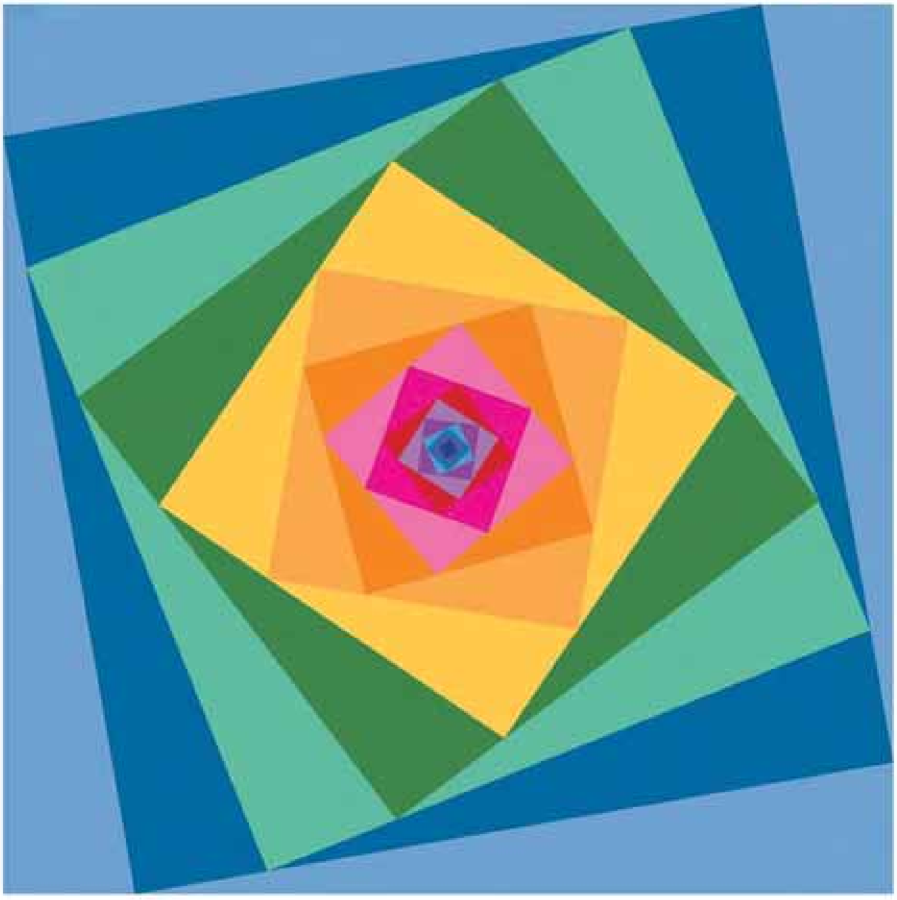
エルサルバドル政府
教育省

算数 8



第2巻

教師用指導書
第二版

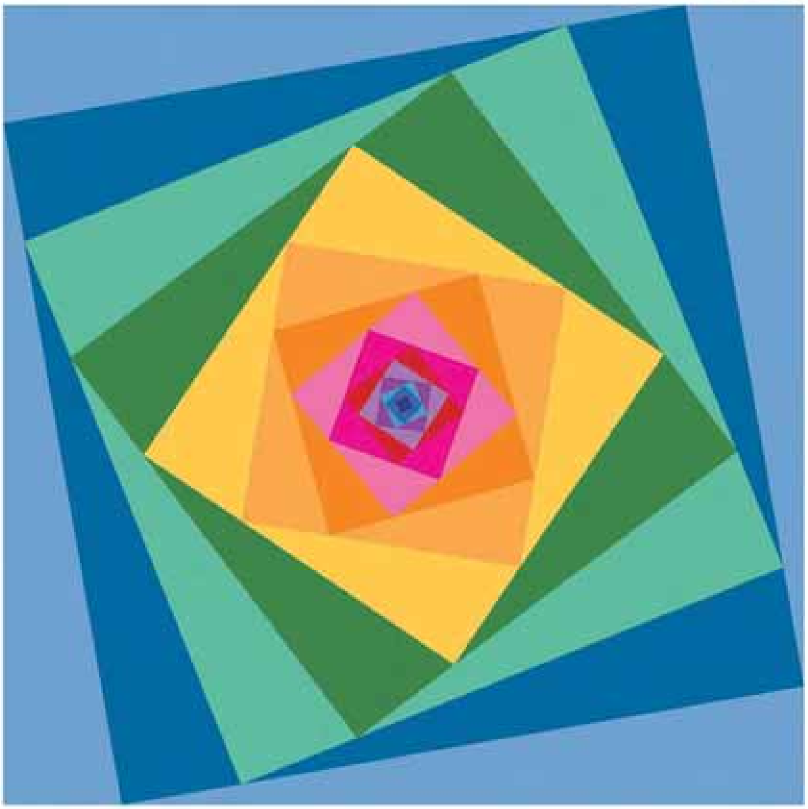
ESMATE

JICA

第2巻 8 第2版 算数 教師用指導書

エルサルバドル政府 | 教育省

算数 8



第2巻

教師用指導書

第二版

Carla Evelyn Hananía de Varela
教育科学技術大臣

Ricardo Cardona Alvarenga
教育科学技術省副大臣
善意協力

Wilfredo Alexander Granados Paz
中等（第3サイクルおよび中等）教育局長
名誉代理

Janet Lorena Serrano de López
基礎教育局長
名誉代理

Santiago Alfredo Flores Amaya
予防社会プログラム局長
名誉代理

Roberto Alejandro Rivera Campos
科学技術イノベーション教育課長

Félix Abraham Guevara Menjívar
科学技術イノベーション教育部長（数学）

Gustavo Antonio Cerros Urrutia
中等教育カリキュラム専門家部長

教育省の執筆及びレイアウトチーム

Ana Ester Argueta Aranda
Erick Amílcar Muñoz Deras
Reina Maritza Pleitez Vásquez
Diana Marcela Herrera Polanco
Francisco Antonio Mejía Ramos
Norma Elizabeth Lemus Martínez
Salvador Enrique Rodríguez Hernández
César Omar Gómez Juárez

デザイン及びレイアウトの校正

Francisco René Burgos Álvarez
Judith Samanta Romero de Ciudad Real

文体修正

Mónica Marlene Martínez Contreras
Marlene Elizabeth Rodas Rosales
Ana Esmeralda Quijada Cárdenas

国際協力機構（JICA）を通じた日本の技術協力

表紙には、教育的見地から連続する正方形の図を用いています。それぞれの正方形において４つの合同な直角三角形が作られています。

372.7
M425 算数8 ［電子資料］ ：教師用指導書：第2巻／
Ana Ester Argueta、Aranda… ［他］ ；
レイアウト：Francisco René Burgos Álvarez、
Judith Samanta Romero de Ciudad Real -- 第2版 --
サンサルバドル、エルサルバドル：教育省（MINED）、2020年。
監修 電子資料1件、（224ページ：図解入り、28 cm. – （Esmate）

電子データ［1ファイル：1 pdf、10.3 MB］。
-- http://www.mined.gob.sv
ISBN 978-99961-355-6-9（電子書籍）
1. 算数 – 教科書。2. 算数 – 教授 -- ガイド
I. Argueta Aranda、Ana Ester、共著、II. タイトル。
BINA/jmh

教師のみなさん

心からご挨拶を申し上げ、エルサルバドルの全国民のために重要な仕事をされていることに感謝します。

教育科学技術省（MINEDUCYT）は初中等教育算数・数学指導力向上プロジェクト（ESMATE）を通じて、みなさんのために算数・数学科目の教師用指導書を作成しました。この指導書は日常の指導活動で重要なツールとなるでしょう。

この資料は、当科目の授業を展開する方法を具体的に指導し、その結果エルサルバドルの生徒たちの学びを大きく向上させることを主な目的としています。

この指導教本は生徒用の教科書に対応する授業内容の提案となっていることから、算数学習プログラムの規程を具体的に実現するものであると言えます。

みなさんがこの資料を最大限に活用し、私たちの愛する国の発展に貢献し続けるべく、全力で努力し献身されると確信しています。

敬具

Carla Evelyn Hananía de Varela
教育科学技術大臣

Ricardo Cardona Alvarenga
教育科学技術省副大臣
善意協力

目次

ユニット5：三角形の合同条件

このユニットのねらい

三角形の合同を定める条件を使い、平面図形の性質を学習する。また、日常生活の中で数学を使い問題を解決する。

関連と発展

小学校低学年･高学年

- 分度器を使った角の作図
- 三角形の分類と作図
- 四角形の分類と作図
- 立体図形の分類
- 対称図形
- 三角形・四角形の外周と面積
- 立方体と四角柱、三角柱のパターン
- 円周の長さと円の面積
- 扇形の弧の長さと面積
- 角柱の体積
- 平行移動、回転および回転対称

7学年

ユニット8：平面図形と立体図形の構成

- 図面上での図形の動き
- 円、線分と角
- 平面図形、立体図形と角柱、角錐、円柱の総面積

8学年

ユニット4：平行線と多角形の角

- 多角形の内角と外角の和
- 平行な直線と角

ユニット5：三角形の合同条件

- 三角形の合同

ユニット6：三角形と四角形の性質

- 三角形
- 平行四辺形

ユニット7：立体の面積と体積

- 立体の性質と要素
- 立体の体積の計算
- 体積の応用
- 立体の面積
- 面積の応用

9学年

ユニット5：相似な図形

- 相似
- 三角形の相似
- 相似と平行
- 相似と相似な三角形の応用

ユニット6：ピタゴラスの定理

- ピタゴラスの定理
- ピタゴラスの定理の応用

ユニット7：円周角と中心角

- 中心角と円周角
- 中心角と円周角の応用

ユニット学習計画

レッスン	時間	授業
1. 三角形の合同	1	1. 三角形の合同とは
	1	2. 三角形の合同
	1	3. 三角形の合同条件 (1)
	1	4. 三角形の合同条件 (2)
	1	5. 三角形の合同条件 (3)
	1	6. 三角形の合同条件の応用
	1	7. 三角形の合同条件の応用
	1	8. 三角形の合同の応用 (1)
	1	9. 三角形の合同の応用 (2)
	1	ユニット5 テスト

授業 9時間 + ユニット5 テスト

このレッスンの要点

レッスン1：三角形の合同

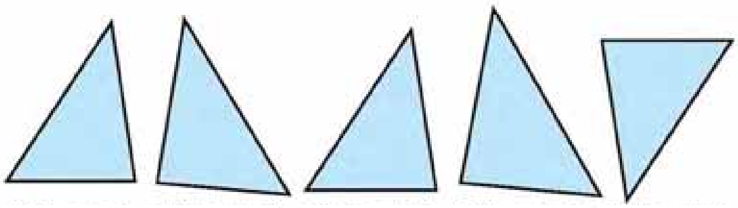
この課ではまず平面図形の合同とは何かを導入し、そのあと三角形が持つそれぞれの要素と関連付けながら、三角形の合同を定義づけします。続いて、図形の作図過程に注目し、三角形の合同条件を導入します。最後に、異なる場面でどのように合同条件が応用されるかを学習します。

レッスン 1 三角形の合同

1.1 三角形の合同とは

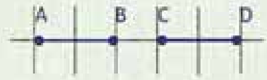
P

三角形2～5のうち、三角形1とぴったり重なる図形を見つけましょう。（裏返して重ねることもできます）

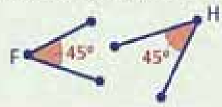


三角形1　三角形2　三角形3　三角形4　三角形5

2つの線分の長さが同じであれば、その線分は等しいです。例：AB = CD

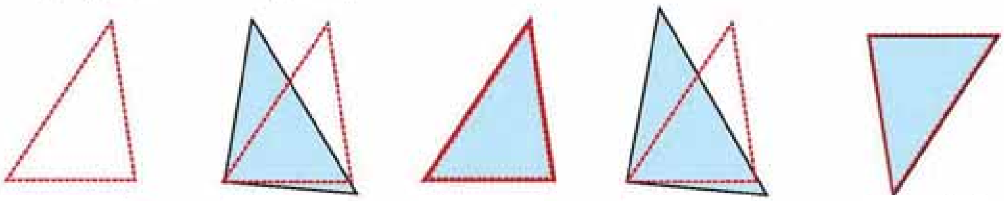


2つの角の大きさが同じであれば、その角は等しいです。例： ∢F = ∢H



S

三角形1を切り取りひとつずつ重ねていくと、すべての辺と角がぴったり重なるのは、三角形3と5だけであることがわかります。



三角形1　三角形2　三角形3　三角形4　三角形5

C

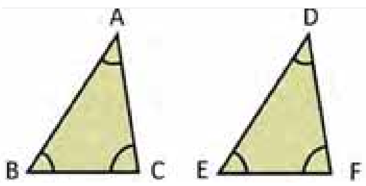
2つの図形があり、直接もしくはそのひとつを裏返してぴったりと重なるとき、その2つの図形は**合同**であるといいます。

合同な図形の頂点、辺、角はそれぞれ、**対応する**頂点、**対応する**辺、**対応する**角といいます。

図形において**対応する**要素のことを、**対応要素**ともいいます。

E

合同な三角形があります。対応する頂点、辺、角を見つけましょう。



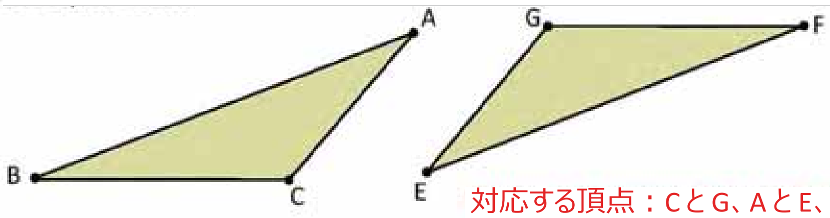
三角形1　三角形2

対応する頂点：A と D、B と E、C と F

対応する辺：AB と DE、BC と EF、CA と FD

対応する角： ∢A と ∢D、∢B と ∢E、∢C と ∢F

次の三角形は合同です。2つの図形を比較し、対応する頂点、辺、角を見つけましょう。



置き方が違っても、この2つの三角形は合同です。回したり裏返したりして重ねてみましょう。

対応する頂点：C と G、A と E、B と F
対応する辺：CA と GE、CB と GF、AB と EF
対応する角： ∢C と ∢G、∢A と ∢E、∢B と ∢F

達成の目安

1.1 2つの図形が合同かどうかを学習します。

学習の流れ

前のユニットでは、多角形の内角と外角について学習しました。この授業では、図形を比べます。その比較過程で考慮すべき要素のひとつが、内角です。そのあと、平面図形において比較要素それぞれの対応要素を見つけます。図形を比べるとき、必要に応じて図形を回したり裏返したりすることが大切です。

ねらい

Ⓟ・Ⓢ：図形を重ねて比べることで、一致するすべての要素を見つけ、その過程から**合同な図形**という概念を導き出します。

Ⓒ：「結論」にある定義を考慮にいれて、合同な2つの三角形で等しい辺を見つけます。

一部の設問の解答：

対応する頂点：
CとG、AとE、BとF

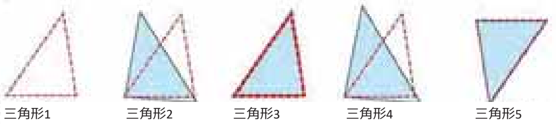
対応する辺：
CAとGE、CBとGF、ABとEF

対応する辺：
∢Cと∢G、∢Aと∢E、∢Bと∢F

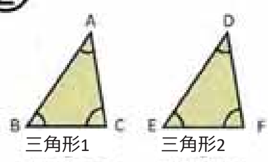
つまずきやすい点：
切り取りが正確にできないと、図形が一致しない場合があります。そうならないために、問題を解くときは、切り方に注意するよう強調します。

日付： **U5 1.1**

Ⓟ 三角形2～5のうち、三角形1とぴったり重なる三角形を見つけましょう。（裏返して重ねることもできます）備考：教科書の絵を切り取って作業しましょう。

Ⓢ


三角形1を切り取りひとつずつ重ねていくと、すべての辺と角がぴったり重なるのは、三角形3と5だけであることがわかります。

Ⓔ


対応する頂点：
AとD、BとE、CとF
対応する辺：ABとDE、BCとEF、CAとFD
対応する辺：
∢Aと∢D、∢Bと∢E、∢Cと∢F

Ⓡ 対応する頂点：
CとG、AとE、BとF

対応する辺：
CAとGE、CBとGF、ABとEF

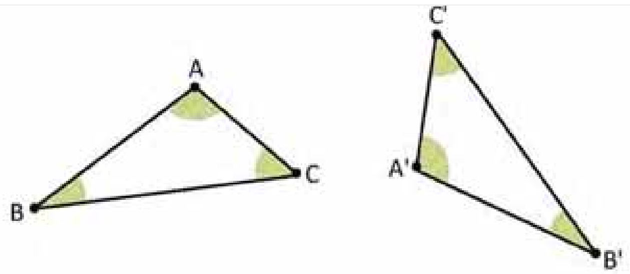
対応する辺：
∢Cと∢G、∢Aと∢E、∢Bと∢F

宿題： 練習帳108ページ

1.2 三角形の合同

P

ΔABC と ΔA'B'C'は合同です。対応する辺と角を比較しましょう。

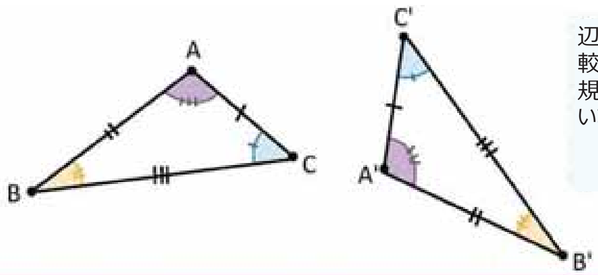


A'、B'、C'はそれぞれ"Aダッシュ"、"Bダッシュ"、"Cダッシュ"と読み、A、B、Cとは異なる頂点ですが、それぞれに対応していることを表しています。

S

対応する辺の長さと対応する角の大きさを比較すると、次のようになります。

AB = A'B'	∢A = ∢A'
AC = A'C'	∢B = ∢B'
BC = B'C'	∢C = ∢C'

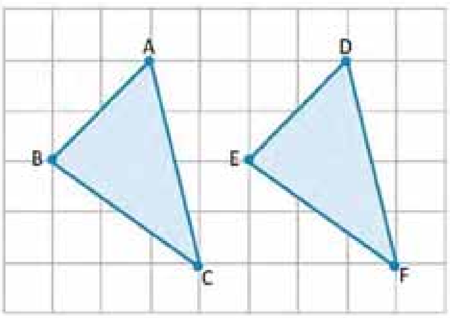


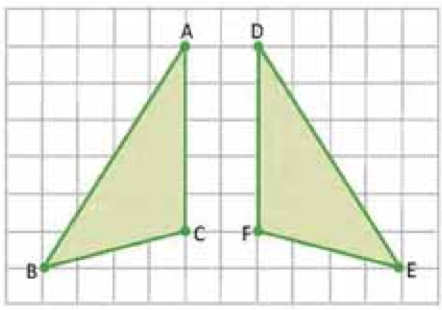
辺の長さと角の大きさを比較するときは、それぞれ定規、コンパス、分度器を使いましょう。

C

合同な三角形では、対応する辺の長さと対応する角の大きさが等しくなります。ΔABC と ΔA'B'C'が合同であることは記号 ≅ を使って表します。つまり、ΔABC ≅ ΔA'B'C' のように表し、**三角形ABCは三角形A'B'C'と合同である**と読みます。

次の三角形は合同な三角形です。対応する辺と角を見つけ、記号を使って三角形が合同であることを表しましょう。





AB = DE	∢A = ∢D
BC = EF	∢B = ∢E
AC = DF	∢C = ∢F

したがって、ΔABC ≅ ΔDEF

三角形の合同を表すときは、対応する頂点をアルファベット順に書かなければなりません。

AB = DE	∢A = ∢D
BC = EF	∢B = ∢E
AC = DF	∢C = ∢F

したがって、ΔABC ≅ ΔDEF

達成の目安

1.2 2つの合同な三角形を見つけます。

学習の流れ

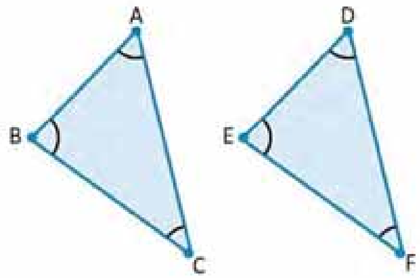
前回の授業では、合同という概念を導入しました。今回の授業では、合同な図形のひとつのケースとして、三角形の合同を学習します。比較する要素は対応していなければならないことを強調することが大切です。

ねらい

Ⓟ・Ⓢ：2つの合同な三角形における対応する要素の長さや大きさを比較し、その関係が等しいことを学習します。

Ⓒ： 三角形の合同を表すときに使う表記法を導入します。

一部の設問の解答：



1. 2つの三角形では、

AB = DE	∢A = ∢D
BC = EF	∢B = ∢E
AC = DF	∢C = ∢F

したがって、ΔABC ≅ ΔDEF

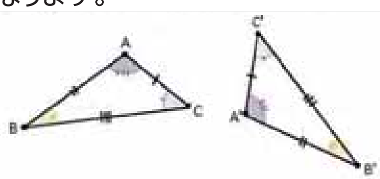
つまずきやすい点：
幾何学図形の測定を正確にできないと、等しい辺や角を見つけることが難しい可能性があります。その場合は、測るときに使用する文房具の使い方全般を説明する必要があります。

教材：
生徒も教師もそれぞれが自分の定規と分度器を使用します。

日付： U5 1.2

Ⓟ ΔABC と ΔA'B'C'は合同です。対応する辺と角を比較しましょう。
備考：教科書の三角形を見ましょう。

Ⓢ 辺の長さと対応する角の大きさを比較すると、次のようになります。



AB = A'B'	∢A = ∢A'
AC = A'C'	∢B = ∢B'
BC = B'C'	∢C = ∢C'

Ⓡ 1. 2つの三角形では、

AB = DE	∢A = ∢D
BC = EF	∢B = ∢E
AC = DF	∢C = ∢F

したがって、ΔABC ≅ ΔDEF

2. 2つの三角形では、

AB = DE	∢A = ∢D
BC = EF	∢B = ∢E
AC = DF	∢C = ∢F

したがって、ΔABC ≅ ΔDEF

宿題： 練習帳109ページ

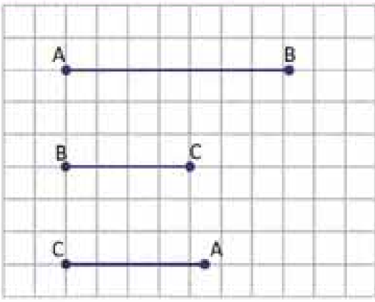
1.3 三角形の合同条件 (1)

P

コンパスと定規を使って、次の練習をしましょう。

a) 右にある3つの線分を辺として用いて、三角形を作図しましょう。

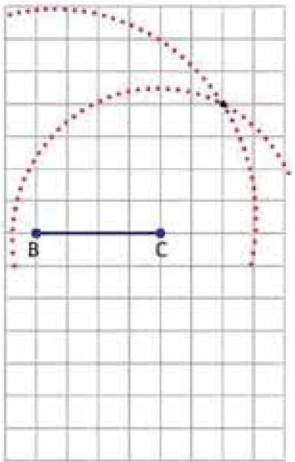
b) 自分が作図したものをクラスメイトのものと比べてみましょう。どんな三角形ができましたか。

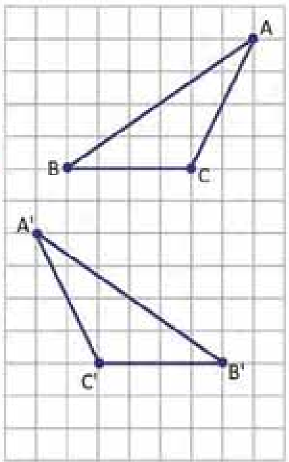


S

a) 次のように三角形を作図します。
- 長さBCの線分をひきます。
- 半径BAで中心がBの円をかき、次にCを中心に半径CAの円をかきます。
- 2つの円弧の交点を求めます。
- 点を結び、三角形ABCを作図します。

b) 三角形を比較すると、長さや大きさがすべて一致することがわかります。つまり、置き方に関係なく、辺と角がそれぞれ等しくなります。





C

三角形の合同条件 1：

3つの辺が等しい2つの三角形は、合同です。この条件を「**辺、辺、辺 （3辺）**」といい、つまり ΔABC ≅ ΔA'B'C' のとき、AB = A'B'、AC = A'C'、BC = B'C' となります。

合同な三角形のペアを見つけましょう。

a) ΔABC; AB = 5, BC = 7, CA = 6

b) ΔDEF; DE = 2, EF = 4, FD = 3

c) ΔGHI; GH = 4, HI = 5, IH = 3

d) ΔJKL; JK = 5, KL = 7, LJ = 8

e) ΔMNO; MN = 3, NO = 4, OM = 5

f) ΔPQR; PQ = 5, QR = 8, RP = 7

g) ΔSTU; ST = 7, TU = 5, US = 6

h) ΔXYZ; XY = 4, YZ = 3, ZX = 2

エウクレイデスの『ユークリッド原論』は2300年のあいだ、類をみない素晴らしい書物として知られてきました。この文書は他の優れた作品と同じように繰り返し読まれ、そのたびに新しい側面が見出されてきました。この古代の書物は現在もなお、その巧妙さと優雅な数学的論理展開を愛する人々に無限の喜びを与えてくれています。W. ダンハム(1992)数学の知性—天才と定理でたどる数学史 p.116.

