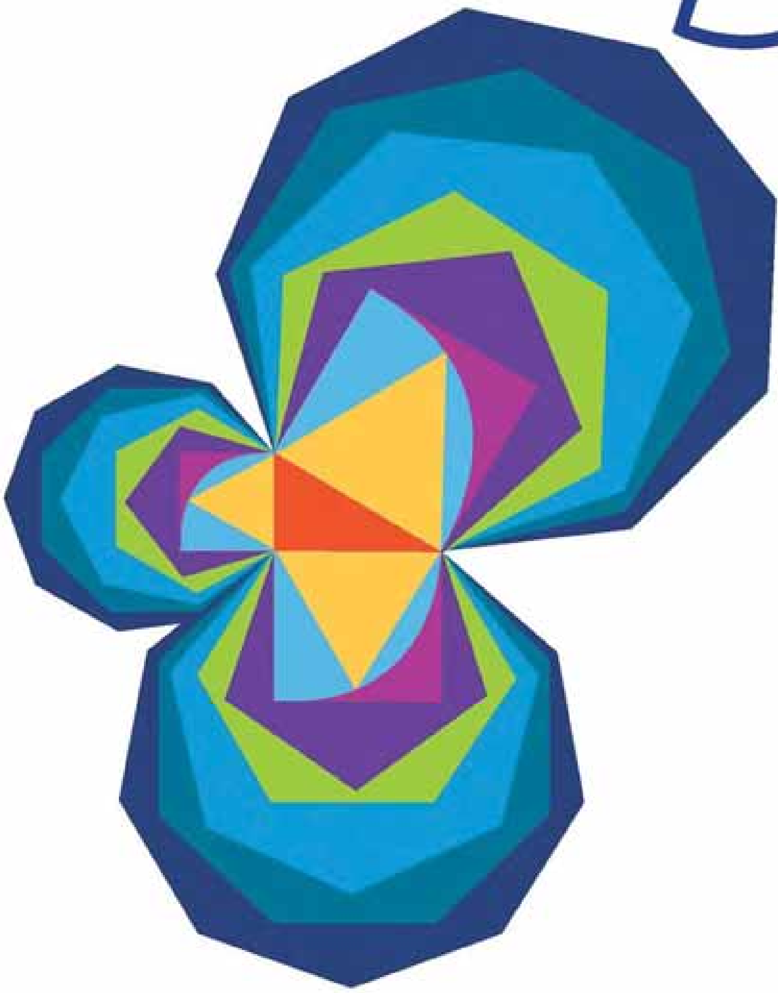
エルサルバドル政府

教育省

算数 9



第2巻

教師用指導書

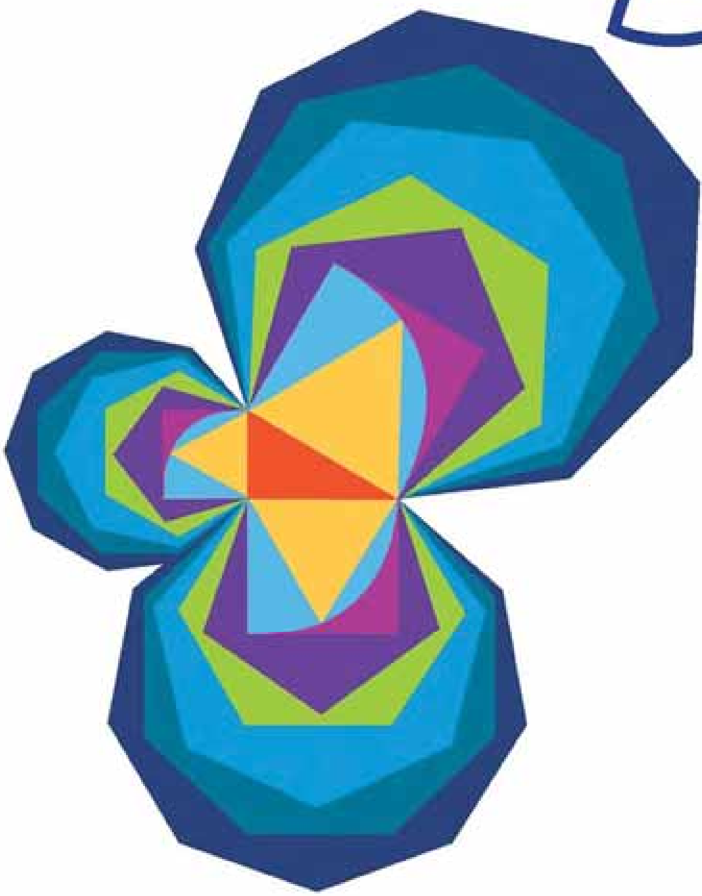
第二版

第2巻 9 第2版 算数 教師用指導書

エルサルバドル政府

教育省

算数 9



第2巻

教師用指導書

第二版

ESMATE

JICA

Carla Evelyn Hananía de Varela
教育科学技術大臣

Ricardo Cardona Alvarenga
教育科学技術省副大臣
善意協力

Wilfredo Alexander Granados Paz
中等（第3サイクルおよび中等）教育局長
名誉代理

Janet Lorena Serrano de López
基礎教育局長
名誉代理

Santiago Alfredo Flores Amaya
予防社会プログラム局長
名誉代理

Roberto Alejandro Rivera Campos
科学技術イノベーション教育課長

Félix Abraham Guevara Menjívar
科学技術イノベーション教育部長（数学）

Gustavo Antonio Cerros Urrutia
中等教育カリキュラム専門家部長

教育省の執筆及びレイアウトチーム

Ana Ester Argueta Aranda
Erick Amílcar Muñoz Deras
Reina Maritza Pleitez Vásquez
Diana Marcela Herrera Polanco
Francisco Antonio Mejía Ramos
Norma Elizabeth Lemus Martínez
Salvador Enrique Rodríguez Hernández
César Omar Gómez Juárez

デザイン及びレイアウトの校正
Francisco René Burgos Álvarez
Judith Samanta Romero de Ciudad Real

文体修正
Ana Esmeralda Quijada Cárdenas

国際協力機構（JICA）を通じた日本の技術協力

教育的見地から表紙の図では、辺の数が異なる多角形を用いてピタゴラスの定理と図形の相似を表現しています。

372.7
M425 算数9 ［電子資料］ ：教師用指導書：第2巻／
Ana Ester Argueta、Aranda… ［他］ ；
レイアウト：Francisco René Burgos Álvarez、
Judith Samanta Romero de Ciudad Real -- 第2版 --
サンサルバドル、エルサルバドル：教育省（MINED）、2020年。
監修 電子資料1件、（216ページ：図解入り、28 cm. – （Esmate）

電子データ［1ファイル：1 pdf、10.5 MB］。 -- http://www.mined.gob.sv

ISBN 978-99961-355-7-6（電子書籍）

1. 算数 – 教科書。2. 算数 – 教授 -- ガイド
I. Argueta Aranda、Ana Ester、共著、II. タイトル。

BINA/jmh

教師のみなさん

心からご挨拶を申し上げ、エルサルバドルの全国民のために重要な仕事をされていることに感謝します。

教育科学技術省（MINEDUCYT）は初中等教育算数・数学指導力向上プロジェクト（ESMATE）を通じて、みなさんのために算数・数学科目の教師用指導書を作成しました。この指導書は日常の指導活動で重要なツールとなるでしょう。

この資料は、当科目の授業を展開する方法を具体的に指導し、その結果エルサルバドルの生徒たちの学びを大きく向上させることを主な目的としています。

この指導教本は生徒用の教科書に対応する授業内容の提案となっていることから、算数学習プログラムの規程を具体的に実現するものであると言えます。

みなさんがこの資料を最大限に活用し、私たちの愛する国の発展に貢献し続けるべく、全力で努力し献身されると確信しています。

敬具

Carla Evelyn Hananía de Varela
教育科学技術大臣

Ricardo Cardona Alvarenga
教育科学技術省副大臣
善意協力

目次

ユニット５：相似な図形

このユニットのねらい

– 辺と角度から、相似である形を見分け作成します。
– 問題を解くにあたり、三角形の相似を用いて推測したり、相似な形や立体の特徴を応用します。

関連と発展

6 学年

ユニット４：比率と百分率
- 比率
- 百分率

ユニット５：比例
- 比率
- 正比例
- 反比例

7 年生

ユニット６：正比例と反比例
- 正比例
- 反比例
- 比例の応用

8 年生

ユニット５：三角形の合同条件
- 三角形の合同

9 学年

ユニット５：相似な図形
- 相似
- 三角形の相似
- 相似と平行
- 相似と相似三角形の応用

ユニット６：ピタゴラスの定理
- ピタゴラスの定理
- ピタゴラスの定理の応用

ユニット７：円周角と中心角
- 中心角と円周角
- 中心角と円周角の応用

高校１年

ユニット５：　斜三角形の解法
- 比率　鋭角の三角比
- 比率　非鋭角の三角比
- 斜三角形の解法

ユニット学習計画

レッスン	時間	授業
1. 相似	1	1. 線分の比
	1	2. 比例と線分
	1	3. 相似な図形
	1	4. 相似な図形の特徴、パート1
	1	5. 相似な図形の特徴、パート2
	1	6. 相似な図形の作成
	1	7. 復習問題
2. 三角形の相似	1	1. 三角形の合同条件 (1)
	1	2. 三角形の合同条件 (2)
	1	3. 三角形の合同条件 (3)
	1	4. 復習問題
	1	5. 復習問題
3. 相似と平行	1	1. 中点連結定理、パート1
	1	2. 中点連結定理、パート2
	1	3. 四角形に内接した平行四辺形
	1	4. 平行線を利用した相似、パート1
	1	5. 平行線を利用した相似、パート2
	1	6. 線分の比からの平行、パート1
	1	7. 線分の比からの平行、パート2
	1	8. 線分の比からの平行、パート3

レッスン	時間	授業
	1	9. 復習問題
4. 相似と三角形の相似の応用	1	1. 地図上の2点間の距離
	1	2. 相似多角形の面積
	1	3. 相似する立体の体積
	1	4. 三角形の相似を利用して解く問題
	1	5. 復習問題
	1	ユニット 5 のテスト
	1	2 学期テスト

26 時間の授業 + ユニット 5 テスト + 2 学期テスト

各レッスンの要点

レッスン 1：相似
線分と線分の比の比率を学びます。この概念は、後に定規とコンパスを用いて作成する二つの合同な形に取り組む際に役立ちます。

レッスン 2：三角形の相似
二つの合同な形の特徴を用いて定められる三つの合同条件は、さまざまな問題を解くのに使われます。

レッスン 3：相似と平行
この課では三角形の合同を用いて、中点連結定理、平行線の定理、三角形と比の定理といった幾何学で重要な定理を学びます。

レッスン 4：相似と相似三角形の応用
教科書の問題や今後の算数の学習において、三角形の合同に関するすべての決まり事を駆使することで学習した線分間の比率のほか、合同の応用方法を学びます。

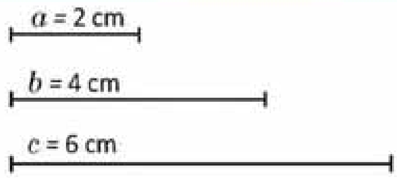
レッスン 1 相似

1.1 線分の比

P

a) 線分 a の長さは、線分 b の長さに対して何倍ですか?

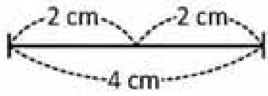
b) 線分 a の長さは、線分 c の長さに対して何倍ですか? 線分 b のは線分 c に対してどうなりますか?



S

a) 線分 a の長さを線分 b の長さと比較することにより、a は b の $\frac{1}{2}$ だと分かります。

b) 指数 $\frac{a}{c}$ を計算して、a の長さは c の長さの $\frac{1}{3}$ だと分かります。同様にして、b の長さは c の長さの $\frac{2}{3}$ だと分かります。

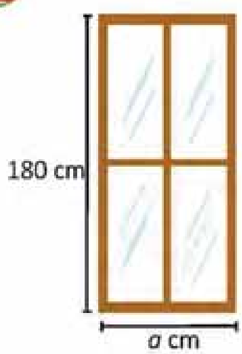


C

2つの線分の長さを表す数同士の指数を、**線分の比**と呼びます。この比は、いかなる単位を付けて表すこともありません。つまり、センチメートル、メートル、その他いかなる長さの単位も伴わないということです。

冒頭の設問では、線分 a と b の比は、$\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ であることから、$\frac{1}{2}$ です。これは 1 : 2 とも表し、「1 対 2」と読みます。a と b の順序に注意を払わなければなりません。一般に、線分の比は約分して記述します。

E



高さが 180 cm で、幅と高さの寸法の比が $\frac{4}{9}$ で与えられている窓の幅の寸法は、どれくらいでしょうか? （図参照）

窓の幅と高さを、この両者の比に等しくします。ここで、順序に気を付けなければなりませんよ。つまり、当てはまる場合に合わせて、短い方の長さ 割る 長い方の長さ、になるようにするか、又はその逆にします。

窓の幅の寸法のセンチメートル値を a で表します。もし、幅と高さの寸法が $\frac{4}{9}$ の比にあるのであれば：

$$\frac{\text{幅}}{\text{高さ}} = \frac{4}{9}$$

値を前の等式に代入して、a の値を移項して：

$$\frac{a}{180} = \frac{4}{9}$$

$$a = 180\left(\frac{4}{9}\right)$$

$$a = 80$$

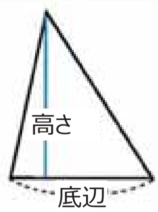
よって、窓の幅の寸法は 80 cm になります。

1. 線分 a = 4 cm と線分 b = 20 cm の間の比を計算しましょう。

比 $\frac{1}{5}$

2. 三角形の底辺と高さは $\frac{5}{7}$ の比になっています。もし底辺の長さが 10 cm だとすると、三角形の高さはどれだけの寸法になりますか? （図参照）

高さ＝14 cm



達成の目安

1.1　線分の長さを、与えられた比によって、求めることができることです。

学習の流れ

比の概念は、生徒にとって新しい知識になります。初学年の頃から、これに関する学習を **倍の数** の概念を使って開始し、2つの数量の間の比較として比を定めました。例えば、ある比は 5 : 3 のような形で書き表し、数 $\frac{5}{3}$ は比の値として知られています。第 6 学年では、この内容についてより詳細な学習をし、第 7 学年では、それぞれで用いるグラフも含めて、正比例と反比例の分析に集中しました。このユニットでは、線分同士の比較に係っていることから、比の概念と比例の概念は決定的に重要な意味を持ちます。

ねらい

Ⓟ , Ⓢ 狙いは、線分 a、b、c の長さを比較し、互いの線分の間の比を見付けることです。この活動では、目盛りの付けられた紐を使用することができます。

Ⓒ 2つの長さの間の比と、それを書き表す方式について言及します。

Ⓔ 比においては順序に注意を払うことが重要です。例では、幅は分子にあり高さは分母にありますので、これによりどのような比についても、a と b が言及されていれば、分数 $\frac{a}{b}$ に確定することができます。しかし、もし b と a として言及される場合には、分数 $\frac{b}{a}$ として確定しなければなりません。

一部の項目の解答：

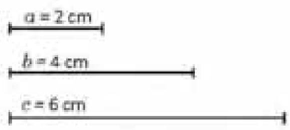
2.
$$\frac{\text{底辺}}{\text{高さ}} = \frac{5}{7}$$
$$\frac{\text{高さ}}{10} = \frac{7}{5}$$
$$\text{高さ} \times 5 = 7 \times 10$$
$$\text{高さ} = \frac{7 \times 10}{5} = 14$$

よって、高さは 14 cm です。

直面しうる困難：
もし生徒が比と比例の概念を習得できないでいれば、授業 1 時限を超えない時間を使用して、この内容について補強することができます。

日付： **U5 1.1**

Ⓟ a) a の長さは、b の長さに対して何倍ですか?
b) 次の長さは何倍になっていますか?
a が c に対して。
b が c に対して。

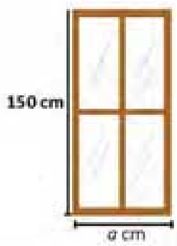


Ⓢ

a) a は b の $\frac{1}{2}$

b) a は c の $\frac{1}{3}$, b は c の $\frac{2}{3}$

Ⓔ 幅と高さは $\frac{9}{4}$ の比になっています。
a の値を計算しましょう。



幅と高さは $\frac{9}{4}$ の比になっているので：

$$\frac{\text{幅}}{\text{高さ}} = \frac{4}{9}$$
$$\frac{a}{180} = \frac{4}{9}$$
$$a = 180\left(\frac{4}{9}\right)$$
$$a = 80$$

Ⓡ 1. $\frac{1}{5}$

2. 高さ＝14 cm

宿題：練習帳の100ページ

レッスン 1

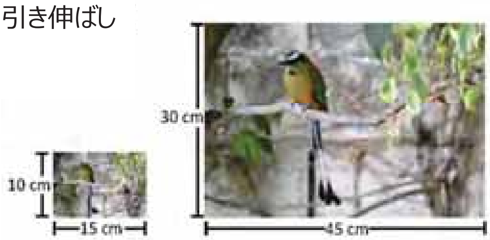
1.2 比例と線分

P

カルロスは、1 羽のトロゴスの写真を撮りましたので、これを引き伸ばして額に入れることにしました。

a) 小さい写真と引き伸ばした写真の高さの比は、どれだけになっていますか? 底辺同士ではどうですか?

b) これら 2 つの比の間には、どのような関係がありますか?



