エルサルバドル政府

教育省

算数 9

第1巻

教師用指導書

第二版

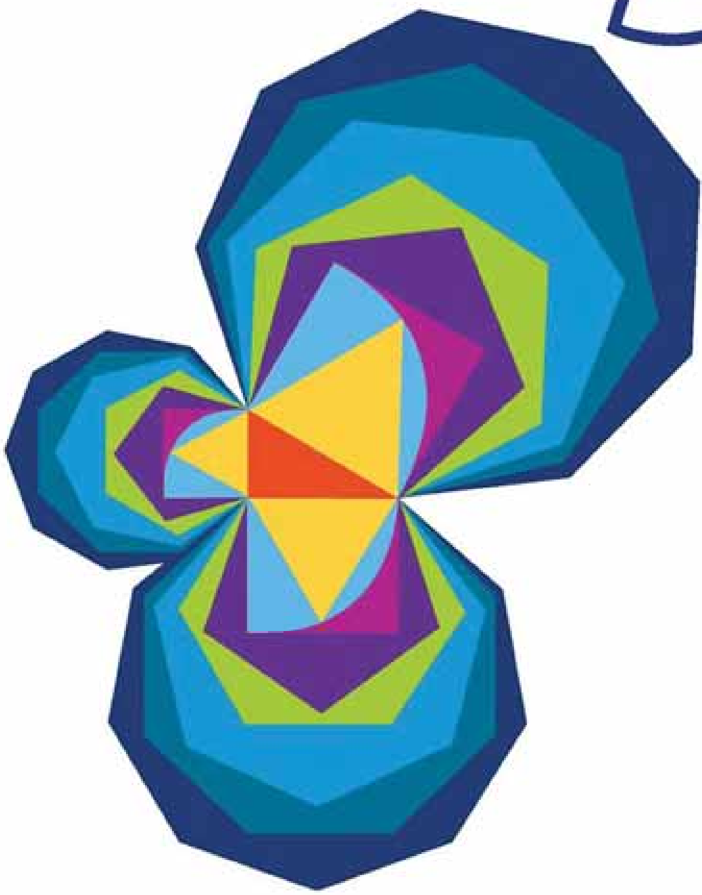
ESMATE

JICA

エルサルバドル政府

教育省

算数 9



第1巻

教師用指導書

第二版

Carla Evelyn Hananía de Varela
教育科学技術大臣

Ricardo Cardona Alvarenga
教育副大臣

Wilfredo Alexander Granados Paz
中等（第3サイクルおよび中等）教育局長
名誉代理

Janet Lorena Serrano de López
基礎教育局長
名誉代理

Santiago Alfredo Flores Amaya
予防社会プログラム局長
名誉代理

Gorka Iren Garate Bayo
科学技術イノベーション教育局長
名誉代理

Roberto Alejandro Rivera Campos
科学技術イノベーション教育課長

Félix Abraham Guevara Menjívar
科学技術イノベーション教育部長（数学）

Gustavo Antonio Cerros Urrutia
中等教育カリキュラム専門家部長

教育省の執筆及びレイアウトチーム

Ana Ester Argueta Aranda
Erick Amílcar Muñoz Deras
Reina Maritza Pleitez Vásquez
Diana Marcela Herrera Polanco
Francisco Antonio Mejía Ramos
Norma Elizabeth Lemus Martínez
Salvador Enrique Rodríguez Hernández
César Omar Gómez Juárez

デザイン及びレイアウトの校正

Francisco René Burgos Álvarez
Judith Samanta Romero de Ciudad Real

文体修正
Mónica Marlene Martínez Contreras
Marlene Elizabeth Rodas Rosales
Ana Esmeralda Quijada Cárdenas

国際協力機構（JICA）を通じた日本の技術協力

教育的見地から表紙の図では、辺の数が異なる多角形を用いてピタゴラスの定理と図形の相似を表現しています。

372.704 5
M425 算数9［電子資料］：第1巻、教師用指導書／
監修 Ana Ester Argueta Aranda、Erick Amilcar Muñoz Deras、Reina Maritza Pleitez Vásquez、Diana Marcela Herrera Polanco、Francisco Antonio Mejía Ramos、Norma Elizabeth Lemus Martínez、Salvador Enrique Rodríguez Hernández、César Omar Gómez Juárez。
-- 第2版 --
サンサルバドル、エルサルバドル：教育省（MINED）、2019年。
電子資料1件、（256ページ：図解入り、28 cm -- （Esmate）
電子データ（1ファイル：pdf、61.8 MB）。--
www.mined.gob.sv/index.php/esmate.
ISBN 978-99961-348-3-8（電子書籍）
1. 算数－教科書。2. 算数－練習、問題、など。3. 初等教育－教科書。
I. Argueta Aranda、Ana Ester、共著。II. タイトル

教師のみなさん

心からご挨拶を申し上げ、エルサルバドルの全国民のために重要な仕事をされていることに感謝します。

教育科学技術省（MINEDUCYT）は初中等教育算数・数学指導力向上プロジェクト（ESMATE）を通じて、みなさんのために算数・数学科目の教師用指導書を作成しました。この指導書は日常の指導活動で重要なツールとなるでしょう。

この資料は、当科目の授業を展開する方法を具体的に指導し、その結果エルサルバドルの生徒たちの学びを大きく向上させることを主な目的としています。

この指導教本は生徒用の教科書に対応する授業内容の提案となっていることから、算数学習プログラムの規程を具体的に実現するものであると言えます。

みなさんがこの資料を最大限に活用し、私たちの愛する国の発展に貢献し続けるべく、全力で努力し献身されると確信しています。

敬具

Carla Evelyn Hananía de Varela
教育科学技術大臣

Ricardo Cardona Alvarenga
教育科学技術副大臣

目次

I. はじめに

本指導書（GM）は、算数科の指導プロセスを改善する目的で行われた、教育省の初中等教育算数・数学指導力向上プロジェクト（ESMATE）により、他の一連の教材と合わせ作成されたものです。

第二版には上下巻があり、それぞれには、国家教育システムに所属して3年目を迎える教師によるアドバイスや気付き点が盛り込まれています。

この指導書では、生徒の学力を向上させるために、学習指導を行うにあたって考慮すべき全てのポイントを、出題する問題の解き方をベースに詳しく解説しています。この指導書を活用することで、教師は効果的な授業を行うことができ、さらに教科書（LT）や練習帳（CE）を最大限に活用することができます。

この指導書を活用することで、主に以下の目標の達成を目指します。

1. 課とユニット毎に示される指標や単元の内容に沿った授業の進め方を提案すること。
2. 教師および生徒が内容を理解するのに役立つような具体的かつ適切な指導案を提示すること。
3. 生徒が、算数・数学的学力をつけるために必要な目安を達成できるように具体的な指導案を提示すること。

教育省は、これらの教材を適切に用いることが教師の指導力向上に役立ち、また生徒の学力向上にも大いに役立つと確信し、義務教育課程でこれらの教材を使うことを推奨しています。そのため以下にこの教材を用いる上で大切なポイントをまとめます。

1. 算数学習の重要性： 数学的思考を発展させることで、生徒たちは、複雑な問題を解いたり、問題の状況を分析したり、創造力を働かせたり、批評や応用も含め、実用主義的思考や論理的思考を身につけることができます。数学的知識を身につければ、我々の日常生活にはあらゆる場面で科学が関わっていること、また身近にある物を使って、日常的に直面する様々な問題を解決することができることに気付くことができます。ですので数学的思考力は、一市民として生活を送る上で必要不可欠な知識であり、自分の属するコミュニティーの持続可能な開発を可能にする能力でもあるのです。

2. 教師の基本的役割と生徒の主体性： 生徒の教育において教師が果たす役割は非常に重要で、教育成果を出すためには、その資質が問われます。そこで、あくまで授業の主役は生徒自身であることをふまえ、各生徒の学習到達度に合わせ、適宜、教師が使える指導支援ツールとして用いることができるように、これらの教材が作成されました。主体性は各授業に学習指標の達成を設定することで引き出すことができます。これらの指標の達成が、ユニット相応の学力を身につけ、既習の知識も使って簡単な問題から難しい問題まで正しく解けるようになるための「ステップ」となります。この指導書は、達成の目安の知識を有し、内容を理解し、実際にその内容にそって各授業を行うことを前提としています。

3. 授業の流れと正しい学び体験： 生徒の主体性は以下にあげる授業の流れの中に盛り込まれています。

- 冒頭の設問
- 冒頭の設問の解き方
- まとめ
- 問題及び練習問題

この流れになる理由は授業の各要素のねらいで解説しています。生徒たちが教師のサポートを受けて思考力を磨き、必要な学力を身につけることができるように、このような流れに沿って授業を行うことを推奨します。

4. **学校運営との完全調和**：これらの学習教材の効果を最大限に引き出すために、もう1つ考慮すべき基本事項に、学習をするのに適した環境を整えるという問題があります。これは、行政と教育機関の運営に密接にかかわるテーマです。この管理については、教師が年間を通して実施する授業の時間数が大きく関わってきます。この指導書にある授業を実施して学習内容の目安を達成するためには、年間に少なくとも160時間の授業を行うことが必要になります。

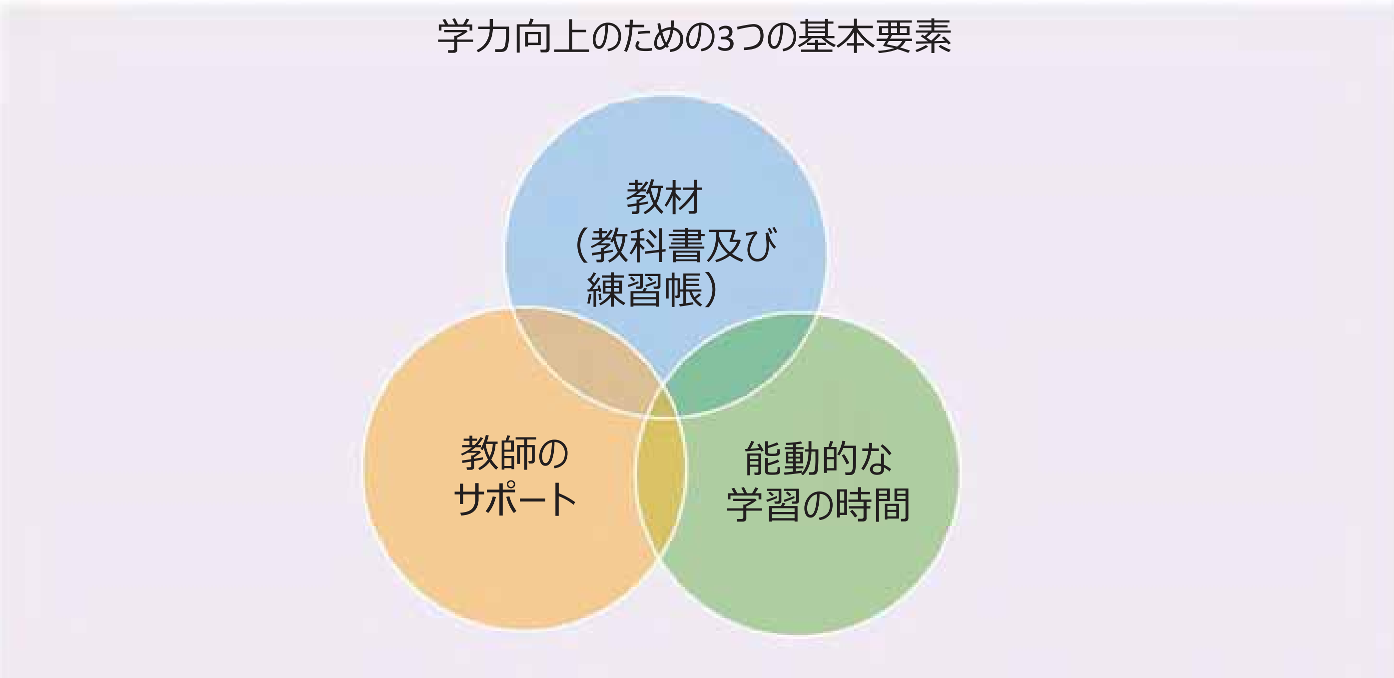
5. **練習帳を活用した生徒たちの自宅学習**： 知識や学習内容を身につけるのは授業中のみとするのではなく、家庭学習の時間もそれにあてるべきです。そのため、生徒が算数の授業で学んだ知識と理解をより深めることができるように練習帳（CE）を用いて問題及び練習問題に取り組めるようにしています。このように家庭でも授業の続きに取り組めるようにすることで、日常的に知識を深めるのに相応しい家庭環境が生まれるきっかけになればという想いも込められています。

この指導書の中でも特に**IV章は意義があります。指導書**の構成の中で、授業の各要素がなぜ大切で何のために掘り下げるかを解説している部分は、特に重要です。さらに、生徒たちが問題に取り組む上でつまづくと思われる部分についても触れており、教師がその生徒のつまづきをうまく利用して指導できるようにアドバイスしています。そうして教師が各要素のねらいをしっかり受け止めることで、各授業における学習指標の到達度が改善すると考えられています。また、この部分では、各授業の到達の目安と授業で扱った問題に対応する各ユニットのテストの例を載せています。 これは非常に使いやすく、プロセス全体を通し生徒の学習理解度を測るのに適しています。

もう1つの重要な意義を持つ章が**V章になります。問題の解き方をベースに算数の授業を行う方法を提案しており、**ここでは、学習の中で生徒たちが主に取り組むべきことや教師のサポートの仕方、また授業のすすめ方など授業の流れの各要素を詳しく解説しています。さらに、生徒の主体性とそれをスムーズにサポートする教師の役割に関し、具体的な方法を提案している点も注目に値します。

本書を含む教材の開発には、全国から実際に生徒の教育や指導に携わった経験を持つ多くの教員が参加しており、彼らの多大なる貢献により、これらの指導書の各要素が作成されました。この教材開発が参加型であったように、この教材の活用に関しても、各教師が生徒の学習に必要だと思う部分を適宜補いながら活用するべきで、あくまで柔軟に扱える改訂可能な教材として活用することが大切です。

これらの教材を用いる目的は、将来我が国を担うことになる生徒たちの学力の向上であり、ここで掲げる提案とは別に、この目的に関する要素を以下に挙げます。



これらの３つの要素が最も大切な要素です。：教科書と練習帳からなる**教材、**授業中および家庭学習における**能動的な学習の時間**、そして学習を進める上での教師の**サポート**や**役割**です。

教材

学習効果や効率を良くするには、生徒たちの理解力に対し、学習の流れと問題難易度が適切であること、つまり、これらの教材の内容が学術的にも教育的にも十分である上に、さらに理解しやすいものであることが重要となります。

ここで述べている最初の要件を満たすためには、算数科で身につけるべき教養は教育省が定める基準を確実に満たすものである必要があります。二つ目に掲げた要件については、教科書の内容がエルサルバドルの学生たちの学力にできる限り近いものである必要があります。

能動的な学習の時間

この指導書が出来上がる前段階として、教育省が学校教育の調査を行った際、その結果が満足いくものでなかったという点に触れておかなければなりません。その調査では、能動的な学習の時間が十分でなかったことが確認され、その結果、生徒の能力が十分に引き出せなていないことが分かりました。そのため、今回作成されたこの教科書では、教師に対し、生徒たちが自分の力やクラスメートと相互学習することで能動的に問題に取り組む時間を少なくとも20分は用意すべきであると提案しています。

能動的な学習

1. 個別形式
   学力がつくのはどの時点ですか？
   生徒が自分で教科書を読んでいる時や授業用ノートを使って自力で問題を解いている時が能動的な学習に相当します。反対に、一般的には、教師の説明を生徒が一方的に聞いている時間は受け身学習となるため、能動的学習に比べ学び力が劣るとされます。

   その理由から、教師には生徒一人一人がそれぞれ個別に能動的に学習する時間を作るように勧めています。

2. 相互学習形式
   生徒全員が学習する必要がありますが、実際の授業では、教師が一度に生徒全員に対応することは難しく、一人もしくは二人の生徒に対し指導している間、他の生徒の指導ができない場面が多々みられます。

他に、生徒全員が必要なサポートを受けられる方法はないのでしょうか？
生徒同士で相互学習（または交互学習）させるべきです。相互学習には多くのメリットがあります。まず、ペアで行う学習は、もし片方の生徒が内容を理解していなければ、時間を無駄にすることなく（教師が対応してくれるのを待つ必要なく）もう一方の生徒に聞けばよいというメリット、二つ目は、クラスメートに説明する側の生徒も声に出して説明することで、自分の理解を深めることができるというメリット、三つ目は、教師が個別に対応でてきていない生徒たちにとって、知りたいことを聞きたいときに聞けるというメリット、そして四つ目は、教室に共生の雰囲気が生まれるというメリットです。

したがってまず最初に個別形式の取組みを行い、その後相互形式の学習をもってくることを勧めます。

各授業では、生徒がそれぞれ教科書のページにある問題や練習問題を解くのに、（少なくとも）20分与えるのが理想です。この個別形式の学習（もしくは相互学習）で、生徒たちに学ぶ力がついて、学力があがり、それにより、出題される問題に対する理解度も上がることなどが期待されます。

この点について最後に、教科書に加え、練習帳も、家庭学習で最低20分の能動的な学習時間を使って行うように用意されていることを述べておきます。それぞれ能動的な家庭での20分の学習と授業での20分の学習をあわせ、それを160日間続けると、以下が達成されることになります。

（20分 + 20分） × 160日 = 学力の向上

我が国の全ての教師はこの点を意識すべきでしょう。

サポートと役割

教育省は教師の役割についての解釈を、**教えること**から**学習のサポート**へと切り替えることを提案しています。従来、教育課程においては、生徒たちが何を得ることができるかに焦点をあてる代わりに、 **教師がすべきことは何か**という問に対する答えを模索してきました。学びに着目することが真の努力であり、教師の仕事に対する評価の基本になります。

教師は学力を高めることに注力し、生徒に学力がついたかどうか、その結果を常に注視すべきです。

教科書内の1授業の構成

以下は、ユニット2の授業2.7のページです。

課の番号を示しています。

授業の番号を示しています。

このアイコンが出てくるときは、生徒は問題を解くのに電卓を使ってよいことを示しています。

授業では、まず最初に生徒に対し問題を提示して、その問題をどのように解くかを考えさせる必要があります。そのようにして授業で扱うテーマを導入することになります。

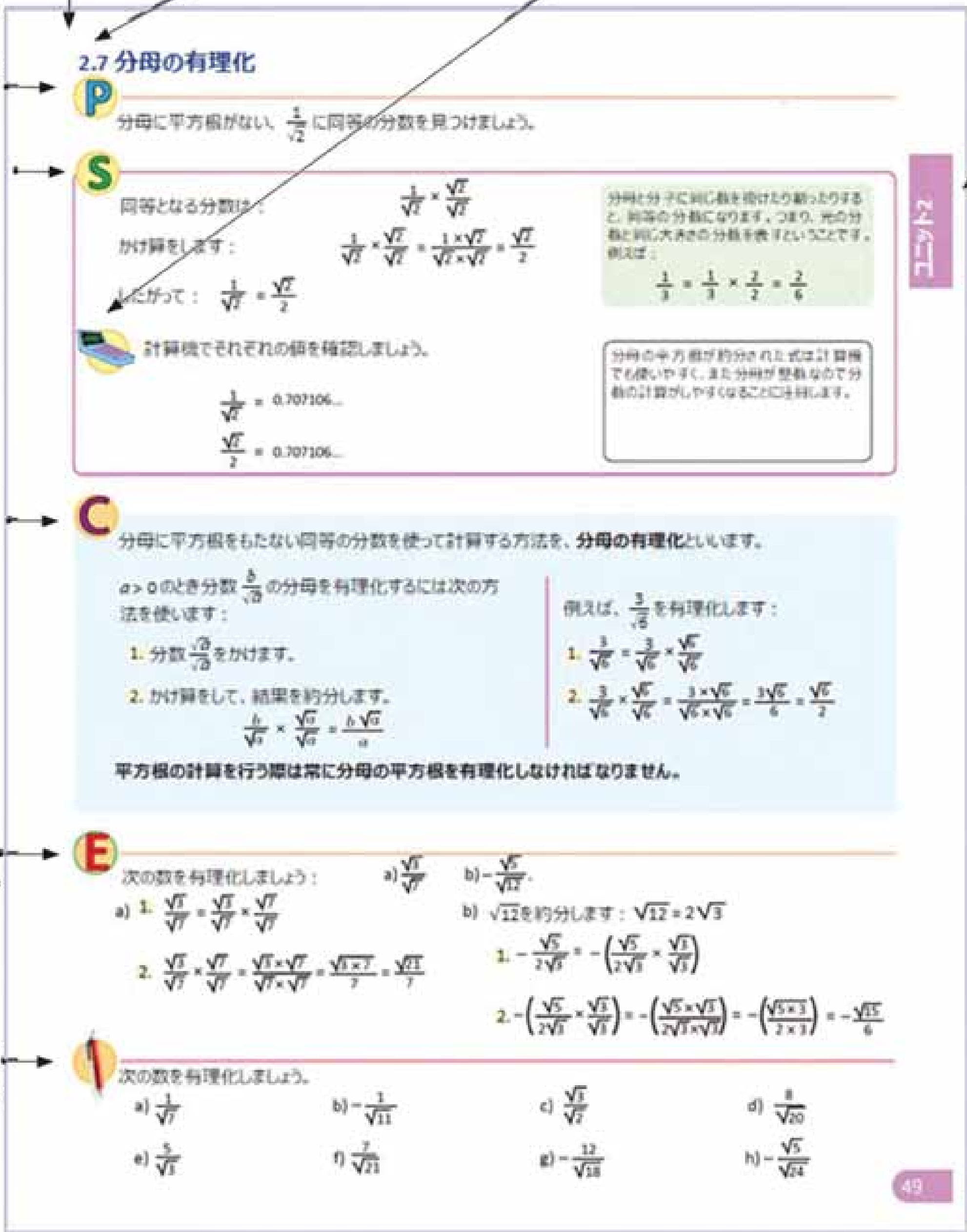
授業の属するユニットを表示しています。

授業ではその後、教科書にのっている1つ以上ある解き方を扱います。

ここでは冒頭の設問とその解き方を数式を使って表わし、学習内容をまとめています。

学習内容の定着を図るために、必要な場合に追加問題が出されています。

生徒が学習内容の復習ができるように、問題や練習問題が出されています。



2.7 分母の有理化

P

分母に平方根がない、$\frac{1}{\sqrt{2}}$ に同等の分数を見つけましょう。

S

同等となる分数は： $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

かけ算をします： $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

したがって： $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

分母と分子に同じ数を掛けたり割ったりすると、同等の分数になります。つまり、元の分数と同じ大きさの分数を表すということです。例えば：

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{2}{6}$

計算機でそれぞれの値を確認しましょう。

$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707106...$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707106...$

分母の平方根が約分された式は計算機でも使いやすく、また分母が整数なので分数の計算がしやすくなることに注目します。

C

分母に平方根をもたない同等の分数を使って計算する方法を、**分母の有理化**といいます。

$a > 0$ のとき分数 $\frac{b}{\sqrt{a}}$ の分母を有理化するには次の方法を使います：

1. 分数 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$ をかけます。
2. かけ算をして、結果を約分します。

$\frac{b}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{a}$

例えば、$\frac{3}{\sqrt{6}}$ を有理化します：

1. $\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$
2. $\frac{3}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{3 \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

平方根の計算を行う際は常に分母の平方根を有理化しなければなりません。

E

次の数を有理化しましょう： a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ b) $-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}}$.

a) 1. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$

2. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3 \times 7}}{7} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

b) $\sqrt{12}$ を約分します： $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

1. $-\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = -\left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$

2. $-\left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = -\left(\frac{\sqrt{5} \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}}\right) = -\left(\frac{\sqrt{5 \times 3}}{2 \times 3}\right) = -\frac{\sqrt{15}}{6}$

次の数を有理化しましょう。

a) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ b) $-\frac{1}{\sqrt{11}}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ d) $\frac{8}{\sqrt{20}}$

e) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ f) $\frac{7}{\sqrt{21}}$ g) $-\frac{12}{\sqrt{18}}$ h) $-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{24}}$

ユニット2

49

補足情報： 教科書には、予備知識やヒント、算数の歴史に関する小話など、学習をスムーズにする要素が盛り込まれ、それぞれ色を変えて紹介されています。

予備知識	ヒント	小話

授業配分： この教科書は8ユニットで構成されており、各ユニットには複数の課があり、それぞれの課は複数の授業で構成されています。各授業のタイトルについている番号は、最初の番号が何課であるかを示し、二つ目の番号が何番目の授業であるかを示しています。

さらに、それぞれのユニットまたはそれぞれの課の最後に、そのユニットもしくは課で学習した全てのテーマを網羅した問題がいくつか掲載されていて、**「復習しよう」**の名前がついた授業となっています。

1. 年間計画の作成

学期	月	ユニット （時間）	GM のページ （教科書の ページ）	内容
一学期	1月 2月 3月	ユニット1：多項式の乗法 （29）	29～96 （1～32）	• 単項式かける二項式 • 二項式かける二項式 • 二項式かける三項式 • 三項式かける三項式 • $(x + a)(x + b)$型の展開 • 二項式の二乗 • 二項式の和と差の積 • 代入を使った乗法公式の展開 • 乗法公式の組み合わせ • 三項式の二乗 • 数値と式の計算 • 多項式の因数分解 • 共通因数 • 三項式$x^2 + (a + b)x + ab$の型になる因数分解 • 完全平方になっている三項式の因数分解 • 因数分解（二乗の差） • 可変数への置き換えを利用した因数分解 • 連続した因数分解 • 因数分解を用いた数式の計算
	3月 4月	ユニット2：平方根（24）	97～148 （33～ 56）	• 平方根の意味と記号 • 根号のついた数の表現 • 数の平方根 • 平方根の大小関係 • 有理数と無理数 • 少数から分数への変換 • 実数の定義 • 平方根の乗法と除法 • 根号を使わない数の表し方 • 平方数でない平方根の約分 • 約分を用いた平方根の乗法 • 分母の有理化 • 約分と有理化を用いた平方根の加法と減法 • 実数の問題の解き方 • 実数の問題の解き方
	4月	ユニット3：二次方程式 –2学期へと続く–（4）	149～160 （57～ 61）	• 二次方程式の意味と定義 • 二次方程式の解法 • 方程式 $x^2 = c$ の解法 • 方程式 $ax^2 = c$ の解法
二学期	4月	ユニット3：二次方程式—つづき–（3）	161～166 （62～ 64 ）	• 方程式 $(x + m)^2 = n$ の解法 • 方程式 $x^2 + bx = 0$ の解法 • 方程式 $x^2 + 2ax + a^2 = 0$ の解法

