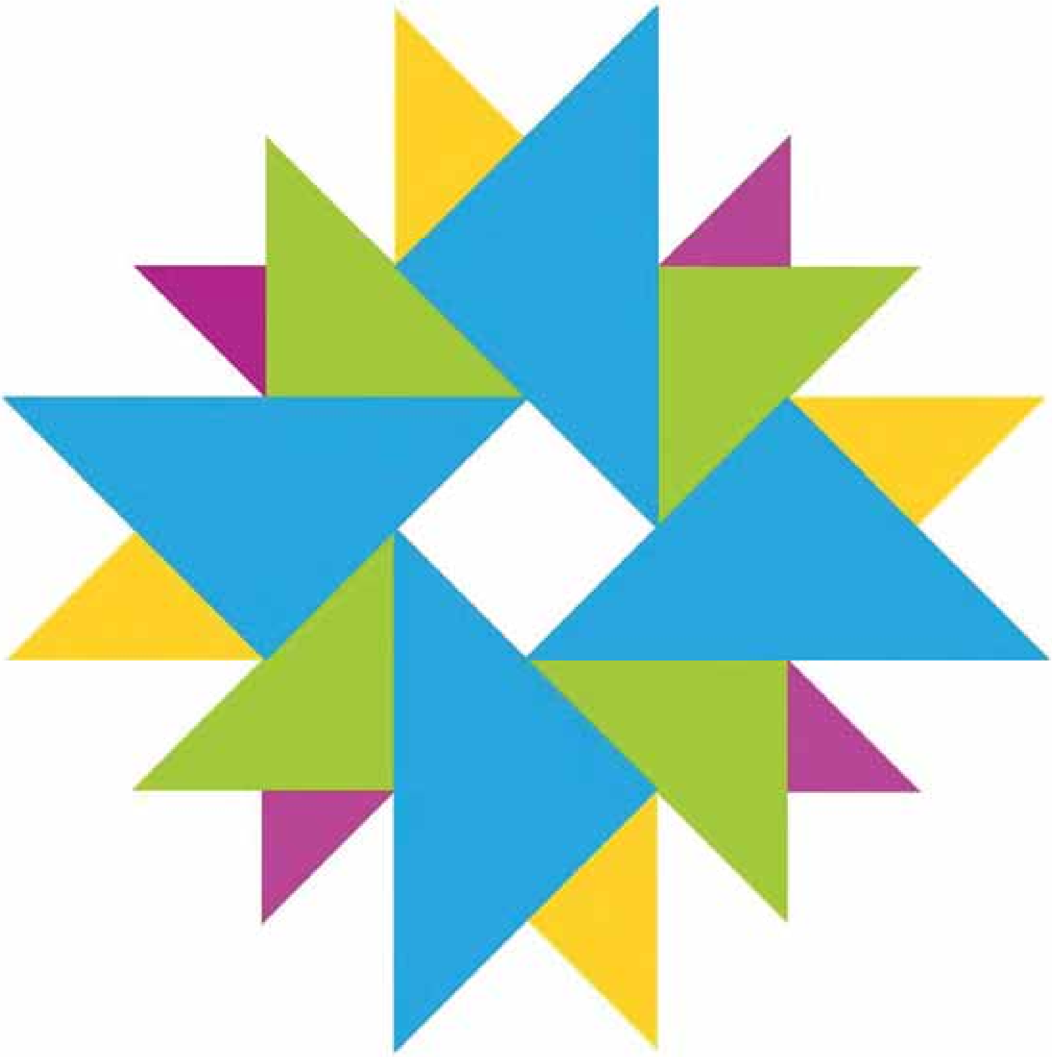
エルサルバドル政府

教育省

算数

高校2年



教科書

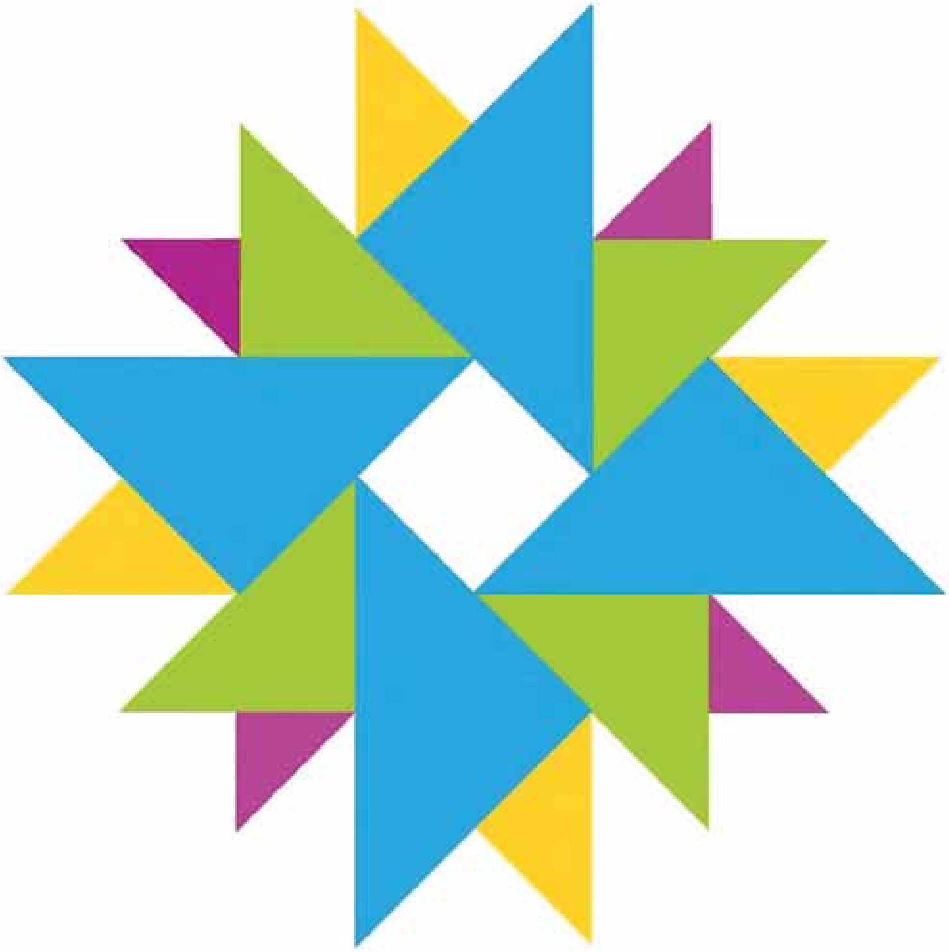
第二版

エルサルバドル政府

教育省

算数

高校2年



教科書

第二版

ESMATE

JICA

教育省の執筆及びレイアウトチーム

Ana Ester Argueta Aranda
César Omar Gómez Juárez
Diana Marcela Herrera Polanco
Francisco Antonio Mejía Ramos

技術的校正
Claudia Patricia Corcio de Beltrán

デザイン及びレイアウトの校正
Francisco René Burgos Álvarez
Judith Samanta Romero de Ciudad Real

文体修正
Mónica Marlene Martínez Contreras
Marlene Elizabeth Rodas Rosales

現職教員教育国家計画内の専門家チームによる全国レベルでの校正
国際協力機構（JICA）を通じた日本の技術協力

表紙の画像は教育的見地から、面積が1/2の割合で減少する直角三角形で形成された図形になっており、その面積を計算で求めることができます。
答えは裏表紙の裏にあります。

510
M425 算数：高校2年：教科書／執筆チーム Ana Ester Argueta、César Omar Gómez、Diana Marcela Herrera、
監修 Francisco Antonio Mejía。-- 第2版 -- サンサルバドル、エルサルバドル：教育省（MINED）、2019年。
216ページ：図解入り；28 cm -- （Esmate）
ISBN 978-99961-341-3-5（印刷）
1. 算数 – 教科書。2. 関数 – 問題、演習など。3. 算数 – 教育 数学：高校1年... 2019年 I. Argueta Aranda、Ana Ester、共著。II. タイトル。
BINA/jmh

生徒の皆さんへ：

新しい学年に皆さんをお迎えし、皆さんがこれから算数のさらなる知識を得る機会を得ることを喜ばしく思います。

教育・科学技術省（MINEDUCYT）では、初等教育及び中等教育における算数教育向上計画（ESMATE）を通じ、皆さんのために様々な教育教材を開発してきました。その中のひとつが、いま皆さんが手にされている「教科書」です。

この強化には、皆さんが考える力を強化し、算数の能力を伸ばせるような問題やアクティビティがたくさん含まれています。そうした能力は、日常生活の問題を解決するために役に立つものです。

ですから、この教科書にある問題を一つ一つに、挑戦だと思って取り組んでみてください。皆さんが、私たちの国の発展に貢献してくれる模範的な市民となるために、この練習帳にすべての力を注いで取り組むことを期待しています。

Carla Evelyn Hananía de Varela
教育科学技術大臣

Ricardo Cardona Alvarenga
教育科学技術副大臣

教科書の紹介

1授業の構成

導入問題　各授業では、まず最初に生徒に対し問題を提示して、その問題をどのように解くかを考えさせることが大切です。そのようにして授業で扱うテーマを導入することになります。

解法　教科書ではこの段階で、提示された問題の解き方を1つ以上を載せています。

まとめ　「まとめ」では、解き方を解説しています。ここでは問題の解答を「導入問題」と「解法」に関連づけて数式を使って表わしています。

例　学習内容の定着を図るために、必要な場合に追加問題を出しています。

問題　鉛筆マークは文章題と計算問題のセクションを示します。

電卓のアイコンがある問題でのみ、電卓を使う必要があります。

補足情報

この教科書では、事前知識やヒント、また算数の歴史といった小話も学習の助けとなるよう、それぞれ色を変えて紹介しています。

事前知識　　ヒント　　小話

授業配分

この教科書は8ユニットで構成されており、各ユニットには複数の課があり、それぞれの課は複数の授業で構成されています。各授業のタイトルについている番号は、最初の番号が何課であるかを示し、二つ目の番号が何番目の授業であるかを示しています。例えば、この教科書のユニット1の課1の7回目の授業のタイトルは、以下のように表示されています。

課番号を表示します。

1.7 有理方程式

授業番号を表示します。

ユニット番号は、奇数ページの端に紫色で表示されています。

ユニット1

さらに、それぞれのユニットの最後に、そのユニットで学習した全てのテーマを網羅した問題が掲載されており、また時には、数学の学習用ツールGeoGebraを使う練習問題も掲載されています。

目次

ユニット1

方程式 7

1. 方程式と連立方程式 8

ユニット2

直線 19

1. 点と線分 20
2. 直線 27
3. 2直線の位置関係 33
4. GeoGebraを使った演習 45

ユニット3

2次曲線 49

1. 放物線 50
2. 円 62
3. 楕円 69
4. 双曲線 77
5. GeoGebraを使った演習 87

ユニット4

超越関数 I 95

1. 累乗とn乗根 96
2. 指数関数と指数方程式 108

目次

ユニット 5

超越関数 II 119

1. 全単射関数と逆関数 120
2. 対数関数 128
3. 三角関数 138
4. GeoGebraを使った演習 153

ユニット 6

等差数列、等比数列 161

1. 等差数列 162
2. 等差数列 171

ユニット 7

場合の数 177

1. 集合論 178
2. 順列 182
3. 組み合わせ 194

ユニット 8

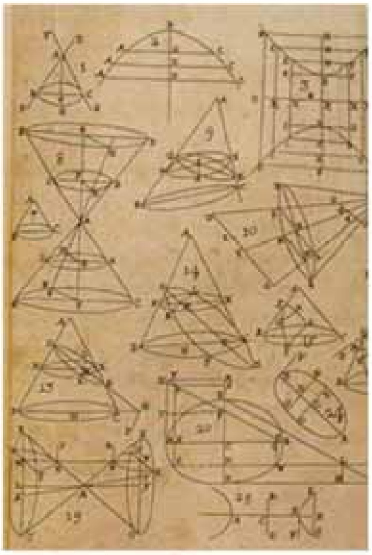
確率 205

1. コルモゴロフの公理 206
2. 条件付き確率 213

ユニット 1

方程式

方程式の研究は古代文化から行われてきました。方程式の起源を詳細に述べるのは複雑ですが、歴史的に研究されてきた次数の低い方程式とともに、特徴のある方程式の研究も行われてきました。たとえば、2 次方程式の構造を持つ4次方程式（次数が 4）や根号を含む方程式、1 次方程式に還元される有理方程式などです。これらの方程式にも等式や連立方程式があり、また、それらと同じ特性を持っています。



アポロニウスの円錐曲線の図。これらの図形の方程式を導くためには、根号を含む方程式を解く必要があります。

自然界の状況のモデリングにおいては、1 次方程式や2次方程式でモデリングするのが複雑な現象があり、他の種類の式を解く必要があります。そのためには、基本的な方程式（1 次方程式、2 次方程式、連立 1 次方程式）を解く際に得た知識を他の種類の方程式に応用する必要があります。

2 次方程式で学んだことの応用として、4 方程式の内容に取り組むことから始めます。その後、根号を含む方程式を解くことに移ります。最後に、多項式の最小公倍数の概念から出発し、有理方程式に取り組みます。

1.1 4 次方程式　パート 1

導入問題

以下の手順に従って、方程式 $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$ を解きなさい。

1. $y = x^2$ の変数変換を行う。
2. 1.で得た 2 次方程式を解く。
3. 元の方程式の解を見つける。

解法

1. 方程式を観察すると、 $(x^2)^2 - 25(x^2) + 144 = 0$ と書くことができます。よって、$y = x^2$ の変数変換を行うと、

$$(x^2)^2 - 25(x^2) + 144 = y^2 - 25y + 144 = 0$$

2. この 2 次方程式は因数分解によって解くことができるので、掛けると 144 になり、足すと –25 になる 2 つの値を探します。

$$y^2 - 25y + 144 = (y - 16)(y - 9) = 0$$

ここから、$y - 16 = 0$ または $y - 9 = 0$ つまり、$y = 16$ または $y = 9$

3. 1. から $y = x^2$ 、また、2. から $y = 16$ または $y = 9$ が分かります。よって、

$$x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4 \text{ または } x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

したがって、$x^4 - 25x^2 + 144 = 0$ の解は $x = -4、-3、3、4$

定義

A はゼロではない $Ax^4 + Bx^2 + C = 0$ という形の方程式を **4 次**方程式といいます。

4 次方程式は、$y = x^2$ の変数変換を行い、この変換でできた 2 次方程式を解くことによって、解くことができます。
4 次方程式には、すべてが実数、すべてが虚数、または、2つが実数で 2 つが虚数の 4 つの解があります。

例

方程式 $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$ のすべての複素数解を求めなさい。

$y = x^2$の変数変換を行うと、$y^2 - 24y - 25 = 0$ の方程式になります。これを因数分解すると、

$$y^2 - 25y + 144 = (y - 16)(- 9) = 0$$

したがって、$y - 25 = 0$ または $y + 1 = 0$

- $y - 25 = 0$ ならば、$y = 25 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$
- $y + 1 = 0$ ならば、$y = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$

高校1年生のユニット 2 から、以下が分かります。

$$\sqrt{-1} = i$$

したがって、$x^4 - 25x^2 + 144 = 0$ の解は $x = -5、5、i、-i$

問題

以下の問題を解きなさい。

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$　　b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

c) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$　　d) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

e) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$　　f) $x^4 + 4x^2 + 3 = 0$

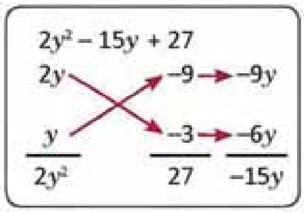
1.2 4 次方程式　パート 2

導入問題

方程式 $2x^4 - 15x^2 + 27 = 0$ を解きなさい。

解法

$y = x^2$ の変数変換を行うと、 $2y^2 - 15y + 27 = 0$ になります。因数分解によって方程式を解くとき、たすきがけ法を使うと、$2y^2 - 15y + 27 = (2y - 9)(y - 3) = 0$ になります。



ここから以下のようになります。

- $2y - 9 = 0 \Rightarrow y = \frac{9}{2}$. つまり、 $x^2 = \frac{9}{2}$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

- $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$. つまり、 $x^2 = 3$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

したがって、$2x^4 - 15x^2 + 27 = 0$ の解は $x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$.

まとめ

$Ax^4 + Bx^2 + C$ の形の方程式は、たすきがけ法によって、$(ax^2 + b)(cx^2 + d)$ の形に因数分解することができます。この方法を使うと、$y = x^2$ の変数変換を行わずに 4 次方程式を解くことができます。

例

方程式 $2x^4 + 33x^2 + 16 = 0$ を解きなさい。

たすきがけ法によって $2x^4 + 33x^2 + 16$ を因数分解すると、

$$2x^4 + 33x^2 + 16 = (2x^2 + 1)(x^2 + 16) = 0$$

ここから以下のようになります。

- $2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{2}$. つまり、

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}i$$
$$= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

- $x^2 + 16 \Rightarrow x^2 = -16$. つまり、 $x = \pm 4i$

したがって、方程式 $2x^4 + 33x^2 + 16 = 0$ の解は $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2}i, -4i, 4i$.

問題

以下の問題を解きなさい。

a) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

b) $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$

c) $9x^4 - 40x^2 + 16 = 0$

d) $9x^4 + 5x^2 - 4 = 0$

e) $8x^4 - x^2 - 7 = 0$

f) $3x^4 + 4x^2 + 1 = 0$

1.3 根号を含む方程式 パート 1

導入問題

方程式 $\sqrt{x}-3=5$ を解きなさい。

解法

根号を含むこのような形の方程式を解くためには、根号を外し、2 乗します。

$$\sqrt{x}-3=5$$
$$\sqrt{x}=5+3 \quad \text{根号を外し、}$$
$$(\sqrt{x})^2=8^2 \quad \text{2乗し、}$$
$$x=64.$$

解を確認するときは、$\sqrt{64}-3=8-3=5$ とします。すると、$x=64$ は、元の方程式を満たします。したがって、$x=64$ が解です。

定義

根号を含む方程式とは、根号の中に 1 つまたは複数の変数がある方程式のことです。

根号を含む方程式は、根号を外し 2 乗することによって、根号を含まない方程式に変換することができます。

根号を含む方程式を解いたら、見つけた値を元の方程式に代入して等式を確認して、値が方程式を満たすことを確認しなければなりません。

元の方程式で確認したときに複素数になる値は、解とは見なされません。

例

$2\sqrt{2x+1}-6=0$ を解きなさい。

根号を外し 2 乗すると、

$$2\sqrt{2x+1}-6=0$$
$$2\sqrt{2x+1}=6$$
$$\sqrt{2x+1}=3 \quad \text{根号を外し、}$$
$$2x+1=9 \quad \text{1 次方程式にし、これを解かなければなりません。}$$
$$2x=8$$
$$x=4.$$

解を確認するときは、$2\sqrt{2(4)+1}-6=2\sqrt{9}-6=2(3)-6=6-6=0$ したがって、$x=4$ がこの方程式の解です。

問題

根号を含む方程式を解きなさい。

a) $\sqrt{x+3}=4$

b) $\sqrt{x-8}=2$

c) $5-\sqrt{3x+1}=0$

d) $5+3\sqrt{x}=8$

e) $7-\sqrt{x+2}=3$

f) $\sqrt{x+3}=\sqrt{5x-1}$

1.4 根号を含む方程式　パート2

導入問題

以下の方程式を解きなさい。

a) $\sqrt{4x^2-15}-2x=-1$　　b) $\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{2x}=x$

解法

a) 前の授業でやった方法と同じように、根号を外し、2 乗します。

$$\sqrt{4x^2-15}-2x=-1$$
$$\sqrt{4x^2-15}=2x-1$$
$$4x^2-15=4x^2-4x+1 \quad \text{2 乗して展開すると、}$$
$$\cancel{4x^2}-15=\cancel{4x^2}-4x+1$$
$$4x=16$$
$$x=4.$$

4 が方程式の解であることを、元の方程式に代入して確かめます。

$$\sqrt{4(4)^2-15}-2(4)=\sqrt{64-15}-8=\sqrt{49}-8=7-8=-1$$

したがって、$x=4$ が方程式 $\sqrt{4x^2-15}-2x=-1$ の解です。

b) この方程式には 2 つの根号があります。そこで、左辺と右辺に分かれるようにします。

$$\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{2x}=x$$
$$\left(\sqrt{x^2+6x}\right)^2=\left(x+\sqrt{2x}\right)^2$$
$$x^2+6x=x^2+2x\sqrt{2x}+2x \quad \text{2乗して二項式を展開し、}$$
$$\cancel{x^2}+6x-2x=\cancel{x^2}+2x\sqrt{2x}$$
$$(4x)^2=\left(2x\sqrt{2x}\right)^2$$
$$16x^2=4x^2(2x)$$
$$16x^2-4x^2(2x)=0$$
$$4x^2(4-2x)=0.$$

ゼロになるかどうかはわからないため、$4x^2$ で割らないことをお勧めします。

ここから、$4x^2=0 \Rightarrow x=0$ または $4-2x=0 \Rightarrow x=2$ 元の方程式で 2 つの値を確認すると

$x=0$: $\sqrt{0^2+6(0)}-\sqrt{2(0)}\stackrel{¿?}{=}0 \Rightarrow 0=0$ ✓

$x=2$: $\sqrt{2^2+6(2)}-\sqrt{2(2)}\stackrel{¿?}{=}2$
$\Rightarrow \sqrt{4+12}-\sqrt{4}\stackrel{¿?}{=}2$
$\Rightarrow 4-2\stackrel{¿?}{=}2$
$\Rightarrow 2=2$ ✓

よって、$x=0$ と $x=2$ が方程式 $\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{2x}=x$ の解になります。

まとめ

根号を含む方程式を解くと、2次以上の方程式になることがあります。その場合は、因数分解によって解くことができます。または、因数分解によって解くことができない2次方程式になった場合は、一般的な公式を使って解きます。

問題

根号を含む方程式を解きなさい。

a) $x+2=\sqrt{x^2+1}$　　b) $3\sqrt{2x-1}=3x$

c) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{4x+5}=-1$　　d) $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x+2}=0$

e) $\sqrt{3x-11}+\sqrt{3x}=\sqrt{12x-23}$　　f) $\sqrt{9x-8}-\sqrt{4x+1}=\sqrt{x-3}$

1.5 根号を含む方程式　パート 3

導入問題

$x+\sqrt{4x+1}=5$ を解きなさい。

解法

根号を外し、2 乗します。

$$
\begin{aligned}
x+\sqrt{4x+1} &= 5\\
\sqrt{4x+1} &= 5-x\\
\left(\sqrt{4x+1}\right)^2 &= (5-x)^2\\
4x+1 &= 25-10x+x^2\\
x^2-14x+24 &= 0 \quad \text{得られた2次方程式を解くと、}\\
(x-2)(x-12) &= 0.
\end{aligned}
$$

したがって、$x-2=0$ または $x-12=0$　　よって、$x=2$ または $x=12$　元の方程式で解を確かめると、

$x=2$: $2+\sqrt{4(2)+1}=2+\sqrt{8+1}=2+3=5$ ✓

$x=12$: $12+\sqrt{4(12)+1}=12+\sqrt{48+1}=12+7=19\neq 5$ ✗

よって、$x=2$が $x+\sqrt{4x+1}=5$ の解です。

2 乗して得られた方程式の解が、必ずしも元の方程式の解とは限りません。なぜなら、$A^2=B^2$ は、必ずしも $A=B$ を意味するわけではないからです。

例えば、$3^2=(-3)^2$ ですが、$3\neq -3$

まとめ

根号を含む方程式の解の数を確定する方法はないので、方程式を解いて得た各値を、元の方程式に代入して確認しなければなりません。

例

$\sqrt{2x^2-1}=\sqrt{x}$ を解きなさい。

今回は 2 つの根号があります。そこで、方程式の左辺と右辺に分かれるようにします。

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt{2x^2-1}\right)^2 &= \left(\sqrt{x}\right)^2\\
2x^2-1 &= x\\
2x^2-x-1 &= 0
\end{aligned}
$$

この方程式は因数分解によって解くことができ、次のように確認することができます。

$$2x^2-x-1=(2x+1)(x-1)=0.$$

よって、$x=1$ または $x=-\frac{1}{2}$　最初に見てわかるのは、x は $-\frac{1}{2}$ にはなり得ないことです。なぜなら、平方根 $\sqrt{x}$ が実数にならないからです。

$x=1$ として確認すると $\sqrt{2(1)^2-1}=\sqrt{2-1}=\sqrt{1}=1.$ ✓

したがって、$x=1$ が $\sqrt{2x^2-1}=\sqrt{x}$ の解です。

問題

各根号を含む方程式を解きなさい。

a) $3x+\sqrt{x-1}=2x+7$
b) $\sqrt{5x+1}-\sqrt{2x+1}=2$
c) $2-\sqrt{2x+3}=2x-1$
d) $x=2\sqrt{x+2}+1$
e) $\sqrt{3x+10}=5-3\sqrt{x+3}$
f) $\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+6}=\sqrt{13-3x}$

1.6 多項式の最小公倍数*

導入問題

各場合の最小公倍数を計算しなさい。

a) 4, 6, 15　　b) $6x$, $3x+1$, $6x+2$　　c) $2m+3$, $2m-3$, $4m^2-9$

多項式の因数分解は、素因数分解に似ています。

解法

a) 4、6、15 の最小公倍数を計算するためには、各数を素因数分解します。

$$4 = 2^2,\qquad 6 = 2(3),\qquad 15 = 3(5)$$

したがって、4、6、15 の最小公倍数は、$2^2(3)(5) = 4(3)(5) = 60$ になります。

b) 多項式の最小公倍数は、数の最小公倍数と同じような方法で求めることができます。最初に各式を因数分解します。

$6x = 2(3)x$　　$3x + 1$ は因数分解することができません。　$6x + 2 = 2(3x + 1)$

したがって、$6x$、$3x + 1$、$6x + 2$ の最小公倍数は、$2(3)(x)(3x+1) = 6(3x^2 + x) = 18x^2 + 6x$ になります。

c) b) と同じように、各式を因数分解します。最小公倍数は、各因数分解において現れる各共通因数と共通因数でない数の、3 つの式の中に現れる最も大きな指数がついているものの積になります。

$2m + 3$ と $2m - 3$ は因数分解できません。また、2 乗の差によって、$4m^2 - 9 = (2m - 3)(2m + 3)$

したがって、$2m + 3$、$2m - 3$ 、$4m^2 - 9$ の最小公倍数は、$(2m - 3)(2m + 3)$

まとめ

2 つ以上の数の**最小公倍数**は、それらの数の複数の公倍数の中で最も小さいもので、mcm で表示されます。

2 つ以上の数の最小公倍数を計算するためには、各数を素因数分解し、各共通因数と共通因数でない数の最も大きな指数がついているものをかけて求めます。

また、代数式の最小公倍数を同様の方法で計算することができます。各式を完全に因数分解します。最小公倍数は、最も大きい指数のついている共通因数および共通因数でないものすべての積です。

例

$x + y$、$x^2 + 2xy + y^2$ 、$x^2 - y^2$ の最小公倍数を求めなさい。

前の各式を因数分解します。

$x + y$, $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$, $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

注意：$(x + y)^2(x - y)$ を展開する必要はありません。

したがって、$x + y$、$x^2 + 2xy + y^2$ 、$x^2 - y^2$ の最小公倍数は、$(x + y)^2(x - y)$

問題

各場合の最小公倍数を求めなさい。

a) x^2, y^2, xy　　b) $x + 5$, $x^2 - 25$, $x - 5$

c) $3a + 6$, $a^2 - 4$　　d) 2, $x - 3$, $2x - 6$

e) $m - 1$, $m^2 - 1$, $m + 1$　　f) $3x + 15$, $x^2 - 25$, $6x$, $x - 5$

1.7 有理方程式

導入問題

各方程式を解きなさい。

a) $\dfrac{x+1}{x-2}=4$　　　b) $\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{3}{2x-1}=\dfrac{5}{2x^2+5x-3}$

解法

a) この形の方程式があるとき、最初にやらなければならないのは、 x がとり得る値を限定することです。なぜなら、定義されていないゼロでの割り算になる可能性があるからです。よって、この場合は、$x-2$ がゼロになるため、x は 2 ではあり得ません。次に、分母を払う必要があります。そのために方程式全体に $x-2$ をかけると、

$$(x-2)\left(\frac{x+1}{x-2}\right)=4(x-2)$$

$$\cancel{(x-2)}\left(\frac{x+1}{\cancel{x-2}}\right)=4(x-2)$$

$$x+1=4x-8$$　この一次方程式を解くと、

$$3x=9$$

$$x=3.$$

$x=3$ なら、分母 $x-2$ はゼロにはなりません。$3-2=1$

したがって、$x=3$ がこの方程式の解です。

b) ここでも、目的は分母を払うことです。この場合は、分母 3 つがそれぞれ異なるので、これらの最小公倍数を方程式に掛けなければなりません。

式 $x+3$ と $2x-1$ は因数分解できません。また、$2x^2+5x-3=(2x-1)(x+3)$、よって、分母 3 つの最小公倍数は、$(2x-1)(x+3)$ さらに、x は -3 や $\frac{1}{2}$ にはなり得ません。なぜなら、その場合、分母のいずれかがゼロになってしまうからです。よって、

$$(2x-1)(x+3)\left(\frac{1}{x+3}-\frac{3}{2x-1}\right)=(2x-1)(x+3)\left(\frac{5}{2x^2+5x-3}\right)$$

$$(2x-1)\cancel{(x+3)}\frac{1}{\cancel{x+3}}-\cancel{(2x-1)}(x+3)\left(\frac{3}{\cancel{2x-1}}\right)=\cancel{(2x-1)(x+3)}\left(\frac{5}{\cancel{2x^2+5x-3}}\right)$$

$$2x-1-3(x+3)=5$$

$$2x-1-3x-9-5=0$$

$$-x-15=0$$

$$x=-15$$

$x=-15$ なら、各分母に -15 を代入しても、ゼロになる分母はありません。したがって、$x=-15$ がこの方程式の解です。

定義

分数を含み、分母のいずれかに変数がある方程式を**有理方程式**といいます。有理方程式では、変数は分母にあるため、いずれの分母もゼロにしないような変数の値を考える必要があります。

有理方程式を解くためには、まず、どのような変数の値がいずれかの分母をゼロにするか、分析しなければなりません。次に、分母の最小公倍数を方程式全体に掛け、その結果得られた方程式を解きます。元の方程式の分母のいずれかをゼロにする変数の値は排除します。

例

方程式 $\frac{4}{x-1} = \frac{3}{x^2-x} + \frac{x}{x-1}$ を解きなさい。

この場合は、x は 0 と 1 の値をとることはできません。さらに $x-1$ と x^2-x の最小公倍数は、$x(x-1)$ なので、

$$x(x-1)\left(\frac{4}{x-1}\right) = x(x-1)\left(\frac{3}{x^2-x}\right) + x(x-1)\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$x\cancel{(x-1)}\left(\frac{4}{\cancel{x-1}}\right) = \cancel{x(x-1)}\left(\frac{3}{\cancel{x^2-x}}\right) + x\cancel{(x-1)}\left(\frac{x}{\cancel{x-1}}\right)$$

$$4x = 3 + x^2$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-3)(x-1) = 0$$

よって、$x = 3$ または $x = 1$ しかしながら $x \neq 1$、よってこの解は排除されます。

したがって、$x = 3$ が方程式 $\frac{4}{x-1} = \frac{3}{x^2-x} + \frac{x}{x-1}$ の解です。

> 元の方程式に代入して、$x = 3$ が解であることを確認する必要はありません。なぜなら、$x \neq 1$ および $x \neq 0$なら、$x(x-1)$ を掛けるというのは、可逆演算だからです。
>
> $$\begin{array}{ccc} & \frac{4}{x-1} = \frac{3}{x^2-x} + \frac{x}{x-1} & \\ \times\, x(x-1) \downarrow & & \uparrow \div\, x(x-1) \\ & 4x = 3 + x^2 & \end{array}$$

問題

各有理方程式を解きなさい。

a) $\frac{1}{x} = 3$

b) $\frac{3}{x} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{4}{5x} - 3 = 0$

d) $\frac{1}{2x+1} = 3$

e) $x + 3 = \frac{2x^2}{2x-1}$

f) $\frac{x-4}{x-1} = \frac{1-x}{x+1}$

g) $\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+3} = 0$

h) $\frac{1}{2x} + \frac{3}{5x} = \frac{11}{x^2}$

1.8 連立方程式

導入問題

連立方程式のすべての解を求めなさい。 $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2-3x-y+2=0 \end{cases}$

解法

連立方程式の 1 つから変数の 1 つを消し、その後、別の方程式に代入します。

この場合は、1 次方程式の y を消す方がより簡単です。

$$y=2-x \qquad \text{------------------ (1)}$$

その後、もう 1 つの方程式に代入すると、

$$x^2-3x-y+2=x^2-3x-(2-x)+2=x^2-3x-2+x+2=x^2-2x=x(x-2)=0.$$

ここから、 $x=0$ または $x=2$

y の値を求めるために、 (1) に x の値を代入します。すると、$x=0$ のときは $y=2$、$x=2$ のときは $y=0$
したがって、連立方程式の解は、$x=0$、$y=2$ と、$x=2$、$y=0$

まとめ

1 つが 1 次方程式、もう 1 つが 2 次方程式の連立方程式を解くためには、方程式の 1 つから変数を 1 つ消し、別の方程式に代入し、その後、残った変数がある方程式を解きます。

2 次方程式で次数が低い変数を 1 次方程式で消すのがお薦めです。

例

連立方程式を解きなさい。

$$\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+x+y-1=0 \end{cases}$$

1 次方程式の y を求めると、$y=x-2$　もう 1 つの方程式に代入します。

$$x^2+x+y-1=x^2+x+(x-2)-1=x^2+x+x-2-1=x^2+2x-3=0.$$

因数分解によって解くと、$(x-1)(x+3)=0$ よって、$x=1$ または $x=-3$

$x=1$ に対しては、$y=-1$ また、$x=-3$ に対しては $y=-5$　したがって、連立法的式の解は、
$x=1$、$y=-1$ と $x=-3$、$y=-5$

問題

各連立方程式を解きなさい。

a) $\begin{cases} x-y=0 \\ x^2+y=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y=3 \\ x^2+2x-y=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x+y-3=0 \\ x^2-7x-y+3=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-y=-14 \\ x^2+5x+y=4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x+y=-5 \\ 2x^2-x+y=1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x-y=7 \\ -x^2+4x+2y=1 \end{cases}$

1.9 復習問題

1. 以下の方程式のすべての複素数解を求めなさい。

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

b) $x^4 - 9x^2 = 0$

c) $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$

d) $x^4 - 16 = 0$

e) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$

f) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$

g) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

h) $2x^4 + 9 = 11x^2$

i) $3x^4 + 64 = 52x^2$

j) $2x^4 - x^2 - 1 = 0$

2. 以下の根号を含む方程式を解きなさい。

a) $\sqrt{5x+9} = 2x+3$

b) $\sqrt{2x+1} = x-1$

c) $\sqrt{2x+16} = 2x+4$

d) $\sqrt{x} + x = \sqrt{3x+x^2}$

e) $\sqrt{x} + \sqrt{x+7} = 7$

f) $\sqrt{x+16} - \sqrt{x} = 2$

g) $\sqrt{3x+12} - 1 = \sqrt{5x+9}$

h) $\sqrt{2x-3} + \sqrt{x-1} = \sqrt{3x-2}$

3. 以下の根号を含む方程式を解きなさい。

a) $\dfrac{3x-4}{3-x} = 2$

b) $\dfrac{2}{x+1} = \dfrac{3}{x}$

c) $\dfrac{3}{x-2} = \dfrac{2}{x+3}$

d) $\dfrac{2x+3}{5x-1} = \dfrac{6x+4}{15x+2}$

e) $\dfrac{4x-7}{12x+3} = \dfrac{x-16}{3x+5}$

f) $\dfrac{2}{x-3} + \dfrac{3}{x-2} = 3$

4. 以下の連立方程式のすべての解を求めなさい。

a) $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+x-y+3=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y+3=0 \\ x^2-x-y-5=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x-y-12=0 \\ x^2+2x-y=8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+y=-8 \\ x^2+2x+y=-7 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 8x-y-20=0 \\ 3x^2-7x-y=2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x-y=4 \\ 2x^2+x+y=6 \end{cases}$

1.10 このユニットの問題

1. 以下の 4 次方程式のすべての複素数解を求めなさい。

a) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

b) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$

c) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$

d) $-x^4 + 7x^2 - 12 = 0$

e) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

f) $8x^2 - 15 = x^4$

g) $3x^4 - 26x^2 - 9 = 0$

h) $12x^4 - 5x^2 - 3 = 0$

i) $-2x^4 - 9x^2 + 68 = 0$

j) $4x^4 = 13x^2 - 9$

k) $4x^4 = 5 - 19x^2$

l) $4x^4 + 91x^2 - 225 = 0$

2. 以下の根号を含む方程式を解きなさい。

a) $\sqrt{7-5x} = 8$

b) $x + \sqrt{5x+19} = -1$

c) $2\sqrt{x} - \sqrt{x-3} = \sqrt{5+x}$

d) $\sqrt{1+4\sqrt{x}} = \sqrt{x} + 1$

e) $3\sqrt{2x-3} + 2\sqrt{7-x} = 11$

f) $\sqrt{7-2x} - \sqrt{5+x} = \sqrt{4+3x}$

g) $\sqrt{2x+15} - 2 = \sqrt{6x+1}$

h) $\sqrt{x+1} + \sqrt{3x+4} = \sqrt{5x+9}$

3. 以下の根号を含む方程式を解きなさい。

a) $\dfrac{5x+1}{x+2} + \dfrac{x-1}{x} = 2$

b) $\dfrac{2x}{x+6} + \dfrac{3x}{x+4} = x$

4. 以下の連立方程式のすべての解を求めなさい。

a) $\begin{cases} 6x - y + 2 = 0 \\ 2x^2 + 5x - y + 1 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 2y = 9 \\ 4x^2 - 12x - y + 9 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y - 8 = 0 \\ x^2 - 4x + 7y = 0 \end{cases}$

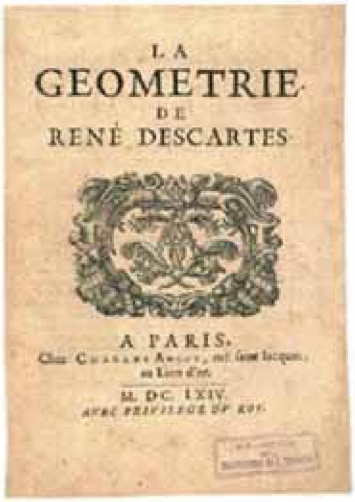
d) $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x^2 - 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$

5. デカルト平面において、
   a) $y = 2x - 2$ および $y = x^2 - 2x + 1$ の方程式をグラフ化しなさい。
   b) a) で示した 2 つの方程式を満足させる x と y の値を見つけなさい。
   c) 同じデカルト平面に座標 (x, y) を配置しなさい。ここでいう x と y は、b) で求めた値です。
   d) c) で配置した点と、a) の方程式のグラフに何が起きますか。
   e) 1 つが 1 次方程式でもう 1 つが 2 次方程式の連立方程式を解くことに関して、何を結論付けることができますか。

ユニット 2

直線

算術と代数学は、歴史的に常に互いに関連してきた数学の分野です。たとえば、代数学は、算術を一般化する必要性から生じました。課題は、もともと数式にのみ使用されていたのと同じ代数言語で幾何学図形を表現することでした。「解析幾何学」という表現を初めて使ったのは、フランスの数学者ルネ・デカルトで、1637年頃のことでした。解析幾何学はデカルト以前に他の数学者によって使用された可能性はありますが、解析幾何学に関する最初の出版物を出したのはデカルトであり、その基礎はデカルト平面の発見にあります。



ルネ・デカルトによる本「幾何学」の出版


電気通信の進歩は、解析幾何学の応用に大いによるものです。

解析幾何学の発見から数学の領域が広がり、これによって幾何学は図で表現できるものの限界を超えることができました。解析幾何学とともに、微分幾何学や代数幾何学など、その他の数学分野も発展を遂げました。さらに、特にテクノロジーとコンピューターの進歩に関連するさまざまな分野に貢献した、より複雑な分野の開発も可能になり、数学は、今日知られている世界にとって、不可欠な基盤となっています。

このユニットで扱っている解析幾何学に関する内容は、直線、直線の方程式、2 直線の位置関係、直線の傾斜角、2 直線のなす角、点と直線の距離です。ユニットの最後には、扱った内容を強化する GeoGebra を使った演習があります。

1.1 2 点間の距離

導入問題

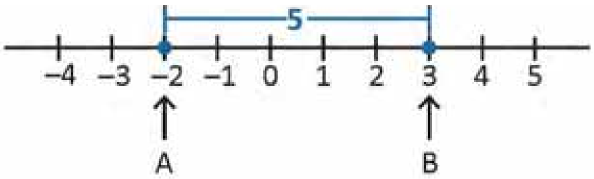
以下の場合の点 A と点 B 間の距離を求めなさい。

a) A(−2) と B(3) は、数直線上にあります。
b) A(3, 4) と B(−1, 1) は、デカルト平面上にあります。

p は実数なので、P(p) という表記は、点 P が数直線上の p 値にあることを示しています。

解法

a) 数直線上に値がそれぞれ −2 と 3 の点 A と点 B を置きます（図を参照）。これに基づくと、2 点間の距離は 5。

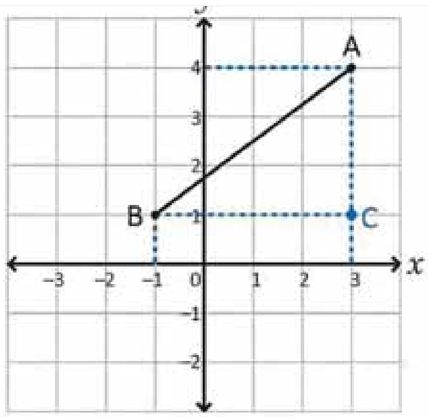


したがって、点 A と点 B の距離は 5。上記は、数直線を用いず、B の値から A の値を引いて求めることもできます。

$$\begin{aligned} AB &= 3-(-2) \\ &= 3+2 \\ &= 5. \end{aligned}$$

b) デカルト平面上に 座標がそれぞれ (3, 4) と (−1, 1) の点 A と点 B を置きます（図を参照）。点 A と点 B の距離は、線分 AB の長さに等しくなります。

点 P(x_1, y_1) をデカルト平面上に置くために x_1 座標を x 軸上に置きます。そこから、プラスなら上に向かって、マイナスなら下に向かって（どちらの場合も垂直に）y_1 座標に対応する位置に進みます。



直角三角形 ABC が形成されたら、ピタゴラスの定理を使って、

$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$

$$AB = \sqrt{BC^2 + CA^2}.$$

距離について話しているので、AB は常にゼロより大きくなります。

線分 BC の長さは、x 軸上で −1 から 3 までの距離を計算するのに等しいです。つまり、

$$BC = 3-(-1) = 4.$$

同様に、線分 CA の長さは、y 軸上で 1 から 4 までの距離を計算するのに等しいです。つまり、

$$CA = 4-1 = 3.$$

BC と CA を $AB = \sqrt{BC^2 + CA^2}$ に代入し、計算すると、

$$\begin{aligned}AB &= \sqrt{4^2+3^2}\\ &= \sqrt{16+9}\\ &= \sqrt{25}\\ &= 5.\end{aligned}$$