S

a) 小さい写真の高さは 10 cm で、引き伸ばした写真の高さは 30 cm です。つまり、両方の高さの比（小さい方 割る 引き伸ばした方）は $\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$ で、1 : 3 のように書き表すこともできます。底辺についても同様の手順で行い、両方の比は $\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$ または 1 : 3 になります。

b) 両方の比を約分すると、結果は $\frac{1}{3}$ となり、すなわち等しくなります。
このようなことが起こるとき、写真の高さと底辺は「比例」している、といいます。

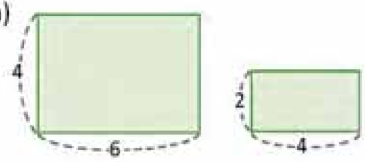
また、比を、大きい方の高さ 割る 小さいほうの高さ で計算して $\frac{30}{10}=\frac{3}{1}$ とし、3 : 1 と書き表すこともできます。底辺についても同じ方法で行うこともできますが、確実に同じ順序で行わなければなりません。

C

2つの比の同等性について、つまり 2 つの比がが等しいことを、**比例** と呼びます。例えば、$\frac{10}{30}=\frac{15}{45}$ で、この両者を約分して、$\frac{1}{3}$ または 1 : 3 と書き表すことができます。

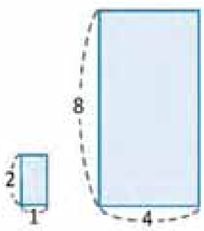
1. 以下のような長方形の組が与えられるとき、それぞれの組で、底辺と高さは比例しているでしょうか? 自分の答えを証明しましょう。

a)



比例していません。

b)

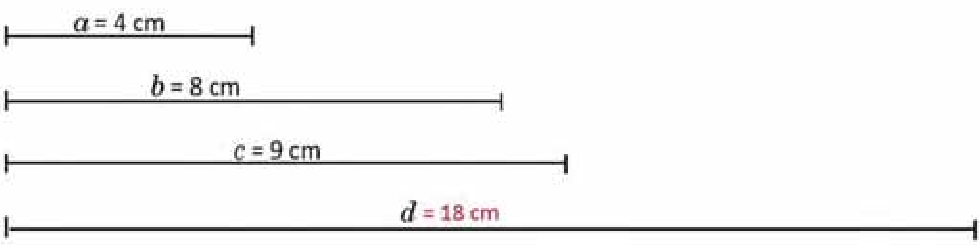


比例しています。$\frac{1}{4}$ を満たしています。

c)

比例しています。$\frac{5}{6}$ を満たしています。

2.次の図では、線分 a と b が c と d に比例するようにするには、線分 d はどんな長さでないといけないでしょうか?



ユニット5

99

達成の目安

1.2　線分の間の比を利用することにより、ある線分の組が、もう 2 本と比例しているかどうか求めることができることです。

学習の流れ

第 1 学年から第 6 学年までは、比例を、2 つの比が同等であることと定め、比例関係を満たす数量や、正比例と反比例のグラフについて分析します。このユニットでは、この概念は非常に重要です。それは、2 つの図形は、対応する角が等しく、その辺が比例関係を持つときに、相似である、と定めるからです。

ねらい

Ⓟ , a) では、前回授業で説明したものと同種の項目について解答します。b)　では、目的は両方の比を比較し、それらの比の値が等しいと結論づけることで、これにより **線分の比例** の概念が導入されます。

比例の概念について正式に定義します。同様に 2 つの数量の比較をした前授業との違いは、ここでは、その比較は 2 つの図形について実施するということです。

一部の項目の解答：

1. c) 高さの比：

$$\frac{3}{3.6} = \frac{3}{3.6} \times \frac{10}{10} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

底辺の比：

$$\frac{4}{4.8} = \frac{4}{4.8} \times \frac{10}{10} = \frac{40}{48} = \frac{5}{6}$$

これにより、両方の比は等しく、よって底辺と高さは比例しています。

2. a と b について言及があったので、前ページで説明したように、$\frac{a}{b}$ と書かなければなりません。
与件より：

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$
$$\frac{4}{8} = \frac{9}{d}$$
$$d(4) = 8(9)$$
$$d = \frac{72}{4} = 18$$

したがって、d = 18 cm

日付：　　　　US 1.2

Ⓟ

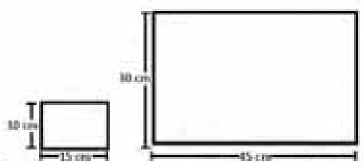


写真　　引き伸ばした写真

Ⓢ a) 計算しましょう：高さの比
底辺の比
b) 両方の比はどのようになっていますか?

a)　高さの比 $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ または 1 : 3
底辺の比 $\frac{15}{45} = \frac{1}{3}$ または 1 : 3

b) 両方の比とも、結果は $\frac{1}{3}$ です。

Ⓡ 1. a) 高さの比：　$\frac{4}{2} = 2$
底辺の比：　$\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
比例していません。
b) 比例しています。　比 $\frac{1}{4}$
c) 比例しています。　比 $\frac{5}{6}$

2.　d = 18 cm.

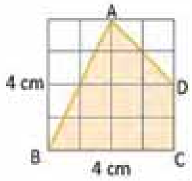
宿題：練習帳の101ページ

レッスン 1

1.3 図形の相似

P

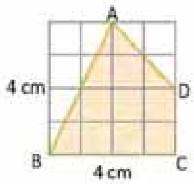
四角形 ABCD を、その形を変えることなしに、半分に縮小し、また 2 倍に拡大しましょう。

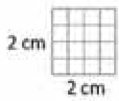


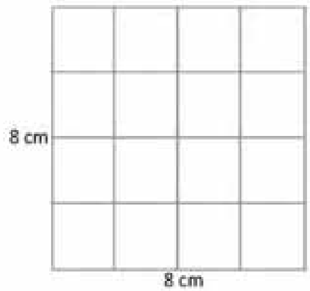
四角形の辺を、半分に縮小し、また 2 倍に拡大しましょう。

S

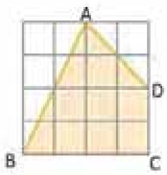
2 つの正方形で、一方は辺が 2 cm のもの、もう一方は辺が 8 cm のものを描きます。元の碁盤目状の四角には 16 の正方形がありますが、これと同じ形に 2 cm と 8 cm の正方形を、内部に 16 のマスができるように碁盤目状にします：

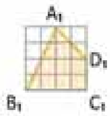


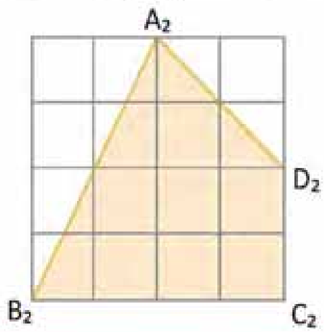




次に、両方の碁盤目状の四角に、四角形を、その形を保存して描きます。







小さい方の碁盤目状四角の中の正方形は、辺が 5 mm になっていて、大きい方の碁盤目状四角の中のものは辺が 2 cm になっています。

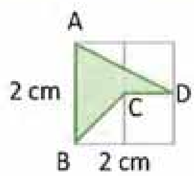
C

2 つかそれ以上の図形は、必ずしも同じ大きさでなくても（前例のように）、同じ形を持つとき、**相似**であるといいます。ある図形を縮小または拡大すると、結果として元の図形と相似な図形になります。

相似性を示すためには、記号 ~ を用います：四角形 ABCD ~ 四角形 $A_1B_1C_1D_1$ であり、これは「四角形 ABCD は四角形 $A_1B_1C_1D_1$ に相似である」（図形は対応する頂点の順に読んでいきます）と読み、また四角形 ABCD ~ 四角形 $A_2B_2C_2D_2$ です。

1.右の四角形 ABCD を 2 倍に拡大し、その結果生じる図形を描きましょう。

2.四角形 ABCD を 3 倍に拡大するときには、碁盤目状四角の寸法はどのようになるでしょうか？その結果生じる図形を描きましょう。



100

達成の目安

1.3 四角形を縮小し、または拡大し、相似な図形を碁盤目状四角を用いて描くことができることです。

学習の流れ

第 1 学年から第 6 学年までは、比例を、2 つの比が同等であることと定め、比例関係を満たす数量や、正比例と反比例のグラフについて分析します。このユニットでは、この概念は非常に重要です。それは、2 つの図形は、対応する角が等しく、その辺が比例関係を持つときに、相似である、と定めるからです。

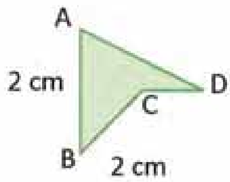
ねらい

Ⓟ, a) では、前回授業で説明したものと同種の項目について解答します。b) では、目的は両方の比を比較し、それらの比の値が等しいと結論づけることで、これにより **線分の比例** の概念が導入されます。

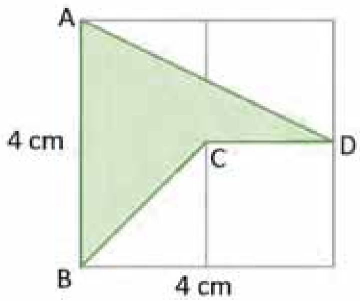
比例の概念について正式に定義します。同様に 2 つの数量の比較をした前回授業との違いは、ここでは、その比較は 2 つの図形について実施するということです。

一部の項目の解答：

1.



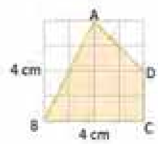
2倍に拡大：



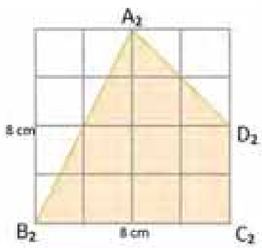
2. 四角形 ABCD を 3倍に拡大する場合には、碁盤目状四角は、各辺が 6 cmでないとならず、後で前項のように図形を描きます。

日付：　U5 1.3

Ⓟ 四角形 ABCD の場合
定規と鉛筆を用いて：
半分に縮小します。
2 倍に拡大します。

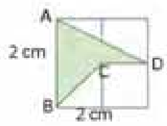


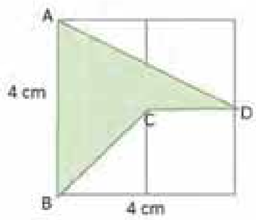
Ⓢ 2 つの正方形で、一方は辺が 2 cm のもの、もう一方は辺が 8 cm のものを描きます。両方の正方形を、元の図形のように碁盤目状にします。



元の図形の形を保存して行います。

Ⓡ 1.





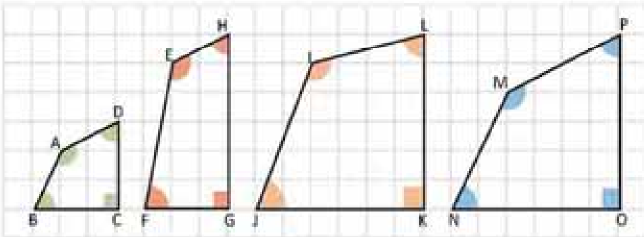
2. 碁盤目状四角の寸法は 6 cm でなければなりません。

宿題：練習帳の102ページ

1.4 相似な図形の特徴 第1部

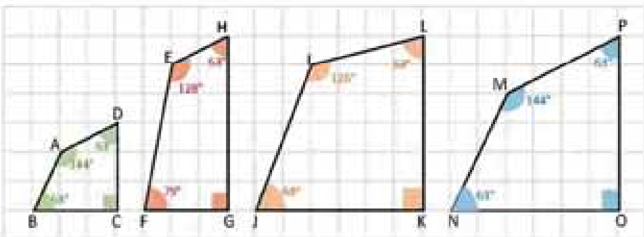
P

どの四角形が、四角形 ABCD と相似ですか?



S

四角形 ABCD を拡大すると、その結果は、これと相似なもう一つの四角形であり、ただその辺の長さが変わるのみで、その角の大きさは変わりません。分度器で四角形の角を計測して比較します：

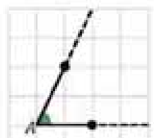


四角形 ABCD と四角形 EFGH の場合： ∢B は ∢F と合同でなく、よって、同じ形を持たないことから、EFGH は ABCD と相似ではありません。

ABCD の角を IJKL のそれと比較しても、同様のことが起こります：
∢J は ∢B と合同でありません。

最後に、四角形 ABCD と四角形 MNOP については： 前者の角は後者の角と合同で、ABCD を 2 倍に拡大すると、その結果は MNOP と等しくなります。よって、MNOP は ABCD と相似です。

ある角の辺を延長した場合、その角の角度は保たれます。



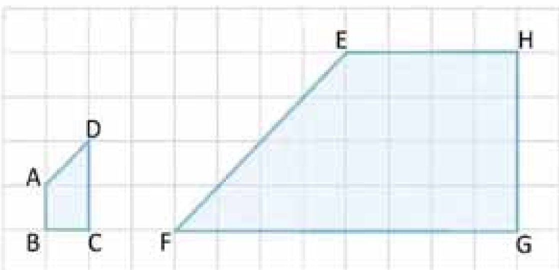
頂点が A である角の角度を示す際には、∢A と記述します。

C

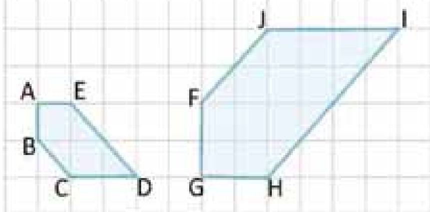
2つかそれ以上の相似な多角形については、その対応する角が合同となっています。言い換えれば、その角度が等しくなっています。多角形については、同じ位置にある角を **対応する角** といいます。

それぞれの多角形の組について、対応する角を認識しましょう。

a)



b)



達成の目安

1.4　多角形同士の対応する角を認識し、これに基づき、多角形の相似を判定できることです。

学習の流れ

前回授業では、ある 2 つの図形は、同じ形を保存していれば、大きさが異なっても、相似である、と定義しました。この授業で触れる内容では、形を保存すれば、同じ角度を保存した対応する角が存在するということを認識することを目指します。

注意すべきことは、対応する角の合同は、それが即相似を意味するのではない、という事実です。例：長方形。

ねらい

Ⓟ、2 つの四角形は、全ての同じ位置にある角は、同じ角度をもっていることに注意します。
考えとしては、第 1 の図形の角を全て計測して、それを残り 3 つの図形と比較することですが、その目的のためには、付属のページの複写を取り、計算の上でより高い精度を得られるようにすることをお奨めします。これと同様に、ABCD を切り取って、他の図形の上に載せることも可能で、この方法によって、MNOP との相似がより識別しやすくなります。

一部の項目の解答：

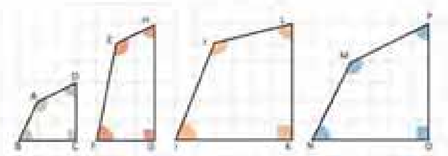
この項目の意図は、図形が回転していても、相似が保たれることを分析することです。

∢A は ∢E と対応しています。
∢B は ∢H と対応しています。
∢C は ∢G と対応しています。
∢D は ∢F と対応しています。

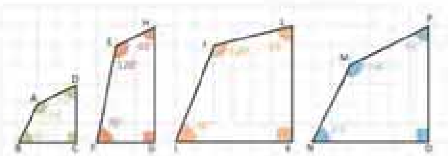
直面しうる困難：
角度の計測が困難な場合には、計測がより容易になるように、そのいずれかの辺を延長すべきことを指示します。

日付：　　U5 1.4

Ⓟ どれが四角形 ABCD と相似ですか?



Ⓢ 分度器で四角形の角を計測して比較します：



四角形 ABCD と四角形 MNOP では、その角の角度は合同で、加えて MNOP の辺は ABCD の変の2倍です。

Ⓡ 1.

a) 相似なのは：
∢A = ∢E = 135°, ∢D = ∢F = 45°
∢B = ∢H = ∢C = ∢G = 90°
図形は回転しています。

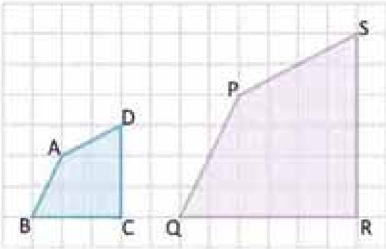
b) 相似なのは
∢C = ∢J = 135°, ∢D = ∢I = 45°
∢B = ∢F = 135°, ∢A = ∢G = 90°
∢E = ∢H = 135°
図形は回転しています。

宿題：練習帳の103ページ

1.5 相似な図形の特徴 第2部

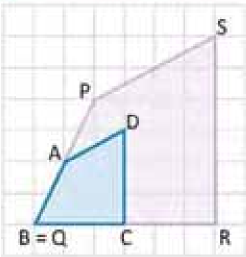
P

四角形 ABCD と四角形 PQRS は相似です。両四角形の対応する辺同士の比は、どのような関係になっていますか?



対応する辺 とは、同じ位置にあるもののことです。両方の四角形を重ね合わせて、それぞれの辺を比較するか、定規を用いて辺の長さを計測して、比を計算することができます。

S



頂点 B と頂点 Q が一致するようにして、四角形を重ね合わせます。図形から、以下が導きだされます：

$PQ = 2AB \Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{1}{2}$　　$QR = 2BC \Rightarrow \frac{BC}{QR} = \frac{1}{2}$

$RS = 2CD \Rightarrow \frac{CD}{RS} = \frac{1}{2}$　　$SP = 2DA \Rightarrow \frac{DA}{SP} = \frac{1}{2}$

比は等しく、よって対応する辺は比例しています。

C

2 つの相似な多角形では、その対応する辺は比例しています。冒頭の設問では：

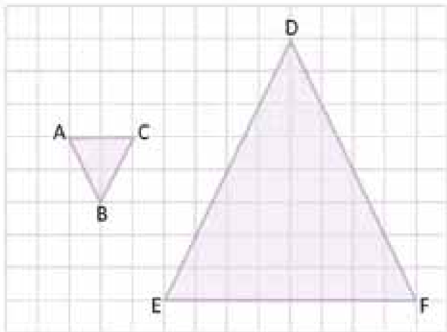
$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP} = \frac{1}{2}$$

対応する辺は、**対応辺** とも呼び、それらの間の比は**相似比** と称します。

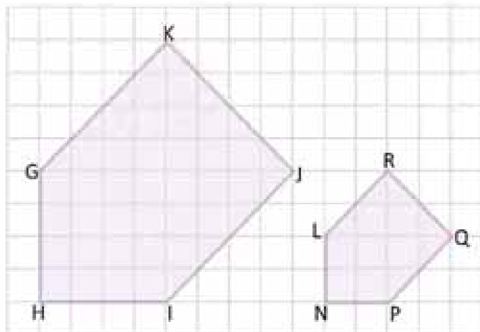
一般に、対応する辺が比例していて、対応する角が合同であるとき、その **2 つの多角形は相似です**。

図形では、三角形 ABC は三角形 FDE に相似で、五角形 GHIJK は LNPQR に相似です。それぞれの組について、対応する辺を識別し、その相似比を計算しましょう。

a)



b)



達成の目安

1.5　図形の対応する辺を識別し、相似比を計算できることです。

学習の流れ

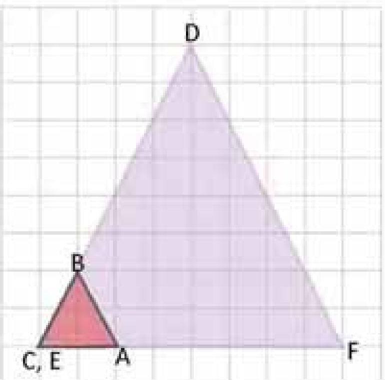
ここにいたるまで、2 つの図形はその対応する角が合同であるときに相似であると定めましたが、この授業では、その辺がどのような関係を満たすべきかについて分析します。そのために、授業 1.2 で学習した線分同士の比例を利用します。

ねらい

Ⓟ, Ⓢ 2つの相似な図形では、対応する辺は比例しており、同じ比の値をもっていることを導き出します。冒頭の設問にでてくる画像の複写を取って使用することができます。これは付録の 184 ページに掲載されています。小さい画像を、そのいずれかの辺が一致するようにして、第 2 のものに重ね合わせます。
最後の 2 つの同等式についてより深く理解するためには、頂点 D を頂点 S に合わせるのがよいでしょう。

一部の項目の解答：

a) ΔABC を 180° 回転させると、図形は ΔDEF と同じ方向になります。



対応辺は次のとおりです：

AC と FE
BA と DF
BC と DE

図より　$FE = 4AC \Rightarrow \frac{AC}{FE} = \frac{1}{4}$

$DF = 4BA \Rightarrow \frac{BA}{DF} = \frac{1}{4}$

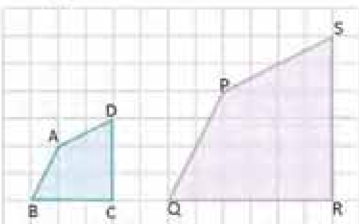
$DE = 4BC \Rightarrow \frac{BC}{DE} = \frac{1}{4}$

相似比は $\frac{1}{4}$ です。

備考：対応する頂点は、B と D、A と E、C と F とすることもできます。同様のことが項 b にも適用されます。

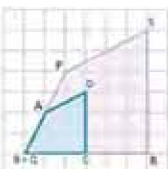
日付：　　　　　　　　　　　　　　**U5 1.5**

Ⓟ 以下の四角形については。



対応する辺同士の比を求めます。
得られた比同士の関係はどうなっていますか?

