ユニット2. 平方根

このユニットのねらい

将来の数学的問題や環境問題に対処するうえで、アルゴリズム的演算や約分し簡略化するための演算を行うことで、平方根の意味、表現、定義について理解すること。

関連と発展

7学年

ユニット1：正の数、負の数と零
- 正の数、負の数と零
- 数の大小関係と絶対値

ユニット2：正の数、負の数と零の減法
- 正の数、負の数と零の加法
- 正の数、負の数と零の減法
- 正の数、負の数と零の加法と減法の混合算

ユニット3：正の数、負の数と零の乗法と除法
- ユニット3　正の数、負の数と零の乗法と除法
- 混合計算
- 素数と合成数

9学年

ユニット2：平方根
- 平方根と実数
- 平方根の演算

ユニット3：二次方程式
- 二次方程式
- 二次方程式の応用

高校1年次

ユニット1：実数
- 実数

ユニット学習計画

レッスン	時間	授業
1. 平方根と実数	1	1. 平方根の意味と記号
	1	2. 根号のついた数の表現
	1	3. 数の平方根
	1	4. 平方根の大小関係
	1	5. 有理数と無理数
	1	6. 少数から分数への変換
	1	7. 実数の定義
	2	8. 復習問題
2. 平方根の演算	1	1. 平方根の乗法
	1	2. 平方根の除法
	1	3. 根号を使わない数の表し方
	1	4. 有理数と平方根の乗法
	1	5. 平方数でない平方根の約分
	1	6. 約分を用いた平方根の乗法
	1	7. 分母の有理化
	1	8. 平方根の加法と減法
	1	9. 約分と有理化を用いた平方根の加法と減法
	1	10. 平方根の混合算

レッスン	時間	授業
	1	11. 平方根の混合算
	2	12. 復習問題
	1	13. 実数の問題の解き方
	1	14. 復習問題
	1	ユニット2　テスト

ユニット2　24時間の授業 + ユニットテスト

各レッスンの要点

レッスン1：平方根と実数
この課では数の単一の平方根と複数の平方根との概念の違いをはっきりさせることが重要で、基本的に、単一の平方根は無理数の表現として、また、複数の平方根は二次方程式の解法として考える必要があります。それに加え、この時点で、実数の定義を導入することとしますが、このことは、関数やピタゴラスの定理などに関する学習を進めるうえで基礎となるはずです。

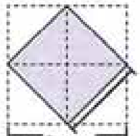
レッスン2：平方根の演算
四則（乗法、除法、加法、減法）の計算を初めとして、平方根の基本的な演算方法を規定します。それに加え、平方根の約分（素因数分解を用いた）と分母の有理化の概念を導入します。

レッスン 1 平方根と実数

1.1 平方根の意味と記号

P

次の形は一辺が 1 cmの4つの正方形からなり、図のように内側の四角形を形作っています：



2 cm

2乗すると2になる数を考えなさい

内側の正方形の面積と一辺の長さはいくつになりますか？

正方形の面積は次のように計算します：$A = L^2$

S

正方形の面積は、1 cm 角の各正方形の半分から成り立っているので、内側の正方形の面積は **2 cm²** になります。

知っている数の中に2乗するとその結果として2になる数があるかどうか、試してみると、

1 として試すと：	$1^2 = 1 < 2$	2 として試すと：	$2^2 = 4 > 2$	値は 1 と 2 の間にあります。
1.4 として試すと：	$1.4^2 = 1.96 < 2$	1.5 として試すと：	$1.5^2 = 2.25 > 2$	値は 1.4 と 1.5 の間にあります。
1.41 として試すと：	$1.41^2 = 1.9881 < 2$	1.42 として試すと：	$1.42^2 = 2.0164 > 2$	値は 1.41 と 1.42 の間にあります。
1.414 として試すと：	$1.414^2 = 1.9993 < 2$	1.415 として試すと：	$1.415^2 = 2.002 > 2$	値は 1.414 と 1.415 の間にあります。

最終的に、2乗すると2になるような少数を書くことは不可能です。よって、慣用的に、面積が2の正方形の一辺は $\sqrt{2}$で表すこととします。

C

$\sqrt{}$ の記号は、2乗するとその結果がこの記号の中にある数になるような、**負ではない**数を表します。

累乗根と呼ばれる$\sqrt{}$ の記号で表され、「平方根」と読みます。累乗根の中にある数を**被開平数**と言います。

累乗根 → $\sqrt{a}$ ← 被開平数

例えば： $\sqrt{3}$ は「3の平方根」と読み、2乗すると結果として3になるような数を表します。

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

2乗すると結果が3になるような少数を書くことは不可能なことが分かります。

E

次の式を2乗すると、どんな数になりますか？

$\sqrt{\frac{2}{5}}$ 2乗すると ($\sqrt{\frac{2}{5}}$) ^{2} は数 $\frac{2}{5}$ を表します。したがって、

$$\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 = \frac{2}{5}$$

1. 以下の正方形の辺の長さを求めなさい：

a) 5 cm² $\sqrt{5}$ cm

b) 3 cm² $\sqrt{3}$ cm

c) $\frac{2}{3}$ cm² $\sqrt{\frac{2}{3}}$ cm

d) 2.3 cm² $\sqrt{2.3}$ cm

2.以下の式を2乗するとなる数を求めなさい：

a) $\sqrt{7}$ b) $\sqrt{13}$ c) $\sqrt{\frac{3}{5}}$ d) $\sqrt{0.2}$

以下のようになる正の数を表します。

$\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$ $\left(\sqrt{13}\right)^2 = 13$ $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}$ $\left(\sqrt{0.2}\right)^2 = 0.2$

達成の目安

1.1 数を表すのに累乗根の記号を使いなさい。

学習の流れ

この授業まで、生徒は正式に有理数の定義をしないまま、有理数の集り（群）について学習してきました。この授業では、循環しない無限小数（無理数）という考えを導入するために、正方形の面積についての知識を利用することにします。

ねらい

Ⓟ,Ⓢ 面積が2の正方形の一辺の値の近似を求めるために不等式を用い、少数を使って表すことは不可能なことを確認すること。無理数が存在することを示し、暗紫色の正方形の面積は一辺が2の点線で囲まれた正方形の面積より小さく、一辺が1の正方形の面積より大きいことに注目させるために、図形を用いること。暗紫色の正方形の面積が2であることを分からせるために、この図形は面積が4の正方形を形作っている小さな正方形のそれぞれの半分から成っていること、を使うこと。

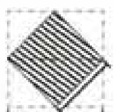
Ⓒ **累乗根**が何を表す記号かを、特に一部の数を正確に表現する唯一の方法であることを強調しながら把握させること（少数の場合は、こうした数については近似を求めるしかできません）。またそれに加え、これらの数を表現する方法や、累乗根で表された数を演算するうえでアルゴリズムを確立する際に用いられる各部分の名称（累乗根や被開平数）を定義する必要もあります。

Ⓔ この記号$\sqrt{}$は負の数を表さないということを強調すること、例えば：$\sqrt{4} = \pm 2$は誤り、つまり、$x < 0$ ならば、ルート記号に入った$\sqrt{x^2} = x$ は誤りです。
それに加え、$x^2 = a$であるならば、必ずしも$x = \sqrt{a}$ でなく、$x = -\sqrt{a}$ の可能性もあります。

つまずきやすい点：
暗紫色の正方形の面積は 2 ということを分からせること；常に別の小数があり、そうした数には特定するパターンが無いということを明らかにするために、試行錯誤を経験させること。

Fecha: U2 1.1

Ⓟ 影付きの正方形の面積と一辺の長さを求めなさい。



Ⓢ 影付きの正方形の面積は 2 cmです。

$1^2 < 2 < 2^2$ 一辺の長さは 1 と 2 の間です
$1.4^2 < 2 < 1.5^2$ 一辺の長さは 1.4 と 1.5 の間です
$1.41^2 < 2 < 1.42^2$ 一辺の長さは 1.41 と 1.42 の間です
$1.414^2 < 2 < 1.415^2$ 一辺の長さは 1.414 と 1.415 の間です

この数を小数で表すことは不可能で、$\sqrt{2}$ cm と表すことになります。

Ⓔ $\sqrt{\frac{2}{5}}$ は、2乗するといくつになるでしょう？
以下のようになる正の数を表します。

$$\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 = \frac{2}{5}$$

Ⓡ 1. a) $\sqrt{5}$ cm b) $\sqrt{3}$ cm c) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ cm d) $\sqrt{2.3}$ cm
2. 以下のようになる正の数を表します：

a) $(\sqrt{7})^2 = 7$ b) $(\sqrt{13})^2 = 13$

c) $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}$ d) $(\sqrt{0.2})^2 = 0.2$

宿題：ワークブック 34ページ

1.2 平方根の記号（根号）が付いた数の表し方

P

面積が 9 cm² の正方形の各辺の長さはいくつになるでしょう？

$A = 9\ cm^2$ 長さはいくつになるでしょう？

S

平方根の表記で各辺の長さを示します：$\sqrt{9}$ cm

これは $(\sqrt{9})^2 = 9$ ということです。

既知数の中に2乗するとその結果として9 になる数があるかどうか、試してみましょう。

2として試すと、$2^2 = 4 < 9$

3として試すと、$3^2 = 9$　よって$\sqrt{9}$ で表される数は3です。

したがって、$\sqrt{9} = 3$

そして、一辺の長さは：**3 cm**

C

累乗根の記号の中に書かれた数にはこの記号を使わずとも表すことができる数があります。これらの数は**完全平方数**として知られています。

例えば、$\sqrt{25}$は、2乗すると結果として25になる数を表します。

$$(\sqrt{25})^2 = 25$$

また、$\sqrt{25}$で表された数は5で、なぜなら：$5^2 = 25$

したがって、$\sqrt{25} = 5$

$a > 0$ ならば、$\sqrt{a^2} = a$ となります。

E

以下の数を根号を使わず表しなさい。

a) $\sqrt{\frac{4}{9}}$

$\frac{1}{3}$として試すと；　$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

$\frac{2}{3}$として試すと；　$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

したがって、$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$となり、これは完全平方数です。

b) $\sqrt{0.16}$

0.3 として試すと：$(0.3)^2 = 0.09$.

0.4 として試すと：$(0.4)^2 = 0.16$.

したがって、$\sqrt{0.16} = 0.4$ となり、これは完全平方数です。

1. 以下の正方形の辺の長さを求めなさい：

a) 1 cm²　$\sqrt{1} = 1$cm

b) 4 cm²　$\sqrt{4} = 2$cm

c) $\frac{9}{16}$ cm²　$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$ cm

d) 0.49 cm²　$\sqrt{0.49} = 0.7$ cm

2. 以下の数を根号を使わず表しなさい：

a) $\sqrt{36}$　6

b) $\sqrt{81}$　9

c) $\sqrt{\frac{1}{25}}$　$\frac{1}{5}$

d) $\sqrt{0.01}$　0.1

達成の目安

1.2 完全平方数である数を求めなさい。

学習の流れ

前回の授業では、数（無理数）を表す方法が他にない場合に、累乗根を持つ数の表現を導入しましたが、ここでは、根号を用いて有理数を表すことができることにも触れることになります。

ねらい

Ⓟ,Ⓢ この記号$\sqrt{\ }$は負の数でないあらゆる数に適用されることを明らかにすること。これまでとは違って、ここでは、値を9【ルート記号に入った9】で表すことができるので、正方形の面積を一辺の値を求めるのに用いること。一方、試行錯誤によって、これもまた条件を満たす自然値（ここでは3）が存在することを証明すること。その後、ここから、生徒が $\sqrt{9} = 3$を導くように指導すること。

Ⓒ 累乗根の記号は有理数（後に負の数を表すまでに拡大）を表すのに用いることができ、こうした有理数を**完全平方数**と呼ぶことを把握させること。

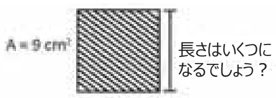
Ⓔ 有理数を累乗根で示す表現に重点を置き、生徒にその結果をしっかり理解させること。最初の設問は根号を持つ有理数の数量の表し方についてのものです。

つまずきやすい点：
小数と分数の完全平方数を求めること。

日付：

U2 1.2

Ⓟ 面積 9 cm² の正方形の各辺を求めなさい。



Ⓢ 前回の授業で学習した累乗根の表記を使うと、正方形の一辺は、$\sqrt{9}$ cm.

加えて、2 として試すと：$2^2 = 4 < 9$.

また、3 として試すと：$3^2 = 9$.

したがって、9 = 3、また、正方形の辺は3 cm².

Ⓔ 以下の数を根号を使わず表しなさい：

a) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$　　b) $\sqrt{0.16} = 0.4$

Ⓡ 1. a) $\sqrt{1} = 1$ cm　b) $\sqrt{4} = 2$ cm

c) $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$ cm　d) $\sqrt{0.49} = 0.7$ cm

2. a) 6　b) 9　c) $\frac{1}{5}$　d) 0.1

宿題：ワークブック 35ページ

1.3 数の平方根

P

2乗するとその結果が9になる数を求めなさい。

S

2乗するとその結果が9になる数を探します。

この数が a ならば、
数 a は、方程式 $a^2 = 9$ を成り立たせます。
解は $a = 3$ と $a = -3$.

2乗すると 9 になる数は限定されていて、それは：3 と –3.

C

正の数 **a** の**平方根**は、2乗するとその結果が **a** になる数と定義されます。

よって、次を満たせば、数 ***b*** は **a** の平方根です： $b^2 = a$.

この等式を成り立たせる数は b と $-b$：$(-b)^2 = b^2 = a$.

また、**a** の平方根は ***b*** と ***–b*** であると言えます。

次の理由から、平方根を1つだけ持つ唯一の数は零だということに注目しましょう：それは、$0^2 = 0$ にしかならないからです。

例えば：9 の平方根は：

$(-3)^2 = 9$ と $3^2 = 9$ なので、3 と – 3

正および負の平方根を表すために、**プラスマイナス**と読む記号、± を使うことになります：

9 の平方根は：± 3.

正の記号を持つ平方根は**平方根**として知られ、$\sqrt{a}$ と表記されます。例えば：

$$\sqrt{9}, \sqrt{\frac{25}{4}}, \sqrt{5}、等$$

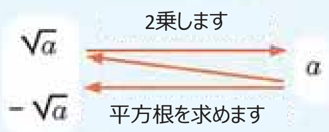
負の記号を持つ平方根は**負の平方根**として知られ、$\sqrt{a}$ の逆の数、つまり、$-\sqrt{a}$ となります。
例えば：

$$-\sqrt{9}, -\sqrt{\frac{25}{4}}, -\sqrt{5}、等$$

一般に正の数 **a** の場合次のようになります。

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

$$(-\sqrt{a})^2 = a$$



注目しましょう：

$3 = \sqrt{9}$ $\xrightarrow{\text{2乗します}}$ 9

$-3 = -\sqrt{9}$ $\xleftarrow{\text{平方根を求めます}}$

a がどんな数であれ実数ならば、$\sqrt{a^2} = |\,a\,|$ になります。
例えば： $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5.$

記号 | | は数の絶対値を表します。

E

以下の数の平方根を求めなさい：

a) $\frac{25}{4}$ 数を求めると： $\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$ と $-\sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{5}{2}$.

また、平方根は： $\pm\frac{5}{2}$.

b) 5 数を求めると： $\left.\begin{array}{r}\sqrt{5}\\-\sqrt{5}\end{array}\right\}$ これらは根号を使わずに表すことはできません。

また、平方根は： $\pm\sqrt{5}$.

1. 2乗すると次ような結果になる数はそれぞれいくつでしょう：

a) 144 ±12　　b) 169 ±13　　c) 225 ±15

d) 121 ±11　　e) $\frac{4}{9}$ $\pm\frac{2}{3}$　　f) $\frac{41}{36}$ $\pm\frac{\sqrt{41}}{6}$

2. 以下のそれぞれの数の平方根を求めなさい。

a) 25 $\pm\sqrt{25} = \pm5$　　b) 49 $\pm\sqrt{49} = \pm7$　　c) $\frac{9}{36}$ $\pm\sqrt{\frac{9}{36}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$

d) 10 $\pm\sqrt{10}$　　e) 13 $\pm\sqrt{13}$　　f) 0.04 $\pm\sqrt{0.04} = \pm0.2$

達成の目安

1.3 数の平方根を求めなさい。

学習の流れ

生徒は平方根の記号とその意味をすでに知っているので、それを基にここでは、今後平方根の性質の一部や平方根を含む演算にも若干取り組むため、**数の平方根**の概念を正式に定義することが可能になります。

ねらい

Ⓟ,Ⓢ 累乗についての生徒の知識（第7学年の）をもとに、この授業では負の数も考慮に入れて、数の平方根を求めます。
© 正式に数の平方根の概念を定義し、この点において、生徒に、2つの数（異なる記号の）があること、また、それらを2乗すると結果として同じ数になるということを、しっかり理解させることを試みます。零の場合は特別なケースとして考えます。この授業は本学年のユニット3で学習する二次方程式の解法を導入するうえで基礎となるものです。

数学的表現の適切な使用

この授業では、数の平方根について話す時に、生徒が負の数の平方根の存在を完全に度外視してしまうような間違いを犯さないよう、彼らが数学用語を正確に表現できるようになることを目指します。それに加え、 $\sqrt{a^2} = |a|$ のような場合に関し、平方根の概念に関するその他の一般的な誤りにも触れます。

この意味で、$x < 0$ の場合には $\sqrt{x^2} = x$ は誤りであることを強調します。つまり、記号は平方根の方程式（2乗）を消去するためのものではないということです。

日付： U2 1.3

Ⓟ 2乗して結果が 9 になる数を求めなさい。

Ⓢ この数が a ならば、
$a^2 = 9$ となります。

2乗して結果が9になる値は 3 と –3 だけです。

Ⓔ 以下のそれぞれの数の平方根を求めなさい：

a) $\frac{25}{4}$
$\pm\sqrt{\frac{25}{4}} = \pm\frac{5}{2}$

b) 5
$\pm\sqrt{5}$

Ⓡ 1. a) ±5 b) ±7 c) $\pm\frac{1}{2}$
d) $\pm\sqrt{10}$ e) $\pm\sqrt{13}$ f) ±0.2

2. a) ±12 b) ±13 c) ±15
d) ±11 e) $\pm\frac{2}{3}$ f) $\pm\frac{\sqrt{41}}{6}$

宿題：ワークブック 36ページ

1.4 平方根の大小関係

P

1つは 3 cm^2 、もう一方は、5 cm^2 の面積の異なる2つの正方形があります。
どちらの正方形がより長い辺を持っていますか？

S

各正方形の辺の長さを解析するために、次のように2つの正方形を配置することができます。

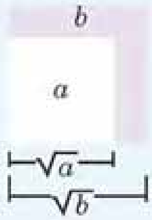
そして、このように2つの正方形を置くことで、3 cm^2 の面積の正方形の一辺は 5 cm^2 の面積の正方形の一辺より短い、ということが分かります。

"a" の面積の一辺は： $\sqrt{a}$.

よって、$3 < 5$ なので、 $\sqrt{3} < \sqrt{5}$ のようになります。

C

一般的には、平方根の被開平数がもう一方の被開平数より小さいならば、よって、最初の平方根は2番目の平方根より小さくなり、したがって：



$a, b > 0$ の場合、$a < b$ ならば、よって$\sqrt{a} < \sqrt{b}$

例えば：

$\sqrt{12}$ か $\sqrt{11}$ のどちらの数が大きいでしょう？

$11 < 12$ なので、よって$\sqrt{11} < \sqrt{12}$

被開平数は、正方形の面積と、また、累乗根は同じ正方形の一辺長さと関連することに注目しましょう。

E

以下の数の大小関係を明らかにしなさい：

a) 3 と $\sqrt{7}$

3 は$\sqrt{9}$のように表されるので

また、$\sqrt{9}$ と $\sqrt{7}$ を比較すると

$9 > 7$ よって、$\sqrt{9} > \sqrt{7}$

したがって： $3 > \sqrt{7}$

b) $-\sqrt{15}$ y $-\sqrt{\frac{17}{2}}$

負の数を比べる場合は、大きな絶対値を持っているものがより小さくなります。

$\sqrt{15}$と $\sqrt{\frac{17}{2}}$ を比較すると、

$\frac{17}{2} < 15$ よって、 $\sqrt{\frac{17}{2}} < \sqrt{15}$.

したがって、負の数であることから、次のようになる。

$-\sqrt{\frac{17}{2}} > -\sqrt{15}$.

1. <、>、= のなかから適切な記号を入れなさい。

a) $\sqrt{7}$ $\boxed{>}$ $\sqrt{6}$　　b) 2 $\boxed{>}$ $\sqrt{3}$　　c) 0.7 $\boxed{<}$ $\sqrt{0.7}$

d) $-\sqrt{14}$ $\boxed{<}$ $-\sqrt{13}$　　e) $-\sqrt{\frac{2}{7}}$ $\boxed{<}$ $-\frac{2}{7}$　　f) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ $\boxed{=}$ $\sqrt{0.5}$

問題 c)、e)、f) では注意して、2乗したときにどちらが大きくなるか良く見てください。

2. 以下の数を小さい順に並べなさい。

a) $\sqrt{10}$　　b) -5　　c) 10　　d) $-\sqrt{15}$　　e) $\sqrt{\frac{100}{4}}$　　f) $-\sqrt{1.5}$

$-5 < -\sqrt{15} < -\sqrt{1.5} < \sqrt{10} < \sqrt{\frac{100}{4}} < 10$

達成の目安

1.4　数を比較するために、平方根の大小関係を用いなさい。

学習の流れ

平方根の概念を導入することを目的に、これまで取り組んできた面積についての考え方を再び取り上げ、ここでは、根号で表された数の大小関係を明らかにするために、面積の比較、つまり、ある数の正方形がもう1つの数の正方形より大きいならば、最初の数は2番目の数より大きい、ということを使うことにします。

ねらい

Ⓟ,Ⓢ より大きな面積を占める正方形が、より長い辺を有するということを識別すること。これは、数値を持つ正方形をもとに、累乗根の比較方法を発見することを目的としています。

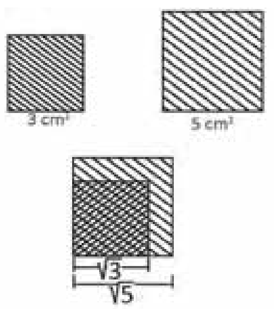
© 平方根の大小を順序づけ、アルゴリズムを規定すること。それぞれが持つ記号に注意しながら、被開平数を比較することや、さまざまな数の正方形を比較することにも改めて取り組むことができます。

数が累乗根で表されていない場合の平方根の比較問題の一部を解くこと、被開平数を比較するということは、大小の順を明らかにしたい複数の数の正方形同士を比較するのと同じです。そしてまた、負の数の平方根を比較すること。

つまずきやすい点：
累乗根のついた数を別の累乗根のない数と比較すること。負の数の大小関係と混同すること、負の数の場合は、規則が逆になります。0 と 1 との場合、または –1 と 0 との場合に混同すること。

日付：　　　　U2 1.4

Ⓟ どちらの正方形が長い辺を持っていますか？



Ⓢ $3 < 5$ なので、$\sqrt{3} < \sqrt{5}$ となります。

Ⓔ 以下の数の大小関係を明らかにしなさい。

a) 3 y $\sqrt{7}$
$9 > 7$、よって
$3 > \sqrt{7}$

b) $-\sqrt{15}$ y $-\sqrt{\frac{17}{2}}$
$15 > \frac{17}{2}$, よって
$\sqrt{15} > \sqrt{\frac{17}{2}}$ したがって
$-\sqrt{15} < -\sqrt{\frac{17}{2}}$

Ⓡ 1. a) $7 > 6$ よって $\sqrt{7} < \sqrt{6}$

b) $2 > \sqrt{3}$　　c) $0.7 < \sqrt{0.7}$

d) $-\sqrt{14} < -\sqrt{13}$　　e) $-\sqrt{\frac{2}{7}} < -\frac{2}{7}$

2. 最初に正の数を、次に負の数を順番に並べると：

$$-5 < -\sqrt{15} < -\sqrt{1.5} < \sqrt{10} < \sqrt{\frac{100}{4}} < 10$$

宿題：ワークブック 37ページ

1.5 有理数と無理数

P

以下の数を分数で表しなさい：

a) 7 　　b) 0.25 　　c) −2.3

S

a) 7

$7 = \frac{7}{1}$

1で割るとすべて、結果として元と同じ数になります。

b) 0.25

$0.25 \times \frac{100}{100} = \frac{25}{100}$ 　1 を掛けて

$= \frac{1}{4}$ 　約分して

c) −2.3

$-2.3 \times \frac{10}{10} = -\frac{23}{10}$

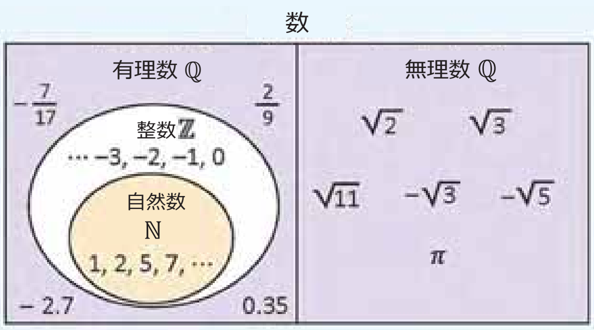
b) と c) では、小数点以下が消えるような数を探します。どちらの場合も、1を掛けており、すなわち数の値は同じです。

C

分数で表すことのできる数、つまり、$\frac{a}{b}$ の形を持ち a と b が整数で、$b \neq 0$ である数を**有理数**と呼び、次のように表現（表記）します：ℚ.

上記の問題では、すべての数が分数で表せましたが、よって、それらの数は有理数となります。

$\frac{a}{b}$ の形で表せない数は**無理数**と呼ばれ、次のように表現（表記）します：ℚ .例えば： $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi$



1. 以下の数を、各場合に応じて、有理数か無理数かで分類しなさい。

a) 8 　$\frac{8}{1}$ は有理数です。

b) −0.09 　$-\frac{9}{100}$ は有理数です。

c) $-\sqrt{11}$ 　$-\sqrt{11}$ は無理数です。

d) $-\pi$ 　$-\pi$ は無理数です。

2. 以下の数を分数で表しなさい：

a) 2 　$\frac{2}{1}$

b) 0.35 　$\frac{7}{20}$

c) −6 　$-\frac{6}{1}$

d) −1.5 　$-\frac{3}{2}$

3. 以下の分数を割り算して、少数で表しなさい。

a) $\frac{3}{5}$ 　0.6

b) $\frac{5}{8}$ 　0.625

c) $\frac{5}{11}$ 　0.4545...

d) $\frac{4}{3}$ 　1.3333...

問題 1 の c) と d)では結果がどうなったかに注目してください。

達成の目安

1.5 数を有理数か無理数かで分類しなさい。

学習の流れ

このユニットの前にすでに生徒が学習してきた、異なる種類の数の存在がここで導入されたことから、有理数（第7学年から学習している）の集りと、無理数（不完全な平方数）の集りを分類し正式に定義をすることとします。

ねらい

Ⓟ,Ⓢ $\frac{a}{b}$ の形の数式を導入するために、一部の少数を分数に変換すること。そのために、10の累乗を掛けることで少数を分数へと変換するやり方を学習した第5学年（この学年では有限小数だけを学習）の PRE Saber テストを用います。

Ⓒ 冒頭の設問を解いて、有理数と無理数の集まりを正式に定義すること。次の授業では循環小数に触れることになっているため、有理数のあらゆるタイプの数をここで提示する必要はなく、また、無理数についても、本学年では平方根とπだけを扱うことになっているため、すべてに取り組む必要はありません。

さまざまな数を分類し、$\frac{a}{b}$ の形で表現し、そして、$\frac{a}{b}$ の形の数を小数で示すために、有理数と無理数の定義を用いること。

日付：

U2 1.5

Ⓟ 以下の数を分数で表現しなさい。

a) 7　　b) 0.25　　c) −2.3

Ⓢ a) $7 = \frac{7}{1}$

b) $0.25 = 0.25 \times \frac{100}{100}$

$= \frac{25}{100}$

$= \frac{1}{4}$

c) $-2.3 = -\frac{23}{10}$

Ⓡ

1. a) $\frac{8}{1}$ は有理数です。　b) $-\frac{9}{100}$ は有理数です。

c) $-\sqrt{11}$ は無理数です。d) $-\pi$ は無理数です。

2. a) $\frac{2}{1}$　b) $\frac{7}{20}$　c) $-\frac{6}{1}$　d) $-\frac{3}{2}$

3. a) 0.6　b) 0.625　c) 0.4545...　d) 1.333...

宿題：ワークブック 38ページ

1.6 少数の分数への変換

P

以下の数を分数で表しなさい。

a) 1.333333...　　b) 0.262626...

数字の最後の3つの点は、小数点以下の部分が同じパターンを無限に繰り返すことを意味しています。

S

$x = 1.333333...$ を考えると、$10x$ と x の差を分析すると：

$$\begin{array}{rl} & 10x = 13.3333... \\ - & \underline{\quad x = \ \ 1.3333...} \\ & 9x = 12.0000... \end{array}$$

x を求めると：　$x = \dfrac{\cancel{12}^{4}}{\cancel{9}_{3}} = \dfrac{4}{3}$.

したがって、　$x = 1.333333 = \dfrac{4}{3}$.

$x = 0.26262626...$ を考慮すると、$100x$ と x の差を分析すると：

$$\begin{array}{rl} & 100x = 26.262626... \\ - & \underline{\quad x = \ \ 0.262626...} \\ & 99x = 26.000000... \end{array}$$

小数に10、100、1000 ... を掛けると、小数点はそれぞれ1スペース、2スペース、3スペース ... といったように右に移動します。

よって：　$x = \dfrac{26}{99}$.

したがって：

$0.26262626 = \dfrac{26}{99}$.

13.333... から1.333... 、また、26.2626... から 0.2626... を引くと無限に循環する部分が除かれます。

C

小数部分に何桁かの数字を持ち、その何桁かの数字が無限に繰り返される小数は、 **循環小数**として知られています。このような数を表現するには、循環節（繰り返される数）の上に線、つまり、オーバーラインを用いることになります。したがって $1.873535... = 1.87\overline{35}$.

循環節が1桁または2桁の数を分数に変換するには：

1. 数を x で表し、$10x$（または $100x$）を計算します。

2. 循環節を除くために、$10x$（または $100x$）から x を引きます。

3. x を解き、この循環小数に相当する分数を約分します。

例えば：　$2.\overline{15}$

1. $x = 2.\overline{15}$　　$100x = 215.\overline{15}$

循環節 2桁

2.
$$\begin{array}{rl} & 100x = 215.1515... \\ - & \underline{\quad x = \ \ \ 2.1515...} \\ & 99x = 213.0000... \end{array}$$

3. $x = \dfrac{\cancel{213}^{71}}{\cancel{99}_{33}} = \dfrac{71}{33}$

有理数はすべて、小数もしくは循環小数で表せます。

1. 以下の小数を循環小数か、循環小数ではないかで、分類しなさい。

a) 3.141592　循環小数ではない	b) 1.452727...　循環小数	c) 14.7777...　循環小数
d) 2.7272...　循環小数	e) 0.873521　循環小数ではない	f) 1.8555...　循環小数

2. 以下の循環小数を分数で表しなさい。

a) $0.\overline{4}$　$\frac{4}{9}$	b) $0.\overline{17}$　$\frac{17}{99}$	c) $3.\overline{5}$　$\frac{32}{9}$
d) $1.\overline{25}$　$\frac{124}{99}$	e) $0.\overline{741}$　$\frac{247}{333}$	f) $4.\overline{217}$　$\frac{4213}{999}$

達成の目安

1.6 循環少数を分数に変換しなさい。

学習の流れ

前回の授業で有理数と無理数の集りを定義しましたが、ここでは、循環小数に取り組み、こうした循環小数を $\frac{a}{b}$ の形で表し、また、これらも有理数だということを明らかにします。

ねらい

Ⓟ,Ⓢ 循環小数を $\frac{a}{b}$ の形で表す方法を規定すること、そのためにこの授業では、教師が重点的に介入する必要があるかもしれません。

Ⓒ 循環小数を $\frac{a}{b}$ の形で表すためのアルゴリズムをしっかり把握させること。

一部の項目の解法

$x = 0.\overline{4}$　　$10x = 4.\overline{4}$

よって、$10x - x = 4.\overline{4} - 0.\overline{4}$

$$9x = 4$$
$$x = \frac{4}{9}$$

$x = 0.\overline{17}$　　$100x = 17.\overline{17}$

よって、$100x - x = 17.\overline{17} - 0.\overline{17}$

$$99x = 17$$
$$x = \frac{17}{99}$$

$x = 3.\overline{5}$　　$10x = 35.\overline{5}$

よって、$10x - x = 35.\overline{5} - 3.\overline{5}$

$$9x = 32$$
$$x = \frac{32}{9}$$

$x = 1.\overline{25}$　　$100x = 125.\overline{25}$

よって、$100x - x = 125.\overline{25} - 1.\overline{25}$

$$99x = 124$$
$$x = \frac{124}{99}$$

$x = 0.\overline{741}$　　$1000x = 741.\overline{741}$

よって、$1000x - x = 741.\overline{741} - 0.\overline{741}$

$$999x = 741$$
$$x = \frac{741}{999} = \frac{247}{333}$$

最初に問題2を解き、次に問題1を解くことを勧めます。

日付：　　　　**U2 1.6**

Ⓟ 以下の数を分数で表しなさい。

Ⓢ a) 1.3333...　　b) 0.262626...

$x = 1.3333...$　　$x = 0.262626...$

$10x = 13.333...$　　$100x = 26.262626...$

よって：

$10x = 13.333...$　　$100x = 26.262626...$

$x = 1.3333...$　　$-\ x = 0.262626...$

$9x = 12$　　$99x = 26$

$x = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$　　$x = \frac{26}{99}$

Ⓡ 2. a) $\frac{4}{9}$　b) $\frac{17}{99}$　c) $\frac{32}{9}$

d) $\frac{124}{99}$　e) $\frac{247}{333}$　f) $\frac{4213}{999}$

1. a) 循環小数ではない　b) 循環小数

c) 循環小数　d) 循環小数

e) 循環小数ではない　f) 循環小数

宿題：ワークブック 39ページ

1.7 実数の定義

P

以下の数を数直線上で示しなさい。

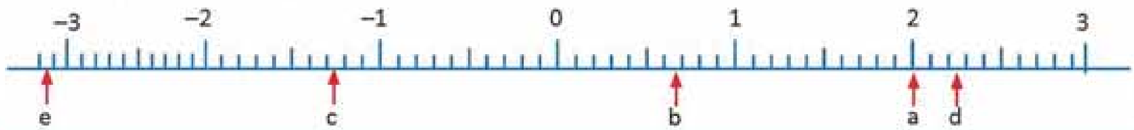
a) 2　　b) $\frac{2}{3}$　　c) $-1.271212...$　　d) $\sqrt{5}$　　e) $-\pi$

S

これらの数を小数で表したものを使って。

a) $2 = 2$　　b) $\frac{2}{3} = 0.\overline{6}$　　c) $-1.271212...$　　d) $\sqrt{5} = 2.236...$　　e) $-\pi = -3.141...$

数直線上に置いて。



C

数直線上の各点に1つの実数が相当し、またその逆も同様です。

有理数と無理数からなる集りは、**実数**として知られています。

実数は、次の記号で表されます：ℝ
例えば：

- 正数と負数の整数、および零は、有理数なので実数です。

$$2 = \frac{2}{1},\ -3 = \frac{-3}{1},\ 0 = \frac{0}{1}$$

- 正数と負数の分数は、有理数なので実数です。

$$\frac{3}{5},\ -\frac{3}{5} = \frac{-3}{5}$$

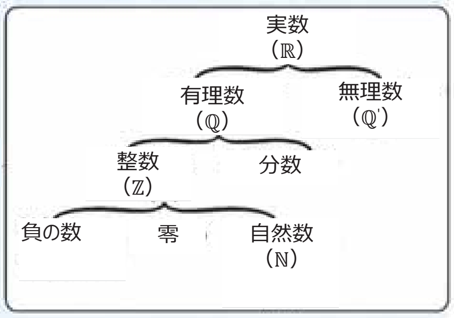
- 有理数または無理数なので、小数になります。

$0.7, -0.34, 0.\overline{3}, -1.2\overline{34}, 4.231574...$, 等.

