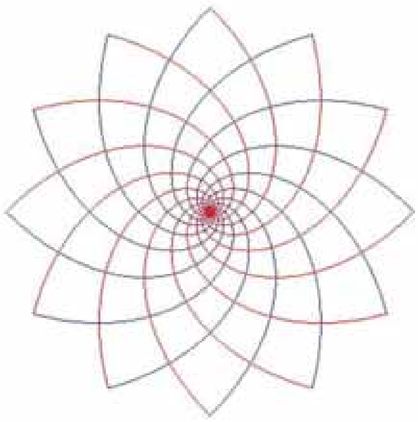
5 ユニット

超越関数 II

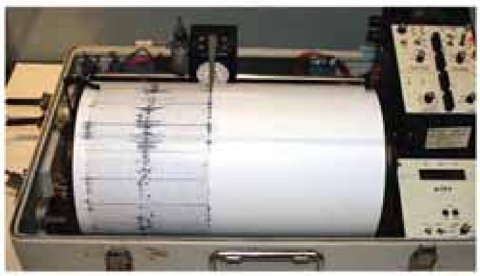
17 世紀の初めに、英国の数学者ジョン・ネイピアとヘンリー・ブリッグスは対数を導入し、洗練しました。対数は、乗算、除算、開平算などの面倒な演算を単純化するという特性によって、実用的かつ理論的に非常に重要な概念です。ネイピアの動機は、天文学で使用される球面三角法の計算を容易にすることでした。ブリッグスは 10 をベースとして提案し、近似値を記載した対数表を作成しました。



対数螺旋の直交網

コリントスのモザイク装飾
2 世紀

現在、対数は科学の多くの分野で応用されています。対数によって、音の強さ、pH として知られる物質の酸性度、マグニチュードによる地震の強さ、音楽の半音階のトーンの程度などを測定することができます。



地震計で地震の強さと持続時間を
測定することができます。

このユニットでは、 単射、全射、全単射などの関数のいくつかの性質を学びます。また、逆関数を合成の特殊なケースとして定義することを可能にする関数の合成を理解します。その後、対数関数を定義し、その特性について学びます。

1.1 単射

導入問題

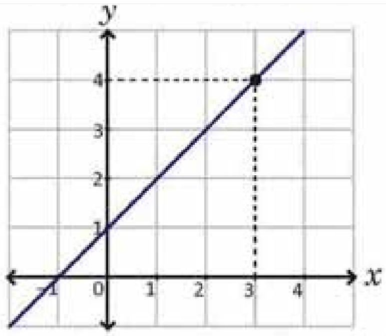
次の質問に答えましょう。

a) $f(x) = x + 1$ であり、$f(3) = 4$ が成り立つとき、$\mathbb{R}$ に属する他の x の値で、$f(x) = 4$ が成り立つものはあるでしょうか?

b) 関数 $f(x) = x^2$ の場合に、$f(2) = 4$ が成り立つとき、前事例と同じことが成立するでしょうか?

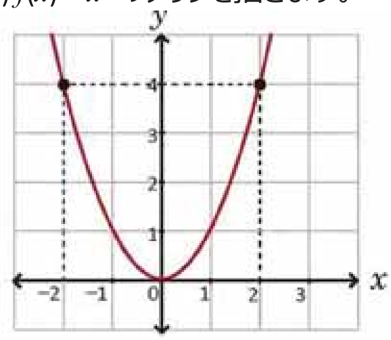
解法

a) $f(x) = x + 1$ のグラフを描きます。



$f(x) = 4$ となる唯一の x の値は $x = 3$.

b) $f(x) = x^2$ のグラフを描きます。



$f(x) = 4$ を満たす x の値が 2 つ存在するので、同じことは成立しません。
$x = 2$ と $x = -2$.

定義

関数 f : A → B は、集合 A の異なる値の元に対して、集合 B の異なる値の元が対応するとき、**単射**である。より象徴的に表現して：もし a と b が A の元であって、$a \neq b$ であるときに、$f(a) \neq f(b)$ が成り立つこと。

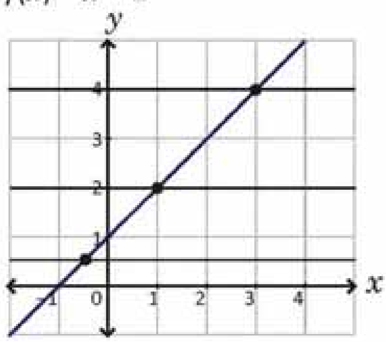
また次のように定義することもできます。f : A → B は、B における像のそれぞれに対して、A における原像がただ 1 つ対応するとき、A において**単射**である。

ある関数が単射であるかどうかをグラフで判定するためには、グラフ上に水平に直線を描き、もしその直線が 2 点以上で交われば、その関数は単射ではありません。

例

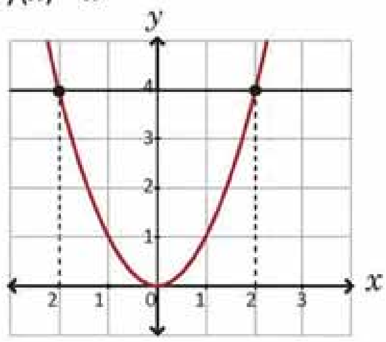
以下の関数が単射であるかどうか判定しましょう。

a) $f(x) = x + 1$



全ての水平直線は、関数上のただ1つの点で交わっています。よって, $f(x) = x + 1$ は単射です.

b) $f(x) = x^2$



点 (2, 4) 上を通る水平直線は、点 (−2, 4) 上も通っています。よって, $f(x) = x^2$ は単射ではありません.この事例では $2 \neq -2$ ですが、$f(2) = 4$ かつ $f(-2) = 4$ であることから、$f(2) = f(-2)$ となっています。

問題

以下の関数が、その定義域において単射であるかどうか判定しましょう。

a) $f(x) = 2x - 6$　b) $f(x) = -x^2 - 2x - 6$　c) $f(x) = 2x^3$　d) $f(x) = \frac{1}{x}$　e) $f(x) = \sqrt{x}$

1.2 全射

導入問題

A から B への関数で、$y = f(x)$ を等式としてもつものは、次の形で書き表すことができます。

1. $f: A \to B$
$x \to f(x)$

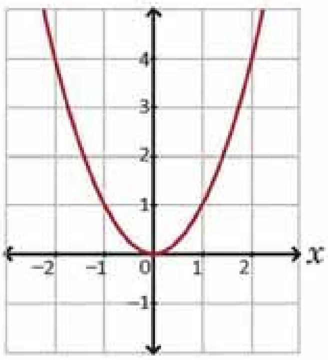
2. $f: A \to B;\ x \to f(x)$

この表現は、「A から B への関数で、x が A に、$f(x)$ が B に値をとるもの」を意味しています。

a) 関数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \to x^2$ が与えられているとして、始集合の x の値で、$f(x) = -1$ を満たすものは存在しますか?
b) 関数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \to x^3$ について考えましょう。y が実数であり、$f(x) = y$ として $y = 1$ と $y = 8$ のときに、x が満たす値を求めましょう。

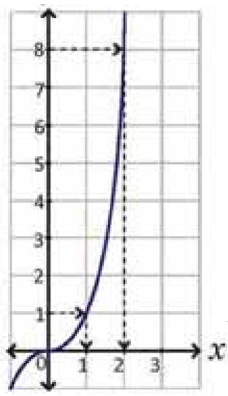
解法

a) $f(x) = x^2$ のグラフを描きます。



$f(x) = -1$ を満たす x の値は存在しません。

b) $f(x) = x^3$ のグラフを描きます。



$f(x) = 1$ を満たす x の値は、$x = 1$.
$f(1) = 1^3 = 1$.

$f(x) = 8$ を満たす x の値は、$x = 2$.
$f(2) = 2^3 = 8$.

まとめ

関数 $f: A \to B$ は、もし B にある数のそれぞれが、A にある数の少なくとも 1 つの像であるときに、**全射**です。

1. ある関数が全射でないといえるためには、B にある y の値で A に原像をもたないものをみつけなければなりません。
2. 関数 $f: A \to B$ は、集合 B が関数の値域 R_f と相等であるときには、全射な関数です。

値域とは、関数　$R_f = \{f(x) \mid x \in A\}$ がとりうる値の集合のことであることを復習しよう。

例

a) 関数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \to x^2$ は、$x^2 = -1$ をみたす実数 x をもたないことから、全射ではありません。

$f(x) = x^2$ は $\mathbb{R}$ ではなく、$R_f = [0, \infty[$.

b) 関数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \to x^3$ は、$\mathbb{R}$ にある数 y が数 $\sqrt[3]{y}$ の像であることから、全射です。計算して、次が得られます。$f(\sqrt[3]{y}) = (\sqrt[3]{y})^3 = y$.

$f(x) = x^3$ の値域は $R_f = \mathbb{R}$.

問題

以下の関数について、全射かどうか判別しましょう。

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to x$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to 3x - 2$

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to x^2 - 1$

d) $f: \mathbb{R} \to]-\infty, 0]$
$x \to -x^2$

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to -x^2 + x$

f) $f: [0, \infty[\to [0, \infty[$
$x \to \sqrt{x}$

g) $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$
$x \to \dfrac{1}{x}$

h) $f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{0\}$
$x \to \dfrac{1}{1-x}$

i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to |x|$

集合 $]-\infty, a[\ \cup\ ]a, \infty[$ は、$\mathbb{R} - \{a\}$ という形で書き表すことができ、数 a を除いた実数を表しています。

$f(x) = |x|$ は絶対値関数です。

1.3 全単射*

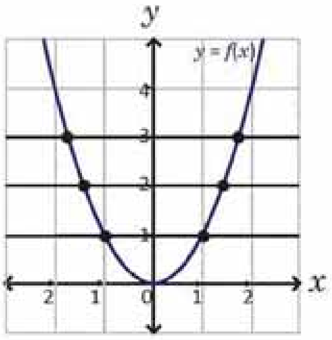
定義

関数 f : A → B は、同時に単射かつ全射であるときに**全単射**です。
- もしある関数が単射でないときには、単射にするために定義域を制限することができます。いくつかの場合では、それを複数の方法で行うことができます。
- 関数 f が全射であるためには、値域 R_f を求めて B = R_f とすればたります。

前述の手順の結果として得られるものを、**関数 f の制限** と呼びます。

例

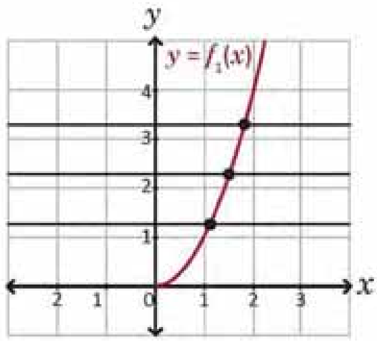
1. 関数 f : $\mathbb{R}\to[0, \infty[$; $x\to x^2$ が全単射でないことを確かめましょう。
2. 関数 f が全単射になるように、定義域に制限をしましょう。

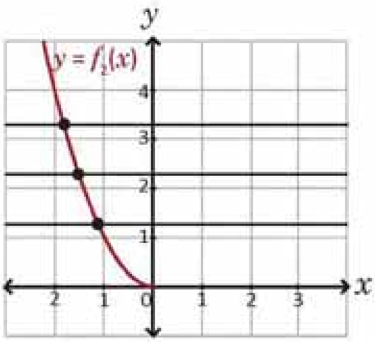


1. 水平直線がグラフを2点で交わっているので、関数は単射なく、よって全単射でもありません。

2. 第 1 座標が負の点を除くことにより、単射な関数のグラフが得られて、これを f_1 と称します。その定義域は [0, ∞[で、その値域は [0, ∞[です。

これにより、関数 f_1 ： $[0, \infty[\to [0, \infty[; x \to x^2$ は単射かつ全射となり、全単射になります。





もう 1 つの f の制限は、第 1 座標が正の点を除くことにより得られます。

これにより、関数 f_2 ： $[-\infty, 0[\to [0, \infty[; x \to x^2$ は、単射かつ全射となり、全単射になります。

問題

それぞれの関数が全単射であるかどうか求め、もしそうでなければ、f に対する制限を行い、全単射にしましょう。

a) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$x\to x$

b) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$x\to x-1$

c) $f: [0, 10]\to[0, \infty[$
$x\to x^2$

d) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$x\to x^2-2x+3$

e) $f: \mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}-\{0\}$
$x\to \frac{1}{x}$

f) $f: \mathbb{R}\to[0, \infty[$
$x\to |x|$

g) $f: \mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}$
$x\to 1+\frac{1}{1-x}$

h) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$x\to 2^x$

i) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$x\to 2^{-x-1}+1$

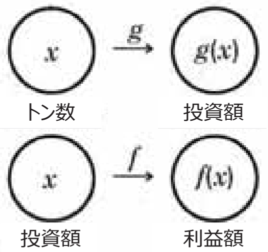
1.4 関数の合成

導入問題

モラサン県では、サトウキビ糖蜜の生産者が得る利益の平均値は、ドル表示で、式 $f(x) = 0.53x$ によって与えられています。ここで x は、生産者によってなされる投資額を示します。ある生産者によってなされた投資額が関数 $g(x) = 69.19x$ によって示されることが分かっています。ここで x は、使用されるサトウキビのトン数を示します。以上から、次に答えましょう。

1. もし 2 トンを使用する場合、生産者が実施する投資額はいくらになりますか?
2. もし 2 トンを使用する場合、生産者が得る利益額はいくらになりますか?
3. x トンのサトウキビを使用することにより得られる利益額を決定する関数を求めましょう。

解法



1. 投資の関数 g を用いて、$g(2) = 69.19(2) = 138.38$ が得られます。
   これにより、実施された投資額は \$138.38 になります。
2. 2 トン使用することにより実施される投資額は $g(2) = \$138.38$ です。
   利益の関数 f を用いて、
   $$f(g(2)) = f(138.38) = 0.53(138.38) = 73.3414.$$
   よって、利益額は \$ 73.3414 になります。
3. x トンを使用することにより、額 $g(x) = 69.19x$ の投資がなされます。
   $g(x)$ の投資がなされることにより、$f(g(x)) = 0.53(g(x))$ の利益が得られます。
   これにより、x トンの量から得られる利益は $f(g(x)) = 0.53(69.19x) = 36.6707x$ です。

定義

2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ が与えられる場合、f と g の**合成**は $(f \circ g)(x)$ のように記述し、次のように定義します。

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

f と g の合成は、関数 $g(x)$ を関数 $f(x)$ で評価した結果の関数です。

記述 $f \circ g$ は、g と合成した f、と読みます。記述 $f(g(x))$ は、x の g の f、と読みます。

例

関数 $f(x) = 2x + 1$ と $g(x) = x - 3$ で、$f \circ g$ と $g \circ f$ の合成を行いましょう。

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= 2(g(x)) + 1 \quad \text{関数 } g(x) \text{ を } f(x) \text{ で評価します。} \\ &= 2(x - 3) + 1 \\ &= 2x - 6 + 1\end{aligned}$$

これにより, $(f \circ g)(x) = 2x - 5$.

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= f(x) - 3 \quad \text{関数 } f(x) \text{ を } g(x) \text{ で評価します。} \\ &= (2x + 1) - 3 \\ &= 2x - 2\end{aligned}$$

これにより、$(g \circ f)(x) = 2x - 2$.

> 一般に, $(f \circ g)(x)$ は $(g \circ f)(x)$ と等しくないことに注目しましょう。
>
> もし $f(x) = 2x + 1$ で $g(x) = x - 3$ の場合には、$(f \circ g)(x) = 2x - 5$ で $(g \circ f)(x) = 2x - 2$.
>
> この場合には $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

問題

以下の関数から $f \circ g$ の合成を行いましょう。

a) $f(x) = 4x$, $g(x) = 3x$　　b) $f(x) = -x + 2$, $g(x) = x + 5$　　c) $f(x) = \sqrt{x + 1}$, $g(x) = x - 4$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x + 1$　　e) $f(x) = x + 1$, $g(x) = \frac{1}{x}$　　f) $f(x) = 3^x$, $g(x) = x + 2$

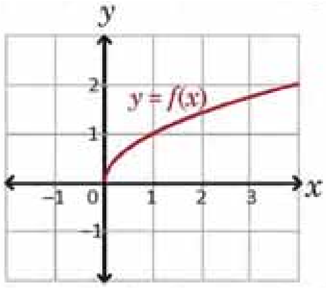
g) $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2^x$　　h) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 5^x$　　i) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 4^x$

1.5 合成関数の定義域*

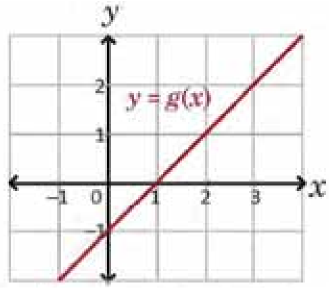
導入問題

関数 f： $[0, \infty[\to [0, \infty[; x \to \sqrt{x}$ と g : $\mathbb{R}\ \mathbb{R}; x \to x - 1$ のグラフがあります。

$D_f = [0, \infty[$
$R_f = [0, \infty[$



$D_g = \mathbb{R}$
$R_g = \mathbb{R}$



関数の合成は $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ のように定義されています、つまり $g(x)$ は $f(x)$ で評価されます。上記を踏まえて、次の問題を解いてみましょう。

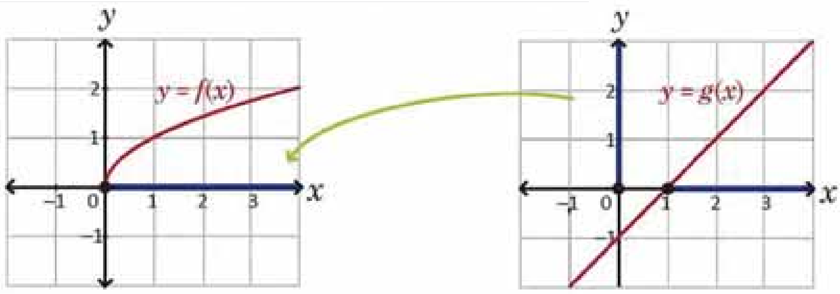
a) $f(g(x))$ が定義されるように $g(x)$ がとりうる値の区間を求めましょう。

b) $g(x)$ が前項の区間にあるように x がとるべき値の区間はどれになるでしょうか?

解法

a) $g(x)$ がとれる値は、$f(x)$ の定義域になければなりません。
これにより、求めるべき区間は$[0, \infty[$ です。

b) グラフから、区間を決定します。



関数 $g(x)$ では、区間$[0, \infty[$ の値は、区間 $[1, \infty[$ の値を評価することにより得られます。

よって、$g(x)$ が区間 $[0, \infty[$ にあるためには、x は値を区間 $[1, \infty[$ でとる必要があります。

定義

f と g の**合成関数の定義域**は、集合：$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ により与えられます。

合成関数 $(f \circ g)(x)$ の定義域は、$g(x)$ が D_f ($f(x)$ の定義域) に属している上で、D_g ($g(x)$ の定義域) に属する値です。

例

関数：$f(x) = \sqrt{x-9}$, 定義域が $D_f = [9, \infty[$, と関数 $g(x) = 3x$, 定義域が $D_g = \mathbb{R}$, を用いて、合成関数 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{3x-9}$ の定義域を求めましょう。

それぞれの定義域は $D_f = [9, \infty[$ と $D_g = \mathbb{R}$ となっています。$D = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ を求めるにあたっては、$g(x) \geq 9$ が満たされるのであれば、$g(x)$ は $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 9\}$ の値$_{f \circ g}$ であることになり、これを代入して $3x \geq 9$ が得られ、これにより $x \geq 3$ よって $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid x \geq 3\}$。よって, $D_{f \circ g} = [3, \infty[$。

問題

合成関数 $(f \circ g)(x)$ の定義域を求めましょう。

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to 3x + 1$
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to 2x + 4$

b) $f: [3, \infty[\to [-1, \infty[$
$x \to x^2 - 12x + 35$
$g: [0, \infty[\to [0, \infty[$
$x \to \sqrt{x}$

c) $f: [-1, \infty[\to [-1, \infty[$
$x \to x^2 - 1$
$g: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$
$x \to \dfrac{1}{x}$

d) $f: [0, \infty[\to [0, \infty[$
$x \to \sqrt{x}$
$g: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$
$x \to \dfrac{1}{x}$

1.6 逆関数

導入問題

関数 $f(x) = 2x + 2$ y $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$ が与えられている場合に、次の関数の合成を行いましょう。

a) $(f \circ g)(x)$　　　　b) $(g \circ f)(x)$

解法

a) $(f \circ g)(x)$

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
&= 2(g(x)) + 2 \\
&= 2\left(\frac{1}{2}x - 1\right) + 2 \\
&= x - 2 + 2 \\
&= x
\end{aligned}
$$

よって, $(f \circ g)(x) = x.$

b) $(g \circ f)(x)$

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\
&= \frac{1}{2}(2x + 2) - 1 \\
&= x + 1 - 1 \\
&= x
\end{aligned}
$$

よって, $(g \circ f)(x) = x.$

定義

f : A → B がある関数で, ここでもし関数 g : B → A が以下を満たす場合に :

1. 全ての B にある x の値で $(f \circ g)(x) = x.$　　2. 全ての A にある x の値で $(g \circ f)(x) = x.$

g を f の **逆関数** と呼び、f^{-1} で表します。

逆関数 f^{-1} は $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$ を満たし、逆関数の等式を求めるには $y = f^{-1}(x)$ を満たす等式 $f(y) = x$ を移項します。

例

$f(x) = 2x + 2$ の逆関数を求めましょう。

等式を書きましょう　⇒　$f(y) = x,$

y を $f(x) = 2x + 2$ で評価しましょう　⇒ $2y + 2 = x,$

移項して次が得られます。　⇒　$y = \frac{1}{2}x - 1.$

したがって、$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 1$ となります。

関数 $h(x) = x$ のことを **恒等関数** と呼びます。

ある関数 l : A → B に対して、恒等関数は次の条件を満たします。

1. もし h : B → B; $x \to x$ ならば、$(h \circ l)(x) = l(x).$

2. もし h : A → A; $x \to x$ ならば、$(l \circ h)(x) = l(x).$

問題

1. 以下の関数の逆関数の等式を求めましょう。

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to 5x - 1$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^3$

c) $f: \mathbb{R} \to [1, \infty[$, $x \to (x-2)^2 + 1$

d) $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$, $x \to \frac{1}{x}$

e) $f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{1\}$, $x \to \frac{x+1}{x-1}$

f) $f: [0, \infty[\to [0, \infty[$, $x \to \sqrt{x}$

g) $f: [0, \infty[\to [1, \infty[$, $x \to x^2 + 1$

h) $f: [1, \infty[\to [0, \infty[$, $x \to (x-1)^2$

2. 関数の合成を行うことにより、前問題のそれぞれの項で見つけた関数が、逆関数であることを確かめましょう。

$(f \circ f^{-1})(x) = x$ で $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ であることを確かめましょう。

1.7 逆関数の存在とその定義域と値域

導入問題

a) 関数 $f(x) = 2x + 2$ と $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 1$ を同じ座標平面に描き、もし点 (a, b) が f のグラフ上にあれば、点 (b, a) は f^{-1} のグラフ上にあることに注目しましょう。

点 (a, b) と $(a, -b)$ は、直線 $y = x$ に関して対称です。

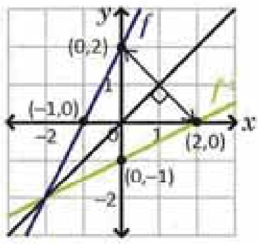
b) (a, b) を f のグラフ上の点として、もし f が逆関数 f^{-1} をもつのであれば、点 (b, a) は f^{-1} のグラフ上にあることを証明しましょう。

c) 関数 $f(x) = x^2$ をグラフ上に表し、次に $f(x)$ 上のそれぞれの点 (a, b) に対して (b, a) のグラフを描き、これらの点を結ぶグラフを描きましょう。

d) c) で得られた曲線は、ある関数のグラフに該当しますか?

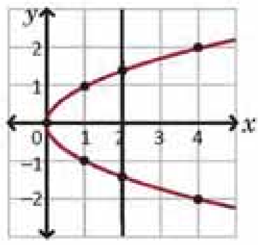
解法

a) f と f^{-1} のグラフは直線 $y = x$ に関して対称であることが観察されます。よって、もし (a, b) が f のグラフ上の点であれば、(b, a) は f^{-1} 上の点です。



b) (a, b) は、ただ $f(a) = b$ であるときに限って f のグラフ上の点です。
前の等式の逆関数を求めることにより、$f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b)$ がえられます。
こうして、逆関数の定義から次が得られます： $a = f^{-1}(b)$.
よって、もし (a, b) が f のグラフ上の点であれば、(b, a) は f^{-1} のグラフ上の点になります。

c) いくつかの点 (b, a) をグラフで表します： (0, 0), (1, 1), (1, −1), (4, 2), (4, −2).
これらの点を結ぶ曲線を描きます。



d) これにより得られた曲線は、特定の関数のグラフには該当しません。なぜなら、曲線を 2 点で縦に交わる縦方向の直線が存在するからです。

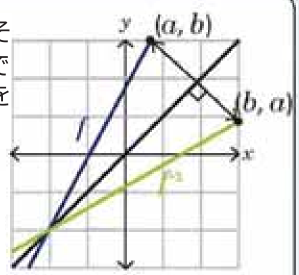
定義

関数 f : A → B は、ただそれが全単射であるときに限って、逆関数をもちます。授業 1.3 の内容から、ある関数は、全単射にするために制限を加えることができ、これにより逆関数を得ることができます。

もし (a, b) が $f(x)$ のグラフ上の点であれば、(b, a) は $f^{-1}(x)$ のグラフ上の点になります。

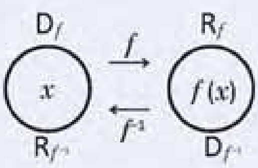
f^{-1} のグラフは f のそれに対して対称であり、対称軸を $y = x$ にもちます。

点 (a, b) は点 (b, a) に対称です。



逆関数の定義域は、元の関数の値域であり、額関数の値域は、元の関数の定義域である：

$$D_{f^{-1}} = R_f\ ,\quad R_{f^{-1}} = D_f.$$



問題

次の各項で、逆関数と、その定義域と値域を求めましょう。また、同じ座標平面に関数と逆関数それぞれのグラフを描きましょう。項 d) では、関数に対して一定の制限を加えましょう。

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to 3x - 2$

b) $f: \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R} - \{0\}$
$x \to \frac{1}{x+1}$

c) $f:]-\infty, 0] \to [0, \infty[$
$x \to x^2$

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to (x+1)^2 - 4$

1.8 復習問題

1. 以下の各項で、合成関数 $(f \circ g)(x)$ と $(g \circ f)(x)$ の等式を求めましょう。

a) $f(x) = -x + 5,\ g(x) = -x - 2$　　b) $f(x) = x^2 + 4,\ g(x) = -x + 1$

c) $f(x) = \sqrt{-x+1},\ g(x) = 4 - x^2$　　d) $f(x) = 2^x,\ g(x) = x^2 - x$

2. 以下の関数の定義域を求めましょう。

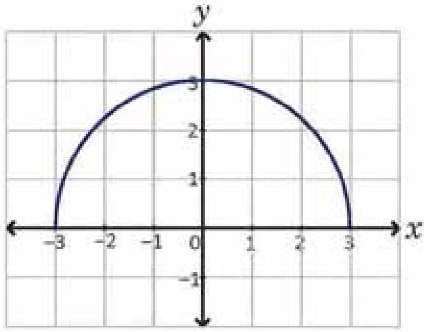
a) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$　　b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3}$　　c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x^2 + 1}}$　　e) $f(x) = \sqrt{3^x - 9}$　　f) $f(x) = 3^{\sqrt{x}}$

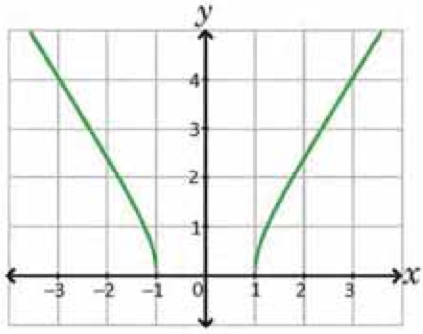
それぞれの関数を、一種の合成関数として書きましょう。

3. 以下の関数のグラフが描かれています。

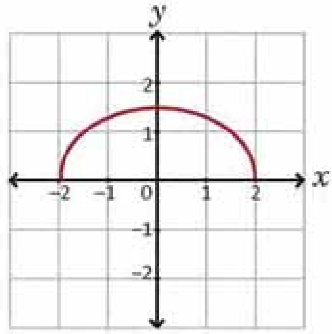
$f_1(x) = \sqrt{9 - x^2}$



$f_2(x) = \sqrt{2x^2 - 2}$



$f_3(x) = \sqrt{2 - \dfrac{x^2}{2}}$



それぞれについて：

a) 定義域を、関数が定義されているところでの値の集合として、求めましょう。

b) 単射になるように、関数の定義域を制限しましょう。

c) 項 b) で求まった定義域をもとに、関数が全射になるように値域を求めましょう。

d) 関数のグラフを、b) と c) で制限した定義域と値域で描きましょう。

4. 問題 3 で再定義した関数をもとに、以下を行いましょう。

a) それぞれの関数について、逆関数の等式を求めましょう。

b) 逆関数の定義域と値域を求めましょう。

c) 同一の座標平面に f と f^{-1} のグラフを描きましょう。

5. 点 $\mathrm{P}(a, b)$、$\mathrm{Q}(b, a)$ と直線 l： $y = x$ を想定して、$d(\mathrm{P}, l) = d(\mathrm{Q}, l)$ が成立することを証明しましょう。

6. 以下の関数とその逆関数が与えられたとして：

f_1: $[0, \infty[\to [0, \infty[;\ x \to x^2$　　f_1^{-1}: $[0, \infty[\to [0, \infty[;\ x \to \sqrt{x}$

f_2: $[-1, \infty[\to [0, \infty[;\ x \to x + 1$　　f_2^{-1}: $[0, \infty[\to [-1, \infty[;\ x \to x - 1$

以下を行いましょう。

a) 関数 $g_1(x) = (f_1 \circ f_2)(x)$ の等式を求めましょう。

b) 関数 $g_2(x) = (f_2^{-1} \circ f_1^{-1})(x)$ の等式を求めましょう。

c) $(g_1 \circ g_2)(x)$ と $(g_2 \circ g_1)(x)$ で関数の合成を行いましょう。

d) この場合には、$g_1(x) = (f_1 \circ f_2)(x)$ の逆関数はどれになりますか?

e) f_1 と f_2 を 2 つの任意の関数として、関数 $f_1^{-1}, f_2^{-1}, f_1 \circ f_2$ y $f_2^{-1} \circ f_1^{-1}$ が定められているとします。$f_2^{-1} \circ f_1^{-1}$ は $f_1 \circ f_2$ の逆関数であることを証明しましょう。

2.1 対数の定義

導入問題

次の等式を満たすには指数 x はどのような値をとるでしょうか。

a) $2^x = 8$　　　　b) $3^x = \frac{1}{27}$

解法

a) $2^x = 8$

$2^x = 2^3$　8 を 2 の累乗で書きます

$x = 3.$

したがって、$x = 3$。

b) $3^x = \frac{1}{27}$

$3^x = 27^{-1}$

$3^x = (3^3)^{-1}$　底が同じ累乗で書きます

$3^x = 3^{-3}$

$x = -3.$

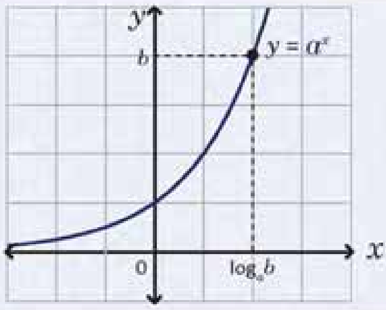
したがって、$x = -3$。

定義

a、b および x を $b > 0$、$a > 0$ および $a \neq 1$ となるような実数とすれば、底を a とする数 b の**対数**は次のように定義されます。

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

これは、対数とは数 b を得るために**底**と呼ばれる数 a を累乗しなければならない指数であることを意味します。

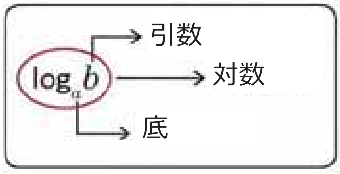


例

導入問題では次のようになります。

a) $2^3 = 8 \Leftrightarrow \log 8 = 3$ であり、2 を底とする 8 の対数イコール 3 と読みます。

b) $3^{-3} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow \log_3 \frac{1}{27} = -3$ であり、3 を底とする $\frac{1}{27}$ の対数イコール – 3 と読みます。



問題

1. 次の各々の累乗を対数で書きなさい。

a) $2^2 = 4$　　b) $3^4 = 81$　　c) $10^{-1} = \frac{1}{10}$　　d) $4^{-2} = \frac{1}{16}$

e) $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$　　f) $25^{\frac{3}{2}} = 125$　　g) $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$　　h) $2^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{32}}$

2. それぞれの対数を累乗で書きなさい。

a) $\log_2 64 = 6$　　b) $\log_5 25 = 2$　　c) $\log_5 \frac{1}{5} = -1$　　d) $\log_3 \frac{1}{27} = -3$

e) $\log_4 32 = \frac{5}{2}$　　f) $\log_3 \sqrt[4]{3} = \frac{1}{4}$　　g) $\log_4 \sqrt{8} = \frac{3}{4}$　　h) $\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$

2.2 ある数の対数

導入問題

1. 以下の対数の値を計算しなさい。

a) $\log_2 16$　　　b) $\log_3 \frac{1}{9}$

2. $a > 0$ かつ $a \neq 1$ であれば $\log_a a^c = c$ となることを証明しなさい。

解法

1. a) $\log_2 16$

$x = \log_2 16$ とします。

$x = \log_2 16 \Leftrightarrow 2^x = 16$　対数の定義を応用します。

$\Leftrightarrow 2^x = 2^4$　方程式を解きます。

$\Leftrightarrow x = 4.$

b) $\log_3 \frac{1}{9}$

$x = \log_3 \frac{1}{9}$ とします。

$x = \log_3 \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{9}$　対数の定義を適用します。

$\Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{3^2}$　9 を 3 の累乗で書きます。

$\Leftrightarrow 3^x = 3^{-2}$　負の指数を使って書き直します。

$\Leftrightarrow x = -2.$

2. $x = \log_a a^c \Leftrightarrow a^x = a^c$ となります。したがって、$x = c$。

まとめ

対数 logaritmo $x = \log_a b$ の値を計算することは、$a^x = b$ を満たす指数の値を求めることです。

一般的に、対数の値を求めるには、次のステップを実行します。

1. 累乗で書きます $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$。
2. 方程式 $a^x = b$ を解きます。

$b = a^c$ であれば $\log_a b = c$となり、したがって $a > 0$ かつ $a \neq 1$であれば $\log_a a^c = c$ となります。

$a^1 = a \Leftrightarrow \log_a a = 1$
$a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0$

例

対数 $\log_4 64$ の値を求めなさい。

解答 1
$x = \log_4 64$ とし、よって $x = \log_4 64 \Leftrightarrow 4^x = 64 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^6 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$ となります。

解答 2
性質を利用して $\log_a a^c = c$ ：　$\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$ となります。

問題

以下の対数の値を求めなさい。

a) $\log_{10} 10$	b) $\log_3 1$	c) $\log_2 2^{100}$	d) $\log_2 32$
e) $\log_9 81$	f) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$	g) $\log_8 4$	h) $\log_{25} 125$
i) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}$	j) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$	k) $\log_4 \frac{1}{2}$	l) $\log_{\frac{1}{3}} 9$

ユニット5

2.3 対数の性質*

導入問題

1. 次の各項の演算と対数の答えを比較しなさい。

a) $\log_2 4 + \log_2 8$ と $\log_2 32$　　b) $\log_2 8 - \log_2 4$ と $\log_2 2$　　c) $3\log_2 4$ と $\log_2 4^3$　　d) $\log_2 8^2$ と $\log_2 4^3$

2. 次の性質を証明しなさい。

a) $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$　　b) $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$

c) $b\log_a M = \log_a M^b$　　d) $\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$

解法

1. a) $\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 2^2 + \log_2 2^3$ と $\log_2 32 = \log_2 2^5$

$= 2 + 3$　　$= 5$

$= 5$

したがって、答えは同じです。

$\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2(4 \times 8) = \log_2 32$ であることに注目します。

b) $\log_2 8 - \log_2 4 = \log_2 2^3 - \log_2 2^2$ と $\log_2 2 = 1$

$= 3 - 2$

$= 1$

したがって、答えは同じです。

$\log_2 8 - \log_2 4 = \log_2 \frac{8}{4} = \log_2 2$ であることに注目します。

c) $3\log_2 4 = 3\log_2 2^2$ と $\log_2 4^3 = \log_2 (2^2)^3$

$= 3(2)$　　$= \log_2 2^6$

$= 6$　　$= 6$

したがって、答えは同じです。

$3\log_2 4 = \log_2 4^3 = 6$ であることに注目します。

d) $\log_2 8^2 = \log_2 2^6$ と $\log_2 4^3 = \log_2 2^6$

$= 6$　　$= 6$

したがって、答えは同じです。$8^2 = 4^3$ であることに注目します。

2. $x = \log_a M$ かつ $y = \log_a N$ とすると、定義により $M = a^x$ かつ $N = a^y$ となります。

a) 積は $MN = a^x a^y = a^{x+y}$ となります。

対数で書くと： $\log_a MN = x + y$

したがって、$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$。

b) 商は $\frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ となります。

対数の定義により $\log_a \frac{M}{N} = x - y$

したがって、$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$。

c) 累乗は $M^b = (a^x)^b = a^{bx}$ となります。

対数で $bx = \log_a M^b$ に書き直します。

したがって、$b\log_a M = \log_a M^b$。

d) この場合、$x = \log_a M$ かつ $x = \log_a N$ となります。

よって $M = a^x$ かつ $N = a^x$

したがって、$M = N$。

まとめ

a、M および N を正の数とし、$a \neq 1$ とすると、対数は次の性質を満たします。

1. $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$
2. $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$
3. $b\log_a M = \log_a M^b$
4. $\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$

注目：
$(\log_2 4)^3 = 2^3 = 8$ であり、また
$\log_2 4^3 = 3\log_2 4 = 3(2) = 6$ です。
$(\log_2 4)^3 \neq \log_2 4^3$ です。
したがって、一般的には $(\log_a M)^b \neq \log_a M^b$ となります。

問題

以下の演算をしなさい。

a) $\log_4 2 + \log_4 8$　　b) $\log_6 12 + \log_6 18$　　c) $\log_2 96 - \log_2 3$　　d) $\log_2 6 - \log_2 24$

e) $\log_2 \frac{12}{5} + \log_2 \frac{5}{3}$　　f) $\log_3 \frac{11}{54} + \log_3 \frac{2}{33}$　　g) $\log_3 \frac{6}{7} - \log_3 \frac{2}{21}$　　h) $\log_4 \frac{3}{10} - \log_4 \frac{12}{5}$

i) $3\log_9 3 + \log_9 243$　　j) $5\log_4 8 + 3\log_4 32$　　k) $2\log_2 54 - 3\log_2 18$　　l) $2\log_{\frac{2}{3}} 12 - 2\log_{\frac{2}{3}} 18$

2.4 対数の底の変更*

導入問題

▤ 底が 10 の対数を利用して $\log_2 5$ の値をどのように計算するでしょうか。

> 関数電卓の大部分では、10およびeを底とする対数の値のみを求めることができます。
> ネイピア数： $e = 2.718281828459045\ldots$

解法

$x = \log_2 5$ とします。よって：

$2^x = 5$ 　対数の定義により、

$\log 2^x = \log 5$ 　対数の性質を利用して

$x\log 2 = \log 5$ 　等式の両辺に対数を適用します。

$x = \dfrac{\log 5}{\log 2}$.