したがって、点 A と点 B 間の距離は 5

まとめ

点 A と 点 B 間の距離は、$d(A, B)$で表され、以下のように定義されます。

a) $A(a)$ と $B(b)$ が 数直線上にあるならば、

$$d(A, B) = |a-b|.$$

$|a-b|$ は、引き算$a-b$ の絶対値を示します。

b) $A(x_1, y_1)$ と $B(x_2, y_2)$ がデカルト平面上にあるならば、

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

A と B がデカルト平面上の点であるときに $d(A, B)$ を計算するためのこの公式は、線分 AB が座標軸の 1 つと平行な場合にも使用します。

例

各場合について、以下の場合の $d(A, B)$ を求めなさい。

a) $A(-10)$ と $B(6)$　　b) $A(-2, -1)$ と $B(3, 2)$

a) A と B は数直線上にあるので、

$$\begin{aligned}d(A, B) &= |-10-6|\\ &= |-16|\\ &= -(-16)\\ &= 16.\\ &= 16.\end{aligned}$$

したがって、$d(A, B) = 16$

x が実数なら、$|x|$ によって表される x の絶対値は、以下のように定義されます。

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

b) A と B はデカルト平面上にあります。よって、

$$\begin{aligned}d(A, B) &= \sqrt{(-2-3)^2+(-1-2)^2}\\ &= \sqrt{(-5)^2+(-3)^2}\\ &= \sqrt{25+9}\\ &= \sqrt{34}.\end{aligned}$$

したがって、 $d(A, B) = \sqrt{34}.$

問題

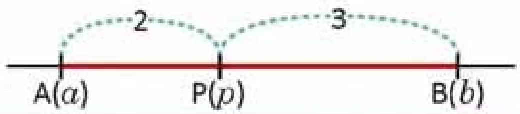
各場合について、2 点 A、B 間の距離、すなわち $d(A, B)$ を求めなさい。

a) $A(3)$ と $B(7)$	b) $A(0)$ と $B(6)$	c) $A(-1)$ と $B(1)$	d) $A(-3)$ と $B(-1)$
e) $A(-8)$ と $B(0)$	f) $A(-3)$ と $B(-10)$	g) $A(7)$ と $B(2)$	h) $A(5)$ と $B(-4)$
i) $A(5, 6)$ と $B(2, 3)$	j) $A(3, 2)$ と $B(-2, 1)$	k) $A(4, 6)$ と $B(-5, -3)$	l) $A(7, 2)$ と $B(1, -4)$
m) $A(-3, 4)$ と $B(1, 3)$	n) $A(0, 0)$ と $B(4, -5)$	ñ) $A(-5, 4)$ と $B(2, -1)$	o) $A(6, -2)$ と $B(6, -5)$

1.2 与えられた比での線分の分割： 数直線

導入問題

下の図に示されているように、数直線上に A(a) と B(b) の 2 点があります。
線分 AB を 2：3 の比で分割する点Pの値はいくらですか。



$$\frac{d(\mathrm{A},\mathrm{P})}{d(\mathrm{P},\mathrm{B})} = \frac{2}{3}$$

解法

P が線分 AB を 2：3 の比で分割するのであれば、

$$\frac{d(\mathrm{A},\mathrm{P})}{d(\mathrm{P},\mathrm{B})} = \frac{2}{3}$$

図から $d(\mathrm{A},\mathrm{P}) = |a-p| = p-a$ また、$d(\mathrm{P},\mathrm{B}) = |p-b| = b-p$ と導くことができます。なぜなら、それぞれ $p>a$ および $b>p$ 上記に代入し、割合の基本的な性質を利用すると、

$$\begin{aligned}
\frac{p-a}{b-p} &= \frac{2}{3}\\
3(p-a) &= 2(b-p)\\
3p-3a &= 2b-2p\\
2p+3p &= 3a+2b\\
(2+3)p &= 3a+2b\\
p &= \frac{3a+2b}{2+3}
\end{aligned}$$

したがって、点 P の値は、$\dfrac{3a+2b}{5}$

一般的に

数直線上の 2 点 A(a) と B(b) が与えられるとき、線分 AB上にあり、線分 AB を k：n の比で分割する点 P(p) の値は、

$$p = \frac{na+kb}{k+n}.$$

例

A(−3) と B(5) が与えられるとき、線分 AB を 3：1 の比で分割する点 P(p) の値を求めなさい。

この場合は、$a=-3$、$b=5$、$k=3$、$n=1$　したがって、

$$\begin{aligned}
p &= \frac{1(-3)+3(5)}{3+1}\\
&= \frac{-3+15}{4}\\
&= \frac{12}{4}\\
&= 3.
\end{aligned}$$

したがって、点 P の値は 3

問題

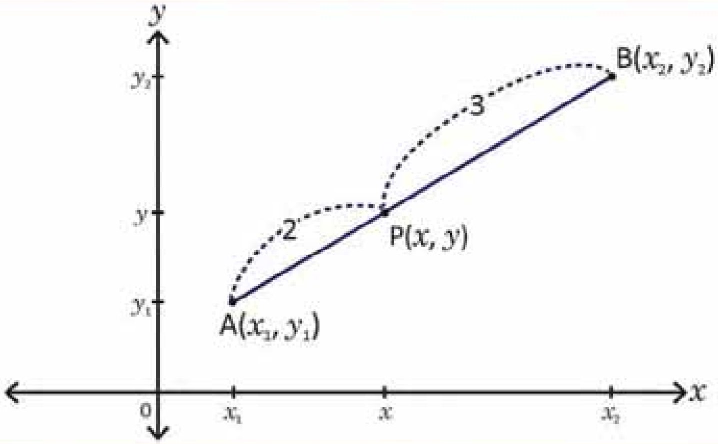
1. 各場合について、線分 AB を与えられた比で分割する点 P(p) の値を求めなさい。
   a) 比 3：2　A(1)、B(6)
   b) 比 2：5　A(− 4)、B(3)
   c) 比 1：4　A(0)、B(5)
   d) 比 2：3　A(− 10)、B(0)
   e) 比 3：4　A(−16)、B(−2)
   f) 比 1：3　A(−1)、B(7)

2. 数直線上にある 2 点を A(−1) と B(b) とします。P(1) が線分 AB を 4：5 の比で分割するならば、b の値はいくらですか。

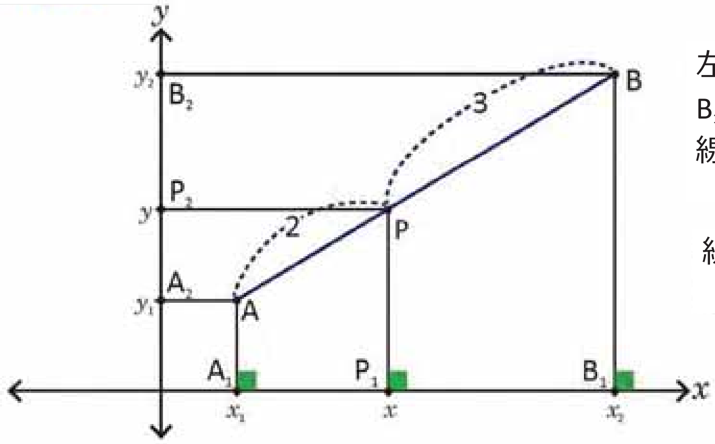
1.3 与えられた比での線分の分割：デカルト平面*

導入問題

右図で示されているように、$A(x_1, y_1)$ と $B(x_2, y_2)$ の 2 点がデカルト平面上にあります。線分 AB上にあり、線分 AB を 2：3 の比で分割している点 $P(x, y)$ の座標を、どのように求めますか。



解法



左図に示されているように、点 $A_1(x_1, 0)$、$P_1(x, 0)$、$B_1(x_2, 0)$、$A_2(0, y_1)$、$P_2(0, y)$、$B_2(0, y_2)$ は軸上にあります。線分AA_1、PP_1、BB_1、AA_2、PP_2、BB_2を引きます。

線分AA_1、PP_1、BB_1は平行です。平行線と比の定理から、

$$\frac{d(A_1, P_1)}{d(P_1, B_1)} = \frac{d(A, P)}{d(P, B)} = \frac{2}{3}.$$

前の授業で学んだことを使うと、点 P の x 座標は、

$$x = \frac{3x_1 + 2x_2}{2 + 3}.$$

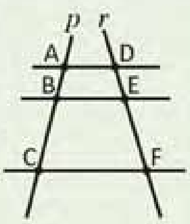
同じように、点 P の y 座標は、

$$y = \frac{3y_1 + 2y_2}{2 + 3}.$$

したがって、 $P\left(\frac{3x_1 + 2x_2}{5}, \frac{3y_1 + 2y_2}{5}\right).$

平行線と比の定理：
p と r が 3 つの平行な直線によって分割された直線ならば（図を参照）

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$



一般的に

デカルト平面上にある 2 つの点 $A(x_1, y_1)$ と $B(x_2, y_2)$ が与えられたとき、線分 AB上にあり、線分 AB を $k : n$ の比で分割する点 $P(x, y)$ の座標は、

$$\left(\frac{nx_1 + kx_2}{k + n}, \frac{ny_1 + ky_2}{k + n}\right).$$

問題

各場合について、線分 AB を与えられた比で分割する点 $P(x, y)$ の座標を求めなさい。

a) 比 1：3　A(−5, 1)、B(3, −3)

b) 比 3：4　A(−2, −10)、B(5, 4)

c) 比 3：2　A(1, 8)、B(6, −2)

d) 比 4：5　A(−2, −9)、B(7, 0)

1.4 線分の中点

導入問題

以下の場合の、線分 AB の中点の値または座標を求めなさい。

1. $A(a)$ と $B(b)$ は数直線上にあります。
2. $A(x , y)$ と $B(x , y)$ はデカルト平面上にあります。

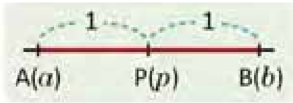
中点は線分AB を 1：1 の比で分割します。

解法

中点を求めることは、線分 AB を 1：1 の比で分割する点を求めることに等しいです。つまり、$k = 1$ および $n = 1$

1. 中点 P の値 p を計算すると、

$$p = \frac{1a + 1b}{1 + 1} = \frac{a + b}{2}.$$



したがって、中点 P の値は、$\frac{a + b}{2}$

2. 中点 P の座標 (x, y) を計算すると、

$$x = \frac{1x_1 + 1x_2}{1 + 1} = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{1y_1 + 1y_2}{1 + 1} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

したがって、中点 P の座標は、$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

まとめ

1. $A(a)$ と $B(b)$ が数直線上の点であるなら、線分 AB の中点 $P(p)$ の値は、

$$p = \frac{a + b}{2}.$$

2. $A(x_1, y_1)$ と $B(x_2, y_2)$ が数直線上の点であるなら、線分 AB の中点 P の座標は、

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

問題

1. 各場合について、線分 AB の中点 P の値を求めなさい。

a) $A(1)$ と $B(7)$　b) $A(0)$ と $B(8)$　c) $A(-2)$ と $B(4)$　d) $A(-4)$ と $B(2)$
e) $A(-6)$ と $B(-2)$　f) $A(-7)$ と $B(-3)$　g) $A(\sqrt{2})$ と $B(3\sqrt{2})$　h) $A(-\sqrt{3})$ と $B(\sqrt{2})$

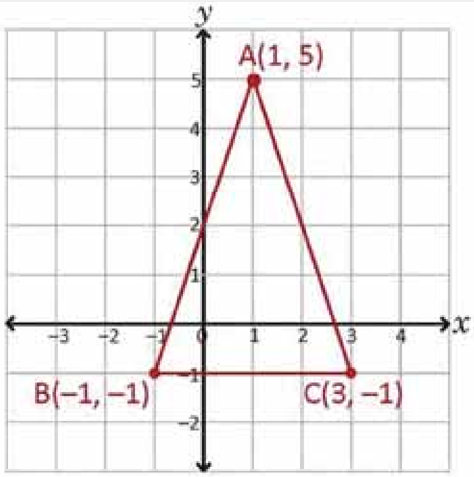
2. 各場合について、線分 AB の中点 P の座標を求めなさい。

a) $A(1, 2)$ と $B(3, 6)$　b) $A(-6, 4)$ と $B(0, -2)$　c) $A(-4, -5)$ と $B(2, 1)$
d) $A(1, 6)$ と $B(4, 0)$　e) $A(-5, -1)$ と $B(3, 1)$　f) $A(0, \sqrt{2})$ と $B(0, 6\sqrt{2})$

1.5 応用

導入問題

図に表示されている座標を持つ、A、B、C の 3 点がデカルト平面上にあります。



三角形 ABC が二等辺三角形であることを証明しなさい。

解法

ΔABC が二等辺三角形であるためには、長さが等しい2辺を持っていなければなりません。一見して、辺 AB と辺 CA はこの条件を満たしているように見えます。点 A と 点 B 間の距離に等しい辺ABの長さを計算します。

$$
\begin{aligned}
d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) &= \sqrt{[1-(-1)]^2 + [5-(-1)]^2} \\
&= \sqrt{4+36} \\
&= \sqrt{40} \\
&= 2\sqrt{10}
\end{aligned}
$$

同じように、辺 CA の長さ、つまり、点 C と 点 A 間 の距離を計算します。

$$
\begin{aligned}
d(\mathrm{C}, \mathrm{A}) &= \sqrt{(3-1)^2 + (-1-5)^2} \\
&= \sqrt{4+36} \\
&= \sqrt{40} \\
&= 2\sqrt{10}
\end{aligned}
$$

したがって、$d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = d(\mathrm{C}, \mathrm{A})$、すなわち、三角形 ABC は同じ長さの2辺AB と CA を持っています。よって、ΔABC は二等辺三角形です。

問題

1. 3 点 A(3, 3)、B(−3, −3)、$C\left(-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\right)$ によって形成される三角形が正三角形であることを証明しなさい。
2. 3 点 D(1, 4)、E(−3, −2)、F(5, 1) によって形成される三角形が不等辺三角形であることを証明しなさい。
3. 3 点 A(3, 7)、B(−3, −1)、C(3, −1) が直角三角形を形成することを証明しなさい。

三角形の 3 辺 a、b、c が、$a^2 + b^2 = c^2$ の関係を満たすとき、その三角形は直角三角形です。

1.6 復習問題

1. 各場合について、2 点 A、B 間の距離を求めなさい。

a) A(−9) 、B(−1)　　b) A(0) 、B(5)

c) $A\left(-\frac{3}{2}\right)$、$B\left(\frac{7}{2}\right)$　　d) $A\left(\sqrt{5}\right)$、$B\left(3\sqrt{5}\right)$

e) A(−4, 0) 、B (5, −2)　　f) A(−1, 6)、B(3, −2)

g) $A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$、$B\left(\frac{5}{2}, 3\right)$　　h) $A\left(-\sqrt{2}, -3\right)$、B(0, 2)

2. 点 A と点 B 間の距離は $d(A, B) = 2\sqrt{13}$ です。A の座標が (−2, 5) で、B の座標が $(x, 1)$ ならば、x の値はいくらですか。

3. 点 A と点 B 間の距離は $d(A, B) = 2\sqrt{34}$ です。Aの座標が $(-6, y)$ で、B の座標が (4, 4) ならば、y の値はいくらですか。

4. 各場合について、線分 AB を与えられた比で分割する、線分 AB 上の点の値を求めなさい。

a) 比 6：5　A(−10)、B(1)　　b) 比 3：1　A(−2)、B(2)

c) 比 1：3　A(−6, 7)、B(2, 3)　　d) 比 1：2　A(−4, 0)、B(11, 6)

5. 各場合について、線分 AB の中点を求めなさい。

a) A(−1)、B(3)　　b) $A\left(-2\sqrt{10}\right)$、$B\left(\sqrt{10}\right)$

c) A(0, 7) 、B(4, −11)　　d) A(−5, −1.5) 、B(3, 5.5)

6. 点 $P(x_1, y_1)$ と原点 (0, 0) 間の距離はいくらですか。

7. A(−1, 3) と B の中点が $P\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ のとき、点 B の座標を求めなさい。

8. ある三角形の頂点が、A(2, 4)、B(−2, −2)、C(4, 0) です。D と E がそれぞれ辺 AB と辺 BC の中点のとき、$DE = \frac{1}{2}AC$ を証明しなさい。

9. 三角形 ABC の頂点 A の座標は、(−2, 4) です。辺 AB と辺 BC の中点がそれぞれ (−3, 1) と (1, 0) のとき、頂点 B と頂点 C の座標はどうなりますか。

10. 四角形 ABCD の頂点 A の座標は、(−4, 4) です。辺 AB、辺 BC、辺 CD の中点がそれぞれ (−2, 0)、(4, −2)、(6, 4) のとき、頂点 B、頂点 C、頂点 D の座標をどうなりますか。

2.1 直線の傾きと定義

導入問題

3点 A(−2, −3)、B(0, 1)、C(1, 3) について、以下を行いなさい。

1. どの 2 点の組み合わせでも、係数 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ は一定であることを確認しなさい。
2. デカルト平面上に 3 点を置きなさい。3 点とも同一直線上にありますか。
3. 点 P(2, y) が与えられたとき、P が A および B と同一直線上にあるためには、y の値はいくらにならなければならないですか。

解法

1. 可能な組み合わせは、A と B、A と C、B と C です。各組合せに関して、係数 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ を求めます。

A(−2, −3) と B(0, 1)

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1-(-3)}{0-(-2)}=\frac{4}{2}=2$$

A(−2, −3) と C(1, 3)

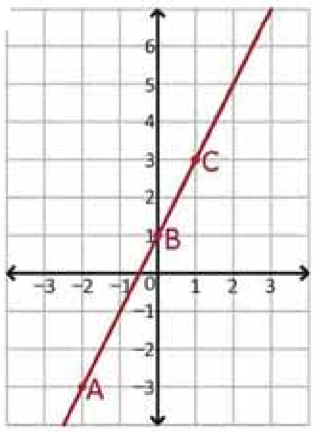
$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3-(-3)}{1-(-2)}=\frac{6}{3}=2$$

B(0, 1) と C(1, 3)

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3-1}{1-0}=\frac{2}{1}=2$$

したがって、どの 2 点の組み合わせでも、係数 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ は一定です。

2. 右図で示しているように、デカルト平面上に各点を置きます。定規を使って、実際に3点が同一直線上にあることを確認します。



3. 上記の問題 1 と 2 に基づくと、P(2, y) が A(−2, −3) および B(0, 1) と同一直線上にあるためには、係数 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ は、3 点 A、B、P のどの組み合わせに対しても 2 に等しくならなければなりません。B と P に関して遵守されていることを確認するだけで十分です。

$$\frac{y-1}{2-0}=2$$
$$y=5$$

また、問題 2 のグラフを使って、P(2, 5) が A(−2, −3) および B(0, 1) と同一直線上にあるためには、y の値が 5 でなければならないことを導くこともできます。

定義

直線とは、どのような異なる2点 A(x_1, y_1) と B(x_2, y_2) を取っても、係数 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ の値が常に一定である点の集まりです。この係数を**直線の傾き**と呼び、文字 m で表します。すなわち、

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

注目：

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-(y_1-y_2)}{-(x_1-x_2)}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

問題

1. 各場合について、3 点 A、B、C が同一直線上にあることを示しなさい。

a) A(0, −3)、B(3, 0)、C(5, 2)
b) A(−4, 1)、B(0, 3)、C(6, 6)
c) A(−3, 5)、B(−1, −1)、C$\left(\frac{1}{3}, -5\right)$
d) A(−3, 4)、B$\left(\frac{3}{2}, 1\right)$、C(3, 0)

2. 図上に表示せずに、なぜ 3 点 D(−3, 1), E(1, −1)、F$\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ が同一直線上にないか、証明しなさい。

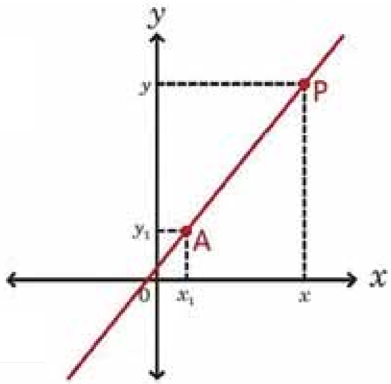
2.2 直線の方程式：点・傾き形*

導入問題

点 A (x_1, y_1) を通る傾き m をもつ直線 l の方程式が以下であることを証明しなさい。

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

解法



点 A(x_1, y_1) 以外の直線l上の任意の点を P(x, y) とします。
直線の定義から、m は定数なので、

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

よって、

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

したがって、直線 l の方程式 は、$y - y_1 = m(x - x_1)$

定義

傾き m をもち点 A (x_1, y_1) を通る直線 l の方程式は、

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

この方程式を**直線の方程式（点・傾き形）**といいます。上の式の変数 y を求めると、

$$y = mx - mx_1 + y_1$$

ここでは変数 x の係数が直線の傾きであり、$-mx_1 + y_1$ の値は定数になります。点 A(x_1, y_1) を通ることが分かっている直線 l をグラフに表すために、以下を行います。

1. x に特定の値を代入し、対応する y の値を求めます。
2. デカルト平面上に点 A(x_1, y_1) と 1 で求めた点を置きます。その後、両方の点を通る直線を引きます。

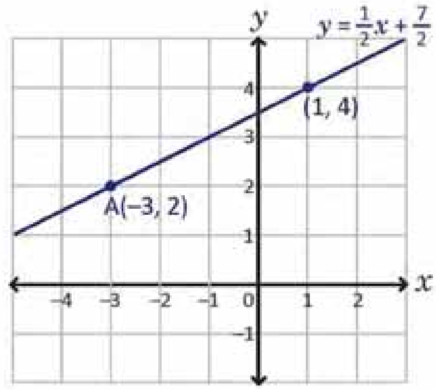
例

傾きが $m = \frac{1}{2}$ で、点 A$(-3, 2)$ を通る直線 l の方程式を求めなさい。
点・傾き形の式に傾き m と (x_1, y_1) の値を代入します。

$$y - 2 = \frac{1}{2}[x - (-3)]$$

$$y = \frac{1}{2}(x + 3) + 2$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$



直線のグラフを描くには、上の方程式の x に、たとえば $x = 1$など、特定の値を代入し、対応する y の値を求めます。

$$y = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4.$$

右図のように、平面上に点 A$(-3, 2)$ と $(1, 4)$ を置き、両方の点を通る直線を引きます。

問題

与えられた傾きをもち点Aを通る直線の方程式を求めなさい。そしてそれぞれ、直線のグラフを作成しなさい。

a) 傾き $m = 2$、A$(6, 7)$　　b) 傾き $m = 1$、A$(-1, 0)$

c) 傾き $m = -1$、A$(-2, 6)$　　d) 傾き $m = \frac{1}{2}$、A$(1, 8)$

2.3 2点を与えられた直線の方程式

導入問題

点 A(−1, −3) と点 B(2, 9) を通る直線の方程式を求めなさい。また、そのグラフを作成しなさい

解法

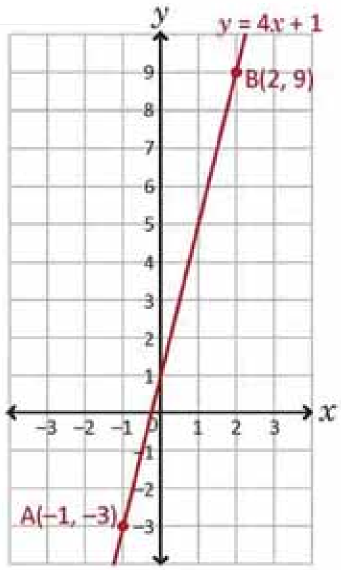
点・傾き形方程式を用いるためには、直線の傾きを見つける必要があります。定義から、

$$m = \frac{9-(-3)}{2-(-1)} = 4.$$

$x_1 = -1$、$y_1 = -3$ を用い、点・傾き形方程式に値を代入します。

B の座標を点・傾き形方程式に用い、方程式が同じになることを確認することもできます。

$$y-(-3) = 4[x-(-1)]$$
$$y+3 = 4(x+1)$$
$$y = 4x+1$$



したがって、点 A(−1, −3) と点 B(2, 9) を通る直線の方程式は、$y = 4x + 1$
直線のグラフを描くためには、右図のように、直線を通る 2 点を置き（問題文で与えられている点 A と 点 B でも構いません）、線を引くだけで十分です。

まとめ

$x_1 \neq x_2$ ではない 2 つの座標点 A(x_1, y_1) と B(x_2, y_2) を通る直線 l の方程式は、

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

直線 l のグラフを描くには、デカルト平面上に点 A と点 B を置き、次に両方の点を通る直線を引きます。一般的に、直線 l のグラフを描くためには、直線 l に属する 2 点を置き、両方の点を通る直線を引くだけで十分です。

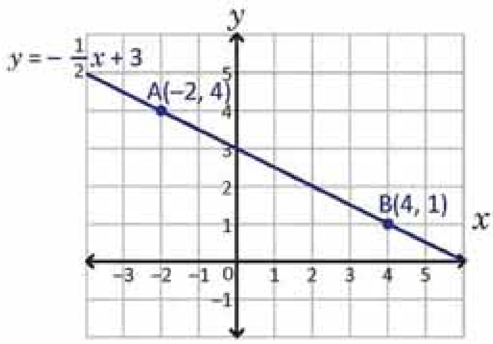
例

点 A(−2, 4) と点 B(4, 1) を通る直線の方程式を求めなさい。また、その直線のグラフを描きなさい。

x_1、y_1、x_2、y_2 の値を代入します。

$$y - 4 = \frac{1-4}{4-(-2)}[x-(-2)]$$
$$y = \frac{-3}{6}(x+2)+4$$
$$y = -\frac{1}{2}x+3$$

$y = -\frac{1}{2}x + 3$ のグラフは、右図に示されています。



問題

点 A と点 B を通る直線の方程式を求めなさい。また、それぞれ直線のグラフを描きなさい。

a) A(−3, −1)、B(1, −5)
b) A(2, −2)、B(3, 1)
c) A(0, −5)、B(6, 4)
d) A(0, 4)、B(12, −6)

2.4 座標軸に平行な直線

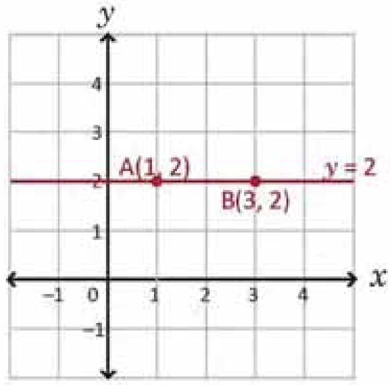
導入問題

各場合について、点 A と点 B を通る直線のグラフを描き、その方程式を求めなさい。

a) A(1, 2) 、B(3, 2)　　　　b) A(1, −1)、B(1, 3)

解法

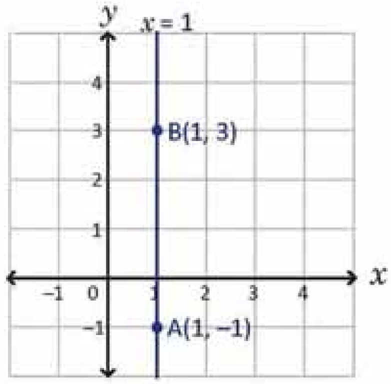
a) 右図のように、デカルト平面上に点 A と点 B を置き、直線を引きます。結果は、水平な直線、つまり、 x 軸に平行な直線です。この直線の方程式は、前の授業で学んだことを用いて求めます。



$$y-2=\frac{2-2}{3-1}(x-1)$$
$$y=\frac{0}{2}(x-1)+2$$
$$y=2$$

したがって、直線の方程式 は、$y = 2$

b) デカルト平面上に点 A(1, −1) と点 B(1, 3) を置き、直線を引くと、垂直な直線、つまり、y 軸に平行な直線になります。この直線の傾きを計算すると、以下のようになります。



$$m=\frac{3-(-1)}{1-1}=\frac{4}{0}$$

これは傾きが定義できないことを意味します。直線上の点の x 座標は、常に一定で 1 に等しくなります（y 座標は一定ではありません）。

したがって、方程式は $x = 1$

まとめ

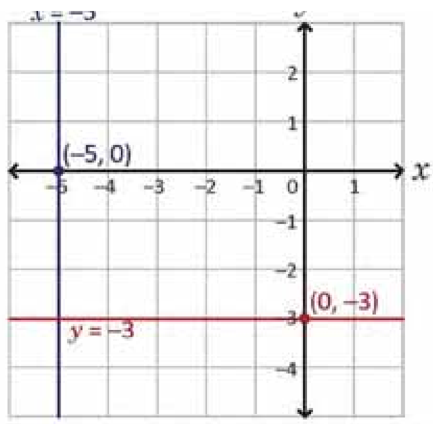
座標軸の1つと平行な直線 l の方程式は、

a) 直線が x 軸に平行ならば、$y = k$点 $(0, k)$ は直線 l 上の点です。

b) 直線が y 軸に平行ならば、$x = k$点 $(k, 0)$ は直線 l 上の点です。

例

$y = -3$ と $x = -5$ のグラフを描きなさい。



点 (0, −3) と点 (−5, 0) を置きます。次に、直線を引きます。

1. $y = -3$ の場合は、(0, −3) を通る x 軸に平行な直線
2. $x = -5$ の場合は、(−5, 0) を通る y 軸に平行な直線

どちらの直線も右図に表示されています。

問題

1. 点 A を通り、座標軸の1つと平行な直線の方程式を求めなさい。また、この直線を引きなさい。

a) A(0, 4) を通り、x 軸と平行な直線　　b) $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$を通り、$x$ 軸と平行な直線

c) A(5, 0) を通り、 y 軸と平行な直線　　d) A(3, −1) を通り、y 軸と平行な直線

2. 水平な直線はすべて傾きがゼロであることを証明しなさい。

2.5 直線の方程式の一般形

導入問題

同じデカルト平面上に以下の方程式のグラフを描きなさい。

a) $2x-3y+6=0$　　b) $y+2=0$　　c) $4x-24=0$

問 a) と b) では y を、問 c) では x を求めなさい。

解法

a) 変数 y を求めると、

$$3y=2x+6$$
$$y=\frac{2}{3}x+2$$

この最後の方程式が、x 軸に平行で、点 (0, −2) と (3, 4) を通る直線の方程式です。

b) 変数 y を求めると、

$$y=-2$$

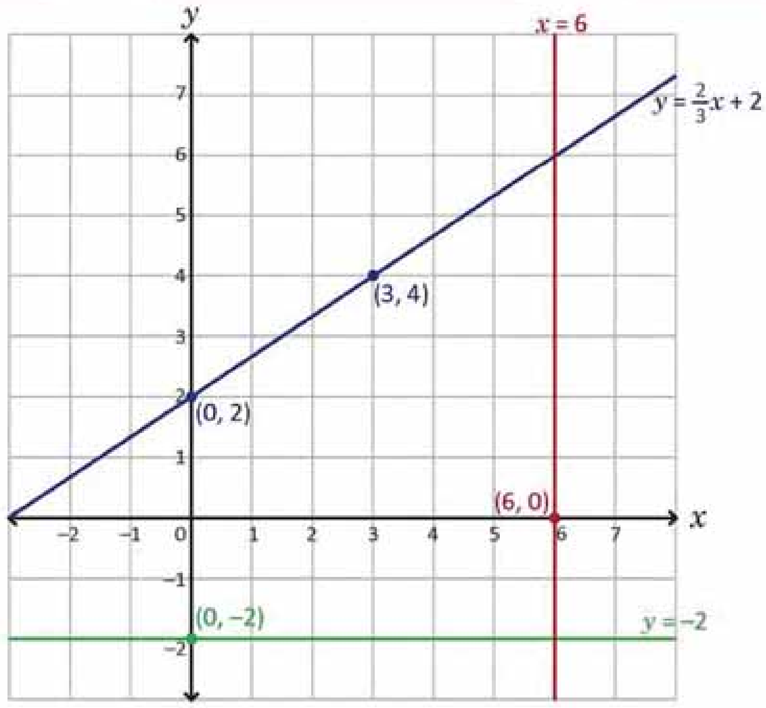
この最後の方程式が、x 軸に平行で、点 (0, −2) を通る直線の方程式です。

c) 変数 x を求めると、

$$4x=24$$
$$x=6$$

最後の方程式は、y 軸に平行で、点 (6, 0) を通る直線の方程式です。

a) では、点 (0, 2) と (3, 4) を求めるために、$x=0$ と $x=3$ を直線の方程式に代入し、$y=2$ と $y=4$ を求めました。



定義

a、b、c が実数（a と b が同時にゼロであることはあり得ません）である、$ax+by+c=0$ の形の方程式のグラフは、直線になります。

この方程式を、**直線の方程式の一般形**と呼びます。

直線の方程式の一般形は、1つだけではありません。たとえば、方程式 $2x-y+1=0$、$-2x+y-1=0$、$4x-2y+2=0$ は同一直線を表します。
2 つ目の方程式の係数は、1 つ目の方程式の係数と符号が逆転しています。また、3 つ目の方程式の係数は、1 つの方程式の係数の2倍です。

問題

1. 同一デカルト平面上に、以下の方程式によって表される直線のグラフを描きなさい。

a) $3x+y-5=0$　　b) $x-2y-9=0$　　c) $5y-5=0$

2. 以下の直線の方程式を一般形で書きなさい（整数の係数を使うこと）。

a) $y=-2x+\frac{5}{4}$　　b) $y=\frac{3}{5}x+2$　　c) $y=-\frac{5}{6}$　　d) $x=\frac{8}{3}$

2.6 復習問題

1. 各問について、点 A、B、C が同一直線上にあるかないか、（グラフを描かず）明らかにしなさい。

   a) A(0, –3)、B(2, 3)、C(3, 1)
   b) A(–3, 5)、B(1, 2)、C(5, –1)
   c) A(–1, –6)、B(0, –2)、C(1, 3)
   d) A(–4, 8)、B(2, 4)、C(20, –8)

2. 点 A(0, –3) と 点 B(6, 4) が与えられるとき、点A、B、C が同一直線上にあるためには、C(x, 25) の x の値はいくらでなければならないですか。

3. 各問について、与えられた傾きをもち、点 A を通る直線の方程式を求めなさい。また、同一平面上にすべての直線のグラフを描きなさい。

   a) 傾き $m = -4$, A(–3, 5)
   b) 傾き $m = 10$, A(1, –1)
   c) 傾き $m = \frac{1}{5}$, A(0, 4)
   d) 傾き $m = \frac{2}{5}$, A$\left(-2, -\frac{4}{5}\right)$

4. 値がわかっている傾き m をもち、点 (0, b) を通る直線の方程式が、$y = mx + b$ であることを証明しなさい。

> $y = mx + b$ の形式で書かれた直線の方程式は、点・切片形として知られています。

5. 各問について、点 A と点 B を通る直線の方程式を求めなさい。また、同一のデカルト平面にすべての直線のグラフを描きなさい。

   a) A(5, 1)、B(6, –2)
   b) A(–4, –4)、B(2, 5)
   c) A$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$、B$\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$
   d) A(0, 0) 、B$\left(2, -\frac{13}{4}\right)$

6. 各問について、座標軸の 1 つと平行であり、点Aを通る直線の方程式を求めなさい。また、同一デカルト平面にすべての直線のグラフを描きなさい。

   a) A(9, 0) を通り、y 軸と平行な直線
   b) A(–5, 2) を通り、x 軸と平行な直線
   c) A$\left(\frac{7}{2}, 5\right)$を通り、$y$ 軸と平行な直線
   d) A$\left(\frac{5}{6}, -\frac{9}{2}\right)$を通り、$x$ 軸と平行な直線

7. 以下の直線の方程式を一般形で書きなさい（整数の係数を使うこと）。

   a) $y = 4x + 3$
   b) $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{6}$
   c) $y = 4x - \frac{2}{3}$
   d) $y = -\frac{x}{5} - 1$

8. 直線が 2 点 (–1, 0) 、(3, 2) を通るとき、方程式 $y = mx + b$ の m と b の値を求めなさい。

3.1 直線と x 軸の交点

導入問題

各問において、直線とx 軸の交点の座標を求めなさい。

a) $y = 3x + 3$　　b) $x + 2y - 2 = 0$

この場合、交点とは直線とx軸が交差する点を指します。

解法

直線と x 軸の交点を $A(x_1, y_1)$ とします。いずれの場合も、A は x 軸上にあります。したがって、y 座標 (y_1) はゼロであり、$A(x_1, 0)$ となります。

a) $A(x_1, 0)$ が直線上にあるならば、次の式を満たします。

$$y = 3x + 3$$

A の座標を上記の方程式に代入し、x_1 の値を求めます。

$$0 = 3x_1 + 3$$
$$3x_1 = -3$$
$$x_1 = -1$$

したがって、直線 $y = 3x + 3$ と x 軸の交点の座標は、$A(-1, 0)$

b) 前問と同様に、$A(x_1, 0)$ が直線上にあるならば、次の式を満たします。

$$x + 2y - 2 = 0$$

A の座標を上記の方程式に代入し、x_1 の値を求めます。

$$x_1 + 2(0) - 2 = 0$$
$$x_1 = 2$$

したがって、直線 $x + 2y - 2 = 0$ と x 軸の交点の座標は、$A(2, 0)$

まとめ

直線 l が与えられているとき、直線と x 軸の交点の座標は、$(x_1, 0)$ になり、x_1 の値は、$y = 0$ および $x = x_1$ を直線の方程式に代入し、x_1 の値を明らかにして、求めます。

問題

1. 各問において、直線と x 軸の交点の座標を求めなさい。

a) $y = 2x - 2$　　b) $y = -\frac{x}{2} + 2$　　c) $2x - 3y + 6 = 0$

d) $8x + 3y + 6 = 0$　　e) $x = \sqrt{2}$　　f) $y = \sqrt{3}$

2. 座標軸のいずれとも平行ではない、方程式 $ax + by + c = 0$ の直線があります。直線と x 軸の交点の座標が $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ であることを証明しなさい。

3. 方程式 $x = k$ の直線を l とします。直線 l と x 軸の交点の座標が $(k, 0)$であることを証明しなさい。

4. x 軸に平行な直線を l とします。直線 l と x 軸の交点は存在しますか。あなたの答えを証明しなさい。

ユニット 2

3.2 直線と y 軸の交点

導入問題

前の授業の「導入問題」にある直線の方程式を用い、各直線と y 軸との交点の座標を求めなさい。

解法

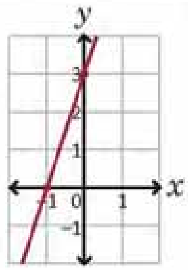
直線と y 軸の交点を $B(x_1, y_1)$ とします。いずれの場合も、B は y 軸上にあります。したがって、 x 座標 (x_1) はゼロであり、$B(0, y_1)$ となります。

a) 点 $B(0, y)$ が直線上にあるならば、方程式 $y = 3x + 3$ を満たします。B の座標を上記の方程式に代入し、y_1 の値を求めます。

$$y_1 = 3(0) + 3$$
$$y_1 = 3$$

したがって、直線 $y = 3x + 3$ と y 軸の交点の座標は、$B(0, 3)$

グラフを見ると、直線 $y = 3x + 3$ は、点 $(-1, 0)$、$(0, 3)$で座標軸と交差しています。

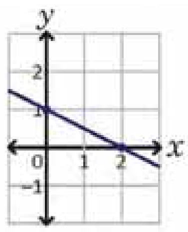


b) 前問と同様に、$B(0, y_1)$ が直線上にあるならば、$x + 2y - 2 = 0$ の方程式を満たします。B の座標を上記の方程式に代入し、y_1 の値を求めます。

$$0 + 2y_1 - 2 = 0$$
$$2y_1 = 2$$
$$y_1 = 1$$

したがって、直線 $x + 2y - 2 = 0$ と y 軸の交点の座標は、$B(0, 1)$

グラフを見ると、直線 $x + 2y - 2 = 0$ は、点 $(2, 0)$と点$(0, 1)$で座標軸と交差しています。



まとめ

直線 l が与えられているとき、直線と y 軸の交点の座標は、$(0, y_1)$ になり、y_1 の値は、$y = y_1$ および $x = 0$ を直線の方程式に代入し、y_1 の値を明らかにして、求めます。

直線 l が x 軸と平行であれば、その方程式は $y = k$ の形になり、直線と y 軸の交点は、$(0, k)$。直線 l が y 軸と平行であれば、直線と y 軸の交点はありません。

一般的に、直線が座標軸と交差する点を**切片**と呼びます。直線は最大2つの切片（各軸上に 1 つ）を持つことができます。

問題

1. 前の授業の問題 1 で与えられた直線の方程式について、各直線と y 軸の交点の座標を求めなさい。

2. 以下の各問について、切片の座標を求めなさい。
   a) $2x - 3y - 6 = 0$　　　b) $4x + y + 2 = 0$

3. p と q は、ゼロではない実数とします。方程式 $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ の直線の切片が $(p, 0)$ と $(0, q)$ であることを証明しなさい。この方程式を、**直線の方程式の対称形**と呼びます。

3.3 2 直線の交点

導入問題

方程式 $y = -x + 3$ の直線と方程式 $2x - 3y + 4 = 0$ の直線の交点の座標を求めなさい。

2 直線の交点は、どちらの方程式も満たします。

解法

2 直線の交点を P(x, y) とします。これは、P の座標点が最初の方程式も 2 番目の方程式も満たすことを示し、座標点を求めるのは、連立方程式を解くことに相当します。

$$\begin{cases} y = -x + 3 & \text{---------- (1)} \\ 2x - 3y + 4 = 0 & \text{---------- (2)} \end{cases}$$

方程式 (1) の y の値を方程式 (2) に代入し、変数 x の値を求めます。

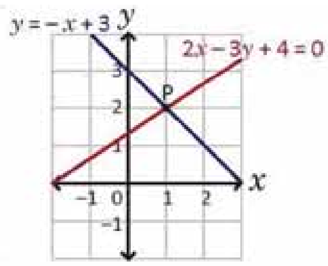
$$\begin{aligned} 2x - 3(-x + 3) + 4 &= 0 \\ 2x + 3x &= 9 - 4 \\ 5x &= 5 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

x の値を方程式 (1) に代入します。

$$y = -1 + 3 = 2$$

したがって、2直線の交点の座標は、P(1, 2)

方程式 $y = -x + 3$ の直線と方程式 $2x - 3y + 4 = 0$ の直線が交差する点は、P(1, 2)です。



まとめ

2 直線が与えられたとき、これらの交点の座標（つまり、2 直線が交差すところ）は、これらの直線の方程式からなる連立 2 元 1 次方程式を解いて求めます。

異なる 2 直線が点 P で交差するとき、交点は 1 つだけです。つまり、2 直線が交差する、P ではない他の点 R は存在しません。

問題

1. 以下の方程式の各 2 直線の交点の座標を求めなさい。

a) $y = -3x - 8$、$4x - 3y + 15 = 0$
b) $x + y - 2 = 0$、$2x - y + 2 = 0$
c) $x + 2y + 6 = 0$、$4x + 3y + 4 = 0$
d) $2x + 3y = 4$、$4x - y = 8$
e) $y = x + 1$、$x = -2$
f) $3x - 2y - 5 = 0$、$y = 2$

2. 方程式 $y = k_1$ の直線と方程式 $x = k_2$ の直線が与えられたとき、2 直線の交点の座標を求めなさい。

3. 方程式 $10x - 5y = 10$ の直線と方程式 $10x - 5y = -25$ の直線が与えられたとき、2 直線はいずれかの点で交差しますか。グラフであなたの答えを確認しなさい。