Ⓢ 四角形同士を重ね合わせて、頂点の一つが一致するようにします。



図形より、以下が得られます：

$PQ=2AB \Longrightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{1}{2}$　　$QR=2BC \Longrightarrow \frac{BC}{QR} = \frac{1}{2}$

$RS=2CD \Longrightarrow \frac{CD}{RS} = \frac{1}{2}$　　$SP=2DA \Longrightarrow \frac{DA}{SP} = \frac{1}{2}$

比は等しくなっています。
対応する辺は比例しています。

Ⓡ a) 対応辺は次のとおりです：
AC と FE、BA と DF、BC と DE
相似比は $\frac{1}{4}$ です。

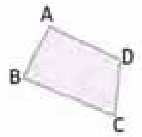
b) 対応辺は次のとおりです：
GH と LN、HI と NP、IJ と PQ、JK と QR、GK と RL。
相似比は $\frac{1}{2}$ です。

宿題：練習帳の104ページ

1.6 相似な図形の作成

P

ボンド紙白紙のページの上に、次の四角形を描きましょう：

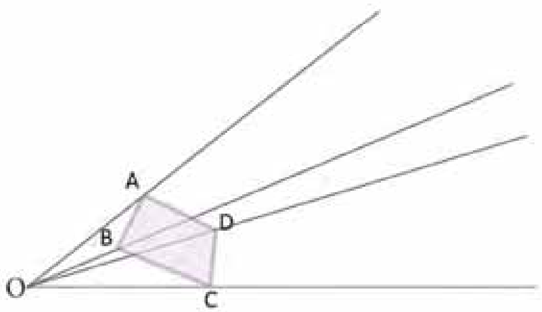


どのようにして、ABCD と相似な四角形で、比が 1 : 3 になっているものを描くことができますか?

S

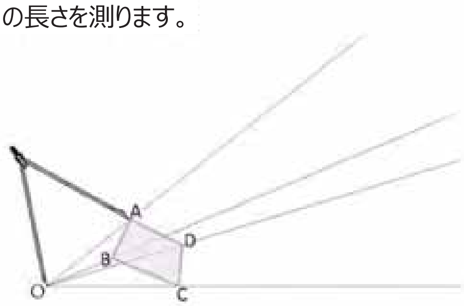
ABCD と相似な四角形で、比が 1 : 3 になっているものを描くためには、
以下を行います：

1. ある点を定め、O とします。点 O と、四角形のそれぞれの頂点を通る半直線を描きます。

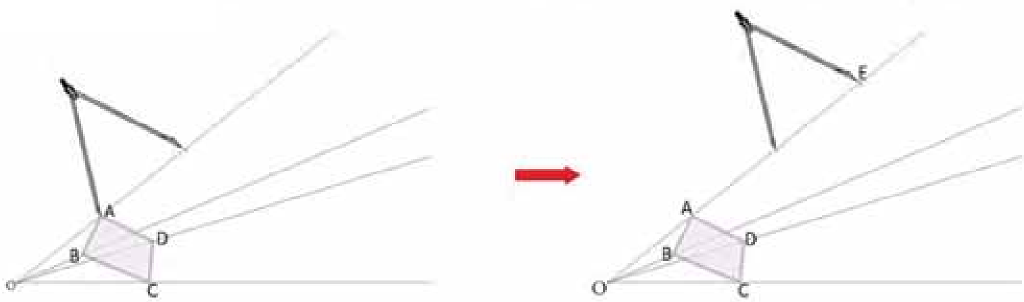


> **半直線** は、ある直線上の全ての点で、ある特定の点の片側にあるものから成っています。**始線** とも呼ばれます。

2. コンパスを用いて、OA の長さを測ります。

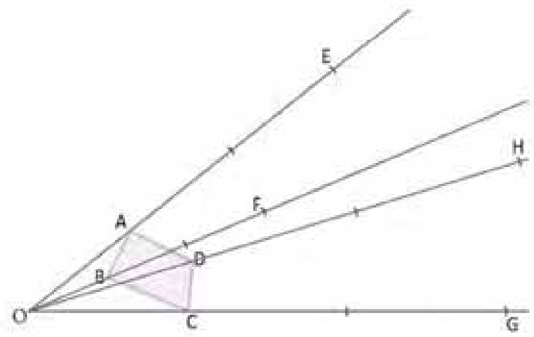


3. 半直線の上で頂点 A から発して、OE = 3OA を満たす点 E に印をつけます。これは、コンパスの支点を A に置き、半直線と交わるように弧を描いて行います。次に、コンパスの支点をその弧で描いた交点に置き、半直線と交わる第 2 の弧を描き、それが点 E となります：

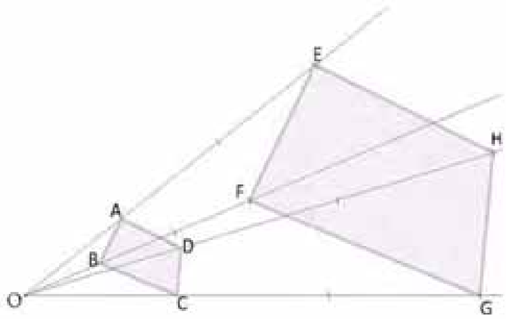


ユニット5

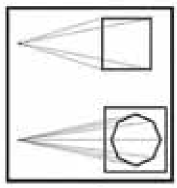
4. 同様のことを他の 3 つの頂点に対しても行いますが、OB、OC、OD を計り、OF = 3OB、OG = 3OC、OH = 3OD を満たす点 F、点 G、点 H を見つけます：



5. 四角形 EFGH を形成するために、点同士を繋ぎましょう：



イタリア人の **レオン・バッティスタ・アルベルティ** は、建築士であると同時に、ルネサンスで初めての芸術理論家でもあり、この技術を自分の著作「絵画論 (*Della pintura*)」で述べ、遠近法の法則について説明しています。ある物体の大きさは、それを長い距離から見るにつれて小さくなっていき、果てには一点に縮小してしまいます。




A. バッティスタ (1782)
Della Architettura.

C

前述の、相似な図形を描き出すための技法は、**相似変換** として知られています。点 O は **相似変換の原点** と呼び、四角形 ABCD と四角形 EFGHは、一方が一方を **相似拡大/相似縮小** しているといい、その比は：

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} = \frac{1}{3}$$

相似比 と呼びます。

1. ここで描いた四角形は、比 1 : 3 で相似であることを確認しましょう。

2. 相似比が 1 : 2 である 2 つの三角形を描きましょう。

達成の目安

1.6　相似変換により、相似な図形を作成できることです。

学習の流れ

授業 1.3 と授業 1.4 では、もし対応する辺が比例していて、対応する角が等しければ、2つの図形は相似であることを学びました。特にこれは全ての多角形について成立しています。この授業では、相似変換により、定規とコンパスを用いて、相似な図形を作成します。

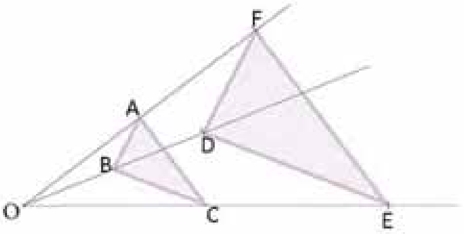
ねらい

ⓟ, ⓢ 相似な図形を作成するために、定規とコンパスを使用します。この場合には特に、生徒は「解き方」を段階を追って進んでいかなければなりません。重要なのは、辺が 1 : 3 の比になっているべきことから、O から頂点までの距離の 3 倍に配置するべきだ、ということです。また、直線を 3 部分に分ける際に、コンパスが同じ開き方を保っていなければならないことを明確な形で指示しなければなりません。

重要なのは、互いに相似拡大または相似縮小されている2つの図形は、同時に相似でもあることです。コンパスを使用することにより、図形が 1 : 3 の比にあることが確認できます。

一部の項目の解答：

コンパスを使用すると、

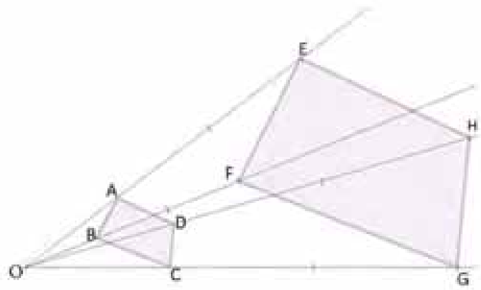


三角形は 1 : 2 の比にあります。

日付：　　**U4 1.6**

Ⓟ ABCD と相似なもう一つの四角形で、比が 1 : 3 になっているものを、描きます。

Ⓢ 段階を追って実施していきます。



1. 点 O を配置し、頂点を通る直線を描きます。
2. コンパスを用いて、$\overline{OA}$ の長さを測ります。
3. 同じ開き方を保ち、OE = 3OA を満たす点 E に印を付けます。
4. 他の頂点に関しても、同様の手順を繰り返します。
5. 付けた印を繋いで、四角形を形成します。

Ⓡ 1. コンパスを用いて対応する辺を計り、以下を確認します：

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} = \frac{1}{3}$$

宿題：練習帳 105 ページ

1.7 学んだことで練習しましょう

1. ある長方形の形をした教室の床の幅と長さの寸法は、3 : 4 の比になっています。

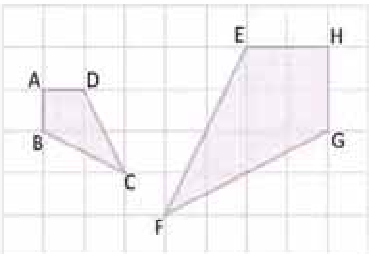
   a) もし教室の長さが 8 m であるとき、その幅はどれだけの寸法になりますか? 幅 = 6 m

   b) 教室の床を、焼き物で敷きます。もし焼き物のタイルが、面積が 0.25 m^2 で、その価格が $ 2.00 である場合には、床全体にこの焼き物を敷く場合には、いくらかかるでしょうか? $384

2. エルサルバドルの立法議会は、祖国の象徴法を発令しましたが、同法では、大国旗の寸法は、長さが 3.35 m で幅が 1.89 m としています。フリアは、国旗の縮小版を制作し、その幅を 20 cm にします。元版と縮小版が相似である場合には、フリアが制作する国旗の長さはどれだけの寸法になりますか? 答えを cm で、小数第 1 位までで求めましょう。 長さ = 35.4 cm

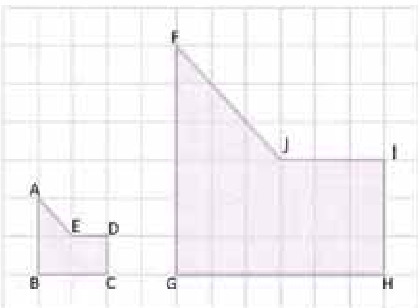
国旗の寸法は、両方の版で、cm または m で表されていなければなりません。

3. 四角形 ABCD と四角形 HGFE が互いに相似なことを確認しましょう。相似比はいくらですか?



比： 1 ：2

4. 多角形 ABCDE と FGHIJ が相似であることを確認しましょう。相似比はいくらですか?



比： 1 ：3

5. 相似比が 2 : 3 である 2 つの、一方が一方を相似拡大した三角形を描きましょう。

エニット5

105

達成の目安

1.7　図形の相似が関わる問題を解答できることです。

一部の項目の解答：

1. 幅と長さが 3 : 4 の比にあるため、満たされます：

$$\frac{幅}{長さ} = \frac{3}{4}$$

a) もし 長さ = 8 m であれば、すなわち：

$$\frac{幅}{8\ \text{m}} = \frac{3}{4}$$
$$幅 = \frac{3}{4}(8\ \text{m})$$
$$幅 = 6\ \text{m}$$

b) 幅 = 6 m で 長さ = 8 m であることから、
土地の面積は $6 \times 8 = 48\ \text{m}^2$
一つ一つのタイルの面積が 0.25 m^2 なので、
$48\ \text{m}^2 \div 0.25\ \text{m}^2 = 192$
床を覆うのに 192 のタイルが必要だということを意味します。

また、$2 \times 192 = 384$
よって、床を焼き物で覆うには $384 必要です。

項目 b を解くときのみに、計算機を使用します。

2. 両方の版は、互いに相似なため、それぞれの辺は比例しており、次を満たさなければなりません：

$$\frac{3.35\ \text{m}}{1.89\ \text{m}} = \frac{長さ}{20\ \text{cm}}$$

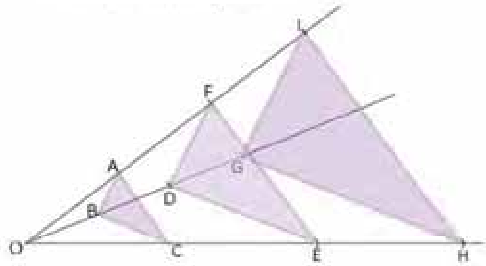
全てをセンチメートルに直して、

$$\frac{335\ \text{cm}}{189\ \text{cm}} = \frac{長さ}{20\ \text{cm}}$$
$$長さ = \frac{335}{189} \times 20$$
$$= \frac{6\,700}{189}$$
$$= 35.4\ \text{cm}$$

宿題：練習帳の106ページ

5. 解答例

コンパスを使用すると、

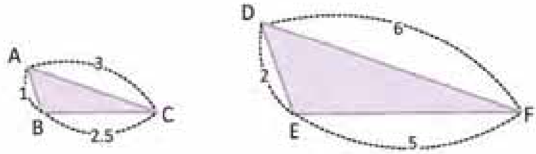


図形では、三角形 DEF と三角形 GHI は、一方が一方を相似拡大したもので、その比は 2 ：3 になっています。

2.1 1 番目の三角形の相似条件

P

図の三角形ABCと三角形DEFはその辺の比が 1 : 2 です。相似ですか?



三角形の角の大きさを測るには、付録ページにある図を使ってください。

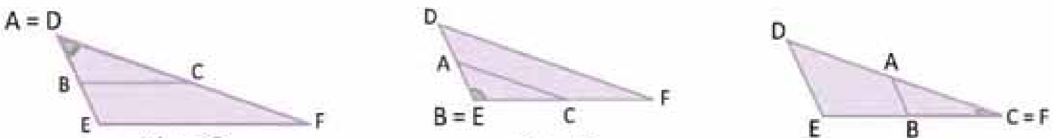
S

2 つの三角形の辺は比例しています。三角形の対応する角が等しいか確認しなければならず これは次の方法で行うことができます。

1. 分度器を使い、各三角形の角の大きさを測ります。

∢A = ∢D
∢B = ∢E
∢C = ∢F

2. 三角形を重ねて各頂点を比べます。



∢A = ∢D　∢B = ∢E　∢C = ∢F

この2つの場合では、両方の三角形の対応する角が合同であることが確認されます。したがって、ΔABC ~ ΔDEF となります。

C

2 つの三角形の対応する辺が比例し、対応する角が合同であるとき、その三角形は相似です。

条件 LLL：
2 つの三角形の対応する辺が比例すれば、これも相似です。例えば、冒頭の設問の三角形 ABC と DEF は対応する辺が比例しています。つまり、

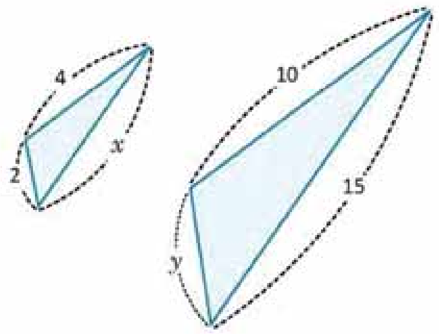
$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{1}{2}$$

したがって、ΔABC と ΔDEF は相似です。

レッスン 2

E

次の 2 つの三角形が相似になるには、x と y の値はいくつですか?