- 無理数なので、平方根で表された数になります。

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{10}\ 等.$$

また、実数間では、たし算、引き算、掛け算、割り算ができます。



以下の数はなぜ実数なのか説明しなさい。

a) 7 自然数だからです。　　b) -15 整数だからです。　　c) $\frac{5}{9}$ 有理数だからです。　　d) -0.04 有理数だからです。

e) $3.141592...$ 無理数だからです。　　f) $-1.45\overline{27}$ 有理数だからです。　　g) $14.\overline{7}$ 有理数だからです。　　h) $-2.\overline{72}$ 有理数だからです。

i) $\sqrt{7}$ 無理数だからです。　　j) $-\sqrt{16}$ 有理数だからです。　　k) π 無理数だからです。　　l) $-\sqrt{0.09}$ 有理数だからです。

41

達成の目安

1.7 実数を特定し、それらの数が実数の集りに属するという根拠を示しなさい。

学習の流れ

生徒が有理数と無理数の集りについてはすでに理解しているので、これらの数を数直線上に順番に並べることで、実数の集りを定義することができます。

ねらい

Ⓟ,Ⓢ 実数と実数直線を定義することを目的として、有理数と無理数それぞれの小数の式と近似値を、数直線上で示すために使うこと。

Ⓒ 今使っている数直線の定義は、実数にまで拡大できるということを理解させること。実数を有理数と無理数からなる集りとして定義すること。

黒板に書く時に苦労しないよう、厚紙に事前に描いた数直線を持って行くこともできます。

日付： U2 1.7

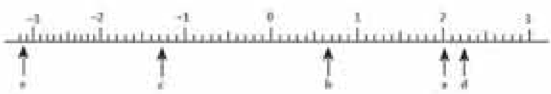
Ⓟ 以下の数を数直線上で示しなさい。

a) 2 b) $\frac{2}{3}$ c) -1.271212

d) $\sqrt{5}$ e) $-\pi$

Ⓢ $\frac{2}{3} = 0.\bar{6}$、$\sqrt{5} \approx 2.236...$ なので、

y $-\pi \approx -3.141...$



Ⓡ a) 自然数なので実数です。

b) 整数なので実数です。

c) 有理数なので実数です。

d) 有理数なので実数です。

e) 無理数なので実数です。

f) 有理数なので実数です。

g) 有理数なので実数です。

h) 有理数なので実数です。

i) 無理数なので実数です。

j) 有理数（–4です）なので実数です。

k) 無理数なので実数です。

l) 有理数（–0.3です）なので実数です。

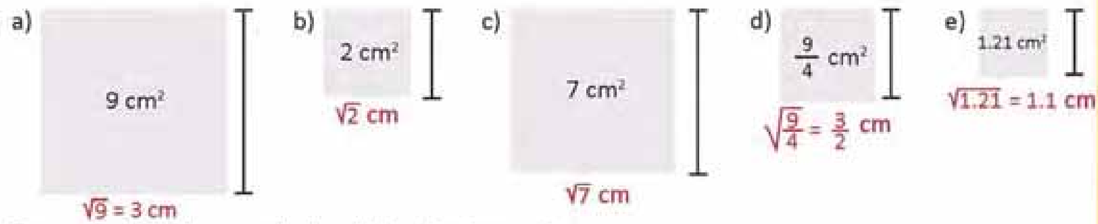
宿題：ワークブック 40ページ

1.8 復習問題

1. 以下の判断が正しければ (V) また誤っていれば (F) としなさい。

   a) 零は有理数ではありません。 F（誤）
   b) 分数で$0.\overline{9}$を表すと$\frac{9}{9}$ V（正）
   c) 等式$\sqrt{(-2)^2} = -2$は正しいです。 F（誤）
   d) 数 $\sqrt{16}$ は有理数です。 V（正）
   e) 無理数の引き算をすると答えは常に別の無理数になります。 F（誤）

2. 以下の正方形の辺の長さを求めなさい：



3. 以下の数の平方根を求めなさい：

   a) 81 $\pm\sqrt{81} = \pm 9$　　b) 17 $\pm\sqrt{17}$　　c) $\frac{16}{49}$ $\pm\sqrt{\frac{16}{49}} = \pm\frac{4}{7}$　　d) 0.4 $\pm\sqrt{0.4}$

4. 以下の数を根号を使わず表しなさい：

   a) $\sqrt{36}$ 6　　b) $-\sqrt{\frac{64}{25}}$ $\frac{8}{5}$　　c) $-\sqrt{0.36}$ -0.6　　d) $\sqrt{2.25}$ 1.5

1.9 復習問題

1. 以下の数のうち等しいのはどれとどれですか：

   a) $(\sqrt{2})^2$ 2　　b) $\sqrt{2^2}$ 2　　c) $(-\sqrt{2})^2$ 2　　d) $\sqrt{(-2)^2}$ 2

2. 以下の数を小さい順に並べなさい：

   a) $\sqrt{3}$　　b) 2　　c) -3　　d) $-\sqrt{2}$　　e) $\sqrt{\frac{5}{3}}$　　f) $-\sqrt{2.9}$

   $-3 < -\sqrt{2.9} < -\sqrt{2} < \sqrt{\frac{5}{3}} < \sqrt{3} < 2$

3. 以下の a) と b) の問題で：

   a) 示された累乗を用いて$\sqrt{15}$ の近似値を求めなさい。

   $3.86^2 = \boxed{14.8996}$　　$3.87^2 = \boxed{14.9769}$　　$3.88^2 = \boxed{15.0544}$　　$3.89^2 = \boxed{15.1321}$

   $\boxed{3.87} < \sqrt{15} < \boxed{3.88}$

   b) 計算機を用いて、以下の無理数の近似値を小数第2位まで求めなさい。

   $\boxed{2.64} < \sqrt{7} < \boxed{2.65}$

   $\boxed{-3.75} < -\sqrt{14} < \boxed{-3.74}$

4. 以下の実数を有理数と無理数で分類しなさい。有理数ならば、$\frac{a}{b}$ の形で表しなさい。

   a) 15 有理数だからです。 $\frac{15}{1}$　b) −1.252547... 無理数だからです。 c) $\sqrt{7}$ 無理数だからです。 d) $-\sqrt{0.01}$ 有理数だからです。 $-0.1 = -\frac{1}{10}$

42

達成の目安

1.8 実数と平方根についての問題を解きなさい。

一部の項目の解法：

授業の一部の設問の解答

1.8：

1. a) 零は次のように表すことができます：$\frac{0}{1}$

 b) $x = 0.\overline{9}$　　$10x = 9.\overline{9}$

 よって、$10x - x = 9.\overline{9} - 0.\overline{9}$

 $9x = 9$

 $x = \frac{9}{9}$

 c) $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

 d) $\sqrt{16} = 4$

 e) $\pi - \pi = 0$ とゼロは有理数です。

3. d) 0.4の累乗根は：

 $\pm\sqrt{0.4} = \pm\sqrt{\frac{4}{10}} = \pm\frac{2}{\sqrt{10}}$

 有理数では表すことができません。

4. c) $-\sqrt{0.36} = -\sqrt{\frac{36}{100}} = -\frac{6}{10} = -0.6$

 d) $\sqrt{2.25} = \sqrt{\frac{225}{100}} = \frac{15}{10} = 1.5$

宿題：ワークブック 41ページ

授業1.9 の一部の設問の解答：

2. 初めに正の数を順番に並べると、

 $\frac{5}{3} < 3 < 4$　よって、$\sqrt{\frac{5}{3}} < \sqrt{3} < 2$

 今度は負の数の番です：

 $2 < 2.9 < 9$ よって、$\sqrt{2} < \sqrt{2.9} < 3$

 したがって：

 $-3 < -\sqrt{2.9} < -\sqrt{2} < \sqrt{\frac{5}{3}} < \sqrt{3} < 2$

3. b) $2^2 < 7 < 3^2$ なので、よって、

 $2 < \sqrt{7} < 3.$

 $2.6^2 < 7 < 2.7^2$ なので、よって、

 $2.6 < \sqrt{7} < 2.7.$

 $2.64^2 < 7 < 2.65^2$ なので、よって、

 $2.64 < \sqrt{7} < 2.65.$

 $3^2 < 14 < 4^2$ なので、よって、

 $3 < \sqrt{14} < 4.$

 $3.7^2 < 14 < 3.8^2$ なので、よって、

 $3.7 < \sqrt{14} < 3.8.$

 $3.74^2 < 14 < 3.75^2$ なので、よって、

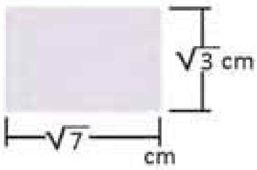
 $3.74 < \sqrt{14} < 3.75.$

レッスン 2 平方根の演算

2.1 平方根のかけ算

P

高さ $\sqrt{3}$ cm 、底辺 $\sqrt{7}$ cm の長方形の面積を求めましょう。



S

面積を求めるには $\sqrt{3} \times \sqrt{7}$のかけ算が必要です。
以下のとおり計算します

累乗の公式では次が成り立ちます
$a^2b^2 = (ab)^2$

$$(\sqrt{3}\times\sqrt{7})^2 = (\sqrt{3}\times\sqrt{7})\times(\sqrt{3}\times\sqrt{7})$$
$$= (\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{7})^2$$
$$= 3\times 7$$

次のようになります　$(\sqrt{3}\times\sqrt{7})^2 = 3\times 7.$

次に正の平方根をとります：　$\sqrt{3}\times\sqrt{7} = \sqrt{3\times 7} = \sqrt{21}$
$= \sqrt{21}$ cm²

C

一般的に、$a, b \geq 0$ のとき、$\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ を求めると
$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = a \times b$ が成り立ちます。
正の平方根をとって：
$$\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{a\times b}$$
各平方根の被開平数を乗算します。

例えば：
$$\sqrt{3}\times\sqrt{2} = \sqrt{3\times 2} = \sqrt{6}$$

E

注目
$\sqrt{4^2} = 4$
しかし $\sqrt{(-4)^2}$ は -4 ではありません、なぜなら
$\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4.$

次の平方根のかけ算をしましょう。

a) $(-\sqrt{2})\times\sqrt{8}$

符号の法則より：
$-(\sqrt{2}\times\sqrt{8}).$

そこから：
$-(\sqrt{2}\times\sqrt{8}) = -(\sqrt{2\times 8}) = -\sqrt{16} = -\sqrt{4^2} = -4.$

b) $(-\sqrt{5})\times(-\sqrt{3})$

符号の法則より：
$(-\sqrt{5})\times(-\sqrt{3}) = (\sqrt{5}\times\sqrt{3})$

そこから：
$(\sqrt{5}\times\sqrt{3}) = (\sqrt{5\times 3}) = \sqrt{15}.$

次の平方根のかけ算をしましょう。

a) $\sqrt{5}\times\sqrt{7}$　$\sqrt{35}$

b) $\sqrt{2}\times\sqrt{8}$　4

c) $(-\sqrt{3})\times\sqrt{7}$　$-\sqrt{21}$

d) $(-\sqrt{10})\times(-\sqrt{7})$　$\sqrt{70}$

e) $\sqrt{10}\times(-\sqrt{3})$　$-\sqrt{30}$

f) $\sqrt{3}\times(-\sqrt{12})$　-6

g) $(-\sqrt{18})\times\sqrt{2}$　-6

h) $(-\sqrt{50})\times(-\sqrt{2})$　10

達成の目安

2.1 平方根のかけ算を行います。

学習の流れ

いくつかの無理数を根号で表現する方法を学んだので、平方根の計算の学習に入ります。まずかけ算とわり算から始めます。平方根のかけ算・わり算は平方根の定義から導かれるからです。

ねらい

Ⓟ,Ⓢ 長方形の面積を求めるという考え方を使います。辺の長さは根号で表されていますが、$\sqrt{3} \times \sqrt{7}$ の積（長方形の面積となる）が存在すると理解するため、面積を二乗する方法を使います。そこから平方根で表した数の定義を使って整数を求めます。次にもう一度定義を使って平方根のかけ算の計算方法を導きます。

Ⓒ 平方根で表された2つの数をかけ算する方法を明らかにします。

一部の設問の解答：

a) $\sqrt{5} \times \sqrt{7} = \sqrt{5 \times 7} = \sqrt{35}$

b) $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$

c) $(-\sqrt{3}) \times \sqrt{7} = -\sqrt{3 \times 7} = -\sqrt{21}$

d) $(-\sqrt{10}) \times (-\sqrt{7}) = +\sqrt{10 \times 7} = \sqrt{70}$

日付： U2 2.1

Ⓟ $\sqrt{3} \times \sqrt{7}$の解を求めましょう。

Ⓢ かけ算を2乗します。

$$\begin{aligned}(\sqrt{3} \times \sqrt{7})^2 &= (\sqrt{3} \times \sqrt{7})(\sqrt{3} \times \sqrt{7}) \\ &= (\sqrt{3})^2(\sqrt{7})^2 \\ &= 3 \times 7\end{aligned}$$

よって、$\sqrt{3} \times \sqrt{7}$は 3 × 7 の正の平方根

したがって、$\sqrt{3} \times \sqrt{7} = \sqrt{3 \times 7} = \sqrt{21}$

Ⓔ 次の平方根のかけ算をしましょう。

a) $(-\sqrt{2}) \times \sqrt{8} = -\sqrt{2 \times 8} = -\sqrt{16} = -4$

b) $(-\sqrt{5}) \times (-\sqrt{3}) = +\sqrt{5 \times 3} = \sqrt{15}$

Ⓡ a) $\sqrt{35}$ b) 4 c) $-\sqrt{21}$ d) $\sqrt{70}$

e) $-\sqrt{30}$ f) -6 g) -6 h) 10

宿題： ワークブック42ページ

レッスン 2

2.2 平方根のわり算

P

$\sqrt{3} \div \sqrt{7}$ のわり算の方法を見つけます。

S

わり算を分数で表します： $\sqrt{3} \div \sqrt{7} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

また、平方根は次が成り立ちます： $(\sqrt{3})^2 = 3$ $(\sqrt{7})^2 = 7$

累乗の公式では次が成り立ちます
$\frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$

よって、： $\frac{(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{7})^2} = \frac{3}{7}$. 累乗の特徴から： $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2 = \frac{3}{7}$.

2乗して $\frac{3}{7}$ となる正の数は $\sqrt{\frac{3}{7}}$です。

正の平方根をとって： $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$.

したがって： $\sqrt{3} \div \sqrt{7} = \sqrt{\frac{3}{7}}$.

C

一般的に、$a \geq 0, b > 0$ のとき、$\sqrt{a} \div \sqrt{b}$ を求めるには

分数で表し、次のようになります $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$.

正の平方根をとって： $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

例えば： $\sqrt{3} \div \sqrt{5} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

各平方根の被開平数をわり算し、分数で表します。

E

次の平方根のわり算をしましょう：

a) $(-\sqrt{6}) \div \sqrt{10}$

符号の法則より：

$(-\sqrt{6}) \div \sqrt{10} = -\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}\right)$.

そこから：

$-\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}\right) = -\sqrt{\frac{6}{10}} = -\sqrt{\frac{3}{5}}$.

b) $(-\sqrt{8}) \div (-\sqrt{18})$

符号の法則より：

$(-\sqrt{8}) \div (-\sqrt{18}) = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}}$.

そこから：

$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}} = \sqrt{\frac{8}{18}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$.

I

次の平方根のわり算をしましょう。

a) $\sqrt{2} \div \sqrt{5}$
$\sqrt{\frac{2}{5}}$

b) $\sqrt{2} \div \sqrt{8}$
$\frac{1}{2}$

c) $(-\sqrt{3}) \div \sqrt{6}$
$-\sqrt{\frac{1}{2}}$

d) $(-\sqrt{15}) \div (-\sqrt{6})$
$\sqrt{\frac{5}{2}}$

e) $\sqrt{3} \div (-\sqrt{7})$
$-\sqrt{\frac{3}{7}}$

f) $\sqrt{27} \div (-\sqrt{12})$
$-\frac{3}{2}$

g) $(-\sqrt{20}) \div \sqrt{5}$
-2

h) $(-\sqrt{12}) \div (-\sqrt{3})$
2

達成の目安

2.2 平方根のわり算を行います。

学習の流れ

平方根のかけ算の方法を学習したので、わり算の方法を学びます。本授業ではわり算を分数で表現する方法を使います。

ねらい

Ⓟ,Ⓢ かけ算と類似の手順を使います。平方根のわり算の方法を導くには、分数で表した平方根を二乗します。そこから平方根で表した数の定義を使って整数を求めます。次にもう一度定義を使って平方根のわり算の計算方法を導きます。

Ⓒ 平方根で表された2つの数を除算する方法を明らかにします。

一部の設問の解答：

a) $\sqrt{2} \div \sqrt{5} = \sqrt{\frac{2}{5}}$

b) $\sqrt{2} \div \sqrt{8} = \sqrt{\frac{2}{8}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

c) $(-\sqrt{3}) \div \sqrt{6} = -\sqrt{\frac{3}{6}} = -\sqrt{\frac{1}{2}}$

d) $(-\sqrt{15}) \div (-\sqrt{6}) = +\sqrt{\frac{15}{6}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

日付： U2 2.2

Ⓟ $\sqrt{3} \div \sqrt{7}$ の解を求めましょう。

Ⓢ $(\sqrt{3})^2 = 3$ $(\sqrt{7})^2 = 7$

分数で表されたわり算を2乗します：

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{7})^2} = \frac{3}{7}$$

よって、$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ は $\frac{3}{7}$ の正の平方根

したがって、 $\sqrt{3} \div \sqrt{7} = \sqrt{\frac{3}{7}}$

Ⓔ 次の平方根のわり算をしましょう。

a) $(-\sqrt{6}) \div \sqrt{10} = -\sqrt{\frac{6}{10}} = -\sqrt{\frac{3}{5}}$

b) $(-\sqrt{8}) \div (-\sqrt{18}) = +\sqrt{\frac{8}{18}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

Ⓡ a) $\sqrt{\frac{2}{5}}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $-\sqrt{\frac{1}{2}}$ d) $\sqrt{\frac{5}{2}}$

e) $-\sqrt{\frac{3}{7}}$ f) $-\frac{3}{2}$ g) -2 h) 2

宿題： ワークブック43ページ

2.3 根号を使わない数の表し方

P

$\sqrt{225}$ を根号を使わずに表します。

S

225を素因数分解で表します：
したがって、$225 = 3^2 \times 5^2$
平方根は以下のようになります：

$$\sqrt{225} = \sqrt{3^2 \times 5^2}$$

根号のかけ算を用いて：

$$\sqrt{3^2 \times 5^2} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{5^2} = 3 \times 5 = 15$$

したがって：$\sqrt{225} = 15.$

225の素因数分解は

225	3
75	3
25	5
5	5
1	

よって $225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 3^2 \times 5^2$.

C

根号を使わない数の表し方：
1. 被開平数の素因数分解を解きます。
2. 累乗のかけ算部分の平方根を分けます。
3. 各平方根を計算し、結果をかけ算します。

例えば：$\sqrt{324}$
1. $324 = 2^2 \times 3^2 \times 3^2$
2. $\sqrt{324} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 3^2}$
$= \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3^2}$
3. $\sqrt{324} = 2 \times 3 \times 3 = 18$

324	2
162	2
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

E

$\sqrt{\dfrac{400}{441}}$ を根号を使わずに表します。

$\sqrt{\dfrac{400}{441}} = \dfrac{\sqrt{400}}{\sqrt{441}}$ 分子と分母を処理します：

1. $400 = 2^2 \times 2^2 \times 5^2$ 2. $\sqrt{400} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 5^2} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{5^2}$ 3. $\sqrt{400} = 2 \times 2 \times 5 = 20$

1. $441 = 3^2 \times 7^2$ 2. $\sqrt{441} = \sqrt{3^2 \times 7^2} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{7^2}$ 3. $\sqrt{441} = 3 \times 7 = 21$

解説：

400	2	441	3
200	2	147	3
100	2	49	7
50	2	7	7
25	5	1	
5	5		
1			

したがって：$\dfrac{\sqrt{400}}{\sqrt{441}} = \dfrac{20}{21}.$

以下の数を根号を使わずに表しましょう：

a) $\sqrt{900}$ 30

b) $-\sqrt{625}$ −25

c) $-\sqrt{441}$ −21

d) $-\sqrt{\dfrac{49}{144}}$ $-\dfrac{7}{12}$

e) $\sqrt{\dfrac{81}{196}}$ $\dfrac{9}{14}$

f) $-\sqrt{\dfrac{100}{121}}$ $-\dfrac{10}{11}$

達成の目安

2.3 素因数分解を使って根号を使わずに数を表します。

学習の流れ

生徒は平方根のかけ算を学習しました。次は、素因数分解を使って、根号を使わず大きな数を表します。

ねらい

Ⓟ,Ⓢ 平方根のかけ算を使って、素因数分解により根号を使わず大きな数を表します。

Ⓒ 素因数分解を使って、根号を使わず大きな数を表す方法を明らかにします。

Ⓔ「まとめ」で解説する方法を使って、根号を使わず分数の平方根を表します。

一部の設問の解答：

a) $\sqrt{900} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 5^2} = 30$

b) $-\sqrt{625} = -\sqrt{5^2 \times 5^2} = -25$

c) $-\sqrt{441} = -\sqrt{3^2 \times 7^2} = -21$

d) $-\sqrt{\frac{49}{144}} = -\frac{\sqrt{7^2}}{\sqrt{2^2 \times 2^2 \times 3^2}} = -\frac{7}{12}$

日付： **U2 2.3**

Ⓟ 根号を使わず $\sqrt{225}$ を表しましょう。

Ⓢ 225 を素因数分解すると：

$$225 = 3^2 \times 5^2$$

$$\begin{aligned}\sqrt{225} &= \sqrt{3^2 \times 5^2}\\ &= \sqrt{3^2} \times \sqrt{5^2}\\ &= 3 \times 5\\ &= 15\end{aligned}$$

Ⓔ 根号を使わず $\sqrt{\frac{400}{441}}$ を表しましょう。

$400 = 2^2 \times 2^2 \times 5^2$

$441 = 3^2 \times 7^2$

$$\sqrt{\frac{400}{441}} = \frac{\sqrt{400}}{\sqrt{441}} = \frac{\sqrt{2^2 \times 2^2 \times 5^2}}{\sqrt{3^2 \times 7^2}} = \frac{20}{21}$$

Ⓡ a) 30　b) -25　c) -21

d) $-\frac{7}{12}$　e) $\frac{9}{14}$　f) $-\frac{10}{11}$

宿題： ワークブック44ページ

2.4 有理数と平方根のかけ算

P

$5 \times \sqrt{2}$ のかけ算をして、結果を1つの数の平方根で表します。

S

5を根号を使って $5 = \sqrt{25}$ と表します。

よって、$5 \times \sqrt{2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2}$ が求められます。

かけ算します。 $\sqrt{25} \times \sqrt{2} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{50}$.

したがって、 $5 \times \sqrt{2} = \sqrt{50}$.

かけ算を表すには
$5 \times \sqrt{2}$ は以下のように表すことができます：
$5\sqrt{2}$

C

$a\sqrt{b}$は、$a, b \geq 0$ のとき $a \times \sqrt{b}$ のかけ算を記号で表したものです。

$a \times \sqrt{b}$ のかけ算をして、結果を1つの数の平方根で表すには：

1. a を根号で表します。

$$a = \sqrt{a^2}$$

2. 平方根をかけ算します。

$$a \times \sqrt{b} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} = \sqrt{a^2 \times b}$$

例えば： $3\sqrt{3}$

1. $3 = \sqrt{9}$

2. $3\sqrt{3} = 3 \times \sqrt{3} = \sqrt{9} \times \sqrt{3}$
$= \sqrt{9 \times 3}$
$= \sqrt{27}$

E

$\frac{\sqrt{5}}{3}$ を1つの数の平方根で表しましょう。

3 を根号で表すと $3 = \sqrt{9}$

次に、 $\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}}$.

次の数を1つの数の平方根で表しましょう。

a) $3\sqrt{2}$ $\sqrt{18}$

b) $5\sqrt{3}$ $\sqrt{75}$

c) $4\sqrt{5}$ $\sqrt{80}$

d) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ $\sqrt{\frac{7}{4}}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{7}$ $\sqrt{\frac{3}{49}}$

f) $\frac{\sqrt{2}}{9}$ $\sqrt{\frac{2}{81}}$

46

達成の目安

2.4 有理数と平方根のかけ算を、1つの被開平数の計算に表します。

学習の流れ

素因数分解により、根号を使わず数を表す方法を学びました。次は有理数と平方根のかけ算を学習します。この内容は次の授業で平方根の約分を学習するとき役立ちます。

ねらい

Ⓟ,Ⓢ 有理数を根号で表し、授業2.1で学んだ平方根のかけ算に適用します。そして結果を1つの平方根で表します。

Ⓒ 有理数と平方根のかけ算の方法を明らかにして有理数を平方根で表します。

Ⓔ 冒頭の設問とわり算である点だけが異なる類似の問題を、同じ計算方法で求めます。

一部の設問の解答：

a) $3\sqrt{2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = \sqrt{18}$

b) $5\sqrt{3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = \sqrt{75}$

c) $4\sqrt{5} = \sqrt{16} \times \sqrt{5} = \sqrt{80}$

d) $\frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{7}{4}}$

日付：

U2 2.4

Ⓟ $5 \times \sqrt{2}$を計算しましょう。

Ⓢ $5 = \sqrt{25}$ なので

したがって、$5 \times \sqrt{2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2}$
$= \sqrt{25 \times 2}$
$= \sqrt{50}$

Ⓔ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ を1つの数の平方根で表しましょう。

$\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}}$

Ⓡ a) $\sqrt{18}$　b) $\sqrt{75}$　c) $\sqrt{80}$

d) $\sqrt{\frac{7}{4}}$　e) $\sqrt{\frac{3}{49}}$　f) $\sqrt{\frac{2}{81}}$

宿題： ワークブック45ページ

2.5 平方数でない被開平数の約分

P

a) $\sqrt{12}$ と b) $\sqrt{\frac{5}{9}}$ の式をどう約分しますか。

S

a) 12 を素因数分解します：

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3}$$

式を約分して：

$$\sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

したがって：

$$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

b) 根号を分数で表します：

$$\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}}$$

分母の平方根を約分して：

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

したがって：

$$\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

C

被開平数を元より小さくすることを平方根の**約分**といいます。
平方根の被開平数をできるだけ小さな値にすることを、平方根を**最小値の式に約分する**といいます。
***a, b ≥ 0* なら、$\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$**

たとえば、$\sqrt{90}$ を最小値の式に約分します。

解説：

90	2
45	3
15	3
5	5
1	

90 を素因数分解して：

$$\sqrt{90} = \sqrt{3^2 \times 2 \times 5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{2 \times 5} = 3\sqrt{10}$$

$\sqrt{90}$ を最小値の式に約分すると $3\sqrt{10}$ になります。この被開平数はこれ以上小さくできません。**根号を使って計算をする際は、常に結果を最小値の式に約分します。**

E

解説：

396	2
198	2
99	3
33	3
11	11
1	

$-\sqrt{396}$ を約分して最小値の式で表しましょう。
396 を素因数分解して：

$$-\sqrt{396} = -\sqrt{2^2 \times 3^2 \times 11} = -\sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{11} = -2 \times 3 \times \sqrt{11} = -6\sqrt{11}$$

この被開平数をこれ以上小さくできないので、$-\sqrt{396}$ の最小値の式に約分した結果は： $-6\sqrt{11}$

1. 次の平方根を約分しましょう：

a) $\sqrt{18}$ $3\sqrt{2}$　b) $-\sqrt{\frac{6}{25}}$ $-\frac{\sqrt{6}}{5}$　c) $\sqrt{27}$ $3\sqrt{3}$　d) $-\sqrt{200}$ $-10\sqrt{2}$　e) $-\sqrt{\frac{5}{81}}$ $-\frac{\sqrt{5}}{9}$

2. 次の平方根を最小値の式に約分しましょう。

a) $\sqrt{252}$ $6\sqrt{7}$　b) $-\sqrt{450}$ $-15\sqrt{2}$　c) $\sqrt{405}$ $9\sqrt{5}$

達成の目安

2.5 平方数でない被開平数を約分します。

学習の流れ

前回の授業で学んだ手順とは逆の手順で問題を解きます。素因数分解を使って平方根の約分の方法を明らかにします。

ねらい

Ⓟ,Ⓢ 前回の授業で学んだ手順とは逆の手順を使い、平方根を約分します。

Ⓒ 約分や最小値の式への約分によってわかることを数学的に定義します。そして平方根の約分の仕方を導きます。

Ⓔ「まとめ」で解説する方法を使って、平方根を約分します。

一部の設問の解答：

1. a) $\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$

b) $-\sqrt{\frac{6}{25}} = -\sqrt{\frac{6}{5^2}} = -\frac{\sqrt{6}}{5}$

c) $\sqrt{27} = \sqrt{3^2 \times 3} = 3\sqrt{3}$

d) $-\sqrt{200} = -\sqrt{2^2 \times 5^2 \times 2} = -10\sqrt{2}$

日付： U2 2.5

Ⓟ 約分しましょう：

a) $\sqrt{12}$ b) $\sqrt{\frac{5}{9}}$

Ⓢ 素因数分解して：

a) $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}$

b) $\sqrt{\frac{5}{9}} = \sqrt{\frac{5}{3^2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Ⓔ $-\sqrt{396}$ を約分して最小値の式で表しましょう。

$-\sqrt{396} = -\sqrt{2^2 \times 3^2 \times 11} = -6\sqrt{11}$

Ⓡ 1. a) $3\sqrt{2}$ b) $-\frac{\sqrt{6}}{5}$ c) $3\sqrt{3}$

d) $-10\sqrt{2}$ e) $-\frac{\sqrt{5}}{9}$

2. a) $6\sqrt{7}$ b) $-15\sqrt{2}$ c) $9\sqrt{5}$

宿題： ワークブック46ページ

レッスン 2

2.6 約分を使った平方根のかけ算

P

$\sqrt{28} \times \sqrt{18}$ のかけ算をしましょう。

S

計算のまえに約分します。

$\sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = 2\sqrt{7}$

$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$

したがって：

$\sqrt{28} \times \sqrt{18} = 2\sqrt{7} \times 3\sqrt{2}$

$= 2 \times 3 \times \sqrt{7} \times \sqrt{2}$

$= 6\sqrt{14}$

最初からかけ算します。

$\sqrt{28} \times \sqrt{18} = \sqrt{28 \times 18}$

次に素因数で表します：

$\sqrt{28 \times 18} = \sqrt{7 \times 2^2 \times 3^2 \times 2}$

そして、約分します：

$\sqrt{7 \times 2^2 \times 3^2 \times 2} = 2 \times 3 \times \sqrt{7 \times 2}$

$= 6\sqrt{14}$

大きな数の計算をしなくていいように、かけ算をしないことに注目します。
28×18.

