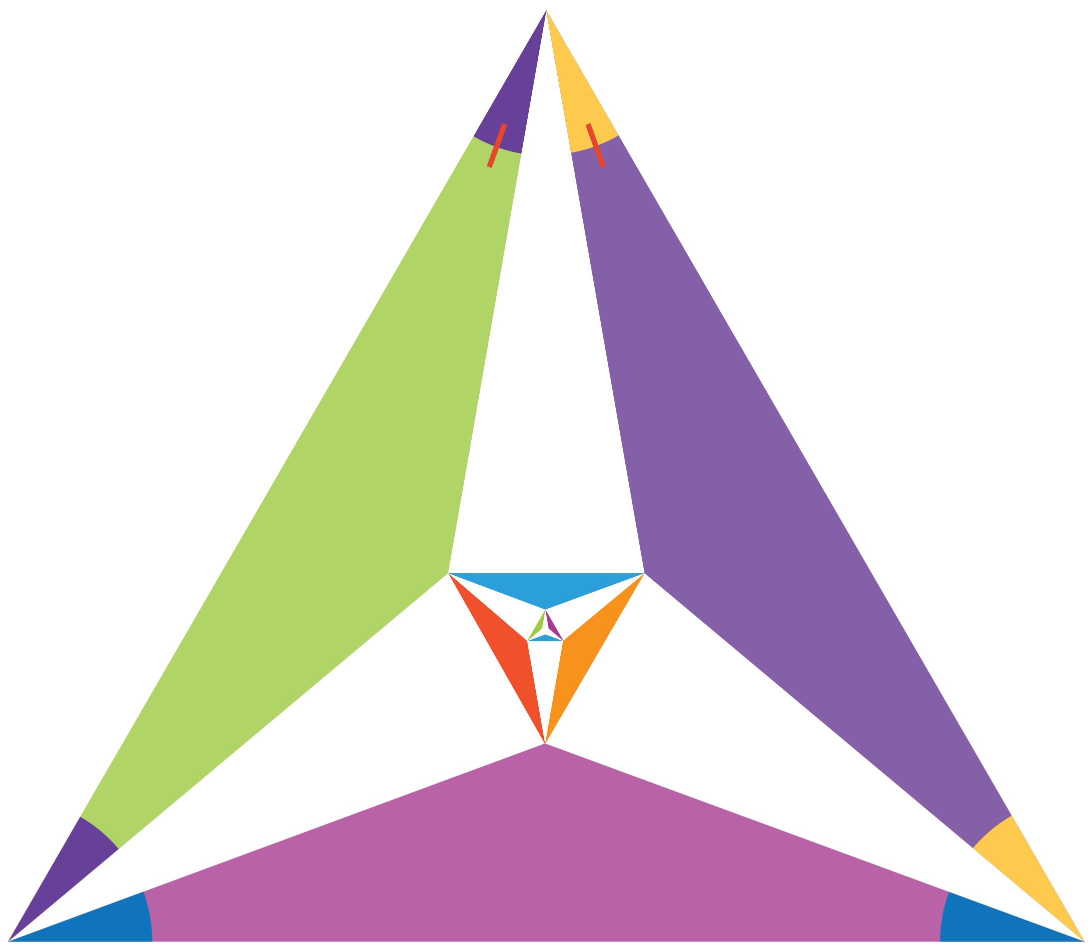
GOBIERNO DE EL SALVADOR

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Matemática

Primer año de bachillerato



Libro de texto
Segunda edición

ESMATE

JICA

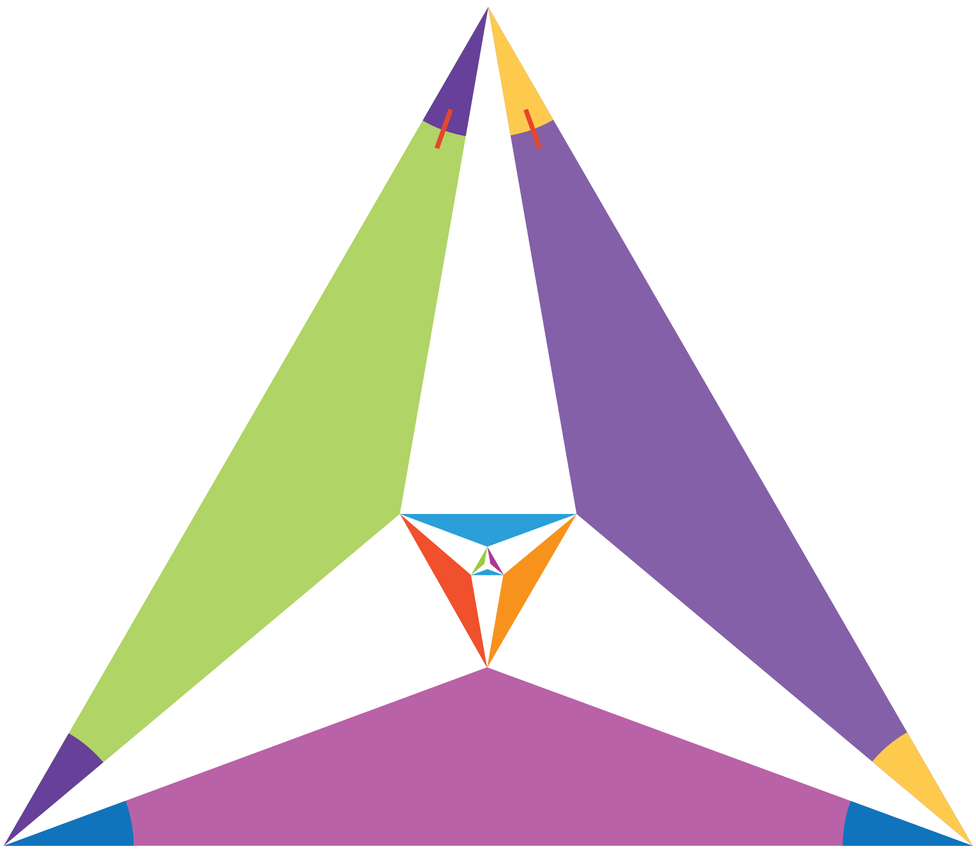
Libro de texto Matemática Segunda edición 1 Bachillerato

GOBIERNO DE
EL SALVADOR

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

Matemática

Primer año de bachillerato



Libro de texto
Segunda edición

ESMATE

JICA

Equipo técnico autoral y de diagramación del Ministerio de Educación
Ana Ester Argueta Aranda
César Omar Gómez Juárez
Diana Marcela Herrera Polanco
Francisco Antonio Mejía Ramos

Revisión técnica
Claudia Patricia Corcio de Beltrán

Diseño y revisión de diagramación
Francisco René Burgos Álvarez
Judith Samanta Romero de Ciudad Real

Corrección de estilo
Mónica Marlene Martínez Contreras
Marlene Elizabeth Rodas Rosales

Revisión a nivel nacional por especialistas formados dentro del Plan Nacional de Formación Docente en Servicio.
Cooperación Técnica de Japón a través de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA).

Imagen de portada con fines educativos, en ella se ilustra un triángulo equilátero trisecado en un ángulo, a partir de esto se puede calcular el valor del lado del triángulo interior más grande.
La respuesta se encuentra al reverso de la contraportada.

510
M425 Matemática : primer año de bachillerato : libro de texto / equipo técnico
autoral Ana Ester Argueta, César Omar Gómez, Diana Marcela Herrera,
s/v Francisco Antonio Mejía. -- 2ª ed. -- San Salvador, El Salv. : Ministerio de
Educación (MINED), 2019.
218 p. : il. ; 28 cm. -- (Esmate)
ISBN 978-99961-341-1-1 (impreso)
1. Matemáticas-Libros de texto. 2. Funciones-Problemas, ejercicios, etc.
3. Matemáticas-Enseñanza. I. Argueta Aranda, Ana,
Matemática: primer año de bachillerato ... 2019
Ester, coaut. II. Título.
BINA/jmh

Estimados estudiantes:

Nos complace darles la bienvenida a un nuevo año escolar y a una nueva oportunidad de adquirir muchos conocimientos matemáticos.

Como Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología (MINEDUCYT) a través del Proyecto de Mejoramiento de los Aprendizajes de Matemática en Educación Básica y Educación Media (ESMATE) hemos creado para ustedes diversos materiales educativos, uno de ellos es el Libro de texto que tienen en sus manos.

Este libro contiene múltiples problemas y actividades con los que podrán desarrollar su razonamiento y mejorar las capacidades matemáticas que les serán muy útiles para resolver situaciones de la vida diaria.

Por ello, les invitamos a abordar cada actividad que contiene este libro como un reto a vencer y contamos con que pondrán todo su esfuerzo y dedicación para convertirse en ciudadanos ejemplares que contribuyan al desarrollo de nuestro querido país.

Carla Evelyn Hananía de Varela
Ministra de Educación, Ciencia y Tecnología

Ricardo Cardona Alvarenga
Viceministro de Educación

Presentación del libro

Partes de una clase

Problema inicial En el primer momento de cada clase, el estudiante debe pensar una solución a partir de una situación problemática la cual permite introducir el contenido que se va a desarrollar.

Solución En este segundo momento, el texto propone una o varias formas de resolver el problema planteado.

Conclusión En la Conclusión se llega a la explicación del contenido. Aquí se relacionan el Problema inicial y la Solución para explicar con lenguaje matemático la finalidad del contenido.

Ejemplo A veces es necesario presentar un problema adicional, que permita consolidar el contenido de la clase.

Problemas Es la sección de problemas y ejercicios.

El ícono de la calculadora indica los únicos ejercicios en donde es indispensable utilizarla.

Información complementaria

En el libro se utilizan algunos elementos que facilitan el aprendizaje de los contenidos, como presaberes, pistas, información adicional como historia de la matemática, esto se representa con diferentes colores:

Presaberes	Pista	Información adicional

Distribución de las clases

El libro está compuesto por 8 unidades didácticas, cada una formada por diferentes lecciones y cada lección está compuesta por distintas clases. En la numeración del título de cada clase, el primer número indica la lección y el segundo indica la clase. Por ejemplo, el título de la clase 8 de la lección 1 de la unidad 1 de este libro se representa de la siguiente manera:

Indica el número de lección

1.8 El valor absoluto de un número real

Indica el número de clase

El número de la unidad aparece en una etiqueta verde en la parte lateral de las páginas impares.

Unidad 1

Además, al finalizar cada unidad siempre aparecen algunos problemas sobre todas las temáticas abordadas, y en ocasiones, también se desarrollan algunas prácticas en GeoGebra, como recurso tecnológico de la matemática.

Índice

Unidad 1

Unidad 2

Unidad 3

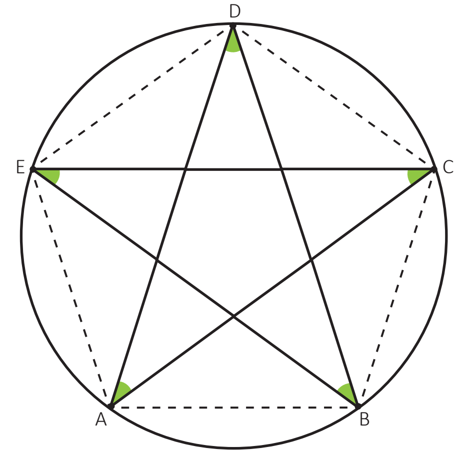
Unidad 4

Índice

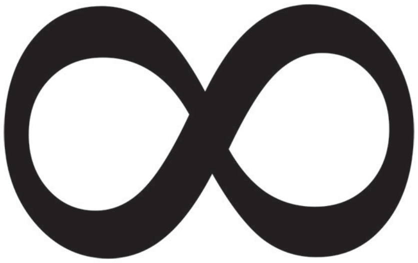
Unidad 1

Números Reales

Con la invención de la agricultura (15 000-10 000 a. C.) la humanidad tuvo que enfrentarse a la noción de número, que surgiría al contar las cabezas de ganado o al distribuir los distintos cultivos. Los pitagóricos atribuían un papel especial al número entero y definieron el número racional como la razón de las longitudes de dos segmentos conmensurables (uno está contenido un número entero de veces en el otro). El descubrimiento de números no conmensurables dio origen a los números irracionales, pero fue hasta el siglo XIX que el matemático francés Louis Cauchy ofreció la idea que un número irracional era la aproximación de varias fracciones racionales.



El pentágono regular es una figura en la que históricamente se ha estudiado la inconmensurabilidad de los segmentos.



El símbolo de "infinito" fue introducido por el matemático inglés John Wallis en el siglo XVII, y es uno de los conceptos básicos para la fundamentación de los números reales.

Desde las primeras nociones hasta la formalización matemática de los números reales en el siglo XIX, este conjunto numérico ha significado una herramienta indispensable para la comprensión y estudio de la naturaleza y la realidad, partiendo de la continuidad que poseen fenómenos como el tiempo o la materia, de modo que a partir del uso de los números reales se ha podido modelar matemáticamente de manera más certera el universo que rodea al ser humano, y a partir de ello intentar describirlo y comprenderlo.

Con el desarrollo de esta unidad recordarás los conceptos de raíz cuadrada, números reales, racionalización y valor absoluto. Conocerás el número Neperiano y el número Áureo, por último aprenderás acerca de la definición de intervalo.

1.1 Operaciones con raíces cuadradas (Repaso)

Problema inicial

Resuelve los siguientes ejercicios:

a) $\sqrt{6} \times \sqrt{10}$ b) $\sqrt{8} \div \sqrt{18}$ c) $\sqrt{12} + \sqrt{75}$ d) $\sqrt{18} - \sqrt{50}$

Recuerda que:
1. $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$
2. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
3. $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$

Solución

a) $\sqrt{6} \times \sqrt{10}$

$$\begin{aligned}\sqrt{6} \times \sqrt{10} &= \sqrt{6 \times 10}\\ &= \sqrt{(2 \times 3) \times (2 \times 5)}\\ &= \sqrt{2^2 \times 3 \times 5}\\ &= 2\sqrt{3 \times 5}\\ &= 2\sqrt{15}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt{6} \times \sqrt{10} = 2\sqrt{15}$.

b) $\sqrt{8} \div \sqrt{18}$

$$\begin{aligned}\sqrt{8} \div \sqrt{18} &= \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}}\\ &= \sqrt{\frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{18}^{9}}}\\ &= \sqrt{\frac{4}{9}}\\ &= \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt{8} \div \sqrt{18} = \frac{2}{3}$.

c) $\sqrt{12} + \sqrt{75}$

Se simplifican las raíces cuadradas

$$\begin{aligned}\sqrt{12} &= \sqrt{2^2 \times 3}\\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{75} &= \sqrt{3 \times 5^2}\\ &= 5\sqrt{3}\end{aligned}$$

se efectúa la suma de términos semejantes:

$$\begin{aligned}\sqrt{12} + \sqrt{75} &= 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}\\ &= 7\sqrt{3}\end{aligned}$$

d) $\sqrt{18} - \sqrt{50}$

Se simplifican las raíces cuadradas

$$\begin{aligned}\sqrt{18} &= \sqrt{2 \times 3^2}\\ &= 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{50} &= \sqrt{2 \times 5^2}\\ &= 5\sqrt{2}\end{aligned}$$

se efectúa la resta de términos semejantes:

$$\begin{aligned}\sqrt{18} - \sqrt{50} &= 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2}\\ &= -2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Conclusión

Un número b es raíz cuadrada de un número a si al elevar al cuadrado el número b se obtiene el número a, es decir $b^2 = a$.
Si $a \geq 0$, la raíz cuadrada no negativa de a se denota por $\sqrt{a}$.

Un número positivo a tiene dos raíces cuadradas: $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$.

- Al efectuar un producto o una división de raíces se utilizan las propiedades:

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b} \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Se realizan las operaciones indicadas y por último se simplifica si es posible.

Para simplificar utiliza el hecho que $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$.

- Al efectuar una suma o una resta de raíces se simplifican las raíces cuadradas y luego se realiza la suma o resta de términos semejantes.

Problemas

Realiza las siguientes operaciones con raíces cuadradas:

a) $\sqrt{21} \times \sqrt{14}$ b) $\sqrt{6} \times \sqrt{12}$ c) $\sqrt{24} \div \sqrt{6}$ d) $\sqrt{15} \div \sqrt{27}$

e) $\sqrt{40} + \sqrt{90}$ f) $\sqrt{80} + \sqrt{45}$ g) $\sqrt{28} - \sqrt{63}$ h) $\sqrt{32} - \sqrt{8}$

Realiza la descomposición prima, para evitar cálculos grandes.

1.2 Operaciones combinadas con raíces cuadradas (Repaso)

Problema inicial

Realiza las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{10})$

b) $(\sqrt{2}+\sqrt{15})(\sqrt{5}-\sqrt{6})$

Solución

a) $\sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{10}) = \sqrt{2}\times\sqrt{6}+\sqrt{2}\times\sqrt{10}$ Aplicando la propiedad distributiva,

$= \sqrt{2\times 6}+\sqrt{2\times 10}$

$= \sqrt{12}+\sqrt{20}$ se puede hacer la descomposición prima de una sola vez,

$= \sqrt{2^2\times 3}+\sqrt{2^2\times 5}$

$= 2\sqrt{3}+2\sqrt{5}.$

Por lo tanto, $\sqrt{2}\,(\sqrt{6}+\sqrt{10}) = 2\sqrt{3}+2\sqrt{5}$.

b) $(\sqrt{2}+\sqrt{15})(\sqrt{5}-\sqrt{6}) = \sqrt{2}\times\sqrt{5}-\sqrt{2}\times\sqrt{6}+\sqrt{15}\times\sqrt{5}-\sqrt{15}\times\sqrt{6}$ Efectuando el producto,

$= \sqrt{2\times 5}-2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-\sqrt{3^2\times 5\times 2}$ realizando la descomposición prima,

$= \sqrt{10}-2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-3\sqrt{10}$

$= -2\sqrt{10}+3\sqrt{3}.$

Por lo tanto, $(\sqrt{2}+\sqrt{15})(\sqrt{5}-\sqrt{6}) = -2\sqrt{10}+3\sqrt{3}$.

Conclusión

En las operaciones combinadas con radicales se realizan los siguientes pasos:

1. Se efectúan las multiplicaciones y divisiones.
2. Se simplifican las raíces cuadradas.
3. Se efectúan las sumas y restas de raíces semejantes.

Recuerda la propiedad distributiva y los productos notables:

$$a(b+c) = ab+ac$$
$$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$$

Problemas

Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{2}(\sqrt{14}+\sqrt{5})$

b) $\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{8})$

c) $\sqrt{5}(4\sqrt{10}+7\sqrt{15})$

d) $(2-\sqrt{18})(2+\sqrt{18})$

e) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$

f) $(\sqrt{8}-\sqrt{6})^2$

g) $(\sqrt{5}+\sqrt{12})(\sqrt{10}+\sqrt{24})$

h) $(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{21}-\sqrt{15})$

i) $(\sqrt{12}-4)(\sqrt{6}+9)$

1.3 Racionalización con denominador $\sqrt{a}$

Problema inicial

Racionaliza el denominador y simplifica si es posible:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{20}}$

Solución

a) $\dfrac{3}{\sqrt{6}} = \dfrac{3}{\sqrt{6}} \times \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$

$= \dfrac{3 \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}}$

$= \dfrac{\cancel{3}^{1}\sqrt{6}}{\cancel{6}_{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{6}}{2}.$

Multiplicando y dividiendo por $\sqrt{6}$, observa que $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 1$,

Por lo tanto, $\dfrac{3}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

b) Simplificando la raíz cuadrada,

$\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \times 5}$

$= 2\sqrt{5}$

sustituyendo y racionalizando,

$\dfrac{2}{\sqrt{20}} = \dfrac{\cancel{2}^{1}}{{}_{1}\cancel{2}\sqrt{5}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

$= \dfrac{1 \times \sqrt{5}}{5}$

$= \dfrac{\sqrt{5}}{5}.$

Por lo tanto, $\dfrac{2}{\sqrt{20}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Conclusión

Para racionalizar el denominador de $\dfrac{b}{\sqrt{a}}$ se realizan los siguientes pasos:

1. Se multiplica por: $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$.
2. Se simplifica el resultado cuando sea posible: $\dfrac{b}{\sqrt{a}} \times \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \dfrac{b\sqrt{a}}{a}$.

Racionalizar una fracción es encontrar una fracción equivalente con denominador entero.

Problemas

1. Racionaliza el denominador y simplifica siempre que sea posible.

a) $\dfrac{5}{\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{7}{\sqrt{14}}$ c) $\dfrac{3}{\sqrt{15}}$ d) $\dfrac{4}{\sqrt{8}}$

e) $\dfrac{6}{\sqrt{18}}$ f) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{12}}$ g) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{10}}$ h) $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{72}}$

Revisa si se simplifica antes de racionalizar.

2. Racionaliza el denominador y determina cuáles son iguales.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{10}}$ b) $\dfrac{3}{\sqrt{7}}$ c) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ d) $\dfrac{\sqrt{35}}{\sqrt{21}}$

e) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{21}}$ f) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ g) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ h) $\dfrac{3\sqrt{7}}{7\sqrt{3}}$

1.4 Racionalización con denominador binomio

Problema inicial

¿De qué manera podrías racionalizar el denominador?

a) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

Solución

Recordando el producto notable "Suma por diferencia de binomios": $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$

Se puede efectuar este producto para una suma por diferencia de dos raíces cuadradas:

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b$$

El producto de una suma de raíces cuadradas, de números racionales, por su diferencia es un número racional.

Ahora se aplicará esto a los ejercicios propuestos.

a)
$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} &= \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\\ &= \frac{2\times(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}\\ &= \frac{2\times(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2}\\ &= \frac{2\times(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}\\ &= \frac{2\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

multiplicando y dividiendo por una resta de términos

Por lo tanto, $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}$.

b)
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} &= \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\\ &= \frac{1\times(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}\\ &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}\\ &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1}\\ &= \sqrt{3}+\sqrt{2}.\end{aligned}$$

multiplicando y dividiendo por una suma de términos

Por lo tanto, $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

Definición

A la expresión $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ se le denomina la **conjugada** de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. La **conjugada** de una expresión de dos términos se obtiene cambiando el signo del segundo término. Dos expresiones son **conjugadas** si una es la **conjugada** de la otra.

Para **racionalizar** una fracción cuyo denominador sea suma o diferencia con raíces cuadradas, se multiplica y divide por la **conjugada** del denominador.

Ejemplo

Racionaliza el denominador $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-2}$

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-2} &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-2}\times\frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2}\\ &= \frac{\sqrt{3}\times(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}\\ &= \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{7}+\sqrt{3}\times 2}{3}\\ &= \frac{\sqrt{21}+2\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

la conjugada de $\sqrt{7}-2$ es $\sqrt{7}+2$,

efectuando el producto notable,
$(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)=(\sqrt{7})^2-(2)^2=7-4=3$,

Por lo tanto, $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-2}=\dfrac{\sqrt{21}+2\sqrt{3}}{3}$.

Problemas

Racionaliza el denominador de las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}+\sqrt{6}}$ d) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{8}+\sqrt{6}}$ f) $\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{5}}{\sqrt{15}-\sqrt{5}}$ g) $\dfrac{4}{\sqrt{10}+3}$ h) $\dfrac{\sqrt{14}+2}{1-\sqrt{7}}$

1.5 Los números neperiano y áureo

Problema inicial

El número neperiano e

Su valor es 2.718281828459045... y puede aproximarse mediante la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ donde n es un número natural muy grande.

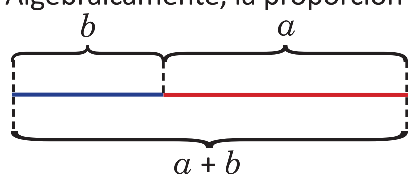
A partir de lo anterior realiza lo siguiente:

1. Observa que el valor numérico de la expresión anterior aumenta, si aumenta el valor de n.
2. Encuentra el valor numérico de la expresión anterior con los valores n = 1000, n = 10 000, n = 100 000.

El número áureo $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Es la razón de las longitudes de dos segmentos distintos a y b a través de la relación: La suma de las longitudes es al segmento mayor, como el segmento mayor es al segmento menor.

Algebraicamente, la proporción dada se escribe así:



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi$$

A partir de la proporción calcula ϕ.

Solución

1. Se evalúan los valores con una calculadora.

n	1	2	3	4
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2.25	2.3703...	2.4414...

Al aumentar el valor de n aumenta el valor de la expresión.

2. Se elabora una tabla con los valores dados.

n	1000	10 000	100 000
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2.71692...	2.71814...	2.71826...

Al tomar valores "muy grandes" de n, se aproxima al valor de e dado al principio.

$\phi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$ y $\frac{a}{b} = \frac{\phi}{1}$, luego $\frac{b}{a} = \frac{1}{\phi}$

$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$, sustituyendo en la proporción,

$\phi^2 = 1 + \phi$, multiplicando por ϕ,

$\phi^2 - \phi - 1 = 0$, transponiendo los términos del miembro izquierdo.

Se aplica la fórmula general de la ecuación cuadrática para $a = 1$, $b = -1$ y $c = -1$

$$\phi = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

ϕ es positivo, pues es la razón de longitudes.

Por lo tanto, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Conclusión

El número e es irracional, por lo que su valor exacto solo es aproximable.

Leonard Euler, en Introductio in Analysin infinitorum de 1748, dio dos expresiones para aproximar el valor de e.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ y } e = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$$

J.L. Coolidge. (1950). *The number e*.

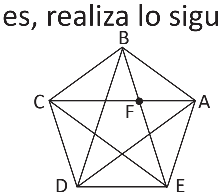
El número ϕ es irracional pues no puede escribirse como el cociente de dos números enteros.

El número áureo es una constante que aparece con frecuencia en diversos campos de la naturaleza: crecimiento de las hojas, esqueletos de los mamíferos, etc. Además, tiene presencia en el arte y la música, pues tal proporción, se cree, tiene relación con la percepción de la armonía y belleza.

Casans, A. (2001). *Aspectos estéticos de la divina proporción*.

Problemas

1. Utilizando la expresión $e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$, con n un número natural y $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$, aproxima el valor de e hasta n = 10.
2. En el pentágono regular ABCDE de lado 1 se han trazado todas las diagonales, realiza lo siguiente:
   a) Demuestra que $\Delta ABC \sim \Delta BFA$. b) Demuestra que ΔBCF es isósceles.
   c) Demuestra que $FA = a - 1$, donde a es la longitud de la diagonal $\overline{AC}$.
   d) Demuestra que $a = \frac{1}{a-1}$. e) Encuentra el valor de a.



1.6 Definición de los números reales: la recta numérica

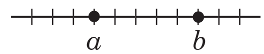
Problema inicial

1. Dibuja la recta numérica y ubica los siguientes números:

   a) 3 b) -2 c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{9}{5}$ e) -2.5 f) 1.4 g) $\sqrt{5}$ h) ϕ i) -1 j) π

2. Clasifica cada uno de los números anteriores como racional e irracional.

En la recta numérica b está a la derecha de a si y solo si $a < b$.



Solución

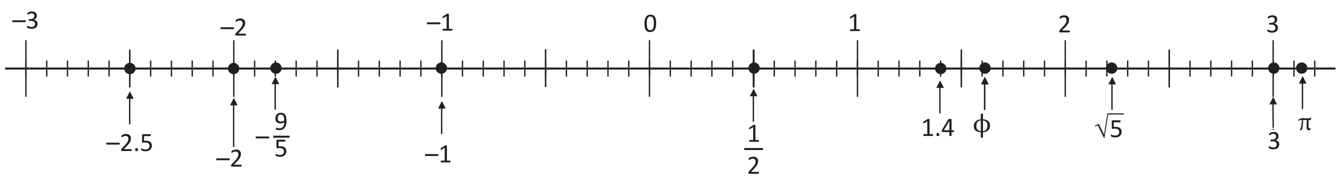
1. Se utilizan los valores aproximados en decimales de los números dados:

   a) $3 = 3$ b) $-2 = -2$ c) $\frac{1}{2} = 0.5$ d) $-\frac{9}{5} = -1.8$ e) $-2.5 = -2.5$

   f) 1.4 g) $\sqrt{5} = 2.236...$ h) $\phi = 1.618...$ i) -1 j) $\pi = 3.141...$

   Antes de colocar los números en la recta numérica, se ordenan de menor a mayor.

   $-2.5 < -2 < -\frac{9}{5} < -1 < \frac{1}{2} < 1.4 < \phi < \sqrt{5} < 3 < \pi$



a) 3 es racional b) -2 es racional c) $\frac{1}{2}$ es racional d) $-\frac{9}{5}$ es racional

e) $-2.5 = -\frac{5}{2}$ es racional f) $1.4 = \frac{7}{5}$ es racional g) $\sqrt{5}$ es irracional h) ϕ es irracional

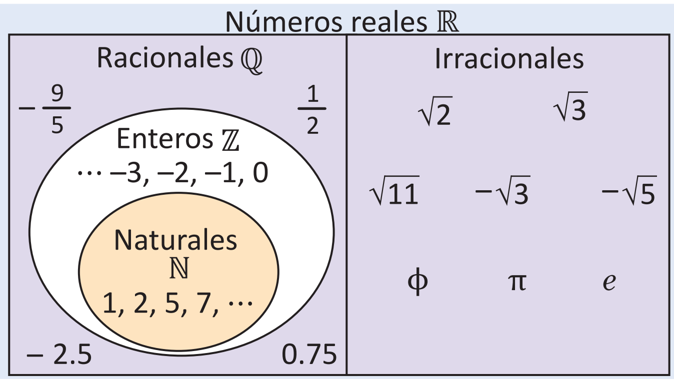
i) -1 es racional j) π es irracional

Definición

El conjunto de los **números reales** está formado por los números racionales y los números irracionales.

El símbolo utilizado para representar el conjunto de los números reales es $\mathbb{R}$.

La recta numérica es una representación del conjunto de los números reales: a cada número real le corresponde un único punto en la recta y viceversa.



Problemas

1. Ubica los siguientes números en la recta numérica.

   a) $\frac{2}{5}$ b) 1 c) -3 d) $\sqrt{3}$

   e) $-\frac{8}{5}$ f) $-0.\overline{5}$ g) 2.9 h) 0.15

   i) $-\frac{11}{10}$ j) e k) $\sqrt{2}$ l) $\frac{7}{3}$

2. Determina a cuáles de los siguientes conjuntos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ pertenece cada número del problema 1 o si es un número irracional.

1.7 Definición de los números reales: números decimales

Problema inicial

Escribe como un número decimal los siguientes números reales:

a) 3 b) –2 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{5}{3}$ e) $\frac{1}{6}$ f) $\sqrt{7}$ g) e h) π

Solución

a) 3.000..., es un número decimal, su parte entera es 3 y su parte decimal es 0.000...

b) –2.000..., es un número decimal, su parte entera es –2 y su parte decimal es 0.000...

c) $\frac{3}{2}$, se divide $\frac{3}{2} = 3 \div 2 = 1.5$.

d) $\frac{5}{3}$, se divide $\frac{5}{3} = 5 \div 3 = 1.\overline{6}$.

e) $\frac{1}{6}$, se divide $\frac{1}{6} = 1 \div 6 = 0.1\overline{6}$.

f) $\sqrt{7} = 2.645751...$

g) e = 2.7182818...

h) π = 3.141592...

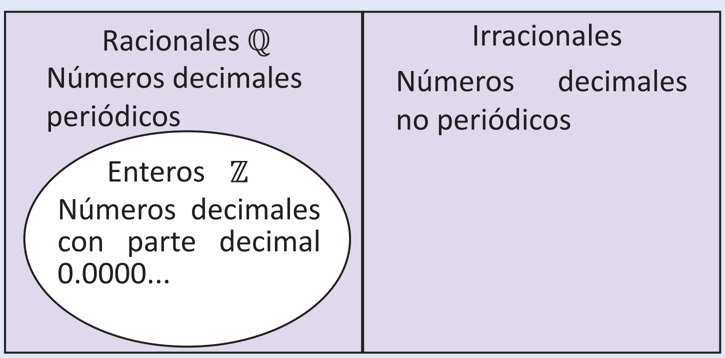
Definición

Los números decimales se utilizan para representar partes de la unidad, por lo que un número decimal se escribe de la forma $a.bcdefg\ldots$ donde a es un número entero y los números b, c, d, e, f, $g\ldots$ pueden ser los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Al número a se le denomina la **parte entera** y al número $0.bcdefg\ldots$ se le denomina **parte decimal**.

Así, el conjunto de los **números reales** $\mathbb{R}$ está formado por todos los números decimales:

Números Reales $\mathbb{R}$



Problemas

Clasifica cada uno de los siguientes números decimales como racional o irracional.

a) 0.125

b) 0.101001000100001...

c) 0

d) 5.75757575...

e) –7.321

f) 1.221212121212121...

g) –10

h) 3.333333...

i) 3.141592653589...

j) 4.12666666

k) 0.123456789101112...

l) –0.61803398874989...

1.8 El valor absoluto de un número real

Problema inicial

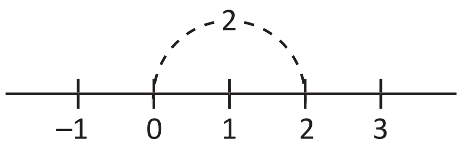
Calcula el valor absoluto de los siguientes números:

a) 2 b) –3 c) $\sqrt{7}$ d) $-\frac{3}{4}$

Solución

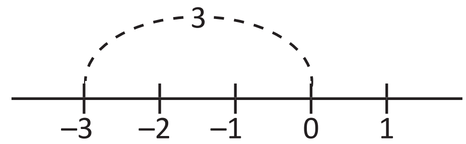
El valor absoluto de un número real es la distancia de ese número a cero en la recta numérica.

a) 2



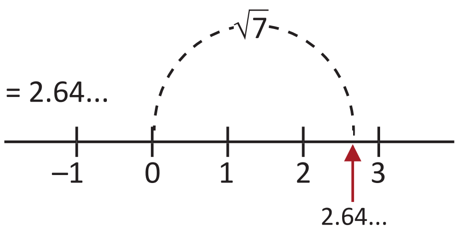
$|2| = 2$

b) –3



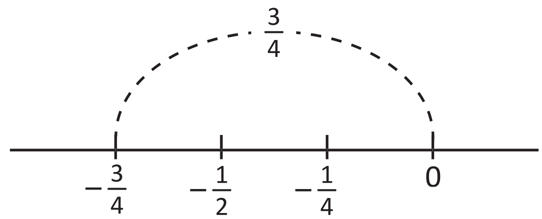
$|-3| = 3$

c) $\sqrt{7} = 2.64...$



$|\sqrt{7}| = \sqrt{7}$

d) $-\frac{3}{4}$



$\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$

El valor absoluto de un número positivo es el mismo número:

$|2| = 2$ $\quad |\sqrt{7}| = \sqrt{7}$

El valor absoluto de un número negativo es igual a su número opuesto:

$|-3| = 3$ $\quad \left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$

Observa que:
$-(-3) = 3$ y $-\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$

Definición

Se observa que:

- El valor absoluto de un número positivo es el mismo número, es decir, si $a > 0$ entonces $|a| = a$.
- El valor absoluto de cero es cero: $|0| = 0$.
- El valor absoluto de un número negativo es su número opuesto: si $a < 0$ entonces $|a| = -a > 0$.
- Cada número real determina un único valor absoluto, es decir, un número tiene un único valor absoluto.

El valor absoluto de un número real a se define de la siguiente manera:

$$|a| = \begin{cases} a \ , & \text{si } a \geq 0 \\ -a \ , & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Recuerda que:
$\sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4$, $\quad \sqrt{0^2} = \sqrt{0} = 0$ y $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$
Por lo que, para todo número real a se cumple que:
$\sqrt{a^2} = |a|$

Problemas

1. Encuentra el valor absoluto de los siguientes números:

a) $\sqrt{6}$ b) $\frac{1}{70}$ c) –0.11111 d) –153

e) e f) $-\phi$ g) 0 h) $-\frac{1}{3}$

2. Sean a y b dos números positivos, demuestra que: si $a \geq b$ entonces $|a - b| = a - b$.

1.9 Definición de intervalo

Problema inicial

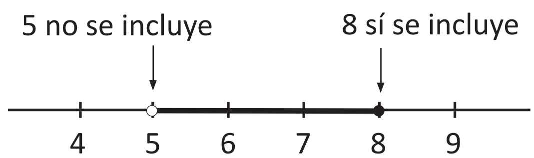
Escribe cómo se lee y representa en la recta numérica las siguientes desigualdades:

a) $5 < x \leq 8$ b) $-1 \leq x \leq 4$ c) $0 < x < 2$ d) $-3 \leq x < -1$

e) $x > 8$ f) $x < -4$ g) $x \leq 5$ h) $x \geq -2$

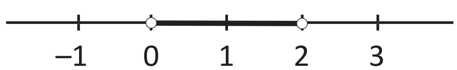
Solución

a) $5 < x \leq 8$, esta desigualdad se lee:
x mayor que 5 y menor o igual que 8.
Su representación en la recta es:

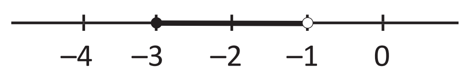


b) $-1 \leq x \leq 4$, esta desigualdad se lee:
x mayor o igual que -1 y menor o igual que 4.
Esta desigualdad se representa así:

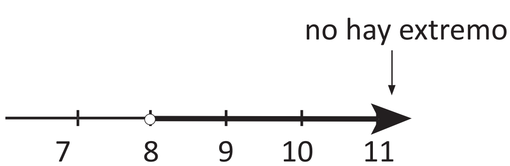
c) $0 < x < 2$, esta desigualdad se lee:
x mayor que 0 y menor que 2, por lo que su representación es:



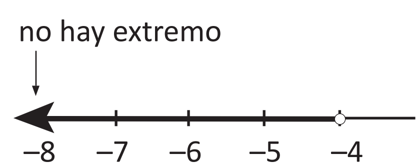
d) $-3 \leq x < -1$, esta desigualdad se lee:
x mayor o igual que -3 y menor que -1, por lo que su representación es:



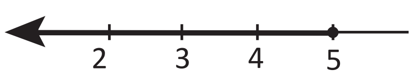
e) $x > 8$, esta desigualdad se lee:
x mayor que 8.
Se representa de la siguiente manera:



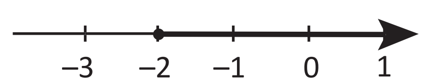
f) $x < -4$, esta desigualdad se lee:
x menor que -4.
Se representa de la siguiente manera:



g) $x \leq 5$, esta desigualdad se lee:
x menor o igual que 5.



h) $x \geq -2$, esta desigualdad se lee:
x mayor o igual que -2.



Definición

Un **intervalo** es una porción de la recta numérica representado por una semirrecta o un segmento de recta. Por ejemplo, los subconjuntos representados en el Problema inicial son intervalos: a), b), c) y d) son segmentos, y e), f), g) y h) son semirrectas.

Retomando el Problema inicial, la notación utilizada para representar un intervalo es:

a) $5 < x \leq 8 \Rightarrow]5, 8]$ b) $-1 \leq x \leq 4 \Rightarrow [-1, 4]$ c) $0 < x < 2 \Rightarrow]0, 2[$ d) $-3 \leq x < -1 \Rightarrow [-3, -1[$

A los números que aparecen en el intervalo se les llama **extremos del intervalo**.
Si el extremo del intervalo no se incluye, el corchete se escribe al revés : "]" al principio y "[" al final.

e) $x > 8 \Rightarrow]8, \infty[$ f) $x < -4 \Rightarrow]-\infty, -4[$ g) $x \leq 5 \Rightarrow]-\infty, 5]$ h) $x \geq -2 \Rightarrow [-2, \infty[$

El símbolo "∞" representa el infinito, mientras que "–∞" representa menos infinito. Estos símbolos en un intervalo indican que no existe otro número que sea extremo del intervalo.

El corchete correspondiente a –∞ o ∞ se coloca al revés, por ejemplo: "]–∞, 8]" y "]1, ∞[".

La siguiente tabla resume la notación de los tipos de intervalos, su representación en la recta numérica y la notación como conjunto utilizando desigualdades:

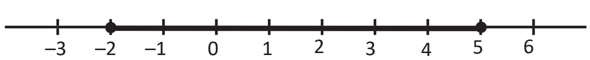
Tipo de intervalo	Notación de intervalo	Representación en la recta numérica	Notación de conjunto
Cerrado	$[a, b]$		$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
Semiabierto por la derecha	$[a, b[$		$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
Semiabierto por la izquierda	$]a, b]$		$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
Abierto	$]a, b[$		$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
Infinitos	$[a, \infty[$		$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
	$]a, \infty[$		$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
	$]-\infty, a]$		$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
	$]-\infty, a[$		$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

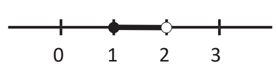
En la notación de conjunto, por ejemplo, el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ se lee: los elementos x que pertenecen a los números reales tal que x es mayor o igual que a y menor o igual que b.

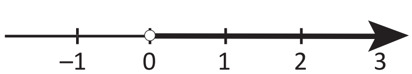
Problemas

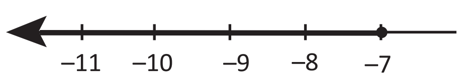
Represent a los siguientes intervalos en las otras dos notaciones:

a) $]-3, 0]$ b) $]-\infty, -5[$ c) $[5, \infty[$ d) $]2, 6[$

e) 

f) 

g) 

h) 

i) $\{x \in \mathbb{R} \mid -9 < x < -5\}$ j) $\{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x \leq -2\}$

k) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -4\}$ l) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

1.10 Practica lo aprendido

1. Racionaliza las siguientes fracciones:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ c) $\frac{1}{4+\sqrt{7}}$ d) $\frac{2}{2-\sqrt{3}}$

e) $\frac{\sqrt{3}+2}{1-\sqrt{3}}$ f) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{27}-\sqrt{8}}$ g) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ h) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}$

2. Sea n un número natural. Ubica en la recta numérica los números $\sqrt{n}$ tales que $2 < \sqrt{n} < 3$.

3. Encuentra el valor absoluto de los siguientes números:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}-\frac{3}{4}$ c) $\frac{5}{6}-\frac{1}{2}$ d) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

e) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ f) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ g) $\sqrt{10}-3$ h) $2\sqrt{7}-6$

Utiliza el resultado del problema 2 de la clase 1.8 y también que si a y b son números reales tales que $0 < a < b$ entonces $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

4. Justifica las siguientes afirmaciones:

a) Al efectuar la división $\sqrt{12} \div \sqrt{3}$ se obtiene un número entero.

b) Al efectuar la división $\sqrt{2} \div \sqrt{8}$ se obtiene un número racional.

c) El número áureo ϕ es menor que el neperiano e.

d) $\sqrt{2}+\sqrt{3} \neq \sqrt{5}$.

Utiliza la definición de raíz cuadrada.

e) Al efectuar la operación: $\phi^2 - \frac{1}{\phi}$ se obtiene un número entero.

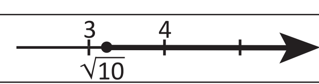
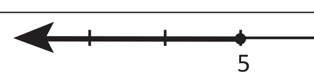
f) El valor absoluto de un número real nunca es un número negativo.

g) Sean a y b números reales, si $0 < b < a$ entonces $|b-a| = a-b$.

5. En los siguientes literales, ¿qué valores puede tomar la variable x para que la igualdad se cumpla?

a) $|x| = 1$ b) $|x| = 6$ c) $|x| = 0$ d) $|x+1| = 3$

6. Completa el siguiente cuadro sobre las representaciones de intervalos.

Intervalo	Notación de conjunto	Representación en la recta numérica
$]-4, 7]$		
		
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 9\}$	
$[\sqrt{2}, \phi]$		
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$	
$[0, 2\pi[$		
	$\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$	
		

Unidad 2

Operaciones con polinomios y números complejos

El área de álgebra comenzó a convertirse en una rama cuyo desarrollo requirió estudios especiales en estas temáticas. Hacia el siglo XII, el matemático italiano Leonardo de Pisa (Fibonacci) divulgó por Europa lo que conocía acerca de polinomios, estos conocimientos fueron ampliados hacia el siglo XVI por los matemáticos italianos Cardano, Ferrari y Tartaglia, quienes presentaron resultados acerca de la solución de ecuaciones de grado 3 y 4. A partir de esto, en 1805 aproximadamente, el matemático italiano Paolo Ruffini presenta algunos resultados muy importantes acerca del trabajo con polinomios (uno de ellos, la regla de Ruffini o división sintética); en estos tiempos ya era conocida la relación existente entre las raíces de un polinomio y la solución de ecuaciones mediante la factorización (teorema del factor).

Área conocida como "polinomiografía" (polynomiography en inglés), que relaciona el arte y los polinomios a través de la computación.

Los contenidos de álgebra son una base fundamental para el desarrollo de cualquier aplicación en cualquier área, ya sea de la ingeniería, tecnología u otras áreas científicas. Los polinomios son utilizados como el medio para expresar los fenómenos de la naturaleza en un lenguaje matemático, para transformarlo mediante resultados matemáticos y luego interpretar la respuesta al fenómeno en cuestión.

Durante el desarrollo de la unidad se hará un repaso sobre la factorización de polinomios, además se profundizará en la división de polinomios, presentando los resultados sobre el teorema del factor, el teorema del residuo, así como la división sintética o regla de Ruffini. Por otro lado, se abordará la definición y características algebraicas de los números complejos como conjunto numérico.

1.1 Definición de monomio, polinomio y grado

Definición

A la expresión algebraica formada por una o más variables con exponentes enteros positivos, un número real llamado **coeficiente** y que solo involucra multiplicaciones se le llama **término**. La expresión formada por un término o por la suma de dos o más términos se conoce como **polinomio**, y al polinomio formado por un solo término se le llama **monomio**.

El término del polinomio que no posee variables se llama **término independiente**.

El **grado** es una característica relacionada con los exponentes de las variables, este se define de la siguiente forma:

1. El **grado de un término** es la suma de todos los exponentes de las variables. El grado del término independiente, es decir, aquel que no posee variable es igual a cero.
2. El **grado de un polinomio** puede dividirse en dos tipos:
   a) El **grado asociado a una variable** es el exponente mayor de la variable seleccionada.
   b) El **grado absoluto** es el mayor grado de los términos del polinomio.

Si en un polinomio aparece involucrada una sola variable entonces las definiciones a) y b) coinciden y el polinomio se llama **polinomio en una sola variable**.

Los términos de un polinomio pueden ordenarse de acuerdo al grado asociado a una variable o al grado de cada término. Ordenar de forma descendente es iniciar con el término de mayor grado hasta finalizar con el de menor grado, mientras que ordenar de forma ascendente es iniciar con el término de menor grado hasta finalizar con el de mayor grado.

Ejemplo 1

Para el polinomio $11 + 3xy - 5x^3y^2 + 8x^2y$ realiza lo siguiente:

1. Identifica las variables y los coeficientes del polinomio.
2. Identifica los términos del polinomio y calcula el grado de cada uno de ellos.
3. Calcula el grado asociado a cada una de las variables.
4. Calcula el grado absoluto del polinomio.

1. Las variables del polinomio son x y y; los coeficientes del polinomio son los siguientes:

$11 \longrightarrow$ término independiente	$3 \longrightarrow$ coeficiente de xy
$-5 \longrightarrow$ coeficiente de x^3y^2	$8 \longrightarrow$ coeficiente de x^2y

2. Los términos del polinomio son: 11, $3xy$, $-5x^3y^2$ y $8x^2y$. El grado de cada uno se calcula sumando los exponentes de las variables que aparecen en cada término, es decir:

   Grado de $11 \longrightarrow 0$, pues no aparece variable alguna.
   Grado de $3xy \longrightarrow 2$, pues las variables x y y tienen como exponente 1 y 1 respectivamente.

   El grado del término independiente siempre será igual a cero.

   Grado de $-5x^3y^2 \longrightarrow 5$, pues las variables x y y tienen como exponente 3 y 2 respectivamente.
   Grado de $8x^2y \longrightarrow 3$, pues x y y tienen exponentes 2 y 1 respectivamente.

3. El grado asociado a la variable x es 3, ya que es el mayor exponente de la misma. El grado asociado a y es 2, pues es el mayor exponente de la variable.

4. El grado absoluto del polinomio es el mayor grado de los términos del polinomio, del literal b) puede comprobarse que el término $-5x^3y^2$ es el que posee mayor grado. Por tanto, el grado absoluto es 5.

Ejemplo 2

Para el polinomio $11 + 3xy - 5x^3y^2 + 8x^2y$ realiza lo siguiente:

1. Ordena los términos en forma ascendente y descendente con respecto a la variable x.
2. Ordena los términos en forma ascendente y descendente con respecto a la variable y.
3. Ordena el polinomio en forma ascendente y descendente con respecto a los términos.

1. En la forma ascendente se ordenan los términos empezando con el término de menor grado de la variable hasta llegar al término con mayor grado de la variable seleccionada; la forma descendente es lo contrario. Así, el polinomio ordenado con respecto a la variable x queda de la siguiente forma:

$$\text{Forma ascendente} \longrightarrow 11 + 3xy + 8x^2y - 5x^3y^2.$$
$$\text{Forma descendente} \longrightarrow -5x^3y^2 + 8x^2y + 3xy + 11.$$

2. La variable y en los términos $3xy$ y $8x^2y$ tiene el mismo grado, entonces para ordenarlos se toma en consideración el exponente de la variable x. Así, en la forma ascendente irá primero el término cuyo exponente de x sea menor, y en la forma descendente irá primero el término cuyo exponente de x sea mayor.

   El polinomio ordenado con respecto a la variable y, de forma ascendente y descendente queda de la siguiente forma:

$$\text{Forma ascendente} \longrightarrow 11 + 3xy + 8x^2y - 5x^3y^2 = 11 + (3x + 8x^2)y - 5x^3y^2.$$
$$\text{Forma descendente} \longrightarrow -5x^3y^2 + 8x^2y + 3xy + 11 = -5x^3y^2 + (8x^2 + 3x)y + 11.$$

   Se observa que el término independiente 11, en la forma ascendente para cualquier variable siempre va primero, mientras que en la forma descendente para cualquier variable se coloca al final.

3. Para ordenar con respecto a los términos, en la forma ascendente se inicia con el término de menor grado, mientras que en la forma descendente se inicia con el término de mayor grado. Entonces, el polinomio ordenado en ambas formas queda de la siguiente manera:

$$\text{Forma ascendente} \longrightarrow \underbrace{11}_{\text{Grado 0}} + \underbrace{3xy}_{\text{Grado 2}} + \underbrace{8x^2y}_{\text{Grado 3}} - \underbrace{5x^3y^2}_{\text{Grado 5}}.$$

$$\text{Forma descendente} \longrightarrow -5x^3y^2 + 8x^2y + 3xy + 11.$$

Generalmente, los términos de un polinomio se ordenan de forma descendente.

Problemas

1. En cada literal identifica las variables, los coeficientes y los términos del polinomio. Luego, calcula el grado de cada término, el grado asociado a cada variable y el grado absoluto del polinomio:
   a) $10xy + 5x^2y^2 - 2xy^2 - 6x^3y^3$
   b) $-3a^2b^3 + 4a^3b - ab^2 + b$
   c) $9m^2 - 12m^2n^3 + 2mn - 5mn^2 + 1$
   d) $8x^3 - 10 + 3x + 5x^2$

2. Para cada uno de los polinomios del numeral 1 realiza lo siguiente:
   a) ordena los términos del polinomio con respecto a cada variable, tanto de forma ascendente como descendente;
   b) ordena el polinomio con respecto a sus términos.

3. Sin desarrollar los productos, calcula la suma de los coeficientes del siguiente polinomio: $(x - 3)^2 + (x + 2)^2 + 9x - 10$.

No olvides que el término independiente también es un coeficiente.

1.2 Productos de binomio por binomio, parte 1

Problema inicial

Desarrolla los siguientes productos notables:

a) $(x + 9)(x - 5)$ b) $(x + 3)^2$ c) $(x - 7)^2$ d) $(x + 4)(x - 4)$

Solución

a) El producto es de la forma $(x + a)(x + b)$ cuyo desarrollo es:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

utilizando lo anterior,

$$\begin{aligned}(x + 9)(x - 5) &= x^2 + (9 - 5)x + (9)(-5)\\ &= x^2 + 4x - 45\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x + 9)(x - 5) = x^2 + 4x - 45$.

b) El producto es el cuadrado de un binomio, cuyo desarrollo es:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

utilizando lo anterior,

$$\begin{aligned}(x + 3)^2 &= x^2 + 2(3)x + 3^2\\ &= x^2 + 6x + 9\end{aligned}$$

Luego, $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$.

c) También es el cuadrado de un binomio, cuyo desarrollo es:

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

utilizando lo anterior,

$$\begin{aligned}(x - 7)^2 &= x^2 - 2(7)x + 7^2\\ &= x^2 - 14x + 49\end{aligned}$$

Luego, $(x - 7)^2 = x^2 - 14x + 49$.

d) Es un producto de la suma por la diferencia de binomios cuyo desarrollo es:

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$$

utilizando lo anterior,

$$\begin{aligned}(x + 4)(x - 4) &= x^2 - 4^2\\ &= x^2 - 16\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x + 4)(x - 4) = x^2 - 16$.

Conclusión

Los productos notables son productos de polinomios cuyos resultados pueden identificarse y escribirse de manera directa. Sean a y b números reales cualesquiera:

Producto notable	Desarrollo
Producto de la forma $(x + a)(x + b)$	$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
Cuadrado de un binomio	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Suma por la diferencia de binomios	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Problemas

Desarrolla los siguientes productos notables:

a) $(x + 3)(x + 10)$ b) $(y - 6)(y - 4)$ c) $(x - 8)(x + 2)$

d) $(y + 5)^2$ e) $(m - 2)^2$ f) $(x + 11)^2$

g) $(x + 3)(x - 3)$ h) $(10 + y)(10 - y)$ i) $(m - 6)(m + 6)$

j) $\left(y + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{3}{2}\right)$ k) $\left(x + \frac{4}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$ l) $\left(x + \frac{2}{3}\right)^2$

m) $\left(x + \sqrt{5}\right)^2$ n) $\left(y + 2\sqrt{3}\right)^2$ o) $\left(m + \frac{1}{5}\right)\left(m - \frac{1}{5}\right)$

p) $\left(\frac{4}{7} - x\right)\left(\frac{4}{7} + x\right)$ q) $\left(y + \sqrt{6}\right)\left(y - \sqrt{6}\right)$ r) $\left(x - 2\sqrt{10}\right)\left(x + 2\sqrt{10}\right)$

1.3 Productos de binomio por binomio, parte 2

Problema inicial

Desarrolla los siguientes productos:

a) $(4x + 3)(4x - 5)$ b) $(2x + y)^2$ c) $(3x - 2y)^2$ d) $(5x + 6y)(5x - 6y)$

Solución

a) El desarrollo del producto es similar al de $(x + a)(x + b)$, pues el término $4x$ aparece en cada binomio:

$$\begin{aligned}(4x + 3)(4x - 5) &= (4x)^2 + (3 - 5)(4x) + (3)(-5)\\ &= 16x^2 + (-2)(4x) - 15\\ &= 16x^2 - 8x - 15\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(4x + 3)(4x - 5) = 16x^2 - 8x - 15$.

b) El producto es el cuadrado de un binomio:

$$\begin{aligned}(2x + y)^2 &= (2x)^2 + 2(2x)(y) + y^2\\ &= 4x^2 + 4xy + y^2\end{aligned}$$

Luego, $(2x + y)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$.

c) El producto es, como el literal anterior, el cuadrado de un binomio:

$$\begin{aligned}(3x - 2y)^2 &= (3x)^2 - 2(3x)(2y) + (2y)^2\\ &= 9x^2 - 12xy + 4y^2\end{aligned}$$

Luego, $(3x - 2y)^2 = 9x^2 - 12xy + 4y^2$.

d) El producto es una suma por diferencia de binomios, y se desarrolla:

$$\begin{aligned}(5x + 6y)(5x - 6y) &= (5x)^2 - (6y)^2\\ &= 25x^2 - 36y^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(5x + 6y)(5x - 6y) = 25x^2 - 36y^2$.

En general

Sean a, b y m números reales cualesquiera. Entonces:

1. El producto $(mx + a)(mx + b)$ se desarrolla de forma similar al de la forma $(x + a)(x + b)$, es decir:
   $(mx + a)(mx + b) = (mx)^2 + (a + b)(mx) + ab$.

2. Los productos $(ax + by)^2$ y $(ax - by)^2$ son el cuadrado de un binomio y se desarrollan:
   $(ax + by)^2 = (ax)^2 + 2(ax)(by) + (by)^2$
   $(ax - by)^2 = (ax)^2 - 2(ax)(by) + (by)^2$.

3. El producto $(ax + by)(ax - by)$ es una suma por diferencia de binomios y se desarrolla:
   $(ax + by)(ax - by) = (ax)^2 - (by)^2$.

Los babilonios resolvían problemas como el siguiente: "encontrar dos números cuya suma (o diferencia) y producto fuesen conocidos" utilizando el producto notable del literal c). Por ejemplo, el "razonamiento babilónico" para encontrar dos números cuya suma sea 14 y producto sea 45, escrito en el lenguaje matemático actual es el siguiente:

14 corresponde a la suma de los números $7 + x$ y $7 - x$, el producto de ellos debe ser igual a 45:

$$(7 + x)(7 - x) = 45$$

de lo anterior se obtiene $49 - x^2 = 45$ cuya solución es $x = \pm 2$. Entonces, los números son 9 y 5.

Bunt, N. H., Jones, P. S. y Bedient, J. D. (1988). *The historical roots of elementary mathematics*.

Problemas

Desarrolla los siguientes productos notables:

a) $(2x + 9)(2x + 1)$ b) $(3x - 1)(3x + 5)$ c) $(5y - 4)(5y - 2)$

d) $(4x + 5y)^2$ e) $(2x - 7y)^2$ f) $(3y - 10x)^2$

g) $(2x + 5y)(2x - 5y)$ h) $(6w + z)(6w - z)$ i) $(8y - 3x)(8y + 3x)$

j) $\left(2n - \frac{1}{2}\right)\left(2n - \frac{1}{4}\right)$ k) $\left(\frac{1}{3}x + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{3}x - \frac{9}{2}\right)$ l) $\left(\frac{2}{3}y + 11\right)\left(\frac{2}{3}y - 5\right)$

m) $\left(\sqrt{2}\,x + y\right)^2$ n) $\left(\sqrt{3}\,w + \sqrt{5}\,z\right)^2$ o) $\left(4 - 3\sqrt{2}\,x\right)^2$

p) $\left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{9}y\right)\left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{9}y\right)$ q) $\left(\sqrt{5}\,x - \frac{3}{4}y\right)\left(\sqrt{5}\,x + \frac{3}{4}y\right)$ r) $\left(2\sqrt{2}\,x - 3\sqrt{3}y\right)\left(2\sqrt{2}\,x + 3\sqrt{3}\,y\right)$

1.4 Productos de la forma $(ax+b)(cx+d)$

Problema inicial

Desarrolla el producto $(2x+5)(3x+4)$. Encuentra una regla para productos de la forma $(ax+b)(cx+d)$.

Solución

Se multiplica cada uno de los términos del primer binomio por cada uno de los términos del segundo:

$$\begin{aligned}(2x+5)(3x+4) &= 2x(3x)+2x(4)+5(3x)+5(4) && \text{multiplicar término a término,}\\ &= 2(3)x^2+[2(4)+5(3)]x+5(4) && \text{propiedad conmutativa y distributiva,}\\ &= 6x^2+[8+15]x+20 && \text{desarrollar productos,}\\ &= 6x^2+23x+20.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(2x+5)(3x+4)=6x^2+23x+20$. Un producto de la forma $(ax+b)(cx+d)$ se desarrolla como sigue:

$$\begin{aligned}(ax+b)(cx+d) &= ax(cx)+ax(d)+b(cx)+bd\\ &= acx^2+(ad+bc)x+bd.\end{aligned}$$

Luego, $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$.

Conclusión

El producto de binomios de la forma $(ax+b)(cx+d)$ se desarrolla de la siguiente forma:

$$(ax+b)(cx+d)=\overbrace{ac}^{\text{Producto de } a \text{ y } c}x^2+(\underbrace{ad+bc}_{\text{Producto de } a \text{ y } d \text{ más el producto de } b \text{ y } c})x+\overbrace{bd}^{\text{Producto de } b \text{ y } d}.$$

Ejemplo

Desarrolla el producto $(5x-6)(2x+7)$.

En este caso, $a=5$, $b=-6$, $c=2$ y $d=7$. Luego:

$$\begin{aligned}(5x-6)(2x+7) &= 5(2)x^2+[5(7)+(-6)(2)]x+(-6)(7)\\ &= 10x^2+(35-12)x-42\\ &= 10x^2+23x-42.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(5x-6)(2x+7)=10x^2+23x-42$.

Problemas

1. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x+9)(3x+1)$ b) $(4x+1)(2x+1)$ c) $(2x+7)(3x-2)$

d) $(4x+3)(x-2)$ e) $(-x+7)(6x+4)$ f) $(x-8)(-2x-5)$

g) $(3x-10)(-2x+3)$ h) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(3x+\frac{5}{2}\right)$ i) $\left(5x-\frac{1}{4}\right)\left(6x-\frac{1}{10}\right)$

2. Para cada caso, determina el valor de los enteros a, b, c o d para que sea verdadera la igualdad:

a) $(ax-7)(4x+d)=12x^2-25x-7$ b) $(5x+4)(cx+d)=10x^2+33x+20$

c) $(ax+b)(cx+6)=2x^2+5x-42$ d) $(ax+b)(cx+d)=5x^2+23x+12$

Dos polinomios de grado 2, ex^2+fx+g y mx^2+nx+p son iguales si $e=m$, $f=n$ y $g=p$.

1.5 Cubo de un binomio, parte 1

Problema inicial

Desarrolla el producto:

$$(a + b)^3.$$

$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)^2(a + b)$

Solución

El producto $(a + b)^3$ es la potencia cúbica de $a + b$, y es igual a:

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$$

asociando los primeros dos factores se obtiene:

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= [(a + b)(a + b)](a + b)\\ &= (a + b)^2(a + b).\end{aligned}$$

Se desarrolla $(a + b)^2$ y se efectúa el producto de trinomio por binomio:

$(a + b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$	desarrollar el cuadrado de un binomio,
$= a^2(a) + a^2(b) + 2ab(a) + 2ab(b) + b^2(a) + b^2(b)$	multiplicar término a término,
$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$	desarrollar los productos de monomios,
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$	reducir términos semejantes.

Por lo tanto, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Conclusión

El producto de la forma $(a + b)^3$ se llama **cubo de un binomio** y se desarrolla de la siguiente forma:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

El cubo de un binomio es igual al cubo del primer término, más el triple del cuadrado del primer término por el segundo, más el triple del primer término por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo término.

Ejemplo

Desarrolla el producto $(2x + y)^3$.

El producto $(2x + y)^3$ también es el cubo de un binomio, por tanto se desarrolla de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}(2x + y)^3 &= (2x)^3 + 3(2x)^2(y) + 3(2x)y^2 + y^3\\ &= 8x^3 + 3(4x^2)y + 6xy^2 + y^3\\ &= 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3.\end{aligned}$$

Luego, $(2x + y)^3 = 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$.

Problemas

Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x + 1)^3$ b) $(y + 4)^3$ c) $(m + 5)^3$

d) $(x + 2y)^3$ e) $(3x + y)^3$ f) $(m + 4n)^3$

g) $\left(m + \frac{1}{3}\right)^3$ h) $\left(y + \frac{1}{2}\right)^3$ i) $(3x + 2y)^3$

j) $\left(\frac{1}{3}x + 3y\right)^3$ k) $\left(\frac{2}{3}x + y\right)^3$ l) $\left(\frac{1}{3}m + \frac{1}{3}n\right)^3$

Unidad 2

1.6 Cubo de un binomio, parte 2

Problema inicial

Desarrolla el producto:

$(a - b)^3$.

$(a - b)^3 = [a + (- b)]^3$

Solución

Se escribe $(a - b)^3$ como $[a + (- b)]^3$ y se desarrolla como el cubo de un binomio:

$$\begin{aligned}(a - b)^3 &= [a + (- b)]^3\\ &= a^3 + 3a^2(- b) + 3a(- b)^2 + (- b)^3\\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Conclusión

El producto de la forma $(a - b)^3$ también es el **cubo de un binomio** y se desarrolla:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

En general, $(ax + by)^3$ y $(ax - by)^3$ también son productos notables y se les llama cubo de un binomio; se desarrollan de la siguiente forma:

$$(ax \overset{\text{Positivo}}{+} by)^3 = (ax)^3 \overset{\text{Positivo}}{+} 3(ax)^2(by) \overset{\text{Positivo}}{+} 3(ax)(by)^2 \overset{\text{Positivo}}{+} (by)^3.$$

$$(ax \underset{\text{Negativo}}{-} by)^3 = (ax)^3 \underset{\text{Negativo}}{-} 3(ax)^2(by) \underset{\text{Positivo}}{+} 3(ax)(by)^2 \underset{\text{Negativo}}{-} (by)^3.$$

Ejemplo

Desarrolla el producto $(2x - 3y)^3$.

El producto $(2x - 3y)^3$ también es el cubo de un binomio, por tanto se desarrolla de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}(2x - 3y)^3 &= (2x)^3 - 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 - (3y)^3\\ &= 8x^3 - 3(4x^2)(3y) + 3(2x)(9y^2) - 27y^3\\ &= 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3\end{aligned}$$

Luego, $(2x - 3y)^3 = 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$.

Problemas

1. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x - 1)^3$ b) $(y - 3)^3$ c) $(m - 10)^3$

d) $(4x - y)^3$ e) $(m - 5n)^3$ f) $(5x - 2y)^3$

g) $\left(x - \frac{1}{6}\right)^3$ h) $\left(y - \frac{1}{2}\right)^3$ i) $\left(m - \frac{2}{3}\right)^3$

j) $\left(\frac{1}{3}x - 2y\right)^3$ k) $\left(3m - \frac{1}{6}n\right)^3$ l) $\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y\right)^3$

2. Para cada caso, determina el valor de a o b para que sea verdadera la igualdad:

a) $(x + a)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ b) $(y - a)^3 = y^3 - 12y^2 + 48y - 64$

c) $(ax + by)^3 = 8x^3 + 60x^2y + 150xy^2 + 125y^3$ d) $(ax - by)^3 = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x^2y + \frac{1}{6}xy^2 - \frac{1}{27}y^3$

1.7 Combinaciones de productos notables

Problema inicial

Desarrolla lo siguiente:

a) $(2x + 3)^3 - (2x - 3)^3$

b) $(a + b + c)^2$

Solución

a) Ambos productos, $(2x + 3)^3$ y $(2x - 3)^3$, son cubos de binomios. Una vez identificados los productos notables que aparecen en la expresión se desarrollan de acuerdo a lo visto en clases anteriores y se reducen los términos semejantes, si los hay:

$$\begin{aligned}
\overbrace{(2x+3)^3}^{(1)} - \overbrace{(2x-3)^3}^{(2)} &= \overbrace{8x^3 + 3(2x)^2(3) + 3(2x)(3)^2 + 27}^{(1)} - \overbrace{[8x^3 - 3(2x)^2(3) + 3(2x)(3)^2 - 27]}^{(2)} \\
&= \cancel{8x^3} + 3(4x^2)(3) \cancel{+ 3(2x)(9)} \boxed{+ 27} - \cancel{8x^3} + 3(4x^2)(3) \cancel{- 3(2x)(9)} \boxed{+ 27} \\
&= 36x^2 + 27 + 36x^2 + 27 \\
&= 72x^2 + 54
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(2x + 3)^3 - (2x - 3)^3 = 72x^2 + 54$.

b) Sea $a + b = x$; entonces $(a + b + c)^2 = (x + c)^2$ corresponde al cuadrado de un binomio:

$$\begin{aligned}
(a + b + c)^2 &= (x + c)^2 && \text{sustituir } a + b = x, \\
&= x^2 + 2xc + c^2 && \text{desarrollar el cuadrado de un binomio,} \\
&= (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 && \text{sustituir } x = a + b, \\
&= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \\
&= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \\
&= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc).
\end{aligned}$$

Luego, $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$.

En general

Al desarrollar combinaciones de productos notables:

1. Se identifican primero cuáles son los productos notables involucrados en la expresión.
2. Se desarrollan los productos teniendo cuidado con los signos.
3. Se reducen los términos semejantes, si los hay.

Problemas

1. Desarrolla lo siguiente:

a) $(5x + 11)(5x - 6) + (x - 2y)(x + 2y)$

b) $(10x - y)^2 + (x - 10y)^2$

c) $(x - 1)^2 + (x + 2)^2 + (x + 4)(x - 5)$

d) $(x + 4y)^3 + (x - 5y)^3$

e) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - 1\right)\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 1\right)$

f) $\left(\sqrt{2}\,x + \sqrt{3}\,y\right)\left(\sqrt{2}\,x - \sqrt{3}\,y\right) - (x + y + 1)^2$

2. Utiliza productos notables para resolver lo siguiente:

a) ¿Cuál es el valor numérico de $a^2 - b^2$ si $a + b = 25$ y $a - b = 10$?

b) ¿Cuál es el valor numérico de ab si $a^2 + b^2 = 58$ y $a + b = 10$?

c) Sin utilizar calculadora encuentra el resultado de 101^3.

1.8 Practica lo aprendido

1. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x+7)(x-5)$ b) $(m+8)^2$ c) $(n-6)\left(n-\frac{1}{2}\right)$

d) $(y-10)(y+8)$ e) $(y-4)^2$ f) $(x+6)^2$

g) $(x+5)(x-5)$ h) $\left(\frac{1}{7}-y\right)\left(\frac{1}{7}-y\right)$ i) $(n-2\sqrt{2})(n+2\sqrt{2})$

2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(3x+7)(3x+2)$ b) $\left(\frac{1}{2}y+5\right)\left(\frac{1}{2}y-9\right)$ c) $\left(5n-\frac{4}{5}\right)\left(5n-\frac{1}{5}\right)$

d) $(9x+4y)^2$ e) $\left(3x-\frac{1}{3}y\right)^2$ f) $(2x+\sqrt{3}\,y)^2$

g) $(10m+7n)(10m-7n)$ h) $\left(\frac{1}{5}x-\frac{2}{3}y\right)\left(\frac{1}{5}x+\frac{2}{3}y\right)$ i) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$

3. Desarrolla los siguientes productos de la forma $(ax+b)(cx+d)$:

a) $(2x-3)(x-4)$ b) $(x+6)(3x+5)$ c) $(4y-3)(5y+2)$

d) $\left(2x+\frac{1}{3}\right)\left(3x+\frac{2}{3}\right)$ e) $\left(5n+\frac{1}{2}\right)\left(4n-\frac{4}{5}\right)$ f) $\left(\frac{1}{3}x-8\right)\left(\frac{1}{4}x+3\right)$

4. Determina los números enteros a, b, c o d para que sea verdadera la igualdad:

a) $(x+b)(cx-6)=2x^2+12x-54$ b) $(2x-5)(cx+d)=6x^2-35x+50$

c) $(ax+1)(cx+5)=8x^2+22x+5$ d) $(5x+b)(cx+d)=10x^2-9x-9$

5. Desarrolla los siguientes cubos de binomios:

a) $(m+3)^3$ b) $(y+10)^3$ c) $\left(x+\frac{1}{6}\right)^3$

d) $(y-4)^3$ e) $(5-m)^3$ f) $\left(x-\frac{1}{5}\right)^3$

g) $(10x+3y)^3$ h) $\left(\frac{1}{5}m-5n\right)^3$ i) $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^3$

6. Desarrolla lo siguiente:

a) $(3x+4)(3x-4)-(2x+5)(2x-9)$ b) $(x+3y)^2+(2x-5y)^2$

c) $(2x-y)^3-(x+y)^3$ d) $(3x-4y+5)(3x-4y-5)$

e) $(3x-7)(4x+5)+(5x+1)(5x-6)$ f) $(x+9)(2x-11)+(x-5)^2$

7. Resuelve lo siguiente:

a) ¿Cuál es el valor numérico de $(a-b)^2$ si $a^2+b^2=40$ y $ab=12$?

b) ¿Cuál es el valor numérico de $a+b$ si $a^2-b^2=24$ y $a-b=2$?

c) Utilizando productos notables, calcula el resultado de las siguientes operaciones:

- 103^2 • $105(95)$ • $45(55)$

d) Sea $x=445$, calcula el resultado de la operación: $446(444)-447(443)$ escribiendo las cantidades en términos de x y utilizando productos notables.

e) Demuestra que $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$.

1.9 Factor común monomio y polinomio

Problema inicial

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $10x^2y + 6xy^2 - 8xy$

b) $xy + 3x + 2y + 6$

Identifica el factor común en los términos del polinomio del literal a). En el literal b) asocia las parejas de términos que tienen factor común.

Solución

a) Se debe identificar el factor común en los términos del polinomio:

$$\begin{aligned} 10x^2y &= 2(5)(x)(x)(y) = 2xy(5x)\\ 6xy^2 &= 2(3)(x)(y)(y) = 2xy(3y)\\ -8xy &= -2(4)(x)(y) = -2xy(4) \end{aligned}$$

se extrae dicho factor y escribiendo como producto de un monomio por un polinomio se tiene:

$$\begin{aligned} 10x^2y + 6xy^2 - 8xy &= 2xy(5x) + 2xy(3y) - 2xy(4)\\ &= 2xy(5x + 3y - 4). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $10x^2y + 6xy^2 - 8xy = 2xy(5x + 3y - 4)$.

b) Los cuatro términos del polinomio no poseen factor común. Sin embargo, el primer y segundo término tienen factor común x; mientras que el tercer y cuarto término tienen factor común 2. Se asocian estas dos parejas y se extrae el factor común en cada caso:

$$\begin{aligned} xy + 3x + 2y + 6 &= (xy + 3x) + [2y + 2(3)]\\ &= x(y + 3) + 2(y + 3). \end{aligned}$$

sea $m = y + 3$; sustituyendo en la expresión anterior y extrayendo factor común m se obtiene:

$$\begin{aligned} xy + 3x + 2y + 6 &= xm + 2m\\ &= (x + 2)m. \end{aligned}$$

Luego, $xy + 3x + 2y + 6 = (x + 2)(y + 3)$.

Conclusión

Factorizar un polinomio significa escribirlo como producto de polinomios más simples; a dichos polinomios simples se les llama **factores**. Si todos los términos de un polinomio tienen en común un monomio, entonces se extrae ese monomio y se escribe como producto de un monomio por un polinomio:

$$ma + mb + mc = m(a + b + c).$$

Si los términos del polinomio no tienen factor común pero estos pueden asociarse en grupos de términos con un factor común diferente en cada grupo, entonces:

1. Se extrae el factor común en cada grupo.
2. Si al hacer lo anterior en la expresión quedan monomios multiplicados por un mismo polinomio, entonces se extrae este polinomio común:

$$\begin{aligned} ma + mb + na + nb &= m(a + b) + n(a + b)\\ &= (m + n)(a + b). \end{aligned}$$

Al proceso de factorizar asociando términos que tengan el mismo factor común también se le llama **factor común por agrupación de términos**.

Problemas

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 + xy^2$

b) $2a - 8ab$

c) $x^2y^2 - x^2y + xy$

d) $-10a^2b^2 + 5ab^2 - 15abc$

e) $-12xy^2 + 20x^2 + 16xy$

f) $12a^2b^2c - 6ab^2c^2 + 18a^2bc$

g) $mn - 4m + 3n - 12$

h) $xy - 2x - 5y + 10$

i) $2ab - 12a + b - 6$

j) $3xy - 7x - 12y + 28$

k) $6mn + 8m + 15n + 20$

l) $x^2y - 3xy^2 + 8x - 24y$

m) $\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x$

n) $10\sqrt{2}\,a^2b + 6\sqrt{2}\,ab$

o) $\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}mn + \frac{1}{3}m + \frac{1}{3}n$

1.10 Factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$

Problema inicial

Factoriza los siguientes polinomios en la forma $(x + a)(x + b)$:

a) $x^2 + 10x + 16$

b) $y^2 - y - 20$

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

Solución

a) Para factorizar $x^2 + 10x + 16$ en la forma $(x + a)(x + b)$ deben buscarse dos números cuya suma sea igual a 10 y cuyo producto sea 16. Como la suma es positiva entonces ambos números deben ser positivos:

Pareja	Producto	Suma
1 y 16	16	17
2 y 8	16	10

Puedes desarrollar el producto $(x + 2)(x + 8)$ para verificar si la factorización es correcta.

Luego, $a = 2$ y $b = 8$, y $x^2 + 10x + 16 = (x + 2)(x + 8)$.

b) De forma similar al literal anterior, se buscan dos números cuya suma sea igual a -1 y cuyo producto sea -20. Como el producto de ambos es negativo, uno de ellos debe ser positivo y el otro negativo:

Pareja	Producto	Suma
-1 y 20	-20	19
-2 y 10	-20	8
-4 y 5	-20	1
4 y -5	-20	-1

Se puede descomponer el número 20 en sus factores primos para encontrar las parejas: $20 = 2(2)(5)$.

Por lo tanto, $a = 4$ y $b = -5$, y $y^2 - y - 20 = (y + 4)(y - 5)$.

Conclusión

Para poder factorizar un trinomio en el producto notable $(x + a)(x + b)$ debe verificarse que, dentro de los términos del trinomio se encuentren: x^2, otro término con variable x y el otro sin variable (término independiente). Sean m y n números positivos:

a) Si el trinomio es $x^2 + mx + n$ entonces se buscan **dos números positivos** cuyo producto sea n y cuya suma sea m.

b) Si el trinomio es $x^2 - mx + n$ entonces se buscan **dos números negativos** cuyo producto sea n y cuya suma sea $-m$.

c) Si el trinomio es $x^2 + mx - n$ o $x^2 - mx - n$ entonces se buscan **dos números, uno positivo y el otro negativo** cuyo producto sea $-n$ y cuya suma sea m o $-m$, según sea el caso.

Problemas

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 + 7x + 6$
b) $x^2 - 9x + 14$
c) $y^2 - 3y - 40$
d) $y^2 + 2y - 15$
e) $a^2 + 2a - 63$
f) $b^2 - 12b + 20$
g) $y^2 + 14y + 40$
h) $x^2 - 2x - 35$
i) $x^2 - 12x + 27$
j) $y^2 + 5y - 24$
k) $a^2 + 15a + 56$
l) $b^2 - 9b - 22$

2. Sin desarrollar los productos, factoriza cada uno de los siguientes polinomios:

a) $(x - 1)^2 - 2(x - 1) - 24$

Sustituye $y = x - 1$.

b) $(x + 1)^2 + 10(x + 1) + 21$
c) $(x - 2)^2 + 5(x - 2) - 50$
d) $(x - 3)^2 - 5(x - 3) + 6$

1.11 Trinomio cuadrado perfecto y diferencia de cuadrados, parte 1

Problema inicial

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 + 12x + 36$

b) $y^2 - 100$

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$
$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$

Solución

a) El primer término del trinomio y el término independiente son cuadrados, pues x^2 es el cuadrado de x y 36 es el cuadrado de 6. Además, $12x = 2(6)(x)$.

Entonces: $x^2 + 12x + 36 = x^2 + 2(6)(x) + 6^2$.

Lo anterior corresponde al desarrollo del cuadrado de un binomio, $x^2 + 2(6)(x) + 6^2 = (x + 6)^2$.

Por lo tanto, $x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$.

b) Ambos términos del binomio son cuadrados: $y^2 - 100 = y^2 - 10^2$.

Lo anterior corresponde al desarrollo de una suma por diferencia de binomios, $y^2 - 10^2 = (y + 10)(y - 10)$.

Luego, $y^2 - 100 = (y + 10)(y - 10)$.

Conclusión

El trinomio de la forma $\boldsymbol{x^2 \pm 2ax + a^2}$ se llama **trinomio cuadrado perfecto**. Este se factoriza como el cuadrado de un binomio de acuerdo al signo del segundo término:

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2.$$

Para determinar si un trinomio es trinomio cuadrado perfecto debe comprobarse que el término independiente es el cuadrado de algún número, luego comprobar que el doble de ese número es igual al coeficiente de la variable de primer grado. Por otro lado, el polinomio de la forma $\boldsymbol{x^2 - a^2}$ se llama **diferencia de cuadrados**, y se factoriza:

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a).$$

Problemas

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 - 6x + 9$
b) $y^2 + 10y + 25$
c) $b^2 - 8b + 16$
d) $x^2 - 4$
e) $a^2 - 36$
f) $49 - y^2$
g) $b^2 + b + \frac{1}{4}$
h) $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$
i) $y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}$
j) $a^2 - \frac{1}{25}$
k) $b^2 - \frac{1}{64}$
l) $\frac{4}{9} - y^2$
m) $x^2 + 5x + \frac{25}{4}$
n) $y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{9}{16}$
o) $x^2 - \frac{7}{5}x + \frac{49}{100}$
p) $a^2 - \frac{36}{49}$
q) $y^2 - \frac{4}{121}$
r) $\frac{81}{64} - b^2$

2. Sin utilizar calculadora, determina el resultado de las siguientes operaciones:

a) $77^2 - 23^2$
b) $998^2 - 4$
c) $97^2 + 6(97) + 9$

1.12 Trinomio cuadrado perfecto y diferencia de cuadrados, parte 2

Problema inicial

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $49x^2 - 28xy + 4y^2$

b) $121x^2 - 16y^2$

Solución

a) El primer término del trinomio es el cuadrado de $7x$ y el tercer término es el cuadrado de $2y$:

$$(7x)^2 = 49x^2$$
$$(2y)^2 = 4y^2$$

además, $-2(7x)(2y) = -28xy$, por lo que $49x^2 - 28xy + 4y^2$ es un trinomio cuadrado perfecto y se factoriza:

$$\begin{aligned}49x^2 - 28xy + 4y^2 &= (7x)^2 - 2(7x)(2y) + (2y)^2\\ &= (7x - 2y)^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, $49x^2 - 28xy + 4y^2 = (7x - 2y)^2$.

b) El primer término es el cuadrado de $11x$ mientras que el segundo es el cuadrado de $4y$:

$$(11x)^2 = 121x^2$$
$$(4y)^2 = 16y^2$$

entonces $121x^2 - 16y^2$ es una diferencia de cuadrados y se factoriza:

$$\begin{aligned}121x^2 - 16y^2 &= (11x)^2 - (4y)^2\\ &= (11x + 4y)\,(11x - 4y)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $121x^2 - 16y^2 = (11x + 4y)(11x - 4y)$.

En general

El trinomio de la forma $a^2x^2 \pm 2abxy + b^2y^2$ es un trinomio cuadrado perfecto y se factoriza:

$$(ax)^2 + 2(ax)(by) + (by)^2 = (ax + by)^2$$
$$(ax)^2 - 2(ax)(by) + (by)^2 = (ax - by)^2.$$

El binomio de la forma $a^2x^2 - b^2y^2$ es una diferencia de cuadrados y se factoriza:

$$(ax)^2 - (by)^2 = (ax + by)\,(ax - by).$$

Problemas

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $4x^2 + 20xy + 25y^2$

b) $9x^2 - 12xy + 4y^2$

c) $25a^2 + 60ab + 36b^2$

d) $9x^2 - 100y^2$

e) $25x^2 - 16y^2$

f) $49a^2 - 4b^2$

g) $\frac{1}{4}x^2 + xy + y^2$

h) $9x^2 - 3xy + \frac{1}{4}y^2$

i) $\frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{16}y^2$

j) $\frac{1}{64}x^2 - 9y^2$

k) $\frac{25}{9}a^2 - \frac{1}{49}b^2$

l) $\frac{4}{81}x^2 - \frac{25}{16}y^2$

m) $4x^2 + 4\sqrt{2}\,xy + 2y^2$

n) $5a^2 - 2\sqrt{15}\,ab + 3b^2$

o) $6x^2 + 8\sqrt{3}\,xy + 8y^2$

p) $100a^2 - 7b^2$

q) $6x^2 - \frac{1}{25}y^2$

r) $8x^2 - 11y^2$

2. Sin desarrollar los productos, factoriza los siguientes polinomios:

a) $9x^2 + 6x(y + 2) + (y + 2)^2$ Sustituye $z = y + 2$.

b) $(a - 3)^2 - 10(a - 3)b + 25b^2$

c) $(2x + 1)^2 + 2(2x + 1)(3y - 4) + (3y - 4)^2$

d) $16a^2 - (b + 5)^2$

e) $(x + 9)^2 - (y - 9)^2$

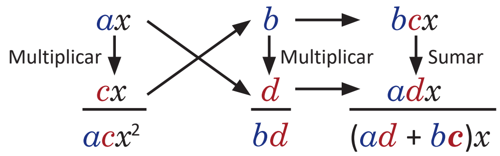
f) $x^2 + y^2 + 2xy + 10x + 10y$

1.13 Método de la tijera, parte 1

Problema inicial

El polinomio $2x^2 + 13x + 15$ no es un trinomio cuadrado perfecto; sin embargo puede factorizarse en la forma $(ax + b)(cx + d)$ realizando lo siguiente:

1. Descomponer 2 y 15 como producto de dos factores.
2. En el siguiente esquema, sustituye los valores de a y c por los factores de 2, y los valores de b y d por factores de 15. Realiza las operaciones indicadas hasta que se cumpla $ad + bc = 13$.



3. Escribe $2x^2 + 13x + 15$ como $(ax + b)(cx + d)$.

Solución

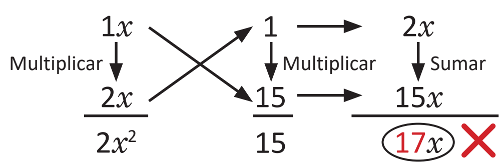
1. Los números 2 y 15 pueden descomponerse como producto de dos factores de las siguientes maneras:

$$2 = 1(2) \qquad 15 = \begin{cases} 1(15) \\ 3(5) \end{cases}$$

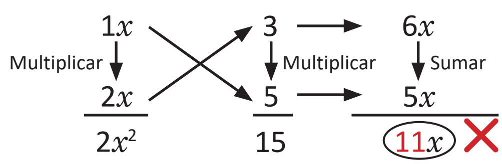
El producto es conmutativo, por tanto $1(2) = 2(1)$.

2. Se sustituyen los valores de a y c por los factores de 2, y los valores de b y d por factores de 15 hasta que $ad + bc = 13$:

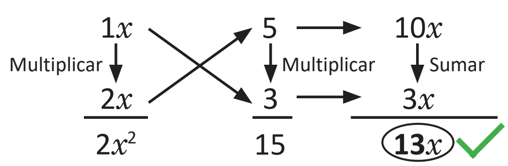
- Si $a = 1$ y $c = 2$, $b = 1$ y $d = 15$:



- Si $a = 1$ y $c = 2$, $b = 3$ y $d = 5$:



- Si $a = 1$ y $c = 2$, $b = 5$ y $d = 3$:



3. De lo anterior se obtiene: $2x^2 + 13x + 15 = (x + 5)(2x + 3)$.

Conclusión

Sea un trinomio de la forma $mx^2 + nx + p$ con m, n y p enteros diferentes de cero. Si existen a, b, c y d números enteros tales que $\boldsymbol{ac = m}$, $\boldsymbol{bd = p}$ y $\boldsymbol{ad + bc = n}$ entonces:

$$mx^2 + nx + p = (ax + b)(cx + d).$$

Problemas

Factoriza los siguientes polinomios utilizando el esquema del Problema inicial:

a) $3a^2 + 8a + 5$ b) $2x^2 + 7x + 3$ c) $2x^2 + 9x + 9$

d) $2y^2 + 11y + 12$ e) $3y^2 + 8y + 4$ f) $3a^2 + 17a + 20$

g) $4x^2 + 5x + 1$ h) $6x^2 + 11x + 3$ i) $8y^2 + 22y + 5$

j) $6y^2 + 23y + 20$ k) $6x^2 + 17x + 12$ l) $10a^2 + 27a + 18$

1.14 Método de la tijera, parte 2

Problema inicial

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $2x^2 - 5x - 12$

b) $3y^2 - 11y + 8$

Utiliza el método visto en la clase anterior.

Solución

a) El coeficiente de x^2 y el término independiente deben escribirse como producto de dos números enteros. Como el término independiente es negativo entonces debe ser el resultado de multiplicar un número negativo por uno positivo. Los números 2 y –12 pueden escribirse como producto de dos factores de la siguiente forma:

$$2 = 1(2) \qquad -12 = \begin{cases} 1(-12) \text{ o } -1(12) \\ 2(-6) \text{ o } -2(6) \\ 3(-4) \text{ o } -3(4) \end{cases}$$

Debe tenerse en cuenta lo siguiente: el resultado de $ad + bc$ al sustituir $a = 1$, $c = 2$, $b = 1$ y $d = -12$ no será el mismo si se toman $a = 1$, $c = 2$, $b = -12$ y $d = 1$; es decir, intercambiar los valores de b y d dará un resultado diferente para $ad + bc$. El método de la tijera es, por tanto, una estrategia para factorizar trinomios que consiste en experimentar con posibles soluciones hasta encontrar la correcta; a esta estrategia de resolución de problemas se le llama **ensayo y error**.

