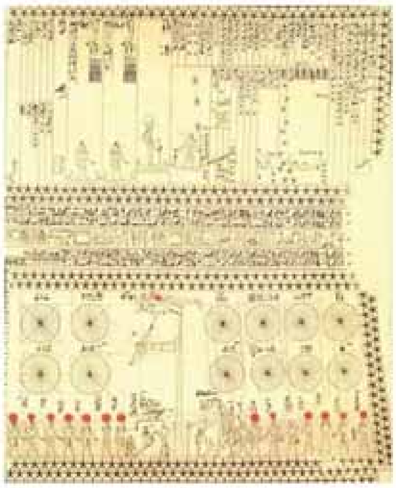
# 斜三角形の解法

ユニット 5

三角法の数学領域は、天文学に歴史的な起源があります。この分野は古代エジプト人とヒンズー教徒によって広く研究されましたが、最初の三角関数表を作成したのは、ギリシャの天文学者で数学者のヒッパルコスでした。この三角関数表は、天空にさまざまな星座を配置する線の測定に基づいていました。角度の測定が60進法で行われるのは、歴史的起源によるものです。さらに、天空を36の「デカン」に分け、各デカンにそれぞれ星座が配置されていました。



星座を配置するために、地球を 360° で分割していることが示されている文書

セオドライトは、工学活動で使用される垂直角と水平角を測定するための機器です。

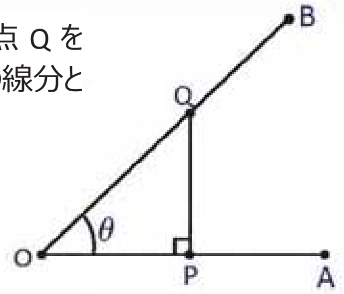
斜三角形の解法は、現在も多くの用途があります。最も重要なもののいくつかは、たとえば、さまざまな状況での仰角と俯角の計算です。また、ものの高さや、ものとものの距離など、特定の距離を計算するのにも役立ちます。

このユニットの学習を通じて、鋭角および任意の角度の三角比の定義を学びます。さらに、仰角と俯角の計算に三角関数を応用すること、また、正弦定理と余弦定理の重要なポイントも学びます。

## 1.1 三角比*

### 導入問題

直線の線分 $\overline{OA}$ 及び $\overline{OB}$ を取り、その間に出来た角の大きさを$\theta$とします。$\overline{OB}$ 上に 点 Q を取り、垂直な線分を $\overline{OA}$ まで引き Q を通るようにします。図が示すように、この垂直の線分と $\overline{OA}$ の間の交点は P ということになります。




直角三角形 OPQ の比は以下のようになります。$\frac{PQ}{OQ}, \frac{OP}{OQ}, \frac{PQ}{OP}$ .

定義された比が直角三角形 OPQ の辺の長さに依存しないことを証明しましょう。

### 解法

$\overline{OB}$上に Q とは別に任意の点 Q′ を取ります。図が示すように、$\overline{OA}$ に垂直で Q′ を通る線分を引き、この垂直線分と $\overline{OA}$ の交点が P' になるようにします。そして、条件 AA (ΔOPQ ~ ΔOP'Q′ で表される)により、三角形 OPQ と OP'Q' は相似であるので、次のことが言えます。

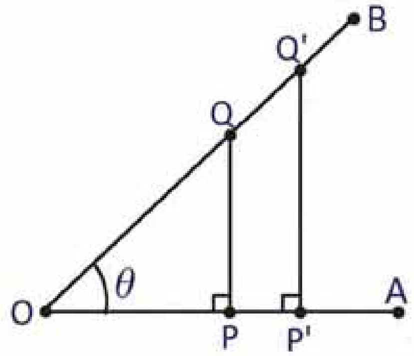
$$\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{OP}{OP'} = \frac{OQ}{OQ'}.$$

$\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{OQ}{OQ'}$ から、$\frac{PQ}{OQ} = \frac{P'Q'}{OQ'}$ と導かれます。

$\frac{OP}{OP'} = \frac{OQ}{OQ'}$ から、$\frac{OP}{OQ} = \frac{OP'}{OQ'}$ と導かれます。

$\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{OP}{OP'}$ から、$\frac{PQ}{OP} = \frac{P'Q'}{OP'}$ と導かれます。

比例式が $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ の時、$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ が成り立ちます。

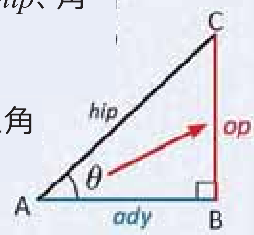



よって、$\frac{PQ}{OQ} = \frac{P'Q'}{OQ'}, \frac{OP}{OQ} = \frac{OP'}{OQ'}, \frac{PQ}{OP} = \frac{P'Q'}{OP'}$ となります。

よって、比 $\frac{PQ}{OQ}, \frac{OP}{OQ}, \frac{PQ}{OP}$ は三角形の辺の長さに依存しないと言えます。

### 定義

ABC が直角三角形で、B が直角、ΔABC の鋭角の一つの角度が $\theta$ とします。三角形の斜辺を $hip$、角度に相対する辺を $op$、角度の隣接する辺を $ady$ と定義します。




三角形の中の相対する辺と隣接する辺は、どの角度に対してなのかによって異なりますので、三角形が図に示されているのとは違う置き方になっている場合には特に注意が必要です。

比 sen $\theta$, cos $\theta$, tan $\theta$ は $\text{sen}\ \theta = \frac{op}{hip}$, $\cos\theta = \frac{ady}{hip}$, $\tan\theta = \frac{op}{ady}$ と定義され、それぞれ "シータのサイン"、"シータのコサイン"、"シータのタンジェント" と読みます。

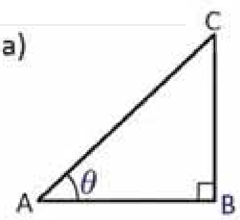
比 sen $\theta$、cos $\theta$、tan $\theta$ を角度 $\theta$ の**三角比**と言います。

### 問題

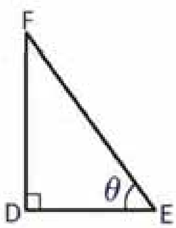
直角三角形において、90°の角に相対する辺を**斜辺**と言い、直角を作る二つの辺のことを**隣辺**と言います。さらに、斜辺は最も長い辺です。

斜辺、角度 $\theta$ に相対する辺と隣接する辺を見つけましょう。そして、それぞれの場合の三角比を表しましょう。

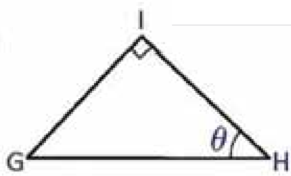
a)




b)




c)

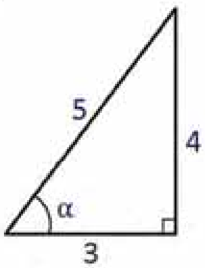


## 1.2 直角三角形における三角比

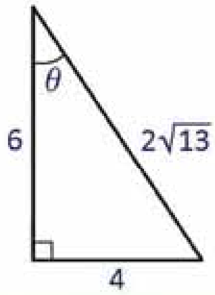
### 導入問題

角 α 及び $\theta$ の三つの三角比を求めましょう。

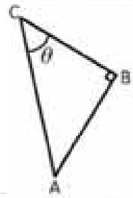
a)




b)




角に対応する辺と隣接する辺を選ぶ際に注意が必要です。例えば、三角形 ABC では、$\theta$ に相対する辺は $\overline{AB}$ で、$\theta$ に隣接する辺は $\overline{BC}$ です。




### 解法

a) 角 α の斜辺、相対する辺、隣接する辺を見つけ出します。この場合、$hip = 5$、$op = 4$、$ady = 3$ なので、以下のようになります。

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{op}{hip} = \frac{4}{5}, \quad \cos\alpha = \frac{ady}{hip} = \frac{3}{5}, \quad \tan\alpha = \frac{op}{ady} = \frac{4}{3}.$$

b) 角 $\theta$ の斜辺、相対する辺、隣接する辺を見つけ出します。この場合、$hip = 2\sqrt{13}$、$op = 4$、$ady = 6$ なので、以下のようになります。

- $\text{sen}\,\theta = \frac{op}{hip} = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \times \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ と、分母の有理化を行います。

- $\cos\theta = \frac{ady}{hip} = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ と、分母の有理化を行います。

- $\tan\theta = \frac{op}{ady} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$

分数を有理化するには、分数の分母にある平方根で、分子と分母に掛けます。



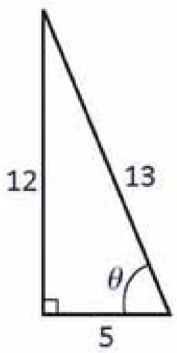
### 定義

直角三角形の辺の長さがわかっていれば、その鋭角の一つの三角比正弦（サイン）、余弦（コサイン）、正接（タンジェント）は、その角の斜辺、相対する辺、隣接する辺の長さを見つけ、1.1課で定義した比を計算することによって算定することができます。

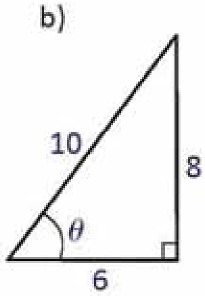
### 問題

1. 以下の三角形それぞれについて、三角比 sen $\theta$、cos $\theta$、tan $\theta$ を計算しましょう。
   可能なところは、約分あるいは有理化してください。

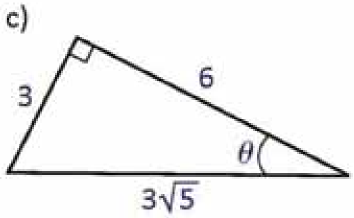
a)

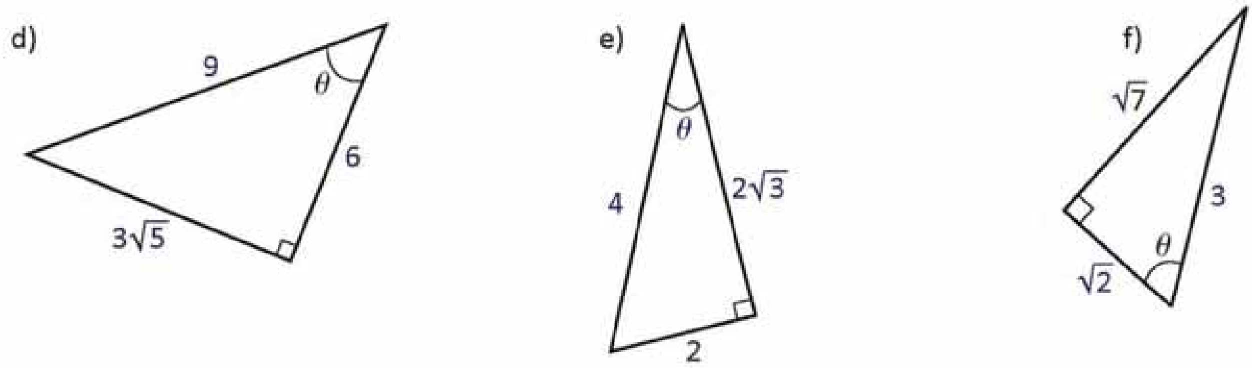



b)



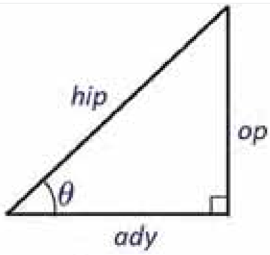

c)






2. csc $\theta$、sec $\theta$、cot $\theta$ と表される鋭角 $\theta$ の三角比余割（コセカント）、小割（セカント）、余接（コタンジェント）が以下のように定義されます。

$$\csc\theta = \frac{hip}{op},$$
$$\sec\theta = \frac{hip}{ady},$$
$$\cot\theta = \frac{ady}{op}.$$



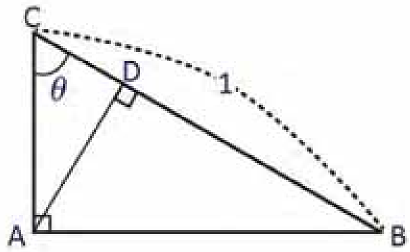

問題 1 の三角形について、三角比 csc $\theta$、sec $\theta$、cot $\theta$ を求めましょう。

3. 問題 2 の定義に基づき、$\csc\theta = \dfrac{1}{\text{sen}\,\theta}$ であることを証明しましょう。

4. 問題 2 の定義に基づき、$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ であることを証明しましょう。

5. 問題 2 の定義に基づき、$\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ であることを証明しましょう。

6. 次の図で、ABC は直角三角形で、∢CAB = 90°、∢BCA = $\theta$ 、BC = 1 です。線分 AC、AB、AD、BD、CD の値を 角 $\theta$ を使って表しましょう。




**三角法** という名称はギリシャ語の「三角形」と「測る」という言葉から来ています。その始まりが、主に「三角形を解く」（三辺と三角のうち、いくつかは分かっている場合にこのすべての寸法を計算する）という問題に関係していることから、そのように呼ばれています。

三角法は三角形を解く必要性から生まれましたが、現在では物理学（振り子の動きの計測）、天文学（恒星間距離の計測）、地図作成法（二点間距離の計測）など多くの分野で使われています。

紀元前 2 世紀頃、ギリシャの天文学者の中で最も著名とされる小アジアのニカイアに生まれた数学者ヒッパルコス（紀元前 180～125 年）は、ある意味では正弦値の初歩的な表に相当する円周の弦の数表を使い始めました。

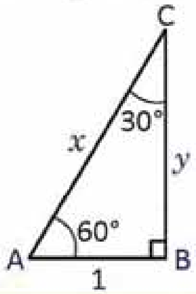
アボット、B.A. (1967).『独学三角法』

## 1.3 特殊な直角三角形

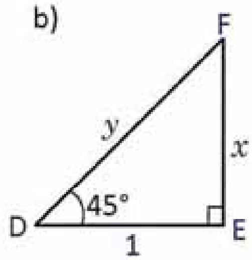
### 導入問題

次の直角三角形において、$x$ と $y$ の値を求めましょう。

a)

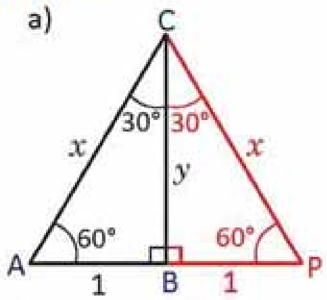



b)




### 解法

a)



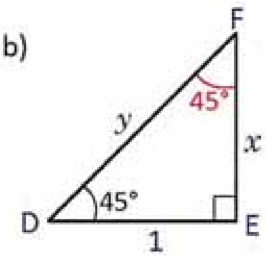

三角形 ABC を $\overline{BC}$ を軸に反転させると三角形 APC が得られます。∢BCA = 30° であるので、∢PCA = 60° でなくてはなりません。結果的に三角形 APC は正三角形となるので、$x$ = AP = 2 となります。

よって、$y$ 値を求めるには、ピタゴラスの定理を三角形 ABC に適用します。$x^2 = 1^2 + y^2$つまり、

$$y^2 = x^2 - 1^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3.$$

$y > 0$であるので、$y = \sqrt{3}$

b)




三角形 DEF において、角 FDE と角 DFE は余角の関係にあります。つまり、∢FDE + ∢EFD = 90° したがって、∢EFD = 45° になります。それで、三角形 DEF は二等辺三角形であることがわかるので、$x$ = 1 となります。

$y$ 値を求めるには、ピタゴラスの定理を三角形 DEF に適用します。

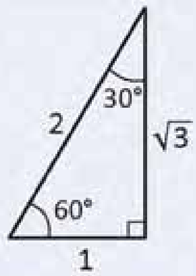
$$y^2 = 1^2 + x^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

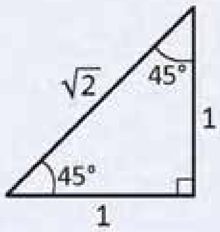
$y > 0$,であるので、$y = \sqrt{2}$

### 定義

鋭角が 30° と 60°の直角三角形と、その二つの鋭角が 45° の直角三角形のことを**特殊な三角形**と呼びます。

このような三角形のことを指して、30, 60 の三角形、また 45 の三角形という呼び方がよく使われます。

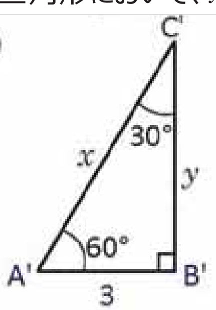


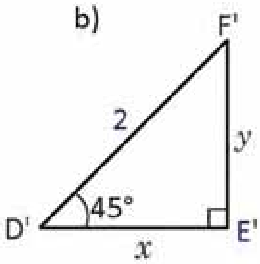

### 例

次の三角形において、$x$ と $y$ の値を求めましょう。

a)

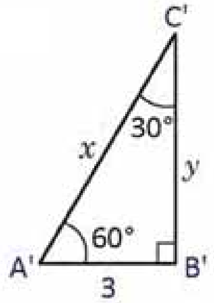


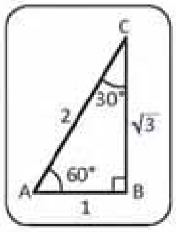

b)



a) ΔA'B'C' ~ ΔABC であることに注目すると、以下が成り立ちます。

$\frac{x}{2}=\frac{3}{1} \Rightarrow x=3(2)=6$ と $\frac{y}{\sqrt{3}}=\frac{3}{1} \Rightarrow y=3\sqrt{3}.$

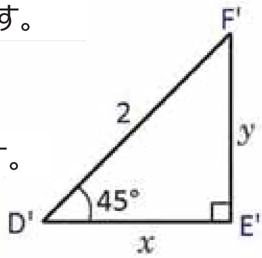


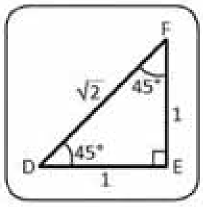




b) a) と同様に、ΔD'E'F' ~ ΔDEF であるので、以下が成り立ちます。

$\frac{x}{1}=\frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow x=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$

よって、ΔD'E'F' は二等辺三角形なので、$y=\sqrt{2}$ とわかります。

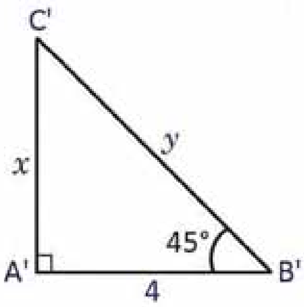


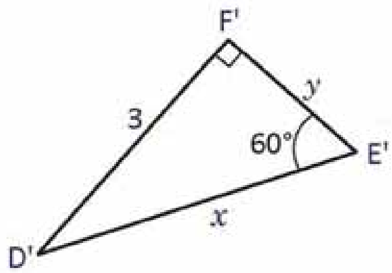

## 問題

それぞれの三角形について $x$ と $y$ の値を求めてみましょう。

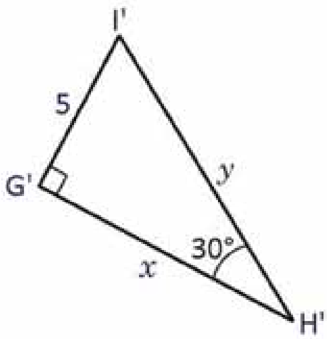
a)



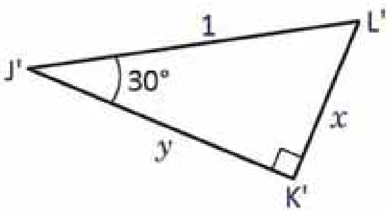

b)



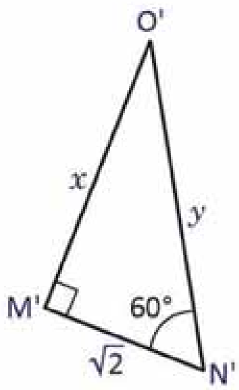

c)



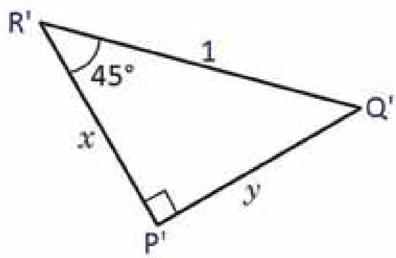

d)




e)




f)



## 1.4 特殊な直角三角形の三角比

### 導入問題

角度30°、45°、60° の三角比を三つとも求めましょう。

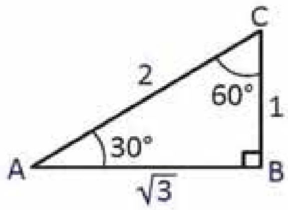
### 解法

a) 角度 30° の三角比を計算するには、図に示されている三角形を使います。角度 30° の相対の辺と隣接する辺を特定すると、$ady = \sqrt{3}$、$op = 1$ であることがわかります。よって

$$\text{sen } 30° = \frac{1}{2},$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

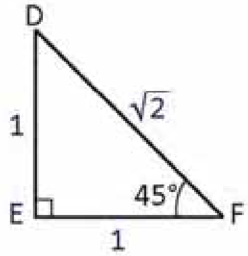



b) 角度 45° の三角比を計算するには、図に示されている三角形を使います。角度 45° の相対の辺と隣接する辺を特定すると、$ady = op = 1$ であることがわかります。よって

$$\text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\tan 45° = \frac{1}{1} = 1.$$



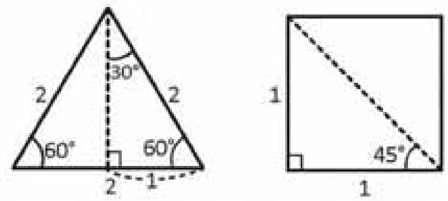

c) 角度 60° の三角比を求めるには、a) で使ったのと同じ三角形 ABC を使います。この場合、$ady = 1$、$op = \sqrt{3}$ です。よって

$$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2},$$

$$\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$

角度 30°、45°、60° の三角比を覚える方法の一つとして、次のような 30°、60° の三角形と 45° の三角形の作り方を覚えておくという方法があります。




### まとめ

次の表は角度30°、45°、60° の三角比をまとめたものです。

| $\theta$ | 30° | 45° | 60° |
|---|---|---|---|
| sen $\theta$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| cos $\theta$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| tan $\theta$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |

角度 30°、45°、60° の三角比を計算するには、表の枠内に示されている値を使わなくてはなりません。

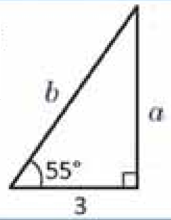
### 問題

三角比セカント、コセカント、コタンジェントを角度 30°、45°、60° について求めましょう。

## 1.5 一辺と一鋭角が分っている直角三角形

### 導入問題

次の三角形がある場合、残りの二辺の長さを求めましょう。小数点第1位までの概数で求めてください。




### 解法

三角形の鋭角の一つの値がわかっているため、三角比を使って残りの二辺の長さを計算することができます。

$\tan 55° = \frac{a}{3}$ であることがわかっているので、$a = 3\tan 55°$ になります。55° は特殊な三角形の角ではないため、tan 55° の値の計算には電卓を使いますが、その前に次のステップで角度が度数で計測されるように電卓を設定する必要があります。

キー MODE を二回押し、キー 1 を押します。

これで電卓の設定ができたので、次の示すように tan 55° を入力します。

電卓の画面

tan 5 5 = ⇒ tan 55 1.428148007

少数点第1位までの概数にすると、$a = 3\tan 55° \approx 3(1.4) = 4.2$ となるはずです。
$b$ の値を計算するには、次のことを念頭にに置きます。

$$\cos 55° = \frac{3}{b} \Rightarrow b = \frac{3}{\cos 55°}$$

電卓の画面

3 ÷ cos 5 5 = ⇒ 3÷cos 55 5.230340387

よって、$a \approx 4.2$、$b \approx 5.2$ となります。

電卓の型式によって、MODE キーの表示は二種類あります。

MODE CLR　MODE SETUP

電卓に二つ目のオプションがある場合、次のキーを押します。

SHIFT　MODE SETUP

それから 3 キーを押します。

電卓上では、サインの機能は sin として表されます。

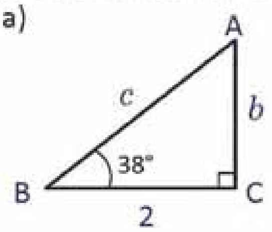
### まとめ

直角三角形の一片の長さと鋭角の一つの角度が与えられている場合、鋭角の三角比を使って残りの辺の長さも求めることができます。

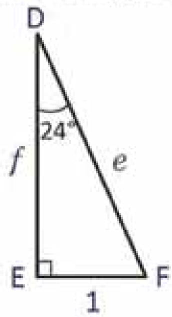
### 問題

それぞれの三角形の残りの辺の長さを求めましょう。

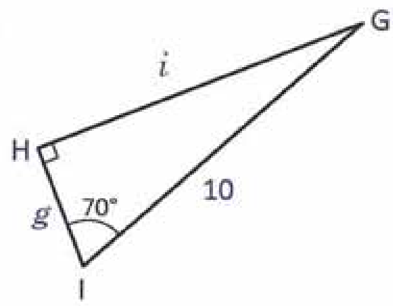
a)



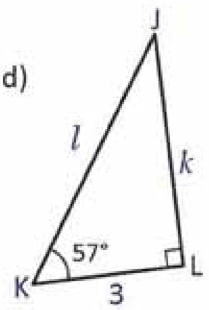

b)



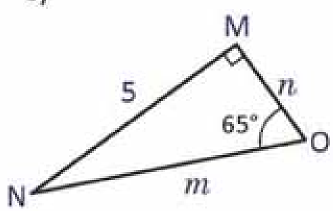

c)




d)




e)

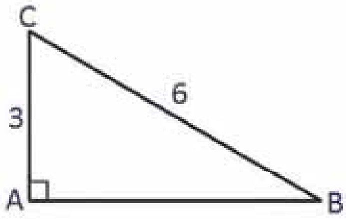


## 1.6 二辺が分っている直角三角形

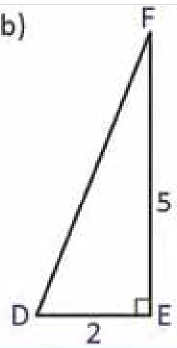
### 導入問題

次の三角形について、鋭角の角度を求めましょう。

a)



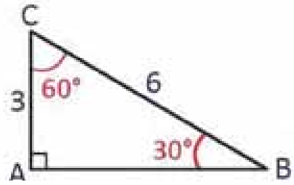

b)



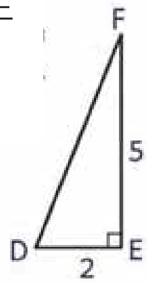

三角形 ABC において、角 C の角度は通常 $C$ (斜体)で表記します。

### 解法

a) $\cos C = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ であることに注目します。この条件を満たす角は 60° の角であるので、$C = 60°$、$B = 30°$ となります。




b) この三角形から $\tan D = \frac{5}{2}$ であることがわかります。この条件を満たす角度 $D$ を求めるには、その三角比が特殊な三角形の比ではないので電卓を使います。





⟹

電卓の画面

tan⁻¹(5÷2)
68.19859051

小数点第 1 位までの概数を求めると、$D \approx 68.2°$ であることがわかります。
よって $F \approx 90° - 68.2° = 21.8°$ となります。

電卓の $\tan^{-1}$ 関数を使うと、指定した条件を満たす角度を割り出すことができます。例えば、$\tan^{-1}\frac{5}{2}$ では、$\tan\theta = \frac{5}{2}$、$\theta$ が $-90°$ と $90°$ の間であるという条件を満たす角度 $\theta$ を割り出すことができます。

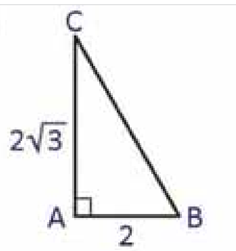
### まとめ

直角三角形の二辺が与えられている場合、三角比を使って鋭角を求めることができます。

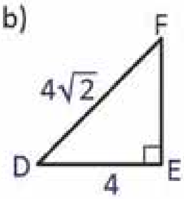
### 問題

直角三角形の鋭角の角度を求めましょう。

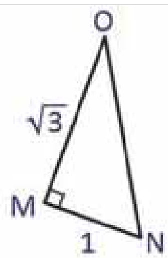
a)



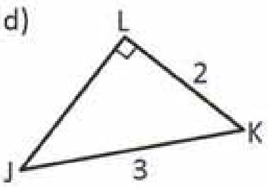

b)



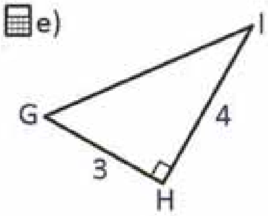

c)



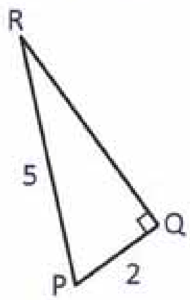

d)




e)



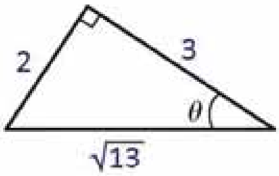

f)



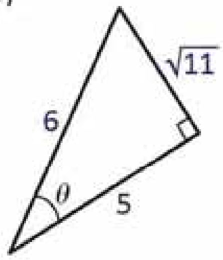
## 1.7 復習問題

1. 以下の三角形それぞれについて、三角比 sen $\theta$、cos $\theta$、tan $\theta$ を求めましょう。

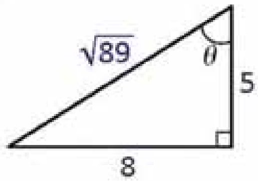
a)




b)

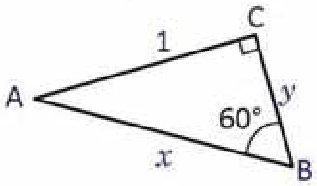



c)

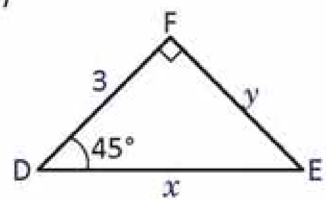



2. それぞれの三角形について $x$ と $y$ の値を求めてみましょう。

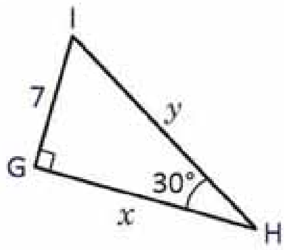
a)




b)

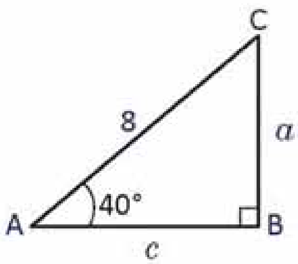



c)

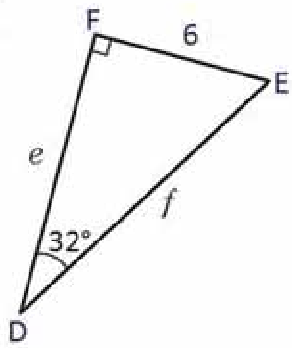



3. それぞれの三角形の残りの辺の長さを計算しましょう。小数点第 1 位までの概数で解答してください。

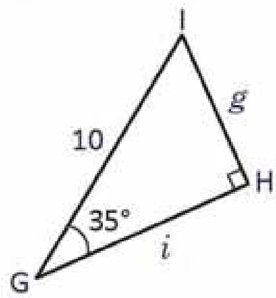
a)




b)

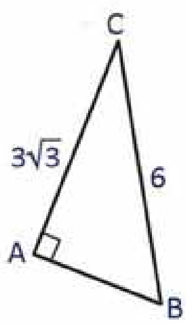



c)

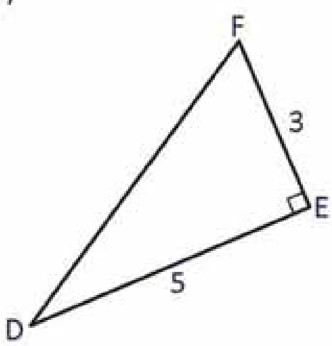



4. 直角三角形の鋭角の角度を小数点第 1 位まで計算しましょう。

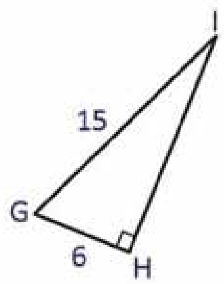
a)




b)




c)



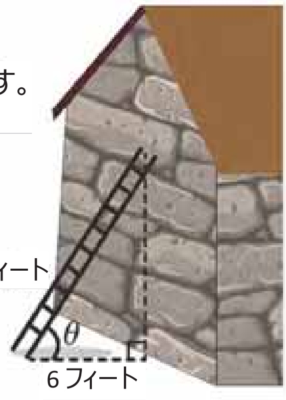
## 1.8 三角比の応用

### 導入問題

大工が 25 フィートのはしごを購入しましたが、使用説明書には、はしごの足が壁から 6 フィートの位置にある時が最も安全な位置であると書かれています。
地面とはしごの間の角度は何度になりますか。

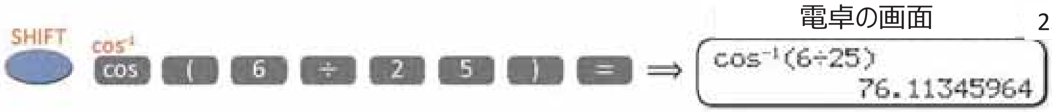
### 解法

図が示すように直角三角形を描くことができます。三角比を適用すると、以下のようになります。




$$\cos\theta = \frac{6}{25}.$$

電卓を使って角度を計算すると、以下のようになります。




よって、はしごと地面の間の角度は約 76° になります。

### まとめ

三角比は、平面を持ついくつかの物体によって形成される傾斜角を計算したり、2 つの物体間の距離や建物や樹木の高さを計算したりするために使用することができます。

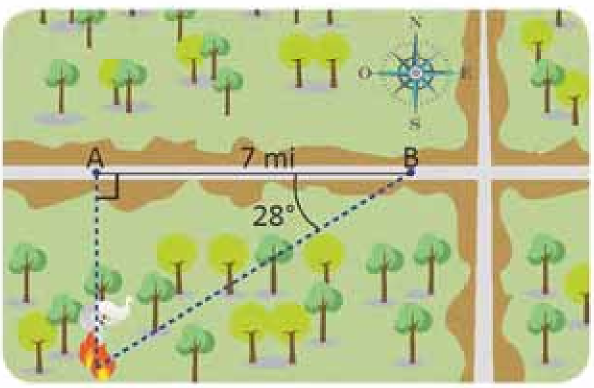
### 問題

1. あるスケート選手が、2 メートルの長さのランプでピルエットを行います。
   ランプの高さが 1 メートルの時、ランプの傾斜角は何度になりますか。


2. 野球選手が通過すべき 3 つの塁は、図のように辺が 90 フィートの正方形上にあります。ピッチャーはバッターからどれくらいの距離にいるでしょうか。


3. 壁に 20 フィートのはしごがかかっていて、16 フィートの高さまで届いています。
   地面に対するはしごの傾斜角は何度になるでしょうか。

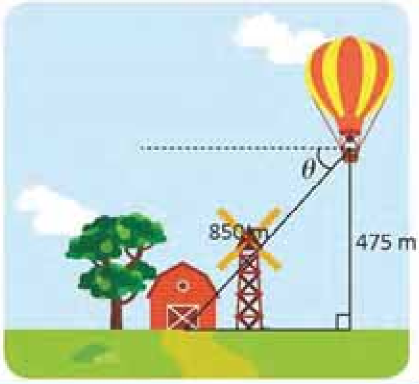
4. A 地点にいるあるレンジャーが真南に火事を目撃しています。最初のレンジャーから 7 マイル離れた B 地点にいる 2 人目のレンジャーが、南西 28 度で同じ火事を目撃しています。 最初のレンジャーから火事までの距離はどのくらいですか？



## 1.9 俯角

### 導入問題

プロのカメラマンが、地上約 475 m の熱気球から 850 m 離れている所に見えている農場を、撮影したいと考えています。
点線が水平であるとしたら、角 $\theta$ は何度になりますか。




### 解法

図のように、形成された三角形の頂点を A、B、C とします。よって、点線は $\overline{AB}$ に水平なので、∢CAB = $\theta$ となります。三角比を使うと、以下のようになります。

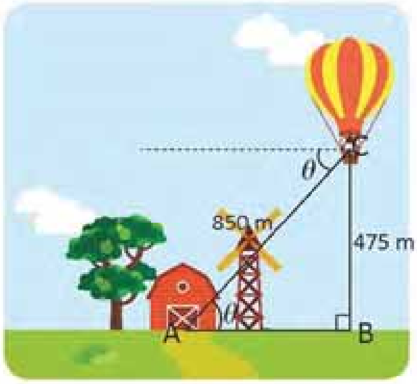
$$\text{sen}\,\theta = \frac{475}{850}.$$

電卓を使うと、以下のようになります。

SHIFT sen⁻¹ sen ( 4 7 5 ÷ 8 5 0 ) =

電卓の画面

sen⁻¹(475÷850)
33.97447595




したがって、$\theta \approx 34°$ となります。

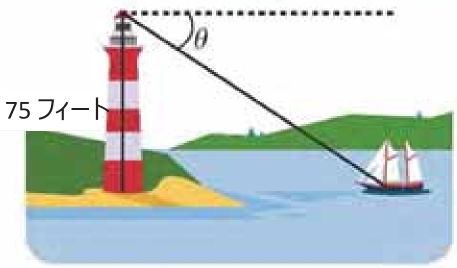
### 定義

観察者が物体よりも上にいる場合、仮想の水平線と物体への視線との間に形成される角度を**俯角**と言います。
例えば、導入問題に出てくる角$\theta$ は俯角です。

### 問題

1. 灯台の高さは 75 フィートで、その先端から船が見え、俯角のコサインが $\frac{4}{5}$ となります。灯台から船までどれくらいの距離がありますか。

2. 古い建物の上から、子どもが道にいる犬を見ており、俯角は 37° です。建物の高さが 9 m なら、犬は建物の下からどのくらいの距離にいるでしょうか。




3. 高さ 100 m の建物があり、最も高い地点からある人が地上でリスが餌を食べている様子を眺めています。この人の俯角のタンジェントは $\frac{5}{4}$ です。リスは建物の下からどれくらいの距離にいるでしょうか。

4. 海面から 3.5 m の高さの桟橋に、身長 1.5 m の人が立っています。この人は俯角 10° で船を見ています。船は桟橋からどのくらいの距離にあるのでしょうか。

## 1.10 仰角

### 導入問題

レンジャーが木の高さを計算しようとしていますが、そのために、木の根元から 7 m のところに立ち、木の先端を 74° の角度で眺めています。レンジャーの背の高さが 1.6 m なら、木の高さはどれくらいになりますか。

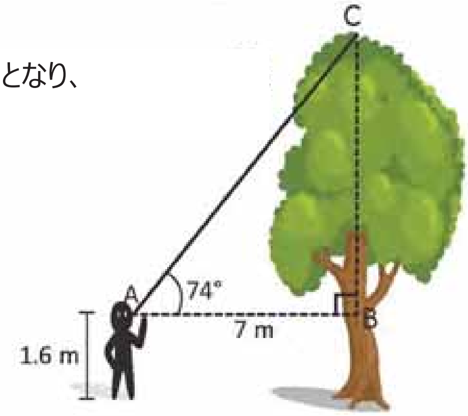
### 解法

図が示すように補助的な直角三角形 ABC ができます。すると、$\tan 74° = \frac{BC}{7}$ となり、$BC = 7\tan 74°$となります。電卓を使って BC を求めることができます。

電卓の画面

7 × tan 7 4 = ⟹ 7×tan 74　24.41190111

BC の値にレンジャーの身長を加算しなければなりませんので、木の高さは約 $24.4 + 1.6 = 26$ m となります。




### 定義

観察者が物体よりも下にいる場合合、仮想の水平線と物体への視線との間に形成される角度を**仰角**と言います。例えば、導入問題の図では、仰角は ∢CAB となります。

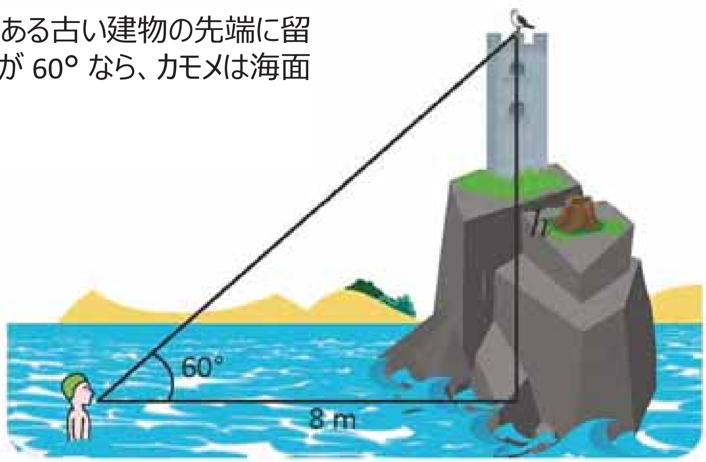
### 問題

1. あるレンジャーは、新しい木材業者のチームを木の高さの計算について訓練しなくてはなりません。例として、レンジャーは木の根元から 12 m の所まで歩き、地面から木の先端までの仰角は 70° であると、推測します。木の高さを計算してみましょう。

