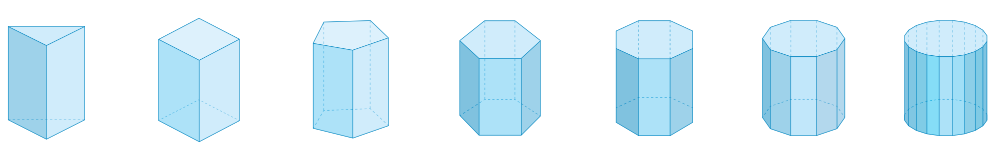
Se deduce entonces, que el volumen del cilindro se obtiene de una manera análoga al volumen de un prisma, es decir, el volumen de un cilindro es igual al producto del área de la base ($A_B = \pi r^2$) por la altura (h).

$$V_{cilindro} = A_B \times h = \pi r^2 h$$



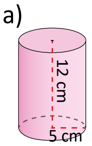
E

Observa la siguiente secuencia de cuerpos geométricos, ¿a qué figura plana se aproxima la base del prisma cuando se aumenta el número de lados?

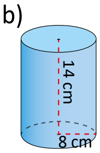


La base se aproxima a un círculo. Por tanto, el volumen del prisma se aproxima al volumen del cilindro cuando el número de lados de la base aumenta.

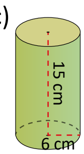
Encuentra el volumen de los siguientes sólidos utilizando el área de la base y la altura.

a)


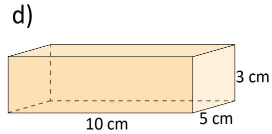
$300\pi\ cm^3$

b)


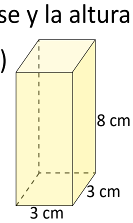
$896\pi\ cm^3$

c)


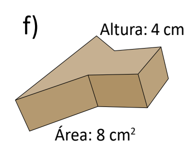
$540\pi\ cm^3$

d)


$150\ cm^3$

e)


$72\ cm^3$

f)


$32\ cm^3$

Unidad 7

145

Indicador de logro

1.3 Deduce la fórmula para el cálculo del volumen del cilindro de manera análoga al cálculo del volumen del prisma.

Secuencia

En las dos clases anteriores se trabajó con las características y elementos de algunos cuerpos geométricos, en esta ocasión se trabajará en deducir el volumen del prisma y del cilindro.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Deducir el volumen de un cilindro de manera análoga al cálculo del volumen del prisma, apilando cubos y discos con 1 cm de altura.

Ⓔ El ejemplo de esta clase es para que el estudiante observe que entre más lados tenga la base del prisma, más se acerca al volumen del cilindro.

Solución de algunos ítems:

b) $V_{cilindro} = 64\pi \text{ cm}^2 \times 14 \text{ cm}$
$V_{cilindro} = 896\pi \text{ cm}^3$

c) $V_{cilindro} = 36\pi \text{ cm}^2 \times 15 \text{ cm}$
$V_{cilindro} = 540\pi \text{ cm}^3$

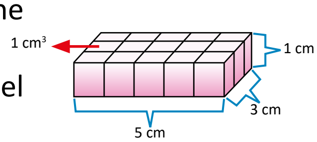
d) $V_{Prisma} = 50 \text{ cm}^2 \times 3 \text{ cm}$
$V_{Prisma} = 150 \text{ cm}^3$

Materiales:
Un cartel con las figuras del Problema inicial, fomi o cubos de madera (estos últimos dos en el caso de que se trabaje con los estudiantes con material concreto).

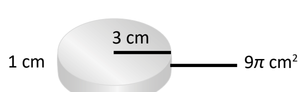
Fecha: U7 2.1

Ⓟ Observa las siguientes situaciones, luego contesta:

1. a) ¿Qué sólido se obtiene si se apilan 4 bloques?
   b) Deduce el volumen del sólido formado.



2. Se tiene un disco de radio 3 cm y altura 1 cm.
   a) ¿Qué sólido se obtiene si se apilan 5 discos?
   b) Deduce el volumen del sólido formado.



Ⓢ 1. a) Se obtiene un prisma rectangular.
b) $V = 15 \text{ cm}^2 \times 4 \text{ cm}$

2. a) Se obtiene un cilindro.
b) $V = 9\pi \text{ cm}^2 \times 5 \text{ cm}$

Ⓔ **Observación:**
Ver imágenes en el LT.

La base se aproxima a un círculo. Por tanto, el volumen del prisma se aproxima al volumen del cilindro cuando el número de lados de la base aumenta.

Ⓡ $V_{cilindro} = A_B \times h = \pi r^2 h$
$V_{cilindro} = 25\pi \text{ cm}^2 \times 12 \text{ cm}$
$V_{cilindro} = 300\pi \text{ cm}^3$

Tarea: página 150 del Cuaderno de Ejercicios.

2.2 Comparación del volumen del prisma y la pirámide cuadrangular

P

Si se tiene un prisma y una pirámide que tienen una base cuadrangular congruente e igual altura, ¿cuántas veces cabe el volumen de la pirámide en el prisma?, ¿qué se puede concluir con el resultado obtenido?

Un poliedro es un cuerpo geométrico limitado por caras planas y que encierran un volumen.

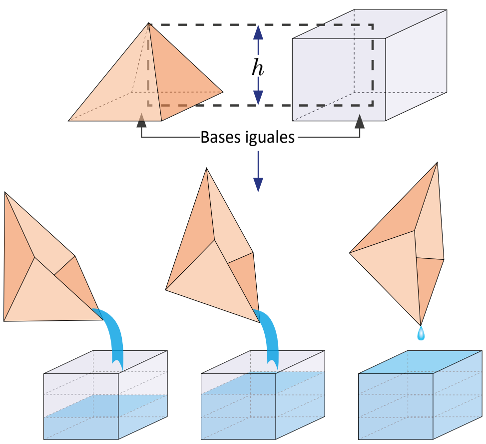
Una pirámide es un poliedro limitado por una sola base poligonal y por varias caras laterales, con forma triangular, que tienen un vértice común.

S

Para resolver la situación planteada es importante considerar que, tanto la pirámide como el prisma, están hechos de un material resistente al agua.

Para determinar cuántas veces cabe el volumen de la pirámide en el del prisma, se llena de agua la pirámide y se vierte en el prisma, se puede comprobar que este proceso se realiza 3 veces.

A partir de este resultado se concluye que el prisma tiene tres veces el volumen de la pirámide. Es decir, el volumen de la pirámide es la tercera parte del volumen del prisma.

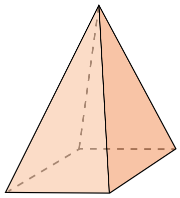


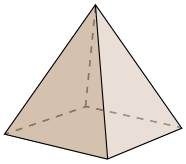
C

El volumen de la pirámide es igual a un tercio del producto del área de la base (A_B) por su altura (h):

$$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \times A_B \times h$$

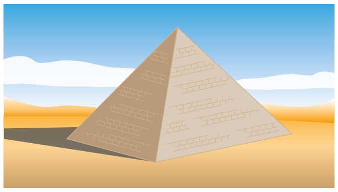
1. ¿Cuál es el volumen de una pirámide que tiene por base un cuadrado de lado 4 cm y tiene una altura de 9 cm? 48 cm^3





2. ¿Cuál es la altura de una pirámide que tiene por base un cuadrado de lado 2 cm y tiene por volumen 16 m^3? 12 cm

3. La Gran Pirámide de Giza es la única que perdura de las siete maravillas del mundo antiguo. Actualmente tiene una altura de 137 m y la base es un cuadrado de 230 m de lado. ¿Cuál es su volumen aproximado? 2 415 767 m^3



Indicador de logro

2.2 Determina la relación entre el volumen de un prisma y el de una pirámide, cuyas bases son congruentes y se utilizan para resolver problemas.

Secuencia

En la clase anterior se trabajó con el volumen de un prisma y un cilindro, realizando comparaciones entre el volumen de ambos, en esta clase se determinará la relación de los volúmenes entre el prisma y una pirámide cuando sus bases son congruentes.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Comparar el volumen de una pirámide cuadrangular con un prisma cuadrangular, que tenga base y altura congruentes, con el objetivo de verificar la relación entre volúmenes de estos cuerpos geométricos.

Ⓔ En la conclusión se obtiene la fórmula general para el volumen de una pirámide.

Solución de algunos ítems:

2. $V_{pirámide} = \frac{1}{3} \times A_B \times h$

$16\text{ cm}^3 = \frac{1}{3} \times 4\text{ cm}^2 \times h$

$16\text{ cm}^3 = \frac{4}{3}\text{ cm}^2 \times h$

$16\text{ cm} \times \frac{3}{4} = h$

$h = 12\text{ cm}$

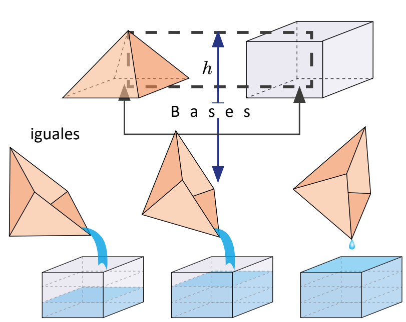
Materiales
Una pirámide y prisma cuadrangular con altura y base congruente.
Agua, arroz, maíz, maicillo, arena, etc., lo importante es ver la cantidad de veces que cabe el volumen de la pirámide cuadrangular en el prisma.

Posibles dificultades:
Para el problema 2, puede que los estudiantes tengan problemas con el despeje de la variable h, en este caso el docente debe orientarles al respecto.
Además, el problema en el Libro de texto dice que el volumen de la pirámide es 16 m^3, debe ser 16 cm^3.

Fecha: **U7 2.2**

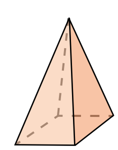
Ⓟ Si se tiene un prisma y una pirámide que tienen una base cuadrangular congruente e igual altura, ¿cuántas veces cabe el volumen de la pirámide en el prisma? ¿Qué se puede concluir con el resultado obtenido?

Ⓢ Se llena de agua la pirámide y se vierte en el prisma. A partir de este resultado se concluye que el prisma tiene tres veces el volumen de la pirámide, es decir, el volumen de la pirámide es la tercera parte del volumen del prisma.



Ⓡ

$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \times A_B \times h$



$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \times 16\text{ cm}^2 \times 9\text{ cm}$

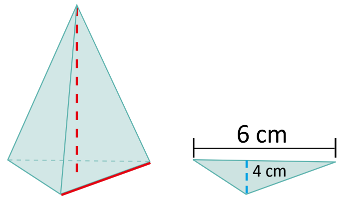
$V_{pirámide} = 48\text{ cm}^3$

Tarea: página 151 del Cuaderno de Ejercicios.

2.3 Volumen de la pirámide triangular

P

Calcula el volumen de una pirámide de base triangular, si su base tiene las dimensiones mostradas en la figura y la altura de la pirámide es 7 cm.



Observa que la base en este ejemplo es triangular.

S

Se sabe que el volumen de una pirámide es igual a $V_{pirámide} = \frac{1}{3}A_B \times h$ y como en este caso la base es un triángulo, entonces el área de la base es:

$$A_B = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = \frac{6 \times 4}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ cm}^2.$$

Luego, el volumen de la pirámide es: $V_{pirámide} = \frac{1}{3} \times 12 \times 7 = 28 \text{ cm}^3$.

C

El volumen de la pirámide triangular, se determina de manera similar al de la pirámide cuadrangular $V_{pirámide} = \frac{1}{3} \times A_B \times h$. En general, para una pirámide de base cualquiera el volumen se calcula de manera similar.

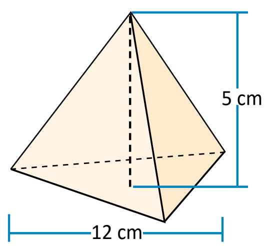
E

¿Cuál es el volumen de la pirámide mostrada si la altura del triángulo de la base es de 6 cm?

El área de la base es $A_B = \frac{1}{2} \times 12 \times 6 = \frac{12 \times 6}{2} = 36 \text{ cm}^2$.

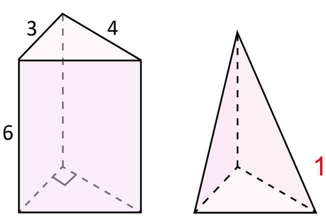
Por tanto, el volumen de la pirámide es:

$$V_{pirámide} = \frac{1}{3} A_B \times h = \frac{1}{3} \times 36 \times 5 = 60 \text{ cm}^3.$$



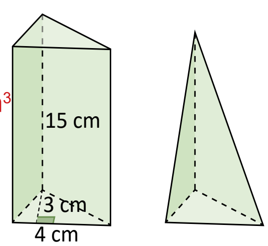
1. Para cada uno de los casos, calcula el volumen del prisma y luego el volumen de la respectiva pirámide:

a)



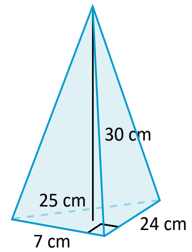
36 cm³ 12 cm³

b)



90 cm³ 30 cm³

2. Encuentra el volumen de una pirámide cuya base es 25 cm² y su altura es 9 cm.
   75 cm³
3. Encuentra el volumen de una pirámide cuyos lados del triángulo rectángulo, se muestran en la figura, y la altura de la pirámide mide 30 cm.
   840 cm³



Unidad 7

Indicador de logro

2.4 Calcula el volumen de una pirámide de base triangular utilizando la fórmula.

Secuencia

En la clase anterior se realizó la deducción del volumen de una pirámide cuadrangular, para esta clase se trabajará con la fórmula del volumen de la pirámide triangular.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Calcular el volumen de una pirámide triangular, mediante la fórmula general encontrada en la clase anterior.

Ⓔ En el ejemplo se busca que el estudiante encuentre el área de la base, comprendiendo que hay dos alturas, una de la base y la otra de la pirámide.

Solución de algunos ítems:

1. b) $A_B = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}^2$

$V_{prisma} = A_B \times h = 6 \times 15 = 90 \text{ cm}^3$

$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \times V_{prisma} = \frac{1}{3} \times 90 \text{ cm}^3$

$= 30 \text{ cm}^3$

2. $V_{pirámide} = \frac{1}{3} A_B \times h = \frac{1}{3} \times 25 \times 9$

$= 75 \text{ cm}^3$

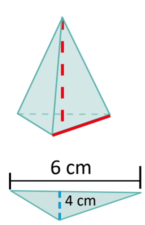
En cuanto al problema 3 de la fijación, el 25 no es un dato necesario para el cálculo del volumen indicado.

Observación:
- Es necesario aclarar que el triángulo base de la pirámide del Problema inicial es rectángulo.
- La base del triángulo es 12 cm, como se muestra en el Libro de texto.

Posibles dificultades:
En el ejemplo, es posible que los estudiantes confundan la altura de la base con la altura de la pirámide o el prisma, en ese caso pedir que revisen la figura, y señalar cuál es la base, para que no haya confusión.

Fecha: U7 2.3

P Calcula el volumen de una pirámide de base triangular, si su base tiene las dimensiones mostradas en la figura y la altura es 7 cm.



S Se encuentra primero el área de la base denominada A_B

$A_B = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = \frac{6 \times 4}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ cm}^2$

Luego, el volumen de la pirámide es:

$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \times 12 \times 7 = 28 \text{ cm}^3$

E El área de la base es:

$A_B = \frac{1}{2} \times 12 \times 6 = \frac{12 \times 6}{2}$
$= 36 \text{ cm}^2$

$V_{pirámide} = \frac{1}{3} A_B \times h$
$= \frac{1}{3} \times 36 \times 5$
$= 60 \text{ cm}^3$

R 1. a) $A_B = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}^2$

$V_{prisma} = A_B \times h = 6 \times 6 = 36 \text{ cm}^3$

$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \times V_{prisma} = \frac{1}{3} \times 36 \text{ cm}^3 = 12 \text{ cm}^3$

Tarea: página 152 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 2

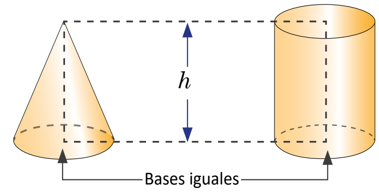
2.4 Volumen del cono

P

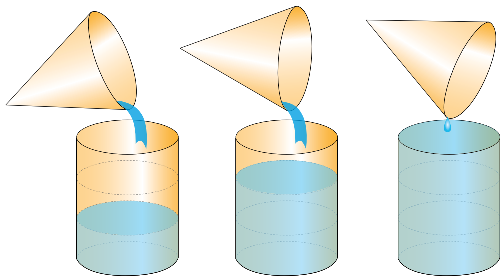
Se tiene un cilindro y un cono de bases congruentes, ¿cuántas veces cabe el volumen del cono en el cilindro?, ¿qué se puede concluir con el resultado obtenido?

S

Para resolver la situación planteada es importante considerar que tanto el cono como el cilindro están hechos de un material resistente al agua.



Para determinar cuántas veces cabe el volumen del cono en el del cilindro, se llena de agua el cono y se vierte en el cilindro, se puede comprobar que este proceso se realiza 3 veces.



A partir de este resultado se puede concluir que el cilindro tiene tres veces el volumen del cono. Es decir, el volumen del cono es la tercera parte del volumen del cilindro.

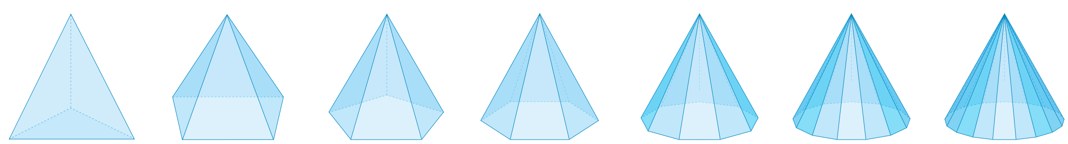
C

El volumen del cono es igual a un tercio del volumen del cilindro; es decir, es un tercio del producto del área de la base (A_B) por la altura (h).

$$V_{cono} = \frac{1}{3}A_B \times h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

E

El volumen de una pirámide es igual a un tercio del área de su base por su altura. Observa la siguiente secuencia de cuerpos geométricos:

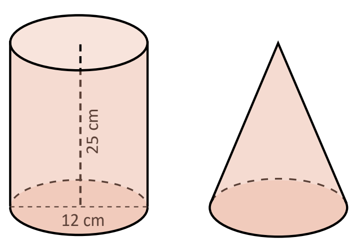


¿A qué figura se aproxima la base de la pirámide cuando aumentas su número de lados?

Solución.
La base se aproxima a un círculo. Así, cuando el número de lados de la base de una pirámide aumenta más y más, esta se aproxima a un cono.

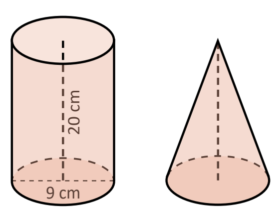
Calcula el volumen del cilindro, luego encuentra el volumen del cono de igual base y altura que el cilindro.

a)



900π cm^3 300π cm^3

b)



405π cm^3 135π cm^3

Indicador de logro

2.4 Determina la relación entre el volumen del cono y el cilindro de igual radio y altura.

Secuencia

En la clase anterior se trabajó con el volumen de la pirámide triangular, y en la clase 2.1 se dedujo el volumen del cilindro mediante el del prisma, ahora se determinará el volumen del cono mediante el del cilindro.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Comparar el volumen del cilindro con un cono que tenga base y altura congruentes, con el objetivo de verificar la relación entre los volúmenes de estos cuerpos geométricos.

Ⓔ En el Ejemplo se puede observar que entre más lados tenga la base de la pirámide más se acerca al volumen del cono.

Solución de algunos ítems:

b) $V_{cilindro} = A_B \times h = \pi r^2 h$

$V_{cilindro} = \pi(4.5)^2(20) = 405\pi \text{ cm}^3$

$V_{cono} = \frac{1}{3}V_{cilindro} = \frac{1}{3}(405 \text{ cm}^3) = 135\pi \text{ cm}^3$

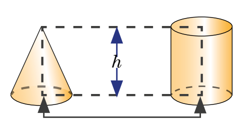
Materiales

Un cono y un cilindro. Se debe construir con un material en el que se pueda utilizar ya sea agua, granos de maíz, arroz o arena.

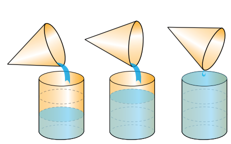
Fecha: **U7 2.4**

Ⓟ Se tiene un cilindro y un cono de bases congruentes, ¿cuántas veces cabe el volumen del cono en el cilindro? ¿Qué se puede concluir con el resultado obtenido?

Ⓢ Se llena de agua el cono y se vierte en el cilindro. A partir de este resultado se concluye que el cilindro tiene tres veces el volumen del cono. Es decir, el volumen del cono es la tercera parte del volumen del cilindro.

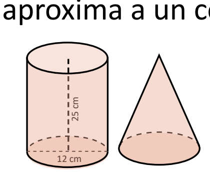


Bases iguales



Ⓔ Solución.
La base se aproxima a un círculo. Así, cuando el número de lados de la base de una pirámide aumenta más y más, esta se aproxima a un cono.

Ⓡ a)



$V_{cilindro} = A_B \times h = \pi r^2 h$

$V_{cilindro} = \pi(6)^2(25) = 900\pi \text{ cm}^3$

$V_{cono} = \frac{1}{3} V_{cilindro} = \frac{1}{3}(900\pi \text{ cm}^3)$

$= 300\pi \text{ cm}^3$

Tarea: página 153 del Cuaderno de Ejercicios.

2.5 Volumen de la esfera

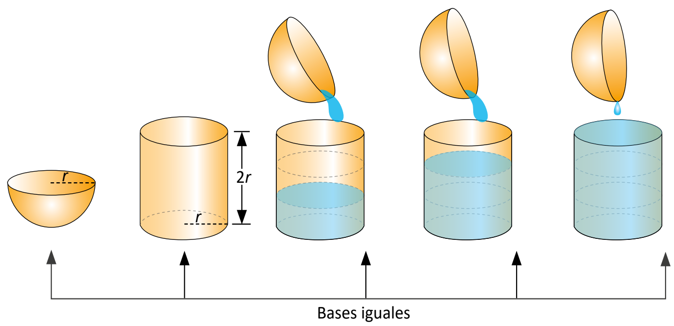
P

Se tiene una esfera y un cilindro con el mismo radio, la altura del cilindro es el diámetro de la esfera, ¿cuántas veces cabe el volumen de la esfera en el cilindro?, ¿qué puedes concluir con el resultado obtenido?

S

Para resolver la situación planteada es importante considerar que, tanto la esfera como el cilindro, están hechos de un material resistente al agua.

Se considera la mitad de una esfera hueca. Se llena de agua la mitad de la esfera y se vierte en el cilindro. Para llenar el cilindro se necesita hacer este procedimiento tres veces.



A partir de este resultado, se puede concluir que el volumen de la semiesfera es la tercera parte del volumen del cilindro; pero la esfera está formada por dos semiesferas. Entonces, el volumen de la esfera es dos terceras partes del volumen del cilindro.

El volumen de la esfera es igual a dos tercios del volumen de un cilindro que tenga el mismo radio y su altura sea igual al diámetro de la esfera. Es decir,

$$V_{esfera} = \frac{2}{3}(V_{cilindro}) = \frac{2}{3}\pi r^2 h \quad (\text{ pero } h \text{ del cilindro es } 2r)$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^2(2r) = \frac{2}{3}(2\pi r^3) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

A la mitad de una esfera se le conoce como semiesfera.

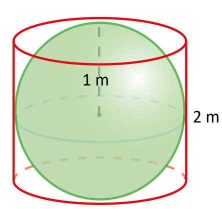
C

El volumen de la esfera es igual a dos tercios del volumen del cilindro; es decir, es dos tercios del producto del área de la base (A_B) por la altura (h).

$$V_{esfera} = \frac{2}{3}(V_{cilindro}) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

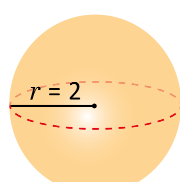
1. Calcula el volumen de una esfera inscrita en un cilindro de 2 m de altura.

   $\frac{4}{3}\pi$ m^3



2. Determina el volumen de la siguiente esfera.

   $\frac{32}{3}\pi\ u^3$



3. Calcula el volumen de una semiesfera de 10 cm de radio.

   $\frac{2\,000}{3}\pi\ u^3$

Indicador de logro

3.1 Determina la relación entre el volumen de la esfera y el cilindro con igual radio e igual altura.

Secuencia

En la clase anterior se trabajó con el volumen de un cono realizando la comparación con un cilindro, de manera similar se pretende realizar para el volumen de una esfera, para este caso se trabajará con una semiesfera y luego el resultado se multiplicará por dos.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Comparar el volumen del cilindro con una semiesfera que tenga radios congruentes, con el objetivo de verificar la relación entre los volúmenes de estos cuerpos geométricos.

Ⓒ En la conclusión se obtiene la fórmula general para el volumen de la esfera.

Solución de algunos ítems:

2. $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$

$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi(2)^3$

$V_{esfera} = \frac{32}{3}\pi\ u^3$

3. $V_{semiesfera} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$

$V_{semiesfera} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi(10)^3\right)$

$V_{semiesfera} = \frac{2\,000}{3}$ cm^3

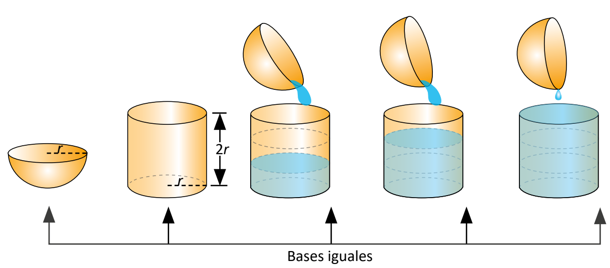
Materiales
Una semiesfera y un cilindro. Se deben construir con un material en el que se pueda utilizar ya sea agua, granos de maíz, arroz o arena.

Fecha:

U7 2.5

Ⓟ Se tiene una esfera y un cilindro con el mismo radio, la altura del cilindro es el diámetro de la esfera, ¿cuántas veces cabe el volumen de la esfera en el cilindro? ¿Qué puedes concluir con el resultado obtenido?

Ⓢ



El volumen de la esfera es igual a dos tercios del volumen de un cilindro que tenga el mismo radio y su altura sea igual al diámetro de la esfera.

Ⓡ

$V_{cilindro} = A_B \times h = \pi r^2 h$

$V_{cilindro} = \pi(1)^2(2) = 2\pi$ m^3

$V_{esfera} = \frac{2}{3}V_{cilindro}$

$= \frac{2}{3}(2\pi \text{ m}^3)$

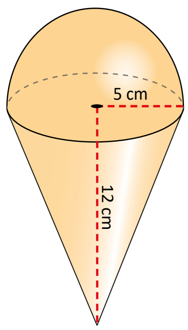
$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi$ m^3

Tarea: página 154 del Cuaderno de Ejercicios.

3.1 Volumen de sólidos compuestos

P

Calcula el volumen del siguiente sólido:



Puedes descomponer el sólido en cuerpos geométricos conocidos.