『ユークリッド原論』の命題I.22.でエウクレイデスは、次のように三角形の合同について述べています。「3つの線分が、別に与えられた3つのそれと等しい三角形を作図する。ただし、与えられた3つの線分において、どの2線分の和も残りの線分より大きいものとする。」

a) と g)、b) と h)、c) と e)、d) と f)

達成の目安

1.3 2つの三角形が合同であるために、最低限等しくなければならない必要要素を求めます。

学習の流れ

合同を表す記号と合同な三角形の概念を導入したあと、2つの三角形が合同であるためには、最低いくつ要素が等しくなければならないのかを分析します。そういった意味で、この授業では**1つ目の合同条件**である「辺、辺、辺 （3辺）」を導入します。

ねらい

Ⓟ・Ⓢ：与えられた長さの3辺を使って三角形を作図します。この問題では、生徒に三角形の置き方を指示しないことが大切です。そうすることで、そのあと比較したときに、作図した三角形の置き方にかかわらず、辺の長さが等しければ必ず合同であるということがわかるようになります。

©：「結論」で定義した合同条件を使います。ここでは、辺の長さを測るだけで、三角形をかく必要はありません。ただし時間が許すようなら、コンパスに慣れるためにも、かかせるようにしましょう。

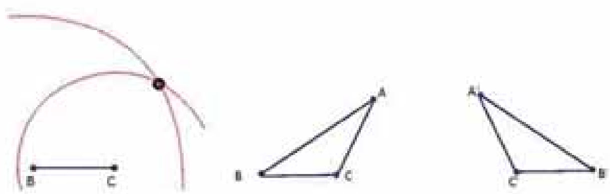
つまずきやすい点：
コンパスが正しく使えないと、求められた作図ができないことがあります。その場合は、大まかに説明し、復習のためにも三角形のかきかたを宿題として出すことが大切です。

教材：
生徒も教師もそれぞれが自分の定規セットとコンパスを使用します。

日付： U5 1.3

Ⓟ a) 教科書に載っている線分の長さを使って、三角形を作図しましょう。定規とコンパスを使用しましょう。
b) 作図した三角形をクラスメイトのものと比べてみましょう。どんな三角形ができましたか。

Ⓢ



三角形を比べてみると、長さがすべて同じことがわかります。つまり、合同です。

Ⓡ 3辺の合同条件を使うと、次のペアが合同な三角形であることがわかります。

a) と g)
b) と h)
c) と e)
d) と f)

宿題： 練習帳110ページ

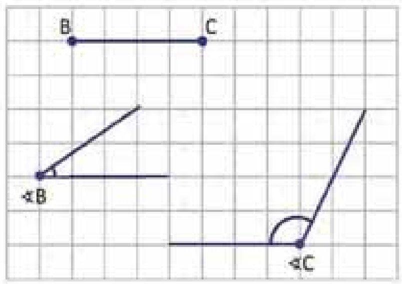
1.4 三角形の合同条件 (2)

P

定規と分度器を使って、次の練習をしましょう。

a) 右にある線分と2つの角を用いて、三角形を作図しましょう。2つの角は、線分の両端の角とします。

b) 作図した三角形をクラスメイトのものと比べてみましょう。どんな三角形ができましたか。

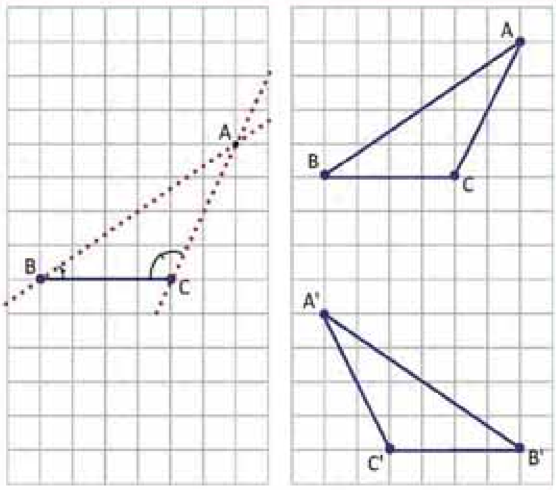


S

a)2つの角の大きさを線分の両端の角の大きさとし、三角形を作図します。

- 長さBCの線分をひきます。
- 線分BCの両端にあるBとCの角度を測ります。
- ∢B と ∢Cの角度でひかれた線の交点を見つけます。
- 頂点を結び、ΔABCを作ります。

b) 三角形を比較すると、長さや大きさがすべて一致することがわかります。つまり、置き方に関係なく、辺と角がそれぞれ等しくなります。



C

三角形の合同条件 2：

1辺とその両端の2角が等しい2つの三角形は、合同です。この条件を「**角、辺、角　（1辺2角）**」といいます。

ΔABC ≅ ΔA'B'C' のとき、∢B = ∢B'、BC = B'C'、∢C = ∢C' となります。

合同な三角形のペアを見つけましょう。

a) ΔABC; BC = 5, ∢B = 35°, ∢C = 100°

b) ΔDEF; EF = 6, ∢E = 50°, ∢F = 70°

c) ΔGHI; GH = 6, ∢G = 40°, ∢H = 110°

d) ΔJKL; JK = 5, ∢J = 60°, ∢K = 50°

e) ΔMNO; MO = 5, ∢M = 100°, ∢O = 35°

f) ΔPQR; PR = 6, ∢P = 110°, ∢R = 40°

g) ΔSTU; ST = 5, ∢T = 50°, ∢U = 60°

h) ΔXYZ; XZ = 6, ∢X = 60°, ∢Y = 50°

次の三角形が合同です： a) と e)、b) と h)、c) と f)

達成の目安

1.4 2つの三角形が合同であるときに求められる別のケースを学習します。

学習の流れ

前回の授業では、1つ目の合同条件を学習しました。この授業では、三角形の3つの要素を用いて作図し、2つ目の条件を学習します。前回の授業と違い、今回は要素をどう置くのかが重要になってきます。

ねらい

Ⓟ・Ⓢ：1辺とその両端の2角を使って三角形を作図します。完成した図をもとに、**2つ目の合同条件**である「角、辺、角（1辺2角）」を導入します。できた図を比較するときは、線分に対して2つの角をどう配置するのかを強調することが大切です。

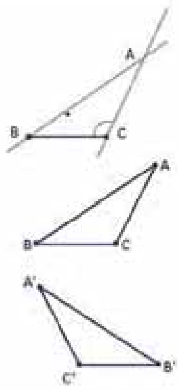
©：この授業で学習した条件を使って、合同な三角形を見つけるプロセスの練習をします。

教材：
教師も生徒もそれぞれが自分の定規セットを使用します。

日付： U5 1.4

Ⓟ a) 教科書に載っている線分と2つの角を用いて、三角形を作図しましょう。定規と分度器を使いましょう。
b) 自分が作図したものをクラスメイトのものと比べてみましょう。どんな三角形ができましたか。

Ⓢ 三角形を比較すると、長さや大きさがすべて一致することがわかります。つまり、置き方に関係なく、辺と角がそれぞれ等しくなります。



Ⓡ 1辺2角の合同条件を考慮すると、次のペアが合同な三角形です。

a) と e)
b) と h)
c) と f)

宿題： 練習帳111ページ

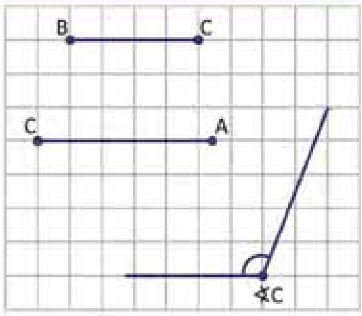
1.5 三角形の合同条件 (3)

P

定規と分度器、コンパスを使って、次の練習をしましょう。

a) 右にある2つの線分と角を用いて、三角形を作図しましょう。角は、2つの線分のあいだの角とします。

b) 作図した三角形をクラスメイトのものと比べてみましょう。どんな三角形ができましたか。

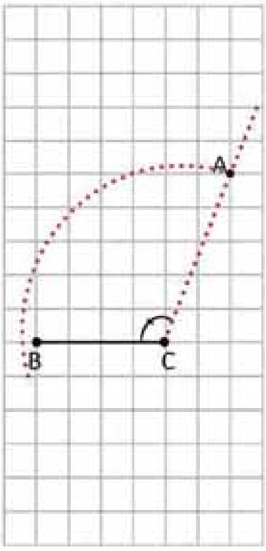


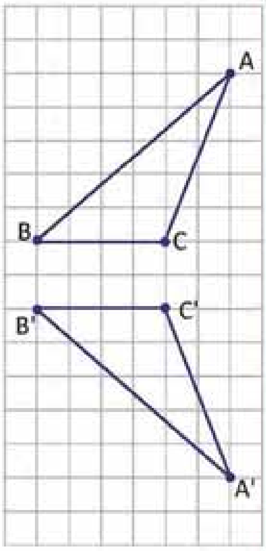
S

a) 与えられた2つの線分の長さとそのあいだの角の大きさをもとに、次のように三角形を作図します。

- 長さBCの線分をひきます。
- 角Cの大きさを測ります。
- 半径CAの円をかきます。
- 円と∢Cの角度でひかれた線の交点を記します。
- 点を結び、三角形ABCを作図します。

b) 三角形を比較すると、長さや大きさがすべて一致することがわかります。つまり、置き方に関係なく、辺と角がそれぞれ等しくなります。





C

三角形の合同条件 3：

2辺とそのあいだの角が等しい2つの三角形は、合同です。この条件を「**辺、角、辺　（2辺1角）**」といい、つまり ΔABC ≅ ΔA'B'C' のとき、BC = B'C'、∢C = ∢C'、CA = C'A' となります。

合同な三角形のペアを見つけましょう。

a) ΔABC; BC = 3, CA = 4, ∢C = 50°

b) ΔDEF; EF = 3, FD = 5, ∢F = 60°

c) ΔGHI; GH = 4, HI = 3, ∢H = 60°

d) ΔJKL; JK = 5, KL = 4, ∢K = 50°

e) ΔMNO; OM = 3, MN = 4, ∢M = 60°

f) ΔPQR; RP = 4, PQ = 5, ∢P = 50°

g) ΔSTU; US = 4, TU = 3, ∢U = 50°

h) ΔXYZ; YX = 5, XZ = 3, ∢X = 60°

次の三角形が合同です： a) と g)、b) と h)、c) と e)

達成の目安

1.5 2つの三角形が合同であるときに求められる別のケースを学習します。

学習の流れ

過去2回の授業では、2つの三角形が合同であると定めた条件を2つ学習しました。この授業では、これまで見てきた要素とはまた違う要素を使って、**3つ目の合同条件**である「辺、角、辺　（2辺1角）」を導入します。

ねらい

Ⓟ・Ⓢ：与えられた要素を使って三角形を作図し、その後できた図をクラスメイトと比べます。要素の置き方が重要であることを考慮する必要があります。

©：この授業で学習した合同条件を使って、三角形の比較過程をしっかりと学びます。

備考：
多角形の外角の和は常に360°であることを強調することが重要です。この授業では、理解を深める目的のためだけに計算を行わせましょう。

日付： U5 1.5

Ⓟ a) 教科書に載っている2つの線分と角を用いて、三角形を作図しましょう。コンパスと分度器を使いましょう。
b) 作図した三角形を同学年の生徒と比べてみましょう。どんな三角形ができましたか。

Ⓢ

三角形を比較すると、長さや大きさがすべて一致することがわかります。つまり、置き方に関係なく、辺と角がそれぞれ等しくなります。

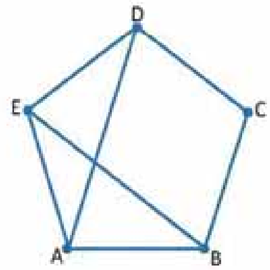
Ⓡ 2辺1角の合同条件を使うと、次のペアが合同な三角形です。
a) と g)
b) と h)
c) と e)

宿題： 練習帳112ページ

1.6 三角形の合同条件の応用

P

次の図が正五角形であるとき、なぜ$\Delta ABE \cong \Delta EDA$となるか説明しましょう。



正五角形では、すべての辺の長さが等しく、また内角すべての角度も等しいです。

S

肯定	根拠
$EA = AE$	両三角形に共通
$AB = ED$	正五角形の辺
$\sphericalangle EAB = \sphericalangle DEA$	正五角形の内角
$\Delta ABE \cong \Delta EDA$	2辺1角の条件

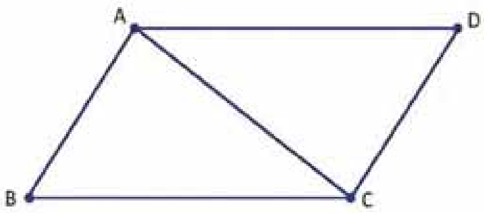
C

一連の理由がそれぞれ論理的に組み立てられ、またそのそれぞれがすでに正しいと認められている別の理由に裏付けされているとき、それを**証明**といいます。

先に出題された問題において、正五角形の辺と内角の性質、また三角形の合同条件は、すでに正しいと認められていることがらであり、したがって、この解答を証明といいます。

次を証明しましょう。

1. 四角形ABCDがひし形で、ACがその対角線のとき、$\Delta ABC \cong \Delta CDA$ であることを証明しましょう。

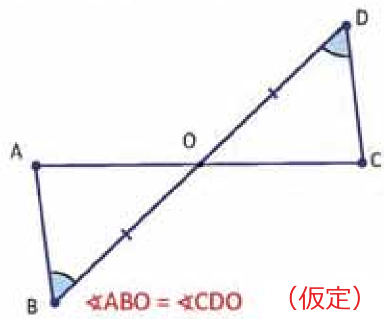


$\sphericalangle CAB = \sphericalangle ACD$
$\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACB$ （内側の錯角）

$AC = CA$ （共通する線分）

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$ （1辺2角の合同条件）

2. $AB \parallel CD$ で、$DO = BO$ のとき、$\Delta ABO \cong \Delta CDO$ であることを証明しましょう。



$\sphericalangle ABO = \sphericalangle CDO$ （仮定）
$\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$ （対頂角）

$OB = OD$ （仮定）

$\Delta ABO \cong \Delta CDO$ （1辺2角の合同条件）

ユニット5

111

達成の目安

1.6 多角形から形成された三角形の関係を証明するために合同条件を応用します。

学習の流れ

過去3回の授業では、3つの合同条件を学習しました。この授業では、その合同条件を多角形の性質を証明するために用います。

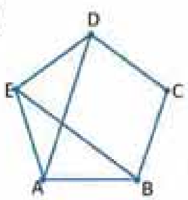
ねらい

Ⓟ・Ⓢ：正五角形の辺と対角線から形成される複数の三角形の関係を証明します。

©：2つの三角形が合同であるかどうかを証明するために、合同条件を使います。

日付： **U5 1.6**

Ⓟ



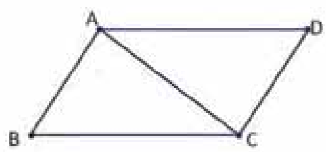
次の図が正五角形であるとき、なぜ $\Delta ABE \cong \Delta EDA$ であるか説明しましょう。

備考： 教科書の五角形を切り取るか、教科書の図を見ましょう。

Ⓢ

肯定	根拠
$EA = AE$	両三角形に共通
$AB = ED$	正五角形の辺
$\sphericalangle EAB = \sphericalangle DEA$	正五角形の内角
$\Delta ABE \cong \Delta EDA$	2辺1角の条件

Ⓡ



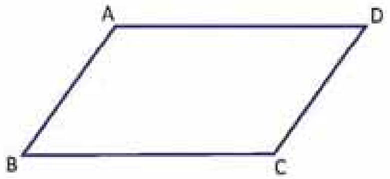
$\sphericalangle CAB = \sphericalangle ACD$ $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACB$	（内側の錯角）
$AC = CA$	（共通の線分）
$\Delta ABC \cong \Delta CDA$	（1辺2角の合同条件）

宿題： 練習帳113ページ

1.7 三角形の合同条件の応用

P

四角形ABCDにおいて、AD ∥ BC、BC = DAのとき、AB = CD であることを証明しましょう。

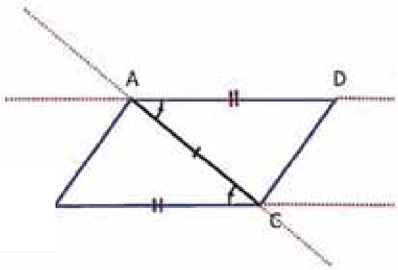


ABとDCを含む三角形の合同を利用して、辺が等しいことを証明します。

S

次を証明します： ΔABC ≅ ΔCDA

肯定	根拠
BC = DA	仮定
CA = AC	両三角形に共通する辺
∢BCA = ∢DAC	平行線間にある内側の錯角
ΔABC ≅ ΔCDA	2辺1角の条件



したがって、合同な2つの三角形の対応する辺であることから、AB = CDであると結論づけられます。

C

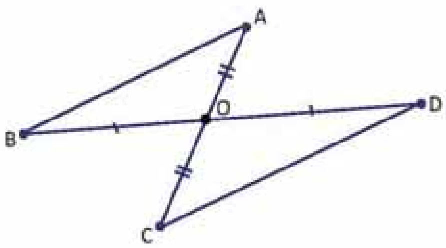
証明は次のように組み立てられます。
文中にある要素 （BC = DA） のことを、**仮定**といいます。

CA = AC
∢BCA = ∢DAC （すでに正しいと認められていることがら）
ΔABC ≅ ΔCDA

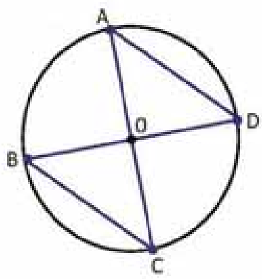
AB = CD （証明する根拠・ことがら。**結論**）

数学では、次のような形で表されます。
□ ならば、○ である。
□ の部分は仮定、○ の部分は結論といいます。

1. 線分ACとBDは点Oで交わります。BO = DO、AO = CO のとき、AB = CDであることを証明し、仮定と結論を書きましょう。



2. 次の円で、2つの直径ACとBDは円の中心Oで交わります。AD ＝ CB であることを証明しましょう。



達成の目安

1.7 多角形から形成された三角形の関係を証明するために合同条件を応用します。

学習の流れ

前回の授業では、2つの三角形が合同であることを証明するために、合同条件を使いました。この授業では、平行について学習した内容とともに合同条件を再び使用し、2つの三角形が合同であることを証明します。

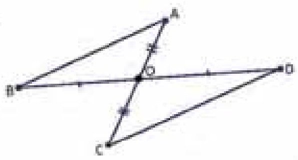
ねらい

Ⓟ・Ⓢ：四角形に対角線をひくと、2つの合同な三角形が形成されることを証明します。

©：与えられた2つの三角形が合同であることを証明します。そのためには、合同条件と三角形について学習した内容を使う必要があります。

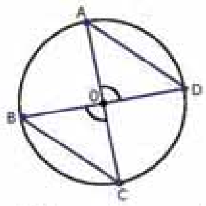
一部の設問の解答：

1.



肯定	根拠
BO = DO	仮定
AO = CO	仮定
∢AOB = ∢COD	対頂角
ΔABO ≅ ΔCDO	2辺1角の条件

2.



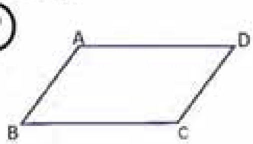
肯定	根拠
BO = DO	直径
AO = CO	直径
∢AOD = ∢COB	対頂角
ΔAOD ≅ ΔCOB	2辺1角の条件

したがって、AD = CB であると結論づけられます。

つまずきやすい点：
前回の授業と同様、証明を行えるための根拠が見つからない場合があります。そのときは、ペアを作って作業させましょう。

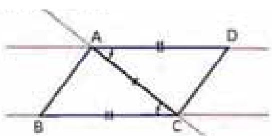
日付： U5 1.7

Ⓟ



四角形ABCDにおいて、AD ∥ BC、BC = DAのとき、AB = CD であることを証明しましょう。

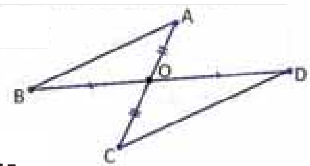
Ⓢ 次を証明します：ΔABC ≅ ΔCDA.



肯定	根拠
BC = DA	仮定
CA = AC	両三角形に共通する辺
∢BCA = ∢DAC	平行線間にある内側の錯角
ΔABC ≅ ΔCDA	2辺1角の条件

したがって、2つの合同な三角形の対応する辺であることから、AB = CD であると結論づけられます。

Ⓡ



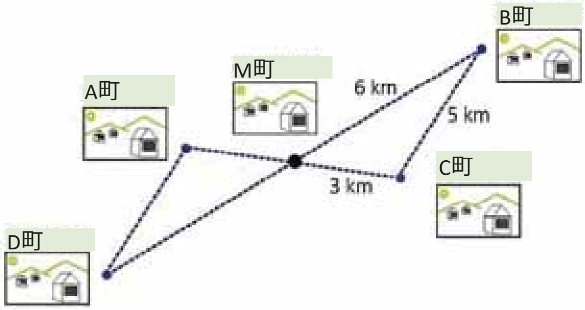
肯定	根拠
BO = DO	仮定
AO = CO	
∢AOB = ∢COD	対頂角
ΔABO ≅ ΔCDO	2辺1角の条件

宿題： 練習帳114ページ

1.8 三角形の合同の応用 (1)

P

次の地図には5つの町があります。M町は、A町とC町、B町とD町のちょうど真ん中にあることからその名がつけられました。A町とD町はどれだけ離れていますか。



S

それぞれの町の距離を比較するとき、2つの三角形が形成されることがわかります。その三角形の要素の関係は次のようになります。

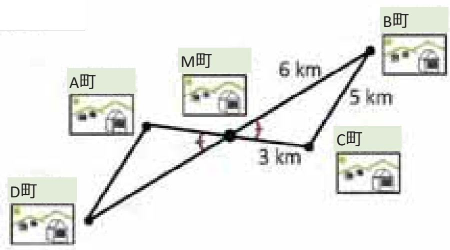
町の位置関係を観察し、AM = CM = 3 km

町の位置関係を観察し、MD = MB = 6 km

対頂角なので、∢AMD = ∢CMB

2辺1角の条件から、ΔAMD ≅ ΔCMB

2つの合同な三角形の対応する辺であることから、DA = BC



したがって、A町とD町は5 km離れています。

それぞれの項目で求められていることがらを分析し答えましょう。

1. 図1では、BC = EC、CA = CD、AB = DE です。

   a) 合同な三角形があるか見分け、考慮した合同条件を示しながら証明しましょう。
   b) θの値を計算しましょう。

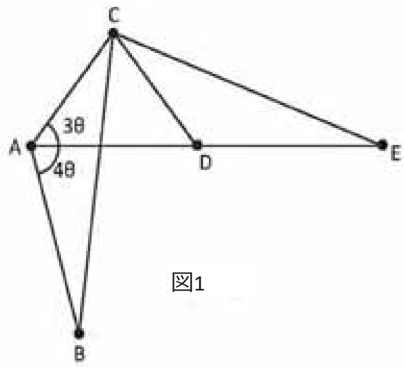


図1

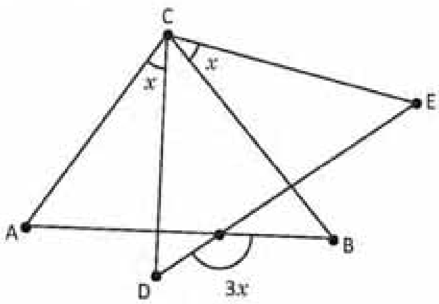


図2

2. 図2では、AC = DC、BC = EC です。

   a) 合同な三角形があるか見分け、考慮した合同条件を示しながら証明しましょう。
   b) xの値を計算しましょう。

ユニット5

達成の目安

1.8 身の回りにある問題を解決するのに合同条件を応用します。

学習の流れ

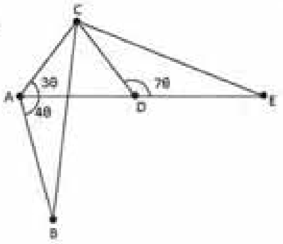
過去2回の授業では、与えられた図形における2つの三角形が合同であることを証明するために合同条件を使いました。今回は、日常生活で必要な場面で使います。

ねらい

Ⓟ・Ⓢ：2つの町の距離が三角形の1辺と等しいとき、その長さを求めるために三角形の合同を使います。

一部の設問の解答：

1.

