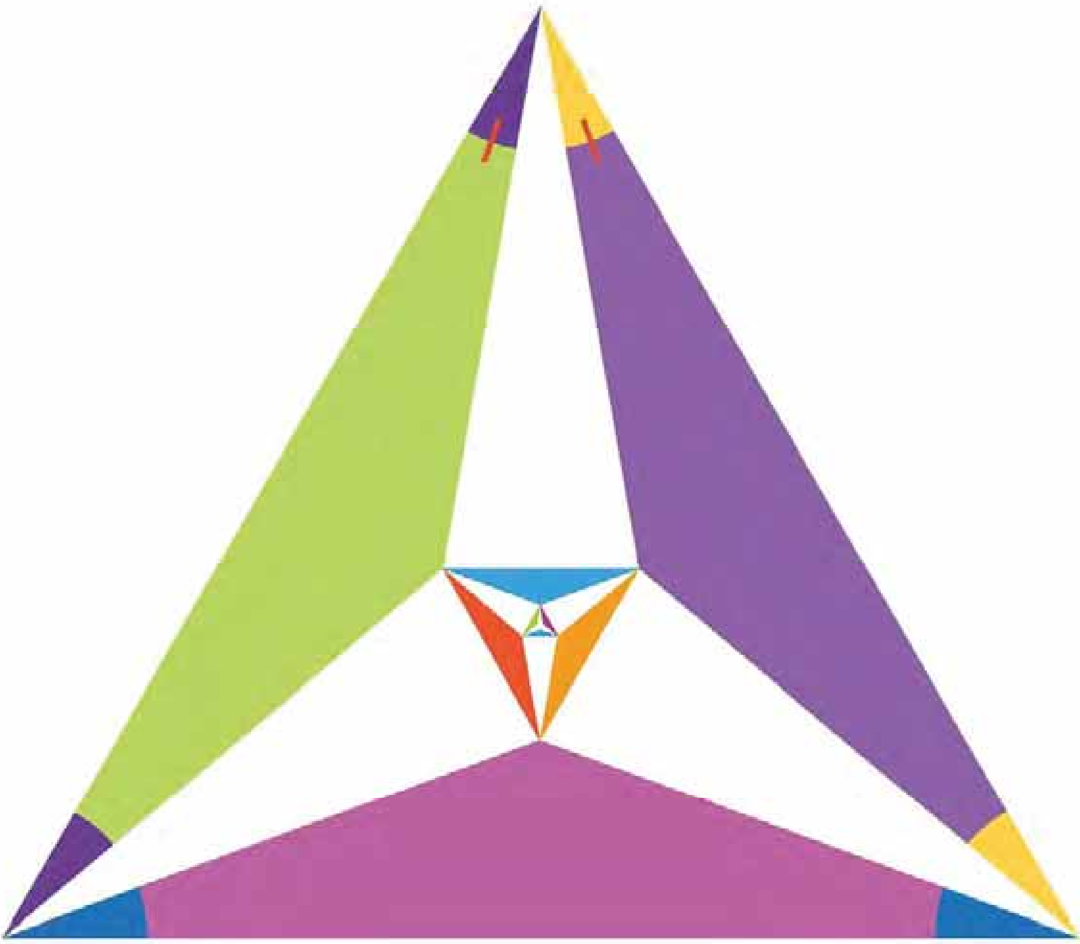
エルサルバドル政府

教育省

算数

高校1年



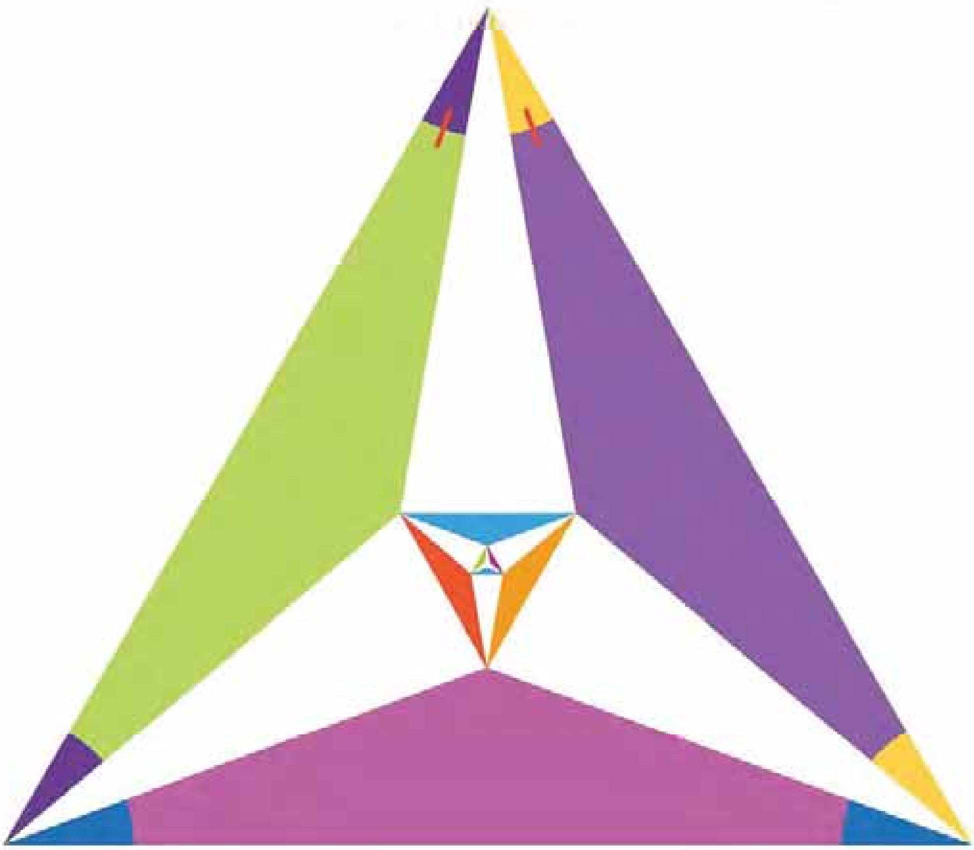
教科書
第二版

エルサルバドル政府

教育省

算数

高校1年



教科書

第二版

ESMATE

JICA

Carla Evelyn Hananía de Varela
教育科学技術大臣

Ricardo Cardona Alvarenga
教育副大臣

Wilfredo Alexander Granados Paz
中等（第3サイクルおよび中等）教育局長
名誉代理

Janet Lorena Serrano de López
基礎教育局長
名誉代理

Santiago Alfredo Flores Amaya
予防社会プログラム局長
名誉代理

Gorka Iren Garate Bayo
科学技術イノベーション教育局長
名誉代理

Roberto Alejandro Rivera Campos
科学技術イノベーション教育課長

Félix Abraham Guevara Menjívar
科学技術イノベーション教育部長（数学）

Gustavo Antonio Cerros Urrutia
中等教育カリキュラム専門家部長

教育省の執筆及びレイアウトチーム

Ana Ester Argueta Aranda
César Omar Gómez Juárez
Diana Marcela Herrera Polanco
Francisco Antonio Mejía Ramos

技術的校正

Claudia Patricia Corcio de Beltrán

デザイン及びレイアウトの校正

Francisco René Burgos Álvarez
Judith Samanta Romero de Ciudad Real

文体修正

Mónica Marlene Martínez Contreras
Marlene Elizabeth Rodas Rosales

現職教員教育国家計画内の専門家チームによる全国レベルでの校正
国際協力機構（JICA）を通じた日本の技術協力

表紙の画像は教育的見地から、正三角形の内角を三等分し、それによりその中にできる最も大きい三角形の辺の値を求めることができる図を用いています。
答えは裏表紙にあります。

510
M425 算数：高校1年：教科書／執筆チーム Ana Ester Argueta、César Omar Gómez、Diana Marcela Herrera、
監修 Francisco Antonio Mejía。-- 第2版 -- サンサルバドル、エルサルバドル：教育省（MINED）、2019年。
218ページ：図解入り；28 cm -- （Esmate）
ISBN 978-99961-341-1-1（印刷）
1. 算数－教科書。2. 関数－ 問題、演習など。3. 算数－教育 数学：高校1年... 2019年 I. Argueta Aranda、Ana Ester、共著。II. タイトル。
BINA/jmh

生徒の皆さんへ：

新しい学年に皆さんをお迎えし、皆さんがこれから算数のさらなる知識を得る機会を得ることを喜ばしく思います。

教育・科学技術省（MINEDUCYT）では、初等教育及び中等教育における算数教育向上計画（ESMATE）を通じ、皆さんのために様々な教育教材を開発してきました。その中のひとつが、いま皆さんが手にされている「教科書」です。

この強化には、皆さんが考える力を強化し、算数の能力を伸ばせるような問題やアクティビティがたくさん含まれています。そうした能力は、日常生活の問題を解決するために役に立つものです。

ですから、この教科書にある問題を一つ一つに、挑戦だと思って取り組んでみてください。皆さんが、私たちの国の発展に貢献してくれる模範的な市民となるために、この練習帳にすべての力を注いで取り組むことを期待しています。

Carla Evelyn Hananía de Varela
教育科学技術大臣

Ricardo Cardona Alvarenga
教育科学技術副大臣

教科書の紹介

1授業の構成

導入問題 各授業では、まず最初に生徒に対し問題を提示して、その問題をどのように解くかを考えさせることが大切です。そのようにして授業で扱うテーマを導入することになります。

解法 教科書ではこの段階で、提示された問題の解き方を1つ以上を載せています。

まとめ 「まとめ」では、解き方を解説しています。ここでは問題の解答を「導入問題」と「解法」に関連づけて数式を使って表わしています。

例 学習内容の定着を図るために、必要な場合に追加問題を出しています。

問題 鉛筆マークは文章題と計算問題のセクションを示します。

電卓のアイコンがある問題でのみ、電卓を使う必要があります。

補足情報

この教科書では、事前知識やヒント、また算数の歴史といった小話も学習の助けとなるよう、それぞれ色を変えて紹介しています。

事前知識　ヒント　小話

授業配分

この教科書は8ユニットで構成されており、各ユニットには複数の課があり、それぞれの課は複数の授業で構成されています。各授業のタイトルについている番号は、最初の番号が何課であるかを示し、二つ目の番号が何番目の授業であるかを示しています。例えば、この教科書のユニット1のレッスン1の8回目の授業のタイトルは、以下のように表示されています。

レッスン番号を表示します。

1.8 実数の絶対値

授業番号を表示します。

ユニット番号は、奇数ページの端に紫色で表示されています。

ユニット1

さらに、それぞれのユニットの最後に、そのユニットで学習した全てのテーマを網羅した問題が掲載されており、また時には、数学の学習用ツールGeoGebraを使う練習問題も掲載されています。

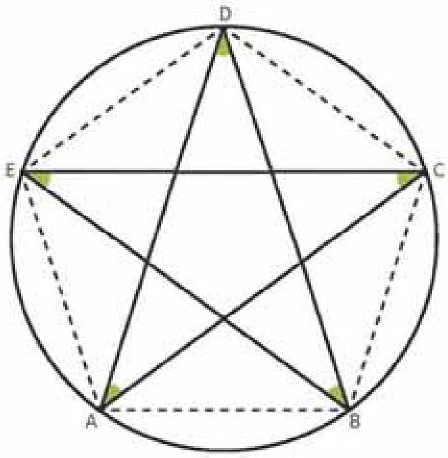
目次

目次

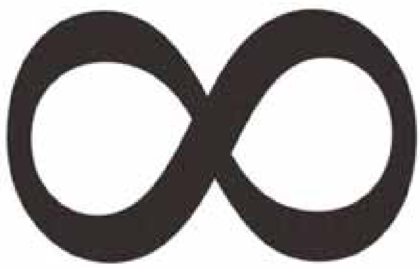
ユニット 1

実数

農業の発明（紀元前15,000年から紀元前10,000年）によって、人類は数の概念に直面しなければなりませんでした。家畜の数を数えたり、さまざまな作物を分配するときには、数の概念が必要です。ピタゴラス学派は、整数に特別な役割を与え、有理数を2つの通約可能な線分（一方がもう一方に整数回含まれている）の長さの比率として定義しました。通約不可能な数の発見は無理数を生み出しましたが、19世紀になって、フランスの数学者ルイ・コーシーが無理数はいくつかの有理分数の近似値であるという考えを発表しました。



正五角形は、線分の通約不可能性が歴史的に研究されてきた図形です。


「無限大」の記号は、17世紀に英国の数学者ジョン・ウォリスによって導入されたものですが、実数の基礎となる基本的な概念の1つです。

最初の概念から19世紀に数学的に確立するまで、実数は、時間や物質などの現象が持つ連続性をはじめとし、自然と現実を理解し、研究するための不可欠なツールでした。実数を使用することで、人間を取り巻く世界をより正確に数学的にモデル化することができるようになり、そこから、世界を記述し、理解しようとすることが可能になりました。

このユニットでは、平方根、実数、有理化、絶対値の概念を復習します。また、ネイピア数と黄金数について理解し、最後に区間の定義について学びます。

1.1 平方根の演算（復習）

導入問題

次の問題を解きましょう。

a) $\sqrt{6} \times \sqrt{10}$　　b) $\sqrt{8} \div \sqrt{18}$　　c) $\sqrt{12} + \sqrt{75}$　　d) $\sqrt{18} - \sqrt{50}$

復習しよう。
1. $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$
2. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
3. $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$

解法

a) $\sqrt{6} \times \sqrt{10}$

$$\begin{aligned}\sqrt{6} \times \sqrt{10} &= \sqrt{6 \times 10}\\ &= \sqrt{(2 \times 3) \times (2 \times 5)}\\ &= \sqrt{2^2 \times 3 \times 5}\\ &= 2\sqrt{3 \times 5}\\ &= 2\sqrt{15}\end{aligned}$$

したがって、 $\sqrt{6} \times \sqrt{10} = 2\sqrt{15}$.

b) $\sqrt{8} \div \sqrt{18}$

$$\begin{aligned}\sqrt{8} \div \sqrt{18} &= \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}}\\ &= \sqrt{\frac{\cancel{8}^4}{\cancel{18}^9}}\\ &= \sqrt{\frac{4}{9}}\\ &= \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

したがって、 $\sqrt{8} \div \sqrt{18} = \frac{2}{3}$.

c) $\sqrt{12} + \sqrt{75}$

平方根を単純化します。

$$\begin{aligned}\sqrt{12} &= \sqrt{2^2 \times 3}\\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{75} &= \sqrt{3 \times 5^2}\\ &= 5\sqrt{3}\end{aligned}$$

同類項を加算します。

$$\begin{aligned}\sqrt{12} + \sqrt{75} &= 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}\\ &= 7\sqrt{3}\end{aligned}$$

d) $\sqrt{18} - \sqrt{50}$

平方根を単純化します。

$$\begin{aligned}\sqrt{18} &= \sqrt{2 \times 3^2}\\ &= 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{50} &= \sqrt{2 \times 5^2}\\ &= 5\sqrt{2}\end{aligned}$$

同類項を減算します。

$$\begin{aligned}\sqrt{18} - \sqrt{50} &= 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2}\\ &= -2\sqrt{2}\end{aligned}$$

まとめ

数字 b を二乗して数字 a が得られる時、数字 b 平は、数字 a の平方根、つまり、$b^2 = a$ になります。

$a \geq 0$ の時、a の非負の平方根は $\sqrt{a}$ で表します。

整数 a は 2つの平方根を有します。 $\sqrt{a}$ および $-\sqrt{a}$ 。

- 積または平方根の割算を行う時、以下の法則を用います。

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b} \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

単純化するために、$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$ を用いましょう。

示された通りに計算をしてから、可能であれば、最後に単純化しましょう。

- 平方根の足算または引算を行う場合、まずはじめに平方根の単純化をし、次に同類項の足算または引算を行います。

問題

平方根を用いて、次の計算を行いましょう。

a) $\sqrt{21} \times \sqrt{14}$　　b) $\sqrt{6} \times \sqrt{12}$　　c) $\sqrt{24} \div \sqrt{6}$　　d) $\sqrt{15} \div \sqrt{27}$

e) $\sqrt{40} + \sqrt{90}$　　f) $\sqrt{80} + \sqrt{45}$　　g) $\sqrt{28} - \sqrt{63}$　　h) $\sqrt{32} - \sqrt{8}$

複雑な計算を避けるために、素因数分解を行いましょう。

1.2 平方根との混合算（復習）

導入問題

次の式を解いてください。

a) $\sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{10})$　　　　b) $(\sqrt{2}+\sqrt{15})(\sqrt{5}-\sqrt{6})$

解法

a) $\sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{10}) = \sqrt{2}\times\sqrt{6}+\sqrt{2}\times\sqrt{10}$　　分布特性を適用すれば、

$= \sqrt{2\times 6}+\sqrt{2\times 10}$

$= \sqrt{12}+\sqrt{20}$　　一度で素因数分解できます。

$= \sqrt{2^2\times 3}+\sqrt{2^2\times 5}$

$= 2\sqrt{3}+2\sqrt{5}.$

したがって、 $\sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{10}) = 2\sqrt{3}+2\sqrt{5}.$

b) $(\sqrt{2}+\sqrt{15})(\sqrt{5}-\sqrt{6}) = \sqrt{2}\times\sqrt{5}-\sqrt{2}\times\sqrt{6}+\sqrt{15}\times\sqrt{5}-\sqrt{15}\times\sqrt{6}$　　掛算を行います。

$= \sqrt{2\times 5}-2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-\sqrt{3^2\times 5\times 2}$　　素因数分解します。

$= \sqrt{10}-2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-3\sqrt{10}$

$= -2\sqrt{10}+3\sqrt{3}.$

したがって、 $(\sqrt{2}+\sqrt{15})(\sqrt{5}-\sqrt{6}) = -2\sqrt{10}+3\sqrt{3}.$

まとめ

ルートの複合算は、次の順序で行います。

1. 掛算と割算をしましょう。
2. 平方根を単純化します。
3. 同類項の足算と引算をします。

分配法則と乗法公式を復習しよう。

$$a(b+c) = ab+ac$$
$$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$$

問題

次の計算をしましょう。

a) $\sqrt{2}(\sqrt{14}+\sqrt{5})$　　b) $\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{8})$　　c) $\sqrt{5}(4\sqrt{10}+7\sqrt{15})$

d) $(2-\sqrt{18})(2+\sqrt{18})$　　e) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$　　f) $(\sqrt{8}-\sqrt{6})^2$

g) $(\sqrt{5}+\sqrt{12})(\sqrt{10}+\sqrt{24})$　　h) $(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{21}-\sqrt{15})$　　i) $(\sqrt{12}-4)(\sqrt{6}+9)$

1.3 分母 $\sqrt{a}$ を用いた有理化

導入問題

分母を有理化して、可能であれば単純化しましょう。

a) $\frac{3}{\sqrt{6}}$　　b) $\frac{2}{\sqrt{20}}$

解法

a)
$$\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$$
$$=\frac{3\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}$$
$$=\frac{{}^{1}\cancel{3}\sqrt{6}}{\cancel{6}_{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

したがって、 $\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$

掛算し、また $\sqrt{6}$ で割ってください。
$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=1$ に注目してください。

b) 平方根を単純化し、
$$\sqrt{20}=\sqrt{2^2\times5}$$
$$=2\sqrt{5}$$

代用し、また、有理化し、
$$\frac{2}{\sqrt{20}}=\frac{\cancel{2}^{1}}{{}_{1}\cancel{2}\sqrt{5}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$
$$=\frac{1\times\sqrt{5}}{5}$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

したがって、 $\frac{2}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$

まとめ

$\frac{b}{\sqrt{a}}$ の分母の有理化は、次の順序で行います。

1. 掛け算します。 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$.
2. 可能であれば解を単純化してください。 $\frac{b}{\sqrt{a}}\times\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\frac{b\sqrt{a}}{a}$

分数の有理化とは、整数の分母を用いて等しい分数を導き出すことです。

問題

1. 分母を有理化し、可能な場合は必ず単純化しましょう。

a) $\frac{5}{\sqrt{5}}$　　b) $\frac{7}{\sqrt{14}}$　　c) $\frac{3}{\sqrt{15}}$　　d) $\frac{4}{\sqrt{8}}$

e) $\frac{6}{\sqrt{18}}$　　f) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{12}}$　　g) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{10}}$　　h) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{72}}$

有理化する前に単純化できるか確認しましょう。

2. 分母を有理化し、どれが等しいか決めましょう。

a) $\frac{2}{\sqrt{10}}$　　b) $\frac{3}{\sqrt{7}}$　　c) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$　　d) $\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{21}}$

e) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{21}}$　　f) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$　　g) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$　　h) $\frac{3\sqrt{7}}{7\sqrt{3}}$

1.4 分母の項が 2 つの時の有理化

導入問題

どんな方法で分母を有理化できますか？

a) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

解法

乗法公式を復習しましょう。『二項式の差の和』：$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$

二つの平方根の差による足算のためにこの乗法を行うことができます。

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b$$

有理数の平方根の和の積の差は有理数になります。

それでは与えられた演習に適用してみましょう。

a) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ 項の差で掛算と割算をします。

$$=\frac{2\times(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{2\times(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2}$$

$$=\frac{2\times(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}$$

$$=\frac{2\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}.$$

したがって、$\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}.$

b) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ 項の和で掛算と割算をします。

$$=\frac{1\times(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1}$$

$$=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

したがって、$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$

定義

数式 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ を、$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ の**共役**と呼びます 。二つの項の数式の**共役**は、二つ目の項の符号を変更することで得られます。一方が他方の**共役**である時、二つの式は**共役**です。

分母が、平方根との和または差である分数を**有理化**するには、掛算し分母の**共役**で割算をします。

例

分母 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-2}$ を有理化しましょう。

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-2}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-2}\times\frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2}$$

$\sqrt{7}-2$ の共役は $\sqrt{7}+2$ です。

$$=\frac{\sqrt{3}\times(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}$$

乗法公式を行います。
$(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)=(\sqrt{7})^2-(2)^2=7-4=3,$

$$=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{7}+\sqrt{3}\times 2}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{21}+2\sqrt{3}}{3}.$$

したがって、$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-2}=\frac{\sqrt{21}+2\sqrt{3}}{3}.$

問題

次の分数の分母を有理化しましょう。

a) $\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ b) $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}+\sqrt{6}}$ d) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}$ e) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{8}+\sqrt{6}}$ f) $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{5}}{\sqrt{15}-\sqrt{5}}$ g) $\frac{4}{\sqrt{10}+3}$ h) $\frac{\sqrt{14}+2}{1-\sqrt{7}}$

1.5 ネイピア数と黄金数

導入問題

ネイピア数 e

その値は、2.718281828459045...です。また、n が最大自然数の時、式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ と通して近似できます。

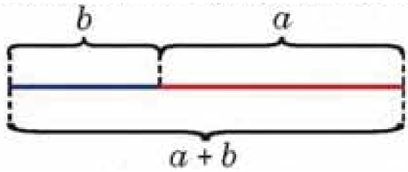
上記を踏まえて、次の問題を解いてみましょう。

1. n の値が増えると、前の式の数値が増えることに注意してください。
2. n = 1,000、n = 10,000、n = 100,000 の値を用いて、前の式の数値を求めましょう。

黄金数 $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

これは、二つの異なる線分 a と b の関係による長さの比率です。長さの和は、最長の区分が最短の区分になるように、最長の区分になります。

代数的に与えられた比は、以下のように記します。



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi$$

比率から ϕ を導き出しましょう。

解法

1. 計算機を使って、値を評価しましょう。

n	1	2	3	4
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2.25	2.3703...	2.4414...

n の値が大きくすると、式の値も大きくなります。

2. 与えられた値を用いて図を完成させましょう。

n	1000	10 000	100 000
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2.71692...	2.71814...	2.71826...

n の『とても大きい』値を求めることによって、最初に与えられた e の値を概算します。

$\phi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$及び$\frac{a}{b} = \frac{\phi}{1}$ したがって、$\frac{b}{a} = \frac{1}{\phi}$

$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$, 比率の代わりに、

$\phi^2 = 1 + \phi$, ϕ を掛けて、

$\phi^2 - \phi - 1 = 0$, 移項します。

左辺から $a = 1$、$b = -1$ 及び $c = -1$ には平方根の解の公式を用います。

$$\phi = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

ϕ は長さの比率であるため、正の数になります。

よって、 $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ です。

まとめ

数 e は無理数です。そのため、e の正確な値は概算です。

> レオンハルト・オイラーは 1748 年に、『無限解析入門』の中で、e の値を概算するために二つの式を示しました。
>
> $$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ y } e = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$$
>
> J.L.クーリッジ。(1950)。ネイピア数 e

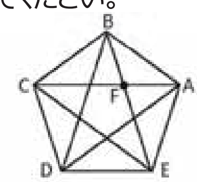
数 ϕ は無理数であるため、二つの整数の指数として表すことはできません。

> 黄金数は、葉の成長や哺乳類の骨格など自然のさまざまな分野でよく見られる定数です。また、芸術や音楽にも現れ、その比率は調和と美の知覚に関係していると考えられています。
>
> A. カサン (2001)。神の美的側面比率。

問題

1. 自然数 n と $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$ として、式 $e = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ を用いて、e の値を n = 10 に近似します。

2. 辺 1 の正五角形 ABCDE にはすべての対角線が描かれています。次の手順で行ってください。
   a) $\Delta ABC \sim \Delta BFA$であることを証明してください。
   b) ΔBCF が二等辺であることを証明してください。
   c) a が対角線 $\overline{AC}$ の長さである時、$FA = a - 1$ であることを証明してください。
   d) $a = \frac{1}{a-1}$ であることを証明してください。 e) a の値を求めましょう。



1.6 実数の定義：数直線

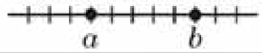
導入問題

1. 以下の数を数直線上に図示してください。

a) 3　b) -2　c) $\frac{1}{2}$　d) $-\frac{9}{5}$　e) -2.5　f) 1.4　g) $\sqrt{5}$　h) ϕ　i) -1　j) π

2. 上記の数を、有理数と無理数に分けてください。

数直線上の b は、y が $a < b$ の場合に限り、a の右側にあります。



解法

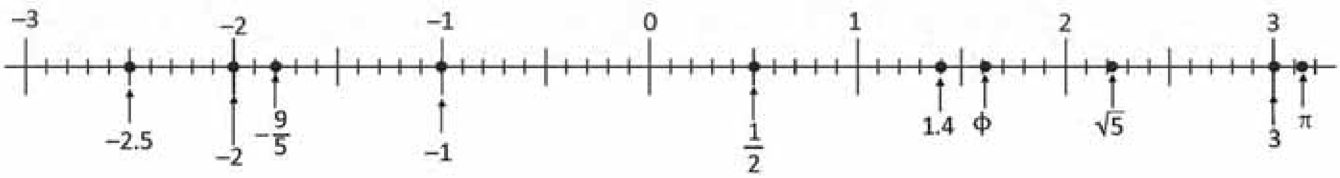
1. 与えられた数から少数のおおよその値を使用します。

a) $3 = 3$　b) $-2 = -2$　c) $\frac{1}{2} = 0.5$　d) $-\frac{9}{5} = -1.8$　e) $-2.5 = -2.5$

f) 1.4　g) $\sqrt{5} = 2.236...$　h) $\phi = 1.618...$　i) -1　j) $\pi = 3.141...$

数直線上に数字を書き込む前に、小さい順に並べます。

$-2.5 < -2 < -\frac{9}{5} < -1 < \frac{1}{2} < 1.4 < \phi < \sqrt{5} < 3 < \pi$



a) 3 は有理数です。　b) -2 は有理数です。　c) $\frac{1}{2}$ は有理数です。　d) $-\frac{9}{5}$ は有理数です。

e) $-2.5 = -\frac{5}{2}$ は有理数です。f) $1.4 = \frac{7}{5}$ は有理数です。g) $\sqrt{5}$ は無理数です。　h) ϕ は無理数です。

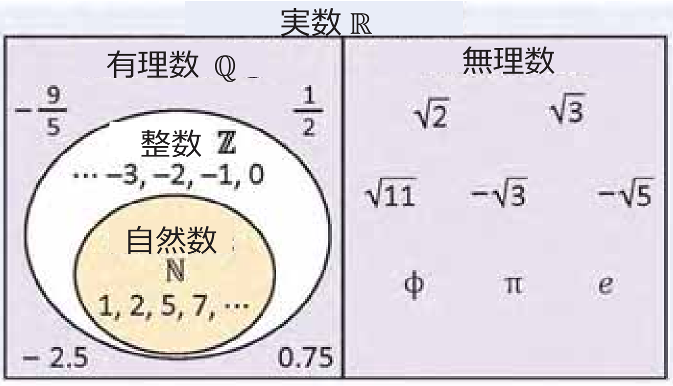
i) -1 は有理数です。　j) π は無理数です。

定義

実数の集合は、有理数と無理数から成り立っています。

実数の集合を表すために用いられる記号は $\mathbb{R}$ です。

数直線とは、実数の集合を表したものです。一つの実数には、線上に一つの点のみ存在します。つまり線上の一つの点には、一つの実数のみ存在します。



問題

1. 以下の数を数直線上で示しなさい。

a) $\frac{2}{5}$　b) 1　c) -3　d) $\sqrt{3}$

e) $-\frac{8}{5}$　f) $-0.\overline{5}$　g) 2.9　h) 0.15

i) $-\frac{11}{10}$　j) e　k) $\sqrt{2}$　l) $\frac{7}{3}$

2. 以下の集合をそれぞれ定義しましょう。$\mathbb{N}$、$\mathbb{Z}$、$\mathbb{Q}$ は、問 1 の各数、または無理数の場合に属しています。

1.7 実数の定義：少数

導入問題

以下の実数を少数で表しましょう。

a) 3　　b) -2　　c) $\frac{3}{2}$　　d) $\frac{5}{3}$　　e) $\frac{1}{6}$　　f) $\sqrt{7}$　　g) e　　h) π

解法

a) 3.000... は少数です。整数の部分が 3 で、少数の部分が 0.000... です。

b) -2.000... は少数です。整数の部分が -2 で、少数の部分が 0.000... です。

c) $\frac{3}{2}$ を $\frac{3}{2} = 3 \div 2 = 1.5$ で割ります。

d) $\frac{5}{3}$ を $\frac{5}{3} = 5 \div 3 = 1.\overline{6}$ で割ります。

e) $\frac{1}{6}$ を $\frac{1}{6} = 1 \div 6 = 0.1\overline{6}$ で割ります。

f) $\sqrt{7} = 2.645751...$

g) $e = 2.7182818...$

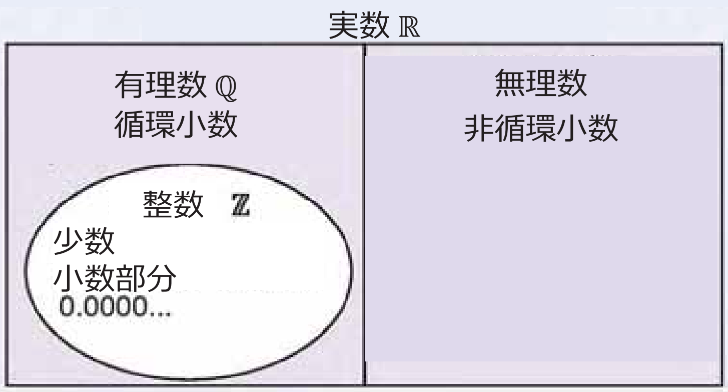
h) $\pi = 3.141592...$

定義

少数は、単位を部分を表すために使用します。したがって、少数は $a.bcdefg...$ の形で表します。a は整数を表し、b, c, d, e, f, g... は 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 または 9 のうちのいずれかの数字になります。

a は、**整数部分**と呼ぶ、0.$bcdefg$... は、**小数部分**と呼びます。

したがって、**実数**の集合 $\mathbb{R}$ は、すべての 10 進数で形成されます。



問題

以下の少数を有理数または無理数に分けましょう。

a) 0.125　　b) 0.101001000100001...　　c) 0

d) 5.75757575...　　e) −7.321　　f) 1.221212121212121...

g) −10　　h) 3.333333...　　i) 3.141592653589...

j) 4.12666666　　k) 0.123456789101112...　　l) −0.61803398874989...

1.8 実数の絶対値

導入問題

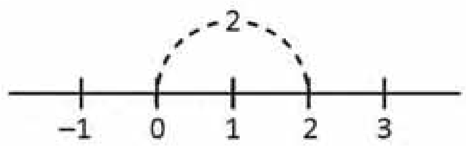
次の数の絶対値を求めましょう。

a) 2　　b) -3　　c) $\sqrt{7}$　　d) $-\frac{3}{4}$

解法

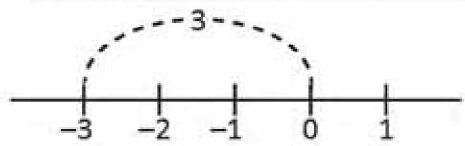
実数の絶対値とは、数直線上のその実数からゼロまでの距離のことです。

a) 2



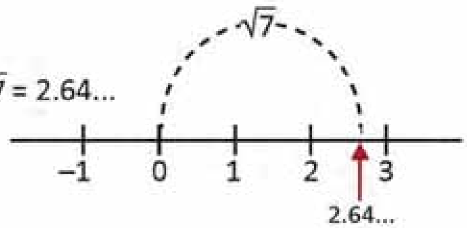
$|2| = 2$

b) -3



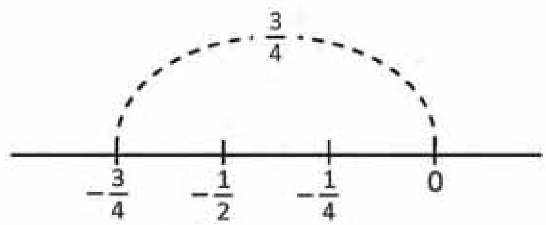
$|-3| = 3$

c) $\sqrt{7} = 2.64...$



$|\sqrt{7}| = \sqrt{7}$

d) $-\frac{3}{4}$



$\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$

正の数の絶対値は、同じ数：

$|2| = 2$　　$|\sqrt{7}| = \sqrt{7}$

負の数の絶対値は、その数の逆の数と等しい数のことです。

$|-3| = 3$　　$\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$

注目：
$-(-3) = 3$ および $-\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$

定義

以下のことに注目します。

- 正の数の絶対値は同じ数になります。つまり、$a > 0$ のとき、$|a| = a$ になります。
- ゼロの絶対値はゼロです。$|0| = 0$
- 負の数の絶対値はその数の逆の数です。$a < 0$ の時、$|a| = -a > 0$ になります。
- それぞれの実数には一つの絶対値があります。つまり、絶対値は、一つの数につき一つしかありません。

実数 a の絶対値の定義は、次の通りです。

$$|a| = \begin{cases} \text{もし、} a \geq 0 \text{であるなら、} a \\ \text{もし、} a < 0 \text{であるなら、} -a \end{cases}$$

復習しよう。
$\sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4$,　$\sqrt{0^2} = \sqrt{0} = 0$　y　$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$
そのため、a のすべての実数の証明は、
$\sqrt{a^2} = |a|$

問題

1. 次の数の絶対値を求めましょう。

a) $\sqrt{6}$　　b) $\frac{1}{70}$　　c) -0.11111　　d) -153

e) e　　f) $-\phi$　　g) 0　　h) $-\frac{1}{3}$

2. a と b を正の数とし、$a \geq b$ としたとき、$|a - b| = a - b$ になります。

1.9 区間の定義

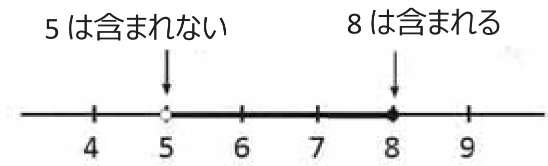
導入問題

数直線上の、次の不等式の読み方と表し方を書きましょう。

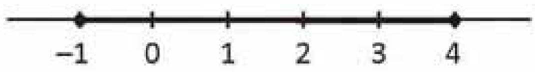
a) $5 < x \leq 8$　　b) $-1 \leq x \leq 4$　　c) $0 < x < 2$　　d) $-3 \leq x < -1$
e) $x > 8$　　f) $x < -4$　　g) $x \leq 5$　　h) $x \geq -2$

解法

a) $5 < x \leq 8$　これらの不等号の読み方は、
5 小なり x 小なりイコール 8 数直線上での表し方は、

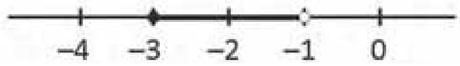


b) $-1 \leq x \leq 4$ の不等号の読み方は、
-1 小なりイコール x 小なりイコール 4
この不等号は以下のように表します。

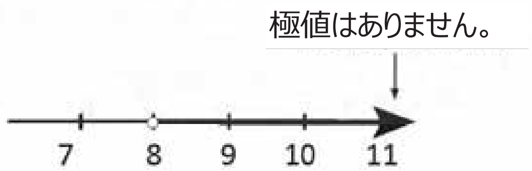


c) $0 < x < 2$　この不等号の読みからは、
0 小なり x 小なり 2 となり、そのためこの不等号の表し方は、

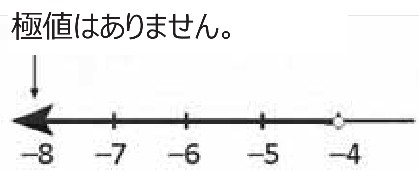
d) $-3 \leq x < -1$　この不等号の読み方は、
-3 小なりイコール x 小なり -1 となり、そのためこの不等号の表し方は、



e) $x > 8$ の不等号の読み方は、
x 大なり 8 です。
次のように表します。

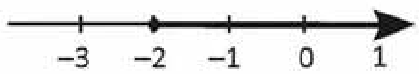


f) $x < -4$の不等号の読み方は、
x 小なり -4 です。
次のように表します。



g) $x \leq 5$ この不等号の読み方は、
x 小なりイコール 5 です。

h) $x \geq -2$ の不等号の読み方は、
x 大なりイコール -2 です。



定義

区分とは、半径または線分で表される数直線の一部分のことを言います。例えば、導入問題の中で出てきた部分集合は、区間のことです。a)、b)、c)、d) は線分で、e)、f)、g)、h) は半径です。

導入問題を参考にした区間を表すために用いられる表記は、

a) $5 < x \leq 8 \Rightarrow]5, 8]$　　b) $-1 \leq x \leq 4 \Rightarrow [-1, 4]$　　c) $0 < x < 2 \Rightarrow]0, 2[$　　d) $-3 \leq x < -1 \Rightarrow [-3, -1[$

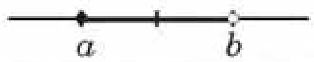
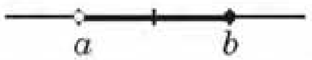
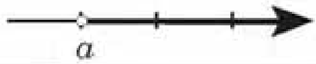
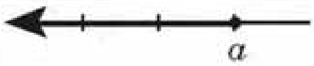
区間上の数を**端点**と呼びます。
もしも端点が含まれない場合、括弧の向きは逆になります。] を始めに置き、[を終わりに置きます。

e) $x > 8 \Rightarrow\ ]8, \infty[$ f) $x < -4 \Rightarrow\ ]-\infty, -4[$ g) $x \leq 5 \Rightarrow\ ]-\infty, 5]$ h) $x \geq -2 \Rightarrow [-2, \infty[$

∞ は、無限大を表す記号です。一方、$-\infty$ はマイナス無限大を表します。これらの記号は、区間において、端点が他にないことを示しています。

$-\infty$ または ∞ に応じた括弧は、逆に配置します。例： $]-\infty, 8]$ 及び $]1, \infty[$

次の図は、区間の種類の表記をまとめたものです。数直線上の表し方や、不等式を用いた集合の表記です。

種類 区間の	区間の表記	数直線上での表し方	集合の表記
閉区間	$[a, b]$		$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
右半開区間	$[a, b[$		$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
左半開区間	$]a, b]$		$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
開区間	$]a, b[$		$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
無限大	$[a, \infty[$		$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
	$]a, \infty[$		$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
	$]-\infty, a]$		$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
	$]-\infty, a[$		$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

集合の表記では以下のように読みます。例えば：$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ 集合エックス属するアール絶対値エー小なりイコールエックス小なりイコールビー

問題

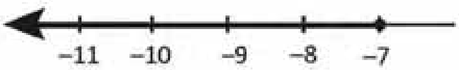
次の区間を異なる二つの表記で表してください。

a) $]-3, 0]$ b) $]-\infty, -5[$ c) $[5, \infty[$ d) $]2, 6[$

e) 

f) 

g) 

h) 

i) $\{x \in \mathbb{R} \mid -9 < x < -5\}$ j) $\{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x \leq -2\}$

k) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -4\}$ l) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

1.10 復習問題

1. 次の分数を有理化しましょう。

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$　b) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$　c) $\frac{1}{4+\sqrt{7}}$　d) $\frac{2}{2-\sqrt{3}}$

e) $\frac{\sqrt{3}+2}{1-\sqrt{3}}$　f) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{27}-\sqrt{8}}$　g) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$　h) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}$

2. n 自然数は自然数とします。数直線上に$\sqrt{n}$ または $2<\sqrt{n}<3$ を配置しましょう。

3. 次の数の絶対値を求めましょう。

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$　b) $\frac{2}{3}-\frac{3}{4}$　c) $\frac{5}{6}-\frac{1}{2}$　d) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

e) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$　f) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$　g) $\sqrt{10}-3$　h) $2\sqrt{7}-6$

授業 1.8 の問 2 の解答を使用しましょう。また、a と b が $0<a<b$ のような実数の時、$\sqrt{a}<\sqrt{b}$ になります。

4. 次の命題を証明しましょう。

a) $\sqrt{12}\div\sqrt{3}$ を割ると、整数を得られます。

b) $\sqrt{2}\div\sqrt{8}$ を割ると、有理数を得られます。

c) 黄金数 ϕ は、ネイピア数 e より小さいです。

d) $\sqrt{2}+\sqrt{3}\neq\sqrt{5}$.