> 10 を底とする対数は、通常は $\log_{10} a = \log a$ のように底なしで表します。

次の商を求めるには電卓を利用します。

log　5　÷　log　2　=　⇒　電卓の画面

したがって、$\log_2 5 = 2.321928095\ldots$ となります。

```
log 5 ÷ log 2
      2.321928095
```

定義

a, b および c を $a \neq 1$ かつ $c \neq 1$であるような正の数とします。下記を等式に対する**底の変更**と呼びます。

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

例

1. $c = 10$ への底の変更の性質を証明しなさい。

$x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b$ となります。

10 を底とする対数を適用して $\log a^x = \log b$ とします。

累乗の対数の性質を適用して $x \log a = \log b$ とします。

x: $x = \dfrac{\log b}{\log a}$ の解を求めます。$a \neq 1$ なので $\log a \neq 0$ です。

したがって、$\log_a b = \dfrac{\log b}{\log a}$ となります。

2. $\log_4 8$ の値を計算しなさい。

> この場合、電卓を利用する必要はありません。

$c = 2$ であることを用います。

$$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2} = \frac{3}{2}.$$

したがって、$\log_4 8 = \dfrac{3}{2}$ となります。

任意の底を用いることができます。

$$\log_4 8 = \frac{\log_3 8}{\log_3 4} = \frac{\log_3 2^3}{\log_3 2^2} = \frac{3\log_3 2}{2\log_3 2} = \frac{3}{2}.$$

問題

1. 底の変更の性質を用いて次の対数を簡略化しなさい。

a) $\log_4 32$　　b) $\log_4 \frac{1}{8}$　　c) $\log_9 \sqrt{3}$　　d) $\log_4 \frac{1}{\sqrt{2}}$

e) $\log_{\frac{1}{9}} 27$　　f) $\log_{\frac{1}{27}} 3$　　g) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{8}$　　h) $\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{\sqrt{4}}$

> 対数の引数と底が同じ底の累乗であることに注目します。

▤ 2. 次の対数の値を計算しなさい。

a) $\log_5 24$　　b) $\log_2 \frac{1}{3}$　　c) $\log_{\frac{1}{2}} 5$　　d) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2}$

> $c = 10$ であることを用います。

ユニット5

2.5 対数関数とそのグラフの定義

導入問題

1. a) 次の表を用いて関数 $f(x) = \log_2 x$ をグラフにしなさい。

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y					

b) 関数 $f(x) = \log_2 x$ が増加関数なのか または減少関数なのかを判断しなさい。

2. a) 次の表を用いて関数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ をグラフにしなさい。

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y					

b) 関数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ は増加関数ですか、それとも減少関数ですか。

解法

1. a) $x = \frac{1}{4}$ の場合、$f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$ となります

$x = \frac{1}{2}$ の場合、$f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$ となります

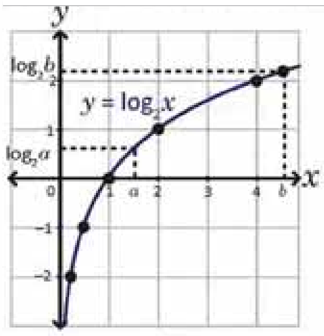
$x = 1$ の場合、$f(1) = \log_2 1 = \log_2 2^0 = 0$ となります。

$x = 2$ の場合、$f(2) = \log_2 2 = 1$ となります。

$x = 4$ の場合、$f(4) = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$ となります。

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	−2	−1	0	1	2

得られた複数の点上に曲線を描きます。



b) $0 < a < b$の場合、$\log_2 a < \log_2 b$ となります。
したがって、$f(x) = \log_2 x$ は増加関数になります。

2. a) $x = \frac{1}{4}$ の場合、$f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2$ となります

$x = \frac{1}{2}$ の場合、$f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$ となります

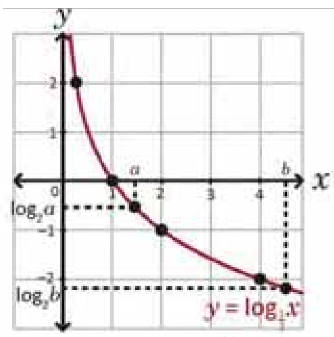
$x = 1$ の場合、$f(1) = \log_{\frac{1}{2}} 1 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0$ となります。

$x = 2$ の場合、$f(2) = \log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -1$ となります。

$x = 4$ の場合、$f(4) = \log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -2$ となります。

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	2	1	0	−1	−2

得られた複数の点上に曲線を描きます。



b) $0 < a < b$の場合、$\log_{\frac{1}{2}} a > \log_{\frac{1}{2}} b$ となります。
したがって、$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ は減少関数になります。

定義

対数関数は次のように定義されます。$f:\ ]0, \infty[\to \mathbb{R}$

$x \to \log_a x$

ここで a は正の数であり、かつ $a \neq 1$ です。

関数 $f(x) = \log_a x$ の単調性を次に説明します。

1. $a > 1$ であれば増加関数です。
2. $f(x) =$ は、$0 < a < 1$ であれば増加関数です。

引数が正であれば、対数は十分に定義されています。

$f(x) = \log_a x$ のグラフは点 (1, 0) と (a, 1) を通ります。

問題

次の対数関数をグラフにしなさい。

a) $f(x) = \log_3 x$　　b) $f(x) = \log_4 x$　　c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$　　d) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

2.6 指数関数と対数との関係

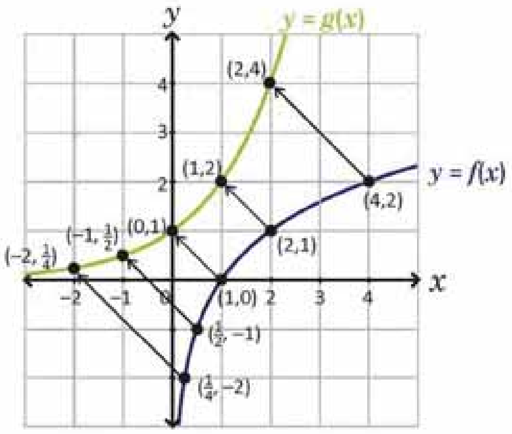
導入問題

1. 関数 $f(x) = \log_2 x$ と $g(x) = 2^x$ を同じデカルト座標面でグラフにし、(a, b) が f 点の場合、(b, a) が g 点であることに注目しなさい。
2. 次の合成を行いなさい。

a) $f(g(x))$　　　　b) $g(f(x))$

解法

1. 関数 $f(x) = \log_2 x$ は前回の授業でグラフにしました。また関数 $g(x) = 2^x$ はユニット 4 の授業 2.1 でグラフにしました。



$f(x) = \log_2 x$	$g(x) = 2^x$
(4, 2)	(2, 4)
(2, 1)	(1, 2)
(1, 0)	(0, 1)
$\left(\frac{1}{2}, -1\right)$	$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{1}{4}, -2\right)$	$\left(-2, \frac{1}{4}\right)$

2. 次の合成を行いなさい。

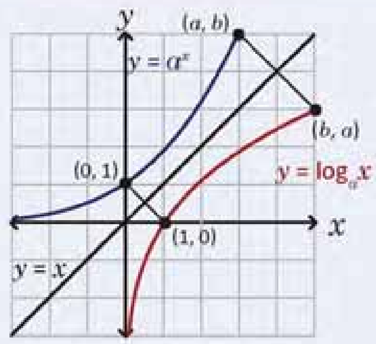
a) $f(g(x)) = f(2^x)$
$= \log_2 2^x$
$= x$

b) $g(f(x)) = g(\log_2 x)$
$= 2^{\log_2 x}$
$= x$

対数の定義により $a^{\log_a x} = x$ です。

まとめ

1. 関数 $y = \log_a x$ と $y = a^x$ は、直線 $y = x$ に対して対称で、$a > 0$ かつ $a \neq 1$ です。
2. 2 つの数 a と b について、$a > 0$ かつ $a \neq 1$ とすれば、$\log_a a^b = b$ かつ $a^{\log_a b} = b$ となります（ただし $b > 0$）。
3. 対数関数は、指数関数の逆関数です。



$$f: \mathbb{R} \to]0, \infty[\qquad x \to a^x$$
$$f^{-1}:]0, \infty[\to \mathbb{R} \qquad x \to \log_a x$$

4. $y = a^x$ は直線 $y = 0$ を水平漸近線とし、対称性を利用することで $y = \log_a x$ は直線 $x = 0$ を垂直漸近線 とします。
5. 対数関数の領域は指数関数の範囲：$]0, \infty[$ になります。
対数関数の範囲は指数関数の領域：$\mathbb{R}$ になります。
6. 対数関数は、指数関数の逆関数なので、全単射関数になります。

問題

各々の関数について、その逆関数を書き、同じデカルト座標面上にそれらの関数をグラフにしなさい。

a) $f(x) = \log_3 x$　　b) $f(x) = \log_4 x$　　c) $f(x) = f\left(\frac{1}{4}\right)^x$

$\left(\frac{1}{4}\right)^x = 4^{-x}$ であることを復習しよう。

2.7 対数方程式、パート 1

導入問題

次の各々の等式を解き、求めた解を証明しなさい。

a) $\log_2 x = 3$　　b) $\log_3(x-1) = 2$
c) $\log_5 x^2 = 4$　　d) $\log_6(3x(x+1)) = 2$

求めた値を代入することで対数の引数が正であることを確認しましょう。

対数で処理するときは、実解のみを考慮しましょう。

解法

a) 次のように対数の定義を使います。

$\log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 2^3 \Leftrightarrow x = 8$。

$8 > 0$ なので、よって $x = 8$ がこの方程式の解です。

b) 次のように対数の定義を使います。

$\log_3(x-1) = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 3^2 \Leftrightarrow x - 1 = 9 \Leftrightarrow x = 10$。

$10 - 1 = 9 > 0$であることを確認します。
したがって、$x = 10$ がこの方程式の解です。

c) 次のように対数の定義を使います。

$$\begin{aligned}\log_5 x^2 = 4 &\Leftrightarrow x^2 = 5^4\\ &\Leftrightarrow x = \pm 5^2\\ &\Leftrightarrow x = \pm 25\end{aligned}$$

$(\pm 25)^2 > 0$ であることを確認します。
したがって、$x = 25$ と $x = -25$ がこの方程式の解になります。

d) 次のように対数の定義を使います。$3x(x+1) = 6^2$　この方程式を次のように解きます。

$$\begin{aligned}3x^2 + 3x - 6^2 = 0 &\Leftrightarrow 3(x+4)(x-3) = 0\\ &\Leftrightarrow x = -4 \text{ o } x = 3\end{aligned}$$

$x = -4$ の場合、$3(-4)(-4+1) = 36 > 0$ となることを確認します。
$x = 3$ の場合、$3(3)(3+1) = 36 > 0$ となります。
したがって、$x = -4$ と $x = 3$ がこの方程式の解になります。

まとめ

対数方程式は、対数の引数に変数 x が現れる方程式です。

M が変数 x の代数式である $\log_a M = b$ の形の方程式を解くには、対数の定義 $\log_a M = b \Leftrightarrow a^b = M$ を応用して得られる方程式 $a^b = M$ を解きます。次に、求めた解が引数の条件 $M > 0$ を満たしているか確認します。

さらに、指数方程式は次のように対数を応用して解くことができます。

$$a^x = b \Leftrightarrow \log a^x = \log b \Leftrightarrow x\log a = \log b \Leftrightarrow x = \frac{\log b}{\log a}$$

例

次の解に注目しましょう。

$7^x = 2 \Leftrightarrow \log 7^x = \log 2 \Leftrightarrow x\log 7 = \log 2 \Leftrightarrow x = \frac{\log 7}{\log 2} \Leftrightarrow x = 2.80735...$

問題

1. 以下の対数方程式を解きなさい。

a) $\log_3 x = 4$　　b) $\log_2(x+1) = 5$　　c) $\log_2 x^2 = 6$　　d) $\log_3 x^3 = 6$
e) $\log_4 x = -2$　　f) $\log_3(2x+1) = -1$　　g) $\log_2 x^2 = -2$　　h) $\log_2(x^2+4) = 3$
i) $\log(x(20-x)) = 2$　　j) $\log_6(x(13-x)) = 2$　　k) $\log(x(x+3)) = 1$　　l) $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{4}$

2. 以下の方程式を解きなさい。

a) $9^x = 15$　　b) $2^{x+1} = 13$　　c) $5^{2x-1} = 1\,953\,125$

2.8 対数方程式、パート2

導入問題

以下の各方程式を解きなさい。

a) $\log_2 x + \log_2(x-1) = 1$

b) $\log_5(2x) = \log_5(x+1)$

解法

a) 次のように対数の和の性質を用います。

$\log_2 x + \log_2(x-1) = \log_2(x(x-1))$

方程式 に代入し：

$\log_2(x(x-1)) = 1$

次のように定義を応用して解きます。

$$\begin{aligned} \log_2(x(x-1)) = 1 &\Leftrightarrow (x(x-1)) = 2^1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \text{ o } x = -1 \end{aligned}$$

各対数において引数が正であることを確認します。
$x = 2$ の場合、$2 > 0$、$2 - 1 = 1 > 0$となります。
$x = -1$ の場合、$-1 < 0$となります。これは方程式の解になりません。

したがって、解は$x = 2$。

b) $\log_5(2x) = \log_5(x+1)$

$2x = x + 1$　次のように性質を利用します。
$\log_a M = \log_a N \Rightarrow M = N$。

$x = 1$　方程式を解きます。

各対数において $x = 1$ の評価 を行います
$2(1) = 2 > 0$ かつ $2 + 1 = 3 > 0$。

したがって、解は$x = 1$。

まとめ

対数方程式を解くには、対数の性質を利用して方程式を $\log_a M = b$ の形に持っていきます。

1. 正の数であるすべての M と N に関して、以下が満たされます。
   a) $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$
   b) $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$
   c) $\log_a M^b = b\log_a M$
   d) $\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$

2. 等式の解であることを確認するため、求めた値を代入して各対数の引数が正であることを証明しなければなりません。

性質 $\log_a M^b = b\log_a M$ では、M は正の数でないといけません。b が偶数である場合、注意しなければなりません。
例：
$\log_3 x^2 = 4 \Leftrightarrow 2\log_3 x = 4 \Leftrightarrow \log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2 = 9$
この場合、解 $x = -9$ が抜けています。
このように、方程式の解ではこの性質を利用しないほうがよいです。

問題

以下の対数方程式を解きなさい。

a) $\log_2 x + \log_2(x-2) = 3$

b) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2+1)^2 = -2$

c) $\log_4(3x) + \log_4(x-2)^{-1} = 1$

d) $\log(x+1) = \log(1-x)$

e) $\log_8(x-3)^9 = 6$

f) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^6 = -18$

g) $\log_3(x+1) + \log_3(x^2-x+1) = 2$

h) $\log_2(x^4 - 6x^2 + 16)^4 = 12$

2.9 10 を底とする対数と自然対数*

導入問題

1. $\log 2^{2019}$ の値を求めなさい。
2. 数 2^{2019} は何桁ですか。

注目：
n は$10^0 \leq n < 10^1$ である場合のみ 1 桁で書きます。
n は $10^1 \leq n < 10^2$ である場合のみ 2 桁で書きます。
n は $10^2 \leq n < 10^3$ である場合のみ 3 桁で書きます。

解法

1. $\log 2^{2019} = 2019\log 2 = 607.77956...$ と計算します。

2. 数の桁数に注目します

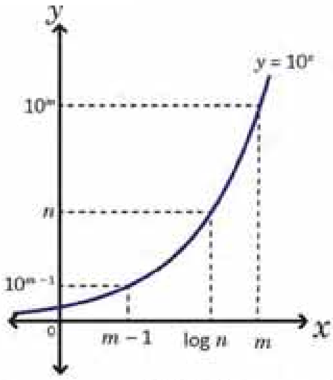
$$\underbrace{1, 2, ..., 9}_{1桁}, \underbrace{10, 11, 12, ..., 99}_{2桁}, \underbrace{100, 101, ..., 999}_{3桁}, \underbrace{1\,000, 1\,001, ..., 9\,999}_{4桁}, \underbrace{10\,000, 10\,001...}_{5桁}$$

よって、n が正の数であれば、n は$10^{m-1} \leq n < 10^m$ である場合のみ m 桁 で書くと推定できます。

2^{2019} の桁数は、のように指数 m によって特定されています。

$$10^{m-1} \leq 2^{2019} < 10^m \Leftrightarrow \log 10^{m-1} \leq \log 2^{2019} < \log 10^m$$
$$\Leftrightarrow m-1 \leq \log 2^{2019} < m$$

問題 1 から $607 \leq \log 2^{2019} < 608$ となります。したがって、2^{2019} は 608 桁で書きます。



$10^{m-1} \leq n < 10^m$ である場合、底が $10 > 1$ なので、よって $m-1 \leq \log n < m$ となることに注目しましょう。

まとめ

1. 数 a の 10 を底とする対数は $\log a$ で表します。

2. 正の整数 a の桁数は、$\log a$ に隣接する大きい方の整数 m になります。

3. 数 a の自然対数は対数 $\log_e a$ であり、底はネイピア数 $e = 2.71828...$ であり、表記 $\log_e a = \ln a$ を利用します。
   自然対数は、極小計算で非常に役立ちます。

問題

1.次の累乗の桁数はいくつですか。

a) 3^{2019}　b) 5^{1000}　c) 2019^{2019}

2. 2 を何乗すれば 2019 桁になりますか。

3. 以下の対数の値を求めなさい。

a) $\ln 2$　b) $\ln 3$
c) $\ln 10$　d) $\ln \frac{1}{4}$
e) $\ln \frac{8}{3}$　f) $\ln \frac{11}{3}$

電卓では、ある数の自然対数を計算するにはキー ln を使用します。

2.10 復習問題

1. 以下の対数の値を計算しなさい。

a) $\log_7 49$　b) $\log_{16} 2$　c) $\log_9 \frac{1}{3}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 1$　e) $\log_5 \sqrt{5}$　f) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{\sqrt{6}}$

g) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{2}$　h) $\log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{\sqrt{3}}$　i) $\log_{\sqrt{2}} 2$

j) $\log_{\sqrt{2}} 4$　k) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3}$　l) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27}$

2. 以下の式の値を求めなさい。

a) $\log_6 2 + \log_6 3$　b) $\log 4 + \log 25$　c) $\log_3 99 - \log_3 11$

d) $\log_5 4 - \log_5 500$　e) $\log_7 \frac{28}{9} + \log_7 \frac{63}{4}$　f) $\log_8 \frac{48}{5} + \log_8 \frac{10}{3}$

g) $\log_2 \frac{15}{16} - \log_2 30$　h) $\log_9 \frac{36}{5} - \log_9 \frac{4}{45}$　i) $\log_{\sqrt{5}} \frac{15}{4} + \log_{\sqrt{5}} \frac{20}{3}$

3. 電卓を使用しないで以下の式の値を計算しなさい。

a) $\frac{\log_9 125}{\log_9 5}$　b) $\frac{\log_3 49}{\log_3 7}$　c) $\frac{\log_6 64}{\log_6 32}$

4. 底の変更の性質を用いて以下の対数の値を求めなさい。

a) $\log_3 15$　b) $\log_8 6$　c) $\log_2 \frac{1}{5}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 3$　e) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{2}{3}$　f) $\log_{\frac{5}{3}} \frac{1}{2}$

5. 以下の関数のグラフを描きなさい。

a) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$　b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$　c) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

6. 以下の対数方程式を解きなさい。

a) $\log_8 x = \frac{7}{3}$　b) $\log_3 x(x + 2) = 1$　c) $\log_2 x(2 - 3x) = -2$

d) $\log_6(2x - 3) = \log_6 5 + \log_6 7$　e) $\log(x - 3) + \log(5 - x) = 0$　f) $\log(x - 8) - \log(x - 9) = \log 4$

g) $\log_7(-x) - \log_7(6 - x) = 1$　h) $\log_6(x - 2) + \log_6(x + 3) = 1$　i) $\log_2(x^2 + 9) = 1 + \log_2(2x^2 - 33)$

7. 以下の数の桁数を求めなさい。

a) 2^{350}　b) 3^{1234}　c) 4^{98765}

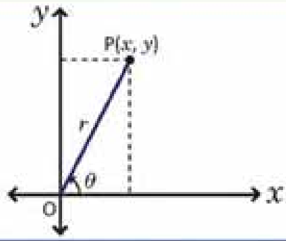
8. 11 を底とし、100 桁で書く累乗を求めなさい。別の累乗は存在しますか。

3.1 任意の角度の三角関数の比率（復習）

導入問題

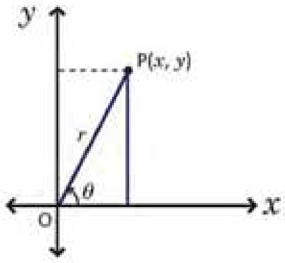
1. 角度 θ のグラフで、O は原点、$\overline{OP}$ は標準位置に描かれた角度 θ の末端側、r は辺 $\overline{OP}$ セグメントの長さ。角度 θ の三角関数の比率を書きましょう。

2. 三角比は r の値に依存しますか?

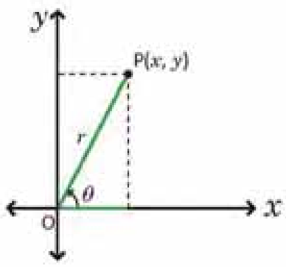


解法

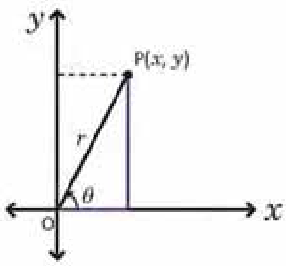
1.



$\text{sen}\ \theta = \frac{y}{r}$



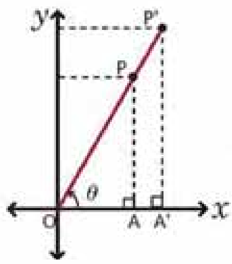
$\cos\theta = \frac{x}{r}$



$\tan\theta = \frac{y}{x}$

$x \neq 0$ である場合は常に

2. 図に示すように、$\overline{OP'}$が θ の末端側でもあるように別の点 P '(x', y') を選択する。



P が辺 $\overline{OP'}$ 上の 1 点となっている。

A を P の x 軸への投影、A' を P' の x 軸への投影とすると。

三角形の類似度のAA基準で ΔPOA ～ΔP'OA' を満たしています。

$r' = \overline{OP'}$ とすると、類似度から

$\text{sen}\ \theta = \frac{y}{r} = \frac{y'}{r'}$, $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x'}{r'}$, $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$

にならなければなりません。

三角比は r の値に依存しません。

まとめ

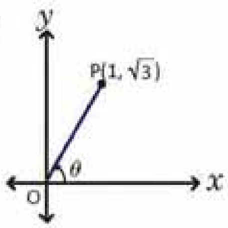
1. 三角比はセグメント $\overline{OP}$ の長さに依存しません。
2. 三角比は角度 θ だけに依存します。
3. 角度 θ は、senθ の 1 値、cosθ の 1 値、および tanθ の 1 値に該当します。
4. 三角比の sen θ、cos θ、tan θ は角度θの関数です。

今後、sen、cos、tan を**三角関数**と呼びます。

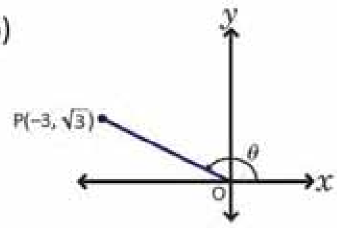
問題

1. 点 P(x,y) から角度 θ の三角関数を計算しましょう。

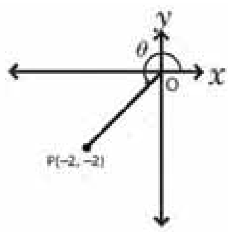
a)



b)



c)



2. 問題 1 の各項において、点 P '（cosθ, senθ）が辺 $\overline{OP}$ に属することを確認しましょう。

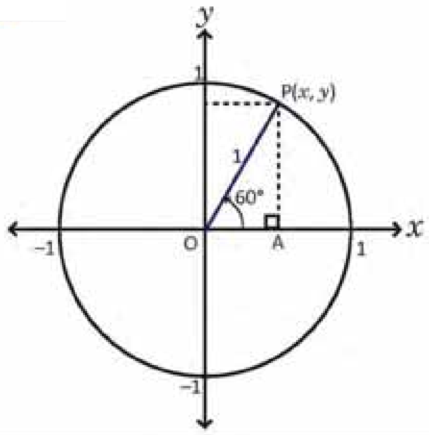
3.2 三角円

導入問題

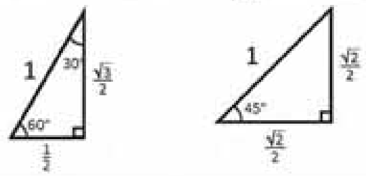
1. 原点を中心とした直行座標系の中心に半径 1 の円を描きましょう。末端側を円周の半径とした 60° の角度を表しましょう。
2. 角度の末端側との円周の交点である点 P(x, y) の座標を決定します。

解法

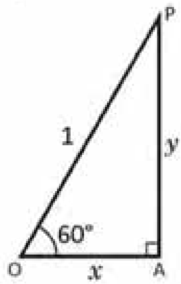
1.



三角円の中にある基準角において使用するべき三角形比は：



2. 図中、直角三角形 POA が形成されます。P は点 P(x, y)、O は原点、A は x 軸上の P の延長です。



三角比を使うと：

sen 60° $= \frac{y}{1} = y$ と cos 60° $= \frac{x}{1} = x$

なので：

$y =$ sen 60° $= \frac{\sqrt{3}}{2}$ と $x =$ cos 60° $= \frac{1}{2}$.

したがって、中点 P の座標は、P$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

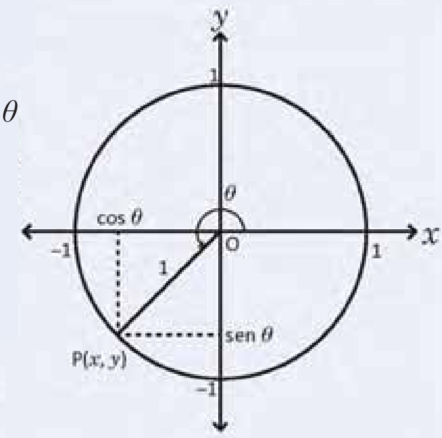
まとめ

1. 原点Oを中心とした半径 1 の円を**三角円 (TC)** と呼ぶ。

2. 三角円上の点 P(x, y) の座標は、端子辺 $\overline{OP}$ を基準位置に描かれた角度θで決まる。任意の角度の三角関数の比率の定義に従い、
   sen $\theta = \frac{y}{1} = y$，　cos $\theta = \frac{x}{1} = x$ となります。

   よって、P(x, y) = P(cos θ, sen θ)

3. 全ての角度 θ に、TC 内の点の座標としてcos θ、sen θ の値を求めることができます。



問題

1. θ の各値について、TC の点 P(cos θ, sen θ) をグラフ化しましょう。それぞれの問題の円を描きましょう。

   a) θ = 120°, θ = 210°　　b) θ = 30°, θ = 300°　　c) θ = 45°, θ = 135°

   d) θ = –45°, θ = –135°　　e) θ = 360°, θ = 405°　　f) θ = 495°, θ = 540°

2. 三角円を用いて、次の角度の sen と cos を求めましょう。

   a) θ = 0°　　b) θ = 90°　　c) θ = 180°　　d) θ = 270°

P(cos θ, sen θ) = P(x, y)であることを利用します。

3.3 三角円上の sen 関数と cos 関数の周期性

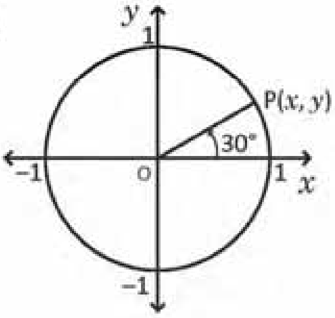
導入問題

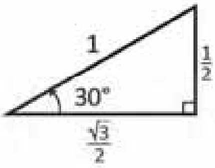
TC 上に以下の点をグラフ化し、その座標を決定してください。

a) P(cos 30°, sen 30°)　　b) P(cos 390°, sen 390°)

解法

a)

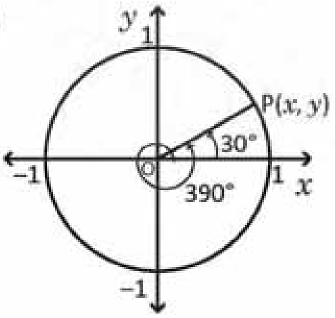




$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$　　$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

したがって、P(cos 30°, sen 30°) = $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

b)



390° = 30° + 360°に分解します。

基準角度は 30° なので、

$\text{sen } 390° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$　と　$\cos 390° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

したがって、P(cos 390°, sen 390°) = $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

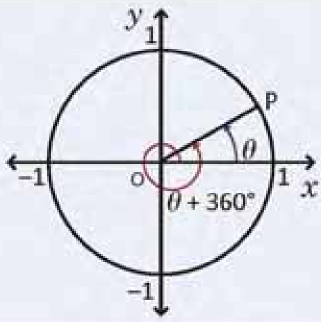
まとめ

θ を任意の角度とし、$\alpha = \theta + 360°$ とする。角度 θ と α を標準位置に描くと、TC では同じ末端側になる。

したがって、P(cos θ, sen θ) = P(cos(θ + 360°), sen(θ + 360°)) を満たす。

すべての x が $f(x) = f(x + t)$ を満たすような値 t があれば、関数 f は**周期的**です。
したがって、sen と cos は、次のような性質を持っているので、周期性があります。

$\cos(\theta \pm 360°) = \cos \theta$　　$\text{sen}(\theta \pm 360°) = \text{sen } \theta$



例

sen(−330°) の値を求めましょう。

周期性を適用して、$\text{sen}(-330°) = \text{sen}(-330° + 360°) = \text{sen}(30°) = \frac{1}{2}$

したがって、$\text{sen}(-330°) = \frac{1}{2}$.

問題

1. 三角関数の周期性を利用して、以下の値を計算します。

a) sen 405°	b) cos 420°	c) sen(−300°)
d) cos(−675°)	e) sen 1080°	f) cos 630°
g) sen(−900°)	h) cos(−630°)	i) sen 540°

2. 和の sen と cos の公式を使って、次の性質を示してください。

a) $\cos(\theta + 360°) = \cos \theta$　　b) $\text{sen}(\theta + 360°) = \text{sen } \theta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta$
$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{ sen } \beta$

3.4 三角円上の tan の周期性

導入問題

それぞれの角度について：

1. $\theta = 30°$　　　　2. $\theta = -30°$

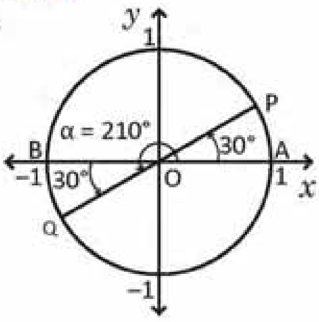
P'($-x$, $-y$) は、原点を基準とした P(x, y)の対称点です。

以下を解答しましょう。

a) 減点に対して点 P(cos θ, sen θ) に対称な点 Q をグラフ化し、その座標を書きましょう。
b) 点 Q に対応する基準位置の角度 α を決定しましょう。
c) tan α の値を計算しましょう。

解法

1.



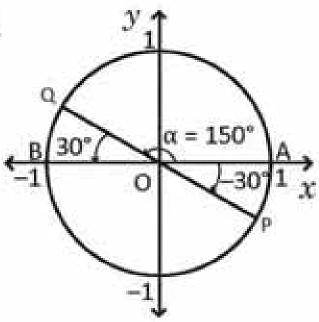
a) 線分 $\overline{OP}$ を TC を再び切断するまで延長します。この切断点が Q なので、$\overline{OQ} = \overline{OP} = 1$。 この点は点 P と対称を成すことから、座標は Q ($-\cos 30°$, $-\text{sen } 30°$) となります。

b) 点A(1, 0)と点 B(-1, 0) とする。頂点に対向する角度によって、∢BOQ = ∢AOP = 30° となる。したがって、 α = 180° + 30° = 210°

c) 点 Q(-cos 30°, -sen 30°) とすると：

$$\tan 210° = \frac{-\text{sen } 30°}{-\cos 30°} = \frac{\text{sen } 30°}{\cos 30°} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2.



a) 点 Q をグラフ化すると、原点を基準にして点 P に対して対称なので、その座標は Q(-cos 30°, -sen 30°)

b) 点 A(1, 0) と B(−1, 0) とする。頂点に対向する角度によって、∢BOQ = ∢AOP = 30° となる。したがって、 α = 180° − 30° = 150°

c) 点Q(cos(−30°), −sen(−30°)) とすると：

$$\tan 150° = \frac{-\text{sen}(-30°)}{-\cos(-30°)} = \frac{\text{sen}(-30°)}{\cos(-30°)} = \tan(-30°) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

まとめ

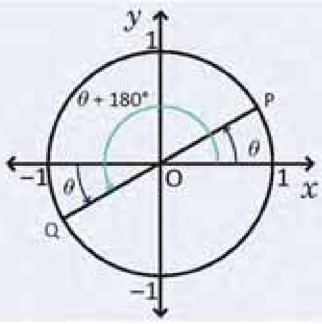
θ を任意の角度とすると：

$$Q(\cos(\theta + 180°), \text{sen}(\theta + 180°)) = Q(-\cos\theta, -\text{sen }\theta)$$

なので $\tan(\theta + 180°) = \dfrac{-\text{sen }\theta}{-\cos\theta} = \dfrac{\text{sen }\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

したがって、tan の**周期性**は次のように示すことができます。

$\tan(\theta \pm 180°) = \tan\theta$



問題

1. tan 関数の周期性を利用して、以下の値を計算します。

a) tan 225°	b) tan 210°	c) tan 240°	d) tan 180°
e) tan(−150°)	f) tan(−135°)	g) tan(−120°)	h) tan(−300°)

2. 和の tan の式を用いて $\tan(\theta + 180°) = \tan\theta$ の性質を証明しましょう。

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

3.5 sen 関数

導入問題

1. 次の表を完成させ、関数 y = sen θ をグラフ化しましょう。

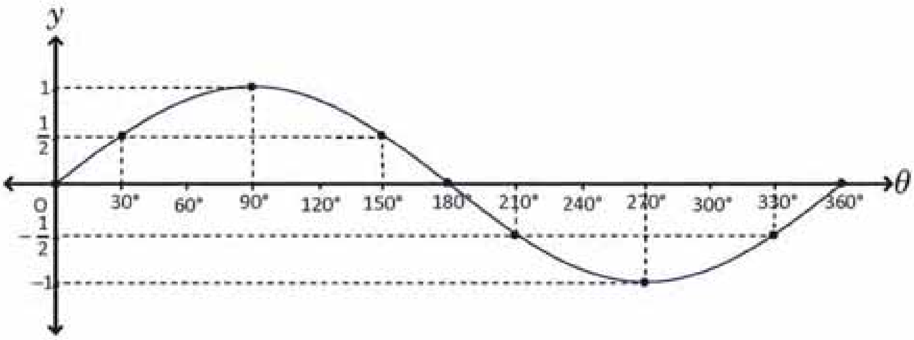
θ	0°	30°	90°	150°	180°	210°	270°	300°	360°
sen θ									

2. 領域と範囲を決定します。

解法

1.

θ	0°	30°	90°	150°	180°	210°	270°	330°	360°
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	−1	$-\frac{1}{2}$	0

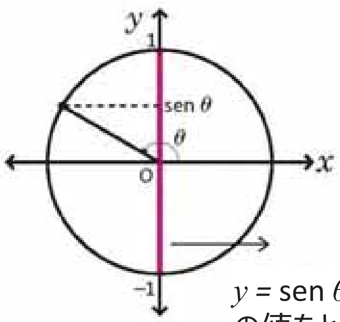


2. 領域変数 θ は任意の角度の値を取ることができます。

したがって、関数 y = sen θ の領域は ℝ となります。

範囲：TC から、任意の角度の sen 値として [-1, 1] の範囲の値を取ることができます。

したがって、関数 y = sen θ の範囲は [−1, 1] となります。



y = sen θ は [−1, 1] の値をとります。

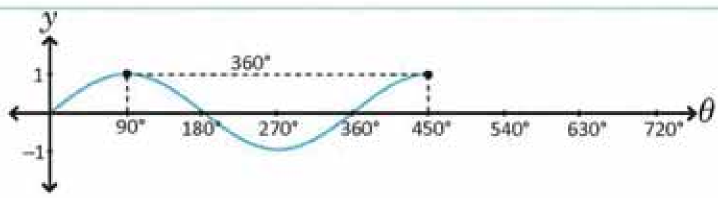
まとめ

関数 $f(\theta)$ = sen θ は、領域 D_f = ℝ、範囲 R_f = [−1, 1] です。

関数 $f(\theta)$ = sen θ は、周期的な関数、すなわち θ のすべての値に対して $f(\theta + \alpha) = f(\theta)$ となるような値 α があります。$f(\theta + \alpha) = f(\theta)$ となるような最小値 $\alpha > 0$ を関数 f の**周期**と呼ぶ。sen 関数の周期は 360° です。一般に、すべての角度 θ に対して、また、すべての n 個の整数に対して、(θ + 360°n) = sen θ となります。

問題

1. 次の図は、[0°,450°] の範囲で sen 関数をグラフ化したものです。関数の周期性を利用して、720° の角度までのグラフを完成させましょう。



2. 関数 $f(\theta)$ = sen θ を [-360°, 0°] の範囲でグラフ化しましょう。

3.6 cos 関数

導入問題

1. 次の表を完成させ、関数 y = cos θ をグラフ化しましょう。

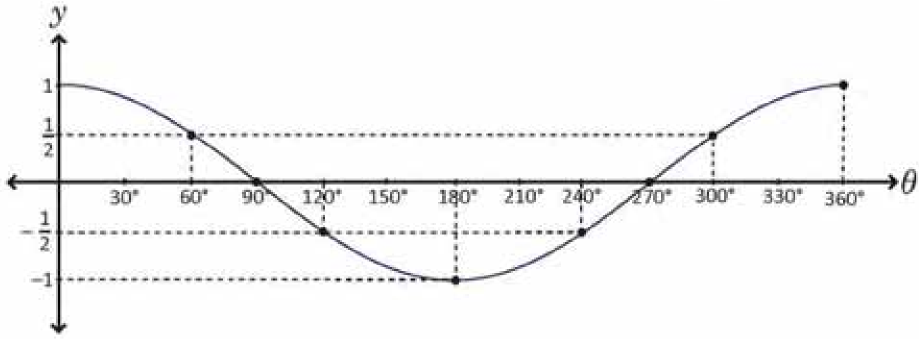
θ	0°	60°	90°	120°	180°	240°	270°	300°	360°
cos θ									

2. 領域と範囲を決定します。

解法

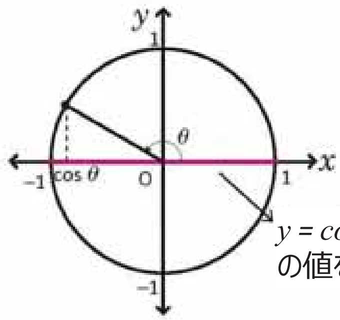
1.