S

Primero se encuentra el volumen de la semiesfera:

$$\frac{1}{2}V_{esfera} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{4}{6}(\pi \times 5^3) = \frac{500}{6}\pi = \frac{250}{3}\pi = 83.3\pi \text{ cm}^3.$$

Luego se encuentra el volumen del cono:

$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 5^2 \times 12 = 100\pi \text{ cm}^3.$$

Entonces el volumen del sólido es:

$$V = \frac{1}{2}V_{esfera} + V_{cono} = \frac{250}{3}\pi \text{ cm}^3 + 100\pi \text{ cm}^3 = \frac{550}{3}\pi \text{ cm}^3 \approx 183.3\pi \text{ cm}^3.$$

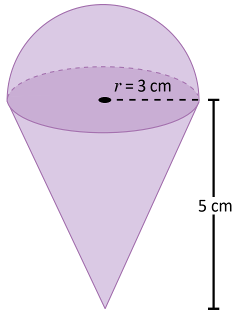
C

Para determinar el volumen de sólidos compuestos, se realiza lo siguiente:

- Se descompone el sólido en cuerpos geométricos conocidos y se calculan sus volúmenes.
- Se suman los volúmenes calculados.

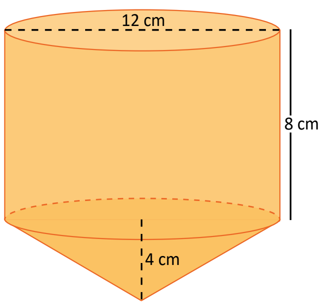
Calcula el volumen de los siguientes sólidos:

a)



33π cm^3

b)



336π cm^3

Indicador de logro

3.1 Utiliza las fórmulas de volúmenes de sólidos geométricos, para determinar el volumen de sólidos compuestos.

Secuencia

En las clases anteriores se dedujeron los volúmenes de algunos sólidos geométricos, en esta clase se utilizarán para calcular el volumen de algunos sólidos compuestos.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Encontrar el volumen total de sólidos compuestos, utilizando las fórmulas que se dedujeron en las clases anteriores, para ello se desarrollará cada uno de los sólidos individuales y luego se sumarán.

Ⓒ En la conclusión se destacan los pasos a seguir para determinar el volumen de los sólidos compuestos.

Solución de algunos ítems:

b) $V_{cilindro} = A_B \times h = \pi r^2 h$

$V_{cilindro} = \pi(6)^2(8) = 288\pi \text{ cm}^3$

$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 6^2 \times 4$

$= \frac{144}{3}\pi \text{ cm}^3 = 48\pi \text{ cm}^3$

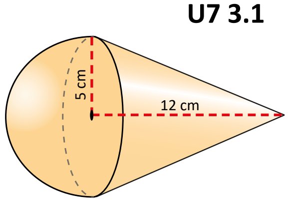
$V = V_{cilindro} + V_{cono} = 288\pi \text{ cm}^3 + 48\pi \text{ cm}^3$

$= 336\pi \text{ cm}^3$

Fecha:

U7 3.1

Ⓟ Calcula el volumen del siguiente sólido:



Ⓢ $\frac{1}{2}V_{esfera} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{4}{6}(\pi \times 5^3)$

$= \frac{500}{6}\pi = \frac{250}{3}\pi = 83.3\pi \text{ cm}^3$

$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 5^2 \times 12 = 100\pi \text{ cm}^3$

$V = \frac{1}{2}V_{esfera} + V_{cono} = \frac{250}{3}\pi \text{ cm}^3 + 100\pi \text{ cm}^3$

$= \frac{550}{3}\pi \text{ cm}^3 \approx 183.3\pi \text{ cm}^3$

Ⓡ a) $V_{semiesfera} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$

$= \frac{4}{6}(\pi \times 3^3) = \frac{108}{6}\pi$

$= 18\pi \text{ cm}^3$

$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 3^2 \times 5$

$= \frac{45}{3}\pi \text{ cm}^3 = 15\pi \text{ cm}^3$

$V = V_{semiesfera} + V_{cono} = 18\pi \text{ cm}^3 + 15\pi \text{ cm}^3$
$= 33\pi \text{ cm}^3$

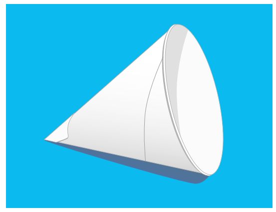
Tarea: página 155 del Cuaderno de Ejercicios.

3.2 Practica lo aprendido

1. Un vaso de papel en forma de cono tiene un radio de 3 cm y una altura de 9 cm, ¿cuánta agua puede contener?

   27π cm^3

   2.87 fl oz



Puedes considerar que

1 cm^3 = 1 ml = 0.0338135 fl oz
(fl oz: onzas fluidas).

2. ¿Qué cantidad de agua puede almacenar un recipiente esférico con radio igual a 18 cm?

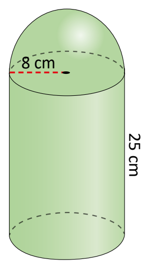
   7 776π cm^3 o bien 826.03 fl oz.

3. Calcula el volumen de una pelota cuyo diámetro mide 16 cm.

   $\frac{2\,048}{3}\pi$ cm^3

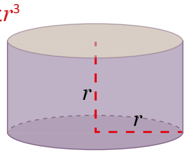
4. Calcula el volumen del siguiente cuerpo geométrico:

   $\frac{5\,824}{3}\pi$ cm^3

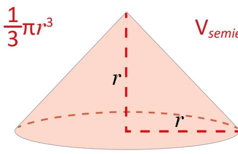


5. Compara los volúmenes de los tres cuerpos, ¿qué relación encuentras entre ellos?

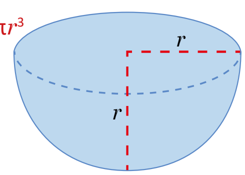
$V_{cilindro} = \pi r^3$



$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^3$



$V_{semiesfera} = \frac{2}{3}\pi r^3$



6. Si el radio de la Tierra es de 6 370 km, calcula el volumen de nuestro planeta utilizando distintas aproximaciones del número π:

   a) 3 b) 3.14 c) π

a) 1 033 899 412 000 km^3 b) 1 082 148 051 000 km^3 c) 1 082 696 932 000 km^3

7. Encuentra el volumen de un depósito cilíndrico cuya circunferencia de la base (longitud de la circunferencia) mide 8π m y la altura 6.3 m.

   100.8π m^3

8. Un laboratorio farmacéutico envasa alcohol en frascos de forma cilíndrica, que miden 4 cm de diámetro y 10 cm de altura. Calcula la capacidad en litros de cada frasco de alcohol.

   $0.04\pi\ l$

Indicador de logro

3.3 Resuelve ejercicios y problemas correspondientes a volúmenes de sólidos.

Solución de algunos ítems:

1. $V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 3^2 \times 9$

$= \frac{81}{3}\pi \text{ cm}^3 = 27\pi \text{ cm}^3$

Luego para encontrar la cantidad de agua que puede contener el cono hay que multiplicar el resultado por 0.0338135 fl oz.

Es decir, si 1 cm³ = 0.0338135 fl oz, entonces $1 = \frac{0.0338135 \text{ f}l \text{ oz}}{1 \text{ cm}^3}$

$27\pi \text{ cm}^3 = 27\pi \text{ cm}^3$

$= 2.87 \text{ f}l \text{ oz}$

2. $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$

$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi(18)^3 = 7776\pi \text{ cm}^3$

$7\,776\pi \text{ cm}^3 = 7\,776\pi \text{ cm}^3\left(\frac{0.0338135 \text{ f}l \text{ oz}}{1 \text{ cm}^3}\right)$

$= 826.03 \text{ f}l \text{ oz}$

3. $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$

$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi(8)^3 = \frac{2\,048}{3}\pi \text{ cm}^3$

4. $V_{semiesfera} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{4}{6}(\pi \times 8^3)$

$= \frac{2\,048}{6}\pi = \frac{1\,024}{3}\pi \text{ cm}^3$

$V_{cilindro} = A_B \times h = \pi r^2 h$

$V_{cilindro} = \pi(8)^2(25) = 1\,600\pi \text{ cm}^3$

$V = V_{semiesfera} + V_{cilindro}$

$= \frac{1\,024}{3}\pi \text{ cm}^3 + 1\,600\pi \text{ cm}^3$

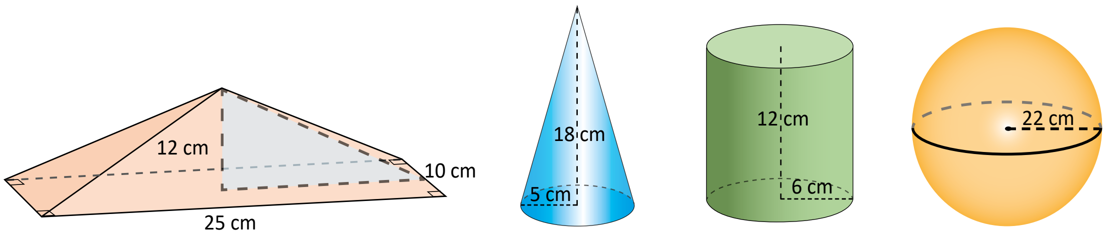
$= \frac{5\,824}{3}\pi \text{ cm}^3$

Observación:
Para el ejercicio 6, dependiendo del instrumento que se utilice para el cálculo, pueden variar los últimos dígitos.

Tarea: página 156 del Cuaderno de Ejercicios.

3.3 Practica lo aprendido

1. Encuentra el volumen de los siguientes sólidos.



1 000 cm³ — 150π cm³ — 432π cm³ — $\frac{42\,592}{3}\pi$ cm³

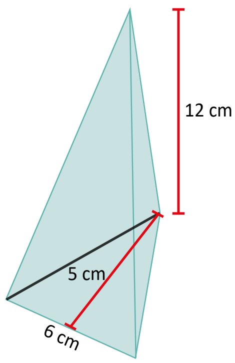
2. Si un cilindro de radio 5 cm tiene un volumen de 300π cm³, ¿cuál es su altura?
   12 cm

3. Encuentra la altura de un cilindro cuyo volumen es de 60π cm³ y el radio de la base es de 8 cm.
   $\frac{15}{16}$ cm

4. Encuentra el volumen de un cilindro de 15 cm de altura y 8 cm de diámetro.
   240π cm³

5. La base de una pirámide regular es un cuadrado de 10 cm de lado. Su altura es de 15 cm. Encuentra su volumen.
   500 cm³

6. Calcula el volumen de una pirámide triangular que tiene de altura 12 cm y las características del triángulo base son: 5 cm de altura y 6 cm de base.
   60 cm³



7. ¿Cuál es la altura de un cono que tiene un volumen de 135π cm³ y 9 cm de radio? 5 cm

8. Calcula el volumen de un cono de 4 cm de radio de la base y 9 cm de altura. 48π cm³

9. Encuentra el radio de una esfera cuyo volumen es 36π cm³. 3 cm

Indicador de logro

3.3 Resuelve ejercicios y problemas correspondientes a volúmenes de sólidos.

Solución de algunos ítems:

1\. a) $V_{pirámide} = \frac{1}{3}A_b h = \frac{1}{3}(250) \times 12$

$= \frac{3\,000}{3}$ cm^3

$= 1\,000$ cm^3

b) $V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi(5)^2(18) = 150\pi$ cm^3

c) $V_{cilindro} = \pi r^2 h = \pi(6)^2(12)$ cm^3

$V_{cilindro} = 432\pi$ cm^3

d) $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$

$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi(22)^3 = \frac{42\,592}{3}\pi$ cm^3

2\. $V_{cilindro} = \pi r^2 h$

$300\pi \text{ cm}^3 = \pi(5 \text{ cm})^2 h$

$h = \frac{300\pi \text{ cm}^3}{25\pi \text{ cm}^2} = 12$ cm

3\. $V_{cilindro} = \pi r^2 h$

$60\pi \text{ cm}^3 = \pi(8 \text{ cm})^2 h$

$h = \frac{60\pi \text{ cm}^3}{64\pi \text{ cm}^2} = \frac{15}{16}$ cm

$h = \frac{15}{16}$ cm

4\. $V_{cilindro} = \pi r^2 h = \pi(4)^2(15)$ cm^3

$V_{cilindro} = 240\pi$ cm^3

5\. $V_{pirámide} = \frac{1}{3}A_b h = \frac{1}{3}(100) \times 15$

$V_{pirámide} = 500$ cm^3

6\. $A_B = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 = \frac{30}{2} = 15$ cm^2

$V_{pirámide} = \frac{1}{3}A_b h = \frac{1}{3}(15) \times 12$

$V_{pirámide} = 60$ cm^3

Tarea: página 157 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 4 Áreas de sólidos geométricos

4.1 Desarrollo del cono y longitud de arco

P

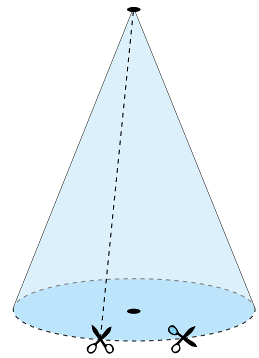
Dado un cono de papel, se hace un corte como indica la figura, y además, se corta el círculo por la orilla, pero sin despegarlo del resto del cono:

a) ¿Qué figura se obtiene? Dibújalo en tu cuaderno.

b) ¿Cómo se llama la figura que se obtuvo?

c) Describe qué figuras geométricas que ya conoces aparecen en el cono desplegado.

d) Identifica, sobre tu dibujo, las generatrices y el radio del cono, ¿cuál es la longitud de arco que forma el patrón de un cono?



S

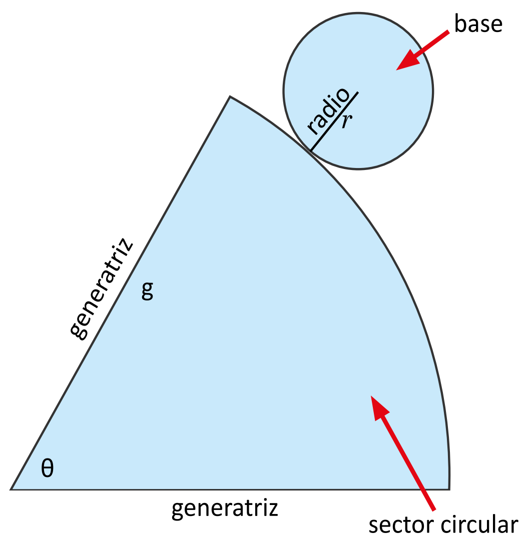
a) Al cortar el cono como sugiere la indicación, se obtiene una figura compuesta, tal como se muestra en la imagen de la derecha.

b) Una figura plana compuesta que describe un sólido geométrico, se conoce como **patrón** o **plano desarrollado** del sólido.

c) En el patrón del cono aparece un círculo con radio r, que corresponde al radio del cono y un sector circular, cuyo radio es la generatriz g del cono.

d) La circunferencia de la base es $2\pi r$, si se vuelve a armar el cono, el arco del sector circular se enrolla en la circunferencia de la base. Así, el arco tiene una longitud de

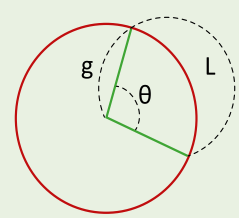
$$L = 2\pi r$$



Otra forma de calcularlo es tomando el radio del sector circular como g, y el ángulo central que es la porción del círculo limitada por dos radios, que son las generatrices del cono; el arco del sector circular es $\frac{\theta}{360}$ veces la circunferencia del círculo que forma el sector, así la longitud del arco del sector es:

$$L = 2\pi g \times \frac{\theta}{360°} = \frac{\theta}{180°}\pi g$$

Un sector circular es la porción de círculo limitada por dos radios, que forman el ángulo central θ.



C El patrón del cono está compuesto por un círculo de radio r, que es el radio del cono; y por un sector circular, cuyo radio es la generatriz del cono y el ángulo central θ.

Las fórmulas para calcular la longitud de arco de un sector circular son:

$$L = 2\pi r \ ...(1)$$

$$L = \frac{\theta}{180°} \pi g \ ...(2)$$

E Encuentra la longitud de arco en los siguientes casos:

a) El radio de la base es r = 8 cm
b) La generatriz g = 12 cm y el ángulo central θ = 240°

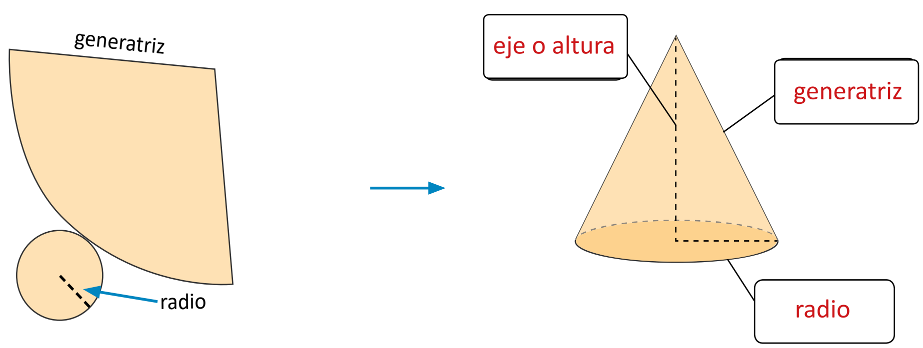
Solución.

a) $L = 2\pi r$; entonces, $L = 2\pi \times 8 = 16\pi$; o bien,

b) $L = \frac{\theta}{180°}\pi g$; entonces, $L = \frac{240°}{180°}\pi \times 12 = \frac{4}{3}\pi \times 12 = 4\pi \times 4 = 16\pi$.

Es importante observar que los elementos conocidos son los que determinan la fórmula que se utilizará para calcular la longitud de arco.

1. Dada la siguiente figura del patrón del cono, escribe el nombre a los elementos indicados.



2. Encuentra la longitud de arco de un cono, cuya generatriz mide 10 cm y el ángulo central es 60°.

$\frac{10}{3}\pi$ cm

3. Encuentra la longitud de arco de un cono, cuyo radio mide 5 cm.

10π cm

Indicador de logro

4.1 Identifica los elementos del patrón del cono.

Secuencia

En esta clase se pretende visualizar a detalle cada uno de los elementos del patrón o plano desarrollado del cono, para ello se realizan recortes al cono y se despliega para visualizar las figuras planas que lo forman. Además, se aborda la longitud de arco.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Identificar los elementos del cono, mediante el plano desarrollado, donde se muestran las figuras geométricas involucradas, a la vez que se encuentra la longitud de arco, la cual se utilizará más adelante para encontrar el área de un cono.

Solución de algunos ítems:

2. $L = \frac{\theta}{180°}\pi g$; entonces,

$L = \frac{60°}{180°}\pi \times 10$

$= \frac{1}{3}\pi \times 10 = \frac{10}{3}\pi$ cm

3. $L = 2\pi r$ entonces,
$L = 2\pi \times 5 = 10\pi$ cm.

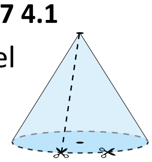
Posibles dificultades:
En esta clase pueden surgir dificultades para definir la longitud de arco, que en realidad es trabajar con la base de la circunferencia que es $2\pi r$, para esto es importante que los estudiantes recuerden cuál es la longitud de la circunferencia.

Además, es posible que se les dificulte a los estudiantes comprender una forma alternativa para encontrar la longitud de arco, en este caso explicar que esta consiste en convertir los grados a radianes y como en una vuelta completa hay 360° por eso el ángulo se divide entre esos grados. Como la generatriz del sector circular coincide con el radio, se tiene la siguiente fórmula:

$$L = 2\pi g \times \frac{\theta}{360°} = \frac{\theta}{180°}\pi g$$

Fecha: **U7 4.1**

P a) Dibuja la figura que se obtiene al recortar el cono.
b) ¿Cómo se llama la figura que se obtuvo?



c) Describe qué figuras geométricas aparecen en el cono desplegado.
d) Identifica, sobre tu dibujo, las generatrices y el radio del cono. ¿Cuál es la longitud de arco que forma el patrón de un cono?

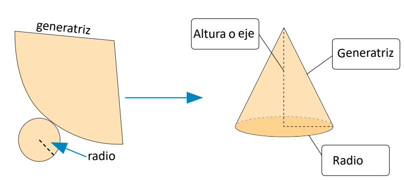
S a) Una figura compuesta.
b) Patrón o plano desarrollado.
c) Un círculo con radio r, y un sector circular de radio g.
d) El arco tiene una longitud de: $L = 2\pi r$ o
$L = 2\pi g \times \frac{\theta}{360°} = \frac{\theta}{180°}\pi g$.

E a) $L = 2\pi r$, entonces $L = 2\pi \times 8$
$= 16\pi$;

b) $L = \frac{\theta}{180°}\pi g$, entonces

$L = \frac{240°}{180°}\pi \times 12 = \frac{4}{3}\pi \times 12 = 4\pi \times 4$
$= 16\pi$

R 1.



Tarea: página 158 del Cuaderno de Ejercicios.

4.2 Relación entre los elementos del patrón del cono

P

Utilizando las fórmulas de la clase anterior, determina las medidas de los siguientes elementos:

1. El radio r, dado el ángulo central θ del sector circular y la generatriz g del cono.
2. El ángulo central θ del sector circular, dada la generatriz g y el radio r del cono.
3. La generatriz g, dado el ángulo central θ y la longitud de arco del sector circular.
4. La generatriz g dado ángulo central θ y del arco del sector circular L.

S

Se tienen las siguientes fórmulas; encuentra la longitud de arco L:

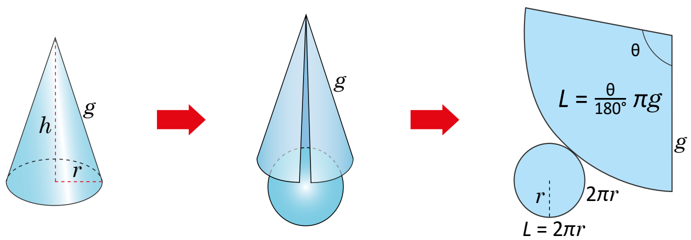
$L = 2\pi r$ ....(1) $\qquad L = \frac{\theta}{180°}\pi g$ ....(2)

1. Por (1) y (2), se obtiene la siguiente relación:

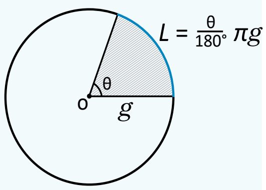
$$2\pi r = \frac{\theta}{180°}\pi g$$

$$r = \frac{\theta}{360°}g \text{ .... (3)}$$

2. Por (3), $\theta = \frac{360°}{g}r$ .... (4)
3. Por (3), $g = \frac{360°}{\theta}r$ .... (5)
4. Por (2), $g = \frac{180°}{\theta\pi}L$ .... (6)



Longitud de arco de un sector circular.



Con el ángulo central θ y generatriz g.

C

Las medidas del cono se pueden calcular cuando la relación de la circunferencia de la base es igual a la longitud de arco del sector circular, es decir:

$$L = 2\pi r \text{ ....(1)}, \; 2\pi r = \frac{\theta}{180°}\pi g$$

Radio del cono: r
Ángulo central del sector circular: θ
Generatriz del cono: g
Longitud del arco del sector circular: L

E

Encuentra el ángulo central θ del sector circular, dada la generatriz g = 30 cm y el radio del cono r = 4 cm.

Solución.
Como $2\pi r = \frac{\theta}{180°} \times \pi g$; luego $\theta = \frac{360°}{g} \times r$, sustituyendo los valores se tiene:

$$\theta = \frac{360°}{g} \times r = \frac{360°}{30} \times 4 = 48°\text{; entonces, } \theta = 48°.$$

1. Encuentra el ángulo θ del sector circular del plano desarrollado del cono, si la generatriz g = 18 cm y el radio del cono es r = 9 cm. 180°
2. Encuentra el radio r de un cono, si su generatriz g = 6 cm y el ángulo del sector circular del desarrollo del cono es θ = 120°. 2 cm
3. Encuentra la generatriz del desarrollo del cono, si su radio mide 4 cm y el ángulo central del sector circular mide 60°. 24 cm
4. Encuentra la generatriz del desarrollo del cono, si su ángulo es θ = 120° y la longitud de su arco es L = 8π cm. 12 cm

Indicador de logro

4.2 Determina la relación entre los elementos del patrón del cono.

Secuencia

En la clase anterior se encuentran las fórmulas que se pueden utilizar para la longitud de arco, por lo que a partir de ellas se puede deducir la relación entre los elementos que existen en el patrón del cono.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Determinar la relación entre los elementos del patrón del cono, para ello los estudiantes realizarán los despejes necesarios para encontrar 4 fórmulas.

Ⓒ Con el ejemplo se espera que el estudiante pueda encontrar el ángulo θ, utilizando las dos fórmulas encontradas en la clase anterior.

Solución de algunos ítems:

1. $2\pi r = \frac{\theta}{180°} \times \pi g$;

$$\theta = \frac{360°}{g} \times r = \frac{360°}{18} \times 9 = 180°$$

2. Usando la siguiente fórmula se tiene:
$r = \frac{\theta}{360°}g = \frac{120°}{360°} \times 6 = 2$ cm

3. $g = \frac{360°}{\theta}r = \frac{360°}{60°} \times 4 = 24$ cm

4. $g = \frac{180°}{\theta\pi}L = \frac{180°}{120°\pi} \times 8\pi = 12$ cm

Fecha: **U7 4.2**

Ⓟ Utilizando las fórmulas de la clase anterior, determina las medidas de los siguientes elementos:
1. El radio r, dado el ángulo central θ del sector circular y la generatriz g del cono.
2. El ángulo central θ del sector circular, dada la generatriz g y el radio r del cono.
3. La generatriz g, dado el ángulo central θ y la longitud de arco del sector circular.
4. La generatriz g dado el ángulo central θ y del arco del sector circular L.

Ⓢ 1. De la relación $L = 2\pi r = \frac{\theta}{180°}\pi g$ se tiene que $r = \frac{\theta}{360°}g$.

2. $\theta = \frac{360°}{g}r$ 3. $g = \frac{360°}{\theta}r$

4. $g = \frac{180°}{\theta\pi}L$

Ⓔ Como $2\pi r = \frac{\theta}{180°} \times \pi g$,
luego $\theta = \frac{360°}{g} \times r$
sustituyendo los valores se tiene:
$\theta = \frac{360°}{g} \times r = \frac{360°}{30} \times 4 = 48°$;

Ⓡ 1. $2\pi r = \frac{\theta}{180°} \times \pi g$;
luego $\theta = \frac{360°}{g} \times r = \frac{360°}{18} \times 9$
$\theta = 180°$

Tarea: página 159 del Cuaderno de Ejercicios.

4.3 Área superficial del cono

P

El patrón del cono está formado por los siguientes elementos:

a) La cara lateral del cono que es un sector circular con ángulo $\theta = \frac{360°}{g} \times r$, g es la generatriz del cono, el cual es el radio del sector circular,

b) Un círculo de radio r.

Expresa el área de la cara lateral y del círculo del cono. ¿Cuál es su área total?