3.4 平行な直線

導入問題

方程式 $y = 2x + 3$ と $y = 2x - 5$ の 2 直線が与えられています。

直線の方程式が $y = mx + b$ の形で書かれているなら、変数 x の係数は直線の傾きです。

1. 各直線の傾きの値はいくらですか。
2. 2 直線はいずれかの点で交差しますか。あなたの答えを証明しなさい。
3. 同一デカルト平面上に 2 直線を描きなさい。1 つの直線は他の直線に対してどうなっていますか。

解法

1. 直線の方程式が、$y = mx + b$ という形で書かれているので、どちらの直線の傾きも 2 です。

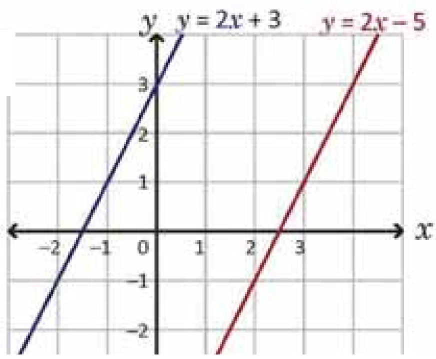
2. 2 直線が交差するかどうかを知るためには、連立方程式を解かなくてはなりません。

$$\begin{cases} y = 2x + 3 & \text{----------- (1)} \\ y = 2x - 5 & \text{----------- (2)} \end{cases}$$

しかし、この連立方程式には解がありません。なぜなら、(2) に (1) を代入すると、

$$2x + 3 = 2x - 5$$
$$2x - 2x = -3 - 5$$
$$0 = -8$$

これは、2 直線はいかなる点においても交差しないことを示しています。



3. どちらの直線のグラフも右図に表示されています。2 直線はいかなる点においても交差しないので、平行であることを示しています。

2 直線は平行です。直線を伸ばしても互いの距離を保ちます。

定理

垂直でない 2（またはそれ以上の）直線は、同じ傾きを持っているときのみ、平行です。これは、2（またはそれ以上の）直線が平行であるならば、同じ傾きを持っていて、平行でなければ、傾きが違うということです。直線の方程式を求めなさい。

例

点 A(1, 3) を通り、$2x + y - 1 = 0$ に平行な直線の方程式を求めなさい。

傾きの値を求めるために、$2x + y - 1 = 0$ において y を求めます。$y = -2x + 1$、よって $m = -2$. 直線は A(1, 3) を通るので、直線の方程式の点・傾き形を使います。

$$y - 3 = -2(x - 1)$$
$$y = -2x + 5$$

したがって、点 A (1, 3) を通り、$2x + y - 1 = 0$ に平行な直線の方程式は、$y = -2x + 5$

問題

1. 以下の直線の組み合わせが平行かどうか明らかにしなさい。
   a) $y = -4x + 7$; $y = -4x + 16$　　b) $3x - 2y + 3 = 0$; $6x - 4y - 9 = 0$　　c) $x - 2y + 5 = 0$; $x - 3y = 0$

2. 各問に対し、与えられた直線に平行で、点 A を通る直線の方程式を求めなさい。
   a) $2x - y = 0$; A(4, 0)　　b) $x + 3y - 5 = 0$; A(3, 4)
   c) $y = 5$; A(0, −1)　　d) $x = 1$; A(3, −2)

3.5 直角に交わる直線*

導入問題

原点を通過し、さらに、以下の方程式の直線と直角に交わる直線の方程式を求めなさい。

$$y = 3x$$

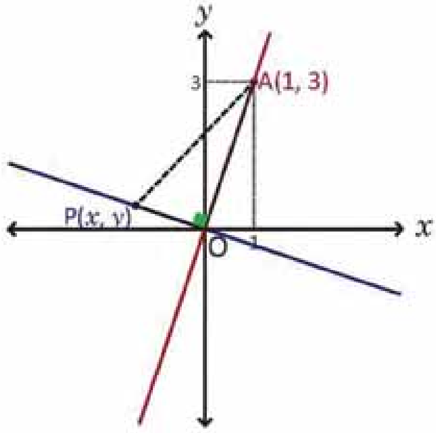
2 直線の傾き間の関係はどうなっていますか。

解法

原点を通るので、求める直線は $y = mx$ という形になります。この直線上の任意の点を P(x, y) とします。点 A(1, 3) は $y = 3x$ を通ります。なぜなら、その座標は方程式を満たすからです。

O を原点とすると、三角形 POA は直角三角形になります（直線は直角に交わります）。ピタゴラスの定理から、

上記の方程式で、$d(\mathrm{P, A})^2 = (x-1)^2 + (y-3)^2$、$d(\mathrm{P, O})^2 = x^2 + y^2$、$d(\mathrm{O, A})^2 = 1^2 + 3^2$。値を代入し、$y$ を x の項で明らかにすると、



$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = (x^2 + y^2) + (1 + 9)$$
$$\cancel{x^2} - 2x + \cancel{1} + \cancel{y^2} - 6y + \cancel{9} = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + \cancel{1} + \cancel{9}$$
$$-2x - 6y = 0$$
$$y = -\frac{1}{3}x$$

したがって、$y = 3x$ に直角に交わり、原点を通る直線の方程式は、$y = -\frac{1}{3}x$ それぞれ 3 $-\frac{1}{3}$ である、両直線の傾きを比べると、傾きの積は、−1 であることがわかります。

定理

傾きがそれぞれ m_1 と m_2 の座標軸に垂直ではない 2 直線は、傾きの積が −1 に等しいときのみ、すなわち、以下のとき、直角に交わります。

$$m_1 m_2 = -1$$

これは、2 直線が直角に交わるならば、それらの傾きの積は −1であり、そうでないときは、積は −1ではないことを意味します。

例

点 A(1, 3) を通り、$2x + y - 1 = 0$ に直角に交わる直線の方程式を求めなさい。

$2x + y - 1 = 0$ においてy を求めると、$y = -2x + 1$、よって $m_1 = -2$ m_2 が求める直線の傾きなら、$m_1 m_2 = -1$ が成り立たなければなりません。m_1 を代入し、m_2 を求めると、

$$-2m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = \frac{1}{2}$$

したがって、$2x + y - 1 = 0$ に直角に交わり、A(1, 3) を通る直線の方程式は、$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

問題

1. 以下の直線の組み合わせが直角に交わるかどうか明らかにしなさい。

a) $y = -2x$、 $y = \frac{x}{2}$
b) $y = \frac{4}{3}x$、 $y = -\frac{3}{4}x$
c) $x - y + 2 = 0$、 $3x + 2y + 6 = 0$
d) $x - 2y + 2 = 0$、 $2x + y - 6 = 0$

2. 各場合について、与えられた直線に直角に交わり、点 P を通る直線の方程式を求めなさい。

a) $y = x$; P(3, 3)
b) $y = -2x + 5$; P(−4, 3)
c) $x - 4y + 4 = 0$; P(−1, 5)
d) $y = 1$; P(1, −1)

3.6 点と直線の距離

定理

方程式 $ax + by + c = 0$ の直線 l と、この直線上の点ではない点 $P(x_1, y_1)$ が与えられているとき、P から直線 l までの距離は、$d(P, l)$ で表され、以下のようになります。

$$d(P, l) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

例

各場合について、点 P から直線 l までの距離を求めなさい。

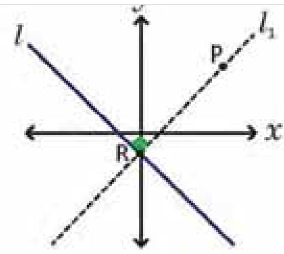
a) l： $2x - y + 1 = 0$、P(2, 0)　　b) l： $3x + 2y - 9 = 0$、P(2, −2)　　c) $l: y = \frac{x}{3} + \frac{8}{3}$ 、P(0, 5)

a) 各値を代入します。$a = 2, b = -1, c = 1, x_1 = 2$ y $y_1 = 0$

$$d(P, l) = \frac{|2(2) + (-1)(0) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|4 + 0 + 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

したがって、P から直線 l までの距離は $\sqrt{5}$

l_1 が P を通る直線 l に直角に交わる直線であるなら、R は l と l_1 の交点です。よって、$d(P, l)$ を求めるのは、$d(P, R)$ を求めるのに等しいです。



b) 各値を代入します。$a = 3$、$b = 2$、$c = -9$、$x_1 = 2$、$y_1 = -2$

$$d(P, l) = \frac{|3(2) + (2)(-2) + (-9)|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{|6 - 4 - 9|}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13}$$

したがって、P から直線 l までの距離は $\frac{7\sqrt{13}}{13}$

c) まず、直線の方程式を $ax + by + c = 0$ の形で表す必要があります。方程式全体に 3 を掛けると、

$$3y = x + 8$$

$$x - 3y + 8 = 0$$

次に、各値を代入します。 $a = 1, b = -3, c = 8, x_1 = 0$、$y_1 = 5$

$$d(P, l) = \frac{|1(0) + (-3)(5) + 8|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{|0 - 15 + 8|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{7}{\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{10}}{10}.$$

したがって、P から直線 l までの距離は $\frac{7\sqrt{10}}{10}$

問題

1. 点 P から直線 l までの距離を求めなさい。

a) $l: x + 3y - 3 = 0$ 、 P(1, −1)　　b) $l: 2x + y - 4 = 0$ 、 P(0, 3)

c) $l: y = \frac{3}{4}x$ 、 P(1, −2)　　d) $l: y = \frac{x}{5} + 1$ 、 P(3, −3)

2. 原点から直線 l： $ax + by + c = 0$ までの距離が $\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ であることを証明しなさい。

3.7 復習問題

1. 各直線の切片の座標を求めなさい。

a) $y = 2x$ b) $5x + 2y + 10 = 0$

c) $y = \frac{x}{6} - 1$ d) $y = -8x + 4$

e) $y = 3$ f) $x = -4$

2. 各 2 直線の交点の座標を求めなさい。

a) $x + y - 2 = 0$; $4x - y + 7 = 0$ b) $y = -x$; $3x + y - 6 = 0$

c) $x + 2y + 2 = 0$; $y = 2x + 9$ d) $x - y - 1 = 0$; $y = 3$

e) $3x - y + 3 = 0$; $9x + 7y - 4 = 0$ f) $y = -5$; $x = \frac{1}{4}$

3. 各 2 直線が平行か、または、直角に交わるか、明らかにしなさい。

a) $y = 3x - 5$; $y = 3x$ b) $y = \frac{x}{4} + 1$; $x - 4y + 2 = 0$

c) $y = -3x - 2$; $x - 3y + 1 = 0$ d) $y = -2$; $x = 1$

4. 点 A を通る直線 l に平行な直線の方程式を求めなさい。

a) $l: y = -2x + 5$; A(–2, –3) b) $l: y = 3x + 4$; A(5, –1)

5. 点 A を通る直線 l に直角に交わる直線の方程式を求めなさい。

a) $l: y = -5x - 1$; A(10, 1) b) $l: 3x - 4y + 8 = 0$; A(–6 , 0)

6. 2 直線 l_1 と l_2 は、点 (–4, 4) で交差します。l_1 が (0, 12) を通り、l_2 に直角に交わるならば、2 直線の方程式はどうなりますか。

7. 方程式 $5x - 2y = 0$ の直線を l とします。直線 $ax + by + c = 0$ が以下の場合の a と b の値を求めなさい。

a) 直線 l に平行 b) 直線 l に直角に交わる

l ： $5x - 2y = 0$ に平行な直線および直角に交わる直線は無限に存在します。a と b に対して、一組の値を求めるだけで十分です。

8. 方程式 $x - 3y - 6 = 0$ の直線を l とします。方程式 $ax + (a - 4)y + c = 0$ の直線が以下の場合の、a の値を求めなさい。

a) 直線 l に平行 b) 直線 l に直角に交わる

9. 各場合について、点 P から直線 l までの距離を求めなさい。

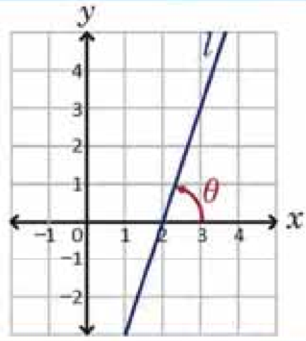
a) P(4, –9); $l: x + 4y - 2 = 0$ b) P(8, 5); $l: y = x$

c) P(0, –3); $l: y = -2x$ d) P(3, 1); $l: x = -3$

3.8 直線の傾斜角

導入問題

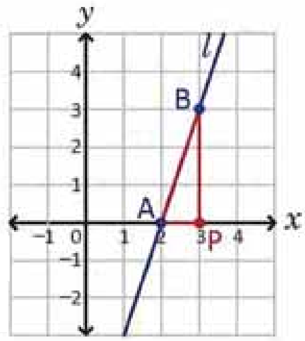
直線 l： $y = 3x - 6$ が与えられているとき、x 軸の正の部分から直線に向かう角 θ の大きさはいくらですか。小数点第 1 位までの概数で求めなさい。



A(2, 0)、P(3, 0)、B(3, 3) の 3 点で直角三角形 APB を作り、直角三角形における三角比を用います。

解法

2 点 A(2, 0) と B(3, 3) は、直線 l 上の点です。また、点 P(3, 0) は、x 軸上にあり、図に示すように直角三角形 APB が形成されます。直角三角形における三角比を用いて、



$$\tan A = \frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{AP}}$$

角θの大きさは、A を頂点とする角の大きさに等しいことに注目しましょう。また、係数 $\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{AP}}$ は、直線 l の傾きの値、すなわち、3 です。よって、

$$\begin{aligned} \tan \theta &= 3 \\ \theta &= \tan^{-1}(3) \\ &\approx 71.6^\circ \end{aligned}$$

したがって、角 θ の大きさはおおよそ 71.6°

定義

直線 l が与えられたとき、x 軸の正の部分と直線がなす（反時計回り方向の）角を直線 l の**傾斜角**と呼びます。m が直線 l の傾きで、その傾斜角が θ ならば、

$$0^\circ \leq \theta < 180^\circ \text{ で、} \tan \theta = m$$

例

直線 l ： $x + 2y + 1 = 0$ の傾斜角を求めなさい（小数点第 1 位までの概数）。

傾きを求めるために、直線の方程式を $y = mx + b$ の形で表します。

$$\begin{aligned} 2y &= -x - 1 \\ y &= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって、$m = -\frac{1}{2}$ で

$$\begin{aligned} \tan \theta &= -\frac{1}{2} \\ \theta &= \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &\approx 153.4^\circ \end{aligned}$$

$\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ を計算機で計算すると、 −26.6°という値になります。これは、x 軸の正の部分から時計回りの方向で直線に向かって測った角度です。傾斜角は、反時計回りの方向でないといけないので、前の答えに180° を足せば良いだけです。なぜなら、$\tan \theta = \tan(\theta + 180^\circ)$ だからです。

したがって、直線 l ： $x + 2y + 1 = 0$ の傾斜角は、おおよそ153.4°

問題

以下の直線の傾斜角を求めなさい（小数第 1 位までの概数）。

a) $y = 2x + 7$　　b) $y = -x + 1$　　c) $x - 2y + 4 = 0$

d) $5x + 3y - 20 = 0$　　e) $x + 1 = 0$　　f) $y - 1 = 0$

3.9 2直線のなす角

定理

直角に交わらず、傾きがそれぞれ m_1 と m_2 の任意の2直線を l_1とl_2とします。α が2直線のなす角で、反時計回りで l_1 から l_2 までの大きさならば、

$$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

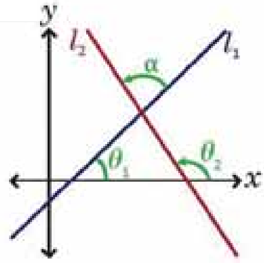
$m_1 m_2 \neq -1$

θ_1 と θ_2 が、それぞれ l_1 と l_2 の傾斜角ならば、

$$\theta_2 = \alpha + \theta_1$$
$$\alpha = \theta_2 - \theta_1$$

上記より、

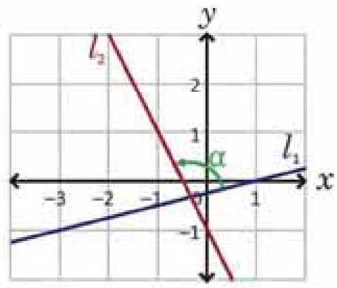
$$\tan\alpha = \tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_1\tan\theta_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$



例

直線 l_1： $x - 4y - 1 = 0$ と直線 l_2： $y = -2x - 1$ のなす角で、l_1 から l_2 へ測定する角の大きさはいくらですか。小数点第1位までの概数で求めなさい。

まず、直線 l_1と l_2の 傾き m_1と m_2をそれぞれ求めなければなりません。l_1 の場合は、$y = m_1x + b$ の形の方程式を書きます。



$$4y = x - 1$$
$$y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

よって、$m_1 = \frac{1}{4}$ で、$m_2 = -2$。2直線のなす角で、l_1 から l_2 へ反時計回りで測った角を α とします（図を参照）。よって、

$$\tan\alpha = \frac{-2 - \frac{1}{4}}{1 + \left(\frac{1}{4}\right)(-2)}$$

$$\tan\alpha = \frac{-\frac{9}{4}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\tan\alpha = -\frac{9}{2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{9}{2}\right)$$

$$\approx 102.5°$$

計算機で $\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{9}{2}\right)$ を計算して、答えとして $-77.5°$（概数）の値を得たならば、この値は、l_1 から l_2 まで時計回りで測った角度に相当します。

$$\tan\theta = \tan(180° + \theta)$$

となり、答えに 180° を足すだけで十分です。

したがって、2直線 l_1と l_2 のなす角の大きさは、102.5°

問題

1. 直線 l_1と l_2のなす角（l_1から l_2に測った角）の大きさを、小数点第1位までの概数で求めなさい。

   a) $l_1: y = 5x,\ l_2: y = -5x$
   b) $l_1: y = x - 1,\ l_2: y = -2x + 7$
   c) $l_1: y = 4x - 4,\ l_2: y = -5x$
   d) $l_1: 5x + 2y + 12 = 0,\ l_2: 2x + 3y + 6 = 0$
   e) $l_1: 2x - 7y - 2 = 0,\ l_2: 2x + y + 2 = 0$
   f) $l_1: 6x - y - 2 = 0,\ l_2: 3x + 5y + 20 = 0$

2. 頂点が A(−1, 6)、B(−5, 3)、C(4, 1) の3点である三角形の内角の大きさを小数点第1位までの概数で求めなさい。

3. 2直線 l_1： $y = k$ と l_2： $y = mx + b$ があります。m と k はゼロではない実数です。2直線 l_1と l_2のなす角（l_1から l_2へ測った角）が直線 l_2の傾斜角に等しいことを証明しなさい。

3.10 応用

導入問題

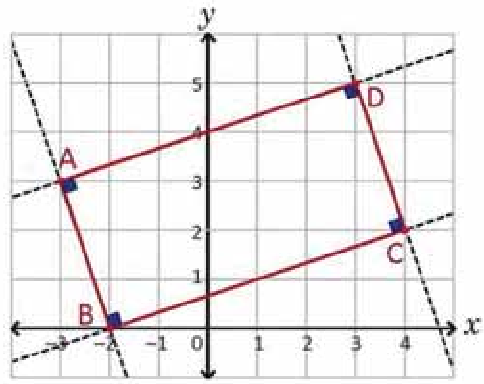
4 点 A(–3, 3)、B(–2, 0)、C(4, 2)、D(3, 5) が長方形を形成することを証明しなさい。

長方形は 4 つの直角を持つ四角形です。

解法

ABCD が長方形であるためには、以下を満たさなければなりません。

a) $\overline{AB} \perp \overline{BC}$　b) $\overline{BC} \perp \overline{CD}$　c) $\overline{CD} \perp \overline{DA}$



これらの 3 つの条件を満たすのであれば、辺 DA も辺 AB に直角に交わっています。

a) 辺 AB が辺 BC に直角に交わっていることを証明するためには、A と B を通る 直線が B と C を通る直線に直角に交わっていることを確認しなければなりません。

A(–3, 3) と B(–2, 0) を通る直線の傾きは、$m_1 = \frac{0-3}{-2-(-3)} = -3$

B(–2, 0) と C(4, 2) を通る直線の傾きは、$m_2 = \frac{2-0}{4-(-2)} = \frac{1}{3}$

傾き同士を掛けると、$m_1 m_2 = -3\left(\frac{1}{3}\right) = -1$

したがって、$\overline{AB} \perp \overline{BC}$

b) この場合も、a) と同じように解きます。

B(–2, 0) と C(4, 2) を通る直線の傾きは、$m_2 = \frac{1}{3}$

C(4, 2) と D(3, 5) を通る直線の傾きは、$m_3 = \frac{5-2}{3-4} = -3$

傾き同士を掛けると、$m_2 m_3 = \frac{1}{3}(-3) = -1$

したがって、$\overline{BC} \perp \overline{CD}$

c) a) および b) と同様のやり方を行い、D と A を通る直線の傾きを求めると、その値は $\frac{1}{3}$
傾き同士の積は、–1 なので、$\overline{CD} \perp \overline{DA}$
したがって、ABCD は長方形です。

問題

1. 4 点 A(2, 3)、B(0, –3)、C(5, –2)、D(7, 4) が平行四辺形を形成することを証明しなさい。

2. 4 点 A(–4, 0)、B(1, –1)、C(6, 0)、D(1, 1) がひし形を形成することを証明しなさい。

ひし形とは、すべての辺が同じ長さの四角形です。

3.11 復習問題

1. 4 点 A(0, 3)、B(4, −1)、C(7, 2)、D(5, 4) が直角台形を形成することを証明しなさい。

1 組の 平行な対辺と1直角をもつ四角形は直角台形です。

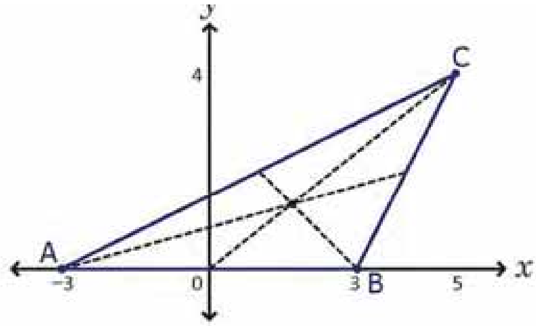
2. 4 点 A(−3, 3)、B(−5, −1)、C(5, 1)、D(3, 5) で四角形が形成されます。四角形 ABCD の各辺の中点によって形成される四角形は平行四辺形であることを証明しなさい。

3. 点 A(−1, 6) と 点 B(7, 4) によって形成される線分の垂直二等分線の方程式を求めなさい。

線分の垂直二等分線は、線分を中点で分割し、線分と直角をなす直線です。

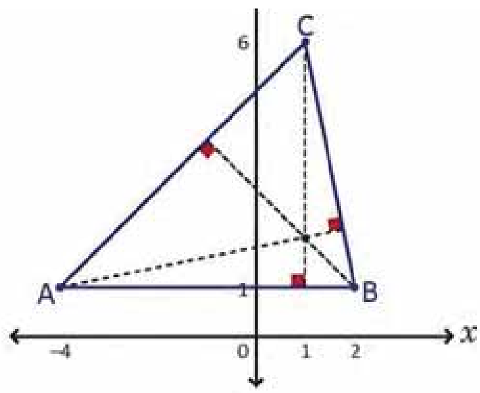
4. 三角形の**中線**は、1つの頂点から始まりその頂点の反対側にある辺の中点で終わる線分です。三角形においては 3 つの中線を引くことができます（各頂点に対し 1 つ）。頂点が A(−3, 0)、B(3, 0)、C(5, 4) である三角形を作り、以下を行いなさい。

   a) 各辺の中点の座標を求めなさい。
   b) 三角形 ABC の 3 つの中線の方程式を求めなさい（例えば、中線の 1 つは点 A(−3, 0) と辺 BC の中点を通ります）。
   c) 中線が 1 点で交差することを確認しなさい。



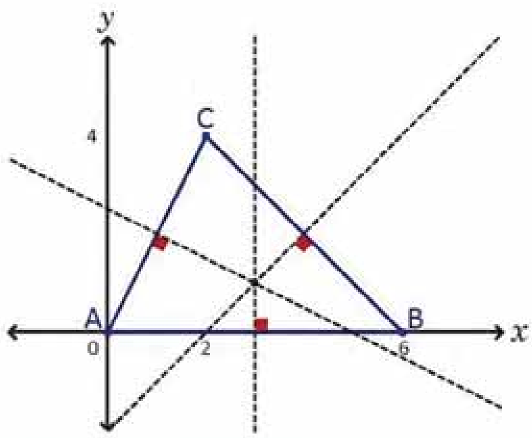
5. 三角形の**高さを表す線分**は、1 つの頂点から始まり反対側にある辺と直角をなす線分です。三角形においては 3 つの高さを表す線分を引くことができます（各頂点に対し 1 つ）。頂点が A(−4, 1)、B(2, 1)、C(1, 6) である三角形を作り、以下を行いなさい。

   a) 点 A と点 B、点 B と点 C、点 C と点 A を通る直線の傾きを求めなさい。
   b) 三角形 ABC の 3 つの高さを表す線分の方程式を求めなさい（例えば、そのうちの1つは点 A(−4, 1) を通り、辺 BC と直角に交わります）。
   c) 高さを表す線分が 1 点で交差することを確認しなさい。



6. 点 A(0, 0)、点 B(6, 0)、点 C(2, 4) で三角形を作り、以下を行いなさい。

   a) 各辺の中点の座標を求めなさい。
   b) 三角形の垂直二等分の方程式を求めなさい（例えば、そのうちの 1 つは辺 AB の中点を通り、辺 AB と直角に交わります）。
   c) 垂直二等分線が 1 点で交差することを確認しなさい。



3.12 このユニットの問題

1. 点 A(–5, 3) と点 B(4, –3) が与えられているとき、線分 AB を 3 等分する点 C と 点 D の座標を求めなさい。

点 C は、線分 AB を 1 : 2 の比で分割します。

2. 点 $P\left(a+1, \frac{1}{a}\right)$ が方程式 $2x - 3y + 3 = 0$ の直線上にあるときの a の値を求めなさい。

3. 平行四辺形 ABCD の頂点の 3 つは、A(–5, 0)、B(–2, –1)、C(5, 2) です。4 つ目の頂点の座標を求めなさい。

4. 頂点が A(0, 8)、B(–4, 0)、C(10, 4) である三角形 ABC で以下を行いなさい。

   a) 辺 AB、辺 BC、辺 CA の中点を求め、それぞれ D、E、F で表しなさい。
   b) 線分 AE を 2 : 1 の比で分割する点の座標を求めなさい。
   c) 線分 BF と線分 CD を 2 : 1 の比で分割する点の座標を求めなさい。前問とどのような関係がありますか。
   d) この問題と 3.11 の授業の問題 4 から何を結論付けることができますか。

5. A(–3, –1) と B(2, 2) は、ある平行四辺形の連続する 2 つの頂点です。2 つの対角線の交点が点 P(3, 0) であるとき、残り 2 つの頂点の座標はいくらですか。

6. ある三角形の辺 A B、辺 BC、辺 CA の中点は、それぞれ D(–1, –1)、E(4, 2)、F(2, 3) です。この三角形の頂点 A、B、C の座標を求めなさい。

7. 方程式 $ax + by + c = 0$ と $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ の 2 直線が直角に交わるならば、$aa_1 + bb_1 = 0$ であることを証明しなさい。

8. 点 $P(x_1, y_1)$ を通り、さらに、直線 l : $ax + by + c = 0$ に平行な直線の方程式は、$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$ であることを証明しなさい。

9. l_1 と l_2 が 135°の角（l_1 から l_2 に測った角）をなして交差しています。l_2 の傾きが –3 ならば、l_1 の傾きの値はいくらですか。

10. 三角形 ABC の頂点 A の座標が (–4, 0) で、頂点 B から引いた高さを表す線分と中線の方程式が、それぞれ、$4x + y - 7 = 0$ と $2x - y + 1 = 0$ であるとき、頂点 B と頂点 C の座標を求めなさい。

4.1 GeoGebra を使った演習：線分

昨年は、GeoGebra で関数をグラフ化する方法、2 次関数の水平移動・垂直移動のやり方、ベクトルをグラフ化し、それらを使用して操作を実行する方法を学びました。この演習では、線分と直線をその方程式から図上に表示するソフトウェアを使用します。

パソコンにGeoGebra が入っているか確認する必要があります。そのために、アプリケーションアイコン（このページの右上の隅にあるもの）を探します。アプリケーションが入っていない場合は、以下のリンクに従い、ダウンロードすることができます。

GeoGebra https://goo.gl/iRmmdc

ダウンロード（インストール）“GeoGebra Clásico 5”。以下のリンクから携帯電話用アプリケーションをダウンロードすることもできますし、オンラインで GeoGebra を使うことも可能です。

アプリケーション → https：//goo.gl/wf5mHx　**オンライン** → https：//goo.gl/ThXbeB

演習

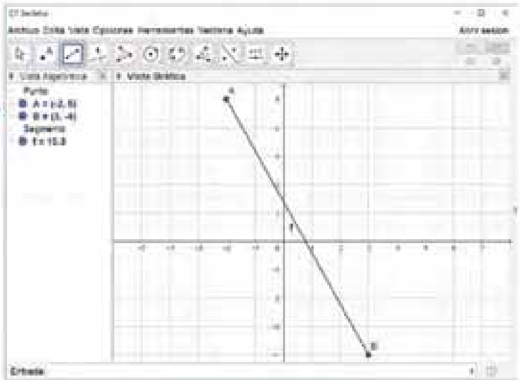
デカルト平面上の点と線分

1. ソフトウェアのアイコンをクリック（またはダブルクリック）して、GeoGebra の新しいファイルを開いてください。

2. A(−2, 5) と B(3, −4) の線分 AB を作成するためには、
   a) 点ツールまたは入力バーを使って、平面上に 2 点を配置してください。

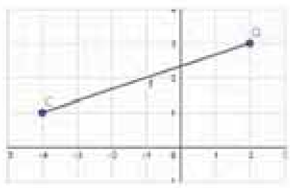
GeoGebra では、点は大文字で表記します。「a=(-2,5)」で入力すると、ベクトルになります。

   b) 直線 ツールの右下の部分をクリックし、線分を選択してください。



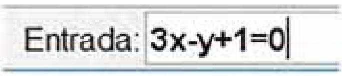
   c) グラフィックスビューで、点　A　と点　B　を選択してください。数式ビューに線分の名前と長さが表示されます。線分 AB の長さは、点 A と点 B 間の距離に等しいことを復習しよう。この場合は、およそ 10.3 です。

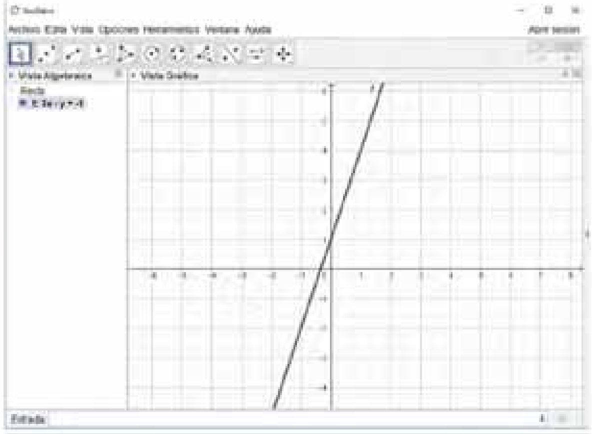
   d) また、線分ツールの代わりに、入力バーを使って線分を作成することもできます。点 C(−4, 1) と点 D(2, 3) を作成しましょう。 入力バーに線分という言葉を記入し、「線分(<点(端)>, <点(端)>)」を選択してください。<点(端)>の部分に、それぞれ C と D を入力してください。



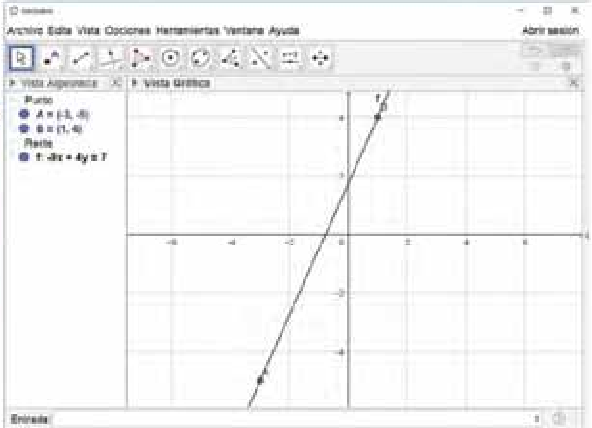
直線：

3. 方程式がわかっている直線のグラフを描くためには、入力バーに方程式を入力するだけです。例えば、$3x - y + 1 = 0$ のグラフを描くためには、3x-y+1=0 を記入し、入力を押します。





4. 2 点を通る直線の方程式を求め、グラフを描くためには、入力バーの直線 (<点>, <点>) コマンドを使用します。例えば、点A(−3, −5) と点 B(1, 4) を通る直線の方程式を求めるには、まず、点A と点 B を作成します。次に、直線 (A,B) を記入し、入力を押します。数式ビューには直線の方程式が表示され、グラフィックスビューには直線が現れます。



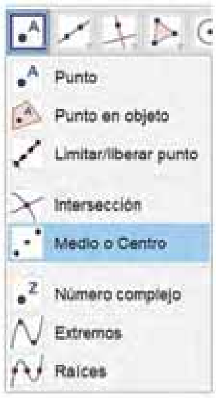
また、前述のコマンドを使用し、直線 ((-3,-5),(1,4)) を入力してもよいです。

課題

1. 線分の中点

a) GeoGebra の新しい画面を開き、A(−4, −3) の B(6, 1) の線分 AB を作成します。

b)「点」ツールの右下部分をクリックし、「中点または中心」を選択してください。



c) グラフィックスビュー（または数式ビュー）で、点 A と点 B をクリックすると、線分 AB の中点である、座標 (1, −1) の新たな点 C が表示されます。

d) 授業 1.6 の問題 7、8、9、10（復習問題）の解答を確認しましょう。

2. 直線の傾き

a) 入力バーに「傾き」と記入すると、「傾き(<直線、半直線または線分>)」のオプションが現れます。

b) <直線、半直線または線分>の部分に直線の方程式を記入し、入力を押します。

c) 直線 $y = -2$ および直線 $x = 3$ の傾きを計算すると、どうなりますか。垂直な直線および水平な直線の傾きの値はいくらですか。

3. 授業 2.2 から 2.5 までの問題の解答を確認しましょう。

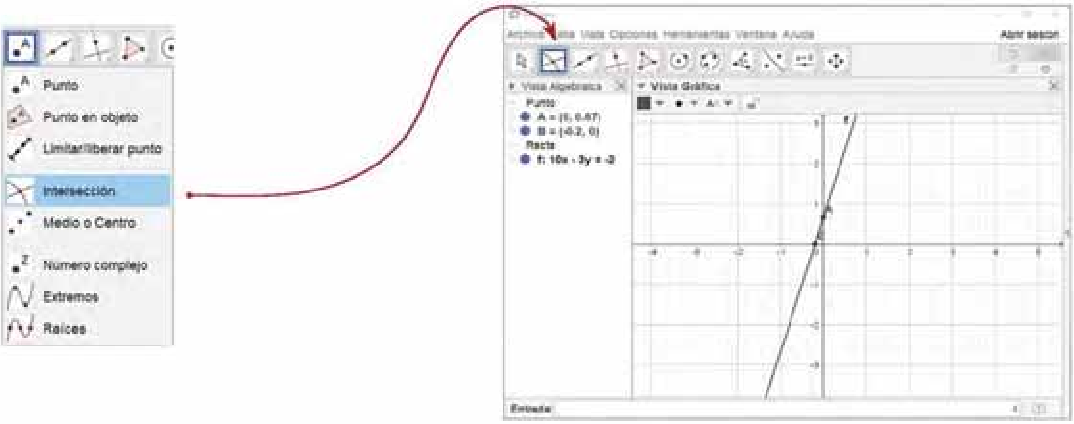
4.2 GeoGebra を使った演習： 2 直線の位置関係

この演習では、2 直線の交点の座標の求め方、平行な直線と直角に交わる直線の描き方、直線の傾斜角の求め方を学びます。

演習

座標軸と直線の交点：

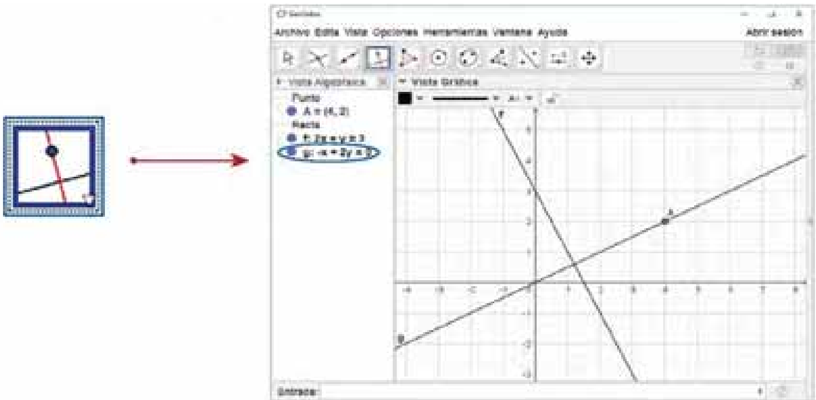
1. 直線 $10x - 3y + 2 = 0$ を描きなさい（必要だと思ったら、グラフィックスビューを拡大してください）。
2. 点ツールの右下部分をクリックし、交点を選択します。グラフィックスビューで x 軸(または y 軸)をクリックした後、直線をクリックします。数式ビューに x 切片または y 切片の座標が表示されます。



3. 2 直線間の交点を求めるために、同じツールを使います。この場合は、座標軸のどちらかを選択する代わりに、2 直線を選択します。

平行な直線と直角に交わる直線

4. 新たな画面を開き、直線 $2x + y - 3 = 0$ を描きます。
   a) 前の直線に直角に交わる直線を描くためには、直角ツールをクリックします。グラフィックスビューで、直線 $2x + y - 3 = 0$ を選択します（直角に交わる直線が現れるのがわかります）。次に、直線を置きたい場所を選択します。それによって、数式ビューの方程式が決まります。



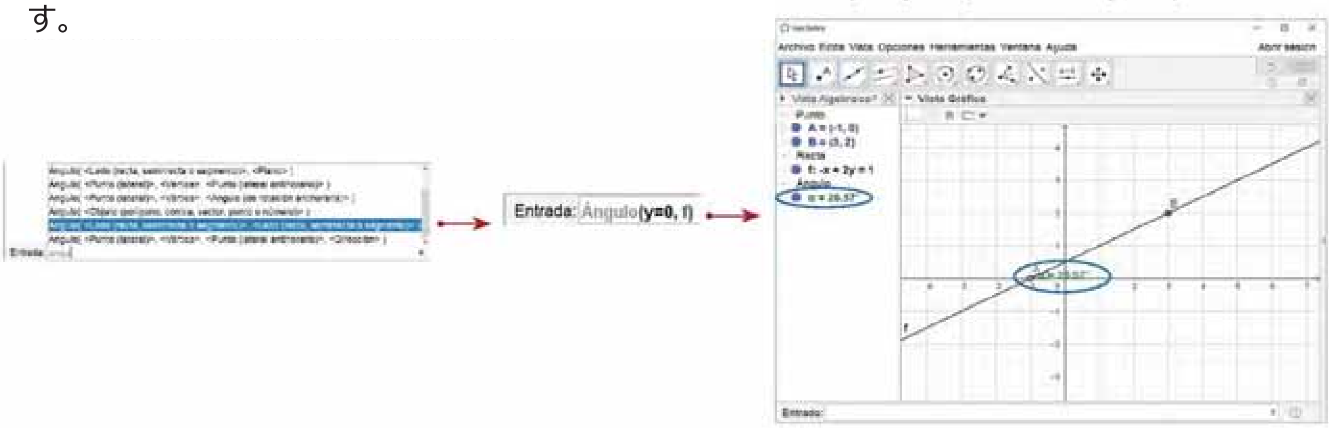
画面では、直角に交わる直線が点 (4, 2) 上に置かれたので、方程式は es $-x + 2y = 0$

   b) $2x + y - 3 = 0$ に平行な直線を引くためには、直角 ツールの右下の角をクリックし、平行を選択します。グラフィックスビューで、直線 $2x + y - 3 = 0$ をクリックします（平行な直線が現れるのがわかります）。次に、直線を置きたい場所を選択します。それによって、数式ビューの方程式が決まります。

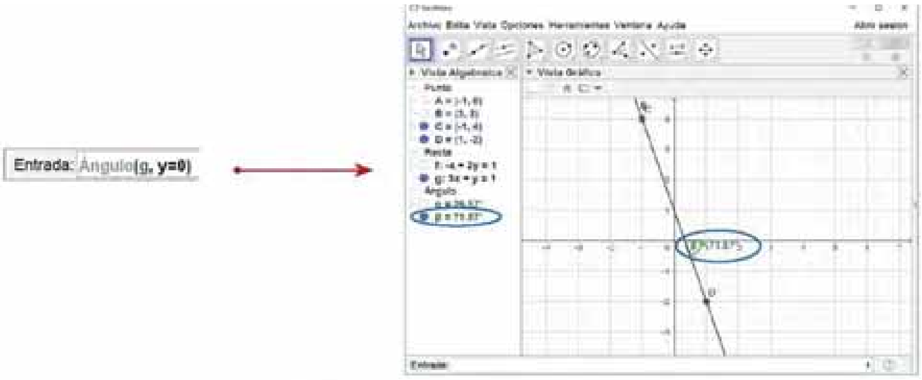
直線の傾斜角

5. 傾斜角を求めるためには、直線の傾きを考慮に入れなければなりません。

a) 正の傾き： $x - 2y + 1 = 0$のグラフを描きます。入力バーに角度を記入し、リストで角度（< 辺 (直線、半直線または線分) >、< 辺 (直線、半直線または線分) > ）を選択します。< 辺 (直線、半直線または線分) > の部分に、まず y=0 を記入し、次に、方程式の前に数式レビューに表示される文字を記入します。



b) 負の傾き：$3x + y - 1 = 0$のグラフを描きます。角度（< 辺 (直線、半直線または線分) >、< 辺 (直線、半直線または線分) >）コマンドを使い、まず、方程式の数式レビューに表示される文字を入力し、次に y=0 を入力します。



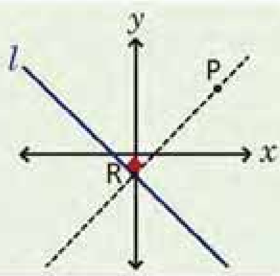
GeoGebra が、直線 $3x + y - 1 = 0$ から x 軸の正の部分に向かって測ったた角度を表示するのを見てください。よって、直線の傾斜角は、180° からコマンドで得た角度を引いた差に等しくなります。

課題

1. 座標軸との交点、2 直線の交点、平行な直線、直角に交わる直線に関する授業 3.1 から授業 3.5 までの問題の解答を確認しましょう。

2. 直線 l： $y = -3x + 2$ と点 P(−2, −1) を使って、点 P から直線 l までの距離を求めるために、GeoGebra を用いたやり方を明らかにしましょう。

l_1が P を通る直線 l に直角に交わる直線であるなら、R は l と l_1 の交点です。よって、 $d(P, l)$ を求めるのは、$d(P, R)$を求めるのに等しいです。



3. 直線 f： $x - y - 5 = 0$ と g ：$6x - y - 21 = 0$ が与えられているとき、2 直線がなす角を求めるために、GeoGebra を使ったやり方を明らかにしましょう。