2. 夜間にある雲の高度を計算するため、垂直光線を雲のある一点に向けます。光線を発射している地点から 135 フィートにある地表のどこかの点で、光の頂点への仰角が 65° であると定まっています。雲の高度はいくらあるでしょう。

3. 子どもが木から 2 m 離れた所にいて、木の頂点に取り残された猫を眺めています。子どもの身長が 1 m で、仰角が 60° なら、猫は地上からどれくらいの高さにいるのでしょうか。

4. 岩場から 8 m のところを泳いでいる人が、岩場の上にある古い建物の先端に留まっているカモメを眺めています。泳いでいる人の仰角が 60° なら、カモメは海面からどれくらいの高さにいるでしょうか。



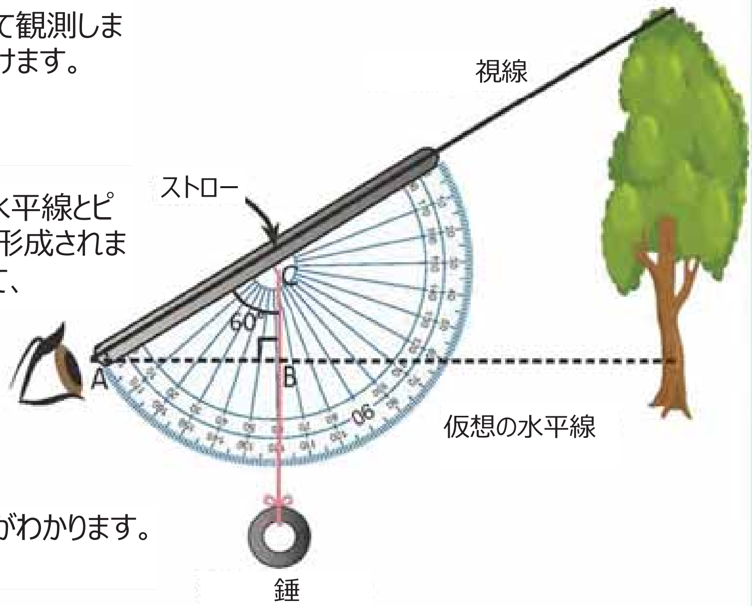

ユニット5

## 1.11 課題クリノメーターの作成

クリノメーターとは、表面の傾きを測定するための装置ですが、建物や樹木、電柱などの高さを計算するためにも使用されます。業務用のクリノメーターは使いやすく、本課題ではその作り方を紹介しています。

### クリノメーターの仕組み

観測者は図のようにクリノメーターを配置し、管を通して観測します。錘をひもに結び付け、このひもを分度器に結び付けます。




図のようにクリノメーターを配置すると、視線と仮想の水平線とピンと張ったひもの一片との間に直角三角形 (ΔABC) が形成されます。ひもが分度器上に示す角度は角 BCA です。よって、三角形 ΔABC について、以下が成り立ちます。

$$\sphericalangle CAB = 90° - \sphericalangle BCA = 90° - 60° = 30°.$$

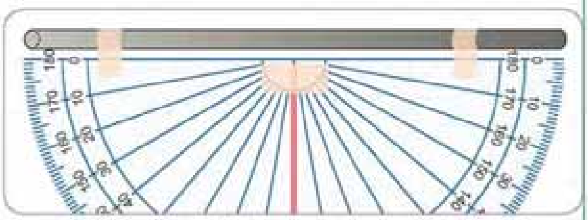
この手順を踏めば、計算した角度が仰角にあたることがわかります。

### 材料

- 分度器一個
- ストロー一本
- 粘着テープ
- 毛糸またはひも一片
- はさみ
- 錘、20 mm のナットでもよい

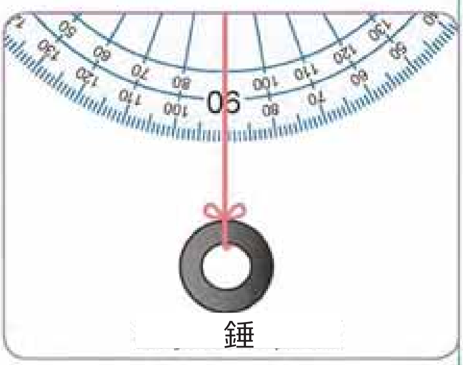
### 課題

1. 分度器の中には、中心に穴が開いているものがあり、その穴にひもを結べます。穴がなければ、粘着テープで分度器の中心に貼り付けてもよいでしょう。ひもの長さは分度器の半径より長くなければなりません。



2. ストローを、分度器の直径と同じ長さ切り取ります。中をのぞきこむためのものなので、つぶさないように注意しながら、ストローの一片を粘着テープで貼り付けます。

3. 空いている方のひもの端に錘を結び付けます。




これでクリノメーターの準備が完了しました。

### 問題

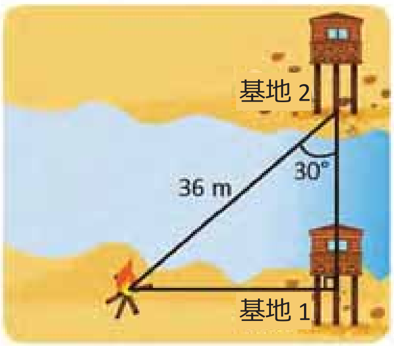
1. クリノメーターを使って仰角を特定し、身近にある木の高さを計算してみましょう。
2. 課題 1.11 で作成したクリノメーターを使って、俯角を計算できるでしょうか。できるとすれば、どのようにしたらいいか、説明してみましょう。

## 1.12 三角比の応用

1. 猟師が東方向にある船から 12 km 離れたところにいて、その船に対する視線から 60° の位置にある灯台を眺めています。灯台が船の南方向にある場合、船は灯台からどれくらいの距離にあるでしょうか。

2. 気球が岩に 20 m のロープで繋がれています。ロープと地面の間にできる角のサインは $\frac{3}{4}$ です。気球の高さはどれだけありますか。

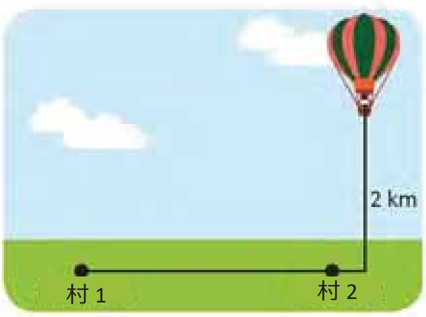
3. 図について、基地 1 とたき火の間にはどれだけの距離がありますか。




4. ある男性が灯台の一番上から漁船を眺めており、俯角は 25° と推測します。灯台の高さが 40 m の時、漁船は灯台からどれだけの距離にありますか。

5. 男性がある建物から 100 m の距離にある別の建物を眺めています。建物の一番上への仰角は 30° で建物の下への俯角は 15° です。眺めている建物の高さはどれだけありますか。男性の身長は無視します。

6. 高さ 2 km にある気球から二つの村が見えています。二つの村への俯角は 80° と 20° です。村同士の距離はどれだけありますか。




ユニット 5

## 2.1 2 点間の距離

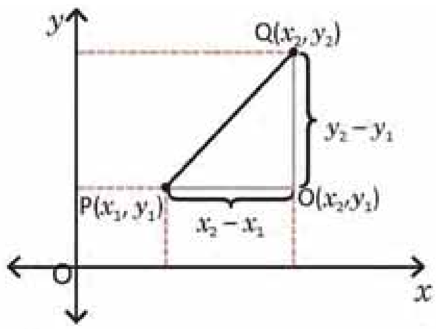
### 導入問題

座標平面上にある点 P $(x_1, y_1)$ と点 Q $(x_2, y_2)$ の 2 点間の距離を求めなさい。

2 点間の距離は、2 点を結ぶ直線の長さで定義されます。

### 解法

$x_1 \neq x_2$、$y_1 \neq y_2$ と仮定します。図のように点 P と点 Q を通る軸に対して直角に交わる直線を引くと、点 O の座標は $(x_2, y_1)$ となります。ここから OP = $x_2 - x_1$、そして QO = $y_2 - y_1$ であることが分かります。ゆえに、ピタゴラスの定理に従い三角形 POQ は次のようになります。




$$(PQ)^2 = (OP)^2 + (QO)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

ただし距離のため PQ > 0 となるので、

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

もし $x_1 = x_2$、$y_1 \neq y_2$ であれば、PQ 間の距離は次のようになります。

$$\Rightarrow \quad PQ = \sqrt{(x_2 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|.$$

同様に、もし $x_1 \neq x_2$、$y_1 = y_2$ であれば、PQ間の距離は次のようになります。

$$\Rightarrow \quad PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|.$$

すべての実数に対し $a$ は次のようになります。
$\sqrt{a^2} = |a|.$

### 定義

$d$ (P, Q) で示される、平面上における点 P $(x_1, y_1)$ と点 Q $(x_2, y_2)$ の 2 点間の距離は次のように表します。

$$d(P, Q) = PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

### 例

点 P (-1, 3) と点 Q (2, 1) 間の距離を求めなさい。

距離は、

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \sqrt{(2-(-1))^2 + (1-3)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{9+4} \\ &= \sqrt{13}. \end{aligned}$$

### 問題

1. 点 P と点 Q 間の距離を求めなさい。

a) P(−2, −1), Q(2, 2)　b) P(7, 2), Q(4, −2)　c) P(2, −2), Q(−8, 4)

d) P(1, 1), Q(9, 2)　e) P(0, 1), Q(3, 5)　f) P(−3, 5), Q(7, −9)

g) P(−1, 4), Q(2, 4)　h) P(3, 2), Q(3, 2)　i) P(−1, 0), Q(−1, 0)

2. 点 P $(x_1, y_1)$、点 Q $(x_2, y_2)$ において $d$ (P, Q) = $d$ (Q, P) であることを証明しなさい。

## 2.2 座標平面上での対称性*

### 導入問題

座標平面上の点を点 P $(a, b)$ とします。点 P について以下を求めなさい。

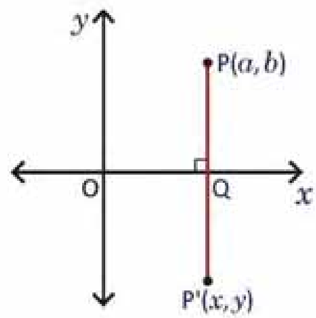
a) $x$ 軸を基準とした対称点の座標。

b) $y$ 軸を基準とした対称点の座標。

c) 原点を基準とした対称点の座標。

d) 直線 $y = x$ を基準とした対称点の座標。

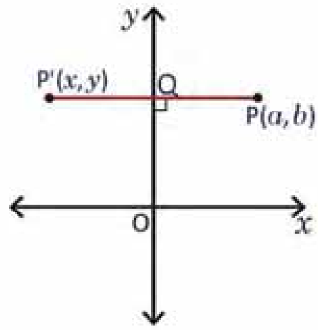
### 解法




a) $x$ 軸を基準とした点 P の対称点を点 P'$(x, y)$ とします。対称性により、線分 PP' は $x$ 軸に対して垂直、そして点 Q が線分 PP' と $x$ 軸の交点であれば、PQ = P'Q を満たすことになります。

線分 PP' は垂直のため、2 つ目の座標である点 P' のみが変化します。$x$ 軸から点 P と点 P' までの距離は同じため、2 つ目の座標である点 P' が点 $b$ の対称点 $-b$ となります。

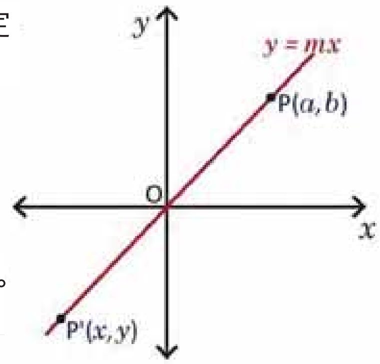
よって、$x$ 軸を基準とした点 P$(a, b)$ の対称点は点 P'$(a, -b)$ となります。




b) $y$ 軸を基準とした点 P の対称点を点 P'$(x, y)$ とします。対称性により、線分 PP' は $y$ 軸に対して垂直、そして点 Q が線分 PP' と $y$ 軸の交点であれば、PQ = P'Q を満たすことになります。

線分 PP' は水平のため、1 つ目の座標である点 P' のみが変化します。$y$ 軸から点 P と点 P' までの距離は同じため、1 つ目の座標である点 P' が、点 $a$ の対称点 $-a$ となります。

よって、$y$ 軸を基準とした点 P$(a, b)$ の対称点は点 P'$(-a, b)$ となります。




c) 原点 O を基準とした点 P の対称点を点 P'$(x, y)$ とします。点に対する対称の定義により OP = OP'、すなわち

$$(OP)^2 = (OP')^2$$
$$\Rightarrow \quad (x-0)^2 + (y-0)^2 = (a-0)^2 + (b-0)^2$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \qquad \text{---------------------} (1)$$

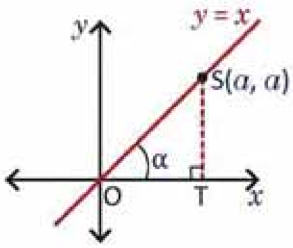
ただし点 P と点 P' は直線 $y = mx$ 上にあるため、$b = ma$ も満たすことになります。(1) の $y$ と $b$ を置換すると

$$x^2 + m^2x^2 = a^2 + m^2a^2$$
$$\Rightarrow \quad x^2(1 + m^2) = a^2(1 + m^2);$$

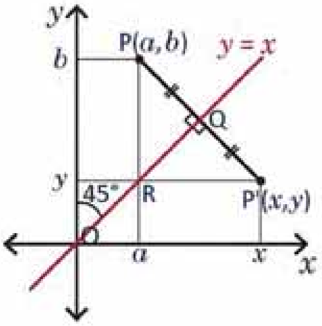
$1 + m^2 \neq 0$ なので $\Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = a$ もしくは $x = -a$ となります。

$x = a$ の場合、$y = mx = ma = b$。よって点 P' は点 P と同じとなります。$x = -a$ の場合、$y = mx = -ma = -b$。よって点 P'$(-a, -b)$ は原点を基準とした点 P の対称点となります。よって点 P'$(-a, -b)$ となります。

d) まず、直線 $y=x$上の点を点 S($a$, $a$) として三角形 OTS を描くと、tan α = 1 であることから、α = 45° となります。すなわち、直線 $y=x$ は座標平面 I と III を二等分していることになります。




座標平面上の点を点 P($a$, $b$)、直線 $y=x$ を基準としたその対称点を点 P'($x$, $y$) とします。点 P が直線 $y = x$上にある場合、結果に影響はありません。点 Q を線分 PP' と直線 $y=x$ の交点とします。対称性により、線分 PP' はこの直線 PQ = P'Q に対して垂直となります。




垂直線 PR を描きます。PQ = P'Q、QR は共通する辺、さらに ∢PQR = ∢P'QR = 90° であることから、三角形PQRとP'QRは合同といえます（三角形の合同条件）。よって、

$$PR = P'R \text{ y } ∢PRQ = ∢P'RQ. \qquad \text{------------------ (2)}$$

ただし PR は $y$ 軸に対して平行のため、∢PRQ = 45°。ゆえに ∢P'RQ = 45°、よって ∢P'RP = 90°、したがって P'R は PR に対して垂直であり、P'R = $x-a$ そして PR = $b-y$。

(2) より PR = P'R、ただし PR = $b-a$、よって $b-a$ = P'R = $x-a$、つまり $x=b$ となります。同様に $b-a$ = PR = $b-y$、すなわち $y=a$。よって点 P' の座標は ($b$, $a$) となります。

## 定理

点 P($a$, $b$) が座標平面上にある場合、

- 点 P'($a$, $-b$) は $x$ 軸を基準とした点 P の対称点。
- 点 P'($-a$, $b$) は $y$ 軸を基準とした点 P の対称点。
- 点 P'($-a$, $-b$) は原点を基準とした点 P の対称点。
- 点 P'($b$, $a$) は直線 $y=x$ を基準とした点 P の対称点。

方程式 $y=x$ を有する直線は、**恒等関数**と呼ばれます。

## 例

平面上に点 P(−1, 3)、点 Q(−2, −3) の 2 点があります。$x$ 軸、$y$ 軸、原点、恒等関数を基準とした場合の点 P と点 Q の対称点を求めなさい。

a) $x$ 軸を基準とした点 P の対称点は $P_1(-1, -3)$。
 $y$ 軸を基準とした点 P の対称点は $P_2(1, 3)$。
 原点を基準とした点 P の対称点は $P_3(1, -3)$。
 恒等関数を基準とした点 P の対称点は $P_4(3, -1)$。

b) $x$ 軸を基準とした点 Q の対称点は $Q_1(-2, 3)$。
 $y$ 軸を基準とした点 Q の対称点は$Q_2(2, -3)$。
 原点を基準とした点Q の対称点は $Q_3(2, 3)$。
 恒等関数を基準とした点 Q の対称点は $Q_4(-3, -2)$。

## 問題

1. $x$ 軸、$y$ 軸、原点、直線 $y=x$ を基準とした場合の各点の対称点を求めなさい。

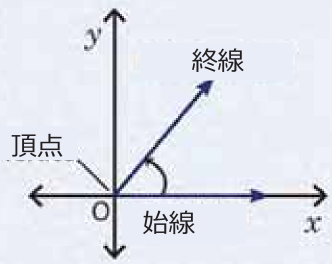
| | | |
|---|---|---|
| a) P(1, 4) | b) P(3, −2) | c) P(−3, −1) |
| d) P(−5, 4) | e) P(2, 0) | f) P(0, −3) |

2. $x$ 軸を基準として対称点を求め、その後 $y$ 軸を基準として対称点を求めると、点 P の原点を基準とした対称点を求めることができますか？解答の理由も述べなさい。

## 2.3 角

### 定義

座標平面上の原点を起点とし、$x$ 軸上に矢印を書き、原点を中心に回転させます。最初の矢印と最後の矢印の間の部分を**角**、最初の矢印を**始線**、最後の矢印を**終線**と呼びます。始線が正の $x$ 軸上、そして頂点が原点上にある場合、角は**標準位置**にあると言います。 角は角度で測ります。角度の単位は円を360等分割したもので、1°（1 度）です。




矢印を反時計回りに回転させてできた角は正、時計回りに回転させてできた角は負の角となります。

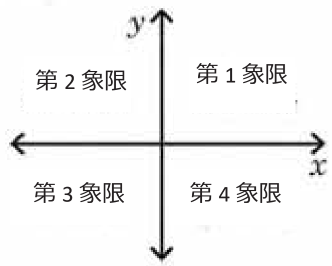
終線がある象限が、その角の象限となります。

### 例

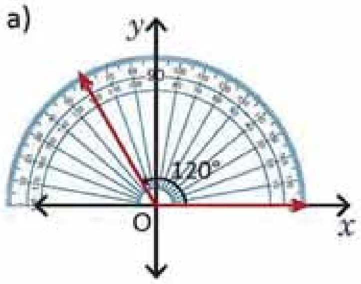
それぞれの角を標準位置に描き、属する象限を特定しなさい。

a) 120°　　b) −70°　　c) −150°

座標平面は象限と呼ばれる 4 つの部分で構成されます。右上から反時計回りに番号が割り当てられています。



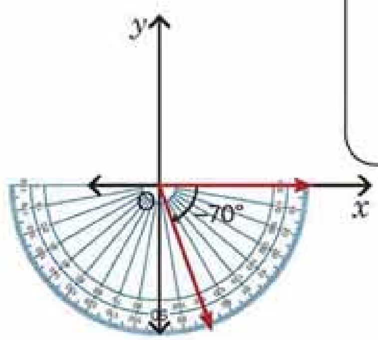

a)




終線が第 2 象限にあるため、120° は第 2 象限に属します。

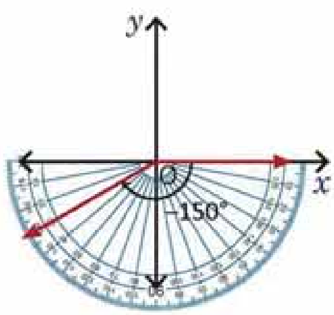
b) この角を描くには時計回りに回転させるため、分度器を下側において 70° を測定します。

終線が第 4 象限にあることから、−70° は第 4 象限に属します。




c) この角を描くには時計回りに回転させるため、分度器を下側において150°を測定します。

終線が第 3 象限にあることから、−150° は第 3 象限に属します。




### 問題

それぞれの角を標準位置に描き、属する象限を特定しなさい。

a) 80°　　b) 310°　　c) −170°

ユニット 5

## 2.4 360°より大きい角と -360°より小さい角

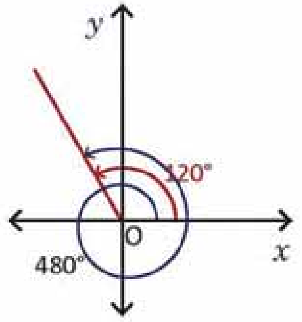
### 導入問題

480°、930°、2 150°、−1 150° の角を描きなさい。

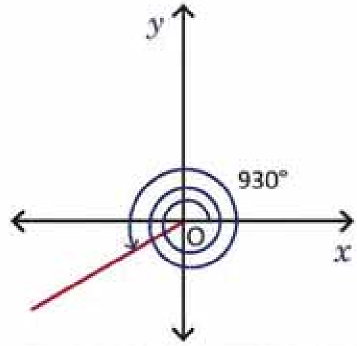
### 解法

角を描く際には、（前回の授業で習った）円が360等分された単位が1°であること、すなわち360°の角は1周回を意味することを復習しましょう。

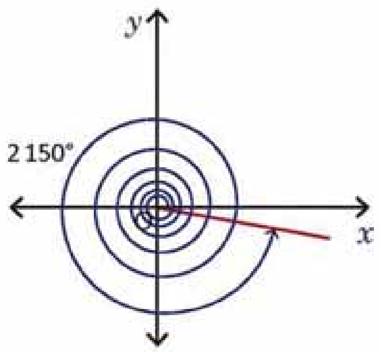
a) 480° は360° + 120° であるため、この角は次のように描きます。




b) 930° = 360°(2) + 210° であるため、この角は次のように描きます。

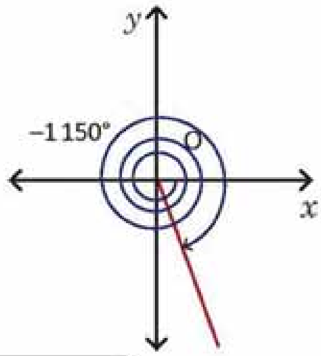



c) 2150° = 360°(5) + 350° であるため、この角は次のように描きます。




d) 負の角のため、時計回りに測定します。さらに以下の式から、この角は次のように描きます。

−1 150° = −360°(3) − 70°




-1150° は次のように書くこともできます。
360°(−3) − 70° = 360°(−3) − 70° + 360° − 360° = 360°(−4) + 290。こうすると負の角ではなくなるので便利です。

### まとめ

360°より大きい角を描く場合は、その角に何周回含まれるか計算します。終線の位置が、角を分解した後に残る360°未満の角度となります。

例えば、$\theta = 360°n + \theta'$、そして $n$ はゼロ以外の整数の場合、$n$ はその角が含む周回数となります。そして $0 \leq \theta' < 360°$ となることから、$\theta$ の終線は角 $\theta'$ の終線と同じとなります。$n > 0$ の場合、角は時計と反対回りに測定します。$n < 0$ の場合、角は時計回りに測定します。

### 問題

それぞれの角を描きなさい。

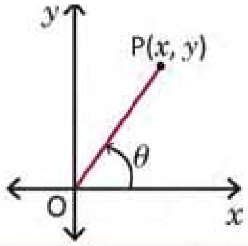
a) 1 000°　　b) 990°　　c) 1 480°

d) −1 500°　　e) −1 315°　　f) −1 880°

## 2.5 任意の角の三角関数の比率（パート 1）

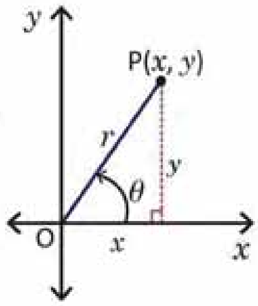
### 導入問題

図の角 $\theta$ について考えてみます。$x$ と $y$ を使って、角 $\theta$ のサイン、コサイン、タンジェントを表しなさい。




### 解法

直角三角形は図のように、斜辺が角の終線となり、辺のうち 1 つが $x$ 軸上にくるように描きます。終線の終点は点 P$(x, y)$ で決まります。よって、三角形の二辺の長さはそれぞれ $x$、$y$ となります。

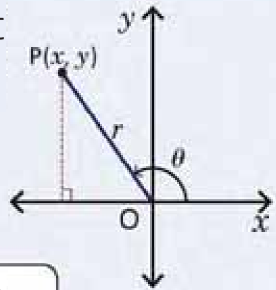



直角三角形の場合、$x$ は隣接する辺の長さ、$y$ は $\theta$ と反対側の辺の長さです。斜線の長さ $r$ はピタゴラスの定理を適用すると次のようになります。 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ よって、

$$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r},\ /\ \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

### 定義

いかなる角 $\theta$ の三角関数の比率も次のように定義します。角$\theta$を標準位置に置き、終線上に点 P$(x, y)$ を取ります。これで $r = \text{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$ となるため、次のようになります。




$$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r},\ /\ \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

$\tan\theta$ は $x \neq 0$ の場合に限り定義します。

三角関数の比率の定義に従い、次のように導くことができます。

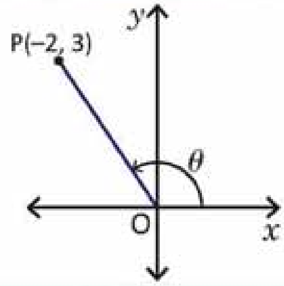
$$y = r\,\text{sen}\,\theta、\quad x = r\cos\theta。$$

さらに $\text{sen}(360°n + \theta) = \text{sen}\,\theta$、$\cos(360°n + \theta) = \cos\theta$ となります。

> 確認しましょう。
> $\tan\theta = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}.$

### 例

図の角 $\theta$ のサイン、コサイン、タンジェントを求めなさい。



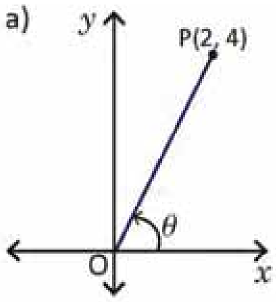

この場合、 $r = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$ となるので、

$$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{r} = \frac{3}{\sqrt{13}},\ \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{\sqrt{13}} = -\frac{2}{\sqrt{13}},\ /\ \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}.$$

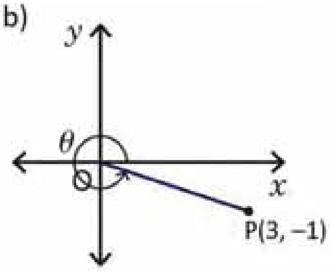
### 問題

それぞれの角のサイン、コサイン、タンジェントを求めなさい。

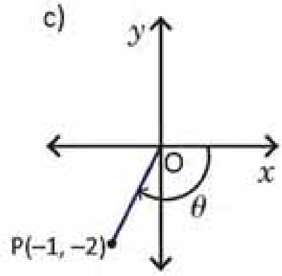
a)




b)




c)



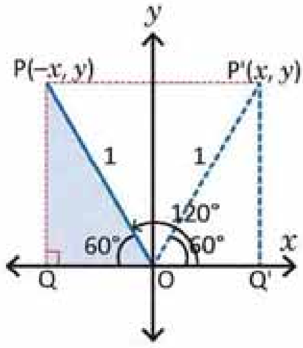
## 2.6 任意の角の三角関数の比率（パート 2）

### 導入問題

sen 120°、cos 120°、tan 120° の値を求めなさい。

### 解法

角を標準位置に置き、図のように OP = 1 となるように三角形 OPQ を描きます。図のとおり ∢QOP は 180°- 120° = 60° と同じであることから、sen 120°、cos 120°、tan 120° はそれぞれ sen 60°、cos 60°、tan 60° の値を参考にして計算できることが分かります。




ΔOPQ を $y$ 軸を基準として反転させると、三角形 OP'Q' となります。点 P' の座標は (cos 60°, sen 60°)、そして点 P は点 P' の対称であることから点 P の座標は (−cos 60°, sen 60°)、よって次のようになります。

$$\text{sen } 120° = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2},$$

$$\tan 120° = \frac{\text{sen } 120°}{\cos 120°} = \frac{\text{sen } 60°}{-\cos 60°} = -\tan 60° = -\sqrt{3}.$$

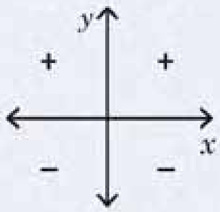
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{r\,\text{sen }\theta}{r\cos\theta} = \frac{\text{sen }\theta}{\cos\theta}$$

### まとめ

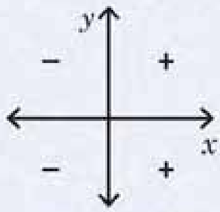
角が 0°、90°、180°、270° のいずれでもない場合、**基準三角形**は直角三角形と定義されます。その際、長さ 1 の斜辺は角の終線となり、いずれかの辺が $x$ 軸上にきます。冒頭の「導入問題」の解答では、三角形 OPQ が基準三角形です。

90°より大きい角の三角関数の比率は、次のように計算します。

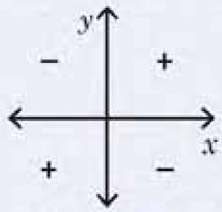
1. 角を標準位置に置きます。
2. 可能な場合には必ず基準三角形を描きます。
3. 基準三角形の鋭角（角の終線と $x$ 軸の間）を使い、三角関数の比率を計算します。この段階で、角が属する象限に基づいて三角関係の比率の正負が分かります。サインの正負は $y$、コサインの正負は $x$、タンジェントの正負は $\frac{y}{x}$ の比率で決まります。



サインの正負



コサインの正負



タンジェントの正負

三角関数の比率の計算に使用される鋭角は、**参照角**と呼ばれます。

### 問題

すべての角の三角関数の比率を計算し、表を完成させなさい。比率が定義されない場合は、/ を記入してください。

| $\theta$ | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° | 210° | 225° | 240° | 270° | 300° | 315° | 330° | 360° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sen $\theta$ | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| cos $\theta$ | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| tan $\theta$ | | | | | | | | | | | | | | | | | |

0°、90°、270°、360° の角の三角関数の比率を計算する際には、座標平面上の角を構成する $x$ と $y$ の座標を確認します。

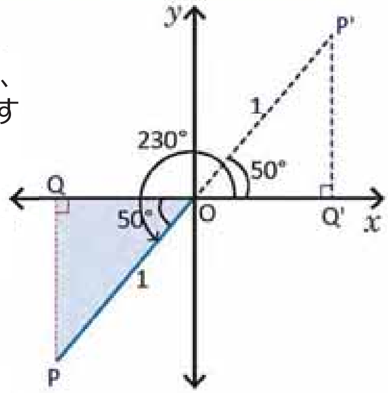
# 2.7 任意の角の三角関数の比率（パート 3）

## 導入問題

a) sen 230°、cos 230°、tan 230° の値を鋭角を使って表しなさい。

b) sen 320°、cos 320°、tan 320° の値を鋭角を使って表しなさい。

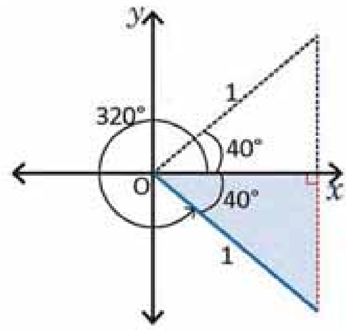
## 解法




a) 参照角を描きます。図のとおり ∢POQ = 230° − 180° = 50°、よって sen 230°、cos 230°、tan 230° の比率は sen 50°、cos 50°、tan 50° の値を参考にして示すことができます。

サインとコサインの値は負、タンジェントの値は正、よって sen 230° = – sen 50°、cos 230° = – cos 50°、tan 230° = tan 50° となります。

b) この場合、参照角は 360° – 320° = 40° となります。この計算方法については右の図を参照してください。




第 4 象限にあるためサインとタンジェントの値は負、コサインの値は正、よって、

sen 320° = – sen 40°、cos 320° = cos 40°、tan 320° = – tan 40°
となります。

## まとめ

90° より大きい角の三角関数の比率を計算する際には、参照角が役立ちます。

参照角の計算方法は、その角が属する象限によって変わってきます。 $\theta$ が 360° 未満とすると、

- $\theta$ が第 1 象限に属する場合、参照角は角そのものとなります。
- $\theta$ が第 2 象限に属する場合、参照角は 180°– $\theta$ となります。
- $\theta$ が第 3 象限に属する場合、参照角は $\theta$ - 180° となります。
- $\theta$ が第 4 象限に属する場合、参照角は 360°– $\theta$ となります。

## 例

cos(-400°) の値を鋭角を使って表しなさい。

–400° = –360° – 40°、よって参照角は 40°。角は第 4 象限に属するため、cos(–400°) の値は正。
よって、cos(–400°) = cos 40°。

## 問題

以下について、三角関数の比率の値を sen $\theta$、cos $\theta$、tan $\theta$ を使って表しなさい。ただし $0 \leq \theta < 90°$ とします。

| | | |
|---|---|---|
| a) 100° | b) 175° | c) 220° |
| d) 250° | e) 290° | f) 310° |
| g) 405° | h) 570° | i) 630° |
| j) –780° | k) –940° | l) –1 000° |

エニット 5

## 2.8 任意の角の三角関数の比率（パート 4*）

### 導入問題

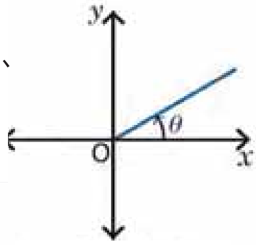
$\theta$ が 0° から 360° の場合について、それぞれの値を計算しなさい。

a) $\text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}$ b) $\cos\theta = -\frac{3}{4}$

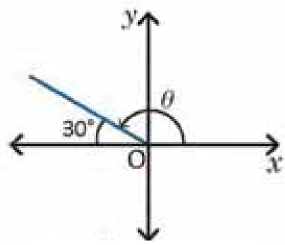
### 解法

a) 与えられた条件によると sen $\theta$ の値は正。サインは第 1、第 2 象限においてその値が正となります。さらに $\text{sen}\,30° = \frac{1}{2}$ なので、$\theta$ の値が 0° から 360° の間にある場合、可能性のある値は 2 つあります。

すなわち $\theta = 30°$ または $\theta = 180° - 30° = 150°$です。



$\theta$ が第 1 象限にある場合



$\theta$ 第 2 象限にある場合

b) 与えられた条件によると cos $\theta$ の値は負。コサインは第 2、第 3 象限においてその値が負となります。$\theta$ の値を求めるためには電卓を使用します。数のままではなく、$-\frac{3}{4}$ の絶対値を使用します。

参照角を α とすると、$\cos\alpha = \frac{3}{4}$ となります。

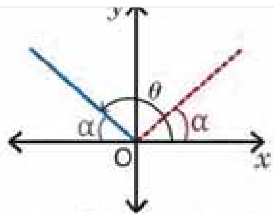
電卓の $\cos^{-1}$ 機能を使うと、$\cos\alpha = \frac{3}{4}$ を満たす角 α が計算されます。つまり $\cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = \alpha$ ということになります。

ただし α は参照角、そして $\theta$ は第 2 象限にあるため、

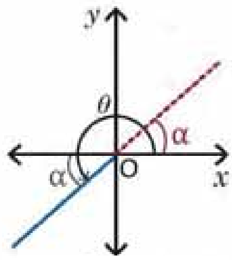
$$\theta = 180° - \alpha = 180° - \cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 138.6°.$$

同様に、$\theta$ が第 3 象限にある場合は、

$$\theta = 180° + \cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 221.4°.$$



$\theta$ が第 2 象限にある場合



$\theta$ が第 3 象限にある場合

電卓で角を計算する場合、サインとタンジェントについては -90° から 90°、コサインについては 0° から 180° の間の角が出ますので特に注意してください。

### まとめ

角を計算する際、三角関数の比率のいずれかが分かっている場合は参照角を使用します。さらに、角が 0° から 360° の場合、与えられる条件を満たす角は一般的に 2 つ存在します。

### 問題

$\theta$ が 0° から 360° の場合について、それぞれの値を計算しなさい。

a) $\text{sen}\,\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\tan\theta = \sqrt{3}$

c) $\text{sen}\,\theta = \frac{2}{3}$ d) $\cos\theta = -\frac{4}{7}$

## 2.9 ピタゴラスの公式

### 導入問題

$(\text{sen}\ \theta)^2$、$(\cos\theta)^2$ といった三角関数の比率の二乗は $\text{sen}^2\theta$、$\cos^2\theta$ のように表します。いかなる角 $\theta$ においても $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ となることを証明しなさい。

### 解法

$r = \sqrt{x^2+y^2}$ とすると、$\text{sen}\ \theta = \frac{y}{r}$、$\cos\theta = \frac{x}{r}$、$r = \sqrt{x^2+y^2}$ となります。よって、

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{y^2+x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1.$$

### まとめ

$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ は**ピタゴラスの公式**として知られており、いかなる角 $\theta$ にも有効です。

### 例 1

$\text{sen}\ \theta = \frac{5}{13}$ で第 1 象限にある場合の、$\cos\theta$ と $\tan\theta$ を求めなさい。

ピタゴラスの公式 $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を使用すると、

$$\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2\theta = \frac{25}{169} + \cos^2\theta = 1.$$

よって、$\cos^2\theta = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169-25}{169} = \frac{144}{169}$。すなわち $\cos\theta = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$ または $\cos\theta = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$。ただし、もう 1 つの条件として $\theta$ は第 1 象限にあり、第 1 象限にあるコサインの値は正のため、$\cos\theta = \frac{12}{13}$。

$\tan\theta$ の計算については、$\theta = \frac{\text{sen}\ \theta}{\cos\theta}$ のため、

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\ \theta}{\cos\theta} = \frac{5}{13} \div \frac{12}{13} = \frac{5}{13} \times \frac{13}{12} = \frac{5}{12}.$$

よって、$\cos\theta = \frac{12}{13}$、$\tan\theta = \frac{5}{12}$。

### 例2

あらゆる角 $\theta$ において、$1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\text{sen}^2\theta}$ であることを証明しなさい。

平面上の座標 $(x, y)$ おいて、$\tan\theta = \frac{y}{x}$ のため、$\cot\theta = \frac{x}{y}$。

$$1 + \cot^2\theta = 1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{y^2+x^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2}.$$

一方、$\frac{1}{\text{sen}^2\theta} = 1 \div \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1 \times \frac{r^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2}$。よって、$1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\text{sen}^2\theta}$。

### 問題

1. $\cos\theta = -\frac{4}{5}$ で、$\theta$ が第 3 象限にある場合の $\text{sen}\ \theta$ と $\tan\theta$ の値を求めなさい。
2. $\cos\theta = -\frac{7}{9}$、$\tan\theta < 0$ の場合の $\text{sen}\ \theta$ と $\tan\theta$ の値を求めなさい。
3. $\text{sen}\ \theta = \frac{2}{3}$ で、$\theta$ が第 1 象限にはない場合の $\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めなさい。
4. あらゆる角 $\theta$ において、$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ であることを証明しなさい。
5. $\tan\theta = -\frac{1}{2}$、$\text{sen}\ \theta > 0$ の場合の $\text{sen}\ \theta$、$\cos\theta$ の値を求めなさい。
6. $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta\csc\theta$ であることを証明しなさい。
7. $\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta\ \text{sen}\ \theta$ であることを証明しなさい。

冒頭問題の解答で使った方法を応用しましょう。

5 問目は、4 問目の解答を使えます。

## 2.10 学んだことで練習しましょう

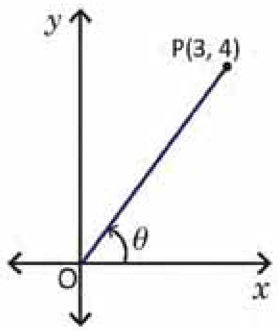
1. それぞれの角を描きなさい。

a) 530°　　b) 780°　　c) 855°

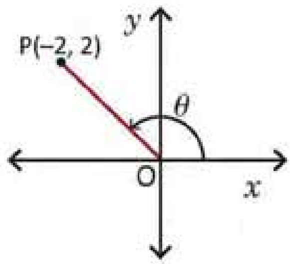
d) −1 360°　　e) −1 210°　　f) −630°

2. それぞれの角について、三角関数のサイン、コサイン、タンジェントの比率を求めなさい。

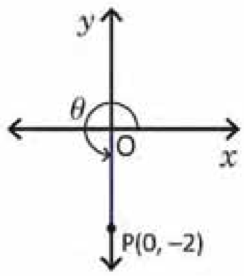
a)



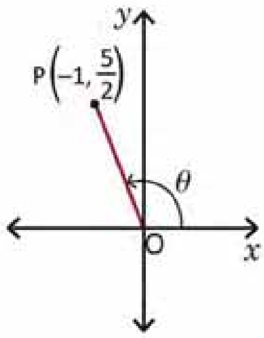

b)




c)




d)




3. 以下について、三角関数の比率の値を sen $\theta$、cos $\theta$、tan $\theta$ を使って表しなさい。ただし $0 \le \theta < 90°$ とします。

a) 165°　　b) 855°　　c) 2 385°

d) −140°　　e) −840°　　f) −2 190°

4. $0° \le \theta < 360°$ の場合について、それぞれ$\theta$の値を計算しなさい。

a) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$　　b) $\tan\theta = 1$　　c) $\text{sen}\,\theta = -\frac{7}{9}$