θ	0°	60°	90°	120°	180°	240°	270°	300°	360°
cos θ	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	−1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1



2. 領域変数 θ は任意の角度の値を取ることができます。
したがって、関数 y = cos θ の領域は ℝ となります。

範囲：TC から、任意の角度の cos 値は [−1, 1] の範囲の値を取ることができます。したがって、関数 y = cos θ の範囲は [−1, 1] となります。



$y = \cos\theta$ は [−1, 1] の値をとります。

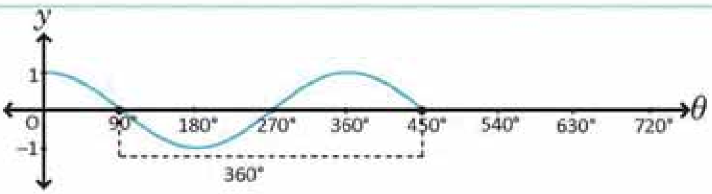
まとめ

関数 $f(\theta)$ = sen θ は、領域 D_f = ℝ、範囲 R_f = [−1, 1] です。

関数 $f(\theta)$ = cos θ は周期関数です。cos 関数の周期は 360° です。一般に、すべての角度 θ に対して、また、すべての n 個の整数に対して、cos (θ + 360°n) = cos θ となる。

問題

1. 次の図は、cos 関数を [0°, 450°] の範囲で描き、関数の周期性を利用して 720° の角度までのグラフを完成させたものです。



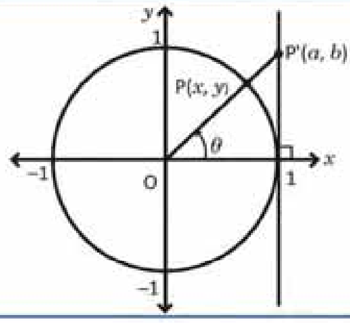
2. 関数 $f(\theta)$ = cos θ を [−360°, 0°] の範囲でグラフ化しましょう。

ユニット 5

3.7 三角円上の tan

導入問題

直線 x=1 を描き、P(x, y) を TC 上の点とする終点側 $\overline{OP}$ との角度 θ を描く。
そして、辺 OP は、線 x = 1上にある点 P' まで延長される。



1. θ に応じて点 P'(a, b) の座標を決定しましょう。

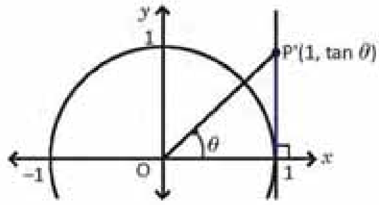
2. θ のどの値について、関数 y = tan θ が定義されていないでしょうか？

解法

1. P' は直線 x = 1 上の点なので、a = 1 でなければなりません。

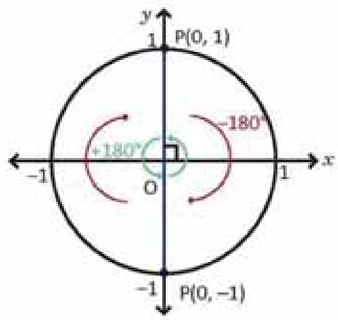
   tan の定義を使うと、tan $\theta = \frac{b}{a} = \frac{b}{1} = b$ となります。

   よって P'(a, b) = P'(1, tan θ)



2. tan $\theta = \frac{y}{x}$ のように、x = 0 では定義されません。この値は、角度 θ = 90° と θ = 270° に対応しており、TC 上の点がそれぞれ (0, 1) と (0, –1) です。

   また、これらの角度から180°を足したり引いたりすると、x = 0 になります。したがって、これらの値はすべて次のように書くことができます。90° + 180°n、ここで n は整数です。

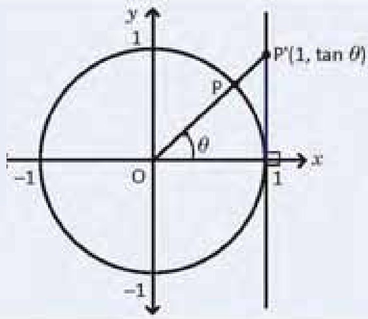


まとめ

角度 θ の tan は三角円上で次のように表すことができます。

1. 角度 θ に対応する点 P を TC 上に描きます。
2. 辺 $\overline{OP}$ (Oが原点) を、線 x = 1 を切断するまで延長します。
3. 切断点を P' とします。P' の y 座標は tan θ に等しい。

次の角については、tan θ は定義されていません。
θ = 90° + 180°n 、ここで n は整数です。



問題

結論の図を用いて、次の角度の tan の値を表しましょう。

a) θ = 30°	b) θ = 60°	c) θ = 135°
d) θ = –45°	e) θ = –120°	f) θ = –150°

3.8 tan 関数をグラフ化しましょう

導入問題

1. θ が 90° と -90° に近い値をとると、tan θ の値はどうなるのでしょうか？次の表を用いましょう。

θ	88°	89°	89.5°	89.9°	89.99°
tan θ					

θ	−88°	−89°	−89.5°	−89.9°	−89.99°
tan θ					

2. 次の表を完成させ、]−90°, 90°[の範囲で関数 y = tan θ をグラフ化しましょう。

θ	−60°	−45°	−30°	0°	30°	45°	60°
tan θ							

3. 関数 y = tan θ の領域を求めましょう。
4. 関数 y = tan θ の範囲はどこでしょうか？

解法

1. 90° に近い角度の場合。

θ	88°	89°	89.5°	89.9°	89.99°
tan θ	28.6...	57.2...	114.5...	572.9...	5 729.5...

θ が 90° に非常に近い値をとると、tan θ の値はどんどん高くなります。

−90° に近い角度の場合。

θ	−88°	−89°	−89.5°	−89.9°	−89.99°
tan θ	−28.6...	−57.2...	−114.5...	−572.9...	−5 729.5...

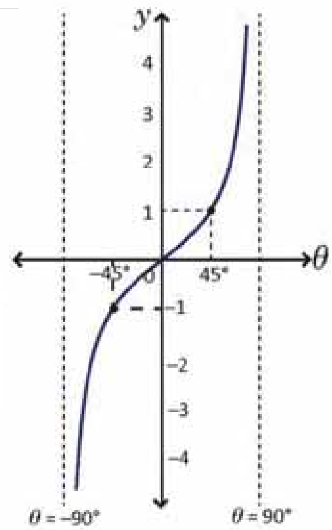
θ が −90° に非常に近い値をとると、tan θ の値はどんどん高くなります。

θ = 90° と θ = −90°が垂直方向の漸近線であることがわかります。

2. 表は次のようになります。

θ	−60°	−45°	−30°	0°	30°	45°	60°
tan θ	−1.7...	−1	−0.5...	0	0.5...	−1	1.7...

グラフ化すると右図のようになります。



3. 前回の授業では、整数 n を持つ θ = 90° + 180°n の値に対して、関数 y = tan θ が定義されていないことがわかりました。よって、領域は：
$\mathbb{R}$ − {90° + 180° n | n は整数}.

4. グラフから、y = tan θ の範囲は $\mathbb{R}$ であることがわかります。

まとめ

関数 $f(\theta)$ = tan θ の領域は $\mathbb{R}$ - {90° + 180°n | n は整数} で、その範囲は $\mathbb{R}$ です。さらに、n が整数である直線 θ = 90° + 180°n は、tan 関数のグラフの垂直方向の漸近線です。

関数 $f(\theta)$ = tan θ は周期関数です。tan 関数の周期は 180° なので、一般的にはすべての n の整数に対して tan (θ + 180°n) = tan θと なります。

問題

tan の周期性を用いて、関数 $f(\theta)$ = tan θ を]−270°, 270°[の範囲に描きます。

3.9 三角関数の周期と振幅

導入問題

1. 同じ直交座標系内で、関数 $f_1(\theta)$ = sen θ および $f_2(\theta)$ = 2sen θ を間隔 [0°, 360°] でグラフ化します。

θ	0°	90°	180°	270°	360°
sen θ					
2sen θ					

2. a) 関数 $g_1(\theta)$ = cos θ を区間 [0°, 360°] でグラフ化し、$g_2(\theta)$ = cos 2θ を区間 [0°, 180°] でグラフ化すると、次の表のようになります。

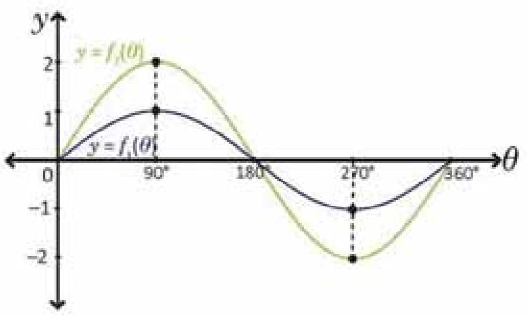
θ	0°	45°	90°	135°	180°
2θ					
cos 2θ					

b) $g_2(\theta + 180°) = g_2(\theta)$ であることを確認して、360° までのグラフを完成させましょう。

解法

1. 表を完成させましょう。

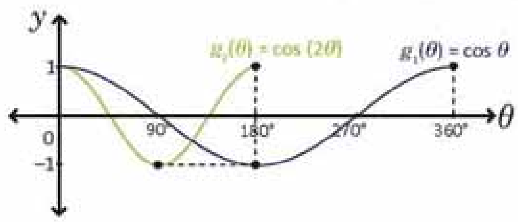
θ	0°	90°	180°	270°	360°
sen θ	0	1	0	−1	0
2sen θ	0	2	0	−2	0



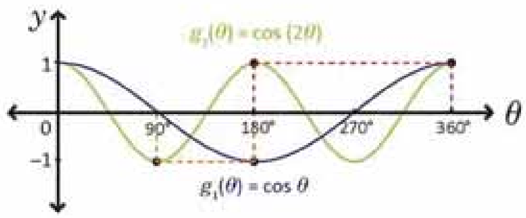
$f_2(\theta)$ = 2sen θ のグラフ上の各点は、$f_1(\theta)$ = sen θ のグラフ上の点の y 座標を 2 倍することで得られます。

2. a) 表を完成させましょう。

θ	0°	45°	90°	135°	180°
2θ	0°	90°	180°	270°	360°
cos 2θ	1	0	−1	0	1



b) $g_2(\theta + 180°) = \cos(2\theta + 360°) = \cos 2\theta = g_2(\theta)$



$g_2(\theta) = \cos 2\theta$ のグラフ上の各点は、$g_1(\theta)$ = cos θ のグラフ上の点の θ 内の座標を $\frac{1}{2}$ 倍することで得られます。

定義

三角関数 $f(\theta)$ = A sen θ の振幅を値 |A|と呼び、関数がとることができる最大値です。
この場合、関数の範囲は [-|A|, |A|] となります。この関数は、関数 sen θ のすべての y 座標に A を乗じて得られます。

B が 0 以外の実数である関数 $f(\theta)$ = sen Bθ は次を満たします。

$$\text{sen}\,(B\theta + 360°) = \text{sen}\,B\theta \Leftrightarrow \text{sen}\,B\left(\theta + \frac{360°}{B}\right) = \text{sen}\,B\theta \Leftrightarrow f\left(\theta + \frac{360°}{B}\right) = f(\theta).$$

このことから、関数の周期 $f(\theta)$ = sen Bθ es $\frac{360°}{|B|}$ （周期が正であるために|B|) が使用されます）。

これらの定義は、関数 $f(\theta)$ = Acos θ および $f(\theta)$ = cos Bθ にも適用されます。

問題

区間 [0, 360°] において、振幅と周期性を用いて次の関数をグラフ化しましょう。

a) $f(\theta)$ = 3sen θ　　b) $f(\theta) = -2\cos\theta$　　c) $f(\theta)$ = sen 3θ　　d) $f(\theta) = \cos\frac{\theta}{2}$

3.10 三角関数の垂直変位

導入問題

以下の a) と b) それぞれの関数のグラフを同一の直交座標系内に書きましょう。

a) $f_1(\theta)$ = sen θ, $f_2(\theta)$ = sen $\theta + 1$; [0°, 450°]

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen $\theta + 1$						

b) $g_1(\theta)$ = sen θ, $g_2(\theta)$ = sen $\theta - 1$; [0°, 450°]

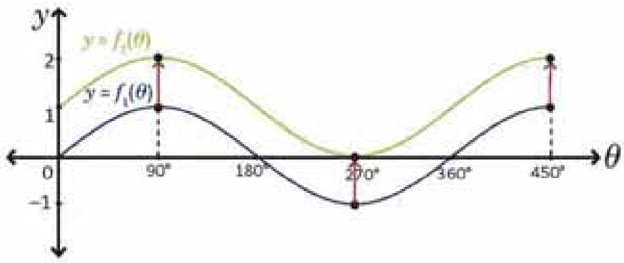
θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen $\theta - 1$						

解法

関数 sen(θ + 1°) とsen θ + 1 が異なることに注目してください。

a) 表を埋めます。

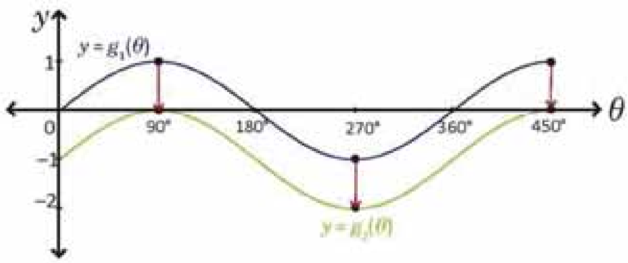
θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen (θ) + 1	1	2	1	0	1	2



$f_2(\theta)$ = sen $\theta + 1$ の各点は、$f_1(\theta)$=sen θ のグラフ上の点の上方への 1 単位の変位を示しています。

b) 表を埋めます。

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen $\theta - 1$	−1	0	−1	−2	−1	0



$g_2(\theta)$ = sen $\theta - 1$ の各点は、$g_1(\theta)$ = sen θ のグラフ上の点の下方への1単位の変位を示しています。

まとめ

関数 $f(\theta)$ = sen $\theta + k$ のグラフは、関数 sen θ が k 単位分垂直方向に変位したものです。

- $k > 0$ ならば、変位は上方へとなります。
- $k < 0$ ならば、変位は下方へとなります。

領域 $\mathbb{R}$ を持つ関数 $f(\theta)$= sen $\theta + k$ が与えられた場合、その範囲は区間 $[-1 + k, 1 + k]$ となります。

これらの規則は、関数 cos θ の垂直方向の変位としての関数 $f(\theta)$ = cos $\theta + k$ にも適用されます。

一般に、$f(x) + k$ のグラフは $f(x)$ のグラフの垂直方向の変位です。$k > 0$ の場合は上向き、$k < 0$ の場合は下向きとなります。

問題

区間 [0, 360°] で次の関数を垂直方向の変位を用いてグラフ化しましょう。

a) $f(\theta)$ = cos $\theta + 1$

b) $f(\theta)$ = sen $\theta + 2$

c) $f(\theta)$ = cos $\theta - 2$

d) $f(\theta)$ = sen $\theta - 3$

ユニット5

3.11 三角関数の水平変位

導入問題

次の設問では、指定された間隔において、同じ直交座標系内に関数をグラフ化します。

a) $f_1(\theta)$ = sen θ, $f_2(\theta)$ = sen(θ – 90°); [0°,450°]

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen θ						
sen(θ – 90°)						

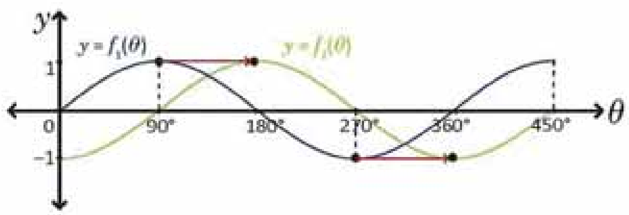
b) $g_1(\theta)$ = cos θ, $g_2(\theta)$ = cos(θ + 90°); [0°, 450°]

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°	540°
cos θ							
cos(θ + 90°)							

解法

a) 表を埋めます。

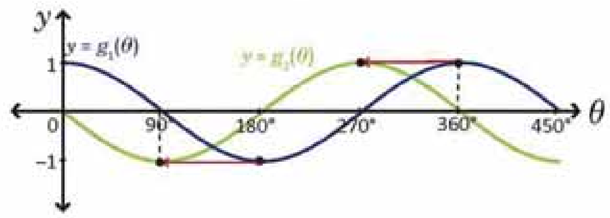
θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen θ	0	1	0	–1	0	1
sen(θ – 90°)	–1	0	1	0	–1	0



$f_2(\theta)$ = sen(θ – 90°) の各点は、$f_1(\theta)$ = sen θ のグラフ上の点を右に 90° ずらしたものです。

b) 表を埋めます。

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
cos θ	1	0	–1	0	1	0
cos(θ + 90°)	0	–1	0	1	0	–1



$g_2(\theta)$ = cos(θ + 90°) の各点は、$g_1(\theta)$ = cos θ のグラフ上の点を左に 90° ずらしたものです。

まとめ

$f(\theta)$ = sen(θ – α) のグラフは、sen θ のグラフのα単位の水平変位です。

- h > 0 ならば、変位は右方向へとなります。
- α < 0 ならば、変位は左方向へとなります。

これらの規則は、関数 cos θ の変位としての関数 $f(\theta)$ = cos(θ – α) にも適用されます。

一般に、$f(x-h)$ のグラフは、$f(x)$ のグラフから h 単位の水平方向の変位である。

- h > 0 なら右方向へ。
- h < 0 なら左方向へ。

問題

区間 [0, 360°] で次の関数を垂直方向の変位を用いてグラフ化しましょう。

a) $f(\theta)$ = cos(θ – 45°)

b) $f(\theta)$ = cos(θ – 90°)

c) $f(\theta)$ = sen(θ – (–30°))

d) $f(\theta)$ = sen(θ + 90°)

3.12 三角関数の一般的な形式

導入問題

次の手順で区間 [0°, 360°] 上の関数 $f(\theta) = 2\text{sen}\,(3\theta + 90°)$ をグラフ化しましょう。

1. 関数 $f_1(\theta) = \text{sen}\ 3\theta, f_2(\theta) = 2\text{sen}\ 3\theta,\ f(\theta) = 2\text{sen}(3\theta + 90°)$ を考慮し、表 1 を完成させましょう。
2. 表を埋めましょう。
3. 区間 [0, 120°] で関数 $f_1(\theta)$ と $f_2(\theta)$ を同じ直交座標系にグラフ化しましょう。
4. 周期性を利用して、区間 [0°, 360°] まで関数 $f_2(\theta)$ のグラフを完成させましょう。
5. 関数 $f_2(\theta)$ と $f(\theta)$ を別の直交座標系にグラフ化してください。表 2 を使います。

表 1

θ	0°	30°	60°	90°	120°
$f_1(\theta)$					
$f_2(\theta)$					

表2

θ	0°	30°	60°	90°	120°
$f_2(\theta)$					
$f(\theta)$					

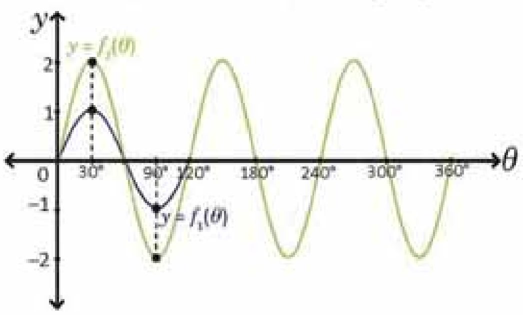
以下の関数に注目しましょう。
$f(\theta) = 2\text{sen}(3\theta + 90°) = 2\text{sen}\ 3(\theta - (-30°))$

解法

1. 表 1 を埋めます。

θ	0°	30°	60°	90°	120°
$f_1(\theta)$	0	1	0	–1	0
$f_2(\theta)$	0	2	0	–2	0

3 と 4. 関数 f_1 と f_2 がグラフ化されています。

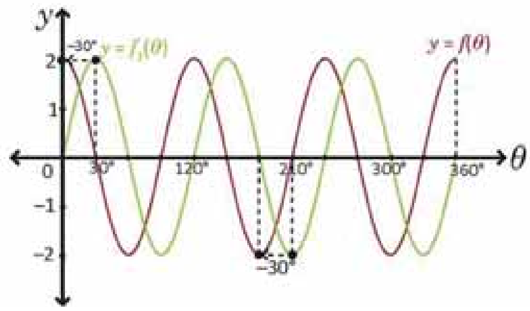


f_1 は $\frac{360°}{3} = 120°$ の周期。

2. 表 2 を埋めます。

θ	0°	30°	60°	90°	120°
$f_2(\theta)$	0	2	0	–2	0
$f(\theta)$	2	0	–2	0	2

5. 次の関数がグラフ化されます
$f_2(\theta) = 2\text{sen}\ 3\theta$ y $f(\theta) = 2\text{sen}\ 3(\theta - (-30°))$



$f(\theta)$ のグラフは、$f_2(\theta) = 2\text{sen}\ 3\theta$ のグラフが左に 30° 変位したものです。

まとめ

A ≠ 0 と B ≠ 0の$f(\theta) = A\text{sen}\ B(\theta - \alpha)$の形式の関は、次のような特徴を有します。

1. 振幅 |A|なので、範囲は [–|A|, |A|]です。
2. 周期 $\frac{360°}{|B|}$ を持ち、Asen Bθ関数に対して α 単位水平変位する。

以下の手順で $f(\theta) = A\text{sen}\ B(\theta - \alpha)$ の形式の関数をグラフ化できます。

1. 関数 $f(\theta) = \text{sen}\ \theta$ を $\left[0, \frac{360°}{|B|}\right]$ の範囲でグラフ化しましょう。
2. 関数 Asen Bθ をグラフ化し、周期性を利用してグラフ化する区間を完成させます。
3. $f(\theta) = A\text{sen}\ B(\theta - \alpha)$ を得るために、α 単位の水平変位を行います。

問題

区間 [0, 360°] 内で、各関数を変位、振幅、周期を用いてグラフ化しましょう。

a) $f(\theta) = 2\text{sen}(\theta - 30°)$ b) $f(\theta) = 3\cos 2(\theta + 45°)$ c) $f(\theta) = -\text{sen}(4\theta + 240°)$

3.13 角度における六十分法

導入問題

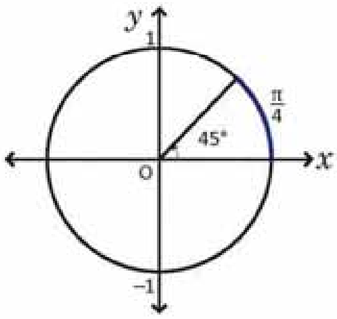
1. 中心角が 45° の TC の円弧の長さを求めましょう。

2. 長さが $\frac{\pi}{6}$ である TC の中心角を求めましょう。

半径 r の円上で、中心角 θ で囲まれた円弧の長さは、$2\pi r\frac{\theta}{360^\circ}$ で表されます。

解法

1. TCの半径は $r=1$ です。45° の角度で支えられた円弧の長さは次式で表すことができます。
$2\pi(1)\frac{45^\circ}{360^\circ}=\cancel{2}^{1}\pi\frac{1}{\cancel{8}_{4}}$
したがって、円弧の長さは $\frac{\pi}{4}$ となります。



2. $2\pi\frac{\alpha}{360^\circ}=\frac{\pi}{6}$ となるような中心角を α とします。
$\alpha=\frac{\pi}{6}\left(\frac{360^\circ}{2\pi}\right)=30^\circ$ を解きます。
したがって、長さ $\frac{\pi}{6}$ の円弧を挟む角度は 30° です。

定義

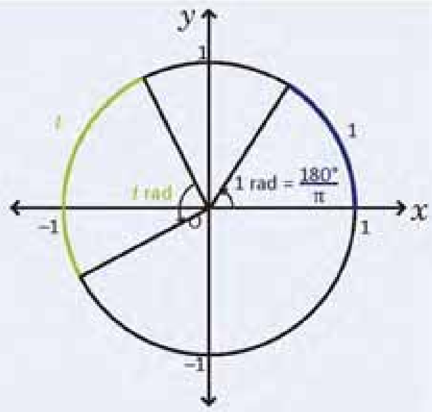
三角関数は次のように定義されます。長さ 1 の円弧を支える角度としての **1 ラジアン。**

したがって、t **ラジアン**は長さ t の円弧を支える角度であり、t rad（または単に t）として表されます。

$0\leqq\theta\leqq360^\circ$ の角度 θ は、長さ $\frac{\theta}{180^\circ}\pi$, の円弧を支えるので、
$0\leqq\theta\leqq360^\circ$ の角度 θ は $\frac{\theta}{180^\circ}\pi$ rad の値を持ちます。

この定義は次のように任意の角度に適用できます。任意の角度 θ のラジアンでの値は $\frac{\theta}{180^\circ}\pi$ rad となります。

角度 t をラジアンで表す場合、その値 θ を度数で表すと $\theta=\frac{180^\circ}{\pi}t$ となります。



角度を度数で書くシステムを**角度の六十進法**といいます。

例

a) 角度 120° をラジアンで表します。

$120^\circ=\frac{120^\circ}{180^\circ}\pi\text{ rad}=\frac{2\pi}{3}\text{ rad}$

b) $\frac{\pi}{5}$ の値を度で表しましょう。

$\frac{\pi}{5}=\frac{180^\circ}{\cancel{\pi}}\left(\frac{\cancel{\pi}}{5}\right)=36^\circ$

問題

1. 次の角度を度数で表し、その値をラジアンで求めましょう。

a) 60°　b) 15°　c) 10°　d) 270°
e) 135°　f) 150°　g) 210°　h) 315°

2. 次の角度をラジアンで表し、その値を度数で求めましょう。

a) 2π rad　b) π rad　c) $\frac{\pi}{2}$ rad　d) $\frac{5\pi}{12}$ rad
e) 1 rad　f) $\frac{2\pi}{9}$ rad　g) $\frac{5\pi}{4}$ rad　h) $\frac{9\pi}{5}$ rad

3.14 復習問題

1. 三角円を描き、各 θ 値の点 P(cos θ, sen θ) をグラフ化します。
   a) $\theta = 60°$　b) $\theta = 150°$　c) $\theta = 240°$　d) $\theta = 330°$

2. TC で sen と cos を用いて $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を証明しましょう。

3. 三角関数の周期性を利用して、次の値を計算しましょう。
   a) sen 750°　b) cos 765°　c) tan 600°
   d) sen(−660°)　e) cos(−690°)　f) tan(−495)

4. 指示に従って解きましょう。
   a) 関数 f： [-90°, 90°] → [-1, 1] ; θ → sen θ が全単射であることを証明しましょう。
   b) 余弦関数が全単射になるように制限します。授業 3.6 のグラフを使いましょう。

5. TC で tan 関数を用いて $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ を証明しましょう。

6. 次の問題を解きましょう。
   a) 点 (0,1) で TC に接する直線 $y = 1$ を書きましょう。
   b) θ を第 1 象限の角度とする。直線 $y = 1$ と辺 OP の延長線との交点である R(0,1)、P(cos θ, sen θ))、Q を書きましょう。
   c) $OQ = \dfrac{1}{\text{sen}\,\theta}$ であることを証明しましょう。
   d) 点 Q(a, b) の座標を決定しましょう。
   e) $1 + \dfrac{1}{\tan^2\theta} = \dfrac{1}{\text{sen}^2\theta}$ であることを証明しましょう。

7. 次の関数の周期を求め、与えられた区間上にグラフ化しましょう。
   a) tan (θ − 90°); [0, 360°]　b) tan 2θ; [0, 270°]

8. 次の関数の周期と振幅を求め、与えられた間隔でグラフ化しましょう。
   a) $f(\theta) = \text{sen}\,5\theta$; [0°, 360°]　b) $f(\theta) = \cos\dfrac{\theta}{3}$; [0°, 1 080°]
   c) $f(\theta) = 4\cos\theta$; [0°, 360°]　d) $f(\theta) = \dfrac{1}{2}\text{sen}\,\theta$; [0°, 360°]

9. 以下の関数を変位、振幅、周期を用いてグラフ化しましょう。また、領域と範囲を決定しましょう。
   a) $f(\theta) = 2\cos(6\theta - 120°)$　b) $f(\theta) = 4\text{sen}(2\theta + 120°)$
   c) $f(\theta) = -2\cos(4\theta + 180°)$　d) $f(\theta) = \dfrac{1}{2}\text{sen}(3\theta - 225°)$

10. 六十進法の角度を六十分法に書き換えたり、またその逆を行います。
   a) 20°　b) 50°　c) 140°　d) 345°
   e) 500°　f) −150°　g) $\frac{\pi}{8}$ rad　h) $\frac{4\pi}{9}$ rad
   i) $\frac{5\pi}{3}$ rad　j) $\frac{\pi}{180}$ rad　k) 3π rad　l) $-\frac{\pi}{2}$ rad

11. 円の中心角 45° を 9 cm の円弧が支えているとすると、円の半径の長さはどのようになりますか？

12. 円の半径は 5 cm です。12 cm の円弧を表す中心角をラジアン単位で求めましょう。

3.15 このユニットの問題

1. 以下の方程式を解きましょう。

a) $\log_2(x^2 - 8) = 3$　　b) $\log_{\frac{1}{2}} x = 4$　　c) $\log_3 x = -\frac{1}{2}$

d) $2^{3x+2} = 256$　　e) $2^x = 3^{x-2}$　　f) $2^{x+5} = 3^{x-2}$

2. 水平方向と垂直方向の変位を使用して、以下の関数をグラフ化しましょう。

a) $f(x) = \log_3(x - 1)$　　b) $f(x) = \log_2 x + 2$　　c) $f(x) = \log_3(x - 1) - 1$　　d) $f(x) = \log_4(x + 2) - 3$

3. 前の問題の各関数について次を決定しましょう。領域、範囲、漸近値、およびその逆関数

4. **複利計算**　ある一定の金額Cを年利率 r% で t 年間投資し、1 年に n 回再資本化（再投資）したとします。t 年後に得られた金額は、式 $D(t) = C\left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{nt}$ で表すことができます。

マリアは信用組合に 500 ドルの定期預金をします。預金の年利は 4% です。年に 4 回（3 ヶ月に 1 回）資本修正がなされます。

a) 既知の値を式 $D(t) = C\left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{nt}$ に代入することで、t 年後にマリアが積み立てた金額を求める式を作ります。

b) 2 年後のマリアの貯金額はどれくらいになるのでしょうか？

c) マリアが最低でも 750 ドルを貯めるには何年かかるのでしょうか？

5. **人口増加**　時間経過に伴う人口の成長は、次の指数関数で示されます。$P(t) = C(1 + r)^t$。ここで、C は初期人口、r は成長率、t は経過年数です。2017 年のエルサルバドルの人口は 6,172,011 人で、人口増加率は 0.3% と推計されています。前述の情報を用いて次の問題に回答しましょう。

a) このまま成長率が変わらない場合、2030 年のエルサルバドルの人口は、おおよそどのくらいになるのでしょうか？

b) 人口が 700 万人を超えるのは何年後でしょうか？

6. 次の定理を正当化してください。すべての自然数 n について、2^n が k 桁の場合、2^{n+1} が k 桁、または 2^{n-1} が k 桁である。

7. tan 関数を全単射に限定してグラフ化しましょう。

8. 復習問題 3.14 の 4 と前回の問題で学んだ制限関数を用いて、三角関数の逆関数をグラフ化しましょう。

六十分法の角度を用います。

9. すべての角度 θ に対して、次が成り立つことを証明しましょう。

三角不等式を用います。

a) $\text{sen}^2\theta \leq 1$　　b) $|\text{sen}\,\theta + \cos\theta| \leq 2$

c) $(\text{sen}\,\theta + \cos\theta)^2 = 1 + \text{sen}\,2\theta$

d) $|\text{sen}\,\theta + \cos\theta| \leq \sqrt{2}$　前回と同様におこないます。

e) $\frac{2\tan\theta}{1 + \tan^2\theta} \leq 1$, $\theta \neq 90° + 180°n$、ここで n は整数です。

10. π の近似値。半径 1 の円に次の多角形が内接している状態で、多角形の外周と円の直径の商を計算しましょう。

a) 正八角形　　b) 正十二角形

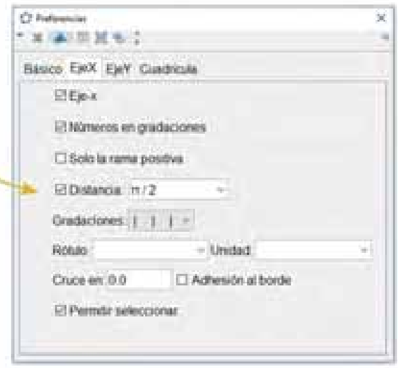
アルキメデス（紀元前287-212）は図形の面積や体積を求める手法である"取り尽くし法"を用いて実験に成功しました。この手法では、円の中に正多角形を描き込み、その面積を近似させることで成り立ちます。この方法で、アルキメデスはまた、その直径による円周の商、すなわち定数πの近似を行いました。
W. ダンハム(2004) *Viaje a través del genio*

4.1 GeoGebraを使った演習： 三角関数

演習が進むにつれ、GeoGebra での三角関数のグラフと、その特徴(振幅、周期、位相)を学習できます。

演習

1. 軸の単位を変えます。
   a)「グラフ表示 (Vista Gráfica)」で右クリックします。
   b)「グラフ表示 (Vista Gráfica)」 を選びます。
   c)「X 軸 (EjeX)」を選びます。
   d)「間隔 (Distancia)」の前の四角に印をつけます。
   e)プルダウンメニューから「π / 2」を選びます。

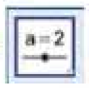


2. 三角関数のグラフ
   a) 正弦 (サイン) 関数。入力バー (Entrada) に sen x と入力します。

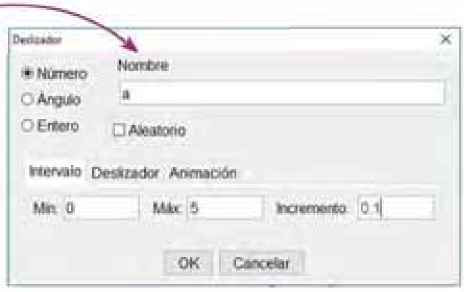
   b) 正弦 (サイン) 関数の値を評価します。三角関数の角を角度で評価する場合、相当する角度記号を入力しなければなりません。入力バー (Entrada) に a = f(90°)、b = f(90)、c = f(π / 2) を入力します。b = f(90) の時、プログラムでは 90 ラジアンとすることに注意してください。

3. 三角関数のグラフの振幅
   関数 $g(x) = 2\text{sen } x$ のグラフを描きましょう。入力バー (Entrada) に g(x) = 2*f(x) を入力します。

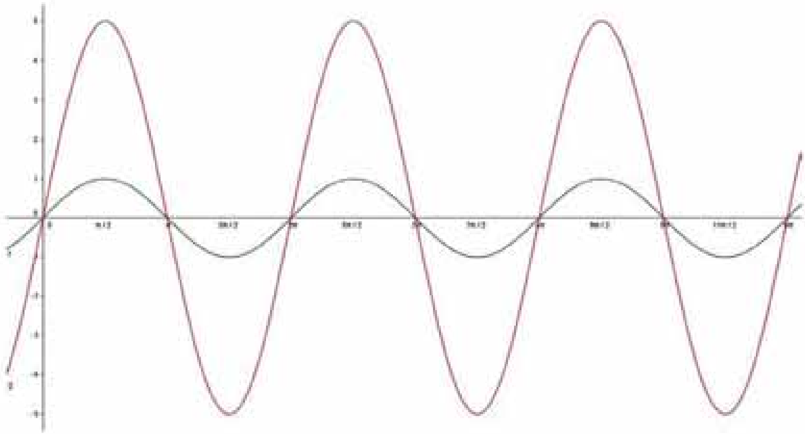
4. a>0の時の関数 $f(x) = a\text{sen}(x)$ の動き。
   スライダー (Deslizador) の設定。
   a) ツールバー (barra de herramientas) で「スライダー (Deslizador)」を選びます。



   b)「グラフ表示 (Vista Gráfica)」をクリックします。
   c) スライダーの「名前 (Nombre)」を入力する表示が現れます。この場合「**a**」と入力します。「最小 (Mín)」に 0、「最大 (Máx)」に 5 を、「増加 (Incremento)」に 0.1 を入力し、「OK (OK)」をクリックします。

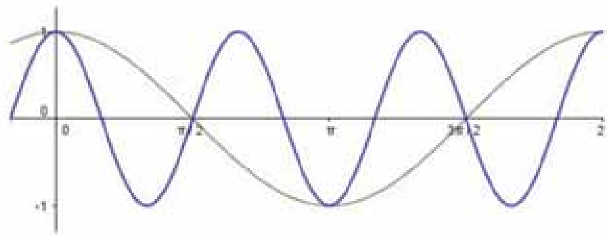


   d) 関数 $f(x) = \text{sen } x$ のグラフを描きます。
   e) 関数 $g(x) = a\text{sen } x$ のグラフを描きます。
   f) スライダーの点を選び、右に行くほど関数が拡大し、左に行くほど縮小することに注意します。
   g) スライダーの上で右クリックし、アニメーションを始めます。



5. 周期

a) 関数 $f(x)$=cos x のグラフを描きましょう。
b) 関数 cos $3x$ のグラフを描きましょう。入力バー (Entrada) に g(x)=f(3x) を入力します。
c) 関数 cos $\frac{x}{3}$ のグラフを描きましょう。入力バー (Entrada) に h(x)=f(x/3) を入力します。

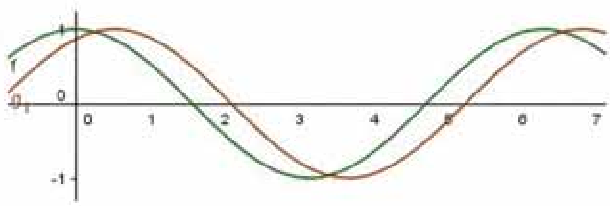


6. 縦方向または水平方向の移動

a) 関数 $f(x)$=cos x のグラフを描きましょう。
c) 関数 $h_1(x)$ = cos (x + 60°) のグラフを描きましょう。
e) 関数 $h_2(x)$ = cos(x) – 2 のグラフを描きましょう。

b) 関数 $g_1(x)$ = cos (x – 30°) のグラフを描きましょう。
d) 関数 $g_2(x)$ = cos(x) + 3 のグラフを描きましょう。

GeoGebraで添え字を書く時は、次に示すように下につけます。



課題

1. 授業 3.14 の設問 8 の関数のグラフを描きましょう。
2. 授業 3.14 の設問 9 の関数のグラフを描きましょう。
3. スライダーを **B** に設定し、「最小 (Mín)」に 0、「最大 (Máx)」に 5 を、「増加 (Incremento)」に 0.1 を入力しましょう。次に関数 $f(x)$ = sen x と $g(x)$ = sen Bx のグラフを描きましょう。**B** の値が増えたり減ったりする時の関数 g の動きに注意しましょう。
4. スライダーを使って、縦方向と水平方向の移動のアニメーションを作ってみましょう。

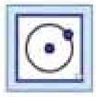
4.2 GeoGebraを使った演習：正弦(サイン)関数と余弦(コサイン)関数のグラフの作成