平方根の定義を用いましょう。

e) $\varphi^2-\frac{1}{\varphi}$ を計算すると、整数が得られます。

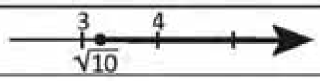
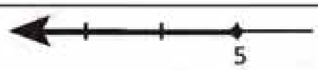
f) 実数の絶対値が負の数になることはありません。

g) 実数 a と b を実数とした場合、$0<b<a$ は $|b-a|=a-b$ になります。

5. 次の問題では、不等式を解くために変数 x はどのような値になりますか？

a) $|x|=1$　b) $|x|=6$　c) $|x|=0$　d) $|x+1|=3$

6. 区間の表現に関する以下の表を完成させてください。

区間	集合の表記	数直線上での表し方
$]-4, 7]$		
		
	$\{x\in\mathbb{R}\mid x>9\}$	
$[\sqrt{2}, \phi]$		
	$\{x\in\mathbb{R}\mid x<2\}$	
$[0, 2\pi[$		
	$\left\{x\in\mathbb{R}\mid -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right\}$	
		

ユニット 2

多項式と複素数の計算

代数の領域は、その発展のためには、代数の問題を特別に研究する必要がある分野になり始めました。12 世紀頃、イタリアの数学者レオナルド・ダ・ピサ（フィボナッチ）は、多項式についての知識をヨーロッパ中に広めました。この知識は、イタリアの数学者カルダーノ、フェラーリ、タルタリアによって16世紀頃に拡大されました。彼らは、3次方程式と4次方程式の解法に関する成果を発表しました。これに基づき、1805 年頃、イタリアの数学者パオロ・ルフィニは、多項式の計算について非常に重要な成果をいくつか発表しています（その一つがルフィニのルール、すなわち、合成除算です）。その頃にはすでに、多項式の根と因数分解による方程式の解法との間に存在する関係（因数定理）が知られていました。

「ポリノミオグラフィー」
（英語で*polynomiography*）として
知られる領域。芸術と多項式を
コンピュータで結びつけます。

代数の内容は、工学、テクノロジー、その他の科学分野を問わず、あらゆる分野においてあらゆる用途を開発するための根本的な基盤です。多項式は、自然現象を数学言語で表現したり、数学的な結果によって変換し、問題の現象への対応を解釈する手段として使用されます。

このユニットでは、 多項式の因数分解について復習します。さらに、因数定理、剰余の定理、ならびに合成除法すなわちルフィニのルールについて学び、多項式の除法を深めます。また、数値集合としての複素数の定義と代数的特徴を扱います。

1.1 単項式、多項式と次数の定義

定義

正の整数を指数とする1つ以上の変数で表される代数式 において、**係数**と呼ばれる実数のある乗法のみを含むものを**項**といいます。1つの項もしくは2つ以上の項の和で表される式を**多項式**といい、1つだけの項で表される多項式は**単項式**といいます。

多項式の項で変数をもたないものを**定数項**といいます。

次数は変数の指数と関連しており、それは次のように定義されます。

1. **単項式の次数**は全ての変数の指数の和です。定数項の次数は、つまり、変数がないので、ゼロとなります。
2. **多項式の次数**には次の 2 タイプがあります。
   a) 1変数の最大指数がその**変数の次数**です。
   b) 多項式の項の中で最も大きい次数を**最高次数**といいます。

多項式がただ一つの変数を含む場合、a) と b) の定義に当てはまり、
その多項式 は **1 変数多項式**といいます。

多項式の項は変数の次数または各項の次数に応じて整理することができます。降べきの順に並べるとは、大きい次数をもつ項から始めて小さい次数を持つ項が最後にくるようにすることで、昇べきの順に並べ替えるとは、小さい次数をもつ項から始めて大きい次数を持つ項が最後にくるようにすることです。

例 1

多項式 $11 + 3xy - 5x^3y^2 + 8x^2y$ について、以下を求めなさい。

1. 多項式の変数と係数を特定しなさい。
2. 多項式の項を特定し、それぞれの次数を計算しなさい。
3. それぞれの変数の次数を数えなさい。
4. 多項式の最高次数を数えなさい。

1. 多項式の変数は、x と y です。多項式の係数は、以下です。

   $11 \longrightarrow$ 定数項　　　$3 \longrightarrow xy$ の係数
   $-5 \longrightarrow x^3y^2$ の係数　　　$8 \longrightarrow x^2y$ の係数

2. 多項式の項は、11、$3xy$、$-5x^3y^2$ 、$8x^2y$ それぞれの次数は各項にある変数の指数を足して求めます。
   よって、

   11 の次数は変数がひとつもないので$\longrightarrow$ 0です。
   $3xy$ の次数は変数 x と y の指数がそれぞれ 1 と 1 なので、$\longrightarrow$ 2 です。

   定数項の次数は常にゼロです。

   $-5x^3y^2$ の次数は変数 x と y それぞれの指数が 3 と 2 なので、$\longrightarrow$ 5 です。
   $8x^2y$ の次数は x と y の指数がそれぞれ 2と 1 なので、$\longrightarrow$ 3 です。

3. 変数 x の次数は x の最大指数の 3 です。y と結びつく次数は変数の最大指数なので、2 です。

4. 多項式の最高次数は多項式の項の最大次数であり、問 b) では、$-5x^3y^2$ の項が最大次数のある項です。よって、最高次数は 5 です。

例 2

多項式 $11 + 3xy - 5x^3y^2 + 8x^2y$ について、以下を求めなさい。

1. 項を変数 x について昇べきの順と降べきの順に並べ替えなさい。
2. 項を変数 y について昇べきの順と降べきの順に並べ替えなさい。
3. 多項式を項について昇べきの順と降べきの順に並べ替えなさい。

1. 昇べきの順に並べ替えるとは、項を変数の次数が小さいものから大きいものになるように並べ替えることで、降べきの順に並べ替えるとは、その反対です。ですので、多項式 を変数xに関して並べ替えると以下のようになります。

$$\text{昇べきの順} \longrightarrow 11 + 3xy + 8x^2y - 5x^3y^2$$
$$\text{降べきの順} \longrightarrow -5x^3y^2 + 8x^2y + 3xy + 11$$

2. 項 $3xy$ と $8x^2y$ の変数は同じ次数なので、並べ替える際は変数 x の指数を考慮します。そのようにして昇べきの順では、まず、より小さい x の指数をもつ項から並べ、降べきの順では、より大きい x の指数をもつ項から並べます。

   変数 y について昇べきの順と降べきの順で並べ替えた多項式 はこのようになります。

$$\text{昇べきの順} \longrightarrow 11 + 3xy + 8x^2y - 5x^3y^2 = 11 + (3x + 8x^2)y - 5x^3y^2$$
$$\text{降べきの順} \longrightarrow -5x^3y^2 + 8x^2y + 3xy + 11 = -5x^3y^2 + (8x^2 + 3x)y + 11$$

   昇べきの順で並べかえると定数項11が、他のどの変数より先にくる点、また降べきの順で並べ替えるとどの変数よりも後にくる点に注意します。

3. 昇べきの順では、まず、より小さい次数の項から並べ、降べきの順では、より大きい次数の項から並べます。したがって、それぞれの順に並べ替えた多項式は以下のようになっています。

$$\text{昇べきの順} \longrightarrow \underbrace{11}_{\text{次数 }0} + \underbrace{3xy}_{\text{次数 }2} + \underbrace{8x^2y}_{\text{次数 }3} - \underbrace{5x^3y^2}_{\text{次数 }5}$$
$$\text{降べきの順} \longrightarrow -5x^3y^2 + 8x^2y + 3xy + 11$$

通常、多項式の項は降べきの順で並べます。

問題

1. 以下の多項式において、それぞれ変数、係数、項を特定しなさい。そして、それぞれの多項式の項の次数、変数の次数、最高次数を求めなさい。
   a) $10xy + 5x^2y^2 - 2xy^2 - 6x^3y^3$
   b) $-3a^2b^3 + 4a^3b - ab^2 + b$
   c) $9m^2 - 12m^2n^3 + 2mn - 5mn^2 + 1$
   d) $8x^3 - 10 + 3x + 5x^2$

2. 問 1 の多項式について、それぞれ以下のことを行います。
   a) 多項式の項を変数について昇べきの順、降べきの順に並べ直します。
   b) 多項式を項について並べ替えます。

3. 展開せずに多項式 $(x - 3)^2 + (x + 2)^2 + 9x - 10$ の係数の和を求めなさい。

定数項を忘れないよう注意します。
これもまた係数です。

1.2 二項式かける二項式の展開　第 1 部

導入問題

以下の乗法公式を展開しなさい。

a) $(x+9)(x-5)$　　b) $(x+3)^2$　　c) $(x-7)^2$　　d) $(x+4)(x-4)$

解法

a) $(x+a)(x+b)$ 型の展開はこのようになります。

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

これを用いて、

$$\begin{aligned}(x+9)(x-5) &= x^2 + (9-5)x + (9)(-5)\\ &= x^2 + 4x - 45\end{aligned}$$

よって、　$(x+9)(x-5) = x^2 + 4x - 45.$

b) これは 二項式の二乗の展開なので、

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

これを用いて、

$$\begin{aligned}(x+3)^2 &= x^2 + 2(3)x + 3^2\\ &= x^2 + 6x + 9\end{aligned}$$

そして、$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9.$

c) これも 二項式の二乗なので、

$$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

これを用いて、

$$\begin{aligned}(x-7)^2 &= x^2 - 2(7)x + 7^2\\ &= x^2 - 14x + 49\end{aligned}$$

そして、$(x-7)^2 = x^2 - 14x + 49.$

d) これは二項式の和と差の積の展開なので、

$$(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$$

これを用いて、

$$\begin{aligned}(x+4)(x-4) &= x^2 - 4^2\\ &= x^2 - 16\end{aligned}$$

よって、　$(x+4)(x-4) = x^2 - 16.$

定義

乗法公式は多項式の展開結果が分かる、多項式にそのままあてはめて使うことができる展開式です。
a も b もどちらも実数とします。

乗法公式	展開
式の展開 $(x+a)(x+b)$	$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
二項式の二乗	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
二項式の和と差の積	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

問題

以下の乗法公式を展開しなさい。

a) $(x+3)(x+10)$　　b) $(y-6)(y-4)$　　c) $(x-8)(x+2)$

d) $(y+5)^2$　　e) $(m-2)^2$　　f) $(x+11)^2$

g) $(x+3)(x-3)$　　h) $(10+y)(10-y)$　　i) $(m-6)(m+6)$

j) $\left(y+\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{3}{2}\right)$　　k) $\left(x+\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$　　l) $\left(x+\frac{2}{3}\right)^2$

m) $\left(x+\sqrt{5}\right)^2$　　n) $\left(y+2\sqrt{3}\right)^2$　　o) $\left(m+\frac{1}{5}\right)\left(m-\frac{1}{5}\right)$

p) $\left(\frac{4}{7}-x\right)\left(\frac{4}{7}+x\right)$　　q) $\left(y+\sqrt{6}\right)\left(y-\sqrt{6}\right)$　　r) $\left(x-2\sqrt{10}\right)\left(x+2\sqrt{10}\right)$

1.3 二項式かける二項式の展開　第 2 部

導入問題

以下の展開をしなさい。

a) $(4x+3)(4x-5)$　b) $(2x+y)^2$　c) $(3x-2y)^2$　d) $(5x+6y)(5x-6y)$

解法

a) $4x$ が両項にあるので、この展開は $(x+a)(x+b)$ の展開とにています。

$$\begin{aligned}(4x+3)(4x-5) &= (4x)^2 + (3-5)(4x) + (3)(-5)\\ &= 16x^2 + (-2)(4x) - 15\\ &= 16x^2 - 8x - 15\end{aligned}$$

よって、$(4x+3)(4x-5) = 16x^2 - 8x - 15.$

b) 二項式の二乗の展開です。

$$\begin{aligned}(2x+y)^2 &= (2x)^2 + 2(2x)(y) + y^2\\ &= 4x^2 + 4xy + y^2\end{aligned}$$

よって、$(2x+y)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2.$

c) これはひとつ前の問と同じく二項式の二乗の展開です。

$$\begin{aligned}(3x-2y)^2 &= (3x)^2 - 2(3x)(2y) + (2y)^2\\ &= 9x^2 - 12xy + 4y^2\end{aligned}$$

よって、$(3x-2y)^2 = 9x^2 - 12xy + 4y^2.$

d) これは二項式の和と差の積の展開になります。

$$\begin{aligned}(5x+6y)(5x-6y) &= (5x)^2 - (6y)^2\\ &= 25x^2 - 36y^2\end{aligned}$$

よって、$(5x+6y)(5x-6y) = 25x^2 - 36y^2.$

全体を通して

a、b、m のいずれも実数とします。したがって、

1. $(mx+a)(mx+b)$ は、$(x+a)(x+b)$ 型の展開と同じように展開します。
   $$(mx+a)(mx+b) = (mx)^2 + (a+b)(mx) + ab.$$
2. $(ax+by)^2$ と $(ax-by)^2$ はどちらも二項式の二乗なので、このように展開します。
   $$(ax+by)^2 = (ax)^2 + 2(ax)(by) + (by)^2$$
   $$(ax-by)^2 = (ax)^2 - 2(ax)(by) + (by)^2.$$
3. $(ax+by)(ax-by)$ は二項式の和と差の積なので、このように展開します。
   $$(ax+by)(ax-by) = (ax)^2 - (by)^2.$$

バビロニア人たちは「それぞれの和（もしくは差）と積が分かっている二つの数字をみつけなさい」という問題を問c)の乗法公式を使って解きました。例えば、「バビロンの推理」を用いて、それぞれの和が14で積が45になる二つの数字をみつける方法を数式に表すとこのようになります。

足して 14 になる数字は、$7+x$ と $7-x$、そして、ふたつの数字の積は 45 なので、

$$(7+x)(7-x) = 45$$

ここから $49 - x^2 = 45$ で、これを解くと $x = \pm 2$ したがってその数字は 9 と 5 であることが分かります。

著者：Bunt, N.H., Jones, P.S. y Bedient, J.D.(1988) 初等数学の歴史的ルーツ

問題

以下の乗法公式を展開しなさい

a) $(2x+9)(2x+1)$　b) $(3x-1)(3x+5)$　c) $(5y-4)(5y-2)$

d) $(4x+5y)^2$　e) $(2x-7y)^2$　f) $(3y-10x)^2$

g) $(2x+5y)(2x-5y)$　h) $(6w+z)(6w-z)$　i) $(8y-3x)(8y+3x)$

j) $\left(2n-\frac{1}{2}\right)\left(2n-\frac{1}{4}\right)$　k) $\left(\frac{1}{3}x+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{3}x-\frac{9}{2}\right)$　l) $\left(\frac{2}{3}y+11\right)\left(\frac{2}{3}y-5\right)$

m) $\left(\sqrt{2}\,x+y\right)^2$　n) $\left(\sqrt{3}\,w+\sqrt{5}\,z\right)^2$　o) $\left(4-3\sqrt{2}\,x\right)^2$

p) $\left(\frac{1}{5}x+\frac{1}{9}y\right)\left(\frac{1}{5}x-\frac{1}{9}y\right)$　q) $\left(\sqrt{5}\,x-\frac{3}{4}y\right)\left(\sqrt{5}\,x+\frac{3}{4}y\right)$　r) $\left(2\sqrt{2}\,x-3\sqrt{3}\,y\right)\left(2\sqrt{2}\,x+3\sqrt{3}\,y\right)$

1.4 $(ax+b)(cx+d)$ 型の展開

導入問題

$(2x+5)(3x+4)$ を展開しましょう。$(ax+b)(cx+d)$ 型の展開のルールをみつけましょう。

解法

一番目の二項式のそれぞれの項に二番目の二項式のそれぞれの項をかけます。

$$\begin{aligned}(2x+5)(3x+4) &= 2x(3x)+2x(4)+5(3x)+5(4) \\ &= 2(3)x^2+[2(4)+5(3)]x+5(4) \\ &= 6x^2+[8+15]x+20 \\ &= 6x^2+23x+20.\end{aligned}$$

それぞれの項を一つずつかけます。
交換法則と分配法則に従います。
展開します。

よって、$(2x+5)(3x+4)=6x^2+23x+20$。$(ax+b)(cx+d)$ 型の展開はこうなります。

$$\begin{aligned}(ax+b)(cx+d) &= ax(cx)+ax(d)+b(cx)+bd \\ &= acx^2+(ad+bc)x+bd.\end{aligned}$$

よって、$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd.$

定義

二項式$(ax+b)(cx+d)$ の展開 はこうなります。

$$(ax+b)(cx+d)=\overbrace{ac}^{a\text{と}c\text{の展開}}x^2+(\underbrace{ad+bc}_{a\text{と}d\text{の積たす}\ b\text{と}c\text{の積}})x+\overbrace{bd}^{b\text{と}d\text{の展開}}.$$

例

$(5x-6)(2x+7)$ を展開しましょう。
ここでは、$a=5$、$b=-6$、$c=2$、$d=7$ になっています。したがって

$$\begin{aligned}(5x-6)(2x+7) &= 5(2)x^2+[5(7)+(-6)(2)]x+(-6)(7) \\ &= 10x^2+(35-12)x-42 \\ &= 10x^2+23x-42.\end{aligned}$$

よって、 $(5x-6)(2x+7)=10x^2+23x-42.$

問題

1. 以下の展開をしましょう。

a) $(x+9)(3x+1)$　b) $(4x+1)(2x+1)$　c) $(2x+7)(3x-2)$

d) $(4x+3)(x-2)$　e) $(-x+7)(6x+4)$　f) $(x-8)(-2x-5)$

g) $(3x-10)(-2x+3)$　h) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(3x+\frac{5}{2}\right)$　i) $\left(5x-\frac{1}{4}\right)\left(6x-\frac{1}{10}\right)$

2. 各問題の a、b、c、d それぞれに整数をあてはめて等式が正しいかどうかを確認しましょう。

a) $(ax-7)(4x+d)=12x^2-25x-7$　b) $(5x+4)(cx+d)=10x^2+33x+20$

c) $(ax+b)(cx+6)=2x^2+5x-42$　d) $(ax+b)(cx+d)=5x^2+23x+12$

次数が 2 の二つの多項式 ex^2+fx+g と mx^2+nx+p は $e=m$、$f=n$、$g=p$ である場合、同じ式となります。

1.5 二項式の三乗　第１部

導入問題

展開しなさい。

$$(a+b)^3.$$

$(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)=(a+b)^2(a+b)$

解法

$(a+b)^3$ は $a+b$ の三乗であり、以下のように表すことができます。

$$(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)$$

最初にある二つの因数を関連づけるとこうなります。

$$\begin{aligned}(a+b)^3&=[(a+b)(a+b)](a+b)\\&=(a+b)^2(a+b).\end{aligned}$$

$(a+b)^2$ を展開して三項式かける二項式の積を求めます。

$$\begin{aligned}(a+b)^3&=(a^2+2ab+b^2)(a+b)\\&=a^2(a)+a^2(b)+2ab(a)+2ab(b)+b^2(a)+b^2(b)\\&=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3\\&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

二項式の二乗を展開します
それぞれの項を一つずつかけます。
単項式の項を展開します。
同類項を整理します。

よって、 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$

まとめ

$(a+b)^3$ の形は**二項式の三乗**といい、このように展開します。

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

二項式の三乗は、最初の項の三乗と、最初の項の二乗と二つ目の項の積の三つ分と、最初の項と二つ目の項の二乗の積の三つ分と、二つ目の項の三乗とをあわせたものとなります。

例

$(2x+y)^3$ を展開しなさい。

$(2x+y)^3$ も二項式の三乗なので、このように展開します。

$$\begin{aligned}(2x+y)^3&=(2x)^3+3(2x)^2(y)+3(2x)y^2+y^3\\&=8x^3+3(4x^2)y+6xy^2+y^3\\&=8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3.\end{aligned}$$

よって、$(2x+y)^3=8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3.$

問題

以下の展開をしなさい。

a) $(x+1)^3$　　b) $(y+4)^3$　　c) $(m+5)^3$

d) $(x+2y)^3$　　e) $(3x+y)^3$　　f) $(m+4n)^3$

g) $\left(m+\frac{1}{3}\right)^3$　　h) $\left(y+\frac{1}{2}\right)^3$　　i) $(3x+2y)^3$

j) $\left(\frac{1}{3}x+3y\right)^3$　　k) $\left(\frac{2}{3}x+y\right)^3$　　l) $\left(\frac{1}{3}m+\frac{1}{3}n\right)^3$

1.6 二項式の三乗　第 2 部

導入問題

展開しなさい。

$$(a-b)^3.$$

$(a-b)^3 = [a+(-b)]^3$

解法

$(a-b)^3$ は $[a+(-b)]^3$ と直し、二項式の三乗として展開します。

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= [a+(-b)]^3\\ &= a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3\\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

よって、 $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$

まとめ

$(a-b)^3$ も**二項式の三乗**なので、このように展開します。

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

通常は $(ax+by)^3$ と $(ax-by)^3$ はどちらも乗法公式で二項式の三乗といい、次の方法で展開します。

$$(ax \overset{\text{正の符号}}{+} by)^3 = (ax)^3 \overset{\text{正の符号}}{+} 3(ax)^2(by) \overset{\text{正の符号}}{+} 3(ax)(by)^2 \overset{\text{正の符号}}{+} (by)^3.$$

$$(ax \underset{\text{負の符号}}{-} by)^3 = (ax)^3 \underset{\text{負の符号}}{-} 3(ax)^2(by) \underset{\text{正の符号}}{+} 3(ax)(by)^2 \underset{\text{負の符号}}{-} (by)^3.$$

例

$(2x-3y)^3$を展開しなさい。

$(2x-3y)^3$ も二項式の三乗ですので、このように展開します。

$$\begin{aligned}(2x-3y)^3 &= (2x)^3 - 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 - (3y)^3\\ &= 8x^3 - 3(4x^2)(3y) + 3(2x)(9y^2) - 27y^3\\ &= 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3\end{aligned}$$

よって、$(2x-3y)^3 = 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3.$

問題

1. 以下の展開をしなさい。

a) $(x-1)^3$　b) $(y-3)^3$　c) $(m-10)^3$

d) $(4x-y)^3$　e) $(m-5n)^3$　f) $(5x-2y)^3$

g) $\left(x-\frac{1}{6}\right)^3$　h) $\left(y-\frac{1}{2}\right)^3$　i) $\left(m-\frac{2}{3}\right)^3$

j) $\left(\frac{1}{3}x-2y\right)^3$　k) $\left(3m-\frac{1}{6}n\right)^3$　l) $\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right)^3$

2. それぞれの等式が成り立たせる a または b の値を特定しなさい。

a) $(x+a)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$　b) $(y-a)^3 = y^3 - 12y^2 + 48y - 64$

c) $(ax+by)^3 = 8x^3 + 60x^2y + 150xy^2 + 125y^3$　d) $(ax-by)^3 = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x^2y + \frac{1}{6}xy^2 - \frac{1}{27}y^3$

1.7 乗法公式の組み合わせ

導入問題

以下の展開をしなさい。

a) $(2x+3)^3-(2x-3)^3$　　　　b) $(a+b+c)^2$

解法

a) $(2x+3)^3$ と $(2x-3)^3$ はどちらも二項式の三乗です。式にあてはまる乗法公式が分かれば、あとは前回までの授業で習った方法で展開し、同類項があればまとめます。

$$\underbrace{(2x+3)^3}_{(1)}-\underbrace{(2x-3)^3}_{(2)}=\underbrace{8x^3+3(2x)^2(3)+3(2x)(3)^2+27}_{(1)}-\underbrace{[8x^3-3(2x)^2(3)+3(2x)(3)^2-27]}_{(2)}$$

$$=\cancel{8x^3}+3(4x^2)(3)\cancel{+3(2x)(9)}\boxed{+27}\cancel{-8x^3}+3(4x^2)(3)\cancel{-3(2x)(9)}\boxed{+27}$$

$$=36x^2+27+36x^2+27$$

$$=72x^2+54$$

よって、　$(2x+3)^3-(2x-3)^3=72x^2+54.$

b) $a+b=x$であるなら、$(a+b+c)^2=(x+c)^2$が二項式の二乗にあてはまります。

$(a+b+c)^2=(x+c)^2$　　　$a+b=x$ を代入します。

$=x^2+2xc+c^2$　　　二項式を展開します。

$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$　　　$x=a+b$ を代入します。

$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc).$

よって、$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc).$

全体を通して

乗法公式の組み合わせを展開する時は、

1. どの部分に乗法公式が示されているかを見極めます。
2. 符号に注意しながら展開します。
3. 同類項があればまとめます。

問題

1. 以下の展開をしなさい。

a) $(5x+11)(5x-6)+(x-2y)(x+2y)$　　　b) $(10x-y)^2+(x-10y)^2$

c) $(x-1)^2+(x+2)^2+(x+4)(x-5)$　　　d) $(x+4y)^3+(x-5y)^3$

e) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-1\right)\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+1\right)$　　　f) $\left(\sqrt{2}\,x+\sqrt{3}\,y\right)\left(\sqrt{2}\,x-\sqrt{3}\,y\right)-(x+y+1)^2$

2. 乗法公式を使って以下の問題を解きなさい。

a) $a+b=25$、$a-b=10$ が成り立つ場合の、a^2-b^2 にあてはまる数値を求めなさい。
b) $a^2+b^2=58$、$a+b=10$ が成り立つ場合の ab の数値を求めなさい。
c) 計算機を使わずに 101^3 を解きなさい。

1.8 復習問題

1. 以下の展開をしなさい。

a) $(x+7)(x-5)$　b) $(m+8)^2$　c) $(n-6)\left(n-\frac{1}{2}\right)$

d) $(y-10)(y+8)$　e) $(y-4)^2$　f) $(x+6)^2$

g) $(x+5)(x-5)$　h) $\left(\frac{1}{7}-y\right)\left(\frac{1}{7}-y\right)$　i) $(n-2\sqrt{2})(n+2\sqrt{2})$

2. 以下の展開をしなさい。

a) $(3x+7)(3x+2)$　b) $\left(\frac{1}{2}y+5\right)\left(\frac{1}{2}y-9\right)$　c) $\left(5n-\frac{4}{5}\right)\left(5n-\frac{1}{5}\right)$

d) $(9x+4y)^2$　e) $\left(3x-\frac{1}{3}y\right)^2$　f) $(2x+\sqrt{3}y)^2$

g) $(10m+7n)(10m-7n)$　h) $\left(\frac{1}{5}x-\frac{2}{3}y\right)\left(\frac{1}{5}x+\frac{2}{3}y\right)$　i) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$

3. $(ax+b)(cx+d)$ 型の以下の式を展開しなさい。

a) $(2x-3)(x-4)$　b) $(x+6)(3x+5)$　c) $(4y-3)(5y+2)$

d) $\left(2x+\frac{1}{3}\right)\left(3x+\frac{2}{3}\right)$　e) $\left(5n+\frac{1}{2}\right)\left(4n-\frac{4}{5}\right)$　f) $\left(\frac{1}{3}x-8\right)\left(\frac{1}{4}x+3\right)$

4. a、b、c、d にあてはまる数字を特定し、等式が正しいかどうかを確かめなさい。

a) $(x+b)(cx-6)=2x^2+12x-54$　b) $(2x-5)(cx+d)=6x^2-35x+50$

c) $(ax+1)(cx+5)=8x^2+22x+5$　d) $(5x+b)(cx+d)=10x^2-9x-9$

5. 以下の二項式の三乗を展開しなさい。

a) $(m+3)^3$　b) $(y+10)^3$　c) $\left(x+\frac{1}{6}\right)^3$

d) $(y-4)^3$　e) $(5-m)^3$　f) $\left(x-\frac{1}{5}\right)^3$

g) $(10x+3y)^3$　h) $\left(\frac{1}{5}m-5n\right)^3$　i) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3$

6. 以下の展開をしなさい。

a) $(3x+4)(3x-4)-(2x+5)(2x-9)$　b) $(x+3y)^2+(2x-5y)^2$

c) $(2x-y)^3-(x+y)^3$　d) $(3x-4y+5)(3x-4y-5)$

e) $(3x-7)(4x+5)+(5x+1)(5x-6)$　f) $(x+9)(2x-11)+(x-5)^2$

7. 以下を解きなさい。

a) $a^2+b^2=40$、$ab=12$ が成り立つ $(a-b)^2$ の値を求めなさい。

b) $a^2-b^2=24$、$a-b=2$ が成り立つ $a+b$ の値を求めなさい。

c) 乗法公式を用いて以下の式の答えを求めなさい。

- 103^2
- $105(95)$
- $45(55)$

d) $x=445$ である場合、$446(444)-447(443)$ の式を乗法公式を使ってx の項の数を書いて計算しなさい。

e) $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$ であることを証明しなさい。

1.9 単項式と多項式の共通因数

導入問題

以下の多項式を因数分解しなさい。

a) $10x^2y + 6xy^2 - 8xy$　　b) $xy + 3x + 2y + 6$

問 a) の多項式の項にある共通因数をみつけなさい。問 b) 共通因数をもつ項をくくりなさい。

解法

a) 多項式の項の共通因数を見つけます。

$$\begin{aligned} 10x^2y &= 2(5)(x)(x)(y) &= 2xy(5x) \\ 6xy^2 &= 2(3)(x)(y)(y) &= 2xy(3y) \\ -8xy &= -2(4)(x)(y) &= -2xy(4) \end{aligned}$$

それらの因数を取り出して単項式かける多項式のかけ算にして書きます。

$$\begin{aligned} 10x^2y + 6xy^2 - 8xy &= 2xy(5x) + 2xy(3y) - 2xy(4) \\ &= 2xy(5x + 3y - 4). \end{aligned}$$

よって、$10x^2y + 6xy^2 - 8xy = 2xy(5x + 3y - 4)$

b) この多項式の項には共通因数がありません。しかし、最初の項と二番目の項は共通因数 x があり、三番目と 4 番目の項には共通因数があります。これらの二つの組み合わせをくくり、それぞれの共通因数を取り出します。

$$\begin{aligned} xy + 3x + 2y + 6 &= (xy + 3x) + [2y + 2(3)] \\ &= x(y + 3) + 2(y + 3). \end{aligned}$$

$m = y + 3$ であると仮定して、上の式に代入し、共通因数 m を取り出します。

$$\begin{aligned} xy + 3x + 2y + 6 &= xm + 2m \\ &= (x + 2)m. \end{aligned}$$

したがって、$xy + 3x + 2y + 6 = (x + 2)(y + 3)$

まとめ

多項式の**因数分解**は、多項式の展開を簡単にして書くことです。つまりその多項式の簡単な形を**因数**といいます。多項式にある項が全て同じ共通の単項式をもつ場合は、その単項式を取り出し、単項式かける多項式の式に直します。

$$ma + mb + mc = m(a + b + c).$$

多項式の項が共通因数をもたない場合で、他の異なる共通因数をもっている項の組とくくることができるのであれば、

1. それぞれの組の共通因数を取り出します。
2. そして、そうすることにより式が単項式かける同じ多項式になる場合は、この共通である多項式を取り出します。

$$\begin{aligned} ma + mb + na + nb &= m(a + b) + n(a + b) \\ &= (m + n)(a + b). \end{aligned}$$

同じ共通因数をもつ項に関連づけて因数分解を行うことを、**共通項でくくる因数分解**といいます。

問題

以下の多項式を因数分解しなさい。

a) $x^2 + xy^2$　　b) $2a - 8ab$　　c) $x^2y^2 - x^2y + xy$

d) $-10a^2b^2 + 5ab^2 - 15abc$　　e) $-12xy^2 + 20x^2 + 16xy$　　f) $12a^2b^2c - 6ab^2c^2 + 18a^2bc$

g) $mn - 4m + 3n - 12$　　h) $xy - 2x - 5y + 10$　　i) $2ab - 12a + b - 6$

j) $3xy - 7x - 12y + 28$　　k) $6mn + 8m + 15n + 20$　　l) $x^2y - 3xy^2 + 8x - 24y$

m) $\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x$　　n) $10\sqrt{2}a^2b + 6\sqrt{2}ab$　　o) $\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}mn + \frac{1}{3}m + \frac{1}{3}n$

1.10 三項式 $x^2 + (a + b)x + ab$ の因数分解

導入問題

以下の多項式を $(x + a)(x + b)$ の形に因数分解しなさい。

a) $x^2 + 10x + 16$　　　b) $y^2 - y - 20$

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

解法

a) $x^2 + 10x + 16$ を $(x + a)(x + b)$ に因数分解するには、和が 10、積が 16 になる二つの数を見つけなければなりません。和は正の数であるので、二つの数とも正の数である必要があります。

組み合わせ	積	和
1 と 16	16	17
2 と 8	16	10

$(x + 2)(x + 8)$ の展開をして因数分解が正しいかどうかを確かめます。

よって、$a = 2$、$b = 8$ となり、$x^2 + 10x + 16 = (x + 2)(x + 8)$ です。

b) 前の設問と同じ方法で、和が -1、積が -20 になる二つの数をみつけます。どちらの値もマイナスなので、その二つの数のどちらか一方が正の数でもう一方が負の数である必要があります。

組み合わせ	積	和
−1 と 20	−20	19
−2 と 10	−20	8
−4 と 5	−20	1
4 と −5	−20	−1

20 を素因数分解すれば組み合わせがみつけられます。$20 = 2(2)(5)$

よって、$a = 4$、$b = -5$、$y^2 - y - 20 = (y + 4)(y - 5)$

まとめ

三項式 を乗法公式 $(x + a)(x + b)$ の形に因数分解するためには、三項式の項の中にx^2、変数 x のある項、変数のない項（定数項）があることを確認しなければなりません。m も n も正の数とします。

a) 三項式が $x^2 + mx + n$ の場合、積が n、和が m となる**二つの数は正の数**をみつけます。
b) 三項式が $x^2 - mx + n$ の場合、積が n、和が $-m$ となる**二つの数は負の数**をみつけます。
c) 三項式が $x^2 + mx - n$ または $x^2 - mx - n$ の場合は、積が $-n$、和が m もしくは $-m$ となる**二つの数の一方が正の数でもう一方が負の数**をみつけます。

問題

1. 以下の多項式を因数分解しなさい。

a) $x^2 + 7x + 6$　　b) $x^2 - 9x + 14$　　c) $y^2 - 3y - 40$
d) $y^2 + 2y - 15$　　e) $a^2 + 2a - 63$　　f) $b^2 - 12b + 20$
g) $y^2 + 14y + 40$　　h) $x^2 - 2x - 35$　　i) $x^2 - 12x + 27$
j) $y^2 + 5y - 24$　　k) $a^2 + 15a + 56$　　l) $b^2 - 9b - 22$

2. 展開せずに以下の多項式をそれぞれ因数分解しなさい。

a) $(x - 1)^2 - 2(x - 1) - 24$　　$y = x - 1$ を代入します。　　b) $(x + 1)^2 + 10(x + 1) + 21$
c) $(x - 2)^2 + 5(x - 2) - 50$　　d) $(x - 3)^2 - 5(x - 3) + 6$

1.11 完全二乗三項式と二乗の差　第 1 部

導入問題

以下の多項式を因数分解しなさい。

a) $x^2 + 12x + 36$　　　b) $y^2 - 100$

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$
$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$

解法

a) 三項式の一番目の項と定数項が二乗なので、x^2 は x の二乗、36 は 6 の二乗です。
さらに、$12x = 2(6)(x)$ です。

したがって、$x^2 + 12x + 36 = x^2 + 2(6)(x) + 6^2$

上記は二項式を展開させたもの $x^2 + 2(6)(x) + 6^2 = (x + 6)^2$ と等しくなります。

よって、$x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$

b) 二項式のどちらの項も二乗なので、$y^2 - 100 = y^2 - 10^2$

上記は二項式の和と差の積にあてはまるので、$y^2 - 10^2 = (y + 10)(y - 10)$

したがって $y^2 - 100 = (y + 10)(y - 10)$

まとめ

$x^2 \pm 2ax + a^2$ は**完全平方三項式**といいます。これは、二項式の二乗の因数分解を二つ目の項の符号に合わせて行います。

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2.$$

完全平方三項式であるかどうかを確かめるには、まず定数項がどの数字の二乗になっているかを確かめ、次にその数字を 2 倍にしたものが一次の変数の係数となっているかを確かめます。一方、$x^2 - a^2$ の形をもつ多項式は**二乗の差**といい、次のように因数分解します。

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a).$$

問題

1. 以下の多項式を因数分解しなさい。

a) $x^2 - 6x + 9$	b) $y^2 + 10y + 25$	c) $b^2 - 8b + 16$
d) $x^2 - 4$	e) $a^2 - 36$	f) $49 - y^2$
g) $b^2 + b + \frac{1}{4}$	h) $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$	i) $y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}$
j) $a^2 - \frac{1}{25}$	k) $b^2 - \frac{1}{64}$	l) $\frac{4}{9} - y^2$
m) $x^2 + 5x + \frac{25}{4}$	n) $y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{9}{16}$	o) $x^2 - \frac{7}{5}x + \frac{49}{100}$
p) $a^2 - \frac{36}{49}$	q) $y^2 - \frac{4}{121}$	r) $\frac{81}{64} - b^2$

2. 計算機を使わずに以下の式を計算しなさい。

a) $77^2 - 23^2$　　　b) $998^2 - 4$　　　c) $97^2 + 6(97) + 9$

1.12 完全平方三項式と二乗の差　第 2 部

導入問題

以下の多項式を因数分解しなさい。

a) $49x^2 - 28xy + 4y^2$　　b) $121x^2 - 16y^2$

解法

a) 三項式の最初の項は $7x$ の二乗で、三つ目の項は $2y$ の二乗です。

$$(7x)^2 = 49x^2$$
$$(2y)^2 = 4y^2$$

さらに、$-2(7x)(2y) = -28xy$、よって$49x^2 - 28xy + 4y^2$ は完全平方三項式で、次のように因数分解します。

$$\begin{aligned} 49x^2 - 28xy + 4y^2 &= (7x)^2 - 2(7x)(2y) + (2y)^2 \\ &= (7x - 2y)^2 \end{aligned}$$

よって、$49x^2 - 28xy + 4y^2 = (7x - 2y)^2$

b) 最初の項は $11x$ の二乗で、二つ目の項は $4y$ の二乗です。

$$(11x)^2 = 121x^2$$
$$(4y)^2 = 16y^2$$

したがって $121x^2 - 16y^2$ は二乗の差で因数分解はこうなります。

$$\begin{aligned} 121x^2 - 16y^2 &= (11x)^2 - (4y)^2 \\ &= (11x + 4y)(11x - 4y) \end{aligned}$$

よって、$121x^2 - 16y^2 = (11x + 4y)(11x - 4y)$

全体を通して

三項式 $a^2x^2 \pm 2abxy + b^2y^2$ は完全平方三項式で、因数分解はこうなります。

$$(ax)^2 + 2(ax)(by) + (by)^2 = (ax + by)^2$$
$$(ax)^2 - 2(ax)(by) + (by)^2 = (ax - by)^2.$$

二項式 $a^2x^2 - b^2y^2$ は二乗の差で、その因数分解はこうなります。

$$(ax)^2 - (by)^2 = (ax + by)(ax - by).$$

問題

1. 以下の多項式を因数分解しなさい。

a) $4x^2 + 20xy + 25y^2$　　b) $9x^2 - 12xy + 4y^2$　　c) $25a^2 + 60ab + 36b^2$

d) $9x^2 - 100y^2$　　e) $25x^2 - 16y^2$　　f) $49a^2 - 4b^2$

g) $\frac{1}{4}x^2 + xy + y^2$　　h) $9x^2 - 3xy + \frac{1}{4}y^2$　　i) $\frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{16}y^2$

j) $\frac{1}{64}x^2 - 9y^2$　　k) $\frac{25}{9}a^2 - \frac{1}{49}b^2$　　l) $\frac{4}{81}x^2 - \frac{25}{16}y^2$

m) $4x^2 + 4\sqrt{2}\,xy + 2y^2$　　n) $5a^2 - 2\sqrt{15}\,ab + 3b^2$　　o) $6x^2 + 8\sqrt{3}\,xy + 8y^2$

p) $100a^2 - 7b^2$　　q) $6x^2 - \frac{1}{25}y^2$　　r) $8x^2 - 11y^2$

2. 展開せずに以下の多項式を因数分解しなさい。

a) $9x^2 + 6x(y + 2) + (y + 2)^2$　　$z = y + 2$ を代入します。　　b) $(a - 3)^2 - 10(a - 3)b + 25b^2$

c) $(2x + 1)^2 + 2(2x + 1)(3y - 4) + (3y - 4)^2$　　d) $16a^2 - (b + 5)^2$

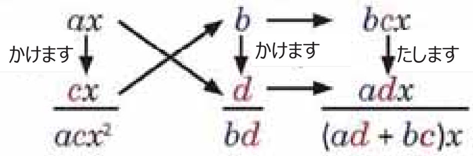
e) $(x + 9)^2 - (y - 9)^2$　　f) $x^2 + y^2 + 2xy + 10x + 10y$

1.13 たすきがけ　第 1 部

導入問題

多項式 $2x^2 + 13x + 15$ は完全平方三項式ではありませんが、このようにして $(ax + b)(cx + d)$ の形に因数分解できます。

1. 2 と 15 を因数の積として分解します。
2. 下の図では、a と c の値に 2 の因数をあてはめ、b と d の値に 15 の因数をあてはめます。$ad + bc = 13$ となるまで計算します。



3. $2x^2 + 13x + 15$ は、$(ax + b)(cx + d)$ の形に直します。

解法

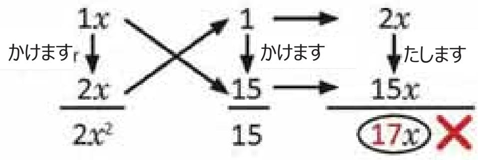
1. 2 と 15 は二つの因数を使ってできる積として次のように分解できます。

$$2 = 1(2) \qquad 15 = \begin{cases} 1(15) \\ 3(5) \end{cases}$$

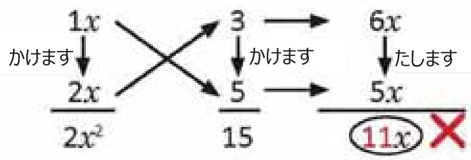
この積は可換性をもつので、$1(2) = 2(1)$

2. $ad + bc = 13$ が成り立つまで a と c に 2 の因数をあてはめ、b と d に 15 の因数をあてはめます。

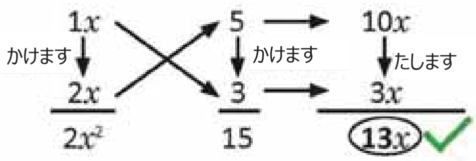
• もし、$a = 1$、$c = 2$ であるなら、$b = 1$、$d = 15$ となります。



• もし、$a = 1$、$c = 2$ であるなら、$b=3$、$d = 5$ となります。



• もし、$a = 1$、$c = 2$ であるなら、$b = 5$、$d = 3$ となります。



3. 以上から、$2x^2 + 13x + 15 = (x + 5)(2x + 3)$

まとめ

$mx^2 + nx + p$ の三項式で、m、n、p がゼロでない整数とします。**$ac = m$、$bd = p$、$ad + bc = n$** になる整数 a、b、c、d があるならば、

$$mx^2 + nx + p = (ax + b)(cx + d).$$

問題

以下の多項式を導入問題の図を活用して因数分解しなさい。

a) $3a^2 + 8a + 5$	b) $2x^2 + 7x + 3$	c) $2x^2 + 9x + 9$
d) $2y^2 + 11y + 12$	e) $3y^2 + 8y + 4$	f) $3a^2 + 17a + 20$
g) $4x^2 + 5x + 1$	h) $6x^2 + 11x + 3$	i) $8y^2 + 22y + 5$
j) $6y^2 + 23y + 20$	k) $6x^2 + 17x + 12$	l) $10a^2 + 27a + 18$

1.14 たすきがけ　第 2 部

導入問題

以下の多項式を因数分解しなさい。

a) $2x^2 - 5x - 12$　　　　b) $3y^2 - 11y + 8$

前回の授業で学習した方法を使いなさい。

解法

a) x^2 の係数と定数項は、二つの整数の積になります。定数項はマイナスなので、負の数と正の数をかけたものであると分かります。2 と -12 は二つの因数の積なので、

$$2 = 1(2) \qquad -12 = \begin{cases} 1(-12) \text{ o } -1(12) \\ 2(-6) \text{ o } -2(6) \\ 3(-4) \text{ o } -3(4) \end{cases}$$

以下のことに注意します。$ad + bc$ に、$a = 1$、$c = 2$、$b = 1$、$d = -12$ を代入した場合と、$a = 1$、$c = 2$、$b = -12$、$d = 1$ を代入した場合では結果が異なります。つまり、b の値と d の値を入れ替えると $ad + bc$ の結果が違ってきます。よって、たすきがけは、三項式を因数分解するために、正しい答えがみつかるまであてはまりそうな数を入れて試算する**試行錯誤**といわれる方法です。

- もし $a = 1$、$c = 2$ であるなら $b = 1$、$d = -12$

$$\begin{array}{ccccc} 1x & & 1 & \rightarrow & 2x \\ \text{かけます}\downarrow & \times & \downarrow\text{かけます} & & \downarrow\text{たします} \\ 2x & & -12 & \rightarrow & -12x \\ \hline 2x^2 & & -12 & & -10x \end{array}$$

$b = -12$ と $d = 1$ を代入すると、$ad + bc$ は -23 になります。

- もし $a = 1$、$c = 2$ であるなら、$b = 2$、$d = -6$

$$\begin{array}{ccccc} 1x & & 2 & \rightarrow & 4x \\ \text{かけます}\downarrow & \times & \downarrow\text{かけます} & & \downarrow\text{たします} \\ 2x & & -6 & \rightarrow & -6x \\ \hline 2x^2 & & -12 & & -2x \end{array}$$

- もし $a = 1$、$c = 2$ であるなら、$b = 3$、$d = -4$

$$\begin{array}{ccccc} 1x & & 3 & \rightarrow & 6x \\ \text{かけます}\downarrow & \times & \downarrow\text{かけます} & & \downarrow\text{たします} \\ 2x & & -4 & \rightarrow & -4x \\ \hline 2x^2 & & -12 & & 2x \end{array}$$

- もし $a = 1$、$c = 2$ であるなら、$b = 4$、$d = -3$

$$\begin{array}{ccccc} 1x & & 4 & \rightarrow & 8x \\ \text{かけます}\downarrow & \times & \downarrow\text{かけます} & & \downarrow\text{たします} \\ 2x & & -3 & \rightarrow & -3x \\ \hline 2x^2 & & -12 & & 5x \end{array}$$

- もし $a = 1$、$c = 2$ であるなら、$b = -4$、$d = 3$

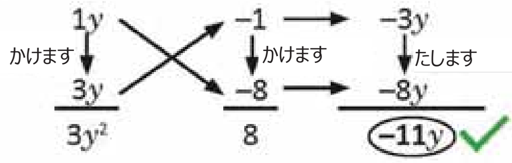
$$\begin{array}{ccccc} 1x & & -4 & \rightarrow & -8x \\ \text{かけます}\downarrow & \times & \downarrow\text{かけます} & & \downarrow\text{たします} \\ 2x & & 3 & \rightarrow & 3x \\ \hline 2x^2 & & -12 & & -5x \end{array}$$

したがって、$2x^2 - 5x - 12 = (x - 4)(2x + 3)$

b) a と c は整数とします。y の係数は負の数で、定数項は正の数です。これは、b と d に当てはまる数字がどちらも負の数であることを意味しています。上記を考慮して、3 と 8 を因数の積と考えると、次のように表すことができます。

$$3 = 1(3) \qquad 8 = \begin{cases} -1(-8) \text{ o } -8(-1) \\ -2(-4) \text{ o } -4(-2) \end{cases}$$

• もし$a = 1$、$c = 3$であるなら、$b = -1$、$d = -8$



よって、$3y^2 - 11y + 8 = (y - 1)(3y - 8)$

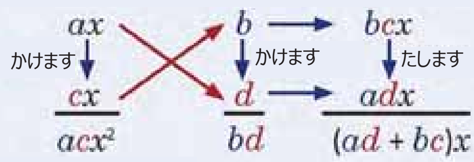
まとめ

$mx^2 + nx + p$ の形の三項式で、m、n、p がそれぞれゼロでない整数で、m が正の数であるとします。$(ax + b)(cx + d)$ の形に因数分解するためには次の手順をとります。

1. m と p をそれぞれ二つの因数に因数分解します。

   a) もし n と p が正の数であるならば、p は二つの正の数の積であるはずです。
   b) もし n が負の数で p が正の数であるなら、p は二つの負の数の積であるはずです。
   c) もし p が負の数であるならば、p は正の数と負の数の積であるはずです。

2. 以下の図で、a と c に m の因数を代入し、b と d に P の因数を代入して、$ad + bc = n$ となる組み合わせがみつかるまで、全ての組み合わせを試します。



3. $mx^2 + nx + p$ は $(ax + b)(cx + d)$ となります。

この図にある前回の三項式の因数分解で用いたaxとd、cxとb というようにななめに掛け合わせる方法を **たすきがけ** といいます。またシンプルなクロス計算といいます。

問題

1. 以下の多項式をたすきがけを使って因数分解しなさい。

a) $2x^2 - x - 10$	b) $2y^2 - y - 15$	c) $3y^2 - 16y + 5$
d) $5x^2 + 2x - 3$	e) $5a^2 - 14a + 8$	f) $7x^2 - 5x - 2$
g) $4x^2 + 17x - 15$	h) $6y^2 - 17y + 12$	i) $8a^2 - 18a - 5$

2. 三項式 $21x^2 + nx + 21$ を a、b、c、d の整数を利用して$(ax + b)(cx + d)$ に因数分解できるような整数を n とします。n がなぜ偶数になるかを説明しなさい。