学期	月	ユニット（時間）	GM のページ（教科書のページ）	内容
二学期	5月	ユニット3：二次方程式 –つづき–（14）	167- 199（65～78）	•方程式 $(x + a)(x + b)$ の解法 •面積を使った二次方程式の解法 •正方形を完成させる方程式の解法 •方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解法 •二次方程式の一般公式 •二次方程式の一般公式の応用 •二次方程式の判別式 •問題の解答における判別式の使用 •二次方程式を用いた問題の解決
	5月／6月	ユニット4：2次関数の式 $y = ax^2 + c$（15）	201～238（79～96）	•2乗に正比例する関数 •関数 $y = x^2$. •関数 $y = ax^2$; $a > 1$, $0 < a < 1$. •関数 $y = -ax^2$; $a > 0$. •関数 $y = x^2$ の特徴 •$y = ax^2$ の変動（最大値と最小値） •関数 $y = ax^2 + c$; $c > 0$, $c < 0$. •二次関数の方程式を求めるための最初の条件
	6月／7月	ユニット5：相似な図形（26）	239～306（97～126）	•線分の比 •比例と線分 •相似な図形 •相似な図形の特徴 •相似な図形の作成 •相似条件 LLL, AA, LAL. •中点連結定理 •四角形に内接した平行四辺形 •平行線を利用した相似 •線分の比からの平行 •地図上の2点間の距離 •相似多角形の面積 •相似する立体の体積 •三角形の相似を利用して解く問題
三学期	7月／8月	ユニット6：ピタゴラスの定理（17）	307～342（127～142）	•直角三角形の斜辺の計算 •ピタゴラスの定理 •直角を作る辺の長さの計算 •特別な三角形 •ピタゴラスの定理の逆 •錐の高さと体積の計算 •四角錐の高さと体積の計算 •直方体の斜線の長さの計算 •六角形の面積の計算 •ピタゴラスの定理の応用
	8月／9月	ユニット7：円周角と中心角（7）	343～359（143～150）	•円の部位 •円周角の定義と大きさ •円周角の定理 •合同な弧

学期	月	ユニット（時間）	GM のページ（教科書のページ）	内容
三学期	9月	ユニット7：円周角と中心角（9）	360～380（151～158）	• 円に対する接線の作図 • 円の弦と弧 • 三角形の相似への応用 • 円上の四つの点 • 接線と弦のなす角
	9月 10月	ユニット8：ばらつきの測定（12）	381～430（159～180）	• 散らばったデータの範囲 • 平均値との偏差 • 散らばったデータの分散 • 散らばったデータの偏差 • データのまとめ • 算術平均 と一連のデータの範囲 • 一連のデータの分散 • 標準偏差 • ある変数の標準偏差、プラス定数 • ある変数をある定数で掛けた時の標準偏差

決められた内容を全て行うためには、表示されている計画を達成する必要があります。

2. ユニット番号

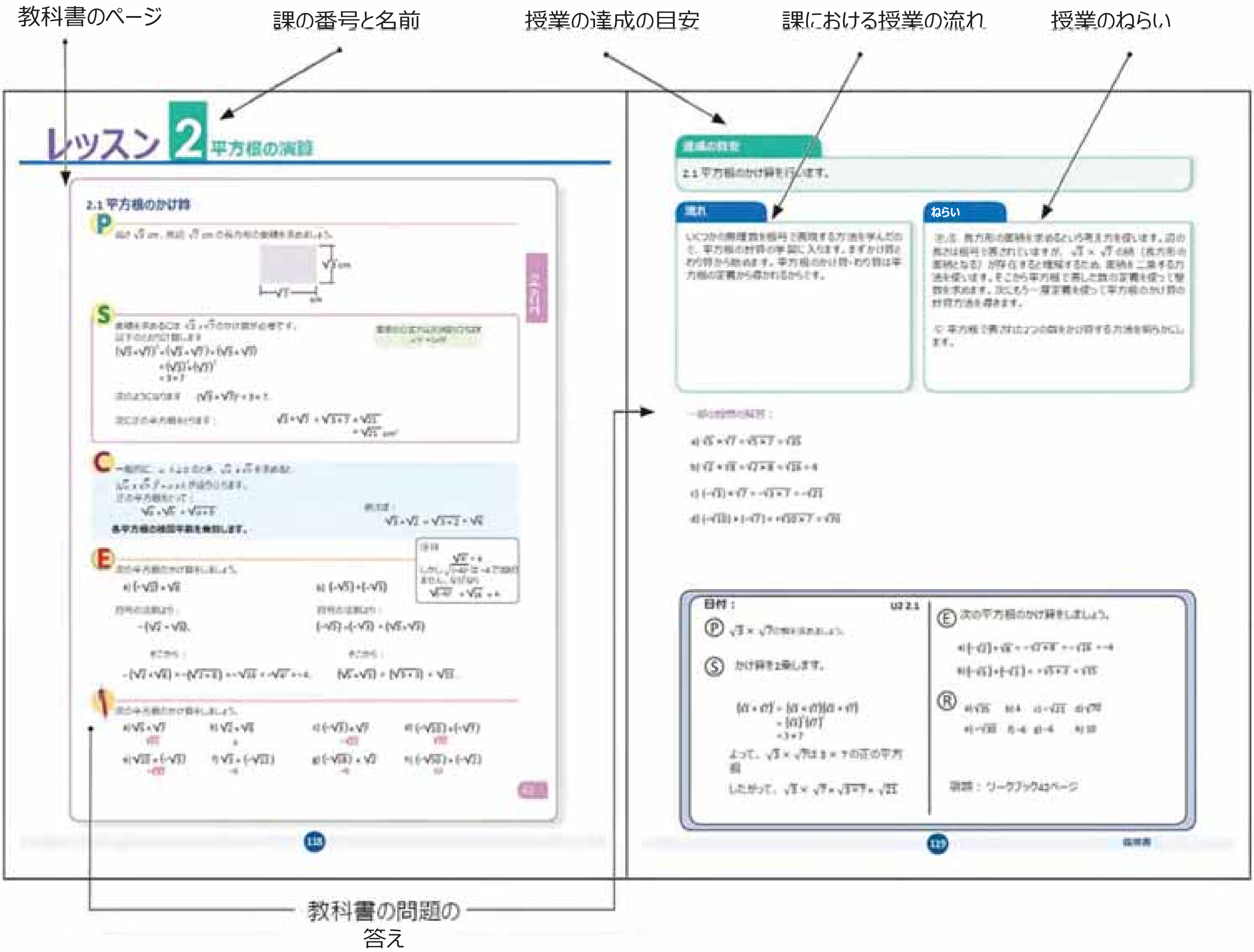
a) このユニットのねらい：このユニットを終えた時点で生徒たちが身につけている学力を示しています。
b) 関連および発展（前学年までと次年度以降）： 生徒が予備知識を学習した学年、また今後この内容を含む学習をする学年が示されています。
c) ユニット学習計画：各授業の内容が示されています。
d) 各レッスンの要点：ユニット毎の課で扱う重要事項が示されています。

3. ユニットテスト

生徒たちの理解度と教師によるユニット目標到達度を測るためのテストの例を紹介します。正解率が悪い問題があった場合は、教師はどのようにその問題を改善するかを考え、その正解率の低さが次の学習の妨げとならないように配慮する必要があります。このように、教師はこのテスト結果を踏まえて学内あるいは他校の教師仲間と議論することができます。

4. 指導書のページの要素

指導書の第二版で新しくなったのは、教師が授業を行いやすいように、教科書と板書計画の載っているページの表示が大きくなった点です。



授業によっては、問題を解く上でヒントになる小話や教師向けの重要情報が盛り込まれています。それらは以下のような図で示されています。

教師にとって大切な情報

1. 授業展開に関する教員向けアドバイス

以前の学習プログラムと同じく、この新バージョンにおいても、算数の授業では、問題の解き方に焦点をあてて、それをもとに授業展開する方法を提案しています。この方法で行われる授業では、学びのプロセスの主体は生徒となります。そのため、この方法では生徒たちが自ら教材や出題された問題を元にどの方法を使うかやその手順などを考えます。このプロセスにおいて、教師が果たすべき主な役割は、生徒たちの学習に寄り添うことです。そのためには教員は以下にあげる手順を守る必要があります。

手順	学びのプロセス（生徒）	学習サポートのプロセス（教師）	サポートする上での重要注意事項
1	宿題の問題の答えの確認と予備知識の確認	宿題の問題の答え合わせをして、練習帳の各問題群の最初の問題を正しく解くことができていることを確認します。	この手順にかける時間は最大3分とします。
2	授業の冒頭の設問を各自で解く	授業の冒頭の設問を読むように指示し、そのテーマに関する生徒たちの理解度を把握してから、それぞれ各自で問題を解いてみるように指示を出します。	- 生徒たちが冒頭の設問を解いている間、教師は教室内を巡回し、生徒の進み具合やつまづき具合を確認します。 - もしつまずいている生徒がいた場合は、教科書にある解き方を参照するよう生徒に促します。 - この手順にかける時間は最大6分とします。
3	クラスメートとの相互学習	クラスメート同士で解き方や分からない点を確認しあうことでしっかり学習します。	- まずは二人のペアをつくって取組み、少しずつグループ人数を増やして最終的に4人までのグループで取り組ませます。 - 分からない場合は、教科書に掲載されている解き方を参照するように促します。
4	解き方と授業のまとめの共有化	解き方と授業のまとめを発表するよう促します。	もし必要な場合は、解き方を説明するか、全体で解き方を確認し合うようにもっていきます。

5	問題と練習問題コーナーの一つ目の設問を解く（能動的学習）	問題コーナーの最初の問題を解くように指示します。	もしすでに一つ目の設問を解き終えた生徒がいた場合は、残りの設問も解くように伝えます。
6	一つ目の設問の答え合わせ	最初の問題について、生徒全員で答え合わせをして、答えがあっていることを確認します。	- 生徒たちが取り組んでいる間、教師は教室内を巡回し、生徒全員の最初の設問の答えを確認します。 - 難易度によっては、教師が解き方まはた答えを説明しても構いません。
7	残りの問題の取組み	残りの問題を解くように指示を出します。その後答えがあっているかを確かめて間違えた問題については再度チャレンジするように指導します。	早く終えた生徒たちには、クラスメートをサポートするように伝えます。
8	家でする宿題をメモします。	練習帳の宿題範囲を指定するか、教科書内でやり残した問題を宿題にします。	もし教科書にある授業用の課題を全て終えることが出来なかった場合、生徒たちに対し、宿題として出しても構いませんが、他の宿題の分量を考慮する必要があります。

生徒たちの学力を高める手段として出しているので、最低20分の能動的学習時間を与えなくてはなりませんし、それに関しては、これまでの手順、特に手順2、3，5，7ができている場合は、問題ないと思われます。

2. 学習を支援する上で考慮すべき重要なポイント

a. 適切な時間配分

学習プログラムには、達成の目安とそのカリキュラムで指定されている授業時間数が示されています。プログラムにおいては、1つの授業は45分で構成され、年間200授業相当の時間数が設定されています。この枠にそって、その時間内で教科書にある全ての内容を学習できるようにする必要があります。この点については、与えられた時間に対する学習の効率化が必要となってきます。45分で目安を達成することは容易ではありません。したがって、以下に学習をスムーズにすすめるテクニックの一部を紹介します。

■ 生徒の机の配置

生徒の机の配置は授業の内容によって変わることもありますが、以下にあげる理由により算数の授業では生徒たちが全員黒板に向かって座るように、基本的に机は黒板に向かって縦に並べることを推奨します。

a. 生徒たちの学習状況を確認するために巡回しやすい
b. クラスメートとの相互学習がしやすい
c. 生徒が黒板を見やすい

■ 授業を始める前の教科書の配布

教室内では授業を受ける態度に関する規程がありますが、それにもう1つ規程を足す必要があります。授業が始まる前に授業で使う必要な道具を用意しておくことを生徒に伝えます。例えば、三年生の教科書は、使った後学校で保管します。このようにすることで、教材の痛みを少なくすることはできますが、逆に授業の開始時に教材を配布する時間がかかってしまいます。そのため、この規則を作ることで、一部の生徒に教科書配布係りを割り当てて、その生徒が責任をもって授業開始前に教科書を配布するようにすることができます。

■ それで浮いた時間を予備知識の整理や復習に充てることができます。

授業時間は限られており、各授業にはその授業で生徒が到達すべき目安が設定されています。もし最初の予備知識を整理する段階で3分以上かかってしまった場合、おそらく時間が足りなくなって目安を達成することは難しくなると思われます。そしてその遅れが次の授業の遅れを招き、その結果、その年に履修すべき学習プログラムの内容を全て終えることができなくなる可能性がでてきてしまいます。

もし冒頭の予備知識を整理する段階でつまづいた場合、多くの場合短時間で内容を思い出すのは難しく、逆に予備知識の整理にもっと時間をかける必要がでてきます。たとえば、3年生では、たいてい基本的な計算でつまづく生徒がいますが、このつまづきをなくすには、もっと問題を解くという時間のかかる作業が必要になります。ですので、予備知識の整理をする際は、教師はその日の授業の問題が解けるように、その部分ではヒントを出すことが求められ、それはあくまで予備知識の整理であってその授業の主目的ではないことを常に意識しなくてはなりません。

■ 各自が授業の冒頭の設問に取り組む時間

1.　授業展開に関する教員向けアドバイスに定めているようにこの時間は6分間とるべきです。多くの場合、生徒たちは個別に取り組む中で、次に何をすればよいか分からない場合、単純に教師の次なる指示を待とうとします。その場合、生徒同士で確認し合うように、相互学習を指示するのが良いでしょう。

■ 時間不足で授業内容を全て網羅できない場合

時間が足りなくなって授業時間内に全てを終えられない場合もあるでしょう。別の授業で扱うことにする教師もいれば、宿題にする教師もいます。別の授業で扱う場合、多くの場合指導計画の遅れを生じさせます。また宿題にする場合は、生徒たちには家庭学習用に練習帳の問題があるので、宿題が大量になってしまう場合があります。ですので、それらの手つかずになった問題をそのままにするか、テストの事前整理課題として扱うか、早く終えた生徒にさせるかなどは、各教師の裁量に負かすのがよいでしょう。

■授業時間外の校内学習の習慣づけ

時には十分に学習内容をまとめあげる前に授業時間が終了してしまうことがあります。そのような場合、宿題として課す以外に、学校で授業時間外の時間を有効活用させる方法もあります。学校の授業時間には延長時間はありませんが、実際には使える時間があります。例えば、教師が授業前に来客対応や緊急の用で授業開始が遅れたり、あるいは一日不在になる場合、その時間をあてたり、また45分かからず授業が終わった時など、そういう時間を使って、教科書で手つかずとなっている問題に取り組ませるのが良いでしょう。主に、間違い易い基本的な内容の問題を解く力をつけることに多くの時間を割くのがよいでしょう。

■解いた問題は全てあっているか答え合わせをしなくてはなりません。

生徒が解いた問題を全てチェックするのは、とても時間のかかる作業で決して容易ではありませんので、何か他の方法をみつけなくてはなりません。そのためには、生徒たちが二つの習慣を身につける必要があります。

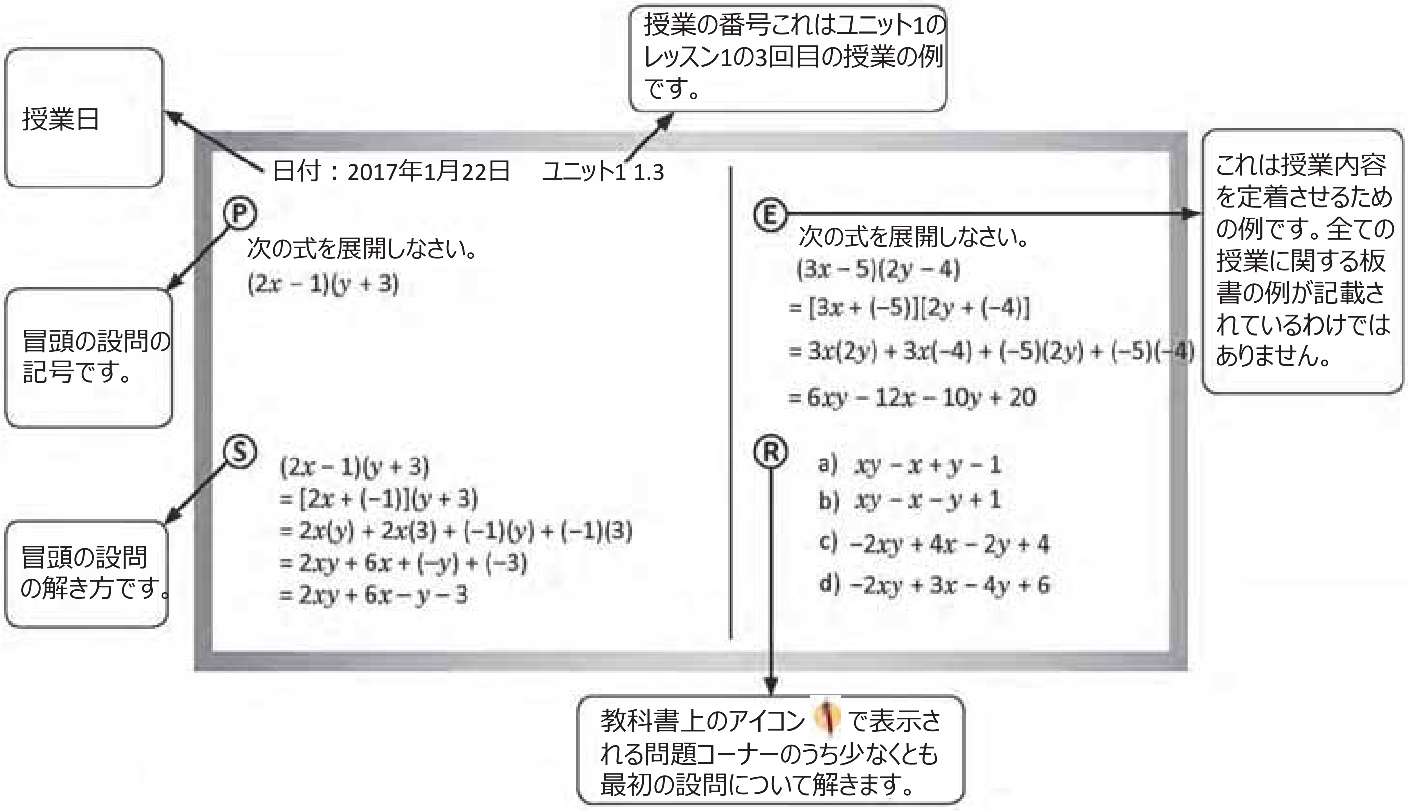
1. 自分で答え合わせをする習慣
2. 間違えた問題をもう一度解いてみるという習慣

生徒が最初の習慣を身につけるには、教師が口頭で答えを確認する方法と黒板に書いて答え合わせをさせる方法があります。またその際、生徒同士でノートを交換し、お互いに答え合わせをし合うという方法もあります。二つ目の習慣については、生徒たちが分からないままにならないという利点があり、また、間違えても努力すればよいという人格形成の上で大切な指導にもつながり、本人の学習意欲を引き出す効果も期待できます。

以下の点は時間管理には直接的には関係ありませんが、学習のプロセスにおいて教師のサポートをスムーズにする効果があります。

b. 黒板の活用

黒板は教師と生徒たちをつなぐノートの役割を果たしています。ですので、黒板に授業の学習内容を整理して書くことは大切です。この指導書では、指導書にある授業の進度に合わせ次のような板書を用いて指導することを推奨しています。



この指導書では各授業の板書方法を提案しており、黒板には授業の各手順の時間配分がどうであれ、生徒による能動的な学習時間を考慮して必要な情報が板書されるべきです。

c. 授業準備

この指導書では各授業の授業準備をして、それにそって授業を行うことを提案しているので、授業計画や授業の進め方あるいは話す内容などを別紙で用意する必要はありません。また、もし必要と感じるのであれば、重要なポイントのみ鉛筆で書きこんでも構いません（指導書は学校の所有物であり、教師の私物ではありませんので、ボールペンで書きこむのは控えるべきです）。生徒の特性に応じてアレンジする必要があると考える場合は、別の授業計画を立てても構いませんが、その場合も用意する必要があるのは、上記の内容に沿った黒板の板書計画のみです。なぜなら、板書が授業の学習内容のプロセスを全て要約するものであるからです。続いて、以下に黒板の使い方を示します。

日付：＿＿＿＿＿＿　ユニット：＿＿＿＿　レッスン：＿＿＿＿

達成の目安：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

板書計画：

Ⓟ　　Ⓔ

Ⓢ　　Ⓡ

宿題：

最初の設問を解いた生徒の数：

備考：

d. 生徒用ノートの利用

各教師は生徒の授業用ノートの使用方法を決めることができますが、その内容には常に以下の項目を含めなくてはなりません。授業日、教科書のページ、その日の学習テーマ、解き方、問題とその正しい答え、です。続いてノートの使用例を示します。

日付：2017年1月22日　ユニット1 1.3

Ⓟ

次の式を展開しなさい。

$(2x-1)(y+3)$

Ⓢ

$(2x-1)(y+3)$
$= [2x+(-1)](y+3)$
$= 2x(y)+2x(3)+(-1)(y)+(-1)(3)$
$= 2xy+6x+(-y)+(-3)$
$= 2xy+6x-y-3$

Ⓔ 次の式を展開しなさい。

$(3x-5)(2y-4)$

$= [3x+(-5)][2y+(-4)]$

$= 3x(2y)+3x(-4)+(-5)(2y)+(-5)(-4)$

$= 6xy-12x-10y+20$

Ⓡ

a) $xy-x+y-1$
b) $xy-x-y+1$
c) $-2xy+4x-2y+4$
d) $-2xy+3x-4y+6$

e. 教室内の巡回によるチェックと指導

生徒たちが問題を解いている間、教師は教室内を巡回し、生徒が設問を正しく理解して正解できているかチェックしながら、その理解度を確認します。

多くの場合、つまづいている生徒がいれば、教師はその生徒に指導しますが、全員に対応するには時間が足りません。そこで以下の方法をとることを推奨します。もしつまづく生徒が5人以下である場合は、個別にサポートし、そうでない場合は別の方法で指導するのがよいでしょう。つまり、全員に対して説明する、グループ別に説明をする、あるいは答え合わせの時に解説する、などの方法です。

f. 課題を他の生徒より早く終える生徒たちへ対応

問題コーナーでは難易度が低い問題も高い問題も含まれているので、生徒が問題を解きおわるのに要する時間には常にばらつきがあります。公的教育では、常に学ぶ機会の平等を保証しなくてはならず、他の生徒より早く課題を終えてしまう生徒に何をすればよいか提案しないことは、彼らの時間を無駄にしていることになり、また、生徒にとって何もすることがないという状況は、学級の教育面においても負の要素となってしまう可能性があります。この状況を防ぎそのような生徒たちの能力を引き出すためにも教師は次のルールを決めるとよいでしょう。全ての問題を解き終わり、答え合わせも終えた場合は、まだ終えていないクラスメートのサポートに回ってもよい、とすることです。このようにして、つまづいている生徒はクラスメートにサポートしてもらうことができ、またサポートする側になる生徒も授業の学びを深めることができます。同様に、教師は授業内容の定着を図るためさらなる問題を出しても構いませんし、生徒の能力をさらに引き出すように、難易度をあげた挑戦問題を出しても構いません。

g. 授業用ノートの確認

教師が定期的にノートの使い方をチェックしないと、生徒によっては全く整理できないまま使用している場合がありますので、ノートの使い方は平均で月に1回程度、定期的にチェックする必要があります。ここでのポイントは、学年の最初にチェックの回数を増やし、生徒にチェックされているという意識をもたせ、きちんとノートをとる習慣を身につけさせることです。恐らくノートを最後まで細かくチェックするには時間が足りないので、学年の最初に指導した黒板の写しがきちんとできているか、その構成のみをチェックし、最初の問題の理解度を確認し、きちんとノートがとれていることを簡略に褒めるコメントを残すだけで構いません。

h. 宿題または練習帳のチェック

同様に、授業用ノートのチェックでは宿題をきちんとしているかどうかを継続的にチェックする必要があります。授業の最初に宿題のチェックを行う以外に、宿題や練習帳のチェックを定期的に行うことを予定に組み込んで、全てをきちんとこなし、自己採点をし、間違った問題をもう一度やり直した生徒には特別な配慮をしてもよいでしょう。

i. 家庭学習の習慣を身につけること

第三回地域比較説明研究（TERCE）の算数テストの結果によれば、30分以上家庭学習を行っている生徒は、家庭学習の時間がそれより少ないか全く行っていない他の生徒に比べ、明らかに優秀な成績を納めていることが分かっています。家庭学習の理想的な時間は学年により異なりますが、年次×10分にさらに10分追加したものが平均的に必要な家庭学習時間とされています。例えば、三年生の場合は、$10 \times 3 + 10 = 40$分です。生徒たちに家で宿題をする習慣をつけさせるのは、教師にとっても親にとっても容易ではありません。したがってまず最初は宿題を出すことで家庭学習の習慣を身につけさせることになるでしょう。

j. 指導し、確認し、再指導し、褒めるというサイクル

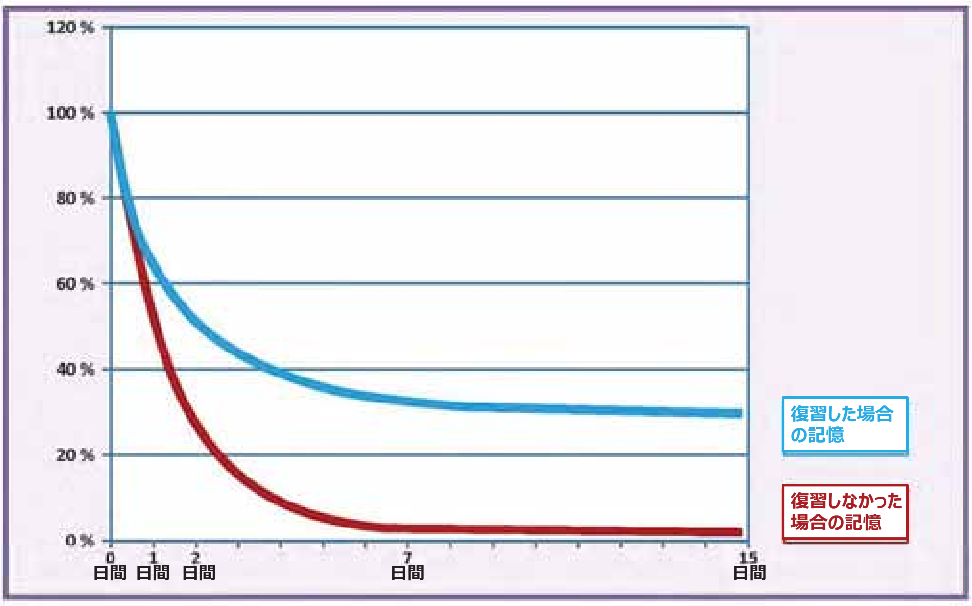
教師が行う指導サイクルの基本は、何かを指導した後、モニターをし、それがきちんと達成されているか確認するというものです。そして生徒たちが達成していた場合は、できたことを褒めてあげなければならず、逆にできていない時は、もう一度指導する必要があります。これは全ての指導に当てはまるものです。例えば、何か課題を与えた時、生徒がそれを達成できたかを確かめ、それができていれば褒め、できていなければ再度指導し直す必要があるということです。このサイクルは学習のサポートにもいえます。ある内容について指導し、テストを通してその問題を正しく溶けていることが確認できた場合は、褒めてあげなくてはなりません。またそうでない場合は再度指導してあげなければなりません。このサイクルは単純に思えますが、継続的に行うに、習慣づける必要があります。