ユニット 3

二次曲線

二次曲線は古代ギリシャから研究されてきたテーマです。紀元前 350 年頃にギリシャの数学者メナエクムスによって発見されました。二次曲線は、トルコの数学者ペルガのアポロニウスによって再び取り上げられ、深められました。彼は円錐の切り口の種類に従って二次曲線を分類しました。最も重要な貢献は、円錐が持つ反射特性の発見にあります。以後、物理学はその発見を幾何学立体の設計に取り入れています。反射特性は、光学やレーダーの設計、アンテナ、ナビゲーションシステム、信号などに応用されています。

マクストフカセグレン望遠鏡には、放物線形状のレンズと双曲線形状のレンズが使用されています。

天体の軌道は、楕円（太陽系など）や放物線または双曲線（彗星など）を描く場合があります。

また、二次曲線の応用は、宇宙の研究が盛んになるのに伴い、非常に興味深いものになり、ドイツの天体学者ヨハネス・ケプラーが太陽系の惑星の軌道が楕円曲線を描いていることを発見するに至りました。そしてその発見は、英国の数学者で物理学者のアイザック・ニュートンによって概括されました。ニュートンは、重力の周りの天体（彗星、惑星、星など）の軌道が二次曲線であることを証明しました。

このユニットでは、解析幾何学から見た放物線、円周、楕円、双曲線の内容を扱います。さらに、二次曲線の応用に関する授業も含まれています。円錐の反射特性を、科学ツールや技術ツールの作成に使用します。その後、扱った内容を強化するために、いくつか GeoGebra を使った演習を行います。

1.1 方程式の軌跡

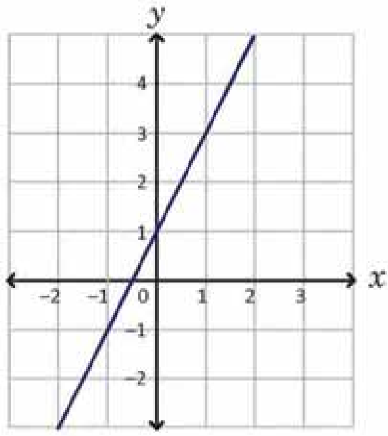
導入問題

次の方程式の条件を満たす点の集合を座標平面にグラフ化しなさい。

a) $y = 2x + 1$ b) $y = x^2 - 1$

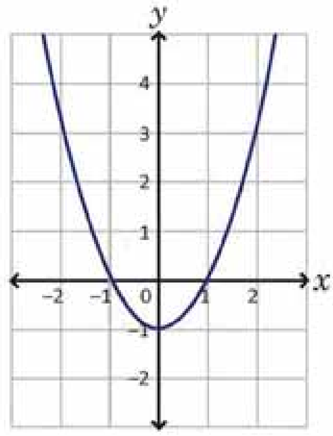
解法

a) これは 1 次関数の式で、座標グラフは以下になります。



したがって、$y = 2x + 1$ の条件を満たす点の集合は直線となります。

b) これは 2 次関数の式で、座標グラフは以下になります。



したがって、$y = x^2 - 1$ の条件を満たす点の集合は放物線となります。

定義

ある方程式の**軌跡**はその方程式の条件を満たす点の集合であり、特定の場合には、点や直線、円、放物線などと呼ばれる形になることがあります。

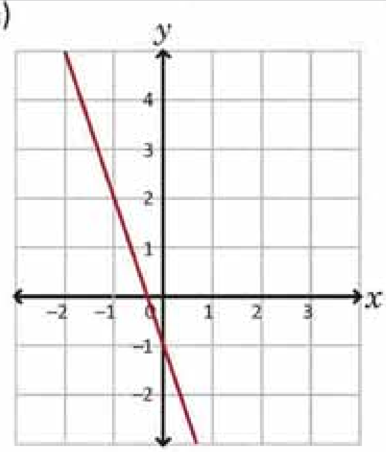
問題

1. それぞれの方程式の軌跡を座標平面に描きなさい。

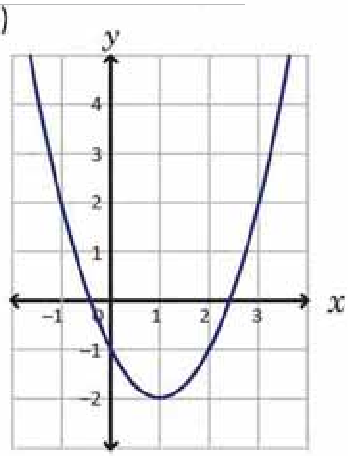
a) $y = x - 4$ b) $y = -3x + 2$ c) $y = x^2 - 3$

2. それぞれの図が示す軌跡の方程式を求めなさい。

a)



b)

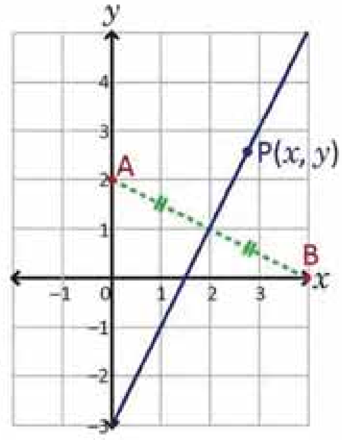


1.2 軌跡の方程式*

導入問題

点 A (0、2) までの距離と点 B(4、0) までの距離が等しい点が軌跡となる方程式を作りなさい。

解法



座標平面に点 A と点 B をとります。

少なくとも切片 AB の中間点は条件を満たす点です。

条件を満たす点 P(*x*, *y*) と 2 つの点の間の距離を利用します。

$$d(\mathrm{A}, \mathrm{P}) = d(\mathrm{P}, \mathrm{B})$$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2}$$ 2乗し、

$$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-4y+4=\cancel{x^2}-8x+16+\cancel{y^2}$$ 整理し、

$$8x-4y-12=0.$$

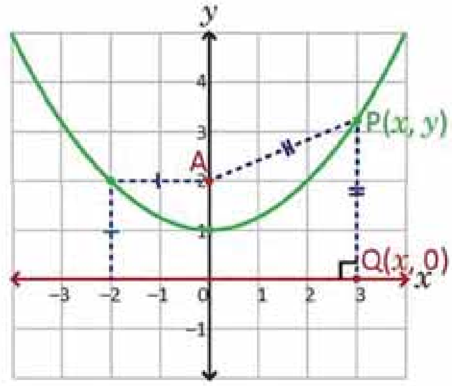
したがって、この軌跡の方程式は、$2x-y-3=0$ となり、そのグラフは、切片AB の中間点を通る傾き（線分 AB の垂直二等分線）であることが分かります。

まとめ

特定の条件をもつ軌跡の方程式を得るには、点と点との距離や、点と線との距離などをヒントにしながら与えられた条件を満たす方程式を考えます。

例

x 軸までの距離と点 A(0, 2) までの距離とが常に等しくなる点を軌跡とする方程式を求めなさい。



まず、条件を満たす点の1つは点 A と *x* 軸の間の中間点です。

条件を満たす点 P(*x*, *y*) の式を考えて、

$$d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = d(\mathrm{A}, \mathrm{P})$$

$$|y| = \sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}$$ 2乗し、

$$\cancel{y^2}=x^2+\cancel{y^2}-4y+4$$ 整理し、

$$x^2-4y+4=0.$$

そして、このような式にすることができます。$y=\frac{1}{4}x^2+1$

したがって、この軌跡の方程式は、$x^2-4y+4=0$ となり、放物線であることが分かります。

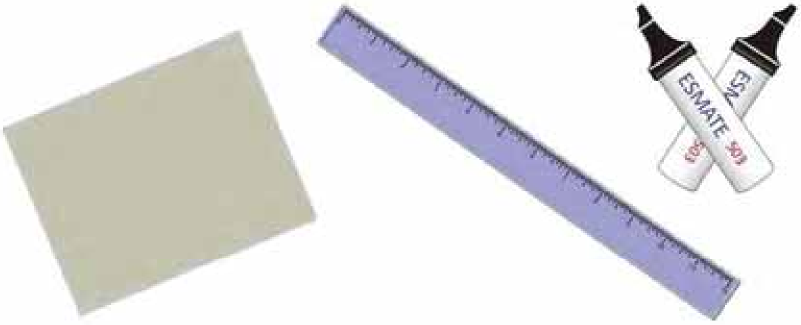
問題

1. 点 A(2, −3) までの距離と点 B(0, −1) までの距離が同じになる点を軌跡とする方程式を求めなさい。
2. 直線 $y=-1$ までの距離が、常に点 A(0, 1) までの距離と同じになる点を軌跡とする方程式を求めなさい。
3. *y* 軸からの距離が 2 になる点を軌跡とする方程式を求めなさい。
4. *x* 軸からも *y* 軸からも同じ距離になる点を軌跡とする方程式を求めなさい。

1.3 導入方法

用意する物

- トレーシングペーパー
- マジック
- 定規



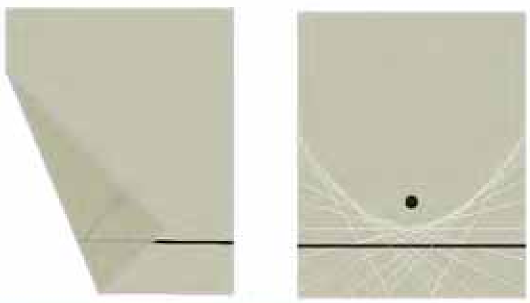
課題

1. 用紙の下の方に、用紙の幅の広い方の辺に平行する直線を一本引きなさい。

2. その直線の上の方で、紙の中心線上に点を打ちなさい。

3. 直線の端の部分が記入した点と重なるように用紙を折ります。

4. 直線の手前の部分から最後の部分まで同じことを繰り返しなさい。できた形を分析しなさい。



定義

用紙を折り曲げて出来た折り目にによってできた形が**放物線**です。その放物線上の各点において、最初につけた点までの距離と描きこんだ直線までの距離が等しくなっていることに注目しなさい。

問

1. 描きこんだ直線から点の位置が離れると放物線はどうなりますか。
2. 直線の下に点を描きこんだ場合は、どうなりますか。
3. 直線を垂直方向に引いて、その右または左に点を描きこんだ場合はどうなりますか。
4. 放物線になる点において点からの距離と直線からの距離が等しくなる理由を考えなさい。

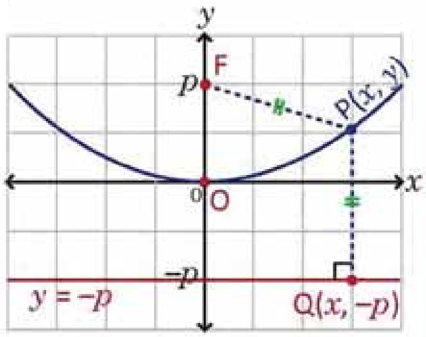
1.4 放物線*

導入問題

直線 $y=-p$ までの距離と、点 F(0, p) までの距離が等しい軌跡をもつ方程式を求めなさい。

解法

一般的には、条件を満たす点 P(x, y) をとり、1点から直線までの距離と、2つの点の間の距離を使います。



直線 $y=-p$ は水平なので、$d(P, Q)=|y-(-p)|$

等式 $d(P, Q)=d(P, F)$ にあてはめて、

$$|y-(-p)|=\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}$$ 2乗し、

$$|y+p|^2=x^2+(y-p)^2$$ 展開し、

$$y^2+2yp+p^2=x^2+y^2-2yp+p^2$$ 整理し、

$$4yp=x^2$$ y を取り出し、

$$y=\frac{1}{4p}x^2.$$

したがって、この軌跡は $a=\frac{1}{4p}$ の放物線 $y=ax^2$ です。

定義

放物線**の位置を特定する方程式は** $y=\frac{1}{4p}x^2$ と表します。

この方程式では放物線の**頂点** が常に原点を通ります。
p の値を**パラメータ**といいます。

点 F(0、p) は放物線の**焦点**といい、直線 $y=-p$ は放物線の**準線**といいます。
準線と垂直に交わり放物線の焦点を通る直線を**軸**といいます。

パラメータ p が負の数である式は下に向かって開いた放物線となります。

準線が $x=-p$ の垂線である場合、放物線は水平型で、方程式は次のように表します。

$$x=\frac{1}{4p}y^2$$

例 1

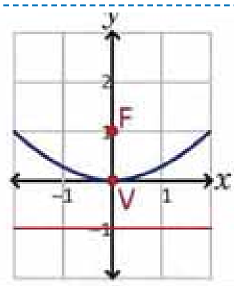
焦点 F(0, −3) 、準線 $y=3$ の放物線の方程式を求めなさい。

$p=-3$であることから、放物線の方程式は $y=\frac{1}{4(-3)}x^2$ となり、計算により $y=-\frac{1}{12}x^2$

したがって、方程式は $y=-\frac{1}{12}x^2$ となり、下に向かって開いた放物線になります。

例 2

放物線 $y=\frac{1}{4}x^2$ の焦点、準線、頂点を求め、座標平面上でそれぞれの位置を特定し、グラフ化しなさい。



ただし、$\frac{1}{4}=\frac{1}{4p}$、つまり $p=1$ とする。

焦点：F(0, 1)　準線： $y=-1$　頂点：V(0, 0)

問題

1. 各問にある焦点と準線をもつ方程式を求め、放物線グラフを作りなさい。

a) F(0, 2), $y=-2$　b) F(0, −1), $y=1$　c) F$\left(0, \frac{1}{8}\right)$, $y=-\frac{1}{8}$　d) F$\left(0, -\frac{1}{16}\right)$, $y=\frac{1}{16}$　e) F(2, 0), $x=-2$

2. 次の焦点と頂点の座標と準線の方程式を求め、座標平面に放物線グラフを作りなさい。

a) $y=2x^2$　b) $y=-x^2$　c) $y=\frac{1}{8}x^2$　d) $y=-\frac{1}{4}x^2$　e) $x=2y^2$

ユニット3

1.5 平行移動

導入問題

$y = (x-2)^2 + 1$ の軌跡を座標平面上で垂直方向と水平方向に移動させなさい。焦点、頂点の座標を求め、準線の方程式を作りなさい。

関数 $f(x-h)+k$ のグラフは、関数 $f(x)$ が右に h、上に k 移動したものです。

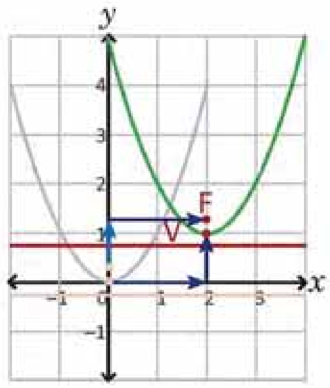
解法

関数 $y = (x-2)^2 + 1$ のグラフは、関数 $y = x^2$ のグラフが右に2、上に 1 移動したものです。

$y = x^2$: $1 = \frac{1}{4p}$ を計算して p を特定します。$p = \frac{1}{4}$

そして、頂点、焦点の座標、準線の方程式は同じだけ移動します。

方程式	$y = x^2$	$y = (x-2)^2 + 1$
焦点	$F\left(0, \frac{1}{4}\right)$	$F\left(0+2, \frac{1}{4}+1\right) = F\left(2, \frac{5}{4}\right)$
頂点	$V(0, 0)$	$V(0+2, 0+1) = V(2, 1)$
準線	$y = -\frac{1}{4}$	$y = \frac{3}{4}$



一般的に

図形を水平方向に h 分移動させるには、変数 x を $x-h$ に置き換え、図形を垂直に k 分移動させるには、変数 y を $y-k$ に置き換えます。

したがって、放物線 $y = \frac{1}{4p}x^2$ が水平に h、垂直に k 移動した式は、$y-k = \frac{1}{4p}(x-h)^2$ となります。

移動した放物線 $y-k = \frac{1}{4p}(x-h)^2$ は以下の条件を満たします。
頂点：(h, k)　焦点：$(h, p+k)$　準線：$y = -p+k$

例

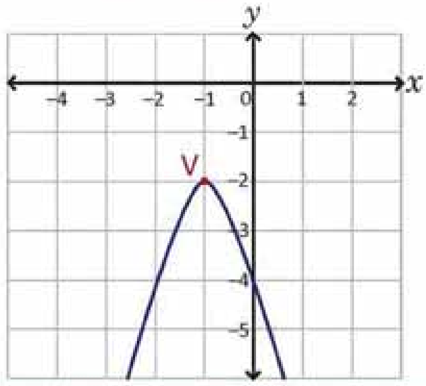
a) 放物線 $y = 2x^2$ を水平方向に -3 移動させ、垂直方向に 1 移動させた時にできる方程式を求めなさい。

x に $x-(-3)$ を代入し、y に $y-1$ を代入し

$y-1 = 2(x+3)^2$、つまり、$y = 2(x+3)^2 + 1$

b) $y+2 = -2(x+1)^2$ の放物線グラフを作成しなさい。

これは $y = -2x^2$ の放物線が水平方向に -1、垂直方向に -2 移動したものなので、右の図になります。



問題

1. 各問にある水平に h、垂直に k 移動している方程式を求めなさい。

a) $y = x^2, h = 3, k = 2$　b) $y = 3x^2, h = -1, k = 3$　c) $y = -x^2, h = 1, k = -1$

d) $y = -2x^2, h = -2, k = -1$　e) $y = 2x^2, h = 0, k = 3$　f) $y = -3x^2, h = -2, k = 0$

2. 以下の方程式の放物線グラフを座標平面に描きなさい。そして焦点、頂点の座標と準線の方程式をそれぞれ求めなさい。

a) $y-1 = (x-4)^2$　b) $y+2 = 2(x-3)^2$　c) $y-3 = -(x+1)^2$　d) $y+1 = -2(x+1)^2$

1.6 平方完成の手順

導入問題

多項式 $x^2 + 4x$ を $a(x-h)^2 + k$ の形に直しなさい。

解法

代数式の平方完成をするには、代数式を変えないように同じ回数だけ足し算や引き算をします。

$$x^2 + 4x = x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2$$
$$= (x^2 + 4x + 2^2) - 4$$
$$= (x + 2)^2 - 4$$

よって、$x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$

2 項式の 2 乗を展開して、

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

"x" の係数を 2 で割って2乗することで、a^2 が得られます。

$$\left(\frac{2a}{2}\right)^2 = a^2$$

ユニット3

まとめ

代数式に適切な数字を足したり引いたりして完全な平方式に変換することを**平方完成**といい、これは数学問題を解くのに非常に役立つ方法です。

例

次の代数式を平方完成しなさい。

a) $x^2 - 8x$　　b) $x^2 - 4x + 2$　　c) $2x^2 + 12x + 10$　　d) $-3x^2 + 12x - 13$

a) $x^2 - 8x = (x^2 - 8x + 4^2) - 4^2$
$= (x - 4)^2 - 16$

b) $x^2 - 4x + 2 = (x^2 - 4x + 2^2) - 2^2 + 2$
$= (x - 2)^2 - 4 + 2$
$= (x - 2)^2 - 2$

c) $2x^2 + 12x + 10 = 2(x^2 + 6x) + 10$
$= 2(x^2 + 6x + 3^2 - 3^2) + 10$
$= 2[(x + 3)^2 - 9] + 10$
$= 2(x + 3)^2 - 18 + 10$
$= 2(x + 3)^2 - 8$

d) $-3x^2 + 12x - 13 = -3(x^2 - 4x) - 13$
$= -3(x^2 - 4x + 2^2 - 2^2) - 13$
$= -3[(x - 2)^2 - 4] - 13$
$= -3(x - 2)^2 + 12 - 13$
$= -3(x - 2)^2 - 1$

問題

1. 次の代数式を平方完成しなさい。

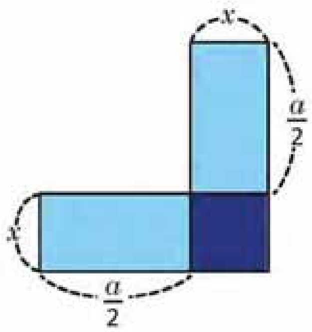
a) $x^2 + 2x$　　b) $x^2 + 6x$　　c) $x^2 + 8x$　　d) $x^2 - 4x$　　e) $x^2 + 10x + 15$

f) $x^2 - 2x - 1$　　g) $2x^2 + 8x + 6$　　h) $3x^2 - 6x - 2$　　i) $-x^2 - 4x - 4$　　j) $-2x^2 + 8x + 3$

2. 右の図を使って、

a) 図の面積を求めなさい。

b) 正方形を作る場合に追加で必要となる長方形の面積を求めなさい。

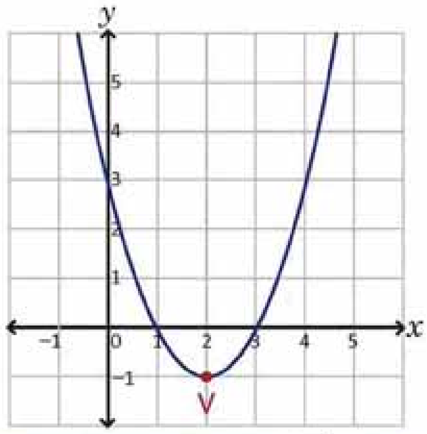


1.7 放物線の方程式（一般形）

導入問題

$-x^2 + 4x - 3 + y = 0$ の軌跡を表しなさい。

解法



y を取り出して、x を平方完成した式を作ります。

$$y = x^2 - 4x + 3$$
$$y = (x^2 - 4x + 2^2) - 2^2 + 3$$
$$y = (x - 2)^2 - 4 + 3$$
$$y = (x - 2)^2 - 1$$

別の式で表すと、$y - (-1) = (x - 2)^2$

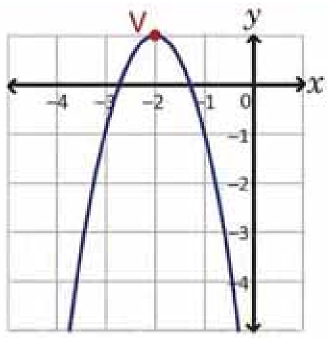
よって、$y - x^2 + 4x - 3 = 0$ の方程式は、$y = x^2$ の放物線グラフを右に 2、下に 1 移動させたグラフになります。

まとめ

放物線は $y - k = \frac{1}{4p}(x - h)^2$ の方程式を平方完成させて、右辺が 0 の等式で表すこともできます。

一般的に、$ax^2 + bx + cy + d = 0$ の形で表される方程式を垂直移動と水平移動させるには、平方完成をして $y - k = \frac{1}{4p}(x - h)^2$ の形の式に直します。$ax^2 + bx + cy + d = 0$ の形で表す方程式を放物線の方程式（一般形）**と言います。**

例



$2x^2 + 8x + 7 + y = 0$ の放物線グラフを作成しなさい。頂点、焦点の座標と準線を求めなさい。

y を取り出して、x を平方完成した式を作ります。

$$y = -2x^2 - 8x - 7$$
$$y = -2(x^2 + 4x) - 7$$
$$y = -2(x^2 + 4x + 2^2 - 2^2) - 7$$
$$y = -2(x + 2)^2 + 8 - 7$$
$$y = -2(x + 2)^2 + 1$$

したがって、これは、$y = -2x^2$ の放物線グラフを左に 1、上に 1 移動させたグラフになります。

$-2 = \frac{1}{4p}$ を計算して p を特定します。$p = -\frac{1}{8}$

したがって、

方程式	$y = -2x^2$	$y = -2(x + 2)^2 + 1$
焦点	$F\left(0, -\frac{1}{8}\right)$	$F\left(-2, \frac{7}{8}\right)$
頂点	V (0, 0)	V (−2, 1)
準線	$y = \frac{1}{8}$	$y = \frac{9}{8}$

問題

各問の頂点の座標を求め、それぞれ放物線グラフを作成しなさい。

a) $x^2 + 2x + 2 - y = 0$　b) $x^2 - 4x + 3 - y = 0$　c) $x^2 + 4x + 5 + y = 0$　d) $-x^2 + 2x + 1 - y = 0$

e) $-2x^2 - 12x - 20 + y = 0$　f) $2x^2 - 8x + 5 + y = 0$　g) $3x^2 - 6x + 5 + y = 0$　h) $3x^2 + 6x + y + 6 = 0$

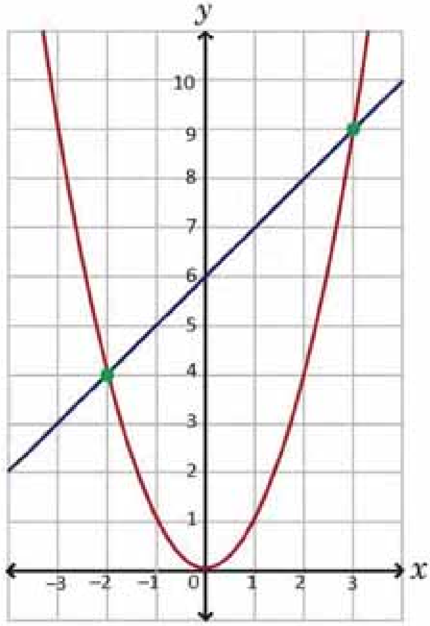
1.8 直線と放物線

導入問題

放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x + 6$ の交点の座標を求めなさい。

解法

ある点で 2 つのグラフが交わっている場合、その点は直線の方程式と放物線の方程式のどちらの条件も満たしていることになります。そのため、交点を求めるということは、連立方程式を解くことを意味します。



$$\begin{cases} y = x^2 & \text{----------- (1)} \\ y = x + 6 & \text{----------- (2)} \end{cases}$$

代入する方法を使って、

$x^2 = x + 6$ 右辺をゼロの等式に直し、

$x^2 - x - 6 = 0$ 因数分解し、

$(x - 3)(x + 2) = 0$ 2 次関数の式をといて、

$x = 3$ か $x = -2$.

以下の x の値をあてはめて y の値を求めると、

$x = 3$ であれば、$y = 3 + 6 = 9$

$x = -2$ であれば、$y = -2 + 6 = 4$

よって、交点は (3, 9)、(–2, 4) となります。

まとめ

放物線と直線の交点の座標は、連立方程式の解と一致します。

連立方程式で解く時は 3 つのパターンがあります。

1. 直線が放物線と異なる 2 点で接する（割線）
2. 直線が放物線と 1 点で接する（接線または垂線）
3. 直線と放物線が接していない

問題

各問の放物線と直線の交点を求めなさい。座標平面にグラフを作成しなさい

a) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 3x \end{cases}$　b) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$　c) $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$　d) $\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = -x - 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ y = 5x - 4 \end{cases}$　f) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 1 \end{cases}$　g) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$　h) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x - 1 \end{cases}$

1.9 パラメータ

導入問題

直線 $y = 4x + m$ が放物線 $y = x^2$ の接線となる場合の m の値を求めなさい。

解法

交点を求めるために、連立方程式を解きます。

$$\begin{cases} y = x^2 & \text{----------- (1)} \\ y = 4x + m & \text{----------- (2)} \end{cases}$$

$x^2 + 2ax + b$ が完全平方であるためには、以下を満たさなければなりません。

$$\left(\frac{2a}{2}\right)^2 = b$$

なぜなら、$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$
または、$ax^2 + bx + c$ の判別式は、
$b^2 - 4ac = 0$

これを解くと、

$$x^2 = 4x + m$$
$$x^2 - 4x - m = 0$$

直線が放物線に 1 点で接するためには、二次方程式 $x^2 - 4x - m = 0$ の解は 1 つでなければなりません。そのためには、式 $x^2 - 4x - m$ は完全平方でなければなりません。

方法 1

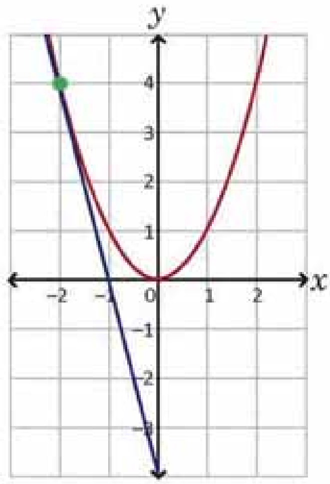
完全平方式を使います。

$$-m = \left(\frac{4}{2}\right)^2$$
$$m = -4$$

方法 2

二次方程式の判別式を分析します。

$$b^2 - 4ac = 0$$
$$(-4)^2 - 4(1)(-m) = 0$$
$$16 = -4m$$
$$m = -4$$



したがって、直線 $y = 4x + m$ が放物線 $y = x^2$ の接線となる場合の m の値は、$m = -4$ になります。

まとめ

値が不明で、グラフが特定の条件を満たすよう変化する定数は、**パラメータ**と呼ばれます。

放物線に接する直線の方程式においてパラメータを特定するためには、判別式を分析するか、または、二次方程式の解が 1 つだけになるような完全平方式を用いる必要があります。

問題

各方程式において、直線が放物線に接するときのパラメータ p の値（または複数の値）を求めなさい。

a) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 6x - p \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = 2x + p \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = -x^2 - 3x \\ y = -x - p \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = -x^2 - 3x - 5 \\ y = 3x + p \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = 4x^2 \\ y = 4x - p \end{cases}$

f) $\begin{cases} y = -3x^2 + 2x - 3 \\ y = -10x + p \end{cases}$

g) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = px - 4 \end{cases}$

h) $\begin{cases} y = -x^2 \\ y = px + 16 \end{cases}$

1.10 復習問題

1. 各問にある焦点と準線をもつ方程式を求め、放物線グラフを作りなさい。

a) $F(0, -2), y = 2$　　b) $F\left(0, \frac{1}{12}\right), y = -\frac{1}{12}$

2. 各問にある、水平方向に h 分、垂直方向に k 分移動している放物線の方程式を求めなさい。

a) $y = 4x^2, h = -2, k = 4$　　b) $y = -2x^2, h = -3, k = -3$

3. 次の代数式を平方完成しなさい。

a) $x^2 - 10x$　　b) $x^2 - 4x - 9$　　c) $-3x^2 + 6x - 2$

4. 次の放物線グラフを座標平面に描きなさい

a) $y = -2x^2$　　b) $y - 1 = -(x + 2)^2$　　c) $2x^2 + 4x - y = 0$

5. それぞれの放物線の頂点と焦点の座標と準線を求めなさい。

a) $y = \frac{1}{8}x^2$　　b) $y + 3 = 2(x + 5)^2$　　c) $3x^2 - 12x + 7 - y = 0$

6. 各問の放物線と直線の交点を求めなさい。座標平面にグラフを描きなさい。

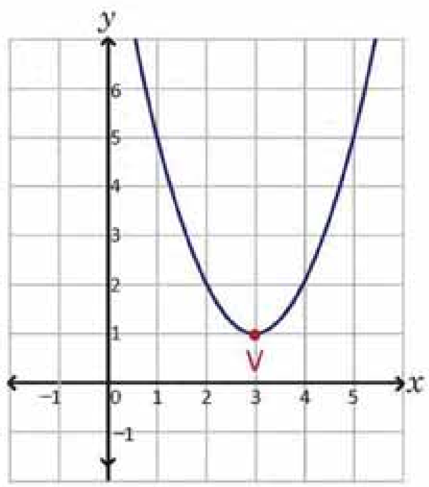
a) $\begin{cases} y = -x^2 + 2 \\ y = 4x - 3 \end{cases}$　　b) $\begin{cases} y = x^2 + 2x + 1 \\ y = -3x - 3 \end{cases}$　　c) $\begin{cases} y = -x^2 \\ x = -2 \end{cases}$

7. 以下の方程式で、直線がそれぞれの放物線の接線となるよう、パラメータ p の値（複数の場合もあります）を求めなさい。

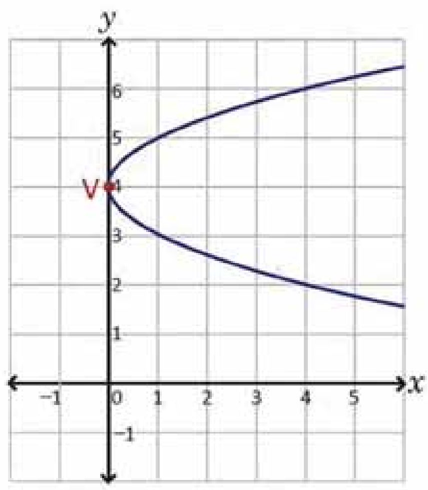
a) $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = 2x + p \end{cases}$　　b) $\begin{cases} y = -9x^2 - 6x - 2 \\ y = 6x + p \end{cases}$　　c) $\begin{cases} y = 4x^2 \\ y = px - 1 \end{cases}$

8. 各問のグラフになる方程式を求めなさい。

a)



b)

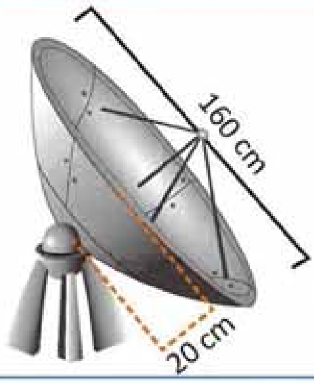


ユニット3

1.11 放物線の応用*

導入問題

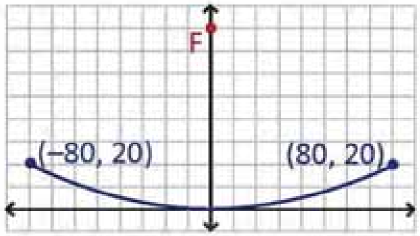
エルサルバドルの文化テレビ放送チャンネルのパラボラアンテナは直径 160 cm で、高さは 20 cm あります。雨で壊れてしまったアンテナの焦点を修理する場合、新しい焦点はパラボラアンテナの円盤の中心からどれぐらい離れた位置に取りつける必要がありますか。



放物線形状をもつ立体は、ある放物線を軸を中心に回転させてできる幾何学的な形をもった立体です。

解法

条件をもとに座標平面に型をとると、放物線 $y = \frac{1}{4p}x^2$ を活用すればよいことが分かります。



そして 160 cm の幅なので、放物線の長さは、x 座標の –80 から 80 までであると考えます。

そして高さは 20 cm なので、原点から y 軸上の点 20 までとみなします。

放物線の式は、$y = \frac{1}{4p}x^2$ となり、点 (–80, 20) と 点 (80, 20) を通ります。

方程式に点 (80, 20) を代入し、p を求める式を作ります。

$$20 = \frac{1}{4p}80^2 \quad \text{等式を解きます。}$$

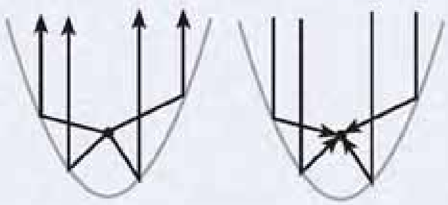
$$p = \frac{80^2}{80} = 80$$

よって、焦点の座標は F(0, 80) です。

よって、パラボラアンテナの新しい焦点は頂点から 80 cm の位置に設置する必要があります。

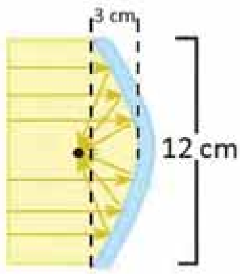
まとめ

放物線では、焦点に重要な反射特性があり、焦点から伸びる線はいずれも、 同じ方向に向かって反射します。そしてまた軸に対して平行に入ってくる線は、焦点に向かって反射します。そのため、放物線は非常に役立つものとして、パラボラアンテナなどの日用品にも応用されています。



問題

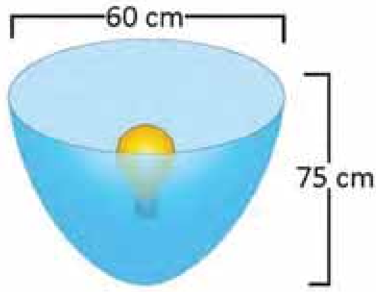
1. インターネット信号を発信するパラボラアンテナが故障して、その焦点から信号を正しく発することができなくなっています。交換するには、焦点が円盤の中心からどれだけ離れた位置にあったかを調べなくてはなりません。アンテナの円周の直径が 1 m で、高さが 0.5 m である場合に、その焦点のくるべき位置を求めなさい。
2. 反射望遠鏡の鏡面は放物面になっており、直径が 12 cm で奥行きが 3 cm です。入射した光が集まるポイントの鏡面の中心からの距離を求めなさい。



1.12 復習問題

次の放物線に関する応用問題を解きなさい。それぞれの条件を座標平面にグラフで表しなさい。

1. マリアの通う学校では、夜間照明に問題があり、その状況を改善するため、マリアは監視用の可動式放物線ライトを建設する計画をたてています。そのために、直径 60 cm、高さ 75 cm の放物線形状の受光器を利用する予定です。ある一定方向にのみ光を反射させるために、マリアは円盤の中心からどれだけ離した位置に焦点を配置するべきですか。



2. プロジェクターの反射鏡は放物面になっており、その焦点から光を発光します。反射鏡の直径が 12 cm で奥行きが 8 cm である場合、頂点から焦点までの距離はどれだけになりますか。

3. アントニオのコミュニティーでは、緊急事態に対応するため通報システムの設置を検討しています。アントニオは放物線スピーカーを設置すべきですが、直径 24 cm で奥行き 9 cm のスピーカーを用いる場合、同じ方向に向けて音が発せられるようにするには、発音装置をどの位置に取りつけるべきですか。

4. ホセはモンテクリスト国立公園へ家族旅行にでかけますが、煙を出さない様に、調理に薪を使わ無くて済むよう、太陽光を一点（焦点）に集めるための鉄製の放物面を持つ反射鏡をもって行きます。その反射鏡の直径が 1 m、高さが 0.25 m である場合、ホセはその反射鏡の頂点からどれぐらい離れた位置に焼き網を置くべきかを求めなさい。

5. 性の平等に関するイベントを行う会場で使う集音プレートは、頂点から12cmのところに焦点がくる放物線状に作られています。もしこのイベントの最中にプレートに破損が生じた場合、交換できる集音プレートは高さはいろいろありますが、直径は 8 cm のものしかありません。このパラボラ型の集音プレートが正しく機能するためには、どの高さの集音プレートを使うべきですか。

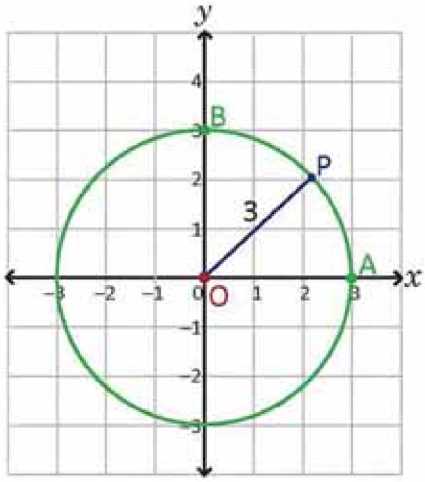
2.1 円

導入問題

原点 O(0、0) からの距離が 3 になる軌跡の方程式を作りなさい。

解法

まず条件を満たす点 A(3, 0) と点 B(0, 3) に印をつけます。



条件を満たす点 P(x, y) と 2 つの点の間の距離を利用します。

$$d(\mathrm{P, O}) = 3$$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = 3$$ の式を 2 乗し、

$$x^2 + y^2 = 9.$$

よって、このグラフの方程式は、

$x^2 + y^2 = 3^2$ です。

定義

中心 と呼ばれる一点までの距離 r が定数である軌跡をもつグラフを**円**といいます。

中心が座標平面の原点にある半径 r の円の方程式は、$x^2 + y^2 = r^2$ です。

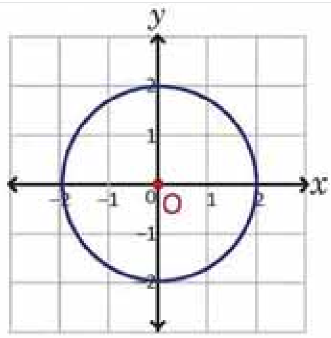
例 1

中心が原点にある半径 4 の円の方程式を求めなさい。

方程式は、$x^2 + y^2 = 4^2$ よって、$x^2 + y^2 = 16$ と表すこともできます。

例 2

座標平面に $x^2 + y^2 = 4$ のグラフ（または軌跡）を描きなさい。



$x^2 + y^2 = 4$ の方程式は $x^2 + y^2 = 2^2$ で表すことができるので、中心が原点の半径 2 の円になります。

問題

1. 各問にある半径を持ち原点に中心がある円の方程式を作りなさい。

a) $r = 1$　　b) $r = 6$　　c) $r = \frac{1}{2}$　　d) $r = \frac{1}{3}$　　e) $r = \sqrt{5}$

2. 以下の方程式を座標平面にグラフで表しなさい。

a) $x^2 + y^2 = 25$　　b) $x^2 + y^2 = 100$　　c) $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$　　d) $x^2 + y^2 = 3$

2.2. 円の平行移動*

導入問題

点 C(2、3) を通る半径 1 の円の式を作りなさい。

解法 1

条件を満たす点 P(*x*, *y*) と点 P から点 C(2、3) までの距離を用いて、

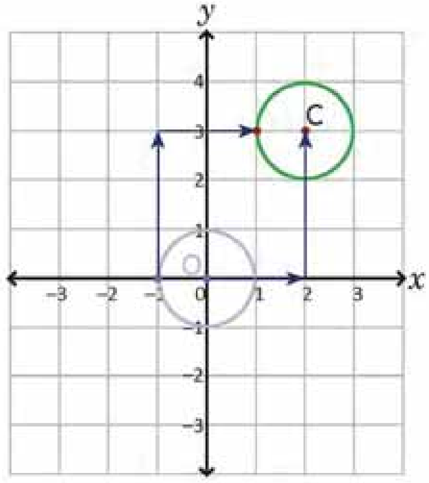
$$d(\mathrm{P}, \mathrm{C}) = 1$$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = 1 \quad 2\text{ 乗し、}$$

$$(x-2)^2+(y-3)^2 = 1.$$

解法 2

原点を中心とする半径 1 の円の方程式は、$x^2 + y^2 = 1$



したがって、中心が C(2, 3)で、半径 1 の円 は、原点を中心とする円を（図のように）右に2、上に 3 移動させたものです。

右に 2 移動させた円の方程式 は、$(x-2)^2 + y^2 = 1$ となります。

次に、上に 3 移動させた円の式は、$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ です。

よって、点 C(2, 3) を中心とする半径 1 の円の式は、$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ です。

まとめ

点 C(*h*, *k*) を中心とする半径 *r* の円を式で表すと、

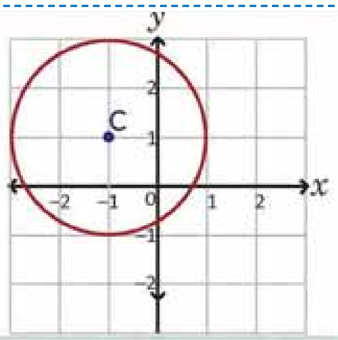
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

例 1

点 C(2、−1) を中心とする半径 2 の円の方程式を求めなさい。
方程式は、$(x-2)^2 + [y-(-1)]^2 = 2^2$ となり、$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$ の式で表すこともできます。

例 2

座標平面に$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$のグラフ(または軌跡)を作成しなさい。



方程式 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$ を、$[x-(-1)]^2 + (y-1)^2 = 2^2$ に直し、中心が C(−1、1) の半径 2 の円であることが分かります。

問題

1. 各問の点Cが中心となる半径 *r*をもつ 円の方程式を求めなさい。

 a) C(4, 1), $r = 3$ b) C(−2, 5), $r = 2$ c) C(3, −4), $r = \frac{2}{3}$ d) C(−2, −2), $r = \sqrt{6}$

2. 以下の方程式のグラフを座標平面に描きなさい。

 a) $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$ b) $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$ c) $(x+3)^2 + (y-4)^2 = \frac{25}{4}$ d) $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 5$