3. 二項式 $x + 1$ は三項式 $x^2 + mx - 2$ の因数なので、$x^2 + mx - 2 = (x + 1)(x - b)$ さらに、二項式 $2x - 1$ は三項式 $nx^2 + 5x - 4$ の因数です。以上から、$\frac{n}{m}$ を求めなさい。

1.15 因数分解の組み合わせ　第 1 部

導入問題

以下の多項式を因数分解しなさい。

a) $6x^2y - 4x^2 + 30xy - 20x$　　　　b) $6x^2y + 57xy + 27y$

解法

a) まず最初に多項式の項から共通因数を取り出します。そして次に前回までの授業で習った因数分解の方法のいずれかをあてはめます。

$$\begin{aligned}6x^2y - 4x^2 + 30xy - 20x &= 2x(3xy - 2x + 15y - 10) && \text{共通因数 } 2x\\ &= 2x[(3xy - 2x) + (15y - 10)] && \text{大括弧の中で項をくくり、}\\ &= 2x[x(3y - 2) + 5(3y - 2)] && \text{共通因数 } x \text{ と } 5 \text{ それぞれを取り出し、}\\ &= 2x(x + 5)(3y - 2) && \text{共通因数} 3y - 2 \text{を取り出します。}\end{aligned}$$

よって、$6x^2y - 4x^2 + 30xy - 20x = 2x(x + 5)(3y - 2)$

b) 前の問と同じように、多項式の項から共通因数を取り出し、それから前回までの授業でならった方法で因数分解をします。

$$6x^2y + 57xy + 27y = 3y(2x^2 + 19x + 9) \qquad \text{共通因数 } 3y$$

たすきがけを使って $2x^2 + 19x + 9$ を因数分解 します。

$$\begin{array}{ccccc} 1x & & 9 & \rightarrow & 18x \\ 2x & & 1 & \rightarrow & x \\ \hline 2x^2 & & 9 & & 19x \end{array}$$

よって、$6x^2y + 57xy + 27y = 3y(x + 9)(2x + 1)$

全体を通して

多項式の因数分解をする際は、まず最初に共通となる単項式があるかどうか確認します。あれば、その単項式を取り出して前回までの授業で習った方法のいずれかを使って他の多項式を因数分解します。

教育省(MINED)は日常的な算数に関する一連のビデオを作製していますが、そのうちの 1 つが多項式の因数分解を紹介しています。こちらのリンクで確認できます。
https：//goo.gl/ZgJVzs

問題

1. 以下の多項式を因数分解しなさい。

a) $20xy^2 - 20xy - 15x$　　　　b) $90x^3 - 40xy^2$

c) $18x^3y + 12x^2y^2 + 2xy^3$　　　　d) $6ab^3 - 33ab^2 + 36ab$

e) $225x^3y - 180x^2y^2 + 36xy^3$　　　　f) $3a^2bc + 6a^2bd + 15a^2b - 2a^2c - 4a^2d - 10a^2$

2. 多項式 $(x + 1)(x - 3y + 4)^2 - (x + 1)(2x + y - 5)^2$ を因数分解しなさい。

ここでは計算をせず、共通因数を特定しなさい。

1.16 因数分解の組み合わせ 第 2 部

導入問題

以下の多項式を因数分解しなさい。

a) $ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 - 2axy - 2bxy$　　b) $2mx^2 - 2nx^2 + 5mx - 5nx - 3m + 3n$

解法

a) 多項式の項には共通因数がありませんが、共通因数をもつものとしてそれらの項をくくって共通因数を取り出すことができます。つまり、

$$ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 - 2axy - 2bxy = (ax^2 + ay^2) + (bx^2 + by^2) + (-2axy - 2bxy)$$

項を括弧でくくります。

$$= a(x^2 + y^2) + b(x^2 + y^2) - 2xy(a + b)$$

$$= (a + b)(x^2 + y^2) - 2xy(a + b)$$

それぞれの共通因数を取り出します。

次に多項式 $a + b$の共通因数を取り出し、二つ目の因数を因数分解します。

$$ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 - 2axy - 2bxy = (a + b)(x^2 + y^2 - 2xy)$$

$$= (a + b)(x^2 - 2xy + y^2)$$

$$= (a + b)(x - y)^2$$

共通因数 $a + b$ を取り出し、項を整理し、$x^2 - 2xy + y^2$ を因数分解します。

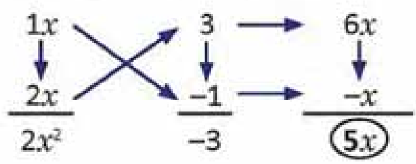
よって、$ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 - 2axy - 2bxy = (a + b)(x - y)^2$

b) 前の問題と同じように、共通因数をもつ項をくくり、その因数を取り出します。

$$2mx^2 - 2nx^2 + 5mx - 5nx - 3m + 3n = 2x^2(m - n) + 5x(m - n) - 3(m - n)$$

$$= (2x^2 + 5x - 3)(m - n)$$

$2x^2 + 5x - 3$ をたすきがけを使って因数分解します。



したがって、$2x^2 + 5x - 3 = (x + 3)(2x - 1)$、$2mx^2 - 2nx^2 + 5mx - 5nx - 3m + 3n = (x + 3)(2x - 1)(m - n)$

全体を通して

多項式を因数分解する際に、共通となる単項式の項がない場合は、共通因数があるものとして項をくくり、共通因数となる多項式を取り出し、今まで学習した方法のいずれかを使って残りの項を因数分解します。

また、多項式で共通因数をもたない項でも因数分解をしやすいように項をくくることができます。

問題

以下の多項式を因数分解しなさい。

a) $4a^2x + 4a^2y - b^2x - b^2y$

b) $2cm^2 + dm^2 + 50cn^2 + 25dn^2 + 20cmn + 10dmn$

c) $4a^2x - 12abx + 9b^2x - 8a^2y + 24aby - 18b^2y$

d) $(a + b)(c - d)^2 + 2(a + b)(c - d)(2c + 3d) + (a + b)(2c + 3d)^2$

1.17 復習問題

1. 以下の多項式（共通因数）を因数分解しなさい。

a) $4x^2y^2 + 6x^2y - 10xy$
b) $-15a^2b^2 + 12b^3 - 21b^2$
c) $-2a^2b^2c^2 - 20ab^2c - 10abc$
d) $\frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}xy - \frac{1}{8}x$
e) $2ax + bx + 6ay + 3by$
f) $3mx - 2my - 12nx + 8ny$
g) $5ax - 2bx + \frac{5}{3}ay - \frac{2}{3}by$
h) $2mx + 4nx - 3my - 6ny + 5m + 10n$

2. 以下の $(x + a)(x + b)$ 型の三項式を因数分解しなさい。

a) $x^2 - 17x + 70$
b) $y^2 + 3y - 40$
c) $a^2 - 3a - 54$
d) $b^2 + 14b + 33$
e) $m^2 + 2m - 35$
f) $n^2 - 8n - 20$
g) $4x^2 + 24x + 35$
h) $4y^2 - 24y + 27$
i) $9a^2 - 3a - 20$

問 2 では、設問 g)、h)、i)で は、多項式が $m^2 + pm + q$ の形になるように変数を代入して $(m + a)(m + b)$ の形に因数分解します。

3. 以下の多項式を因数分解しなさい（二乗の三項式と二乗の差）

a) $x^2 + 18x + 81$
b) $y^2 - 20y + 100$
c) $a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{16}$
d) $b^2 - 16$
e) $y^2 - 121$
f) $\frac{1}{49} - a^2$
g) $25x^2 + 30xy + 9y^2$
h) $\frac{9}{4}a^2 - \frac{25}{49}b^2$
i) $900x^2 - \frac{121}{100}y^2$

4. たすきがけを使って因数分解しなさい。

a) $2x^2 + 19x + 45$
b) $3y^2 + 26y + 16$
c) $5a^2 - 27a - 18$
d) $3a^2 - 10a + 8$
e) $5b^2 + 13b - 6$
f) $10a^2 - 23a - 5$
g) $12y^2 - 23y + 5$
h) $8x^2 + 10x - 25$
i) $6x^2 + 11x + 4$

5. 以下の多項式を因数分解しなさい。

a) $4x^3y - 100xy^3$
b) $5m^3 + 15m^2 - 350m$
c) $75a^3b - 60a^2b^2 + 12ab^3$
d) $-96x^3y - 144x^2y^2 - 54xy^3$
e) $4xy^3 - 26xy^2 + 42xy$
f) $60a^2m - 80a^2n + 30abm - 40abn$

6. 展開せずに以下の多項式を因数分解しなさい。

a) $(5x - 2y + 9)^2 - (x - 8)^2$
b) $(a + 7)^2 + 2(a + 7)(b - 6) + (b - 6)^2$
c) $(2y + 3)^2 + 3(2y + 3) - 28$
d) $(6y - 1)^2 - 5(6y - 1) - 14$
e) $4(m + n)^2 - 4(m + n)(n - 2) + (n - 2)^2$
f) $3(4x + 1)^2 + 11(4x + 1) - 20$

7. 多項式 $amx + anx + amy + any + bmx + bnx + bmy + bny$ を因数分解しなさい。

8. 因数分解を使って以下の式を解きなさい。

a) $999^2 - 1$
b) $550^2 - 450^2$
c) $98^2 + 4(98) + 4$
d) $995^2 + 3(995) - 10$

2.1 単項式による多項式の除算

導入問題

次の割り算を解きましょう。

a) $(20xy + 16x - 4y) \div 4$　　　b) $(12ab - 21b^2) \div (3b)$

多項式をある数で割る除算を解くには、多項式の各項にその割る数の逆数を掛けて解きましょう。

解法

a) 割り算を、除数の逆数との掛け算に直して解きます。つまり、

$$\begin{aligned}(20xy + 16x - 4y) \div 4 &= (20xy + 16x - 4y)\left(\frac{1}{4}\right)\\ &= 20xy\left(\frac{1}{4}\right) + 16x\left(\frac{1}{4}\right) - 4y\left(\frac{1}{4}\right)\\ &= 5xy + 4x - y\end{aligned}$$

したがって、$(20xy + 16x - 4y) \div 4 = 5xy + 4x - y$ となります。

b) 前の文字式では、割り算 $(12ab - 21b^2) \div (3b)$ は、$12ab - 21b^2$ に $3b$ の逆数を掛ける掛け算と等しいので、次のようになります。

$$\begin{aligned}(12ab - 21b^2) \div (3b) &= (12ab - 21b^2)\left(\frac{1}{3b}\right)\\ &= 12ab\left(\frac{1}{3b}\right) - 21b^2\left(\frac{1}{3b}\right)\\ &= \frac{\overset{4}{\cancel{12}}a\cancel{b}}{\cancel{3b}} - \frac{\overset{7}{\cancel{21}}\overset{b}{\cancel{b^2}}}{\cancel{3b}}\\ &= 4a - 7b\end{aligned}$$

$$\frac{b^2}{b} = \frac{\cancel{b}(b)}{\cancel{b}} = b$$

そして、$(12ab - 21b^2) \div (3b) = 4a - 7b$ となります。

一般的に

多項式を単項式で割るためには、多項式の各項にその単項式の逆数を掛けて解き、その結果を約分します。

例

割り算 $(15x^2y^2 - 40x^2y - 25xy) \div (-5xy)$ を解きます。

結論で学んだことを応用します。

$$\begin{aligned}(15x^2y^2 - 40x^2y - 25xy) \div (-5xy) &= 15x^2y^2\left(-\frac{1}{5xy}\right) - 40x^2y\left(-\frac{1}{5xy}\right) - 25xy\left(-\frac{1}{5xy}\right)\\ &= -\frac{\overset{3}{\cancel{15}}\overset{x}{\cancel{x^2}}\overset{y}{\cancel{y^2}}}{\underset{1}{\cancel{5xy}}} + \frac{\overset{8}{\cancel{40}}\overset{x}{\cancel{x^2}}\cancel{y}}{\underset{1}{\cancel{5xy}}} + \frac{\overset{5}{\cancel{25xy}}}{\underset{1}{\cancel{5xy}}}\\ &= -3xy + 8x + 5\end{aligned}$$

したがって、$(15x^2y^2 - 40x^2y - 25xy) \div (-5xy) = -3xy + 8x + 5$ となります。

問題

以下の割り算を解きましょう。

a) $(-8abc + 22a^2 - 18a) \div (2a)$

b) $(18xyz + 24x^2yz) \div (3xyz)$

c) $(-10a^2b^2 + 45a^2bc - 20abc) \div (-5ab)$

d) $(4x^2y^2z^2 - 40x^2y^2z - 32xy^2z^2) \div (-4xyz)$

e) $(8a^2b + 12ab^2) \div (10ab)$

f) $(-14xyz^2 + 15xy^2z^2 - 18xyz) \div (-6xy)$

g) $(-2ab^2 + 5ab^3) \div \left(\frac{1}{2}b\right)$

h) $(9xyz - 2xy) \div \left(-\frac{3}{2}xy\right)$

2.2 多項式による多項式の割り算

定義

変数が 1 つの多項式 p と q があり、そして多項式 d と r があり、次のようになります。

$$p = qd + r$$

ここで、r はゼロか、または r の次数は q の次数よりも小さいです。数の割り算と同じように、多項式 **p が被除数、q が除数、d が商で、多項式 r は、p を qで除した時の剰余です。**

多項式を除す手順は次のようになります。

1. 割り算を縦型に書き、被除数と除数をそれぞれの次数の高い順に項を並べます。次数が無い項の場合は、該当する位置にゼロと書きます。

基礎教育では、数の割り算の学習は次のように縦型に書いて行いました。

$$\begin{array}{c|c} \text{被除数} & \text{除数} \\ \cline{2-2} \text{剰余} & \text{商} \end{array}$$

2. 被除数の 1 番目の項を除数の 1 番目の項で割って、商の 1 番目の項を得ます。
3. ステップ2で得られた商と、除数の各項を掛けます。次に、その結果を被除数から引きます。
4. このプロセスを繰り返しますが、今度はステップ3で得た結果を被除数として扱います。
   これを、被除数の多項式の次数が除数のそれよりも小さくなるまで繰り返します。

この手順は、**筆算**という呼び方で知られています。

例 1

次の割り算を解きましょう。$(x^3 + 3x^2 - 5x - 4) \div (x + 2)$ そして被除数を、$qd + r$ の形で書きましょう。

被除数の各項は、既に次数の高い順に並べられています。割り算 $(x^3 + 3x^2 - 5x - 4) \div (x + 2)$ を、数の割り算と同様に、縦型に書きます。

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 - 5x - 4 & x + 2 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

被除数の 1 番目の項を除数の 1 番目の項で割ります。つまり、$x^3 \div x$ を解き、商の 1 番目の項を得ます。

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 - 5x - 4 & x + 2 \\ \cline{2-2} & x^2 \end{array}$$

$x^3 \div x$ の結果

除数に、商の 1 番目の項を掛けます。つまり、$(x + 2)(x^2) = x^3 + 2x^2$ となります。この結果を、被除数から引きます。

$x^3 + 2x^2$ を被除数から引くということは、これらの項の符号は変わります。

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^3} + 3x^2 - 5x - 4 & x + 2 \\ \cline{2-2} -\cancel{x^3} - 2x^2 & x^2 \\ \cline{1-1} 0 + x^2 - 5x - 4 & \end{array}$$

$x^2 - 5x + 4$ を被除数として、同じ手順をくり返します。

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 - 5x - 4 & x + 2 \\ \cline{2-2} -x^3 - 2x^2 & x^2 + x \\ \cline{1-1} 0 + \cancel{x^2} - 5x - 4 & \\ -\cancel{x^2} - 2x & \\ \cline{1-1} 0 - 7x - 4 & \end{array}$$

$x^2 \div x$ の結果

$(x + 2)(x)$ の結果を、$x^2 - 5x + 4$ から引きます。

今度は、$-7x-4$ を被除数として扱います。

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +3x^2 & -5x & -4 & x+2 \\ \cline{5-5}
-x^3 & -2x^2 & & & x^2+x-7 \\ \cline{1-2}
0 & +x^2 & -5x & -4 & \\
 & -x^2 & -2x & & \\ \cline{2-3}
 & 0 & -\cancel{7x} & -4 & \\
 & & +\cancel{7x} & +14 & \\ \cline{3-4}
 & & 0 & +10 &
\end{array}
$$

$(-7x) \div x$ の結果

$(x+2)(-7)$ の結果を、$-7x-4$ から引きます。

計算式 $(x+2)(x^2+x-7)+10$ を展開して、割り算が正しく解かれたかを確認することができます。

よって、$x^3-3x^2-5x-4 = (x+2)(x^2+x-7)+10$ となります。

例 2

割り算 $(2x^3-20x-50) \div (x^2+x-4)$ を解きましょう。被除数を、$qd+r$ の形で書きましょう。

被除数は、x^2 の項を含んでいません。そういう時は、縦型の割り算を行うにあたって、その項があるべき位置にゼロと書きます。

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3+0x^2-20x-50 & x^2+x-4 \\ \cline{2-2}
\end{array}
$$

そして、前の例で見た手順で解きます。

$$
\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{2x^3} & +0x^2 & -20x & -50 & x^2+x-4 \\ \cline{5-5}
-\cancel{2x^3} & -2x^2 & +8x & & 2x-2 \\ \cline{1-3}
0 & -\cancel{2x^2} & -12x & -50 & \\
 & \cancel{2x^2} & +2x & -8 & \\ \cline{2-4}
 & 0 & -10x & -58 &
\end{array}
$$

$2x^3-20x-50$ から $(x^2+x-4)(2x)$ を引きます。

$-2x^2-12x-50$ から $(x^2+x-4)(-2)$ を引きます。

$(2x^3) \div x^2$ の結果

$(-2x^2) \div x^2$ の結果

したがって、$2x^3-20x-50 = (x^2+x-4)(2x-2)-10x-58$ となります。

問題

1. 以下の割り算を解きましょう。そして被除数を、$qd+r$ の形に書きましょう。

a) $(x^3+x^2-5x+7) \div (x+3)$

b) $(x^3+2x^2-5x+7) \div (x-1)$

c) $(x^3+4x^2-8x-16) \div (x+5)$

d) $(x^3-6x^2+4x+19) \div (x-3)$

e) $(x^3+3x+9) \div (x+2)$

f) $(x^3-7x^2+11) \div (x-2)$

g) $(x^3+5x^2+5x+3) \div (x^2+4x+1)$

h) $(x^3+x^2-12x+2) \div (x^2+3x-6)$

i) $(x^3-5x^2+5x-1) \div (x-1)$

j) $(x^3+4x^2-6x-5) \div (x+5)$

k) $(2x^3-3x^2-x-2) \div (2x^2+x+1)$

l) $(3x^3+2x^2-2x-1) \div (3x^2-x-1)$

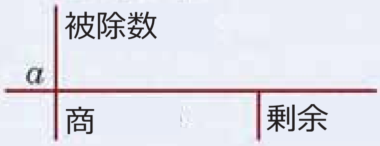
2. $(x^3+2x^2-x+a) \div (x-2)$ で、この割り算の剰余がゼロになるための a の値を求めましょう。

3. 割り算 $(2x^4+6x^3-x^2+3x-1) \div (2x^2+1)$ を解きましょう。

2.3 組立除法、第 1 部

定義

組立除法は、変数が 1 つの多項式の割り算を行うための方法です。そして、除数の多項式が $x-a$ の形を持つときに使用されます。この方法では、次の図式に沿って解きます。



この方法は、m$x-a$ の形の多項式を割る時にも機能します。
この場合、
a の位置に数字 $\frac{a}{m}$ と書きます。

手順は次の通りです。

1. 被除数の項を次数の高い順に並べます。次に、「被除数」と呼ばれている部分に、係数を取り出して横に並べます。
2. 被除数の 1 番目の係数を、「商」と呼ばれている部分に書きます。そして次に、その数と a の値とを掛けて、その結果を被除数の 2 番目の係数の下に書きます。
3. ステップ 2 の数を足し、その結果は商の 2 番目の係数になります。
4. 被除数の定数項の下に書く数を得るまで、この手順を繰り返します。
5. 剰余は、最後の縦の係数を足して得ます。剰余の左の部分に書かれている数は、商の多項式の係数に該当します。それらの各項の次数は、被除数の次数よりも 1 小さくなります。

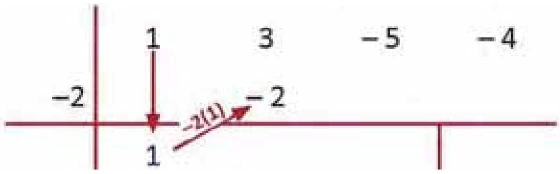
例

$(x^3+3x^2-5x-4) \div (x+2)$ を解くために、組立除法を使いましょう。被除数を、$qd+r$ の形で書きましょう。

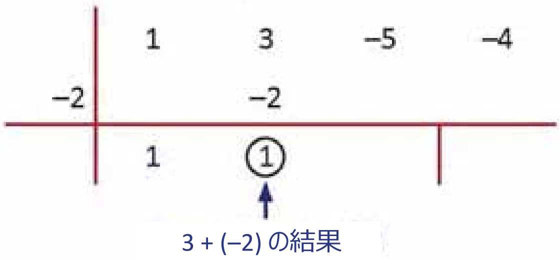
$x+2=x-(-2)$、つまり、$a=-2$

定義で示された図式によると、被除数の多項式の係数を、その順番通りに横並べて書きましょう。$a=-2$ の数値を代入しましょう。

被除数の1番目の係数を、「商」と呼ばれている部分に書きましょう（これは、商の多項式の中で変数に対する冪（べき）指数が最も高い項の係数となります）。この数に −2 を掛けて、その結果を被除数の 2 番目の係数の下に書きましょう。つまり、3 の下です。



足し算 3 + (−2) を解き、その結果が商の 2 番目の数になります。



この手順を繰り返しますが、今度は商の2番目の数に –2 を掛け、その結果を –5 の下に書き、その2つの数を足しましょう。

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 3 & -5 & -4 \\ -2 & & -2 & -2 & \\ \hline & 1 & 1 & -7 & \end{array}$$

–5 + (–2) の結果

–2 に –7 を掛け、その結果を –4 の下に書き、その 2 つの数を足しましょう。

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 3 & -5 & -4 \\ -2 & & -2 & -2 & 14 \\ \hline & 1 & 1 & -7 & 10 \end{array}$$

–4 + 14 の結果

この最後の結果 10 は、割り算の剰余に相当します。1、 1 と –7、この 3 つの数は、商の多項式の係数です。そしてその多項式の次数は 2 です。なぜならば、被除数は 三次の多項式だからです。すなわち、商の多項式は $x^2 + x - 7$ となります。

よって、$x^3 + 3x^2 - 5x - 4 = (x + 2)(x^2 + x - 7) + 10$ となります。

組立除法は、イタリア人数学者パオロ・ルフィニ (1765 - 1822) に因んで、**ルフィニの方法**または**ルフィニのルール**とも呼ばれています。 彼はその他にもイタリアのモデナ大学で、 医学、哲学および文学の研究を行いました。組立除法で得られた結果が筆算で得られた結果と同じであることことが確認できます。

問題

以下の割り算を解きましょう。そして被除数を、$qd + r$ の形に書きましょう。

a) $(x^3 - 12x^2 + 23x - 5) \div (x - 3)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -12 & 23 & -5 \\ 3 & & 3 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

b) $(x^3 + 9x^2 - 13x - 4) \div (x - 1)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 9 & -13 & -4 \\ 1 & & 1 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

c) $(x^3 - 4x^2 - 11x - 2) \div (x + 1)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -4 & -11 & -2 \\ -1 & & -1 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

d) $(x^3 - 2x^2 - 31x + 20) \div (x + 5)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -2 & -31 & 20 \\ -5 & & -5 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

e) $(2x^3 - 3x^2 - 4x - 1) \div (x - 2)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -3 & -4 & -1 \\ 2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

f) $(3x^3 - 11x^2 - 5x + 4) \div (x - 4)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 3 & -11 & -5 & 4 \\ & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

2.4 組立除法、第 2 部

導入問題

割り算 $(x^3-8) \div (x-2)$ を解きましょう。被除数を、$qd+r$ の形に書きましょう。

次数が無い項にはゼロと書きましょう。

解法

多項式 x^3-8 には、変数 x^2 と x を含む項がありません。そんな時は、該当する位置にゼロと書きましょう。

$$(x^3+0x^2+0x-8) \div (x-2)$$

組立除法を使用すると、次の図式が得られます。

	1	0	0	−8
2		2	4	8
	1	2	4	0

除数の多項式は x^2+2x+4 で、剰余はゼロです。よって、$(x^3-8)=(x-2)(x^2+2x+4)$ となります。

一般的に

1 つの変数を含む 2 つの多項式の割り算を解くためには、被除数と除数は常に、次数の高い項の順に並べられていなければなりません。
次数が無い項の場合は、該当する位置にゼロと書きましょう。

除数の形が $x-a$ である場合は、組立除法を使いましょう。その他の全てのケースでは筆算を使いましょう。

例

割り算 $(x^2-2x^3-20) \div (3+x)$ を解きましょう。被除数を、$qd+r$ の形に書きましょう。

被除数と除数のそれぞれの項を次数の高い順に並べ、次数が無い項の係数の位置にはゼロと書きましょう。

$$(-2x^3+x^2+0x-20) \div (x+3)$$

除数の多項式が $x-a$ の形なので、組立除法を使いましょう。そして、$a=-3$ です。

	−2	1	0	−20
−3		6	−21	63
	−2	7	−21	43

よって、$-2x^3+x^2+0-20=(x+3)(-2x^2+7x-21)+43$ となります。

問題

1. 以下の割り算を解きましょう。そして被除数を、$qd+r$ の形に書きましょう。

a) $(x^3-40x+12) \div (x-6)$

b) $(2x^3-65x-45) \div (x+5)$

c) $(x^3-50) \div (x-4)$

d) $(7x-2x^3-5) \div (x+2)$

e) $(10x^2-10-3x^3) \div (-3+x)$

f) $\left(x^3+\frac{1}{8}\right) \div \left(x+\frac{1}{2}\right)$

2. $(x^3-27) \div (x-a)$ で、この割り算の剰余がゼロになるための a の値を見つけ出しましょう。

2.5 留数定理

導入問題

$p = 2x^3 - 9x^2 - 6x + 7$ と $q = x - 5$ の多項式があります。

1. 割り算 $p \div q$ の剰余を求めましょう。
2. 多項式 p に $x = 5$ を代入しましょう。これは、何の結果と同じですか？

解法

1. 組立除法を使用すると：

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & -9 & -6 & 7 \\
5 & \downarrow & 10 & 5 & -5 \\
\hline
 & 2 & 1 & -1 & 2
\end{array}
$$

$p \div q$ を解くと、剰余は 2 です。

2. 多項式 p に $x = 5$ を代入すると、次のようになります。

$$
\begin{aligned}
2(5)^3 - 9(5)^2 - 6(5) + 7 &= 2(125) - 9(25) - 30 + 7 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

この結果が、割り算 $p \div q$ の剰余です。

p、q、d と r は、1 つの変数 x を含む多項式で、$p = qd + r$ そして、$q = x - a$ です。なので：

$$p = (x - a)d + r$$

p に $x = a$ を代入するということは、$(x - a)d + r$ に $x = a$ を代入するのと同じことで、その結果は r です。

$$(a - a)d + r = (0)d + r =$$

すなわち、多項式の割り算 $p \div q$ を解くということは、多項式 p に $x = a$ を代入するのと同じことです。

定理

p と q は、変数 1 つを含む2つの多項式で、q の形は $x - a$ です。割り算 $p \div q$ を解いた時の剰余は、p の $x = a$ を置き換えた時に得る値と同じです。この結果は、**留数定理**と呼ばれています。

例

割り算 $(x^3 + 8x^2) \div (x + 7)$ を解いた時に得る剰余を求めましょう。

この定理を使用すると、剰余は、$x^3 + 8x^2$ に $x = -7$ を代入して得る値と同じです。つまり：

$$
\begin{aligned}
x^3 + 8x^2 &= (-7)^3 + 8(-7)^2 \\
&= -343 + 392 \\
&= 49
\end{aligned}
$$

よって、割り算 $(x^3 + 8x^2) \div (x + 7)$ の剰余は 49 です。

問題

1. 以下の割り算を解いた時に得る剰余を求めましょう。

a) $(3x^3 - 2x^2 + x - 2) \div (x - 1)$
b) $(x^3 + 2x^2 - 14x + 2) \div (x - 2)$
c) $(-x^3 + 9x^2 + 7x + 15) \div (x - 10)$
d) $(3x^3 - 5x) \div (x + 1)$
e) $(2x^3 - 4x^2 - 21x + 30) \div (x + 3)$
f) $(x^3 - 7x^2 + 55) \div (x + 1)$
g) $(x^3 - x^2 + x) \div \left(x - \frac{1}{2}\right)$
h) $(x^3 - x - 1) \div \left(x + \frac{1}{3}\right)$

2. 各ケースで、割り算 $p \div q$ の剰余がゼロになるための a の値を求めましょう。

a) $p = x^3 - 4ax + 3,\ q = x - 1$
b) $p = -x^3 + ax^2 - ax + a^2,\ q = x - 2$

2.6 因数定理を使った因数分解、第 1 部

導入問題

$p = x^3 + 4x^2 + x - 6$ があります。

1. 多項式 p に $x = 1$ を代入すると、得られる値はゼロであることを確認しましょう。
2. 多項式 p を因数分解しましょう。

p を $x - 1$で割ると、剰余はどうなりますか？

解法

1. 多項式 p に $x = 1$ を代入すると、次のようになります。

$$(1)^3 + 4(1)^2 + 1 - 6 = 1 + 4 - 5 = 0$$

つまり、$x = 1$ の時は、p の値はゼロだということです。

2. 留数定理を使って、文字式 a) の結果に基づいて、多項式 p を $x - 1$で割ると、剰余はゼロになります。そうすると、p は $(x - 1)d$ の形で書くことができます。ここで、d は次数が 2 の多項式となります（なぜならば、積の次数は 3 だからです）。多項式 d を導き出すためには、$p \div (x - 1)$ を解きましょう。

	1	4	1	−6
1		1	5	6
	1	5	6	0

すなわち、$d = x^2 + 5x + 6$ で、これは $(x + 3)(x + 2)$ に因数分解できます。よって、

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1)(x + 3)(x + 2).$$

定理

ある多項式 p もしも $x = a$ を代入した時に、p の値がゼロになれば、p は $(x - a)d$ の形に書くことができます。ここで d は、p の次数よりも 1 小さい次数の多項式です。この結果は、**因数定理**として知られています。

例

$p = x^3 - 7x + 6$ があります。もしも $x = -3$ であれば、$p = 0$ で、それを、多項式 p を因数分解するために使います。

p に $x = -3$ を代入すると、次のようになります。

$$(-3)^3 - 7(-3) + 6 = -27 + 21 + 6 = 0.$$

因数定理によって、p は $(x + 3)d$ の形に書けます。d を導き出すために、組立除法を使いましょう。

	1	0	−7	6
−3		−3	9	−6
	1	−3	2	0

そして、$d = x^2 - 3x + 2$ を因数分解すると、$(x - 1)(x - 2)$ の積になります。よって、

$$x^3 - 7x + 6 = (x + 3)(x - 1)(x - 2).$$

問題

各ケースで、$x = a$ であれば、多項式 p の値はゼロであることを確かめ、次に p を因数分解しましょう。

a) $p = x^3 + 2x^2 - x - 2;\ a = 1$

b) $p = x^3 + 6x^2 + 11x + 6;\ a = -1$

c) $p = x^3 + 2x^2 - 5x - 6;\ a = 2$

d) $p = x^3 - 5x^2 - 2x + 24;\ a = -2$

e) $p = x^3 - 21x - 20;\ a = -4$

f) $p = x^3 - 9x^2 + 23x - 15;\ a = 5$

2.7 因数定理を使った因数分解、第 2 部

導入問題

$p = x^3 - 19x - 30$ があります。

1. 定数項の約数（正と負）を求めましょう。
2. それらの中のどれの時に p がゼロに等しいかを特定しましょう。そして、多項式 p を因数分解しましょう。

解法

1. 定数項 –30 の約数は、±1、±2、±3、±5、±6、±10、±15 と ±30 です（「±」は、正と負の約数を示すためです）。30 をその素数に分解することで、これらが求められます。

2. 多項式 p の x の値に前の文字式で得られた数を代入すると、次のようになります。

   a) もしも $x = 1$ であれば、$(1)^3 - 19(1) - 30 = -48$ となります。
   b) もしも $x = -1$ であれば、$(-1)^3 - 19(-1) - 30 = -12$ となります。
   c) もしも $x = 2$ であれば、$(2)^3 - 19(2) - 30 = -60$ となります。
   d) もしも $x = -2$ であれば、$(-2)^3 - 19(-2) - 30 = 0$ となります。

   因数定理によって、多項式 p は $(x + 2)d$ の形に書くことができます。d を求めるためには、組立除法を使用します。

	1	0	−19	−30
−2		−2	4	30
	1	−2	−15	0

すると $d = x^2 - 2x - 15$ となり、これは $(x + 3)(x - 5)$ に因数分解できます。よって、

$$x^3 - 19x - 30 = (x + 2)(x + 3)(x - 5).$$

まとめ

$p = x^3 + mx^2 + nx + k$ があります。p を $(x - a)d$ の形に書くことを可能にし得る a の値は、定数項 k の約数です。

すなわち、$p = x^3 + mx^2 + nx + k$ を因数分解するには、次のことを行いましょう。

1. 定数項の約数（正と負）を求めましょう。
2. それらの中のどれによって多項式 p の値がゼロに等しくなるかを特定しましょう。
3. p を $(x - a)d$ の形に書くために割り算を行いましょう。ここで d は、次数が 2 の多項式です。
4. これまでの授業で学習した何れかの方法を使って、d を因数分解しましょう。

問題

1. 以下の多項式を因数分解しましょう。

   a) $x^3 - 2x^2 - x + 2$　　b) $x^3 + 2x^2 - x - 2$　　c) $x^3 + x^2 - 14x - 24$
   d) $x^3 - 5x^2 - 9x + 45$　　e) $y^3 - 4y^2 + y + 6$　　f) $y^3 - 3y^2 - 4y + 12$

2. $(x + 10)^3 + 1$を因数分解しましょう。　$x + 10$ を y に置き換えましょう。

3. 多項式 $x^3 - 13x - 12$ の因数の和を求めましょう。

2.8 連続した因数分解

導入問題

以下の多項式を因数分解しましょう。

a) $x^3y^2 - 2x^2y^2 - 9xy^2 + 18y^2$　　b) $n^3x^2 - n^3y^2 - 3n^2x^2 + 3n^2y^2 + 4x^2 - 4y^2$

解法

a) まず、多項式の各項の共通因数をくくり出しましょう。この場合は、y^2 です。

$$x^3y^2 - 2x^2y^2 - 9xy^2 + 18y^2 = (x^3 - 2x^2 - 9x + 18)y^2$$
$$= y^2(x^3 - 2x^2 - 9x + 18)$$

$x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ を、因数定理と組立除法を使用して、因数分解しましょう。
この場合、$x = 2$ の時に、多項式はゼロとなります。

$$(2)^3 - 2(2)^2 - 9(2) + 18 = 8 - 8 - 18 + 18 = 0$$

	1	−2	−9	18
2		2	0	−18
	1	0	−9	0

すると、$x^3y^2 - 2x^2y^2 - 9xy^2 + 18y^2 = y^2(x - 2)(x^2 - 9)$ になります。3 番目の因数 $x^2 - 9$ は、二乗数同士の引き算で、それは掛け算 $(x + 3)(x - 3)$ に因数分解できます。よって、

$$x^3y^2 - 2x^2y^2 - 9xy^2 + 18y^2 = y^2(x - 2)(x + 3)(x - 3).$$

b) 全ての項に共通因数があるわけではありません。なので、それを含む各項を組み合わせて多項式の共通因数をくくり出しましょう。

$$n^3x^2 - n^3y^2 - 3n^2x^2 + 3n^2y^2 + 4x^2 - 4y^2 = n^3(x^2 - y^2) - 3n^2(x^2 - y^2) + 4(x^2 - y^2)$$
$$= (n^3 - 3n^2 + 4)(x^2 - y^2)$$

多項式 $n^3 - 3n^2 + 4$ を、因数定理と組立除法を使用して、因数分解しましょう。これは、$n = -1$ の時にゼロになります。

	1	−3	0	4
−1		−1	4	−4
	1	−4	4	0

すると、$n^3x^2 - n^3y^2 - 3n^2x^2 + 3n^2y^2 + 4x^2 - 4y^2 = (n + 1)(n^2 - 4n + 4)(x^2 - y^2)$ となります。因数 $n^2 - 4n + 4$ は、完全平方三項式で、それを因数分解すると $(n - 2)^2$ になり、$x^2 - y^2$ は 二乗数同士の引き算で因数分解でき、$(x - y)(x + y)$ となります。よって、

$$n^3x^2 - n^3y^2 - 3n^2x^2 + 3n^2y^2 + 4x^2 - 4y^2 = (n + 1)(n - 2)^2(x - y)(x + y).$$

一般的に

多項式 p を因数分解するには、多項式の各項の共通因数をくくり出して、2 番目の因数を因数分解します。
もしも全ての項には共通因数が無いのであれば、それを含む項を適切に組み合わせてから、これまでの授業で学習した方法の何れかを使用して因数分解します。この手順を、元の多項式が、最も簡単な数式の多項式の掛け算で表現できるまで繰り返します。

問題

以下の多項式を因数分解しましょう。

a) $3xy^3 + 15xy^2 + 9xy - 27x$　　b) $2abc^3 + 2abc^2 - 50abc - 50ab$

c) $m^3n^2 - 4m^2n^2 - 11mn^2 + 30n^2$　　d) $4x^3y^2 - 16x^2y^2 - 12xy^2 + 72y^2 - x^3 + 4x^2 + 3x - 18$

2.9 復習問題

1. 以下の割り算を解きましょう。

a) $(x^2y - xy^2 + y^3) \div (-y)$

b) $(24m^2n^2 + 30mn^2 - 15mn) \div (3mn)$

c) $(-a^3b^2 + 2a^2b^2 - 5ab^2) \div (-ab^2)$

d) $(35x^3y^3z^3 - 25x^3y^2z^2 - 45x^2y^2z^3) \div (5x^2y^2z^2)$

e) $(m^3n + m^3n^2 - 3m^2n^2) \div \left(\frac{1}{3}m^2n\right)$

f) $(2x^3y^2 - 3x^2y^2 - 5xy) \div \left(-\frac{2}{3}xy\right)$

2. 筆算を使って、以下の割り算を解きましょう。そして被除数を $qd + r$ の形に書きましょう。

a) $(2x^3 + 3x^2 + 9) \div (x + 2)$

b) $(2x^3 - 7x^2 - 3x + 2) \div (x - 4)$

c) $(2y^3 - 13y^2 + 14y + 2) \div (y - 5)$

d) $(2y^3 + 5y^2 - 8y - 6) \div (2y + 1)$

e) $(3x^3 + 11x^2 - x - 3) \div (x^2 + 4x + 1)$

f) $(5y^3 - 8y^2 - 14y + 4) \div (y^2 - 2y - 2)$

3. 以下の割り算を解くために、組立除法を使いましょう。そして被除数を $qd + r$ の形に書きましょう。

a) $(x^3 - 9x^2 + 21x + 2) \div (x - 4)$

b) $(y^3 - 3y^2 - 6y - 11) \div (y - 5)$

c) $(2m^3 + 4m^2 + 3m + 8) \div (m + 3)$

d) $(3n^3 + 4n^2 - 6n - 7) \div (n + 2)$

e) $(a^3 - 37a - 1) \div (a - 6)$

f) $(b^3 + 8b^2 - 29) \div (b + 7)$

g) $(2x^3 + 1) \div (x - 1)$

h) $(y^3 + 2y^2 - y + 1) \div \left(y - \frac{1}{2}\right)$

i) $(x^3 + x^2 + x - 1) \div \left(x + \frac{1}{3}\right)$

j) $\left(y^3 + \frac{1}{27}\right) \div \left(y + \frac{1}{3}\right)$

4. 以下の割り算を解いた時に得る剰余を求めましょう。

a) $(x^3 + x^2) \div (x - 2)$

b) $(8y^3 - 5y) \div (y + 1)$

c) $(5m^3 + 11m^2 - 9) \div (m + 2)$

d) $(n^3 - 13n^2 + 29n + 10) \div (n - 3)$

e) $(y^3 + 4y^2 - 6y - 6) \div (y + 5)$

f) $\left(x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x - 1\right) \div \left(x - \frac{1}{2}\right)$

5. k を整数とします。各ケースで、割り算 $p \div q$ の剰余がゼロになるための k の値を求めましょう。

a) $p = kx^3 + (k + 1)x^2 + (k - 4)x - 2;\ q = x + 1$

b) $p = x^3 + (k - 3)x^2 + (k + 4)x - 6k;\ q = x - 3$

c) $p = x^3 - k^2x^2 + 2kx + k - 1;\ q = x - 1$

d) $p = k^2x^3 + (k + 1)x^2 - 7x + 3k;\ q = x + 2$

6. 以下の多項式を因数分解しましょう。

a) $-2xy^3 - 4xy^2 + 32xy + 64x$

b) $5x^3y^2 - 15x^2y^2 - 90xy^2 + 200y^2$

c) $-abc^3 - 9abc^2 - 11abc + 21ab$

7. 以下の多項式を因数分解しましょう。

a) $4a^3b^2 + 24a^2b^2 - 60ab^2 - 400b^2 - 9a^3 - 54a^2 + 135a + 900$

b) $(x + 1)^3 - (x + 1)^2 - 30(x + 1) + 72$

3.1 因数分解による二次方程式の解法

導入問題

次の二次方程式を因数分解で解きなさい。

a) $x^2 - 15x + 56 = 0$　　　b) $5x^2 + 11x - 12 = 0$

次のように、a と b が実数で、$ab = 0$ である場合、$a = 0$ または $b = 0$ となります。

解法

a) この多項式を因数分解するには、積が 56 に、和が -15 になる 2 つの数字を求めます（積は正の数、和は負の数になるので、2 つの数字は負の数であることが分かります）。
この 2 つの数字を求めるには、56 を前述の条件を満たす素因数の組み合わせに分解します。すると、次のようになることが確認できます。$(-8)(-7) = 56$ と $-8 - 7 = -15$ したがって、$x^2 - 15x + 56$ は、積 $(x - 8)(x - 7)$ に因数分解できます。よって、次のように計算します。

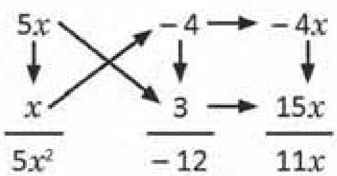
$$(x-8)(x-7) = 0$$

積が 0 なので、次のように、因数のうち 1 つは 0 と等しいことになります。

$$x - 8 = 0 \text{ または } x - 7 = 0$$

したがって、解は $x = 8$、$x = 7$

b) $5x^2 + 11x - 12$ を因数分解するには、5 と –12 を 2 つの因数に分解して、たすき掛けします。



よって、$5x^2 + 11x - 12 = (5x - 4)(x + 3) = 0$ となり、$5x - 4 = 0$ または $x + 3 = 0$ が成り立ちます。よって、$5x^2 + 11x - 12 = 0$ の解は、次のようになります。 $x = \frac{4}{5}$ または $x = -3$

定義

$ax^2 + bx + c = 0$ のような式のうち、a、b、c が実数で、$a \neq 0$ の場合、このような方程式を**二次方程式**といいます。二次方程式を因数分解をつかって解くには、$ax^2 + bx + c$ を一次二項式 2 つの積に書き換えます。因数分解後の一次二項式を解くと、どちらも 0 に等しくなります。

例

次の方程式を因数分解をつかって解きなさい。$\frac{5}{2}x^2 - 2 = -\frac{4}{3}x.$

ある式に等しい方程式を求めるとき、その係数がいずれも整数であれば、難なく因数分解できます。よって、この式の場合、両辺に 6 を掛けて整数にすると、次のような等価方程式になります。$15x^2 - 12 = -8x$ 因数分解をつかうには、方程式を 0 に等しくする必要があるので、$-8x$ を左辺に移項します。すると、方程式は次のようになります。$15x^2 + 8x - 12 = 0$ これをたすき掛けで因数分解すると、$(5x + 6)(3x - 2) = 0$ となります。よって、方程式の解は次のとおりです。 $x = -\frac{6}{5}$、 $x = \frac{2}{3}$

問題

1. 次の方程式を因数分解で解きなさい。

a) $x^2 + 2x - 15 = 0$　　b) $x^2 - 15x + 44 = 0$　　c) $x^2 + 4x + 3 = 0$

d) $x^2 + 7x - 60 = 0$　　e) $x^2 + 16x + 63 = 0$　　f) $\frac{1}{4}x^2 - x - 15 = 0$

g) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3 = 0$　　h) $3x^2 + 13x - 10 = 0$　　i) $8x^2 - 38x + 35 = 0$

j) $4x^2 + 21x - 18 = 0$　　k) $0.2x^2 + 0.3x - 0.2 = 0$　　l) $\frac{3}{5}x^2 - \frac{1}{10}x - \frac{1}{5} = 0$

2. 解が 1 と –15 になる二次方程式を求めなさい。

3.2 解の公式による二次方程式の解法

導入問題

次の二次方程式を解きなさい。

a) $2x^2 + 3x - 1 = 0$　　b) $x^2 - 2x - 6 = 0$

方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ の解は、次のとおりです。

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

解法

a) この方程式は、因数分解では解けません。このような場合、解の公式をつかって解きます。この場合は、$a = 2$、$b = 3$、$c = -1$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

よって、$2x^2 + 3x - 1 = 0$ の解は次のとおりです。

$$x = \frac{-3+\sqrt{17}}{4} \text{ および } x = \frac{-3-\sqrt{17}}{4}.$$

b) 方程式を因数分解で解こうとすると、積が -6、和が -2 になる 2 つの整数が求められないことが分かります。前回の問いと同じように、解の公式をつかうと、次のようになります。$a = 1$、$b = -2$、$c = -6$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4+24}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 1 \pm \sqrt{7}.$$