5. $\cos\theta = \frac{5}{6}$ で $\theta$ が第 1 象限にない場合の、sen $\theta$ を求めなさい。

6. $\tan\theta = -\frac{1}{3}$ で $\theta$ が第 2 象限にある場合の、sen $\theta$、cos $\theta$ を求めなさい。

7. $\sec^2\theta + \csc^2\theta = \sec^2\theta\csc^2\theta$ であることを証明しなさい。

8. $(\tan\theta + \cot\theta)\tan\theta = \sec^2\theta$ であることを証明しなさい。

## 3.1 三角形の面積

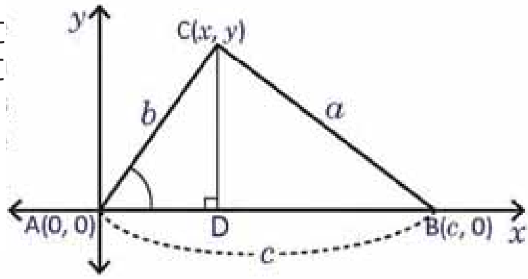
### 導入問題

三角形 ABC について、辺 AC = $b$、辺 AB = $c$ の長さ、および角 A の大きさが分かっています。三角比を使って三角形の面積を求める式を立てましょう。

復習しよう。三角形では通常、頂点に記されている文字は角を指します。

### 解法

A(0, 0)、B($c$, 0) ただし $c > 0$ 、C($x$, $y$) ただし $y > 0$ となるように座標平面に三角形 ABC を作図します。三角形の面積は底辺と高さの積の半分に等しいので、点 C の $y$ 座標の値を求めなければなりません。つまり、$y = b\text{sen}A$ です。




ここでは底辺は AB = $c$ なので、

$$\Delta\text{ABCの面積} = \frac{\text{底辺 x 高さ}}{2} = \frac{(\text{AB})(y)}{2} = \frac{c(b\text{sen }A)}{2} = \frac{bc\text{sen }A}{2}.$$

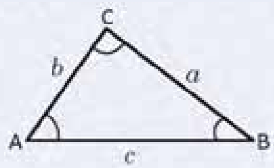
### 定理

三角形 ABC の面積は (ABC) で表されます。三角形の 2 つの辺の長さとその間の角の大きさが分かっているとき、面積は三角比を使って次のように計算できます。

$$(\text{ABC}) = \frac{ab\text{sen }C}{2} = \frac{bc\text{sen }A}{2} = \frac{ca\text{sen }B}{2}.$$

これから先は、次の表記を使用します。

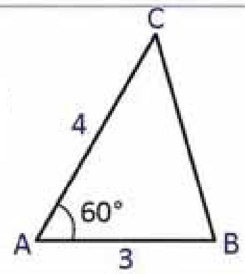
$$(\text{ABC}) = \frac{1}{2}ab\text{sen }C = \frac{1}{2}bc\text{sen }A = \frac{1}{2}ca\text{sen }B.$$




三角形には 3 つの高さがあります。これらは、頂点から始まり、向かい合う辺に垂直に引いた線です。

### 例1

図に示されている三角形 ABC の面積を求めなさい。




2 つの辺の長さとその間の角の大きさが分かっているので、面積の公式がそのまま使えます。よって、

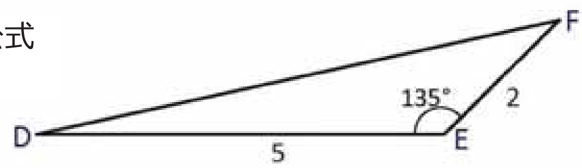
$$(\text{ABC}) = \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{4})(3)\text{sen }60° = (2)(3)\text{sen }60° = (\cancel{2})(3)\left(\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right) = 3\sqrt{3}.$$

### 例2

図に示されている三角形 DEF の面積を求めなさい。

2 つの辺の長さとその間の角の大きさが分かっているので、面積の公式がそのまま使えます。よって、

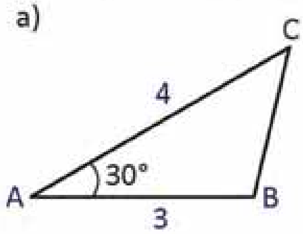
$$(\text{DEF}) = \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2})(5)\text{sen }135° = 5\text{sen }135° = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$



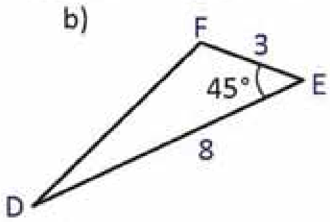

### 問題

1. 次の三角形の面積を求めなさい。

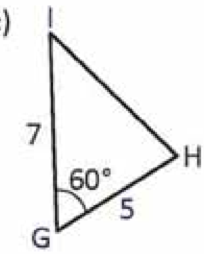
a)



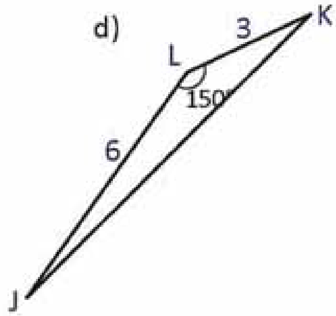

b)




c)




d)




2. 点 C が座標 ($x$, $y$) にあり、$x < 0$ 、$y > 0$ のとき、導入問題の三角形 ABC の面積の式を立てなさい。

## 3.2 正弦定理*

### 導入問題

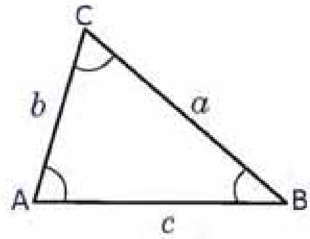
どんな三角形 ABC も、$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$ となることを証明しなさい。

### 解法

三角形の面積を求めるには、次の 3 つの方法があります。$\frac{1}{2}ab\text{sen } C$、$\frac{1}{2}bc\text{sen } A$、$\frac{1}{2}ca\text{sen } B$ 。

けれども、どのように求めても面積は同じになるため、

$$\frac{1}{2}ab\text{sen } C = \frac{1}{2}bc\text{sen } A = \frac{1}{2}ca\text{sen } B.$$




2 を掛けて、

$$bc\text{sen } A = ac\text{sen } B = ab\text{sen } C,$$

$abc$ で割り、

$$\frac{bc\text{sen } A}{abc} = \frac{ac\text{sen } B}{abc} = \frac{ab\text{sen } C}{abc} \Rightarrow \frac{\cancel{bc}\text{sen } A}{a\cancel{bc}} = \frac{\cancel{ac}\text{sen } B}{\cancel{a}b\cancel{c}} = \frac{\cancel{ab}\text{sen } C}{\cancel{ab}c},$$

$$\Rightarrow \frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c}, \quad \text{------------------ (1)}$$

逆数にします

$$\Rightarrow \frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}.$$

面積の比は、辺とその向かい合う角の正弦に関連していることに着目しましょう。

### 定理（正弦定理）

三角形 ABC において、$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$ が成り立ちます 。

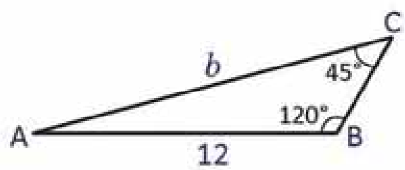
上の等式は (1) の等式と同じなので、必要に応じて 2 つのいずれかを使用することができます。

### 例

三角形 ABC において、$c = 12$、$B = 120°$、$C = 45°$ のときの $b$ の値を求めます。

三角形 ABC を作図して値を書き入れます。正弦定理を使うと、

$$\frac{b}{\text{sen } 120°} = \frac{12}{\text{sen } 45°} \Rightarrow b = \frac{12\text{sen } 120°}{\text{sen } 45°} = 12\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \div \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{12\sqrt{3}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{12\sqrt{6}}{2}$$
$$= 6\sqrt{6}.$$




したがって、 $b = 6\sqrt{6}.$

### 問題

三角形 ABC の次の値を求めなさい。

a) $a = 3$、$A = 30°$、$B = 45°$のとき、$b$ の値。

b) $a = 9$、$A = 60°$、$B = 45°$のとき、$b$ の値。

c) $a = 6$、$A = 30°$、$C = 135°$のとき、$c$ の値。

d) $c = 8$、$B = 55°$、$C = 100°$のとき、$b$ の値。

e) $a = 6$、$A = 60°$、$B = 75°$のとき、$c$ の値。

## 3.3 2 辺の長さと 1 つの角の大きさが分っている三角形の角の計算、その 1

### 導入問題

次のとき、三角形を作図することはできますか。作図できる場合は、指示された角の大きさを求めなさい。

a) $d = 16$、$e = 8$、$D = 30°$ の ΔDEF。角 E の値を求めなさい。

b) $n = 20$、$p = 8$、$P = 30°$ の ΔMNP。角 N の値を求めなさい。

### 解法

a) 三角形 DEF を作図して、分かっている値を書き入れます。2 つの辺とその一方の辺と向かい合う角が分かっているので、正弦定理が使用できます。便宜上、授業 3.2 の (1) を使用します。


$$\frac{\text{sen } E}{8} = \frac{\text{sen } 30°}{16} \Rightarrow \text{sen } E = \frac{8\text{sen } 30°}{16} = \frac{\cancel{8}\text{sen } 30°}{\cancel{16}} = \frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{4}.$$

$\text{sen } E = \frac{1}{4}$ のとき、$E \approx 14.5°$ または $E \approx 180° - 14.5° = 165.5°$。

三角形では $D + E + F = 180°$ となります。そこで、求めた $E$ の値が正しいかどうかを確認しなければなりません。

角 E が 2 つの値を持つことができる理由は、このユニットの授業 2.7 で確認できます。

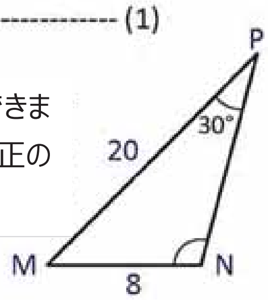
$E \approx 14.5°$ のとき、$D + E \approx 30° + 14.5° = 44.5° < 180°$。したがって、$E \approx 14.5°$。

$E \approx 165.5°$のとき、$D + E \approx 30° + 165.5 = 195.5° > 180°$。したがって、165.5° は $E$ の値になることはできません。

よって、求めた値を使って $E \approx 14.5°$ の三角形を作図することができます。

b) 正弦定理を使うと次のようになります。

$$\frac{8}{\text{sen } 30°} = \frac{20}{\text{sen } N} \Rightarrow \text{sen } N = \frac{20 \text{ sen } 30°}{8} = \frac{\cancel{20} \text{ sen } 30°}{\cancel{8}} = 5\left(\frac{1}{2}\right) \div 2 = \frac{5}{4} \quad \text{------------------ (1)}$$




$\text{sen } \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ のとき、この三角比は1より大きくしたり、–1 より小さくしたりすることはできません。任意の実数 $x$ および $y$ について、$y^2 \leq x^2 + y^2$ であることが分かります（正の数たす正の数）。したがって、$-\sqrt{x^2 + y^2} \leq y \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ となり、すべてを $\sqrt{x^2 + y^2}$ で割ると、

$$-1 \leq \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 1\text{、すなわち } -1 \leq \text{sen } \theta \leq 1.$$

よって、(1) から、$\text{sen } N = \frac{5}{4} > 1$ 。正弦は 1 を超えることはできないため、この条件を満たす角はありません。したがって、与えられた値で三角形を作図することはできません。

### まとめ

2 つの辺の長さとその一方の辺と向かい合う角の大きさが分かっているとき、正弦定理を使って三角形を作図できるかどうかを判断できます。また、正弦定理を使うことにより、三角形のすべての角を求めることができます。

### 問題

次のとき、作図できる三角形ABCはいくつありますか。作図できる場合は、指示された角の大きさを求めなさい。

a) $b = 2$、$c = \sqrt{2}$ 、B = 45° のとき。$C$ を求めなさい。

b) $a = \sqrt{3}$、$b = \sqrt{2}$ 、$A = 120°$ のとき。$B$ を求めなさい。

c) $b = 3$、$c = \sqrt{2}$ 、C = 150° のとき。$B$ を求めなさい。

d) $b = 6$、$c = \sqrt{3}$、$C = 135°$ のとき。$B$ を求めなさい。

## 3.4 2 辺の長さと 1 つの角の大きさが分っている三角形の角の計算、その 2

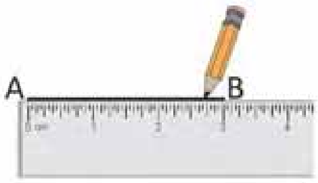
### 導入問題

$a$ = 2 cm、$c$ = 3 cm、$A$ = 30°の三角形があります。三角形を作図して、角 $C$ の大きさを求めなさい。

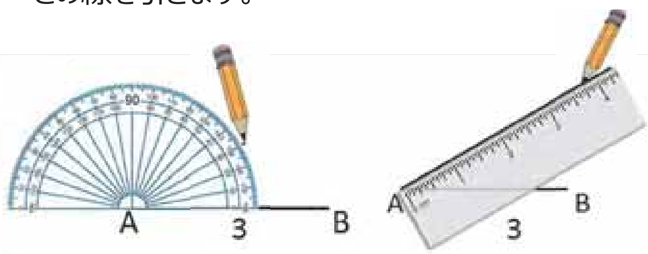
### 解法

次の手順にしたがって、まず三角形を作図します。

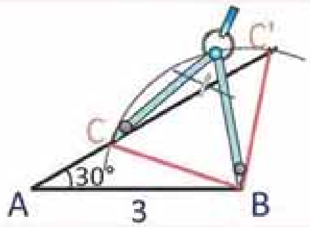
1. 3 cm の線を引きます。A は描き始め、B は描き終わりを示しています。




2. 頂点を A にして 30° の角を決め、そこから適当な長さの線を引きます。



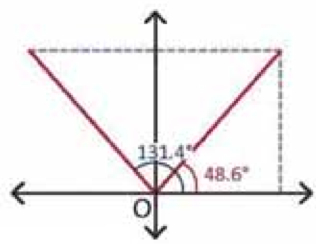

3. コンパスを使って 2 cm の幅を測定し、ステップ 2 で描いた線と交わるまで、B を中心とした弧を描きます。ここでは 2 か所で線が交わるため、与えられた値を使って 2 つの三角形を描くことができます。




角 $C$ の値を計算するには、2 つの辺の長さとその辺と向かい合う角の大きさが分かっているので、正弦定理が使用できることに着目してください。

$$\frac{2}{\text{sen}\,30^\circ} = \frac{3}{\text{sen}\,C} \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,C = \frac{3\,\text{sen}\,30^\circ}{2} = 3\left(\frac{1}{2}\right) \div 2 = \frac{3}{4}.$$

$\text{sen}\ C = \frac{3}{4}$ のとき、$C \approx 48.6^\circ$ または $C \approx 180^\circ - 48.6^\circ = 131.4^\circ$。




$C$ の両方の値が有効であることを確認しなければなりません。

- $C \approx 48.6^\circ$ のとき、$A + C \approx 30^\circ + 48.6^\circ = 78.6^\circ < 180^\circ$。
- $C \approx 131.4^\circ$ のとき、$A + C \approx 30^\circ + 131.4^\circ = 161.4^\circ < 180^\circ$。

よって、与えられた値を使って求めた角Cの値は、約 48.6° または 161.4° となります。

### まとめ

三角形の 2 つの辺の長さとその一方の辺と向かい合う角の大きさが分かっているとき、場合によってはこれらの値を使って 2 つの三角形を作図できます。このような場合は、**一意に定まらない場合**と呼ばれます。

### 問題

次のとき、与えられた値でいくつの三角形を作図できますか。作図できる場合は、指示された角の大きさを求めなさい。

a) $a$ = 3、$b$ = 4、$A$ = 30° のとき。$B$ を求めなさい。

b) $a$ = 2、$c$ = 1、$C$ = 20° のとき。$A$ を求めなさい。

c) $a$ = 4、$b$ = 6、$B$ = 60° のとき。$A$ を求めなさい。

## 3.5 余弦定理*

### 導入問題

どんな三角形 ABC も次のようになることを証明しなさい。

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

### 解法

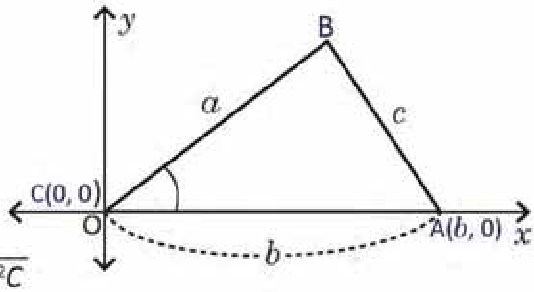
A$(b, 0)$ と C$(0, 0)$ となるように座標平面に三角形 ABC を作図します。

点 B の座標が $(p, q)$ のとき、

$$\cos C = \frac{p}{a} \quad 、 \quad \operatorname{sen} C = \frac{q}{a}.$$

したがって、$p = a\cos C$ 、$q = a\operatorname{sen} C$。

ここでは点 A と点 B の距離は




$$\begin{aligned} d(\text{A, B}) &= \sqrt{(b - a\cos C)^2 + (0 - a\operatorname{sen} C)^2} \\ &= \sqrt{b^2 - 2ab\cos C + a^2\cos^2 C + a^2\operatorname{sen}^2 C} \\ &= \sqrt{a^2(\operatorname{sen}^2 C + \cos^2 C) + b^2 - 2ab\cos C} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}. \end{aligned}$$

ただし、A から B までの距離は三角形の辺 AB の長さ、すなわち $c$。よって、

$$d(\text{A, B}) = c \quad \Rightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

### 定理（余弦定理）

三角形 ABC において、$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ が成り立ちます。

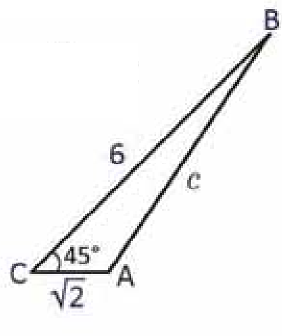
同様に、

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B.$$

### 例

$a = 6$, $b = \sqrt{2}$, $C = 45°$ のとき、三角形 ABC の 3 つめの辺の長さを求めなさい。

三角形を作図して値を書き込むと、次のように余弦定理をそのまま使えることが分かります。




$$\begin{aligned} c^2 &= 6^2 + (\sqrt{2})^2 - 2(6)(\sqrt{2})\cos 45° \\ &= 36 + 2 - \cancel{12}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right) \\ &= 38 - 6(2) = 38 - 12 = 26. \end{aligned}$$

$c > 0$ なので、$c = \sqrt{26}$ 。

### 問題

次のとき、三角形の 3 つめの辺の長さを求めなさい。

a) $a = \sqrt{3}$ 、$b = 5$、$C = 30°$ となる $\Delta$ABC。

b) $b = 6$、$c = 4$、$A = 120°$ となる $\Delta$ABC。

c) $a = 9$、$c = 9\sqrt{3}$ 、$B = 150°$ となる $\Delta$ABC。

d) $a = b = 4$、$C = 60°$ となる $\Delta$ABC。

e) $a = \sqrt{2}$、$c = 2$、$B = 135°$ となる $\Delta$ABC。

## 3.6 3 つの辺の長さが分っている三角形の角度の計算

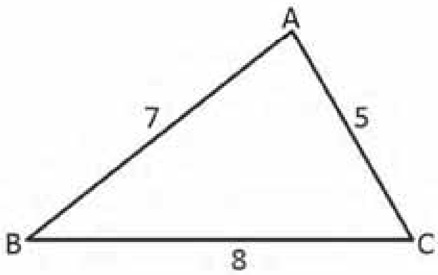
### 導入問題

$a = 8$、$b = 5$、$c = 7$ の三角形があります。三角形の 3 つの角の大きさを求めなさい。

### 解法

三角形の角を求めるために、余弦定理を使うことができます。$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ を使います。
よって：

$$
\begin{aligned}
7^2 &= 8^2 + 5^2 - 2(8)(5)\cos C\\
2(8)(5)\cos C &= 8^2 + 5^2 - 7^2\\
80\cos C &= 64 + 25 - 49\\
80\cos C &= 40\\
\cos C &= \frac{40}{80} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$




$\cos C = \frac{1}{2}$ のとき、$C = 60°$。

別の角を求めるために、ここで再び余弦定理を使います。

$$
\begin{aligned}
5^2 &= 7^2 + 8^2 - 2(7)(8)\cos B\\
2(7)(8)\cos B &= 8^2 + 7^2 - 5^2\\
112\cos B &= 64 + 49 - 25\\
112\cos B &= 88\\
\cos B &= \frac{88}{112} = \frac{11}{14}.
\end{aligned}
$$

$\cos B = \frac{11}{14}$ のとき、$B \approx 38.2°$。

よって、$A = 180° - B - C \approx 180° - 38.2° - 60° = 81.8°$。

したがって、$A \approx 81.8°$, $B \approx 38.2°$ ，$C = 60°$。

> 正弦定理を使って 2 つめの角も求めることができることに着目しましょう。
>
> $$\frac{7}{\text{sen } 60°} = \frac{5}{\text{sen } B} \quad \Rightarrow \quad \text{sen } B = \frac{5\text{sen } 60°}{7} = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \div 7 = \frac{5\sqrt{3}}{14}.$$
>
> $\text{sen } B = \frac{5\sqrt{3}}{14}$ のとき、$B \approx 38.2°$ あるいは $B \approx 180° - 38.2° = 141.8°$。ただし、$B \approx 141.8°$ のときは$B + C \approx 141.8° + 60° = 201.8°$ となり、三角形を作図することはできません。したがって、$B \approx 38.2°$。余弦定理を使ったほうがいいのは、なぜでしょう？

### 定義

三角形の 3 つの辺の長さ分かっているとき、その 3 つの角の大きさは余弦定理を使って求めることができます。

### 問題

1. 次の三角形の 3 つの角の大きさを、可能であれば求めなさい。

a) ΔABC では、$a = \sqrt{3}, b = 1$ ，$c = 2$

b) ΔABC では、$a = 1, b = \sqrt{2}$ ，$c = \sqrt{5}$

c) ΔABC では、$a = 5, b = 3$ ，$c = 7$

d) ΔABC では、$a = 6, b = 10$ ，$c = 11$

e) ΔABC では、$a = \sqrt{3}, b = 12$ ，$c = 9$

2. ΔABC では、$\cos B$ を辺 $a$、$b$、$c$ で表します。

## 3.7 復習問題

1. 与えられた値を使って、三角形 ABC の面積を求めなさい。

a) $a = 7, c = 4$′, $B = 45°$　　b) $b = 10, c = 8$′, $A = 30°$

c) $a = 1, b = 2$′, $C = 45°$　　d) $a = 4, b = 5$′, $C = 60°$

e) $a = 6, c = \sqrt{3}$′, $B = 120°$

2. 次のとき、三角形 ABC において指定された値を求め、答えが有効かどうかを考えなさい。

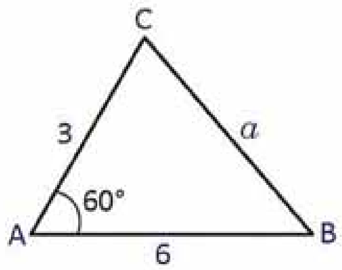
a) $b = 24$、$B = 38°$、$C = 120°$ のとき。$c$ を求めなさい。　b) $c = 10$、$A = 135°$、$C = 30°$ のとき。$a$ を求めなさい。

c) $a = 12$、$b = 16$、$A = 45°$ のとき。$B$ を求めなさい。　d) $a = 3$、$b = 2$、$B = 30°$ のとき。$A$ を求めなさい。

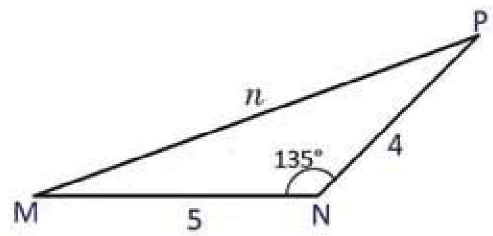
e) $b = 2$、$c = \sqrt{3}$、$C = 120°$ のとき。$B$ を求めなさい。

3. 次のとき、3 つめの辺の長さを求めなさい。

a)



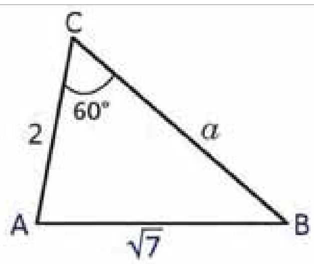

b)




4. 次のとき、三角形 ABC の 3 つの角の大きさを求めなさい。

a) $a = 12, b = 7, c = 6$　　b) $a = 2, b = 3, c = 4$

5. 図に示されている三角形 ABC の 3 つめの辺の長さを求めなさい。




余弦定理を使い、そこから生じる二次方程式を解きます。

6. 正弦定理と余弦定理を使って、次の三角形を作図しなさい。

a) $b = 21, A = 60°, B = 12°$　　b) $a = 15, c = 7, B = 65°$

c) $a = 3, b = 2, c = 2$　　d) $c = 3, B = 110°, C = 45°$

三角形を作図するには、その辺と角のすべての値を求めなければなりません。

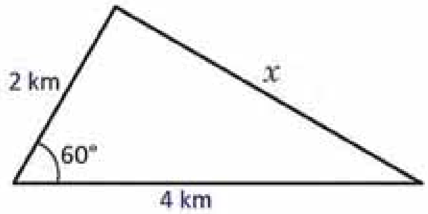
## 3.8 正弦定理、余弦定理の公式の応用

### 導入問題

アナは毎朝、三角形のブロックの周りを走りに行きます。最初に 4 km、次に 2 km 走り、おしまいに最後の通りを走って家に帰ります。ブロックを 1 周すると、アナは毎朝合計で何 km 走りますか？


### 解法

アナが毎朝合計で何 km 走っているかを知るには、ブロックの 3 つめの辺の距離を求めなければなりません。ブロックは三角形で、2 つの辺と求めなければならない辺と向かい合う角がわかっているので、正弦定理使って計算することができます。




$$x^2 = 4^2 + 2^2 - 2(4)(2)\cos 60° = 16 + 4 - 2(4)(\cancel{2})\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) = 20 - 8 = 12$$

すなわち、$x^2 = 12 \Longrightarrow x = \sqrt{12}$ または $x = -\sqrt{12}$。

ただし、$x$ は長さを表すため、負の値にすることはできません。よって、$x \approx 3.5$ km。したがって、アナは毎朝およそ 4 km + 2 km + 3.5 km = 9.5 km を走っています。

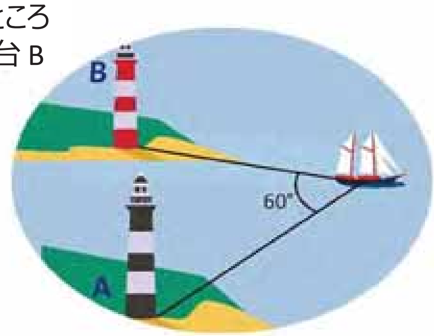
### まとめ

正弦定理と余弦定理は、三角形に関係する身の回りの問題を解くために使用できます。

正弦定理を使ったほうがよい場合もあれば、余弦定理を使ったほうがよい場合もあるため、作図して、分かっている値と求める値を見つけ、2 つの定理のどちらを使うかを判断するようにしましょう。

### 問題

1. 船が灯台 A を出発し、5 km 航行します。この時点で、灯台 A から 7 km のところに灯台 B があります。両方の灯台への視線間の角度が 60° のとき、船は灯台 B からどのくらい離れていますか。



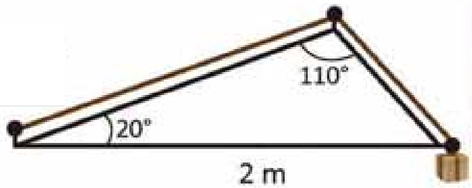

2. 三角形の庭つきの家があります。家主は庭の上に芝生をしこうと考えています。そこで、芝生を購入するために庭の面積を計算しなければなりません。庭の 2 つの辺は 40 m と 42 m で、42 m の辺と向かい合う角は 120° です。およそ何 $m^2$ の芝生を購入すればよいですか。

3. 鍛冶屋は、両端に 2 つの二等辺三角形の支えがついたブランコを作りたいと考えています。角度が 30° で、それと向かい合う辺が 1 m の支えを作りたい場合、他の 2 つの辺の長さはどのくらいにしなければなりませんか。


4. 平行四辺形の面積は、2 つの隣接する辺とその間の角の正弦の積であることを証明しなさい。

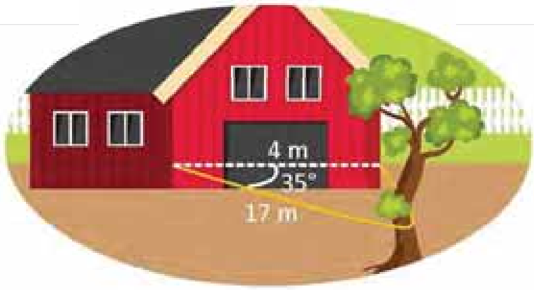
## 3.9 復習問題

1. 図のようにロープで箱を支えています。ロープの長さを求めなさい。



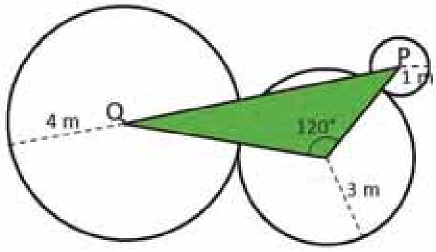

2. 船の船長は、航海中に 2 つの灯台を見ています。船は一方の灯台から 15 マイル、もう一方の灯台から 20 マイルのところにいます。船長が灯台までの 2 つの視線間の角度が 120° であると判断した場合、灯台間の距離を求めなさい。

3. 農場主は厩舎を持っています。そこにもうひとつ囲いを作らなければなりません。彼は手持ちの 38 m のロープを図のように厩舎に結びつけようと考えています。ロープの結び目と結び目の間が 4 メートル離れているとき、農場主の持っているロープで足りますか。




4. 30 フィートの長さの柱が、元の位置から約 15° 傾いています。市長はワイヤーで柱を支えるつもりですが、必要なワイヤーの量を計算しなければなりません。柱の基部から 100 フィートのところにワイヤーを結ぶとき、ワイヤーはどのくらい必要か求めなさい。


5. 図のような三角形の庭飾りを作ります。三角形のそれぞれの頂点が、それが置かれている円の中心であるとき、PQ の長さを求めなさい。

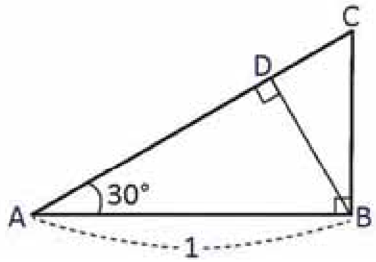



6. 探検隊は、サバイバル旅行のために航海を学んでいます。彼らは地図上に訪問する 3 地点を記しました。各地点でどれだけ方向を変えなければならないかを把握するために、角度を知る必要があります。3 地点を訪れるために、彼らが向きを変えなければならない角度を求めなさい。

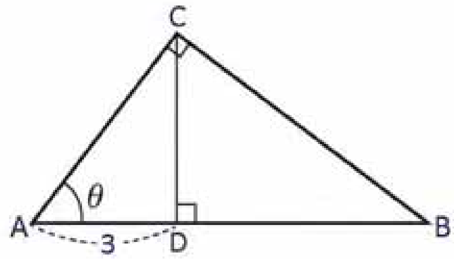

ユニット 5

## 3.10 章末問題

1. 次の図の辺 AD、DC、AC、BD、および BC の長さを求めなさい。必要に応じて有理化しなさい。




2. 次の図の辺 BC、AC、DB、および AB の長さを角 $\theta$ を使って表しなさい。

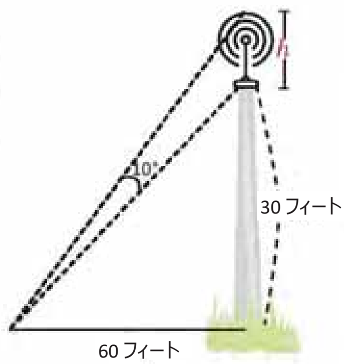



3. 半径 7 の円の中に正五角形があります。五角形の外周を求めなさい。

4. 30 フィートの長さのはしごが 70° の傾斜で壁にかかっています。はしごの足が壁からどれだけ離れているかを求めなさい。

5. 50 フィートの灯台のてっぺんから、11° の俯角にビンが見えます。ビンは灯台からどれくらい離れているか求めなさい。

6. 高さ 30 フィートの柱の上に垂直アンテナが取り付けられています。図のように柱の基部から 60 フィートの位置から見ると、アンテナは 10° の角度のところにあります。アンテナの長さ $h$ を求めなさい。




7. 次のような直角三角形のとき、それぞれの値を求めなさい。

a) $\cos\theta = \frac{1}{3}$ のとき、$\mathrm{sen}\,\theta$ を求めなさい。

a) $\mathrm{sen}\,\theta = \frac{1}{4}$ のとき、$\cos\theta$ を求めなさい。

c) $\tan\theta = 2$ のとき、$\cos\theta$ と $\mathrm{sen}\,\theta$ を求めなさい。

d) $\mathrm{sic}\,\theta = 7$ のとき、$\cos\theta$ と $\mathrm{sen}\,\theta$ を求めなさい。

8. 次のとき、PQ 間の距離を求めなさい。

a) P(−1, 3)　Q(2, 5)

b) P(2, 3)　Q(2, 6)

9. 頂点 A(−3, −1)、B(0, 3)、C(3, 4)、および D(4, 1) を持つ四辺形 ABCD の周囲を求めなさい。

## 3.11 章末問題

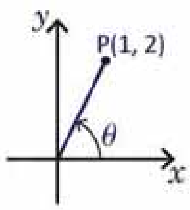
10. $x$ 軸、$y$ 軸、原点を基準としたとき、各点の対称点を求めなさい。それぞれの点をグラフ上に記しなさい。

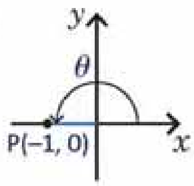
a) $P(0, 3)$　　b) $P\left(\frac{1}{2}, -1\right)$　　c) $P(-2, 0)$　　d) $P(-1, -1)$

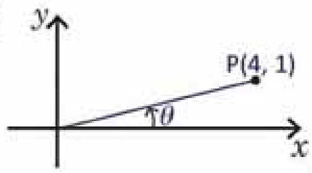
11. 次の角を描き、どの象限にあるかを特定しなさい。

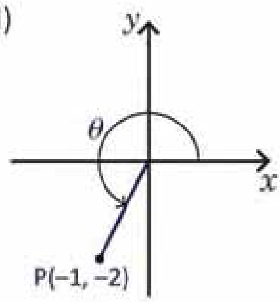
a) $800°$　　b) $-300°$　　c) $1\,050°$　　d) $-735°$

12. $\theta$ のサイン、コサイン、タンジェントを求めなさい。

a)



b)



c)



d)



13. 以下について、三角比の値を sen $\theta$、cos $\theta$、tan $\theta$ を使って表しなさい。ただし $0° \leq \theta < 90°$ とします。

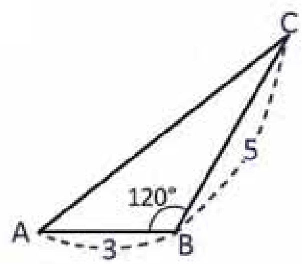
a) $150°$　　b) $370°$　　c) $450°$　　d) $535°$

14. 次の値を求めなさい。

a) $\cos\theta = -\frac{1}{3}$、$90° < \theta < 180°$ のとき、sen $\theta$ と tan $\theta$ の値。

b) sen $\theta = \frac{3}{4}$ で $\theta$ が第 2 象限にあるとき、tan $\theta$ の値。

c) sen $\theta = 2$ で $\theta$ が第 1 象限にあるとき、cos $\theta$ と sen $\theta$ の値。




15. 三角形 ABC の面積を求めなさい。

16. 次の値を求めなさい。

a) $a = 3$、$A = 60°$、$C = 45°$ のとき、$c$ の値。

b) $a = 1$、$b = \sqrt{3}$、$A = 30°$ のとき、$B$ の値。

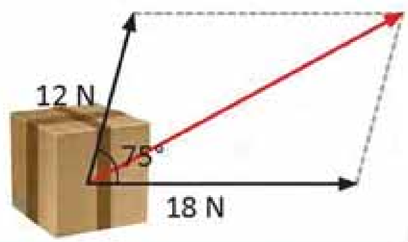
c) $b = 2$、$c = 2\sqrt{3}$、$A = 150°$ のとき、$a$ の値。

d) $a = b = 2$、$c = \sqrt{3}$ のとき、3 つの角の大きさ。

e) $a = 4$、$b = 1$、$B = 60°$ のとき、$A$ の値。

物体に作用する力の単位はニュートンで、**N** で表されます。

17. 異なる 2 方向の力が物体に作用するとき、それにより生じる力の大きさは、加えられた力によって作られる平行四辺形の対角線になります。12 ニュートンと 18 ニュートンの 2 つの力が 75° の角度で物体に作用するとき、合力の値は何ですか？

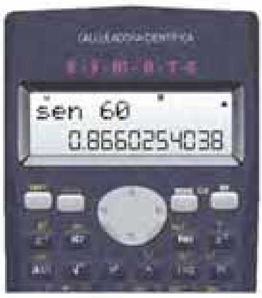



ユニット 5

## 付録 計算機の使い方

計算機には、関数電卓、グラフ計算機、事務用電卓など、さまざまな種類があります。ここでは、三角関数の値を計算するための関数電卓の適切な使い方を参照することができます。持っている計算機のモデルを知るには、計算機のキーのタイプを見てください。キーのタイプに基づいて、計算機を設定することができます。

### 関数電卓




これは最もシンプルなタイプです。角度の単位を度に設定するためには、以下の手順に従います。

MODE キーを2回押した後、 1 キーを押します。

電卓が度の単位に設定されているのを確認するために、D の文字が表示されているか確認する必要があります。D は、「度」を表す英語 degree を意味します。


これはもっと進んだタイプの電卓です。単位を度に設定するためには、以下の手順に従います。

SHIFT キーを押した後、 MODE SETUP キーを押し、最後に 3 キーを押します。

電卓の多くには、正弦関数として $\sin^{-1}$ sin キーがあります。sin は、英語の単語 sine （サイン） です。

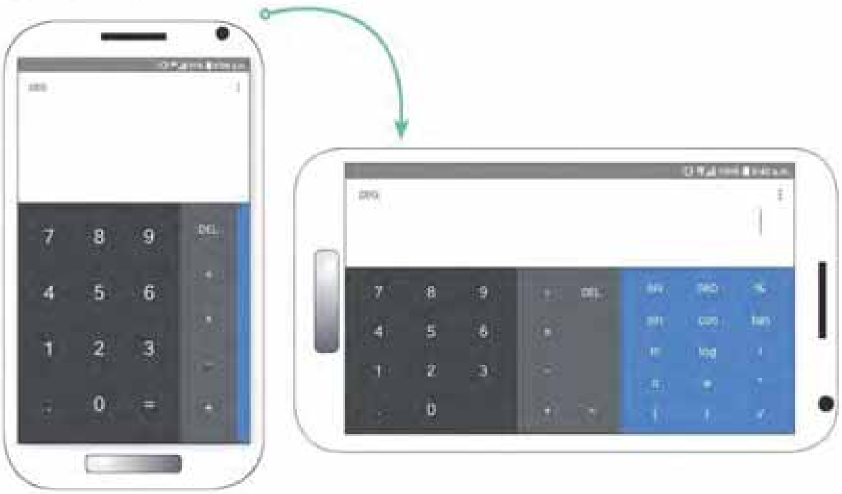
DEG は英語の度に由来します。RAD はラジアン、GRAD はグラードです。グラードは、土木工学で角度を測定するために一般的に使用され、ラジアンは、円周を 400 の等しい部分に分割して計算します。

一般的に、どの関数電卓でも同じような方法で設定することができます。MODE キーを押して、deg （度）に設定しなければなりません。

### 携帯電話

今日の多くのスマートフォンには電卓が内蔵されており、足し算、引き算、掛け算、割り算の基本的な操作に加え、より高度な科学的機能が備わっています。

携帯電話の関数電卓にアクセスするためには、電卓アプリケーションに移動し、アプリケーションを開き、携帯電話を水平に置いて、機能が見えるようにします。



計算機の基本的な機能と数字キーが一部に表示され、他の部分には、サイン、コサイン、タンジェントを計算するためのキー、対数、累乗、根を計算するためのキーおよび円周率や黄金数などの科学的機能が表示されます（表示されるキーのタイプはアプリケーションによって異なります）。

携帯電話の関数電卓を使用するときも、画面のどこかに「DEG」という文字が表示されているか確認し、角度が度に設定されていることに注意する必要があります。RAD という文字が表示されている場合は、DEG キーを探して押さなければなりません。電卓と携帯電話によっては、表示される文字が DEG ではなく GRAD になっている場合があります。携帯電話の GRAD は関数電卓の GRAD と同じではないことに注意しなければなりません。

