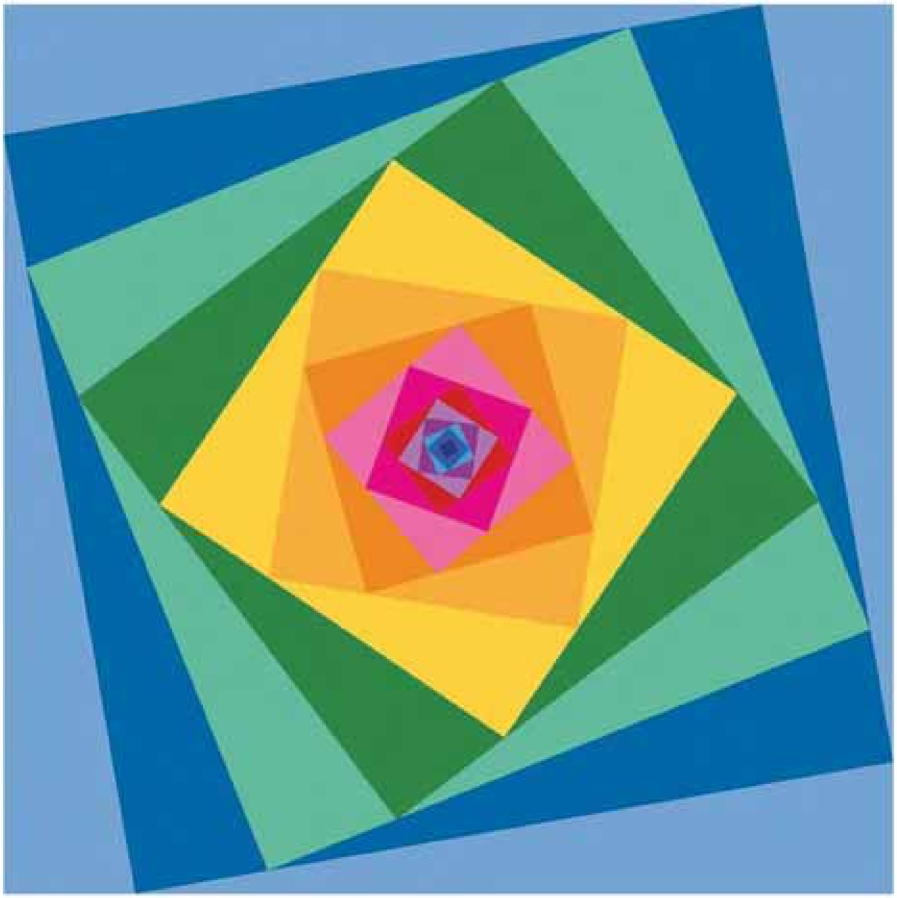
エルサルバドル政府

教育省

算数 8



教科書

第二版

ESMATE

JICA

Carla Evelyn Hananía de Varela
教育科学技術大臣

Ricardo Cardona Alvarenga
教育副大臣

Wilfredo Alexander Granados Paz
中等（第3サイクルおよび中等）教育局長
名誉代理

Janet Lorena Serrano de López
基礎教育局長
名誉代理

Santiago Alfredo Flores Amaya
予防社会プログラム局長
名誉代理

Gorka Iren Garate Bayo
科学技術イノベーション教育局長
名誉代理

Roberto Alejandro Rivera Campos
科学技術イノベーション教育課長

Félix Abraham Guevara Menjívar
科学技術イノベーション教育部長（数学）

Gustavo Antonio Cerros Urrutia
中等教育カリキュラム専門家部長

教育省執筆専門チーム

Ana Ester Argueta Aranda
Erick Amílcar Muñoz Deras
Reina Maritza Pleitez Vásquez
Diana Marcela Herrera Polanco
César Omar Gómez Juárez
Francisco Antonio Mejía Ramos
Norma Elizabeth Lemus Martínez
Salvador Enrique Rodríguez Hernández
Félix Abraham Guevara Menjívar

レイアウトチーム

Neil Yazdi Pérez Guandique
Francisco René Burgos Álvarez
Michael Steve Pérez Guandique
Judith Samanta Romero de Ciudad Real