よって、$x^2 - 2x - 6 = 0$ の解は次のとおりです。

$$x = 1 + \sqrt{7} \text{ および } x = 1 - \sqrt{7}.$$

注目：$\frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{2}$ は、次のように、分子の共通因数である 2 をくり出すことができるので、約分できます。

$$\frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{2} = \frac{2(1 \pm \sqrt{7})}{2} = 1 \pm \sqrt{7}.$$

まとめ

二次方程式が因数分解で解けない場合は、解の公式をつかいます。

例

方程式 $x = 7 - \frac{4}{x}$ を解きなさい。

$x = 0$ がこの方程式の解ではないことに注目しましょう。方程式は、両辺に x をかけることで、次のように二次方程式にできます。

$$x^2 = 7x - 4 \Rightarrow x^2 - 7x + 4 = 0$$

この方程式は、因数分解では解けません。よって、解の公式をつかうと、次のようになります。

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{7 \pm \sqrt{49-16}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

よって、$x = 7 - \frac{4}{x}$ の解は次のとおりです。

$$x = \frac{7+\sqrt{33}}{2} \text{ および } x = \frac{7-\sqrt{33}}{2}.$$

問題

次の方程式を解きなさい。

a) $3x^2 + x - 1 = 0$　　b) $x^2 = -2(2x+1)$　　c) $x^2 - 3(2x+1) = 0$　　d) $2x(3-x) = 3$

e) $x = x^2 - 1$　　f) $x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{45}{4} = 0$　　g) $2x = 8 - \frac{5}{x}$　　h) $x = -3 + \frac{2}{x}$

ユニット 2

3.3 複素数の定義

定義

$i^2 = -1$ を満たす数 i を**虚数単位**といいます。つまり、次の式が成り立ちます。

$$i = \sqrt{-1}.$$

この虚数単位と 2 つの実数 a と b を用いて、$z = a + bi$ という式で表すことのできる数を**複素数**といいます。
複素数全体からなる集合、つまり $a + bi$ という式は、$\mathbb{C}$. を用いて表します。

複素数 $z = a + bi$ は、次の条件を満たします。

1. $b = 0$ のとき、z は実数です。
2. a と b が 0 ではないとき、z は**虚数**です。
3. $a = 0$、$b \neq 0$ のとき、$z = bi$ は**純虚数**です。

複素数を表すには、通常アルファベットの z と w を用います。2 つ以上の複素数が必要な場合は、z_1、z_2、z_3、z_4 などのように、添字を用います。

a を z の**実部**といい、$\mathrm{Re}(z)$ と表します。一方、b を z の**虚部**といい、$\mathrm{Im}(z)$ と表します。2 つの複素数があり、実部どうし、虚部どうしがそれぞれ等しい場合、この 2 つの複素数は等しいということになります。

例 1

次の式の $\mathrm{Re}(z)$ と $\mathrm{Im}(z)$ を求めなさい。

a) $z = 5 - 7i$

b) $z = \sqrt{2} + i$

c) $z = \dfrac{-4 + 9i}{2}$

a) $\mathrm{Re}(z) = 5$
$\mathrm{Im}(z) = -7$

b) $\mathrm{Re}(z) = \sqrt{2}$
$\mathrm{Im}(z) = 1$

c) まず、z を次のように変換します。

$$z = \frac{-4}{2} + \frac{9i}{2} = -2 + \frac{9}{2}i$$

すると、次にようになります。

$$\mathrm{Re}(z) = -2、\mathrm{Im}(z) = \frac{9}{2}$$

例 2

2 つの複素数が $z = 2x + 3i$、$w = 4 + (y - 1)i$ である場合、$z = w$ を満たす実数 x と y の値を求めなさい。

複素数 z と w が等しくなるには、次のようになります。

$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w)$	$\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$
$2x = 4$	$3 = y - 1$

両方の一次方程式を解くと、次のようになります。

$x = 2$	$4 = y$

よって、$z = w$ を満たすとき、x と y の値は、それぞれ 2 と 4 になります。

問題

1. 次の式で、z の実部と虚部を求めなさい。

a) $z = -3 + 8i$　　b) $z = \dfrac{1}{2} - 6i$　　c) $z = \sqrt{5} - \sqrt{3}i$

d) $z = 11i$　　e) $z = 3$　　f) $z = \dfrac{-12 - i}{3}$

2. 次の式で、$z = w$ を満たす実数 x と y の値を求めなさい。

a) $z = (x + 1) + 5i$, $w = -6 + (4 - y)i$　　b) $z = 10 - 3xi$, $w = 8y + 15i$

c) $z = (x + y) + 4i$, $w = -2x + 3yi$　　d) $z = -x + 3yi$, $w = (y - 1) - xi$

3.4 複素数のたし算、ひき算、かけ算

導入問題

$z = 3 + 7i$、$w = 2 - 3i$の場合、$z + w$、$z - w$、zw の解を求めなさい。

計算するにあたって、i を変数と考えましょう。

解法

多項式の和のように、たし算できるのは「同類」項だけです。

$$\begin{aligned} z + w &= 3 + 7i + 2 - 3i \\ &= (3 + 2) + [7 + (-3)]i \\ &= (3 + 2) + (7 - 3)i \\ &= 5 + 4i \end{aligned}$$

ひき算をするには、w の実部と虚部の表記に注意します。

$$\begin{aligned} z - w &= 3 + 7i - (2 - 3i) \\ &= (3 - 2) + [7 - (-3)]i \\ &= (3 - 2) + (7 + 3)i \\ &= 1 + 10i \end{aligned}$$

かけ算をするには、$i^2 = -1$ に留意して、二項式の積とします。

$$\begin{aligned} zw &= (3 + 7i)(2 - 3i) \\ &= 3(2) + [3(-3) + 7(2)]i + 7(-3)i^2 \\ &= 6 + (-9 + 14)i - 21(-1) \\ &= 6 + 21 + 5i \\ &= 27 + 5i \end{aligned}$$

よって、次のようになります。$z + w = 5 + 4i$、$z - w = 1 + 10i$、$zw = 27 + 5i$

定義

複素数 $z = a + bi$、$w = c + di$ の**和と差**は、それぞれ $z + w$、$z - w$ と表し、次のように定義します。

$$z + w = (a + c) + (b + d)i$$
$$z - w = (a - c) + (b - d)i.$$

複素数 $z = a + bi$、$w = c + di$ の**積**は zw と表し、次のように定義します。

$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

$z = a + bi$ の**共役複素数**（または、単に z の共役数）は、$\overline{z}$ で表した別の複素数 $\overline{z} = a - bi$ です。$|z|$ で表した実数は、複素数 $z = a + bi$ の**絶対値**といい、次のように定義します。

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= (a + bi)(a - bi) \\ &= a^2 - b^2i^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

問題

1. それぞれ、$z + w$、$z - w$、zw を計算し、各数の共役数と絶対値を求めなさい。

a) $z = -5 + 4i,\ w = 2 - 3i$
b) $z = 4 - i,\ w = -6 + 4i$
c) $z = -3 - 2i,\ w = -5 + i$
d) $z = 8 - i,\ w = 12 + 3i$
e) $z = 5 - 2i,\ w = 6i$
f) $z = -3 + 8i,\ w = 2$

2. 複素数 $z = a + bi$ の場合、次の等式が成り立つことを証明しなさい。

a) $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$
b) $z - \overline{z} = 2\mathrm{Im}(z)i$

ユニット 2

3.5 複素数のわり算

導入問題

$z = a + bi$、$w = c + di$ の場合、$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di}$ を計算するには、次の手順を踏みます。

1. $\frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{c-di}{c-di}$ でかけます。
2. この積を求めます。
3. 解を求めます。

解法

1. $\frac{\overline{w}}{\overline{w}}$ でかけ算するにあたって、1 でかけています。つまり、元の式に変化はありません。

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \times \frac{c-di}{c-di}$$
$$= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}.$$

2. この積を計算すると、次のようになります。

$$\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd+(-ad+bc)i}{c^2+d^2}.$$

3. z の w によるわり算は、複素数です。

$$\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i.$$

定義

複素数 $z = a + bi$、$w = c + di$ の場合、z の w によるわり算は $\frac{z}{w}$ で表し、次の式が成り立ちます。

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i.$$

例

$4 + 3i$ を $5 - i$ でわりなさい。

この場合、分母と分子を共役数 $5 - i$ でかけると、次のようになります。

$$\frac{4+3i}{5-i} = \frac{4+3i}{5-i} \times \frac{5+i}{5+i} = \frac{(4+3i)(5+i)}{5^2+1^2} = \frac{(20-3)+(4+15)i}{26} = \frac{17+19i}{26} = \frac{17}{26} + \frac{19}{26}i.$$

よって、次のようになります。$\frac{4+3i}{5-i} = \frac{17}{26} + \frac{19}{26}i$

問題

1. それぞれ、$\frac{z}{w}$ を計算しなさい。
   a) $z = 3, w = 2 + 4i$
   b) $z = 5, w = 2 - 7i$
   c) $z = -7i, w = 6 - 2i$
   d) $z = 2 + 9i, w = -3 - i$
   e) $z = -4 + 6i, w = 2 + 7i$
   f) $z = -3 - 2i, w = 5 + 2i$
   g) $z = 4 - 2i, w = -5i$
   h) $z = -2 + 6i, w = 3i$

2. $z = a + bi$、$w = c + di$ の場合、次の問を解きなさい。
   a) $\frac{z}{w}$ を計算しなさい。
   b) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}$ を計算しなさい。
   c) $\frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ を計算しなさい。
   d) b) と c) の解を比較しなさい。

注目： これまで複素数を含めた計算を見てきましたが、それぞれ、複素数 $u + vi$ の式の書き出しを目的としています。同じように、わり算については、分子と分母を分母の共役数でかけることで、分母の複素数をくくり出すことを目的としています。

3.6 負の数の平方根*

導入問題

複素数 x の場合、$x^2 = -5$ を満たす x の値をすべて求めなさい。

$i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$

解法

複素数のうち、二乗すると解が -5 に等しくなるものを求めます。-5 を積 5(-1) と書き出せることに注目しましょう。よって、次のようになります。$x^2 = 5(-1) = 5i^2$

よって、$x = \sqrt{5}\, i$ または $x = -\sqrt{5}\, i$ では、$x^2 = 5i^2$ を満たします。したがって、次の式が成り立ちます。

$$\left(\sqrt{5}\, i\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 i^2 = -5 \qquad \left(-\sqrt{5}\, i\right)^2 = \left(-\sqrt{5}\right)^2 i^2 = -5$$

よって、$x^2 = -5$ を満たす x の値は、次のとおりです。$x = \sqrt{5}\, i$ または $x = -\sqrt{5}\, i$

定義

正の実数 a $(a > 0)$ の場合、$-a$ の平方根は、$\sqrt{a}\, i$ と $-\sqrt{a}\, i$ です。よって、次の式が成り立ちます。

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}\, i.$$

例

次の数を、式 $a + bi$ で書き表しなさい。

a) $\sqrt{-3}\,\sqrt{-5}$ 　 b) $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}}$ 　 c) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}}$

$-i^2 = -(-1) = 1$

まず負の数の根を式 $\sqrt{a}\, i$ で書き表して、次にそれぞれ計算します。

a)
$$\sqrt{-3}\,\sqrt{-5} = \left(\sqrt{3}\, i\right)\left(\sqrt{5}\, i\right) = \sqrt{15}\, i^2 = -\sqrt{15}$$

この式から、次の解が導き出せます。

$$\sqrt{-3}\,\sqrt{-5} = -\sqrt{15}.$$

b)
$$\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}\, i}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3}{5}}\, i$$

よって、次のようになります。

$$\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3}{5}}\, i$$

c)
$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}\, i}\left(\frac{-i}{-i}\right) = \sqrt{\frac{3}{5}}\left(\frac{-i}{-i^2}\right) = \sqrt{\frac{3}{5}}\left(\frac{-i}{1}\right) = -\sqrt{\frac{3}{5}}\, i$$

よって、次のようになります。

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}} = -\sqrt{\frac{3}{5}}\, i.$$

一般的に、a と b が正の実数の場合、次の式が成り立ちます。
1. $\sqrt{-a}\sqrt{-b} \neq \sqrt{(-a)(-a)}$ 　 2. $\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}} \neq \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}$

また、$\sqrt{5}\, i$ の共役数、つまり $-\sqrt{5}\, i$ でかけることもできます。同じ解が求められることを確認しましょう。

問題

1. それぞれ、$-a$ の平方根を求めなさい。

a) $a = 2$ 　 b) $a = 3$ 　 c) $a = 7$ 　 d) $a = 10$

e) $a = 4$ 　 f) $a = 25$ 　 g) $a = \frac{1}{3}$ 　 h) $a = \frac{1}{9}$

2. 次の数を、式 $a + bi$ で書き表しなさい。

a) $\sqrt{-7}\,\sqrt{2}$ 　 b) $\sqrt{7}\,\sqrt{-2}$ 　 c) $\sqrt{-3}\,\sqrt{-7}$

d) $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-7}}$ 　 e) $\dfrac{\sqrt{-4}}{\sqrt{3}}$ 　 f) $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{-6}}$

3.7 二次方程式の判別式

導入問題

二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ で、$\Delta = b^2 - 4ac$ と定義します。次の方程式において、Δ の値を計算してください。その際、符号を確認のうえ、解の公式をつかって解いてください（複素解を検討すること）。

a) $2x^2 - 5x - 1 = 0$　　b) $x^2 - 2x + 1 = 0$　　c) $x^2 + 3x + 5 = 0$

Δ はギリシャ文字のひとつで、「デルタ」と読みます。

解法

a) Δ を計算すると、次のようになります。

$$\Delta = (-5)^2 - 4(2)(-1) = 25 + 8 = 33$$

つまり、$\Delta > 0$ となります。解の公式をつかって方程式を解くと、次のようになります（Δ の値は、解の公式の被開平数です）。

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{33}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{4}.$$

方程式 $2x^2 - 5x - 1 = 0$ には、実数解が 2 つあります。

b) Δ の値は、次のようになります。

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = 0$$

つまり、$\Delta = 0$ となります。また、解の公式における被開平数の値は 0 なので、次の式が成り立ちます。

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

方程式 $x^2 - 2x + 1 = 0$ には、実数解が 1 つあります。

c) Δ の値は、次のようになります。

$$\Delta = 3^2 - 4(1)(5) = 9 - 20 = -11$$

つまり、$\Delta < 0$ となります。解の公式をつかって方程式を解くと、次のようになります。

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{11}\,i}{2}.$$

方程式 $x^2 + 3x + 5 = 0$ には、複素解が 2 つあります。

定義

二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の a、b、c が実数で、$a \neq 0$ の場合、$\Delta = b^2 - 4ac$ は、二次方程式の判別式といいます。
二次方程式の解における数とその種類は、次のように見極めることができます。

1. $\Delta > 0$ の場合、方程式には実数解が 2 つあります。つまり、実数を含んでいます。
2. $\Delta = 0$ の場合、方程式には実数解が 1 つあります。
3. $\Delta < 0$ の場合、方程式には虚数解が 2 つあります。つまり、式 $u + vi$ において、$v \neq 0$ です。

例

方程式 $x^2 + mx + 4 = 0$ に実数解が 1 つの場合、m の値を求めなさい。
実数解が 1 つの場合、$\Delta = 0$ を満たします。つまり、$\Delta = m^2 - 16 = 0$ となります。よって、$m = 4$ または $m = -4$ です。
したがって、方程式 $x^2 + mx + 4 = 0$ に実数解が 1 つの場合、m は、4 または -4 です。

問題

1. 次の方程式の解が実数解か虚数解かを求めなさい。

a) $4x^2 + x - 3 = 0$　　b) $4x^2 + x + 14 = 0$
c) $9x^2 - 30x + 25 = 0$　　d) $15x^2 + 12 = -8x$

2. 方程式 $x^2 - 6x + 5 - m = 0$ に実数解が 1 つの場合、m の値を求めなさい。

3.8 多項式の因数分解*

導入問題

複素数をつかって、多項式 $x^2 + 12x + 40$ を因数分解しなさい。

解法

今回も、三項式 $x^2 + (a + b)x + ab$ の因数分解のケースと同様、積が 40、和が 12 に等しい 2 つの複素数を求めなければなりません。まず、解の公式をつかって、方程式 $x^2 + 12x + 40 = 0$ を解きます。

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(1)(40)}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-12 \pm 4i}{2} = -6 \pm 2i$$

よって、次のようになります。

$$\begin{aligned} x = -6 + 2i \quad &\text{または} \quad x = -6 - 2i \\ x - (-6 + 2i) = 0 \quad &\text{または} \quad x - (-6 - 2i) = 0 \\ x + 6 - 2i = 0 \quad &\text{または} \quad x + 6 + 2i = 0 \end{aligned}$$

$z = 6 - 2i$、$w = 6 + 2i$ の場合、$zw = 40$、$z + w = 12$ であることを確認できます。そして、次の式が成り立ちます。

$$(x + z)(x + w) = x^2 + (z + w)x + zw = x^2 + 12x + 40.$$

よって、次のようになります。 $x^2 + 12x + 40 = [x - (-6 + 2i)][x - (-6 - 2i)] = (x + 6 - 2i)(x + 6 + 2i)$

まとめ

x_1 と x_2 が、二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解（実数解または虚数解） である場合、次の式が成り立ちます。

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

例

多項式 $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$ を因数分解しなさい。

定数項の約数は、$a = \pm1$、±2、±7、±14 です。元の多項式で $x = 2$ を代入すると、次のようになります。

$$2^3 - 6(2)^2 + 15(2) - 14 = 8 - 24 + 30 - 14 = 0$$

因数定理により、$x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = (x - 2)d$ とし、d は二次多項式とします。組立除法をつかうと、次のようになります。

$$x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = (x - 2)(x^2 - 4x + 7)$$

次に、二次方程式の解の公式をつかって、多項式 $x^2 - 4x + 7$ を因数分解します。

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(7)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = 2 \pm \sqrt{3}i.$$

よって、次のようになります。

$$x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = (x - 2)[x - (2 + \sqrt{3}i)][x - (2 - \sqrt{3}i)] = (x - 2)(x - 2 - \sqrt{3}i)(x - 2 + \sqrt{3}i)$$

問題

次の多項式を因数分解しなさい。

a) $x^2 - 12x + 40$
b) $5x^2 + 8x + 5$
c) $x^3 - 6x^2 + 2x + 24$
d) $x^3 + x + 10$
e) $x^3 - 3x^2 + 25x + 29$
f) $x^3 - 7x^2 + 20x - 50$

3.9 多項式の根*

導入問題

多項式に $x = a$ を代入して解が 0 の場合、a（実数または虚数） は、変数 x の多項式の根です。次の多項式の根を求めてください。

a) $3x - 12$　　b) $2x^2 + 7x + 3$　　c) $x^3 - 3x^2 + 25x + 29$

解法

a) $3x - 12$ の根を求めるには、多項式が 0 になる x の値を求めなければなりません。つまり、方程式 $3x - 12 = 0$ を解くには、根を求めるだけで十分ということです。方程式の解は $x = 4$ なので、4 は $3x - 12$ で唯一の根となります。

b) 前回の問いと同じように、方程式 $2x^2 + 7x + 3 = 0$ を解くには、多項式 $2x^2 + 7x + 3$ の根を求めるだけで十分です。因数分解をつかって解くと、次のようになります。

$$2x^2 + 7x + 3 = (2x + 1)(x + 3) = 0.$$

よって、多項式 $2x^2 + 7x + 3$ の根は次のとおりです。 $x = -\frac{1}{2}$　$x = -3$

c) 三次多項式の場合、因数定理をつかって、多項式が 0 になる値を求めなければなりません。よって、±1 と ±29 のどちらかを x に代入します。

$x = -1$ の場合、次のようになります。$(-1)^3 - 3(-1)^2 + 25(-1) + 29 = -1 - 3 - 25 + 29 = 0$

組立除法をつかって $(x^3 - 3x^2 + 25x + 29) \div (x + 1)$ を計算し、元の多項式を因数分解すると、次のようになります。

$$x^3 - 3x^2 + 25x + 29 = (x + 1)(x^2 - 4x + 29)$$

多項式の根のうちひとつは、$x = -1$ です。次に、方程式 $x^2 - 4x + 29 = 0$ を解きながら、$x^2 - 4x + 29$ の根を求めます。

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(29)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-100}}{2} = \frac{4 \pm 10i}{2} = 2 \pm 5i.$$

よって、$x^3 - 3x^2 + 25x + 29$ の根は次のとおりです。$x = -1$、$x = 2 + 5i$、$x = 2 - 5i$

まとめ

変数の多項式が p は、次の条件を満たします。

1. p が一次多項式の場合、複素数の根は 1 つです。
2. p が二次多項式の場合、複素数の根は 2 つです。複素数の根が何乗されているか数えることで分かります。例えば、多項式 $x^2 + 2x + 1$ は、$(x + 1)^2$ と書き表すことができ、$x = -1$ は二重根です。
3. p が三次多項式の場合、複素数の根は 3 つです。複素数の根が何乗されているか数えることで分かります。

一次多項式は**線形多項式**、二次多項式は**二次式**、三次多項式は**三次式**ともいいます。多項式が、n 次式の場合もあります。n が負の数ではない整数で、かつ変数である場合、次の式で表せます。

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

この場合、a_n は 0 と相異なります。

n 次多項式の場合、複素数の根は n個です。x_1、x_2…、x_r が多項式 $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ の（相異なる） 根である場合、次のように因数分解できます。

$$a_n(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_r)^{m_r}$$

この場合、m_i を根 x_i の**重複度**といい、次を満たします。

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n.$$

多項式に虚根が 1 つある場合、共役数もまた、根ということになります。

3.10 復習問題

1. 次の方程式を、可能であれば因数分解し、そうでなければ解の公式をつかって解きなさい。

a) $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{12} = 0$
b) $x^2 + 5x = 0$
c) $x(3x + 10) = 77$
d) $15x^2 - 14 = 29x$
e) $22x^2 + 67x - 35 = 0$
f) $2.7x^2 + 4.2x + 0.8 = 0$
g) $x^2 - 6x + 12 = 0$
h) $x^2 + 5x + 6 = 0$
i) $x^2 - 2x + 26 = 0$
j) $6x^2 + x + 12 = 0$
k) $x^2 + 3x + 6 = 0$
l) $-3x^2 - 5 = -x$
m) $4x^2 + x + 14 = 0$
n) $15x^2 + 8x = -12$
o) $x^2 + 4x + 14 = 0$
p) $x^2 + 8x + 17 = 0$

2. 次の場合、x の値を求めなさい。

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}$$

赤枠で囲った式から何が分かりますか?

$$x = 1 + \cfrac{1}{\boxed{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}$$

3. 次の場合、 $x = 2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{2 + \ddots}}}}$

$x = 3$ であることを証明しなさい。

4. 次の各問で、$z + w$、$z - w$ を計算しなさい。

a) $z = 2 - i,\ w = 3 + 7i$
b) $z = -3 + 2i,\ w = 2 - 4i$
c) $z = -6 - i,\ w = i$
d) $z = 2 + i,\ w = 8 - i$
e) $z = 1 - 3i,\ w = 5 - 2i$
f) $z = 9i,\ w = 5i$
g) $z = -5,\ w = 15i$
h) $z = 7 - 6i,\ w = -11 - 3i$

5. 次の各問で、zw、$\frac{z}{w}$ を計算しなさい。

a) $z = -5 + 4i,\ w = 2 - 3i$
b) $z = 4 - i,\ w = -6 + 4i$
c) $z = -3 - 2i,\ w = -5 + i$
d) $z = 8 - i,\ w = 12 + 3i$
e) $z = 5 - 2i,\ w = 6i$
f) $z = -3 + 8i,\ w = 2$
g) $z = -9 + 7i,\ w = 4 + 9i$
h) $z = 7 - 6i,\ w = -11 - 3i$

6. 次の多項式を、複素数をつかって因数分解しなさい。

a) $4x^2 + x + 1$
b) $9x^2 + 28x + 50$
c) $x^3 - x^2 - 14x + 24$
d) $x^4 - 11x^3 + 40x^2 - 56x + 24$

3.11 ユニット問題

1. 次の多項式を因数分解しなさい。

a) $(x+y)^2-(x-y)^2$

b) $(x+y)^2+(x-y)^2$

2. 乗法公式をつかって、次の式の解を求めなさい。

a) $190(210)$

b) $96(104)-94(106)$

c) $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$

d) $\sqrt{100(101)(102)(103)+1}$

$x=\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$ として、x^2 を計算しましょう。

$x=100$ として、初項と末項、第二項と第三項をかけましょう。

3. 複素数を $z_1=1+2i$、$z_2=-2+3i$、$z_3=1-i$ とし、次の計算式の解を求めなさい。

a) $z_1+z_2+z_3$

b) $z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$

c) $z_1z_2z_3$

d) $z_1^2+z_2^2+z_3^2$

e) $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}$

f) $\frac{z_1^2+z_2^2}{z_2^2+z_3^2}$

4. 次の積を計算して、それぞれ等しいことを証明しなさい。

a) $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ac)x+abc$

b) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

c) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$

5. 次の条件を満たす変数 x の二次多項式を求めなさい。1. x の係数と定数項が等しい。2. x に 1 と 2 を代入すると、多項式の値がそれぞれ 7 と 18 になります。

6. x と y が正の実数の場合、次の多項式を因数分解しなさい（平方根を含んだ因数項はそのまま残してもよい）

a) $x+2\sqrt{x}+1$

b) $x-y$

c) $y+4\sqrt{y}+4$

d) $x-1$

7. 複素数 z において、$|z|\geq 0$ を満たすことを証明しなさい。

8. $z=a+bi$、$w=c+di$ の場合、$|zw|=|z||w|$ を満たすかどうか証明しなさい。

9. $z=a+bi$、$w=c+di$ の場合、$\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$ を満たすかどうか証明しなさい。

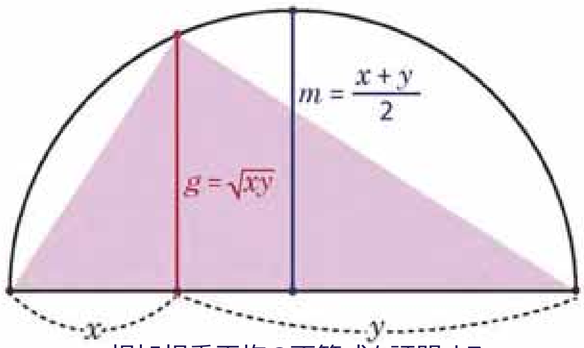
10. 方程式 $mx^2+2x+1=0$ に実数解が 2 つある場合、実数 m に代わる値を求めなさい。

11. 方程式 $x^2+2x+m=0$ に虚数解が 2 つある場合、実数 m に代わる値を求めなさい。

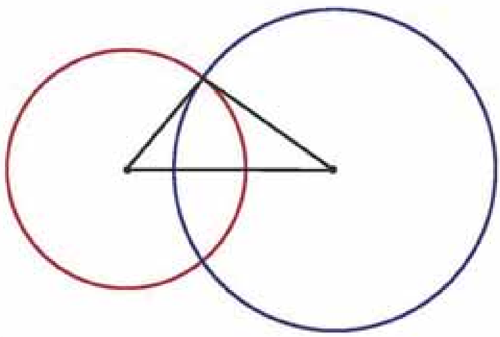
不等式

ユニット 3

不等式の発展は方程式の発展と並行して進みました。最初の不等式はエジプト人によって記録されていますが、不等式がいつ発生したかについて、明確で正確な情報はありません。しかしながら、「少なくとも」や「多くとも」などの言葉が介在する、お金や食べ物または資源に関する問題が日常生活の中で発生するため、人間は常に不等式を解く必要がありました。



相加相乗平均の不等式を証明する幾何学図


円を使用して三角不等式を証明する幾何学図。

歴史を通じて不等式は発生し、数学的理論の絶え間ない発展のために用いられてきました。数学の基本的な不等式の1つは三角不等式ですが、さまざまな幾何学表現、代数表現、ベクトル表現、数値表現などで用いられています。

このユニットでは、不等式の概念を発展させます。不等式の性質を不等式を解くために用い、不等式の係数と定数の変化に応じてさまざまなケースを分析します。次に、三角不等式や相加相乗平均の不等式など、数学におけるいくつかの非常に重要な不等式に取り組みます。

1.1 不等式の性質 パート 1

導入問題

≤、≥、< 又は >、いずれかの正しい不等号で空欄を埋めてください。

a) $1 \ \square \ -2$　　b) $3.5 \ \square \ \frac{7}{2}$　　c) $-3+2 \ \square \ 5+2$

d) $-5+3 \ \square \ -7+3$　　e) $\frac{1}{2}-1 \ \square \ -1-1$　　f) $1.5-5 \ \square \ 4-5$

解法

a) 正の数は負の数よりも大きくなります。したがって、

$$1 \ \boxed{>} \ -2$$

b) 3.5 は $\frac{7}{2}$ の少数になります。したがって、≤と≥の両方で表すことができます。

$$3.5 \ \boxed{\geq} \ \frac{7}{2}$$

c) $-3 < 5$ の両辺に 2 を足すと $-3+2=-1$ と $5+2=7$ になり不等号の向きは変わりません。したがって、

$$-3+2 \ \boxed{<} \ 5+2$$

d) 前の問題と同じように、$-5>-7$ となるので、

$$-5+3 \ \boxed{>} \ -7+3$$

e) $\frac{1}{2}>-1$ の両辺から 1 を引くと、各辺が $-\frac{1}{2}$、-2 となり、不等号の向きは変わりません。
したがって、

$$\frac{1}{2}-1 \ \boxed{>} \ -1-1$$

f) に類似した解き方で、$1.5<4$ となるので、

$$1.5-5 \ \boxed{<} \ 4-5$$

まとめ

不等号 ≤, ≥, < 又 > は、数値の大小関係を表すために使います。下記の不等号の表す大小関係は次の通りです。

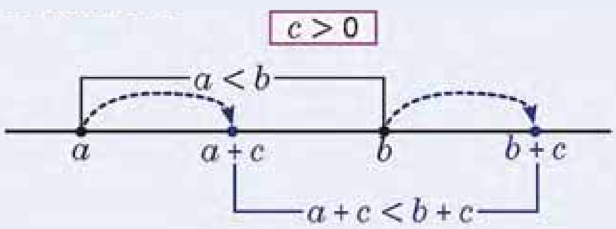
≤ : 小なりイコール　　≥ : 大なりイコール

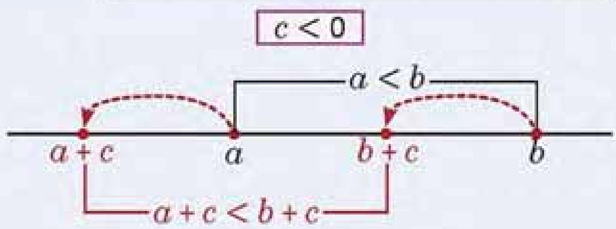
< : 小なり　　> : 大なり

2 つの数値又は数式の大小関係を表した数式を**不等式**といいます。$a \leq b$ の不等式の場合、a が**左辺**そして b が**右辺**となります。

a、b 及び c が実数で、$a<b$ **が成り立つとき、**$a+c<b+c$ となります。通常、不等式の両辺に対し実数を足しても（或いは引いても）、不等式の成り立ちは変わりません。

この性質は $a>b$, $a \geq b$, $a \leq b$ どの不等式に対しても成り立ちます。つまり、実数 c を a と b の両辺に足しても不等式の成り立ちは変わりません。





問題

空欄を適切な不等号で埋めてください。

a) $3+7 \ \square \ 10+7$　　b) $-1+4 \ \square \ 5+4$　　c) $-6-2 \ \square \ -9-2$

d) $-\frac{1}{2}-5 \ \square \ -0.5-5$　　e) $-0.25+5 \ \square \ -\frac{1}{4}+5$　　f) $4.5+1.2 \ \square \ 1+1.2$

g) $-3+2.7 \ \square \ -1.9+2.7$　　h) $-3+\sqrt{2} \ \square \ -1+\sqrt{2}$　　i) $\sqrt{2}-\frac{1}{2} \ \square \ -\sqrt{3}-\frac{1}{2}$

1.2 不等式の性質 パート 2

導入問題

<、> いずれかの正しい不等号で空欄を埋めてください。

a) $2(4)\ \square\ 5(4)$　　b) $-5(3)\ \square\ 4(3)$　　c) $-3(10)\ \square\ -9(10)$

d) $6(-2)\ \square\ 3(-2)$　　e) $8(-4)\ \square\ -5(-4)$　　f) $-11(-5)\ \square\ -7(-5)$

解法

a) $2 < 5$ の両辺に 4 を掛けると $2(4) = 8$ 、$5(4) = 20$ になり大小関係は変わりません。
したがって、

$$2(4)\ \boxed{<}\ 5(4)$$

b) a) に類似した解き方で、$-5 < 4$ の両辺に 3 を掛けても大小関係は変わりません。
したがって

$$-5(3)\ \boxed{<}\ 4(3)$$

c) $-3 > -9$ の両辺を 10 倍にしても、大小関係は変わりません。
したがって、

$$-3(10)\ \boxed{>}\ -9(10)$$

d) $6 > 3$ですが、この場合は、両辺に負の数を掛けるので $6(-2) = -12$ 、$3(-2) = -6$ になるので大小関係が変わります。

$$6(-2)\ \boxed{<}\ 3(-2)$$

d) と類似した解き方で、$8 > -5$ の両辺に負の数を掛けるので、$8(-4) = -32$ 、$-5(-4) = 20$ となり大小関係が変わります。

$$8(-4)\ \boxed{<}\ -5(-4)$$

f) 前の問題と同様に $-11 < -7$ の両辺に負の数を掛けると大小関係が変わります。
したがって、

$$-11(-5)\ \boxed{>}\ -7(-5)$$

まとめ

a 、b または c が実数であり、$a < b$ の条件が成り立つ場合。

1. **$c > 0$ のとき、$ac < bc$ が成り立ちます。** すなわち、不等式の両辺に正の数を掛けても不等号の向きは変わりません。

2. **$c < 0$ のとき、$ac > bc$ が成り立ちます。** すなわち、不等式の両辺に負の数を掛けると不等号の向きが変わります。

> 同様の性質が成り立ちます。
> 不等式 $a > b$、$a \geq b$、また $a \leq b$ のときも

問題

1. 空欄を正しい不等号で埋めてください。

a) $8(5)\ \square\ 11(5)$　　b) $-3(6)\ \square\ -7(6)$　　c) $6(-3)\ \square\ -4(-3)$

d) $-10(-7)\ \square\ -5(-7)$　　e) $4.8(9)\ \square\ 1.3(9)$　　f) $-3.5(-2)\ \square\ -3.6(-2)$

g) $\frac{4}{5}(-4)\ \square\ 5(-4)$　　h) $-\frac{8}{5}(3)\ \square\ \frac{1}{2}(3)$　　i) $10\left(\frac{1}{2}\right)\ \square\ 7\left(\frac{1}{2}\right)$

j) $-6.5\left(-\frac{1}{4}\right)\ \square\ -4.3\left(-\frac{1}{4}\right)$　　k) $\frac{8}{3}\left(\frac{5}{4}\right)\ \square\ -\frac{1}{4}\left(\frac{5}{4}\right)$　　l) $\sqrt{6}(-11)\ \square\ \sqrt{3}(-11)$

2. 実数 c、d において $c < d$ が成り立つとき、<、> いずれか正しい不等号を選んで空欄を埋めてください。（また、等式が成り立つことを証明してください）。

a) $3c\ \square\ 3d$　　b) $-c\ \square\ -d$　　c) $5.6c\ \square\ 5.6d$

d) $-2c\ \square\ -2d$　　e) $-7c\ \square\ -7d$　　f) $\frac{3}{4}c\ \square\ \frac{3}{4}d$

3. a を正の数とするとき、次の不等式が成り立つことを証明してください。

a) $a > 1$ とすると $a^2 > a$ になります。　　b) $a < 1$ とすると $a^2 < a$ になります。

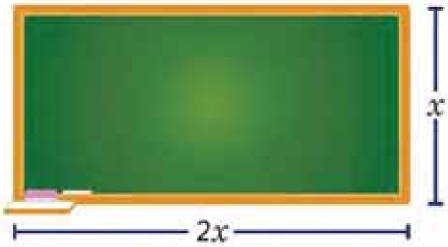
2.1 一次不等式の定義

導入問題

長方形の黒板の底辺の長さは高さの 2 倍あり、その周囲の長さは 7.20 m^2 です。周囲の長さとその最大値を関連付ける不等式を書きましょう。

解法

下図が示すように、黒板の高さをメートルで表したものを x とします。問題文によると、底辺の長さは高さの 2 倍なので、底辺の長さは $2x$ になります。



黒板の周囲の長さは、以下の方法で計算します。

$$2x + 2(2x) = 6x$$

すなわち、黒板の周囲の長さは $6x$ となります。問題文によると、周囲の長さの最大値は 7.20 m^2 です。これは、周囲の長さが 7.20 m^2 以下であることを意味します。したがって、周囲の長さとその最大値を関連付ける不等式は、以下の通りとなります。$6x \le 7.20$

定義

不等式とは、変数を含む二つの一次式からなる**一次不等式を指します。**一次不等式では、変数によって表される未知の値を**未知数**と言い、不等式を成り立たせる未知数の数値の区間を、**不等式の解**と言います。

この場合の変数は、実数値つまり実数でなければなりません。

問題

1. 次の命題を一次不等式で表してください。
   a) サラは通勤に最長で 1 時間 15 分かかります。
   b) 環境・自然資源省 (MARN) によると、2015 年までに、人体に感じない微小地震の数が、人体に感じる地震の数の 11 倍になり、その年には、4000 件以上の地震が記録されました。
   c) マリオの年齢は、アントニオの年齢の 3 分の 1 で、2 人の年齢の合計は、28 年未満です。
   d) 洗濯機の消費電力は、一時間あたり 500 ワットです。ある一定の時間が過ぎた際の消費電力は、1 時間あたり 3,500 ワットを超えました。

2. ベアトリスとホセは、一学年を通して貯金することにしました。学年の終わりにベアトリスの貯金額は、ホセの貯金額の半分以上でした。不等式を書きましょう。

2.2　一次不等式の解　パート 1

導入問題

次の不等式を満たすxのすべての値を求めましょう。

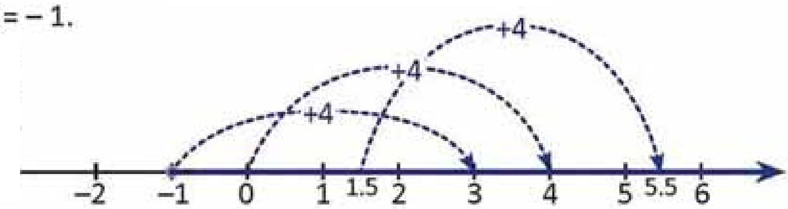
a) $x + 4 \geq 3$　　b) $x - 5 < 2$

解法

a) 足して 4 になる実数を求めましょう。解は 3 か 3 以上になります。一次方程式 $x + 4 = 3$ を用いて、4 を足して解が 3 になる実数を求めることができます。

$$x + \cancel{4} - \cancel{4} = 3 - 4 \qquad \text{両辺からそれぞれ 4 を引く、}$$
$$x = -1.$$

右の図では、次のことがわかります。
−1よりも大きいすべての数は
不等式 $x + 4 \geq 3$ を満たします。したがって、
$x \geq -1$ の場合、$x + 4 \geq 3$ となります。



この問題は、1.1 で学習した内容を用いて解くこともできます。つまり、元の不等式の両辺それぞれから、4 を引きます。

$$x + 4 \geq 3$$
$$x + \cancel{4} - \cancel{4} \geq 3 - 4 \qquad \text{両辺それぞれから 4 を引いても、不等式は変わりません。}$$
$$x \geq -1.$$

したがって、$x \geq -1$ で、不等式 $x + 4 \geq 3$ が成り立ちます。部分集合 $x \geq -1$ を用いて、以下のように表します。
$x \in [-1, \infty[$.

b) 不等式の特性を用いて、両辺にそれぞれ 5 を足します。

$$x - 5 < 2$$
$$x - \cancel{5} + \cancel{5} < 2 + 5 \qquad \text{両辺にそれぞれ 5 を足しても、不等式は変わりません。}$$
$$x < 7.$$

したがって、不等式 $x - 5 < 2$ は、$x < 7$ にも当てはまります。部分集合を用いて、$x \in]-\infty, 7[$ と表します。

まとめ

b と c のいずれも実数とします。$x + b \geq c$ または、$x + b \leq c$,の形で表される一次不等式を解くには、$x \geq d$ または、$x \leq d$ と書かなければなりません。その際、不等式の両辺に $-b$ を足してください。

1. $x + b \geq c$ は、$x \geq c - b$ に当てはめることができます。部分集合を用いて、次のように表します。　$x \in [c - b, \infty[$
2. $x + b \leq c$ は $x \leq c - b$ が成り立ちます。区間を用いて $x \in]-\infty, c - b]$ と表します。

不等式が $x + b > c$ または $x + b < c$ である場合、解には極値 $c - b$ を用いてはいけません。

問題

1. 次の一次不等式を解きましょう。（区間を用いた解を書いてください。）

a) $x + 7 \geq 10$	b) $x - 3 > -8$	c) $x - 2 < 11$
d) $x + 4 \leq -6$	e) $x - 6 \geq 0$	f) $0 \geq x + 8$
g) $x + \frac{2}{3} < \frac{1}{3}$	h) $x - \frac{5}{2} > \frac{1}{2}$	i) $x + \frac{1}{4} \geq 1$
j) $x - \frac{4}{3} \leq -\frac{3}{4}$	k) $x + \frac{1}{2} < -4$	l) $x + \sqrt{2} \geq 5\sqrt{2}$

2. 1.1 で学んだ、解を証明する不等式の特性を用いてください。
$x + b \leq c$ は、$x \in]-\infty$ または $c - b]$ です。

2.3 一次不等式の解　パート 2

導入問題

次の不等式を満たす x のすべての値を求めましょう。
不等式：
a) $3x > 12$　　b) $-5x \leq -10$

両辺を掛ける実数が正の数である場合不等式は変化しませんが、実数が負の数である場合、不等式は逆になります。

解法

a) 不等式を解くためには、$x > d$ という形を用いなければなりません。この場合 d は実数とします。その為に、不等式の両辺を $\frac{1}{3}$ で掛けます。

$$3x > 12$$
$$\cancel{3}x\left(\frac{1}{\cancel{3}}\right) > 12\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$x > 4$$

それぞれの両辺に $\frac{1}{3}$ を掛けても、不等式は変化しません。

したがって、不等式 $3x > 12$ は $x > 4$ となり、よって、$x \in\ ]4$ のとき $+\infty[$ となります。

b) 前の問題と同じように、不等式の両辺に $-\frac{1}{5}$ を掛けます。こうすることで、不等式の記号は、$\leq$ から $\geq$ に変わります。

$$-5x \leq -10$$
$$-\cancel{5}x\left(-\frac{1}{\cancel{5}}\right) \geq -10\left(-\frac{1}{5}\right)$$
$$x \geq 2$$

したがって、$-5x \leq -10$ は $x \geq 2$ となり、よって、$x \in [2$ のとき $+\infty[$ となります。

まとめ

a はゼロ以外の実数とします。$ax \geq c$ または $ax \leq c$ の形の一次不等式を解くには、不等式の両辺を a の逆、つまり、$\frac{1}{a}$ で掛けます。

1. a が正の数のとき、不等式 $ax \geq c$ と $ax \leq c$ はそれぞれ、$x \geq \frac{c}{a}$ 及び $x \leq \frac{c}{a}$ が成り立ちます。
2. a が負の数の時、不等式 $ax \geq c$ 及び $ax \leq c$ はそれぞれ $x \leq \frac{c}{a}$、$x \geq \frac{c}{a}$ が成り立ちます。

不等式が、$ax > c$ または $ax < c$ の時、解には極値 $\frac{c}{a}$ を用いることはできません。

$x \geq \frac{c}{a}$ の解は $x \in \left[\frac{c}{a}, \infty\right[$ などの区間を用いて表します。一方 $x \leq \frac{c}{a}$ は以下の数字で表します。$x \in \left]-\infty, \frac{c}{a}\right]$

問題

一次の一次不等式を解きましょう。（区間を用いた解を書いてください。）

a) $2x \leq 6$　　b) $4x \geq 24$　　c) $-3x > -33$

d) $-14 > 7x$　　e) $-8x \geq 0$　　f) $0 \geq 5x$

g) $-4x < 18$　　h) $5x > -1$　　i) $-\frac{1}{3}x \geq 3$

j) $\frac{2}{5}x < -1$　　k) $\frac{5}{2}x \leq -\frac{5}{3}$　　l) $-\sqrt{2}\,x > 1$

2. 次の各問題について、両方の不等式を満たす x のすべての値を求めましょう。

a) $\begin{cases} x + 2 > -3 \\ 3x > 9 \end{cases}$　　b) $\begin{cases} x - 5 \geq 2 \\ -2x > 10 \end{cases}$　　c) $\begin{cases} x + 4 < 1 \\ 5x > -30 \end{cases}$