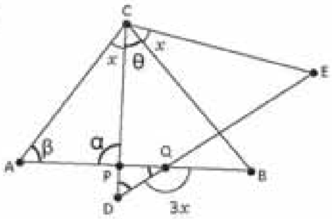


a) 仮定より、BC = EC、CA = CD、AB = DE
3辺の条件により、ΔABC ≅ ΔCDE

b) θの値を計算します。

$$10\theta = 180°$$
$$\theta = 18°$$

2.



a)
仮定より、AC = DC、BC = EC
∢ACB = ∢DCE = $x + \theta$
2辺1角の条件により、ΔABC ≅ ΔCDE

b)
ΔPQDでは、合同の定義より、∢D = ∢A = βであることがわかり、対頂角であることから∢DPB = ∢APC = αであることがわかります。また、∢Q = 180° – $3x$です。したがって、以下のようになります。

$$\beta + \alpha + (180° - 3x) = 180°$$
$$\beta + 180° - (\beta + x) + (180° - 3x) = 180°$$
$$2 \times 180° - 4x = 180°$$
$$-4x = -180°$$
$$x = 45°$$

日付： U5 1.8

Ⓟ 教科書にある地図では、M町はA町とC町、B町とD町のちょうど真ん中に位置しています。A町とD町はどれだけ離れていますか。

Ⓢ 町の位置関係を観察し、AM = CM = 3 km
町の位置関係を観察し、MD = MB = 6 km
対頂角なので、∢AMD = ∢CMB

2辺1角の条件から、ΔAMD ≅ ΔCMB
2つの合同な三角形の対応する辺であることから、DA = BC とわかります。
したがって、A町とD町は5 km離れています。

Ⓡ 1. 仮定より、BC = EC、CA = CD、AB = DE
3辺の条件により、ΔABC ≅ ΔCDA

$$10\theta = 180°$$
$$\theta = 18°$$

宿題： 練習帳115ページ

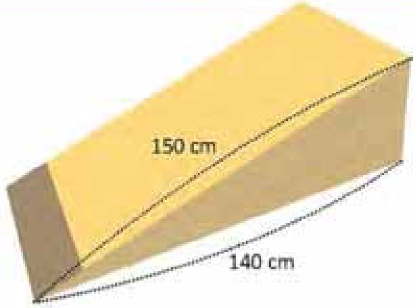
レッスン 1

1.9 三角形の合同の応用 (2)

P

カルロスは、近日中に行われるローラーブレードの競技大会に出場します。練習用ランプもすでに用意してあります。彼のいとこであるホセもやる気になり、大会に参加するため、カルロスのと似たランプを作ろうとしています。カルロスは、図にあるような情報を載せた写真を送り、長さを記した2辺のあいだの角は13°であると言いました。

ホセは、カルロスからもらった3つの数字をもとに、どうやってランプを作ることができますか。

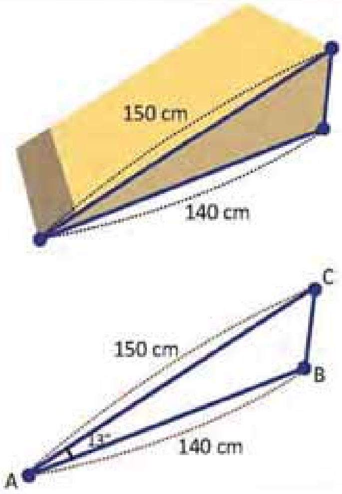


S

1. 問題の条件を復習しましょう。
   - 図に示された、長さのわかっている辺を特定します。
   - 長さのわかっている辺のあいだの角（13°）を示します。
   - 側面に三角形が形成されていることに注目します。

2. 三角形の合同条件を使います。
   2辺とそのあいだの角がわかっているので、2辺1角の条件を使い、新しいランプを作ることができます。

3. 数字を抜きだし、ランプを作ります。
   - 三角形に示されている値の通りに材料を測り、切ります。
   - 切った材料を配置します。はじめにベースとなるものを置き、その次に1枚目との交点が13°となるようにもう一枚を置きます。

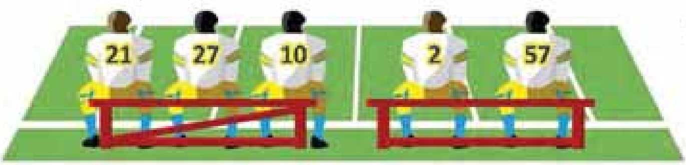


それぞれの項目で求められていることがらを分析し答えましょう。

1. 図のようなデザインの歩道があり、一部のピースを交換しなければなりません。アントニオは交換するピースを作る役目を担います。ピースを作るには、並んだピースを参考に、レプリカを作らなければなりません。

   a) 図にあるようなピースと完全に同じレプリカを作るには、アントニオは、最低何を何回測らなければなりませんか。

   b) 前問で導いた方法は、ピースのレプリカを作るための唯一の方法ですか。根拠づけて答えましょう。



2. 図を見て答えましょう。対角線に支えが入れてあるベンチはもう一つのベンチよりも安定しているのはどうしてでしょうか。根拠づけて答えましょう。

達成の目安

1.9 身の回りにある問題を解決するのに合同条件を応用します。

学習の流れ

前回の授業では、三角形の合同と角の関係を使って問題を解きました。この授業では、再び三角形の合同を用いて、身の回りの問題を解決します。

ねらい

Ⓟ・Ⓢ：冒頭にある問題を解決します。ランプを作ったり、まとめとして用いることもできます。

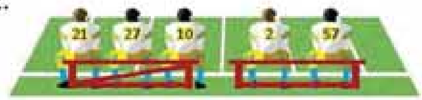
一部の設問の解答：

1.

a) 3つの線分の長さを測れます。
b) 他にも、次の長さや角度を測れます。
- 1つの線分と2つの角度
- 2つの角度とそのあいだにある線分

三角形なので、合同のケースだと考えられるからです。

2.

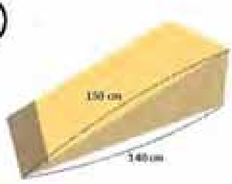


三角形は変形しない形なので、3辺を作りだすことで、より重い力にも耐えられるようになるからです。そのため、構造物のほとんどに三角形が使われています。

つまずきやすい点：
ひとりで問題を解けないようなら、ペアを作ります。

日付： U5 1.9

Ⓟ



ホセは、カルロスからもらった3つの数字をもとに、どうやってランプを作ることができますか。

Ⓢ

2辺とそのあいだの角がわかっているので、2辺1角の条件を使い、新しいランプを作ることができます。

数字を抜き出します。材料を三角形に示された長さの通りに測って切り、ランプを作ります。

Ⓡ

a) 3つの線分の長さを測れます。
b) 他にも、次の長さや角度を測れます。
- 1つの線分と2つの角度
- 2つの角度と1つの線分

三角形なので、合同のケースだと考えられるからです。

宿題： 練習帳116ページ

ユニット6：三角形と四角形の性質

このユニットのねらい

合同条件を使って平面図形を見分け、三角形と四角形の性質を学ぶ。

関連と発展

小学校低学年・高学年

- 分度器を使った角の作図
- 三角形の分類と作図
- 四角形の分類と作図
- 立体図形の分類
- 対称図形
- 三角形・四角形の外周と面積
- 立方体と四角柱、三角柱のパターン
- 円周の長さと円の面積
- 扇形の弧の長さと面積
- 角柱の体積
- 平行移動、回転および回転対称

7学年

ユニット8：平面図形と立体図形の構成
- 図面上での図形の動き円、線分と角
- 平面図形、立体図形と角柱、角錐、円柱の総面積

8学年

ユニット4：平行線と多角形の角
- 多角形の内角と外角の和
- 平行な直線と角

ユニット5：三角形の合同条件
- 三角形の合同

ユニット6：三角形と四角形の性質
- 三角形
- 平行四辺形

ユニット7：立体の面積と体積
- 立体の性質と要素
- 立体の体積の計算
- 体積の応用
- 立体の面積
- 面積の応用

9学年

ユニット5：相似な図形
- 相似
- 三角形の相似
- 相似と平行
- 相似と相似三角形の応用

ユニット6：ピタゴラスの定理
- ピタゴラスの定理
- ピタゴラスの定理の応用

ユニット7：円周角と中心角
- 中心角と円周角
- 中心角と円周角の応用

ユニット学習計画

レッスン	時間	授業
1. 三角形	1	1. 二等辺三角形
	1	2. 二等辺三角形の定理
	1	3. 二等辺三角形の二等分線
	1	4. 正三角形
	1	5. 二等辺三角形と正三角形の定理
	1	6. 相反定理と反例
	1	7. 直角三角形の合同条件 (1)
	1	8. 直角三角形の合同条件 (2)
	1	9. 必要条件と十分条件
	1	10. 必要条件と十分条件の使い方
	1	11. 三角形の二等分線の性質
	2	12. 復習問題
		13. 復習問題
	1	2学期テスト
2. 平行四辺形	1	1. 平行四辺形
	1	2. 平行四辺形の性質
	1	3. 平行四辺形の対角線
	1	4. 四角形が平行四辺形である場合の辺の条件
	1	5. 四角形が平行四辺形である場合の角の条件
	1	6. 四角形が平行四辺形であるための十分条件
	1	7. 長方形とひし形の性質

	1	8. 長方形における対角線の性質の応用
	1	9. 長方形の性質の相反定理
	1	10. 平行線と面積の関係
	1	11. 平行線と面積の間の関係の応用
	2	12. 復習問題
		13. 復習問題
	1	ユニット6 テスト

26時間の授業 + ユニット6テスト + 二学期テスト

各レッスンの要点

レッスン1：三角形

基礎教育で学んだ多角形の三角形分割をしながら、 n 辺の多角形の内角の和を計算する公式を導き出します。その後それを使って、多角形の外角の和を求めます。さらに、特殊な正多角形の事例に重点を置きます。

レッスン2：平行四辺形

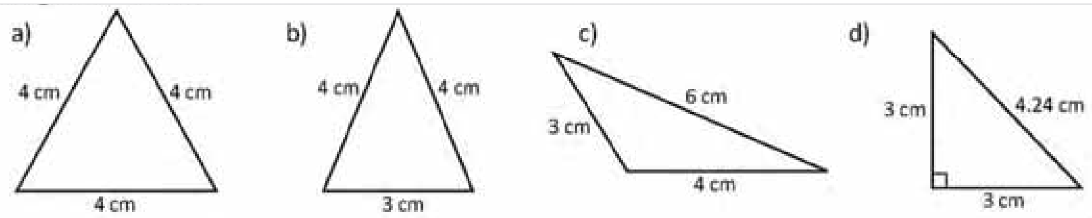
この課では、まず基礎教育で学んだ対角について復習してから、対となる対角の関係について学習します。さらに、補角の関係を用いて、それぞれの角度の値を求めます。その後、平行線の角の関係について分析します。この平行線の角の関係は、数学の定理の中でも最も重要な定理のひとつであり、日常生活でも役立つ場面があります。

レッスン 1 三角形

1.1 二等辺三角形

P

辺の長さに注目して、次の三角形を分類しましょう。また、二等辺三角形の性質を答えましょう。



S

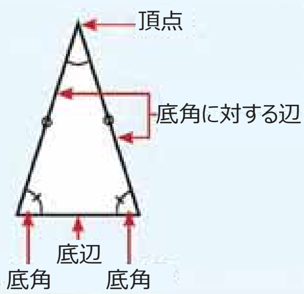
a) 3つの辺の長さが等しいので、**正三角形**です。
b) 2つの辺の長さが等しいので、**二等辺三角形**です。
c) 3つの辺の長さが異なるので、**不等辺三角形**です。
d) 2つの辺の長さが等しいので、**二等辺三角形**です。

三角形はそれぞれの角でも分類できることに注目しましょう。
a) 鋭角三角形です（3つの角が鋭角）。
b) これも鋭角三角形です。
c) 鈍角三角形です（1つの角が鈍角）。
d) 直角三角形です（1つの角が直角）。

C

二等辺三角形は2辺の長さが等しい三角形と定義され、2角の大きさが等しいという性質があります。

二等辺三角形の要素の名称は次の通りです。
頂点：2本の等辺が交わる点です。
底辺：頂点に対する辺です。
底角：底辺ともう2本の辺とでできた角です。
底角に対する辺：二等辺三角形の等辺です。

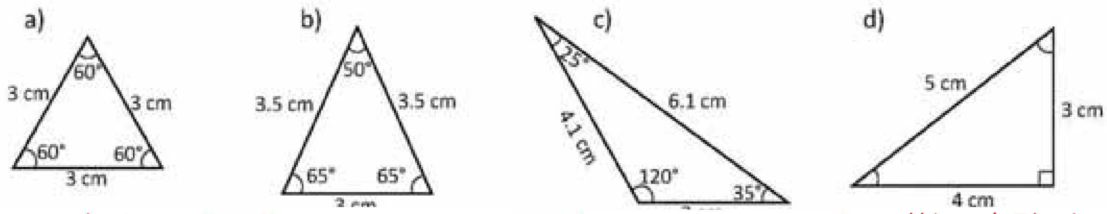


E

紙を使って二等辺三角形を作り、2辺と2角が等しいことを確かめましょう。次の手順で行います。
1. 図1のように、紙を長方形を作るように折ります。
2. できた長方形に対角線をひき、ハサミで切ります（図2）。
3. 中にできた三角形を真ん中で分けます。角と辺が一致することを確かめ、二等辺三角形であることを確認します。

図1　図2　図3

次の三角形を分類しましょう。答えの理由を説明し、二等辺三角形を形成する部分をいいましょう。



a) 正三角形です。　b) 二等辺三角形です。　c) 不等辺三角形です。　d) 不等辺三角形です。

116

達成の目安

1.1 二等辺三角形の性質を学びます。

学習の流れ

基礎教育の高学年では、辺と角の関係に注目しながら、三角形の分類を学習しました。この授業では、二等辺三角形の要素とその性質について学びます。また、長方形の紙を使って、二等辺三角形の作成過程も分析します。

ねらい

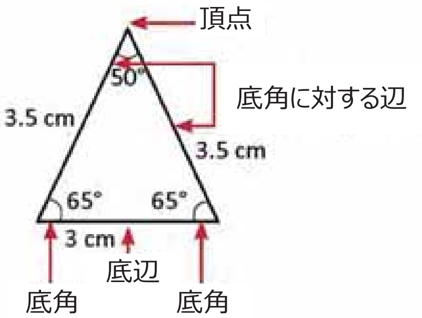
Ⓟ・Ⓢ：三角形の性質を復習し、基礎教育で学んだことを復習します。そうしながら、三角形の特殊なケースである二等辺三角形を形成する要素の名称を導入します。

Ⓒ：数学用語を導入しながら、二等辺三角形の要素と性質を整理します。

Ⓔ：二等辺三角形をつくり、折り目を使いながらその性質について確認します。

一部の設問の解答：

b) 2つの辺の長さが等しいので、**二等辺三角形**です。



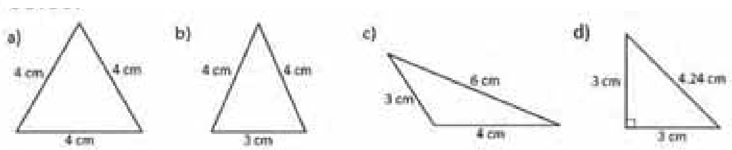
c) 3つの辺の長さがどれも異なるので、**不等辺三角形**です。

d) 3つの辺の長さがどれもことなるので**不等辺三角形**ですが、直角三角形でもあります。

日付：

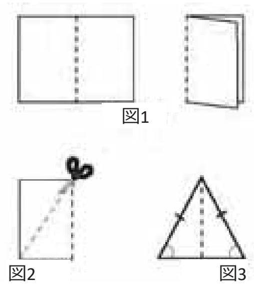
U6 1.1

Ⓟ 辺の長さに注目して、次の三角形を分類しましょう。また、二等辺三角形の性質を答えましょう。



Ⓢ a) 3つの辺の長さが等しいので、**正三角形**です。
b) 2つの辺の長さが等しいので、**二等辺三角形**です。
c) 3つの辺の長さが異なるので、不等辺三角形です。
d) 2つの辺の長さが等しいので、**二等辺三角形**です。

Ⓔ 二等辺三角形をつくります：



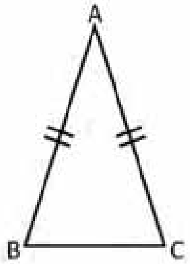
Ⓡ a) 3つの辺の長さが等しいので、正三角形です。

宿題： 練習帳120ページ

1.2 二等辺三角形の定理

P

ΔABCがAB = ACの二等辺三角形であるとき、∢ABC = ∢ACB であることを証明しましょう。



三角形の合同条件を応用して、「二等辺三角形の底角は等しい」（二等辺三角形は2つの辺が等しく、残りの辺を底辺と呼ぶ図形である） という定理を証明することができます。これは、*Pons Asinorum*、通称「ロバの橋」と呼ばれる有名な定理です。J. ピナスコ(2009).幾何学

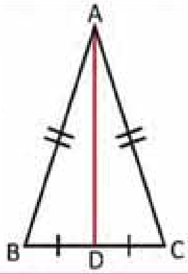
S

BCの中点Dへ、線分ADをひきます。

DB = DC （作図）

よって、ΔABD ≅ ΔACD （ADが共通で、仮定よりAB = AC、3辺の条件が成立）

したがって、∢ABC = ∢ACB （三角形の合同）

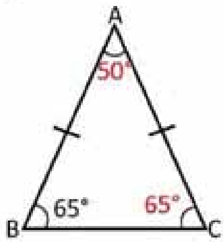


C

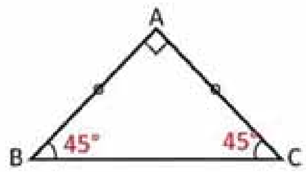
二等辺三角形の底角は等しくなります。

1. 上の定理を使って、それぞれの三角形の残りの角度を求めましょう。

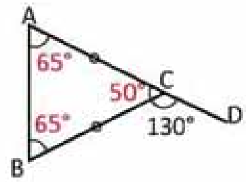
a)



b)



c)



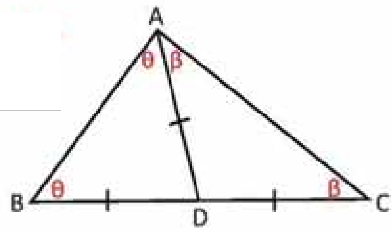
2. 次の図では、BD = CD = AD です。各問について、なぜ等しくなるのか証明しましょう。また、どのように証明したのか書きましょう。

a) ∢DAB = ∢DBA　二等辺三角形の底角だから。

b) ∢DAC = ∢DCA　a) と同じ。

c) ∢DBA + ∢ACB = 90°　2∢θ + 2∢β = 180° であるから、したがって、∢θ + ∢β = 90°

d) ∢CAB = 90°　∢CAB = ∢θ + ∢β = 90° だから。



ユニット6

達成の目安

1.2 三角形の合同を使って、「等辺に対する角は等しい」という二等辺三角形の定理を証明します。

学習の流れ

前回の授業では、二等辺三角形のそれぞれの要素とその性質を学びました。この授業では、有名な定理のひとつを証明します。そのためには、証明と三角形の合同について学習した内容を復習することが重要となります。

ねらい

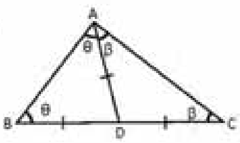
Ⓟ・Ⓢ：定理を証明し、証明の仕方を復習します。そのとき、別のユニットで事前に学習した数学の知識を使って行うことを強調します。

Ⓒ： 問1では、直前で証明した定理を使って残りの角度を求めます。そのとき、三角形の内角の和の定理と補角の定理も同様に用います。

問2では、角と三角形について学んだことを必ず用いながら、提示されたことがらが正しいことを証明します。

一部の設問の解答：

2.



a) 二等辺三角形の底角だから、$\measuredangle DAB = \measuredangle DBA$

b) a) と同じ理由で、$\measuredangle DAC = \measuredangle DCA$

c) $\measuredangle DBA + \measuredangle ACB = 90°$

$2\measuredangle\theta + 2\measuredangle\beta = 180°$ であるから、

$\measuredangle\theta + \measuredangle\beta = 90°$

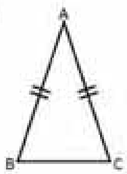
d) $\measuredangle CAB = 90°$.