文体修正

Mónica Marlene Martínez Contreras
Marlene Elizabeth Rodas Rosales

現職教員教育国家計画内の専門家チームによる全国レベルでの校正
国際協力機構（JICA）を通じた日本の技術協力

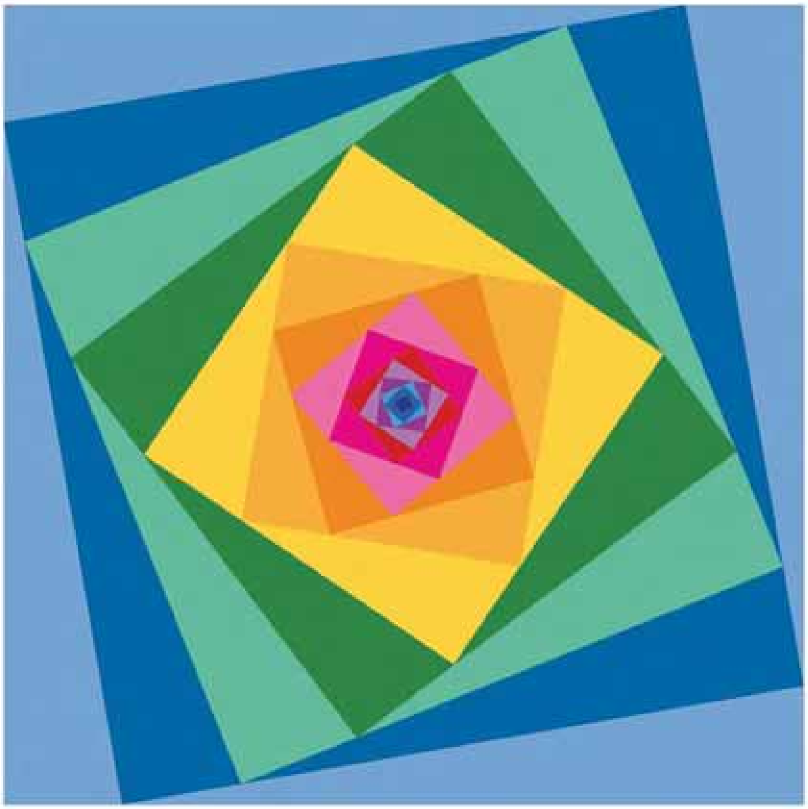
表紙には、教育的見地から連続する正方形の図を用いています。それぞれの正方形において４つの合同な直角三角形が作られています。

372.704 5
M425　算数８：教科書／執筆チーム Ana Ester Argueta、Erick Amílcar Muñoz、Reina Maritza Pleitez、Diana Marcela Herrera、César Omar Gómez、Francisco Antonio Mejía、Norma Elizabeth Lemus、Salvador Enrique Rodríguez、Félix Abraham Guevara；レイアウト Neil Yazdi Pérez、Francisco René Burgos、Michael Steve Pérez、Judith Samanta Romero；文体修正 Mónica Marlene Martínez、Marlene Elizabeth Rodas. -- 第2版 -- サンサルバドル、エルサルバドル：教育省（MINED）、2018年。
188ページ：図解入り、28 cm -- （Esmate）
ISBN 978-99961-70-62-1（印刷）
1. 算数－教科書。2. 算数－教育。
I. Argueta Aranda、Ana Ester、1991年～、共著。II. タイトル。
BINA/jmh

エルサルバドル政府

教育省

算数 8



教科書
第二版

ESMATE

JICA

生徒の皆さんへ：

新しい学年に皆さんをお迎えし、皆さんがこれから算数のさらなる知識を得る機会を得ることを喜ばしく思います。

教育・科学技術省（MINEDUCYT）では、初等教育及び中等教育における算数教育向上計画（ESMATE）を通じ、皆さんのために様々な教育教材を開発してきました。その中のひとつが、いま皆さんが手にされている「教科書」です。

この強化には、皆さんが考える力を強化し、算数の能力を伸ばせるような問題やアクティビティがたくさん含まれています。そうした能力は、日常生活の問題を解決するために役に立つものです。

ですから、この教科書にある問題を一つ一つに、挑戦だと思って取り組んでみてください。皆さんが、私たちの国の発展に貢献してくれる模範的な市民となるために、この練習帳にすべての力を注いで取り組むことを期待しています。

Carla Evelyn Hananía de Varela
教育科学技術大臣

Ricardo Cardona Alvarenga
教育科学技術副大臣

教科書の紹介

第二版

第二版には国家教育システムに所属して3年目を迎える教員によるアドバイスや気付き点が盛り込まれています。

アイコン

P 「P」の文字は、「導入問題」を表わします。各授業では、まず最初に生徒に対し問題を提示して、その問題をどのように解くかを考えさせることが大切です。そのようにして授業で扱うテーマを導入することになります。

S 「S」の文字は、「解き方」を表わします。教科書ではこの段階で、提示された問題の解き方を1つ以上を載せています。

C 「C」の文字は、「結論」を表わし、内容の解説になっています。ここでは問題の解答を「P」と「S」に関連づけて、数式を使って表わしています。

E 「E」の文字は、例を表わします。学習内容の定着を図るために、必要な場合に追加問題を出しています。

✏ 鉛筆マークは文章題と計算問題のコーナーを示します。

補足情報

この教科書では、事前知識やヒント、また算数の歴史といった小話なども学習の助けとなるよう、それぞれ色を変えて紹介しています。

事前知識

ヒント

小話

アルベルト・サンチェス博士の絵が出てくる小話では、学習の対象となっている算数の歴史を紹介しています。

アルベルト・サンチェス
（1864～1896）

アルベルト・サンチェス博士は19世紀に活躍したエルサルバドル出身の数学者であり、その最も優れた業績の1つに、彼自身がコルノイデ（cornoide)と名付けた曲線の発見があります。
この曲線はこの本の裏表紙に描かれています。

授業配分

この教科書は8ユニットで構成されており、各ユニットには複数の課があり、それぞれの課は複数の授業で構成されています。各授業のタイトルについている番号は、最初の番号が何課であるかを示し、二つ目の番号が何番目の授業であるかを示しています。例えば、この教科書のユニット4の第2課の3回目の授業のタイトルは、以下のように表示されています。