結論で示された結果に従って、三角形が相似になるには、その辺が比例していれば十分です。
つまり　$\frac{2}{y} = \frac{x}{15} = \frac{4}{10}$　です。

x の値を計算します：

$$\frac{x}{15} = \frac{4}{10}$$
$$x = 15\left(\frac{4}{10}\right)$$
$$x = 6$$

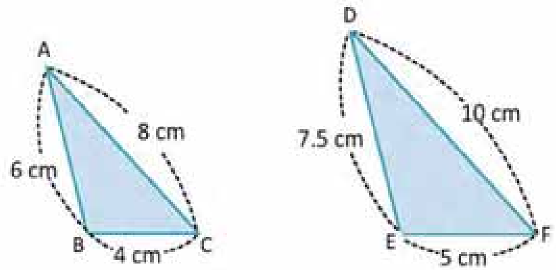
y の値を計算します：

$$\frac{2}{y} = \frac{4}{10}$$
$$\frac{2(10)}{4} = y$$
$$y = 5$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

したがって、x と y の値はそれぞれ 6 と 5 です。

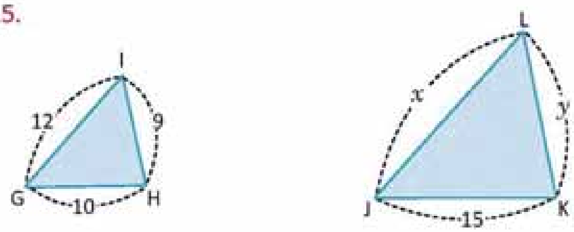
1. 結論で示された結果を使って、三角形 ABC と三角形 DEF が相似かどうか判定します。相似ならば、相似比を計算します。



三角形は相似で、相似比は $\frac{4}{5}$ です。

2. 三角形 GHI と三角形 JKL が相似になるには、x と y の値はいくつですか。

$x = 18$, $y = 13.5.$



ユニット5

達成の目安

2.1 "対応する辺が比例" の条件から相似な三角形を特定します。

学習の流れ

前の授業で、線分の比率や比例という概念を定義しました。次に、その概念を使って、2つの図形の対応する線分が比例するとき、また、その対応する角が等しいときはこの図形は相似であることを正式に定義し、さらに、定規とコンパスを使用して、相似図形をつくります。

この課では、ただ三角形だけを対象に、この学習をしますが、1 組の三角形が相似になるために満たさなければならない 3 条件を分析し、一般的には **LLL** として知られる**対応する辺が比例**の条件をこの授業で学習します。

ねらい

Ⓟ, Ⓢ 辺が比例する 2 つの三角形は相似であることを確認すること。前の授業で忘れてはいけないのは、相似な図形はどれでも、辺が比例し、対応する角が合同であることが成立すること。そのため、問題では、角が合同であることを確認するだけで充分です。

重要なのは、対応する 3 辺が比例することで充分だとする結論を忘れないこと。そして、2 つの変数の値を求められる比率 $\frac{4}{10}$ はあるので、この結論を使い、値を求めることです。

一部の設問の解答：

1.
比例する辺の比の値を求めると

$$\frac{BC}{EF} = \frac{4}{5}$$
$$\frac{AC}{DF} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$
$$\frac{AB}{DE} = \frac{6}{7.5} = \frac{60}{75} = \frac{4}{5}$$

このため $\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}$ 辺が比例するので、
三角形は相似で、相似比は $\frac{4}{5}$ です。

2.
三角形が相似ならば以下が成り立ちます。

$$\frac{GH}{JK} = \frac{HI}{KL} = \frac{IG}{LJ}$$

よって、

$$\frac{10}{15} = \frac{9}{y} = \frac{12}{x}$$

それぞれを等式として、

$$\frac{10}{15} = \frac{9}{y}$$
$$10y = 15 \times 9$$
$$y = \frac{135}{10} = 13.5$$

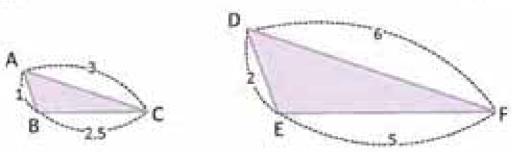
さらに、 $\frac{10}{15} = \frac{12}{x}$

$$10x = 15 \times 12$$
$$x = \frac{180}{10} = 18$$

したがって、$x = 18, y = 13.5$

日付：　　　　　　　　　　　　　　　　　　U5 2.1

Ⓟ

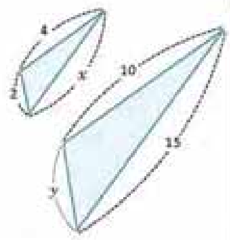


成立するのは、辺が比例する、です。
比率は 1 : 2
相似であるか確認すること。

Ⓢ 分度器で測ると、
∢A = ∢D, ∢B = ∢E, ∢C = ∢F となります。

その三角形では、辺は比例しています。対応する角は等しいです。したがって、相似です。

Ⓔ 相似の場合、$\frac{2}{y} = \frac{x}{15} = \frac{4}{10}$ が成立しなければなりません。



x を計算し、

$$\frac{x}{15} = \frac{4}{10}$$
$$x = \left(\frac{4}{10}\right)15$$
$$x = 6$$

y を計算し、

$$\frac{2}{y} = \frac{4}{10}$$
$$4y = 2 \times 10$$
$$y = \frac{20}{4}$$
$$y = 5$$

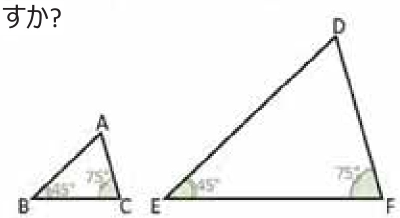
Ⓡ 1. 三角形は相似で、相似比は、$\frac{4}{5}$ です。

宿題： 練習帳107ページ

2.2　2 番目の三角形の相似条件

P

三角形 ABC と DEF で、∢B = ∢E, ∢C = ∢F となっています。∢A と ∢D の角度は何度ですか? 2 つの三角形は相似ですか?

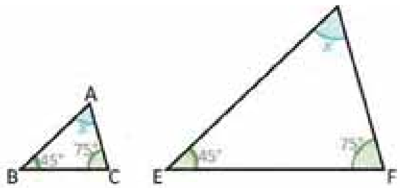


三角形はすべて、その内角を足すと 180° になり、2 つの三角形が相似となるには、対応する辺が比例すること、また、対応する角が合同でなければなりません。

S

3 つ目の角の大きさを x とし、これは 2 つの三角形で等しくなります。三角形の内角の和の性質を利用して、

$$45° + 75° + x = 180°$$
$$x = 180° - 120°$$
$$x = 60°$$



したがって、2 つの三角形の 3 つ目の角の大きさは 60° です。

ここでは、各自のノートに描いたそれぞれの三角形の辺の長さを定規で測り、対応する辺が比例していることを確認しなさい。

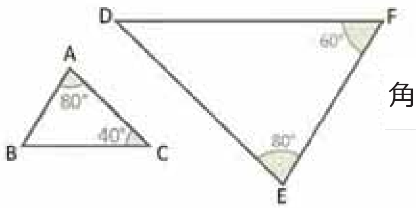
C

条件 AA：
2 つの三角形の対応する 2 組の角が合同なら、その三角形は相似です。

E

図に示す三角形は相似ですか? 解答の理由も述べなさい。

三角形のどれかで、3 つ目の角の値を計算しなさい。



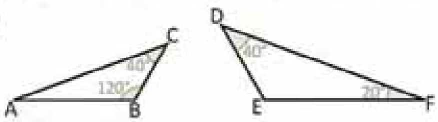
角 ∢A と ∢E は合同です。三角形の内角の和の性質から、

$$∢A + ∢B + ∢C = 180°$$
$$∢B = 180° - 120°$$
$$∢B = 60°$$

したがって、∢B と ∢F は合同です。2 番目の三角形の相似条件から、ΔABC ~ ΔEFD です。

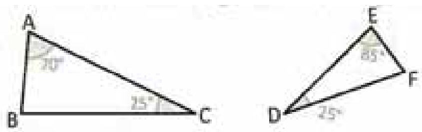
1. 結論で示された結果を使い、各問の三角形は相似かどうか判定しなさい。

a)



ΔABC ~ ΔDEF

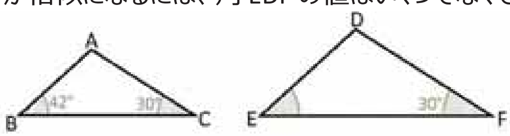
b)



ΔABC ~ ΔFED

2. 三角形 ABC と DEF が相似になるには、角 EDF の値はいくつでなくてはなりませんか?

∢EDF = 108°



108

達成の目安

2.2 "対応する2角が合同”の条件から相似な三角形を特定します。

学習の流れ

前の課で習得した相似な図形の定義を使って、三角形の相似の条件を分析します。そのため、2.1 の授業では、三角形の三辺が比例している場合を分析し、この授業では対応する角の 2 つが等しい場合の条件を学習します。

ねらい

Ⓟ, Ⓢ 対応する 2 角が等しいので、内角の和は常には 180° であることから、両方の三角形の不明な角の大きさは同じとなります。そこで、図形の相似の最後の条件が成り立つことを証明するために、生徒は対応する辺の長さを測り、比率を比べなければなりません。

Ⓔ ΔABC の角度が不明な $\sphericalangle B$ を求めるとき、合同な対応する 2 角があることが分かり、結論に示された条件を応用し、三角形は相似であるとなります。

一部の設問の解答：

1. a)
角は $\sphericalangle C = \sphericalangle D$ で、合同です。相似条件が成り立つよう、別の合同な角を求め、

$$\begin{aligned}\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C &= 180^\circ\\ \sphericalangle A &= 180^\circ - 160^\circ\\ \sphericalangle A &= 20^\circ\end{aligned}$$

2 番目の相似条件により、
ΔABC ~ ΔDEF

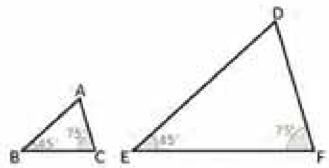
2.
ΔABC において、

$$\begin{aligned}\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C &= 180^\circ\\ \sphericalangle A &= 180^\circ - 72^\circ\\ \sphericalangle A &= 108^\circ\end{aligned}$$

角 $\sphericalangle A$ は、角 $\sphericalangle D$ に対応しています。ΔABC ~ ΔDEF となるには、必ず $\sphericalangle D = 108^\circ$ となるはずです。

日付： **U5 2.2**

Ⓟ



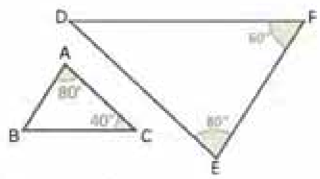
Ⓢ $\sphericalangle A$ と $\sphericalangle D$ を求めます。
三角形が相似かどうか確認します。

3 つ目の角の大きさを x で表し、

$$\begin{aligned}45^\circ + 75^\circ + x &= 180^\circ\\ x &= 180^\circ - 120^\circ\\ x &= 60^\circ\end{aligned}$$

定規で測り、対応する辺が比例しているか確認します。したがって、ΔABC ~ ΔDEFです。

Ⓔ



相似であることを確認するには、

$$\begin{aligned}\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C &= 180^\circ\\ \sphericalangle A &= 180^\circ - 120^\circ\\ \sphericalangle A &= 60^\circ\end{aligned}$$

$\sphericalangle A = \sphericalangle E$、$\sphericalangle B = \sphericalangle F$ なので、2 番目の相似条件により、ΔABC ~ ΔEFD。

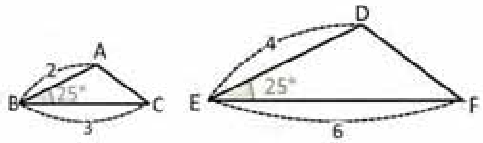
Ⓡ 1. a) 相似です。
b) 相似です。
2. $\sphericalangle D = 108^\circ$

宿題： 練習帳108ページ

2.3 3 番目の三角形の相似条件

P

三角形 ABC と DEF は、対応する 1 角が合同で、その角に隣接する辺は 1 : 2 で比例しています。相似ですか?

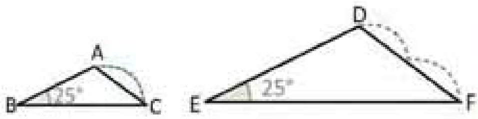


定規（または、コンパス）を使い、$\overline{CA}$ と $\overline{FD}$ の比を計算しなさい。

S

コンパスを使い、辺 CA の長さを測り、$\overline{CA}$ は $\overline{FD}$ の半分であることを確認（FD と比較）します。

したがって、 $\frac{CA}{FD} = \frac{1}{2}$



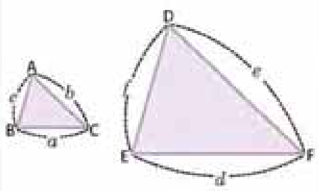
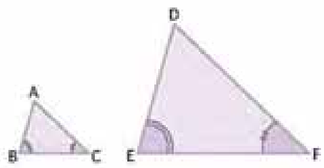
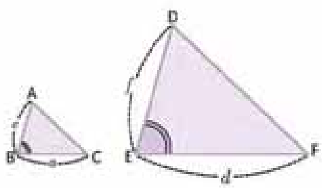
つまり、2 つの三角形の対応する辺は比例しています。1 番目の相似条件により、ΔABC ~ ΔDEF となります。

C

条件 LAL：
2 つの三角形で、対応する 1 角が合同で、その角に隣接する辺が比例すれば、その三角形は相似です。

次に、三角形の 3 つの相似条件をまとめます。

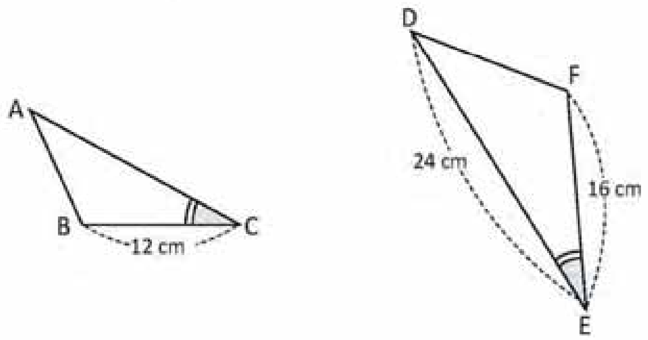
三角形の相似条件　次の条件の少なくとも 1 つを満たせば、2 つの三角形は相似です。

1. 対応する辺が比例します。（条件 LLL）	2. 2 組の対応する角が合同です。（条件 AA）	3. 1 組の対応する角が合同で、その隣接する辺が比例します。（条件 LAL）
 $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$	 ∢B = ∢E ∢C = ∢F	 ∢B = ∢E $\frac{a}{d} = \frac{c}{f}$

ユニット5

E

次の三角形で、角 C と E が合同のとき、ΔABC が ΔDFE に相似となるには、辺 CA の長さはいくつでなければなりませんか?



1 組の対応する角（∢C と ∢E）が合同なので、相似となるには、この角に隣接する辺が比例していなければなりません。つまり、

CA を求めるには、数値と置き換えます。

$$\frac{BC}{FE} = \frac{CA}{ED}$$

$$\frac{12}{16} = \frac{CA}{24}$$

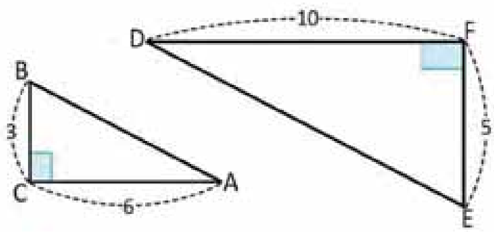
$$24\left(\frac{3}{4}\right) = CA$$

$$CA = 18$$

したがって、三角形 ABC と DFE が相似となるには、辺 CA の長さは 18 cm でなければなりません。

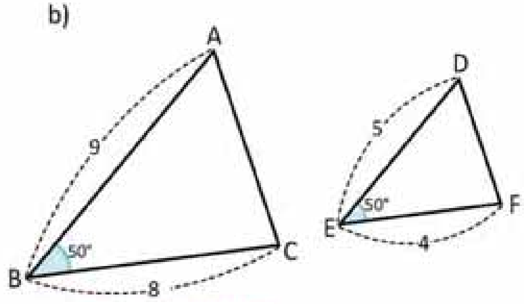
1. 条件 LAL を使って、次の三角形は相似かどうか判定しなさい。

a)



相似である

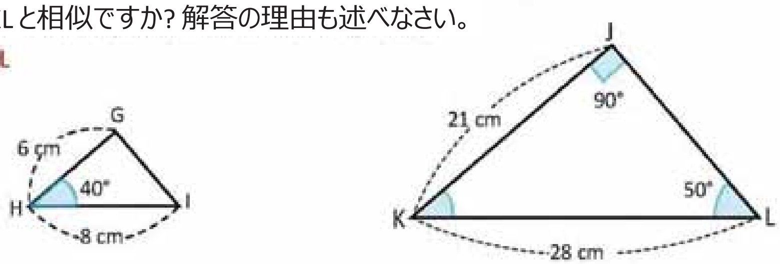
b)



相似ではない

2. ΔGHI は ΔJKL と相似ですか? 解答の理由も述べなさい。

ΔGHI ~ ΔJKL



達成の目安

2.3 ”1 つの角と隣接する 2 組の辺の比が等しい” の条件から相似三角形を選びなさい。

学習の流れ

2.1 と 2.2 の授業では、前課で学んだ相似図形の定義を用いて、三角形の相似条件 2 つを学習しました。冒頭の設問の解答では、1 番目の相似条件を使います。これは 3 番目の条件 ”2 組の辺の比が等しく、その間の角が等しい” を定着させることができます。

ねらい

Ⓟ, Ⓢ 重要な点は、学習者が比が等しい 2 組の辺に気づくことであり、もう 1 組の辺も比が等しいか調べるようであれば、1 番目の相似条件の定着は十分です。確認には、コンパスを使うことを提案し、 AC と同じ長さでコンパスを開け、それが DF の辺で 2 倍かどうかを確認します。また、長さを測る定規を使い、数を比較する方法も可能です。
Ⓔ 前回の授業と同様、この条件を簡単に覚えられるよう ”辺ー角ー辺” を用いてもいいです。

一部の設問の解答：

1. a)
三角形 ∢C = ∢F の中で

$$\frac{BC}{EF} = \frac{3}{5}$$
$$\frac{AC}{DF} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

ゆえに、

$$\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

よって 3 番目の相似条件により
ΔABC ~ ΔDEF

解答：
三角形 JKL では、

$$∢J + ∢K + ∢L = 180°$$
$$∢K = 180° - 140°$$
$$∢K = 40°$$

よって、 ∢K = ∢H で隣接する辺は：

$$\frac{GH}{JK} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$
$$\frac{HI}{KL} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}$$

ゆえに、

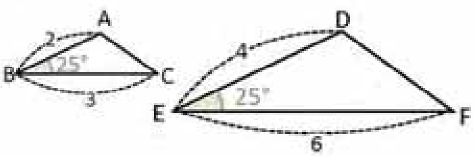
$$\frac{GH}{JK} = \frac{HI}{KL}$$

よって、3 番目の相似条件により
ΔGHI ~ ΔJKL

つまずきやすい点：
例では、三角形は回転しているので、対比する辺を見つけるのが難しいかもしれません。この場合は、三角形の一辺が対比する辺と重なるように想像するといいです。