2.3 円の方程式（一般形）

導入問題

座標平面に $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ のグラフを表しなさい。

解法

平方完成して $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ の式で表します。

$x^2+y^2+4x-2y+1=0$ 移項して同類項をまとめ、

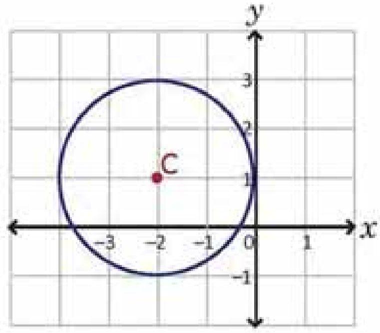
$(x^2+4x)+(y^2-2y)+1=0$ 平方完成して、

$(x^2+4x+4)-4+(y^2-2y+1)-1+1=0$ 整理し、

$(x+2)^2-4+(y-1)^2-1+1=0$ 移項し、

$(x+2)^2+(y-1)^2=4$ 式の形を直して、

$(x-(-2))^2+(y-1)^2=2^2.$



よって $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ の方程式のグラフは 中心が C(−2, 1) の半径 2 の円です。

まとめ

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ の方程式の 2 乗を展開し、右辺を 0 の等式にすることで円の方程式を表すことができます。

通常、$x^2+y^2+cx+dy+e=0$ の方程式の中心と半径を求めるには、x と y をそれぞれ平方完成して、$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ の形の式に直します。$x^2+y^2+cx+dy+e=0$ 形で表す式 を**円の方程式（一般形）**といいます。

例

座標平面に $4x^2+4y^2-16x+8y+19=0$ のグラフを表しなさい。

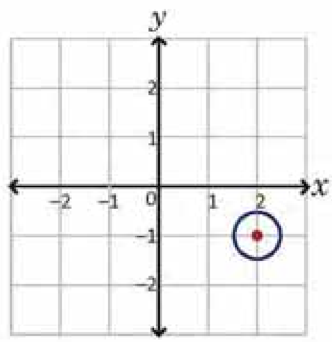
$4x^2+4y^2-16x+8y+19=0$ 両辺を 4 でわって、

$x^2-4x+y^2+2y+\frac{19}{4}=0$ 平方完成して、

$(x-2)^2-4+(y+1)^2-1+\frac{19}{4}=0$ 約分して移項して、

$(x-2)^2+(y+1)^2=\frac{1}{4}$ 式の形を直して、

$(x-2)^2+(y-(-1))^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2.$



これは点 C(2、−1) を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円です。

問題

次の方程式で円の中心と半径を求めなさい。座標平面に各方程式のグラフを作成しなさい。

a) $x^2+y^2-4x-4y-8=0$　b) $x^2+y^2+2x-2y-2=0$　c) $x^2+y^2-6x+8y+16=0$

d) $x^2+y^2+6x+4y+4=0$　e) $x^2+y^2-10y+9=0$　f) $x^2+y^2+6x+8=0$

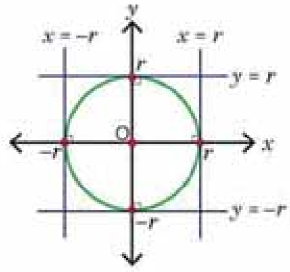
g) $4x^2+4y^2-32x-16y+71=0$　h) $9x^2+9y^2+54x+18y+74=0$

2.4 円の接線*

導入問題

点 P$(x_1,\ y_1)$ において円 $x^2+y^2=r^2$ と接する接線の方程式が $x_1x+y_1y=r^2$ であることを証明しなさい。

解法

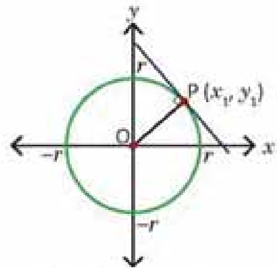


点 P(x_1, y_1) は $x_1^2+y_1^2=r^2$ の軌跡です。

$x_1=0$ なら、$y_1=r$ または $y_1=-r$ 接線は $y=r$ または $y=-r$ であり、$y_1y=r^2$ が成り立ちます。

よって、接線の方程式は $x_1x+y_1y=r^2$ となります。

$y_1=0$ の場合も同様の方法で解きます。



$x_1\neq 0$ かつ $y_1\neq 0$ である場合、半径 $\overline{OP}$ は点 P において接線に垂直に交わり、接線 $\overline{OP}$ の傾きは $\frac{y_1}{x_1}$ となるので、接線の傾きは $m=-\frac{x_1}{y_1}$ です。

傾きと点の方程式を m と P にあてはめて、

$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$ に y_1 をかけて、約分すると $x_1x+y_1y=x_1^2+y_1^2=r^2$ となります。

よって、点 P(x_1, y_1) において円 $x^2+y^2=r^2$ と接する接線を式で表すと、

$$x_1x+y_1y=r^2$$

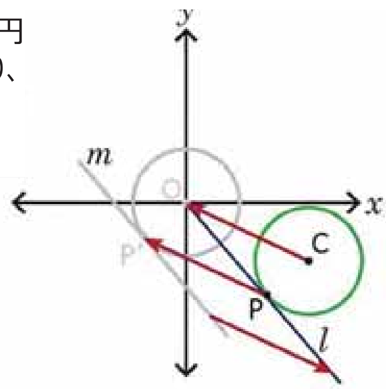
まとめ

点 (x_1, y_1) において円 $x^2+y^2=r^2$ と接する接線の方程式は $x_1x+y_1y=r^2$ です。例えば、点 P$(-1, 1)$ において円 $x^2+y^2=2$ と接する接線の方程式は以下の方法で作ることができます。

$$-1x+1y=2 \quad \text{よって} \quad x-y+2=0$$

例

点 P$(2, -4)$ において円 $(x-4)^2+(y+3)^2=5$ と接する接線の方程式を求めなさい。



円 $(x-4)^2+(y+3)^2=5$ は円 $x^2+y^2=5$ が右に 4、下に 3 移動したものなので、円 $x^2+y^2=5$ の接線を求め、点 P を左に 4、上に 3 移動させればよいです。つまり、P'$(2-4、-4+3)$ = P'$(-2、-1)$ となります。

ここで、「導入問題」の答えをあてはめて、接線 m は

$$-2x+(-1)y=5 \text{ なので、} 2x+y+5=0$$

そして直線を右に 4、下に 3 移動させ、

$$2(x-4)+(y+3)+5=0 \text{ なので } 2x+y=0$$

よって、点 P$(2, -4)$ において円 $(x-4)^2+(y+3)^2=5$ と接する接線は、$2x+y=0$

問題

各問の点Pにおいて円に接する接線の方程式を求めなさい。

a) $x^2+y^2=25$, P$(-3, 4)$　　b) $x^2+y^2=5$, P$(1, 2)$　　c) $x^2+y^2=13$, P$(2, -3)$

d) $x^2+y^2=10$, P$(3, -1)$　　e) $x^2+y^2=1$, P$(-1, 0)$　　f) $x^2+y^2=9$, P$(0, -3)$

g) $x^2+(y-4)^2=2$, P$(-1, 3)$　　h) $(x+3)^2+(y+1)^2=4$, P$(-1, -1)$　　i) $(x-2)^2+(y+3)^2=17$, P$(3, 1)$

2.5 円の割線

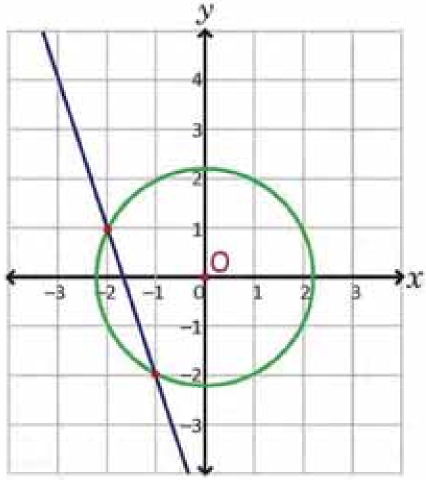
導入問題

円 $x^2 + y^2 = 5$ と直線 $3x + y + 5 = 0$ の交点を求めなさい。

解法

交点は直線上と円周上にある点であることから、円と直線の交点を見つけることは、すなわち連立方程式を解くことと同じです。

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & \text{----------- (1)} \\ 3x + y + 5 = 0 & \text{----------- (2)} \end{cases}$$



代入する方法を使って方程式 (2) の y を求めます。

$$y = -3x - 5$$

方程式 (1) に代入し、

$$x^2 + (-3x - 5)^2 = 5$$

$$x^2 + 9x^2 + 30x + 25 - 5 = 0$$

$$10x^2 + 30x + 20 = 0$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$(x + 1)(x + 2) = 0$$

$$x = -1 \text{ または } x = -2$$

したがって直線 $y + 3x + 5 = 0$ と円 $x^2 + y^2 = 5$ が接する座標は $x = -1$ および $x = -2$ となり、y の座標は (2) の方程式にそれぞれ x の値を代入することで求めることができます。

$$x = -1 \text{ であれば、} y = -3(-1) - 5 = 3 - 5 = -2$$

$$x = -2 \text{ であれば、} y = -3(-2) - 5 = 6 - 5 = 1$$

したがって、交点は $(-1, -2)$ と $(-2, 1)$

まとめ

直線と円の交点を求めるには、1 次式と 2 次式の連立方程式を用いて代入法を使って解きます。

連立方程式に 2 つの実数の解があれば、その直線は円の割線であることを意味します。
連立方程式の解が 1 つの実数であれば、その直線は円の接線です。
連立方程式の解が実数でない場合は、その直線が円と接しないことを意味します。

交点の座標 （または点） の y の値は他の方程式に連立方程式で解いた値を代入することで求めることができます。

問題

次の各問の方程式のグラフにある交点の座標を求めなさい。

a) $x^2 + y^2 = 1;\ x + y = 0$　　b) $x^2 + y^2 = 25;\ x + y - 1 = 0$　　c) $x^2 + y^2 = 5;\ -x + y + 1 = 0$

d) $x^2 + y^2 = 13;\ x + 5y - 13 = 0$　　e) $x^2 + y^2 = 10;\ x - 2y - 5 = 0$　　f) $x^2 + y^2 = 17;\ 3x + 5y - 17 = 0$

2.6 復習問題

1. 各問題で指定された半径を持ち原点に中心がある円の方程式を求めなさい

a) $r = 2$

b) $r = \sqrt{7}$

2. 以下の方程式のグラフを座標平面に描きなさい。

a) $x^2 + y^2 = 16$

b) $x^2 + y^2 = \frac{25}{4}$

3. 各問の点 C が中心となる半径 r をもつ 円の方程式を作りなさい。

a) C $(3, -2)$, $r = 10$

b) C $(4, -3)$, $r = \frac{2}{3}$

4. 以下の方程式のグラフを座標平面に描きなさい。

a) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$

b) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = \frac{9}{4}$

5. 次の方程式で円の中心と半径を求めなさい。それぞれの方程式に対応するグラフを座標平面に描きなさい。

a) $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 18 = 0$

b) $4x^2 + 4y^2 + 24x + 16y + 27 = 0$

6. 各問の点Pにおいて円に接する接線の方程式を求めなさい。

a) $x^2 + y^2 = 10$, P$(-3, 1)$

b) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$, P$(0, -4)$

7. 次の各問の方程式のグラフにある交点の座標を求めなさい。

a) $x^2 + y^2 = 8$; $x - y = 0$

b) $x^2 + y^2 = 20$; $3x - y - 10 = 0$

8. 円 $x^2 + y^2 = 10$ と接する傾き-3の接線（または複数の接線）の方程式を求めなさい。

9. 点 P(2、0) において円 $x^2 + y^2 = 2$ と接する接線（または複数の接線）の方程式を求めなさい。

条件をよく理解するためにグラフを作成しても構いません。

10. 点 P(x_1, y_1) において円 $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ と接する接線が $(x_1 - h)(x - h) + (y_1 - k)(y - k) = r^2$ であることを証明しなさい。

ユニット3

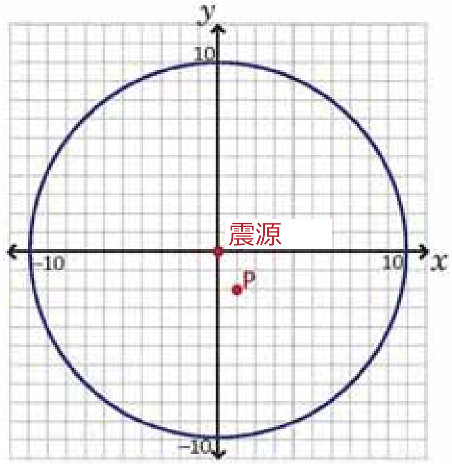
2.7 円の応用*

導入問題

エルサルバドルで起きた地震の震源はサンサルバドル市の市制200周年記念公園一帯でした。地震でその周囲10 km が被災しました。もしアンティグオクスカトラン市が震源の東に 1 km、南に 2 km のところに位置していたら、この地震による被害を受けたでしょうか。

解法

条件をもとに座標平面に印をつけて、座標平面上で震源の位置を求めます。



地震は円から10 kmのところで起きたので、中心が震源で、半径が 10 の円のグラフを作ることができます。

$$x^2 + y^2 = 100$$

アンティグオクスカトラン市の位置を点 P(1, –2) とします。

その点が円の内側であれば被災したことになり、円の外側にあれば被災していないことになります。

方程式に、x と y と点 P の値を代入すると、

$$1^2 + (-2)^2 = 1 + 4 = 5$$

解は 100 以下(5 < 100) になるので、もし点が 100 と同じであれば円の中にあり、もし 100 より大きければ円の外にあります。

したがって、アンティグオクスカトラン市は市制 200 周年記念公園を震源とする地震で被災したことになります。

まとめ

日常の身近な問題には円の方程式を用いて解くことができるものもありますが、問題を解くにあたっては、座標平面にその条件を満たす座標を描きこみ、それをグラフ化し、そこから情報を得て、解答を得るというプロセスが必要です。

問題

1. エルサルバドルで起きた地震の震源はサンサルバドル市の市制 200 周年記念公園一帯でした。地震でその周囲 10 km が被災しました。
   もしボケロン火山が震源の西に 7 km、北に 8 km のところに位置していたら、この地震による被害をうけましたか。

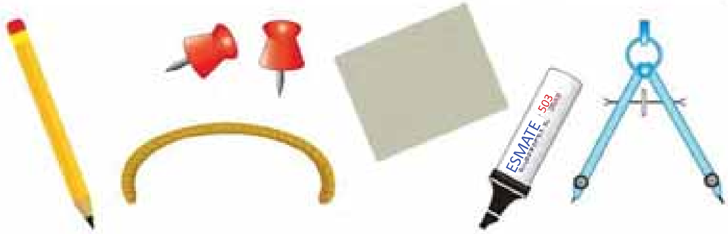
2. 燻煙機は円を描いて飛行し、農民の家を中心とした円と仮定して、13 m の範囲まで噴霧可能です。土地は長さ 30 m、幅 20 mで、農民の家はちょうどその土地の真ん中にあります。農民の家から西に 11 m、南に 5 m のところにあるフリホーレスのプランテーションは燻煙器によって噴霧されるでしょうか。

3. サンサルバドルの守護聖人のお祭りには、「ボラドーラ」と呼ばれる機械遊具が設置されます。この遊具の車輪は電源が切られている状態で半径 2 m をカバーしており、そこから吊り下げられているイスの鎖が 1 m の長さである場合、コントロールブースをこの「ボラドーラ」の中心から東に 1 m、南に 3 m の場所に設置すれば、遊具の電源を入れてもそのコントロールブースには遊具が当たらずに済みますか。

3.1 導入方法

用意する物

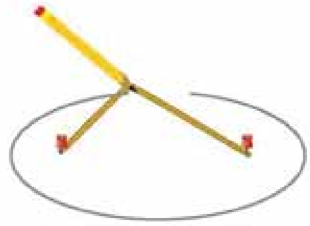
- 画鋲 2 個
- ひも
- 鉛筆
- トレーシングペーパー
- コンパス
- マジック



導入 1

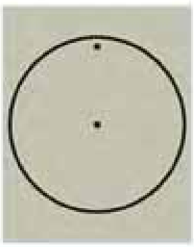
1. 十分なスペースのある場所に紐の先を画鋲でとめます。

2. 鉛筆の先で紐をピンとはるまで引っ張り、そのまま紐を貼った状態で鉛筆が元の位置にくるまで動かして線を引きます。



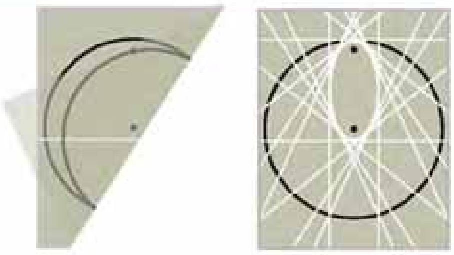
課題 2

1. トレーシングペーパーに、できるだけ大きな円を描きなさい。そしてその円の中に 1 つの点を書きなさい。



2. 書いた点が円周上の点とぴったり重なるように紙を折りなさい。

3. 円周の手前の部分から最初に始めた部分にくるまで同じことを繰り返しなさい。できた形を分析しなさい。



定義

これらの課題にしたがってできる形を**楕円**といいます。それぞれの点において、点から 2 つの定点までの距離が一定に保たれていることを確認します。

問

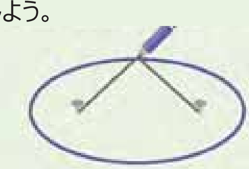
1. 描かれた線上の点からそれぞれの画鋲までの距離を足すとどれだけになりますか。
2. 点から 2 つの画鋲までの距離の合計と紐の長さとの間にはどのような関係がありますか。
3. 課題 2 で点が円周上にある場合はどうなりますか。
4. 課題 2 で点が円の中心にある場合はどうなりますか。

3.2 楕円*

導入問題

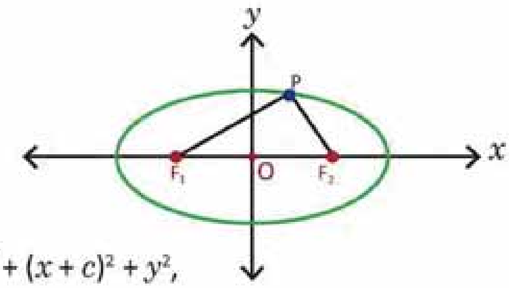
定点 $F_1(-c, 0)$ までの距離ともう 1 つの定点 $F_2(c, 0)$ までの距離との合計が常に $2a$ で、$0 < c < a$ の条件を満たす軌跡になる式を求めなさい。

この軌跡をもつ図形は**楕円**であることを復習しよう。



解法

条件を満たす点 $P(x, y)$ と 2 つの点の間の距離を利用します。



$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

2 乗し、 $(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2,$

整理し、 $a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx,$

2 乗し、 $a^2[(x+c)^2 + y^2] = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2,$

整理し、 $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$

$0 < c < a$ から、$a^2 - c^2 > 0$ が成り立ち、それにより b の値は、$b^2 = a^2 - c^2$ で、$b > 0$ であることが分かります。最後の等式にあてはめて、

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

等式の両辺を a^2b^2 でわって、$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の式で表すことができます。

定義

楕円の軌跡を特定する方程式は $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ と表します。

定点F_1と定点 F_2 は楕円の**焦点**といい座標は、

$$F_1(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0) \text{ y } F_2(\sqrt{a^2 - b^2}, 0).$$

楕円の点からそれぞれの焦点までの距離の合計は $2a$ です。

楕円の方程式が $a = b$ の場合は円になります。よって、円は楕円の特定の形であるといえます。

例

焦点が $F_1(-3, 0)$ と $F_2(3, 0)$ で $a = 5$ の楕円の方程式を求めなさい。

焦点の x 座標は $c = 3$ と $a = 5$ と仮説をたてて b を求める式を作ると、

$$a^2 - c^2 = b^2 \text{となり、} b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 = 4^2$$

よって、楕円の方程式は、$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ つまり、$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

問題

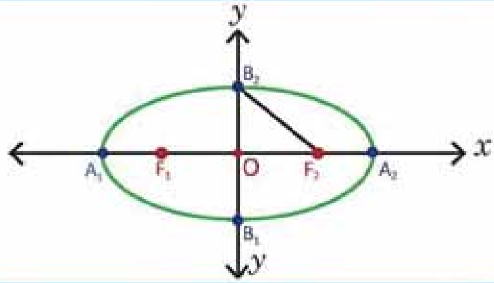
1. 各問の楕円の式を求めなさい。
   a) $F_1(-4, 0), F_2(4, 0), a = 5$ b) $F_1(-2, 0), F_2(2, 0), a = 3$ c) $F_1(-1, 0), F_2(1, 0), a = 2$

2. それぞれの楕円の焦点の座標を求めなさい。
   a) $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ c) $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1$

3.3 楕円の要素と性質

導入問題

楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ のグラフで 点 A_1、A_2、B_1 、B_2 の座標を求めなさい。



解法

A_1 と A_2 は x 軸上にあることから、楕円の方程式に $y=0$ をあてはめて確認することができます。

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{0^2}{b^2}=1$ なので、 $\frac{x^2}{a^2}=1$ そこから、

$x^2=a^2$

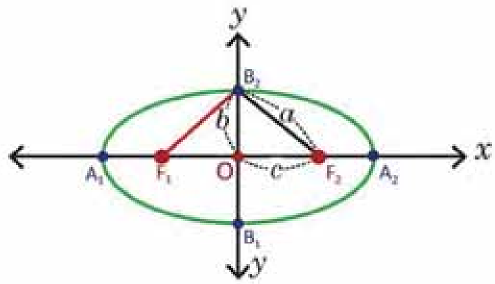
$x=\pm a$

同様に、B_1 と B_2 は y 軸上にあることから、楕円の方程式に $x=0$ をあてはめて、

$y=\pm b$

したがって、これらの点の座標は、

$A_1(-a, 0)$、$A_2(a, 0)$、$B_1(0, -b)$、$B_2(0, b)$です。

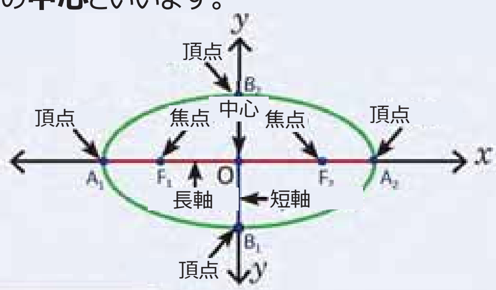


まとめ

楕円の両極の x 軸上とy 軸上にある点を**頂点**といい、それぞれの座標は、$A_1(-a, 0)$、$A_2(a, 0)$、$B_1(0, -b)$、$B_2(0, b)$ と表します。水平（もしくは垂直）方向の頂点の中間点を楕円の**中心**といいます。

楕円の焦点を通る切片とその両端が頂点になっている線分を楕円の**長軸**といい、その長さは $2a$ と表します。

両端が頂点になっている切片で、**長軸**と垂直に交差するものを楕円の短軸といい、その長さは2bと表します。



楕円グラフを作成するには、頂点 A_1 、A_2と、B_1 、B_2を書き込み、長軸と短軸の線を引きます。

例

楕円 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ の頂点、焦点の座標と長軸と短軸の長さを求めなさい。そしてそれを座標平面にグラフで表しなさい。

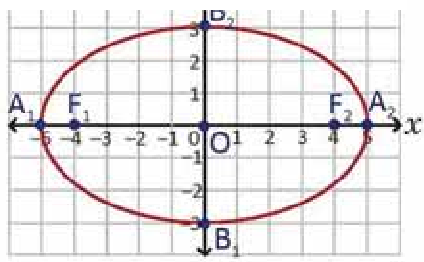
a、b、c の値を代入し、$a=5$, $b=3$ と $c=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$

頂点 $\begin{cases} A_1(-5, 0), A_2(5, 0) \\ B_1(0, -3), B_2(0, 3) \end{cases}$

長軸の長さ $=2(5)=10$

短軸の長さ $=2(3)=6$

焦点 $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$



問題

それぞれの楕円の頂点と焦点の座標と長軸と短軸の長さを求めなさい。そしてそれを座標平面にグラフで表しなさい。

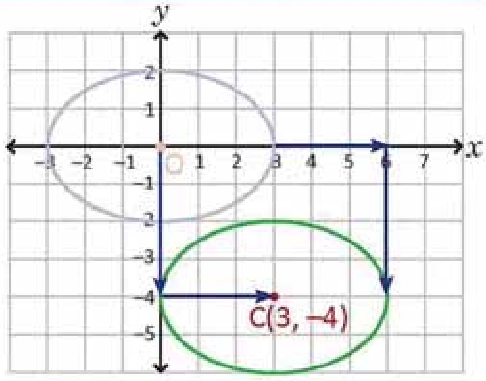
a) $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ c) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ d) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

3.4 楕円の平行移動

導入問題

座標平面に $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{4}=1$ のグラフを描きなさい。

解法



楕円 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ を右に 3、下に 4 移動させることから式は、

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{4}=1.$$

よって、グラフは中心が (3, −4) にある楕円 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ になります。

まとめ

水平方向に h、垂直方向に k 移動させた楕円の方程式を式に表すと、

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

グラフを作るには、中心の位置を求め、そこが座標平面の原点であるかのように作成するか、原点でグラフを作り、それを移動させます。

グラフを水平方向に h、垂直方向に k 移動させるには、変数 x に $x-h$ を代入し、変数 y に $y-k$ をあてはめる点を復習しよう。

例 1

楕円 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ を水平方向に −3、垂直方向に 2 移動させた楕円の式を求めなさい。

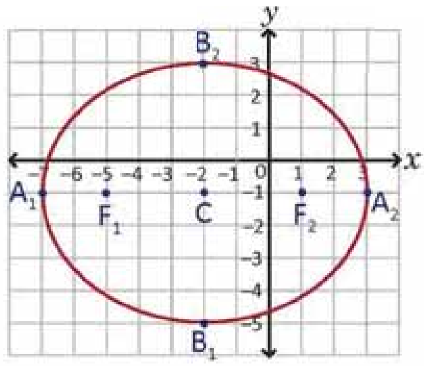
元の方程式の x を $[x-(-3)]$、y を $(y-2)$ に置き換え、$\frac{(x+3)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$

例 2

楕円の頂点、焦点の座標と長軸と短軸の長さを求めなさい。$\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$
そして全ての要素を使って座標平面にグラフで表しなさい。

この楕円は楕円 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ を水平方向に −2、垂直方向に −1 移動させたものとなります。
頂点と焦点が同じように移動する点がポイントです。

方程式	$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$	$\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$
頂点	$A_1(-5,0)$, $A_2(5,0)$ $B_1(0,-4)$, $B_2(0,4)$	$A_1(-7,-1)$, $A_2(3,-1)$ $B_1(-2,-5)$, $B_2(-2,3)$
焦点	$F_1(-3,0)$, $F_2(3,0)$	$F_1(-5,-1)$, $F_2(1,-1)$
長軸と短軸の長さ	$2a=10$, $2b=8$	$2a=10$, $2b=8$



問題

1. それぞれの問いにある水平方向に h、垂直方向に k 移動させた楕円を表す方程式を作りなさい。

a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, $h=-1$, $k=2$　　b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, $h=3$, $k=-1$　　c) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$, $h=-2$, $k=-2$

2. 頂点と焦点の座標と長軸と短軸の長さを求めなさい。そしてそれぞれの楕円グラフを座標平面に描きなさい。

a) $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$　　b) $\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$　　c) $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$

3.5 楕円の方程式（一般形）

導入問題

座標平面に $9x^2 + 25y^2 - 18x - 100y - 116 = 0$ のグラフを作成しなさい。

$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ の形の式で表しなさい。

解法

x と y を平方完成させます。

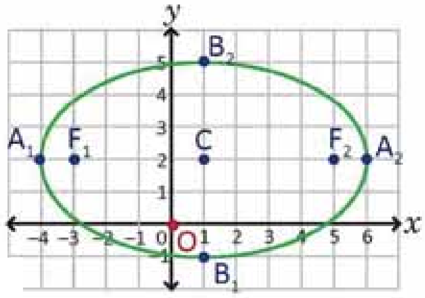
$$9x^2 + 25y^2 - 18x - 100y - 116 = 0$$

$$9(x^2 - 2x) + 25(y^2 - 4y) - 116 = 0$$ 整理して同類項をまとめ、

$$9(x-1)^2 + 25(y-2)^2 - 9 - 100 - 116 = 0$$ 平方完成し、

$$\frac{9(x-1)^2}{225} + \frac{25(y-2)^2}{225} = 1$$ 加算して 1 の等式を作り、

$$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$ 約分します。



よって、中心が (1, 2)、頂点が $A_1(-4, 2)$ と $A_2(6, 2)$、$B_1(1, -1)$ と $B_2(1, 5)$ の楕円グラフになります。

まとめ

楕円 $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ は平方完成して、右辺を 0 の等式にして表すことができます。

通常、$dx^2 + ey^2 + fx + gy + h = 0$ の式で表される楕円の中心と頂点 （長軸と短軸）は、$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ のように x と y の平方完成を行うことで求めることができます。$dx^2 + ey^2 + fx + gy + h = 0$ の形の表す式を**楕円の方程式（一般形）**といいます。

例

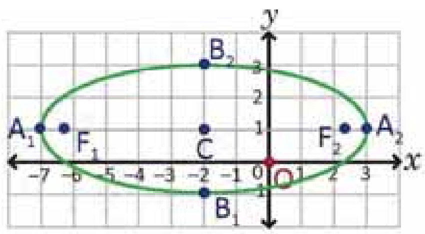
楕円 $4x^2 + 25y^2 + 16x - 50y - 59 = 0$ の頂点、焦点の座標と長軸と短軸の長さを求め、全ての要素を使って座標平面にグラフを描きなさい。

$$4x^2 + 25y^2 + 16x - 50y - 59 = 0$$

$$4(x+2)^2 + 25(y-1)^2 - 16 - 25 - 59 = 0$$

$$\frac{4(x+2)^2}{100} + \frac{25(y-1)^2}{100} = 1$$

$$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$



したがって楕円の中心は、点 C(–2, 1)です。

この楕円は楕円 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ を水平方向に –2 、垂直方向に–1移動させたものと同じです。

方程式	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$	$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$
頂点	$A_1(-5, 0)$, $A_2(5, 0)$, $B_1(0, -2)$, $B_2(0, 2)$	$A_1(-7, 1)$, $A_2(3, 1)$, $B_1(-2, -1)$, $B_2(-2, 3)$
焦点	$F_1(-\sqrt{21}, 0)$, $F_2(\sqrt{21}, 0)$	$F_1(-2-\sqrt{21}, 1)$, $F_2(-2+\sqrt{21}, 1)$
軸の長さ	$2a = 10, 2b = 4$	$2a = 10, 2b = 4$

問題

楕円の頂点、焦点の座標と長軸と短軸の長さを求めなさい。
そしてそれを座標平面にグラフで表しなさい。

a) $4x^2 + 9y^2 + 8x + 18y - 23 = 0$
b) $3x^2 + 4y^2 - 12x + 16y + 16 = 0$
c) $8x^2 + 9y^2 - 16x - 18y - 55 = 0$
d) $7x^2 + 16y^2 + 14x - 64y - 41 = 0$
e) $4x^2 + 9y^2 - 36y = 0$
f) $x^2 + 4y^2 + 4x = 0$

3.6 復習問題

1. 各問の楕円の式を求めなさい。

a) $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$, $a = 3$　　b) $F_1(-\sqrt{7}, 0)$, $F_2(\sqrt{7}, 0)$, $A_1(-4, 0)$, $A_2(4, 0)$

2. それぞれの楕円の焦点の座標を求めなさい。

a) $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$　　b) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$　　c) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

3. それぞれの楕円の頂点と焦点の座標と長軸と短軸の長さを求めなさい。そしてそれを座標平面にグラフで表しなさい。

a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$　　b) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

4. それぞれの問いにある水平方向にh、垂直方向にk移動させた楕円を表す方程式を作りなさい。

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, $h = -2$, $k = -2$　　b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, $h = 3$, $k = -2$

5. 頂点、焦点の座標と長軸と短軸の長さを求めなさい。そして各問の楕円グラフを座標平面に描きなさい。

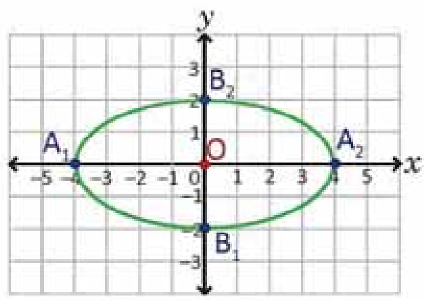
a) $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$　　b) $\frac{(x+3)^2}{8} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$

6. それぞれの楕円の頂点と焦点の座標と長軸と短軸の長さを求めなさい。そしてそれを座標平面にグラフで表しなさい。

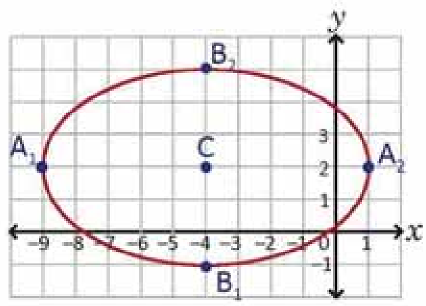
a) $4x^2 + 9y^2 - 16x + 36y + 16 = 0$　　b) $4x^2 + 9y^2 + 24x = 0$

7. 以下の楕円の方程式をそれぞれ求めなさい。

a)



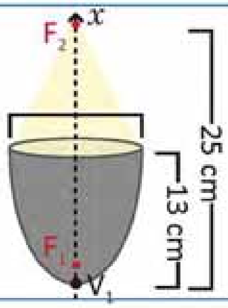
b)



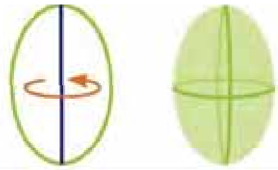
3.7 楕円の応用*

導入問題

高さ 13 cm の半楕円形のランプ（楕円形の半分）に、1 つの焦点から発散する光でランプの頂点から 25 cm 離れた位置にあるもう 1 つの焦点にスポットライトを浴びせるように設計します。ランプが正しく機能するために必要なランプの直径を求めなさい。



楕円形とは、楕円が長軸中心に回転することでできる立方体です。



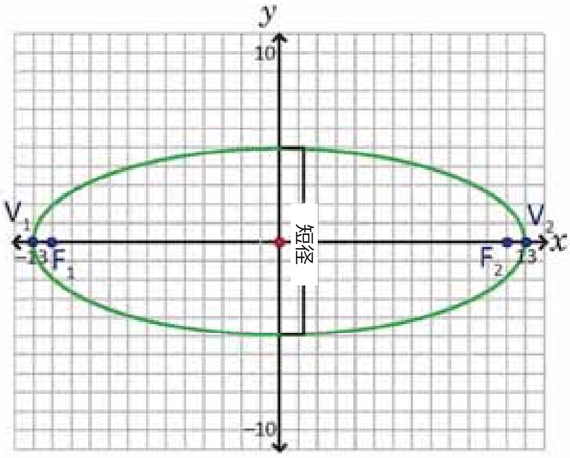
解法

中心が原点の楕円で、その頂点の1つの座標が (13, 0)、焦点の1つの座標が (12, 0) であることから、$a = 13$、$c = 12$ となり、

$$b^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25 = 5^2$$
$$a^2 = 13^2$$

そしてその楕円の方程式は、$\frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$

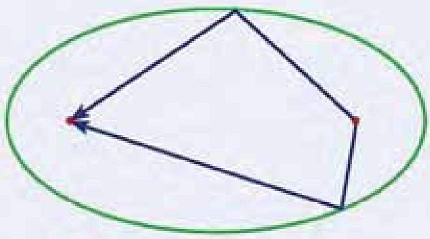
したがって、直径は楕円の短軸の長さ、すなわち $2b = 2(5) = 10$ です。
よって、ランプの直径は 10 cm になります。



まとめ

楕円の焦点には、重要な反射特性があります。楕円の一方の焦点から出る線はもう一方の焦点に正確に反射します。

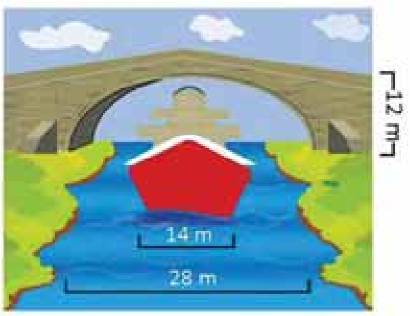
この放物線の反射特性に似た性質により、楕円または楕円形は科学分野、建築分野、音響分野そして芸術分野において活用されています。



問題

1. 一人の電気技師が劇場のために半楕円形のリフレクターを設計します。そのリフレクターは高さ 13 cm で直径 10 cm です。そのリフレクターの頂点からどれぐらいの距離に光が集まるのかを求めなさい。

2. 半楕円形の開口部を持ち長さ 28 m、水面からの高さが 12 m の橋が川の上にかかっています。その橋の下を幅 14 m の船が安全に通過するためには、船の高さの最大値を何 m とする必要があるかを求めなさい。



船は垂直軸に対して対称であり、橋の真ん中を通過するものとします。また、船はすべての点で同じ高さであると考えてください。

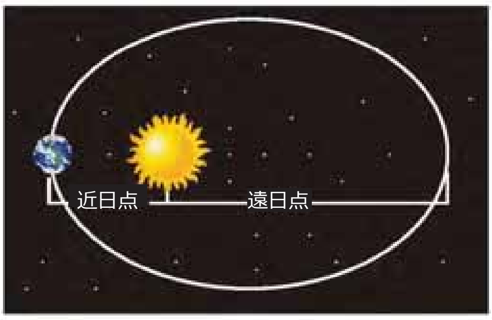
3.8 楕円の応用

以下の楕円を用いた問題を解きなさい。それぞれの条件を座標平面にグラフで表しなさい。


1. 半楕円形の形をした高架は、全長 12 m で、中心の最大高さは 3 m です。道路の中心から道路の両端に向かって 3 m の幅をもつトラックが、この高架下を通過するために必要なトラックの車高の最大値を求めなさい。

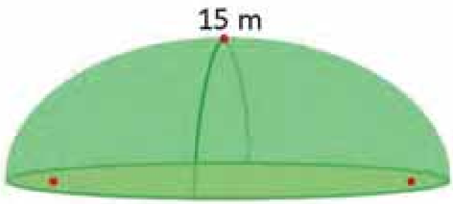

2. ある建築家とあるエンジニアが、幅 30 mの川にかかる半楕円形の橋の設計に取り組んでいます。橋は、その下を最大で幅 20 m、高さ 3 m の船が安全に通過できるようにする必要があります。この橋に必要な高さの上限を求めなさい。

3. 地球は楕円の地球周回軌道をぴったり 1 年かけて移動しますが、この地球周回軌道の焦点の1つは太陽です。地球が太陽に最も近い地点は近日点といい、約 1 億 4,700 万 km 離れた地点になります。一方、地球が太陽から最も遠くなる地点は遠日点といい、約 1 億 5,300 万 km 離れた地点になります。地球の周回軌道の方程式を書きなさい。



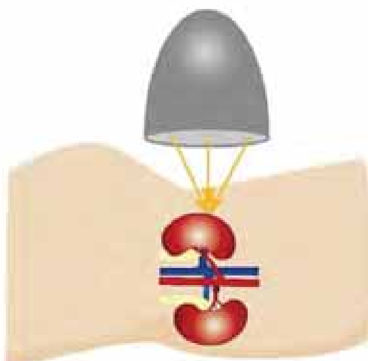
ドイツ人天文学者で数学者でもあるヨハネス・ケプラー氏は、研究の結果**惑星の運動に関する 3 つの法則**を発見しました。第 1 法則は次のように述べられています。「惑星は太陽の周りを楕円形に周回しており、その軌道は太陽を焦点の 1 つとする楕円軌道である」

4. 他の誰にも聞かれないように相手に秘密を発信できるように設計された建物があります。その建物は（楕円の焦点特性を利用して）半楕円形に設計されており、建物の一番高い部分の高さは 15 m、部屋の端から端までの距離は 34 m です。お互いがささやくような声で話していても、一方が他方の声を聞くことができるようにするために 2 人が立つべき位置を求めなさい。



もし 2 人が楕円の焦点になる位置にいれば、一方の焦点から出る音波は、もう一方の焦点に直接反射されます。

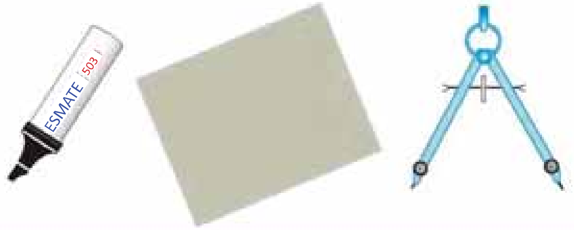
5. 腎臓結石の治療では、時々結石砕石術といわれる治療方法がとられています。この治療方法は楕円の焦点の性質を利用したもので、半楕円形のカバーのような装置が使用されます。楕円の焦点に衝撃波生成装置がついており、そこからでる衝撃波が、一方の焦点になる腎結石に作用を及ぼす仕組みの装置です。装置の高さが 13 cm、直径が 10 cm である場合、この装置を使って結石を粉砕するためには、結石がどれぐらい離れた位置にくるようにすればよいかを求めなさい。



4.1 導入方法

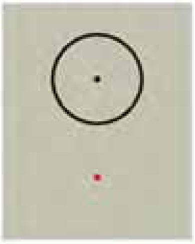
用意する物

- トレーシングペーパー
- コンパス
- マジック
- 定規



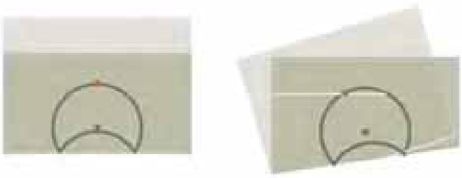
課題

1. トレーシングペーパーに大きすぎない円を描き、その円の中心と、そこから垂直方向に揃えた点を1つ円の外側の少し離れた位置に描きます。

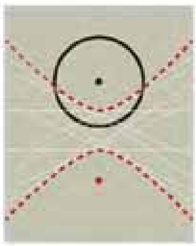


2. 描いた点が円の円周とぴったり重なるように紙を折りなさい。

3. 円周の手前の部分から最初に始めた部分にくるまで同じことを繰り返しなさい。できた形を分析しなさい。



4. できた図形は2つの集合になっており、円の中心は 1 つの集合の中にきて、円の外につけた点はもう 1 つの集合の中にきます。



定義

導入課題でできた2つの集合の形を**双曲線**といいます。そこにできた
双曲線のいずれの点も、ある 1 点から 2 つの定点までの距離の差が常に一定になっていることを確認しなさい。

質問

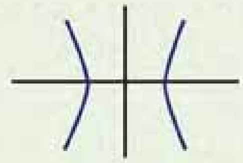
1. 円の外側に描く点を円からもっと遠ざけた場合はどうなりますか。
2. 円周の外側に描く点を円にもっと近づけた場合はどうなりますか。
3. 円周の外側に描く点が円の中心から垂直方向に揃っていない場合はどうなりますか。
4. 双曲線上の点から描かれた2つの定点までの距離の違いはどれだけですか。
5. 双曲線の点から描かれた2つの定点まで距離の差が常に一定となる理由を説明しなさい。

4.2 双曲線*

導入問題

2 つの定点 $F_1(-c, 0)$ と $F_2(c, 0)$ までの距離の差が常に $2a$ で、$0 < a < c$ の条件を満たす軌跡をもつ図形の式を求めなさい。

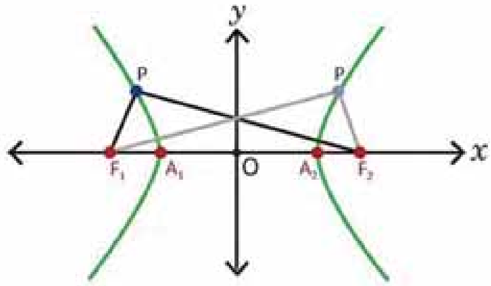
この軌跡をもつ図形は**双曲線**であることを復習しよう。



解法

点 P が左の集合にある場合、$d(P, F_2) - d(P, F_1) = 2a$ 点 P が右の集合にある場合、$d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$.