$\measuredangle CAB = \measuredangle\theta + \measuredangle B = 90°$ だから。

つまずきやすい点：
問2で提示されたことがらを証明するときにつまずくようなら、ペアで作業するよう指示することもできます。万が一解答できる生徒がいない場合は、ヒントを出して答えに導いてあげることも可能です。

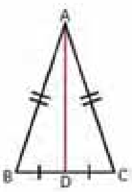
日付： U6 1.2

Ⓟ



ΔABCがAB = ACの二等辺三角形であるとき、$\measuredangle ABC = \measuredangle ACB$ であることを証明しましょう。

Ⓢ BCの中点Dへ、線分ADをひきます。



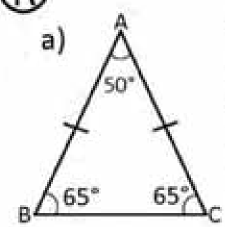
DB = DC（作図）

$\Delta ABD \cong \Delta ACD$（ADが共通、仮定より AB = AC、3辺の条件が成立）

したがって、$\measuredangle ABC = \measuredangle ACB$（三角形の合同）

Ⓡ

a)



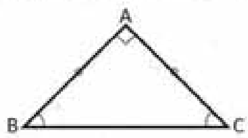
二等辺三角形の底角だから、

$\measuredangle C = \measuredangle B = 65°$

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$であるから、

$\measuredangle A = 50°$

b)



$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180$, $\measuredangle A = 90°$と $\measuredangle B = \measuredangle C$

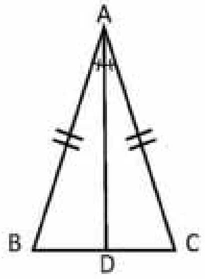
二等辺三角形の底角であるから、$\measuredangle B = \measuredangle C = 45°$

宿題： 練習帳121ページ

1.3 二等辺三角形の二等分線

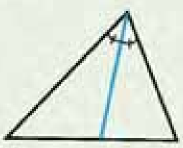
P

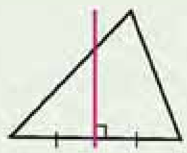
二等辺三角形ABCにおいて、等辺のあいだの角の二等分線は、対する辺の垂直二等分線であることを証明しましょう。



三角形の二等分線とは、3つの角それぞれを等しい角度に分け、対する辺までひく線分のことです。

線分の垂直二等分線は、その線分をちょうど半分に分ける垂直の直線です。





S

図を見ると、ΔABD ≅ ΔACD （2辺1角の条件、AB = AC、ADが共通、仮定より∢BAD = ∢CAD）

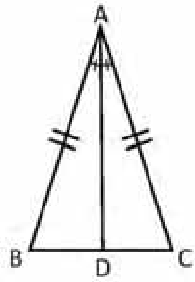
したがって、DB = DC （三角形の合同）

∢ADB = ∢ADC （三角形の合同） . . . (1)

∢ADB + ∢ADC = 180° （補角） . . . . . (2)

よって、2∢ADB = 180° ((1)・(2))

∢ADB = 90° であるから、AD ⊥ BC



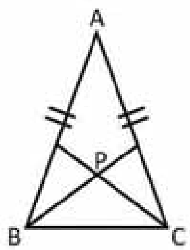
したがって、ADはBCの垂直二等分線である （DB = DC、AD ⊥ BC） 。

C

二等辺三角形では、等辺のあいだの角の二等分線は、対する辺の垂直二等分線になります。

この結論により、等辺のあいだの角の二等分線は、二等辺三角形の高さでもあり、中線でもあることがわかります。

二等辺三角形ΔABCにおいて、底角の二等分線をひき、その交点をPとしたとき、ΔPBC が二等辺三角形であることを証明しましょう。



達成の目安

1.3 二等辺三角形の二等分線が持つ性質を見つけ、応用します。

学習の流れ

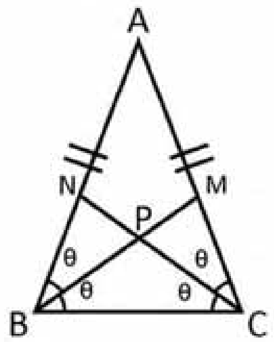
前回の授業では、二等辺三角形の底角に関する定理を証明しました。この授業では、二等辺三角形の底辺の垂直二等分線と頂角の二等分線に関する定理を証明します。

ねらい

Ⓟ・Ⓢ：定理を証明し、二等分線と垂直二等分線の概念を復習します。また、数学の知識を構築していく上で、どれだけ定理が重要かも強調します。

®：合同条件と内角の関係を踏まえて、二等辺三角形の二等分線の性質を証明します。

一部の設問の解答：



AB = AC で、二等辺三角形の底角であるから、
∢B = ∢C

$\theta = \frac{1}{2}\measuredangle B = \frac{1}{2}\measuredangle C$

1辺2角の条件により、ΔBCN ≅ ΔCBM

つまずきやすい点：
生徒は証明をうまく組み立てられないかもしれません。そのときは、ヒントを出して指導し、少しずつ数学的証明を行う能力を養っていけるようにします。

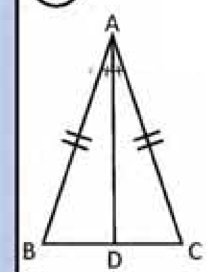
すなわち ∢BNC = ∢CMB であるから、1辺2角の条件により、
ΔBPN ≅ ΔCPM

したがって、BP = CP であるから、ΔPBC は二等辺三角形である。

日付： **U6 1.3**

Ⓟ 二等辺三角形ABCにおいて、等辺のあいだの角の二等分線は、対する辺の垂直二等分線であることを証明しましょう。

Ⓢ



次の図で、ΔABD ≅ ΔACD（2辺1角の条件、AB = AC、ADが共通、仮定より∢BAD = ∢CAD）

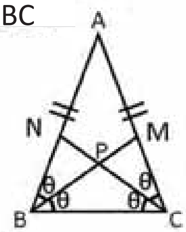
したがって、DB = DC（三角形の合同）

∢ADB = ∢ADC（三角形の合同） ...(1)

∢ADB + ∢ADC = 180°（補角） ...(2)

2∢ADB = 180° ((1)・(2))、
∢ADB = 90° であるから、AD ⊥ BC

Ⓡ



AB = AC であるから、
∢B = ∢C

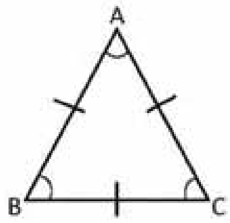
1辺2角の条件により、ΔBCN ≅ ΔCBM
すなわち ∢BNC = ∢CMB であるから、
1辺2角の条件により、ΔBPN ≅ ΔCPM
したがって、BP = CP であるから、ΔPBC は二等辺三角形である。

宿題： 練習帳122ページ

1.4 正三角形

P

正三角形ABCの角度が等しく、それぞれが60°であることを証明しましょう。



正三角形は3辺の長さが等しい図形です。

S

∢ABC = ∢BCA （AB = AC であるため） . . .(1)

∢BCA = ∢CAB （BC = BA であるため） . . .(2)

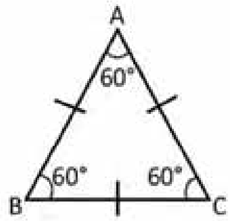
したがって、∢ABC = ∢BCA = ∢CAB ((1)・(2))

角度を x とします。

$3x = 180°$ （三角形の内角の和）

$x = 60°$ （計算の答え）

したがって、正三角形のそれぞれの角度は60°です。

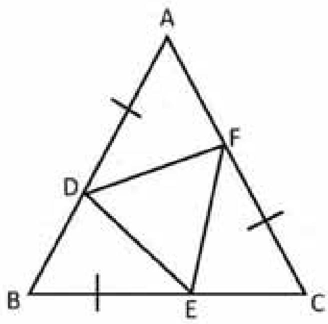


3角の大きさが等しい三角形を**等角三角形**といいます。

C

正三角形の内角はそれぞれ60°です。

ΔABC は正三角形で、BE = CF = AD です。ΔDEF が正三角形であることを証明しましょう。



達成の目安

1.4「正三角形は等角三角形である」という定理を証明します。

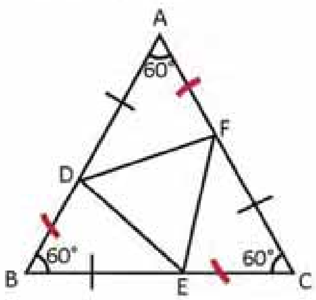
学習の流れ

過去2回の授業では、二等辺三角形の性質について学習しました。この授業では、正三角形の内角がそれぞれ60°であることを証明します。

ねらい

Ⓟ・Ⓢ： 正三角形の内角それぞれの大きさを求めます。

一部の設問の解答：



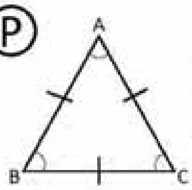
ΔABC は正三角形であるから、
AB = BC = CA

AB = BC = CA は AD + DB = BE + EC = CF + FA と同じである
仮定より、BE = CF = AD であるから、DB = EC = FA

2辺1角の条件により、ΔADF ≅ ΔBED ≅ ΔCFE
よって、DE = EF = FD
したがって、ΔDEF は正三角形である。

日付： **U6 1.4**

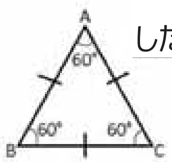
Ⓟ



正三角形ABCの角度が等しく、それぞれが60°であることを証明しましょう。

Ⓢ

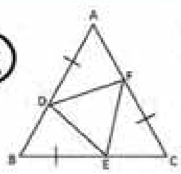
∢ABC = ∢BCA （AB = AC であるため） . . .(1)
∢BCA = ∢CAB （BC = BA であるため） . . .(2)
したがって、∢ABC = ∢BCA = ∢CAB ((1)・(2))



角度を x とします。

$3x = 180°$
したがって、$x = 60°$

Ⓡ



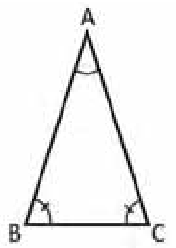
ΔABC は正三角形であるから、
したがって、
AB = BC = CA
AD + DB = BE + EC = CF + FA となり、
仮定より、BE = CF = AD であるから、
DB = EC = FA
2辺1角の条件により、
ΔADF ≅ ΔBED ≅ ΔCFE
よって、DE = EF = FD
したがって、ΔDEF は正三角形である。

宿題： 練習帳123ページ

1.5 二等辺三角形と正三角形の定理

P

三角形の2つの角の大きさが等しいとき、その角に対する辺の長さも等しいことを証明しましょう。

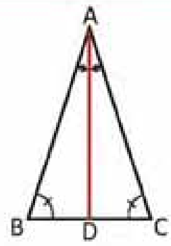


この結果から、２つの角の大きさが等しいとき、その角に対する辺の長さも等しいといえます。

S

∢CAB の二等分線をひくと、次のことがわかります。

∢DBA = ∢DCA （仮定） . . .(1)
∢DAB = ∢DAC （二等分線の作図） . . .(2)
∢BDA = 180° – (∢DBA + ∢DAB) （三角形の内角の和の定理）
= 180° – (∢DCA + ∢DAC) (1・2)
= ∢CDA



つまり、ΔABD ≅ ΔACD （1辺2角の条件、ADが共通、∢BDA = ∢CDA、∢DAB = ∢DAC） 。

したがって、AB = CD （三角形の合同条件）

C

三角形の2つの角の大きさが等しいとき、対する辺の長さも等しくなります。

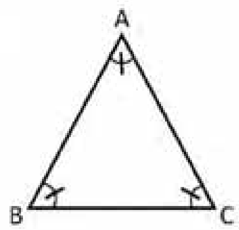
E

三角形のすべての角度が等しいとき、正三角形であることを証明しましょう。

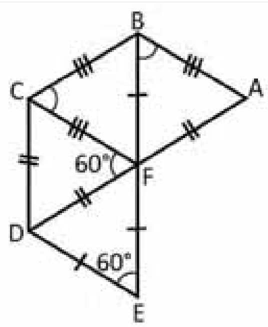
AB = AC （証明済みの結論より、∢BCA = ∢ABC） . . .(1)

CA = BC （証明済みの結論より、∢ABC = ∢CAB） . . .(2)

したがって、AB = BC = CA であるから、正三角形である ((1)・(2))。



次の図形を見て、ΔFAB、ΔFBC、ΔFCD、ΔFDE が正三角形であることを証明しましょう。



達成の目安

1.5 二等辺三角形・正三角形の等しい角とそれぞれに対する辺に関する定理を証明します。

学習の流れ

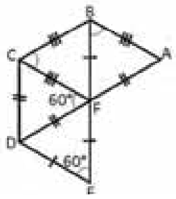
授業1.2では、三角形の2辺が等しいとき、対する角も等しいという二等辺三角形の定理を証明しました。この授業では、角と辺に関する二等辺三角形・正三角形の別の定理を証明します。

ねらい

Ⓟ・Ⓢ：三角形と角の合同について学んだことを踏まえて、二等辺三角形と正三角の定理を証明します。証明する過程では、ひとつの手助けとして補助線をひくことを強調することが重要です。

Ⓡ：出した答えを踏まえて、三角形の3角が等しいとき、その3辺も等しいと証明し、三角形が正三角形であるという結論を導き出します。

一部の設問の解答：



つづき

他2つの三角形については次のようになります。

∢EFD + ∢DFC + ∢CFB = 180° であるから、
∢CFB = 60° となり、仮定より、
CF = CB であるから、∢CFB = ∢FBC = 60°
したがって、ΔCFB は3角の大きさが等しいので、正三角形である...(3)

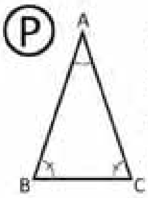
AB = FC、AF = FD。両辺とも正三角形ΔDFCの辺なので、対頂角は∢AFB = ∢EFD = 60°

∢FBA = ∢AFB = 60° だから
∢BAF = 60° となり、3角の大きさが等しいので、ΔFAB も正三角形である...(4)

つまずきやすい点：
生徒がうまく証明を組み立てられない場合は、ペアを作り作業をさせます。それでも難しいようなら、ヒントを与えて、証明プロセスを指導しましょう。

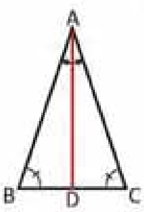
日付： **U6 1.5**

Ⓟ



三角形の2つの角の大きさが等しいとき、その角に対する辺の長さも等しいことを証明しましょう。

Ⓢ ∢CAB の二等分線をひくと、次のことがわかります。

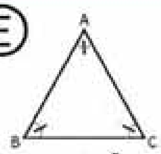


∢DBA = ∢DCA （仮定） . . .(1)
∢DAB = ∢DAC （二等分線の作図） . . .(2)

∢BDA = 180° – (∢DBA + ∢DAB)
= 180° – (∢DCA + ∢DAC)
= ∢CDA

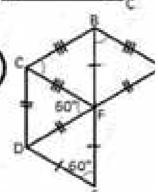
ΔABD ≅ ΔACDしたがって、AB = CD。

Ⓔ



AB = AC (∢BCA = ∢ABC)
CA = BC (∢ABC = ∢CAB)
したがって、AB = BC = CA で、正三角形である。

Ⓡ



ED = EF であるから、
∢EDF = ∢EFD = 60°
したがって、ΔFDE は3角の大きさが等しいので、正三角形である...(1)

DC = DF であるから、
∢DFC = ∢FCD = 60°となり、内角の定理より、
∢CDF = 60°、3角の大きさが等しいので、ΔFCD は正三角形である...(2)
備考：同じように、他2つの三角形についても証明しましょう。
宿題：練習帳124ページ

1.6 相反定理と反例

P

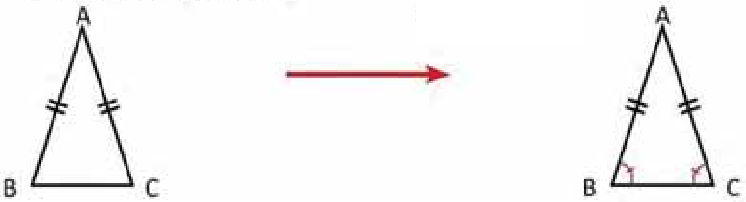
次の定理を比較し、その違いを答えましょう。

- 二等辺三角形ならば、2角の大きさが等しい。
- 2角の大きさが等しければ、二等辺三角形である。

S

1つ目の定理「二等辺三角形ならば、2角の大きさが等しい」を分析します。

真の条件 （仮定） ：二等辺三角形である（2辺の長さが等しい）。 → 証明する条件 （結論） ：三角形の2つの角の大きさが等しい。授業2で証明済み。



2つ目の定理「2角の大きさが等しいとき、二等辺三角形である」を分析します。

真の条件 （仮定） ：三角形の2つの角の大きさが等しい。 → 証明する条件 （結論） ：二等辺三角形である（2辺の長さが等しい）。授業5で証明済み。

1つ目の定理の仮定を2つ目では証明しなければならなく、また2つ目の定理の仮定を1つ目で証明しなければならないので、2つの定理は異なります。

C

ある定理の仮定と結論が別の定理で入れかわっているとき、それを**逆の定理**といいます。ある定理の逆は成立しない場合もあり、その場合は成立しないことを証明する例を挙げなければなりません。これを**反例**といいます。

E

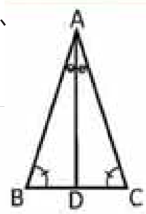
次の文章の逆を書きましょう。成立しない場合は、反例を示して正当化しましょう。「正三角形はすべて、二等辺三角形である」

逆：「二等辺三角形はすべて、正三角形である」成立しません。反例を見てみましょう。

反例：辺がそれぞれ5cm、5cm、6cmの三角形は二等辺三角形ですが、正三角形ではありません。

1.逆をいいましょう。「三角形の3角が等しいとき、それは二等辺三角形である」の逆を書き、成立するかいいましょう。成立しない場合は、反例を挙げましょう。

2. 逆をいいましょう。「三角形ABCにおいて、AB = AC でADが∢CABの二等分線のとき、AD はBCの垂直二等分線である」の逆を書き、成立するかいいましょう。成立しない場合は、反例を挙げましょう。



ユニット6

121

達成の目安

1.6 定理の逆と反例を学習します。

学習の流れ

1.2と1.5の授業では、二等辺三角形の定理を証明しました。この授業では、その定理を分析し、**逆**と**反例**の概念を導入します。それぞれの定理の条件にしっかり焦点を当て、生徒がその条件に慣れ、今後の証明を楽に解けるようにすることが大切です。

ねらい

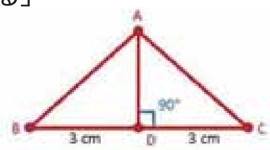
Ⓟ・Ⓢ：すでに証明された2つの定理を、仮定と結論を分析しながら比較し、その分析をもとに定理の逆と反例を定義づけます。

Ⓒ：逆が成立しない定理を説明します。そのとき、その虚偽を反例を使い正当化します。

Ⓔ：定理の逆・反例を見つける手順を学習します。定理を真であると認めるには、証明しなければならないことを強調することが重要です。

一部の設問の解答：

2.
逆：「三角形ABCにおいて、ADがBCの垂直二等分線であるとき、AB = ACであり、ADは∢CABの二等分線である」



垂直二等分線BCをひくと、次のことがわかります。BD = DC （作図）
∢BDA = ∢CDA = 90° （垂直二等分線）

ΔABD ≅ ΔACD （2辺1角の条件、ADが共通）合同の定義により、
AB = AC であり、∢BAD = ∢CAD
したがって、ADは∢BACの二等分線である。

つまずきやすい点：
逆や反例を書くとき。その場合は、ペアを作って作業させ、ヒントとして仮定と結論を見つけるよう言います。

日付： **U6 1.6**

Ⓟ 次の定理を比較し、その違いを答えましょう。
- 二等辺三角形ならば、2角の大きさが等しい。
- 2角の大きさが等しければ、二等辺三角形である。

Ⓢ 1つ目の定理を分析します。

真の条件	証明する条件
三角形は二等辺三角形である。	三角形は2角の大きさが等しい。授業2で証明済み。

2つ目の定理を分析します。

真の条件	証明する条件
三角形の2つの角の大きさは等しい。	三角形は二等辺三角形である。授業5で証明済み。

Ⓔ 逆を書きましょう。または反例を書いて正当化しましょう。
「正三角形はすべて、二等辺三角形である」
逆：
「二等辺三角形はすべて、正三角形である」成立しません。反例を見てみます。
反例：
辺がそれぞれ5cm、5cm、6cmの三角形は二等辺三角形ですが、正三角形ではありません。

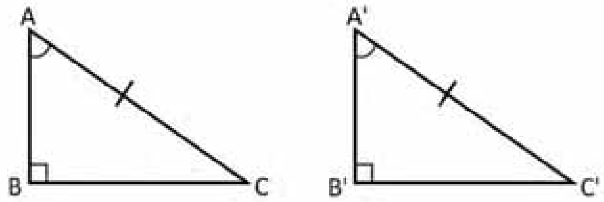
Ⓡ 1. **逆：**
「二等辺三角形ならば、3角の大きさが等しい」成立しません。
反例：
辺がそれぞれ3cm、3cm、4cmの三角形は二等辺三角形ですが、3角は等しくありません。

宿題： 練習帳125ページ

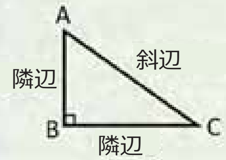
1.7 直角三角形の合同条件 (1)

P

直角三角形ΔABC と ΔA'B'C' において、∢CAB = ∢C'A'B'、∢ABC = ∢A'B'C' = 90°、AC = A'C' であるとき、ΔABC ≅ ΔA'B'C'となることを証明しましょう。



直角三角形の辺は次のように呼ばれることを復習しよう。

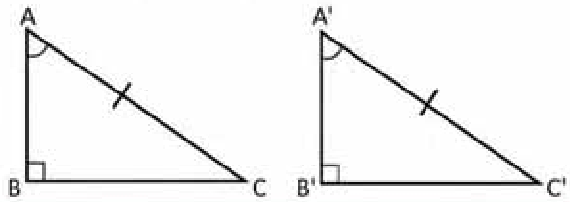


S

2つの三角形は直角三角形なので、それぞれ3つの角は等しくなります。

さらに、∢CAB = ∢ C'A'B'

したがって、ΔABC ≅ ΔA'B'C' （1辺2角の条件）

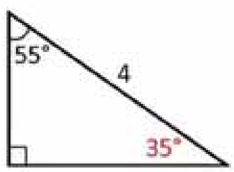


C

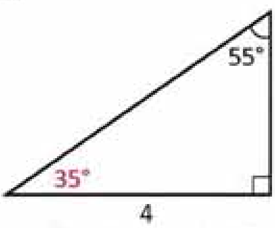
直角三角形において、斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいとき、合同となります。

次の直角三角形のうち、合同であるものを見つけましょう。自分の答えを証明しましょう。

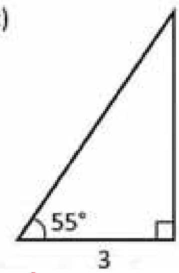
a)



b)



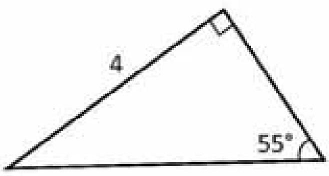
c)



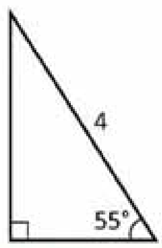
斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいので、三角形 a) と e) は合同です。

1辺2角の条件により、三角形 c) と f) は合同です。

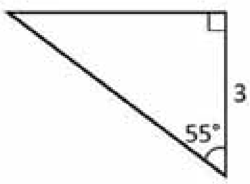
d)



e)



f)



三角形の内角の定理を使って角度の値を求めると、1辺2角の条件により、三角形 b) と d) が合同であることがわかります。

達成の目安

1.7 直角三角形の辺と角にある関係性を見つけます。

学習の流れ

ユニット5では、三角形の合同条件を学習しました。この授業では、事前知識をもとに、直角三角形の合同を学びます。

授業では斜辺と1つの鋭角が等しいときの合同条件について学習しますが、練習問題では隣辺と1つの鋭角が等しい場合についても扱います。これも事前知識で解ける問題です。

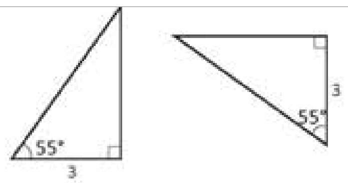
ねらい

Ⓟ・Ⓢ：すでに学習した三角形の合同を踏まえ、1つ目の直角三角形の合同条件を証明します。

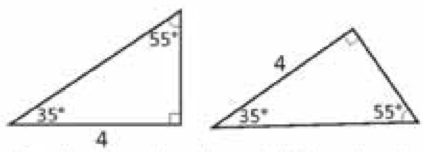
Ⓡ：与えられた内容の中から合同な三角形を見つける問題のほかに、ユニット5で学習した知識を使わなければならない問題もあります。練習問題を解き終わったら、隣辺と1つの鋭角が等しい場合も三角形は合同であることを強調しましょう。

一部の設問の解答：

斜辺と1つの鋭角が等しいから、a) と e)。この授業で学習したことを直接用いて解きます。



隣辺と2つの角が等しいので、1辺2角の条件により、三角形 c) と f) は合同です。この場合、直角と与えられた鋭角に注目します。



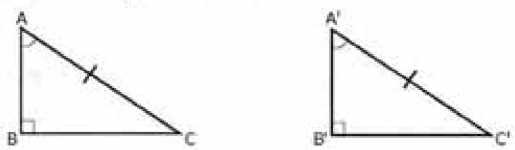
三角形の内角の定理を使って角度の値を求めると、1辺2角の条件により、三角形 b) と d) が合同であることがわかります。

日付： **U6 1.7**

Ⓟ 三角形ΔABC と ΔA'B'C' において、次を証明しましょう。

∢CAB = ∢C′A′B′、∢ABC = ∢A′B′C′ = 90°、AC = A′C′；したがって、ΔABC ≅ ΔA′B′C′.