レッスン番号を表示します。

2.3 同位角の特性評価

授業番号を表示します。

ユニット番号は、奇数ページの端に紫色で表示されています。

ユニット4

目次

代数計算

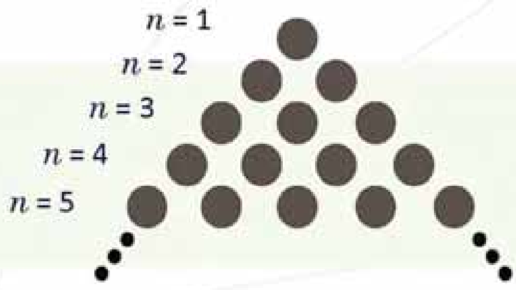
ユニット 1

ある現象が一回起これば、それは事故で、2 回起これば、偶然です。しかし、3 回またはそれ以上起これば、モデル化されます。自然界でのモデルの探求は人類の必然性とされてきました、これは、 私達を取り巻く環境を説明するための絶え間ない探求なのです。例えば、四季の移り変わり、天体の動き、物体の軌道、火とは何か、または、電子を操作して光を作り出す方法を理解する可能性を探求するものです。これらの全てから、どのような現象でも予測できる唯一の魔法は、数理モデルの魔法だという事が理解できます。

日常生活に於いて電磁波を発信する物体。

数理モデルは、抽象化と解釈の2つの手順によって関係付けられています。これは、自然、社会、または、数字や演算の特徴や性質、例えば、地震発生のパターン、電子機器が発受信する電磁波の現象を想定するのに使われます。現象の数理モデルは、内部の秩序と規則性を特定する基礎パターンまたは規則を見つけます。これらの規則は符号や文字で表され、代数式として知られています。

このユニットでは、代数式を用いた計算と、数字や演算の特徴や性質を想定してそれらを利用する、また、日常生活の問題を解決するために利用することを学びます。



ガウスの和の幾何学模様

1.1 文字を使った表現

P

次の計算をしましょう。

a) $z = 8$ の時、$2z - 5$ の値

b) $(3x - 5) \times (-2)$

c) $(-8 + 4a) \div 2$

d) $(-6y + 15) \div 3 + (2x + 8) \times (-5)$

S

a) $z = 8$ の時、$2z - 5$ の値

z の値を代入します ：

$$\begin{aligned} 2z - 5 &= 2 \times 8 - 5 \\ &= 11 \end{aligned}$$

b) $(3x - 5) \times (-2)$

式の各項にかけ算をします ：

$$\begin{aligned} (3x - 5) \times (-2) &= 3x \times (-2) - 5 \times (-2) \\ &= -6x + 10 \end{aligned}$$

c) $(-8 + 4a) \div 2$

わり算を実行します ：

$$\begin{aligned} (-8 + 4a) \div 2 &= -8 \div 2 + 4a \div 2 \\ &= -4 + 2a \\ &= 2a - 4 \end{aligned}$$

d) $(-6y + 15) \div 3 + (2x + 8) \times (-5)$

かけ算とわり算を実行します ：

$$\begin{aligned} (-6y + 15) \div 3 + (2x + 8) \times (-5) &= -6y \div 3 + 15 \div 3 + 2x \times (-5) + 8 \times (-5) \\ &= -2y + 5 - 10x - 40 \\ &= -10x - 2y - 35 \end{aligned}$$

1. 以下の項の係数と変数を答えましょう。

a) $3x$　　b) $-6b$　　c) $-7mn$

2. 次の代数式の項を答えましょう。

a) $2x - 5$　　b) $7b - 3a - 1$　　c) $2x + 7st - 4$

3. 各変数の値を代入し、各代数式の数値を求めましょう。

a) $6a - 1$、$a = 2$ の時　　b) $x - 4$、$x = -5$ の時　　c) $6y - 1$、$y = \frac{1}{3}$ の時　　d) $2a + 4$、$a = -\frac{3}{2}$ の時

4. 次のかけ算を解きましょう。

a) $(4x + 7) \times 2$　　b) $(n - 5) \times 3$　　c) $(3a + 2) \times (-4)$　　d) $(t - 5) \times (-3)$

5. 次のわり算を解きましょう。

a) $(8u + 24) \div 4$　　b) $(-4n - 10) \div 2$　　c) $(9y + 3) \div (-3)$　　d) $(-15a - 5) \div (-5)$

6. 次の計算を行い、同類項をまとめましょう。

a) $(-6y + 12) \div (-2) + (x + 5) \times 3$　　b) $(-5y + 1) \times (-2) + (x - 8) \times 4$

1.2 単項式、多項式と次数の定義

P

マリアの年齢はカルロスの年齢の5倍で、カルロスの年齢はアナとアントニオの年齢の和と同じです。アナとアントニオの年齢を使ってマリアの年齢を表しましょう。
a を使ってアナの年齢を表し、b を使ってアントニオの年齢を表しましょう。

S

カルロスの年齢はアナの年齢とアントニオの年齢の和なので ：カルロスの年齢 = アナの年齢 + アントニオの年齢 = $a + b$.

マリアの年齢はカルロスの年齢の5倍なので ：
マリアの年齢 = 5 × カルロスの年齢 = $5 \times (a + b) = 5a + 5b$

よって、アナとアントニオの年齢を使って代数式で表すマリアの年齢は$\mathbf{5a + 5b}$ です。

C

指数を含む1つ以上の変数で表される代数式において、数字は**係数**と呼ばれ、乗法のみを含むものを**項**といいます。

$$\text{係数} \longrightarrow 7x^{2} \begin{array}{l}\longleftarrow \text{指数}\\ \longleftarrow \text{変数}\end{array}$$