VI. 練習帳の使い方ついて

練習帳は生徒一人一人に渡す消耗品であり、学習内容の定着を図る目的で家庭で取り組む問題が掲載されているものです。中には授業で学習した内容のさらに上をいく挑戦問題や金融教育など他分野のテーマを横断的に含めた問題もあり、家庭学習の習慣を身につけるという狙いもあります。

多くの場合、何かを学ぶということを考えた場合、新たな知識を得るプロセスにばかり焦点が当てられていて、その新たに得た知識をしっかり定着させることや深く掘り下げてその得た知識をベースにさらに複雑な知識をとりいれるという重要な側面は見落とされがちです。この見落とされがちな内容を掘り下げて内容理解を定着させるためには、さらに多くの練習が必要となります。

19世紀に活躍した哲学者で心理学者であったヘルマン・エビングハウスは、かの有名な**忘却曲線**で機械的に暗記して復習をしない場合、学習内容の記憶は翌日には50%になり、2日後には30%、そして1週間後にはわずか3%しか残らないことを証明していて、それは次のグラフのようになります。



この事実を踏まえて小河勝博士が日本の様々な学校で「3 ： 3モジュール」と呼ばれる、生徒たちに3日間同じ問題を復習させる研究を行ったところ、学力が向上し忘却曲線が青色で示されたように改善する結果が得られました。

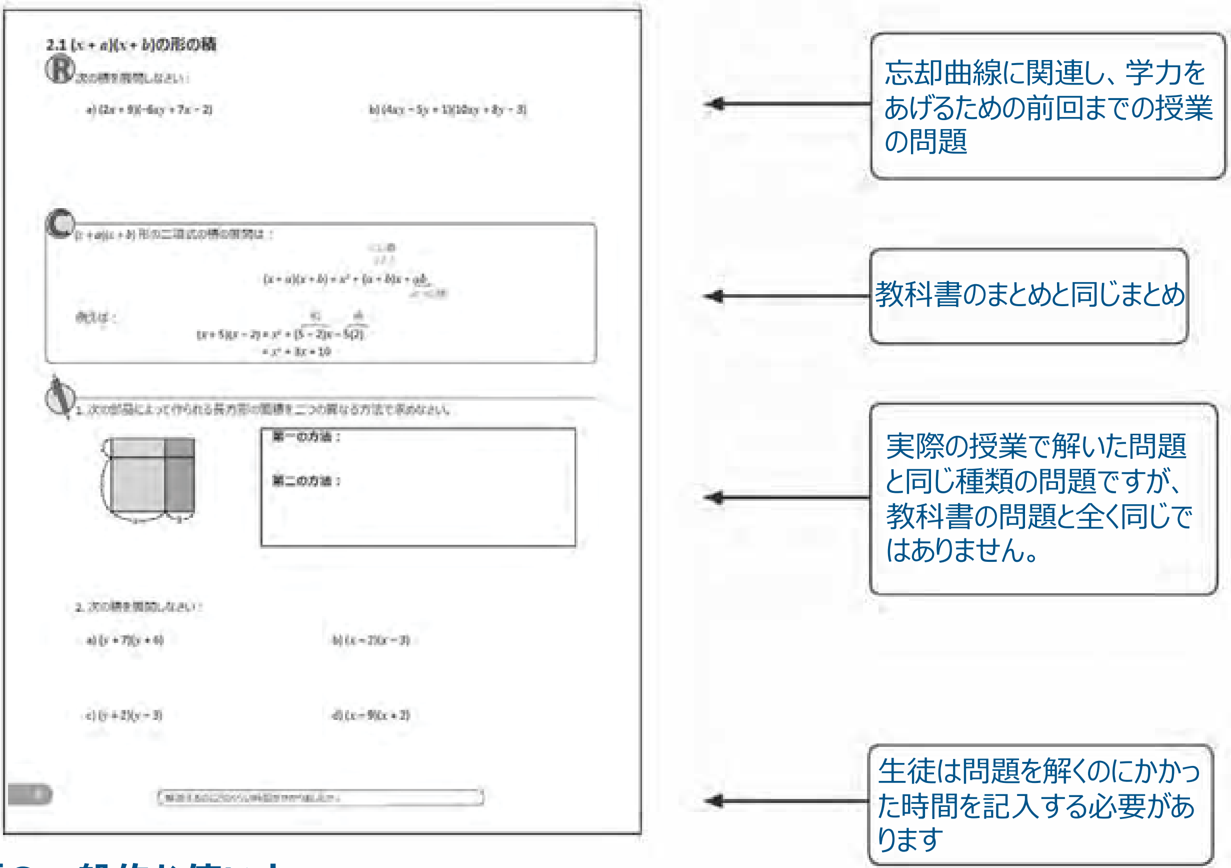
時々簡単な問題や練習問題は機械的なものとして分類されてしまいますが、最近の研究では、特に神経学の分野において、複雑な問題と比較すると簡単な問題の方が、思考、コミュニケーション、感情の制御をつかさどる機能を有する脳の前頭前野を活性化させるという説も生まれています。

最後に、この単純な問題の重要性は、少なくとも知識と応用の設問分野をもつ国際的な能力試験の評価において欠くべきものではないのでしょう。それらの試験においては、常に応用問題より知識問題の点数が高くなり、知識問題の得点と応用問題の得点には明らかな相関関係がみられます。このことは、知識をマスターすることが応用力をつけることにつながる解釈することができます。つまり、しっかり理解すれば応用力も高まるということが言えるのです。

練習帳を通じて基本知識をしっかり定着させて、その後応用問題に取り組むことが望ましいです。

練習帳の構成

基本的にこのノートは教科書のページに応じて作られています。教科書の1授業に対し、練習帳の1ページが対応しています。練習帳1ページには以下の要素が含まれます。既習内容または前日の学習内容の再学習、当日の学習内容のまとめおよび当日の学習内容に関する問題。以下は練習帳のページのサンプルです。



練習帳の一般的な使い方

算数の授業の終わりにその日の授業の内容に応じたページ番号を宿題として提示します。
次回の授業の初めに答え合わせをします。

練習帳の特別な使い方

- 算数の授業のある日に宿題を出す。一日に授業を2コマ進めるのは、教育学上あまりお勧めできません。その場合は、その日に学習した内容に相当する2ページ分を宿題として出すか、あるいは2日に分けて出すしかありません。
- 練習帳にはそのまま書きこんで構いません。
- 教師は定期的に練習帳を確認しなくてはなりません。少なくとも各設問グループの最初の問題は確認して、生徒たちのやる気を引き出すようなコメントをする必要があります。
- もし生徒の親に家庭学習の進捗に関するコメントを書いてもらう方が都合が良い場合はそのように依頼します。
- もし解いていないページが残った場合は、教員研修実施日などの生徒が学校に来ない日に復習用の宿題として出します。

1. テストの応用の重要性

生徒たちの学力評価により得た結果は、教師にとって、学習成果の全体像をみる上でとても意味のある情報です。その結果に基づき、教師は指導している生徒が各授業の目安に達しているかや、全体的に能力がついているか、またその学年の履修内容をすべて横断的にカバーできているかなどを判断することができます。

結果が良い場合は、さらに学力を高められるよう、教師は引き続きよい授業を行う努力をつづければよいです。

もしテストの結果があまりよくない場合は、教師は生徒たちの学力評価と照らし合わせ自分の指導の仕方を自己採点し、授業を改善するための努力に着手する必要があります。そのためには、研修に参加したり、どの内容に生徒のつまづきが多いかを分析したり、同僚に相談したりする必要があります。

教師は教育環境において非常に重要な役割を担っていることを今一度考える必要があります。その役目をしっかり果たし、生徒たちの学力評価に基づいて自分の取組みをきちんと自己評価しなくてはなりません。

以上を踏まえ、この指導書にあるテストを実施する必要があります。テストを行うことで、生徒が身につけた学力と身につかなかった部分が見えるという非常に貴重な情報を得ることができるのです。

2. テストのねらい

以上のことから、テストのねらいは以下のようにまとめることができます。

- 生徒たちの学習内容理解度を知る。
- 生徒たちがつまずいた単元の授業を改善する方法を考える。
- テスト結果の分析に基づいて教師としての取組みを評価し改善に努める。

3. 各テストの機能

ユニットテスト、学期末テスト、学年末テストの3種類のテストです。全て同じ意図で用意されています。ですが、必要に応じそれぞれ他の用途で使っても構いません。以下にテストの活用例について述べます。

a. ユニットのテスト

テストに出てくる問題は、それぞれ主たる（単元の）達成の目安に対応しており、その達成の目安は各ユニットの授業で明示されているものです。したがって、教師は生徒の学習内容の理解度を知ることができます。テストをして理解できていないところが分かれば、その箇所を再学習させればよい、という考え方です。ですが、毎回追加授業を行うだけの十分な時間がとれるとは限りません。その場合、生徒たちに自分たちで復習し、テストで解けなかった問題をもう一度解くように指導しても構いません。

グループで確認できるようにこの指導書にあるテストの答えのコピーを生徒に渡しても構いません。そのようにすれば生徒たちは相互学習ができます。そして教師は生徒たちに自分たちでやり直したテストの紙を集めさせ、それを元にして生徒の学習進度を把握するということも可能です。

テストを実施する前に、生徒たちに対しテスト範囲のユニットを示し、予めその内容を復習しておくように伝えると良いでしょう。

b. 学期末テスト

このテストは、それぞれの学期に学習した重要単元の内容を含む問題で構成されています。タイミングとしては、最後の授業で学習内容の復習ができるように、その学期が終わる1日前にこのテストを行うのがよいでしょう。しかしながら、それが難しい場合は、学期の最終日にテストをして、新学期の最初の授業で振り返り学習をすることになる場合もあるかと思います。

さらに、教員研修の際に他の学校の教師とテスト結果を共有するのもよいでしょう。そのようにすることで、どの単元に生徒がつまづきやすいかや、他の教師がどんな工夫をしているかなど、学習の改善につながる情報を得る事ができるでしょう。他の教師との信頼関係を築くことができれば、SNSを使って情報の共有などやりとりでき、さらには生徒たちの学習の改善につなげる手立て等も得やすくなるでしょう。

c. 学期末テスト

このテストで扱う問題はその学年で履修すべき重要な単元をカバーするものです。テストの結果は、一年間を通して教師が取り組んできた成果を反映するものであるので、このテストの実施には、間違いなく非常に大きな期待が込められます。テスト結果は、来年度、授業の質をあげるために教師が何をすればよいかを示してくれるでしょう。さらに、これらのテストを活用して、教師は来年度担当する教員のために、どの分野のどの単元を強化すべきかについて、学校の記録にコメントを残さなくてはなりません。

4. テスト結果の利用

例　9年次の生徒のテストの場合を例にとり、以下に二つの状況を説明します。

答え
正：

	$(x-2)^2$を展開しましょう。
生徒たちの解き方	x^2-4x+4
この答えになった生徒の割合	70 %

答え
誤：

	$(x-2)^2$を展開しましょう。
生徒たちの解き方	x^2-4
この答えになった生徒の割合	60 %

もしこのような結果であった場合、そこから何が読み取れますか？

この結果から教師が得られる情報

身についた学力	学力として身についていない部分
等式の概念	わり算の概念
計算手順：	分数の概念

テスト結果を再学習に活かす方法

短期的配慮	中期的配慮
生徒が方程式の解き方を理解できていると確認するためには、商が答えになる方程式を用いる必要があります。そうしないと、それまでの学習内容がきちんと理解できていないために、次の学習テーマに進むことができないかもしれません。	既習内容の復習をするためにクラスメートからアドバイスを受けたり、助けてもらう「生徒同士の相互学習」を導入するべきでしょう。
同じようなつまづきが複数の生徒にみられた場合は、同じタイプの問題を黒板を使って再学習する必要があるでしょう。	同じタイプの問題を解けるようになるまで、自宅や学校で自己学習を促す必要があります。

以上から、教師は生徒が正しく答えることができない問題に焦点を絞って時間をかけたり工夫したりすることができます。

最後に、教師がとるべきテストの適切な活用方法を以下に説明します。

a.　指導書に含まれるテストを適切なタイミングで行う
- ユニットのテスト（ユニットが終わるごとに実施するもの）
- 学期末テスト（各学期が終わる前に実施するもの）
- 学年末テスト（年次が終わる前に実施するもの）

b.　実施したテストを見直す

c.　テスト結果から得られた情報を分析する

d.　再学習の方法を考える

e.　学期末テストの場合は、教員研修の際に指導改善案が出せるよう、その結果を近隣の学校で指導している教員と共に分析してもよいでしょう。

ユニット 1.多項式の乗法

このユニットのねらい

数学問題や身近な問題を解く際に視覚化しやすい幾何学的な証明を行いながら、多項式の乗法と因数分解の手順を通じ、初歩的な代数の扱いをマスターします。

関連と発展

7学年

ユニット 4：文字を使った表現
- 代数式
- 代数式の計算
- 数式の相関関係の表記

ユニット 5：1次方程式
- 数式の同等性
- 1次方程式
- 1次方程式の応用

8学年

ユニット 1：代数計算
- 多項式を用いた計算
- 代数式の応用

ユニット 2：連立2元1次方程式
- 2元1次方程式を解く方法
- 連立2元1次方程式

9学年

ユニット 1：多項式の乗法
- 多項式の乗法
- 乗法公式
- 因数分解

ユニット 3：2次方程式
- 2次方程式
- 2次方程式の応用

高校1年次

ユニット 2：多項式の計算と複素数の計算
- 乗法公式と因数分解
- 多項式の除法
- 2次方程式と複素数

ユニット 3：不等式
- 不等式
- 1次不等式
- 非線形不等式

ユニット学習計画

レッスン	時間	授業
1. 多項式の乗法	1	1. 多項式の乗法
	1	2. 二項式かける二項式、第一部
	1	3. 二項式かける二項式、第二部
	1	4. 二項式かける三項式
	1	5. 三項式かける三項式
	1	6. 復習問題
2. 乗法公式	1	1. $(x+a)(x+b)$型の展開
	1	2. 括弧でくくられた二項式の二乗、第一部
	1	3. 括弧でくくられた二項式の二乗、第二部
	1	4. 二項式の和と差の展開
	1	5. 代入を使った乗法公式の展開
	1	6. 乗法公式の組み合わせ
	1	7. 括弧でくくられた三項式の二乗
	1	8. 数値と式の計算
	1	9. 復習問題
	1	10. 復習問題
3. 因数分解	1	1. 多項式の因数分解
	1	2. 共通因数
	1	3. 三項式$x^2+(a+b)x+ab$の型になる因数分解　第一部
	1	4. 三項式$x^2+(a+b)x+ab$の型になる因数分解　第二部
	1	5. 完全平方になっている三項式の因数分解

レッスン	時間	授業
	1	6. 因数分解（二乗の差）
	1	7. 復習問題
	1	8. 可変数への置き換えを利用した多項式の因数分解、第一部
	1	9. 可変数への置き換えを利用した多項式の因数分解、第二部
	1	10. 連続した因数分解
	1	11. 因数分解の組み合わせ
	1	12. 因数分解を用いた数式の計算
	1	13. 復習問題
	1	ユニット 1　テスト

ユニット 1　29時間の授業+テスト

各レッスンの要点

レッスン1：多項式の乗法
多項式の乗法を学びます。長方形の面積を利用して、多項式の乗法を幾何学的に証明します。具体的には、単項式かける二項式、二項式かける二項式、二項式かける三項式、三項式かける三項式の計算の手順を明らかにします。

レッスン2：乗法公式
乗法公式と呼ばれる特別な展開を明らかにします。例えば括弧でくくられた二項式の二乗、二項式の和と差の積、括弧でくくられた三項式の二乗などがあります。 さらに、可変数の代入を用いてより複雑な式で表される乗法の展開をします。ここで学ぶ知識は平方根の展開を扱う次のユニットの基礎になるものです。

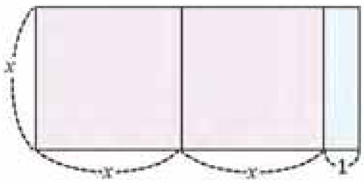
レッスン3：因数分解
多項式を展開する方法の逆の手順として因数分解を明らかにし、その因数分解の手順の一部を長方形の面積を使って直感的に解説します。共通因数、三項式と完全平方になっている三項式の因数分解、二乗の和と差の積と可変数の代入を用いた因数分解などを学習します。

レッスン 1 多項式の乗法

1.1 単項式かける多項式

P

以下のパーツで作られる長方形の面積を二通りの方法で求めなさい。



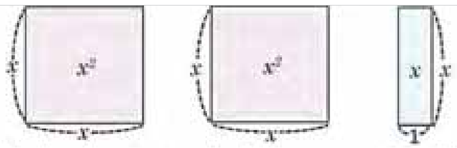
指数を使って表すと、
$a \times a = a^2$

S

1番目の方法：
長方形の高さはxで、底辺は、
$x + x + 1 = 2x + 1$ この３つのパーツで作られる長方形の面積は、
$x(2x + 1)$ です。

多項式とは1つの項もしくは2つ以上の項の和からなる代数式です。多項式のうち項が1つだけのものを**単項式**といいます。

2番目の方法：
長方形を３つのパーツに分けて、それぞれの面積を求めます。



それぞれのパーツの面積の和は、
$x^2 + x^2 + x = 2x^2 + x.$

よって、長方形の面積もまた、$2x^2 + x$

同じ長方形の面積がここに示した二つの方法で求められたことから、以下の式が成り立ちます。
$x(2x + 1) = 2x^2 + x$

積の求め方
1番目の方法は、代数的に、xに多項式$2x + 1$の項をそれぞれかける方法で表すこともできます。

$$\begin{aligned} x(2x + 1) &= x(2x) + x(1) \\ &= 2x^2 + x \end{aligned}$$

C

単項式かける二項式は、四則計算のルールに従って、まず最初に、二項式のそれぞれの項をかけます。
例えば、

$$\begin{aligned} 2x(3x + 4) &= 2x(3x) + 2x(4) \\ &= 6x^2 + 8x \end{aligned}$$

この手順を**展開**といいます。

E

以下の式を展開しなさい。

a) $2x(x - y)$

$$\begin{aligned} 2x(x - y) &= 2x(x) - 2x(y) \\ &= 2x^2 - 2xy \end{aligned}$$

b) $(xy - y)(-2x)$

$$\begin{aligned} (xy - y)(-2x) &= xy(-2x) - y(-2x) \\ &= -2x^2y - (-2xy) \\ &= -2x^2y + 2xy \end{aligned}$$

1. 以下の代数式になる長方形を描きなさい。
   そしてそれをパーツに分けた時場合の面積を求めなさい。

   a) $x(3x + 2)$ $= 3x^2 + 2x$　b) $2x(x + y)$ $= 2x^2 + 2xy$

2. 以下の式を展開しなさい。

   a) $-x(xy + x)$ $= -x^2y - x^2$

   b) $-3y(x - y)$ $= -3xy + 3y^2$

   c) $(xy + x)xy$ $= x^2y^2 + x^2y$

   d) $xy(xy + x + y)$ $= x^2y^2 + x^2y + xy^2$

達成の目安

1.1 単項式かける二項式の展開をしなさい。

学習の流れ

文字式は7学年次から学んできており、口語表現で代数を表し、数字と文字の入った式を解いてきました。その後、8学年次には、引き続き多項式の加法と減法を学習し、多項式の数値を求める学習をしました。今まで生徒はパターンを一般化するのに、記号を使っています。つまり、可変数を文字で表したり、未知数を式の解で表したりしています。8学年次には単項式と単項式の積を学習しているので、この授業では、単項式と二項式の積を学習します。

ねらい

Ⓟ，Ⓢ 分かり易くするため、図形を用いています。図形にある長方形の面積を使って単項式と多項式の積と関連づけることができます。面積の求め方は二通りあり、それぞれの項を両辺にした等式を作ることができます。
Ⓒ 単項式に二項式をかける手順を明らかにします。ここで大切なのは、多項式をかける手順を**展開**と呼ぶこと、またそれは分配の法則に従っているということを教えることです。練習問題の解き方では、結論で明らかになった手順をそのまま使って展開式を作ります。符号に注意する必要があります。また問 b) では、因数の順番は多項式に単項式をかけます。

一部の設問の解答：

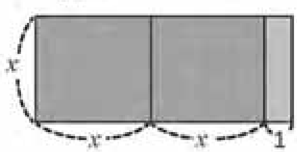
2. a) $-x(xy + x) = -x(xy) + (-x)(x)$
$= -x^2y - x^2$

d) $xy(xy + x + y)$
$= xy(xy) + xy(x) + xy(y)$
$= x^2y^2 + x^2y + xy^2$

日付：

U1 1.1

Ⓟ 長方形の面積を二通りの方法で求めなさい。



Ⓢ 方法1面積を計算します。
高さ × 底辺 = $x(2x + 1)$

方法2それぞれのパーツごとに面積を計算します。
$x^2 + x^2 + 1 = 2x^2 + 1$
二つの方法はどちらも同じ面積を表しています。
よって、$x(2x + 1) = 2x^2 + 1$

Ⓔ 以下の式を展開しなさい。

a) $2x(x - y)$
$= 2x(x) - 2x(y)$
$= 2x^2 - 2xy$

b) $(xy - y)(-2x)$
$= xy(-2x) - y(-2x)$
$= -2x^2y - (-2xy)$
$= -2x^2y + 2xy$

Ⓡ 1.
a) $3x^2 + 2x$ b) $2x^2 + 2xy$

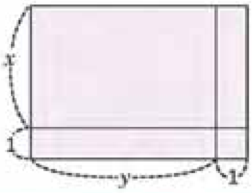
2.
a) $-x^2y - x^2$ b) $-3xy + 3y^2$
c) $x^2y^2 + x^2y$ d) $x^2y^2 + x^2y + xy^2$

宿題： ワークブック2ページ

1.2 二項式かける二項式、第一部

P

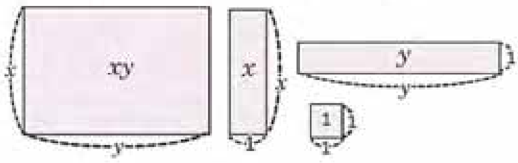
以下のパーツで作られる長方形の面積を二通りの方法で求めなさい。



S

1番目の方法： 長方形の高さは $y + 1$ で、底辺は $x + 1$ したがって、求められる面積の積は、
$(x + 1)(y + 1)$

2番目の方法：
長方形をセクションに分けてそれぞれの面積から求めます。



それぞれのパーツの面積の和は、
$xy + x + y + 1$
よって、長方形の面積もまた、
$xy + x + y + 1$

ここに示された二つの方法は同じ長方形の面積を表しています。よって、
$(x + 1)(y + 1) = xy + x + y + 1$

二つの項を持つ多項式を
二項式といいます。

積の求め方
最初の方法は、一つ目の二項式のそれぞれの項に二つ目の二項式のそれぞれの項をかけることで求めることができます。

$$\begin{aligned}(x + 1)(y + 1) &= x(y) + x(1) + 1(y) + 1(1)\\ &= xy + x + y + 1\end{aligned}$$