Ⓢ



∢CAB = ∢C′A′B′、また直角三角形なので、3つの角はそれぞれ等しくなります。

したがって、ΔABC ≅ ΔA'B'C' （AC = A′C′ であるから、1辺2角の条件）

Ⓡ 斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいので、三角形 a) と e) は合同です。

隣辺と2つの角が等しいので、1辺2角の条件により、三角形 c) y f) は合同です。

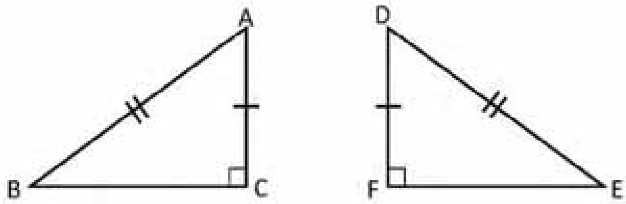
三角形の内角の定理を使って角度の値を求めると、1辺2角の条件により、三角形 b) と d) が合同であることがわかります。

宿題： 練習帳126ページ

1.8 直角三角形の合同条件 (2)

P

AC = DF、AB = DE、∢ACB = ∢DFE = 90°のとき、ΔABC ≅ ΔDEF であることを証明しましょう。



S

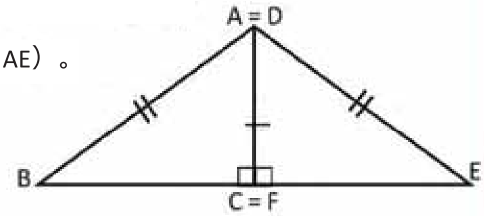
AC と DFを一致させます。

頂点B、C、E は、一列に並んでいます （∢BCE = ∢BCA + ∢EFA = 90° + 90° = 180°）。

よって、ΔABE は二等辺三角形です （B、C、Eが並び、AB = AE）。

∢ABE = ∢AEB （ΔABE は二等辺三角形）。

したがって、ΔABC ≅ ΔDEF （隣辺と斜辺が等しい）。



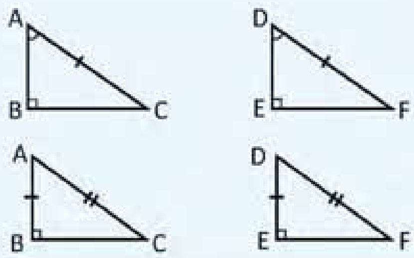
C

直角三角形の合同条件

2つの直角三角形は、次の各場合に合同です。

1. 斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しい。

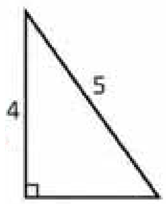
2. 斜辺と1つの隣辺がそれぞれ等しい。



1. 次の直角三角形を、合同なグループに分けましょう。自分の答えを証明しましょう。

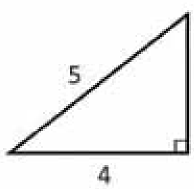
2辺1角の条件を考慮すると、2つの隣辺の長さが等しいときも、三角形は合同であることがわかります。

a)

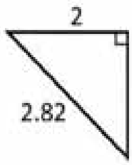


a) と b)： 直角三角形の合同条件2により、合同です。

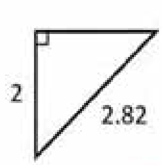
b)



c)



d)

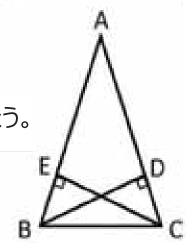


c) と d)： 直角三角形の合同条件2により、合同です。

2. 次の図で、AB = AC、BD ⊥ AC、CE ⊥ AB のとき、以下を証明しましょう。

a) ΔBCD ≅ ΔCBE

b) AE = AD



ユニット6

達成の目安

1.8 2つの直角三角形が合同であるためには、それぞれの辺はどのような関係にあるべきか学習します。

学習の流れ

前回の授業では、斜辺と1つの鋭角に関する直角三角形の1つ目の合同条件を学習しました。この授業では、斜辺と隣辺に関するもう一つの合同条件について学びます。

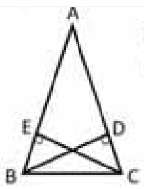
ねらい

Ⓟ・Ⓢ：1つの隣辺と斜辺がそれぞれ等しいとき、2つの直角三角形は合同であることを証明します。このとき、ユニット5で学習した合同条件を使います。

Ⓡ：問1では、すでに学習した合同条件を使って、与えられた三角形が合同であるかどうかを見分けます。問2では、合同条件を使って、2つの三角形が合同であることを証明します。

一部の設問の解答：

2. 次の図で、AB = AC、BD ⊥ AC、CE ⊥ ABのとき、
   以下を証明しましょう。



a) ΔBCD ≅ ΔCBE
b) AE = AD

a) ∢CBA = ∢BCA （AB = AC であるから）。
   よって、∢CBE = ∢BCD
   BC = CB （共通）
   したがって、斜辺と1つの鋭角が等しいので、直角三角形の1つ目の合同条件により、
   ΔBCE ≅ ΔCBD

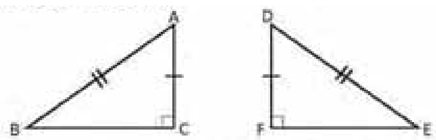
b) AB = AE + EB、AC = AD + DC
   仮定より、AB = AC なので、AE + EB = AD + DC
しかし a) で証明された三角形の合同により、EB = DC であるから、
   AE = AD

つまずきやすい点：

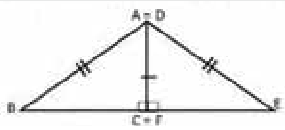
生徒がうまく証明できない場合は、ペアを作らせます。そのときは必ず、問題を解ける生徒がつまずいている生徒をサポートできるような組み合わせにしましょう。ヒントとして、直角三角形の合同条件を使うよう提案してみてもよいでしょう。

日付： **U6 1.8**

Ⓟ AC = DF、AB = DE、∢ACB = ∢DFE = 90°のとき、ΔABC ≅ ΔDEF であることを証明しましょう。



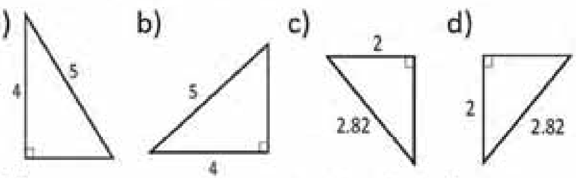
Ⓢ AC と DFを一致させます。



頂点B、C、Eが一列に並んでいます。
（∢BCE = ∢BCA + ∢EFA = 90° + 90° = 180°）
したがって、ΔACDは二等辺三角形です。
（B、C、Eが並び、AB = AE）

∢ABE = ∢AEB （ΔABE は二等辺三角形）
したがって、ΔABC ≅ ΔDEF （隣辺と斜辺が等しい）

Ⓡ 1.



a) と b)： 直角三角形の合同条件2により、合同です。
   隣辺と斜辺が等しいです。
c) と d)： 直角三角形の合同条件2により、合同です。
   隣辺と斜辺が等しいです。

宿題： 練習帳127ページ

1.9 必要条件と十分条件

P

三角形ABCに関する2つの条件AとBについて考えましょう。

A：ABCは正三角形です。　　　　B：ABC は二等辺三角形です。

a) ΔABCで条件Aが成立するとき、条件Bも成立しますか。

b) ΔABCで条件Bが成立するとき、条件Aも成立しますか。

c) ΔABCで条件Bが成立しないとき、条件Aは成立しますか。

S

a) 正三角形は3つの辺が等しく、二等辺三角形は2辺だけが等しいです。条件Aが成立すると条件Bも成立するので、三角形ABCで条件Aが成立するとき、条件Bも成立します。

b) 二等辺三角形は、3つ目の辺（底辺）の長さが他2辺の長さと同じ場合と違う場合があります。つまり正三角形であるためには、二等辺三角形であるだけでは十分でなく、したがって必ずしも成立しません。

c) 二等辺三角形は2つの辺が等しく、正三角形は3つの辺が等しくなければならないので、二等辺三角形でない場合、正三角形でもありません。

C

命題「AならばB」が成立するとき、「AはBの十分条件である」といい、「BはAの必要条件である」といいます。

一方が偽ならばもう一方も偽となる場合、その条件は必要条件です。

次の各問において、AがBの必要条件ならばNを、AがBの十分条件であるならばSを書きましょう。

a) 三角形DEFにおいて：　A：DEFは二等辺三角形です。　B：DEFは正三角形です。
N：AはBの必要条件です。

b) 三角形DEFにおいて：　A：DEFは直角三角形です。　B：DEFは二等辺三角形です。
AはBの必要条件でもなく、十分条件でもありません。

c) 三角形DEFにおいて：　A：DEFは3つの角が等しいです。　B：DEFは二等辺三角形です。
S：AはBの十分条件です。

d) 四角形DEFGにおいて：　A：DEFGは正方形です。　B：DEFGは長方形です。
S：AはBの十分条件です。

達成の目安

1.9 必要条件と十分条件の意味を学習します。

学習の流れ

これまで、複数の三角形のあいだにある関係性を定める定理や命題を学習し、そこから二等辺三角形や正三角形などの性質をみてきました。この授業では、ひとつの命題をつくる条件の論理的関係性について分析します。

ねらい

Ⓟ・Ⓢ：与えられた2つの命題のあいだにある論理的関係性について分析します。今回は、二等辺三角形と正三角形に関する条件を扱います。それぞれの性質についてはすでに前回までの授業で学習しました。

Ⓡ：各問とも、授業で学んだ内容を踏まえて、与えられた条件にある論理的関係性を見つけます。

日付： **U6 1.9**

Ⓟ 三角形ABCに関する2つの条件AとBについて考えましょう。

A：ABCは正三角形です。

B：ABC は二等辺三角形です。

a) ΔABCで条件Aが成立するとき、条件Bも成立しますか。

b) ΔABCで条件Bが成立するとき、条件Aも成立しますか。

c) ΔABCで条件Bが成立しないとき、条件Aは成立しますか。

Ⓢ a) 正三角形は二等辺三角形でもあるので、ΔABCで条件Aが成立するとき、条件Bも成立します。

b) 正三角形であるためには、二等辺三角形であるだけでは十分でないので、必ずしも成立しません。

c) 二等辺三角形は2つの辺が等しく、正三角形は3つの辺が等しくなければならないので、二等辺三角形でない場合、正三角形でもありません。

Ⓡ 三角形DEFにおいて：

a) AはBの必要条件です。

b) AはBの必要条件でもなく、十分条件でもありません。

c) AはBの十分条件です。

d) AはBの十分条件です。

宿題： 練習帳128ページ

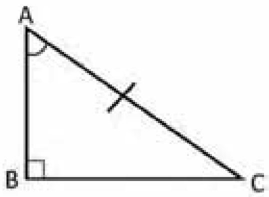
1.10 必要条件と十分条件の使い方

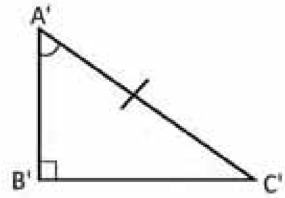
P

AはBの必要条件か十分条件かを答えましょう。次の三角形ABC と A'B'C' を見てください。

A: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C' = 90^\circ$, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$, $AC = A'C'$.

B: $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.





S

前回の授業で学習した合同条件により、条件A （$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C' = 90^\circ$、$\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$、$AC = A'C'$）は条件Bが成立するための十分条件です。

2つの直角三角形が合同であるためには、辺と角がそれぞれ等しくなければならないという合同定義により、条件A （$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C' = 90^\circ$、$\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$、$AC = A'C'$） は条件Bの必要条件です。

したがって、条件A （$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C' = 90^\circ$、$\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$、$AC = A'C'$） はBの必要十分条件です（$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$）。

C

AがBの必要条件でもあり十分条件でもある場合、AはBの**必要十分条件**であるといいます。

AがBの必要十分条件であるとき、命題「AならばB」と逆「BならばA」が成立するということに注目しましょう。

例について考えます。命題「AならばB」は、2つの直角三角形で $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C' = 90^\circ$、$\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$、$AC = A'C'$ が成立するとき、合同であるということを指しており、逆「BならばA」は、2つの三角形が合同のとき、辺と角はそれぞれ等しいということを表しています。

ユニット6

1. 三角形に関する次の条件で、AがBの必要十分条件であるかどうかを答えましょう。

a) A：二等辺三角形	B：2つの角の大きさが等しい	AはBの必要十分条件です。
b) A：正三角形	B：3つの角の大きさが等しい	AはBの必要十分条件です。
c) A：二等辺三角形	B：正三角形	AはBの必要条件です。
d) A：直角三角形	B：正三角形	AはBの必要条件でもなく、十分条件でもありません。

2. 必要十分条件が成立する文章をつくりましょう。

この問いでは、生徒が作った文章を各教師が分析し、AがBの必要十分条件になっているかどうかを確かめます。

達成の目安

1.10 必要十分条件かどうかを文章で説明しましょう。

学習の流れ

前回の授業では、2つの条件のあいだにある関係性を分析し、AがBの必要条件か十分条件かを答えました。この授業では、ある条件がもうひとつの条件の必要十分条件であるかどうかを分析します。すでに証明済みの直角三角形についての命題を使って分析を行います。

図を用いた場合は、与えられた三角形が直角三角形であるとBに明記されていないこともあります。ですから、どの三角形でも成立するのだと生徒が間違った認識を持たないよう強調することが大切です。

ねらい

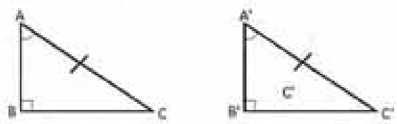
Ⓟ・Ⓢ：与えられた2つの条件を分析し、一方がもう一方の必要十分条件かどうかを答えます。必要十分条件を定義づけることが目的となります。

®：問1では、各条件を分析し、AがBの必要十分条件であると答えます。一方問2では、各生徒もしくはペアが文章を書き、必要十分な関係にある例を挙げます。

日付： **U6 1.10**

Ⓟ AはBの必要条件か十分条件かを答えましょう。次の三角形ABC と A'B'C' を見てください。

A: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C' = 90°$, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$, $AC = A'C'$
B: $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$



Ⓢ 条件A （$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C' = 90°$、$\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$、$AC = A'C'$） は、前回の授業で学習した合同条件により、Bの十分条件であることがわかります。
条件A （$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C' = 90°$、$\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$、$AC = A'C'$） はBの必要条件です。

2つの直角三角形が合同であるための合同定義により、辺と角がそれぞれ等しくなければならないからです。
したがって、A （$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C' = 90°$、$\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$、$AC = A'C'$） は B （$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$） の必要十分条件です。

Ⓡ 次の三角形において：
a) AはBの必要十分条件です。
b) AはBの必要十分条件です。
c) AはBの必要条件です。
d) AはBの必要条件でもなく、十分条件でもありません。

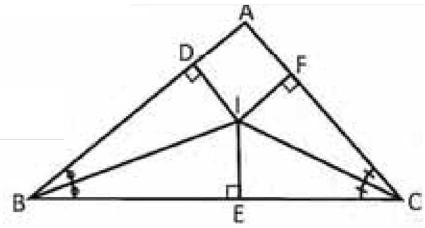
宿題： 練習帳129ページ

1.11 三角形の二等分線の性質

P

次の図で、BI と CI は三角形ABCの二等分線で、$ID \perp AB$、$IE \perp BC$、$IF \perp CA$ です。次のことがらを証明しましょう。

a) ID = IE = IF
b) 線分AIも三角形の二等分線である。



S

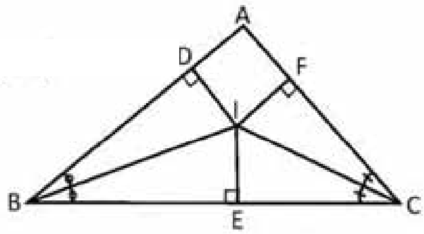
a) $\Delta EIB \cong \Delta DIB$ （直角三角形の合同条件1）

よって、ID = IE （合同） . . .(1)

$\Delta CIE \cong \Delta CIF$ （直角三角形の合同条件1）

よって、IE = IF （合同） . . .(2)

したがって、ID = IE = IF　　((1)・(2))

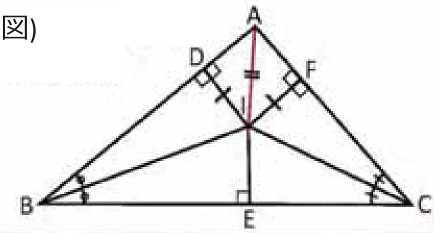


b) で ∢IAF = ∢IAD を証明するためには ΔFIA ≅ ΔDIA を証明する必要があります。

b) ΔFIA と ΔDIA では、ID = IF で、IA は共通 （**a**での証明・作図）
ΔFIA ≅ ΔDIA （直角三角形の合同条件2）

よって、∢IAF = ∢IAD

したがって、AIは ΔABC の二等分線です。



C

三角形の2つの二等分線が交差する点 "I" を、内心といいます。内心から三角形の辺までの距離は常に等しくなります （距離とは、点 "I" からそれぞれの辺に直角にひいた線分の長さをいいます） 。また、3つ目の二等分線も点 "I" を通ります。つまり、3つの二等分線が内心で交差することになります。

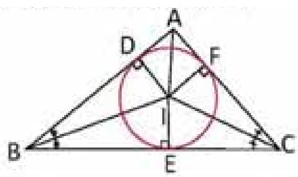
紙でつくった三角形を使って、3つの二等分線が同じ点 （**内心**） で交差していることを確かめましょう。

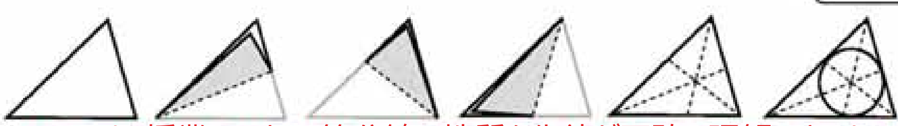
a) 三角形のそれぞれの角を半分に折ります。

b) 3つの二等分線が交差する点にしるしをつけます。

c) 内接円をかきます。

内心が3つの辺から等しい距離にあるとき、その距離と同じ長さを半径とする円をかくことができることに注目します。その円を**内接円**といいます。





126 ここでは、授業でみた二等分線の性質を生徒が正確に理解できるということのみに重点を置いて指導しましょう。

達成の目安

1.11 内心から三角形の辺までの距離は常に等しいことを証明します。

学習の流れ

7学年のユニット8の授業2.11では、二等分線をひき三角形の内心を定義づけしました。この授業では、三角形の二等分線の性質について分析しますが、7学年のときと違い、三角形の合同を用いて証明します。

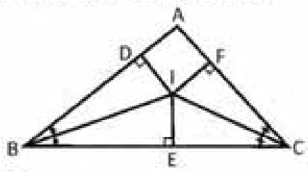
ねらい

Ⓟ・Ⓢ：二等分線を使って形成された三角形が合同であることを証明し、交点から辺までの距離が常に等しいことを確かめます。

Ⓡ：紙の形状を観察し、二等分線の交点の性質について明らかにします。

日付： **U6 1.11**

Ⓟ 次の図で、BI と CI は三角形ABCの二等分線で、ID ⊥ AB、IE ⊥ BC、IF ⊥ CA です。次のことがらを証明しましょう。



a) ID = IE = IF
b) 線分AIも三角形の二等分線である。

Ⓢ a) ΔEIB ≅ ΔDIB （直角三角形の合同条件1）

よって、ID = IE （合同） . . .(1)

ΔCIE ≅ ΔCIF （直角三角形の合同条件1）
よって、IE = IF （合同の定義） ...(2)

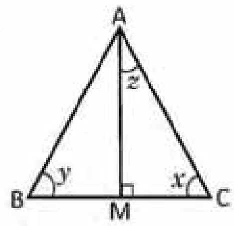
したがって、ID = IE = IF ((1)・(2))
b) ΔFIA と ΔDIA では、ID = IF で、IA は共通（aでの証明・作図）
ΔFIA ≅ ΔDIA （直角三角形の合同条件2）
よって、∢IAF = ∢IAD

したがって、AIは ΔABC の二等分線です。
備考：教科書の図を参照しましょう

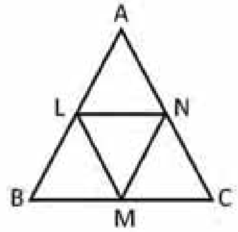
宿題： 練習帳130ページ

1.12 復習問題

1. 正三角形ABCで AM ⊥ BC のとき、次の問いに答えましょう。

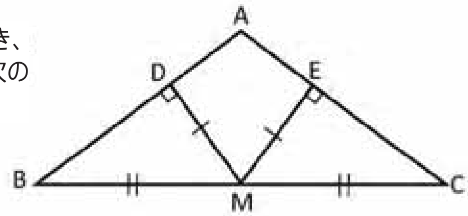


a) 線分AMをなんといいますか。 高さ
b) x、y、zの角の大きさを求めましょう。



2. 次の図で、L、M、Nは三角形ABCの辺の中点です。ΔLMN が正三角形であることを証明しましょう。

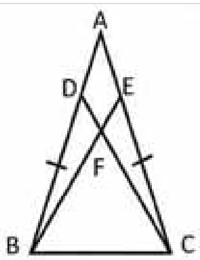
3. ΔABCで、辺BCの中点MからABとACに直角に交わる線をひき、交わった点をそれぞれDとEとします。MD ＝ ME であるとき、次のことがらを証明しましょう。
   a) ΔBDM ≅ ΔCEM
   b) ΔADM ≅ ΔAEM
   c) ΔABC は二等辺三角形です。
   d) 線分DEをひくと、DE // BC です。



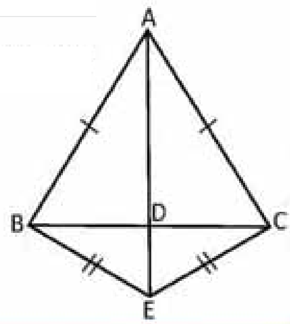
4. 三角形に関する次の条件で、AはBの必要条件、十分条件、必要十分条件のどれに当てはまるか答えましょう。
   a) A：2つの三角形は合同である。
      B：2つの三角形において、対するそれぞれの内角は等しい。
      AはBの十分条件です。
   b) 2つの直角三角形において、
      A：斜辺と1つの鋭角はそれぞれ等しい。AはBの必要条件です。
      B：2つの三角形において、対するそれぞれの内角は等しい。

1.13 復習問題

1. 三角形に関する次の条件で、AはBの必要十分条件か答えましょう。
   a) A：正三角形である； B：角頂点の中線と高さは一致する。AはBの必要十分条件です。
   b) A：角頂点の中線と二等分線は一致する。
      B：角頂点の中線と垂直二等分線は一致する。AはBの必要十分条件です。



2. 二等辺三角形ΔABCの等辺ABとACにDとEの2点を置きます。BD = CE のとき、以下を証明しましょう。
   a) BE = CD
   b) BEとCDが点Fで交差するとき、BF = CF である。



3. 二等辺三角形 ΔABC と ΔEBC において、AE ⊥ BC であることを証明しましょう。
   ヒント： 線分BCの垂直二等分線に注目しましょう。

4. 必要十分条件が成立する文章をつくりましょう。

ユニット6

127

達成の目安

1.13 二等辺三角形・正三角形・直角三角形の性質を踏まえて問題を解きます。

一部の設問の解答：

授業 1.12

1. b) $\sphericalangle x = \sphericalangle y = 60°$ （ΔABC は正三角形）

$\sphericalangle x + \sphericalangle z + 90° = 180°$

$60° + \sphericalangle z + 90° = 180°$ であるから、$\sphericalangle z = 30°$

答えを踏まえると、線分AMは高さであるとともに、二等分線であり、中線でもあり、また垂直二等分線でもあると結論づけられます。

2. ΔABC は正三角形なので、AB = AC = BC
BM = CM、BL = CN（中点の定義）
∢MBL = ∢MCN （正三角形の内角）よって、2辺1角の条件により、ΔMBL ≅ ΔMCN
したがって、ML = MN （合同の定義） ...(1)

AL = LB、AN = BM （中点の定義）
∢NAL = ∢LBM （正三角形の内角）よって、2辺1角の条件により、ΔMBL ≅ ΔLAN
したがって、ML = LN（合同の定義） ...(2)
ML = MN = LN であり、(1)・(2) を踏まえると、ΔLMN は正三角形である。

授業 1.13

2.
a) 仮定より、BD = CE
共通なので、BC = CB
∢CBA = ∢BCA （等辺に対する）
よって、2辺1角の条件により、ΔBCD ≅ ΔCBE
合同の定義により、BE = CD
b) BD = CE、∢BDC = ∢BEC
∢CBD = ∢BCE、∢BCD = ∢CBE （三角形BCDとCBEが合同）
∢CBD = ∢CBE + ∢EBD
∢BCE = ∢BCD + ∢DCE
∢CBD = ∢BCE であるから、
∢CBE + ∢EBD = ∢BCD + ∢DCE
∢CBE = ∢BCD であるから、
∢EBD = ∢DCE となり、1辺2角の条件により、ΔBFD ≅ ΔCFE
したがって、三角形の合同の定義により、BF = CF