-7は変数の指数がすべて0 （$x^0 = 1$）である単項式であることに注目しましょう。

例：$5x$、y、$2ay$、$\frac{3}{5}x^2$、b^2y、-7。

1つの項または2つ以上の項の和からなる代数式を**多項式**といいます。

例： $5a + 5x$, $4y - 2$, $2x^2 - 3ax + 5$

多項式 $2x^2 - 3ax + 5$ は項 $2x^2$、$-3ax$、5で構成されていることに注目しましょう。

$$2x^2 - 3ax + 5 = \underbrace{2x^2 + (-3ax) + 5}_{\text{項}}$$

1つの項のみから構成される多項式を、**単項式**と定義します。

単項式の次数は全ての変数の指数の和と定義します。

例えば、項 $-4xy^2$ の次数は 3です。$-4 \times \overbrace{x \times y \times y}^{\text{次数 } 3}$ と表現でき、指数の和は 3 であるからです。

多項式を構成する項のうち次数が最も大きい項の次数を、**多項式の次数**と定義します。

例えば、多項式 $6x^3 + 5x^2 - 7x$ の次数は 3です。$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{次数 } 3}}{6x^3} + \overset{\substack{\text{次数 } 2\\ \downarrow}}{5x^2} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{次数 } 1}}{(-7x)}$ と表現でき、全ての項のうち次数が最も大きい項の次数は 3 であるからです。

1. 次の多項式を構成する項を答えましょう。

a) $3a + 2x$　　b) $6t + 5z - 2$　　c) $-\frac{2}{3}a + 2x^3 - \frac{1}{2}$　　d) $-ab + 2tv^2$

2. 次の単項式の次数を求めましょう。

a) $4x^3$　　b) $-5xz$　　c) $\frac{3}{5}x^2a^3$　　d) $-\frac{2}{3}ab^2x^3$

3. 次の多項式の次数を求めましょう。

a) $-6xyz$　　b) $7x + 3t$　　c) $\frac{3}{4}x^2a^3 - xa^3$　　d) $-uvw^2 + v^2 - \frac{t^2}{3}$

1.3 多項式における同類項のまとめ

P

次の多項式の同類項をまとめましょう。

a) $3x + 5a - 2x + 4a$　　b) $2y^2 + 8y - 9y + 3y^2$

指数が等しい同じ変数を持つ項を、**同類項**と呼びます。

同類項

$4x + 5a - 2x + 4a$

同類項

まとめるとこのようになります。

$ax + bx = (a + b)x$

S

a) $3x + 5a - 2x + 4a$

$= 3x - 2x + 5a + 4a$

$= (3 - 2)x + (5 + 4)a$

$= x + 9a$

$= 9a + x$

同類項を整理します。

同類項をまとめます。

b) $2y^2 + 8y - 9y + 3y^2$

$= 2y^2 + 3y^2 + 8y - 9y$

$= (2 + 3)y^2 + (8 - 9)y$

$= 5y^2 - y$

C

多項式の同類項のまとめは、以下の順序で行います。

1. 同類項を整理します。
2. 同類項をまとめます。

例： $7c^2 + 2c - 4c^2 + 3c$

1. $7c^2 + 2c - 4c^2 + 3c = 7c^2 - 4c^2 + 2c + 3c$

2. $= (7 - 4)c^2 + (2 + 3)c$

$= 3c^2 + 5c$

2つの項の変数の指数が異なる場合は、それらの項は同類項ではありません。

例えば、$5x^2$ と $5x$ は同類項ではありません。

1.次の多項式の同類項をまとめましょう。

a) $3a + 2a$　　b) $6x + 5x$　　c) $3x + 5a - 2x + 3a$　　d) $5y + 9b - 6b - 6y$

e) $6t + 2z - t - 5z$　　f) $4x - y - 2y + x$　　g) $9t^2 + 2t - 7t^2 + 6t$　　h) $3y - 3y^2 - 4y^2 + 9y$

i) $a^2 + 5a - 5a^2 + a$　　j) $z^2 + 9z + 3z - z^2$　　k) $xy + \frac{2}{3}y - 3y + \frac{1}{2}xy$　　l) $a^2 - 2a - \frac{1}{4}a + \frac{1}{3}a^2$

2.同類項をまとめるための以下の手順がなぜ誤っているか、説明しましょう。

$4x + 5a - 2x + 4a = 4x - 2x + 5a + 4a$

$= (4 - 2)x + (5 + 4)a$

$= 2x + 9a$

$= 11xa$

1.4 多項式のたし算とひき算

P

次の多項式を含む計算をしましょう。

a) $(4x + 3y) + (5x - 2y)$　　b) $(2x + 5y) - (-3x + 9y)$

符号の法則より：
「符号が同じ2つの数の積は正
符号が異なる2つの数の積は
負になります。」

S

符号の法則を使い、かっこを使わずに表現します。

a) $(4x + 3y) + (5x - 2y)$

$= 4x + 3y + 5x - 2y$

同類項をまとめます。

$= 4x + 5x + 3y - 2y$

$= 9x + y$

b) $(5y + 2x) - (9y - 3x)$

$= 5y + 2x - 9y + 3x$

$= 2x + 3x + 5y - 9y$

$= 5x - 4y$

たて書きで問題が解けることに注目しましょう。

a)
$$\begin{array}{rr} & 4x + 3y \\ (+) & \underline{5x - 2y} \\ & 9x + y \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rr} & 2x + 5y \\ (-) & \underline{-3x + 9y} \\ & 5x - 4y \end{array}$$

C

多項式のたし算とひき算を行うためには、次の手順を踏みます。

1. 符号の法則を用いて、かっこを使わずに表現します。
2. 同類項をまとめます。

例： $(3a + 5b) - (4a - 3b)$

1. $(3a + 5b) - (4a - 3b) = 3a + 5b - 4a + 3b$

2. $= 3a - 4a + 5b + 3b$

$= -a + 8b$

次の多項式を含む計算をしましょう。

a)
$$\begin{array}{rr} & 6x + 2y \\ (+) & \underline{3x - 5y} \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rr} & 4a + 5b \\ (-) & \underline{7a - 9b} \end{array}$$