- Si $a = 1$ y $c = 2$, $b = 1$ y $d = -12$:

$$\begin{array}{ccc} 1x & 1 & 2x \\ \text{Multiplicar}\downarrow & \downarrow\text{Multiplicar} & \downarrow\text{Sumar} \\ 2x & -12 & -12x \\ \hline 2x^2 & -12 & -10x \end{array}$$

Al sustituir $b = -12$ y $d = 1$ el resultado de $ad + bc$ será igual a –23.

- Si $a = 1$ y $c = 2$, $b = 2$ y $d = -6$:

$$\begin{array}{ccc} 1x & 2 & 4x \\ \text{Multiplicar}\downarrow & \downarrow\text{Multiplicar} & \downarrow\text{Sumar} \\ 2x & -6 & -6x \\ \hline 2x^2 & -12 & -2x \end{array}$$

- Si $a = 1$ y $c = 2$, $b = 3$ y $d = -4$:

$$\begin{array}{ccc} 1x & 3 & 6x \\ \text{Multiplicar}\downarrow & \downarrow\text{Multiplicar} & \downarrow\text{Sumar} \\ 2x & -4 & -4x \\ \hline 2x^2 & -12 & 2x \end{array}$$

- Si $a = 1$ y $c = 2$, $b = 4$ y $d = -3$:

$$\begin{array}{ccc} 1x & 4 & 8x \\ \text{Multiplicar}\downarrow & \downarrow\text{Multiplicar} & \downarrow\text{Sumar} \\ 2x & -3 & -3x \\ \hline 2x^2 & -12 & 5x \end{array}$$

- Si $a = 1$ y $c = 2$, $b = -4$ y $d = 3$:

$$\begin{array}{ccc} 1x & -4 & -8x \\ \text{Multiplicar}\downarrow & \downarrow\text{Multiplicar} & \downarrow\text{Sumar} \\ 2x & 3 & 3x \\ \hline 2x^2 & -12 & -5x \end{array}$$

Luego, $2x^2 - 5x - 12 = (x - 4)(2x + 3)$.

b) Se toman a y c positivos; el coeficiente de y es negativo, mientras que el término independiente es positivo; esto indica que los números b y d deben ser ambos negativos. Teniendo en cuenta lo anterior, los números 3 y 8 pueden escribirse como producto de dos factores de las siguientes formas:

$$3 = 1(3) \qquad\qquad 8 = \begin{cases} -1(-8) \text{ o } -8(-1) \\ -2(-4) \text{ o } -4(-2) \end{cases}$$

- Si $a = 1$ y $c = 3$, $b = -1$ y $d = -8$:

$$\begin{array}{ccccc}
1y & & -1 & \longrightarrow & -3y \\
\text{Multiplicar}\downarrow & \times & \downarrow\text{Multiplicar} & & \downarrow\text{Sumar} \\
3y & & -8 & \longrightarrow & -8y \\
\hline
3y^2 & & 8 & & \mathbf{-11y}
\end{array}$$

Por lo tanto, $3y^2 - 11y + 8 = (y - 1)(3y - 8)$.

Conclusión

Sea un trinomio de la forma $mx^2 + nx + p$ con m, n y p enteros diferentes de cero, y m positivo. Para factorizarlo en el producto de la forma $(ax + b)(cx + d)$ se realiza lo siguiente:

1. Se descomponen los números m y p en dos factores:
   a) si n y p son positivos entonces p debe escribirse como producto de dos números positivos;
   b) si n es negativo y p es positivo entonces p debe escribirse como producto de dos números negativos;
   c) si p es negativo entonces debe escribirse como producto de un número positivo y uno negativo.
2. En el siguiente esquema, se sustituyen los valores de a y c por los factores de m, y los valores de b y d por los factores de p, realizando todas las combinaciones hasta que $ad + bc = n$:

$$\begin{array}{ccccc}
ax & & b & \longrightarrow & bcx \\
\text{Multiplicar}\downarrow & \times & \downarrow\text{Multiplicar} & & \downarrow\text{Sumar} \\
cx & & d & \longrightarrow & adx \\
\hline
acx^2 & & bd & & (ad + bc)x
\end{array}$$

3. Se escribe $mx^2 + nx + p$ como $(ax + b)(cx + d)$.

Al método anterior para factorizar trinomios se le llama **método de la tijera** por la forma cruzada en que se multiplican ax y d, cx y b en el esquema; también se le conoce como método del aspa simple.

Problemas

1. Factoriza los siguientes polinomios utilizando el método de la tijera:

a) $2x^2 - x - 10$ b) $2y^2 - y - 15$ c) $3y^2 - 16y + 5$

d) $5x^2 + 2x - 3$ e) $5a^2 - 14a + 8$ f) $7x^2 - 5x - 2$

g) $4x^2 + 17x - 15$ h) $6y^2 - 17y + 12$ i) $8a^2 - 18a - 5$

2. Sea n un número entero tal que el trinomio $21x^2 + nx + 21$ puede factorizarse en el producto $(ax + b)(cx + d)$, con a, b, c y d números enteros. Explica por qué n es un número par.

3. El binomio $x + 1$ es un factor del trinomio $x^2 + mx - 2$, es decir, $x^2 + mx - 2 = (x + 1)(x - b)$. Además, el binomio $2x - 1$ es un factor del trinomio $nx^2 + 5x - 4$. Con base en lo anterior, calcula el resultado de $\frac{n}{m}$.

1.15 Combinaciones de métodos de factorización, parte 1

Problema inicial

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $6x^2y - 4x^2 + 30xy - 20x$

b) $6x^2y + 57xy + 27y$

Solución

a) Lo primero es extraer el factor común de los términos del polinomio, luego utilizar alguna de las factorizaciones vistas en las clases anteriores:

$$\begin{aligned} 6x^2y - 4x^2 + 30xy - 20x &= 2x(3xy - 2x + 15y - 10) && \text{factor común } 2x, \\ &= 2x[(3xy - 2x) + (15y - 10)] && \text{asociar los términos dentro del corchete,} \\ &= 2x[x(3y - 2) + 5(3y - 2)] && \text{extraer factor común } x \text{ y } 5 \text{ respectivamente,} \\ &= 2x(x + 5)(3y - 2) && \text{extraer factor común } 3y - 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $6x^2y - 4x^2 + 30xy - 20x = 2x(x + 5)(3y - 2)$.

b) Igual que en el literal anterior, debe extraerse el factor común de los términos del polinomio y luego utilizar los métodos estudiados en clases anteriores para factorizar:

$$6x^2y + 57xy + 27y = 3y(2x^2 + 19x + 9) \qquad \text{factor común } 3y.$$

Se utiliza el método de la tijera para factorizar $2x^2 + 19x + 9$:

$$\begin{array}{ccccc} 1x & & 9 & \rightarrow & 18x \\ \downarrow & \times & \downarrow & & \downarrow \\ 2x & & 1 & \rightarrow & x \\ \hline 2x^2 & & 9 & & 19x \end{array}$$

Por lo tanto, $6x^2y + 57xy + 27y = 3y(x + 9)(2x + 1)$.

En general

Cuando se factoriza un polinomio cualquiera, lo primero es verificar si sus términos tienen un monomio común, de ser así se extrae este monomio y se factoriza el otro polinomio utilizando cualquiera de los métodos vistos en las clases anteriores.

El Ministerio de Educación (MINED) ha elaborado una serie de videos sobre Matemática en lo cotidiano, uno de ellos presenta la factorización de polinomios. Puedes visualizarlo en el siguiente enlace:
https://goo.gl/ZgJVzs

Problemas

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $20xy^2 - 20xy - 15x$

b) $90x^3 - 40xy^2$

c) $18x^3y + 12x^2y^2 + 2xy^3$

d) $6ab^3 - 33ab^2 + 36ab$

e) $225x^3y - 180x^2y^2 + 36xy^3$

f) $3a^2bc + 6a^2bd + 15a^2b - 2a^2c - 4a^2d - 10a^2$

2. Factoriza el polinomio $(x + 1)(x - 3y + 4)^2 - (x + 1)(2x + y - 5)^2$.

No desarrolles los productos, identifica en este caso el factor común.

1.16 Combinaciones de métodos de factorización, parte 2

Problema inicial

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 - 2axy - 2bxy$ b) $2mx^2 - 2nx^2 + 5mx - 5nx - 3m + 3n$

Solución

a) Los términos del polinomio no poseen un factor común, sin embargo pueden asociarse aquellos que sí lo posean y extraer el factor común, o sea:

$$ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 - 2axy - 2bxy = (ax^2 + ay^2) + (bx^2 + by^2) + (-2axy - 2bxy) \quad \text{asociar términos;}$$

$$\left.\begin{aligned} &= a(x^2 + y^2) + b(x^2 + y^2) - 2xy(a + b) \\ &= (a + b)(x^2 + y^2) - 2xy(a + b) \end{aligned}\right\} \text{extraer el factor común en cada caso.}$$

Ahora se extrae el factor común polinomio $a + b$ y se factoriza el segundo factor:

$$\begin{aligned} ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 - 2axy - 2bxy &= (a + b)(x^2 + y^2 - 2xy) && \text{extraer el factor común } a + b; \\ &= (a + b)(x^2 - 2xy + y^2) && \text{ordenar los términos;} \\ &= (a + b)(x - y)^2 && \text{factorizar } x^2 - 2xy + y^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 - 2axy - 2bxy = (a + b)(x - y)^2$.

b) De forma similar al literal anterior, se asocian los términos que posean factor común y se extrae dicho factor:

$$\begin{aligned} 2mx^2 - 2nx^2 + 5mx - 5nx - 3m + 3n &= 2x^2(m - n) + 5x(m - n) - 3(m - n) \\ &= (2x^2 + 5x - 3)(m - n) \end{aligned}$$

se factoriza $2x^2 + 5x - 3$ usando el método de la tijera:

$$\begin{array}{ccccc} 1x & & 3 & \rightarrow & 6x \\ 2x & & -1 & \rightarrow & -x \\ \hline 2x^2 & & -3 & & 5x \end{array}$$

Luego, $2x^2 + 5x - 3 = (x + 3)(2x - 1)$ y $2mx^2 - 2nx^2 + 5mx - 5nx - 3m + 3n = (x + 3)(2x - 1)(m - n)$.

En general

Al factorizar un polinomio, si sus términos NO poseen un monomio común entonces se asocian los términos que sí lo posean, se extrae el factor común polinomio y se aplica al otro factor cualquiera de los métodos vistos en las clases anteriores.

También pueden asociarse términos convenientemente para factorizar un polinomio, sin que estos tengan factor común.

Problemas

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $4a^2x + 4a^2y - b^2x - b^2y$

b) $2cm^2 + dm^2 + 50cn^2 + 25dn^2 + 20cmn + 10dmn$

c) $4a^2x - 12abx + 9b^2x - 8a^2y + 24aby - 18b^2y$

d) $(a + b)(c - d)^2 + 2(a + b)(c - d)(2c + 3d) + (a + b)(2c + 3d)^2$

1.17 Practica lo aprendido

1. Factoriza los siguientes polinomios (factor común):

a) $4x^2y^2 + 6x^2y - 10xy$

b) $-15a^2b^2 + 12b^3 - 21b^2$

c) $-2a^2b^2c^2 - 20ab^2c - 10abc$

d) $\frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}xy - \frac{1}{8}x$

e) $2ax + bx + 6ay + 3by$

f) $3mx - 2my - 12nx + 8ny$

g) $5ax - 2bx + \frac{5}{3}ay - \frac{2}{3}by$

h) $2mx + 4nx - 3my - 6ny + 5m + 10n$

2. Factoriza los siguientes trinomios en la forma $(x + a)(x + b)$:

a) $x^2 - 17x + 70$

b) $y^2 + 3y - 40$

c) $a^2 - 3a - 54$

d) $b^2 + 14b + 33$

e) $m^2 + 2m - 35$

f) $n^2 - 8n - 20$

g) $4x^2 + 24x + 35$

h) $4y^2 - 24y + 27$

i) $9a^2 - 3a - 20$

En el problema 2, para los literales g), h) e i), realiza un cambio de variable de modo que el polinomio pueda transformarse en otro polinomio de la forma $m^2 + pm + q$ y luego factorizarlo en la forma $(m + a)(m + b)$.

3. Factoriza los siguientes polinomios (trinomio cuadrado perfecto y diferencia de cuadrados):

a) $x^2 + 18x + 81$

b) $y^2 - 20y + 100$

c) $a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{16}$

d) $b^2 - 16$

e) $y^2 - 121$

f) $\frac{1}{49} - a^2$

g) $25x^2 + 30xy + 9y^2$

h) $\frac{9}{4}a^2 - \frac{25}{49}b^2$

i) $900x^2 - \frac{121}{100}y^2$

4. Factoriza utilizando el método de la tijera:

a) $2x^2 + 19x + 45$

b) $3y^2 + 26y + 16$

c) $5a^2 - 27a - 18$

d) $3a^2 - 10a + 8$

e) $5b^2 + 13b - 6$

f) $10a^2 - 23a - 5$

g) $12y^2 - 23y + 5$

h) $8x^2 + 10x - 25$

i) $6x^2 + 11x + 4$

5. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $4x^3y - 100xy^3$

b) $5m^3 + 15m^2 - 350m$

c) $75a^3b - 60a^2b^2 + 12ab^3$

d) $-96x^3y - 144x^2y^2 - 54xy^3$

e) $4xy^3 - 26xy^2 + 42xy$

f) $60a^2m - 80a^2n + 30abm - 40abn$

6. Factoriza los siguientes polinomios sin desarrollar los productos:

a) $(5x - 2y + 9)^2 - (x - 8)^2$

b) $(a + 7)^2 + 2(a + 7)(b - 6) + (b - 6)^2$

c) $(2y + 3)^2 + 3(2y + 3) - 28$

d) $(6y - 1)^2 - 5(6y - 1) - 14$

e) $4(m + n)^2 - 4(m + n)(n - 2) + (n - 2)^2$

f) $3(4x + 1)^2 + 11(4x + 1) - 20$

7. Factoriza el siguiente polinomio: $amx + anx + amy + any + bmx + bnx + bmy + bny$

8. Utilizando factorización, calcula el resultado de las siguientes operaciones:

a) $999^2 - 1$

b) $550^2 - 450^2$

c) $98^2 + 4(98) + 4$

d) $995^2 + 3(995) - 10$

2.1 División de polinomio por monomio

Problema inicial

Realiza las siguientes divisiones:

a) $(20xy + 16x - 4y) \div 4$ b) $(12ab - 21b^2) \div (3b)$

Para realizar la división de un polinomio por un número se multiplica el recíproco del número por cada término del polinomio.

Solución

a) Se cambia la división por la multiplicación con el número recíproco del divisor, es decir:

$$\begin{aligned}(20xy + 16x - 4y) \div 4 &= (20xy + 16x - 4y)\left(\frac{1}{4}\right)\\ &= 20xy\left(\frac{1}{4}\right) + 16x\left(\frac{1}{4}\right) - 4y\left(\frac{1}{4}\right)\\ &= 5xy + 4x - y\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(20xy + 16x - 4y) \div 4 = 5xy + 4x - y$.

b) Como en el literal anterior la división $(12ab - 21b^2) \div (3b)$ equivale a multiplicar $12ab - 21b^2$ por el recíproco de $3b$; al realizar esto se obtiene:

$$\begin{aligned}(12ab - 21b^2) \div (3b) &= (12ab - 21b^2)\left(\frac{1}{3b}\right)\\ &= 12ab\left(\frac{1}{3b}\right) - 21b^2\left(\frac{1}{3b}\right)\\ &= \frac{\overset{4}{\cancel{12}}a\cancel{b}}{\cancel{3}\cancel{b}} - \frac{\overset{7}{\cancel{21}}\overset{b}{\cancel{b^2}}}{\cancel{3}\cancel{b}}\\ &= 4a - 7b\end{aligned}$$

$$\frac{b^2}{b} = \frac{\cancel{b}(b)}{\cancel{b}} = b$$

Luego, $(12ab - 21b^2) \div (3b) = 4a - 7b$.

En general

Para dividir un polinomio entre un monomio se multiplica cada término del polinomio por el recíproco del monomio y se simplifica el resultado.

Ejemplo

Realiza la división $(15x^2y^2 - 40x^2y - 25xy) \div (-5xy)$.

Aplicando lo visto en la conclusión:

$$\begin{aligned}(15x^2y^2 - 40x^2y - 25xy) \div (-5xy) &= 15x^2y^2\left(-\frac{1}{5xy}\right) - 40x^2y\left(-\frac{1}{5xy}\right) - 25xy\left(-\frac{1}{5xy}\right)\\ &= -\frac{\overset{3}{\cancel{15}}\overset{x}{\cancel{x^2}}\overset{y}{\cancel{y^2}}}{\underset{1}{\cancel{5}}\cancel{x}\cancel{y}} + \frac{\overset{8}{\cancel{40}}\overset{x}{\cancel{x^2}}\cancel{y}}{\underset{1}{\cancel{5}}\cancel{x}\cancel{y}} + \frac{\overset{5}{\cancel{25}}\cancel{x}\cancel{y}}{\underset{1}{\cancel{5}}\cancel{x}\cancel{y}}\\ &= -3xy + 8x + 5\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(15x^2y^2 - 40x^2y - 25xy) \div (-5xy) = -3xy + 8x + 5$.

Problemas

Realiza las siguientes divisiones:

a) $(-8abc + 22a^2 - 18a) \div (2a)$

b) $(18xyz + 24x^2yz) \div (3xyz)$

c) $(-10a^2b^2 + 45a^2bc - 20abc) \div (-5ab)$

d) $(4x^2y^2z^2 - 40x^2y^2z - 32xy^2z^2) \div (-4xyz)$

e) $(8a^2b + 12ab^2) \div (10ab)$

f) $(-14xyz^2 + 15xy^2z^2 - 18xyz) \div (-6xy)$

g) $(-2ab^2 + 5ab^3) \div \left(\frac{1}{2}b\right)$

h) $(9xyz - 2xy) \div \left(-\frac{3}{2}xy\right)$

2.2 División de polinomio por polinomio

Definición

Dados dos polinomios p y q en una variable, entonces existen los polinomios d y r tales que:

$$p = qd + r$$

donde r es cero o de grado menor a q. Como en la división de números: el polinomio $\boldsymbol{p}$ **es el dividendo**, $\boldsymbol{q}$ **el divisor**, $\boldsymbol{d}$ **es el cociente** y el polinomio $\boldsymbol{r}$ **es el residuo** de la división de p entre q.

El procedimiento para dividir polinomios es el siguiente:

1. Escribir la división en forma vertical y ordenar los términos del dividendo y el divisor según las potencias decrecientes de la variable. Si falta una potencia de la variable se coloca cero en el lugar correspondiente.
2. Dividir el primer término del dividendo por el primer término del divisor para obtener el primer término del cociente.
3. Multiplicar el divisor por el término del cociente encontrado en el paso 2. Luego, restar este resultado del dividendo.
4. Repetir este proceso, ahora con el resultado obtenido en el paso 3 como dividendo, hasta que el grado del polinomio del dividendo sea menor al grado del polinomio del divisor.

En Educación Básica se aprende a dividir números en forma vertical, ubicando los elementos de la división como sigue:

$$\begin{array}{r|l} \text{Dividendo} & \underline{\text{Divisor}} \\ \text{Residuo} & \text{Cociente} \end{array}$$

A este procedimiento también se le conoce como **división larga** de polinomios.

Ejemplo 1

Realiza la división $(x^3 + 3x^2 - 5x - 4) \div (x + 2)$ y escribe el dividendo en la forma $qd + r$.

Los términos del dividendo y el divisor ya se encuentran ordenados de acuerdo a las potencias decrecientes de la variable. Se escribe $(x^3 + 3x^2 - 5x - 4) \div (x + 2)$ como la división en forma vertical de números:

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2-5x-4 & \underline{x+2} \end{array}$$

se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, o sea $x^3 \div x$, para obtener el primer término del cociente:

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2-5x-4 & \underline{x+2} \\ & x^2 \longleftarrow \text{Resultado de } x^3 \div x \end{array}$$

se multiplica el divisor por el primer término del cociente, o sea $(x + 2)(x^2) = x^3 + 2x^2$; este resultado se resta del dividendo:

Al restar $x^3 + 2x^2$ del dividendo, los términos del primero cambian de signo.

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^3}+3x^2-5x-4 & \underline{x+2} \\ \underline{-\cancel{x^3}-2x^2} & x^2 \\ 0+x^2-5x-4 & \end{array}$$

Repite el proceso, tomando $x^2 - 5x + 4$ como dividendo:

Restar el resultado de $(x + 2)(x)$ de $x^2 - 5x - 4$.

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2-5x-4 & \underline{x+2} \\ \underline{-x^3-2x^2} & x^2+x \longleftarrow \text{Resultado de } x^2 \div x \\ 0+\cancel{x^2}-5x-4 & \\ \underline{-\cancel{x^2}-2x} & \\ 0-7x-4 & \end{array}$$

Ahora se toma $-7x-4$ como dividendo:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +3x^2 & -5x & -4 & x+2 \\ \cline{5-5}
-x^3 & -2x^2 & & & x^2+x-7 \\ \cline{1-2}
0 & +x^2 & -5x & -4 & \\
 & -x^2 & -2x & & \\ \cline{2-3}
 & 0 & -\cancel{7x} & -4 & \\
 & & +\cancel{7x} & +14 & \\ \cline{3-4}
 & & 0 & +10 &
\end{array}
$$

Resultado de $(-7x) \div x$

Restar el resultado de $(x+2)(-7)$ de $-7x-4$.

Puedes desarrollar la operación:
$(x+2)(x^2+x-7)+10$
para comprobar si la división es correcta.

Luego, $x^3+3x^2-5x-4=(x+2)(x^2+x-7)+10$.

Ejemplo 2

Realiza la división $(2x^3-20x-50) \div (x^2+x-4)$. Escribe el dividendo en la forma $qd+r$.

El dividendo no posee el término con x^2, entonces se coloca cero en la posición donde "debería" estar este término al momento de escribir la división en forma vertical:

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3+0x^2-20x-50 & x^2+x-4 \\ \cline{2-2}
\end{array}
$$

luego, se realiza el proceso visto en el ejemplo anterior:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{2x^3} & +0x^2 & -20x & -50 & x^2+x-4 \\ \cline{5-5}
-\cancel{2x^3} & -2x^2 & +8x & & 2x-2 \\ \cline{1-3}
0 & -\cancel{2x^2} & -12x & -50 & \\
 & \cancel{2x^2} & +2x & -8 & \\ \cline{2-4}
 & 0 & -10x & -58 &
\end{array}
$$

Restar $(x^2+x-4)(2x)$ de $2x^3-20x-50$

Restar $(x^2+x-4)(-2)$ de $-2x^2-12x-50$

Resultado de $(2x^3) \div x^2$

Resultado de $(-2x^2) \div x^2$

Por lo tanto, $2x^3-20x-50=(x^2+x-4)(2x-2)-10x-58$.

Problemas

1. Realiza las siguientes divisiones y escribe el dividendo en la forma $qd+r$:

a) $(x^3+x^2-5x+7) \div (x+3)$

b) $(x^3+2x^2-5x+7) \div (x-1)$

c) $(x^3+4x^2-8x-16) \div (x+5)$

d) $(x^3-6x^2+4x+19) \div (x-3)$

e) $(x^3+3x+9) \div (x+2)$

f) $(x^3-7x^2+11) \div (x-2)$

g) $(x^3+5x^2+5x+3) \div (x^2+4x+1)$

h) $(x^3+x^2-12x+2) \div (x^2+3x-6)$

i) $(x^3-5x^2+5x-1) \div (x-1)$

j) $(x^3+4x^2-6x-5) \div (x+5)$

k) $(2x^3-3x^2-x-2) \div (2x^2+x+1)$

l) $(3x^3+2x^2-2x-1) \div (3x^2-x-1)$

2. Encuentra el valor de a para que el residuo de la división $(x^3+2x^2-x+a) \div (x-2)$ sea igual a cero.

3. Efectúa la división $(2x^4+6x^3-x^2+3x-1) \div (2x^2+1)$.

2.3 División sintética, parte 1

Definición

La **división sintética** es un método para realizar divisiones entre polinomios en una variable y se utiliza cuando el polinomio del divisor tiene la forma $x - a$. En este método se trabaja con el esquema:

$$\begin{array}{c|ll} & \text{Dividendo} & \\ a & & \\ \hline & \text{Cociente} & \multicolumn{1}{|l}{\text{Residuo}} \end{array}$$

Este método también funciona cuando se divide entre un polinomio de la forma $mx - a$. En este caso, se ubica el número $\frac{a}{m}$ en lugar de a.

El procedimiento es el siguiente:

1. Ordenar los términos del dividendo según las potencias decrecientes de la variable. Luego se escriben los coeficientes del dividendo en forma horizontal, en la parte con título “Dividendo”.
2. Se escribe el primer coeficiente del dividendo en la parte con título “Cociente”; luego se multiplica este número por el valor de a y se escribe el resultado debajo del segundo coeficiente del dividendo.
3. Se suman las cantidades del paso 2, el resultado será el segundo coeficiente del cociente.
4. Repetir este proceso hasta obtener un número debajo del término independiente del dividendo.
5. El residuo será la suma de las cantidades de la última columna; los números a la izquierda del residuo corresponden a los coeficientes del polinomio del cociente, cuyo grado será uno menos que el grado del polinomio del dividendo.

Ejemplo

Utiliza la división sintética para realizar $(x^3 + 3x^2 - 5x - 4) \div (x + 2)$. Escribe el dividendo en la forma $qd + r$.

$x + 2 = x - (-2)$, es decir, $a = -2$

De acuerdo al esquema mostrado en la definición, se escriben los coeficientes del polinomio del dividendo en el lugar correspondiente, en forma horizontal; se sustituye también el valor de $a = -2$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -5 & -4 \\ -2 & & & & \\ \hline & & & & \multicolumn{1}{|r}{} \end{array}$$

se escribe el primer coeficiente del dividendo en la parte correspondiente al cociente (este será el coeficiente de la variable con mayor potencia del polinomio del cociente). Este número se multiplica por -2 y se escribe el resultado debajo del segundo coeficiente del dividendo, o sea, debajo de 3:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -5 & -4 \\ -2 & & -2 & & \\ \hline & 1 & & & \multicolumn{1}{|r}{} \end{array}$$

$-2(1)$

se efectúa la suma $3 + (-2)$ y el resultado será el segundo número del cociente:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -5 & -4 \\ -2 & & -2 & & \\ \hline & 1 & 1 & & \multicolumn{1}{|r}{} \end{array}$$

Resultado de $3 + (-2)$

se repite el proceso ahora multiplicando –2 por el segundo número del cociente, se escribe el resultado debajo de –5 y se suman ambas cantidades:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 3 & -5 & -4 \\ -2 & & -2 & -2 & \\ \hline & 1 & 1 & -7 & \end{array}$$

$-2(1)$

Resultado de $-5 + (-2)$

se multiplica –2 por –7, el resultado se escribe debajo de –4 y se suman ambas cantidades:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 3 & -5 & -4 \\ -2 & & -2 & -2 & 14 \\ \hline & 1 & 1 & -7 & 10 \end{array}$$

$-2(-7)$

Resultado de $-4 + 14$

Este último resultado 10, corresponde al residuo de la división. Los números 1, 1 y –7 son los coeficientes del polinomio del cociente, cuyo grado será 2 pues el grado del polinomio del dividendo es 3; o sea, el polinomio del cociente es: $\boldsymbol{x^2 + x - 7}$.

Por lo tanto, $x^3 + 3x^2 - 5x - 4 = (x + 2)(x^2 + x - 7) + 10$.

A la división sintética también se le conoce como **método de Ruffini** o **regla de Ruffini** debido al matemático italiano Paolo Ruffini (1765 - 1822), que además estudió Medicina, Filosofía y Literatura en la Universidad de Módena en Italia. Puedes comprobar que el resultado de la división sintética es el mismo que el de la división larga.

Problemas

Realiza las siguientes divisiones y escribe el dividendo en la forma $qd + r$:

a) $(x^3 - 12x^2 + 23x - 5) \div (x - 3)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -12 & 23 & -5 \\ 3 & & 3 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

$3(1)$

b) $(x^3 + 9x^2 - 13x - 4) \div (x - 1)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 9 & -13 & -4 \\ 1 & & 1 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

$1(1)$

c) $(x^3 - 4x^2 - 11x - 2) \div (x + 1)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -4 & -11 & -2 \\ -1 & & -1 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

$-1(1)$

d) $(x^3 - 2x^2 - 31x + 20) \div (x + 5)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -2 & -31 & 20 \\ -5 & & -5 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

$-5(1)$

e) $(2x^3 - 3x^2 - 4x - 1) \div (x - 2)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -3 & -4 & -1 \\ 2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

f) $(3x^3 - 11x^2 - 5x + 4) \div (x - 4)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 3 & -11 & -5 & 4 \\ & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

2.4 División sintética, parte 2

Problema inicial

Realiza la división $(x^3 - 8) \div (x - 2)$. Escribe el dividendo en la forma $qd + r$.

Si falta una potencia de la variable debes colocar cero en el lugar correspondiente.

Solución

El polinomio $x^3 - 8$ no posee términos con las variables x^2 y x, entonces debe colocarse cero en el lugar correspondiente:

$$(x^3 + 0x^2 + 0x - 8) \div (x - 2)$$

Utilizando división sintética se obtiene lo siguiente:

	1	0	0	–8
2	↓	2	4	8
	1	2	4	0

El polinomio del cociente es $x^2 + 2x + 4$ y el residuo es cero. Por lo tanto, $(x^3 - 8) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

En general

Al dividir dos polinomios en una variable, los términos del dividendo y del divisor siempre deben estar ordenados según las potencias decrecientes de la variable. Si falta una potencia de la variable se coloca cero en el lugar correspondiente.

Si el polinomio del divisor tiene la forma $x - a$ entonces se utiliza la división sintética; en cualquier otro caso se utiliza la división larga de polinomios.

Ejemplo

Realiza la división $(x^2 - 2x^3 - 20) \div (3 + x)$. Escribe el dividendo en la forma $qd + r$.

Deben ordenarse los polinomios del dividendo y del divisor de acuerdo a las potencias decrecientes de la variable, y colocar cero en el lugar donde falte una de la potencias:

$$(-2x^3 + x^2 + 0x - 20) \div (x + 3)$$

como el polinomio del divisor tiene la forma $x - a$ se utiliza división sintética, con $a = -3$:

	–2	1	0	–20
–3	↓	6	–21	63
	–2	7	–21	43

Luego, $-2x^3 + x^2 + 0 - 20 = (x + 3)(-2x^2 + 7x - 21) + 43$.

Problemas

1. Realiza las siguientes divisiones y escribe el dividendo en la forma $qd + r$:

a) $(x^3 - 40x + 12) \div (x - 6)$

b) $(2x^3 - 65x - 45) \div (x + 5)$

c) $(x^3 - 50) \div (x - 4)$

d) $(7x - 2x^3 - 5) \div (x + 2)$

e) $(10x^2 - 10 - 3x^3) \div (-3 + x)$

f) $\left(x^3 + \frac{1}{8}\right) \div \left(x + \frac{1}{2}\right)$

2. Determina el valor de a para que el residuo de la división $(x^3 - 27) \div (x - a)$ sea igual a cero.

2.5 Teorema del residuo

Problema inicial

Dados los polinomios $p = 2x^3 - 9x^2 - 6x + 7$ y $q = x - 5$:

1. Encuentra el residuo de la división $p \div q$.
2. Sustituye $x = 5$ en el polinomio p. ¿A qué es igual este resultado?

Solución

1. Utilizando la división sintética:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & -9 & -6 & 7 \\
5 & \downarrow & 10 & 5 & -5 \\
\hline
 & 2 & 1 & -1 & \boxed{2}
\end{array}$$

El residuo al realizar $p \div q$ es 2.

2. Al sustituir $x = 5$ en el polinomio p se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} 2(5)^3 - 9(5)^2 - 6(5) + 7 &= 2(125) - 9(25) - 30 + 7 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Este resultado es el residuo de la división $p \div q$.

Sean p, q, d y r polinomios en una variable x tales que $p = qd + r$ y $q = x - a$. Así:

$$p = (x - a)d + r$$

Sustituir $x = a$ en p será igual a sustituir $x = a$ en la expresión $(x - a)d + r$, cuyo resultado es igual a r:

$$(a - a)d + r = (0)d + r = r$$

Luego, el residuo al efectuar la división de polinomios $p \div q$ es igual a sustituir $x = a$ en el polinomio p.

Teorema

Sean p y q dos polinomios en una variable, con q de la forma $x - a$. El residuo al realizar la división $p \div q$ es igual al valor obtenido cuando se sustituye $x = a$ en el polinomio p. A este resultado se le conoce como **teorema del residuo** o **teorema del resto**.

Ejemplo

Encuentra el residuo que se obtiene al realizar la división $(x^3 + 8x^2) \div (x + 7)$.

Utilizando el teorema, el residuo será igual al valor obtenido al sustituir $x = -7$ en $x^3 + 8x^2$, es decir:

$$\begin{aligned} x^3 + 8x^2 &= (-7)^3 + 8(-7)^2 \\ &= -343 + 392 \\ &= 49 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el residuo de la división $(x^3 + 8x^2) \div (x + 7)$ es 49.

Problemas

1. Encuentra el residuo que se obtiene al realizar las siguientes divisiones:

a) $(3x^3 - 2x^2 + x - 2) \div (x - 1)$

b) $(x^3 + 2x^2 - 14x + 2) \div (x - 2)$

c) $(-x^3 + 9x^2 + 7x + 15) \div (x - 10)$

d) $(3x^3 - 5x) \div (x + 1)$

e) $(2x^3 - 4x^2 - 21x + 30) \div (x + 3)$

f) $(x^3 - 7x^2 + 55) \div (x + 1)$

g) $(x^3 - x^2 + x) \div \left(x - \frac{1}{2}\right)$

h) $(x^3 - x - 1) \div \left(x + \frac{1}{3}\right)$

2. En cada caso determina el valor de a para que el residuo de la división $p \div q$ sea igual a cero:

a) $p = x^3 - 4ax + 3$, $q = x - 1$

b) $p = -x^3 + ax^2 - ax + a^2$, $q = x - 2$

2.6 Factorización utilizando el teorema del factor, parte 1

Problema inicial

Sea $p = x^3 + 4x^2 + x - 6$:

1. Verifica que el valor obtenido al sustituir $x = 1$ en el polinomio p es igual a cero.
2. Factoriza el polinomio p.

¿Cuál será el residuo al dividir p entre $x - 1$?

Solución

1. Sustituyendo $x = 1$ en el polinomio p se obtiene:

$$(1)^3 + 4(1)^2 + 1 - 6 = 1 + 4 - 5 = 0$$

es decir, el valor del polinomio p es igual a cero cuando $x = 1$.

2. Utilizando el teorema del residuo y con base en el resultado del literal a), el residuo al dividir el polinomio p entre $x - 1$ será igual a cero. Entonces p puede escribirse en la forma $(x - 1)d$, donde d es un polinomio de grado 2 (pues el producto es de grado 3). Para encontrar al polinomio d se realiza $p \div (x - 1)$:

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & 4 & 1 & & -6 \\
1 & \downarrow & 1 & 5 & & 6 \\
\hline
 & 1 & 5 & 6 & & 0
\end{array}$$

luego, $d = x^2 + 5x + 6$ y este se puede factorizar en $(x + 3)(x + 2)$. Por lo tanto,

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1)(x + 3)(x + 2).$$

Teorema

Sea p un polinomio cualquiera. Si el valor de p al sustituir $x = a$ es igual a cero entonces p puede escribirse en la forma $(x - a)d$, donde d es un polinomio de un grado menor que p. Este resultado se conoce como **teorema del factor**.

Ejemplo

Sea $p = x^3 - 7x + 6$. Verifica que si $x = -3$ entonces $p = 0$ y utiliza esto para factorizar el polinomio p.

Al sustituir $x = -3$ en p se obtiene:

$$(-3)^3 - 7(-3) + 6 = -27 + 21 + 6 = 0.$$

Por el teorema del factor, p puede escribirse en la forma $(x + 3)d$. Se utiliza división sintética para encontrar d:

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 0 & -7 & 6 \\
-3 & \downarrow & -3 & 9 & -6 \\
\hline
 & 1 & -3 & 2 & 0
\end{array}$$

luego, $d = x^2 - 3x + 2$ y este se factoriza como el producto $(x - 1)(x - 2)$. Por lo tanto,

$$x^3 - 7x + 6 = (x + 3)(x - 1)(x - 2).$$

Problemas

Para cada caso verifica que el valor del polinomio p es cero si $x = a$; luego factoriza p:

a) $p = x^3 + 2x^2 - x - 2;\ a = 1$

b) $p = x^3 + 6x^2 + 11x + 6;\ a = -1$

c) $p = x^3 + 2x^2 - 5x - 6;\ a = 2$

d) $p = x^3 - 5x^2 - 2x + 24;\ a = -2$

e) $p = x^3 - 21x - 20;\ a = -4$

f) $p = x^3 - 9x^2 + 23x - 15;\ a = 5$

2.7 Factorización utilizando el teorema del factor, parte 2

Problema inicial

Sea $p = x^3 - 19x - 30$:

1. Encuentra los divisores (positivos y negativos) del término independiente.
2. Determina en cuál de ellos p es igual a cero; luego factoriza el polinomio p.

Solución

1. Los divisores del término independiente –30 son: ±1, ±2, ±3, ±5, ±6, ±10, ±15 y ±30 (se coloca "±" para indicar el divisor positivo y negativo), estos pueden encontrarse al descomponer 30 en sus factores primos.

2. Se sustituye el valor de x en el polinomio p por los números encontrados en el literal anterior:

   a) si $x = 1$ entonces $(1)^3 - 19(1) - 30 = -48$;
   b) si $x = -1$ entonces $(-1)^3 - 19(-1) - 30 = -12$;
   c) si $x = 2$ entonces $(2)^3 - 19(2) - 30 = -60$;
   d) si $x = -2$ entonces $(-2)^3 - 19(-2) - 30 = 0$.

   Por el teorema del factor, el polinomio p se puede escribir en la forma $(x + 2)d$; para encontrar d se utiliza división sintética:

	1	0	–19	–30
–2		–2	4	30
	1	–2	–15	0

   entonces $d = x^2 - 2x - 15$ y este se puede factorizar en $(x + 3)(x - 5)$. Por lo tanto,

$$x^3 - 19x - 30 = (x + 2)(x + 3)(x - 5).$$

Conclusión

Sea $p = x^3 + mx^2 + nx + k$; los posibles valores de a tales que p pueda escribirse en la forma $(x - a)d$ son los divisores del término independiente k.

Es decir, para factorizar $p = x^3 + mx^2 + nx + k$ puede realizarse lo siguiente:

1. Encuentra los divisores (positivos y negativos) del término independiente.
2. Determina cuál de ellos hace que el valor del polinomio sea igual a cero.
3. Realiza la división para escribir p en la forma $(x - a)d$, donde d es un polinomio de grado 2.
4. Factoriza d con cualquiera de los métodos vistos en las clases anteriores.

Problemas

1. Factoriza los siguientes polinomios:

   a) $x^3 - 2x^2 - x + 2$
   b) $x^3 + 2x^2 - x - 2$
   c) $x^3 + x^2 - 14x - 24$
   d) $x^3 - 5x^2 - 9x + 45$
   e) $y^3 - 4y^2 + y + 6$
   f) $y^3 - 3y^2 - 4y + 12$

2. Factoriza: $(x + 10)^3 + 1$.

   Sustituye $x + 10$ por y.

3. Encuentra la suma de los factores del polinomio: $x^3 - 13x - 12$.

2.8 Factorizaciones sucesivas

Problema inicial

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^3y^2 - 2x^2y^2 - 9xy^2 + 18y^2$

b) $n^3x^2 - n^3y^2 - 3n^2x^2 + 3n^2y^2 + 4x^2 - 4y^2$

Solución

a) Primero debe extraerse el factor común de los términos del polinomio, en este caso es y^2:

$$\begin{aligned} x^3y^2 - 2x^2y^2 - 9xy^2 + 18y^2 &= (x^3 - 2x^2 - 9x + 18)y^2 \\ &= y^2(x^3 - 2x^2 - 9x + 18) \end{aligned}$$

se factoriza $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ utilizando el teorema del factor y división sintética; en este caso, el polinomio es igual a cero cuando $x = 2$:

$$(2)^3 - 2(2)^2 - 9(2) + 18 = 8 - 8 - 18 + 18 = 0$$

	1	–2	–9	18
2		2	0	–18
	1	0	–9	0

de lo anterior, $x^3y^2 - 2x^2y^2 - 9xy^2 + 18y^2 = y^2(x - 2)(x^2 - 9)$. El tercer factor, $x^2 - 9$, es una diferencia de cuadrados que se factoriza en el producto $(x + 3)(x - 3)$. Por lo tanto,

$$x^3y^2 - 2x^2y^2 - 9xy^2 + 18y^2 = y^2(x - 2)(x + 3)(x - 3).$$

b) No todos los términos tienen un monomio común, así que se asocian aquellos que lo posean y se extrae el factor común polinomio:

$$\begin{aligned} n^3x^2 - n^3y^2 - 3n^2x^2 + 3n^2y^2 + 4x^2 - 4y^2 &= n^3(x^2 - y^2) - 3n^2(x^2 - y^2) + 4(x^2 - y^2) \\ &= (n^3 - 3n^2 + 4)(x^2 - y^2) \end{aligned}$$

el polinomio $n^3 - 3n^2 + 4$ se factoriza usando el teorema del factor y división sintética, este se anula cuando $n = -1$:

	1	–3	0	4
–1		–1	4	–4
	1	–4	4	0

de lo anterior, $n^3x^2 - n^3y^2 - 3n^2x^2 + 3n^2y^2 + 4x^2 - 4y^2 = (n + 1)(n^2 - 4n + 4)(x^2 - y^2)$. El factor $n^2 - 4n + 4$, es un trinomio cuadrado perfecto cuya factorización es $(n - 2)^2$ y $x^2 - y^2$ puede factorizarse por diferencia de cuadrados, siendo $(x - y)(x + y)$. Por lo tanto,

$$n^3x^2 - n^3y^2 - 3n^2x^2 + 3n^2y^2 + 4x^2 - 4y^2 = (n + 1)(n - 2)^2(x - y)(x + y).$$

En general

Para factorizar un polinomio p se extrae el monomio común de los términos del polinomio y se factoriza el segundo factor. Si no todos los términos tienen un monomio común entonces se asocian estos de forma conveniente y se factorizan por cualquiera de los métodos vistos en las clases anteriores. Este proceso se repite hasta dejar expresado el polinomio original como producto de polinomios en su más simple expresión.

Problemas

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $3xy^3 + 15xy^2 + 9xy - 27x$

b) $2abc^3 + 2abc^2 - 50abc - 50ab$

c) $m^3n^2 - 4m^2n^2 - 11mn^2 + 30n^2$

d) $4x^3y^2 - 16x^2y^2 - 12xy^2 + 72y^2 - x^3 + 4x^2 + 3x - 18$

2.9 Practica lo aprendido

1. Realiza las siguientes divisiones:

a) $(x^2y - xy^2 + y^3) \div (-y)$

b) $(24m^2n^2 + 30mn^2 - 15mn) \div (3mn)$

c) $(-a^3b^2 + 2a^2b^2 - 5ab^2) \div (-ab^2)$

d) $(35x^3y^3z^3 - 25x^3y^2z^2 - 45x^2y^2z^3) \div (5x^2y^2z^2)$

e) $(m^3n + m^3n^2 - 3m^2n^2) \div \left(\frac{1}{3}m^2n\right)$

f) $(2x^3y^2 - 3x^2y^2 - 5xy) \div \left(-\frac{2}{3}xy\right)$

2. Realiza las siguientes divisiones utilizando la división larga y escribe el dividendo en la forma $qd + r$:

a) $(2x^3 + 3x^2 + 9) \div (x + 2)$

b) $(2x^3 - 7x^2 - 3x + 2) \div (x - 4)$

c) $(2y^3 - 13y^2 + 14y + 2) \div (y - 5)$

d) $(2y^3 + 5y^2 - 8y - 6) \div (2y + 1)$

e) $(3x^3 + 11x^2 - x - 3) \div (x^2 + 4x + 1)$

f) $(5y^3 - 8y^2 - 14y + 4) \div (y^2 - 2y - 2)$

3. Utiliza la división sintética para efectuar las siguientes divisiones de polinomios y escribe el dividendo en la forma $qd + r$:

a) $(x^3 - 9x^2 + 21x + 2) \div (x - 4)$

b) $(y^3 - 3y^2 - 6y - 11) \div (y - 5)$

c) $(2m^3 + 4m^2 + 3m + 8) \div (m + 3)$

d) $(3n^3 + 4n^2 - 6n - 7) \div (n + 2)$

e) $(a^3 - 37a - 1) \div (a - 6)$

f) $(b^3 + 8b^2 - 29) \div (b + 7)$

g) $(2x^3 + 1) \div (x - 1)$

h) $(y^3 + 2y^2 - y + 1) \div \left(y - \frac{1}{2}\right)$

i) $(x^3 + x^2 + x - 1) \div \left(x + \frac{1}{3}\right)$

j) $\left(y^3 + \frac{1}{27}\right) \div \left(y + \frac{1}{3}\right)$

4. Encuentra el residuo que se obtiene al realizar las siguientes divisiones:

a) $(x^3 + x^2) \div (x - 2)$

b) $(8y^3 - 5y) \div (y + 1)$

c) $(5m^3 + 11m^2 - 9) \div (m + 2)$

d) $(n^3 - 13n^2 + 29n + 10) \div (n - 3)$

e) $(y^3 + 4y^2 - 6y - 6) \div (y + 5)$

f) $\left(x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x - 1\right) \div \left(x - \frac{1}{2}\right)$

5. Sea k un número entero. Para cada caso determina el valor de k para que el residuo de la división $p \div q$ sea igual a cero:

a) $p = kx^3 + (k + 1)x^2 + (k - 4)x - 2;\ \ q = x + 1$

b) $p = x^3 + (k - 3)x^2 + (k + 4)x - 6k;\ \ q = x - 3$

c) $p = x^3 - k^2x^2 + 2kx + k - 1;\ \ q = x - 1$

d) $p = k^2x^3 + (k + 1)x^2 - 7x + 3k;\ \ q = x + 2$

6. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $-2xy^3 - 4xy^2 + 32xy + 64x$

b) $5x^3y^2 - 15x^2y^2 - 90xy^2 + 200y^2$

c) $-abc^3 - 9abc^2 - 11abc + 21ab$

7. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $4a^3b^2 + 24a^2b^2 - 60ab^2 - 400b^2 - 9a^3 - 54a^2 + 135a + 900$

b) $(x + 1)^3 - (x + 1)^2 - 30(x + 1) + 72$

3.1 Resolución de ecuaciones cuadráticas por factorización

Problema inicial

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando factorización:

a) $x^2 - 15x + 56 = 0$ b) $5x^2 + 11x - 12 = 0$

Si a y b son números reales tales que $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Solución

a) Para factorizar el polinomio se buscan dos números cuyo producto sea 56 y cuya suma sea igual a –15 (como el producto es positivo y la suma negativa ambos números deben ser negativos). Para encontrarlos puede descomponerse 56 en sus factores primos y buscar una combinación de ellos que cumplan lo dicho anteriormente. Se verifica entonces que: $(-8)(-7) = 56$ y $-8 - 7 = -15$, por lo que $x^2 - 15x + 56$ puede factorizarse en el producto $(x - 8)(x - 7)$. Luego:

$$(x - 8)(x - 7) = 0$$

como el producto es cero, uno de los factores debe ser igual a cero:

$$x - 8 = 0 \quad \text{o} \quad x - 7 = 0.$$

Por lo tanto, las soluciones son $x = 8$ o $x = 7$.

b) Para factorizar $5x^2 + 11x - 12$ se descomponen 5 y –12 en dos factores y se aplica el método de la tijera:

$$\begin{array}{ccccc}
5x & & -4 & \rightarrow & -4x \\
\downarrow & \times & \downarrow & & \downarrow \\
x & & 3 & \rightarrow & 15x \\
\hline
5x^2 & & -12 & & 11x
\end{array}$$

entonces, $5x^2 + 11x - 12 = (5x - 4)(x + 3) = 0$, por lo que $5x - 4 = 0$ o $x + 3 = 0$. Entonces, $x = \frac{4}{5}$ o $x = -3$ son las soluciones de $5x^2 + 11x - 12 = 0$.

Definición

Una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$ se llama **ecuación cuadrática**. Para resolverla utilizando factorización se escribe $ax^2 + bx + c$ como producto de dos binomios lineales, se iguala cada uno de ellos a cero y se resuelven ambas ecuaciones lineales.

Ejemplo

Resuelve por factorización, la ecuación $\frac{5}{2}x^2 - 2 = -\frac{4}{3}x$.

Si se encuentra una ecuación equivalente a la dada pero cuyos coeficientes sean todos enteros, la factorización resultará más fácil. Así, al multiplicar ambos miembros por 6, se obtiene la ecuación equivalente $15x^2 - 12 = -8x$. Para utilizar factorización la ecuación debe estar igualada a cero: se pasa $-8x$ al miembro izquierdo y se obtiene la ecuación $15x^2 + 8x - 12 = 0$. Al factorizar por el método de la tijera se obtiene $(5x + 6)(3x - 2) = 0$, por lo que las soluciones de la ecuación son $x = -\frac{6}{5}$ y $x = \frac{2}{3}$.

Problemas

1. Calcula las soluciones de cada ecuación utilizando factorización.

a) $x^2 + 2x - 15 = 0$ b) $x^2 - 15x + 44 = 0$ c) $x^2 + 4x + 3 = 0$

d) $x^2 + 7x - 60 = 0$ e) $x^2 + 16x + 63 = 0$ f) $\frac{1}{4}x^2 - x - 15 = 0$

g) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3 = 0$ h) $3x^2 + 13x - 10 = 0$ i) $8x^2 - 38x + 35 = 0$

j) $4x^2 + 21x - 18 = 0$ k) $0.2x^2 + 0.3x - 0.2 = 0$ l) $\frac{3}{5}x^2 - \frac{1}{10}x - \frac{1}{5} = 0$

2. Encuentra una ecuación de grado 2 que tenga por soluciones a 1 y –15.

3.2 Resolución de ecuaciones cuadráticas con la fórmula general

Problema inicial

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $2x^2 + 3x - 1 = 0$

b) $x^2 - 2x - 6 = 0$

Las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Unidad 2

Solución

a) Esta ecuación no puede resolverse por factorización; cuando esto ocurre se resuelve utilizando la fórmula general. En este caso, $a = 2$, $b = 3$ y $c = -1$:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Entonces, las soluciones de $2x^2 + 3x - 1 = 0$ son:

$$x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \text{ y } x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}.$$

b) Si se intenta resolver la ecuación por factorización, se llega a que no es posible encontrar dos números enteros cuyo producto sea -6 y cuya suma sea -2. De forma similar al literal anterior, se utiliza la fórmula general con $a = 1$, $b = -2$ y $c = -6$:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4+24}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 1 \pm \sqrt{7}.$$

Entonces, las soluciones de $x^2 - 2x - 6 = 0$ son:

$$x = 1 + \sqrt{7} \text{ y } x = 1 - \sqrt{7}.$$

Observa que $\frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{2}$ se simplifica porque puede sacarse 2 como factor común en el numerador:

$$\frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{2} = \frac{2(1 \pm \sqrt{7})}{2} = 1 \pm \sqrt{7}.$$

Conclusión

Cuando una ecuación cuadrática no pueda resolverse mediante factorización, se utiliza la fórmula general.

Ejemplo

Resuelve la ecuación $x = 7 - \frac{4}{x}$.

Nótese que $x = 0$ no es solución de la ecuación. La ecuación puede llevarse a una ecuación cuadrática al multiplicar por x ambos miembros:

$$x^2 = 7x - 4 \Rightarrow x^2 - 7x + 4 = 0$$

esta ecuación no puede resolverse mediante factorización, por lo que al aplicar la fórmula general se obtiene:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{7 \pm \sqrt{49-16}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

Entonces, las soluciones de $x = 7 - \frac{4}{x}$ son:

$$x = \frac{7 + \sqrt{33}}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{7 - \sqrt{33}}{2}.$$

Problemas

Calcula las soluciones de cada ecuación:

a) $3x^2 + x - 1 = 0$

b) $x^2 = -2(2x + 1)$

c) $x^2 - 3(2x + 1) = 0$

d) $2x(3 - x) = 3$

e) $x = x^2 - 1$

f) $x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{45}{4} = 0$

g) $2x = 8 - \frac{5}{x}$

h) $x = -3 + \frac{2}{x}$

3.3 Definición de número complejo

Definición

Se llama **unidad imaginaria**, y se denota por i, al número que satisface $i^2 = -1$, es decir:

$$i = \sqrt{-1}.$$

Dados dos números reales cualesquiera a y b, el número de la forma $z = a + bi$ se llama **número complejo**. Al conjunto de todos los números complejos, es decir, aquellos de la forma $a + bi$ se le denota por $\mathbb{C}$.

Sea $z = a + bi$ un número complejo:

1. Si $b = 0$ entonces z es un número real.
2. Si a y b son diferentes de cero entonces z se llama **número imaginario.**
3. Si $a = 0$ y $b \neq 0$ entonces $z = bi$ se llama **número imaginario puro**.

> Para denotar números complejos, usualmente se utilizan las letras z y w. Si se necesitan más de dos números complejos, se utilizan subíndices, por ejemplo, z_1, z_2, z_3, z_4, etc.

Al número a se le llama **parte real** de z, y se denota por Re(z); mientras que al número b se le llama **parte imaginaria** de z, y se denota por Im(z). Dos números complejos son iguales si sus correspondientes partes real e imaginaria son iguales, y viceversa.

Ejemplo 1

Para cada caso, determina Re(z) e Im(z):

a) $z = 5 - 7i$

b) $z = \sqrt{2} + i$

c) $z = \dfrac{-4 + 9i}{2}$

a) Re(z) = 5
Im(z) = –7

b) Re(z) = $\sqrt{2}$
Im(z) = 1

c) Lo primero es reescribir z:

$$z = \frac{-4}{2} + \frac{9i}{2} = -2 + \frac{9}{2}i$$

Luego, Re(z) = –2 e Im(z) = $\frac{9}{2}$.

Ejemplo 2

Sean $z = 2x + 3i$ y $w = 4 + (y - 1)i$ dos números complejos. Determina los valores de los números reales x y y para que se cumpla $z = w$.

Para que se cumpla la igualdad entre los números complejos z y w debe ocurrir:

Re(z) = Re(w)	Im(z) = Im(w)
$2x = 4$	$3 = y - 1$

al resolver ambas ecuaciones lineales se obtiene:

$x = 2$	$4 = y$

Por lo tanto, para que se cumpla $z = w$ los valores de x y y deben ser 2 y 4 respectivamente.

Problemas

1. Para cada caso, determina la parte real y la parte imaginaria de z:

a) $z = -3 + 8i$
b) $z = \frac{1}{2} - 6i$
c) $z = \sqrt{5} - \sqrt{3}\,i$
d) $z = 11i$
e) $z = 3$
f) $z = \dfrac{-12 - i}{3}$

2. Para cada caso, determina los valores de los números reales x y y para que se cumpla $z = w$:

a) $z = (x + 1) + 5i$, $w = -6 + (4 - y)i$
b) $z = 10 - 3xi$, $w = 8y + 15i$
c) $z = (x + y) + 4i$, $w = -2x + 3yi$
d) $z = -x + 3yi$, $w = (y - 1) - xi$

3.4 Suma, resta y multiplicación de números complejos

Problema inicial

Sean $z = 3 + 7i$ y $w = 2 - 3i$. ¿Cuál es el resultado de las operaciones $z + w$, $z - w$ y zw?

Considera el número i como una variable para realizar las operaciones.

Solución

Como en la suma de polinomios, solo pueden sumarse aquellos términos que sean "semejantes":

$$\begin{aligned} z + w &= 3 + 7i + 2 - 3i \\ &= (3 + 2) + [7 + (-3)]i \\ &= (3 + 2) + (7 - 3)i \\ &= 5 + 4i \end{aligned}$$

Para la resta deben cuidarse los signos de la parte real e imaginaria de w:

$$\begin{aligned} z - w &= 3 + 7i - (2 - 3i) \\ &= (3 - 2) + [7 - (-3)]i \\ &= (3 - 2) + (7 + 3)i \\ &= 1 + 10i \end{aligned}$$

La multiplicación se desarrolla como si fuese el producto de binomios, y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} zw &= (3 + 7i)(2 - 3i) \\ &= 3(2) + [3(-3) + 7(2)]i + 7(-3)i^2 \\ &= 6 + (-9 + 14)i - 21(-1) \\ &= 6 + 21 + 5i \\ &= 27 + 5i \end{aligned}$$

Por lo tanto, $z + w = 5 + 4i$, $z - w = 1 + 10i$ y $zw = 27 + 5i$.

Definición

La suma y **resta de los números complejos** $z = a + bi$ y $w = c + di$ se denotan por $z + w$ y $z - w$ respectivamente, y se definen:

$$z + w = (a + c) + (b + d)i$$
$$z - w = (a - c) + (b - d)i.$$

El **producto de los números complejos** $z = a + bi$ y $w = c + di$ se denotan por zw y se define:

$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

El **complejo conjugado** de $z = a + bi$, o simplemente conjugado de z, es otro número complejo denotado por $\overline{z}$ tal que $\overline{z} = a - bi$. Se llama **módulo** del número complejo $z = a + bi$ al número real denotado por $|z|$ y definido por:

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= (a + bi)(a - bi) \\ &= a^2 - b^2i^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Problemas

1. Para cada caso, calcula $z + w$, $z - w$ y zw. Además, encuentra el conjugado y el módulo de cada número:

a) $z = -5 + 4i$, $w = 2 - 3i$
b) $z = 4 - i$, $w = -6 + 4i$
c) $z = -3 - 2i$, $w = -5 + i$
d) $z = 8 - i$, $w = 12 + 3i$
e) $z = 5 - 2i$, $w = 6i$
f) $z = -3 + 8i$, $w = 2$

2. Sea $z = a + bi$ un número complejo. Demuestra lo siguiente:

a) $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$
b) $z - \overline{z} = 2\mathrm{Im}(z)i$

3.5 División de números complejos

Problema inicial

Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$. Para calcular $\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di}$ realiza los siguientes pasos:

1. Multiplica por $\frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{c-di}{c-di}$.
2. Efectúa los productos indicados.
3. Encuentra el resultado.

Solución

1. Al multiplicar por $\frac{\overline{w}}{\overline{w}}$ se está multiplicando por 1, o sea que la expresión original no se altera:

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \times \frac{c-di}{c-di}$$

$$= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}.$$

2. Al efectuar los productos indicados, se obtiene:

$$\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd+(-ad+bc)i}{c^2+d^2}.$$

3. La división de z entre w es entonces el número complejo:

$$\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i.$$

Definición

Sean los números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$. La división de z entre w se denota por $\frac{z}{w}$ y está dada por:

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i.$$

Ejemplo

Divide $4 + 3i$ entre $5 - i$.

En este caso, al multiplicar por el conjugado de $5 - i$ en el numerador y denominador, se tiene que:

$$\frac{4+3i}{5-i} = \frac{4+3i}{5-i} \times \frac{5+i}{5+i} = \frac{(4+3i)(5+i)}{5^2+1^2} = \frac{(20-3)+(4+15)i}{26} = \frac{17+19i}{26} = \frac{17}{26} + \frac{19}{26}i.$$

Por lo tanto, $\frac{4+3i}{5-i} = \frac{17}{26} + \frac{19}{26}i$.

Problemas

1. Para cada caso, calcula $\frac{z}{w}$:
   - a) $z = 3$, $w = 2 + 4i$
   - b) $z = 5$, $w = 2 - 7i$
   - c) $z = -7i$, $w = 6 - 2i$
   - d) $z = 2 + 9i$, $w = -3 - i$
   - e) $z = -4 + 6i$, $w = 2 + 7i$
   - f) $z = -3 - 2i$, $w = 5 + 2i$
   - g) $z = 4 - 2i$, $w = -5i$
   - h) $z = -2 + 6i$, $w = 3i$

2. Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$; realiza lo siguiente:
   - a) Calcula $\frac{z}{w}$
   - b) Calcula $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}$
   - c) Calcula $\frac{\overline{z}}{\overline{w}}$
   - d) Compara los resultados de b) y c)

Observa que el objetivo en cada una de las operaciones vistas con los números complejos es escribir la operación como un número complejo $u + vi$. Así, en el caso de la división, el objetivo es quitar el número complejo del denominador multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador.

3.6 Raíces cuadradas de números negativos*

Problema inicial

Sea x un número complejo. Determina todos los valores de x que satisfacen: $x^2 = -5$

$i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$

Solución

Se busca el número complejo tal que, al elevarlo al cuadrado, su resultado sea igual a –5; observa que –5 puede escribirse como el producto 5(–1), entonces: $x^2 = 5(-1) = 5i^2$,

luego, $x^2 = 5i^2$ se cumple para $x = \sqrt{5}\,i$ o $x = -\sqrt{5}\,i$. En efecto:

$$\left(\sqrt{5}\,i\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 i^2 = -5 \qquad \left(-\sqrt{5}\,i\right)^2 = \left(-\sqrt{5}\right)^2 i^2 = -5$$

Por lo tanto, los valores de x que satisfacen $x^2 = -5$ son $x = \sqrt{5}\,i$ y $x = -\sqrt{5}\,i$.

Definición

Sea a un número real positivo ($a > 0$). Las raíces cuadradas de $-a$ son $\sqrt{a}\,i$ y $-\sqrt{a}\,i$. Además:

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,i.$$

Ejemplo

Escribe los siguientes números en la forma $a + bi$:

a) $\sqrt{-3}\,\sqrt{-5}$ b) $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}}$

$-i^2 = -(-1) = 1$

Primero se escriben las raíces de números negativos en la forma $\sqrt{a}\,i$, luego se realizan las operaciones respectivas:

a)
$$\sqrt{-3}\,\sqrt{-5} = \left(\sqrt{3}\,i\right)\left(\sqrt{5}\,i\right) = \sqrt{15}\,i^2 = -\sqrt{15}$$

De lo anterior se concluye que:

$$\sqrt{-3}\,\sqrt{-5} = -\sqrt{15}.$$

b)
$$\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}\,i}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3}{5}}\,i$$

Luego, $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{3}{5}}\,i.$

c)
$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}\,i}\left(\frac{-i}{-i}\right) = \sqrt{\frac{3}{5}}\left(\frac{-i}{-i^2}\right) = \sqrt{\frac{3}{5}}\left(\frac{-i}{1}\right) = -\sqrt{\frac{3}{5}}\,i$$

Luego, $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}} = -\sqrt{\dfrac{3}{5}}\,i.$

En general, si a y b son números reales positivos:

1. $\sqrt{-a}\sqrt{-b} \neq \sqrt{(-a)(-a)}$ 2. $\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}} \neq \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}$

También puedes multiplicar por el conjugado de $\sqrt{5}\,i$, o sea, $-\sqrt{5}\,i$ y verificar que se llega a la misma respuesta.

Problemas

1. Para cada caso, encuentra las raíces cuadradas de $-a$ si:

a) $a = 2$ b) $a = 3$ c) $a = 7$ d) $a = 10$

e) $a = 4$ f) $a = 25$ g) $a = \frac{1}{3}$ h) $a = \frac{1}{9}$

2. Escribe los siguientes números en la forma $a + bi$:

a) $\sqrt{-7}\,\sqrt{2}$ b) $\sqrt{7}\,\sqrt{-2}$ c) $\sqrt{-3}\,\sqrt{-7}$

d) $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-7}}$ e) $\dfrac{\sqrt{-4}}{\sqrt{3}}$ f) $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{-6}}$

3.7 Discriminante de la ecuación cuadrática

Problema inicial

De la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ se define el número $\Delta = b^2 - 4ac$. Para cada una de las siguientes ecuaciones calcula el valor de Δ, establece su signo y resuelve cada una utilizando la fórmula general (considera las soluciones complejas):

a) $2x^2 - 5x - 1 = 0$ b) $x^2 - 2x + 1 = 0$ c) $x^2 + 3x + 5 = 0$

Δ es una letra griega llamada "Delta".

Solución

a) Al calcular Δ se tiene:

$$\Delta = (-5)^2 - 4(2)(-1) = 25 + 8 = 33$$

es decir, $\Delta > 0$. Al resolver la ecuación utilizando la fórmula general (el valor de Δ es el radicando de la fórmula general):

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{33}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{4}.$$

La ecuación $2x^2 - 5x - 1 = 0$ tiene dos soluciones reales.

b) El valor de Δ es:

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = 0$$

o sea, $\Delta = 0$. Luego, el valor del radicando en la fórmula general es cero y:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

La ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$ tiene una solución real.

c) El valor de Δ es:

$$\Delta = 3^2 - 4(1)(5) = 9 - 20 = -11$$

es decir, $\Delta < 0$. Al resolver la ecuación utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{11}\, i}{2}.$$

La ecuación $x^2 + 3x + 5 = 0$ tiene dos soluciones complejas.

Definición

Dada una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b y c números reales y $a \neq 0$, se le llama **discriminante** de la ecuación cuadrática al número $\Delta = b^2 - 4ac$. El número y tipo de soluciones de la ecuación cuadrática puede determinarse de acuerdo a lo siguiente:

1. Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales, es decir, pertenecen a los números reales.
2. Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene una solución real.
3. Si $\Delta < 0$, la ecuación tiene dos soluciones imaginarias, es decir, de la forma $u + vi$ con $v \neq 0$.

Ejemplo

¿Cuál debe ser el valor de m para que la ecuación $x^2 + mx + 4 = 0$ tenga una solución real?
Para que tenga una solución real debe cumplirse que $\Delta = 0$, es decir $\Delta = m^2 - 16 = 0$. Luego, $m = 4$ o $m = -4$.
Por lo tanto, para que la ecuación $x^2 + mx + 4 = 0$ tenga una solución real m debe ser 4 o -4.

Problemas

1. Determina si las soluciones de cada ecuación son reales o imaginarias:

a) $4x^2 + x - 3 = 0$ b) $4x^2 + x + 14 = 0$
c) $9x^2 - 30x + 25 = 0$ d) $15x^2 + 12 = -8x$

2. ¿Cuál debe ser el valor de m para que la ecuación $x^2 - 6x + 5 - m = 0$ tenga una solución real?

3.8 Factorización de un polinomio*

Problema inicial

Utilizando números complejos factoriza el polinomio $x^2 + 12x + 40$.

Solución

Similar al caso de la factorización del trinomio de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, en este caso deben encontrarse dos números complejos cuyo producto sea igual a 40 y cuya suma sea igual a 12. Primero se resuelve la ecuación $x^2 + 12x + 40 = 0$ utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(1)(40)}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-12 \pm 4i}{2} = -6 \pm 2i$$

luego,

$$\begin{aligned} x &= -6 + 2i & \text{o} \quad & x = -6 - 2i \\ x - (-6 + 2i) &= 0 & \text{o} \quad & x - (-6 - 2i) = 0 \\ x + 6 - 2i &= 0 & \text{o} \quad & x + 6 + 2i = 0 \end{aligned}$$

sean $z = 6 - 2i$ y $w = 6 + 2i$; puede comprobarse que $zw = 40$ y $z + w = 12$, y se tiene:

$$(x + z)(x + w) = x^2 + (z + w)x + zw = x^2 + 12x + 40.$$

Por lo tanto, $x^2 + 12x + 40 = [x - (-6 + 2i)][x - (-6 - 2i)] = (x + 6 - 2i)(x + 6 + 2i)$.

Conclusión

Si x_1 y x_2 son las soluciones (reales o imaginarias) de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ entonces:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Ejemplo

Factoriza el polinomio $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$.

Los divisores del término independiente son $a = \pm1, \pm2, \pm7, \pm14$. Al sustituir $x = 2$ en el polinomio original se obtiene:

$$2^3 - 6(2)^2 + 15(2) - 14 = 8 - 24 + 30 - 14 = 0$$

por el teorema del factor, $x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = (x - 2)d$, donde d es un polinomio de grado 2; utilizando división sintética se obtiene:

$$x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = (x - 2)(x^2 - 4x + 7)$$

el siguiente paso es factorizar el polinomio $x^2 - 4x + 7$; esto puede realizarse utilizando la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(7)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = 2 \pm \sqrt{3}i.$$

Por lo tanto, $x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = (x - 2)[x - (2 + \sqrt{3}i)][x - (2 - \sqrt{3}i)] = (x - 2)(x - 2 - \sqrt{3}i)(x - 2 + \sqrt{3}i)$.

Problemas

Factoriza cada polinomio:

a) $x^2 - 12x + 40$
b) $5x^2 + 8x + 5$
c) $x^3 - 6x^2 + 2x + 24$
d) $x^3 + x + 10$
e) $x^3 - 3x^2 + 25x + 29$
f) $x^3 - 7x^2 + 20x - 50$

3.9 Raíces de un polinomio*

Problema inicial

Un número a (real o imaginario) es una raíz de un polinomio en variable x si al sustituir $x = a$ en el polinomio el resultado es cero. Calcula las raíces de los siguientes polinomios:

a) $3x - 12$ b) $2x^2 + 7x + 3$ c) $x^3 - 3x^2 + 25x + 29$

Solución

a) Para determinar las raíces de $3x - 12$ hay que encontrar los valores de x que hacen cero el polinomio; es decir, basta resolver la ecuación $3x - 12 = 0$ para determinar las raíces. La solución de la ecuación es $x = 4$, entonces 4 es la única raíz de $3x - 12$.

b) De igual forma que en el literal anterior, basta resolver la ecuación $2x^2 + 7x + 3 = 0$ para calcular las raíces del polinomio $2x^2 + 7x + 3$. Resolviendo por factorización:

$$2x^2 + 7x + 3 = (2x + 1)(x + 3) = 0.$$

Entonces $x = -\frac{1}{2}$ y $x = -3$ son las raíces del polinomio $2x^2 + 7x + 3$.

c) Como el polinomio es de grado 3 se utiliza el teorema del factor para determinar alguno de los valores que hacen cero el polinomio; se sustituye x por alguno de los números ±1, ±29:

$$\text{si } x = -1, \text{ entonces } (-1)^3 - 3(-1)^2 + 25(-1) + 29 = -1 - 3 - 25 + 29 = 0$$

se utiliza división sintética para realizar $(x^3 - 3x^2 + 25x + 29) \div (x + 1)$ y factorizar el polinomio original; de esto se obtiene:

$$x^3 - 3x^2 + 25x + 29 = (x + 1)(x^2 - 4x + 29)$$

una de las raíces del polinomio es $x = -1$. Se calculan ahora las raíces de $x^2 - 4x + 29$ resolviendo la ecuación $x^2 - 4x + 29 = 0$:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(29)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-100}}{2} = \frac{4 \pm 10i}{2} = 2 \pm 5i.$$

Por lo tanto, las raíces de $x^3 - 3x^2 + 25x + 29$ son $x = -1$, $x = 2 + 5i$ y $x = 2 - 5i$.

Conclusión

Sea p un polinomio en una variable:

1. Si p es de grado 1, entonces tiene una raíz compleja.
2. Si p es de grado 2 entonces tiene dos raíces complejas, contando aquellas que se repiten. Por ejemplo, el polinomio $x^2 + 2x + 1$ puede escribirse como $(x + 1)^2$ y $x = -1$ es una raíz doble.
3. Si p es de grado 3, entonces tiene tres raíces complejas, contando aquellas que se repiten.

Un polinomio de grado 1 se llama **lineal**, al de grado 2 se le conoce como polinomio **cuadrático** y si es de grado 3 se le llama polinomio **cúbico**. Un polinomio puede ser de grado n, para n un entero no negativo, y cuando es de una variable es de la forma:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

donde a_n es distinto de cero.

Un polinomio de grado n tiene n raíces complejas. Si x_1, x_2, ..., x_r son las raíces (distintas) del polinomio $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ entonces puede factorizarse como:

$$a_n(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_r)^{m_r}$$

donde a los m_i se les llama **multiplicidades de la raíz** x_i y cumplen que:

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n.$$

Si un polinomio tiene una raíz imaginaria, el conjugado también es raíz.

3.10 Practica lo aprendido

1. Resuelve las siguientes ecuaciones, analizando primero si puede resolverse por factorización; de lo contrario, utiliza la fórmula general:

a) $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{12} = 0$

b) $x^2 + 5x = 0$

c) $x(3x + 10) = 77$

d) $15x^2 - 14 = 29x$

e) $22x^2 + 67x - 35 = 0$

f) $2.7x^2 + 4.2x + 0.8 = 0$

g) $x^2 - 6x + 12 = 0$

h) $x^2 + 5x + 6 = 0$

i) $x^2 - 2x + 26 = 0$

j) $6x^2 + x + 12 = 0$

k) $x^2 + 3x + 6 = 0$

l) $-3x^2 - 5 = -x$

m) $4x^2 + x + 14 = 0$

n) $15x^2 + 8x = -12$

o) $x^2 + 4x + 14 = 0$

p) $x^2 + 8x + 17 = 0$

2. Calcula el valor de x si:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}$$

¿Qué se puede observar de la expresión encerrada en el recuadro rojo?

$$x = 1 + \cfrac{1}{\boxed{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}$$

3. Sea $x = 2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{2 + \ddots}}}}$

Demuestra que $x = 3$.

4. Para cada caso, realiza $z + w$ y $z - w$:

a) $z = 2 - i$, $w = 3 + 7i$

b) $z = -3 + 2i$, $w = 2 - 4i$

c) $z = -6 - i$, $w = i$

d) $z = 2 + i$, $w = 8 - i$

e) $z = 1 - 3i$, $w = 5 - 2i$

f) $z = 9i$, $w = 5i$

g) $z = -5$, $w = 15i$

h) $z = 7 - 6i$, $w = -11 - 3i$

5. Para cada caso, realiza zw y $\frac{z}{w}$:

a) $z = -5 + 4i$, $w = 2 - 3i$

b) $z = 4 - i$, $w = -6 + 4i$

c) $z = -3 - 2i$, $w = -5 + i$

d) $z = 8 - i$, $w = 12 + 3i$

e) $z = 5 - 2i$, $w = 6i$

f) $z = -3 + 8i$, $w = 2$

g) $z = -9 + 7i$, $w = 4 + 9i$

h) $z = 7 - 6i$, $w = -11 - 3i$

6. Factoriza cada polinomio utilizando números complejos:

a) $4x^2 + x + 1$

b) $9x^2 + 28x + 50$

c) $x^3 - x^2 - 14x + 24$

d) $x^4 - 11x^3 + 40x^2 - 56x + 24$

3.11 Problemas de la unidad

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $(x+y)^2-(x-y)^2$

b) $(x+y)^2+(x-y)^2$

2. Utiliza productos notables para calcular el resultado de las siguientes operaciones:

a) 190(210)

b) 96(104) – 94(106)

c) $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$

d) $\sqrt{100(101)(102)(103)+1}$

Toma $x=\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$ y calcula x^2.

Considera $x = 100$ y multiplica el primero con el último y el segundo con el tercero.

3. Considera los números complejos $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -2 + 3i$ y $z_3 = 1 - i$. Calcula el resultado de las siguientes operaciones:

a) $z_1 + z_2 + z_3$

b) $z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$

c) $z_1z_2z_3$

d) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$

e) $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}$

f) $\frac{z_1^2+z_2^2}{z_2^2+z_3^2}$

4. Desarrolla cada uno de los productos para demostrar las igualdades:

a) $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x + abc$

b) $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$

c) $(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2+(ay-bx)^2$

5. Encuentra un polinomio de segundo grado en una variable x que cumpla lo siguiente: el coeficiente de x y el término independiente sean iguales; los valores del polinomio al sustituir x por 1 y 2 sean 7 y 18 respectivamente.

6. Sean x y y números reales positivos. Factoriza los siguientes polinomios (puedes dejar los términos de los factores con raíces cuadradas):

a) $x+2\sqrt{x}+1$

b) $x-y$

c) $y+4\sqrt{y}+4$

d) $x-1$

7. Demuestra que para cualquier número complejo z, se cumple que $|z| \geq 0$.

8. Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$, ¿se cumple que $|zw| = |z||w|$?

9. Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$, ¿se cumple que $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$?

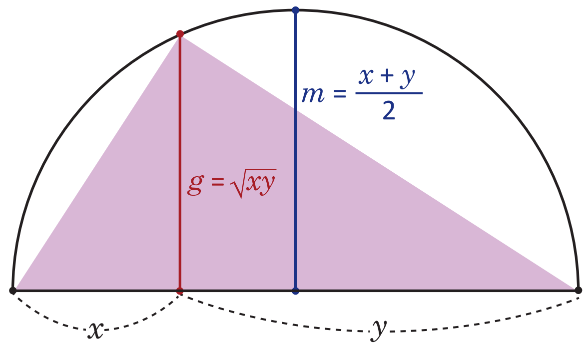
10. Determina los valores que puede tomar el número real m para que la ecuación $mx^2 + 2x + 1 = 0$ tenga dos soluciones reales.

11. Determina los valores que puede tomar el número real m para que la ecuación $x^2 + 2x + m = 0$ tenga dos soluciones imaginarias.

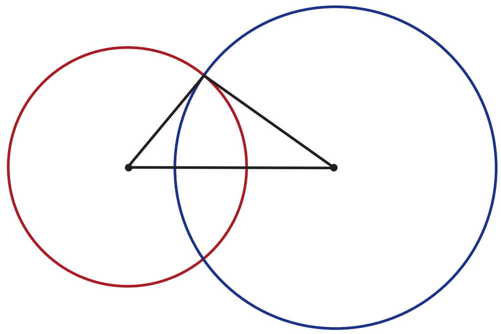
Unidad 3

Desigualdades

El desarrollo de las desigualdades o inecuaciones fue llevado de forma paralela con el desarrollo de las ecuaciones, los primeros aportes se registran por los egipcios, pero no existe una información clara y exacta del momento en que surgieron. Sin embargo, el ser humano se ha visto en la constante necesidad de resolver desigualdades, ya que en la vida cotidiana surgían problemas sobre dinero, alimento o recursos, donde intervenían frases como “al menos” o “a lo sumo”.



Esquema geométrico de la demostración de la desigualdad entre la media aritmética y la geométrica.


Esquema geométrico de la demostración de la desigualdad triangular usando circunferencias.

A lo largo de la historia han ido surgiendo desigualdades que han sido aplicadas para el desarrollo constante de teorías matemáticas; una de las desigualdades básicas de la matemática es la desigualdad triangular, cuyo resultado se cumple en diversas representaciones geométricas, algebraicas, vectoriales, numéricas, entre otras.

Se desarrollará el concepto de desigualdad, y se aplicarán sus propiedades para la resolución de inecuaciones, analizando diferentes casos según variaciones en los coeficientes y las constantes de esta. Luego se abordarán algunas desigualdades muy importantes en matemática, como la desigualdad triangular y la desigualdad entre la media aritmética y la geométrica.

1.1 Propiedades de las desigualdades, parte 1

Problema inicial

Escribe en el espacio en blanco el símbolo de desigualdad correcto, $\leq$, $\geq$, $<$ o $>$:

a) $1 \;\boxed{}\; -2$ b) $3.5 \;\boxed{}\; \frac{7}{2}$ c) $-3 + 2 \;\boxed{}\; 5 + 2$

d) $-5 + 3 \;\boxed{}\; -7 + 3$ e) $\frac{1}{2} - 1 \;\boxed{}\; -1 - 1$ f) $1.5 - 5 \;\boxed{}\; 4 - 5$

Solución

a) Un número positivo siempre será mayor que un número negativo. Entonces:

$$1 \;\boxed{>}\; -2$$

b) El número 3.5 es el decimal correspondiente a $\frac{7}{2}$. Se puede utilizar cualquiera de los símbolos $\leq$ o $\geq$:

$$3.5 \;\boxed{\geq}\; \frac{7}{2}$$

c) $-3 < 5$ y al sumar 2 a ambos números se obtiene $-3 + 2 = -1$ y $5 + 2 = 7$, es decir, la desigualdad se mantiene. Luego:

$$-3 + 2 \;\boxed{<}\; 5 + 2$$

d) De igual forma al literal anterior, como $-5 > -7$ entonces:

$$-5 + 3 \;\boxed{>}\; -7 + 3$$

e) $\frac{1}{2} > -1$ y al restar 1 a ambos números se obtienen como resultados $-\frac{1}{2}$ y -2 respectivamente, es decir, la desigualdad se mantiene. Luego:

$$\frac{1}{2} - 1 \;\boxed{>}\; -1 - 1$$

f) De forma similar al literal e), como $1.5 < 4$, entonces:

$$1.5 - 5 \;\boxed{<}\; 4 - 5$$

Conclusión

Los símbolos $\leq$, $\geq$, $<$ y $>$ se utilizan para representar relaciones entre cantidades distintas o iguales. Estos se leen como sigue:

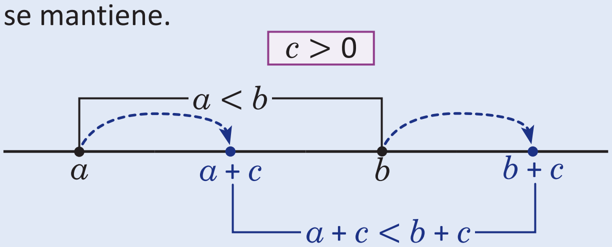
$\leq$: menor o igual que $\geq$: mayor o igual que

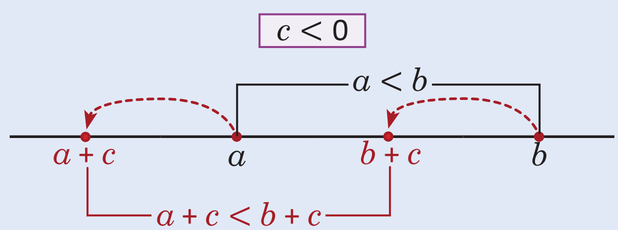
$<$: menor que $>$: mayor que

La relación que indica cuando dos cantidades o expresiones matemáticas son distintas o iguales se llama **desigualdad**. En la desigualdad $a \leq b$, la cantidad a es el **miembro izquierdo** y la cantidad b es el **miembro derecho**.

Sean a, b y c números reales cualesquiera; **si $a < b$ entonces $a + c < b + c$**. En general, si se suma (o resta) un número real a ambos miembros de una desigualdad entonces la desigualdad se mantiene.

La propiedad es válida para cualquier tipo de desigualdad: $a > b$, $a \geq b$, y $a \leq b$. Es decir, al sumar un número real c a ambos miembros a y b entonces la desigualdad se mantendrá.





Problemas

Escribe en el espacio en blanco el símbolo de desigualdad correcto:

a) $3 + 7 \;\boxed{}\; 10 + 7$ b) $-1 + 4 \;\boxed{}\; 5 + 4$ c) $-6 - 2 \;\boxed{}\; -9 - 2$

d) $-\frac{1}{2} - 5 \;\boxed{}\; -0.5 - 5$ e) $-0.25 + 5 \;\boxed{}\; -\frac{1}{4} + 5$ f) $4.5 + 1.2 \;\boxed{}\; 1 + 1.2$

g) $-3 + 2.7 \;\boxed{}\; -1.9 + 2.7$ h) $-3 + \sqrt{2} \;\boxed{}\; -1 + \sqrt{2}$ i) $\sqrt{2} - \frac{1}{2} \;\boxed{}\; -\sqrt{3} - \frac{1}{2}$

1.2 Propiedades de las desigualdades, parte 2

Problema inicial

Escribe en el espacio en blanco el símbolo de desigualdad correcto, $<$ o $>$:

a) $2(4)$ $\square$ $5(4)$ b) $-5(3)$ $\square$ $4(3)$ c) $-3(10)$ $\square$ $-9(10)$

d) $6(-2)$ $\square$ $3(-2)$ e) $8(-4)$ $\square$ $-5(-4)$ f) $-11(-5)$ $\square$ $-7(-5)$

Solución

a) $2 < 5$ y al aumentar 4 veces ambas cantidades resultan $2(4) = 8$ y $5(4) = 20$, es decir, la desigualdad se mantiene. Entonces:

$2(4)$ $\boxed{<}$ $5(4)$

b) De forma similar al literal a), $-5 < 4$, al multiplicar por 3 ambos miembros la desigualdad se mantiene, y:

$-5(3)$ $\boxed{<}$ $4(3)$

c) $-3 > -9$; si se aumentan 10 veces ambas cantidades la desigualdad se mantiene. Luego:

$-3(10)$ $\boxed{>}$ $-9(10)$

d) $6 > 3$, pero ahora ambas cantidades se multiplican por un número negativo obteniendo $6(-2) = -12$ y $3(-2) = -6$, es decir, la desigualdad se invierte:

$6(-2)$ $\boxed{<}$ $3(-2)$

e) De forma similar al literal d), $8 > -5$ y al multiplicar por un número negativo ambos miembros se obtiene $8(-4) = -32$ y $-5(-4) = 20$, o sea, la desigualdad se invierte:

$8(-4)$ $\boxed{<}$ $-5(-4)$

f) $-11 < -7$, y como en los literales anteriores, si se multiplica ambos miembros por un número negativo la desigualdad se invierte; entonces:

$-11(-5)$ $\boxed{>}$ $-7(-5)$

Conclusión

Sean a, b y c números reales tales que $\boldsymbol{a < b}$.

1. **Si $\boldsymbol{c > 0}$ entonces $\boldsymbol{ac < bc}$**, es decir, si se multiplica ambos miembros de una desigualdad por un número positivo entonces la desigualdad se mantiene.
2. **Si $\boldsymbol{c < 0}$ entonces $\boldsymbol{ac > bc}$**, es decir, si se multiplica ambos miembros de una desigualdad por un número negativo entonces la desigualdad se invierte.

La propiedad es válida también para las desigualdades $a > b$, $a \geq b$, y $a \leq b$.

Problemas

1. Escribe en el espacio en blanco el símbolo de desigualdad correcto:

a) $8(5)$ $\square$ $11(5)$ b) $-3(6)$ $\square$ $-7(6)$ c) $6(-3)$ $\square$ $-4(-3)$

d) $-10(-7)$ $\square$ $-5(-7)$ e) $4.8(9)$ $\square$ $1.3(9)$ f) $-3.5(-2)$ $\square$ $-3.6(-2)$

g) $\frac{4}{5}(-4)$ $\square$ $5(-4)$ h) $-\frac{8}{5}(3)$ $\square$ $\frac{1}{2}(3)$ i) $10\left(\frac{1}{2}\right)$ $\square$ $7\left(\frac{1}{2}\right)$

j) $-6.5\left(-\frac{1}{4}\right)$ $\square$ $-4.3\left(-\frac{1}{4}\right)$ k) $\frac{8}{3}\left(\frac{5}{4}\right)$ $\square$ $-\frac{1}{4}\left(\frac{5}{4}\right)$ l) $\sqrt{6}(-11)$ $\square$ $\sqrt{3}(-11)$

2. Sean c y d números reales positivos tales que $c < d$. Escribe el símbolo de desigualdad correcto, $<$ o $>$ (justifica tu respuesta):

a) $3c$ $\square$ $3d$ b) $-c$ $\square$ $-d$ c) $5.6c$ $\square$ $5.6d$

d) $-2c$ $\square$ $-2d$ e) $-7c$ $\square$ $-7d$ f) $\frac{3}{4}c$ $\square$ $\frac{3}{4}d$

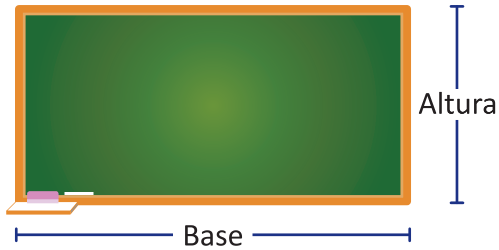
3. Sea a un número positivo. Demuestra lo siguiente:

a) Si $a > 1$ entonces $a^2 > a$; b) Si $a < 1$ entonces $a^2 < a$.