次の各問題について、数直線を使ってそれぞれの不等式の回答を示しましょう。また、両方の部分集合が同じ値であることを証明してください。

2.4 一次不等式の解　パート 3

導入問題

以下の不等式を解きましょう。

a) $2x + 7 > -9$　　　　b) $6x - 5 \leq 2x + 15$

解法

a) $x > d$ という形を導き出すために不等式の特性を用います。まずはじめに加法または減法、次に乗法の順で行ってください。

$$2x + 7 > -9$$

$$2x + \cancel{7} - \cancel{7} > -9 - 7$$　両辺からそれぞれ 7 を引き、

$$\cancel{2}x\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) > -16\left(\frac{1}{2}\right)$$　次に両辺にそれぞれ $\frac{1}{2}$ を掛けます。

$$x > -8.$$

したがって、不等式 $2x + 7 > -9$ は、$x \in\ ]-8, \infty[$ で成り立ちます。

以下のことが推測できます。
- どちらかの辺に足した時に出てくる項を、反対側の辺から引きます。
  （**移項：項の移動**）
- $mx \leq n$ の形まで解いたら、x を係数 1 で表し、n を m の逆数で掛けます。

b) $6x - 5 \leq 2x + 15$ を解くために前の授業で学んだことを応用して、次の問題を解きましょう。

$$6x - 5 \leq 2x + 15$$

$$6x \leq 2x + 15 + 5$$

$$6x - 2x \leq 20$$

右辺に 5 を移項し、
左辺に $2x$ を移項します。

$$4x \leq 20$$

$$x \leq 20\left(\frac{1}{4}\right)$$　x を係数 1 で表し、左辺に $\frac{1}{4}$ を掛けます。

$$x \leq 5.$$

したがって、不等式 $6x - 5 \leq 2x + 15$ には、$x \in\ ]-\infty, 5]$ が成り立ちます。

まとめ

次の方法で一次不等式を解きます。
1. 不等式を $mx \geq n$ または $mx \leq n$ の形にするために移項します。
2. 係数 1 を用いて未知数を表し、m の逆数を両辺に掛けます。

問題

1. 次の一次不等式を解きましょう。（区間を用いた解を書いてください。）

a) $3x - 4 < 8$　　b) $2 \leq 5x + 12$　　c) $7x - 24 > -x$

d) $4x + 9 < 2x + 11$　　e) $2x - 1 \leq 5x + 14$　　f) $3x - 2 \geq x + 6$

g) $x - 4 \leq -2x - 9$　　h) $3x + 16 < 7x + 2$　　i) $6x + 3 \geq 4x - 1$

j) $\frac{1}{3}x - 2 \geq x - \frac{7}{2}$　　k) $\frac{5}{2}x + \frac{1}{3} < -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$　　l) $-4x - 5\sqrt{3} > x + 10\sqrt{3}$

2. 次の各問題について、両方の不等式を満たす x のすべての値を求めましょう。

a) $\begin{cases} -3x > 0 \\ 2x - 5 > -3 \end{cases}$　　b) $\begin{cases} x + 4 \leq 3x \\ 5x - 1 > 4x + 7 \end{cases}$　　c) $\begin{cases} 3x + 7 > -x - 5 \\ -2x > 3x - 10 \end{cases}$

2.5 一次不等式のグラフの解釈

導入問題

一次関数 $y = 2x - 4$ を用いて：

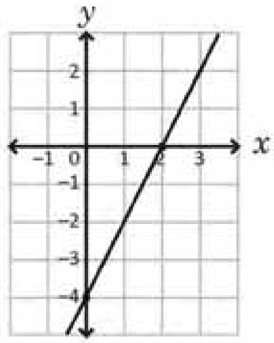
1. 座標軸との交点を見つける関数のグラフを描きましょう。

2. $y \geq 0$である時、$y = 2x - 4$ のグラフを用いて、x の値を求めましょう。

3. 前の問で得た x の値と $2x - 4 \geq 0$ の解の関係を答えましょう。

一次関数 $y = ax + b$ のグラフは、点 $(0, b)$ と点 $(x, 0)$ を通る直線です。$y = 0$ を解くことで二つ目点の x の値が求められます。

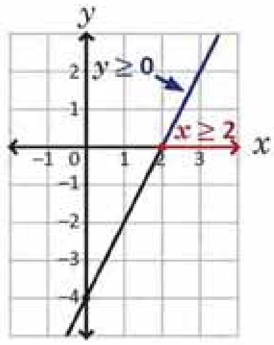
解法



1. y 軸の共通部分は点 (0, –4) です。一方で x 軸の共通部分は $y = 0$ を解くことで求められます。

$$2x - 4 = 0$$
$$x = 2$$

右の図のように、座標平面に点 (0, –4) と点 (2, 0) を描きこみ、その両点を通る直線を引きます。



2. $y \geq 0$ である x 値を求めることは、$y = 2x - 4$ のグラフが x 軸と交差するか、この上を通るグラフ上の値を指します。

以下のことがわかります。$x \geq 2$ の時、$y \geq 0$ が成り立ちます。よって、$x \in [2$ の時、$+\infty[$ となります。

3. $2x - 4 \geq 0$ の不等式の解は $x \geq 2$ です。つまり、前の問題の解と同じです。

まとめ

$ax + b \geq 0$ または $ax + b \leq 0$ の形の一次不等式を解くことは、x 軸を切る関数 $y = ax + b$ のグラフの x の値を求めることと等しいです。また、$ax + b \geq 0$ の場合は x 軸の上を通り、$ax + b \leq 0$ の場合は x 軸の下を通ります。

不等式が > または < の時、$y = ax + b$ がゼロである場合の値は考慮しません。

問題

1. 次の不等式をグラフを用いて解いてみましょう。

a) $-2x + 6 < 0$　　b) $5x - 5 > 0$　　c) $-\frac{1}{2}x - 1 \geq 0$

2. $a \neq 0$ を用いた $ax + b \geq 0$ または $ax + b \leq 0$ の形の一次不等式に解がない可能性はありますか？$y = ax + b$ のグラフに基づいてあなたの答えを証明しましょう。

3. a を正の数とします。$ax + b < 0$ の不等式の解が $ax + b < 0$ が $\left]-\infty, -\frac{b}{a}\right[$ であることを証明してください。

2.6 一次不等式の応用

導入問題

マリオさんは事業に必要なインターネットサービスの契約を、A 社とするか、B 社とするか決めなければいけません。A 社は、モデムの取り付け工事費として1時間あたり 9.50 ドル、また、月々の利用代金に 45 ドル掛かり、B社は、モデムの取り付け工事費として 1 時間あたり 12.50 ドル、また、月々の利用代金に 43.50 ドル掛かります。もしもマリオさんが工事費と月々の利用代金にかかる費用を算出した場合、何か月後に A 社よりも B 社の方が安くなる計算になるでしょうか？

解法

x カ月経過した後の A 社のサービスにかかる総費用の計算の仕方は、

$$45x + 9.5,$$

一方で、x カ月経過した後の B 社のサービスにかかる総費用は、

$$43.5x + 12.5$$

経過しなければならない月数を求めることで、

$$\text{総費用 B} < \text{総費用 A}$$

$$43.5x + 12.5 < 45x + 9.5$$

一次不等式を解きましょう。

$$12.5 - 9.5 < 45x - 43.5x$$
$$3 < 1.5x$$
$$2 < x.$$

解では、整数を用いて計算するために、不等式の両辺のすべての項に10を掛けることができます。

よって、B 社のサービスが A 社のサービスよりも安くなるのは 2 か月後、つまり、3 か月目以降です。

全体を通して

一次不等式の使用に伴う状況を解決するためには、次の順序で行います。

1. 問題の示されている通りの、未知数が表す数を決めます。
2. 一次不等式を提案します。
3. 一次不等式を解決し、計算法を説明してください。

問題

1. 環境・自然資源省（MARN）によると、2015 年に、人体に感じない微小地震の数が、人体に感じる地震の数の 11 倍になり、同年、4,000 件以上の地震が記録されたとのことです。人体に感じる地震の最小件数は何件になるかを求めましょう。

2. x 時間後の自動車の走行距離 y (km) は以下の式で求められます。$y = 70x$ 最低でも何時間で 315 キロメートル道路を走れるかを求めましょう。

3. 大半のアングロサクソン国家では、気温の計測に華氏が使われています。例えば、2017 年 8 月カナダで、71°F（華氏 71 度と読みます。）を記録しました。一方、同じ日のサンサルバドルの気温は 31°C でした。（摂氏 31 度と読みます。）摂氏と華氏の違いは、方程式 $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ によって表され、C は摂氏温度、F は華氏温度を表します。もしも 2017 年のエルサルバドルの記録された最低気温が、20°C だった場合、華氏での最低気温は何度でしょう。

2.7 練習問題

1. 次の一次不等式を解きましょう。（区間を用いた解を書いてください。）

a) $5x-7<-2x$
b) $3x+11\geq 8x-14$
c) $-4x+9\geq -5x-15$
d) $-x-10<9x-8$
e) $2x-6\geq 4x+5$
f) $\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}\leq -\frac{5}{2}x+\frac{1}{5}$
g) $-\frac{4}{3}x+\frac{2}{5}>-\frac{1}{4}+\frac{5}{2}x$
h) $4x>x+12\sqrt{3}$
i) $-3x-9\sqrt{5}\leq -7x-13\sqrt{5}$
j) $x+4\sqrt{2}\geq \frac{1}{2}x+10\sqrt{2}$
k) $6\sqrt{3}x-9<2\sqrt{3}x+7$
l) $\sqrt{6}x+5>x+4$

2. 次の不等式をグラフを用いて解いてみましょう。

a) $-3x+12\geq 0$
b) $4x+8<0$
c) $\frac{1}{3}x-2\geq 0$

3. 以下の文章題を解いてみましょう。

a) マリオの年齢は、アントニオの年齢の三分の一です。二人の年齢の合計が 28 歳以下の時、マリオの最大年齢は何歳ですか？

b) 2017 年のサンサルバドル大学歯学部の総学生数は 717 人にのぼりました。男性と女性の比率が 1：2 の時、男性の数は何人でしょうか？

c) 2017 年 8 月、サンサルバドルでの国産小豆 1 キンタルの最低価格は、50 ドルで、最高価格は 58 ドルでした。1 キンタルは、約 100 ポンドに相当します。いくらにするべきでしょうか？利益を出すには、小豆 1 ポンド相当の最低金額は

- 1 キンタルを 50 ドルで購入した場合：
- 1 キンタルを 58 ドルで購入した場合：

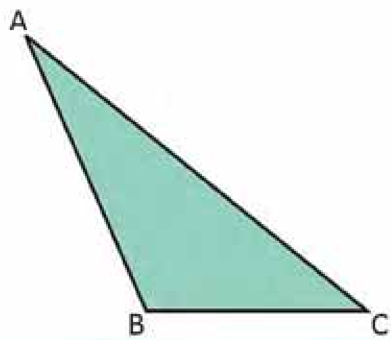
d) 二歳までの子供の成長速度は、思春期（15 歳）に達するまでは、最低でも年間6センチメートルです。7 歳で身長が 1 メートル 19 センチだった場合、10 歳以上の子供の最低身長はどれくらいになるでしょうか？

e) カロリーナは自動車ディーラーです。一台 6,000 ドルの車の売上ごとに、売値の 3% 分の手数料が貰えます。カロリーナは、最低でもこの値段の車を何台売れば、年末までに 1,080 ドル以上の手数料が貰えるでしょうか？

f) 長方形の高さと底辺の長さの比は3です。4. 長方形の周囲の長さの合計が 105 センチメートルだった場合、高さの最大長は何センチメートルになりますか？また、底辺の最大長は何センチメールになるでしょうか？

g) 右の三角形 ABC の辺 AB の長さは辺 BC よりも 2 センチメートル長く、辺 CA の長さは辺 BC の二倍です。三角形の周辺の和が 34 センチメートルかそれ以下の場合：

- 辺 BC の最大長は何センチメートルでしょうか？
- 辺 AB の最大長は何センチメートルでしょうか？
- 辺 CA の最大長は何センチメートルでしょうか？



3.1 課題辺を描いて行う

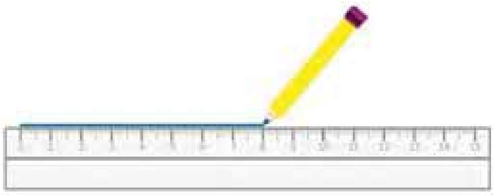
教材

- 定規及びコンパス
- 鉛筆及びノート

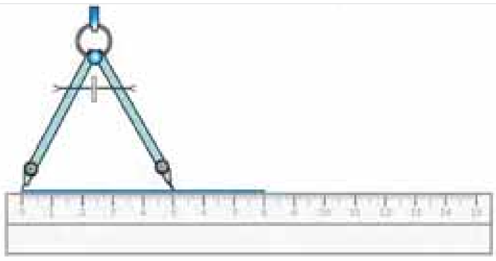
課題

各辺の長さがそれぞれ 5、7、8 センチメートルの三角形を描く方法は次の通りです。

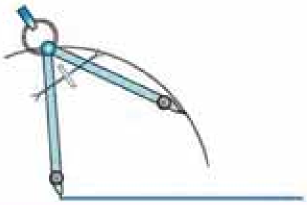
1. 長さ 8 cm の線を引きます。



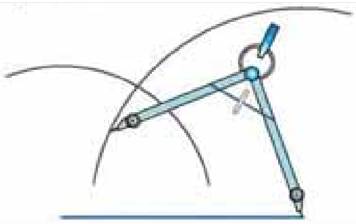
2. コンパスで他の辺の長さ、この場合、例えば 5 cm をとります。



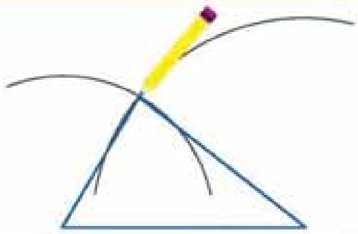
3. 1 で引いた線のどちらか一方の端にコンパスを置き、円の弧を描きます。



4. 次にコンパスで 7 cm の長さを取り、線のもう一方の端にコンパスを置いて手順 2 と 3 を繰り返します。



5. 二つの弧が交差する点から 8 cm の線の両端にそれぞれ線を引きます。三角形のそれぞれの辺が 5、7、8 センチメートルになっているか確認します。



問

1. それぞれの場合について、次の a、b、c の辺の長さを持つ三角形を描くことができるか確かめましょう。
   a) a = 4 cm, b = 5 cm 、c = 6 cm
   b) a = 8 cm, b = 10 cm 、c = 15 cm
   c) a = 3 cm, b = 4 cm 、c = 7 cm
   d) a = 6 cm, b = 8 cm 、c = 15 cm

2. 問 1 のそれぞれの問題について、次のように行います。
   a) $a + b, b + c$ 及び $a + c$ の合計をそれぞれ計算します。
   b) 次の不等式 $a + b > c, b + c > a$ 及び $a + c > b$ が成立しますか。

3.2 三角不等式　第 1 部*

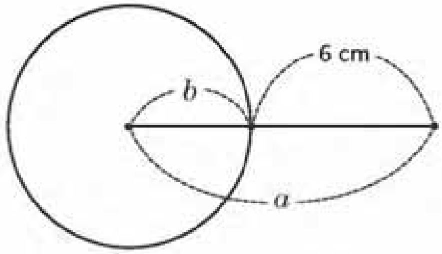
導入問題

a = 10 cm、b = 4 cmで、c が正数であるとします。a、b 及び c それぞれを辺にもつ三角形が成立するためには、c にはどのような数字が入るでしょうか。

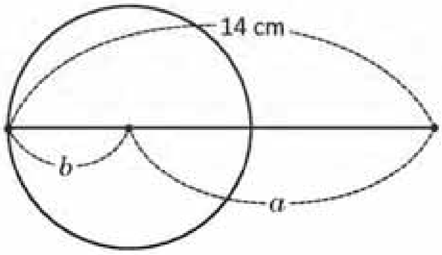
a の長さを持つ辺を描き、その辺のどちらかの端を中心として b を半径とする円の弧を描きます。

解法

a = 10 cm の辺を描き、その辺のどちらかの端を中心とする半径 b = 4 cm の円の弧を描きます。三角形の二つの頂点が辺 a の両端である場合、三つ目の頂点はこの円上になければなりません。原則として、c は $a - b$ = 6 cm よりも大きい値でなければなりません。これよりも小さい場合、三角形を描くことはできません（右の図参照）。

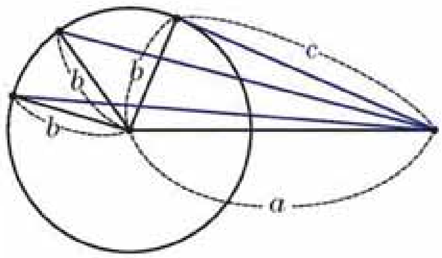


また c は、a + b = 14 cm よりも小さい値でなければなりません。この値をとる場合、右の図のように三つ目の頂点が辺aの延長線上に来てしまい、三角形にならないからです。



これ以外の場所に三つ目の頂点が来る場合、c の値は常に 6 cm より大きく、14 cm より小さくなります。したがって：

$$a - b < c < a + b$$
$$6 < c < 14$$

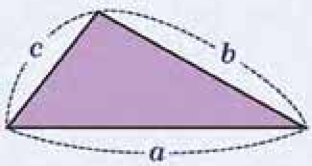


したがって、三角形を描くためには c の値は 6 cm と 14 cm の間の値をとります。

定理

すべての三角形において、二辺の長さの和は、もう一辺の長さよりも大きい。また二辺の長さの差は、もう一辺の長さよりも小さい。すなわち：

a) $b - c < a < b + c$;
b) $a - c < b < a + c$;
c) $a - b < c < a + b$.



三角形の辺の長さがそれぞれ a, b 及び c で、$b \geq c$ の場合：

$$b - c < a < b + c.$$

問題

1. 三角形の二辺の長さが次の通り与えられている場合、残りの一辺が取り得る値を求めましょう。
   a) 二辺の長さがそれぞれ 9 及び 14 センチメートルの場合。
   b) 二辺の長さがそれぞれ 3 及び 11 センチメートルの場合。
   c) 二辺の長さがそれぞれ 13 及び 7 センチメートルの場合。

2. 三辺の長さがそれぞれ14 cm、30 cm 及び 16cm の場合、どうして三角形にならないのか図を書かずに説明しましょう。

3.3 三角不等式　第 2 部*

導入問題

a と b が実数で $a \le b$ の場合、次の不等式が成立することを証明しましょう。

$$|a+b| \le |a| + |b|.$$

場合ごとに分ける：a と b が両方とも正数またはゼロの場合、一方が正数またはゼロ、もう一方が負の数の場合、両方とも負の数の場合。

解法

不等式を証明する場合、a と b が正の数またはゼロを取るか負の数になるか、それぞれの場合に分けて考えましょう。

a) **1 つ目の場合： $a \ge 0$ で $b \ge 0$ のとき。**この場合、$|a| = a$, $|b| = b$ になり $a + b \ge 0$; したがって：

$$|a+b| = a + b = |a| + |b|$$

つまり、不等式 $|a+b| \le |a| + |b|$ は成立します。等式が成立するからです。

b) **2 つ目の場合： $a < 0$ で $b \ge 0$ のとき。**この場合、$|a| = -a$, $|b| = b$ になり、 $|a| + |b| = (-a) + b$ となります。

- $a + b < 0$ の場合、次のようになります。 $|a+b| = -(a+b) = (-a) + (-b)$

  しかし、$-b < b$ （b が正の数であるため）となり、$(-a) + (-b) < (-a) + b$ になり、よって不等式 $|a+b| \le |a| + |b|$ が成立します。

- $a + b \ge 0$ の場合は練習問題とします。

$a \ge 0$ で $b < 0$ の場合は、2 番目の場合と同様に証明します。

c) **3 つ目の場合： $a < 0$ で $b < 0$ のとき。**この場合、 $|a| = -a$ で $|b| = -b$ になります。さらに a と b の和も負の数になります。

$$\begin{aligned}|a+b| &= -(a+b)\\ &= (-a) + (-b)\\ &= |a| + |b|\end{aligned}$$

つまり、等式を満たすため、不等式 $|a+b| \le |a| + |b|$ は成立します。

一般的に

a と b がどのような実数であっても、不等式 $|a+b| \le |a| + |b|$ は常に成立します。つまり二つの数の和の絶対値が、その二つの数それぞれの絶対値の和と同じか、またはこれよりも小さくなります。この不等式を**三角不等式**と呼びます。

問題

1. 次の a と b の数字の組合せのときに三角不等式が成立するか確かめましょう。

a) $a = 9$ および $b = 7$	b) $a = -8$ および $b = 10$	c) $a = -5$ および $b = -6$
d) $a = 11$ および $b = -13$	e) $a = -4$ および $b = 4$	f) $a = 8$ および $b = 8$
g) $a = 0$ および $b = -6$	h) $a = -\frac{4}{5}$ および $b = \frac{2}{5}$	i) $a = \sqrt{2}$ および $b = 3\sqrt{2}$

2. $a < 0$, $b \ge 0$ 及び $a + b \ge 0$ の場合、すなわち $|a+b| \le |a| + |b|$ になることを示します。

3. a、b 及び c が実数の場合。三角不等式を使って、次の不等式を証明しましょう。
   $|a+b+c| \le |a| + |b| + |c|$.

ユニット 3

3.4 算術幾何平均の不等式

導入問題

次の不等式が成り立つことを証明しましょう。

1. x が実数の場合 $x^2 \geq 0$ であること。
2. a と b が負の数ではない実数の場合、$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$

a) では、$x > 0$ と $x < 0$ の場合にわけて考えます。b) では、x を $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ に置き換えて a) の結果を利用します。

解法

1. $x = 0$ の場合、$x^2 = 0$ となり等式が成立します。x がとり得る値ごとに場合分けします。 $x > 0$ の場合と $x < 0$ の場合。

1 つ目の場合, $x \geq 0$

$x\,(x) \geq 0\,(x)$ 両方の側に正の数をかける場合、不等式は変わりません。

$x^2 \geq 0.$

2 つ目の場合, $x < 0$

$x\,(x) > 0\,(x)$ 両方の側に負の数をかける場合、不等式は反転します。

$x^2 > 0.$

よって x がどのような実数であっても $x^2 \geq 0$ は成立します。

2. 前の問題の結果を使い、x を $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ に置き換えます。つまり、$x = \sqrt{a}-\sqrt{b}$ の場合：

$$x^2 = \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$$

$$a - 2\left(\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b}\right) + b \geq 0 \quad \text{二項式を二乗します。}$$

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad 2\sqrt{ab}\ \text{を不等式の両辺に足します。}$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \text{不等式の両辺に}\ \frac{1}{2}\ \text{をかけます。}$$

よって、負ではない数 a と b はどのような組合せであっても次が成立します。 $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

法則

1. 全ての実数 a について $a^2 \geq 0$ が成立します。$a = 0$ の場合、等式が成立します。
2. a と b が負ではないいかなる数の場合でも次の不等式が真となります。

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

不等式の左の項は a と b の相加平均であり、右の項は a と b の相乗平均です。この不等式を**相加相乗平均の不等式**とよびます。

問題

1. a と b が次の数字の組合せの場合、相加相乗平均の不等式が成立するか確かめましょう。

a) $a = 9$ および $b = 4$　b) $a = 8$ および $b = 18$　c) $a = \frac{1}{4}$ および $b = \frac{1}{16}$

d) $a = 10$ および $b = 90$　e) $a = 25$ および $b = 49$　f) $a = 6$ および $b = 30$

2. 相加相乗平均の不等式を使って、次を証明しましょう。

a) x が負の数ではない場合、$1 + x \geq 2\sqrt{x}$ が成立すること。

b) a と b が両方とも正の数の場合、$\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$ が成立すること。

3.5 有理式による不等式

導入問題

次の各問題について、不等式を満たす x を求めましょう。

a) $\frac{1}{x} > 0$　　　　b) $\frac{1}{x-1} < 0$

解法

a) 数 $\frac{1}{x}$ が正の数となるような x の値をすべて求めます。$x = 0$ は解の一部とはなりません。なぜならば $\frac{1}{0}$ という不定形の形になってしまうからです。

$\frac{1}{x}$ の式が正になるために、分子と分母は両方とも正の数か、または両方とも負の数である必要があります。ただし、この場合すでに分子が正の数であるため、$x > 0$ である必要があります。

このため不等式 $\frac{1}{x} > 0$ は $x > 0$ について成立します。すなわち $x \in]0, +\infty[$ となります。

b) 解答手順は前の問題と類似しています。異なる点は $\frac{1}{x-1}$ が負の数にならなければならない点です。分子が正の数であるため、次のようにならなければなりません。

$$x - 1 < 0$$

$$x < 1$$

このため不等式 $\frac{1}{x-1} < 0$ は $x < 1$ について成立します。すなわち $x \in]-\infty, 1[$ となります。

まとめ

a と b は実数で、ただし $a \neq 0$ の場合。

1. 不等式 $\frac{1}{ax+b} > 0$ を解くことは、式が正になるような値を求めるということです。これは $ax + b > 0$ の場合にのみ成立します。
2. 不等式 $\frac{1}{ax+b} > 0$ を解くことは、式が負になるような値を求めるということです。これは $ax + b < 0$ の場合にのみ成立します。

例

不等式 $-\frac{1}{2x+3} < 0$ を解きましょう。

両方の辺に –1 をかけ、これにより不等式が逆転します。

$$\frac{1}{2x+3} > 0$$

よって、$\frac{1}{2x+3} > 0$ は $2x + 3 > 0$ の場合にのみ成立します。

$$2x > -3$$

$$x > -\frac{3}{2}$$

このため、不等式 $-\frac{1}{2x+3} < 0$ は $x > -\frac{3}{2}$ の場合に成立します。すなわち これは $x \in \left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[$ の場合ということです。

記号 ≥ と ≤ についてはこの不等式については考慮しません。なぜなら、$\frac{1}{ax+b}$ の形の式については決してゼロになることはなく、そのような場合を考慮することは意味がないからです。

問題

次の不等式を解きましょう（区間を使って回答を示しましょう）。

a) $\frac{1}{x+4} > 0$　　b) $\frac{1}{2x-5} < 0$　　c) $\frac{-1}{3x+1} > 0$

d) $-\frac{1}{1-x} > 0$　　e) $\frac{1}{-2x+10} > 0$　　f) $\frac{2}{4x-7} < 0$

g) $-\frac{3}{5x+6} > 0$　　h) $\frac{-x-4}{x+5} > -1$　　i) $\frac{x+2}{x+3} > 1$

問題 h) と i) は、全てを一つの辺にまとめて、一方の辺にはゼロが残るようにします。

3.6 ユニット問題

1. 次の一次不等式を解きましょう（区間を使って回答を示しましょう）。

a) $4x-12\sqrt{7}\le 20\sqrt{7}$　　b) $x+9\sqrt{5}\le -x-7\sqrt{5}$　　c) $-5x+3\sqrt{6}>-x+5\sqrt{6}$

d) $11x+2\sqrt{2}\ge 4x+5\sqrt{2}$　　e) $8x-15\sqrt{2}<5x-6\sqrt{3}$　　f) $\sqrt{10}\,x-8>\sqrt{2}\,x-6$

2. 次の各問題について、両方の不等式を満たす x を求めましょう。

a) $\begin{cases} 5x-3>4x-5 \\ -2x+5\le -3x+8 \end{cases}$　　b) $\begin{cases} 7x-6<5x-16 \\ x+11\ge -x-15 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x-7<5x+1 \\ 6x>3x+1 \end{cases}$　　d) $\begin{cases} -2x-3\le x-5 \\ 3x-1\ge 4x+7 \end{cases}$

各問題について、数直線を使ってそれぞれの不等式の回答を示しましょう。それから、両方の区分が一致する値であるか確認しましょう。

3. 以下の文章題を解きなさい。

a) ホセは高校一年生です。今年、数学の学期テストでそれぞれ次の成績をとりました。

第 1 学期	7.6
第 2 学期	8.0
第 3 学期	8.2

ホセが最終的な成績の平均を 8.0 と同等またはこれよりも高い値にしたい場合、第4学期のテストで取るべき成績の最低限の値はいくつになりますか。

b) フリアは旅行のために車を借りようとしています。A 社では車のレンタル料金 24.00 ドルに加えて、走行距離一キロにつき 0.30 ドルかかります。一方、B 社では、車のレンタル料金 25.00 ドルに加えて、走行距離一キロにつき 0.25 ドルかかります。A 社の料金が B 社の料金を上回るためには、フリアは少なくとも何キロ走行する必要がありますか。

c) 製品は、その売り上げによる収入が生産費用を上回る場合にのみ利益を生み出します。ある携帯電話の会社では、携帯電話を x 台生産するのにコストが C（ドル）かかると試算しています。

$$C=90x+1000,$$

一方で収入は 次の通り R (ドル) としています：$R=140x$.

利益を得るためには、少なくとも何台の携帯電話を売らなければならないでしょうか。

4. a, b 及び c を、ある三角形のそれぞれの辺の長さとします。このとき次の不等式が成立することを証明しなさい。

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}<3.$$

このユニットの 3.2 課の結果を使いましょう。

5. 相加相乗平均の不等式を使って、次を証明しましょう。

a) $x>0$ の場合、$x+\frac{1}{x}\ge 2$　になること。

b) a, b 及び x が正の数の場合、$ax+\frac{b}{x}\ge 2\sqrt{ab}$ が成立すること。

ユニット 4

実関数

リンド数学パピルスの画像。自然数とその 2 乗、3 乗および逆数が表示されています。

関数に関する概念は、エジプトやメソポタミア（バビロン）などの地域で、歴史的に非常に古い時代から出現し、数の 2 乗、3 乗または逆数に関する表を分析してきました（現在は関数として分析することができます）。しかし、変数間の依存関係の概念は歴史の中で自然に発生し、数学者で思想家のニコル・オレームによって初めて提示されました。彼は、自然の法則を大きさの間の依存関係として説明しています。

しかしながら、17 世紀に変数間の関係としての運動の研究において、より正式な関数の概念を提示したのは、数学者で天文学者のガリレオガリレイでした。その後、解析幾何学の進展により、関数の理論が発展し、スイスの数学者ヨハン・ベルヌーイが「関数」という表現を生み出しました。関数は多いに発展した後、20 世紀の初めにその定義が提示されました。それが現在知られている定義です。さらに、今世紀には集合論から出発し、数学に厳格な努力が払われています。これによって、関数の理論に新たなアプローチが与えられ、トポロジーなどの領域の出現から、関数の一般化に貢献しました。

ある居住地域における債務対時間のグラフ

関数の知識によって、日常生活の現象の表現や研究が容易になり、関数の解釈は、経済や医学、物理、工学に大いに応用されてきました。関数は、地球においても、そして、より複雑な空間である宇宙においても、人間の生活を支配しています。

このユニットでは、2次関数を引き続き学習し、軸方向への平行移動の概念を概括します。また、現在の関数の定義を理解し、記述的学習を通じてその他の重要な関数に取り組みます。最後に、このユニットの学習を強化するために、*GeoGebra* を使った演習をいくつか行います。

1.1 関数表記

導入問題

以下それぞれにある x の値に対応する関数 y の値を求めなさい。

a) $y = 5x - 1;\ x = -3$　　b) $y = 4x^2;\ x = \frac{1}{2}$　　c) $y = \frac{x^2}{2} + 5;\ x = 10$

解法

いずれの場合も、x の値を代入して y の値を求めます。

a)
$$\begin{aligned} y &= 5(-3) - 1 \\ &= -15 - 1 \\ &= -16 \end{aligned}$$

$x = -3$ ならば、$y = -16$

b)
$$\begin{aligned} y &= 4\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \\ &= 4\left(\tfrac{1}{4}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$x = \frac{1}{2}$ ならば、$y = 1$

c)
$$\begin{aligned} y &= \frac{(10)^2}{2} + 5 \\ &= \frac{100}{2} + 5 \\ &= 55 \end{aligned}$$

$x = 10$ ならば、$y = 55$

定義

A と B の 2 つの集合がある場合に、集合 A にある x の要素それぞれを定める B の集合にある y の要素が唯一である場合の関係を **B は A の関数**であるといいます。B が A の関数であることを示す表記は ***f* を使い、A ⟶ B**, A にある x の要素を**独立変数または説明変数**といい、B にある y の要素を**従属変数または目的変数**といいます。関数を用いる時は、y の変数は $f(x)$ と表し、「x の関数」と読みます。

すでに特定の 2 種類の関数、すなわち一次関数 $f(x) = ax + b$ と、二次関数 $f(x) = ax^2 + c$ を学習しています。どちらの関数も$\mathbb{R}$の関数$\mathbb{R}$となっているので、x の値も、y の値も実数です。関数は他の文字を使って表すことも可能です。例えば、$g(x)$ や $h(x)$ などと表記できます。

$x = m$ が成り立つ場合、$f(m)$ の値を求めるには、x に m をあてはめて**関数 *f* の方程式**を解きます。

例

以下の式にある関数 $f(x)$ の値を求めなさい。

a) $f(x) = -2x + 7\ ;\ x = -5$　　b) $f(x) = 3x^2 + 2\ ;\ x = 2$

$f(x)$ は、f かける x を意味しているのではなく、xの関数であることを表しています。

それぞれ関数の方程式に、x の値を代入します。1 つ目の問題では、$x = -5$ である関数を、$f(-5)$ と表し、二つ目の問題では、$x = 2$ である関数を $f(2)$ と表します。

a)
$$\begin{aligned} f(-5) &= -2(-5) + 7 \\ &= 10 + 7 \\ &= 17 \end{aligned}$$

よって、$f(-5) = 17$

b)
$$\begin{aligned} f(2) &= 3(2)^2 + 2 \\ &= 3(4) + 2 \\ &= 14 \end{aligned}$$

よって、$f(2) = 14$

問題

1. 以下の問題で、x がそれぞれ与えられた値を持つ場合の関数 $f(x)$ を求めなさい。

a) $f(x) = x + 4;\ x = 0$　　b) $f(x) = 4x - 6;\ x = 1$　　c) $f(x) = -\frac{x}{3} + 1;\ x = 6$

d) $f(x) = -5x^2;\ x = 3$　　e) $f(x) = x^2 + 4;\ x = -1$　　f) $f(x) = -\frac{x^2}{2} - 2;\ x = 2$

2. 一次関数 $f(x) = 2x - 3$ である場合に、$f(x) = 5$ となる x の値を求めなさい。

3. 関数 $f(x) = 4x^2 + 5$ である場合に、$f(x) = 11$ となる x の値を求めなさい。

1.2 関数グラフ

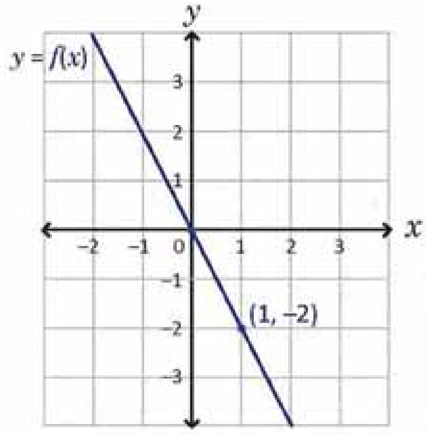
導入問題

$f(x) = -2x$ と $g(x) = 2x^2$ の式を例にとって、

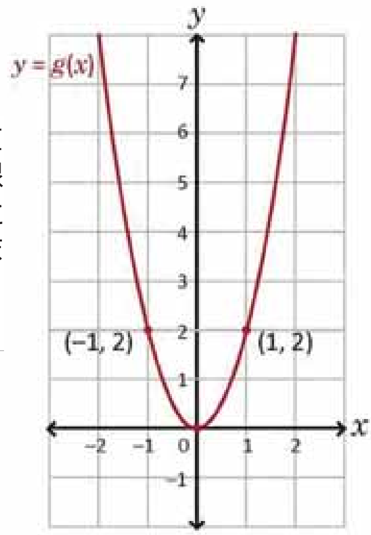
1. それぞれのグラフを作成しなさい。　f のグラフは直線で、g のグラフは放物線です。
2. それぞれのグラフに垂線を描きなさい。垂線は f と g それぞれのグラフと何回交差しますか？
3. もし垂線を描き続けたら、それらの垂線は f と g それぞれのグラフと何回交差することになりますか？

解法

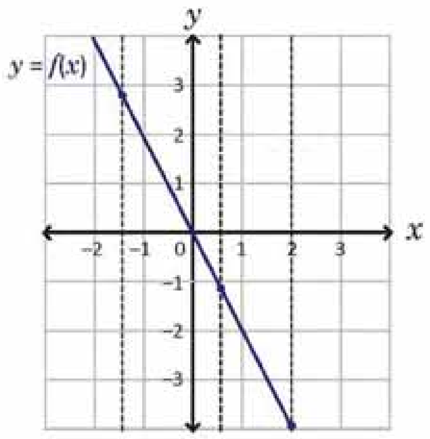
1. 関数 f は、一次関数で、そのグラフは原点を通る直線 です。そのことから、もし x が 1 ユニット増えると（つまり $x = 1$ になると） $f(x)$ は 2 減少します。$f(x) = -2x$ のグラフは、右図になります。

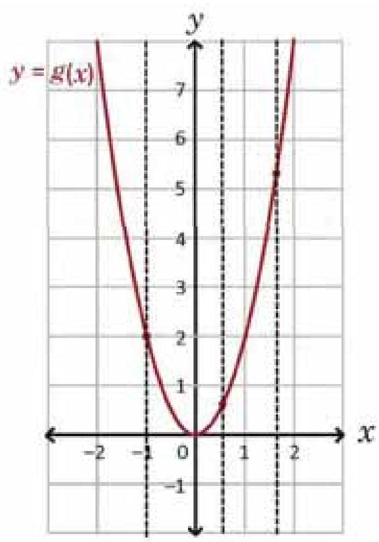


関数グラフ g は、頂点が原点にある放物線です。グラフ化するには、頂点の左と右にくる点を求めます。もし $x = -1$ ならば、$g(-1) = 2(-1)^2 = 2$ となり、放物線 g に属する点 (−1, 2) が求められます。同様に、$x = 1$ ならば、$g(1) = 2(1)^2 = 2$ となり、放物線上の点 (1, 2) が求められます。$g(x) = 2x^2$ のグラフは右図になります。



2. それぞれのグラフに 3 つの垂線を引いています。それぞれの垂線は、それぞれグラフ f もしくはグラフ g と 1 点で交わっています。





3. 垂線を何本引こうと、引いた垂線は全てそれぞれ関数 f のグラフや関数 g のグラフと （どちらのグラフであっても）１点で交わります。

まとめ

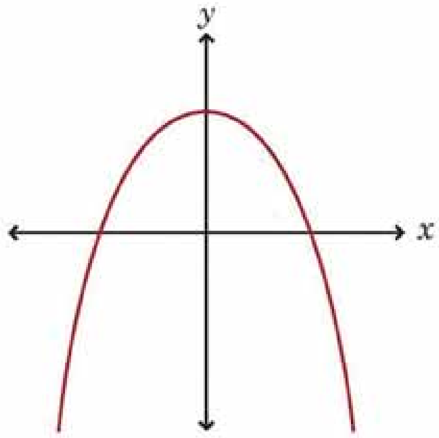
座標表面に描かれた一本の線の x の値が I の域にあって、I の域に描かれた垂線のいずれとも 1 点でのみと交わる場合、その線は関数グラフであると言えます。このように関数グラフを認識する方法を**垂線の証明**といいます。

これは関数そのものの定義により起こります。x の要素それぞれに対応する y の要素は唯一です。それぞれのグラフで描かれた垂線は x の特定の値を表しています。もしこの垂線が関数グラフと唯一の点で交わる場合は、その xの値に対し、関数 $f(x)$ または $g(x)$ の値が唯一であることを意味します。

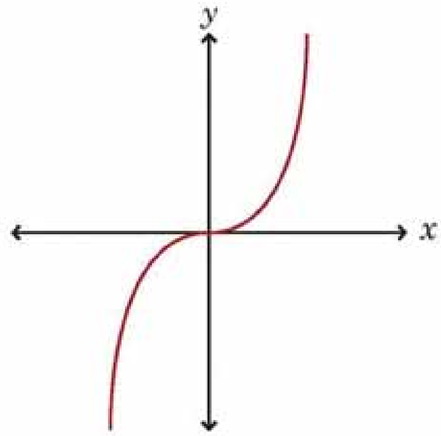
問題

それぞれの特定の垂線の証明を使って、関数グラフを表すと、こうなります。（関数の方程式を求める必要はありません）

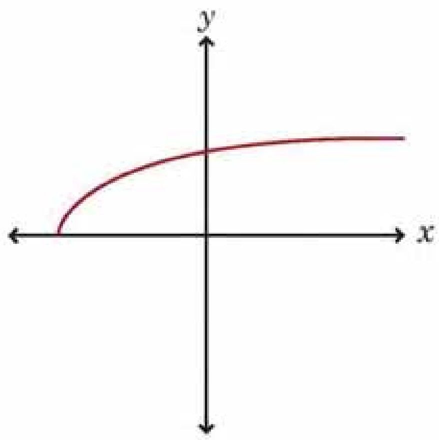
a)



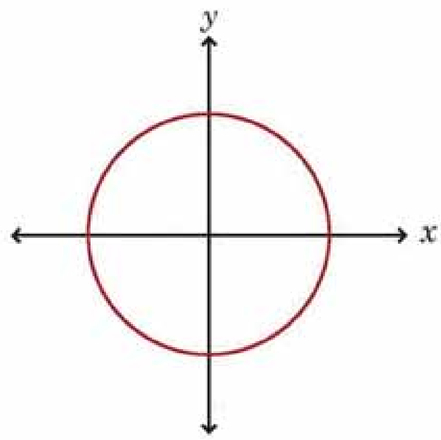
b)



c)



d)



1.3 関数の定義域と値域*

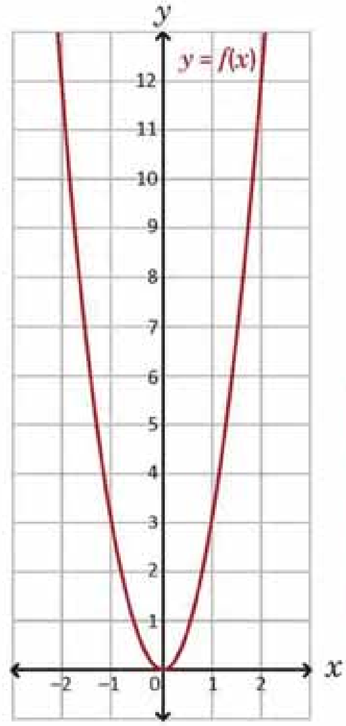
導入問題

方程式 $f(x) = 3x^2$ とそのその関数グラフを使って以下の問いに答えなさい。

1. なぜ x の値は $f(x)$ によって決まるのですか？
2. $f(x)$ にあてはまる可能性がある値を全てあげなさい。

解法

この関数グラフは右図で示すような頂点が (0,0) にある下に向かって開いた放物線グラフです。



1. 関数 $f(x) = 3x^2$ の方程式と、あらゆる実数の値をもつことができ、係数が常に $f(x)$ である独立変数 x よって、x の値がどんな実数であろうと $f(x)$ は一定であることが分かります。

2. この関数グラフでは、従属変数 $y = f(x)$ が最小の値となるのは、$x = 0$ のときです。x が増加または減少するにつれ、$f(x)$ の値 は増加します。（これは放物線が上に向かって開いている場合にあてはまります）よって、$f(x)$ にあてはまる値は 0 以上の実数、つまり、$[0, \infty[$ の間にある数値となります。

定義

関数 f の**定義域**は D_f と表し、それは $f(x)$ 定数である時に x にあてはまる全ての数値の集合です。関数 f の値域は R_f と表し、関数 $f(x)$ の値になり得る全ての値の集合です。

一次関数の場合、定義域も値域も実数の集合であるので、$\mathbb{R}$ と表します。関数 $f(x) = ax^2$ の定義域は $\mathbb{R}$ で、値域は a の値によって変動します。

1. $a > 0$ であれば、$R_f = [0, \infty[$
2. $a < 0$ であれば、$R_f =]-\infty, 0]$

問題

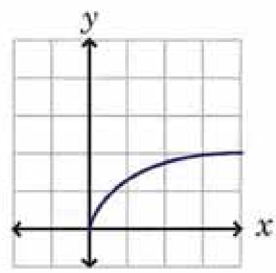
1. 以下の関数それぞれの定義域と値域を求めなさい。

a) $f(x) = \frac{1}{3}x + 4$　b) $f(x) = -10x + 3$　c) $f(x) = -x - 5$

d) $f(x) = x^2$　e) $f(x) = 2x^2$　f) $f(x) = -x^2$

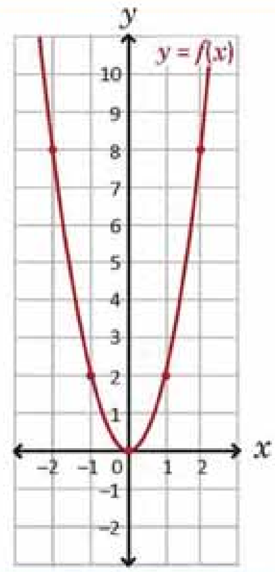
g) $f(x) = -3x^2$　h) $f(x) = 3x^2$　i) $f(x) = -2x^2$

2. ある関数グラフが右に示されています。このグラフだけを用いて、この関数の定義域と値域を求めなさい。



2.1 縦方向の平行移動

導入問題



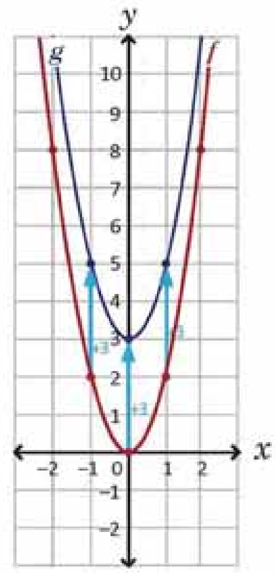
関数 $f(x) = 2x^2$ のグラフを用いて以下を行いましょう。

1. 関数 $g(x) = 2x^2 + 3$ と $h(x) = 2x^2 - 2$ をグラフで表しましょう。それぞれの関数の定義域と値域はどうなっていますか?

$g(x)$ のグラフは、f のグラフを上に単位 1 で +3 平行移動したものに相当します。h の平行移動はどの方向に向かってになるのでしょうか?