C

二項式に別の二項式をかける場合は、四則計算のルールに従って、一つ目の二項式のそれぞれの項に二つ目の二項式のそれぞれの項をかけます。

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

E

次の式を展開しなさい。$(2xy + x)(3y + 2)$

$$\begin{aligned}(2xy + x)(3y + 2) &= 2xy(3y) + 2xy(2) + x(3y) + x(2)\\ &= 6xy^2 + 4xy + 3xy + 2x\\ &= 6xy^2 + 7xy + 2x\end{aligned}$$

$4xy$と$3xy$それぞれの項はどちらもxyの部分を持つので同類項です。それらの和を求めるには、係数4と係数3を足して、文字の部分をそのままつなげます。

よって、$(2xy + x)(3y + 2) = 6xy^2 + 7xy + 2x$

展開しなさい。

a) $(2x + 1)(y + 1)$
$= 2xy + 2x + y + 1$

b) $(2x + 3)(3y + 2)$
$= 6xy + 4x + 9y + 6$

c) $(xy + 3x)(y + 1)$
$= xy^2 + 4xy + 3x$

d) $(2xy + 3y)(3x + 5)$
$= 6x^2y + 19xy + 15y$

e) $(x + 1)(x + y)$
$= x^2 + xy + x + y$

f) $(2x + 3)(x + y)$
$= 2x^2 + 2xy + 3x + 3y$

達成の目安

1.2 二項式かける正の符号をもつ二項式の展開をしなさい。

学習の流れ

前の授業では単項式に二項式をかける手順を学びました。今回の授業では、二項式に二項式をかける手順まで学習します。前回の授業で習った二つの因数が二項式の場合の手順の延長であることが分かるでしょう。

ねらい

Ⓟ, Ⓢ 4つの項があることが分かるように、長方形の面積を使って、二項式かける二項式の手順に取り組みます。
代数ブロックはシンプルなもの、例えば動かせるものであればどんな紙でも使って作ることができます。9学年次の教科書の最後にある補助教材をコピーして利用することもできます。ここでは、授業の前に教材を準備しておき、授業が始まる時点で生徒たちに教材が配布されているようにすることが大切です。

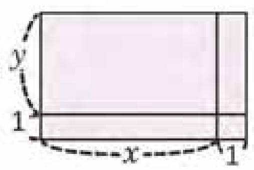
©いきなり分配法則を使うのではなく、それぞれの括弧( )に可変数を関連づけてかけ算をします。面積の例を使って展開を分かり易くします。この授業では理解しやすくするために、正の符号を持つ二項式のみを扱います。

つまずきやすい点：
この学習では、代数式の記号が未知数を表すものと勘違いして、文字に当てはまる数値を求めようとして、混乱してしまう生徒がいるかもしれません。この代数を扱うプロセスでは、可変数がある未知数を表している訳ではないことに注意を促します。面積の例を使えばそのような勘違いを防ぐことができます。

日付：

U1 1.2

Ⓟ 長方形の面積を二通りの方法で求めなさい。



Ⓢ 方法1 面積を計算します。
底辺 × 高さ = $(x + 1)(y + 1)$
方法2 それぞれのパーツごとに面積を計算します。
$xy + x + y + 1$
二つの方法はどちらも同じ面積を表しています。
よって、$(x + 1)(y + 1) = xy + x + y + 1$

Ⓔ 次の式を展開しなさい。
$(2xy + x)(3y + 2)$
$= 2xy(3y) + 2xy(2) + x(3y) + x(2)$
$= 6xy^2 + 4xy + 3xy + 2x$
$= 6xy^2 + 7xy + 2x$

Ⓡ
a) $2xy + 2x + y + 1$
b) $6xy + 4x + 9y + 6$
c) $xy^2 + 4xy + 3x$
d) $6x^2y + 19xy + 15y$
e) $x^2 + xy + x + y$
f) $2x^2 + 2xy + 3x + 3y$

宿題：ワークブック3ページ

1.3 二項式かける二項式、第二部

P

次の式を展開しなさい。$(2x-1)(y+3)$

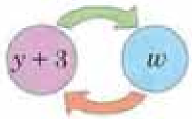
$a-b$は次のような加法の式で表すことができます。
$$a-b=a+(-b)$$

S

二項式の一項目にある、符号が (–) であることに注意します。次の方法で式を展開することができます。

1. $2x-1$を次のような加法の式で表します。$2x+(-1)$ 前の授業で行ったのと同じ方法で式を展開します。

$$\begin{aligned}(2x-1)(y+3) &= [2x+(-1)](y+3)\\ &= 2x(y)+2x(3)+(-1)(y)+(-1)(3)\\ &= 2xy+6x+(-y)+(-3)\\ &= 2xy+6x-y-3\end{aligned}$$



2. $y+3=w$として、二項式かける単項式の展開をします。

$$\begin{aligned}(2x-1)(y+3) &= 2x(w)-1(w)\\ &= 2x(y+3)-(y+3)\\ &= 2xy+6x-y-3.\end{aligned}$$

$y+3$ を w に置き換え、
このように再びw を $y+3$ に戻し

よって、$(2x-1)(y+3)=2xy+6x-y-3$

C

二項式かける二項式の積は以下の二通りの方法で求めることができます。

1. $a-b=a+(-b)$ の式を作り、展開します。

$$\begin{aligned}(a-b)(c+d) &= [a+(-b)]\ (c+d)\\ &= ac+ad+(-b)c+(-b)d\\ &= ac+ad+(-bc)+(-bd)\\ &= ac+ad-bc-bd\end{aligned}$$

2. $c+d=w$と考え、二項式かける単項式の形の式を作り展開します。

E

展開しなさい。$(3x-5)(2y-4)$

最初の項を$3x+(-5)$ の式で表し、2つ目の項を$2y+(-4)$で表します。

$$\begin{aligned}(3x-5)(2y-4) &= [3x+(-5)][2y+(-4)]\\ &= 3x(2y)+3x(-4)+(-5)(2y)+(-5)(-4)\\ &= 6xy-12x-10y+20\end{aligned}$$

よって、$(3x-5)(2y-4)=6xy-12x-10y+20$

展開しなさい。

a) $(x+1)(y-1)$
$=xy-x+y-1$

b) $(x-1)(y-1)$
$=xy-x-y+1$

c) $(2x+2)(-y+2)$
$=-2xy+4x-2y+4$

d) $(-x-2)(2y-3)$
$=-2xy+3x-4y+6$

e) $(xy-x)(y+10)$
$=xy^2+9xy-10x$

f) $(2xy-y)(5x-3)$
$=10x^2y-11xy+3y$

4

達成の目安

1.3 正負の符号が入った二項式かける二項式の式を展開しなさい。

学習の流れ

以前は、長方形の面積を使って、正の符号のみをもつ二項式の積の手順を求めました。今回の授業では、この方法を使って負の符号を含む掛け算の展開を行います。引き算の式を足し算の式に直すか、二項式に可変数を代入することで展開します。

ねらい

Ⓟ 生徒に対し、前の授業で学習した二項式に二項式をかける式の変形を作るよう指示します。
Ⓢ 二項式の掛け算の方法を二通り示します。最初の方法は、前の授業で学習した計算手順を使っています。二つ目の方法は、初めて可変数の置き換えをし、$w = y + 3$ を代入してから単項式かける二項式の計算をする方法です。ここで大切なことは、生徒がこの式をそのまま暗記するのではなく、展開の仕方を理解して、可変数への置き換えなど様々な方法を使えるようになることです。生徒たちが慣れてきたら、結果のパート1に記載した部分は省略するようにします。

練習セクションでは、二項とも負の符号となっている冒頭の設問で扱った式の変形になっていますが、冒頭の設問で用いた解き方がこの式の展開にも使えることに着目するよう促します。

一部の設問の解答：

$(-x-2)(2y-3) = [-x+(-2)][2y+(-3)]$
$= -x(2y) - x(-3) + (-2)(2y) + (-2)(-3)$
$= -2xy + 3x - 4y + 6$

つまずきやすい点：
符号をもつ式の扱い、例えば、このような間違いをする生徒がよくいます。$-x(-3) = -3x$

日付： U1 1.3

Ⓟ 次の式を展開しなさい。
$(2x-1)(y+3)$

Ⓢ 1. $(2x-1)(y+3)$
$= [2x+(-1)](y+3)$
$= 2x(y) + 2x(3) + (-1)(y) + (-1)(3)$
$= 2xy + 6x + (-y) + (-3)$
$= 2xy + 6x - y - 3$

2. $(2x-1)(y+3)$
$= 2x(w) - 1(w)$　　$y + 3$をwに置き換えて
$= 2x(y+3) - (y+3)$ このようにwを$y + 3$に戻して
$= 2xy + 6x - y - 3$

Ⓔ 次の式を展開しなさい。
$(3x-5)(2y-4)$
$= [3x+(-5)][2y+(-4)]$
$= 3x(2y) + 3x(-4) + (-5)(2y) + (-5)(-4)$
$= 6xy - 12x - 10y + 20$

Ⓡ a) $xy - x + y - 1$
b) $xy - x - y + 1$
c) $-2xy + 4x - 2y + 4$
d) $-2xy + 3x - 4y + 6$
e) $xy^2 + 9xy - 10x$
f) $10x^2y - 11xy + 3y$

宿題： ワークブック4ページ

1.4 二項式かける三項式

P

$(x + 2)(xy + y + 1)$を展開しなさい。

多項式 $xy + y + 1$ には3つの項があるので、**三項式**といい、$(x + 2)(xy + y + 1)$ は二項式かける三項式の積です。

S

式は以下の方法で展開することができます。

1. 二項式 のそれぞれの項に三項式のそれぞれの項をかけます。

$$\begin{aligned}(x + 2)(xy + y + 1) &= x(xy) + x(y) + x(1) + 2(xy) + 2(y) + 2(1)\\ &= x^2y + xy + x + 2xy + 2y + 2\end{aligned}$$

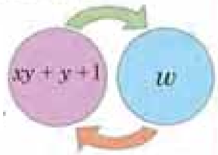
$$(x + 2)(xy + y + 1) = x^2y + 3xy + x + 2y + 2$$

2. $xy + y + 1 = w$として、二項式に単項式をかける式で表すと $(x + 2)(xy + y + 1) = (x + 2)w$

$$\begin{aligned}(x + 2)(xy + y + 1) &= (x + 2)w\\ &= x(w) + 2(w)\\ &= x(xy + y + 1) + 2(xy + y + 1)\\ &= x^2y + xy + x + 2xy + 2y + 2\\ &= x^2y + 3xy + x + 2y + 2\end{aligned}$$

$xy + y + 1$をwに置き換え、

代入を再び戻します。



よって、$(x + 2)(xy + y + 1) = x^2y + 3xy + x + 2y + 2$

C

$(a + b)(c + d + e)$の積は二通りの方法で求めることができます。

1. 四則計算のルールに従って一項目のそれぞれの項に二項目のそれぞれの項をかけます。

$$(a + b)(c + d + e) = ac + ad + ae + bc + bd + be$$

多項式を展開した後は必ず同類項をまとめます。

2. $c + d + e = w$として、二項式かける単項式になる式を展開します。

E

結論にある二つの方法で $(2x - 1)(2x - y + 3)$ を展開します。

1. まず、このような式を作ります。 $2x - 1 = 2x + (-1)$ y $2x - y + 3 = 2x + (-y) + 3$

$$\begin{aligned}(2x - 1)(2x - y + 3) &= (2x + (-1))(2x + (-y) + 3)\\ &= 2x(2x) + 2x(-y) + 2x(3) + (-1)(2x) + (-1)(-y) + (-1)(3)\\ &= 4x^2 - 2xy + 6x - 2x + y - 3\end{aligned}$$

$$(2x - 1)(2x - y + 3) = 4x^2 - 2xy + 4x + y - 3$$

2. $w = 2x - y + 3$ を使います。

$$\begin{aligned}(2x - 1)(2x - y + 3) &= (2x - 1)w\\ &= 2x(w) - w\\ &= 2x(2x - y + 3) - (2x - y + 3)\\ &= 4x^2 - 2xy + 6x - 2x + y - 3\end{aligned}$$

$$(2x - 1)(2x - y + 3) = 4x^2 - 2xy + 4x + y - 3$$

$2x - y + 3$ を w に置き換え、

再び戻しています。

自分のやりやすい方法で以下の式を展開しなさい。

a) $(2y + 1)(2xy - 3x + 1)$
$= 4xy^2 - 4xy - 3x + 2y + 1$

b) $(2xy - 3)(5x + 3y + 4)$
$= 10x^2y + 6xy^2 + 8xy - 15x - 9y - 12$

c) $(2x - 3)(x - y - 4)$
$= 2x^2 - 2xy - 11x + 3y + 12$

達成の目安

1.4 二項式かける三項式の式を展開しなさい。

学習の流れ

今までの授業では、因数が二項までで表されている乗法の展開の手順に取り組んできました。そのため、今回の授業では因数の1つが三項で表されている式の展開の手順を学習します。今まで学習してきた手順では、常に、一つ目の多項式のそれぞれの項に二つ目の多項式のそれぞれの項をかける方法であったことを強調します。

ねらい

Ⓟ 因数が三項になっている多項式の乗法の変形パターンを解きます。

Ⓢ 二項式かける三項式になっている式を二通りの方法で解きます。最初の方法は、二項式と三項式の展開の手順を明らかにする方法です。二つ目の方法は、それに代わる方法として紹介するものですが、生徒はどちらも使えるように覚えなくてはなりません。可変数に置き換える際は、すでにならった式の形にするよう注意します。あとの練習問題を解く際は、生徒はやりやすい方法を使えばいいのです。Ⓔ で紹介する変形パターンは、項の中に負の符号がいくつかあるパターンです。多項式をかけて解く方法と、可変数の置き換えを使って解く方法があることを示す必要があります。

つまずきやすい点：

生徒がよく間違えるのは、$2x(2x) = 4x$ としてしまう点です。この間違いは今までの授業でもみられたかもしれません。

$2x(2x)$ は、辺 $2x$ をもつ正方形の面積を表していることに注意させます。よって、$x > 0$ である場合、面積を式で表すと、$4x^2$となります。

日付：

U1 1.4

Ⓟ 次の式を展開しなさい。

$(x + 2)(xy + y + 1)$

Ⓢ 1. $(x + 2)(xy + y + 1)$

$= x(xy) + x(y) + x(1) + 2(xy) + 2(y) + 2(1)$

$= x^2y + xy + x + 2xy + 2y + 2$

$= x^2y + 3xy + x + 2y + 2$

2. $(x + 2)(xy + y + 1)$

$= (x + 2)w$ 　$xy + y + 1$をwに置き換えています。

$= x(xy + y + 1) + 2(xy + y + 1)$

$= x^2y + xy + x + 2xy + 2y + 2$

$= x^2y + 3xy + x + 2y + 2$

Ⓔ 次の式を展開しなさい。

$(2x - 1)(2x - y + 3)$

$= (2x + (-1))(2x + (-y) + 3)$

$= 2x(2x) + 2x(-y) + 2x(3) + (-1)(2x) + (-1)(-y) + (-1)(3)$

$= 4x^2 - 2xy + 6x - 2x + y - 3$

Ⓡ a) $4xy^2 - 4xy - 3x + 2y + 1$

b) $10x^2y + 6xy^2 + 8xy - 15x - 9y - 12$

c) $2x^2 - 2xy - 11x + 3y + 12$

宿題： ワークブック5ページ

1.5 三項式かける三項式

P

$(x-y+1)(x+y+3)$ を展開しなさい。

最初の三項式のそれぞれの項に二つ目の三項式のそれぞれの項をかける必要はありますか？

S

今までの授業で行っていたのは、最初の三項式のそれぞれの項に二つ目の三項式の項を（四則計算のルールに従って）かけて、（同類項がある場合は）同類項をまとめる方法でした。

$$\begin{aligned}(x-y+1)(x+y+3) &= x(x)+x(y)+x(3)+(-y)(x)+(-y)(y)+(-y)(3)+1(x)+1(y)+1(3)\\ &= x^2+yx+3x-yx-y^2-3y+x+y+3\\ &= x^2+4x-y^2-2y+3\end{aligned}$$

よって、$(x-y+1)(x+y+3)=x^2+4x-y^2-2y+3$

C

三項式かける三項式の積では、（四則計算のルールに従って）最初の三項式にあるそれぞれの項に二つ目の三項式にあるそれぞれの項をかけ、同類項をまとめます。

E

次の式を展開しなさい。$(3x-2y+3)(2x+5y-3)$

冒頭の設問では、最初の三項式にあるそれぞれの項に二つ目の三項式にあるそれぞれの項をかけて、

$$\begin{aligned}(3x-2y+3)(2x+5y-3) &= 3x(2x)+3x(5y)+3x(-3)+(-2y)(2x)+(-2y)(5y)+(-2y)(-3)+3(2x)+3(5y)+3(-3)\\ &= 6x^2+15xy-9x-4xy-10y^2+6y+6x+15y-9\\ &= 6x^2+15xy-4xy-9x+6x-10y^2+6y+15y-9\\ &= 6x^2+11xy-3x-10y^2+21y-9\end{aligned}$$

よって、$(3x-2y+3)(2x+5y-3)=6x^2+11xy-3x-10y^2+21y-9$

以下の式を展開しなさい。

a) $(x+y+1)(x+y+3)$
$=x^2+2xy+4x+4y+y^2+3$

b) $(x+y-1)(x+y+3)$
$=x^2+2xy+2x+2y+y^2-3$

c) $(x-y-1)(x+y+3)$
$=x^2+2x-4y-y^2-3$

d) $(x+y+1)(x-y+3)$
$=x^2+4x+2y-y^2+3$

e) $(x+3y+4)(5x-2y-3)$
$=5x^2+13xy+17x-17y-6y^2-12$

f) $(4x-3y+2)(2x-6y-3)$
$=8x^2-30xy-8x-3y+18y^2-6$

6

達成の目安

1.5 三項式かける三項式を展開しなさい。

学習の流れ

今までの授業では、どの場合でも同じような手順で展開する多項式の乗法を学習してきました。可変数への置き換えを行って多項式の乗法をする方法も学びました。展開の法則が理解できていれば、かけ算を1つすればもう1つのかけ算をする必要がなくなるので、このテクニックは式の展開方法が分からないときに使えます。

ねらい

Ⓟ いままで解いたことのない二つの因数が三項式になっているタイプの多項式の乗法を解きます。前回までの授業で学んだことから、最初の三項式のそれぞれの項に二つ目の三項式のそれぞれの項をかければよいと直感的に分かるはずです。ここでは、可変数への置き換えを省略します。
Ⓒ 冒頭の設問で得た結果から、三項式かける三項式の手順を形にします。

つまずきやすい点：
同類項をまとめる際に、例えば最後の答えを式で表す時に、xy と yx とが足せることに注意します。

日付： **U1 1.5**

Ⓟ 次の式を展開しなさい。

$(x-y+1)(x+y+3)$

Ⓢ $(x-y+1)(x+y+3)$

$= x(x)+x(y)+x(3)+(-y)(x)+(-y)(y)$
$\quad +(-y)(3)+1(x)+1(y)+1(3)$

$= x^2+yx+3x-yx-y^2-3y+x+y+3$

$= x^2+4x-y^2+y+3$

よって、

$(x-y+1)(x+y+3)=x^2+4x-y^2+y+3$

Ⓔ 次の式を展開しなさい。

$(3x-2y+3)(2x+5y-3)$

$= 3x(2x)+3x(5y)+3x(-3)+(-2y)(2x)+(-2y)(5y)+$
$\quad (-2y)(-3)+3(2x)+3(5y)+3(-3)$

$= 6x^2+15xy-9x-4xy-10y^2+6y+6x+15y-9$

$= 6x^2+11xy-3x-10y^2+21y-9$

Ⓡ a) $x^2+2xy+4x+4y+y^2+3$

b) $x^2+2xy+2x+2y+y^2-3$

c) x^2+2x-y^2-4y-3

d) $x^2+4x+2y-y^2+3$

宿題： ワークブック6ページ

1.6 復習問題

1. 以下の代数式になる長方形を描きなさい。そしてそれをパーツに分けた場合の面積を求めなさい。

a) $x(y+3)$
$= xy + 3x$

b) $(x+2)(y+1)$
$= xy + x + 2y + 2$

2. 以下の式を展開しなさい。

単項式かける二項式：

a) $(-x)(y-5)$
$= -xy + 5x$

b) $(4x)(xy+y)$
$= 4x^2y + 4xy$

c) $(-xy)(x-y)$
$= -x^2y + xy^2$

d) $(-3xy+2y)(-xy)$
$= 3x^2y^2 - 2xy^2$

二項式かける二項式：

a) $(y+2)(2x+1)$
$= 2xy + 4x + y + 2$

b) $(x+1)(xy+y)$
$= x^2y + 2xy + y$

c) $(2x-5)(y+4)$
$= 2xy + 8x - 5y - 20$

d) $(xy+3)(x-y)$
$= x^2y - xy^2 + 3x - 3y$

二項式かける三項式：

a) $(x+3)(3xy+2x+4y)$
$= 3x^2y + 2x^2 + 13xy + 6x + 12y$

b) $(y-2)(3xy+5x+y)$
$= 3xy^2 - xy + y^2 - 10x - 2y$

c) $(xy-1)(-10xy+3x+2y)$
$= -10x^2y^2 + 3x^2y + 2xy^2 + 10xy - 3x - 2y$

d) $(2x-3y)(-xy+4x-5y)$
$= -2x^2y + 3xy^2 + 8x^2 - 22xy + 15y^2$

三項式かける三項式：

a) $(x+y+1)(x-y+2)$
$= x^2 - y^2 + 3x + y + 2$

b) $(2x+5y-3)(-xy+3x+3)$
$= -2x^2y - 5xy^2 + 6x^2 + 18xy - 3x + 15y - 9$

c) $(-xy+x-1)(2xy+2x+1)$
$= -2x^2y^2 - 3xy + 2x^2 - 2x - 1$

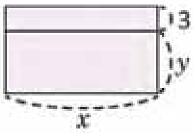
d) $(2xy+3y-6)(5xy+2y+10)$
$= 10x^2y^2 + 19xy^2 - 10xy + 6y^2 + 18y - 60$

達成の目安

1.6 多項式の乗法を使って問題を解きなさい。

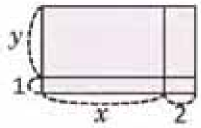
一部の設問の解答：

1. a)



面積：
$xy + 3x$

b)



面積：
$xy + x + 2y + 2$

2. 単項式かける二項式

c) $(-xy)(x-y) = (-xy)[x+(-y)]$
$= (-xy)x + (-xy)(-y)$
$= -x^2y + xy^2$

二項式かける二項式

d) $(xy+3)(x-y)$
$= (xy+3)[x+(-y)]$
$= (xy)x + (xy)(-y) + 3x + 3(-y)$
$= x^2y - xy^2 + 3x - 3y$

二項式かける三項式

b) $(y-2)(3xy+5x+y)$
$= y(3xy) + y(5x) + y(y) + (-2)(3xy) +$
$(-2)(5x) + (-2)(y)$
$= 3xy^2 + 5xy + y^2 - 6xy - 10x - 2y$
$= 3xy^2 - xy + y^2 - 10x - 2y$

三項式かける三項式

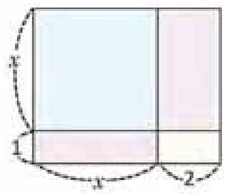
c) $(-xy+x-1)(2xy+2x+1)$
$= (-xy)(2xy) + (-xy)(2x) + (-xy)(1) + x(2xy) + x(2x) + x(1) +$
$(-1)(2xy) + (-1)(2x) + (-1)(1)$
$= -2x^2y^2 - 2x^2y - xy + 2x^2y + 2x^2 + x - 2xy - 2x - 1$
$= -2x^2y^2 - 3xy + 2x^2 - 2x - 1$

宿題： ワークブック7ページ

2.1 $(x+a)(x+b)$ 型の積

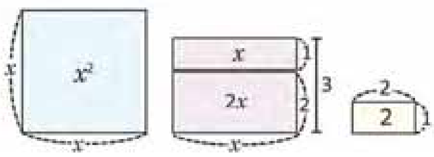
P

以下のパーツで作られる長方形の面積を二通りの方法で求めなさい。



S

1番目の方法：長方形の高さは $x+1$ で、底辺は $x+2$ です。したがって面積はこのような式になります。
$(x+1)(x+2)$
2番目の方法：長方形をセクションに分けてそれぞれの面積から求めます。



それぞれのパーツの面積の和は、
$x^2+2x+x+2=x^2+3x+2$
よって、長方形の面積は次の式でも表すことができます。
x^2+3x+2

ここに示された二つの方法は同じ長方形の面積を表しています。

よって、$(x+1)(x+2)=x^2+3x+2$

積の求め方：項x と項$2x$ はそれぞれ同類項であることに気付きます。よって係数を足して文字x をそのままつけます。

$$\begin{aligned}(x+1)(x+2)&=x^2+(1+2)x+1(2)\\&=x^2+3x+2\end{aligned}$$

C

$(x+a)(x+b)$ 型の二項式の積はこのように展開します。

$$(x+a)(x+b)=x^2+\overbrace{(a+b)}^{a\text{と}b\text{の和}}x+\underbrace{ab}_{a\text{と}b\text{の積}}$$

例えば、

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2)&=x^2+\overbrace{(3+2)}^{\text{和}}x+\overbrace{3(2)}^{\text{積}}\\&=x^2+5x+6\end{aligned}$$

E

$(x+2)(x-3)$を展開しなさい

$$\begin{aligned}(x+2)(x-3)&=(x+2)[x+(-3)]\\&=x^2+(2-3)x+2(-3)\\&=x^2-x-6\end{aligned}$$