S

a) El área lateral del cono $A_{Lateral}$, es el área del sector circular en el patrón del cono, el cual es proporcional al área total del círculo con el radio g; πg^2, por el ángulo central θ del sector circular:

$$A_{Lateral} = \pi g^2 \times \frac{\theta}{360°} \quad \ldots (1)$$

Luego por (1) y sustituyendo $\theta = \frac{360°}{g} \times r$ en (1), se tiene:

$$\begin{aligned} A_{Lateral} &= \pi g^2 \times \frac{\theta}{360°} \\ &= \pi g^2 \times \frac{1}{360°} \times \theta \\ &= \pi g^2 \times \frac{1}{360°} \times \frac{360°}{g} \times r. \\ A_{Lateral} &= \pi r g \end{aligned}$$

b) El área de la base es: $A_{Base} = \pi r^2$.

El área total será la suma del área lateral más el área de la base, es decir:

$$A_{Total} = A_{Lateral} + A_{Base} = \pi r g + \pi r^2 = \pi r(g + r).$$

C

Se utiliza el plano desarrollado del cono para calcular su área lateral y total, cuando el radio del cono es r y la generatriz es g:

Área lateral $A_{Lateral}$: Es el área del sector circular que aparece en el desarrollo del cono. Su área está dada por:

$$A_{Lateral} = \pi r g$$

Área total A_{Total}: Es la suma del área lateral y el área de la base.

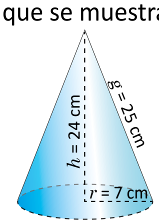
Como la base del cono es un círculo, se tiene que el área total es:

$$A_{Total} = A_{Lateral} + A_{Base} = \pi r g + \pi r^2 = \pi r(g + r).$$

1. Calcula el área lateral y total del cono que se muestra en la figura:

$A_{Lateral} = 175\pi$ cm^2

$A_{Total} = 224\pi$ cm^2



2. Encuentra la generatriz de un cono que tiene las siguientes especificaciones: radio de $r = 6$ cm y una área lateral de $A_{Lateral} = 120\pi$ cm^2. 20 cm

Indicador de logro

4.3 Determina el área total del cono a partir de su patrón o plano desarrollado.

Secuencia

En la clase anterior se encuentran las fórmulas para poder deducir los elementos del cono, ahora se buscará que el estudiante pueda encontrar el área superficial del cono.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Determinar el área total del cono, para ello se calculará el área lateral y el área de su base que es un círculo.

Solución de algunos ítems:

2. $A_{Lateral} = \pi r g$

$$120\pi \text{ cm}^2 = \pi(6 \text{ cm})g$$

$$g = \frac{120\,\pi \text{ cm}^2}{6\,\pi \text{ cm}} = 20 \text{ cm}$$

Fecha: **U7 4.3**

Ⓟ Encontrar en el patrón del cono el área de lo siguiente:

a) La cara lateral del cono que es un sector circular con ángulo $\theta = \frac{360°}{g} \times r$, g es la generatriz del cono, la cual es el radio del sector circular.

b) Un círculo de radio r.

Ⓢ a) El área lateral del cono $A_{Lateral}$, es el área del sector circular en el patrón del cono, el cual es proporcional al área total del círculo con el radio g; πg^2, por el ángulo central θ del sector circular:

$$A_{Lateral} = \pi g^2 \times \frac{\theta}{360°} \text{ ... (1)}$$

Luego por (1) y sustituyendo $\theta = \frac{360°}{g} \times r$ en (1), se tiene:

$$A_{Lateral} = \pi r g$$

El área de la base es: $A_{Base} = \pi r^2$

$A_{Total} = A_{Lateral} + A_{Base} = \pi r g + \pi r^2 = \pi r(g + r)$

Ⓡ $A_{Lateral} = \pi r g = \pi(7)(25) = 175\pi \text{ cm}^2$

$A_{Base} = \pi(7)^2 = 49\pi \text{ cm}^2$

$A_{Total} = 175\pi \text{ cm}^2 + 49\pi \text{ cm}^2$

$A_{Total} = 224\pi \text{ cm}^2$

Tarea: página 160 del Cuaderno de Ejercicios.

4.4 Área superficial de la esfera

P

Se tiene una esfera y un círculo de radio r, ¿qué relación existe entre el área de la esfera comparada con la del círculo?, ¿qué se puede concluir sobre el área de la esfera?

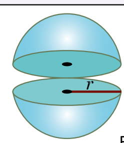
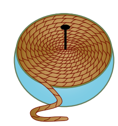
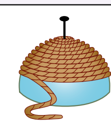
S

Para resolver esta situación, es necesario tomar una esfera que se pueda cortar, un cordel y un clavo. Luego se realiza lo siguiente:

1. Se corta la esfera en 2 partes iguales, formando así dos semiesferas (ver figura A).
2. Se fija el cordel en el centro del círculo de una de las semiesferas, se enrolla hasta cubrir todo el círculo y se corta lo que sobra (ver figura B); luego se desenrolla el cordel utilizado.
3. Se fija el cordel sobre uno de los polos de la esfera y se enrolla (ver figura C), se repite este proceso hasta cubrir la esfera.

Al hacer este procedimiento, debes tomar en cuenta que para recubrir totalmente la esfera, es necesario cortar 3 pedazos de cordel con igual longitud que el primero.

Con este resultado, se tiene que el área superficial de la esfera es cuatro veces el área del círculo de igual radio.

Corta por el medio una esfera (bola) de radio r	Envuelve el cordel alrededor de un alfiler colocado en el centro de la región circular	Envuelve el cordel alrededor del hemisferio
 Figura A	 Figura B	 Figura C

C

Como el área de un círculo de radio r es igual a πr^2, entonces el área superficial de la esfera es:

$$A_{esfera} = 4\pi r^2$$

E

Otra forma de ver el área de la esfera

Al comparar el área de la esfera con el área lateral de un cilindro, cuyo radio sea igual al de la esfera y su altura es el diámetro de la esfera, ¿qué se obtiene?, ¿cuál es la relación entre el área de la esfera y el área lateral del cilindro?

Se puede hacer la misma actividad anterior, pero ahora cubriendo el cilindro con el cordel y luego cubrir la esfera con ese mismo cordel.

Solución.
Se puede concluir que, el área de una esfera de radio r es igual al área lateral de un cilindro de radio r y altura $2r$. Es decir, $A = 2\pi rh = 2\pi r(2r) = 4\pi r^2$.

1. ¿Cuál será el área total de una esfera cuyo diámetro es igual a 12 cm? 144π cm^2

2. ¿Cuál es el diámetro de una esfera cuya área es igual a 144π cm^2? 12 cm

Indicador de logro

4.4 Determina la relación entre el área superficial de una esfera y el área del círculo de igual radio.

Secuencia

En la clase anterior se trabajó con el área lateral y total del cono, para esta clase se calculará el área superficial de la esfera, determinando la relación entre esta y el área del círculo de igual radio.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Determinar la relación entre el área superficial de una esfera y el área del círculo de igual radio, realizando el experimento con un cordel y una esfera.

Con el ejemplo se busca que el estudiante también conozca la relación para encontrar el área superficial de una esfera con el área superficial del cilindro, el cual se encontró en la Unidad 8 de séptimo grado. De esta manera el estudiante tendría otra alternativa para encontrar el área de una esfera.

Solución de algunos ítems:

2. $A_{esfera} = 4\pi r^2$

144π cm$^2 = 4\pi r^2$

$r^2 = 36$ cm^2

r = 6 cm por lo que el diámetro es 12 cm, también se puede utilizar el problema 1 para deducir que el diámetro es 12 cm.

Fecha: **U7 4.4**

Ⓟ Se tiene una esfera y un círculo de radio r, ¿qué relación existe entre el área de la esfera comparada con la del círculo?, ¿qué se puede concluir sobre el área de la esfera?

Ⓢ

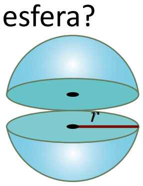


Figura A

Se corta la esfera en dos partes iguales.

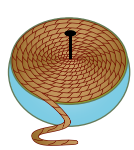


Figura B

Envuelve el cordel alrededor de un alfiler colocado en el centro de la región circular.

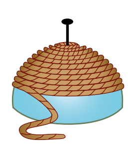


Figura C

Envuelve el cordel alrededor del hemisferio.

En conclusión, el área de la esfera es cuatro veces el área del círculo, entonces: $A_{esfera} = 4\pi r^2$.

Ⓔ Se puede concluir que, el área de una esfera de radio r es igual al área lateral de un cilindro de radio r y altura $2r$. Es decir, $A = 2\pi rh = 2\pi r(2r) = 4\pi r^2$

Ⓡ 1. $A_{esfera} = 4\pi r^2$

$A_{esfera} = 4\pi(6)^2$

$A_{esfera} = 144\pi$ cm^2

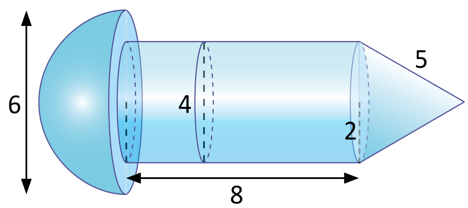
Tarea: página 161 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 5 Aplicaciones de áreas

5.1 Areas superficiales en sólidos compuestos

P

Encuentra el área superficial del siguiente sólido:



Área de la semiesfera:	$A_{semiesfera} = \frac{1}{2}(4\pi r^2)$
Área lateral del cilindro:	$A_{Lateral} = 2\pi rh$
Área lateral del cono:	$A_{Lcono} = \pi rg$
Área del círculo:	$A_{círculo} = \pi r^2$

S

Primero se encuentra el área de la semiesfera:

$$A_{Semiesfera} = \frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2 \times \pi \times 3^2 = 18\pi \text{ cm}^2.$$

Luego, se calcula el área lateral del cilindro:

$$A_{Lateral} = 2\pi rh = 2\pi \times 2 \times 8 = 32\pi \text{ cm}^2.$$

El área lateral del cono:

$$A_{Lcono} = \pi rg = \pi \times 2 \times 5 = 10\pi \text{ cm}^2.$$

Luego, del área del círculo de la semiesfera se resta el área del círculo de la tapa del cilindro:

$$A_{Círculos} = \pi\left(\frac{6}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 9\pi - 4\pi = 5\pi \text{ cm}^2.$$

Por tanto, el área de la figura A:

$$A_{Figura} = A_{Semiesfera} + A_{Lateral} + A_{Lcono} + A_{Círculos} = 18\pi + 32\pi + 10\pi + 5\pi = 65\pi \text{ cm}^2.$$

C

Para encontrar el área superficial de figuras compuestas, se suman o se restan las áreas de cada uno de los sólidos que aparecen en el problema.

1. Encuentra el área del cuerpo geométrico que se muestra en la figura 1.

   90π cm^2

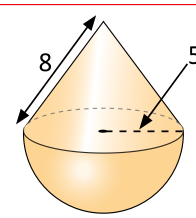


Figura 1

2. Calcula el área superficial de las esferas cuyos radios son: 5 cm, 10 cm y 50 cm. ¿Qué relación hay entre las áreas de las esferas?

   100π cm^2, 400π cm^2, $10\,000\pi$ cm^2

3. Se construirá una bodega con la forma de un cilindro para almacenar granos básicos, con un techo semiesférico como se muestra en la figura 2. Si las paredes del cilindro tienen una altura de 10 m y el área lateral del cilindro es de 100π m^2, determina el radio del cilindro.

   5 cm

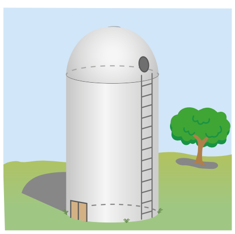


Figura 2

Indicador de logro

5.1 Utiliza las fórmulas deducidas sobre áreas superficiales de sólidos, para determinar el área superficial de sólidos compuestos.

Secuencia

En séptimo grado se trabajó con el área superficial del cilindro, en las clases anteriores de esta unidad se estudiaron las del cono y la esfera; es el momento oportuno para trabajar con sólidos compuestos.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Calcular las áreas superficiales de sólidos compuestos. Es importante que el estudiante observe que hay áreas que se comparten entre los sólidos las cuales no se deben contar dos veces.

Solución de algunos ítems:

2.

a) $A_{esfera} = 4\pi r^2 = 4\pi(5)^2 = 100\pi$ cm^2

b) $A_{esfera} = 4\pi r^2 = 4\pi(10)^2 = 400\pi$ cm^2

c) $A_{esfera} = 4\pi r^2 = 4\pi(50)^2 = 10\,000\pi$ cm^2

3.

Área lateral del cilindro: $A_{Lateral} = 2\pi rh$

$$100\pi \text{ cm}^2 = 2\pi r(10 \text{ cm})$$

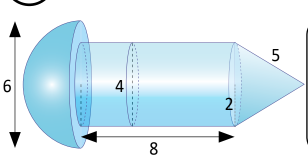
$$\frac{100\pi \text{ cm}^2}{20\pi \text{ cm}} = r$$

$$r = 5 \text{ cm}$$

Posibles dificultades:
En el cálculo del área total de un sólido es posible que el estudiante no repare en que hay figuras compartidas y que se cuenten sus áreas dos veces, al respecto se debe orientar para que tengan esta consideración.

Fecha: **U7 5.1**

Ⓟ Encuentra el área superficial del siguiente sólido:



Área de la semiesfera:	$A_{semiesfera} = \frac{1}{2}(4\pi r^2)$
Área lateral del cilindro:	$A_{Lateral} = 2\pi rh$
Área lateral del cono:	$A_{Lcono} = \pi rg$
Área del círculo:	$A_{círculo} = \pi r^2$

$$A_{Semiesfera} = \frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2 \times \pi \times 3^2 = 18\pi \text{ cm}^2$$

Ⓢ Área lateral del cilindro: $A_{Lateral} = 2\pi rh = 2\pi \times 2 \times 8$
$= 32\pi$ cm^2

$$A_{Lcono} = \pi rg = \pi \times 2 \times 5 = 10\pi \text{ cm}^2$$

Luego del área del círculo de la semiesfera se resta el área del círculo de la tapa del cilindro:

$$A_{Círculos} = \pi\left(\frac{6}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 9\pi - 4\pi = 5\pi \text{ cm}^2$$

$A_{Figura} = A_{Semiesfera} + A_{Lateral} + A_{Lcono} + A_{Círculos}$
$= 18\pi + 32\pi + 10\pi + 5\pi$
$= 65\pi$ cm^2

Ⓡ $A_{Semiesfera} = \frac{1}{2}(4\pi r^2)$
$= 2 \times \pi \times 5^2$
$= 50\pi$ cm^2

$A_{Lcono} = \pi rg = \pi \times 5 \times 8$
$= 40\pi$ cm^2

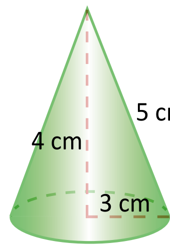
$A_{Figura} = 50\pi \text{ cm}^2 + 40\pi \text{ cm}^2$
$= 90\pi$ cm^2

Tarea: página 162 del Cuaderno de Ejercicios.

5.2 Practica lo aprendido

1. Calcula el área lateral y total de un cono cuya altura mide 4 cm, la generatriz mide 5 cm y el radio de la base es de 3 cm.

   15π cm^2 y 24π cm^2



2. Calcula el área de una semiesfera de 10 cm de radio.

   200π cm^2

3. Encuentra el área de una esfera que tiene un volumen de 144π cm^3.

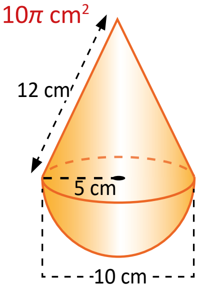
   90.63π cm^2

4. Una esfera de radio 4 cm será recubierta con una capa metálica de 1 cm de espesor. Calcula la cantidad de material necesario para recubrir la esfera.

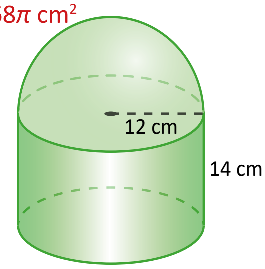
   $\frac{244\pi}{3}$ cm^3

5. Calcula el área superficial de las siguientes figuras:

   a) 110π cm^2

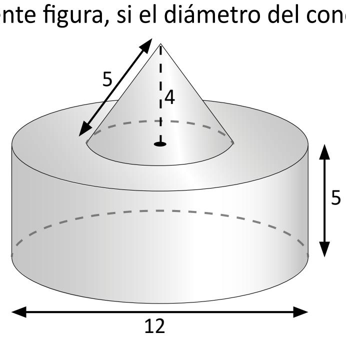


   b) 768π cm^2



6. Encuentra el volumen de la siguiente figura, si el diámetro del cono es 6 cm.

   192π cm^3



Indicador de logro

5.2 Resuelve ejercicios y problemas correspondientes a áreas y volúmenes de sólidos.

Solución de algunos ítems:

1. $A_{Lateral} = \pi rg = \pi(3\text{ cm})(5\text{ cm})$
$= 15\pi\text{ cm}^2$

$A_{Base} = \pi r^2 = \pi(3)^2 = 9\pi\text{ cm}^2$

$A_{Total} = 15\pi\text{ cm}^2 + 9\pi\text{ cm}^2 = 24\pi\text{ cm}^2$

2. $A_{Semiesfera} = \frac{1}{2}(4\pi r^2)$
$= 2 \times \pi \times 10^2 = 200\pi\text{ cm}^2$

3. $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$

$144\pi\text{ cm}^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$

$108\text{ cm}^3 = r^3$
$r = 4.76\text{ cm}$

Entonces el área de la esfera es:

$A_{esfera} = 4\pi r^2 = 4\pi(4.76)^2$
$= 90.63\pi\text{ cm}^2$

4. La cantidad de material necesario es:

$V_{capa} = \frac{4}{3}(R^3 - r^3)\pi$

$V_{capa} = \frac{4}{3}(5^3 - 4^3)\pi$

$V_{capa} = \frac{244}{3}\pi\text{ cm}^3$

5. a) $A_{Semiesfera} = \frac{1}{2}(4\pi r^2)$

$= 2 \times \pi \times 5^2$
$= 50\pi\text{ cm}^2$

$A_{Lcono} = \pi rg = \pi \times 5 \times 12$
$= 60\pi\text{ cm}^2$

$A_{Figura} = 50\pi\text{ cm}^2 + 60\pi\text{ cm}^2$
$= 110\pi\text{ cm}^2$

b) $A_{Semiesfera} = \frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2 \times \pi \times 12^2$
$= 288\pi\text{ cm}^2$

Área lateral del cilindro: $A_{Lateral} = 2\pi rh$
$A_{Lateral} = 2\pi \times 12 \times 14 = 336\pi\text{ cm}^2$
$A_{Círculo} = \pi(12)^2 = 144\pi\text{ cm}^2$

$A_{Figura} = 288\pi\text{ cm}^2 + 336\pi\text{ cm}^2 + 144\pi\text{ cm}^2$
$= 768\pi\text{ cm}^2$

6. $V_{figura} = V_{cilindro} + V_{cono}$

$= \pi r^2 h + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \pi 6^2(5) + \frac{1}{3}\pi(3)^2(4)$

$= 180\pi + 12\pi$

$= 192\pi\text{ cm}^3$

Tarea: página 163 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 5

5.3 Practica lo aprendido

Volúmenes de sólidos geométricos:

Volumen de un cilindro: $V_{cilindro} = A_B \times h = \pi r^2 h$

Volumen de un cono: $V_{cono} = \frac{1}{3} \times A_B \times h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Volumen de la pirámide: $V_{pirámide} = \frac{1}{3} A_B \times h$

Volumen de la esfera: $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$

Áreas de sólidos geométricos:

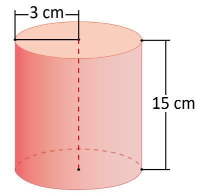
Área lateral del cilindro: $A_{Lateral} = 2\pi r h$

Área total del cono: $A_{cono} = \pi r(g + r)$

Área total del cilindro: $A_{cilindro} = 2\pi r(h + r)$

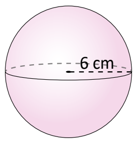
Área de la esfera: $A_{esfera} = 4\pi r^2$

1. ¿Cuál es el volumen de un cilindro cuyo radio es de 3 cm y su altura es de 15 cm? 135π cm^3



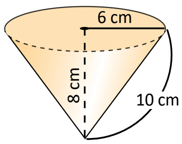
2. Calcula el área y volumen de los siguientes sólidos:

a)



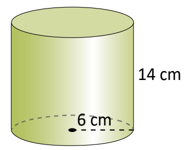
144π cm^2 y 288π cm^3

b)



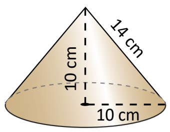
96π cm^2 y 96π cm^3

c)

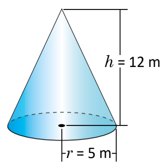


240π cm^2 y 504π cm^3

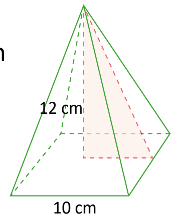
3. Encuentra el área total de un cono rectangular (altura = radio) de radio 10 cm.
240π cm^2



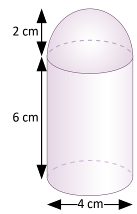
4. Calcula el volumen del siguiente cono:
100π cm^3



5. Calcula el volumen de una pirámide cuadrangular cuya base tiene de lado 10 cm y 12 cm de altura. 400 cm^3



6. Calcula el área total y volumen de un cono de 7 cm de radio de la base, 24 cm de altura y generatriz 25 cm.
224π cm^2 y 392π cm^3



7. Calcula el área total y volumen de la siguiente figura compuesta:
Área 36π cm^2 Volumen $\frac{88}{3}\pi$ cm^3

Indicador de logro

5.3 Resuelve ejercicios y problemas correspondientes a áreas y volúmenes de sólidos

Solución de algunos ítems:

1. $V_{cilindro} = \pi r^2 h = \pi(3)^2(15)$
   $= \pi(9)(15) = 135\pi \text{ cm}^3$

2. a) $A_{esfera} = 4\pi r^2 = 4\pi(6)^2 = 144\pi \text{ cm}^2$

   $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi(6)^3 = \frac{864}{3}\pi \text{ cm}^3$

   $= 288\pi \text{ cm}^3$

   b) $A_{cono} = \pi r(g + r) = \pi(6)(10 + 6)$
   $= \pi(6)(16) = 96\pi \text{ cm}^2$

   $V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

   $V_{cono} = \frac{1}{3}\pi(6)^2(8) = 96\pi \text{ cm}^3$

   c) $A_{cilindro} = 2\pi r(h + r)$
   $= 2\pi(6)(14 + 6)$
   $= 12\pi(20) = 240\pi \text{ cm}^2$

   $V_{cilindro} = \pi r^2 h = \pi(6)^2(14)$
   $= \pi(36)(14) = 504\pi \text{ cm}^3$

3. $A_{cono} = \pi r(g + r) = \pi(10)(14 + 10)$
   $= \pi(10)(24) = 240\pi \text{ cm}^2$

4. $V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

   $V_{cono} = \frac{1}{3}\pi(5)^2(12) = 100\pi \text{ cm}^3$

5. $V_{pirámide} = \frac{1}{3}A_B \times h$

   $A_B = 10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} = 100 \text{ cm}^2$

   $V_{pirámide} = \frac{1}{3}100 \text{ cm}^2 \times 12 \text{ cm}$

   $= 400 \text{ cm}^3$

6. $A_{cono} = \pi r(g + r) = \pi(7)(25 + 7)$
   $= \pi(7)(32) = 224\pi \text{ cm}^2$

   $V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

   $V_{cono} = \frac{1}{3}\pi(7)^2(24) = 392\pi \text{ cm}^3$

Tarea: página 164 del Cuaderno de Ejercicios.

Unidad 8. Organización y análisis de datos estadísticos

Competencia de la Unidad

- Organizar, graficar e interpretar la información del entorno, a fin de utilizarla en la toma de decisiones personales y/o sociales, valorando con criticidad la opinión de los demás.
- Resolver problemas aplicando las medidas de tendencia central a datos estadísticos para analizar, opinar y obtener conclusiones de manera crítica.

Relación y desarrollo

Primero y segundo ciclo

- Representación de datos en tabla
- Gráfica de barras
- Pictogramas
- Gráfica de líneas
- Moda, mediana y media
- Porcentajes

Séptimo grado

Unidad 7: Gráfica de faja y circular
- Gráfica de faja
- Gráfica circular

Octavo grado

Unidad 8: Organización y análisis de datos estadísticos
- Tablas y gráficas estadísticas para variables cuantitativas
- Medidas de tendencia central
- Valor aproximado y dígitos significativos

Noveno grado

Unidad 8: Medidas de dispersión
- Dispersión
- Propiedades de la desviación típica

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Tablas y gráficas estadísticas para variables cuantitativas	1	1. Agrupación de datos
	1	2. Tabla de frecuencias
	1	3. Elementos de la tabla de frecuencias
	1	4. Gráficas estadísticas
	1	5. Uso del polígono de frecuencias
	1	6. Interpretación de datos estadísticos
	1	7. Practica lo aprendido
	1	8. Practica lo aprendido
2. Medidas de tendencia central	1	1. Sentido de las medidas de tendencia central
	1	2. Media aritmética
	1	3. Propiedades de la media aritmética
	1	4. Mediana y moda
	1	5. Propiedades de las medidas de tendencia central
	1	6. Practica lo aprendido
	1	7. Practica lo aprendido
	1	8. Relación entre media, moda y mediana
3. Valor aproximado y dígitos significativos	1	1. Valor aproximado
	1	2. Dígitos significativos
	1	3. Cantidades en notación científica
	1	Prueba de la Unidad 8
	1	Prueba del tercer trimestre

19 horas clase + prueba de la Unidad 8 + prueba del tercer trimestre

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Tablas y gráficas estadísticas para variables cuantitativas
Se aborda el uso de tablas de distribución de frecuencias y gráficas como un medio para presentar la información de un conjunto de datos de forma resumida. En grados anteriores ya se ha trabajado con gráficas para variables cuantitativas discretas, por lo que esta será la primera vez que el estudiante trabajará con gráficas que son adecuadas para presentar información de variables cuantitativas continuas.

Lección 2: Medidas de tendencia central
Se hace una ampliación al cálculo de una aproximación de las medidas de tendencia central para un conjunto de datos que están agrupados en una tabla de distribución de frecuencias. También es importante la comprensión de las propiedades de la media aritmética como las de las medidas de tendencia central en general; y la relación entre estas medidas según la forma del polígono de frecuencia que representa la distribución del conjunto de datos.

Lección 3: Valor aproximado y dígitos significativos
Si bien en grados anteriores ya se ha trabajado con la aproximación de números, en esta lección se hace un refuerzo o recordatorio de las reglas, para posteriormente trabajar con el concepto de dígitos significativos y así introducir el concepto de notación científica.

Lección 1 Tablas y gráficas estadísticas para variables cuantitativas

1.1 Agrupación de datos

P

Doña Carmen es la propietaria de la sala de belleza El Buen Gusto, para atender a todos sus clientes ha tenido que abrir dos sucursales A y B. A continuación se muestran los datos del registro de la edad de 30 clientes atendidos el día de la secretaria, en la sucursal A.