条件を満たす点 $P(x, y)$ と 2 つの点の間の距離を利用します。



$$d(P, F_2) - d(P, F_1) = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2+y^2} \quad \text{移項し、}$$

$$(x-c)^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2+y^2 \quad \text{2 乗し、}$$

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a^2 + cx \quad \text{整理し、}$$

$$a^2[(x+c)^2+y^2] = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \quad \text{を 2 乗し、}$$

$$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2) \quad \text{約分します。}$$

$0 < a < c$ であるので、$c^2 - a^2 > 0$ が成り立ち、その結果から、b を　$b > 0$ の時には $b^2 = c^2 - a^2$ と表すことができます。最後の等式にあてはめて、$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

この等式は、両辺を a^2b^2 でわって $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ と表すことができます。

定義

双曲線の軌跡を特定する方程式は $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ と表します

定点 F_1 と F_2 は双曲線の**焦点**といい、その座標は、

$$F_1(-\sqrt{a^2+b^2}, 0) \text{ y } F_2(\sqrt{a^2+b^2}, 0).$$

双曲線上の点からそれぞれの焦点までの距離の差は常に $2a$ です。

例

焦点 $F_1(-5, 0)$ と $F_2(5, 0)$ をもち、$a = 3$ である双曲線の方程式を作りなさい。

仮説条件から、焦点の x 座標が $c = 5$、$a = 3$ となることが分かるので、b を計算するには次の式を使います。

$$c^2 - a^2 = b^2\text{、なので、}\quad b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 = 4^2.$$

したがって、双曲線の方程式は $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$ 、つまり、$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ です。

問題

1. 各問の双曲線の式を作りなさい。

a) $F_1(-5, 0), F_2(5, 0), a = 4$　　b) $F_1(-3, 0), F_2(3, 0), a = 2$　　c) $F_1(-4, 0), F_2(4, 0), a = 3$

2. それぞれの双曲線の焦点の座標を求めなさい。

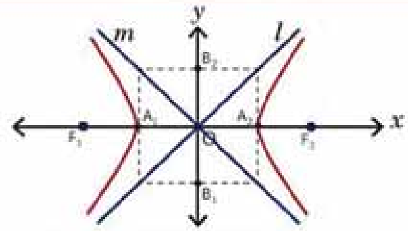
a) $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$　　b) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$　　c) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$

4.3 双曲線の要素と性質

導入問題

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ のグラフを使って、

a) 点 A_1 と A_2 の座標を求めなさい。
b) $B_1(0, -b)$、$B_2(0, b)$ である場合に、この図に示されている長方形の対角線の方程式を求めなさい。



解法

a) A_1 と A_2 が x 軸上にあり、双曲線に属していることから双曲線の方程式は $y = 0$ であることが分かります。

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{0^2}{b^2}=1 \qquad \text{そこから} \qquad \frac{x^2}{a^2}=1$$

$$x^2=a^2$$

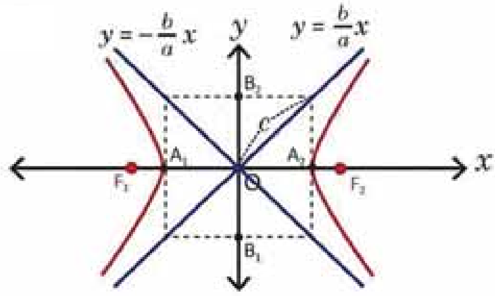
$$x=\pm a$$

よって、これらの点の座標は、$A_1(-a, 0)$、$A_2(a, 0)$

b) 直線 l が点 (a, b) と $(0, 0)$ を通ることから方程式を使って 2 点を表すと $y=\dfrac{b}{a}x$

直線 m が点 $(-a, b)$ と $(0, 0)$ を通ることから

方程式を使って 2 点を表すと、 $y=-\dfrac{b}{a}x$

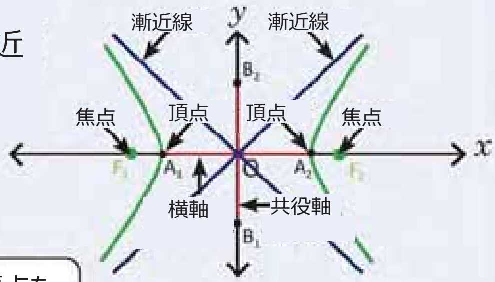


まとめ

双曲線の点 A_1 と A_2 は**頂点**といい、座標は $A_1(-a, 0)$、$A_2(a, 0)$ で表します。さらに、切片 A_1A_2 の中間点は双曲線の**中心**といいます。

直線 $y=\dfrac{b}{a}x$ と直線 $y=-\dfrac{b}{a}x$ **は** 双曲線の漸近線といい、双曲線に近接しても決して接しません。

双曲線の頂点と頂点を結ぶ切片を**横軸**、点 $(0, -b)$ と点 $(0, b)$ を結んだ直線を**共役軸といいます。**



双曲線を作成するには、まず漸近線と頂点を書きます。

例

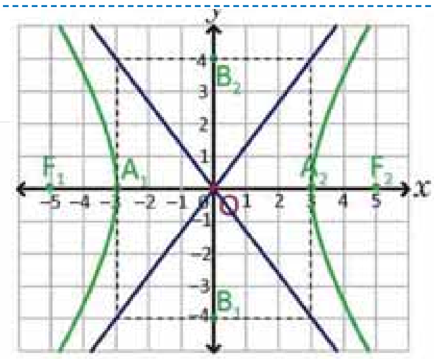
頂点と焦点の座標と 双曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ の漸近線の式を求めなさい。そしてそれを座標平面にグラフで表しなさい。

a、b、c の値は $a=3, b=4, c=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$ なので、

頂点は $A_1(-3, 0)$、$A_2(3, 0)$ 、焦点は、$F_1(-5, 0)$、$F_2(5, 0)$

漸近線は、 $y=\dfrac{4}{3}x,\ y=-\dfrac{4}{3}x$ となります。

この時にできる点A_1、A_2、B_1 と B_2 をもつ長方形は、**漸近長方形**といい、その長方形の対角線から双曲線の漸近線を引くことができます。



問題

それぞれの双曲線の頂点の座標と、漸近線の式と焦点を求めなさい。そしてそれを座標平面にグラフで表しなさい。

a) $\dfrac{x^2}{4^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=1$ b) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ c) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$ d) $x^2-y^2=1$

4.4 双曲線の平行移動

導入問題

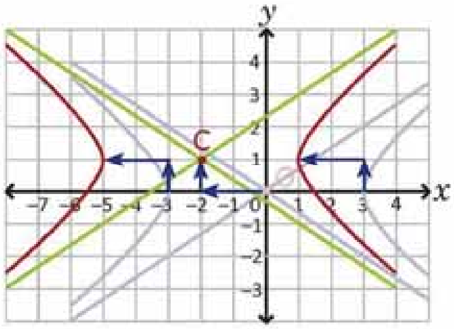
$\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$ のグラフを座標平面に作成しなさい。

解法

双曲線 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ を左に 2、上に 1 移動させることになるので、次の式になります。

$$\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

したがって、これは中心が (–2, 1) の双曲線 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ のグラフになります。



まとめ

水平方向に h、垂直方向に k 移動させた双曲線を式で表すと

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

グラフを作るには、中心の位置を求め、そこが座標平面の原点であるかのように作成するか、原点でグラフを作り、それを移動させます。

グラフを水平方向に h 、垂直方向にk 動かすためには、変数 x を $x-h$ に、変数 y を $y-k$ に置き換える点を復習しよう。

例 1

双曲線 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ を水平方向に –4、垂直方向に –3 移動させた式を求めなさい。

元の方程式をもとに、x を $[x-(-4)]$ に、y を $[y-(-3)]$ に置き換えて計算します。

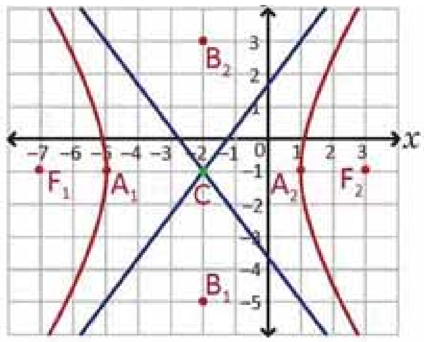
$$\frac{(x+4)^2}{16}-\frac{(y+3)^2}{9}=1$$

例 2

双曲線 $\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{16}=1$ の漸近線の頂点と焦点の座標と式を求めなさい。そして全ての要素を使って座標平面にグラフで表しなさい。

この双曲線は $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ を水平方向に –2、垂直方向に –1 移動させたものと等しいことから、中心は C(–2, –1) であると分かります。

方程式	$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$	$\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{16}=1$
頂点	$A_1(-3, 0), A_2(3, 0)$	$A_1(-5, -1), A_2(1, -1)$
焦点	$F_1(-5, 0), F_2(5, 0)$	$F_1(-7, -1), F_2(3, -1)$
漸近線	$y=\frac{4}{3}x,\ y=-\frac{4}{3}x$	$y+1=\frac{4}{3}(x+2) \Rightarrow y=\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$, $y+1=-\frac{4}{3}(x+2) \Rightarrow y=-\frac{4}{3}x-\frac{11}{3}$



問題

1. それぞれの問いにある水平方向に h、垂直方向に k 移動させた楕円を表す方程式を作りなさい。

a) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1,\ h=3,\ k=1$　　b) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1,\ h=2,\ k=-4$　　c) $\frac{x^2}{21}-\frac{y^2}{4}=1,\ h=-3,\ k=-2$

2. それぞれの双曲線の頂点と焦点の座標と、漸近線の式を求めなさい。そしてそれを座標平面にグラフで表しなさい。

a) $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$　　b) $\frac{(x-3)^2}{4}-(y+2)^2=1$　　c) $(x+2)^2-(y+1)^2=1$

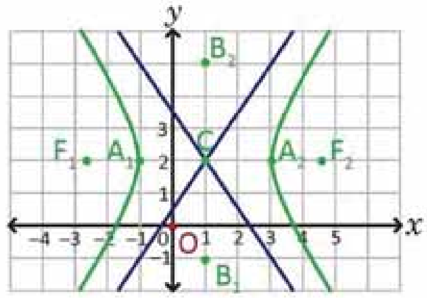
4.5 双曲線の方程式（一般形）

導入問題

$9x^2 - 4y^2 - 18x + 16y - 43 = 0$ を座標平面にグラフで表しなさい。

解法

x と y を平方完成させます。



$$9x^2 - 4y^2 - 18x + 16y - 43 = 0$$

$$9(x^2 - 2x) - 4(y^2 - 4y) - 43 = 0$$ 整理して同類項をまとめ

$$9(x-1)^2 - 4(y-2)^2 - 9 + 16 - 43 = 0$$ 平方完成し、

$$\frac{9(x-1)^2}{36} - \frac{4(y-2)^2}{36} = 1$$ 加算をして右辺が 1 となる等式を作り、

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$ 約分します。

したがって、中心が (1, 2)、頂点が $A_1(-1, 2)$、$A_2(3, 2)$ で、漸近線が

$y - 2 = \frac{3}{2}(x-1)$ 、つまり $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$; $y - 2 = -\frac{3}{2}(x-1)$ 、つまり $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$ になります。

まとめ

双曲線は、式 $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ を展開し、右辺が 0 の等式で表すことができます。

一般に、方程式が $dx^2 - ey^2 + fx + gy + h = 0$ の形になっている双曲線の中心、頂点、および漸近線を求めるためには、x と y の平方完成をし、次の形の式に直します。

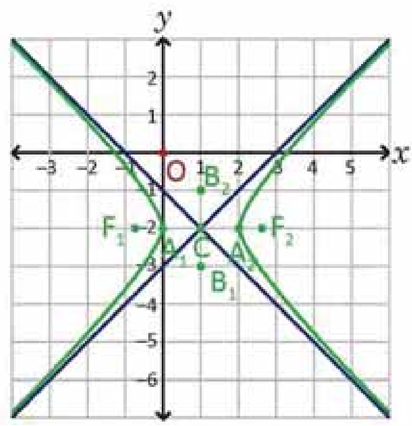
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

例

双曲線 $x^2 - y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ の頂点、焦点、および漸近線の座標を求め、全ての要素を使って座標平面にグラフ化しなさい。

$$x^2 - y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$$
$$(x-1)^2 - (y+2)^2 - 1 + 4 - 4 = 0$$
$$(x-1)^2 - (y+2)^2 = 1$$

この双曲線は、$x^2 - y^2 = 1$ が水平方向に 1、垂直方向に −2 平行移動したもので、中心 C は (1, −2) になります。



方程式	$x^2 - y^2 = 1$	$(x-1)^2 - (y+2)^2 = 1$
頂点	$A_1(-1, 0), A_2(1, 0)$	$A_1(0, -2), A_2(2, -2)$
焦点	$F_1(-\sqrt{2}, 0), F_2(\sqrt{2}, 0)$	$F_1(-\sqrt{2}+1, -2), F_2(\sqrt{2}+1, -2)$
漸近線	$y = x,\ y = -x$	$y = x - 3,\ y = -x - 1$

問題

各双曲線の頂点の座標と漸近線の方程式、および焦点を求めなさい。そしてそれを座標平面にグラフで表しなさい。

a) $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0$　b) $25x^2 - 4y^2 - 100x - 16y - 16 = 0$　c) $x^2 - 4y^2 + 2x + 8y - 7 = 0$
d) $16x^2 - 9y^2 + 32x - 54y - 209 = 0$　e) $x^2 - y^2 - 4y - 8 = 0$　f) $4x^2 - 9y^2 - 8x - 32 = 0$

4.6 復習問題

1. 各問の双曲線の式を作りなさい。

a) $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$, $a = 3$　　b) $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$ 、と頂点 $A_1(-2, 0)$, $A_2(2, 0)$.

2. それぞれの双曲線の焦点の座標を求めなさい。

a) $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$　　b) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$　　c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

3. それぞれの双曲線の頂点と焦点の座標と、漸近線の式を求めなさい。そしてそれを座標平面にグラフで表しなさい。

a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$　　b) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

4. それぞれの問いにある水平方向に h、垂直方向に k 移動させた双曲線を表す方程式を作りなさい。

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, $h = 2$, $k = 3$　　b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$, $h = -3$, $k = -1$

5. それぞれの双曲線の頂点、漸近線、焦点の座標を求めなさい。そして各問それぞれ座標平面にグラフで表しなさい。

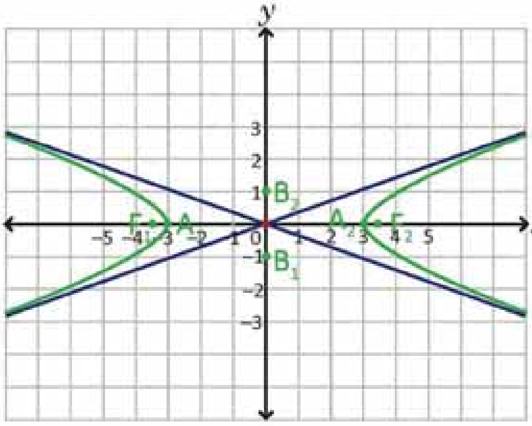
a) $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$　　b) $(x+1)^2 - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

6. それぞれの双曲線の頂点、漸近線、焦点の座標を求めなさい。そして各問それぞれ座標平面にグラフで表しなさい。

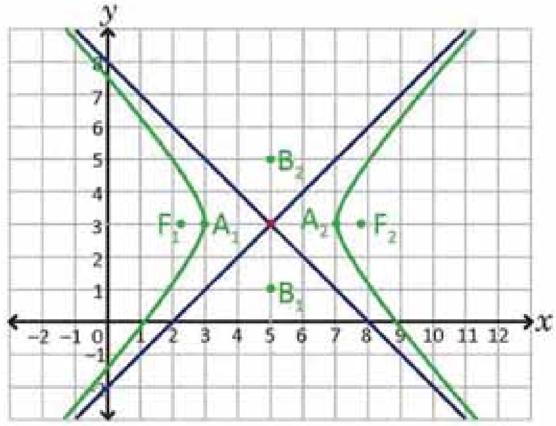
a) $x^2 - 4y^2 + 2x - 8y - 19 = 0$　　b) $9x^2 - y^2 + 6y - 18 = 0$

7. 以下の各グラフにあてはまる方程式を求めなさい。

a)



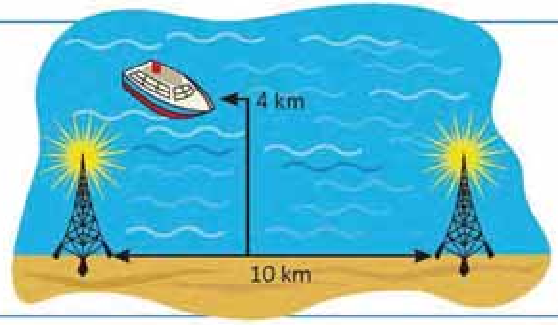
b)



4.7 双曲線の応用*

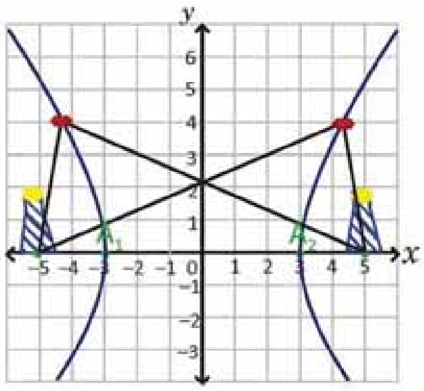
導入問題

ある船は、海岸線沿いに 10 km の距離をあけて建てられている2つのタワーに向けて信号を送ります。タワーで信号を受信すると、船から一方のタワーまでの距離が、もう一方のタワーまでの距離より 6 km 離れていることが分かります。船が岸から 4 km の地点を航行していると仮定して、船が航行している可能性がある位置を求めなさい。



解法

タワーが双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ の焦点であると仮定して、2 つのタワーまでの距離の差は 6 km であることから、a の値はすぐに分かります。また 2 つのタワー（焦点）間の距離も分かっているので、c の値も求めることができます。



$$|d_2-d_1|=2a=6 \text{ なので、 } a=3,$$
$$2c=10 \text{ なので、 } c=5,$$
$$b^2=c^2-a^2=5^2-3^2=4^2.$$

よってこの条件から求められる双曲線の方程式は $\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=1$ です。

船の位置を特定するには、$y=4$ の場合の x の座標を求めればよいだけです。

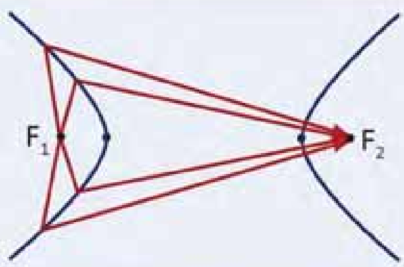
$$\frac{x^2}{3^2}-\frac{4^2}{4^2}=1 \quad x^2 \text{ を取り出して、}$$
$$x^2=2(3^2)$$
$$x=\pm3\sqrt{2}.$$

ロシアの CHAYKA ナビゲーションシステムと LORAN システムは、船の位置を特定するためにこの原則を活用していますが、少しずつこれらのシステムに代わって GPS の利用が普及してきています。

まとめ

双曲線では、焦点は重要な反射特性を有します。一方の焦点から線が引かれると、それは双曲線のもう一方の焦点に正確に到達するように反射します。

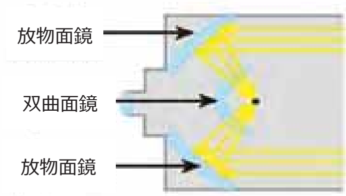
この反射特性は、楕円と放物線の性質に似ていて、さまざまな科学分野で双曲線を応用した器具が使用されています。



問題

1. 海岸線上に 26 km の距離をあけて建てられている CHAYKA システムのタワーが船から信号を受信すると、船から一方のタワーまでの距離が、もう一方のタワーまでの距離より 10 km 離れていることが分かります。船が岸から 12 km を航行していると仮定して、船が航行している可能性がある位置を求めなさい。

2. Maksutov-Cassegrain 望遠鏡は、光信号を受信し、それを放物面鏡（カット面）から別の鏡の焦点にむけて反射することで機能するのですが、その別の鏡は図で示したような双曲面鏡です。双曲面鏡の機能と Maksutov-Cassegrain 望遠鏡がどのように機能するかを説明しなさい。



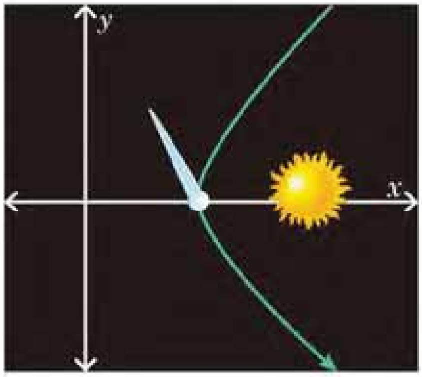
4.8 復習問題

以下の双曲線に関する応用問題を解きなさい。それぞれの条件を座標平面にグラフで表しなさい。

1. 宇宙では、彗星の軌道は、楕円形、放物線状、双曲線状などのさまざまである可能性があり、常にその軌道の焦点には太陽があります。軌道が双曲線になる彗星（歴史上一度だけ見られる）を例にとって式に表すと、

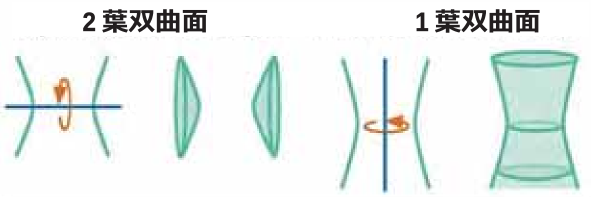
$$\frac{x^2}{20^2} - \frac{y^2}{21^2} = 1$$

この数字 20 と 21 の単位は 100 万の 4 乗、つまり数千億メートルとします。この軌道上で彗星が太陽に最も近くなる地点の太陽からの距離を求めなさい。



2. 原子力発電所の冷却塔は、一枚の双曲面の形に設計されていて、最上部は直径 3.75 m、高さ 9 m あり、塔の直径が最も小さくなっている部分は直径 3 m で高さ 6 m に位置しています。この塔の基部の直径はおおよそどれぐらいになりますか。

双曲面は、双曲線をそのいずれかの軸を中心にして回転させた結果生じる幾何学的形状の立体です。**横軸**を中心に回転させた際にできる形を **2 葉双曲面**といい、**共役軸**を中心に回転させた際にできる形を **1 葉双曲面**といいます。



3. ポリビーノタワーは、世界で初めて双曲面の形に設計された建造物でした。双曲面タワーの最も高い位置の直径が 45 m、地上からの高さが 32 m で、タワーが最も細くなっている部分の直径が 4 m、高さが 16 m である場合の、タワーの基部の直径を求めなさい。

ポリビーノタワーはロシアのウラジミールシューホフ技師により建設されたもので、双曲面タワーとしてシュホフ氏自身により 1896 年に特許を得ている建物です。

4. 小型飛行機がサンビセンテ市の上空を飛行し、$4y^2 - x^2 = 2{,}500$ の双曲線軌道を描きます。

小型飛行機が飛ぶ地点の地上からの距離について、最小値を求めなさい。

4.9 このユニットの問題

1. 以下の式で示される放物線をそれぞれ座標平面に描きなさい。

水平方向の放物線の方程式はどのような式になるか考えなさい。

a) $x = 2y^2$　b) $x = -3y^2$　c) $x + 1 = (y - 2)^2$　d) $x + 2 = -(y + 1)^2$

2. 以下の式で示される楕円をそれぞれ座標平面に描きなさい。

垂直方向の楕円の方程式はどのような式になるか考えなさい。

a) $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$　b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$　c) $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$　d) $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

3. 以下の式で表される双曲線をそれぞれ座標平面に作成しなさい。

垂直方向の双曲線の方程式はどのような式になるか考えなさい。

a) $\frac{y^2}{2^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1$　b) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$　c) $\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$　d) $\frac{(y-2)^2}{4} - (x+1)^2 = 1$

4. 以下の方程式で表される図形をそれぞれ、放物線、円、楕円、双曲線に分類しなさい。

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a \neq b$　b) $y - k = \frac{1}{4p}(x - h)^2$　c) $x^2 + y^2 = r^2$　d) $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

e) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$　f) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$　g) $y = \frac{1}{4p}x^2$　h) $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, a \neq b$

5. それぞれの式が示す図形がどの図形（放物線、円、楕円、双曲線） になるか答えなさい。

a) $9x^2 + 25y^2 - 54x - 144 = 0$　b) $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$　c) $y^2 + x + 4y + 4 = 0$

d) $4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 7 = 0$　e) $2x^2 - 4x - y + 4 = 0$　f) $x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$

g) $9x^2 + 4y^2 - 16y - 20 = 0$　h) $9x^2 - 9y^2 - 18x + 54 = 0$　i) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$

j) $9x^2 - 16y^2 - 18x - 32y - 151 = 0$　k) $y^2 + x + 2y + 3 = 0$　l) $25x^2 + 9y^2 - 50x + 18y - 191 = 0$

まとめ

学習した 4 つの図形（放物線、円、楕円、双曲線）は**円錐形**といい、それぞれを表す公式は以下の通りです。

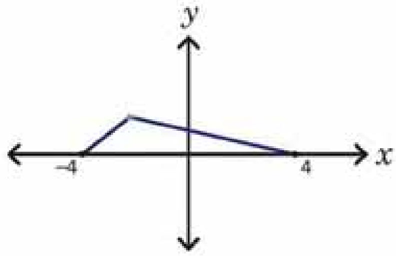
$y = \frac{1}{4p}x^2$	$x^2 + y^2 = r^2$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
放物線	**円**	**楕円**	**双曲線**

それぞれの形にはバリエーションがあり、水平型や垂直型、移動した形もあり、あらゆる計算式を用いて表すことができ、また右辺を 0 の等式で表すこともできます。一般的に、上記の方程式はそれぞれの図形に対する**方程式（標準形）**とされているものです。

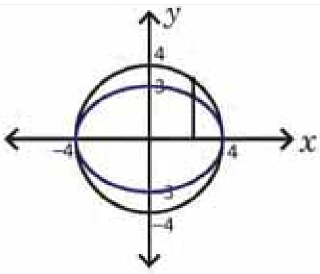
ユニット 3

4.10 このユニットの問題

1. 三角形の底辺の長さは一定で、その頂点は点 (–4, 0) と (4, 0) にあります。可変辺の傾きが常に 4 となる場合にもう 1 つの頂点がくる座標を求めなさい。

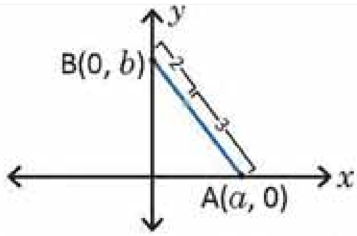


2. $x^2 + y^2 = 16$ の円がくる位置から y 軸の座標を $\frac{3}{4}$ ずつ減らした場合の軌跡を求めなさい。



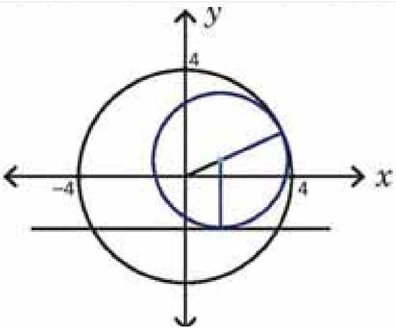
この演習では、楕円がまるで一定の比率で一定の方向に縮小された小さな円のように見えることを確認できます。

3. 点 A が x 軸上を移動し、点 B が y 軸上を移動する長さ 5 の切片 AB を座標平面上にあるとします。切片 AB 上で3 : 2 の比率になる座標を求めなさい。



座標を A(a, 0)、B(0, b) と仮定して、ピタゴラスの定理を使用して方程式を作ることができます。そして与えられた割合で分割された切片上の点の座標を計算すれば解けます。

4. 接線 $y + 2 = 0$ と円 $x^2 + y^2 = 16$ に常に接点をもつ円になるように半径が変化する円の中心のが描く軌跡を求めなさい。上記の円は常に接線より上で円の内側を移動すると仮定します。

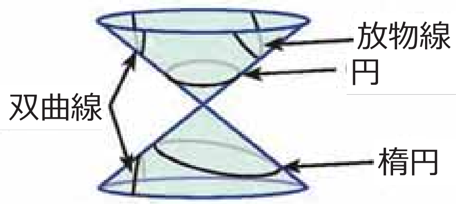


可変円の中心から直線までの距離と可変円の中心から固定円の中心までの距離との関係を求めなさい。

まとめ

すべての円錐形は、図に示すように、2つの紙でできた円錐を、平面にカットすることにしたがって得られる形であるので、このような名前がつけられています。

2 次曲線に関する情報は、エルサルバドル教育省 (MINED) の公式ビデオ「2 次曲線」（アドレス *https：//goo.gl/Lq3dGW*）で見られます。



5.1 GeoGebra演習：2 次曲線の作成

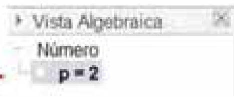
この演習では、2 次曲線の図形は変数を用いて作成されるので、中心、パラメータ、軸の長さなどの値をそれぞれ指定することで、同じ系統になる 2 次曲線（放物線、円、楕円、双曲線）を作成することができます。「演習」の手順にしたがって、円錐形を作成しなさい。次に、GeoGebraで、この演習の最後にある「課題」セクションの問題に取り組みます。

演習

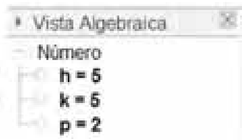
パラメータ *p* と頂点 (*h, k*) を持つ放物線の作成

1. 入力バーに変数 *p* の値 2 を p = 2 と入力します。

2. 「Enter」を押すと、代数ビュー（左側のパネル）に右の式が表示されます。



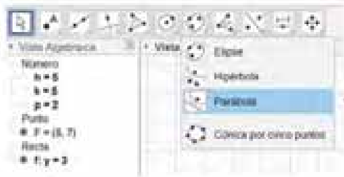
3. 同様に、共に 5 の値を持つ変数 *h* と *k* を入力し、代数ビューに右の図のような結果が表示されるのを確認します。



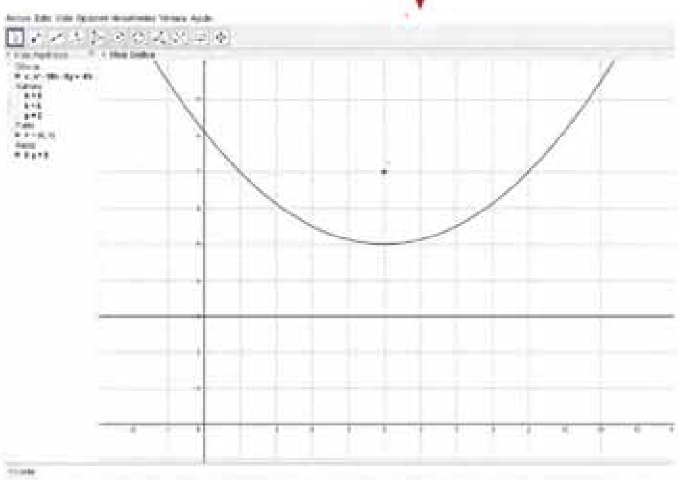
4. 入力バーに焦点 F = (h, k + p) を入力すると、点 F（焦点） がグラフィックビューに表示されます。

5. 入力バーに準線 y = k - p を入力すると、グラフィックビューに準線が表示されます。

6. 円錐形 ボタンの中から 放物線 を選択します。



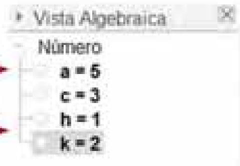
7. 次に、（グラフィックビューまたは代数ビューのいずれかで）点 F を選択してから、準線を選択します。
   下の図にあるグラフが作成されます。



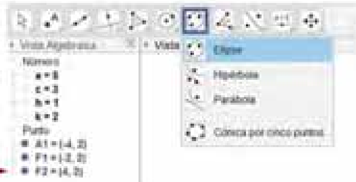
8. 変数 *p*, *h*, *k* の値は、代数ビューでそれぞれをダブルクリックすると変更できるので、課1 の問題の答えを確認することができます。また代数ビューにある円錐形の方程式を右クリックすることですべてのオプションが表示され、放物線の方程式の形を確認することもできます。

a, *c* の値と中心 (*h*, *k*) の値が分かっている楕円の作成。

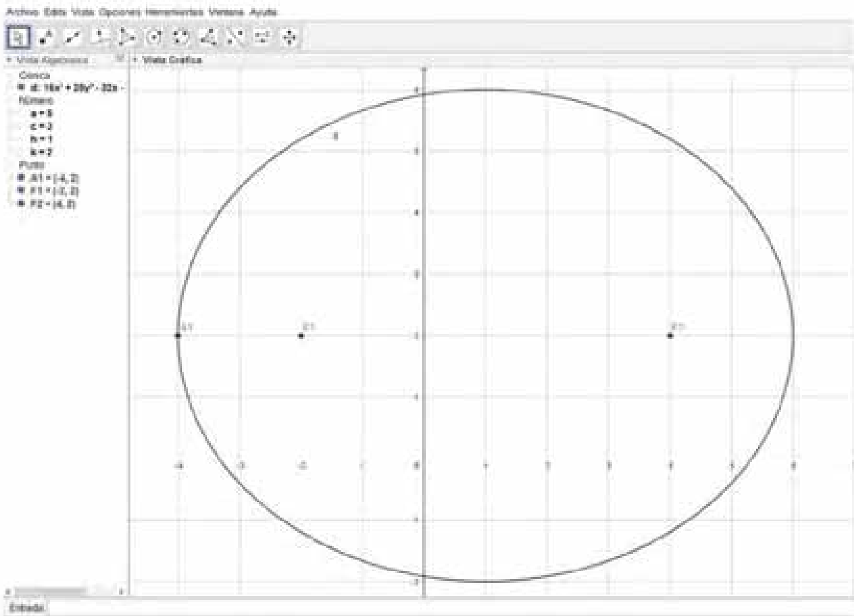
1. 入力バーから変数 *a*, *c*, *h*, *k* にそれぞれ 5、3、1、2 の値を入力します。代数ビューに、右の図に示す結果が表示されます。



2. 点 F_1、F_2、A_1 の座標に式 F1 = (h - c, k), F2 = (h + c, k), A1 = (h - a, k) と入力し、焦点と頂点をグラフ化します。グラフィックビューに点が表示されます。



3. 円錐形ボタンの中から楕円を選択します。
4. 次に、点 F1 を選択し、その後点 F2 を選択し、最後に点 A1（頂点）を選択します。以下に示すグラフが表示されます。



5. 変数 *a, c, h, k* の値は、代数ビューでそれぞれをダブルクリックすると変更できるので、課 3 の問題の答えを確認することができます。また代数ビューにある円錐形の方程式を右クリックすることですべてのオプションが表示され、楕円の方程式の形を確認することもできます。

課題

1. 中心 (*h, k*)、半径*r*の円を作成しなさい。
2. *a*、*c* の値と中心 (*h*、*k*) をもつ双曲線の作成しなさい。
3. ユニット全体の授業で取り組んだ問題の答えを確かめて、正しいことを確認しなさい。
4. 水平な放物線を作成しなさい。
5. 垂直な楕円を作成しなさい。
6. 垂直な双曲線を作成しなさい。

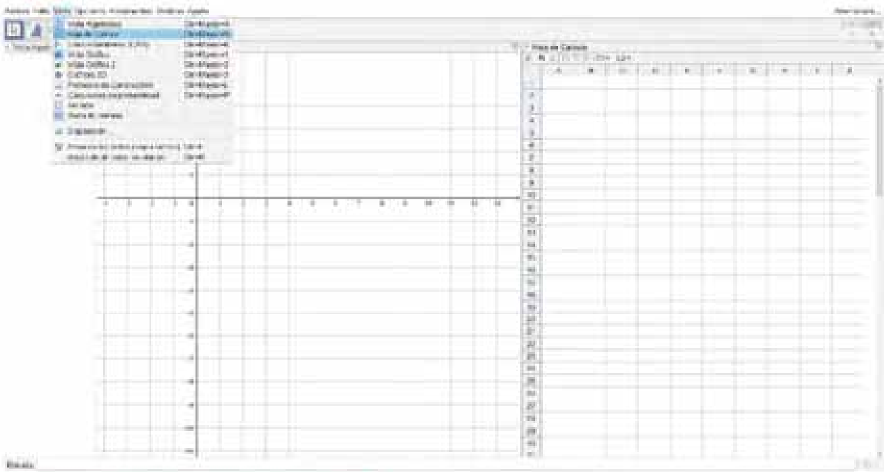
5.2 GeoGebraでの演習：円錐形の方程式 (一般形) のグラフを作りなさい。

この演習では、円錐形の方程式（一般形）からグラフを作るためにGeoGebra 計算シートを使用します。方程式（一般形）を使うことで、円錐形の形を識別しやすくなります。また、代数ビューを使用して、方程式(標準形)の式を作ることができます。「演習」の部分に表示される手順に従い、方程式（一般形）に対応する円錐形グラフを作成します。その後、GeoGebraを使ってこの演習の最後にある「課題」セクションの問題に取り組みます。

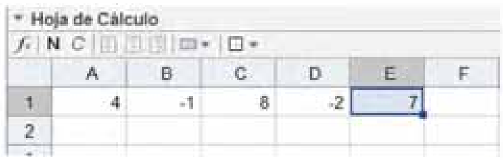
演習

指定された方程式（一般形）の円錐形のグラフを作りなさい。

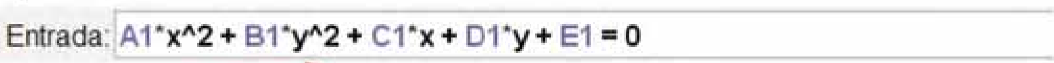
1. ビュー メニューを開き、計算シート を選択します。



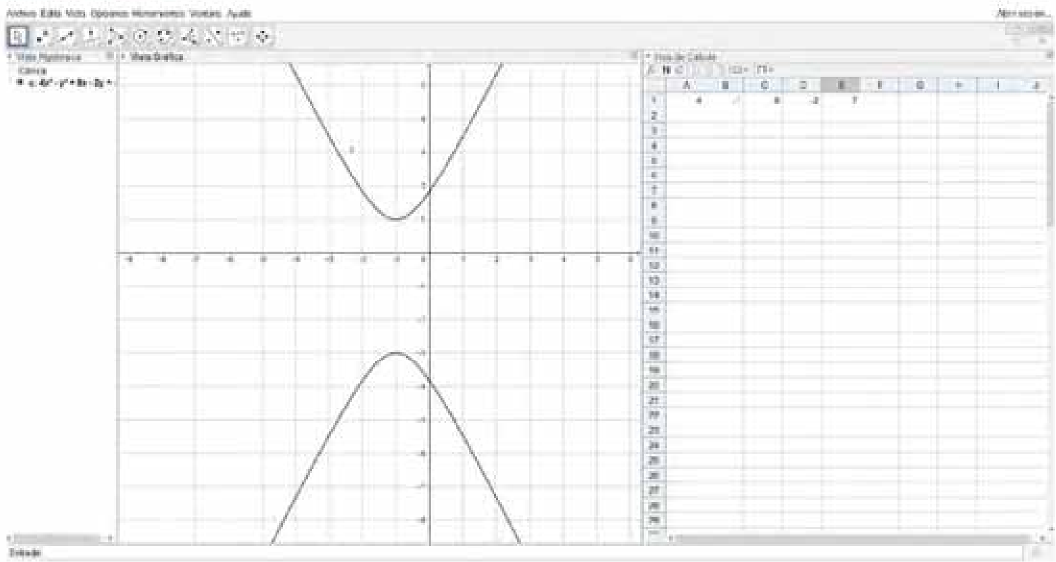
2. 行 1 に移動し、右の図のように、各列にそれぞれ 4 , −1 , 8 , −2 , 7 と入力します。



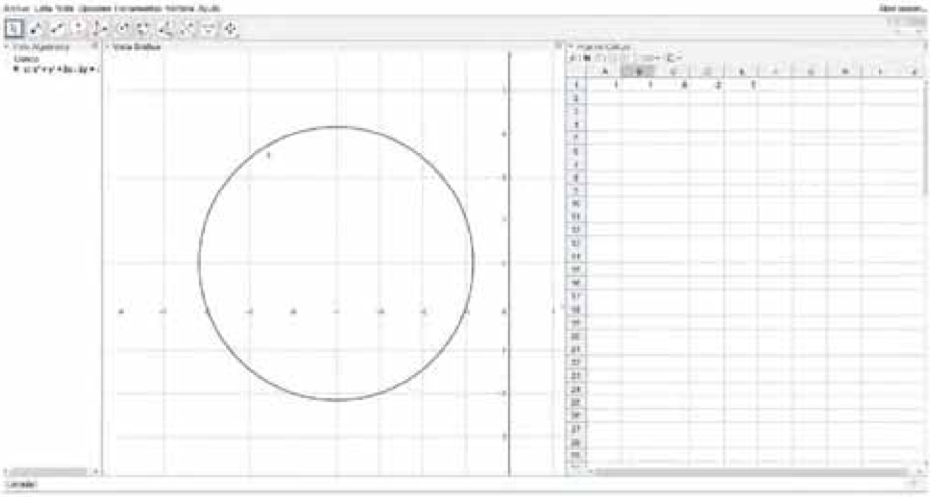
3. 次に、入力バーに、セル x^2, y^2, x, y の係数と定数にそれぞれ A1, B1, C1, D1 , E1 の値をあてはめた方程式（一般式）を A1*x^2 + B1*y^2 + C1*x + D1*y + E1 = 0 と入力します。



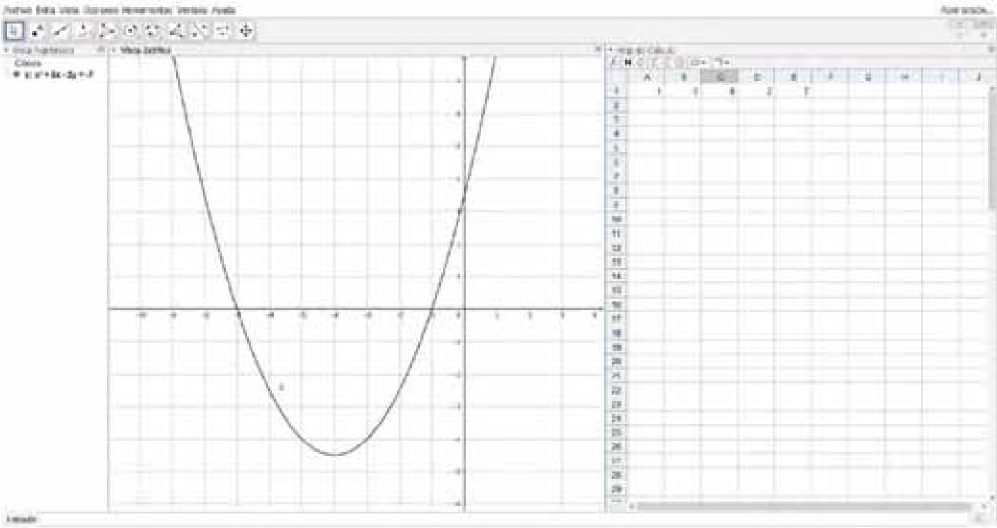
4. 方程式を入力すると、グラフビューにこの図のような双曲線のグラフが表示されます。