ユニット 6

# 三角関数の恒等式と方程式

天文学研究の一環として三角法が導入されたことから、三角法の寸法に関連する方程式が研究され始めました。一部の歴史家は、最初の恒等式が発見された場所として、インド、より正確にはケララ学派を指摘しています。ただし、これらの恒等式は、三角形と円周の幾何学的構造と性質から得られたものでした。アラブ地域は三角法に最も関心を示した地域であり、10世紀頃にはすでに三角法の研究が非常に進んでいました。

1940年にタコマナローズ橋を破壊した振動は、三角法を用いて調べることができます。

三角法の研究と今日知られている三角比の定義は、ニュートン、オイラー、ライプニッツなどの重要な数学者によって再び取り上げられ、複素数とその連続方程式などに連結するに至りました。これによって、三角法は音や光または機械的振動の描写において、科学と技術の発展、ならびに、物理学にとって、なくてはならないものになりました。

三角比を理解した後、今度は、最もよく知られている三角関数の恒等式の推論を行います。正弦と余弦の加法定理、正弦と余弦の倍角の恒等式を証明した後、これらを三角方程式の解法で使用します。

## 1.1 $-\theta$, 90° $-\theta$ と 180° $-\theta$ の角度の三角関数の公式

### 導入問題

証明してください。

1. $\cos(-\theta) = \cos\theta$ と $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$
2. $\cos(90° - \theta) = \text{sen}\,\theta$ と $\text{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$
3. $\cos(180° - \theta) = \cos\theta$ と $\text{sen}(90° - \theta) = \text{sen}\,\theta$

$x$ 軸、直角と $y$ 軸に対する対称を使いましょう。

### 解法

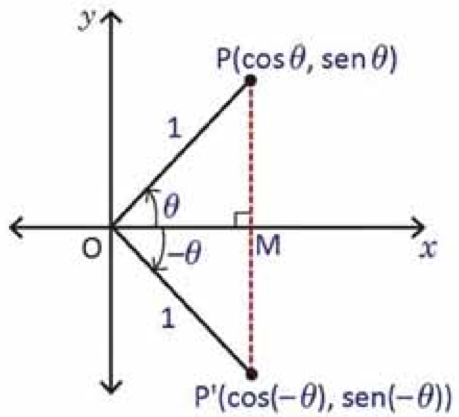
1. 授業 2.2 のユニット 5 から P が直交座標系に座標 $(a, b)$ を持つ点であり、$x$ 軸に対する P' の対称座標は $(a, -b)$ である事が分かります。

点 $P(a, b)$ が OP = 1 と $\overline{OP}$ になれば角度 $\theta$ と $x$ 軸を構成します。P の座標は $(\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$。だとすれば、$x$ 軸に対する対称の座標は

$$P'(\cos\theta, -\text{sen}\,\theta) \qquad \text{-------------------} \ (1)$$

そして $\overline{OP'}$ が角度 $-\theta$ と $x$ 軸とします。したがって、P' の座標は

$$(\cos(-\theta), \text{sen}(-\theta)) \qquad \text{-------------------} \ (2)$$




(1) と (2) を比較して $\cos(-\theta) = \cos\theta$ と $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$ だと証明されます。

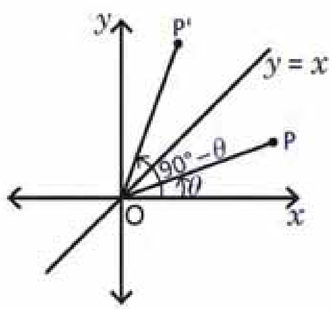
2. Pが $(a, b)$ を座標に持つ直交座標系であれば、P' の対称座標がである恒等写像が $(b, a)$ である事が分かります。

$P(\cos\ \theta,\ \text{sen}\ \theta)$ を考慮すれば、それに対する恒等写像は

$$P'(\text{sen}\,\theta, \cos\theta) \qquad \text{-------------------} \ (3)$$

P' は P の対称であるため、$\overline{OP'}$ が 90° − $\theta$ の角度を構成する事がわかります。
$x$ 軸から P' の座標は

$$(\cos(90° - \theta), \text{sen}(90° - \theta)) \qquad \text{-------------------} \ (4)$$

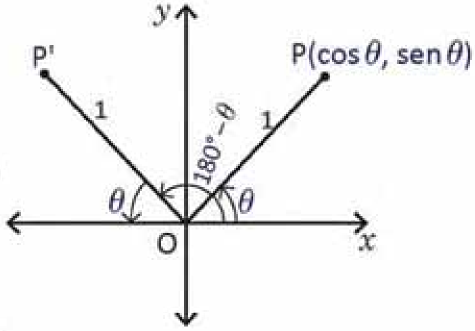



(3) と (4) から $\cos(90° - \theta) = \text{sen}\,\theta$ と $\text{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$ であることが証明されます。

3. $P(a, b)$ が直交座標系上の点であれば、$P'(-a, b)$ は $y$ 軸に対するその対称であることが分かります。

P が直交座標系上での点であれば、OP = 1 と $\overline{\mathrm{OP}}$ は $x$ 軸とともに角度 $\theta$ を構成し、その座標は $(\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta)$ となります。そうであれば $y$ 軸に対するその対称は

$$\mathrm{P}'(-\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta) \quad \text{------------------- (5)}$$




そして $\overline{\mathrm{OP}'}$ が $x$ 軸と角度 $180° - \theta$ を構成します。
したがって、P' の座標は

$$(\cos(180° - \theta), \mathrm{sen}(180° - \theta)) \quad \text{------------------- (6)}$$

その後、(5) と (6) $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$ であり、$\mathrm{sen}(180° - \theta) = \mathrm{sen}\,\theta$ である事が証明されます。

## まとめ

**三角関数**の公式は三角測量比が関与し、事実を指し示します。
三角関数の公式は三角比が関与する等式であり、どの角度の値に対しても真となります。

どの角度 $\theta$ でもコサインとサインにより対角の証明が出来ます。

a) $\cos(-\theta) = \cos\theta$ b) $\mathrm{sen}(-\theta) = -\mathrm{sen}\,\theta$

どの角度 $\theta$ でも余角と相補角の証明が出来ます。
どの角度 $\theta$ でも、次のコサインおよびサインの余角公式と相補角公式が満たされます。

c) $\cos(90° - \theta) = \mathrm{sen}\,\theta$ d) $\mathrm{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$
e) $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$ f) $\mathrm{sen}(180° - \theta) = \mathrm{sen}\,\theta$

タンジェントについては次の証明が確認されます。

g) $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ h) $\tan(90° - \theta) = \dfrac{1}{\tan\theta}$ i) $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$

## 例

各比率を角度で示し、角度 $\theta$ は $0° \le \theta < 90°$。

1. $\cos(-40°)$ 2. $\mathrm{sen}\ 120°$ 3. $\tan 320°$

1. 対角の証明を利用し、$\cos(-40°) = \cos 40°$。
2. 相補角の証明を利用し、$\mathrm{sen}\ 120° = \mathrm{sen}(180° - 120°) = \mathrm{sen}\ 60°$。
3. この場合はまず相補角の証明を利用します。

$$\tan 320° = -\tan(180° - 320°) = -\tan(-140°) = \tan 140° = -\tan(180° - 140°) = -\tan 40°.$$

ですので、$\tan 320° = -\tan 40°$。

## 問題

1. 各三角比を角度で示し、角度 $\theta$ は $0° \le \theta < 90°$。どの様な証明を利用する必要があるかを説明してください。

a) $\cos(-30°)$ b) $\mathrm{sen}\ 170°$ c) $\mathrm{sen}\ 110°$

d) $\cos 250°$ e) $\tan(-60°)$ f) $\tan(-100°)$

2. $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ であることを証明してください。
3. $\tan(90° - \theta) = \dfrac{1}{\tan\theta}$ であることを証明しなさい。
4. $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$ であることを証明してください。

## 1.2 $\theta + 180°$, $\theta - 180°$ と $90° + \theta$ の角度の三角関数の公式

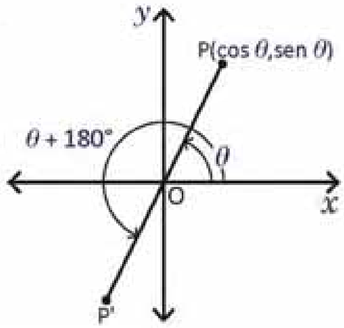
### 導入問題

証明してください。

1. $\cos(\theta + 180°) = -\cos\theta$, $\text{sen}(\theta + 180°) = -\text{sen}\,\theta$
2. $\cos(\theta - 180°) = -\cos\theta$, $\text{sen}(\theta - 180°) = -\text{sen}\,\theta$
3. $\cos(90° + \theta) = -\text{sen}\,\theta$, $\text{sen}(90° + \theta) = \cos\theta$

原点に対する対称と証明を利用して下さい。
前回の授業で学んだ原点に対する対称と公式を利用します。

### 解法




a) 点 $P(a, b)$ が$OP = 1$ と $\overline{OP}$ になれば角度 $\theta$ と $x$ 軸を構成します。P の座標は $(\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$。だとすれば、原点に対する対称の座標は

$$P'(-\cos\theta, -\text{sen}\,\theta) \quad \text{------------------ (1)}$$

しかし、$\overline{OP'}$ は $x$ 軸と共に、$\theta + 180°$ という角度を構成します。ですので、P' の座標は

$$(\cos(\theta + 180°), \text{sen}(\theta + 180°)) \quad \text{------------------ (2)}$$

後に (1) と(2) より $\cos(\theta + 180°) = -\cos\theta$ と $\text{sen}(\theta + 180°) = -\text{sen}\,\theta$ である事が分かります。

b) $\theta - 180°$ の角度は $-(180° - \theta)$ と表現できます。よって、

$$\cos(\theta - 180°) = \cos(-(180° - \theta)) = \cos(180° - \theta) = -\cos\theta \text{と}$$

$$\cos(\theta - 180°) = \cos(-(180° - \theta)) = \cos(180° - \theta) = -\cos\theta\text{。}$$

c) $90° + \theta$ の角度は $180° - (90° - \theta)$ と表現できます。よって、

$$\cos(90° + \theta) = \cos(180° - (90° - \theta)) = -\cos(90° - \theta) = -\text{sen}\,\theta \text{と}$$

$$\cos(90° + \theta) = \cos(180° - (90° - \theta)) = -\cos(90° - \theta) = -\text{sen}\,\theta\text{。}$$

### まとめ

$\theta$ の角度全てに言えることは

a) $\cos(\theta + 180°) = -\cos\theta$ b) $\text{sen}(\theta + 180°) = -\text{sen}\,\theta$

c) $\cos(\theta - 180°) = -\cos\theta$ d) $\text{sen}(\theta - 180°) = -\text{sen}\,\theta$

e) $\cos(90° + \theta) = -\text{sen}\,\theta$ f) $\text{sen}(90° + \theta) = \cos\theta$

タンジェントについては次の証明が確認されます。

g) $\tan(\theta + 180°) = \tan\theta$ h) $\tan(\theta - 180°) = \tan\theta$ i) $\tan(90° + \theta) = -\dfrac{1}{\tan\theta}$

### 例

各比率を角度で示し、角度 $\theta$ は $0° \leq \theta < 90°$。

a) $\cos 200°$ b) $\text{sen}\,130°$ c) $\tan 250°$

a) $200° = 20° + 180°$ なので、$\cos 200° = -\cos 20°$ となります。
b) $130° = 90° + 40°$ なので、$\text{sen}\,130° = \text{sen}(90° + 40°) = \cos 40°$ となります。
c) $250° = 70° + 180°$ なので、$\tan 250° = \tan(70°)$ となります。

### 問題

各三角比を角度で示し、角度 $\theta$ は $0° \leq \theta < 90°$。

a) $\text{sen}\,100°$ b) $\text{sen}\,215°$ c) $\cos 160°$

d) $\cos 195°$ e) $\tan 205°$ f) $\tan 290°$

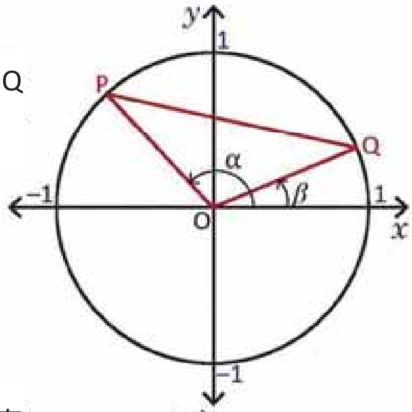
## 1.3 角度加算*

### 導入問題

証明してください。

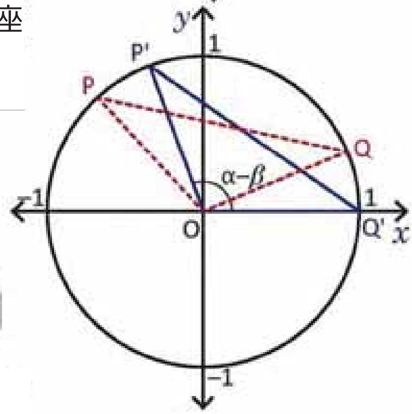
a) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$　　b) $\mathrm{sen}(\alpha+\beta) = \mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$

### 解法




a) 図の様に R1 の円周と OPQ の三角形を描きます。P の座標が (cos α、sen α)で Q が (cos β、sen β) になります。P から Q の距離の自乗は

$$\begin{aligned}(PQ)^2 &= (\cos\alpha-\cos\beta)^2 + (\mathrm{sen}\,\alpha-\mathrm{sen}\,\beta)^2\\ &= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \mathrm{sen}^2\alpha - 2\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta + \mathrm{sen}^2\beta\\ &= (\cos^2\alpha + \mathrm{sen}^2\alpha) + (\cos^2\beta + \mathrm{sen}^2\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta\\ &= 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta.\end{aligned}$$




OPQ の三角形における– β 角を原点に対して回転させせると、P と Q の回転した座標は P'(cos(α – β)、sen(α – β)) と Q'(1, 0) です。P' から Q' の距離の自乗は

$$\begin{aligned}(P'Q')^2 &= (\cos(\alpha-\beta)-1)^2 + (\mathrm{sen}(\alpha-\beta)-0)^2\\ &= \cos^2(\alpha-\beta) - 2(1)\cos(\alpha-\beta) + 1 + \mathrm{sen}^2(\alpha-\beta)\\ &= [\cos^2(\alpha-\beta) + \mathrm{sen}^2(\alpha-\beta)] - 2\cos(\alpha-\beta) + 1\\ &= 1 - 2\cos(\alpha-\beta) + 1\\ &= 2 - 2\cos(\alpha-\beta).\end{aligned}$$

ピタゴラスの公式により分かるのは
どの $\theta$ に対しても、$\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$。

しかし回転させても距離関係は保たれるので $d(P, Q) = d(P', Q')$ です。という事は

$$(d(P,Q))^2 = (d(P',Q'))^2$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow\ 2 - 2\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta - 2\cos\alpha\cos\beta = 2 - 2\cos(\alpha-\beta)\\ &\Rightarrow\ -2(\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta + \cos\alpha\cos\beta) = -2\cos(\alpha-\beta)\\ &\Rightarrow\ \cos(\alpha-\beta) = \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta + \cos\alpha\cos\beta.\end{aligned}$$

b) ここを証明するには $\mathrm{sen}\,\theta = \cos(90° - \theta)$ と $\cos\theta = \mathrm{sen}(90° - \theta)$ なので、

$$\begin{aligned}\mathrm{sen}(\alpha+\beta) &= \cos(90° - (\alpha+\beta))\\ &= \cos((90° - \alpha) - \beta)\\ &= \cos(90° - \alpha)\cos\beta + \mathrm{sen}(90° - \alpha)\mathrm{sen}\,\beta\\ &= \mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta.\end{aligned}$$

### 加算の定理

次の角度加算の証明が出来ます。

a) $\mathrm{sen}(\alpha+\beta) = \mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$　　b) $\mathrm{sen}(\alpha-\beta) = \mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$

c) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$　　d) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$

そして、タンジェントについては次の証明が確認されます。

e) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$　　f) $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

b、c、e と f の証明については宿題になります。

### 問題

加算定理の文字式 b、c、e と f を証明してください。

$\alpha+\beta = \alpha-(-\beta)$, $\alpha-\beta = \alpha+(-\beta)$を確認してください。b) と c) の証明には a) と b)を 引用

授業： 1.1.

ユニット 6

## 1.4 三角関数の正確な値、パート1

### 導入問題

75° = 45° + 30° であるという事を引用して sen 75°、cos 75° と tan 75° の正確な値を求めてください。

### 解法

75° = 45° + 30° なので、

$$\operatorname{sen} 75° = \operatorname{sen}(45° + 30°) = \operatorname{sen} 45° \cos 30° + \cos 45° \operatorname{sen} 30°$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

ユニット 5 の授業 2.6 の表を利用してください。

cos 75° を計算するには同様にします。

$$\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45° \cos 30° - \operatorname{sen} 45° \operatorname{sen} 30°$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

tan 75° を計算するには $\tan 75° = \dfrac{\operatorname{sen}(75°)}{\cos(75°)}$ を利用して、

$$\tan 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \div \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{3}.$$

### 定義

角度加算の証明を利用し、三角関数の正確な値を求める事が出来ます。
加算角の公式を利用して、未知の角の三角比の正確な値を計算することができます。

### 問題

1. 角度加算の証明を利用し、次の特別な角度のサイン、コサイン、タンジェントの正確な値を求めてください。

a) 15°　　b) 105°

c) 165°　　d) 195°

特別な角度と言うのは三角関数が知られているものを指します。(0°、30°、45°、60°、90° と 180°)。
120°、135°、150°、210°、225°の角度240°、270°、300°。315° と 330°の角度も特別ですが、先ほど記載した値で求める事が出来ます。

2. 角度加算の証明を利用して次を証明してください。

a) $\cos(180° + \theta) = -\cos\theta$　　b) $\operatorname{sen}(180° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$

c) $\cos(270° + \theta) = \operatorname{sen}\theta$　　d) $\operatorname{sen}(270° + \theta) = -\cos\theta$

e) $\cos(45° - \theta) = \operatorname{sen}(45° + \theta)$　　f) $\tan(45° + \theta) = \dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

g) $\operatorname{sen}(360° + \theta) = \operatorname{sen}\theta$　　h) $\cos(360° + \theta) = \cos\theta$

## 1.5 倍角

### 導入問題

証明してください。

a) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\text{sen}^2\theta$　　b) $\text{sen}\ 2\theta = 2\text{sen}\ \theta \cos\theta$ $\theta$

### 解法

a) コサインの角度加算の方式を利用します。

$$\cos 2\theta = \cos(\theta + \theta) = \cos\theta\cos\theta - \text{sen}\ \theta\ \text{sen}\ \theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta。\qquad (1)$$

ピタゴラスの公式より $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ は $\cos^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta$ に簡略化できるため、(1) を代入することで、結果は、

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta - \text{sen}^2\theta = 1 - 2\text{sen}^2\theta。$$

ピタゴラスの方式より $\text{sen}^2\theta$ を取り除くと $\text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ となります。(1) に代入すると、結果は、

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) = \cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta = 2\cos^2\theta - 1。$$

b) サインの角度加算の方式を利用します。

$$\text{sen}\ 2\theta = \text{sen}(\theta + \theta) = \text{sen}\ \theta\cos\theta + \cos\theta\ \text{sen}\ \theta = \text{sen}\ \theta\cos\theta + \text{sen}\ \theta\cos\theta = 2\text{sen}\ \theta\cos\theta。$$

### 倍角の定理

どの角度 $\theta$ でも次の倍角の証明が成り立ちます

a) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\text{sen}^2\theta$　　b) $\text{sen}\ 2\theta = 2\text{sen}\ \theta\cos\theta$

さらにタンジェントには次の証明ができます

c) $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

### 例 1

$90° < \theta < 180°$ と $\text{sen}\ \theta = \frac{3}{5}$ ならば、$\text{sen}\ 2\theta$ と $\cos 2\theta$ の値は何ですか？

サインとコサインの倍角の方式を確認すると $\cos\theta$ を計算する必要がある事が分かります。$\theta$ は 90° と 180° の間に値するので、$\cos\theta$ は負の数になります。ピタゴラスの公式より、

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1 \quad\Rightarrow\quad \cos^2\theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \quad\Rightarrow\quad \cos\theta = -\frac{4}{5}.$$

その後に $\text{sen}\ 2\theta = 2\text{sen}\ \theta\cos\theta = 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$ と $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$

### 例2

$\cos\theta = \frac{1}{4}$ であれば、$\cos 2\theta$ の値は何ですか？

$\cos\theta$ の値が分かっているので、$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ の証明を利用します。

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = 2\left(\frac{1}{16}\right) - 1 = \frac{1}{8} - 1 = -\frac{7}{8}.$$

### 問題

1. $0° < \theta < 90°$ と $\cos\theta = \frac{7}{9}$ であれば、$\text{sen}\ 2\theta$ と $\cos 2\theta$ の値は何ですか？
2. $\text{sen}\ \theta = -\frac{\sqrt{7}}{3}$ であれば、$\cos 2\theta$ の値を求めてください。
3. もし $\tan\theta = \frac{12}{5}$ と $\theta$ が第三象限に位置する場合、$\text{sen}\ 2\theta$、$\cos 2\theta$ と $\tan 2\theta$ の値を求めてください。
4. $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$ であることを証明しなさい。

## 1.6 半角

### 導入問題

証明してください。

a) $\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$　　　b) $\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$

### 解法

a) 倍角の方式により分かっている事象としては

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$$

この際に $\alpha = \frac{\theta}{2}$ を確認するために、

$$\cos\left(2\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1,$$

$$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1,$$

$$\Rightarrow \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$ 　$\cos^2\frac{\theta}{2}$ を解きます。

b) a) と同様に、倍角の方式により理解できる事象としては

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\mathrm{sen}^2\alpha.$$

$\alpha = \frac{\theta}{2}$ を確認するために、

$$\cos\left(2\frac{\theta}{2}\right) = 1 - 2\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

$$\cos\theta = 1 - 2\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2},$$

$$\Rightarrow \mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$ 　$\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}$ を解きます。

### 半角の定理

$\theta$ の角度全てに言えることは、

a) $\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$　　　b) $\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$

そしてタンジェントに対して証明できるのは、

c) $\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

### 問題

1. 半角の方式の文字式 c) を証明してください。
2. 問 1 の結果を用いて、$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}$ であることを証明して下さい。

問 2 には $\tan\frac{\theta}{2}$ と $\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}$ と $\cos\frac{\theta}{2}$ との関係性とサインの倍角の証明を利用しましょう。適当な1（分母と分子が同じ値の分数）を掛けましょう

3. $\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ に $\frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta}$ を掛けると $\tan\frac{\theta}{2} = \pm\frac{1-\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}$ という事が分かります。この最後のは表記を＋か－で選ばなければいけないという点で問 2 の結果と差異があります。＋表記のみを選ぶ理由を述べてください。

## 1.7 三角関数の正確な値、パート 2

### 導入問題

1. sen 22.5°、cos 22.5° と tan 22.5° の正確な値を求めてください。
2. $\theta = \frac{3}{5}$、con $\theta$ が第 3 象限に位置しているのであれば、sen $\frac{\theta}{2}$ 、cos $\frac{\theta}{2}$ と tan $\frac{\theta}{2}$ の値を求めてください。

### 解法

1. $22.5° = \frac{45°}{2}$ であり、22.5° が第 1 象限に位置するのであれば、sen 22.5°、cos 22.5° と tan 22.5° はそれぞれ正の数です。

$$\text{sen}^2 22.5° = \text{sen}^2 \frac{45°}{2} = \frac{1-\cos 45°}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \text{sen}\, 22.5° = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

$$\cos^2 22.5° = \cos^2 \frac{45°}{2} = \frac{1+\cos 45°}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos 22.5° = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

$$\tan 22.5° = \frac{\text{sen}\, 22.5°}{\cos 22.5°} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \div \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

2. $\theta$ は第 4 象限に位置するので、$270° < \theta < 360°$ となります。ですので、$135° < \frac{\theta}{2} < 180°$という事で、$\frac{\theta}{2}$ は第 2 象限に位置するという事になるので、 sen $\frac{\theta}{2}$ は正の数であり、cos $\frac{\theta}{2}$ と tan $\frac{\theta}{2}$ は負の数となります。ですので、

$$\text{sen}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1-\frac{3}{5}}{2} = \frac{2}{5\times 2} = \frac{1}{5} \Rightarrow \text{sen} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1+\frac{3}{5}}{2} = \frac{\cancel{8}}{5\times\cancel{2}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos \frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \div \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{\cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{2\cancel{\sqrt{5}}} = -\frac{1}{2}.$$

### まとめ

半角の公式が利用でき、それによって三角関数の正確な値を求める事が出来ます。

### 問題

1. 半角の証明を利用し、各角の三角関数を計算してください。

a) 67.5°　　b) 105°　　c) 112.5°　　d) 165°

2. cos $\theta$ の各値に対し、sen $\frac{\theta}{2}$ 、cos $\frac{\theta}{2}$ と tan $\frac{\theta}{2}$ を求めてください。

a) $\cos\theta = \frac{3}{4},\ 0° < \theta < 90°$　　b) $\cos\theta = -\frac{5}{12},\ 90° < \theta < 180°$

c) $\cos\theta = -\frac{1}{9},\ 180° < \theta < 270°$　　d) $\cos\theta = \frac{1}{8},\ 270° < \theta < 360°$

3. sen $\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ と $180° < \theta < 270°$ であれば、sen $\frac{\theta}{2}$ 、cos $\frac{\theta}{2}$ と tan $\frac{\theta}{2}$ の値を求めて下さい。

## 1.8 学んだことで練習しましょう

1. 各三角比を角度で示し、角度 $\theta$ は $0° \leq \theta < 90°$。

a) $\operatorname{sen}(-45°)$　b) $\operatorname{sen} 210°$　c) $\operatorname{sen} 350°$

d) $\cos(-130°)$　e) $\cos(-80°)$　f) $\tan 135°$

2. 証明してください。

a) $\sec(-\theta) = \sec$　b) $\csc(-\theta) = -\csc\theta$

c) $\cot(-\theta) = -\cot\theta$　d) $\sec(90° - \theta) = \csc\theta$

e) $\csc(90° - \theta) = \sec\theta$　f) $\tan(\theta + 45°)\tan(45° - \theta) = 1$

3. $\cot 75° = 2 - \sqrt{3}$ であることを確認します。

4. 証明してください。

a) $\tan(\theta + 180°) = \tan\theta$　b) $\tan(\theta - 180°) = \tan\theta$

5. $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$ を証明して下さい。

6. 各ケースにおいて $\operatorname{sen} 2\theta$、$\cos 2\theta$ と $\tan 2\theta$ を特定してください。

a) $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$、$0° < \theta < 90°$　b) $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{3}$、$180° < \theta < 270°$

c) $\sec\theta = \frac{\sqrt{13}}{2}$、$270° < \theta < 360°$　d) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$、$90° < \theta < 180°$

7. $\cos 480°$ と $\operatorname{sen} 480°$ の正確な値を求めてください。

8. $\operatorname{sen}\theta$ の各値については $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$、$\cos\frac{\theta}{2}$ と $\tan\frac{\theta}{2}$ を求めてください。

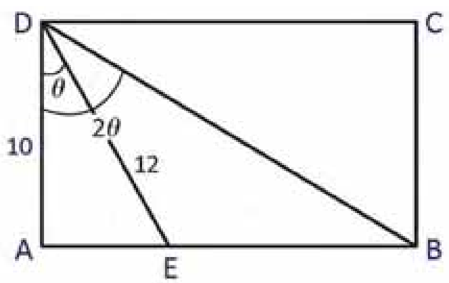
a) $\operatorname{sen}\theta = -\frac{4}{5}$、$180° < \theta < 270°$　b) $\operatorname{sen}\theta = \frac{5}{12}$、$90° < \theta < 180°$

9. 図において ABCD は長方形です。そして AD = 10、DE = 12 で、∢BDA = 2∢EDA をとっています。

a) $\cos\theta$ の値を求めてください。

b) $\cos 2\theta$ の値を求めてください。

c) BD の距離を求めてください。



## 2.1 三角方程式、第一部*

### 導入問題

$\tan^2\theta = 1$ を解いて $0° \leq \theta < 360°$ を答えてください。

### 解法

$\tan^2\theta = 1$ を解くために。自乗されているので、両側面のルート自乗を計算します。そうすると $\tan\theta = \pm 1$ となります。ですので、$\tan\theta = 1$ もしくは $\tan\theta = -1$。ですので、

> $\tan\theta$ が正の数であれば、角は第一もしくは第三象限に位置する事になります。
> $\tan\theta$ が負の数であれば、角は第二もしくは第四象限に位置する事になります。

- $\tan\theta = 1$ が成り立つのは $\theta = 45°$ もしくは $\theta = 180° + 45° = 225°$。
- $\tan\theta = -1$ が成り立つのは $\theta = 180° - 45° = 135°$ もしくは $\theta = 360° - 45° = 315°$ の時です。

よって $\tan^2\theta = 1$ の結果は $\theta$ が $0°$ から $360°$ の時に $\theta = 45°$、$135°$、$225°$、$315°$ となります。

### 定義

三角関数の方程式は未知数が三角関数の引数として示される方程式の事を指します。
三角方程式は、未知数が三角比の偏角として現れる方程式です。

三角関数を解き明かす事は等式の解き方を全て割り出す事に繋がります。

三角関数の答えの数は未知数の値によって決まります。例として、$\text{sen}\,\theta = -\frac{1}{2}$ の方程式は $0° \leq \theta < 180°$ からすれば解答できません。何故なら $\text{sen}\,\theta$ は $0°$ から $180°$ の間に位置する角度に対し正の数となるからです。

### 例

$2\cos\theta - 6 = -4$ を解き $0° \leq \theta < 360°$を答えて下さい。

解くには $\cos\theta$ を求め

$$
\begin{aligned}
& 2\cos\theta - 6 = -4 \\
\Rightarrow\quad & 2\cos\theta = -4 + 6 \\
\Rightarrow\quad & 2\cos\theta = 2 \\
\Rightarrow\quad & \cos\theta = 1
\end{aligned}
$$

$\cos\theta$ は $\theta = 0°$ の時 1 に等しいので、$\theta$ が $0°$ と $360°$ の間に位置する際に方程式 $2\cos\theta - 6 = -4$ は $\theta = 0°$ になります。

### 問題

$0° \leq \theta < 360°$ の方程式を求めてください。

a) $\text{sen}^2\theta = \frac{1}{4}$
b) $\cos^2\theta = \frac{3}{4}$
c) $\tan^2\theta = 3$
d) $\text{sen}^2\theta = \frac{3}{4}$
e) $2\text{sen}\,\theta - \sqrt{3} = 0$
f) $2\cos\theta + 3 = 4$
g) $4\text{sen}\,\theta + 5 = 7$
h) $7\tan\theta = 2\sqrt{3} + \tan\theta$

## 導入問題

$2\cos^2\theta - \text{sen}\,\theta - 1 = 0$ を解き $0° \leq \theta < 360°$ を答えて下さい。

## 解法

$\text{sen}\,\theta$ のみになるように方程式を解きます。その際にピタゴラスの公式を利用します。

$$\begin{aligned} & 2\cos^2\theta - \text{sen}\,\theta - 1 = 0 \\ \Rightarrow\ & 2(1 - \text{sen}^2\theta) - \text{sen}\,\theta - 1 = 0 \\ \Rightarrow\ & 2 - 2\text{sen}^2\theta - \text{sen}\,\theta - 1 = 0 \\ \Rightarrow\ & -2\text{sen}^2\theta - \text{sen}\,\theta + 1 = 0 \\ \Rightarrow\ & 2\text{sen}^2\theta + \text{sen}\,\theta - 1 = 0 \end{aligned}$$

ピタゴラスより $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$ を利用し、$\cos^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta$ もしくは $\text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ だと確認できます。

$y = \text{sen}\,\theta$ に変換すると、方程式が $2y^2 + y - 1 = 0$ となります。

たすき掛けにて多項式を因数分解すると $2y^2 + y - 1 = (2y - 1)(y + 1) = 0$ となります。しかし、$y = \text{sen}\,\theta$ なので三角方程式が二つになります。

- $\theta = 30°$ もしくは $\theta = 180° - 30° = 150°$ の時、 $2\text{sen}\,\theta - 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}$ となります。
- $\theta = 270°$ の時、$\text{sen}\,\theta + 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}\,\theta = -1$ となります。

$2y^2 + y - 1 = 0$ を解くために、解の公式も利用できます。

よって $2\cos^2\theta - \text{sen}\,\theta - 1 = 0$ の結果は $0° \leq \theta < 360°$ の時に $\theta = 30°$、$150°$、$270°$ となります。

## まとめ

ピタゴラスの公式により二次方程式になる三角方程式もあります。そうする事によりサインかコサインのみの証明が可能になります。

## 例

$2\text{sen}^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$ を解き $0° \leq \theta < 360°$ を答えて下さい。

$\cos\theta$ のみになるように方程式を解きます。その際にピタゴラスの公式を利用します。

$$\begin{aligned} & 2\text{sen}^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0 \\ \Rightarrow\ & 2(1 - \cos^2\theta) + 3\cos\theta - 3 = 0 \\ \Rightarrow\ & 2 - 2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0 \\ \Rightarrow\ & -2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 1 = 0 \\ \Rightarrow\ & 2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0 \end{aligned}$$

たすき掛けにより $2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1$ を因数分解します。

| | | |
|---|---|---|
| $2\cos\theta$ | $-1$ | $-\cos\theta$ |
| $\cos\theta$ | $-1$ | $-2\cos\theta$ |
| $2\cos^2\theta$ | $1$ | $-3\cos\theta$ |

未知数の $\cos\theta$ を計算すると $2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = (2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 1) = 0$ となります。

よって、 $2\cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$、という事は $\theta = 60°$ もしくは $\theta = 360° - 60° = 300°$。

もしくは $\cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1$ という事は $\theta = 0°$。

よって $2\text{sen}^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$ の解答は $0° \leq \theta < 360°$ となり、$\theta = 0°$、$60°$、$300°$ が分かります。

## 問題

$0° \leq \theta < 360°$ の方程式を求めてください。

a) $2\cos^2\theta + \text{sen}\,\theta - 1 = 0$

b) $-3\text{sen}\,\theta + \cos^2\theta = 3$

c) $4\cos^2\theta + 4\sqrt{3}\text{sen}\,\theta - 7 = 0$

d) $2\text{sen}^2\theta - 3 = \cos\theta - 2$

復習しよう。
$-1 \leq \text{sen}\,\theta \leq 1$ と
$-1 \leq \cos\theta \leq 1$。

## 2.3 三角方程式、第三部（コサインの倍角の使用）

### 導入問題

三角方程式 $\cos 2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 2 = 0$ を解き、$0° \le \theta < 360°$ を求めましょう。

### 解法

復習しよう。
$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\text{sen}^2\theta.$

コサインの倍角の証明を利用し、

$$\begin{aligned} & \cos 2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 2 = 0 \\ \Rightarrow\ & (2\cos^2\theta - 1) - 2\sqrt{2}\cos\theta + 2 = 0 \\ \Rightarrow\ & 2\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0 \end{aligned}$$

導入問題と同様にこの方程式を解くには解の公式を利用できます。ですが、ある事が分かればたすき掛けで解く事も可能です。

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{2}\cos\theta & -1 & -\sqrt{2}\cos\theta \\ \sqrt{2}\cos\theta & -1 & -\sqrt{2}\cos\theta \\ \hline 2\cos^2\theta & 1 & -2\sqrt{2}\cos\theta \end{array}$$

つまり、$2\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 1 = (\sqrt{2}\cos\theta - 1)(\sqrt{2}\cos\theta - 1) = (\sqrt{2}\cos\theta - 1)^2$ 。ですので、ここから

$$\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\theta$ が 45° と 315° になる時、$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ となる事が分かります。よって元の方程式の解は $\theta$ が 0° と 360° になる時、$\theta = 45°$、315° となる事が分かります。

### まとめ

$\cos 2\theta$ という表現が三角方程式にて出題される際、コサインの倍角の証明を利用し、角度 $\theta$ のみの結果が出る方程式に変換する必要があります。そうする事で同一の結果にします。通常解くには因数分解をし、求められた解を 0 と同一にし、三角方程式を割り出し解く必要があります。

### 例

方程式 $\cos 2\theta + 6\text{sen}^2\theta - 1 + (2\sqrt{2} - 2)\text{sen}\,\theta - \sqrt{2} = 0$ を解き $0° \le \theta < 360°$を求めてください。

$\cos 2\theta = 1 - 2\,\text{sen}^2\theta$ の証明を代替し、$4\text{sen}^2\theta + (2\sqrt{2} - 2)\text{sen}\,\theta - \sqrt{2} = 0$ を求めます。

冒頭の問題と同様に、この方程式は解の公式で解くことができますが、右記のことが指摘されます。

$$\begin{array}{ccc} 2\text{sen}\,\theta & \sqrt{2} & 2\sqrt{2}\text{sen}\,\theta \\ 2\text{sen}\,\theta & -1 & -2\text{sen}\,\theta \\ \hline 4\text{sen}^2\theta & -\sqrt{2} & 2\sqrt{2}\text{sen}\,\theta - 2\text{sen}\,\theta \end{array}$$

よって $4\text{sen}^2\theta + (2\sqrt{2} - 2)\text{sen}\theta - \sqrt{2} = (2\text{sen}\,\theta + \sqrt{2})(2\text{sen}\,\theta - 1) = 0$ 。よって、

$\text{sen}\,\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\theta$ が 225° と 315° の時、もしくは $\text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}$ の時、$\theta$ の値は 30° と 150°。したがって $\cos 2\theta + 6\text{sen}^2\theta - 1 + (2\sqrt{2} - 2)\text{sen}\,\theta - \sqrt{2} = 0$ の方程式の解は $\theta = 30°$、150°、225°、315°。

### 問題

$0° \le \theta < 360°$ の方程式を求めてください。

a) $\cos 2\theta + \cos\theta = 0$
b) $\cos 2\theta + 3\text{sen}\,\theta - 2 = 0$
c) $\cos 2\theta + \text{sen}\,\theta = 0$
d) $\cos 2\theta + 4\cos\theta = -3$
e) $\cos 2\theta - \sqrt{3}\cos\theta - 2 = 0$

## 2.4 三角方程式、第四部（サインの倍角の使用）

### 導入問題

三角方程式 sen $2\theta$ + cos $\theta = 0$ を解き、$0° \le \theta < 360°$ を求めましょう。

### 解法

サインの倍角の証明を利用し、分かる事は

$$\text{sen}\,2\theta + \cos\theta = 0$$
$$\Rightarrow \quad 2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + \cos\theta = 0 \quad \text{倍角の証明を利用し、}$$
$$\Rightarrow \quad \cos\theta(2\text{sen}\,\theta + 1) = 0 \quad \text{因数分解し、}$$
$$\Rightarrow \cos\theta = 0 \text{ もしくは } 2\text{sen}\,\theta + 1 = 0\text{。}$$

- $\cos\theta = 0$ であれば $\theta = 90°$ もしくは $\theta = 270°$ となります。
- $2\text{sen}\,\theta + 1 = 0 \Rightarrow 2\text{sen}\,\theta = -1 \Rightarrow \text{sen}\,\theta = -\frac{1}{2}$ であれば、その後、$\text{sen}\,\theta = -\frac{1}{2}$ が成り立つのは $\theta = 180° + 30° = 210°$ もしくは $\theta = 360° - 30° = 330°$ の時です。

よって sen $2\theta$ + cos $\theta = 0$ の解答は $0° \le \theta < 360°$ となり、$\theta = 90°$、$210°$、$270°$、$330°$ が分かります。

### まとめ

sen $2\theta$ という表現が三角方程式にて出題される際、サインの倍角の証明、sen $2\theta = 2$ cos $\theta$ sen $\theta$ を利用し、角度 $\theta$ のみの結果が出る方程式に変換する必要があります。通常解くには因数分解し、二通りの三角関数の値を求めるのですが、そのためには満足する角度を求める必要があります。

### 例

方程式 sen $2\theta$ + 2sen $\theta = 0$ を解き $0° \le \theta < 360°$ を求めてください。

サインの倍角の証明を利用して分かる事は

$$\text{sen}\,2\theta + 2\text{sen}\,\theta = 0$$
$$\Rightarrow \quad 2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + 2\text{sen}\,\theta = 0$$
$$\Rightarrow \quad 2\text{sen}\,\theta(\cos\theta + 1) = 0$$

ここで分かる事は sen $\theta = 0$ もしくは $\cos\theta + 1 = 0$。

- sen $\theta = 0$ であれば、$\theta$ は $0°$ もしくは$180°$ となります。
- $\cos\theta + 1 = 0$ であれば、$\cos\theta = -1$ となるので、$\theta = 180°$。

したがって、方程式 sen $2\theta$ + 2sen $\theta = 0$ の解は $\theta = 0°$、$180°$。

### 問題

$0° \le \theta < 360°$ の方程式を求めてください。

a) sen $2\theta$ + sen $\theta = 0$

b) sen $2\theta - \sqrt{3}$sen $\theta = 0$

c) sen $2\theta$ = sen $\theta$

d) sen $2\theta + \sqrt{2}\cos\theta = 0$

e) sen $2\theta - \cos\theta = 0$

f) sen $2\theta$ + 2sen $\theta = 0$

## 2.5 三角方程式、第五部*

### 導入問題

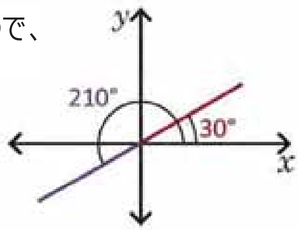
方程式 $\tan 2\theta = \cot\theta$ を解き $0° \le \theta < 360°$ を求めてください。