24	23	28	30	29	31
27	26	24	30	32	29
21	22	27	33	30	24
24	21	26	24	30	39
24	22	22	24	21	20

1. Clasifica los datos en 5 grupos de 4 en 4, inicia en 20 y termina en 40.
2. ¿En qué grupo se concentró el mayor número de clientes?
3. ¿Qué cantidad de clientes tiene la mayor edad registrada?
4. ¿Qué cantidad de clientes tiene una edad inferior a 32 años?

S

1. Para clasificar los datos, primero se crean los grupos, como deben iniciar en 20 e ir de 4 en 4, entonces los grupos serán de 20 a 24, de 24 a 28, de 28 a 32, de 32 a 36 y de 36 a 40. Para facilitar la clasificación de los datos, se van escribiendo en una tabla, siguiendo el orden en que aparecen, tal como se muestra en la tabla de la derecha.
2. En el grupo de edades de 24 a 28 años queda concentrado el mayor número de clientes (igual a 11).
3. La mayor edad de los clientes que se atendieron corresponde a 39 años (que es el dato mayor).
4. Para determinar la cantidad de clientes que se atendió y que tienen una edad inferior a 32 años, se cuentan los que quedan en los primeros 3 grupos: 8 + 11 + 8 = 27, es decir, 27 clientes tienen una edad inferior a 32 años.

	24			
	24			
	24			
20	26	30		
21	24	30		
22	24	29		
22	27	30		
21	24	31		
22	26	29		
21	27	30	33	
23	24	28	32	39
De 20 a 24	**De 24 a 28**	**De 28 a 32**	**De 32 a 36**	**De 36 a 40**

C

Para organizar una serie de datos en grupos, se realiza lo siguiente:

1. Se definen las categorías considerando el número de grupos a crear y los límites a considerar.
2. Se colocan los datos uno a uno, en el grupo al que pertenecen, teniendo cuidado que en cada grupo deben quedar los datos, cuyo valor es igual o mayor al del límite menor, pero que sean menores que el límite mayor, tal como se muestra en el ejemplo desarrollado, por ejemplo: en el grupo 1 de 20 a 24 quedarón todos los datos que son iguales o mayores a 20, pero menores que 24; lo que significa que los datos cuyo valor es 24 quedan en el siguiente grupo.

A continuación se muestran los datos del registro de la edad de 30 clientes atendidos el día de la secretaria, en la sucursal B de la sala de belleza El Buen Gusto, de doña Carmen.

20	22	24	22	30
27	34	35	29	28
24	21	20	23	26
23	26	20	29	36
28	29	24	23	34
24	21	20	36	24

1. Clasifica los datos en 5 grupos de 4 en 4, inicia en 20 y termina en 40.
2. ¿En qué grupo se concentró el mayor número de clientes? De 20 a 24
3. ¿Qué cantidad de clientes tiene la mayor edad registrada? Dos clientes
4. ¿Qué cantidad de clientes tiene una edad igual o mayor a 32 años?
   5 clientes

Indicador de logro

1.1 Clasifica los datos en grupos.

Secuencia

Anteriormente se trabajó el conteo de elementos organizados según la observación de una característica, por ejemplo, en la característica “tipo de animal” se observaba cuántos patos, vacas, gallinas, etc., había de cada uno; otro ejemplo es respecto a la característica “tipo de verdura” donde se observaba cuántos rábanos, tomates, etc., había. Para esta clase se organizan las observaciones realizadas en grupos, según rangos de valores que puede tomar la característica observada, es decir, se trabaja con variables numéricas, aunque en este nivel no se debe hacer referencia a los términos: variable categórica o nominal, ordinal o cuantitativa, porque se verán hasta bachillerato.

Solución de algunos ítems:

1.

20				
21				
23				
20	24			
23	24			
23	24	29		
20	26	28		
21	26	29		
22	24	28	34	
22	27	29	35	36
20	24	30	34	36
De 20 a 24	**De 24 a 28**	**De 28 a 32**	**De 32 a 36**	**De 36 a 40**

2.
En el grupo de 20 a 24.

3.
Dos clientes.

4.
3 + 2 = 5 clientes.

Fecha:

U8 1.1

(P) Con los datos.
1. Forma 5 grupos de 4 en 4, inicia en 20 y termina en 40.
2. ¿En qué grupo hay más clientes?
3. ¿Cuántos clientes tienen la mayor edad?
4. ¿Cuántos clientes tienen menos de 32 años?

(S)
1. Verificar con la tabla en el texto.
2. De 24 a 28.
3. 1 (de 39 años).
4. 27 clientes.

(R) 1.
De 20 a 24: 20, 22, 22, 21, 20, 23, 23, 20, 23, 21, 20.
De 24 a 28: 24, 27, 24, 26, 26, 24, 24, 24.
De 28 a 32: 30, 29, 28, 29, 28, 29.
De 32 a 36: 34, 35, 34.
De 36 a 40: 36, 36.

2.
De 20 a 24.

Tarea: página 166 del Cuaderno de Ejercicios.

1.2 Tabla de frecuencias

P

Retomando los datos de los 30 clientes atendidos el día de la secretaria, en la sucursal A de la sala de belleza:

1. Organiza los grupos en una tabla.
2. Determina el total de datos de cada grupo y anota el resultado.

	24			
	24			
	24			
20	26	30		
21	24	30		
22	24	29		
22	27	30		
21	24	31		
22	26	29		
21	27	30	33	
23	24	28	32	39
De 20 a 24	**De 24 a 28**	**De 28 a 32**	**De 32 a 36**	**De 36 a 40**

S

1. Para organizar los datos en grupos, se elabora una tabla y en la primera columna se colocan los grupos.

2. Al realizar el conteo de los datos que quedan en cada grupo y colocar el resultado en la tabla, se obtiene la columna 2.

Edades	Número de clientes
20 - 24	8
24 - 28	11
28 - 32	8
32 - 36	2
36 - 40	1
Total	**30**

C

La tabla en la que se organizan los grupos de datos de una serie, tal como el ejemplo desarrollado, se llama **tabla de distribución de frecuencias** y a cada grupo de datos formado se le llama **clases**, de donde se puede decir que los datos del ejemplo han sido organizados en 5 clases. Además, al total de datos que corresponde a cada clase se le llama **frecuencia**.

Por tanto, para organizar una serie de datos en una tabla de distribución de frecuencias, es necesario:

- Organizar los datos en tantas clases como sea necesario.
- Realizar el conteo de los datos que pertenecen a cada clase para determinar la frecuencia.

Mario y Carlos se reúnen todas las tardes para jugar baloncesto, durante el último mes han llevado un registro de los tiempos jugados por cada uno, cuyos datos se muestran a continuación:

Mario

10	13			
11	15		21	
12	14		21	
11	13	16	20	
12	15	17	19	
11	13	16	20	
10	14	17	19	23
12	13	18	20	22
De 10 a 13	**De 13 a 16**	**De 16 a 19**	**De 19 a 22**	**De 22 a 24**

Carlos

				24
			21	22
		17	21	24
	13	18	20	22
11	13	16	19	23
11	14	16	19	22
11	13	18	19	22
10	15	17	20	23
De 10 a 13	**De 13 a 16**	**De 16 a 19**	**De 19 a 22**	**De 22 a 25**

1. Ordena los datos en una tabla de distribución de frecuencias.
2. Completa los resultados y responde, ¿quién es el que ha jugado mayor tiempo?
   Carlos ha jugado mayor tiempo.

Indicador de logro

1.2 Organiza datos en tablas de distribución de frecuencias.

Secuencia

En la Unidad 2 de cuarto grado se trabajaron las características de los sólidos mediante la observación de figuras en el entorno. Para esta clase se busca que el estudiante descubra los sólidos que se generan al hacer girar figuras planas sobre un eje.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ El estudiante debe manipular la cartulina en forma de rectángulo con el palillo de dientes y observar que al girar dicho rectángulo se generará el cilindro.

Ⓔ Se presentan dos casos en los que se puede trabajar con cartulina o simplemente deducir que al girar el triángulo rectángulo se genera el cono y para el caso del cono truncado el estudiante puede notar que solo observando un lado del eje, el sólido es generado por un trapecio isósceles.

Solución de algunos ítems:

1.

Mario

Minutos de juego	Número de días
10 a 13	8
13 a 16	8
16 a 19	5
19 a 22	7
22 a 25	2
TOTAL	**30**

Carlos

Minutos de juego	Número de días
10 a 13	4
13 a 16	5
16 a 1 9	6
19 a 22	7
22 a 25	8
TOTAL	**30**

2.

Al sumar los datos se tiene que Mario juega 468 minutos en el mes mientras que Carlos juega 534. Por tanto, Carlos ha jugado mayor tiempo.

Fecha: **U8 1.2**

Ⓟ A partir de la ilustración de la clasificación de los datos en el texto:
1. Organiza los grupos en una tabla.
2. Determina el total de datos de cada grupo y anota el resultado.

Ⓢ

Edades	Número de clientes
20 - 24	8
24 - 28	11
28 - 32	8
32 - 36	2
36 - 40	1
Total	**30**

Ⓡ

1. Mario

Minutos de juego	Número de días
10 a 13	8
13 a 16	8
16 a 19	5
19 a 22	7
22 a 25	2
TOTAL	**30**

Carlos

Minutos de juego	Número de días
10 a 13	4
13 a 16	5
16 a 19	6
19 a 22	7
22 a 25	8
TOTAL	**30**

Tarea: página 167 del Cuaderno de Ejercicios.

1.3 Elementos de la tabla de frecuencias

P

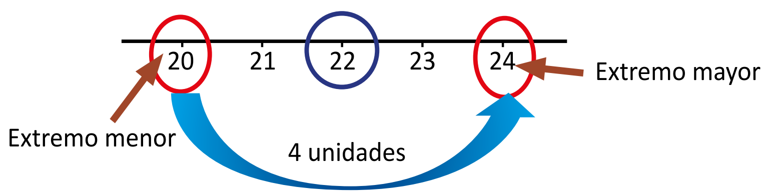
La tabla contiene el registro de la edad de 30 clientes atendidos el día de la secretaria, en la sucursal A de la sala de belleza El Buen Gusto de doña Carmen, analiza los datos y responde:

1. Determina el tamaño de cada clase.
2. Calcula el valor del número que está en el centro de cada clase.
3. ¿Cuál es la frecuencia de la clase cuyo valor que está en medio es 30?

Edades	Número de clientes f
20 - 24	8
24 - 28	11
28 - 32	8
32 - 36	2
36 - 40	1
Total	**30**

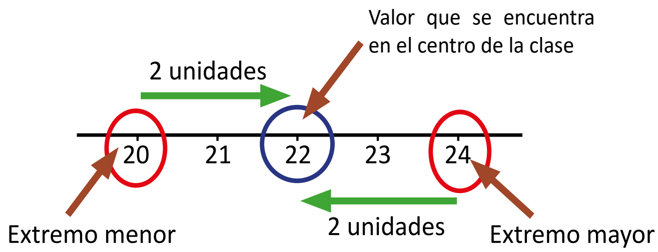
S

1. Al analizar el tamaño de la primera clase, puede observarse que es igual a 4 unidades. Por ejemplo:



Se puede calcular restando los extremos de cada clase: 24 – 20 = 4.

2. Al observar la primera clase, se puede obtener el valor del número que está en el centro de la clase, gráficamente contando igual cantidad de unidades desde cada uno de los extremos, tal como se muestra a continuación:



Edades	Número de clientes f	Valor medio
20 - 24	8	22
24 - 28	11	26
28 - 32	8	30
32 - 36	2	34
36 - 40	1	38
Total	**30**	

Se puede calcular sumando los extremos y dividiendo por dos:

$$\frac{24+20}{2} = \frac{44}{2} = 22$$

3. Al observar la tabla puede verse que la clase, cuyo valor que está en medio es 30, es la clase de 28 a 32, y tiene una frecuencia de 8.

C

Al tamaño de una clase se le llama **ancho de clases** y a los valores extremos **límite de clases**; por ejemplo, para la primera clase, de 20 a 24, los límites de clase son 20 y 24, se tiene que
Límite inferior = extremo menor = 20
Límite superior = extremo mayor = 24 → Ancho de clase = 24 – 20 = 4.

Para calcular el ancho de una clase cualquiera se utiliza la ecuación:

Ancho de clase = límite superior – límite inferior

El número que está en el centro de cada clase se llama **punto medio** y se determina mediante la ecuación:

$$\text{Punto medio} = \frac{\text{límite superior} + \text{límite inferior}}{2}$$

1. La tabla contiene el registro de las edades de 30 clientes atendidos el día de la secretaria, en la sucursal B de la sala de belleza El Buen Gusto, de doña Carmen, analiza los datos y responde:

   a) Determina el ancho de las clases. 24 – 20 = 4
   b) Calcula el punto medio de cada clase. 22, 26, 30, 34, 38
   c) ¿Cuál es la frecuencia de la clase cuyo punto medio es 26?
   8 hombres

Edades	Número de clientes f
20 - 24	11
24 - 28	8
28 - 32	6
32 - 36	3
36 - 40	2
Total	**30**

2. La tabla de frecuencia muestra resultados de la toma de presión sanguínea sistólica a 100 hombres adultos saludables, analiza los datos y responde:

   a) Determina el ancho de las clases. 110 – 100 = 10
   b) Calcula el punto medio de las clases de la distribución.
   c) ¿Cuántos hombres tienen una presión de 125 mmHg en promedio? 38 hombres

Presión sanguínea (mmHg)	Total de hombres f
100 - 110	4
110 - 120	18
120 - 130	38
130 - 140	55
140 - 150	17
150 - 160	6
Total	**138**

3. Investiga la edad de tus compañeras y compañeros de grado, con los datos recopilados realiza lo siguiente:

   a) Identifica el dato menor y el dato mayor, luego organízalos en 5 grupos.
   b) Organiza los datos en una tabla de frecuencias.
   c) Determina los límites de clases y las respectivas frecuencias.
   d) Calcula el punto medio de cada clase.

Un ejemplo de solución podría ser:
a) Menor: 1.60, mayor: 1.70

Indicador de logro

1.3 Calcula el punto medio de una serie de datos organizados en una tabla e interpreta los resultados.

Secuencia

Como en la clase anterior se estableció el significado del término **clase**, ahora se abordarán a detalle los elementos de una clase.

Solución de algunos ítems:

1.

a)

Ancho de clase = 24 – 20 = 4.

b)

20 a 24: $\frac{20+24}{2} = \frac{44}{2} = 22$

24 a 28: $\frac{24+28}{2} = \frac{52}{2} = 26$

28 a 32: $\frac{28+32}{2} = \frac{60}{2} = 30$

32 a 36: $\frac{32+36}{2} = \frac{68}{2} = 34$

36 a 40: $\frac{36+40}{2} = \frac{76}{2} = 38$

c) La frecuencia es 8.

2.

a) Ancho de clase = 110 – 100 = 10.

b)

100 a 110: $\frac{100+110}{2} = \frac{210}{2} = 105$

110 a 120: $\frac{110+120}{2} = \frac{230}{2} = 115$

120 a 130: $\frac{120+130}{2} = \frac{250}{2} = 125$

130 a 140: $\frac{130+140}{2} = \frac{270}{2} = 135$

140 a 150: $\frac{140+150}{2} = \frac{290}{2} = 145$

150 a 160: $\frac{150+160}{2} = \frac{310}{2} = 155$

c) 38 hombres.

Fecha: **U8 1.3**

P Con los datos de la situación presentada en el texto:
1. Determina el tamaño de cada clase
2. Calcula el número que está en el centro de cada clase
3. ¿Cuál es la frecuencia de la clase cuyo valor que está en medio es 30?

S 1. 24 – 20 = 4 unidades.
2. De 20 a 24: $\frac{24+20}{2} = \frac{44}{2} = 22$
De 24 a 28: 26
De 28 a 32: 30
De 32 a 36: 34
De 36 a 40: 38 3. 8

R 1.

a)

Ancho de clase = 24 – 20 = 4

b)

20 a 24: $\frac{20+24}{2} = \frac{44}{2} = 22$

24 a 28: $\frac{24+28}{2} = \frac{52}{2} = 26$

28 a 32: $\frac{28+32}{2} = \frac{60}{2} = 30$

32 a 36: $\frac{32+36}{2} = \frac{68}{2} = 34$

36 a 40: $\frac{36+40}{2} = \frac{76}{2} = 38$

c) La frecuencia es 8.

Tarea: página 168 del Cuaderno de Ejercicios.

Solución de algunos ítems:

3. Un ejemplo de la recolección podría ser:
1.64, 1.62, 1.65, 1.65, 1.65, 1.62, 1.63, 1.62, 1.68, 1.64, 1.64, 1.66, 1.60, 1.67, 1.62, 1.60, 1.69, 1.66, 1.67, 1.62, 1.66, 1.60, 1.66, 1.61, 1.69, 1.65, 1.65, 1.67, 1.61, 1.63, 1.67, 1.69, 1.64, 1.70, 1.68, 1.60, 1.63, 1.65.

a) Dato menor: 1.60
Dato mayor: 1.70

		1.65			
		1.64			
	1.63	1.65	1.67		
	1.63	1.65	1.67		
1.60	1.62	1.64	1.66		
1.61	1.62	1.64	1.66	1.68	
1.61	1.62	1.65	1.67	1.69	
1.60	1.63	1.65	1.66	1.69	
1.60	1.62	1.65	1.67	1.69	
1.60	1.62	1.64	1.66	1.68	1.70
De 1.60 a 1.62	De 1.62 a 1.64	De 1.64 a 1.66	De 1.66 a 1.68	De 1.68 a 1.70	De 1.70 a 1.72

b)

Estatura en metros	**Número de estudiante**
	f
De 1.60 a 1.62	6
De 1.62 a 1.64	8
De 1.64 a 1.66	10
De 1.66 a 1.68	8
De 1.68 a 1.70	5
De 1.70 a 1.72	1
Total	**38**

c) y d)

Clase	Límite inferior	Límite superior	Frecuencia	Punto medio
1	1.60	1.62	6	$\frac{1.60 + 1.62}{2} = 1.61$
2	1.62	1.64	8	$\frac{1.62 + 1.64}{2} = 1.63$
3	1.64	1.66	10	$\frac{1.64 + 1.66}{2} = 1.65$
4	1.66	1.68	8	$\frac{1.66 + 1.68}{2} = 1.67$
5	1.68	1.70	5	$\frac{1.68 + 1.70}{2} = 1.69$
6	1.70	1.72	1	$\frac{1.70 + 1.72}{2} = 1.71$

1.4 Gráficas estadísticas

P

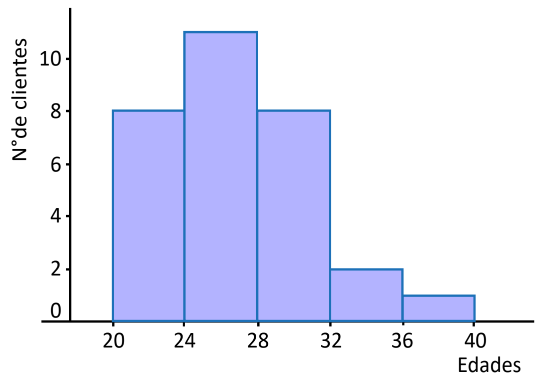
La tabla contiene el registro de la edad de 30 clientes atendidos el día de la secretaria, en la sucursal A de la sala de belleza El Buen Gusto, realiza lo siguiente:

1. Representa mediante rectángulos las clases con las respectivas frecuencias.
2. Qué características tiene la gráfica que muestra la distribución de los clientes atendidos en la sucursal A de la sala de belleza.
3. Grafica el punto medio y la frecuencia de cada clase como pares ordenados.
4. Une con segmentos de recta los puntos graficados en el numeral anterior.

Edades	*f*
20 - 24	8
24 - 28	11
28 - 32	8
32 - 36	2
36 - 40	1
Total	**30**

S

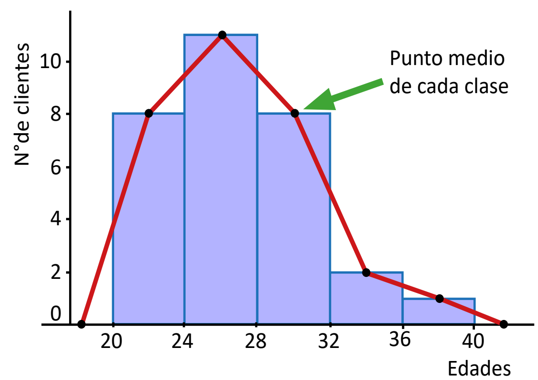
1. Para representar mediante rectángulos las clases, con las respectivas frecuencias, se realiza lo siguiente:
   - Colocar en el eje horizontal los límites de las clases.
   - En el eje vertical se coloca el número de clientes que corresponde a la frecuencia de cada clase.
   - Sobre el ancho de clases, se levantan rectángulos cuya altura coincida con la frecuencia de cada clase.



2. Al observar la gráfica puede verse que los primeros rectángulos son más altos, lo que indica que la mayor cantidad de clientes que se atendió tiene una edad entre 20 y 32 años. Además, como el límite superior de una clase es igual al inferior de la siguiente, los rectágulos quedan pegaditos, uno a continuación del otro.

3. Al ampliar una clase inferior y una superior con frecuencia cero, y graficar como pares ordenados el punto medio con las respectivas frecuencias, se obtienen puntos ubicados en el centro de la parte superior de cada rectángulo.

4. Al unir los puntos se obtiene una línea poligonal abierta que inicia en el punto medio de la primera clase y termina en el punto medio de la última clase, tal como se muestra en la gráfica de la derecha.



Lección 1

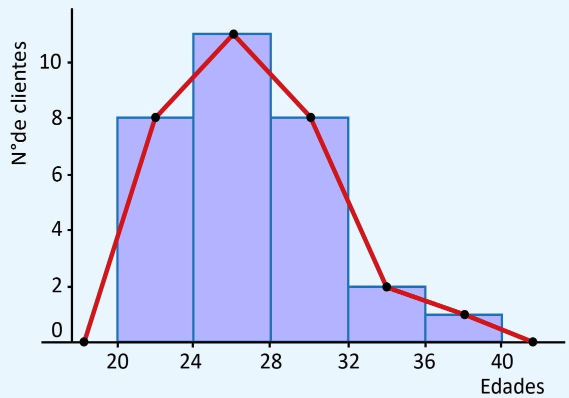
La gráfica que se obtiene al representar las clases con sus respectivas frecuencias se le llama **histograma** y para elaborarlo se realiza lo siguiente:

- Se coloca en el eje horizontal los límites de las clases.
- En el eje vertical se coloca la frecuencia, se busca una escala adecuada, considerando los valores de la frecuencia de la distribución de los datos.
- Se levantan rectángulos cuya base coincide con el ancho de clases y la altura con la frecuencia de la respectiva clase.

Al observar el histograma se puede encontrar que

- Tiene forma parecida a la de una montaña y la parte más alta indica dónde se encuentra concentrado el mayor número de datos.
- Los rectángulos que forman el histograma tienen un área proporcional a la frecuencia de su clase.

En algunos casos es importante resaltar la forma de la distribución de los datos, en ese caso, se coloca un punto en el punto medio del lado superior de cada rectángulo, se unen con segmentos de recta los puntos identificados; luego, el extremo izquierdo se conecta con el punto medio de una clase imaginaria anterior a la menor, con frecuencia cero y el extremo derecho se conecta con el punto medio de una clase imaginaria posterior a la mayor, también con frecuencia cero. A la gráfica que se obtiene se le llama **polígono de frecuencia**.



La tabla contiene el registro de las edades de 30 clientes atendidos el día de la secretaria, en la sucursal B de la sala de belleza El Buen Gusto, con este registro realiza lo siguiente:

1. Representa los datos mediante un histograma.
2. ¿Qué características tiene la gráfica que muestra la distribución de las edades de los 30 clientes atendidos en la sucursal B de la sala de belleza?
3. Grafica el polígono de frecuencia a partir del histograma.

Edades	f
20 - 24	11
24 - 28	8
28 - 32	6
32 - 36	3
36 - 40	2
Total	**30**

2. A medida que los rangos de las edades aumentan, el número de personas en cada uno disminuye.

Unidad 8

Indicador de logro

1.4 Representa gráficamente información estadística.

Secuencia

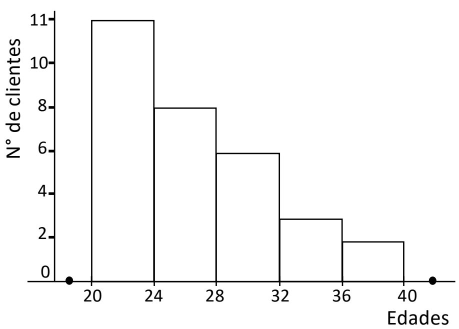
Los estudiantes ya conocen algunas gráficas estadísticas como lo son: la gráfica de barras, de líneas, de faja y pastel, así como el pictograma, de manera que ahora se introducen las gráficas utilizadas para datos que están agrupados por clases; es decir, el histograma y el polígono de frecuencias.

Propósito

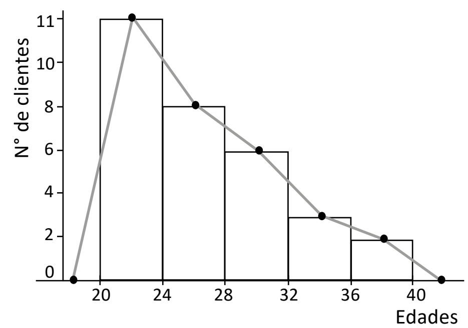
Ⓟ, Ⓢ A la hora del desarrollo de la Solución para no dibujar dos gráficas, se recomienda realizar el numeral 1, 2 y luego regresar al gráfico del numeral 1 para hacer el numeral 3 y 4.

Solución de algunos ítems:

1.



3.



2. A medida que los rangos de las edades aumenta, el número de personas en cada uno disminuye.

Cuando se resuelva el ítem en la pizarra se recomienda hacerlo de la siguiente manera:
Realizar el numeral 1, 2 y luego regresar al gráfico del numeral 1 para hacer el numeral 3.

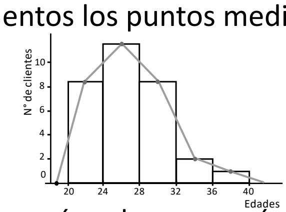
Fecha:

U8 1.4

Ⓟ Con la tabla de frecuencias presentada en el texto:

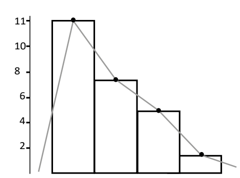
1. Representa mediante rectángulos las clases con las respectivas frecuencias.
2. ¿Qué características tiene la gráfica?
3. Grafica el punto medio y la frecuencia de cada clase como pares ordenados.
4. Une con segmentos los puntos medios.

Ⓢ 1., 3. y 4.



2. Los primeros rectángulos son más altos, indica que la mayoría de clientes atendidos tienen entre 20 y 32 años. También los rectángulos están consecutivos sin espacio entre ellos.

Ⓡ 1 y 3



2. A medida que los rangos de edad aumenta, el número de personas en cada uno de ellos disminuye.

Tarea: página 169 del Cuaderno de Ejercicios.