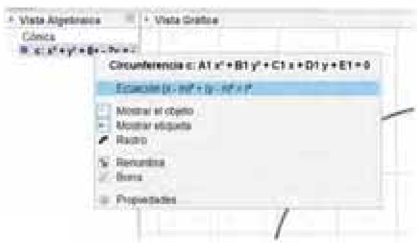
5. セル A1 と B1 の値を 1 に変えると円ができます。



6. セル B1 の値を 0 に変更すると、放物線ができます。



7. 図にあるように、方程式の上を右クリックして、方程式（標準形）を選択しなさい。



課題

次のそれぞれの式で表される円錐形の種類を特定し、授業 4.9 の問題 5 の答えが正しいかどうか確認し、間違っている場合は、どこが間違っていたかを確認しなさい。

a) $9x^2 + 25y^2 - 54x - 144 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$

c) $y^2 + x + 4y + 4 = 0$

d) $4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 7 = 0$

e) $2x^2 - 4x - y + 4 = 0$

f) $x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$

g) $9x^2 + 4y^2 - 16y - 20 = 0$

h) $9x^2 - 9y^2 - 18x + 54 = 0$

i) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$

j) $9x^2 - 16y^2 - 18x - 32y - 151 = 0$

k) $y^2 + x + 2y + 3 = 0$

l) $25x^2 + 9y^2 - 50x + 18y - 191 = 0$

5.3 GeoGebra での演習：2 次曲線の性質

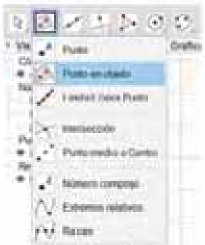
この演習では、GeoGebra のリソースを使って、各コンテンツのアプリケーションで用いた 2 次曲線（放物線、楕円、双曲線）の焦点の性質を**検証**します。まず「演習」にある手順にしたがって、プロパティを作成します。その後、GeoGebra を使ってこの演習の最後にある「課題」セクションの問題に取り組みます。

演習

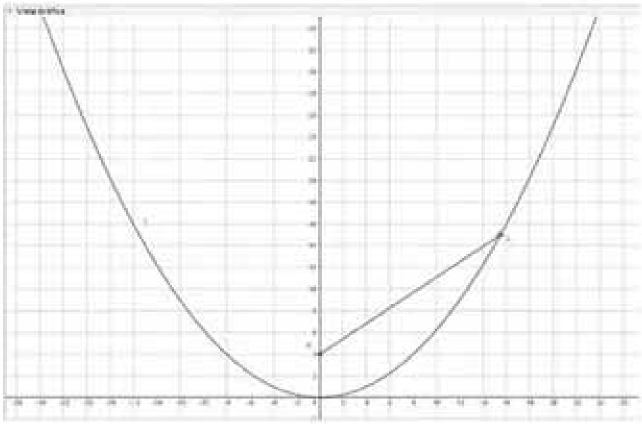
放物線の焦点特性の検証

焦点からの線はいずれも、軸に対し平行な同じ方向に向かって反射され、また、軸に対し平行に入ってくる線は、焦点に向かって反射されます。

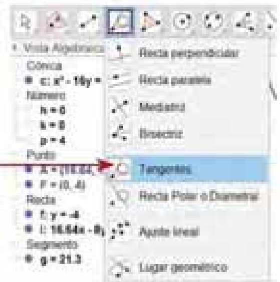
1. 演習 5.1 で作成したファイルを使用して、頂点 (0, 0)、パラメータ $p = 4$ の放物線のグラフを作りなさい。
2. 「点」ボタンの中の オブジェクトに点をうつ を選択し、放物線に点をつける方法で、放物線のどこにでも点を打つことができます。



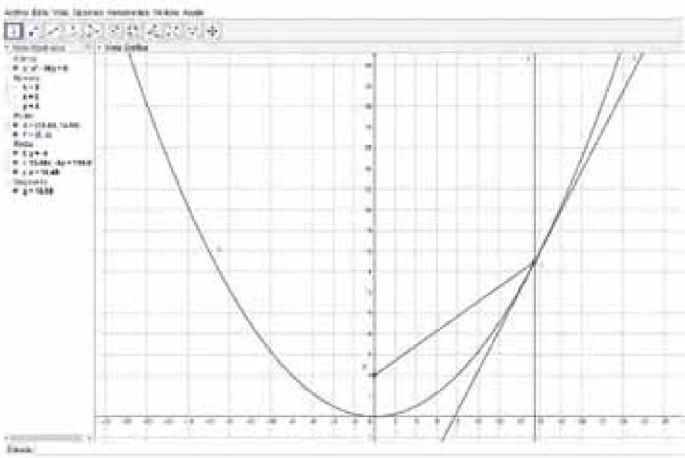
3. 図に示すように、焦点 (F) から放物線上につけた点まで伸びる切片を描画しなさい。



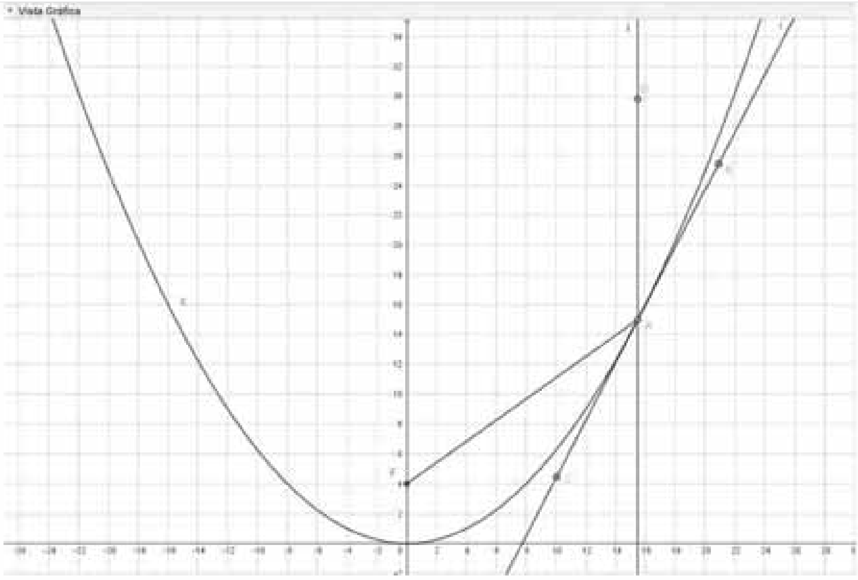
4. 線ボタンの中の 接線 を使って、点を選択してから放物線を選択し、問 2で描画しした点で放物線に接する接線を作成しなさい。



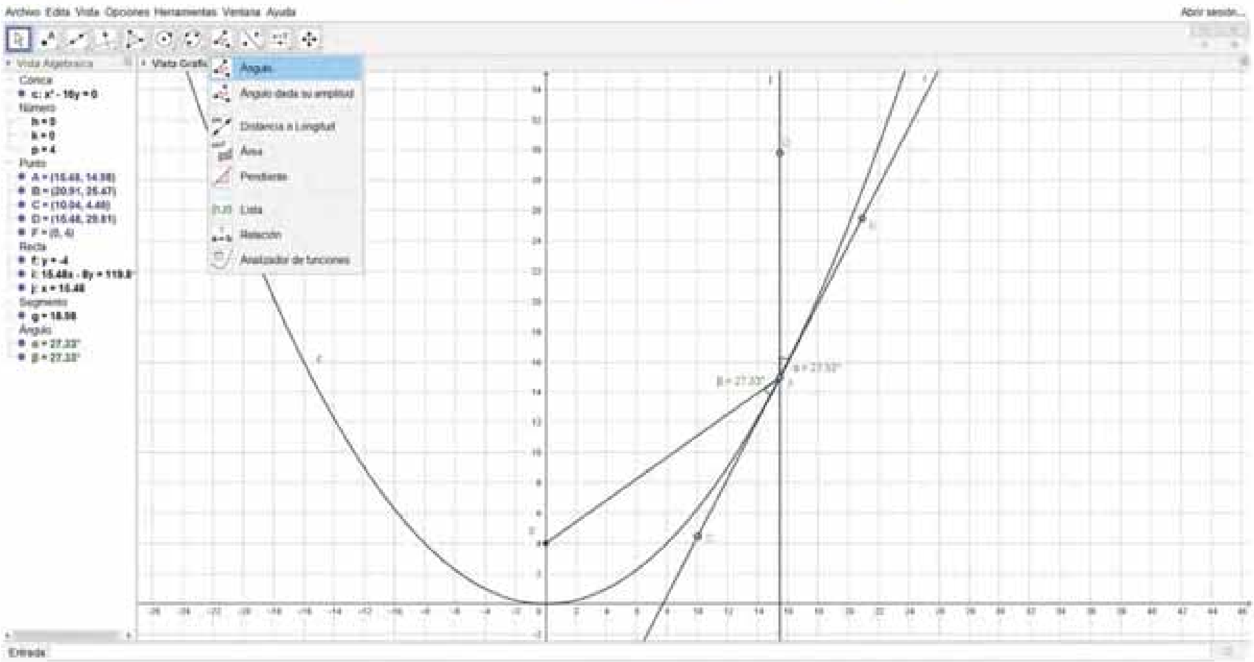
5. 線 ボタンの中の 平行線 を使って、点と y 軸を選択し、問 2で作成した点を通る y 軸に平行な線を描画しなさい。以下の図が表示されます。



6. 図のように、点 B と点 C を接線上に配置し、点 D を y 軸に対し平行な線上に配置しなさい。



7. 図のように、角度ボタンの中の角度を使って、角 DAB と角 FAC の角度を測りなさい。



8. カーソルを使って、放物線上の点を移動させ、焦点から放出された線が反射される角度が、放物線の軸に平行な線に対して一定であることを確認しなさい。点を右クリックして、選択肢の中からアニメーションを選ぶことで、自動的に放物線上のすべての点の上を通過させることもできます。

課題

1. 楕円のアプリケーションで利用した楕円の焦点の性質を検証するために作図しなさい。

2. 双曲線のアプリケーションで使用した双曲線の焦点の性質を検証するために作図しなさい。

5.4 GeoGebraを使って演習しなさい 円錐形の軌跡に関する問題

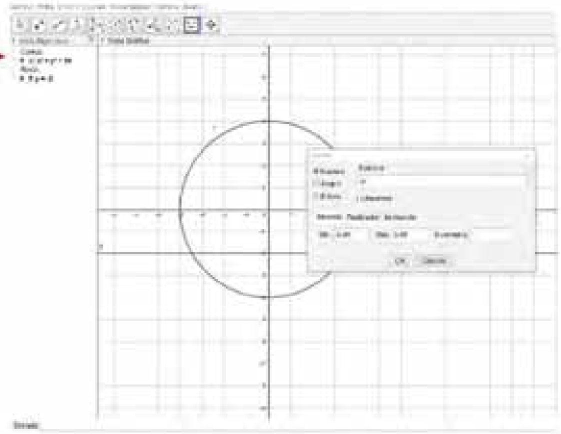
この演習では、GeoGebra リソースを利用して、4.10 の授業で解いた2次曲線の軌跡に関する問題の解答を**検証**します。「演習」 の部分に表示される手順に従い、それぞれ指定された軌跡を描画します。その後、GeoGebraを使ってこの演習の最後にある「課題」セクションの問題に取り組みます。

演習

授業 4.10 の問題 4 を再掲しています。

接線 $y + 2 = 0$ と円 $x^2 + y^2 = 16$ に常に接点をもつ円になるように半径が変化する円の中心のが描く軌跡を求めなさい。上記の円は常に接線より上で円の内側を移動すると仮定します。

1. 入力バーを利用して、線 $y + 2 = 0$ と円 $x^2 + y^2 = 16$ を描画します。

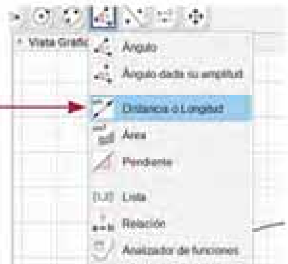


2. スライダーボタンを選択して、配置したい位置でグラフィックビューをクリックし、最小値 –3.46、最大値 3.46 を指定して「Enter」を押し、変数 a のスライダーを挿入します。

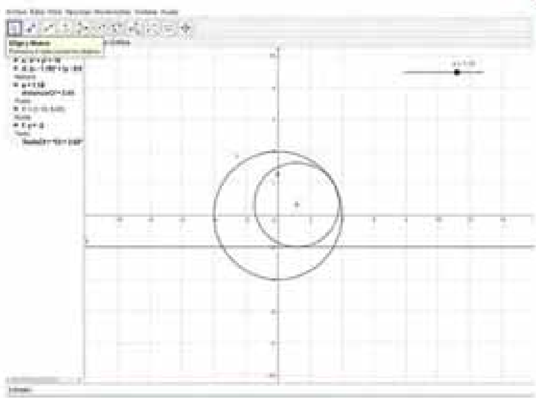
3. 問題の答え（$y = -\frac{x^2}{4} + 1$）を確認するには、入力バーに点 $C = (x, -\frac{x^2}{4} + 1)$ を次のように入力します。

C = (a, (–a^2 / 4) + 1)

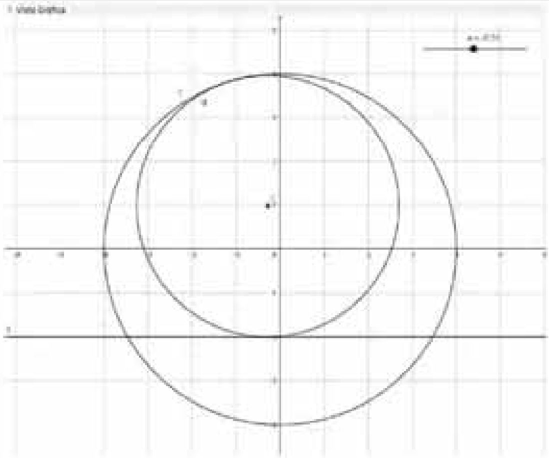
4. 角度ボタンの中から距離または長さを選択し、手順 3 でグラフ化した点 C を選択し、線 $y + 2 = 0$ を選択します。その後、点 C から線までの距離を示すラベルがグラフィックビューに表示され、代数ビューに、測定された距離の数値を格納する「distanceCf」という名前の変数が表示されます



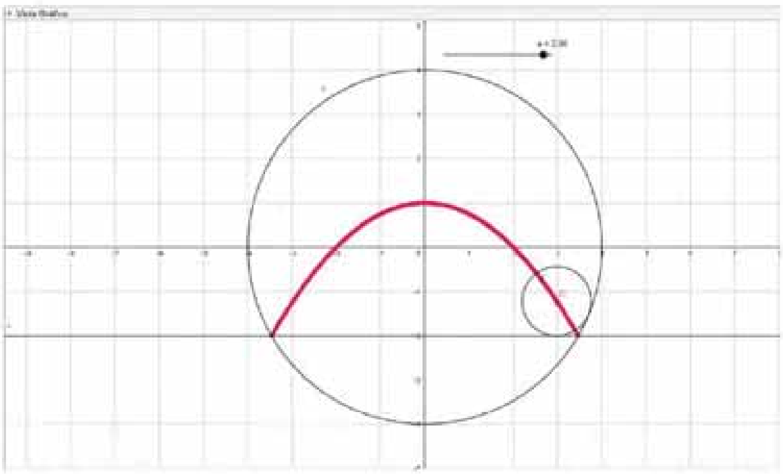
5. 次に、中心と半径のオプションを使って円を作成し、手順 3 で作成した点 C を中心として選択し、半径の入力バーに距離を「distanciaCf」と入力します。結果は下の図のようになります。



6. 手順 5 で作成した円は、線 $y + 2 = 0$ と円 $x^2 + y^2 = 16$ の両方に接していることを確認します。スライダーを水平に動かして、円がどのように動くかを見ることができます。



7. 点 C を右クリックし、残像 を選択し（必要に応じて点の色を変更できます）、スライダーをもう一度動かして、軌跡がどのようになるかを確認します。



8. 最後に、スライダーを右クリックして、アニメーションを選択すると、軌跡が自動的に描画され、答えが正しいことを確認できます。

課題

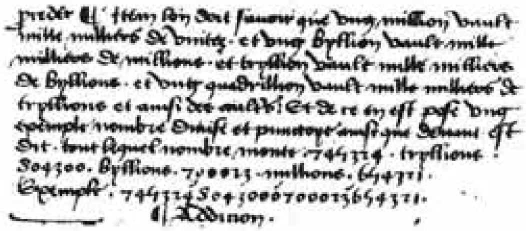
1. スライダーの最小値と最大値の範囲を変更し、線 $y + 2 = 0$ と円 $x^2 + y^2 = 16$ の円の接線がどうなるかに注目しながら観察し、その結果と結論を記述しなさい。

2. 授業 4.10 の「このユニットの問題」の問 2 と問 3 の答えを作図して、検証しなさい。
   a) $x^2 + y^2 = 16$ の円の y 座標をそれぞれ $\frac{3}{4}$ にした場合の軌跡を求めなさい。

   b) 座標平面上にある長さ 5 の切片 AB で、点 A が x 軸上を移動し、点 B が y 軸上を移動するとします。切片 AB が 3 ： 2 の比率になる時の点の軌跡を求めなさい。

ユニット 4

超越関数 I



『Triparty en la science des nombres』
オリジナル原稿の抜粋

累乗の概念は、ユークリッド（紀元前 300 年）が、数にその数自体を掛けなければならない回数を表すためにこの用語を使用した、古代ギリシャまで遡ります。初めて有理数と無理数の指数の概念を提示したのは、フランスの思想家ニコル・オレーム（14 世紀）でした。また、フランスの数学者ニコラ・シュケー（15 世紀）の著書『Triparty en la science des nombres』（1484 年）で、初めて負の数が係数、指数、方程式の解として登場します。 その後、1694 年頃、スイスの数学者ヨハン・ベルヌーイ（17～18 世紀）が指数関数に関する重要な研究を発表しました。

19 世紀の終わりに、自然界のさまざまな問題が指数関数によって数学的に記述されました。スヴァンテ・アテニウスは、化学反応の速度定数と温度の関係を式にしました。トマス・マルサスは、人口の増加が、時間の経過とともに指数関数的な推移を示すことを明らかにしました。そして、物体の冷却に関するニュートンの観察によって、指数関数的減衰を伴う冷却の法則が導かれました。

世界の人口は指数関数的に増加しています。

このユニットでは、整数と有理数の指数の性質を学び、すべての実数の指数に関して累乗を概括します。これにより、指数関数を定義し、その性質を学ぶことができます。

1.1 同一の底と自然数の指数を持つ累乗の性質

導入問題

次の演算を行い、ある数の累乗でその答えを示しなさい。

a) $2^2 \times 2^3$　　b) $3^6 \div 3^2$　　c) $(2^2)^3$

解法

a が実数で、n が正の整数とすると、よって、

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n\text{倍}}$$

a^n：指数、累乗、底

a) $2^2 \times 2^3$

$$2^2 \times 2^3 = \underbrace{(2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)}_{5\text{倍}}$$
$$= 2^5$$

次のようになります。　$2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$

b) $3^6 \div 3^2$

$$3^6 \div 3^2 = \frac{3^6}{3^2}$$
$$= \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times \cancel{3} \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times \cancel{3}}$$ 簡約化して、
$$= \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{4\text{倍}}$$
$$= 3^4$$

次のようになります。　$3^6 \div 3^2 = 3^{6-2} = 3^4$

c) $(2^2)^3$

$$(2^2)^3 = (2^2) \times (2^2) \times (2^2)$$
$$= (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2)$$
$$= \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{6\text{倍}}$$
$$= 2^6$$

次のようになります。　$(2^2)^3 = 2^{2\times3} = 2^6$

定義

1. a と b が実数、m と n が正の整数とすると、同一の底を持つ累乗の演算するための公式は、

a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$　　b) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (si $a \neq 0$ y $m > n$)　　c) $(a^m)^n = a^{m \times n}$

上記の b) もまた分数 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ で表されます 。

a が実数ならば
$a^1 = a$

2. a は正の実数とすると、よって

a) n は偶数ならば、よって

$$(-a)^n = \underbrace{(-a) \times (-a) \times \cdots \times (-a)}_{\text{負数の偶数の数量}} = a^n$$

b) n が奇数ならば、よって

$$(-a)^n = \underbrace{(-a) \times (-a) \times \cdots \times (-a)}_{\text{負数の奇数の数量}} = -a^n$$

問題

以下の演算を単一の累乗で表しなさい。

a) $3^6 \times 3^4$　　b) $(-3)^2 \times (-3)^4$　　c) $(-2)^3 \times (-2)^2$

d) $5^7 \div 5^3$　　e) $(-2)^5 \div (-2)^3$　　f) $(-3)^8 \div (-3)^5$

g) $(6^5)^2$　　h) $(10^4)^3$　　i) $[(-3)^3]^5$

1.2 同一の自然数の指数を持つ累乗の性質

導入問題

次の演算を行い、ある数の累乗でその答えを示しなさい。

a) $2^3 \times 3^3$

b) $\frac{6^3}{2^3}$

解法

a) $2^3 \times 3^3$

$2^3 \times 3^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$ 結合すると、

$= \underbrace{6 \times 6 \times 6}_{3倍}$

$= 6^3$

次のようになります。 $2^3 \times 3^3 = (2 \times 3)^3 = 6^3$

b) $\frac{6^3}{2^3}$

上記の問題から次が得られます。$6^3 = 2^3 \times 3^3$.

等式の両辺を 2^3 で割ることで、次が得られます。

$\frac{6^3}{2^3} = \frac{\cancel{2^3} \times 3^3}{\cancel{2^3}} = 3^3$

次のようになります。 $\frac{6^3}{2^3} = \left(\frac{6}{2}\right)^3 = 3^3$

まとめ

- a と b が実数で 、m が正の整数とすると、同一の指数を持つ累乗の演算をするための公式は、

a) $a^m \times b^m = (a \times b)^m$

b) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ (si $b \neq 0$)

- b) の性質はこのような割り算で表されます。

$$a^m \div b^m = (a \div b)^m$$

- $a_1, a_2, \dots, a_n$ が実数とすれば、よって、

$$a_1^m \times a_2^m \times \cdots \times a_n^m = (a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n)^m$$

例

$2^2 \times 3^2 \times 5^2$ の積をただ 1 つの累乗で表しなさい。

$2^2 \times 3^2 \times 5^2 = (2 \times 3 \times 5)^2 = 30^2$

したがって、$2^2 \times 3^2 \times 5^2 = 30^2$

問題

以下の演算を単一の累乗で表しなさい。

a) $6^{10} \times 4^{10}$

b) $(-3)^7 \times 6^7$

c) $5^5 \times (-8)^5$

d) $(-2)^5 \times (-7)^5$

e) $12^5 \div 6^5$

f) $20^3 \div (-4)^3$

g) $(-24)^4 \div 3^4$

h) $(-15)^6 \div (-5)^6$

i) $(-35)^4 \div (-7)^4$

1.3 指数がゼロと負の数の場合*

導入問題

$a^m \div a^n = a^{m-n}$ の性質が整数m と n のすべてに対し成り立つと仮定します。以下の 2 つの異なる方法で割り算をしなさい。

a) $6^3 \div 6^3$　　　　b) $3^3 \div 3^7$

解法

a) $6^3 \div 6^3$

割り算の性質を用いて

$6^3 \div 6^3 = 1$

この場合、指数の性質が証明されるならば、よって、

$$6^3 \div 6^3 = 6^{3-3}$$
$$= 6^0$$

したがって、$6^3 \div 6^3 = 6^0$ となります。

したがって、6^0 と 1 は同じ数を表します。

b) $3^3 \div 3^7$

式の簡約化を用いて

$$3^3 \div 3^7 = \frac{3^3}{3^7}$$
$$= \frac{\cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{3}}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{3}}$$
$$= \frac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 3}$$
$$= \frac{1}{3^4}$$

したがって、 $3^3 \div 3^7 = \frac{1}{3^4}$ となります。

この場合、指数の性質が証明されるならば、よって、

$$3^3 \div 3^7 = 3^{3-7}$$
$$= 3^{-4}$$

したがって、$3^3 \div 3^7 = 3^{-4}$ となります。

よって 3^{-4}、$\frac{1}{3^4}$ は同じ数字を表します。

定義

a) **指数がゼロの場合**

a が $a \neq 0$で実数ならば、よって

$$a^0 = 1.$$

b) **指数が負の数の場合**

a が$a \neq 0$で 実数、n が正の整数ならば、よって

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

この定義に基づき、正の指数の性質もまた、指数が負の数とゼロの場合にも適用されます。a と b が実数、 m と n が整数ならば、

a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$　b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$　c) $(a^m)^n = a^{m \times n}$

d) $a^m \times b^m = (a \times b)^m$　e) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

問題

1. 以下の関数を負の指数の累乗で書きなさい。

a) $\frac{1}{2^3}$　b) $\frac{1}{3}$　c) $\frac{1}{(-5)^5}$　d) $\frac{1}{10^8}$

2. 以下の負の指数の累乗を分数で書きなさい。

a) 2^{-7}　b) 3^{-5}　c) 5^{-1}　d) 7^{-2}

1.4 実数の *n* 乗根

導入問題

次のそれぞれの方程式の x の実数の値を決定しなさい。

a) $x^3 = 27$　　b) $x^4 = 625$

解法

a) 27 の素因数分解は、

$$27 = 3^3$$

$$\begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

したがって、$x = 3$ が、この方程式の解です。

したがって、3 を 27 の立方根と呼び、$3 = \sqrt[3]{27}$ で表されます。

b) 625 の素因数分解は、

$$625 = 5^4$$

$$\begin{array}{r|l} 625 & 5 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

したがって、$x = 5$ が、方程式の解です。

5 を 625 の 4 乗根と呼びます。$5 = \sqrt[4]{625}$

また $x = -5$ となり、これがこの方程式の解です。

−5 を 625 の負の 4 乗根と呼びます。

$$-5 = -\sqrt[4]{625}$$

定義

n は正の整数とすると、$b^n = a$ の条件数を満たす数 b は、a の ***n* 乗根**と呼ばれます。

実数の n 乗根を扱う場合、2 つのケースに分類されます。

1. もし n が奇数ならば、実数 a のそれぞれに対し単一の (n) 乗根 が対応し、$\sqrt[n]{a}$ で表されます。
2. もし n が偶数ならば、それぞれの正の実数 a に、2 つの実数の n 乗根が対応、すなわち、正数の $\sqrt[n]{a}$ と負数の $-\sqrt[n]{a}$ が対応します。

以下の条件の 1 つが満たされるならば、つまり、n が奇数、もしくは、n が偶数で $a > 0$ ならば、よって $\sqrt[n]{a^n} = a$ となります。

根指数 ← $\sqrt[n]{a}$ → 累乗根

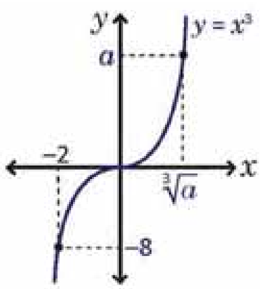
被開平数

Si $n = 1 \Rightarrow \sqrt[1]{a} = a.$
Si $n = 2 \Rightarrow \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}.$

n が正の正数 ならば 、よって $\sqrt[n]{0} = 0.$

例

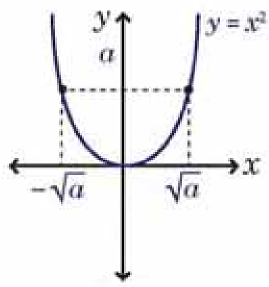
a) 数字 −8 は、立方根を 1 つだけ有します。



$$-8 = (-2)^3 \Longrightarrow \sqrt[3]{-8} = -2.$$

実数 a はすべて、1 つの立方根 $\sqrt[3]{a}$ を有します。

b) 数字 −16 は、平方根を 2 つ有します。



$$\sqrt{16} = 4 \text{ y } -\sqrt{16} = -4$$

実数 a はすべて、2 つの平方根 $\sqrt{a}$ と $-\sqrt{a}$ を有します。

問題

次の等式を n 乗根の表記法を用いて表しなさい。

a) $2^3 = 8$　　b) $(-5)^3 = -125$　　c) $3^4 = 81$　　d) $(-7)^4 = 2401$

e) $6^2 = 36$　　f) $(-2)^5 = -32$　　g) $(-4)^5 = -1024$　　h) $5^5 = 3125$

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$　　j) $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$　　k) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$　　l) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$

1.5 根号を使わない数字の表し方

導入問題

以下の数字を根号を使わず表しなさい。

a) $\sqrt[3]{729}$ b) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$

数字の各桁の合計が3で割り切れるならば、その数字は割り切れます。

解法

a) $\sqrt[3]{729}$

$729 = 3^6$ 729 を分解

$= 3^3 \times 3^3$ 累乗の性質を使う場合は、根指数3の累乗の積で書き直し、

$= (3 \times 3)^3$

$= 9^3$.

つまり、9 を 3 乗すると、729 が得られます。

したがって、$\sqrt[3]{729} = 9$ となります。

b) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$

$\frac{16}{81} = \frac{2^4}{3^4}$ 16 と 81 を分解

$= \left(\frac{2}{3}\right)^4$ 累乗の性質を使う場合は、

よって、$\frac{2}{3}$ を 4 乗すると $\frac{16}{81}$ が得られます。

したがって、$\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$ となります。

まとめ

実数 $\sqrt[n]{a}$ を根号を使わず書くには、次のように計算します。

例： $\sqrt[3]{1728}$

1. a の素因数分解を書き、被関平数が、分数ならば分子と分母を分解しなさい。 → $1728 = 2^6 \times 3^3$
2. 指数 n の累乗の積で分解を表しなさい。 → $1728 = 2^3 \times 2^3 \times 3^3$
3. 同一の指数の累乗の積あるいは商の性質を用いなさい。 → $1728 = (2 \times 2 \times 3)^3 = 12^3$
4. $a = b^n$ の形の式が得られ、よって $\sqrt[n]{a} = b$。 → $\sqrt[3]{1728} = 12$

n が奇数の正数でa が実数ならば、よって $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$ となります。

n が偶数ならば、負の数の n 乗根は実数ではありません。

問題

以下の数字を根号を使わず表しなさい。

a) $\sqrt[4]{16}$ b) $\sqrt[5]{243}$ c) $\sqrt[7]{128}$ d) $\sqrt[5]{100\,000}$

e) $\sqrt[3]{-216}$ f) $\sqrt[4]{256}$ g) $\sqrt[3]{\frac{512}{343}}$ h) $\sqrt[6]{\frac{64}{729}}$

1.6 n 乗根の演算

導入問題

累乗根 1 つだけで以下の演算を表すために、n 乗根の定義を使いなさい。

a) $\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{20}$　　b) $\sqrt[4]{96}\div\sqrt[4]{3}$　　c) $\sqrt{\sqrt[3]{128}}$

解法

a) $\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{20}$

$(\sqrt[3]{6})^3=6$ と $(\sqrt[3]{20})^3=20$	立方根の定義を使い、
$(\sqrt[3]{6})^3\times(\sqrt[3]{20})^3=6\times 20$	上記の等式を各辺ごとに掛け合わせ、
$(\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{20})^3=6\times 20$	左辺に累乗の性質を適用することで、
$\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{20}=\sqrt[3]{6\times 20}$	累乗を立方根で表し、
$\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{20}=\sqrt[3]{120}$	その積を求めます。

したがって、　$\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{20}=\sqrt[3]{120}$.

b) $\sqrt[4]{96}\div\sqrt[4]{3}$

$(\sqrt[4]{96})^4=96$ と $(\sqrt[4]{3})^4=3$	4 乗根の定義を用い、
$(\sqrt[4]{96})^4\div(\sqrt[4]{3})^4=96\div 3$	各辺を割り算し、
$(\sqrt[4]{96}\div\sqrt[4]{3})^4=96\div 3$	左辺に累乗の性質を適用することで、
$\sqrt[4]{96}\div\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{96\div 3}$	累乗を 4 乗根 ($\sqrt[4]{96}\div\sqrt[4]{3}>0$)で表し、
$\sqrt[4]{96}\div\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{32}$	割り算します。

したがって、　$\sqrt[4]{96}\div\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{32}$.

c) $\sqrt{\sqrt[3]{128}}$

$(\sqrt{\sqrt[3]{128}})^2=\sqrt[3]{128}$	平方根の定義を用い、
$[(\sqrt{\sqrt[3]{128}})^2]^3=(\sqrt[3]{128})^3=128$	立方根の定義を使い、
$(\sqrt{\sqrt[3]{128}})^{2\times 3}=128$	累乗の性質を適用することで、
$(\sqrt{\sqrt[3]{128}})^6=128$	積を求め、
$\sqrt{\sqrt[3]{128}}=\sqrt[6]{128}$	累乗を 6 乗根で表します $(\sqrt{\sqrt[3]{128}}>0)$

したがって、　$\sqrt{\sqrt[3]{128}}=\sqrt[6]{128}$.

まとめ

実行するために		以下が必要		n 乗根で表して
a) $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}$	$\Rightarrow$	$(\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b})^n = a\times b$	$\Rightarrow$	$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\times b}$
b) $\sqrt[n]{a}\div\sqrt[n]{b}$	$\Rightarrow$	$(\sqrt[n]{a}\div\sqrt[n]{b})^n = a\div b$	$\Rightarrow$	$\sqrt[n]{a}\div\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\div b}$
c) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$	$\Rightarrow$	$(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{m\times n} = a$	$\Rightarrow$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\times n]{a}$

n 乗根を簡約化するために乗法の性質を用います。

$$\sqrt[n]{a^n\times b}=\sqrt[n]{a^n}\times\sqrt[n]{b}$$
$$=a\sqrt[n]{b}$$

$a_1, a_2, \cdots, a_m$ が実数ならば、
よって、
$\sqrt[n]{a_1}\times\sqrt[n]{a_2}\times\cdots\times\sqrt[n]{a_m}=\sqrt[n]{a_1\times a_2\times\cdots\times a_m}$

b) の性質もまた次のように用いられます。

b) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

累乗根を**簡約化**するとは、初めの値より小さい被開平数を用いて表すことです。
最小値の式　へ簡約化するとは、被開平数を可能な限り小さい値へと簡約化することです。

累乗根を使った演算を行った後は常に最小値の式へと簡約化しなければなりません。

例

1.「導入問題」の結果を簡約化しなさい。

a) $\sqrt[3]{120}$

$\sqrt[3]{120}=\sqrt[3]{2^3\times3\times5}$

$=2\sqrt[3]{3\times5}$

$=2\sqrt[3]{15}$

したがって、$\sqrt[3]{120}=2\sqrt[3]{15}$ となります。

b) $\sqrt[4]{32}$

$\sqrt[4]{32}=\sqrt[4]{2^4\times2}$

$=2\sqrt[4]{2}$

したがって、$\sqrt[4]{32}=2\sqrt[4]{2}$

c) $\sqrt[6]{128}$

$\sqrt[6]{128}=\sqrt[6]{2^6\times2}$

$=2\sqrt[6]{2}$

したがって、$\sqrt[6]{128}=2\sqrt[6]{2}$

2. 以下の演算を行いなさい。

a) $\sqrt[8]{4}\times\sqrt[8]{8}\times\sqrt[8]{2}\times\sqrt[8]{4}$

$\sqrt[8]{4}\times\sqrt[8]{8}\times\sqrt[8]{2}\times\sqrt[8]{4}=\sqrt[8]{4\times8\times2\times4}$

$=\sqrt[8]{2^2\times2^3\times2\times2^2}$

$=\sqrt[8]{2^8}$

$=2$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}$

$\dfrac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{\dfrac{108}{4}}$

$=\sqrt[3]{27}$

$=\sqrt[3]{3^3}$

$=3$

問題

次の演算をして、出た答えを最小値の式へと簡約化しなさい。

a) $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{10}$　　b) $-\sqrt[4]{75}\times\sqrt[4]{50}$　　c) $-\sqrt[5]{45}\times(-\sqrt[5]{81})$

d) $\sqrt[3]{320}\div\sqrt[3]{10}$　　e) $\sqrt[3]{486}\div(-\sqrt[3]{6})$　　f) $-\sqrt[4]{192}\div(-\sqrt[4]{6})$

g) $\sqrt{\sqrt{80}}$　　h) $-\sqrt{\sqrt[3]{640}}$　　i) $\sqrt[3]{-\sqrt{256}}$

数字の各桁の数の合計が 3 で割り切れるならば、その数は割り切れます。

1.7 加法、減法、n 乗根の累乗

導入問題

以下の演算を行いなさい。

a) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}$

b) $(\sqrt[6]{4})^3$

2 つの累乗根が等根で、同じ根指数と被開平数を持つならば、足し算もしくは引き算ができます。

解法

a) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}$

最小値の式へと簡約化し、

$\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^3\times 2}$ と $\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{2\times 3^3}$

$=2\sqrt[3]{2}$ $=3\sqrt[3]{2}$

等根の足し算をします。

$\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}=2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}$

$=5\sqrt[3]{2}$

したがって、 $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}=5\sqrt[3]{2}$ となります。

b) $(\sqrt[6]{4})^3$

累乗を積で分解します。

$(\sqrt[6]{4})^3=\sqrt[6]{4}\times\sqrt[6]{4}\times\sqrt[6]{4}$

$=\sqrt[6]{4\times 4\times 4}$

$=\sqrt[6]{4^3}$ 累乗で表します。

簡約化して $\sqrt[6]{4^3}=\sqrt[6]{(2^2)^3}=\sqrt[6]{2^6}=2.$

したがって、 $(\sqrt[6]{4})^3=2.$

まとめ

1. n 乗根の足し算もしくは引き算をするためのステップは、
   - 累乗根を最小値の式に簡約化します。
   - 等根を加算もしくは減算します。

2.実数の累乗根の累乗は $(\sqrt[n]{a})^m=\underbrace{\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{a}\times\cdots\times\sqrt[n]{a}}_{m\text{ 倍}}$ となり

n乗根の性質を用いて、 $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{m\text{ 倍}}}$

被開平数の累乗で書き直すと、 $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

数 $\sqrt[n]{a}$ は n が偶数で a が負の数ならば、実数ではありません。

すなわち、
$\sqrt{-1},\sqrt{-2},\sqrt{-3},\sqrt[4]{-1},\sqrt[4]{-2},\sqrt[6]{-1}$ と $\sqrt{-2}$ となり、これらは実数ではありません。

問題

1. 以下の演算をしなさい。

a) $\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}$ b) $\sqrt[4]{32}+\sqrt[4]{512}$ c) $\sqrt[4]{80}+\sqrt[4]{405}$ d) $\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{135}$

e) $\sqrt[3]{500}-\sqrt[3]{108}$ f) $\sqrt[3]{576}-\sqrt[3]{72}$ g) $\sqrt[3]{486}-\sqrt[3]{144}$ h) $\sqrt[4]{243}-\sqrt[4]{48}$

i) $(\sqrt[3]{27})^2$ j) $(\sqrt[6]{8})^5$ k) $(\sqrt[3]{25})^2$ l) $(\sqrt[4]{27})^3$

2. $2=\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}-\sqrt[3]{-10+\sqrt{108}}$ であることを示すために、次のステップを踏んでください。

a) $(1+\sqrt{3})^3=10+6\sqrt{3}$ であることを示し、次に立方根で等式を書いてください。

b) $(-1+\sqrt{3})^3=-10+6\sqrt{3}$ であることを示し、次に立方根で等式を書いてください。

c) 上の a) から l) の問題のうち立方根の引き算を行い答えを出してください。

1.8 有理数の指数

導入問題

1. 次の式を簡約化し、その答を累乗で表してください。

a) $\sqrt{2^6}$　　b) $\sqrt[3]{2^{12}}$

2. $\sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2^2}$ であることを示してください。

すべての正の実数 a について以下であることを復習しよう。
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \times n]{a}$ y $\sqrt[n]{a^n} = a$.

解法

1. a) $\sqrt{2^6} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2^2}$

$= 2 \times 2 \times 2$

$= 2^3$.

したがって、 $\sqrt{2^6} = 2^3$.

$3 = \frac{6}{2}$ → 指数 / 根指数 ということが分かります。

b) $\sqrt[3]{2^{12}} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3}$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 2^4$.