日付： **U5 2.3**

Ⓟ 図形では ∢B = ∢E と隣接する辺は比例します。



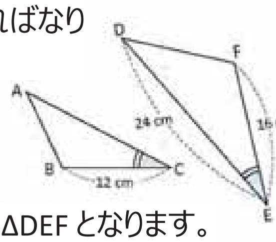
Ⓢ CA の長さを考慮し：

$$\frac{CA}{FD} = \frac{1}{2}.$$

よって、隣接する辺は比例していて、1 番目の相似条件により ΔABC ~ ΔDEF

Ⓔ ∢C = ∢E のように、隣接する辺は比例しなければなりません：

$$\frac{BC}{FE} = \frac{CA}{ED}$$
$$\frac{12}{16} = \frac{CA}{24}$$
$$CA = 18$$



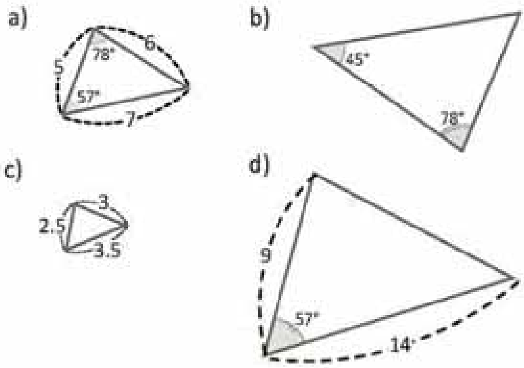
したがって、ΔABC ~ ΔDEF となります。

Ⓡ 1. a) 相似です
b) 相似ではありません

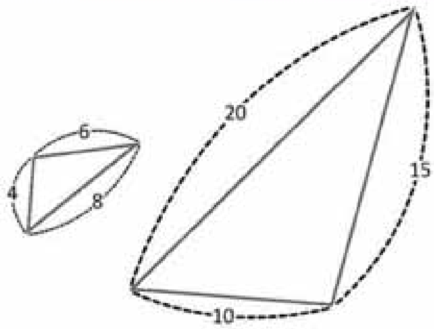
宿題： 練習帳109ページ

2.4 復習問題

1. 右に示す三角形のうち、相似な三角形はどれですか。根拠となる相似条件を書きなさい。
図形 a), b), c) は相似です。

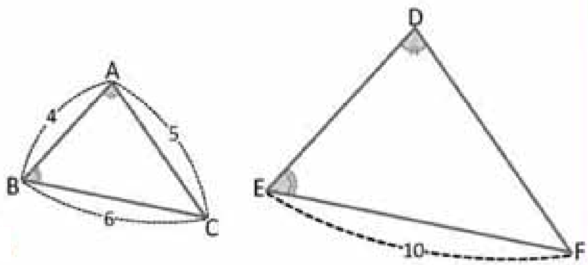


2. 図の三角形が相似であることを確かめなさい。使用した相似条件と相似比率を書きなさい。
三角形は相似していて、比率は 2 : 5 です。



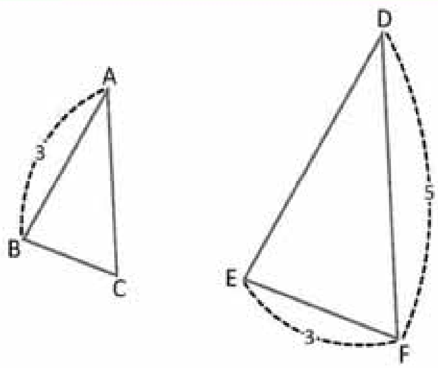
3. 図形 ∢A = ∢D と ∢B = ∢E
a) 相似の三角形と判断するために使われる条件はどれですか？
b) $\overline{DE}$の長さをもとめましょう。

a) 相似 AA の 2 番目の条件により
b) DE = $\frac{20}{3}$



4. 三角形 ABC と DEF は相似で、比率は 2 : 3 です。$\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{DE}$ の長さはいくつでしょうか?

BC = 2, AC = $\frac{10}{3}$, ED = $\frac{9}{2}$



ユニット5

達成の目安

2.4 三角形の相似条件を用いて問題を解きなさい。

一部の設問の解答：

1.
a) では最後の角度を考慮しながら x とすると成立します。

$$57° + 78° + x = 180°$$
$$x = 180° - 135°$$
$$x = 45°$$

そして、AA 条件により、a) と b) の三角形は相似です。

a) と c) では、該当する辺は比率が 1 : 2 です。よって、1 番目の条件 LLL によって、これらの三角形も相似となります。

a) の図形は c) と相似なので、該当する角度は一致します。よって、2 番目の条件 AA により、図形 b) と c) は相似です。

宿題： 練習帳110ページ

3.
a) ∢A = ∢D と ∢B = ∢E のように、相似 AA の 2 番目の条件により、三角形は相似しています。

b) BC と EF の比率は 3 : 5 です。よって、以下が成り立ちます。

$$\frac{4}{DE} = \frac{3}{5}$$
$$DE = (5)\frac{4}{3}$$
$$DE = \frac{20}{3}$$

4.
2つの三角形は相似で、相似比は2:3です。
よって、以下が成り立ちます。

$$\frac{BC}{3} = \frac{2}{3}$$
$$BC = 2$$

同じく

$$\frac{AC}{5} = \frac{2}{3}$$
$$AC = \frac{10}{3}$$

同じく

$$\frac{3}{ED} = \frac{2}{3}$$
$$ED = \frac{9}{2}$$

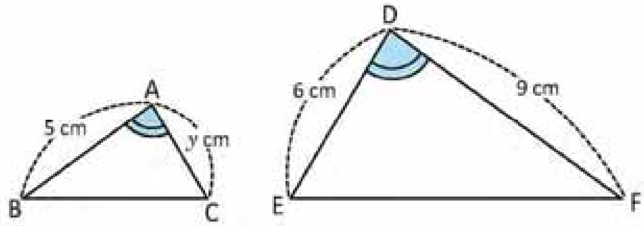
したがって、

$BC = 2,\ AC = \dfrac{10}{3},\ ED = \dfrac{9}{2}$

レッスン 2

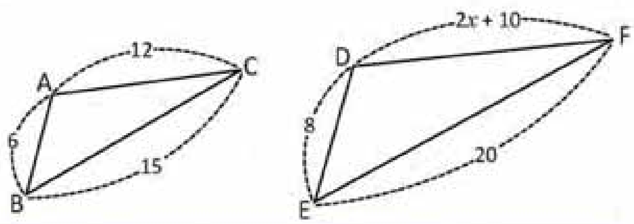
2.5 復習問題

1. 三角形 ABC と DFE は ∢A = ∢D を満たします。y の値と 2 つの三角形が相似である条件を求めなさい。



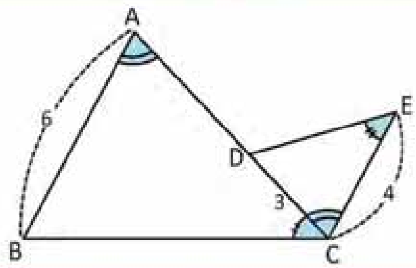
2. ΔABC ~ ΔDEF を満たす x の値はいくつでなければいけませんか？

$x = -\frac{1}{2}$



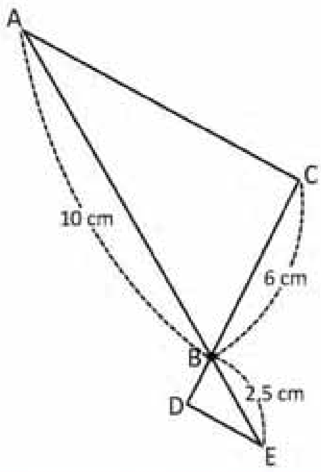
3. ∢BAC = ∢ECD かつ ∢ACB = ∢DEC のとき、AD の長さを求めなさい。

$\overline{AD} = 5$



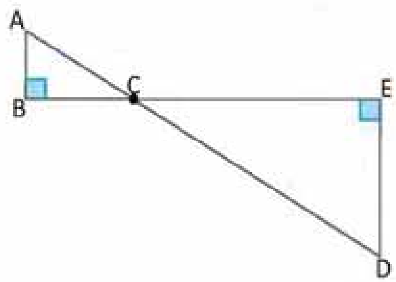
4. 図形では、AC と DE 部分が平行です。
   a) 三角形 ABC と EBD が相似と証明できる相似条件を使いなさい。
   b) BD の長さをもとめましょう。

BD = $\frac{3}{2}$



5. 三角形の ABC と DEC は相似ですか？答えを確かめましょう。

ΔABC ~ ΔDEC



達成の目安

2.5 三角形の 3 つの相似条件を用いて問題を解きなさい。

一部の設問の解答：

1.
対応する辺：
AB と DF、AC と DE、BC と FE

同じく $\frac{AB}{DF} = \frac{5}{9}$.

ゆえに、
$$\frac{y}{6} = \frac{5}{9}$$
$$y = \frac{5}{9}(6)$$
$$y = \frac{10}{3}$$

2.
$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{3}{4}$ なので、

以下が成り立ちます。
$$\frac{2x+10}{12} = \frac{3}{4}$$
$$2x + 10 = 9$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

3.
∢BAC = ∢ECD, ∢ACB = ∢DECで、2 番目の相似条件 AA により、三角形は相似です。

$$\frac{CD}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{4}{AC} = \frac{1}{2}$$
$$AC = 8$$

さらに AD = AC – DC = 8 – 3 = 5

よって、AD = 5 となります。

4.
a) 対頂角なので、∢ABC = ∢EBD
平行線間の内側の錯角のため
∢BDE = ∢BCA
よって 2 番目の条件 AA により、三角形 ABC と EBD は相似です。

b) 2つの三角形は相似なので、以下が成り立ちます:
$$\frac{BD}{6} = \frac{2.5}{10}$$
$$BD = \frac{3}{2}$$

5.
両方の三角形は 90° の角があります。
さらに、∢BCA = ∢ECD 、対頂角です。
よって相似 AA の 2 番目の条件により、
ΔABC ~ ΔDEC です。

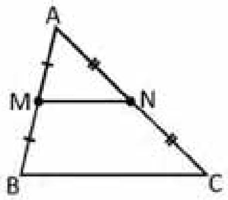
宿題： 練習帳111ページ

レッスン 3 相似と平行

3.1 中点連結定理、パート1

P

三角形 ABC において、M と N はそれぞれ線分 AB と線分 CA の中点です。三角形の相似を使い、$\overline{MN}$ と $\overline{BC}$ が平行であり、$MN = \frac{1}{2}BC$ であることを証明しましょう。



M と N が $\overline{AB}$ と $\overline{CA}$ の中点ならば、$AM = \frac{1}{2}AB$、$NA = \frac{1}{2}CA$ です。

S

三角形 AMN と三角形 ABC において：

$\frac{AM}{AB} = \frac{NA}{CA} = \frac{1}{2}$ （M と N はそれぞれ $\overline{AB}$ と $\overline{CA}$ の中点）

$\sphericalangle MAN = \sphericalangle BAC$ （両方の三角形に共通する角）

$\Delta AMN \sim \Delta ABC$ （二辺比夾角相等）

$\sphericalangle NMA = \sphericalangle CBA$ （三角形 AMN と三角形 ABC が相似のため）

$\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ （角 NMA と角 CBA は平行線の同位角）

$\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ （三角形 AMN と三角形 ABC の相似比）

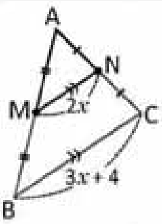
したがって、$\overline{MN}$ は $\overline{BC}$ と平行であり、$MN = \frac{1}{2}BC$ です。

C

中点連結定理：ある三角形の 2 つの辺の中点を結ぶ線分は底辺と平行であり、その長さは底辺の半分です。

E

M と N がそれぞれ $\overline{AB}$ と $\overline{CA}$ の中点ならば、x の値はいくつになりますか?



2つの線分が平行のとき、線分の上に>>の記号をつけて表します。

M と N が $\overline{AB}$ と $\overline{CA}$ の中点ならば、$\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ です。線分の値を入れ替えて x の値を求めましょう。

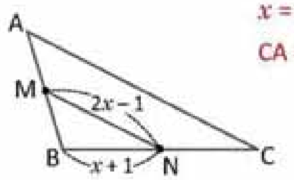
$$\frac{2x}{3x+4} = \frac{1}{2}$$
$$4x = 3x + 4$$
$$4x - 3x = 4$$
$$x = 4$$

したがって、x の値は 4 です。

三角形 ABC において、M と N はそれぞれ $\overline{AB}$ と $\overline{BC}$ の中点です。

a) BC = 8 cm のときの、x の値を計算しましょう。

b) 辺 CA の長さを求めましょう。



$x = 3$

CA = 10

ユニット5

達成の目安

3.1 中点連結定理を利用して線分の長さを計算します。

学習の流れ

レッスン 1 では 2 つの図形が相似になるための条件を分析しました。レッスン 2 ではそれらの条件を使い、2 つの三角形が相似になる条件を勉強しました。この授業ではそれらの相似条件を使い、いくつか重要な図形の定理と結果を証明します。

ねらい

Ⓟ, Ⓢ 3 つ目の三角形の相似条件である二辺比夾角相等を使い、中点連結定理を証明します。

解答するときはステップごとに証明の要素を書き、横に括弧をつけてそのステップの証明を書きます。

Ⓒ 線分 MN は辺の中点同士を結び、中点連結定理を使うと一次方程式で x の値を出せるため、中点連結定理の仮説が成立することを確認することが重要です。

一部の設問の解答：

a) BC = 8 ならば BN = 4です (N は BC の中点であるため)。BN = 4 なので $x = 3$ です。

b) CA = 2NM

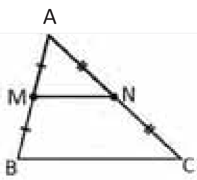
$$\begin{aligned} &= 2(2x-1)\\ &= 4x-2\\ &= 4(3)-2\\ &= 10. \end{aligned}$$

したがって、CA = 10

つまずきやすい点：
生徒は正式な証明のステップを忘れていたり、設問の仮説と結論をなかなか見つけられない可能性があります。その場合、この内容の復習に授業 1 回を使っても良いです。理想は 8 年生のユニット 4 の 2.5 と 2.6 の授業を参考にすることです。

日付： **U5 3.1**

Ⓟ M と N は AB と CA の中点です。
$\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ であり $MN = \frac{1}{2}BC$ であることを証明しましょう。
三角形の相似を使いましょう。

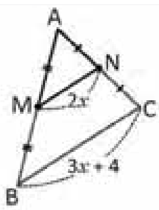


Ⓢ $\frac{AM}{AB} = \frac{NA}{CA} = \frac{1}{2}$ （M と N は中点です）
$\sphericalangle MAN = \sphericalangle BAC$
$\Delta AMN \sim \Delta ABC$ （二辺比夾角相等）
$\sphericalangle NMA = \sphericalangle CBA$ （相似による）
MN ∥ BC （同位角による）
$\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ （相似比）

したがって、$\overline{MN} \parallel \overline{BC}$であり $MN = \frac{1}{2}BC$ です。

Ⓔ M と N が $\overline{AB}$ と $\overline{CA}$ の中点のときの x の値を計算しましょう。
次のようになります：$\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$

$$\frac{2x}{3x+4} = \frac{1}{2}$$
$$4x = 3x + 4$$
$$x = 4$$



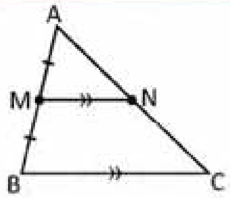
Ⓡ a) $x = 3$
b) CA = 10

宿題： 練習帳112ページ

3.2 中点連結定理、パート 2

P

三角形 ABC において、M は辺 $\overline{AB}$ の中点です。$\overline{BC}$ と平行で点 N で辺 $\overline{CA}$ と交わる線分を、M から引きます。三角形の相似を使い、N は $\overline{CA}$ の中点であり、MN = $\frac{1}{2}$ BC であることを証明しましょう。



S

三角形 AMN と三角形 ABC において：

$\sphericalangle MAN = \sphericalangle BAC$ （両方の三角形に共通する角）

$\sphericalangle NMA = \sphericalangle CBA$ （平行線の同位角）

$\Delta AMN \sim \Delta ABC$ （二角相等）

$\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$ （M は $\overline{AB}$ の中点）

$\frac{NA}{CA} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ （三角形 AMN と ABC の相似比）

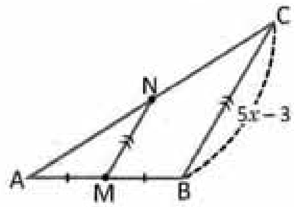
したがって、N は $\overline{CA}$ の中点であり MN = $\frac{1}{2}$ BC です。

C

ある三角形の 1 つの辺の中点から別の辺に平行する線を引くと、この線はもう 1 つの辺の中点と交わり、その長さは平行する線の半分になります。

E

M が $\overline{AB}$ の中点であり $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ 、MN = 3.5 のときの、x の値を計算しましょう。



M が $\overline{AB}$ の中点であり $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ ならば、$\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ です。前の問題の値を置き換えて x の値を求めましょう。

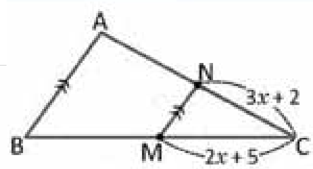
$$\frac{3.5}{5x-3} = \frac{1}{2}$$
$$2(3.5) = 5x - 3$$
$$7 + 3 = 5x$$
$$\frac{10}{5} = x$$
$$x = 2$$

したがって、x の値は 2 です。

三角形 ABC において、M は辺 $\overline{BC}$ の中点であり $\overline{NM} \parallel \overline{AB}$ です。

a) CA = 10 cm のときの、x の値を計算しましょう。$x = 1$

b) 辺 BC の長さを求めましょう。BC = 16



達成の目安

3.2 中点連結定理の変形を使い線分の長さを求めましょう。

学習の流れ

前回の授業と今回の授業の違いは定理の仮説にあります。3.1 の授業での仮説は中点 M と中点 N でしたが、今回の授業での仮説は中点 M とその平行線です。仮説を理解し、定理を使えるようになることが重要です。

ねらい

Ⓟ, Ⓢ 三角形の相似の 2 つ目の条件を使い、中点連結定理の証明をします。

この場合、直線の平行によるものを 1 つ含む、2 つの等しい角を見つけることが重要です。

Ⓒ 結論で示された 2 つの条件が成立するため、中点連結定理が使えることを理解する必要があります。

一部の設問の解答：

a) M は BC の中点であるため、次のようになります：

$$\frac{CN}{CA} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{3x+2}{10} = \frac{1}{2}$$
$$3x + 2 = 5$$
$$3x = 3$$
$$x = 1$$

b) $x = 1$ なので、MC = 7 です。

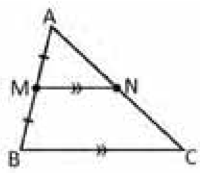
また次のようになります。

$$\frac{MC}{BC} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{7}{BC} = \frac{1}{2}$$
$$BC = 14$$

日付：

US 3.2

Ⓟ M は AB の中点であり、$\overline{MN} \parallel \overline{BC}$です。
N は CA の中点であり、
$MN = \frac{1}{2}BC$ であることを
証明しましょう。