C

被開平数が大きな数の平方根のかけ算には次の方法を使います：

1. 可能なら各平方根を約分します。
2. 約分した平方根をかけ算します。
3. 可能なら約分します。

例えば： $\sqrt{20} \times \sqrt{90}$

1. $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ $\sqrt{90} = 3\sqrt{10}$
2. $2\sqrt{5} \times 3\sqrt{10} = 2 \times 3 \times \sqrt{5} \times \sqrt{10} = 6\sqrt{50}$
3. $6\sqrt{50} = 6 \times 5\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$

E

$-\sqrt{98} \times \sqrt{80}$のかけ算をしましょう。

被開平数が大きいときは、かけ算の前に素因数分解します。

$-\sqrt{98} \times \sqrt{80} = -\sqrt{98 \times 80} = -\sqrt{2 \times 7^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 5}$

$= -7 \times 2 \times 2 \times \sqrt{2 \times 5}$

$= -28\sqrt{10}$

解説：

$$\begin{array}{r|l} 98 & 2 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 80 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

次の平方根のかけ算をしましょう。

a) $\sqrt{20} \times \sqrt{12}$
$4\sqrt{15}$

b) $\sqrt{75} \times \sqrt{50}$
$25\sqrt{6}$

c) $\sqrt{18} \times (-\sqrt{50})$
-30

d) $(-\sqrt{27}) \times (-\sqrt{32})$
$12\sqrt{6}$

e) $\sqrt{10} \times \sqrt{14}$
$2\sqrt{35}$

f) $\sqrt{8} \times \sqrt{6}$
$4\sqrt{3}$

g) $\sqrt{12} \times (-\sqrt{15})$
$-6\sqrt{5}$

h) $\sqrt{96} \times (-\sqrt{20})$
$-8\sqrt{30}$

達成の目安

2.6 約分を使って平方根の積を求めます。

学習の流れ

生徒は平方根の約分とかけ算の方法を学びました。次は大きな被開平数をもつ平方根のかけ算のツールとして約分を使うことを学習します。

ねらい

Ⓟ,Ⓢ 平方根の約分を使ってかけ算を行い、約分した形で結果を表します。28 × 18 といった複雑なかけ算は計算しません。

Ⓒ 平方根のかけ算を簡潔にする方法を導入します（とくに数が大きいとき）。

Ⓔ 約分を使って平方根のかけ算をします。そして負の数と正の数のかけ算に応用します。

一部の設問の解答：

a) $\sqrt{20} \times \sqrt{12} = 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{3}$
$= 4\sqrt{15}$

b) $\sqrt{75} \times \sqrt{50} = 5\sqrt{3} \times 5\sqrt{2}$
$= 25\sqrt{6}$

c) $\sqrt{18} \times (-\sqrt{50}) = 3\sqrt{2} \times (-5\sqrt{2})$
$= -15 \times 2$
$= -30$

d) $(-\sqrt{27}) \times (-\sqrt{32}) = -3\sqrt{3} \times (-4\sqrt{2})$
$= 12\sqrt{6}$

日付： **U2 2.6**

Ⓟ $\sqrt{28} \times \sqrt{18}$ のかけ算をしましょう。

Ⓢ
$\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$
$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$\sqrt{28} \times \sqrt{18} = 2 \times 3 \times \sqrt{7} \times \sqrt{2}$
$= 6\sqrt{14}$

$\sqrt{28} \times \sqrt{18} = \sqrt{28 \times 18}$
$= \sqrt{2^2 \times 7 \times 3^2 \times 2}$
$= 6\sqrt{14}$

Ⓔ $-\sqrt{98} \times \sqrt{80}$のかけ算をしましょう。

$-\sqrt{98} \times \sqrt{80} = -\sqrt{98 \times 80}$
$= -\sqrt{2 \times 7^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 5}$
$= -28\sqrt{10}$

Ⓡ

a) $4\sqrt{15}$	b) $25\sqrt{6}$	c) -30	d) $12\sqrt{6}$
e) $2\sqrt{35}$	f) $4\sqrt{3}$	g) $-6\sqrt{5}$	h) $-8\sqrt{30}$

宿題： ワークブック47ページ

レッスン 2

2.7 分母の有理化

P

分母に平方根がない、$\frac{1}{\sqrt{2}}$ に同等の分数を見つけましょう。

S

同等となる分数は：　$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

かけ算をします：　$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

したがって：　$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

分母と分子に同じ数を掛けたり割ったりすると、同等の分数になります。つまり、元の分数と同じ大きさの分数を表すということです。例えば：

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{2}{6}$

計算機でそれぞれの値を確認しましょう。

$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707106...$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707106...$

分母の平方根が約分された式は計算機でも使いやすく、また分母が整数なので分数の計算がしやすくなることに注目します。

C

分母に平方根をもたない同等の分数を使って計算する方法を、**分母の有理化**といいます。

$a > 0$ のとき分数 $\frac{b}{\sqrt{a}}$ の分母を有理化するには次の方法を使います：

1. 分数 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$ をかけます。
2. かけ算をして、結果を約分します。

$$\frac{b}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{a}$$

例えば、$\frac{3}{\sqrt{6}}$ を有理化します：

1. $\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$
2. $\frac{3}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{3 \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

平方根の計算を行う際は常に分母の平方根を有理化しなければなりません。

E

次の数を有理化しましょう：　a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$　　b) $-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}}$.

a) 1. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$

2. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3 \times 7}}{7} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

b) $\sqrt{12}$を約分します：$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

1. $-\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = -\left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$

2. $-\left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = -\left(\frac{\sqrt{5} \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}}\right) = -\left(\frac{\sqrt{5 \times 3}}{2 \times 3}\right) = -\frac{\sqrt{15}}{6}$

次の数を有理化しましょう。

a) $\frac{1}{\sqrt{7}}$　$\frac{\sqrt{7}}{7}$　　b) $-\frac{1}{\sqrt{11}}$　$-\frac{\sqrt{11}}{11}$　　c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$　$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　d) $\frac{8}{\sqrt{20}}$　$\frac{4\sqrt{5}}{5}$

e) $\frac{5}{\sqrt{3}}$　$\frac{5\sqrt{3}}{3}$　　f) $\frac{7}{\sqrt{21}}$　$\frac{\sqrt{21}}{3}$　　g) $-\frac{12}{\sqrt{18}}$　$-2\sqrt{2}$　　h) $-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{24}}$　$-\frac{\sqrt{30}}{12}$

ユニット2

49

達成の目安

2.7 分数の分母を有理化します。

学習の流れ

前の授業でいくつかの約分の方法について明らかにし、平方根の計算に使いました。生徒は平方根のかけ算を学びましたので、本授業では分数の分母の有理化を導入します。有理化は分母と分子に同じ数のかけ算・わり算を行うことにより同等の分数を得る方法です。

ねらい

Ⓟ,Ⓢ 同等の分数を使って、分母の平方根を約分する方法を明らかにします。

Ⓒ 分数の分母を有理化する方法を定義し、平方根が1つの式のときの分母の有理化の方法を明らかにします。平方根が1つの式より多い場合の有理化の方法は高校で学習します。また、有理化のしかたは問題を解きながら解答の最後まで説明することが重要です。

一部の設問の解答：

a) $\frac{1}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$

b) $-\frac{1}{\sqrt{11}} \times \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}} = -\frac{\sqrt{11}}{11}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

d) $\frac{8}{\sqrt{20}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{10} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

問題解決の方法：
本授業では数学でよく使うある方法を使います。それはある「1」の数を「適切な」方法でかけ算することです。ある量を別の形で表すのに適した同じ大きさの量でかけ算したりわり算する、ということです。

日付： **U2 2.7**

Ⓟ 分母に平方根がない、$\frac{1}{\sqrt{2}}$に同等の分数を見つけましょう。

Ⓢ 同等となる分数は：

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ⓔ 次の数を有理化しましょう：

a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

b) $-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}}$

$-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}} = -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$

$= -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$= -\frac{\sqrt{15}}{6}$

Ⓡ a) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ b) $-\frac{\sqrt{11}}{11}$

c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ d) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

e) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ f) $\frac{\sqrt{21}}{3}$

g) $-2\sqrt{2}$ h) $-\frac{\sqrt{30}}{12}$

宿題： ワークブック48ページ

2.8 平方根のたし算とひき算

P

次の計算をしましょう：

a) $7\sqrt{3}+2\sqrt{3}$　　b) $7\sqrt{3}-2\sqrt{3}$

S

a) $a=\sqrt{3}$ として：　$7\sqrt{3}+2\sqrt{3} = 7a+2a=9a=9\sqrt{3}$

b) $a=\sqrt{3}$ として：　$7\sqrt{3}-2\sqrt{3} = 7a-2a=5a=5\sqrt{3}$

$7a=a+a+a+a+a+a+a.$
$2a=a+a.$

C

平方根のたし算とひき算では、同じ被開平数の平方根の係数をたし算、ひき算します。

例：　a) $6+5\sqrt{7}-3\sqrt{7}$　　b) $3\sqrt{2}-4\sqrt{3}+2\sqrt{2}$

解説：
$\sqrt{2}+\sqrt{3} \neq \sqrt{5}$
$1.41...+1.73... \neq 2.23...$
$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ はこれ以上簡単にできません。

同じ被開平数をもつ数を見つけます：

$6+5\sqrt{7}-3\sqrt{7}$　　$3\sqrt{2}-4\sqrt{3}+2\sqrt{2}$

同じ被開平数の平方根の係数をたし算、ひき算します。

$6+5\sqrt{7}-3\sqrt{7}=6+(5-3)\sqrt{7}$　　$3\sqrt{2}-4\sqrt{3}+2\sqrt{2}=(3+2)\sqrt{2}-4\sqrt{3}$

したがって：

$6+5\sqrt{7}-3\sqrt{7}=6+2\sqrt{7}$　　$3\sqrt{2}-4\sqrt{3}+2\sqrt{2}=5\sqrt{2}-4\sqrt{3}$

$\sqrt{a}+\sqrt{a}$ のたし算に注意します。$\sqrt{a+a}=\sqrt{2a}$ **ではありません。** $2\sqrt{a}$ になります。

注意しましょう
かけ算：　$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$
たし算：　$\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$

次の平方根の計算をしましょう。

a) $\sqrt{3}+4\sqrt{3}$
$5\sqrt{3}$

b) $9\sqrt{2}-7\sqrt{2}$
$2\sqrt{2}$

c) $\sqrt{5}-7\sqrt{5}$
$-6\sqrt{5}$

d) $5\sqrt{6}+7\sqrt{6}+8$
$12\sqrt{6}+8$

e) $2\sqrt{2}-6-7\sqrt{2}$
$-5\sqrt{2}-6$

f) $9\sqrt{5}+7\sqrt{5}+4\sqrt{7}$
$16\sqrt{5}+4\sqrt{7}$

g) $7\sqrt{6}-3\sqrt{2}+8\sqrt{2}$
$7\sqrt{6}+5\sqrt{2}$

h) $5\sqrt{7}-4\sqrt{3}-8\sqrt{7}$
$-3\sqrt{7}-4\sqrt{3}$

達成の目安

2.8 同類項の平方根のたし算とひき算

学習の流れ

平方根のかけ算と割り算の学習をしましたので、次はたし算とひき算を導入します。同類項の平方根を明らかにして、多項式の演算と同じような方法で計算します。

ねらい

Ⓟ,Ⓢ 平方根のたし算とひき算の違いを示します。同じ平方根を使いますが、演算の記号だけ変えてあります。そこから、平方根を変数に置き換えて単項式のたし算として演算し、平方根の和を導きます。

Ⓒ 同じ被開平数の平方根のたし算の方法を正確に導入します。枠で囲った部分は、異なる平方根のたし算でよくあるミスをしないための注意の呼びかけです。このたし算は同じ被開平数の平方根のたし算ではありません。

問題解決の方法：
2つの平方根のたし算が、被開平数のたし算の根にならないと説明するため「反例」を示します。同じ結果が導かれないことを反例で証明します。計算機を使わなくても反例が示せます：

$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$
$\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$
したがって、 $\sqrt{9} + \sqrt{16} \neq \sqrt{25}$.

数学的表現の使用：
本授業では数学的な表現を正しく使います。よくあるミスは、異なる被開平数をもつ2つの平方根のたし算を、被開平数同士のたし算の根と説明してしまうことですが、そのような表現は使わないようにします。そのため枠内に反例を示して注意を促します。

日付： U2 2.8

Ⓟ 計算しましょう：

a) $7\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$ b) $7\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$

Ⓢ $a = \sqrt{3}$ とし、置き換えます：

a) $7a + 2a = 9a$
$= 9\sqrt{3}$

b) $7a - 2a = 5a$
$= 5\sqrt{3}$

Ⓡ
a) $5\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{2}$
c) $-6\sqrt{5}$ d) $12\sqrt{6} + 8$
e) $-5\sqrt{2} - 6$ f) $16\sqrt{5} + 4\sqrt{7}$
g) $7\sqrt{6} + 5\sqrt{2}$ h) $-3\sqrt{7} - 4\sqrt{3}$

宿題： ワークブック49ページ

レッスン 2

2.9 約分と有理化を使った平方根のたし算とひき算

P

次の計算をしましょう：　a) $\sqrt{18}-\sqrt{32}+\sqrt{50}$　b) $\sqrt{12}-\frac{6}{\sqrt{3}}$.

S

a) 各平方根を約分して：

$$\sqrt{18} = \sqrt{2\times3^2} = 3\sqrt{2}$$
$$\sqrt{32} = \sqrt{2\times4^2} = 4\sqrt{2}$$
$$\sqrt{50} = \sqrt{2\times5^2} = 5\sqrt{2}$$

平方根をたし算します：

$$\sqrt{18}-\sqrt{32}+\sqrt{50} = 3\sqrt{2}-4\sqrt{2}+5\sqrt{2}$$
$$= (3-4+5)\sqrt{2}$$
$$= 4\sqrt{2}$$

b) 一方の平方根を約分し、もう一方は有理化して：

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2\times3} = 2\sqrt{3}$$
$$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6}{3}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

平方根をひき算します：

$$\sqrt{12}-\frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}-2\sqrt{3}$$
$$= 0$$

同じ被開平数をもつ平方根を**同類項の平方根**といいます。

C

被開平数が異なる平方根のたし算とひき算は：

1.それぞれの項を最小の式に約分します。

2.できるものは平方根を有理化します。

3.同類項でたし算とひき算を計算します。

例えば：　$\sqrt{20}-\sqrt{45}+\frac{30}{\sqrt{5}}$.

1. $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
   $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
2. $\frac{30}{\sqrt{5}} = \frac{30}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{30}{5}\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$
3. $\sqrt{20}-\sqrt{45}+\frac{30}{\sqrt{5}}$
   $= 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

次の平方根の計算をしましょう：

a) $\sqrt{20}+\sqrt{45}$
$5\sqrt{5}$

b) $\sqrt{48}+\sqrt{75}+\sqrt{27}$
$12\sqrt{3}$

c) $\sqrt{12}-\sqrt{3}+\sqrt{27}$
$4\sqrt{3}$

d) $\sqrt{12}+\frac{3}{\sqrt{3}}$
$3\sqrt{3}$

e) $\sqrt{63}+\frac{28}{\sqrt{7}}$
$7\sqrt{7}$

f) $\sqrt{72}-\frac{8}{\sqrt{2}}$
$2\sqrt{2}$

g) $\sqrt{28}+\sqrt{7}+\frac{35}{\sqrt{7}}$
$8\sqrt{7}$

h) $\sqrt{98}-\sqrt{50}+\frac{18}{\sqrt{2}}$
$11\sqrt{2}$

i) $\sqrt{75}-\sqrt{12}-\frac{3}{\sqrt{3}}$
$2\sqrt{3}$

達成の目安

2.9 約分と有理化を使った平方根のたし算とひき算

学習の流れ

前授業で同類項の平方根のたし算の方法は学習しました。次はその学習内容を応用して約分と有理化をツールとして使い、同類項の平方根を求めます。

ねらい

Ⓟ,Ⓢ 約分を行ってから平方根の計算をします。もう一方は、有理化と平方根の計算を行います。この方法はより複雑な計算ができますが、手順も多くなります。生徒が約分または有理化した平方根を使います。ねらいは計算に時間をかけないことと、授業の目的に集中することです。つまり平方根の約分または有理化を使って平方根の計算をすることです。b)は、2つの項はそう見えないが、有理化すると同類項になることを説明します（絶対値で）。

Ⓒ 約分や有理化できる平方根をもつ設問を、どのように一般的な方法で解くか分析します。そしてさまざまな形式で表された数の計算を行います。

一部の設問の解答：

a) $\sqrt{20} + \sqrt{45} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5}$
$= 5\sqrt{5}$

b) $\sqrt{48} + \sqrt{75} + \sqrt{27} = 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$
$= 12\sqrt{3}$

c) $\sqrt{12} - \sqrt{3} + \sqrt{27} = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} + 3\sqrt{3}$
$= 4\sqrt{3}$

d) $\sqrt{12} + \frac{3}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{3}$
$= 2\sqrt{3} + \sqrt{3}$
$= 3\sqrt{3}$

日付： **U2 2.9**

Ⓟ 計算しましょう：

a) $\sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{50}$ b) $\sqrt{12} - \frac{6}{\sqrt{3}}$

Ⓢ

a) $\sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{50} = 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$
$= 4\sqrt{2}$

b) $\sqrt{12} - \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - \frac{6\sqrt{3}}{3}$
$= 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$
$= 0$

Ⓡ

a) $5\sqrt{5}$ b) $12\sqrt{3}$ c) $4\sqrt{3}$
d) $3\sqrt{3}$ e) $7\sqrt{7}$ f) $2\sqrt{2}$
g) $8\sqrt{7}$ h) $11\sqrt{2}$ i) $2\sqrt{3}$

宿題： ワークブック50ページ

2.10 平方根の混合演算　パート1

P

計算しましょう　$\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+5)$.

S

$\sqrt{3} = a$ として

分配法則を使って：

分配法則により以下が成り立ちます：
$a(b+c) = ab + ac.$

$\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+5) = a\,(a+5) = a^2 + 5a$

$$\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+5) = (\sqrt{3})^2 + 5\,(\sqrt{3})$$
$$= 3 + 5\sqrt{3}$$

C

たし算に対するかけ算の分配法則は実数、そして平方根に対しても成り立ちます。

3つの実数 a, b, c に対し、$a\,(b+c) = ab + ac$ が成り立ちます。

例えば：
$$\sqrt{5}\,(\sqrt{6}+\sqrt{5}) = \sqrt{5}\,(\sqrt{6}) + (\sqrt{5})^2$$
$$= \sqrt{30} + 5$$

E

$\sqrt{5}(\sqrt{45}+7)$ を計算しましょう：

$\sqrt{45}$ を約分します： $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

したがって： $\sqrt{5}\,(\sqrt{45}+7) = \sqrt{5}\,(3\sqrt{5}+7) = 3\times(\sqrt{5})^2 + 7(\sqrt{5}) = 3\times5 + 7\sqrt{5} = 15 + 7\sqrt{5}$.

次の平方根の計算をしましょう：

計算前に約分するか見直しましょう。

a) $\sqrt{7}\,(\sqrt{7}+6)$
$7+6\sqrt{7}$

b) $\sqrt{2}\,(\sqrt{2}-3)$
$2-3\sqrt{2}$

c) $\sqrt{5}\,(\sqrt{45}+3)$
$15+3\sqrt{5}$

d) $\sqrt{6}\,(\sqrt{24}+9)$
$12+9\sqrt{6}$

e) $\sqrt{3}\,(\sqrt{75}-4)$
$15-4\sqrt{3}$

f) $\sqrt{5}\,(\sqrt{20}-6)$
$10-6\sqrt{5}$

g) $\sqrt{7}\,(\sqrt{7}+\sqrt{3})$
$7+\sqrt{21}$

h) $\sqrt{2}\,(\sqrt{18}+\sqrt{48})$
$6+4\sqrt{6}$

達成の目安

2.10 たし算に対するかけ算の分配法則を使って平方根を計算します

学習の流れ

平方根の基本的な四則演算を学習したので、次は平方根の混合演算を少し扱います。最初はたし算に対するかけ算の分配法則を使います。続いて、より複雑な分配法則を適用するケースを学習します（2つのケース）。こちらは次の授業で扱います。

ねらい

Ⓟ,Ⓢ 授業2.8では平方根を変数としてとらえました。次は分配法則を使ってたし算の混合演算のかけ算を行う方法について考察します。

Ⓒ 平方根ならびに一般的にどのような実数に対しても分配法則が成り立つことを明らかにします。

Ⓔ パターンの違う分配法則です。計算の前に約分をしておくと計算が楽になります。

一部の設問の解答：

a) $\sqrt{7}\left(\sqrt{7}+6\right)=7+6\sqrt{7}$

b) $\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-3\right)=2-3\sqrt{2}$

c) $\sqrt{5}\left(\sqrt{45}+3\right)=\sqrt{5}\left(3\sqrt{5}+3\right)$
$=15+3\sqrt{5}$

d) $\sqrt{6}\left(\sqrt{24}+9\right)=\sqrt{6}\left(2\sqrt{6}+9\right)$
$=12+9\sqrt{6}$

日付： **U2 2.10**

Ⓟ 計算しましょう：

$$\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+5\right)$$

Ⓢ $a=\sqrt{3}$ として、置き換えます：

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+5\right)&=a(a+5)\\&=a^2+5a\\&=\left(\sqrt{3}\right)^2+5\\&=3+5\sqrt{3}\end{aligned}$$

Ⓔ $\sqrt{5}\left(\sqrt{45}+7\right)=\sqrt{5}\left(3\sqrt{5}+7\right)$
$=15+7\sqrt{5}$

Ⓡ a) $7+6\sqrt{7}$　b) $2-3\sqrt{2}$
c) $15+3\sqrt{5}$　d) $12+9\sqrt{6}$
e) $15-4\sqrt{3}$　f) $10-6\sqrt{5}$
g) $7+\sqrt{21}$　h) $6+4\sqrt{6}$

宿題： ワークブック51ページ

2.11 平方根の混合演算　パート2

P

$(\sqrt{5}+3)(\sqrt{2}+1)$ を計算しましょう。

S

かけ算を展開します：

$$(\sqrt{5}+3)(\sqrt{2}+1) = \sqrt{5}(\sqrt{2})+\sqrt{5}(1)+3(\sqrt{2})+3(1)$$
$$= \sqrt{10}+\sqrt{5}+3\sqrt{2}+3$$

$(a+b)(c+d)$ の計算は以下のようにします：

$$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd.$$

C

たし算に対するかけ算の分配法則は、実数、平方根、$(a+b)(c+d)$ に対しても成り立ちます。

4 つの実数 a、b、c、d に対し、$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$ が成り立ちます。

例えば：　$(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

$$(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \sqrt{7}(\sqrt{2})+\sqrt{7}(\sqrt{3})+\sqrt{3}(\sqrt{2})+(\sqrt{3})^2$$
$$= \sqrt{14}+\sqrt{21}+\sqrt{6}+3$$

E

$(\sqrt{2}+1)^2$ を計算しましょう。

乗法公式を適用します：

$$(\sqrt{2}+1)^2 = (\sqrt{2})^2+2(\sqrt{2})(1)+(1)^2$$
$$= 2+2\sqrt{2}+1$$
$$= 3+2\sqrt{2}$$

乗法公式を展開します：

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

次の平方根の計算をしましょう。解答は最小値の式に約分しましょう。

a) $(\sqrt{7}+2)(\sqrt{5}-4)$
$\sqrt{35}+2\sqrt{5}-4\sqrt{7}-8$

b) $(\sqrt{6}+5)(\sqrt{6}+4)$
$26+9\sqrt{6}$

c) $(\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}-7)$
$23-10\sqrt{2}$

d) $(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})$
2

e) $(\sqrt{5}+6)^2$
$41+12\sqrt{5}$

f) $(\sqrt{3}-2)^2$
$7-4\sqrt{3}$

g) $(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{6})$
$3\sqrt{2}+6+\sqrt{15}+\sqrt{30}$

h) $(\sqrt{6}-4)(\sqrt{2}-2)$
$2\sqrt{3}-2\sqrt{6}-4\sqrt{2}+8$

i) $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)$
1

達成の目安

2.11 たし算に対するかけ算の分配法則を使って平方根を計算します

学習の流れ

分配法則は平方根にも実数にも成り立つことを学習しました。次はこの法則を、たし算（またはひき算）する2つの数と、別のたし算（またはひき算）する2つの数のかけ算に適用します。つまり分配法則を2度適用します。

ねらい

Ⓟ,Ⓢ 分配法則をつかって、様々な組み合わせのたし算とひき算の混合演算のかけ算を行います。

Ⓒ 分配法則を平方根と実数にも適用します。

Ⓔ Ⓒで明らかにした法則を適用して平方完成の計算を行い、多項式の乗法公式の手順へと導きます。

一部の設問の解答：

a) $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{7}-4)=\sqrt{35}-4\sqrt{7}+2\sqrt{5}-8$

b) $(\sqrt{6}+5)(\sqrt{6}+4)=(\sqrt{6})^2+9\sqrt{6}+20$
$=26+9\sqrt{6}$

c) $(\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}-7)=(\sqrt{2})^2-10\sqrt{2}+21$
$=23-10\sqrt{2}$

d) $(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})=(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2$
$=7-5$
$=2$

日付： **U2 2.11**

Ⓟ 計算しましょう：

$(\sqrt{5}+3)(\sqrt{2}+1)$

Ⓢ $(\sqrt{5}+3)(\sqrt{2}+1)=\sqrt{5}(\sqrt{2})+\sqrt{5}+3\sqrt{2}+3$

$=\sqrt{10}+\sqrt{5}+3\sqrt{2}+3$

Ⓔ 計算しましょう：

$(\sqrt{2}+1)^2=(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}+1$
$=3+2\sqrt{2}$

Ⓡ a) $\sqrt{35}-4\sqrt{7}+2\sqrt{5}-8$
b) $9\sqrt{6}+26$
c) $23-9\sqrt{2}$
d) 2
e) $41+12\sqrt{5}$
f) $7-4\sqrt{3}$
g) $3\sqrt{2}+6+\sqrt{15}+\sqrt{30}$
h) $2\sqrt{3}-2\sqrt{6}-4\sqrt{2}+8$
i) 1

宿題： ワークブック52ページ

2.12 復習問題

1. 次の説明が正しいか（V） 誤り （F） か答えましょう。

a) $\sqrt{121} = 11$ したがって $\sqrt{12.1} = 1.1$ F

b) $\sqrt{8} \div \sqrt{2}$ のわり算の結果は有理数です。 F

c) $2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}$ の解は $2 \times 3 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ です。 V

d) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ の解は $\sqrt{2+3} = \sqrt{5}$ です。 F

e) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ を有理化すると $\sqrt{2}$ が得られます。 F

2. 次の平方根のかけ算をしましょう。

a) $\sqrt{7} \times \sqrt{2}$ $\sqrt{14}$ b) $(-\sqrt{6}) \times \sqrt{10}$ $-2\sqrt{15}$ c) $(-\sqrt{6}) \times (-\sqrt{14})$ $2\sqrt{21}$

3. 次の平方根のわり算をしましょう。

a) $\sqrt{5} \div \sqrt{7}$ $\sqrt{\frac{5}{7}}$ b) $\sqrt{6} \div (-\sqrt{14})$ $-\sqrt{\frac{3}{7}}$ c) $(-\sqrt{6}) \div (-\sqrt{24})$ $\frac{1}{2}$

4. 以下の数を根号を使わずに表しましょう。

a) $\sqrt{900}$ 30 b) $-\sqrt{\frac{400}{81}}$ $-\frac{20}{9}$

5. 次の数を1つの数の平方根で表しましょう。

a) $2\sqrt{5}$ $\sqrt{20}$ b) $7\sqrt{2}$ $\sqrt{98}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ $\sqrt{\frac{2}{25}}$ d) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ $\sqrt{\frac{5}{16}}$

2.13 復習問題

1. 次の平方根を最小値の式に約分しましょう。

a) $\sqrt{27}$ $3\sqrt{3}$ b) $\sqrt{\frac{11}{64}}$ $\frac{\sqrt{11}}{8}$ c) $\sqrt{405}$ $9\sqrt{5}$

2. 次の平方根のかけ算をしましょう。

a) $\sqrt{45} \times \sqrt{28}$ $6\sqrt{35}$ b) $\sqrt{30} \times \sqrt{21}$ $3\sqrt{70}$

3. 次の平方根を有理化しましょう。

a) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ $\frac{\sqrt{6}}{6}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$ $\frac{\sqrt{35}}{7}$ c) $\frac{30}{\sqrt{5}}$ $\frac{30\sqrt{5}}{5}$

4. 次の平方根の計算をしましょう。

a) $6\sqrt{7} + 9\sqrt{7}$ $15\sqrt{7}$ b) $13\sqrt{5} - 7 - 8\sqrt{5}$ $5\sqrt{5} - 7$ c) $\sqrt{3} - 5\sqrt{7} + 4\sqrt{3}$ $5\sqrt{3} - 5\sqrt{7}$

d) $\sqrt{75} + \sqrt{48}$ 9 e) $\sqrt{28} - \sqrt{63} + \sqrt{7}$ 0 f) $\sqrt{98} - \frac{20}{\sqrt{2}}$ $-3\sqrt{2}$

5. 次の平方根の計算をしましょう。

a) $\sqrt{5}\,(\sqrt{5} - 6)$ $5 - 6\sqrt{5}$ b) $\sqrt{3}\,(\sqrt{75} - 8)$ $15 - 8\sqrt{3}$ c) $\sqrt{5}\,(\sqrt{7} - \sqrt{5})$ $\sqrt{35} - 5$

d) $(\sqrt{3} - 7)(\sqrt{3} - 5)$ $38 - 12\sqrt{3}$ e) $(\sqrt{8} + \sqrt{6})(\sqrt{8} - \sqrt{6})$ 2 f) $(\sqrt{5} - 4)^2$ $21 - 8\sqrt{5}$

達成の目安

2.12 平方根の計算問題を解きます。

一部の設問の解答：

授業2.12の一部の設問の解答：

1. a) $\sqrt{12.1} = \sqrt{\frac{121}{10}} = \frac{11}{\sqrt{10}}$ は無理数です。

b) $\sqrt{8} \div \sqrt{2} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$

c) $2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 2 \times 3 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$
$= 6 \times 2$
$= 12$

d) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3$
$= 5 + 2\sqrt{6} \neq 5$

e) $\frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{6}{3}$

4. b) $-\sqrt{\frac{400}{81}} = -\sqrt{\frac{2^2 \times 2^2 \times 5^2}{3^2 \times 3^2}}$
$= -\frac{2 \times 2 \times 5}{3 \times 3}$
$= -\frac{20}{9}$

2. a) $\sqrt{7} \times \sqrt{2} = \sqrt{7 \times 2}$
$= \sqrt{14}$

b) $(-\sqrt{6}) \times \sqrt{10} = -\sqrt{6 \times 10}$
$= -2\sqrt{15}$

c) $(-\sqrt{6}) \times (-\sqrt{14}) = \sqrt{3 \times 2 \times 2 \times 7}$
$= 2\sqrt{21}$

3. c) $(-\sqrt{6}) \div (-\sqrt{24}) = \sqrt{\frac{6}{24}}$
$= \sqrt{\frac{1}{4}}$
$= \frac{1}{2}$

5. b) $2\sqrt{5} = \sqrt{5 \times 2^2}$
$= \sqrt{20}$

授業2.13の一部の設問の解答：

1. a) $\sqrt{27} = \sqrt{3^2 \times 3}$
$= 3\sqrt{3}$

2. a) $\sqrt{45} \times \sqrt{28} = \sqrt{3^2 \times 5 \times 2^2 \times 7}$
$= 6\sqrt{35}$

3. a) $\frac{1}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

4. e) $\sqrt{28} - \sqrt{63} + \sqrt{7} = 2\sqrt{7} - 3\sqrt{7} + \sqrt{7}$
$= 0$

5. d) $(\sqrt{3} - 7)(\sqrt{3} - 5) = (\sqrt{3})^2 - 12\sqrt{3} + 35$
$= 38 - 12\sqrt{3}$

宿題： ワークブック53ページ

2.14 実数の問題の解き方

P

マリオの学校で進級用のシャツを購入します。購入費は$225です。シャツの枚数とシャツ1枚の値段が同じなら、シャツ1枚の値段はいくらですか。

S

- シャツ3枚なら、シャツ1枚の値段は$3になり、合計$9の出費となります。
- シャツ10枚なら、シャツ1枚の値段は$10になり、合計$100の出費となります。

シャツ1枚の値段を a とします。
問題では、シャツの枚数がシャツ1枚の値段と同じと述べています。

よって、1枚 a ドルの値段でシャツを a 枚買いました。合計費用は$225です。$a^2 = 225$が成り立ちます。

よって、シャツ1枚の値段は：　$\sqrt{225}$.
素因数分解します：　$\sqrt{3^2 \times 5^2} = 3 \times 5 = 15$.

$\sqrt{225}$は2乗すると225になる正の数であるのを復習しましょう。

シャツ1枚の値段は **$15** です。

C

次の手順で問題を解きます：

1. 問題を読んで情報を読み解きます。
2. できれば問題の状況を図式で表します。
3. 問題を解く方法を考えます。
4. 問題に対する解答を導きます。
5. 導いた解答が問題と矛盾していないか確認します。

1. カルメンの学校で大会用ユニフォームを購入します。購入費は$144です。ユニフォームの枚数とユニフォーム1枚の値段が同じなら、ユニフォーム1枚の値段はいくらですか。

   $12

2. チェスボードは正方形で64のマス目があります。チェスボードの1辺にはマス目がいくつありますか。

   1辺に8マス

3. 1辺 0.25 mのタイルを正方形の土地に敷き詰めます。土地の面積が 25 m^2 なら、タイルは何枚必要ですか。

   400枚

エニット2

55

達成の目安

2.12 平方根の概念を使って応用問題を解きます。

学習の流れ

ユニットの学習をすべて終えたら、平方根の知識を使って応用問題を解きます。本授業は次のユニットの学習内容、二次方程式の求め方に何らかの形で繋がります。

ねらい

Ⓟ,Ⓢ 設問の条件に合う数を「トライ&エラー」であてはめながら、シャツの枚数を求める生徒がいるかもしれません。解き方がわかると、その方法が二次方程式につながることを意図しています。ただし具体的に説明しません。

Ⓒ 問題を解くには、生徒に一般的な解決方法を学ばせます。それと同じように、一般的な図式を導入して、問題に取り組んで解を求めます。

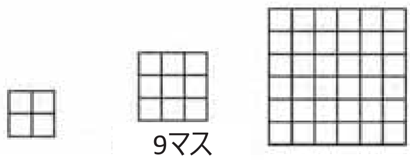
一部の設問の解答：

1. この問題は授業で扱った問題と同じ方法で解くことができます。合計金額は異なりますが、問題の場面は同じです。生徒は前問と同じ方法で解を求め、約分できることが求められます：

$$\sqrt{144} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 3^2}$$
$$= 12$$

よって、1枚$12のユニフォーム12着を注文しました。

2. チェスボードは正方形で、縦・横のマス目の数は同じですから、状況を表す図を作ると：



4マス　9マス　36マス

1辺の量を x とします。$x^2 = 64$ が成り立ちます。よって、$x = \sqrt{64} = 8$ となり、1辺は8マスです。

3. 土地は正方形なので、1辺は 5 mです。5 ÷ 0.25 = 20 の計算から1辺に20枚のタイルが必要であることがわかります。よって、合計では $20^2 = 400$ となり、400枚のタイルが必要であることが算出されます。

日付： U2 2.14

Ⓟ シャツの枚数とシャツの値段は同じです。購入費は全部で$225です。シャツ1枚の値段を求めます。

シャツ3枚なら、シャツ1枚の値段は$3になり、合計$9の出費となります。

Ⓢ シャツ10枚なら、シャツ1枚の値段は$10になり、合計$100の出費となります。

a = シャツの枚数なら以下が成り立ちます。
$a^2 = 225$

平方根の定義から –25 または 25 が導かれますが、シャツの枚数なので負の数にはなりえません。よって、シャツの枚数は25枚、1枚の値段は$25です。

Ⓡ 1. 1枚$12 のシャツ

2. 1辺に8マス

3. 土地すべてに敷き詰めるのに必要なタイルは400枚

宿題： ワークブック54ページ

レッスン 2

2.15 復習問題

1. 次の関係が成り立つ自然数 "a" を求めましょう：

$$3 < \sqrt{a} < 4$$

10, 11, 12, 13 ,14 y 15.

2. $\sqrt{5} \approx 2.236$ として、次の式の概算をだしましょう。

a) $\sqrt{20}$ 4.472

b) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ 0.4472

c) $\dfrac{15}{\sqrt{5}}$ 6.708

3. $x = \sqrt{5} + \sqrt{7}$, $y = \sqrt{5} - \sqrt{7}$ として、次の代数式の値を求めましょう。

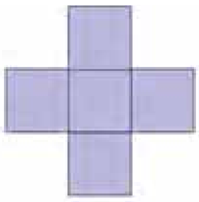
a) $(x + y)^2$ 20

b) xy −2

c) $x^2 - y^2$ $4\sqrt{35}$

4. 次の条件を満たす2つの数字を求めましょう。2つの数の合計は318、1つの平方根はもう1つの平方根より20多い値と等しい。 149と169

5. 面積が 245 m^2 の次の図形の外周の長さを求めましょう。図形は正方形から構成されています。



84 m

6. 豆の苗を育てるため、トレーを使って苗床を作ります。豆の苗は170本あり、正方形のトレーを2つ使います。1つのトレーの1辺に7つの仕切りがあるとしたら、もう1つのトレーにはいくつの仕切りが必要ですか。

1辺に11の仕切り

7. 高さ 10 m の建物から物体を落とします。時間が $t = \sqrt{\dfrac{10y}{49}}$ の式で表されるとき、物体を落下させてから何秒後に地面に落ちますか。（ y ： 物体が落ちる高さ）

約 1.43 秒

8. フアンは 2500 m^2 ある正方形の土地に塀をめぐらそうと考えています。塀を1メートル作るのに$3.75かかるとしたら、土地全体を囲うのにいくらかかりますか。

$750

達成の目安

2.15 平方根に関する問題を解きます。

一部の設問の解答：

1. $3 < \sqrt{a} < 4$ であれば、以下が成り立ちます：

$$9 < a < 16$$

これを満たす自然数は：10、11、12、13、14、15 です。

2. a) 約分して $\sqrt{5}$ の値を置き換えると：

$$\sqrt{20} = 2\sqrt{5} = 2(2.236) = 4.472$$

b) 有理化して$\sqrt{5}$ の値を置き換えます。
c) 有理化、約分して$\sqrt{5}$ の値を置き換えます。

3. a) $(x + y)^2 = (\sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{5} - \sqrt{7})^2$
$= (2\sqrt{5})^2$
$= 20$

4. この練習問題では、1つの平方根がもう1つの平方根より20多いとの説明をする際、次の関係が成り立つことを説明します。

$$\sqrt{y} = \sqrt{x + 20}$$

x と y が求める数とすると、以下の条件が成り立ちます：

$$x + y = 318 \quad (1)$$
$$\sqrt{y} = \sqrt{x + 20} \quad (2)$$

(2) から次が導かれます：

$$y = x + 20$$

これを(1)に置き換えると以下が導かれます：

$$x + x + 20 = 318$$
$$x = 149$$
$$y = 149 + 20 = 169$$

5. 1辺を x とすると、各正方形の面積は x^2 となります。図形は5つの正方形から構成されているので：

$$5x^2 = 245$$
$$x^2 = 49$$

よって、正方形の1辺は 7 m となります（負の数にはなりません）。

図形の外周は12辺あるので、12(7) = 84 (m) となります。

6. トレーはいずれも正方形です。1つのトレーは1辺に7つの仕切りがあります。もう1つのトレーの1辺に x 個の仕切りがあると考えると、以下が成り立ちます。

$$x^2 + 7^2 = 170$$
$$x^2 = 170 - 49$$
$$x^2 = 121$$

平方根を応用して、もう1つのトレーは1辺に11の仕切りがあることが導かれました。

7. 高さを y に置き換えて物体が落下する時間を求めます。

8. 正方形の土地の1辺の長さを計算します（平方根の応用）。$\sqrt{2500} = 50$ となります。次に外周を求めます。4(50) = 200 (m) となります。1メートルあたり$3.75かかるので、全体では 200(3.75) = 750 (ドル) となります。

宿題： ワークブック55ページ

ユニット 3二次方程式

このユニットのねらい

日常生活の問題を具体化し解決するため、様々な解答方法を使いながら二次方程式を解けるようにします。

関連と展開

7学年

ユニット 5：一次方程式

- 数式の同等性
- 一次方程式
- 一次方程式の応用

8学年

ユニット 2：連立二元一次方程式

- 二元一次方程式を解く方法
- 連立二元一次方程式の応用

9学年

ユニット 3：二次方程式

- 二次方程式
- 二次方程式の応用

ユニット 4：二次関数の式 $y = ax^2 + c$

- 関数 $y = ax^2$
- 関数 $y = ax^2 + c$

高校1年次

ユニット 2：多項式の計算と複素数の計算

- 乗法公式と因数分解
- 多項式の除法
- 二次方程式と複素数

ユニット学習計画

レッスン	授業時数	授業
1. 二次方程式	1	1. 二次方程式の意味と定義
	1	2. 二次方程式の解法
	1	3. 方程式 $x^2 = c$ の解法
	1	4. 方程式 $ax^2 = c$ の解法
	1	1 学期のテスト
	1	5. 方程式 $(x + m) = n$ の解法
	1	6. 方程式 $x^2 + bx = 0$ の解法
	1	7. 方程式 $x^2 + 2ax + a^2 = 0$ の解法
	1	8. 方程式 $(x + a)(x + b)$ の解法
	1	9. 面積を使った二次方程式の解法
	1	10. 正方形を完成させる方程式の解法
	1	11. 方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解法
	1	12. 二次方程式の一般公式
	1	13. 二次方程式の一般公式の応用
	1	14. 二次方程式と解くための方法
	2	15. 復習問題

レッスン	授業時数	授業
2. 二次方程式の応用	1	1. 二次方程式の判別式
	1	2. 問題の解答における判別式の使用
	1	3. 二次方程式を用いた問題の解決
	1	4. 復習問題
	1	5. 復習問題
	1	ユニット 3 テスト

21 時間の授業 + ユニット3テスト + 1学期テスト

各レッスンの要点

レッスン1：二次方程式
二次方程式を定義し、様々な状況でその発生を見ながらその意味を見出します。異なった方法を使って二次方程式の解法を勉強します。まずは平方根、その後に因数分解で問題を解きながら平方完成を通して二次方程式の解法も勉強し、一般公式の使用をもって終了します。

レッスン2：二次方程式の応用
二次方程式の判別式、および問題の解答に対するその使用について勉強します。また二次関数についての様々な応用問題と分析も行います。

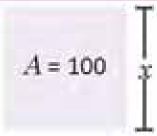
1.1 二次方程式の意味と定義

P

アントニオさんは豆を作るため正方形の土地を持っています。面積が 100 m² あるとすると、土地の各辺の長さはどのように求める事ができるでしょうか?