2. g と h のグラフを求める際に、f のグラフに何が起こるのか説明しましょう。

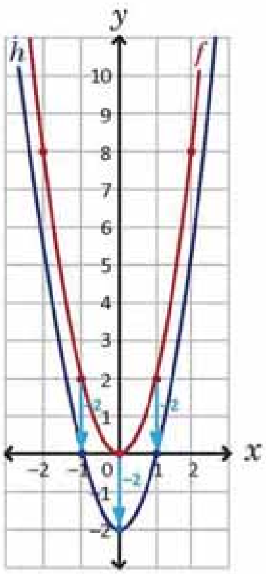
解法



1. 関数 $g(x) = 2x^2 + 3$ をグラフで表すためには、関数 $f(x) = 2x^2$ のグラフを縦方向で上に +3 平行移動させます。(参照:右の図)。

   つまり、関数 f のグラフの頂点は (0, 0) であるので、関数 g のものは (0, 3) となります。点 (–1, 2) と (1, 2) は関数 f の放物線上に存在することから、点 (–1, 5) と (1, 5) は関数 g のグラフ上に存在することになります。

   関数のグラフから、以下が導きだされます。$D_g = \mathbb{R}$ かつ $R_g = [3, \infty[$



関数 $h(x) = 2x^2 - 2$ のグラフを表す際には、$f(x) = 2x^2$ のグラフを単位 1 で -2 下に平行移動させます。

つまり、関数 f のグラフの頂点は (0, 0) であるので、関数 h のものは (0, -2) となります。点 (–1, 2) と (1, 2) が関数 f の放物線上に存在することから、点 (–1, 0) と (1, 0) は関数 h のグラフ上に存在することになります。

関数のグラフから、以下が導きだされます。$D_h = \mathbb{R}$ かつ $R_h = [-2, \infty[$

2. $f(x) = 2x^2$ を用いることにより：

a) 関数 $g(x) = 2x^2 + 3$ のグラフは、
$f(x) = 2x^2$ のグラフを縦方向で上に単位 1 で +3 平行移動させることにより求められます。

b) 関数 $h(x) = 2x^2 - 2$ のグラフは、
$f(x) = 2x^2$ のグラフを縦方向で下に単位 1 で -2 平行移動させることにより求められます。

定義

関数 $f(x)$ と、0 と異なる実数 k が与えられている場合、関数 $g(x) = f(x) + k$ のグラフは、**f のグラフを縦方向に単位 1 で** k 平行移動させたものです。もし $k > 0$ であれば、グラフは上に平行移動し、もし $k < 0$ であれば、グラフは下に平行移動します。

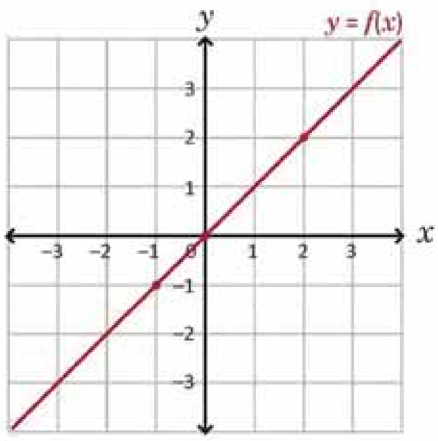
$f(x) = ax^2$ の場合、$g(x) = ax^2 + k$ のグラフは頂点が $(0, k)$ にある放物線で：

1. もし $a > 0$ であれば、$R_f = [k,\infty[$。
2. もし $a < 0$ であれば、$R_f =]-\infty, k]$。

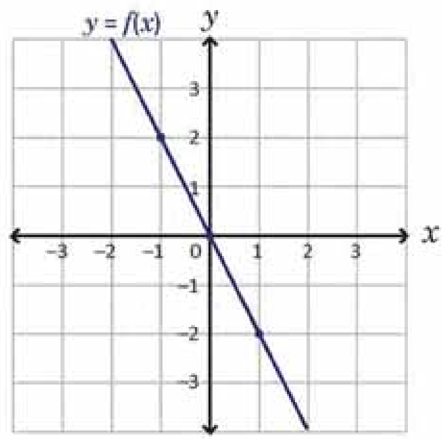
問題

それぞれの場合について、関数 $f(x)$ のグラフを用いて、関数 $g(x)$ のグラフを表して、その定義域と値域を求めましょう。

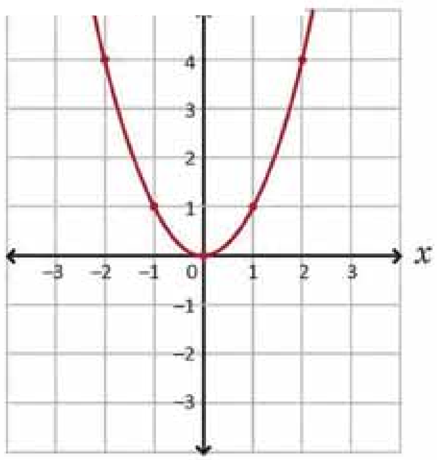
a) $f(x) = x$ と $g(x) = x + 1$



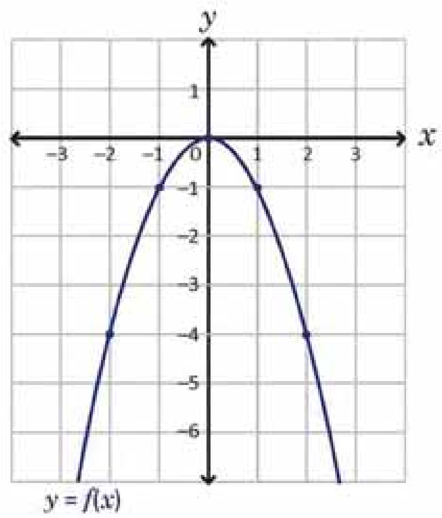
b) $f(x) = -2x$ と $g(x) = -2x - 3$



c) $f(x) = x^2$ と $g(x) = x^2 + 2$



d) $f(x) = -x^2$ と $g(x) = -x^2 - 3$



2.2 $f(x) = a(x - h)^2$, $h > 0$ 型の関数

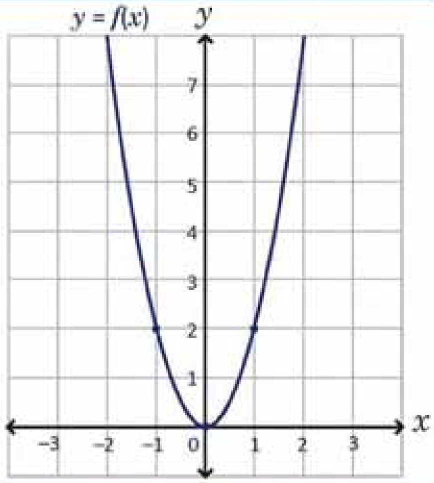
導入問題

関数 $f(x) = 2x^2$ のグラフを用いて以下を行いましょう。

1. 関数 $g(x) = 2(x - 1)^2$ の表とグラフを完成させましょう。

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	18	8	2	0	2	8	18
$g(x)$							

g のグラフは放物線になります。



2. g のグラフの頂点の座標はどれになりますか? g の定義域と値域はどのようになりますか?
3. g のグラフを得るには、f のグラフをどのように平行移動させるべきですか?

解法

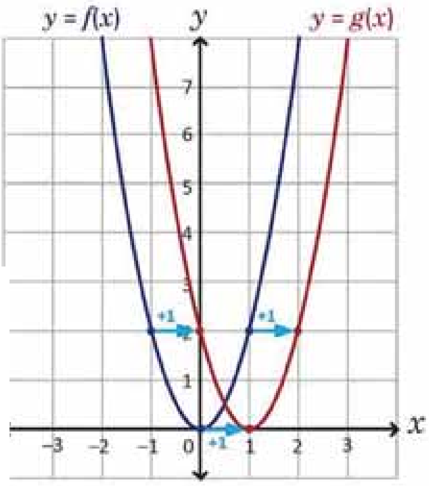
1. 表は次のようになります。

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	18	8	2	0	2	8	18
$g(x)$	32	18	8	2	0	2	8

次のことが分かります。ある x の値が与えられると、対応する $g(x)$ の値は、$f(x - 1)$ の値に等しくなります。例えば、$x = 0$ のときは：

$$g(0) = f(0 - 1)$$
$$= f(-1)$$
$$= 2$$

g のグラフは右に示してあります。



2. g のグラフの頂点の座標は (1, 0) で、$D_g = \mathbb{R}$ かつ $R_g = [0, \infty[$ 。

3. $f(x) = 2x^2$ のグラフは、横方向で右に単位 1 で +1 平行移動し、$g(x) = 2(x - 1)^2$ のグラフが求まりました。

まとめ

$f(x) = ax^2$ として、a は任意の 0 でない実数で、かつ $h > 0$ のとき、関数のグラフは：

$$g(x) = f(x - h) = a(x - h)^2$$

f のグラフを、**横方向で右に単位 1 で h 平行移動させたものです。**放物線の頂点は $(h, 0)$ で、$D_g = \mathbb{R}$、かつ

1. a > 0 であれば、$Rg = [0, \infty[$
2. $a < 0$ であれば、$Rg =]-\infty, 0]$

問題

$f(x)$ のグラフを用いて、関数 $g(x)$ のグラフを、それぞれの場合について描きましょう。関数 g の頂点の座標と、定義域と値域を求めましょう。

a) $f(x) = x^2$; $g(x) = (x - 2)^2$
b) $f(x) = -x^2$; $g(x) = -(x - 1)^2$
c) $f(x) = 2x^2$; $g(x) = 2(x - 2)^2$
d) $f(x) = -2x^2$; $g(x) = -2(x - 3)^2$

2.3 $f(x)=a(x-h)^2$, $h<0$ 型の関数

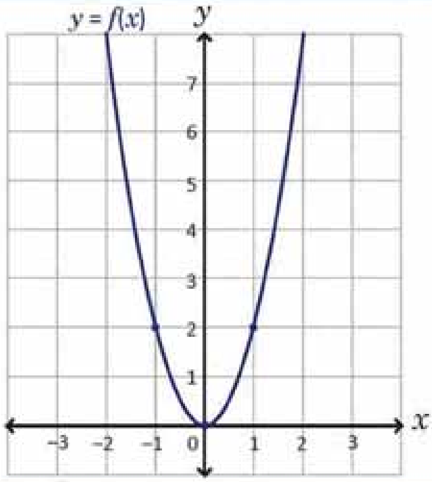
導入問題

関数 $f(x)=2x^2$ のグラフを用いて以下を行いましょう。

1. 関数 $g(x)=2(x+1)^2$ の表とグラフを完成させましょう。

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	18	8	2	0	2	8	18
$g(x)$							

g のグラフは放物線になります。



2. g のグラフの頂点の座標はどれになりますか? g の定義域と値域はどのようになりますか?
3. g のグラフを得るには、f のグラフをどのように平行平行移動させるべきですか?

解法

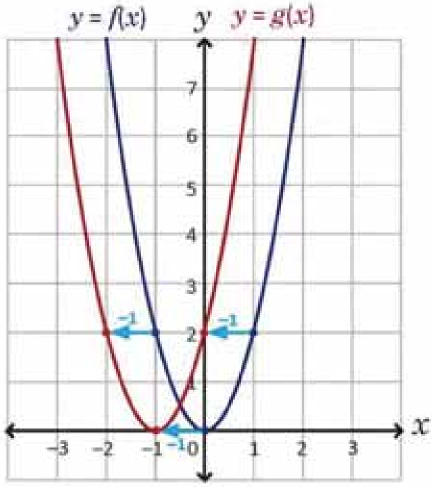
1. 表は次のようになります。

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	18	8	2	0	2	8	18
$g(x)$	8	2	0	2	8	18	32

次のことが分かります。ある x の値が与えられると、対応する $g(x)$ の値は、$f(x+1)$ の値に等しくなります。例えば、$x=0$ のときは：

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0+1) \\ &= f(1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

g のグラフは右に示してあります。



2. g のグラフの頂点の座標は $(-1, 0)$ で、$D_g=\mathbb{R}$ かつ $R_g=[0,+\infty[$ 。
3. $f(x)=2x^2$ のグラフは、横方向で左に単位 1 で −1 平行移動して、$g(x)=2(x+1)^2$ のグラフが求まりました。

関数 g の方程式は、$g(x)=2[x-(-1)]^2$ のように書き表すこともできます。

まとめ

$f(x)=ax^2$ として、a は任意の 0 でない実数で、かつ $h<0$ のとき、関数のグラフは：

$$g(x)=f(x-h)=a(x-h)^2$$

f のグラフを、横方向で左に単位 1 で h 平行移動させたものです。放物線の頂点は $(h,0)$ で、$D_g=\mathbb{R}$、かつ：

1. $a>0$ であれば、$R_g=[0,\infty[$
2. $a<0$ であれば、$R_g=]-\infty, 0]$

問題

$f(x)$ のグラフを用いて、関数 $g(x)$ のグラフを、それぞれの場合について描きましょう。関数 g の頂点の座標と、定義域と値域を求めましょう。

a) $f(x)=x^2$; $g(x)=(x+2)^2$
b) $f(x)=-x^2$; $g(x)=-(x+1)^2$
c) $f(x)=2x^2$; $g(x)=2(x+2)^2$
d) $f(x)=-2x^2$; $g(x)=-2(x+3)^2$

2.4 $f(x) = a(x - h)^2 + k$ 型の関数、第 1 部

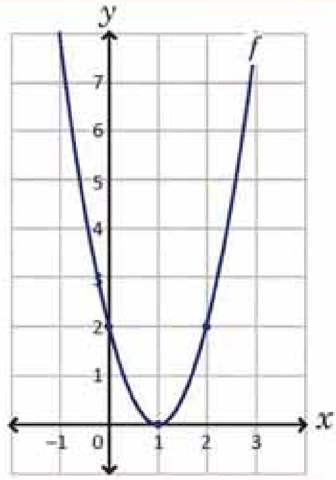
導入問題

関数 $f(x) = 2(x - 1)^2$ のグラフを用いて以下を行いましょう。

1. 関数 $g_1(x) = 2(x - 1)^2 + 3$ と $g_2(x) = 2(x - 1)^2 - 4$ をグラフで表しましょう。それぞれのグラフを得るには、f のグラフをどのように平行移動させるべきか説明しましょう。

> $g(x) = f(x) + k$ のグラフは、f のグラフを縦方向で単位 1 で k だけ平行移動させたもので、k が正のときは上方向で、k が負のときは下方向への平行移動になります。

2. それぞれの場合について、頂点の座標と、定義域と値域を求めましょう。



解法

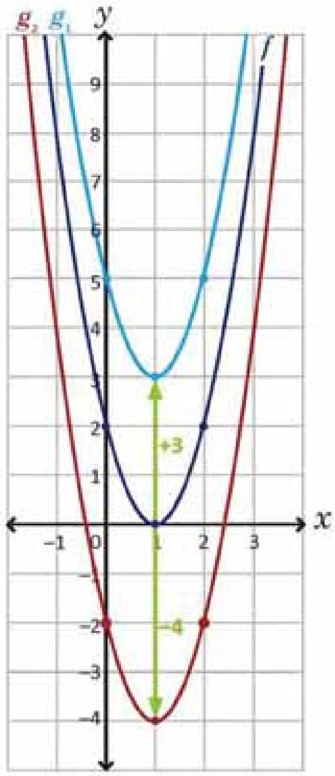
1. 双方の関数とも $f(x) + k$ 型をしていますが、これは縦方向に単位 1 で k だけ平行移動したものであることを意味します。

   $g_1(x) = 2(x - 1)^2 + 3$, $k = 3$ の場合には、f のグラフは、これによって、縦方向で単位 1 で上に +3 平行移動します。右の図の空色の放物線は、g_1 のグラフに該当します。

   $g_2(x) = 2(x - 1)^2 - 4$, $k = -4$ の場合には、f のグラフは、これによって縦方向で単位 1 で下に −4 平行移動します。右の図の赤色の放物線は、g_2 のグラフに該当します。

2. 関数 g_1 のグラフの頂点の座標は (1, 3) で、さらに $D_{g1} = \mathbb{R}$ でかつ $R_{g1} = [3, \infty[$ です。

   一方、関数 g_2 のグラフの頂点の座標は (1, −4) で、さらに $D_{g2} = \mathbb{R}$ でかつ $R_{g2} = [-4, \infty[$ です。



まとめ

$f(x) = a(x - h)^2$ として、a と h は任意の実数で、かつ a が 0 と異なるとき、関数のグラフは：

$$g(x) = a(x - h)^2 + k$$

k が実数であるとき、これは f のグラフを縦方向に単位 1 で **k 平行移動させたものになります。** もし $k > 0$ であれば、平行移動は上方向で、もし $k < 0$ であれば、平行移動は下方向になります。**g の放物線の頂点は (h, k)** で、$D_g = \mathbb{R}$、かつ：

1. もし $a > 0$ であれば、$R_g = [k, \infty[$ 。
2. もし $a < 0$ であれば、$R_g =]-\infty, k]$ 。

問題

$f(x)$ のグラフを用いて、関数 $g(x)$ のグラフを、それぞれの場合について描きましょう。関数 g の頂点の座標と、定義域と値域を求めましょう。

a) $f(x) = (x - 2)^2$; $g(x) = (x - 2)^2 + 3$

b) $f(x) = -(x - 1)^2$; $g(x) = -(x - 1)^2 + 2$

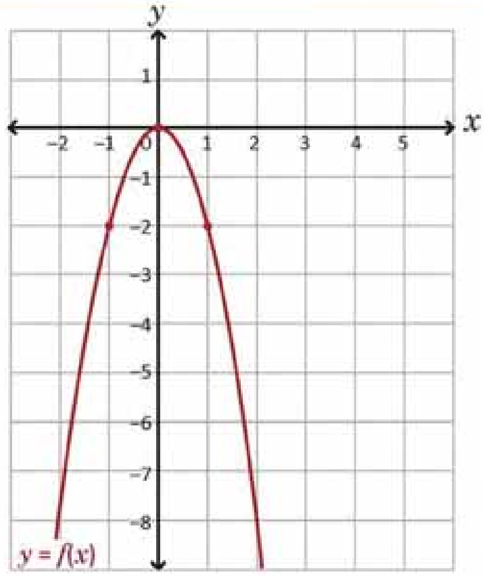
c) $f(x) = 2(x + 2)^2$; $g(x) = 2(x + 2)^2 - 1$

d) $f(x) = -2(x + 3)^2$; $g(x) = -2(x + 3)^2 - 4$

2.5 $f(x) = a(x-h)^2 + k$ 型の関数、第 2 部

導入問題

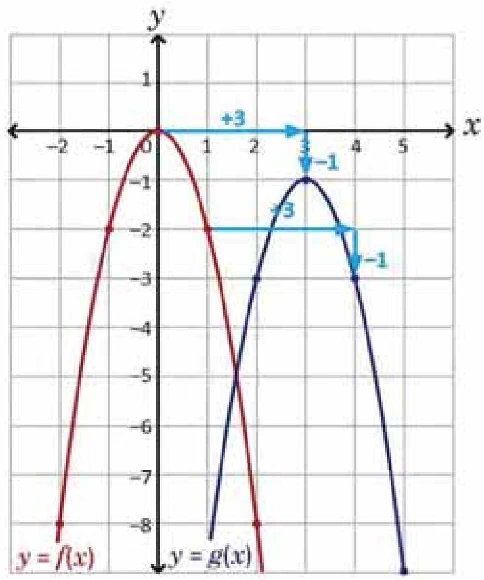
関数 $f(x) = -2x^2$ のグラフを用いて以下を行いましょう。



1. 関数 $g(x) = -2(x-3)^2 - 1$ のグラフを描きましょう。g のグラフを得るために、f のグラフをどのように平行移動させなければいけないか、説明してください。

2. 関数 g の頂点の座標、定義域と値域を求めましょう。

解法



1. 関数 g は $f(x-h)+k$ 型になっています。つまり、縦方向にも横方向にも平行移動がなされています。この場合については、$h = 3$ で $k = -1$ です。

   最初に、f のグラフが横方向に単位 1 で +3 右に平行移動し、次に縦方向で単位 1 で −1 下に平行移動しています。g のグラフは、右の図の青色の放物線に該当します。

2. g のグラフの頂点の座標は (3, −1) で、さらに $D_g = \mathbb{R}$ かつ $R_g =]-\infty, -1]$ 。

まとめ

$f(x) = ax^2$ として、a は任意の 0 でない実数 のとき、関数のグラフは：

$$g(x) = a(x-h)^2 + k$$

f のグラフを **横方向に単位 1 で h 平行移動し、** さらに縦方向に単位 1 で k 平行移動させた放物線です。g のグラフの頂点は (h, k) で、$D_g = \mathbb{R}$ で、かつ：

1. もし $a > 0$ であれば、$R_g = [k, \infty[$ 。
2. もし $a < 0$ であれば、$R_g =]-\infty, k]$ 。

問題

それぞれの場合について、$f(x)$ のグラフを描き、そこから $g(x)$ のグラフを描きましょう。g の頂点の座標と、定義域と値域を求めましょう。

a) $f(x) = x^2$; $g(x) = (x+1)^2 + 2$
b) $f(x) = -x^2$; $g(x) = -(x+3)^2 - 3$
c) $f(x) = 3x^2$; $g(x) = 3(x-2)^2 + 1$
d) $f(x) = -3x^2$; $g(x) = -3(x-4)^2 - 2$

2.6 $f(x) = ax^2 + bx$ 型の関数 *

導入問題

以下の関数それぞれのグラフを描き、定義域と値域を求めましょう。

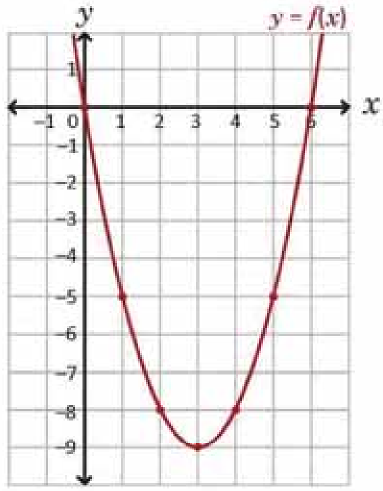
a) $f(x) = x^2 - 6x$　　b) $g(x) = -2x^2 - 4x$

それぞれの関数の方程式で、平方完成しましょう。

解法

a) 関数 f の方程式で平方完成します。

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 \\ &= (x^2 - 6x + 3^2) - 3^2 \\ &= (x-3)^2 - 3^2 \\ &= (x-3)^2 - 9 \end{aligned}$$

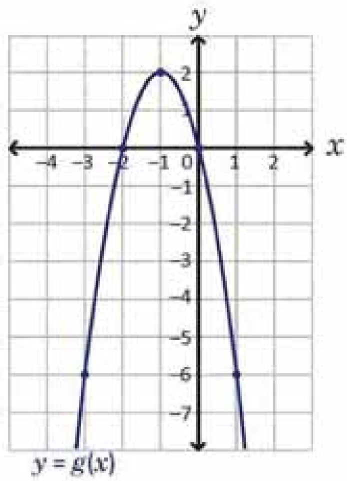


関数 f は $a(x-h)^2 + k$ 型：$D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-9, \infty[$ で、そのグラフは右図に示されているように、頂点を (3, –9) として上に開いた放物線です。

$f(x) = (x-3)^2 - 9$ は、$h(x) = x^2$ のグラフを横方向に単位 1 で右に +3 平行移動し、縦方向に単位 1 で下に –9 平行移動したものです。

b) 同様に、関数 g の方程式で平方完成します。

$$\begin{aligned} g(x) &= -2(x^2 + 2x) \\ &= -2\left[x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2\right] \\ &= -2[x^2 + 2x + 1^2 - 1^2] \\ &= -2[(x+1)^2 - 1] \\ &= -2(x+1)^2 + 2 \end{aligned}$$



関数 g は $a(x-h)^2 + k$ 型：$D_g = \mathbb{R}$, $R_g =]-\infty, 2]$ で、そのグラフは右図で示すように頂点を (–1, 2) として下に開いた放物線です。

$g(x) = -2(x+1)^2 + 2$ は、$h(x) = -2x^2$ のグラフを、横方向に単位 1 で –1 左に平行移動し、縦方向に単位 1 で +2 上に平行移動したものです。

まとめ

$f(x) = ax^2 + bx$ 型の関数が与えられると、関数 f の方程式を平方完成させることにより、$a(x-h)^2 + k$ 型に変形することができ、そのグラフは、$a > 0$ であれば上に開いた放物線で、$a < 0$ であれば下に開いた放物線になっています。

問題

それぞれの場合について、f のグラフを描くために平方完成し、関数の頂点の座標と、定義域と値域を求めましょう。

a) $f(x) = x^2 - 4x$　　b) $f(x) = -x^2 + 2x$　　c) $f(x) = 3x^2 + 6x$

2.7 $f(x) = x^2 + bx + c$ 型の関数

導入問題

グラフを描き、頂点、定義域と値域を求めましょう。

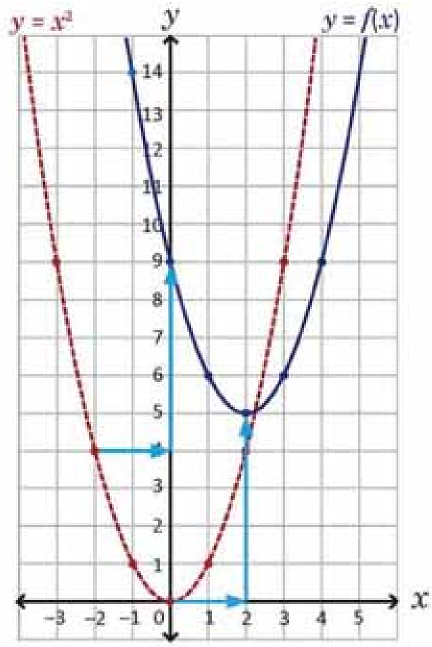
$$f(x) = x^2 - 4x + 9.$$

関数 f の方程式で平方完成しましょう。

解法

関数 f の方程式で平方完成します。

$$f(x) = \left[x^2 - 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2\right] + 9$$
$$= (x^2 - 4x + 2^2) - 2^2 + 9$$
$$= (x - 2)^2 - 4 + 9$$
$$= (x - 2)^2 + 5$$



これにより、関数 f が $(x - h)^2 + k$ 型で $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [5, \infty[$ 、に書き換えられました。そのグラフは、右図に示されるように、頂点を (2, 5) として上に開いた放物線です。

$f(x) = (x - 2)^2 + 5$ は、$y = x^2$ のグラフを横方向に単位 1 で +2 右に平行移動して、縦方向に単位 1 で +5 上に平行移動したものです。

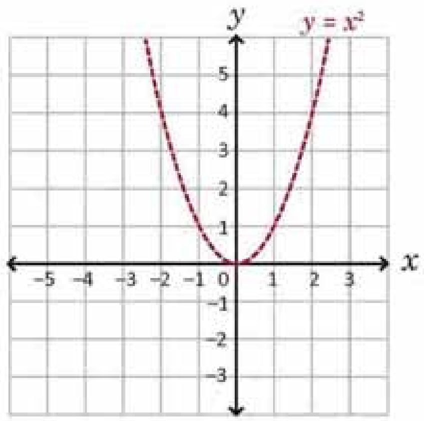
まとめ

$f(x) = x^2 + bx + c$ 型の関数が与えられると、関数 f の方程式を平方完成させることにより、$(x - h)^2 + k$ 型に変形することができ、そのグラフは、上に開いた放物線になります。

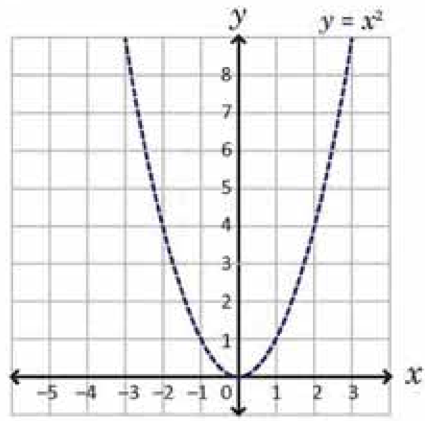
問題

それぞれの場合について、f のグラフを描くために平方完成し、関数の頂点の座標と、定義域と値域を求めましょう。

a) $f(x) = x^2 + 2x - 2$



b) $f(x) = x^2 + 4x + 5$



c) $f(x) = x^2 - 6x + 7$

d) $f(x) = x^2 - 8x + 18$

2.8 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 型の関数

導入問題

関数のグラフを描き、頂点の座標と、定義域と値域を求めましょう。

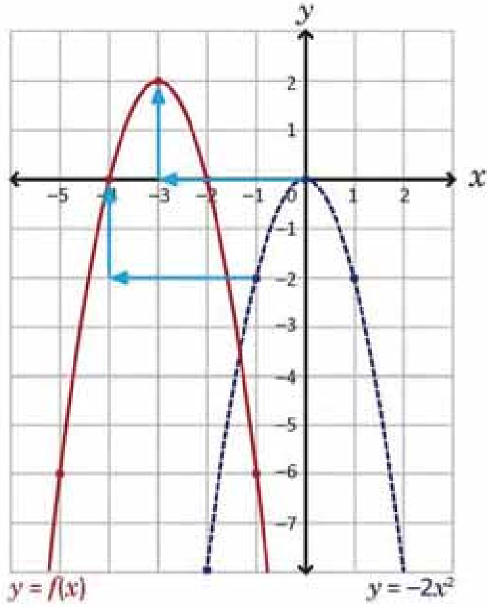
$$f(x) = -2x^2 - 12x - 16.$$

関数 f の方程式で平方完成します。

解法

関数 f の方程式で平方完成します。

$$\begin{aligned} f(x) &= -2[x^2 + 6x] - 16 \\ &= -2\left[x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2\right] - 16 \\ &= -2[x^2 + 6x + 3^2 - 3^2] - 16 \\ &= -2[(x+3)^2 - 9] - 16 \\ &= -2(x+3)^2 + 18 - 16 \\ &= -2(x+3)^2 + 2 \end{aligned}$$



これにより、関数 f は $a(x-h)^2 + k$: $D_f = \mathbb{R}$, $R_f =]-\infty, 2]$ に書き換えられ、そのグラフは、右図に示されるように、頂点を $(-3, 2)$ として下に開いた放物線です。

関数 $f(x) = -2(x+3)^2 + 2$ は、$y = -2x^2$ のグラフを横方向に単位 1 で -3 左に平行移動し、縦方向に単位 1 で上に $+2$ 平行移動したものです。

定義

$f(x) = ax^2 + bx + c$ 型の関数で、a、b、c が任意の実数を取り、a が 0 と異なるものは、**二次関数**と呼ばれます。

二次関数は、関数 f の方程式を平方完成することにより $a(x-h)^2 + k$ の形にも表すことができ、このとき、そのグラフは頂点を点 (h, k) にとって、もし $a > 0$ であれば上に開いた放物線、もし $a < 0$ であれば下に開いた放物線になります。

ある二次関数の定義域は、常に実数の集合 ($\mathbb{R}$) に等しく、値域は a の値と頂点座標 (h, k) の y 軸の値に依存します。

1. もし $a > 0$ であれば、$R_g = [k, \infty[$ 。
2. もし $a < 0$ であれば、$R_g =]-\infty, k]$ 。

問題

それぞれの場合について、f のグラフを描くために平方完成し、さらに関数の頂点の座標と、定義域と値域を求めましょう。

a) $f(x) = -x^2 + 8x - 13$

b) $f(x) = 3x^2 + 12x + 11$

c) $f(x) = 2x^2 - 20x + 44$

d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$

2.9 初期条件

導入問題

それぞれの場合について、二次関数 f の方程式を求めましょう。
1. f のグラフの頂点は (4, 5) で、点 (2, −7) を通ります。
2. f は $ax^2 + bx$ 型で、グラフは点 (−1, −10) と (−4, −16) を通ります。

解法

1. 初期条件は、f のグラフの頂点の座標を示していますので、次の形で方程式を記述するのが好都合です。

$$f(x) = a(x-h)^2 + k \qquad \text{------------------- (1)}$$

(1) の h と k に値を代入して、次が得られます。

$$f(x) = a(x-4)^2 + 5$$

ここで、もしこの曲線が点 (2, −7) を通るのであれば、$x = 2$ のとき $f(2) = -7$ 。前の方程式に代入して、a の値を移項すると：

$$\begin{aligned} -7 &= a(2-4)^2 + 5 \\ -7 &= 4a + 5 \\ -12 &= 4a \\ -3 &= a \end{aligned}$$

よって、関数の方程式は $f(x) = -3(x-4)^2 + 5$

> $f(x) = -3(x-4)^2 + 5$ は、次のように記述することもできます。
> $f(x) = -3x^2 + 24x - 43$

2. 初期条件は $f(x) = ax^2 + bx$ と示しています。もし f のグラフが点 (−1, −10) を通るのであれば、$x = -1$ のとき、$f(-1) = -10$ これらの値を代入して、a を関数の形になるよう移項して：

$$\begin{aligned} -10 &= a(-1)^2 + b(-1) \\ -10 &= a - b \\ -10 + b &= a \qquad \text{------------------- (2)} \end{aligned}$$

同様に、$x = -4$ のとき、$f(-4) = -16$ これらの値を、(2)で得た a を含めて代入し、b の値を移項します。

$$\begin{aligned} -16 &= a(-4)^2 + b(-4) \\ -16 &= (b-10)16 - 4b \\ -16 &= 16b - 160 - 4b \\ 144 &= 12b \\ 12 &= b \end{aligned}$$

よって、関数の方程式は $f(x) = 2x^2 + 12x$

まとめ

f が二次関数であることから、これの方程式は、$a(x-h)^2 + k$ または $ax^2 + bx + c$ の形で書き表すことができます。もし、初期条件で f のグラフの頂点の座標が提供されていれば、$a(x-h)^2 + k$ の形で記述するのが望ましいといえます。

問題

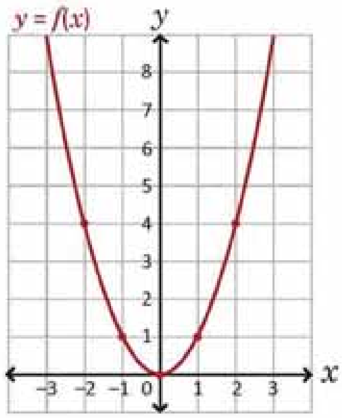
1. それぞれの場合について、二次関数 f の方程式を求めましょう。
   a) f のグラフの頂点は (−2, 1) で、点 (0, 5) を通ります。
   b) f のグラフの頂点は (3, −6) で、点 (4, −8) を通ります。
   c) f は $ax^2 + bx$ 型で、グラフは点 (8, 0) と (2, −12) を通ります。

2. 二次関数 f が点 (−2, 8)、(0, 2)、(2, 4) を通るとき、その方程式を求めましょう。

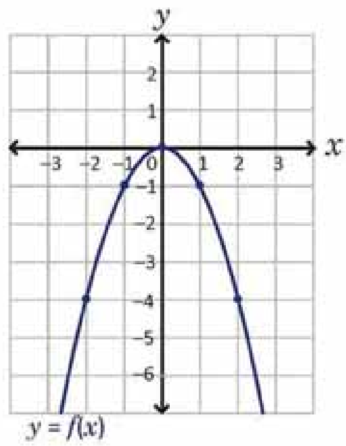
2.10 学んだことで練習しましょう

f のグラフを用いて、g のグラフを描きましょう。
それぞれの場合について、頂点の座標と、定義域と値域を求めましょう。

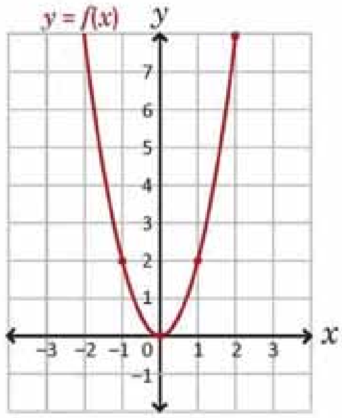
a) $f(x) = x^2$ と $g(x) = x^2 + 3$



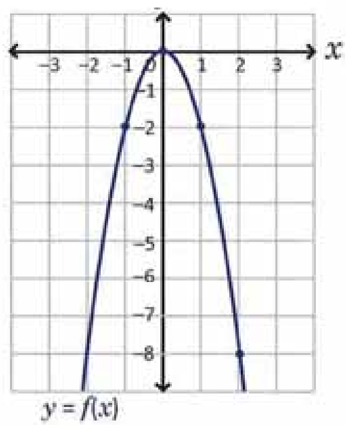
b) $f(x) = -x^2$ と $g(x) = -x^2 + 2$



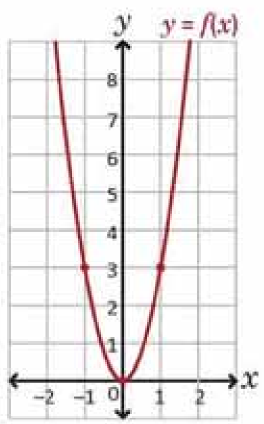
c) $f(x) = 2x^2$ と $g(x) = 2x^2 - 1$



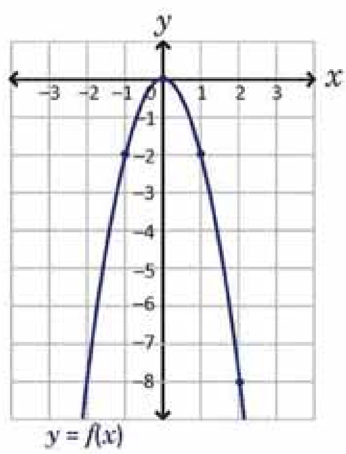
d) $f(x) = -2x^2$ と $g(x) = -2x^2 - 3$



e) $f(x) = 3x^2$ と $g(x) = 3(x - 4)^2$



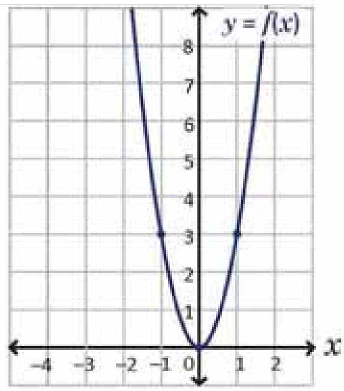
f) $f(x) = -2x^2$ と $g(x) = -2(x - 1)^2$



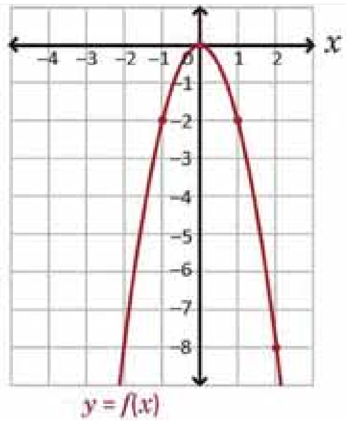
2.11 学んだことで練習しましょう

1. f のグラフを使用して、g のグラフを描きましょう。それぞれの場合について、頂点の座標と、定義域と値域を求めましょう。

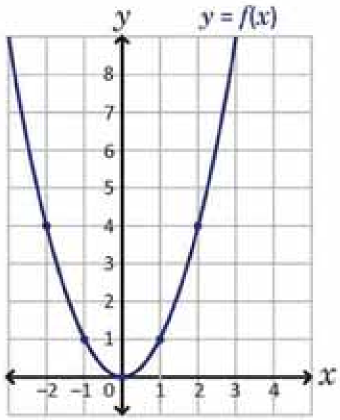
a) $f(x) = 3x^2$ と $g(x) = 3(x + 2)^2$



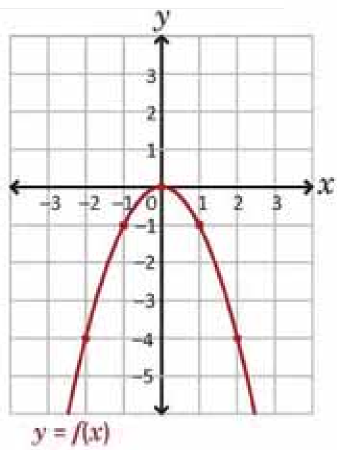
b) $f(x) = -2x^2$ と $g(x) = -2(x + 2)^2$



c) $f(x) = x^2$ と $g(x) = (x - 4)^2 + 2$



d) $f(x) = -x^2$ と $g(x) = -(x + 1)^2 + 3$



2. それぞれの場合について、f のグラフを描くために平方完成しましょう。関数の頂点の座標と、定義域と値域を求めましょう。

a) $f(x) = -3x^2 + 6x$
b) $f(x) = 5x^2 + 10x$
c) $f(x) = -x^2 - 4x$
d) $f(x) = x^2 - 2x + 2$
e) $f(x) = x^2 + 2x + 2$
f) $f(x) = x^2 - 10x + 23$
g) $f(x) = -x^2 - 4x - 7$
h) $f(x) = 2x^2 - 12x + 13$
i) $f(x) = -3x^2 - 6x + 2$

3. 以下の場合について、二次関数 f の方程式を求めましょう。

a) f のグラフの頂点が (0, 0) にあり、点 (2, 2) を通るとき。
b) f のグラフの頂点が (0, –1) にあり、点 (–1, –3) を通るとき。
c) f のグラフの頂点が (3, 0) にあり、点 (2, 4) を通るとき。
d) f のグラフの頂点が (2, –5) にあり、点 (4, 3) を通るとき。
e) f は $ax^2 + bx$ 型で、そのグラフは点 (2, 0) と (–1, 3) を通ります。
f) f は $ax^2 + bx$ 型で、グラフは点 (1, –4) と (4, 8) を通ります。
g) f のグラフは点 (–2, 3)、(0, –3)、(1, 0) を通ります。

3.1 単調関数

導入問題

二次関数 $f(x) = 2(x - 1)^2 - 5$ 及び $g(x) = -2(x - 1)^2 + 5$ である場合、次の問題に回答しましょう。

1. $-1 \le x \le 1$ の場合、$f(x)$ と $g(x)$ はどの数の間にありますか？
2. $1 \le x \le 3$ とすると、$f(x)$ と $g(x)$ はどの数の間にありますか？

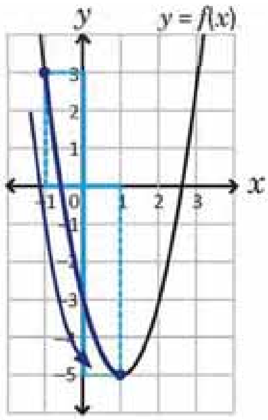
f と g のグラフを使用してください。

解法

1. $f(x)$ と $g(x)$ の値を確定するために関数グラフを描きます。放物線 f は頂点 (1,-5) で上向きに開いており、一方放物線 g は頂点 (1,5) で下向きに開いています。いずれのグラフにおいても、x 軸上では、x が取る値の [-1, 1] のエリアに緑色の影をつけています。

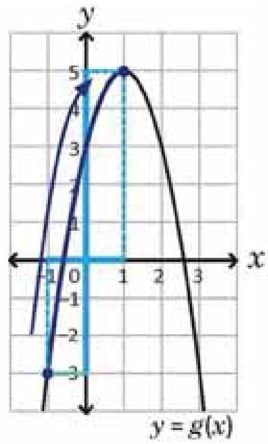
f では：x が -1 から 1 に増加すると、$f(x)$ は $f(-1) = 3$ から $f(1) = -5$ に減少します。

そうすると、$-5 \le f(x) \le 3$



g では：x が -1 から 1 に増加すると、$g(x)$ は $g(-1) = -3$ から $g(1) = 5$ に増加します。

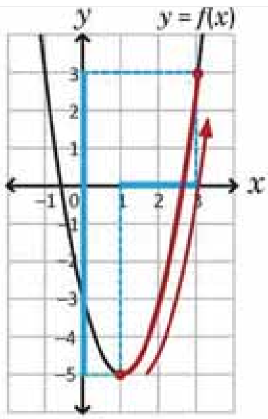
そうすると、$-3 \le g(x) \le 5$



2. ここでも、関数のグラフを使うことで、次のように結論できます。

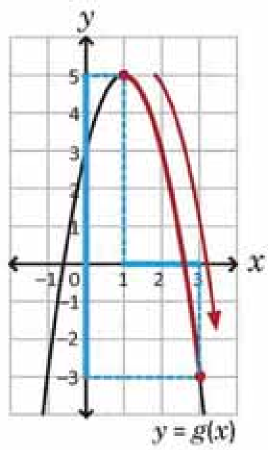
f では：x が 1 から 3 に増加すると、$f(x)$ は $f(1) = -5$ から $f(3) = 3$ に増加します。

そうすると、$-5 \le f(x) \le 3$



g では：x が 1 から 3 に増加すると、$g(x)$ は $g(1) = 5$ から $g(3) = -3$ に減少します。

そうすると、$-3 \le g(x) \le 5$



定義

関数 f が区間 $[x_1, x_2]$ で**増加している**場合、x が x_1 から x_2 に増加すると、$f(x)$ は $f(x_1)$ から $f(x_2)$ に増加します。すなわち、**m と n が $m \le n$ で $[x_1, x_2]$ に属している場合、$f(m) \le f(n)$ となります。**一方で、関数 f が区間 $[x_1, x_2]$ で**減少している**場合、x が x_1 から x_2 に増加すると、$f(x)$ は $f(x_1)$ から $f(x_2)$ に減少します。すなわち、**m と n が $m \le n$ で $[x_1, x_2]$ に属している場合、$f(m) \ge f(n)$ となります。**

$[x_1, x_2]$ において、区間内で増加または減少している場合、関数は**単調関数**です。

問題

それぞれの場合について，関数 f が与えられた区間で増加しているか減少しているかを判断し，$f(x)$ の値がある区間を回答しましょう。

a) $f(x) = (x - 5)^2;\ 5 \le x \le 7$

b) $f(x) = -2x^2 + 3;\ 0 \le x \le 2$

c) $f(x) = -3(x - 3)^2 - 1;\ 2 \le x \le 3$

d) $f(x) = (x + 2)^2 + 3;\ -5 \le x \le -3$

3.2 バリエーション：最大値または最小値

導入問題

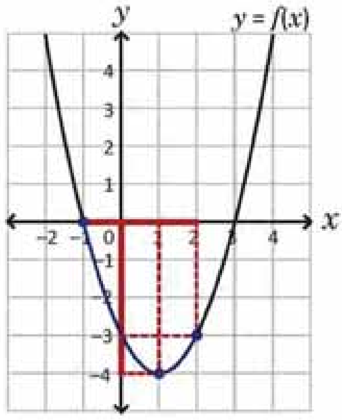
二次関数 $f(x) = (x - 1)^2 - 4$、$g(x) = -x^2 - 4x - 1$ である場合、次の問題に回答しましょう。