2.1 Definición de desigualdad lineal

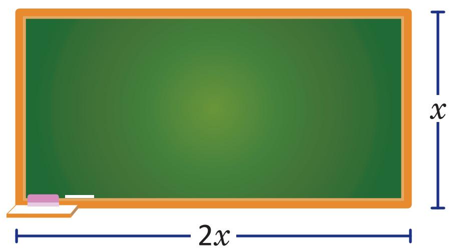
Problema inicial

La longitud de la base de una pizarra rectangular es el doble de su altura, y la medida de su perímetro es a lo sumo 7.20 m^2. Escribe una desigualdad que relacione el perímetro y la medida máxima que este puede tomar.



Solución

Sea x la longitud en metros de la altura de la pizarra como lo muestra la figura de abajo. De acuerdo al enunciado del problema la longitud en metros de su base será igual a $2x$ pues es el doble de la altura.



El perímetro de la pizarra se calcula:

$$2x + 2(2x) = 6x$$

es decir, la medida del perímetro de la pizarra es igual a $6x$. De acuerdo al problema, el perímetro es a lo sumo 7.20 m^2; esto es equivalente a decir que la medida del perímetro es menor o igual a 7.20 m^2. Por lo tanto, la desigualdad que relaciona el perímetro y la medida máxima de este es: $6x \leq 7.20$.

Definición

La desigualdad de dos expresiones matemáticas de grado 1 que involucra una variable se llama **desigualdad lineal**. En una desigualdad lineal, al valor desconocido que se representa por una variable se llama **incógnita**, al intervalo de los valores numéricos de la incógnita que cumplen con la desigualdad se llaman **solución de la desigualdad**.

En esta unidad, las variables únicamente podrán tomar valores reales, es decir, números reales.

Problemas

1. Escribe los siguientes enunciados como desigualdades lineales:
   a) Sara se tarda en llegar a su trabajo a lo sumo 1 hora con 15 minutos.
   b) Según el Ministerio de Medio Ambiente y Recursos Naturales (MARN), para el 2015 la cantidad de sismos no sentidos fue 11 veces la cantidad de sismos sentidos; mientras que en total se registró una cantidad superior a los 4 000 sismos en ese año.
   c) La edad de Mario es un tercio de la edad de Antonio, y la suma de sus edades es inferior a 28 años.
   d) El consumo de energía de una lavadora es 500 watts por hora. Al finalizar cierto tiempo, el consumo de energía superó los 3 500 watts por hora.

2. Beatriz y José deciden ahorrar durante todo el período escolar; al finalizar el año lectivo, el dinero ahorrado por Beatriz es superior a la mitad del dinero ahorrado por José. Escribe una desigualdad que relacione el dinero ahorrado por Beatriz y José.

2.2 Solución de desigualdades lineales, parte 1

Problema inicial

Determina todos los valores de x que satisfacen las siguientes desigualdades:

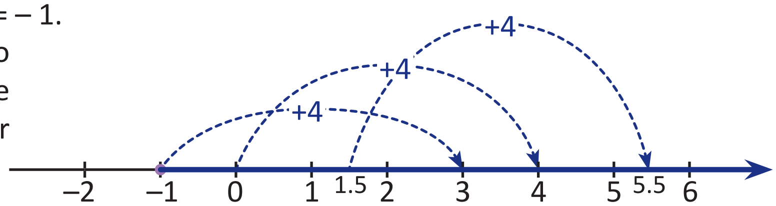
a) $x + 4 \geq 3$ b) $x - 5 < 2$

Solución

a) Deben encontrarse los números reales tales que al sumarles 4, el resultado es mayor o igual a 3. Resolver la ecuación lineal $x + 4 = 3$ equivale a encontrar el número real cuyo resultado al sumarle 4 es 3:

$$x + \cancel{4} - \cancel{4} = 3 - 4 \qquad \text{restar 4 a ambos miembros,}$$
$$x = -1.$$

En la figura de la derecha se observa lo siguiente: todos los números mayores que -1 satisfacen la desigualdad $x + 4 \geq 3$. Por lo tanto, $x + 4 \geq 3$ si $x \geq -1$.



Este resultado también puede obtenerse utilizando la propiedad vista en la clase 1.1, es decir, en la desigualdad original restar 4 a ambos miembros:

$$x + 4 \geq 3$$
$$x + \cancel{4} - \cancel{4} \geq 3 - 4 \qquad \text{restar 4 a ambos miembros no altera la desigualdad,}$$
$$x \geq -1.$$

Por lo tanto, la desigualdad $x + 4 \geq 3$ se cumple para $x \geq -1$. Utilizando intervalos, $x \geq -1$ se escribe $x \in [-1, \infty[$.

b) Usando propiedades de desigualdades, se suma 5 a ambos miembros:

$$x - 5 < 2$$
$$x - \cancel{5} + \cancel{5} < 2 + 5 \qquad \text{sumar 5 a ambos miembros no altera la desigualdad,}$$
$$x < 7.$$

Por lo tanto, la desigualdad $x - 5 < 2$ se cumple para $x < 7$; utilizando intervalos se escribe $x \in]-\infty, 7[$.

Conclusión

Sean b y c números reales cualesquiera. Para resolver una desigualdad lineal de la forma $x + b \geq c$ o $x + b \leq c$, esta debe escribirse como $x \geq d$ o $x \leq d$ sumando $-b$ a ambos miembros de la desigualdad:

1. $x + b \geq c$ se cumple para $x \geq c - b$; utilizando intervalos se escribe $x \in [c - b, \infty[$.
2. $x + b \leq c$ se cumple para $x \leq c - b$; utilizando intervalos se escribe $x \in]-\infty, c - b]$.

Si las desigualdades son $x + b > c$ o $x + b < c$ entonces en la solución no debe tomarse en cuenta el extremo $c - b$.

Problemas

1. Resuelve las siguientes desigualdades lineales (escribe la solución utilizando intervalos):

a) $x + 7 \geq 10$ b) $x - 3 > -8$ c) $x - 2 < 11$

d) $x + 4 \leq -6$ e) $x - 6 \geq 0$ f) $0 \geq x + 8$

g) $x + \frac{2}{3} < \frac{1}{3}$ h) $x - \frac{5}{2} > \frac{1}{2}$ i) $x + \frac{1}{4} \geq 1$

j) $x - \frac{4}{3} \leq -\frac{3}{4}$ k) $x + \frac{1}{2} < -4$ l) $x + \sqrt{2} \geq 5\sqrt{2}$

2. Utiliza la propiedad de las desigualdades vista en la clase 1.1 para justificar por qué la solución de $x + b \leq c$ es $x \in]-\infty, c - b]$.

2.3 Solución de desigualdades lineales, parte 2

Problema inicial

Determina todos los valores de x que satisfacen las siguientes desigualdades:

a) $3x > 12$

b) $-5x \leq -10$

Al multiplicar ambos miembros por un número real, si el número es positivo la desigualdad no se altera y si es negativo la desigualdad se invierte.

Solución

a) Para solucionar la desigualdad debe llevarse a la forma $x > d$, donde d es un número real. Para ello se multiplican ambos miembros de la desigualdad por $\frac{1}{3}$:

$$3x > 12$$

$$\cancel{3}x\left(\frac{1}{\cancel{3}}\right) > 12\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$x > 4$$

multiplicar por $\frac{1}{3}$ ambos miembros no altera la desigualdad.

Por lo tanto, la desigualdad $3x > 12$ se cumple para $x > 4$, es decir, si $x \in \,]4, +\infty[$.

b) De forma similar al literal anterior, se multiplican ambos miembros de la desigualdad por $-\frac{1}{5}$, esto hace que el símbolo de desigualdad se invierta de $\leq$ a $\geq$:

$$-5x \leq -10$$

$$-\cancel{5}x\left(-\frac{1}{\cancel{5}}\right) \geq -10\left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$x \geq 2$$

Por lo tanto, $-5x \leq -10$ se cumple para $x \geq 2$, es decir, si $x \in [2, +\infty[$.

Conclusión

Sea a un número real diferente de cero. Para resolver una desigualdad lineal de la forma $ax \geq c$ o $ax \leq c$ se multiplican ambos miembros de la desigualdad por el recíproco de a, es decir, $\frac{1}{a}$:

1. Si a es positivo, entonces las desigualdades $ax \geq c$ y $ax \leq c$ se cumplen para $x \geq \frac{c}{a}$ y $x \leq \frac{c}{a}$ respectivamente.
2. Si a es negativo, entonces las desigualdades $ax \geq c$ y $ax \leq c$ se cumplen para $x \leq \frac{c}{a}$ y $x \geq \frac{c}{a}$ respectivamente.

Si las desigualdades son $ax > c$ o $ax < c$ entonces en la solución no debe tomarse en cuenta el extremo $\frac{c}{a}$.

La solución $x \geq \frac{c}{a}$ se escribe utilizando intervalos como $x \in \left[\frac{c}{a}, \infty\right[$; mientras que $x \leq \frac{c}{a}$ se escribe: $x \in \left]-\infty, \frac{c}{a}\right]$.

Problemas

1. Resuelve las siguientes desigualdades lineales (escribe la solución utilizando intervalos):

a) $2x \leq 6$

b) $4x \geq 24$

c) $-3x > -33$

d) $-14 > 7x$

e) $-8x \geq 0$

f) $0 \geq 5x$

g) $-4x < 18$

h) $5x > -1$

i) $-\frac{1}{3}x \geq 3$

j) $\frac{2}{5}x < -1$

k) $\frac{5}{2}x \leq -\frac{5}{3}$

l) $-\sqrt{2}\,x > 1$

2. Para cada literal, determina todos los valores de x que satisfacen ambas desigualdades:

a) $\begin{cases} x + 2 > -3 \\ 3x > 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 5 \geq 2 \\ -2x > 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 4 < 1 \\ 5x > -30 \end{cases}$

Para cada literal, representa la solución de cada desigualdad en la recta numérica. Luego, verifica los valores donde coinciden ambos intervalos.

2.4 Solución de desigualdades lineales, parte 3

Problema inicial

Resuelve las siguientes desigualdades lineales:

a) $2x + 7 > -9$ b) $6x - 5 \leq 2x + 15$

Solución

a) Se utilizan propiedades de desigualdades para llevarla a la forma $x > d$; primero deben realizarse las sumas o restas y luego las multiplicaciones:

$$2x + 7 > -9$$

$$2x + \cancel{7} - \cancel{7} > -9 - 7 \quad \text{restar 7 a ambos miembros,}$$

$$\cancel{2}x\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) > -16\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{multiplicar por } \frac{1}{2} \text{ ambos miembros,}$$

$$x > -8.$$

Por lo tanto, la desigualdad $2x + 7 > -9$ se cumple para $x \in\ ]-8, \infty[$.

Puede deducirse lo siguiente:

- Un término que se encuentra sumando en uno de los miembros pasa al otro miembro a restar y viceversa (**transposición de términos**).
- Al llegar a la forma $mx \leq n$, se escribe x con coeficiente 1 y se multiplica n por el recíproco de m.

b) Aplicando lo encontrado en el literal anterior, para resolver $6x - 5 \leq 2x + 15$ se realiza lo siguiente:

$$6x - 5 \leq 2x + 15$$

$$6x \leq 2x + 15 + 5 \quad \text{se transpone 5 en el miembro derecho,}$$

$$6x - 2x \leq 20 \quad \text{se transpone } 2x \text{ en el miembro izquierdo,}$$

$$4x \leq 20$$

$$x \leq 20\left(\frac{1}{4}\right) \quad \text{se escribe } x \text{ con coeficiente 1 y se multiplica por } \frac{1}{4} \text{ el miembro izquierdo,}$$

$$x \leq 5.$$

Por lo tanto, la desigualdad $6x - 5 \leq 2x + 15$ se cumple para $x \in\ ]-\infty, 5]$.

Conclusión

Para resolver una desigualdad lineal se hace lo siguiente:

1. Transponer términos para llevar la desigualdad a la forma $mx \geq n$ o $mx \leq n$.
2. Escribir la incógnita con coeficiente 1 y multiplicar el otro miembro por el recíproco de m.

Problemas

1. Resuelve las siguientes desigualdades lineales (escribe la solución utilizando intervalos):

a) $3x - 4 < 8$ b) $2 \leq 5x + 12$ c) $7x - 24 > -x$

d) $4x + 9 < 2x + 11$ e) $2x - 1 \leq 5x + 14$ f) $3x - 2 \geq x + 6$

g) $x - 4 \leq -2x - 9$ h) $3x + 16 < 7x + 2$ i) $6x + 3 \geq 4x - 1$

j) $\frac{1}{3}x - 2 \geq x - \frac{7}{2}$ k) $\frac{5}{2}x + \frac{1}{3} < -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$ l) $-4x - 5\sqrt{3} > x + 10\sqrt{3}$

2. Para cada literal, determina todos los valores de x que satisfacen ambas desigualdades:

a) $\begin{cases} -3x > 0 \\ 2x - 5 > -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 4 \leq 3x \\ 5x - 1 > 4x + 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 7 > -x - 5 \\ -2x > 3x - 10 \end{cases}$

2.5 Interpretación gráfica de una desigualdad lineal

Problema inicial

Dada la función lineal $y = 2x - 4$:

1. Traza la gráfica de la función encontrando la intersección con los ejes de coordenadas.
2. Utilizando la gráfica de $y = 2x - 4$ determina los valores de x para los cuales $y \geq 0$.
3. ¿Cuál es la relación entre los valores de x encontrados en el literal anterior y la solución de $2x - 4 \geq 0$?

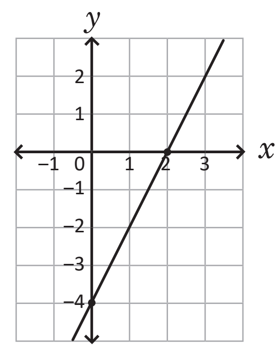
La gráfica de una función lineal $y = ax + b$ es una línea recta que pasa por los puntos $(0, b)$ y $(x, 0)$, donde el valor de x del segundo punto se encuentra al resolver $y = 0$.

Solución

1. La intersección con el eje y es el punto $(0, -4)$; mientras que la intersección del eje x se encuentra resolviendo $y = 0$:

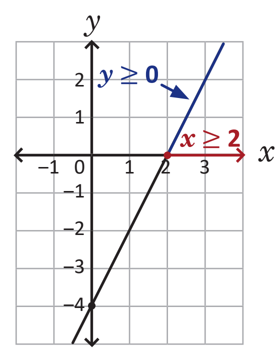
$$2x - 4 = 0$$
$$x = 2$$

se colocan los puntos $(0, -4)$ y $(2, 0)$ en el plano cartesiano y se traza la recta que pasa por ambos puntos como se muestra en la figura de la derecha.



2. Encontrar los valores de x para los cuales $y \geq 0$ significa, gráficamente, los números para los cuales la gráfica de $y = 2x - 4$ corta al eje x o queda arriba de este.

Se observa lo siguiente: $y \geq 0$ si $x \geq 2$, es decir, si $x \in [2, +\infty[$.



3. La solución de la desigualdad $2x - 4 \geq 0$ es $x \geq 2$, o sea, la misma encontrada en el literal anterior.

Conclusión

Resolver una desigualdad lineal de la forma $ax + b \geq 0$ o $ax + b \leq 0$ equivale a encontrar los valores de x para los cuales la gráfica de la función $y = ax + b$ corta al eje x o se encuentra arriba de este en el caso de $ax + b \geq 0$, o debajo de este en el caso de $ax + b \leq 0$.

Cuando las desigualdades son $>$ o $<$ no se toman en cuenta los valores donde $y = ax + b$ es igual a cero.

Problemas

1. Resuelve gráficamente las siguientes desigualdades:

a) $-2x + 6 < 0$ b) $5x - 5 > 0$ c) $-\frac{1}{2}x - 1 \geq 0$

2. ¿Será posible que una desigualdad lineal de la forma $ax + b \geq 0$ o $ax + b \leq 0$, con $a \neq 0$, no tenga solución? Justifica tu respuesta con base en la gráfica de $y = ax + b$.

3. Sea a un número positivo. Demuestra que la solución de la desigualdad $ax + b < 0$ es $\left]-\infty, -\frac{b}{a}\right[$.

2.6 Aplicaciones de las desigualdades lineales

Problema inicial

Mario contratará un servicio de internet para su negocio y debe decidir entre dos compañías A y B. La compañía A le cobrará \$9.50 por la instalación del módem y \$45.00 mensual; mientras que la compañía B le cobrará \$12.50 por la instalación del módem y \$43.50 mensual. Si Mario calcula el gasto total por la instalación y el pago mensual, ¿después de cuántos meses el servicio de la compañía B será más barato que el de la compañía A?

Solución

El gasto total por el servicio de la compañía A después de transcurrir x meses se calcula:

$$45x + 9.5,$$

mientras que el gasto total por el servicio de la compañía B después de transcurrir x meses será:

$$43.5x + 12.5$$

debe encontrarse la cantidad de meses que deben transcurrir para que:

$$\text{Gasto total B} < \text{Gasto total A}$$

$$43.5x + 12.5 < 45x + 9.5$$

se resuelve la desigualdad lineal:

$$12.5 - 9.5 < 45x - 43.5x$$

$$3 < 1.5x$$

$$2 < x.$$

En la solución pueden multiplicarse todos los términos de ambos miembros de la desigualdad por 10 para trabajar con números enteros.

Luego, el servicio de la compañía B será más barato que el de la compañía A después de dos meses, es decir, del tercer mes en adelante.

En general

Para resolver una situación que implique el uso de desigualdades lineales se realiza lo siguiente:

1. Determinar, según la información del problema, la cantidad que representa la incógnita.
2. Plantear una desigualdad lineal.
3. Resolver la desigualdad lineal e interpretar la solución.

Problemas

1. El Ministerio de Medio Ambiente y Recursos Naturales (MARN) registró en el 2015 que la cantidad de sismos no sentidos fue 11 veces la cantidad de sismos sentidos; si en total se registró una cantidad superior a los 4 000 sismos en ese año, ¿cuál fue la cantidad mínima de sismos sentidos?

2. La distancia y en kilómetros recorrida por un automóvil después de x horas está dada por la expresión $y = 70x$. ¿En cuántas horas recorrerá al menos 315 kilómetros de una carretera?

3. En la mayoría de países anglosajones se utiliza el grado Fahrenheit para medir la temperatura; por ejemplo en un día de agosto de 2017 la temperatura registrada en Canadá fue de 71°F (se lee “71 grados Fahrenheit”), mientras que en El Salvador ese mismo día la temperatura fue de 31°C (se lee “31 grados Celsius o centígrados”). La relación entre grados Celsius y grados Fahrenheit está dada por la ecuación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, donde C es la temperatura en grados Celsius y F en grados Fahrenheit. Si en un día de septiembre de 2 017 la temperatura mínima registrada en El Salvador fue de 20°C, ¿cuál fue la temperatura mínima en grados Fahrenheit?

2.7 Practica lo aprendido

1. Resuelve las siguientes desigualdades lineales (escribe la solución utilizando intervalos):

a) $5x - 7 < -2x$

b) $3x + 11 \geq 8x - 14$

c) $-4x + 9 \geq -5x - 15$

d) $-x - 10 < 9x - 8$

e) $2x - 6 \geq 4x + 5$

f) $\frac{3}{4}x + \frac{3}{2} \leq -\frac{5}{2}x + \frac{1}{5}$

g) $-\frac{4}{3}x + \frac{2}{5} > -\frac{1}{4} + \frac{5}{2}x$

h) $4x > x + 12\sqrt{3}$

i) $-3x - 9\sqrt{5} \leq -7x - 13\sqrt{5}$

j) $x + 4\sqrt{2} \geq \frac{1}{2}x + 10\sqrt{2}$

k) $6\sqrt{3}x - 9 < 2\sqrt{3}x + 7$

l) $\sqrt{6}x + 5 > x + 4$

2. Resuelve gráficamente las siguientes desigualdades:

a) $-3x + 12 \geq 0$

b) $4x + 8 < 0$

c) $\frac{1}{3}x - 2 \geq 0$

3. Resuelve las siguiente situaciones:

a) La edad de Mario es un tercio de la edad de Antonio. Si la suma de sus edades es inferior a 28 años, ¿cuál es la edad máxima que puede tener Mario?

b) La cantidad total de estudiantes de la Facultad de Odontología de la Universidad de El Salvador en el año 2017 fue de a lo sumo 717 estudiantes. Si la razón entre la cantidad de hombres y la cantidad de mujeres es 1 : 2, ¿cuál es la cantidad máxima de hombres que hay?

c) En San Salvador, en Agosto de 2017 el precio mínimo del quintal de frijol rojo de seda nacional fue de \$50.00, y el máximo de \$58.00. Un quintal equivale a 100 libras aproximadamente. ¿Cuál debe ser el precio mínimo por libra de frijol para obtener ganancia si:

- Se compra el quintal a \$50.00?
- Se compra el quintal a \$58.00?

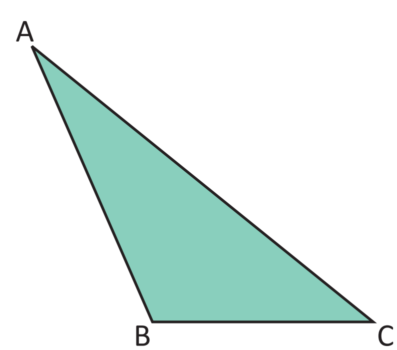
d) El ritmo de crecimiento de los niños, después de los dos años, es de al menos 6 centímetros por año hasta llegar a la adolescencia (15 años). ¿Cuál será la estatura mínima de un niño mayor de 10 años, si a los 7 años medía 1.19 m?

e) Carolina es vendedora de automóviles. Por la venta de un automóvil de \$6,000 obtiene una comisión del 3% sobre el precio de venta. ¿Cuántos automóviles de ese precio vendió Carolina como mínimo si su comisión al finalizar el año fue de más de \$1,080?

f) Las longitudes de la altura y la base de un rectángulo están en razón 3 : 4. Si el perímetro del rectángulo mide a lo sumo 105 cm, ¿cuál es la longitud máxima de la altura? ¿Y de la base?

g) En el triángulo ABC de la derecha, el lado AB mide 2 centímetros más que el lado BC, y el lado CA mide el doble del lado BC. Si la medida del perímetro del triángulo es menor o igual que 34 cm:

- ¿Cuál es la longitud máxima que puede tomar el lado BC?
- ¿Cuál es la longitud máxima que puede tomar el lado AB?
- ¿Cuál es la longitud máxima que puede tomar el lado CA?



3.1 Actividad. Construcción de un triángulo dados sus lados

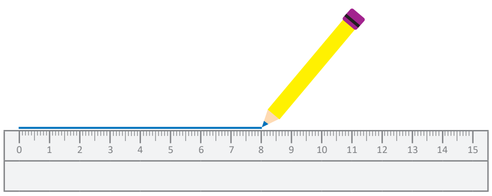
Materiales

- Regla y compás.
- Lápiz y cuaderno.

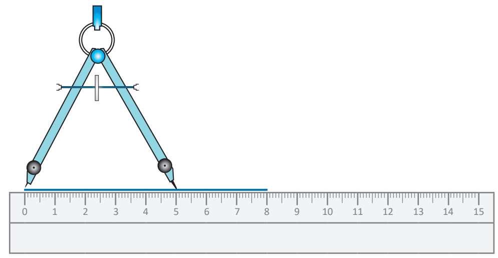
Actividad

Para dibujar un triángulo de lados 5, 7 y 8 centímetros se realiza lo siguiente:

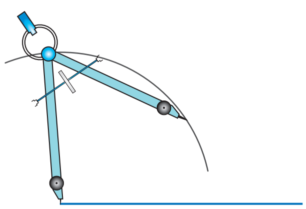
1. Traza el segmento de longitud 8 cm.



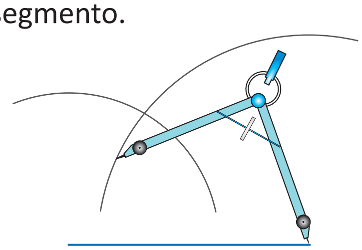
2. Con el compás toma la medida de otro de los lados, por ejemplo 5 cm.



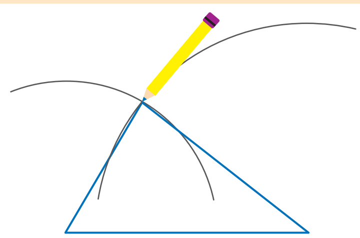
3. Coloca el compás en uno de los extremos del segmento dibujado en el numeral 1 y traza un arco de circunferencia.



4. Repite el proceso de los numerales 2 y 3, ahora tomando la medida de 7 cm y colocando el compás en el otro extremo del segmento.



5. Traza los segmentos que van desde el punto donde se cortan los arcos de circunferencia hacia cada uno de los extremos del segmento de 8 cm. Mide los lados del triángulo para verificar que, en efecto, miden 5, 7 y 8 centímetros.



Preguntas

1. Para cada caso, verifica si es posible trazar el triángulo de lados a, b y c:
   - a) a = 4 cm, b = 5 cm y c = 6 cm
   - b) a = 8 cm, b = 10 cm y c = 15 cm
   - c) a = 3 cm, b = 4 cm y c = 7 cm
   - d) a = 6 cm, b = 8 cm y c = 15 cm

2. Para cada uno de los literales del ejercicio 1 realiza lo siguiente:
   - a) Calcula las sumas $a + b$, $b + c$ y $a + c$.
   - b) ¿Se cumplen las desigualdades $a + b > c$, $b + c > a$ y $a + c > b$?

3.2 Desigualdad triangular, parte 1*

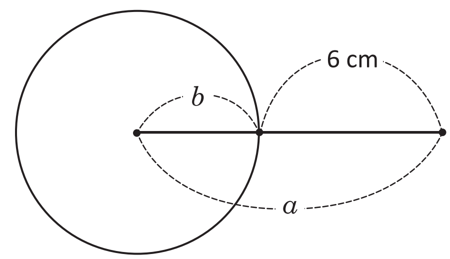
Problema inicial

Sean a = 10 cm, b = 4 cm y c un número positivo. ¿Qué valor puede tomar c para poder formar un triángulo de lados a, b y c?

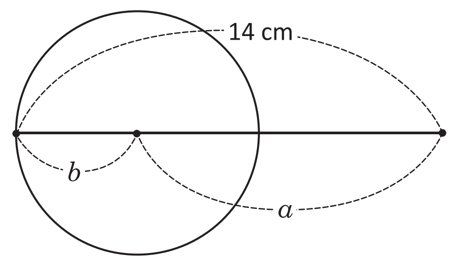
Traza el segmento de longitud a y tomando uno de los extremos como centro, traza una circunferencia de radio b.

Solución

Se traza el segmento a = 10 cm y una circunferencia de radio b = 4 cm y centro en uno de los extremos del segmento. Si dos de los vértices del triángulo son los extremos del segmento de longitud a entonces el tercer vértice debe estar sobre la circunferencia. En principio, el valor de c debe ser mayor que $a - b$ = 6 cm, de lo contrario no se podría formar un triángulo (ver figura de la derecha).

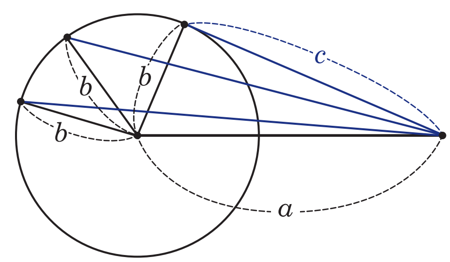


El valor de c también debe ser menor que $a + b$ = 14 cm; esto resulta de colocar el tercer vértice sobre la prolongación del segmento de longitud a como lo muestra la figura de la derecha y no se formaría un triángulo.



En cualquier otro lugar donde se coloque el tercer vértice, el valor de c siempre será mayor que 6 cm y menor que 14 cm. Por lo tanto:

$$a - b < c < a + b$$
$$6 < c < 14$$

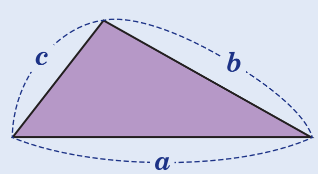


Por lo tanto, c puede tomar valores entre 6 cm y 14 cm para formar un triángulo.

Teorema

En todo triángulo, la suma de las longitudes de dos lados es mayor que el tercer lado; y la diferencia de las longitudes de dos lados es menor que el tercer lado, es decir:

a) $b - c < a < b + c$;
b) $a - c < b < a + c$;
c) $a - b < c < a + b$.



Si las longitudes de los lados de un triángulo son a, b y c de tal manera que $b \geq c$ entonces:
$$b - c < a < b + c.$$

Problemas

1. Dadas las longitudes de dos de los lados de un triángulo, determina los posibles valores que puede tomar el tercer lado:
   a) dos lados miden 9 y 14 centímetros respectivamente;
   b) dos lados miden 3 y 11 centímetros respectivamente;
   c) dos lados miden 13 y 7 centímetros respectivamente.

2. Sin elaborar la figura, justifica por qué con las longitudes 14 cm, 30 cm y 16 cm no se puede elaborar un triángulo.

3.3 Desigualdad triangular, parte 2*

Problema inicial

Demuestra que, para cualesquiera valores reales a y b, con $a \leq b$ siempre se cumple la desigualdad:

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Separa por casos: cuando a y b son ambos positivos o iguales a cero; cuando uno es positivo o igual a cero y el otro negativo; y cuando ambos son negativos.

Solución

Para demostrar la desigualdad se separan los posibles casos para los números a y b, dependiendo si son positivos o iguales a cero, o negativos:

a) **Caso 1: $\boldsymbol{a} \geq$ 0 y $\boldsymbol{b} \geq$ 0**. Entonces, $|a| = a$, $|b| = b$ y $a + b \geq 0$; luego:

$$|a + b| = a + b = |a| + |b|$$

es decir, la desigualdad $|a + b| \leq |a| + |b|$ se cumple porque se cumple la igualdad.

b) **Caso 2: $\boldsymbol{a} <$ 0 y $\boldsymbol{b} \geq$ 0**. Entonces, $|a| = -a$, $|b| = b$ y $|a| + |b| = (-a) + b$.

- Si $a + b < 0$ entonces: $$|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b)$$

  pero $-b < b$ (ya que b es positivo), y se tiene $(-a) + (-b) < (-a) + b$ y por tanto, la desigualdad $|a + b| \leq |a| + |b|$ se cumple.

- El caso $a + b \geq 0$ queda como ejercicio.

El caso $a \geq 0$ y $b < 0$ se demuestra de forma similar al caso 2.

c) **Caso 3: $\boldsymbol{a} <$ 0 y $\boldsymbol{b} <$ 0**. Entonces, $|a| = -a$ y $|b| = -b$; además, la suma de a y b también será un número negativo y:

$$\begin{aligned} |a + b| &= -(a + b) \\ &= (-a) + (-b) \\ &= |a| + |b| \end{aligned}$$

es decir, la desigualdad $|a + b| \leq |a| + |b|$ se cumple porque se cumple la igualdad.

En General

Para cualesquiera números reales a y b, la desigualdad: $|a + b| \leq |a| + |b|$ siempre es verdadera, es decir, el valor absoluto de la suma de dos números es menor o igual que la suma de los valores absolutos de ambos números. A esta desigualdad se le llama **desigualdad triangular.**

Problemas

1. Verifica que la desigualdad triangular se cumple para las siguientes parejas de números a y b:

a) $a = 9$ y $b = 7$	b) $a = -8$ y $b = 10$	c) $a = -5$ y $b = -6$
d) $a = 11$ y $b = -13$	e) $a = -4$ y $b = 4$	f) $a = 8$ y $b = 8$
g) $a = 0$ y $b = -6$	h) $a = -\frac{4}{5}$ y $b = \frac{2}{5}$	i) $a = \sqrt{2}$ y $b = 3\sqrt{2}$

2. Demuestra que si $a < 0$, $b \geq 0$ y $a + b \geq 0$ entonces $|a + b| \leq |a| + |b|$.

3. Sean a, b y c números reales cualesquiera. Utiliza la desigualdad triangular para demostrar la desigualdad $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$.

Unidad 3

3.4 Desigualdad de las medias aritmética y geométrica

Problema inicial

Demuestra lo siguiente:

1. Si x es cualquier número real entonces $x^2 \geq 0$.
2. Si a y b son números reales no negativos entonces $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

En el literal a), separa por casos: $x > 0$ y $x < 0$. Para el literal b), utiliza el resultado de a) sustituyendo x por $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Solución

1. Si $x = 0$ entonces $x^2 = 0$ y se cumple la igualdad. Ahora se separan los posibles casos para el número x: cuando $x > 0$ y cuando $x < 0$.

   Caso 1, $x \geq 0$:

   $x(x) \geq 0(x)$ multiplicar ambos lados por un número positivo no altera la desigualdad,

   $x^2 \geq 0$.

   Caso 2, $x < 0$:

   $x(x) > 0(x)$ multiplicar ambos lados por un número negativo invierte la desigualdad,

   $x^2 > 0$.

   Por lo tanto, para cualquier número real x se cumple $x^2 \geq 0$.

2. Usando el resultado del literal anterior se sustituye x por $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, es decir, si $x = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ entonces:

   $$x^2 = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$$

   $a - 2\left(\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b}\right) + b \geq 0$ desarrollar cuadrado de un binomio,

   $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ sumar $2\sqrt{ab}$ a ambos lados de la desigualdad,

   $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ multiplicar por $\frac{1}{2}$ ambos lados de la desigualdad.

   Por lo tanto, para cualquier pareja de números no negativos a y b se cumple: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Propiedad

1. Para todo número real a se cumple $a^2 \geq 0$; la igualdad se verifica si $a = 0$.
2. Si a y b son números no negativos cualesquiera entonces la desigualdad:

   $$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

   es verdadera; el miembro izquierdo de la desigualdad es la media aritmética de a y b, mientras que el miembro derecho es la media geométrica de a y b. A esta desigualdad se le llama **desigualdad de las medias aritmética y geométrica**.

Problemas

1. Verifica que la desigualdad de las medias aritmética y geométrica se cumple para las siguientes parejas de números a y b:

   a) $a = 9$ y $b = 4$ b) $a = 8$ y $b = 18$ c) $a = \frac{1}{4}$ y $b = \frac{1}{16}$

   d) $a = 10$ y $b = 90$ e) $a = 25$ y $b = 49$ f) $a = 6$ y $b = 30$

2. Utilizando la desigualdad de las medias aritmética y geométrica, demuestra lo siguiente:

   a) si x es un número no negativo entonces $1 + x \geq 2\sqrt{x}$;

   b) si a y b son números positivos entonces $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

3.5 Desigualdades con expresiones racionales

Problema inicial

Para cada literal, determina todos los valores de x que satisfacen la desigualdad:

a) $\frac{1}{x} > 0$

b) $\frac{1}{x-1} < 0$

Solución

a) Deben encontrarse todos los valores de x para los cuales el número $\frac{1}{x}$ es positivo. Es claro que $x = 0$ no es parte de la solución, pues se tendría la forma indeterminada $\frac{1}{0}$.

Ahora, para que la expresión $\frac{1}{x}$ sea positiva, el numerador y denominador deben ser ambos positivos o bien ambos negativos. Sin embargo, el numerador ya es positivo y por tanto debe ser $x > 0$.

Por tanto, la desigualdad $\frac{1}{x} > 0$ se cumple para $x > 0$, o sea $x \in]0, +\infty[$.

b) El proceso es similar al del literal anterior, solo que esta vez $\frac{1}{x-1}$ debe ser negativo. Como el numerador ya es positivo debe ser:

$$x - 1 < 0$$
$$x < 1$$

Por tanto, la desigualdad $\frac{1}{x-1} < 0$ se cumple para $x < 1$, o sea $x \in]-\infty, 1[$.

Conclusión

Sean a y b números reales cualesquiera, con $a \neq 0$.

1. Resolver la desigualdad $\frac{1}{ax+b} > 0$ significa encontrar los valores para los cuales la expresión es positiva. Esto ocurre solo si $ax + b > 0$.
2. Resolver la desigualdad $\frac{1}{ax+b} < 0$ significa encontrar los valores para los cuales la expresión es negativa. Esto ocurre solo si $ax + b < 0$.

Ejemplo

Resuelve la desigualdad $-\frac{1}{2x+3} < 0$.

Se multiplica por –1 ambos miembros, esto invierte la desigualdad:

$$\frac{1}{2x+3} > 0$$

entonces, $\frac{1}{2x+3} > 0$ solo si $2x + 3 > 0$:

$$2x > -3$$
$$x > -\frac{3}{2}$$

Por lo tanto, la desigualdad $-\frac{1}{2x+3} < 0$ se cumple para $x > -\frac{3}{2}$, es decir si $x \in \left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

No se consideran los símbolos ≥ y ≤ para estas desigualdades, ya que una expresión de la forma $\frac{1}{ax+b}$ nunca será igual a cero, por lo que no tiene sentido considerarlos.

Problemas

Resuelve las siguientes desigualdades (expresa la solución utilizando intervalos):

a) $\frac{1}{x+4} > 0$

b) $\frac{1}{2x-5} < 0$

c) $\frac{-1}{3x+1} > 0$

d) $-\frac{1}{1-x} > 0$

e) $\frac{1}{-2x+10} > 0$

f) $\frac{2}{4x-7} < 0$

g) $-\frac{3}{5x+6} > 0$

h) $\frac{-x-4}{x+5} > -1$

i) $\frac{x+2}{x+3} > 1$

En los problemas h) e i), pasa todo a un solo miembro de modo que en un miembro quede cero.

Unidad 3

3.6 Problemas de la unidad

1. Resuelve las siguientes desigualdades lineales (escribe la solución utilizando intervalos):

a) $4x - 12\sqrt{7} \leq 20\sqrt{7}$

b) $x + 9\sqrt{5} \leq -x - 7\sqrt{5}$

c) $-5x + 3\sqrt{6} > -x + 5\sqrt{6}$

d) $11x + 2\sqrt{2} \geq 4x + 5\sqrt{2}$

e) $8x - 15\sqrt{2} < 5x - 6\sqrt{3}$

f) $\sqrt{10}\,x - 8 > \sqrt{2}\,x - 6$

2. Para cada literal, determina todos los valores de x que satisfacen ambas desigualdades:

a) $\begin{cases} 5x - 3 > 4x - 5 \\ -2x + 5 \leq -3x + 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x - 6 < 5x - 16 \\ x + 11 \geq -x - 15 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 7 < 5x + 1 \\ 6x > 3x + 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2x - 3 \leq x - 5 \\ 3x - 1 \geq 4x + 7 \end{cases}$

Para cada literal, representa la solución de cada desigualdad en la recta numérica. Luego, verifica los valores donde coinciden ambos intervalos.

3. Resuelve las siguientes situaciones:

a) José es un estudiante de primer año de bachillerato. Durante este año obtuvo las siguientes calificaciones en sus exámenes de período de matemática:

Período 1	7.6
Período 2	8.0
Período 3	8.2

Si José quiere que su promedio final en los exámenes sea mayor o igual a 8.0, ¿cuál debe ser la calificación mínima que ha de obtener en el examen del período 4 para lograrlo?

b) Julia rentará un auto para un viaje. La agencia A le cobrará \$24.00 la renta del auto más \$0.30 por cada kilómetro recorrido; mientras que la agencia B le cobrará \$25.00 la renta del auto más \$0.25 por cada kilómetro recorrido. ¿Cuál es la cantidad mínima de kilómetros que puede recorrer Julia hasta que el precio de la agencia A exceda al precio de la agencia B?

c) Un producto genera utilidad solo cuando el ingreso de la venta del producto excede al costo de producción. Una empresa de teléfonos celulares calcula que el costo C (en dólares) para producir x teléfonos celulares es:

$$C = 90x + 1\,000,$$

mientras que el ingreso R (en dólares) es: $R = 140x$.

¿Cuál debe ser la cantidad mínima de teléfonos celulares que deben venderse para obtener utilidad?

4. Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo. Demuestra que se cumple la siguiente desigualdad:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 3.$$

Utiliza el resultado de la clase 3.2 de esta unidad.

5. Utilizando la desigualdad de las medias aritmética y geométrica demuestra lo siguiente:

a) si $x > 0$ entonces $x + \frac{1}{x} \geq 2$;

b) si a, b y x son números positivos entonces $ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab}$.

Unidad 4

Funciones reales

Imagen del papiro Ahmes, en él se presentan números naturales y sus cuadrados, cubos, e inversos.

Las nociones sobre función surgen históricamente desde épocas muy antiguas, en regiones como Egipto o Mesopotamia (Babilonia), analizando las tablas sobre cuadrados, cubos o inversos de un número (actualmente puede analizarse como una función). Sin embargo, el concepto de dependencia entre variables surge de manera natural en la historia y es presentado por primera vez por el matemático y pensador Nicolás Oresme, quién describe las leyes de la naturaleza como dependencia entre magnitudes. Pero es con el matemático y astrónomo Galileo Galilei que se presenta un concepto más formal de función en sus estudios del movimiento como relación entre variables en el siglo XVII. Luego, con el impulso de la geometría analítica se desarrolla la teoría de funciones, hasta que el matemático suizo Johann Bernoulli acuña la expresión de "función". Después de mucho desarrollo se da la definición de función a principios del siglo XX, que es la que se conoce actualmente; además, en este siglo se da el esfuerzo de rigurosidad de la matemática a partir de la teoría de conjuntos, con lo cual se da un enfoque nuevo a la teoría de funciones que contribuyó a su generalización a partir del surgimiento de áreas como la topología.

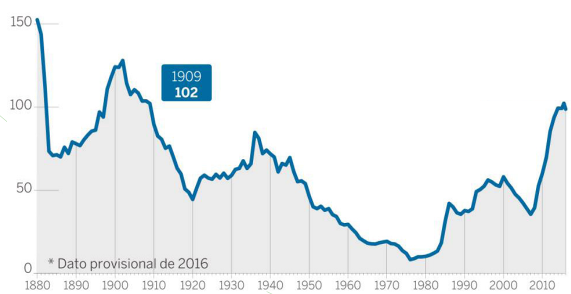


Gráfico de la deuda en función del tiempo en una población

El conocimiento de funciones ha facilitado la representación y estudio de los fenómenos de la vida cotidiana, y su interpretación ha sido de gran aplicación en economía, medicina, física e ingeniería. Las funciones rigen la vida del ser humano tanto en la Tierra como en un plano más complejo: el Universo.

Para esta unidad se continuará estudiando la función cuadrática, generalizando la idea de desplazamientos paralelos a los ejes, se dará una definición de función real, se abordarán otras funciones importantes por medio de un estudio descriptivo. Al finalizar se encontrarán algunas prácticas en ***GeoGebra***, para consolidar los aprendizajes de esta unidad.

1.1 Notación de funciones

Problema inicial

Encuentra el valor de y correspondiente al valor de x en cada función si:

a) $y = 5x - 1$; $x = -3$ b) $y = 4x^2$; $x = \frac{1}{2}$ c) $y = \frac{x^2}{2} + 5$; $x = 10$

Solución

En cada caso debe sustituirse el valor de x para encontrar y:

a)
$$\begin{aligned} y &= 5(-3) - 1 \\ &= -15 - 1 \\ &= -16 \end{aligned}$$

El valor correspondiente a $x = -3$ es $y = -16$.

b)
$$\begin{aligned} y &= 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 4\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

El valor correspondiente a $x = \frac{1}{2}$ es $y = 1$.

c)
$$\begin{aligned} y &= \frac{(10)^2}{2} + 5 \\ &= \frac{100}{2} + 5 \\ &= 55 \end{aligned}$$

El valor correspondiente a $x = 10$ es $y = 55$.

Definición

Dados dos conjuntos A y B, se llama **función de A en B** a la correspondencia que asigna a cada elemento x del conjunto A un único elemento y del conjunto B. Para denotar una función de A en B se escribe $\boldsymbol{f}$**: A $\longrightarrow$ B**, al elemento x de A se le llama **variable independiente o preimagen**; mientras que el elemento y de B se llama **variable dependiente o imagen**. Cuando se trata con funciones, la variable y se escribe como $\boldsymbol{f(x)}$ y se lee "f de x".

Ya se han estudiado dos funciones específicas: la función lineal $f(x) = ax + b$ y la función $f(x) = ax^2 + c$. Ambas funciones son de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, pues los valores de x y y son números reales. Las funciones también pueden nombrarse utilizando otras letras, por ejemplo, $g(x)$ o $h(x)$.

Dado un valor particular $x = m$, para encontrar el valor de $f(m)$ se sustituye x por m en la **ecuación de la función $\boldsymbol{f}$**.

Ejemplo

Encuentra el valor de $f(x)$ en cada caso:

a) $f(x) = -2x + 7$; $x = -5$ b) $f(x) = 3x^2 + 2$; $x = 2$

$f(x)$ NO significa f multiplicado por x, sino la función f evaluada en x.

Deben sustituirse los valores de x en la ecuación de la función, según sea el caso. En el primer literal, el valor de la función evaluada en $x = -5$ se representa por $f(-5)$; mientras que en el segundo literal, el valor de la función evaluada en $x = 2$ se representa por $f(2)$.

a)
$$\begin{aligned} f(-5) &= -2(-5) + 7 \\ &= 10 + 7 \\ &= 17 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(-5) = 17$.

b)
$$\begin{aligned} f(2) &= 3(2)^2 + 2 \\ &= 3(4) + 2 \\ &= 14 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(2) = 14$.

Problemas

1. En cada caso encuentra el valor de $f(x)$, si x toma el valor dado:

a) $f(x) = x + 4$; $x = 0$ b) $f(x) = 4x - 6$; $x = 1$ c) $f(x) = -\frac{x}{3} + 1$; $x = 6$

d) $f(x) = -5x^2$; $x = 3$ e) $f(x) = x^2 + 4$; $x = -1$ f) $f(x) = -\frac{x^2}{2} - 2$; $x = 2$

2. Dada la función lineal $f(x) = 2x - 3$, ¿cuál debe ser el valor de x para que $f(x) = 5$?

3. Dada la función $f(x) = 4x^2 + 5$, ¿cuáles deben ser los valores de x para que $f(x) = 11$?

1.2 Gráfica de una función

Problema inicial

Dadas las funciones $f(x) = -2x$ y $g(x) = 2x^2$:

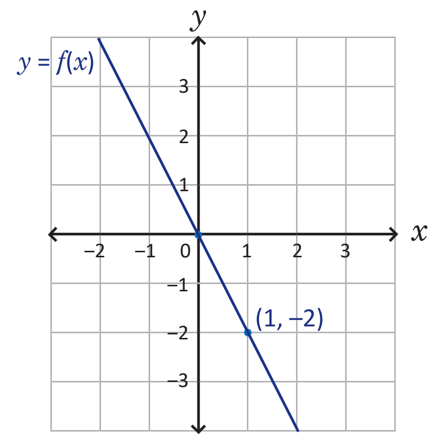
1. Elabora la gráfica de cada una de ellas.

La gráfica de f es una línea recta mientras que la de g es una parábola.

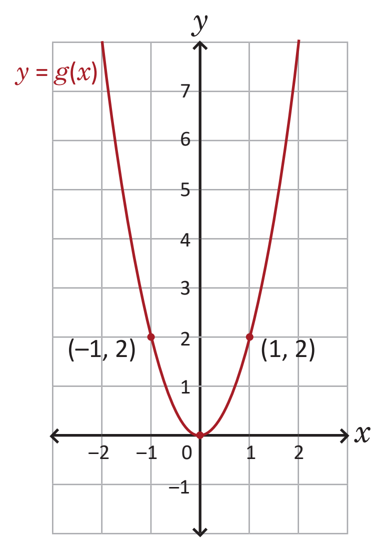
2. Traza líneas rectas verticales en cada gráfica. ¿Cuántas veces cortan las rectas verticales a las gráficas de f y g?
3. Si se continúan trazando rectas verticales, ¿cuántas veces cortarán a las gráficas de las funciones f y g?

Solución

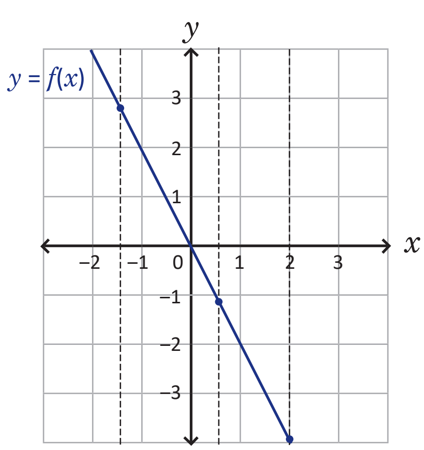
1. La función f es una función lineal y su gráfica es una línea recta que pasa por el origen. A partir de este, si x aumenta una unidad (es decir, $x = 1$) entonces $f(x)$ disminuye 2. La gráfica de $f(x) = -2x$ se presenta a la derecha.

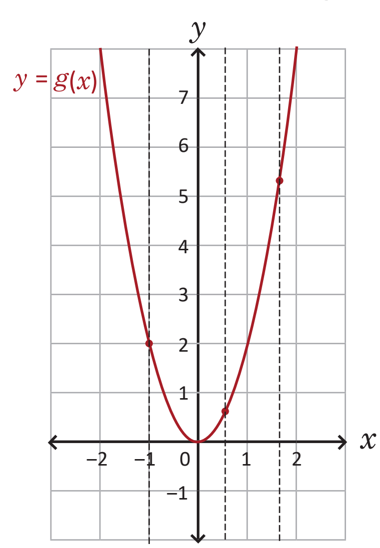


La gráfica de la función g es una parábola con vértice en el origen. Para graficarla se buscan otros dos puntos a la izquierda y derecha del vértice: si $x = -1$ entonces $g(-1) = 2(-1)^2 = 2$ y el punto $(-1, 2)$ pertenece a la parábola de g; de igual forma si $x = 1$ entonces $g(1) = 2(1)^2 = 2$ y el punto $(1, 2)$ pertenece a la parábola. La gráfica de $g(x) = 2x^2$ se presenta a la derecha.



2. En cada gráfica se han trazado tres rectas verticales. Cada una de ellas corta a la gráfica de f o g, según sea el caso, en un único punto:





3. Sin importar la cantidad de rectas verticales que se tracen, cada una de ellas cortará a la gráfica de la función f o g (según sea el caso) en un único punto.

Conclusión

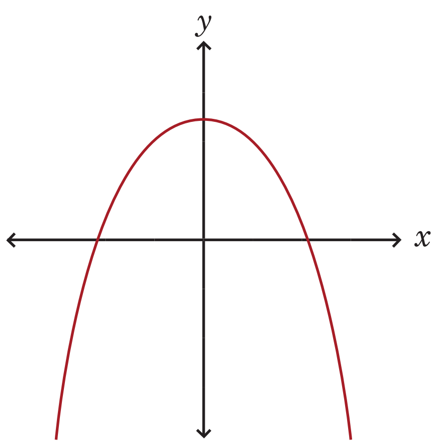
Una línea trazada en el plano cartesiano, cuyos valores de x se encuentran en un intervalo I, corresponde a la gráfica de una función si toda recta vertical trazada en el intervalo I corta a la línea en un único punto. A esta manera de reconocer gráficas de funciones se le conoce como **prueba de la recta vertical**.

Esto ocurre debido a la definición misma de función, a cada elemento x le corresponde un único elemento y. Las rectas verticales trazadas en cada gráfica representan un valor específico para x, si esta recta corta a la gráfica de una función en un único punto, entonces esto indica que para ese valor de x hay un único valor para $f(x)$ o $g(x)$.

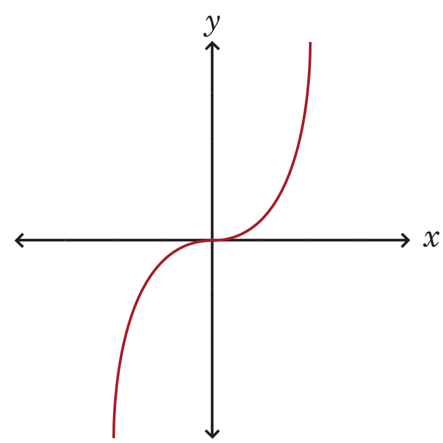
Problemas

Utilizando la prueba de la recta vertical determina, en cada caso, si la línea representa la gráfica de una función (no es necesario encontrar la ecuación de la función):

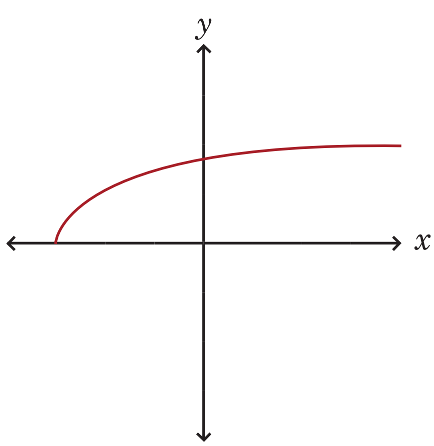
a)



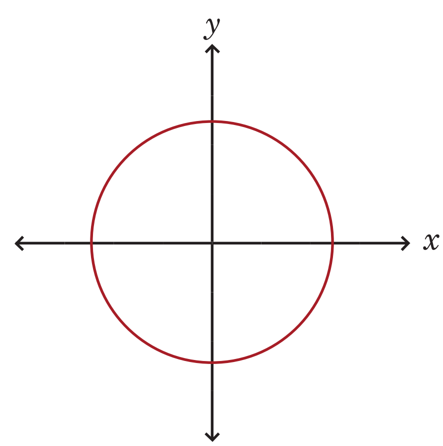
b)



c)



d)



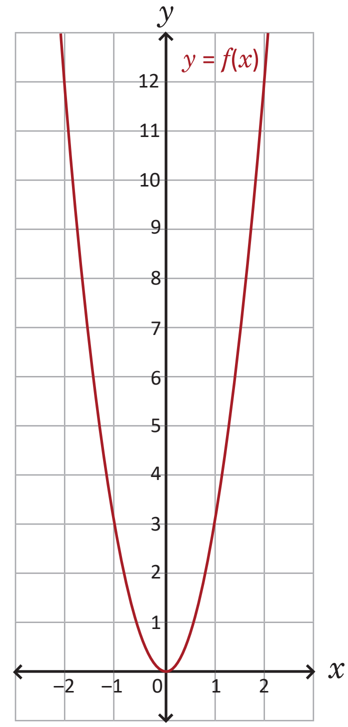
1.3 Dominio y rango de una función*

Problema inicial

Utilizando la ecuación y la gráfica de la función $f(x) = 3x^2$ responde lo siguiente:

1. ¿Para qué valores de x está definida $f(x)$?
2. ¿Cuáles son todos los posibles valores para $f(x)$?

Solución



La gráfica de la función es una parábola abierta hacia arriba con vértice en (0, 0) como se muestra en la figura de la derecha.

1. En la ecuación de la función $f(x) = 3x^2$, la variable independiente x puede tomar el valor de cualquier número real y siempre será posible encontrar su correspondiente $f(x)$. Por lo tanto, $f(x)$ está definida para cualquier número real que tome el valor de x.

2. En la gráfica de la función, el valor más pequeño que toma la variable dependiente $y = f(x)$ ocurre cuando $x = 0$. A medida que x aumenta o disminuye, el valor de $f(x)$ siempre aumentará (esto lo refleja el hecho de que la parábola se abre hacia arriba). Por lo tanto, los valores posibles para $f(x)$ son los números reales mayores o iguales a 0, es decir, los números pertenecientes al intervalo $[0, \infty[$.

Definición

El **dominio** de una función f se denota por D_f y es el conjunto de todos los números x para los cuales $f(x)$ está definida. El **rango** de una función f se denota por R_f y es el conjunto de todos los posibles valores para $f(x)$.

En el caso de las funciones lineales, tanto el dominio como el rango son el conjunto de los números reales, es decir $\mathbb{R}$. Mientras que para funciones de la forma $f(x) = ax^2$ el dominio es $\mathbb{R}$ y el rango depende del valor de a:
1. Si $a > 0$ entonces $R_f = [0, \infty[$.
2. Si $a < 0$ entonces $R_f =]-\infty, 0]$.

Problemas

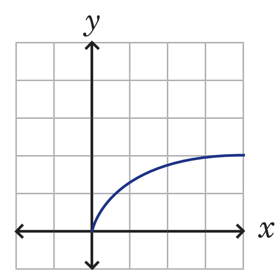
1. Encuentra el dominio y el rango de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{3}x + 4$ b) $f(x) = -10x + 3$ c) $f(x) = -x - 5$

d) $f(x) = x^2$ e) $f(x) = 2x^2$ f) $f(x) = -x^2$

g) $f(x) = -3x^2$ h) $f(x) = 3x^2$ i) $f(x) = -2x^2$

2. La gráfica de una función se presenta en la figura de la derecha. Utilizando únicamente este recurso, ¿cuál es el dominio y el rango de la función?

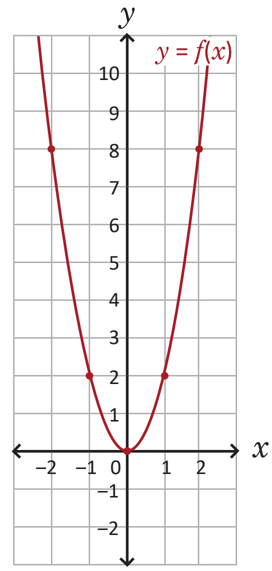


Unidad 4

2.1 Desplazamiento vertical

Problema inicial

Utilizando la gráfica de la función $f(x) = 2x^2$ realiza lo siguiente:



1. Grafica las funciones $g(x) = 2x^2 + 3$ y $h(x) = 2x^2 - 2$. ¿Cuál es el dominio y el rango en cada una?

> La gráfica de $g(x)$ corresponde a un desplazamiento de 3 unidades hacia arriba de la gráfica de f. ¿Hacia dónde será el desplazamiento de h?

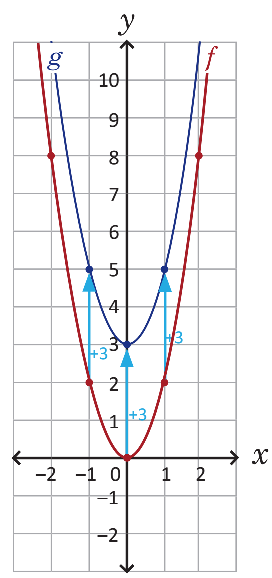
2. Explica qué le ocurre a la gráfica de f para obtener las gráficas de g y h.

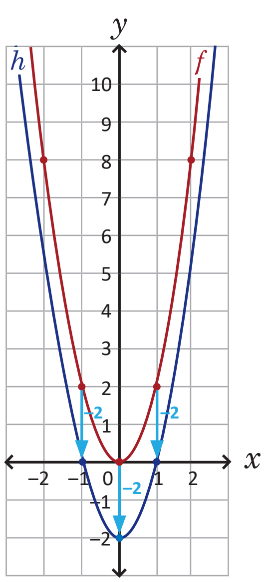
Solución

1. Para graficar $g(x) = 2x^2 + 3$ se desplaza verticalmente la gráfica de $f(x) = 2x^2$ tres unidades hacia arriba (ver figura de la derecha).

   Es decir, si el vértice de la gráfica de f es (0, 0) entonces el de g será (0, 3); si los puntos (–1, 2) y (1, 2) pertenecen a la parábola de f entonces los puntos (–1, 5) y (1, 5) pertenecen a la gráfica de g.

   De la gráfica de la función se deduce que: $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [3, \infty[$.





Mientras que para graficar $h(x) = 2x^2 - 2$ se desplaza verticalmente la gráfica de $f(x) = 2x^2$ dos unidades hacia abajo.

Es decir, si el vértice de la gráfica de f es (0, 0) entonces el de h será (0, –2); si los puntos (–1, 2) y (1, 2) pertenecen a la parábola de f entonces los puntos (–1, 0) y (1, 0) pertenecen a la gráfica de h.

De la gráfica de la función se deduce que: $D_h = \mathbb{R}$ y $R_h = [-2, \infty[$.

2. Utilizando $f(x) = 2x^2$:

a) la gráfica de la función $g(x) = 2x^2 + 3$ se obtiene desplazando verticalmente hacia arriba tres unidades la gráfica de $f(x) = 2x^2$;

b) la gráfica de la función $h(x) = 2x^2 - 2$ se obtiene desplazando verticalmente hacia abajo dos unidades la gráfica de $f(x) = 2x^2$.

Definición

Dada una función $f(x)$ y un número real k diferente de cero, la gráfica de la función $g(x) = f(x) + k$ es un **desplazamiento vertical de k unidades** de la gráfica de f, y: si $k > 0$ entonces la gráfica se desplaza hacia arriba, y si $k < 0$ entonces la gráfica se desplaza hacia abajo.

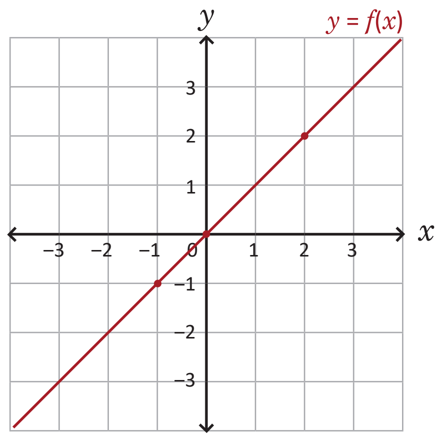
Si $f(x) = ax^2$ entonces la gráfica de $g(x) = ax^2 + k$ es una parábola con vértice en $(0, k)$, y:

1. Si $a > 0$ entonces $R_f = [k, \infty[$.
2. Si $a < 0$ entonces $R_f =]-\infty, k]$.

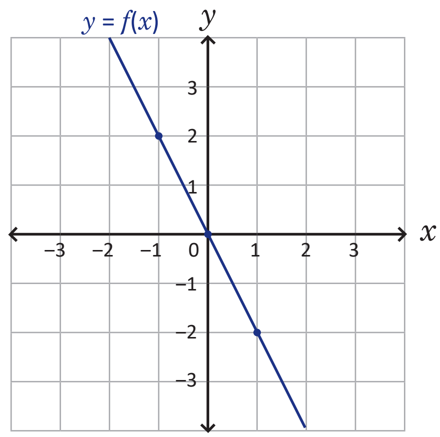
Problemas

Para cada caso y utilizando la gráfica de la función $f(x)$, grafica la función $g(x)$ y encuentra su dominio y rango:

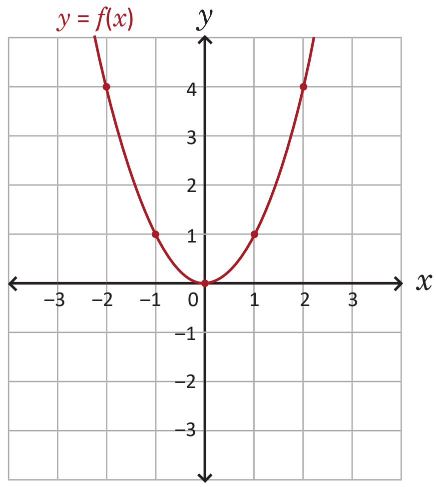
a) $f(x) = x$ y $g(x) = x + 1$



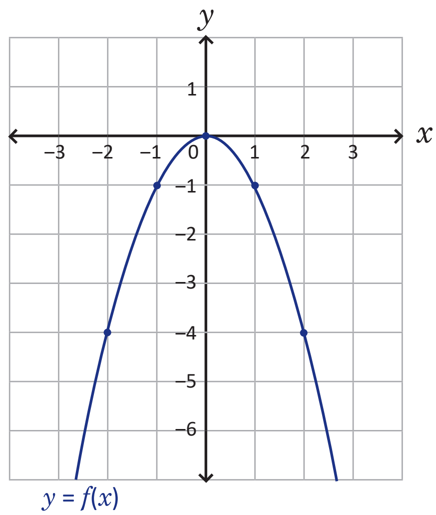
b) $f(x) = -2x$ y $g(x) = -2x - 3$



c) $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 + 2$



d) $f(x) = -x^2$ y $g(x) = -x^2 - 3$



2.2 Función de la forma $f(x) = a(x - h)^2$, $h > 0$

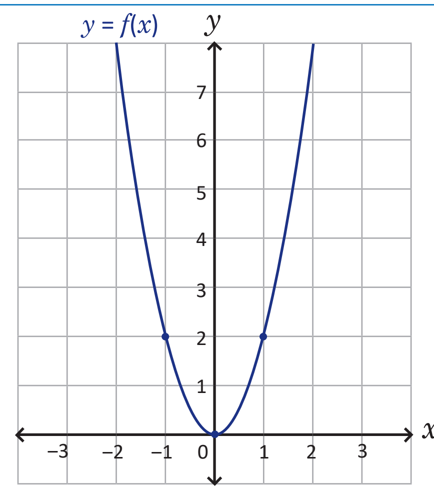
Problema inicial

Utilizando la gráfica de la función $f(x) = 2x^2$ realiza lo siguiente:

1. Completa la tabla y grafica la función $g(x) = 2(x - 1)^2$:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	18	8	2	0	2	8	18
$g(x)$							

La gráfica de g es una parábola.



2. ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la gráfica de g? ¿Cuál es el dominio y rango de g?
3. ¿Cómo se debe desplazar la gráfica de f para obtener la de g?

Solución

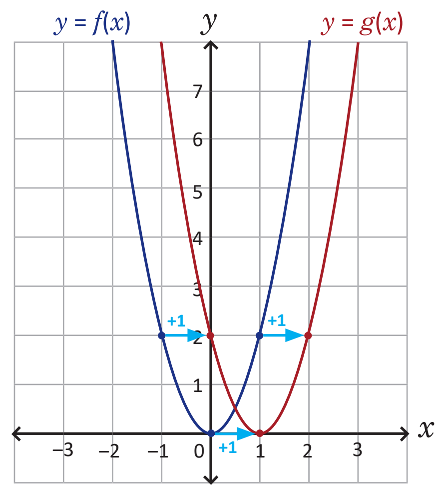
1. La tabla queda de la siguiente manera:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	18	8	2	0	2	8	18
$g(x)$	32	18	8	2	0	2	8

se observa lo siguiente: dado un valor de x, su correspondiente $g(x)$ es igual al valor de $f(x - 1)$. Por ejemplo, si $x = 0$:

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0 - 1) \\ &= f(-1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

La gráfica de g se muestra a la derecha.



2. Las coordenadas del vértice de la gráfica de g son (1, 0), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [0, \infty[$.

3. La gráfica de $f(x) = 2x^2$ se desplazó una unidad horizontalmente hacia la derecha para obtener la gráfica de $g(x) = 2(x - 1)^2$.

Conclusión

Sean $f(x) = ax^2$, donde a es cualquier número real diferente de cero, y $h > 0$. La gráfica de la función:

$$g(x) = f(x - h) = a(x - h)^2$$

es un **desplazamiento horizontal de h unidades hacia la derecha** de la gráfica de f. El vértice de la parábola es $(h, 0)$, $D_g = \mathbb{R}$ y:

1. Si $a > 0$ entonces $R_g = [0, \infty[$.
2. Si $a < 0$ entonces $R_g =]-\infty, 0]$.

Problemas

Utilizando la gráfica de $f(x)$, grafica la función $g(x)$ en cada caso. Encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y rango de la función g:

a) $f(x) = x^2$; $g(x) = (x - 2)^2$
b) $f(x) = -x^2$; $g(x) = -(x - 1)^2$
c) $f(x) = 2x^2$; $g(x) = 2(x - 2)^2$
d) $f(x) = -2x^2$; $g(x) = -2(x - 3)^2$

2.3 Función de la forma $f(x) = a(x - h)^2$, $h < 0$

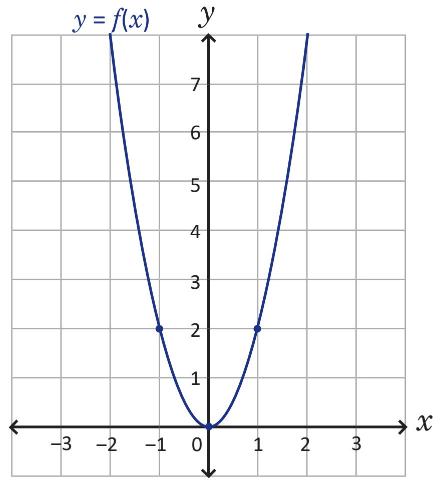
Problema inicial

Utilizando la gráfica de la función $f(x) = 2x^2$ realiza lo siguiente:

1. Completa la tabla y grafica la función $g(x) = 2(x + 1)^2$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	18	8	2	0	2	8	18
$g(x)$							

La gráfica de g es una parábola.



2. ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la gráfica de g? ¿Cuál es el dominio y rango de g?

3. ¿Cómo se debe desplazar la gráfica de f para obtener la de g?

Solución

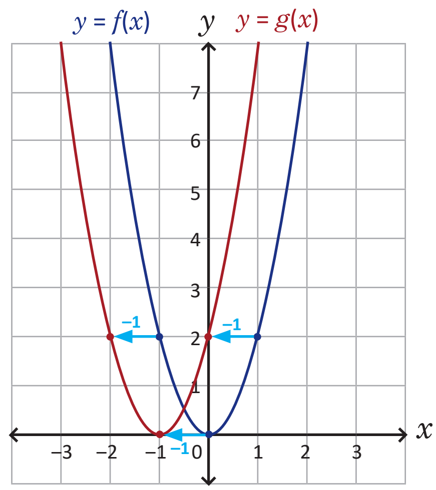
1. La tabla queda de la siguiente manera:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	18	8	2	0	2	8	18
$g(x)$	8	2	0	2	8	18	32

se observa lo siguiente: dado un valor de x, su correspondiente $g(x)$ es igual al valor de $f(x + 1)$. Por ejemplo, si $x = 0$:

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0 + 1) \\ &= f(1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

La gráfica de g se muestra a la derecha.



2. Las coordenadas del vértice de la gráfica de g son $(-1, 0)$, $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [0, +\infty[$.

3. La gráfica de $f(x) = 2x^2$ se desplazó una unidad horizontalmente hacia la izquierda para obtener la gráfica de $g(x) = 2(x + 1)^2$.

La ecuación de la función g también puede escribirse como $g(x) = 2[x - (-1)]^2$.

Conclusión

Sean $f(x) = ax^2$ donde a es cualquier número real diferente de cero, y $h < 0$. La gráfica de la función:

$$g(x) = f(x - h) = a(x - h)^2$$

es un **desplazamiento horizontal de h unidades hacia la izquierda** de la gráfica de f. El vértice de la parábola es $(h, 0)$, $D_g = \mathbb{R}$ y:

1. Si $a > 0$ entonces $R_g = [0, \infty[$.
2. Si $a < 0$ entonces $R_g =]-\infty, 0]$.

Problemas

Utilizando la gráfica de $f(x)$, grafica la función $g(x)$ en cada caso. Encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y rango de la función g:

a) $f(x) = x^2$; $g(x) = (x + 2)^2$

b) $f(x) = -x^2$; $g(x) = -(x + 1)^2$

c) $f(x) = 2x^2$; $g(x) = 2(x + 2)^2$

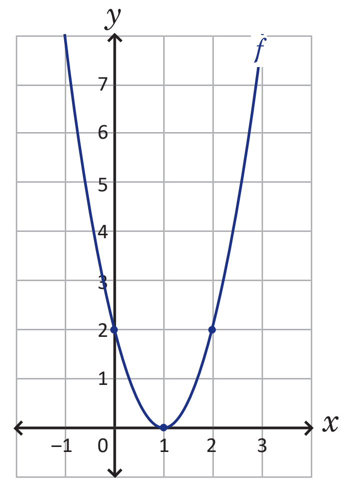
d) $f(x) = -2x^2$; $g(x) = -2(x + 3)^2$

Unidad 4

2.4 Función de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$, parte 1

Problema inicial

Utilizando la gráfica de la función $f(x) = 2(x - 1)^2$ realiza lo siguiente:

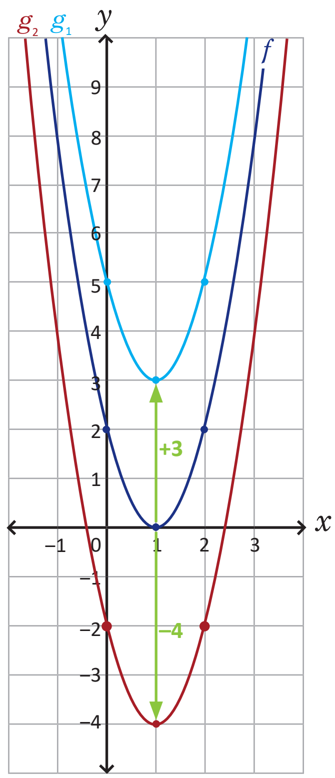


1. Grafica las funciones $g_1(x) = 2(x - 1)^2 + 3$ y $g_2(x) = 2(x - 1)^2 - 4$. Describe cómo se debe desplazar la gráfica de f para obtener cada gráfica.

> La gráfica de $g(x) = f(x) + k$ es un desplazamiento vertical de k unidades de la gráfica de f, hacia arriba si k es positivo y hacia abajo si k es negativo.

2. Encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y el rango en cada caso.

Solución



1. Ambas funciones son de la forma $f(x) + k$, es decir, son desplazamientos verticales de k unidades.

   En el caso de $g_1(x) = 2(x - 1)^2 + 3$, $k = 3$ y por tanto la gráfica de f se desplaza tres unidades verticalmente hacia arriba. La parábola en color celeste de la figura de la derecha corresponde a la gráfica de g_1.

   En el caso de $g_2(x) = 2(x - 1)^2 - 4$, $k = -4$ y por tanto la gráfica de f se desplaza cuatro unidades verticalmente hacia abajo. La parábola en color rojo de la figura de la derecha corresponde a la gráfica de g_2.

2. Las coordenadas del vértice de la gráfica de la función g_1 son (1, 3) y además $D_{g_1} = \mathbb{R}$ y $R_{g_1} = [3, \infty[$.

   Mientras que las coordenadas del vértice de la gráfica de la función g_2 son (1, –4) y además $D_{g_2} = \mathbb{R}$ y $R_{g_2} = [-4, \infty[$.

Conclusión

Sean $f(x) = a(x - h)^2$ donde a y h son números reales cualesquiera, y a es diferente de cero. La gráfica de la función:

$$g(x) = a(x - h)^2 + k$$

donde k es un número real, es un **desplazamiento vertical de k unidades** de la gráfica de f. Si $k > 0$ el desplazamiento es hacia arriba, y si $k < 0$ el desplazamiento es hacia abajo. El **vértice de la parábola de g** es **(h, k)**, $D_g = \mathbb{R}$ y:

1. Si $a > 0$ entonces $R_g = [k, \infty[$.
2. Si $a < 0$ entonces $R_g =]-\infty, k]$.

Problemas

Utilizando la gráfica de $f(x)$, grafica la función $g(x)$ en cada caso. Encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y rango de la función g:

a) $f(x) = (x - 2)^2$; $g(x) = (x - 2)^2 + 3$
b) $f(x) = -(x - 1)^2$; $g(x) = -(x - 1)^2 + 2$
c) $f(x) = 2(x + 2)^2$; $g(x) = 2(x + 2)^2 - 1$
d) $f(x) = -2(x + 3)^2$; $g(x) = -2(x + 3)^2 - 4$

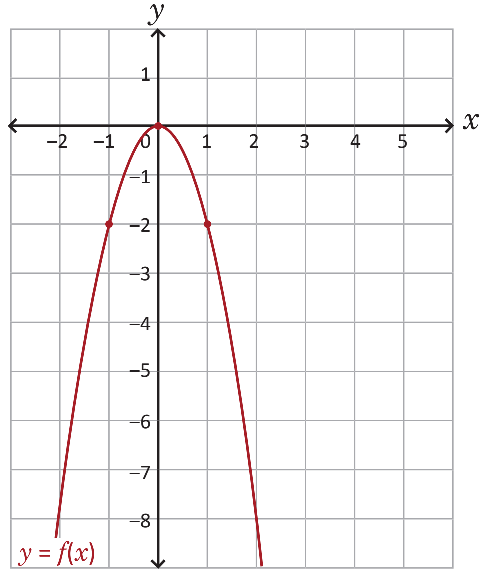
2.5 Función de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$, parte 2

Problema inicial

Utilizando la gráfica de la función $f(x) = -2x^2$ realiza lo siguiente:

1. Grafica la función $g(x) = -2(x - 3)^2 - 1$. Describe cómo se debe desplazar la gráfica de f para obtener g.

2. Encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y el rango de la función g.

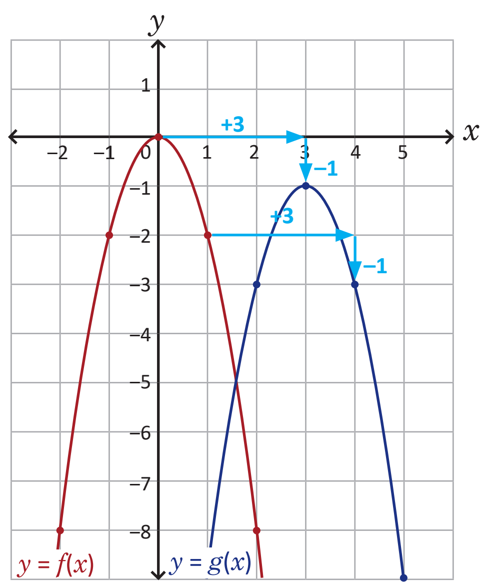


Solución

1. La función g es de la forma $f(x - h) + k$, es decir, combina desplazamientos tanto horizontales como verticales. En este caso, $h = 3$ y $k = -1$:

   Primero se desplaza la gráfica de f tres unidades horizontalmente hacia la derecha, luego se desplaza una unidad verticalmente hacia abajo. La gráfica de g corresponde a la parábola en color azul de la figura de la derecha.

2. Las coordenadas del vértice de la gráfica de g son (3, –1) y además $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g =]-\infty, -1]$.



Conclusión

Dada una función $f(x) = ax^2$, donde a es un número real diferente de cero. La gráfica de la función:

$$g(x) = a(x - h)^2 + k$$

es una parábola que resulta de desplazar h **unidades horizontalmente** y k **unidades verticalmente** la gráfica de f. El vértice de la gráfica de g es (h, k), $D_g = \mathbb{R}$ y:

1. Si $a > 0$ entonces $R_g = [k, \infty[$.
2. Si $a < 0$ entonces $R_g =]-\infty, k]$.

Problemas

Para cada caso, traza la gráfica de $f(x)$ y a partir de esta elabora la gráfica de $g(x)$. Encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y rango de g:

a) $f(x) = x^2$; $g(x) = (x + 1)^2 + 2$

b) $f(x) = -x^2$; $g(x) = -(x + 3)^2 - 3$

c) $f(x) = 3x^2$; $g(x) = 3(x - 2)^2 + 1$

d) $f(x) = -3x^2$; $g(x) = -3(x - 4)^2 - 2$

Unidad 4

2.6 Función de la forma $f(x) = ax^2 + bx$*

Problema inicial

Traza la gráfica y encuentra el dominio y rango de las siguientes funciones:

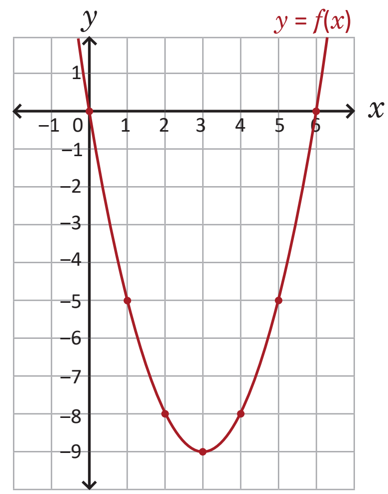
a) $f(x) = x^2 - 6x$ b) $g(x) = -2x^2 - 4x$

Completa los cuadrados en las ecuaciones de cada función.

Solución

a) Se completa el cuadrado en la ecuación de la función f:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 \\ &= (x^2 - 6x + \mathbf{3}^2) - \mathbf{3}^2 \\ &= (x - \mathbf{3})^2 - \mathbf{3}^2 \\ &= (x - \mathbf{3})^2 - 9 \end{aligned}$$

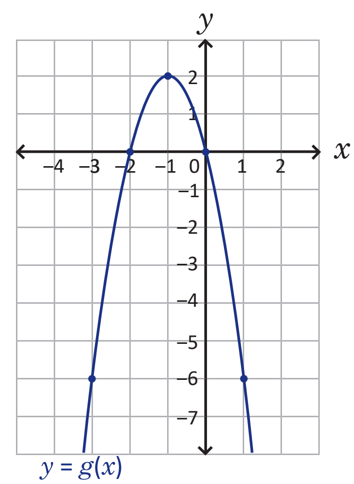


La función f es de la forma $a(x - h)^2 + k$: $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-9, \infty[$ y su gráfica es una parábola abierta hacia arriba con vértice en (3, –9) como lo muestra la figura de la derecha.

$f(x) = (x - 3)^2 - 9$ es un desplazamiento de 3 unidades horizontalmente a la derecha y 9 unidades verticalmente hacia abajo de la gráfica de $h(x) = x^2$.

b) De forma similar, se completa el cuadrado en la ecuación de la función g:

$$\begin{aligned} g(x) &= -2(x^2 + 2x) \\ &= -2\left[x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2\right] \\ &= -2[x^2 + 2x + \mathbf{1}^2 - \mathbf{1}^2] \\ &= -2[(x + \mathbf{1})^2 - 1] \\ &= -2(x + \mathbf{1})^2 + 2 \end{aligned}$$



La función g es de la forma $a(x - h)^2 + k$: $D_g = \mathbb{R}$, $R_g =]-\infty, 2]$ y su gráfica es una parábola abierta hacia abajo con vértice en (–1, 2) como lo muestra la figura de la derecha.

$g(x) = -2(x + 1)^2 + 2$ es un desplazamiento de 1 unidad horizontalmente a la izquierda y 2 unidades verticalmente hacia arriba de la gráfica de $h(x) = -2x^2$.

En resumen

Dada una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx$, esta puede llevarse a la forma $a(x - h)^2 + k$ completando cuadrados en la ecuación de la función f y su gráfica es una parábola, abierta hacia arriba si $a > 0$ o abierta hacia abajo si $a < 0$.

Problemas

Completa los cuadrados en cada caso para trazar la gráfica de f, y encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y rango de la función:

a) $f(x) = x^2 - 4x$ b) $f(x) = -x^2 + 2x$ c) $f(x) = 3x^2 + 6x$

2.7 Función de la forma $f(x) = x^2 + bx + c$

Problema inicial

Traza la gráfica y encuentra el vértice, el dominio y rango de la función:

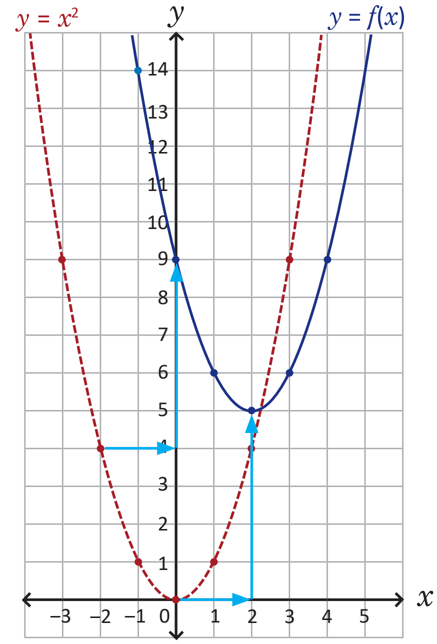
$$f(x) = x^2 - 4x + 9.$$

Completa el cuadrado en la ecuación de f.

Solución

Se completa el cuadrado en la ecuación de la función f:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[x^2 - 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2\right] + 9 \\ &= (x^2 - 4x + \mathbf{2}^2) - \mathbf{2}^2 + 9 \\ &= (x - \mathbf{2})^2 - 4 + 9 \\ &= (x - \mathbf{2})^2 + 5 \end{aligned}$$



luego la función f se ha reescrito en la forma $(x - h)^2 + k$: $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [5, \infty[$ y su gráfica es una parábola abierta hacia arriba con vértice en (2, 5) como lo muestra la figura de la derecha.

$f(x) = (x - 2)^2 + 5$ es un desplazamiento de 2 unidades horizontalmente a la derecha y 5 unidades verticalmente hacia arriba de la gráfica de $y = x^2$.

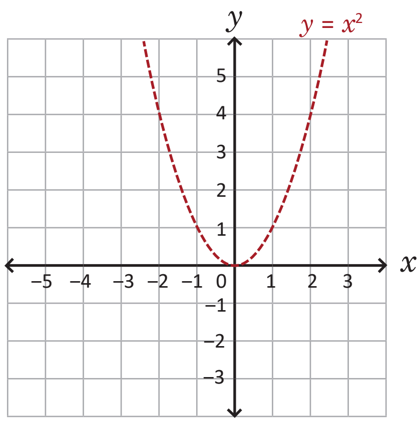
En resumen

Dada una función de la forma $f(x) = x^2 + bx + c$, esta puede llevarse a la forma $(x - h)^2 + k$ completando cuadrados en la ecuación de la función f y su gráfica es una parábola, abierta hacia arriba.

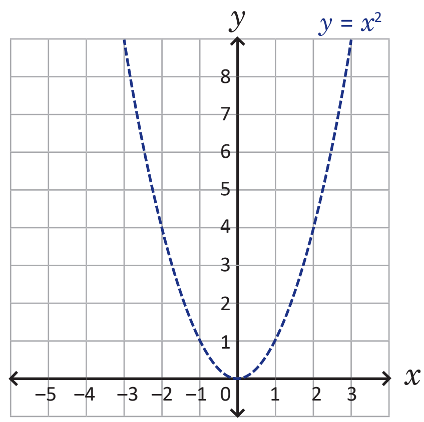
Problemas

Completa los cuadrados en cada caso para trazar la gráfica de f, encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y el rango de la función:

a) $f(x) = x^2 + 2x - 2$



b) $f(x) = x^2 + 4x + 5$



c) $f(x) = x^2 - 6x + 7$

d) $f(x) = x^2 - 8x + 18$

2.8 Función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$

Problema inicial

Traza la gráfica y encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y rango de la función:

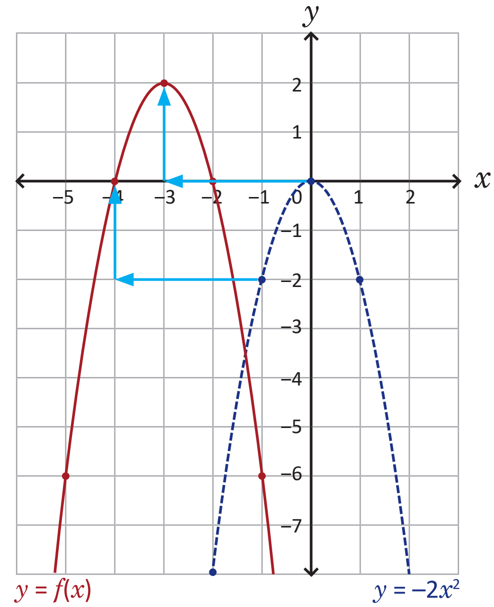
$$f(x) = -2x^2 - 12x - 16.$$

Completa el cuadrado en la ecuación de la función f.

Solución

Se completa el cuadrado en la ecuación de la función f:

$$\begin{aligned} f(x) &= -2[x^2 + 6x] - 16 \\ &= -2\left[x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2\right] - 16 \\ &= -2[x^2 + 6x + \mathbf{3}^2 - \mathbf{3}^2] - 16 \\ &= -2[(x + \mathbf{3})^2 - 9] - 16 \\ &= -2(x + \mathbf{3})^2 + 18 - 16 \\ &= -2(x + \mathbf{3})^2 + 2 \end{aligned}$$



luego, la función f se ha reescrito en la forma $a(x - h)^2 + k$: $D_f = \mathbb{R}$, $R_f =]-\infty, 2]$ y su gráfica es una parábola abierta hacia abajo con vértice en $(-3, 2)$ como lo muestra la figura de la derecha.

La función $f(x) = -2(x + 3)^2 + 2$ es un desplazamiento de 3 unidades horizontalmente a la izquierda y 2 unidades verticalmente hacia arriba de la gráfica de $y = -2x^2$.

Definición

La función de la forma $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$, donde a, b y c son números reales cualesquiera y a es diferente de cero se llama **función cuadrática**.

Una función cuadrática también puede escribirse en la forma $\boldsymbol{a(x - h)^2 + k}$ completando el cuadrado en la ecuación de la función f y, por tanto, su gráfica es una parábola con vértice en el punto (h, k) que se abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.

El dominio de una función cuadrática siempre es igual al conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) y el rango dependerá del valor de a y de la segunda coordenada del vértice (h, k) de la gráfica de la función:

1. Si $a > 0$ entonces $R_g = [k, \infty[$.
2. Si $a < 0$ entonces $R_g =]-\infty, k]$.

Problemas

Completa los cuadrados en cada caso para trazar la gráfica de f, encuentra además las coordenadas del vértice, el dominio y el rango de la función:

a) $f(x) = -x^2 + 8x - 13$

b) $f(x) = 3x^2 + 12x + 11$

c) $f(x) = 2x^2 - 20x + 44$

d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$

2.9 Condiciones iniciales

Problema inicial

Encuentra la ecuación de la función cuadrática f en cada caso:
1. El vértice de la gráfica de f es (4, 5) y pasa por el punto (2, –7).
2. f es de la forma $ax^2 + bx$ y la gráfica pasa por los puntos (–1, –10) y (–4, –16).