単位円での動きを追うことで三角関数を導きだすことができます。次に正弦（サイン）関数のグラフを描いてみましょう。

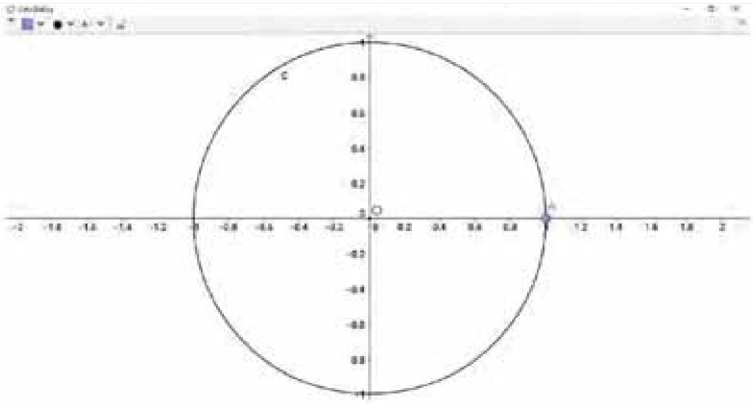
演習

1. 単位円を描きます。

   a) ツールバー (Barra de Herramientas) から「円周（中心、点）(Circunferencia [centro, punto])」を選びます。

   b) 中心として点 O(0, 0) を、点として A(1, 0) を選びます。



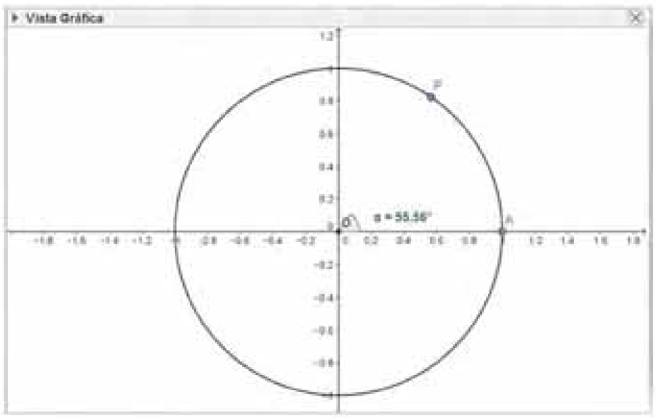
2. 角度を描きます。

   a) 三角円上で点 P を選びます。

   b) ツールバー (barra de herramientas) で、「角度（3 点または 2 直線）(Ángulo [tres puntos o dos rectas])」を選びます。

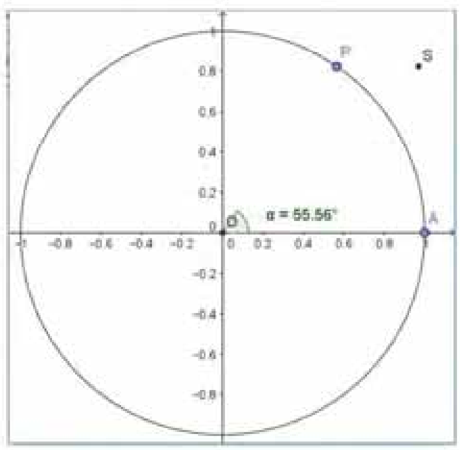
   

   c) A、O、P の各点をこの順番に選びます。角度は自動的に α となります。



3. 作成点この点は、角度 α のラジアン値を x 座標とし（プログラムが自動で変換します）、P 点の y 座標を y 座標とします（すなわち、senα です）。

   a) 入力バー (Entrada) に S = (α, y(P)) と入力し、「入力 (Enter)」を押します。



ユニット5

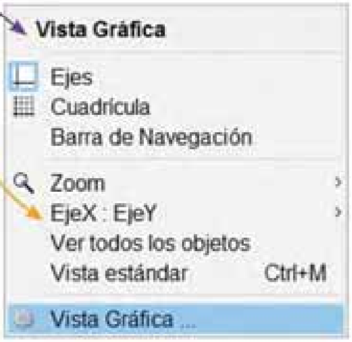
4. x 軸の単位を変えます。

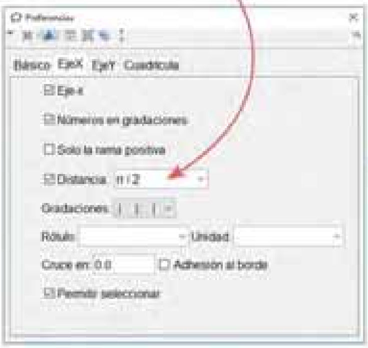
a)「グラフ表示 (Vista Gráfica)」で右クリックします（オプションは何も選びません）。

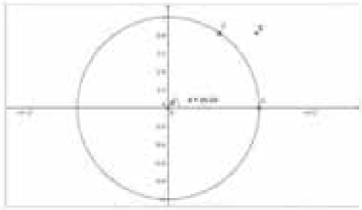
b)「グラフ表示 (Vista Gráfica)」をクリックします。

c)「X 軸 (EjeX)」をクリックします。

d)「間隔 (Distancia)」の前の四角をクリックし、オプションから π / 2 を選びます。退出します。





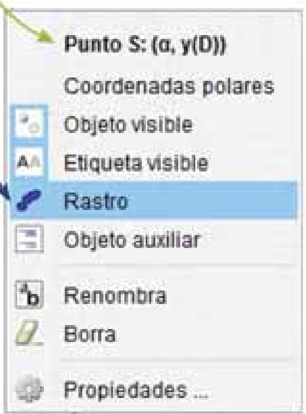


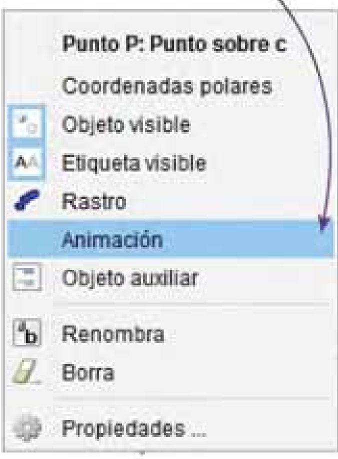
5. 正弦(サイン)関数のグラフを描きます。

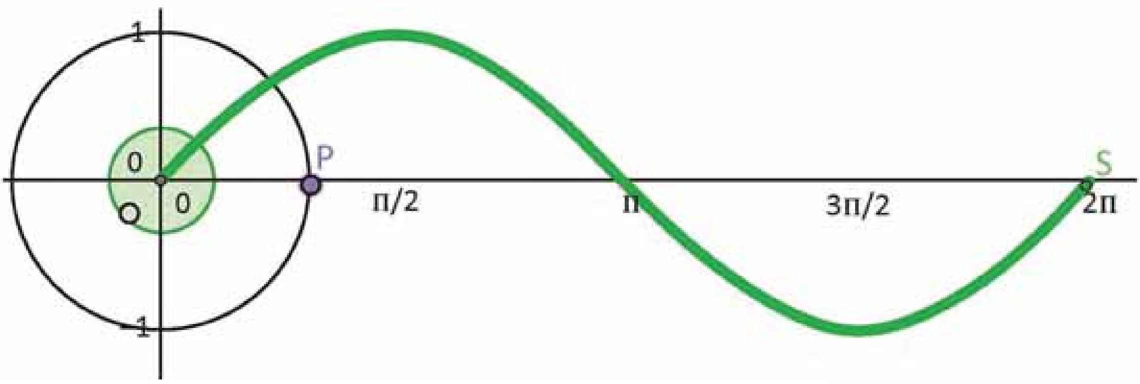
a) 点 S を選び、右クリックします。

b)「残像表示 (Rastro)」をクリックします。

c) 点 P を選び、右クリックし、アニメーションを始めます。







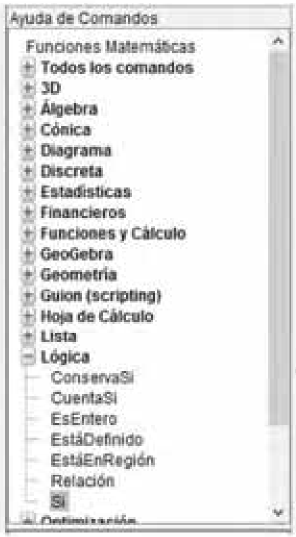
課題

三角関数の単位円から余弦（コサイン）関数のグラフを描きましょう。

4.3 GeoGebra を使った演習：正接 (タンジェント) 関数のグラフの作成

正弦（サイン）関数と余弦（コサイン）関数のグラフの場合と同様に、正接（タンジェント）関数のグラフも単位円から描くことができます。しかし、三角円上で $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ の値を走査する際の角度については、区画 $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ で関数で評価しなければならないという困難さがあります。これを実行する時、「ロジック (Lógica)」の選択肢の **IF** 関数が有用であることを説明することになるでしょう。

演習



1. 入力バー (Entrada) の右にある「コマンドのヘルプ (Ayuda de Comandos)」ボタンをクリックします。コマンドパネルが開きます。

2. 「ロジック (Lógica)」の選択肢の中にある「IF 関数 (Si)」を選びます。このコマンドには、コンマで区切りながらデータを 2 つか 3 つ入力しなければなりません。

   Si[<Condición>, <Entonces>, <Si no>]

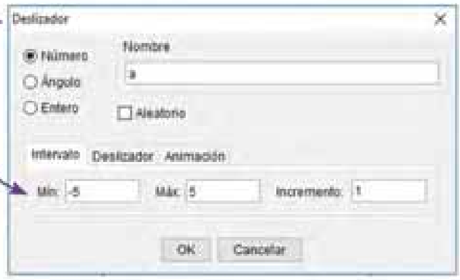
   「条件 (Condición)」：変数が含まれている条件を入力します。等式、不等式などが考えられます。

   「それならば (Entonces)」：条件を満たす時に、コマンドが返答してくる値です。

   「そうでないなら (Si no)」：条件が満たされない時に、コマンドが返答してくる値です。

3. スライダー (deslizador) **a** から、数 **b** が設定されます。すなわち、**a** の値が負の場合、**b** の値は 0 になり、**a** の値が正の場合、**b** は **a** の値になります。

   a) スライダー (deslizador) の「名前 (Nombre)」を **a** にし、「最小 (Mín)」に –5、「最大(Máx)」に 5 を、「増加 (Incremento)」に 1 を入力します。

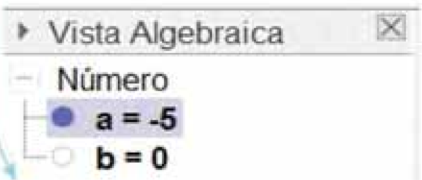
   b) 入力バー(Entrada)に「**b =**」と入力し、次に「Si」と入力します。「Si」は、「Si (IF関数)」のことで、これはロジック (Lógica) の選択肢の中にあります。

   Entrada: b=**Si[]**

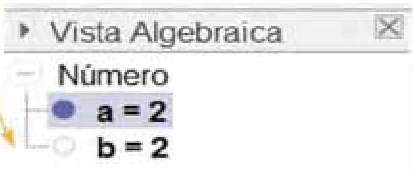
   c) **a** が負であるか否か評価しなければなりません。もし負ならば、入力する条件 (Condición) は、「**a**<0」になります。もし、「**a**<0」を満たすのなら、コマンドが回答してくる値は、「0」です。もし、「**a**<0」を満たさないのなら、コマンドが回答してくる値は、「**a**」です。

   Entrada: **b=Si[a<0, 0, a]**

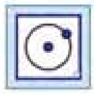
a 値が負の場合、
b の値は 0 になります。



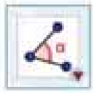
a の値が正の場合、
b の値は **a** になります。



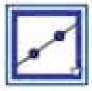
4. 単位円を描きます。
   a) ツールバー (Barra de Herramientas) から「円周（中心、点） (Circunferencia [centro, punto])」を選びます。
   b) 中心として点 O(0, 0) を、点として A(1, 0) を選びます。
   c) 直線 $x = 1$ のグラフを描きます。



5. 角度を描きます。
   a) 点 A(1, 0) を定めます。
   b) 三角円上で点Pを選びます。
   c) ツールバー (barra de herramientas) で、「角度（3 点または 2 直線）(Ángulo[tres puntos o dos rectas])」を選びます。
   d) A、O、P の各点をこの順番に選びます。角度は自動的に α となります。



6. 正接（タンジェント）関数のグラフの作成
   a) 点 O と点 P を通る直線を描きます。
   b) 描いた直線と直線 $x = 1$ の交差する点を Q とします。
   c) 描いた直線を見えないようにします。

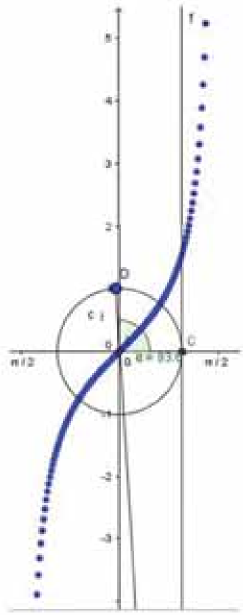


7. 作成点この点は、角度 α のラジアン値を x 座標とし（プログラムが自動で変換します）、P 点の y 座標を y 座標とします（すなわち、tanα です）。

   a) 角度 θ を設定します。　Entrada: θ = Si[α > 3* π /2 , α - 2 π , α]

   b) 作成点を点 T とします。
   入力バー (Entrada) に T = (θ, y(Q)) と入力し、「入力を (Enter)」を押します。　Entrada: T = (θ, y(Q))

8. 関数のグラフを描きます。
   a) x 軸の単位を変更して π で表します。
   b) 点 T を選んで、右クリックし、「残像表示 (Rastro)」をクリックします。
   c) 点 P を選び、右クリックし、アニメーションを始めます。



課題

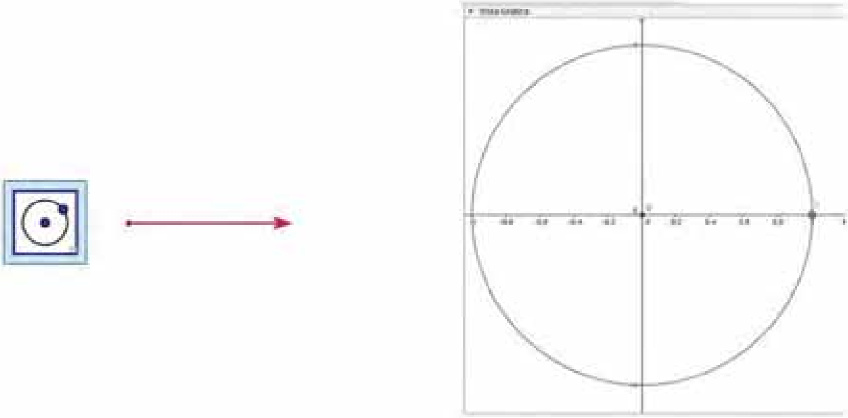
三角関数の単位円から余接（コタンジェント）関数のグラフを描きましょう。

4.4 GeoGebraを使った演習： 取り尽くし法

三角関数の単位円内に多角形をはめ込み、多角形の辺が増大するにつれて、多角形の面積が単位円の面積に近づいていくのを観察します。

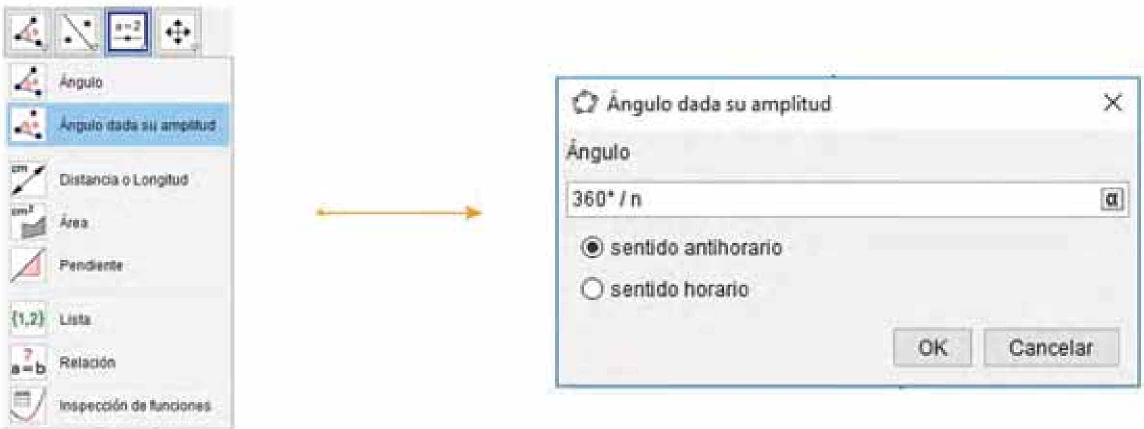
演習

1. 単位円を描きます。
   点 O(0, 0) を中心とし、点 A(1, 0) を円周上の点とします。



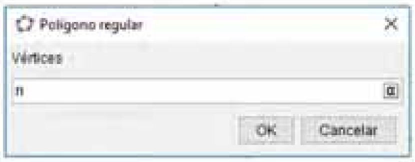
2. 正多角形の辺の数に対して、スライダー (Deslizador) を設定し、そのスライダーを n とします。
   「最小 (Mín)」に 3、「最大 (Máx)」に1 00 を、「増加 (Incremento)」に 1 を入力します。

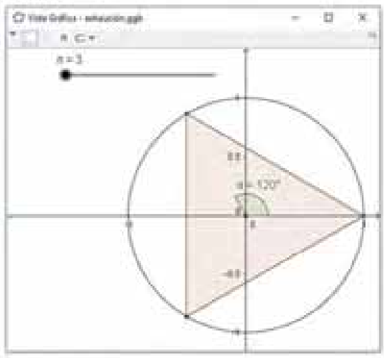
3. 振幅から中心角 α を設定します。
   a) 点 A と点 O を選び、振幅を 360°/n にして、「OK (OK)」をクリックします。
   b) 三角円上に別の点が現れます。この点の名前 (Nombre) を B とします。



4. 正多角形の作成
   a) オプションから「正多角形 (Polígono regular)」を選び、点 A と B を選びます。

b) 次に現れた表示に「頂点 (Vertices)」の数 n を入力します。





自動的に設定した多角形の面積の値が表示されます。

5. 「幾何学的要素 (Geometría)」のオプションの中のコマンド「面積 (Área)」で円の面積を計算します。辺の数が増えるにつれて、正多角形の面積がどのように円の面積に近づいていくか観察します。

6. 多角形の外周の長さと円周の長さを決めます。

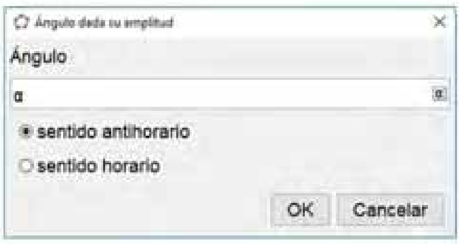
多角形の外周　Entrada: perpoligono=Perímetro[poligono1]

円周の長さ　Entrada: percircunferencia=Perímetro[c]

7. 多角形の辺の数が増える時の多角形の外周の長さと円周の長さを比較します。

8. 定数 π を、円周を円の半径で割った商と定義します。π 値を概算するのに作成した図を使います。

9. 単位円に外接していく正多角形を作成します。
「与えられた長さの線分 (Segmento de longitud dada)」である OO_1 を、「長さ (Longitud)」を $\dfrac{1}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$ として、設定します。点 O_1 は x 軸上にとります。



10. 振幅から中心角βを設定します。
  a) 点 O_1、O を選び、振幅を α とします。「OK (OK)」をクリックします。
  b) 結果として設定される点の名前を O_2 に変えます。

11. 点 O_1 と O_2 を使用して正多角形を作成します。辺の数は n とします。

課題

設問 10 で作成した多角形で、前の設問で行った 3 種類の接近（面積、周囲の長さ、π の値）を行ってみましょう。

ユニット 6

等差数列と等比数列

ギリシャ時代の数字（三角形と四角形）

等差数列と等比数列はどちらも、主要な創始者が明らかにされることなく、歴史を通じて発展してきたテーマです。さまざまな文化に記録があります。たとえば、バビロンでは、掛け売りと計算に複利に似た式が含まれているため、等比数列を使用する必要がありました。エジプト人もまた、一部の分数を表現するために数列の和に取り組みました。ギリシャ人は最初の図に見られるようなパターンに取り組み、数字をデザインしました。

数列の分析には、常にパターンの分析がありました。これは、さまざまな分野で使用されてきました。現在、（一部のケースでは）等比数列を基礎とする財務式が用いられています。また、一部の生物の繁殖など、いくつかの自然現象でさえ、状況に応じて等比数列または等差数列として、モデル化されることがあります。

最も有名で重要な数列の1つは、フィボナッチ数列です。
これは、自然界の一部の形をモデル化したものです。

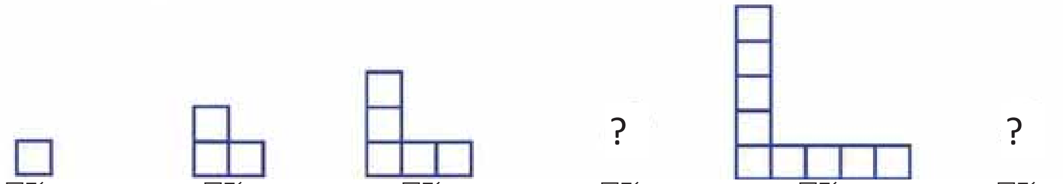
このユニットでは、パターンの数列と生成方法を特定することを目的として、パターンの復習を行った後、全般的な学習を行います。その後、等差数列と等比数列についてより広範な学習を行い、数列の最初の n 項の合計を分析します。

1.1 規則性

導入問題

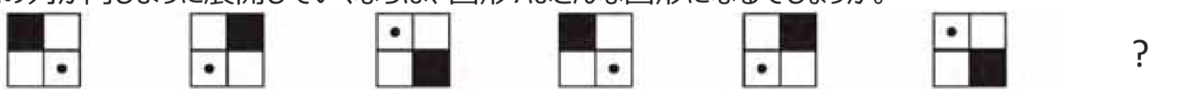
以下の数値や図形が並んでいる列を良く見てください。それぞれの問題に答えなさい。

a) この列が同じように展開していくならば、図形 4 と図形 6 がどのようになるか、明らかにしなさい。



図形 1　図形 2　図形 3　図形 4　図形 5　図形 6

b) この列が同じように展開していくならば、図形7はどんな図形になるでしょうか。



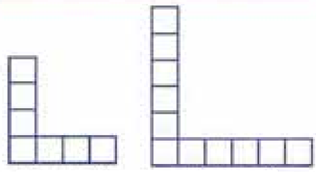
図形 1　図形 2　図形 3　図形 4　図形 5　図形 6　図形 7

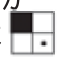
c) 欠けている数と、この列を作るうえでの法則を明らかにしなさい。

2	3	5	8	12	17	23	?
位置 1	位置 2	位置 3	位置 4	位置 5	位置 6	位置 7	位置 8

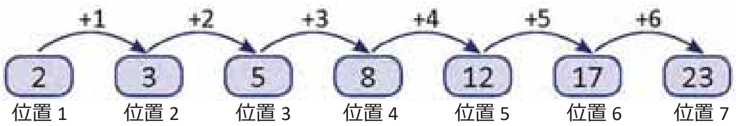
解法

a) 各図形は、その前の図形に二つの正方形を、L字型になるように加えるとできることが分かります。よって、図形 4 と図形 6 は右に示した図形のようになります。


図形4　図形6

b) 大きい方の正方形が時計方向に真ん中を軸にして 90° 回転するならば、図形 2 は図形 1 が一度回転することで、図形 3 は図形 2 が一度回転することで、図形 4 は図形 3 が二度回転することで、図形 5 は図形 4 が一度回転することで、そして図形 6 は図形 5 が一度回転するこことで得られます。よって、図形 7 は二度図形 6 が回転することで得られ、よって、図形 7 は 。

c) 次のことが分かります



よって、次の数は 23 + 7 = 30 となるはずです。

数を求めるには、前の数に、この数の位置の数字を足します。

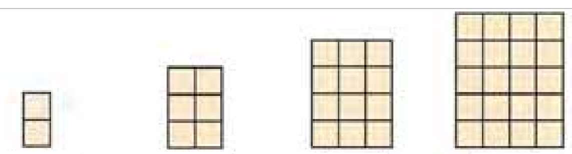
まとめ

数学的規則性の一つが、一定の法則を満たす数値または図形の列で、こうした列の要素はどんなものであれ、この一定の法則によって生まれます。

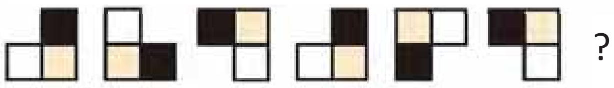
問題

以下の数値や図形が並んでいる列を良く見てください。それぞれの問題に答えなさい。

a) この列に沿った図表 5、6、7 を決定し、またこの列を作るために用いられる法則を明らかにしなさい。


図形 1　図形 2　図形 3　図形 4

b) どの図形が図形 7 に相当しますか？



図形 1　図形 2　図形 3　図形 4　図形 5　図形 6　図形 7

c) 欠けている数と、この列をつくるために用いた法則を明らかにしなさい。

2	6	12	20	30	42	?

1.2 一般的規則性

導入問題

次の列に注目しましょう。

3	6	9	12	15	18	21	?	?	…
1	2	3	4	5	6	7	8	9	

a) この列を作るために使ったのはどんな法則ですか？
b) 位置 8 と 9 に入る数はそれぞれいくつでしょう？
c) 位置 20 に入る数はいくつでしょうか？また、位置 100 に入る数はいくつでしょう？
d) 任意の n の位置に入る数はいくつになるでしょう？

解法

a) この列を良く見ると、すべての数は 3 の倍数であることが確認ができ、その結果、用いた法則は、その位置を示す数字に 3 を掛けること、になります。

b) 上記の a) の結果から、位置 8 と 9 は、3(8) = 24 と 3(9) = 27 になります。

c) 問題の数は、位置の数字に 3 を掛けることで得られるので、よって、3(20) = 60 は位置 20 に入る数に、また 3(100) = 300 は位置 100 に入る数になります。

d) 位置 n に入る数は $3n$ です。

この数列はまた、一つ手前の数に 3 を足すことでも作れます。

定義

ある一定の法則に従う数値の列のことをまた、**数列**と呼びます。数列では、その要素はある順序を持っており通常 a_n で表され、その場合、当の要素が占める位置は n で示します。例えば、「導入問題」の列では、$a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_7 = 21$, $a_n = 3n$ のようになります。

数列の各要素を**項**と呼び、n 番目の位置（n は自然数）を占める要素のことを**一般項**と呼びます。例えば、$a_n = 3n$ が「導入問題」の一般項です。

数列が有限な個数の要素を持つならば、その列は**有限**です。その逆の場合、数列は**無限**であると言います。

数列を表す際に、順番に $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, と並べますが、その場合のテンテンテン（三点リーダー）は、数列が続くことを表します。

場合よっては、ある数列を表す、単純な形の一般項を見つけることが不可能なことがあります。

例

次の列の一般項を明らかにし、項20、41、101 を計算しなさい。

$$-1, 2, -3, 4, -5, \ldots$$

それぞれの項で記号が変化しながら数列が続くこと、また、奇数の各位置は負の数、偶数の各位置は正の数であることに注目してください。このことは次のように書くことができることに留意してください。

$$(-1)^n = \begin{cases} n \text{ が偶数ならば、} 1 \\ n \text{ が奇数ならば、} -1 \end{cases}$$

それに加え、この数列を作る数の絶対値はすべて連続し、数列の中のそれぞれの位置に対応しているので、一般項は $a_n = (-1)^n\,n$ となります。

したがって, 項 20、41 および 101 は $a_{20} = (-1)^{20}20 = 20$、$a_{41} = -41$ および $a_{101} = -101$ となります。

問題

1. それぞれの数列について、一般項と質問されている項の答えを見つけなさい。

a) 2, 4, 6, 8, ... 項 42 はいくつですか？

b) 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... 項 21 はいくつですか？

c) 1, 4, 9, 16, 25, ... 項 11 はいくつですか？

d) 1, 8, 27, 64, 125, ... 項 8 はいくつですか？

e) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ ... 項 954 はいくつですか？

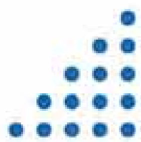
f) 2, 0, 2, 0, 2, ... 項 10 はいくつですか？また、項 55 は？

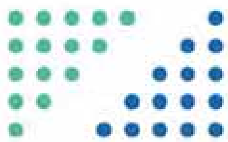
2. 次の場合のそれぞれにおいて、一般項 a_n を持つ数列の最初の五つの項をリストアップしなさい。

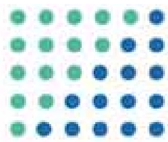
a) $a_n = 3n + 1$　　b) $a_n = 4n - 2$　　c) $a_n = -n + 2$　　d) $a_n = n^2 - 3$

3. 次のプロセスを注意して見てください。次の数列において、図形 5 の要素の数が T_5 であるなら：

- 図形 5 の要素を再配置します。
- 図形を二つ合わせます
- 二つの同じ図形を合わせ、5 × 6 の要素の長方形を作ります。







したがって、
$2T_5 = 5(6)$.

上述のプロセスを、数列の一般項 T_n を求めるために一般化しなさい。

最も有名な数列の一つが、良く知られている「フィボナッチ数列」です。

フィボナッチは、1175 年頃ピサで生まれたイタリアの数学者です。彼の本名はレオナルド・ダ・ピサですが、彼は一般にはフィボナッチとして知られていますが、この名前はボナッチの息子を意味するフィリウス・ボナッチオを縮めた呼び方です。

フィボナッチ数列は次の形になります。

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

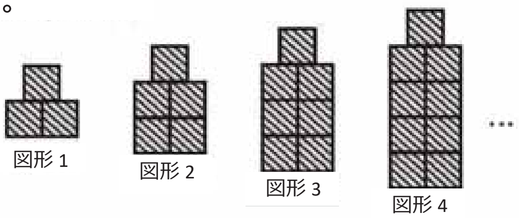
フィボナッチ数列の最初のいくつかの項は：1, 1, 2, 3, 5, 8, ... となります。つまり、フィボナッチ数列の項は、手前の二つの項を足すことで求めることができるのです。

この数列が考案されたのは、一つがいの兎に関する問題が、兎は死ぬことはなく、また、産まれてひと月経つと成兎となり、それぞれのつがいの兎は毎月一つがい（オスとメス）の兎を生む、という仮定のもとに立てられた時でした。

1.3 等差数列 ： 定義

導入問題

次の列を良く見て質問に答えなさい。



a) 数列の初めの 10 項の要素の数を書き出しなさい。
b) この数列を作るのに、どんな法則を使いましたか？
c) ある項からその手前の項を引くとして、もしこれを何度も繰り返したならば、どんなことが分かりますか？
d) 項 1 と 10、2 と 9、3 と 8 というように、続けて足していくと、どんなことが起こりますか？

解法

a) 各図形の持つ要素をリストにするため、表を作ることができます。

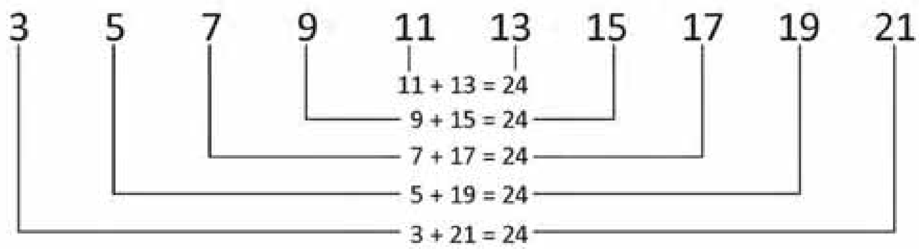
項	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
要素の数	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21

b) 図形を良く見れば、手前の図形に二つの正方形が加わって行っていることが分かります。

c) 一つの項を取り上げ、そこから一つ手前の項を引くと、結果は何回も繰り返しても、常に同じであることが分かります。この場合結果は 2 になります。

$a_2 - a_1 = 5 - 3 = 2$
$a_5 - a_4 = 11 - 9 = 2$
$a_9 - a_8 = 19 - 17 = 2$

d) 項 1 と 10、2 と 9、3 と 8、4 と 7、5 と 6 は 二つ一組で常に両端との距離が等しいことに注目してください。両端から等しい距離の項を足し合わせると、その結果は常に同一であることが分かります：24



定義

各項がその手前の項に、ある同じ数を足して得られる数列を**等差数列**と呼びます。

等差数列は、ある項からその手前の項を引くと同じ結果となる性質を持っています。この結果を**公差**と呼びます。

有限である等差数列（有限算術数列）のもう一つの性質は、両端から等しい距離にある項を足し合わせると、計算結果が同じになるということです。

細かいことですが、等差数列について強調しておきたい点は、公差はどんな数でもとり得る、つまり、整数、有理数、小数、または無理数の場合もあり得るということです。

問題

それぞれの数列が等差数列であるかどうかを特定しなさい。もしそうである場合は、その公差を求めなさい。

a) 5, 11, 17, 23, 29, 35, …
b) −3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, …
c) 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, …
d) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5, \frac{11}{2}, \ldots$
e) −4, −4, −4, −4, −4, −4, …
f) 11, 7, 3, −1, −5, −9, …

1.4 等差数列：一般項*

導入問題

授業 1.3 の「導入問題」の等差数列の一般項を求めなさい。

解法

まず、a_{n-1} が任意の項とすれば、a_n はそれに連続する項だということに注目してください。各図形は、手前の図形に二つの正方形を加えることで得られることから、以下のようになります。

$$\underbrace{5 = 3 + 2}_{a_2 = a_1 + 2},\quad \underbrace{7 = 5 + 2}_{a_3 = a_2 + 2},\quad \underbrace{9 = 7 + 2}_{a_4 = a_3 + 2},\quad \dots\quad a_{n+1} = a_n + 2$$

よって、以下のようになります。

$$a_2 = a_1 + 2,\quad a_3 = a_2 + 2,\quad a_4 = a_3 + 2,\quad a_5 = a_4 + 2, \dots,\quad a_{n-2} = a_{n-3} + 2,\quad a_{n-1} = a_{n-2} + 2\ ,\quad a_n = a_{n-1} + 2$$

数列に占める位置の項の中から、公式を見つける必要があります。よって、次のことに留意してください。

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2 \\ &= a_{n-2} + (2 + 2) \\ &= a_{n-3} + (2 + 2 + 2) \\ &= a_{n-4} + (2 + 2 + 2 + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= a_4 + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-4}) = (a_3 + 2) + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-4}) \\ &= a_3 + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-3}) = (a_2 + 2) + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-3}) \\ &= a_2 + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-2}) = (a_1 + 2) + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-2}) \\ &= a_1 + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-1}) \end{aligned}$$

のように連続するならば

$4 = n - (n - 4)$ となることに注目しましょう。

よって、a_n は初項足す $n - 1$ 掛ける 2、つまり、この数列の一般項は、$a_n = a_1 + 2(n - 1)$ となります。

まとめ

等差数列では、d がその公差ならば、一般項は $a_n = a_1 + d(n - 1)$ によって得られます。

例

等差数列 $a_n = -2 + 6(n - 1)$ の項 4、12、17、99 を計算し、項 a_1 はいくつか、また、その公差を求めなさい。

質問の項を計算するために、n をその項の位置で置き換えます。したがって、

$a_4 = -2 + 6(4 - 1) = -2 + 6(3) = -2 + 18 = 16$

$a_{12} = -2 + 6(12 - 1) = -2 + 6(11) = 64$

$a_{17} = -2 + 6(17 - 1) = -2 + 6(16) = 94$

$a_{99} = -2 + 6(99 - 1) = -2 + 6(98) = 586$

また、$a_1 = -2$ で、公差は $d = 6$ です。

多くの場合、等差数列の一般項は、$a_n = a_1 - d + dn$ の形で表されます。例えば、$a_n = -2 + 6(n - 1)$ は$a_n = -8 + 6n$ と書くことができます。

問題

1. 授業 1.3 の各問題の等差数列の一般項を求めなさい。
2. 以下の等差数列のそれぞれについて、項 1、7、11、20、100 を求めなさい。

a) $a_n = 5 + 4(n - 1)$　b) $a_n = -1 + 7(n - 1)$　c) $a_n = 2 - 3(n - 1)$

d) $a_n = -4 - (n - 1)$　e) $a_n = \frac{1}{2} - (n - 1)$　f) $a_n = 5 - \frac{1}{3}(n - 1)$

g) $a_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(n - 1)$　h) $a_n = -0.6 + 2(n - 1)$　i) $a_n = -0.4 - 0.7(n - 1)$

1.5 等差数列： 部分和、パート 1*

導入問題

以下の a) から d) までを解きなさい。

a) 足し算 $1 + 2 + 3 + \cdots + 28 + 29 + 30$ の値はいくつですか？各項を一つ一つ足し合わせずに計算する方法を見つけなさい。

b) 以下の数、1, 2, 3, ...、$n - 3$、$n - 2$ 、$n - 1$ がある場合、数のすべての和はいくつですか？

c) 数列 $a_n = a_1 + d(n - 1)$ の最初の n 個の項の和 S_n はいくつですか？

d) 等差級数 $a_n = 1 + 2n$ において、最初の 10 項の和はいくつですか？

問題a) に関しては、30＋29＋28＋…＋3＋2＋1 の和も考慮しなさい。

解法

a) 足し算をすれば、

$$\begin{array}{rcccccccccccc} & \boxed{1} & + & \boxed{2} & + & \boxed{3} & + \cdots + & \boxed{28} & + & \boxed{29} & + & \boxed{30} \\ + & \boxed{30} & + & \boxed{29} & + & \boxed{28} & + \cdots + & \boxed{3} & + & \boxed{2} & + & \boxed{1} \\ \hline & 31 & + & 31 & + & 31 & + \cdots + & 31 & + & 31 & + & 31 \end{array} \quad \text{------------------- (1)}$$

答えは同じになります。1 + 2 + 3 + ... + 28 + 29 + 30 の足し算には 30 の項があり、よって、この和を求めるということは、数 31 を 30 回足し合わせることになり、その結果、31(30) となります。

一方、(1) における和は、$1 + 2 + 3 + \cdots + 28 + 29 + 30$ を二回足し合わせることで得ることができ、その結果、求める和は $\frac{31(30)}{2}$ になります。約分すると、次が得られます。

$$\frac{31(30)}{2} = \frac{31(\cancel{30}^{15})}{\cancel{2}_1} = 31(15) = 465.$$

したがって、1 + 2 + 3 + ... + 28 + 29 + 30 = 465.

b) 上記 a) と同じやり方を使うならば、次のようになるでしょう。

$$\begin{array}{rcccccccccccc} & \boxed{1} & + & \boxed{2} & + & \boxed{3} & + \cdots + & \boxed{n-3} & + & \boxed{n-2} & + & \boxed{n-1} \\ + & \boxed{n-1} & + & \boxed{n-2} & + & \boxed{n-3} & + \cdots + & \boxed{3} & + & \boxed{2} & + & \boxed{1} \\ \hline & n & + & n & + & n & + \cdots + & n & + & n & + & n \end{array} \quad \text{------------------- (2)}$$

(2) における和は $n - 1$ 個の項を持ち、その結果、値は $n(n - 1)$ となります。ところがここでは新たに、$1 + 2 + 3 + \cdots + n - 3 + n - 2 + n - 1$ を二回足し合わせてしまっているので、その結果、

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n - 3 + n - 2 + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

c) n 個 の項を新しい順序に置き換えます。

$$\begin{array}{lcccccccccc} S_n = & a_1 & \overset{+d}{+} & a_2 & \overset{+d}{+} & a_3 & + \cdots + & a_{n-2} & \overset{+d}{+} & a_{n-1} & \overset{+d}{+} & a_n \\ S_n = & a_n & \overset{-d}{+} & a_{n-1} & \overset{-d}{+} & a_{n-2} & + \cdots + & a_3 & \overset{-d}{+} & a_2 & \overset{-d}{+} & a_1 \\ \hline \end{array}$$
$$2S_n = (a_n + a_1) + (a_{n-1} + a_2) + (a_{n-2} + a_3) + \cdots + (a_3 + a_{n-2}) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_1 + a_n)$$

最後の行では、すべての組が同じ値 $a_1 + a_n$ を有していますが、これは、それぞれの和において、最初の行では和は d ずつ 増加して行き、次の行では $-d$ ずつ 増加して行くからです。

n 個の組があるので、$2S_n = n(a_1 + a_n)$ になります。したがって、$S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$.