S

状況を絵で説明すると：



x を使って一辺の長さを記号化します。

土地の面積は 100 m² なので、方程式を立てる事ができます。

$$x^2 = 100$$

土地の各辺の長さを求めるには、この方程式を解かなければなりません。

正方形の面積は：
$A = L^2$
L は正方形の一辺の長さとします。

C

設問で立てた方程式は 100 を移項すると $x^2 = 100$ となり、$x^2 - 100 = 0$ と表す事もできます。この方程式では未知数が二乗されています。このようなタイプの方程式は**二次方程式**と呼ばれます。

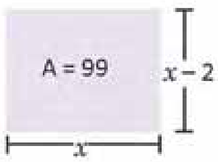
一般的に二次方程式は、a、b、c、および $a \neq 0$ である実数を用いて $ax^2 + bx + c = 0$ という形として定義されます。

方程式において移項するという事は、方程式の 1つの辺から他の辺へと移す事を意味します。

例：$2x^2 - 3 = 0$、$9x^2 - 3 = 0$、$(x + 5)^2 - 16 = 0$、$x^2 + 4x + 1 = 0$、$x^2 + 4x = 0$ など。

E

ミゲルさんは縦が横よりも 2m 長い長方形の形をした土地を持っていて、その面積は 99 m² です。縦の長さを x とし、問題が意味するところの方程式を求めなさい。

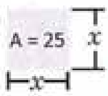


長方形の面積の求め方（A = 底辺 × 高さ）を使うと　$x(x - 2) = 99$

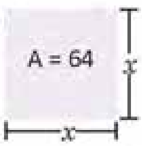
積を求めると：　$x^2 - 2x = 99$

99 を移項すると：　$x^2 - 2x - 99 = 0$

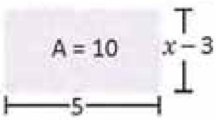
1. それぞれの図で分からない長さを求める方程式を答えなさい。

a)


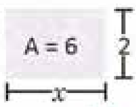
$x^2 - 25 = 0$

b)


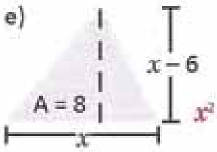
$x^2 - 64 = 0$

c)


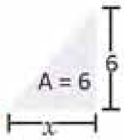
$5(x - 3) = 10$

d)


$2x - 6 = 0$

e)


$x^2 - 6x = 16$

f)


$3x - 6 = 0$

同じ問題は三角形でも考える事ができます。三角形の面積の求め方を復習しなければなりません。
$A = \frac{底辺 \times 高さ}{2}$

2. 前問で作られた方程式のうちどれが二次方程式かを答えなさい。　a), b), e)
3. 2つの連続した整数でこれらを掛け合わせると 42 になる方程式を求めなさい。

x は小さい方の数。$x^2 + x - 42 = 0$

達成の目安

1.1 二次方程式を作り、これを解く必要性を特定しましょう。

学習の流れ

方程式の学習は7学年に始まり、等式の様々な性質を分析し、等式を満たす数値を求めるために使われています。その後8学年では、身近な問題を通して二元一次方程式の意味を見出し、連立方程式を解くための様々な方法を学習しています。

前のユニットでは、平方根について、その意味と定義を分析し、正と負の平方根を明らかにし、その計算を行いながら学習しました。このユニットでは、生徒がこの知識を習得する事、とりわけ二乗した時にその結果として同じ数字となるような数字が2つ存在するという事が重要です。

ねらい

ⓅⓈ 代数的にこの問題を解釈すると、二次方程式の作成という事になります。この設問を解くという事ではなく、方程式の式を導き出すという事になります。

Ⓒ $ax2 + bx + c = 0$ の形の方程式で二次方程式を正式に定めましょう。前回のように実数を定め、a、b、c が実数で $a \neq 0$ であるとしなければなりません。そうしなければ方程式は二次の方程式とならなくなります。

一部の設問の解答：

3. x を整数とし、その連続数を $x + 1$ とします。
2つの数を掛け合わせると：

$$x(x + 1) = 42$$
$$x^2 + x - 42 = 0$$

これが特定された二次方程式となります。

備考：次のような形で方程式を表すのは正しいと考えます：

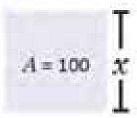
$$x^2 = a \text{ または } x^2 - a = 0$$

日付：

U3 1.1

Ⓟ アントニオさんは面積 100 m² の正方形の形をした土地を持っています。それぞれの辺の長さはどのようにして求める事ができるでしょうか?

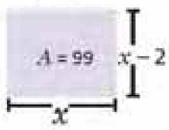
Ⓢ 状況の図解：



土地の面積は100 m²。
作成した方程式は $x^2 = 100$ となります。

この方程式を使って正方形の一辺の長さを求める事ができます。

Ⓔ x が土地の縦を示すとします。絵は状況を説明しています。



長方形の面積を求める方程式は：

$$x(x - 2) = 99$$
$$x^2 - 2x = 99$$
$$x^2 - 2x - 99 = 0$$

Ⓡ
a) $x^2 = 25$
b) $x^2 = 64$
c) $5(x - 3) = 10$
d) $2x = 6$
e) $\frac{x(x-6)}{2} = 8$
f) $3x = 6$

宿題： ワークブック60ページ

1.2 二次方程式の解法

P

−4、−3、3、4 の数字のうち、どれが次の方程式の解になるのか答えなさい。

a) $3x = 12$　　b) $x^2 - x - 12 = 0$

S

−4 を使い両方の方程式に代入すると、

a) $3(-4) = -12$　　b) $(-4)^2 - (-4) - 12 = 16 + 4 - 12 = 8$

−4 はいずれの方程式でも解とはなりません。

−3 を使い両方の方程式に代入すると、

a) $3(-3) = -9$　　b) $(-3)^2 - (-3) - 12 = 9 + 3 - 12 = 0$

−3 は方程式 a) の解ではありませんが、方程式 b) の解となります。

3 を使い両方の方程式に代入すると、

a) $3(3) = 9$　　b) $(3)^2 - (3) - 12 = 9 - 3 - 12 = -6$

3はいずれの方程式でも解とはなりません。

4を使い両方の方程式に代入すると、

a) $3(4) = 12$　　b) $(4)^2 - (4) - 12 = 16 - 4 - 12 = 0$

4はどちらの方程式でも解となります。

よって、方程式 a) には解が1つ (4) あり、方程式 b) には解が 2つ (4 と -3) あります。

C

二次方程式を満たす未知数の値は**解**と呼ばれます。

二次方程式を解くプロセスはその全ての解を求める事になります。二次方程式では解が 2つまである可能性があります。

一次方程式では解は1つだけです。

1. かっこ内の数字のうち、どれが次の方程式の解になるのか答えなさい。

a) $x^2 - 9 = 0$　(−3, −1, 1, 3)　−3, 3

b) $2x - 6 = 0$　(−3, −1, 1, 3)　3

c) $x^2 - 2x - 8 = 0$　(−4, −2, 2, 4)　−2, 4

d) $2x + 8 = 0$　(−4, −2, 2, 4)　−4

e) $x^2 + 4x + 3 = 0$　(−3, −1, 1, 3)　−3, −1

f) $4x + 12 = 0$　(−3, −1, 1, 3)　−3

g) $x^2 - 8x + 16 = 0$　(−4, −2, 2, 4)　4

h) $x - 4 = 0$　(−3, −1, 1, 3)　どの値も解にはならない。

2. 前問の方程式のうちどれが二次方程式で、どれが一次方程式かを答えなさい。答えを証明しなさい。

a)、c)、e)、g) が二次方程式。
b)、d)、f)、h) が一次方程式。

達成の目安

1.2 二次方程式に解がいくつあるか求めましょう。

学習の流れ

前回の授業では、代数的に解釈したいくつかの状況について式を立てる事を通して二次方程式の意味合いを見出しました。今回は、二次方程式が解を2つまで持つ事ができるという事を学習します。

ねらい

ⓅⓈ 変数に数字を代入し等式を満たすかを確認しながら、その数字が方程式の解であるかを確認しましょう。

Ⓒ 二次方程式の解を求め、二次方程式が解をゼロ個、1個、または2個持つ事ができる事を特定し、一次方程式は解を多くても1つだけという事を認識しましょう。

日付：

U3 1.2

Ⓟ −4、−3、3、4 の数字のうち、どれが次の方程式の解になるのか答えなさい。

a) $3x = 12$
b) $x^2 - x - 12 = 0$

Ⓢ -4 の場合、

a) $3(-4) = -12$　　b) $(-4)^2 - (-4) - 12 = 8$

-4 はいずれの方程式でも解とはなりません。

-3 の場合、

a) $3(-3) = -9$　　b) $(-3)^2 - (-3) - 12 = 0$

-3 は b) の解となります。

3 の場合、

a) $3(3) = 9$　　b) $(3)^2 - (3) - 12 = -6$

3 はいずれの方程式でも解とはなりません。

4 の場合、

a) $3(4) = 12$　　b) $(4)^2 - (4) - 12 = 0$

4 はどちらの方程式でも解となります。

Ⓡ a) −3 y 3
b) 3
c) −2 y 4
d) −4
e) −1 y e)
f) −3
g) 4
h) 4

宿題： ワークブック61ページ

レッスン 1

1.3 方程式 $x^2 = c$ の解法

P

1回目の授業のアントニオさんの問題で立てた二次方程式を解きなさい。

$$x^2 = 100$$

S

この方程式を解くには、数字の平方根の概念を使います。$x^2 = 100$ は x を二乗したら 100 となるという事を意味します。

よって、$x = \pm\sqrt{100}$となり、

根号を使わずに表すと、$x = \pm 10$ となります。

数字を二乗すると、その負の数を二乗した時と同じ計算結果が出ます。

$3^2 = (-3)^2 = 9$

アントニオさんの問題は土地の各辺の長さについてでしたので、負の解を考慮する事はできません。よって問題の解は：**10 m**。

C

$x^2 = c$ の形の二次方程式を解くには次のステップに従います。

例： $x^2 = \frac{1}{4}$

1. c の平方根を求めながら方程式を解きます。

$$x = \pm\sqrt{c}$$

1. $x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$

2. なるべく根号を使わずに数字を表しましょう。

2. $x = \pm\frac{1}{2}$

E

二次方程式 $x^2 - 20 = 0$ を解きなさい。

方程式 $x^2 = 20$ の 20 を移項します。

方程式 $x^2 = 81$ を解きます。　1. $x = \pm\sqrt{20}$　2. $x = \pm 2\sqrt{5}$

1. 次の二次方程式を解きなさい。

a) $x^2 = 16$　$x = \pm 4$

b) $x^2 = \frac{1}{9}$　$x = \pm\frac{1}{3}$

c) $x^2 = \frac{4}{9}$　$x = \pm\frac{2}{3}$

d) $x^2 - 1 = 0$　$x = \pm 1$

e) $x^2 - 9 = 0$　$x = \pm 3$

f) $x^2 - \frac{1}{4} = 0$　$x = \pm\frac{1}{2}$

g) $\frac{16}{25} - x^2 = 0$　$x = \pm\frac{4}{5}$

h) $\frac{4}{36} - x^2 = 0$　$x = \pm\frac{2}{6}$

2. フリアさんの兄は 4歳年上で、妹は 4歳年下です。兄と妹の年齢を掛け合わせると 20になる場合、フリアさんの年齢はいくつでしょうか?

フリアさんの年齢は 6歳。

達成の目安

1.3 $x^2 = c$ の形の方程式を解きます。

学習の流れ

1回目の授業では問題から方程式を立て、二次方程式として定義しました。今回の授業では、立てた方程式を満たす値を求める目的で、同じ問題の情報を使います。

ねらい

ⓅⓈ 方程式 $x^2 = 100$ の解を求めましょう。平方根を使いながら求めますが、問題の解は二乗すると計算結果が 100 になる数字となります。

Ⓒ $x^2 = c$ の形の二次方程式を解くためにその過程を 1ステップずつ確かめましょう。この方程式を扱う際は、$c > 0$ となる事と常に解が正と負の2つ存在する事を述べるのが重要になります。この形の二次方程式は負の解が1つあるという事を常に強調しなければなりません。この場合は、長さについての話なので負の解を排除し正の解だけを考慮します。次の式は誤りである事を考慮しましょう：

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$$

平方根のユニットで見た通り、$\sqrt{x^2}$ は必ずしも x に等しいわけではありません。

一部の設問の解答：

x：フリアさんの年齢

$$(x+4)(x-4) = 20$$
$$x^2 - 16 = 20$$
$$x^2 = 36$$
$$x = \pm 6$$

$x > 0$ なので、フリアさんの年齢は 6歳となります。

日付： **U3 1.3**

Ⓟ 方程式を解きなさい。

$x^2 = 100$

Ⓢ 平方根の概念を使います。

$x^2 = 100$
$x = \pm\sqrt{100}$
$x = \pm 10$

二乗すると 100 になる数字は 10 と -10 です。
よってこれらが方程式の解となります。

Ⓔ 方程式を解きなさい。

$x^2 - 20 = 0$
$x^2 = 20$
$x = \pm\sqrt{20}$
$x = \pm 2\sqrt{5}$

Ⓡ 1. a) $x = \pm 4$
b) $x = \pm\frac{1}{3}$
c) $x = \pm\frac{2}{3}$
d) $x = \pm 1$
e) $x = \pm 3$

宿題：ワークブック 62ページ

1.4 方程式 $ax^2 = c$ の解法

P

マルタさんとマリオさんは「数字当てゲーム」をしています。マルタさんはマリオさんに、3倍すると 12になる数について考えている、と言っています。マリオさんはマルタさんが考えている数字をどうしたら分かるでしょうか?

S

マルタさんが考えている数字を x で示します。
従ってマルタさんが考えている数字の3倍は「$3x$」で示されます。
それから3倍にした数字は 12 という事を示すために、次の方程式を作ります：
$x(3x) = 12$

それぞれの項に掛け算を行います：$3x^2 = 12$.

x^2 を整理すると、$x^2 = \frac{12}{3} \Rightarrow x^2 = 4$ となります。

方程式を解くと、$x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$ となります。

よって、マルタさんが考えている数字は、**+2 または −2** となるでしょう。

C

$ax^2 = c$ の形で $c \neq 0$ である二次方程式を解くには、次のステップに従います：

1. x^2 の項を整理します。
$$x^2 = \frac{c}{a}$$
2. $\frac{c}{a}$ の平方根を求めて方程式を解きます。
$$x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$$
3. 根号を使わずに求めるか、可能な場合は最小の式に簡略化します。

a の符号が c の符号と異なる場合は $\frac{c}{a}$ の符号は負になる事に注目しましょう。この時方程式は、負の数の平方根が定められていないので実数の解にはなりません。

E

二次方程式を解きなさい。 $3x^2 - 2 = 0$

方程式の -2 を移項します： $3x^2 = 2$

方程式 $3x^2 = 2$ を解きます。 1. $x^2 = \frac{2}{3}$ 2. $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

分母に累乗根がある場合は有理化しなければなりません。

1. 次の二次方程式を解きなさい。

a) $2x^2 = 18$
$x = \pm 3$

b) $-4x^2 = -1$
$x = \pm\frac{1}{2}$

c) $x^2 = 7$
$x = \pm\sqrt{7}$

d) $-4x^2 + 4 = 0$
$x = \pm 1$

e) $10 - 2x^2 = 0$
$x = \pm\sqrt{5}$

f) $-x^2 + 2 = 0$
$x = \pm\sqrt{2}$

$x^2 = c$ の形の方程式は、$ax^2 = c$ の形の方程式で $a = 1$ の時における特別なケースです。

2. バスケットボールのコートの縦が横幅の 2倍で、面積が 450 m² である場合のコートの長さをそれぞれ求めなさい。
バスケットボールのコートの長さは 15 m と 30 m。

ユニット3

61

達成の目安

1.4 $ax^2 = c$ の形の方程式を解きます。

学習の流れ

今まで、多くても2ステップまでの二次方程式を解いてきましたが、そのうちの1つはまず変数を整理して平方根を抽出するものだったと思います。今回の授業は3ステップまでで解く事ができる二次方程式のタイプを学習します。変数に掛け合わせている数字で割るというステップが加わります。

ねらい

ⓅⓈ 冒頭の設問から $ax^2 = c$ というタイプの方程式を立てなければなりません。この方程式は 7学年で見た等式の性質と、前のユニットで見た累乗根の性質を使って解きます。

Ⓒ $ax2 = c$ というタイプの二次方程式を解くために従うべきステップを確立します。

Ⓔ 冒頭の設問との違いは方程式の形にあります。このケースでは定数項を移項して、変数に伴われている係数で割り算を行います。

一部の設問の解答：

1. e) $10 - 2x^2 = 0$

$$-2x^2 = -10$$
$$x^2 = 5$$
$$x = \pm\sqrt{5}$$

2. バスケットボールのコートの横幅を a とします。

$$a(2a) = 450$$
$$2a^2 = 450$$
$$a^2 = 225$$
$$a = \sqrt{225}$$
$$a = \pm 15$$

長さについてなので、正の解を選びます。よって、$a = 15$ となります。

バスケットボールのコートの長さは 15 m と 30 m。

日付：

U3 1.4

Ⓟ 3倍すると 12 になる数字です。どの数字でしょうか?

Ⓢ この数を x とします。

$$x(3x) = 12$$
$$3x^2 = 12$$
$$x^2 = \frac{12}{3}$$ 3で割ります。
$$x = \pm\sqrt{4}$$
$$x = \pm 2$$

よってマルタさんは +2 または –2 という2つの数字を考えていたと言える。

Ⓔ 方程式を解きなさい。$3x^2 - 2 = 0$

$3x^2 = 2$ 3で割ります。

$$x^2 = \frac{2}{3}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Ⓡ 1. a) -3 と 3

b) $\frac{1}{2}$ と $-\frac{1}{2}$

c) $\sqrt{7}$ と $-\sqrt{7}$

d) -1 と 1

e) $\sqrt{5}$ と $-\sqrt{5}$

宿題： ワークブック63ページ

1.5 $(x+m)^2 = n$ の形の方程式の解

P

二次方程式 $(x+1)^2 = 25$を解きなさい。

S

この方程式を解くために、まず括弧内の $x+1$ を $w = x+1$としてから平方根のアイデアを使うことを示します。

$w^2 = 25$ 　　$w = x+1$と置き換えます、

$w = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

$x + 1 = \pm 5$ 　　あらたに $x+1 = w$ と置き換えます。

方程式の一部を一つの違う文字で置き換える作戦は**変数の置換**として知られています。

つまり $x+1 = 5$ と $x+1 = -5$ です。

x をクリアすると $x = 5-1 = 4$ と $x = -5-1 = -6$

最後に方程式 $(x+1)^2 = 25$ の解は **$x = 4$ と $x = -6$** です。

C

式 $(x+m)^2 = n$ の二次方程式を解くには次のステップに従います。

1. 変数 $x+m$ を u で置き換える。
   $w^2 = n$
2. 式 $x^2 = n$ の方程式を解きます。
   $w = \pm\sqrt{n}$
3. 最初の変数を置き換えることになります。
   $x + m = \pm\sqrt{n}$
4. 初期変数を求めることになります。
   $x = -m \pm\sqrt{n}$

例えば

$(x-3)^2 = 7$ で $w = x-3$ とすると

1. $w^2 = 7$
2. $w = \pm\sqrt{7}$
3. $x - 3 = \pm\sqrt{7}$
4. $x = 3 \pm\sqrt{7}$

注目

もし $n = 0$であれば、方程式のただ一つ解は $x = -m$ となります。

もし n が負であれば方程式は解が無いことになります。

E

二次方程式 $(x-5)^2 - 12 = 0$ を解きなさい。

方程式 $(x-5)^2 = 12$で -12 を置き換えなさい。

方程式 $(x-5)^2 = 12$ を解きます。

1. $w^2 = 12$ 　2. $w = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$ 　3. $x - 5 = \pm 2\sqrt{3}$ 　4. $x = 5 \pm 2\sqrt{3}$

1. 次の二次方程式を解きなさい。

a) $(x+4)^2 = 4$
$x = -6, -2$

b) $(x-2)^2 = 2$
$x = 2 \pm \sqrt{2}$

c) $(-x-3)^2 = 8$
$x = 3 \pm 2\sqrt{2}$

d) $(x+2)^2 = 0$
$x = -2$

e) $(x-4)^2 - 16 = 0$
$x = 0, 8$

f) $(x+3)^2 - 3 = 0$
$x = -3 \pm \sqrt{3}$

g) $(-x+6)^2 - 12 = 0$
$x = 6 \pm 2\sqrt{3}$

h) $(1-x)^2 = 0$
$x = 1$

アントニオさんの土地の側辺はそれぞれ10mでこの課の第3授業で定めたことを復習して下さい。

2. 豆畑の面積を144m^{2}にしたければ、アントニオさんの正方形の土地の一辺をそれぞれどれだけ増やす必要がありますか。

土地の側辺は 2 m 増やす必要があります。

達成の目安

1.5 式 $(x+m)^2=n$ の方程式を解きなさい。

学習の流れ

前の授業では式 $ax^2=c$ の方程式を解きましたが、$a=1$であった場合の特別なケースを含んでいて、この場合指数2は変数に相当していましたが、この授業では2が $x+m$ の指数になっています。

ねらい

ⓅⓈ 授業1.3で習ったケースの式に持ってゆくために変数の置換えを使います。次に、生徒は学習した手順で問題を解く必要がありますが、大切なのは一次方程式に置き換えた変数を元に戻して解を求めることです。

式 $(x+m)^2=n$ の方程式を解くために正式に次のステップを設けます。もし $n=0$ であれば答えは単に $x=-m$ ですが、もし $n<0$ であれば方程式は実数で定義される事になり解を持たないことになることをやってみることが重要です。

一部の設問の解答：

2. 問題の情報を使って方程式を考えます：

$(x+10)^2=144$　　$w=x+10$として

$w^2=144$

$w=\pm\sqrt{144}$

$w=\pm 12$　　$x+10=w$と置き換えて $x+10=\pm 12$

$x+10=\pm 12$

$x=-10\pm 12$

よって $x=-22$ と $x=2$.
長さに関する事なので、$x>0$ となります。

従って土地の側面は 2 m 増やすべきです。

日付：　　　　U3 1.5

Ⓟ 二次方程式を解きなさい：
$(x+1)^2=25$

Ⓢ $(x+1)^2=25$

$w^2=25$　　$w=x+1$ として

$w=\pm\sqrt{25}$

$w=\pm 5$

$x+1=\pm 5$　　$x+1=w$ と置き換えます

$x=-1\pm 5$

従って、解は　$x=4$ と $x=-6$ です。

Ⓔ $(x-5)^2-12=0$

$(x-5)^2=12$　　12を移項します

$w^2=12$　　$w=x-5$ とします

$w=\pm\sqrt{12}$

$w=\pm 2\sqrt{3}$

$x-5=\pm 2\sqrt{3}$

$x=5\pm 2\sqrt{3}$

Ⓡ 1. a) $x=-6, -2$
b) $x=2\pm\sqrt{2}$
c) $x=3\pm 2\sqrt{2}$

宿題： ワークブック64ページ

1.6 $x^2 + bx = 0$ 形の方程式の解

P

二次方程式 $x^2 + 5x = 0$を解きなさい。

S

次の法則はいずれの実数 A, B にも当てはまります。

もし $A \times B = 0$ であれば $A = 0$ または $B = 0$ です。

さらに式 $x^2 + 5x$ は共通因子 $x^2 + 5x = 0$ を取り出して因数分解できます。

そうして方程式： $x(x + 5) = 0$ が得られます。

$x = 0$ または $x + 5 = 0$ で満たされます。

線型方程式を解きます $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$

二次方程式 $x^2 + 5x = 0$ の解は： $x = 0$ または $x = -5$です。

C

式 $x^2 + bx = 0$ 二次方程式を解くには次のステップに従います：

1. 共通因子を使って因数分解します：
$$x(x + b) = 0$$

2. はじめに述べた法則を適用して解くべき線型方程式を定めます。：
$$x = 0 \text{ または } x + b = 0$$

3. 線型方程式 $x + b = 0$ を解いて二次方程式の解を定めます。
$$x = 0 \text{ または } x + b = 0 \Rightarrow x = -b$$

解 $x = 0$ はいつも式 $x^2 + bx = 0$ の方程式の解であることに注目しましょう。

E

$ax^2 + bx = 0$ の方程式はどのように解きますか。例えば $3x^2 + 2x = 0$.

$x(a + bx) = 0$ を因数分解してから解をみつけます。

1. $x(3x + 2) = 0$
2. $x = 0$ または $3x + 2 = 0$
3. $x = 0$ または $x = -\dfrac{2}{3}$

$x = 0$ の解は式 $ax^2 + bx = 0$ の方程式の解であることに注目しましょう。

次の二次方程式を解きなさい。

a) $x^2 - 5x = 0$
$x = 0$ または $x = 5$

b) $x^2 + x = 0$
$x = 0$ または $x = -1$

c) $3x^2 + 5x = 0$
$x = 0$ または $x = -\dfrac{5}{3}$

d) $4x^2 - x = 0$
$x = 0$ または $x = \dfrac{1}{4}$

e) $-x^2 + x = 0$
$x = 0$ または $x = 1$

f) $-x^2 - 2x = 0$
$x = 0$ または $x = -2$

g) $2x^2 + 8x = 0$
$x = 0$ または $x = -4$

h) $-3x^2 + 6x = 0$
$x = 0$ または $x = 2$

達成の目安

1.6 $x^2 + bx = 0$ の形の方程式を解きます。

学習の流れ

前は変数が2の指数として表され $ax^2 = c$ の形の方程式だけを解いていましたが、この授業では1の指数がついた x の項以上を持っている方程式を解いて、このタイプの方程式は因数分解を使って解く事になります。

ねらい

ⓅⓈ もし A × B = 0ならば A = 0 または B = 0 であることがあって、二次方程式を解くためにの解は因数分解を使って、この特徴を満たす値でしょう。

このタイプの方程式を解くためにユニット1の授業3.2で習った共通因子を使うことを学ぶことが重要です。冒頭の設問に関する変形は x の係数に由来していて、1とは異なりゼロとは違い、従って式を因数分解すると $x(ax + b) = 0$ となり、この場合その結果の線型方程式を解くと係数 a で割る追加プロセスに関係してくるものです。

一部の設問の解答：

e項)

$-x^2 + x = 0$
$x(-x + 1) = 0$
$x = 0$ または $-x + 1 = 0$
$x = 1$

冒頭の設問には集合としての解答の観点から $x = 0$ かつ $x = -5$ と書くべきで、両者の値はともに解答として満たされています。$x = 0$ または $x = -5$ と書くのは結果に記載される実数の属性によるものです。可能な限り生徒にこれを説明します。

日付： **U3 1.6**

Ⓟ 二次方程式を解きなさい：
$x^2 + 5x = 0$

Ⓢ 二つの実数にはいずれのAとBも、もし A × B = 0 であればA = 0 または B = 0です。

$x^2 + 5x = 0$
共通因子で括ると
$x = 0$ または $x + 5 = 0$ を満たしている
$x = 0$ または $x = -5$

従って回答は次の通りです：
$x = 0$ または $x = -5$

Ⓔ 因数分解しましょう。$3x^2 + 2x = 0$
$3x^2 + 2x = 0$
$x(3x + 2) = 0$ 　共通因子 x
$x = 0$ または $3x = -2$
$x = 0$ または $x = -\frac{2}{3}$

Ⓡ a) $x = 0$ または $x = 5$
b) $x = 0$ または $x = -1$
c) $x = 0$ または $x = -\frac{5}{3}$
d) $x = 0$ または $x = \frac{1}{4}$

宿題：ワークブックの65ページ

レッスン 1

1.7 $x^2 + 2ax + a^2 = 0$ の形の方程式の解

P

二次方程式 $x^2 + 4x + 4 = 0$ を解きなさい。

S

完全平方三項式 $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 = 0$ を因数分解します

完全二次三項式は因数分解すると：
$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$

したがって：

$$x + 2 = 0$$

$$\mathbf{x = -2}$$

C

$x^2 + 2ax + a^2 = 0$ の形の二次方程式を解くには次のステップに従います。

1. 完全平方三項式を使って式を因数分解します。
   $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2 = 0$

2. 授業6の始めに述べた法則を適用して $x + a = 0$ を解く線型方程式を定めます、
   $x + a = 0.$

3. 二次方程式の解を定めます。
   $\mathbf{x = -a}$

E

次の二次方程式 $4x^2 + 4x + 1 = 0$を解きなさい。

1. $4x^2 + 4x + 1 = w^2 + 2w + 1 = 0$ 　　$w = 2x$ として

2. $(w + 1)^2 = (2x + 1)^2 = 0$ 　　$2x = w$ とあらためて置き換えて

3. $2x + 1 = 0.$

   $x = -\frac{1}{2}$

次の二次方程式を解きなさい。

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$
$x = -3$

b) $x^2 - 8x + 16 = 0$
$x = 4$

c) $4x^2 - 12x + 9 = 0$
$x = \frac{3}{2}$

d) $9y^2 + 6y + 1 = 0$
$y = -\frac{1}{3}$

e) $y^2 - 10y + 25 = 0$
$y = 5$

f) $y^2 + 14y + 49 = 0$
$y = -7$

64

達成の目安

1.7 完全平方三項式を使って $x^2 + 2ax + a^2 = 0$ の形の二次方程式を解きます。

学習の流れ

ユニット1では $x^2 + 2ax + a^2$ の形の方程式を学習しましたが、この授業では $x^2 + 2ax + a^2 = 0$ の形の方程式を解くのにこの知識を使います。

ねらい

ⓅⓈ 三項式 $x^2 + 4x + 4 = 0$ は $(x + 2)^2 = 0$ として因数分解され、この関係を満たす唯一の数は -2 で、従ってこのタイプの方程式は一つの解しかありません。

Ⓔ この場合、完全平方三項式が示すことがより明らかであり冒頭の設問を同じような形で解いて、さらにこの方程式の解は分数ですと、十分な変数の置換えをするべきです。

一部の設問の解答：

b) $x^2 - 8x + 16 = 0$
$(x - 4)^2 = 0$
$x - 4 = 0$
$x = 4$

d) $9y^2 + 6y + 1 = 0$
$w^2 + 2w + 1 = 0$　$w = 3y$ とすると
$(w + 1)^2 = 0$

$w + 1 = 0$　置換えれば $3y = w$
$3y + 1 = 0$
$y = -\frac{1}{3}$

日付： **U3 1.7**

Ⓟ 方程式を解きなさい：
$x^2 + 4x + 4 = 0$

Ⓢ
$x^2 + 4x + 4 = 0$
$(x + 2)^2 = 0$　完全平方三項式の因数分解

授業 1.5 のように解答しましょう
$w^2 = 0$　$w = x + 2$ として
$x + 2 = 0$　従って、$x = -2$

Ⓔ 方程式を解きなさい：$4x^2 + 4x + 1 = 0$
$w = 2x$ とすると
$4x^2 + 4x + 1 = w^2 + 2w + 1 = 0$
$(w + 1)^2 = 0$
置換えると $2x = w$
$(2x + 1)^2 = 0$
$2x + 1 = 0$
$x = -\frac{1}{2}$

Ⓡ a) $x = -3$
b) $x = 4$
c) $x = \frac{3}{2}$
d) $y = -\frac{1}{3}$

宿題： 練習帳の66ページ

レッスン 1

1.8 $(x+a)(x+b)=0$ の形の方程式の解

P

$(x-2)(x-3)=0$ であれば次を満たすべきです、

S

二次方程式 $\underbrace{(x-2)}_{A}\times\underbrace{(x-3)}_{B}=0$ を解きなさい。

$x-2=0$ または、$x-3=0$

線型方程式を解くと：

$x=2$ または $x=3$

A, Bがどのような実数であっても、$A\times B=0$ のとき $A=0$ または $B=0$ が成り立ちます

C

$(x-a)(x-b)=0$ の形の二次方程式を解くには次のステップに従います。

例えば　$(x+1)(x-4)=0$

1. 法則を適用して解くべき線型方程式を定めます。
$x-a=0$ または、$x-b=0$

1. $x+1=0$ または $x-4=0$

2. 線型方程式を解いて二次方程式の解法を決めます。
$x=a$ または $x=b$

2. $x=-1$ または、$x=4$

E

二次方程式 $x^2+5x+6=0$ を解きなさい。

この場合、乗じて6加えて5となる2つの数字である3と2を該当する乗法公式で求め、まず式を因数分解します。

そこから：　$x^2+5x+6=0 \Rightarrow (x+3)(x+2)=0$

1. $x+3=0$ または $x+2=0$
2. $x=-3$ または $x=-2$

式の形：
$x^2+(a+b)x+ab=0$
次の方法で因数分解します：
$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$.