Solución

1. Las condiciones iniciales indican las coordenadas del vértice de la gráfica de f, por tanto, es conveniente escribir la ecuación en la forma:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k \qquad \text{------------------ (1)}$$

sustituyendo los valores de h y k en (1), se tiene:

$$f(x) = a(x - 4)^2 + 5$$

ahora, si la gráfica pasa por el punto (2, –7) entonces cuando $x = 2$, $f(2) = -7$. Se sustituye en la ecuación anterior y se despeja el valor de a:

$$-7 = a(2 - 4)^2 + 5$$
$$-7 = 4a + 5$$
$$-12 = 4a$$
$$-3 = a$$

Por lo tanto, la ecuación de la función es $f(x) = -3(x - 4)^2 + 5$.

$f(x) = -3(x - 4)^2 + 5$ también puede escribirse como:
$f(x) = -3x^2 + 24x - 43$.

2. Las condiciones iniciales indican que $f(x) = ax^2 + bx$. Si la gráfica de f pasa por el punto (–1, –10), entonces cuando $x = -1$, $f(-1) = -10$. Se sustituyen estos valores y se despeja a en la forma de la función:

$$-10 = a(-1)^2 + b(-1)$$
$$-10 = a - b$$
$$-10 + b = a \qquad \text{------------------ (2)}$$

de forma similar, cuando $x = -4$, $f(-4) = -16$. Se sustituyen estos valores, incluyendo el de a encontrado en (2), y se despeja el valor de b:

$$-16 = a(-4)^2 + b(-4)$$
$$-16 = (b - 10)16 - 4b$$
$$-16 = 16b - 160 - 4b$$
$$144 = 12b$$
$$12 = b$$

Luego, $a = 2$ y la ecuación de la función es $f(x) = 2x^2 + 12x$.

En resumen

Si f es una función cuadrática, entonces su ecuación puede escribirse en la forma $a(x - h)^2 + k$ o $ax^2 + bx + c$. Si en las condiciones iniciales se proporcionan las coordenadas del vértice de la gráfica de f entonces conviene escribirla en la forma $a(x - h)^2 + k$.

Problemas

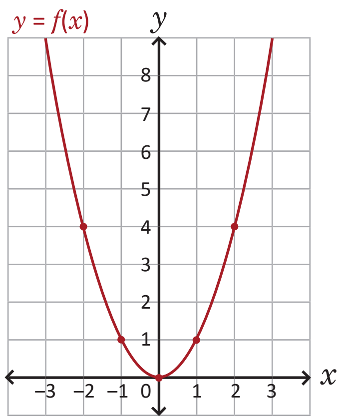
1. Encuentra la ecuación de la función cuadrática f en cada caso:
   a) el vértice de la gráfica de f es (–2, 1) y pasa por el punto (0, 5);
   b) el vértice de la gráfica de f es (3, –6) y pasa por el punto (4, –8);
   c) f es de la forma $ax^2 + bx$ y su gráfica pasa por los puntos (8, 0) y (2, –12).

2. Encuentra la ecuación de una función cuadrática f si su gráfica pasa por los puntos (–2, 8), (0, 2) y (2, 4).

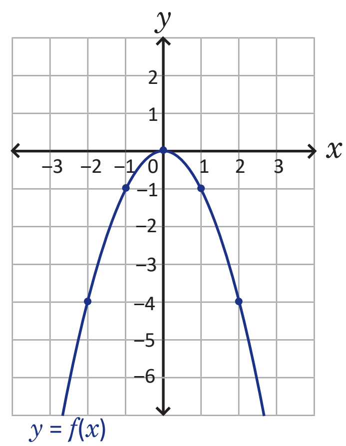
2.10 Practica lo aprendido

Utilizando la gráfica de f traza la gráfica de g; encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y el rango en cada caso:

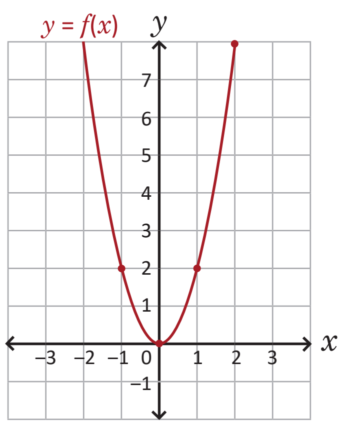
a) $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 + 3$



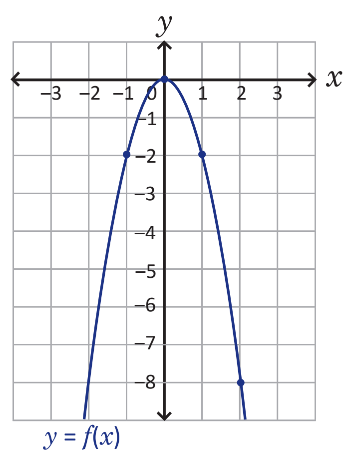
b) $f(x) = -x^2$ y $g(x) = -x^2 + 2$



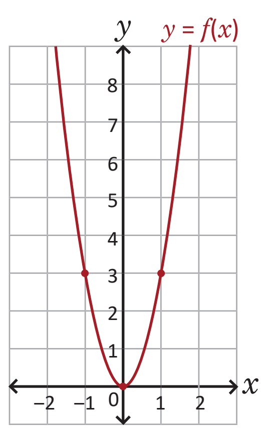
c) $f(x) = 2x^2$ y $g(x) = 2x^2 - 1$



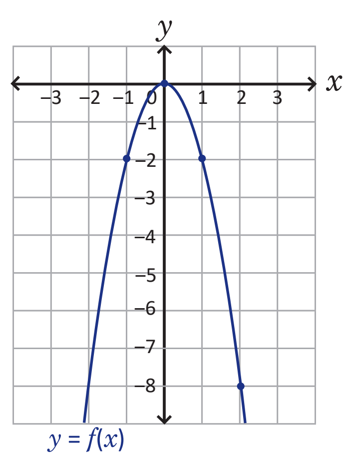
d) $f(x) = -2x^2$ y $g(x) = -2x^2 - 3$



e) $f(x) = 3x^2$ y $g(x) = 3(x - 4)^2$



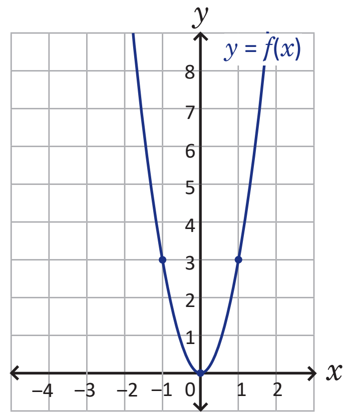
f) $f(x) = -2x^2$ y $g(x) = -2(x - 1)^2$



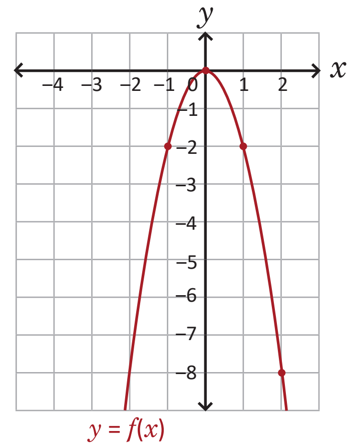
2.11 Practica lo aprendido

1. Utilizando la gráfica de f traza la gráfica de g; encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y el rango en cada caso:

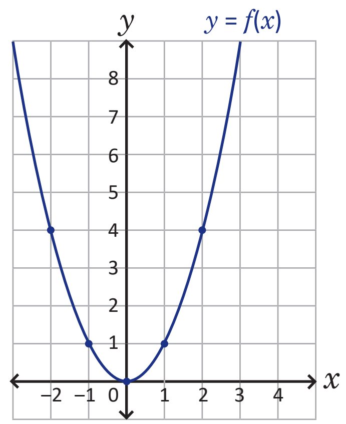
a) $f(x) = 3x^2$ y $g(x) = 3(x + 2)^2$



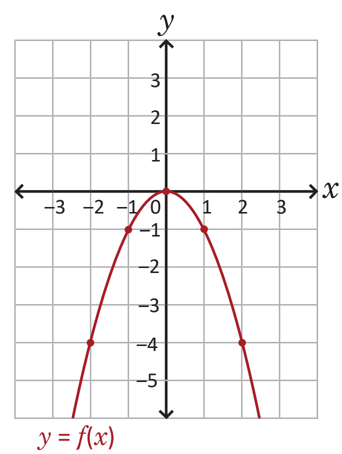
b) $f(x) = -2x^2$ y $g(x) = -2(x + 2)^2$



c) $f(x) = x^2$ y $g(x) = (x - 4)^2 + 2$



d) $f(x) = -x^2$ y $g(x) = -(x + 1)^2 + 3$



2. Completa los cuadrados en cada caso para trazar la gráfica de f, encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y el rango de la función:

a) $f(x) = -3x^2 + 6x$ b) $f(x) = 5x^2 + 10x$ c) $f(x) = -x^2 - 4x$
d) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ e) $f(x) = x^2 + 2x + 2$ f) $f(x) = x^2 - 10x + 23$
g) $f(x) = -x^2 - 4x - 7$ h) $f(x) = 2x^2 - 12x + 13$ i) $f(x) = -3x^2 - 6x + 2$

3. Encuentra la ecuación de la función cuadrática f si:

a) la gráfica de f tiene vértice en (0, 0) y pasa por el punto (2, 2);
b) la gráfica de f tiene vértice en (0, –1) y pasa por el punto (–1, –3);
c) la gráfica de f tiene vértice en (3, 0) y pasa por el punto (2, 4);
d) la gráfica de f tiene vértice en (2, –5) y pasa por el punto (4, 3);
e) f es de la forma $ax^2 + bx$ y su gráfica pasa por los puntos (2, 0) y (–1, 3);
f) f es de la forma $ax^2 + bx$ y su gráfica pasa por los puntos (1, –4) y (4, 8);
g) la gráfica de f pasa por los puntos (–2, 3), (0, –3) y (1, 0).

3.1 Monotonía

Problema inicial

Dadas las funciones cuadráticas $f(x) = 2(x-1)^2 - 5$ y $g(x) = -2(x-1)^2 + 5$ responde lo siguiente:

1. Si $-1 \leq x \leq 1$, ¿entre cuáles números se encuentran $f(x)$ y $g(x)$?
2. Si $1 \leq x \leq 3$, ¿entre cuáles números se encuentra $f(x)$ y $g(x)$?

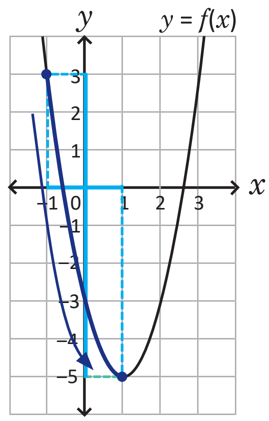
Utiliza las gráficas de f y g.

Solución

1. Se trazan las gráficas de las funciones para poder determinar los valores de $f(x)$ y $g(x)$: la parábola de f es abierta hacia arriba con vértice en (1, –5); mientras que la parábola de g es abierta hacia abajo con vértice en (1, 5). En ambas gráficas, sobre el eje x se ha sombreado en verde el intervalo [–1, 1] de los valores que toma x.

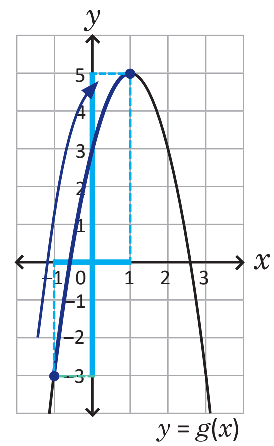
En f: a medida que x aumenta de –1 a 1, $f(x)$ disminuye de $f(-1) = 3$ a $f(1) = -5$.

Luego, $-5 \leq f(x) \leq 3$.



En g: a medida que x aumenta de –1 a 1, $g(x)$ aumenta de $g(-1) = -3$ a $g(1) = 5$.

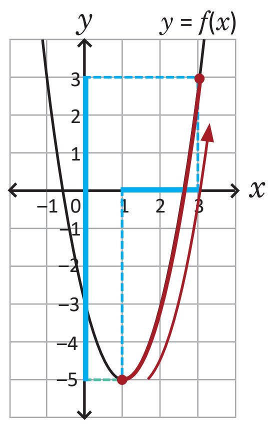
Luego, $-3 \leq g(x) \leq 5$.



2. Nuevamente, utilizando las gráficas de las funciones se concluye lo siguiente:

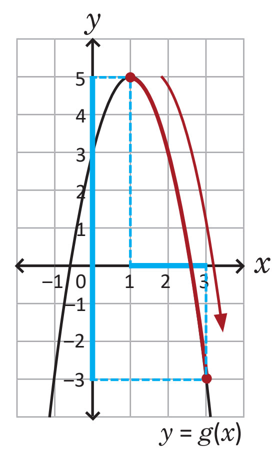
En f: a medida que x aumenta de 1 a 3, $f(x)$ aumenta de $f(1) = -5$ a $f(3) = 3$.

Luego, $-5 \leq f(x) \leq 3$.



En g: a medida que x aumenta de 1 a 3, $g(x)$ disminuye de $g(1) = 5$ a $g(3) = -3$.

Luego, $-3 \leq g(x) \leq 5$.



Definición

Una función f es **creciente** en un intervalo $[x_1, x_2]$ si a medida que x aumenta de x_1 a x_2 entonces $f(x)$ aumenta de $f(x_1)$ a $f(x_2)$, es decir, **si m y n pertenecen a $[x_1, x_2]$ con $m \leq n$ entonces $f(m) \leq f(n)$**. Por otro lado f es **decreciente** en un intervalo $[x_1, x_2]$ si a medida que x aumenta de x_1 a x_2 entonces $f(x)$ disminuye de $f(x_1)$ a $f(x_2)$, es decir, **si m y n pertenecen a $[x_1, x_2]$ con $m \leq n$ entonces $f(m) \geq f(n)$**.

Una función es **monótona** en $[x_1, x_2]$ si es creciente o decreciente en el intervalo.

Problemas

Para cada caso, determina si la función f es creciente o decreciente en el intervalo dado; escribe el intervalo donde se encuentran los valores de $f(x)$:

a) $f(x) = (x-5)^2$; $5 \leq x \leq 7$

b) $f(x) = -2x^2 + 3$; $0 \leq x \leq 2$

c) $f(x) = -3(x-3)^2 - 1$; $2 \leq x \leq 3$

d) $f(x) = (x+2)^2 + 3$; $-5 \leq x \leq -3$

3.2 Variación: valor máximo o mínimo

Problema inicial

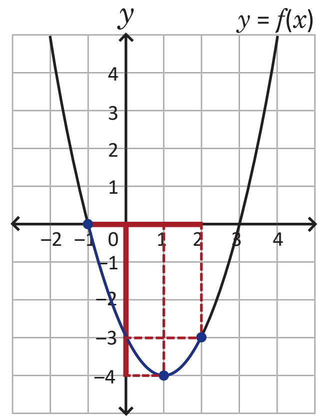
Dadas las funciones cuadráticas $f(x) = (x - 1)^2 - 4$ y $g(x) = -x^2 - 4x - 1$ responde lo siguiente:

1. Si $-1 \leq x \leq 2$, ¿entre cuáles números se encuentra $f(x)$?
2. Si $-4 \leq x \leq 1$, ¿entre cuáles números se encuentra $g(x)$?

Utiliza las gráficas de f y g.

Solución

1. Se traza la gráfica de la función para poder determinar los valores de $f(x)$ como se muestra en la figura de la derecha. La parábola es abierta hacia arriba con vértice en $(1, -4)$.

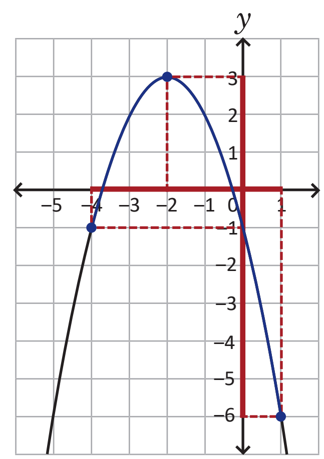


Sobre el eje x se ha sombreado en rojo el intervalo $[-1, 2]$ de los valores que toma x. Si $x = -1$ entonces $f(-1) = 0$ y si $x = 2$ entonces $f(2) = -3$; esto puede llevar a pensar que: $-3 \leq f(x) \leq 0$.

Sin embargo, el valor mínimo de $f(x)$ se alcanza cuando $x = 1$, es decir, en $f(1) = -4$. Por lo tanto, $-4 \leq f(x) \leq 0$.

2. Primero se escribe g en la forma $a(x - h)^2 + k$ completando el cuadrado:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= -(x^2 + 4) - 1 \\
&= -\left[x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2\right] - 1 \\
&= -[x^2 + 4x + \mathbf{2}^2 - \mathbf{2}^2] - 1 \\
&= -[(x + \mathbf{2})^2 - 4] - 1 \\
&= -(x + \mathbf{2})^2 + 4 - 1 \\
&= -(x + \mathbf{2})^2 + 3
\end{aligned}
$$



La parábola se abre hacia abajo con vértice en $(-2, 3)$. Sobre el eje x se ha sombreado en rojo el intervalo $[-4, 1]$ de los valores que toma x. Si $x = -4$ entonces $g(-4) = -1$ y si $x = 1$ entonces $g(1) = -6$; para este caso, el valor máximo de $g(x)$ se alcanza cuando $x = -2$, es decir, en $g(-2) = 3$.
Por lo tanto, $-6 \leq g(x) \leq 3$.

En resumen

Dada una función cuadrática $f(x) = a(x - h)^2 + k$ y $x_1 \leq h \leq x_2$:

1. Si $a > 0$ entonces el valor mínimo $f(x)$ se alcanza en $x = h$.
   Además si x es un número real tal que $x_1 \leq x \leq x_2$ y $f(x_1) < f(x_2)$ entonces $k \leq f(x) \leq f(x_2)$; caso contrario si $f(x_1) \geq f(x_2)$ entonces $k \leq f(x) \leq f(x_1)$.

2. Si $a < 0$ entonces el valor máximo $f(x)$ se alcanza en $x = h$.
   Además si x es un número real tal que $x_1 \leq x \leq x_2$ y $f(x_1) < f(x_2)$ entonces $f(x_1) \leq f(x) \leq k$; caso contrario si $f(x_1) > f(x_2)$ entonces $f(x_2) \leq f(x) \leq k$.

Problemas

Para cada caso, determina el intervalo donde se encuentran los valores de $f(x)$ si:

a) $f(x) = (x - 5)^2$; $2 \leq x \leq 6$

b) $f(x) = -2x^2 + 3$; $-2 \leq x \leq 1$

c) $f(x) = -3(x - 3)^2 - 1$; $2 \leq x \leq 5$

d) $f(x) = (x + 2)^2 + 3$; $-6 \leq x \leq 0$

e) $f(x) = 2(x - 6)^2 + 1$; $4 \leq x \leq 8$

f) $f(x) = -(x + 4)^2 - 2$; $-6 \leq x \leq -2$

Unidad 4

3.3 Aplicación: valor máximo*

Problema inicial

Los estudiantes de primer año de bachillerato del Instituto Nacional de San Matías, en La Libertad, realizan experimentos en su clase de ciencias naturales sobre tiro vertical. Han descubierto que, al lanzar una pelota de fútbol verticalmente hacia arriba, la distancia $f(x)$ en metros sobre el suelo después de x segundos está dada por la función:

$$f(x) = -5x^2 + 10x + 0.5$$

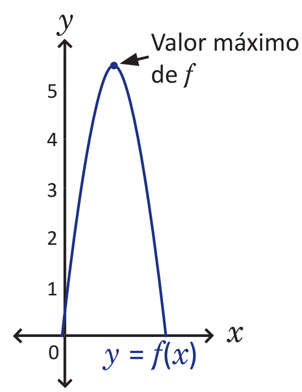
¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota? ¿Después de cuántos segundos alcanza la altura máxima?

Solución

Si la pelota se lanza verticalmente hacia arriba llegará a un punto en que debe descender; el problema pide calcular cuántos metros se elevará desde el suelo y cuántos segundos transcurrirán después de ser lanzada antes que empiece a descender.

La función encontrada por los estudiantes que relaciona la distancia sobre el suelo después de x segundos es una función cuadrática, cuyo valor máximo para $f(x)$ se encuentra en el vértice de la gráfica de la función pues el coeficiente de x^2 es negativo. Entonces, el problema se reduce a encontrar las coordenadas del vértice de la gráfica de f:

$$\begin{aligned} f(x) &= -5(x^2 - 2) + 0.5 \\ &= -5\left[x^2 - 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2\right] + 0.5 \\ &= -5[x^2 - 2x + \mathbf{1}^2 - \mathbf{1}^2] + 0.5 \\ &= -5(x - \mathbf{1})^2 + 5 + 0.5 \\ &= -5(x - \mathbf{1})^2 + 5.5 \end{aligned}$$



El vértice de la gráfica de f es (1, 5.5) y la parábola se muestra en la figura de la derecha (solo se toma la parte que queda sobre el eje x pues $f(x)$ debe ser positivo o cero). Por lo tanto, la altura máxima que alcanza la pelota es 5.5 metros después de transcurrir 1 segundo.

En resumen

En problemas donde se plantea una función cuadrática cuyo coeficiente de x^2 es negativo y se desea conocer el valor máximo de una cantidad, este se encuentra en el vértice de la gráfica de la función.

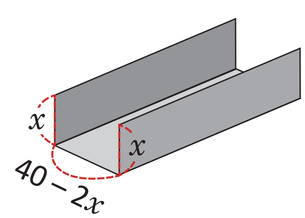
Problemas

1. Carlos, un adolescente con discapacidad intelectual, es parte del equipo de baloncesto que participará en los Juegos Latinoamericanos de Olimpiadas Especiales. Si Carlos lanza la pelota hacia el aro en determinada posición, la distancia en metros de la pelota al suelo después de x segundos está dada por la función:

$$f(x) = -5x^2 + 6x + 1.4$$

   ¿Cuál es la altura máxima que alcanzará la pelota lanzada por Carlos? ¿Cuántos segundos transcurrirán para alcanzar dicha altura?

2. Marta colocará un canal en el techo de su casa. Para ello dispone de una hoja rectangular metálica cuyos lados deben doblarse para formar el canal. Si la hoja tiene 40 centímetros de ancho, ¿cuántos centímetros debe doblarse en cada lado para que den al canal su mayor capacidad?



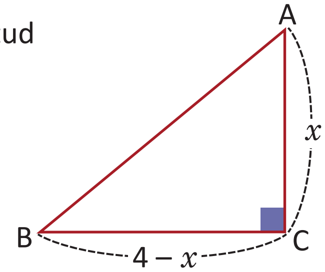
La capacidad será máxima cuando el área de la sección transversal de lados x y $40 - 2x$ sea máxima.

3.4 Aplicación: valor mínimo*

Problema inicial

En el triángulo rectángulo ABC, ¿cuál debe ser el valor de x para que la longitud de la hipotenusa sea mínima?

Por el teorema de Pitágoras:
$AB^2 = BC^2 + CA^2$,
además, $0 < x < 4$.



Solución

Utilizando el teorema de Pitágoras:

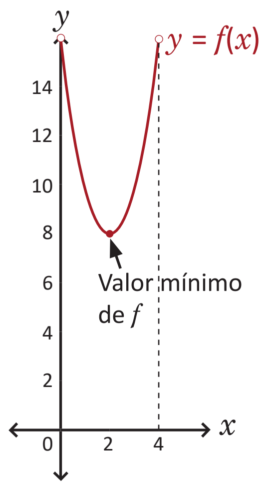
$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$

se sustituyen BC y CA por $4 - x$ y x, respectivamente, y se reducen los términos semejantes:

$$\begin{aligned} AB^2 &= (4 - x)^2 + x^2 \\ &= 16 - 8x + x^2 + x^2 \\ &= 2x^2 - 8x + 16 \end{aligned}$$

La longitud de la hipotenusa AB será mínima cuando AB^2 también sea mínima. Sea $f(x) = 2x^2 - 8x + 16$; como es una función cuadrática y el coeficiente de x^2 es positivo entonces la parábola se abre hacia arriba. Se completa el cuadrado para trazar la gráfica de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x^2 - 4x) + 16 \\ &= 2\left[x^2 - 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2\right] + 16 \\ &= 2[x^2 - 4x + \mathbf{2}^2 - \mathbf{2}^2] + 16 \\ &= 2[(x - \mathbf{2})^2 - 4] + 16 \\ &= 2(x - \mathbf{2})^2 - 8 + 16 \\ &= 2(x - \mathbf{2})^2 + 8 \end{aligned}$$



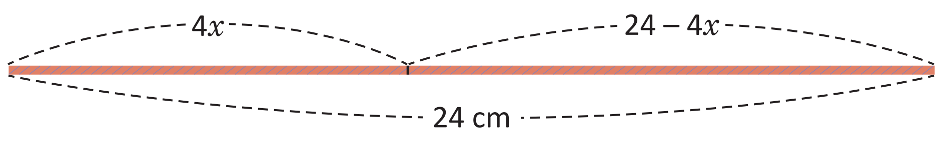
En la figura de la derecha se muestra la gráfica en el intervalo $]0, 4[$ cuyo vértice es $(2, 8)$. Por lo tanto, para que la longitud de la hipotenusa sea mínima, x debe ser igual a 2.

En resumen

En problemas donde se plantea una función cuadrática cuyo coeficiente de x^2 es positivo y se desea conocer el valor mínimo de una cantidad, este se encuentra en el vértice de la gráfica de la función.

Problemas

1. Encuentra dos números enteros cuya diferencia sea igual a 20 y su producto sea mínimo.
2. Un pedazo de lana de 24 cm de longitud se divide en dos partes con las que se formarán dos cuadrados. Si la primera parte tiene longitud $4x$ y la segunda tiene longitud $24 - 4x$, ¿cuál debe ser el valor de x que reduzca al mínimo la suma de las áreas de los dos cuadrados?



3.5 Intersección de la gráfica de una función cuadrática con el eje y

Problema inicial

Encuentra las coordenadas del punto de intersección de la gráfica de la función cuadrática f con el eje y si:

a) $f(x) = (x - 3)^2 - 4$ b) $f(x) = -2x^2 - 12x - 18$

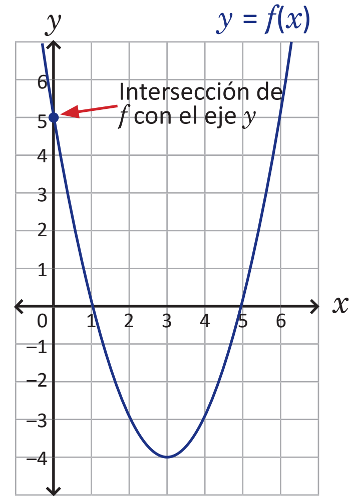
La primera coordenada del punto de intersección de la gráfica de f con el eje y es igual a cero.

Solución

a) La intersección de la gráfica de f con el eje y ocurre cuando $x = 0$, es decir, se debe calcular el valor de $f(0)$ y las coordenadas del punto de corte entre f y el eje y serán $(0, f(0))$.

$$\begin{aligned} f(0) &= (0 - 3)^2 - 4 \\ &= 9 - 4 \\ &= 5 \end{aligned}$$

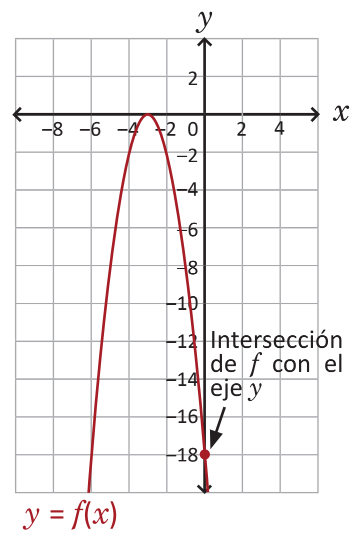
Por lo tanto, el punto de intersección de la gráfica de $f(x) = (x - 3)^2 - 4$ con el eje y es $(0, 5)$.



b) De forma similar al literal anterior, encontrar las coordenadas del punto de intersección de la gráfica de $f(x) = -2x^2 - 12x - 18$ con el eje y equivale a encontrar $(0, f(0))$:

$$\begin{aligned} f(0) &= -2(0)^2 - 12(0) - 18 \\ &= -18 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el punto de intersección de la gráfica de $f(x) = -2x^2 - 12x - 18$ con el eje y es $(0, -18)$.



En general

Las coordenadas del punto de intersección de la gráfica de una función f con el eje y son: $(0, f(0))$. Si f es una función cuadrática entonces la gráfica de f corta al eje y en un único punto.

Problemas

1. Para cada caso, determina las coordenadas del punto de intersección de la gráfica de f con el eje y:

a) $f(x) = -(x + 4)^2 + 6$ b) $f(x) = 3(x - 2)^2 - 10$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

d) $f(x) = -2x^2 + 7$ e) $f(x) = -5(x + 10)^2$ f) $f(x) = 2x^2 + 24x + 52$

g) $f(x) = -3x^2 + 6x - 11$ h) $f(x) = x^2 - x - \frac{3}{4}$ i) $f(x) = x^2 + 5x + \frac{1}{5}$

2. ¿Es posible que una función cualquiera tenga dos intersecciones con el eje y? Justifica tu respuesta.

3.6 Intersección de la gráfica de una función cuadrática con el eje x

Problema inicial

Encuentra las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica de la función cuadrática f con el eje x si:

a) $f(x) = (x - 3)^2 - 4$ b) $f(x) = -2x^2 - 12x - 18$ c) $f(x) = 3x^2 + 2$

La segunda coordenada del punto de intersección de la gráfica de f con el eje x es igual a cero.

Solución

a) Los puntos de intersección de la gráfica de f con el eje x tienen segunda coordenada igual a cero, es decir, son de la forma $(x, 0)$. Para encontrar el valor de x se iguala a cero la ecuación de f y se resuelve la ecuación cuadrática:

$$(x - 3)^2 - 4 = 0$$
$$(x - 3)^2 = 4$$
$$x - 3 = \pm 2$$
$$x = 3 \pm 2 \longrightarrow x = 1 \text{ y } x = 5$$

Observa la gráfica de $f(x) = (x - 3)^2 - 4$ trazada en la clase anterior.

Por lo tanto, los puntos de intersección de $f(x) = (x - 3)^2 - 4$ con el eje x son $(1, 0)$ y $(5, 0)$.

b) De forma similar al literal anterior, se iguala la ecuación de la función f y se resuelve la ecuación cuadrática (en este caso puede factorizarse el polinomio):

$$-2x^2 - 12x - 18 = 0$$
$$x^2 + 6x + 9 = 0$$
$$(x + 3)^2 = 0$$
$$x + 3 = 0$$
$$x = -3$$

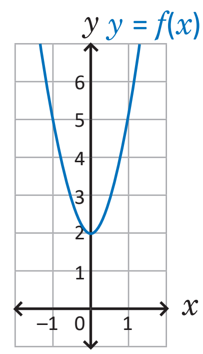
Observa la gráfica de $f(x) = -2x^2 - 12x - 18$ trazada en la clase anterior.

Por lo tanto, el punto de intersección de $f(x) = -2x^2 - 12x - 18$ con el eje x es $(-3, 0)$.

c) Al igualar a cero la ecuación de la función:

$$3x^2 + 2 = 0$$

Esta ecuación cuadrática no tiene solución en los números reales. Esto quiere decir que la gráfica de la función f no corta al eje x, como lo muestra la figura de la derecha.



En general

Las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica de una función f con el eje x se encuentra igualando a cero la ecuación de f y resolviendo la ecuación cuadrática resultante:

1. Si la ecuación tiene dos soluciones reales $x = x_1$ y $x = x_2$ entonces la gráfica de f corta al eje x en los puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.
2. Si la ecuación tiene una solución real $x = x_1$ entonces la gráfica de f corta al eje x en el punto $(x_1, 0)$. Este punto es el vértice de la parábola y se dice que la gráfica de f es tangente al eje x.
3. Si la ecuación no tiene solución real entonces la gráfica de f no corta al eje x, es decir, la parábola se encuentra arriba del eje o debajo de este.

Problemas

Para cada caso, determina las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica de f con el eje x:

a) $f(x) = 3x^2$ b) $f(x) = -(x + 4)^2$ c) $f(x) = -(x + 6)^2 + 1$

d) $f(x) = (x - 5)^2 - 9$ e) $f(x) = -(x - 2)^2 - 4$ f) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

g) $f(x) = 3x^2 + 9x - 30$ h) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$ i) $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$

3.7 Desigualdad cuadrática $ax^2 + bx + c \geq 0$, $a > 0$, parte 1*

Problema inicial

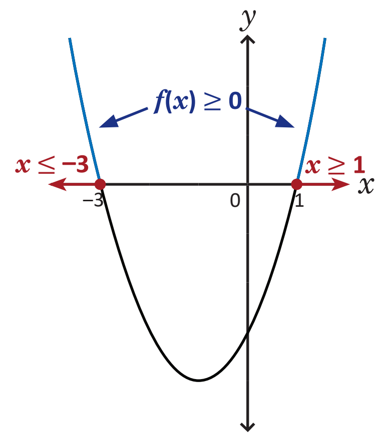
Determina todos los valores de x que satisfacen la desigualdad:

$$x^2 + 2x - 3 \geq 0$$

Solución

Sea $f(x) = x^2 + 2x - 3$; deben determinarse los valores de x para los cuales $f(x)$ es igual o mayor que cero, es decir, los puntos donde la gráfica de f corta al eje x o está arriba de este. Se encuentran las intersecciones con el eje x resolviendo la ecuación cuadrática $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} &x^2 + 2x - 3 = 0 \\ &(x + 3)(x - 1) = 0 \\ &x + 3 = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0 \\ &\quad x = -3 \qquad\quad x = 1 \end{aligned}$$



La gráfica de f corta al eje x en los puntos $(-3, 0)$ y $(1, 0)$. Como el coeficiente de x^2 es positivo la parábola se abre hacia arriba como lo muestra la figura de la derecha.

Se observa lo siguiente: $f(x) \geq 0$ se cumple para $x \leq -3$ o $x \geq 1$; la desigualdad $x \leq -3$ denota al intervalo $]-\infty, -3]$; mientras que, $x \geq 1$ al intervalo $[1, +\infty[$. La solución $x \leq -3$ o $x \geq 1$ se escribe, utilizando intervalos:

$$x \in]-\infty, -3] \cup [1, \infty[$$

El símbolo "∪" indica que el valor de x está en el primer intervalo o en el segundo.

En general

Resolver una desigualdad de la forma $ax^2 + bx + c \geq 0$ con $a > 0$ significa encontrar todos los valores de x para los cuales $ax^2 + bx + c \geq 0$ es verdadero. Si se denota por $f(x) = ax^2 + bx + c$ entonces $f(x) \geq 0$ significa gráficamente encontrar los valores de x para los cuales la parábola de f corta o se encuentra arriba del eje x.

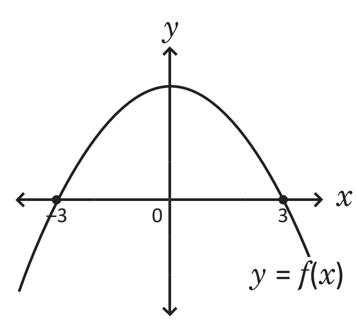
Si la gráfica de f corta al eje x en dos puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$, con $x_1 < x_2$, entonces $f(x) \geq 0$ se cumple para $x \leq x_1$ o $x \geq x_2$. Utilizando intervalos se escribe: $x \in]-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty[$.

Problemas

1. Para cada caso encuentra los valores de x para los cuales se satisface la desigualdad:

a) $x^2 - 4 \geq 0$	b) $4x^2 - 9 \geq 0$	c) $2x^2 + 4x \geq 0$
d) $x^2 - 10x + 21 \geq 0$	e) $x^2 + x - 20 \geq 0$	f) $x^2 + 7x + 6 \geq 0$
g) $x^2 - 4x - 45 \geq 0$	h) $x^2 - 8 \geq 0$	i) $9x^2 - 5 \geq 0$

2. Utilizando la gráfica de la función cuadrática f que se muestra a la derecha, determina los valores de x para los cuales se cumple $f(x) \geq 0$:



3.8 Desigualdad cuadrática $ax^2 + bx + c \geq 0$, $a > 0$, parte 2

Problema inicial

Determina todos los valores de x que satisfacen, en cada caso, la desigualdad:

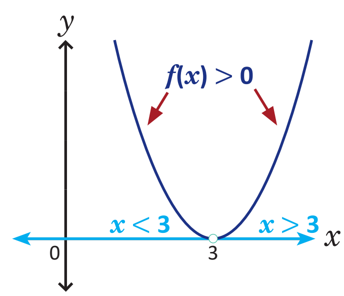
a) $x^2 - 6x + 9 > 0$ b) $x^2 - 2x + 2 > 0$

Solución

a) Sea $f(x) = x^2 - 6x + 9$; de forma similar a la clase anterior, resolver $f(x) = x^2 - 6x + 9 > 0$ equivale a encontrar los valores de x para los cuales la gráfica de f queda arriba del eje x; esta vez no deben incluirse los puntos donde $f(x) = 0$ ya que la desigualdad es estricta, sin embargo deben encontrarse las intersecciones con el eje x:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 &= 0 \\ (x-3)^2 &= 0 \\ x - 3 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

La gráfica de f corta al eje x en el vértice (3, 0) y es una parábola que se abre hacia arriba como lo muestra la figura de la derecha. Se cumple lo siguiente: $f(x)$ es positivo para cualquier número real x diferente de 3.



Por lo tanto, $x < 3$ o $x > 3$; utilizando intervalos se escribe:

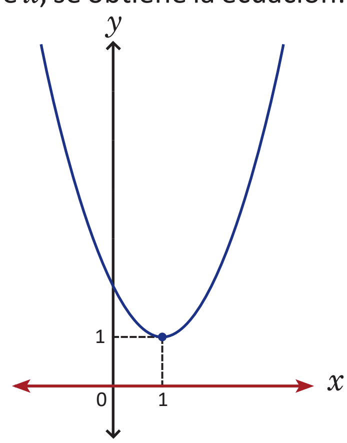
$$x \in]-\infty, 3[\cup]3, \infty[.$$

b) Sea $f(x) = x^2 - 2x + 2$; si se buscan las intersecciones de la gráfica de f con el eje x, se obtiene la ecuación:

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

Esta ecuación no tiene solución en los números reales. Si se completa el cuadrado para llevar a la forma $a(x-h)^2 + k$ se obtiene:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 2x) + 2 \\ &= \left[x^2 - 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2\right] + 2 \\ &= (x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + 2 \\ &= (x - \mathbf{1})^2 + 1 \end{aligned}$$



La gráfica es una parábola abierta hacia arriba, con vértice en (1, 1) como muestra la figura de la derecha. Toda la gráfica queda sobre el eje x, por lo tanto $f(x) > 0$ para todo número real x.

En general

Dada la desigualdad $ax^2 + bx + c > 0$, con $a > 0$; al denotar por $f(x) = ax^2 + bx + c$:

1. Si la gráfica de f corta al eje x únicamente en el vértice $(h, 0)$ entonces $f(x) > 0$ se cumple para $x < h$ o $x > h$. Utilizando intervalos se escribe: $x \in]-\infty, h[\cup]h, \infty[$.
2. Si la gráfica de f NO corta al eje x entonces $f(x) > 0$ se cumple para todo número real x, es decir, la gráfica de f queda arriba del eje x.

Problemas

Para cada caso encuentra los valores de x para los cuales se satisface la desigualdad:

a) $2x^2 > 0$ b) $x^2 - 4x + 6 > 0$ c) $x^2 + 4x + 4 > 0$

d) $x^2 - 14x + 49 \geq 0$ e) $x^2 + 2x + 3 \geq 0$ f) $\frac{1}{3}x^2 \geq 0$

Unidad 4

3.9 Desigualdad cuadrática $ax^2 + bx + c \leq 0$, $a > 0$

Problema inicial

Determina todos los valores de x que satisfacen, en cada caso, la desigualdad:

a) $x^2 + 2x - 3 \leq 0$　　b) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$　　c) $x^2 - 2x + 2 < 0$

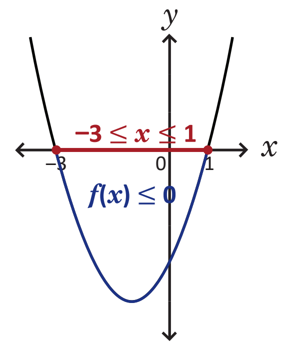
Utiliza las gráficas de la clase anterior.

Solución

a) Sea $f(x) = x^2 + 2x - 3$; ahora deben encontrarse los valores de x para los cuales la gráfica de f queda debajo del eje x, incluyendo los puntos donde $f(x) = 0$.

La parábola de la función se muestra a la derecha, en ella se observa que $f(x) \leq 0$ si $-3 \leq x \leq 1$. Utilizando intervalos se escribe:

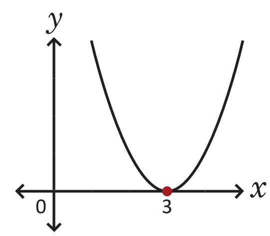
$$x \in [-3, 1].$$



b) Sea $f(x) = x^2 - 6x + 9$; en la clase anterior se llegó a $f(x) = (x - 3)^2$, cuya gráfica se muestra a la derecha; se deben encontrar los valores de x para los cuales $f(x)$ es menor o igual a cero. La parábola de la función queda siempre arriba del eje x, y es igual a cero en el vértice de la parábola. Por lo tanto, la desigualdad:

$$f(x) = (x - 3)^2 \leq 0$$

se cumple únicamente para $x = 3$.



c) Sea $f(x) = x^2 - 2x + 2$; en la clase anterior se concluyó que $f(x) > 0$ para todo número real x, es decir, la gráfica queda totalmente arriba del eje x. Por lo tanto, $f(x) = x^2 - 2x + 2 < 0$ no tiene solución.

En general

Resolver una desigualdad de la forma $ax^2 + bx + c \leq 0$, con $a > 0$, significa encontrar todos los valores de x para los cuales $ax^2 + bx + c \leq 0$ es verdadero. Si se denota por $f(x) = ax^2 + bx + c$, entonces $f(x) \leq 0$ significa gráficamente encontrar los valores de x para los cuales la parábola de f corta o se encuentra debajo del eje x. Para ello se encuentran las intersecciones de la gráfica de la función con el eje x:

1. Si la gráfica de f corta al eje x en dos puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$, con $x_1 < x_2$, entonces $f(x) \leq 0$ se cumple para $x_1 \leq x \leq x_2$. Utilizando intervalos se escribe: $x \in [x_1, x_2]$.
2. Si la gráfica de f corta al eje x únicamente en el vértice $(h, 0)$ entonces $f(x) \leq 0$ se cumple solo para $x = h$.
3. Si la gráfica de f no corta al eje x entonces $f(x) \leq 0$ no tiene solución.

En las desigualdades de la forma $ax^2 + bx + c < 0$ NO deben incluirse los puntos donde $f(x) = 0$; para el numeral 2, $f(x) < 0$ no tiene solución.

Problemas

Para cada caso encuentra los valores de x para los cuales se satisface la desigualdad:

a) $x^2 - 4 \leq 0$　　b) $x^2 + 2x \leq 0$　　c) $x^2 - 10x + 21 < 0$

d) $x^2 + 8x + 15 < 0$　　e) $2x^2 \leq 0$　　f) $x^2 - 10x + 25 < 0$

g) $x^2 - 4x - 3 \leq 0$　　h) $x^2 + 2x - 8 < 0$　　i) $x^2 + 8 \leq 0$

3.10 Desigualdad cuadrática, $a < 0$

Problema inicial

Determina todos los valores de x que satisfacen la desigualdad:

$$-x^2 + 4x - 3 < 0.$$

Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$

Solución

Utilizando propiedades de desigualdades, se multiplican ambos miembros de la desigualdad por – 1, esto hace que el símbolo “menor que” cambie a “mayor que”:

$$(-x^2 + 4x - 3)(-1) > 0(-1)$$

$$x^2 - 4x + 3 > 0 \qquad \text{-----------------} \ (1)$$

La desigualdad (1) se resuelve como lo visto en las clases anteriores. Primero se encuentran las intersecciones de $f(x) = x^2 - 4x + 3$ con el eje x:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$(x - 1)(x - 3) = 0$$
$$x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0$$
$$x = 1 \qquad\qquad x = 3$$

Entonces, $x^2 - 4x + 3 > 0$ si $x < 1$ o $x > 3$. Esta solución satisface también la desigualdad original:

$$-x^2 + 4x - 3 < 0.$$

Por lo tanto, $x \in]-\infty, 1[\cup]3, \infty[$.

En general

A las desigualdades de la forma:

a) $ax^2 + bx + c \geq 0$ b) $ax^2 + bx + c \leq 0$ c) $ax^2 + bx + c > 0$ d) $ax^2 + bx + c < 0$

donde a es cualquier número real diferente de cero, se les llama **desigualdades cuadráticas con una incógnita**. Si $a > 0$ entonces su solución está dada como en las clases 3.7, 3.8 y 3.9; si $a < 0$ entonces se multiplica por –1 ambos miembros de la desigualdad y se soluciona como en las clases 3.7, 3.8 y 3.9.

Problemas

1. Para cada caso encuentra los valores de x para los cuales se satisface la desigualdad:

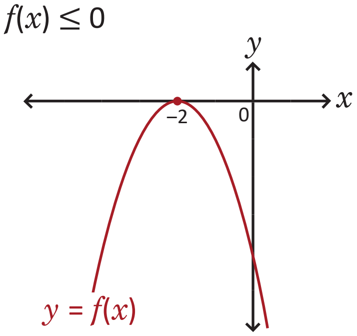
a) $-x^2 + 2x + 15 \leq 0$ b) $-(x + 3)^2 \leq 0$ c) $-x^2 + 1 \geq 0$

d) $-x^2 - 6x - 5 \leq 0$ e) $-2x^2 + 4x - 3 > 0$ f) $-x^2 + 8x - 16 \geq 0$

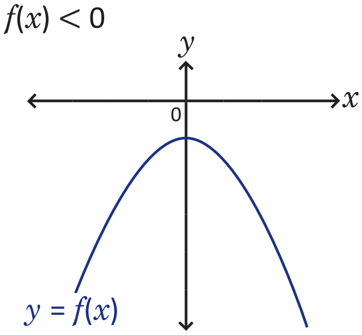
g) $-x^2 - 4x - 4 < 0$ h) $-2x^2 - 1 > 0$ i) $-x^2 + 5 > 0$

2. Utilizando la gráfica de f en cada caso, encuentra los valores de x que satisfacen la desigualdad:

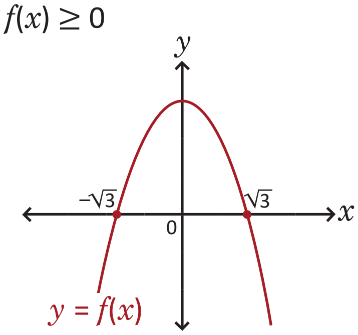
a) $f(x) \leq 0$



b) $f(x) < 0$



c) $f(x) \geq 0$



3.11 Cuadro de variación, parte 1*

Problema inicial

Resuelve la siguiente desigualdad cuadrática:

$$2x^2 - x - 3 > 0$$

Solución

Se escribe $2x^2 - x - 3$ como producto de binomios:

$$2x^2 - x - 3 = (x + 1)(2x - 3)$$

la desigualdad se convierte en $(x + 1)(2x - 3) > 0$. Para que este producto sea mayor que cero ambos binomios deben ser, o bien positivos o bien negativos. Es necesario dividir los números reales en intervalos y determinar, en cada intervalo, el signo de $x + 1$ y de $2x - 3$. Los intervalos a considerar se toman con base a las raíces del trinomio, a saber:

$$(x + 1)(2x - 3) = 0$$

$$x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad 2x - 3 = 0$$

$$x = -1 \qquad\qquad x = \frac{3}{2}$$

Se construye una tabla como la siguiente, cuya línea superior simula la recta numérica donde se colocan los valores -1 y $\frac{3}{2}$ por ser las raíces del trinomio y se coloca cero en la línea vertical donde el factor es cero:

	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		∞
$x + 1$			0				
$2x - 3$					0		
$(x + 1)(2x - 3)$							

Para determinar el signo de cada factor en un intervalo basta tomar un número que se encuentre dentro del mismo y evaluarlo en el factor. Por ejemplo, -2 pertenece al intervalo $]-\infty, -1[$; entonces si $x = -2$ resulta $-2 + 1 = -1$ negativo para el primer factor y $2(-1) - 3 = -5$ negativo para el segundo factor. En la tabla se escriben los signos de los factores:

	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		∞
$x + 1$		$-$	0				
$2x - 3$		$-$			0		
$(x + 1)(2x - 3)$							

También se puede resolver la desigualdad lineal $x + 1 > 0$ para determinar los intervalos donde $x + 1$ es positivo y donde es negativo.

De forma similar se hace para los otros intervalos; la tabla queda de la siguiente manera:

	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		∞
$x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x + 1)(2x - 3)$							

Luego, se multiplican los signos de los factores en cada columna, por ejemplo en el intervalo $]-\infty, -1[$ los signos de los factores $x + 1$ y $2x - 3$ son "–" y "–" respectivamente, por tanto al multiplicarlos el resultado será "+":

	$-\infty$	-1		$\frac{3}{2}$	∞
$x + 1$	$-$	0	$+$		$+$
$2x - 3$	$-$		$-$	0	$+$
$(x + 1)(2x - 3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Los ceros sobre las líneas indican que en ese número el producto de los factores es igual a cero. Como interesa cuando $(x + 1)(2x - 3) > 0$ entonces los valores para x serán aquellos donde el producto es positivo.

Por lo tanto, $2x^2 - x - 3 = (x + 1)(2x - 3) > 0$ si $x \in]-\infty, -1[\cup \left]\frac{3}{2}, \infty\right[$.

En resumen

Si x_1 y x_2 son raíces del polinomio $ax^2 + bx + c$, con $x_1 < x_2$ entonces para resolver una desigualdad de la forma $ax^2 + bx + c > 0$ o $ax^2 + bx + c < 0$ se hace lo siguiente:

1. Se escribe $ax^2 + bx + c = pq$, donde p y q son binomios lineales cuyas raíces son x_1 y x_2, respectivamente.
2. Se dividen los números reales en los intervalos $]-\infty, x_1[$, $]x_1, x_2[$ y $]x_2, \infty[$.
3. Si n es un número que pertenece a cualquiera de los tres intervalos descritos en 2 y el valor de p o q es positivo o negativo al evaluar $x = n$ entonces p o q será positivo o negativo en todo el intervalo.
4. Se multiplican los signos de p y q en cada intervalo. La solución serán aquellos intervalos donde el producto sea positivo para el caso de $ax^2 + bx + c > 0$, o negativo para el caso de $ax^2 + bx + c < 0$.

A la tabla construida en la solución del Problema inicial se le llama **cuadro de variación**.

Problemas

1. Resuelve las siguientes desigualdades:

a) $2x^2 - x - 1 > 0$ b) $3x^2 + 8x - 3 < 0$ c) $3x^2 - 8x + 4 < 0$

d) $2x^2 + 9x + 4 > 0$ e) $-3x^2 - 4x + 15 > 0$ f) $-4x^2 + 7x - 3 < 0$

g) $6x^2 + x - 1 < 0$ h) $x^2 - 4x + 4 > 0$ i) $4x^2 - 1 < 0$

2. Antonio es dueño de una tienda de ropa. Ha estimado que la ganancia diaria en dólares en la venta de camisas está dado por la función $f(x) = x^2 - 14x - 32$, donde x es la cantidad de camisas vendidas en un día. ¿Cuántas camisas debe vender Antonio para obtener ganancias y no pérdidas?

3.12 Cuadro de variación, parte 2

Problema inicial

Resuelve la siguiente desigualdad cuadrática:

$$-6x^2 \geq -11x - 7$$

Deben dejarse todos los términos a un solo lado del símbolo "≥".

Solución

Deben dejarse todos los términos a un solo lado del símbolo "≥". Utilizando propiedades de desigualdades se suma $6x^2$ a ambos miembros de la desigualdad:

$$\cancel{-6x^2} \cancel{+6x^2} \geq -11x - 7 + 6x^2$$
$$0 \geq 6x^2 - 11x - 7$$

esta última es equivalente a $6x^2 - 11x - 7 \leq 0$. Se factoriza el trinomio como producto de dos binomios lineales, a saber:

$$6x^2 - 11x - 7 = (3x - 7)(2x + 1)$$

De lo anterior se obtienen las raíces del polinomio $x = -\frac{1}{2}$ y $x = \frac{7}{3}$. De forma similar a la clase anterior se construye el cuadro de variación para determinar los intervalos donde el polinomio es negativo:

	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{7}{3}$		∞
$3x - 7$	$-$		$-$	0	$+$	
$2x + 1$	$-$	0	$+$		$+$	
$(3x - 7)(2x + 1)$	$+$	0	$-$	0	$+$	

El símbolo "≤" indica que también deben tomarse en cuenta los valores de x para los cuales el polinomio $6x^2 - 11x - 7$ es igual a cero.

Entonces, $6x^2 - 11x - 7 = (3x - 7)(2x + 1) \leq 0$ si $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{7}{3}\right]$. Este intervalo también satisface la desigualdad original.

En resumen

En una desigualdad cuadrática se cumplen las siguientes propiedades:

1. Sumar o restar un número real a ambos miembros no altera la desigualdad.
2. Multiplicar o dividir ambos miembros de la desigualdad por un número real positivo no altera la desigualdad.
3. Multiplicar o dividir ambos miembros de la desigualdad por un número real negativo cambia el sentido de la desigualdad.

Problemas

1. Para cada caso, determina el intervalo donde se encuentran los valores de x si:

a) $6x^2 \geq 11x - 3$ b) $15x^2 + 2x \leq 1$ c) $31x + 15 \geq -10x^2$

d) $3x \geq -20x^2 + 2$ e) $-6x^2 + 23x - 7 \geq 0$ f) $9x^2 - 25 \geq 0$

g) $x^2 - 2 \leq 0$ h) $4x^2 - 3 \leq 0$ i) $x^2 \leq 1 + 2x$

2. Sean x_1 y x_2 las raíces del trinomio $x^2 + bx + c$ con $x_1 < x_2$. Utilizando el cuadro de variación demuestra que la solución de la desigualdad $x^2 + bx + c \leq 0$ es $[x_1, x_2]$.

3.13 Practica lo aprendido

1. Determina si la función f es creciente o decreciente en el intervalo dado, luego escribe el intervalo donde se encuentran los valores de $f(x)$:

   a) $f(x) = -(x + 3)^2 - 5;\ -7 \leq x \leq -4$

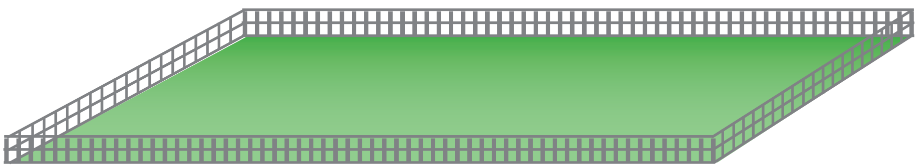
   b) $f(x) = 2(x - 2)^2 - 4;\ -1 \leq x \leq 1$

2. En cada caso, determina el intervalo donde se encuentran los valores de $f(x)$ si:

   a) $f(x) = -2(x + 3)^2 + 7;\ -4 \leq x \leq -1$

   b) $f(x) = (x - 5)^2 - 8;\ 1 \leq x \leq 8$

3. En el Instituto Nacional Puerto El Triunfo construirán un huerto escolar en un terreno con forma rectangular, para promover el consumo de frutas y hortalizas, y así contribuir a la formación de valores y conocimientos en el cuido del medio ambiente. Si se cuenta con 32 metros de malla para cercar el terreno, ¿cuáles deben ser las dimensiones del terreno para tener la mayor área posible? ¿Cuál sería el área para el huerto escolar?



4. Una sastrería confecciona y distribuye trajes para hombre cuyo precio es de \$100.00. Si una tienda de ropa solicita 50 o más trajes, entonces el precio se reduce a razón de \$0.50 por el número pedido. ¿De qué cantidad debe ser el pedido para producir la máxima ganancia para la sastrería? No tomes en cuenta los costos de producción.

5. Un proyectil se lanza verticalmente hacia arriba desde el suelo. La altura alcanzada, en metros, después de x segundos está dada por la función:

$$f(x) = -5x^2 + 100x.$$

   Calcula la altura máxima que alcanza el proyectil y el tiempo que tarda en llegar al suelo.

6. Encuentra dos números enteros cuya suma sea igual a 30 y la suma de sus cuadrados sea mínima.

7. Encuentra las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica de f con los ejes de coordenadas si:

   a) $f(x) = (x - 3)^2 - 9$

   b) $f(x) = -(x + 5)^2 + 4$

   c) $f(x) = 2x^2 - 8$

   d) $f(x) = 3x^2 + 4x - 1$

8. Resuelve las siguientes desigualdades:

   a) $x^2 + 2x - 8 \geq 0$

   b) $x^2 - 5x - 24 < 0$

   c) $x^2 + 4x + 4 \leq 0$

   d) $-\frac{1}{3}x^2 + 2 > 0$

   e) $-x^2 - 6x \geq 10$

   f) $2x^2 + 15 < 13x$

   g) $-3x^2 - 11x + 4 > 0$

   h) $5x^2 + 3x \leq 8$

   i) $-4x^2 + 20x - 9 < 0$

   j) $x^2 + 3x - 5 < 0$

4.1 Función $f(x) = x^3$

Problema inicial

Sea $y = x^3$:

$x^3 = (x)(x)(x)$

1. Completa la siguiente tabla (aproxima hasta las centésimas):

x	–1	–0.8	–0.6	–0.4	–0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	–1										

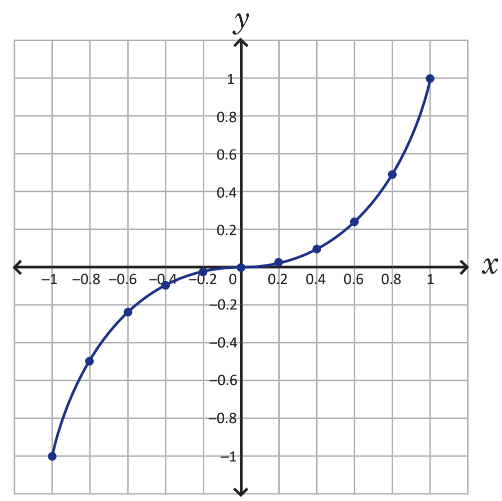
2. Ubica los pares ordenados (x, y) encontrados en el literal anterior. ¿Cómo es la línea que se forma?

Solución

1. Cada valor de y es igual a multiplicar el correspondiente valor de x por sí mismo tres veces. Debe cuidarse el signo, por ejemplo: $(-1)^3 = (-1)(-1)(-1) = -1$. De acuerdo con esto, la tabla queda de la siguiente manera:

x	–1	–0.8	–0.6	–0.4	–0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	–1	–0.51	–0.22	–0.06	–0.01	0	0.01	0.06	0.22	0.51	1

2. Los puntos del numeral anterior quedan situados como se muestra en la figura de la derecha. La línea que se forma no es recta y tampoco es una parábola.



x^3 es la potencia cúbica del número x; también se lee "x elevado al cubo".

Conclusión

La ecuación $y = x^3$ corresponde a una función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que asigna a cada número real x su valor elevado al cubo. Para la función $f(x) = x^3$: el dominio y rango son el conjunto de los números reales, su gráfica pasa por el origen y es creciente en todo su dominio.

Una función x de A en B significa que a cada elemento x del conjunto A le corresponde un único elemento y del conjunto B. Si la función es de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ entonces los valores para x son números reales y su correspondiente $f(x)$ también es un número real.

Problemas

1. Sea $f(x) = x^3$; completa la siguiente tabla y ubica los puntos $(x, f(x))$ en el plano cartesiano (aproxima hasta las centésimas). Utiliza los puntos encontrados en el problema 1 del Problema inicial para continuar la gráfica de f:

x	–2	–1.8	–1.6	–1.4	–1.2	1.2	1.4	1.6	1.8	2
$f(x)$										

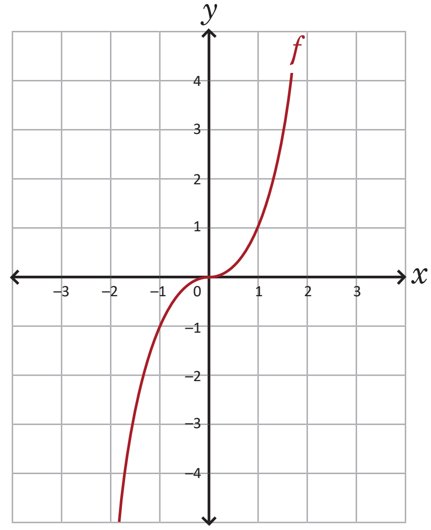
2. ¿Qué relación hay entre los valores de $f(x) = x^3$ cuando $x = -1$ y $x = 1$? ¿Y si $x = -2$ y $x = 2$?

3. En general, ¿qué relación hay entre los valores de $f(x) = x^3$ cuando $x = -m$ y $x = m$?

4.2 Función $f(x) = ax^3$, $a > 0$

Problema inicial

Con la gráfica de $f(x) = x^3$, realiza lo siguiente:



1. Utiliza los valores de $f(x)$ para completar la tabla y grafica las funciones $g(x) = 2x^3$ y $h(x) = \frac{1}{2}x^3$:

x	–2	–1.5	–1	–0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	–8	–3.38	–1	–0.13	0	0.13	1	3.38	8
$g(x)$									
$h(x)$									

2. ¿Cuáles son las similitudes y diferencias de las funciones g y h con respecto a la función f?

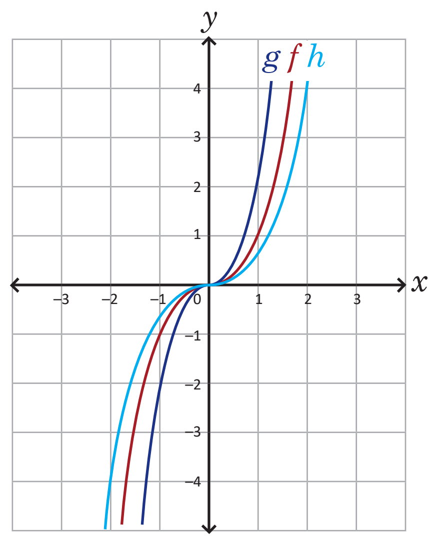
Solución

1. Los valores de $g(x)$ son el resultado de multiplicar por 2 los de $f(x)$; mientras que los de $h(x)$ son el resultado de multiplicar por $\frac{1}{2}$ los de $f(x)$. La tabla queda de la siguiente manera:

x	–2	–1.5	–1	–0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	–8	–3.38	–1	–0.13	0	0.13	1	3.38	8
$g(x)$	–16	–6.76	–2	–0.26	0	0.26	2	6.76	16
$h(x)$	–4	–1.69	–0.5	–0.07	0	0.07	0.5	1.69	4

×2 ×$\frac{1}{2}$

Las gráficas de g y h se muestran en la figura de la derecha.



2. Similitudes entre las funciones:
   a) el dominio y el rango de las tres es $\mathbb{R}$;
   b) las gráficas de las tres funciones tienen la misma forma y pasan por el origen.

   Diferencias entre las funciones:
   a) todos los puntos, excepto el origen, no coinciden;
   b) si $x < 0$ entonces $g(x)$ está debajo de $f(x)$ y $h(x)$ está arriba de $f(x)$;
   c) si $x > 0$ entonces $g(x)$ está arriba de $f(x)$ y $h(x)$ está debajo de $f(x)$.

En resumen

La función $g(x) = ax^3$, con $a > 0$, tiene como dominio y rango el conjunto de los números reales y es creciente en todo su dominio; su gráfica pasa por el origen, tiene la misma forma que la gráfica de $f(x) = x^3$ y resulta de multiplicar por a los valores de $f(x)$.

Problemas

Utilizando la gráfica de $f(x) = x^3$ grafica las funciones $g(x) = 3x^3$ y $h(x) = \frac{1}{3}x^3$.

Elabora una tabla similar a la del Problema inicial.

4.3 Función $f(x) = -ax^3$, $a > 0$

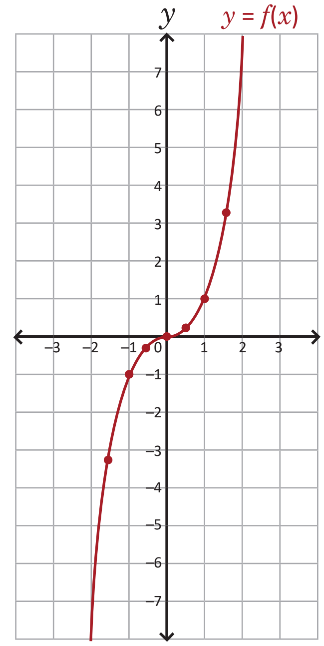
Problema inicial

Con la gráfica de $f(x) = x^3$, realiza lo siguiente:

1. Utiliza los valores de $f(x)$ para completar la tabla y grafica la función $g(x) = -x^3$:

x	–2	–1.5	–1	–0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	–8	–3.38	–1	–0.13	0	0.13	1	3.38	8
$g(x)$									

2. ¿Cuáles son las similitudes y diferencias entre las funciones f y g?



La función de la forma:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

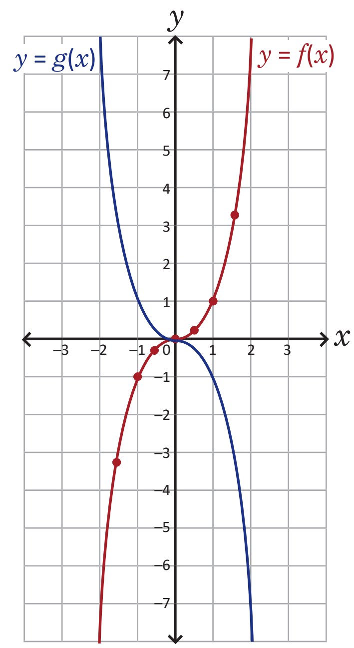
donde a es un número real diferente de cero, se llama **función cúbica**; $f(x) = ax^3$ es un caso particular de la función cúbica.

Solución

1. Los valores de $g(x)$ son el resultado de multiplicar por –1 los de $f(x)$; la tabla queda de la siguiente manera:

x	–2	–1.5	–1	–0.5	0	0.5	1	1.5	2	
$f(x)$	–8	–3.38	–1	–0.13	0	0.13	1	3.38	8	$\times(-1)$
$g(x)$	8	3.38	1	0.13	0	–0.13	–1	–3.38	–8	

Las gráficas de f y g se muestran en la figura de la derecha.



2. Similitudes entre las funciones:
   a) el dominio y el rango de ambas es $\mathbb{R}$;
   b) las gráficas tienen la misma forma, y pasan por el origen.

   Diferencias entre las funciones:
   a) todos los puntos, excepto el origen, no coinciden;
   b) si $x < 0$ entonces $g(x)$ está sobre el eje x mientras que $f(x)$ está debajo del eje;
   c) si $x > 0$ entonces $g(x)$ está debajo del eje x mientras que $f(x)$ está sobre el eje.

En resumen

Si $f(x) = ax^3$ y $a > 0$ entonces la gráfica de la función $g(x) = -f(x) = -ax^3$ es una **reflexión con respecto al eje x** de la gráfica de la función f; tiene como dominio y rango el conjunto de los números reales y es decreciente en todo su dominio; su gráfica pasa por el origen, tiene la misma forma que la gráfica de f y resulta de multiplicar por –1 los valores de $f(x)$.

Problemas

Utilizando la gráfica de $f(x)$ grafica la función $g(x)$ en cada caso:

a) $f(x) = 2x^3$, $g(x) = -2x^3$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^3$, $g(x) = -\frac{1}{2}x^3$

c) $f(x) = 3x^3$, $g(x) = -3x^3$

4.4 Función $f(x) = \frac{k}{x}$ y sus desplazamientos

Problema inicial

Sean $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = -\frac{2}{x}$:

1. Encuentra los valores de $f(x)$ y $g(x)$ correspondientes a cada valor de x en la siguiente tabla:

x	-8	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$												
$g(x)$												

2. Determina otros valores para f y g que no estén en 1, luego ubica los puntos $(x, f(x))$ y $(x, g(x))$ y traza las gráficas de ambas funciones.

3. Encuentra las ecuaciones de las funciones cuyas gráficas resultan de desplazar las de f y g una unidad horizontalmente hacia la derecha y tres unidades verticalmente hacia arriba.

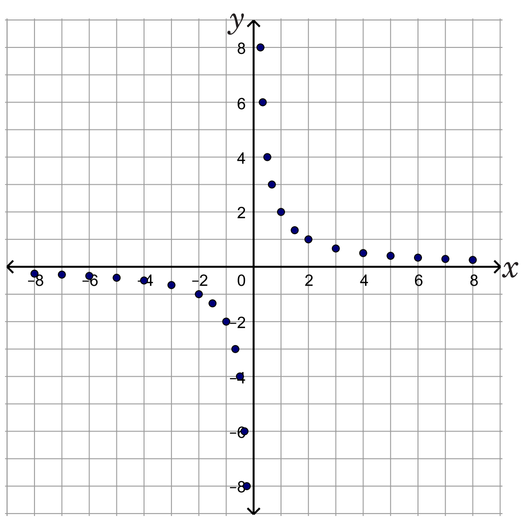
Solución

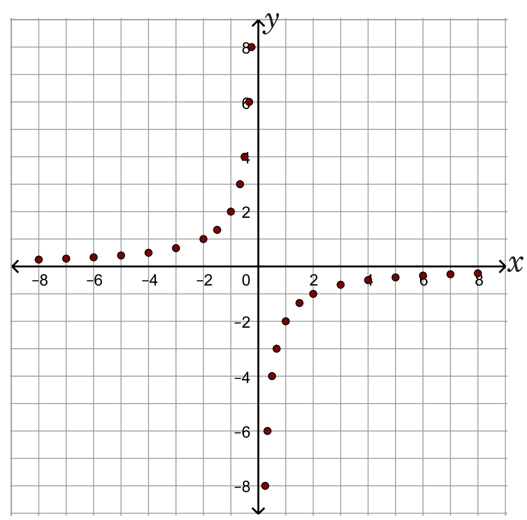
1. La tabla queda de la siguiente manera:

x	-8	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$	–0.25	–0.5	–1	–2	–4	–8	8	4	2	1	0.5	0.25
$g(x)$	0.25	0.5	1	2	4	8	–8	–4	–2	–1	–0.5	–0.25

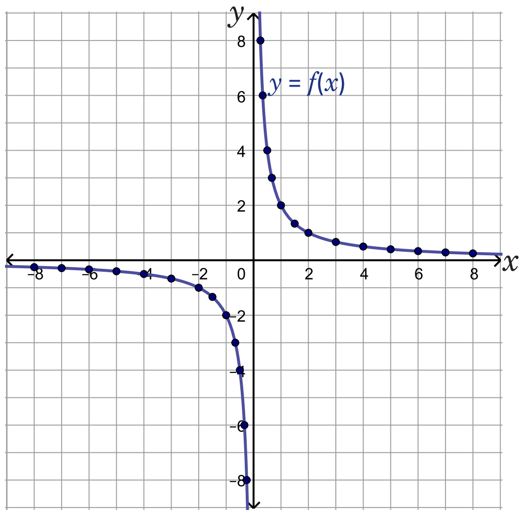
2. Se encuentran otros valores de f y g, por ejemplo para $x = -7, -6, -5, -3, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 3, 5, 6, 7$ y se ubican los puntos $(x, f(x))$ y $(x, g(x))$ en el plano cartesiano:

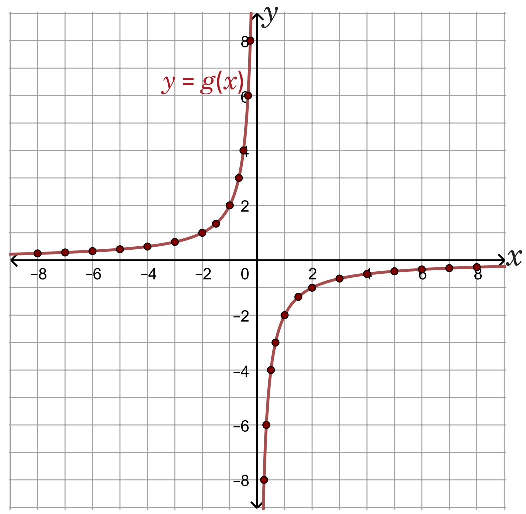
x	-7	-6	-5	-3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	3	5	6	7
$f(x)$	–0.29	–0.33	–0.4	–0.67	–1.33	–3	–6	6	3	1.33	0.67	0.4	0.33	0.29
$g(x)$	0.29	0.33	0.4	0.67	1.33	3	6	–6	–3	–1.33	–0.67	–0.4	–0.33	–0.29





Esto permite visualizar mejor la forma de cada gráfica, como se muestra a continuación:





3. Sea $h(x)$ la función cuya gráfica resulta de desplazar la de f una unidad horizontalmente hacia la derecha y tres unidades verticalmente hacia arriba. Si (a, b) es un punto sobre la gráfica de h entonces $(a-1, b-3)$ es un punto sobre la gráfica de f, es decir:

$$f(a-1) = b-3$$
$$b = f(a-1)+3$$

luego, la ecuación de $h(x)$ es $f(x-1)+3$, o sea, $h(x) = \frac{2}{x-1} + 3$.

De forma similar, si $l(x)$ es la función cuya gráfica resulta de desplazar la de g una unidad horizontalmente a la derecha y tres unidades verticalmente hacia arriba entonces:

$$l(x) = g(x-1) + 3 = -\frac{2}{x-1} + 3.$$

Conclusión

Sea $f(x) = \frac{k}{x}$, con k un número real diferente de cero. A f se le llama **función de proporcionalidad inversa**; cuando el valor absoluto de x, o sea $|x|$, aumenta sin límites entonces la gráfica de f se acerca al eje x sin llegar a cortarlo; además, si $|x|$ se acerca a cero entonces la gráfica de $f(x)$ se acerca al eje y sin llegar a cortarlo.

En general, la gráfica de la función de proporcionalidad inversa tiene la misma forma que las del problema inicial según sea el caso ($k > 0$ o $k < 0$).

Lo anterior indica que la función de proporcionalidad inversa no posee intersecciones con los ejes de coordenadas; al **eje x** y al **eje y** se les llama **asíntota horizontal** y **asíntota vertical**, respectivamente, de la gráfica de $f(x) = \frac{k}{x}$.

Si $g(x)$ es la función cuya gráfica resulta de desplazar la de $f(x) = \frac{k}{x}$, p unidades horizontalmente y q unidades verticalmente entonces:

$$g(x) = \frac{k}{x-p} + q.$$

Si $p > 0$, el desplazamiento es hacia la derecha, y si $p < 0$, entonces es hacia la izquierda. Por otra parte, si $q > 0$, el desplazamiento es hacia arriba, y si $q < 0$, entonces es hacia abajo.

Problemas

Usando las funciones f y g del Problema inicial, encuentra las ecuaciones de las funciones cuyas gráficas resultan de desplazar las de f y g, p unidades horizontalmente y q unidades verticalmente:

a) $p = 2, q = 1$ b) $p = -2, q = 1$ c) $p = 2, q = -1$ d) $p = -2, q = -1$

4.5 Gráfica de la función $h(x) = \frac{k}{x-p} + q$*

Problema inicial

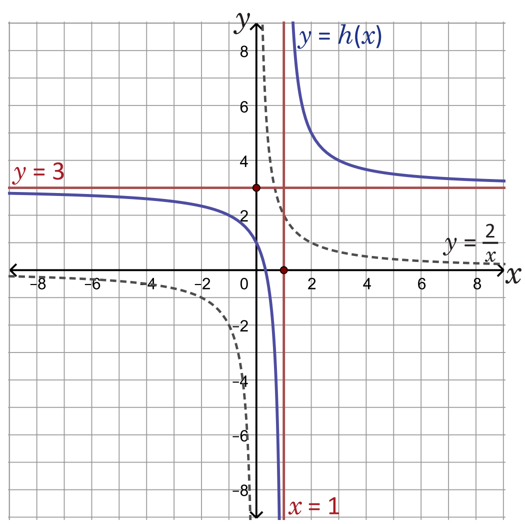
Sea $h(x) = \frac{2}{x-1} + 3$

1. Encuentra las ecuaciones de las asíntotas de la gráfica de h.
2. Traza las asíntotas del literal anterior, y luego la gráfica de h.
3. Encuentra el dominio y el rango de la función h.

Solución

1. De la clase anterior se sabe que la gráfica de $h(x)$ corresponde a un desplazamiento de una unidad horizontalmente y tres unidades verticalmente de la gráfica de $f(x) = \frac{2}{x}$. Las asíntotas se trasladan de la misma manera, es decir, si $y = 0$ (eje x) y $x = 0$ (eje y) son las asíntotas de f entonces $y = 3$ y $x = 1$ son las asíntotas de la gráfica de h.

2. La gráfica de $y = 3$ es una línea recta horizontal que pasa por (0, 3); mientras que $x = 1$ es una línea recta vertical que pasa por (1, 0). Luego de trazar las asíntotas se traza la gráfica de h, cuya forma es similar a la de $f(x) = \frac{2}{x}$:



3. En la ecuación de la función h, el denominador no puede ser igual a cero; esto se cumple si x es diferente de 1 y, por tanto, el dominio de h es $]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$. De la gráfica de $h(x)$ se deduce que su rango es $]-\infty, 3[\cup]3, \infty[$.

Conclusión

Sean k, p y q números reales, con k diferente de cero. Las asíntotas horizontal y vertical de la función $h(x) = \frac{k}{x-p} + q$ son $y = q$ y $x = p$, respectivamente. El dominio de la función h es $D_h =]-\infty, p[\cup]p, \infty[$, y su rango es $R_h =]-\infty, q[\cup]q, \infty[$.

Al momento de trazar la gráfica de h se recomienda primero trazar las asíntotas y luego la gráfica.

Problemas

Traza las asíntotas y la gráfica de la función $h(x)$ en cada caso; luego encuentra su dominio y su rango:

a) $h(x) = \frac{1}{x-2} + 1$

b) $h(x) = \frac{1}{x+2} + 1$

c) $h(x) = \frac{1}{x+1} - 1$

d) $h(x) = -\frac{1}{x-2} + 1$

Unidad 4

4.6 Gráfica de la función $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

Problema inicial

Sea $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$:

1. Efectúa la división $(x + 1) \div (x - 2)$; escribe $\dfrac{x+1}{x-2}$ en la forma $\dfrac{k}{x-p} + q$.
2. Traza la gráfica de $f(x)$.

Solución

1. Utilizando la división sintética se obtiene lo siguiente:

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & 1 \\ 2 & \downarrow & 2 \\ \hline & 1 & 3 \end{array}$$

En la división sintética se colocan los coeficientes de los polinomios del dividendo y divisor en la siguiente forma:

$$\begin{array}{c|c} & \text{Dividendo} \\ a & \\ \hline & \text{Cociente} \ | \ \text{Residuo} \end{array}$$

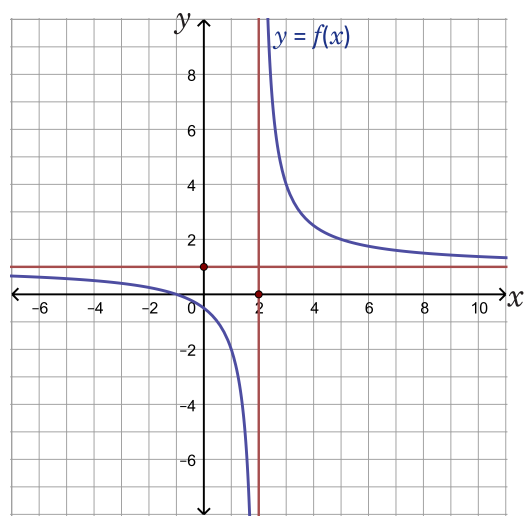
Luego, $x + 1 = 1(x - 2) + 3$. Se dividen ambos miembros de esta ecuación por $x - 2$:

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{1\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} + \frac{3}{x-2} = \frac{3}{x-2} + 1.$$

Por lo tanto, $\dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{3}{x-2} + 1$.

2. Del numeral anterior, $f(x) = \dfrac{3}{x-2} + 1$; entonces la gráfica de f se obtiene desplazando dos unidades horizontalmente y una unidad verticalmente la gráfica de $y = \dfrac{3}{x}$.

Las asíntotas de f son $y = 1$ y $x = 2$.



Conclusión

Sean a, b y d números reales no todos iguales a cero y $c \neq 0$; se le llama **función racional** a la función de la forma $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. La ecuación de f puede llevarse a la forma $\dfrac{k}{x-p} + q$ efectuando la división del polinomio del numerador entre el polinomio del denominador.

En general, una función racional es de la forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios cualesquiera, no solamente polinomios lineales.

Problemas

Para cada caso, escribe la ecuación de la función f en la forma $\dfrac{k}{x-p} + q$, luego traza las asíntotas y la gráfica de la función:

a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$ b) $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$ c) $f(x) = \dfrac{-x+3}{x-2}$

4.7 Función irracional $f(x) = a\sqrt{x}$

Problema inicial

Sea $y = \sqrt{x}$:

1. Completa la siguiente tabla (aproxima hasta las centésimas):

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0									

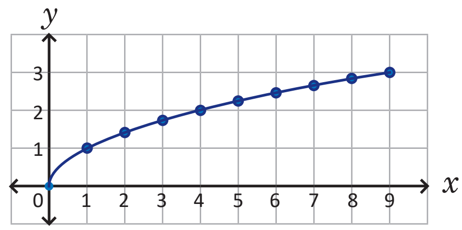
2. Coloca los puntos (x, y) en el plano cartesiano y únelos con una línea, ¿es similar a alguna gráfica de las funciones estudiadas anteriormente?
3. ¿Para cuáles valores de x se encuentra definido el valor de y?

Solución

1. La tabla queda de la siguiente manera:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	1	1.41	1.73	2	2.24	2.45	2.65	2.83	3

2. La línea que se forma al unir los puntos aparece en la figura de la derecha. La línea se asemeja a la mitad de una parábola, solo que esta vez se abre hacia la derecha.



3. El valor de y se encuentra definido para todo x positivo o igual a cero, es decir, $x \in [0, \infty[$.

Conclusión

La ecuación $y = \sqrt{x}$ es la ecuación de una función de $[0, \infty[$ a $\mathbb{R}$, cuya gráfica pasa por el origen y es similar a la mitad de una parábola que se abre hacia la derecha. En general, $f(x) = a\sqrt{x}$, con $a \neq 0$, es una función cuyo dominio es $[0, \infty[$ y:

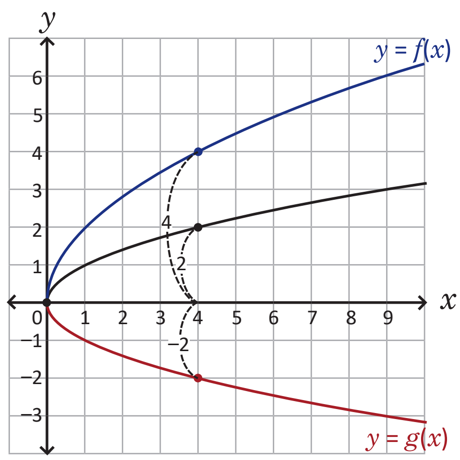
1. Si $a > 0$ entonces el rango de f es $[0, \infty[$ y su gráfica queda arriba del eje x.
2. Si $a < 0$ entonces el rango de f es $]-\infty, 0]$ y su gráfica queda debajo del eje x.

Ejemplo

Grafica las funciones $f(x) = 2\sqrt{x}$ y $g(x) = -\sqrt{x}$, encuentra el dominio y el rango en cada una.

La gráfica de f queda arriba del eje x y resulta de multiplicar por 2 los valores de $\sqrt{x}$; mientras que la gráfica de g queda debajo del eje x y resulta de multiplicar por –1 los valores de $\sqrt{x}$.

Ambas gráficas se muestran en la figura de la derecha, su dominio es $[0, \infty[$ y los rangos son $R_f = [0, \infty[$, $R_g =]-\infty, 0]$.



Problemas

Para cada caso, grafica la función f, encuentra el dominio y el rango:

a) $f(x) = 3\sqrt{x}$ b) $f(x) = -2\sqrt{x}$ c) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$

Unidad 4

4.8 Función irracional $f(x) = \sqrt{ax}$

Problema inicial

Sea $f(x) = \sqrt{-x}$:

1. ¿Cuál es el dominio de la función f?
2. Calcula los valores de $f(x)$ en la siguiente tabla, luego traza la gráfica de la función (aproxima hasta las centésimas):

x	–9	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0
$f(x)$										

3. ¿Cuál es el rango de la función?

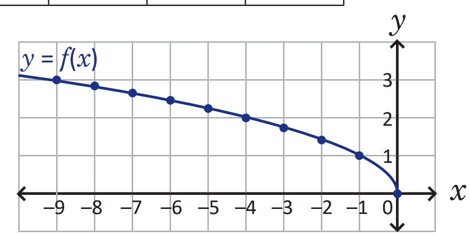
Solución

1. Los números dentro de la raíz deben ser mayores o iguales a cero; entonces el dominio de la función deben ser los números reales para los cuales $-x \geq 0$, es decir, $x \leq 0$. Por lo tanto $D_f =]-\infty, 0]$.

2. La tabla queda de la siguiente manera:

x	–9	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0
$f(x)$	3	2.83	2.65	2.45	2.24	2	1.73	1.41	1	0

La gráfica de f se muestra en la figura de la derecha:



3. El valor de $f(x) = \sqrt{-x}$ siempre será un número positivo o igual a cero, por lo tanto $R_f = [0, \infty[$.

En resumen

Las funciones de la forma $f(x) = a\sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{ax}$, donde a es un número real diferente de cero, son casos particulares de las llamadas **funciones irracionales**. Las gráficas de f y g pasan por el origen y se asemejan a la mitad de una parábola que se abre a lo largo del eje x. En el caso de la función g, su rango son los números reales positivos y el cero, o sea $[0, \infty[$, y:

1. Si $a > 0$ entonces el dominio de f es $[0, \infty[$ y su gráfica queda a la derecha del eje y.
2. Si $a < 0$ entonces el dominio de f es $]-\infty, 0]$ y su gráfica queda a la izquierda del eje y.

Ejemplo

Grafica la función $f(x) = \sqrt{2x}$, encuentra su dominio y su rango.

La gráfica de f queda a la derecha del eje y como se muestra en la figura de la derecha; $D_f = [0, \infty[$ y $R_f = [0, \infty[$.

La gráfica de $f(x) = \sqrt{2x}$ no es igual a la de $g(x) = 2\sqrt{x}$, sino a la de $h(x) = \sqrt{2}\sqrt{x}$.