1.5 Uso del polígono de frecuencias

P

En el octavo grado de un centro escolar se aplicó una prueba a las dos secciones, los resultados se muestran en la tabla de la derecha. Con la información realiza lo siguiente:

1. ¿Es posible comparar los resultados obtenidos en las dos secciones? En caso de no ser posible, analiza una manera que permita comparar los resultados de las dos secciones.
2. Calcula el porcentaje de alumnos cuyos resultados quedan agrupados en cada clase.
3. Representa los datos en un polígono de frecuencia.

Puntajes	Sección (A)	Sección (B)
	f_A	f_B
0 - 20	3	5
20 - 40	5	8
40 - 60	12	17
60 - 80	6	10
80 - 100	4	5
Total	**30**	**45**

S

1. Como el número de estudiantes de las dos secciones es distinto, no tiene sentido comparar las frecuencias, por ejemplo, en la clase de 40 a 60, quedan comprendidos los resultados de 12/30 estudiantes en la sección A; mientras que en la sección B son 17/45 estudiantes.

   Como no es posible comparar las frecuencias, entonces se puede calcular la razón de la frecuencia de cada clase entre el total de la frecuencia en lugar de utilizar la frecuencia por sí sola; por ejemplo, para la primera clase de 0 a 20 se tiene $\frac{3}{30}$ = 0.10 para la sección A y $\frac{5}{45}$ = 0.11 para la sección B, al calcular para todas las clases se obtienen los datos de la siguiente tabla.

Puntajes	Sección (A)	Sección (B)
0 - 20	0.10	0.11
20 - 40	0.17	0.18
40 - 60	0.40	0.38
60 - 80	0.20	0.22
80 - 100	0.13	0.11
Total	**1.00**	**1.00**

2. Llamando x al porcentaje de una clase y considerando que el total de la frecuencia corresponde al 100% de los estudiantes de una sección, entonces para calcular el porcentaje de la primer clase se tiene:

   Para la sección A:
   3/30 = x/100%, de donde se obtiene que $x = \frac{3}{30} \times 100\%$.

   Para la sección B:
   5/45 = x/100%, de donde se obtiene que $x = \frac{5}{45} \times 100\%$.

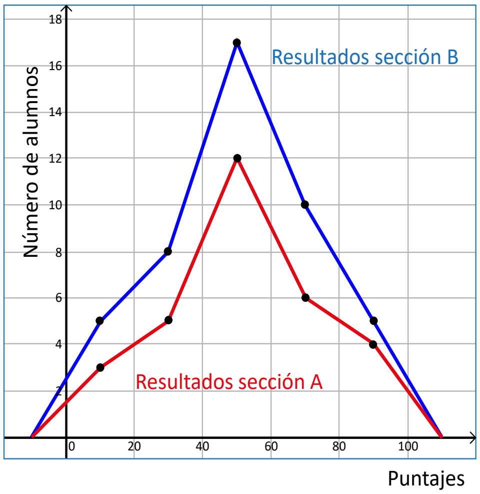
   Al comparar los resultados con el numeral anterior, se observa que el porcentaje de una clase se puede obtener multiplicando por 100% la razón entre la frecuencia y el total de la frecuencia; es decir, se puede calcular los porcentajes multiplicando únicamente por 100% los resultados de la tabla anterior, por ejemplo para la segunda clase de 20 a 40, se tiene:
   Sección A: 0.17 × 100% = 17%.
   Sección B: 0.18 × 100% = 18%.

Puntajes	Sección (A)	Sección (B)
0 - 20	10	11
20 - 40	17	18
40 - 60	40	38
60 - 80	20	22
80 - 100	13	11
Total	**100%**	**100%**

Así, sucesivamente, se determinan los porcentajes de las clases restantes, obteniendo los resultados de la tabla.

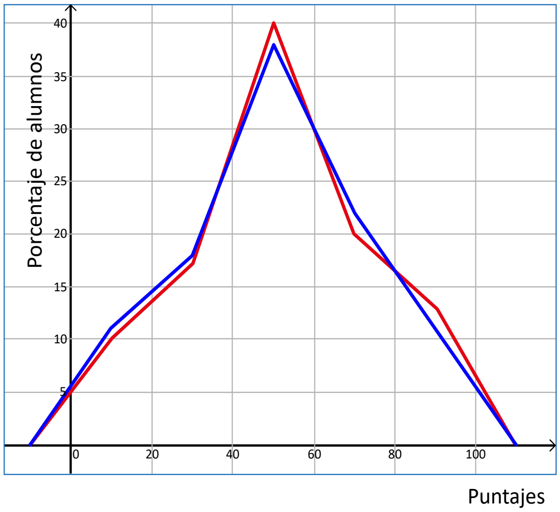
3. Al representar los resultados de cada una de las secciones mediante un polígono de frecuencias en un mismo plano, se obtiene la gráfica 1, en la cual no se pueden realizar comparaciones por tener distinto número de datos, pero si en lugar de las frecuencias se toman los porcentajes, entonces se puede hacer una comparación gráfica entre los resultados de las dos secciones (ver gráfica 2).

1.



Gráfica 1

2.



Gráfica 2

C

La comparación de datos estadísticos generalmente no se puede realizar directamente con las frecuencias de cada clase, en estos casos, es necesario calcular la razón entre la frecuencia de cada clase y el total de la frecuencia; tal como se hizo en el ejemplo anterior, $\frac{\textit{frecuencia}}{\textit{total de frecuencias}}$, a este cociente se le llama **frecuencia relativa(f_r)**. Considerando que el total de las frecuencias es igual al número de datos (n), entonces $f_r = \frac{\textit{frecuencia}}{\textit{total de frecuencias}} = \frac{f}{n}$.

Al producto que se obtiene al multiplicar la frecuencia relativa por 100 se le llama **frecuencia relativa porcentual** (f_r%), es decir que $f_r\% = \frac{\textit{frecuencia}}{\textit{total de frecuencias}} \times 100 = \frac{f}{n} \times 100$ se utiliza para determinar los porcentajes de datos que corresponden a cada clase de la distribución; para facilitar el análisis y/o comparación de una o más series de datos.

Miguel tiene una finca y para recolectar el café organizó a los trabajadores en dos cuadrillas, en la tabla se muestra el registro de la cantidad de café recolectada en un día específico por cada una de las cuadrillas. Con la información realiza lo siguiente:

Arrobas de café	Cuadrilla 1	Cuadrilla 2
0 - 3	1	2
3 - 6	2	4
6 - 9	3	7
9 - 12	5	8
12 - 15	6	10
15 - 18	5	7
18 - 21	2	5
21 - 24	1	2
Total	**25**	**45**

1. Calcula las frecuencias relativas y las frecuencias relativas porcentuales.
2. Representa los datos en un polígono de frecuencia relativa porcentual.
3. ¿En cuál cuadrilla los trabajadores tuvieron mejores resultados? Parece ser que el desempeño de ambas cuadrillas es muy parejo. No se puede decir cuál tiene mejor desempeño.

Indicador de logro

1.5 Compara información estadística mediante polígonos de frecuencias.

Secuencia

Los estudiantes ya conocen el término **frecuencia** de una clase, por lo que ahora se ampliará a **frecuencia relativa** y **frecuencia relativa porcentual**, a través de la presentación de su importancia para realizar comparaciones entre conjunto de datos con diferente número de elementos.

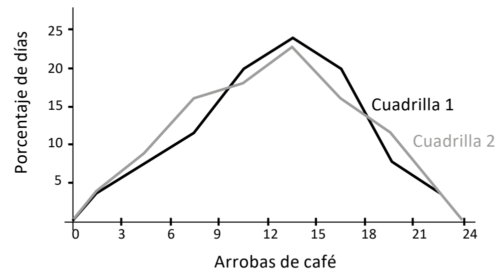
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Lo importante es hacer notar el hecho de que la diferencia entre el número de estudiantes entre cada sección evita que se pueda hacer una comparación directa entre las gráficas de las frecuencias absolutas, haciéndose necesario el uso de la frecuencia porcentual para poder hacer una comparación objetiva del desempeño de las dos secciones.

Solución de algunos ítems:

1.

Arrobas de café	Cuadrilla 1	Cuadrilla 2	f_{r1}	f_{r2}	$f_{r1}\%$	$f_{r2}\%$
0 - 3	1	2	0.04	0.04	4	4
3 - 6	2	4	0.08	0.09	8	9
6 - 9	3	7	0.12	0.16	12	16
9 - 12	5	8	0.20	0.18	20	18
12 - 15	6	10	0.24	0.22	24	22
15 - 18	5	7	0.20	0.16	20	16
18 - 21	2	5	0.08	0.11	8	11
21 - 24	1	2	0.04	0.04	4	4
Total	**25**	**45**	**1.0**	**1.0**	**100**	**100**



3. Parece ser que el desempeño de ambas cuadrillas es muy parejo. Por lo tanto, no se puede decir cuál tiene mejor desempeño.

Fecha: **U8 1.5**

Ⓟ Con la información de la tabla del texto:

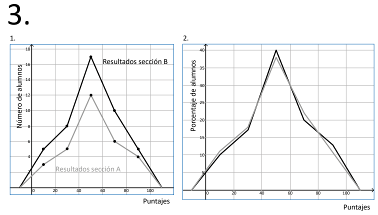
1. ¿Se pueden comparar los resultados de las secciones?, ¿por qué?, calcula la razón de la frecuencia con el total de datos en cada clase.
2. Calcula el porcentaje de alumnos en cada clase.
3. Construye un polígono de frecuencia en el que se representan las frecuencias de ambas secciones. Luego realiza otro histograma para los porcentajes.

Ⓢ 1. No, los grupos no tienen igual cantidad de estudiantes.

2.

Puntajes	Sección (A)	Sección (B)	Sección (A)	Sección (B)
0 - 20	0.10	0.11	10	11
20 - 40	0.17	0.18	17	18
40 - 60	0.40	0.38	40	38
60 - 80	0.20	0.22	20	22
80 - 100	0.13	0.11	13	11
Total	**1.00**	**1.00**	**100%**	**100%**

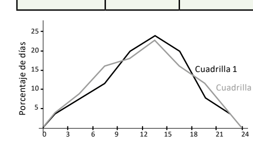
3.



Ⓡ 1.

f_{r1}	f_{r2}	$f_{r1}\%$	$f_{r2}\%$
0.04	0.04	4	4
0.08	0.09	8	9
0.12	0.16	12	16
0.20	0.18	20	18
0.24	0.22	24	22
0.20	0.16	20	16
0.08	0.11	8	11
0.04	0.04	4	4
1.0	**1.0**	**100**	**100**

2.



3. No se puede decir cuál tiene mejor desempeño.

Tarea: página 171 del Cuaderno de Ejercicios.

1.6 Interpretación de datos estadísticos

P

En el Instituto Nacional Buena Vista realizaron el examen de admisión para el año próximo, los resultados se muestran en la tabla. Analiza y realiza los respectivos cálculos, luego responde:

1. ¿Qué porcentaje de estudiantes obtuvo un puntaje inferior a 40?
2. ¿Qué porcentaje de los alumnos obtuvo un puntaje mayor o igual a 70?
3. Si únicamente se aceptarán a los que obtuvieron al menos 50 puntos de la prueba, ¿cuántos de los estudiantes evaluados serán aceptados?

Puntajes	Número de alumnos/as
0 - 10	1
10 - 20	6
20 - 30	10
30 - 40	16
40 - 50	22
50 - 60	25
60 - 70	12
70 - 80	9
80 - 90	7
90 - 100	2
Total	**110**

S

Primero es necesario calcular los porcentajes de cada clase, por ejemplo:

- Para la clase 1: $f_r\% = \frac{1}{110} \times 100\% = 0.9\%$
- Para la clase 2: $f_r\% = \frac{6}{110} \times 100\% = 5.5\%$

Puntajes	Porcentaje de alumnos/as
0 - 10	0.9
10 - 20	5.5
20 - 30	9.1
30 - 40	14.5
40 - 50	20.0
50 - 60	22.7
60 - 70	10.9
70 - 80	8.2
80 - 90	6.4
90 - 100	1.8
Total	**100%**

1. El porcentaje de estudiantes que obtuvo un puntaje inferior a 40 se determina sumando los porcentajes de las clases que corresponden a los respectivos puntajes: 0.9 + 5.5 + 9.1 + 14.5 = 30%.
2. Para determinar el porcentaje de estudiantes que obtuvo un puntaje mayor o igual a 70, se procede de igual manera que el caso anterior, sumando los respectivos porcentajes: 8.2 + 6.4 + 1.8 = 16.4%, que se puede aproximar a 16%.
3. Si se aceptarán a los estudiantes que hayan obtenido al menos 50 puntos de la prueba, para determinar el total de estudiantes, se suman las frecuencias de las respectivas clases:
   25 + 12 + 9 + 7 + 2 = 55; por tanto, serán aceptados únicamente 55 estudiantes.

En una clase de educación física se ha cronometrado el tiempo, en segundos, que tarda cada estudiante en recorrer la pista de la cancha de fútbol.

Tiempo en segundos	Número de alumnos/as
8 - 9	11
9 - 10	10
10 - 11	8
11 - 12	5
12 - 13	3
13 - 14	2
14 - 15	1
Total	**40**

1. ¿Qué porcentaje de estudiantes hizo un tiempo inferior a 10 segundos? 53 %
2. ¿Qué porcentaje de estudiantes hizo un tiempo mayor o igual a 12 segundos? 15 %
3. Si se seleccionará al 50% de los estudiantes considerando los que tienen mayor velocidad, ¿cuál es el tiempo máximo que se aceptará? El tiempo que se tarda un estudiante seleccionado no debe ser de 10 o más segundos.

Indicador de logro

1.6 Interpreta datos estadísticos organizados en tablas de frecuencias.

Secuencia

En la clase anterior se introdujo la utilidad de la frecuencia relativa porcentual para realizar comparaciones, ahora se hace una ampliación del uso de esta frecuencia para obtener otro tipo información de los datos resumidos en una tabla y poder hacer interpretaciones sobre ellos.

Propósito

Ⓟ Determinar la frecuencia porcentual a partir de la frecuencia absoluta. Cuando los estudiantes hayan calculado los porcentajes se les puede indicar que individualmente los comparen con los calculados en la tabla de la Solución.

Solución de algunos ítems:

Tiempo en segundos	Número de alumnos/as	f_r	$f_{r\%}$
8 - 9	11	0.28	28
9 - 10	10	0.25	25
10 - 11	8	0.20	20
11 - 12	5	0.12	12
12 - 13	3	0.08	8
13 - 14	2	0.05	5
14 - 15	1	0.02	2
Total	**40**	**1**	**100**

1. 28 + 25 = 53 %
2. 8 + 5 + 2 = 15 %
3. Entre la primera y segunda clase se tiene el 50 % de los estudiantes. De tal manera que el tiempo que se tarda un estudiante seleccionado no debe ser de 10 o más segundos, es decir, el máximo que se aceptará es 9 segundos.

Fecha: **U8 1.6**

Ⓟ Según las notas de los alumnos en la tabla, calcula los porcentajes y responde:
1. ¿Qué porcentaje obtuvo menos de 40?
2. ¿Qué porcentaje obtuvo 70 o más?
3. Si únicamente se aceptarán a los que obtuvieron al menos 50 puntos de la prueba, ¿cuántos estudiantes evaluados serán aceptados?

Ⓢ
1. 0.9 + 5.5 + 9.1 + 14.5 = 30 %.
2. 8.2 + 6.4 + 1.8 = 16.4 % ≈ 16 %.
3. Se suman las frecuencias de las respectivas clases: 25 + 12 + 9 + 7 + 2 = 55.
   Por tanto, se aceptarán 55 estudiantes.

Ⓡ

Tiempo en segundos	Número de alumnos/as	f_r	$f_{r\%}$
8 - 9	11	0.28	28
9 - 10	10	0.25	25
10 - 11	8	0.20	20
11 - 12	5	0.12	12
12 - 13	3	0.08	8
13 - 14	2	0.05	5
14 - 15	1	0.02	2
Total	**40**	**1**	**100**

1. 28 + 25 = 53 %
2. 8 + 5 + 2 = 15 %
3. El tiempo que se tarda un estudiante seleccionado no debe ser de 10 o más segundos.

Tarea: página 172 del Cuaderno de Ejercicios.

1.7 Practica lo aprendido

Realiza de manera ordenada lo que se solicita en cada situación planteada.

1. A continuación se muestran los registros que lleva una unidad de salud, del peso en libras, de los niños que cumplieron 3 años.

28	32	38	25	27	37	19	26	35	23
30	26	18	33	29	21	34	28	31	39
29	35	30	31	22	34	25	16	30	29
24	34	20	26	31	23	35	29	30	27
29	28	27	31	30	31	28	26	29	33

a) Identifica el peso menor y el peso mayor.
b) Construye una tabla con los datos agrupados en 6 clases de ancho 4 libras.
c) Representa la distribución de datos mediante un histograma.
d) Elabora el polígono de frecuencia de la distribución a partir del histograma.

2. Una psicóloga llevó un registro sobre el número de películas que han visto cada uno de sus pacientes, estos datos los clasificó en niños y adultos, considerando la edad.

Niños

8	15	22	19	15	17	18	20	17	12
16	16	17	21	23	18	20	21	20	20
15	18	17	19	20	23	22	10	17	19
19	21	20	18	18	24	11	19	31	16
17	18	19	20	18	18	39	18	19	16

Adultos

10	12	5	8	13	10	12	8	7	9
11	10	9	9	11	15	12	17	14	10
9	8	15	16	10	14	7	16	9	1
4	11	12	7	9	10	3	11	14	8
12	5	10	9	7	11	14	10	15	9

a) Con los datos del número de películas que ven los niños, realiza lo siguiente:

- Organiza los datos en una tabla de distribución de frecuencias con 8 clases, con un ancho de clases igual a 4.
- ¿Cuántas películas ve la mayor cantidad de niños?
- Representa la información mediante un histograma.

b) Con los datos sobre el número de películas que ven los adultos, haz lo siguiente:

- Organiza los datos en una tabla de frecuencias con 6 clases (utiliza un ancho de clases igual a 3).
- ¿En cuál clase queda ubicada la mayor cantidad de adultos?
- Representa la información mediante un histograma.

c) ¿Es posible comparar las dos distribuciones mediante la gráfica del polígono de frecuencias? Justifica tu respuesta.

d) Escribe al menos una semejanza y una diferencia de las distribuciones.

Indicador de logro

1.7 Resuelve problemas correspondientes a tablas y gráficas estadísticas para variables cuantitativas.

Solución de algunos ítems:

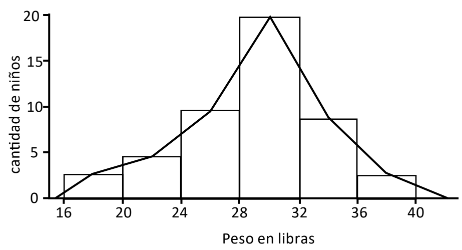
1.

a) peso menor: 16; peso mayor: 39

b)

			29		
			28		
			31		
			30		
			31		
			28		
			29		
			30		
			29		
			31		
		26	29		
		27	30	33	
		27	31	35	
		26	30	34	
		24	29	34	
	23	25	31	35	
	20	26	28	34	
16	22	26	29	33	39
18	21	27	30	35	37
19	23	25	28	32	38
De 16 a 20	**De 20 a 24**	**De 24 a 28**	**De 28 a 32**	**De 32 a 36**	**De 36 a 40**

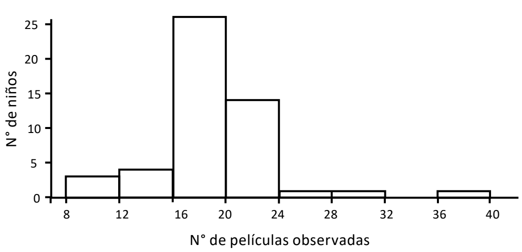
c) y d)



2. a)

n.° de películas	n.° de niños
8 a 12	3
12 a 16	4
16 a 20	26
20 a 24	14
24 a 28	1
28 a 32	1
32 a 36	0
36 a 40	1
Total	**50**

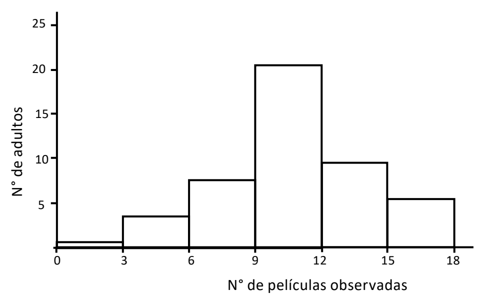
De 16 a 19 películas.



b)

n.° de películas	n.° de adultos
0 a 3	1
3 a 6	4
6 a 9	8
9 a 12	21
12 a 15	10
15 a 18	6
Total	**50**

En la clase de 9 a 12.



c) Sí es posible. Porque se tiene igual número de niños que adultos.

d) **Semejanza:** Ambas gráficas tienen una mayor cantidad de datos a un lado del centro de la distribución.
Diferencia: La gráfica de a) tiene la mayor cantidad de datos a la izquierda del centro de la distribución, mientras que en b) la mayoría de los datos están a la derecha.

Tarea: página 173 del Cuaderno de Ejercicios.

1.8 Practica lo aprendido

Realiza de manera ordenada lo que se solicita en cada situación planteada.

1. El tiempo que transcurre entre la finalización de la presentación de un chiste y el momento en que una persona comienza a reírse se denomina tiempo de reacción. En este contexto, la presentación del chiste es un estímulo y la aparición de la risa, la reacción. Se hizo un experimento con un grupo de personas, en el que se midió el tiempo de reacción de sus integrantes ante un chiste y se registraron los siguientes datos en décimas de segundos (ds).

Tiempo en ds	Número de personas
13 - 19	4
19 - 25	9
25 - 31	36
31 - 37	32
37 - 43	12
43 - 49	7
Total	**100**

   a) Representa la distribución mediante un polígono de frecuencias.
   b) ¿Cuántas personas reaccionaron en un tiempo igual o mayor a 19 décimas de segundos, pero menor a 37? 77 personas
   c) ¿Cuántas personas reaccionaron a un tiempo igual o mayor a 37 décimas de segundos? 19 personas
   d) Calcula el tiempo promedio de reacción de la clase de personas que reaccionan entre las 25 y 31 décimas de segundos. 28 ds
   e) Determina el porcentaje de personas que reaccionaron antes de las 25 décimas de segundos. 13 %
   f) Determina el porcentaje de personas que reaccionaron en un tiempo igual o mayor a 31 décimas de segundos. 51 %

2. En una fábrica se ha medido la longitud de 1 000 tornillos para determinar si la máquina cortadora está ajustada y se han obtenido los siguientes datos:

Longitud en mm	Número de tornillos
67 - 72	5
72 - 77	95
77 - 82	790
82 - 87	100
87 - 92	10
Total	**1 000**

   a) Representa la información mediante un histograma. 10 %
   b) Si se consideran aceptables las piezas cuya longitud está en el intervalo de 77 a 87 mm, ¿cuál es el porcentaje de piezas defectuosas? 11 %
   c) Calcula el porcentaje de piezas cuya medida es inferior a 77 mm.
   d) Determina el porcentaje de tornillos cuya medida es 87 mm o más. 1 %

3. La tabla muestra los tiempos en que han sido anotados los goles en los distintos partidos jugados en una temporada de fútbol, en tu cuaderno completa la tabla y realiza lo que se pide en cada caso.

Tiempo en minutos	Goles (f)	Punto medio	f_r	f_r%
0 - 15	5			
15 - 30	6			
30 - 45	8			
45 - 60	7			
60 - 75	8			
75 - 90	6			
Total				

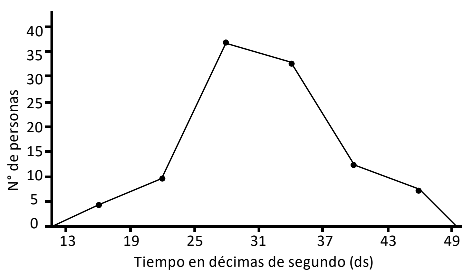
   a) Elabora el respectivo histograma.
   b) Representa la información mediante un polígono de frecuencias.
   c) ¿Cuántos goles se han realizado en el primer tiempo (los primeros 45 minutos)? 19 goles
   d) ¿Qué porcentaje de goles ha sido realizado durante el segundo tiempo de juego? 52.5 %
   e) ¿Qué porcentaje de goles se ha acertado entre el minuto 30 y el 60? 37.5 %

Indicador de logro

1.8 Resuelve problemas correspondientes a tablas y gráficas estadísticas para variables cuantitativas.

Solución de algunos ítems:

1.a)



b) 9 + 36 + 32 = 77 personas.

c) 12 + 7 = 19 personas.

d) $\frac{25 + 31}{2} = \frac{56}{2} = 28$ ds.

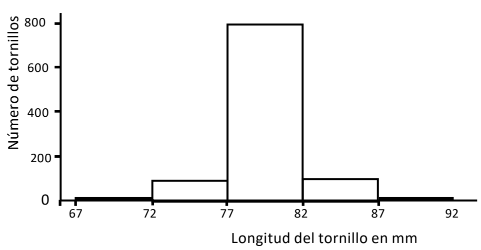
e)

Tiempo en ds	Número de personas	f_r	f_r%
13 - 19	4	0.04	4
19 - 25	9	0.09	9
25 - 31	36	0.36	36
31 - 37	32	0.32	32
37 - 43	12	0.12	12
43 - 49	7	0.07	7
Total	**100**	**1**	**100**

4 + 9 = 13 %.

f) 32 + 12 + 7 = 51 %.

2. a)



b)

Longitud en mm	Número de tornillos	f_r	f_r%
67 - 72	5	0.005	0.5
72 - 77	95	0.095	9.5
77 - 82	790	0.790	79.0
82 - 87	100	0.100	10.0
87 - 92	10	0.010	1.0
Total	**1 000**	**1**	**100**

100 – (79 + 10) = 100 – 89 = 11 %.

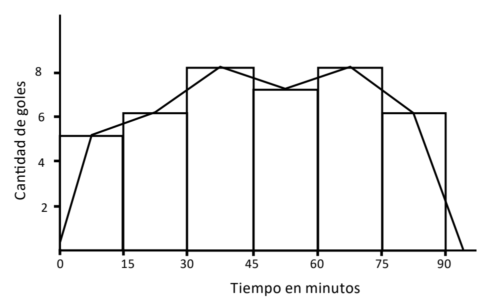
c) 9.5 + 0.5 = 10 %.

d) 1 %.

3.

Tiempo en minutos	Goles (f)	Punto medio	f_r	f_r%
0 - 15	5	7.5	0.125	12.5
15 - 30	6	22.5	0.150	15.0
30 - 45	8	37.5	0.200	20.0
45 - 60	7	52.5	0.175	17.5
60 - 75	8	67.5	0.200	20.0
75 - 90	6	82.5	0.150	15.0
Total	**40**		**1**	**100**

a) y b)



c) 5 + 6 + 8 = 19 goles.

d) 17.5 + 20.0 + 15.0 = 52.5 %.

e) 20 + 17.5 = 37.5 %.