1. 次の二次方程式を解きなさい。

a) $(x-2)(x-1)=0$
$x=2$ または $x=1$

b) $(x+5)(x-3)=0$
$x=-5$ または $x=3$

c) $(x-7)(x+2)=0$
$x=7$ または $x=-2$

d) $(x+4)(x+3)=0$
$x=-4$ または $x=-3$

e) $x^2-7x+6=0$
$x=6$ または $x=1$

f) $x^2-2x-8=0$
$x=4$ または $x=-2$

g) $x^2+x-6=0$
$x=-3$ または $x=2$

h) $x^2-4x+3=0$
$x=1$ または $x=3$

2. 二つの連続する数字で二乗した後に加算すると25となる二つの数をみつけましょう。
–4 と–3、さらに3 と 4も。

ユニット3

達成の目安

1.8 $(x+a)(x+b)=0$ の形の二次方程式の解法

学習の流れ

前の授業では完全平方三項式を因数分解して解く二次方程式を学習しましたが、この授業では完全平方式でない三項式を因数分解して二次方程式を解きます。

ねらい

Ⓟⓢ 二つの数字を相互に乗じた結果がゼロになることを使って、もしそのいくつかがゼロであれば（授業1.6で習った）この関係を満たす x の値が見つかるでしょう。

Ⓔ ユニット1の授業3.3でやった形の方程式の三項式を因数分解することと同じような形で冒頭の設問を解きます。

一部の設問の解答：

1. g) $x^2+x-6=0$
$(x+3)(x-2)=0$

$x+3=0$ または $x-2=0$
$x=-3$ または、$x=2$

2. x が整数とするとその次に続く整数は $x+1$ です。

$$x^2+(x+1)^2=25$$
$$x^2+x^2+2x+1=25$$
$$2x^2+2x-24=0$$
$$x^2+x-12=0$$
$$(x+4)(x-3)=0$$

この方程式の解は次の通り：
$x+4=0$ または $x-3=0$
$x=-4$ または $x=3$

対となっている数で満たすものは：
-4と-3、さらに 3 と 4です。次の通り確認されます：

$(-4)^2+(-3)^2=25$
$(3)^2+(4)^2=25$

授業1.6のように集合としての解答の観点から冒頭の設問では $x=2$ と $x=3$ と書くべきで、両者の値はともに解答として満たされています。ⓢに記された実数の属性から $x=2$ または $x=3$ と書かれます。可能な限りこの点を生徒に説明します。

日付： U3 1.8

Ⓟ 二次方程式 $(x-2)(x-3)=0$ を解きなさい。

Ⓢ もし A × B = 0 で、従って A = 0 または B = 0 であることも使って。

もし $(x-2)(x-3)=0$ であれば
従って、$x-2=0$ または $x-3=0$

従って $x=2$ または $x=3$

Ⓔ $x^2+5x+6=0$
$x^2+5x+6=(x+3)(x+2)=0$

$x+3=0$ または $x+2=0$
$x=-3$ または $x=-2$

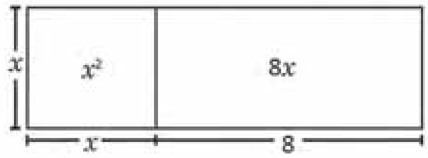
Ⓡ 1. a) $x=2$ または $x=1$
b) $x=-5$ または $x=3$
c) $x=7$ または $x=-2$
d) $x=-4$ または $x=-3$

宿題： ワークブック 67 ページ

1.9 面積を使った二次方程式の解法

P

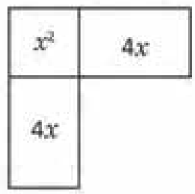
図の面積は 33 cm²です。幾何学的な釈明を使って x 側の長さを見つけなさい。



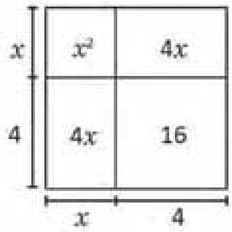
都合に合うように各部分を短くしたり適合させるように考えられます。

S

1. 長方形を二つの同じ部分に分割して、その一つの部分を90°回転させます。



2. 辺4 の正方形を完成させます。



3. 最初の図の面積は 33 cm²です。もし辺 4 の正方形を加えると前の図の面積は 49 cm²です。

従って、**(7 cm)² = 49 cm²** なので、辺は3 cmの値となるべきです。

代数的解法

$x^2 + 8x = 33$

1. $x^2 + 4x + 4x = 33$

2. $x^2 + 2(4x) + 4^2 = 33 + 4^2$

3. $(x + 4)^2 = 49$

解答： $x = 3$

C

二次方程式の正の解を見つけるのに幾何学的論証を使うことができます。

二次方程式は二つまでの解がありますが、ただある図の辺に関する事なので正のものだけを考慮します。

次の方程式の正の解を求めるのに幾何学的論証を使いましょう：

a) $x^2 + 2x = 8$
$x = 2$

b) $x^2 + 10x = 56$
$x = 4$

c) $x^2 + 6x = 27$
$x = 3$

達成の目安

1.9 $x^2 + bx + c = 0$ タイプの方程式の正の解をみつけるために幾何学的論証を使います。

学習の流れ

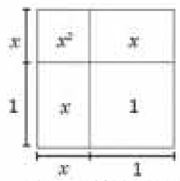
前では因数分解と平方根の概念を使って二次方程式を解きました。
この授業では面積のモデルを使って二次方程式の正の解をどのように見つけるかを検討します。この授業は次のようなテーマへの入門となります。正方形を完成させながら方程式を解くことです。

ねらい

Ⓟ 図の面積を定める方程式は $x^2 + 8x = 33\ cm^2$ です。これらの条件と部品を修正することを通じ正方形の辺 x が見つけられます。

Ⓢ 面積 $8x$ の長方形を二つに等分してできる部分の一辺の長さが x となりさらに正方形の辺に接することができるように分割します。各部分を合わせせると正方形の形をした空欄が生じてこれを完成させると図全体は一辺が $x + 4$ の正方形でその面積が $33\ cm^2 + 16\ cm^2 = 49\ cm^2$ で $x = 3$ をみたすものです。

一部の設問の解答：

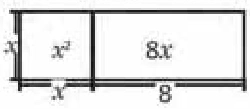


$(x + 1)^2 = 8 + 1$
$(x + 1)^2 = 9$
$x + 1 = 3$
$x = 2$

注意： この授業では面積に関する事なので正の値だけを解答とします。
辺 x が未知の値を示す事と部分の寸法が操作できる恣意的値であってこの方法と x の解法と混同しないようにと強調するようにします。さらに冒頭の設問の図の大きさと解答は同じであるべきでしたが、ページの紙面の余白が限られているのに合わせました。

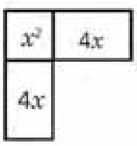
日付： U3 1.9

Ⓟ 辺 x の寸法をみつけましょう

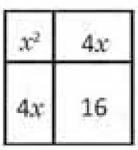


面積：33 cm²

Ⓢ 1. 長方形の部分を半分に分割し、右図のように置きます。



2. 辺4の正方形を完成させます。



3. 図の面積は：$33\ cm^2 + 16\ cm^2 = 49\ cm^2$です。
$33\ cm^2 + 16\ cm^2 = 49\ cm^2$.
従って、$(x + 4)^2 = 49$
$x + 4 = 7$
$x = 3$　　$x = 3$ cm

Ⓡ a) $x = 2$
b) $x = 4$
c) $x = 3$

宿題：ワークブックの 68 ページ。

1.10 正方形を完成させる方程式の解法

P

二次方程式： $x^2 + 8x - 20 = 0$を解きなさい。

S

解くために $(x + m)^2 = n$ の形に変えて前の授業で学習したことを適用します。

-20 を置き換えます： $x^2 + 8x = 20$。

式の両辺に適当な数字を加え左辺の式が完全平方三項式となるようにします。

$$x^2 + 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 20 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$$

分数を簡略化していくつかの計算をして次の式が得られます：
$x^2 + 8x + 16 = 36$

二項式の二乗の展開の式は次の通りです：

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

そして項 a^2 は "x" についている2以内の二乗に達する係数を割ることで得られます。

$$\left(\frac{2a}{2}\right)^2 = a^2$$

左辺の式が完全平方三項式であるので $(x + 4)^2 = 36$ のような式になります。

$(x + m)^2 = n$： $x + 4 = \pm 6$ 式の方程式を解きますと ⇒ $x + 4 = 6$ または $x + 4 = -6$

従って、解は： $\boldsymbol{x = 2}$ **と** $\boldsymbol{x = -10}$です。

C

$x^2 + bx + c = 0$ の形の二次方程式を解くには次のステップで進めます：

例えば $x^2 + 2x - 1 = 0$

1. c 項を右辺に移します。
2. 左辺の式が完全平方三項式になるように両辺の方程式にある適当な数字を加えます。
3. 式を簡略化して計算を実行します。
4. $(x + m)^2 = n$ の形の方程式を解きます。

1. $x^2 + 2x = 1$

2. $x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{2}{2}\right)^2$

3. $(x + 1)^2 = 1 + 1 = 2$

4. $x + 1 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$

解は $x = -1 + \sqrt{2}$ または $x = -1 - \sqrt{2}$

この方法を使った二次方程式の解法は**完全平方**による解法として知られています。

次の二次方程式を解きなさい。

a) $x^2 + 4x + 3 = 0$
$x = -3$ または $x = -1$

b) $x^2 - 6x + 5 = 0$
$x = 5$ または $x = 1$

c) $x^2 - 6x - 7 = 0$
$x = 7$ または $x = -1$

d) $x^2 - 8x + 16 = 0$
$x = 4$

e) $x^2 + 2x - 2 = 0$
$x = -1 \pm \sqrt{3}$

f) $x^2 - 4x + 2 = 0$
$x = 2 \pm \sqrt{2}$

g) $x^2 + 5x + 5 = 0$
$x = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

h) $x^2 + x - 1 = 0$
$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

達成の目安

1.10 二次方程式を解くために完全平方の方法を使います。

学習の流れ

前の授業で展開した面積を使った二次方程式を解く方法はこの授業の展開には大変重要で、前に幾何学的に行った方法を代数学的に行うものです。

ねらい

ⓅⓈ 前の授業で学習した手順を使って解くことができないことを気づかせます。使われる方法は変数 x に対する完全平方を完成させ最終的には $(x+m)^2=n$ の型の式を解くことを目的としています。解く方法の説明をすることで前の授業でやったステップと関係づけることができます。

Ⓔ 完全平方を使って二次方程式を解くために行うステップを正式に定めます。

一部の設問の解答：

a)

$$x^2+4x+3=0$$
$$x^2+4x=-3$$
$$x^2+4x+\left(\frac{4}{2}\right)^2=-3+\left(\frac{4}{2}\right)^2$$
$$x^2+4x+2^2=-3+2^2$$
$$(x+2)^2=1$$
$$x+2=\pm1$$
$$x=-2\pm1$$
$$x=-3,\ x=-1$$

完全平方で二次方程式を解く方法のことも**完全平方**と呼ばれます。

日付： **U3 1.10**

Ⓟ 二次方程式を解きなさい：

$x^2+8x-20=0$

Ⓢ

$$x^2+8x-20=0$$
$$x^2+8x=20 \quad \text{移行します。}$$
$$x^2+8x+\left(\frac{8}{2}\right)^2=20+\left(\frac{8}{2}\right)^2 \quad \text{完全平方します。}$$
$$x^2+8x+16=36$$
$$(x+4)^2=36$$
$$x+4=\pm6$$
$$x=-4\pm6$$

従って、$x=-10$ または $x=2$

Ⓡ

1. a)

$$x^2+4x+3=0$$
$$x^2+4x+3=0$$
$$x^2+4x=-3 \quad \text{移行します。}$$
$$x^2+4x+\left(\frac{4}{2}\right)^2=-3+\left(\frac{4}{2}\right)^2 \quad \text{完全平方します。}$$
$$x^2+4x+4=1$$
$$(x+2)^2=1$$
$$x+2=\pm1$$
$$x=-2\pm1$$

従って、$x=-3$ または $x=-1$

b) $x=5$ または $x=1$、c) $x=7$ または $x=-1$、d) $x=4$

宿題： 練習帳69ページ

レッスン 1

1.11 $ax^2 + bx + c = 0$ の形の方程式の解

P

次の式を解くためには次の a)、b)、c) のステップに従います。

$$3x^2 + 5x + 1 = 0$$

a) x^2 の係数で式を割って定数項を式の右辺に移します。
b) 適当な数を加えて二乗を完成させます。
c) 変数 x をもとめます。

S

a) $3x^2 + 5x + 1 = 0$

$x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{3} = 0$　　3で割ります。

$x^2 + \frac{5}{3}x = -\frac{1}{3}$

b) $x^2 + \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{1}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2$　　適切な数を加えます。

$(x + \frac{5}{6})^2 = -\frac{1}{3} + \frac{25}{36}$　　完全平方します。

c) $(x + \frac{5}{6})^2 = \frac{25-12}{36}$　　右の分数を加えます。

$x + \frac{5}{6} = \pm\frac{\sqrt{13}}{6}$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$　　x をもとめます。

C

$ax^2 + bx + c = 0$ の形の二次方程式を解くには次のステップに従ってできます。

1. 式を x^2 の係数 a で割ります。
2. 定数項を右辺に移します。
3. 式の両辺に適切な数を加えて左辺の式が完全平方三項式になるようにします。
4. 式を簡略化して必要な計算を行います。
5. $(x + m)^2 = n$ の形の方程式を解きます。

次の二次方程式を解きなさい。

a) $2x^2 + 5x - 1 = 0$　　$x = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{4}$

b) $2x^2 - 3x - 4 = 0$　　$x = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{4}$

c) $5x^2 + 5x + 1 = 0$　　$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{10}$

d) $7x^2 + 7x + 1 = 0$　　$x = \frac{-7 \pm \sqrt{21}}{14}$

達成の目安

1.11 二次方程式の解の公式を推論する事前の作戦として一連のステップを使って二次方程式を解きます。

学習の流れ

二次方程式を解くのに完全平方を完成する作戦があるので、ここでは二次方程式を解くのに一連のステップを定めようと試み、この手順が解の公式を推論するのに使われるようにします。

ねらい

ⓅⓈ 完全平方を完成する手順を使って二次方程式の解法を見定めるために授業1.10と授業1.5で学習したテーマを使います。この問題の為には生徒が前に学習した知識を応用することが必要です。

Ⓔ 二次方程式の解の公式を推論するために有効なステップに従って二次方程式の解を求めるプロセスを体系化します。

一部の設問の解答：

c) $5x^2 + 5x + 1 = 0$

$$x^2 + x + \frac{1}{5} = 0$$
$$x^2 + x = -\frac{1}{5}$$
$$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{5} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{5} + \frac{1}{4}$$
$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{-4+5}{20}$$
$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{20}$$
$$x + \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{20}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{10}$$
$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{10}$$
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{10}$$

生徒がワークブック文字 a) と b) は簡略化するとより難しくする変数が使われているので、c) の部分から始めることをお勧めします。

つまずきやすい点：
この授業で説明されたプロセスは大変複雑でたくさんのステップがあるので生徒が正解に到達するためにはその一つ一つを正しく実施していることを確認する必要があります。

日付： U3 1.11

Ⓟ 教科書a)、b) と c) に示すステップに従って式を解きなさい：$3x^2 + 5x + 1 = 0$

Ⓢ

a) $3x^2 + 5x + 1 = 0$

$x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{3} = 0$ 3で割ります。

$x^2 + \frac{5}{3}x = -\frac{1}{3}$

b) $x^2 + \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{1}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2$ 両辺に加えます。

$\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{1}{3} + \frac{25}{36}$ 完全平方します。

c) $\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{13}{36}$

$x + \frac{5}{6} = \pm\frac{\sqrt{13}}{6}$ 分数を加えます。

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$ x を求めます。

Ⓡ

a) $x = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{4}$

b) $x = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{4}$

c) $x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{10}$

d) $x = \frac{-7 \pm \sqrt{21}}{14}$

宿題：ワークブックの 70ページ。

1.12 二次方程式の解の公式

P

一般二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ で $a \neq 0$ を解く公式をみつけましょう。

S

解くのに $x^2 + bx + c = 0$ の形に変形するのに "a" で割ることができて前の授業で学習したことを応用できます。

今度は二次方程式を解きます：

	$ax^2 + bx + c = 0$
まず、係数が1になるように式の両辺を x^2 の係数で割ります。	$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
次に $\frac{c}{a}$ を移行します。	$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$
完全平方を完成させます。	$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$
計算をします。	$(x + \frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$
式の右辺の計算をします。	$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$
式を解きます。	$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
	$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

C

$ax^2 + bx + c = 0$ の形の二次方程式を解くために解の最後に到達した公式を使えます。

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

この公式は二次方程式の解の公式として知られているものです。そして二次方程式の解をみつけるために公式の a、b、c の値を置き換えます。

例えば　　$3x^2 + 5x + 1 = 0$

もし解の公式で $a = 3$、$b = 5$、$c = 1$ と置き換えると

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(3)(1)}}{2(3)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 12}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$$ が確認されます。

次の二次方程式を解きなさい。

a) $5x^2 - 3x - 1 = 0$　$x = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{10}$

b) $-4x^2 - x + 1 = 0$　$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{8}$

c) $x^2 + 3x - 9 = 0$　$x = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2}$

d) $-4x^2 + 5x + 5 = 0$　$x = \frac{5 \pm \sqrt{105}}{8}$

ユニット3

69

達成の目安

1.12 二次方程式の解の公式を定めるのに平方完成を使います。

学習の流れ

この授業では生徒が式の解の公式を推論するためのステップに従い特定の二次方程式を解くことができるようになります。今度は解の公式を推論するのに前の授業で学習した手順を応用します。

ねらい

ⓅⓈ いかなる二次方程式も解くことのできる公式を推測するため一般形式で書かれた二次方程式に述べた手順を適用します。この授業は少し複雑でありますので生徒が方法がわからない場合は生徒の解決を指導するために介入できます。

Ⓔ 最初に簡略化すべきでなく最終回答が正の数で始まる一つの項目について取扱い、その後に正の数だが分母が負になるもの、その後は解答が負数で始まりさらに第三項に根に簡略化を与えるべきです。

一部の設問の解答：

a) $5x^2 - 3x - 1 = 0$

$a = 5, b = -3, c = -1$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(5)(-1)}}{2(5)}$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{10}$

b) $-4x^2 - x + 1 = 0$

$a = -4, b = -1, c = 1$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-4)(1)}}{2(-4)}$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{-8} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{8}$

別の形：
両辺に−1を乗ずると式 $4x^2 + x - 1 = 0$がえられ
解くと：
$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{8}$

日付： **U3 1.12**

Ⓟ 一般二次方程式を解きなさい。

$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

Ⓢ $ax^2 + bx + c = 0$

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ a で割ります。

$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ 両辺に加えます。

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$ 完全平方します。

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ 分数を加えます。

$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ x を求めます。

Ⓡ a) $x = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{10}$

b) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{8}$

c) $x = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2}$

d) $x = \frac{5 \pm \sqrt{105}}{8}$

宿題： ワークブック71ページ

1.13 二次方程式の解の公式の適用

P

二次方程式の解の公式を使って方程式を解きます。

a) $4x^2 + 2x - 1 = 0$

b) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

S

解の公式で置き換えます：

a) $a = 4, b = 2, c = -1$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(4)(-1)}}{2(4)}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8}$$

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{2}}(-1 \pm 1\sqrt{5})}{\underset{4}{\cancel{8}}}$$

簡略化する必要があります。

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$ または $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$

b) $a = 3, b = 5, c = -2$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{6}$$

49の平方根を計算する必要があります。

$$= \frac{-5 \pm 7}{6}$$

$x = \frac{-5 + 7}{6}$　　$x = \frac{-5 - 7}{6}$

$x = \frac{1}{3}$ o $x = -2$

2つの解を計算します。

C

二次方程式の解の公式を適用するためには二次方程式のa、 b、 c の値を識別し、解を計算する際には簡略化や根を有理数として表す必要があります。

次の二次方程式を解きなさい。

a) $2x^2 + x - 1 = 0$
X = -1 または x = $\frac{1}{2}$

b) $3x^2 - 5x - 2 = 0$
X = 2 またはx = $-\frac{1}{3}$

c) $6x^2 + 5x + 1 = 0$
x = $-\frac{1}{3}$ または x = $-\frac{1}{2}$

d) $9x^2 - 12x + 4 = 0$
$x = \frac{2}{3}$

e) $4x^2 + 20x + 25 = 0$
$x = -\frac{5}{2}$

f) $2x^2 - 4x + 1 = 0$
$x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$

g) $4x^2 + 6x + 1 = 0$
$x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{4}$

h) $-2x^2 + 2x + 1 = 0$
$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

達成の目安

1.13一般式 の値を識別して二次方程式の解の公式を使います。

学習の流れ

解の公式が設定されれば、解の簡略化や別途表示されるような異なるケースを識別しながら今度はこのことについてもう少し勉強します。

ねらい

ⓅⓈ 二つの二次方程式を示しその解に解の公式が適用され文字 a) の場合は 簡略化すべきで文字 b) はその式を満たす2つの有理数を定めることができます。x の（正確な）有理値を計算できるときはいつでも計算すべきで、$x = \frac{-7 \pm 5}{6}$ の形で解を残さないようにします。

Ⓔ 目的は生徒が二次方程式を勉強し始めて、二つの有理数解を、まず整数解と分数解を組み合わせ、次に二つの分数解、その後は根の場合で被開法数が0で一つの分数解しかないもの、そして最後に 簡略化しなければならないが非合理的な解をもつ方程式を定めることができるようにします。

一部の設問の解答：

a) $2x^2 + x - 1 = 0$

$a = 2, b = 1, c = -1$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)}$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4}$

$x = \frac{-1 \pm 3}{4}$

$x = -1 \quad x = \frac{1}{2}$

d) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

$a = 9, b = -12, c = 4$

$x = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(9)(4)}}{2(9)}$

$x = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{18}$

$x = \frac{2}{3}$

つまずきやすい点：
冒頭の設問の文字 a) の解を求める際誤りを犯す可能性があります。

$\frac{\overset{-1}{\cancel{-2}} \pm 2\sqrt{5}}{\underset{4}{\cancel{8}}}$

日付： **U3 1.13**

Ⓟ 二次方程式の解の公式を使って解きなさい。

Ⓢ

a) $4x^2 + 2x - 1 = 0$

$a = 4, b = 2, c = -1$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(4)(-1)}}{2(4)}$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8}$

$x = \frac{\cancel{-2} \pm \cancel{2}\sqrt{5}}{\underset{4}{\cancel{8}}}$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$

$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ または $\frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$

b) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

$a = 3, b = 5, c = -2$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)}$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{6}$

$x = \frac{-5 \pm 7}{6}$

$x = \frac{-5 - 7}{6}$ または $x = \frac{-5 \pm 7}{6}$

$x = -2$ または $\frac{1}{3}$

Ⓡ

a) $x = -1$ または $x = \frac{1}{2}$

b) $x = 2$ または $x = -\frac{1}{3}$

c) $x = -\frac{1}{2}$ または $x = -\frac{1}{3}$

d) $x = \frac{2}{3}$

e) $x = -\frac{5}{2}$

f) $x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$

g) $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{4}$

h) $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

宿題： ワークブック 72ページ

1.14 二次方程式を解く方法

P

二次方程式 $x^2 + 7x + 12 = 0$ を因数分解、解の公式と平方完成を使って解きなさい。解法は同じですか。ノートにそれぞれの方法について自分の意見を書きましょう。

S

因数分解

$x^2 + 7x + 12 = 0$

$(x + 4)(x + 3) = 0$

$x = -4$ または $x = -3$

解の公式

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(1)(12)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2}$$

$$= \frac{-7 \pm 1}{2}$$

$x = -3$ または $x = -4$

平方完成

$x^2 + 7x + 12 = 0$

$x^2 + 7x = -12$

$x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = -12 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$

$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = -12 + \frac{49}{4}$

$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{-48 + 49}{4}$

$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$x + \frac{7}{2} = \pm\frac{1}{2}$

$x = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}$　$x = -\frac{7}{2} - \frac{1}{2}$

$x = -3$ または $x = -4$

この場合、因数分解の方法を適用するのが最も容易で実用的でしたが、さらに解の公式の方法は少し多い計算が伴いますが、すべての場合に適用可能で、最後の平方完成方法はこの場合には複雑になりましたが、より簡単になる場合もあることを注目しましょう。

C

二次方程式の解の最も効率的な方法を選択するためにできるのは：

1. 因数分解を使って解く事です。

2. 因数分解をみつけることがもし出来ない場合、その他の二つの方法のいずれかを適用できます。

解の公式は全ての場合に適用できますが、他の方法を使った時より複雑な計算を伴う場合もあり得ます。

最も適切な方法を使って次の二次方程式を解きなさい。

a) $x^2 - \frac{4}{9} = 0$　$x = \pm\frac{2}{3}$

b) $4x^2 - 16 = 0$　$x = \pm 2$

c) $(6 - x)^2 - 1 = 0$　$x = 7$ または $x = 5$

d) $x^2 - 8x - 9 = 0$　$x = 9$ または $x = -1$

e) $x^2 + 3x - 1 = 0$　$x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$

f) $5x^2 + 10x = 0$　$x = 0$ または $x = -2$

g) $x^2 - 10x + 25 = 0$　$x = 5$

h) $5x^2 - 11x + 2 = 0$　$x = 2$ または $x = \frac{1}{5}$

達成の目安

1.14 二次方程式を解くのに展開される解決方法を比較します。

学習の流れ

前の授業では生徒は様々な方法を使って二次方程式を解くことを学びました、今度は様々な二次方程式を示してどの方法が最も解くのに適当かを決めてもらいます。

ねらい

ⓅⓈ 一つの二次方程式を解くのに存在する様々な方法を取り纏めて、場合によってはある方法がある条件では余り適切でない事を記載させます。

Ⓔ 最も適切な方法を決める事について生徒を正しく指導するために先生が勧められるのは、式の反応が整数であれば因数分解を使うのが良く、もし分数であれば平方根による開平または解の公式を使う方法です。

一部の設問の解答：

a) $x^2 - \frac{4}{9} = 0$

$x^2 = \frac{4}{9}$

$x = \pm\sqrt{\frac{4}{9}}$

$x = \pm\frac{2}{3}$

d) $x^2 - 8x - 9 = 0$

$(x-9)(x+1) = 0$

$x - 9 = 0$ o $x + 1 = 0$

$x = 9$ または $x = -1$

d) $x^2 - 8x - 9 = 0$

$(x-9)(x+1) = 0$

$x - 9 = 0$ o $x + 1 = 0$

$x = 9$ または $x = -1$

g) $x^2 - 10x + 25 = 0$

$(x-5)^2 = 0$

$x = 5$

この文字は二乗の差で因数分解して解けます、が全ての生徒がこの形でやるとは限りません。

日付： **U3 1.14**

Ⓟ 式 $x^2 + 7x + 12 = 0$ を因数分解、解の公式、平方完成で解きなさい。

Ⓢ 因数分解

$x^2 + 7x + 12 = 0$

$(x+4)(x+3) = 0$

$x = -4$ または $x = -3$

解の公式

$x = \frac{-7 \pm\sqrt{7^2 - 4(1)(12)}}{2(1)}$

$x = \frac{-7 \pm 1}{2}$

$x = -4$ または $x = -3$

平方完成

$x^2 + 7x + 12 = 0$

$x^2 + 7x = -12$

$x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = -12 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$

$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = -12 + \frac{49}{4}$

$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$x + \frac{7}{2} = \pm\frac{1}{2}$

$x = -4$ または $x = -3$

Ⓡ

a) $x = \pm\frac{2}{3}$

b) $x = \pm 2$

c) $x = 7$ または $x = 5$

d) $x = 9$ または $x = -1$

e) $x = \frac{-3 \pm\sqrt{13}}{2}$

f) $x = 0$ または $x = -2$

g) $x = 5$

h) $x = 2$ または $x = \frac{1}{5}$

宿題：ワークブック73ページ

レッスン 1

1.15復習問題

1. 授業で習った方法を使って次の式を解きなさい。

形 $ax^2 = c$.

a) $2x^2 = 2$ 　$x = \pm 1$

b) $-9x^2 = -1$ 　$x = \pm\frac{1}{3}$

c) $3x^2 - 27 = 0$ 　$x = \pm 3$

d) $21 - 3x^2 = 0$ 　$x = \pm\sqrt{7}$

e) $-x^2 - 3 = 0$ 　解がありません

形 $(x + m)^2 = n$.

a) $(x + 1)^2 = 9$ 　$x = 2$ または $x = -4$

b) $(-x + 2)^2 = 3$ 　$x = 2+\sqrt{3}$ または $x = 2-\sqrt{3}$

c) $(x - 4)^2 - 12 = 0$ 　$x = 4+2\sqrt{3}$ または $x = 4-2\sqrt{3}$

d) $(-3 - x)^2 = 0$ 　$x = -3$

e) $(5 - x)^2 + 3 = 0$ 　解がありません

形 $x^2 + bx + c = 0$ （完全平方を完成）

a) $x^2 + 2x - 3 = 0$ 　$x = 1$ または $x = -3$

b) $x^2 + 4x - 12 = 0$ 　$x = 2$ または $x = -6$

c) $x^2 + 6x + 9 = 0$ 　$x = -3$

d) $x^2 - 2x - 8 = 0$ 　$x = 4$ または $x = -2$

e) $x^2 - 8x + 12 = 0$ 　$x = 6$ または $x = 2$

f) $x^2 + 4x - 1 = 0$ 　$x = -2 \pm \sqrt{5}$

g) $x^2 + 2x + 4 = 0$ 　解がありません

h) $x^2 - x - 6 = 0$ 　$x = 3$ または $x = -2$

i) $x^2 - 5x + 3 = 0$ 　$x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$

j) $x^2 - 5x + 6 = 0$ 　$x = 3$ または $x = 2$

2. 解の公式を使って次の二次方程式を解きなさい。

a) $3x^2 - 11x + 6 = 0$ 　$x = 3$ または $x = \frac{2}{3}$

b) $4x^2 + 17x - 15 = 0$ 　$x = -5$ または $x = \frac{3}{4}$

c) $12x^2 - 13x + 3 = 0$ 　$x = \frac{1}{3}$ または $x = \frac{3}{4}$

d) $4x^2 + 8x + 3 = 0$ 　$x = -\frac{1}{2}$ または $x = -\frac{3}{2}$

e) $-3x^2 + 5x - 1 = 0$ 　$x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$

f) $4x^2 - 7x + 2 = 0$ 　$x = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{8}$

g) $3x^2 + 6x + 2 = 0$ 　$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}$

h) $x^2 - 4x - 1 = 0$ 　$x = 2 \pm \sqrt{5}$

1.16 復習問題

1. 因数分解を使って次の二次方程式を解きなさい。

形 $x^2 + bx = 0$.

a) $x^2 - 7x = 0$ 　$x = 0$ または $x = 7$

b) $2x^2 - x = 0$ 　$x = 0$ または $x = \frac{1}{2}$

c) $x^2 + 3x = 0$ 　$x = 0$ または $x = -3$

d) $4x^2 + 12x = 0$ 　$x = 0$ または $x = -3$

形 $x^2 + 2ax + a^2 = 0$.

a) $x^2 - 2x + 1 = 0$ 　$x = 1$

b) $x^2 - 8x + 16 = 0$ 　$x = 4$

c) $16x^2 + 8x + 1 = 0$ 　$x = -\frac{1}{4}$

d) $9x^2 + 12x + 4 = 0$ 　$x = -\frac{2}{3}$

形 $(x + a)(x + b) = 0$.

a) $(x - 1)(x - 6) = 0$ 　$x = 1$ または $x = 6$

b) $(x - 3)(x + 2) = 0$ 　$x = 3$ または $x = -2$

c) $(x + 5)(x - 7) = 0$ 　$x = -5$ または $x = 7$

d) $(x + 2)(x + 4) = 0$ 　$x = -2$ または $x = -4$

形 $x^2 + (a + b)x + ab = 0$.

a) $x^2 - 9x + 8 = 0$ 　$x = 1$ または $x = 8$

b) $x^2 - 2x - 24 = 0$ 　$x = 6$ または $x = -4$

c) $x^2 + 7x - 18 = 0$ 　$x = -9$ または $x = 2$

d) $x^2 - 11x + 28 = 0$ 　$x = 7$ または $x = 4$

2. 次の方程式の正の解を求めるのに幾何学的論証を使いましょう：

a) $x^2 + 6x = 7$ 　$x = 1$

b) $x^2 + 10x = 11$ 　$x = 1$

c) $x^2 + 8x = 9$ 　$x = 1$

達成の目安

1.15 と 1.16 学習した方法を使って二次方程式を解きなさい。

一部の設問の解答：

授業 1.15の項目：

1. 形 $ax^2 = c$.

a) $2x^2 = 2$
$x^2 = 1$
$x = \pm 1$

形 $(x + m)^2 = n$.

c) $(x - 4)^2 - 12 = 0$
$(x - 4)^2 = 12$
$x - 4 = \pm 2\sqrt{3}$
$x = 4 \pm 2\sqrt{3}$

形 $x^2 + bx + c = 0$

f) $x^2 + 4x - 1 = 0$
$x^2 + 4x = 1$
$x^2 + 4x + 2^2 = 1 + 2^2$
$(x + 2)^2 = 5$
$x + 2 = \pm\sqrt{5}$
$x = -2 \pm \sqrt{5}$

2. g) $3x^2 + 6x + 2 = 0$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(3)(2)}}{2(3)}$$
$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{12}}{6}$$
$$x = \frac{-6 \pm 2\sqrt{3}}{6}$$
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

授業 1.16の項目：

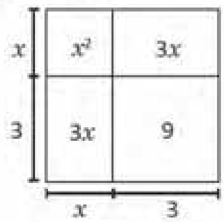
形 $x^2 + bx = 0$

a) $x^2 - 7x = 0$
$x(x - 7) = 0$
$x = 0$ または $x = 7$

形 $(x + a)(x + b) = 0$

a) $(x - 1)(x - 6) = 0$
$x - 1 = 0$ または $x - 6 = 0$
$x = 1$ または $x = 6$

2. a) $x^2 + 6x = 7$



$(x + 3)^2 = 7 + 9$
$(x + 3)^2 = 16$
$x + 3 = 4$
$x = 1$

形 $x^2 + 2ax + a^2 = 0$

a) $x^2 - 2x + 1 = 0$
$(x - 1)^2 = 0$
$x = 1$

形 $x^2 + (a + b)x + ab = 0$

a) $x^2 - 9x + 8 = 0$
$(x - 1)(x - 8) = 0$
$x - 1 = 0$ または $x - 8 = 0$
$x = 1$ または $x = 8$