$a=2$、$b=-3$で、$(x+2)(x-3)=(x+2)[x+(-3)]$

よって、$(x+2)(x-3)=x^2-x-6$

展開しなさい。

a) $(x+3)(x+5)$
$=x^2+8x+15$

b) $(x+4)(x-5)$
$=x^2-x-20$

c) $(x-5)(x+2)$
$=x^2-3x-10$

d) $(y-1)(y+2)$
$=y^2+y-2$

e) $(y-2)(y-3)$
$=y^2-5y+6$

f) $(y-\frac{1}{2})(y+\frac{3}{4})$
$=y^2+\frac{1}{4}y-\frac{3}{8}$

達成の目安

2.1 $(x + a)(x + b)$ 型の積を求めなさい。

学習の流れ

前の課では、単項式かける二項式から三項式かける三項式までの多項式の積を求めました。式を展開する際に、可変数の指数が2より大きい数でなかったことに注目します。この課では、特別な性質をもった多項式を扱います。ここで扱うような積を**乗法公式**といいます。

ねらい

Ⓟ, Ⓢ $(x + a)(x + b)$を展開方法を説明しています。これは$y = x$で、授業1.2で学習した積の特別なパターンです。

Ⓒ 以下の展開となる型を明確に他と区別します。

$(x + a)(x + b)$
$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab.$
生徒がこの公式を暗記することが大切です。

一部の設問の解答：

$$\left(y - \tfrac{1}{2}\right)\left(y + \tfrac{3}{4}\right)$$
$$\left[y + \left(-\tfrac{1}{2}\right)\right]\left(y + \tfrac{3}{4}\right)$$
$$= y^2 + \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4}\right)y + \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{3}{4}\right)$$
$$= y^2 + \tfrac{1}{4}y - \tfrac{3}{8}$$

つまずきやすい点：

負の符号をもつ$(x + a)(x + b)$型の展開をする場合。
例えば、

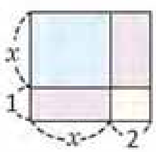
$(y - 3)(y - 2) = y^2 + [-3 + (-2)]y + (-3)(-2).$

このタイプの展開はなかなか理解できない生徒もいるかもしれません。1つの指導法は、手順を書き示すことです。
$(y - 3)(y - 2) = [y + (-3)][y + (-2)]$

日付：

U1 2.1

Ⓟ 長方形の面積の求め方を二通り考えなさい。



Ⓢ 方法1 面積を計算します。
高さ × 底辺 = $(x + 1)(x + 2)$

方法2 それぞれのパーツごとに面積を求めます。
$x^2 + 2x + x + 2 = x^2 + 3x + 2$

二つの方法はどちらも同じ面積を表しています。よって、$(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$

Ⓔ $(x + 2)(x - 3)$を展開しなさい。
$= (x + 2)[x + (-3)]$
$= x^2 + (2 - 3)x + 2(-3)$
$= x^2 - x - 6$
よって、
$(x + 2)(x - 3) = x^2 - x - 6$

Ⓡ a) $x^2 + 8x + 15$
b) $x^2 + x - 20$
c) $x^2 - 3x - 10$
d) $y^2 + y - 2$
e) $y^2 - 5y + 6$
f) $y^2 + \frac{1}{4}y - \frac{3}{8}$

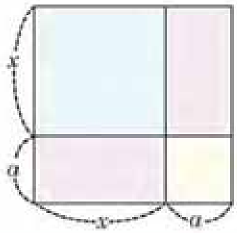
宿題： ワークブック8ページ

レッスン 2

2.2 括弧でくくられた二項式の二乗、第一部

P

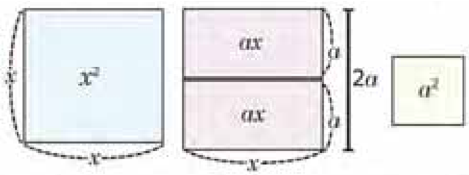
以下のパーツで作られる四角形の面積を二つの異なる方法で求めなさい。



辺lをもつ正方形の面積は l^2となります。

S

1番目の方法：4つのパーツで作られる正方形の辺が $x + a$ なので、面積は $(x + a)^2$と等しくなります。
2番目の方法：長方形をセクションに分けてそれぞれの面積から求めます。



それぞれのパーツの面積の和は、
$x^2 + ax + ax + a^2 = x^2 + 2ax + a^2$
よって、長方形の面積もまた、
$x^2 + 2ax + a^2$

ここに示された二つの方法は同じ長方形の面積を表しています。
よって、$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

積の求め方
$(x + a)^2$ は、前の授業で学んだ代数を用いて展開することもできます。

$$\begin{aligned}(x + a)^2 &= (x + a)(x + a)\\ &= x^2 + (a + a)x + a(a)\\ (x + a)^2 &= x^2 + 2ax + a^2\end{aligned}$$

C

$(x + a)^2$ 型を展開すると、

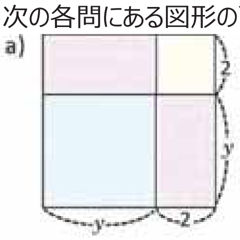
$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

例えば、

$$\begin{aligned}(x + 5)^2 &= x^2 + 2(5)x + 5^2\\ &= x^2 + 10x + 25^2\end{aligned}$$

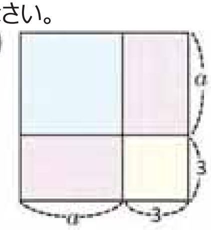
1. 次の各問にある図形の面積を二通りの方法で求めなさい。

a)



$y^2 + 4y + 4$

b)



$a^2 + 6a + 9$

2.展開しなさい。

a) $(x + 1)^2$ $= x^2 + 2x + 1$

b) $(x + 3)^2$ $= x^2 + 6x + 9$

c) $(x + \frac{1}{2})^2$ $= x^2 + x + \frac{1}{4}$

d) $(x + \frac{1}{4})^2$ $= x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$

達成の目安

2.2 足し算の二乗の展開を幾何学的に証明しなさい。

学習の流れ

第2課の初めに、乗法公式のこの型を学習しました：
$(x + a)(x + b)$、その際は面積を使ってこの展開の仕方を図式化しました。ですので、この授業では、これらの展開の特別なパターン、二つの因数が同じであるパターンの展開、つまり、$(x + a)(x + a)$型の展開の分析を進めます。

ねらい

Ⓟ, Ⓢ この授業で扱う公式は前の授業で学習した公式に $b = a$ をあてはめて作ることができます。$2ax$ の項にある係数がなぜ 2 となるかは、図を使って証明します。

Ⓒ 乗法公式 $(x + a)2$ を使って展開の仕方を明らかにします。$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ 今回の授業では、加法の二乗パターンのみを学習しました。減法の二乗については次回学習します。直感的に理解できることも大切ですが、公式は暗記する必要があります。

つまずきやすい点：
二項式を展開させた後にできる式の二項目はかけ算であることを理解する必要があります。例えば、$(x + 3)^2 = x^2 + 2(3)x + 3^2$ の式では、生徒たちは全ての項をどのように計算すべきか疑問を持つかもしれません。

三つの項はそれぞれ積を表しており、x を含む積は x が可変数で積の結果を示すことが不可能であることを示しているにすぎません。

一部の設問の解答：

1. a) 方法1 面積を求めます。
高さ × 底辺 = $(y + 2)(y + 2)$
方法2
それぞれのパーツごとに面積を計算します。
$y^2 + 2y + 2y + 2^2 = y^2 + 4y + 4$

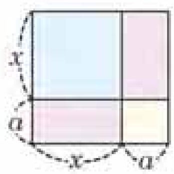
どちらの方法も同じ面積を表しています。よって、
$(y + 2)^2 = y^2 + 4y + 4$

2. a)
$(x + 1)^2 = x^2 + 2(1)x + 1$
$= x^2 + 2x + 1$

日付：

U1 2.2

Ⓟ 長方形の面積の求め方を二通り考えなさい。



Ⓢ 方法1 面積を求めます。$(x + a)^2$

方法2 それぞれのパーツごとに面積を計算します。
$x^2 + ax + ax + a^2 = x^2 + 2ax + a^2$

二つの方法はどちらも同じ面積を表しています。
よって、$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

Ⓡ 1. a) $(y + 2)^2 = y^2 + 4y + 4$
b) $(a + 3)^2 = a^2 + 6a + 9$

2. a) $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$
b) $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$
c) $(x + \frac{1}{2})^2 = x^2 + 2(\frac{1}{2})x + (\frac{1}{2})^2$
$= x^2 + x + \frac{1}{4}$
d) $(x + \frac{1}{4})^2 = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$

宿題： ワークブック9ページ

2.3 括弧でくくられた二項式の二乗、第二部

P

$(x-a)^2$ を展開しなさい。

$(x-a)^2=[x+(-a)]^2$

S

$(x-a)^2$ を $[x+(-a)]^2$ と直し、前の授業で習った方法を使います。

$$\begin{aligned}(x-a)^2 &= [x+(-a)]^2\\ &= x^2+2(-a)x+(-a)^2\\ &= x^2-2ax+a^2\end{aligned}$$

$(-a)^2=(-a)(-a)$
$=a^2$

よって、$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$

C

$(x-a)^2$ 型はこのように展開します。

$$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$$

一般的に、$(x+a)^2$ と $(x-a)^2$ の展開は括弧でくくられた二項式の二乗といいます。

$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2 \text{ ....(1)}$$

$$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2 \text{ ....(2)}$$

E

展開しなさい。

$(x-2)^2$

括弧でくくられた二項式の二乗の (2) のパターンを使って、

$$\begin{aligned}(x-2)^2 &= x^2-2(2)x+2^2\\ &= x^2-4x+4\end{aligned}$$

よって、$(x-2)^2=x^2-4x+4$

展開しなさい。

a) $(x-1)^2$
$=x^2-2x+1$

b) $(x-3)^2$
$=x^2-6x+9$

c) $(x-4)^2$
$=x^2-8x+16$

d) $(x-\frac{1}{2})^2$
$=x^2-x+\frac{1}{4}$

e) $(x-\frac{1}{4})^2$
$=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}$

f) $(x-\frac{1}{3})^2$
$=x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$

10

達成の目安

2.3 減法の二乗を展開しなさい。

学習の流れ

前の授業では、括弧の中が足し算になっている二項式の二乗の展開をしました。今回の授業では、括弧の中が引き算になっているパターンに絞って学習します。

負の数の面積を扱うことは合理的とはいえず、生徒を混乱させることになるので、この乗法公式を説明する際には面積の例は使いませんが、よりシンプルで理解しやすい代数を使った手順を使って説明します。

ねらい

Ⓟ, Ⓢ $(x - a)2$ 型の乗法公式の展開の仕方を $(x + a)2$ 型を使って解明します。
Ⓒ 前の授業で学習した括弧の中が足し算になっている場合の展開と比べます。符号に注意するため、この公式を暗記する必要があり、暗記することで練習問題が解けるようになると説明します。

一部の設問の解答：

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 = x^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right)x + \left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$= x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$$

日付：

U1 2.3

Ⓟ $(x - a)^2$ を展開しなさい。

Ⓢ $(x - a)^2 = [x + (-a)]^2$

$= x^2 + 2(-a)x + (-a)^2$

$= x^2 - 2ax + a^2$

よって、$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

Ⓔ 展開しなさい。

$(x - 2)^2$

$(x - 2)^2 = x^2 - 2(2)x + 2^2$

$= x^2 - 4x + 4$

よって、$(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$

Ⓡ a) $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$

b) $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

d) $(x - \frac{1}{2})^2 = x^2 - x + \frac{1}{4}$

宿題： ワークブック10ページ

2.4 二項式の和と差の積

P

$(x + a)(x - a)$ を展開しなさい。

S

$(x - a)$ を $[x + (-a)]$ と直してから展開します。

$$\begin{aligned}(x+a)(x-a) &= (x+a)[x+(-a)]\\ &= x^2 + (a-a)x + a(-a)\\ &= x^2 + (0)x - a^2\\ &= x^2 - a^2\end{aligned}$$

解説では、
$(x + a)[x + (-a)] \neq (x + a)^2$
つまり、この展開は括弧でくくられた二項式の二乗とは違う方法で展開しています。

よって、$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$

C

$(x + a)(x - a)$ 型の展開は、**二項式の和と差の積**もしくは、単に**二項式の和と差**といい、次のように展開します。

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$$

今までの授業（および今回の授業）で学んできた全ての展開は**乗法公式**といい、示される型は識別しやすく、そのまま使えます。

乗法公式	展開
$(x + a)(x + b)$ 型の展開	$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
括弧でくくられた二項式の二乗	$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ .....(1)
	$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$ .....(2)
二項式の和と差の積	$(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$

E

展開しなさい。

$(x - 2)(x + 2)$

二項式の和と差の積を使って、

$$\begin{aligned}(x-2)(x+2) &= x^2 - 2^2\\ &= x^2 - 4\end{aligned}$$

よって、$(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$

1. 展開しなさい。

a) $(x + 1)(x - 1)$　$= x^2 - 1$

b) $(x + 3)(x - 3)$　$= x^2 - 9$

c) $(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})$　$= x^2 - \frac{1}{4}$

d) $(x - \frac{1}{4})(x + \frac{1}{4})$　$= x^2 - \frac{1}{16}$

2. 以下の式を展開しなさい。

a) $(y - 8)(y - 10)$
$= y^2 - 18y + 80$

b) $(x + 11)^2$
$= x^2 + 22x + 121$

c) $(y - 9)^2$
$= y^2 - 18y + 81$

d) $(y + \frac{4}{3})(y - \frac{4}{3})$
$= y^2 - \frac{16}{9}$

達成の目安

2.4 二項式の和と差の積を展開しなさい。

学習の流れ

この課の最初の授業で、因数がどちらも二項式となる乗法公式を学習しました。また二項式が同じである場合のパターンを学習しました。この授業では、その二項式のパターンが $(x+a)(x-a)$ となる発展パターンを学習します。

ねらい

Ⓟ, Ⓢ 以下の公式を使います。
$(x+a)(x-a)$ は、$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ の公式を使えば展開できるので、この公式を使って展開します。
Ⓒ 二項式の和と差の積 $(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$ の展開の仕方を確かめます。今までの授業で学習した全ての乗法公式とその展開の復習します。今までの公式と同様に、この公式も暗記する必要があります。

一部の設問の解答：

1. d) $\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right) = x^2 - \frac{1}{16}$

2. b) $(x+11)^2 = x^2 + 22x + 121$

日付： **U1 2.4**

Ⓟ 次の式を展開しなさい。
$(x+a)(x-a)$

$(x-a)$ を $[x+(-a)]$ と直します。

Ⓢ
$$\begin{aligned}(x+a)(x-a) &= (x+a)[x+(-a)]\\ &= x^2 + (a-a)x + a(-a)\\ &= x^2 + (0)x - a^2\\ &= x^2 - a^2\end{aligned}$$

よって、$(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$

Ⓔ Desarrolla: $(x-2)(x+2)$

$$\begin{aligned}(x-2)(x+2) &= x^2 - 2^2\\ &= x^2 - 4\end{aligned}$$

よって、$(x+2)(x-2) = x^2 - 4$

Ⓡ
1. a) $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$
   d) $(x-\frac{1}{4})(x+\frac{1}{4}) = x^2 - \frac{1}{16}$
2. a) $y^2 - 18y + 80$
   b) $x^2 + 22x + 121$

宿題： ワークブック11ページ

2.5 代入を使った乗法公式の展開

P

次の式を展開しなさい。$(3x + 4y)^2$

$(x + a)^2$と似た方法で展開することができるでしょうか？

S

$3x = w$、$4y = z$と置き換え、括弧でくくられた二項式の二乗の展開式を作ります。

$$
\begin{aligned}
(3x + 4y)^2 &= (w + z)^2 \\
&= w^2 + 2wz + z^2 \\
&= (3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2
\end{aligned}
$$

$3x$ を w、$4y$ を z に置き換え、

再び w を $3x$、z を $4y$ に戻します。

よって、$(3x + 4y)^2 = 9x^2 + 24xy + 16y^2$

C

可変数のある項をもった乗法公式の展開をするには、代入する方法で今までに覚えた乗法公式にあてはめる事ができます。以下の練習問題をすればそのことがよくわかるでしょう。

E

乗法公式を用いて展開しなさい。

$$(2x + 1)(2x + 3)$$

両方の括弧内に $2x$ があります。$2x = w$ に置き換えて、1回目の授業で学習したのと同じ方法で展開します。

$$
\begin{aligned}
(2x + 1)(2x + 3) &= (w + 1)(w + 3) \\
&= w^2 + (1 + 3)w + 1(3) \\
&= w^2 + 4w + 3 \\
&= (2x)^2 + 4(2x) + 3
\end{aligned}
$$

$2x$をwに置き換え、

再びwを$2x$に戻し、

よって、$(2x + 1)(2x + 3) = 4x^2 + 8x + 3$

展開しなさい。

a) $(5x - 3y)^2$
$= 25x^2 - 30xy + 9y^2$

b) $(3x - 2)(3x - 3)$
$= 9x^2 - 15x + 6$

c) $(2x + 3y)(2x - 3y)$
$= 4x^2 - 9y^2$

d) $(3y - \frac{1}{2})^2$
$= 9y^2 - 3y + \frac{1}{4}$

e) $(\frac{x}{3} - 2)(\frac{x}{3} - 3)$
$= \frac{x^2}{9} - \frac{5x}{3} + 6$

f) $(3y + \frac{1}{5})(3y - \frac{1}{5})$
$= 9y^2 - \frac{1}{25}$

12

達成の目安

2.5 可変数の置き換えを使って多項式を計算しなさい。

学習の流れ

授業2.4までで、括弧でくくられた因数が二項式になっている乗法公式の展開を学習してきました。さらに、第1課では、可変数への置き換えを使ってよりシンプルな展開にする方法を学習しました。今回の授業では、少し複雑な乗法公式を展開するために可変数の置き換えもしくは代入を使う方法を学びます。

ねらい

Ⓟ, Ⓢ 括弧でくくられた二項式の二乗で、両項に可変数がある例を扱います。教科書の解説では、可変数への置き換えを使っています。よくできる生徒はすんなり解くことができるかもしれませんが、LTで提案されている方法を使って展開する方法こそこの授業の目的であるので、必ず試す必要があります。

Ⓒ 生徒は慣れてきたら、可変数への置き換えは暗算でできるようになります。

Ⓔ 可変数の代入を使って$(x + a)(x + b)$型の乗法公式を展開します。

つまずきやすい点：

可変数への置き換えをして展開式を作る時、元の可変数に戻すことを忘れないように注意します。この部分でつまずく生徒が出る可能性があります。

図の緑の矢印が、最初の置き換えで、赤い矢印が元の可変数への置き換えです。

日付：

U1 2.5

Ⓟ 次の式を展開しなさい。

$(3x + 4y)^2$

Ⓢ $(3x + 4y)^2$

$= (w + z)^2$ 　3xをw、4yをzと置き換えています。

$= w^2 + 2wz + z^2$

$= (3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2$

再びwを3xに、zを4yに戻します。

$= 9x^2 + 24xy + 16y^2$

よって、

$(3x + 4y)^2 = 9x^2 + 24xy + 16y^2$

Ⓔ $(2x + 1)(2x + 3)$ を展開しなさい。

$(2x + 1)(2x + 3)$

$= (w + 1)(w + 3)$ 　2xをwに置き換えています。

$= w^2 + (1 + 3)w + 1(3)$

$= w^2 + 4w + 3$

$= (2x)^2 + 4(2x) + 3$ 　wを2xに戻しています。

よって、

$(2x + 1)(2x + 3) = 4x^2 + 8x + 3$

Ⓡ a) $25x^2 - 30xy + 9y^2$

b) $9x^2 - 15x + 6$

宿題： ワークブック12ページ

2.6 乗法公式の組み合わせ

P

展開しなさい。

a) $(x + y + 1)(x + y - 1)$

b) $(2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 5)$

それぞれの問にはどの乗法公式が使えますか？たとえば、最初の問の三項式には足し算 $x + y$ が共通しています。

S

a) どちらの三項式にも足し算 $x + y$ が共通で、一つ目の括弧にある 1 は正の数、二つ目の括弧にある 1 は負の数です。$x + y$ を w と置き換えて二項式の和と差の積の展開をします。

$$\begin{aligned}(x + y + 1)(x + y - 1) &= (w + 1)(w - 1) && x + y \text{ を } w \text{ に置き換え、}\\ &= w^2 - 1^2 \\ &= (x + y)^2 - 1 && \text{再び戻して、}\\ &= x^2 + 2xy + y^2 - 1.\end{aligned}$$

よって、$(x + y + 1)(x + y - 1) = x^2 + 2xy + y^2 - 1$

b) ここで展開することになるのは、括弧でくくられた二項式の二乗と $(x + a)(x + b)$ の部分です。それぞれを展開した後、同類項を整理します。

$$\begin{aligned}(2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 5) &= (2x)^2 - 2(2x)(1) + 1^2 + x^2 + (2 + 5)x + 2(5)\\ &= 4x^2 - 4x + 1 + x^2 + 7x + 10\\ &= 5x^2 + 3x + 11\end{aligned}$$

よって、$(2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 5) = 5x^2 + 3x + 11$

C

乗法公式の組み合わせを展開するには、

1. 式にあてはまる乗法公式を特定します。
2. 四則計算のルールに気を付けながら展開します。
3. 同類項があれば整理します。

以下の式を展開しなさい。

a) $(x - y + 1)(x - y - 1)$
$= x^2 - 2xy + y^2 - 1$

b) $(xy + x + 2)(xy + x - 2)$
$= x^2y^2 + 2x^2y + x^2 - 4$

c) $(x + 3)^2 - (5x + 1)(5x + 2)$
$= -24x^2 - 9x + 7$

d) $(y + 1)(y - 1) - (3y + 2)^2$
$= -8y^2 - 12y - 5$

e) $(x^2 + 1)(x^2 - 1)$
$= x^4 - 1$

f) $(y + 2)(y - 2) + (x^2 + 3)(x^2 - 3)$
$= x^4 + y^2 - 13$

達成の目安

2.6 乗法公式の組み合わせを使って多項式を計算しなさい。

学習の流れ

この授業では、この課で学習してきた乗法公式を使って複数の乗法公式が含まれる展開を行います。

ねらい

Ⓟ, Ⓢ それぞれ複数の乗法公式を組み合わせた展開になる練習問題を解きます。また代入を用いて、式を簡素化することも可能です。a) は三項式の展開で、乗法公式をあてはめるのに可変数を代入する必要があります。
Ⓒ 乗法公式をあてはめるためには、同類項をまとめる必要が出てくる場合がある点に注意します。

一部の設問の解答：

問題a. の解き方

$(x - y + 1)(x - y - 1)$

$x - y$ を w に置き換えます。

$= (w + 1)(w - 1)$
$= w^2 - 1$
$= (x - y)^2 - 1$
$= x^2 - 2xy + y^2 - 1$

日付：

U1 2.6

Ⓟ 展開しなさい。

a) $(x + y + 1)(x + y - 1)$
b) $(2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 5)$

Ⓢ a) $(x + y + 1)(x + y - 1)$
$= (w + 1)(w - 1)$　　$x + y = w$
$= w^2 - 1^2$
$= (x + y)^2 - 1$
$= x^2 + 2xy + y^2 - 1$

よって、
$(x + y + 1)(x + y - 1) = x^2 + 2xy + y^2 - 1$

b) $(2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 5)$
$= (2x)^2 - 2(2x)(1) + 1^2 + x^2 + (2 + 5)x + 2(5)$
$= 4x^2 - 4x + 1 + x^2 + 7x + 10$
$= 5x^2 + 3x + 11$

よって、
$(2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 5) = 5x^2 + 3x + 11$

Ⓡ a) $x^2 - 2xy + y^2 - 1$
b) $x^2y^2 + 2x^2y + x^2 - 4$
c) $-24x^2 - 9x + 7$
d) $-8y^2 - 12y - 5$

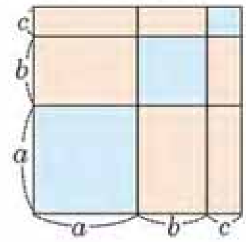
宿題： ワークブック13ページ

レッスン 2

2.7 括弧でくくられた三項式の二乗

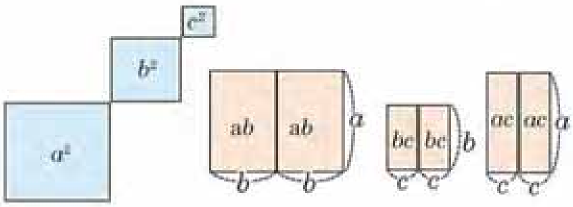
P

以下のパーツで作られる四角形の面積を二つの異なる方法で求めなさい。



S

1番目の方法： 辺$a + b + c$をもつ正方形なので、面積を表す式は、$(a + b + c)^2$となります。
2番目の方法： 正方形を同じサイズのパーツに分けて、それぞれの面積を求めます。



図で示すように、それぞれのパーツの面積の和は、

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$

展開します。 $b + c = w$ を使って括弧でくくられた二項式を展開をします。

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (a+w)^2 \\ &= a^2 + 2aw + w^2 \\ &= a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2 \\ &= a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + (2ab + 2ac + 2bc) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\end{aligned}$$

$b + c$ を w に置き換え、
再び w を $b + c$ に戻します。

よって、$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

この展開をする際は、通常展開式はこの順序にします。

C

$(a + b + c)^2$ 型の展開は**括弧でくくられた三項式の二乗**といい、展開式は、

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$

E

展開しなさい。$(5x - 3y + 4)^2$

$5x - 3y + 4$ は $5x + (-3y) + 4$ と直すことができます。それで、括弧の中を次のように展開することができます。

$$\begin{aligned}(5x - 3y + 4)^2 &= (5x + (-3y) + 4)^2 \\ &= (5x)^2 + (-3y)^2 + (4)^2 + 2(5x)(-3y) + 2(-3y)4 + 2(4)(5x) \\ &= 25x^2 + 9y^2 + 16 - 30xy - 24y + 40x \\ &= 25x^2 + 9y^2 - 30xy + 40x - 24y + 16\end{aligned}$$