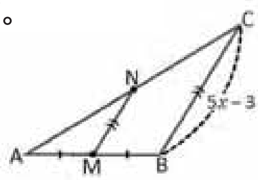


Ⓢ $\sphericalangle MAN = \sphericalangle BAC$ （共通する角）
$\sphericalangle NMA = \sphericalangle CBA$ （同位角）
$\Delta AMN \sim \Delta ABC$ （二角相等）
$\frac{AM}{AB} = \frac{NA}{CA} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$
したがって、N は中点であり $MN = \frac{1}{2}BC$ になります。

Ⓔ M が $\overline{AB}$ の中点であり、
$\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ 、MN = 3.5 のときの、x の値を計算しましょう。中点連結定理により、

$\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ になります。

$$\frac{3.5}{5x-3} = \frac{1}{2}$$
$$2(3.5) = 5x - 3$$
$$10 = 5x$$
$$x = 2$$



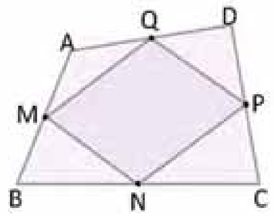
Ⓡ a) $x = 1$
b) BC = 14

宿題： 練習帳113ページ

3.3　四角形に内接した平行四辺形

P

ABCD は四角形であり、M、N、P、Q はそれぞれ $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 、$\overline{CD}$ 、$\overline{DA}$ の中点です。中点連結の定理を使い、MNPQ が平行四辺形であることを証明しましょう。



四角形の対角線を引きます。

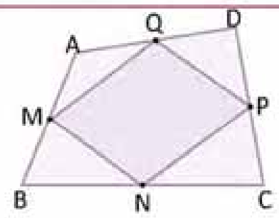
S

四角形の $\overline{BD}$ に対角線を引きます。

$\overline{MQ} \parallel \overline{BD}$（中点連結定理より）

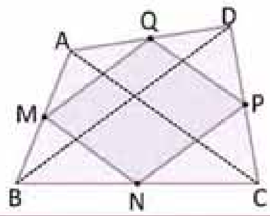
$\overline{BD} \parallel \overline{NP}$ （中点連結定理より）

よって、$\overline{MQ} \parallel \overline{NP}$



同じ方法で台形に対角線 $\overline{AC}$ を引き、$\overline{MN} \parallel \overline{QP}$ を証明することもできます。

したがって $\overline{MQ} \parallel \overline{NP}$ 、$\overline{MN} \parallel \overline{QP}$ なので、MNPQ は平行四辺形です。

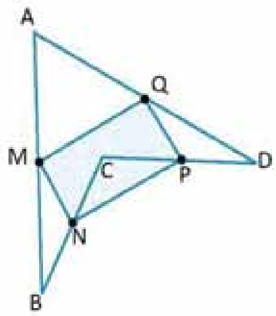


C

ある四角形の各辺の中点を結ぶと、平行四辺形ができます。

この結果は
バリニオンの定理として知られています。

四角形 ABCD では、M、N、P、Q はそれぞれ $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 、$\overline{CD}$ 、$\overline{DA}$ の中点です。MNPQ が平行四辺形であることを証明しましょう。



問題の四角形 ABCD は 180° より大きい角（∢DCB）を含み、**凹四角形**と呼ばれています。

ユニット5

達成の目安

3.3 凹四角形の中点が平行四辺形を形成することを証明します。

学習の流れ

2 つ前の授業ではいくつかの仮説の成立を確認してから、どのように中点連結定理を使うかを学びました。今回の授業ではこの定理を使い、四角形とその中点に関する他の重要な定理を証明します。

ねらい

Ⓟ, Ⓢ 中点連結定理の仮説、2 つの中点が成立し、それらの中点を通る直線が底辺と平行であることを確認することが不可欠です。簡潔な解答ができるよう、ヒントを考えておく必要があります。

Ⓒ この結果は**バリニオンの定理**と呼ばれており、凹凸に関わらず全ての種類の四角形に使うことができます。

一部の設問の解答：

対角線 $\overline{BD}$ を引きます。
$\overline{NP} \parallel \overline{BD}$ （中点連結定理より）
$\overline{BD} \parallel \overline{MQ}$ （中点連結定理より）

よって、$\overline{MQ} \parallel \overline{NP}$

対角線 $\overline{AC}$ を引きます。
$\overline{MN} \parallel \overline{AC}$ （中点連結定理より）
$\overline{AC} \parallel \overline{PQ}$ （中点連結定理より）

よって、$\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$

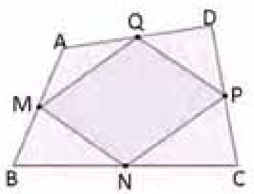
したがって $\overline{MQ} \parallel \overline{NP}$ 、
$\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$ であり、四角形 MNPQ は平行四辺形です。

つまずきやすい点：
必要であれば、授業の始めに簡単に平行四辺形の定義を見直した方が良いです。

日付： US 3.3

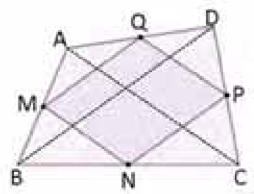
Ⓟ 四角形 ABCD では、M、N、P、Q は中点です。MNPQ が平行四辺形であることを証明しましょう。

ABCD の対角線を引きます。



Ⓢ 対角線 $\overline{BD}$ を引きます。
$\overline{MQ} \parallel \overline{BD}$ （中点連結定理より）
$\overline{BD} \parallel \overline{NP}$ （中点連結定理より）
よって、$\overline{MQ} \parallel \overline{NP}$

対角線 $\overline{AC}$ を引きます。
$\overline{MN} \parallel \overline{AC}$
$\overline{AC} \parallel \overline{QP}$
よって：
$\overline{MN} \parallel \overline{QP}$



したがって $\overline{MQ} \parallel \overline{NP}$ 、$\overline{MN} \parallel \overline{QP}$ なので、MNQP は平行四辺形です。

Ⓡ 対角線 $\overline{BD}$ と対角線 $\overline{AC}$ を引き、中点連結定理を使います。

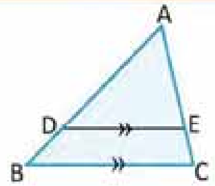
宿題：練習帳114ページ

3.4 平行線を利用した相似、パート 1

P

三角形 ABC において、辺 BC と平行の線分 DE を引きます（$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$）。
三角形 ADE と三角形 ABC は相似ですか? 自分の答えを証明しましょう。

どの三角形の相似条件を使うことができますか?



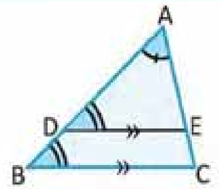
S

三角形 ADE と三角形 ABC において：

$\measuredangle DAE = \measuredangle BAC$ （両方の三角形に共通する角）

$\measuredangle EDA = \measuredangle CBA$ （平行線の同位角）

したがって、$\Delta ADE \sim \Delta ABC$ （二角相等）

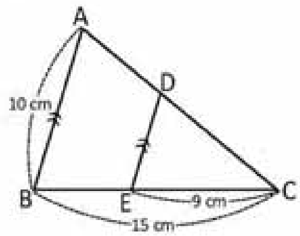


C

ある三角形の 1 つの辺と平行の線分は、残りの 2 つの辺とともにその三角形と相似の三角形を形成するので、次のようになります。$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

E

三角形 ABC において、線分 DE は辺 AB に平行です。$\overline{DE}$ の長さを求めましょう。



線分 DE が辺 AB と平行ならば、上の結果より三角形 DEC と三角形 ABC は相似です。

したがって：
$$\frac{DE}{AB} = \frac{EC}{BC}$$

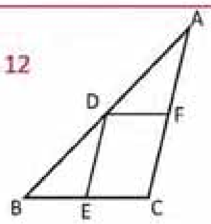
上の AB、EC、BC の値を入れ替えます：
$$\frac{DE}{10} = \frac{9}{15}$$
$$DE = 10\left(\frac{3}{5}\right)$$
$$DE = 6$$

したがって、$\overline{DE}$ の長さは 6 cm です。

1. 三角形 ABC では、$\overline{DF} \parallel \overline{BC}$、$\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ です。
   a) どの三角形とどの三角形が相似ですか?
   b) どの線分とどの線分が比例していますか?

   $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{DE} = \frac{DF}{BE}$

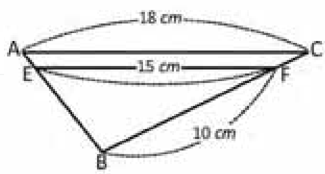
BC = 12



2. 三角形 ABC において、FE は辺 CA に平行です。辺 BC の長さを求めましょう。

   $\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{DF}{BC}$

   $\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}$



達成の目安

3.4 三角形と平行線に関する定理を使い線分の長さを計算します。

学習の流れ

3.4 から 3.7 までの授業では、三角形の線分の比例と平行に関する重要な定理を学びます。通常**タレスの定理**として知られる比例と平行に関する定理を示すために、これらの定理が必要です。 これはこの課で最も大切な内容であり、高校でも使います。
中点連結定理はこれらの定理の中でも特別なものであることを考慮して下さい。

ねらい

Ⓟ, Ⓢ 中点連結定理の仮説、2 つの中点が成立し、それらの中点を通る直線が底辺と平行であることを確認することが不可欠です。簡潔な解答ができるよう、ヒントを考えておく必要があります。

Ⓒ 三角形は相似であるため、辺同士の比例が成立します。このようにして、もう 1 つ等式を加えることができます。

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

しかし、将来的には最初の 2 つの等式のみを使います。

一部の設問の解答：

1. a)
$\overline{DF} \parallel \overline{BC}$ なので ΔABC ~ ΔADF です。
$\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ なので ΔABC ~ ΔDBEです。
$\overline{DF} \parallel \overline{BE}$ 、$\overline{DE} \parallel \overline{AF}$ なので ΔADF ~ ΔDBE です。

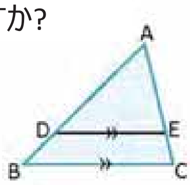
b) $\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{DF}{BC}$
$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}$
$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{DE} = \frac{DF}{BE}$

2.
$\overline{FE} \parallel \overline{CA}$ なので ΔABC ~ ΔEBF です。
したがって、

$\frac{BF}{BC} = \frac{EF}{AC}$
$\frac{10}{BC} = \frac{15}{18}$
$BC = \frac{180}{15}$
$BC = 12$ cm

日付： U5 3.4

Ⓟ ΔABC において、$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ です。
ΔABC と ΔADE は相似ですか?

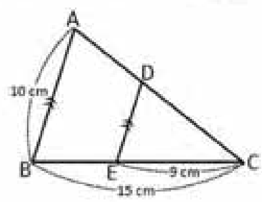


Ⓢ ΔABC と ΔADE では以下が成立します。
∢DAE = ∢BAC （共通する角）
∢EDA = ∢CBA （同位角）

したがって、ΔABC ~ ΔADE となります。

Ⓔ ΔABC において、DE ∥ AB です。$\overline{DE}$ の長さを求めましょう。前の問題の結果より、ΔABC ~ ΔDEC です。

$\frac{DE}{AB} = \frac{EC}{BC}$
$\frac{DE}{10} = \frac{9}{15}$
$DE = 10\left(\frac{3}{5}\right)$
$DE = 6$ cm



Ⓡ 1.
a) ΔABC ~ ΔADF
ΔABC ~ ΔDBE
ΔABC ~ ΔDBE

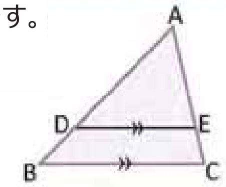
b) $\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{DF}{EC}$
$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}$

2. BC = 12 cm
宿題：練習帳115ページ

3.5 平行線を利用した相似、パート2

P

三角形 ABC において、線分 DE は辺 BC に平行です。
$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ を証明してください。



AB を AD + DB、AC を AE + EC に置き換えます。

S

前回の授業により、次のようになります。

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$$

$\frac{AD+DB}{AD}=\frac{AE+EC}{AE}$ AB を AD + DB、AC を AE + EC に置き換えて、

$1+\frac{DB}{AD}=1+\frac{EC}{AE}$

$\frac{DB}{AD}=\frac{EC}{AE}$ 両辺から 1 をひき、

$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ 両辺の逆数をとります。

次の比はそれぞれ等しいです（他も同様）。

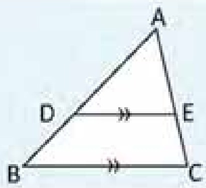
$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC},\ \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC},\ \frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}.$$

C

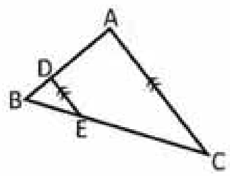
三角形と平行線に関する定理

ΔABC において DE || BC なら、次が成り立ちます。

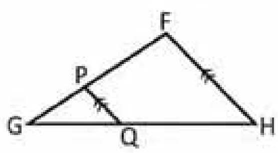
$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC},\ \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$



1. BD = 4 cm、DA = 10 cm、BE = 6 cm のとき、三角形 ABC の線分 $\overline{EC}$ の長さを求めてください。
EC = 15



2. PQ || FH である三角形 FGH において、PG = 6 cm、GQ = 8 cm、QH = 12 cm のとき、三角形の辺 FG の長さを求めてください。
FG = 15



達成の目安

3.5 線分の長さを求めるために三角形の比の定理を利用します。

学習の流れ

3.4 の授業では、どの三角形においても、三角形の辺のうち 1 辺に対して平行な線分が形の等しい 2 つの三角形を形作ることを学びました。この授業では、三角形における平行線の定理を証明しています。そのためには前回の授業の結果を利用します。この定理は 3.8 の授業での重要な定理を証明するため、再度利用します。

ねらい

Ⓟ 、Ⓢ 学生が前回の授業の結果の仮定が証明されることを確認することで、それを利用できるようになります。

備考： $\frac{a}{b}$ は $\frac{b}{a}$ であることを復習する必要があります。

Ⓒ 前回証明されていたことに加え、平行な線によって線分の比が定まることも証明しています。

一部の設問の解答：

1.
三角形と平行線に関する定理：

$$\frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC}$$
$$\frac{4}{10} = \frac{6}{EC}$$
$$4EC = 10 \times 6$$
$$EC = 15 \text{ cm}$$

以前の設問では、学生は定理の利用を証明しなければなりませんでしたが、2 本の平行線の設問からは、仮定を証明することになります。

2.
三角形と平行線に関する定理：

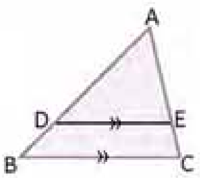
$$\frac{FG}{PG} = \frac{HG}{QG}$$
$$\frac{FG}{6} = \frac{20}{8}$$
$$FG = \frac{120}{8}$$
$$FG = 15 \text{ cm}$$

あるいは次のようにもできます： $\frac{GP}{PF} = \frac{GQ}{QH}$.

日付： U5 3.5

Ⓟ $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ の図において、

$\frac{AD}{DB} = \frac{EC}{BE}$ を証明してください。



Ⓢ 前回の授業により、次のようになります。

$$\frac{AD}{DB} = \frac{EC}{BE}$$
$$\frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE} \quad \text{AD と AC を置き換えます}$$
$$1 + \frac{AD}{DB} = 1 + \frac{EC}{BE}$$
$$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE} \quad \text{1 をひいて}$$
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \text{逆数で割ります}$$

Ⓡ 1. 三角形と平行線に関する定理：

$$\frac{BD}{DA} = \frac{DE}{EC}$$
$$\frac{4}{10} = \frac{6}{EC}$$
$$4EC = 10 \times 6$$
$$EC = 15 \text{ cm}$$

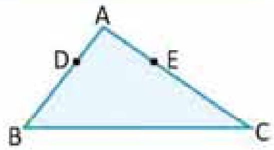
2. FG = 15 cm

宿題： 練習帳116ページ

3.6 線分の比からの平行、パート1

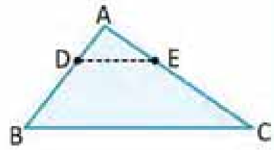
P

三角形 ABC において、D 点と E 点はそれぞれ $\overline{AB}$ と $\overline{AC}$ にあります。そのため $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ が成り立ちます。$\overline{DE}$ に対して $\overline{BC}$ が平行であることを証明するために三角形の相似を利用してください。



S

$\overline{DE}$ に線をひいて三角形 ADE を作ります。



三角形 ADE と三角形 ABC において：

$\measuredangle DAE = \measuredangle BAC$ （両方の三角形に共通する角）

$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ （設問に書かれています）

$\Delta ADE \sim \Delta ABC$ （2 組の辺の長さとその間の角がそれぞれ等しい）

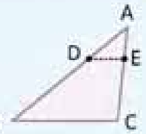
$\measuredangle EDA = \measuredangle CBA$ （三角形 ADE と三角形 ABC が相似のため）

$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ （角 EDA と角 CBA は平行線の同位角）

よって、$\overline{DE}$ は $\overline{BC}$ に平行です。

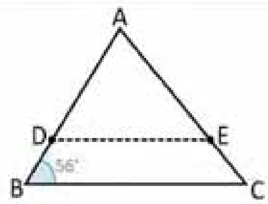
C

三角形 ABC において、点 D と点 E がそれぞれ辺 AB と辺 AC 上にあれば、$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ が成り立つので $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ となります。



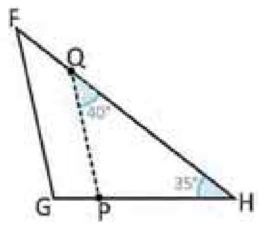
1. 三角形 ABC において、点 D と点 E はそれぞれ辺 AB と AC 上にあり、$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ が成り立ちます。$\measuredangle EDA$ は何度ですか? 解答し説明しましょう。

$\measuredangle EDA = 56°$



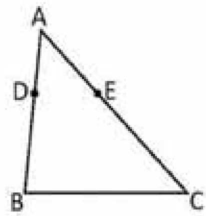
2. 三角形 FGH において、点 P と点 Q はそれぞれ辺 HG と辺 HF 上にあるので、$\frac{HP}{HG}=\frac{HQ}{HF}$ が成り立ちます。$\measuredangle HGF$ は何度ですか? 解答し説明しましょう。

$\measuredangle HGF = 105°$



3. 三角形 ABC において、点 D と点 E はそれぞれ辺 AB と AC 上にあり、$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ が成り立ちます。$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ を証明してください。

DB を AB – AD に、EC を AC – AE に置き換えてください。



達成の目安

3.6 三角形の辺に対する平行線を見つけ、角度を求めます。

学習の流れ

2 回前の授業では、平行線の定理を証明しましたが、その仮定は線分の平行で、結論は線分の比例の関係でした。3.6 と 3.7 の授業では比例する線分の定理を学びます。そこでは比例関係のある辺という仮定から、その辺の間の線分が平行であるという結論にいたります。数学的にはこの定理は重複していますが、教育的意図により別々に学びます。

ねらい

Ⓟ と Ⓢ は、始めに設問に書かれていることから相似の条件を見いだし、三角形の相似の証明に用います。

Ⓒ 注目すべき点は平行を証明するために両方の三角形から比例している辺を見つけ出すことのみです。

一部の設問の解答：

1.
$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ は前に見た結果が利用できるので、$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ となります。
また、平行線の間の同位角なので $\measuredangle EDA = \measuredangle CBA$ です。
したがって、$\measuredangle EDA = 56°$ になります。

2.
前の結果を利用し、
$\overline{FG} \parallel \overline{PQ}$ なので $\measuredangle HQP = \measuredangle HFG = 40°$ です。ΔFGH の内角を加えます。

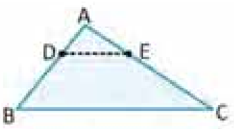
$$\measuredangle HFG + 40° + 35° = 180°$$
$$\measuredangle HFG = 180° - 75°$$
$$\measuredangle HFG = 105°$$

3.
解答
指示の通りに置き換えます。

$$\frac{AD}{AB-AD}=\frac{AE}{AC-AE}$$
$$\frac{AB-AD}{AD}=\frac{AC+AE}{AE}\quad \text{（逆数で割ります）}$$
$$\frac{AB}{AD}-1=\frac{AC}{AE}-1$$
$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}\quad \text{（1 を足します）}$$
$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{EC}\quad \text{（逆数で割ります）}$$

日付： US 3.6

Ⓟ ΔABC において、$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ です。
$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ を証明してください。



Ⓢ $\overline{DE}$ に線をひき ΔADE を作ります。
$\measuredangle DAE = \measuredangle BAC$ （共通）
$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ （設問より）
ΔADE ~ ΔABC （2組の辺の長さとその間の角がそれぞれ等しい）
$\measuredangle EDA = \measuredangle CBA$ （前の設問の相似により ）
$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ （同位角) ）
したがって、$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ です。

Ⓡ 1. 前の結果を利用し、
$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ （$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$のため）
$\measuredangle EDA = \measuredangle CBA$ （同位角）

したがって、$\measuredangle EDA = 56°$ になります。

2. $\measuredangle HFG = 105°$.