### 解法

タンジェントの倍角証明と $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ を利用します。

$$\tan 2\theta = \cot\theta \;\Rightarrow\; \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$$
$$\Rightarrow (2\tan\theta)(\tan\theta) = 1 - \tan^2\theta$$
$$\Rightarrow 2\tan^2\theta = 1 - \tan^2\theta$$
$$\Rightarrow 3\tan^2\theta = 1 \;\Rightarrow\; \tan^2\theta = \frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow \tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

その後、二つの式が確認されます。$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ の時と、$\tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ の時です。ですので、




- $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ であれば $\theta = 30°$ もしくは $\theta = 180° + 30° = 210°$。
- $\tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ であれば、$\theta = 180° - 30° = 150°$ もしくは $\theta = 360° - 30° = 330°$。

よって、三角方程式 $\tan 2\theta = \cot\theta$ の解は $0° \le \theta < 360°$ となるので、$\theta = 30°$、$150°$、$210°$、$330°$。

### まとめ

三角方程式にセカント、コセカント、コタンジェントが確認される場合、これらとコサイン、サイン、タンジェントの関係性を利用し、後者の3点のみが残る方程式に変換します。

### 例

$\sec\theta\csc\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sec\theta = 0$ を解いて、$0° \le \theta < 360°$ を求めてください。

共通因数 $\sec\theta$ が確認されます。ですので、因数分解によって解くことができます。

$$\sec\theta\csc\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sec\theta = 0 \;\Rightarrow\; \sec\theta\left(\csc\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 0$$

このことから、$\sec\theta = 0$ もしくは $\csc\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3} = 0$ という事がわかります。ですので、

- $\sec\theta = 0$ という事は $\frac{1}{\cos\theta} = 0$。しかしこれは可能ではありません。何故ならば分子が0の場合のみに分数が0となるからです。よってこの方程式は解くことができません。
- もしくは $\csc\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3} = 0$ なので、$\csc\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$。しかし、$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$。
  これが起こるのは $\theta$ の値が $60°$ と $120°$ になる場合です。

よって $\sec\theta\csc\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sec\theta = 0$ の結果は $0° \le \theta < 360°$ の時に $\theta = 60°$、$120°$ となります。

### 問題

$0° \le \theta < 360°$ の方程式を求めてください。

a) $2\sec\theta + 3 = \sec\theta + 5$

b) $\sec\theta\csc\theta + \sqrt{2}\csc\theta = 0$

c) $2\operatorname{sen}\theta + 1 = \csc\theta$

d) $3\csc\theta + 5 = \csc\theta + 9$

e) $4(\cot\theta + 1) = 2(\cot\theta + 2)$　$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

f) $\sec\theta + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

ユニット6

## 2.6 学んだことをやってみましょう

各方程式を解き $0° \leq \theta < 360°$ を求めてください。

a) $5(\cos\theta + 1) = 5$

b) $4\text{sen}\,\theta - 1 = 2\text{sen}\,\theta + 1$

c) $3(\tan\theta - 2) = 2\tan\theta - 7$

d) $3\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

e) $\tan^2\theta - 3 = 0$

f) $\cos^2\theta + \text{sen}\,\theta = 1$

g) $1 + \text{sen}\,\theta - \cos^2\theta = 0$

h) $\cos^3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta = 0$

i) $\cos 2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$

j) $3\cos 2\theta - 4\cos^2\theta + 2 = 0$

k) $\text{sen}\,2\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta = 0$

l) $\text{sen}\,2\theta = \tan\theta$

m) $2\tan\theta = 1 + \tan^2\theta$

n) $\tan\theta - 3\cot\theta = 0$

## 2.7 ユニットの問題

問 1 には sen(α + β) の値を求め、角度加算の証明を利用します。

1. $0° < \alpha < 90°$, $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$ と $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{4}{5}$ であれば、sen β、cos β、tan β の値を求めてください。

2. $0° \leq \theta < 360°$ であれば、各方程式を解いてください。

   a) $\text{sen}\,2\theta - 3\cos\theta = 0$

   b) $\cos 2\theta - \text{sen}\,\theta - 1 = 0$

3. $A + B + C = 180°$ であれば、$\text{sen}(B + C) = \text{sen}\,A$ という事を証明してください。

4. $\tan 35° = x$ であれば、証明してください

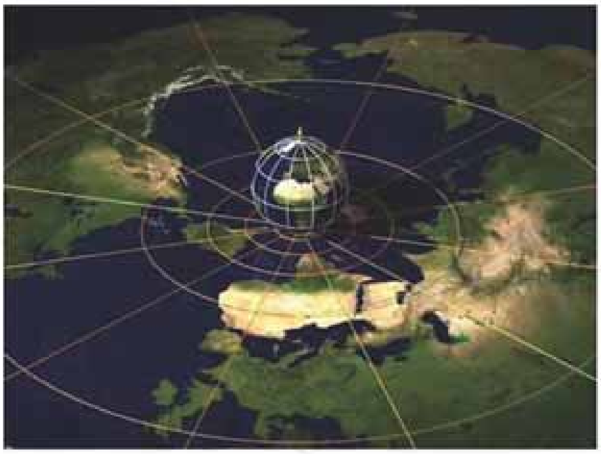
$$\frac{\tan 145° - \tan 125°}{1 + \tan 145° \tan 215°} = \frac{1}{x}.$$

5. 角度 $\theta$ は $\text{sen}(\theta + 30°) = \frac{3\sqrt{3} + 4}{10}$ と $\text{sen}(\theta - 30°) = \frac{3\sqrt{3} - 4}{10}$ となります。sen θ と cos θ の値を求めてください。

ユニット
7

# ベクトルと複素数

ベクトルの概念は、物理学からのニーズとして数学で発生しました。というのも、17 世紀頃、動的現象を定量化する、つまり、運動に数学的な表現を提供する必要があったからです。その時代には、抽象代数学はかなり進歩しており、一般的な数体系の値から分離し、特定の性質を持つあらゆる数値領域で代数学の成果を得ていました。また、それまでは構造が単に代数的だった複素数の概念が形成されました。19 世紀の初めにドイツの数学者デデキントとロシアのカントールによって実数が理論的に確立された後、1843 年にアイルランドの数学者ハミルトンによって、複素数の集合の幾何学的表現が、複素平面上の有向線分または順序対として進歩しました。このような状況の中で、ベクトル解析の数学的領域が構築されます。


地図作成のための立体投影（ベクトル解析）の使用

ベクトル解析は、運動、速度、加速度、力、電荷、電場、熱などの現象をモデル化するための基本的なツールを物理学にもたらしました。さらに、ベクトル解析の分野自体、ここ数世紀、地図の作成（製図法）や宇宙のモデリング、空間軌道、宇宙での衛星の位置など、さまざまな分野で応用されてきました。

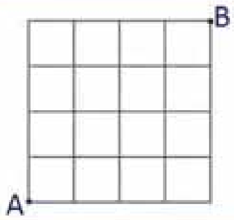
このユニットでは、ベクトルについての考え方と基本的概念、それらを使用して行うことができる演習、内積の概念の重要性、ベクトルの概念と複素数のグラフとの関係を学習し、最後に、学習内容を強化するために、GeoGebra を使った演習をいくつか行います。

## 1.1 ベクトル

### 導入問題

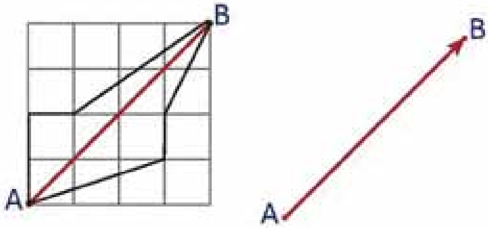
ある人がサンサルバドルの点 A に位置していて、点 B に移動したがっています。解を求めなさい。

a) A から B に行く方法を最低でも3つ。
b) A から B に行くための最短ルート。
c) B から A ではなく、A から B に行くルートであるという表現方法。




### 解法

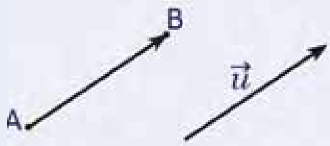
a) 右の図には A から B に行く選択肢がいくつか示されています。
b) A から B に行く最短ルートは赤色でしめされています。
c) このルートが A から B に続いていると表現する方法として出来るのは図に示されているような矢印を使う事です。



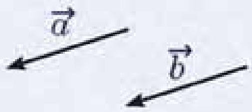

### 定義

A から**開始**し、B にて**終了**する矢印は**方向セグメント**として知られています。

長さが等しく、同じ方角（傾斜）と方向（矢印の指す方向）を指すセグメントの集団は**ベクトル**として知られています。あるベクトルに依存するセグメントにあるベクトルを表します。該当するセグメントの開始点が A で終了点が B とした場合、ベクトルを $\overrightarrow{AB}$ とします。ベクトルの開始点と終了点で表現しない場合、小文字の $a$、$b$、$c$、等の様にも表記できます。例として、$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$。

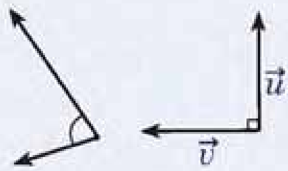



二つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は表現するセグメントが同じ長さ、方角、方向であれば同じであり、平行移動により各々計算する事が出来ます。



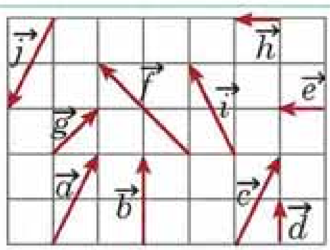

ベクトル $\vec{u}$ の長さは**ルール**としてベクトル $\vec{u}$ より知ることが出来、$\|\vec{u}\|$ として表現されます。ベクトル $\vec{u}$ はルールが 1 であれば、**単体**とします。よって、$\|\vec{u}\| = 1$ となります。

二つの**ベクトルの間の角度**については開始点を繋ぎ測定する事ができ、0° から 180° の値が用いられます。二つのベクトル、$\vec{u}$ と $\vec{v}$ は双方で出来る角度が 90° であれば、**直行投影**となります。

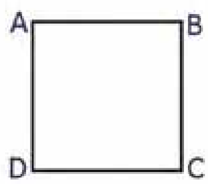



### 問題

1. 各マスの四角形が 1 とした場合、そこに記載のベクトルに関して次を答えてください。
   a) どのベクトルが同一ですか？
   b) いくつのベクトルが同一のルールを共有していますか？
   c) どのベクトルが単体ですか？
   d) どのベクトルが直行投影ですか？




2. ABCD の側面を 1 としたときに次を答えてください。
   a) どのベクトルが同一ですか？
   b) ベクトル $\overrightarrow{AC}$ のルールは？
   c) どのベクトルが単体ですか？
   d) どのベクトルが直行投影ですか？



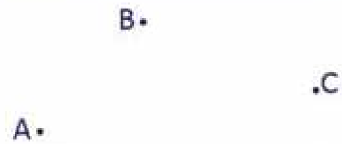
## 1.2 ベクトルの足し算と引き算

### 導入問題

次の文字式を解いてください。

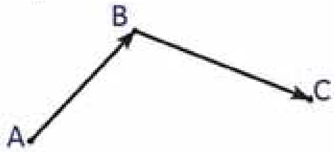
a) B を通過しながら A から C へ行く方法をベクトルで表現してください。

b) C を通過しながら A から B へ行く方法をベクトルで表現してください。

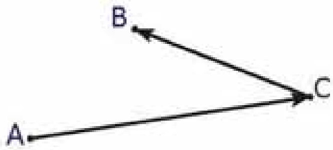



### 解法

a) 表現としては：

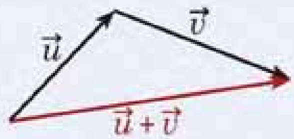



b) 表現としては：




### 定義

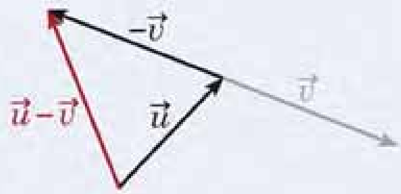
ベクトル $\vec{u}$ の最終点を別のベクトル $\vec{v}$ の開始点とつなげると、**ベクトルのたし算**が確立されます。図の通り、そのベクトルの開始点を $\vec{u}$ とし、最終点を $\vec{v}$ となります。冒頭問題の文字式 a) では $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ が確認されます。




3つのベクトルにより $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ が確認され、$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$（交換法則）と $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$（結合法則）。

ベクトル $\overrightarrow{AB}$ によりベクトル $\overrightarrow{BA}$ が確定され、ベクトル $\overrightarrow{AB}$ の**相対**は $-\overrightarrow{AB}$ となる，ので、結果としては $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$ となります。

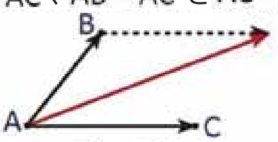

図に示す通り、ベクトル $\vec{u}$ とベクトル $\vec{v}$ の**ひき算**をベクトル $\vec{u}$ と $-\vec{v}$ のたし算 $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$ と確認します。冒頭問題の文字式 b) では $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$ が確認されます。



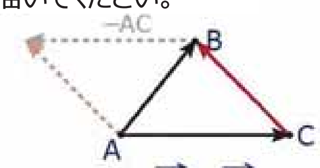

ひき算 $\vec{u}-\vec{u}=\vec{u}+(-\vec{u})$ を実施する事で分かるベクトルは零ベクトルとして知られており、$\vec{0}$ となるので、$\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$ となります。

### 例

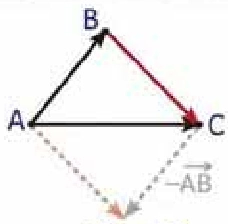
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ を描いてください。




$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$




$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$




$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

これらのベクトルの表現はとても重要になります。

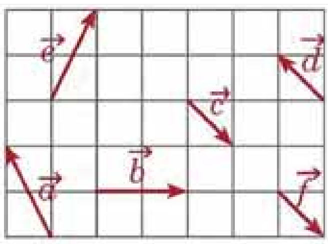
### 問題

ノートにマス目のベクトルを描き、各文字式の表すベクトルを特定してください。

a) $\vec{a}+\vec{b}$　b) $\vec{a}+\vec{c}$　c) $\vec{c}+\vec{d}$

d) $\vec{a}+\vec{e}+\vec{c}$　e) $\vec{a}-\vec{b}$　f) $\vec{d}-\vec{f}$

g) $\vec{c}-\vec{f}$　h) $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$




ユニット7

## 1.3 内積

### 導入問題

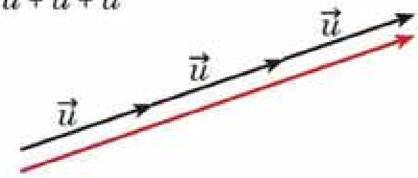
次のベクトルの足し算にて結果として得られるベクトルを描いてください。

a) $\vec{u}+\vec{u}+\vec{u}$

b) $-\vec{u}-\vec{u}$


### 解法

a) $\vec{u}+\vec{u}+\vec{u}$




b) $-\vec{u}-\vec{u}$


### 定義

ベクトル $\vec{u}$ と実数では $\vec{u} \neq \vec{0}$ と $r \neq 0$ なので内積が確認できるので $(r > 1)$ もしくは $(0 < r < 1)$ 同一の方向にて $(r > 0)$ もしくは反対側に $(r < 0)$ 画で表現でき、結論として $r\vec{u}$。

内積では次が成り立ちます。$\|r\vec{u}\| = |r|\|\vec{u}\|$。$0\vec{u} = \vec{0}$ で、$r\vec{0} = \vec{0}$。

$r > 1$ $\quad$ $0 < r < 1$ $\quad$ $-1 < r < 0$ $\quad$ $r < -1$


ベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ を考慮すると、実数 $r$ と $s$、内積の次の特性が成り立ちます。

1. $r(s\vec{u}) = rs\vec{u}$ $\quad$ 2. $(r+s)\vec{u} = r\vec{u} + s\vec{u}$ $\quad$ 3. $r(\vec{u}+\vec{v}) = r\vec{u} + r\vec{v}$

$\vec{0}$ とは異なるベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ はこれらは表現するベクトルに対するセグメントが**平行**の場合、それ自体も平行となります。という事は実数 $r$ が存在し、よって $\vec{u} = r\vec{v}$ 。

### 例

$\vec{u}$ と $\vec{v}$ より表現 $2(2\vec{u}+3\vec{v})-3(2\vec{u}-\vec{v})$ からなるベクトルを求めてください。

$$\begin{aligned} 2(2\vec{u}+3\vec{v})-3(2\vec{u}-\vec{v}) &= 2(2\vec{u})+2(3\vec{v})+(-3)(2\vec{u})+(-3)(-\vec{v}) \\ &= 4\vec{u}+6\vec{v}+(-6\vec{u})+3\vec{v} \\ &= -2\vec{u}+9\vec{v} \end{aligned}$$

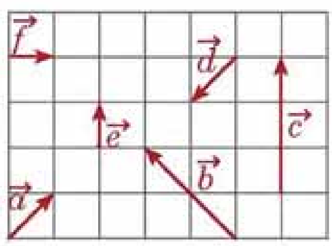
$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ を復習しよう。

### 問題

1. 自身のノートにマス目のベクトルを描き、各文字式が示すベクトルを求めましょう。

a) $4\vec{e}$ $\quad$ b) $4\vec{a}$ $\quad$ c) $\frac{1}{3}\vec{c}$

d) $-3\vec{f}$ $\quad$ e) $-\frac{3}{2}\vec{b}$ $\quad$ f) $2\vec{d}+3\vec{e}$




2. $\vec{u}$ と $\vec{v}$ より各表現の結果からなるベクトルを求めてください。

a) $4\vec{u}+3\vec{v}-\vec{u}-2\vec{v}$ $\quad$ b) $(\vec{u}-2\vec{v})-(-3\vec{u}+2\vec{v})$ $\quad$ c) $3(2\vec{u}+4\vec{v})$ $\quad$ d) $3(-2\vec{u}+\vec{v})-2(3\vec{u}-4\vec{v})$

## 1.4 底辺でのベクトルの座標*

### 導入問題

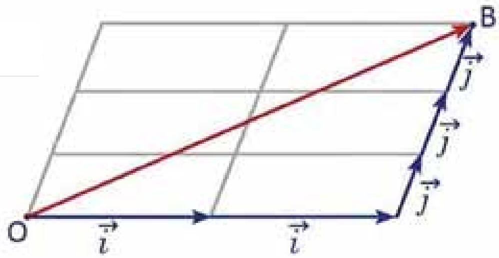
次の図は平行四辺形で、ベクトル $\overrightarrow{OB}$ とベクトル $\vec{i}$ と $\vec{j}$ を表します。


### 解法

ベクトル $\overrightarrow{OB}$ はベクトル $\vec{i}$ と $\vec{j}$ のたし算として合わせる事が出来ます。

$$\overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{i} + \vec{j} + \vec{j} + \vec{j}.$$

内積を利用して $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ が成り立ちます。




### まとめ

ベクトルのペア $\vec{i}$、$\vec{j}$ は双方とも $\vec{0}$ とは違い、平行でありません。これらは**ベクトルの底辺**として知られます。

点 O は ベクトルの底辺の**原点**として知られ、全てのベクトル $\vec{u}$ では点 M となる $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ が成り立ちます。そして全てのベクトル $\overrightarrow{OM}$ では唯一の整数 $x$、$y$ である $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ が存在します。そしてこれらのベクトルはペア $\overrightarrow{OM} = (x, y)$ として表せます。これらのペア $(x, y)$ は OM のベクトルの座標として知られ、その底辺は $(\vec{i}, \vec{j})$ となります。

底辺が**直行投影**となるのは $\vec{i}$ と $\vec{j}$ が直行投影であり、底辺が**正規直行**系 となるのは直行投影でありながら $\vec{i}$ も $\vec{j}$ も単体 （ルールはイコール 1） となる時です。

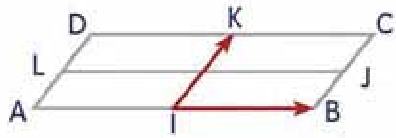
### 例

ベクトル $\overrightarrow{IC}$、$\overrightarrow{IB}$、$\overrightarrow{IK}$、$\overrightarrow{IJ}$、$\overrightarrow{IA}$、$\overrightarrow{ID}$ を底辺の $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IK})$ で座標を求めて下さい。

$\overrightarrow{IC} = (1)\overrightarrow{IB} + (1)\overrightarrow{IK}$　　$\overrightarrow{IB} = (1)\overrightarrow{IB} + (0)\overrightarrow{IK}$

$\overrightarrow{IK} = (0)\overrightarrow{IB} + (1)\overrightarrow{IK}$　　$\overrightarrow{IJ} = (1)\overrightarrow{IB} + \left(\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{IK}$

$\overrightarrow{IA} = (-1)\overrightarrow{IB} + (0)\overrightarrow{IK}$　　$\overrightarrow{ID} = (-1)\overrightarrow{IB} + (1)\overrightarrow{IK}$



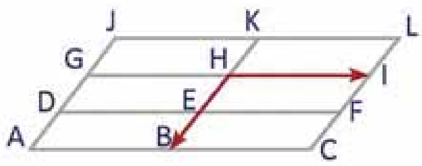

したがって、ベクトルの座標は $(1, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $(-1, 0)$, $(-1, 1)$ 。

### 問題

底辺 $(\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HB})$ を考慮し、各文字式のベクトルの座標を求めて下さい。

a) $\overrightarrow{HA}$　　b) $\overrightarrow{HK}$　　c) $\overrightarrow{HF}$　　d) $\overrightarrow{HJ}$

e) $\overrightarrow{HH}$　　f) $\overrightarrow{HI}$　　g) $\overrightarrow{HB}$　　h) $\overrightarrow{HE}$



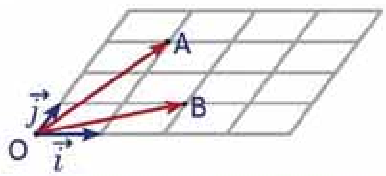
## 1.5 座標におけるベクトルの計算

### 導入問題

次のベクトルを底辺 $(\vec{i},\ \vec{j})$ で求めてください。

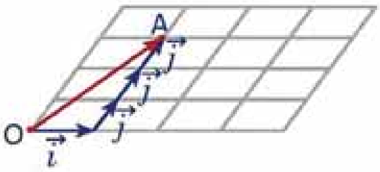
a) $\overrightarrow{OA}$　　b) $\overrightarrow{OB}$　　c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

d) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$　　e) $2\overrightarrow{OB}$　　f) $\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$




### 解法

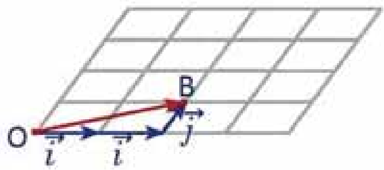
a)




$\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 3\vec{j}$

$\overrightarrow{OA} = (1, 3)$

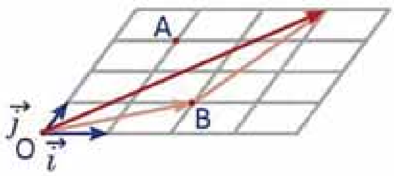
b)




$\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + \vec{j}$

$\overrightarrow{OB} = (2, 1)$

c)



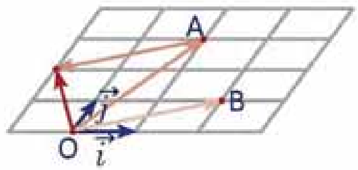

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{i} + \vec{j}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (3, 4)$

N (3, 4) = (1 + 2, 3 + 1) です。

d)



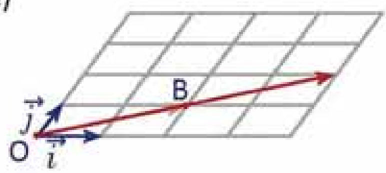

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \vec{i} + 3\vec{j} - (2\vec{i} + \vec{j})$

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = -\vec{i} + 2\vec{j}$

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (-1, 2)$

(–1, 2) = (1 – 2, 3 – 1) です。

e)



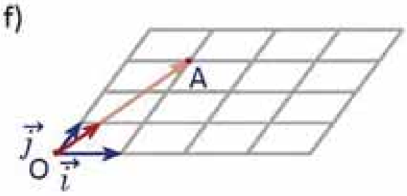

$2\overrightarrow{OB} = 2(2\vec{i} + \vec{j})$

$2\overrightarrow{OB} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$

$2\overrightarrow{OB} = (4, 2)$

(4, 2) = (2 × 2, 2 × 1) です。

f)




$\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}(\vec{i} + 3\vec{j})$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\vec{i} + \vec{j}$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$

$\left(\frac{1}{3}, 1\right) = \left(\frac{1}{3} \times 1, \frac{1}{3} \times 3\right)$ です。

### まとめ

二つのベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ でその座標が $\vec{u} = (x, y)$ と $\vec{v} = (x', y')$ で整数 $r$ の場合成り立つのは

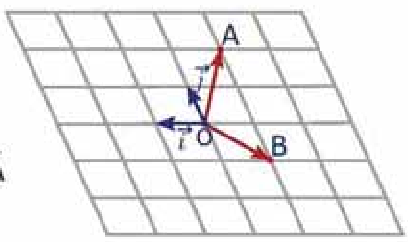
$\vec{u} + \vec{v} = (x + x', y + y')$　　$\vec{u} - \vec{v} = (x - x', y - y')$　　$r\vec{u} = (rx, ry)$

### 問題

次のベクトルを底辺 $\vec{i}$、$\vec{j}$ で求めてください。

a) $\overrightarrow{OA}$　　b) $\overrightarrow{OB}$　　c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$　　d) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$

e) $-3\overrightarrow{OB}$　　f) $\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$　　g) $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$　　h) $3\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OA}$



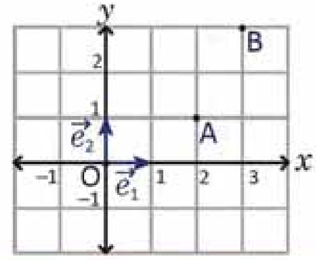
## 1.6 点のベクトルと座標

### 導入問題

図上には A(2, 1) と B(3, 3) は 2 つの点で、正規直行底辺上に座標 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ を持ちます。

a) ベクトル $\overrightarrow{AB}$ の座標を計算してください。

b) ベクトル $\overrightarrow{AB}$ のルールを求めて下さい。




### 解法

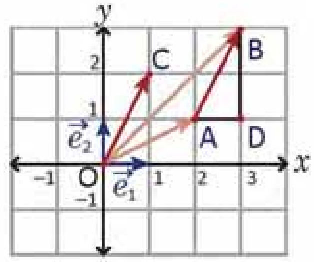
a) $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ の正規直交基底上にて (2, 1) と (3, 3) を座標にもつベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を考慮します。

すると、次の式が成り立ちます。

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{AB} = (3, 3) - (2, 1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (1, 2) = \overrightarrow{OC}.$$




b) このベクトルのルールはピタゴラスの公式を利用して ΔABD を計算する事で求めることができます。よって、

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}\,.$$

### まとめ

ベクトル $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$ 、$\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ を定義する図上の点 $E_1$(1、0) と $E_2$(0、1) を考慮します。

ベクトル $\vec{e}_1$ と $\vec{e}_2$ は正規直交基底を構成します。

図上の点 A$(x, y)$ では $\overrightarrow{OA} = (x, y)$ が成り立ち、底辺 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ となり、$\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ です。

B$(x', y')$ が別の点であれば、下記のようになります。

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x' - x, y' - y) \qquad \text{そして、}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}\,.$$

### 問題

1. 点 A と B は上記の底辺 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ により、ベクトル $\overrightarrow{AB}$ の座標とベクトルのルールを確定します。

a) A = (2, 1); B = (3, 1)　　b) A = (3, 0); B = (1, 2)　　c) A = (1, 1); B = (0, 2)

d) A = (0, 1); B = (−2, 1)　　e) A = (−1, −3); B = (−1, −2)　　f) A = (1, −1); B = (1, −1)

2. ベクトル $\vec{u} = (2, 4)$ と点 A = (1, 3) の底辺 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ の座標を考慮し、$\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ を満たす点 B の座標を求めてください。

ユニット 7

## 1.7 平行度

### 導入問題

ベクトル $\vec{u} = (2, 3)$ を考慮し、$\vec{u}$ $(\vec{u} \parallel \vec{v})$ に平行なベクトル $\vec{v} = (x, -9)$ の値 $x$ を求めてください。

### 解法

次を満たす整数 $r$ を考慮します。

$$\vec{v} = r\vec{u}$$
$$(x, -9) = r(2, 3)$$
$$(x, -9) = (2r, 3r)$$

二つのベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ は $\vec{0}$ と違い、整数 $r$ で $r\vec{u} = \vec{v}$ を満たす整数があると平行です。

そうすると順守すべきは

$$\begin{cases} x = 2r \ldots (1) \\ -9 = 3r \ldots (2) \end{cases}$$

その後、方程式 (2) を解き、 $r = (-9) \div 3 = -3.$

結果として最終的に $r$ の値を (1) に代入し： $x = 2(-3) = -6.$

したがってベクトル $\vec{v}$ の座標は(–6、–9)。

### まとめ

ベクトル $\vec{u} = (x, y) \neq \vec{0}$ において他のベクト $\vec{v}$ は $\vec{u}$ に対し平行で、ただしそれは整数 $r$ が $\vec{v} = (rx, ry)$ である事とします。

しかし、正規直行底辺にてベクトル $\vec{v}$ のルールにおいては次が成り立ちます。

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(rx)^2 + (ry)^2} = |r|\sqrt{x^2 + y^2} = |r|\|\vec{u}\|.$$

ベクトル $u = (x, y)$ は違います。零ベクトルは $x$ か $y$ と違う場合（双方込み）。

すべての整数 $r$ に対し $\sqrt{r^2} = |r|$ が成り立ちます。

### 例

ベクトル $\vec{u} = (-3, 4)$ に平行なベクトルでルールが 15 のものを特定してください。

もし $\vec{v}$ が $\vec{u}$ に平行なベクトルであれば、$\vec{v} = r\vec{u}$ が成り立ちますので、

$$\|\vec{v}\| = |r|\|\vec{u}\|$$
$$15 = |r|\sqrt{(-3)^2 + 4^2}$$
$$15 = 5|r|$$
$$|r| = 3$$
$$r = \pm 3,$$

よってベクトルは：$3\vec{u} = 3(-3, 4) = (-9, 12)$ と$-3\vec{u} = -3(-3, 4) = (9, -12)$。

### 問題

1. $\vec{v}$ の座標を計算し、$\vec{u}$ と $\vec{v}$ が平行になるようにしてください。

   a) $\vec{u} = (2, 1), \vec{v} = (x, 3)$　b) $\vec{u} = (3, 1), \vec{v} = (x, -3)$　c) $\vec{u} = (6, 3), \vec{v} = (2, x)$　d) $\vec{u} = (2, 4), \vec{v} = (-1, x)$

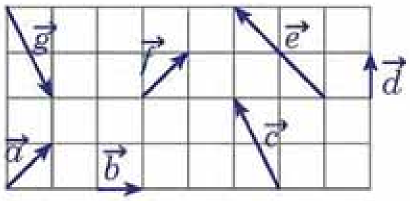
2. ベクトル $\vec{u}$ に対し適当なルールで平行なベクトルを特定してください。正規直交基底上にて座標を考慮してください。

   a) $\vec{u} = (4, 3)$, ルール 10　b) $\vec{u} = (-3, -4)$, ルール 1　c) $\vec{u} = (1, 2)$, ルール 5　d) $\vec{u} = (2, 2)$, ルール 4

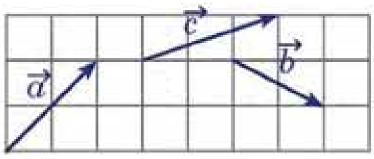
3. A = (1, 2)、B = (3, 5) と D = (0, 0) の場合に、平行四辺形 ABCD 上の点 C の座標を見つけてください。

## 1.8 学んだことで練習しましょう

1. 各マスの四角形が 1 とした場合、そこに記載のベクトルに関して次を答えてください。
   a) どのベクトルが同一ですか？
   b) いくつのベクトルが同一のルールを共有していますか？
   c) どのベクトルが単体ですか？
   d) どのベクトルが直行投影ですか？

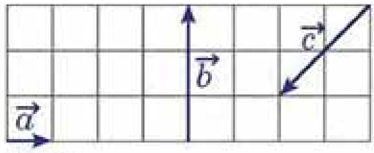



2. ノートにマス目のベクトルを描き、各文字式の表すベクトルを特定してください。




   a) $\vec{a}+\vec{b}$　　b) $\vec{c}-\vec{b}$
   c) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$　　d) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

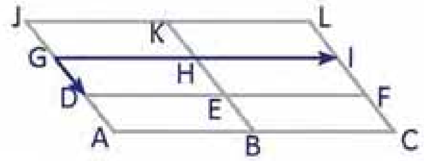
3. ノートにマス目のベクトルを描き、各文字式の表すベクトルを特定してください。



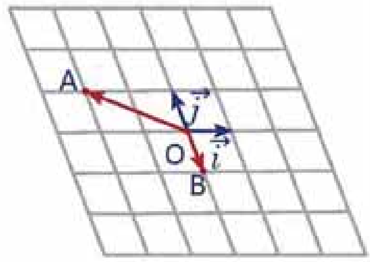

   a) $4\vec{a}$　　b) $\frac{1}{3}\vec{b}$
   c) $-\frac{3}{2}\vec{c}$　　d) $-3\vec{a}+\vec{b}$

4. $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の場合に、各表現の結果のベクトルを求めて下さい。
   a) $2\vec{u}+\vec{v}-3\vec{u}-\vec{v}$　　b) $(3\vec{u}-\vec{v})-(-2\vec{v}-3\vec{u})$　　c) $-2(3\vec{u}-2\vec{v})$　　d) $2(-\vec{u}+3\vec{v})-3(\vec{u}+2\vec{v})$

5. 底辺 $(\overrightarrow{GI}, \overrightarrow{GD})$ を考慮し、各文字式のベクトルの座標を求めて下さい。
   a) $\overrightarrow{GC}$　　b) $\overrightarrow{GL}$　　c) $\overrightarrow{GB}$　　d) $\overrightarrow{GK}$




6. 次のベクトルを底辺 $\vec{i}, \vec{j}$ で求めてください。
   a) $\overrightarrow{OA}$　　b) $\overrightarrow{OB}$　　c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$　　d) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$
   e) $-2\overrightarrow{OB}$　　f) $\frac{5}{3}\overrightarrow{OB}$　　g) $\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$　　h) $-2\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}$




7. 点 A と B は上記の底辺 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ により、ベクトル $\overrightarrow{AB}$ の座標とベクトルのルールを確定します。
   a) A = (3, 1); B = (4, 2)　　b) A = (–2, 1); B = (–3, 2)　　c) A = (–1, –1); B = (–3, –2)

8. ベクトル $\vec{u}=(-2, 1)$ とベクトル $\overrightarrow{OA}=(3, 5)$ の座標を考慮します。$\overrightarrow{OB}$ で $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ を満たすベクトルの座標を求めてください。

9. $\vec{v}$ の座標を計算し、$\vec{u}$ と $\vec{v}$ が平行になるようにしてください。
   a) $\vec{u}=(1, 3)$, $\vec{v}=(x, 12)$　　b) $\vec{u}=(3, 9)$, $\vec{v}=(x, -6)$

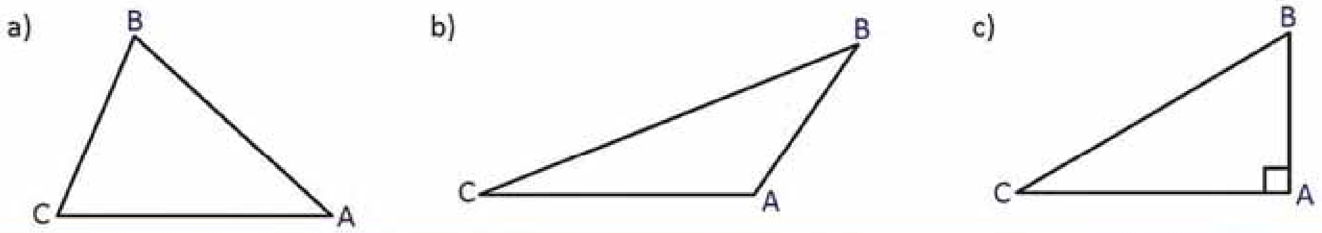
10. ベクトル $\vec{u}$ に対し適当なルールで平行なベクトルを特定してください。座標を考慮してください。
    正規直交基底上にて。
    a) $\vec{u}=(3, 2)$, ルール 13　　b) $\vec{u}=(-2, -4)$, ルール 10

ユニット 7

## 2.1 直行投影

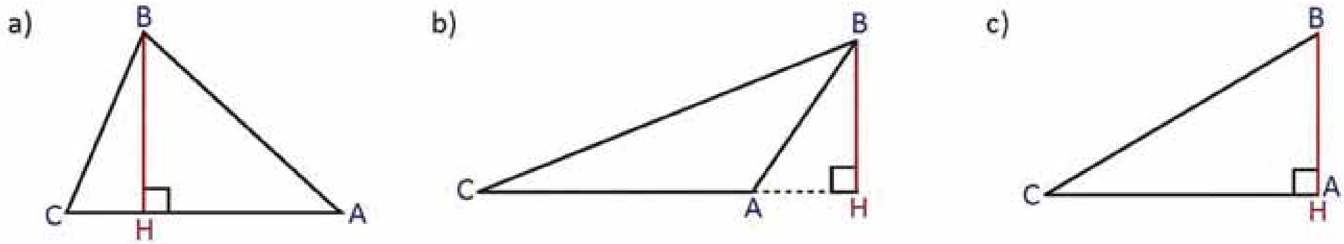
### 導入問題

以下の三角形のそれぞれについて、頂点 B から基底部 AC までの高さが求められる点を決定します。



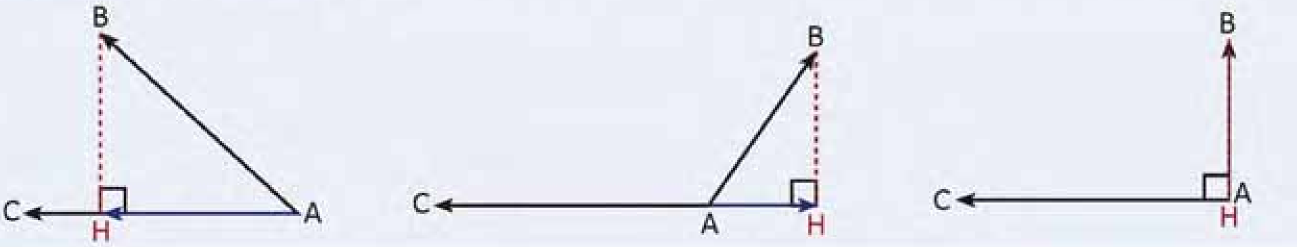

### 解法

各三角形の高さをポイントし、基底部の点を特定します。



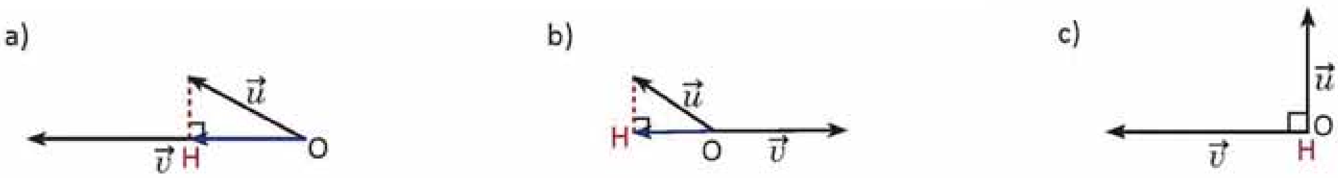

### まとめ

$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の 2 つのベクトルが与えられると、$\overrightarrow{AC}$ 上の $\overrightarrow{AB}$ の直交投影はベクトル $\overrightarrow{AH}$ で定義され、$\overrightarrow{BH}$ が $\overrightarrow{AC}$ と直交することになります。