$a_n = a_1 + (n - 1)d$ で置き換えるならば、次のようになります。 $S_n = \frac{1}{2}n[2a_1 + (n - 1)d]$.

d) 数列 $a_n = 1 + 2n$ の 10 個の項の合計を出したいので、よって、初項と10番目の項の計算します。

$$a_1 = 1 + 2(1) = 3,$$
$$a_{10} = 1 + 2(10) = 21.$$

したがって、最初の10項の和は：

$$S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n) = \frac{1}{2}(10)(3 + 21) = 5(24) = 120.$$

定義

表記法 $\sum_{i=1}^{n} a_i$ は、$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ の和を省略した形で、読み方は「i が1 から i が n までの a_i の総和」となります。

この表記法に従うと、等差数列の最初の n 個の項の和は、次のようになります。

数列の公差が d の場合　$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n) = \frac{1}{2}n[2a_1 + d(n-1)]$、

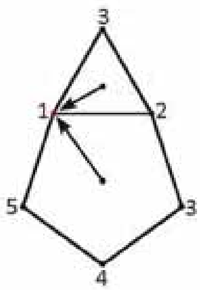
この和は数列または級数の部分和として知られていますが、ここでは、等差数列に関してのものとなります。

記号 Σ はギリシャ文字で、大文字のシグマに相当します。合計を表すために使う場合、この記号は「総和の記号」と呼ばれています。

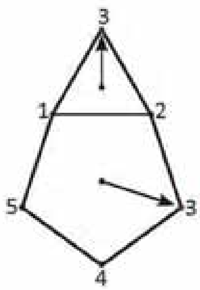
問題

1. それぞれの場合について、求める答えを計算しなさい。
   a) 数列 $a_n = -6 + 6n$ の最初の 21 個の項。
   b) 数列 $a_n = 11 - (n - 1)$ の最初の 28 個の項。
   c) 数列 $a_n = -4 + 5(n - 1)$ の最初の 77 個の項。
   d) 数列 $a_n = 0.5 + 2(n - 1)$ の最初の 33 個の項。

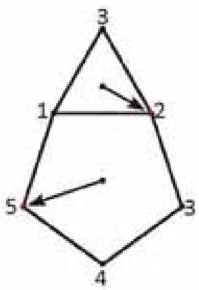
2. 三角形と五角形の中に、二つの矢印のそれぞれが二辺が交わる交点を指すような形であるのが見えます。次に、一列に並ぶ四つの図形があり、そこでは、矢印が回っているのが分かります。



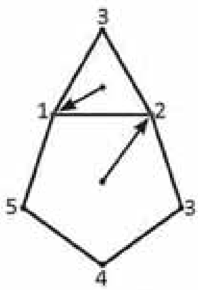
図形1



図形2



図形3



図形4

矢印が常に同じ動きをし続けるならば、30 番目にこれらの矢印が同じ交点を指すことになる図形番号を明らかにしなさい。

1.6 等差数列：部分和、パート２

導入問題

1845 を得るには、数列 $a_n = 5 + 2(n-1)$ の項をいくつ足し合わせる必要があるでしょうか？

解法

等差数列の最初の n 個の項の和は $\frac{1}{2}n[2a_1 + d(n-1)]$ なので、次のようになります。

$$a_1 = 5 \text{ と } \frac{1}{2}n[2a_1 + d(n-1)] = \frac{1}{2}n\left[2(5) + 2(n-1)\right] = \frac{1}{2}n\left[10 + 2(n-1)\right] = 5n + n(n-1) = n^2 + 4n = 1845.$$

未知数が n の場合は、二次方程式が得られます。1845 を得るには、いくつの項を足し合わせなくてはならないかが知りたいので、左記の方程式の解を求める必要があります。

方程式を解くと、

$$n(n+4) = 1845 \Rightarrow n^2 + 4n - 1845 = 0 \Rightarrow (n+45)(n-41) = 0.$$

ここから、$n = -45$ または $n = 41$ が得られます。ところが、n は数列における位置であることから、負の数ではあり得ないので、したがって、1845 を得るには、数列 $a_n = 5 + 2(n-1)$ の 41 個の項を足し合わせなくてはなりません。

まとめ

ある特定の計算結果を得るうえで合計しなくてはならない等差数列の項の数を求めるには、等差数列の項の部分和の公式と得たい総計とを等しくすることで得られる、二乗方程式を解かなくてはなりません。

問題

1. 指示された答えを得るために、各等差数列において合計しなくてはならない項の数を求めなさい。

a) $a_n = -1 + (n-1)$; 部分和 434

b) $a_n = 3 + 4(n-1)$; 部分和 1081

c) $a_n = -3 + 3(n-1)$; 部分和 270

d) $a_n = 5 - 2(n-1)$; 部分和 -391

e) $a_n = -4 - 7(n-1)$; 部分和 -129

f) $\sum_{i=1}^{n}\left[-100 + 4(i-1)\right] = 0$

217 は7 の倍数です。

1081 と 391 は 23 の倍数です。

2. 1064 を得るには、等差数列 2, 8, 14, ... の項をいくつ足さなくてはならないでしょう？

カール・フリードリヒ・ガウスはドイツの数学者、物理学者、天文学者、測地学者で、1777 年 4 月 30 日に生まれ 1855 年 2 月 23 日に亡くなっています。彼は数学の第一人者と考えられており、若いころから並外れた知能を持っていたことが証明されています。子供時代には、家族にアルファベットの各文字の発音を聞いて、独学で読むことを学びました。

ガウスは7歳になると学校に入学し、算術課程を取りましたが、大部分の生徒は義務教育が終わる 15 歳までこの課程で学習していました。この課程で、ガウスの将来に大きな影響を与えるある特筆すべきことが起こります。ある時、彼の算術課程の担任でもあり学校長でもあったビュトナーが、クラス全員に 1 から 100 までの数字すべてを足し合わせよ、という練習問題を出しました。この問題を生徒に出し終えるや否や、ガウスは机の上で書いていた書板を置いて言いました。「はい、出来ました！」、一方他の生徒はまだ掛け算しやたし算をして計算している最中でした。この時、ビュトナーがガウスの書板を見るとそこには正解の数が一つだけ書いてありました。

ガウスは教師にどのようにしてこの計算結果になったかを説明することになり、そして次のように言いました。「100+1=101, 99+2=101, 98+3=101, 等々となりますから、100 の中で作れるペアの数と同じだけのペアがあります。ですから、答えは 50 × 101、つまり 5050 です。」

出典：Dunnington, G. W., Gray, J., Fritz-Egbert Dohse 著『*Carl Friedrich Gauss*：*Titan of Science*（カール・フリードリヒ・ガウス：科学の巨人）』 *MAA* 米国数学協会

ユニット 6

1.7 等差数列：問題

導入問題

3 番目の項が 27 で 5 番目の項が 35 の等差数列の公差を求めなさい。
数列の最初の項と一般項を計算しなさい。

解法

a_n が d を持つ公差等差数列ならば、よって $a_n = a_1 + d(n-1)$.

与件から、$a_3 = 27$ と $a_5 = 35$ になります。しかし、

$$a_3 = a_1 + d(3-1) = a_1 + 2d = 27,$$
$$a_5 = a_1 + d(5-1) = a_1 + 4d = 35.$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} a_5 - a_3 = 35 - 27 = a_1 + 4d - a_1 - 2d &= 2d \\ \Rightarrow 8 &= 2d \\ \Rightarrow d &= 4 \end{aligned}$$

最初の方程式において $d = 4$ と置き換えると次のようになり、$a_1 + 2(4) = 27 \Rightarrow a_1 = 27 - 8 = 19$.
よって、数列の最初の項と一般項は

$$a_1 = 19 \text{ と } a_n = 19 + 4(n-1) = 15 + 4n.$$

まとめ

場合によっては、等差数列の与件の一部が分かっていることがあり、その数列の一般項を求めるために、等差数列の定義と、すでに分かっている与件を用いることがあります。

等差数列の二つの項が分かっているならば、一般項を明らかにするため、すでに分かっている各項に一般項の定義を適用することで得られる連立一次方程式を解きます。

問題

1. 等差数列の第 2 項は 12 で、第 4 項は 22 です。この数列の一般項を明らかにしなさい。

2. 等差数列の第 5 項は –11、第 10 項は –26 です。第 7 項を計算しなさい。

3. ある等差数列について、$a_9 = -5$、また、$a_{15} = 31$ であることが分かっています。a_{20} を計算しなさい。

4. 等差数列の第 8 項が 8 で第 20 項が 44 です。この等差数列の一般項を明らかにしなさい。

5. 第 7 項目が –25 で、第 9 項目が –35 の等差数列の最初の 10 項の和を計算しなさい。

6. $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 219$ に、また $a_7 = 34$ になります。等差数列の一般項 a_n を明らかにしなさい。

7. 等差数列が $a_1 = 43, a_2 = 37, \ldots$,とすると、$\sum_{i=1}^{n} a_i < 0$ になるような最初の整数 n はいくつでしょう？

2.1 等比数列：定義*

導入問題

a) 図 1 の正方形の面積が 1 の場合、各正方形が 4 つの等しい正方形に分割された場合は、影付きの面積を求めてください。

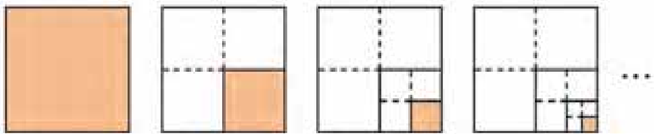


図1 図2 図3 図4

b) 各図の影付きの面積の値をみつけるためにどのようなルールを確立できますか。
c) リテラル b) に従って、列の最初の 7 つの項をリストしてください。
d) 項を前の項で割ると、何が観察できますか。これを少なくとも 3 回行ってください。

解法

a) 図 1 の影付き面積が 1 で、4 つの等しい部分に分割されている場合、図2の影付き面積は、図 1 の正方形の影付きの面積の 4 分の 1 を表します。つまり、の影付き面積は $\frac{1}{4}$ に等しい。

同様に、図 3 の影付き面積は、図 2 の影付きの正方形の 4 分の 1 であるため、影付きの面積は $\frac{1}{4} \div 4 = \frac{1}{16}$ です。

同じ分析を続けると、図 4 の影付きの面積は、図 3 で影付きの正方形の 4 番目の部分です。つまり、影付きの面積は $\frac{1}{16} \div 4 = \frac{1}{64}$ です。

b) 図の影付きの面積を見つけるには、前の図の影付き面積の値を 4 で割ることができます。

c) 各図がもつ要素を一覧表示する表を作成できます。

項	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
面積値	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{4096}$

d) 項を前の項で割ると

$$a_2 \div a_1 = \frac{1}{4} \div 1 = \frac{1}{4} \qquad a_7 \div a_6 = \frac{1}{4096} \div \frac{1}{1024} = \frac{1}{4} \qquad a_5 \div a_4 = \frac{1}{256} \div \frac{1}{64} = \frac{1}{4}$$

常に同じ結果が得られることが分かります。$\frac{1}{4}$

まとめ

前の項に同じ数を掛けて項を求めることができる列を等比数列とよびます。

等比数列には、項の前の項で除算すると、結果が常に同じになるという特性があります。この結果は比率とよびます。

問題

次の列が等比数列であるかどうかを求めてください。等比数列である場合は、その比率を書いてください。

a) 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...
b) 1, 3, 9, 27, 81, ...
c) 3, −6, 12, −24, 48, −96, ...
d) −1, −2, −4, −6, −8, −10, ...

2.2 等比数列：一般項*

導入問題

授業 2.1 の等比数列の一般項を見つけてください。

解法

a_{n-1} が項 $n-1$ である場合、a_n は次の項であることが分かります。この等比数列の各項は、その前の項を掛けることで得られることから、以下のようになります。

$$\underbrace{\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\times 1}_{a_2=\frac{1}{4}\times a_1},\quad \underbrace{\frac{1}{16}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}}_{a_3=\frac{1}{4}\times a_2},\quad \underbrace{\frac{1}{64}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{16}}_{a_4=\frac{1}{4}\times a_3},\ \ldots,\ a_n=\frac{1}{4}\times a_{n-1}$$

つまり、

$$a_2=\frac{1}{4}\times a_1,\quad a_3=\frac{1}{4}\times a_2,\quad a_4=\frac{1}{4}\times a_3,\ \ldots,\quad a_{n-2}=\frac{1}{4}\times a_{n-3},\quad a_{n-1}=\frac{1}{4}\times a_{n-2},\quad a_n=\frac{1}{4}\times a_{n-1}$$

要素の位置の観点から列を説明する式を見つけたいと考えます。
注意して下さい

$$a_n=\frac{1}{4}\times a_{n-1}=\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)\times a_{n-2}=\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)\times a_{n-3}=\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)\times a_{n-4}$$

そのまま続く場合

$$a_n=\underbrace{\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\cdots\times\frac{1}{4}\right)}_{n-4}\times a_4=\underbrace{\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\cdots\times\frac{1}{4}\right)}_{n-3}\times a_3=\underbrace{\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\cdots\times\frac{1}{4}\right)}_{n-2}\times a_2=\underbrace{\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\cdots\times\frac{1}{4}\right)}_{n-1}\times a_1$$

次に、a_n は最初の項に $n-1$ の比率 $\frac{1}{4}$ の積を掛けたものに等しくなります。つまり、等比数列の一般項は $a_n=a_1\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ 。ここで、$a_1=1$です。

まとめ

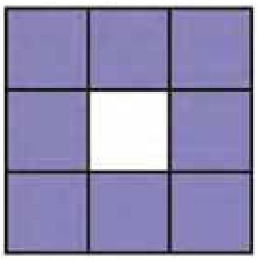
等比数列では、r がその比率である場合、一般項 は$a=a_1r^{n-1}$ で与えられます。

問題

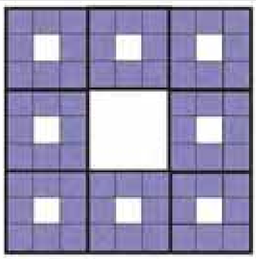
1. 2.1 の授業の問題の等比数列の一般項を求めてください。

2. 次のプロセスを順守してください。

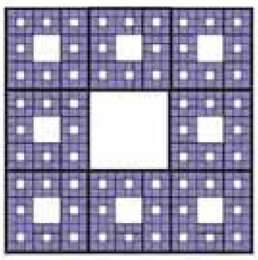
ステップ 1　辺 1 の正方形を 9 つの等しい部分に分割し、中央の正方形を削除します。



ステップ 2　残りの各正方形から、9 つの等しい部分に分割し、それぞれの中心から正方形を削除します。



ステップ 3　同じプロセスを残りの正方形で実行され、9 つの等しい部分に分割し、中央の正方形を削除します。



これに従えば、プロセスを n 回実行した後、最初の正方形が分割される最小の正方形の面積値が決まります。この図は、**シェルピンスキーのカーペット**として知られています。

2.3 等比数列：部分加算、パート 1

導入問題

1. $S = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1}$ とします。$S - rS$ の値を見つけて、S の別の式を計算してください。
2. 等比数列 $a_n = a_1 r^{n-1}$ の最初の n 項の合計を計算してください。
3. 等比数列 $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ の最初の 5 つの項の合計を計算してください。

解法

1. $S = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1}$ 式全体に r を掛けて、次のようにします。

   $rS = r(1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1}) = r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1} + r^n$.

   S から rS を引くと、次のようになります。

$$\begin{array}{rl} S = & 1 + \cancel{r} + \cancel{r^2} + \cancel{r^3} + \dots + \cancel{r^{n-3}} + \cancel{r^{n-2}} + \cancel{r^{n-1}} \\ rS = & \quad\;\; \cancel{r} + \cancel{r^2} + \cancel{r^3} + \dots + \cancel{r^{n-3}} + \cancel{r^{n-2}} + \cancel{r^{n-1}} + r^n \\ \hline S - rS = & 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - r^n \end{array}$$

   従って、$S(1 - r) = 1 - r^n$。$r \neq 1$ の場合、S を解くと、$S = \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$ になります。

   つまり、$r \neq 1$ の場合、$1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$。$r = 1$ の場合、合計は、$S = n$ となるように 1 を n 回加算することを意味します。

2. 列の最初の n 項をリストしてください。

$$a_1,\ a_2 = ra_1,\ a_3 = r^2 a_1,\ a_4 = r^3 a_1,\ \dots,\ a_{n-2} = r^{n-3} a_1,\ a_{n-1} = r^{n-2} a_1,\ a_n = r^{n-1} a_1.$$

   合計を計算してください

$$\begin{aligned} a_1 + ra_1 + r^2 a_1 + r^3 a_1 + \dots + r^{n-3} a_1 + r^{n-2} a_1 + r^{n-1} a_1 &= a_1(1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1}) \\ &= a_1\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right) \quad \text{si } r \neq 1. \end{aligned}$$

   $r = 1$ の場合、合計は na_1 です。

3. 2 の結果を使用して、$a_1 = 1$ と $r = \frac{1}{4}$ に加えて、最初の 5 つの項の合計 $n = 5$ を計算するため、求められる合計はです。

$$1\left(\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^5 - 1}{\frac{1}{4} - 1}\right) = \frac{\frac{1023}{1024}}{\frac{3}{4}} = \frac{1023}{1024} \div \frac{3}{4} = \frac{341}{256}.$$

複素数の割合は次のように計算されます

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

まとめ

等比数列 $a_n = a_1 r^{n-1}$ の部分和は、総和記号で記述され、次の式で与えられます。

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_1 r^n = \begin{cases} a_1\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right) & r \neq 1 \text{の場合。} \\ na_1 & r = 1 \text{の場合。} \end{cases}$$

問題

1. 列 $a_n = 15(2)^{n-1}$ の最初の 6 つの項の合計を計算してください。
2. 列 $a_n = 3(-2)^{n-1}$ の最初の 6 つの項の合計を計算してください。
3. 列 $4, -\frac{4}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{27}$, の最初の 5 つの項の合計を計算してください。
4. 項 5 までの合計 $2 + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{18}\right) + \cdots$ を計算してください。指数で表しましょう。

大きな数の累乗を計算するときに電卓を使用できます。また、回答は概算ではなく分数で表すことをお勧めします。

2.4 等比数列：部分和、パート 2

導入問題

最初の項が $\frac{1}{2}$ で、公比が -4 の等比数列が 102.5 になるには、項をいくつ足し合わせる必要があるでしょうか。

解法

$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{2}\left(\frac{(-4)^n-1}{-4-1}\right) = 102.5$ だと分かっています。

よって

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1-(-4)^n}{5}\right) = \frac{1}{10}[1-(-4)^n] = 102.5$$
$$\Rightarrow 1-(-4)^n = 102.5(10) = 1\,025$$
$$\Rightarrow \quad (-4)^n = -1\,024 \qquad \text{------------------ (1)}$$

実行できる最初の分析は、負の数の累乗があり、これが負であることが判明するため、n は奇数でなければならないということです。n は奇数なので、$(-4)^n = -4^n$ です。よって、(1) を解くことは、$4^n = 1024$ を解くことと同じです。

4 の累乗として 1024 を書きます。$1\,024 = 4^5$。代入すると $4^n = 4^5$ になります。よって、$n = 5$ です。

従って、102.5 を取得するためには、列 $a_n = \frac{1}{2}(-4)^{n-1}$ の最初の 5 項を追加する必要があります。

まとめ

特定の結果を得るために等比数列に追加する必要のある項の数を決定するには、部分和の式を目的の合計と等しくした結果の指数方程式を解く必要があります。

問題

1. 表示された結果を得るために各列からいくつの項を追加する必要があるかを求めてください。

a）1、2、4、8、16、...、部分和 511

b）2、6、18、54、...、部分和 2186

c）4、–20、100、-500、...、部分和 –10416

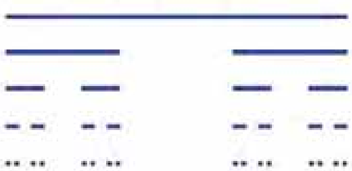
d）$a_n = \frac{1}{3}(2^{n-1})$、部分和 $\frac{127}{3}$

e）$a_n = \frac{2}{3}(-3)^{n-1}$、部分和 $-\frac{364}{3}$

f）$a_n = 3\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1}$、部分和 $\frac{6\,303}{2\,401}$

2. 列 1、–1、1、–1、1、.. の部分和を計算するときに取得できる可能な値を求めてください。

3. 長さ 1 のセグメントから、次の列が作成できます。



ステップ 1 セグメントは 3 つの等しい部分に分割され、中央のセグメントが削除されます長さ $\frac{1}{3}$ の 2 つのセグメントがあります。

ステップ 2 次に、他の 2 つのセグメントが 3 つの等しい部分に分割され、中央のセグメントが削除されます。長さ $\frac{1}{9}$ の 4 つのセグメントがあります。

このプロセスを続行すると、次の質問に答えてください。

a) ステップ n で、いくつのセグメントが削除されましたか

b) ステップ 10 で見つかったセグメントの長さの合計はどれくらいですか

c) 0.1 未満のセグメントの長さの合計はどのステップにありますか

2.5 等比数列：問題

導入問題

等比数列の 3 項は 20 で、8 項は –640 です。列の一般項を求めてください。

解法

a_n が等比数列の一般項であり、r がその比率である場合、$a = a_1 r^{n-1}$ です。

$a_3 = 20$ および $a_8 = -640$ であることが分かります。だが、$a_3 = a_1 r^2 = 20$ および $a_8 = a_1 r^7 = -640$ です。a_8 を a_3 で割ると、

$$\frac{a_8}{a_3} = \frac{a_1 r^7}{a_1 r^2} = r^5 = \frac{-640}{20} = -32.$$

$r^5 = -32$ から、$(-2)^5 = -32$ であるため、$r = -2$ と推測できます。

列の最初の項を計算することは残っています。このために、a_3 または a_8 を取り、$r = -2$ を使用します。

$$a_3 = a_1(-2)^2 = 4a_1 = 20 \Rightarrow a_1 = 5.$$

よって、$a_n = 5(-2)^{n-1}$。

まとめ

等比数列のいくつかのデータが既に知っている場合があり、これの一般項を決定するために、等比数列の定義と既知のデータが使用します。

等比数列の 2 つの項が分かっている場合、一般項を決定するために、両方の項が分割され、結果の方程式を解きます。この場合、方程式は $r^n = c$ の形式であるために、n の累乗で数値 c になるように数値 r を計算する必要があります。

問題

1. 等比数列の 4 項は1で、7 項は $\frac{1}{8}$ です。一般項と 5 項を求めてください。

2. 等比数列の最初の項は 3 で、3 項は $\frac{4}{3}$ です。一般項と 4 項を求めてください。

   2 つの可能な解決があります。

3. 等比数列では、5 項は 48 で、8 項は 384 です。12項 を回答してください。

4. 等比数列 2、6、18、... のどの項が 13122 ですか。

5. 等比数列の 2 項と 5 項は、それぞれ 10 と 1250 です。31250 はこの列の項ですか。もしそうならば、何の項ですか。

6. 3 項が 28 で 6 項が 224 である等比数列の最初の 6 つの項の部分和を計算します。

2.6 復習問題

1. 列 1、4、7、10、.. の一般項を回答してください。

2. 最初の項 2 と差 3 を持つ等差数列の 30 項を計算してください。

3. $a_{50} = 29$ および $d = -3$ のような等差数列の最初の項は何ですか。

4. $a_n = 2 + \frac{1}{2}(n-1)$。の最初の 17 項の合計を計算してください。

5. $a_n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}n$ の最初の 12 項の合計を計算してください。

6. $5 + 9 + 13 + \cdots + 401$ の合計を計算してください。

7. 66 を取得するには、列–9、–6、–3、... からいくつの項を追加する必要がありますか。

8. 74 を取得するには、列26、21、16、... からいくつの項を追加する必要がありますか。

9. 列 3、6、12、24、.. の 6 項を計算してください。

10. 等比数列の 7 項は 192 で、その比率は 2 です。列の最初の 4 つの項を計算してください。

11.等比数列では、$a_8 = 16$、$r = -4$。a_{12} の値を求めてください。

12. $123 + 6 + 12 + \cdots + 6144$ の合計を計算してください。

13. 2049 を取得するには、列 $a_n = 3(-2)^{n-1}$ からいくつの項を追加する必要がありますか。

14. $-\frac{3277}{1024}$ を取得するには、問題 11 の列からいくつの項を追加する必要がありますか。

2.7 このユニットの問題

1. 三角形の内角は 10° の差で等差数列になっています。各角度はどのくらいですか。

2. 等差数列の 4 項は 10 で、6 項は 16 です。列の n 番目の項の式を求めてください。

3. 等差数列の 5 項は 17 で、その差は 2 です。列の最初の 11 項の合計を求めてください。

4. 等差数列の 6 項が 8 で、11 項が -2 の場合、最初の項はどれですか。違いはなんですか。

5. 290 を取得するには、列 2、8、14、... の項をいくつ追加する必要がありますか。

6. 債務は、最初の週に 5 ドル、2 週目に 8 ドル、3 週目に 11 ドルというように、32 週間で支払うことができます。借りている金額を計算してください。

7. a と b を方程式 $x^2 - 3x + A = 0$ の解とし、c と d を方程式 $x^2 - 12x + B = 0$ の解とします。a、b、c、d がこの順序で等比数列を形成することが分かります。A と B の値を求めてください。

ユニット 7

場合の数

場合の数は、賭け事を数学的に分析して理解する（運を理解する）必要性から生じました。歴史的にこの理論は、17 世紀頃フランスに存在した上流社会の娯楽形態から生じました。娯楽形態というのは、サイコロやコイン投げ、物の取り出し、トランプなどを含むゲームに参加することでした。それが運の現象を数学的に確立した理由で、フランスの数学者ブレーズ・パスカルとピエールド・フェルマーによって発見され、使用された場合の数が登場しました。彼らは、数学的概念に基づいて決定をより成功させるよう、場合の数を用い、プレーヤーにとって最も有利な決定を理解・分析しました。

16 世紀頃のフランスのトランプ

日常生活の状況を解決するための歴史的な出現に加え、場合の数の概念は、ここ数世紀にわたる研究の後、情報の暗号化を目的として、情報処理などの技術分野に応用されるまでに発展しました。また、引き続き、多くの場合は運よりも数学が力を発揮する、賭け事やレースを創出するためのツール、分析するためのツールであり続けています。

続いて、樹形図など、いくつかの内容を学習します。そこから、場合の数の基本的な原則が一部導入されます。次に、順列、組み合わせ、特定の状況への場合の数の応用について、より広範な学習を行います。

1.1 集合論

定義

集合とは、ものの集まりのことで、それは数字でも文字でも、人でも、実質的にどんなものでも構いません。集合を構成している個々のものを**要素**と言います。a が A の要素であるとき、$a \in A$ または $A \ni a$ と表し、「a は A に属す」または「a は A の要素である」と読みます。集合が持つ要素の数を**集合の濃度**といい、集合 A がある場合、A の濃度は $n(A)$ で表します（時には$|A|$）。集合は、集合の要素全体を "中括弧 {} " で囲って表します。要素が列挙されている場合、その集合は**外延的定義**で表されていると言います。例えば、A = {1, 2, 3, a, b, c} となります。

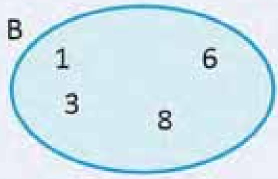
ある規則または全ての要素が持つ特徴によって要素が表されている場合、集合は**内包的定義**で表されていると言います。例えば、

$\{x |\ x$ は 6 未満の正の数$\}$となります。

この集合は、x が 6 未満の正の数になるような要素 x の全体と読みます。

この集合は、6 未満の正の数という条件を満たす変数 x の集まりであるということになります。

集合を図として表すには、集合の全ての要素を含む楕円形が使われます。こうした表記方は**ベン図**と言い、例えば集合 B = {1, 3, 6, 8} は次のようなベン図に表すことができます。



例 1

集合 A = {2, 4, 6, 8, 10} の濃度を求めましょう。また、できれば、内包的定義で集合を表しましょう。
A の濃度： $n(A) = 5$
次のような内包的定義も可能：A = $\{x |\ x$ は 10 以下の正の偶数$\}$ また、A = {10 以下の正の偶数} とも表すことができます。

例 2

次の集合を（できれば）外延的定義で表し、集合の濃度を求めましょう。

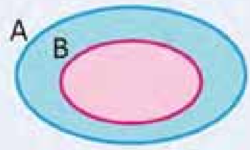
a) A = {8 未満の正の奇数}
b) B = $\{x |\ x = 2n, n$ は自然数$\}$

あるパターンを持っているが、終わりがない要素の集合を表すには、b のように省略符号を使うことができ、その場合、集合の濃度は無限記号 ∞ で表します。

a) A = {1, 3, 5, 7} かつ $n(A) = 4$
b) A = {2, 4, 6, 8, 10, 12, ...} かつ $n(A) = \infty$.

定義

集合 B の要素の全てが集合Aの要素になっている時 ($a \in B$ である場合、$a \in A$)、集合 B は集合Aの**部分集合**であり、$B \subset A$ または $A \supset B$ と表し、「B は A に含まれている」または「A は B を含んでいる」と読みます。



例えば、A = {2, 3, 5, 8, 9} かつ B = {2, 5} であれば、$B \subset A$ と言えます。

要素のない集合を**空集合**と言い、∅ と表し、$n(\emptyset) = 0$ という条件が満たされます。集合 A 全体に $\emptyset \subset A$ と言う条件が満たされます。

集合 A の部分集合全てからなる集合は**集合 A の冪集合**と言います。A = {a, b, c} のとき、集合 A の冪集合は {∅, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}} です。

1.2 集合の演算

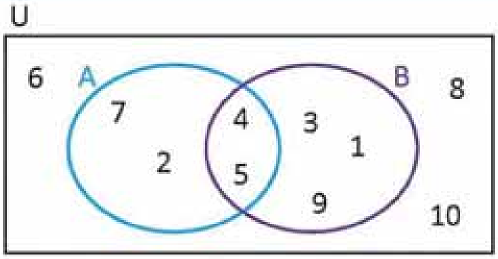
導入問題

集合 A, B が A = {2, 4, 5, 7} かつ B = {1, 3, 4, 5, 9} であるとき、

a) A か B のいずれかに属する要素の集合を定義しましょう。
b) A と B のいずれにも属する要素の集合を定義しましょう。
c) A に属するが B には属さない要素の集合を定義しましょう。
d) U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} のとき、U には属するが A には属さない要素の集合を示しましょう。

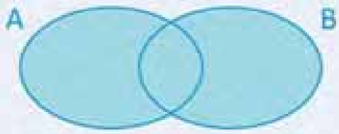
解法

a) 集合は： {1, 2, 3, 4, 5, 7, 9}.
b) 集合は： {4, 5}.
c) 集合は： {2, 7}.
d) 集合は： {1, 3, 6, 8 ,9, 10}.

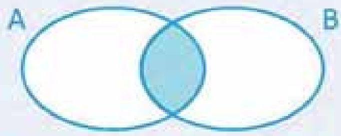


定義

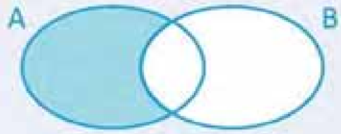
二つの集合 A, B の演算で、A か B のいずれかに属する要素全体からなる集合を**和集合**と言い、A∪B と表し、「A カップ B」と読みます。



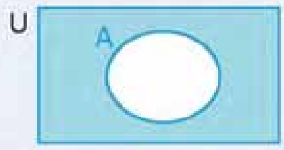
二つの集合 A, B の演算で、A と B のいずれにも属する要素全体からなる集合を**共通部分**と言い、A∩B と表し、「A キャップ B」と読みます。



二つの集合 A, B の演算で、A に属する要素のうち B に属さないものの全体からなる集合を**差集合**と言い、A − B と表します。



二つの集合 A, U の演算で、A ⊂ U であり、A に属さない U の要素を集合 A の**補集合**と言い、A^c と表します。集合Uのことを、しばしば **全体集合**、または単に**ユニバース**とも言います。

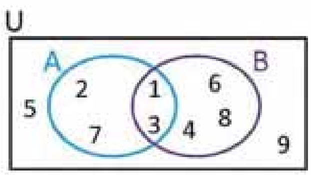


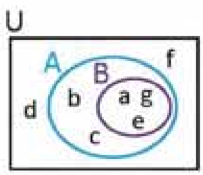
問題

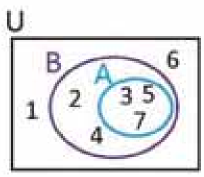
1. a から d それぞれに, 集合 A∪B, A∩B, A – B, B – A を定義しましょう。

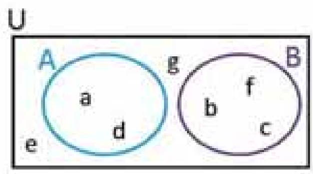
a) A = {a, c, d, e, f, g}, B = {b, d, f, h}
b) A = {−2, 0, 1, 4, 7}, B = {−2, 1, 4}
c) A = {a, b}, B = {a, b, c, d}
d) A = {2, 3, 4}, B = {5, 6, 7}

2. それぞれのベン図について、集合 A, B, A∪B, A∩B, A – B, B – A, A^c , B^c を定義しましょう。

a)


b)


c)


d)


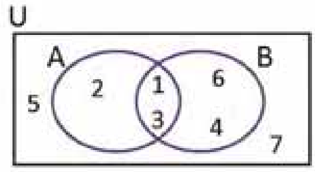
ユニット 7

1.3 集合の濃度

導入問題

右のベン図に表される集合 A、B について、以下の問題を解いてみましょう。

a) A にはいくつ要素がありますか。
b) B にはいくつ要素がありますか。
c) $A \cap B$ にはいくつ要素がありますか。
d) $A \cup B$ にはいくつ要素がありますか。
e) A^c にはいくつ要素がありますか。



解法

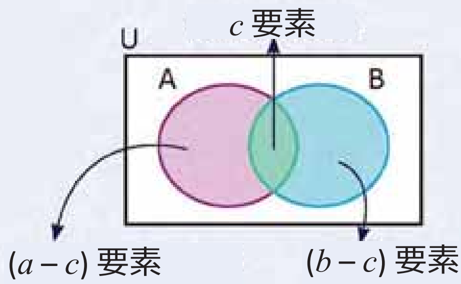
全体集合：$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

a) 集合 A が $A = \{1, 2, 3\}$ であることがわかれば、A の要素数は： $n(A) = 3$.
b) 集合 B が $B = \{1, 3, 4, 6\}$ であることがわかれば、Bの要素数は： $n(B) = 4$.
c) 集合 A, B の共通部分が $A \cap B = \{1, 3\}$ であることがわかれば、$A \cap B$ の要素数は： $n(A \cap B) = 2$.
d) A, B の和集合が $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ であることがわかれば、$A \cup B$ の要素数は： $n(A \cup B) = 5$.
e) A の補集合が $A^c = \{4, 5, 6, 7\}$ であることがわかれば、A^c の要素数は： $n(A^c) = 4$.