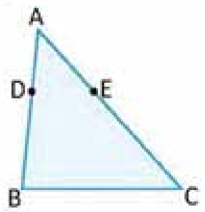
宿題： 練習帳117ページ

レッスン 3

3.7 線分の比からの平行、パート 2

P

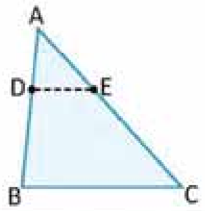
三角形 ABC において、D 点と E 点はそれぞれ AB と AC 上にあります。そのため $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ が成り立ちます。$\overline{DE}$ に対して $\overline{BC}$ が平行であることを証明するために三角形の相似を利用してください。



S

もし $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ なら $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ が成り立ちます。

前回の授業で見たように、DE ∥ BC です。



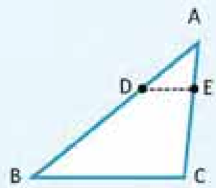
C

三角形と平行線に関する定理

三角形 ABC において、点 D と点 E がそれぞれ辺 $\overline{AB}$ と辺 $\overline{AC}$ 上にあります。

a) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ なら $\overline{DE}$ ∥ $\overline{BC}$です。

b) $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ なら $\overline{DE}$ ∥ $\overline{BC}$です。



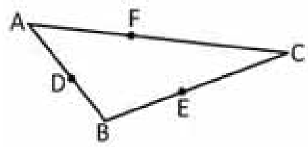
ユニット5

1. 三角形 ABC は次が成り立ちます： $\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC}$ と $\frac{CF}{FA} = \frac{CE}{EB}$.

   a) 点D、E 、F からなる線分のうち、どれが 辺 AC に対して平行ですか? 解答し説明しましょう。$\overline{DE}$ ∥ $\overline{AC}$

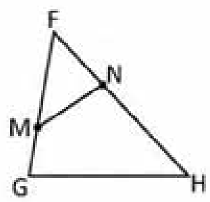
   b) 点D、E 、F からなる線分のうち、どれが辺 AB に対し平行ですか? 解答し説明しましょう。$\overline{FE}$ ∥ $\overline{AB}$

   c) $\overline{DF}$ は $\overline{BC}$ に対して平行ですか。
   平行であることを確認できません。



2. 三角形 FGH は次が成り立ちます： $\frac{FM}{FH} = \frac{FN}{FG}$

   三角形 FNM は三角形 FGH に相似ですか? 解答し説明しましょう。
   ΔFNM ~ ΔFGH



達成の目安

3.7 三角形の線分の比を導く平行な線分を見つけます。

学習の流れ

この授業は前回に見た結果の応用です。ここでは、三角形の辺の上にある 2 点で区切られた線分が比例関係のとき、2 点を結んでできた線分は 3 つ目の辺に対して平行であるという、三角形の線分の比を証明します。

ねらい

Ⓟ、Ⓢ 重要なポイントは比例する線分を見つけることで、それからは相似の条件の 1 つである対応する角度を用い、相似の結果から平行な辺を証明します。

一部の設問の解答：

1.

a) 点から線が分岐する DF と EF は AC に対して平行ではありません。
$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC}$ により線分の比の定理が成り立つので $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$

b) 点から線が分岐する FD は AB に対して平行ではありません。
$\frac{CF}{FA} = \frac{CE}{EB}$ により線分の比の定理が成り立つので $\overline{FE} \parallel \overline{AB}$

c) DFとBCの線分の比について情報がないので、DFとBCが平行であることを証明できません。

2.

以下のことに注目します。

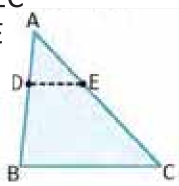
$\sphericalangle MFN = \sphericalangle HFG$ （共通）

さらに、$\frac{FM}{FH} = \frac{FN}{FG}$ （設問より）

よって、相似の条件を利用すると
2 組の辺の長さとその間の角がそれぞれ等しいため
$\Delta FNM \sim \Delta FGH$

日付： U5 3.7

Ⓟ ΔABC において、$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ が成り立ちます。$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ を証明してください。



Ⓢ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ なら、同様に $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ です。

確認：

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$
$$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$$
$$\frac{DB}{AD} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1$$
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{EC}$$

前回の授業により、$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ です。

Ⓡ 1.

a) $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$

b) $\overline{FE} \parallel \overline{AB}$

c) 平行であることを確認できません。

2.

$\Delta FNM \sim \Delta FGH$（2 組の辺の長さとその間の角がそれぞれ等しい）

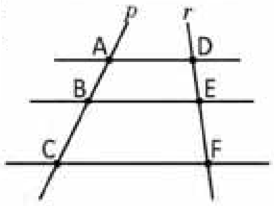
宿題： 練習帳118ページ

3.8 線分の比からの平行、パート3

P

直線 p、r 上に図のような 3 本の平行な直線がひかれています。

$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ であることを証明しましょう。



AFに線をひき、三角形と平行線に関する定理を使います。

S

AF に線を引き、$\overline{AF}$ と $\overline{BE}$ の交点を M とします。

三角形 ACF において、三角形と平行線に関する定理によって、

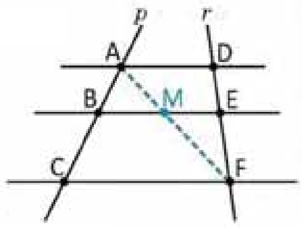
$\frac{AB}{BC} = \frac{AM}{MF}$

三角形 AFD において、三角形と平行線に関する定理によって、

$\frac{FM}{MA} = \frac{FE}{ED}$

両辺の逆数をとり、$\frac{MA}{FM} = \frac{ED}{FE}$ 。

したがって、 $\frac{AB}{BC} = \frac{AM}{MF} = \frac{MA}{FM} = \frac{ED}{FE} = \frac{DE}{EF}$ 。



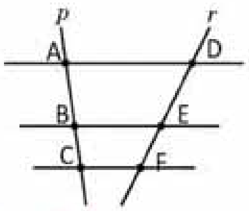
C

比と平行の定理

どんな 2 本の直線も、その上に複数の平行線が横切るとき、それによって直線上で区切られた線分は他の対応する線分と比例します。

この結果はタレスの定理として知られています。

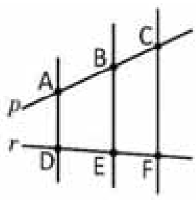
1. 直線 p、r 上に図のような 3 本の平行な直線がひかれています。
   a) どの線分とどの線分が比例していますか?
   b) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ であることを証明しましょう。



$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$, $\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}$ 、同様に $\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$ です。

2. 直線 p、r 上に図のような 3 本の平行な直線がひかれています。AB = 3、DE = 2、EF = 1のとき、BC の値はいくつですか。

BC = $\frac{3}{2}$



達成の目安

3.8 比と平行の定理の証明をします。

学習の流れ

この授業では、比と平行の定理を証明するために、3.5 の授業で学んだ平行な線分の比の定理を使います。将来的に高等教育の内容を学習する際、役に立ちます。

ねらい

Ⓟ、Ⓢ 教科書のヒントを利用する際、2 つの三角形が形作られており、そこに平行な線分の定理を利用できることに注目することが重要です。

タレスの定理として一般に知られています。他の教科書にはその名前で記されていることがあります。

一部の設問の解答：

1.

a) 図では $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$ が成り立ち、

同様に $\frac{AC}{AB}=\frac{DF}{DE}$, $\frac{AC}{BC}=\frac{DF}{EF}$ 。

b) 前述から、次が成り立ちます。

$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$.

そして、AB(EF) = BC(DE)

よって、設問の $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}$ の証明が成り立ちます。

2.

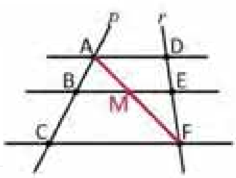
p と r は平行な直線で区切られており、比例と平行の定理を利用できます。以下の方法です。

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$$
$$\frac{3}{BC}=\frac{2}{1}$$
$$\frac{BC}{3}=\frac{1}{2}$$ （逆数でわります）
$$BC=\frac{3}{2}$$

日付： **US 3.8**

Ⓟ p と r を 3 つの平行な直線が横切っています。$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$ であることを証明しましょう。

AF に線をひき、3.5 の授業の定理を利用してください。



Ⓢ $\overline{AF}$ と $\overline{BE}$ の交点をMとします。
三角形と平行線に関する定理により

ΔACF において：$\frac{AB}{BC}=\frac{AM}{MF}$

ΔACF において：$\frac{MF}{AM}=\frac{EF}{DE}$

$\frac{AM}{MF}=\frac{AE}{EF}$ (逆数を使います)

よって、

$\frac{AB}{BC}=\frac{AM}{MF}=\frac{DE}{EF}$ 、同様に $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$.

Ⓡ 1.

a) $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$ 、同様に $\frac{AC}{AB}=\frac{DF}{DE}$ です。

b) 提案： 以下のように

$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$ から AB(EF) = BC(DE) に変形

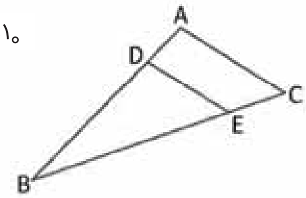
2. BC = $\frac{3}{2}$

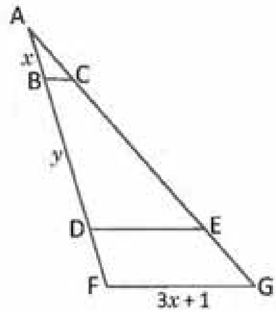
宿題： 練習帳119ページ

3.9 復習問題

1. $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$ 、AC = 2、BD = 3、DA = 1 のとき、$\overline{DE}$ の長さを求めてください。

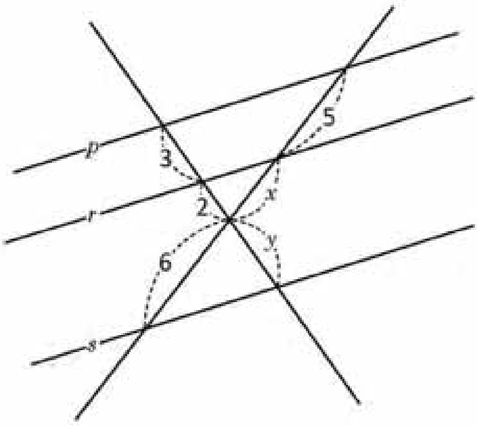
   $DE = \frac{3}{2}$





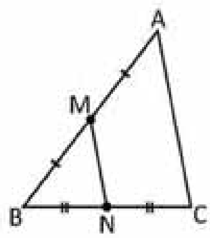
2. ΔAFG において、次が成り立ちます。$\overline{BC} \parallel \overline{DE} \parallel \overline{FG}$
   BC = 0.8 cm、DE = 3 cm、AF = 5 cm のとき、x と y の値を計算してください。

   $x = 1$, $y = \frac{11}{4}$



3. 直線 p と r は平行です。x と y の値を求めてください。

   $x = \frac{10}{3}$, $y = \frac{18}{5}$



4. 図の三角形 ABC において、M と N はそれぞれ $\overline{AB}$ と $\overline{BC}$ の中点です。三角形 MBN の周りの長さが 8 のとき、ΔABC の周りの長さはいくつですか?

   ΔABC の周りの長さは 16 です。

達成の目安

3.9　平行な線分の定理を利用して線分の長さを求めます。

一部の設問の解答：

1.
$\overline{AC} \parallel \overline{DE}$ が成り立つので、三角形の平行な線分の定理を利用できます。

$\frac{BD}{BA} = \frac{DE}{AC}$

一方、BA = BD + DA = 3 + 1 = 4

$\frac{3}{4} = \frac{DE}{2}$　（各値を代入します。）

$DE = \frac{3}{2}$

2.
$\overline{BC} \parallel \overline{FG}$ なので、三角形 AFG、ABC において、平行な線分の定理が利用できます。これにより、

$$\frac{AB}{AF} = \frac{BC}{FG}$$
$$\frac{x}{5} = \frac{0.8}{3x+1}$$
$$3x^2 + x = 4$$
$$x^2 + x - 4 = 0$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 3 \times (-4)}}{6}$$
$$x = \frac{-1 \pm 7}{6},\ x = 1, -\frac{4}{3}$$

線分の長さを求めているので、負の解は除きます。よって $x = 1$。

$\overline{DE} \parallel \overline{FG}$ なので、次が成り立ちます。

$$\frac{AD}{AF} = \frac{DE}{FG}$$
$$\frac{x+y}{5} = \frac{3}{3x+1}$$
$$\frac{y+1}{5} = \frac{3}{4}$$
$$y = \frac{15}{4} - 1$$
$$y = \frac{11}{4}$$

したがって、$x = 1$，$y = \frac{11}{4}$ になります。

備考：難易度により、この設問は最後に解くように指示します。

3.
三角形の平行な線分の定理を p と r にあてはめて、

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{5}$$
$$x = \frac{10}{3}$$

比例と平行の定理を利用します。

$$\frac{y+2}{3} = \frac{6+x}{5}$$
$$y + 2 = \frac{18+3x}{5}$$
$$y + 2 = \frac{18+10}{5}$$

x に代入します。

$$y = \frac{28}{5} - 2$$
$$y = \frac{18}{5}$$

4.
M と N は中点なので、$MN = \frac{1}{2}AC$ が成り立ちます。
周りの長さは辺の長さの合計なので、以下のようになります。

$$BM + BN + MN = 8$$
$$\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AC = 8$$
$$\frac{1}{2}(AB + BC + AC) = 8$$
$$AB + BC + AC = 16.$$

ΔABC の周りの長さはいくつですか。

宿題：練習帳120ページ

レッスン 4 相似の応用と相似三角形

4.1 地図上の 2 点間の距離

P

アナがサンサルバドールの地図上の 2 点の距離を定規で測りました。2 点間の距離は 6 cm でした。地図の縮尺が 1 : 50,000 の場合、印のついた 2 つの場所の間の実際の距離はどれくらいでしょうか？

縮尺の数字は、地図上の 1 センチが現実の 50,000 cm に相当することを示しています。

S

2 地点の実際の距離を x とします。

よって、

$$\frac{6}{x} = \frac{1}{50\,000}$$

上記の式から x を求めます。：

$$6(50\,000) = x$$

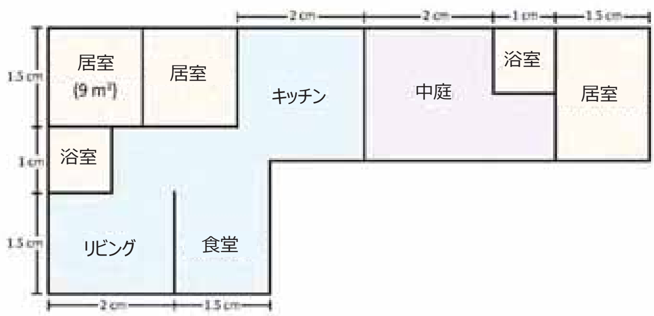
$$x = 300\,000$$

世界の救世主像とエルサルバドル大学の間の距離は 300,000 cm 又は 3 km です。

1. 次のエルサルバドルの地図は、サンタアナとサンサルバドルの間の実際の距離が 48 km で、地図上に描かれたセグメントが 1.5 cm の場合、どのような縮尺で描かれているのでしょうか？

両方の測定値は、同じ単位でなければなりません。

2. 次の図で：
   a) 縮尺は?
   b) 中庭の広さは (m^2)？
   c) 全体の広さは?



縮尺を知るには、定規で図面の長さを測ります。

達成の目安

4.1 地図上の 2 点間の実際の距離を、比例を使って求めます。

学習の流れ

前回の授業で、図形の相似に関するすべての概念、具体的には三角形の相似、2 つの三角形の相似条件を使って得られる重要な定理を学びました。この授業では、文章問題や応用問題に取り組みます。

ねらい

Ⓟ、Ⓢ 1 : 50,000 とは、直線的な比を表し、「地図の 1 cm ごとに実際には 50,000 cm ある」と読み取りましょう。ここでは不明な情報、つまり2点間の実際の距離を明らかにすることが大切です。実際の距離は縮尺を用いて計算します。km への換算は、100,000 で割ることで可能です。

一部の設問の解答：

2.

a) 定規で測ると、部屋の側面は 1 辺 1.5 cm です。部屋の実際の大きさは1 辺 が 3 m です。

よって縮尺は：

$$\frac{1.5}{300} = \frac{15}{3000} = \frac{1}{200}$$

b) 中庭の面積は、紫の部分と浴室を合わせた長方形の面積から浴室の面積を引いて求めることができます。

浴室の全ての辺は 1 cm です。

x を浴室の実際の実寸とすると：$\frac{1}{x} = \frac{1}{200}$ になるので、

x = 200 cm = 2 m です。

よって、浴室の広さは：

$2 \text{ m} \times 2 \text{ m} = 4 \text{ m}^2$.