展開しなさい。

a) $(x + y + 1)^2$ $= x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y$

b) $(2x + y + 3)^2$ $= 4x^2 + y^2 + 9 + 4xy + 6y + 12x$

c) $(3x - 2y + 5)^2$ $= 9x^2 + 4x^2 + 25 - 12xy - 20y + 30x$

d) $(x - 5y - 1)^2$ $= x^2 + 25y^2 + 1 - 10xy + 10y - 2x$

14

達成の目安

2.7 括弧でくくられた三項式の二乗を展開しなさい。

学習の流れ

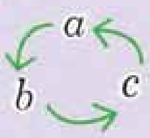
これまでの授業では、括弧の中が二項式になっている乗法公式を学びました。今回の授業では、二乗の括弧でくくられた因数が三項式になっているパターンを扱います。

ねらい

Ⓟ 一片が $a+b+c$ の式で表される正方形の面積をもとめます。
Ⓢ 面積と可変数への置き換えを使って括弧でくくられた三項式を展開する方法を二通り紹介します。図を参照すれば、どの方法がどういう求め方を表しているか見当がつくでしょう。

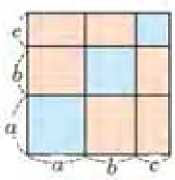
Ⓒ 展開の型とその係数に注意して暗記できるようにします。
Ⓔ 負の数が常に加法の式を使って表されている点に注目します。

この図は、三項式の展開での項の並びと、それぞれの項の二対二の展開の順番を表しています。



日付： U1 2.7

Ⓟ 四角形の面積を二通りの方法で求めなさい。



Ⓢ 方法1
面積を計算します。
高さ × 底辺 = $(a+b+c)^2$

方法2
それぞれのパーツごとに面積を計算します。
$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

よって、
$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

展開します。

$(a+b+c)^2$
$= (a+w)^2$
$= a^2+2aw+w^2$
$= a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$
$= a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$
$= a^2+b^2+c^2+(2ab+2ac+2bc)$
$= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

Ⓔ $(5x-3y+4)^2$
$= (5x+(-3y)+4)^2$
$= (5x)^2+(-3y)^2+(4)^2+2(5x)(-3y)+2(-3y)4+2(4)(5x)$
$= 25x^2+9y^2+16-30xy-24y+40x$

宿題： ワークブック14ページ

2.8 数値と式の計算

P

$a^2 + b^2 = 6$、$ab = 3$ である場合の $(a + b)^2$ の値はいくらでしょう？

$(a + b)^2$、$a^2 + b^2$、ab にあてはまる乗法公式はどれでしょう？

S

この問題は a と b の値を求めているの**ではなく、**$(a + b)^2$ の値を求めています。$a^2 + b^2$ と ab が、括弧でくくられた二項式の二乗の展開にあてはまることに注目します。

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

上記に値を代入します。

加法では、加数の順序で和が変わることはありません。
$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a^2 + b^2) + 2ab \\ &= 6 + 2(3) \\ (a + b)^2 &= 12\end{aligned}$$

よって、$(a + b)^2$ の値は 12

E

98 × 102 を乗法公式を使って計算しなさい。

98 と 102 はそれぞれ 100 − 2 と 100 + 2 と表すことができます。

$$98 \times 102 = (100 - 2)(100 + 2)$$

上記は二項式の和と差の積です。

かけ算では、因数の並び方を入れ替えても積が変わることはありません。
(100 − 2)(100 + 2) = (100 + 2)(100 − 2)

$$\begin{aligned}98 \times 102 &= 100^2 - 2^2 \\ &= 10000 - 4 \\ 98 \times 102 &= 9996\end{aligned}$$

1. 以下の問題を解きなさい。

a) $a^2 + b^2 = 34$、$ab = 15$ である場合の $(a - b)^2$ の値を求めなさい。　$(a - b)^2 = 4$

b) $a - b = 2$、$a^2 - b^2 = 16$ である場合に $a + b$ の値を求めなさい。　$a + b = 8$

2.乗法公式を使って以下の計算をしなさい。

a) 97×103
$= 9991$

b) 95×105
$= 9975$

c) 102^2
$= 10404$

d) 105^2
$= 11025$

達成の目安

2.8 乗法公式を使って代数式と数式の数値を求めなさい。

学習の流れ

前回までの授業で、9学年次で必要な全ての乗法公式を学びました。高校では、ニュートンの二項定理を用いて2以上の有理数をもつ二項式の展開方法を学びます。今回の授業では、それぞれの問題にどの乗法公式を使えばよいかを考える必要があります。

ねらい

Ⓟ, Ⓢ 展開式にある $a2 + b2$ と ab を使って、$(a + b)^2$の式で表しています。

©代数問題を解くだけでなく、数式を簡略化する場合においても乗法公式が使えることを確認します。

一部の設問の解答：

1. b) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
$16 = (a + b)(2)$
$8 = a + b$

2. a) 97×103
$97 \times 103 = (100 - 3)(100 + 3)$
$= 100^2 - 3^2$
$= 10\,000 - 9$
$= 9\,991$

d) $(105)^2$
$(100 + 5)^2 = (100)^2 + 2(100)(5) + (5)^2$
$= 10\,000 + 1\,000 + 25$
$= 11\,025$

日付： **U1 2.8**

Ⓟ $a^2 + b^2 = 6$、$ab = 3$である場合の$(a + b)^2$の値を求めなさい。

Ⓢ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab$
$= 6 + 2(3)$
$(a + b)^2 = 12$

よって、$(a + b)^2$の値は12

Ⓔ 98 × 102を計算しなさい。
$98 \times 102 = (100 - 2)(100 + 2)$
$98 \times 102 = 100^2 - 2^2$
$= 10\,000 - 4$
$98 \times 102 = 9\,996$

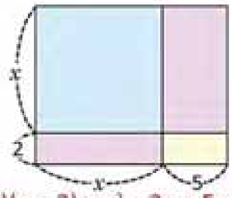
Ⓡ 2.a) 9 991
b) 9 975
c) 10 404
d) 11 025

宿題： ワークブック15ページ

2.9 復習問題

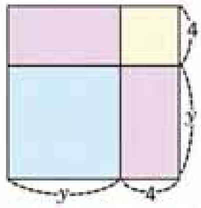
1. 以下の図形の面積を二通りの方法で求めなさい。

a)



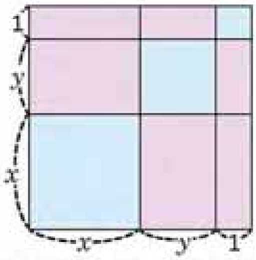
$(x+5)(x+2)$ y $x^2+2x+5x+10$

b)



$(y+4)^2$ y $y^2+4y+4y+16$

c)



$(x+y+1)^2$ y $x^2+y^2+1+xy+xy+x+x+y+y$

2. 以下の $(x+a)(x+b)$ 型の展開をしなさい。

a) $(x+1)(x+9)$
$=x^2+10x+9$

b) $(x+3)(x-6)$
$=x^2-3x-18$

c) $(x+\frac{1}{3})(x+\frac{3}{6})$
$=x^2+\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}$

d) $(y-\frac{1}{2})(y-\frac{3}{2})$
$=y^2-2y+\frac{3}{4}$

e) $(y-1)(y+2)$
$=y^2+y-2$

f) $(x-4)(x-2)$
$=x^2-6x+8$

3. 次の括弧でくくられた二項式の二乗を展開しなさい。

a) $(x+6)^2$
$=x^2+12x+36$

b) $(y-6)^2$
$=y^2-12y+36$

c) $(x+\frac{1}{5})^2$
$=x^2+\frac{2}{5}x+\frac{1}{25}$

d) $(y-\frac{1}{4})^2$
$=y^2-\frac{1}{2}y+\frac{1}{16}$

e) $(x+5)^2$
$=x^2+10x+25$

f) $(y-2)^2$
$=y^2-4y+4$

g) $(x+2)^2$
$=x^2+4x+4$

h) $(y-\frac{1}{3})^2$
$=y^2-\frac{2}{3}y+\frac{1}{9}$

4. 以下の式を展開しなさい。

a) $(x+7)(x-7)$
$=x^2-49$

b) $(x+10)(x-10)$
$=x^2-100$

c) $(y+\frac{1}{5})(y-\frac{1}{5})$
$=y^2-\frac{1}{25}$

d) $(y-\frac{2}{3})(y+\frac{2}{3})$
$=y^2-\frac{4}{9}$

e) $(x+4)(x-4)$
$=x^2-16$

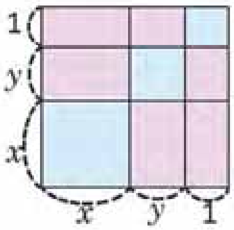
f) $(x+9)(y-9)$
$=xy-9x+9y-81$

達成の目安

2.9 乗法公式を使って問題を解きなさい。

一部の設問の解答：

1. c)



方法1：
高さ × 底辺 = $(x + y + 1)^2$
方法２：
それぞれのパーツごとに面積を計算します。

$$x^2 + y^2 + 1^2 + 2xy + 2x + 2y$$

よって、$(x + y + 1)^2 = x^2 + y^2 + 1^2 + 2xy + 2x + 2y$

2. d) $\left(y - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right)$
$= \left[y + \left(-\frac{1}{2}\right)\right]\left[y + \left(-\frac{3}{2}\right)\right]$
$= y^2 + \left[\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right)\right]y + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)$
$= y^2 + \left[-\frac{4}{2}\right]y + \frac{3}{4}$
$= y^2 - 2y + \frac{3}{4}$

3. a) $(x + 6)^2$
$= x^2 + 2(6)x + 6^2$
$= x^2 + 12x + 36$

h) $\left(y - \frac{1}{3}\right)^2$
$= y^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right)y + \frac{1^2}{3^2}$
$= y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}$

4. c) $\left(y + \frac{1}{5}\right)\left(y - \frac{1}{5}\right)$
$= y^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2$
$= y^2 - \frac{1}{25}$

宿題： ワークブック16ページ

2.10 復習問題

1. 以下の式を展開しなさい。

a) $(6x-10)(6x-2)$ $=36x^2-72x+20$

b) $(\frac{x}{2}+2)(\frac{x}{2}+4)$ $=\frac{x^2}{4}+3x+8$

c) $(5x-6y)^2$ $=25x^2-60xy+36y^2$

d) $(6x+10y)^2$ $=36x^2+120xy+100y^2$

e) $(2x-3)(2x-1)$ $=4x^2-8x+3$

f) $(5x-3y)^2$ $=25x^2-30xy+9y^2$

g) $(\frac{y}{3}-3)^2$ $=\frac{y^2}{9}-2y+9$

h) $(2x+\frac{1}{2})(2x-\frac{1}{2})$ $=4x^2-\frac{1}{4}$

2. 展開しなさい。

a) $(2x+y+2)(2x+y-2)$
$=4x^2+4xy+y^2-4$

b) $(x+y)(x-y)+(x+y)^2$
$=2x^2+2xy$

c) $(2x-3)^2-(5y-1)(5y+2)$
$=4x^2-25y^2-12x-5y+11$

d) $(y^2+1)(y^2-1)-(y^2+1)^2$
$=-2y^2-2$

e) $(5x+10y+3)^2$
$=25x^2+100xy+100y^2+30x+60y+9$

f) $(4x-2y-6)^2$
$=16x^2-16xy+4y^2-48x+24y+36$

3. 以下の問題を解きなさい。

a) $a^2+b^2=104$、$ab=20$である場合の、$(a-b)^2$の値を求めなさい。 $(a-b)^2=64$

b) $a+b=8$、$a^2-b^2=32$である場合の $a-b$ の値を求めなさい。 $a-b=4$

c) $x+y=6$、$x^2+y^2=1$である場合の xy の値を求めなさい。 $xy=\frac{35}{2}$

4. 乗法公式を使って以下の式の計算をしなさい。

a) 101^2
$=(100+1)^2$
$=100^2+200+1$
$=10201$

b) 102×101
$=(100+2)(100+1)$
$=10000+200+100+2$
$=10302$

c) 49×51
$=(50-1)(50+1)$
$=50^2-1^2$
$=2499$

d) 99^2
$=(100-1)^2$
$=100^2-200+1$
$=9801$

達成の目安

2.10 乗法公式を使って問題を解きなさい。

1. f) $w = 5x$ y $z = 3y$ の場合

$(5x - 3y)^2 = (w - z)^2$
$= w^2 - 2(w)(z) + z^2$
$= (5x)^2 - 2(5x)(3y) + (3y)^2$
$= 25x^2 - 30xy + 9y^2$

2. a) $w = 2x + y$の場合

$(2x + y + 2)(2x + y - 2)$
$= (w + 2)(w - 2)$
$= w^2 - 2^2$
$= (2x + y)^2 - 4$
$= (2x)^2 + 2(2x)(y) + y^2 - 4$
$= 4x^2 + 4xy + y^2 - 4$

e) $(5x + 10y + 3)^2$

$= (5x)^2 + (10y)^2 + 3^2 + 2(5x)$
$(10y) +$
$2(10y)(3) + 2(3)(5x)$
$= 25x^2 + 100y^2 + 9 + 100xy +$
$60y + 30x$
$= 25x^2 + 100xy + 100y^2 + 30x +$
$60y + 9$

3. c) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$
$6^2 = 1 + 2xy$
$36 - 1 = 2xy$
$35 = 2xy$
$xy = \frac{35}{2}$

4. b) $(100 + 2)(100 + 1)$

$= (100)^2 + (2 + 1)(100) + 2(1)$
$= 10\,000 + 300 + 2$
$= 10\,302$

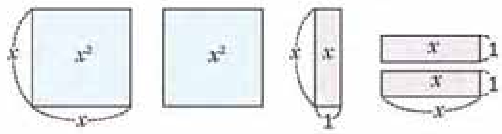
宿題： ワークブック17ページ

レッスン 3 因数分解

3.1 多項式の因数分解

P

アントニオは次のパーツを使って長方形をつくります。

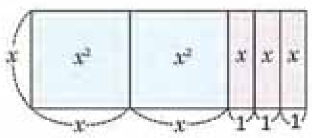


青色のパーツは一辺がxの正方形で、紫色のパーツは高さがx、底辺が1の長方形です。

a) どんな長方形になりますか。
b) 全体の面積はいくらですか。
c) アントニオがつくった長方形の底辺と高さはいくらですか。

S

a) 青色の正方形の1辺の長さは紫色の長方形の高さと等しくなります。（両方とも高さは x）この高さを同じにすれば長方形になります。



b) 面積は各パーツの面積の和と等しくなります、つまり、$x^2 + x^2 + x + x + x = 2x^2 + 3x$
c) 高さと底辺の寸法は次のようになります。

高さ → x
底辺 → $x + x + 1 + 1 + 1 = 2x + 3$

パーツでできた長方形の面積は高さ×底辺で計算します。

全体の面積は $2x^2 + 3x$です、したがって：

$$2x^2 + 3x = x(2x + 3).$$

C

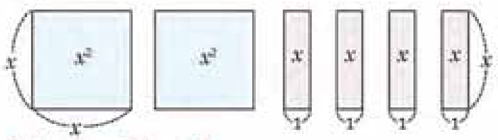
多項式をより簡略化した多項式の積として表す手順を**因数分解**と言います。例えば、$2x^2 + 3x$ を因数分解すると、積 $x(2x + 3)$ となり、x と $2x + 3$ の各項を**因数**と言います。因数分解は多項式の展開の逆の手順です。

$$\overset{\text{因数分解する}}{\underset{\text{展開する}}{2x^2 + 3x = x(2x + 3)}}$$

前の課で、長方形の寸法から面積を求めましたが、ここでは、全体の面積から長方形の寸法を求めます。

1. 各問で、与えられたパーツを使って長方形をつくり、高さと底辺の積として全体の面積を書きなさい。

a)



$2x^2 + 4x = 2x(x + 2)$

b)

$3x^2 + x = x(3x + 1)$

2. 次の多項式の積にある因数を特定しなさい。

a) $2x(5x - 3)$ 因数

b) $x(3x + 2)$ 因数

c) $(x + 4)(2x - 3)$ 因数

d) $3x(x - 5)(2x - 1)$ 因数

達成の目安

3.1 因数分解を多項式の乗法の逆の手順として関連付けます。

学習の流れ

前の課で、この課で学習すべき展開やその他の内容に必要となる乗法公式の事例をすべて学習しました。
因数分解は乗法の逆の手順として見なされるため、様々な型の因数分解との関係を確立するために乗法公式の展開を習得することが重要です。

ねらい

Ⓟ 与えられたパーツを使って長方形をつくり、パーツによって示される全体の面積を求め、その後、できた長方形の高さと底辺の寸法を計算します。これが長方形をパーツに分解するのと逆の手順です。
Ⓢ パーツの面積と長方形の高さと底辺の積との間の関係を確立します。前の課の記載とは異なり、パーツの面積は、等式の左辺に書き、高さと底辺の積は右辺に書きます。
Ⓒ 多項式の乗法の展開とは逆の手順を**因数分解**の定義と定めます。多項式の$2x^2 + 3x$ は単項式の x と二項式 の $2x + 3$の乗法として書くことができる事を示すための例として使用します。

第1番は冒頭の設問と同様の展開をすることが期待され、一方で、第2番では積の中にある因数を特定しなければなりません。これは、次の授業で多項式の因数分解をするために使用する用語の理解に役立ちます。a) では、因数は 2、x、$5x - 3$で、b) と d) も同様です。

日付

次のパーツを使って

a) 長方形をつくってください。
b) 全体の面積を求めてください。
c) 長方形の高さと底辺を求めてください。

c) 高さ
底辺

よって、$2x^2 + 3x = x(2x + 3)$.

2. a) 因数：$2x$ と $5x - 3$
b) 因数： $-x$ と $3x + 2$

宿題：練習帳の18ページ

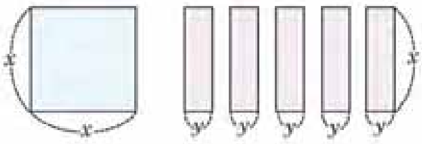
3.2 共通因数

P

以下のように行ってください。

a) 自分のノートにパーツによって示される面積を書きなさい。

b) 長方形をつくり、高さと底辺を使って面積を書きなさい。



S

a) パーツの面積は、$x^2 + 5xy$

b) 長方形の面積は、

高さ → x

底辺 → $x + y + y + y + y + y = x + 5y$

面積は、 $x(x + 5y)$.

式を因数分解するには、$x^2 + 5xy$ を、より簡略化した多項式の積として書かなければなりません。次の式を見てください。

$$x^2 = x(x)$$
$$5xy = x(5y)$$

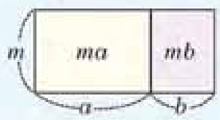
両項に共通して単項式 x があります。したがって、

$$x^2 + 5xy = x(x) + x(5y) \longrightarrow \text{共通項を特定します。}$$
$$= x(x + 5y) \longrightarrow \text{分配法則}$$

よって、$x^2 + 5xy = x(x + 5y)$

C

多項式のすべての項に共通する単項式がある場合は、この単項式を取り出し、分配法則を使って、多項式を因数分解します。$ma + mb = m(a + b)$



E

多項式を因数分解しなさい。

$$5y^2 - 10xy$$

両方の多項式にある共通因数を特定しなければなりません。

$$5y^2 = 5(y)(y) = 5y(y)$$
$$10xy = 2(5)(x)(y) = 5y(2x)$$

したがって、この因数を取り出し、分配法則を使います。

$$5y^2 - 10xy = 5y(y) - 5y(2x)$$
$$= 5y(y - 2x)$$

$5y^2$と $5xy$ の項に共通するものは何ですか。

係数の中の共通因数がその係数の最大公約数です。例えば、5と10の最大公約数は5です。

次の多項式を因数分解しなさい。

a) $2x^2 + xy = x(2x + y)$　b) $10x^2 - 5xy = 5x(2x - y)$　c) $x^2y + xy = xy(x + 1)$

d) $2x^2y - 4xy = 2xy(x - 2)$　e) $2x^2y - 3xy + y = y(2x^2 - 3x + 1)$　f) $3x^2 + 6y + 12xy = 3(x^2 + 2y(1 + 2x))$

g) $x^2y + x^2 - x = x(xy + x - 1)$　h) $4xy - 6y = 2y(2x - 3)$　i) $xy + 16x^2y^2 = xy(1 + 16xy)$

達成の目安

3.3　共通因数が単項式である多項式を因数分解します。

学習の流れ

前回の授業で、因数分解の意味は乗法の逆の手順だと学習しました。この授業では、全項が共通の単項式を持つ場合の 、最も簡単な事例を使って、因数分解の学習を始めます。

ねらい

Ⓟ 与えられたパーツを使って長方形をつくり、パーツによって示される全体の面積を求め、その後、作った長方形の高さと底辺の寸法を計算します。
Ⓢ パーツの面積と長方形の高さと底辺の積との間の関係を確立します。©では、両項にある共通因数を特定し、分配法則を使って、因数分解を行います。

一部の設問の解答：

b) $10x^2 - 5xy$

以下のようにしなければなりません。

$10x^2 = 5(x)(2x)$

$5xy = 5(x)(y)$

よって、

$10x^2 - 5xy = 5(x)(2x) - 5(x)(y)$
$= 5x(2x - y).$

g) $x^2y + x^2 - x$

以下のようにしなければなりません。

$x^2y = (x)(xy)$

$x^2 = (x)(x)$

$x = (x)(1)$

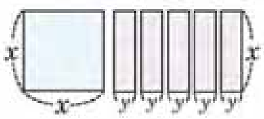
よって、

$x^2y + x^2 - x = (x)(xy) + (x)(x) - (x)$
(1)
$= x(xy + x - 1).$

$-(x)(1)$を因数分解する時に、負の符号を忘れてはいけません。

日付　　U1 3.2

Ⓟ a) パーツによって示される面積を書きなさい。
b) できた長方形の高さと底辺を求めてください。



Ⓢ a)　パーツの面積： $x^2 + 5xy$

b)


高さ　→ x
底辺　→ $x + y + y + y + y + y = x + 5y$
よって、　$x^2 + 5xy = x(x + 5y).$

Ⓔ 因数分解をしなさい。$5y^2 - 10xy$
以下のようにしなければなりません。

$5y^2 = 5y(y)$

$10xy = 5y(2x)$

よって、

$5y^2 - 10xy = 5y(y) - 5y(2x)$
$= 5y(y - 2x).$

Ⓡ a)　$x(2x + y)$
b)　$5x(2x - y)$

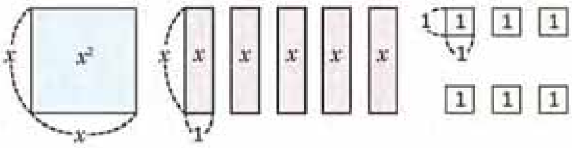
宿題： 練習帳の19ページ。

3.3 三項式 $x^2 + (a + b)x + ab$ の型になる因数分解、第一部

P

アナは三項式 $x^2 + 5x + 6$ を因数分解したいと思っています。因数分解をするために、次のように考えます。

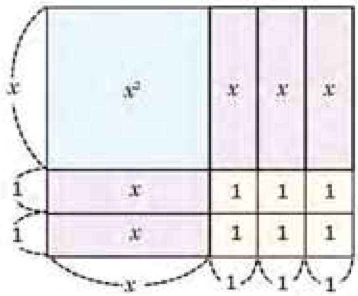
$x^2 + 5x + 6$ は次のパーツからできている、長方形の面積です。したがって、
$x^2 + 5x + 6$ を因数分解するには長方形の高さと底辺を求めなければなりません。



$x^2 + 5x + 6$ はどのように因数分解できますか。

S

パーツでできた長方形が次の図に示してあります。長方形の高さは $(x + 2)$ で、底辺は $(x + 3)$ です。
したがって、$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$



$(x + 2)(x + 3)$ の積は $(x + a)(x + b)$ の形の乗法公式であることに注目すると、これは次のように展開します。

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (\overbrace{a+b}^{a\text{と}b\text{の和}})x + \underbrace{ab}_{a\text{と}b\text{の積}}$$

したがって、$x^2 + 5x + 6$ を因数分解するには和が +5 に、積が +6 になる2つの数字を求めなければなりません。
積が +6 になる数字（正の数と負の数）の組み合わせを試します。

組み合わせ	積	和
1と6	+6	+7
−1と−6	+6	−7
2と3	+6	+5
−2と−3	+6	−5

積が正の6でなければならないので、2つの数字はともに正の数、または負の数でなければなりません。これは乗法の符号の法則によるものです。
(+)(+) = +
(−)(−) = +

よって、$a = 2$、$b = 3$ したがって、$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$

C

$(x + a)(x + b)$ の乗法公式で、三項式を因数分解するには次のように行います。

1. 三項式の項は x^2、文字 x のある別の項、及び変数のない別の項（定数項）とならなければなりません。

2. 符号の法則に注意して、積が定数項と等しく、かつ和が x の係数と等しくなる2つの数を求めます。

E

$y^2 + 13y + 30$ を因数分解しなさい。
積が +30 に、和が +13 になる2つの数字を求めなければなりません。和が正の数なので、したがって2つの数は正の数でなければなりません。

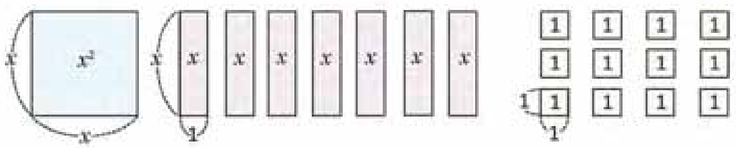
組み合わせ	積	和
1 と 30	+30	+31
2 と 15	+30	+17
3 と 10	+30	+13