一般的に

集合 A, B について、$n(A) = a$,
$n(B) = b$ また $n(A \cap B) = c$ であるとき、次の式が成り立ちます。

$$n(A \cup B) = (a - c) + (b - c) + c$$
$$= a + b - c$$

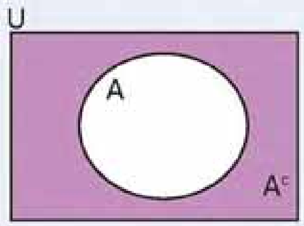


そして、これは以下と同様のことです。

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

似たような形で A^c をAに含まれないUの要素として分析すると、以下のように結論付けられます。

$$n(A^c) = n(U) - n(A)$$



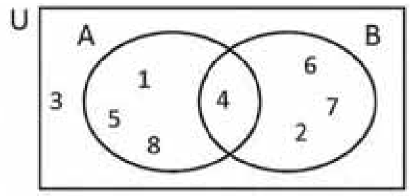
一般的に、集合U, A, Bについては、以下が成り立ちます。

$$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B),}$$
$$\boldsymbol{n(A^c) = n(U) - n(A)}$$

問題

1. 右のベン図について、a から h まで、解いてみましょう。

a) $n(A \cup B)$　b) $n(U)$　c) $n(A^c)$　d) $n(B^c)$
e) $n[(A \cup B)^c]$　f) $n(A^c \cap B^c)$　g) $n[(A \cap B)^c]$　h) $n(A^c \cup B^c)$



ベン図を使うと、$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ かつ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ であることが証明できます。こうした特性を**ドモルガンの性質**といいます。

2. 集合 U, A, B について、$n(U) = 60$, $n(A) = 35$, $n(B) = 21$ かつ $n(A \cap B) = 14$ が成り立つとき、以下を定義してみましょう。

a) $n(A \cup B)$　b) $n(A^c)$　c) $n(B^c)$　d) $n[(A \cup B)^c]$　e) $n[(A \cap B)^c]$　f) $n(A - B)$　g) $n(A \cap B^c)$

1.4 集合の濃度の応用

導入問題

1 から 100 までの自然数について、以下の問題を解いてみましょう。

a) 3 の倍数はいくつありますか。
b) 3 の倍数でない数はいくつありますか。
c) 3 と 5 いずれもの倍数はいくつありますか。
d) 3 か 5 のいずれかの倍数はいくつありますか。

解法

U は 1 から 100 までの自然数の集合です。U に含まれる数の内、3 の倍数の集合を A、5 の倍数の集合を B と表記してみます。

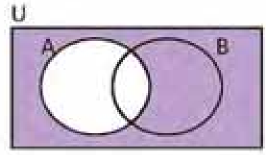
A = {3(1), 3(2), 3(3), ... , 3(31), 3(32), 3(33)}

B = {5(1), 5(2), 5(3), ... , 5(18), 5(19), 5(20)}

a) 1 から 100 までの 3 の倍数の個数は集合Aの濃度に等しく、以下の式になります。$n(A) = 33$

b) 1 から 100 までの 3 の倍数でない数の個数は
A の補集合の濃度に等しく、以下の式になります。

$$n(A^c) = n(U) - n(A) = 100 - 33 = 67$$

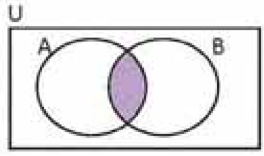


c) 3 および 5 の倍数からなる集合は 1 から 100 までの 15 の倍数の集合と同じです。

$A \cap B$ = {15(1), 15(2), 15(3), 15(4), 15(5), 15(6)}

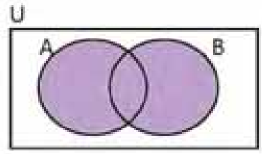
すなわち、$n(A \cap B) = 6$ となります。

また、3 と 5 の共通倍数は、その最小公倍数の倍数、すなわち 15 の倍数ということです。



d) 3 か 5 のいずれかの倍数からなる集合は集合$A \cup B$で表せます。

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 33 + 20 - 6 = 47$$



まとめ

集合論は、集合によってモデル化された状況の計数に非常に役立ちます。

問題

1. 1 から 100 までの自然数で、3 または 5 のいずれの倍数でもない数の個数を求めてみましょう。その後、その状況を表すベン図を作成してみましょう。

2. 1 から 100 までの自然数について、以下の問題を解いてみましょう。
   a) 2 の倍数はいくつありますか。
   b) 3 の倍数でない数はいくつありますか。
   c) 2 の倍数と 3 の倍数はいくつありますか。
   d) 2 か 3 のいずれかの倍数はいくつありますか。
   e) 2 の倍数でも 3 の倍数でもない数はいくつありますか。

3. 表は行と列の集合の共通部分の濃度を表しています。集合 A, B について、足りない情報を表に記入してみましょう。

	A	A^c	合計
B	42		56
B^c		10	
合計	76		100

ユニット 7

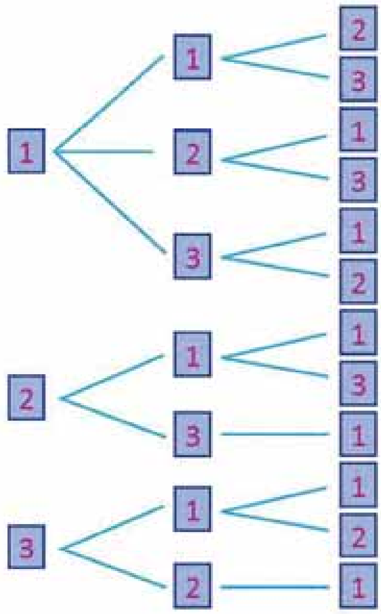
2.1 樹形図

導入問題

次のように 1, 1, 2, 3 と数字が書かれた 4 枚のカードがあります。4 枚のうち 3 枚を並べる方法は何通りか求めなさい。

解法

右の図に示すようにカードの位置を分析します。



そこから、選択できる各経路が 3 枚のカードを並べることができる方法であることが分かります。したがって、数字の書かれたカードの最後にある列から数えることができます。

よって、12 通りあります。

定義

各事例ごとに事象の考えられる場合をすべて列挙し、直線で表した図は**樹形図**として知られ、解の図は樹形図の一例です。

物を取り出す事象において、物を取り出す際に、その取り出したものを取り出すグループに戻すときは、**戻しあり**と言い、その物を戻さないときは、**戻しなし**と言います。

問題

1. 赤、黄、緑の 3 つの玉（各色 1 つ）を、一つの袋から戻しなしで取り出すとき、その取り出し方は何通りかを求めるために樹形図を使いなさい。ただし一度に 1 つ取り出すこととします。

2. 味の異なるお菓子 4 つを 4 人で分けるとき、お菓子の分け方は何通りか計算するために、樹形図を使いなさい。ただし、お菓子のない人はいないものとします。

3. マリアは、すべて異なるパンタロン 2 本、スカート 1 枚、ブラウス 2 枚、靴 3 足を持っています。マリアがそれを着用するとき、何通りの異なる着用方法があるか求めるために、樹形図を使いなさい。

4. 5 枚の異なるトランプから、戻しありで、2 枚を取り出すとき、取り出し方の合計を計算するために、樹形図を使いなさい。

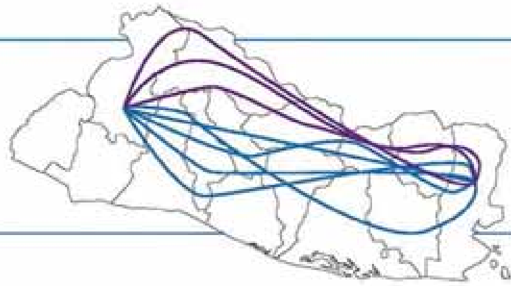
5. 異なるさいころを 3 つ投げます。さいころの目の和が 5 になる場合の数を求めなさい。

一つ目のさいころの目は 1、2、3 だけ出ることとします。そうでなければ和が 5 になりません。

2.2 和の法則

導入問題

サンタ・アナからラ・ウニオンへ移動できる方法は何通りありますか、ただし、サン・サルバドルを通る 5 つの別々の道路があり、チャランテナンゴを通る 3 つの異なる方法があります。2 か所を通る道路はないことを考慮に入れなさい。



解法

サンタ・アナからラ・ウニオンへ移動するためには、サン・サルバドルを通る、またはチャランテナンゴを通るという選択肢が2通りありますが、どのルートも、同時に2か所を通りません。それで、サンタ・アナからラ・ウニオンへ行くための方法の合計を求めるには $5 + 3 = 8$ です。

まとめ

ある事象または条件 A が、a 通り、ある事象または条件 B が、b 通り起こり、かつ、2 つの事象が同時には起こらないとすると、A または B の事象（つまり 2 つの事象のうちの 1 つ）が起こる場合の合計は $a + b$ です。この計算結果は、**和の法則**として知られています。

例

ある靴屋に、サンダルが 4 種類、スニーカーが 2 種類、ブーツが 3 種類あります、この靴屋では異なる種類の靴を何種類提供していますか。

この靴屋では 3 つのタイプの靴を提供し、サンダルには異なる 4 種類、スニーカーには異なる 2 種類、ブーツには異なる 3 種類があります。

そうすると、その靴屋では $4 + 2 + 3 = 9$ 種類の異なる靴を提供していることになります。

問題

1. 食堂ゾーンには食事を購入できる店舗が 3 つあり、一つ目の店舗には、食事の 選択肢が4通りあり、二つ目は 5 通り、三つ目には 7 通りあります。これらのうちのどこかの店舗で、食事を購入する方法は何通りありますか。

2. マリアには社会活動を行う学校が4校あります。一つ目の学校には、社会活動の選択肢が 2 通り、二つ目には3 通り、三つ目には 4 通り、四つ目は、1 通りしかありません。マリアが社会活動を行うための選択肢の合計は何通りあるか求めなさい。

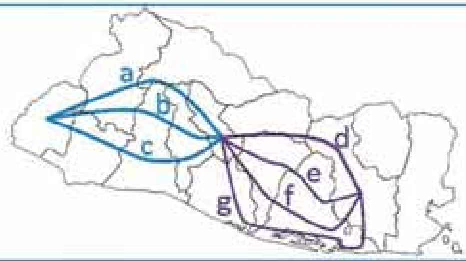
3. さいころを同時に 2 個投げるとき、目の和が 7 または 4 になる場合は、何通りありますか。

4. 問題 3 と同じ状況で、さいころの目の差が 2 または 3 になる場合は、いくつあるか求めなさい。

2.3 積の法則

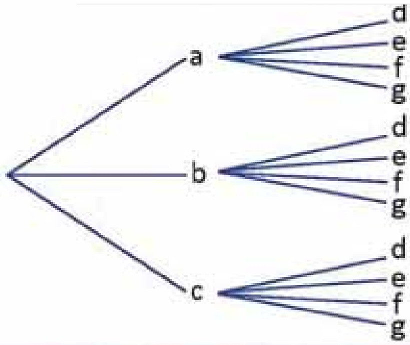
導入問題

クスカトランを通って、アウアチャパンからサン・ミゲルへ移動できる方法はいくつありますか、ただし、アウアチャパンからクスカトランへ行くには 3 つの異なる方法 a、b、c があり、クスカトランからサン・ミゲルへ行くには 4 つの異なる方法 d、e、f、g があるとします。



解法

アウアチャパンから出てクスカトランへは、3 つの異なる方法があり、クスカトランに着くと、それぞれの方法に対しサン・ミゲルに着くための 4 つの異なる方法があります、したがって、アウアチャパンを出てクスカトランを通ってサン・ミゲルに着く方法の合計は異なる $3 \times 4 = 12$ 通りです。



ad、ae、af、ag、bd、be、bf、bg、cd、ce、cf、cg の 12 通りです。

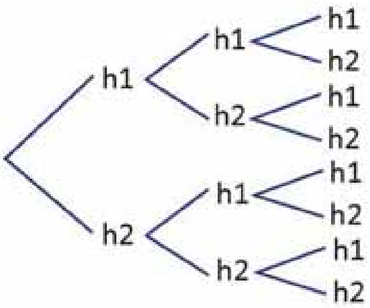
まとめ

ある事象または条件 A が、a 通り起こり、このそれぞれの場合に対しある事象または条件 B が、b 通り起こるとすると、したがって、事象Aと事象 B（つまり 2 つの事象）が起こる場合の合計は abです。この計算結果は**積の法則**として知られています。

いくつかの問題を解くためには和の法則も積の法則も適用することが必要となるかもしれません。

例

ホセはりんご 1 個、なし 1 個、みかん 1 個を 2 人の兄弟に分けたいと思っています。果物を分ける方法は何通りあるか求めなさい。ただし一人の兄弟に全部あげて、もう一人は何もあげないということもできます。



一つの果物を基準にし、この果物の一つ一つに対し、リンゴであれば、兄弟 1 にあげるか、または兄弟 2 にあげるか、2 通りがあります。次に、なしも同じ 2 通りがあり、また、みかんも同様に 2 通りあります。したがってホセは果物を 異なる $2 \times 2 \times 2 = 8$ 通りの出分けることができます。

問題

1. 男の子が 4 人、女の子が 3 人の中で、男の子 1 人と女の子 1 人のペアをつくる方法は何通りあるか求めなさい。

2. ある食堂には、主菜が3種類、米が2種類、サラダが 3 種類あります。昼食に主菜を 1 皿、米を 1 種類、サラダ 1 つを取る場合、何通りあるか求めなさい。

3. なし 1 個、マンゴー 1 個を異なる 3 人に分けるとき、何通りあるか求めなさい。果物を両方とも一人の人にあげることはできないことを考慮に入れなさい。

4. マリアはバスケットの用のハーフパンツ 4 枚とシャツ 3 枚、また、サッカー用のハーフパンツ 5 枚とシャツ 4 枚を持っています。マリアが、バスケットまたはサッカーをするとき、何通りの着方ができますか。

2.4 ある数の階乗

導入問題

4 人を一列に並べるとき、何通りの並べ方が可能か求めなさい。

解法

列の先頭には 4 人のうち誰でも配置でき、したがって、4 通りあります。

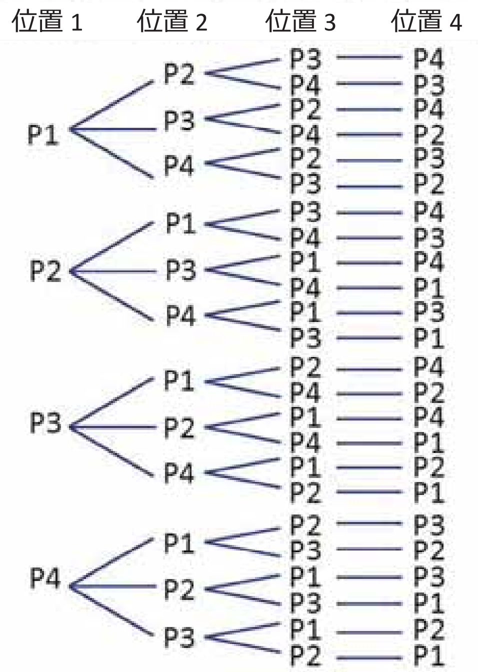
次に、列の二番目の位置につけるのは 3 人だけです。（なぜなら、先頭にはすでに一人いる）、したがって 3 通りあります。

同様に、三番目の位置には 2 通りあります。そして最後の位置は 1 通りだけです。

よって、積の法則を使って 4 人の人を一列に並べる場合の合計は、

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ です。}$$

4人を一列に並べるとき、異なる 24 通りの方法があります。



定義

自然数 n に対し、
1 から nn の階乗を $n!$ と表し、「**n の階乗**」と読みます。したがって、

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

$n! = n \times (n-1)!$ に注目してください。

例

階乗のある計算式の答えを計算、または簡略化しなさい。

a) $3!$

$3! = 3 \times 2 \times 1$
$= 6$

b) $6! \div 4!$

$\frac{6!}{4!} = \frac{6 \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{4!}}$
$= 30$

c) $4! - 3!$

$4! - 3! = (4 \times 3!) - 3!$
$= 3!(4-1)$
$= 6(3)$
$= 18$

d) $\frac{2018!}{2018}$

$\frac{2018!}{2018} = \frac{\cancel{2018} \times 2017!}{\cancel{2018}}$
$= 2017!$

問題

最初に括弧の中を計算しなさい。

1. 階乗のある式の答えを計算をしなさい。

a) $4!$　b) $5!$　c) $(5-3)!$　d) $6! - 4!$
e) $(2+3)!$　f) $4! + 3!$　g) $4! \times 3!$　h) $(2 \times 3)!$

2. 次の階乗のある式を計算または簡略化しなさい。

a) $\frac{5!}{3!}$　b) $\left(\frac{6}{3}\right)!$　c) $\frac{4!}{6}$　d) $\frac{2019!}{2019}$　e) $\frac{7!}{(7-2)!}$　f) $\frac{7!}{2!(7-2)!}$　g) $\frac{9!}{2!(3!)(4!)}$

3. x の値を求めなさい。

a) $x! = 110(x-2)!$　b) $12x! + 5(x+1)! = (x+2)!$

4. ÁRBOL という単語の文字の並べ方は何通りあるか求めなさい。

ユニット 7

2.5 順列

導入問題

一列に、異なる母音を 3 つ並べるとき、何通りあるか求めなさい。

解法

3 つの位置は次のように考えることができます。

____	____	____
一つ目	二つ目	三つ目

一つ目に配置する母音を選ぶためには、5 通りあります。（a、e、i、o、u の 5 つの母音のどれでも）

5	____	____
一つ目	二つ目	三つ目

次に、二つ目と三つ目の位置にはそれぞれ 4 通り、3 通りあります。

5	×	4	×	3
一つ目		二つ目		三つ目

よって、積の法則を使って 5 つの母音の中の 3 つを一列に並べる方法の合計は 4 × 3 = 60 です。

まとめ

並び順を考慮して,ものを並べた列は**順列**として知られています。

n 個 (0 ≤ r ≤ n) から r 個を取り出して並べる順列の合計は次で求められます。

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

${}_nP_0 = \frac{n!}{(n-0)!} = 1$ に注目してください。

この合計は ${}_nP_r$ と表し、「n ペルムート r」と読み、つまり

$${}_nP_r = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-(r-1))}_{r\text{ 個の因数}} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

異なる n 個のものを並べる方法の合計は $n!$ で、その一方で、順列の公式を使うと、${}_nP_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!}$ となり、またこれは、$n!$ でなくてはならない、よって、0! = 1 は成立します。

例

1 から 9 までの数字を使って 3 桁の数が何通りできますか。ただし数字の重複はないものとします。

3 桁の数字をつくるとき、数字の順序（異なる数になる）が重要です。したがって、9 個のものから 3 個を取り出す順列と考えると、9P3 = 9 × 8 × 7 = 504 です。よって、504 個の数がつくれます。

$${}_9P_3 = \underbrace{9 \times 8 \times 7}_{3\text{つの因数}}$$

問題

1. 1 から 5 までの数字を使って、同じ数字を繰り返さずに、できる 2 桁の数字は何個ですか。
2. 6 人の生徒に異なる味の飴を3つ分けることのできる方法は何通りありますか、2 個以上飴を貰う生徒はいないとします。
3. 6 人のグループから会長、副会長、会計係を選ぶことのできる方法は何通りあるか計算しなさい。
4. 5 人が 3 つの椅子に座るための方法が何通りあるか求めなさい。
5. 5 人を一列に並べることのできる方法は何通りありますか、ただし 5 人のうちの特定の一人が先頭にいなければならないとします。

2.6 順列と計算方法

導入問題

男の子 3 人と女の子 4 人を列に並べる方法は何通りあるか求めなさい。ただし、男の子は全員が隣り合っていることとします。

解法

男の子はまとめて一組として考え、次に、5 個のものを列（女の子 4 人と一組の男の子）にします。

女の子	女の子	女の子	男の子たち	女の子

5 個の要素（女の子 4 人と一組の男の子）を 5! 通り に並べることができ、次に、一組の男の子を 3! 通りの方法で並べることができます。

5	4	3	2	1
女の子	女の子	女の子	3 2 1 男の子たち	女の子

そして、積の法則を適用して、男の子 3 人が隣り合うようにして、男の子 3 人と女の子 4 人の並べ方の合計は $5! \times 3! = 720$ となります。

まとめ

順列においては、まとめた要素の集まりを一つのものとみなし、一組の集まりの中にある要素とその他を全て並べ、積の法則を使う戦略をとることはよくあります。

例

男性 3 人と女性 4 人を、男性が隣り合う（一人の男性がもう一人の隣にいる）ことなく、一列に並べることのできる方法は何通りあるか求めなさい。

女性 4 人を一列に配置する方法は 4! 通りと求められます。したがって、男性は下の図に示すスペースのいずれかに入ることができます。

＿＿ 女性 ＿＿ 女性 ＿＿ 女性 ＿＿ 女性 ＿＿

したがって、男性は $_5P_3$ 通りに分かれて並ぶことができます。積の法則を適用して、男性 3 人と女性 4 人を、一人の男性がもう一人の男性と隣り合うことなく並べる方法の合計は $4! \times {}_5P_3 = 24 \times 60 = 1\,440$ です。

問題

1. 男性 4 人と女性 3 人を並べる方法は何通りあるか求めなさい。ただし男性 4 人は常に、隣り合っていなければならないものとします。
2. 歴史の本が 9 冊と数学の本が6冊（すべて異なる）があるとき、棚に本を5冊並べる方法は何通りありますか。ただし、この 5 冊の本は同じ科目でなければならないとします。
3. 「a」から「j」の文字を使って 6 文字の文字列を作るとき、最初の 2 文字は母音で、後の 4 文字は子音の場合、文字列は何通りできますか。
4. 男性 4 人と女性 4 人を一列に並べるとき、並び方は何通りですか。ただし、男女が交互に並ばなければならないとします。
5. 4 人の生徒が一列に並んだ椅子 6 脚に座るとき、生徒のうちの特定の 2 人が常に隣に座る（その生徒の間に空いた椅子がないこと）場合、座り方は何通りですか。

2.7 重複のある順列

導入問題

2、4、5 の数字をつかって出来る 5 桁の数字は何個ありますか、ただし、数の中の数字の重複は許されます。

解法

数字の桁をスペース 5 つとみなし、

$$\underset{DM}{\underline{\quad}} \quad \underset{UM}{\underline{\quad}} \quad \underset{C}{\underline{\quad}} \quad \underset{D}{\underline{\quad}} \quad \underset{U}{\underline{\quad}}$$

したがって、一の位の数から始め、3 通り（数字 2、4、5 のどれでも）あります。

$$\underset{DM}{\underline{\quad}} \quad \underset{UM}{\underline{\quad}} \quad \underset{C}{\underline{\quad}} \quad \underset{D}{\underline{\quad}} \quad \underset{U}{\underline{3}}$$

次に、十の位 にも、3 通りあります。（数の中の数字の重複は許されているので）

$$\underset{DM}{\underline{\quad}} \quad \underset{UM}{\underline{\quad}} \quad \underset{C}{\underline{\quad}} \quad \underset{D}{\underline{3}} \times \underset{U}{\underline{3}}$$

そして、同様には百、千、一万の位にも、それぞれ 3 通りあります。

$$\underset{DM}{\underline{3}} \times \underset{UM}{\underline{3}} \times \underset{C}{\underline{3}} \times \underset{D}{\underline{3}} \times \underset{U}{\underline{3}}$$

よって、重複を許して、2、4、5 の数字を使って5桁の数字を、$3^5 = 241$ 個作ることができます。

まとめ

列中で重複を許す要素nを使って、長さrの列をつくる方法の合計は n^r 通りです。

例

要素が n 個ある集合から、いくつの部分集合ができるか求めなさい。

その集合の各要素を取りあげ、一つの部分集合を作るためには、前記の要素が、部分集合に属するか、属さないかの2通りがあるとみなします。そうすると、その集合にある n 個の各要素に対し、次が成り立ちます。

$$\underset{要素\,1}{\underline{2}} \times \underset{要素\,2}{\underline{2}} \times \cdots \times \underset{要素\,n-1}{\underline{2}} \times \underset{要素\,n}{\underline{2}}$$

この結果は、 濃度が n である集合の冪集合の濃度は 2^n であることを意味します。

よって、n 個の要素をもつ集合からつくることのできる部分集合の数は 2^n です。

問題

1. a、b、c、d を使って、一列に 3 つの文字を並べる方法は何通りありますか。文字は重複できるものとします。

2. バイナリーコードは十進法に替わって数を表す方法で、ビットとして知られる 0 と 1 である、数字または文字を 2 つだけ使い、さらに、コンピューターに保存しやすいため、コンピューター環境で、非常によく使われます。バイナリーコードで、いくつの 7 桁の数を表すことができるか求めなさい。

3. 集合 A = {a, b, c, d, e, f} の部分集合がいくつできるか求めなさい。

4. 車のナンバープレートの数字は、最初の二つは文字 2 つで、次は数字 4 個で構成されています。ナンバープレートでは、数字も文字も重複が許され、かつ、A、B、C、D、E の文字と 1 から 9 までの数字を使える場合に、この条件で、いくつナンバープレートが作成できるか求めなさい。

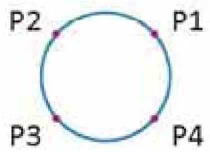
2.8 円順列

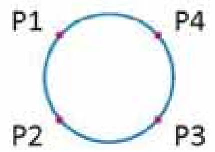
導入問題

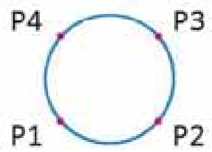
丸テーブルに 4 人が座ることのできる方法は、何通りあるか求めなさい。テーブルを回したとき、配置が別の配置と一致する場合は同じ配置とみなされます。

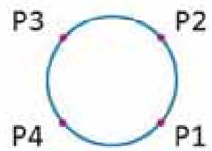
解法

この場合は、特別な配置とされるのは、たとえば、









テーブルが丸いので、上記の 4 つの配置は同じです、つまり、配置方法は 1 つだけと数えます。

したがって、同じ配置方法で 4 回（椅子 1 脚に対し 1 回）回転することができ、したがって、全員を一列に並べたとした場合、これは、4! 通りとなりますが、各配置方法ごとに 4 回数えているので、したがって 4 人が一つの丸テーブルに 座ることのできる方法の合計は $\frac{4!}{4} = 3! = 6$ です。

一般的に、

n 個のものから r 個取って円形に並べると、行える順列の合計は 次を使って求めます。

$$\frac{{}_nP_r}{r}.$$

特に、円形に並んだ n 個の順列の合計は次を使って求めます。

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

例

一つの丸テーブルに 6 人の中から 4 人を並べることのできる方法は何通りか求めなさい。

6 人の中から 4 人を一列に並べる方法の合計は ${}_6P_4$ です。

丸テーブルでの配置でため、前記の合計には、各配置に対し4回数えているので、よって、一つの丸テーブルに 6 人の中から 4 人を並べる方法の合計は $\frac{{}_6P_4}{4} = 90$ です。

問題

1. 全て同じ型の回転木馬7席があるメリーゴーランドに子供7人を乗せることのできる方法は何通りですか。
2. 丸テーブルに椅子が 5 脚あり、7 人いるとき（2 人は立っている）、何通りの座り方がありますか。
3. 丸テーブルで友人 5 人がゲームをしています。何通りの配置方法がありますか。ただし、そのうちの 2 人は、常に隣り合う席を希望しているとします。

2.6 の授業で学んだ方法を使うことができます。

4. 男性ダンサー 4 人と女性ダンサー 4 人が全員で手をつなぎ、輪になってダンスをします。ダンスで男性と女性が交互に踊る場合、ダンサーの配置方法は何通りですか。
5. 恋人 4 組が椅子にすわるとき、それぞれのパートナーが自分のいる位置の真向かいに座る場合、何通りの座り方がありますか。

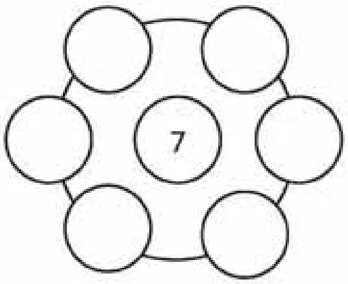
2.9 円形の形状*

導入問題

7 人が丸テーブルに座る方法は何通りあるか求めなさい。ただし、1 人が 中央に、別の 6 人はその周りに 座ることとします。

解法

文章問題を次の図にすると、



このケースは、中央に座る人によって、並び方（あるいはケース）が異なると考えられ、中央に座る人ごとに、円形に配置します。つまり、この条件で、7人が座る方法の合計は $7 \times (6-1)! = 7 \times 5! = 7 \times 120 = 840$ です。

まとめ

円形にものを並べることのできる方法を数えるには戦略が 2 つあります。

1) 列にものを並べ、余分に数えた回転数を求めます。
2) 基準となる要素を配置し、その他を基準となる要素の周りに並べます。

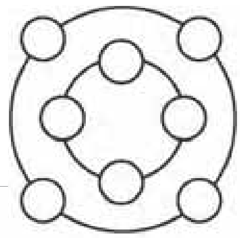
問題

1. 「エルサルバドルにおける算数・数学の学習の改善」について、議論するために、円卓に 12 人が集まります。日本人 3 人、エルサルバドル教育大臣、中等教育局長及び、その他数学教育の専門家たちです。何通りの方法で座ることができるか求めなさい。ただし
   a) 順序は問いません。
   b) 日本人 3 人は、常に隣り合うように、局長は常に大臣の左側にいます。

2. 丸テーブルの 9 脚の椅子に 6 人が座ることのできる方法は何通りですか。

3. 6 人家族が丸テーブルに座り、父親と母親が向かい合って座る場合、座り方は何通りあるか求めなさい。

4. 「青少年の性感染症の予防と教育」に関する会議に 8 人が参加し、図に示すように、それぞれの輪に、4 席ある 2 つの輪になって座ります。8 人が 8 席に座ることのできる方法は何通りあるか求めなさい。



5. 立方体に、異なる 6 色を使って色を塗る方法は何通りあるか求めなさい。ただし、立方体を回転させる際、他の塗り方と色が一致する場合は、色は同じとします。

2.10 同じものを含む順列*

導入問題

ボーリングで、ボールが列になって出て、そのボールはすべて同じ大きさと重さのとき、ボーリングのボールが 7 個出る順番のすべての場合を求めなさい。ただしボールは 2 個が青、3 個が緑、残りが黒とします。

解法

ボールの並べ方の合計は x とします。

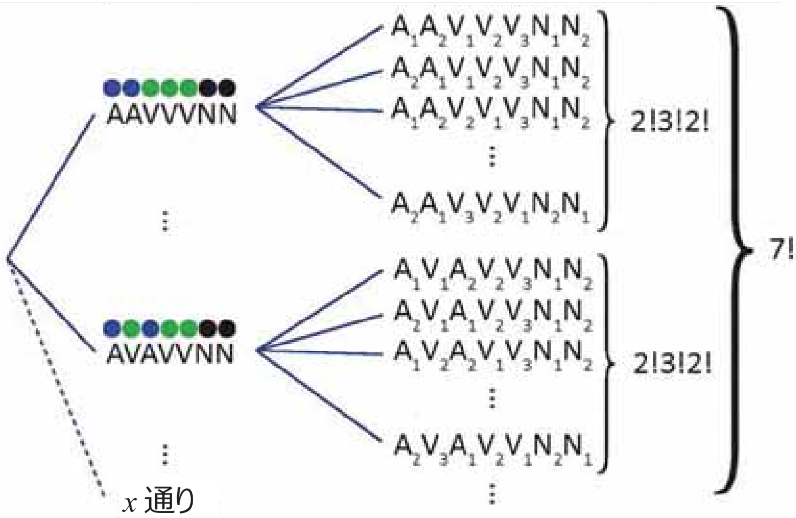
もしボールが異なっていたとしたら、ボール 7 個を並べる方法の合計は 7! です。

また、右の図で示すように、ボールが出てくる各場合に対し 2!3!2! 通りの異なる並べ方（もしボールが異なっていたとしたら）があります。

したがって、$7! = x(2!3!2!)$ が成り立ちます。

よって、青 2 個、緑 3 個、黒 2 個のボールを並べる方法 (x) の合計は

$$x = \frac{7!}{2!\,3!\,2!} = 210.$$



一般的に

n 個あり、r_1 がある種類で（全部同じ）、r_2 が別の種類　（これも全部同じ）、また別の種類の r_k まで 行い、$r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$ が成立する順列の合計は次のように求められます。

$$\frac{n!}{r_1!\,r_2!\ldots r_k!}$$

この結果は、組み合わせを使って示されるので、**複数の組み合わせ**として知られます。

例

チェスでは、黒の駒が 16 個、白の駒が 16 個あります。各色には、ルークが 2 個、ナイトが 2 個、ビショップが 2 個、キングが 1 個、クイーン 1 が個、ポーンが 8 個があります。白のルークを 2 個、ナイトを 2 個、ビショップを 2 個、キングを 1 個、クイーンを 1 個を一列に並べることのできる方法は何通りあるか求めなさい。

同じ種類の駒は同じ形をしているとみなします。

合計 8 個の駒があり、同じルークが 2 個、同じナイトが 2 個、同じビショップが 2 個あるとき、これらの駒を列に並べる方法の合計は、

$$\frac{8!}{2!\,2!\,2!} = 7! = 5040.$$

問題

1. PATRIA という単語の文字の並べ方は何通りありますか。
2. 船から色のついた旗を使って信号を送ります。その船には黄色の旗が 3 枚、白が 2 枚あります。信号を送るために全部の旗を並べる場合、異なる信号がいくつできますか。
3. 民主主義の促進と研修センター (CECADE) が企画するイベントに参加する青年委員会を設立するために、代表委員長 1 人、委員長代理 2 人、随行する参加者 4 人を選ばなければなりません。10 人の若者のグループから委員会メンバーを選ぶことのできる方法は、何通りあるか求めなさい。
4. チェスの黒い駒の並べ方は何通りあるか求めなさい。ただし円形に並べることとします。

ユニット 7

2.11 補集合による場合の数を数える方法

導入問題

ある工場には、扇風機が 6 台あり、職場を常に涼しくしておく必要があるため、少なくとも 1 台は常についています。この条件を満たす方法は何通りありますか。

解法

起こると考えられる全てのケースは、扇風機 1 台だけついている、6 台のうちの 2 台がついている、以下同様に、扇風機 6 台がついているケースまで考えます。

少なくとも扇風機が 1 台ついているとき、考えられるすべてを数えるためには、扇風機があると考えられる全ての場合を数えることができます。つまり、扇風機 1 台ごとに 2 通りあり（ついている、または、消えている）、扇風機があると考えられる場合の数の合計は 2^6 です。

この条件を満たさない唯一の場合は、扇風機が全部消えているときです、つまり、1 通りです。したがって、少なくとも 1 台の扇風機がついている場合の合計は、$2^6 - 1 = 63$ です。

まとめ

ある事象、または、条件 A が発生すると考えられる場合の数があまりにも多く、数えるのが難しくなることもあります。しかし、要求されていないものを数える方が簡単なこともあり、つまり、要求されるものの補集合のことで、条件なしに全てのものを並べる並べ方の合計からそれを引くことです。考えられる全てのケースをUを使って表すと、次のようになります。

$$A \subset U \text{ と } n(U) \text{ は有限で、したがって、} n(A) = n(U) - n(A^c)$$

例

女の子 3 人と男の子 3 人を並べる方法は何通りあるか求めなさい。ただし、3 人の女の子は隣り合わせではないこととします。

3 人の女の子が常に、隣り合わせでいるケースを数え、これは $4! \times 3!$ 通りあります。

次に、男の子 3 人と女の子 3 人(合計 6 人)を並べることのできる方法は $6!$ 通りです。

したがって、6 人の子供の並べ方の合計から女の子 3 人が常に隣り合わせでいる場合を引いて、結果は、$6! - 3! \times 4! = 4!(30 - 3!) = (4 \times 3 \times 2 \times 1)(30 - 6) = 576$ となります。よって、異なる 576 通りに並べることができます。

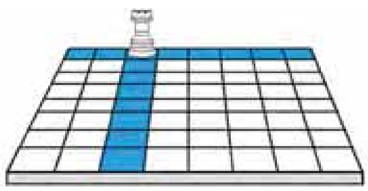
問題

1. 数の全部の桁の積が 0 となるように、バイナリーコード（数字の 0 と 1 を使う）を使って、できる 7 桁の数はいくつあるか求めなさい。

2. 1 から 4 までの 4 つの数字を、数字の重複を許して、一列に並べます。少なくとも 2 つの数字が同じになる数列はいくつあるか求めなさい。

3. 女の子が 4 人、男の子が 2 人いるとき、男の子が隣り合わないようにして、6 人を一列に並べる方法は何通りあるか求めなさい。

4. チェスで、図に示すように、ルークは 8 × 8 のマス目のチェスボードの直線上にある相手の駒を取ることができます。ルーク 2 つを取られないように並べる方法は次の場合は、何通りあるか求めなさい。



   a) ルークの一つは黒で、もう一つは白の場合
   b) 両方のルークが同じ色の場合

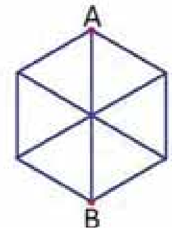
b の場合、同じ色のルークはとることができます。

2.12 復習問題

順列の数え方を使って次の問題を解きなさい。

1. 「障害のある青少年のための機会」についての会議に、スペイン語を話す人が 10 人、英語を話す人が 15 人、フランス語を話す人が 14 人参加し、そのうちの、5 人がスペイン語と英語を、7 人が英語とフランス語を、4 人が、スペイン語とフランス語、また、2 人が 3 つの言語を話します。会議に何人参加しているか求めなさい。

2. 図に一辺が 1 cm の正六角形が示してあります。長さ 1 cm の線分 3 つを使って、A 点と B 点を結ぶ方法は何通りあるか求めなさい。



3. ある陸上競技に 3 人が参加します。陸上選手が到着することができる異なる結果は何通りになりますか、ただし 3 人が引き分けになることもあるとします。

4. 方程式 $x! = 72(x-2)!$ の x の値を求めなさい。

5. 男の子が 4 人、女の子が 5 人いるとき、そのうちの 4 人を列の両端に男の子、中央に女の子となるように、一列に並べます。4 人で一列をつくることのできる方法は何通りあるか求めなさい。

6. 0 から 6 までの番号の付いた6枚のカードがあり、その中から 4 枚とって列にするとき、カードを数字の桁と考えると、5 の倍数は何個あるか求めなさい。左から右に数えるとき、一つ目の数字は 0 にはならないとします。

5の倍数となるには一の位の数字は、
0 または 5 でなければなりません。

7. 味の異なるお菓子10個を子供 3 人で分けるとき、何通りあるか求めなさい。ただし、お菓子全部を一人の子供にあげることもあるとします。

8. あるクラスに、男の子 3 人女の子 2 人のグループが 4 つあるとき、各グループを列になった異なる席に並べる方法は何通りあるか求めなさい。ただし、各グループの男の子も女の子も常に隣り合っていることとします。

9. 7 学年の本 3 冊(同じもの)、8 学年の本 6 冊（同じもの）、9 学年の本 4 冊（同じもの）を棚に置くことのできる方法は何通りありますか、ただし、8 学年の本は全部隣り合わせにあることとします。

10. 7 人を円形に並べることのできる方法は何通りありますか、ただし

    a) そのうちの 2 人が隣り合っている場合
    b) そのうちの 2 人が隣り合っていない場合

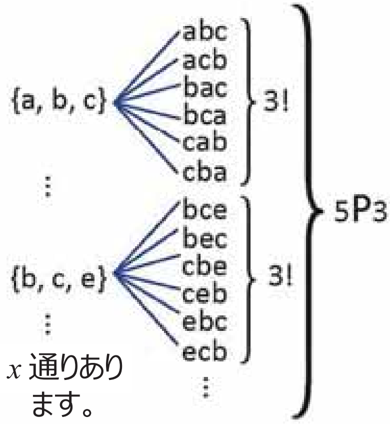
3.1 組み合わせ

導入問題

次の集合 {a, b, c, d, e} の中から、3 文字を選ぶ方法は何通りあるか求めましょう。

解法

集合 {a, b, c, d, e} の中から、3 文字を選ぶ方法の総数を x とします。



3 文字を選択するに当たり、その順番は関係ないので、それぞれ選択したものに 3! を掛けることで、5 文字の中から選んだ 3 文字の並べ方の総数がわかります。つまり、$x(3!) = {}_5P_3$ となります。

つまり、集合 {a, b, c, d, e} の中から、3 文字を選ぶ方法の総数は、

$$x = \frac{{}_5P_3}{3!} = 10.$$

まとめ

順番は関係ないものを選ぶことを、**組み合わせ**といいます。

組み合わせは通常、ものの集まりの選び方に関係しています。なぜなら、この意味において順番は関係なく、選ぶものの最終的な集合が重要だからです。

n 個の集合から r 個のものを選んでできる組み合わせの総数は、$0 \leq r \leq n$ として、次のように表されます。

$$\frac{{}_nP_r}{r!}.$$

この組み合わせの総数は、${}_nC_r$ と表され、"n と r の組み合わせ"、つまり、

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots 2\times 1} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$ と読みます。

${}_nC_0 = \frac{n!}{(n-0)!0!} = 1$ に注目してください。

${}_nC_{(n-r)} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = {}_nC_r$ であり、これは、異なる n 個のものの中から、r を選んで引くか、$n-r$ を選んで残すのと同じであることに、注目しましょう。

例

ある袋の中に、赤い球が3個（すべて同じもの）と緑の球が4個（すべて同じもの）があります。7 つの球を一列に並べるのに何通りあるか求めましょう。

1 列に 7 つのスペースがあると考えることができれば、赤い球が入るスペースがいくつあるか選べばいいので（青い球は残りのスペースに入る）、この計算は ${}_7C_3$ となります。

$${}_7C_3 = \frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1} = 35$$

3つの因子

${}_7C_3 = \frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}$

3つの因子

つまり、7 個の球は 35 通りの方法で並べることができます。

この問題は、もの、もしくはもののスペースを基準にして、順列もしくは組み合わせを使って解くことができます。

問題

1. いちご、メロン、サポーテ、グアバ、パパイヤ、マンゴーの内、2 つのフルーツを組み合わせて作ることができるミックスジュースは何種類ありますか？3 つのフルーツを使った場合は？

2. 座標に 5 つの点がありますが、一直線上に 3 つの点が存在するような配置にはなっていません。それらの点の内、2 つの点を結ぶ線分が何通り描けるかを求めましょう。

3. {1, 2, 3, 4, 5} という集合があります。数字がひとつしかない部分集合は何通りありますか？数字が 2 つある部分集合は？数字が 3 つある部分集合は？数字が 4 つある部分集合は？数字が 5 つの場合は？数字が 0 の場合は？