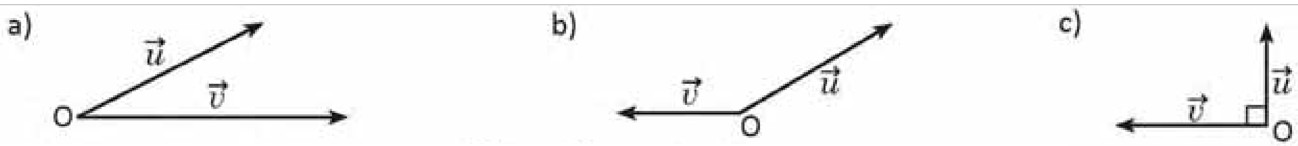

### 例

それぞれについて、$\vec{v}$上の $\vec{u}$ の 直交投影を決定してください。

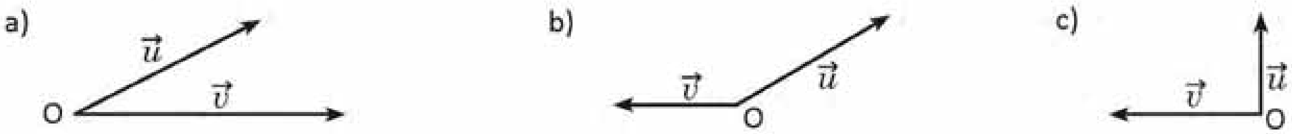



### 問題

1. それぞれについて、$\vec{v}$ 上の $\vec{u}$ の 直交投影を描いてください。




2. それぞれについて、$\vec{u}$ 上の $\vec{v}$ の直交投影を描いてください 。



## 2.2 平行ベクトルの内積

### 定義

$\vec{u}$ と $\vec{v}$ を 2 つの平行な（共線の）ベクトルとします 。$\vec{u}$ と $\vec{v}$ の内積は $\vec{u}\cdot\vec{v}$ で 表され、次のように定義されます。

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\begin{cases}\vec{u}\text{ と }\vec{v}\text{ が 同じ方向ならば、}\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\text{ です。}\\ \vec{u}\text{ と }\vec{v}\text{ が 違う方向ならば、}-\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\text{ です。}\end{cases}$$

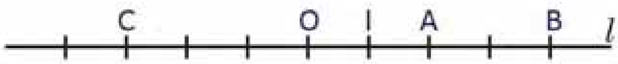
$\vec{u}=0$ または $\vec{v}=0$ のとき、$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ と定義されます。ここに数式を入力します。

### 例 1

線分 $l$ は等分に分割されていて、$\overrightarrow{OI}$ ベクトルは 1 とします。下記を定義しなさい。

a) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$　　b) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$

c) $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{CB}$　　d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$




a) この場合は両方、$\overrightarrow{OA}$ も $\overrightarrow{OB}$ も同じ方向です。
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\|\overrightarrow{OA}\|\,\|\overrightarrow{OB}\|=2\times4=8.$


b) この場合 $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ は違う方向です。
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=-\|\overrightarrow{OA}\|\,\|\overrightarrow{OC}\|=-(2\times3)=-6.$


c) この場合は両方、$\overrightarrow{IA}$ も $\overrightarrow{CB}$ も同じ方向です。
$\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{CB}=\|\overrightarrow{IA}\|\,\|\overrightarrow{CB}\|=1\times7=7.$


d) この場合 $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は違う方向です。
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\|\overrightarrow{AB}\|\,\|\overrightarrow{AC}\|=-(2\times5)=-10.$


### 例 2

A と B は AB＝4 になるような 2 点とします。次の各条件について $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$ を計算しなさい。

a) A は BM の中間点です。


$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-(4\times4)=-16$

b) B は AM の中間点です。


$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=4\times8=32$

c) M は AB の中間点です。


$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=4\times2=8$

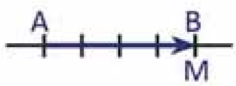
### 例 3

A と B は AB＝4 になるような 2 点とします。各論理式の条件を満たす AB 線上の点 M を表しなさい。

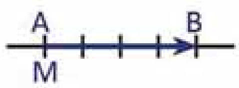
a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=8$


b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-12$


c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=16$




d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

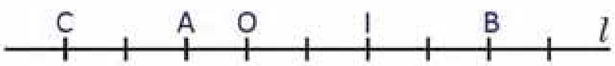



### 問題

1. 線分 $l$ は等分に分割されていて、$\overrightarrow{OI}$ ベクトルは 1 とします。下記を定義しなさい。

a) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$　　b) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$

c) $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{CB}$　　d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$




2. A と B は AB＝2 になるような 2 点とします。次の各条件について $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$ を計算しなさい。

a) A は BM の中間点です。　　b) B は AM の中間点です。　　c) M は AB の中間点です。

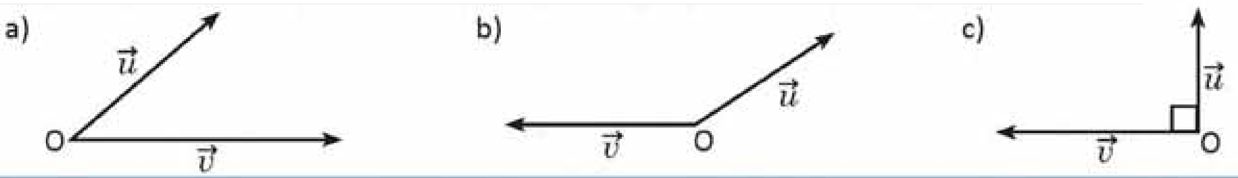
3. A と B は AB＝6 になるような2点とします。各論理式の AB 線上に点 M を描きなさい。

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=24$　　b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-3$　　c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-36$　　d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

## 2.3 平行ではない（共線ではない）ベクトルの内積

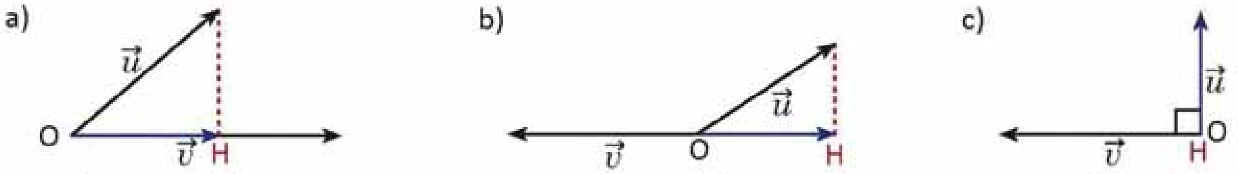
### 導入問題

ベクトル $\vec{v}$ の内積をベクトル $\vec{v}$ への $\vec{u}$ の投影で表現しなさい。




### 解法

$\vec{u}$ の $\vec{v}$ への直交投影です。




a) $\vec{v}\cdot\overrightarrow{OH} = \|\vec{v}\|\|\overrightarrow{OH}\|$　b) $\vec{v}\cdot\overrightarrow{OH} = -\|\vec{v}\|\|\overrightarrow{OH}\|$　c) $\vec{v}\cdot\overrightarrow{OH} = \vec{v}\cdot\vec{0} = 0$

### 定義

$\vec{u}$ と $\vec{v}$ は 2 つの非平行ベクトルであるとし、$\vec{u}'$ を $\vec{v}$ に対する $\vec{u}$ の直交投影、$\vec{v}'$ を $\vec{u}$ に対する $\vec{v}$ の直交投影とします。すると，$\vec{u}'\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v}'$ となります。ベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の内積は次式で定義されます。

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}'\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v}'$$

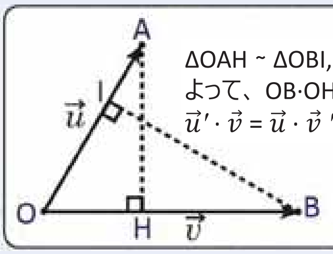
内積計算において，実数 $r$ と 3 つのベクトル $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ は以下の性質を満たします。

1) $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|\|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|^2$

2) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

3) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ , $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$

4) $\vec{u}\cdot(r\vec{v}) = (r\vec{u})\cdot\vec{v} = r(\vec{u}\cdot\vec{v})$




$\Delta OAH \sim \Delta OBI$,
よって、OB·OH = OA·OI。そして
$\vec{u}'\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v}'$。

内積は，2 つのベクトルが直交する場合，0 であり，その逆も同様です。（ゼロではない 2 つの異なるベクトルの内積が 0 であれば、ベクトルは直交しています）。

### 例

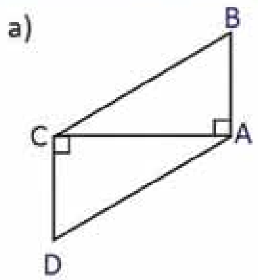
A の直角三角形を ABC とします。内積を表しなさい。

a) $AC\cdot BC = AC\cdot AD$
$= \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$
$= AC^2$

b) $CA\cdot BC = CA\cdot AC$
$= -AC^2$

c) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AB}$
$= -AB^2$

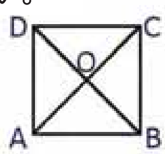
d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA}\cdot\overrightarrow{CA}$
$= \vec{0}\cdot\overrightarrow{CA}$
$= 0$




### 問題

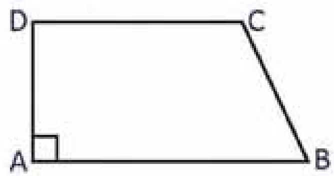
1. 正方形 ABCD があると考えて、次の内積を計算しなさい。以下の内積を計算しなさい。

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$　b) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AC}$　c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}$　d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$　e) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BO}$




2. AB=4、AD=2、CD=3 の直角台形 ABCD があります。
　以下の内積を計算しなさい。

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$　b) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AC}$　c) $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}$　d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$

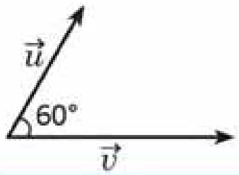


## 2.4 内積の三角関数的形状

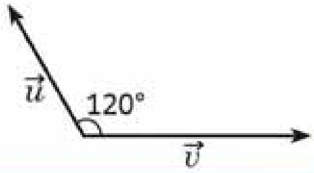
### 導入問題

$\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ であり、かつ、各ベクトル間の角度が $\alpha = 60°$ または $120°$ であることがわかっている場合の、$\vec{u}$ と $\vec{v}$ ベクトルの内積を計算しなさい。

a)




b)




三角比を使って内積を計算することができます。

参照すべき角度の三角比：

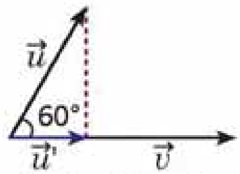
$\cos 60° = \frac{1}{2}$　$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$　$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$　$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$　$\text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

### 解法

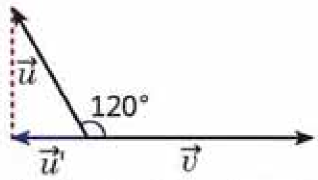
$\vec{v}$ 上に $\vec{u}$ の直交投影 $\vec{u}'$ があります。

a)




$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}' \cdot \vec{v} = \|\vec{u}'\|\ \|\vec{v}\|$

b)




$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}' \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}'\|\ \|\vec{v}\|$

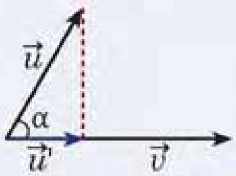
右式より：　$\cos 60° = \dfrac{\|\vec{u}'\|}{\|\vec{u}\|}$　　$\cos 120° = -\dfrac{\|\vec{u}'\|}{\|\vec{u}\|}$,

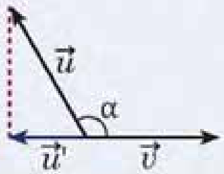
よって：　$\|\vec{u}'\| = \|\vec{u}\| \cos 60°$　　$\|\vec{u}'\| = -\|\vec{u}\| \cos 120°$,

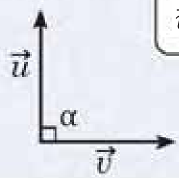
よって　$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}'\|\ \|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos 60° = 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 3$　　$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}'\|\|\vec{v}\| \cos 120° = 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -3.$

### まとめ

$\vec{u}$ と $\vec{v}$ の 2 つのベクトルを考えると $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\ \ \|\vec{v}\| \cos \alpha$ となります。




この式 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\| \cos \alpha$ から、簡単に $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ と導けます。

A α は、ベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の間に形成される角度と言います。

### 例

次のベクトルでは右の通りになります。$\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{3}$ そして $\vec{u} \cdot \vec{v} = 9$。ベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の間に形成される角度を決定しなさい。

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\ \ \|\vec{v}\| \cos \alpha$（α は $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の間の角度）になるので，ゆえに $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の間の角度を計算するには：

$$9 = 3(2\sqrt{3}) \cos \alpha.$$

したがって　$\cos \alpha = \dfrac{9}{6\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

$0° < \alpha \leq 180°$ なので、よって、$\alpha = 30°$。

このユニットの授業 1.1 で、2 つのベクトルの間の角度は 0° から 180° の間であることがわかっています。

### 問題

1. α が両方のベクトルの間に形成される角度であることを考えながら、$\vec{u}$ と $\vec{v}$ の内積を計算しなさい。

   a) $\|\vec{u}\| = 7$, $\|\vec{v}\| = 4$, $\alpha = 60°$　b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 4$, $\alpha = 30°$　c) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 45°$

2. 各論理式の $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の ベクトル間に形成される角度を言いなさい。

   a) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 4$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$　b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 2$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$　c) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = 3$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$

## 2.5 直交平面内のベクトルの内積

### 導入問題

直交基底 ( $\vec{\imath}$ , $\vec{\jmath}$ )、$\vec{u}$ = $(x, y)$ と $\vec{v}$ = $(x', y')$ 2 つのベクトル $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$、$\vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ を考慮しながら $\vec{u} \cdot \vec{v}$ を決定しなさい。

### 解法

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}) \cdot (x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath})$$

$= x\vec{\imath} \cdot x'\vec{\imath} + x\vec{\imath} \cdot y'\vec{\jmath} + y\vec{\jmath} \cdot x'\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \cdot y'\vec{\jmath}$ 法則 3 による

$= xx'(\vec{\imath} \cdot \vec{\imath}) + xy'(\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath}) + yx'(\vec{\jmath} \cdot \vec{\imath}) + yy'(\vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath})$ 法則 4 による

$= xx'\|\vec{\imath}\|^2 + xy'(0) + yx'(0) + yy'\|\vec{\jmath}\|^2$ なぜなら $\vec{\imath}$ , $\vec{\jmath}$ は 直交するから、

$= xx'(1) + yy'(1)$ なぜなら $\vec{\imath}$ , $\vec{\jmath}$ は 正常であるから。

$= xx' + yy'$

### まとめ

直交基底上の 2 つのベクトル $\vec{u} = (x, y)$、$\vec{v} = (x', y')$ が与えられると、次のようになります。

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

### 例

ベクトルの内積を決定しなさい、$\vec{u}$ = (3, 2)、$\vec{v}$ = (1, 2) これらは直交基底上にあります。

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3 \times 1) + (2 \times 2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 + 4$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$$

### 問題

1. 各論理式内のベクトル $\vec{u} \cdot \vec{v}$ の内積を決定しなさい。ベクトルの座標が直交基底にあると考えてください。

a) $\vec{u} = (4, 1), \vec{v} = (2, 3)$　b) $\vec{u} = (-2, 3), \vec{v} = (-1, -2)$　c) $\vec{u} = (2, -3), \vec{v} = (-3, -2)$

2. ベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ を直交させる $x$ の値を求めなさい。ベクトルの座標が直交基底にあると考えてください。

a) $\vec{u} = (-3, 1), \vec{v} = (2, x)$　b) $\vec{u} = (1, 0), \vec{v} = (x, -2)$

c) $\vec{u} = (x, 2), \vec{v} = (-1, x)$　d) $\vec{u} = (2, x), \vec{v} = (x, 5)$

e) $\vec{u} = (2, 1), \vec{v} = (x, 3)$　f) $\vec{u} = (2 - x, 3), \vec{v} = (1, 2 + x)$　g) $\vec{u} = (1 - x, x), \vec{v} = (3x, 2x - 1)$

ゼロの 2 つの異なるベクトルの内積が 0 であれば、ベクトルは直交しています。

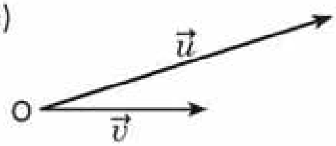
3. 各論理式のベクトル間に形成される角度を決定しなさい。ベクトルの座標が直交基底にあると考えてください。

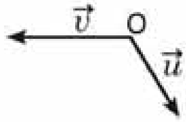
a) $\vec{u} = (4, 1), \vec{v} = (2, 3)$　b) $\vec{u} = (-2, 3), \vec{v} = (-1, -2)$　c) $\vec{u} = (2, -3), \vec{v} = (-3, -2)$

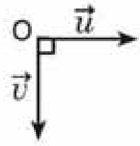
前の授業で例示した内積の方法を当てはめます。

## 2.6 復習問題

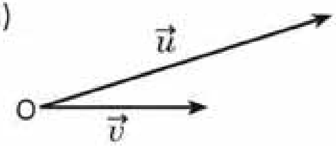
1. $\vec{u}$ の $\vec{v}$ 上への直交投影をそれぞれについて グラフ化しなさい。

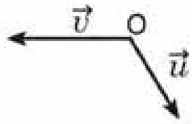
a) 

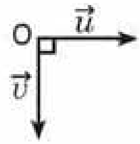

b) 


c) 


2. $\vec{v}$ の $\vec{u}$ 上へ の直交投影をそれぞれについて グラフ化しなさい。

a) 


b) 


c) 


3. 線分 $l$ は等分に分割されていて、$\overrightarrow{OI}$ ベクトルは 1 とします。下記を定義しなさい。

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$　　b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$


4. A と B は AB＝1 になるような2点とします。次の各条件について、$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$ を計算しなさい。

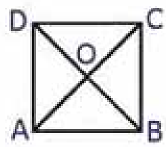
a) A は BM の中間点です　　b) B は AM の中間点です　　c) M は AB の中間点です

5. A と B は AB＝3 になるような 2 点とします。各問の各条件を満たす AB 線上の点Mを表しなさい。

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 2$　　b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -6$　　c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

6. O を中心とする三角形を含む正方形 ABCD があると考えて、次の内積を計算しなさい。以下の内積を計算しなさい。

a) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CA}$　　b) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BC}$　　c) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$




7. α が両方のベクトルの間に形成される角度であることを考えながら、$\vec{u}$ と $\vec{v}$ の内積を計算しなさい。

a) $\|\vec{u}\| = 6$, $\|\vec{v}\| = 5$, $\alpha = 60°$　　b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 4$, $\alpha = 150°$

8. 各論理式の$\vec{u}$ と$\vec{v}$の ベクトル間に形成される角度を言いなさい。

a) $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 6$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 15$　　b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 2$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$

9. 各論理式内のベクトル $\vec{u} \cdot \vec{v}$ の内積を決定しなさい。ベクトルの座標が直交基底にあると考えてください。

a) $\vec{u} = (2, -1)$, $\vec{v} = (-1, 0)$　　b) $\vec{u} = (-3, 4)$, $\vec{v} = (-4, -2)$

10. $\vec{u}$ と $\vec{v}$ のベクトルが 直交になる $x$ の値を求めなさい 。ベクトルの座標が直交基底にあると考えてください。

a) $\vec{u} = (1 - 3x, 2)$, $\vec{v} = (2, 4 + 2x)$　　b) $\vec{u} = (2 - 3x, 2x)$, $\vec{v} = (2x, 3x + 2)$

11. 各論理式のベクトル間に形成される角度を決定しなさい。ベクトルの座標が直交基底にあると考えてください。

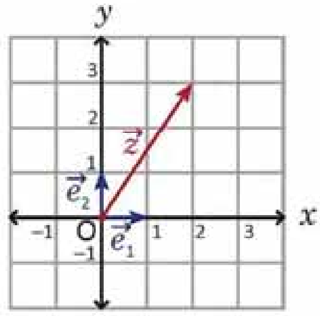
a) $\vec{u} = (-5, 3)$, $\vec{v} = (-6, -10)$　　b) $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\vec{v} = (0, 2)$

## 3.1 複素数の幾何学的表現

### 導入問題

複素数 $z = 2 + 3i$ を念頭に置き、直交平面上にベクトル $\vec{z} = (2, 3)$ を $\vec{e}_1 = (1, 0)$ と $\vec{e}_2 = (0, 1)$ の直交ベクトルを基底として使って表しなさい。

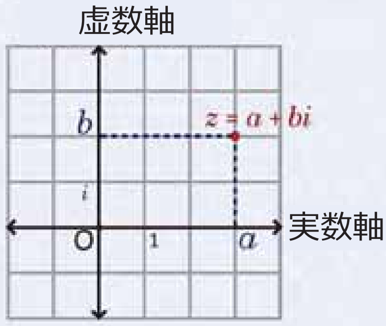
### 解法




### まとめ

直交平面は、直交ベクトル基底であり、平面内の点 A の座標は、直交ベクトル基底のベクトル $\overrightarrow{OA}$ の座標と同じです $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$。

複素数 $z = a + bi$ は、第 1 座標（$x$ 軸）を数 $z$ の実数部 $(a)$ とし、第 2 座標（$y$ 軸）を数 $z$ の虚数部 $(b)$ とする平面上で表現することができます。




複素数が配置されている平面を**複素平面**といいます。横軸を**実軸**、縦軸を**虚軸**といいます。

複素数 $z = a + bi$ の**モジュール**をベクトル規則 $(a, b)$ と定義し、$|z|$ と表記します。つまり、

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}\ .$$

### 例

数 $z = 2 + 3i$ のモジュールの解を求めなさい。

$$|z| = \sqrt{2^2 + 3^2}$$
$$= \sqrt{13}$$

### 問題

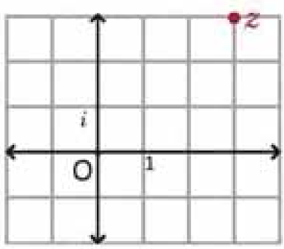
1. 各複素平面上で点にて表される複素数を示し、モジュールを求めなさい。

a) $z = 2 + 3i$　b) $z = -4 - 2i$　c) $z = -1 + 2i$

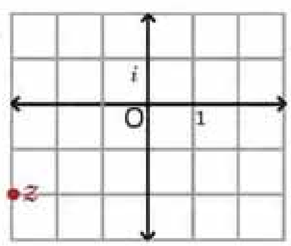
d) $z = 3 - i$　e) $z = 4$　f) $z = -4i$

2. 各複素平面上で表される複素数を示しなさい。

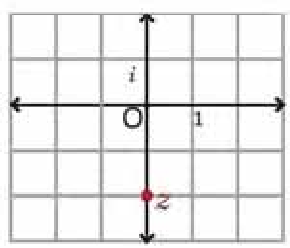
a)




b)




c)




3. $|z|^2 = z\bar{z}$ を証明しなさい。

複素数 $z = a + bi$ の共役数は $\bar{z} = a - bi$ であることを復習しよう。

## 3.2 複素平面上の複素数の演算

### 導入問題

複素数 $z = 2 + 2i$ と $w = 1 - 4i$ があると考えて、複素平面上で次の数を示しなさい。

a) $z$　　b) $w$　　c) $w + z$　　d) $w - z$　　e) $2w$

### 解法

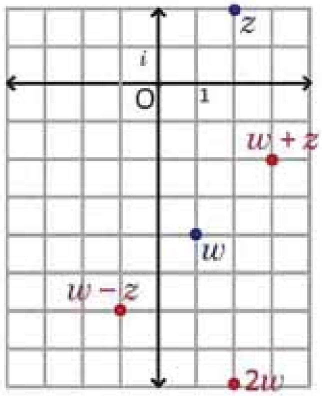
a) 点 (2, 2) を表します。

b) 点 (1, -4) を表します。

c) $w + z = 1 - 4i + 2 + 2i = 3 - 2i$、とすると、点 (3, -2) が提示されます。

d) $w - z = 1 - 4i - (2 + 2i) = -1 - 6i$、とすると、点 (–1, – 6) が提示されます。

e) $2w = 2(1 - 4i) = 2 - 8i$、とすると、点 (2, –8) が提示されます。




### まとめ

2 つの複素数 $w= a + bi$ と $z = c + di$ があるとすると複素数 $w + z$ の和は $(a, b) + (c, d)$ で表される複素数と等価であることを満たします。

同様に、複素数 $w - z$ の引き算の差は、座標 $(a, b) - (c, d)$ で表される複素数に相当します。

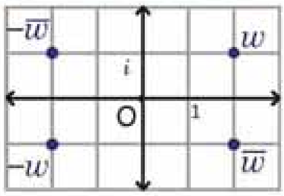
そして、ベクトル $(ra, rb)$ で平面上で表される複素数は $rw$ です。

平面内での複素数の演算は、平面内でのベクトル演算と同じようにすることに注意してください。

### 例

$w = 2 + i$ であると考え、複素数平面に数を示しなさい。

a) $w$　　b) $\overline{w}$　　c) $-w$　　d) $-\overline{w}$




### 問題

1. 複素数 $z = 2 - i$ と $w = 3 + 2i$ があると考えて、複素平面上に次の数を示しなさい。

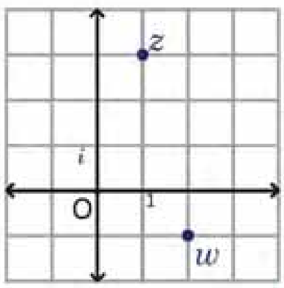
a) $z$　　b) $w$　　c) $w + z$　　d) $w - z$　　e) $z - w$

f) $2z$　　g) $-w$　　h) $\overline{z}$　　i) $-\overline{w}$　　j) $2w - 3z$

2. グラフ化した複素数を使って、次の複素数を示しなさい。

a) $w + z$　　b) $w - z$　　c) $z - w$

d) $-w$　　e) $-\overline{z}$　　f) $2w - z$

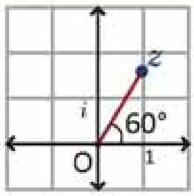



ユニット 7

## 3.3 複素数の三角関数式*

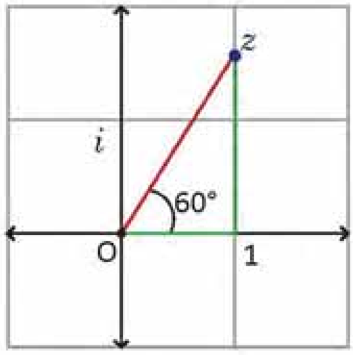
### 導入問題

三角比を用いて、弾性率が 2 で、実軸から O$z$ 線分までの角度が 60° の点で表される複素数を表現しなさい。




### 解法

平面ベクトルで表される複素数 $z$ は、$a$ を $x$ ベクトル座標、$b$ を $y$ ベクトル座標とすると $z = a + bi$ の形で表されるべきです。




サインとコサインの定義からすると、

$$\cos 60° = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{2} \qquad \text{sen } 60° = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{2}$$

そして、$a = 2\cos 60°$、$b = 2 \text{ sen } 60°$ となります。

したがって、このベクトルで表される複素数は、2cos 60° + (2sen 60°)$i$ であり、次の式で表すことができます。

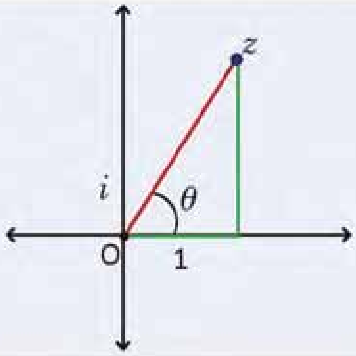
$$z = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i = 1 + \sqrt{3}i.$$

### まとめ

$z$ が複素数であるような実軸と O$z$ セグメントとの間に形成される角度は、複素数**引数**として知られており、arg($z$)で表されます。$\theta$ が $z$ の引数ならば、$\theta + 360°n$ の形の角度はすべて同じ複素数 $z$ の引数になります。

モジュール $|z|$ と引数 $\theta$ を持つ複素数 $z$ については、次のようになります。

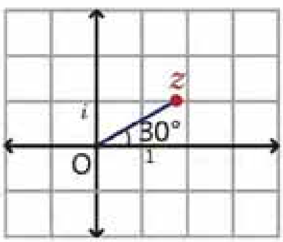
$$z = |z|(\cos\theta + i \text{ sen } \theta).$$



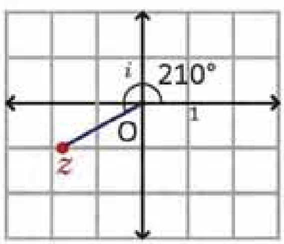

### 問題

1. 各複素平面上で表される複素数の式を表わし、そのモジュールを示しなさい。

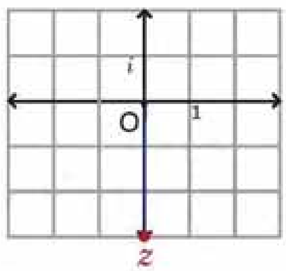
a) $|z| = 2$




b) $|z| = 2$




c) $|z| = 3$




2. モジュールと引数がそれぞれの文字式で示されている時の複素数 $z$ を求めなさい。

a) $|z| = 2, \theta = 45°$　b) $|z| = 3, \theta = 30°$　c) $|z| = 1, \theta = 135°$　d) $|z| = 2, \theta = 150°$

## 3.4 複素数の三角関数式での積算

### 導入問題

次の 2 つの複素数があると考えて、$z = |z|(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$、$w = |w|(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta)$で $zw$ を求めなさい。

### 解法

$$zw = |z|(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha) \times |w|(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta)$$
$$= |z|\,|w|(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta)$$
$$= |z|\,|w|[(\cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta) + i\,(\text{sen}\,\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\beta\cos\alpha)]$$
$$= |z|\,|w|[\cos(\alpha+\beta) + i\,\text{sen}(\alpha+\beta)]$$ （加法定理を適用）。

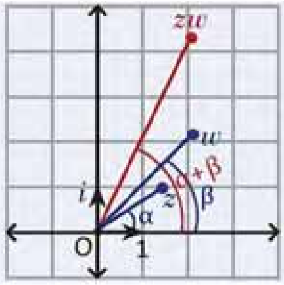
加法定理は：
$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\beta\cos\alpha$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$

結果として得られる複素数はモジュールの乗算になり、その引数は2つの複素数の引数の和に等しくなります。

### まとめ

2 つの複素数 $z = |z|(\cos\alpha + i\ \text{sen}\,\alpha)$ と $w = |w|(\cos\beta + i\ \text{sen}\,\beta)$ の乗算において、結果として得られる複素数はモジュールの乗算で、引数は乗算された数の引数の和になります。

$$zw = |z|\,|w|[\cos(\alpha+\beta) + i\,\text{sen}(\alpha+\beta)]$$




### 例

$zw$ si $z = 2(\cos 20° + i\,\text{sen}\,20°)$ と $w = 3(\cos 10° + i\,\text{sen}\,10°)$ の乗算を行いなさい。

$$zw = 2(\cos 20° + i\,\text{sen}\,20°) \times 3(\cos 10° + i\,\text{sen}\,10°)$$
$$= 2 \times 3\,[\cos(20° + 10°) + i\,\text{sen}(20° + 10°)]$$
$$= 6(\cos 30° + i\,\text{sen}\,30°)$$
$$= 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$
$$= 3\sqrt{3} + 3i$$

### 問題

1. 各文字式の $zw$ 積を求めなさい。
   a) $z = \cos 14° + i\,\text{sen}\,14°$, $w = 2(\cos 16° + i\,\text{sen}\,16°)$
   b) $z = 2(\cos 40° + i\,\text{sen}\,40°)$, $w = 5(\cos 20° + i\,\text{sen}\,20°)$
   c) $z = 3(\cos 100° + i\,\text{sen}\,100°)$, $w = 4(\cos 50° + i\,\text{sen}\,50°)$
   d) $z = 6(\cos 110° + i\,\text{sen}\,110°)$, $w = \cos 160° + i\,\text{sen}\,160°$
   e) $z = 2(\cos 208° + i\,\text{sen}\,208°)$, $w = 2(\cos 107° + i\,\text{sen}\,107°)$
   f) $z = 3(\cos 140° + i\,\text{sen}\,40°)$, $w = 2(-\cos 170° + i\,\text{sen}\,10°)$
   g) $z = 5(\cos 170° + i\,\text{sen}\,10°)$, $w = 3(\cos 70° + i\,\text{sen}\,70°)$

2. 上記のそれぞれの文字式について、$z$, $w$, $zw$ の各数字をグラフに示しなさい。

## 3.5 複素数の三角関数式での除算

### 導入問題

$w = 2(\cos 40° + i \text{ sen } 40°)$ と考えます。$zw = 6(\cos 60° + i \text{ sen } 60°)$ を満たす $z$ の値を求めなさい。

### 解法

$z = |z|(\cos \theta + i \text{ sen } \theta)$とすると、次のようになります。

$$zw = |z|(\cos \theta + i \text{ sen } \theta) \times 2(\cos 40° + i \text{ sen } 40°)$$
$$= 2|z|[\cos(40° + \theta) + i \text{ sen}(40° + \theta)],$$

また、$zw = 6(\cos 60° + i \text{ sen} 60°)$ であることがわかっているので、

したがって

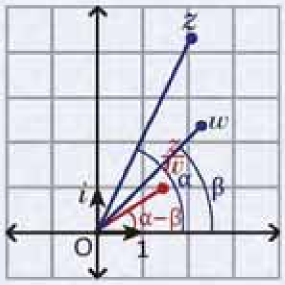
$$2|z| = 6$$

$40° + \theta = 60° + 360° n$ で、$n$ は整数です。

よって、 $z = \frac{6}{2}[\cos(60° - 40°) + i \text{ sen}(60° - 40°)] = 3(\cos 20° + i \text{ sen } 20°).$

### まとめ

2 つの複素数 $z = |z|(\cos \alpha + i \text{ sen } \alpha)$ と$w = |w|(\cos \beta + i \text{ sen } \beta)$ の除算において、得られる複素数はモジュールの除算で、その引数は配当の引数から除数の引数を引いたものに等しいことを満たしています。




$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}[\cos(\alpha - \beta) + i \text{ sen}(\alpha - \beta)]$$

特殊なケースとしては、$\frac{1}{w} = \frac{1}{|w|}[\cos(-\beta) + i \text{ sen}(-\beta)]$ とする必要があります。

### 例

$z = 4(\cos 50° + i \text{ sen } 50°)$ 、そして $w = \cos 20° + i \text{ sen } 20°$ と仮定して $\frac{z}{w}$ の除算をしなさい。

$$\frac{z}{w} = 4(\cos 50° + i \text{ sen } 50°) \div (\cos 20° + i \text{ sen } 20°)$$
$$= \frac{4}{1}[\cos(50° - 20°) + i \text{ sen}(50° - 20°)]$$
$$= 4(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)$$
$$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$
$$= \frac{4\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{2}i$$
$$= 2\sqrt{3} + 2i$$

### 問題

1. 各文字式について $\frac{z}{w}$ の比率を求めなさい。
   a) $z = \cos 42° + i \text{ sen } 42°$と $w = 2(\cos 12° + i \text{ sen } 12°)$
   b) $z = 10(\cos 40° + i \text{ sen } 40°)$と $w = 2[\cos(-20°) + i \text{ sen }(-20°)]$
   c) $z = 5(\cos 110° + i \text{ sen } 110°)$と $w = \cos 170° + i \text{ sen } 170°$
   d) $z = 1$ と$w = \cos 60° + i \text{ sen } 60°$
   e) $z = 3(\cos 207° + i \text{ sen } 207°)$と $w = 3(\cos 117° + i \text{ sen } 117°)$
   f) $z = 3(\cos 110° + i \text{ sen } 70°)$と $w = 2(\cos 20° + i \text{ sen } 20°)$
   g) $z = 6(-\cos 10° + i \text{ sen } 10°)$と $w = 2(\cos 80° + i \text{ sen } 80°)$

2. 上記の文字式それぞれについて、$z$, $w$ と $\frac{z}{w}$ の各数字をグラフに示しなさい。

## 3.6 ド・モアブルの定理

### 導入問題

$z = 2(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°)$ であると考え、$z^2$ と $z^{-2}$ を求めなさい。

$z^{-n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n$ になります。

### 解法

$$z^2 = [2(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°)][2(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°)]$$
$$= 2^2[\cos(15° + 15°) + i \operatorname{sen}(15° + 15°)]$$
$$= 4(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$$
$$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$
$$= 2\sqrt{3} + 2i$$

$$z^{-2} = \left(\frac{1}{z}\right)^2$$
$$= \left\{\frac{1}{2}[\cos(-15°) + i \operatorname{sen}(-15°)]\right\}^2$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2[\cos(-15° - 15°) + i \operatorname{sen}(-15° - 15°)]$$
$$= \frac{1}{4}[\cos(-30°) + i \operatorname{sen}(-30°)]$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3} - i}{8}$$

### 全体を通して

複素数が与えられた場合は $z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$：

$$z^2 = |z|^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta).$$

$z^0 = 1$ となります。

そして、整数 $n$ については、次のようになります。

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta).$$

この複素数の $n$ 乗目の式は**ド・モアブルの定理**として知られています。

### 例

等式 $z^3 = 1$ を真とする複素数 $z$ の値（値は複数のこともある）を求めなさい。

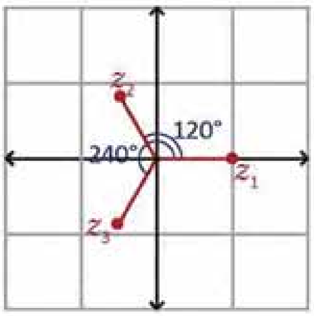
$z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ con $0° \le \theta < 360°$ であると考えると,
$z^3 = |z|^3(\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta) = 1(\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°)$ となります。

このことから、$|z|^3 = 1$、したがって $|z| = 1$ となります。

さらに $3\theta = 360° \times n$ ($n$： 全数) そして $0° \le \theta < 360°$, $3\theta = 0°$, $3\theta = 360°$ または $3\theta = 720°$, このことから
$\theta = 0°$, $\theta = 120°$ または $\theta = 240°$ になります。

$z^3 = 1$ son $z_1 = \cos 0° + i \operatorname{sen} 0°$、$z_2 = \cos 120° + i \operatorname{sen} 120°$,
$z_3 = \cos 240° + i \operatorname{sen} 240°$ を満たす $z$ 値が得られることから、下記のように表わすことができます。

$$z_1 = 1,\ z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$




$z_1$, $z_2$, $z_3$ で構成された三角形は正三角形であることに注目しましょう。この側面の長さを計算して確認することができます。

### 問題

1. 複素数 $z = 2(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°)$ の、解を求めなさい。

a) $z^2$　　b) $z^3$　　c) $z^4$　　d) $z^6$　　e) $z^8$

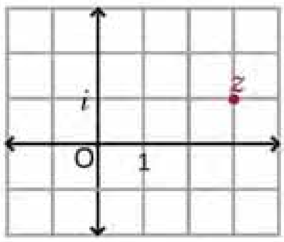
2. 複素数 $w = 3(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)$ の、$w^{-3}$ を求めなさい。
3. 等式 $z^4 = 1$ を真とする複素数 $z$ の値（値は複数のこともある）を求めなさい。
4. 等式 $w^6 = 1$ を真とする複素数 $w$ の値（値は複数のこともある）を求めなさい。

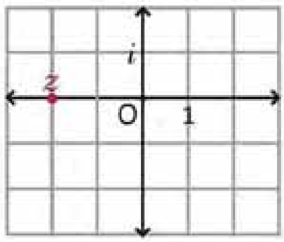
## 3.7 復習問題

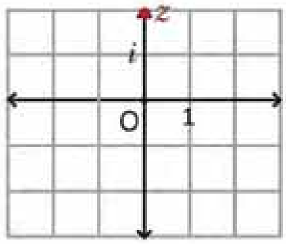
1. 各複素平面上に以下の複素数を示し、モジュールを求めなさい。

a) $z = -1 + 3i$　　b) $z = -2i$　　c) $z = -3$

2. 各複素平面上で表される複素数を示しなさい。

a)


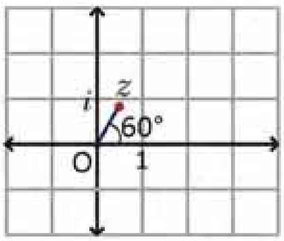

b)


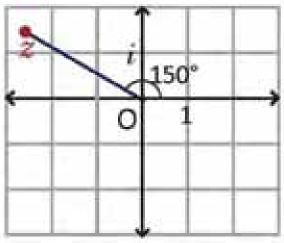

c)


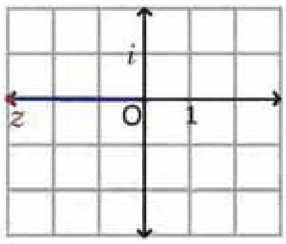

3. 複素数 $z = 1 - 2i$ と $w = -2 + 2i$ があると考えて、複素平面上に次の数を示しなさい。

a) $z + w$　　b) $w - z$　　c) $z - w$　　d) $-3z$　　e) $\overline{w}$　　f) $-w + 2z$

4. 各複素平面上で表される複素数を示しなさい。

a) $|z| = 1$



b) $|z| = 3$



c) $|z| = 3$



5. モジュールと引数がそれぞれの文字式で示されている時の複素数を求めなさい。

a) $|z| = 4, \theta = 60°$　　b) $|z| = 1, \theta = 45°$　　c) $|z| = 2, \theta = 300°$　　d) $|z| = 3, \theta = 180°$

6. 各文字式の $zw$ 積を求めなさい。

a) $z = 3(\cos 23° + i \operatorname{sen} 23°)$ と $w = 4(\cos 37° + i \operatorname{sen} 37°)$
b) $z = 2(\cos 41° + i \operatorname{sen} 41°)$ と $w = 5[\cos(-11°) + i \operatorname{sen}(-11°)]$
c) $z = 3(\cos 200° - i \operatorname{sen} 160°)$ と $w = 2(\cos 20° - i \operatorname{sen} 20°)$