Problemas

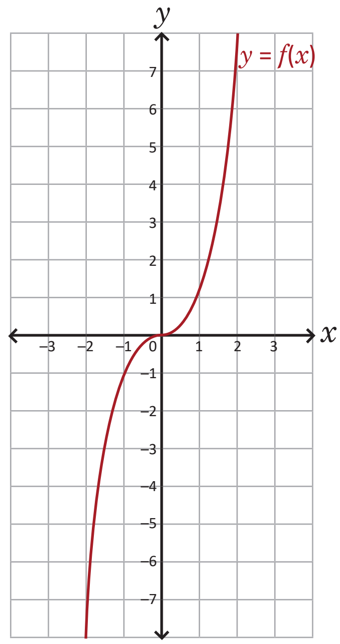
Para cada caso, grafica la función f, encuentra el dominio y el rango:

a) $f(x) = \sqrt{3x}$ b) $f(x) = \sqrt{-2x}$ c) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x}$

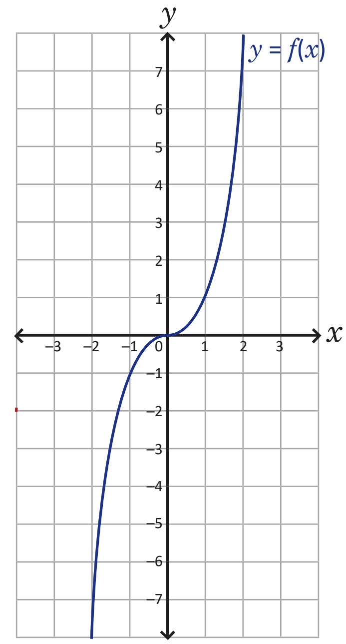
4.9 Practica lo aprendido

1. Utilizando la gráfica de $f(x) = x^3$, grafica la función g y encuentra su dominio y su rango:

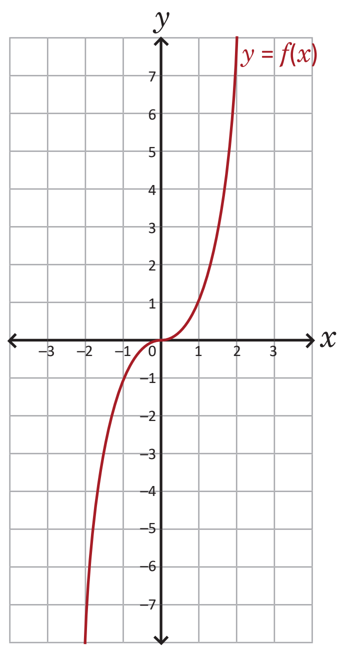
a) $g(x) = 4x^3$



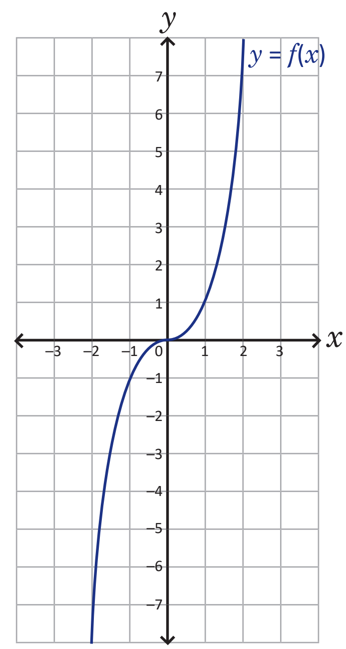
b) $g(x) = \frac{1}{4}x^3$



c) $g(x) = -4x^3$



d) $g(x) = -\frac{1}{4}x^3$



2. Para cada caso, grafica la función y encuentra su dominio y su rango.

a) $f(x) = \frac{-2x}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

3. Para cada caso, grafica la función y encuentra su dominio y su rango.

a) $f(x) = -3\sqrt{x}$ b) $f(x) = 4\sqrt{x}$

c) $f(x) = \sqrt{-3x}$ d) $f(x) = \sqrt{4x}$

4.10 Problemas de la unidad

1. Para cada caso, traza la gráfica de f, encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y el rango de la función:

   a) $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 3$

   b) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^2 + 1$

   c) $f(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$

   d) $f(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$

2. Encuentra la ecuación de la función cuadrática g si la gráfica pasa por los puntos (–12, 0), (–9, 3) y (–7, –5).

3. El sector de sol general del Estadio Nacional Jorge “Mágico” González tiene capacidad para 10 000 aficionados. En un determinado partido el precio del boleto para ese sector fue de \$10.00 y en promedio asistieron 3 000 aficionados. Un estudio de mercado indicó que por cada dólar que se hubiera bajado al precio del boleto, el promedio de asistencia hubiese aumentado en 1 000. ¿Cuál debió haber sido el precio para obtener la máxima ganancia en la venta de boletos para el sector de sol general?

4. Resuelve las siguientes desigualdades:

   a) $12x^2 - 5x - 2 \leq 0$

   b) $4x > -4x^2 + 15$

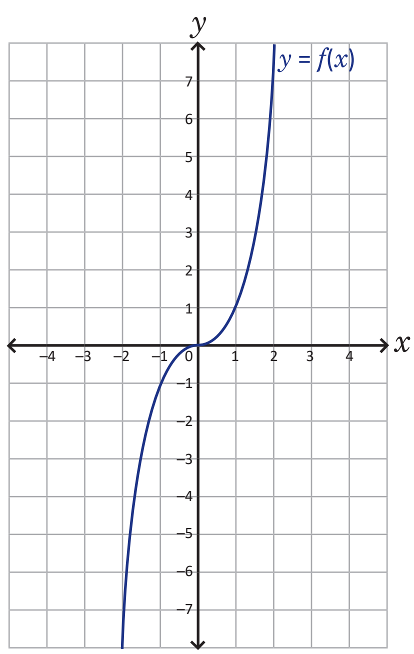
   c) $2x^2 - x \leq 1$

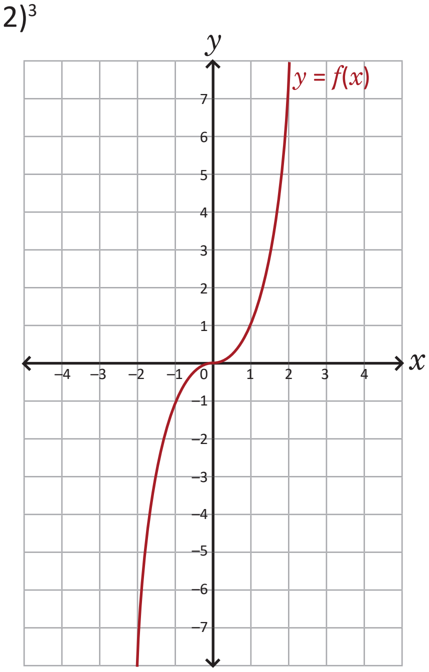
   d) $x^2 - 4x - 1 \geq 0$

5. Utilizando la gráfica de $f(x) = x^3$ traza la gráfica de la función g y encuentra el dominio y el rango:

   a) $g(x) = x^3 + 1$

   b) $g(x) = (x - 2)^3$





6. Para cada caso, grafica la función f y encuentra el dominio y el rango:

   a) $f(x) = -\sqrt{-x}$

   b) $f(x) = \sqrt{x} + 1$

   c) $f(x) = \sqrt{-x} - 3$

   d) $f(x) = \sqrt{x - 1}$

5.1 Práctica en GeoGebra: generalidades

GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas para todos los niveles educativos; en él pueden trabajarse contenidos relacionados con geometría, álgebra, estadística y cálculo, pues cuenta con numerosas herramientas fáciles de usar.

En esta clase explorarás la interfaz para conocer sobre sus generalidades y el uso de algunos comandos. Busca en tu computadora el ícono de GeoGebra (es el que aparece en la esquina superior derecha de esta página); si la PC no cuenta con el software puedes descargarlo de manera gratuita en el siguiente enlace:

GeoGebra https://goo.gl/jRmmdc

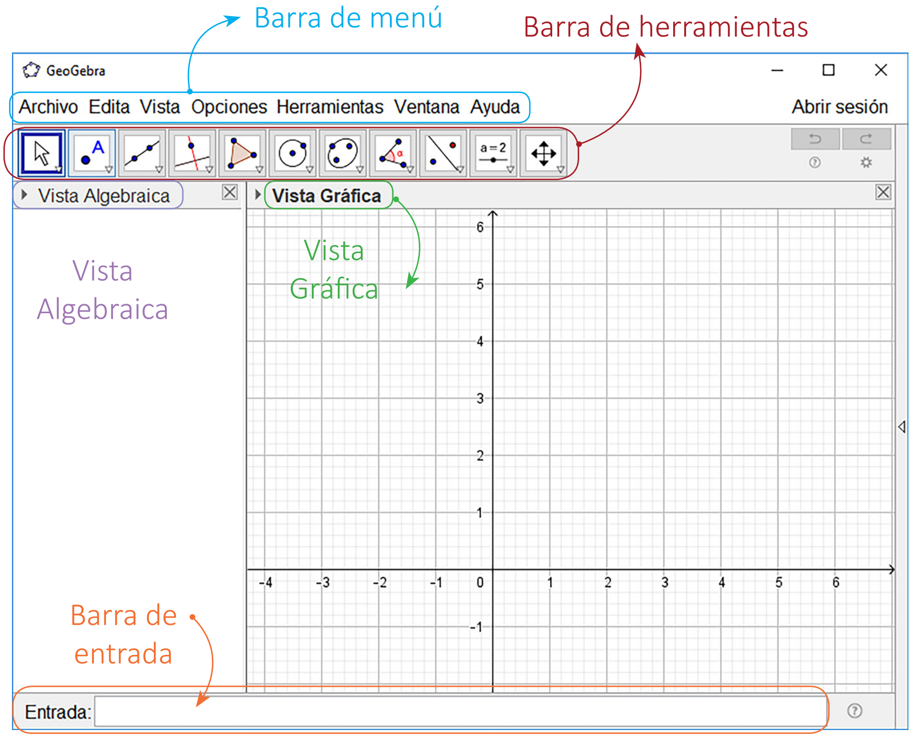
Asegúrate de descargar (instalar) “GeoGebra Clásico 5”. También puedes descargar la app para el celular o trabajar “GeoGebra en línea” en los siguientes enlaces:

App → https://goo.gl/wf5mHx **En línea** → https://goo.gl/ThXbeB

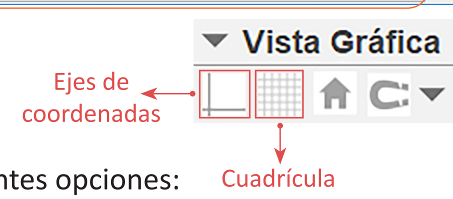
Práctica

Realiza lo siguiente:

1. Abre un nuevo archivo de GeoGebra dando clic al ícono del software. En la ventana puedes identificar las siguientes partes: la Barra de menú, la Barra de herramientas, la Vista Algebraica, la Vista Gráfica y la Barra de entrada.



2. Da clic sobre el triángulo que se encuentra a la izquierda de Vista Gráfica. Puedes ocultar o aparecer los ejes de coordenadas y la cuadrícula.

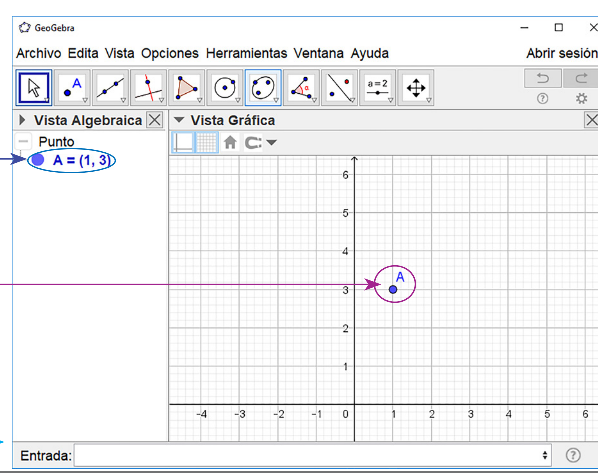


3. Para ubicar puntos en el plano puedes realizar una de las siguientes opciones:
   a) En la barra de entrada escribir las coordenadas del punto en la forma (x, y). Por ejemplo, al escribir (1,3) y presionar Enter, automáticamente aparecerá en la Vista Algebraica el punto A = (1,3) y en la Vista Gráfica el punto sobre el plano cartesiano:

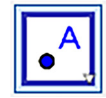
   Entrada: **(1,3)**

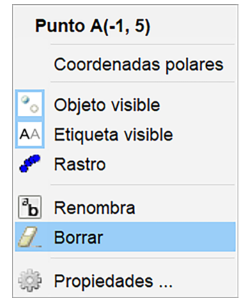
   GeoGebra designa los puntos con letras mayúsculas. Para denotar un punto con una letra específica, por ejemplo P(–2,5), se escribe en la barra de entrada:

   Entrada: **P=(–2,5)**



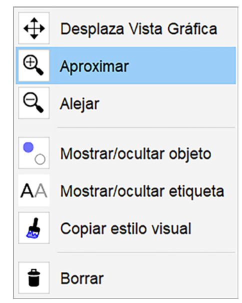
b) Selecciona la herramienta Punto. En la Vista Gráfica ubica el cursor en la posición donde quieras colocar el punto y luego da clic. Cuando las coordenadas del punto son números enteros es fácil utilizar esta herramienta y auxiliarse de la cuadrícula; caso contrario es mejor ingresar las coordenadas en la barra de entrada como en el literal anterior.





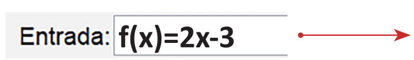
4. Para borrar objetos da clic derecho sobre ellos (ya sea en la Vista Algebraica o en la Vista Gráfica) y selecciona Borrar. Si lo que quieres es ocultar el objeto y no borrarlo, en el cuadro selecciona Objeto visible, desaparecerá de la Vista Gráfica pero permanecerá en la Vista Algebraica.

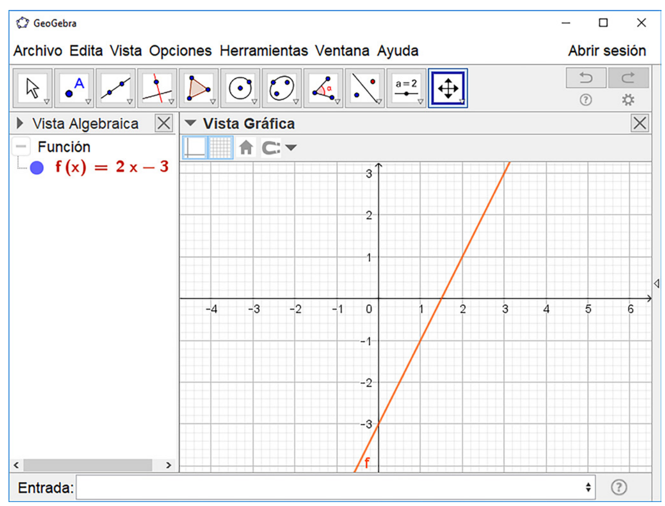
5. Para desplazar el plano cartesiano selecciona la herramienta Desplaza Vista Gráfica. Luego sobre la Vista Gráfica mantén presionado clic izquierdo y arrastra al lugar donde quieres colocar el plano.



6. Para acercar o alejar el plano cartesiano selecciona la esquina inferior derecha del ícono Desplaza Vista Gráfica y elige Aproximar o Alejar, luego da clic sobre la Vista Gráfica.

7. Para graficar funciones se utiliza la notación $f(x)$. Por ejemplo, para graficar la función $f(x) = 2x - 3$ se escribe f(x)=2x-3 en la barra de entrada seguido de Enter. En la Vista Algebraica aparecerá la ecuación de la función y en la Vista Gráfica su gráfica:





Puedes usar también g(x), h(x), etc.; la variable x siempre debe estar en minúscula, de esa forma GeoGebra la reconocerá como una variable.

8. En GeoGebra, para graficar funciones cuadráticas, la potencia x^2 se escribe x^2. Por ejemplo, para graficar $f(x) = 3x^2$ se escribe en la barra de entrada f(x)=3x^2.

Actividades

1. Ubica los siguientes puntos en el plano cartesiano, utilizando la barra de entrada y la herramienta "Punto" en aquellos casos que sea posible:

a) A(–3, 4) b) B(2, 7) c) P(–6, 0) d) $Q\left(4, -\frac{1}{2}\right)$

En GeoGebra la fracción $\frac{m}{n}$ se escribe m/n.

2. Grafica las siguientes funciones:

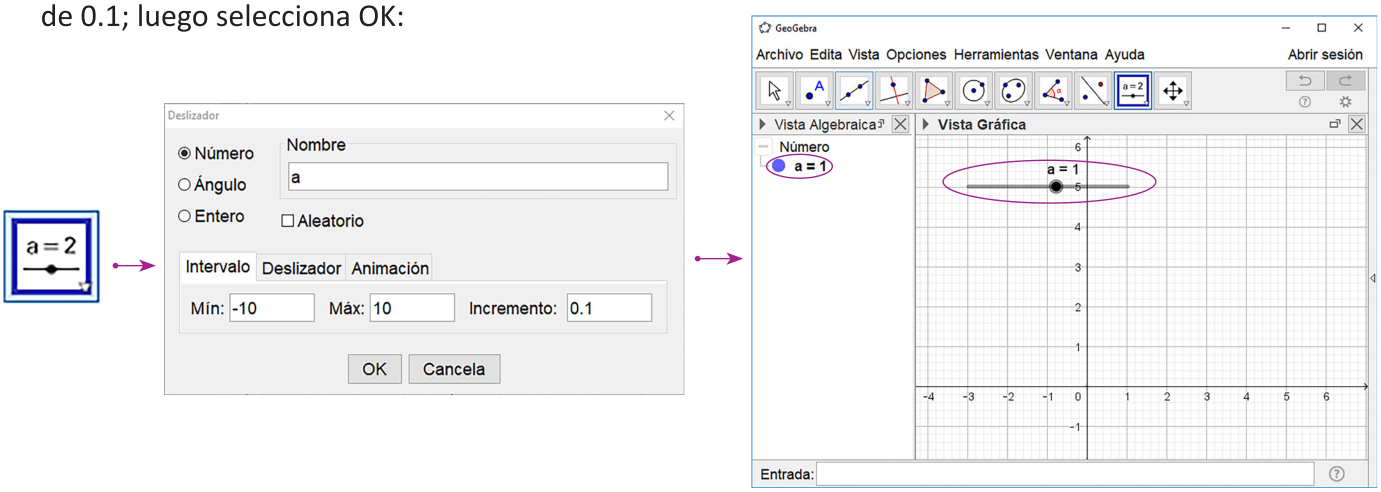
a) $f(x) = -x + 3$ b) $g(x) = \frac{2}{3}x - 5$ c) $h(x) = 4x^2$ d) $p(x) = -x^2$ e) $q(x) = \frac{x^2}{2}$

5.2 Práctica en GeoGebra: desplazamientos verticales

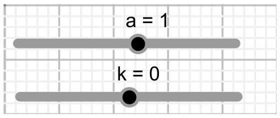
Esta práctica te ayudará a visualizar los desplazamientos verticales de funciones cuadráticas utilizando la herramienta Deslizador; un deslizador es una variable que toma valores determinados dentro de un intervalo indicado.

Práctica

1. Selecciona la herramienta Deslizador. Da clic sobre la Vista Gráfica, te aparecerá un cuadro de diálogo para especificar el nombre del deslizador, el tipo (número, ángulo o entero), el intervalo y el incremento. Nombra al deslizador **a**, en el intervalo coloca el valor mínimo –10 y el valor máximo 10, con un incremento de 0.1; luego selecciona OK:



2. De forma similar crea otro deslizador, nómbralo **k** y asígnale las mismas características de **a** (intervalo e incremento). Coloca el cursor sobre el punto que aparece en el deslizador, muévelo hasta que **k** tenga el valor de cero.



3. Escribe en la barra de entrada f(x)=ax^2; en la Vista Algebraica aparecerá la función $f(x) = 1x^2$ y en la Vista Gráfica la parábola correspondiente. Mueve el deslizador **a**, primero para valores positivos y luego negativos; ¿qué ocurre con la gráfica de f? Anota lo que observas en tu cuaderno.

4. Escribe en la barra de entrada g(x)=f(x)+k.

5. Para determinar el vértice de la gráfica de g escribe en la barra de entrada extremo. Selecciona la opción Extremo(<Polinomio>); luego, en lugar de <Polinomio> escribe "y=g(x)", aparecerá en la Vista Algebraica las coordenadas del vértice y en la Vista Gráfica el punto.

6. Mueve el deslizador **k**, primero para valores positivos y luego para negativos. ¿Qué ocurre con la gráfica y el vértice de la función si **k** es positivo o si es negativo? Anota lo que observas en tu cuaderno.

Actividades

Ahora utilizarás otra herramienta para construir la gráfica de la función $f(x) = x^2$ como se hizo en noveno grado, es decir, a partir de puntos:

1. Abre una nueva ventana. Crea un deslizador y nómbralo "**n**", con intervalo de –5 a 5 e incremento de 0.001. Mueve el deslizador hasta que **n** tenga el valor de –5, aleja la Vista Gráfica.
2. En la barra de entrada ingresa el punto "P=(n,n^2)". Luego da clic derecho sobre P y selecciona la opción "Rastro".
3. Da clic derecho sobre "**n**" y selecciona "Animación". Anota lo que observas en tu cuaderno.

5.3 Práctica en GeoGebra: desplazamientos horizontales

Con esta práctica visualizarás los desplazamientos horizontales, combinaciones de desplazamientos horizontales, verticales y las gráficas de otras funciones que no son cuadráticas.

Práctica

Desplazamientos horizontales:

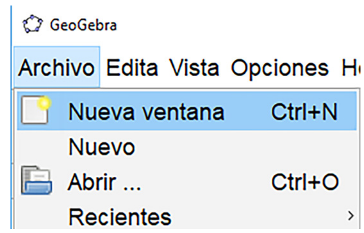
1. Crea dos deslizadores, al primero nómbralo **a** con intervalo de –10 a 10 e incremento 0.1, y al segundo nómbralo **h** y con las mismas características de **a** (intervalo e incremento). Mueve el deslizador **h** hasta que su valor sea igual a cero.

2. Crea las funciones “f(x)=ax^2” y “g(x)=f(x-h)” y encuentra el vértice de la gráfica de g.

3. Mueve el deslizador **a** de tal forma que sea diferente de 1. Luego activa la animación para el deslizador **h**, ¿qué ocurre con la gráfica y el vértice de g para valores positivos de **h**? ¿Y para valores negativos? Anota los resultados en tu cuaderno.

Combinaciones de desplazamientos horizontales y verticales:

1. Abre una nueva ventana en GeoGebra, ve al menú “Archivo” y selecciona “Nueva ventana”.



2. Crea tres deslizadores, nómbralos **a**, **h** y **k**, y asígnales las siguientes características: intervalo de –10 a 10 e incremento de 0.1. Mueve los deslizadores **h** y **k** para que su valor sea cero.

3. Crea las funciones “f(x)=ax^2” y “g(x)=f(x-h)+k”. Encuentra además el vértice de la gráfica de g.

4. Mueve el deslizador **a** de tal forma que sea diferente de 1. Luego mueve los deslizadores **h** y **k** en ese orden y sin activar la animación. Anota lo que le ocurre a la gráfica y el vértice de g con respecto a f.

Gráficas de otras funciones que no son cuadráticas:

1. Abre una nueva ventana en GeoGebra.

2. Crea el deslizador **m** y asígnale las siguientes características: intervalo de –4 a 4 e incremento de 0.001; mueve el deslizador para que su valor sea –4.

3. Crea el punto “P=(m,m^3)” y actívale el rastro. Luego activa la animación del deslizador **m**, ¿cuál es la función cuya gráfica se asemeja a la que se está elaborando?

4. Crea el deslizador **n** con intervalo de 0 a 30 e incremento 0.001; muévelo para que su valor sea 0.

5. Crea el punto “Q=(n, sqrt(n))” y actívale el rastro. Luego activa la animación del deslizador **n**, ¿cuál es la función cuya gráfica se asemeja a la que se está elaborando? ¿Para qué sirve el comando “sqrt”?

Actividades

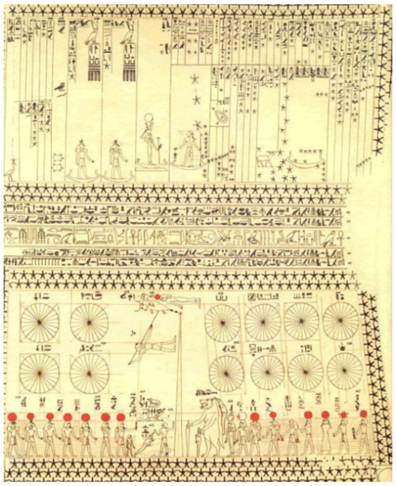
1. Utiliza GeoGebra para comprobar si has elaborado correctamente las gráficas de las funciones de los problemas, desde la clase 2.1 hasta la clase 2.8.

2. Comprueba los resultados de las gráficas de la clase 4.9, y los problemas 5 y 6 de la clase 4.10.

Unidad 5

Resolución de triángulos oblicuángulos

El área matemática de la trigonometría tiene su origen histórico en la astronomía. Esta disciplina fue muy estudiada por los antiguos pueblos egipcios e hindúes, sin embargo, no es hasta con el astrónomo y matemático griego Hiparco que se realiza la primera tabla trigonométrica, que estaba basada en mediciones de cuerdas que ubicaban en el firmamento las diferentes constelaciones. Es por su origen histórico que la medición de ángulos se da en un sistema sexagesimal; además, se solía dividir el cielo en 36 "decanos", y en cada uno de ellos se ubicaba las constelaciones respectivas.



Documento donde se muestra la división de la Tierra en 360° para ubicar las constelaciones.

El teodolito es un instrumento de medición de ángulos verticales y horizontales utilizado en actividades ingenieriles.

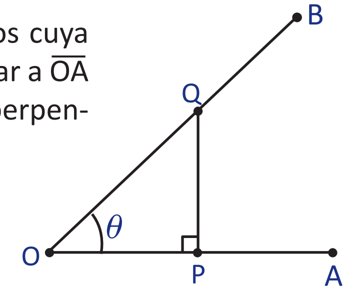
La resolución de triángulos oblicuángulos en la actualidad tiene muchas aplicaciones, algunas de las más importantes son por ejemplo, el cálculo de ángulos de elevación y depresión en diferentes situaciones, también sirve para calcular distancias específicas, ya sean estas alturas de objetos, distancias entre objetos, etc.

Al estudiar la unidad aprenderás sobre la definición de las razones trigonométricas de un ángulo agudo así como de cualquier ángulo, además, conocerás la aplicación de la trigonometría para el cálculo de ángulos de elevación y depresión, también los resultados importantes de la ley de los senos y del coseno.

1.1 Razón trigonométrica*

Problema inicial

Se consideran los segmentos de recta $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ y el ángulo formado entre ellos cuya medida es θ. Sobre $\overline{OB}$ se toma un punto Q y se traza un segmento perpendicular a $\overline{OA}$ y que pase por Q. Se define por P el punto de intersección entre este segmento perpendicular y $\overline{OA}$, como muestra la figura.



Del triángulo rectángulo OPQ se definen las razones: $\frac{PQ}{OQ}$, $\frac{OP}{OQ}$ y $\frac{PQ}{OP}$.

Justifica que las razones definidas no dependen de las longitudes de los lados del triángulo rectángulo OPQ.

Solución

Se toma un punto cualquiera Q' sobre $\overline{OB}$ distinto de Q. Se traza un segmento perpendicular a $\overline{OA}$ que pase por Q' y sea P' la intersección de esta perpendicular y $\overline{OA}$, como muestra la figura. Luego, los triángulos OPQ y OP'Q' son semejantes por el criterio AA (denotado $\Delta OPQ \sim \Delta OP'Q'$), por lo tanto

$$\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{OP}{OP'} = \frac{OQ}{OQ'}.$$

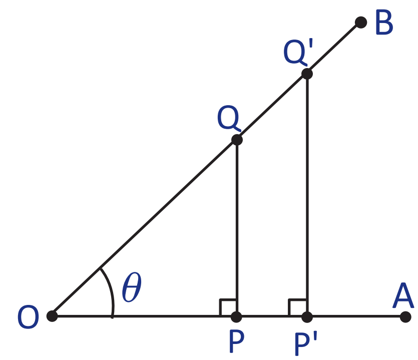
De $\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{OQ}{OQ'}$ se deduce que $\frac{PQ}{OQ} = \frac{P'Q'}{OQ'}$.

De $\frac{OP}{OP'} = \frac{OQ}{OQ'}$ se deduce que $\frac{OP}{OQ} = \frac{OP'}{OQ'}$.

De $\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{OP}{OP'}$ se deduce que $\frac{PQ}{OP} = \frac{P'Q'}{OP'}$.

Entonces, $\frac{PQ}{OQ} = \frac{P'Q'}{OQ'}$, $\frac{OP}{OQ} = \frac{OP'}{OQ'}$ y $\frac{PQ}{OP} = \frac{P'Q'}{OP'}$.

En una proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se cumple que $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

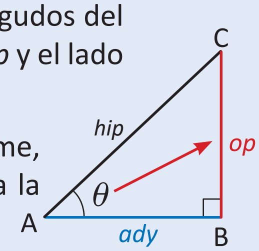


Por lo tanto, las razones $\frac{PQ}{OQ}$, $\frac{OP}{OQ}$ y $\frac{PQ}{OP}$ no dependen de las longitudes de los lados del triángulo.

Definición

Sea ABC un triángulo rectángulo, recto en B y sea θ la medida de uno de los ángulos agudos del ΔABC. Se define a la hipotenusa del triángulo por *hip*, el lado opuesto al ángulo como *op* y el lado adyacente al ángulo como *ady*.

Nótese que el opuesto y adyacente en un triángulo dependerá de cuál ángulo se tome, y se debe tener especial cuidado cuando el triángulo está ubicado en otra posición a la mostrada en la figura.



Se definen las razones sen θ, cos θ y tan θ, como sen $\theta = \frac{op}{hip}$, cos $\theta = \frac{ady}{hip}$, tan $\theta = \frac{op}{ady}$, y se leen "seno de theta", "coseno de theta" y "tangente de theta", respectivamente.

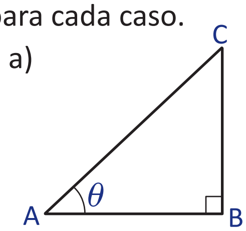
A las razones sen θ, cos θ y tan θ, se les llama **razones trigonométricas** del ángulo θ.

Problemas

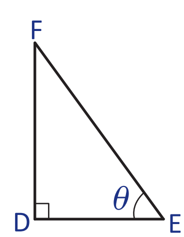
En un triángulo rectángulo, el lado que se opone al ángulo de 90° se conoce como **hipotenusa** y los dos lados que forman dicho ángulo se conocen como **catetos**. Además, la hipotenusa es el lado de mayor longitud.

Identifica la hipotenusa, el lado opuesto y adyacente del ángulo θ y expresa las razones trigonométricas para cada caso.

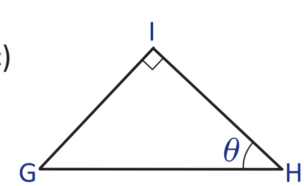
a)



b)



c)

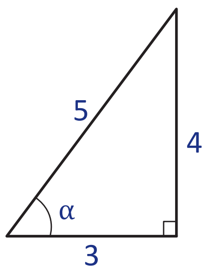


1.2 Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo

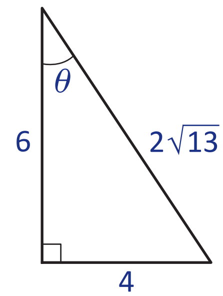
Problema inicial

Determina las tres razones trigonométricas para el ángulo α y θ.

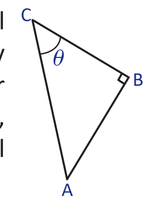
a)



b)



Hay que tener cuidado al elegir el lado opuesto y adyacente al ángulo. Por ejemplo, en el triángulo ABC, el opuesto de θ es $\overline{AB}$ y el lado adyacente θ a es $\overline{BC}$.



Solución

a) Se identifica la hipotenusa, el lado opuesto y el lado adyacente del ángulo α. En este caso, *hip* = 5, *op* = 4 y *ady* = 3, entonces,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{op}{hip} = \frac{4}{5}, \quad \cos\alpha = \frac{ady}{hip} = \frac{3}{5}, \quad \tan\alpha = \frac{op}{ady} = \frac{4}{3}.$$

b) Se identifica la hipotenusa, el lado opuesto y el lado adyacente del ángulo θ. En este caso, *hip* = $2\sqrt{13}$, *op* = 4 y *ady* = 6, entonces,

- $\operatorname{sen}\theta = \frac{op}{hip} = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \times \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, racionalizando el denominador.
- $\cos\theta = \frac{ady}{hip} = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, racionalizando el denominador.
- $\tan\theta = \frac{op}{ady} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Recuerda que para racionalizar una fracción, se multiplica y divide por el radical que aparece en el denominador de la fracción.

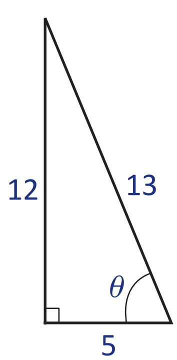
Definición

Si se conocen las medidas de los lados de un triángulo rectángulo pueden calcularse las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de uno de sus ángulos agudos, identificando la medida de la hipotenusa, del lado opuesto y adyacente de dicho ángulo y luego calculando las razones como se definieron en la clase 1.1.

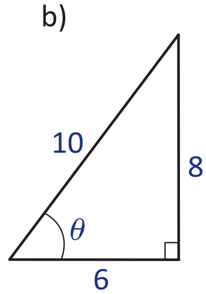
Problemas

1. Para cada uno de los siguientes triángulos, calcula las razones trigonométricas sen θ, cos θ y tan θ. Simplifica o racionaliza cuando sea posible.

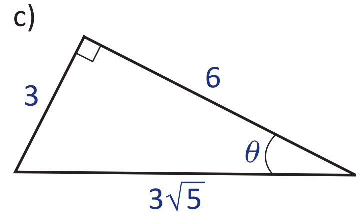
a)



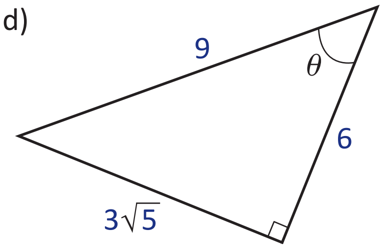
b)



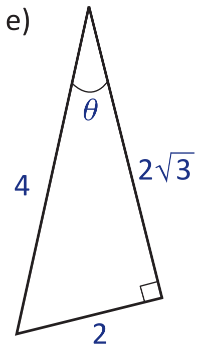
c)



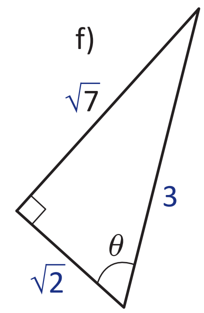
d)



e)



f)

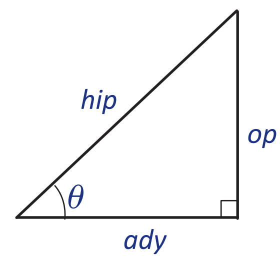


2. Se definen las razones trigonométricas cosecante, secante y cotangente de un ángulo agudo θ, denotadas por csc θ, sec θ y cot θ, respectivamente:

$$\csc\theta = \frac{hip}{op},$$

$$\sec\theta = \frac{hip}{ady},$$

$$\cot\theta = \frac{ady}{op}.$$



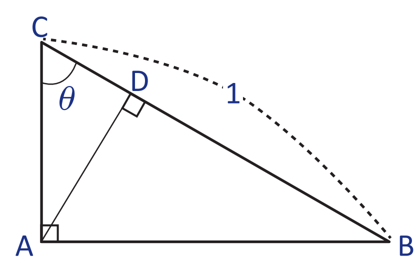
Encuentra las razones trigonométricas csc θ, sec θ y cot θ para los triángulos del Problema 1.

3. Con base a la definición en el Problema 2, demuestra que $\csc\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta}$.

4. Con base a la definición en el Problema 2, demuestra que $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$.

5. Con base a la definición en el Problema 2, demuestra que $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$.

6. En la siguiente figura, ABC es un triángulo rectángulo, ∢CAB = 90°, ∢BCA = θ y BC = 1. Escribe los valores de las longitudes de los segmentos AC, AB, AD, BD y CD en términos del ángulo θ.



El nombre **trigonometría** deriva de palabras griegas que significan "*triángulo*" y "*medir*". Se llama así porque sus inicios tienen que ver principalmente con el problema de "*resolver un triángulo*" (calcular las medidas de los tres lados y tres ángulos, conocidos algunos de ellos).

Si bien la trigonometría nace por la necesidad de resolver triángulos, en la actualidad es utilizada para muchos ámbitos como por ejemplo, en la física (medición del movimiento de un péndulo), la astronomía (medir distancias entre estrellas) o cartografía (medir distancias entre dos puntos).

Alrededor del siglo II a.C., el matemático Hiparco (180-125 a.C.), nacido en Nicea, Asia Menor, es considerado el más destacado de los astrónomos griegos, inicia el uso de una tabla de cuerdas de la circunferencia que en cierto modo equivalía a una tabla rudimentaria de valores del seno.

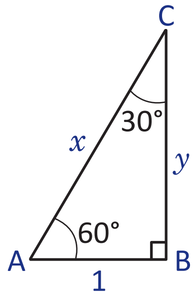
Abbott , B.A. (1967). *Teach Yourself Trigonometry.*

1.3 Triángulos rectángulos notables

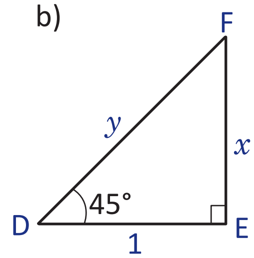
Problema inicial

Dados los siguientes triángulos rectángulos, encuentra el valor de x y y.

a)

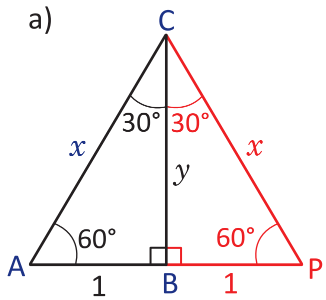


b)



Solución

a)



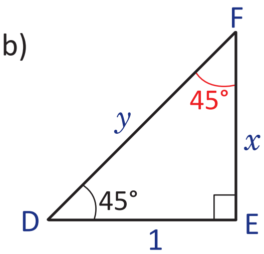
Si se refleja el triángulo ABC con respecto a $\overline{BC}$ se obtiene el triángulo APC. Como $\sphericalangle BCA = 30°$ se tiene que $\sphericalangle PCA = 60°$. Resulta que el triángulo APC es equilátero, y por lo tanto $x = AP = 2$.

Luego, para encontrar el valor de y se aplica el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC: $x^2 = 1^2 + y^2$. Es decir,

$$y^2 = x^2 - 1^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3.$$

Como $y > 0$, entonces, $y = \sqrt{3}$.

b)



En el triángulo DEF, los ángulos FDE y DFE son complementarios, es decir, $\sphericalangle FDE + \sphericalangle EFD = 90°$; por lo tanto, $\sphericalangle EFD = 45°$. Se tiene entonces que el triángulo DEF es isósceles, y por lo tanto $x = 1$.

Para encontrar el valor de y se aplica el teorema de Pitágoras en el triángulo DEF.

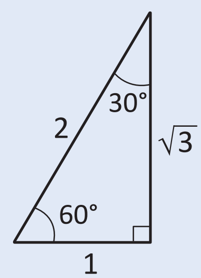
$$y^2 = 1^2 + x^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

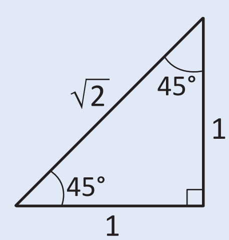
Como $y > 0$, entonces, $y = \sqrt{2}$.

Definición

Al triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos son de 30° y 60°, y al triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos son de 45° se les conoce como **triángulos notables**.

Se suele hacer referencia a estos triángulos como triángulo de 30 y 60; y triángulo de 45.

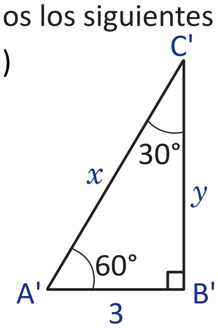




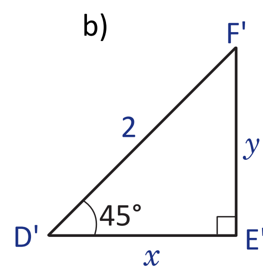
Ejemplo

Dados los siguientes triángulos, encuentra los valores de x y y.

a)

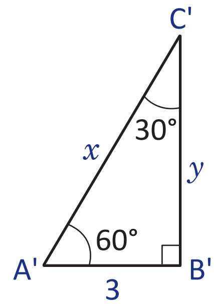


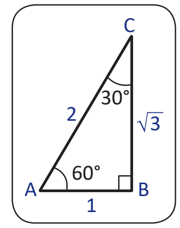
b)



a) Nótese que ΔA'B'C' ~ ΔABC, entonces,

$$\frac{x}{2} = \frac{3}{1} \quad \Rightarrow \quad x = 3(2) = 6 \qquad \text{y} \qquad \frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{3}{1} \quad \Rightarrow \quad y = 3\sqrt{3}.$$

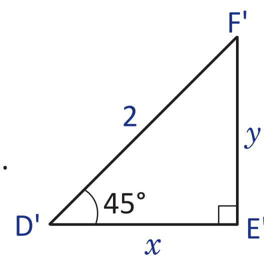


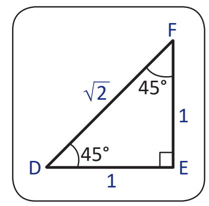


b) De igual forma que en a) ΔD'E'F' ~ ΔDEF, entonces,

$$\frac{x}{1} = \frac{2}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Luego, como el ΔD'E'F' es isósceles se tiene que $y = \sqrt{2}$.

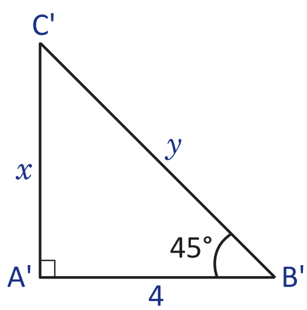




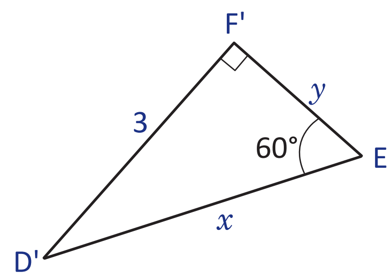
Problemas

Encuentra el valor de x y y en cada triángulo.

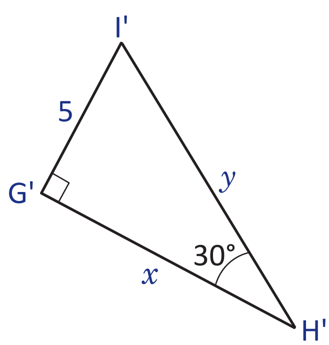
a)



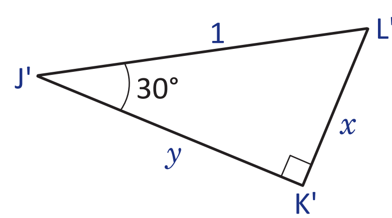
b)



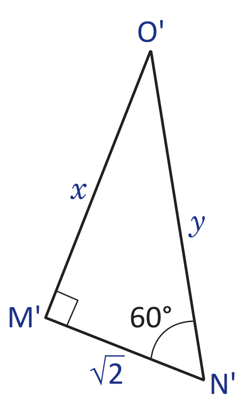
c)



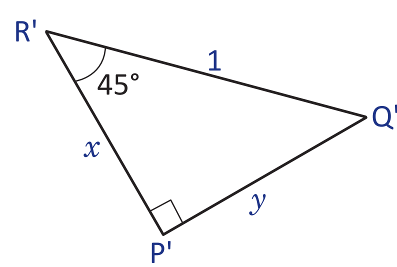
d)



e)



f)



1.4 Razones trigonométricas de triángulos rectángulos notables

Problema inicial

Encuentra las tres razones trigonométricas de los ángulos 30°, 45° y 60°.

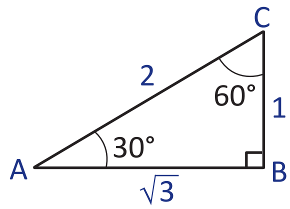
Solución

a) Para calcular las razones trigonométricas para 30° se utiliza el triángulo que se muestra en la figura. Identificando el lado opuesto y adyacente al ángulo de 30° se tiene que, *ady* = $\sqrt{3}$ y *op* = 1. Por lo tanto,

$$\text{sen } 30° = \frac{1}{2},$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

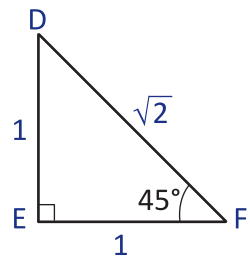


b) Se utiliza el triángulo mostrado en la figura para calcular las razones trigonométricas de 45°. Identificando el lado opuesto y adyacente al ángulo de 45°se tiene que, *ady* = *op* = 1. Por lo tanto,

$$\text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\tan 45° = \frac{1}{1} = 1.$$



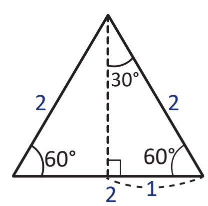
c) Para calcular las razones trigonométricas para 60° se utiliza el mismo triángulo ABC que se utilizó en a). En este caso, *ady* = 1 y *op* = $\sqrt{3}$. Por lo tanto,

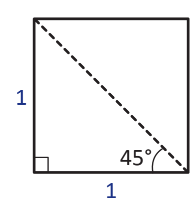
$$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2},$$

$$\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$

Una forma para recordar las razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60° es recordar cómo se construyen el triángulo de 30° y 60°, y el triángulo de 45°, como se muestra a continuación:





Conclusión

Las razones trigonométricas para los ángulos 30°, 45° y 60° se resumen en la siguiente tabla.

θ	30°	45°	60°
sen θ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos θ	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan θ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Cuando se calculen las razones trigonométricas de los ángulos 30°, 45° y 60° hay que utilizar los valores que aparecen en el cuadro.

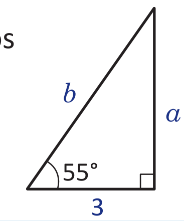
Problemas

Encuentra las razones trigonométricas secante, cosecante y cotangente para los ángulos 30°, 45° y 60°.

1.5 Triángulo rectángulo conocidos un lado y un ángulo agudo

Problema inicial

Dado el siguiente triángulo, encuentra la medida de los dos lados faltantes. Aproxima hasta las décimas.



Solución

Como se conoce el valor de uno de los ángulos agudos del triángulo se pueden utilizar las razones trigonométricas para calcular la medida de los lados faltantes.

Se sabe que $\tan 55° = \frac{a}{3}$, entonces $a = 3\tan 55°$. Como 55° no es un ángulo de un triángulo notable, se calcula el valor de tan 55° con la calculadora, pero antes hay que configurarla de modo que los ángulos estén medidos en grados, realizando los siguientes pasos:

Presionar la tecla MODE dos veces y presionar la tecla [1].

Ahora que está configurada la calculadora, se introduce tan 55° como se muestra a continuación:

[tan] [5] [5] [=] ⇒ Pantalla de la calculadora: tan 55 — 1.428148007

Aproximando a un decimal se tiene que $a = 3\tan 55° \approx 3(1.4) = 4.2$. Para calcular el valor de b se considera el hecho que

$$\cos 55° = \frac{3}{b} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{3}{\cos 55°}$$

[3] [÷] [cos] [5] [5] [=] ⇒ Pantalla de la calculadora: 3÷cos 55 — 5.230340387

Por lo tanto, $a \approx 4.2$ y $b \approx 5.2$.

> Dependiendo del modelo de la calculadora, la tecla MODE puede aparecer de dos formas.
> MODE CLR   MODE SETUP
> Si tu calculadora tiene la segunda opción, debes presionar las teclas
> SHIFT   MODE SETUP
> y luego presionar la tecla [3].

> En la calculadora, la función seno aparece como [sin].

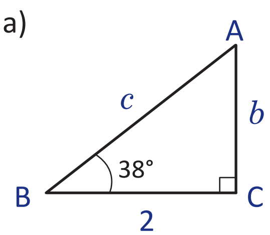
Conclusión

Dadas la medida de un lado y de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo pueden encontrarse las medidas de los lados restantes utilizando las razones trigonométricas del ángulo agudo.

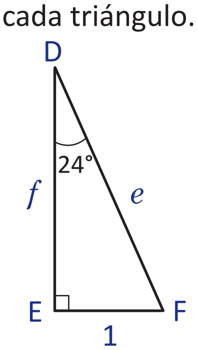
Problemas

Encuentra la medida de los lados faltantes en cada triángulo.

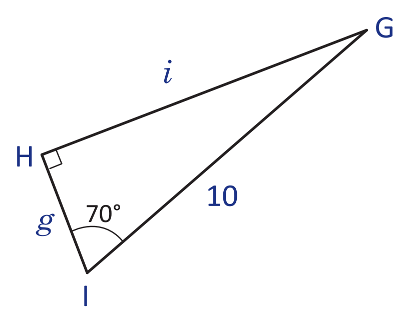
a)



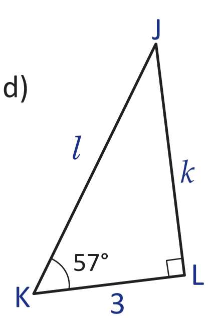
b)



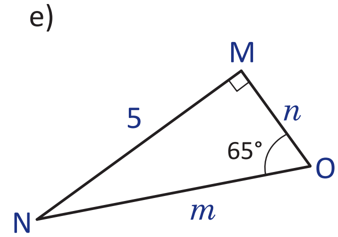
c)



d)



e)

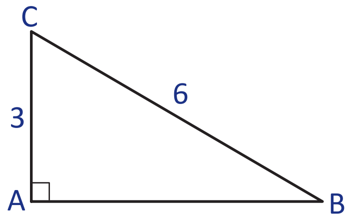


1.6 Triángulo rectángulo conocidos dos lados

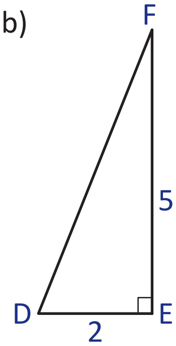
Problema inicial

En los siguientes triángulos, encuentra las medidas de los ángulos agudos.

a)



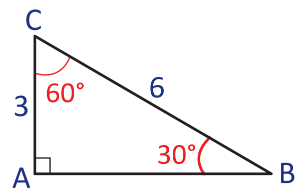
b)



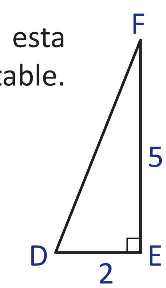
En un triángulo ABC, se suele denotar a la medida del ángulo C por *C* (en cursiva).

Solución

a) Obsérvese que cos $C = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. El ángulo que cumple esta condición es el ángulo de 60°, por lo tanto $C = 60°$ y $B = 30°$.



b) Del triángulo se tiene que $\tan D = \frac{5}{2}$. Para encontrar el valor del ángulo D que cumpla esta condición se utilizará una calculadora ya que la razón no corresponde a algún triángulo notable.



SHIFT [tan⁻¹] tan (5 ÷ 2) = $\Longrightarrow$

Pantalla de la calculadora

tan⁻¹(5÷2)
68.19859051

Aproximando a las décimas, se tiene que $D \approx 68.2°$. Luego, $F \approx 90° - 68.2° = 21.8°$.

La función de la calculadora $\tan^{-1}$ devuelve un ángulo que cumpla la condición que se le indique. Por ejemplo, $\tan^{-1}\frac{5}{2}$ devuelve el ángulo θ que cumple que $\tan\theta = \frac{5}{2}$, con θ entre $-90°$ y $90°$.

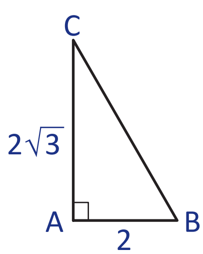
Conclusión

Dadas las medidas de dos lados de un triángulo rectángulo se pueden encontrar los ángulos agudos utilizando las razones trigonométricas.

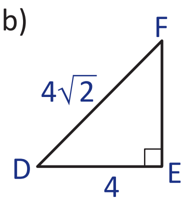
Problemas

Encuentra la medida de los ángulos agudos de los triángulos rectángulos.

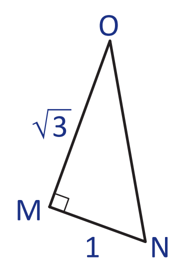
a)



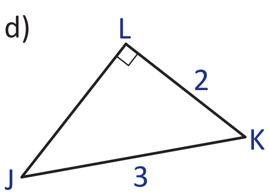
b)



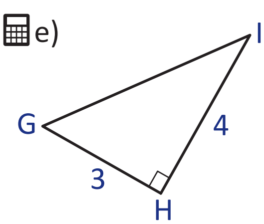
c)



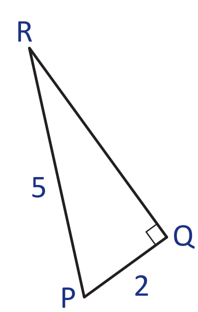
d)



e)



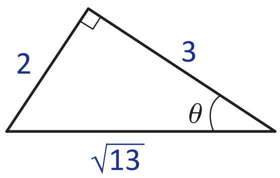
f)



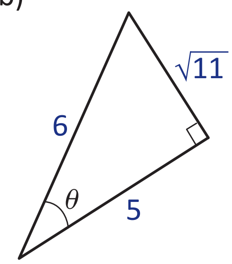
1.7 Practica lo aprendido

1. Determina las razones trigonométricas sen θ, cos θ y tan θ para cada uno de los siguientes triángulos.

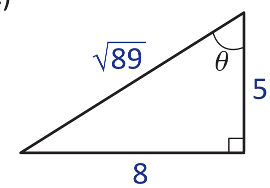
a)



b)

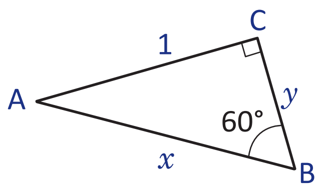


c)

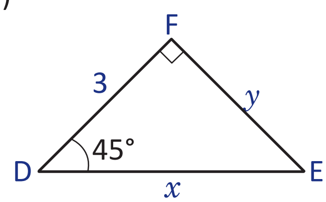


2. Determina el valor de x y y en cada triángulo.

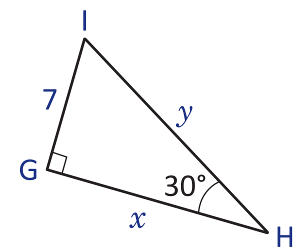
a)



b)

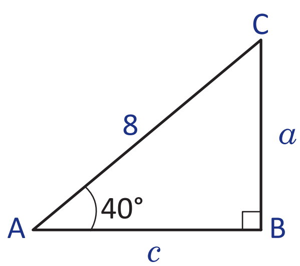


c)

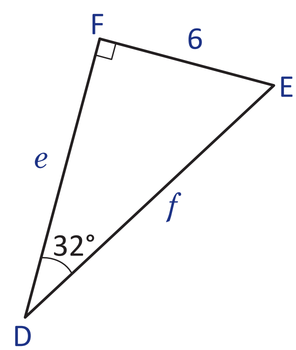


3. Calcula la medida de los lados faltantes en cada triángulo. Aproxima tu respuesta hasta las décimas.

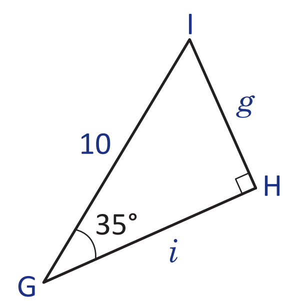
a)



b)

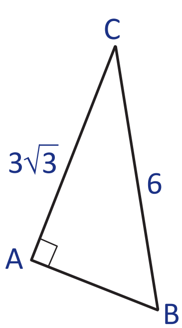


c)

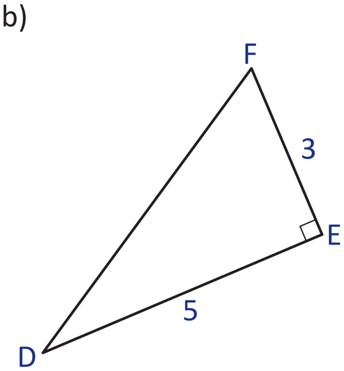


4. Calcula la medida de los ángulos agudos de los triángulos rectángulos hasta las décimas.

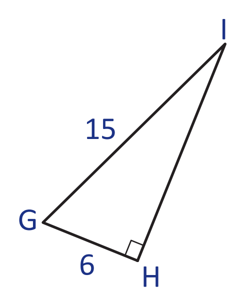
a)



b)



c)

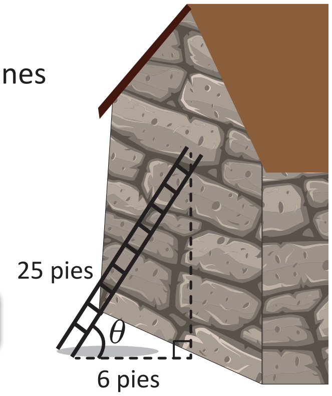


1.8 Aplicación de las razones trigonométricas

Problema inicial

Un carpintero compra una escalera de 25 pies y en las instrucciones de uso dice que la posición más segura para ubicarla sobre la pared es cuando el pie de la escalera se encuentra a 6 pies de la pared. ¿Qué ángulo forma la escalera con el suelo?

Solución



Se puede formar un triángulo rectángulo, como muestra la figura. Aplicando razones trigonométricas se tiene que

$$\cos\theta = \frac{6}{25}.$$

Utilizando la calculadora para calcular el ángulo se tiene

SHIFT $\cos^{-1}$ cos (6 ÷ 2 5) = $\Longrightarrow$

Pantalla de la calculadora

$\cos^{-1}(6\div25)$
76.11345964

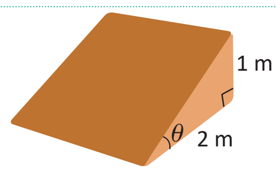
Entonces, el ángulo que forma la escalera con el suelo es aproximadamente 76°.

Conclusión

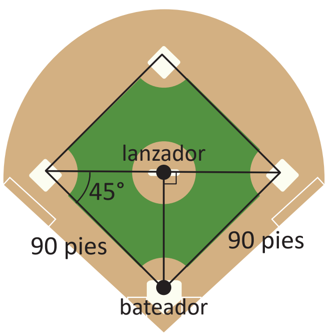
Las razones trigonométricas pueden utilizarse para calcular ángulos de inclinación que forman algunos objetos con superficies planas, para calcular distancias entre dos objetos o alturas de edificios o árboles.

Problemas

1. Un patinador hará una pirueta sobre una rampa cuyo largo es de 2 metros. Si la altura de la rampa es de 1 metro, ¿cuál es el ángulo de inclinación de la rampa?

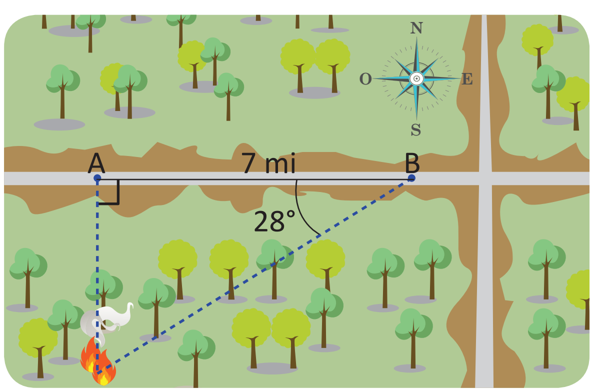


2. Las tres bases por las que debe pasar un beisbolista están sobre un cuadrado de 90 pies, como muestra la figura. ¿A qué distancia se encuentra el lanzador del bateador?



3. Una escalera de 20 pies yace sobre una pared y alcanza una altura de 16 pies, ¿cuál es el ángulo de inclinación de la escalera con respecto al suelo?

4. Un guardabosques que se encuentra en el punto A observa un incendio directamente al sur. Un segundo guardabosques en el punto B, a 7 millas del primer guardabosques observa el mismo incendio a 28° al suroeste, ¿qué tan lejos está el incendio del primer guardabosques?

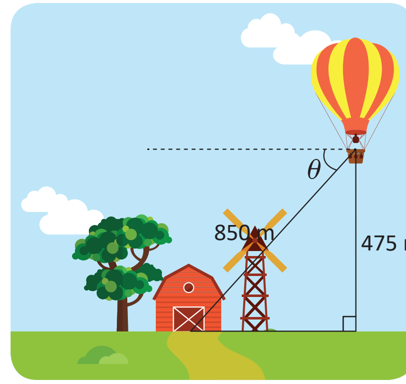


Unidad 5

1.9 Ángulo de depresión

Problema inicial

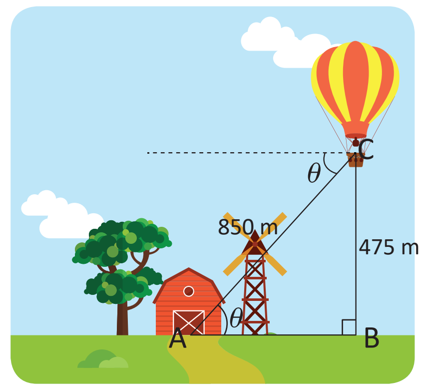
Un fotógrafo profesional desea tomarle una foto a una granja que observa desde un globo aerostático que está a una altura aproximada de 475 metros del suelo y a una distancia de 850 metros de la granja, observa la figura. ¿Cuánto mide el ángulo θ si la línea punteada es horizontal?



Solución

Se etiquetan con A, B y C los vértices del triángulo formado, como muestra la figura. Entonces, $\sphericalangle CAB = \theta$ ya que la línea punteada es paralela a $\overline{AB}$. Utilizando razones trigonométricas, se tiene que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{475}{850}.$$



Utilizando la calculadora,

SHIFT sen⁻¹ sen (4 7 5 ÷ 8 5 0) =

Pantalla de la calculadora

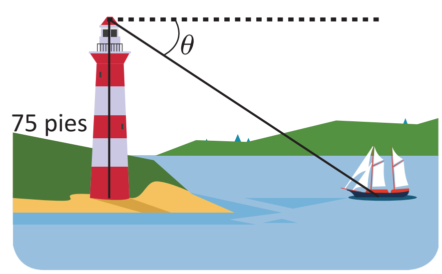
```
sen⁻¹(475÷850)
         33.97447595
```

Por lo tanto, $\theta \approx 34°$.

Definición

Si un observador se encuentra por encima de un objeto, al ángulo que se forma entre una línea horizontal imaginaria y la línea de visión hacia el objeto se le llama **ángulo de depresión**. Por ejemplo, el ángulo θ que aparece en el dibujo del Problema inicial es un ángulo de depresión.

Problemas



1. Un faro tiene 75 pies de altura, y desde la punta de este se observa un bote de modo que el coseno del ángulo de depresión es $\frac{4}{5}$, ¿qué tan lejos está el bote del faro?

2. Desde la parte alta de un viejo edificio, un niño observa a un perro que se encuentra en la calle, de modo que se forma un ángulo de depresión de 37°. Si la altura del edificio es de 9 m, ¿a qué distancia de la base del edificio se encuentra el perro?

3. Un edificio tiene 100 metros de altura, y desde su punto más alto hay una persona observando unas ardillas comiendo en el suelo. La tangente del ángulo de depresión del observador es $\frac{5}{4}$, ¿a qué distancia están las ardillas de la base del edificio?

4. Una persona que mide 1.5 metros se encuentra en un muelle que sobresale 3.5 metros por encima del mar. La persona observa un bote con un ángulo de depresión de 10°, ¿a qué distancia está el bote del muelle?

1.10 Ángulo de elevación

Problema inicial

Un guardabosques quiere calcular la altura de un árbol y para ello se coloca a 7 metros de la base del árbol y observa la punta de este con un ángulo de 74°. Si la altura del guardabosques es de 1.6 metros, ¿cuál es la altura del árbol?

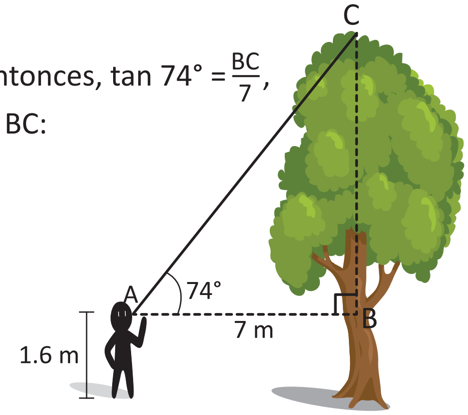
Solución

Se forma un triángulo rectángulo auxiliar ABC como muestra la figura. Entonces, $\tan 74° = \frac{BC}{7}$, por lo que $BC = 7\tan 74°$. Se puede utilizar la calculadora para encontrar BC:

7 × tan 7 4 = ⟹

Pantalla de la calculadora

```
7×tan 74
     24.41190111
```



Al valor de BC hay que sumarle la altura del guardabosques, por lo que la altura del árbol es aproximadamente 24.4 + 1.6 = 26 metros.

Definición

Si un observador se encuentra por debajo de un objeto, al ángulo que se forma entre una línea horizontal imaginaria y la línea de visión hacia el objeto se le llama **ángulo de elevación**. Por ejemplo, del gráfico del Problema inicial, el ángulo de elevación es ∢CAB.

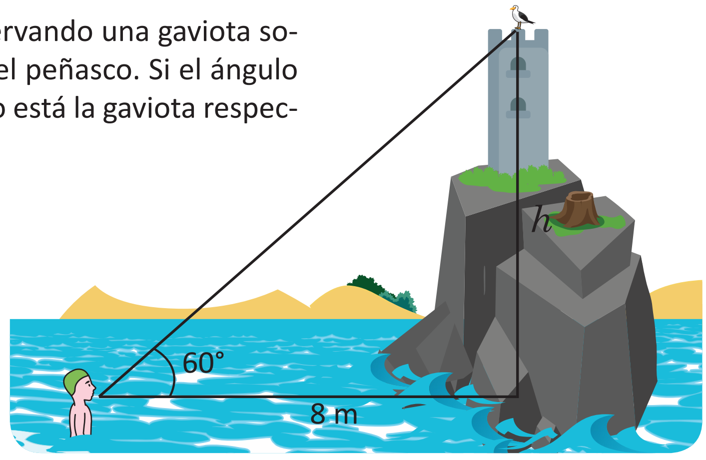
Problemas

1. Una guardabosques debe entrenar a un nuevo equipo de madereros para calcular la altura de los árboles. Como ejemplo, ella camina a 12 metros de la base de un árbol y estima que el ángulo de elevación desde el suelo a la punta del árbol es de 70°. Calcula la altura del árbol.

2. Para calcular la altura a la que se encuentra una nube del suelo durante la noche, se dirige un rayo vertical de luz hacia un punto de ella. En algún punto sobre el suelo, a 135 pies de donde se emite el rayo, se determina que el ángulo de elevación hacia el tope del rayo es de 65°. ¿Cuál es la altura a la que se encuentra la nube?

3. Un niño está a 2 metros de un árbol y observa a un gato que ha quedado atrapado en la punta del árbol. Si la altura del niño es de 1 metro y el ángulo de elevación es de 60°, ¿a qué altura está el gato del suelo?

4. Un nadador está a 8 metros de un peñasco observando una gaviota sobre la punta de un viejo edificio que está sobre el peñasco. Si el ángulo de elevación del nadador es de 60°, ¿qué tan alto está la gaviota respecto al nivel del mar?



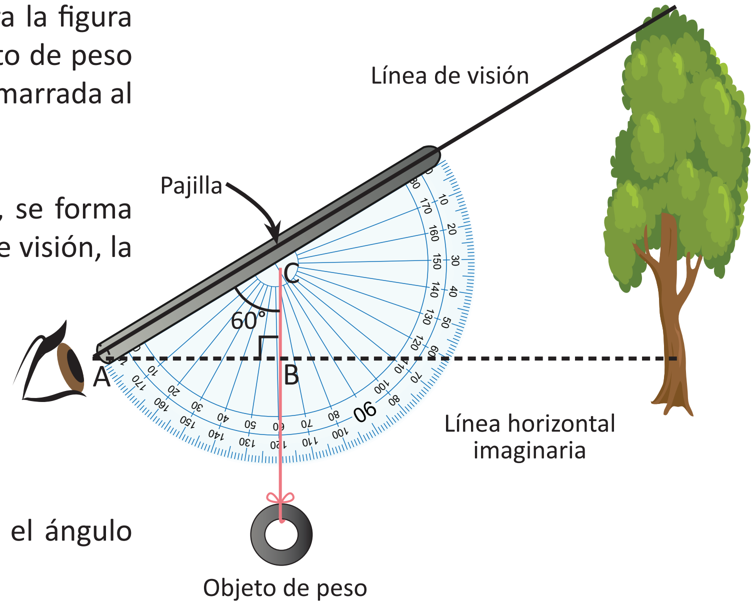
Unidad 5

1.11 Actividad. Construcción de un clinómetro

Un clinómetro es un aparato que se utiliza para medir inclinaciones en superficies, aunque también se utiliza para calcular alturas de edificios, árboles, postes, etc. Los clinómetros profesionales son sencillos de utilizar, y esta actividad muestra cómo construir uno.

Funcionamiento de un clinómetro

El observador coloca el clinómetro como muestra la figura y a través de un tubo observa el objeto. Un objeto de peso está amarrado a una cuerda y esta a su vez está amarrada al transportador.



Al colocar el clinómetro como muestra la figura, se forma un triángulo rectángulo (el ΔABC) entre la línea de visión, la línea horizontal imaginaria y el trozo de cuerda tensado. El ángulo que marca la cuerda en el transportador es el ángulo BCA. Entonces, en el ΔABC se tiene que:

$$\sphericalangle CAB = 90° - \sphericalangle BCA = 90° - 60° = 30°.$$

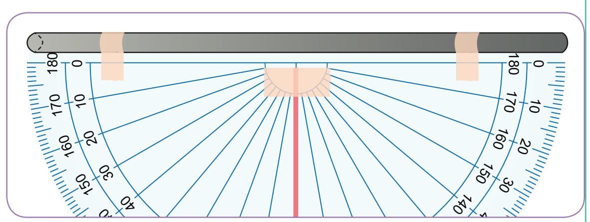
Se puede observar que con este procedimiento, el ángulo calculado corresponde al ángulo de elevación.

Materiales

- Un transportador
- Una pajilla
- Cinta adhesiva
- Lana o un trozo de cuerda
- Tijeras
- Un objeto pesado, puede ser una tuerca de 20 mm

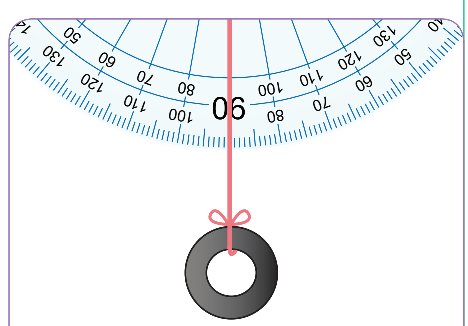
Actividad

1. Algunos transportadores tienen un hueco en su centro, por lo que puede amarrarse un trozo de cuerda en este hueco. Si no tiene el hueco, puede pegarse con un trozo de cinta adhesiva, donde está el centro del transportador. La longitud del trozo de cuerda debe sobrepasar al radio del transportador.



2. Cortar un trozo de pajilla, con longitud igual al diámetro del transportador. Pegar el trozo de pajilla con cinta adhesiva, con cuidado de no apretarla ya que hay que ver a través de ella.

3. En el extremo de la cuerda que quedó libre, amarrar la tuerca.



El clinómetro está listo para utilizarse.

Problemas

1. Calcula la altura de un árbol que se encuentre a tu alrededor utilizando el clinómetro para determinar el ángulo de elevación.

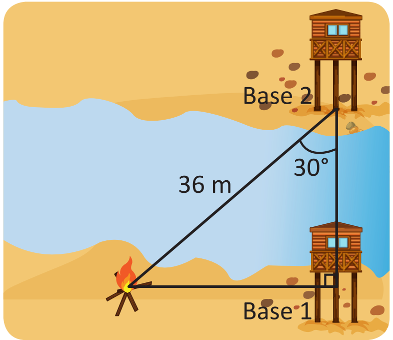
2. Con el clinómetro construido en la Actividad 1.11, ¿puedes calcular ángulos de depresión? Si la respuesta es afirmativa, explica cómo.

1.12 Aplicaciones de las razones trigonométricas

1. Un pescador está a 12 km de un barco que se encuentra al este de él y observa un faro a 60° desde la línea de visión con el barco. ¿A qué distancia está el barco del faro si se encuentra en dirección sur del barco?

2. Un globo aerostático es amarrado a una roca con un lazo de 20 metros. El seno del ángulo que forma el lazo con el suelo es $\frac{3}{4}$, ¿qué tan alto está el globo?

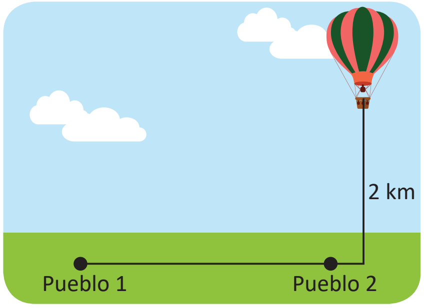
3. En el dibujo, ¿cuál es la distancia entre la Base 1 y la fogata?



4. Un hombre observa desde el tope de un faro una embarcación pesquera y estima que el ángulo de depresión es de 25°. Si la altura del faro es de 40 metros, ¿a qué distancia está la embarcación del faro?

5. Un hombre se encuentra en un edificio observando otro edificio que está a 100 m de distancia. El ángulo de elevación al tope del edificio es de 30° y el ángulo de depresión a la base es de 15°, ¿cuál es la altura del edificio que observa? Desprecia la altura del hombre.

6. Desde un globo aerostático a 2 km de altura, se observan dos pueblos. El ángulo de depresión a ambos pueblos es de 80° y 20°. ¿Qué distancia hay entre los pueblos?



Unidad 5

2.1 Distancia entre dos puntos

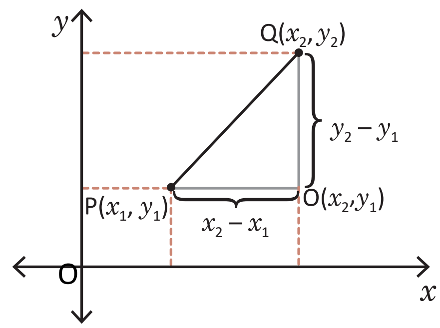
Problema inicial

Dados dos puntos P(x_1, y_1) y Q(x_2, y_2) en el plano cartesiano, ¿cuál es la distancia entre los puntos?

Se define la distancia entre dos puntos como la longitud del segmento de recta que une ambos puntos.

Solución

Supóngase que $x_1 \neq x_2$ y $y_1 \neq y_2$. Si se trazan rectas perpendiculares a los ejes que pasen por P y Q, como muestra la figura, el punto O tiene coordenadas (x_2, y_1). De aquí se deduce que OP = $x_2 - x_1$ y QO = $y_2 - y_1$. Luego, por el teorema de Pitágoras en el triángulo POQ, se tiene que



$$(\text{PQ})^2 = (\text{OP})^2 + (\text{QO})^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Pero PQ > 0 por ser una distancia, entonces

$$\text{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

Si $x_1 = x_2$ y $y_1 \neq y_2$, entonces la distancia de P a Q sería

$$\Rightarrow \quad \text{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|.$$

De manera análoga, si $x_1 \neq x_2$ y $y_1 = y_2$, la distancia de P a Q sería

$$\Rightarrow \quad \text{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|.$$

Para todo número real a se cumple que $\sqrt{a^2} = |a|$.

Definición

La distancia de dos puntos P y Q en el plano con coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) respectivamente, denotada por d(P, Q) está dada por

$$d(\text{P, Q}) = \text{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ejemplo

Calcula la distancia entre los puntos P(–1, 3) y Q(2, 1).

La distancia es,

$$\begin{aligned} d(\text{P, Q}) &= \sqrt{(2 - (-1))^2 + (1 - 3)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{9 + 4} \\ &= \sqrt{13}. \end{aligned}$$

Problemas

1. Calcula la distancia entre los puntos P y Q.

a) P(–2, –1), Q(2, 2)   b) P(7, 2), Q(4, –2)   c) P(2, –2), Q(–8, 4)

d) P(1, 1), Q(9, 2)   e) P(0, 1), Q(3, 5)   f) P(–3, 5), Q(7, –9)

g) P(–1, 4), Q(2, 4)   h) P(3, 2), Q(3, 2)   i) P(–1, 0), Q(–1, 0)

2. Demostrar que si P(x_1, y_1) y Q(x_2, y_2), entonces d(P, Q) = d(Q, P).

2.2 Simetrías en el plano cartesiano*

Problema inicial

Se toma el punto P(a, b) sobre el plano cartesiano. Determina lo siguiente respecto al punto P:

a) Las coordenadas del punto simétrico respecto al eje x.

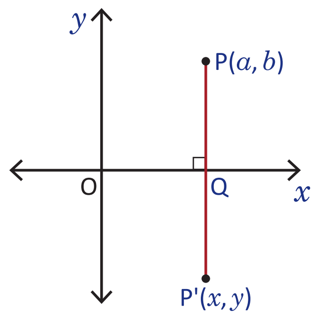
b) Las coordenadas del punto simétrico respecto al eje y.

c) Las coordenadas del punto simétrico respecto al origen.

d) Las coordenadas del punto simétrico respecto a la recta $y = x$.

Solución

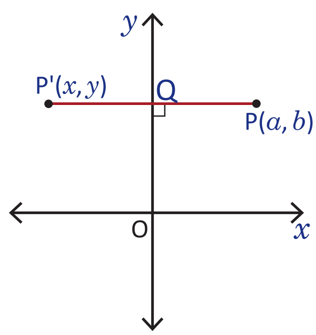
a) Sea P'(x, y) el punto simétrico de P respecto al eje x. Por propiedades de simetría, el segmento PP' es perpendicular al eje x y si Q es la intersección de dicho segmento con el eje, se satisface que PQ = P'Q.



Como el segmento PP' es vertical, solo la segunda coordenada de P' cambia. P y P' están a la misma distancia del eje x, por lo tanto la segunda coordenada de P' es el número opuesto a b, es decir $-b$.

Por lo tanto, el simétrico de P(a, b) respecto al eje x es P'(a, $-b$).

b) Sea P'(x, y) el punto simétrico de P respecto al eje y. Por propiedades de simetría, el segmento PP' es perpendicular al eje y y si Q es la intersección de dicho segmento con el eje, se satisface que PQ = P'Q.

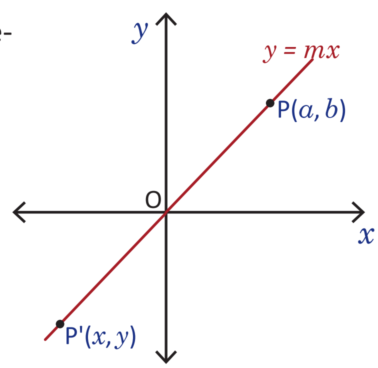


Como el segmento PP' es horizontal, solo la primera coordenada de P' cambia. P y P' están a la misma distancia del eje y, por lo tanto la primera coordenada de P' es el número opuesto a a, es decir $-a$.

Por lo tanto, el simétrico de P(a, b) respecto al eje y es P'($-a$, b).

c) Sea P'(x, y) el simétrico de P respecto al origen O. Por definición de simetría respecto a un punto, se tiene que OP = OP', es decir

$$(\mathrm{OP})^2 = (\mathrm{OP'})^2$$
$$\Rightarrow \quad (x-0)^2 + (y-0)^2 = (a-0)^2 + (b-0)^2$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \quad \text{------------------ (1)}$$



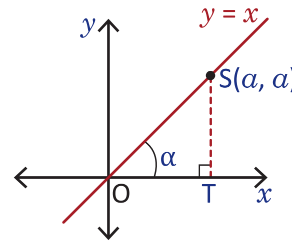
Pero P y P' están sobre la recta $y = mx$, por lo que también se cumple que $b = ma$. Sustituyendo y y b en (1) se tiene

$$x^2 + m^2x^2 = a^2 + m^2a^2$$
$$\Rightarrow \quad x^2(1 + m^2) = a^2(1 + m^2);$$

como $1 + m^2 \neq 0$ $\quad \Rightarrow \quad x^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad x = a$ o bien $x = -a$.

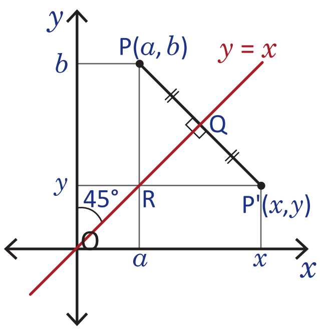
Si $x = a$ entonces $y = mx = ma = b$, por lo que P' resulta ser el mismo punto P. Si $x = -a$ entonces $y = mx = -ma = -b$, así P'($-a$, $-b$) es el simétrico de P respecto al origen. Por lo tanto, P'($-a$, $-b$).

Unidad 5



d) Primero véase que, si se toma el punto S(a, a) sobre la recta $y = x$, al trazar el triángulo OTS se deduce que tan $\alpha = 1$, por lo que $\alpha = 45°$; es decir, la recta $y = x$ divide en dos partes iguales a los cuadrantes I y III del plano cartesiano.

Sea P(a, b) un punto del plano cartesiano y P'(x, y) su simétrico respecto a la recta $y = x$. El resultado no se ve afectado si consideramos a P sobre la recta $y = x$. Sea Q la intersección del segmento PP' y la recta $y = x$. Por propiedades de simetría, PP' es perpendicular a dicha recta y PQ = P'Q.



Se traza el segmento vertical PR. Los triángulos PQR y P'QR son congruentes ya que PQ = P'Q, QR es lado común y ∢PQR = ∢P'QR = 90° (criterio LAL). Por lo tanto,

PR = P'R y ∢PRQ = ∢P'RQ. ------------------ (2)

Pero ∢PRQ = 45°, ya que PR es paralela al eje y. Luego ∢P'RQ = 45°, por lo que ∢P'RP = 90°. Por tanto, P'R es perpendicular a PR y así P'R = $x - a$ y PR = $b - y$.

De (2) se tiene que PR = P'R, pero PR = $b - a$, por lo que $b - a$ = P'R = $x - a$, es decir $x = b$. De igual forma, $b - a$ = PR = $b - y$, es decir, $y = a$. Por lo tanto, las coordenadas de P' son (b, a).

Teorema

Si P(a, b) es un punto sobre el plano cartesiano entonces:

- P'(a, $-b$) es el punto simétrico de P respecto al eje x.
- P'($-a$, b) es el punto simétrico de P respecto al eje y.
- P'($-a$, $-b$) es el punto simétrico de P respecto al origen.
- P'(b, a) es el punto simétrico de P respecto a la recta $y = x$.

A la recta que tiene por ecuación $y = x$ se le conoce como **recta identidad**.

Ejemplo

Sean P(–1, 3) y Q(–2, –3) dos puntos en el plano. Determina el simétrico de P y Q respecto al eje x, respecto al eje y, respecto al origen y respecto a la recta identidad.

a) El simétrico de P respecto al eje x es P_1(–1, –3).
El simétrico de P respecto al eje y es P_2(1, 3).
El simétrico de P respecto al origen es P_3(1, –3).
El simétrico de P respecto a la recta identidad es P_4(3, –1).

b) El simétrico de Q respecto al eje x es Q_1(–2, 3).
El simétrico de Q respecto al eje y es Q_2(2, –3).
El simétrico de Q respecto al origen es Q_3(2, 3).
El simétrico de P respecto a la recta identidad es Q_4(–3, –2).

Problemas

1. Determina el simétrico de cada punto respecto al eje x, respecto al eje y, respecto al origen y respecto a la recta $y = x$.

a) P(1, 4) b) P(3, –2) c) P(–3, –1)

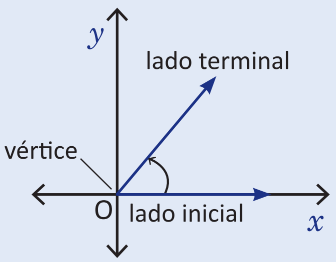
d) P(–5, 4) e) P(2, 0) f) P(0, –3)

2. ¿Puede encontrarse el simétrico respecto al origen de un punto P haciendo una simetría respecto al eje x y luego haciendo otra simetría respecto al eje y? Justifica tu respuesta.

2.3 Ángulos

Definición

Se ubica un rayo sobre el eje x con punto inicial en el origen del plano cartesiano y se rota este rayo alrededor del origen; a la abertura entre el rayo inicial y el final se le llama **ángulo** y al rayo inicial se le llama **lado inicial** y al rayo final se le llama **lado terminal** del ángulo. Se dice que un ángulo está en **posición estándar** si su lado inicial está sobre el lado positivo del eje x y su vértice sobre el origen. Un ángulo puede medirse en grados y cada grado resulta de dividir una circunferencia en 360 partes iguales, siendo cada parte 1° (un grado).



Si un ángulo se genera mediante una rotación en el sentido antihorario será positivo, y una rotación en el sentido horario genera un ángulo negativo.

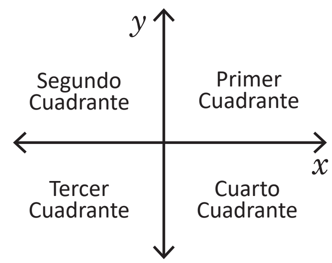
Dependiendo en qué cuadrante está el lado terminal del ángulo, se dice que el ángulo es de dicho cuadrante.

Ejemplo

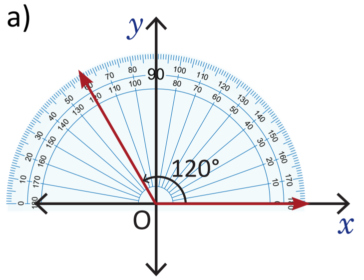
Dibuja cada ángulo en posición estándar e identifica a qué cuadrante pertenece.

a) 120° b) –70° c) –150°

Cuando se construye el plano cartesiano se obtienen cuatro secciones a las que se les llama cuadrantes y se enumeran a partir del cuadrante superior derecho y en sentido antihorario.



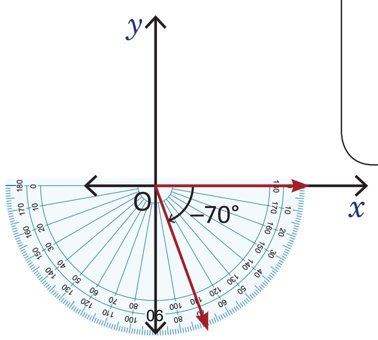
a)



Como el lado final está en el segundo cuadrante, 120° pertenece al segundo cuadrante.

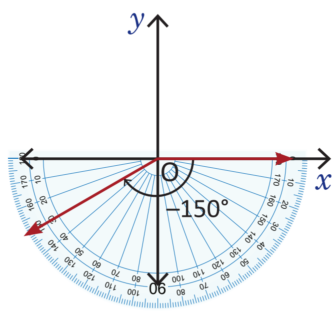
b) Para graficar este ángulo, como va en el sentido a las agujas del reloj, se coloca el transportador hacia abajo y se marca 70°.

Como el lado final está en el cuarto cuadrante, –70° pertenece al cuarto cuadrante.



c) Para graficar este ángulo, como va en el sentido a las agujas del reloj, se coloca el transportador hacia abajo y se marca 150°.

Como el lado final está en el tercer cuadrante, –150° pertenece al tercer cuadrante.



Problemas

Dibuja cada ángulo en posición estándar e identifica a qué cuadrante pertenece.

a) 80° b) 310° c) –170°

Unidad 5

2.4 Ángulos mayores a 360° y menores a –360°

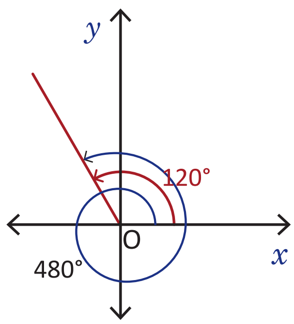
Problema inicial

Dibuja los ángulos 480°, 930°, 2 150° y –1 150°.

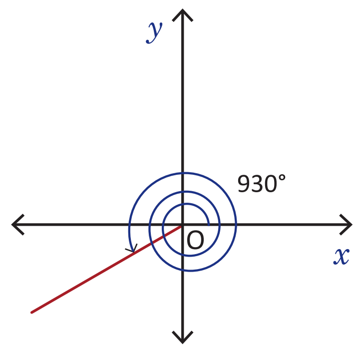
Solución

Para dibujar los ángulos, hay que recordar (de la clase anterior) que una circunferencia se ha dividido en 360 partes iguales y cada parte representa 1°, por lo tanto, un ángulo de 360° representa una vuelta completa.

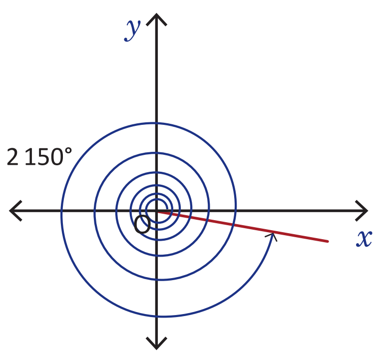
a) Se escribe 480° como 360° + 120°, entonces al dibujar el ángulo se obtiene



b) Observa que 930° = 360°(2) + 210°, entonces al dibujar se obtiene

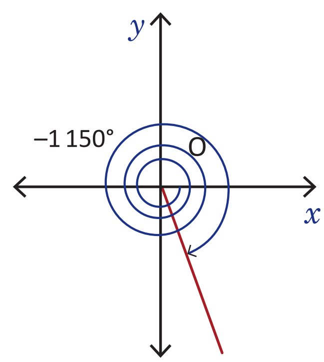


c) Observa que 2 150° = 360°(5) + 350°, entonces al dibujar se obtiene



d) Como el ángulo es negativo hay que medirlo en el sentido de las agujas del reloj, además

–1 150° = –360°(3) – 70°



Observa que –1150° también puede escribirse como
360°(–3) – 70° = 360°(–3) – 70° + 360° – 360° = 360°(–4) + 290°
lo cual resulta más útil, ya que de este modo no se trabaja con ángulos negativos.