宿題： 練習帳131・132ページ

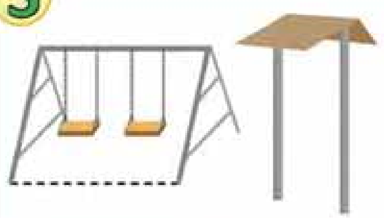
レッスン 2 平行四辺形

2.1 平行四辺形

P

a) 次の図から、平行四辺形と呼ばれる平面図形を選んでください。また、それらの図形がなぜ平行四辺形と呼ばれるか、その理由を答えてください。
b) 次に、あなたの周りにある平行四辺形の例を三つあげてください。

S



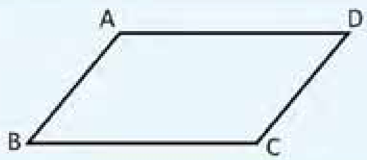
a) ブランコの支柱は四角形です。滑り台の屋根もまた同様に、2組の平行な対辺を有するため、平行四辺形になります。

b) 例1。黒板は平行四辺形です。例2。窓ガラス。
例3教員の机またはいくつかの机。

C

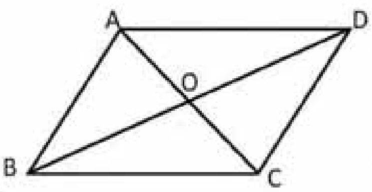
二組の平行な対辺を有する四角形を**平行四辺形**と言います。

長方形や正方形も同様に平行四辺形の条件を満たしていることを復習しよう。



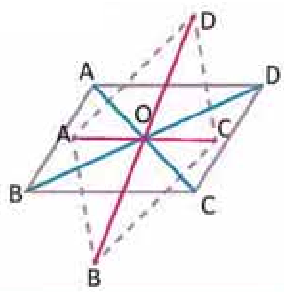
E

以下に示された平行四辺形ABCDには、対角線の交点が点Oで表されています。どの対の線分と角が等しいかを答えてください。

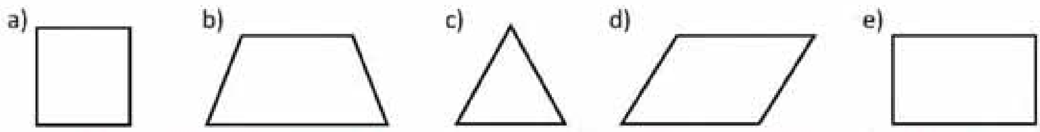


a) AB = DC, AD = BC
b) ∢ABC = ∢CDA, ∢BAD = ∢DCB
c) OA = OC, OB = OD
d) ∢AOB = ∢COD, ∢AOD = ∢COB
e) ∢ABO = ∢CDO, ∢BAO = ∢DCO
f) ∢ADO = ∢CBO, ∢DAO = ∢BCO

点Oを中心点にしてどの角を回転させても、平行四辺形を保ちます。



次の図形の中から平行四辺形を選んでください。それぞれについて証明してください。



a)、d) および e)は平行四辺形です。　b) および c)は平行四辺形ではありません。

達成の目安

2.1 四角形が、平行四辺形になるための条件を示してください。

学習の流れ

初等教育4年では、平方四辺形とその特徴の概念について定義しました。この授業では、周りにある平行四辺形を示し、その特徴をまとめながら、これまでに学んだことを復習していきます。

ねらい

ⓟ・ⓢ：特定の場所、および授業を受けている環境から、平行四辺形を探してみましょう。平行四辺形を探せたら、それらが平行四辺形であるという理由を示しましょう。

ⓡ：初等教育や、8年生のユニット4と5で学んだ内容を用いて、平行四辺形にも当てはまる要素を示しましょう。

一部の設問の解答：

a)、d)とe)の四角形は、二組の平行な対辺を有するため、平行四辺形です。

b)の図形は一組の対辺のみが平行で、c)の図形は三角形なので、b)とc)の図形は平行四辺形ではありません。

つまづきやすい点：
追加の例で示された等式の関係が理解できない場合、教師が手がかりを示すか、ペアを組んで補習させる必要があります。確実に理解してもらうために、提出された解答の等式の証明をしてもらいましょう。

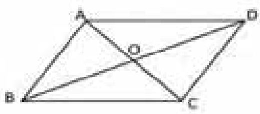
日付： **U6 2.1**

Ⓟ a) 以下の図から、平行四辺形と呼ばれる図形を示してください。また、なぜそれらの図形が平行四辺形と呼ばれるか、その理由を答えてください。
b) 次に、あなたの周りにある平行四辺形の例を三つあげてください。

備考：教科書の図を参照してください。

Ⓢ a) ブランコの支柱は四角形です。滑り台の屋根も同様に、二組の対辺が平行になっているので平行四辺形です。
b) この場合、生徒がいる位置によって解答は異なります。

Ⓔ



a) $AB = DC, \; AD = BC$
b) $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA, \; \sphericalangle BAD = \sphericalangle DCB$
c) $OA = OC, \; OB = OD$
d) $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD, \; \sphericalangle AOD = \sphericalangle COB$
e) $\sphericalangle ABO = \sphericalangle CDO, \; \sphericalangle BAO = \sphericalangle DCO$
f) $\sphericalangle ADO = \sphericalangle CBO, \; \sphericalangle DAO = \sphericalangle BCO$

Ⓡ a)、d)とe)の四角形は平行四辺形です。

b)とc)は、平行四辺形ではありません。

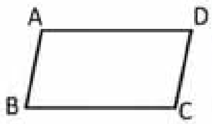
宿題：練習帳の133ページ

2.2 平行四辺形の性質

P

平行四辺形について、以下のことを示しましょう。

1. 二組の等しい対辺を有します。
2. 二組の等しい対角を有します。
3. 二つの隣接補角を有します。



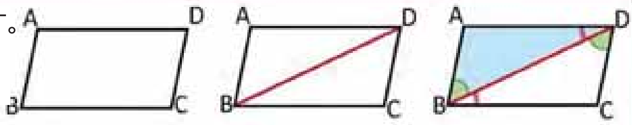
1. AB = DC; AD = BC
2. ∢DAB = ∢BCD および ∢ABC = ∢CDAであることを示すには、

対角線BDを描き、ΔDBA ≅ ΔBDCであることを示すだけで十分です。

S

仮定では、AB // DC および AD // BCとなります。

対角線BDを描くことで、



∢ABD =∢ CDB となります。（平行線間の内側の錯角のため）...(1)

∢ABD =∢ CDB （平行線間の内側の錯角のため） ...(2)

ΔDBA ≅ ΔBDC （(1)、(2) の二角夾辺相等の条件により、また、BDは共通です）。

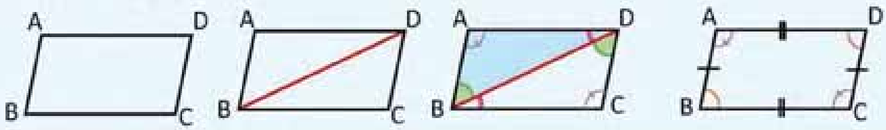
よって、AB = DC、AD = BC、∢DAB =∢ BCD、∢ABC =∢ CDAとなります。

最後に、∢ABC + ∢BCD = 180° （四角形の内角の和の半分）

∢ABC = ∢CDAであることに注目しましょう。なぜなら平行四辺形では、∢ ABD + ∢CBD = ∢CDB + ∢ADBが成り立ちます。

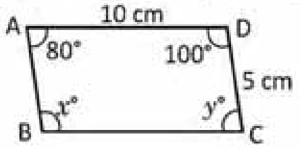
C

平行四辺形では、対辺や対角が等しく、隣接角は補角になります。



E

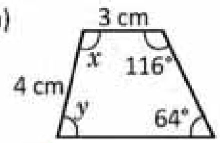
平行四辺形の特徴に応じた角と辺を示してください。



二組の対角は等しいため、∢x = 100° および∢y = 80° となり、また、二組の対辺が等しいため、辺AB = 5 cm およびBC = 10 cmとなります。

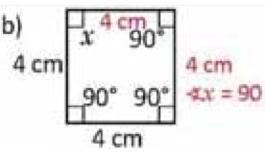
1. 次の図から、平行四辺形であるかどうか辺や角を用いて説明し、平行四辺形である場合には、辺の長さと角の値を求めましょう。

a)

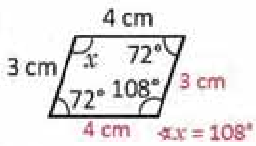


平行四辺形ではありません。

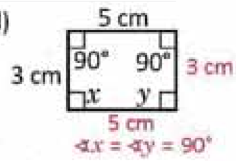
b)



c)



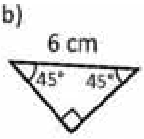
d)



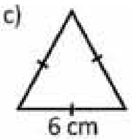
2. 次の三角形の中から、組み合わせた時に平行四辺形になる三角形を選んでください。また、それらがなぜ平行四辺形であるかを説明してください。

a)

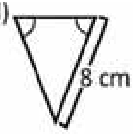
b)



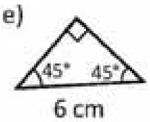
c)



d)



e)



a) と c)、b) と e)を組み合わせると平行四辺形になります。

達成の目安

2.2 辺と角の関係を示し、平行四辺形の特徴をまとめましょう。

学習の流れ

前回の授業では、平行四辺形の概念や特徴について学びました。この授業では、平行四辺形におけるそれぞれの辺と角の関係を示すために、三角形の合同条件を用います。

ねらい

Ⓟ・Ⓢ：平行四辺形では、対辺や対角は等しく、また、隣接角が補角であることを示してください。

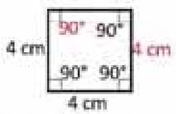
Ⓡ：平行四辺形のそれぞれの角の大きさを求めるために、示した解答を用いましょう。

一部の設問の解答：

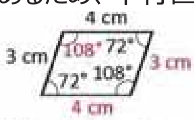
1.

a) 平行四辺形ではありません。

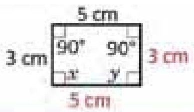
b) 長さ4cmの4つの辺と∢x = 90°を有する平行四辺形です。



c) 二組の辺の長さがそれぞれ4cmと3cmで、∢x = 108°であるため、平行四辺形です。

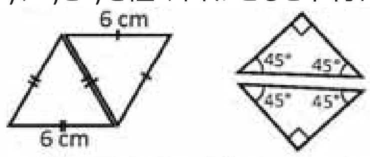


d) 二組の辺の長さがそれぞれ5cmと3cmで、四つの角がそれぞれ直角であるため、平行四辺形です。



2.

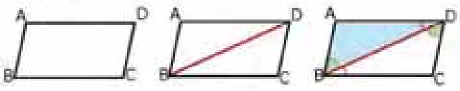
a)とc)、b)とe)を組み合わせると平行四辺形になります。



なぜなら、内側の錯角が等しいことで、対辺が平行だからです。

日付： **U6 2.2**

Ⓟ ある平行四辺形について、次のことを示しましょう。
1. 二組の等しい対辺を有します。
2. 二組の等しい対角を有します。
3. 2つの隣接補角を有します。



Ⓢ 仮定により、AB // DCおよびAD // BCとなります。BDを描くことで、次のことを導き出します：
∢ABD = ∢CDB （平行線間の内側の錯角のため）...(1)
∢ADB = ∢CBD （平行線間の内側の錯角のため）...(2)
ΔDBA ≅ ΔBDC （(1)、(2)の二角夾辺相等の条件により、また、BDは共通です）。よって、
AB = DC、AD = BC、
∢DAB = ∢BCD、∢ABC = ∢CDA。
最後に、∢ABC + ∢BCD = 180°。

Ⓔ 二組の対角と辺が等しいため、∢x = 100°および∢y = 80° となります。二組の対辺が等しいため、AB = 5 cmおよびBC = 10 cmとなります。

Ⓡ
a) 平行四辺形ではありません。
b) 長さ4cmの4つの辺と∢x = 90°を有する平行四辺形です。
c) 二組の辺の長さがそれぞれ4cmと3cmで、∢x = 108°であるため、これは平行四辺形です。

宿題： 練習帳134ページ

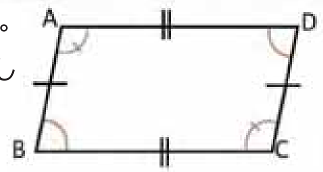
レッスン 2

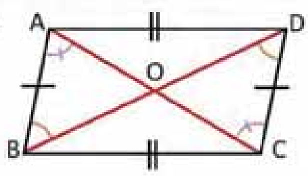
2.3 平行四辺形の対角線

P 平行四辺形の対角線が、その中点で交わることを示しましょう。

四角形には2本の対角線があることを復習しよう。

S 仮定では、AB // DCおよびAD // BCとなります。





平行四辺形の対角線を描くことで を導き出します：

AB = DC （平行四辺形であるため） . . .(1)

∢ABO = ∢CDO （平行線の内側の錯角のため） . . .(2)

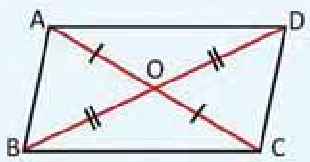
∢BAO = ∢DCO （平行線の内側の錯角であるため） . . .(3)

OA = OC および OB = OD であることを示すには、ΔOAB ≅ ΔOCDであることを示すだけで十分です。

よって、ΔOAB ≅ ΔOCD （(1)、(2) および (3)の二角夾辺相等の条件により）。

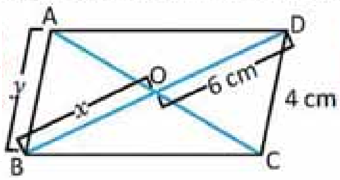
したがって、OA = OC および OB = OD （合同の定義により）となります。

C 平行四辺形の対角線が、その中点で交わることを示しましょう。



1. xとyの値を求めるために、平行四辺形$ABCD$のどの特徴を用いるべきかを書きましょう。

yの値を求めるには、平行かつ等しい対辺を有する平行四辺形の特徴を用います。



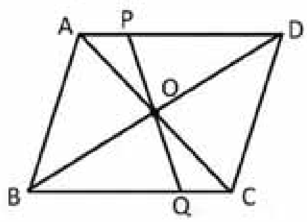
xの値を求めるには、対角線の法則を用います。この時、2つの対角線が交わる点をOとします。

2. 次の図の平行四辺形ABCDの対角線ACとBCの交点をOとし、Oを通る線分をPQとします。 以下の空欄を埋めて、PO = QOであることの説明を完成させましょう。

CO = AO （平行四辺形の法則により） . . .(1)

∢QCO = ∢PAO （平行線間の内側の錯角により） . . .(2)

∢QOC = ∢POA （対頂角である） . . .(3)



ΔAOP ≅ ΔCOQ （(1)、(2) 、(3)の二角夾辺相当の条件により）。

したがって、PO = QO （合同の定義により）。

130

達成の目安

2.3 平行四辺形の対角線を特徴づけましょう。

学習の流れ

先に、平行四辺形の辺と対角の間にある関係について説明しました。この授業では、平行線に2本の対角線を引くことにより、これらが中点で交わることについて示します。

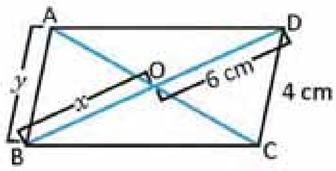
ねらい

ⓟ・ⓢ：平行四辺形の対角線の交点はそれぞれの中点です。そのため、各対角線は、中点で２つの等しい線分に分かれます。

ⓡ：1.では、指定された2つの線分の長さを求めるために、この授業で説明した解答を用いましょう。また2.では、平行四辺形の特徴を用いて説明を完成させましょう。

一部の設問の解答：

1.



xの値を求めるには、対角線の法則を用います。この時、2つの対角線が交わる点をOとします。

BO = DO （Oは対角線の中点である）
x = 6 cm

yの値を求めるには、平行かつ等しい対辺を有する平行四辺形の特徴を用います。

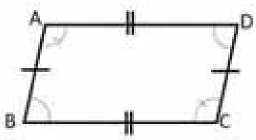
AB = CD （平行四辺形の対辺）
y = 4 cm

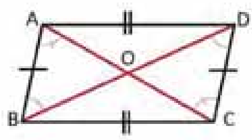
つまづきやすい点：
生徒が説明を終えられない場合は、ペアになって作業するように指示しましょう。

日付： **U6 2.3**

Ⓟ 平行四辺形の対角線が、その中点で交わることを示してください。

Ⓢ

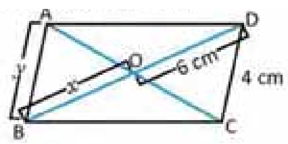




仮定では、AB // DC および AD // BCとなります。
平行四辺形の対角線を引くことで成り立つのは：
AB = DC （平行四辺形であるため） . . .(1)
∢ABO = ∢CDO （平行線間の内側の錯角のため） . . . (2)
∢BAO = ∢DCO （平行線間の内側の錯角であるため） . . .(3)

よって、ΔOAB ≅ ΔOCD （(1)、(2) および (3) の二角夾辺相等の条件により）。
したがって、OA = OC および OB = OD （合同定義により）となります。

Ⓡ 1.



BO = DO （Oは対角線の中点です）
x = 6 cm

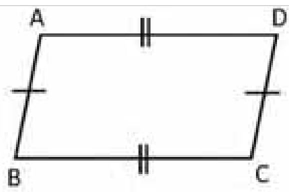
AB = CD （平行四辺形の対辺）
y = 4 cm

宿題： 練習帳135ページ

2.4 四角形が平行四辺形である場合の辺の条件

P

対角の対が等しい四角形が平行四辺形であることを示しましょう。



AD // BC および AB // DC であることを示すためには、 対角線BDを描いて、ΔABD ≅ ΔCDBであることを示すだけで十分です。

S

対角線BDを描きます。

したがって、ΔABD≅ ΔCDB （三辺比相等の条件により、AB = CD、AD = BC。仮定により、BDは共通です）。

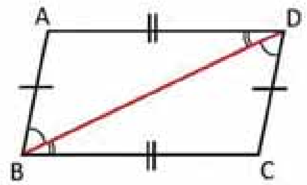
したがって、∢ABD = ∢CDB（合同の同位角であるため）。

したがって、AB // DC （∢ABD = ∢CDBであるため）となります。

同様に、∢ADB = ∢CBD （合同により）となります。

したがって、AD // BC （∢ADB = ∢CBDであるため）となります。

最後に、四角形ABCDは平行四辺形です。

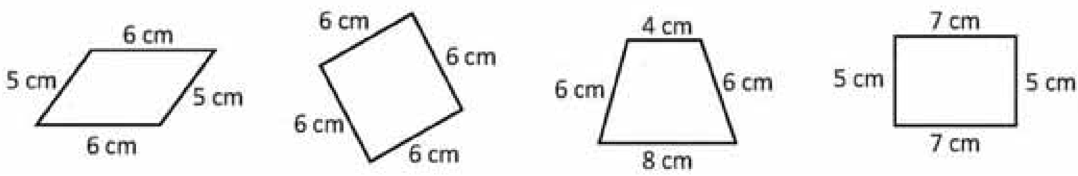


C

四角形の対辺の長さが等しい場合、その四角形は平行四辺形です。この定理は、「平行四辺形では、二組の対辺の長さは等しい」ことと相反います。

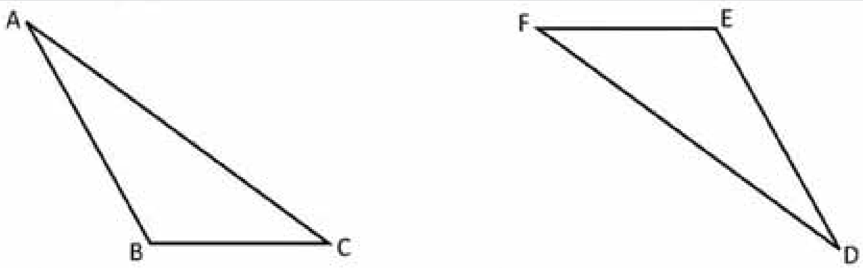
平行四辺形であるためには、四角形が等しい長さの対辺を有するために、必要十分条件だということに注目しましょう。

1. 次の四角形のうち、平行四辺形の条件を満たす四角形を述べてください。



1、2、4は、それぞれの対辺が等しいため、平行四辺形の条件を満たします。

2. ΔABC および ΔDEFは合同です。これらの三角形を組み合わせると平行四辺形になる理由を説明してください。



これらを組み合わせると、二組の対辺が等しい四角形になる理由を説明してください。

ユニット6

達成の目安

2.4 平行四辺形である条件として、四角形の辺の間にある関係を示しましょう。

学習の流れ

授業2.2では、平行四辺形が、等しい対辺を有することを示しました。この授業では、一致について示します。つまり、二組の等しい辺を有する四角形の場合、その四角形は平行四辺形になるということです。

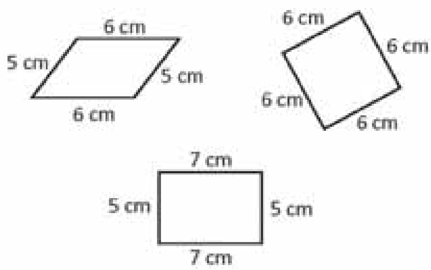
ねらい

Ⓟ・Ⓢ：三角形の合同と平行線間の角について学んだことを用いて示しましょう。

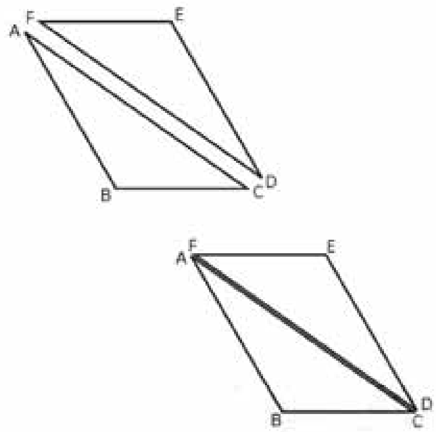
Ⓡ：1.では、与えられた四角形の中から平行四辺形になる条件を満たす四角形を見つけるために平行四辺形について学んだことを用いました。一方で2.では、平行四辺形の特徴を常に用いて、三角形が平行四辺形になる理由について証明します。

一部の設問の解答：

1. 1、2、4は、二組の等しい対辺を有するため、平行四辺形になるための条件を満たします。



2. これらを組み合わせることで、二組の等しい対辺を有する四角形になる理由を示してください。

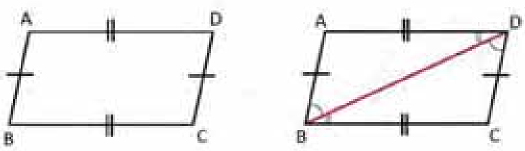


日付：

U6 2.4

Ⓟ 二組の対辺を持つ四角形が平行四辺形と等しい理由について説明してください。

Ⓢ



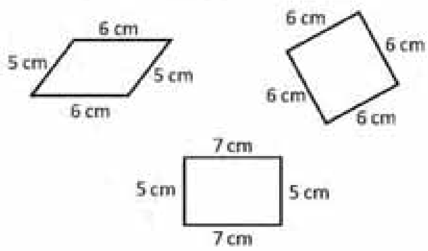
対角線BDを描きます。
したがって、ΔABD ≅ ΔCDBとなります。（三辺比相等により、AB = CD、AD = BC。仮定により、BDは共通） したがって、∢ABD = ∢CDBとなります。（合同の同位角であるため）。

したがって、AB // DC （∢ABD = ∢CDBであるため）となります。

Ⓡ したがって、AD // BC （∢ADB = ∢CBDであるため）となります。

最後に、四角形ABCDは平行四辺形です。

1、2、4は、二組の等しい対辺を有するため、平行四辺形になるための条件を満たします。

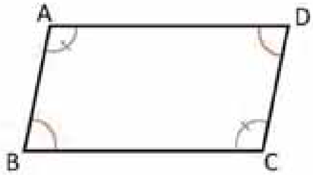


宿題： 練習帳136ページ

2.5 四角形が平行四辺形である場合の角の条件

P

二組の対角の角度が等しい四角形が、平行四辺形であることを示しましょう。



辺BCと辺CDの延長上それぞれ点Eと点Fを取りましょう。AB // DC および BC // ADであることを示すには、∢ABC = ∢DCE、∢BCD = ∢ADFとなることを示すだけで十分です。

S

線分BCを点Eまで、線分CDを点Fまで延長します。

2∢ABC + 2∢BCD = 360° （四角形の内角の和、∢DAB = ∢BCD および ∢ABC = ∢CDA）。

したがって、∢ABC + ∢BCD = 180° （2で割ります） . . .(1)