Tarea: página 174 del Cuaderno de Ejercicios.

2.1 Sentido de las medidas de tendencia central

P

Los datos corresponden al registro del total de clientes atendidos en las dos sucursales de una panadería.

Sucursal A					
14	23	38	40	19	31
49	26	24	30	32	

Sucursal B					
10	22	24	20	30	57
34	46	29	28	24	21

1. Ordena la cantidad de clientes atendidos en ambas sucursales de menor a mayor.
2. Indentifica la cantidad mínima y la cantidad máxima de clientes atendidos en ambas sucursales.
3. Determina el valor de la mediana de los datos de las dos sucursales.
4. ¿Cuál es el valor de la moda de los datos sobre la cantidad de clientes atendidos en las dos sucursales de la panadería?
5. Calcula la media aritmética de los datos de las dos sucursales de la panadería.

S

1. Al ordenar los datos de los clientes atendidos en las dos sucursales de la panadería, se tiene:

   Sucursal A: 14, 19, 23, 24, 26, 30, 31, 32, 38, 40, 49.
   Sucursal B: 10, 20, 21, 22, 24, 24, 28, 29, 30, 34, 46, 57.

2. La cantidad menor y la cantidad mayor de clientes atendidos en ambas sucursales es:

   Sucursal A
   Cantidad menor: 14
   Cantidad mayor: 49
   La cantidad de clientes atendidos en sucursal A oscila entre 14 y 49.

   Sucursal B
   Cantidad menor: 10
   Cantidad mayor: 57
   La cantidad de clientes atendidos en la sucursal B oscila entre 10 y 57.

3. Como la mediana es el dato que ocupa la posición central en la serie de datos, entonces, para cada una de las series se tiene:

   Sucursal A
   14, 19, 23, 24, 26, **30**, 31, 32, 38, 40, 49

   Como son 11 datos, entonces la mediana es el dato que ocupa la posición central, es decir, la posición 6, por tanto: mediana = 30.

   Sucursal B
   10, 20, 21, 22, 24, **24**, **28**, 29, 30, 34, 46, 57

   Como tiene 12 datos, entonces se toman los dos valores centrales y se calcula el punto medio entre ambos, es decir: mediana = $\frac{24+28}{2}$ = 26.

4. Al observar las dos series de datos se puede concluir que

   - En la sucursal A, todos los datos aparecen una sola vez, por tanto, no tiene moda.
   - En la sucursal B, el número 24 aparece 2 veces, entonces: moda = 24.

5. Para calcular la media aritmética es necesario sumar todos los datos y dividir el resultado entre el número de datos, tal como se aprendió en educación básica; *Media aritmética* = $\frac{\textit{Suma de todos los datos}}{\textit{número de datos}}$ entonces, para los datos de las dos sucursales, se tiene:

Sucursal A: 14, 23, 38, 40, 19, 31, 49, 26, 24, 30, 32.

$$\text{Media aritmética} = \frac{14 + 23 + 38 + 40 + 19 + 31 + 49 + 26 + 24 + 30 + 32}{11} = \frac{326}{11} = 29.6.$$

Sucursal B: 10, 22, 24, 20, 30, 57, 34, 46, 29, 28, 24, 21.

$$\text{Media aritmética} = \frac{10 + 22 + 24 + 20 + 30 + 57 + 34 + 46 + 29 + 28 + 24 + 21}{12} = \frac{345}{12} = 28.8.$$

C

Tal como se aprendió en eduación básica, se pueden calcular valores representativos que pueden describir una serie de datos, los cuales se han calculado en el ejemplo anterior y se detallan a continuación:

La mediana es el valor que ocupa la posición central en una serie de datos, cuando ya han sido ordenados de menor a mayor. Para determinar el valor de la mediana, se consideran los siguientes casos:

a) Cuando el número de datos n es impar, la mediana es el dato x que ocupa la posición central. En este caso, para determinar la posición central se utiliza la fórmula $\frac{n+1}{2}$, para el ejemplo anterior de la sucursal A, $n = 11$, entonces la posición de la mediana es: $\frac{11+1}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

b) Cuando el número de datos n es par, la mediana es el número que se encuentra entre los datos centrales, pues al determinar la posición de la mediana, se obtiene un valor que no corresponde a la posición de ningún dato de la serie, por ejemplo, para el caso de la sucursal B, $n = 12$, entonces, al determinar la posición de la mediana, $\frac{12+1}{2} = \frac{13}{2} = 6.5$, lo que indica que la mediana es el número que está entre el dato 6 y el dato 7. En este caso, la mediana = *Punto medio de los dos datos centrales*.

La moda es el valor que aparece la mayor cantidad de veces en una serie, es decir, la moda es el dato que tiene la mayor frecuencia. En casos en que todos los datos aparecen igual cantidad de veces, se dice que la serie no tiene moda o que carece de moda.

La media aritmética (μ) es el número que resulta de dividir la suma de todos lo datos x entre el número de datos n y que se conoce también como **promedio**. Media aritmética = $\frac{\textit{Suma de todos los } x}{n}$.

Las siguientes series de datos corresponden a las ventas expresadas en dólares, de los últimos 15 días, de las dos sucursales de la minitienda La Esquina:

Sucursal 1: 125, 35, 50, 40, 80, 100, 70, 50, 125, 75, 80, 90, 80, 80, 35.
Sucursal 2: 100, 75, 50, 80, 60, 40, 70, 75, 140, 90, 75, 70, 150, 50, 90.

Con los datos de cada sucursal realiza lo siguiente:

1. Ordena los datos de menor a mayor.
2. Identifica el mínimo y el máximo.
3. Determina la mediana. Sucursal 1: 80; sucursal 2: 75.
4. Identifica el valor de la moda. Sucursal 1: 80; sucursal 2: 75.
5. Calcula la media aritmética. Sucursal 1: 74.33; sucursal 2: 81.
6. ¿Es posible determinar cuál sucursal genera mayores ingresos?

Sí, como el valor de la media aritmética de la sucursal 2 es mayor que la de la sucursal 1, entonces se puede decir que la sucursal 2 ha generado mayores ingresos.

Indicador de logro

2.2 Identifica el uso de valores representativos para la solución de situaciones cotidianas.

Secuencia

En esta clase se hace un recordatorio de lo estudiado en primero y segundo ciclo respecto a las medidas de tendencia central (moda, mediana y media) para datos que no están resumidos en una tabla de frecuencias (no agrupados).

Solución de algunos ítems:

1.
Sucursal 1: 35, 35, 40, 50, 50, 70, 75, 80, 80, 80, 80, 90, 100, 125, 125.

Sucursal 2: 40, 50, 50, 60, 70, 70, 75, 75, 75, 80, 90, 90, 100, 140, 150.

2.
Sucursal 1:
El mínimo es 35 y el máximo es 125 dólares.

Sucursal 2:
El mínimo es 40 y el máximo es 150 dólares.

3.
Sucursal 1: 80 dólares

4.
Sucursal 1: 80 dólares
Sucursal 2: 75 dólares

5.
Sucursal 1:
$\frac{1\,115}{15}$ = 74.33 dólares

Sucursal 2:
$\frac{1\,215}{15}$ = 81 dólares

6.
Sí, como el valor de la media aritmética de la sucursal 2 es mayor que la de la sucursal 1 y el período de tiempo en el que se observaron las ventas es el mismo (15 días), entonces se puede decir que la sucursal 2 ha generado mayores ingresos.

Fecha: **U8 2.1**

(P) Para los datos en cada sucursal (A y B):
1. Ordena la cantidad de clientes de menor a mayor.
2. Identifica la cantidad mínima y luego la máxima.
3. Determina la mediana.
4. Determina la moda.
5. Calcula la media aritmética.

(S)
1. A: 14, 19, 23, 24, 26, 30, 31, 32, 38, 40, 49
   B: 10, 20, 21, 22, 24, 24, 28, 29, 30, 34, 46, 57
2. A: el dato menor es 14 y el menor es 49.
   B: el dato menor es 10 y el mayor es 57.
3. Mediana. A: 30; B: $\frac{24 + 28}{2}$ = 26
4. Moda. A: no tiene moda; B: 24
5. Media. A: $\frac{326}{11}$ = 29.6; B: $\frac{345}{12}$ = 28.8

(R)
1.
S1: 35, 35, 40, 50, 50, 70, 75, 80, 80, 80, 80, 90, 100, 125, 125.
S2: 40, 50, 50, 60, 70, 70, 75, 75, 75, 80, 90, 90, 100, 140, 150.
2. **S1:** mínimo: 35; máximo: 125.
   S2: mínimo: 40; máximo: 150.
3. **S1:** 80 dólares,
   S2: 75 dólares.
4. **S1:** 80 dólares,
   S2: 75 dólares.
5. **S1:** $\frac{1115}{15}$ = 74.33 ≈ 74 dólares.
   S2: $\frac{1215}{15}$ = 81 dólares.

Tarea: página 176 del Cuaderno de Ejercicios.

2.2 Media aritmética

P

¿Cómo se puede determinar la media aritmética de una serie de datos organizada en una distribución de frecuencias?
La tabla contiene el registro de las edades de 30 clientes atendidos el día de la secretaria, en la sucursal A de la sala de belleza El Buen Gusto. Realiza lo siguiente:

1. Calcula el punto medio de cada clase.
2. Multiplica cada punto medio por la respectiva frecuencia.
3. Suma los resultados obtenidos en el numeral dos, luego divide el total obtenido entre el número de datos.
4. Compara el resultado obtenido en el numeral 3, con la media aritmética de los datos de la clase 1 de esta unidad.

Edades	Número de clientes
	f
20 - 24	8
24 - 28	11
28 - 32	8
32 - 36	2
36 - 40	1
Total	**30**

Revisa la clase 1 de la unidad.

S

1. Como ya se aprendió a calcular el punto medio en una distribución de frecuencias en clases anteriores, entonces para calcularlos se aplica la fórmula: *punto medio* = $\frac{\textit{Límite superior + límite inferior}}{2}$, y se le agrega otra columna a la tabla anterior para escribir los resultados. Por ejemplo, para la clase 1:

$$Pm = \frac{24 + 20}{2} = 22$$

Edades	Número de clientes	Punto medio (Pm)
	f	
20 - 24	8	22
24 - 28	11	26
28 - 32	8	30
32 - 36	2	34
36 - 40	1	38
Total	**30**	

2. Se multiplica el punto medio de cada clase por la respectiva frecuencia, y se le agrega una nueva columna a la tabla para agregar los resultados, por ejemplo para la clase 1 se tiene:

$$\textit{Punto medio} \times \textit{frecuencia} = Pm \times f = 22 \times 8 = 176$$

Edades	Número de clientes	Punto medio (Pm)	$Pm \times f$
	f		
20 - 24	8	22	176
24 - 28	11	26	286
28 - 32	8	30	240
32 - 36	2	34	68
36 - 40	1	38	38
Total	**30**		**808**

3. Se suman los resultados obtenidos en el numeral anterior, luego se divide el resultado entre el número de datos.

$$\frac{\textit{Suma de todos los productos de } Pm \times f}{\textit{Número de datos}} = \frac{808}{30} \approx 26.9$$ El símbolo debe ser ≈

Generalmente, en las empresas, cuando el objetivo no es el cálculo, sino el análisis de datos, el promedio o media aritmética se puede determinar mediante el uso de un programa informático como Excel, Calc o GeoGebra.

Por ejemplo, se puede determinar el promedio de la edad de clientes atendidos en la sucursal A de la sala de belleza El Buen Gusto.

Se digitan los datos que corresponden a la edad de los 30 clientes de la sucursal A de la sala de belleza "El Buen Gusto", y se calcula la media aritmética, obteniéndose $\mu = 26.2$.

24	23	28	30	29	31
27	26	24	30	32	29
21	22	27	33	30	24
24	21	26	24	30	39
24	22	22	24	21	20

4. El resultado del numeral 3 es 26.9 y la media aritmética de los datos sin organizar en distribución de frecuencias calculado mediante el uso de un programa informático es 26.2, tal como se muestra arriba, la diferencia entre los dos valores es pequeña, por lo que se puede utilizar cualquiera de las dos formas para calcular el promedio de las edades.

C Para determinar la media aritmética de una serie de datos organizados en una distribución de frecuencias, se utiliza la ecuación: *Media aritmética* = $\frac{\textit{Suma de todos los productos de } Pm \times f}{\textit{Número de datos}}$, tal como se muestra en el ejemplo desarrollado.

1. La tabla contiene el registro de las edades de 30 clientes atendidos el día de la secretaria, en la sucursal B, de la sala de belleza El Buen Gusto, realiza lo siguiente:

   a) Completa la tabla.
   b) Calcula la media aritmética. Aproximadamente 26.9 años.

2. Compara la media aritmética de las dos sucursales, ¿en cuál de las dos es mayor la edad promedio de los clientes atendidos? En ambas sucursales la edad promedio de los clientes atendidos es aproximadamente 26.9 años.

Edades	Número de clientes (f)	Punto medio (Pm)	$f \times Pm$
20 - 24	11		
24 - 28	8		
28 - 32	6		
32 - 36	3		
36 - 40	2		
Total	**30**		

Indicador de logro

2.2 Calcula la media aritmética de una serie de datos agrupados.

Secuencia

Ya se ha calculado la media aritmética para datos no agrupados, de manera que ahora se calculará para datos agrupados.

Solución de algunos ítems:

1. a)

Edades	Número de clientes f	Punto medio (Pm)	$f \times Pm$
20 - 24	11	22	242
24 - 28	8	26	208
28 - 32	6	30	180
32 - 36	3	34	102
36 - 40	2	38	76
Total	**30**		**808**

b) $\frac{808}{30} \approx 26.9$ años

2. En ambas sucursales la edad promedio de los clientes atendidos es aproximadamente 26.9 años.

Fecha: **U8 2.2**

Ⓟ Con los datos de la tabla:

1. Calcula el punto medio de cada clase.
2. Multiplica el punto medio por la frecuencia de su clase.
3. Suma los productos obtenidos en el literal 2, luego divide el total entre el número de datos.
4. Compara el resultado en el literal 3, con la media de los datos de la clase 1 de esta unidad.

Ⓢ 1., 2. y 3.

Edades	Número de clientes f	Punto medio (Pm)	$Pm \times f$
20 - 24	8	22	176
24 - 28	11	26	286
28 - 32	8	30	240
32 - 36	2	34	68
36 - 40	1	38	38
Total	**30**		**808**

$\frac{808}{30} = 26.9$

4. El resultado es 26.9 y la media aritmética de los datos sin agrupar es 26.2, la diferencia entre los dos valores es pequeña.

Ⓡ 1.

Edades	Número de clientes f	Punto medio (Pm)	$f \times Pm$
20 - 24	11	22	242
24 - 28	8	26	208
28 - 32	6	30	180
32 - 36	3	34	102
36 - 40	2	38	76
Total	**30**		**808**

2. $\frac{808}{30} \approx 26.9$ años
3. En ambas sucursales la edad promedio de los clientes atendidos es aproximadamente 26.9.

Tarea: página 177 del Cuaderno de Ejercicios.

2.3 Propiedades de la media aritmética

P

Analiza la siguiente situación, luego realiza lo que se pide en cada caso.

La empresa A tiene 25 empleados y les paga un salario promedio de 350 dólares, mientras que la empresa B tiene únicamente 15 empleados con un salario promedio de 600 dólares.

1. Calcula el monto mensual que invierte cada una de las empresas en el pago de los empleados.
2. Si la empresa B realiza un aumento general de 50 dólares, ¿cuál es el nuevo salario promedio?
3. Los empleados de la empresa A piden un aumento para el próximo año, el dueño de la empresa les presenta dos opciones, ¿calcula el nuevo salario promedio en cada caso?, ¿cuál opción recomendarías a los empleados?, ¿por qué?
   a) Un aumento general de 65 dólares.
   b) Un aumento del 20% sobre el salario actual.

S

Para resolver las situaciones planteadas se considerará la información proporcionada en el problema.

EMPRESA A	EMPRESA B
Salario promedio = media aritmética = \$350	*Salario promedio = media aritmética* = \$600

1. El monto mensual se determina multiplicando el salario promedio por la cantidad de empleados que tiene cada empresa.

Monto mensual = 350 × 25 = 8 750	*Monto mensual* = 600 × 15 = 9 000

2. Si la empresa aumenta 50 dólares en el salario a todos los empleados, entonces estará invirtiendo cada mes un total de

   $9\,000 + 15(50) = 9\,000 + 750 = 9\,750$, al dividir el total entre el número de empleados se tiene: $\frac{9\,750}{15} = 650$; por tanto, el nuevo salario mensual será de 650 dólares; observa que es la media que se tenía más los 50 dólares.

3. Al determinar el nuevo salario considerando las dos propuestas, se tiene:

Opción 1: aumento general de 65 dólares	Opción 2: aumento del 20% sobre el salario actual
Salario promedio actual: 350	Salario promedio actual: 350
Monto mensual: 8 750	Monto mensual: 8 750
Nuevo gasto mensual: $8\,750 + 65 \times 25 = 10\,375$	Nuevo gasto mensual: $8\,750 + 20\%(8\,750) = 10\,500$
Nuevo salario promedio: $\frac{10\,375}{25} = 415$	Nuevo salario promedio: $\frac{10\,500}{25} = 420$

Justificación:
- Recomendaría la primera opción, pues aunque el salario promedio es 5 dólares menos que la segunda opción, todos recibirán igual cantidad y es más justo, ya que en el caso de la segunda opción recibirán mayor aumento los que tengan el salario más alto, mientras que los que ganan menos tendrán un menor aumento.

C

A partir de la definición de la media aritmética $\mu = \frac{\textit{Suma de todos los datos } (x)}{n}$, se obtiene que la suma de los datos de una serie es igual a n veces la media aritmética; es decir, $n\mu$ = *Suma de todos los datos* x. La media aritmética posee algunas propiedades, entre las cuales se tienen:

- Si a todos los valores de la variable se les suma una misma cantidad, la media aritmética queda aumentada en dicha cantidad. Por ejemplo, la serie 3, 4, 5, 4, 9; tiene $\mu = 5$, si a cada dato se le suma 2, se obtiene la serie 5, 6, 7, 6, 11; cuya media es $\mu = 5 + 2 = 7$.

- Si todos los valores de la variable se multiplican por una misma constante, la media aritmética queda multiplicada por dicha constante. Por ejemplo, la serie 3, 4, 5, 4, 9; tiene $\mu = 5$, si cada dato se multiplica por 2, se obtiene la serie 6, 8, 10, 8, 18 cuya media es $\mu = 5(2) = 10$.

Analiza la siguiente situación, luego realiza lo que se pide en cada caso.

1. Durante un mes, el Dr. Martínez llevó un registro del pago realizado por sus pacientes en cada cita a la que asistieron, al final realizó el cálculo y obtuvo un pago promedio de 75 dólares; para el próximo mes ha pensado poner una promoción y tiene las dos propuestas siguientes:

   a) Descuento del 10% sobre el costo total al momento de realizar el pago. $67.5
   b) Descuento de 10 dólares sobre el monto a pagar. $65

   Calcula el valor medio de pago en cada caso, ¿cuál opción crees que beneficia más a los pacientes?, ¿por qué?

2. En un supermercado, cada cajera/o al final del turno entrega una venta promedio de $3,500.00. Con el objetivo de mejorar las ventas, el administrador propone a todos los cajeros las siguientes opciones:

   a) Aumentar las ventas en un 10% sobre el total que entregan en este momento. $3,850
   b) Aumentar 300 dólares más de la meta establecida en ese momento. $3,800

   Calcula el valor medio de venta en cada caso, ¿cuál opción crees que beneficia a la empresa? Justifica tu respuesta.

   La propuesta del literal a) es la opción que más beneficia a la empresa porque ganará $50 más.

3. El salario promedio de 3 técnicos es de $900.00, y el salario promedio de otros 7 técnicos es de $1,050.00. ¿Cuál es el salario promedio de los 10 técnicos?

   El salario promedio de los 10 técnicos es $1,005.

4. Un conductor estuvo yendo dos horas a una velocidad promedio de 120 km/hora, la hora siguiente viajó a una velocidad de 90 km/hora. Calcula la velocidad media a la que viajó durante toda la carrera.

   La velocidad promedio que tuvo el conductor durante todo el viaje fue de 110 km/h.

Indicador de logro

2.3 Compara y analiza información mediante el uso de propiedades de la media aritmética.

Secuencia

En esta clase se presentarán dos propiedades de la media aritmética; al sumar o multiplicar por una constante a cada uno de los datos del conjunto.

Solución de algunos ítems:

1. Si el pago promedio sigue constante el siguiente mes, entonces los valores promedios según la propuesta son los siguientes:
   a) $75 - 10\,\%(75) = 75 - 7.5 = 67.5$
   b) $75 - 10 = 65$
   El descuento de \$10 sobre el monto a pagar es la mejor opción para los clientes porque el 75 es un valor central que representa a la totalidad de los datos, de manera que habrá muy pocas personas que gasten \$100, cuyo 10 % es 10. Por lo tanto, el descuento directo de los \$10 es una opción que beneficia a la mayoría de los clientes.

2. Los nuevos valores promedio según la propuesta son los siguientes:
   a) $3\,500 + 3\,500 \times 0.1 = 3\,500 + 350$
   $= 3{,}850$
   b) $3\,500 + 300 = 3\,500 + 300$
   $= 3{,}800$
   La propuesta del literal a) es la opción que más beneficia a la empresa porque ganará \$50 más.

3. $\frac{900(3) + 1\,050(7)}{10} = \frac{2\,700 + 7\,350}{10}$

$= \frac{10\,050}{10}$

$= 1{,}005$

El salario promedio de los 10 técnicos es \$1,005.

4. $\frac{120(2) + 90(1)}{3} = \frac{240 + 90}{3} = \frac{330}{3} = 110$

La velocidad promedio que tuvo el conductor durante todo el viaje fue de 110 km/h.

Observación:
El cálculo que incluye porcentaje en el numeral 3, literal b) también se puede plantear de la siguiente forma: $8\,750 + 8\,750 \times 0.2$.

Fecha: **U8 2.3**

(P) Con los datos en el texto:
1. Calcula el monto mensual que paga cada empresa.
2. En B se aumentan \$50, ¿cuál es el nuevo salario promedio?
3. En A, para los casos de:
   a) Un aumento de 65 dólares
   b) Un aumento del 20 % sobre el salario actual
   ¿Cuál es el nuevo salario promedio en cada caso? ¿Cuál opción recomendarías a los empleados? ¿Por qué?

(S) **En A**: salario promedio = \$350. **En B**: salario promedio = \$600.
1. Monto mensual = $350 \times 25 = 8\,750$;
   Monto mensual = $600 \times 15 = 9\,000$.
2. $9\,000 + 15(50) = 9\,000 + 750 = 9\,750$; entonces $\frac{9\,750}{15} = 650$.
3. Opción 1: $\frac{8\,750 + 65 \times 25}{25} = \frac{10\,375}{25} = 415$
   Opción 2: $\frac{8\,750 + 20\,\%(8\,750)}{25} = \frac{10\,500}{25} = 420$

La opción 1, aunque el salario promedio es \$5 menos que la opción 2, todos recibirán igual cantidad y es más justo.

(R)
1.
a) $75 - 75 \times 0.1$
$= 75 - 7.5$
$= 67.5$
b) $75 - 10 = 65$
Descontar \$10 sobre el monto a pagar es la mejor opción. Muy pocas personas gastan \$100, cuyo 10 % es 10.

El descuento directo de los \$10 es una opción que beneficia a la mayoría de los clientes.

Tarea: página 178 del Cuaderno de Ejercicios.

2.4 Mediana y moda

P

¿Cómo se puede determinar la mediana y la moda de una serie de datos organizada en una distribución de frecuencias?
La tabla contiene el registro de las edades de 30 clientes atendidos el día de la secretaria, en la sucursal A, de la sala de belleza El Buen Gusto, realiza lo siguiente:

1. Identifica la clase donde se encuentra la mediana.
2. Calcula el punto medio de la clase donde se encuentra la mediana.
3. Identifica la clase donde se encuentra la mayor frecuencia.
4. Calcula el punto medio de la clase que tiene la mayor frecuencia.

Edades	Número de clientes
20 - 24	8
24 - 28	11
28 - 32	8
32 - 36	2
36 - 40	1
Total	**30**

S

1. Como la mediana es el dato que ocupa la posición central, entonces es necesario identificar la clase en la que se encuentra el dato central, para ello se suman las frecuencias hasta obtener la mitad del total. Como el total de datos es 30, la mitad es 15, entonces la clase en que se encuentra la mediana es la segunda; pues 8 + 11 = 19.
2. El punto medio de la segunda clase es $Pm = \frac{24+28}{2} = \frac{52}{2} = 26$.
3. La clase que tiene la mayor frecuencia, para esta distribución es la segunda, de 24 a 28.
4. El punto medio de la clase que tiene la mayor frecuencia es 26.

Edades	Número de clientes	Datos acumulados
20 - 24	8	8
24 - 28	11	19
28 - 32	8	27
32 - 36	2	29
36 - 40	1	30
Total	**30**	

El punto medio de la clase donde se encuentra la mediana corresponde aproximadamente al dato que ocupa la posición central de la serie, es decir corresponde al valor de la mediana; mientras que el punto medio de la clase de mayor frecuencia corresponde aproximadamente al valor de la moda.

C

Cuando se tiene una distribución de frecuencias, existen distintos métodos para determinar el valor de la mediana y la moda, en este caso se ha considerado únicamente el método que se conoce como **aproximado**, donde

Para determinar la mediana:
- Se identifica la clase donde queda ubicado el dato que ocupa la posición central $\frac{n}{2}$ **clase mediana**.
- El valor aproximado de la mediana será el punto medio de la clase mediana.

Para determinar la moda:
- Se identifica la clase cuya frecuencia sea mayor **clase modal**.
- El valor aproximado de la moda es el valor medio de la clase modal.

1. La tabla contiene el registro de las edades de 30 clientes atendidos el día de la secretaria, en la sucursal B, de la sala de belleza El Buen Gusto, realiza lo iguiente:
   a) Determina la moda.
   b) Determina la mediana.

2. Construye el polígono de frecuencia de la distribución de datos e identifica el valor de la moda.

Edades	Número de clientes
20 - 24	11
24 - 28	8
28 - 32	6
32 - 36	3
36 - 40	2
Total	**30**

Indicador de logro

2.4 Determina de manera aproximada la mediana y la moda de una serie de datos.

Secuencia

Para seguir con el cálculo de las medidas de tendencia central para datos agrupados, ahora se calculará la mediana y la moda.

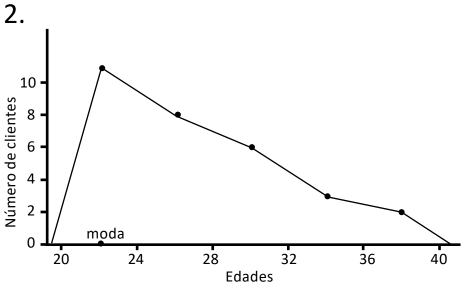
Solución de algunos ítems:

1.

a) La clase modal es de 20 a 24, por tanto la moda es $\frac{20 + 24}{2} = \frac{44}{2} = 22$ años.

b) Como $\frac{30}{2} = 15$, la clase mediana es de 24 a 28 porque 11 + 8 = 19, por tanto la mediana es $\frac{24 + 28}{2} = \frac{52}{2} = 26$ años.