よって $a = 3$, $b = 10$、したがって
$y^2 + 13y + 30 = (y + 3)(y + 10)$

1. 以下の図では、

 a) 長方形になるように次のパーツを並べ替えなさい。

 b) できた長方形の面積を底辺と高さを使って求めなさい。



x^2	x	x	x	x
x	1	1	1	1
x	1	1	1	1
x	1	1	1	1

$x^2 + 7x + 12 = (x + 4)(x + 3)$

2. 次の三項式を因数分解しなさい。

a) $x^2 + 3x + 2 \quad = (x+1)(x+2)$

b) $x^2 + 9x + 20 \quad = (x+4)(x+5)$

c) $y^2 + 8y + 12 \quad = (y+6)(y+2)$

d) $y^2 + 11y + 30 \quad = (y+5)(y+6)$

21

達成の目安

3.3　$x^2 + (a + b)x + ab$ の形の多項式を乗法公式 $(x + a)(x + b)$ で、因数分解します。

学習の流れ

以前、共通因数という定義を定め、和に対する積の分配法則を使って、多項式の項に対し共通する単項の因数がある場合の事例だけ学習しました。この授業では、三項式が $x^2 + (a + b)x + ab$ の形である場合の事例を学習し、それを因数分解するために前回までの授業で学んだ乗法公式の中の一つを使います。

ねらい

Ⓟ $x^2 + (a + b)x + ab$ の形の三項式を因数分解する目的で、数字で表す例を示すため、パーツの取りまわしを利用します。Ⓢ この例題で、x の係数が2つの数の和であること、また定数項がその積であることを示します。この数を求めるにはトライ&エラーの手順を使います。
2つの数の積である30を式で表す方法は限りなくあり、また2つの数字の和である13を式で表す方法も限りなくあります。この理由から、まず、表に積が +30 になる2つの数を書かなければならず、次の欄にその和の値を入れます。その手順を和が +13 になるまで繰り返し行えばそれが求める数字です。

一部の設問の解答：

2. b) $x^2 + 9x + 20$

組み合わせ	積	和
1と20	+20	+21
2と10	+20	+12
4と5	+20	+9

よって、
$x^2 + 9x + 20 = (x + 4)(x + 5)$

d) $y^2 + 11y + 30$

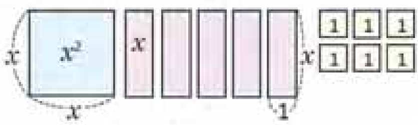
組み合わせ	積	和
1と30	+30	+31
2と15	+30	+17
3と10	+30	+13
5と6	+30	+11

よって、
$y^2 + 11y + 30 = (y + 5)(y + 6)$

つまずきやすい点：
単純ではないパーツを使って長方形をつくります。生徒は頭の中で、または、実際の物を使って隙間のない図形ができるまでパーツを取りまわさなければなりません。各パーツの辺の寸法を忘れたり、同じ寸法ではない別のパーツの辺と合わせようとすることはよくあることです。

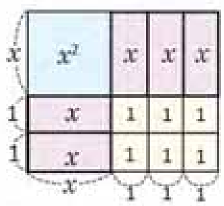
日付　　U1 3.3

Ⓟ 次のパーツを使って、



長方形をつくり、$x^2 + 5x + 6$ を因数分解しなさい。

Ⓢ できた長方形



$x^2 + 5x + 6$
$= (x + 2)(x + 3)$

和が +5 に、積が +6 になる2つの数字を求めます。

組み合わせ	積	和
1と6	+6	+7
−1と−6	+6	−7
2と3	+6	+5

Ⓔ $y^2 + 13y + 30$を因数分解します。

組み合わせ	積	和
1と30	+30	+31
2と15	+30	+17
3と10	+30	+13

$y^2 + 13y + 30$
$= (y + 3)(y + 10)$

宿題：練習帳の20ページ。

3.4 三項式 $x^2 + (a + b)x + ab$ の型になる因数分解、第二部

P

多項式を因数分解しなさい。

a) $x^2 - 13x + 36$　　b) $y^2 - 6y - 40$

S

a) 乗法公式 $(x + a)(x + b)$ で、三項式を因数分解するために、以下の条件を満たします。積が +36 に、和が −13 になる2つの数字を求めます。和が負で、積が正なので、2つの数字は共に負です。

組み合わせ	積	和
−1 と −36	+36	−37
−2 と −18	+36	−20
−3 と −12	+36	−15
−4 と −9	+36	−13

したがって、

$$x^2 - 13x + 36 = [x + (-4)][x + (-9)]$$
$$= (x - 4)(x - 9)$$

よって、　$x^2 - 13x + 36 = (x - 4)(x - 9)$

因数分解が正しいかどうかを確かめるために $(x - 4)(x - 9)$を展開することができます。

b) ここでも、積が −40 に、和が −6 になる2つの数字を求めます。積が負 (−40)であるため、一つは正でもう一つは負でなければなりません。

組み合わせ	積	和
−1 と40	−40	+39
1 と −40	−40	−39
−2 と 20	−40	+18
2 と −20	−40	−18
−4 と 10	−40	+6
4 と −10	−40	−6

表には 5, −8 と −5, 8 の組み合わせがありませんが、条件を満たす数が既に見つかりました。

したがって、

$$y^2 - 6y - 40 = (y + 4)[y + (-10)]$$
$$= (y + 4)(y - 10)$$

よって、　$y^2 - 6y - 40 = (y + 4)(y - 10)$.

C

$a > 0$ かつ、$b > 0$の場合、

三項式が $x^2 + ax + b$ の場合	積が $+b$ に、和が $+a$ になる2つの正の数を求めます。
三項式が $x^2 - ax + b$ の場合	積が $+b$ に、和が $-a$ になる2つの負の数を求めます。
三項式が $x^2 + ax - b$ 又は $x^2 - ax - b$ の場合	一つが正で、もう一つが負の2つの数字で、その積が $-b$ かつ、和が $+a$ 又は $-a$, のいずれか該当する数を求めます。

因数分解しなさい。

a) $x^2 + x - 2$
$= (x + 2)(x - 1)$

b) $x^2 - 10x + 21$
$= (x - 7)(x - 3)$

c) $x^2 - 7x - 30$
$= (x - 10)(x + 3)$

d) $y^2 - 4y - 32$
$= (y - 8)(y + 4)$

e) $y^2 - 14y + 33$
$= (x - 3)(x - 11)$

f) $x^2 + 13x + 42$
$= (x + 6)(x + 7)$

22

達成の目安

3.4 負の符号のある項を伴う $x^2 + (a + b)x + ab$ の形の多項式を乗法公式 $(x + a)(x + b)$で因数分解します。

学習の流れ

前回の授業で、$x^2 + (a + b)x + a$ の形の多項式を因数分解するための手順が具体的に明らかになりました。この授業ではこれと同じ型の多項式ですが、異なる点として、負の符号がつく可能性のある多項式を因数分解します。

ねらい

Ⓟ, Ⓢ 次の方法を使います。
$ab > 0$で、 a と bが同じ符号の場合。$ab < 0$で、a とbの符号が異なる場合。
$a > 0$ かつ、$b > 0$である場合、$a + b > 0$ となります。
$a < 0$ かつ、$b < 0$ である場合、$a + b < 0$ となります。
このように、確かめなければならない組み合わせの数を減らすことができます。
全てのありうる事例において $x^2 + (a + b)x + ab$ の形の三項式を因数分解する手順を確立します。負の符号の使い方を間違えないよう $a > 0$かつ、$b > 0$であると言及するのは重要です。

一部の設問の解答：

2. a) $x^2 + x - 2$

組み合わせ	積	和
1 と −2	−2	−1
−1 と 2	−2	+1

よって、
$$x^2 + x - 2 = (x + (-1))(x + 2) \\ = (x - 1)(x + 2).$$

d) $y^2 - 4y - 32$

組み合わせ	積	和
−1 と 32	−32	+31
−2 と 16	−32	+14
−4 と 8	−32	+4
−8 と 4	−32	−4

よって、
$$y^2 - 4y - 32 = (y + (-8))(y + 4) \\ = (y - 8)(y + 4).$$

日付

U1 3.4

Ⓟ 多項式を因数分解しなさい。
a) $x^2 - 13x + 36$
b) $y^2 - 6y - 40$

Ⓢ a)

組み合わせ	積	和
−1 と −36	+36	−37
−2 と −18	+36	−20
−3 と −12	+36	−15
−4 と −9	+36	−13

よって、
$$x^2 - 13x + 36 = (x + (-4))(x + (-9)) \\ = (x - 4)(x - 9).$$

b)

組み合わせ	積	和
−1 と 40	−40	+39
1 と −40	−40	−39
−2 と 20	−40	+18
2 と −20	−40	−18
−4 と 10	−40	+6
4 と −10	−40	−6

よって、
$$y^2 - 6y - 40 = (y + 4)(y + (-10)) \\ = (y + 4)(y - 10).$$

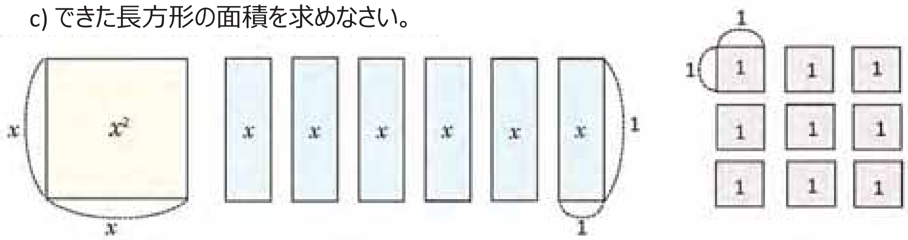
Ⓡ a) $(x + 2)(x - 1)$
b) $(x - 7)(x - 3)$

宿題： 練習帳の21ページ

3.5 完全平方三項式の因数分解

P 以下のように行ってください。

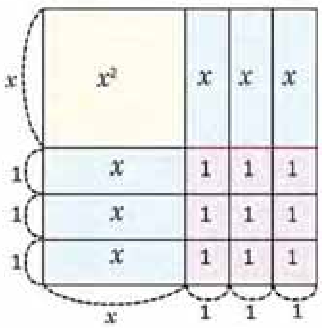
a) パーツによって示される面積を書きなさい。
b) 長方形になるようにパーツを並べなさい。
c) できた長方形の面積を求めなさい。



S a) パーツによって示される面積は、

$x^2 + x + x + x + x + x + x + 9 = x^2 + 6x + 9.$

b) パーツでできた長方形、



高さ → $x + 3$
底辺 → $x + 3$

c) できた長方形は正方形であることが分かります。その面積は、

$(x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2$

よって、 $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2.$

前回までの授業で、学んだことを使い、積が +9 に、和が +6 になる正の数2つ（この例題では）を求めることができます。

組み合わせ	積	和
1と9	+9	+10
3と3	+9	+6

したがって、$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)(x + 3)$
$= (x + 3)^2.$

因数分解は二項式の二乗となります。この乗法公式は次のように展開されます。

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2.$$

したがって、$x^2 + 6x + 9$ を二項式の二乗に因数分解するためには、2乗が9に、2倍が6になる数を求めなくてはならず、ここでは3になります。したがって、

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2.$$

レッスン 3

C

$x^2 \pm 2ax + a^2$の形の三項式は**完全平方三項式**と言います。これを、二つ目の項の符号に合わせて、二項式の二乗として因数分解を行います。

完全平方三項式においては、定数項は常に負ではありません。

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

ある三項式が完全平方三項式であるかどうかを確かめるには、まず定数項がある数字の二乗になっているかを確かめ、次にその数字を2倍にしたものが一次の変数の係数となっているかを確かめます。例えば、

$$x^2 + 6x + 9$$

9が3の二乗 ($3^2 = 9$) で、さらに、3 の2倍は6、また一次の変数 x の係数と等しいので、これは完全平方三項式です。したがって、

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2(3)x + 3^2$$
$$= (x + 3)^2.$$

E

因数分解しなさい。

$$x^2 - 10x + 25$$

次の理由から完全平方三項式です。

a) 定数項がある数の二乗になっています。

25 は5の二乗です。 ($5^2 = 25$ であり、$a = 5$ となっています。)

b) x の係数は5の2倍です。

$$2a = 2(5) = 10.$$

二つ目の項は負ですので、したがって

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2.$$

因数分解しなさい。

a) $x^2 + 4x + 4$
$= (x + 2)^2$

b) $x^2 - 8x + 16$
$= (x - 4)^2$

c) $y^2 - 18y + 81$
$= (x - 9)^2$

d) $y^2 + 14y + 49$
$= (x + 7)^2$

e) $x^2 + x + \frac{1}{4}$
$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

f) $y^2 - \frac{y}{2} + \frac{1}{16}$
$= \left(y - \frac{1}{4}\right)^2$

達成の目安

3.5 乗法公式 $(x+a)^2$ 又は $(x-a)^2$ で完全平方三項式を因数分解します。

学習の流れ

前回までの授業で、因数分解の概念を学習し、その後、乗法公式を使って平方三項式を因数分解し、さらに、多項式を因数分解すると何が起きるかを幾何学的に例示するために、面積を使いました。この授業では、三項式が**完全平方三項式**である場合の、事例を学習します。

ねらい

Ⓟ, Ⓢ 与えられたパーツでできた長方形が実際は正方形であることを確認し、完全平方三項式の因数分解を例示するために、この方法が使われます。

Ⓔ 三項式の二つ目の項の符号が正なのか負なのかにより、乗法公式の $(x+a)^2$ または、$(x-a)^2$ で、完全平方三項式を因数分解するための手順を確立します。

一部の設問の解答：

1. a) x^2+4x+4

以下のようにしなければなりません。

$4=2^2$

$4=2(2)$

よって、

$x^2+4x+4=(x+2)^2$.

e) $x^2+x+\frac{1}{4}$

以下のようにしなければなりません。

$\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$1=2\left(\frac{1}{2}\right)$

よって、

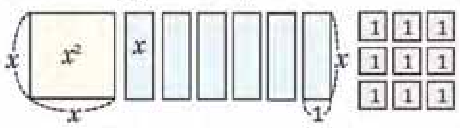
$x^2+x+\frac{1}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$.

つまずきやすい点：

この問題のねらいは完全な形の長方形ができるまで、パーツを取りまわすことだと理解することです。与える指示はできるだけ明確に出さなければなりません。

日付 U 3.5

Ⓟ 次のパーツを使って、



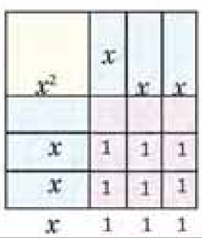
a) パーツに示してある面積を書きなさい。
b) 長方形をつくってください。
c) 長方形の面積を求めなさい。

Ⓢ a)

パーツの面積は、

x^2+6x+9

b)



c) $(x+3)^2$

よって、 $x^2+6x+9=(x+3)^2$.

Ⓔ 因数分解しなさい。$x^2-10x+25$

以下のことに注目します。

$25=5^2$

$10=2(5)$

$x^2-10x+25=x^2-2(5)x+5^2$

$=(x-5)^2$

Ⓡ

a) $(x+2)^2$

b) $(x-4)^2$

c) $(x-9)^2$

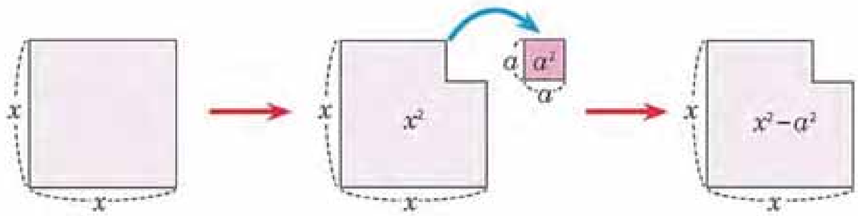
宿題：練習帳の22 ページ

3.6 二乗の差の因数分解

P

図形1では、一辺が x の正方形から一辺が a の正方形を切り取り（図形2）、結果として図形3のようになりました。その面積は $x^2 - a^2$ です。

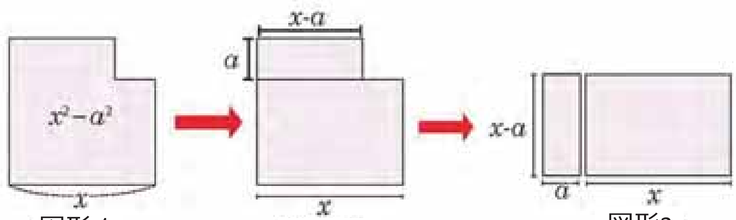
適切にカットして、図形2をパーツに分け、長方形にしなさい。



図形 1　　図形2　　図形3

S

次に示すように、カットし、そのパーツを再配置することができます。



図形 1　　図形2　　図形3

解答としては、長方形をこれらのパーツに分けましたが、これは長方形を分割し、法則を示すことを可能にする唯一の方法ではありません。

図形1の面積は $x^2 - a^2$ で、図形3の面積は $(x + a)(x - a)$ であることに注目します。
これらの式は同じ面積を表しているためです。したがって、$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$ とならなければなりません。

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a).$$

C

$x^2 - a^2$ の形の多項式を**二乗の差**と言い、乗法公式の $(x + a)(x - a)$ で因数分解します。つまり、次のようになります。

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a).$$

E

因数分解しなさい：$x^2 - 9$

$x^2 - 9$ を因数分解するには、定数項の9は3の二乗と等しく、したがって、

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= x^2 - 3^2 \\ &= (x + 3)(x - 3) \end{aligned}$$

よって、　$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3).$

因数分解しなさい。

a) $x^2 - 1$
$= (x + 1)(x - 1)$

b) $x^2 - 16$
$= (x + 4)(x - 4)$

c) $y^2 - 25$
$= (y + 5)(y - 5)$

d) $x^2 - y^2$
$= (x + y)(x - y)$

e) $y^2 - \frac{1}{4}$
$= \left(y + \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)$

f) $x^2 - \frac{1}{9}$
$= \left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$

達成の目安

3.6 乗法公式 $(x+a)(x-a)$ として二乗の差を因数分解します。

学習の流れ

前回までの授業で、前の課で学習した乗法公式を使って三項式を因数分解する方法を学習しました。ここでは、二項式の差と和の積の乗法公式を使って二乗の差をどのようにして因数分解するか学習します。

ねらい

Ⓟ, Ⓢ 取りまわし可能な紙のパーツを使って図2から長方形をつくります。これは一辺が x の正方形から一辺が a の正方形を取った形を表しています。
Ⓒ 二乗の差を因数分解するために解答において得られた結果から手順を明確に決めます。

Ⓔ 二乗の差 に関する事だと気づかせることを目的として x の二乗と 3 の二乗で式をつくります。

一部の設問の解答：

b) x^2-16
$x^2-16 = x^2-4^2$
$= (x+4)(x-4)$

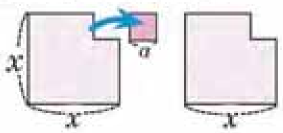
d) x^2-y^2
$x^2-y^2 = (x-y)(x+y)$

注意：
教科書の182ページに、図2と同じ画像が拡大されて掲載されています。取りまわすための材料を簡単に配付できるよう、このページをコピーして使うこともできます。

日付

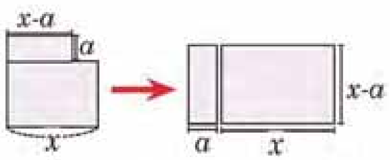
U1 3.6

Ⓟ 一辺が x の正方形から一辺が a の正方形を取ります。



図形をパーツに分け、長方形をつくりなさい。

Ⓢ



面積： $x^2-a^2 = (x+a)(x-a)$

Ⓔ x^2-9 を因数分解しなさい。

$x^2-9 = x^2-3^2$
$= (x+3)(x-3)$

よって、
$x^2-9 = (x+3)(x-3)$.

Ⓡ

a) x^2-1
$x^2-1 = x^2-1^2$
$= (x+1)(x-1)$

b) $(x+4)(x-4)$

c) $(y+5)(y-5)$

宿題： 練習帳の23ページ

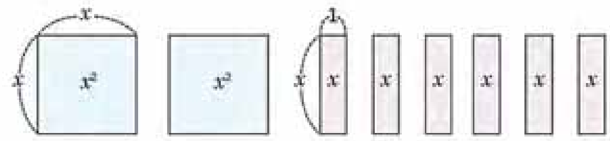
3.7 復習問題

次は、この授業までに確認した因数分解のまとめを提示します。

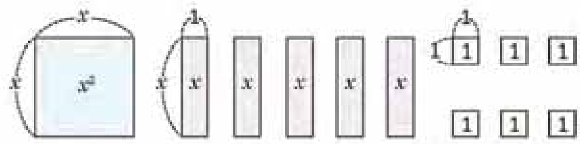
	因数分解すると	例
共通因数 $ma + mb + mc$	$m(a + b + c)$	$4x^2 + 6xy - 10x = 2x(2x + 3y - 5)$
以下の形の三項式 $x^2 + (a + b)x + ab$	$(x + a)(x + b)$	$x^2 + 2x - 35 = (x + 7)(x - 5)$
完全平方三項式 $x^2 + 2ax + a^2$.....(1) $x^2 - 2ax + a^2$.....(2)	$(x + a)^2$.....(1)	$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$
	$(x - a)^2$.....(2)	$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$
二乗の差 $x^2 - a^2$	$(x + a)(x - a)$	$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$

1. 各問で、与えられたパーツを使って長方形をつくり、高さと底辺の積として全体の面積を書きなさい。

a)



b)



2. 次の多項式の積にある因数を特定しなさい。

a) $5x(x - 1)$ b) $(-2x)(x + 10)$

c) $(x + y)(5x - y)$ d) $x(x - 5)(2x + 3)$

e) $2x(3x + 4)(y + 1)$ f) $-y(2y + 9)(10 - 11y)$

3. 三項式 $x^2 - 11x + 18$ について、

a) 積が +18 に、和が −11 になる2つの数は共に正の数ですか、負の数ですか、それとも、一つが正でもう一つが負となりますか。解答の理由も述べなさい。 $2x^2 + 6x = 2x(x + 3)$

b) 三項式を因数分解しなさい。 $x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$

4. 次の多項式を因数分解しなさい。

a) $10x^2 + 6xy$ $= 2x(5x + 3y)$

b) $7xy - 21y^2$ $= 7y(x - 3y)$

c) $-x^2 + 2xy - 3xy^2$ $= -x(x - 2y + 3y^2)$

d) $9x^2y - 15xy - 21xy^2$ $= 3xy(3x - 5 - 7y)$

e) $x^2 - 6x - 55$ $= (x - 11)(x + 5)$

f) $y^2 + 5y - 50$ $= (y + 10)(y - 5)$

g) $x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{16}$ $= \left(x + \frac{5}{4}\right)^2$

h) $y^2 - \frac{5}{3}y + \frac{25}{36}$ $= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2$

i) $x^2 - 81$ $= (x + 9)(x - 9)$

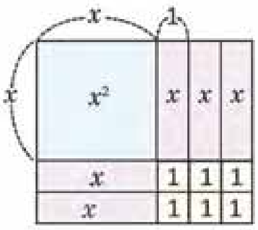
j) $y^2 - \frac{25}{36}$ $= \left(y + \frac{5}{6}\right)\left(y - \frac{5}{6}\right)$

達成の目安

3.7 因数分解を使って問題を解きなさい。

一部の設問の解答：

1. a)



面積の合計： $(x + 3)(x + 2)$

2. a) 因数：$5x$、$x - 1$
   b) 因数： $-2x$、$x + 10$
   c) 因数： $x + y$、$5x - y$
   d) 因数： x、$x - 5$、$2x + 3$
   e) 因数：$2x$、$3x + 4$、$y + 1$
   f) 因数： $-y$、$2y + 9$、$10 - 11y$

3. a) 積が正(+)なので、2つの数は同符号でなければならない。2つの数が正の場合、その和は正になりますが、2つの数が負の場合は、足し算の答えに、負の符号が付きます。よって、共に負の数です。

b) $(x - 9)(x - 2)$

4. f) $y^2 + 5y - 50$

組み合わせ	積	和
1 と −50	−50	−49
−1 と 50	−50	+49
2 と −25	−50	−23
−2 と 25	−50	+23
5 と −10	−50	−5
−5 と 10	−50	+5

よって、

$y^2 + 5y - 50 = (y - 5)(y + 10)$.

j) $y^2 - \frac{25}{36}$

$y^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \left(y - \frac{5}{6}\right)\left(y + \frac{5}{6}\right)$

宿題： 練習帳24ページ

3.8 変数への置き換えを利用した多項式の因数分解　第一部

P

次の多項式を因数分解しなさい。

a) $4x^2 + 12xy + 9y^2$
b) $4x^2 - 25y^2$

各例題で、共通因数を使うことができますか。前回までの授業で、学んだ方法の中でどれが使えますか。

S

a) 三項式の項に共通の単項式がありませんが、前回までの授業で学んだ方法の一つを直接使うことができます。最初の項は $2x$ の二乗で、三つ目の項は $3y$ の二乗だと注目してください。

$$(2x)^2 = 4x^2$$
$$(3y)^2 = 9y^2$$

また、$2(2x)(3y) = 12xy$、よって、$4x^2 + 12xy + 9y^2$ は完全平方三項式です。$2x = w$ 、$3y = z$ とし、完全平方三項式に因数分解します。

$$\begin{aligned} 4x^2 + 12xy + 9y^2 &= (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 && 2x = w、3y = z \text{ とし、} \\ &= w^2 + 2wz + z^2 \\ &= (w + z)^2 && \text{因数分解し、} \\ &= (2x + 3y)^2 && \text{再び、} w = 2x、z = 3y \text{ に戻し} \end{aligned}$$

よって、$4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2$

b) 前の例題と同様に、二項式の項に共通の単項式がありません。最初の項は $2x$ の二乗で、二つ目の項は $5y$ の二乗となることに注目してください。

$$(2x)^2 = 4x^2$$
$$(5y)^2 = 25y^2$$

$2x = w$ 、$5y = z$ とし、完全平方三項式に因数分解します。

$$\begin{aligned} 4x^2 - 25y^2 &= (2x)^2 - (5y)^2 && 2x = w、5y = z \text{ とし} \\ &= w^2 - z^2 && \text{因数分解し、} \\ &= (w + z)(w - z) && \text{再び戻して、} \\ &= (2x + 5y)(2x - 5y). \end{aligned}$$

よって、$4x^2 - 25y^2 = (2x + 5y)(2x - 5y)$

C

多項式を因数分解する場合、その項に共通する単項式が**ない**場合、変数へ置き換え、既に習った多項式に変換し、前回までの授業で学んだ形のどれかを使って、因数分解できます。

因数分解しなさい。

a) $9x^2 - 30x + 25 \quad = (3x - 5)^2$

b) $16x^2 + 24xy + 9y^2 \quad = (4x + 3y)^2$

c) $\frac{x^2}{4} + 5x + 25 = \left(\frac{x}{2} + 5\right)^2$

d) $36x^2 - 25$
$= (6x + 5)(6x - 5)$

e) $x^2 - 100y^2$
$= (x + 100y)(x - 100y)$

f) $\frac{x^2}{4} - y^2$
$= \left(\frac{x}{2} + y\right)\left(\frac{x}{2} - y\right)$

達成の目安

3.8 多項式を因数分解するために、単項式の変数への置き換えを使います。

学習の流れ

2つの多項式の積を他の簡略化した項にまとめるため、または、一見すると複雑な2つの式の積を変換するために、前の授業では、すでに学んだ乗法公式の中で変数への置き換えが使われました。同じ考え方に従って、ここでは、変数への置き換えを使って、多項式の因数分解がより、はっきりと、自然にできるようにします。

ねらい

Ⓟ,Ⓢ これまでに学んだいくつかの因数分解の型を使って代数式を因数分解します。まず、生徒は、それぞれが最も適切だと思うように解答を出すことができます。もし可能なら、使うべき因数分解がよりはっきりするので、変数への置き換えがとても有用であることを示すために、常に、置き換えを使って問題を解かなければなりません。
Ⓒ 変数への置き換えを多項式の因数分解をしやすくするツールとして確立します。

一部の設問の解答：

a) $9x^2 - 30x + 25$
$= (3x)^2 - 2(5)(3x) + 5^2$

Sea $3x = w$
$= w^2 - 2(5)w + 5^2$
$= (w - 5)^2$
$= (3x - 5)^2$
よって、
$9x^2 - 30x + 25 = (3x - 5)^2$.

f) $\frac{x^2}{4} - y^2$, sea $\frac{x}{2} = w$
$= w^2 - y^2$
$= (w + y)(w - y)$
$= \left(\frac{x}{2} + y\right)\left(\frac{x}{2} - y\right)$
よって、
$\frac{x^2}{4} - y^2 = \left(\frac{x}{2} + y\right)\left(\frac{x}{2} - y\right)$.