したがって、 $\sqrt[3]{2^{12}} = 2^4$ となります。

$4 = \frac{12}{3}$ → 指数 / 根指数 ということが分かります。

2. $\sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{\sqrt{2^4}}$　　n 乗根の性質によって、

$= \sqrt[3]{\sqrt{(2^2)^2}}$　　累乗の性質を適用するには、

$= \sqrt[3]{2^2}$　　$\sqrt[n]{a^n} = a$ であることを用います。

したがって、 $\sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2^2}$. $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ → 指数 / 根指数 であることが分かります。

定義

a は正の実数で、m と n は整数、n は正の数ならば、次のように定義されます。

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

有理数の指数を持つ累乗 $\frac{m}{n}$ は、m 乗の n 乗根です。

さらに、r が正の整数ならば、$\sqrt[nr]{a^{mr}} = \sqrt[n]{a^m}$ となり、その結果、有理数の指数の簡約化は、すべての $a > 0$ に対して有効となります。

$$a^{\frac{mr}{nr}} = a^{\frac{m}{n}}$$

問題

1. 以下の累乗根を分数の指数を用いた累乗で書き、可能なら簡約化しなさい。

a) $\sqrt{2}$　　b) $\sqrt{3^3}$　　c) $\sqrt[3]{2}$　　d) $\sqrt[3]{3^2}$

e) $\sqrt[4]{5^2}$　　f) $\sqrt[5]{2^{10}}$　　g) $\sqrt[5]{6^3}$　　h) $\sqrt[6]{5^2}$

2. 以下の分数の累乗を累乗が 1 つの累乗根で書きなさい。

a) $5^{\frac{1}{2}}$　　b) $3^{\frac{5}{2}}$　　c) $2^{\frac{5}{2}}$　　d) $7^{\frac{3}{8}}$

e) $12^{\frac{3}{7}}$　　f) $11^{\frac{7}{2}}$　　g) $9^{\frac{5}{3}}$　　h) $10^{\frac{1}{4}}$

1.9 有理数の指数の性質

導入問題

以下の演算をし、答えを有理数の指数の累乗で表しなさい。

a) $2^{\frac{5}{4}} \times 2^{\frac{3}{4}}$ b) $3^{\frac{10}{3}} \div 3^{\frac{1}{3}}$ c) $(8^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$ d) $3^{\frac{2}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}}$ e) $32^{\frac{3}{4}} \div 2^{\frac{3}{4}}$

解法

a) $2^{\frac{5}{4}} \times 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^5} \times \sqrt[4]{2^3}$ 累乗根で表し、

$= \sqrt[4]{2^5 \times 2^3}$

$= \sqrt[4]{2^8}$

$= 2^{\frac{8}{4}}$

$= 2^2.$

したがって、$2^{\frac{5}{4}} \times 2^{\frac{3}{4}} = 2^2$ となります。$2^{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}} = 2^2$ であることが示されます。

c) $(8^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = (\sqrt[3]{8^2})^{\frac{1}{2}}$ 立方根で表され、

$= \sqrt[2]{\sqrt[3]{8^2}}$ 平方根で表され、

$= \sqrt[6]{8^2}$

$= 8^{\frac{2}{6}}$

$= 8^{\frac{1}{3}}.$

したがって、$(8^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{3}}$ となります。$8^{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{3}}$であることが示されます。

e) $32^{\frac{3}{4}} \div 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{32^3} \div \sqrt[4]{2^3}$ 累乗根で表し、

$= \sqrt[4]{32^3 \div 2^3}$

$= \sqrt[4]{(32 \div 2)^3}$

$= \sqrt[4]{16^3}$

$= 16^{\frac{3}{4}}.$

したがって、$32^{\frac{3}{4}} \div 2^{\frac{3}{4}} = 16^{\frac{3}{4}}$ となります。$(32 \div 2)^{\frac{3}{4}} = 16^{\frac{3}{4}}$ であることが示されます。

b) $3^{\frac{10}{3}} \div 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3^{10}} \div \sqrt[3]{3^1}$ 累乗根で表し、

$= \sqrt[3]{3^{10} \div 3^1}$

$= \sqrt[3]{3^9}$

$= 3^{\frac{9}{3}}$

$= 3^3.$

したがって、$3^{\frac{10}{3}} \div 3^{\frac{1}{3}} = 3^3$ となります。$3^{\frac{10}{3}-\frac{1}{3}} = 3^3$であることが示されます。

d) $3^{\frac{2}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} \times \sqrt[3]{9^2}$ 累乗根で表し、

$= \sqrt[3]{3^2 \times 9^2}$

$= \sqrt[3]{(3 \times 9)^2}$

$= \sqrt[3]{27^2}$

$= 27^{\frac{2}{3}}.$

したがって、 $3^{\frac{2}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}} = 27^{\frac{2}{3}}.$

$(3 \times 9)^{\frac{2}{3}} = 27^{\frac{2}{3}}$ であることが示されます。

であることが示されます。

まとめ

1. 指数が整数の場合の性質はまた指数が有理数の場合にも応用されます。a と b が、正の実数ならば、m と n は有理数であり、よって、

   a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ c) $(a^m)^n = a^{m \times n}$ d) $a^m \times b^m = (a \times b)^m$ e) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

2. 有理数の累乗を簡約化するためには、底が最小値であることを確認する必要があります。

例

以下の「導入問題 」の c)、d) 、e) の答えを簡約化しなさい。

c) $8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{\cancel{3} \times 1}{\cancel{3}}} = 2$ d) $27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{\cancel{3} \times 2}{\cancel{3}}} = 3^2$ e) $16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{\cancel{4} \times 3}{\cancel{4}}} = 2^3$

問題

以下の演算を行い、その解答を簡約化しなさい。

a) $2^{\frac{7}{5}} \times 2^{\frac{8}{5}}$ b) $9^{\frac{1}{5}} \times 9^{\frac{3}{10}}$ c) $25 \div 25^{\frac{1}{2}}$ d) $27^{\frac{5}{3}} \div 27$

e) $(9^{\frac{9}{7}})^{\frac{7}{6}}$ f) $(8^{\frac{10}{9}})^{\frac{3}{2}}$ g) $16^{\frac{5}{6}} \times 4^{\frac{5}{6}}$ h) $98^{\frac{1}{2}} \div 2^{\frac{1}{2}}$

1.10 異なる根指数を持つ累乗根の演算

導入問題

以下の演算をしなさい。

a) $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3}$

b) $\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[12]{9}$

解法

それぞれの累乗根を有理数のべき指数で表します。

a) $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3}$

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3} &= 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}} \\ &= 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} \\ &= 3^{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}} \\ &= 3^{1} \\ &= 3.\end{aligned}$$

したがって、 $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3} = 3$ となります。

b) $\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[12]{9}$

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[12]{9} &= 9^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{1}{3}} \div 9^{\frac{1}{12}} \\ &= 9^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}} \\ &= 9^{\frac{3}{12}+\frac{4}{12}-\frac{1}{12}} \\ &= 9^{\frac{6}{12}} \\ &= 9^{\frac{1}{2}} \\ &= (3^{2})^{\frac{1}{2}} \qquad \text{簡約化して} \\ &= 3.\end{aligned}$$

したがって、 $\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[12]{9} = 3$ となります。

まとめ

異なる根指数を持つ累乗根を計算するためには、次のステップを実行します。
1. それぞれの累乗根は、有理数のべき指数の累乗で表されます。
2. 演算は、有理数のべき指数の性質を用いて行われます。
3. 結果を簡約化します。

例

以下の演算を行いなさい。

a) $\sqrt{32} \times \sqrt[3]{4} \div \sqrt[6]{2}$

$$\begin{aligned}\sqrt{32} \times \sqrt[3]{4} \div \sqrt[6]{2} &= \sqrt{2^{5}} \times \sqrt[3]{2^{2}} \div \sqrt[6]{2} \\ &= 2^{\frac{5}{2}} \times 2^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{6}} \\ &= 2^{\frac{5}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} \\ &= 2^{\frac{15}{6}+\frac{4}{6}-\frac{1}{6}} \\ &= 2^{\frac{18}{6}} \\ &= 2^{3} \\ &= 8.\end{aligned}$$

したがって、 $\sqrt{32} \times \sqrt[3]{4} \div \sqrt[6]{2} = 8$ となります。

b) $\sqrt{3} \times \sqrt[6]{3}$

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \times \sqrt[6]{3} &= 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{6}} \\ &= 3^{\frac{3}{6}+\frac{1}{6}} \\ &= 3^{\frac{4}{6}} \\ &= 3^{\frac{2}{3}} \qquad \text{簡約化ができず、} \\ &= \sqrt[3]{3^{2}} \qquad \text{累乗根で表し、} \\ &= \sqrt[3]{9}.\end{aligned}$$

したがって、 $\sqrt{3} \times \sqrt[6]{3} = \sqrt[3]{9}$ となります。

問題

以下の演算を行い、その解答を簡約化しなさい。

a) $\sqrt{8} \times \sqrt[4]{8} \div \sqrt[12]{8}$

b) $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3}$

d) $\sqrt[4]{4} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[12]{32}$

e) $\sqrt{243} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[6]{3}$

f) $\sqrt[4]{25} \div \sqrt[6]{5}$

1.11 復習問題

1. 以下の演算を実行し、結果を正の指数の累乗を用いて表しなさい。

a) $5^6 \times 5^5$　b) $(-4) \times (-4)^2$　c) $2^6 \times 2^{-3}$　d) $3^{-7} \times 3^7$

e) $(-6)^{-1} \times (-6)^{-2}$　f) $3^9 \div 3^6$　g) $2 \div 2^4$　h) $(-5)^2 \div (-5)^{-3}$

i) $4^{-5} \div 4^3$　j) $(-2)^{-3} \div (-2)^{-2}$　k) $(4^2)^3$　l) $[(-3)^2]^{-3}$

m) $(2^{-4})^3$　n) $(6^{-1})^{-1}$　o) $(5^{-2})^{-2}$　p) $[(-2)^{-3}]^{-5}$

2. 以下の演習を行い、結果を正の指数の累乗を用いて表しなさい。

a) $3^4 \times 5^4$　b) $2^{-6} \times 3^{-6}$　c) $(-4)^2 \times 8^2$　d) $(-6)^{-3} \times (-5)^{-3}$

e) $9^5 \div 3^5$　f) $16^{-2} \div (-2)^{-2}$　g) $(-35)^7 \div 5^7$　h) $(-18)^{-4} \div (-3)^{-4}$

3. 以下の演算を行い、その答えを簡約化しなさい。

a) $\sqrt[5]{12} \times \sqrt[5]{24}$　b) $\sqrt[3]{-20} \times \sqrt[3]{25}$　c) $\sqrt[3]{48} \div \sqrt[3]{6}$　d) $\sqrt[3]{80} \div \sqrt[3]{-5}$

e) $\sqrt{\sqrt{324}}$　f) $\sqrt[3]{56} + \sqrt[3]{189}$　g) $\sqrt[4]{64} - \sqrt[4]{4}$　h) $(\sqrt[3]{24})^2$

4. 以下の累乗根を簡約化しなさい。

それぞれの累乗根を有理数の累乗で書きなさい。

a) $\sqrt[4]{4}$　b) $\sqrt[6]{9}$　c) $\sqrt[6]{27}$　d) $\sqrt[6]{16}$

5. 以下の演習を行い、その答を同じ数式の展開へと簡約化しなさい。

a) $\sqrt[6]{9} \times \sqrt[4]{9}$　b) $\sqrt{8} \times \sqrt[8]{8} \times \sqrt[8]{2}$　c) $\sqrt{27} \div \sqrt[3]{3}$　d) $\sqrt[6]{8} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[6]{2}$

6. 以下の演算を行いなさい。

a) $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9})$　b) $(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9})$

無理数のべき指数

ルート 2（2 のルート記号付き）は、無理数で、その結果、その値は近似値にしかなりません。$\sqrt{2} = 1.414213...$

次の有理数の数列を考えなさい。

$3^1 = 3$,　$3^{1.4} = 4.655536...$,　$3^{1.41} = 4.706965...$,　$3^{1.414} = 4.727695...$,　$3^{1.4142} = 4.728733...$

この数列は、実数の 4.728804... に近似します。
この数列のべき指数は、$\sqrt{2}$ の値に近似します。すなわち、この数列は、$3^{\sqrt{2}}$ の値に近似すると言えます。

このような形で、x が無理数で $a > 0$ ならば、前述の手順にしたがって累乗 a^x を定義することが可能です。

したがって、累乗 a^x はすべての実数 x と $a > 0$ に対し定義されます。これまで見てきた性質は、実数の指数すべてに対して一般化できます。a と b が正の実数ならば、r と s は実数となります。

a) $a^r \times a^s = a^{r+s}$　b) $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$　c) $(a^r)^s = a^{r \times s}$　d) $a^r \times b^r = (a \times b)^r$　e) $\dfrac{a^r}{b^r} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^r$

2.1 指数関数の定義

導入問題

以下の a) と b) のそれぞれについて、与えられた関数の表とグラフを完成させなさい。

a) $f(x) = 2^x$　　b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	−2	−1	0	1	2
y					

解法

a) $f(x) = 2^x$

$x = -2$ ならば $f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$ となります。

$x = -1$ ならば $f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ となります。

$x = 0$ ならば $f(0) = 2^0 = 1$ となります。

$x = 1$ ならば $f(1) = 2^1 = 2$ となります。

$x = 2$ ならば $f(2) = 2^2 = 4$ となります。

x	−2	−1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$x = -2$ ならば $f(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = (2^{-1})^{-2} = 2^2 = 4$ となります。

$x = -1$ ならば $f(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = (2^{-1})^{-1} = 2^1 = 2$ となります。

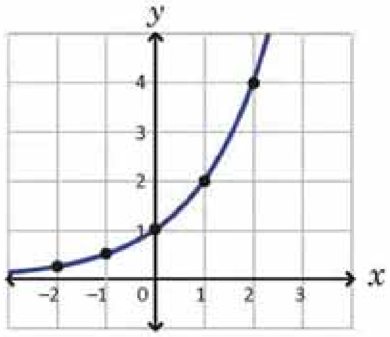
$x = 0$ ならば $f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ となります。

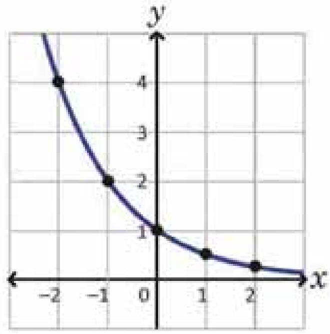
$x = 1$ ならば $f(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$ となります。

$x = 2$ ならば $f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ となります。

x	−2	−1	0	1	2
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

それぞれの場合、得られた複数の点上をなぞる曲線となります。





定義

a は実数で、1以外でなくてはならなりません。関数 $f: f(x) = a^x$ で定義された $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は**指数関数**と呼ばれます。数 a を**底**と呼びます。

指数関数 $f(x) = a^x$ のグラフは、点 (0, 1) と (1, a) を通ります。

$0 < a < 1$ が満たされるならば、よって $f(x) = a^x$ となり、$b = \frac{1}{a} > 1$ の場合、$f(x) = b^{-x}$ の形で表せます。

例えば、　$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}$.

指数関数において、変数 x は指数にあります。

問題

以下の指数関数のグラフを描いてください。

a) $f(x) = 3^x$　　b) $f(x) = 3^{-x}$　　c) $f(x) = 4^x$　　d) $f(x) = 4^{-x}$

2.2 対称性のある指数関数

導入問題

1. 以下の関数のグラフを同一のデカルト平面で描きなさい。
   a) $f_1(x) = 3^x$　　b) $f_2(x) = 3^{-x}$　　c) $f_3(x) = -3^x$
2. y 軸の座標が同じである $f_1(x)$ と $f_2(x)$ のそれぞれの点の x の座標を比較しなさい。
3. x 軸の座標が同じ $f_1(x)$ と $f_3(x)$ のそれぞれの点のy の座標を比較しなさい。

解法

1. a) $f_1(x) = 3^x$

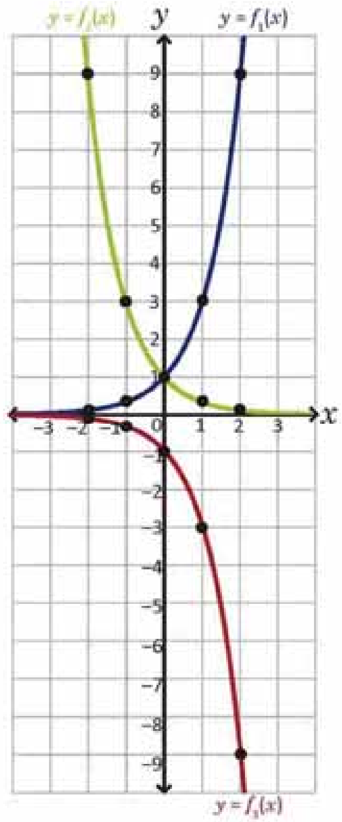
x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

b) $f_2(x) = 3^{-x}$

x	-2	-1	0	1	2
y	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

c) $f_3(x) = -3^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-3	-9



2.

$f_1(x) = 3^x$	$f_2(x) = 3^{-x}$
$\left(-2, \frac{1}{9}\right)$	$\left(2, \frac{1}{9}\right)$
$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$	$\left(1, \frac{1}{3}\right)$
$(0, 1)$	$(0, 1)$
$(1, 3)$	$(-1, 3)$
$(2, 9)$	$(-2, 9)$

$(x, と)$ が f_1 のグラフ上の点ならば、よって $(-x, y)$ は f_2 のグラフ上の点となります。これらのグラフは y 軸に関して対称です。

3.

$f_1(x) = 3^x$	$f_3(x) = -3^x$
$\left(-2, \frac{1}{9}\right)$	$\left(-2, -\frac{1}{9}\right)$
$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$	$\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$
$(0, 1)$	$(0, -1)$
$(1, 3)$	$(1, -3)$
$(2, 9)$	$(2, -9)$

(x, y) が f_1 のグラフ上の点ならば、よって $(x, -y)$ は f_2 のグラフ上の点となります。これらのグラフは x 軸に関して対称です。

以下のことが分かります。
- $y = 3^{-x}$ のグラフは、y 軸に関して関数 $y = 3^x$ のグラフと対称です。
- 関数 $y = 3^{-x}$ のグラフは、x 軸に関して、関数 $y = 3^x$ のグラフと対称です。

まとめ

1. 関数 $y = a^x$ と $y = a^{-x}$ は y 軸に関して対称です。
   $y = a^{-x}$ のグラフを描くために、$y = a^x$ のグラフの各点のx軸の座標に関しての記号を入れ替えます。

2. 関数 $y = a^x$ と $y = -a^x$ はx軸に関して対称です。
   $y = -a^x$ のグラフを描くために、$y = a^x$ のグラフの各点のy軸の座標に関しての記号を入れ替えます。

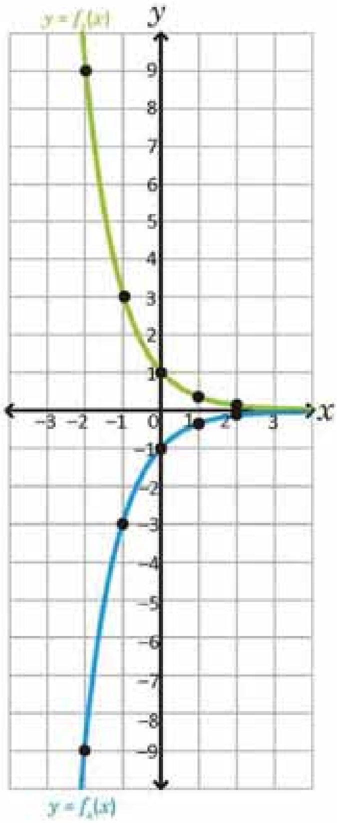
3. 関数 $y = a^{-x}$ と $y = -a^{-x}$ は x軸に関して対称です。
   $y = -a^{-x}$ のグラフを描くために、$y = a^{-x}$ のグラフの各点のy軸の座標に関しての記号を入れ替えます。

例

$f_4(x) = -3^{-x}$ をグラフで描きなさい。

$f_4(x) = -3^{-x}$ のグラフを描くために、$f_2(x) = 3^{-x}$ のグラフの各点の y 軸の座標関しての記号を入れ替えます。

$f_2(x) = 3^{-x}$	$f_4(x) = -3^{-x}$
$\left(2, \frac{1}{9}\right)$	$\left(2, -\frac{1}{9}\right)$
$\left(1, \frac{1}{3}\right)$	$\left(1, -\frac{1}{3}\right)$
$(0, 1)$	$(0, -1)$
$(-1, 3)$	$(-1, -3)$
$(-2, 9)$	$(-2, -9)$



問題

1. 次の関数のグラフを、対称性を用いて、同じデカルト平面上に描きなさい。
   $f_1(x) = 2^x, f_2(x) = 2^{-x}, f_3(x) = -2^x$ y $f_4(x) = -2^{-x}$.

2. 関数 $f_4(x) = 3^x$ をもとに関数 $f_1(x) = -3^{-x}$ のグラフを書きなさい。

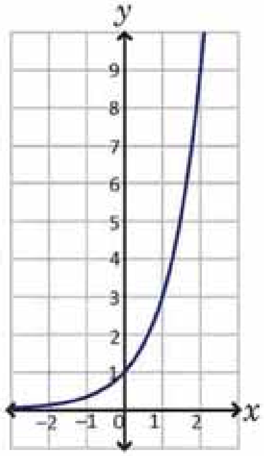
f_4 が原点について f_1 に関して対称であることを確認してください 。 (a, b) が f_1 のグラフ上にあるならば、よって $(-a, -b)$ は f_4 のグラフ上にあります。

2.3 指数関数の特徴

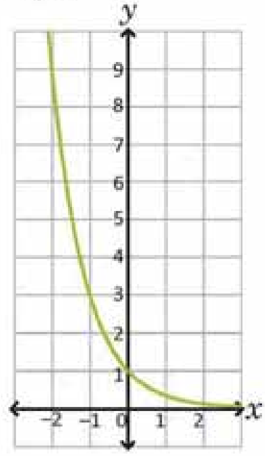
導入問題

以下の関数とそのグラフを示します。

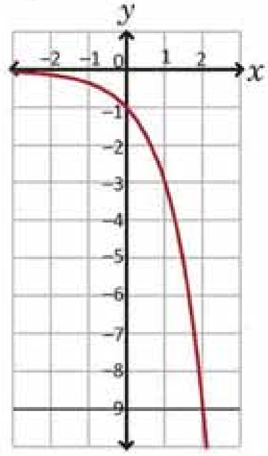
1. $f_1(x) = 3^x$



2. $f_2(x) = 3^{-x}$



3. $f_3(x) = -3^x$



各グラフに対し以下を決定しなさい。

a) 座標軸との切片

b)定義域と域値

c) 増加関数か減少関数か

d) 漸近線と関数

$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$ ならば、f は増加関数です。
$a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$ ならば、f は減少関数です。

解法

1. $f_1(x) = 3^x$

a) 座標軸との切片
y 軸：$f_1(0) = 3^0 = 1$、切片は(0, 1)
x 軸：$3^x = 0$ であるような実数値 x は存在しません。

b) 定義域と域値
$D_{f_1} = \mathbb{R}$
$R_{f_1} =]0, \infty[$

c) この関数は増加関数です。
$b < c$ ならば、よって $3^b < 3^c$

d) 漸近線と関数
$y = 0$ は、関数の水平の漸近線で 、よってf_1 のグラフは、x がその値を減少するにつれて、直線 $y = 0$ a に近似します。

2. $f_2(x) = 3^{-x}$

a) 座標軸との切片
y 軸： $f_2(0) = 3^{-0} = 3^0 = 1$、切片は(0, 1)
x 軸：$3^{-x} = 0$ であるような実数値 x は存在しません。

b) 定義域と域値
$D_{f_2} = \mathbb{R}$
$R_{f_2} =]0, \infty[$

c) この関数は減少関数です。
$b < c$ ならば、よって $3^{-b} > 3^{-c}$

d) 漸近線と関数
$y = 0$ は関数の水平な漸近線です。

3. 関数 $f_3(x) = -3^x$ と $f_1(x) = 3^x$ のグラフは x 軸に対し対称です。

	y 軸における切片(y 切片)	定義域	域値	増加もしく減少	漸近線
$f_1(x) = 3^x$	(0, 1)	$\mathbb{R}$	$]0, \infty[$	増加 $b < c$ ならば、よって $3^b < 3^c$	$y = 0$
$f_3(x) = -3^x$	(0, −1)	$\mathbb{R}$	$]-\infty, 0[$	減少 $b < c$ ならば、よって $-3^b > -3^c$	$y = 0$

まとめ

次の表は $a > 1$である場合の関数 $f_1(x) = a^x$, $f_2(x) = a^{-x}$ y $f_3(x) = -a^x$ のグラフの特徴をまとめたものです。

	$f_1(x) = a^x$	$f_2(x) = a^{-x}$	$f_3(x) = -a^x$
座標軸 y における切片	$(0, 1)$	$(0, 1)$	$(0, -1)$
定義域	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
域値	$R_{f_1} =]0, +\infty[$ $= \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$	$R_{f_2} =]0, +\infty[$	$R_{f_2} =]-\infty, 0[$ $= \{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\}$
増加もしくは減少	増加 $b < c$ ならば、よって $a^b < a^c$	減少 $b < c$ ならば、よって $a^{-b} > a^{-c}$	減少 $b < c$ ならば、よって $-a^b > -a^c$
漸近線	$y = 0$	$y = 0$	$y = 0$

また、関数 f_1、f_2、f_3 は x 軸との切片がないことに注目してください。

a が $a > 1$ であるような実数ならば、よって、

- 関数 $f(x) = a^x$ は、**増加の指数関数**といいます。
- 関数$f(x) = a^{-x}$ は、**減少の指数関数**といいます。

問題

1. 関数 $f(x) = a^{-x}$ の特徴をもとに、関数 $f(x) = -a^{-x}$ の特徴を表にまとめるために、x 軸に関する対称性を用いなさい。

	y 軸における切片 (y 切片)	定義域	域値	増加もしくは減少	漸近線
$f(x) = a^{-x}$	$(0, 1)$	$\mathbb{R}$	$]0, \infty[$	減少 $b < c$ ならば、よって $a^{-b} > a^{-c}$	$y = 0$
$f(x) = -a^{-x}$		$\mathbb{R}$			$y = 0$

2. 次の関数の、y 軸における切片、定義域、域値、単調性、漸近線を決定しなさい。

   a) $f_1(x) = 2^x$　　b) $f_2(x) = 2^{-x}$　　c) $f_3(x) = -2^x$　　d) $f_4(x) = -2^{-x}$

3. 次の不等式を関数 $y = 2^x$ のグラフを用いて解きなさい 。

   a) $2^x \geq 1$　　b) $2^x < 1$

4. 関数 $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ が $[0, \infty[$ において増加であることを、以下のステップを踏んで明らかにしなさい。

   a) $c \neq 0$ と $d \neq 0$ならば、よって $\left(c + \frac{1}{c}\right) - \left(d + \frac{1}{d}\right) = (c - d)\left(1 - \frac{1}{cd}\right)$ であることを明らかにしなさい。

   b) a) から、$(2^b + 2^{-b}) - (2^a + 2^{-a}) = (2^b - 2^a)\left(1 - \frac{1}{2^{a+b}}\right)$ を証明しなさい。

   c) b) から、$0 \leq a < b$ ならば、よって $< f(b)$ であるという結論を導きなさい。

5. 関数 $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ は $]-\infty, 0]$ において減少関数であることを明らかにしなさい。

2.4 指数関数の水平移動と垂直移動

導入問題

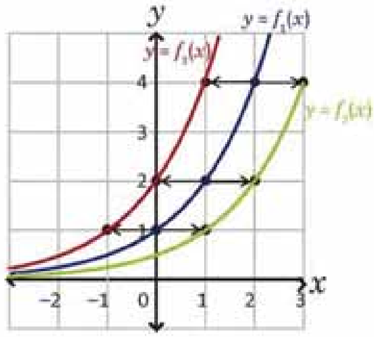
1. 以下の a) と b) それぞれの関数のグラフを同一のデカルト平面上に描きなさい。
   a) $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^{x-1}$, $f_3(x) = 2^{x+1}$　　b) $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^x - 1$, $f_3(x) = 2^x + 1$

2. 関数 $f_1(x)$ の水平移動と平行移動で、関数 $f_2(x)$ と$f_3(x)$ のグラフを描きなさい。

解法

a) $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^{x-1}$, $f_3(x) = 2^{x+1}$

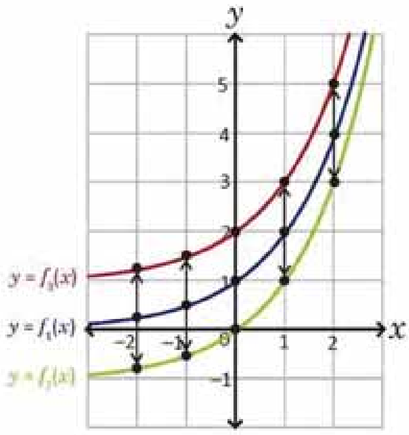
x	-2	-1	0	1	2
$f_1(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f_2(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$f_3(x)$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



関数のグラフを描く時は以下に注目しましょう。
- $f_2(x)$ のグラフは、関数 $f_1(x)$ を右へ 1 単位水平移動したものです。
- $f_3(x)$ のグラフは、関数 $f_1(x)$ を左へ 1 単位水平移動したものです。

b) $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^x - 1$, $f_3(x) = 2^x + 1$

x	-2	-1	0	1	2
$f_1(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f_2(x)$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	3
$f_3(x)$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	2	3	5



- $f_2(x)$ のグラフは、関数 $f_1(x)$ を下方に 1 単位垂直移動したものです。
- $f_3(x)$ のグラフは、関数 $f_1(x)$ を上方に 1 単位垂直移動したものです。

$f(x) = a^x + k$ は、$y = k$ の水平漸近線

まとめ

$f(x) = a^{x-h}$ のグラフは、関数 $f(x) = a^x$ を h 単位水平移動したものです。
- $h > 0$ ならば、移動は右方向へとなります。
- $h < 0$ ならば、移動は左方向へとなります。

関数 $f(x) = a^x + k$ のグラフは、関数 $f(x) = a^x$ が k 単位垂直移動したものです。
- $k > 0$ ならば、移動は上方へとなります。
- $k < 0$ ならば、移動は下方へとなります。

問題

1. $f(x) = 3^x$ のグラフをもとに、以下の関数のグラフを描きなさい。
   a) $f(x) = 3^{x-2}$　　b) $f(x) = 3^{x+1}$　　c) $f(x) = 3^x - 3$

2. $f(x) = 4^x$ のグラフをもとに、以下の関数のグラフを描きなさい。
   a) $f(x) = 4^{x-1}$　　b) $f(x) = 4^{x+2}$　　c) $f(x) = 4^x + 2$

ユニット 4

2.5 対称性と移動性*を持つ指数関数のグラフ

導入問題

以下の a)、b) のそれぞれにおいて、対称性と移動性を用いて $f_1(x) = 2^x$ のグラフをもとに、$f(x)$ のグラフを描きなさい。

a) $f(x) = 2^{x-1} + 1$　　　b) $f(x) = 2^{-(x-1)} - 1$

対称性は、累乗が負の数もしくは変数が負の記号を持っている時に適用できます。

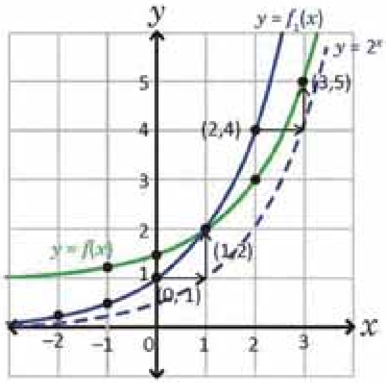
解法

a) f_1 のグラフは、2.1 の授業ですでに描かれています。

f_1 の右への 1 単位の移動で、$y = 2^{x-1}$ のグラフを描きます。

y の 1 単位上方への移動で、$f(x) = 2^{x-1} + 1$ のグラフを描きます。

(x, y) が $f_1(x)$ の点ならば、よって点 $(x + 1, y + 1)$ は、$f(x)$ のグラフの点になります。

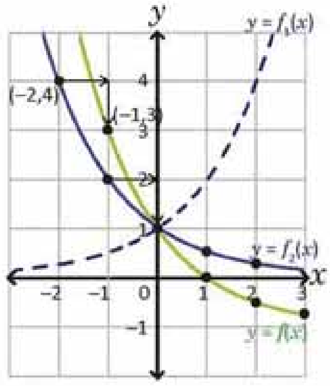


b) y 軸に対し f_1 のグラフと対称であることをもとに、$f_2(x) = 2^{-x}$ のグラフを描きます。

$f(x) = f_2(x - 1) - 1$と書くことができます。

したがって、$f(x)$ は $f_2(x)$ を右へ 1 単位、下方へ 1 単位移動したものです。

$f_2(x)$ の点を (x, y) とすると、よって、点 $(x + 1, y - 1)$ は $f(x)$ のグラフ上の点となります。

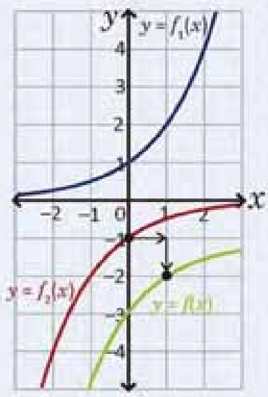


まとめ

指数関数 $f(x)$ のグラフを作成するには、次のステップを実行します。

1. $f_1(x) = a^x$ のグラフを描きます。
2. $f(x)$ の累乗と指数の記号に従って関数 $f_2(x)$ を描きます。
   - a^{-x} は、y 軸に関しての対称性が用いられ
   - $-a^x$ は、x 軸に関しての対称性が用いられ
   - $-a^{-x}$ は、x 軸に関して対称性が用いられます。
3. 移動させた $f(x) = f_2(x - h) + k$ を書くには、f_2 のグラフの点 (x, y) は、f のグラフの点 $(x + h, y + k)$ まで移動させます。

例：$f(x) = -2^{-(x-1)} - 1$



1. $f_1(x) = 2^x$

原点について対称。

2. $f_2(x) = -2^{-x}$

移動

3. $f(x) = -2^{-(x-1)} - 1$

問題

次の関数のグラフを　対称性と移動を用いて描きなさい。

a) $f(x) = 3^{x-2} + 1$　　b) $f(x) = 4^{-x-1} - 3$　　c) $f(x) = -2^{x-1} + 2$　　d) $f(x) = -3^{-x+1} - 3$

e) $f(x) = 3^{-x+1} + 2$　　f) $f(x) = 2^{-x-2} + 1$　　g) $f(x) = -3^{x-1} - 1$　　h) $f(x) = -3^{-x-2} + 2$

2.6 指数方程式

導入問題

次の各方程式の解を見つけなさい。

a) $5^x = 25$　　b) $2^x = \frac{1}{8}$　　c) $4^x = 8$　　d) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 81$

解法

a) $5^x = 25$

$25 = 5^2$ と分解し、

$5^x = 5^2$ と置換し、

したがって、$x = 2$

b) $2^x = \frac{1}{8}$

$8 = 2^3$ と分解し、

$2^x = \frac{1}{2^3}$ と置換し、

負の指数 $2^x = 2^{-3}$ を用いて、

したがって、$x = -3$

c) $4^x = 8$

$4 = 2^2$ および $8 = 2^3$ と分解し、

$(2^2)^x = 2^3$ と置換し、

累乗 $2^{2x} = 2^3$ の特徴を適用し、

よって、$2x = 3$

したがって、$x = \frac{3}{2}$

d) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 81$

$9 = 3^2$ および $81 = 3^4$ と分解し、

$\left(\frac{1}{3^2}\right)^x = 3^4$ と置換し、

負の累乗を用いて書き：$(3^{-2})^x = 3^4$

累乗 の特徴を適用し：$3^{-2x} = 3^4$、

よって、$-2x = 4$

したがって、$x = -2$

定義

指数方程式とは $a > 0$ で $a \neq 1$ である a^x の形の項を持つ方程式です。
a^x con $a >$ と y $a \neq 1$.

指数方程式を解くには、以下のように計算します。

1. すべての項を、累乗の等式を得るために、同じ底で書きます。$a^r = a^s$ ⟶
2. 指数が $r = s$ と等しくなるようにし、この方程式を解きます。 ⟶

例：　$27^x = \frac{1}{9}$

$27^x = (3^3)^x = 3^{3x}$ と $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$

$3^{3x} = 3^{-2}$

$3x = -2$

したがって　$x = -\frac{2}{3}$.

問題

次の指数方程式を解きなさい。

a) $2^x = 16$　　b) $3^{-x+1} = 9^{x+2}$　　c) $5^{3x-4} = \frac{1}{25}$　　d) $2^{2x-3} = \frac{1}{4}$

e) $2^{5x+7} = \frac{1}{8}$　　f) $9^{3x+1} = 27^{-2x-2}$　　g) $8^{-x+3} = 4^{x+2}$　　h) $4^{2x-1} = \frac{1}{2}$

ユニット4

2.7 2 次方程式へと簡約化できる指数方程式

導入問題

指数方程式 $4^x - 2^x = 2$ をもとに以下を行いなさい。

a) 4^xを 2 の累乗で書きなさい。
b) 等式の 2^xを y に置き換えなさい。
c) その結果得られた方程式を解きなさい。
d) 得られた解において等式の y を 2^x に置き換えなさい。
e) その結果得られた各方程式を解きなさい。

解法

a) 2 の累乗で 4^xを表します。

$4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$　　$4 = 2^2$を分解すると、

したがって、等式 $(2^2)^x - 2^x = 2$ が得られます。

b) $(2^2)^x = (2^x)^2$ であることを用い、次が得られます。

$$\begin{array}{ccccc} (2^x)^2 & - & 2^x & = & 2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ y^2 & - & y & = & 2 \end{array}$$

c) その結果得られた方程式を解きなさい。

$y^2 - y = 2$ は 2 次方程式で、これを解くと、

$$y^2 - y - 2 = 0$$
$$(y - 2)(y + 1) = 0$$
$$y = 2 \text{ または } y = -1$$

d) 得られた解において等式の y を 2^x に置き換えなさい。

$$\begin{array}{ccc} y = 2 & \text{または} & y = -1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 2^x = 2 & \text{または} & 2^x = -1 \end{array}$$

e) その結果得られた各方程式を解きなさい。

$2^x = 2$　　　または、 $2^x = -1$, すべての実数 x にとって、$2^x > 0$ であることから、

$2^x = 2^1$　　　$2^x = -1$、この方程式には解がありません。

$x = 1$

したがって、解は $x = 1$

まとめ

累乗の引き算もしくは足し算が含まれる指数方程式は、底の 1 つがもう 1 つの底の2乗ならば、2 次方程式へと簡約化できます。

この種の方程式は次のように表されます。$p(a^x)^2 + qa^x + r = 0$

これを解くには、次のように計算をします。
1. 変数 $y = a^x$ と変えます。
2. 前にステップで得られた方程式 $py^2 + qy + r = 0$ を解きます。
3. 得られた解 $y = y_1$、$y = y_2$ の y を a^x で置き換えます。$a^x = y_1$ 、$a^x = y_2$
4. 最後に、可能ならば、両方の方程式を解きます。これらが、元の方程式の解です。

問題

以下の指数方程式を、2 次方程式に簡約化して解きなさい。

a) $4^x - 2^x - 12 = 0$　　b) $9^x - 2(3^x) + 1 = 0$

c) $4^x - 6(2^x) + 8 = 0$　　d) $5(25^x) - 26(5^x) + 5 = 0$

e) $9^{x+1} + 8(3^x) - 1 = 0$　　f) $4^{x+2} - 5(2^{x+1}) + 1 = 0$

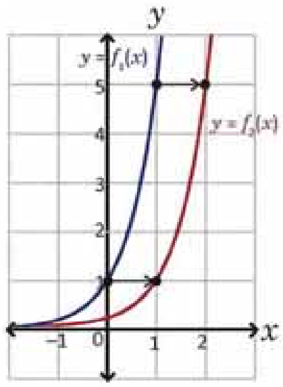
累乗がa^{x+r}の形を持ち、r が実数であるならば、$a^{x+r} = a^r(a^x)$ と書き直せます。
例えば、$2^{x+1} = 2(2^x)$

2.8 復習問題

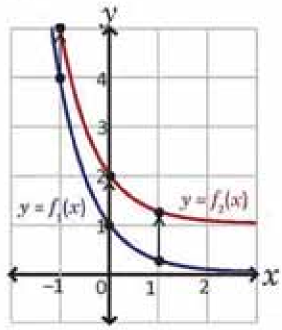
1. 次の命題を証明しなさい。
   a) 関数 $y = 2^x$ と $y = 2^{-x}$ のグラフは、y 軸に対し対称です。
   b) 関数 $y = 3x$ と $y = -3x$ のグラフは、x 軸に対し対称です。
   c) (a, b) が関数 $y = 3^x$ のグラフ上の点ならば、よって $(-a, -b)$ は　$y = -3^x$ の（グラフ上の）点です。

2. 関数 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ を用いて、$f_2(x)$ の方程式を、$f_1(x)$ をもとに決定しなさい。

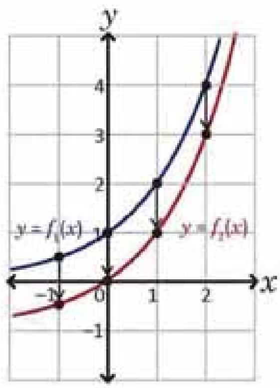
a) $f_1(x) = 5^x$



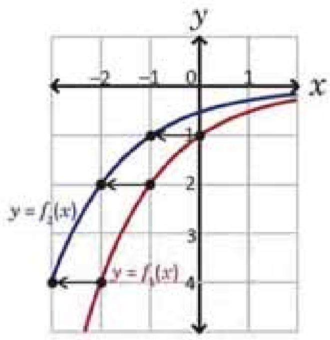
b) $f_1(x) = 4^{-x}$



c) $f_1(x) = 2^x$



d) $f_1(x) = -2^{-x}$



3. 以下の関数をグラフで表し、その特徴、つまり、関数の座標軸における切片、定義域、域値、漸近線、および増加関数か減少関数か、を説明しなさい。

a) $f(x) = 2^{x-3} - 2$　　b) $f(x) = 3^{-x-1} + 4$　　c) $f(x) = 5^{-x+2} + 2$　　d) $f(x) = -4^{x-1} - 1$

4. 次の指数方程式を解きなさい。

a) $2^{3x-1} = 32$　　b) $3^{-2x+3} = \frac{1}{27}$　　c) $4^{3x-3} = 1$

d) $25^{x+3} = \frac{1}{5}$　　e) $7^{-2x-4} = 49$　　f) $16^{x-3} = 8^{2x-1}$

5. 次の指数方程式を、2次方程式に簡約化して解きなさい。

a) $9^x - 4(3^x) + 3 = 0$　　b) $6^{2x} - 5(6^x) - 6 = 0$　　c) $3^{2x+3} - 4(3^{x+1}) + 1 = 0$

2.9 このユニットの問題

1. 以下の式を簡約化しなさい。

a) $\dfrac{(3^{-2})^3 \times (3^4)^2}{3^{-5}}$　　b) $\left[\dfrac{2^2 \times (2^4)^{-2}}{2^7}\right]^{-1}$　　c) $\dfrac{25^{-4} \times 5^{-3}}{5^{-5}}$　　d) $\dfrac{3^{-4} \times 6^8}{2^4}$

2. 以下の a) から d) のそれぞれには 2 つの実数がありますが、そのどちらが大きいかを明らかにしなさい。

a) $\sqrt{2}$ と $\sqrt[3]{2}$　　b) $\sqrt{3}$ と $\sqrt[4]{5}$　　c) $\sqrt[3]{12}$ と $\sqrt{6}$　　d) 4 と $\sqrt[3]{68}$

$a < b \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ であることと有理数の指数であることを用いて、共通の根指数を持つ累乗根を書きなさい。$\sqrt[3]{2}$ と $\sqrt[4]{2}$ の場合は、
$\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{12}} = \sqrt[12]{2^4}$ と $\sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{2^3}$

3.以下の a) から d) において、2つの実数のうちどちらが大きいか判定しなさい。

a) $\sqrt{2}$ と $\sqrt[3]{4}$　　b) $\sqrt[4]{8}$ と $\sqrt[5]{16}$　　c) $\sqrt[4]{125}$ と $\sqrt{5}$　　d) $\sqrt{\dfrac{1}{27}}$ と $\sqrt[3]{\dfrac{1}{81}}$

それぞれの被開平数を累乗で書きなさい

4. $(\sqrt{3} - \sqrt[4]{48} + 2)(\sqrt{3} + \sqrt[4]{48} + 2)$ の積を求めなさい。

5. 分数 $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$ の分母を、次のステップを踏んで有理化しなさい。

a) $\sqrt[3]{3}$ を累乗で書きなさい。

b) 方程式 $\sqrt[3]{3}x = 3$ を解き、その解を累乗で書きなさい。

c) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}} \times \dfrac{x}{x}$ を、x に上記の b) の解を用いて計算しなさい。

6. 以下の各分数の分母を有理数化しなさい。

a) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{9}}$　　b) $\dfrac{4}{\sqrt[4]{2}}$　　c) $\dfrac{10}{\sqrt[4]{8}}$

7. 次の指数方程式を解きなさい。

a) $2^{4x-2} = 8^{x+1}$　　b) $3^{3x} = 27^{2x+3}$　　c) $2^{-x} = \sqrt{2}$

d) $2^{\frac{x}{2}} \times 4^{\frac{x}{3}} = 128$　　e) $9^x - 4(3^{x+1}) + 27 = 0$　　f) $4^{-x} - 2^{-x+2} + 4 = 0$

g) $(4^{x-3})(6^{x+1})(3^{2x-6}) = 6$　　h) $12^{x-2} = 2^{2x-4}$　　i) $-3^x - 9(3^{-x}) + 10 = 0$

8. 次の命題を証明しなさい。

a) $\sqrt{5}$ と $\sqrt[4]{25}$ は同じ数字を表します。
b) $y = 2^x$ と $y = -2^x$ のグラフはいかなる点でも交わりません。
c) $y = 2^x$ と $y = 4^x$ はただ1点で交わります。

9. 以下の分数のグラフを描きなさい。

a) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$　　b) $f(x) = 2^x - 2^{-x}$

10. 上の問題のそれぞれの関数に対し、以下で求めるものを決定しなさい。

a) 定義域と域値　　b) 増加あるいは減少の区間