この式と同じです。
$$\begin{array}{rr} & 4a + 5b \\ (+) & \underline{-7a + 9b} \end{array}$$

c) $(9x + 2y) + (7x - 5y)$

d) $(x + 2y) + (6x - y)$

e) $(5xy + 4y) - (7x - 8xy)$

f) $(4ab - 3a) + (5a - 2ab)$

g) $(-6t + 2z) - (7z - 7t)$

h) $(6a^2 + 2a) - (a^2 - 5a)$

i) $(-2t + 2u) - (2t + 2u)$

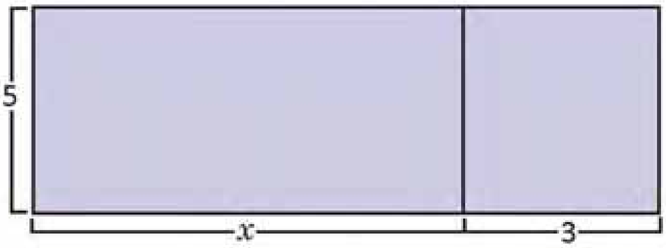
j) $(-x + 7y - 2) + (4x - y + 6)$

k) $(-ab + 5a - 4) - (4a - ab + 9)$

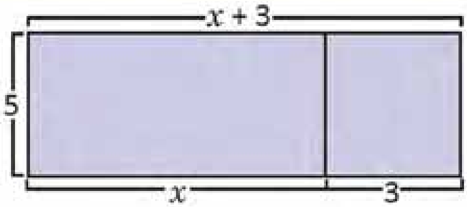
l) $(-8 + 5m - 4m^2) - (m^2 + 9 - m)$

1.5 多項式にある数をかけるかけ算

ポスターを作るために、図で示されているような2つの紙を合体させる必要がありました。ポスター全体の面積を求めましょう。



ポスターの寸法は、幅が5、長さが （$x + 3$） です。

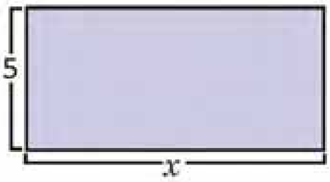


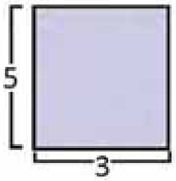
よって、ポスターの面積は 5 × (x + 3) = 5 (x + 3) です。

また、それぞれの紙の面積を計算し、その結果を足して求めることもできます。

面積1：$5 \times x = 5x$

面積2：$5 \times 3 = 15$





よって、全体の面積は： $5(x + 3) = 5x + 15$

したがって： $5(x + 3) = 5x + 15$

多項式にある数をかける掛け算を解くには、その数に多項式の各項を掛けて解きましょう。
例：$-3(4x - 3y - 2)$

$$-3(4x - 3y - 2) = (-3) \times 4x + (-3) \times (-3y) + (-3) \times (-2)$$
$$= -12x + 9y + 6$$

次の式を解きましょう：$5(x - 4a) - 2(3x - 4a)$。

かけ算を行い、同類項をまとめます。

$$5(x - 4a) - 2(3x - 4a) = 5x - 20a - 6x + 8a$$
$$= 5x - 6x - 20a + 8a$$
$$= -x - 12a$$

次の、ある数と多項式のかけ算を解きましょう。

a) $3(4x + y)$
b) $-6(2x - 7y)$
c) $7(2a - 3 - 4b)$
d) $-5(5 - 4a - 6b)$
e) $6(4t - 3b) - 5(-t + 2b)$
f) $-2(8y^2 - 5y) - 3(-7y + y^2)$
g) $-8(\frac{y}{4} - \frac{y^2}{2})$
h) $(-2x + 4y - 12) \times \frac{1}{2}$

1.6 多項式をある数で割るわり算

P

次の、多項式をある数で割るわり算を行いましょう。（10x – 4a） ÷ 2。

S

割り算を、除数の逆数との掛け算に直して解きます。

$$(10x - 4a) \div 2 = (10x - 4a) \times \frac{1}{2}$$

数と多項式をかけます（前回の授業）。

$$(10x - 4a) \times \frac{1}{2} = 10x \times \frac{1}{2} - 4a \times \frac{1}{2}$$

$$= 5x - 2a$$

各単項式にわり算を分配します。

$$(10x - 4a) \div 2 = (10x \div 2) + (-4a \div 2)$$

$$= (5x) + (-2a)$$

$$= 5x - 2a$$

左の答えの約分を確認しましょう。

$$\overset{5}{\cancel{10}}x \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}} - \overset{2}{\cancel{4}}a \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}}$$

C

多項式をある数で割る除算を解くには、多項式の各項にその割る数の逆数を掛けて解きましょう。例えば、（15x – 6y – 9） ÷ （–3）

$$(15x - 6y - 9) \div (-3) = (15x - 6y - 9) \times \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= 15x \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 6y \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 9 \times \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= -5x + 2y + 3$$

E

次の、多項式をある数で割るわり算を行いましょう。$(-30x^2 - 10x + 25) \div (-5)$

逆数を掛けて、同類項をまとめます。

$$(-30x^2 - 10x + 25) \div (-5) = (-30x^2 - 10x + 25) \times \left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$= -30x^2 \times \left(-\frac{1}{5}\right) - 10x \times \left(-\frac{1}{5}\right) + 25 \times \left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$= 6x^2 + 2x - 5$$