3.2 組み合わせと数の数え方の原理

導入問題

あるグループに女性が 5 人、男性が 3 人います。以下の問題に答えましょう。

a) 2 人選ぶのに、同性同士でなければならい場合、選び方は何通りありますか？

b) 4 人選ぶのに、男性 2 人、女性 2 人になるような選び方は、何通りありますか？

解法

a) この状況では、2 つの場合があります。

その 1　女性 2人の場合があります。この時、$_5C_2$ 通りの選び方があります。

その 2　男性 2人の場合があります。この時、$_3C_2$ 通りの選び方があります。

つまり、足し算の原理により、同性の 2 人の選び方は、次のとおりです。$_5C_2 + {_3C_2} = 10 + 3 = 13$。

b) まず、女性の選び方は $_5C_2$ 通りあります。そして、女性の選び方それぞれに対し、男性を選ぶ $_3C_2$ 通りの方法があります。

つまり、足し算の原理により、4 人（男女それぞれ 2 人ずつ）の選び方は、次のとおりです。

$_5C_2 \times {_3C_2} = 10 \times 3 = 30$。

まとめ

場合によっては、すべての場合を数えるために、和の法則と積の法則を組み合わせて計算する必要があります。その上、順列においては、ものをあとから並べるために、その選び方も検討できます。

例

数学の本が 7 冊（すべて異なります）、児童青年の権利の本が 5 冊（すべて異なります）あります。数学の本 3 冊と児童青年の権利の本 2 冊を本棚に並べる時の並べ方は何通りあるか求めましょう。

まず最初に、数学の本を 3 冊選びますが、その選び方は、$_7C_3$ 通りあります。次に、児童青年の権利の本を 2 冊選びますが、その選び方は、$_5C_2$ 通りあります。

最終的に、本の並べ方は、5! 通りあります。つまり、積の法則を応用し、すべての本の並べ方の総数は、次のとおりになります。$_7C_3 \times {_5C_2} \times 5! = 35 \times 10 \times 120 = 42{,}000$。

問題

1. 男の子 3 人と女の子 4 人のグループの中から、男の子 2 人、女の子 3 人を選んで一列に並ばせる方法は、何通りあるか求めましょう。

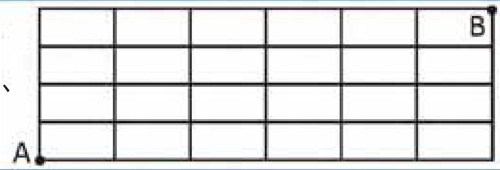
2. 6 人の男性と 4 人の女性のグループの中から、3 人で構成する委員会を結成する時、次の条件下で、何通りの委員会ができるか求めましょう。

a) 何の制限もない時。
b) 男性のみ、または女性のみの時。
c) 男性 2 人、女性 1 人の時。
d) 女性が少なくとも 1 人いなければならない時。

3.3 道順を数える

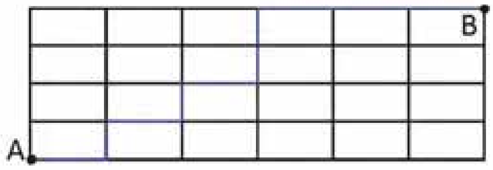
導入問題

右のマス目が書かれた表は、ソンソナーテ県の通行可能な道路を表しています。ある人が最も短い道順を通って、地点 A から地点 B に行くのには、何通りあるかを求めましょう。



解法

通る道の距離を最短にするには、右か上にのみ進まなければなりません（そうでなければ、後戻りします）。そこで、この問題は、6 + 4 = 10 マスの鎖をつなぐことと要約でき、その中の 4 マスを縦に進め、6 マスを横に進めます。



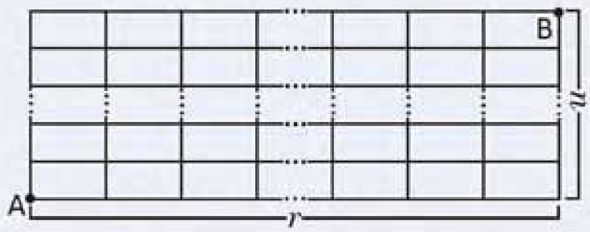
このためには、右に向かって 6 マス進む方法を選ぶだけでよく、その方法は、${}_{10}C_6$ 通りあります。

つまり、地点 A を出発し、地点 B に到着するのに最短の道順の総数は、次のとおりです。${}_{10}C_6 = 210$。

まとめ

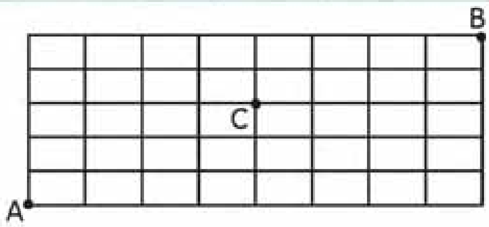
マス目の数が $n \times r$ の表において、地点 A から地点 B に行く最短の道順の総数を求めるには、組み合わせを使うことができます。その総数は、a: ${}_{(n+r)}C_r$ と同じです。

この場合の道順の決め方は、組み合わせの恒等式の証明のいくつかにとても役に立ちます。



例

地点 A から地点 B に行くのに、地点Cを通らなければならない場合、最も短い道順は何通りあるかを求めましょう。



A から C に行くためには、4 マス横に進み、3 マス縦に進む必要があります。そこで、最短距離となる道順は、${}_7C_4$ 通りあります。その後、C から B に最短距離で行く方法は、${}_6C_4$ 通りのあります。

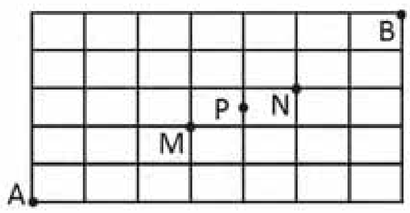
つまり、積の法則を応用すると、A から B に行くのに C を通る場合の最短距離の道順の総数は、

${}_7C_4 \times {}_6C_4 = 35 \times 15 = 525$ 通りになります。

問題

次のマス目が書かれた表で、以下の時、最短距離となる道順の数を求めましょう。

a) A から B に行く。
b) M を通って、A から B に行く。
c) N を通って、A から B に行く。
d) M と N を通って、A から B に行く。
e) M か N を通って、A から B に行く。
f) M も N も通らないで、A から B に行く。
g) P を通って、A から B に行く。



3.4 道順の数を数える方法で行う証明*

導入問題

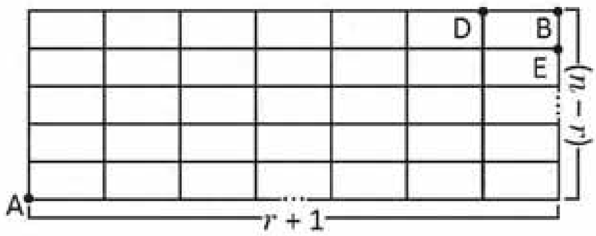
道順を求める論法を使って、パスカルの再帰性を証明します。

$$n \geq r \text{ で、} {}_{(n+1)}C_{(r+1)} = {}_{n}C_{r} + {}_{n}C_{(r+1)}$$

解法

大きさが $(n-r) \times (r+1)$ のマス目が書かれた表と、地点 A から地点 B に行くためには、地点 D または地点 E を通る 2 通りしかないことを考慮します。

A を出て、B に到着する方法の総数は、$(n-r)+(r+1)=n+1$ なので、${}_{(n+1)}C_{(r+1)}$ 通りです。



その上、D に到着するためには、$(n-r)+r=n$ なので、${}_{n}C_{r}$ 通りあります。

また、E に到着するためには、$(n-r-1)+(r+1)=n$ なので、${}_{n}C_{(r+1)}$ 通りあります。

つまり、${}_{(n+1)}C_{(r+1)} = {}_{n}C_{r} + {}_{n}C_{(r+1)}$ となります。

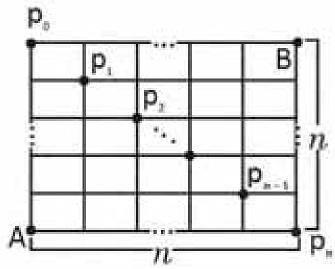
まとめ

組み合わせの恒等式を証明するためには、道順の数え方を使うことができます。そのためには、状況に合わせたマス目を作り、異なる 2 つの道順を数えます。

例

道順を求める論法を使って、恒等式を証明しましょう。

$$({}_{n}C_{0})^2 + ({}_{n}C_{1})^2 + \cdots + [{}_{n}C_{(n-1)}]^2 + ({}_{n}C_{n})^2 = {}_{2n}C_{n}$$



$n \times n$ のマス目が書かれた表があります。A を出て B に到着するための最短距離の総数は、${}_{2n}C_{n}$ です。

また、場合ごとに数を数えることもできます。ある場合（地点 p_0 を通る）では、最初の n マスの移動で横移動せず、次の n マスの移動では縦移動しません。この場合、$({}_{n}C_{0})({}_{n}C_{0})$ 通りの方法があります。

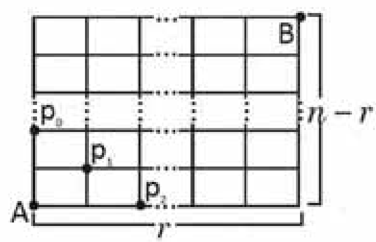
別の場合（地点 p_1 を通る）では、最初の n マスの移動で横移動し、それ以降の移動では、縦に n マス移動します。これには、$({}_{n}C_{1})({}_{n}C_{1})$ 通りの方法があります。以降も同様に、最初の n マスの移動がすべて横移動になる、および最後の n マスの移動がすべて縦移動になる場合まで（地点 p_n を通る）数えます。これには、$({}_{n}C_{n})({}_{n}C_{n})$ 通りの方法があります。

つまり、$({}_{n}C_{0})^2 + ({}_{n}C_{1})^2 + \cdots + [{}_{n}C_{(n-1)}]^2 + ({}_{n}C_{n})^2 = {}_{(2n)}C_{n}$ となります。

問題

下図において、道順を求める論法を使って、次の恒等式を証明しましょう。

$${}_{n}C_{r} = {}_{2}C_{0}[{}_{(n-2)}C_{r}] + {}_{2}C_{1}[{}_{(n-2)}C_{(r-1)}] + {}_{2}C_{2}[{}_{(n-2)}C_{(r-2)}]。$$



3.5 組み合わせの恒等式の 2 通りの解き方*

導入問題

次の組み合わせの恒等式を証明するために、集合を求める論法を使いましょう。

$$_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{(n-2)} + {}_nC_{(n-1)} + {}_nC_n = 2^n$$

解法

n 個の要素を持った小集合を使って作る、小集合の数を数えます。2 つの異なる方法で数えます。

方法 1：各要素が持つ可能性の数を数える。

各要素には、小集合に含まれるか含まれないの、2 つの可能性があります。そのため、集合の濃度 n により作られる小集合の総数は、2^n となります。

$$\underset{\text{要素 }1}{\underline{2}} \times \underset{\text{要素 }2}{\underline{2}} \times \cdots \times \underset{\text{要素 }n-1}{\underline{2}} \times \underset{\text{要素 }n}{\underline{2}}$$

方法 2：それぞれの小集合が持つ可能性を数えます。

要素が 0 個の小集合の数 $_nC_0$。

要素が 1 個の小集合の数 $_nC_1$。

要素が 2 個の小集合の数 $_nC_2$。

同様に、n 個の要素を持つ小集合の数に到達するまで数えます。

よって、n 個の要素をもつ集合から作ることのできる部分集合の数は、次のとおりです。

$$_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{(n-2)} + {}_nC_{(n-1)} + {}_nC_n$$

この同じことはすでに数えてあるので、次のことが成り立つはずです。

$_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{(n-2)} + {}_nC_{(n-1)} + {}_nC_n = 2^n$。

まとめ

組み合わせの恒等式を証明するために、2 つの異なる方法である状況の数を数えることができます。
この方法を、**比較**といいます。

問題

集合を求める論法を使って、次の恒等式を証明しましょう。

a) $_nC_r = {}_nC_{(n-r)}$。

b) 要素が $n \geq r+1$ の時、$_{(n+1)}C_{(r+1)} = {}_nC_r + {}_nC_{(r+1)}$。

c) 要素が $n \geq r+2$ の時、$r \geq 2$。$_nC_r = 2C_0({}_{(n-2)}C_r) + 2C_1[{}_{(n-2)}C_{(r-1)}] + 2C_2[{}_{(n-2)}C_{(r-2)}]$。

d) 要素が $(m \geq r)$ および $(n \geq r)$ の時、$_{(n+m)}C_r = {}_nC_0({}_mC_r) + {}_nC_1[{}_mC_{(r-1)}] + \cdots + {}_nC_{(r-1)}({}_mC_1) + {}_nC_r({}_mC_0)$。

b) では、集合 A と、要素 $n+1$ 個から 要素 $r+1$ を引いたものを考慮し、A の中の特定の要素には、抽出される要素に含まれるか含まれないかの、2 つの選択肢があります。

c) では、集合 A と、2 つの集合において割り算できる n 個の要素を考慮します。2 つの集合の内、ひとつには 2 つの要素があり、もうひとつには $n-2$ 個の要素があります。そして A から、r を引きます。

d)では、前の設問と同様の理論を当てはめます。

3.6 パスカルの三角形

導入問題

次の課題をやってみましょう。

a) 表を作成し、横の列に n 値の 0 から 5 の数字を記入し、縦の列にも r 値の 0 から 5 の数字を記入しましょう。それぞれのマスに（可能な場合）、その組み合わせの数 ${}_n\mathrm{C}_r$ を計算しましょう。

b) $n = 0$ から $n = 5$ まで、組み合わせの値を三角形の形に並べましょう。

c) ひとつ上の横列に続く横列のパターンを求め、また、三角形の 6 番目の横列の値が減るパターンを、直接組み合わせを計算しないで求めましょう。

解法

a) 1 番目の横列では、組み合わせはひとつだけであることが計算できます、${}_0\mathrm{C}_0 = 1$。2 番目の横列では、組み合わせは、${}_1\mathrm{C}_0$ と ${}_1\mathrm{C}_1$ の 2 つであることが計算できます。3 番目の横列では、組み合わせは、${}_2\mathrm{C}_0$ と、${}_2\mathrm{C}_1$ と、${}_2\mathrm{C}_2$ の 3 つであることが計算できます。同様に続けると、表の中の値を計算することができます。

n \ r	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

b) 表中の組み合わせを三角形の形に並べます。

$n = 0$	1
$n = 1$	1 1
$n = 2$	1 2 1
$n = 3$	1 3 3 1
$n = 4$	1 4 6 4 1
$n = 5$	1 5 10 10 5 1

c) 作られた三角形を見ると、両端には常に1があります。これは、${}_n\mathrm{C}_0$ (= 1)、および ${}_n\mathrm{C}_n$ (= 1) の値が来ます。そして、見たところ、2 つの数字の下側の中間にある数字は、その数字の上にある数字の和になっています。例えば、1 と 1 の下側には 2 があり、$1 + 1 = 2$ を満たしています。同様に、10 は 6 と 4 の下側にあり、$6 + 4 = 10$ を満たしています。このパターンに従い、6 番目の横列の値は、次のようになります。1、$1 + 5$、$5 + 10$、$10 + 10$、 $10 + 5$、$5 + 1$、 1。

$n = 0$	1
$n = 1$	1+1
$n = 2$	1 2 1
$n = 3$	1 3 3 1
$n = 4$	1 4 6+4 1
$n = 5$	1 5 10 10 5 1
$n = 6$	1 6 15 20 15 6 1

まとめ

組み合わせを元に作ったこの三角形は、**パスカルの三角形**と呼ばれます。導入問題における推論のパターンは、前の授業で証明したパスカルの再帰性を使って、次のとおり、数学的に証明することができます。

${}_{(n+1)}\mathrm{C}_{(r+1)} = {}_n\mathrm{C}_r + {}_n\mathrm{C}_{(r+1)}$。

$${}_0\mathrm{C}_0$$
$${}_1\mathrm{C}_0 \quad {}_1\mathrm{C}_1$$
$${}_2\mathrm{C}_0 \quad {}_2\mathrm{C}_1 \quad {}_2\mathrm{C}_2$$
$${}_3\mathrm{C}_0 \quad {}_3\mathrm{C}_1 \quad {}_3\mathrm{C}_2 \quad {}_3\mathrm{C}_3$$
$${}_4\mathrm{C}_0 \quad {}_4\mathrm{C}_1 \quad {}_4\mathrm{C}_2 \quad {}_4\mathrm{C}_3 \quad {}_4\mathrm{C}_4$$
$${}_5\mathrm{C}_0 \quad {}_5\mathrm{C}_1 \quad {}_5\mathrm{C}_2 \quad {}_5\mathrm{C}_3 \quad {}_5\mathrm{C}_4 \quad {}_5\mathrm{C}_5$$
$${}_6\mathrm{C}_0 \quad {}_6\mathrm{C}_1 \quad {}_6\mathrm{C}_2 \quad {}_6\mathrm{C}_3 \quad {}_6\mathrm{C}_4 \quad {}_6\mathrm{C}_5 \quad {}_6\mathrm{C}_6$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

問題

1. 組み合わせを計算せずに、パルカルの三角形の 7 番目と 8 番目の横列の値を求めましょう。

2. 右側に、パスカルの三角形の中の 2 列が示されています。
${}_{(n+1)}\mathrm{C}_{(r+1)} = {}_n\mathrm{C}_r + {}_n\mathrm{C}_{(r+1)}$ を応用し、2 列目の値の計算が正しいことを証明しましょう。

1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

3.7 ニュートンの二項定理*

導入問題

積の展開 $(x+y)^5$ において、項 x^2y^3 の係数を求めましょう。

解法

式 $(x+y)^5$ を展開すると、$(x+y)^5=(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$ と表すことができます。

$(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$ を展開するためには、それぞれの括弧の中の x と y を掛け算し、同類項でまとめます。x^2y^3 の係数は、5 つの括弧の中から、y を 3 つ取る場合の回数と同じ、つまり、$_5C_3=10$ となります。

そのため、積の展開 $(x+y)^5$ における、項 x^2y^3 の係数は、

$_5C_3=10$ となります。

問題

一般的に、積の展開 $(x+y)^5$ において、項 $x^{n-r}y^r$ の係数は、$0\le r\le n$ の場合、$_nC_r$ になります。

つまり、$(x+y)^n$ を展開するためには、次の結果が成り立ちます。
$(x+y)^n=({_nC_0})x^n+({_nC_1})x^{n-1}y+({_nC_2})x^{n-2}y^2+\cdots+[{_nC_{(n-2)}}]x^2y^{n-2}+[{_nC_{(n-1)}}]xy^{n-1}+({_nC_n})y^n$。

また、次のように足し算を使って、表すことができます。

$$(x+y)^n=\sum_{r=0}^{n}({_nC_r})x^{n-r}y^r。$$

この結果は、**ニュートンの二項定理**と呼ばれ、数を数えるだけのような分かりやすい場合でない時の、組み合わせの性質や恒等式を証明するために使うこともできます。

例

次の組み合わせの恒等式を証明しましょう、$_nC_0+{_nC_1}+{_nC_2}+\cdots+{_nC_{(n-2)}}+{_nC_{(n-1)}}+{_nC_n}=2^n$。

ニュートンの二項定理を使い、$x=1$ と $y=1$ を当てはめると、次のようになります。

$$(1+1)^n=({_nC_0})1^n+({_nC_1})1^{n-1}1+({_nC_2})1^{n-2}1^2+\cdots+[{_nC_{(n-2)}}]1^21^{n-2}+[{_nC_{(n-1)}}]1^11^{n-1}+({_nC_n})1^n$$

$$2^n={_nC_0}+{_nC_1}+{_nC_2}+\cdots+{_nC_{(n-2)}}+{_nC_{(n-1)}}+{_nC_n}。$$

問題

1. $(1-x)^{10}$ の二項展開における、x^7 の係数を求めましょう。

2. $(x+3y^3)^4$ の二項展開における、x^2y^6 の係数を求めましょう。

3. $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^9$ の二項展開における、x を含まない項の係数を求めましょう。

4. $\sum_{r=0}^{n}3^r({_nC_r})=4^n$ を証明してください。

例と同様の方法を応用することができます。

3.8 仕切りを使う方法*

導入問題

ホセは、お店にあるお菓子を 5 つ買いたいと思っており、いちご、マンゴー、ぶどうの 3 つの味から選ぶことになりました。すべて同じ味を選ぶ場合も含め、ホセが 5 つのお菓子を選ぶのには、何通りの選び方がありますか？

解法

いちご、マンゴー、ぶどう味を順番に選ぶことができ、味の違うグループの間に｜（仕切り）を置きます。例、

次に、お菓子の味の重複しない組み合わせに合った、5 つのまる（O）と 2 つの仕切り（|）がありますが、問題は 5 つの同じまると 2 つの同じ仕切りを並べる方法の総数を数えればいいのです。仕切りを置くことができる 7 つの位置の内、2 つを選んで計算することができます。

つまり、$_7C_2$ 通りの選び方があります（または、まるの位置の選び方 $_7C_5$ 通りを計算します）。

○○|○○|○

3 つの味の中から5つのお菓子を選ぶ方法の総数は、$_7C_2 = 21$です。

一般的に

それぞれ異なる n 種類のものの中から、r 個のものを選ぶ方法の総数は、各種類のものがそれぞれ同じであれば、$n-1$ 個の仕切りを加えることで計算でき、その総数は、次の式で求められます。

$$_{(n+r-1)}C_r。$$

問題

1. チーズ、チーズ入りビーンズ、レブエルタス、ロロコ入りリーズの中から、次の条件で、6 つのププサを注文する方法はいくつあるか求めましょう。
   a) 何の制限もない時。
   b) 少なくとも、各種類から 1 つは注文しなければならない時。
   c) 少なくとも、レブエルタを 3 つ注文しなければならない時。
   d) チーズを 2 つ注文し、レブエルタは多くても 2 つまでしか注文できない時。

各種類をひとつずつ確保した後、さらに 2 つをどの種類からでも注文できます。

2. 次の条件で、方程式 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$ のすべての解を求めましょう。
   a) 負でない整数の時。
   b) 正の整数の時。

問題 1 の設問 b と似た方法で、考えることができます。

ユニット 7

3.9 復習問題

組み合わせの数え方を使って、次の問題を解きましょう。

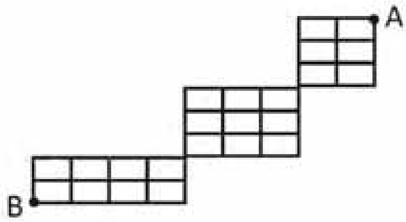
1. 同じカードが 3 枚があり、色の違う 5 枚の封筒を使うことができます。カードを封筒に入れるのに何通りの入れ方があるか求めましょう。

2. ひとつの六角形の3つの頂点を合わせる方法は何通りあるか求めましょう。

3. 長さが 8 の 2 進チェーン（0 と 1）に、1 が最高で 3 個ある方法は何通りありますか？

4. 女の子が 6 人、男の子が 3 人います。男の子 3 人が他の男の子とペアになってはならない場合（常に少なくとも女の子ひとりが間に入り、男の子同士が離れていなければならない）、何通りの並び方があるか求めましょう。

5. 次のマス目が書かれた表で、A を出て B に到着するのに、最短距離となる道順の数を求めましょう。



6. 問題を解きましょう。

a) ニュートンの二項定理 $(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} ({}_n\mathrm{C}_r) x^{n-r} y^r$ において、$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r {}_n\mathrm{C}_r = 0$ の関係を証明するために、$x = 1$ および $y = -1$ に置き換えましょう。

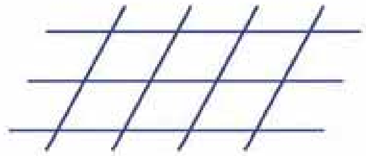
b) 設問 a の関係を用いて、$\sum_{r=2}^{2020} (-1)^r ({}_{2020}\mathrm{C}_r)$ の値を求めましょう。

7. 7 人の友達グループが、アイスクリーム屋でアイスを買わなければなりません。アイスクリーム屋に異なる 7 つの味のアイスクリームがある場合、友達グループの各メンバーがアイスを 1 個買う方法は何通りあるか求めましょう。

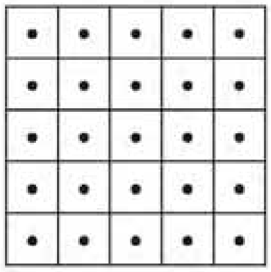
3.10 このユニットの問題

最も適切と思う数え方を使って次の問題を解きましょう。

1. 右の図に、いくつの平行四辺形があるか求めましょう。横の線と斜めの線は、それぞれ平行です。



2. 次の絵が描かれたボードの点の配置を考えながら、



マス目の辺に平行となる隣辺を持つ、直角三角形の頂点を3点を選ぶ方法の数を求めましょう。

3. 8 人の生徒のグループの中から、2 人組のグループを 4 つ作ります。次の条件で、何通りのグループを作ることができるかを求めましょう。
   a) それぞれのグループは、異なるテーマで話をします。その内容は、男女平等、民主主義、環境、性に関する統合教育です。
   b) すべてのグループは、包括性について議論しなければなりません。

4. 各グループの人数が次の場合、9 人の人を 3 つのグループに分ける方法は何通りあるか求めましょう。

a) 2, 3 および 4.　　b) 3, 3 および 3.　　c) 2, 2 および 5.

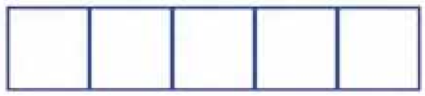
5. 組み合わせを応用しながら、授業 2.10 で学習した公式 $\frac{n!}{r_1!\,r_2!\ldots r_k!}$ を証明しましょう。

6. 公式 ${}_{p}C_{q} = \frac{p!}{(p-q)!q!}$ を応用しながら、等式 ${}_{n}C_{r} = \frac{n(n-1)}{r(r-1)}[{}_{(n-2)}C_{(r-2)}]$ を証明しましょう。

3.11 このユニットの問題

最も適切と思う数え方を使って次の問題を解きましょう。

1. 図の 5 つの四角を、赤、緑、青で塗ります。その際、2 つの隣り合う四角（ひとつの四角が別の四角の横にある状態）が、違う色になるようにします。また、すべての色を使用する必要はありません。それぞれの場合に、何通りの塗り方があるか求めましょう。



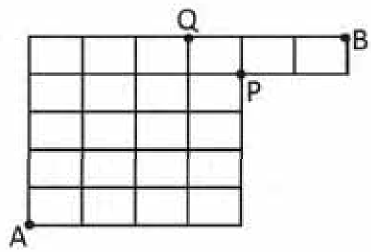
a) 制限なし　　b) 左右対称にする　　c) 緑と青のみで塗る

2. 1、2、3、4、5 の重複しない数字で成り立ち、両端の 2 つの数字が偶数にならないような列の数を求めましょう。

3. 複数の空港があるある国において、ある航空会社は、その国のどの空港でも 2 か所を結ぶ便を運航しています。その航空会社は、42 の異なる便（それぞれの便は異なる 2 つの空港を結んでいます）を運航していることが分かっている場合、空港 A から空港 B を結ぶ飛行は、空港 B から空港 A を結ぶ飛行とは別と考えることを考慮した上で、その国にはいくつ空港があるかを求めましょう。

4. 一匹のかえるが階段の 10 段目にいます。そのカエルは、一段ずつ跳んで移動します（上または下に）。カエルが 10 回目に跳ぶ時、14 段目のいるには、何通りの方法がありますか？

5. 次の条件において、最短ルートで行く方法は何通りありますか？



a) P を通って、A から B に行く。

b) Q を通って、A から B に行く。

c) A から B に行く。

6. ${}_{15}C_{0} + {}_{16}C_{1} + {}_{17}C_{2} + {}_{18}C_{3} = {}_{19}C_{3}$ を証明しましょう。

最初の項 ${}_{15}C_{0}$ (= 1) を、${}_{16}C_{0}$ (= 1) に置き換え、次に、公式 ${}_{p}C_{q} + {}_{p}C_{(q+1)} = {}_{(p+1)}C_{(q+1)}$ を何度も当てはめます。

ユニット 8

確率

確率の概念が生じた歴史的背景は、一部の賭け事を行うときに現れる問題の解法においてでした。たとえば、ある賭け事では、2 人が、コインを投げて、表か裏を選びました。表 5 つまたは裏 5 つのいずれかを達成したら、勝者ですが、一人が表4つで、もう一人が裏 3 つの場合、プレーヤーはフォールドします。各プレイヤーが 32 枚のコインを入れた場合、問題は 64 枚のコインを配布する最も公正な方法を決定することでした。この問題は、メレの騎士であるアントワーヌ・ゴンボーという名のゲームの達人でギャンブラーによって、フランスの数学者パスカルとフェルマーに提起されました。彼らは、 書簡を通じて、賭け事に関するあらゆる種類の問題を解決し、確率の概念を作って、これらの問題の解決に応用しました。確率の研究は、後にフランスの数学者ピエール=シモン・ラプラスによって再び取り上げられました。彼は確率の分析論を発表しました。確率の研究は、1933 年頃にロシアの数学者コルモゴロフの公理で確率論全体が数学的に確立するまで続けられました。

1963 年のテレビコンテストでの、モンティ・ホール問題に関する代表的な画像。

推論統計学の分野は、年月の経過とともに発展していきましたが、さまざまな科学分野における推論統計学の応用は非常に重要でした。というのも、推論から現象をモデル化することができ、経済や教育、輸送、建設などの分野における現象の推移をかなり確実に予測することが可能だったからです。

このユニットで学習する内容は、最初に実験的確率と理論的確率の概念を扱います。次に、確率を学習するためにコルモゴロフの公理を構築し、最後に条件付き確率と独立試行の重要性を学びます。

1.1 導入方法

道具

- コイン、ペン、トランプ

課題

- ノートに 3 行 11 列の表を描き、1 列目にはタイトル、予測、結果と書き、1 行目には 1 から 10 までの数字を書きます。
- 2 行目には、コインを投げるときに予測できる結果を書きます。最初の投げで表が出ると思われる場合は、1 番の下に「表」と書きます。それ例外の場合は「裏」と書きます。記載された例を参考に、ノートの予測欄を全て書きましょう。

投げ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
予測	表									
結果										

- そしてコインを 10 回投げて結果欄を書きます。以下に答えてください。

a) コインを 10 回投げると 10 回表が出る方か、それとも 10 回投げると 6 回表と 4 回裏が出るのかが可能なのかを分析します。
b) コインを投げることで起こりうる全ての結果は何ですか。
c) コインを 10 回投げたとき、表が出る回数は何回でしたか。何回裏が出ましたか。
d) 結果で出た表の数を 10 で割ります。（相対度数）

定義

コインを投げる時、得られる結果を確実に知ることはできませんが、しかしより正確な結果とそうでない結果にパラメータを取得する方法があるかもしれません。予測を行うために結果の発生の大小の確実性を数字で表す方法を勉強する数学の分野は、**確率**として知られています。

データの集合を生み出す過程（コインを投げるなどの結果）は、**実験**として知られています。実験を行うときに得られる可能性のある結果の集合は、**標本空間**として知られています。標本空間の要素は**根元事象**として知られ、標本空間のあらゆる部分集合は**事象**と呼ばれます。

特定の結果が得られた回数を実験が行われた合計回数（相対度数）で割って得られた値は、**実験的確率**として知られています。

$$P_e(A) = \frac{\text{事象 A において起こる回数}}{\text{実験で行う合計回数}} .$$

問題

トランプ（束）を使用して、10 枚のカードを引いたときに各カードで出る色を予測します（カードを引いた後は戻せません）。次に、実験を行い、結果を上記の課題で行ったものと同じように表に書き込みます。

a) 束から引かれたカードの色の実験の標本空間は何ですか。
b) 10 枚のカードを引きその色を確認する実験で発生し得る、少なくとも 5 つの根元事象を例示してください。
c) 得られた結果に基づいて、カードを引くときに黒になる実験的確率を計算します。

1.2 確率

導入問題

コインを一度投げる実験を考えてみましょう。

a) 表が出る可能性は裏が出る可能性よりも高いと思いますか。
b) 表が出る可能性の数はいくつで表せますか。

解法

a) コインを投げるとき、考えられる結果は、表が出るか裏が出るかの 2 つだけです。表裏どちらも出る可能性は同等です。

b) 考えられる結果は 2 つだけであり、表が出るには 1 つの方法しかありません。さらに、どちらの結果になる可能性も等しくあり、このことは分数で表すことができます。

$$\frac{1}{2}$$

1 ← 表が出る方法

表か裏かの 2 つの考えられる結果 → 2

定義

実験において、各根本事象（それぞれ考えられる結果）が発生する可能性が同じであることが成り立つ場合、事象 A（有利なケース）つまり $n(A)$ の要素全体は、標本空間 S（可能性のあるケース）つまり $n(S)$ の要素全体の中から割って得られる値で、**確率論**として知られています。さらに：

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}.$$

例

サイコロを振るときに偶数が出る確率を計算しましょう（目の数が偶数です）。標本空間 S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} を考えます。

事象 A = "偶数が出る" と示す場合、この事象は A = {2、4、6} として表すことができます。

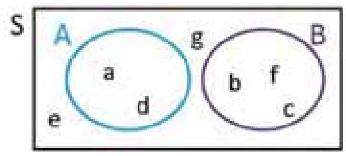
したがって、$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ となります。

問題

1. 1 つのサイコロを 2 回振り、両方とも 3 が出る確率を定めてください（目の数が3です）。

2. 2 つのサイコロを振るときに、（両方のサイコロからの）目の数の合計が 7 になる確率を定めてください。

3. 標本空間 (S) を集合として考慮し、次のベン図を分析します。各根本事象の発生する確率が同じである場合は、次のように解きます。
   a) A の確率論を定めてください。
   b) B の確率論を定めてください。



4. 束から引くとき赤いカードを引く事象の確率論を計算し、それを実験的確率と比較します。実験的確率については前の授業を使用すること。

1.3 共通部分と確率の加法定理

導入問題

1 つのサイコロを 1 回振るとし、次の事象が定義されます。

A：1、2 または 3 が出る。　　B：1、3 または 5 が出る。

a) 事象「A または B が発生する」は何を表しますか。その確率を求めましょう。
b) 事象「A と B が発生する」は何を表しますか。その確率を求めましょう。

解法

a) A または B が発生する事象は、サイコロを振り出る目が 1、2、3、または 5 を意味します、つまり、$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$ となります。よって、有利なケースは 4 で、可能性のあるケース（1 つのサイコロを振る）は 6 です。したがって、$P(A\ o\ B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ となります。

b) AとBが発生する事象は、サイコロを振り出る目が 1 または 3 を意味し（AとBの両方を満たすよう）、つまり、$A \cap B = \{1, 3\}$ となります。よって有利なケースは 2 で可能性のあるケースは 6 となります。したがって、$P(A\ y\ B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ となります。

まとめ

標本空間 (S) のあらゆる A と B の 2 つの事象は、「A と B の両方で発生する」事象で定義され、$A \cap B$ と表し、「事象 A キャップ B」と読みます。

2 つの事象の共通部分が空の場合、$A \cap B = \varnothing$ と表し、**事象 A と B は排反である**、と言います。

また、「事象 A または事象 B で発生する」と定義される事象は $A \cup B$ で表され、「事象 A カップ B」と読みます。したがって $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ を満たすのは：

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

事象 A と B が排反であるとき、次のようになります：$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

例

52 枚のトランプの束からカードを引き「エース」または 7 になる確率はどれくらいですか。

事象は次のように表すことができます。　A：カードは「エース」　B：カードは 7

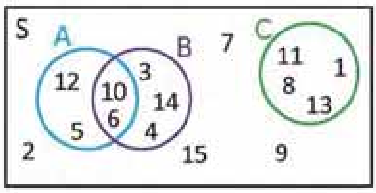
$n(A) = 4$（束には 4 枚の「エース」があります）、$n(B) = 4$（束には 4 枚）、「エース」または 7 は $A \cup B$ であり $A \cap B = \varnothing$ であるため、したがって：

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13}.$$

問題

1. 2 つのサイコロを振るときに、目の数を加算し結果が 5 または 7 になる確率を解きましょう。

2. 標本空間 (S) の事象 A、B と C を考慮し、ベン図を分析して解いてください。
   a) $P(A \cap B)$　b) $P(A \cup B)$　c) $P(A \cap C)$　d) $P(A \cup C)$
   e) どの事象が排反で、どれがそうではありませんか。



3. 3 人の女の子と 3 人の男の子が整列するとき、2 人の特定の女の子が常に一緒になり、2 人の特定の男の子が常に一緒になる確率を解きましょう。

1.4 確率の加法定理の応用*

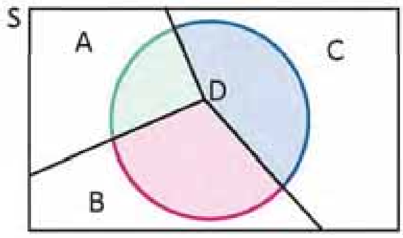
導入問題

ある企業は携帯電話、タブレット、パソコンを含む 500 台のデバイスを製造しています。この 500 台のデバイスの中で欠陥のある携帯電話の確率は $\frac{1}{20}$、欠陥のあるタブレットである確率は $\frac{3}{125}$、欠陥のあるパソコンである確率は $\frac{1}{50}$ となります。500 台の製品の 1 つを選択するとき、それが欠陥である確率を解いてください。

解法

事象を考慮します。　A：携帯電話　　B：タブレット　　C：パソコン

事象 D：欠陥製品；選択肢は 3 つのみです。つまり欠陥のある携帯電話、欠陥のあるタブレットまたは欠陥のあるパソコンかです。



右のベン図を見ると、次のようになります。
$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C)$

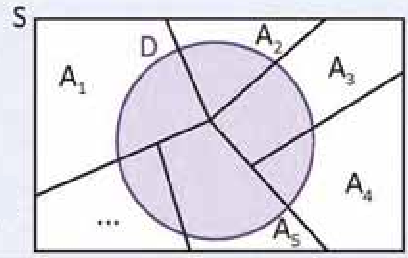
さらに、$P(D \cap A) = \frac{1}{20}$, $P(D \cap B) = \frac{3}{125}$, $P(D \cap C) = \frac{1}{50}$ であることが分かります。

したがって、500 台の製品の中に 1 台欠陥が出る確率は次のとおりです。

$$P(D) = P[(D \cap A) \cup (D \cap B) \cup (D \cap C)] = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) = \frac{1}{20} + \frac{3}{125} + \frac{1}{50} = \frac{25 + 12 + 10}{500} = \frac{47}{500}$$ です。

まとめ

排反であるいくつかの特定の事象 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, で分割された事象Dの確率を計算するには、全ての A_i の和事象が事象 D を構成するので、次のように計算します。



$$P(D) = P[(D \cap A_1) \cup (D \cap A_2) \cup \dots \cup (D \cap A_n)] = P(D \cap A_1) + P(D \cap A_2) + \dots + P(D \cap A_n)$$

例

抽選のために 4 つの異なる色の紙を使い、全体の $\frac{1}{6}$ の紙が当たりになるようにします。全ての紙の $\frac{1}{18}$ の当たりが緑で、$\frac{1}{36}$ の当たりが赤く、そして $\frac{1}{18}$ の当たりが紫です。黄色の紙で、当たり引く確率を解きましょう。

事象を考慮します。　D：紙は当たりが出ます。　A_1：紙は緑です。
A_2：紙は赤です。　A_3：紙は紫です。　A_4：紙は黄色です。

よって、$P(D) = P(D \cap A_1) + P(D \cap A_2) + P(D \cap A_3) + P(D \cap A_4)$

次に、$P(D \cap A_4) = P(D) - P(D \cap A_1) - P(D \cap A_2) - P(D \cap A_3) = \frac{1}{6} - \frac{1}{18} - \frac{1}{36} - \frac{1}{18} = \frac{1}{36}$