7. 複素数 $z = \cos 10° + i \operatorname{sen} 10°$ の、解を求めなさい。

a) $z^3$　　b) $z^6$　　c) $z^9$

8. 複素数 $w = 2(\cos 9° + i \operatorname{sen} 9°)$ の、$w^5$ を求めなさい。

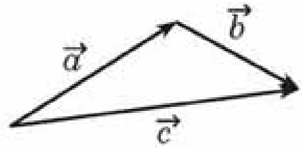
9. 各文字式について $\frac{z}{w}$ 比率を求めなさい。

a) $z = \cos 25° + i \operatorname{sen} 25°$ と $w = 3[\cos(-35°) + i \operatorname{sen}(-35°)]$
b) $z = 6(\cos 21° + i \operatorname{sen} 21°)$ と $w = 3(\cos 9° - i \operatorname{sen} 9°)$
c) $z = 2(\cos 115° + i \operatorname{sen} 65°)$ と $w = 2(\cos 5° - i \operatorname{sen} 5°)$

## 3.8 このユニットの問題

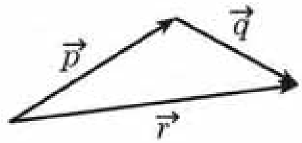
問題 1〜4 の正しい解を求めなさい。

1. ベクトル $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ を足し合わせた結果のベクトルは、



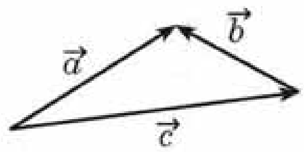

a) $2\vec{a}$　　b) $2\vec{b}$　　c) $\vec{0}$　　d) $2\vec{c}$　　e) $-2\vec{c}$

2. 演算 $\vec{p}+\vec{q}-\vec{r}$ の結果として得られるベクトルは、



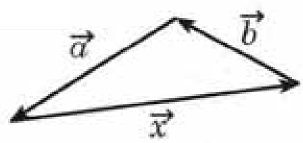

a) $2\vec{p}$　　b) $2\vec{r}$　　c) $\vec{0}$　　d) $2\vec{q}$　　e) $-2\vec{r}$

3. ベクトル $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ のノルムは もし $\|\vec{a}\|=3$, $\|\vec{b}\|=2$ で $\|\vec{c}\|=4$ なら、




a) 2　　b) 4　　c) 6　　d) 9　　e) 0

4. 結果がベクトル $x$ であるベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の式を求めよ。

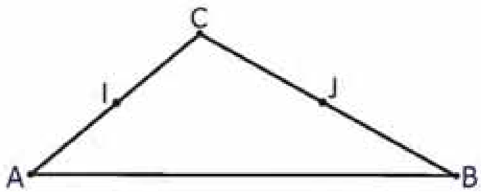



a) $2\vec{a}+\vec{b}$　　b) $\vec{a}+\vec{b}$　　c) $-(\vec{a}+\vec{b})$　　d) $\vec{a}-\vec{b}$

5. 以下のベクトル $\vec{u}=(2, 1)$, $\vec{v}=(1, 4)$ と $\vec{w}=(5, 6)$ で、$\vec{u}$ と $\vec{v}$ がベクトル基底を形成していることを証明し、この基底を基準とした $\vec{w}$ の座標を書きなさい。

6. 基底 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ のベクトル $\vec{u}=(2, 6)$ が与えられた場合の、ベクトル $\vec{u}$ の中点の座標を求めなさい。

7. 三角形 ABC と、AC の中間点である I と BC の中間点である J を考えると、次のようになります。$\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ 。



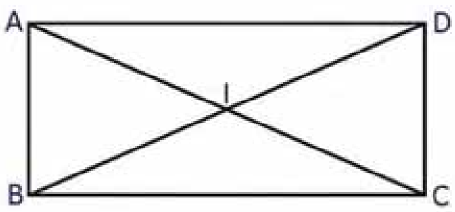

8. 以下を満たす点 P と Q があると考えます。

$$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AQ}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$$

1.3 の授業で学んだことを応用します。

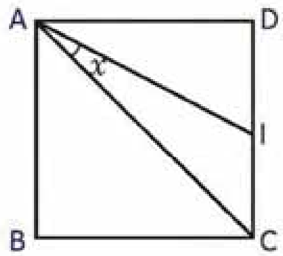
$\overrightarrow{PQ}$ がベクトル $\overrightarrow{BC}$ に平行であることを示しなさい。

9. ABCD を次のような長方形とします。AB = $a$ と BC = $b$。$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 、$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$ 、$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}$、$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DI}$ と $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IA}$ を $a$ と $b$ の値で表しなさい。



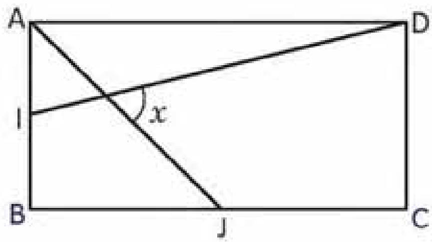
## 3.9 このユニットの問題

1. 正方形 ABCD の一辺で、I を $\overline{CD}$ の中点とします。角 $x$ の値を求めなさい。




計算を容易にするために、$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AC}$ をベクトルの和として表してください。内積の三角関数式を使ってください。

2. 下の図において、ABCD は AB＝2、AD＝4 となるような長方形です。




a) J と I がそれぞれ辺 BC と AB の中点である場合の、AJ と DI の長さを求めなさい。

b) 角 $x$ の値を求めなさい。

3. $\vec{u}=(a, b)$ を正規直交基底の非ゼロベクトルとします。任意の非ゼロの実数 $r$ に対して、ベクトル $\vec{u}$ が $(rb, -ra)$ の形式のベクトルに直交することを証明しなさい。

4. 仮定ベクトル $\overrightarrow{OA}=(1, 4)$ と $\overrightarrow{OB}=(3, 2)$ が、もし I がベクトル $\overrightarrow{AB}$ の中点である場合のベクトル $\overrightarrow{OI}$ の座標を求めなさい。

5. 複素数を用いた次の演算の結果を求めなさい。

a) $(i-1)^8$　　b) $(1+i)^{-8}$

複素数の三角関数式を使ってください。

6. 複素数を用いた次の演算の結果を求めなさい。

a) $(i-1)(1-i)$　　b) $\dfrac{1-i}{1+i}$

複素数の三角関数式を使ってください。

7. 次の量を計算してください。

a) $|(i+1)(2-i)|$　　b) $\left|\dfrac{2-3i}{1+2i}\right|$　　c) $|(1+i)^{20}|$

8. 2 つの複素数 $z$ と $w$ に対して、次のことを満たすことを証明しなさい。

$$|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$$

$|z|^2=z\bar{z}$ と $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$ を使ってください。

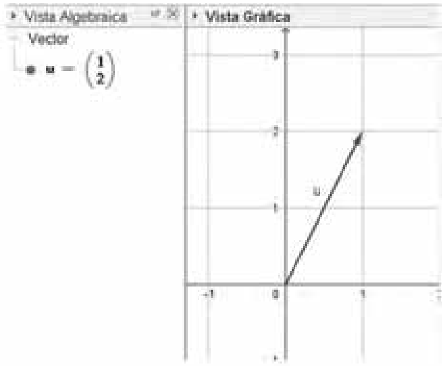
## 4.1 GeoGebra を使った演習： ベクトルの基本概念

この演習では、GeoGebra が持つベクトルの表現方法から、これらのベクトルを使ってできる操作やアプリケーションまで、ベクトルを操作するためのツールを使用します。表現の仕方から、これらのツールを使って問題を解決したり、答えを検証したりするための操作や応用までを行います。そのためには、この「演習」に記載されている手順に従ってください。次に、GeoGebra で、この演習の最後にある「課題」セクションの問題に取り組みます。

### 演習

GeoGebra でのベクトルの概念。

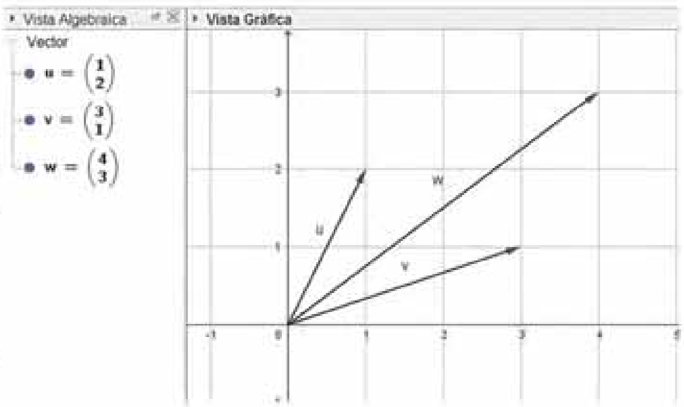
1.入力バー (la barra de entrada) に $\vec{u}$ = (1, 2) と入力して、ベクトル u = (1, 2) を直交参照でプロットします。GeoGebra では、大文字を入力すると点を、小文字を入力するとベクトルをグラフ化します。



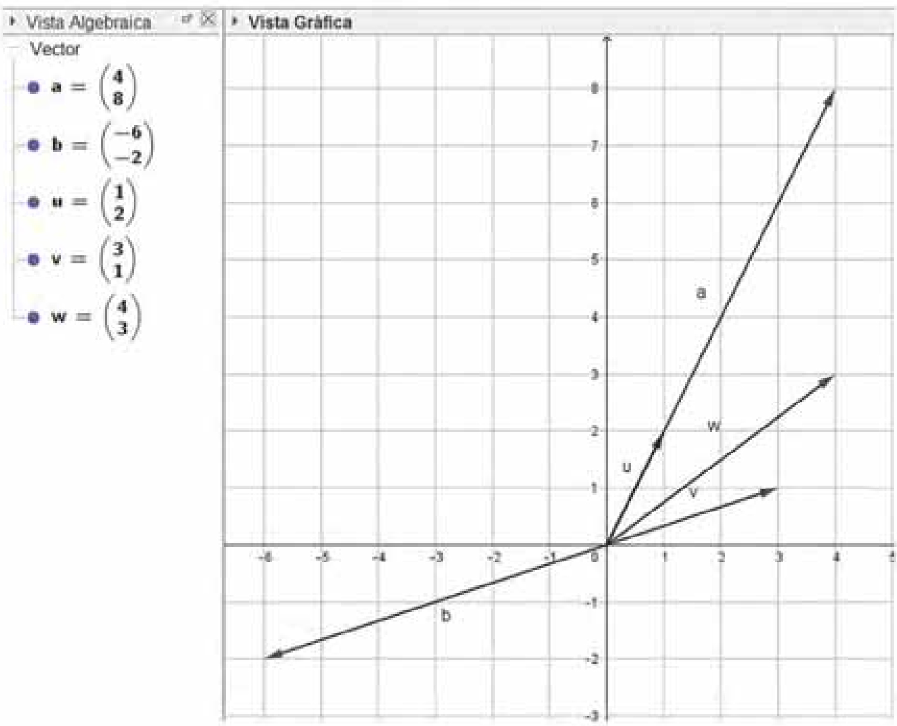

2. ベクトル $\vec{v}$ = (3, 1) をグラフ化し、v = (3, 1) と書きます。

3. ベクトル $\vec{u} + \vec{v}$ の加算を実行します。そのためには，入力バーに u + v と入力します。結果として得られたベクトルはグラフィックビュー (la Vista Gráfica) に、その座標は代数ビュー (la Vista Algebraica) に表示されます。

4. 3.にあるように、入力バーを使用して、$\vec{u} - \vec{v}$ , $\vec{v} + \vec{u}$の操作を実行します。




5. また、スカラーで積を計算することも可能で、例えば、ベクトル 4$\vec{u}$ を求めるには、入力バー 4u に書き込んだり、負の数で、例えば $-2\vec{v}$ のように書き込んだりすることができます。



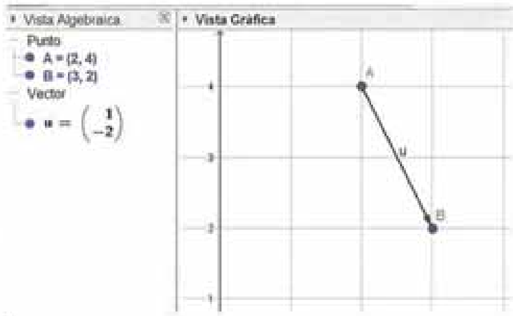

6. 出題された問題の解答を GeoGebra で確認し、正しいかどうかを確認してください。

ユニット7

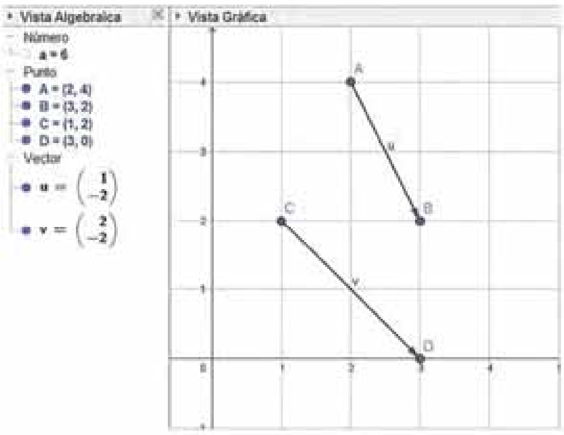
GeoGebra でのベクトルのコマンドの使用方法。

1. A = (2, 4) と B = (3, 2) の座標を持つ 2 点をグラフにします。ベクトル $\overrightarrow{AB}$ をプロットするには、入力バーにコマンドベクトル (A,B) を入力します。

2. 1 の手順を用いて、点 C = (1, 2) と点 D = (3, 0) を持つベクトル $\overrightarrow{CD}$ をグラフ化します。

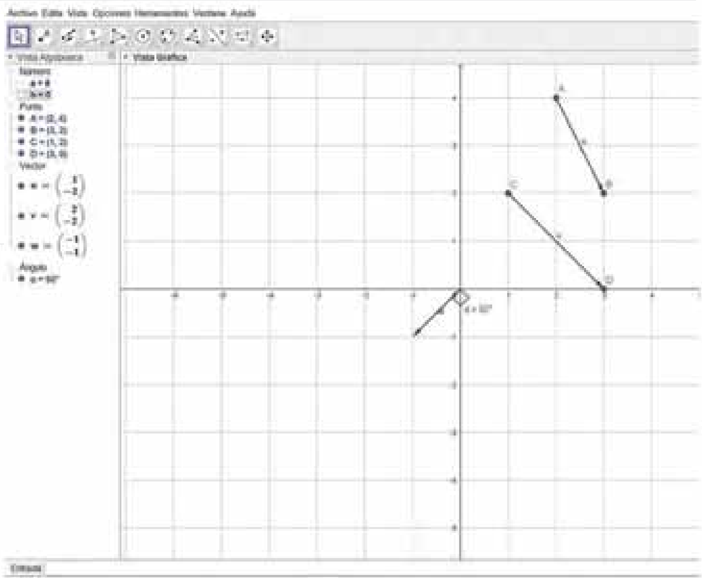


3. ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ の内積を計算するには、“u v” と入力するか、入力バーの ProductoEscalar(u, v) コマンドを使用します。代数ビューでは、変数 a に格納されている内積の値が表示されます。



4. ベクトル $\vec{w}$ = (-1, -1) をプロットし、変数 $\alpha$ に格納された代数ビューのベクトルの角度を出力する Anglo(w, v) コマンドを使用します。

5. 4 から、ベクトル $\vec{v}$ と $\vec{w}$ が垂直であることがわかります。入力バーの内積コマンド (el comando de producto escalar) を使って、この結果を確認してください。GeoGebra では最後に以下のような結果が得られます。



## 課題

GeoGebra で検証できる単元問題の結果を検証し、ケースごとに分析し、最も適切なツールを使用してください。正しく解けなかった問題を直しましょう。

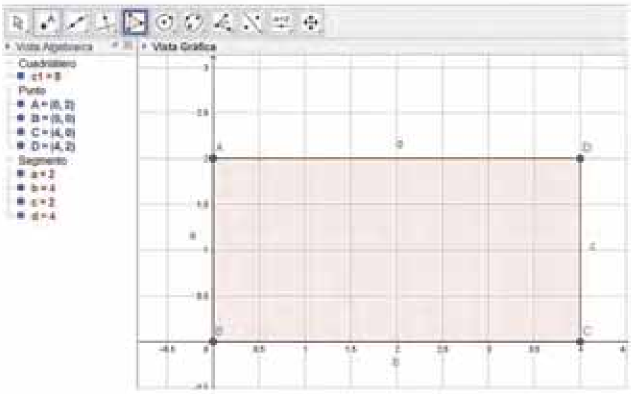
## 4.2 GeoGebra の演習 : 問題を解く

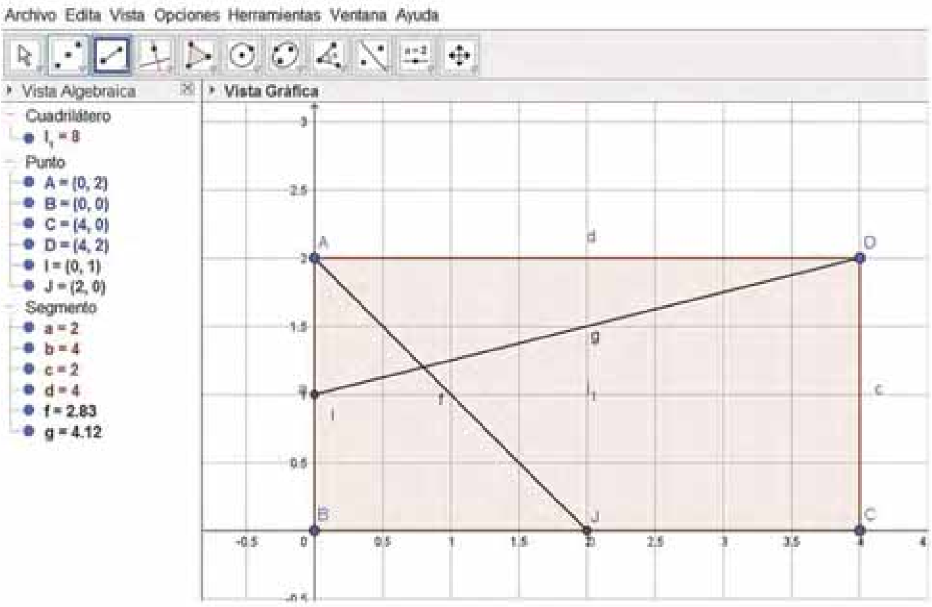
この練習では、前回の授業で習ったツールを使って、授業3.9のユニットの問題をいくつか解いていきます。そのためには、「演習」に記載されている手順に従ってください。次に、GeoGebraで、この演習の最後にある「課題」セクションの問題に取り組みます。

### 演習

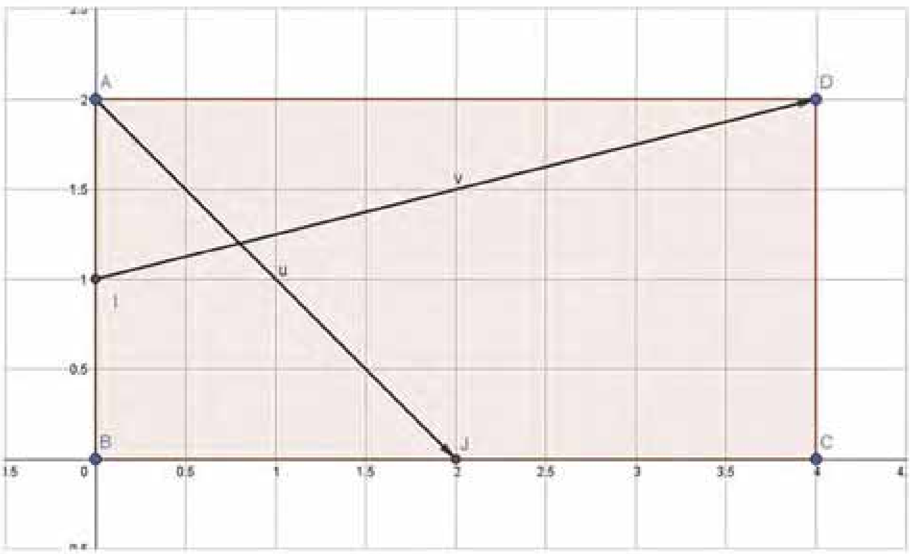
授業 3.9 の問題 2 をもう一度解きます。

1. 点 A = (0, 2), B = (0, 0), C = (4, 0), D = (4, 2) をプロットし、多角形ボタン (el botón de Polígono) を使用して、表示された矩形をプロットします。
2. そして、AB と BCの中点を中点ボタンでプロットします。下図のようにセグメント DI と AJ をプロットします。



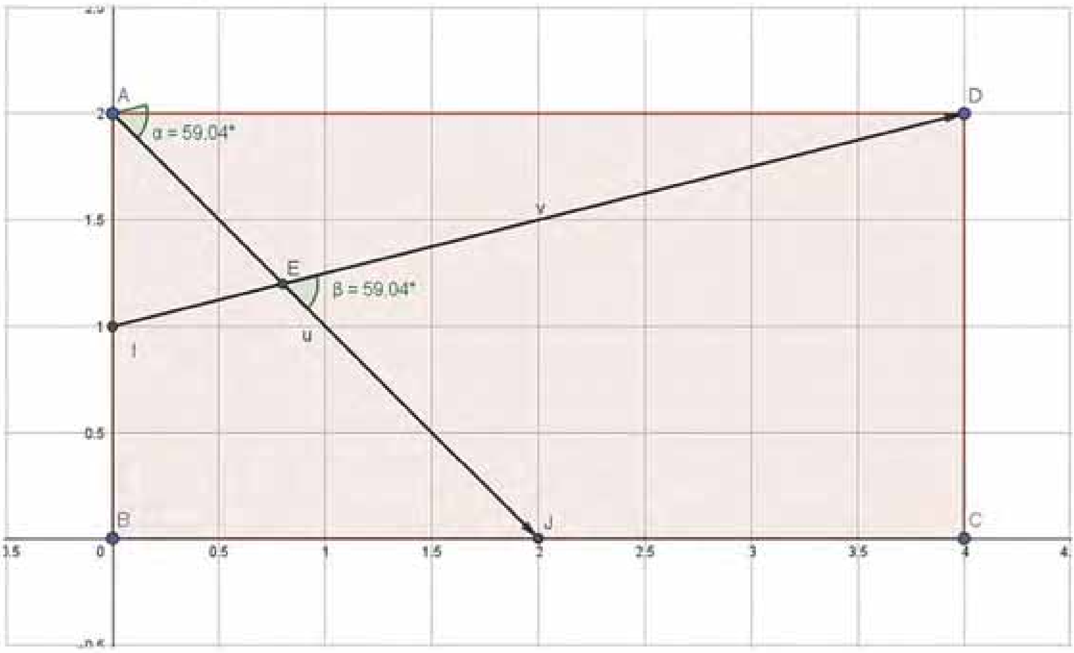



3.2 点間のベクトルを決定するコマンドを使用して、ベクトル $\overrightarrow{AJ}$ と $\overrightarrow{ID}$ をグラフ化します。



4. Ángulo(u, v) コマンドを使用して、ベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の間の角度を計算します。

5. この角度の測定値を確認するには、セグメント AJ と ID の交点をグラフ化し、角度測定オプションを使って角度 JED を測定します。両方の角度が等しいことを確認してください。

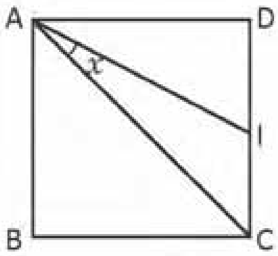



6. 最後にノートに書いた答えを確認すると、問題が正しく解けたかどうかが確認できます。

## 課題

- このユニットの授業 3.9 問題の 1・3・4 を解けるように操作してみましょう。続いて、GeoGebra で得られた解答と比較して、正しく解けたかどうかを確認してください。

- I が BC の中点である辺 1 の正方形 ABCD があるとします。角 $x$ の値を求めなさい。




- $\vec{u}$ = (a, b) を正規直交基底の非ゼロベクトルとします。任意の非ゼロの実数 $r$ に対して、ベクトル $\vec{u}$ が $(rb, -ra)$ の形式のベクトルに直交することを証明しなさい。

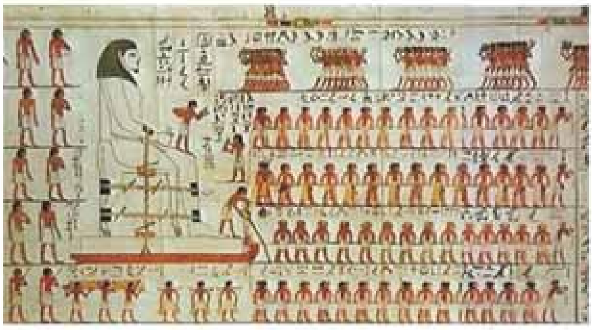
- 仮定ベクトル $\overrightarrow{OA}$ =(1,4) と $\overrightarrow{OB}$ =(3,2) で、もしベクトル $\overrightarrow{AB}$ の中点が I である場合のベクトル $\overrightarrow{OI}$ の座標を求めなさい。

ユニット 8

# 記述的統計

情報の記録は、出生数、死亡率、売上高、債務などのデータを記録することの重要性から、歴史を通じて行われてきた作業です。この種の情報に関する最初の記録は紀元前 3050 年頃に遡ります。また、聖書や約40世紀前の中国文化にも記録があり、さらに、マヤ人は記録に関する知識を巧みに操っていたと考えられています。彼らはその知識を日々の活動に関する問題を解決するために利用していました。

一連のデータの特徴を研究するために使用される方法が完全に開発されたのは、データが記述されたフランス初の国勢調査がシャプタル内務大臣によって発表された、 19 世紀になってからでした。その後、今世紀における開発によって、体系化されてきました。記述的統計の適用は、人口統計においてデータの本質的な特徴を抽出し、それらを分析し、結論を出すために常に非常に役立ってきました。



古代エジプト人の統計記録

人口統計調査から記述的統計が生まれました。

このユニットでは、標本抽出の概念や標本と母集団の中心傾向と分散の測定、変動係数、位置の測定などのテーマを扱い、特に箱ひげ図に重点が置かれています。次に、GeoGebra を使った演習を行い、技術リソースを正しく使用して学習内容を強化します。

## 1.1 以前の定義

### 導入問題

「ブックフェア」には 1,000 名が参加しました。調査を通じて、人口の 15% がインタビューを受け、性別、年齢、好みの文学ジャンル、本の購入予算について質問されます。次の問いに答えなさい。

a) ブックフェアには何人が参加しましたか？
b) 何人がインタビューを受けましたか？
c) 面接対象者には何を尋ねられましたか？

### 解法

a) 合計 1,000 人が参加しました。

b) 1,000 人の 15% がインタビューを受けました。つまり、次のとおりです。 $1000 \times \frac{15}{100} = 150$

そのため、150 人にインタビューを行いました。

c) 性別、年齢、好みの文学ジャンル、本を購入するための予算について尋ねられました。

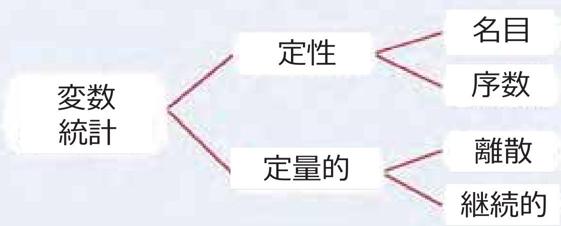
### 定義

- **母集団**は、同じ特性を持ち、結論を得ることに関心のある個人、オブジェクト、またはイベントの合計セットとして定義されます。

- 母集団の一部が調査の目的で取得された場合、この選択されたグループは**標本**と呼ばれます。

- 調査する情報の種類は、**統計変数**と呼ばれます。統計変数は、さまざまな値を取る可能性があり、測定または観察できるプロパティです。

統計変数は、図に示すように分類できます。




- **定性変数**は、さまざまな品質、特性、またはモダリティを表します。
  – 名目上の定性変数を順序で定義することはできません。
  例：国、言語、婚姻状況、性別。

  – 通常の定性変数は、確立されたスケールに従って順序付けられたさまざまな値を取ることができます。例：悪い、平均、良い。

質的変数は、2 つの値のみを取る場合、二分されます。
例：はいといいえ、男性と女性。または、3 つ以上の値を取る場合はポリトミック。

- **量的変数**は数値を取ります。
  – 離散量変数は、負でない整数の数値を取ります。
  例：子供の数。
  – 連続定量変数は、特定の値の範囲内で任意の値を取ることができます。
  例：体重、身長、家族の費用。

## 例

チャラテナンゴ市に住む 21,000 人のうち 2,000 人が「社会における女性の役割」に関するイベントに参加し、性別、身長、子供の数、家庭での料理の頻度などの情報を収集しています。その答えの選択肢は次のとおりです。決して、ほとんど決して、時々、ほとんど常にまたは常に。次のことがらについて答えなさい。

a) このイベントの人口と標本を特定します。

b) 変数を特定し、分類します。

a) 標本を採取する人口は、チャラテナンゴ市に住む 21,000 人です。
標本は、イベントに参加した 2,000人です。

b) 変数は、性別、年齢、子供の数、料理の頻度です。それらを分類すると、次のようになります。

| 質的変数 | | 質的変数 | |
|---|---|---|---|
| **名目** | • 性別 | **離散** | • 子どもの数 |
| **序数** | • 料理の頻度（決して、ほとんど決して、...、常にのように注文できます） | **継続的** | • 高さ |

## 問題

1. 次の各状況について、母集団、標本、統計変数、およびそれらの分類を特定します。

a) エルサルバドール国立図書館は数学の本の状況を知りたがっています。これらは最初の 10 の棚から抽出され、良い、悪い、役に立たないものに分類されます。

b) エルサルバドールのすべての学齢期の子供たちのうち、9 年生の子供たちが電子音楽と楽器音楽のどちらが好きかを調べるために調査されます。

c) ロザレス国立病院では、肺疾患で入院している患者にインタビューし、その病院でどのように治療されているかを調べたいと考えています。

d) モンテクリスト国立公園では、すべてのヒノキの木が持つ寿命を知りたいと思います。

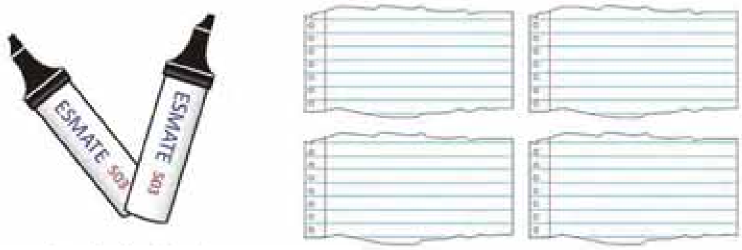
e) サンサルバドールの映画館では、コメディロマンス映画に参加する人にインタビューを行い、ロマンス、コメディ、またはその両方が好きかどうかを調べます。

モンテクリスト国立公園は、サンタアナ県メタパン市にある保護された公園で、面積は 1973 ヘクタールです。

2. 以下に示す統計変数が質的変数（名目または順序）であるか、量的変数（離散または連続）であるかを判別します。

a) 人の血液型
b) 摂氏温度
c) 教育の程度
d) 宗教
e) 出生地
f) 生徒数
g) アイテムの価格
h) 50 人の子供における血糖値
i) 市町村ごとの診療所の数
j) 親の月収
k) 血圧
l) 痛みの強さ

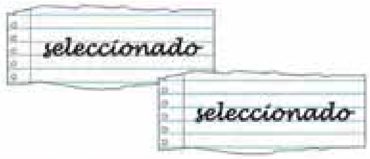
## 1.2 導入アクティビティ



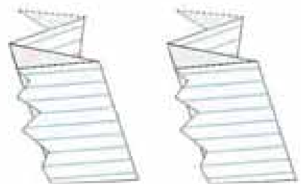

### 道具
– 紙片（各学生に 1 枚）
– マーカー

### 導入 1
次のプロセスを使用して、教室から 5 人の生徒を選択します。

1. 5枚の紙に「選択した」という言葉を書いてください。




2. すべての紙を折って、各生徒に1つずつ渡します。



3. 選ばれた生徒とは、「選ばれた」という言葉が書かれた紙片が出てきた生徒のことです。


### 課題 2
次のプロセスを使用して、教室から 5 人の生徒を選択します。

1. 1 から $N$ までの生徒をリストします。$N$ は教室の生徒の総数です。

2. 生徒は 1 から $\frac{N}{5}$ 以下の最大の整数 $m$ までランダムに選ばれます（紙片やランダム電卓などを使用できます）。

3. 2番目に選択されたのは、前の番号と $m$ の合計に最も近い番号のものです。

4. 3 番目に選択されたのは、2 番目の番号に $m$ が追加されたものです。以下同様に、5 人の生徒が選択されるまで、たとえば、最初の生徒の番号が $a$ の場合、選択された 5 人の生徒は、$a$、$a + m$、$a + 2m$、$a + 3m$、$a + 4m$ の番号の生徒になります。

たとえば、$N = 40$ および $a = 3$ の場合、$m = \frac{40}{5} = 8$ であり、選択された数値は次のとおりです。3、11、19、37、35。

### 定義
$N$ 個の要素の母集団からn個の要素の標本を選択するアクションは、**標本**と呼ばれます。

母集団のすべての要素が選択される確率が等しい（アクティビティ1のように）標本のタイプは、**単純ランダム標本**として知られています。

母集団がリストされ、$\frac{N}{n}$ 以下の乱数が選択されるランダム標本のタイプの場合、$N$ は母集団の合計、$n$ は標本の合計であり、その他は前の値に $\frac{N}{n}$ を加算して選択されます。体系的な**ランダム標本**として知られています。

### 問題
1. 単純標本の 2 つの方法を記述します。

2. 体系的な**ランダム標本**の 2 つの形式を記述します。

3. ラッフルを行うとき、標本していますか？

## 1.3 確率標本*

### 導入問題

研究所には、高校生に関する次の情報があります。

| | 女の子 | 男の子 |
|---|---|---|
| 1 年目 | 24 | 12 |
| 2 年目 | 9 | 15 |

20人の高校生（1 年生または 2 年生、女の子または男の子）の標本を選択する方法を決定します。

### 解法

この問題では、人口には 4 種類の人々がいて、それぞれに対応する人口の割合を計算できます。

1 年生の女の子： $\frac{24}{60} \times 100 = 40\%$　　1 年生の男の子： $\frac{12}{60} \times 100 = 20\%$

2 年生の女の子： $\frac{9}{60} \times 100 = 15\%$　　2 年生の男の子： $\frac{15}{60} \times 100 = 25\%$

次に、20 人の学生の標本を取得するために、これらのパーセンテージを使用できます。
1 年生の女の子：20 の 40% は 8 です　　1 年生の男の子：20 の 20% は 4 です
2 年生の女の子：20 の 15% は 3 です　　2 年生の男の子：20 の 25% は 5 です

したがって、1 年生の女の子 8 人、1 年生の男の子 4 人、2 年生の女の子 3 人、2 年生の男の子 5 人を選択して、20 人の高校生の標本を抽出できます。

### 全体を通して

セクター（層）に分割された母集団に比例して適用される標本は、**層化標本**と呼ばれます。

グループを分割し、それらのいくつかをランダムに選択する必要がある母集団に適用される標本は、**クラスター標本**と呼ばれます。

確率標本は、母集団のすべての要素が標本に選択される可能性が同じであるすべての標本方法として定義されます。

単純ランダム標本、系統的、層化、およびクラスター標本は、すべて確率標本です。

### 例

クラスター標本を使用して、サンタアナ県の人々の好みの食べ物について調査を行う方法を決定します。

人口は、学生、サラリーマン、アスリート、フリーランサーなどのクラスターに分けることができます。そして、これらのクラスターの 2 つまたは 3 つをランダムに選択して、標本を取得します。

### 問題

次のデータを持つ近隣の 40 人の層化標本を実行します。

| | 女性 | 男性 |
|---|---|---|
| 若い | 70 | 40 |
| 大人 | 30 | 60 |

## 1.4 非確率標本

### 定義

選択が調査対象の個人の特性に依存する標本では、**非確率標本**であると言われます。いくつかの非確率標本手法は次のとおりです。

- **便宜的抽出**：標本の選択は、施設または研究の特定の特性に基づいて行われます。
- **スノーボール標本**：知人が標本を選択することで構成されます。つまり、調査は既知の人を対象に行われ、目的の標本に到達するまで、既知の人を対象に行われます。標本が見つけにくい場合に使用します。
- **クォータ標本**：母集団はグループに分割され、グループごとに標本個体の数が設定されます。グループあたりの個体数は、評価の高い方法で作成されます。
- **裁量的な標本**：標本は、人々の特定の特性とトレーニングを考慮して行われます。

### 例1

調査では、食生活の調査を行いたいと考えており、最も連絡が取りやすいのは近所のバスケットボールチームのメンバーです。

この場合、便宜的抽出を行うことができますが、標本は母集団の傾向を反映していない可能性があります。

### 例2

エルサルバドルの犯罪集団の慣習や構造について知りたい調査では、身近な人に面接を行い、身近な人に近づくまで面接を行います。

この場合、スノーボール標本を行うことができます。この手法は、特定の人に情報を提供しない可能性のある人を選択するために選択でき、それらを知っている人から選択することをお勧めします。犯罪、政治、汚職などの問題を研究するために使用されます。

### 例3

調査は 100 人の大学生と 100 人の専門家に対して行われます。

この場合、クォータ標本を実行できます。これは、層による標本と同様の手法ですが、層ごとの人数の割り当ては、母集団から計算されません。

### 例4

教室で、数学オリンピックに参加する 4 人の生徒を選択します。

この場合、任意の標本を行うことができ、数学で最高の成績を収めた 4 人の学生を選択することができます。

### 問題

各状況での標本の種類の長所と短所を説明することにより、最も適切と思われる非確率的標本の種類を決定します。

a) 学生の好きな科目
b) 切手収集家が持っている切手の種類
c) エルサルバドルの各部門のセキュリティ
d) 水泳で競う 5 人の生徒を選ぶ

## 1.5 頻度表の見直し

### 導入問題

サンサルバドルの大都市圏のコミュニティでは、21 歳未満の若者に質問し、次の情報を入手します。

a) 9 から始まり 21 で終わる 3 in 3 の 4 つのクラスの度数分布の表に情報を整理します。
b) 度数分布表を作成し、これらのプールされたデータの算術平均「μ」、最頻値、および中央値を計算します。
c) 分散 ($\sigma^2$) と標準偏差を求めます。

| 年齢 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 14 | 15 | 14 | 19 | 16 |
| 11 | 18 | 9 | 12 | 20 | 12 |
| 12 | 11 | 10 | 19 | 14 | 13 |
| 15 | 12 | 11 | 18 | 11 | 16 |
| 14 | 16 | 17 | 12 | 13 | 17 |

### 解法

a)

| 年齢 | 若者の数 (f) | 中点 ($Pm$) | $f$ x $Pm$ | $Pm - \mu$ | $(Pm - \mu)^2$ | $f(Pm - \mu)^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9～12 | 7 | 10.5 | 73.5 | –4 | 16 | 112 |
| 12～15 | 11 | 13.5 | 148.5 | –1 | 1 | 11 |
| 15～18 | 7 | 16.5 | 115.5 | 2 | 4 | 28 |
| 18～21 | 5 | 19.5 | 97.5 | 5 | 25 | 125 |
| **合計** | **30** | | | | | |

a) の解決策

各クラスで、頻度で測定されたデータが下限以上で上限未満であることは事実です。ただし、最後のクラスでは上限以下です。

b) 算術平均を計算するために、列 $f \times Pm$ の値が加算され、合計データで除算されます。

$$\mu = \frac{\sum f \times Pm}{n} = \frac{73.5 + 148.5 + 115.5 + 97.5}{30} = 14.5$$

中央値を含むクラスは、データ 15 と 16 が含まれているため、2 番目（12 から 15）です。

$$\text{中央値} = \frac{12 + 15}{2} = 13.5$$

最も頻度の高いクラスは 2 番目（12 から 15）です。

$$\text{最頻値} = \frac{12 + 15}{2} = 13.5$$

c) 分散については、列 $f(Pm - \mu)^2$ の値が加算され、合計データで除算されます。

$$\sigma^2 = \frac{\sum f(Pm - \mu)^2}{n} = \frac{112 + 11 + 28 + 125}{30} = 9.2$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f(Pm - \mu)^2}{n}} = \sqrt{9.2} \approx 3.03$$

### 問題

スチョロス高速道路で交通警官が記録した速度は、右側の表にあります。彼は次のことを行います。

a) 度数分布表の情報を、40 から 120 までの 20 から 20 までの 4 つのクラスに整理します。
b) 算術平均、最頻値、および中央値を計算しましょう。
c) 分散と標準偏差を計算しましょう。

| 速度 (km/h) | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 60 | 65 | 40 | 80 | 80 | 90 | 45 |
| 70 | 100 | 70 | 50 | 80 | 55 | 118 |
| 75 | 65 | 90 | 85 | 70 | 100 | 55 |
| 110 | 70 | 95 | 70 | 80 | 115 | 100 |