次の、多項式をある数で割るわり算を計算しましょう。

a) $(16x - 8a) \div 2$

b) $(-24b - 12) \div 6$

c) $(9xy - 45y) \div (-3)$

d) $(-21x^2 + 49x) \div (-7)$

e) $(45x^2 - 20x - 35) \div 5$

f) $(-20y - 36x - 4) \div 4$

g) $(16y + 24x + 48) \div (-8)$

h) $(-63y + 27x + 54) \div (-9)$

1.7 ある数で割った数を含む多項式の複合演算

P

計算を行い、同類項をまとめましょう：$\frac{5x+2y}{3}-\frac{2y-x}{6}$

S

分母を揃えます。

$$\frac{5x+2y}{3}-\frac{2y-x}{6}=\frac{2(5x+2y)}{6}-\frac{2y-x}{6},$$

1つの分数として表します。

$$=\frac{2(5x+2y)-(2y-x)}{6},$$

かっこを外します。

$$=\frac{10x+4y-2y+x}{6},$$

同類項を整理します。

$$=\frac{10x+x+4y-2y}{6},$$

同類項をまとめます。

$$=\frac{11x+2y}{6}.$$

ある数と多項式のかけ算として表します。

$$\frac{5x+2y}{3}-\frac{2y-x}{6}=\frac{1}{3}(5x+2y)-\frac{1}{6}(2y-x),$$

かけ算を行います。

$$=\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}y+\frac{1}{6}x,$$

同類項を整理します。

$$=\frac{5}{3}x+\frac{1}{6}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}y,$$

同類項をまとめます。

$$=\frac{11}{6}x+\frac{1}{3}y.$$

どちらの方法でも答えは同じことに注目しましょう。

$$\frac{11x+2y}{6}=\frac{11}{6}x+\frac{1}{3}y$$

C

分母が異なる多項式の計算を解くには、以下の2つの方法のどちらを用いても構いません。

1. 最小公分母を使い、同類項をまとめます。
2. 分母をある数のかけ算として表してから、同類項をまとめます。

E

計算を解き、同類項をまとめましょう：$\frac{2x-y}{3}-\frac{x-5y}{6}$

$$\frac{2x-y}{3}-\frac{x-5y}{6}=\frac{2(2x-y)}{6}-\frac{(x-5y)}{6}$$

$$=\frac{2(2x-y)-(x-5y)}{6}$$

$$=\frac{4x-2y-x+5y}{6}$$

$$=\frac{3x+3y}{6}=\frac{3(x+y)}{6}=\frac{x+y}{2}$$

計算を行い、同類項をまとめましょう。

a) $\frac{4x+y}{9}+\frac{3y-2x}{3}$

b) $\frac{6z+5t}{3}+\frac{3t-z}{2}$

c) $\frac{4x+7y}{2}-\frac{2y-3x}{4}$

d) $\frac{3a-4y}{5}-\frac{a-y}{2}$

e) $x+y+\frac{y+5x}{3}$

f) $x-y-\frac{4y-3x}{7}$

1.8 復習問題

1.次の多項式を構成する項を答えましょう。

a) $9st + 5x$　　b) $3t^2 + 7zs - 21$

2. 次の単項式の次数を求めましょう。

a) $8xyz$　　b) $-5x^3z$

3. 次の多項式の次数を求めましょう。

a) $7xa + 3t^3$　　b) $6 - 6xyz$

4. 次の多項式の同類項をまとめましょう。

a) $3a + 2a$　　b) $6x + 5x$　　c) $5a + 7x + 3a - 2x$

5. 次の多項式を含む計算をしましょう。

a) $$\begin{array}{rr} & 3x + 7y \\ (+) & \underline{4x - 9y} \end{array}$$

b) $(4ab + 4a^2) - (6a^2 - 8ab)$　　c) $(-5n^2 + 9n + 3) - (-2n^2 - 4n + 1)$

6. 次の、ある数と多項式のかけ算を解きましょう。

a) $-5(-2s + 6t)$　　b) $3(4x - 3y) - 2(5x - 2y)$　　c) $(6x - 15y - 36) \times \frac{1}{3}$

7. 次の、多項式をある数で割るわり算を解きましょう。

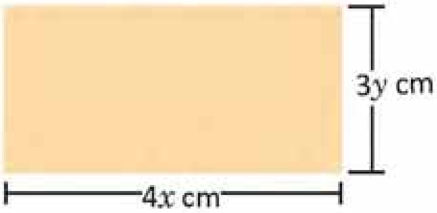
a) $(-9s + 24t) \div 3$　　b) $(-54x^2 + 18x) \div -9$　　c) $(36x^2 - 12x + 28) \div 4$

8. 計算を行い、同類項をまとめましょう。

a) $\frac{10x + 4y}{32} + \frac{-3x + y}{8}$　　b) $\frac{2a + 5b}{10} - \frac{3a - 6b}{40}$　　c) $s - t - \frac{2s - 5t}{6}$