Conclusión

Para dibujar un ángulo mayor a 360° se determina cuántas vueltas completas contiene el ángulo y el lado terminal será el que corresponde al ángulo menor de 360° que queda al descomponer el ángulo.

Por ejemplo, si $\theta = 360°n + \theta'$, con n un número entero distinto de cero, n representa el número de vueltas completas que contiene el ángulo y $0 \leq \theta' < 360°$, el lado terminal de θ será igual al lado terminal del ángulo θ'. Si $n > 0$, el ángulo se mide en el sentido antihorario y si $n < 0$, el ángulo se mide en sentido horario.

Problemas

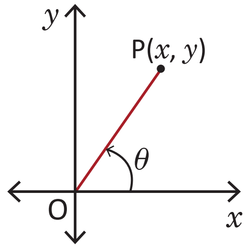
Dibuja cada ángulo.

a) 1 000°
b) 990°
c) 1 480°
d) –1 500°
e) –1 315°
f) –1 880°

2.5 Razones trigonométricas de cualquier ángulo, parte 1

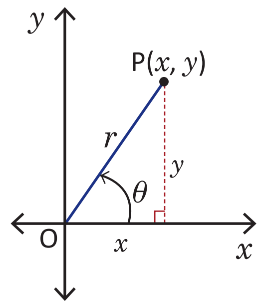
Problema inicial

Considera el ángulo θ de la figura. Expresa los valores seno, coseno y tangente del ángulo θ en términos de x y y.



Solución

Se dibuja un triángulo rectángulo tal que la hipotenusa es el lado terminal del ángulo y uno de los catetos está sobre el eje x, como muestra la figura. El punto final del lado terminal está determinado por el punto P con coordenadas (x, y), por lo que los catetos del triángulo miden x y y unidades.



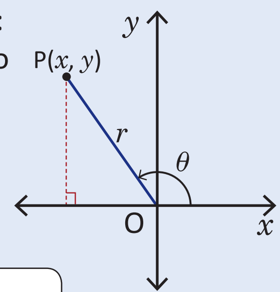
En el triángulo rectángulo, x es la longitud del lado adyacente y y es la longitud del lado opuesto a θ. Para determinar la longitud de la hipotenusa r se aplica el teorema de Pitágoras, obteniéndose $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, por lo tanto,

$$\text{sen}\ \theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r}\ \text{ y }\ \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

Definición

Se definen las razones trigonométricas de cualquier ángulo θ de la siguiente manera:
Se coloca el ángulo θ en posición estándar y se toma un punto $P(x, y)$ sobre el lado terminal. Se establece que $r = OP = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces

$$\text{sen}\ \theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r}\ \text{ y }\ \tan\theta = \frac{y}{x}.$$



Se define $\tan\theta$ solo cuando $x \neq 0$.

De la definición de razones trigonométricas se establece lo siguiente:

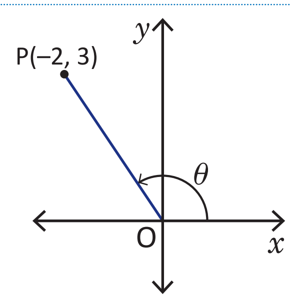
$$y = r\text{sen}\,\theta,\quad x = r\cos\theta.$$

Además, $\text{sen}(360°n + \theta) = \text{sen}\ \theta$ y $\cos(360°n + \theta) = \cos\theta$.

Observar que $\tan\theta = \dfrac{\text{sen}\ \theta}{\cos\theta}$.

Ejemplo

Determina las razones seno, coseno y tangente para el ángulo θ en la figura.



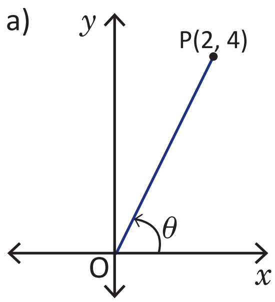
En este caso, $r = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$, por lo tanto,

$$\text{sen}\ \theta = \frac{y}{r} = \frac{3}{\sqrt{13}},\ \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{\sqrt{13}} = -\frac{2}{\sqrt{13}}\ \text{ y }\ \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}.$$

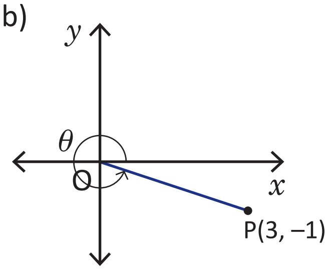
Problemas

Determina los valores seno, coseno y tangente de cada ángulo.

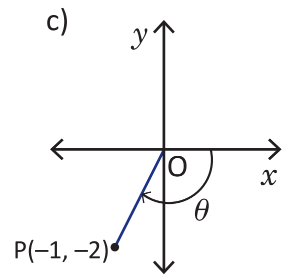
a)



b)



c)

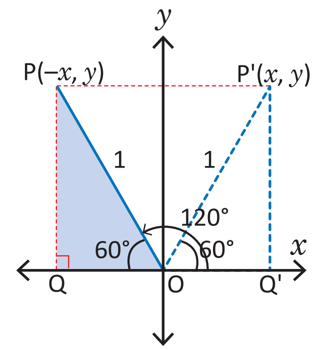


2.6 Razones trigonométricas de cualquier ángulo, parte 2

Problema inicial

Calcula los valores de sen 120°, cos 120° y tan 120°.

Solución



Se ubica el ángulo en posición estándar y se traza un triángulo OPQ de modo que OP = 1, como muestra la figura. Si se observa, el ∢QOP es igual a 180° – 120° = 60°, por lo que las razones sen 120°, cos 120° y tan 120° pueden calcularse tomando como referencia los valores de sen 60°, cos 60° y tan 60°.

Si se refleja el ΔOPQ con respecto al eje y, el resultado es el triángulo OP'Q'. Las coordenadas de P' son (cos 60°, sen 60°) y por ser P el simétrico de P', sus coordenadas son (–cos 60°, sen 60°), por lo tanto,

$$\text{sen } 120° = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2},$$

$$\tan 120° = \frac{\text{sen } 120°}{\cos 120°} = \frac{\text{sen } 60°}{-\cos 60°} = -\tan 60° = -\sqrt{3}.$$

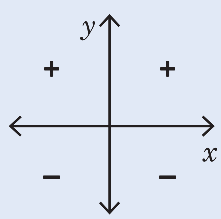
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{r\text{ sen }\theta}{r\cos\theta} = \frac{\text{sen }\theta}{\cos\theta}$$

Conclusión

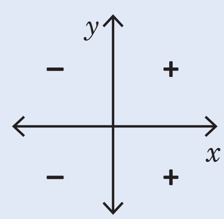
Si se tiene un ángulo distinto de 0°, 90°, 180° o 270° se define el **triángulo de referencia** como el triángulo rectángulo cuya hipotenusa de medida 1, es el lado terminal del ángulo y uno de sus catetos está sobre el eje x. En la solución del Problema inicial, el triángulo OPQ es el triángulo de referencia.

Para calcular razones trigonométricas de ángulos mayores a 90° se procede de la siguiente forma:

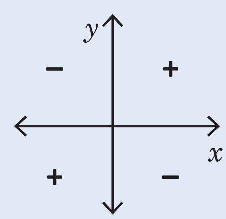
1. Se coloca el ángulo en posición estándar.
2. Se traza el triángulo de referencia siempre que sea posible.
3. Se calculan las razones del ángulo utilizando el ángulo agudo del triángulo de referencia que está comprendido entre el lado terminal del ángulo y el eje x. En este paso se determina el signo que tendrán las razones trigonométricas, dependiendo del cuadrante al que pertenece el ángulo. El signo del seno depende de y, el signo del coseno depende de x y el signo de la tangente depende del cociente $\frac{y}{x}$.



signos del seno



signos del coseno



signos de la tangente

Al ángulo agudo que se utiliza para calcular las razones trigonométricas se le conoce como **ángulo de referencia**.

Problemas

Calcula las razones trigonométricas de cada ángulo de la tabla y complétala. Cuando la razón no esté definida, escribe /.

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sen θ																	
cos θ																	
tan θ																	

Para calcular las razones trigonométricas de los ángulos 0°, 90°, 270° y 360° considera las coordenadas de x y y, que definen el ángulo en el plano cartesiano.

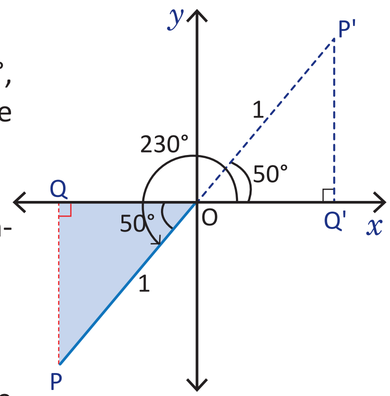
2.7 Razones trigonométricas de cualquier ángulo, parte 3

Problema inicial

a) Representa los valores de sen 230°, cos 230° y tan 230° en términos de un ángulo agudo.

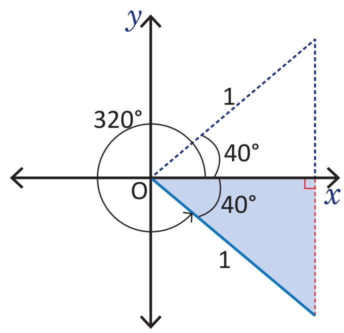
b) Representa los valores de sen 320°, cos 320° y tan 320° en términos de un ángulo agudo.

Solución



a) Se traza el triángulo de referencia. Si se observa, ∢POQ = 230° – 180° = 50°, por lo que las razones sen 230°, cos 230° y tan 230° pueden representarse tomando como referencia los valores de sen 50°, cos 50° y tan 50°.

El signo del seno y coseno es negativo y el de la tangente es positivo. Entonces, sen 230° = –sen 50°, cos 230° = –cos 50° y tan 230° = tan 50°.



b) En este caso, el ángulo de referencia es 360° – 320° = 40°. Puede observarse el gráfico de la derecha para analizar por qué se calcula de este modo.

El signo del seno y la tangente es negativo en el cuarto cuadrante, mientras que el coseno es positivo. Entonces,

sen 320° = – sen 40°, cos 320° = cos 40° y tan 320° = – tan 40°.

Conclusión

Los ángulos de referencia sirven para calcular razones trigonométricas de ángulos mayores a 90°.

La forma de calcular el ángulo de referencia depende del cuadrante al que pertenece dicho ángulo. Sea θ un ángulo cualquiera menor que 360°, entonces:
- Si θ pertenece al primer cuadrante, el ángulo de referencia es él mismo.
- Si θ pertenece al segundo cuadrante, el ángulo de referencia es 180° – θ.
- Si θ pertenece al tercer cuadrante, el ángulo de referencia es θ – 180°.
- Si θ pertenece al cuarto cuadrante, el ángulo de referencia es 360° – θ.

Ejemplo

Representa cos(–400°) en términos de un ángulo agudo.

Como –400° = –360° – 40°, el ángulo de referencia es 40°. El ángulo pertenece al cuarto cuadrante, por lo que el signo de cos(–400°) es positivo. Por lo tanto, cos(–400°) = cos 40°.

Problemas

Representa los valores de las razones trigonométricas en términos de los valores de sen θ, cos θ y tan θ, donde $0 \leq \theta < 90°$.

a) 100°	b) 175°	c) 220°
d) 250°	e) 290°	f) 310°
g) 405°	h) 570°	i) 630°
j) –780°	k) –940°	l) –1 000°

Unidad 5

2.8 Razones trigonométricas de cualquier ángulo, parte 4*

Problema inicial

Si θ está entre 0° y 360°, calcula su valor para cada caso:

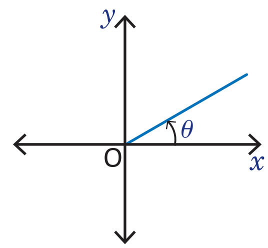
a) $\text{sen}\ \theta = \frac{1}{2}$

b) $\cos\theta = -\frac{3}{4}$

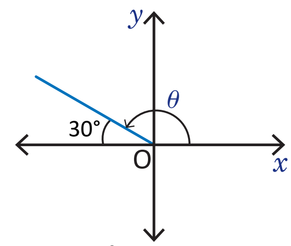
Solución

a) De acuerdo a la condición dada, sen θ es positivo. El seno es positivo en el primer y segundo cuadrante, y además $\text{sen}\ 30° = \frac{1}{2}$. Entonces, hay dos posibles valores para θ si está entre 0° y 360°.

Entonces $\theta = 30°$ o bien $\theta = 180° - 30° = 150°$.



Para θ en el primer cuadrante

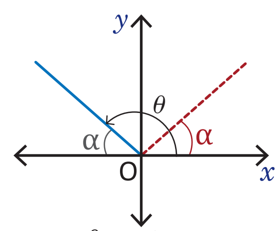


Para θ en el segundo cuadrante

b) De acuerdo a la condición dada, cos θ es negativo. El coseno es negativo en el segundo y tercer cuadrante. Para calcular el valor de θ se utiliza la calculadora. Se utiliza el valor absoluto de $-\frac{3}{4}$ en vez del propio valor.

Considerar el ángulo de referencia α, entonces $\cos\alpha = \frac{3}{4}$.

Se sabe que la función $\cos^{-1}$ de la calculadora devuelve el ángulo α que cumpla que $\cos\alpha = \frac{3}{4}$; es decir, $\cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = \alpha$.



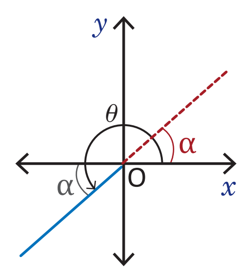
Para θ en el segundo cuadrante

Pero α es el ángulo de referencia y como θ está en el segundo cuadrante, se tiene que

$$\theta = 180° - \alpha = 180° - \cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 138.6°.$$

De igual forma, si θ está en el tercer cuadrante se tiene que

$$\theta = 180° + \cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 221.4°.$$



Para θ en el tercer cuadrante

> Cuando se determinan ángulos con calculadora hay que tener un cuidado especial: esta devuelve ángulos que están entre –90° y 90° para el seno y la tangente, y entre 0° y 180° para el coseno.

Conclusión

Para calcular el valor de un ángulo si se conoce una de sus razones trigonométricas, se utilizan ángulos de referencia. Además, si el ángulo se encuentra entre 0° y 360° generalmente habrán dos ángulos que satisfagan la condición impuesta.

Problemas

Calcula el valor de θ en cada caso si está entre 0° y 360°.

a) $\text{sen}\ \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\tan\theta = \sqrt{3}$

c) $\text{sen}\ \theta = \frac{2}{3}$

d) $\cos\theta = -\frac{4}{7}$

2.9 La identidad pitagórica

Problema inicial

Se denota el cuadrado de una razón trigonométrica, $(\text{sen }\theta)^2$, $(\cos\theta)^2$, etc., como $\text{sen}^2\theta$, $\cos^2\theta$, etc.

Demuestra que para cualquier ángulo θ se cumple que $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

Solución

Recordando que $\text{sen }\theta = \frac{y}{r}$ y $\cos\theta = \frac{x}{r}$, donde $r = \sqrt{x^2+y^2}$, entonces,

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{y^2+x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1.$$

Conclusión

La identidad $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ se conoce como **identidad pitagórica** y es válida para cualquier ángulo θ.

Ejemplo 1

Determinar los valores de $\cos\theta$ y $\tan\theta$ si $\text{sen }\theta = \frac{5}{13}$ y θ está en el cuadrante I.

Utilizando la identidad pitagórica $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$,

$$\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2\theta = \frac{25}{169} + \cos^2\theta = 1.$$

Entonces $\cos^2\theta = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169-25}{169} = \frac{144}{169}$. Luego, $\cos\theta = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$ o bien $\cos\theta = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$. Pero la otra condición inicial es que θ está en el cuadrante I y en el cuadrante I el coseno es positivo, por lo que $\cos\theta = \frac{12}{13}$.

Para calcular $\tan\theta$, recordar que $\tan\theta = \frac{\text{sen }\theta}{\cos\theta}$, entonces

$$\tan\theta = \frac{\text{sen }\theta}{\cos\theta} = \frac{5}{13} \div \frac{12}{13} = \frac{5}{13} \times \frac{13}{12} = \frac{5}{12}.$$

Por lo tanto, $\cos\theta = \frac{12}{13}$ y $\tan\theta = \frac{5}{12}$.

Ejemplo 2

Demuestra que $1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\text{sen}^2\theta}$ para cualquier ángulo θ.

Se sabe que $\tan\theta = \frac{y}{x}$, para (x, y) las coordenadas de un punto del plano. Entonces $\cot\theta = \frac{x}{y}$, así

$$1 + \cot^2\theta = 1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{y^2+x^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2}.$$

Por otra parte, $\frac{1}{\text{sen}^2\theta} = 1 \div \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1 \times \frac{r^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2}$. Por lo tanto, $1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\text{sen}^2\theta}$.

Problemas

1. Determina los valores de $\text{sen }\theta$ y $\tan\theta$ si $\cos\theta = -\frac{4}{5}$ y θ está en el cuadrante III.
2. Determina los valores de $\text{sen }\theta$ y $\tan\theta$ si $\cos\theta = -\frac{7}{9}$ y $\tan\theta < 0$.
3. Determina los valores de $\cos\theta$ y $\tan\theta$ si $\text{sen }\theta = \frac{2}{3}$ y θ no está en el cuadrante I.
4. Demuestra que $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ para cualquier ángulo θ.
5. Determina los valores de $\text{sen }\theta$ y $\cos\theta$ si $\tan\theta = -\frac{1}{2}$ y $\text{sen }\theta > 0$.
6. Demuestra que $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta \csc\theta$.
7. Demuestra que $\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta \text{ sen }\theta$.

Puedes utilizar la estrategia aplicada en la solución del problema inicial.

Para el problema 5 puedes utilizar el resultado del problema 4.

Unidad 5

2.10 Practica lo aprendido

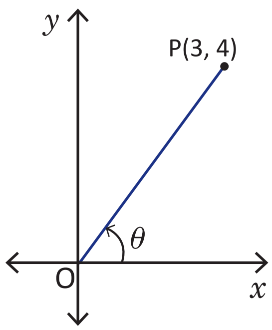
1. Dibuja cada ángulo.

a) 530° b) 780° c) 855°

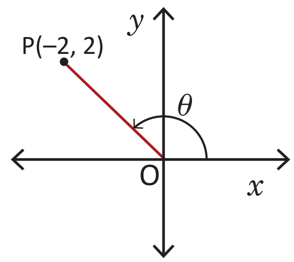
d) –1 360° e) –1 210° f) –630°

2. Determina las razones trigonométricas seno, coseno y tangente para cada ángulo.

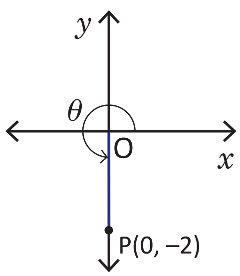
a)



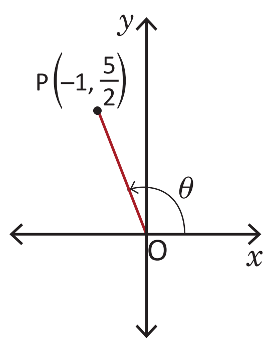
b)



c)



d)



3. Representa los valores de las razones trigonométricas en términos de los valores de sen θ, cos θ y tan θ, donde $0 \leq \theta < 90°$.

a) 165° b) 855° c) 2 385°

d) –140° e) –840° f) –2 190°

4. Calcula el valor de θ en cada caso, donde $0° \leq \theta < 360°$.

a) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\tan\theta = 1$ c) $\text{sen}\,\theta = -\frac{7}{9}$

5. Determina sen θ si $\cos\theta = \frac{5}{6}$ y θ no está en el cuadrante I.

6. Determina sen θ y cos θ si $\tan\theta = -\frac{1}{3}$ y θ está en el cuadrante II.

7. Demuestra que $\sec^2\theta + \csc^2\theta = \sec^2\theta\,\csc^2\theta$.

8. Demuestra que $(\tan\theta + \cot\theta)\tan\theta = \sec^2\theta$.

3.1 Área de un triángulo

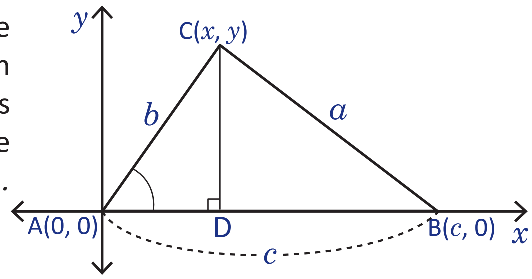
Problema inicial

Del triángulo ABC se conocen las medidas de los lados AC = b y AB = c, y la medida del ángulo A. Determina una fórmula para calcular el área del triángulo utilizando razones trigonométricas.

> Recuerda que en un triángulo suele referirse a los ángulos de acuerdo a las etiquetas de los vértices.

Solución

Se ubica el triángulo ABC sobre el plano cartesiano de modo que A(0, 0) y B(c, 0), con $c > 0$, y C(x, y), con $y > 0$. Como el área de un triángulo es igual a la mitad del producto de la base y la altura, es necesario calcular la longitud de la altura, la cual se corresponde con el valor de la coordenada en y del punto C; es decir, $y = b\text{sen } A$.



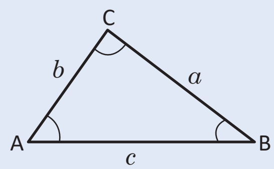
Ahora, la base es AB = c, entonces,

$$\text{Área del } \Delta\text{ABC} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{(\text{AB})(y)}{2} = \frac{c(b\text{sen } A)}{2} = \frac{bc\text{sen } A}{2}.$$

Teorema

Se denota por (ABC) el área de un triángulo ABC. Si se conocen las medidas de dos de los lados de un triángulo y el ángulo entre ellos, entonces puede calcularse el área utilizando trigonometría, de modo que

$$(\text{ABC}) = \frac{ab\text{sen } C}{2} = \frac{bc\text{sen } A}{2} = \frac{ca\text{sen } B}{2}.$$

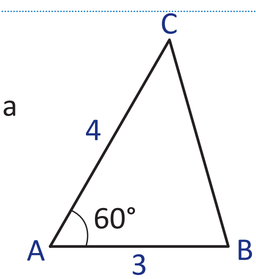


En adelante, se utilizará la notación
$(\text{ABC}) = \frac{1}{2}ab\text{sen } C = \frac{1}{2}bc\text{sen } A = \frac{1}{2}ca\text{sen } B.$

> Un triángulo posee tres alturas, que son aquellos segmentos de recta que parten de un vértice y cortan perpendicularmente al lado opuesto.

Ejemplo 1

Calcula el área del triángulo ABC que muestra la figura.

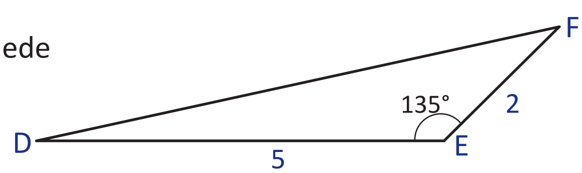


Como el ángulo conocido está entre los lados conocidos, se puede aplicar la fórmula del área directamente. Entonces,

$$(\text{ABC}) = \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{4})(3)\text{sen } 60° = (2)(3)\text{sen } 60° = (\cancel{2})(3)\left(\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right) = 3\sqrt{3}.$$

Ejemplo 2

Determina el área del triángulo DEF que muestra la figura.

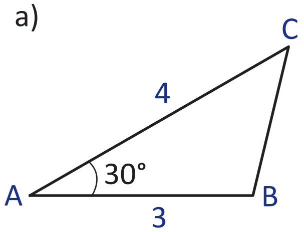


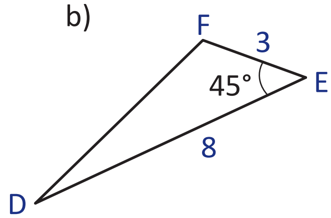
Como el ángulo conocido está entre los lados conocidos, se puede aplicar la fórmula del área directamente. Entonces,

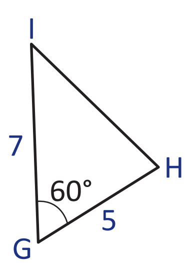
$$(\text{DEF}) = \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2})(5)\text{sen } 135° = 5\text{sen } 135° = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

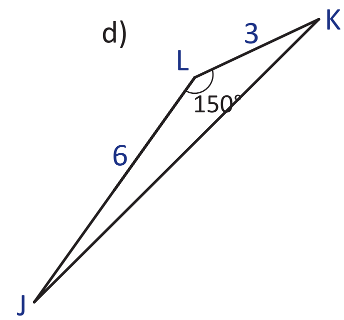
Problemas

1. Calcula el área de cada uno de los triángulos siguientes.

a)


b)


c)


d)


2. Deduce la fórmula del área del triángulo ABC, del Problema inicial, si C tiene coordenadas (x, y), con $x < 0$ y $y > 0$.

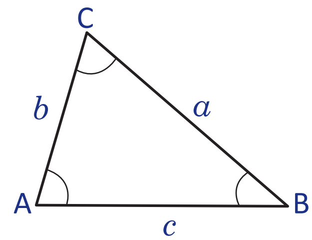
3.2 Ley de los senos*

Problema inicial

Demuestra que en cualquier triángulo ABC se cumple que $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$.

Solución

Si se calcula el área del triángulo, se tienen tres maneras: $\frac{1}{2}ab\text{sen } C$, $\frac{1}{2}bc\text{sen } A$ y $\frac{1}{2}ca\text{sen } B$.
Pero el área es igual, no importa cómo se calcule, por lo tanto



$$\frac{1}{2}ab\text{sen } C = \frac{1}{2}bc\text{sen } A = \frac{1}{2}ca\text{sen } B.$$

Multiplicando por 2,

$$bc\text{sen } A = ac\text{sen } B = ab\text{sen } C,$$

dividiendo entre abc

$$\frac{bc\text{sen } A}{abc} = \frac{ac\text{sen } B}{abc} = \frac{ab\text{sen } C}{abc} \Rightarrow \frac{\cancel{bc}\text{sen } A}{a\cancel{bc}} = \frac{\cancel{ac}\text{sen } B}{\cancel{a}b\cancel{c}} = \frac{\cancel{ab}\text{sen } C}{\cancel{ab}c},$$

$$\Rightarrow \frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c}, \qquad \text{------------------ (1)}$$

sacando los recíprocos $\Rightarrow \frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}.$

Observa que las razones en la proporción relacionan el lado y el seno del ángulo opuesto a este.

Teorema (Ley de los senos)

En un triángulo ABC, se cumple que $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$.

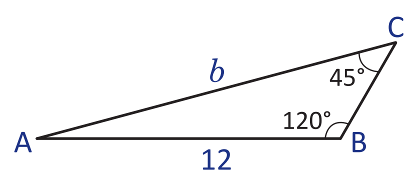
Como las igualdades anteriores son equivalentes a las igualdades en (1), se puede utilizar cualquiera de las dos indistintamente, según sea la necesidad.

Ejemplo

En un triángulo ABC calcula el valor de b si $c = 12$, $B = 120°$ y $C = 45°$.

Se dibuja el triángulo ABC y se ubican los datos. Aplicando el ley de los senos, se tiene

$$\frac{b}{\text{sen } 120°} = \frac{12}{\text{sen } 45°} \Rightarrow b = \frac{12\text{sen } 120°}{\text{sen } 45°} = 12\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \div \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{12\sqrt{3}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{12\sqrt{6}}{2}$$
$$= 6\sqrt{6}.$$



Por lo tanto, $b = 6\sqrt{6}$.

Problemas

Calcula los valores que se piden para el triángulo ABC.

a) El valor de b si $a = 3$, $A = 30°$ y $B = 45°$.

b) El valor de b si $a = 9$, $A = 60°$ y $B = 45°$.

c) El valor de c si $a = 6$, $A = 30°$ y $C = 135°$.

d) El valor de b si $c = 8$, $B = 55°$ y $C = 100°$.

e) El valor de c si $a = 6$, $A = 60°$ y $B = 75°$.

3.3 Cálculo del ángulo de un triángulo conocidos dos lados y un ángulo, parte 1

Problema inicial

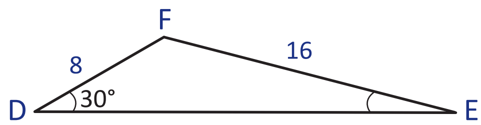
En cada uno de los siguientes casos, determina si puede construirse el triángulo y en caso afirmativo, calcula la medida del ángulo pedido.

a) En el ΔDEF, $d = 16$, $e = 8$ y $D = 30°$. Calcula la medida del ángulo E.

b) En el ΔMNP, $n = 20$, $p = 8$ y $P = 30°$. Calcula la medida del ángulo N.

Solución

a) Se dibuja el triángulo DEF y se colocan los datos conocidos. Como se conocen dos lados y un ángulo opuesto a uno de estos se aplica la ley de los senos. Por comodidad, se utilizará (1) de la clase 3.2.



$$\frac{\operatorname{sen} E}{8} = \frac{\operatorname{sen} 30°}{16} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} E = \frac{8 \operatorname{sen} 30°}{16} = \frac{\cancel{8} \operatorname{sen} 30°}{\cancel{16}} = \frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{4}.$$

Cuando $\operatorname{sen} E = \frac{1}{4}$ se tiene que $E \approx 14.5°$ o bien $E \approx 180° - 14.5° = 165.5°$.

Puede revisarse la clase 2.7 de esta unidad para ver por qué el ángulo E puede tener dos valores.

Se sabe que en un triángulo $D + E + F = 180°$. Es necesario comprobar que los valores de E encontrados tienen sentido.

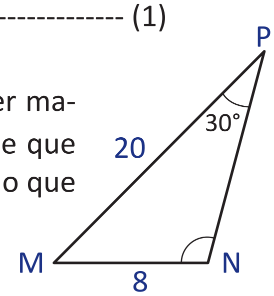
Para $E \approx 14.5°$ se tiene que $D + E \approx 30° + 14.5° = 44.5° < 180°$, por lo tanto $E \approx 14.5°$.

Para $E \approx 165.5°$ se tiene que $D + E \approx 30° + 165.5 = 195.5° > 180°$. Por lo tanto, E no puede tener un valor de 165.5°.

Luego, con los datos proporcionados puede construirse un solo triángulo y $E \approx 14.5°$.

b) Aplicando la ley de los senos se tiene que:

$$\frac{8}{\operatorname{sen} 30°} = \frac{20}{\operatorname{sen} N} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} N = \frac{20 \operatorname{sen} 30°}{8} = \frac{\cancel{20} \operatorname{sen} 30°}{\cancel{8}} = 5\left(\frac{1}{2}\right) \div 2 = \frac{5}{4} \qquad \text{------------------ (1)}$$



Para $\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ se establecerá que esta razón trigonométrica no puede ser mayor que 1 o menor que –1. Para cualesquiera números reales x y y puede verse que $y^2 \leq x^2 + y^2$ (a un número positivo se le está sumando un número positivo). Por lo que $-\sqrt{x^2 + y^2} \leq y \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, al dividir todo entre $\sqrt{x^2 + y^2}$ se obtiene

$$-1 \leq \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 1, \text{ es decir, } -1 \leq \operatorname{sen} \theta \leq 1.$$

Luego, de (1), como $\operatorname{sen} N = \frac{5}{4} > 1$, no hay ángulo que cumpla esta condición ya que el seno no puede ser mayor a 1, y por lo tanto no puede construirse un triángulo con las medidas dadas.

Conclusión

Si se conocen las medidas de dos lados y un ángulo opuesto a uno de los lados conocidos, entonces puede determinarse si el triángulo puede construirse mediante la aplicación de la ley de los senos. Además, pueden calcularse todos los ángulos del triángulo mediante la aplicación de la misma.

Problemas

Determina cuántos triángulos ABC pueden construirse en cada caso, calcula además la medida del ángulo pedido de ser posible.

a) $b = 2$, $c = \sqrt{2}$ y $B = 45°$. Calcula C.

b) $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2}$ y $A = 120°$. Calcula B.

c) $b = 3$, $c = \sqrt{2}$ y $C = 150°$. Calcula B.

d) $b = 6$, $c = \sqrt{3}$ y $C = 135°$. Calcula B.

3.4 Cálculo del ángulo de un triángulo conocidos dos lados y un ángulo, parte 2

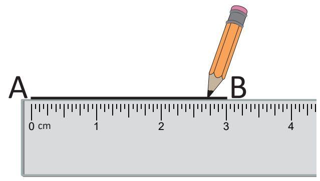
Problema inicial

Del triángulo ABC se sabe que a = 2 cm, c = 3 cm y A = 30°. Construye el triángulo y calcula la medida del ángulo C.

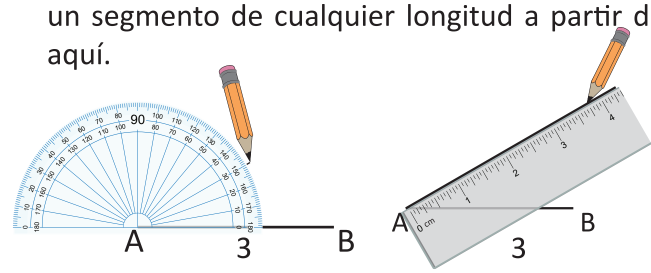
Solución

Puede construirse primero el triángulo de manera exacta como sigue:

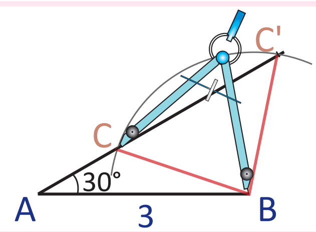
1. Trazar un segmento de longitud 3 cm. Se denota A el extremo inicial y B el extremo final.



2. Con vértice en A trazar un ángulo de 30° y trazar un segmento de cualquier longitud a partir de aquí.



3. Con el compás, medir una amplitud de 2 cm y haciendo centro en B trazar un arco de circunferencia hasta cortar al segmento trazado en el Paso 2. En este paso, se determinan dos cortes, por lo que con las medidas proporcionadas pueden dibujarse dos triángulos.



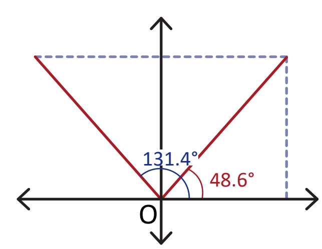
Para calcular el valor del ángulo C, nótese que se conocen dos lados del triángulo y el ángulo conocido es opuesto a un lado conocido, por lo tanto puede aplicarse la ley de los senos:

$$\frac{2}{\operatorname{sen} 30°} = \frac{3}{\operatorname{sen} C} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} C = \frac{3 \operatorname{sen} 30°}{2} = 3\left(\frac{1}{2}\right) \div 2 = \frac{3}{4}.$$

Cuando sen $C = \frac{3}{4}$ se tiene que $C \approx 48.6°$ o bien $C \approx 180° - 48.6° = 131.4°$.

Hay que comprobar que ambos valores de C son válidos.

- Si $C \approx 48.6°$ se tiene que $A + C \approx 30° + 48.6° = 78.6° < 180°$.
- Si $C \approx 131.4°$ se tiene que $A + C \approx 30° + 131.4° = 161.4° < 180°$.



Luego, el valor del ángulo C con los datos dados puede ser aproximadamente 48.6° o 161.4°.

Conclusión

Si se conocen dos lados de un triángulo y un ángulo opuesto a uno de estos lados, en algunos casos, pueden construirse dos triángulos con dichas medidas. A este caso se le llama **caso ambiguo**.

Problemas

Para cada caso, determina cuántos triángulos pueden construirse con las medidas dadas, y calcula el ángulo pedido de ser posible.

a) a = 3, b = 4 y A = 30°. Calcula B.

b) a = 2, c = 1 y C = 20°. Calcula A.

c) a = 4, b = 6 y B = 60°. Calcula A.

3.5 Ley del coseno*

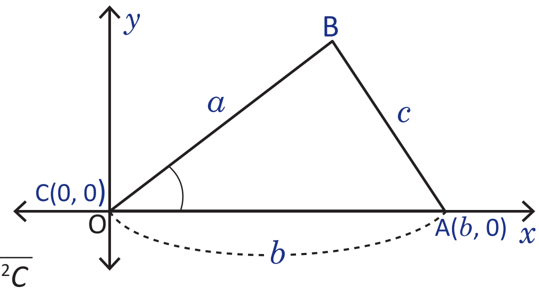
Problema inicial

Demuestra que en cualquier triángulo ABC se cumple que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Solución

Se ubica el triángulo ABC en el plano cartesiano de modo que A(b, 0) y C(0, 0).



Si (p, q) son las coordenadas del punto B, entonces

$$\cos C = \frac{p}{a} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} C = \frac{q}{a}.$$

Por lo que $p = a\cos C$ y $q = a\operatorname{sen} C$.

Ahora, la distancia del punto A al punto B es

$$\begin{aligned} d(\text{A, B}) &= \sqrt{(b - a\cos C)^2 + (0 - a\operatorname{sen} C)^2} \\ &= \sqrt{b^2 - 2ab\cos C + a^2\cos^2 C + a^2\operatorname{sen}^2 C} \\ &= \sqrt{a^2(\operatorname{sen}^2 C + \cos^2 C) + b^2 - 2ab\cos C} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}. \end{aligned}$$

Pero la distancia de A a B es la longitud del lado AB del triángulo, que es c. Entonces,

$$d(\text{A, B}) = c \;\Rightarrow\; c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Teorema (Ley del coseno)

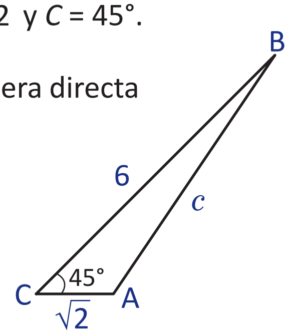
En un triángulo ABC se cumple que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

De igual forma se satisface que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B.$$

Ejemplo

Determina la medida del tercer lado de un triángulo ABC si se sabe que $a = 6$, $b = \sqrt{2}$ y $C = 45°$.



Dibujando el triángulo y ubicando los datos se observa que se puede aplicar de manera directa la ley del coseno. Así,

$$\begin{aligned} c^2 &= 6^2 + (\sqrt{2})^2 - 2(6)(\sqrt{2})\cos 45° \\ &= 36 + 2 - \cancel{12}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right) \\ &= 38 - 6(2) = 38 - 12 = 26. \end{aligned}$$

Como $c > 0$, se tiene que $c = \sqrt{26}$.

Problemas

Para cada caso, calcula la medida del tercer lado del triángulo.

a) En el ΔABC, $a = \sqrt{3}$, $b = 5$ y $C = 30°$.

b) En el ΔABC, $b = 6$, $c = 4$ y $A = 120°$.

c) En el ΔABC, $a = 9$, $c = 9\sqrt{3}$ y $B = 150°$.

d) En el ΔABC, $a = b = 4$ y $C = 60°$.

e) En el ΔABC, $a = \sqrt{2}$, $c = 2$ y $B = 135°$.

Unidad 5

3.6 Cálculo de los ángulos de un triángulo conocidos sus tres lados

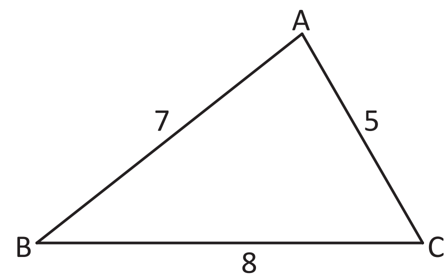
Problema inicial

Del triángulo ABC se sabe que $a = 8$, $b = 5$ y $c = 7$. Determina la medida de los tres ángulos del triángulo.

Solución

Se puede utilizar la ley del coseno para calcular un ángulo del triángulo. Utilizando $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$, entonces:

$$7^2 = 8^2 + 5^2 - 2(8)(5)\cos C$$
$$2(8)(5)\cos C = 8^2 + 5^2 - 7^2$$
$$80\cos C = 64 + 25 - 49$$
$$80\cos C = 40$$
$$\cos C = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}.$$



Cuando $\cos C = \frac{1}{2}$ se tiene que $C = 60°$.

Para calcular otro ángulo se aplica nuevamente la ley del coseno

$$5^2 = 7^2 + 8^2 - 2(7)(8)\cos B$$
$$2(7)(8)\cos B = 8^2 + 7^2 - 5^2$$
$$112\cos B = 64 + 49 - 25$$
$$112\cos B = 88$$
$$\cos B = \frac{88}{112} = \frac{11}{14}.$$

Cuando $\cos B = \frac{11}{14}$, $B \approx 38.2°$.

Luego, $A = 180° - B - C \approx 180° - 38.2° - 60° = 81.8°$.

Por lo tanto, $A \approx 81.8°$, $B \approx 38.2°$ y $C = 60°$.

Observa que para calcular el segundo ángulo también se puede utilizar la ley del seno.

$$\frac{7}{\text{sen } 60°} = \frac{5}{\text{sen } B} \quad \Rightarrow \quad \text{sen } B = \frac{5\text{sen } 60°}{7} = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \div 7 = \frac{5\sqrt{3}}{14}.$$

Cuando $\text{sen } B = \frac{5\sqrt{3}}{14}$, $B \approx 38.2°$ o bien $B \approx 180° - 38.2° = 141.8°$. Pero si $B \approx 141.8°$ entonces $B + C \approx 141.8° + 60° = 201.8°$, lo cual no puede ser en un triángulo. Por lo tanto $B \approx 38.2°$.
¿Por qué es preferible utilizar la ley del coseno?

Conclusión

Si se conocen las medidas de los tres lados de un triángulo pueden calcularse las medidas de sus tres ángulos mediante la ley del coseno.

Problemas

1. Para cada caso, determina la medida de los tres ángulos del triángulo si es posible.

a) En el ΔABC, $a = \sqrt{3}$, $b = 1$ y $c = 2$

b) En el ΔABC, $a = 1$, $b = \sqrt{2}$ y $c = \sqrt{5}$

c) En el ΔABC, $a = 5$, $b = 3$ y $c = 7$

d) En el ΔABC, $a = 6$, $b = 10$ y $c = 11$

e) En el ΔABC, $a = \sqrt{3}$, $b = 12$ y $c = 9$

2. En el ΔABC expresa $\cos B$ en términos de los lados a, b y c.

3.7 Practica lo aprendido

1. Calcula el área del triángulo ABC si se conocen los datos proporcionados en cada caso.

a) $a = 7$, $c = 4$ y $B = 45°$

b) $b = 10$, $c = 8$ y $A = 30°$

c) $a = 1$, $b = 2$ y $C = 45°$

d) $a = 4$, $b = 5$ y $C = 60°$

e) $a = 6$, $c = \sqrt{3}$ y $B = 120°$

2. En el triángulo ABC calcula el dato que se pide en cada caso, analizando si el resultado tiene sentido.

a) $b = 24$, $B = 38°$ y $C = 120°$. Calcula c.

b) $c = 10$, $A = 135°$ y $C = 30°$. Calcula a.

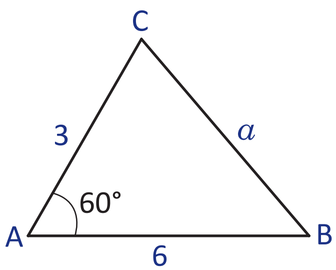
c) $a = 12$, $b = 16$ y $A = 45°$. Calcula el B.

d) $a = 3$, $b = 2$ y $B = 30°$. Calcula el A.

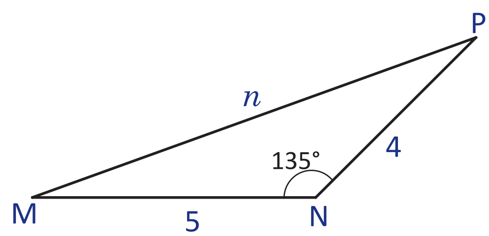
e) $b = 2$, $c = \sqrt{3}$ y $C = 120°$. Calcula el B.

3. Determina el valor del tercer lado en cada caso.

a)



b)

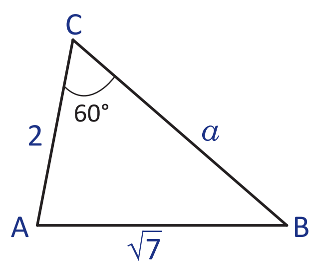


4. Calcula la medida de los tres ángulos del triángulo ABC para cada caso.

a) $a = 12$, $b = 7$ y $c = 6$

b) $a = 2$, $b = 3$ y $c = 4$

5. Determina la medida del tercer lado del triángulo ABC que muestra la figura.



Utiliza la ley del coseno y resuelve la ecuación cuadrática que resulta de ello.

6. Resuelve los siguientes triángulos, utilizando la ley de los senos y la ley del coseno.

a) $b = 21$, $A = 60°$, $B = 12°$

b) $a = 15$, $c = 7$, $B = 65°$

c) $a = 3$, $b = 2$, $c = 2$

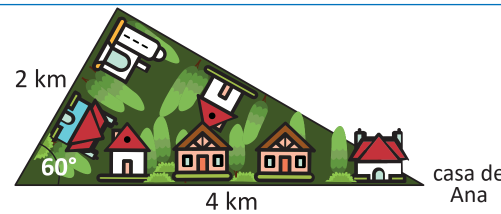
d) $c = 3$, $B = 110°$, $C = 45°$

Resolver un triángulo significa encontrar todas las medidas de sus lados y ángulos.

3.8 Aplicaciones de la ley de los senos y la ley del coseno

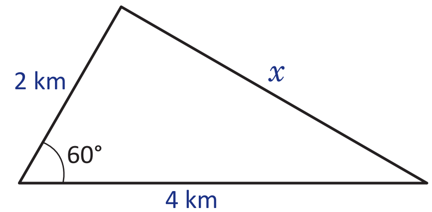
Problema inicial

Ana sale a correr cada mañana alrededor de su cuadra que tiene forma triangular. Primero recorre 4 km, luego 2 km y por último recorre la última calle para regresar a su casa. ¿Cuántos kilómetros corre Ana en total cada mañana si da una vuelta completa en su vecindario?



Solución

Para saber cuántos kilómetros corre Ana en total cada mañana, hay que encontrar la medida del tercer lado del vecindario. Como tiene forma triangular, se conocen dos lados y además el ángulo que se conoce es opuesto al lado que se desea calcular, se utiliza la ley del coseno.



$$x^2 = 4^2 + 2^2 - 2(4)(2)\cos 60° = 16 + 4 - 2(4)(\cancel{2})\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) = 20 - 8 = 12$$

Es decir, $x^2 = 12 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{12}$ o $x = -\sqrt{12}$.

Pero x representa una longitud por lo que no puede ser negativo. Entonces, $x \approx 3.5$ km. Luego, Ana corre cada mañana 4 km + 2 km + 3.5 km = 9.5 km, aproximadamente.

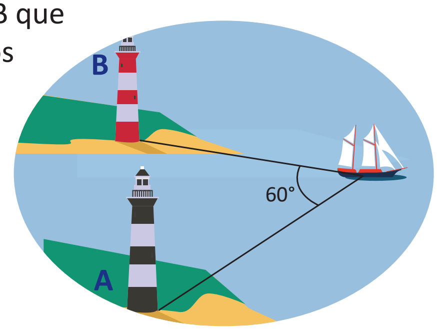
Conclusión

La ley de los senos y la ley del coseno pueden utilizarse para resolver problemas aplicados al entorno cuando dichos problemas involucren triángulos.

En algunos casos resulta útil aplicar la ley de los senos y en otras la ley del coseno, por ello es recomendable elaborar un dibujo y ubicar los datos conocidos y los datos que se desean calcular para identificar cuál de las dos leyes conviene utilizar.

Problemas

1. Un barco deja un faro A y navega 5 km. En este punto observa un faro B que está a 7 km del faro A. Si el ángulo entre las líneas de visión a ambos faros es de 60°, ¿a qué distancia está el bote del faro B?



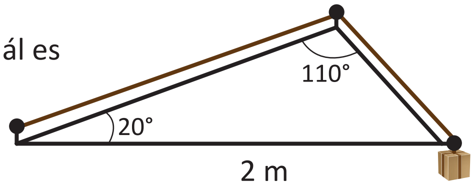
2. Una casa tiene un patio en forma triangular y el dueño quiere ponerle grama, por lo que necesita calcular el área del patio para comprar la grama. Dos de los lados del patio miden 40 y 42 metros, y el ángulo opuesto al lado que mide 42 es de 120°. ¿Cuántos m^2 debe comprar de grama aproximadamente?

3. Un herrero desea construir un columpio usando dos triángulos isósceles en sus extremos. Si el ángulo distinto mide 30° y el lado opuesto a este quiere que mida 1 metro, ¿cuánto deben medir los otros dos lados?

4. Demuestra que el área de un paralelogramo es el producto de dos lados adyacentes y el seno del ángulo entre estos dos lados adyacentes.

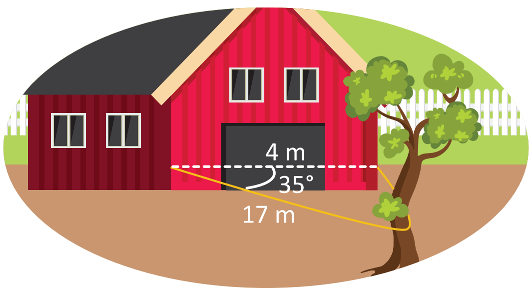
3.9 Practica lo aprendido

1. Una caja está sostenida por una cuerda, como muestra la figura. ¿Cuál es la longitud de la cuerda?

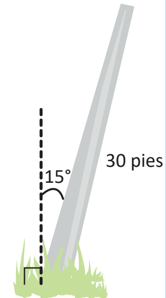


2. La capitana de un barco observa dos faros mientras navega. El barco se encuentra a 15 millas de un faro y a 20 millas del otro faro. Si la capitana determina que el ángulo entre las dos líneas de visión hacia los faros es de 120°, ¿cuál es la distancia entre los faros?

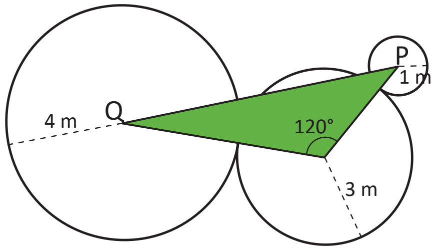
3. Un granjero tiene un establo y necesita hacer un corral extra. Para ello tiene un lazo de 38 metros y piensa atar el lazo como muestra la figura. ¿Tiene el granjero suficiente lazo si los nudos están a una distancia de 4 metros?



4. Un poste de 30 pies de largo se ha inclinado aproximadamente 15° de su posición original. El alcalde de la ciudad piensa sostenerlo con un cable de acero pero necesita calcular cuánto necesita de cable. Si amarra el cable a 100 pies de la base del poste, ¿cuánto necesita aproximadamente?



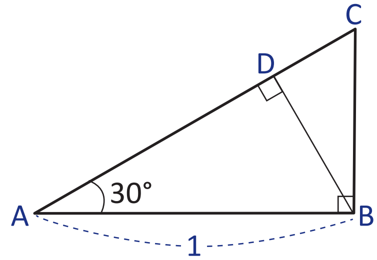
5. Se construirá la decoración de un jardín en forma triangular, como muestra la figura. Si cada vértice del triángulo es centro de la circunferencia sobre la que está, ¿cuál es la longitud de PQ?



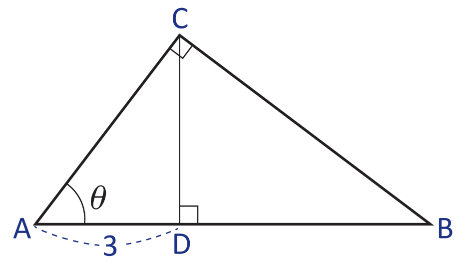
6. Un grupo de exploradores está aprendiendo a navegar para un viaje de supervivencia. Sobre un mapa les han ubicado tres puntos que deben visitar, sin embargo, necesitan conocer las medidas de los ángulos para saber qué tanto deben girar. ¿Cuáles son los ángulos que deben girar para poder visitar los tres puntos?

3.10 Problemas de la unidad

1. De la siguiente figura, calcula las longitudes de los segmentos AD, DC, AC, BD y BC. Racionaliza cuando sea necesario.



2. De la siguiente figura, escribe las longitudes de los segmentos BC, AC, DB y AB en términos del ángulo θ.

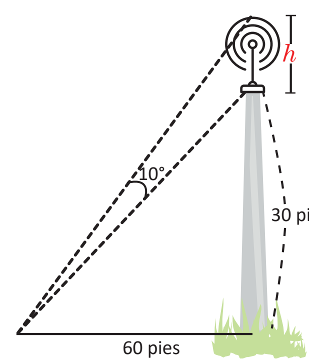


3. Un pentágono regular está inscrito en un círculo de radio 7. Calcula el perímetro del pentágono.

4. Una escalera de 30 pies de largo yace sobre una pared con una inclinación de 70°. Determina la distancia a la que se encuentra el pie de la escalera de la pared.

5. Desde la punta de un faro de 50 pies se observa un bote a un ángulo de depresión de 11°. ¿A qué distancia está el bote del faro?

6. Una antena vertical está montada en el tope de un poste de 30 pies de altura. Desde un punto a 60 pies de la base del poste, la antena subtiende un ángulo de 10°, como muestra la figura. Calcula la longitud h de la antena.



7. Calcula lo que se pide, si los datos se refieren a un triángulo rectángulo.

a) Si cos $\theta = \frac{1}{3}$, calcula sen θ.
b) Si sen $\theta = \frac{1}{4}$, calcula cos θ.
c) Si tan $\theta = 2$, calcula cos θ y sen θ.
d) Si sec $\theta = 7$, calcula cos θ y sen θ.

8. Calcula la distancia entre P y Q para cada caso.

a) P(–1, 3) y Q(2, 5)

b) P(2, 3) y Q(2, 6)

9. Calcula el perímetro del cuadrilátero ABCD que tiene por vértices A(–3, –1), B(0, 3), C(3, 4) y D(4, 1).

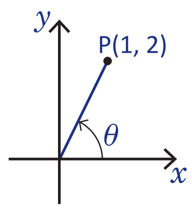
10. Determina el simétrico de cada punto respecto al eje x, respecto al eje y y respecto al origen. Grafica en cada caso.

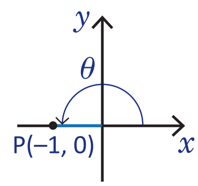
a) P(0, 3) b) $P\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ c) P(–2, 0) d) P(–1, –1)

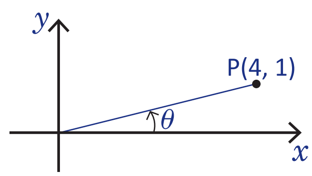
11. Dibuja cada ángulo e identifica a qué cuadrante pertenece.

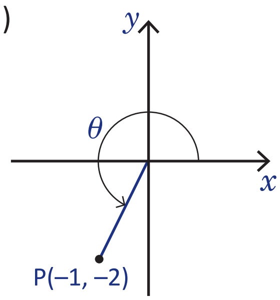
a) 800° b) –300° c) 1 050° d) –735°

12. Determina los valores de seno, coseno y tangente de θ en cada caso.

a)


b)


c)


d)


13. Representa los valores de las razones trigonométricas en términos de los valores de sen θ, cos θ y tan θ, donde $0° \leq \theta < 90°$.

a) 150° b) 370° c) 450° d) 535°

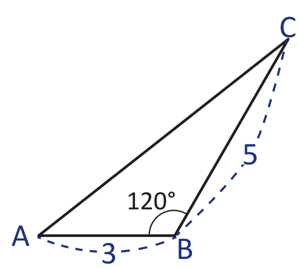
14. Determina los valores que se piden en cada caso.

a) sen θ y tan θ si cos $\theta = -\frac{1}{3}$ y $90° < \theta < 180°$.

b) tan θ si sen $\theta = \frac{3}{4}$ y θ está en el segundo cuadrante.

c) cos θ y sen θ si sec θ = 2 y θ está en el primer cuadrante.

15. Calcula el área del triángulo ABC.



16. Calcula los valores que se piden.

a) El valor de c si a = 3, A = 60° y C = 45°.

b) El valor de B si a = 1, $b = \sqrt{3}$ y A = 30°.

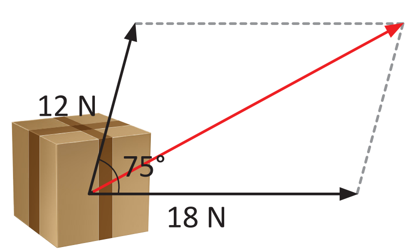
c) El valor de a si b = 2, $c = 2\sqrt{3}$ y A = 150°.

d) La medida de los tres ángulos si $a = b = 2$ y $c = \sqrt{3}$.

e) El valor de A si a = 4, b = 1 y B = 60°.

La unidad de medida de la fuerza aplicada a objetos es el newton y se simboliza por **N**.

17. Cuando dos fuerzas en direcciones distintas actúan sobre un objeto, la fuerza resultante es la diagonal del paralelogramo formado por las fuerzas aplicadas. Si dos fuerzas de 12 y 18 newtons actúan sobre un objeto a un ángulo de 75°, ¿cuál es el valor de la fuerza resultante?



Anexo. Uso de calculadoras

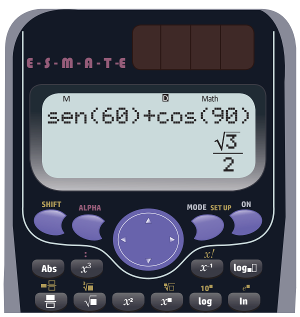
Existen diversos tipos de calculadoras: científicas, gráficas u oficina, entre otras. En este apartado se puede consultar el uso adecuado de una calculadora científica para el cálculo de valores trigonométricos. Para saber qué modelo de calculadora tienes, observa el tipo de teclas que posee y con base a eso podrás configurarla.

Calculadoras científicas

Esta es de las calculadoras más sencillas. Para configurarla para utilizar ángulos en grados se siguen los pasos:

Presionar la tecla MODE dos veces y presionar la tecla 1.

Para comprobar que la calculadora está en grados, debes observar que aparezca la letra D. Esta letra corresponde a la palabra “grados“ en inglés: “degree”.



Esta calculadora es más avanzada, y para configurarla en grados se siguen los pasos:

Presionar la tecla SHIFT, luego la tecla MODE SETUP y por último presionar la tecla 3.

Muchas calculadoras tienen la tecla $\sin^{-1}$ sin como función seno, "sin" viene del vocablo inglés "sine".

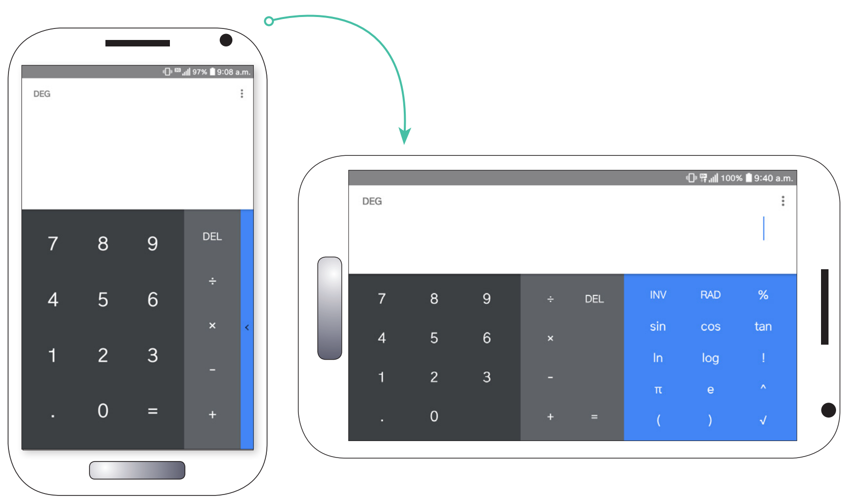
DEG viene del inglés grados, RAD de radianes y GRAD viene de gradianes. Esta última medida es comúnmente utilizada en la ingeniería civil para medir ángulos, y un gradián se calcula al dividir una circunferencia en 400 partes iguales.

En general, cualquier calculadora científica puede configurarse de manera parecida: hay que presionar la tecla MODE y buscar la configuración "deg" (degree).

Celulares

Muchos celulares inteligentes hoy en día traen una calculadora incorporada y presentan funciones científicas más avanzadas aparte de las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división.

Para acceder a la calculadora científica de tu celular ve a la aplicación calculadora ábrela y colócalo de forma horizontal para que puedas visualizar las funciones.



Aparecerá en una parte las funciones básicas de las calculadoras y las teclas numerales y en la otra parte aparecerán las funciones científicas, como las teclas para calcular el seno, coseno y tangente, teclas para calcular logaritmos, potencias, raíces, y los números pi y áureo (el tipo de teclas que aparecen dependen de la aplicación).

Al utilizar la calculadora científica del celular también debes tener cuidado que el ángulo esté medido en grados, observando si aparece en alguna parte de la pantalla la palabra DEG. Si aparece la palabra RAD, en este caso hay que buscar la tecla DEG y presionarla. Dependiendo de la calculadora y del teléfono, la palabra que aparezca puede ser GRAD y no DEG. Hay que tener cuidado que el GRAD del celular no es igual al GRAD de las calculadoras científicas.

6 Unidad

Identidades y ecuaciones trigonométricas

A partir de la introducción de la trigonometría como parte de los estudios astronómicos, se comienzan a trabajar las expresiones relacionadas con las medidas trigonométricas, algunos historiadores señalan la India, con mayor exactitud la escuela de Kerala, como el lugar donde se descubrieron las primeras identidades trigonométricas, sin embargo, estos resultados fueron obtenidos a partir de construcciones geométricas y propiedades de los triángulos y la circunferencia; la región árabe fue la que más interés mostró en la trigonometría y hacia el siglo X ya tenía un gran avance en el estudio de esta.

La oscilación que destruyó el puente Tacoma Narrows en 1940, se puede estudiar utilizando trigonometría.

El estudio de la trigonometría y la definición de las razones trigonométricas como se conocen en la actualidad fue retomado por matemáticos importantes como Newton, Euler o Leibniz, hasta llegar a su conexión con los números complejos y su expresión en series, entre otros resultados, que han llevado a la trigonometría a tener un lugar básico para el desarrollo de las ciencias y la tecnología, así como la física, en la descripción del sonido, la luz o las oscilaciones mecánicas.

Después de conocer las razones trigonométricas, ahora se desarrollará la deducción de las identidades trigonométricas más conocidas; se demostrará el teorema de adición para seno y coseno, y la identidad para el seno y coseno del ángulo doble, para utilizarlas posteriormente en la resolución de ecuaciones que tengan expresiones trigonométricas.

1.1 Identidades trigonométricas de los ángulos $-\theta$, $90° - \theta$ y $180° - \theta$

Problema inicial

Demuestra que

1. $\cos(-\theta) = \cos\theta$ y $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$
2. $\cos(90° - \theta) = \text{sen}\,\theta$ y $\text{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$
3. $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$ y $\text{sen}(180° - \theta) = \text{sen}\,\theta$

Utiliza simetrías respecto al eje x, a la recta identidad y al eje y.

Solución

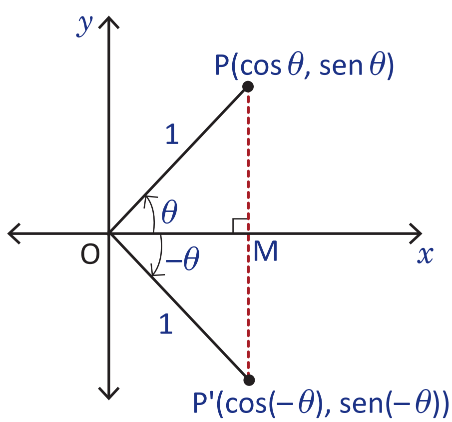
1. De la clase 2.2 de la Unidad 5 se sabe que si P es un punto del plano cartesiano con coordenadas (a, b), las coordenadas del punto simétrico P' respecto al eje x es $(a, -b)$.

   Sea el punto P(a, b) tal que OP = 1 y $\overline{\text{OP}}$ forme un ángulo θ con el eje x. Las coordenadas de P son $(\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$. Entonces, las coordenadas de su simétrico respecto al eje x es

   $$\text{P}'(\cos\theta, -\text{sen}\,\theta) \quad \text{------------------} \ (1)$$

   Por otra parte, $\overline{\text{OP}'}$ forma un ángulo $-\theta$ con el eje x. Por lo tanto, las coordenadas de P' son

   $$(\cos(-\theta), \text{sen}(-\theta)) \quad \text{------------------} \ (2)$$



   Comparando (1) y (2) se tiene que $\cos(-\theta) = \cos\theta$ y $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$.

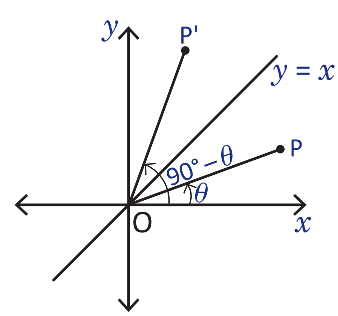
2. Se sabe que si P es un punto sobre el plano cartesiano con coordenadas (a, b), las coordenadas del punto P' simétrico respecto a la recta identidad es (b, a).

   Se considera P$(\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$, entonces su simétrico respecto a la recta identidad es

   $$\text{P}'(\text{sen}\,\theta, \cos\theta) \quad \text{------------------} \ (3)$$

   Como P' es el simétrico de P, se tiene que $\overline{\text{OP}'}$ forma un ángulo de $90° - \theta$ con el eje x; esto quiere decir que las coordenadas de P' son

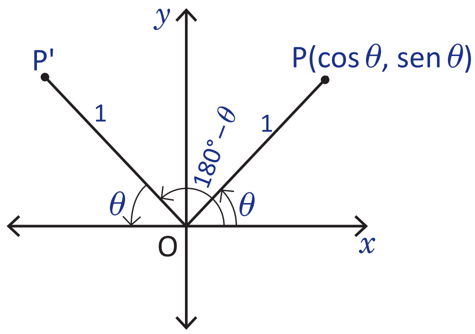
   $$(\cos(90° - \theta), \text{sen}(90° - \theta)) \quad \text{------------------} \ (4)$$



   De (3) y (4) puede determinarse que $\cos(90° - \theta) = \text{sen}\,\theta$ y $\text{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$.

3. Se sabe que si P(a, b) es un punto del plano cartesiano, entonces P'$(-a, b)$ es su simétrico con respecto al eje y.

Si se considera P un punto del plano cartesiano, tal que OP = 1 y $\overline{OP}$ forme un ángulo θ con el eje x, sus coordenadas son (cos θ, sen θ). Entonces su simétrico respecto al eje y es



P'(– cos θ, sen θ) ------------------ (5)

Por otra parte, $\overline{OP'}$ forma un ángulo de 180° – θ con el eje x. Así, las coordenadas de P' son

(cos(180° – θ), sen(180° – θ)) ------------------ (6)

Luego, de (5) y (6) se concluye que cos(180° – θ) = – cos θ y sen(180° – θ) = sen θ.

Conclusión

Una **identidad trigonométrica** es una igualdad donde intervienen razones trigonométricas y es verdadera para cualquier valor del ángulo.

Para cualquier ángulo θ se cumplen las identidades de ángulos opuestos para el coseno y el seno

a) cos(– θ) = cos θ b) sen(– θ) = – sen θ

Para cualquier ángulo θ se cumplen las identidades de ángulos complementarios y suplementarios para el coseno y el seno

c) cos(90° – θ) = sen θ d) sen(90° – θ) = cos θ

e) cos(180° – θ) = – cos θ f) sen(180° – θ) = sen θ

Además, se cumplen las siguientes identidades para la tangente

g) tan(– θ) = – tan θ h) tan(90° – θ) = $\frac{1}{\tan\theta}$ i) tan(180° – θ) = – tan θ

Ejemplo

Representa cada razón en términos de un ángulo θ tal que $0° \leq \theta < 90°$.

1. cos (– 40°) 2. sen 120° 3. tan 320°

1. Utilizando la identidad de ángulos opuestos, cos(– 40°) = cos 40°.
2. Utilizando la identidad de ángulos suplementarios, sen 120° = sen(180° – 120°) = sen 60°.
3. En este caso se aplica primero la identidad de ángulos suplementarios

tan 320° = – tan(180° – 320°) = – tan(– 140°) = tan 140° = – tan(180° – 140°) = – tan 40°.

Es decir, tan 320° = – tan 40°.

Problemas

1. Representa cada razón trigonométrica en términos de un ángulo θ tal que $0° \leq \theta < 90°$. Indica qué tipo de identidad o identidades hay que utilizar.

a) cos(–30°) b) sen 170° c) sen 110°

d) cos 250° e) tan(– 60°) f) tan(– 100°)

2. Demuestra que tan(– θ) = – tan θ.
3. Demuestra que tan(90° – θ) = $\frac{1}{\tan\theta}$.
4. Demuestra que tan(180° – θ) = – tan θ.

Unidad 6

1.2 Identidades trigonométricas de los ángulos $\theta + 180°$, $\theta - 180°$ y $90° + \theta$

Problema inicial

Demuestra que

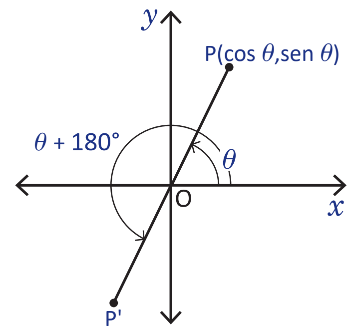
1. $\cos(\theta + 180°) = -\cos\theta$ y $\operatorname{sen}(\theta + 180°) = -\operatorname{sen}\theta$
2. $\cos(\theta - 180°) = -\cos\theta$ y $\operatorname{sen}(\theta - 180°) = -\operatorname{sen}\theta$
3. $\cos(90° + \theta) = -\operatorname{sen}\theta$ y $\operatorname{sen}(90° + \theta) = \cos\theta$

Utiliza la simetría respecto al origen y las identidades de la clase anterior.

Solución

a) Sea el punto P(a, b) tal que OP = 1 y $\overline{\text{OP}}$ forme un ángulo θ con el eje x. Las coordenadas de P son $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Entonces, las coordenadas de su simétrico respecto al origen son

$$\text{P}'(-\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta) \quad \text{------------------ (1)}$$



Pero $\overline{\text{OP}'}$ forma un ángulo de $\theta + 180°$ con el eje x, por lo que las coordenadas de P' son

$$(\cos(\theta + 180°), \operatorname{sen}(\theta + 180°)) \quad \text{------------------ (2)}$$

Luego, de (1) y (2) se tiene que $\cos(\theta + 180°) = -\cos\theta$ y $\operatorname{sen}(\theta + 180°) = -\operatorname{sen}\theta$.

b) El ángulo $\theta - 180°$ puede reescribirse como $-(180° - \theta)$. Entonces,

$$\cos(\theta - 180°) = \cos(-(180° - \theta)) = \cos(180° - \theta) = -\cos\theta \text{ y}$$

$$\operatorname{sen}(\theta - 180°) = \operatorname{sen}(-(180° - \theta)) = -\operatorname{sen}(180° - \theta) = -\operatorname{sen}\theta.$$

c) El ángulo $90° + \theta$ puede reescribirse como $180° - (90° - \theta)$. Entonces,

$$\cos(90° + \theta) = \cos(180° - (90° - \theta)) = -\cos(90° - \theta) = -\operatorname{sen}\theta \text{ y}$$

$$\operatorname{sen}(90° + \theta) = \operatorname{sen}(180° - (90° - \theta)) = \operatorname{sen}(90° - \theta) = \cos\theta.$$

Conclusión

Para cualquier ángulo θ se cumple que

a) $\cos(\theta + 180°) = -\cos\theta$ b) $\operatorname{sen}(\theta + 180°) = -\operatorname{sen}\theta$

c) $\cos(\theta - 180°) = -\cos\theta$ d) $\operatorname{sen}(\theta - 180°) = -\operatorname{sen}\theta$

e) $\cos(90° + \theta) = -\operatorname{sen}\theta$ f) $\operatorname{sen}(90° + \theta) = \cos\theta$

Además, se cumplen las siguientes identidades para la tangente

g) $\tan(\theta + 180°) = \tan\theta$ h) $\tan(\theta - 180°) = \tan\theta$ i) $\tan(90° + \theta) = -\dfrac{1}{\tan\theta}$

Ejemplo

Representa cada razón en términos de un ángulo θ tal que $0° \leq \theta < 90°$.

a) cos 200° b) sen 130° c) tan 250°

a) Como 200° = 20° + 180°, se tiene que cos 200° = – cos 20°.
b) Como 130° = 90° + 40°, se tiene que sen 130° = sen(90° + 40°) = cos 40°.
c) Como 250° = 70° + 180°, se tiene que tan 250° = tan(70°).

Problemas

Representa cada razón trigonométrica en términos de un ángulo θ tal que $0° \leq \theta < 90°$.

a) sen 100° b) sen 215° c) cos 160°

d) cos 195° e) tan 205° f) tan 290°

1.3 Ángulo adición*

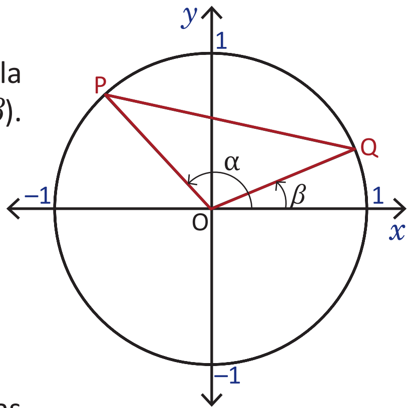
Problema inicial

Demuestra que

a) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$

b) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$

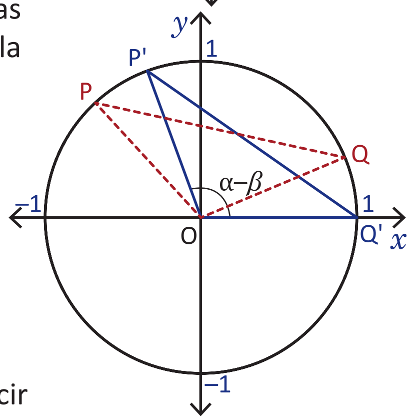
Solución



a) Se dibuja una circunferencia de radio 1 y el triángulo OPQ como muestra la figura. Las coordenadas de P son (cos α, sen α) y las de Q son (cos β, sen β). El cuadrado de la distancia de P a Q es

$$
\begin{aligned}
(PQ)^2 &= (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2\\
&= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}^2\beta\\
&= (\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) + (\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\\
&= 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.
\end{aligned}
$$

Si se rota el triángulo OPQ un ángulo $-\beta$ respecto al origen, las coordenadas de P y Q rotados son P'(cos(α – β), sen(α – β)) y Q'(1, 0). El cuadrado de la distancia de P' a Q' es



$$
\begin{aligned}
(P'Q')^2 &= (\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\operatorname{sen}(\alpha - \beta) - 0)^2\\
&= \cos^2(\alpha - \beta) - 2(1)\cos(\alpha - \beta) + 1 + \operatorname{sen}^2(\alpha - \beta)\\
&= [\cos^2(\alpha - \beta) + \operatorname{sen}^2(\alpha - \beta)] - 2\cos(\alpha - \beta) + 1\\
&= 1 - 2\cos(\alpha - \beta) + 1\\
&= 2 - 2\cos(\alpha - \beta).
\end{aligned}
$$

Por la identidad pitagórica, se sabe que $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, para cualquier θ.

Pero una rotación conserva distancias, por lo que d(P, Q) = d(P', Q'), es decir

$$(d(P, Q))^2 = (d(P', Q'))^2$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow\ 2 - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta - 2\cos\alpha\cos\beta = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)\\
&\Rightarrow\ -2(\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \cos\alpha\cos\beta) = -2\cos(\alpha - \beta)\\
&\Rightarrow\ \cos(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \cos\alpha\cos\beta.
\end{aligned}
$$

b) Para demostrar esta parte, como sen θ = cos(90° – θ) y cos θ = sen(90° – θ), entonces

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \cos(90° - (\alpha + \beta))\\
&= \cos((90° - \alpha) - \beta)\\
&= \cos(90° - \alpha)\cos\beta + \operatorname{sen}(90° - \alpha)\operatorname{sen}\beta\\
&= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta.
\end{aligned}
$$

Teorema de la adición

Se satisfacen las siguientes identidades del ángulo adición:

a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

b) $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

c) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

d) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

Además, se satisfacen las siguientes identidades de la tangente:

e) $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

f) $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

Las identidades b, c, e y f se dejan como ejercicio.

Problemas

Demuestra los literales b, c, e y f del teorema de la adición.

Observa que $\alpha + \beta = \alpha - (-\beta)$, $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$. Para las identidades b) y c) utiliza a) y b) de la clase 1.1.

Unidad 6

1.4 Valores exactos de las razones trigonométricas, parte 1

Problema inicial

Calcula el valor exacto de sen 75°, cos 75° y tan 75° utilizando el hecho que 75° = 45° + 30°.

Solución

Como 75° = 45° + 30°, entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 75° = \operatorname{sen}(45° + 30°) &= \operatorname{sen} 45° \cos 30° + \cos 45° \operatorname{sen} 30°\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Puedes utilizar la tabla de la clase 2.6 de la Unidad 5.

Para calcular cos 75° se hace de la misma manera,

$$\begin{aligned}\cos 75° = \cos(45° + 30°) &= \cos 45° \cos 30° - \operatorname{sen} 45° \operatorname{sen} 30°\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Para calcular tan 75° se utiliza el hecho que $\tan 75° = \dfrac{\operatorname{sen}(75°)}{\cos(75°)}$, por lo que

$$\tan 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \div \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{3}.$$

Conclusión

Se pueden utilizar las identidades del ángulo adición para calcular valores exactos de razones trigonométricas de ángulos no conocidos.

Problemas

1. Utilizando las identidades del ángulo adición, calcula el valor exacto del seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos utilizando los ángulos especiales.

   a) 15° b) 105°

   c) 165° d) 195°

Los ángulos especiales son aquellos para los cuales las razones trigonométricas son conocidas (0°, 30°, 45°, 60°, 90° y 180°). Los ángulos 120°, 135°, 150°, 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315° y 330° también son especiales pero pueden calcularse con los primeros valores mencionados.

2. Utilizando las identidades del ángulo adición demuestra que

   a) $\cos(180° + \theta) = -\cos\theta$ b) $\operatorname{sen}(180° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$

   c) $\cos(270° + \theta) = \operatorname{sen}\theta$ d) $\operatorname{sen}(270° + \theta) = -\cos\theta$

   e) $\cos(45° - \theta) = \operatorname{sen}(45° + \theta)$ f) $\tan(45° + \theta) = \dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

   g) $\operatorname{sen}(360° + \theta) = \operatorname{sen}\theta$ h) $\cos(360° + \theta) = \cos\theta$

1.5 Ángulo doble

Problema inicial

Demuestra que

a) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\text{sen}^2\theta$

b) $\text{sen } 2\theta = 2\text{sen } \theta \cos \theta$

Solución

a) Se utiliza la fórmula del ángulo adición del coseno:

$$\cos 2\theta = \cos(\theta + \theta) = \cos\theta \cos\theta - \text{sen }\theta \text{ sen }\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta. \qquad (1)$$

De la identidad pitagórica $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ se deduce que $\cos^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta$, sustituyendo en (1) se tiene:

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta - \text{sen}^2\theta = 1 - 2\text{sen}^2\theta.$$

Si de la identidad pitagórica despejamos $\text{sen}^2\theta$ se tiene que $\text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$. Sustituyendo en (1) se tiene:

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) = \cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta = 2\cos^2\theta - 1.$$

b) Se utiliza la fórmula del ángulo adición del seno:

$$\text{sen } 2\theta = \text{sen}(\theta + \theta) = \text{sen }\theta \cos\theta + \cos\theta \text{ sen }\theta = \text{sen }\theta\cos\theta + \text{sen }\theta\cos\theta = 2\text{sen }\theta\cos\theta.$$

Teorema del ángulo doble

Para cualquier ángulo θ se satisfacen las identidades del ángulo doble

a) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\text{sen}^2\theta$

b) $\text{sen } 2\theta = 2\text{sen }\theta\cos\theta$

Además, para la tangente se tiene la siguiente identidad

c) $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

Ejemplo 1

Si $90° < \theta < 180°$ y $\text{sen }\theta = \frac{3}{5}$, ¿cuál es el valor de $\text{sen } 2\theta$ y $\cos 2\theta$?

Si se observa la fórmula del ángulo doble del seno y coseno se necesita calcular $\cos\theta$. Como θ está entre 90° y 180°, $\cos\theta$ es negativo. De la identidad pitagórica,

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2\theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = -\frac{4}{5}.$$

Luego, $\text{sen } 2\theta = 2\text{sen }\theta\cos\theta = 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$ y $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$.

Ejemplo 2

Si $\cos\theta = \frac{1}{4}$, ¿cuál es el valor de $\cos 2\theta$?

Como se conoce el valor de $\cos\theta$ se utiliza la identidad $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$.

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = 2\left(\frac{1}{16}\right) - 1 = \frac{1}{8} - 1 = -\frac{7}{8}.$$

Problemas

1. Si $0° < \theta < 90°$ y $\cos\theta = \frac{7}{9}$, ¿cuál es el valor de $\text{sen } 2\theta$ y $\cos 2\theta$?
2. Si $\text{sen }\theta = -\frac{\sqrt{7}}{3}$ determina el valor de $\cos 2\theta$.
3. Determina los valores de $\text{sen } 2\theta$, $\cos 2\theta$ y $\tan 2\theta$ si $\tan\theta = \frac{12}{5}$ y θ está en el tercer cuadrante.
4. Demuestra que $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$.

1.6 Ángulo medio

Problema inicial

Demuestra que

a) $\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$

b) $\text{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$

Solución

a) Del teorema del ángulo doble se sabe que

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$$

Si en esta expresión se hace $\alpha = \frac{\theta}{2}$ se obtendría

$$\cos\left(2\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1,$$

$$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1,$$

$$\Rightarrow \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} \qquad \text{despejando } \cos^2\frac{\theta}{2}.$$

b) De igual forma que en a), del teorema del ángulo doble se tiene que

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\text{sen}^2\alpha.$$

Haciendo $\alpha = \frac{\theta}{2}$ se obtiene

$$\cos\left(2\frac{\theta}{2}\right) = 1 - 2\text{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

$$\cos\theta = 1 - 2\text{sen}^2\frac{\theta}{2},$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} \qquad \text{despejando } \text{sen}^2\frac{\theta}{2}.$$

Teorema del ángulo medio

Para cualquier ángulo θ se cumple que

a) $\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$

b) $\text{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$

Además, para la tangente se cumple la identidad

c) $\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

Problemas

1. Demuestra el literal c) del teorema del ángulo medio.

2. Utilizando el resultado del Problema 1 demuestra que $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$.

Para el Problema 2, utiliza la relación de $\tan\frac{\theta}{2}$ con $\text{sen}\frac{\theta}{2}$ y $\cos\frac{\theta}{2}$ y la identidad del ángulo doble del seno. Multiplica por un 1 conveniente.

3. Si se multiplica $\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ por $\frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta}$ se llega a que $\tan\frac{\theta}{2} = \pm\frac{1-\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$. Esta última difiere del resultado del Problema 2 en el hecho que hay que elegir el signo + o –. Justifica por qué se elige solo el signo +.

1.7 Valores exactos de las razones trigonométricas, parte 2

Problema inicial

1. Calcula los valores exactos de sen 22.5°, cos 22.5° y tan 22.5°.
2. Si $\cos\theta = \frac{3}{5}$, con θ en el cuarto cuadrante, determina el valor de $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$ y $\tan\frac{\theta}{2}$.

Solución

1. Observar que $22.5° = \frac{45°}{2}$. Además, 22.5° está en el primer cuadrante por lo que sen 22.5°, cos 22.5° y tan 22.5° son positivos.

$$\operatorname{sen}^2 22.5° = \operatorname{sen}^2\frac{45°}{2} = \frac{1-\cos 45°}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} 22.5° = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

$$\cos^2 22.5° = \cos^2\frac{45°}{2} = \frac{1+\cos 45°}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos 22.5° = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

$$\tan 22.5° = \frac{\operatorname{sen} 22.5°}{\cos 22.5°} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \div \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

2. Como θ está en el cuarto cuadrante significa que $270° < \theta < 360°$, por lo que $135° < \frac{\theta}{2} < 180°$; es decir, $\frac{\theta}{2}$ está en el segundo cuadrante y por lo tanto $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ es positivo y $\cos\frac{\theta}{2}$ y $\tan\frac{\theta}{2}$ son negativos. Así,

$$\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\frac{3}{5}}{2} = \frac{2}{5\times 2} = \frac{1}{5} \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\frac{3}{5}}{2} = \frac{\cancel{8}}{5\times\cancel{2}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \div \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{\cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{2\cancel{\sqrt{5}}} = -\frac{1}{2}.$$

Conclusión

Se pueden utilizar las fórmulas del ángulo medio para calcular valores exactos de razones trigonométricas.

Problemas

1. Utilizando las identidades del ángulo medio calcula las razones trigonométricas de cada ángulo.

   a) 67.5° b) 105° c) 112.5° d) 165°

2. Para cada valor de $\cos\theta$ determina $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$ y $\tan\frac{\theta}{2}$.

   a) $\cos\theta = \frac{3}{4}$, $0° < \theta < 90°$
   b) $\cos\theta = -\frac{5}{12}$, $90° < \theta < 180°$
   c) $\cos\theta = -\frac{1}{9}$, $180° < \theta < 270°$
   d) $\cos\theta = \frac{1}{8}$, $270° < \theta < 360°$

3. Si $\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ y $180° < \theta < 270°$ determina el valor de $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$ y $\tan\frac{\theta}{2}$.

1.8 Practica lo aprendido

1. Escribe cada razón trigonométrica en términos de un ángulo θ tal que $0° \leq \theta < 90°$.

a) $\text{sen}(-45°)$ b) $\text{sen } 210°$ c) $\text{sen } 350°$

d) $\cos(-130°)$ e) $\cos(-80°)$ f) $\tan 135°$

2. Demuestra que:

a) $\sec(-\theta) = \sec$ b) $\csc(-\theta) = -\csc \theta$

c) $\cot(-\theta) = -\cot \theta$ d) $\sec(90° - \theta) = \csc \theta$

e) $\csc(90° - \theta) = \sec \theta$ f) $\tan(\theta + 45°)\tan(45° - \theta) = 1$

3. Verifica que $\cot 75° = 2 - \sqrt{3}$.

4. Demuestra que:

a) $\tan(\theta + 180°) = \tan \theta$ b) $\tan(\theta - 180°) = \tan \theta$

5. Demuestra que $\text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta) = 2\text{sen } \alpha \cos \beta$.

6. Determina sen 2θ, cos 2θ y tan 2θ en cada caso.

a) $\text{sen } \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$ y $0° < \theta < 90°$ b) $\text{sen } \theta = -\frac{1}{3}$ y $180° < \theta < 270°$

c) $\sec \theta = \frac{\sqrt{13}}{2}$ y $270° < \theta < 360°$ d) $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ y $90° < \theta < 180°$

7. Calcula el valor exacto de cos 480° y sen 480°.

8. Para cada valor de sen θ determina sen $\frac{\theta}{2}$, cos $\frac{\theta}{2}$ y tan $\frac{\theta}{2}$.

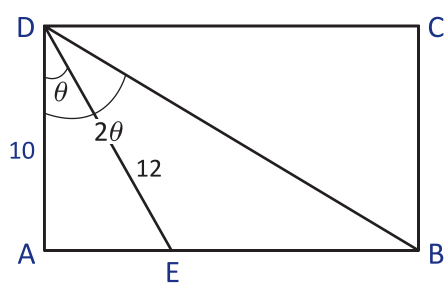
a) $\text{sen } \theta = -\frac{4}{5}$ y $180° < \theta < 270°$ b) $\text{sen } \theta = \frac{5}{12}$ y $90° < \theta < 180°$

9. En la figura, ABCD es un rectángulo, donde AD = 10, DE = 12 y ∢BDA = 2∢EDA.

a) Determina el valor de cos θ.

b) Determina el valor de cos 2θ.

c) Calcula la medida de BD.