## 1.6 中心傾向の尺度

### 導入問題

ある会社は、先月の 30 の支店での販売記録と、30 の支店のうち 20 の記録を持っています。これらを以下に示します。

| 販売 | 枝の数 (*f*) |
|---|---|
| 1,000 ドルから 2,000 ドル | 5 |
| 2,000 ドルから 3,000 ドル | 11 |
| 3,000 ドルから 4,000 ドル | 8 |
| 4,000 ドルから 5,000 ドル | 6 |
| **合計** | **30** |

| 販売 | 枝の数 (*f*) |
|---|---|
| 1,000 ドルから 2,000 ドル | 3 |
| 2,000 ドルから 3,000 ドル | 7 |
| 3,000 ドルから 4,000 ドル | 6 |
| 4,000 ドルから 5,000 ドル | 4 |
| **合計** | **20** |

a) 30 ブランチの算術平均、中央値、および最頻値を決定します。

b) 20 の分岐の算術平均、中央値、および最頻値を決定します。

### 解法

a)

| 販売 | 枝の数 (*f*) | 中点 ($Pm$) | $f \times Pm$ |
|---|---|---|---|
| 1,000 ドルから 2,000 ドル | 5 | 1,500 | 7,500 |
| 2,000 ドルから 3,000 ドル | 11 | 2,500 | 27,500 |
| 3,000 ドルから 4,000 ドル | 8 | 3,500 | 28,000 |
| 4,000 ドルから 5,000 ドル | 6 | 4,500 | 27,000 |
| **合計** | **30** | | 90,000 |

$$平均値 = \frac{90{,}000}{30} = 3{,}000$$

$$中央値 = \frac{2{,}000 + 3{,}000}{2} = 2{,}500$$

$$最頻値 = \frac{2{,}000 + 3{,}000}{2} = 2{,}500$$

b)

| 販売 | 枝の数 (*f*) | 中点 ($Pm$) | $f \times Pm$ |
|---|---|---|---|
| 1,000 ドルから 2,000 ドル | 3 | 1,500 | 4,500 |
| 2,000 ドルから 3,000 ドル | 7 | 2,500 | 17,500 |
| 3,000 ドルから 4,000ドル | 6 | 3,500 | 21,000 |
| 4,000 ドルから 5,000 ドル | 4 | 4,500 | 18,000 |
| **合計** | **20** | | 61,000 |

$$平均値 = \frac{61{,}000}{20} = 3{,}050$$

$$中央値 = 3{,}000$$

$$最頻値 = \frac{2{,}000 + 3{,}000}{2} = 2{,}500$$

### 定義

母集団（30 のブランチなど）の中心傾向の尺度は、母集団**パラメーター**として知られており、多くの場合、次のように表されます。

母平均 = μ　　母平均 = Me　　母平均 = Mo

標本（20 のブランチなど）を参照する中心傾向の尺度は、**統計（または統計学者）**と呼ばれ、次のように表されます。

標本平均 = $\bar{x}$　　標本中央値 = $\tilde{x}$　　標本中央値 = $\hat{x}$

### 問題

教室の母集団を考慮して、クラスメートが家から学校に行くのにかかる時間に関する情報を収集し、母集団の 60% のランダム標本を実行して、標本の母集団と中心傾向のすべての測定値を計算します。

## 1.7 分散の測定

### 導入問題

支店の売上データを使用して、各テーブルの分散と標準偏差を計算します。

| 販売 | 枝の数 (*f*) |
|---|---|
| 1,000 ドルから 2,000 ドル | 5 |
| 2,000 ドルから 3,000 ドル | 11 |
| 3,000 ドルから 4,000 ドル | 8 |
| 4,000 ドルから 5,000 ドル | 6 |
| **合計** | **30** |

| 販売 | 枝の数 (*f*) |
|---|---|
| 1,000 ドルから 2,000 ドル | 3 |
| 2,000 ドルから 3,000 ドル | 7 |
| 3,000 ドルから 4,000 ドル | 6 |
| 4,000 ドルから 5,000 ドル | 4 |
| **合計** | **20** |

標本の分散と標準偏差を計算するには、$n$で除算するのではなく、$n-1$で除算するため、推定のバイアスが少なくなります。

### 解法

| 販売 | 枝の数 (*f*) | 中点 ($Pm$) | $f \times Pm$ | $Pm-\mu$ | $(Pm-\mu)^2$ | $f(Pm-\mu)^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,000 ドルから 2,000 ドル | 5 | 1,500 | 7,500 | –1,500 | 2,250,000 | 11,250,000 |
| 2,000 ドルから 3,000 ドル | 11 | 2,500 | 27,500 | –500 | 250 000 | 2,750,000 |
| 3,000 ドルから 4,000 ドル | 8 | 3,500 | 28,000 | 500 | 250 000 | 2,000,000 |
| 4,000 ドルから 5,000 ドル | 6 | 4,500 | 27,000 | 1,500 | 2,250,000 | 13,500,000 |
| **合計** | **30** | | | | | 29,500,000 |

$$分散 = \frac{\sum f(Pm-\mu)^2}{30} \approx 983,333.3 \qquad 偏差 = \sqrt{\frac{\sum f(Pm-\mu)^2}{30}} = \sqrt{983,333.3} \approx 991.63$$

| 販売 | 枝の数 (*f*) | 中点 ($Pm$) | $f \times Pm$ | $Pm-\bar{x}$ | $(Pm-\bar{x})^2$ | $f(Pm-\bar{x})^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,000 ドルから 2,000 ドル | 3 | 1,500 | 4,500 | –1,550 | 2,402,500 | 7,207,500 |
| 2,000 ドルから 3,000 ドル | 7 | 2,500 | 17,500 | –550 | 302,500 | 2,117,500 |
| 3,000 ドルから 4,000 ドル | 6 | 3,500 | 21,000 | 450 | 202,500 | 1,215,000 |
| 4,000 ドルから 5,000 ドル | 4 | 4,500 | 18,000 | 1,450 | 2,102,500 | 8,410,000 |
| **合計** | **20** | | | | | 18,950,000 |

$$分散 = \frac{\sum f(Pm-\bar{x})^2}{19} \approx 997,368 \qquad 偏差 = \sqrt{\frac{\sum f(Pm-\bar{x})^2}{19}} = \sqrt{997,368} \approx 998.68$$

### まとめ

母集団の場合、分散は $\sigma^2$ で表され、標準偏差は $\sigma$ で表されます。次のように計算されます。

$$\sigma^2 = \frac{\sum f(Pm-\mu)^2}{N} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum f(Pm-\mu)^2}{N}}$$

標本の場合、分散は $s^2$ で示され、標準偏差は $s$ で示されます。次のように計算されます。

$$s^2 = \frac{\sum f(Pm-\bar{x})^2}{n-1} \qquad s = \sqrt{\frac{\sum f(Pm-\bar{x})^2}{n-1}}$$

### 問題

標本と母集団の両方で、クラスメートが家から学校までどのくらいかかるについて前のクラスで収集された情報を考慮して、分散と標準偏差を計算します。

## 1.8 変動係数*

### 導入問題

次の表は、2016 年の人口の 5 歳と 17 歳の男性の身長の平均と標準偏差を示しています。

| 年齢 | 平均値 | 標準偏差 |
|---|---|---|
| 5 歳 | 110.4 | 4.74 |
| 17 歳 | 170.7 | 5.81 |

a) 2 つの母集団の分散の大きさを、標準偏差だけと比較できますか？
b) 両方の母集団について、商を計算します。
（標準偏差）÷（平均）
次に、それらを比較します。

### 解法

a) 17 歳のグループは標準偏差が大きいが、平均も大きいため、このグループの分散が大きいとは言えません。

b) 5 歳の人口：4.74 ÷ 110.4 ≈ 0.043　　17 歳の人口：5.81 ÷ 170.7 ≈ 0.034

この値を使用して、17 歳の人口の身長が5歳の人口よりも分散が少ないことを確認できます。

### 定義

**変動係数**は、データセットの標準偏差 $s$ と算術平均 $\bar{x}$ のパーセンテージとして定義され、$CV$ で表され、次のように計算されます $CV = \frac{s}{\bar{x}}(100)$

変動係数は、平均の差が大きい場合に、異なる母集団のデータの分散の大きさを比較するために使用されます。（平均間の差が小さい場合、または平均が等しい場合は、標準偏差を使用して比較できます）。 一般に、平均が大きい場合、標準偏差は増加する傾向があります。

変動係数のパーセンテージは、データセットの算術平均の信頼性を決定するためにも使用されます。一般に、信頼性を決定するために、次の表をパラメーターとして使用できます。

| $CV$ 値 | 平均の代表性 |
|---|---|
| 0% – 10% | 非常に代表的な平均 |
| 10% – 20% | かなり代表的な平均 |
| 20% – 30% | 代表性のある平均 |
| 30% – 40% | 代表性が疑わしい平均 |
| 40% 以上 | 代表的でない平均 |

### 例

基数 100 で採点した場合と比較して、基数 10 で採点した場合の試験の点数の分散はどうですか？

$CV$ はどちらの場合も同じです。これは、基数 100 の平均と標準偏差の両方が、基数 10 の平均と標準偏差の 10 倍であるため、データの変動が等しいためです。

### 問題

次のデータは、4 つの異なるブランドで見つかった不良乳製品の量に関するものです。どのブランドの平均が最も信頼できるかを判断します。

ブランド 1： $\bar{x} = 14, s = 3$　　ブランド 2： $\bar{x} = 17, s = 2$　　ブランド 3： $\bar{x} = 12, s = 5$　　ブランド 4： $\bar{x} = 15, s = 1$

## 1.9 復習問題

1. 次の各状況で、母集団、標本、統計変数、およびそれらがどのように分類されるかを特定します。

   a) 教育政策の影響を判断するために、全国の 40 の学校で診断テストが実施されています。
   b) 乳製品の品質を知りたい場合は、国内の各スーパーマーケットで製品のユニットに対してテストが実行されます。
   c) エルサルバドルの農村部での平均所得を確定するために、国の各農村部から20人の調査が実施されます。

2. 以下に示す統計変数が、質的変数（名義変数または順序変数）であるか、量的変数（離散変数または連続変数）であるかを判別します。

   a）兄弟の数
   b）両親との関係（悪い、公正、良い）
   c）数学の試験の結果
   d）優先石鹸ブランド

3. 次の標本戦略を単純ランダムまたは系統的ランダムとして分類します。

   a) 母集団に 1 から 10 までの番号を付け（最後に繰り返します）、番号を選択して、その番号を持つすべての人が標本の一部になるようにします。
   b) 母集団に番号を付けて 3 つの数を削除すると、4 番目が選択され、次に別の 3 つと 4 番目が選択され、母集団全体がカバーされるまで続きます。
   c) 母集団にグループを作成し、それらのグループのうち 2 つをランダムに選択して標本にします。
   d) 母集団に番号を付け、サイコロを振ってその番号の母集団から人を選択し、もう一度それを転がして前の結果に追加し、他の人を選択します。

4. 次のデータを持つ会社の 30 人の学生の標本を作成します。

| | 女性 | 男性 |
|---|---|---|
| 生徒名 | 35 | 15 |
| 専門家 | 25 | 25 |

5. 各状況に最も適切と思われる非確率標本のタイプを決定します。

   a) ゼミ課題の社会調査
   b) 違法物質の配布形態。
   c）運転時に過敏性を示す人
   d) 陸上競技に参加する学生。

6. ショッピングセンターの駐車場では、車が駐車されたままの平均時間が計算され、駐車場全体と最初の 30 の位置について次のデータが取得されます。

| 時間 | 車の数 |
|---|---|
| 0 分から 1 時間 | 12 |
| 1 時間から 2 時間 | 30 |
| 2 時間から 3 時間 | 32 |
| 3 時間から 4 時間 | 16 |
| **合計** | **90** |

| 時間 | 車の数 |
|---|---|
| 0 分から 1 時間 | 4 |
| 1 時間から 2 時間 | 10 |
| 2 時間から 3 時間 | 11 |
| 3 時間から 4 時間 | 5 |
| **合計** | **30** |

   a) 母集団と標本の両方の平均、中央値、最頻値、分散、および標準偏差を計算します。
   b) 人々がモールで過ごす平均時間は 2 時間で、標準偏差は 0.8 時間であることを考えると、どちらの平均がより信頼できるでしょうか。

## 2.1 四分位数

### 導入問題

学年末に、先生が生徒の欠席日数を数えたところ、以下のデータを得ました。

4, 5, 6, 2, 4, 8, 10, 11, 13, 12, 11, 10, 12, 6, 7, 9, 8, 13, 14, 15

a) データ集合の中央値はいくつですか。
b) データを小さい順に並べた場合データ集合の前半の中央値はいくつになりますか。
c) データを小さい順に並べた場合データ集合の後半の中央値はいくつになりますか。

### 解法

a) データを並べ替えて中央値を算出しています。

2, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 13, 13, 14, 15

中央値は $\frac{9+10}{2} = 9.5$ です。

b) a) のデータ集合の前半を考えます。

2, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9

中央値は $\frac{6+6}{2} = 6$ です。

全体のデータが奇数 ($2n + 1$) の場合 b) は最初の $n$ 個のデータ、そして c) は最後の $n$ 個のデータについて考えなければいけません。つまり中央値と一致するデータについては考えません。

c) a) のデータ集合の後半を考えます。

10, 10, 11, 11, 12, 12, 13, 13, 14, 15

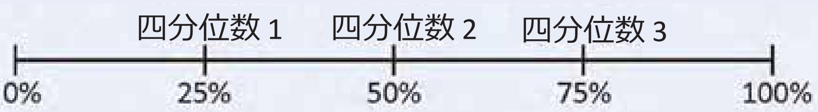
中央値は $\frac{12+12}{2} = 12$ です。

これは、教室にいる生徒の 25% が最大 6 回欠席、50% が最大 9.5 回欠席、75% が最大 12 回の欠席ということになります。

### 定義

データ集合を等量のデータで4分割する変数の値を「**四分位数**」といいます。

四分位数 1 にはその下のデータの 25%、四分位数 2 にはその下のデータの 50%、四分位数 3 にはその下のデータの 75% が集まっています。




四分位数 3 と四分位数 1 の差 (C3 – C1) は、**RI** で示される四分位数**間の範囲数**です。

### 問題

ある複数の医療機関で毎月のデング熱報告者数から得られた以下のデータ集合の 3 つの四分位を決定し、分析しなさい。

a) 3, 1, 4, 12, 10, 9, 11, 7, 12, 16, 3
b) 6, 3, 7, 8, 10, 15, 8, 12, 17, 2
c) 1, 3, 2, 5, 10, 14, 15, 13, 10, 5, 9, 3, 8
d) 4, 2, 5, 7, 10, 16, 12, 9, 14, 8, 5, 1

## 2.2 箱ひげ図

### 導入問題

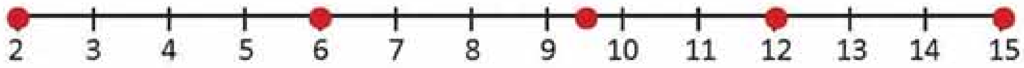
先生が収集した生徒の欠席データについて考えます。

4, 5, 6, 2, 4, 8, 10, 11, 13, 12, 11, 10, 12, 6, 7, 9, 8, 13, 14, 15

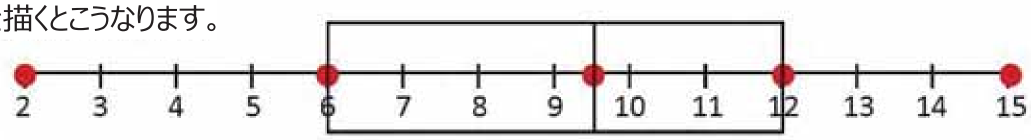
a) 最小値、四分位数 1、四分位数 2、四分位数 3、最大値を数直線上に表しなさい。
b) 四分位数 1 から四分位数 3 までをカバーする長方形を描きなさい。

### 解法

a) 最小値は 2、四分位 1 は 6、四分位 2 は 9.5、四分位 3 は 12、最大値は 15 となっています。よって、それらを直線上に表すと下記の図になります。




b) 長方形を描くとこうなります。




### 定義

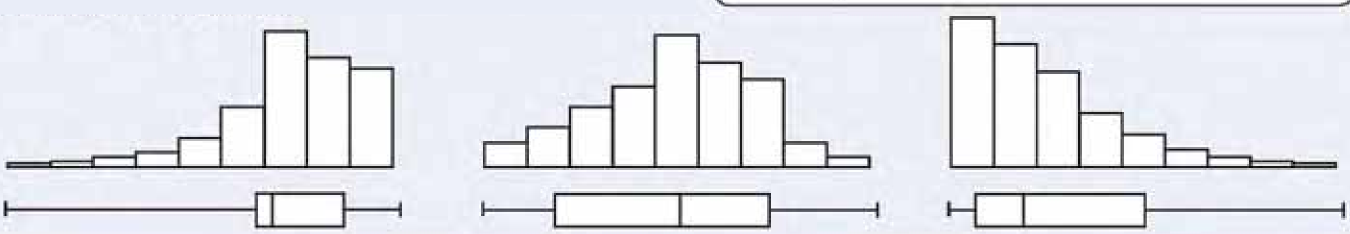
作成されたダイアグラムは、**箱ひげ図**として知られています。


左のひげが右のひげよりも短い場合は、データの下方 25% の範囲がデータの上方 25% よりも狭いことを意味し、同じ様にボックスが狭い場合は、データの中間 50% の範囲が狭いことを意味します。

統計的には、箱図を構築するために、通常、分位間距離の 1.5 倍の値がパラメータとして使用され、ひげは、C1 - 1.5(RI) から C3 + 1.5(RI) の数直線の範囲内にある最初と最後の観測値で表されます。この構造は、データ集合内の外れ値の識別に役立ちます。

箱図の形状で、データの分布を記述するためのガイダンスが得られます。以下の箱図とそれに対応するヒストグラムを参照してください。

1つのヒストグラムは1つの箱図に相当します。しかしながら、1つの箱図が 2つ以上のヒストグラムに相当することもありえます。

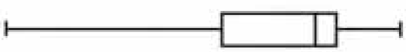
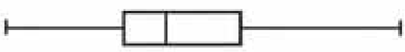
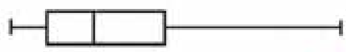


### 問題

1. デング熱で報告された人のデータの箱図を作成し、分析しなさい。

a) 3, 1, 4, 12, 10, 9, 11, 7, 12, 16, 3
b) 6, 3, 7, 8, 10, 15, 8, 12, 17, 2
c) 1, 3, 2, 5, 10, 14, 15, 13, 10, 5, 9, 3, 8
d) 4, 2, 5, 7, 10, 16, 12, 9, 14, 8, 5, 1

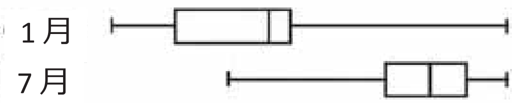
2. 下の箱図を見て、データがどのように分布しているかを見積もりなさい。

a) 
b) 
c) 

## 2.3 箱ひげ図の分析＊

### 導入問題

以下の 1 日の売上高を記録した月ごとの箱ひげ図2つをそれぞれの月別に示し、分析し回答しなさい。

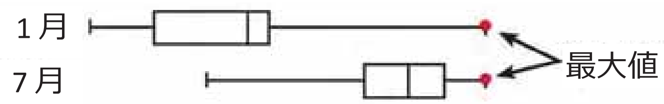



それぞれの月の日数は同じとしてください。

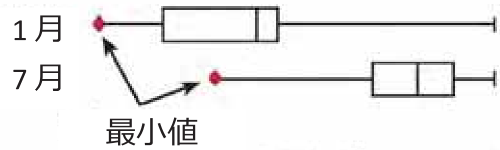
a) どちらの月の売上が最高でしたか？
b) どちらの月の売上が最悪でしたか？
c) 両方の月の四分位数間のばらつきはどのようになっていたかを求めなさい。
d) どちらの月が最高の販売数でしたか？

### 解法

a) 両図の最大値が同じなので、両月ともに最高の売上は等しくなりました。

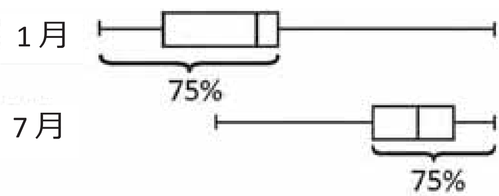



b) 1 月に最悪の売り上げが起きました。図 1 の最小値が図 2 の最低値よりも低くなっているからです。




c) 1 月は、最も低い売上高の 25% は変動が少なく（範囲が狭い）、少ない売上に集中していて、売上高の最低 25% の範囲が大きく、1 月よりも高い売上高に達している 7 月とは異なっています。一方で、1 月の四分位間の範囲は 7 月の四分位間の範囲よりも大きく、つまり、これは 7 月よりも 1 月の方がこの範囲の変動が大きかったということです。結論として、主要売上の 25% を分析すると、1 月は非常に低い値から非常に大きな変動がありますが、7 月は範囲が小さく、非常に高い売上高に集中しています。

d) 少なくとも 1 月の最低売上高の 75% 以上が 7 月の 1 次四分位数以下であることから、7 月の売上高は 1 月の売上高よりも高いと考えられます。



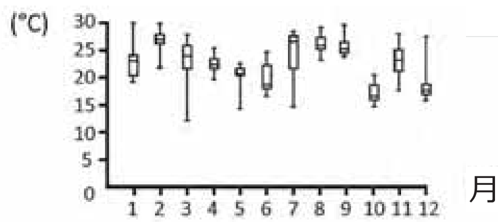

### まとめ

箱図を使うと、それぞれの間で発生する可能性のあるデータの分散を評価してデータを比較するための貴重な情報が得られます。データを正確に記述するためには非常に有用なツールです。

### 問題

1 年の 12 ヶ月間のエルサルバドルの気温を以下の箱ひげ図で分析し、問題に答えなさい。

a) 気温の変化が最も大きかったのはどの月だったのでしょうか？
b) 気温の変化が最も小さかったのはどの月だったのでしょうか？



## 2.4 十分位数と百分位数

### 導入問題

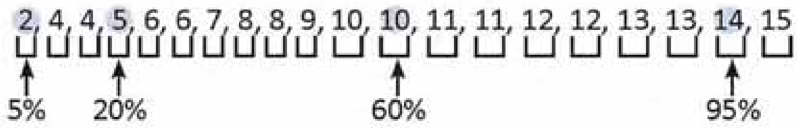
学年末に、先生が生徒の欠席日数を数えたところ、以下のデータを得ました。

4, 5, 6, 2, 4, 8, 10, 11, 13, 12, 11, 10, 12, 6, 7, 9, 8, 13, 14, 15

a) 欠席者数が最も少ない生徒の 20% が欠席した時の欠席数は最大何回でしたか？
b) 欠席者数が最も少ない生徒の 60% が欠席した時の欠席数は最大何回でしたか？
c) 欠席者数が最も少ない生徒の 5% が欠席した時の欠席数は最大何回でしたか？
d) 欠席者数が最も少ない生徒の 95% が欠席した時の欠席数は最大何回でしたか？

### 解法

データをソートして 20 等分（各部分 5%）に分けます。

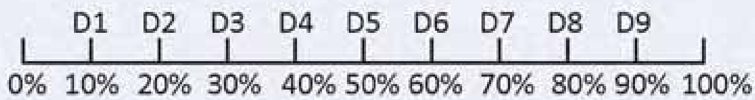



a) 欠席が最も少ない生徒の 20% は、最大で 5 回欠席しています。
b) 欠席が最も少ない生徒の 60% は、最大で 10 回欠席しています。
c) 欠席が最も少ない生徒の 5% は、最大で 2 回欠席しています。
c) 欠席が最も少ない生徒の 95% は、最大で 14 回欠席しています。

### 定義

データ集合を等量のデータで 10 分割する変数の値を「**十分位数**」といいます。

各十分位数は前のものよりも 10% 多くのデータを集めます。最初の十分位数は 10% のデータを集め、2 番目の十分位数は 20% のデータを集め、その後 90% のデータを集める十分位数 9 まで続きます。




データ集合を等量のデータで 100 分割する変数の値を「**百分位数**」といいます。

各百分位数は前のものよりも 1% 多くのデータを集めます。最初の百分位数は 1% のデータを集め、2 番目は 2% のデータを集め、その後 99 のデータを集める十分位数 99 まで続きます。

$n$ 個のデータの合計の十分位数 $d$ を計算するためには、小さい方から大きい方に順番に並べ、$d\frac{n}{10}$ の値に最も近い位置にあるデータを探します。同様に、十分位数値を計算するには、値 $p\frac{n}{100}$ 最も近い位置にあるデータを探します。

### 問題

各データ系列に示された十分位数を計算し、それらのデータから得られる情報を分析しなさい。

a) 6, 9, 2, 10, 1, 7, 8, 2, 7, 5, 11, 12, 9, 5, 3, 10, 12, 7, 4, 8. 十分位数 3, 5 と 7。
b) 4, 6, 10, 15, 13, 7, 9, 5, 7, 7, 12, 14, 10, 9, 6, 11. 十分位数 4, 6 と 9。

## 2.5 復習問題

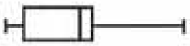
1. 視力障害リハビリセンター、『エウヘニア・ドュエニャス』に新規登録された人の数から得られた以下のデータ集合の 3 つの四分位数を求めなさい。その後、各四分位数が提供する情報を分析しなさい。

a) 5, 10, 8, 6, 3, 2, 8, 12, 5, 1, 7, 9, 4

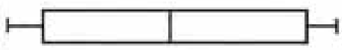
b) 3, 2, 5, 9, 10,15, 7, 9, 12, 10, 3, 1

2. 視力障害リハビリセンター、『エウヘニア・ドュエニャス』に在籍している人のデータ（数字 1）の箱図を作成し、分析しなさい。

3. 下の箱図を見て、データがどのように分布しているかをヒストグラムを使って見積もりなさい。

a) 

b) 

c) 

4. あるアスリートの 12 週間のトレーニング期間中の 100 メートル平地疾走時間についての、以下のパフォーマンス箱図を分析しなさい。

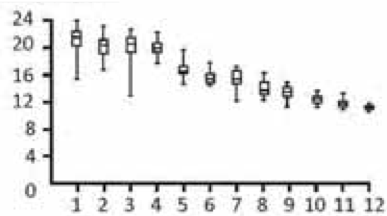
a) どの週に最高のパフォーマンスが得られたのでしょうか？

b) どの週で一番パフォーマンスが悪かったのでしょうか？

c) どの週に最速タイムを記録したのでしょうか？

d) 7 週目のパフォーマンスはどうでしたか？

e) このトレーニングからどのような結論が導き出されますか？




5. 各データ系列に示された十分位数を計算し、それらのデータから得られる情報を分析しなさい。

a) 10, 6, 7, 11, 13, 8, 9, 5, 9, 10, 12, 12, 7, 9, 11, 15, 4, 6. 十分位数 2、4 と 8。

b) 10, 5, 7, 11, 8, 9, 12, 7, 6, 10, 9, 8, 14, 13, 9, 11, 5. 十分位数 3, 7 と 9。

c) 8, 5, 4, 2, 1, 7, 3, 9, 10, 9, 8, 6, 2, 11, 3, 14, 11, 8, 13, 10, 6, 12, 10, 4, 3. 十分位数 1, 5 と 7。

## 2.6 ユニットの問題

コンピュータの負荷の持続時間を評価することを目的とした、あるノート PC の品質管理を行います。そのために、50 台のコンピュータのサンプルを採取し、以下のデータを記録します。

| バッテリー持続時間（時間） | ノート PC の数 |
|---|---|
| 0 ～ 2 | 10 |
| 2 ～ 4 | 15 |
| 4 ～ 6 | 9 |
| 6 ～ 8 | 9 |
| 8 ～ 10 | 5 |
| 10 ～ 12 | 2 |

a) 変数を特定し、分類しなさい。

b) この品質管理には、どのような種類のサンプリングが最も適していますか？

c) このタイプのノート PC の平均的なバッテリーの持続時間はどれくらいですか？

d) このタイプのノート PC で最も顕著に見られるバッテリー持続時間は、どのくらいですか？

e) このデータ集合の中央値は何ですか？

f) このサンプルの分散と標準偏差を計算しなさい。

g) これらのデータの変動係数を計算しなさい。

h) データ集合の平均はどのくらいデータ全体を如実にあらわしていますか？

i) 以下の情報は、別のタイプのノート PC のバッテリー持続時間についてです。

| バッテリー持続時間（時間） | ノート PC の数 |
|---|---|
| 0 ～ 2 | 8 |
| 2 ～ 4 | 17 |
| 4 ～ 6 | 13 |
| 6 ～ 8 | 8 |
| 8 ～ 10 | 3 |
| 10 ～ 12 | 1 |

バッテリー持続時間一番長いことが要求されるコンピュータを購入する必要がある場合、どのタイプのノート PC をを購入するのが適していますか？またその理由は何ですか？問題の最初のノート PC とここで述べたノート PC を比較しなさい。

## 2.7 ユニットの問題

以下は、走り幅跳びの選手の過去 8 週間の 1 週間あたりのパフォーマンスのデータです。テーブルには、跳んだ長さ (m) が記録されています。

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 第 1 週 | 3.5 | 3.8 | 3.7 | 3.8 | 3.9 | 3.7 | 4.0 |
| 第 2 週 | 3.8 | 4.2 | 4.3 | 4.2 | 4.4 | 4.6 | 4.6 |
| 第 3 週 | 4.5 | 4.8 | 4.7 | 4.9 | 4.9 | 5.3 | 5.2 |
| 第 4 週 | 5.2 | 5.5 | 5.7 | 5.6 | 5.8 | 5.9 | 6.0 |
| 第 5 週 | 5.8 | 6.3 | 6.5 | 6.8 | 6.8 | 6.9 | 6.8 |
| 第 6 週 | 6.7 | 6.9 | 7.0 | 6.5 | 6.8 | 7.0 | 7.1 |
| 第 7 週 | 6.9 | 7.2 | 7.3 | 7.2 | 7.4 | 7.1 | 7.5 |
| 第 8 週 | 7.4 | 7.7 | 7.8 | 7.6 | 7.9 | 7.8 | 7.9 |

a) 各週のデータの四分位数を近似しなさい。

b) 各週の箱ひげ図を構築しなさい。

c) 箱ひげ図を使って、アスリートの 8 週間のパフォーマンスを比較する図を作成しなさい。

d) どの週に最高のパフォーマンスが得られましたか？

e) どの週で一番パフォーマンスが悪かったですか？

f) どの週に最高記録が出ましたか？

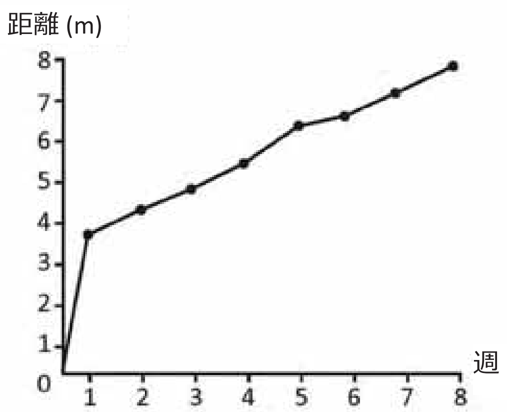
g) 7 週目のパフォーマンスはどうでしたか？

h) どの週から、5 m 以上跳べる可能性が高いですか？

i) 1 週目のトレーニングで 4 m 以上跳べるようになったと考えていいのですか？ なぜですか？

j) このトレーニングからどのような結論が導き出されますか？

k) 以下のグラフは、各週の平均値を使って作成したのもです。c) で作成したものを下のものとを比べて良い点を指摘しなさい。



## 3.1 GeoGebra 演習：統計解析

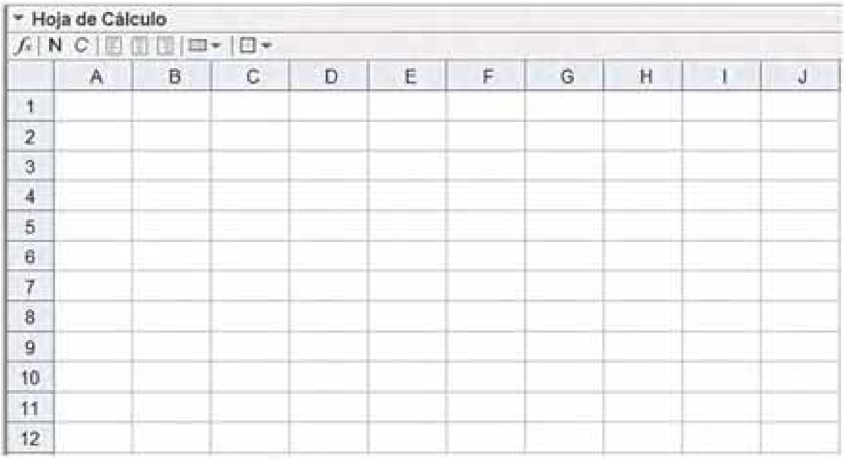
この演習では、GeoGebra リソースを使用して変数の統計分析を実行し、ユニットで提起された状況に基づいて箱図とひげ図を作成します。まず「演習」にある手順にしたがって、図を作成し、そして必要な分析をします。次に、GeoGebra で、この演習の最後にある「課題」セクションの問題に取り組みます。

### 演習

授業 1.5 の問題のデータに戻ります。

| 速度 (km/h) | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 60 | 65 | 40 | 80 | 80 | 90 | 45 |
| 70 | 100 | 70 | 50 | 80 | 55 | 120 |
| 75 | 65 | 90 | 85 | 70 | 100 | 55 |
| 110 | 70 | 95 | 70 | 80 | 115 | 100 |

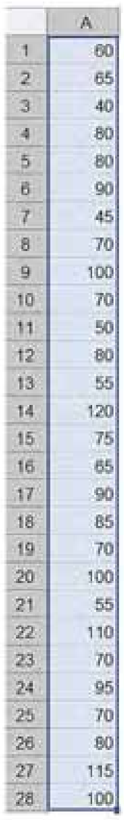
1. スプレッドシートビュー (la vista de hoja de cálculo) を使用します。このためには、スプレッドシートオプションで GeoGebra を起動したときに開くメニューを使用するか、またはビューメニューからスプレッドシートオプション (opción Hoja de Cálculo) をクリックします。以下のようなウィンドウが開きます。

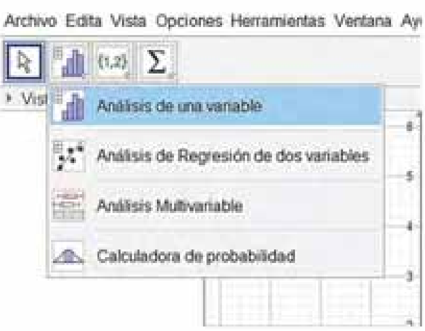



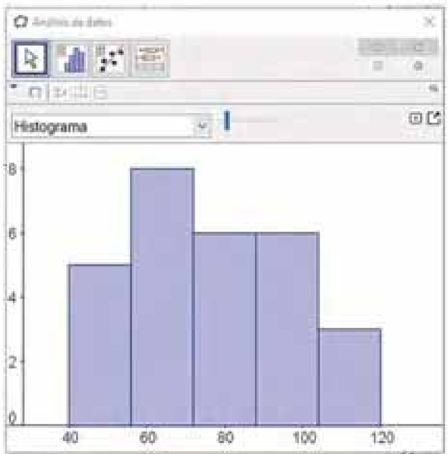

2. スプレッドシートビューの A 列に速度表のデータを 1 つずつ入力します。

3. マウスの左ボタンを押したまま、入力されたデータをすべて選択すると、そこが水色の濃淡で表示されます。

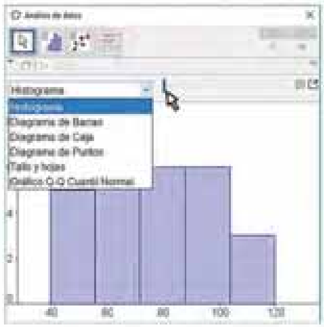
4. 「変数を分析する (Análisis de una variable)」ボタンを押すと "データソース" と呼ばれるテキストボックスが開きますが、それは前のステップで選択したデータが表示されます。「分析する (Analiza)」ボタンを押すと、下のようなグラフが表示されます。



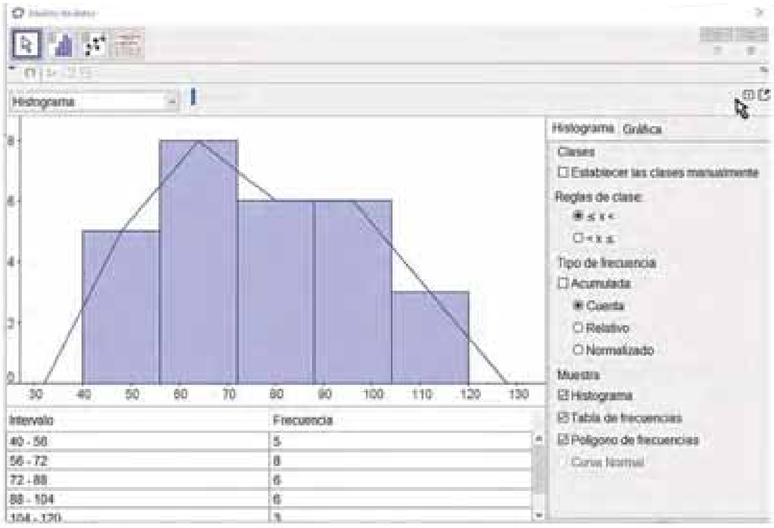


5. 選択肢を広げると、提示されているグラフがヒストグラムであること、また、棒グラフ（基礎教育で学ぶ）、ヒストグラム（8 年生で学ぶ）、箱図（このユニットで学ぶ）や、これまで学んでこなかった種類のグラフなど様々なな種類の統計グラフが選択できることに気づくでしょう。

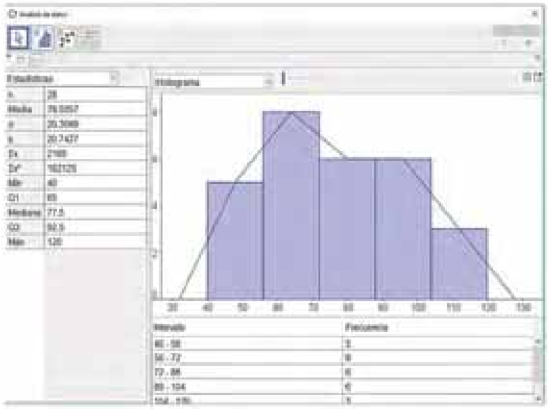



6. 右上の表示オプション (las opciones de la vista) を拡張することができます。その中で、頻度表オプション (las opciones de tabla de frecuencias)（手動で作成することができます）にチェックを入れると、自動的に頻度分布表を作成します。そして、頻度多角形オプション (la opción polígono de frecuencias) にチェックを入れると、以下の結果が得られます。



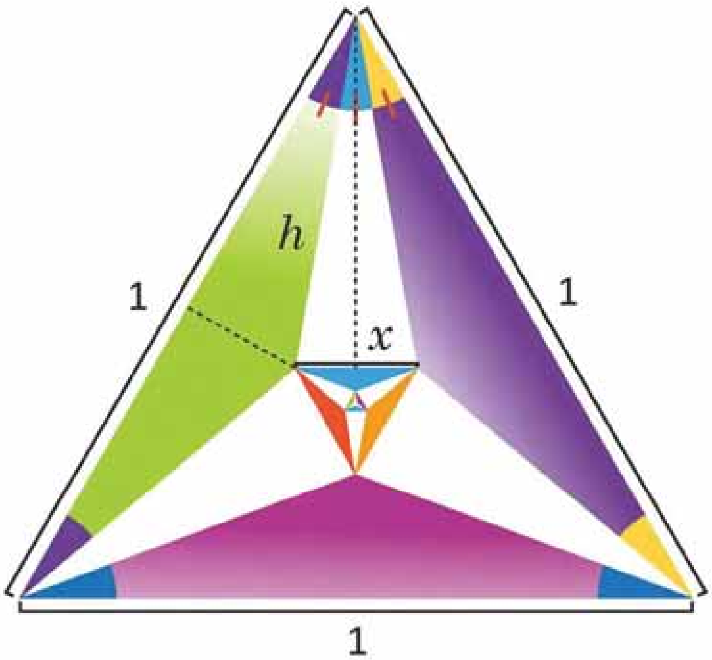

7. 最後に、＋のアイコンが付いている左上の統計学 (Estadísticas) オプションを選択します。これで、平均、標準偏差（標本と母集団）、分級数、中央値、最小値、最大値などの統計情報が得られます。

8. この問題の解決方法をチェックして、自分の答えを確認し、必要に応じて修正してください。



## 課題

GeoGebra の表計算ツールを使って、授業 2.7 の単元問題を解いてみましょう。 これを行うには、各週のデータを比較する必要があるので、各行に一週間のデータを入力、例えば、A 列に 1 週目のデータを、B 列に 2 週目のデータを入力していき、H 列に 8 週目のデータに達するまで行います。
次に、すべてのデータを選択し、多変量解析オプションを使用します。




$x$ = ?

それぞれの角は20°です。高さを示す点線を引くと、$h = \frac{1}{2\cos 20°}$ なので、sin 10°= $x$ cos 20° が成立し、よって、$x = \frac{\text{sen } 10°}{\cos 20°}$ となります。

REPÚBLICA DE EL SALVADOR EN LA AMÉRICA CENTRAL