1. $-1 \le x \le 2$ とすると、$f(x)$ はどの数の間にありますか？
2. $-4 \le x \le 1$ とすると、$g(x)$ はどの数の間にありますか？

f と g のグラフを使用してください。

解法

1. 右図のように $f(x)$ の値を求めるために、関数のグラフを作成します。放物線は、(1, -4) に頂点を持ち、上に向かって開いています。

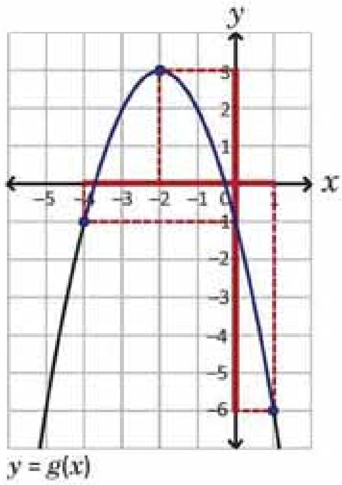


x 軸上では、x が取る値の [–1, 2] のエリアに赤色の影をつけています。x = -1 ならば $f(-1) = 0$ であり、x = 2 ならば $f(2) = -3$; この場合、$-3 \le f(x) \le 0$ であると考えることができます。

しかし、$f(x)$ はその最小値に $x = 1$ のとき、つまり $f(1) = -4$ のときに到達します。したがって、$-4 \le f(x) \le 0$ となります。

2. まず、g を $a(x - h)^2 + k$ の形で書いて式を完成させます。

$$\begin{aligned} g(x) &= -(x^2 + 4) - 1 \\ &= -\left[x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2\right] - 1 \\ &= -[x^2 + 4x + 2^2 - 2^2] - 1 \\ &= -[(x + 2)^2 - 4] - 1 \\ &= -(x + 2)^2 + 4 - 1 \\ &= -(x + 2)^2 + 3 \end{aligned}$$



放物線は (-2, 3) に頂点を持ち、下に向かって開いています。x 軸上では、x が取る値の [–4, 1] のエリアに赤色の影をつけています。$x = -4$ ならば $g(-4) = -1$ であり、$x = 1$ ならば $g(1) = -6$; この場合、$g(x)$ は最大値に $x = -2$ のとき、すなわち $g(-2) = 3$ の時に達します。
したがって、$-6 \le g(x) \le 3$ となります。

まとめ

二次関数 $f(x) = a(x - h)^2 + k$ と $x_1 \le h \le x_2$ について

1. もしも $a > 0$ ならば、最小値 $f(x)$ には $x = h$ で到達します。
   さらに、x が実数であり、$x_1 \le x \le x_2$ で $f(x_1) < f(x_2)$であれば、$k \le f(x) \le f(x_2)$ であり、そうでない場合、$f(x_1) \ge f(x_2)$ であれば、$k \le f(x) \le f(x_1)$ となります。

2. もしも $a < 0$ ならば、最大値 $f(x)$ には $x = h$ で到達します。
   さらに、x が実数であり、$x_1 \le x \le x_2$ で$f(x_1) < f(x_2)$ であれば、$f(x_1) \le f(x) \le k$ であり、そうでない場合、$f(x_1) > f(x_2)$ であれば、$f(x_2) \le f(x) \le k$ となります。

問題

次の各ケースについて、次の場合に $f(x)$ の値が見つかる区間を決定しましょう。

a) $f(x) = (x - 5)^2$; $2 \le x \le 6$
b) $f(x) = -2x^2 + 3$; $-2 \le x \le 1$
c) $f(x) = -3(x - 3)^2 - 1$; $2 \le x \le 5$
d) $f(x) = (x + 2)^2 + 3$; $-6 \le x \le 0$
e) $f(x) = 2(x - 6)^2 + 1$; $4 \le x \le 8$
f) $f(x) = -(x + 4)^2 - 2$; $-6 \le x \le -2$

3.3 応用例：最大値*

導入問題

ラ・リベルターに位置するサン・マティアス高校の1年生の生徒たちは、自然科学の授業で自由落下の実験を行っています。彼らは、サッカーボールを垂直に上に投げたとき、x 秒後の地面からの距離 $f(x)$ をメートル単位で求めると、次の関数で表されることを発見しました。

$$f(x) = -5x^2 + 10x + 0.5$$

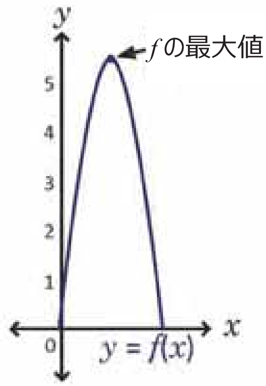
ボールが到達できる最大の高さは？何秒後に最大高度に到達しますか？

解法

ボールを垂直に上向きに投げた場合、いつかは下降しなければならない地点に到達します。質問では、投げられてから下降を開始するまでに地面から何メートル上昇し、何秒が経過するかを計算します。

学生が発見した x 秒後の地上距離の関係を表す関数は二次関数で、x^2 の因数が負であるため、$f(x)$ の最大値は関数のグラフの頂点にあります。そうすると、f の頂点の座標を求めれば回答できます。

$$\begin{aligned} f(x) &= -5(x^2 - 2) + 0.5 \\ &= -5\left[x^2 - 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2\right] + 0.5 \\ &= -5[x^2 - 2x + 1^2 - 1^2] + 0.5 \\ &= -5(x - 1)^2 + 5 + 0.5 \\ &= -5(x - 1)^2 + 5.5 \end{aligned}$$



f のグラフの頂点を (1, 5.5) とし、放物線を右図に示します（ $f(x)$ は正かゼロでなければならないので、x 軸に残っている部分だけを取ります）。したがって、ボールが到達する最大の高さは、1 秒後の 5.5 メートルとなります。

まとめ

負の因数 x^2 を持つ 二次関数において、最大値を求める問題が出た場合、答えは関数のグラフの頂点となります。

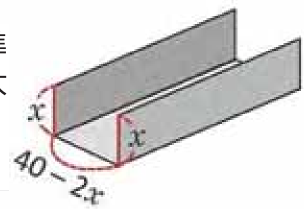
問題

1. 知的障害を持つ青年カルロスは、ラテンアメリカの特殊なオリンピックス競技会に参加するバスケットボールチームの一員です。カルロスがある位置で輪に向かってボールを投げると、x 秒後のボールから地面までの距離（メートル）は次の関数で示すことができます。

$$f(x) = -5x^2 + 6x + 1.4$$

カルロスが投げたボールが到達する最大の高さは？その高さに到達するには何秒かかるのでしょうか？

2. マルタは自分の家の屋根に水路を設置します。そのために、長方形の金属のシートを準備し、水路を形成するためにその側面を曲げます。シートの幅が 40 cm だとすると、最大の容量の水路を形成するためには、片側何 cm 曲げればいいのでしょうか？



側面 x と $40 - 2x$ の断面積が最大となる時に容量が最大となります。

3.4 応用例：最小値*

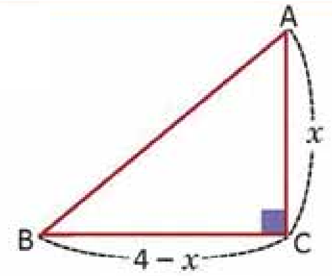
導入問題

直角三角形 ABC において、次点の長さが最小とする場合、x の値はどうなりますか？

ピタゴラスの定理から：

$AB^2 = BC^2 + CA^2$,

また、$0 < x < 4$



解法

ピタゴラスの定理を利用し：

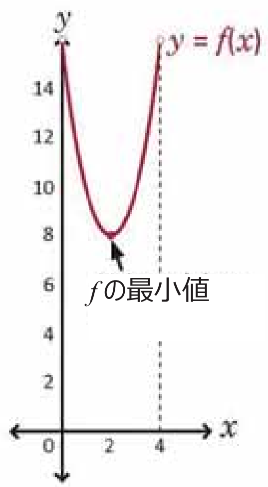
$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$

BCとCAをそれぞれ $4 - x$ と x に置き換え、同様の項を削減します。

$$\begin{aligned} AB^2 &= (4 - x)^2 + x^2 \\ &= 16 - 8x + x^2 + x^2 \\ &= 2x^2 - 8x + 16 \end{aligned}$$

また、AB^2 も最小となると、次点 AB の長さは最小となります。$f(x) = 2x^2 - 8x + 16$ とすると、これは 二次関数であり、x^2 の因数が正なので、放物線は上向きに開きます。$f(x)$ のグラフを描くために数式を完成させます。

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x^2 - 4x) + 16 \\ &= 2\left[x^2 - 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2\right] + 16 \\ &= 2[x^2 - 4x + 2^2 - 2^2] + 16 \\ &= 2[(x - 2)^2 - 4] + 16 \\ &= 2(x - 2)^2 - 8 + 16 \\ &= 2(x - 2)^2 + 8 \end{aligned}$$



右図は、(2, 8) を頂点とする区間]0, 4[のグラフです。したがって、次点の長さが最小になるためには、x は 2 と等しくなければなりません。

まとめ

正の因数 x^2 を持つ 二次関数において、最小値を求める問題が出た場合、答えは関数のグラフの頂点となります。

問題

1. 差が 20 に等しく、その積が最小である 2 つの整数を求めましょう。
2. 長さ 24 cm の羊毛を 2 つに分けて 2 つの羊毛片にします。一つ目の羊毛片の長さが $4x$ で 2 つ目の長さが $24 - 4x$ の場合、2 つの羊毛片の面積の和が最小になる x の値は何でしょうか？

3.5 二次関数のグラフと y 軸の交差

導入問題

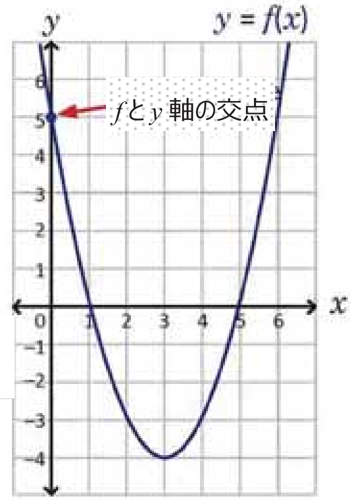
下記の場合の二次関数fのグラフと y 軸との交点の座標を求めましょう。

a) $f(x) = (x - 3)^2 - 4$　　　b) $f(x) = -2x^2 - 12x - 18$

f のグラフと y 軸との交点の第 1 座標が 0 である時。

解法

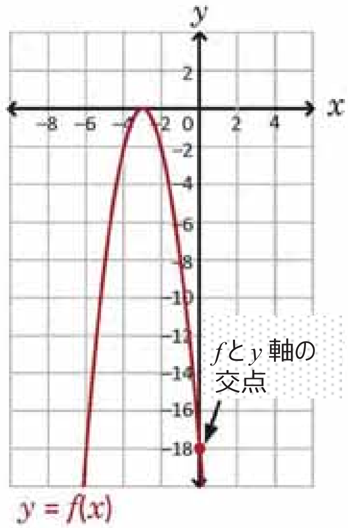
a) f のグラフと y 軸との交点は $x = 0$ のときに発生し、したがって $f(0)$ の値を計算しなければならず、f と y 軸との間の切断点の座標は $(0, f(0))$ となります。



$$
\begin{aligned}
f(0) &= (0 - 3)^2 - 4 \\
&= 9 - 4 \\
&= 5
\end{aligned}
$$

したがって、$f(x)=(x - 3)^2 - 4$ のグラフと y 軸との交点は $(0, 5)$ となります。

b) 前項と同様に、$f(x) = -2x^2 - 12x - 18$ のグラフと y 軸との交点の座標を求めることは、$(0, f(0))$ を求めることと同じです。



$$
\begin{aligned}
f(0) &= -2(0)^2 - 12(0) - 18 \\
&= -18
\end{aligned}
$$

したがって、$f(x) = -2x^2 - 12x - 18$ のグラフと y 軸との交点は $(0, -18)$ となります。

一般的に

関数 f のグラフと y 軸との交点の座標は：$(0, f(0))$.
f が 二次関数の場合、f のグラフは 1 点だけで y 軸を切ります。

問題

1. それぞれの場合について、f のグラフと y 軸との交点の座標を決定します。

a) $f(x) = -(x + 4)^2 + 6$　　b) $f(x) = 3(x - 2)^2 - 10$　　c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

d) $f(x) = -2x^2 + 7$　　e) $f(x) = -5(x + 10)^2$　　f) $f(x) = 2x^2 + 24x + 52$

g) $f(x) = -3x^2 + 6x - 11$　　h) $f(x) = x^2 - x - \frac{3}{4}$　　i) $f(x) = x^2 + 5x + \frac{1}{5}$

2. 任意の関数が y 軸との交点を 2 つ持つことはあり得るのでしょうか？解答し説明しましょう。

3.6 二次関数のグラフと x 軸の交差

導入問題

下記の場合の 二次関数 f のグラフと x 軸との交点の座標を求めましょう。

f のグラフと x 軸との交点の第 2 座標が 0 である時。

a) $f(x) = (x-3)^2 - 4$　　b) $f(x) = -2x^2 - 12x - 18$　　c) $f(x) = 3x^2 + 2$

解法

a) f のグラフと x 軸との交点は、ゼロに等しい第2の座標を持ち、すなわち $(x, 0)$ の形をしています。x の値を求めるには、f の方程式を 0 に等しくし、二次方程式を解きます。

$$(x-3)^2 - 4 = 0$$
$$(x-3)^2 = 4$$
$$x - 3 = \pm 2$$
$$x = 3 \pm 2 \longrightarrow x = 1 \quad x = 5$$

前回の授業で描いた $f(x) = (x-3)^2 - 4$ のグラフを見てください。

したがって、$f(x) = (x-3)^2 - 4$ と x 軸との交点は、(1， 0) と (5， 0) です。

b) 前項と同様に、関数fの方程式を等化し、二次方程式を解きます（この場合、多項式の因数分解を用いることができます）。

$$-2x^2 - 12x - 18 = 0$$
$$x^2 + 6x + 9 = 0$$
$$(x+3)^2 = 0$$
$$x + 3 = 0$$
$$x = -3$$

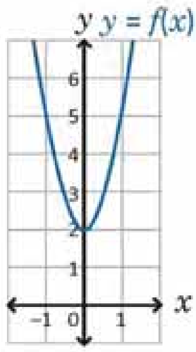
前回の授業で描いた $f(x) = -2x^2 - 12x - 18$ のグラフを見てください。

したがって、$f(x) = -2x^2 - 12x - 18$ のグラフと x 軸との交点は (–3, 0) となります。

c) 関数の方程式がゼロと等しくなると：

$$3x^2 + 2 = 0$$

この 二次方程式は実数の解がありません。これは、右図のように関数 f のグラフが x 軸を切らないことを意味します。



一般的に

関数 f のグラフと x 軸との交点の座標は、f の方程式をゼロに等しくし、得られた 二次方程式を解くことで求められます。

1. 方程式が 2 つの実解 $x = x_1$ と $x = x_2$ を持つ場合、f のグラフは点 $(x_1, 0)$ と $(x_2, 0)$ で x 軸を切断します。
2. 方程式が 1 つの実解 $x = x_1$ を持つ場合、f のグラフは点 $(x_1, 0)$ で x 軸を切断します。
   この点は放物線の頂点であり、f のグラフは x 軸に接線すると言います。
3. 方程式が実解を持たない場合、f のグラフは x 軸を切らない、つまり放物線は 軸の上か下にあります。

問題

それぞれの場合について、fのグラフと x 軸との交点の座標を決定します。

a) $f(x) = 3x^2$　　b) $f(x) = -(x+4)^2$　　c) $f(x) = -(x+6)^2 + 1$

d) $f(x) = (x-5)^2 - 9$　　e) $f(x) = -(x-2)^2 - 4$　　f) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

g) $f(x) = 3x^2 + 9x - 30$　　h) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$　　i) $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$

3.7 二次不等式 $ax^2 + bx + c \geq 0$、$a > 0$ 、第 1 部*

導入問題

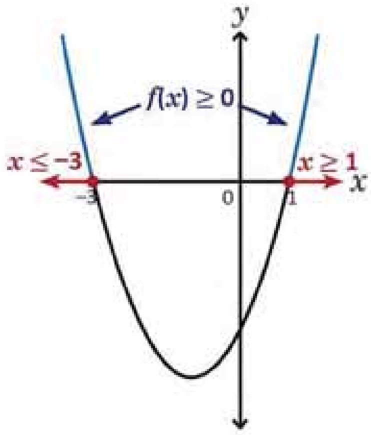
不等式を満たすx のすべての値を求めましょう。

$$x^2 + 2x - 3 \geq 0$$

解法

$f(x) = x^2 + 2x - 3$ とすると、$f(x)$ がゼロより大きいか等しい x の値、すなわち f のグラフが x 軸を切る点、または x 軸より上にある点を決定しなければなりません。x 軸との交点は、二次方程式 $f(x) = 0$ を解くことで求められます。

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$(x + 3)(x - 1) = 0$$
$$x + 3 = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0$$
$$x = -3 \qquad\qquad x = 1$$



f のグラフは、(-3, 0) と (1, 0) の点で x 軸を切断します。x^2 の因数が正の値になると、右図に示されるように放物線は上向きに開きます。

以下のようなことが観察できます。$f(x) \geq 0$ は $x \leq -3$ または $x \geq 1$ で示され、不等式 $x \leq -3$ は区間 $]-\infty, -3]$ を表し、$x \geq 1$ は区間 $[1, +\infty[$ を表します。解 $x \leq -3$ または $x \geq 1$ は、次の区間を用いて次のように表せます。

$$x \in \,]-\infty, -3] \cup [1, \infty[$$

シンボル "U" は、x の値が第 1 区間または第 2 区間にあることを示しています。

一般的に

$ax^2 + bx + c \geq 0$ の形式の不等式を $a > 0$ で解くことは、$ax^2 + bx + c \geq 0$ が真である x のすべての値を求めることを意味します。$f(x) = ax^2 + bx + c$ で示される場合、$f(x) \geq 0$ は、f の放物線が切断されるか、または x 軸より上にあるような x 値をグラフで求めることを意味します。

f のグラフが x 軸を 2 点 $(x_1, 0)$ と $(x_2, 0)$で切り、$x_1 < x_2$となる場合、$x \leq x_1$ または $x \geq x_2$ に対して $f(x) \geq 0$ が満たされます。区間を用いて次のように表せます。$x \in \,]-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty[$。

問題

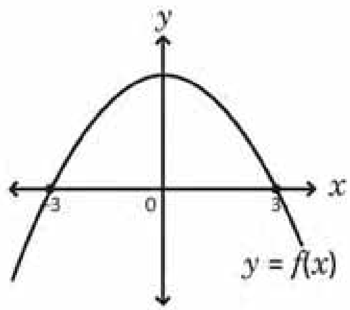
1. それぞれの場合について、不等式を満たす x の値を求めましょう。

a) $x^2 - 4 \geq 0$　　b) $4x^2 - 9 \geq 0$　　c) $2x^2 + 4x \geq 0$

d) $x^2 - 10x + 21 \geq 0$　　e) $x^2 + x - 20 \geq 0$　　f) $x^2 + 7x + 6 \geq 0$

g) $x^2 - 4x - 45 \geq 0$　　h) $x^2 - 8 \geq 0$　　i) $9x^2 - 5 \geq 0$

2. 右図の 二次関数 f のグラフを用いて、$f(x) \geq 0$ を満たす x の値を求めましょう。



3.8 二次不等式 $ax^2 + bx + c \geq 0$, $a > 0$、第 2 部

導入問題

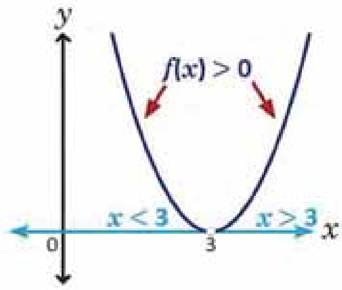
不等式を満たすx のすべての値をそれぞれ求めましょう。

a) $x^2 - 6x + 9 > 0$　　b) $x^2 - 2x + 2 > 0$

解法

a) $f(x) = x^2 - 6x + 9$ とすると、前回の授業と同様に、$f(x) = x^2 - 6x + 9 > 0$ を解くことは、f のグラフが x 軸の上にある x の値を見つけることと同じです。今回は厳密な不等式なので、$f(x) = 0$ の点は含まれませんが、x 軸との交点を見つける必要があります。

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 &= 0 \\ (x-3)^2 &= 0 \\ x - 3 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$



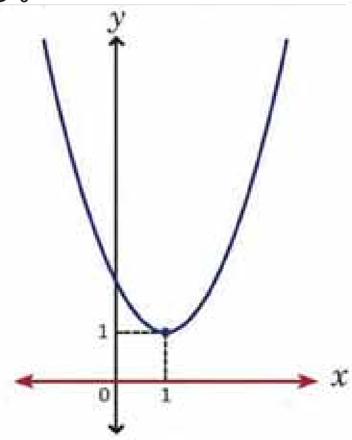
f のグラフは、頂点 (3, 0) で x 軸を切断しており、右図のように上向きに開く放物線です。次のを満たします。$f(x)$ は 3 と異なるどのような実数xに対しても正です。

したがって、$x < 3$ または $x > 3$。区間を用いて次のように表せます。

$$x \in]-\infty, 3[\cup]3, \infty[.$$

b) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ とすると、f のグラフと x 軸の交点を求める時、次の式が得られます。

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$



この方程式は実数の解がありません。$a(x-h)^2 + k$ の形になるように完成させると、次のような式が得られます。

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 2x) + 2 \\ &= \left[x^2 - 2x + \left(\tfrac{2}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{2}{2}\right)^2\right] + 2 \\ &= (x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + 2 \\ &= (x - 1)^2 + 1 \end{aligned}$$

この関数グラフは右図で示すような頂点が (1, 1) にある上に向かって開いた放物線グラフです。グラフ全体が x 軸上にあるので、すべての実数 x について $f(x) > 0$ となります。

一般的に

不等式 $ax^2 + bx + c > 0$, $a > 0$ が与えられたとき、$f(x) = ax^2 + bx + c$ で表されます。

1. もしf のグラフが頂点 $(h, 0)$ でのみ x 軸を切断するならば、$x < h$ または $x > h$ に対して $f(x) > 0$ となります。区間を用いて次のように表せます。$x \in]-\infty, h[\cup]h, \infty[$。
2. もしfのグラフが x 軸を切らないならば、すべての実数 x に対して $f(x) > 0$ となり、つまりfのグラフは x 軸の上にあります。

問題

それぞれの場合について、不等式を満たす x の値を求めましょう。

a) $2x^2 > 0$　　b) $x^2 - 4x + 6 > 0$　　c) $x^2 + 4x + 4 > 0$

d) $x^2 - 14x + 49 \geq 0$　　e) $x^2 + 2x + 3 \geq 0$　　f) $\frac{1}{3}x^2 \geq 0$

3.9 二次不等式 $ax^2 + bx + c \le 0, a > 0$

導入問題

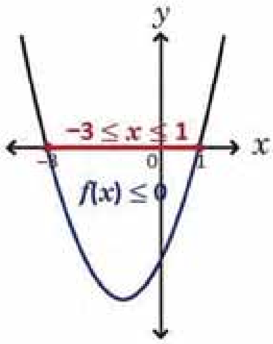
不等式を満たす x のすべての値をそれぞれ求めましょう。

前回の授業のグラフを使用してください。

a) $x^2 + 2x - 3 \le 0$　　b) $x^2 - 6x + 9 \le 0$　　c) $x^2 - 2x + 2 < 0$

解法

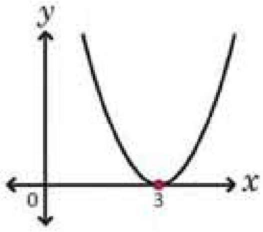
a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ とすると、ここで、$f(x) = 0$ の点を含めて、f のグラフが x 軸より下にある x 値を求めましょう。



右図に示された関数の放物線で、$-3 \le x \le 1$ ならば、$f(x) \le 0$ であることが分かります。区間を用いて次のように表せます。

$$x \in [-3, 1].$$

b) $f(x) = x^2 - 6x + 9$ とすると、前回の授業では右のグラフが示すように、$f(x) = (x - 3)^2$ に達します。$f(x)$がゼロ以下になるxの値を見つけなければなりません。関数の放物線は常に x 軸より上にあり、放物線の頂点では0に等しくなります。そこで、不等式は次のようになります。



$$f(x) = (x - 3)^2 \le 0$$

$x = 3$ の時のみ成り立ちます。

c) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ とすると、前回の授業では、すべての実数 x について $f(x) > 0$、つまり、グラフが完全に x 軸の上にあると結論づけられました。したがって、$f(x) = x^2 - 2x + 2 < 0$ には解がありません。

一般的に

$ax^2 + bx + c \le 0$ の形式の不等式を $a > 0$ で解くことは、$ax^2 + bx + c \le 0$ が真である x のすべての値を求めることを意味します。$f(x) = ax^2 + bx + c$ で示される場合、$f(x) \le 0$ は、f の放物線が切断されるか、または x 軸より上にあるような x 値をグラフで求めることを意味します。したがって、関数グラフの交点は、次の場合に x 軸上にあります。

1. f のグラフが x 軸を 2 点 $(x_1, 0)$ と $(x_2, 0)$ で切り、$x_1 < x_2$となる場合、$x_1 \le x \le x_2$ に対して $f(x) \le 0$ が成り立つ。区間を用いて次のように表せます。 $x \in [x_1, x_2]$。
2. もし f のグラフが頂点 $(h, 0)$ でのみ x 軸を切断するならば、$f(x) \le 0$ は $x = h$ の場合にのみ成り立ちます。
3. もし f のグラフが x 軸を切断しない場合、$f(x) \le 0$ は解を持ちません。

$ax^2 + bx + c < 0$ の形式の不等式において $f(x) = 0$ の点を含めてはいけません。2 の場合、$f(x) < 0$ には解がありません。

問題

それぞれの場合について、不等式を満たす x の値を求めましょう。

a) $x^2 - 4 \le 0$	b) $x^2 + 2x \le 0$	c) $x^2 - 10x + 21 < 0$
d) $x^2 + 8x + 15 < 0$	e) $2x^2 \le 0$	f) $x^2 - 10x + 25 < 0$
g) $x^2 - 4x - 3 \le 0$	h) $x^2 + 2x - 8 < 0$	i) $x^2 + 8 \le 0$

3.10 二次不等式、$a < 0$

導入問題

不等式を満たす x のすべての値を求めましょう。

$a < b$ と $c < 0$ の場合、$ac > bc$

$$-x^2 + 4x - 3 < 0.$$

解法

不等式の使用すると、不等式のそれぞれの構成要素に -1 が乗算されるため、「小なり」が「大なり」に変化します。

$$(-x^2 + 4x - 3)(-1) > 0(-1)$$
$$x^2 - 4x + 3 > 0 \qquad \text{------------------ (1)}$$

不等式 (1) の解は前回の授業のように求めます。まず、$f(x) = x^2 - 4x + 3$ と x 軸との交点があります。

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$(x - 1)(x - 3) = 0$$
$$x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0$$
$$x = 1 \qquad\qquad x = 3$$

したがって、$x < 1$ または $x > 3$ の場合、$x^2 - 4x + 3 > 0$ となります。この解は、元の不等式も満たしています。

$$-x^2 + 4x - 3 < 0.$$

したがって、$x \in]-\infty, 1[\cup]3, \infty[$

一般的に

以下のような不等式において：

a) $ax^2 + bx + c \geq 0$　　b) $ax^2 + bx + c \leq 0$　　c) $ax^2 + bx + c > 0$　　d) $ax^2 + bx + c < 0$

a が 0 以外の実数である場合、それらは未知数を持つ**二次不等式**と呼ばれます。
もし $a > 0$ の場合、その解はレッスン 3.7, 3.8, 3.9 のように求めることができます。$a < 0$ の場合、不等式の両方の構成要素に -1 を掛けて、レッスン 3.7, 3.8, 3.9 のように求めます。

問題

1. それぞれの場合について、不等式を満たす x の値を求めましょう。

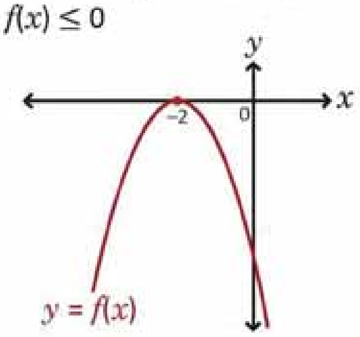
a) $-x^2 + 2x + 15 \leq 0$　　b) $-(x + 3)^2 \leq 0$　　c) $-x^2 + 1 \geq 0$

d) $-x^2 - 6x - 5 \leq 0$　　e) $-2x^2 + 4x - 3 > 0$　　f) $-x^2 + 8x - 16 \geq 0$

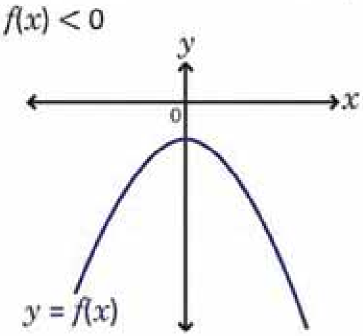
g) $-x^2 - 4x - 4 < 0$　　h) $-2x^2 - 1 > 0$　　i) $-x^2 + 5 > 0$

2. それぞれの場合の f のグラフを用いて、不等式を満たす x の値を求めましょう。

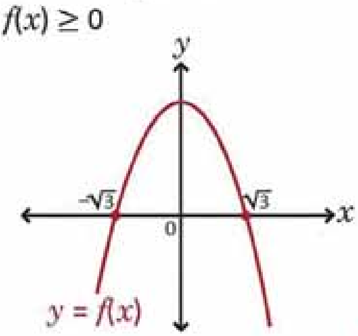
a) $f(x) \leq 0$



b) $f(x) < 0$



c) $f(x) \geq 0$



3.11 変動表、第 1 部*

導入問題

次の二次不等式を解きなさい。

$$2x^2 - x - 3 > 0$$

解法

$2x^2 - x - 3$ を二項式の積として書きます。

$$2x^2 - x - 3 = (x+1)(2x-3)$$

不等式は $(x + 1)(2x - 3) > 0$ となります。この積が 0 より大きくなるためには、二項式の両方が正または負のいずれかでなければなりません。実数を区間に分割して、各区間で $x + 1$ と $2x - 3$ を決定する必要があります。考慮すべき区間は次のように三項式の根に基づいています。

$$(x+1)(2x-3) = 0$$
$$x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad 2x - 3 = 0$$
$$x = -1 \qquad x = \frac{3}{2}$$

下のような表が構築されます。上の行は数字の行を表し、三項式の値 -1 と $\frac{3}{2}$ が配置され、因数がゼロになる縦線上にゼロが配置されます。

	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		∞
$x+1$			0				
$2x-3$					0		
$(x+1)(2x-3)$							

区間内の各因数の記号を決定するには、区間内の数値を一つ取り、それを因数で評価します。例えば、 -2 は区間 $]-\infty, -1[$ に属します。そうすると、$x = -2$ の場合、1 番目の因数は $-2 + 1 = -1$で負、2 番目の因数は $2(-1) - 3 = -5$ で負となります。因数の記号を表に記載します。

	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		∞
$x+1$		$-$	0				
$2x-3$		$-$			0		
$(x+1)(2x-3)$							

また、一次不等式 $x + 1 > 0$ を解いて、$x + 1$ が正である区間と負である区間を求めることもできます。

他の区間についても同様に行います。そうすると、表は以下の通りになります。

	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		∞
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(2x-3)$							

そして、各列の因数記号を乗算します。例えば、区間]−∞, −1[では、因数 $x + 1$ と $2x - 3$ の記号はそれぞれ "−" と "− " なので、乗算すると結果は "+“ になります。

	$-\infty$	-1	$\frac{3}{2}$	∞
$x + 1$	−	0 +		+
$2x - 3$	−		− 0	+
$(x + 1)(2x - 3)$	+	0 −	0	+

線の上の 0 は、因数の積が 0 であることを示しています。$(x + 1)(2x - 3) > 0$ のとき、x の値は積が正の値になります。

よって、　$2x^2 - x - 3 = (x + 1)(2x - 3) > 0$ si $x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]\frac{3}{2}, \infty\right[$.

まとめ

x_1 と x_2 が多項式 $ax^2 + bx + c$ の根で、$x_1 < x_2$ とすると、$ax^2 + bx + c > 0$ または $ax^2 + bx + c < 0$ の形の不等式は次のように解きます。

1. $ax^2 + bx + c = pq$ と書きます。ここで、p と q は、それぞれ x_1 と x_2 を根とする線形二項式です。
2. 実数は、区間]-∞、x_1[、]x_1、x_2[と]x_2、∞[に分かれています。
3. n が 2 で述べた 3 つの区間のいずれかに属する数で、$x = n$ を評価するときに p または q の値が正または負であれば、p または q は区間全体にわたって正または負になります。
4. p と q の記号は各区間で乗算されています。解は、$ax^2 + bx + c > 0$ の場合は積が正である区間、$ax^2 + bx + c < 0$ の場合は積が負である区間となります。

導入問題の解答で作成された表を**変動表**と呼びます。

問題

1. 以下の不等式を解きましょう。

a) $2x^2 - x - 1 > 0$　b) $3x^2 + 8x - 3 < 0$　c) $3x^2 - 8x + 4 < 0$

d) $2x^2 + 9x + 4 > 0$　e) $-3x^2 - 4x + 15 > 0$　f) $-4x^2 + 7x - 3 < 0$

g) $6x^2 + x - 1 < 0$　h) $x^2 - 4x + 4 > 0$　i) $4x^2 - 1 < 0$

2. アントニオは衣料品店を経営しています。シャツの販売による 1 日のドルの利益が関数 $f(x) = x^2 - 14x - 32$ で計算できる推定しました。ここで x は 1 日に販売されたシャツの数です。赤字にならずに利益を出すために、アントニオは何枚のシャツを売らないといけませんか?

3.12 変動表、第 2 部*

導入問題

次の二次不等式を解きなさい。

$$-6x^2 \ge -11x-7$$

すべての項を、記号「≥」の片側に残しておく必要があります。

解法

すべての項を、記号「≥」の片側に残しておく必要があります。不等式の性質を利用して不等式の両辺に $6x^2$ を足します。

$$\cancel{-6x^2}+\cancel{6x^2} \ge -11x-7+6x^2$$
$$0 \ge 6x^2-11x-7$$

後者が $6x^2-11x-7 \le 0$ に相当します。三項式は、2 つの線形二項式の積、すなわち：

$$6x^2-11x-7=(3x-7)(2x+1)$$

上記から、多項式 $x=-\frac{1}{2}$ と $x=\frac{7}{3}$ の根を求めます。前回の授業と同様に、多項式が負になる区間を決定するための変動表を作成します。

	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{7}{3}$	∞
$3x-7$	$-$		$-$	0	$+$
$2x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$(3x-7)(2x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

記号「≤」は、多項式 $6x^2-11x-7$ が 0 に等しい x の値も考慮すべきであることを示しています。

したがって $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{7}{3}\right]$ の場合 $6x^2-11x-7=(3x-7)(2x+1) \le 0$ です。この解は、元の不等式も満たしています。

まとめ

二次不等式では、次の性質も成立します。

1. 両辺に実数を足したり引いたりしても、不等式は変化しません。
2. 不等式の両辺に正の実数を掛けたり割ったりしても、不等式は変化しません。
3. 不等式の両辺に負の実数を掛けたり割ったりすると、不等式の方向が変わります。

問題

1. 各ケースについて、次の場合に x の値が見つかる区間を決定しましょう。

a) $6x^2 \ge 11x-3$　　b) $15x^2+2x \le 1$　　c) $31x+15 \ge -10x^2$

d) $3x \ge -20x^2+2$　　e) $-6x^2+23x-7 \ge 0$　　f) $9x^2-25 \ge 0$

g) $x^2-2 \le 0$　　h) $4x^2-3 \le 0$　　i) $x^2 \le 1+2x$

2. x_1 と x_2 を $x_1 < x_2$ の三項式 x^2+bx+c の根とします。変動表を使うと、不等式 $x^2+bx+c \le 0$ の解は $[x_1, x_2]$ であることがわかります。

3.13 これまでの復習

1. それぞれの場合について，関数 f が与えられた区間で増加しているか減少しているかを判断し，$f(x)$ の値がある区間を回答しましょう。

a) $f(x) = -(x+3)^2 - 5; -7 \leq x \leq -4$

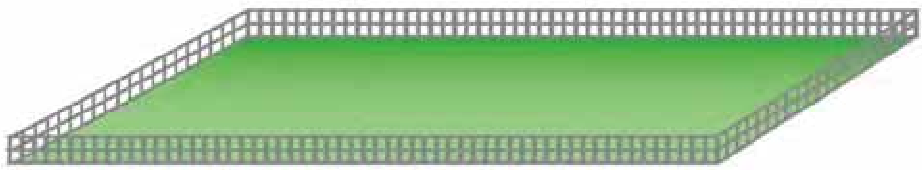
b) $f(x) = 2(x-2)^2 - 4; -1 \leq x \leq 1$

2. いずれの場合も、次の場合に $f(x)$ の値がある区間を決定します。

a) $f(x) = -2(x+3)^2 + 7; -4 \leq x \leq -1$

b) $f(x) = (x-5)^2 - 8; 1 \leq x \leq 8$

3. プエルト・エル・トリウンフォ高校では、果物や野菜の消費を促進するために、学校の土地に長方形の畑をつくり、環境保護における価値観や知識の形成に貢献しています。土地をフェンスで囲うために32メートルの網があるとすると、できるだけ多くの面積を得る為には、土地の寸法はどのようにするべきでしょうか？学校の畑の面積はどれだけになるのでしょうか？



4. 仕立て屋で 100 ドルの男性用スーツを製造・販売しています。洋服店が 50 着以上のスーツを注文した場合、注文した数に応じて 0.50 ドル値段が下がります。仕立て屋が最大の利益を出すためには、何着注文すればいいのでしょうか？製造にかかる費用は考慮しません。

5. ミサイルが地面から垂直に上に向かって発射されます。x 秒後に到達した高さ（メートル）を関数で計算できます。

$$f(x) = -5x^2 + 100x.$$

ミサイルが到達する最大の高さと、地面に到達するまでの時間を計算しましょう。

6. 和が 30 に等しく、その 2 乗の和が最小である 2 つの整数を求めましょう。

7. 次の場合の f のグラフと座標軸との交点の座標を求めましょう。

a) $f(x) = (x-3)^2 - 9$

b) $f(x) = -(x+5)^2 + 4$

c) $f(x) = 2x^2 - 8$

d) $f(x) = 3x^2 + 4x - 1$

8. 以下の不等式を解きましょう。

a) $x^2 + 2x - 8 \geq 0$

b) $x^2 - 5x - 24 < 0$

c) $x^2 + 4x + 4 \leq 0$

d) $-\frac{1}{3}x^2 + 2 > 0$

e) $-x^2 - 6x \geq 10$

f) $2x^2 + 15 < 13x$

g) $-3x^2 - 11x + 4 > 0$

h) $5x^2 + 3x \leq 8$

i) $-4x^2 + 20x - 9 < 0$

j) $x^2 + 3x - 5 < 0$

4.1 関数 $f(x) = x^3$

導入問題

$y = x^3$ の場合：

$x^3 = (x)(x)(x)$

1. 次の表を完成させなさい（少数第二位まで近づける）。

x	−1	−0.8	−0.6	−0.4	−0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	−1										

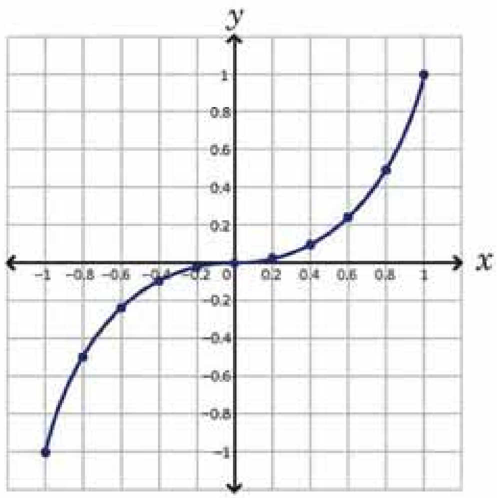
2. 前問で得られた座標 (x, y) を配置しなさい。どのような線が描けますか。

解法

1. y の各値は、x の値にそれ自体を3倍掛けることに等しいです。符号に気をつけなければいけません。
例えば： $(-1)^3 = (-1)(-1)(-1) = -1$ これに基づくと、表は次のようになります。

x	−1	−0.8	−0.6	−0.4	−0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	−1	−0.51	−0.22	−0.06	−0.01	0	0.01	0.06	0.22	0.51	1

2. こうすると、前に得られた各数点の配置は、右のグラフに示す通りになります。形成された線は直線ではなく、放物線でもありません。



x^3 は数 x の 3 乗で、「xの立方」とも読みます。

まとめ

$y = x^3$ の方程式は、各実数 x の 3 乗に割り当てたℝ でℝの関数 f にあたります。関数 $f(x) = x^3$ の場合：領域と範囲は実数の集合であり、そのグラフは原点を通過し、すべての領域で増加します。

B における A の関数 x は、集合 A の各要素 x が集合 B の 1 つの要素 y だけを持つことを意味します。もし関数が ℝ で ℝ であれば、x の値は実数であり、対応する $f(x)$ も実数となります。

問題

1. $f(x) = x^3$、次の表を完成させ、点 $(x, f(x))$ を直交平面上に配置しなさい（少数第二位まで近づけます）。
f のグラフを続けるのに導入問題の問題 1 で見つけたポイントを使いなさい。

x	−2	−1.8	−1.6	−1.4	−1.2	1.2	1.4	1.6	1.8	2
$f(x)$										

2. $x = -1$ と $x = 1$ のときの $f(x) = x^3$ の値にはどのような関係がありますか。それでは、$x = -2$ と $x = 2$ の場合はどうですか。

3. 通常、$x = -m$ や $x = m$ の時、$f(x) = x^3$ の値とはどのような関係がありますか。

4.2 関数 $f(x) = ax^3$、$a > 0$

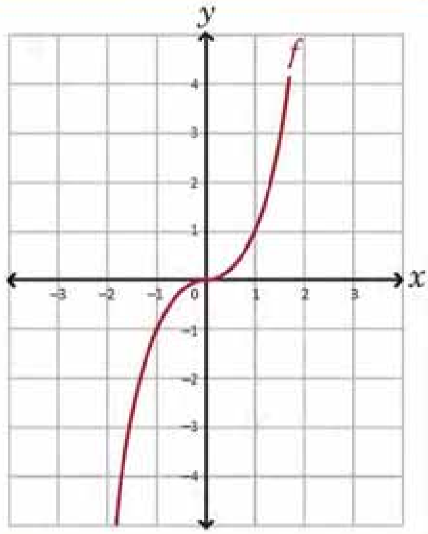
導入問題

$f(x) = x^3$ のグラフから、次に答えなさい。

1. $f(x)$ の値を使って表を完成させ、関数 $g(x) = 2x^3$ と $h(x) = \frac{1}{2}x^3$ をグラフ化します。

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	−8	−3.38	−1	−0.13	0	0.13	1	3.38	8
$g(x)$									
$h(x)$									

2. 関数 f に関して、関数 g と h の類似点と相違点は何ですか。

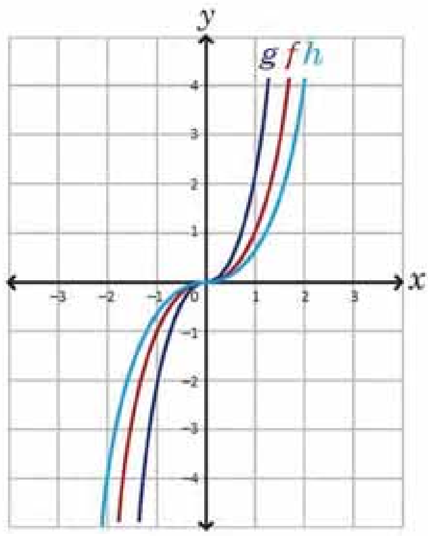


解法

1. $g(x)$ の値は $f(x)$ の値に 2 を掛けた結果であり、$h(x)$ の値は $f(x)$ の値に $\frac{1}{2}$ を掛けた結果です。表は次のようになります。

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	−8	−3.38	−1	−0.13	0	0.13	1	3.38	8
$g(x)$	−16	−6.76	−2	−0.26	0	0.26	2	6.76	16
$h(x)$	−4	−1.69	−0.5	−0.07	0	0.07	0.5	1.69	4

g と h のグラフは右の図のようになります。



2. 関数間の類似点：
   a) 3 つの定義域と域値は $\mathbb{R}$ です。
   b) 3 つの関数のグラフは同じ形をしており、原点を通っています。

関数間の相違点：
a) 原点以外のすべての点が一致しません。
b) もし $x < 0$ であれば、$g(x)$は$f(x)$と$h(x)$ $f(x)$より下であり、$h(x)$ は$f(x)$より上になります。
c) もし $x > 0$ であれば、$g(x)$ は $f(x)$ より上であり、$h(x)$ は $f(x)$ より下になります。