2.1 Ecuaciones trigonométricas, parte 1*

Problema inicial

Resuelve $\tan^2\theta = 1$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Solución

Para resolver $\tan^2\theta = 1$. Como está elevado al cuadrado, se saca la raíz cuadrada a ambos lados y se tiene que $\tan\theta = \pm 1$. Esto significa que $\tan\theta = 1$ o bien $\tan\theta = -1$. Así,

Si $\tan\theta$ es positivo entonces el ángulo está en el primer o tercer cuadrante. Si $\tan\theta$ es negativo entonces el ángulo está en el segundo o cuarto cuadrante.

- $\tan\theta = 1$ cuando $\theta = 45°$ o $\theta = 180° + 45° = 225°$.
- $\tan\theta = -1$ cuando $\theta = 180° - 45° = 135°$ o $\theta = 360° - 45° = 315°$.

Por lo tanto, las soluciones de $\tan^2\theta = 1$ son $\theta = 45°, 135°, 225°, 315°$ cuando θ está entre 0° y 360°.

Definición

Una **ecuación trigonométrica** es una ecuación donde la incógnita aparece como argumento de una razón trigonométrica.

Resolver una ecuación trigonométrica es encontrar todas las soluciones que satisfacen la igualdad.

El número de soluciones de una ecuación trigonométrica depende de los valores en los que se limita la incógnita; por ejemplo, la ecuación $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2}$ para $0° \leq \theta < 180°$ no tiene solución ya que $\operatorname{sen}\theta$ es positivo para ángulos que están entre 0° y 180°.

Ejemplo

Resuelve $2\cos\theta - 6 = -4$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Para resolver se despeja $\cos\theta$ y se obtiene

$$
\begin{aligned}
& 2\cos\theta - 6 = -4 \\
\Rightarrow\quad & 2\cos\theta = -4 + 6 \\
\Rightarrow\quad & 2\cos\theta = 2 \\
\Rightarrow\quad & \cos\theta = 1
\end{aligned}
$$

Como $\cos\theta$ es igual a 1 cuando $\theta = 0°$ se tiene que la solución de la ecuación $2\cos\theta - 6 = -4$ es $\theta = 0°$ cuando θ está entre 0° y 360°.

Problemas

Resuelve las ecuaciones para $0° \leq \theta < 360°$.

a) $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{4}$

b) $\cos^2\theta = \frac{3}{4}$

c) $\tan^2\theta = 3$

d) $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{3}{4}$

e) $2\operatorname{sen}\theta - \sqrt{3} = 0$

f) $2\cos\theta + 3 = 4$

g) $4\operatorname{sen}\theta + 5 = 7$

h) $7\tan\theta = 2\sqrt{3} + \tan\theta$

Unidad 6

2.2 Ecuaciones trigonométricas, parte 2 (uso de la identidad pitagórica)

Problema inicial

Resuelve $2\cos^2\theta - \text{sen}\ \theta - 1 = 0$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Solución

Se reescribe la ecuación de modo que aparezca únicamente sen θ y para ello se utiliza la identidad pitagórica.

$$\begin{aligned} & 2\cos^2\theta - \text{sen}\ \theta - 1 = 0 \\ \Rightarrow\ & 2(1 - \text{sen}^2\theta) - \text{sen}\ \theta - 1 = 0 \\ \Rightarrow\ & 2 - 2\text{sen}^2\theta - \text{sen}\ \theta - 1 = 0 \\ \Rightarrow\ & -2\text{sen}^2\theta - \text{sen}\ \theta + 1 = 0 \\ \Rightarrow\ & 2\text{sen}^2\theta + \text{sen}\ \theta - 1 = 0 \end{aligned}$$

De la identidad pitagórica $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$ puede obtenerse que $\cos^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta$ o bien $\text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$.

Si se hace el cambio de variable $y = \text{sen}\ \theta$, la ecuación se transforma en $2y^2 + y - 1 = 0$.

Al factorizar el polinomio con el método de las tijeras se obtiene que $2y^2 + y - 1 = (2y - 1)(y + 1) = 0$. Pero $y = \text{sen}\ \theta$ por lo que se tienen dos ecuaciones trigonométricas:

- $2\text{sen}\ \theta - 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}\ \theta = \frac{1}{2}$ y esto sucede cuando $\theta = 30°$ o $\theta = 180° - 30° = 150°$.
- $\text{sen}\ \theta + 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}\ \theta = -1$ y esto sucede cuando $\theta = 270°$.

También puede utilizarse la fórmula general para resolver $2y^2 + y - 1 = 0$.

Por lo tanto, las soluciones de $2\cos^2\theta - \text{sen}\ \theta - 1 = 0$ son $\theta = 30°, 150°, 270°$ cuando $0° \leq \theta < 360°$.

Conclusión

Algunas ecuaciones trigonométricas pueden transformarse en una ecuación cuadrática utilizando la identidad pitagórica, de modo que aparezca solo la razón seno o coseno.

Ejemplo

Resuelve $2\text{sen}^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Se reescribe la ecuación de modo que aparezca únicamente cos θ y para ello se utiliza la identidad pitagórica.

$$\begin{aligned} & 2\text{sen}^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0 \\ \Rightarrow\ & 2(1 - \cos^2\theta) + 3\cos\theta - 3 = 0 \\ \Rightarrow\ & 2 - 2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0 \\ \Rightarrow\ & -2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 1 = 0 \\ \Rightarrow\ & 2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0 \end{aligned}$$

Se factoriza $2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1$ por el método de la tijera

$2\cos\theta$	-1	$-\cos\theta$
$\cos\theta$	-1	$-2\cos\theta$
$2\cos^2\theta$	1	$-3\cos\theta$

Al considerar la ecuación con incógnita cos θ se tiene que $2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = (2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 1) = 0$.

Así, $2\cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$, es decir, $\theta = 60°$ o $\theta = 360° - 60° = 300°$.

O bien $\cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1$, es decir, $\theta = 0°$.

Por lo tanto, las soluciones de $2\text{sen}^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$ tal que $0° \leq \theta < 360°$ son $\theta = 0°, 60°, 300°$.

Problemas

Resuelve las ecuaciones para $0° \leq \theta < 360°$.

a) $2\cos^2\theta + \text{sen}\ \theta - 1 = 0$

b) $-3\text{sen}\ \theta + \cos^2\theta = 3$

c) $4\cos^2\theta + 4\sqrt{3}\text{sen}\ \theta - 7 = 0$

d) $2\text{sen}^2\theta - 3 = \cos\theta - 2$

Recuerda que $-1 \leq \text{sen}\ \theta \leq 1$ y $-1 \leq \cos\theta \leq 1$.

2.3 Ecuaciones trigonométricas, parte 3 (uso del ángulo doble del coseno)

Problema inicial

Resuelve la ecuación trigonométrica $\cos 2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 2 = 0$ para $0° \leq \theta < 360°$.

> Recuerda que
> $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\text{sen}^2\theta$.

Solución

Utilizando la identidad del ángulo doble del coseno,

$$\begin{aligned} & \cos 2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 2 = 0 \\ \Rightarrow\quad & (2\cos^2\theta - 1) - 2\sqrt{2}\cos\theta + 2 = 0 \\ \Rightarrow\quad & 2\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0 \end{aligned}$$

Puede utilizarse la fórmula general para resolver esta ecuación, pero también puede utilizarse el método de la tijera observando que

$$\begin{array}{ccccc} \sqrt{2}\cos\theta & \searrow\!\!\!\!\nearrow & -1 & & -\sqrt{2}\cos\theta \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \sqrt{2}\cos\theta & \nearrow\!\!\!\!\searrow & -1 & & -\sqrt{2}\cos\theta \\ \hline 2\cos^2\theta & & 1 & & -2\sqrt{2}\cos\theta \end{array}$$

Es decir, $2\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 1 = (\sqrt{2}\cos\theta - 1)(\sqrt{2}\cos\theta - 1) = (\sqrt{2}\cos\theta - 1)^2$. De aquí se tiene que

$$\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ahora, se sabe que $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ cuando θ toma el valor de 45° y de 315°. Por lo tanto, las soluciones de la ecuación original son $\theta = 45°, 315°$ cuando θ está entre 0° y 360°.

Conclusión

Cuando en una ecuación trigonométrica aparece un término $\cos 2\theta$, esta debe transformarse a una ecuación donde resulten solo términos con ángulo θ utilizando la identidad del ángulo doble del coseno, de modo que aparezca una misma razón. Normalmente, para resolverlas, se debe factorizar y luego igualar a cero los dos factores que se obtengan, teniéndose dos ecuaciones trigonométricas las cuales hay que resolver.

Ejemplo

Resuelve la ecuación $\cos 2\theta + 6\text{sen}^2\theta - 1 + (2\sqrt{2} - 2)\text{sen}\,\theta - \sqrt{2} = 0$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Sustituyendo la identidad $\cos 2\theta = 1 - 2\,\text{sen}^2\theta$ se obtiene $4\text{sen}^2\theta + (2\sqrt{2} - 2)\text{sen}\,\theta - \sqrt{2} = 0$

Como en el Problema inicial, esta ecuación puede resolverse con la fórmula general, pero puede notarse que $\longrightarrow$

$$\begin{array}{ccccc} 2\text{sen}\,\theta & \searrow\!\!\!\!\nearrow & \sqrt{2} & & 2\sqrt{2}\text{sen}\,\theta \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ 2\text{sen}\,\theta & \nearrow\!\!\!\!\searrow & -1 & & -2\text{sen}\,\theta \\ \hline 4\text{sen}^2\theta & & -\sqrt{2} & & 2\sqrt{2}\text{sen}\,\theta - 2\text{sen}\,\theta \end{array}$$

Por lo que $4\text{sen}^2\theta + (2\sqrt{2} - 2)\text{sen}\theta - \sqrt{2} = (2\text{sen}\,\theta + \sqrt{2})(2\text{sen}\,\theta - 1) = 0$. Entonces, $\text{sen}\,\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ cuando θ toma los valores de 225° y 315°, o bien $\text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}$ cuando θ toma los valores de 30° y 150°. Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $\cos 2\theta + 6\text{sen}^2\theta - 1 + (2\sqrt{2} - 2)\text{sen}\,\theta - \sqrt{2} = 0$ son $\theta = 30°$, 150°, 225°, 315°.

Problemas

Resuelve las ecuaciones para $0° \leq \theta < 360°$.

a) $\cos 2\theta + \cos\theta = 0$

b) $\cos 2\theta + 3\text{sen}\,\theta - 2 = 0$

c) $\cos 2\theta + \text{sen}\,\theta = 0$

d) $\cos 2\theta + 4\cos\theta = -3$

e) $\cos 2\theta - \sqrt{3}\cos\theta - 2 = 0$

2.4 Ecuaciones trigonométricas, parte 4 (uso del ángulo doble del seno)

Problema inicial

Resuelve la ecuación trigonométrica sen 2θ + cos θ = 0 para $0° \leq \theta < 360°$.

Solución

Utilizando la identidad del ángulo doble para el seno, se tiene

$$\begin{aligned} & \operatorname{sen} 2\theta + \cos\theta = 0 & \\ \Rightarrow \quad & 2\cos\theta \operatorname{sen}\theta + \cos\theta = 0 & \text{aplicando la identidad del ángulo doble,} \\ \Rightarrow \quad & \cos\theta(2\operatorname{sen}\theta + 1) = 0 & \text{factorizando,} \\ \Rightarrow \quad & \cos\theta = 0 \ \text{ o bien } \ 2\operatorname{sen}\theta + 1 = 0. & \end{aligned}$$

- Si $\cos\theta = 0$ entonces $\theta = 90°$ o $\theta = 270°$.
- Si $2\operatorname{sen}\theta + 1 = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen}\theta = -1 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2}$. Luego, $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2}$ cuando $\theta = 180° + 30° = 210°$ o cuando $\theta = 360° - 30° = 330°$.

Luego, las soluciones de sen 2θ + cos θ = 0 tal que $0° \leq \theta < 360°$ son $\theta = 90°, 210°, 270°, 330°$.

Conclusión

Cuando en una ecuación trigonométrica aparece un término sen 2θ se utiliza la identidad del ángulo doble del seno, sen 2θ = 2 cos θ sen θ, para transformarla a una ecuación donde aparezcan solo términos con ángulo θ. Normalmente, para resolverlas se factoriza, obteniendo dos valores trigonométricos para los cuales hay que determinar el ángulo que las satisface.

Ejemplo

Resuelve la ecuación sen 2θ + 2sen θ = 0 para $0° \leq \theta < 360°$.

Al utilizar la identidad del ángulo doble del seno, se tiene,

$$\begin{aligned} & \operatorname{sen} 2\theta + 2\operatorname{sen}\theta = 0 \\ \Rightarrow \quad & 2\cos\theta \operatorname{sen}\theta + 2\operatorname{sen}\theta = 0 \\ \Rightarrow \quad & 2\operatorname{sen}\theta(\cos\theta + 1) = 0 \end{aligned}$$

De aquí se tiene que $\operatorname{sen}\theta = 0$ o bien $\cos\theta + 1 = 0$.

- Si $\operatorname{sen}\theta = 0$ entonces θ debe ser 0° o 180°.
- Si $\cos\theta + 1 = 0$ entonces $\cos\theta = -1$, por lo que $\theta = 180°$.

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación sen 2θ + 2sen θ = 0 son $\theta = 0°, 180°$.

Problemas

Resuelve las ecuaciones para $0° \leq \theta < 360°$.

a) $\operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{sen}\theta = 0$

b) $\operatorname{sen} 2\theta - \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta = 0$

c) $\operatorname{sen} 2\theta = \operatorname{sen}\theta$

d) $\operatorname{sen} 2\theta + \sqrt{2}\cos\theta = 0$

e) $\operatorname{sen} 2\theta - \cos\theta = 0$

f) $\operatorname{sen} 2\theta + 2\operatorname{sen}\theta = 0$

2.5 Ecuaciones trigonométricas, parte 5*

Problema inicial

Resuelve la ecuación $\tan 2\theta = \cot \theta$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Solución

Se aplica la identidad del ángulo doble de tangente y además se utiliza el hecho de que $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$.

$$\tan 2\theta = \cot \theta \Rightarrow \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$$

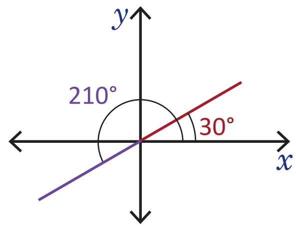
$$\Rightarrow (2\tan\theta)(\tan\theta) = 1 - \tan^2\theta$$

$$\Rightarrow 2\tan^2\theta = 1 - \tan^2\theta$$

$$\Rightarrow 3\tan^2\theta = 1 \Rightarrow \tan^2\theta = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Luego, se tienen dos casos: cuando $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y cuando $\tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Así,



- Si $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ entonces $\theta = 30°$ o $\theta = 180° + 30° = 210°$.
- Si $\tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ entonces $\theta = 180° - 30° = 150°$ o $\theta = 360° - 30° = 330°$.

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación trigonométrica $\tan 2\theta = \cot \theta$ tal que $0° \leq \theta < 360°$ son $\theta = 30°, 150°, 210°, 330°$.

Conclusión

Cuando en una ecuación trigonométrica aparecen las razones secante, cosecante y cotangente se utilizan las relaciones entre estas y las razones coseno, seno y tangente para transformar la ecuación a una donde aparezcan únicamente estas últimas razones.

Ejemplo

Resuelve $\sec\theta\csc\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sec\theta = 0$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Puede observarse que hay un factor común $\sec\theta$, por lo que se puede resolver por factorización.

$$\sec\theta\csc\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sec\theta = 0 \quad \Rightarrow \sec\theta\left(\csc\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 0$$

De aquí se tiene que, $\sec\theta = 0$ o bien $\csc\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3} = 0$. Así,

- $\sec\theta = 0$ significa que $\frac{1}{\cos\theta} = 0$. Pero esto no es posible, ya que una fracción puede ser cero solo cuando el numerador es cero. Por lo que esta ecuación no tiene solución.
- O bien, $\csc\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3} = 0$, es decir $\csc\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Pero $\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
  Esto sucede cuando θ toma los valores de 60° y 120°.

Por lo tanto, las soluciones de $\sec\theta\csc\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sec\theta = 0$ son $\theta = 60°, 120°$ cuando $0° \leq \theta < 360°$.

Problemas

Resuelve las ecuaciones para $0° \leq \theta < 360°$.

a) $2\sec\theta + 3 = \sec\theta + 5$

b) $\sec\theta\csc\theta + \sqrt{2}\csc\theta = 0$

c) $2\operatorname{sen}\theta + 1 = \csc\theta$

d) $3\csc\theta + 5 = \csc\theta + 9$

e) $4(\cot\theta + 1) = 2(\cot\theta + 2)$

$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$.

f) $\sec\theta + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

Unidad 6

2.6 Practica lo aprendido

Resuelve cada ecuación para $0° \leq \theta < 360°$.

a) $5(\cos\theta + 1) = 5$

b) $4\text{sen}\,\theta - 1 = 2\text{sen}\,\theta + 1$

c) $3(\tan\theta - 2) = 2\tan\theta - 7$

d) $3\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

e) $\tan^2\theta - 3 = 0$

f) $\cos^2\theta + \text{sen}\,\theta = 1$

g) $1 + \text{sen}\,\theta - \cos^2\theta = 0$

h) $\cos^3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta = 0$

i) $\cos 2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$

j) $3\cos 2\theta - 4\cos^2\theta + 2 = 0$

k) $\text{sen}\,2\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta = 0$

l) $\text{sen}\,2\theta = \tan\theta$

m) $2\tan\theta = 1 + \tan^2\theta$

n) $\tan\theta - 3\cot\theta = 0$

2.7 Problemas de la unidad

Para el Problema 1, calcula el valor de $\text{sen}(\alpha + \beta)$ y utiliza la identidad del ángulo adición.

1. Si $0° < \alpha < 90°$, $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$ y $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{4}{5}$, determina los valores de $\text{sen}\,\beta$, $\cos\beta$ y $\tan\beta$.

2. Si $0° \leq \theta < 360°$, resuelve cada ecuación.
   a) $\text{sen}\,2\theta - 3\cos\theta = 0$
   b) $\cos 2\theta - \text{sen}\,\theta - 1 = 0$

3. Si $A + B + C = 180°$, demuestra que $\text{sen}(B + C) = \text{sen}\,A$.

4. Si $\tan 35° = x$, deduce que

$$\frac{\tan 145° - \tan 125°}{1 + \tan 145°\tan 215°} = \frac{1}{x}.$$

5. El ángulo θ cumple que $\text{sen}(\theta + 30°) = \frac{3\sqrt{3}+4}{10}$ y $\text{sen}(\theta - 30°) = \frac{3\sqrt{3}-4}{10}$. Determina los valores de $\text{sen}\,\theta$ y $\cos\theta$.

Unidad 7

Vectores y números complejos

La noción de vector surge en la matemática como una exigencia de la física, ya que hacia el siglo XVII era necesaria la cuantificación de fenómenos dinámicos, es decir, dotar al movimiento de una representación matemática. Hacia estas fechas se había tenido un avance bastante marcado en el álgebra abstracta, a modo de lograr separarse de los valores de los sistemas numéricos comunes y conseguir resultados algebraicos en cualquier campo numérico que cumpla ciertas propiedades, así mismo la concepción de un número complejo, cuya estructura hasta ese entonces era meramente algebraica. Después que se logra el establecimiento teórico de los números reales por el matemático alemán Dedekind y el ruso Cantor a principios del siglo XIX, se avanza en la representación geométrica del conjunto de los números complejos, como segmento dirigido o como un par ordenado en el plano complejo, por el matemático irlandés Hamilton en 1843. A partir de este contexto se construye el área matemática del análisis vectorial.

Uso de la proyección estereográfica (análisis vectorial) para la elaboración de mapas.

El análisis vectorial dotó a la física de una herramienta fundamental para la modelación de fenómenos como el movimiento, la velocidad, la aceleración, la fuerza, la carga eléctrica, los campos eléctricos, el calor, etc. Además que la propia área del análisis vectorial ha tenido diversas aplicaciones en los últimos siglos, como la elaboración de mapas (cartografía), modelación del universo, trayectorias espaciales, ubicación de satélites en el espacio, entre otros.

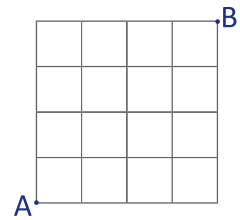
En esta unidad aprenderás los conceptos y nociones básicas sobre vectores, las operaciones que se pueden realizar con ellos, la importancia del concepto de producto escalar, y la relación del concepto de vectores con la representación gráfica de un número complejo, y se culmina con algunas prácticas en GeoGebra para consolidar lo aprendido.

1.1 Vectores

Problema inicial

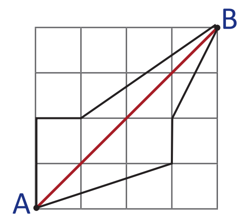
Una persona se encuentra en un punto A dentro de la ciudad de San Salvador y desea dirigirse hacia el punto B. Determina:

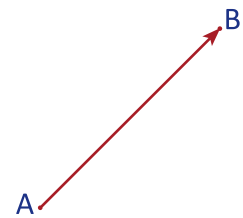
a) Al menos 3 formas para llegar de A a B.
b) El camino más corto para llegar de A hasta B.
c) Una forma para representar que el camino va de A a B y no de B a A.



Solución

a) Algunas opciones para llegar de A a B se muestran en la figura de la derecha.
b) El camino más corto para llegar de A a B es el que está en color rojo.
c) Para representar que este camino va de A hacia B se puede utilizar una flecha que lo indique como lo muestra la figura.

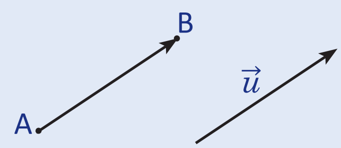




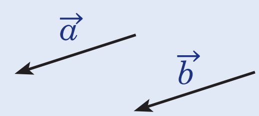
Definición

La flecha cuyo **punto inicial** es A y su **punto final** es B se conoce como **segmento dirigido**.

El conjunto de segmentos dirigidos que poseen la misma longitud, dirección (inclinación) y sentido (hacia donde apunta la flecha) se conoce como **vector**. Se representa un vector con cualquier segmento dirigido que pertenece a ese vector, si este segmento dirigido tiene su punto inicial A y su punto final B, se denota este vector por $\overrightarrow{AB}$; si no se expresan los vectores con sus puntos inicial y final se pueden usar las letras minúsculas a, b, c, ... por ejemplo, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

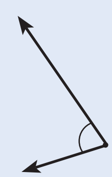


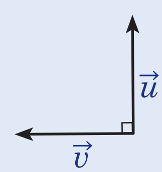
Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son iguales si los segmentos dirigidos que los representan tienen la misma longitud, dirección y sentido, es decir, uno se obtiene del otro por medio de un desplazamiento paralelo.



La longitud de un vector $\vec{u}$ se conoce por **norma** del vector $\vec{u}$, y se denota por $\|\vec{u}\|$. Un vector $\vec{u}$ es **unitario** si su norma es 1, es decir, $\|\vec{u}\| = 1$.

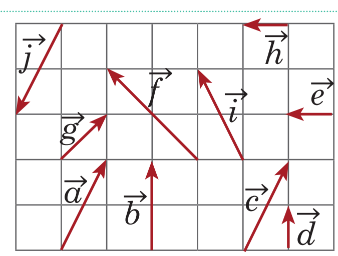
El **ángulo entre dos vectores** se mide al unir por los puntos iniciales ambos vectores y se utilizan valores de 0° hasta 180°. Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son **ortogonales** si el ángulo formado entre ellos es de 90°.



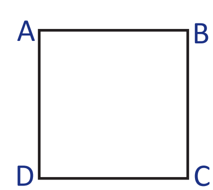


Problemas

1. Considerando los vectores en la cuadrícula donde el lado de cada cuadrado es 1, responde:
   a) ¿Cuáles vectores son iguales?
   b) ¿Cuáles vectores tienen la misma norma?
   c) ¿Cuáles vectores son unitarios?
   d) ¿Cuáles vectores son ortogonales?



2. Considerando el cuadrado ABCD de lado 1, determina:
   a) ¿Cuáles vectores son iguales?
   b) La norma del vector $\overrightarrow{AC}$.
   c) ¿Cuáles vectores son unitarios?
   d) ¿Cuáles vectores son ortogonales?



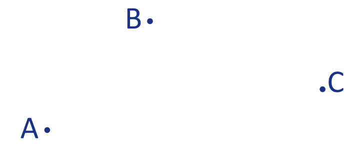
1.2 Suma y resta de vectores

Problema inicial

Resuelve los siguientes literales:

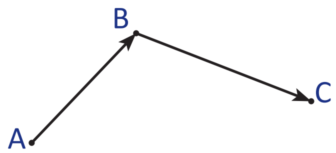
a) Representa con vectores la forma de ir de A hacia C pasando por B.

b) Representa con vectores la forma de ir de A hacia B pasando por C.

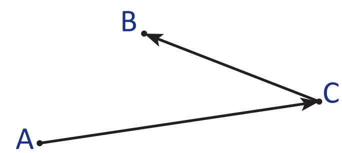


Solución

a) La representación sería:

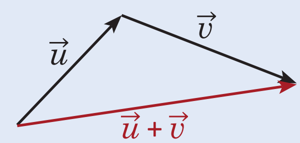


b) La representación sería:



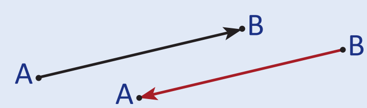
Definición

Al unir el punto final de un vector $\vec{u}$ con el punto inicial de otro vector $\vec{v}$, se define la operación **suma de vectores** como el vector determinado por el punto inicial de $\vec{u}$ con el punto final de $\vec{v}$, como lo muestra la figura. En el literal a) del Problema inicial se cumple que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

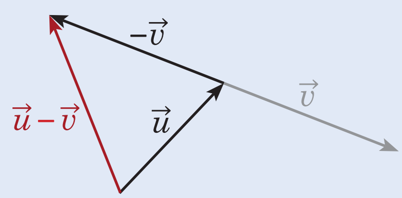


Dados 3 vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ se cumple que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (conmutatividad) y que $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ (asociatividad).

Dado un vector $\overrightarrow{AB}$, se define el vector $\overrightarrow{BA}$ como **el opuesto** del vector $\overrightarrow{AB}$, y se denota por $-\overrightarrow{AB}$, es decir, $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.



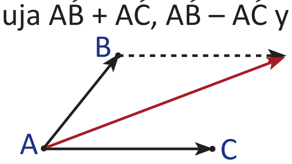
Se define la **resta** del vector $\vec{u}$ con el vector $\vec{v}$ como la suma del vector $\vec{u}$ con $-\vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ como lo muestra la figura. En el literal b) del Problema inicial se cumple que $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.



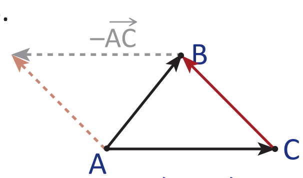
El vector que resulta de realizar la resta $\vec{u} - \vec{u} = \vec{u} + (-\vec{u})$ se conoce como **vector cero**, y se denota por $\vec{0}$ y cumple que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$.

Ejemplo

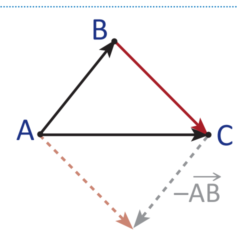
Dibuja $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$



$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$



$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Estas representaciones de vectores son muy importantes.

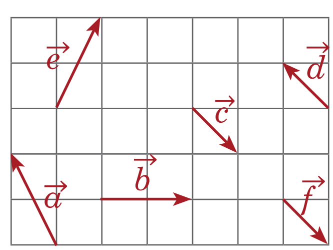
Problemas

Dibuja en tu cuaderno los vectores de la cuadrícula y determina el vector que representa las operaciones de cada literal.

a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $\vec{a} + \vec{c}$ c) $\vec{c} + \vec{d}$

d) $\vec{a} + \vec{e} + \vec{c}$ e) $\vec{a} - \vec{b}$ f) $\vec{d} - \vec{f}$

g) $\vec{c} - \vec{f}$ h) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$



Unidad 7

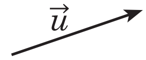
1.3 Producto por escalar

Problema inicial

Dibuja el vector que resulta en las siguientes sumas de vectores:

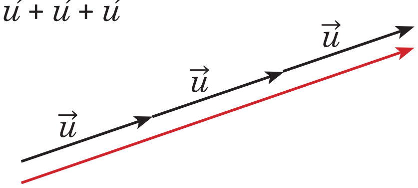
a) $\vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$

b) $-\vec{u} - \vec{u}$

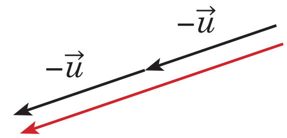


Solución

a) $\vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$



b) $-\vec{u} - \vec{u}$

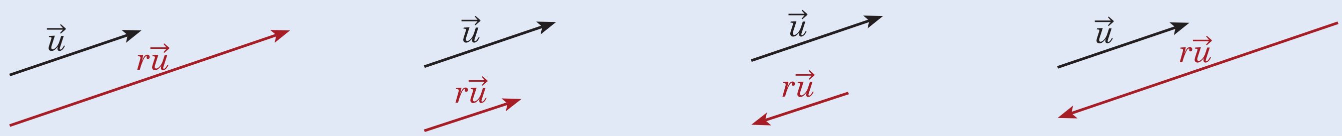


Definición

Para un vector $\vec{u}$ y un número real r, de modo que $\vec{u} \neq \vec{0}$ y $r \neq 0$, se define el **producto por escalar** para representar dilataciones ($r > 1$) o contracciones ($0 < r < 1$) en el mismo sentido ($r > 0$) o en sentido contrario ($r < 0$), y se denota por $r\vec{u}$.

Para el producto por escalar se cumple que $\|r\vec{u}\| = |r|\,\|\vec{u}\|$. Se define que $0\vec{u} = \vec{0}$ y que $r\vec{0} = \vec{0}$.

$r > 1$ $\quad$ $0 < r < 1$ $\quad$ $-1 < r < 0$ $\quad$ $r < -1$



Considerando los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, los números reales r y s, se cumplen las siguientes propiedades del producto por escalar:

1. $r(s\vec{u}) = rs\vec{u}$ $\qquad$ 2. $(r + s)\vec{u} = r\vec{u} + s\vec{u}$ $\qquad$ 3. $r(\vec{u} + \vec{v}) = r\vec{u} + r\vec{v}$

Se dice que dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ diferentes de $\vec{0}$ son **paralelos** (o colineales) cuando los segmentos dirigidos que representan estos vectores, son paralelos. Esto equivale a que existe un número real r tal que $\vec{u} = r\vec{v}$.

Ejemplo

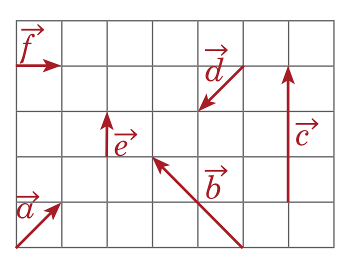
Determina en términos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ el vector resultante de la expresión $2(2\vec{u} + 3\vec{v}) - 3(2\vec{u} - \vec{v})$.

$$\begin{aligned} 2(2\vec{u} + 3\vec{v}) - 3(2\vec{u} - \vec{v}) &= 2(2\vec{u}) + 2(3\vec{v}) + (-3)(2\vec{u}) + (-3)(-\vec{v}) \\ &= 4\vec{u} + 6\vec{v} + (-6\vec{u}) + 3\vec{v} \\ &= -2\vec{u} + 9\vec{v} \end{aligned}$$

Recuerda que $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Problemas

1. Dibuja en tu cuaderno los vectores de la cuadrícula y determina el vector que representa cada literal.



a) $4\vec{e}$ $\qquad$ b) $4\vec{a}$ $\qquad$ c) $\frac{1}{3}\vec{c}$

d) $-3\vec{f}$ $\qquad$ e) $-\frac{3}{2}\vec{b}$ $\qquad$ f) $2\vec{d} + 3\vec{e}$

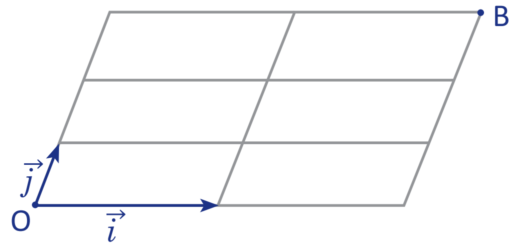
2. Determina en términos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ el vector resultante de cada expresión.

a) $4\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{u} - 2\vec{v}$ $\qquad$ b) $(\vec{u} - 2\vec{v}) - (-3\vec{u} + 2\vec{v})$ $\qquad$ c) $3(2\vec{u} + 4\vec{v})$ $\qquad$ d) $3(-2\vec{u} + \vec{v}) - 2(3\vec{u} - 4\vec{v})$

1.4 Coordenadas de un vector en una base*

Problema inicial

La siguiente figura está formada por paralelogramos, expresa el vector $\overrightarrow{OB}$ con los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$.

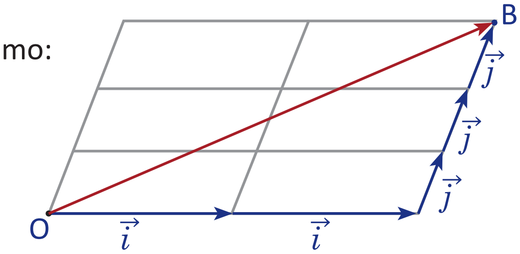


Solución

El vector $\overrightarrow{OB}$ se puede expresar como suma de vectores con $\vec{i}$ y $\vec{j}$ como:

$$\overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{i} + \vec{j} + \vec{j} + \vec{j}.$$

Utilizando el producto por escalar, se cumple que $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.



Conclusión

A una pareja de vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ ambos diferentes de $\vec{0}$ y no paralelos (no colineales) se les llama **base vectorial**.

El punto O se conoce como **origen** de la base vectorial, y para todo vector $\vec{u}$ se cumple que, existe un punto M tal que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. Además para todo vector $\overrightarrow{OM}$, existen dos números reales únicos x, y, tales que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, y se puede expresar el vector como un par ordenado $\overrightarrow{OM} = (x, y)$, a este par ordenado (x, y) se le conoce como **coordenadas** del vector $\overrightarrow{OM}$ en la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Una base es **ortogonal** cuando $\vec{i}$ y $\vec{j}$ son ortogonales, y se dice que una base es **ortonormal** cuando además de ser ortogonales, tanto $\vec{i}$ como $\vec{j}$ son unitarios (la norma es igual a 1).

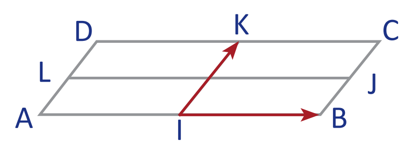
Ejemplo

Determina las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{ID}$ en la base $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IK})$.

$\overrightarrow{IC} = (1)\overrightarrow{IB} + (1)\overrightarrow{IK}$ $\qquad$ $\overrightarrow{IB} = (1)\overrightarrow{IB} + (0)\overrightarrow{IK}$

$\overrightarrow{IK} = (0)\overrightarrow{IB} + (1)\overrightarrow{IK}$ $\qquad$ $\overrightarrow{IJ} = (1)\overrightarrow{IB} + \left(\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{IK}$

$\overrightarrow{IA} = (-1)\overrightarrow{IB} + (0)\overrightarrow{IK}$ $\qquad$ $\overrightarrow{ID} = (-1)\overrightarrow{IB} + (1)\overrightarrow{IK}$

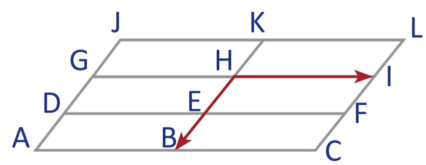


Por lo tanto, las coordenadas de los vectores son (1, 1), (1, 0), (0, 1), $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, (–1, 0), (–1, 1).

Problemas

Considerando la base $(\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HB})$, determina las coordenadas de los vectores de cada literal.

a) $\overrightarrow{HA}$	b) $\overrightarrow{HK}$	c) $\overrightarrow{HF}$	d) $\overrightarrow{HJ}$
e) $\overrightarrow{HH}$	f) $\overrightarrow{HI}$	g) $\overrightarrow{HB}$	h) $\overrightarrow{HE}$



Unidad 7

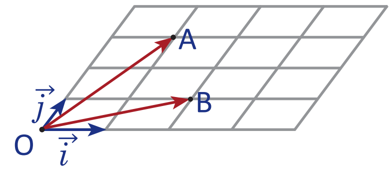
1.5 Operaciones con vectores en coordenadas

Problema inicial

Determina las coordenadas de los siguientes vectores en la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

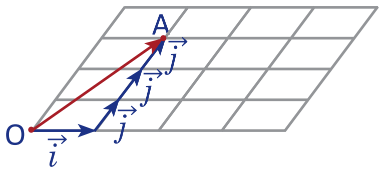
a) $\overrightarrow{OA}$ b) $\overrightarrow{OB}$ c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

d) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ e) $2\overrightarrow{OB}$ f) $\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$



Solución

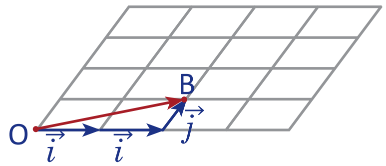
a)



$\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 3\vec{j}$

$\overrightarrow{OA} = (1, 3)$

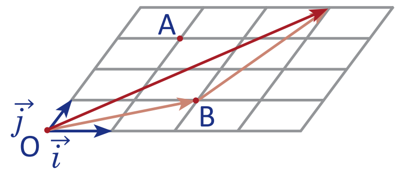
b)



$\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + \vec{j}$

$\overrightarrow{OB} = (2, 1)$

c)



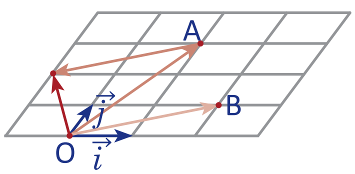
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{i} + \vec{j}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (3, 4)$

Nota que (3, 4) = (1 + 2, 3 + 1).

d)



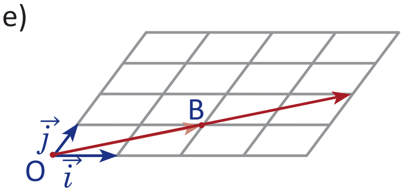
$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \vec{i} + 3\vec{j} - (2\vec{i} + \vec{j})$

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = -\vec{i} + 2\vec{j}$

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (-1, 2)$

Nota que (–1, 2) = (1 – 2, 3 – 1).

e)



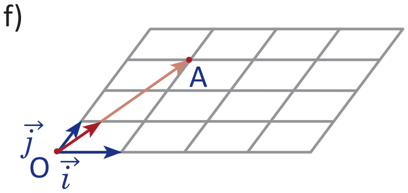
$2\overrightarrow{OB} = 2(2\vec{i} + \vec{j})$

$2\overrightarrow{OB} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$

$2\overrightarrow{OB} = (4, 2)$

Nota que (4, 2) = (2 × 2, 2 × 1).

f)



$\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}(\vec{i} + 3\vec{j})$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\vec{i} + \vec{j}$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$

Nota que $\left(\frac{1}{3}, 1\right) = \left(\frac{1}{3} \times 1, \frac{1}{3} \times 3\right)$.

Conclusión

Dado dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con coordenadas $\vec{u} = (x, y)$ y $\vec{v} = (x', y')$ y un número real r se cumple que

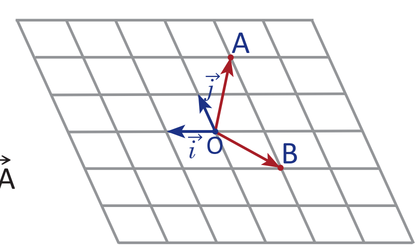
$$\vec{u} + \vec{v} = (x + x', y + y') \qquad \vec{u} - \vec{v} = (x - x', y - y') \qquad r\vec{u} = (rx, ry)$$

Problemas

Determina las coordenadas de los siguientes vectores en la base $\vec{i}, \vec{j}$.

a) $\overrightarrow{OA}$ b) $\overrightarrow{OB}$ c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ d) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$

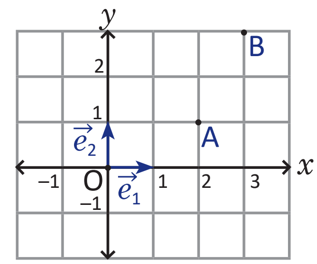
e) $-3\overrightarrow{OB}$ f) $\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$ g) $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$ h) $3\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OA}$



1.6 Vectores y coordenadas de puntos

Problema inicial

Sean A(2, 1) y B(3, 3) dos puntos en el plano, con coordenadas en la base ortonormal $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ que muestra la figura.

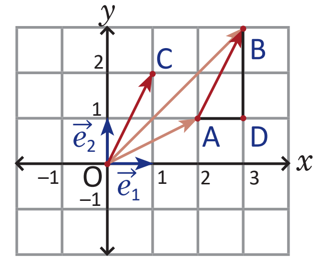


a) Calcula las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$.

b) Determina la norma del vector $\overrightarrow{AB}$.

Solución

a) Considerando los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ con coordenadas (2, 1) y (3, 3) respectivamente en la base ortonormal $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.



Entonces se cumple que

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{AB} = (3, 3) - (2, 1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (1, 2) = \overrightarrow{OC}.$$

b) La norma de este vector se puede calcular aplicando el teorema de Pitágoras al ΔABD, de modo que

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Conclusión

Considerando en el plano los puntos $E_1(1, 0)$ y $E_2(0, 1)$ que definen los vectores $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$ y $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$. Se tiene que los vectores $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$ forman una base ortonormal.

Dado un punto A(x, y) en el plano, se cumple que $\overrightarrow{OA} = (x, y)$ en la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, y que $\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Si B(x', y') es otro punto, entonces se tiene que

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x' - x, y' - y) \qquad \text{y que,}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}.$$

Problemas

1. Dados los puntos A y B, determina las coordenadas y la norma del vector $\overrightarrow{AB}$ en la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ definida arriba.

   a) A = (2, 1); B = (3, 1)
   b) A = (3, 0); B = (1, 2)
   c) A = (1, 1); B = (0, 2)
   d) A = (0, 1); B = (–2, 1)
   e) A = (–1, –3); B = (–1, –2)
   f) A = (1, –1); B = (1, –1)

2. Considerando las coordenadas en la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de un vector $\vec{u} = (2, 4)$ y un punto A = (1, 3), determina las coordenadas de un punto B que cumpla que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Unidad 7

1.7 Paralelismo

Problema inicial

Considerando el vector $\vec{u} = (2, 3)$, determina el valor de x para que el vector $\vec{v} = (x, -9)$ sea paralelo a $\vec{u}$ ($\vec{u} \parallel \vec{v}$).

Solución

Se considera un número real r que cumple:

$$\vec{v} = r\vec{u}$$
$$(x, -9) = r(2, 3)$$
$$(x, -9) = (2r, 3r)$$

Y entonces se debe cumplir que

$$\begin{cases} x = 2r \ldots (1) \\ -9 = 3r \ldots (2) \end{cases}$$

Luego se resuelve la ecuación (2), y se tiene: $r = (-9) \div 3 = -3$.

Finalmente se sustituye el valor de r en (1): $x = 2(-3) = -6$.

Por lo tanto las coordenadas del vector $\vec{v}$ son $(-6, -9)$.

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ diferentes de $\vec{0}$ son paralelos si existe un número real r que cumple $r\vec{u} = \vec{v}$.

Conclusión

Dado un vector $\vec{u} = (x, y) \neq \vec{0}$, se tiene que otro vector $\vec{v}$ es paralelo a $\vec{u}$ si existe un número real r de modo que $\vec{v} = (rx, ry)$.

Además, en una base ortonormal, para la norma del vector $\vec{v}$ se cumple que

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(rx)^2 + (ry)^2} = |r|\sqrt{x^2 + y^2} = |r|\,\|\vec{u}\|.$$

Un vector $u = (x, y)$ es distinto del vector cero si x o y son distintos de cero (ambos inclusive).

Para todo número real r se cumple que $\sqrt{r^2} = |r|$.

Ejemplo

Determina los vectores paralelos al vector $\vec{u} = (-3, 4)$ que tienen norma 15.

Si $\vec{v}$ es un vector paralelo a $\vec{u}$ se cumple que $\vec{v} = r\vec{u}$, entonces:

$$\|\vec{v}\| = |r|\,\|\vec{u}\|$$
$$15 = |r|\sqrt{(-3)^2 + 4^2}$$
$$15 = 5|r|$$
$$|r| = 3$$
$$r = \pm 3,$$

por lo tanto los vectores son: $3\vec{u} = 3(-3, 4) = (-9, 12)$ y $-3\vec{u} = -3(-3, 4) = (9, -12)$.

Problemas

1. Calcula las coordenadas de $\vec{v}$ para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean paralelos.

   a) $\vec{u} = (2, 1)$, $\vec{v} = (x, 3)$ b) $\vec{u} = (3, 1)$, $\vec{v} = (x, -3)$ c) $\vec{u} = (6, 3)$, $\vec{v} = (2, x)$ d) $\vec{u} = (2, 4)$, $\vec{v} = (-1, x)$

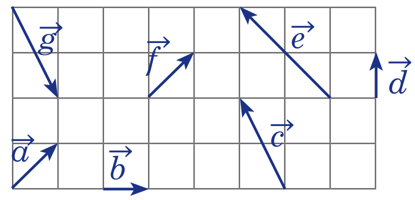
2. Determina los vectores paralelos al vector $\vec{u}$ que tienen la norma indicada. Considera las coordenadas en una base ortonormal.

   a) $\vec{u} = (4, 3)$, norma 10 b) $\vec{u} = (-3, -4)$, norma 1 c) $\vec{u} = (1, 2)$, norma 5 d) $\vec{u} = (2, 2)$, norma 4

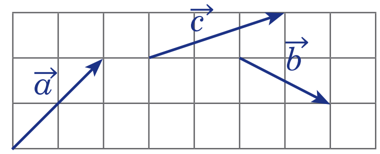
3. Encuentra las coordenadas del punto C de un paralelogramo ABCD, si se cumple que A = (1, 2), B = (3, 5) y D = (0, 0).

1.8 Practica lo aprendido

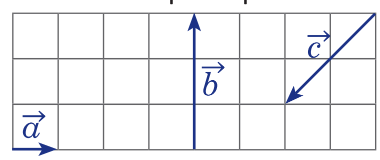
1. Considerando los vectores en la cuadrícula donde el lado de cada cuadrado es 1, responde:
   a) ¿Cuáles vectores son iguales?
   b) ¿Cuáles vectores tienen la misma norma?
   c) ¿Cuáles vectores son unitarios?
   d) ¿Cuáles vectores son ortogonales?



2. Dibuja en tu cuaderno los vectores de la cuadrícula y determina el vector que representa la operación de cada literal.
   a) $\vec{a} + \vec{b}$
   b) $\vec{c} - \vec{b}$
   c) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
   d) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

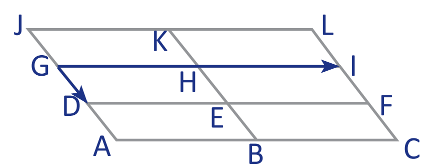


3. Dibuja en tu cuaderno los vectores de la cuadrícula y determina el vector que representa cada literal.
   a) $4\vec{a}$
   b) $\frac{1}{3}\vec{b}$
   c) $-\frac{3}{2}\vec{c}$
   d) $-3\vec{a} + \vec{b}$

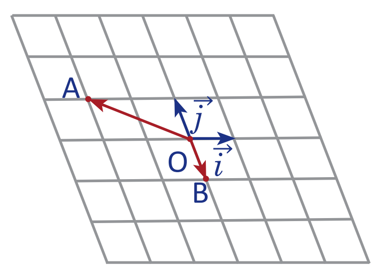


4. Determina en términos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ el vector resultante de cada expresión.
   a) $2\vec{u} + \vec{v} - 3\vec{u} - \vec{v}$
   b) $(3\vec{u} - \vec{v}) - (-2\vec{v} - 3\vec{u})$
   c) $-2(3\vec{u} - 2\vec{v})$
   d) $2(-\vec{u} + 3\vec{v}) - 3(\vec{u} + 2\vec{v})$

5. Considerando la base $(\overrightarrow{GI}, \overrightarrow{GD})$, determina las coordenadas de los vectores de cada literal.
   a) $\overrightarrow{GC}$
   b) $\overrightarrow{GL}$
   c) $\overrightarrow{GB}$
   d) $\overrightarrow{GK}$



6. Determina las coordenadas de los siguientes vectores en la base $\vec{i}$, $\vec{j}$.
   a) $\overrightarrow{OA}$
   b) $\overrightarrow{OB}$
   c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$
   d) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$
   e) $-2\overrightarrow{OB}$
   f) $\frac{5}{3}\overrightarrow{OB}$
   g) $\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$
   h) $-2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}$



7. Dados los puntos A y B, determina las coordenadas y la norma del vector $\overrightarrow{AB}$ en la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
   a) A = (3, 1); B = (4, 2)
   b) A = (–2, 1); B = (–3, 2)
   c) A = (–1, –1); B = (–3, –2)

8. Considerando las coordenadas de un vector $\vec{u} = (-2, 1)$ y un vector $\overrightarrow{OA} = (3, 5)$. Determina las coordenadas de un vector $\overrightarrow{OB}$ que cumpla que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

9. Calcula las coordenadas de $\vec{v}$ para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean paralelos.
   a) $\vec{u} = (1, 3)$, $\vec{v} = (x, 12)$
   b) $\vec{u} = (3, 9)$, $\vec{v} = (x, -6)$

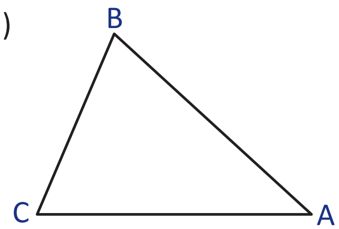
10. Determina los vectores paralelos al vector $\vec{u}$ que tienen la norma indicada. Considera las coordenadas en una base ortonormal.
    a) $\vec{u} = (3, 2)$, norma 13
    b) $\vec{u} = (-2, -4)$, norma 10

2.1 Proyección ortogonal

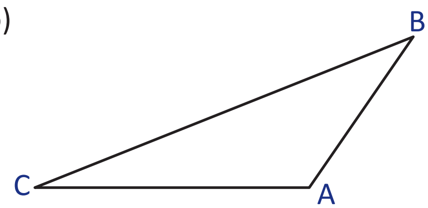
Problema inicial

Para cada uno de los siguientes triángulos determina el punto donde se interceptan la altura del vértice B a la base AC.

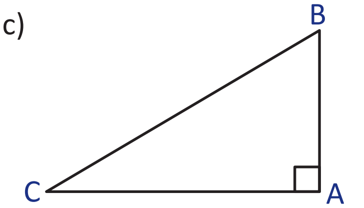
a)



b)



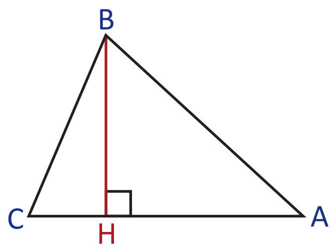
c)



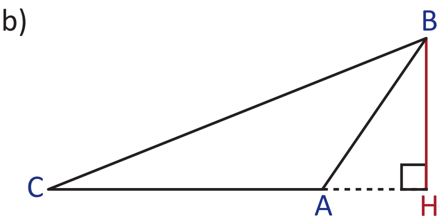
Solución

Trazando la altura de cada triángulo y localizando el punto de intercepción:

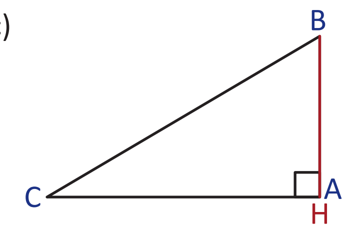
a)



b)

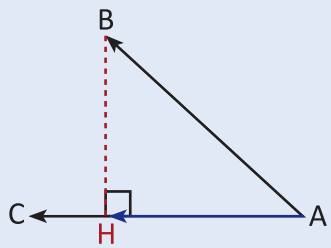


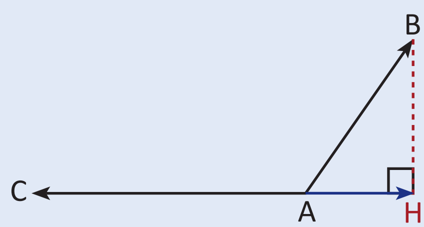
c)

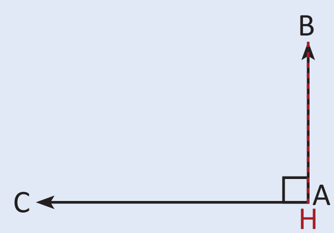


Conclusión

Dados dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ se define **la proyección ortogonal** de $\overrightarrow{AB}$ sobre $\overrightarrow{AC}$, por el vector $\overrightarrow{AH}$, y se cumple que $\overrightarrow{BH}$ es ortogonal a $\overrightarrow{AC}$.



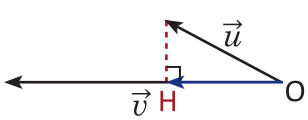




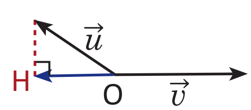
Ejemplo

Determina la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ para cada caso.

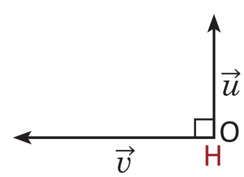
a)



b)



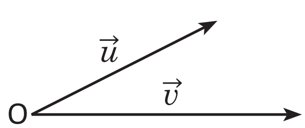
c)



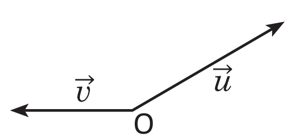
Problemas

1. Grafica la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ para cada caso.

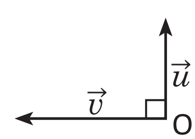
a)



b)

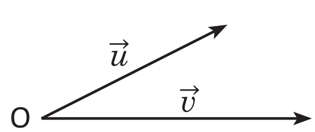


c)

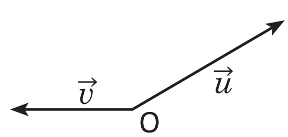


2. Grafica la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ para cada caso.

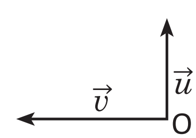
a)



b)



c)



2.2 Producto escalar de vectores paralelos

Definición

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores paralelos (colineales). Se denota el producto escalar de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ por $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y se define por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|, \text{ si } \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ tienen el mismo sentido.} \\ -\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|, \text{ si } \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ tienen diferente sentido.} \end{cases}$$

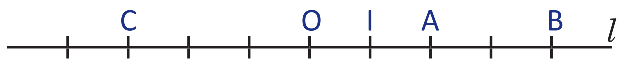
Cuando $\vec{u} = \vec{0}$ o $\vec{v} = \vec{0}$, se define $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$.

Ejemplo 1

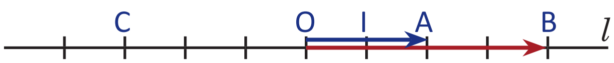
Las divisiones de la recta l son regulares y el vector $\overrightarrow{OI}$ es unitario, determina:

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$

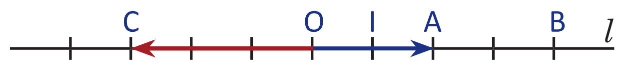
c) $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{CB}$ d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$



a) En este caso tanto $\overrightarrow{OA}$ como $\overrightarrow{OB}$ tienen el mismo sentido, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{OB}\| = 2 \times 4 = 8$.

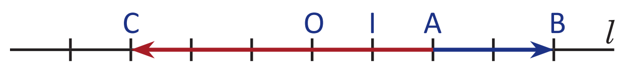


b) En este caso $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OC}$ tienen diferente sentido, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = -\|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{OC}\| = -(2 \times 3) = -6$.



c) En este caso tanto $\overrightarrow{IA}$ como $\overrightarrow{CB}$ tienen el mismo sentido, $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{CB} = \|\overrightarrow{IA}\|\|\overrightarrow{CB}\| = 1 \times 7 = 7$.

d) En este caso $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tienen diferente sentido, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\| = -(2 \times 5) = -10$.



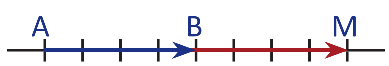
Ejemplo 2

Sean A y B dos puntos tales que AB = 4. Calcula $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$ para cada una de las siguientes condiciones.

a) A es el punto medio de BM.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -(4 \times 4) = -16$

b) B es el punto medio de AM.



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 4 \times 8 = 32$

c) M es el punto medio de AB.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 4 \times 2 = 8$

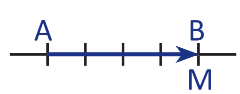
Ejemplo 3

Sean A y B dos puntos tales que AB = 4. Representa el punto M en la recta AB que cumpla las condiciones de cada literal.

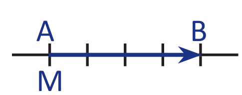
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 8$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -12$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 16$



d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$



Problemas

1. Las divisiones de la recta l son regulares, y el vector $\overrightarrow{OI}$ es unitario, determina:

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$

c) $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{CB}$ d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

2. Sean A y B dos puntos tales que AB = 2. Calcula $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$ para cada una de las siguientes condiciones.

a) A es el punto medio de BM. b) B es el punto medio de AM. c) M es el punto medio de AB.

3. Sean A y B dos puntos tales que AB = 6. Dibuja el punto M en la recta AB para cada literal.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 24$ b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -3$ c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -36$ d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

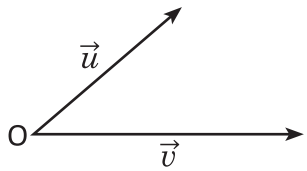
Unidad 7

2.3 Producto escalar de vectores no paralelos (no colineales)

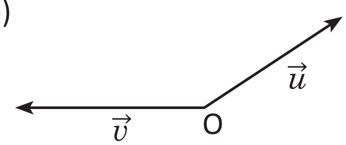
Problema inicial

Expresa el producto escalar del vector $\vec{v}$ con la proyección de $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$.

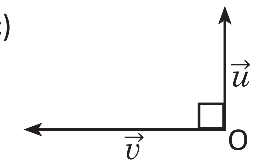
a)



b)



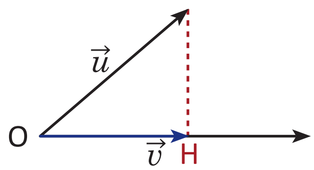
c)



Solución

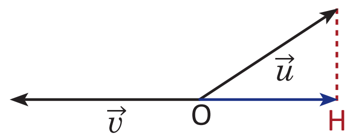
Se encuentra la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

a)



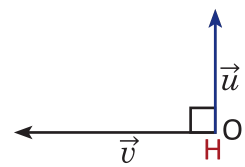
$\vec{v} \cdot \overrightarrow{OH} = \|\vec{v}\|\|\overrightarrow{OH}\|$

b)



$\vec{v} \cdot \overrightarrow{OH} = -\|\vec{v}\|\|\overrightarrow{OH}\|$

c)



$\vec{v} \cdot \overrightarrow{OH} = \vec{v} \cdot \vec{0} = 0$

Definición

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores no paralelos, y sea $\vec{u}'$ la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$, entonces $\vec{u}' \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}'$. Se define el **producto escalar** de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}' \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}'$$

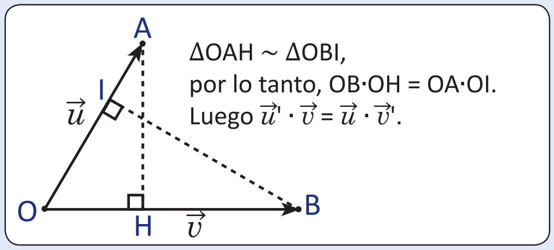
En el producto escalar se cumplen las siguientes propiedades para un número real r y tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$:

1) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|\|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|^2$

2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

3) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

4) $\vec{u} \cdot (r\vec{v}) = (r\vec{u}) \cdot \vec{v} = r(\vec{u} \cdot \vec{v})$



El producto escalar cumple que si dos vectores son ortogonales, entonces su producto escalar es 0 y viceversa (si el producto escalar de dos vectores diferentes de cero es 0 entonces los vectores son ortogonales).

Ejemplo

Sea ABC un triángulo rectángulo en A, expresa los productos escalares:

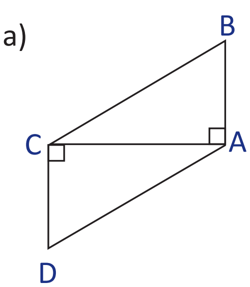
a) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$
$= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}$
$= AC^2$

b) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AC}$
$= -AC^2$

c) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB}$
$= -AB^2$

d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} \cdot \overrightarrow{CA}$
$= \vec{0} \cdot \overrightarrow{CA}$
$= 0$

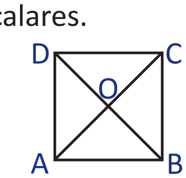
a)



Problemas

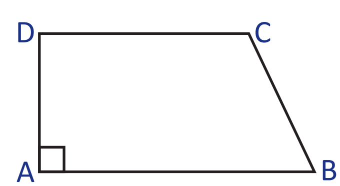
1. Considerando un cuadrado ABCD de lado 4. Calcula los siguientes productos escalares.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA}$ d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ e) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BO}$



2. Teniendo el trapecio rectángulo ABCD, con AB = 4, AD = 2 y CD = 3.
Calcula los siguientes productos escalares.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$ b) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA}$ d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$

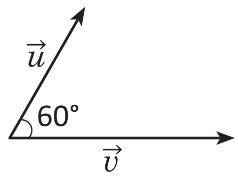


2.4 Forma trigonométrica del producto escalar

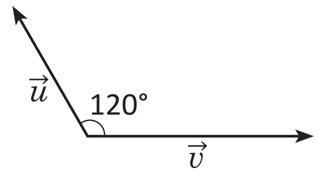
Problema inicial

Calcula el producto escalar de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ si se sabe que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ y el ángulo entre los vectores es $\alpha = 60°$ o $120°$.

a)



b)



Puedes utilizar razones trigonométricas para calcular el producto escalar.

Las razones trigonométricas de ángulos notables son:

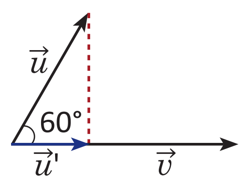
$\cos 60° = \frac{1}{2}$ $\quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$ $\quad \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Solución

Se encuentra la proyección ortogonal $\vec{u}'$ de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

a)



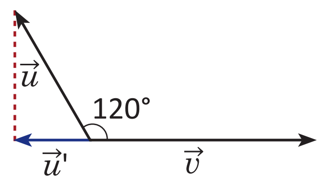
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}' \cdot \vec{v} = \|\vec{u}'\|\ \|\vec{v}\|$

Puesto que: $\cos 60° = \dfrac{\|\vec{u}'\|}{\|\vec{u}\|}$

entonces: $\|\vec{u}'\| = \|\vec{u}\|\cos 60°$

por lo tanto $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}'\|\ \|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos 60°$
$= 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 3$

b)



$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}' \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}'\|\ \|\vec{v}\|$

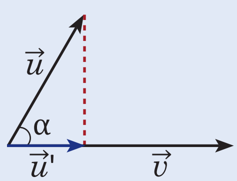
$\cos 120° = -\dfrac{\|\vec{u}'\|}{\|\vec{u}\|}$,

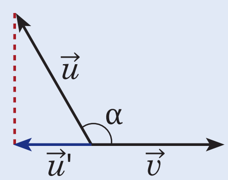
$\|\vec{u}'\| = -\|\vec{u}\|\cos 120°$,

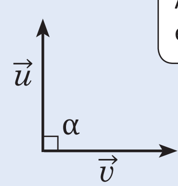
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}'\|\|\vec{v}\|\cos 120°$
$= 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -3.$

Conclusión

Considerando dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se cumple que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos \alpha$.







A partir de la expresión $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos \alpha$ es sencillo demostrar que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

A α se le llama ángulo formado entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Ejemplo

En los siguientes vectores se cumple que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{3}$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 9$. Determina el ángulo formado entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Se cumple que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos \alpha$ (α es el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$) entonces para calcular el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$9 = 3(2\sqrt{3})\cos \alpha.$$

Luego $\cos \alpha = \dfrac{9}{6\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Como $0° < \alpha \leq 180°$, entonces $\alpha = 30°$.

De la clase 1.1 de esta unidad se sabe que el ángulo entre dos vectores está entre 0° y 180°.

Problemas

1. Calcula el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, considerando que α es el ángulo formado entre ambos vectores.
   a) $\|\vec{u}\| = 7$, $\|\vec{v}\| = 4$, $\alpha = 60°$ b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 4$, $\alpha = 30°$ c) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 45°$

2. Determina la medida del ángulo formado entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para cada literal.
   a) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 4$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$ b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 2$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$ c) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = 3$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$

2.5 Producto escalar de vectores en el plano cartesiano

Problema inicial

Considerando una base ortonormal $(\vec{i}, \vec{j})$, $\vec{u} = (x, y)$ y $\vec{v} = (x', y')$ dos vectores $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$. Determina $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Solución

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j}) \\
&= x\vec{i} \cdot x'\vec{i} + x\vec{i} \cdot y'\vec{j} + y\vec{j} \cdot x'\vec{i} + y\vec{j} \cdot y'\vec{j} && \text{por propiedad 3,} \\
&= xx'(\vec{i} \cdot \vec{i}) + xy'(\vec{i} \cdot \vec{j}) + yx'(\vec{j} \cdot \vec{i}) + yy'(\vec{j} \cdot \vec{j}) && \text{por propiedad 4,} \\
&= xx'\|\vec{i}\|^2 + xy'(0) + yx'(0) + yy'\|\vec{j}\|^2 && \text{porque } \vec{i}, \vec{j} \text{ son ortogonales,} \\
&= xx'(1) + yy'(1) && \text{porque } \vec{i}, \vec{j} \text{ son normales.} \\
&= xx' + yy'
\end{aligned}$$

Conclusión

Dados dos vectores $\vec{u} = (x, y)$, $\vec{v} = (x', y')$ en una base ortonormal, se cumple que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Ejemplo

Determina el producto escalar de los vectores $\vec{u} = (3, 2)$, $\vec{v} = (1, 2)$ en una base ortonormal.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3 \times 1) + (2 \times 2)$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 + 4$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$$

Problemas

1. Determina el producto escalar de los vectores $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en cada literal. Considera que las coordenadas de los vectores están en una base ortonormal.

   a) $\vec{u} = (4, 1)$, $\vec{v} = (2, 3)$ b) $\vec{u} = (-2, 3)$, $\vec{v} = (-1, -2)$ c) $\vec{u} = (2, -3)$, $\vec{v} = (-3, -2)$

2. Encuentra el valor de x que hace que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales. Considera que las coordenadas de los vectores están en una base ortonormal.

   a) $\vec{u} = (-3, 1)$, $\vec{v} = (2, x)$ b) $\vec{u} = (1, 0)$, $\vec{v} = (x, -2)$

   c) $\vec{u} = (x, 2)$, $\vec{v} = (-1, x)$ d) $\vec{u} = (2, x)$, $\vec{v} = (x, 5)$

   e) $\vec{u} = (2, 1)$, $\vec{v} = (x, 3)$ f) $\vec{u} = (2 - x, 3)$, $\vec{v} = (1, 2 + x)$ g) $\vec{u} = (1 - x, x)$, $\vec{v} = (3x, 2x - 1)$

   Si el producto escalar de dos vectores diferentes de cero es 0, entonces los vectores son ortogonales.

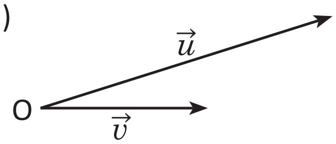
3. Determina la medida del ángulo formado entre los vectores de cada literal. Considera que las coordenadas de los vectores están en una base ortonormal.

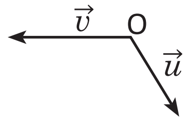
   a) $\vec{u} = (4, 1)$, $\vec{v} = (2, 3)$ b) $\vec{u} = (-2, 3)$, $\vec{v} = (-1, -2)$ c) $\vec{u} = (2, -3)$, $\vec{v} = (-3, -2)$

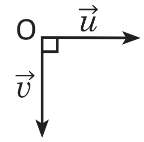
   Aplica la forma en que se utilizó el producto escalar en el ejemplo de la clase anterior.

2.6 Practica lo aprendido

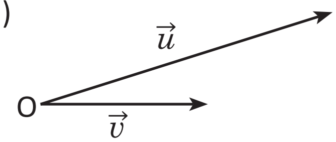
1. Grafica la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ para cada caso.

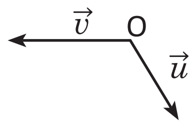
a) 

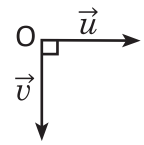
b) 

c) 

2. Grafica la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ para cada caso.

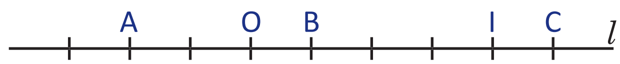
a) 

b) 

c) 

3. Las divisiones de la recta l son regulares, y el vector $\overrightarrow{OI}$ es unitario, determina:

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$



4. Sean A y B dos puntos tales que AB = 1. Calcula $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$ para cada una de las siguientes condiciones.

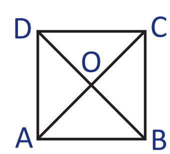
a) A es el punto medio de BM b) B es el punto medio de AM c) M es el punto medio de AB

5. Sean A y B dos puntos tales que AB = 3. Representa el punto M en la recta AB que cumpla las condiciones de cada literal.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 2$ b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -6$ c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

6. Considerando un cuadrado ABCD con centro O y lado 3. Calcula los siguientes productos escalares.

a) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CA}$ b) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$



7. Calcula el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, considerando que α es el ángulo formado entre ambos vectores.

a) $\|\vec{u}\| = 6$, $\|\vec{v}\| = 5$, $\alpha = 60°$ b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 4$, $\alpha = 150°$

8. Determina la medida del ángulo formado entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para cada literal.

a) $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 6$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 15$ b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 2$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$

9. Determina el producto escalar de los vectores $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en cada literal. Considera que las coordenadas de los vectores están en una base ortonormal.

a) $\vec{u} = (2, -1)$, $\vec{v} = (-1, 0)$ b) $\vec{u} = (-3, 4)$, $\vec{v} = (-4, -2)$

10. Encuentra el valor de x que hace que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales. Considera que las coordenadas de los vectores están en una base ortonormal.

a) $\vec{u} = (1 - 3x, 2)$, $\vec{v} = (2, 4 + 2x)$ b) $\vec{u} = (2 - 3x, 2x)$, $\vec{v} = (2x, 3x + 2)$

11. Determina la medida del ángulo formado entre los vectores de cada literal. Considera que las coordenadas de los vectores están en una base ortonormal.

a) $\vec{u} = (-5, 3)$, $\vec{v} = (-6, -10)$ b) $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\vec{v} = (0, 2)$

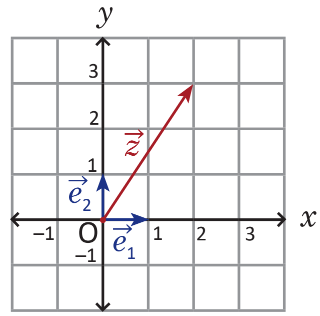
Unidad 7

3.1 Representación geométrica de los números complejos

Problema inicial

Considerando el número complejo $z = 2 + 3i$, representa en el plano cartesiano el vector $\vec{z} = (2, 3)$ utilizando como base los vectores ortonormales $\vec{e}_1 = (1, 0)$ y $\vec{e}_2 = (0, 1)$.

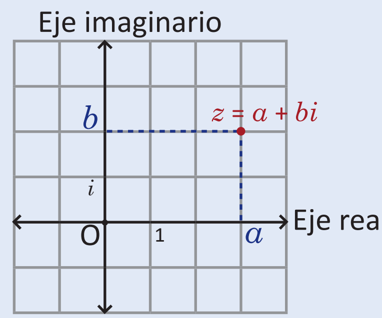
Solución



Conclusión

El plano cartesiano es una base de vectores ortonormales y las coordenadas de un punto A en el plano equivalen a las coordenadas del vector $\overrightarrow{OA}$ en la base ortonormal $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Un número complejo $z = a + bi$, se puede representar en un plano en donde la primera coordenada (eje x) es la parte real (a) del número z, y la segunda coordenada (eje y) es la parte imaginaria (b) del número z.



El plano donde se ubican los números complejos se conoce como **plano complejo**. El eje horizontal se conoce como **eje real** y el eje vertical se conoce como **eje imaginario**.

Se define el **módulo** del número complejo $z = a + bi$, como la norma del vector (a, b), y se denota por $|z|$, es decir:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ejemplo

Determina el módulo del número $z = 2 + 3i$.

$$|z| = \sqrt{2^2 + 3^2}$$
$$= \sqrt{13}$$

Problemas

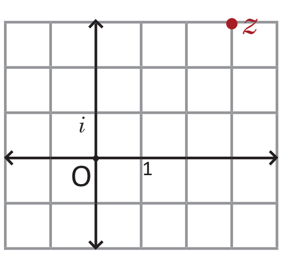
1. Representa los siguientes números complejos como puntos en el plano complejo y determina su módulo.

a) $z = 2 + 3i$ b) $z = -4 - 2i$ c) $z = -1 + 2i$

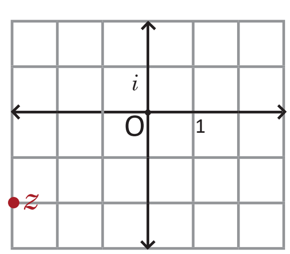
d) $z = 3 - i$ e) $z = 4$ f) $z = -4i$

2. Expresa el número complejo representado en cada plano complejo.

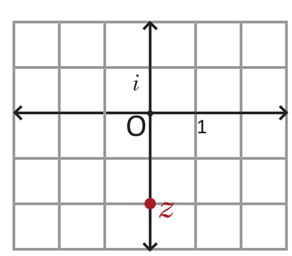
a)



b)



c)



3. Demuestra que $|z|^2 = z\bar{z}$.

Recuerda que el conjungado de un número complejo $z = a + bi$ es $\bar{z} = a - bi$.

3.2 Operaciones con números complejos en el plano complejo

Problema inicial

Considerando los números complejos $z = 2 + 2i$ y $w = 1 - 4i$ representa los siguientes números en el plano complejo.

a) z b) w c) $w + z$ d) $w - z$ e) $2w$

Solución

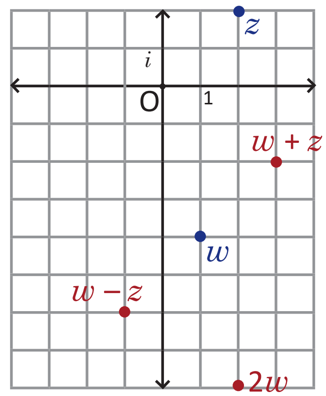
a) Se representa el punto (2, 2).

b) Se representa el punto (1, –4).

c) $w + z = 1 - 4i + 2 + 2i = 3 - 2i$, entonces se representa el punto (3, –2).

d) $w - z = 1 - 4i - (2 + 2i) = -1 - 6i$, entonces se representa el punto (–1, –6).

e) $2w = 2(1 - 4i) = 2 - 8i$, entonces se representa el punto (2, –8).



Conclusión

Dados dos números complejos $w = a + bi$ y $z = c + di$, se cumple que la suma de números complejos $w + z$ equivale al número complejo representado por las coordenadas $(a, b) + (c, d)$.

Análogamente, la resta de números complejos $w - z$ equivale al número complejo representado por las coordenadas $(a, b) - (c, d)$.

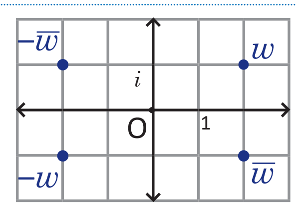
Y el número complejo que se representa en el plano por el vector (ra, rb) es rw.

Observar que las operaciones con números complejos en el plano complejo se comportan como las operaciones de vectores en el plano.

Ejemplo

Considerando $w = 2 + i$, representa en el plano complejo los números:

a) w b) $\overline{w}$ c) $-w$ d) $-\overline{w}$



Problemas

1. Considerando los números complejos $z = 2 - i$ y $w = 3 + 2i$ representa los siguientes números en el plano complejo.

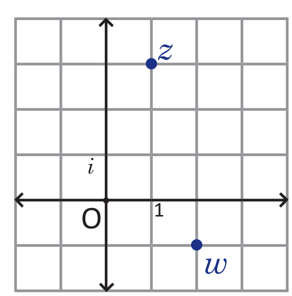
a) z b) w c) $w + z$ d) $w - z$ e) $z - w$

f) $2z$ g) $-w$ h) $\overline{z}$ i) $-\overline{w}$ j) $2w - 3z$

2. Utilizando los números complejos graficados en la figura, representa los siguientes números complejos.

a) $w + z$ b) $w - z$ c) $z - w$

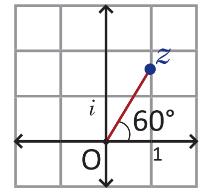
d) $-w$ e) $-\overline{z}$ f) $2w - z$



3.3 Forma trigonométrica de los números complejos*

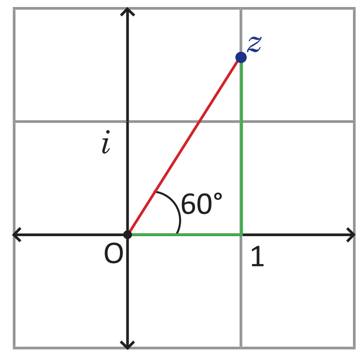
Problema inicial

Utiliza razones trigonométricas para expresar el número complejo representado por el punto cuyo módulo es 2 y el ángulo medido desde el eje real al segmento Oz es 60°.



Solución

Un número complejo z representado por el vector del plano, debe ser expresado en la forma $z = a + bi$ donde a es la coordenada del vector en x, y b es la coordenada del vector en y.



De la definición de seno y coseno se tiene que:

$\cos 60° = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{sen} 60° = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{2}$

Luego, $a = 2 \cos 60°$ y $b = 2 \operatorname{sen} 60°$.

Por lo tanto, el número complejo representado por este vector es 2cos 60° + (2sen 60°)i, que puede ser expresado por:

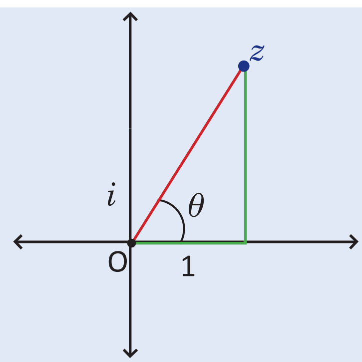
$$z = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i = 1 + \sqrt{3}i.$$

Conclusión

El ángulo formado entre el eje real y el segmento Oz, tal que z es un número complejo, se conoce como **argumento** del número complejo, y se representa por arg(z). Si θ es argumento de z, entonces todos los ángulos de la forma $\theta + 360°n$ son argumento del mismo número complejo z.

Para un número complejo z con módulo $|z|$ y argumento θ, se cumple que:

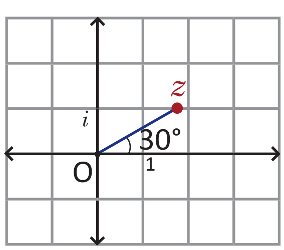
$$z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$



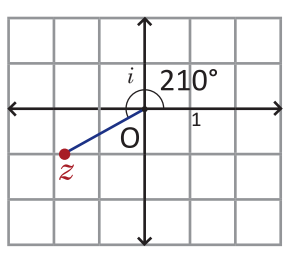
Problemas

1. Expresa el número complejo representado en cada plano complejo y cuyo módulo es el que se indica.

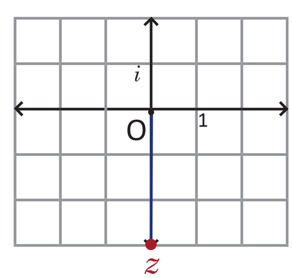
a) $|z| = 2$



b) $|z| = 2$



c) $|z| = 3$



2. Determina el número complejo z si su módulo y argumento es el que se indica en cada literal.

a) $|z| = 2$, $\theta = 45°$ $\qquad$ b) $|z| = 3$, $\theta = 30°$ $\qquad$ c) $|z| = 1$, $\theta = 135°$ $\qquad$ d) $|z| = 2$, $\theta = 150°$

3.4 Multiplicación de números complejos en su forma trigonométrica

Problema inicial

Considerando dos números complejos $z = |z|(\cos \alpha + i \text{ sen } \alpha)$, y $w = |w|(\cos \beta + i \text{ sen } \beta)$, determina zw.

Solución

El teorema de adición es:
$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \text{sen } \beta \cos \alpha$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta$

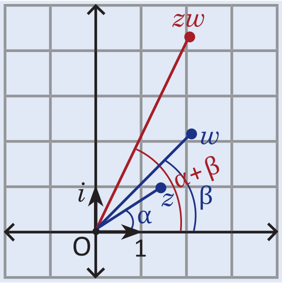
$$
\begin{aligned}
zw &= |z|(\cos \alpha + i \text{ sen } \alpha) \times |w|(\cos \beta + i \text{ sen } \beta)\\
&= |z||w|(\cos \alpha + i \text{ sen } \alpha)(\cos \beta + i \text{ sen } \beta)\\
&= |z||w|[(\cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta) + i(\text{sen } \alpha \cos \beta + \text{sen } \beta \cos \alpha)]\\
&= |z||w|[\cos(\alpha + \beta) + i \text{ sen}(\alpha + \beta)] \quad \text{(aplicando el teorema de adición).}
\end{aligned}
$$

El número complejo que resulta tiene como módulo la multiplicación de los módulos, y su argumento es igual a la suma de los argumentos de los dos complejos.

Conclusión

En la multiplicación de dos números complejos $z = |z|(\cos \alpha + i \text{ sen } \alpha)$ y $w = |w|(\cos \beta + i \text{ sen } \beta)$ se cumple que el número complejo resultante tiene como módulo la multiplicación de los módulos y el argumento es la suma de los argumentos de los números multiplicados.

$$zw = |z||w|[\cos(\alpha + \beta) + i \text{ sen}(\alpha + \beta)]$$



Ejemplo

Realiza la multiplicación zw si $z = 2(\cos 20° + i \text{ sen } 20°)$ y $w = 3(\cos 10° + i \text{ sen } 10°)$.

$$
\begin{aligned}
zw &= 2(\cos 20° + i \text{ sen } 20°) \times 3(\cos 10° + i \text{ sen } 10°)\\
&= 2 \times 3\,[\cos(20° + 10°) + i \text{ sen}(20° + 10°)]\\
&= 6(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)\\
&= 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)\\
&= 3\sqrt{3} + 3i
\end{aligned}
$$

Problemas

1. Determina el producto zw para cada literal.

   a) $z = \cos 14° + i \text{ sen } 14°$ y $w = 2(\cos 16° + i \text{ sen } 16°)$

   b) $z = 2(\cos 40° + i \text{ sen } 40°)$ y $w = 5(\cos 20° + i \text{ sen } 20°)$

   c) $z = 3(\cos 100° + i \text{ sen } 100°)$ y $w = 4(\cos 50° + i \text{ sen } 50°)$

   d) $z = 6(\cos 110° + i \text{ sen } 110°)$ y $w = \cos 160° + i \text{ sen } 160°$

   e) $z = 2(\cos 208° + i \text{ sen } 208°)$ y $w = 2(\cos 107° + i \text{ sen } 107°)$

   f) $z = 3(\cos 140° + i \text{ sen } 40°)$ y $w = 2(-\cos 170° + i \text{ sen } 10°)$

   g) $z = 5(\cos 170° + i \text{ sen } 10°)$ y $w = 3(\cos 70° + i \text{ sen } 70°)$

2. Grafica los números z, w y zw, para cada uno de los literales anteriores.

Unidad 7

3.5 División de números complejos en su forma trigonométrica

Problema inicial

Considerando $w = 2(\cos 40° + i \text{ sen } 40°)$. Determina el valor de z que cumple que $zw = 6(\cos 60° + i \text{ sen } 60°)$.

Solución

Tomando $z = |z|(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)$, entonces:

$$\begin{aligned} zw &= |z|(\cos\theta + i \text{ sen } \theta) \times 2(\cos 40° + i \text{ sen } 40°) \\ &= 2|z|[\cos(40° + \theta) + i \text{ sen}(40° + \theta)], \end{aligned}$$

además se sabe que $zw = 6(\cos 60° + i \text{ sen } 60°)$,

luego:

$$2|z| = 6$$
$$40° + \theta = 60° + 360°n \text{ con } n \text{ un número entero.}$$

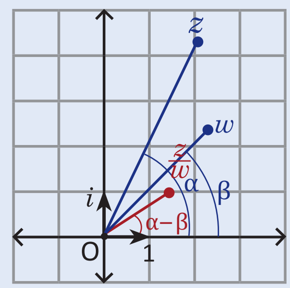
Por lo tanto, $z = \frac{6}{2}[\cos(60° - 40°) + i \text{ sen}(60° - 40°)] = 3(\cos 20° + i \text{ sen } 20°)$.

Conclusión

En la división de 2 números complejos $z = |z|(\cos\alpha + i \text{ sen } \alpha)$, y $w = |w|(\cos\beta + i \text{ sen } \beta)$ se cumple que el número complejo resultante tiene como módulo la división de los módulos y el argumento es igual al argumento del dividendo menos el argumento del divisor.

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}[\cos(\alpha - \beta) + i \text{ sen}(\alpha - \beta)]$$

Como caso especial, se tiene que $\frac{1}{w} = \frac{1}{|w|}[\cos(-\beta) + i \text{ sen}(-\beta)]$.



Ejemplo

Realiza la división $\frac{z}{w}$ si $z = 4(\cos 50° + i \text{ sen } 50°)$ y $w = \cos 20° + i \text{ sen } 20°$.

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= 4(\cos 50° + i \text{ sen } 50°) \div (\cos 20° + i \text{ sen } 20°) \\ &= \frac{4}{1}[\cos(50° - 20°) + i \text{ sen}(50° - 20°)] \\ &= 4(\cos 30° + i \text{ sen } 30°) \\ &= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{2}i \\ &= 2\sqrt{3} + 2i \end{aligned}$$

Problemas

1. Determina el cociente $\frac{z}{w}$ para cada literal.

   a) $z = \cos 42° + i \text{ sen } 42°$ y $w = 2(\cos 12° + i \text{ sen } 12°)$

   b) $z = 10(\cos 40° + i \text{ sen } 40°)$ y $w = 2[\cos(-20°) + i \text{ sen } (-20°)]$

   c) $z = 5(\cos 110° + i \text{ sen } 110°)$ y $w = \cos 170° + i \text{ sen } 170°$

   d) $z = 1$ y $w = \cos 60° + i \text{ sen } 60°$

   e) $z = 3(\cos 207° + i \text{ sen } 207°)$ y $w = 3(\cos 117° + i \text{ sen } 117°)$

   f) $z = 3(\cos 110° + i \text{ sen } 70°)$ y $w = 2(\cos 20° + i \text{ sen } 20°)$

   g) $z = 6(-\cos 10° + i \text{ sen } 10°)$ y $w = 2(\cos 80° + i \text{ sen } 80°)$

2. Grafica los números z, w y $\frac{z}{w}$, para cada uno de los literales anteriores.

3.6 Fórmula de Moivre

Problema inicial

Considerando $z = 2(\cos 15° + i \text{ sen } 15°)$ determina z^2 y z^{-2}.

Se define $z^{-n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n$.

Solución

$$z^2 = [2(\cos 15° + i \text{ sen } 15°)][2(\cos 15° + i \text{ sen } 15°)]$$
$$= 2^2[\cos(15° + 15°) + i \text{ sen}(15° + 15°)]$$
$$= 4(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)$$
$$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$
$$= 2\sqrt{3} + 2i$$

$$z^{-2} = \left(\frac{1}{z}\right)^2$$
$$= \left\{\frac{1}{2}[\cos(-15°) + i \text{ sen } (-15°)]\right\}^2$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2[\cos(-15° - 15°) + i \text{ sen}(-15° - 15°)]$$
$$= \frac{1}{4}[\cos(-30°) + i \text{ sen } (-30°)]$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3} - i}{8}$$

En general

Se cumple que dado un número complejo $z = |z|(\cos \theta + i \text{ sen } \theta)$:

$$z^2 = |z|^2(\cos 2\theta + i \text{ sen } 2\theta).$$

Se define $z^0 = 1$.