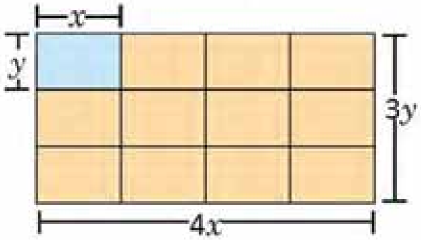
1.9 単項式に単項式をかけるかけ算

長さが $4x$ cm で、幅が $3y$ cm の長方形の面積を求めましょう。



長方形の面積はかけ算 $4x \times 3y$ の結果になります。

この長方形を、さらに小さい、幅 y cm、長さ x cm の長方形に分けます。



単項式のかけ算 $4x \times 3y$ は以下のようになることに注目しましょう。

$$\begin{aligned} 4x \times 3y &= 4 \times x \times 3 \times y \\ &= 4 \times 3 \times x \times y \\ &= 12xy \end{aligned}$$

小さい長方形それぞれの面積は $x \times y = xy$ （底辺 × 高さ）です。

面積が xy の長方形が横に4つ、縦に3つあります。

したがって、長さが $4x$ cm で幅が $3y$ cm の長方形の面積は、$4 \times 3 = 12$ 個の xy の長方形の面積の和になります。よって、

$$A = 4x \times 3y = 4 \times 3 \times x \times y = 12xy.$$

2つの単項式をかけるには、単項式の係数をかけて、その後変数をかけます。

例：$7x \times (-5y)$。

$$\begin{aligned} 7x \times (-5y) &= 7 \times (-5) \times x \times y \\ &= -35xy \end{aligned}$$

基数が同じ2つの指数のかけ算は、1つの指数として表すことができます。

$$b \times b^2 = b \times (b \times b) = b^3.$$

次の単項式と単項式のかけ算をしましょう。

a) $2b \times 5b^2$

係数と変数のかけ算を行います。

$$\begin{aligned} 2b \times 5b^2 &= 2 \times 5 \times b \times b^2 \\ &= 10b^3 \end{aligned}$$

b) $(-4n)^3$

係数と変数のかけ算を行います。

$$\begin{aligned} (-4n)^3 &= (-4n) \times (-4n) \times (-4n) \\ &= (-4) \times (-4) \times (-4) \times n \times n \times n \\ &= -64n^3 \end{aligned}$$

次の単項式と単項式のかけ算をしましょう。

a) $5x \times 6y$

b) $8b \times (-3a)$

c) $-7m \times (-3n)$

d) $9x \times 4x^3$

e) $-9a^2 \times a^3$

f) $(-2n)^3$

g) $-6ab \times (-8a^2b)$

h) $-9ab \times 3(-a)^2$

1.10 単項式を単項式で割るわり算

P

次の単項式のわり算を解きましょう。

a) $\frac{1}{3}y^2z \div \frac{5}{9}yz$

b) $12ab \div (-4b)$

S

a) $\frac{1}{3}y^2z \div \frac{5}{9}yz$

割る数の逆数を使って分数のかけ算として表し、約分します。

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}y^2z \div \frac{5}{9}yz &= \frac{y^2z}{3} \div \frac{5yz}{9}\\ &= \frac{y^2z}{3} \times \frac{9}{5yz}\\ &= \frac{y \times \overset{1}{\cancel{y}} \times \overset{1}{\cancel{z}} \times \overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{1}{\cancel{3}} \times 5 \times \underset{1}{\cancel{y}} \times \underset{1}{\cancel{z}}}\\ &= \frac{3}{5}y\end{aligned}$$

b) $12ab \div (-4b)$

わり算を分数として表し、約分します。

$$\begin{aligned}12ab \div (-4b) &= \frac{12ab}{-4b}\\ &= -\frac{12ab}{4b}\\ &= -\frac{\overset{3}{\cancel{12}} \times a \times \overset{1}{\cancel{b}}}{\underset{1}{\cancel{4}} \times \underset{1}{\cancel{b}}}\\ &= -3a\end{aligned}$$

さらに、問 b） では次の方法で逆数のかけ算を適用できることに注目しましょう。

$$\begin{aligned}12ab \div (-4b) &= 12ab \times \frac{1}{-4b}\\ &= -\frac{12ab}{4b}\\ &= -\frac{\overset{3}{\cancel{12}} \times a \times \overset{1}{\cancel{b}}}{\underset{1}{\cancel{4}} \times \underset{1}{\cancel{b}}}\\ &= -3a\end{aligned}$$

2つの指数をかけて、約分することができます。

$$y^2z \div yz = \frac{y^2z}{yz} = \frac{y \times \overset{1}{\cancel{y}} \times \overset{1}{\cancel{z}}}{\underset{1}{\cancel{y}} \times \underset{1}{\cancel{z}}} = y$$

C

2つの単項式のわり算を解くには、分数のわり算として表し、逆数のかけ算を用いて、最小の代数式として表します。

次の単項式のわり算を解きましょう。

a) $18xy \div 6x$

b) $24x^3 \div (-6x)$

c) $15mn \div (-12n)$

d) $-8a^2b \div 6ab^2$

e) $6ab \div \frac{1}{4}bc$

f) $10y^2z^2 \div \frac{5}{2}yz$

g) $-\frac{3}{5}t^3u \div \frac{3}{10}t^2u$

h) $-\frac{5}{8}y^4 \div \frac{1}{2}y^2$

1.11 単項式と単項式のかけ算およびわり算の組み合わせ

P

次の式を解きましょう。その後、結果を約分し最小の代数式にしましょう。

a) $7x^2 \times 6y \div (-3y^2x)$　　b) $-2a^2b \div 6ab^2 \times (-3b)$

S

式を分数として表します。

a) $7x^2 \times 6y \div (-3y^2x) = -\dfrac{7\overset{x}{\cancel{x^2}} \times \overset{2}{\cancel{6}}\overset{1}{\cancel{y}}}{\underset{1}{\cancel{3}}\underset{y}{\cancel{y^2}}\underset{1}{\cancel{x}}}$