紫の長方形の側面の高さは 2 cm、長さは 3 cm です。

x と y が実際の辺の長さです。

$\frac{2}{x} = \frac{1}{200}$ 、よって x = 400 cm = 4 m

$\frac{3}{y} = \frac{1}{200}$ 、よって x = 600 cm = 6 m

この面積は$4 \times 6 = 24 \text{ m}^2$ なので、中庭の面積は $24 - 4 = 20 \text{ m}^2$ になります。

日付： U5 4.1

Ⓟ 地図上の 2 点間の距離は 6 cm です。地図の縮尺が 1 : 50000 の場合

2 点間の実際の距離は？

Ⓢ 2 点間の距離は：

$$\frac{6}{x} = \frac{1}{50000}$$

$x = 6(50000)$ x を求めると

$x = 300000$ cm

2 点間の距離は 3 km 又は 300,000 cm になります。

Ⓡ 1.

48 km が 4,800,000 cm なので、

比は：

$$\frac{1.5}{4800000} = \frac{15}{4800000} = \frac{1}{3200000}$$

地図の縮尺は 1 : 3200000

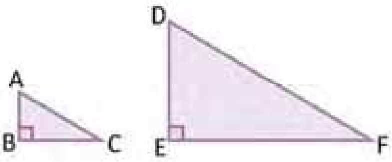
宿題：練習帳121ページ

レッスン 4

4.2 相似多角形の面積

P

三角形の ABC と DEF の比率は 1 : 3 で相似しています。ΔABC と ΔDEF の面積の比は？



三角形の面積は：

$$\frac{(\text{底辺})\ (\text{高さ})}{2}$$

S

ABC の三角形の面積を $\frac{(BC)(AB)}{2}$、DEF の三角形の面積を $\frac{(EF)(DE)}{2}$ とします。よって、面積の比は以下のように計算します。

$$\frac{(ABC)}{(DEF)} = \frac{\frac{(BC)(AB)}{2}}{\frac{(EF)(DE)}{2}} = \frac{(BC)(AB)}{(EF)(DE)} = \left(\frac{BC}{EF}\right)\left(\frac{AB}{DE}\right)$$

(ABC) は三角形 ABC の面積です。従って、$\frac{(ABC)}{(DEF)}$ は、三角形 (ABC) と (DEF) の面積の比となります。

$\frac{BC}{EF} = \frac{1}{3}$ かつ $\frac{AB}{DE} = \frac{1}{3}$ であると仮定します。面積の比を代入します。

$$\frac{(ABC)}{(DEF)} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

したがって、ΔABC と ΔDEF の面積の比は、$\frac{1}{9}$（相似比の 2 乗）に等しい。

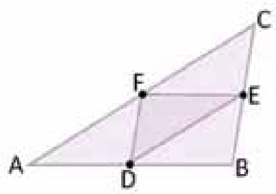
C

2 つの相似図形の面積の比は、相似比の 2 乗に等しい。

1. 2 つの相似三角形の比は 2 : 3 です。その面積の比は? $\frac{4}{9}$

2. 三角形 ABC の D, E, F は、辺 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ の中間点です。ABC の三角形と DEF の三角形の面積の比は?

$\frac{(ABC)}{(DEF)} = 4$



ユニット5

達成の目安

4.2　2 つの相似三角形の比を使って、その面積の比を求めましょう。

学習の流れ

前回の授業では、三角形の相似を地図や平面図の活用に応用することを学びました。この授業では、相似図形の面積の数学的応用を学びます。

ねらい

Ⓟ、Ⓢ　三角形が比 1 : 3 で相似と書かれているときは、対応する辺が比 1 : 3 にあることを意味していることを理解しておきましょう。ここで忘れてはいけないのは、ABC の三角形の面積を表現するために (ABC) という表記を使っていることです。

以上のことからから注意しなければならないのは、面積の比が両辺の比の二乗になるということです。これはどのような三角形でも、どのような平面図形でも当てはまります。

一部の設問の解答：

1.
結論で示されること：

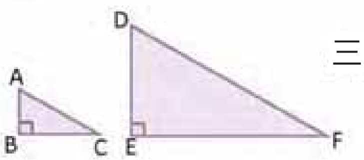
$$\frac{(ABC)}{(DEF)} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

2.
従って、$DE = \frac{1}{2}CA$、$FD = \frac{1}{2}BC$ なので、中点連結定理により、$EF = \frac{1}{2}AB$ になります。

ゆえに、$\Delta ABC \sim \Delta EDF$（三角形の相似条件）と相似比が 2 : 1 なので、$\frac{(ABC)}{(DEF)} = (\frac{2}{1})^2 = 4$ になります。

日付：　　**U5 4.2**

Ⓟ 三角形 ABC と DEF の比は 1 : 3 です。面積の比は?



三角形の面積：$\frac{(\text{底辺})(\text{高さ})}{2}$

Ⓢ ABCの面積：$\frac{(BC)(AB)}{2}$

DEFの面積：$\frac{(EF)(DE)}{2}$

$$\frac{(ABC)}{(DEF)} = \frac{(AB)(BC)}{2} \div \frac{(EF)(DE)}{2}$$

$$= \frac{(BC)(AB)}{(EF)(DE)}$$

$$= \left(\frac{BC}{EF}\right)\left(\frac{AB}{DE}\right)$$

$\frac{BC}{EF} = \frac{1}{3}$ で $\frac{AB}{DE} = \frac{1}{3}$ と仮定します。
代入します：

$$\frac{(ABC)}{(DEF)} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

従って、面積の比は、$\frac{1}{9}$ です。

Ⓡ 1.
結論で示されること：

$$\frac{(ABC)}{(DEF)} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

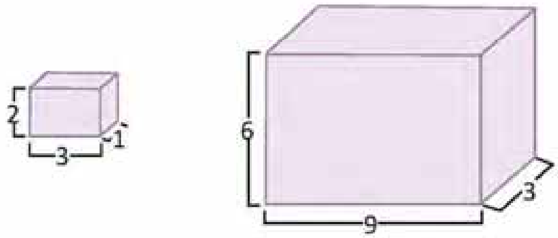
2. 4

宿題：練習帳123ページ

4.3 相似する立体の体積

P

図の直方体は相似しています。体積の比を求めましょう。



直方体の体積の求め方：
(高さ) (縦) (横)

S

小さい直方体の体積を V_1、大きいの直方体の体積を V_2 とします。したがって：

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{(2)(3)(1)}{(6)(9)(3)}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{3}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

約分すると：

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

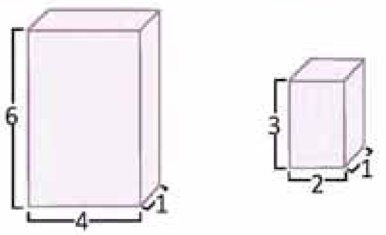
$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

したがって、V_1 の小さい直方体と V_2 の大きい直方体の体積の比は $\frac{1}{27}$ です。

C

2 つの相似する立体の体積の比は、相似比の 3 乗に等しい。

1. 次の直方体は相似していますか? あなたの答えを説明してみましょう。
それぞれ対応する辺の比が異なるため、相似していません。



2. 2 つの円柱が 1 : 4 の比で相似である場合、体積の比はいくつですか。
体積の比は、$\frac{1}{64}$ です。

達成の目安

4.3　立体の相似を利用して、その体積の相似比を求めましょう。

学習の流れ

直方体の体積を求める式を用いて比を求め、約分して答えを求めます。重要なのは、体積の比は、相似比の 3 乗に等しいことです。

ねらい

Ⓟ、Ⓢ　直方体の体積を求める式を用いて、両者の比を求め、約分して答えを出します。重要なのは、体積の比は相似比の 3 乗に等しいということです。ここで注意したいのは、体積の比は辺の比の 3 乗になっていることです。

Ⓒ 重要なのは、この結果は全ての相似する直方体や立体に当てはまるということを示すことです。

一部の設問の解答：

結論で示されたことを適用すると、円柱の体積の比は $(\frac{1}{4})^3 = \frac{1}{64}$ になります。

円柱の場合の結果の確認は、次のように行います。

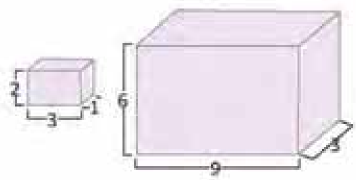
円柱の体積は：
π × (半径)^2 × (高さ)

半径の比が 1 : 4 で高さも 1 : 4 です。
体積を求めましょう：

$$V_1 = \pi r_1 h_1$$
$$V_2 = \pi r_2 h_2$$
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi r_1^2 h_1}{\pi r_2^2 h_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\left(\frac{h_1}{h_2}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{4}\right)^3$$
$$= \frac{1}{64}$$

日付：　　　　**U5 4.3**

Ⓟ 以下の直方体は相似形です。体積の比を求めましょう。



Ⓢ V_1：小さい直方体の体積
V_2：大きい直方体の体積

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{(2)(3)(1)}{(6)(9)(3)}$$
$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{3}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

従って、体積の比は、$\frac{1}{27}$

Ⓡ 1.
辺の比が異なるため相似形ではありません。

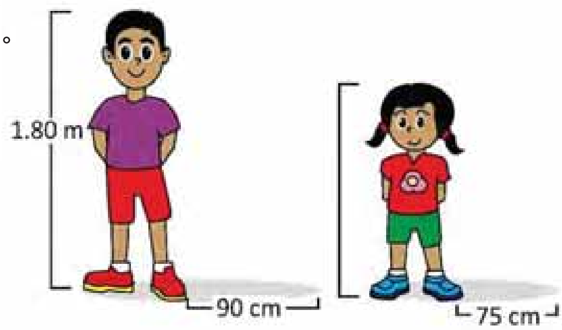
2. $\frac{1}{64}$

宿題：　練習帳124ページ

4.4 三角形の相似を利用して解く問題

P

ある同じ時間にホセとマルタは校庭に立ちます。ホセの影は 90 cm の長さ、マルタの影は 75 cm の長さになりました。ホセの身長は 1.80 m です。マルタの身長は?



同じ時間の 2 つの物体の高さは、その影の長さに比例します。

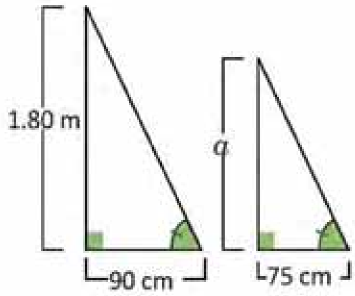
S

二人の身長と影の長さで二つの相似する直角三角形を作ることができます（三角形の相似条件）。
最初に、ホセの身長を cm に直します。

$$1.80 \text{ m} = 180 \text{ cm}$$

マルタの身長を cm で表します。相似する三角形にするには：

$$\frac{a}{180} = \frac{75}{90}$$



上の式を解きます。

$$a = 180\left(\frac{75}{90}\right)$$

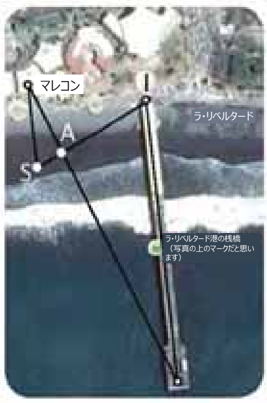
$$a = 150$$

従って、マルタの身長は 150 cm 又は 1.50 m になります。

1. ある時間帯の内務省の塔の影が 40 m になりました。同じ時に身長 1.82 m の男性の影は 1.40 m の長さになりました。内務省の塔の高さを求めましょう。52 m

2. アントニオ (A) はライフガード (S) から 24 m 離れたビーチにいます。マレコンとライフガードの距離が 60 m で桟橋の長さが 200 m であった場合、アントニオと桟橋の端 (I) の距離は? 80 m

写真では、マレコンと S 地点を結ぶ線は桟橋と平行になっています。



達成の目安

4.4　相似図形の知識を使って応用問題を解きましょう。

学習の流れ

直方体の体積を求める式を用いて比を求め、約分して答えを求めます。重要なのは、体積の比は、相似比の 3 乗に等しいことです。

ねらい

Ⓟ、Ⓢ 直方体の体積を求める式を用いて、両者の比を求め、約分して答えを出します。重要なのは、体積の比は相似比の 3 乗に等しいということです。ここで注意したいのは、体積の比は辺の比の 3 乗になっていることです。

Ⓒ この結果は、すべての直方体や立体に当てはまります。

一部の設問の解答：

1.
高さは影と比例しますので、当の高さを a とします。

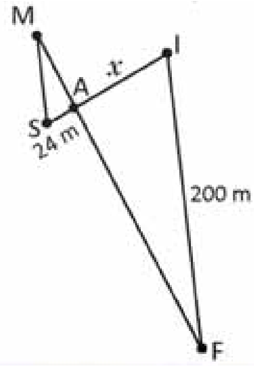
$$\frac{a}{1.82} = \frac{40}{1.40}$$
$$a = \frac{40}{1.40}(1.82)$$
$$a = 52 \text{ m}$$

2.
追加情報として、2 辺は平行です。マレコンの位置 M、桟橋の橋の I、桟橋の端 F。
∢SMA = ∢AFI（内角の錯角なので）
∢MAS = ∢FAI（対頂角なので）

三角形の相似条件より、2 つの三角形は相似していて、次のようになります。

$$\frac{x}{24} = \frac{200}{60}$$
$$x = \frac{200}{60}(24)$$
$$x = 80 \text{ m}$$

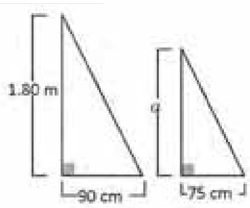
したがって、アントニオと桟橋の端の距離は 80 m となります。



日付： US 4.4

Ⓟ マルタの身長 “a” はいくつでしょう？

身長は影に比例します。



Ⓢ 身長は影に比例するので、

$$\frac{a}{180} = \frac{75}{90}; \quad 1.80 \text{ m} = 180 \text{ cm}$$
$$a = 180\left(\frac{75}{90}\right)$$
$$a = 150$$

したがって、マルタの身長は 1.50 m です。

Ⓡ 1.
身長が影の長さに比例していると仮定して、塔の高さを出してみましょう。

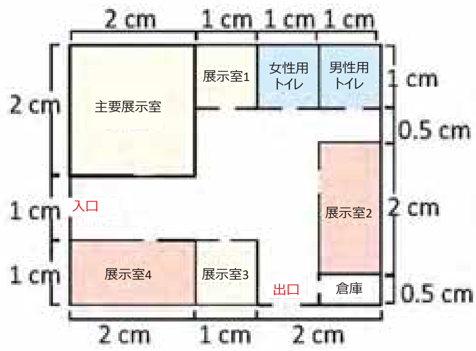
$$\frac{a}{1.82} = \frac{40}{1.40}$$
$$a = \frac{40}{1.40}(1.82)$$
$$a = 52 \text{ m}$$

2.
80 m

宿題： 練習帳125ページ

4.5 復習問題

1. 次の図面は博物館のもので、縮尺は 1 : 200 です。トイレと展示室 1 と 3 は同じ大きさで、展示室 2 の大きさは展示室 4 と同じです。



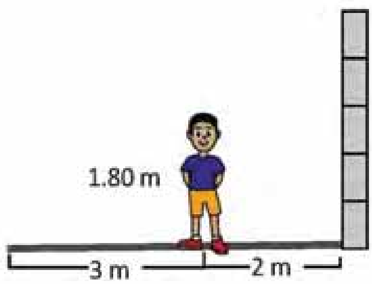
a) 主要展示室の大きさは? 16 m²
b) 展示室 1 の面積は? 4 m²
c) 博術館の床全体を 25 cm × 25 cm のタイル敷きにする場合、タイルは何枚必要になるのでしょうか? 1280 枚

2. カルメンさんは缶詰の果物やジュースを販売しています。そのため、2 種類の缶を使用しています。高さ 10 cm で半径 4 cm の通常ものと体積が 540π cm³ のジャンボ缶の 2 種類です。2 種類の缶が相似しているとしたら、ジャンボ缶の半径と高さは？

半径 = 6 cm

高さ = 15 cm

3. ホセは、自分の影の終わりが壁の影の終わりと一致するように、壁から 2 メートルのところに立ちました。ホセの身長を 1.80 m、影の長さを 3 m とすると、壁の高さは何 m になりますか？



ホセが壁と平行に立っていると仮定して、相似する三角形を 2 つ作り、底辺の比、$\frac{a}{5} = \frac{1.8}{3}$ （ここで a は壁の高さ）を使うと、a = 3 mとなります。

達成の目安

4.5　相似図形の知識を使って応用問題を解く。

一部の設問の解答：

1.
a) 最初に実寸を出し、つぎに面積を出します。

主要展示室の一辺を x とします。

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{200}$$
$$x = 400\ \text{cm} = 4\ \text{m}$$

したがって、主要展示室の面積は
4 m × 4 m = 16 m^2 になります。

b) 展示室 1 の一辺を y とします。

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{200}$$
$$y = 200$$

したがって、展示室 1 の面積は：
2 m × 2 m = 4 m^2

c) 博物館の図面の 2 辺の長さは 4 cm と 5 cm です。
実際の長さを求めてみましょう。

x を実際の縦の長さとします。

$$\frac{4}{x} = \frac{1}{200}$$
$$x = 800\ \text{cm}$$

y を実際の横の長さとします。

$$\frac{5}{y} = \frac{1}{200}$$
$$y = 1000\ \text{cm}$$

さらに、
800 ÷ 25 = 32 と 1000 ÷ 25 = 40
したがって、タイルは縦に 32 枚、横に 40 枚入ります。
ですので、40 × 32 = 1280 枚のタイルが必要です。

2.
授業 4.3 の結果から、体積の比は相似比の 3 乗に等しいことがわかっています。

小さい缶の体積は、16π (10) cm^3 = 160π cm^3 になります。
体積の比は：

$$\frac{160\pi}{540\pi} = \frac{8}{27} = \frac{2^3}{3^3}$$

相似比は、2 : 3 になります。
半径を求めます。

$$\frac{4}{R} = \frac{2}{3}$$
$$R = 6\ \text{cm}$$

高さ h を求めます。

$$\frac{10}{h} = \frac{2}{3}$$
$$h = 15\ \text{cm}$$

宿題： 練習帳126ページ