黒板の書き方としては、生徒に変数への置き換えを使った式を使うよう要求することが必要なので、解答の部分には、置き換えの式は省略します。

日付 U1 3.8

Ⓟ 次の多項式を因数分解しなさい。
a) $4x^2 + 12xy + 9y^2$
b) $4x^2 - 25y^2$

Ⓢ a) $4x^2 + 12xy + 9y^2$
以下のことに注目します。
$4x^2 = (2x)^2$ y $9y^2 = (3y)^2$

$4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2$
$2x = w$、$3y = z$ とすると、
$(2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 = w^2 + 2(w)(z) + (z)^2$
$= (w + z)^2$
$= (2x + 3y)^2$

したがって、$4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2$.

b) $4x^2 - 25y^2$
以下のことに注目します。
$4x^2 = (2x)^2$ y $25y^2 = (5y)^2$
$4x^2 - 25y^2 = (2x)^2 - (5y)^2$
$= (2x + 5y)(2x - 5y)$
したがって、$4x^2 - 25y^2 = (2x + 5y)(2x - 5y)$

Ⓡ a) $(3x - 5)^2$
b) $(4x + 3y)^2$
c) $\left(\frac{x}{2} + 5\right)^2$
d) $(6x + 5)(6x - 5y)$

宿題： 練習帳25ページ

3.9 変数への置き換えを利用した多項式の因数分解、 第二部

P

因数分解しなさい。

a) $(x-1)^2-(y+1)^2$

b) $(x+1)^2+2(x+1)y+y^2$

各多項式の中にある積を展開してはいけません。因数分解するために前の授業で使った手順と似たものを使います。

S

a) $(x-1)^2$ は $x-1$ の二乗で、$(y+1)^2$ は $y+1$ の二乗で、この2つは引き算であることに注目します。二乗の差として因数分解ができます。$x-1=w$、$y+1=z$ として、二乗の差を因数分解します。

$$\begin{aligned}(x-1)^2-(y+1)^2 &= w^2-z^2 && x-1=w、y+1=z\text{として}\\ &=(w+z)(w-z) && \text{因数分解し、}\\ &=(x-1+y+1)[x-1-(y+1)] && \text{再び戻して、}\\ &=(x+y)(x-y-2)\end{aligned}$$

よって、$(x-1)^2-(y+1)^2=(x+y)(x-y-2)$

b) $(x+1)^2$ は $x+1$ の二乗で、y^2 は y の二乗で、また二つ目の項は 2、$x+1$、y の積となっていることに注目します。したがって、多項式は完全平方三項式として因数分解できます。つまり、$x+1=w$ として、完全平方三項式を因数分解します。

$$\begin{aligned}(x+1)^2+2(x+1)y+y^2 &= w^2+2wy+y^2 && x+1=w\text{として}\\ &=(w+y)^2 && \text{因数分解し、}\\ &=(x+1+y)^2 && \text{あらたに }x+1=w\text{として置き換えます。}\\ &=(x+y+1)^2.\end{aligned}$$

よって、$(x+1)^2+2(x+1)y+y^2=(x+y+1)^2$

C

多項式を因数分解する場合、その項に共通する単項式が**ない**場合、変数へ置き換え、既に習った多項式に変換し、前回までの授業で学んだ形のどれかを使って、因数分解できます。

変数への置き換えを使うときは、因数分解をした後、再度置き換え、同類項をまとめ（もしあれば）、因数の項を整理しなければならないことを覚えておきます。

因数分解しなさい。

a) $4x^2-(y+2)^2$
$=(2x+y+2)(2x-y-2)$

b) $(x+3)^2-9y^2$
$=(x-3y+3)(x+3y+3)$

c) $(x-5)^2-(y-1)^2$
$=(x+y-6)(x-y-4)$

d) $y^2-2(x+3)y+(x+3)^2$
$=(y-x-3)^2$

e) $4x^2-4x(y-7)+(y-7)^2$
$=(2x-y+7)^2$

f) $(x-2)^2+2(x-2)(y-3)+(y-3)^2$
$=(x+y-5)^2$

28

達成の目安

3.9 多項式を因数分解するために、二項式の変数への置き換えを使います。

学習の流れ

多項式を因数分解するために、前回の授業で行った変数の置き換えの学習はただ、置き換える変数が単項式の時だけでした。ここでは、二項式を変数に置き換えることが必要になる問題を解きます。

ねらい

ⓅⓈ 式を別の簡略化したものに変換するために、二項式の変数への置き換えを使用します、その式では、どの形の因数分解が使うべきかがより明解になります。

Ⓒ 二項式の変数への置き換えを使って行う因数分解の手順を全体として確立し、この方法を使って式を因数分解した時は、元の変数に戻すことを忘れてはならないことを覚えておきます。

一部の設問の解答：

$y^2-2(x+3)y+(x+3)^2$

$x+3=w$ として、

$$
\begin{aligned}
&= y^2-2(w)y+w^2\\
&= (y-w)^2\\
&= (y-(x+3))^2\\
&= (y-x-3)^2
\end{aligned}
$$

よって、

$y^2-2(x+3)y+(x+3)^2=(y-x-3)^2.$

日付

U1 3.9

Ⓟ 因数分解しなさい。

a) $(x-1)^2-(y+1)^2$

b) $(x+1)^2+2(x+1)y+y^2$

Ⓢ a) $(x-1)^2-(y+1)^2$

以下のように置き換えて、$x-1=w$　$y+1=z$

$$
\begin{aligned}
&(w)^2-(z)^2\\
&= (w+z)(w-z)\\
&= (x-1+(y+1))(x-1-(y+1))\\
&= (x-1+y+1)(x-1-y-1)
\end{aligned}
$$

したがって、

$$
\begin{aligned}
(x-1)^2-(y+1)^2 &= (x-1+y+1)(x-1-y-1)\\
&= (x+y)(x-y-2).
\end{aligned}
$$

b) $(x+1)^2+2(x+1)y+y^2$

x + 1 = w として、

$$
\begin{aligned}
&(x+1)^2+2(x+1)y+y^2\\
&= (w)^2+2(w)y+y^2\\
&= (w+y)^2\\
&= (x+1+y)^2
\end{aligned}
$$

したがって、

$(x+1)^2+2(x+1)y+y^2=(x+1+y)^2.$

Ⓡ a) $(2x+y+2)(2x-y-2)$

b) $(x-3y+3)(x+3y+3)$

c) $(x+y-6)(x-y-4)$

d) $(y-x-3)^2$

宿題： 練習帳26ページ

3.10 連続した因数分解

P

次の多項式を因数分解しなさい。$2x^2 + 2x - 12$

前回までの授業で学んだ方法を直接使うことができますか。
まず最初に何をしなければならないでしょうか。

S

まず最初にしなければならないことは、全項から共通する因数を取り出すことです。この場合は2です。

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x - 12 &= 2(x)^2 + 2(x) - 2(6) \\ &= 2(x^2 + x - 6) \end{aligned}$$

括弧内の三項式は $(x + a)(x + b)$ の形で因数分解でき、積が −6、和が +1 となる、2つの数（一つは正でもう一つは負）は、3 と −2です。したがって、

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x - 12 &= 2(x^2 + x - 6) \\ &= 2(x + 3)(x - 2) \end{aligned}$$

よって、　$2x^2 + 2x - 12 = 2(x + 3)(x - 2).$

C

多項式の因数分解をする際は、まず最初に共通となる単項式があるかどうか確認します。あれば、その単項式を取り出し、前回までの授業で習った方法のいずれかを使って二つ目の因数を因数分解します。

E

次の多項式を因数分解しなさい。$-2x^2y + 8xy - 8y$

まず、3つの項に共通する因数を取り出さなければなりません。この場合は $-2y$ です。

$$\begin{aligned} -2x^2y + 8xy - 8y &= (-2y)(x^2) + (-2y)(-4x) + (-2y)(4) \\ &= (-2y)(x^2 - 4x + 4) \\ &= (-2y)(x - 2)^2 \end{aligned}$$

$x^2 - 4x + 4$を因数分解して、

よって、$-2x^2y + 8xy - 8y = -2y(x - 2)^2$

次の多項式を因数分解しなさい。

a) $-2x^2 + 10x - 8$
$= -2(x - 1)(x - 4)$

b) $2x^2 + 32x + 30$
$= 2(x + 15)(x + 1)$

c) $3x^2 + 12x + 12$
$= 3(x + 2)^2$

d) $5xy^2 - 25xy + 30x$
$= 5x(y - 3)(y - 2)$

e) $2x^2 - 18$
$= 2(x + 3)(x - 3)$

f) $-3y^2 + 300$
$= -3(y + 10)(y - 10)$

g) $-2x^2y + 8xy - 8y$
$= -2y(x - 2)^2$

h) $2x^2y - 12xy + 18y$
$= (2y)(x - 3)^2$

i) $3x^2z - 12y^2z$
$= 3z(x + 2y)(x - 2y)$

達成の目安

3.10 共通因数を取り出し、乗法公式を使って多項式を因数分解します。

学習の流れ

ここでは、一つの式に対し複数の型の因数分解を行います。3.8 と 3.9の授業とは異なり、式の中に出てくる項は単項式である共通因数を一つ持っています。そのため、最初のステップは共通因数を識別することです。次に、因数分解をします。変数の置き換えを行った直後に因数分解をした前回までの授業と異なります。

ねらい

Ⓟ,Ⓢ 式が全て因数分解された状態になるように、因数分解を2回行わなければならない問題を解きます。もし解答がはっきりしない場合は、「まず何をしなければならないでしょうか」と問いかけをし、冒頭の設問に記述してあるヒントを使うことができます。
Ⓒ 最初のステップは常に、式に共通因数があるかどうか確認するということを強調し、連続した因数分解の使用を明確に決めます。
Ⓔ 解答に書かれていることを例示し、最初のステップは共通因数を取り出すことで、その後、完全平方三項式の因数分解を使います。通常は、2乗した項が 負の場合は、共通の単項式には負の符号をつけます。

一部の設問の解答：

a) $-2x^2+10x-8$
$= (-2)(x^2)+(-2)(-5x)+(-2)(4)$
$= -2(x^2-5x+4)$
$= -2(x-1)(x-4)$

i) $3x^2z-12y^2z$
$= (3z)(x^2)-(3z)(4y^2)$
$= 3z(x^2-4y^2)$
$= 3z(x+2y)(x-2y)$

注意：
i) の設問では、変数の置き換えは使いません。この事例は次回の授業で学習することになっています。

日付　　U1 3.10

Ⓟ 因数分解しなさい。

a) $2x^2+2x-12$

$2x^2+2x-12$

Ⓢ 共通因数2を取り出します。

$2x^2+2x-12 = 2(x^2)+2(x)-2(6)$
$= 2(x^2+x-6)$

$(x+a)(x+b)$ の形で因数分解すると、
$= 2(x+3)(x-2)$

したがって、
$2x^2+2x+12 = 2(x+3)(x-2).$

Ⓔ $-2x^2y+8xy-8y$

共通因数 $-2y$ を取り出します。

$-2x^2y+8xy-8y$
$= -2y(x^2)+(-2y)(-4x)+(-2y)(4)$
$= -2y(x^2-4x+4)$
$= -2y(x-2)^2$

したがって、
$-2x^2y+8xy-8y = -2y(x-2)^2.$

Ⓡ a) $-2(x-1)(x-4)$
b) $2(x+15)(x+1)$
c) $3(x+2)^2$

宿題： 練習帳27ページ

3.11 因数分解の組み合わせ

P

次の因数分解をしなさい。$18x^2 - 200y^2$

まず、例題にある共通因数を取り出さなければなりません。

S

x^2とy^2の係数には共通因数2があります。

$$18x^2 - 200y^2 = 2(9x^2) - 2(100y^2)$$
$$= 2(9x^2 - 100y^2)$$

$9x^2 = (3x)^2$、$100y^2 = (10y)^2$であることを念頭に置いて、

$$= 2[(3x)^2 - (10y)^2]$$
$$= 2(w^2 - z^2)$$
$$= 2(w + z)(w - z)$$
$$=2(3x + 10y)(3x - 10y).$$

$3x = w$、$10y = z$として、
因数分解し、
再び戻して、

$$18x^2 - 200y^2 = 2(3x + 10y)(3x - 10y).$$

C

一般的には、どんな多項式でも、因数分解をする際は、まず最初に共通する単項式が項の中にあるかどうか確認します。あれば、その単項式を取り出して二つ目の因数を因数分解します。多項式の項に共通する単項式が**ない**場合、前回までの授業で学んだ方法のうちのいずれかを使って直接多項式を因数分解します。この手順は残りの因数のそれぞれに対し元の多項式が、最も簡略化された多項式の積となるまで繰り返されます。（それが可能なら）

正しく因数分解されたかどうか確認するために、全因数を掛けることができ、その結果は、元の多項式と同じでなければならないことを覚えておきます。

次の多項式を因数分解しなさい。

a) $-18x^2y^2 + 32$
$= -2(3xy + 4)(3xy - 4)$

b) $3x^2z - 12y^2z$
$= 3z(x + 2y)(x - 2y)$

c) $18mn^2 + 6mn - 4m$
$= 2m(3n + 2)(3n - 1)$

d) $27m^2 - 75n^2$
$= 3(3m + 5n)(3m - 5n)$

e) $12zx^2 + 36zxy + 27zy^2$
$= (3z)(2x + 3y)^2$

f) $36mn^2 + 24mn + 4m$
$= 4m(3n + 1)^2$

30

達成の目安

3.11 前回までの授業で学んだ方法の組み合わせを伴う多項式を因数分解します。

学習の流れ

前の授業では、連続した因数分解を行いました。そこでは、最初のステップとして、共通因数を取り出し、その後、因数分解を行いました。ここでは、連続した因数分解を常に学習しますが、違いは、二回目の因数分解の際に、変数への置き換えをしなければならないことです。

ねらい

Ⓟ,Ⓢ 共通因数とその後の、変数の置き換えを使い、連続した因数分解で式を因数分解します。
Ⓒ 多項式を因数分解するために、一般的には、従うべき手順を確立します。指示としては、最初のステップとして常に、共通因数を探し、次に別の因数分解を考えます。式に共通因数がない場合は、直接、因数分解をする方法を取らなければなりません。

一部の設問の解答：

c) $18mn^2 + 6mn - 4m$
$= 2m(9n^2 + 3n - 2)$

$3n = w$として、
$= 2m(w^2 + w - 2)$
$= 2m(w + 2)(w - 1)$
$= 2m(3n + 2)(3n - 1)$

d) $27m^2 - 75n^2$
$= 3(9m^2 - 25n^2)$

$3m = w$、$5n = z$として
$= 3(w^2 - z^2)$
$= 3(w + z)(w - z)$
$= 3(3m + 5n)(3m - 5n)$

e) $12zx^2 + 36zxy + 27zy^2$
$= 3z(4x^2 + 12xy + 9y^2)$

$2x = m$、$3y = n$として
$= 3z(m^2 + 2mn + n^2)$
$= 3z(m + n)^2$
$= 3z(2x + 3y)^2$

日付

U1 3.11

Ⓟ 次の因数分解をしなさい。$18x^2 - 200y^2$

Ⓢ $18x^2 - 200y^2$
共通因数2を取り出し、
$18x^2 - 200y^2$
$= 2(9x^2) - 2(100y^2)$
$= 2(9x^2 - 100y^2)$
$= 2[(3x)^2 - (10y)^2]$　　$3x = w$、$10y = z$ として
$= 2(w^2 - z^2)$
$= 2(w + z)(w - z)$　　再び戻して、
$= 2(3x + 10y)(3x - 10y)$
よって、
$18x^2 - 200y^2 = 2(3x + 10y)(3x - 10y)$.

Ⓡ a) $-18x^2y^2 + 32$
$= -2(9x^2y^2 - 16)$
$3xy = w$ として、
$-2(9x^2y^2 - 16)$
$= -2(w^2 - 4^2)$
$= -2(w + 4)(w - 4)$
$= -2(3xy + 4)(3xy - 4)$

b) $3z(x + 2y)(x - 2y)$
c) $2m(3n + 2)(3n - 1)$
d) $3(3m + 5n)(3m - 5n)$
e) $3z(2x + 3y)^2$

宿題：練習帳の28ページ。

3.12 因数分解を用いた数式の計算

P

因数分解を使って、次の計算の答えを求めなさい。

a) $99^2 - 1$ b) $35^2 - 15^2$

S

a) この式は二乗の差です。

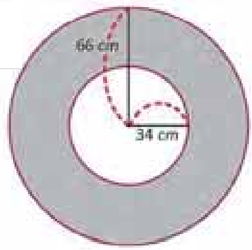
$$99^2 - 1 = (99 + 1)(99 - 1)$$
$$= (100)(98)$$
$$99^2 - 1 = 9\,800$$

b) この式も二乗の差です。

$$35^2 - 15^2 = (35 + 15)(35 - 15)$$
$$= (50)(20)$$
$$35^2 - 15^2 = 1\,000$$

E

影付きの領域の面積を計算しなさい。
（計算の答えは π の項で表したままにします）



2つの円の中心が同じ位置にある場合、**同心円**と言います。2つの円で囲まれた領域を**円環**と言います。

影付きの領域の面積を計算するには、大きい円の面積から小さい円の面積を引かなければなりません。大きい円の半径は 66 *cm* で、面積は、

$$\pi(66)^2 = 66^2\pi$$

小さい円の半径は 34 *cm* で、面積は、

$$\pi(34)^2 = 34^2\pi$$

したがって、影付きの領域の面積は、

$$66^2\pi - 34^2\pi = (66^2 - 34^2)\pi$$
$$= (66 + 34)(66 - 34)\pi$$
$$= (100)(32)\pi$$
$$66^2\pi - 34^2\pi = 3\,200\pi$$

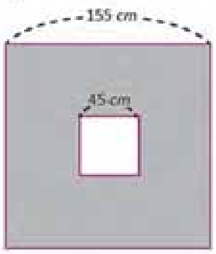
共通因数 π を取り出し、二乗の差として因数分解し、括弧の中の式を計算し、πの項で表したままにします。

よって、影付きの領域の面積は 3200π cm^2 です。

1. 因数分解を使って以下の式の計算をしなさい。

a) $35^2 - 25^2$ $= 600$ b) $45^2 - 35^2$ $= 800$ c) $98^2 - 4$ $= 9\,600$

2. 影付きの領域の面積を計算しなさい。（四角形は両方とも正方形）



$= 22\,000$ cm²

達成の目安

3.12 因数分解を使って数式や面積の計算をします。

学習の流れ

この課を通じて、因数分解の様々な手法を学習しました。これからは、いくつかの式では、計算を簡略化するために因数分解の代数式を使います。

ねらい

Ⓟ,Ⓢ この課で学習した代数式を使って、計算問題を2つ解きます。
Ⓒ 数式を簡略化し、面積の計算に、因数分解を使う例を挙げます。影付きの部分の面積は大きいほうの円の面積ひく中にある円の面積です。円の面積は半径の二乗なので、使う因数分解は二乗の差です。

一部の設問の解答：

1. a) $35^2 - 25^2$
$= (35 + 25)(35 - 25)$
$= (60)(10)$
$= 600$

2.影付きの領域の面積は2つの正方形の面積の差なので、問題を解くためには、二乗の差が適用できます。

$155^2 - 45^2$
$= (155 + 45)(155 - 45)$
$= 200 \times 110$
$= 22\,000$

よって、
影付きの領域の面積は 22000cm² です。

日付 **U1 3.12**

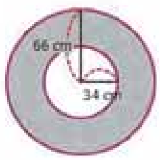
Ⓟ 次の計算の答えを求めなさい。因数分解を使いなさい。

a) $99^2 - 1$ b) $35^2 - 15^2$

Ⓢ a) $99^2 - 1$
$= 99^2 - 1^2$
$= (99 + 1)(99 - 1)$
$= (100)(98)$
$= 9\,800$

b) $35^2 - 15^2$
$= 35^2 - 15^2$
$= (35 + 15)(35 - 15)$
$= (50)(20)$
$= 1\,000$

Ⓔ 影付きの領域の面積を計算しなさい。



$66^2\pi - 34^2\pi$
$= (66^2 - 34^2)\pi$
$= (66 + 34)(66 - 34)\pi$
$= (100)(32)\pi$
$= 3\,200\pi$

よって、
面積は 3200π cm² です。

Ⓡ 1. a) 600 b) 800 c) 9 600

2. 22 000 cm2.

宿題： 練習帳29ページ

3.13 これまでの復習

1. 次の多項式を因数分解しなさい。

a) $3x^2 + 24x - 60$ $= 3(x + 10)(x - 2)$

b) $-4y^2 - 16y - 12$ $= -4(y + 3)(y + 1)$

c) $5x^2 - \frac{5}{4}$ $= 5\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

d) $36x^2 - 60xy + 25y^2$ $= (6x - 5y)^2$

e) $4x^2 + 2xy + \frac{y^2}{4}$ $= \left(2x + \frac{y}{2}\right)^2$

f) $64x^2 - 49y^2$ $= (8x + 7y)(8x - 7y)$

g) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25}$ $= \left(\frac{x}{4} + \frac{y}{5}\right)\left(\frac{x}{4} - \frac{y}{5}\right)$

h) $(2x + 9)^2 - (3x - 2)^2$ $= -(5x + 7)(x - 11)$

i) $4x^2z - 16xyz + 16y^2z$ $= 4z(x - 2y)^2$

j) $5xy^2 + 105xy + 550x$ $= 5x(y + 11)(y + 10)$

2. 因数分解を使って以下の式の計算をしなさい。

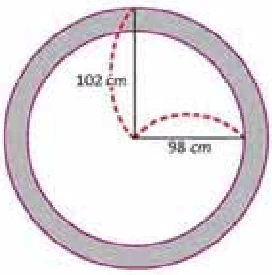
a) $75^2 - 25^2$ $= 5000$

b) $95^2 - 25$ $= 9000$

c) 101^2 $= 10201$

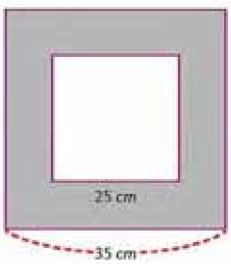
d) 47×53 $= 2491$

3. 影付きの領域の面積を計算しなさい。



$= 800\pi \text{ cm}^2$

4. 影付きの領域の面積を計算しなさい。



$= 600 \text{ cm}^2$

32

達成の目安

3.13 連続した因数分解を使って問題を解きなさい。

一部の設問の解答：

1. a) $3x^2 + 24x - 60$
$= 3(x^2 + 8x - 20)$
$= 3(x + 10)(x - 2)$

d) $36x^2 - 60xy + 25y^2$
$w = 6x$ y $z = 5y$の場合
$= w^2 - 2wz + z^2$
$= (w - z)^2$
$= (6x - 5y)^2$

h) $(2x + 9)^2 - (3x - 2)^2$
$w = 2x + 9$ y $z = 3x - 2$の場合
$= w^2 - z^2$
$= (w + z)(w - z)$
$= (2x + 9 + 3x - 2)(2x + 9 - 3x + 2)$
$= (5x + 7)(-x + 11)$
$= -(5x + 7)(x - 11)$

宿題： 練習帳30ページ

2. c) 101^2
$101^2 = (100 + 1)^2$
$= 100^2 + 2(100)(1) + 1^2$
$= 10\,000 + 201 + 1$
$= 10\,201$

3. $102^2\pi - 98^2\pi$
$102^2\pi - 98^2\pi$
$= (102^2 - 98^2)\pi$
$= (102 + 98)(102 - 98)\pi$
$= 200 \times 4\pi$
$= 800\pi\ \text{cm}^2$