Y para un número entero n se cumple que:

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i \text{ sen } n\theta).$$

Esta expresión para la potencia n-ésima de un número complejo se conoce como **fórmula de Moivre**.

Ejemplo

Encuentra el valor (o valores) del número complejo z que hace cierta la igualdad $z^3 = 1$.

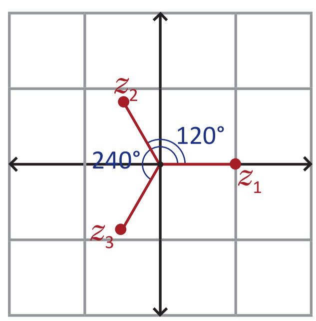
Considerando $z = |z|(\cos \theta + i \text{ sen } \theta)$ con $0° \leq \theta < 360°$,
entonces $z^3 = |z|^3(\cos 3\theta + i \text{ sen } 3\theta) = 1(\cos 0° + i \text{ sen } 0°)$.

De lo cual se deduce que $|z|^3 = 1$, y por lo tanto $|z| = 1$.

Además como $3\theta = 360° \times n$ (n: número entero) y $0° \leq \theta < 360°$, $3\theta = 0°$, $3\theta = 360°$ o $3\theta = 720°$, de lo cual se tendrá que $\theta = 0°$, $\theta = 120°$ o $\theta = 240°$.

Por lo tanto, los valores de z que cumplen que $z^3 = 1$ son $z_1 = \cos 0° + i \text{ sen } 0°$, $z_2 = \cos 120° + i \text{ sen } 120°$, $z_3 = \cos 240° + i \text{ sen } 240°$; que se pueden expresar como:

$$z_1 = 1,\ z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$



Observa que el triángulo que forman z_1, z_2 y z_3 es un triángulo equilátero. Puedes comprobarlo calculando las longitudes de los lados de este.

Problemas

1. Para el número complejo $z = 2(\cos 15° + i \text{ sen } 15°)$. Determina:

a) z^2 b) z^3 c) z^4 d) z^6 e) z^8

2. Para el número complejo $w = 3(\cos 20° + i \text{ sen } 20°)$, determina w^{-3}.

3. Encuentra el valor (o valores) del número complejo z que hace cierta la igualdad $z^4 = 1$.

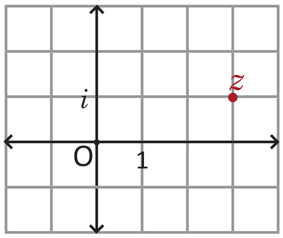
4. Encuentra el valor (o valores) del número complejo w que hace cierta la igualdad $w^6 = 1$.

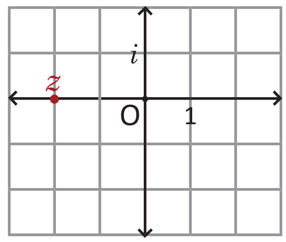
3.7 Practica lo aprendido

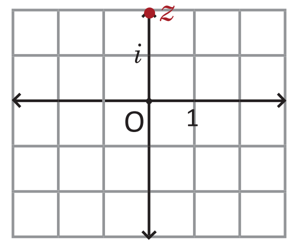
1. Representa los siguientes números complejos en el plano complejo y determina su módulo.

a) $z = -1 + 3i$ b) $z = -2i$ c) $z = -3$

2. Expresa el número complejo representado en cada plano complejo.

a)


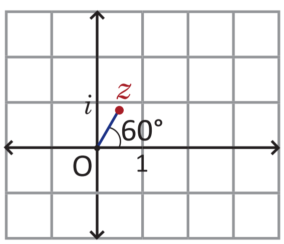
b)


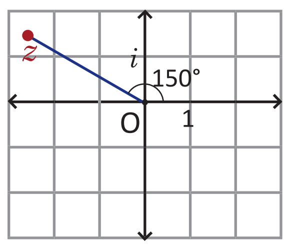
c)


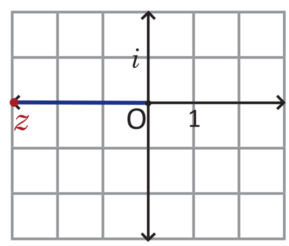
3. Considerando los números complejos $z = 1 - 2i$ y $w = -2 + 2i$ representa los siguientes números en el plano complejo.

a) $z + w$ b) $w - z$ c) $z - w$ d) $-3z$ e) $\overline{w}$ f) $-w + 2z$

4. Expresa el número complejo representado en cada plano complejo.

a) $|z| = 1$


b) $|z| = 3$


c) $|z| = 3$


5. Determina el número complejo que tiene módulo y argumento que indica cada literal.

a) $|z| = 4$, $\theta = 60°$ b) $|z| = 1$, $\theta = 45°$ c) $|z| = 2$, $\theta = 300°$ d) $|z| = 3$, $\theta = 180°$

6. Determina el producto zw para cada literal.

a) $z = 3(\cos 23° + i\,\text{sen}\, 23°)$ y $w = 4(\cos 37° + i\,\text{sen}\, 37°)$
b) $z = 2(\cos 41° + i\,\text{sen}\, 41°)$ y $w = 5[\cos(-11°) + i\,\text{sen}(-11°)]$
c) $z = 3(\cos 200° - i\,\text{sen}\, 160°)$ y $w = 2(\cos 20° - i\,\text{sen}\, 20°)$

7. Para el número complejo $z = \cos 10° + i\,\text{sen}\, 10°$. Determina:

a) z^3 b) z^6 c) z^9

8. Para el número complejo $w = 2(\cos 9° + i\,\text{sen}\, 9°)$. Determina w^{-5}.

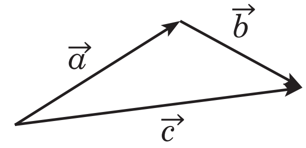
9. Determina el cociente $\frac{z}{w}$ para cada literal:

a) $z = \cos 25° + i\,\text{sen}\, 25°$ y $w = 3[\cos(-35°) + i\,\text{sen}(-35°)]$
b) $z = 6(\cos 21° + i\,\text{sen}\, 21°)$ y $w = 3(\cos 9° - i\,\text{sen}\, 9°)$
c) $z = 2(\cos 115° + i\,\text{sen}\, 65°)$ y $w = 2(\cos 5° - i\,\text{sen}\, 5°)$

3.8 Problemas de la unidad

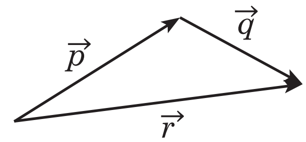
En los problemas del 1 al 4, determina la respuesta correcta.

1. El vector que resulta de sumar los vectores $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ es:



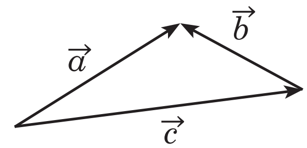
a) $2\vec{a}$ b) $2\vec{b}$ c) $\vec{0}$ d) $2\vec{c}$ e) $-2\vec{c}$

2. El vector que resulta de la operación $\vec{p} + \vec{q} - \vec{r}$ es:



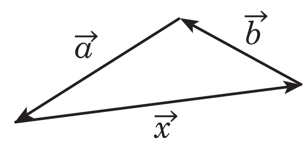
a) $2\vec{p}$ b) $2\vec{r}$ c) $\vec{0}$ d) $2\vec{q}$ e) $-2\vec{r}$

3. La norma del vector $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ si $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 2$ y $\|\vec{c}\| = 4$ es:



a) 2 b) 4 c) 6 d) 9 e) 0

4. Determina la expresión con los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ cuyo resultado sea el vector $\vec{x}$.

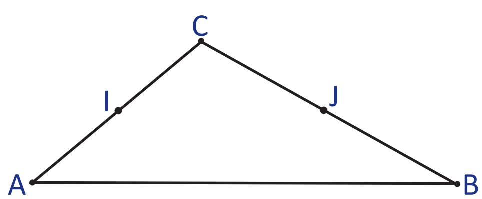


a) $2\vec{a} + \vec{b}$ b) $\vec{a} + \vec{b}$ c) $-(\vec{a} + \vec{b})$ d) $\vec{a} - \vec{b}$

5. Sean los vectores $\vec{u} = (2, 1)$, $\vec{v} = (1, 4)$ y $\vec{w} = (5, 6)$, verifica que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base vectorial y escribe las coordenadas de $\vec{w}$ respecto a esta base.

6. Dado el vector $\vec{u} = (2, 6)$ en la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, determina las coordenadas del punto medio del vector $\vec{u}$.

7. Considerando el triángulo ABC, y siendo I el punto medio de AC y J el punto medio de BC, demuestra que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



8. Considerando los puntos P y Q que cumplen:

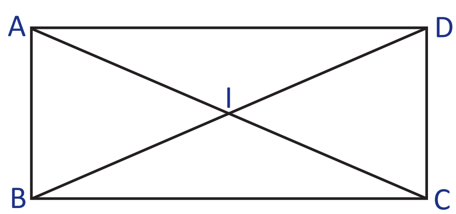
$$\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AQ} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$$

Utiliza lo aprendido en la clase 1.3.

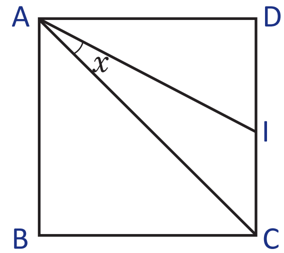
Demuestra que $\overrightarrow{PQ}$ es paralelo al vector $\overrightarrow{BC}$.

9. Sea ABCD un rectángulo tal que: AB = a y BC = b. Expresa $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DI}$ y $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IA}$ con los valores a y b.



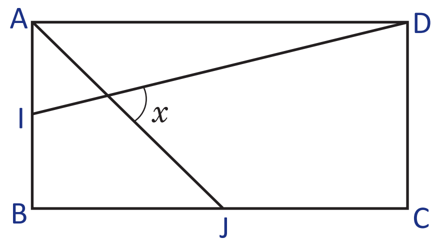
3.9 Problemas de la unidad

1. Considera un cuadrado ABCD de lado 1 y sea I el punto medio de $\overline{CD}$. Determina la medida del ángulo x.



Expresa $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC}$ como suma de vectores que faciliten el cálculo. Utiliza la forma trigonométrica del producto escalar.

2. En la siguiente figura, ABCD es un rectángulo tal que AB = 2 y AD = 4.



a) Determina la longitud de AJ y DI, si J e I son puntos medios de los lados BC y AB respectivamente.

b) Determina la medida del ángulo x.

3. Sea $\vec{u} = (a, b)$ un vector diferente de cero, en una base ortonormal. Demuestra que el vector $\vec{u}$ es ortogonal a los vectores de la forma $(rb, -ra)$ para cualquier número real r diferente de cero.

4. Considerando los vectores $\overrightarrow{OA} = (1, 4)$ y $\overrightarrow{OB} = (3, 2)$ determina las coordenadas del vector $\overrightarrow{OI}$ si I es el punto medio del vector $\overrightarrow{AB}$.

5. Determina el resultado de las siguientes operaciones con número complejos.

a) $(i - 1)^8$　　b) $(1 + i)^{-8}$

Utiliza la forma trigonométrica de un número complejo.

6. Determina el resultado de las siguientes operaciones con números complejos.

a) $(i - 1)(1 - i)$　　b) $\dfrac{1 - i}{1 + i}$

Utiliza la forma trigonométrica de un número complejo.

7. Calcula las siguientes cantidades.

a) $|(i + 1)(2 - i)|$　　b) $\left|\dfrac{2 - 3i}{1 + 2i}\right|$　　c) $|(1 + i)^{20}|$

8. Demuestra que para 2 números complejos z y w se cumple que:

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

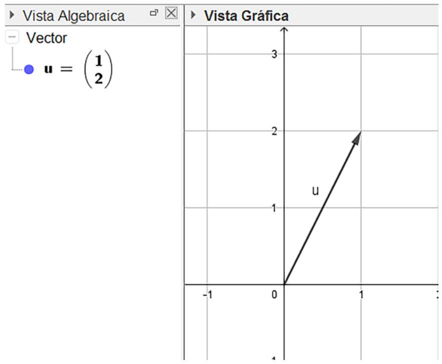
Utiliza $|z|^2 = z\bar{z}$ y que $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.

Para esta práctica se utilizarán las herramientas que posee GeoGebra para trabajar con vectores, desde la forma como se representan, hasta las operaciones y aplicaciones que se pueden hacer con estas herramientas para resolver problemas y verificar respuestas. Para ello sigue los pasos indicados en la parte de Práctica. Luego trabaja en GeoGebra la parte Actividades que está al final de esta práctica.

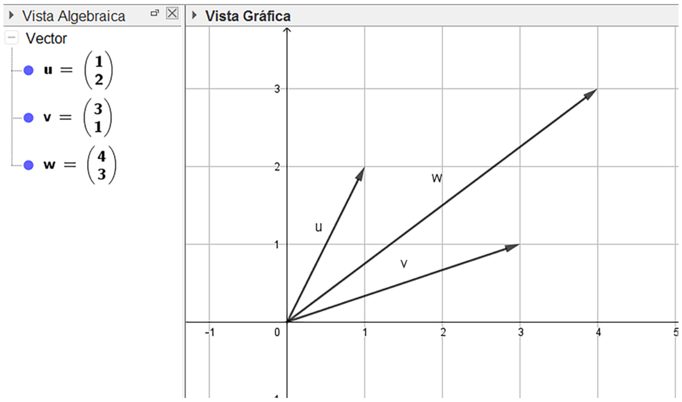
Práctica

Conceptos de vectores en GeoGebra.

1. Grafica en la referencia ortonormal el vector $\vec{u} = (1, 2)$, digitando en la barra de entrada u = (1, 2). En GeoGebra, si se digita la letra en mayúscula grafica un punto y si se digita en minúscula, grafica un vector.



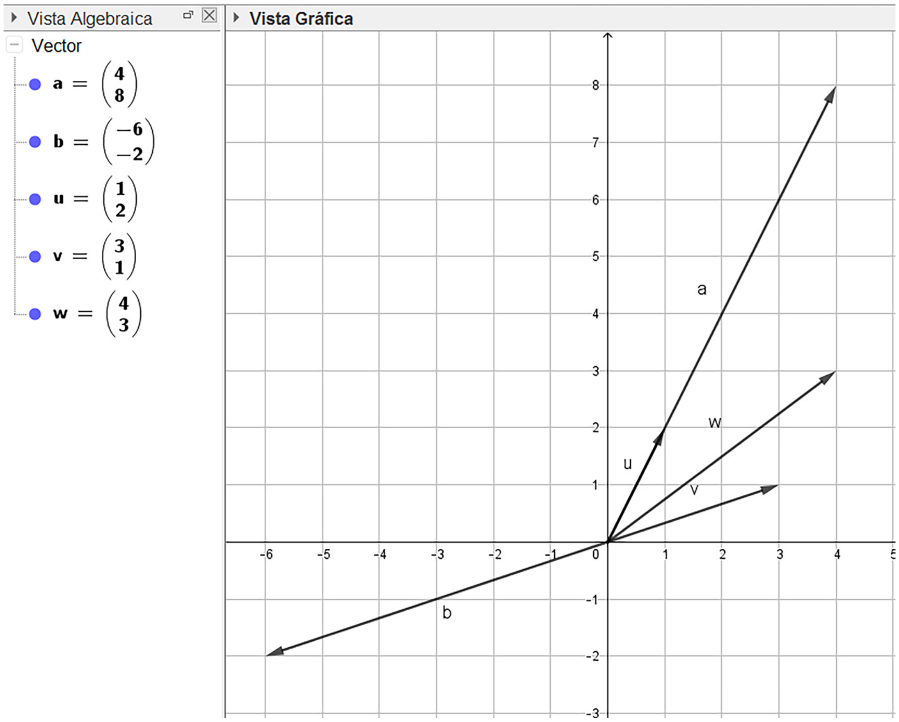
2. Grafica el vector $\vec{v} = (3, 1)$, escribiendo v = (3, 1).



3. Realiza la suma de vectores $\vec{u} + \vec{v}$, para ello digita en la barra de entrada u + v. En la Vista Gráfica se observará el vector resultante y en la Vista Algebraica sus coordenadas.

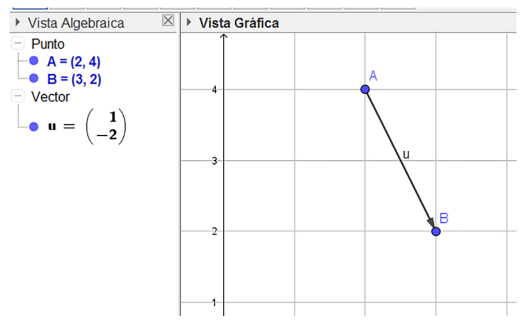
4. Realiza las operaciones $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{v} + \vec{u}$, utilizando la barra de entrada, tal como en el numeral 3.

5. También es posible calcular el producto por escalar, por ejemplo, para determinar el vector $4\vec{u}$, se puede escribir en la barra de entrada 4u, o con números negativos, por ejemplo $-2\vec{v}$.



6. Verifica en GeoGebra las respuestas a los problemas planteados, y corrobora si están correctos.

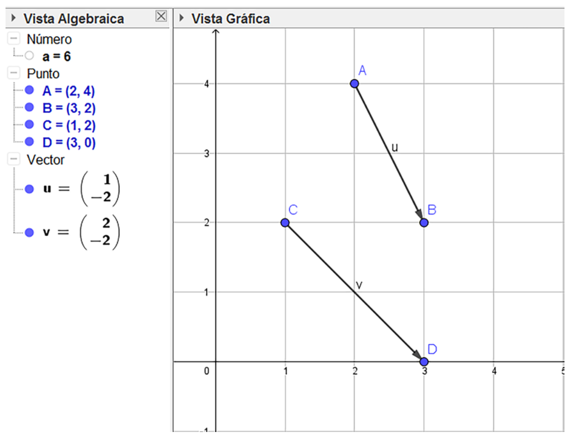
Uso de comandos para vectores en GeoGebra.



1. Grafica dos puntos con coordenadas A = (2, 4) y B = (3, 2). Para representar el vector $\overrightarrow{AB}$, digitar en la barra de entrada el comando vector (A, B).

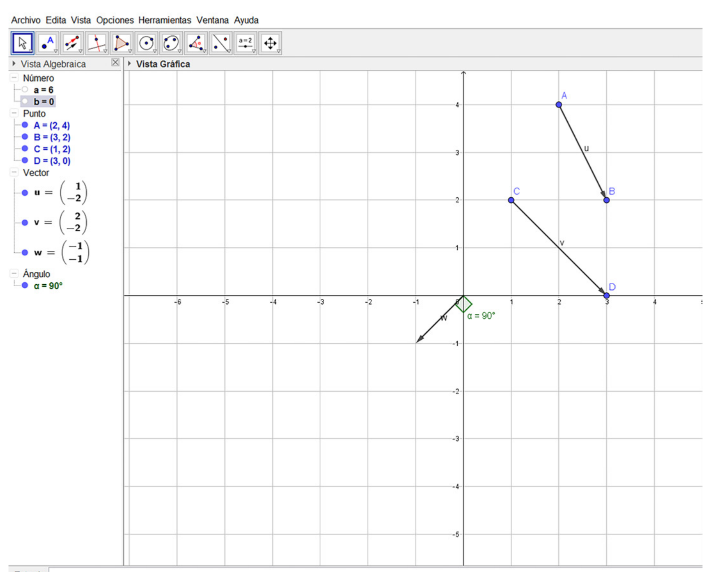
2. Grafica el vector $\overrightarrow{CD}$ con los puntos C = (1, 2) y D = (3,0) utilizando el procedimiento del numeral 1.

3. Es posible calcular el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, digitando "u v" o utilizando el comando ProductoEscalar(u, v) en la barra de entrada. En la Vista Algebraica aparece el valor del producto escalar guardado en la variable a.



4. Grafica el vector $\vec{w}$ = (–1, –1), y utiliza el comando Ángulo(w, v) el cual dará como resultado el ángulo de los vectores en la Vista Algebraica guardados en una variable α.

5. Del numeral 4 se sabe que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son perpendiculares, verifica este resultado utilizando el comando de producto escalar en la barra de entrada. Al finalizar se obtendrán los siguientes resultados en GeoGebra.



Actividades

Verifica los resultados de los problemas de la unidad que se pueden constatar con GeoGebra, analiza cada caso y utiliza la herramienta más conveniente. Corrige los problemas que no fueron resueltos correctamente.

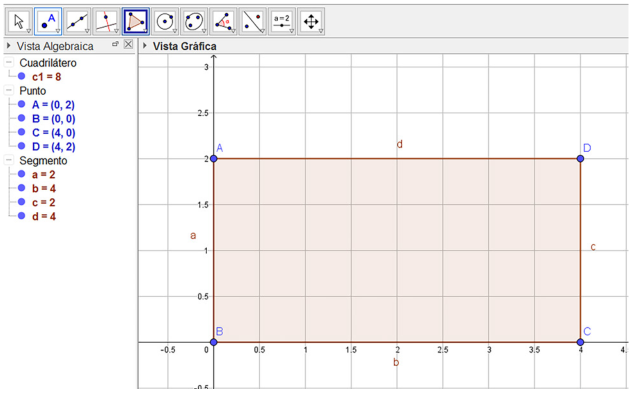
4.2 Práctica en GeoGebra: resolución de problemas

Para esta práctica se utilizarán las herramientas aprendidas en la clase anterior para solucionar algunos problemas de la clase 3.9 de los problemas de la unidad. Para ello, sigue los pasos indicados en la parte de Práctica. Luego trabaja en GeoGebra la parte Actividades que está al final de esta práctica.

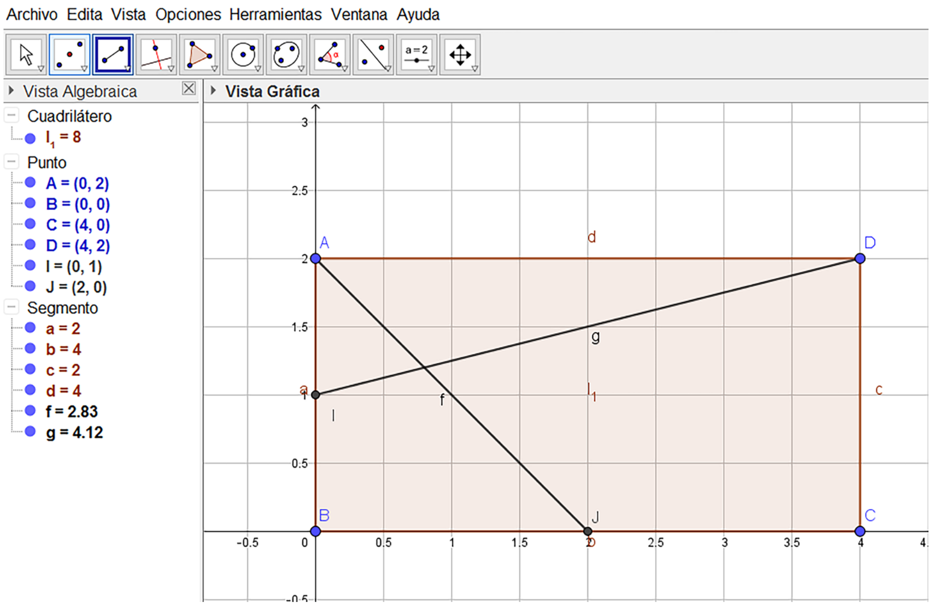
Práctica

Resolución del problema 2 de la clase 3.9.

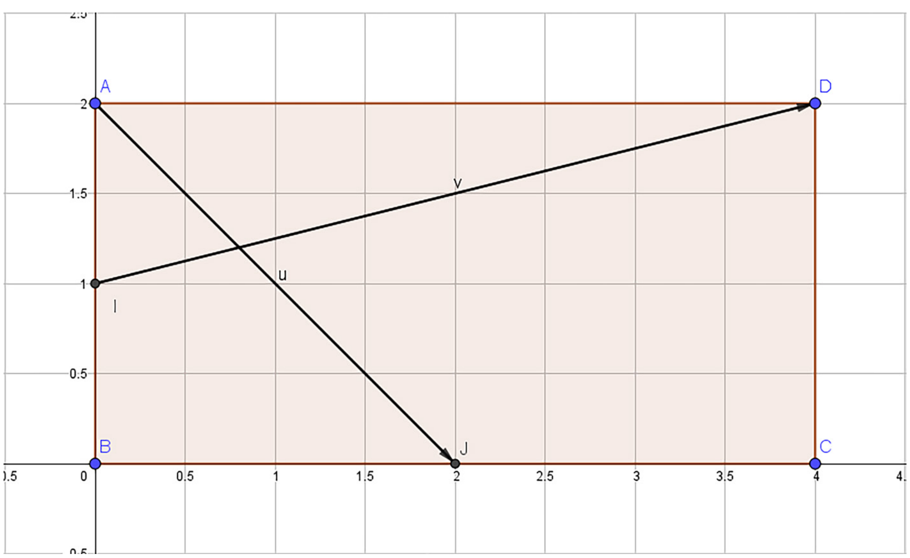
1. Grafica los puntos A = (0, 2), B = (0, 0), C = (4, 0) y D = (4, 2), luego utiliza el botón de Polígono y grafica el rectángulo indicado.



2. Luego grafica el punto medio de AB y de BC, utilizando el botón de Punto medio. Traza los segmentos DI y AJ como lo muestra la figura de abajo.

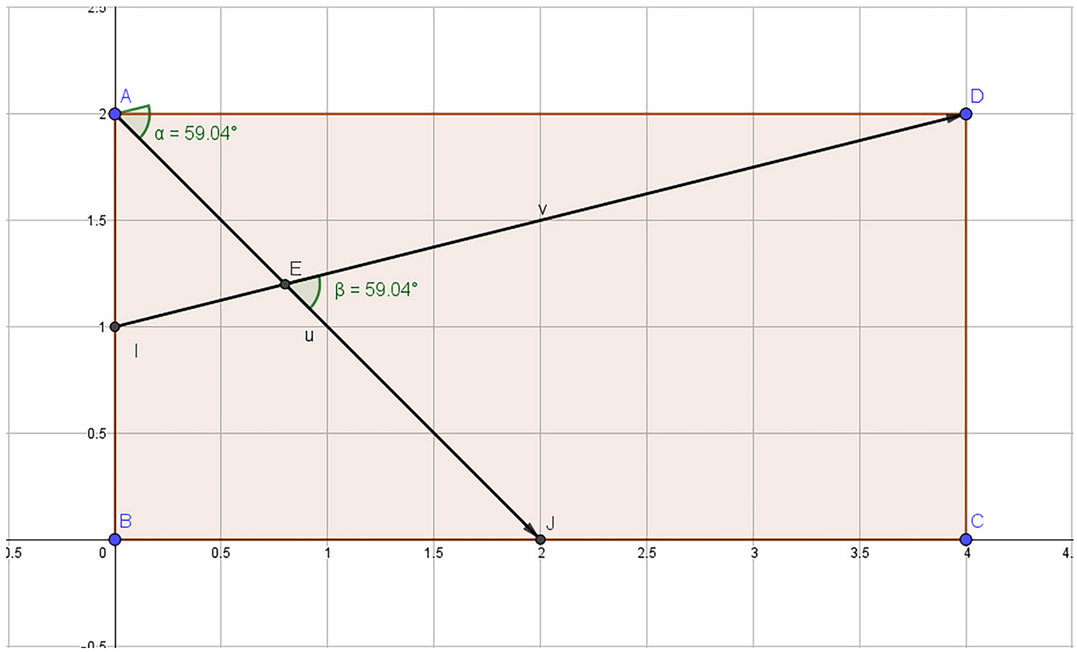


3. Utilizando los comandos para determinar el vector comprendido entre dos puntos, grafica los vectores $\overrightarrow{AJ}$ y $\overrightarrow{ID}$.



4. Utilizando el comando Ángulo(u, v) calcula el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

5. Para verificar la medida de este ángulo, grafica el punto que se encuentra en la intersección de los segmentos AJ e ID, y utiliza la opción de medir ángulo, para medir el ángulo JED. Verifica que ambos ángulos tienen igual medida.

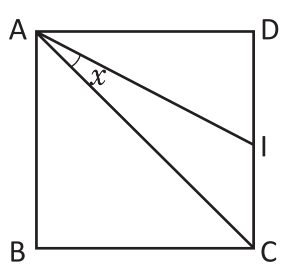


6. Finalmente puedes corroborar si fue resuelto correctamente el problema, contrastando tu respuesta de tu cuaderno.

Actividades

- Realiza una construcción que permita resolver el problema 1, 3 y 4 de la clase 3.9 sobre problemas de la unidad, luego verifica que lo resolviste correctamente comparando tu respuesta con la obtenida en GeoGebra.

- Considerando un cuadrado ABCD de lado 1, siendo I el punto medio de BC. Determina la medida del ángulo x.



- Sea $\vec{u} = (a, b)$ un vector diferente de cero, en una base ortonormal. Demuestra que el vector $\vec{u}$ es ortogonal a los vectores de la forma $(rb, -ra)$ para cualquier número real r diferente de cero.

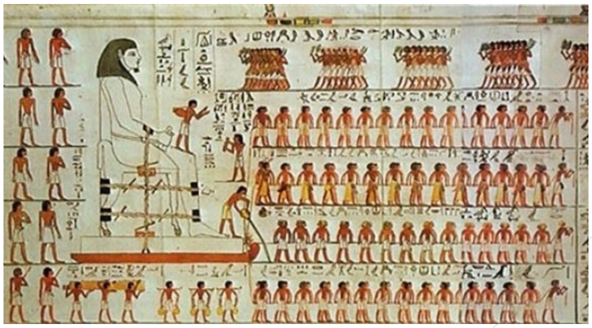
- Considerando los vectores $\overrightarrow{OA} = (1, 4)$ y $\overrightarrow{OB} = (3, 2)$ determina las coordenadas del vector $\overrightarrow{OI}$ si I es el punto medio del vector $\overrightarrow{AB}$.

Estadística descriptiva

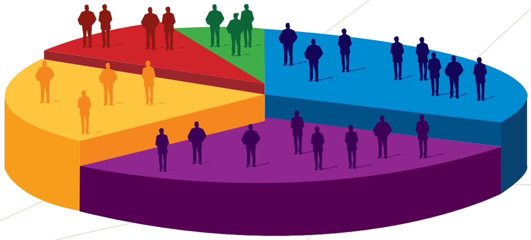
8 Unidad

El registro de la información ha sido una tarea que se ha dado durante toda la historia, esto debido a la importancia de mantener un registro sobre datos como: la cantidad de nacimientos, la tasa de mortalidad, las ventas, las deudas, entre otros. Los primeros aportes sobre este tipo de información datan desde aproximadamente el año 3050 a.C., asimismo se encuentran registros en la biblia y en la cultura china de hace unos 40 siglos, además se considera que los mayas poseían un gran dominio de estos conocimientos, los cuales utilizaban para resolver problemas referentes a sus actividades cotidianas.

Es hasta el siglo XIX que se alcanza un desarrollo pleno de los métodos utilizados para el estudio de las características de un conjunto de datos, con la publicación del primer censo con estas descripciones por el Ministro del Interior francés Chaptal y se van sistematizando a lo largo del desarrollo de este siglo. La aplicación de la estadística descriptiva siempre ha sido muy útil especialmente en aspectos demográficos, para extraer las características esenciales de los datos, analizarlos y dar conclusiones.



Registros estadísticos de los egipcios en la antigüedad.



Los estudios demográficos dieron origen a la estadística descriptiva.

Algunas temáticas que se desarrollarán durante esta unidad son la idea de muestreo, las medidas de tendencia central y dispersión para muestras y poblaciones, coeficiente de variación y medidas de posición, con especial énfasis en el diagrama de caja y bigotes; luego se presenta una práctica en **GeoGebra** para afianzar los aprendizajes con el uso correcto del recurso tecnológico.

1.1 Definiciones previas

Problema inicial

A la “Feria del Libro” asistieron 1 000 personas. Por medio de una encuesta se entrevista al 15% de la población y se les pregunta acerca de: sexo, edad, género literario preferido, presupuesto para la compra de libros. Responde:

a) ¿Cuántas personas asistieron a la Feria del Libro?
b) ¿Cuántas personas fueron entrevistadas?
c) ¿Qué se les preguntó a las personas entrevistadas?

Solución

a) Asistieron un total de 1 000 personas.

b) Se entrevistó el 15% de 1 000, es decir: $1\,000 \times \frac{15}{100} = 150$.

Por lo tanto, se entrevistaron 150 personas.

c) Se les preguntó acerca del sexo, edad, género literario preferido y presupuesto para comprar libros.

Definiciones

- Se define **población** como un conjunto total de individuos, objetos o eventos que tienen las mismas características y sobre el que se está interesado en obtener conclusiones.

- Si se toma a una parte de la población con el propósito de ser estudiada, a este grupo seleccionado se le llama **muestra**.

- Al tipo de información que se desea investigar se le llama **variable estadística**. Una variable estadística es una propiedad que es susceptible a tomar diferentes valores y que pueden medirse u observarse.

Las variables estadísticas pueden clasificarse tal como muestra el esquema.

- Variable estadística
  - Cualitativa
    - Nominal
    - Ordinal
  - Cuantitativa
    - Discreta
    - Continua

- Las **variables cualitativas** expresan distintas cualidades, características o modalidades.
  - Las variables cualitativas nominales no pueden definirse mediante un orden. Por ejemplo: país, idioma, estado civil, sexo.
  - Las variables cualitativas ordinales pueden tomar distintos valores ordenados siguiendo una escala establecida. Por ejemplo: malo, regular, bueno.

Una variable cualitativa es dicotómica si toma solo dos valores. Por ejemplo: sí y no, hombre y mujer; o politómica si toma tres o más valores.

- Las **variables cuantitativas** toman valores numéricos.
  - Las variables cuantitativas discretas toman valores numéricos enteros no negativos. Por ejemplo: número de hijos.
  - Las variables cuantitativas continuas pueden tomar cualquier valor dentro de un intervalo específico de valores. Por ejemplo: el peso, altura, gastos familiares.

Ejemplo

A un evento sobre “El rol de la mujer en la sociedad” asisten un total de 2 000 personas de las 21 000 que habitan el municipio de Chalatenango, y de ellas se recoge la siguiente información: sexo, estatura, cantidad de hijos y cuán a menudo cocina en la casa; cuyas opciones de respuesta son: nunca, casi nunca, a veces, casi siempre o siempre. Responde los siguientes literales:

a) Identifica la población y la muestra en este evento.

b) Identifica las variables y clasifícalas.

a) La población de la cual se obtiene la muestra son las 21 000 personas que habitan el municipio de Chalatenango.

La muestra son las 2 000 personas que asistieron al evento.

b) Las variables son: sexo, edad, cantidad de hijos y periodicidad con que cocina. Al clasificarlas se obtiene:

Variables cualitativas		Variables cuantitativas	
Nominales	• Sexo	***Discretas***	• Cantidad de hijos
Ordinales	• Periodicidad con que cocina (se puede ordenar como nunca, casi nunca, ... , siempre)	***Continuas***	• Estatura

Problemas

1. Para cada una de las siguientes situaciones, identifica la población, la muestra, las variables estadísticas y su clasificación.

   a) En la Biblioteca Nacional de El Salvador se desea conocer el estado de los libros de Matemática y estos se extraen de los primeros 10 estantes para categorizarlos como bueno, malo o inservible.

   b) De todos los niños en edad escolar de El Salvador, se encuesta a los que están en noveno grado para conocer si les gusta la música electrónica o la instrumental.

   c) En el Hospital Nacional Rosales se desea entrevistar a los pacientes que están hospitalizados por enfermedades pulmonares y saber el trato que reciben en dicho hospital.

   d) En el Parque Nacional Montecristo se desea saber los años de vida que tienen todos los árboles cipreses que hay.

   e) En un cine de San Salvador se entrevista a los que asisten a una película de comedia-romance para investigar si les gusta más las de romance, comedia o ambas.

El Parque Nacional Montecristo es un parque protegido que está ubicado en el municipio de Metapán, departamento de Santa Ana y tiene una extensión de 1973 hectáreas.

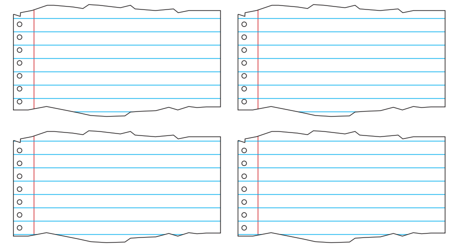
2. Determina si las variables estadísticas presentadas a continuación son variables cualitativas (nominales u ordinales) o variables cuantitativas (discretas o continuas).

   a) El grupo sanguíneo de una persona
   b) Temperatura en grados centígrados
   c) Grado de escolaridad
   d) Religión
   e) Lugar de nacimiento
   f) Número de alumnos
   g) El precio de un artículo
   h) Valores de la glucosa en 50 niños
   i) Número de clínicas médicas por municipio
   j) El ingreso mensual de un padre de familia
   k) Presión arterial
   l) Intensidad del dolor

1.2 Actividad introductoria

Materiales

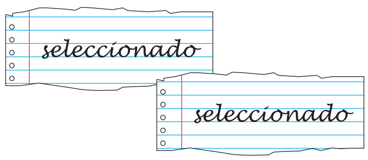
- Pedacitos de papel (uno por cada estudiante)
- Plumón



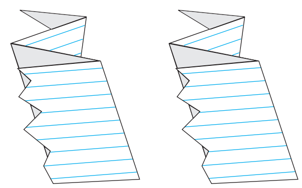
Actividad 1

Seleccionar 5 estudiantes del salón de clase utilizando el siguiente proceso:

1. Escribir en 5 de los pedacitos de papel la palabra "seleccionado".



2. Doblar todos los papelitos y entregar uno a cada estudiante.



3. Los estudiantes seleccionados son aquellos a quienes les apareció un papelito con la palabra "seleccionado".

Actividad 2

Seleccionar 5 estudiantes del salón de clase utilizando el siguiente proceso:

1. Numerar los estudiantes del 1 a N, siendo N la cantidad total de estudiantes que hay en el salón.

2. Se escoge un estudiante al azar del 1 al mayor entero m menor o igual que $\frac{N}{5}$ (se pueden usar papelitos, o el aleatorio de la calculadora , etc.)

3. El segundo seleccionado es el que tiene el número más cercano a la suma del anterior y m.

4. El tercer seleccionado es el que tiene el número del segundo sumándole m. Y así sucesivamente hasta seleccionar los 5 estudiantes, por ejemplo si el primer estudiante tiene el número a, los 5 estudiantes seleccionados serían los que tienen los número: a, $a + m$, $a + 2m$, $a + 3m$, $a + 4m$.

Por ejemplo, si $N = 40$ y $a = 3$, entonces $m = \frac{40}{5} = 8$ y los números seleccionados son: 3, 11, 19, 37, 35.

Definiciones

A la acción de seleccionar de una población de N elementos una muestra de n elementos se conoce como **muestreo**.

El tipo de muestreo en el que todos los elementos de la población tienen igual probabilidad de ser seleccionados (como en la actividad 1) se conoce como **muestreo aleatorio simple**.

Al tipo de muestreo aleatorio en el que se lista la población, y se escoge un número aleatorio menor o igual que $\frac{N}{n}$ donde N es el total de la población y n es el total de la muestra, y se seleccionan los demás sumándole al anterior $\frac{N}{n}$ se conoce como **muestreo aleatorio sistemático**.

Problemas

1. Escribe 2 formas de muestreo aleatorio simple.

2. Escribe 2 formas de muestreo aleatorio sistemático.

3. ¿Al realizar una rifa se está realizando un muestreo?

1.3 Muestreo probabilístico*

Problema inicial

En un instituto se cuenta con la siguiente información de los estudiantes de bachillerato:

	Niñas	Niños
Primer año	24	12
Segundo año	9	15

Determina una forma para seleccionar una muestra de 20 estudiantes que cursen bachillerato (primero o segundo año, niñas o niños).

Solución

En este problema se tiene 4 tipos de personas para la población, se puede calcular el porcentaje de la población que le corresponde a cada uno:

Niñas de Primer año: $\frac{24}{60} \times 100 = 40\%$

Niños de Primer año: $\frac{12}{60} \times 100 = 20\%$

Niñas de Segundo año: $\frac{9}{60} \times 100 = 15\%$

Niños de Segundo año: $\frac{15}{60} \times 100 = 25\%$

Entonces para obtener la muestra de 20 estudiantes se pueden utilizar estos porcentajes:

Niñas de Primer año: 40% de 20 es 8

Niños de Primer año: 20% de 20 es 4

Niñas de Segundo año: 15% de 20 es 3

Niños de Segundo año: 25% de 20 es 5

Por lo tanto se puede extraer una muestra de 20 estudiantes de bachillerato, seleccionando 8 niñas de primer año, 4 niños de primer año, 3 niñas de segundo año y 5 niños de segundo año.

En general

El muestreo que se aplica proporcionalmente a una población que está dividida en sectores (estratos) se conoce como **muestreo estratificado**.

El muestreo que se aplica a una población donde es necesario dividir grupos y seleccionar aleatoriamente algunos de ellos se conoce como **muestreo por conglomerado**.

Se define el **muestreo probabilístico** como todos aquellos métodos de muestreo donde todos los elementos de la población tienen las mismas posibilidades de ser seleccionados para la muestra.

El muestreo aleatorio simple, el sistemático, el estratificado y el muestreo por conglomerado son todos muestreos probabilísticos.

Ejemplo

Utilizando muestreo por conglomerado determina la forma de realizar un estudio acerca de la comida preferida de las personas en el departamento de Santa Ana.

Se puede dividir la población en conglomerados: estudiantes, empleados de oficina, deportistas, profesionales independientes, etc. Y se seleccionan al azar 2 o 3 de estos conglomerados para obtener la muestra.

Problemas

Realiza un muestreo estratificado de 40 personas de una colonia que tiene los siguientes datos:

	Femenino	Masculino
Menor de edad	70	40
Mayor de edad	30	60

1.4 Muestreo no probabilístico

Definición

En un muestreo cuando la selección depende de las características de los individuos que se desean estudiar, se dice que es un **muestreo no probabilístico**. Algunas técnicas de muestreo no probabilístico son:

- **Muestreo por conveniencia**: la selección de la muestra se hace basada en la facilidad o las características específicas del estudio.
- **Muestreo por bola de nieve**: consiste en seleccionar la muestra por medio de conocidos, es decir, se hace el estudio a personas conocidas, para que estas lo hagan a personas conocidas de ellas y así hasta llegar a la muestra que se desea. Se utiliza cuando es difícil encontrar la muestra.
- **Muestreo por cuotas**: se divide la población por grupos y se establece una cantidad de individuos de muestra por cada grupo, la cantidad de individuos por grupo se realiza de manera apreciativa.
- **Muestreo discrecional**: el muestreo se hace considerando las características y formación específicas de las personas.

Ejemplo 1

En una investigación se desea realizar una encuesta de hábitos alimenticios, y las personas con las que se tiene mayor facilidad de contacto son los miembros del equipo de baloncesto de una colonia.

En este caso se puede realizar un muestreo por conveniencia, pero puede que la muestra no refleje la tendencia de la población.

Ejemplo 2

En una investigación se desea saber sobre las costumbres y estructura de los grupos delincuenciales en El Salvador, para ello se realiza una entrevista a personas cercanas y luego estas personas la hacen a personas cercanas a ellas, hasta llegar a personas cercanas a estos grupos.

En este caso se puede realizar un muestreo por bola de nieve. Esta técnica se puede escoger para seleccionar personas que pueden no brindar información a una persona particular y es mejor selecionarla a partir de personas que los conozcan, se utiliza para estudiar temas de delincuencia, política, corrupción, etc.

Ejemplo 3

Se realiza una encuesta a 100 universitarios y 100 profesionales.

En este caso se puede realizar un muestreo por cuotas. Es una técnica parecida al muestreo por estratos, pero la asignación de la cantidad de personas por estrato no se calcula a partir de la población.

Ejemplo 4

En un salón de clase se desea seleccionar 4 estudiantes para participar en una olimpíada de matemática.

En este caso se puede realizar un muestreo discrecional, se pueden seleccionar los 4 estudiantes que tienen mejor rendimiento en matemática.

Problemas

Determina qué tipo de muestreo no probabilístico consideras más adecuado explicando las ventajas y desventajas de los tipos de muestreo para cada situación.

a) Materia favorita de un estudiante
b) Tipos de estampillas que tienen los filatelistas
c) Seguridad en cada departamento de El Salvador
d) Escoger 5 estudiantes para competir en natación

1.5 Repaso de tablas de frecuencia

Problema inicial

En una comunidad del área metropolitana de San Salvador se pregunta la edad a jóvenes menores de 21 años, obteniendo la siguiente información:

Edades					
9	14	15	14	19	16
11	18	9	12	20	12
12	11	10	19	14	13
15	12	11	18	11	16
14	16	17	12	13	17

a) Organiza la información en una tabla de distribución de frecuencias en 4 clases de 3 en 3, iniciando en 9 y terminando en 21.
b) Elabora una tabla de distribución de frecuencias y calcula la media aritmética (μ), la moda y la mediana para estos datos agrupados.
c) Calcula la varianza (σ^2) y la desviación típica (o desviación estándar σ).

Solución

a)

Edades	Cantidad de jóvenes (f)	Punto medio (Pm)	$f \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f(Pm - \mu)^2$
9 a 12	7	10.5	73.5	–4	16	112
12 a 15	11	13.5	148.5	–1	1	11
15 a 18	7	16.5	115.5	2	4	28
18 a 21	5	19.5	97.5	5	25	125
TOTAL	**30**					

Solución de a)

En cada clase se cumple que los datos contados en la frecuencia son mayores o iguales al límite inferior y menores al límite superior, excepto en la última clase, donde es menor o igual al límite superior.

b) Para calcular la media aritmética se suman los valores de la columna $f \times Pm$ y se divide por el total de datos.

$$\mu = \frac{\sum f \times Pm}{n} = \frac{73.5 + 148.5 + 115.5 + 97.5}{30} = 14.5$$

La clase que contiene la mediana es la segunda (12 a 15) porque en ella se encuentran los datos 15 y 16.

$$\text{Mediana} = \frac{12 + 15}{2} = 13.5$$

La clase con la mayor frecuencia es la segunda (12 a 15).

$$\text{Moda} = \frac{12 + 15}{2} = 13.5$$

c) Para la varianza se suman los valores de la columna $f(Pm - \mu)^2$ y se divide por el total de datos.

$$\sigma^2 = \frac{\sum f(Pm - \mu)^2}{n} = \frac{112 + 11 + 28 + 125}{30} = 9.2$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f(Pm - \mu)^2}{n}} = \sqrt{9.2} \approx 3.03$$

Problemas

Las velocidades que registra un policía de tránsito en la carretera de Los Chorros están en la tabla de la derecha, realiza lo siguiente:

Velocidad en km/h						
60	65	40	80	80	90	45
70	100	70	50	80	55	118
75	65	90	85	70	100	55
110	70	95	70	80	115	100

a) Organiza la información en una tabla de distribución de frecuencias en 4 clases de 20 en 20, iniciando en 40 y terminando en 120.
b) Calcula la media aritmética, la moda y la mediana.
c) Calcula la varianza y la desviación típica.

1.6 Medidas de tendencia central

Problema inicial

De una empresa se tiene el registro de ventas del último mes en sus 30 sucursales y un registro de 20 de sus 30 sucursales, las cuales se muestran a continuación:

Ventas	Cantidad de sucursales (f)
De \$1,000 a \$2,000	5
De \$2,000 a \$3,000	11
De \$3,000 a \$4,000	8
De \$4,000 a \$5,000	6
TOTAL	**30**

Ventas	Cantidad de sucursales (f)
De \$1,000 a \$2,000	3
De \$2,000 a \$3,000	7
De \$3,000 a \$4,000	6
De \$4,000 a \$5,000	4
TOTAL	**20**

a) Determina la media aritmética, mediana y moda para las 30 sucursales.

b) Determina la media aritmética, mediana y moda para las 20 sucursales.

Solución

a)

Ventas	Cantidad de sucursales (f)	Punto medio (Pm)	$f \times Pm$
De \$1,000 a \$2,000	5	1,500	7,500
De \$2,000 a \$3,000	11	2,500	27,500
De \$3,000 a \$4,000	8	3,500	28,000
De \$4,000 a \$5,000	6	4,500	27,000
TOTAL	**30**		90,000

$$\text{Media} = \frac{90{,}000}{30} = 3{,}000$$

$$\text{Mediana} = \frac{2{,}000 + 3{,}000}{2} = 2{,}500$$

$$\text{Moda} = \frac{2{,}000 + 3{,}000}{2} = 2{,}500$$

b)

Ventas	Cantidad de sucursales (f)	Punto medio (Pm)	$f \times Pm$
De \$1,000 a \$2,000	3	1,500	4,500
De \$2,000 a \$3,000	7	2,500	17,500
De \$3,000 a \$4,000	6	3,500	21,000
De \$4,000 a \$5,000	4	4,500	18,000
TOTAL	**20**		61,000

$$\text{Media} = \frac{61{,}000}{20} = 3{,}050$$

$$\text{Mediana} = 3{,}000$$

$$\text{Moda} = \frac{2{,}000 + 3{,}000}{2} = 2{,}500$$

Definición

Las medidas de tendencia central referentes a una población (tal como las 30 sucursales) se conocen como **parámetros** de la población y a menudo se denotan:

Media Poblacional = μ Mediana Poblacional = Me Moda Poblacional = Mo

Las medidas de tendencia central referentes a una muestra (tal como las 20 sucursales) se conocen como **estadísticos (o estadígrafos)** y se denotan:

Media Muestral = $\bar{x}$ Mediana Muestral = $\tilde{x}$ Moda Muestral = $\hat{x}$

Problemas

Considerando la población del salón de clase, recopila la información sobre el tiempo que se tardan tus compañeros en llegar desde la casa a la escuela, luego realiza una muestra aleatoria del 60% de la población y calcula todas las medidas de tendencia central, tanto para la población como para la muestra.

1.7 Medidas de dispersión

Problema inicial

Con los datos de las ventas de las sucursales, calcula la varianza y la desviación típica, para cada tabla.

Ventas	Cantidad de sucursales (f)
De \$1,000 a \$2,000	5
De \$2,000 a \$3,000	11
De \$3,000 a \$4,000	8
De \$4,000 a \$5,000	6
TOTAL	**30**

Ventas	Cantidad de sucursales (f)
De \$1,000 a \$2,000	3
De \$2,000 a \$3,000	7
De \$3,000 a \$4,000	6
De \$4,000 a \$5,000	4
TOTAL	**20**

Solución

Para calcular la varianza y la desviación típica de una muestra no se divide por n sino por $n-1$, para que la estimación tenga menor sesgo.

Ventas	Cantidad de sucursales (f)	Punto medio (Pm)	$f \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f(Pm - \mu)^2$
De \$1,000 a \$2,000	5	1,500	7,500	–1,500	2,250,000	11,250,000
De \$2,000 a \$3,000	11	2,500	27,500	–500	250 000	2,750,000
De \$3,000 a \$4,000	8	3,500	28,000	500	250 000	2,000,000
De \$4,000 a \$5,000	6	4,500	27,000	1,500	2,250,000	13,500,000
TOTAL	**30**					29,500,000

Varianza = $\dfrac{\sum f(Pm-\mu)^2}{30} \approx 983,333.3$ Desviación = $\sqrt{\dfrac{\sum f(Pm-\mu)^2}{30}} = \sqrt{983,333.3} \approx 991.63$

Ventas	Cantidad de sucursales (f)	Punto medio (Pm)	$f \times Pm$	$Pm - \overline{x}$	$(Pm - \overline{x})^2$	$f(Pm - \overline{x})^2$
De \$1,000 a \$2,000	3	1,500	4,500	–1,550	2,402,500	7,207,500
De \$2,000 a \$3,000	7	2,500	17,500	–550	302,500	2,117,500
De \$3,000 a \$4,000	6	3,500	21,000	450	202,500	1,215,000
De \$4,000 a \$5,000	4	4,500	18,000	1,450	2,102,500	8,410,000
TOTAL	**20**					18,950,000

Varianza = $\dfrac{\sum f(Pm-\overline{x})^2}{19} \approx 997,368$ Desviación = $\sqrt{\dfrac{\sum f(Pm-\overline{x})^2}{19}} = \sqrt{997,368} \approx 998.68$

Conclusión

Para una población, la varianza se denota por σ^2 y la desviación típica se denota por σ. Y se calcula de la siguiente manera:

$$\sigma^2 = \frac{\sum f(Pm-\mu)^2}{N} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum f(Pm-\mu)^2}{N}}$$

Para una muestra la varianza se denota por s^2 y la desviación típica se denota por s. Y se calcula de la siguiente manera:

$$s^2 = \frac{\sum f(Pm-\overline{x})^2}{n-1} \qquad s = \sqrt{\frac{\sum f(Pm-\overline{x})^2}{n-1}}$$

Problemas

Considerando la información recopilada en la clase anterior sobre el tiempo que se tardan tus compañeros en llegar desde la casa a la escuela, tanto en la muestra como en la población calcula la varianza y la desviación típica.

Unidad 8

1.8 Coeficiente de variación*

Problema inicial

La siguiente tabla muestra la media y la desviación típica de la estatura de personas del sexo masculino con edades de 5 y 17 años de una población para el año 2016:

Edad	Media	Desviación típica
5 años	110.4	4.74
17 años	170.7	5.81

a) ¿Se puede comparar la magnitud de dispersión de las dos poblaciones solo con la desviación típica?

b) Para ambas poblaciones calcula el cociente:

(desviación típica) ÷ (media)

Luego compáralos.

Solución

a) Aunque el grupo de 17 años tiene mayor desviación típica, no se puede decir que este grupo tiene mayor dispersión, porque la media también es mayor.

b) Población de 5 años: $4.74 \div 110.4 \approx 0.043$ Población de 17 años: $5.81 \div 170.7 \approx 0.034$

Este valor puede utilizarse para determinar que la estatura de la población de 17 años tiene menor dispersión que la de 5 años.

Definición

Se define el **coeficiente de variación** como el porcentaje de la desviación típica s y la media aritmética $\overline{x}$ de un conjunto de datos, se denota por CV, y se calcula: $CV = \frac{s}{\overline{x}}(100)$.

El coeficiente de variación se utiliza para comparar *la magnitud* de la dispersión de los datos de diferentes poblaciones, cuando la diferencia de las medias es grande (si la diferencia entre las medias es poca, o las medias son iguales se puede utilizar la desviación típica para comparar); por lo general cuando la media es grande, la desviación típica tiende a aumentar.

El porcentaje del coeficiente de variación también se utiliza para determinar la confiabilidad de la media aritmética de un conjunto de datos, en general para determinar la confiabilidad se puede usar la siguiente tabla como parámetro:

Valor de CV	**Representatividad de la media**
0% – 10%	Media altamente representativa
10% – 20%	Media bastante representativa
20% – 30%	Media con representatividad
30% – 40%	Media con representatividad dudosa
40% o más	Media no representativa

Ejemplo

¿Cómo es la dispersión de las notas de un exámen si se califica con base 10 respecto de calificarlo base 100?

El CV es igual para ambos casos, puesto que base 100 tanto la media como la desviación típica es 10 veces la media y la desviación típica de calificarlo base 10, por lo tanto la variación de los datos es igual.

Problemas

Los siguientes datos son sobre la cantidad de productos lácteos en malas condiciones que se han encontrado en 4 marcas diferentes. Determina la media de qué marca es más confiable.

Marca 1: $\overline{x} = 14$, $s = 3$ Marca 2: $\overline{x} = 17$, $s = 2$ Marca 3: $\overline{x} = 12$, $s = 5$ Marca 4: $\overline{x} = 15$, $s = 1$

1.9 Practica lo aprendido

1. En cada una de las siguientes situaciones, identifica la población, la muestra, las variables estadísticas y cómo se clasifican.
   a) Para determinar el impacto de una política educativa se realiza una prueba diagnóstica a 40 escuelas de todo el país.
   b) Se desea saber la calidad de un producto lácteo y para ello se realiza una prueba a una unidad del producto en cada supermercado del país.
   c) Para establecer el ingreso promedio que tiene una persona en el área rural de El Salvador se realiza una encuesta a 20 personas de cada área rural del país.

2. Determina si las variables estadísticas presentadas a continuación son: variables cualitativas (nominales u ordinales) o variables cuantitativas (discretas o continuas).
   a) Cantidad de hermanos
   b) Relación con sus padres (mala, regular, buena)
   c) Resultados de un examen de matemática
   d) Marca de jabón preferida

3. Clasifica las siguientes estrategias de muestreo como aleatorio simple o aleatorio sistemático.
   a) Numerar la población del 1 al 10 (se repite al finalizar) y luego escoger un número, de modo que todos los que tengan ese número serán parte de la muestra.
   b) Numerar la población y eliminar 3 números y el cuarto es escogido, luego otros 3 y el cuarto es escogido, y así sucesivamente hasta abarcar toda la población.
   c) Hacer grupos en una población y seleccionar 2 de esos grupos al azar para que sean la muestra.
   d) Numerar la población, tirar un dado y seleccionar la persona de la población con ese número, luego tirarlo de nuevo y sumárselo al resultado anterior para seleccionar la otra persona y así sucesivamente.

4. Realiza una muestra de 30 estudiantes de una empresa que dispone de los siguientes datos:

	Femenino	Masculino
Estudiantes	35	15
Profesionales	25	25

5. Determina qué tipo de muestreo no probabilístico consideras más adecuado para cada situación.
   a) Investigación social para una tarea de seminario
   b) Forma de distribución de sustancias ilícitas.
   c) Personas que presentan mayor irritabilidad al conducir
   d) Estudiantes que participan en atletismo.

6. En un estacionamiento de centro comercial se calcula el tiempo promedio que permanece un carro estacionado, y se obtienen los siguientes datos para todo el estacionamiento y para los primeros 30 puestos:

Tiempo	Cantidad de carros
De 0 a 1 hora	12
De 1 a 2 horas	30
De 2 a 3 horas	32
De 3 a 4 horas	16
TOTAL	**90**

Tiempo	Cantidad de carros
De 0 a 1 hora	4
De 1 a 2 horas	10
De 2 a 3 horas	11
De 3 a 4 horas	5
TOTAL	**30**

   a) Calcula media, mediana, moda, varianza y desviación típica tanto para la población como para la muestra.
   b) Considerando que el tiempo promedio que las personas permanecen en el centro comercial es 2 horas con una desviación típica de 0.8 horas, ¿qué promedio es más confiable?

2.1 Cuartiles

Problema inicial

Al finalizar el año escolar el profesor cuenta las inasistencias de sus estudiantes y obtiene los siguientes datos:

4, 5, 6, 2, 4, 8, 10, 11, 13, 12, 11, 10, 12, 6, 7, 9, 8, 13, 14, 15

a) ¿Cuál es la mediana del conjunto de datos?
b) ¿Cuál es la mediana de la primera mitad del conjunto de datos ordenados de menor a mayor?
c) ¿Cuál es la mediana de la segunda mitad del conjunto de datos ordenados de menor a mayor?

Solución

a) Se ordenan los datos y se calcula la mediana:

2, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 13, 13, 14, 15

La mediana es $\frac{9 + 10}{2} = 9.5$.

b) Considerando la primera mitad del conjunto de datos del literal a):

2, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9

La mediana es $\frac{6 + 6}{2} = 6$.

Si el total de datos fuera impar ($2n + 1$) para b) se tendrían que considerar los primeros n datos y para c) los últimos n datos, es decir, sin considerar el dato que coincide con la mediana.

c) Considerando la segunda mitad del conjunto de datos del literal a):

10, 10, 11, 11, 12, 12, 13, 13, 14, 15

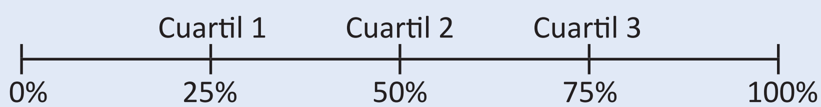
La mediana es $\frac{12 + 12}{2} = 12$.

Esto significa que el 25% de los estudiantes del salón tiene a lo sumo 6 inasistencias, el 50% de los estudiantes tiene a lo sumo 9.5 inasistencias y el 75% tiene a lo sumo 12 inasistencias.

Definición

Los valores de una variable que dividen al conjunto de datos en cuatro partes con igual cantidad de datos se conoce como **cuartiles**.

El cuartil 1 concentra al 25% de los datos menores a este, el cuartil 2 concentra al 50% de los datos menores a él, el cuartil 3 concentra al 75% de los datos menores a él.



La diferencia entre el cuartil 3 y el cuartil 1 (C3 – C1) se conoce como **rango intercuartílico**, denotado por **RI**.

Problemas

Determina y analiza los 3 cuartiles de los siguientes conjuntos de datos obtenidos de la cantidad de personas reportadas con dengue en cada mes por algunos centros asistenciales.

a) 3, 1, 4, 12, 10, 9, 11, 7, 12, 16, 3
b) 6, 3, 7, 8, 10, 15, 8, 12, 17, 2
c) 1, 3, 2, 5, 10, 14, 15, 13, 10, 5, 9, 3, 8
d) 4, 2, 5, 7, 10, 16, 12, 9, 14, 8, 5, 1

2.2 Diagrama de caja y bigotes

Problema inicial

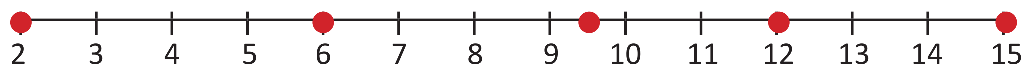
Considerando los datos de las inasistencias de los estudiantes que recolectó el profesor:

4, 5, 6, 2, 4, 8, 10, 11, 13, 12, 11, 10, 12, 6, 7, 9, 8, 13, 14, 15

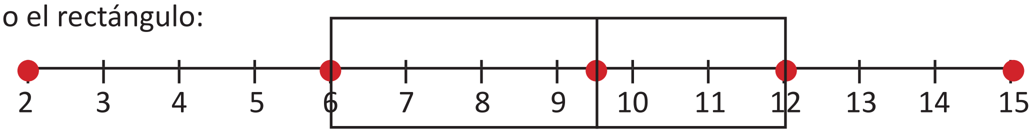
a) Ubica en una recta numérica el valor mínimo, el cuartil 1, el cuartil 2, el cuartil 3 y el valor máximo.
b) Dibuja un rectángulo que cubra desde el cuartil 1 hasta el cuartil 3.

Solución

a) El valor mínimo es 2, el cuartil 1 es 6, el cuartil 2 es 9.5, el cuartil 3 es 12 y el valor máximo es 15; entonces al ubicarlos en una recta se tiene:

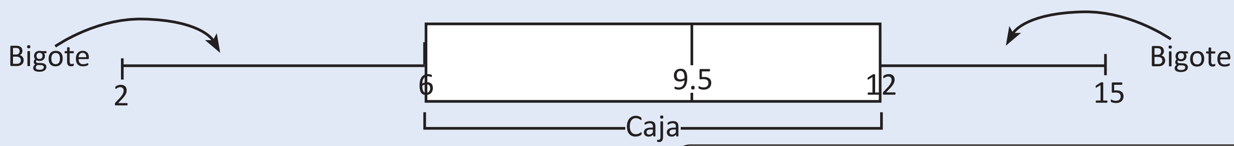


b) Dibujando el rectángulo:



Definición

El diagrama elaborado se conoce como **diagrama de caja y bigotes**.



Si el bigote de la izquierda es más corto que el de la derecha significa que el 25% de los datos menores tienen menor rango que el 25% de los datos mayores, así mismo si una caja es angosta significa que el 50% central de los datos tienen rango más estrecho.

Estadísticamente, para construir el diagrama de caja se suele utilizar como parámetro el valor de 1.5 veces el rango intercuartílico y los bigotes se representan por la primera y última observación que queda dentro del rango de C1 – 1.5(RI) hasta C3 + 1.5(RI). Esta construcción ayuda a la identificación de datos atípicos en un conjunto de datos.

La forma del diagrama de caja puede orientar para la descripción de la forma de distribución de los datos, observa los diagramas de caja siguientes y sus correspondientes histogramas.

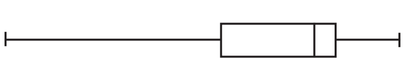
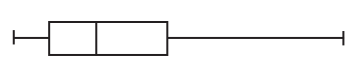
A un histograma le corresponde un diagrama de caja, pero un diagrama de caja puede corresponder a dos o más histogramas.

Problemas

1. Elabora y analiza el diagrama de caja de los datos de las personas reportadas con dengue.

a) 3, 1, 4, 12, 10, 9, 11, 7, 12, 16, 3
b) 6, 3, 7, 8, 10, 15, 8, 12, 17, 2
c) 1, 3, 2, 5, 10, 14, 15, 13, 10, 5, 9, 3, 8
d) 4, 2, 5, 7, 10, 16, 12, 9, 14, 8, 5, 1

2. Observa los siguientes diagramas de caja y estima la forma en que se distribuyen los datos.

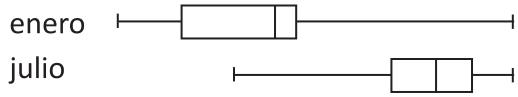
a) 
b) 
c) 

Unidad 8

2.3 Análisis del diagrama de caja y bigotes*

Problema inicial

A continuación se presentan dos diagramas de caja correspondientes a las ventas registradas por día durante dos meses diferentes, analiza y luego responde:

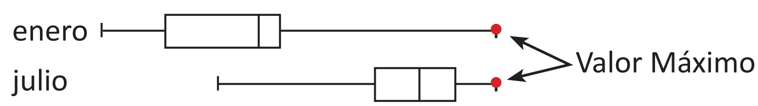


Nota que la cantidad de días es igual para ambos meses.

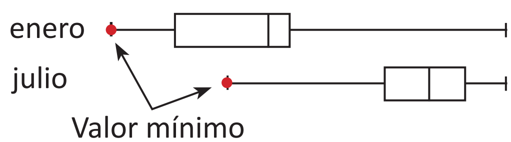
a) ¿En qué mes se dio la mejor venta?
b) ¿En qué mes sucedió la peor venta?
c) Determina cómo fue la variabilidad entre los cuartiles de ambos meses.
d) ¿En qué mes hubo mayor cantidad de ventas?

Solución

a) La mejor venta fue igual en ambos meses, puesto que el valor máximo en ambos diagramas es el mismo.

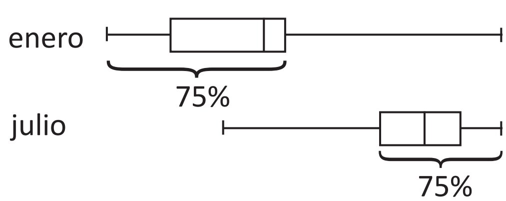


b) La peor venta sucedió en enero, puesto que el valor mínimo del diagrama 1 es menor que el valor mínimo del diagrama 2.



c) El 25% de ventas más bajas, enero tuvo poca variabilidad (rango estrecho) y se concentra en ventas bajas, al contrario de julio, cuyo 25% de ventas más bajas tiene mayor rango y alcanza ventas más altas que enero, por otro lado el rango intercuartílico de enero es mayor que el rango intercuartílico de julio, lo cual significa que hubo más variabilidad en este rango en enero que en julio; finalmente, al analizar el 25% de ventas mayores se determina una variabilidad muy grande en enero viniendo de valores muy bajos, sin embargo en julio el rango es pequeño y se concentra en ventas muy altas.

d) Al menos el 75% de las ventas más bajas de enero están por debajo del cuartil 1 de julio, por esta razón se puede considerar que las ventas de julio fueron mejores que las de enero.



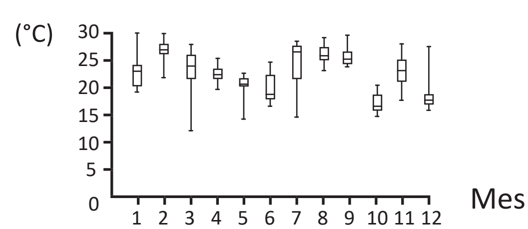
Conclusión

El diagrama de caja brinda información muy valiosa para la comparación de datos valorando la dispersión que pueda existir entre ellos y es una herramienta muy útil para describir los datos de manera certera.

Problemas

Analiza los siguientes diagramas de caja de la temperatura de El Salvador durante los 12 meses del año, luego responde las preguntas.

a) ¿En qué mes variaron más las temperaturas?
b) ¿En qué mes variaron menos las temperaturas?



2.4 Deciles y percentiles

Problema inicial

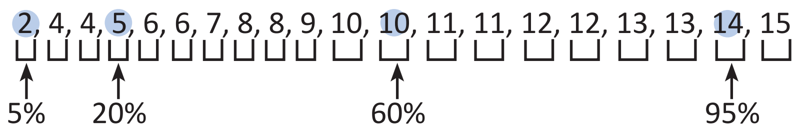
Al finalizar el año escolar el profesor cuenta las inasistencias de sus estudiantes y obtiene los siguientes datos:

4, 5, 6, 2, 4, 8, 10, 11, 13, 12, 11, 10, 12, 6, 7, 9, 8, 13, 14, 15

a) ¿Cuál fue el número máximo de inasistencias que tuvo el 20% de los estudiantes con menos inasistencias?
b) ¿Cuál fue el número máximo de inasistencias que tuvo el 60% de los estudiantes con menos inasistencias?
c) ¿Cuál fue el número máximo de inasistencias que tuvo el 5% de los estudiantes con menos inasistencias?
d) ¿Cuál fue el número máximo de inasistencias que tuvo el 95% de los estudiantes con menos inasistencias?

Solución

Se ordenan los datos y se dividen en 20 partes iguales (cada una equivale a un 5%).

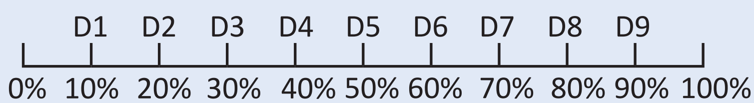


a) El 20% de estudiantes con menos inasistencias tiene a lo sumo 5 inasistencias.
b) El 60% de estudiantes con menos inasistencias tiene a lo sumo 10 inasistencias.
c) El 5% de estudiantes con menos inasistencias tiene a lo sumo 2 inasistencias.
c) El 95% de estudiantes con menos inasistencias tiene a lo sumo 14 inasistencias.

Definición

Los valores de una variable que dividen al conjunto de datos en diez partes con igual cantidad de datos cada una se conoce como **deciles**.

Cada decil concentra 10% más de los datos que el anterior, el primero concentra el 10% de los datos, el segundo el 20% de los datos y así sucesivamente hasta el decil 9 que concentra el 90% de los datos.



Los valores de una variable que dividen al conjunto de datos en cien partes con igual cantidad de datos cada una, se conoce como **percentiles**.

Cada percentil concentra 1% más de los datos que el anterior, el primero concentra el 1% de los datos, el segundo el 2% de los datos y así sucesivamente hasta el percentil 99 que concentra el 99% de los datos.

Para calcular el decil d de un total de n datos, se ordenan los datos de menor a mayor y se busca el dato cuya posición se aproxime más al valor $d\,\frac{n}{10}$. Análogamente para calcular el valor del percentil p, se busca el dato cuya posición se aproxima más al valor $p\,\frac{n}{100}$.

Problemas

Calcula los deciles indicados en cada serie de datos, luego analiza la información que proveen estos datos.

a) 6, 9, 2, 10, 1, 7, 8, 2, 7, 5, 11, 12, 9, 5, 3, 10, 12, 7, 4, 8. Deciles 3, 5 y 7.
b) 4, 6, 10, 15, 13, 7, 9, 5, 7, 7, 12, 14, 10, 9, 6, 11. Deciles 4, 6 y 9.

2.5 Practica lo aprendido

1. Determina los 3 cuartiles de los siguientes conjuntos de datos obtenidos de la cantidad de personas nuevas que son matriculadas en el Centro de Rehabilitación de Ciegos "Eugenia Dueñas". Luego analiza la información que brinda cada cuartil.

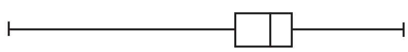
   a) 5, 10, 8, 6, 3, 2, 8, 12, 5, 1, 7, 9, 4

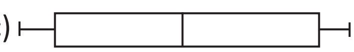
   b) 3, 2, 5, 9, 10,15, 7, 9, 12, 10, 3, 1

2. Elabora y analiza el diagrama de caja de los datos de las personas matriculadas en el Centro de Rehabilitación de Ciegos "Eugenia Dueñas" (numeral 1).

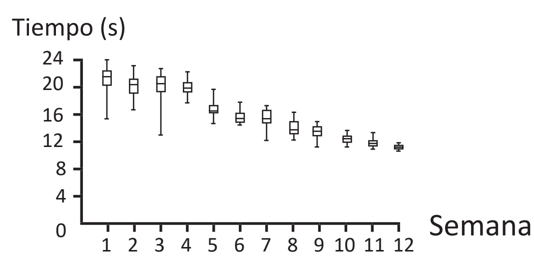
3. Observa los siguientes diagramas de caja y estima la forma en que se distribuyen los datos usando histogramas.

   a) 

   b) 

   c) 

4. Analiza los siguientes diagramas de caja del desempeño de un atleta en el tiempo que tarda para recorrer 100 metros planos durante 12 semanas de entrenamiento.



   a) ¿En qué semana se obtuvo el mejor rendimiento?

   b) ¿En qué semana tuvo el peor rendimiento?

   c) ¿En qué semana marcó el mejor tiempo?

   d) ¿Cómo fue el desempeño en la semana 7?

   e) ¿Qué conclusiones puedes sacar del entrenamiento del atleta?

5. Calcula los deciles indicados en cada serie de datos, luego analiza la información que proveen estos datos.

   a) 10, 6, 7, 11, 13, 8, 9, 5, 9, 10, 12, 12, 7, 9, 11, 15, 4, 6. Deciles 2, 4 y 8.

   b) 10, 5, 7, 11, 8, 9, 12, 7, 6, 10, 9, 8, 14, 13, 9, 11, 5. Deciles 3, 7 y 9.

   c) 8, 5, 4, 2, 1, 7, 3, 9, 10, 9, 8, 6, 2, 11, 3, 14, 11, 8, 13, 10, 6, 12, 10, 4, 3. Deciles 1, 5 y 7.

2.6 Problemas de la unidad

Se realiza el control de calidad de un tipo de laptop, cuyo objetivo es evaluar el tiempo de duración de la carga de la computadora, para ello se toma una muestra de 50 computadoras y se registran los siguientes datos:

Duración de la batería en horas	Cantidad de laptops
0 a 2	10
2 a 4	15
4 a 6	9
6 a 8	9
8 a 10	5
10 a 12	2

a) Identifica la variable a estudiar y clasifícala.

b) ¿Qué tipo de muestreo es el más adecuado para este control de calidad?

c) ¿Cuánto tiempo dura en promedio la batería de una laptop de este tipo?

d) ¿Cuánto tiempo es más frecuente que dure la batería de una laptop de este tipo?

e) ¿Cuál es el valor de la mediana de este conjunto de datos?

f) Calcula la varianza y la desviación típica de esta muestra.

g) Calcula el coeficiente de variación de estos datos.

h) ¿Cómo es la representatividad de la media para el conjunto de datos?

i) La siguiente información es acerca de la duración de la batería de otro tipo de laptop:

Duración de la batería en horas	Cantidad de laptops
0 a 2	8
2 a 4	17
4 a 6	13
6 a 8	8
8 a 10	3
10 a 12	1

Si se necesita comprar una computadora en la que se requiera la mejor duración de la batería, ¿qué tipo de laptop sería más adecuado comprar? ¿por qué? Compara entre la laptop inicial y la mencionada en el literal i.

2.7 Problemas de la unidad

A continuación se presentan los datos obtenidos por semana durante las últimas 8 semanas del rendimiento de un atleta de salto largo, en el cuadro se registra la longitud saltada en metros:

Semana 1	3.5	3.8	3.7	3.8	3.9	3.7	4.0
Semana 2	3.8	4.2	4.3	4.2	4.4	4.6	4.6
Semana 3	4.5	4.8	4.7	4.9	4.9	5.3	5.2
Semana 4	5.2	5.5	5.7	5.6	5.8	5.9	6.0
Semana 5	5.8	6.3	6.5	6.8	6.8	6.9	6.8
Semana 6	6.7	6.9	7.0	6.5	6.8	7.0	7.1
Semana 7	6.9	7.2	7.3	7.2	7.4	7.1	7.5
Semana 8	7.4	7.7	7.8	7.6	7.9	7.8	7.9

a) Realiza una aproximación de los cuartiles para los datos de cada semana.

b) Construye el diagrama de caja y bigotes para cada semana.

c) Realiza un diagrama que compare el desempeño del atleta durante las 8 semanas mediante los diagramas de caja y bigotes.

d) ¿En qué semana se obtuvo el mejor rendimiento?

e) ¿En qué semana tuvo el peor rendimiento?

f) ¿En qué semana marcó el mejor salto?

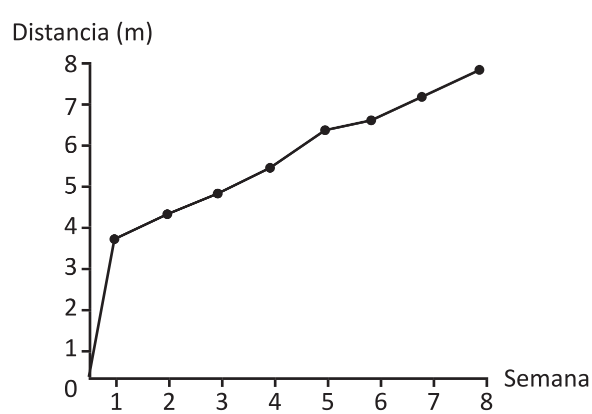
g) ¿Cómo fue el desempeño en la semana 7?

h) ¿A partir de qué semana se puede asegurar con mayor probabilidad que el atleta puede realizar un salto de al menos 5 metros?

i) ¿Se puede pensar que después del entrenamiento de la semana 1, el atleta era capaz de saltar al menos 4 metros? ¿por qué?

j) ¿Qué conclusiones puedes sacar del entrenamiento del atleta?

k) El siguiente gráfico ha sido elaborado con los promedios de cada semana, establece las ventajas entre el diagrama elaborado en el literal c) y el diagrama presentado a continuación.



3.1 Práctica en GeoGebra: análisis estadístico

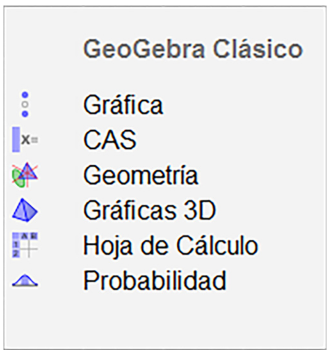
Para esta práctica se utilizarán los recursos de GeoGebra para realizar análisis estadístico de una variable, y construir diagramas de caja y bigotes sobre las situaciones planteadas en la unidad. Para ello sigue los pasos indicados en la parte de Práctica y construye los diagramas y el análisis necesario. Luego trabaja en GeoGebra la parte Actividades que está al final de esta práctica.

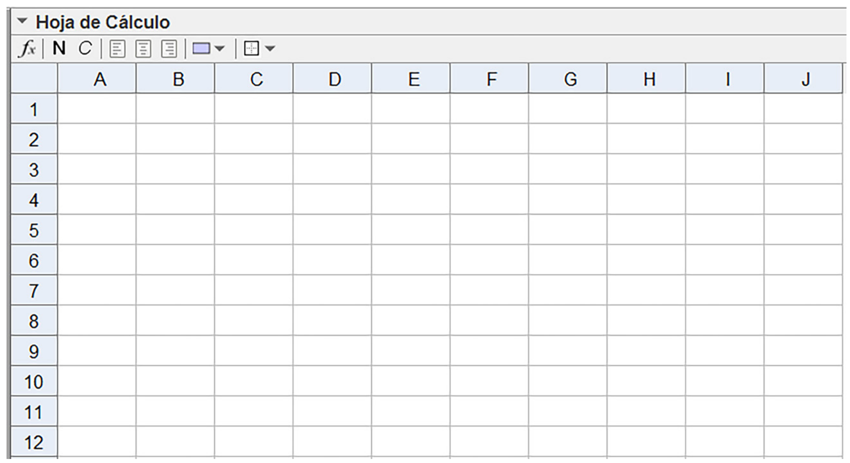
Práctica

Retomando los datos del problema de la clase 1.5:

Velocidad en Km/h						
60	65	40	80	80	90	45
70	100	70	50	80	55	120
75	65	90	85	70	100	55
110	70	95	70	80	115	100

1. Se utilizará la vista de hoja de cálculo, para ello puedes utilizar el menú que se abre al iniciar GeoGebra en la opción Hoja de Cálculo, o bien, desde el menú vista dando click en la opción Hoja de Cálculo, y se abrirá una ventana como la que se muestra abajo.





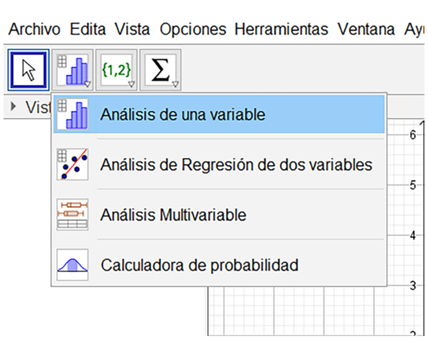
2. Ingresa los datos de la tabla de velocidades uno por uno en la columna A de la vista de Hoja de Cálculo.

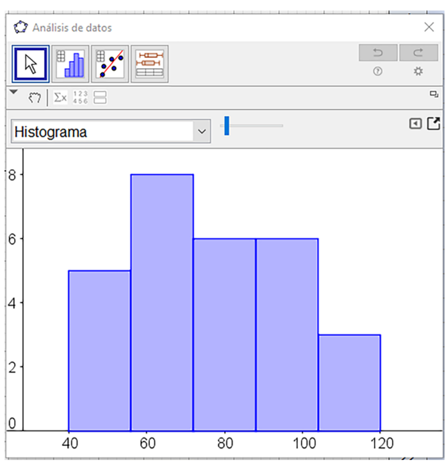
3. Manteniendo presionado el clic izquierdo, selecciona todos los datos que se ingresaron, estos quedarán sombreados en un color azul suave.

4. Ahora utiliza el botón Análisis de una variable, luego se abrirá un cuadro de texto llamado "Fuente de datos", en ella aparecerán los datos seleccionados en el paso anterior, presiona Analiza y se mostrará una gráfica como la que se muestra a continuación.

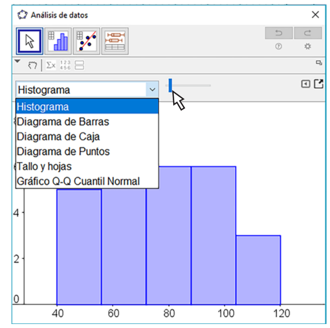
	A
1	60
2	65
3	40
4	80
5	80
6	90
7	45
8	70
9	100
10	70
11	50
12	80
13	55
14	120
15	75
16	65
17	90
18	85
19	70
20	100
21	55
22	110
23	70
24	95
25	70
26	80
27	115
28	100

	A
1	60
2	65
3	40
4	80
5	80
6	90
7	45
8	70
9	100
10	70
11	50
12	80
13	55
14	120
15	75
16	65
17	90
18	85
19	70
20	100
21	55
22	110
23	70
24	95
25	70
26	80
27	115
28	100

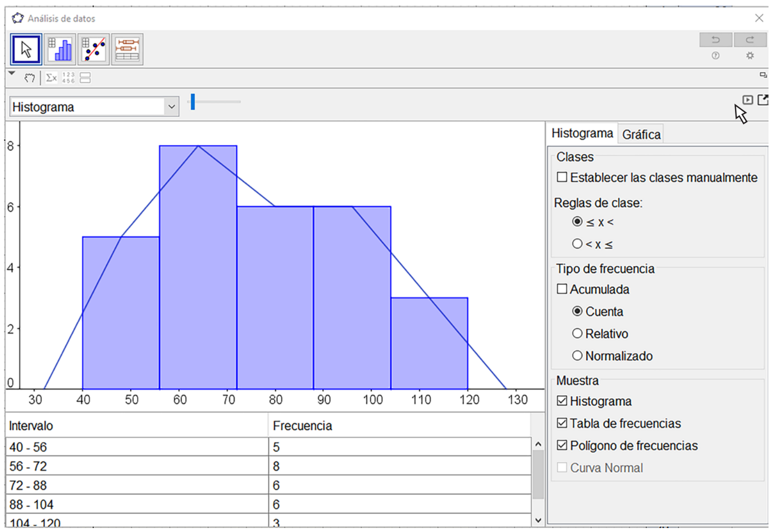




5. Al expandir las opciones, puedes notar que la gráfica que se presenta es un histograma, y que es posible seleccionar diferentes tipos de gráficos estadísticos, entre los cuáles están el diagrama de barras (estudiado en educación básica), histograma (estudiado en 8° grado), diagrama de caja (estudiado en esta unidad) y otros diagramas que no se han estudiado por el momento.

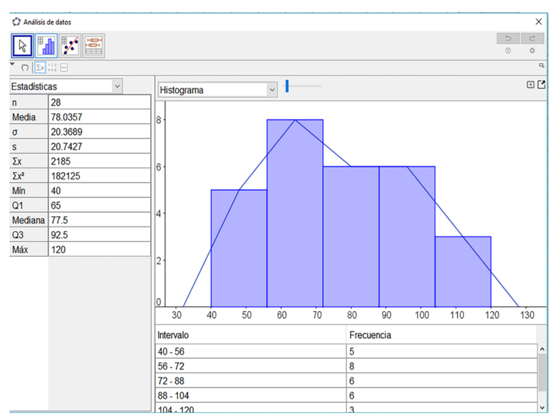


6. En la parte superior derecha puedes extender las opciones de la vista, en ella marca las opciones de tabla de frecuencias (la cual puedes construir manualmente) que creará una tabla de distribución de frecuencias de forma automática; y marca la opción polígono de frecuencias, y se obtendrá el siguiente resultado.



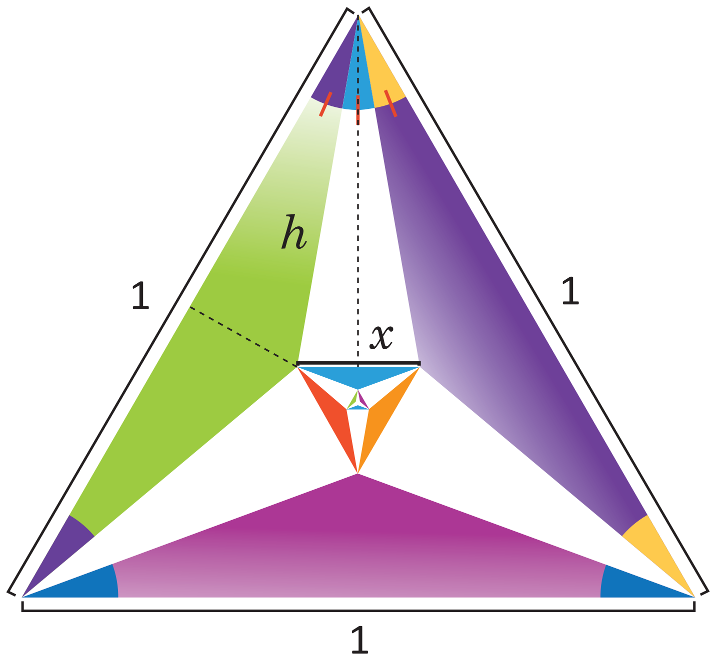
7. Finalmente selecciona la opción Estadísticas, ubicado en la parte superior izquierda, con ícono de un símbolo de sumatorio, así se obtendrán algunos estadísticos como la media, la desviación estándar (muestral y poblacional), cuartiles, mediana, mínimo, máximo, etc.

8. Comprueba la resolución de este problema, verificando tu respuesta y luego corrige si es necesario.



Actividades

Utiliza la herramienta de la hoja de cálculo de GeoGebra para resolver el problema de la clase 2.7 acerca de problemas de la unidad, para ello, como se requiere comparar datos por cada semana, ingresa en cada columna los datos de una semana, por ejemplo, los datos de la semana 1 en la columna A, la semana 2 en la columna B, y así sucesivamente hasta llegar a la semana 8 en la columna H. Luego selecciona todos los datos, y utiliza la opción de análisis multivariante.



x = ¿?

Cada ángulo mide 20°, trazando las alturas punteadas se cumple que $h = \dfrac{1}{2\cos 20°}$ y entonces sen 10° = x cos 20°, por lo tanto $x = \dfrac{\text{sen } 10°}{\cos 20°}$.

REPÚBLICA DE EL SALVADOR EN LA AMÉRICA CENTRAL

1

Bachillerato

Libro de texto Matemática Segunda edición 1 Bachillerato