宿題： ワークブックの74ページ。

レッスン 2 二次方程式の応用

2.1 二次方程式の判別式

P

公式を用いて次の2次方程式を解きなさい。被開平数の値に注目しなさい。

a) $2x^2 + 3x + 1 = 0$　　b) $4x^2 + 4x + 1 = 0$　　c) $2x^2 + x + 1 = 0$

S

a) $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$

$= \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4}$

$= \dfrac{-3 \pm 1}{4}$

$x = -\frac{1}{2}$ と $x = -1$

被開平数はゼロよりも大きく、2つの解があります。

b) $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(4)(1)}}{2(4)}$

$= \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{8}$

$= \dfrac{\cancel{-4}^{-1}}{\cancel{8}_{2}} = -\dfrac{1}{2}$

被開平数はゼロであり、解は1つです。

c) $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$

$= \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{4}$

$= \dfrac{-1 \pm \sqrt{-7}}{4}$

負の数の平方根が定義されていないので、よって $\pm\sqrt{7}$は実数ではないことに注目しなさい。

被開平数はゼロよりも小さく、実数には解がありません。

C

式 $b^2 - 4ac$ により与えられる公式の被開平数は、二次方程式の、いわゆる**判別式**です。

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow \text{判別式}$$

判別式が次の3つのケースのいずれかを満たすことができることに注目しなさい：

a) $b^2 - 4ac > 0$

$2x^2 + 3x + 1 = 0$、この場合、二次方程式は**2つの解**を持ちます。

b) $b^2 - 4ac = 0$

$4x^2 + 4x + 1 = 0$、この場合、二次方程式は**1つの解**しか持ちません。

c) $b^2 - 4ac < 0$

$2x^2 + x + 1 = 0$, この場合、二次方程式は**実数に解を持ちません。**

二次方程式が完全平方三項式なので、判別式はゼロになります。

1. 判別式の値をゼロと比べることで、次の二次方程式が解を持たない、1つ持つ、または2つ持つのか判断しなさい。

a) $x^2 + 6x - 9 = 0$
解を2つ持つ。

b) $x^2 + 2x + 2 = 0$
解を持たない。

c) $x^2 - 2x + 1 = 0$
解を1つ持つ。

d) $x^2 - 2x = 0$
解を2つ持つ。

e) $x^2 + 1 = 0$
解を持たない。

f) $5x^2 - 9x + 1 = 0$
解を2つ持つ。

g) $4x^2 - 9 = 0$
解を2つ持つ。

h) $4x^2 + 12x + 9 = 0$
解を1つ持つ。

2. 式 $x^2 + bx = 0$, $b \neq 0$ の二次方程式はいくつの解を持つのか判断しなさい。
解を2つ持つ。

達成の目安

2.1 二次方程式の持つ解の数を判断し、解釈する。

学習の流れ

すでに二次方程式を解く方法を学習したので、ここではこれらの方程式の解の性質を判別するための判別式の分析を紹介します。

ねらい

ⓅⓈ 3つの異なる状況における二次式の被開平数を調べ、その被開平数を二次方程式の解と比較します。

Ⓔ 二次方程式の判別式を定義し、その判別式を公式の被開平数と結びつけ、判別式の値で二次方程式の解の特徴を表します。

一部の設問の解答：

1. a) $a = 1, b = 6, c = -9$

$$b^2 - 4ac = 6^2 - 4(1)(-9) = 36 + 36 = 72$$

解を2つ持つ。

b) $a = 1, b = 2, c = 2$

$$b^2 - 4ac = 2^2 - 4(1)(2) = 4 - 8 = -4$$

解を持たない。

c) $a = 1, b = -2, c = 1$

$$b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = 0$$

解を1つ持つ。

d) $a = 1, b = -2, c = 0$

$$b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(0) = 4$$

解を2つ持つ。

2. $a = 1, b \neq 0, c = 0$

$$b^2 - 4ac = b^2 - 4(1)(0) = b^2 > 0$$

解を2つ持つ。

日付： U3 2.1

Ⓟ 公式を用いて2次方程式を解きなさい。各方程式の被開平数に注目しなさい。

Ⓢ a) $2x^2 + 3x + 1 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{-3 \pm 1}{4}$$

$x = -\frac{1}{2}$ または $x = -1$

被開平数はゼロよりも大きく、方程式は解を2つ持つ。

b) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(4)(1)}}{2(4)}$$

$$x = \frac{-4 \pm 0}{8}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

被開平数はゼロであり、方程式は解を1つ持つ。

c) $2x^2 + x + 1 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{4}$$

被開平数はゼロよりも小さく、方程式は解を持たない。

Ⓡ a) 解を2つ持つ　b) 解を持たない　c) 解を1つ持つ　d) 解を2つ持つ
e) 解を持たない　f) 解を2つ持つ　g) 解を2つ持つ　h) 解を1つ持つ

宿題： ワークブック75ページ

2.2 問題の解答における判別式の使用

P

和が4で積が5になるような2つの実数が存在しないことを証明しなさい。

S

2つの実数を x と y とします。$x+y=4$ そして $xy=5$ を満たさなければなりません。

一次方程式を次のように設定します：

$x+y=4$
$x^2+xy=4x$　方程式の両辺に x を掛けます。
$x^2+5=4x$　$xy=5$ なので、
$x^2-4x+5=0$　左辺に移項して整理します。

二次方程式の判別式を次のように分析します：

$(-4)^2-4(1)(5)<0$

二次方程式の判別式：
$b^2-4ac<0$

よって、この二次方程式では実数に解は存在しません。したがって、和が4で積が5になるような実数は存在しません。

C

二次方程式の判別式を用いて様々な問題を解くことができます。二次方程式を作り、その解を分析します。方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ において、

a) $b^2-4ac>0$　実解が2つ存在する。

b) $b^2-4ac=0$　実解が1つ存在する。

c) $b^2-4ac<0$　実解が存在しない。

1. 2つの数の和が4であり、それらの数を掛け合わせた結果は c になります。下記のようになるには、c はどのような値を取るでしょうか。

a)方程式が2つの実解を持つ。　$c<4$

b)方程式が1つの実解を持つ。　$c=4$

c)方程式が実解を持たない。　$c>4$

2. ある人が、自分の家の形は長方形で、その周辺の長さは 18 m、さらに面積は 21 m² だと言っています。その人が嘘を言っていることを証明しなさい。
一辺の長さが x m だとすれば、方程式は $x^2-9x+21=0$ となり、その判別式はゼロよりも小さくなります。

3. ホセさんは、長方形で面積が 700 m² の土地を持っています。長さ 100 m の針金でその土地を囲うことはできるでしょうか。
できません。一辺の長さが x m だとすれば、方程式は $x^2-50x+700=0$ となり、その判別式はゼロよりも小さくなるからです。

達成の目安

2.2 判別式を用いることで、二次方程式が解を1つ持つのか、2つ持つのか、または解を持たないのかを判断する。

学習の流れ

前回の授業で見た判別式の分析に関する内容を用いることで、今回はこの分析を必要とする問題の解答を紹介します。

ねらい

ⓅⓈ 判別式の値を適用することで、冒頭の設問が設ける条件下で2つの数が存在しないことを証明します。解答では、生徒は方程式の両辺に x を掛けることを思いつくかもしれません。ですが、1つの方程式を別の方程式に置き換えるようにしてそれらの方程式に取り組めば、同一の二次方程式が導き出され、同じ判別式を分析することになります。

一部の設問の解答：

方法1

$$x + y = 4$$
$$xy = c$$
$$x(4 - x) = c$$
$$4x - x^2 = c$$
$$x^2 - 4x + c = 0$$

方法2

$$x + y = 4$$
$$x^2 + xy = 4x$$
$$x^2 + c = 4x$$
$$x^2 - 4x + c = 0$$

この問題の各項について判別式を分析すると、次のことを満たさなければなりません：

a) $b^2 - 4ac > 0$
$(-4)^2 - 4(1)(c) > 0$
$16 - 4c > 0$

試行錯誤により $c < 4$ であることが確認できます。

b) $b^2 - 4ac = 0$
$(-4)^2 - 4(1)(c) = 0$
$16 - 4c = 0$
$16 = 4c$
$4 = c$

c) a) 項と同様に、$c > 4$ であることが証明できます。

日付： U3 2.2

Ⓟ 和が4で積が5になるような2つの数が存在しないことを証明しなさい。

Ⓢ 2つの数を x、y とします。

$x + y = 4$
$xy = 5$
$x^2 + xy = 4x$　方程式の各辺に x を掛けます。

$x^2 + 5 = 4x$　$xy = 5$ と置換します。
$x^2 - 4x + 5 = 0$　整理します。

判別式を以下のように分析します：

$b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(5)$
$= 16 - 20 = -4 < 0$

したがって、それらの数は存在しません。

Ⓡ

1a) $c < 4$　1b) $c = 4$　1c) $c > 4$

2. 一辺の長さを x とします。方程式は $x^2 - 9x + 21 = 0$ であり、判別式は -3 です。したがって、この寸法の土地は存在しません。

3. 一辺の長さを x とします。方程式は $x^2 - 50x + 700 = 0$ であり、判別式は -300 です。したがって、この土地用の針金の長さに達しません。

宿題： ワークブック76ページ

2.3 二次方程式による問題の解答

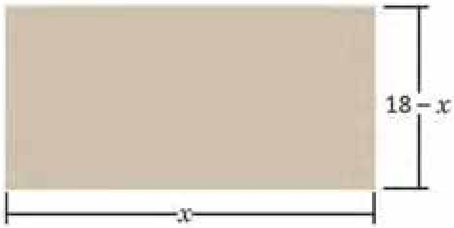
P

ファンさんは、面積が 72 m² で周辺の長さが 36 m の長方形の土地に自分の家を建てる予定です。建築許可の申請時には、土地の寸法の提示が要求されます。どのようにしてこの情報から土地の寸法を求めることができるでしょうか。

S

土地の長さを x で表すとすると、x を用いて幅をどのように表せるでしょうか。

長さと幅の和が周辺の長さの半分 ($\frac{36}{2} = 18$) に等しいので、よって幅は「$18 - x$」となります。



面積の値を用いて方程式 $x(18 - x) = 72$ を作ります。

次のように展開します： $-x^2 + 18x = 72 \Rightarrow 0 = x^2 - 18x + 72.$

次のように因数分解を利用します： $x^2 - 18x + 72 = 0 \Rightarrow (x - 12)(x - 6) = 0$

よって： $x - 12 = 0$ または $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 12$ または $x = 6$

x は長い方の辺なので： $x = 12$

よって、フアンさんの土地の幅は 6 になります。

したがって、フアンの土地の寸法は**長さ12 mで幅6 m** になります。

C

ある問題状況を解くには、一般的に次のステップを辿ることができます。

1. できればその問題状況の図式を作成する。
2. 問題がもたらす情報を特定し、未知数を表す数が何であるかを定義する。
3. 同じ未知数を用いてすべての数を表す。
4. 解かなければならない二次方程式を作成する（同等性を定める）。
5. 二次方程式を解く。
6. 解が問題に対して適当であるか分析する。

1. 周辺の長さが 28 mで面積が 48 m² の土地に家を建てます。土地の寸法はどれだけでしょうか。

   6 m と 8 m

2. 飛行機による km 単位の飛行距離は方程式 $x = 140t + 3t^2$ で与えられており、式中の t は離陸後の時間単位の飛行時間を表しています。この飛行機のエルサルバドルからコスタリカまでの運行が、両国間の距離を約775 kmとすれば、どのくらいの時間になるかを求めなさい。

   5時間

ユニット 3

75

達成の目安

2.3 問題状況を解く二次方程式を作成する。

学習の流れ

最終的に、二次方程式を解くためのすべてのツールを揃えた後で、生徒たちが方程式を作成して解かなければならない一部の応用問題に取り組むことが可能になります。

ねらい

ⓅⓈ 二次方程式を作成するのに前の授業で理解したことを使うことができる、足すとある量になり掛けると別の量になる数を求めることに関するタイプの問題を利用します。
Ⓔ 例二次方程式を作成し、その後にその方程式を解くことを必要とする問題をどのように解くかに関して一般的な図式を決定します。

一部の設問の解答：

1. 以下のように方程式を作ります：底辺の長さを x、高さの長さを y とします。

$$x + y = 14$$
$$xy = 48$$
$$x(14 - x) = 48$$
$$14x - x^2 = 48$$
$$x^2 - 14x + 48 = 0$$
$$(x - 8)(x - 6) = 0$$
$$x = 8 \text{ または } x = 6$$

したがって、土地の寸法は 6 m と 8 m になります。

日常生活への応用：
この授業では、数値が実生活における飛行機の数値と類似する設問2で、加速された運動の物理式を応用します。また、設問1と冒頭の設問では、生産能力の開発が強調されています。

備考：
エルサルバドルとコスタリカ間の実飛行時間は約1時間です。

日付：

U3 2.3

Ⓟ 周辺の長さが36 mで面積が 72 m^2 の土地の寸法を求めなさい。

Ⓢ x： 一辺の長さ

$$x(18 - x) = 72$$
$$18x - x^2 = 72$$
$$x^2 - 18x + 72 = 0$$
$$(x - 12)(x - 6) = 0$$
$$x = 12 \text{ または } x = 6$$

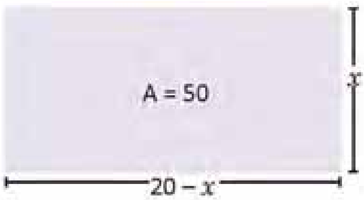
Ⓡ 1. 土地の寸法は 6 m と 8 m でなければなりません。

2. 飛行は5時間かかります。

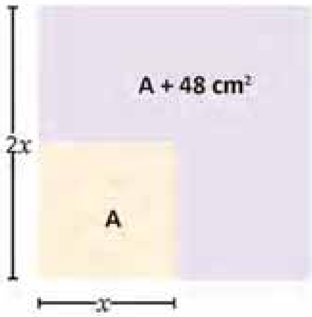
宿題： ワークブック77ページ

2.4 復習

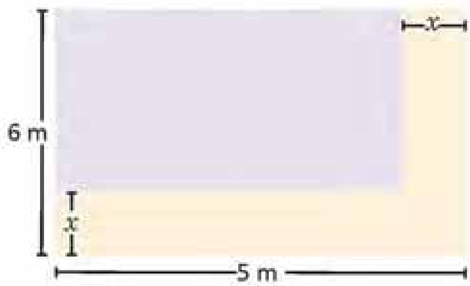
1. 次の長方形の寸法を求めなさい。
   $10 + 5\sqrt{2}$ と $10 - 5\sqrt{2}$



2. 正方形の辺を2倍にすると、その面積は48 cm^2に増えます。正方形の辺の長さはどれだけでしょうか。
   4 cm



3. 図中、紫の陰影が施された長方形の面積は12 cm^2です。x の値を求めなさい。
   x = 2 cm



4. 2乗の和が25になるような2つの連続する整数を求めなさい。
   −4 と −3、または 3 と 4

5. 周辺の長さが 30 m で面積が 54 m^2の土地に家を建てます。その土地の寸法はどれだけでしょうか。
   6 m と 9 m

達成の目安

2.4 二次方程式に該当する問題を解く。

一部の設問の解答：

1.
$$x(20 - x) = 50$$
$$20x - x^2 = 50$$
$$x^2 - 20x = -50$$
$$x^2 - 20x + 10^2 = -50 + 10^2$$
$$(x - 10)^2 = 50$$
$$x - 10 = \pm\sqrt{50}$$
$$x - 10 = \pm 5\sqrt{2}$$
$$x = 10 \pm 5\sqrt{2}$$

一辺の長さが $10 + 5\sqrt{2}$ であれば、もう一辺の長さは $20 - (10 + 5\sqrt{2}) = 10 - 5\sqrt{2}$になります。

したがって、寸法は $10 - 5\sqrt{2}$ と $10 + 5\sqrt{2}$になります。

2.
$$A = x^2$$
$$(2x)^2 = A + 48$$
$$(2x)^2 = x^2 + 48$$
$$4x^2 = x^2 + 48$$
$$3x^2 = 48$$
$$x^2 = 16$$
$$x = \pm 4$$
$$x = 4$$

4.
$$x^2 + (x + 1)^2 = 25$$
$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 25$$
$$2x^2 + 2x - 24 = 0$$
$$x^2 + x - 12 = 0$$
$$(x + 4)(x - 3) = 0$$

$x + 4 = 0$ または $x - 3 = 0$
$x = -4$ または $x = 3$

$x = -4$ であれば、$x + 1 = -3$
$x = 3$ であれば、$x + 1 = 4$

次の2つの解を持ちます：
-4 と -3、または 3 と 4

5. 土地が長方形であると仮定すると（授業2.3を参照）。

周辺の長さの半分は 15 m になります
各辺の長さは x と $15 - x$ です。
よって $x(15 - x) = 54$

$$15x - x^2 = 54$$
$$x^2 - 15x + 54 = 0$$
$$(x - 9)(x - 6) = 0$$

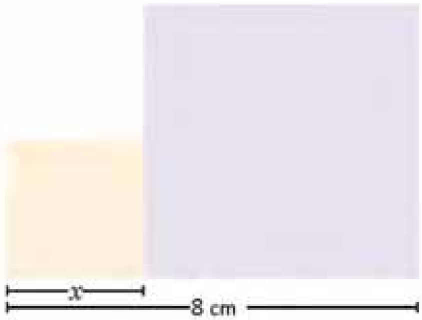
$x - 9 = 0$ または $x - 6 = 0$
$x = 9$ または $x = 6$

宿題：練習帳の78ページ

2.5 復習

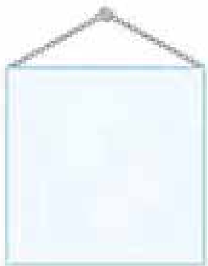
1. 次の図は2つの正方形で構成されています。2つの面積の和が 34 cm² であれば、両方の辺の値はいくつでしょうか。

3 m と 5 m



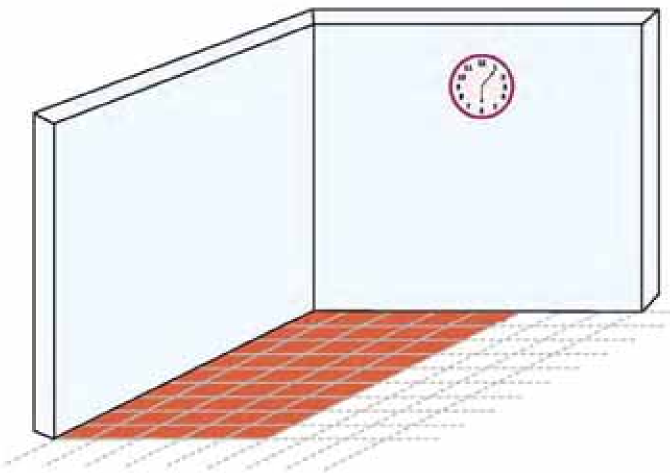
2. アナは面積が 400 cm² の正方形の鏡の木枠を作ります。鏡の辺の寸法はどれだけでしょうか。

20 cm



3. 家に面積が 60 m² の床を敷くのに正方形の煉瓦を240個使用しました。使用した煉瓦の大きさを求めなさい。

0.5 m



4. アナはビー玉5個入りの小袋を5つ買います。それらの小袋を買う店の女主人は、追加の小袋を1つ買うごとに各小袋にビー玉を1個増やしますと言いました。ビー玉を64個得るには、アナは小袋をいくつ買わなければならないでしょうか。

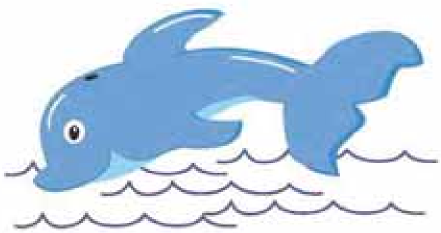
小袋8つ

5. マリオはバスの運転手です。彼は、運賃0.40ドルを徴収すると、1回の運行で平均90人がバスに乗ること、そして運賃を1セント増やすごとに乗客が1人減ることを知っています。運行の終了時に42ドル得るには、マリオは運賃をいくら増やさなければならないでしょうか。

20セントまたは
30セント

6. イルカが水から出たときの海抜高度は、方程式 $h = 7t - 5t^2$ で求められます。式中、t は、イルカが水から出た後に経過した時間であり、秒で表されます。イルカはどれだけの時間、水から出ているでしょうか。

1.4 秒



達成の目安

2.5 二次方程式に該当する問題を解く。

一部の設問の解答：

1.
$$x^2 + (8 - x)^2 = 34$$
$$x^2 + 64 - 16x + x^2 = 34$$
$$2x^2 - 16x + 30 = 0$$
$$x^2 - 8x + 15 = 0$$
$$(x - 5)(x - 3) = 0$$
$x - 5 = 0$ または $x - 3 = 0$

$x = 5$ または $x = 3$

したがって、寸法は 3 m と 5 m になります。

2. $x^2 = 400$
$$x = \pm\sqrt{400}$$
$$x = \pm 20$$
$$x = 20$$

したがって、鏡の寸法は一辺が 20cm になります。

3.煉瓦の辺の長さを求めなければなりません。

煉瓦の長さを x とすると：

$$240x^2 = 60$$
$$x^2 = \frac{60}{240}$$
$$x^2 = \frac{1}{4}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$$
$$x = \pm\frac{1}{2}$$
$$x = \frac{1}{2}$$
$$x = 0.5$$

4. x = 追加の小袋の数
$5 + x$ = 購入する小袋の数

$$(5 + x)(5 + x) = 64$$
$$(5 + x)^2 = 64$$
$$5 + x = \pm 8$$
$x = -5 + 8$ または $x = -5 - 8$

$x = 3$ または $x = -13$

5 + 3 = 8 小袋を買わなければなりません。

5. 増やすセントの数を x とします。よって：

$$(0.4 + 0.01x)(90 - x) = 42$$
$$100(0.4 + 0.01x)(90 - x) = 100(42)$$
$$(40 + x)(90 - x) = 4\,200$$
$$3600 + 50x - x^2 = 4\,200$$
$$x^2 - 50x + 600 = 0$$
$$(x - 30)(x - 20) = 0$$
$x - 30 = 0$ または $x - 20 = 0$

$x = 30$ または $x = 20$

マリオは運賃を20セントまたは30セント増やさなければなりません。

6. イルカは $h = 0$ のときに水から出て、$h = 0$ のときに水に入ります。

$$7t - 5t^2 = 0$$
$$t(7 - 5t) = 0$$
$t = 0$ または $7 - 5t = 0$

$t = 0$ または $t = \frac{7}{5}$

$t = 0$ または $t = 1.4$

イルカは1.4秒間、水から出ます。

宿題：練習帳の78ページ

ユニット 4. 2次関数の式 $y = ax^2 + c$

このユニットのねらい

関数 $y = ax^2 + c$ の性質を判断し、正確にグラフを描き、関数の変動に関する問題を解きます。

関連と発展

6学年

ユニット5：比例
- 比率
- 正比例
- 反比例

7学年

ユニット6：正比例と反比例
- 正比例
- 反比例
- 比例の応用

8学年

ユニット3：1次関数
- 1次関数
- 1次関数と連立二元一次方程式
- 1次関数の応用

9学年

ユニット3：二次方程式
- 二次方程式
- 二次方程式の応用

ユニット 4：2次関数の式 $y = ax^2 + c$
- 関数 $y = ax^2$
- 関数 $y = ax^2 + c$

高校1年次

ユニット 4：実関数
- 関数の定義
- 2次関数
- 2次関数の応用
- その他の関数
- GeoGebraを使った演習

高校2年次

ユニット 4：超越関数 1
- 累乗と乗根
- 指数関数と指数方程式

ユニット5：超越関数2
- 全単射関数と逆関数
- 対数関数
- 三角関数
- GeoGebraを使った演習

ユニット学習計画

レッスン	授業時数	授業
1. 関数 $y = ax^2$	1	1. 2乗に正比例する関数　パート1
	1	2. 2乗に正比例する関数　パート2
	1	3. 関数 $y = x^2$
	1	4. 関数 $y = ax^2; a > 1$
	1	5. 関数 $y = ax^2; 0 < a < 1$
	1	6. 関数 $y = -ax^2; a > 0$
	1	7. $y = ax^2$ の特徴
	1	8. $y = ax^2$ の変動　パート1
	1	9. $y = ax^2$ の変動　パート2
	1	10. $y = ax^2$ の変動　パート3
	1	11. 復習
2. 関数 $y = ax^2 + c$	1	1. 関数 $y = ax^2 + c; c > 0$
	1	2. 関数 $y = ax^2 + c; c < 0$
	1	3. 関数の方程式を求めるための最初の条件
	1	4. 復習
	1	ユニット4テスト

ユニット4　15時間の授業 + テスト

各レッスンの要点

レッスン1：関数 $y = ax^2$

関数 $y = ax^2$ を学習します。二つの変数のうちの一つが2乗される時のそれら変数の間の比例関係から、この関数を必然的に導き出します。関数 $y = ax^2$ の全ての場合のグラフを提示します。$a = 1$ の時の最も単純な関数を基準に考えます。この関数の特徴と性質、増加する区間、減少する区間および対称軸について分析します。この課では、最大と最小の概念の他に、関数の縦方向の拡大と縮小など、生徒にとって新しい概念が登場します。

レッスン2： $y = ax^2 + c$

関数 $y = ax^2$ に関する知識から、c の値をもとにして移動させ、関数 $y = ax^2 + c$ のグラフを求めます。
さらに、最初のデータから、$y = ax^2 + c$ の形式の関数の方程式を求めるための分析プロセスを応用します。

レッスン 1 関数 $y = ax^2$

1.1 2乗に正比例する関数　パート1

P

建物の上からボールを落とします。高さを地面に着くまでにボールが通過する距離とすると、この距離は次の表の通りに変わります。

x（秒）	0	1	2	3	4
y（m）	0	5	20	45	80

x を（ボールを落としてからの）経過時間とし、y を x 秒後にボールが通過した距離とします。

a) x の値が0、1、2、3、4の時、y の値はいくつになるでしょうか?
y は x に対して正比例しているでしょうか?

> x がその時点での回数分だけ変化し、y が同一の数量で変化しているのなら、y は x に対して正比例しています。

b) ノートで次の表を完成させて答えましょう。
x^2と y との間にはどのような関係があるでしょうか?

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1			
y	0	5	20	45	80

c) 5秒後にボールが通過した距離は全部でどのくらいでしょうか?

d) y を x を使って表しましょう。

S

a) x の値が0、1、2、3、4の時、y の値はそれぞれ0、5、20、45、80になります（表を参照しましょう）。

y が x に対して正比例する場合、x の値が二倍または三倍になると、y の値も二倍または三倍になります。しかし、この場合はそうなっていません。

$x = 1$ が二倍（$x = 2$）になった時、$y = 5$ であったのが その四倍になっています（$y = 20$）。
$x = 1$ が三倍（$x = 3$）になった時、$y = 5$ であったのが その九倍になっています（$y = 45$）。

x 3
x 2

x（秒）	0	1	2	3	4
y（m）	0	5	20	45	80

x 4
x 9

よって、y が正比例しているのは x に対してではありません。

b) 表は右のようになります。

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	9	16
y	0	5	20	45	80

x^2 の値のそれぞれを5倍にすると、y のそれぞれの値になります。

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	9	16
y	0	5	20	45	80

つまり、y は、5 に x^2 を掛けた数に等しくなります。

c) 5秒後にボールが通過した距離は、次にようになります。

$$5(5^2) = 5(25)$$
$$= 125 \text{ m}$$

d) $y = 5x^2$

C

$y = ax^2$ の時、**ある大きさ y は、もう一つの大きさ x の2乗に正比例します。**aで表す数が**定数**です。これは、変化しない実数です。

この例では、ボールが落ちてから通過する距離は、落ちてから経過する時間の2乗に正比例しています。

冒頭の設問では、定数 a は5に等しくなります。ここで提示した数は、実際の数量を概算した値です。実際の自然科学では、もっと細かく表す数字を用います。

1. 正方形の面積は、$a = \frac{1}{2}$ の時、その対角線の2乗に正比例します。

a) 次の表の各面積を求めましょう。x が正方形の対角線を表すとし（cm）、y がその面積（cm²）を表すとします。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64
y	0	0.5	2	4.5	8	12.5	18	24.5	32

b) y（面積）を x（対角線）で表しましょう。$y = \frac{1}{2}x^2$

2. 円の面積は、その半径の2乗に正比例します。

a) 定数の値はいくつでしょうか? π

b) x が円の半径を表し y がその面積を表す時、y を x で表しましょう。 $y = \pi x^2$

c) 次の表の各面積の値を求めましょう。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64
y	0	1	4π	9π	16π	25π	36π	49π	64π

達成の目安

1.1 表を使用して方程式 $y = ax^2$ を提示し、方程式に示される2乗に正比例する関数を求めます。

学習の流れ

正比例の学習は、正比例や反比例で描写される状況を分析するという形で六年次から行います。正比例の学習は七年次にも行われ、七年次では、さらに、変数同士の間の変化を解釈するために、順序対をグラフ化します。八年次では、二つの変数の間の比例関係から1次関数をグラフ化します。ここで、双方の変数の間の変化の割合を、**関数の傾き**と言います。

このユニットでは $y = ax^2 + c$ で表される関数に学習の焦点を当てる旨を述べることが大切です。$y = ax^2 + bx + c$ で表される関数は、高校までに学習することになります。

ねらい

ⓅⓈ では表を使って二つの変数の間の比例関係を分析させましょう。
設問 a) では、x と y との二つの変数の間に比例関係がないことに注意させるようにします。一方、設問 b) では、変数 y と、x を2乗した値との間に、比例関係があることを分析させることができます。この対応規則は、d) で改めて提示されます。

Ⓔでは、変数 y が x^2 に同じ数を掛けると得られることを示します。このように、y は x^2 に正比例しています。

生徒の何人かがまだ正比例の概念を完全にマスターしていないかもしれません。この場合、このユニットのために、基礎的な概念を復習させる目的で特別に授業を一回使うこともできます。その授業では、七年次のユニット6の授業1.2の見直しをさせましょう。

日付： U4 1.1

Ⓟ

x （秒）	0	1	2	3	4
y （m）	0	5	20	45	80

a) y は x に対して正比例しているでしょうか?
b) 表を埋めましょう。x^2 と y との間にはどんな関係があるでしょうか?

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1			
y	0	5	20	45	80

c) 5秒後に通過した距離は全部でどのくらいでしょうか?

d) y を x を使って表しましょう。

Ⓢ

x （秒）	0	1	2	3	4
y （m）	0	5	20	45	80

×2 ×3 ×4 ×9

a) よって、y は x に対して正比例しているのではありません。

b)

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	9	16
y	0	5	20	45	80

×5 ×5 ×5 ×5 ×5

c) $5(5^2) = 5(25) = 125$ m
d) $y = 5x^2$

Ⓡ 1. b) $y = \frac{1}{2}x^2$　　2. a) π
b) $y = \pi x^2$

宿題： 練習帳の82ページ

1.2 2乗に正比例する関数　パート2

P

変数 y は、変数 x の2乗に正比例しています。さらに、$x = 3$ の場合、$y = 18$ になります。
定数 a の値を求めて、関数 $y = ax^2$ の式を完成させましょう。

S

問題文で $y = ax^2$ とされています。

定数 a の値を求めるには、x に 3を、y に18を代入し、方程式を解きます。

$$18 = a(3)^2$$
$$18 = 9a$$
$$a = \frac{18}{9}$$
$$a = 2$$

したがって、$y = 2x^2$ となります。

C

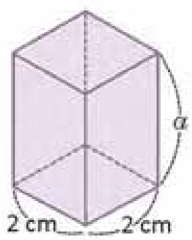
$y = ax^2$ であれば、定数 a の値は、x と y というひと組の提示されている変数に代入して、方程式を解いて求めます。
y が x の2乗に正比例するのであれば、**y は x の関数である** と言います。x に値を代入すると、その値のそれぞれに対して、y の値がただ一つに決まるからです。

通常、a、b、c が実数である関数 $y = ax^2 + bx + c$ は ($a \neq 0$)、**2次関数**と言います。関数 $y = ax^2$ と $y = ax^2 + c$ は、このユニットでは特別なケースとして学習します。2次関数の完全な形式は高校までに学習することになります。

1. 次の各設問では、y は x^2 に対して正比例しています。次のそれぞれの場合の定数の値を計算しましょう。

a) $x = 2$であれば、$y = 12$ となります。$a = 3;\ y = 3x^2$
b) $x = 3$であれば、$y = 18$ となります。$a = 2;\ y = 2x^2$
c) $x = 6$であれば、$y = 18$ となります。$a = \frac{1}{2};\ y = \frac{1}{2}x^2$

2. 底面が正方形で高さが一定の角柱の容量は、底面の辺の2乗に比例して変わります。底面の辺が 2 cm の時に、容量は、12 cm³ に等しくなります。高さはどのくらいでしょうか?
高さは 3 cmです。



角柱の容量は、高さに底面の面積を掛けた積に等しくなります。

達成の目安

1.2 与えられた独立変数や従属変数で、比例の定数を求めるのに正比例を応用しましょう。

学習の流れ

前の授業では、ある変数と別の変数を2乗した数値との間の正比例関係を学習しました。さらにその関係を表す方程式を求めました。この授業では、2乗に正比例する関数を表す方程式について直接取り組みます。変数がふくまれ得る最初のデータから比例の定数を求めます。そして、このタイプの方程式を**2次関数**とすると結論づけます。七年次と八年次では、1次関数を掘り下げて学びましたが、九年次と高校一年次では、1次関数に関する全てについて学習することになります。

ねらい

ⓅⓈ では、**正比例の定数**という概念を設問を通して把握させます。ここでは、変数を使って知った値をすぐさま用いて定数を計算させます。

一部の設問の解答：

1.

c) $x = 6$であれば、$y = 18$です。

$$y = ax^2$$
$$18 = a(6)^2$$
$$a = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

したがって、$y = \frac{1}{2}x^2$です。

2.

y が角柱の容量を表す時、

$$y = a(2)^2$$
$$12 = a(2)^2$$
$$a = \frac{12}{4} = 3$$

したがって、高さは 3 cmです。

日付： U4 1.2

Ⓟ 方程式は、$y = ax^2$ です。$x = 3$であれば、$y = 18$ です。a の値を求めましょう。

Ⓢ $y = ax^2$ であることが分かっています。
$x = 3$ で、$y = 18$ です。

$$18 = a(3)^2$$
$$18 = 9a$$
$$a = \frac{18}{9}$$
$$a = 2$$

したがって、$y = 2x^2$ です。

x に値を代入すると、その値のそれぞれに対して、y の値がただ一つに決まることに注意させます。

Ⓡ

1. a) $x = 2$ であれば、$y = 12$ です。

$$y = ax^2$$
$$12 = a(2)^2$$
$$a = \frac{12}{4} = 3$$

したがって、$y = 3x^2$ です。

b) $a = 2$; $y = 2x^2$
c) $a = \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{2}x^2$

$a = 3$です。角柱の高さは 3 cmです。

宿題： 練習帳の83ページ

3. 関数 $y = x^2$

P

$y = x^2$ の時、$a = 1$ とします。

a) ノートで次の表を完成させましょう。

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	16								

b) デカルト平面に前の設問で得られた座標 (x, y) を配置し、次の質問に答えましょう。すべて直線上にありますか?

c) 次の表を完成させ、デカルト平面に座標を配置しましょう。どのような線が描けますか?

x	−1	−0.9	−0.8	−0.7	−0.6	−0.5	−0.4	−0.3	−0.2	−0.1	0
y	1	0.81									0

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	0.01									

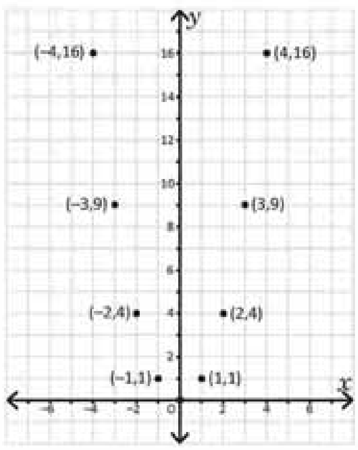
S

a) y の各値は、対応する値 x を2乗した値に等しくなります。記号に注意しなければなりません。例えば、$(-4)^2 = (-4)(-4) = 16$です。これに基づくと、表は次のようになります。

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

b)デカルト平面に点を配置するには、次のようにします。第一の座標を x 軸に置きます。ここから、次の座標まで該当する単位を数えます。正であれば上に向かい、負であれば下に向かいます（いずれにせよ縦方向の動きをします）。