2.



El valor apróximado de la moda es 22.

Fecha: **U8 2.4**

Ⓟ Con los datos presentados en el texto:
1. Identifica la clase donde está la mediana
2. Calcula el punto medio de la clase identificada en el literal 1
3. Identifica la clase donde está la mayor frecuencia
4. Calcula el punto medio de la clase que tiene la mayor frecuencia

Ⓢ
1. Como el total de datos es 30, la mitad es 15, entonces la mediana está en la segunda clase; pues 8 + 11 = 19.
2. $Pm = \frac{24 + 28}{2} = \frac{52}{2} = 26$.
3. De 24 a 28.
4. 26.

Ⓡ

1.

a) La clase modal es: 20 a 24. La moda es:
$\frac{20 + 24}{2} = \frac{44}{2} = 22$ años.

b) Como $\frac{30}{2} = 15$, la clase mediana es: 24 a 28 porque 11 + 8 = 19. La mediana es:
$\frac{24 + 28}{2} = \frac{52}{2} = 26$ años.

Tarea: página 179 del Cuaderno de Ejercicios.

2.5 Propiedades de las medidas de tendencia central

P

Compara las siguientes series de datos A, B y C.

A: 3, 4, 5, 5, 7, 8, 10 B: 3, 4, 5, 5, 7, 8, 20 C: 9, 12, 15, 15, 21, 24, 30

1. Determina la moda, mediana y media aritmética para cada serie.
2. Al cambiar el número 10 de la serie A por el 20 en la serie B, ¿qué sucede con el valor de cada una de las siguientes medidas de tendencia central?
3. Al multiplicar por 3 los datos de la serie A, se genera la serie de datos C, ¿qué sucede con los valores de cada una de las siguientes medidas de tendencia central?

S

1. Para determinar las medidas de tendencia central de cada serie, se trabajan por separado:

Para la serie A: 3, 4, 5, 5, 7, 8, 10 Moda = 5 Mediana = 5 $\mu = \frac{3+4+5+5+7+8+10}{7} = 6$

Para la serie B: 3, 4, 5, 5, 7, 8, 20 Moda = 5 Mediana = 5 $\mu = \frac{3+4+5+5+7+8+20}{7} = 7.4$

Para la serie C: 9, 12, 15, 15, 21, 24, 30 Moda = 15 Mediana = 15 $\mu = \frac{9+12+15+15+21+24+30}{7} = 18$

2. Al comparar los valores de la moda, mediana y media aritmética de la serie A con los de la serie B, se puede observar que el valor de la moda y de la mediana, se mantienen, pero el de la media arimética aumenta.

3. Al comparar los valores de la moda, mediana y media aritmética de la serie A con la serie C, se puede observar que quedan multiplicados por 3. Por ejemplo la moda y la mediana para la serie A es 5 y para la serie C es 15, la media para la serie A es 6 y para la serie C es 18.

C

Características y usos de las medidas de tendencia central:

La moda, mediana y media aritmética son llamadas medidas de tendencia central, debido a que cuando los datos se ordenan de menor a mayor o viceversa, estas tienden a quedar ubicadas en el centro de la serie.

- **La moda y la mediana** se pueden utilizar para series de datos cualitativos (no numéricos) y cuantitativos (numéricos), además no se ven afectadas por los valores extremos de una serie de datos; tal como se muestra en el numeral 2 del ejemplo anterior.

- **La media aritmética** se utiliza únicamente para series de datos cuantitativos (numéricos); aunque la media es confiable en el sentido de que toma en cuenta todos los valores del conjunto de datos, puede verse afectada por valores extremos que no son representativos del resto de los datos, tal como se muestra en el numeral 2 del ejemplo anterior.

Determina la moda, mediana y media arimética para cada una de las siguientes series de datos:

A) 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5
B) 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 9
C) 0, 2, 2, 4, 4, 6, 6, 6, 8, 10
D) 0, 5, 5, 10, 10, 15, 15, 15, 20, 25

1. Compara los resultados obtenidos, ¿qué concluyes?
2. ¿Qué sucedería con las tres medidas de tendencia central si a cada dato de la serie A se le suma 6?

Indicador de logro

2.5 Interpreta situaciones a partir de las propiedades de las medidas de tendencia central.

Secuencia

Ahora se presentan las características de las medidas de tendencia central. La clase se enfatiza en que al calcular la media y mediana en un conjunto de datos numéricos, estas no se ven afectadas por los valores extremos, mientras que la media sí, aunque en ocasiones esa característica es la que convierte a la media en una medida confiable ya que toma en cuenta a todos los valores del conjunto de datos.

Solución de algunos ítems:

A) **Para la serie :** 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5
Moda: 3; mediana: $\frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$;
media: $\frac{24}{10} = 2.4$

B) **Para la serie:** 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 9
Moda: 3; mediana: $\frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$;
media: $\frac{28}{10} = 2.8$

C) **Para la serie:** 0, 2, 2, 4, 4, 6, 6, 6, 8, 10
Moda: 6; mediana: $\frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5$;
media: $\frac{48}{10} = 4.8$

D) **Para la serie:** 0, 5, 5, 10, 10, 15, 15, 15, 20, 25
Moda: 15; mediana:
$\frac{10+15}{2} = \frac{25}{2} = 12.5$; media: $\frac{120}{10} = 12$

Observación:
Por motivos de espacio las medidas de tendencia central calculadas para cada serie no están en el plan de pizarra pero se recomienda que se escriban antes de responder el literal 1 para que los estudiantes puedan verificar sus respuestas.

1. Para los literales A) y B) la moda y la mediana son las mismas, pero la media es diferente, ya que toma en cuenta todos los datos para ser calculada y el último dato es distinto. Las series de C) y D) se pueden obtener de multiplicar por 2 y 5 respectivamente la serie A); también las medidas de tendencia central de C) y D) se obtienen de multiplicar por 2 y 5 respectivamente las de la serie A).

2. Las medidas de tendencia central en cada uno de los literales quedaría aumentada también en 6.

Fecha: **U8 2.5**

Ⓟ Con las series de datos A, B y C.
1. Determina la moda, mediana y media aritmética para cada serie.
2. Al intercambiar el 10 de la serie A por el 20 de la serie B, ¿qué sucede con la moda, mediana y media de las series A y B?
3. Al multiplicar por 3 los datos de A, se obtiene C, ¿qué relación hay entre las medias, medianas y modas de A y C?

Ⓢ
1. A: Moda = 5, mediana = 5, $\mu = \frac{3+4+5+5+7+8+10}{7} = 6$
B: Moda = 5, mediana = 5, $\mu = \frac{3+4+5+5+7+8+20}{7} = 7.4$
C: Moda = 15, mediana = 15, $\mu = \frac{9+12+15+15+21+24+30}{7} = 18$
2. La moda y la mediana se mantienen, pero el de la media aritmética aumenta.
3. En la serie C la moda, mediana y media son el triple (multiplicadas por 3) de las de la serie A.

Ⓡ
1. En A) y B) la mediana y la moda son las mismas. La media es diferente porque toma en cuenta todos los valores para ser calculada.

Para C) y D) sus medidas de tendencia central son iguales a multiplicar por 2 y 5 respectivamente las de la serie A).

Tarea: página 180 del Cuaderno de Ejercicios.

2.6 Practica lo aprendido

En tu cuaderno, realiza de manera ordenada lo que se pide en cada caso.

1. El tiempo que transcurre entre la finalización de la presentación de un chiste y el momento en que una persona comienza a reírse, se denomina tiempo de reacción; en este contexto, la presentación del chiste es un estímulo y la aparición de la risa, la reacción. Se hizo un experimento con un grupo de personas, en el que se midió el tiempo de reacción de sus integrantes ante un chiste y se registraron los siguientes datos en décimas de segundos (ds).

   a) Calcula el tiempo promedio de reacción. 31.6 ds
   b) Calcula la moda del tiempo de reacción. 28 ds
   c) Calcula la mediana del tiempo. 34 ds

Tiempo en ds	Número de personas
13 - 19	4
19 - 25	9
25 - 31	36
31 - 37	32
37 - 43	12
43 - 49	7
Total	**100**

2. En una fábrica se ha medido la longitud de 1 000 tornillos para determinar si la máquina cortadora está ajustada y se han obtenido los siguientes datos:

   a) Calcula la longitud promedio de los tornillos. Aprox. 79.6 mm
   b) Determina la moda de las longitudes. 79.5 mm
   c) Calcula el valor de la mediana de la serie. 79.5 mm

Longitud en mm	Número de tornillos
67 - 72	5
72 - 77	95
77 - 82	790
82 - 87	100
87 - 92	10
Total	**1 000**

3. La tabla muestra los tiempos en que han sido anotados los goles en los distintos partidos de una temporada de fútbol. Completa la tabla y realiza lo que se pide en cada caso.

   a) Calcula el tiempo promedio. Aprox. 46.7 minutos
   b) Determina la moda del tiempo. 52.5 minutos
   c) Calcula el valor de la mediana. 52.5 minutos

Tiempo en minutos	Goles (*f*)
0 - 15	5
15 - 30	6
30 - 45	7
45 - 60	8
60 - 75	7
75 - 90	6
Total	**39**

4. La tabla detalla los pesos en kilogramos de una muestra de 30 jóvenes. Completa la tabla y realiza lo que se pide en cada caso.

   a) Calcula el peso promedio. 32.2 kg
   b) Determina la moda de los pesos. 32 kg
   c) Calcula el valor de la mediana. 32 kg

Peso (kg)	Nº de niños
24.5 - 27.5	3
27.5 - 30.5	7
30.5 - 33.5	10
33.5 - 36.5	6
36.5 - 39.5	3
39.5 - 42.5	1
Total	**30**

Indicador de logro

2.6 Resuelve problemas correspondientes a medidas de tendencia central.

Solución de algunos ítems:

1. a)

Tiempo en ds	Número de personas	*Pm*	*f × Pm*
13 - 19	4	16	64
19 - 25	9	22	198
25 - 31	36	28	1008
31 - 37	32	34	1088
37 - 43	12	40	480
43 - 49	7	46	-322
Total	**100**		**3160**

Media = $\frac{3\,160}{100}$ = 31.6 ds

b) La clase modal es de 25 a 31, por tanto la moda es $\frac{25 + 31}{2} = \frac{56}{2}$ = 28 ds.

c) Como $\frac{100}{2}$ = 50, la clase mediana es de 31 a 37 porque 4 + 9 + 36 + 32 = 81, por tanto la mediana es:
$\frac{31 + 37}{2} = \frac{68}{2}$ = 34 ds.

2. a)

Longitud en mm	Número de tornillos	*Pm*	*f × Pm*
67 - 72	5	69.5	347.5
72 - 77	95	74.5	7 077.5
77 - 82	790	79.5	62 805.0
82 - 87	100	84.5	8 450.0
87 - 92	10	89.5	895.0
Total	**1 000**		**79 575**

Media = $\frac{79\,575}{1\,000}$ ≈ 79.6 mm

b) La clase modal es de 77 a 82, por tanto la moda es: $\frac{77 + 82}{2} = \frac{159}{2}$ = 79.5 mm.

c) Como $\frac{1\,000}{2}$ = 500, la clase mediana es de 77 a 82 porque 5 + 95 + 790 = 890, por tanto la mediana es :
$\frac{77 + 82}{2} = \frac{159}{2}$ = 79.5 mm.

3. a)

Tiempo en minutos	Goles (*f*)	*Pm*	*f × Pm*
0 - 15	5	7.5	37.5
15 - 30	6	22.5	135.0
30 - 45	7	37.5	262.5
45 - 60	8	52.5	420.0
60 - 75	7	67.5	472.5
75 - 90	6	82.5	495.0
Total	**39**		**1822.5**

Media = $\frac{1\,822.5}{39}$ ≈ 46.7 minutos

b) La clase modal es de 45 a 60, por tanto la moda es: $\frac{45 + 60}{2} = \frac{105}{2}$ = 52.5 minutos.

c) Como $\frac{39}{2}$ = 19.5, la clase mediana es de 45 a 60 porque 5 + 6 + 7 + 8 = 26, por tanto la mediana es :
$\frac{45 + 60}{2} = \frac{105}{2}$ = 52.5 minutos.

4.a)

Peso (kg)	Nº de niños	*Pm*	*f × Pm*
24.5 - 27.5	3	26	78
27.5 - 30.5	7	29	203
30.5 - 33.5	10	32	320
33.5 - 36.5	6	35	210
36.5 - 39.5	3	38	114
39.5 - 42.5	1	41	41
Total	**30**		**966**

Media = $\frac{966}{30}$ = 32.2 kg

b) La clase modal es de 30.5 a 33.5, por tanto la moda es: $\frac{30.5 + 33.5}{2} = \frac{64}{2}$ = 32 kg.

c) Como $\frac{30}{2}$ = 15, la clase mediana es de 30.5 a 33.5 porque 3 + 7 + 10 = 20, por tanto la mediana es :

$$\frac{30.5 + 33.5}{2} = \frac{64}{2} = 32 \text{ kg}$$

Tarea: página 181 del Cuaderno de Ejercicios.

2.7 Practica lo aprendido

En tu cuaderno, realiza de manera ordenada lo que se pide en cada caso.

1. Se han exprimido 30 naranjas y se ha medido la cantidad de jugo obtenido, expresada en centilitros(cl). Los resultados fueron:
   35, 60, 48, 39, 40, 39, 45, 38, 46, 50, 51, 59, 56, 55, 49, 47, 48, 49, 56, 53, 47, 50, 52, 57, 58, 52, 60, 65, 46, 51.
   a) Agrupa los datos en intervalos de amplitud 8 cl, comenzando por la clase de 30 a 38.
   b) Realiza la tabla de frecuencias y represéntala en un polígono de frecuencias.
   c) Encuentra el valor de la mediana, media y moda. Media: aprox. 50.8, moda: 50, mediana: 50

2. Los agricultores de cierta cooperativa han llevado un registro de la cantidad de quintales de maíz recogidos por manzana. Los resultados fueron:
   32, 37, 54, 70, 74, 75, 76, 109 , 66, 77, 90, 96, 30, 41, 42, 69, 36 , 59, 60, 55, 70, 47, 32, 99, 48.
   a) Ordena los datos de menor a mayor. 30, 32, 32, 36, 37, 41, 42, 47, 48, 54, 55, 59, 60, 66, 69, 70, 70, 74, 75, 76, 77 90, 96, 99, 109.
   b) Agrupa los datos en cinco intervalos de amplitud 16, comenzando por la clase de 30 a 46.
   c) Encuentra la moda, media y mediana.
   d) Al haber calculado los valores representativos, ¿qué conclusiones puedes sacar?

3. En una cooperativa dedicada a la agricultura, el salario medio es de 160 dólares. A partir del 2017 el nuevo salario promedio será de 200 dólares. Si la cooperativa tiene 50 empleados:
   a) ¿Cuánto pagaba mensualmente en concepto de planilla de salarios durante 2016? 160 × 50 = 8,000
   b) ¿Cuánto deberá pagar mensualmente en concepto de planilla de salarios durante 2017?
   c) Determina el incremento mensual en concepto de planilla. 10,000 – 8,000 = 2,000 dólares
   200 × 50 = 10,000

4. Pregunta la edad a cada uno de tus compañeras/os, luego determina:
   a) La edad media, moda y mediana.
   b) Si para el próximo año se mantienen exactamente los mismos compañeros, ¿cuál será la edad media, moda y mediana.
   c) Si en 10 años todos estuviesen juntos, ¿cuál sería la edad promedio?

5. Don Carlos tiene una tienda y mensualmente lleva el registro de las ganancias, al final del año descubrió que tuvo una ganancia mensual promedio de 300 dólares.
   a) Determina el total de ganancias obtenidas durante todo el año. 3,600 dólares
   b) Si para el 2017, espera un aumento del 10% en las ganacias, ¿cuál sería el nuevo promedio mensual de las ganacias? 330 dólares

6. Don Antonio paga un promedio de 14 dólares mensualmente en concepto de energía eléctrica, determina el gasto total anual en energía eléctrica. 168 dólares

7. Carmen estudia ingeniería electrónica y gasta mensualmente un promedio de 200 dólares.
   a) Determina el gasto total anual que invertirá en sus estudios. 2,400 dólares
   b) Si la carrera tiene una duración aproximada de 6 años, determina la inversión total. 14,400 dólares

Indicador de logro

2.7 Resuelve problemas correspondientes a medidas de tendencia central.

Solución de algunos ítems:

1.

a)

		51		
		46		
		52		
		52		
		50		
		47		
		53		
		49	60	
		48	58	
		47	57	
	38	49	56	
	45	51	55	
	39	50	56	
	40	46	59	
35	39	48	60	65
De 30 a 38	**De 38 a 46**	**De 46 a 54**	**De 54 a 62**	**De 62 a 70**

b)

Peso (kg)	Nº de niños
De 30 a 38	1
De 38 a 46	5
De 46 a 54	15
De 54 a 62	8
De 62 a 70	1
Total	**30**

c)

Pm	*f × Pm*
34	34
42	210
50	750
58	464
66	66
	1524

Media = $\frac{1\,524}{30}$ = 50.8 cl.

Moda: $\frac{46 + 54}{2} = \frac{100}{2}$ = 50 cl.

Mediana: $\frac{46 + 54}{2} = \frac{100}{2}$ = 50 cl.

2.

a) 30, 32, 32, 36, 37, 41, 42, 47, 48, 54, 55, 59, 60, 66, 69, 70, 70, 74, 75, 76, 77 90, 96, 99, 109.

b)

		70		
32		69		
36	48	77		
42	47	66		
41	55	76		
30	60	75		99
37	59	74		96
32	54	70	90	109
De 30 a 46	**De 46 a 62**	**De 62 a 78**	**De 78 a 94**	**De 94 a 110**

c)

Moda: No hay moda.

Media: $\frac{1\,544}{25}$ = 61.76 quintales.

Mediana: 60 quintales.

d) Los valores de la media y la mediana son cercanos. La moda no se puede determinar.

3.

a) 160 × 50 = 8,000 dólares

b) 200 × 50 = 10,000 dólares

c) 10,000 – 8,000 = 2,000 dólares

4. **Un ejemplo de la recolección podría ser:** 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 16, 14, 17, 15, 14, 16, 16, 15, 14, 15, 16, 15, 17, 14, 16, 15, 16, 16, 17 y 14.
   a) Media: $\frac{410}{27}$ ≈ 15.2 años.
   Mediana = 15 años.
   Moda = 15 años.
   b) Al hacer los nuevos cálculos se suma 1 año a cada medida:
   Media ≈ 16.2 años.
   Mediana = 16 años.
   Moda = 16 años.
   c) Al aplicar la propiedad de la media se tiene que la nueva edad es: 15.2 + 10 = 25.2 años.

5. a) 300 × 12 = 3, 600 dólares
   b) $\frac{3\,600 + 3\,600 \times 0.1}{12} = \frac{3\,960}{12}$
   = 330

6. 14 × 12 = 168 dólares.

7. a) 200 × 12 = 2,400 dólares.
   b) Primero se calcula el total de meses: 12 × 6 = 72.
   Por tanto;
   200 × 72 = 14,400 dólares.

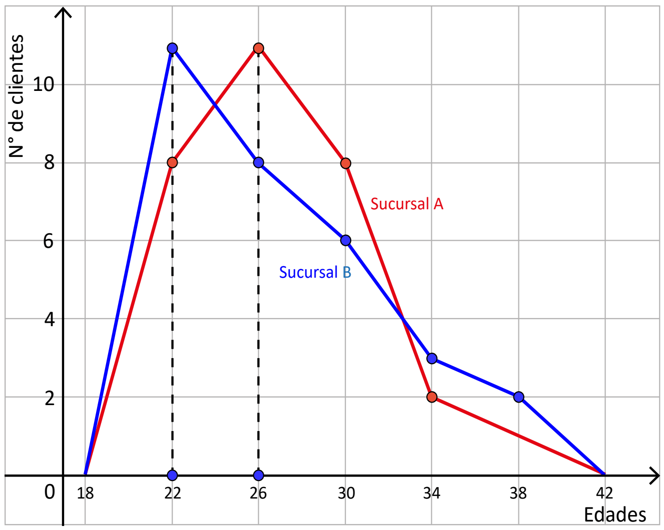
Tarea: página 182 del Cuaderno de Ejercicios.

2.8 Relación entre media, moda y mediana

P

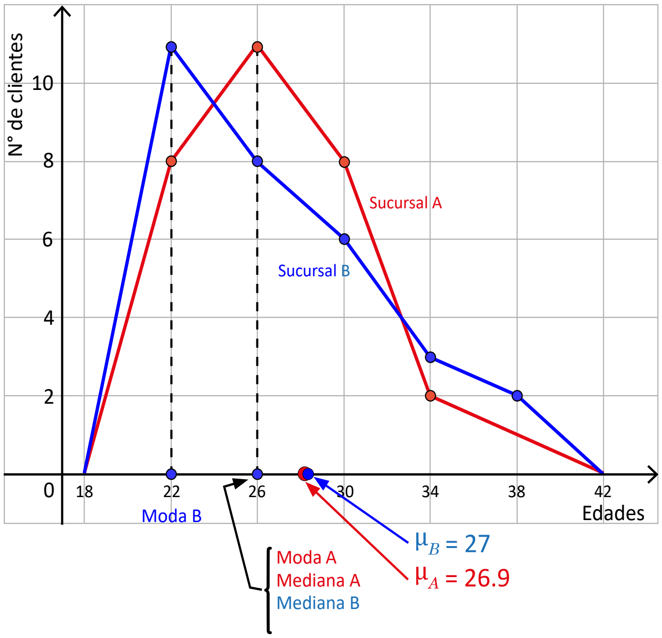
La gráfica corresponde al registro de las edades de 30 clientes atendidos el día de la secretaria en cada una de las dos sucursales A y B de la sala de belleza El Buen Gusto, realiza lo siguiente:

1. Traza una línea vertical para identificar el valor de la moda.
2. Compara los valores de la moda, mediana y media aritmética, luego identifica qué posición le corresponde a la media y la mediana respecto a la moda, para cada distribución (estos valores han sido calculados en clases anteriores).



S

1. En la gráfica se muestra la línea vertical que se traza desde el punto más alto del polígono hacia la recta horizontal o eje x, el punto donde corta al eje x, es el valor aproximado de la moda. Para la sucursal A es 26 y para la sucursal B es 22.



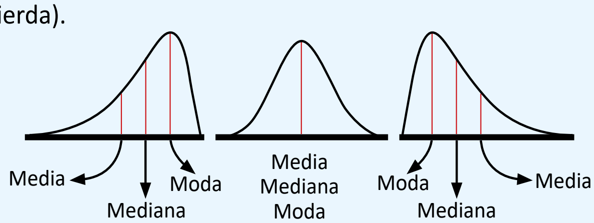
2. Al comparar los valores de la moda, mediana y media aritmética, se tiene:

- Para la distribución correspondiente a la sucursal A, moda = 26, mediana = 26 y μ = 26.9, es decir que la moda y la mediana tienen igual valor y la media aritmética es mayor.
- Para la distribución correspondiente a la sucursal B, moda = 22, mediana = 26 y μ = 27, es decir que la moda es menor que la mediana y esta a su vez es menor que la media aritmética.

Lección 2

C Para una distribución de frecuencias, la forma del gráfico depende de la relación que existe entre el valor de la moda, mediana y media aritmética, es decir:

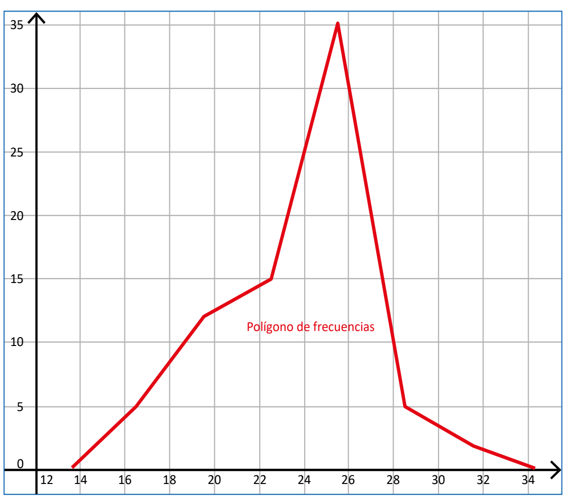
- Si en una distribución de frecuencias, la moda, mediana y media aritmética tienen igual valor, se dice que es una distribución simétrica.
- Si en una distribución de frecuencias, la moda, mediana y media aritmética tienen la siguiente relación media > mediana > moda, se dice que la distribución es asimétrica o con cola a la derecha (sesgada a la derecha).
- Si en una distribución de frecuencias, la moda, mediana y media aritmética tienen la siguiente relación: media < mediana < moda, se dice que la distribución es asimétrica o con cola a la izquierda (sesgada a la izquierda).

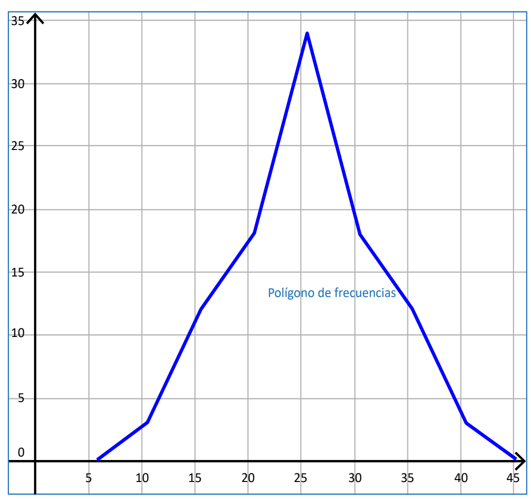


Asimétrica hacia la izquierda

Asimétrica hacia la derecha

1. Observa la forma de las siguientes gráficas, las cuales corresponden a una distribución de datos, luego realiza lo siguiente para cada caso:
   a) Identifica el valor aproximado de la moda.
   b) Determina la relación entre media, moda y mediana a partir de la forma del gráfico.





2. La distribución de los resultados de la PAES 2016 en un complejo educativo tiene los siguientes valores representativos: media aritmética 7.7, moda 6.5 y mediana 7 puntos.
   a) A partir de la relación entre los tres valores representantivos, describe el tipo de distribución que corresponde a los resultados de la PAES, para ese complejo educactivo.
   b) Elabora un boceto de la distribución representando lo valores dados.

PAES, es la Prueba de Aprendizaje y Aptitudes que el Ministerio de Educación aplica a estudiantes egresados de Educación Media del sector público y privado.

Indicador de logro

2.8 Analiza la relación entre las medidas de tendencia central a partir de una gráfica.

Secuencia

Para esta clase se hace una correspondencia entre la relación de orden de las medidas de tendencia central y la forma de la gráfica de la distribución de frecuencias.