また、∢BCD + ∢DCE = 180° （補角により） . . .(2)

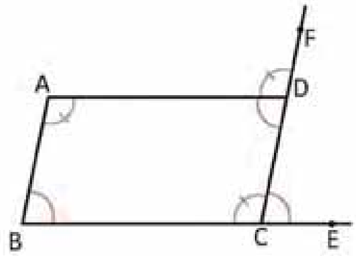
よって、∢ABC = ∢DCE （(1)から(2)を引きます）。

したがって、AB // DC （等しい大きさの同位角であるため）。

同様に、BC // ADであることを示します。

示し終えたら、四角形の対辺が平行であることを結論付けることができます。

したがって、四角形ABCDは平行四辺形です。

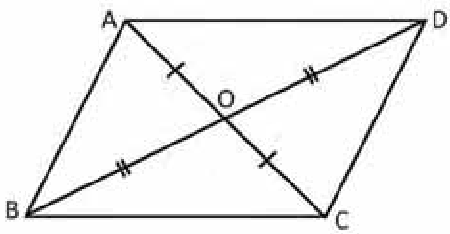


C

四角形の二組の対角が等しい時、その四角形は平行四辺形になります。これは相反定理です。「平行四辺形では、二組の対角は等しいです。」

平行四辺形であるためには、四角形が等しい長さの対角を持つことが必要十分条件です。

対角線が中点で交わる四角形が平行四辺形であることを示しましょう。



ABCDが平行四辺形であることを示すには、対辺の長さが等しいことを確かめるだけで十分です。そのために、平行四辺形の中にできる4つの三角形について考えることができます。

達成の目安

2.5 四角形が平行四辺形であるために、対角が等しくなければならないことを説明しましょう。

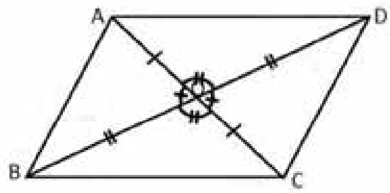
学習の流れ

前回の授業では、対辺が等しい四角形が平行四辺形であることを示しました。今回の授業では、対角が等しい四角形が平行四辺形であることを示します。

ねらい

Ⓟ・Ⓢ：仮定と補角を用いて、対角が等しい四角形が平行四辺形であることを示します。

®：四角形平行四辺形であるための条件として、2.3の授業の結論の相反定理を示しましょう。



AO = CO 、 BO = DO、仮定により...(1)
∢AOD = ∢COB（対頂角であるため)...(2)
よって、ΔAOD ≅ ΔCOB（(1) および (2)の二辺比夾角相等により）
したがって、AD = CB（合同の定義）...(3)
∢AOB = ∢COD（対頂角であるため）...(4)

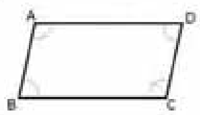
よって、ΔAOB ≅ ΔCOD。(1) および (4)の二辺比夾角相等により）したがって、AB = CD（合同の定義）...(5)
(3) および (5) より、対辺が等しいことから、四角形ABCDが平行四辺形となることが結論付けられます。

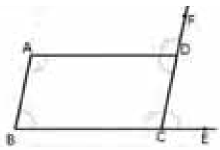
つまづきやすい点：
もしも解答にたどり着けない生徒がいた場合は、ペアを組んで作業をさせたり、手がかりを参照するよう提案しましょう。

日付： U6 2.5

Ⓟ 二組の対角の角度が等しい四角形が、平行四辺形であることを示しましょう。

Ⓢ





線分BCを点E まで、線分CDを点Fまで延長します。
2∢ABC + 2∢BCD = 360°（四角形の内角の和、∢DAB = ∢BCD および ∢ABC = ∢CDA）
よって、∢ABC + ∢BCD = 180°（2で割ります）... (1)
また、∢BCD + ∢DCE = 180°（補角により） ... (2)

よって、∢ABC = ∢DCE （[1]から[2]を引いて）
したがって、AB // DC （等しい同位角）
同様に、 BC // ADよって、対辺は平行であることが結論付けられます。したがって、四角形ABCDは平行四辺形となります。

Ⓡ AO = COおよびBO = DO（仮定により） ... (1)
∢AOD = ∢COB（対頂角であるため） ... (2)
よって、ΔAOD ≅ ΔCOB （(1)および(2)の二辺比夾角相等により）
したがって、AD = CB
同様に、AB = CDであることが示されます。

宿題： 練習帳137ページ

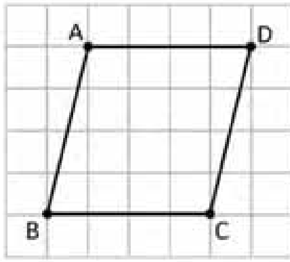
2.6 四角形が平行四辺形であるための十分条件

P

以下の順に従って、ノートに図形を描きましょう。次に解答しましょう。

1. ノートの4マス分、または4cmの線分ADを描きましょう。
2. ノートの4マス分、または4cmの別の線分BCを描きましょう。
3. 線分ABとCDを描きましょう。

ABCDは平行四辺形ですか？前回の授業で学んだ条件を用いて、あなたの解答を論じましょう。

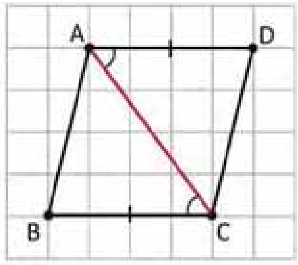


S

順序に従い図形を描いた結果AD=BC=4 cmとなり、またノートの罫線は平行であるためAD//BCとなります。

対角線ACを描きましょう。
したがって、ΔABC ≅ ΔCDA （∢ACB = ∢CAD （平行線間の角であるため、AD = BC および ACは共通です）。
よって、AB = CD（合同により）

したがって、ABCDは平行四辺形となります。（二組の等しい角度の対角）



C

四角形が平行四辺形であるために以下のそれぞれの条件は必要十分です：

1. 二組の対辺が平行であること。
2. 二組の対辺が等しいこと。
3. 二組の対角が等しいこと。
4. 対角線が中点で交差していること。
5. 二組の対辺が平行かつ等しいこと。
6. 隣接角が補角であること。

1.は平行四辺形の定義に該当します。

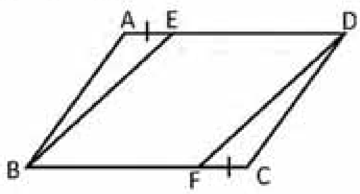
E

AE = CFとなるように、平行四辺形ABCDの辺ADおよび辺BCからそれぞれ点Eおよび点Fを取ります。四角形EBFDが平行四辺形であることを示しましょう。

ED ∥ BF

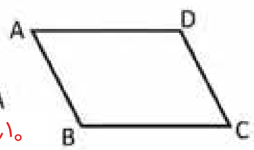
ED = AD − AE = BC − FC = BF

よって、四角形BFDEは平行四辺形です。（二組の平行かつ合同の対辺を有するため）。

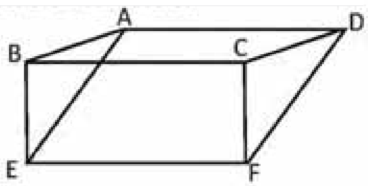


1. 四角形ABCDにおいて、以下のいずれの条件の中から、四角形が平行四辺形であるための十分条件を示しましょう。

   a) BA = AD, BC = CD いいえ。
   b) AB = DC, AD = BC はい。
   c) ∢DAB = ∢BCD, ∢ABC = ∢CDA はい。



2. 図の中の四角形ABCDおよびBEFCは平行四辺形です。同じく、四角形AEFDが平行四辺形であることを示しましょう。



ユニット6

133

達成の目安

2.6 四角形が平行四辺形であるための十分条件をまとめましょう。

学習の流れ

前の二つの授業では、等しい対辺または等しい対角を有する四角形が平行四辺形であることを示しました。この授業では、四角形が平行四辺形であるために満たすべき条件をまとめていきます。これは、ある条件下の作図を示しながら行います。

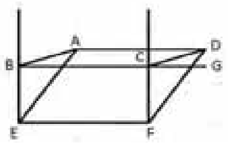
ねらい

Ⓟ・Ⓢ：四角形を描き、次にそれが平行四辺形であることを示しましょう。これは、四角形が平行四辺形であるために必要十分な条件をまとめる目的で行います。

Ⓡ：1.では、四角形が平行四辺形である場合の十分条件を判断するために授業で示した解答を用いましょう。

いくつかの設問の解答：

設問 2：



BC = DA および BC = EF、したがって、DA = EF。
平行四辺形の辺であるため...(1)
同時に、BC // DA および BC // EF、したがって、
DA // EF。
二組の等しい対辺を有するため、AEFDは平行四辺形です。

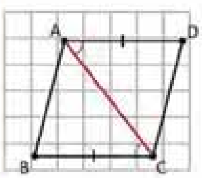
つまづきやすい点：

指定の2.が答えられない場合、解答に導くための手がかりを示しましょう。

日付： **U6 2.6**

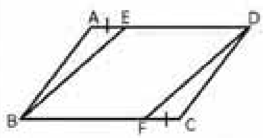
Ⓟ 教科書の指示通りの順序で、図を完成させましょう。
ABCDは平行四辺形ですか？前の授業で学んだ条件を用いて、あなたの解答を説明してください。

Ⓢ ノートの罫線は平行なため、示された順で行うことで、図形AD = BC = 4 cmおよびAD // BCが得られます。



対角線ACを描きましょう。
よって、ΔABC ≅ ΔCDA （∢ACB = ∢CAD 平行線間の角であるため、AD = BC および ACは共通です。）
よって、AB = CD（合同により）
したがって、ABCDは平行四辺形です。

Ⓔ



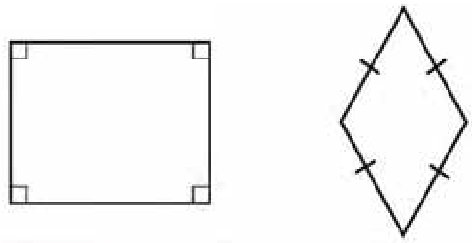
ED ∥ BF
ED = AD − AE = BC − FC = BF
よって、四角形BFDEは平行四辺形です。（二組の平行かつ長さの等しい対辺を有するため）

Ⓡ 1. a) BA = AD、BC = CD。いいえ。
b) AB = DC、AD = BC。はい、2.4の授業で示されています。
c) ∢DAB = ∢BCD、∢ABC = ∢CDA。はい、2.5の授業で示されています。

宿題： 練習帳の138ページ

2.7 長方形とひし形の性質

P 長方形とひし形が平行四辺形であることを示しましょう。前回の授業で示した条件を用いましょう。



長方形の定義：4つの等しい直角を有する四角形です。

ひし形の定義：4つの等しい辺を有する四角形です。

S
- 長方形：二組の等しい対角を有するため、条件3により、平行四辺形となります。
- ひし形：二組の等しい対辺を有するため、条件2により、平行四辺形となります。

C 長方形は、その角および辺により平行四辺形となります。ひし形も同様にそうなります。

E ひし形および長方形の対角線について以下の解答を示しましょう。

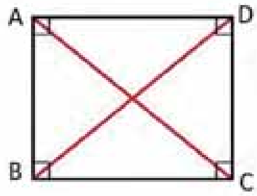
a) 長方形の対角線は等しいです。
b) ひし形の対角線は、垂直に交差します。

AC = DBであることを示すためには、ΔABC ≅ ΔDCBであることを示すだけで十分です。

1. 長方形ABCDに対角線ACおよびDBを描きましょう。

よって、ΔABC ≅ ΔDCB　（二辺比夾角相等により、AB = DC、BCは共通および∢ABC = ∢DCB = 90°）

したがって、AC = BD（合同条件により）



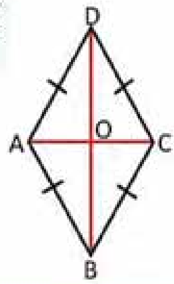
2. ひし形ABCDに対角線ACおよびBDを描きましょう。交わる点をOとします。

BD ⊥ ACであることを示すためには、DOがΔACDの高さであることを示すだけで十分です。

よって、ΔACDは、二等辺三角形です。
（ひし形DA = DCであることにより）

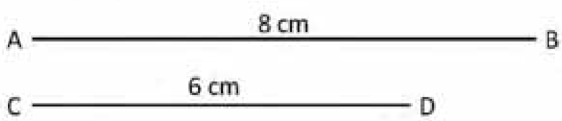
よって、DOはΔACDの二等分です。（平行四辺形であるため対角線が中点で交わることにより）

したがって、DB⊥AC（授業1.3によると、二等辺三角形では二等分線と二等分が一致するため）



1. 対角線が等しく、かつ中点で交わる四角形が長方形であることを示しましょう。

2. 対角線が線分ABおよびCDと等しいひし形を描きましょう。



134

達成の目安

2.7 長方形とひし形の特徴をまとめましょう。

学習の流れ

このユニットのレッスン2では、平行四辺形の法則を示し、四角形が平行四辺形であるための必要十分条件について述べました。この授業では、前回の授業の条件を用いて、ひし形や長方形も同様に、平行四辺形であることを示していきます。

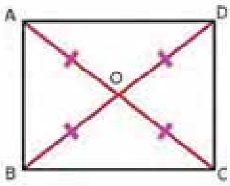
ねらい

Ⓟ・Ⓢ：ひし形および長方形が平行四角形であることを示すために、四角形が平行四辺形であるための必要十分条件を用いましょう。

Ⓡ：1.では、対角線が等しいこと、また、対角線が中点を通ることを証明するために三角形の合同条件を用います。条件が満たされた場合、それは長方形ということになります。一方、2.では、定規やコンパスを使って作図だけを行います。

一部の設問の解答：

1.

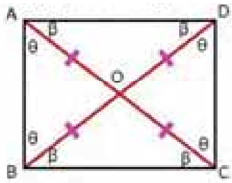


AC = BD; AO = CO および BO = DO; 仮定により...(1)

∢COD = ∢AOB y ∢BOC = ∢DOA; 対頂点であるため...(2)

したがって、ΔAOB ≅ ΔCOD および
ΔBOC ≅ ΔDOA 二等辺三角形です; (1) および (2)の二辺比夾角相等により

次に三角形の合同条件により、以下のようになります：



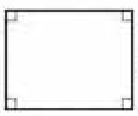
$$4\theta + 4\beta = 360°$$
$$\theta + \beta = 90°$$

したがって、四角形ABCDは平行四辺形です。

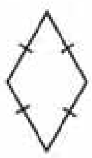
日付： **U6 2.7**

Ⓟ 長方形とひし形が平行四辺形であることを示しましょう。

Ⓢ



長方形：条件3による、二組の等しい対角を有するため、平行四辺形となります。



ひし形：条件2による、二組の等しい対辺を有するため、平行四辺形となります。

Ⓔ 証明してください。
a) 長方形の対角線は等しいです。
b) ひし形の対角線は、垂直に交差します。

1. 長方形ABCDに対角線ACおよびDBを描きましょう。よって、ΔABC ≅ ΔDCB、二辺比夾角相等により
したがって、AC = BD。（合同により）。
2. 対角線の交わる点をOとします。したがって、ΔACDは二等辺三角形です。（ひし形であるため、DA = DC）。
よって、DOは ΔACDの二等分になります。

したがって、DB⊥AC （二等辺三角形では、二等分線が中央値と高さが一致するため）。

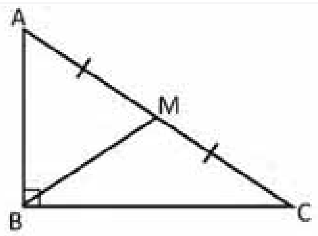
Ⓡ「設問の解」欄の解答を写しましょう。

宿題： 練習帳139ページ

2.8 長方形における対角線の性質の応用

P

直角三角形ABCについて、斜辺ACの中点をMとし、MA = MB = MCであることを示しましょう。



長方形では、対角線はその中点で交差することを復習しよう。

S

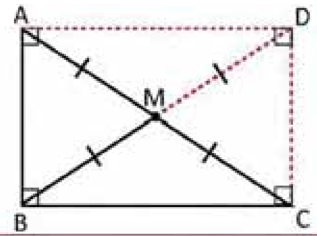
辺ABとBCおよび、平行四辺形Mであるため、中点で交わる対角線ACとBDの、長方形ABCDを描きましょう。

$BM = \frac{1}{2} BD$（平行四辺形ABCDの対角線であるため） . . .(1)

$MA = MC = \frac{1}{2} AC$（平行四辺形ABCDの対角線であるため） . . .(2)

また、AC = BD （ABCDは長方形です） . . .(3)

したがって、MA = MB = MC （(1), (2) および (3) より） 。



C

すべての直角三角形では、対頂点から斜辺を結ぶ中点は、斜辺の半分の長さと等しい長さを有します。

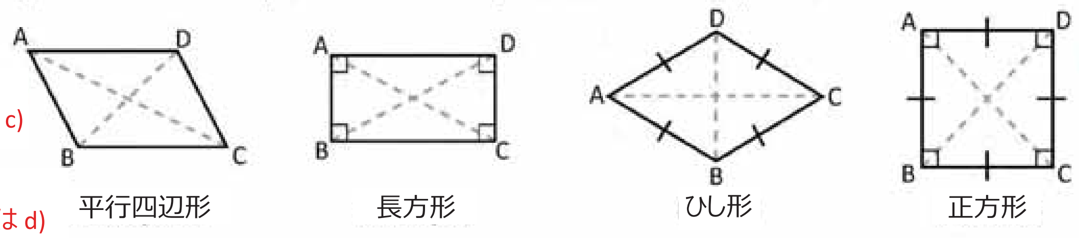
E

正方形は平行四辺形であるかを答えましょう。
正方形の4つの辺は等しいため、互いの対辺も等しいということになり、よって、正方形は平行四辺形になります。

正方形は、4つの直角と4つの等しい長さを有する四角形であることを復習しよう。

1. 平行四辺形が長方形、ひし形、または正方形であるために、それぞれ付け加えるべき条件を答えましょう。該当する条件を a から b の中から選びましょう。

a) ∢A = 90°　　b) AB = BC　　c) AC = BD　　d) AC⊥BD



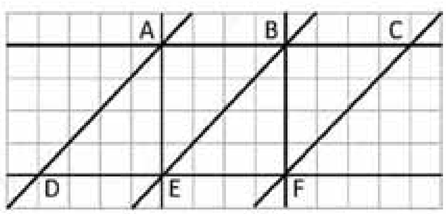
長方形：
a) または c)

ひし形：
b) または d)

正方形：
a) と b)
a) と d)
c) と b)
c) と d)

2. 以下の図から、形成される平行四辺形を選んでください。次に、それらを長方形、正方形、ひし形、または平行四辺形に分けてください。

ADEB、平行四辺形
BEFC、平行四辺形
ADFC、平行四辺形
AEFB、正方形



ユニット6

達成の目安

2.8 直角三角形の要素との関係を示すために、長方形の対角線の特徴を用いましょう。

学習の流れ

前回の授業では、直角三角形のいくつかの特徴を示しました。今回は、対頂点と斜辺をその中点で結ぶ線分が、斜辺の半分の長さと等しいことを示します。

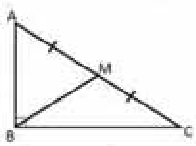
ねらい

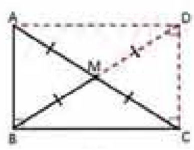
Ⓟ･Ⓢ：長方形の作図とその対角線の特徴をもとに、直角三角形の法則のうち一つを示してください。

Ⓡ：与えられた情報をもとに、四角形が長方形、ひし形、正方形になるために求められる条件を示してください。

日付： **U6 2.8**

Ⓟ 直角三角形ABCについて、斜辺ACの中点をMとし、MA = MB = MCであることを示しましょう。





Ⓢ 辺ABとBCおよび対角線ACとBDの長方形ABCDを描いてください。

$BM = \frac{1}{2}BD$。（平行四辺形ABCDの対角線であるため） ...(1)

$MA = MC = \frac{1}{2}AC$。（平行四辺形ABCDの対角線であるため） ...(2)

また、AC = BDとなります。（ABCDは長方形です） . . .(3)

したがって、MA = MB = MC (1)、(2)および(3)より。

Ⓔ 正方形の4つの辺は等しいため、互いの対辺も等しいということになり、よって、正方形は平行四辺形になります。

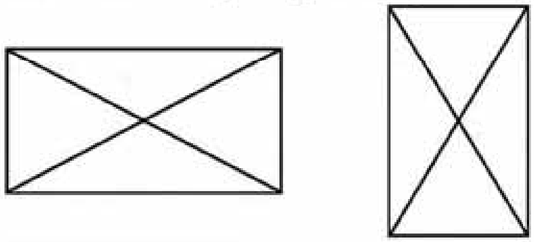
Ⓡ 1. 長方形： a) または c)
ひし形： b) または d)
正方形： a) と b)
a) とd)
c) と b)
c) と d)

宿題： 練習帳140ページ

2.9 長方形の性質の相反定理

P

平行四辺形以外で、等しい対角線を有する四角形があるか答えましょう。

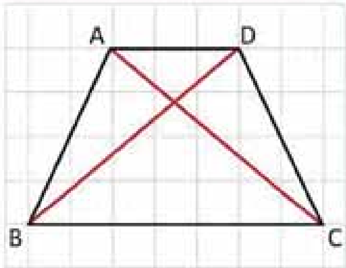


「長方形の対角線は等しい」ことの相反について考察しましょう。

台形は、一組のみの平行する辺を有する四角形です。

S

等脚台形を用いて （AB = DC および AD // BC） 。
AC = DBであることを求めるために$\Delta ABC \cong \Delta DCB$であることを示すことができます。



したがって、解答は「はい」です。台形は一例で、他にも、対角線の等しい四角形はあります。

つまり、四角形の対角線が等しい場合でも、必ずしも長方形だというわけではなく、他の種類の 四角形である可能性もあります。

C

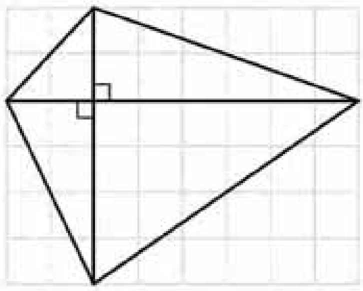
相反定理「長方形の対角線は等しい」、つまり、「四角形の対角線が等しい場合、その四角形は長方形である」というのは、提案の反例では成り立ちません。

相反定理の正確性を示すために、この場合、**反証**を用いました。

この場合は成立しないため、対角線が等しくなるために、長方形であることは**十分**条件ではあるが、**必要条件ではないと表すこともできます。**

E

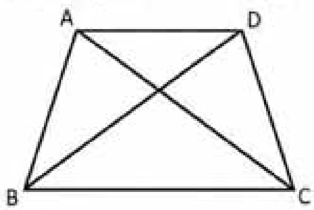
対角線が垂直に交わる四角形はひし形ですか？



示された四角形の対角線は垂直ですが、辺が等しくなくひし形ではないため、これは正しくありません。

この命題は、「ひし形の対角線は垂直に交わる」の相反定理です。

1. 平行四辺形ではない等脚台形の対角線が等しいことを示してください。



2. 対角線が垂直で、かつ中点で交わる四角形がひし形であることを示しましょう。

達成の目安

2.9 長方形の特徴である相反定理の正確性を分析しましょう。

学習の流れ

授業2.7では、長方形が等しい対角線を有すること、また、中点で交わることを示しました。この授業では、四角形の対角線が等しい場合、必ずしも長方形になるわけではないことを示します。

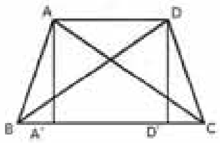
ねらい

Ⓟ・Ⓢ：反例の提示して、「長方形の対角線は等しい」ことの相反定理が成立しないことを示しましょう。

Ⓔ：1では、はじめの問題で用いた反例である、等脚台形の対角線が等しいことを示します。一方2では、ひし形の対角線間にある関係性を示します。

一部の設問の解答：

1.



AA´ = DD´の2つの高さを描きます。...(1)
AB = DC; 仮定により ...(2)
∢AA´B = ∢DD´C = 90°.