こうすると、設問 a)で得られた各点の配置は、次のグラフに示す通りになります。明らかに各点は直線上にありません。



ユニット4

83

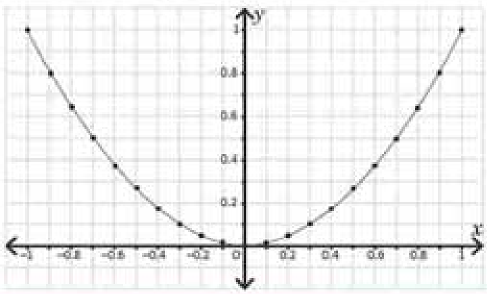
レッスン 1

c) 表を埋めると次のようになります。

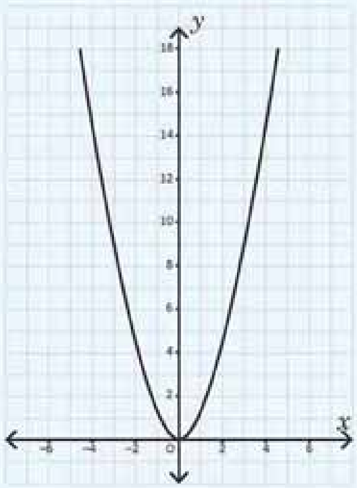
x	−1	−0.9	−0.8	−0.7	−0.6	−0.5	−0.4	−0.3	−0.2	−0.1	0
y	1	0.81	0.64	0.49	0.36	0.25	0.16	0.09	0.04	0.01	0

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1

各座標をつなぐと次のような線になります。



関数 $y = x^2$ をグラフで表した線を、**放物線**と言い、原点 (0,0) を通ります。



全ての2次関数は、グラフにすると放物線で表されます。その形は、$y = x^2$ の場合と似ています。

1. 始めの設問で得た結果を基にしますと、$x = -1$ の時、y の値とはどのような関係がありますか? $x = 1$ の時、y の値とはどのような関係がありますか? $x = 1$ と $x = -1$ の時、$y = 1$ です。
   $x = -2$ の時や $x = 2$ の時と関係は同じでしょうか? $x = 2$ と $x = -2$ の時、$y = 4$ です。
2. 通常、$x = -m$ や $x = m$ の時、y の値とはどのような関係がありますか? 両方の場合とも $y = m^2$ の関係になります。
3. $y = x^2$ のグラフをちょうど y 軸のところで「折った」とすると、両側にあるグラフの部分はどうなるでしょうか?
   両側にあるグラフの部分は重なります。

達成の目安

1.3 デカルト平面に配置した各点から関数 $y = x^2$ の特徴を描写します。

学習の流れ

前の授業では、表を使って2乗に比例する関数を分析しました。この授業では、表から読み取れる数値から抽出した座標でグラフを描きます。1次関数のグラフで学習した八年次と同様に、2乗に正比例する関数のグラフの形状をデカルト平面で分析することを目的とします。

ねらい

ⓅⓈ では、a) と b) で、結果としてグラフは直線ではないが特徴があり、その特徴を描くことができることを生徒が判断することができるようにします。c) では、デカルト平面でグラフで表した点同士の間に、一定の規則性があり、これを曲線で表すことができることを生徒が見て取ることができることをめざします。

Ⓟ では、関数 $y = x^2$ のグラフを**放物線**という用語で初めて言い表します。この関数の特徴を強調しなければなりません。例えば、その線の角度や、x 軸上のそれぞれの実数とそれに相対する数に、いつも y 軸上の同一の値が対応することなどです。

一部の設問の解答：

1. $x = 1$ の時も $x = -1$ の時も、変数 y は、同一の値 1 になります。$x = -2$ の時も $x = 2$ の時も y は4になります。
 x に相対する数には、同一の値 y が対応することに気づかせることが大切です。

2. $x = -m$ の時も $x = m$ の時も、$y = m^2$ の関係になります。

教材：
デカルト平面を作ります。中くらいの大きさのボンド紙とマーカーを使って、できれば 20 × 20 の大きさの方眼紙を作り、後でテープで補強します。

つまずきやすい点：
c) では、計算機の正しい使い方を指示します。
-0.8^2 と計算機にインプットすると -0.64 となることがあります。正しく $(-0.8)^2$ とインプットするよう指示します。この場合、0.64となります。

日付： U4 1.3

Ⓟ a)

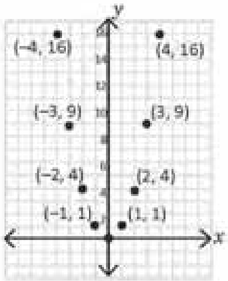
x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

b) a)の座標 (x, y) を配置します。
c) 表を埋めて、各座標を配置します。

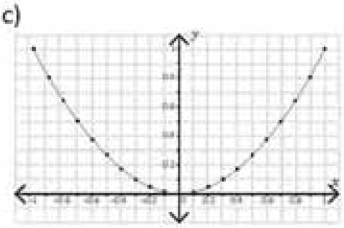
x	−0.7	−0.6	−0.5	−0.4	−0.3	−0.2	−0.1
y	0.49	0.36	0.25	0.16	0.09	0.04	0.01

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
y	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49

Ⓢ b)



c)



宿題：練習帳の84ページ

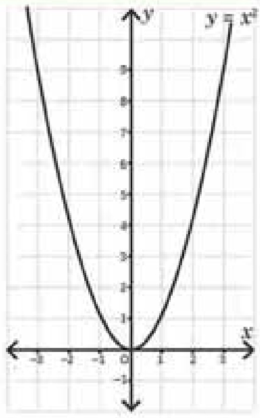
1.4 関数 $y = ax^2$; $a > 1$

P

$y = x^2$ のグラフをもとにして、次の設問に答えましょう。

a) 次の表を完成し、$y = x^2$ と同じ面に関数 $y = 2x^2$ のグラフを描きましょう。

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2
x^2	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4
$2x^2$	8								



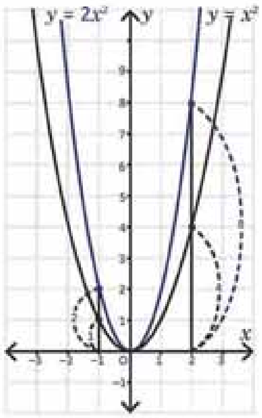
b) $y = x^2$ のグラフと $y = 2x^2$ のグラフでは何が似ていて何が異なるでしょうか?

c) この二つの関数で、$x = -1$ の時の y の値と、$x = 2$ の時の y の値を比較しましょう。どうなっているでしょうか?

S

a) $y = 2x^2$ の値は、$y = x^2$ の値に2を掛けた結果と同じです。表は次のようになります。

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2
x^2	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4
$2x^2$	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8



b) 二つのグラフの似ている点： 原点 (0, 0) を通ること、放物線であること、y 軸で折るとグラフの右側の部分と左側の部分が重なること。

二つのグラフの異なる点：原点以外の各点が一致しないこと。さらに、$y = 2x^2$ では、$y = x^2$「よりも y の値が大きくなっています」。

c) 表とグラフを見ると、$y = 2x^2$ の値は、$x = -1$ の時、$y = x^2$ の値の二倍です。$x = 2$ の時も同様です。通常、関数 $y = 2x^2$ の値は、関数 $y = x^2$ の値の二倍です。

$y = 2x^2$ のグラフは、$y = x^2$ のグラフを因数2の分だけ縦方向に拡大したものになっています。これを**拡大**と言います。

C

a が 1 よりも大きい数だとしますと ($a > 1$)、$y = ax^2$ のグラフを描くには、$y = x^2$ の全ての値に a を掛けます。放物線の**対称軸**は、 放物線を一致する二つの部分に分ける垂直な線です。$y = ax^2$ の場合、対称軸は、y 軸になります。

$y = x^2$ のグラフをもとに、次の関数のグラフを描きなさい：

a) $y = 3x^2$　　b) $y = 4x^2$　　c) $y = \frac{3}{2}x^2$

達成の目安

1.4 $y = x^2$ のグラフをもとにして、$a > 1$の時の $y = ax^2$ のグラフを描きます。

学習の流れ

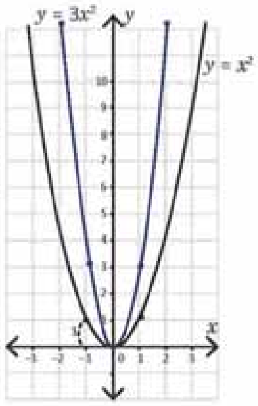
この授業では、$y = x^2$ のグラフに関する知識を使い、$y = 2x^2$ と比較して、1より大きい定数を変数に掛けた時にもたらす変化を見ます。

ねらい

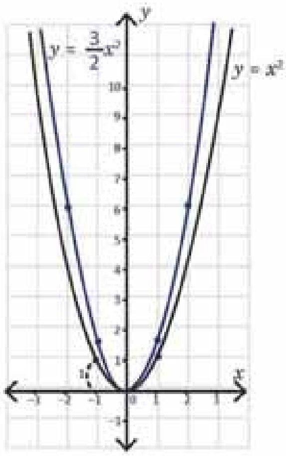
Ⓟ では、x^2 の値と $2x^2$ の値を表で比較させることができます。これは、後で関数 $y = x^2$ に対して関数 $y = 2x^2$ のグラフがどのように変化するかを認識させるためです。
Ⓢ では、$a > 1$の時、$y = ax^2$ での結果を**拡大**と呼ぶことを提示します。生徒が自らの考えを伝えるのに数学用語を正しく使うことが大切です。

一部の設問の解答：

a)



c)



いつも $y = x^2$ をもとにしなければなりません。こうすれば、他の関数がこの関数を変形させたものであることを示すことになります。同じ面に全てのグラフを描くと、変化を見せる手助けになります。

日付： U4 1.4

Ⓟ a) 表を完成させましょう。

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2
x^2	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4
$2x^2$	8	4.50	2	0.50	0	0.50	2	4.5	8

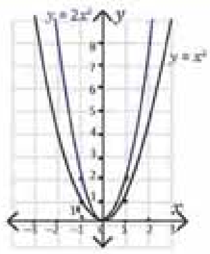
同じ面に $y = 2x^2$ と $y = x^2$ のグラフを描きましょう。

b) 二つのグラフの同じ点と異なる点を書いてみましょう。

c) $x = −1$ と $x = 2$ の時、それぞれ y の値はどうなるでしょうか?

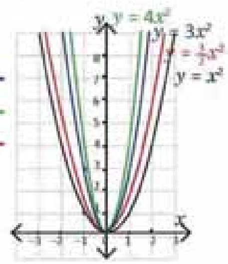
Ⓢ b) 同じ点： 原点 (0, 0) を通ること、対称軸は y 軸であること。
異なる点： 共通している唯一の点は、原点だけであること。
さらに、$y = 2x^2$ では、$y = x^2$「よりも y の値が大きくなっています」。

c) y の値は、$y = 2x^2$ ではいつも関数 $y = x^2$ の値の二倍になっています。



Ⓡ

a) —
b) —
c) —



宿題： 練習帳の85ページ

レッスン 1

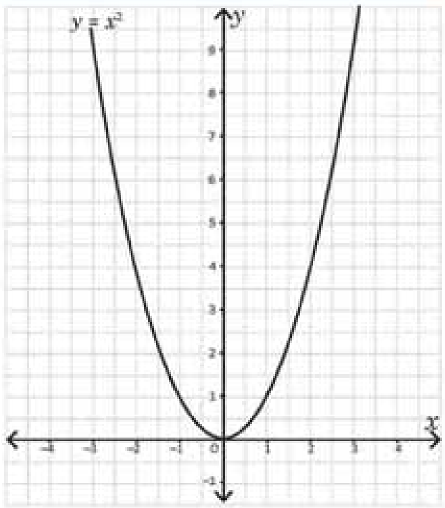
1.5 関数 $y = ax^2$; $0 < a < 1$

P

$y = x^2$ のグラフをもとにして、次の設問に答えましょう。

a) 次の表を完成し、$y = x^2$ と同じ面に関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフを描きましょう。

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$\frac{1}{2}x^2$							



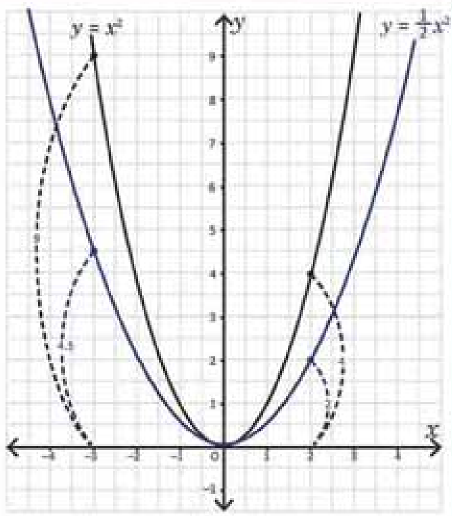
b) $y = x^2$ のグラフと $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフでは何が似ていて何が異なるでしょうか?

c) 二つの関数で、$x = -3$ の時と $x = 2$ の時の y の値を比較しましょう。どうなっているでしょうか?

S

a) $y = \frac{1}{2}x^2$ の値は、$y = x^2$ の値に $\frac{1}{2}$ を掛けた結果と同じです。表は次のようになります。

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$\frac{1}{2}x^2$	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5



b) 二つのグラフの似ている点： 原点 (0, 0) を通ること、放物線であること、y 軸が対称軸であること。

二つのグラフの異なる点：原点以外の各点が一致しないこと。さらに、$y = \frac{1}{2}x^2$ では、$y = x^2$「よりも y の値が小さくなっています」。

c) 表とグラフを見ると、$y = \frac{1}{2}x^2$ の値は、$x = -3$ の時、$y = x^2$ の値の半分です。$x = 2$ の時も同様です。通常、関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ の値は関数 $y = x^2$ の値の $\frac{1}{2}$ です。

$y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフは、$y = x^2$ のグラフを因数 $\frac{1}{2}$ の分だけ縦方向に縮小したものになっています。これを**縮小**と言います。

C

a が 0 より大きく 1 より小さい時 ($0 < a < 1$)、$y = ax^2$ のグラフを描くには、$y = x^2$ の全ての値に a を掛けます。

次の関数のグラフを描きなさい。

a) $y = \frac{1}{3}x^2$　　b) $y = \frac{1}{4}x^2$　　c) $y = \frac{2}{3}x^2$

達成の目安

1.5 $y = x^2$ のグラフをもとにして、$0 < a < 1$の時の $y = ax^2$ のグラフを描きます。

学習の流れ

前の授業と同じように、関数 $y = x^2$ をもとにして、関数 $y = x^2$に対する変化を比較しながら、$0 < a < 1$の時の関数 $y = ax^2$ のグラフを描きます。$a > 1$の時に起こる結果を**拡大**と言い、$0 < a < 1$の時の結果を**縮小**と言います。

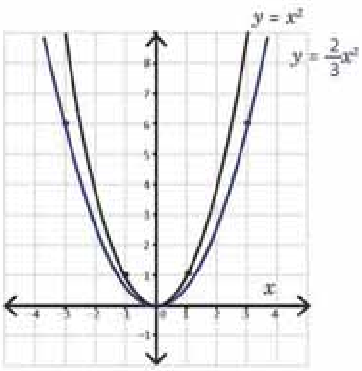
ねらい

Ⓟ, Ⓢ では、表のデータを使用して関数 $y = \frac{1}{2}x^2$と関数 $y = x^2$を比較し、その後、二つの関数のグラフを描かせます。c)では、$y = x^2$ の各値が $y = \frac{1}{2}x^2$ の各値よりも早く増大することを見せることを目的とします。

一部の設問の解答：

c) グラフをより正確に描かせるために、表を作成させることもできます。座標をいくつかグラフ上にとらせて、それらの座標を曲線で結ばせます。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$\frac{2}{3}x^2$	6	$\frac{8}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$	6



授業を進めるには、表を完成させた後で放物線を描かせ、それから b) と c) を解かせる必要があります。使えるスペースがどのくらいあるかを考慮しながら、黒板を使えるようにしておきます。

日付： **U4 1.5**

Ⓟ a) 表を完成させましょう。

$y = \frac{1}{2}x^2$と $y = x^2$ のグラフを同じ面に描きましょう。

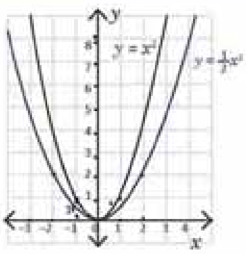
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$2x^2$	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5

b) 二つのグラフの同じ点と異なる点を書いてみましょう。
c) $x = -3$ の時と $x = 2$の時、それぞれの場合の y の値はどうなるでしょうか?

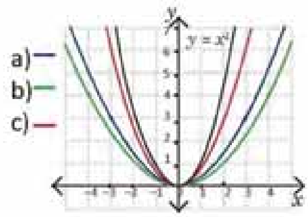
Ⓢ b) 同じ点： 原点 (0, 0) を通ること、対称軸は y 軸であること。

異なる点： 共通している唯一の点は、原点だけであること。
さらに、$y = \frac{1}{2}x^2$ では、$y = x^2$「よりも y の値が小さくなっています」。

c) y の値は、$y = \frac{1}{2}x^2$ ではいつも関数 $y = x^2$ の値の半分になっています。



Ⓡ



宿題： 練習帳の86ページ

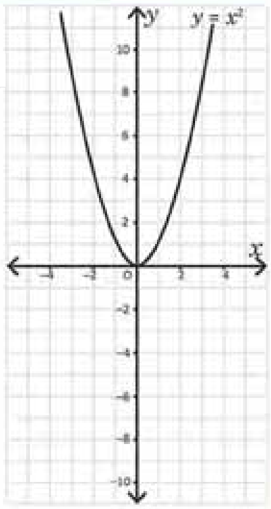
レッスン 1

1.6 関数 $y = -ax^2$; $a > 0$

P

$y = x^2$ のグラフをもとにして、次の設問に答えましょう。

a) 次の表を完成し、$y = x^2$ と同じ面に関数 $y = -x^2$ のグラフを描きましょう。



x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$-x^2$	–9						

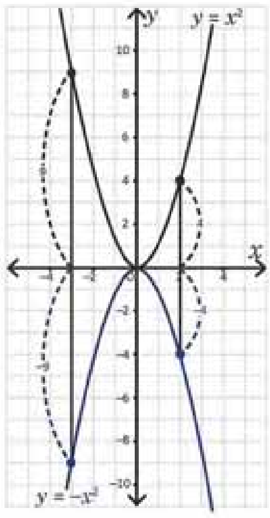
b) $y = x^2$ のグラフと $y = -x^2$ のグラフでは何が似ていて何が異なるでしょうか?

c) この二つの関数で、$x = -3$ の時の y の値と、$x = 2$ の時の y の値を比較しましょう。どうなっているでしょうか?

S

a) $y = -x^2$ の値は、$y = x^2$ の値に–1を掛けた結果と同じです。表は次のようになります。

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$-x^2$	–9	–4	–1	0	–1	–4	–9



b) 二つのグラフの似ている点： 原点 (0, 0) を通ること、放物線であること、y 軸が対称軸であること。

二つのグラフの異なる点：原点以外の各点が一致しないこと。さらに、$y = -x^2$ は、x 軸の下に描かれることになります。

c) 表とグラフを見ると、$y = -x^2$ の値は、$x = -3$ の時、$y = x^2$ の値の負の値になっています。$x = 2$ の時も同様です。通常、関数 $y = -x^2$ の値は、関数 $y = x^2$ の値の負の値です。

C

a が 0 よりも大きい数だとしますと ($a > 0$)、$y = -ax^2$ のグラフを描くには、$y = ax^2$ の全ての値に–1を掛けます。関数 $y = -ax^2$ は、関数 $y = ax^2$ のグラフを **x 軸に関して対称移動させたもの**です。この場合、$y = -ax^2$ の放物線が下に向かって開いていると言います。

$y = -2x^2$ と $y = -\frac{1}{2}x^2$ のグラフを描きましょう。また、それらのグラフを $y = 2x^2$ と $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフと比較しましょう。

達成の目安

1.6 $y = x^2$ のグラフをもとにして、$a > 0$の時の $y = -ax^2$ のグラフを描きます。

学習の流れ

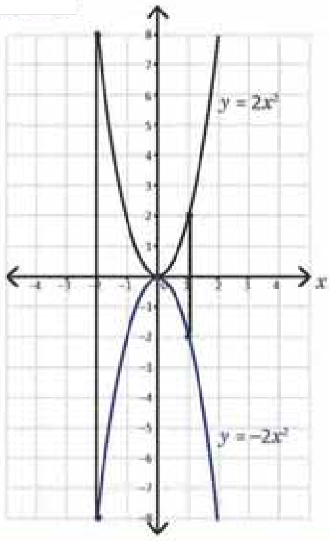
前の授業では、$0 < a < 1$ の時と $a > 1$ の時の関数 $y = ax^2$ について、a がもたらす変化を見ながら、また、$y = x^2$ と比較しながら、学習しました。この授業では、係数 a に負の記号を掛ける場合について習います。この時の変化を、$y = x^2$ と比較すると対称となる性質から、**x 軸に関して対称移動させる**と言います。

ねらい

ⓅⓈ では、この授業の直前の2授業で学習した時の状況と似た状況で、係数 a が負の数で0ではない時の放物線状のグラフを描かせます。b)では、この関数の特徴を詳細に分析してみせます。その際、その放物線が下に向かって開いた形状になることを主に取り上げます。

数学用語を正しく使わなければなりません。x 軸でグラフを折ると、$y = x^2$ と $y = -x^2$ のグラフが重なるわけですが、このグラフの変化を対象移動という呼び名で示さなければなりません。

一部の設問の解答：



$y = 2x^2$ と $y = -2x^2$ の二つの関数のグラフを同じ面に描くよう指示しなければなりません。

日付： **U4 1.6**

Ⓟ a) 表を完成させましょう。

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$-x^2$	−9	−4	−1	0	−1	−4	−9

$y = 2x^2$ と$y = -x^2$ のグラフを同じ面に描きましょう。

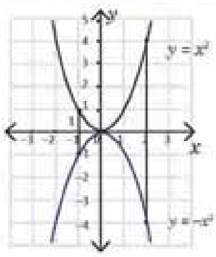
b) 二つのグラフの同じ点と異なる点を書いてみましょう。

c) $x = -3$ の時と、$x = 2$ の時、y の値はどうなっているでしょうか?

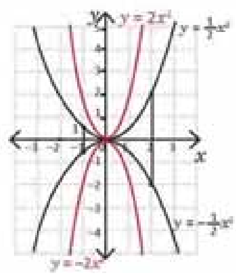
Ⓢ b) 同じ点： 原点 (0, 0) を通ること、対称軸は y 軸であること。

異なる点： $y = -x^2$ のグラフは x 軸の下にあり、共通している唯一の点は、原点 (0, 0) だけです。

c) y の値は、$y = -x^2$ の場合、いつも関数 $y = x^2$ の値の負の値です。



Ⓡ



宿題： 練習帳の87ページ

レッスン 1

1.7 $y = ax^2$ の特徴

P

$y = x^2$ と $y = -x^2$：のグラフを使って次の設問に答えましょう。

a) 関数 $y = 3x^2$、$y = -3x^2$、$y = \frac{1}{3}x^2$、$y = -\frac{1}{3}x^2$ のグラフを同じ面に描きましょう（前の授業で描いたグラフを使いましょう）。

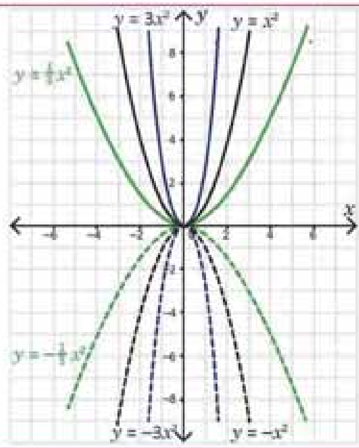
b) a が 0 以外の実数の場合（つまり、正の数の場合も負の数の場合もあり得ます）、関数 $y = ax^2$ のグラフの特徴を書いてみましょう。

S

a) 関数 $y = -3x^2$ のグラフは、$y = 3x^2$ のグラフを x 軸に関して対称移動させたものです。同様に、$y = -\frac{1}{3}x^2$ のグラフは、$y = \frac{1}{3}x^2$ のグラフを x 軸に関して対称移動させたものです。

b) 関数 $y = ax^2$ の特徴は次の通りです。

- a の値に関係なく、$y = ax^2$ のグラフは原点 (0, 0) を通る放物線で、y 軸が対称軸です。
- a の絶対値が 1 より大きい時、放物線は y 軸に近づきますが、a の絶対値が 0 と 1 との間にある時は、放物線は y 軸から遠ざかります。
- $a > 0$ の時、放物線は上に向かって開いた形状になります。
- $a < 0$ の時、放物線は下に向かって開いた形状になります。

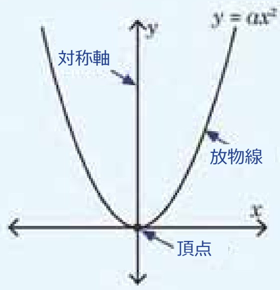


C

関数 $y = ax^2$ のグラフを放物線と呼び、y 軸が対称軸となっています。放物線とその対称軸が交差する点を**頂点**と呼びます。$y = ax^2$ の場合、頂点は原点 (0, 0) に一致します。

a の絶対値が 1 より大きい時、放物線は y 軸に近づきますが、a の絶対値が 0 と 1 との間にある時は、放物線は y 軸から遠ざかります。

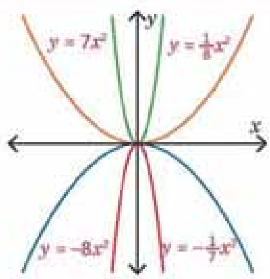
$a > 0$ の場合、放物線は上に向かって開きます。$a < 0$ の場合、放物線は下に向かって開きます。



次のそれぞれの関数を表すグラフを右の図からそれぞれ選びましょう。選んだ理由を説明しましょう。

a) $y = -\frac{1}{7}x^2$　　b) $y = -8x^2$

c) $y = 7x^2$　　d) $y = \frac{1}{8}x^2$



達成の目安

1.7 a の値から、関数 $y = ax^2$ と関数 $y = -ax^2$ の特徴を掴みましょう。

学習の流れ

前の授業で、関数 $y = ax^2$ と $y = -ax^2$ のグラフについて分析しました。この授業では、頂点、対称軸、そして a の取り得る値次第で放物線の形状が変わることなど、重要な概念を強調しながら、関数 $y = ax^2$ の特徴を学習します。

ねらい

ⓅⓈ では、a)で、提示された様々なケースでの放物線を描かせて、提示した関数の特徴を分析させます。
b)では、a)で学習したことをもとにして、関数 $y = ax^2$ の特徴を抽出して列記してあります。

Ⓒ では、放物線の特徴にはどのようなものがあるか、そして、a に取り得る値によってグラフの形状が異なってくることが提示してあります。
生徒が絶対値について把握することが大切です。関数の特徴を掴むのに必要だからです。

絶対値と言った場合に、生徒が放物線の特徴を理解できないのなら、a の値が同じ 3 で、かつ、同じ絶対値をもつ関数 $y = 3x^2$ と $y = -3x^2$ のグラフの形状がどのようになっているかに注目するよう示唆しなければなりません。

日付： U4 1.7

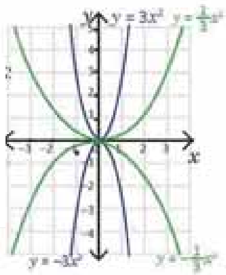
Ⓟ a) 関数 $y = 3x^2$、$y = -3x^2$、$y = \frac{1}{3}x^2$、$y = -\frac{1}{3}x^2$ のグラフを描きましょう。

b) a が 0 以外の全ての実数を取り得る場合、$y = ax^2$ の特徴を書きましょう。

Ⓢ

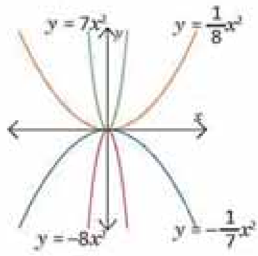
a) $y = -3x^2$ は、$y = 3x^2$ を対称移動させたものです。

$y = -\frac{1}{3}x^2$ は、$y = \frac{1}{3}x^2$ を対称移動させたものです。



$y = ax^2$ の特徴は次の通りです。
- $a > 0$ なら、グラフは上に向かって開いています。
- $a < 0$ なら、グラフは下に向かって開いています。
- $|a| > 1$なら、放物線は y 軸に近づきます。
- $0 < |a| < 1$なら、放物線は y 軸から遠ざかります。

Ⓡ



宿題： 練習帳の88ページ

レッスン 1

1.8 $y = ax^2$ の変動　パート1

P

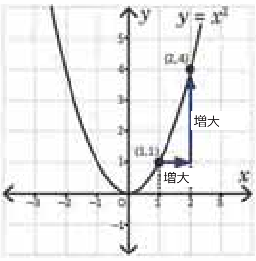
$y = x^2$ と $y = -x^2$ のグラフをもとにして、次の設問に答えましょう。

a) x の値が 1 から 2 に増える時、y の値は $y = x^2$ と $y = -x^2$ とでどのように変わるでしょうか?
b) x の値が -2 から -1 に増える時、y の値は $y = x^2$ と $y = -x^2$ とでどのように変わるでしょうか?

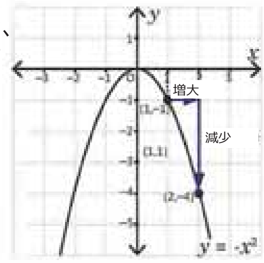
S

a) $y = x^2$ と $y = -x^2$ のグラフを見ますと、次の結論が導き出せます。

x の値が1から2に増える時、y の値は1から4に増えます。

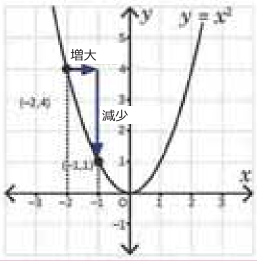


x の値が1から2に増える時、y の値は-1から-4に減ります。

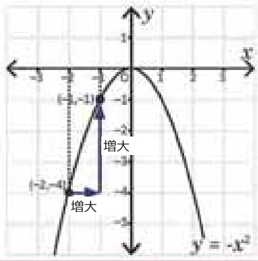


b) 前の設問と同様に、次の結論が導き出せます。

x の値が-2から-1に増える時、y の値は4から1に減ります。

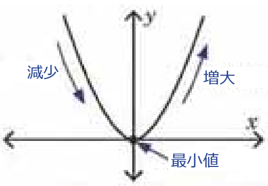
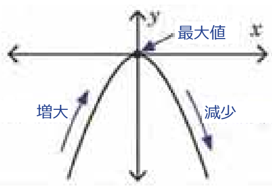


x の値が-2から-1に増える時、y の値は-4から-1に増えます。



C

関数が $y = ax^2$ で a の値が 0 以外の実数である場合（正または負）の場合で、x の値が増え続けるとき、次のようになります。

$a > 0$	$a < 0$
a) $x < 0$ の時、y の値は減ります。 b) $x > 0$ の時、y の値は増えます。 c) $x = 0$ であれば、$y = 0$ になります。この場合、$y = 0$ で、これは関数 $y = ax^2$ の**最小**値であると言います。	a) $x < 0$ の時、y の値は増えます。 b) $x > 0$ の時、y の値は減ります。 c) $x = 0$ であれば、$y = 0$になります。この場合、$y = 0$ で、これは関数 $y = ax^2$の**最大**値であると言います。
	

$y = x^2$ では、2から3の時、y の値は増えます。-3から-2の時、y の値は減ります。
$y = -x^2$ では、2から3の時、y の値は減ります。-3から-2の時、y の値は増えます。

1. 関数 $y = x^2$ と $y = -x^2$ のグラフから、x の値が2から3に増えると、y の値は、それぞれの場合でどのように変わるでしょうか?　x の値が-3から-2に増えた場合はどうでしょうか?
2. 関数 $y = x^2$ では、$y = -4$ を満たす x の値はあるでしょうか?解答し説明しましょう。

$y = x^2$ では、$x = 2$ の時、$y = 4$ になり、$x = -2$ の時も、$y = 4$ になります。さらに、y の値はいつも正の数になるので、$y = -4$を満たす数は一切ありません。
別の考え方として、関数 $y = x^2$ のグラフでは各値はいつも正の数になることに注目させましょう。

達成の目安

1.8 では、頂点の x 座標を含まない区間での関数 $y = ax^2$ の値の変化を描写します。

学習の流れ

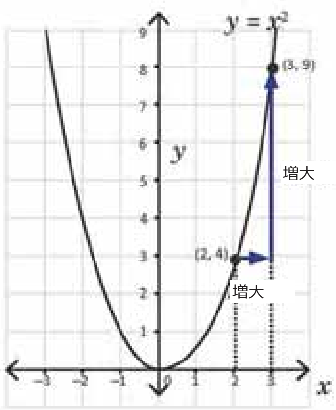
この授業では、x の値が増大するにつれて関数がどう変化するかを学習します。さらに関数の最大値と最小値についても学習します。これらの概念は、高校で、より広範かつ厳正に学ぶことになります。さらに、この授業では、頂点の x 座標を含まない区間についても学習します。

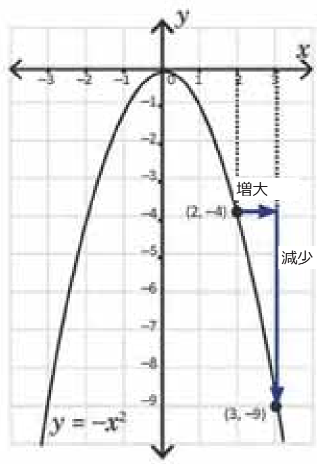
ねらい

ⓅⓈ では、x の値が増えるにつれて y の値がどのように変化するかを観察させ、二つの関数の間の違いに気づかせることが大切です。関数の最小値を示す点と最大値を示す点があることを認識させます。

Ⓒ では、y の値が、対称軸の一方の側で増え、もう一方の側で減ったりしている点が重要です。このことについては、区間の両端で y の値を比較すれば充分です。

一部の設問の解答：





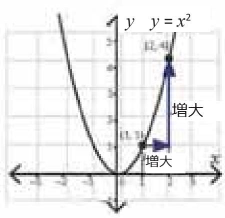
冒頭の設問については、授業を始める前に解の四つの放物線をボンド紙に描いておくことを推奨します。

日付： U4 1.8

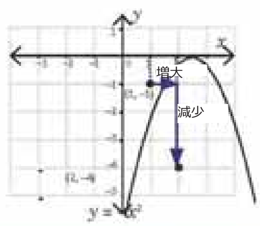
Ⓟ 関数 $y = x^2$ と $y = -x^2$ について、
a) x の値が1から2に増えると、y の値はどう変化するでしょうか?
b) x の値が–2から–1に増えると、y の値はどう変化するでしょうか?

Ⓢ a)

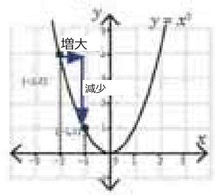
x の値が増えると、y の値は増えます。



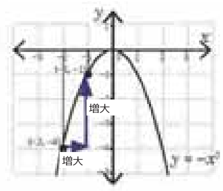
x の値が増えると、y の値は減ります。



x の値が増加すると、y の値が減少します。



x の値が増加すると、y の値が増加します。



Ⓡ 1. $y = x^2$ では、
x の値が2から3に増えると、y の値は増えます。
x の値が–3から–2に増えると、y の値は減ります。
$y = -x^2$ では、
x の値が2から3に増えると、y の値は減ります。
x の値が–3から–2に増えると、y の値は増えます。

宿題： 練習帳の89ページ

レッスン 1

1.9 $y = ax^2$ の変動　パート2

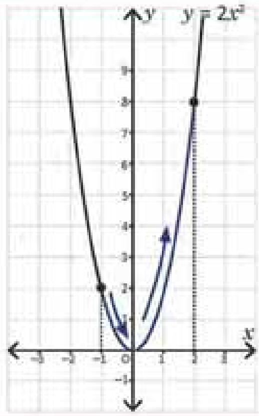
P

関数 $y = 2x^2$ で x の値が -1 と 2 の間にある時、y の値はどの値とどの値の間にあるでしょうか?