まとめ

$a > 0$ の関数 $g(x) = ax^3$ は、定義域と域値として実数の集合を持ち、すべての定義域で増加します。そのグラフは原点を通り、$f(x) = x^3$ のグラフと同じ形式を持ち、$f(x)$ の値を a で乗算して得られた結果です。

問題

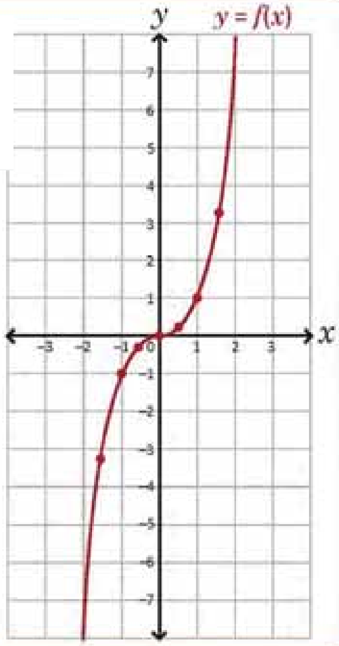
$f(x) = x^3$ のグラフを使って、関数 $g(x) = 3x^3$ と $h(x) = \frac{1}{3}x^3$ をグラフ化しなさい。

導入問題と同じような表を作成しなさい。

4.3 関数 $f(x) = -ax^3$、$a > 0$

導入問題

$f(x) = x^3$ のグラフから、次に答えなさい。



1. $f(x)$ の値を使って表を完成させ、関数 $g(x) = -x^3$ をグラフ化しなさい。

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	−8	−3.38	−1	−0.13	0	0.13	1	3.38	8
$g(x)$									

2. 関数 f と g の類似点と相違点は何ですか。

> $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
> の形式の関数は、a が 0 以外の実数である場合は **三次関数**と呼ばれ、$f(x) = ax^3$ は 三次関数の特殊なケースです。

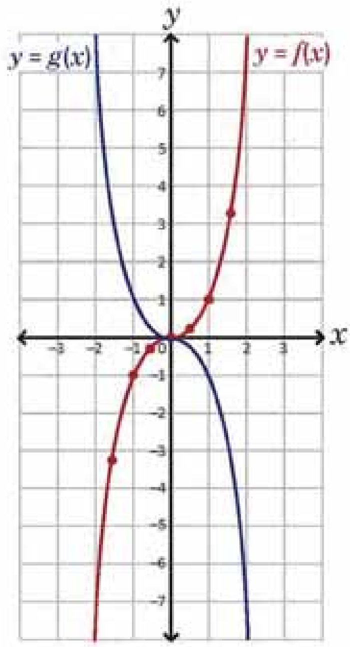
解法

1. $g(x)$ の値は $f(x)$ の値に -1 を乗じた結果であり、表は次のようになります。

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	−8	−3.38	−1	−0.13	0	0.13	1	3.38	8
$g(x)$	8	3.38	1	0.13	0	−0.13	−1	−3.38	−8

×(−1)

f と g のグラフは右の図のようになります。



2. 関数間の類似点：
   a) 双方の定義域と域値は $\mathbb{R}$です。
   b) グラフは同じ形をしており、原点を通っています。

   関数間の相違点：
   a) 原点以外のすべての点が一致しません。
   b) もし $x < 0$ であれば、$g(x)$ は x 軸の上にあり、$f(x)$ は軸の下にあります。
   c) もし $x > 0$ であれば、$g(x)$は x 軸の下にあり、$f(x)$ は軸の上にあります。

まとめ

もし $f(x) = ax^3$ かつ $a > 0$ である場合、$g(x) = -f(x) = -ax^3$ の関数グラフは、**x 軸に関して**、関数 f のグラフに**対称**なグラフとなります。つまり、定義域も値域も実数の集合になり、定義域において常に値が減少する原点を通るグラフとなり、形は関数 f のグラフと同じで、$f(x)$ の値に -1 をかけたものになります。

問題

$f(x)$ のグラフを用いて、関数 $g(x)$ のグラフを、それぞれの場合について描きなさい。

a) $f(x) = 2x^3$, $g(x) = -2x^3$　　b) $f(x) = \frac{1}{2}x^3$, $g(x) = -\frac{1}{2}x^3$　　c) $f(x) = 3x^3$, $g(x) = -3x^3$

4.4 関数 $f(x)=\frac{k}{x}$ とその移動

導入問題

$f(x)=\frac{2}{x}$ と $g(x)=-\frac{2}{x}$ の場合

1. 次の表の x の各値に対応する $f(x)$ と $g(x)$ の値を求めなさい。

x	-8	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$												
$g(x)$												

2. 1 以外の f と g の他の値を決め、点 $(x, f(x))$ と $(x, g(x))$ を見つけ、両方の関数のグラフを描きなさい。

3. f と g のグラフを水平方向に 1 単位右に、垂直方向に 3 単位上に移動させたときに得られる関数の方程式を求めなさい。

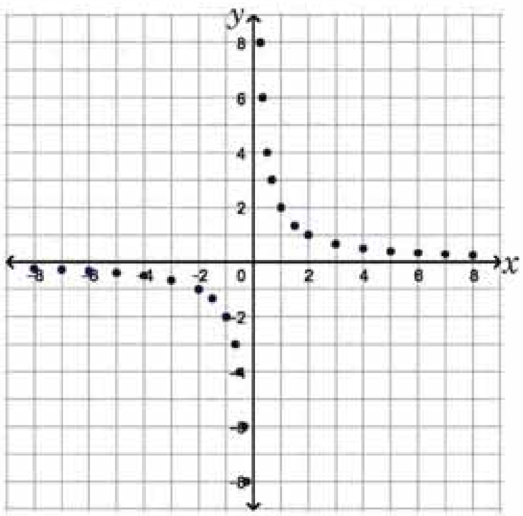
解法

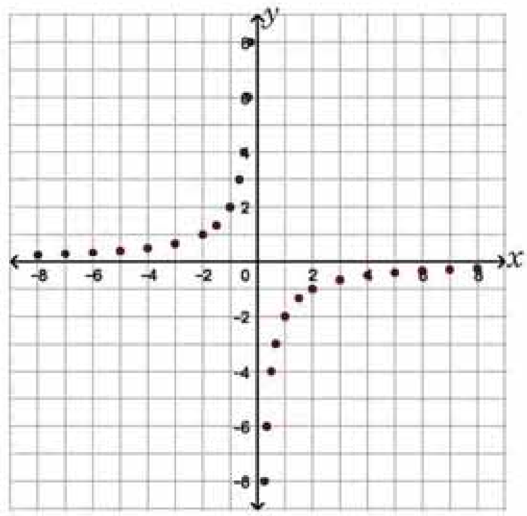
1. 表は次のようになります。

x	-8	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$	-0.25	-0.5	-1	-2	-4	-8	8	4	2	1	0.5	0.25
$g(x)$	0.25	0.5	1	2	4	8	-8	-4	-2	-1	-0.5	-0.25

2. 例えば $x=-7, -6, -5, -3, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 3, 5, 6, 7$ のように、点 $(x, f(x))$ や $(x, g(x))$ が座標平面上に位置しているような、f と g の他の値があります。

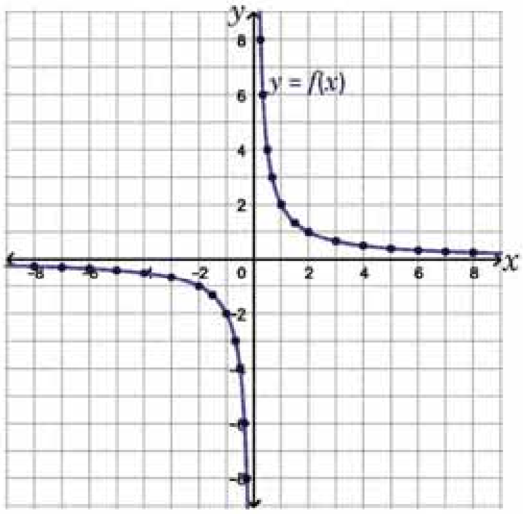
x	-7	-6	-5	-3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	3	5	6	7
$f(x)$	-0.29	-0.33	-0.4	-0.67	-1.33	-3	-6	6	3	1.33	0.67	0.4	0.33	0.29
$g(x)$	0.29	0.33	0.4	0.67	1.33	3	6	-6	-3	-1.33	-0.67	-0.4	-0.33	-0.29

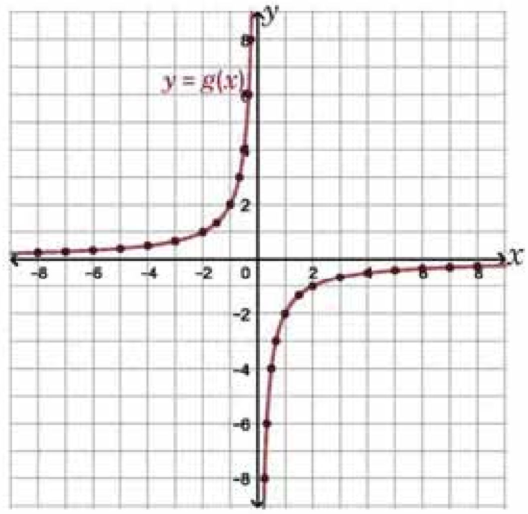




これにより、各グラフの形状をより良く可視化することができます。

次に示すように：





3. $h(x)$ は、f のグラフを水平方向に 1 単位右に，垂直方向に 2 単位上にずらしたときに得られる関数です。$(a、b)$ が h のグラフ上の点ならば、$(a - 1、b - 3)$ は f のグラフ上の点になります。つまり：

$$f(a-1) = b-3$$
$$b = f(a-1)+3$$

すると、方程式 $h(x)$ は $f(x-1)+3$、つまり $h(x) = \frac{2}{x-1}+3$ となります。

似たような形で、$l(x)$ が g のグラフを水平方向に 1 単位右に，垂直方向に 3 単位上にずらしたときに得られる関数であるとすると、次のようになります。

$$l(x) = g(x-1)+3 = -\frac{2}{x-1}+3.$$

まとめ

k が 0 以外の実数で $f(x) = \frac{k}{x}$ とします。f は**反比例関数**と呼ばれ、x の絶対値、つまり $|x|$ が無限に増加したとき、f のグラフは x 軸を通過することなく x 軸に近づきます。また、$|x|$ が零に近い場合、$f(x)$ のグラフは y 軸を通過することなく y 軸に近いものになります。

一般に、反比例関数のグラフは、ケースによっては導入問題のグラフと同じ形をしています。
($k > 0$ または $k < 0$)

以上のことから、反比例関数は座標軸との交点を持たないことがわかります。$f(x) = \frac{k}{x}$ のグラフの **x 軸**を**水平漸近線**、**y 軸**を**垂直漸近線**といいます。

$g(x)$ が $f(x) = \frac{k}{x}$ を p 単位を水平方向に、q 単位を垂直方向に移動させたグラフの関数であるとすると：

$$g(x) = \frac{k}{x-p}+q.$$

$p > 0$ の場合、移動は右に、$p < 0$ の場合、移動は左になります。一方、$q > 0$ の場合、移動は上に、$q < 0$ の場合、移動は下になります。

問題

導入問題の関数 f、g を用いて、f、g のグラフを水平に p 単位，垂直に q 単位移動したときに得られる関数の方程式を求めなさい。

a) $p = 2, q = 1$　　b) $p = -2, q = 1$　　c) $p = 2, q = -1$　　d) $p = -2, q = -1$

4.5 関数 $h(x)=\dfrac{k}{x-p}+q$ *のグラフを描きなさい

導入問題

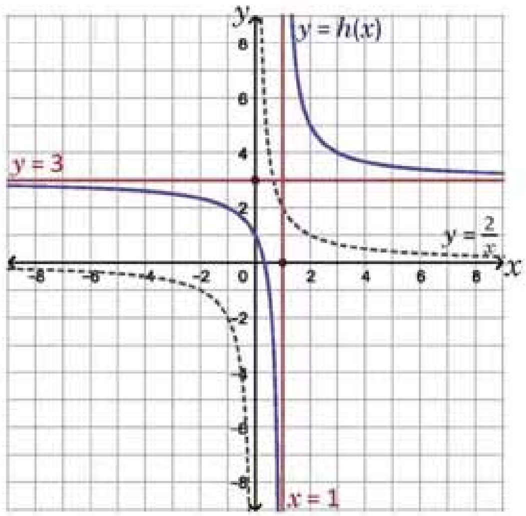
次の場合 $h(x)=\dfrac{2}{x-1}+3$

1. h のグラフの漸近線の方程式を求めなさい。
2. 前項の漸近線を描いてから、h のグラフを描きなさい。
3. h 関数の定義域と域値を求めなさい。

解法

1. 前回の授業から、$h(x)$ のグラフは $f(x)=\dfrac{2}{x}$ のグラフから水平方向に 1 単位、垂直方向に 3 単位移動したものであることがわかります。漸近線は同じように移動されます。つまり、y=0 (x軸) と x=0 (y軸) が f の漸近線なら、y=3 と x =1 は h のグラフの漸近線です。

2. y = 3 のグラフは (0, 3) を通る水平直線ですが、x = 1 は (1, 0) を通る直線 の垂直線です。漸近線を描いたら、h のグラフが描かれ、その形状は $f(x)=\dfrac{2}{x}$ のグラフに似ています。



3. 関数 h の方程式では，分母が零になることはありません。これは x が 1 と異なる場合のみであり、したがって、h の定義域は]−∞、1[U]1、∞[となります。$h(x)$ のグラフから、その域値は]−∞、3[U]3、∞[となります。

まとめ

k がゼロと異なる k、p、q の実数であるとします。関数 $h(x)=\dfrac{k}{x-p}+q$ の水平方向と垂直方向の漸近線は、それぞれ $y=q$ と $x=p$、です。関数 h の領域は、D_h =]−∞、p[U]p、∞[であり、その域値は R_h =] −∞、q[U]q、∞[です。

h のグラフを描くときは、まず漸近線を描き、次にグラフを描くことを勧めます。

問題

各ケースで関数 $h(x)$ の漸近点とグラフを描き，その定義域と域値を求めなさい。

a) $h(x)=\dfrac{1}{x-2}+1$　　b) $h(x)=\dfrac{1}{x+2}+1$　　c) $h(x)=\dfrac{1}{x+1}-1$　　d) $h(x)=-\dfrac{1}{x-2}+1$

4.6 関数 $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ のグラフを描きなさい

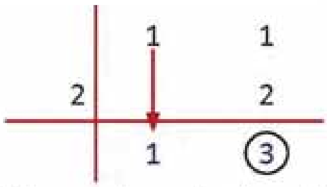
導入問題

次の場合 $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ ：

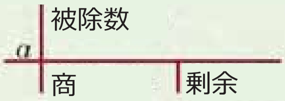
1. $(x+1) \div (x-2)$ の割り算を求め、$\dfrac{x+1}{x-2}$ を $\dfrac{k}{x-p} + q$ の形で書きなさい。
2. $f(x)$ のグラフを描きなさい。

解法

1. 組立除法を使って、次のものを求めなさい。



組立除算では、被除数と除数の多項式の係数を次のように配置しています。



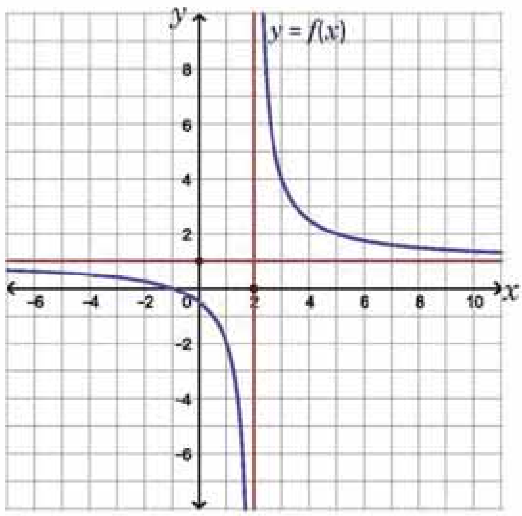
したがって、$x+1 = 1(x-2)+3$ となります。この方程式の両辺を $x-2$ で割ります。

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{1\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} + \frac{3}{x-2} = \frac{3}{x-2} + 1.$$

したがって、$\dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{3}{x-2} + 1$ となります。

2. 前の数字 $f(x) = \dfrac{3}{x-2} + 1$ から、f のグラフを水平方向に 2 単位、垂直方向に 1 単位移動させて $y = \dfrac{3}{x}$ のグラフを求めます。

f の漸近点は $y = 1$ と $x = 2$ になります。



まとめ

a、b、d のすべてが 0 に等しくない実数であるとして、$c \neq 0$ であるとすると、$f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ の形の関数を**有理関数**といいます。f の方程式は、分子の多項式を分母の多項式で割ることで $\dfrac{k}{x-p} + q$ の形で行うことができます。

一般に、有理関数は $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ の形式であり、ここで $p(x)$ と $q(x)$ は線形多項式であるだけでなく、任意の多項式です。

問題

各問で、関数 f の方程式を $\dfrac{k}{x-p} + q$ の形式で書き、関数のグラフと漸近点を描きなさい。

a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$　　b) $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$　　c) $f(x) = \dfrac{-x+3}{x-2}$

4.7 無理数の関数 $f(x) = a\sqrt{x}$

導入問題

次の場合 $y = \sqrt{x}$ ：

1. 次の表を完成させなさい（少数第二位まで近づける）。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0									

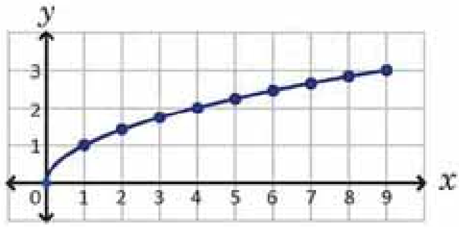
2. 点 $(x、y)$ を座標平面上に置き、線で結びなさい。これは、これまでに学んだ関数のグラフに似ていますか。
3. x のどの値に対して y の値が定義されていますか。

解法

1. 表は次のようになります。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	1	1.41	1.73	2	2.24	2.45	2.65	2.83	3

2. 点を接合してできた線は、右図のようになります。この線は半放物線に似ていますが、今回は右に開いています。



3. y の値は、すべての正の x または 0 に等しいです、つまり $x \in [0、\infty[$ です。

まとめ

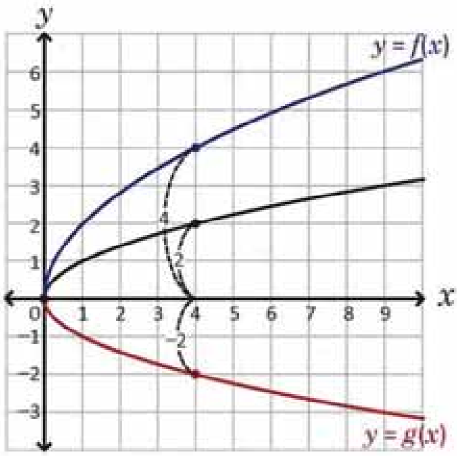
方程式 $y = \sqrt{x}$ は、関数 $[0、\infty[$ a $\mathbb{R}$、の方程式で、グラフは原点を通り、右に開く半放物線に似ています。一般に、$f(x) = a\sqrt{x}$ で、$a \neq 0$ の場合、$[0, \infty[$ が定義域である関数です。

1. $a > 0$ の場合、f の域値は $[0、\infty[$ となり、グラフは x 軸より上になります。
2. $a < 0$ の場合、f の域値は $[0,]-\infty、0]$ となり、グラフは x 軸より下になります。

例

関数 $f(x) = 2\sqrt{x}$ と $g(x) = -\sqrt{x}$ をグラフ化し、それぞれの定義域と域値を求めなさい。

f のグラフは x 軸の上にあり、$\sqrt{x}$ の値に 2 を掛けた結果で、g のグラフは x 軸の下にあり、$\sqrt{x}$ の値に -1 を掛けた結果です。



両グラフが右図に示されています。定義域は $[0, \infty[$ 、域値は $R_f = [0、\infty[$ 、$R_g =]-\infty、0]$ です。

問題

各問で、関数 f をグラフ化し、定義域と域値を求めなさい。

a) $f(x) = 3\sqrt{x}$　　b) $f(x) = -2\sqrt{x}$　　c) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$

4.8 無理数の関数 $f(x)=\sqrt{ax}$

導入問題

次の場合 $f(x)=\sqrt{-x}$ ：

1. 関数 f の定義域は何ですか。
2. 次の表で $f(x)$ の値を計算し、関数のグラフを描きなさい（少数第二位まで近づける）。

x	−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0
$f(x)$										

3. 関数の域値は何ですか。

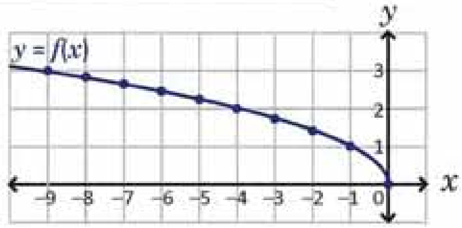
解法

1. 平方数の数値は 0 以上でなければなりません。とすると、関数の定義域は、$-x \geq 0$、すなわち $x \leq 0$ である実数でなければなりません。したがって、$D_f =]-\infty, 0]$ となります。

2. 表は次のようになります。

x	−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0
$f(x)$	3	2.83	2.65	2.45	2.24	2	1.73	1.41	1	0

f のグラフは、右図に示されています。



3. $f(x)=\sqrt{-x}$ の値は常に正の数か 0 に等しいので、$R_f = [0、\infty[$ となります。

まとめ

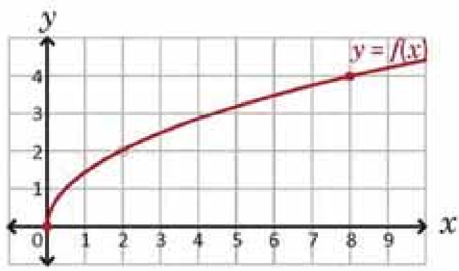
a が 0 以外の実数である $f(x)=a\sqrt{x}$ や $g(x)=\sqrt{ax}$ の形式の関数は、いわゆる**無理関数**の特殊な例です。f と g のグラフは原点を通過し x 軸に沿って開く半放物線に似ています。g 関数の場合、その定義域は正の実数と零、つまり、$[0、\infty[$ となり ：

1. $a>0$ の場合、f の域値は $[0, \infty[$ となり、グラフは y 軸より右になります。
2. $a<0$ の場合、f の域値は $]-\infty, 0]$ となり、グラフは y 軸より左になります。

例

関数 $f(x)=\sqrt{2x}$ をグラフ化し、その定義域と域値を求めなさい。

f のグラフは、右の図のように y 軸の右にあり、$D_f = [0, \infty[$ と $R_f = [0, \infty[$ となります。



グラフ $f(x)=\sqrt{2x}$ は、$g(x)=2\sqrt{x}$ のグラフとは一致せず $h(x)=\sqrt{2}\sqrt{x}$ のグラフと一致します。

問題

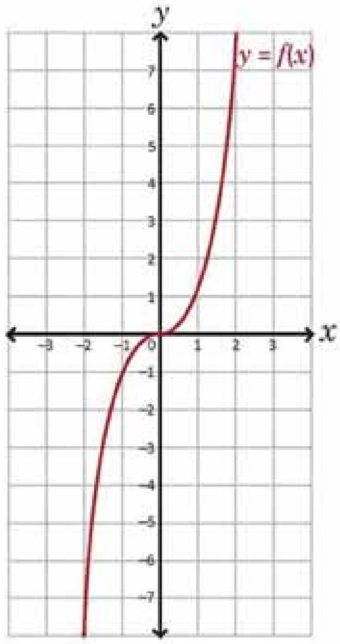
各問で、関数 f をグラフ化し、定義域と域値を求めなさい。

a) $f(x)=\sqrt{3x}$　　b) $f(x)=\sqrt{-2x}$　　c) $f(x)=\sqrt{\frac{1}{2}x}$

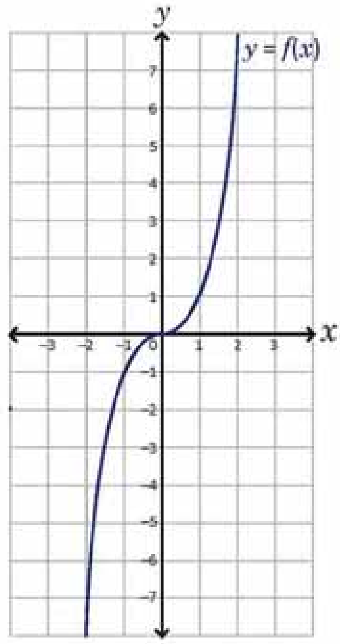
4.9 復習問題

1. $f(x) = x^3$ のグラフを使って、関数 g をグラフ化し、その定義域と域値を求めなさい。

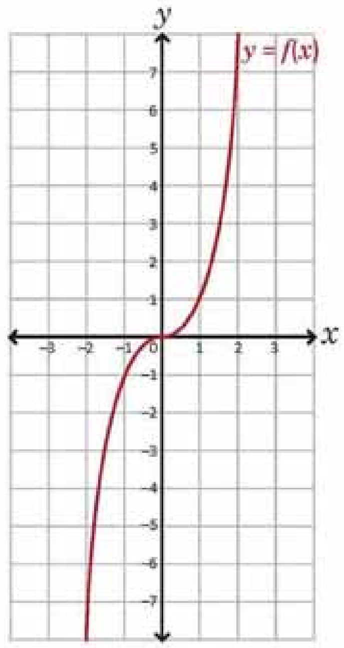
a) $g(x) = 4x^3$



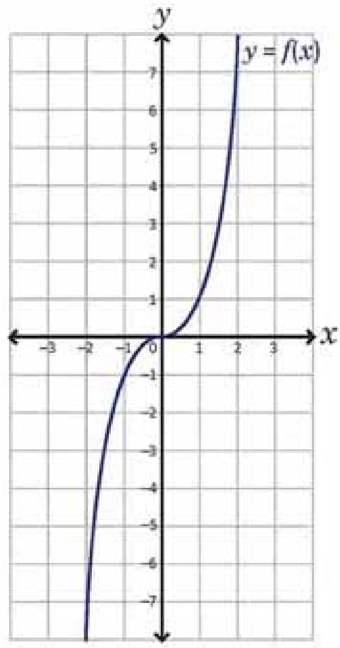
b) $g(x) = \frac{1}{4}x^3$



c) $g(x) = -4x^3$



d) $g(x) = -\frac{1}{4}x^3$



2. 各問で、関数をグラフ化し、定義域と域値を求めなさい。

a) $f(x) = \frac{-2x}{x-2}$

b) $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

3. 各問で、関数をグラフ化し、定義域と域値を求めなさい。

a) $f(x) = -3\sqrt{x}$

b) $f(x) = 4\sqrt{x}$

c) $f(x) = \sqrt{-3x}$

d) $f(x) = \sqrt{4x}$

4.10 ユニット問題

1. 関数 f のグラフを描き、関数の頂点の座標と、定義域と値域を求めましょう。

a) $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 3$

b) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^2 + 1$

c) $f(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$

d) $f(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$

2. 二次関数 g が点 (–12、0)、(–9、3)、(–7、–5) を通るとき、その方程式を求めましょう。

3. ホルヘ "マヒコ" ゴンサレス国立競技場の一般太陽セクターは、1 万人のファンを収容することができます。ある試合では、そのセクターのチケットの価格は 10 ドルで、平均 3000 人のファンが参加しました。市場調査によると、チケットの価格を 1 ドル下げるごとに平均参加者数が 1000 人増えたといいます。一般太陽セクターのチケット販売で最大の利益を得るためには、価格はいくらにすべきでしたか。

4. 以下の不等式を解きましょう。

a) $12x^2 - 5x - 2 \leq 0$

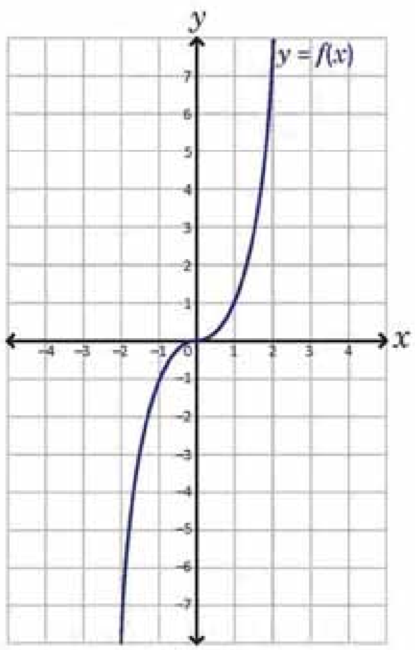
b) $4x > -4x^2 + 15$

c) $2x^2 - x \leq 1$

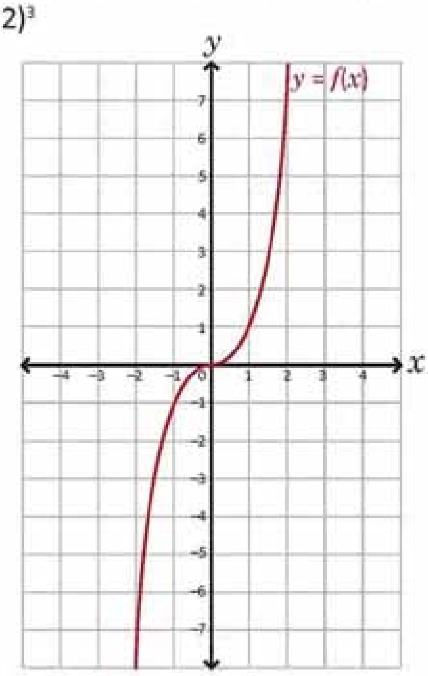
d) $x^2 - 4x - 1 \geq 0$

5. $f(x)=x^3$ のグラフを使って、関数 g をグラフ化し、その定義域と域値を求めなさい。

a) $g(x) = x^3 + 1$



b) $g(x) = (x - 2)^3$



6. 各問で、関数 f をグラフ化し、定義域と域値を求めなさい。

a) $f(x) = -\sqrt{-x}$

b) $f(x) = \sqrt{x} + 1$

c) $f(x) = \sqrt{-x} - 3$

d) $f(x) = \sqrt{x - 1}$

5.1 GeoGebraを使った演習： 概要

GeoGebraは、あらゆる学年で使える動的数学ソフトウェアです。Geogebra には、簡単に使える数多くのツールが含まれているので、幾何学、代数、統計や計算に関する内容に取り組むことができます。

この授業では、GeoGebra の概要といくつかのコマンドの使用について理解するために、インターフェイスを探究します。パソコンで GeoGebra のアイコン（このページの右上角に表示されているもの）を探しましょう。もしPCにソフトウェアがなければ、次のリンクから無料でダウンロードできます。

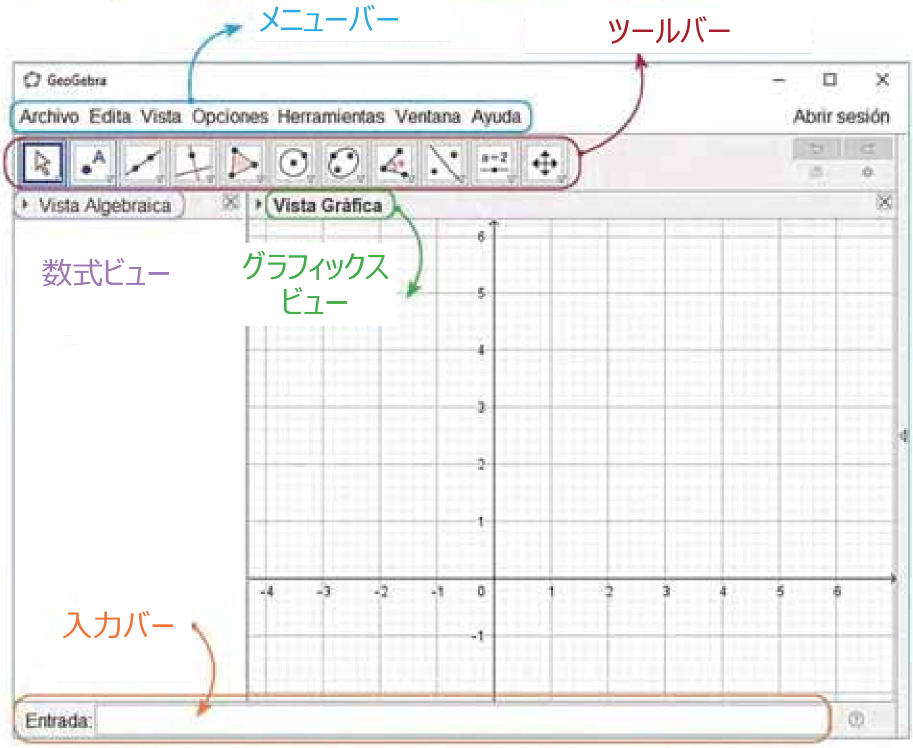
GeoGebra https://goo.gl/jRmmdc

必ず「GeoGebra Clásico 5」をダウンロード（インストール）しましょう。また、以下のリンクからスマートフォン用のアプリをダウンロードしたり、「オンラインGeoGebra」を使ったりすることもできます。

アプリ → https：//goo.gl/wf5mHx　**オンライン** → https：//goo.gl/ThXbeB

演習

以下のとおり行いましょう。



1. ソフトウェアのアイコンをクリックして GeoGebra の新規ファイルを開きます。

   ウィンドウには、次の各部が認識できます。 メニューバー、ツールバー、数式ビュー、グラフィックスビュー、入力バー。

2. グラフィックスビューの左にある三角形をクリックします。座標軸と方眼の非表示/表示ができます。

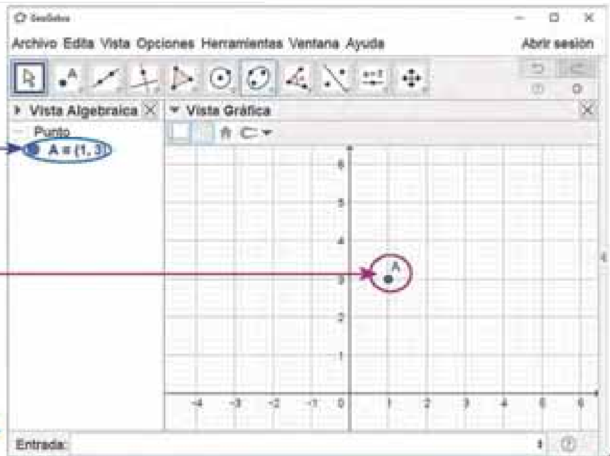
3. 平面上に点を配置するには、次のいずれかオプションを行います。

   a) 入力バーに (x, y) の形で点の座標を入力します。例えば、(1,3) と入力して Enterを押すと、自動的に数式ビューには点 A = (1,3) と表示され、グラフィックスビューの座標平面上に点が表示されます。

   入力： (1,3)

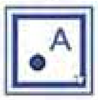
   GeoGebra では、点の名前を大文字でつけます。例えば、P(−2,5) のように特異な文字を使って点を示すには、次のように入力バーに 入力します。

   入力： P=(−2,5)



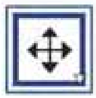
ユニット 4

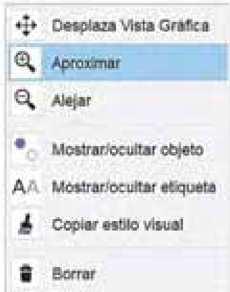
b) ツール「点」を選択します。グラフィックスビューの任意の位置にカーソルを置き、点を配置し、その後クリックします。点の座標が整数の場合は、このツールを用いて方眼を補助に使うのが簡単です。整数でない場合は、前項に示したように入力バーに座標を入力する方がよいでしょう。



4. オブジェクトを削除するには、そのオブジェクト上（数式ビューでもグラフィックスビューでもよい）で右クリックして、「削除」を選びます。オブジェクトを非表示とするのみで削除したくないときは、コンテキストメニューで「オブジェクトの表示」を選びます。そうすると、オブジェクトはグラフィックスビューから消えますが、数式ビューには残ります。

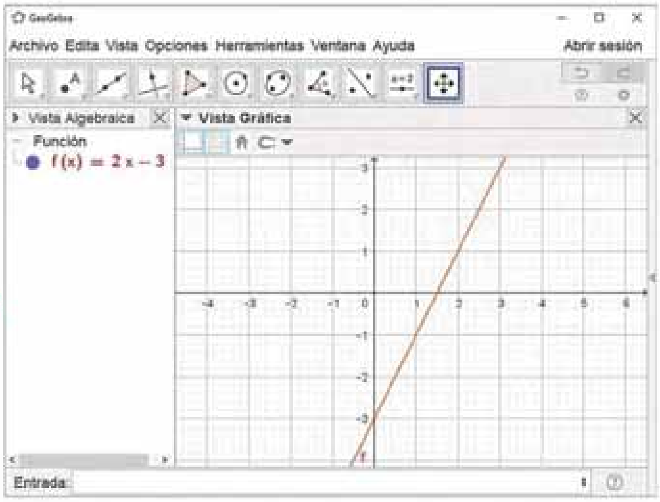
5. 座標平面を移動させるには、ツール「グラフィックスビューの移動」を選択します。その後、グラフィックスビュー上で左クリックしたまま、座標平面を配置したい場所までドラッグします。





6. 座標平面を拡大/縮小するには、「グラフィックスビューの移動」というアイコンの右下角を選択し、「「ズームイン 」または「 ズームアウト」を選び、その後、グラフィックスビュー上でクリックします。

7. 関数のグラフを描くには、$f(x)$ という表記を使います。例えば、関数 $f(x) = 2x - 3$ のグラフを描くには、入力バーに f(x)=2x-3 と入力し、Enter を押します。数式ビューに関数式、グラフィックスビューにそのグラフが表示されます。



また、g(x)、h(x) 等も使えます。変数 x は必ず小文字でなければなりません。そうすると、GeoGebra はこれを変数として認識します。

8. GeoGebraで 二次関数のグラフを描くには、累乗 x^2 は x^2 と入力します。例えば、$f(x) = 3x^2$ のグラフを描くには、入力バーに f(x)=3x^2 と入力します。

課題

1. 入力バー、可能であればツール「点」を使って、次の点を座標平面上に配置しなさい。

a) A(−3, 4)　　b) B(2, 7)　　c) P(−6, 0)　　d) $Q\left(4, -\frac{1}{2}\right)$

GeoGebraでは、分数 $\frac{m}{n}$ は m/n と入力します。

2. 次の関数のグラフを描きなさい。

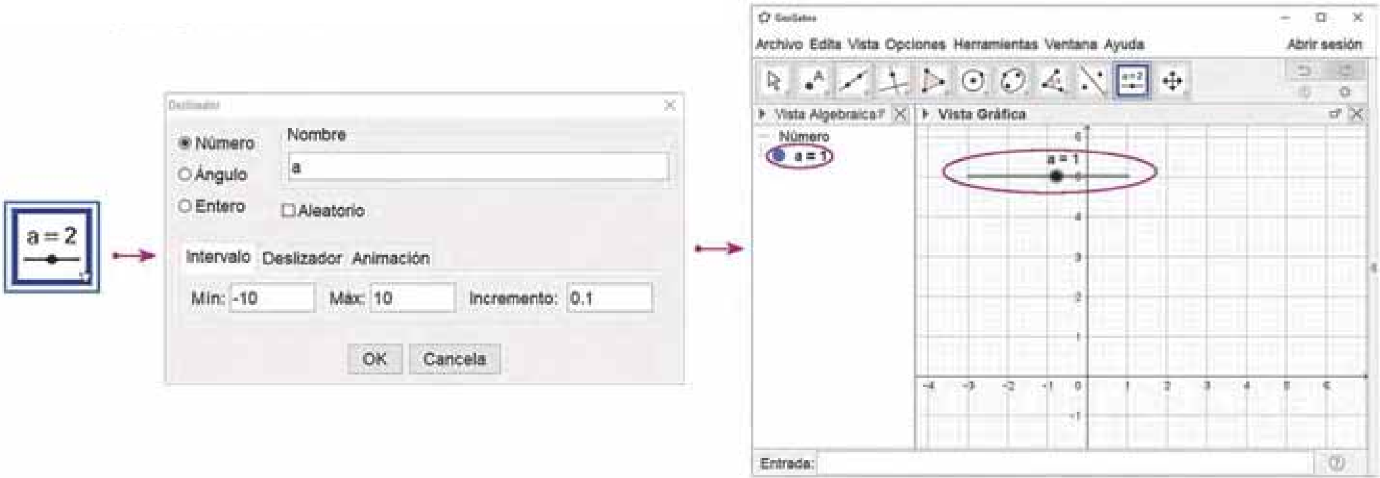
a) $f(x) = -x + 3$　　b) $g(x) = \frac{2}{3}x - 5$　　c) $h(x) = 4x^2$　　d) $p(x) = -x^2$　　e) $q(x) = \frac{x^2}{2}$

5.2 GeoGebra を使った演習 ： 垂直移動

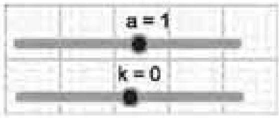
この演習は、ツール「スライダー」を使用して二次関数の垂直移動を視覚化する助けとなります。スライダーは、指示された区間の中で指定の値をとる変数です。

演習

1. ツール「スライダー」 を選択します。グラフィックスビュー上でクリックします。そうすると、スライダーの名前、タイプ（数値、角度、整数）、区間、増分を指定するダイアログ画面が表示されます。スライダーに **a** という名前をつけ、区間には最小値 –10、最大値10、増分は0.1と入力します。その後、OK を選択します。



2. 同じように、 **k** という名前で別のスライダーを作成し、 **a** と同じ特性（区間と増分）を指定します。スライダー上にある点にカーソルを当て、**k** の値が0になるまでドラッグします。



3. 入力バーに f(x)=ax^2 と入力します。そうすると、数式ビューに関数 $f(x) = 1x^2$、グラフィックスビューにこれに対応する放物線が表示されます。スライダー **a** を、まず正の値になるように、次に負の値になるように動かします。f のグラフはどうなるでしょうか。気づいたことをノートに書きましょう。

4. 入力バーに g(x)=f(x)+k と入力します。

5. g のグラフの頂点を特定するには、入力バーに extremum と入力します。Extremum (<多項式>) というオプションを選択します。次に、<多項式> というところに y=g(x) と入力します。そうすると、数式ビューに頂点の座標、グラフィックスビューに点が表示されます。

6. スライダー **k** を、まず正の数になるように、次に負の数になるように動かします。**k** が正の値のとき、または負の値のとき、関数のグラフと頂点はどうなるでしょうか。気づいたことをノートに書きましょう。

課題

今度は、別のツールを使い、9 年生（中 3） でやったように点をもとにして $f(x) = x^2$ のグラフを作成してみましょう。

1. 新規ウィンドウを開きます。スライダーを作成し、区間を –5 から 5、増分を 0.001 として「**n**」と名前をつけます。**n** の値が –5 になるまでスライダーを動かし、グラフィックスビューをズームアウトします。
2. 入力バーに点 P=(n,n^2) を入力します。次に、P の上で右クリックし、「残像表示」というオプションを選びます。
3. 「**n**」の上で右クリックし、「アニメーション」を選びます。気づいたことをノートに書きましょう。

5.3 GeoGebraを使った演習： 水平移動

この演習によって、水平移動、水平移動と垂直移動の組み合わせ、二次関数でない他の関数のグラフを視覚化します。

演習

水平移動：

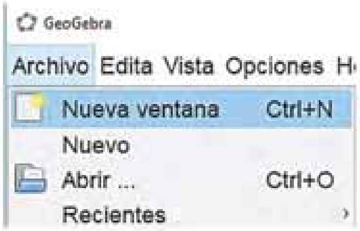
1. スライダーを 2 つ作成します。1 つ目には **a** という名前をつけて区間は –10 から 10、増分は 0.1 とし、2 つ目は **h** という名前で 特性（区間と増分）は **a** と同じにします。スライダー **h** の値が 0 になるまで動かします。

2. 関数 f(x)=ax^2 と g(x)=f(x-h) を作成し、g のグラフの頂点を求めます。

3. スライダー **a** の値が 1 以外になるように動かします。その後、スライダー **h** に対してアニメーションをオンにします。**h** が正の値のとき、g のグラフと頂点はどうなるでしょうか。負の値のときはどうでしょうか。結果をノートに描きましょう。

水平移動と垂直移動の組み合わせ：

1. メニューの「ファイル」から「新規ウィンドウ」を選び、GeoGebra の新規ウィンドウを開きます。



2. スライダーを3つ作成します。それぞれ **a**、**h**、**k** という名前をつけ、区間を –10から10、増分を0.1とする特性を指定します。スライダー **h** とスライダー **k** の値が0になるように動かします。

3. 関数 f(x)=ax^2 と g(x)=f(x-h)+k を作成します。さらに、g のグラフの頂点を求めます。

4. スライダー **a** の値が1以外になるように動かします。その後、スライダー **h** 、スライダー **k** という順で動かします。アニメーションはオンにはしません。f に対して g のグラフと頂点がどうなったのか書き留めましょう。

二次関数でない他の関数のグラフ：

1. GeoGebraの新規ウィンドウを開きます。

2. スライダー **m** を作成し、区間を –4から4、増分を0.001とする特性を指定します。スライダーの値が –4 になるように動かします。

3. 点「P=(m,m^3)」を作成し、残像表示をオンにします。その後、スライダー **m** のアニメーションをオンにします。今作成しているグラフに似たグラフの関数はどれでしょうか。

4. 区間を0から30、増分を 0.001 としてスライダー **n** を作成します。スライダーの値が 0 になるように動かします。

5. 点「Q=(n, sqrt(n))」を作成し、残像表示をオンにします。その後、スライダー **n** のアニメーションをオンにします。今作成しているグラフに似たグラフの関数はどれでしょうか。コマンド「sqrt」の機能は何でしょうか。

課題

1. GeoGebra を使って、授業 2.1 から 2.8 までの問題のグラフが正しく作成できたかどうか確認しなさい。

2. 授業 4.9 のグラフと授業 4.10 の問題 5 と 6 の結果を確認しなさい。