したがって、ΔAA´B ≅ ΔDD´C; 斜辺および隣辺を有するため。

∢ABC = ∢DCB; 合同の定義により...(3)
BC = CB; 同じであるため ... (4)

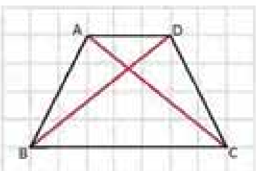
合同定義によってAC = BDであることは、どのように結論付けられるのでしょうか。

日付： **U6 2.9**

Ⓟ 長方形以外で、等しい対角線を有する四角形があるか答えましょう。

Ⓢ 等脚台形を用いて （AB = DC および AD // BC）。

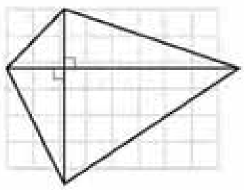
AC = DBであることを求めるためにΔABC ≅ ΔDCBであることを示すことができます。



したがって、解答は「はい」です。対角線の等しい他の四角形もあり、台形はその一例です。

これは、四角形の対角線が等しい場合でも、必ずしも長方形であるとは限らないということを意味しています。

Ⓔ



これは、必ずしも正しいとは限りません。例えば、示された四角形は、垂直の対角線を有しかつひし形ではありません。

Ⓡ 1. いくつかの設問の解の列に説明があります。

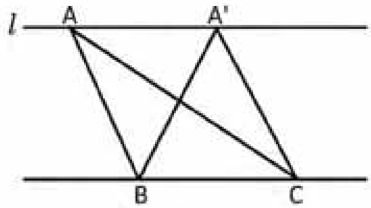
宿題：練習帳の141ページ

レッスン 2

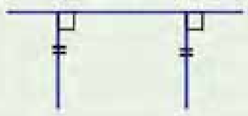
2.10 平行線と面積の関係

P

次の図では、線 *l* およびBCは平行です。三角形ABCとA'BCの面積が同じ理由を説明してください。



一組の平行線では、一本の平行線の二つの点ともう一本の平行線を結ぶ垂直な線の長さは等しいです。

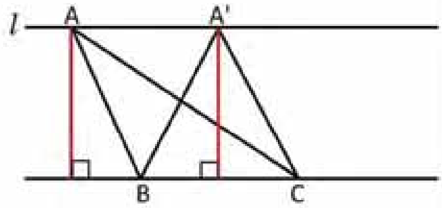


S

図の三角形ABCとA'BCは、底辺にあたる線分BC有し、また、頂点の1つは底辺BCの平行線上にあります。

これらの三角形は等しい底辺を有し、それぞれの高さを求めるとき、2本の平行線間にあるため、その2本は等しいです。

したがって、この2つの三角形の面積は等しいです。

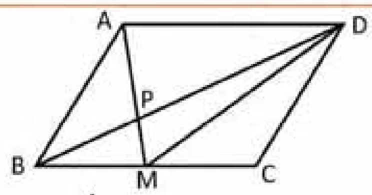


C

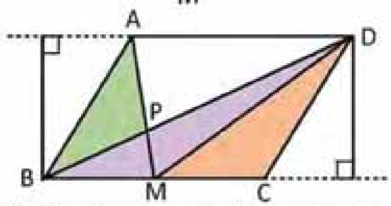
2本の平行線を有する場合、1本の直線からもう1本の直線に引かれた垂直な線分の長さは等しいです。

E

ABCDは平行四辺形です。Mは、線分BCの中点です。Pは線分BCと線分AMが交差する点です。面積の等しい三角形を示してください。

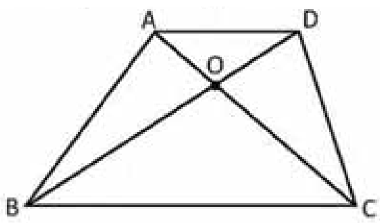


三角形ABD、AMD、BDCに加えて、三角形ABM、DBM、DMCの面積は等しいです。「平行線間の垂直な線分の長さは等しい」という法則から、これらの三角形の底辺と高さが等しいということを導くことができます。



同じように、ABMとDBMの面積が等しいことから、三角形ABPとDMPの面積が等しいことがわかります。また、互いの面積から等しい部分を引いています。（MPB）

台形ABCDの対角線とAD // BCの交点をOとした場合、三角形AOBとDOCの面積が等しいことを示してください。



ユニット6

137

達成の目安

2.10 平行線間に引かれた垂直な線分の間の関係を示しましょう。

学習の流れ

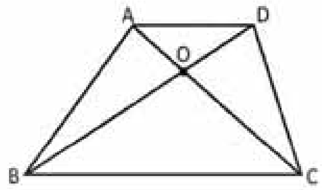
前の授業では、四角形の特徴について学びました。この授業では、等しい底辺と高さの2つの三角形の面積をもとに、2本の平行線間に引かれた垂直な線分間の関係について示します。

ねらい

Ⓟ・Ⓢ：2本の平行線間に引かれた垂直な線分の長さが等しいことを示しましょう。

Ⓔ：今回と前回の授業の解答をもとに、2つの三角形の面積が等しいことを示しましょう。

一部の設問の解答：



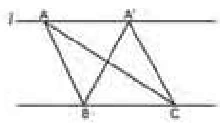
三角形ABCとDCBの底辺と高さが等しいため、この2つの三角形の面積は等しいです。

(ΔABC) = (ΔAOB) + (ΔOCB) ... (1)
(ΔDCB) = (ΔDOC) + ΔOCB ... (2)

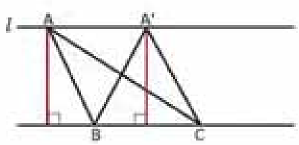
ΔABCとΔDCBなため、面積は等しいです。(1)および(2)により、三角形AOBとDOCの面積は等しいです。

日付： **U6 2.10**

Ⓟ 次の図では、線lおよびBCは平行です。三角形ABCとA'BCの面積が同じである理由を説明してください。



Ⓢ



図の三角形ABCとA'BCは、底辺にあたる線分BC有し、また、頂点の1つは底辺BCの平行線上にあります。

等しい底辺と高さを有します。よって、これら2つの三角形の面積は等しいです。

Ⓔ 等しい底辺と高さを有するため、三角形ABD、AMD、BDCに加えて、三角形ABM、DBM、DMCの面積も等しいです。

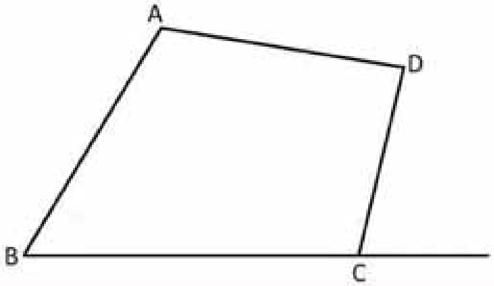
Ⓡ いくつかの設問の解の列に説明があります。

宿題： 練習帳142ページ

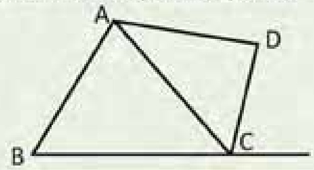
2.11 平行線と面積の間の関係の応用

P

次に示される四角形ABCDでは、線分BCの延長線上に点Eがあり、三角形ABEが出来上がります。このように、ΔABEが四角形ABCDと等しい面積を有する場合、点Eはどこに取らなければならないでしょうか？



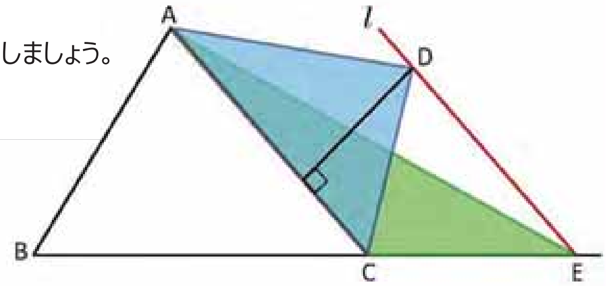
平行線と面積を関連付けて、三角形ACDと等しい面積の三角形を見つけてみましょう。



S

四角形ABCDと等しい面積を有するΔABEについて詳しく述べるために、以下の手順に従ってください。

1. 対角線ACを描きましょう。
2. 辺ACに平行で、頂点Dを通るlを描きましょう。辺BCの延長線上で交差する点Eを示しましょう。
3. 点Aから点Eまでの線分を描き、ΔABEを作図しましょう。



この作図から、
ΔDACの面積 = ΔEACの面積が成り立ちます。（平行線間に位置し、共通の底辺を有するため）。

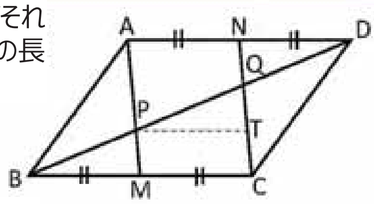
四角形ABCDの面積 = ΔABCの面積 + ΔDACの面積。
ΔABE の面積= ΔABCの面積 + ΔEACの面積。

したがって、ΔABEの面積 = 四角形ABCDの面積 （ΔDACの面積 = ΔEACの面積）。

C

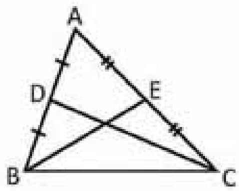
共通の底辺を持つ三角形は、対頂点と底辺を結ぶ直線が底辺と平行である場合、等しい面積を有します。

1. 平行四辺形ABCDでは、辺BCとADに中点MとNがあり、線分BDがそれぞれAMとCNで交差する点PとQを通り、BQ =12とした場合の、QDの長さを計算しましょう。



PTがMCと平行になるように、点Tを示してください。

2. 三角形ABCでは、辺ABとACの中点をそれぞれDとEとします。BCと$DE = \frac{1}{2}BC$ に平行になるように線分DEを描きましょう。証明してください。



a) 三角形DBE、ADE、DCEの面積は等しいです。
b) 三角形DBEの二倍にあたる面積は、三角形ABEと三角形EBCの面積と等しいです。

達成の目安

2.11 平行線と面積の関係を用いて、三角形と平行四辺形の問題を解決しましょう。

学習の流れ

2本の平行線間にあり、等しい底辺を有する三角形の面積が等しいということを学びました。今回の授業では、補助線を引いて、与えられた四角形と同じ面積を有する三角形を見つけるために、前回の授業の解答を用います。

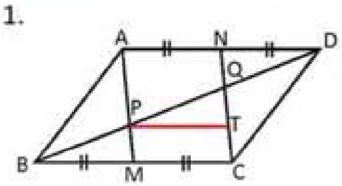
ねらい

Ⓟ・Ⓢ：前回の授業の解答を用いて、補助線を引いて、与えられた四角形と同じ面積の三角形があることを示しましょう。

Ⓡ：1では、指定された線分の長さを示すために、角と三角形について学んだことを用いましょう。

一部の設問の解答：

1.



BM = MC、仮定により、およびMC = PT、作図により、したがって、BM = PT ...(1)
∢PBM = ∢QPT; 平行線間の同位角により ...(2)

∢BMP = ∢MCT および ∢MCT = ∢PTQ; 平行線間の同位角により、したがって、∢BMP = ∢PTQ ...(3)
よって、ΔBMP ≅ ΔPTQ; (1)、(2) および (3)の二角夾辺相等の条件により。

したがって、BP = PQとなり、それぞれの長さは6となります。...(4)
ΔABM ≅ ΔCDN;三辺比相等の条件により、よって
AB = CD、AM = CNおよびBM = DN ...(5)

したがって、∢BMP = ∢DNQ、合同の定義...(6)
また、∢PBM = ∢NDQ、平行線間の内側の錯角により...(7)

したがって、ΔBMP ≅ ΔDNQ; (5)、(6)および(7)の二角夾辺相等の条件により。

したがって、BP = QD = 6、合同の定義により。

日付： **U6 2.11**

Ⓟ 四角形に、線分BCの延長に点Eを置くことで、三角形ABEが出来上がります。ΔABEが、四角形ABCDと同じ面積を有するためには、どの位置に点Eを置く必要があるか答えましょう。

Ⓢ **備考：**教科書の絵を見ましょう。

1. 対角線ACを描きましょう。
2. 頂点Dを通り、辺ACに、平行な線lを描いてください。辺BCの延長線上で交差する点Eを示してください。
3. 点Aから点Eまでの線分を描き、ΔABEを作図しましょう。

ΔDACの面積= ΔEACの面積、（平行線間にあり、かつ共通の底辺を有するため）。

四角形ABCDの面積 = ΔABCの面積 + ΔDACの面積。

ΔABE の面積= ΔABCの面積 + ΔEACの面積。

Ⓡ したがって、ΔABEの面積 = 四角形ABCDの面積 （ΔDACの面積 = ΔEACの面積。

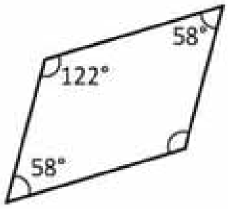
1. BP = QD = 6、（最初の設問の解答ですべての解答を見ましょう）。

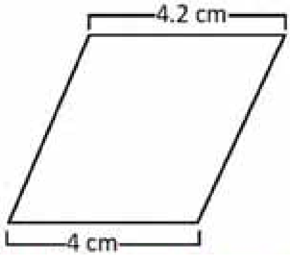
宿題： 練習帳143ページ

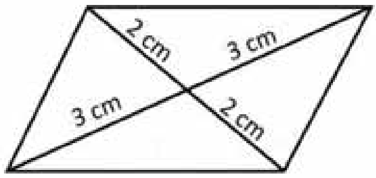
2.12 復習問題

1. 次の四角形のうち、平行四辺形がどれが答えましょう。このレッスンの授業6で学んだ条件のうち、どの条件を適用するか示しましょう。

平行四辺形　　平行四辺形ではありません。　　平行四辺形

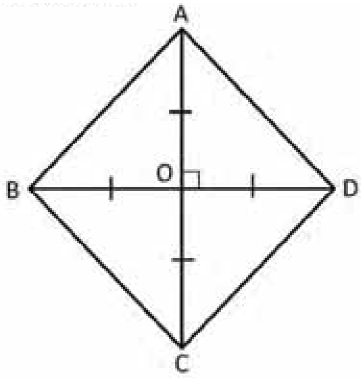




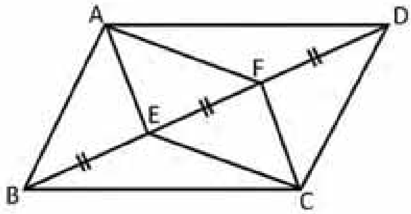


2つの隣接角は補角です。　　2つの対辺は等しくありません。　　対角線は中点で交差します。

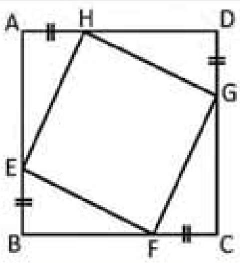
2. 対角線が中点で交わる等しい垂線の四角形が正方形であることを示しましょう。



3. 図の中では、点E および F は、平行四辺形ABCDの対角線BD上にあり、BE = EF = FDとします。
四角形AECFが平行四辺形であることを示しましょう。



4. ABCDは正方形で、示された辺は合同です。EFGHも同様に正方形であることを示しましょう。



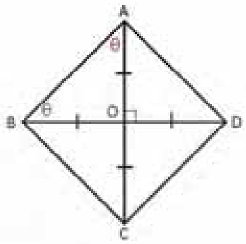
ユニット6

達成の目安

2.13 三角形と平行四辺形の性質と理論を用いて問題を解きましょう。

一部の設問の解答：

2.



DO = BO および AO は共有します。

∢BOA = ∢DOA = 90°.

したがって、ΔBOA ≅ ΔDOA、二辺比夾角相等により。
したがって、AB = DA （合同の定義） ...(1)

AO = COおよびDOは共有します。

∢DOC = ∢DOA = 90°.

よって、ΔDOC ≅ ΔDOA、二辺比夾角相等の条件により。
したがって、CD = DA （合同の定義） ...(2) BO = DO および CO は共有します。

∢BOC = ∢DOC = 90°.

よって、ΔBOC ≅ ΔDOC、二辺比夾角相等の条件により。
したがって、BC = CD （合同の定義） ...(3)
AB = CD = BC = DA; (1)、(2) および(3)より。

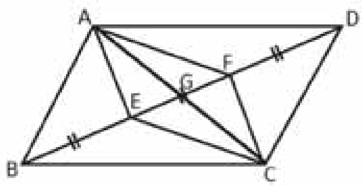
４つの三角形BOA、DOA、DOCおよびBOC が二等辺であるため、

8θ = 180°(4 – 2).

θ = 45°である時、8θ = 360°が成り立ちます。; よって、

∢A = ∢B = ∢C = ∢D = 90° = 2θ.

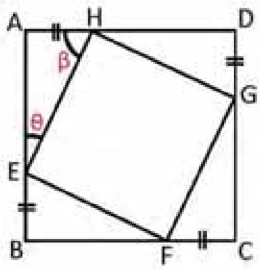
3.



GをAC と BDの交点とします。
平行四辺形の対角線の特徴から、AG = CGおよび
EG = BG – BE = DG – DF = FGとなります。

したがって、四角形AECFは平行四辺形になります。

4.

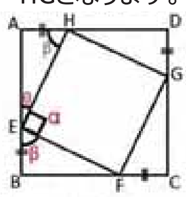


DA = AB
DH + HA = AE + EB; しかし、HA = EB。
よって、DH = AE ...(1)
DA = BC
DH + HA = BF + FC; しかし、HA = FC。

よって、DH = BF ...(2)
CD = DA
CG + GD = DH + HA; しかし、GD = HA。
よって、CG = DH ...(3)
AE = DH = BF = CG; (1), (2)および(3)より。
よって、ΔAHE ≅ ΔBEF ≅ ΔCFG ≅ ΔDGH、
二辺比夾角相等により。

ここで、EH = FE = GF = HGとなります。

$$\theta + \beta = 90^\circ$$
$$\theta + \beta + \alpha = 180^\circ$$
$$\alpha = 90^\circ$$

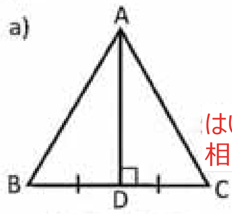


したがって、四角形EFGHは、それらの辺が等しく、それぞれの角が90°であるため、正方形です。

宿題：練習帳の144ページ

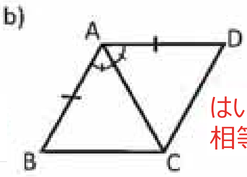
2.13 復習問題

1. 表示された情報に基づいて、示された三角形が等しいか等しくないかを答えましょう。解答を説明してください。

a) 

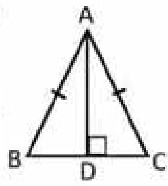
はい、二辺比夾角相等の条件により。

ΔABD および ΔACD

b) 

はい、二辺比夾角相等の条件により。

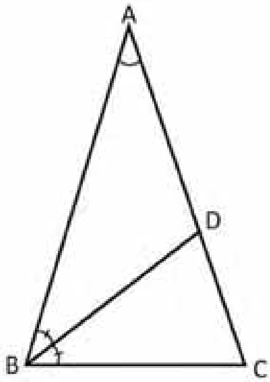
ΔABC および ΔACD

c) 

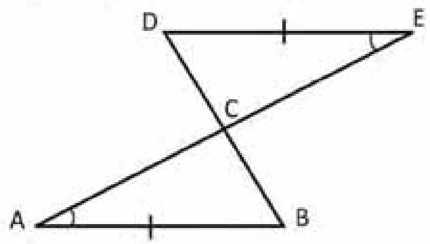
ΔABD および ΔACD

はい、直角三角形です。また、等しい隣辺と斜辺を有します。

2. ΔABCでは、AB = ACおよび∢CAB=36°となります。DBは、点Dで辺ACと交わる∢ABCの二等分線です。BC = BD = DAであることを示しましょう。

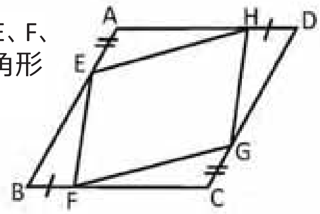


3. 次の図では、DE = AB および ∢DEC= ∢BACとなります。AD = BEであることを示しましょう。



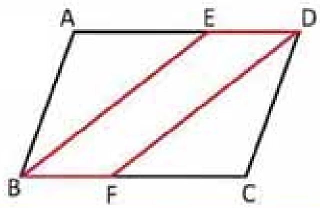
4. 平行四辺形ABCDに、それぞれ4本の辺AB、BC、CDおよびDAに4つの点E、F、GおよびHを描きます。そのためAE = CGおよびBF = DHとなります。四角形EFGHが平行四辺形であることを示しましょう。

[提案：ΔAEH ≅ ΔCGFであると推測して、AH = CFになることに注目しましょう。]



5. 図の四角形ABCDは平行四角形です。BEおよびDFはそれぞれ∢ABCと∢CDAの二等分線ということになります。

BE // DFであることを示しましょう。平行四辺形の条件3を用いましょう。



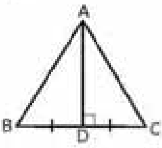
達成の目安

2.13 三角形と平行四辺形の性質と理論を用いて問題を解きましょう。

一部の設問の解答：

1.

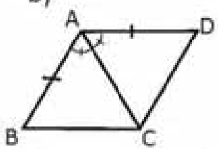
a)



$\measuredangle CDA = \measuredangle BDA = 90°$
BD = CDでADは共有します。

よって、二辺比夾角相等の条件によりΔCDA ≅ ΔBDAとなります。

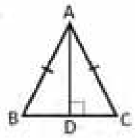
b)



$\measuredangle BAC = \measuredangle DAC$
AB = DAでACは共有します。

よって、二辺比夾角相等の条件によりΔBAC ≅ ΔDACとなります。

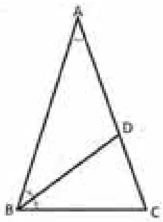
c)



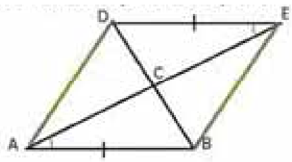
AB = ACでADは共有します。

よって、等しい斜辺と隣辺を有するためΔDAB ≅ ΔDACとなります。

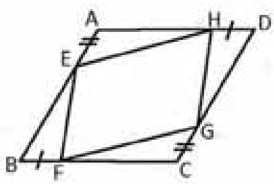
2. AB = ACであるため、$\measuredangle ABC = \measuredangle ACB$となります。
$\measuredangle ABC + \measuredangle ACB = 180° - \measuredangle A = 144°$;
よって、$\measuredangle ABC = \measuredangle ACB = 72°$ および$\measuredangle ABD = 36° = \measuredangle A$、二等分線の法則により、よって、BD = DA ...(1)
また、$\measuredangle BDC = 180° - 36° - 72° = 72° = \measuredangle BCD$、
BD = BC が得られることから...(2)
したがって、BD = DA = BC



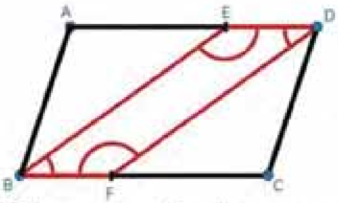
3. $\measuredangle DEC = \measuredangle BAC$であるため、DE // AB; また、DE = ABとなります。したがって、四角形ABEDは、2つの平行かつ等しい対辺を有するため、平行四辺形です。



4. AD = BC、平行四辺形の対辺であるため;
AH = AD − HD = BC − FB = CF。
仮定によりAE = CGと平行四辺形の対角であるため
$\measuredangle A = \measuredangle C$。
ΔAEH ≅ ΔCGFが得られることから。
したがって、四角形EFGHは平行四辺形です。



5.



$\measuredangle ABC = \measuredangle CDA$, 平行四辺形の対角であるため。

BEおよびDFは
$\measuredangle ABC = \measuredangle CDA$の二等分線であるため、
$\measuredangle ABE = \measuredangle EBC = \measuredangle ADF = \measuredangle CDF$ ... (1)
平行四辺形の対角であることにより
AB = CDとなります。...(2)
よって、二角夾辺相等の条件により、ΔABE ≅ ΔCDF。

三角形の合同の定義により、
$\measuredangle AEB = \measuredangle CFD$が成り立ちます。...(3)
$\measuredangle AEB + \measuredangle BED = 180°$ および
$\measuredangle CFD + \measuredangle DFB = 180°$; よって、
$\measuredangle AEB + \measuredangle BED = \measuredangle CFD + \measuredangle DFB$
(3)を用いると、$\measuredangle BED = \measuredangle DFB$が成り立ちます。...(4)

(1)および(4)から、二組の等しい対角を有するため、四角形BFDEは平行四辺形です。

宿題： 練習帳145ページ