問題

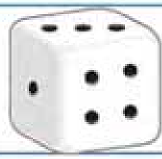
1. 性別や職業についてアンケートされた人々から、全人数の、$\frac{1}{3}$ が女性医師で、$\frac{1}{6}$ が女性数学者で、$\frac{1}{16}$ が 他 の 活動で働く女性であると分かります。調査対象の人物が選ばれるときに、その人物が女性である確率を解きましょう。

2. ある小児科クリニックでは同じ数の女の子と男の子が診療され、全体の $\frac{1}{6}$ の診療される子どもが生後 12 か月以上の女の子です。生後 12 か月以下の女の子が診療される確率を求めましょう。

1.5 確率の公理（理論）

導入問題

1 つのサイコロを振る実験を考慮して、以下を解きます。
a) サイコロを振り 3 が出る確率を求めましょう。
b) サイコロを振り 1、2、3、4、5、または 6 が出る確率を求めましょう。



解法

標本空間を S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} と表します。

A と B を各問に対応する事象とします。

a) A = {3} のようになりますので、したがって $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}$ です。

b) B = {1, 2, 3, 4, 5, 6} のようになりますので、したがって $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{6} = 1$ です。

コルモゴロフの公理

標本空間Sの 2 つの事象AとBの場合、次のようになります。

1) $0 \leq P(A) \leq 1$。よって $A \subseteq S$ なので、$0 \leq n(A) \leq n(S)$ が成り立ちます。

2) $P(S) = 1$。この状況では、有利なケースは全ての可能性のあるケース、または A = S です。

3) もし $A \cap B = \varnothing$ とすると$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ となります。

第 2 と第 3 の公理から、$P(S) = P(S \cup \varnothing) = P(S) + P(\varnothing)$ 、したがって $P(\varnothing) = 0$ となります。

例

コルモゴロフの公理第 3 から、A、B、およびCが標本空間Sの事象である場合を示し、
$A \cap B = B \cap C = C \cap A = \varnothing$、なので $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ となります。

3 つの集合A、BおよびCは、次のことが成り立ちます：$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

なので $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$、よって第 3 の公理から：

$$P[(A \cup B) \cup C] = P(A \cup B) + P(C) \text{ --------- } (1)$$

そして $A \cap B = \varnothing$、よって第 3 の公理から：

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ --------- } (2)$$

したがって、(2)を(1)に代入すると、次のようになります

$$P(A \cup B \cup C) = P[(A \cup B) \cup C] = P(A) + P(B) + P(C)$$

同じように、事象$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$の各ペアがお互いに排反である場合、以下のようになります。

$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$

問題

1. 4 人の女性と 4 人の男性の間で5人のグループを作る場合の確率を求めましょう。
   a) 男性 2 人と女性 3 人で構成されます。
   b) 少なくとも 1 人の男性または少なくとも 1 人の女性で構成されます。
   c) 3 人または 4 人の女性で構成されます。

計算を単純化するために組合せの性質を使いましょう。

2. A、B、C、および D を標本空間Sの事象とし、また $A \cap B = A \cap C = B \cap C = B \cap D = C \cap D = D \cap A = \varnothing$ 、$P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D)$ であることを証明します。

1.6 補集合の確率*

導入問題

サイコロを 3 回振るときに 1 の目が少なくとも 1 回出る確率を計算しましょう。

解法

事象を考慮します。A：3 回振るときに少なくとも 1 回 1 の目が出る、とすると事象は以下のように定義できます。

A^c = 3 回振り、1 の目が出ない。

さらに、標本空間Sにおいて、$S = A \cup A^c$ y $A \cap A^c = \varnothing$ になるので、よって：

$P(S) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$、しかし$P(S) = 1$（コルモゴロフの公理より）、なので $P(A) + P(A^c) = 1$

したがって $P(A) = 1 - P(A^c)$

次に、$n(S) = 6^3$（サイコロを振る度に 6 通り選択肢があることを考慮します）そして $n(A^c) = 5^3$（2、3、4、5 あるいは 6 の 5 通りの選択肢があります） よって、$P(A^c) = \frac{n(A^c)}{n(S)} = \frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216}$です。

最終的に $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$

まとめ

A を標本空間 S の中の事象とします。事象 A^c は**余事象 A** として知られ、また $P(A^c)$ は**余事象 A の確率**として知られています。次のようになります。

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

例

3 人の女の子が全員まとまらないよう、3 人の女の子と 3 人の男の子が一列に整列する確率を求めてください。

事象を考慮します。A：3 人の女の子はまとまりません。

よって A^c：3 人の女の子が全員まとまります。

次に $n(A^c) = 4!3!$ y $n(S) = 6!$

よって、$P(A^c) = \frac{n(A^c)}{n(S)} = \frac{4!3!}{6!} = \frac{1}{5}$ したがって、$P(A) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

また、補集合を数えて有利なケースを見つけ、求められているものを直接計算することもできます。

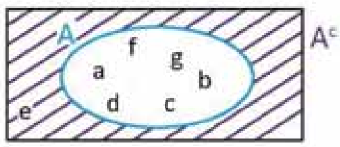
問題

1. ある機械で製造されたナットに欠陥がある確率は $\frac{1}{40}$ です。ではナットに欠陥がない確率を求めましょう。

2. コインを 10 回投げ、少なくとも 1 回表が出る確率を求めてください。

3. あるサイコロ遊びで 6 つのサイコロを振るとき、プレイヤーはどれかのサイコロで少なくとも「1 の目」が出ると勝ちます。このサイコロ遊びで勝つ確率を求めてください。

4. 標本空間 (S) で事象 A を考慮するとき、ベン図を分析して解いてください。



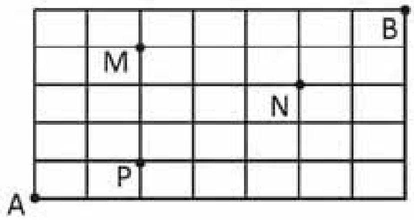
a) $P(A^c)$　　b) $1 - P(A^c)$　　c) $P(A \cap A^c)$　　d) $P(A \cup A^c)$

1.7 復習問題

確率について次の問題を解きましょう。

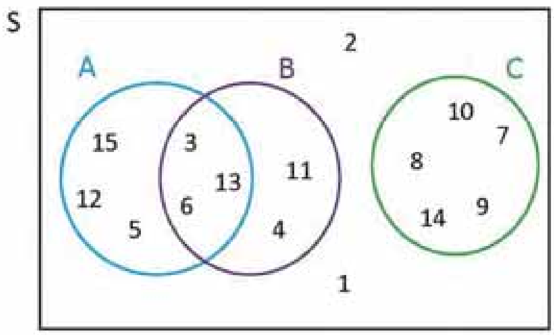
1. 2 つのサイコロを同時に振る実験の標本空間を求めましょう。次に事象「目の数の合計は 7」と、事象「目の数の合計は 5」を部分集合として表します。

2. カルメンはサンタ・アナの街を移動します。彼女は A 点にいて、図に示すように B 点に到達したいと考えています。最短経路を通る確率を求めると、次のようになります。



   a) カルメンは M 点または N 点を通ります。
   b) カルメンは P 点と N 点を通ります。

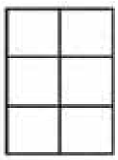
3. 標本空間 (S) の事象 A、B および C を考慮して、ベン図を分析し、以下を求めましょう。



   a) 標本空間 S、事象 A、事象 B と事象 C
   b) P(A), P(B), P(C)
   c) $P(A \cap B)$, $P(B \cap C)$, $P(A \cap C)$
   d) $P(A \cup B)$, $P(B \cup C)$, $P(A \cup C)$
   e) $P(A^c)$, $P(B^c)$, $P(C^c)$
   f) $1 - P(A^c)$, $1 - P(B^c)$, $1 - P(C^c)$

4. 男性 5 人と女性 5 人の中から委員会の会長と副会長が選出されます。会長が女性で副会長が男性になる確率を求めましょう。

5. 四角形の点字ブロックに 6 つのマス目がついていて、マス目のそれぞれには、何もないか、点が一つ浮き彫りになっているとします。ある点字ブロック 1 つを選び、解きましょう。



   a) ブロックがちょうど 3 つの点と、3 つの何もないマス目になる確率。
   b) ブロックが 1 つの点または 1 つの何もないマス目になる確率。
   c) ブロックが 8 つの点になる確率。

6. ある家電店では、顧客が着くと テレビ購入する確率は $\frac{4}{15}$、冷蔵庫を購入する確率は $\frac{7}{30}$、洗濯機を購入する確率は $\frac{2}{15}$ であると判断されます。顧客が着くときにこれら 3 つの製品のどれかが販売される確率を求めましょう。各顧客は最大 1 つの製品を購入すると考えてください。

7. 運頼みのゲームで 1 つの調整されたサイコロが見つかり、20 回振ると、17 回で 6 の目が出ました。サイコロ 1 つを 1 回振り 6 が出ないゲームを構成する場合、ゲームに勝つ確率を求めてください。

8. ディナーには 12 個のププサが注文され、カボチャ、スクランブル、チーズのププサから選択できます。各種のププサが選択される確率が同じであることを考慮して、それらを注文するときに、少なくとも 1 つのププサがスクランブルになる確率を求めましょう。

2.1 条件付き確率

導入問題

右の表は職業に関するアンケートの結果です。女性がすでに選ばれている後に女性の数学者が選ばれる確率を計算しましょう。

職業	女性	男性	合計
医師	40	31	71
数学者	22	24	46
家事担当	15	15	30
合計	77	70	147

解法

事象 A： 数学者である。事象 B： 女性である。

設問から、人を選んだらそれが女性であったことが分かっています（男性が選ばれることはすでにないものとします）。すると、あり得る場合は 77 通りです。

職業	女性	男性	合計
医師	40	31	71
数学者	22	24	46
家事担当	15	15	30
合計	77	70	147

女性であることと数学者であることが一致する欄が求める場合を示しているということになります。つまり求める場合は 22 通りです。

従って、P(すでに B が起こっている時に A になる場合) $=\frac{22}{77}=\frac{2}{7}$.

定義

事象 A と B がある場合、事象 B がすでに起こっている場合に事象 A が起こる確率を見出すと、二つの事象は関係を持ち得ることになります。これを**条件付き確率**といい、P(A/B)で表し、「B が起こったときの A の確率」と言います。これを計算するには、次のように考えることができます。B が起こる得る何通りかを、あり得る場合とします。これを $n(\mathrm{B})$ とします。A∩B が起こり得る何通りかを、求める場合とします。これを $n(\mathrm{A\cap B})$ とします。すると、次の式が成り立ちます。

$$P(A/B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}.$$

標本空間の場合の総数を $n(\mathrm{S})$ とすると、上記の等式は、次の式に等しくなります。

$$P(A/B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

例

さいころを投げた結果、奇数が出て、それが4より大きい数である確率を求めましょう。事象 A を 4 より大きいこととし、事象 B を奇数であることとします。この二つを考えると次のようになります。

$P(A\cap B)=\frac{1}{6}$ (5 だけが満たします)、$P(B)=\frac{3}{6}$ (1、3、5 が満たします)、したがって $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{\cancel{6}}\div\frac{3}{\cancel{6}}=\frac{1}{3}$.

問題

1. 導入問題の表について、次の問題に答えましょう。
   a) 家事担当の人で男性を選ぶ確率を求めましょう。
   b) 男性で数学者を選ぶ確率を求めましょう。
   c) 数学者で女性を選ぶ確率を求めましょう。

2. さいころを投げた結果、奇数が出て、それが 3 より大きい数である確率を求めましょう。

3. ある車の会社に同じ数の車を組み立てる機械が 3 台あります。ある車を偶然選ぶ時、それが不良品で機械 1 号機で組み立てられたものである確率は $\frac{1}{120}$ です。機械 1 号機で組み立てられた車が不良品である確率を求めましょう。

2.2 様々な条件付き確率

導入問題

袋に青い球が 3 個と白い球が 5 個入っています。取り出した球を取り出す球として再び使うことなく、球を 1 個取り出し、その後でもう 1 個取り出すという形で球を 2 個取り出す時（袋から取り出した 1 個目の球はもう使いません）、球が 2 個とも青い球である確率を求めましょう。

解法

事象 A： 第一の球は青い球。事象 B： 第二の球は青い球。

第一の球も第二の球も青い球であることで、二つの事象は関係を持つことになります。すなわち、P(A⋂B) です。

$P(A) = \frac{3}{8}$とします。そうしますと、球は 7 個残っています。そのうち 2 個が青です。したがって、$P(B/A) = \frac{2}{7}$.

条件付き確率の定義から、$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ ですが、これを演繹すると次のようにできます。

$$P(A\cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28}.$$

したがって、青い球を 2 個取り出す確率は、$\frac{3}{28}$。

まとめ

授業 2.1 で学習した条件付き確率の結果から事象が交わる確率を計算することができます。そのための式は次のようになります。$P(A\cap B) = P(B)P(A/B)$.

この結果は、**確率の積の法則**として知られています。

問題

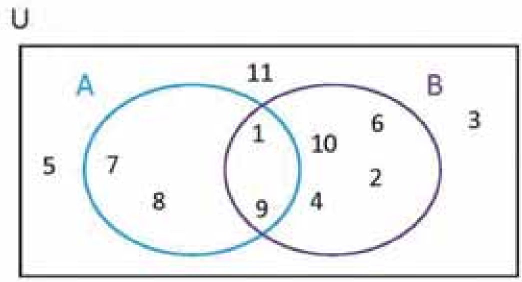
1. 袋に青い球が 2 個と白い球が 4 個入っています。取り出した球を取り出す球として再び使うことなく、球を 1 個取り出し、その後でもう 1 個取り出すという形で球を 2 個取り出す時、第一の球が青で、第二の球が白である確率を求めましょう。

2. カードが異なる 4 色のトランプがあります（4 色のうちの 1 色は緑です）。それぞれの色のカードの 5 枚は、1 から 5 の番号がついています。カードを 2 枚引き抜くとします。抜いたカードをまた引き抜くためのカードに使うことなく、1 枚を引いた後でもう 1 枚を引きます。次の事象が起こる確率を求めましょう。

   a) 両方とも 1 です。
   b) 第一のカードが 2 で、第二のカードが 3 です。
   c) 第一のカードが 3 で、第二のカードが緑色で 4 です。
   d) 両方とも同じ色です。
   e) 第一のカードが 2 で、第二のカードが同じ色の 1 です。

3. 右のベン図を使って計算しましょう。

   a) P(B) と P(A)。
   b) P(B/A)と P(A/B)。
   c) 前の二つの設問から、P(A⋂B) の異なる 2 通りを計算しましょう。



2.3 条件付き確率の応用

導入問題

トランプから次々にカードを2枚引き抜きます。第一のカードがダイヤの時、第二のカードがダイヤになる確率を求めましょう。その際、次の条件を考えることにします。

a) 第一のカードを、トランプに戻さず、第二のカードを引き抜く時に使いません。
b) 第一のカードを、第二のカードを引き抜く時に使うためにトランプに戻します。

解法

事象 A を第二のカードはダイヤであるということとし、事象 B を第一のカードはダイヤであるということとすると

a) 第一のカードがダイヤであるためには、13 枚のカードが考えられます。次に、トランプに戻さないので、第二のカードがダイヤであるためには、考えられるカードは 12 枚だけです。あり得る場合は、52 通りで、第二のカードについては、51 通りです。したがって、$P(A \cap B) = \frac{13 \times 12}{52 \times 51} = \frac{1}{17}$.
さらに、第一のカードがダイヤであるためには、13 通りの可能性があります。また、第二のカードについては 51 通りです。したがって、$P(B) = \frac{13 \times 51}{52 \times 51} = \frac{1}{4}$.
したがって、$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{17} \div \frac{1}{4} = \frac{4}{17}$.

b) 前のケースとの違いは、第二のカードがダイヤであるためには、新たに 13 枚のカードが考えられ、可能性は 52 通りと 52 通りです、したがって、$P(A \cap B) = \frac{13 \times 13}{52 \times 52} = \frac{1}{16}$.
同様に、$P(B) = \frac{13 \times 52}{52 \times 52} = \frac{1}{4}$. したがって、$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{16} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

まとめ

条件付き確率は、便宜上、または、決められた状況を考慮して、条件を加えるためにしばしば使われます。例えば導入問題ではゲームの戦略を検討するのに便利でしょうし、他の状況では、気候や伝染病の状況や影響力のある人の性格を読むこと等に使用できるでしょう。

問題

1. トランプのゲームで、第一のカードがクラブでした。ゲームに勝つためには第二のカードもクラブでなければなりません。第二のカードが第一のカードと同じトランプから引き抜かれる（第一のカードを第二のカードを引き抜くためにトランプに戻すことはしません）場合、または、第二のカードが完全にカードが揃っているトランプから引き抜かれる（このトランプからはまだカードは一切引き抜かれていません）場合、どのような状況であれば勝つ確率が最も高くなるか分析しましょう。

2. ある研究で、糖尿病が体重過多の結果であるかどうかを判断したいと考えています。調査したところ、ある人が体重過多である確率は $\frac{1}{2}$ で、さらに、ある人が体重過多である時に糖尿病でもある確率は $\frac{2}{3}$ でした。ある人が体重過多でもあり糖尿病でもある確率を求めましょう。

3. ある大工作業場で、25 基の机を加工しました。そのうち 4 基が不良品で、5 基に小さな問題があり、その他は良好な状態でした。机を次々に選ぶ時、第一の机は不良品で、第二の机には小さな問題がある確率を求めましょう。

4. あるゲームで、3 枚のドアがあります。そのうちの 1 枚の後ろには、賞として車が置いてあります。ゲームは次のようなものです。参加者が3枚のうちの 1 枚を選びます。次に司会者が、この司会者はそれぞれのドアの後ろに何があるのか知っているのですが、1 枚のドアを開けます。司会者は、このドアの後ろに賞の車がないことを知っています。そして、参加者にドアを変えることを選択できると告げます。条件付き確率を使って、どちらを選べば（ドアを変えるか、ドアを変えないままでいるか）、勝つ可能性が最も高くなるかを求めましょう。

2.4 条件付き確率に関する問題

導入問題

ある大工作業場で左利きの人用の机をデザインしました。マルタ、マリア、カルロスがこのデザインをしました。マルタ、マリア、カルロスがデザインした机が不良がある確率は、それぞれ、0.1、0.12 、0.11です。全員が同じ数の机を作ったとします。次の設問に答えましょう。

a) 不良のある机を選ぶ確率を求めましょう。

b) 不良のある机を選ぶと、その机がマルタが作ったものである確率を求めましょう。

解法

a) 事象 A をマルタが作ったものであること、事象 B をマリアが作ったものであること、事象 C をカルロスが作ったものであること、事象 D を不良品であることとします。そうしますと、$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$.

さらに、次のことが分かっています。$P(D/A) = 0.1$ （マルタが作ったものであり、不良品である確率）

$P(D/B) = 0.12$（マリアが作ったものであり、不良品である確率）

$P(D/A) = 0.11$ （カルロスが作ったものであり、不良品である確率）

全員が同じ数の机を作るので、$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$.

さらに、$P(D/A) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)}$ であることが分かっているので、$P(A \cap D) = P(A) \times P(D/A) = \frac{1}{3}(0.1)$.

同様に、$P(B \cap D) = \frac{1}{3}(0.12)$ および $P(C \cap D) = \frac{1}{3}(0.11)$.

したがって、$P(A \cap D) = \frac{1}{3}(0.1)$ および $P(D) = 0.11$.

b) $P(A/D)$（机に不良があるとすると、その机がマルタが作ったものである確率）を計算すれば充分です。

$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)}$ なので、また、設問 a) から、$P(D) = \frac{1}{3}(0.1) + \frac{1}{3}(0.12) + \frac{1}{3}(0.11) = \frac{1}{3}(0.33) = 0.11$.

したがって、$P(A/B) = \frac{\frac{1}{3}(0.1)}{(0.11)} = \frac{10}{33}$.

確率を分数または小数として表すことができること、そして、導入問題も少数を分数に変換して解くことができることに注意しましょう。

まとめ

ある机が不良品である確率を計算するには、加法規則を排除される事象(ある机がマルタが作ったものであるとしたら、その机はカルロスやマリアによって作られたものであるはずがありません)の交わりに応用することが必要になりました。この結果を、**全確率の法則**と言います。

次に、ある机が不良品であることがすでに分かっている時、その机が特定の人が作ったものである確率を計算するのにこの結果を適用しました。これを、**ベイズの定理**と言います。

問題

1. ある工場に車を組み立てる機械が2台あります。それぞれの機械は同じ数の車を組み立てます。
機械 1 号機によって組み立てられる車に問題がある確率は 0.05 です。
機械 2 号機によって組み立てられる車に問題がある確率は 0.07 です。次の設問に答えましょう。
a) ある車に問題がある確率を求めましょう。
b) ある車に問題があり、その車が機械1号機によって組み立てられたものである確率を求めましょう。

2. ある印刷所に印刷機が3台あります。印刷機 1 号機は 20% を印刷し、2 号機は 40% を印刷します。3 号機は残りを印刷します。1 号機があるページで不備を起こす確率は $\frac{1}{100}$ です。2 号機では $\frac{1}{50}$ で、3 号機では $\frac{1}{40}$ です。あるページに不備があると、その不備は 3 号機によるものである確率を求めましょう。

2.5 独立した実験*

導入問題

二つの実験と二つの事象を次のように定めます。

T_1 ：硬貨を投げること　　A_1 ：表が出ること
T_2 ：さいころを投げること　　A_2 ：1 か 2 が出ること

a) T_1 において A_1 が起こる時に、T_2 において A_2 が起こる確率を求めましょう。
b) T_2 において A_2 が起こる時に、T_1 において A_1 が起こる確率を求めましょう。
c) T_1 において A_1 が起こり、かつ、T_2 において A_2 が起こる確率を求めましょう。

解法

T_1 と T_2 の標本空間をそれぞれ S_1 と S_2 とします。

a) 実験 T_1 は実験 T_2 に影響を及ぼさないので、A_2 の確率は、$\frac{n(A_2)}{n(S_2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

b) 実験 T_2 は実験 T_1 に影響を及ぼさないので、A_1 の確率は、$\frac{n(A_1)}{n(S_1)} = \frac{1}{2}$.

c) T_1 と T_2 を標本空間が S である単独の実験Tとし、T_1 において A_1 が起こり、かつ、T_2 において A_2 が起こる事象を C とすると、$n(S) = n(S_1) \times n(S_2)$ y $n(C) = n(A_1) \times n(A_2)$ となります。したがって、

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{n(A_1) \times n(A_2)}{n(S_1) \times n(S_2)} = \frac{n(A_1)}{n(S_1)} \times \frac{n(A_2)}{n(S_2)} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

設問 c) の結果は、$P(C) = P(A_1) \times P(A_2)$ と表すことができます。

定義

A_1 が T_1 の事象で A_2 が T_2 の事象であるとして実験 T_1 と T_2 を考慮した場合、実験 T_1 が起こることが実験 T_2 に影響を及ぼさない時（その逆の時も）、T_1 と T_2 は**独立した実験**であると言います。

T_1 において事象 A_1 が起こり、かつ、T_2 において A_2 が起こる確率は、次のようになります。

$$P(A_1) \times P(A_2).$$

例

さいころを 2 回投げて、第一回目には「1」が出て、第二回目には「2」が出る確率を求めましょう。事象 A：第一回目に「1」が出ること。事象 B：第二回目に「2」が出ること。

A と B は独立した二つの実験の事象なので（第一回目としてさいころを投げることと、第二回目として投げることは、別のことです）、確率は、

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

問題

1. トランプから 2 枚のカードを引く時、第一のカードがハートで、第二のカードがクラブである確率を求めましょう。第一のカードは、抜いた後、元のトランプに戻すことにします。

2. 硬貨を 3 回投げた時、1 回だけ表が出て、それが 3 回目である確率を求めましょう。

3. トランプから次々にカードを2枚引き抜く（抜いたカードは元に戻します）時、第一のカードが赤いカードで、第二のカードが「J」またはダイヤである確率を求めましょう。

4. 正しいことを聞くか正しくないことを聞く 5 つの質問に答える時、偶然に 4 つ正しい答えを得る確率を求めましょう。

2.6 反復実験の確率　パート 1

導入問題

さいころを 5 回投げると「6 または 3」が 2 回出る確率を求めましょう。

解法

さいころ投げることについて、事象 A を、6 または 3 が出ること、そして、事象 B を、6 も 3 も出ないこととします。

さいころを 5 回投げることは独立した実験が 5 つあるということです。事象には、次の場合が考えられます。

場合の総数 $_5C_2$
- A A B B B の時、確率は、$P(A) \times P(A) \times P(B) \times P(B) \times P(B) = \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3$.
- A B A B B の時、確率は、$P(A) \times P(B) \times P(A) \times P(B) \times P(B) = \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3$.
- ⋮

場合の総数は、5 つの場所から 2 つを選ぶ時の方法の数と等しくなります。これは事象 A が起こる時です。従って、$_5C_2$ の場合があります。これらの場合全てが互いに独立しており、同じ確率となります。したがって、確率は、

$$_5C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}.$$

まとめ

ある実験で事象 A が起こる確率を p とします。実験を n 回繰り返す時、事象 A が r 回 $(0 \le r \le n)$ 起こる確率は、次のようになります。

$$({_nC_r})p^r(1-p)^{n-r}.$$

例

あるサッカー選手のプレイを分析したところ、ファールする時に、ゴールに入れる確率が $\frac{3}{10}$ で、蹴ったボールがポストに当たる確率が $\frac{1}{2}$ で、蹴ったボールが場外に行く確率が $\frac{1}{5}$ との情報を得ました。ファールを 6 回すると、ゴールを 3 回し、ポストに 2 回当て、場外にボールを 1 回蹴りだしている確率を求めましょう。

ファールをすることについて、事象 A をゴールに入れることとし、事象 B をポストに当てることとし、事象 C を場外にボールを蹴りだすこととします。

1 回のファールは、他の回のファールから独立していることです。始めの 3 回のファールの時に 3 回ゴールし、つぎに 2 回ポストに当て、1 回場外にボールを蹴りだすこともあり得ます。その時の確率は、$P(A) \times P(A) \times P(A) \times P(B) \times P(B) \times P(C)$ になります。

次に、場合の総数は、実験（ファールすること）でゴールする ($_6C_3$) ことになり、さらに残りの実験（ファールすること）でポストに当てる ($_3C_2$) ことになる各通りの総数に等しくなります。

これらの場合のそれぞれが起こる確率は、$\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{3}{5000}$.

したがって、求める確率は、$_6C_3 \times {_3C_2} \times \frac{3}{5000} = \frac{9}{250}$.

問題

1. 袋に赤い球が 3 個と黒い球が 4 個入っています。4 個の球を次々に取り出します。この時、元の袋は補充します（取り出した球を袋に戻します）。次の設問を解きましょう。
   a) 赤い球を 2 個取り出し、黒い球を 2 個取り出す確率を求めましょう。
   b) 赤い球が多くても 1 個しか出ない確率を求めましょう。
   c) 黒い球が少なくとも 1 個出る確率を求めましょう。

2. 伝統的な形式のトランプ（カードが全部で 52 枚）から（次々に）カードを 7 枚引き抜き、抜いたカードは元のトランプに戻す時、抜いたカードの 3 枚がダイヤで、2 枚が黒い色で、2 枚がハートである確率を求めましょう。

2.7 反復実験の確率　パート 2

導入問題

あるゲームで、数字の 5 が 2 回出るまでさいころを投げます。さいころを 4 回投げた時にこのことを達成する確率を求めましょう。

解法

この場合、4 回目に投げた時に 5 が出なければなりません。最初の 3 回でも、5 が 1 回出なければなりません。投げることはそれぞれ独立していますので、求める確率は次のようになります。

$$ {}_3C_1 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{25}{432}. $$

まとめ

ある実験の標本空間の事象 A を考える場合、事象 A が r 回起こるまで実験を n 回繰り返すのなら、事象 A は、始め $(n-1)$ の反復において起こっていなければならず $(r-1)$、また、実験を最後に反復する時にも起こらなければなりません。

問題

1. 伝統的な形式のトランプからカードを次々に抜き、元のトランプは補充し（抜いたカードを元のトランプに戻します）、ダイヤのカードを 3 枚抜いた時に実験を終了します。始めに 6 回抜いた時点で、3 枚のダイヤのカードが出ている確率を求めましょう。

2. ボードゲームで、さいころを投げて 6 が出るまでに、駒を動かし始めるということになっています。

   次の設問を解きましょう。
   a) 第一回目を投げてから駒を動かし始める確率を求めましょう。
   b) 第三回目を投げてから駒を動かし始める確率を求めましょう。
   c) 投げるのが多くても 3 回で駒を動かし始める確率を求めましょう。
   d) 少なくとも 3 回投げて駒を動かし始める確率を求めましょう。

3. ある繊維会社の個人の生産目標は、4 枚のシャツを不備なく作ることです。不備のあるシャツを作る確率は、$\frac{1}{3}$です。

   次の設問を解きましょう。
   a) ちょうど 5 枚のシャツを作って目標を達成する確率を求めましょう。
   b) 作るのが多くても 6 枚のシャツで目標を達成する確率を求めましょう。
   c) 少なくとも 7 枚のシャツを作って目標を達成する確率を求めましょう。

4. 伝統的な形式のトランプからカードを抜く場合、第二のカードがクラブであるのが 5 回目に抜いた時である確率を求めましょう。抜いたカードは元のトランプに戻します。

5. ダーツの専門家がダーツを的に投げます。10 回投げると7回当たることが分かっています。次のゲームをします。3 人の参加者が、4 つのダーツを的に当てるために何回投げなければならないかを言います。第一の参加者は、5 回投げるうちに達成すると言い、第二の参加者は、7回と言い、第三の参加者は、10 回と言います。勝つ確率が最も高い参加者が誰か求めましょう。

2.8 復習問題

最も適切と思う計算方法を使って次の問題を解きましょう。

1. 伝統的な形式のトランプからカードを抜く場合で、抜いたカードが赤色であることが分かっているとき、そのカードがハートである確率を求めましょう。

2. あるテレビ番組を既婚男性が見る確率が0.3で、既婚女性が見る確率が0.4で、妻がこの番組を見る時に夫がこの番組を見る確率が0.7です。

   次の設問を解きましょう。
   a) 夫婦がこの番組を見る確率を求めましょう。
   b) 夫がこの番組を見て、妻がこの番組を見る確率を求めましょう。
   c) 少なくとも夫の一人がこの番組を見る確率を求めましょう。

3. 3 つの賞をくじ引きで決めるのに15人が参加します。15人のうち、10人が女性で 5人が男性です。同じ者が 2 つの賞を当てることができないとする時、3人の男性が賞を当てる確率を求めましょう。

4. 10 月のある日に雨が降る確率が $\frac{1}{3}$ です。

   次の設問を解きましょう。
   a) 5 日間続けて雨が降らない確率を求めましょう。
   b) 一週間（5 日間とします）のうち 3 日雨が降る確率を求めましょう。
   c) 10 月の 6 日までに雨が降る確率を求めましょう。

5. さいころを 5 回投げて、いずれかの回に、ちょうど 4、6、1 と出る確率を求めましょう。

6. 運転者の 30% が交通事故に遭いました。この交通事故のうち、30% が運転者がアルコールの影響下にあったことが原因で、20% が携帯電話に答えていた事が原因で、5% がラジオの放送局を変えていたことが原因でした。一方、運転中に、40% の運転者がアルコールの影響下で運転をするつもりで、50% が携帯電話に答えるつもりで、70% がラジオの放送局を変えるつもりです。

   次の設問を解きましょう。
   a) ある人が、酔って運転する時、衝突する確率を求めましょう。
   b) ある人が、携帯電話に答えた時、衝突する確率を求めましょう。
   c) ある人が、ラジオの放送局を変えた時、衝突する確率を求めましょう。

7. 食糧用じょうごの品質管理で、95% の製品の品質が良い時、不良品が 4 個揃うまで製品を抜き取ります。

   次の設問を解きましょう。
   a) 品質管理で 10 個の製品を抜き取る確率を求めましょう。
   b) 始めの 4 個が不良品である確率を求めましょう。

2.9 このユニットの問題

最も適切と思う計算方法を使って次の問題を解きましょう。

1. 伝統的な形式のトランプからカードを抜き取る時、抜き取ったカードがダイヤか、スペードかジャックである確率を求めましょう。

♠スペード	♣クラブ
♥ハート	♦ダイヤ

2. さいころを 3 個投げると合計が 10 になる確率を求めましょう。

3. 3 個の青い球（全て同じ）、4 個の紫色の球（全て同じ）、2 個の黒い球（全て同じ）を並べると、黒い球が全て隣同士になる確率を求めましょう。

4. あるゲームをします。袋が 2 つあります。第一の袋には 3 個の白い球、2 個の赤い球、そして 1 個の黒い球が入っています。第二の袋には 2 個の白い球、3 個の赤い球、そして 3 個の黒い球が入っています。いずれかの袋から球を抜き取ります。

   次の設問を解きましょう。
   a) 第二の袋から黒い球を抜き取る確率を求めましょう。
   b) 赤い球を抜き取る確率を求めましょう。

5. クローゼットに 3 組の黒い靴と 4 組のコーヒー色の靴が入っています。靴を一つ取り出すとします。次の設問を解きましょう。

   a) 右のコーヒー色の靴または左の黒い靴を取り出す確率を求めましょう。
   b) 左の靴または黒い靴を取り出す確率を求めましょう。

6. 長さ 6 の 2 進列（0 と 1 で構成されています）で、列の最後に少なくとも 3 つの 0 が揃って現れる確率を求めましょう。

7. チェス盤 (8 x 8) に 2 つのルークを配置する時、この 2 つのルークが縦または横に並ぶ確率を求めましょう。

8. 円卓に 3 人の少女と 3 人の少年を座らせる時、どの少年も他の少年の横に並ばない確率を求めましょう。

9. 四角形の点字ブロックに 6 つのマス目がついていて、マス目のそれぞれには、何もないか、点が一つ浮き彫りになっているとします。点字ブロックを選ぶと少なくとも一つのマス目に何もない（浮き彫りになった点がない）確率を求めましょう。

2.10 このユニットの問題

最も適切と思う計算方法を使って次の問題を解きましょう。

1. あるゲームをします。伝統的な形式のトランプからハートのカード3枚、ダイヤのカード1枚、クラブのカード 2 枚が抜いてあります。このゲームでは、この残りのトランプからカードを抜いたら、そのカードがどの組のカードかを当てます（スペード、ハート、クラブまたはダイヤ）。勝つ確率が最も高いのはどのカードでしょうか。

2. あるゲームをします。硬貨を 7 回投げると何回表が出るかを当てます。カルメンは 4 回と言い、カルロスは 3 回と言います。勝つ確率はどちらのほうが高いでしょうか。8 回投げるとしたら、最もあり得るのは何回でしょうか。

3. さいころのゲームで、何回投げたら 5 が 3 回出るかを当てます。ある人は 6 回投げたらそうなると言い、別の人は 7 回投げたらと言い、また別の人は 8 回投げたらと言います。勝つ確率が最も高い人は誰かを求めましょう。あなたは、勝つ確率を最も高くするには何回投げればいいと思いますか?

4. 通りにある信号機が故障している確率は 0.2 です。この通りで事故が起こる確率は 0.5 です。信号機が故障しているので事故が起こる確率は 0.75 です。

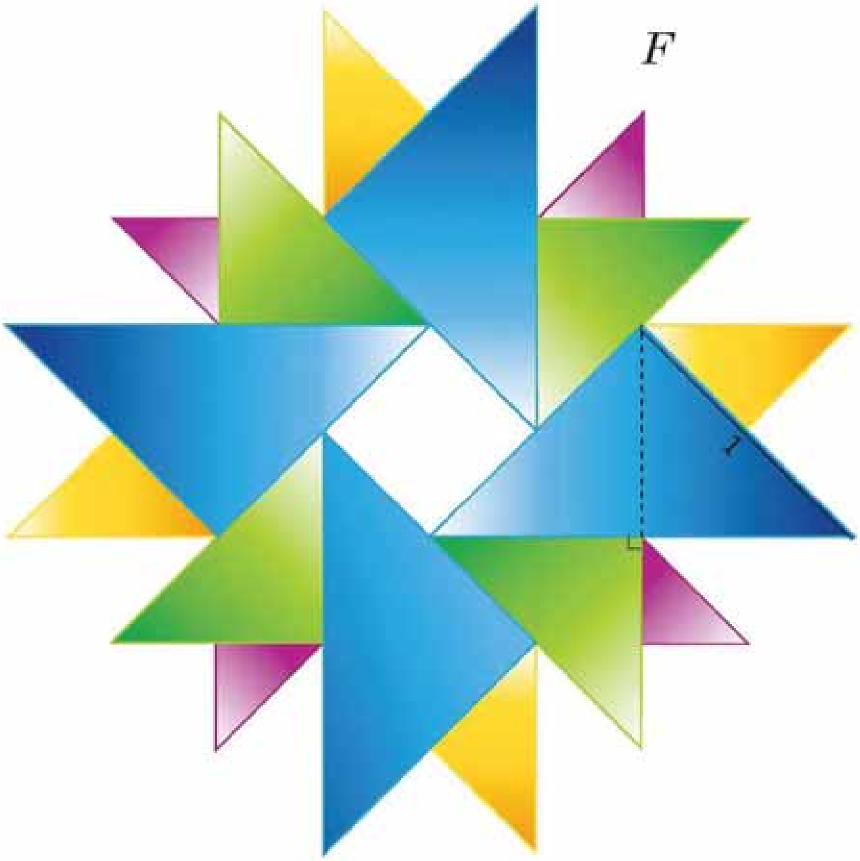
   次の設問を解きましょう。
   a) 事故が起こり、信号機が故障している確率を求めましょう。
   b) 事故が起こった時に信号機が故障している確率を求めましょう。

5. くじ引きの箱に、5 個の白い球と 4 個の赤い球が入っています。白同士と赤同士では全て互いに区別がつきません。この箱から 3 個の球を次々に取り出します。その際、赤い球なら箱に戻し、白い球なら箱に戻しません。3 個の球を取り出す時、そのうちの 1 個がまさしく白である確率を求めましょう。

6. ある診療所では、診断で癌があるとされる確率が 0.9 で、診断で癌でないとされていても癌を発症する確率が 0.15 で、20% の患者が癌と診断されることが分かっています。

   次の設問を解きましょう。
   a) ある患者が癌を発症する確率を求めましょう。
   b) ある患者が癌を発症する時に癌と診断される確率を求めましょう。

7. テレビ番組のゲームで、カラールーレットを回し、3 人が参加します。何回回したらルーレットで赤い色の場所に落ちるかを当てます。ある人は 3 回目だと言い、別の人は 6 回目だと言い、最後の一人は 4 回目だと言います。ルーレットで赤い色の場所に落ちる確率が 0.3 の時、勝つ確率が最も高いのはどの人でしょうか。あなたは、勝つ確率を最も高くするには何回回せばいいと思いますか?



面積 F = ¿?

この図形は異なる色の三角形を4枚ずつ使って作られています。よって、次のように計算します。

面積 $F = 4T_1 + 4T_2 + 4T_3 + 4T_4 = 4(T_1 + T_2 + T_3 + T_4) = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}\right)$

よって、この等比級数の合計の大きさから、面積 $F = 4\left(\frac{2^4 - 1}{2^4}\right) = \frac{15}{4}\,U^2$.

REPÚBLICA DE EL SALVADOR EN LA AMÉRICA CENTRAL

高校