Propósito

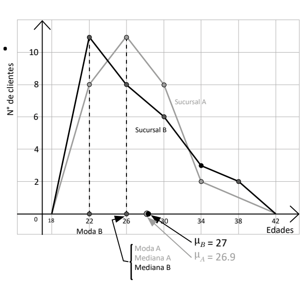
En la clase 2.4 se mostró que la moda es el punto medio de la clase que tiene mayor frecuencia absoluta, por lo que se espera que, ahora los estudiantes para dar respuesta al numeral 1 del Problema inicial tracen la línea vertical a partir del punto más alto del histograma que representa la mayor frecuencia hacia el eje x, determinando así el punto medio de la clase con mayor frecuencia absoluta.

Si es necesario, puede orientar a los estudiantes que vean la clase 2.3 donde se especifica el procedimiento para calcular la media.

Fecha: **U8 2.8**

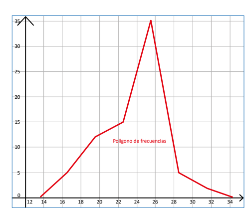
(P) Para cada sucursal, según su polígono de frecuencia:
1. Identifica la moda al trazarse una línea vertical de la gráfica al eje.
2. Establece una relación de orden o igualdad entre la media, mediana y moda.

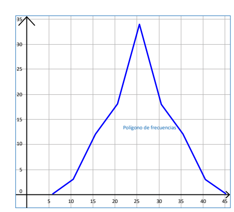
(S) 1.



2. **Sucursal A.** La media tiene muy poca diferencia respecto a la moda y mediana, prácticamente moda = mediana = media
Sucursal B.
moda < mediana < media

(R) 1.





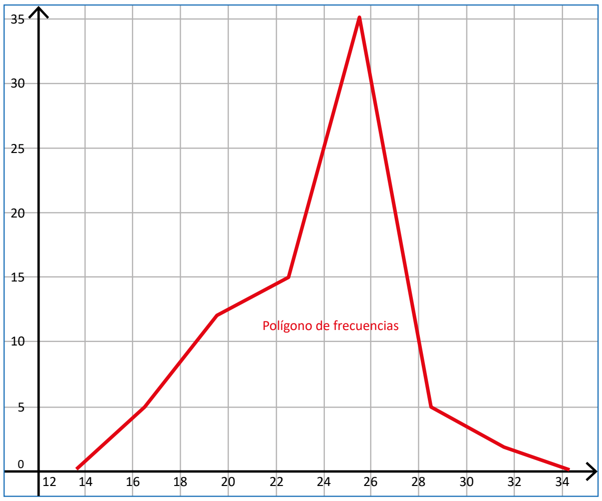
a) El valor de la moda en la primera de las gráficas está entre 25 y 26. En la segunda gráfica el valor de la moda está entre 25 y 30.
b) En la primera gráfica la moda está a la derecha de la mediana. Es simétrica a la izquierda. En la segunda gráfica hay una distribución simétrica. Las tres medidas de tendencia central son iguales.

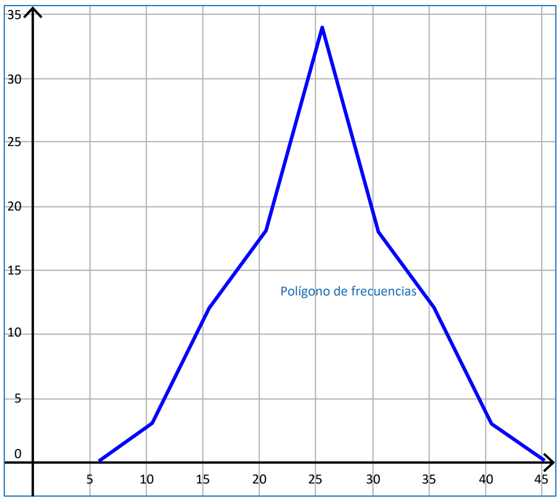
Tarea: página 183 del Cuaderno de Ejercicios.

Solución de algunos ítems:

1.

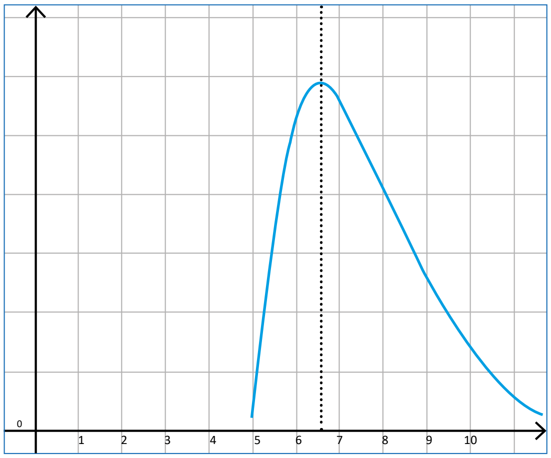
a) El valor de la moda en la primera de las gráficas está entre 25 y 26.
 En la segunda gráfica el valor de la moda está entre 25 y 30.





b) En la primera gráfica la moda está a la derecha de la mediana, por tanto es asimétrica hacia la izquierda.
 En la segunda gráfica se observa una distribución simétrica, por tanto las tres medidas de tendencia central son iguales.

2. Es asimétrica hacia la derecha porque moda < mediana < media aritmética (6.5 < 7 < 7.7).



Observación:

En el literal a) las coordenadas de los puntos que corresponden a cada intervalo son: (16.5, 5), (19.5, 12), (22.5, 15), (25.5, 35), (28.5, 5), (31.5, 2). De estos datos se calcula:
Media = 23.7, moda = 25.5, mediana = 25.5.

En el literal b) las coordenadas son: (11, 3), (16, 12), (21, 18), (26, 34), (31, 18), (36, 12), (41, 3)
Media = moda = mediana = 26.

3.1 Valor aproximado

P

Calcula el valor de 33 ÷ 7 y realiza lo siguiente:

1. Redondea el resultado hasta las centésimas.
2. Diferencia entre el valor real y el valor redondeado.
3. Calcula el rango del valor real.

En ciencias se usan dos clases de números: los que se cuentan o definen y los que resultan de una medición.

Del número contado o definido se puede especificar su valor exacto, pero el valor exacto de un número medido no puede conocerse.

S

Al calcular el cociente de 33 ÷ 7 se obtiene 4.714, con un residuo de 2, si se encuentra el cociente con calculadora se obtiene 4.714285714285714...

```
33 |7
50   4.714
 10
  30
   2
```

1. Al redondear el resultado hasta las centécimas, se obtiene 4.71.
2. Al aproximar a las centésimas, se genera un margen de error que su valor absoluto puede ser a lo sumo de 0.005, esto debido a que si el dígito que sigue a 1 en el número 4.71 fuese 5 o mayor a cinco, entonces se aproximará a 4.72.

$$(4.714285714285714...) - (4.71) = 0.004285714...$$

3. Considerando el margen de error, se puede encontrar el rango del valor real; es decir que al redondear 4.71, este puede representar muchos valores, por ejemplo: 4.705, 4.706, 4.707, 4.708, 4.709, 4.710, 4.711, 4.712; al llegar a 4.715, este puede ser redondeado a 4.72. Entonces, 4.71 puede estar comprendido entre 4.705 y 4.715, pero sin incluir el 4.715; es decir, $4.705 \leq 4.71 < 4.715$.

C

Cuando se calcula un cociente aplicando un proceso de división o mediante el uso de una calculadora, se pueden obtener hasta ocho o más dígitos. Para redondear a 2 o 3 cifras significativas se aplican las reglas de redondeo aprendidas en educación básica.

- Si el primer dígito que se eliminará es menor que 5, ese dígito y todos los dígitos que le siguen, simplemente se eliminan.
- Si el primer dígito que se eliminará es mayor de 5 o si es 5 seguido de dígitos diferentes de cero, todos los dígitos siguientes se suprimen y el valor del último dígito que se conserva se aumenta en una unidad.

El número obtenido después de aplicar redondeo se llama **valor aproximado** y al resultado con todos los dígitos se le llama **valor real o valor exacto**. A la diferencia entre el valor real y el aproximado se le llama **margen de error**.

El valor absoluto del margen de error, puede ser como máximo la mitad de la unidad a la que se aproxima un número, por ejemplo: si se tiene como resultado 12 redondeado hasta las unidades, el valor absoluto del margen de error puede ser como máximo 0.5, por tanto el valor real puede estar entre 11.5 y 12.5; es decir:

$$11.5 \leq 12 < 12.5$$

Si el resultado fuese 8.4 redondeado hasta las décimas, el valor absoluto del margen de error puede ser como máximo 0.05, por tanto el valor real puede estar entre 8.35 y 8.45; es decir, $8.35 \leq 8.4 < 8.45$.

Para cada uno de los siguientes literales:

1. Determina el valor aproximado según se indica en cada caso.
2. Calcula el valor absoluto del margen de error.
3. Determina el rango del valor absoluto del valor real.

Redondear a las décimas:

a) 3.5465 b) 5.23178 c) 2.4751

Calcular y redondear a las centésimas:

d) 18 ÷ 7 e) 10 ÷ 3 f) 26 ÷ 11

Indicador de logro

3.1 Determina el valor aproximado de una cantidad.

Secuencia

En primero y segundo ciclo se ha trabajado el valor aproximado de un número. Para los estudiantes que comprendieron este contenido anteriormente, esta clase servirá como repaso y para los que no será un refuerzo.

La aproximación es muy utilizada en estadística, por esta razón realizar este repaso/refuerzo es importante en esta unidad. Además en esta clase se debe permitir el uso de calculadora a los estudiantes.

Solución de algunos ítems:

1.
Redondeo hasta las décimas:
Para a) y b) como el primer dígito que se eliminará es menor a 5 ese dígito y todos los que le siguen solo se eliminan.
a) 3.5 b) 5.2

Para c) como el primer dígito que se eliminará es mayor o igual a 5, todos los dígitos siguientes se suprimen y el valor del último dígito que se conserva se aumenta en una unidad.
c) 2.5

Cálculo y redondeo a las centésimas:
d) 18 ÷ 7 = 2.571428... ≈ 2.57
e) 10 ÷ 3 = 3.333333... ≈ 3.33
f) 26 ÷ 11 = 2.363636... ≈ 2.36

2. a) 3.5465 – 3.5 = 0.0465
 b) 5.23178 – 5.2 = 0.03178
 c) 2.5 – 2.4751 = 0.0249
 d) 2.571428... – 2.57 = 0.001428...
 e) 3.333333... – 3.33 = 0.0033...
 f) 2.363636... – 2.36 = 0.003636...

3. a) 3.45 ≤ 3.5 < 3.55
 b) 5.15 ≤ 5.2 < 5.25
 c) 2.45 ≤ 2.5 < 2.55
 d) 2.565 ≤ 2.57 < 2.575
 e) 3.325 ≤ 3.33 < 3.335
 f) 2.355 ≤ 2.36 < 2.365

Fecha: **U8 3.1**

P Calcula el valor de 33 ÷ 7 y luego:
1. Redondea el resultado hasta las centésimas.
2. Resta del valor real y el valor redondeado.
3. A partir del valor redondeado, determina el rango para el valor real.

S 33 ÷ 7 = 4.714285714285714...
1. Al redondear hasta las centésimas, se obtiene 4.71.
2. A esta diferencia se le llama "margen de error".
 (4.714285714285714...) – (4.71) = 0.004285714
 Observa que 0 ≤ |margen de error| ≤ 0.005.
3. Al redondear 4.71, este puede representar muchos valores, por ejemplo: 4.705, 4.706, 4.707, ... hasta antes de 4.715. Si fuera 4.715 se aproxima a 4.72.
 Entonces 4.705 ≤ 4.71 < 4.715.

R
1.
Redondeo hasta las décimas:
a) 3.5 b) 5.2 c) 2.5
Cálculo y redondeo a las centésimas:
d) 18 ÷ 7 = 2.571428... ≈ 2.57
e) 10 ÷ 3 = 3.333333... ≈ 3.33
f) 26 ÷ 11 = 2.363636... ≈ 2.36

2.
a) 3.5465 – 3.5 = 0.0465
b) 5.23178 – 5.2 = 0.03178
c) 2.5 – 2.4751 = 0.0249
d) 2.571428... – 2.57 ≈s 0.001428...
e) 3.333333.. – 3.33 ≈ 0.0033...
f) 2.363636 – 2.36 ≈ 0.003636...

Tarea: página 185 del Cuaderno de Ejercicios.

3.2 Dígitos significativos

P

En el 2007 se realizó un censo poblacional en el que se refleja la población por departamento; por ejemplo, Cuscatlán tenía una población de 231 480 y Ahuachapán tenía 319 503 habitantes.

1. Redondea a la unidad de millar más próxima, la población de los dos departamentos.
2. Escribe la población aproximada con un número igual o mayor que 1 multiplicado por la mayor potencia de 10 que sea posible.

Las potencias de 10 son:
$10 = 10^1$
$100 = 10^2$
$1\,000 = 10^3$, etc.

S

1. Al redondear el dato la población de los dos departamentos a las unidades de millar más próxima, se tiene:

Cuscatlán

El dígito que ocupa la posición de las unidades de millar es 1, al redondear es necesario considerar la regla y como el número que sigue es 4, simplemente se eliminan los dígitos siguientes, así se obtiene que $231\,480 \approx 231\,000$.

En este caso, 231 000 oscila entre 230 500 y 231 499, es decir, $230\,500 \leq 231\,000 < 231\,500$. Entonces, el 2, 3 y 1 son dígitos significativos.

Ahuachapán

El dígito que ocupa la posición de las unidad de millar es el 9, al redondear es necesario considerar la regla y como el dígito que ocupa la posición siguientes es 5, se le suma una unidad, así se obtiene que $319\,503 \approx 320\,000$.

En este caso, 320 000 oscila entre 319 500 y 320 499, es decir, $319\,500 \leq 320\,000 < 320\,500$. Entonces el 3, 2 y 0 son dígitos significativos.

2. Al expresar como el producto de un número por la mayor potencia de 10, se tiene:

$231\,000 = 2.31 \times 10^5$
Se deja el 2 en la parte entera y los otros dígitos se cuentan para colocar el exponente de la potencia de 10, sin olvidar colocar los otros dos dígitos significativos (3 y 1), después del punto decimal.

$320\,000 = 3.20 \times 10^5$
Se deja el 3 en la parte entera y los otros dígitos se cuentan para colocar el exponente de la potencia de 10, sin olvidar colocar los otros dos dígitos significativos (2 y 0), después del punto decimal.

C

Cuando se aproxima una cantidad o cuando se realiza cualquier medición o cálculo, los dígitos que tienen un significado real y que por tanto aportan alguna información para determinar el valor real, se les llama **dígitos significativos** o **cifras significativas**. Para determinar la cantidad de dígitos significativos se consideran ciertas reglas, entre las que se tienen:

1. En números que no contienen ceros, todos los dígitos son significativos; por ejemplo, 345 tiene 3 dígitos significativos.

2. Todos los ceros entre dígitos significativos son significativos; por ejemplo, 2 109 tiene 4 cifras significativas.

3. Los ceros a la izquierda del primer dígito, que no es cero, sirven solamente para fijar la posición del punto decimal y no son significativos, por ejemplo 0.048, tiene solamente 2 cifras significativas.

4. En un número con dígitos a la derecha del punto decimal, los ceros a la derecha del último número diferente de cero son significativos; por ejemplo, 3.20000×10^5, tiene 6 cifras significativas.

5. En un número que no tiene punto decimal y que termina con uno o más ceros (como 4 700), los ceros con los cuales termina el número pueden ser o no significativos. El número es ambiguo en términos de cifras significativas. Para especificar el número de cifras significativas, se requiere información adicional acerca de cómo se obtuvo el número. Si el número es resultado de una medición, los ceros probablemente no son significativos. Si el número ha sido contado o definido, todos los dígitos son significativos (suponiendo que el recuento haya sido perfecto).

   Para evitar la ambigüedad sobre el número de cifras significativas de un número, se expresan como el producto de un número por una potencia de 10 (un número que tenga un solo dígito en la parte entera) × (potencia de 10) de la forma $a \times 10^n$, donde $1 \leq a < 10$, tal como se muestra en el numeral 2 del ejemplo desarrollado. Cuando un número está expresado de esta forma, se dice que está en **notación científica**.

   La notación científica se utiliza para expresar fácilmente números muy grandes o muy pequeños, en este grado se trabajará únicamente para números muy grandes.

E

La extensión territorial de América Central o Centroamérica es de **507 900** kilómetros cuadrados.

1. Expresa la extensión territorial de Centroamérica como notación científica, considera los casos siguientes:
   a) 2 cifras significativas.
   b) 3 cifras significativas.
   c) 4 cifras significativas.

2. Analiza cada caso y determina el rango del valor real.

Solución.
1. Al expresar en notación científica, se tiene:
   a) $507\,900 \approx 5.1\ 10^5$ b) $507\,900 \approx 5.08 \times 10^5$ c) $507\,900 = 5.079 \times 10^5$

2. Al analizar cada caso, se tiene:
   a) $5.05 \leq 5.1 < 5.15$ b) $5.075 \leq 5.08 < 5.085$ c) $5.0785 \leq 5.079 < 5.0795$

Por tanto, la cantidad de dígitos significativos que se deben tomar, depende de qué tan pequeño se desee el margen de error de los datos con los que se está trabajando.

Expresa las siguientes cantidades en notación científica con 4 cifras significativas, para tal efecto, hay que redondear hasta el cuarto dígito desde la izquierda.

a) 504.70 b) 257 800 c) 3 400 587 d) 72 130 000 000

$504.70 = 5.047 \times 10^2$ $257\,800 = 2.578 \times 10^5$ $3\,400\,587 \approx 3.401 \times 10^6$ $72\,130\,000\,000 = 7.213 \times 10^{10}$

Indicador de logro

3.2 Analiza las reglas para determinar los dígitos significativos de una cantidad.

Solución de algunos ítems:

Al expresar en notación científica, se tiene:

a) $504.70 = 5.047 \times 10^2$

b) $257\,800 = 2.578 \times 10^5$

c) $3\,400\,587 \approx 3.401 \times 10^6$

d) $72\,130\,000\,000 = 7.213 \times 10^{10}$

Corrección:
En la solución del numeral 1 del Ejemplo aparece $5.1\ 10^5$, lo correcto es 5.1×10^5.

Secuencia:
En esta clase se hará uso nuevamente del concepto de aproximación, y se relacionará con el de términos significativos para introducir la notación científica.

Fecha: **U8 3.2**

Ⓟ En el censo, Cuscatlán tenía 231 480 y Ahuachapán 319 503 habitantes.

1. Redondea a la unidad de millar más próxima la población de los departamentos.
2. Escribe la población aproximada con un número ≥ 1 multiplicado por la mayor potencia de 10 posible.

Ⓢ
1. Cuscatlán: $231\,480 \approx 231\,000$;
   Ahuachapán: $319\,503 \approx 320\,000$.
2. Cuscatlán: $231\,000 = 2.31 \times 10^5$
   Ahuachapán: $320\,000 = 3.20 \times 10^5$

Ⓔ
1. Notación científica:
   a) $507\,900 \approx 5.1 \times 10^5$
   b) $507\,900 \approx 5.08 \times 10^5$
   c) $507\,900 = 5.079 \times 10^5$
2. Rango del valor real:
   a) $5.05 \leq 5.1 < 5.15$
   b) $5.075 \leq 5.08 < 5.085$
   c) $5.0785 \leq 5.079 < 5.0795$

Ⓡ Al expresar en notación científica, se tiene:

a) $504.70 = 5.047 \times 10^2$

b) $257\,800 = 2.578 \times 10^5$

c) $3\,400\,587 \approx 3.401 \times 10^6$

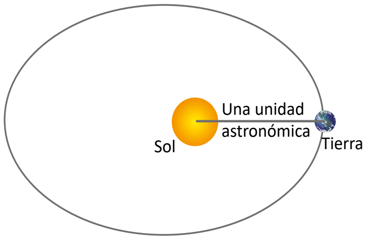
d) $72\,130\,000\,000 = 7.213 \times 10^{10}$

Tarea: página 186 del Cuaderno de Ejercicios.

3.3 Cantidades en notación científica

P

Lee la siguiente situación y realiza lo que se pide en cada numeral.
*"La unidad astronómica (ua) es una unidad de longitud y es aproximadamente igual a la distancia media entre la Tierra y el Sol. Su valor, medido experimentalmente, dado en el Sistema Internacional de Unidades es **149 597 870.7 km**".*



1. Redondea la cantidad a la unidad de millón más próxima.
2. Identifica cuáles son los dígitos significativos.
3. Expresa la cantidad redondeada en notación científica.

S

1. Al redondear 149 597 870.7 a la unidad de millón más próxima, se obtiene 150 000 000.

2. 150 000 tiene 3 dígitos significativos: 1, 5 y 0, pues los otros ceros se obtienen de la aproximación.

3. Para expresar en notación científica 150 000 000, se coloca el punto después del 1, luego se cuentan los dígitos que quedan a la derecha del punto; es decir, 150 000 000 = 1.50000000×10^8, como solo los primeros 3 dígitos son significativos, se dejan únicamente dos dígitos después del punto; entonces, 1.50×10^8.

En cada una de las situaciones siguientes, realiza lo que se indica en cada literal, sobre los datos que aparecen en negrilla.

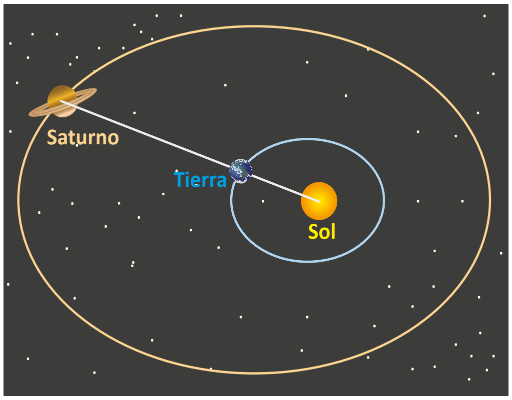
a) Redondea cada una a 4 cifras significativas.
b) Exprésala en notación científica (número que tenga un solo dígito en la parte entera) × (potencia de 10).

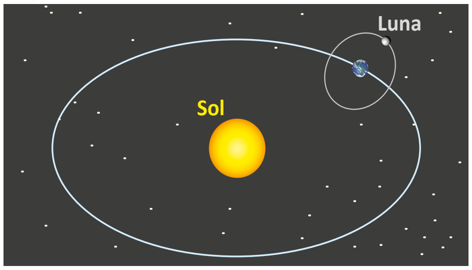
1. La velocidad de la luz en el vacío es de **299 792 458** m/s.

2. Un año luz es la distancia que recorre la luz en un año. Equivale aproximadamente a **9 460 800 000 000** km.

3. Saturno es el segundo planeta más grande del Sistema Solar y el único con anillos visibles desde la Tierra, tiene una distancia media al sol de **1 429 400 000** kilómetros aproximadamente.

4. Urano fue descubierto por William Herschel en 1781 y tiene un radio ecuatorial de **25 559** kilómetros.





5. La Luna orbita la Tierra a una distancia media de **384 403** km.

Indicador de logro

3.3 Expresa cantidades en notación científica.

Secuencia

En la clase anterior se introdujo la notación científica, por lo que ahora se aplicará en situaciones del contexto científico.

Solución de algunos ítems:

1.
a) 299 792 458 ≈ 299 800 000 m/s
b) 2.998×10^8 m/s

2.
a) 9 460 800 000 000 ≈ 9 461 000 000 000 km

b) 9.461×10^{12} km

3.
a) 1 429 400 000 ≈ 1 429 000 000 km
b) 1.429×10^9 km

4.
a) 25 559 ≈ 25 560 km
b) 2.556×10^4 km

5.
a) 384 403 ≈ 384 400 km
b) 3.844×10^5 km

Fecha: **U8 3.3**

(P) La unidad astronómica (ua) = ***149 597 870.7 km.***

1. Redondea la cantidad(ua) a la unidad de millón más próxima.
2. Identifica cuáles son los dígitos significativos.
3. Expresa la cantidad redondeada en notación científica.

(S)
1. 150 000 000.
2. 1, 5 y 0, los otros ceros se obtienen de la aproximación.
3. 150 000 000 = 1.50000000×10^8, se puede expresar como 1.50×10^8.

(R)
1. a) 299 792 458 ≈ 299 800 000 m/s
   b) 2.998×10^8 m/s

2. a) 9 460 800 000 000 ≈ 9 461 000 000 000 km
   b) 9.461×10^{12} km

3. a) 1 429 400 000 ≈ 1 429 000 000 km
   b) 1.429×10^9 km

4. a) 25 559 ≈ 25 560 km
   b) 2.556×10^4 km

5. a) 384 403 ≈ 384 400 km
   b) 3.844×10^5 km

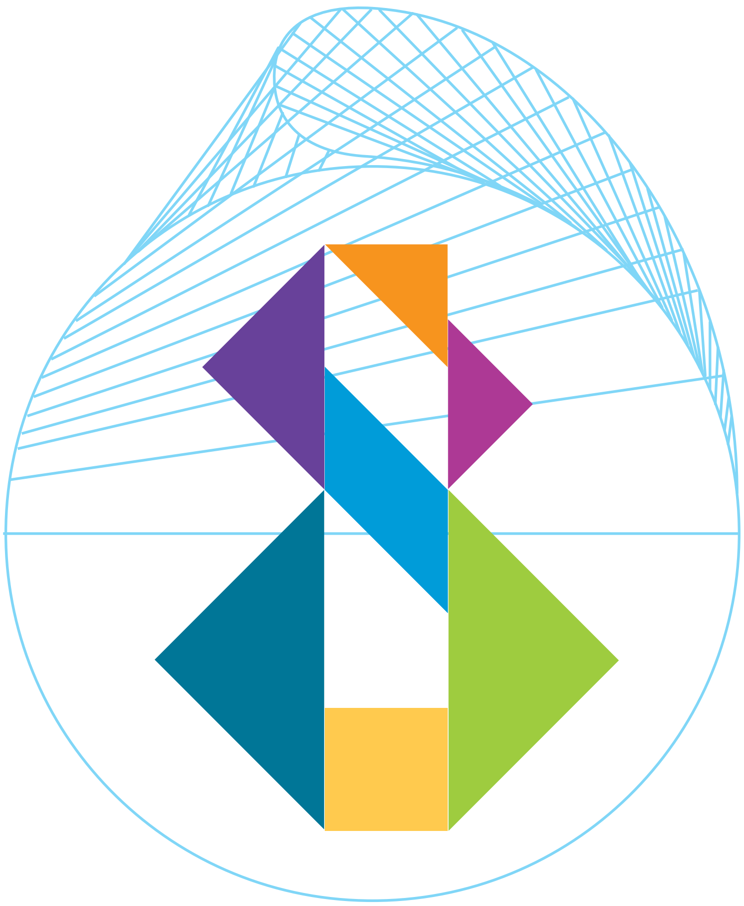
Tarea: página 187 del Cuaderno de Ejercicios.

Anexos

Pruebas

Se proporcionan las pruebas de cada unidad, de trimestre y la final, para que los docentes las fotocopien y apliquen a los estudiantes cuando corresponda.

REPÚBLICA DE EL SALVADOR EN LA AMÉRICA CENTRAL



Guía metodológica Matemática Segunda edición

8

Tomo 2