$y = 2x^2$ のグラフを使いましょう。

S

y の値を求めるには、まず $x = -1$ から放物線まで、次に $x = 2$ から放物線までの垂直方向の線分を描きます。



次のことが分かります。
- y の値の最小値は 0 です（$x = 0$ の時）。
- y の値の最大値は 8 です（$x = 2$ の時）。

よって、y の値は 0 と 8 との間にあります。

C

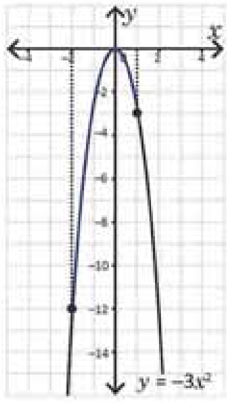
変数 x がとる値を**定義域**、変数 y がとる値を**域値**と言います。この二つの概念については高校でより掘り下げて学習します。

E

関数 $y = -3x^2$ で x の値が -2 と 1 の間にある時、y の値はどの値とどの値の間にあるでしょうか?

- y の値の最小値は -12 です（$x = -2$ の時）。
- y の値の最大値は 0 です（$x = 0$ の時）。

よって、y の値は -12 と 0 との間にあります。



1. 関数 $y = 3x^2$ の場合、x の値が -2 と 3 の間にある時、y の値はどの値とどの値の間にあるでしょうか?
   y の値は 0 と 27 の間にあります。
2. 関数 $y = -2x^2$ の場合、x の値が 2 と 4 の間にある時、y の値はどの値とどの値の間にあるでしょうか?
   y の値は -8 と -32 の間にあります。
3. 関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ の場合、x の値が -1 と 2 の間にある時、y の値はどの値とどの値の間にあるでしょうか?
   y の値は 0 と 2 の間にあります。

達成の目安

1.9 関数 $y = ax^2$ の定義域が頂点の x 座標を含む時、その関数 $y = ax^2$ の域値を求めましょう。

学習の流れ

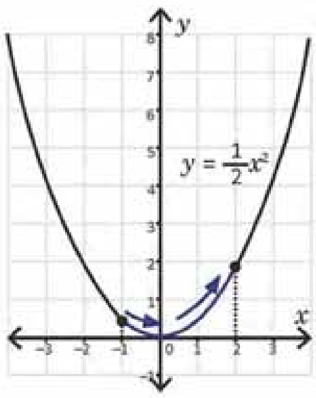
前の授業で関数 $y = ax^2$ の変動を学習しました。また、x の値が増える時の y の値の変化についても学習することで関数の最大値と最小値という概念を導入しました。この授業では、それほど厳密にではありませんが、**定義域**と**域値**の概念を導入します。この二つの概念については高校でより詳細に学習することになります。さらに、この授業では、頂点の x 座標を含む区間についても学習します。

ねらい

ⓅⓈ では、グラフのある点が対称軸を過ぎると、変化は増加に転じたり減少に転じたりすることに注意させます。
両端で y の値を比較することだけを扱うのではないことを忘れてはなりません。つまり、頂点が最小値または最大値になることにも触れなければなりません。

Ⓒ では、冒頭の設問に変化を加えています。この場合、x につく係数が負の数になっています。そのため、そのグラフは下に向かって開いています。この時、y の値に考えられる値はいつも負の数か 0 になることを強調します。

一部の設問の解答：



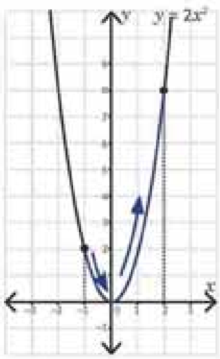
x の値が –1 と 2 の間にある時、
y の最小値は 0 です。
y の最大値は 2 です。

よって、y の値は 0 と 2 との間にあります。

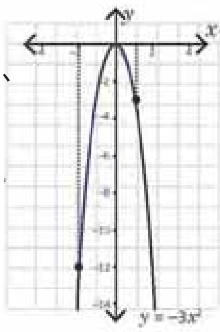
日付： **U4 1.9**

Ⓟ 関数 $y = 2x^2$ では、
x の値が –1 と 2 との間にある時、
y の値はどの値とどの値の間にあるでしょうか?

Ⓢ x の値が –1 と 2 との間にある時、y の最小値は 0 です。y の最大値は 8 です。
よって、y の値は 0 と 8 との間にあります。



Ⓔ
x の値が –2 と1との間にある時、
y の最小値は –12です。
y の最大値は 0です。
よって、y の値は –12 と 0 との間にあります。



Ⓡ

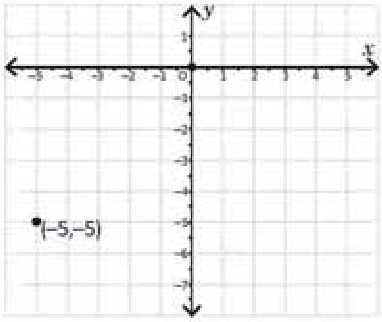
1. $y = 3x^2$ では、
x の値が –2 と 3 との間にある時、
y の値は 0 と 27 との間にあります。

宿題： 練習帳の90ページ

1.10 復習

1. 関数 $y=-\frac{1}{5}x^2$ の表とグラフを完成させましょう。

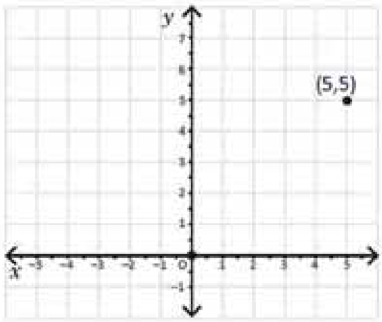
x	−5	−3	0	3	5
x^2	25	9	0	9	25
$-\frac{1}{5}x^2$		−1.8			−5



$x=-5$ の時も $x=5$ の時も、y の値は同じ −5になります。通常、$x=-m$ の時も $x=m$ の時も、y の値は同じ値になります。

2. 関数 $y=-\frac{1}{5}x^2$ の表とグラフを完成させましょう。前のグラフと比較しましょう。

x	−5	−3	0	3	5
x^2	25	9	0	9	25
$\frac{1}{5}x^2$					



3. 次の各設問では、y は x^2 に対して正比例しています。次のそれぞれの場合の定数の値を計算しましょう。

a) $x=2$ であれば、$y=24$ です。 $y=6x^2$
b) $x=8$ であれば、$y=16$ です。 $y=\frac{1}{4}x^2$
c) $x=2$ であれば、$y=-6$ です。 $y=-\frac{3}{2}x^2$

4. 同じ平面上で次の関数のグラフを描きましょう。

a) $y=\frac{3}{2}x^2$ b) $y=\frac{2}{3}x^2$ c) $y=-\frac{3}{2}x^2$ d) $y=-\frac{2}{3}x^2$

5. $y=\frac{1}{6}x^2$ と $y=-\frac{1}{6}x^2$ のグラフで、

a) x の値が1から6に増える時、y の値は二つのグラフでどのように変わるでしょうか? $y=\frac{1}{6}x^2$ では y は増えます。$y=-\frac{1}{6}x^2$ では y は減ります。
b) x の値が−12から−6に増える時、y の値は二つのグラフでどのように変わるでしょうか? $y=\frac{1}{6}x^2$ では y は減ります。$y=-\frac{1}{6}x^2$ では y は増えます。

6. $y=2x^2$ の場合、

a) x の値が−1と3との間にある時、y の値はどの値とどの値の間にあるでしょうか? y の値は0と18との間にあります。
b) x の値が−2と4との間にある時、y の値はどの値とどの値の間にあるでしょうか? y の値は0と32との間にあります。

達成の目安

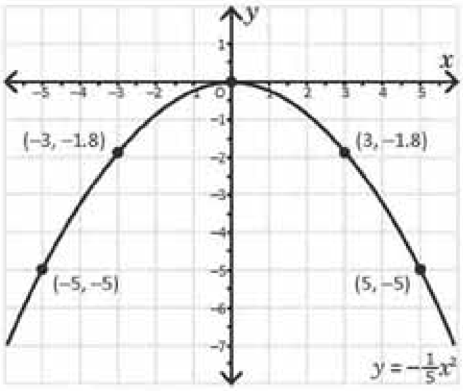
1.10 関数 $y = ax^2$ に関する問題を解きます。

一部の設問の解答：

1. 負の記号は、放物線が下に向かって開いており、頂点が (0, 0) であることを示します。グラフを描くには、頂点をとり、頂点の右側にある x の値と左側にある x の値の両方をとっていきます。

x	–5	–3	0	3	5
x^2	25	9	0	9	25
$-\frac{1}{5}x^2$	–5	–1.8	0	–1.8	–5

x = –5 の時も x = 5 の時も、y の値は同じ –5になります。通常、$x = -m$ の時も $x = m$ の時も、y の値は同じ値になります。

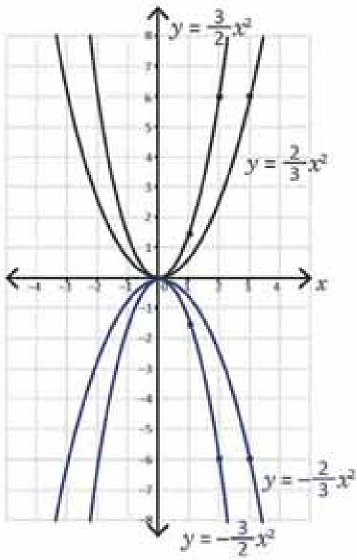


3. c) $y = ax^2$ であることが分かっています。
x = 2 の時、y = –6 になります。

$$-6 = a(2)^2$$
$$-6 = 4a$$
$$a = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

したがって、$y = -\frac{3}{2}x^2$ です。

4.



宿題： 練習帳の91ページ

1.11 復習

1. $y = -6x^2$の場合

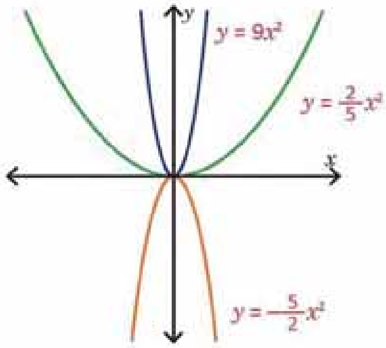
   a) xの値が–3と2との間にある時、yの値はどの値とどの値の間にあるでしょうか?yの値は–54と0との間にあります。
   b) xの値が–1と1との間にある時、yの値はどの値とどの値の間にあるでしょうか?yの値は–6と0との間にあります。

2. 左のそれぞれの関数を表すグラフを右の図からそれぞれ選びましょう。

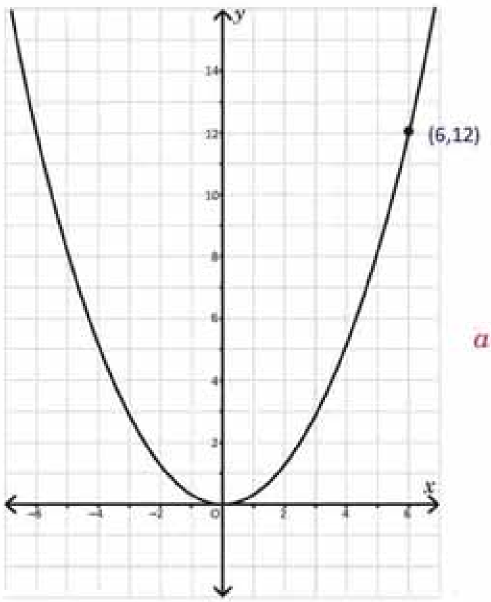
a) $y = \frac{2}{5}x^2$

b) $y = -\frac{5}{2}x^2$

c) $y = 9x^2$



3. 次のグラフは関数$y = ax^2$のものです。aの値はいくつでしょうか?



$a = 3, y = 3x^2$

達成の目安

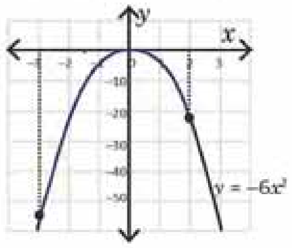
1.11 関数 $y = ax^2$ に関する問題を解きます。

一部の設問の解答：

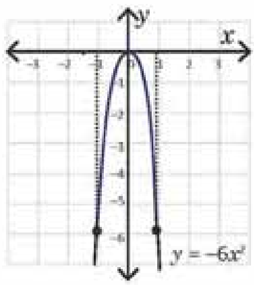
1.

a)

$x = -3$ の時、$y = -54$ になります。
$x = 2$ の時、$y = -24$ になります。
x の値が正の値と負の値の間にあるので、この関数のグラフは–54から0に増え、その後、0から–24に減ります。
よって、y の値は –54と0との間にあります。



b)



$x = -1$ の時、$y = -6$ になります。
$x = 1$ の時、$y = -6$ になります。
よって、y の値は –6と0との間にあります。

宿題： 練習帳の91ページ

3.

グラフでは、関数の曲線は (6,12) の点を通ります。

関数は $y = ax^2$ の形をとるので、次のようになります。

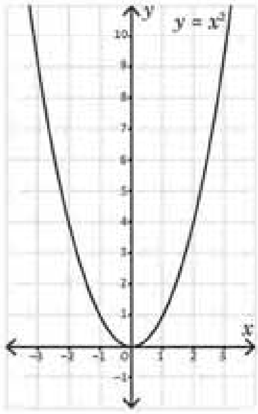
$$y = ax^2$$
$$12 = a(6)^2$$
$$a = \frac{12}{36}$$
$$a = \frac{1}{3}$$

レッスン 2 関数 $y = ax^2 + c$

2.1 関数 $y = ax^2 + c$; $c > 0$

P

$y = x^2$のグラフをもとにして、



a) 関数 $y = x^2 + 2$ の表とグラフを完成させましょう。

x	−2	−1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 + 2$	6				

$y = x^2 + 2$ のグラフは放物線になります。

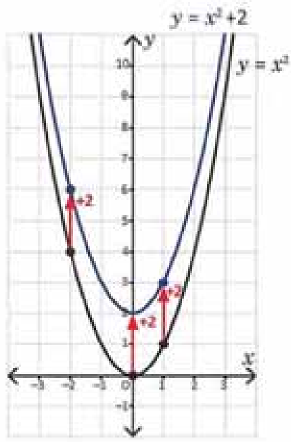
b) $y = x^2$ のグラフと $y = x^2 + 2$ のグラフでは何が似ていて何が異なるでしょうか?

c) $y = x^2 + 2$ のグラフを描く時、$y = x^2$ のグラフがどうなるか自分の言葉で説明してみましょう。

S

a) $y = x^2 + 2$の値は、$y = x^2$の値に2を足した値です。表は次のようになります。

x	−2	−1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 + 2$	6	3	2	3	6



b) 二つのグラフの似ている点： 二つとも放物線で、y 軸が変わらずに対象軸であること。

二つのグラフの異なる点： 重なる点がないこと。さらに、$y = x^2$ では (0, 0) が頂点ですが、$y = x^2 + 2$では (0, 2) が頂点で二単位分上にあることです。

c) $y = x^2 + 2$ のグラフを描く時、$y = x^2$のグラフが二単位分上に移動します。

C

a が 0 以外の実数で（正の値または負の値） で c が正の数 ($c > 0$) である時、$y = ax^2 + c$ のグラフは、$y = ax^2$のグラフを**単位 c の分だけ縦方向に**（上に） **移動したもの**になります。$y = ax^2 + c$ の対称軸は、y 軸で、その頂点は (0, c) になります。

次の関数のグラフを描きましょう。それぞれの場合について頂点がどうなるか書きましょう。

a) $y = x^2 + 3$ 頂点：(0,3)

b) $y = -x^2 + 3$ 頂点：(0,3)

c) $y = -2x^2 + 2$ 頂点：(0,2)

ユニット4

達成の目安

2.1 $y = ax^2$ のグラフをもとにして、単位 c の分だけ縦方向に移動させて、$c > 0$ の時の $y = ax^2 + c$ のグラフを描きましょう。

学習の流れ

前の課では、関数 $y = ax^2$ に関する様々なグラフを平面に描いて学習しました。 この時、定数 a がとり得る様々な値をもとにしました。また、関数の最大値や最小値、さらに定義域と域値など、重要な概念についても学習しました。

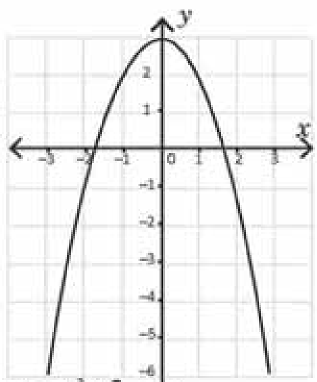
この課では、$y = ax^2 + c$ という形式の関数に焦点を当て、c の値によって発生する移動について分析します。

ねらい

ⓅⓈ では、$y = x^2$ のグラフを二単位移動させると、まさしく $y = x^2 + 2$ のグラフが描けることに注意させなければなりません。二つの関数の頂点も比較させましょう。

Ⓒ では、関数 $y = ax^2 + c$ が関数 $y = ax^2$ を単位 c の分だけ縦方向に移動させたものであることを正式に提示します。頂点の y 座標が c の値と一致することを理解させなければなりません。

一部の設問の解答：



$y = -x^2 + 3$

$x = 0$ なら、$y = 3$ になります。
したがって、頂点は (0, 3) です。

注意：
冒頭の設問の表を黒板に書く時、教科書に出ている通りに空欄を設けなければなりません。これらの空欄を埋めるのは適切な時でなければなりませんが、それは、生徒達が自ら解答を出した後になります。

日付： **U4 2.1**

Ⓟ $y = x^2$ のグラフをもとにします。

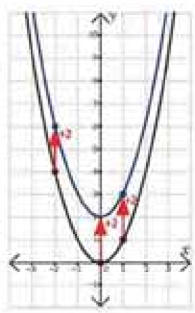
x	−2	−1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 + 2$	6	3	2	3	6

a) 関数 $y = x^2 + 2$ の表とグラフを完成させましょう。

b) 二つのグラフの同じ点と異なる点を書いてみましょう。

c) $y = x^2$ のグラフをもとにすると、$y = x^2 + 2$ のグラフはどのように描きますか?

Ⓢ



b) 似ている点： y 軸が対称軸であること。
異なる点： 二つのグラフの間で重なる点がないこと。

c) $y = x^2$ が二単位分上に移動すると、$y = x^2 + 2$ のグラフが得られます。

Ⓡ a) 頂点：(0, 3)
b) 頂点：(0, 3)
c) 頂点：(0, 2)

宿題： 練習帳の92ページ

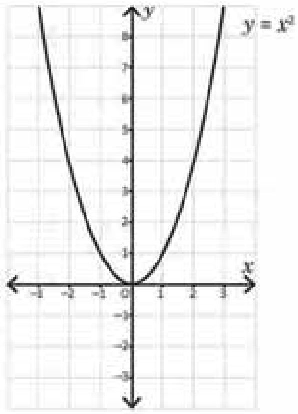
2.2 関数 $y = ax^2 + c$; $c < 0$

P

$y = x^2$のグラフをもとにして、

a) 関数 $y = x^2 - 2$ の表とグラフを完成させましょう。

x	−2	−1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 - 2$	2				



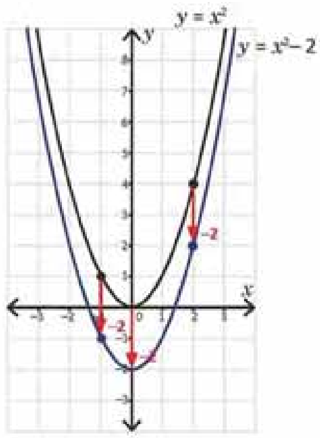
b) $y = x^2$ のグラフと $y = x^2 - 2$ のグラフでは何が似ていて何が異なるでしょうか?

c) $y = x^2 - 2$ のグラフを描く時、$y = x^2$のグラフがどうなるか自分の言葉で説明してみましょう。

S

a) $y = x^2 - 2$ の値は、$y = x^2$ の値から2を引いた値です。表は次のようになります。

x	−2	−1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 - 2$	2	−1	−2	−1	2



b) 二つのグラフの似ている点： 二つとも放物線で、 y 軸が変わらずに対象軸であること。
二つのグラフの異なる点： 重なる点がないこと。さらに、$y = x^2$ では (0, 0) が頂点ですが、$y = x^2 - 2$ では (0, − 2) が頂点で二単位分下にあることです。

c) $y = x^2 - 2$ のグラフを描く時、$y = x^2$ のグラフが二単位分下に移動します。

C

a が 0 以外の実数で（正の値または負の値） で c が負の数 ($c < 0$) である時、$y = ax^2 + c$ のグラフは、$y = ax^2$ のグラフを**単位 c の分だけ縦方向に**（下に） **移動したもの**になります。$y = ax^2 + c$ の対称軸は、y 軸で、その頂点は (0, c) になります。

次の関数のグラフを描きましょう。それぞれの場合について頂点がどうなるか書きましょう。

a) $y = x^2 - 3$
頂点：(0, −3)

b) $y = -x^2 - 3$
頂点：(0, −3)

c) $y = 2x^2 - 2$
頂点：(0, −2)

達成の目安

2.2 $y = ax^2$ のグラフをもとにして、単位 c の分だけ縦方向に移動させて、$c < 0$ の時の $y = ax^2 + c$ のグラフを描きましょう。

学習の流れ

前の授業で、$c > 0$ の時の関数 $y = ax^2 + c$ のグラフを学習しました。この時、関数 $y = ax^2$ のグラフを単位 c の分縦方向に（上に）移動させて $y = ax^2 + c$ のグラフを描くことができました。この授業で学習するのは、$c < 0$ の時の縦方向の移動についてです。

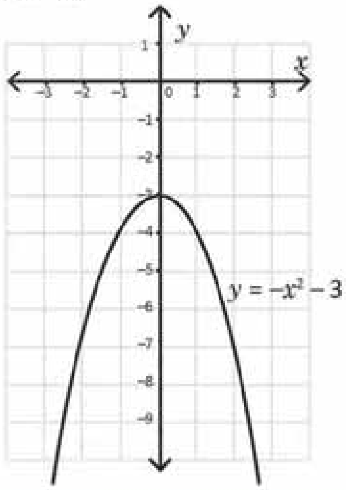
ねらい

ⓅⓈ では、関数 $y = x^2 - 2$ と関数 $y = x^2$ を比較させ、一方の関数を縦方向に二単位分移動させるともう一方の関数が得られると結論づけさせます。

一部の設問の解答：

$y = -x^2 - 3$

$x = 0$ なら、$y = -3$ になります。
したがって、頂点は $(0, -3)$ です。



注意：
これらの関数のグラフを描くには、九年次の教科書補完用教材のページ、特に183ページをコピーして生徒達に渡してグラフを容易に描けるようにし、デカルト平面でグラフを描くことにあまり時間をかけないようにします。

日付：　　U4 2.2

Ⓟ $y = x^2$ のグラフをもとにします。

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 - 2$	2	-1	-2	-1	2

a) 関数 $y = x^2 - 2$ の表とグラフを完成させましょう。

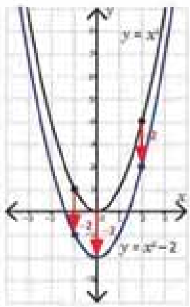
b) 二つのグラフの同じ点と異なる点を書いてみましょう。

c) $y = x^2$ のグラフをもとにすると、$y = x^2 - 2$ のグラフはどのように描きますか?

Ⓢ

b) 似ている点： y 軸が対称軸であること。
異なる点： 二つのグラフの間で重なる点がないこと。

c) $y = x^2$ が二単位分下に移動すると、$y = x^2 - 2$ のグラフが得られます。



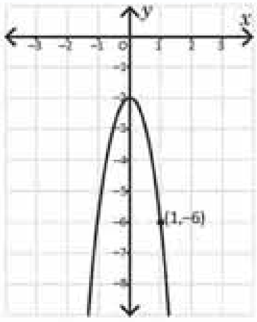
Ⓡ a) 頂点：$(0, -3)$
b) 頂点：$(0, -3)$
c) 頂点：$(0, -2)$

宿題： 練習帳の93ページ

2.3 関数の方程式を求めるための最初の条件

P

関数 $y = ax^2 + c$ が、図のとおりのグラフになるためには、a と c の値はいくつでなければならないでしょうか?

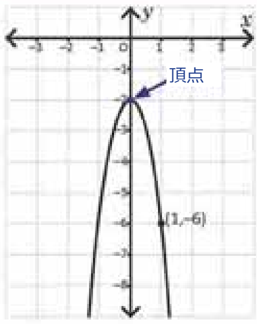


この設問では、a と c の値が正の値であるか否かについて何も言っていません。つまり、それらの値が負の数である場合もあり得ます。グラフを使って頂点を求めましょう。

S

この設問では、この関数が $y = ax^2 + c$ の形式であるとされています。グラフから、次の結論が導き出せます。

1. 放物線が下に向かって開いているので、a の値は負の値です。
2. 頂点は $(0, c)$ です。これは問題文から分かります。
3. 頂点が $(0, 0)$ の「下に」あるので、c の値は負の値です。



グラフを見ると、頂点が $(0, -2)$ にあることが確認できます。従って $c = -2$ です。$(1, -6)$ の点は放物線上にあります。つまり、$x = 1$ の時、$y = -6$ になるということです。これらの値と c の値を $y = ax^2 + c$ に代入し、a を求めます。

$$-6 = a(1)^2 + (-2)$$
$$a - 2 = -6$$
$$a = -6 + 2$$
$$a = -4$$

よって、a の値と c の値は、それぞれ–4と–2です。関数は、$y = -4x^2 - 2$ になります。

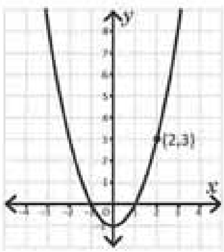
C

関数 $y = ax^2 + c$ とそのグラフ上の点 (m, n) から、a と c の値（正の数にも負の数にもなり得ます）を求めるには、次のようにします。

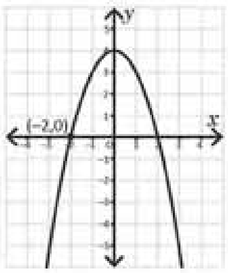
1. グラフ上で、放物線の頂点 $(0, c)$ の位置を見つけます。もし $(0, 0)$ の上にあるのなら、c の値は正の数になり、$(0, 0)$ の下にあるのなら、c の値は負の数になります。
2. n と m と c の値を代入して a の値を求めます。そうしますと、$n = am^2 + c$ になります。

1. 次のグラフは、$y = ax^2 + c$ の形式をとる関数のグラフです。それぞれについて a と c の値を求めましょう。

a)



b)



2. グラフが点 $(1, 4)$ と点 $(2, 10)$ を通る関数 $y = ax^2 + c$ の a と c の値を求めましょう。

達成の目安

2.3 最初に与えられた関数グラフの条件から、$y = ax^2 + c$ の a と c の値を求めましょう。

学習の流れ

この課では、関数 $y = ax^2 + c$ のグラフで、c の値に基づく縦方向の移動について学習します。2次関数をより掘り下げる水平移動については高校までに学習することになります。
ここでは、グラフに示されている最初の条件から、$y = ax^2 + c$ の形式のこの関数を求めなければなりません。

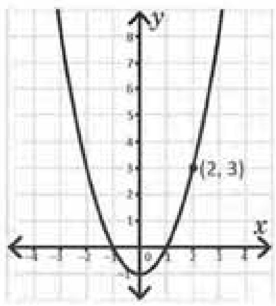
ねらい

ⓅⓈ では、頂点とグラフ上の点という最初に与えられた条件から、2次関数の方程式を求めさせます。

Ⓟ では、関数の方程式を求めるのにたどらなければならない手順と、最初に与えられた条件を正しく使う方法を見つけ出させます。

一部の設問の解答：

1.



グラフから頂点が (0, –1) であることが分かります。また、グラフの線上に点 (2, 3) があります。

代入していきます。

$$3 = a(2)^2 - 1$$
$$4a - 1 = 3$$
$$4a = 4,\ a = 1$$

したがって、$y = x^2 - 1$ となります。

2. $y = ax^2 + c$ に点 (1, 4) と点 (2, 10) から読み取れる値を代入します。次のようになります。

$$4 = a + c$$
$$10 = 4a + c$$

消去します。

$$\begin{array}{r} 4 = a + c \\ \underline{-10 = -4a - c} \\ -6 = -3a \\ a = 2 \end{array}$$

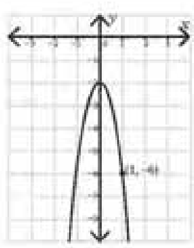
代入していくと、$a + c = 4$ になり、$c = 2$ となります。

したがって、$y = 2x^2 + 2$ となります。

日付： U4 2.3

Ⓟ

関数 $y = ax^2 + c$ があります。
この関数のグラフが図のとおりになる時の a と c の値を求めましょう。



Ⓢ

1. 放物線は下に向かって開いています。したがって、a の値は負の数です。
2. 頂点は (0, –2) です。したがって、$c = -2$ です。

各値を代入します。

$$-6 = a(1)^2 + (-2)$$
$$a - 2 = -6$$
$$a = -6 + 2$$
$$a = -4$$

したがって、$y = -4x^2 - 2$ となります。

Ⓡ 1.
a) $a = 1,\ y = x^2 - 1$
b) $a = -1,\ y = -x^2 + 4$

2. $a = 2,\ c = 2,\ y = 2x^2 + 2$

宿題：練習帳の94 ページ

2.4 復習

1. 次の関数のグラフを描き、それぞれの頂点を示しましょう。

a) $y = -3x^2 + 1$　頂点：(0, 1)

b) $y = 3x^2 - 1$　頂点：(0, −1)

c) $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$　頂点：(0, 2)

d) $y = -\frac{1}{4}x^2 - 2$　頂点：(0, −2)

2. 次の関数の頂点を示しましょう。

a) $y = 2x^2 - \frac{1}{2}$　頂点：$(0, -\frac{1}{2})$

b) $y = 2x^2 + \frac{1}{2}$　頂点：$(0, \frac{1}{2})$

c) $y = -2x^2 - \frac{1}{2}$　頂点：$(0, -\frac{1}{2})$

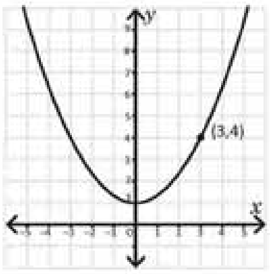
d) $y = -2x^2 + \frac{1}{2}$　頂点：$(0, \frac{1}{2})$

e) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$　頂点：(0, 2)

f) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$　頂点：(0, −2)

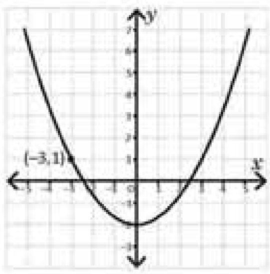
3. 次のグラフは、$y = ax^2 + c$ の形式をとる関数のグラフです。それぞれの a の値と c の値を求めましょう。

a)



$a = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{3}x^2 + 1$

b)



$a = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{3}x^2 - 2$

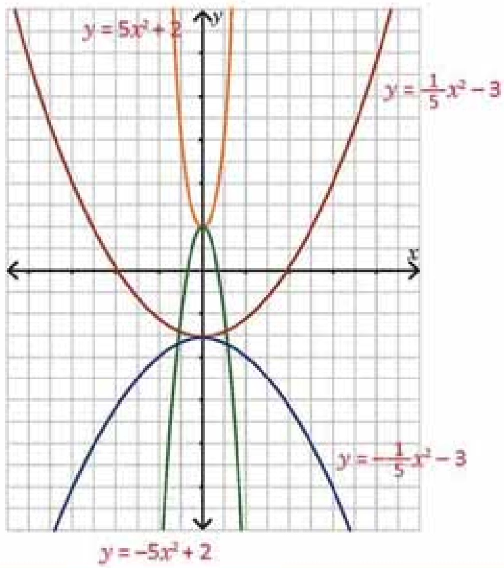
4. 次の関数のそれぞれを表すグラフを次の図から選びましょう。

a) $y = -5x^2 + 2$

b) $y = 5x^2 + 2$

c) $y = \frac{1}{5}x^2 - 3$

d) $y = -\frac{1}{5}x^2 - 3$

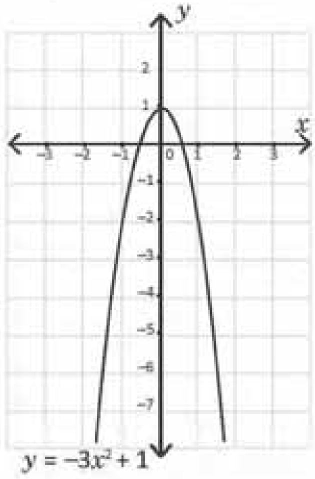


達成の目安

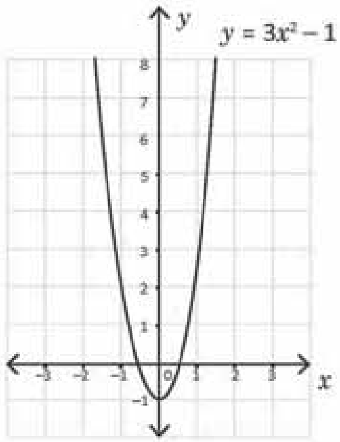
2.4 関数 $y = ax^2 + c$ に関する問題を解きます。

1.

a) $y = -3x^2 + 1$



b) $y = 3x^2 - 1$



3. b) グラフから頂点が (0, –2) であることが分かります。また、点 (–3, 1) がグラフの線上にあります。

$y = ax^2 + c$ に各値を代入していきます。

$$1 = a(-3)^2 + (-2)$$
$$9a = 2 + 1$$
$$9a = 3$$
$$a = \frac{1}{3}$$

したがって、$y = \frac{1}{3}x^2 - 2$になります。

宿題： 練習帳の95ページ

付録

年間学習量

算数教科の年間指導計画書を作り、その中で授業を行う日の欄にどの授業を行うかを記載しなくてはなりません。

テスト

教員が適宜コピーして使えるように、各ユニット毎のテスト、学期末テスト、学年末テストをここに掲載します。

結果の分析

各学期末には、表を使ってそれぞれの結果を分析することができます。

第1学期の結果分析					
	ユニット__テスト	ユニット__テスト	ユニット__テスト	ユニット__テスト	学期テスト
得られた平均					
平均6未満の学生の数					
平均6～8の学生の数					
平均8以上の学生の数					
第2学期の結果分析					
	ユニット__テスト	ユニット__テスト	ユニット__テスト	ユニット__テスト	学期テスト
得られた平均					
平均6未満の学生の数					
平均6～8の学生の数					
平均8以上の学生の数					
第3学期の結果分析					
	ユニット__テスト	ユニット__テスト	ユニット__テスト	ユニット__テスト	学期テスト
得られた平均					
平均6未満の学生の数					
平均6～8の学生の数					
平均8以上の学生の数					

年間学習量：2020											
	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月
1		X	X					X			X
2		X			X			X			
3					X					X	
4	X			X			X			X	
5	X			X			X		X		
6						X			X		
7			X			X					X
8		X	X					X			X
9		X			X			X			
10					X					X	
11	X			X			X			X	
12	X			X			X		X		
13						X			X		
14			X			X					X
15		X	X					X			X
16		X			X			X			
17					X					X	
18	X			X			X			X	
19	X			X			X		X		
20	U1 1.1					X			X		
21	1.2		X			X					X
22		X	X					X			X
23		X			X			X			
24					X					X	
25	X			X			X			X	
26	X			X			X		X		
27						X			X		
28			X			X					X
29		X	X					X			X
30					X			X			
31					X					X	

年間学習量：											
	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											
11											
12											
13											
14											
15											
16											
17											
18											
19											
20											
21											
22											
23											
24											
25											
26											
27											
28											
29											
30											
31											

REPÚBLICA DE EL SALVADOR EN LA AMÉRICA CENTRAL