$= -\dfrac{7x \times 2}{y}$

$= -\dfrac{14x}{y}$

b) $-2a^2b \div 6ab^2 \times (-3b) = \dfrac{(\overset{1}{\cancel{2}}\overset{a}{\cancel{a^2}}\overset{1}{\cancel{b}}) \times (\overset{1}{\cancel{3}}\overset{1}{\cancel{b}})}{\underset{\underset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{6}}\underset{1}{\cancel{a}}\underset{\underset{1}{\cancel{b}}}{\cancel{b^2}}}$

$= \dfrac{a \times 1}{1}$

$= a$

C

単項式のかけ算とわり算の組み合わせを解くには、まず符号を特定し（符号の法則を使います）、次に1つの分数として表して最小の代数式になるまで約分します。

E

次の式を解きましょう、結果を約分し最小の代数式にしましょう：$(-2a)^3 \times (-4a^2) \div \left(-\frac{2a}{3}\right)$

$$(-2a)^3 \times (-4a^2) \div \left(-\frac{2a}{3}\right) = -8a^3 \times 4a^2 \times \left(\frac{3}{2a}\right)$$

$$= -\frac{\overset{4a^2}{\cancel{8a^3}} \times 4a^2 \times 3}{\underset{1}{\cancel{2}}\underset{1}{\cancel{a}}}$$

$$= -\frac{4a^2 \times 4a^2 \times 3}{1}$$

$$= -48a^4$$

次の式を解きましょう。結果を約分し最小の代数式にしましょう。

a) $2x^2 \times 6x \div 3x^4$

b) $10yz \div 4z^2 \times (-6z)$

c) $a^2b \div (-ab) \times (-b^2)$

d) $-s^2t \times (-st^2) \div (-s^2t^2)$

e) $(-2a)^2 \div 6ab^2 \times 9b$

f) $-xy \div (-2xy)^3 \times (-4x)$

g) $3y^3 \times 6y \div (-3y)^2$

h) $24a^2b^2 \div 8ab \times 3b$

i) $(-2st)^3 \times (-2s) \div (-3s^2)$

j) $\frac{3}{5}ab^2 \times 5a \div \frac{1}{3}ab$

k) $(-\frac{1}{2}xz)^2 \div 6xz^3 \times (-4)$

l) $-\frac{2}{5}t^2 \div (-t^3) \times (-\frac{5}{2}t^2)$

1.12 多項式の代入と数値

P

示された式を解き、その後各多項式の数値を、変数に対して与えられた値を使って求めましょう。

$(4x - 5y) - (x - y) \quad x = 6, y = -4$

S

各多項式の変数の値を代入します。

$$\begin{aligned}(4x - 5y) - (x - y) &= 4x - 5y - x + y\\ &= 3x - 4y\\ &= 3 \times 6 - 4 \times (-4);\end{aligned}$$ 変数の値を代入します。

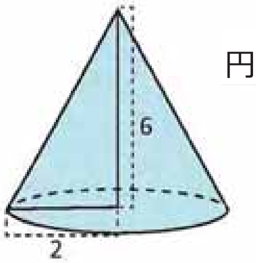
$$\begin{aligned}&= 18 + 16\\ &= 34\end{aligned}$$

C

変数の値を代入して多項式の数値を得るには、まず同類項をまとめます。

E

円錐の体積は多項式 $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ として与えられ、ここで π は定数（数）、r は円錐の底面の半径、h は高さです。半径が 2 cm で高さが 6 cm の円錐の体積を求めましょう。



円錐の体積の多項式における変数 r と h の値を代入します。

$r = 2$
$h = 6$

したがって、この場合は, $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times (2)^2 \times 6 = 8\pi.$

よって、半径 2 cm、高さ 6 cm の円錐の体積は 8 πcm³です。

1. 示された式を解き、その後各多項式の数値を、変数に対して与えられた値を使って求めましょう。

a) $(3x - 2y) + (x - y)$ si $x = 5, y = -2$

b) $(x + 3y) - (x - y)$ si $x = 1, y = -4$

c) $(x - y) - 2(x - y)$ si $x = 8, y = -2$

d) $3(x - 2y) - (2x - 5y)$ si $x = -4, y = 5$

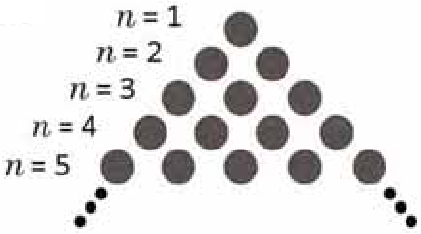
e) $(6x - y) - 2(3x - 5y)$ si $x = -2, y = 3$

f) $(4x - y) - (5x - 3y)$ si $x = -6, y = 4$

2. 次の多項式のうちどちらが初めの何列かの和を表しているか分析し、答えましょう。次の図では、n が列の番号を表しています。図を頼りに解きましょう。

a) $2n - 1$

b) $\frac{1}{2}n(n + 1)$



1.13 復習問題

1. 次の多項式を構成する項、各項の次数、多項式の次数を答えましょう。

a) $5xyz + 2t^2$ b) $5x^4 + 7z^3 - 21xz$ c) $6ab - 6st^2$ d) $3xyz$

2. 次の多項式を含む計算をしましょう。

a) $(10a - 7b + 9) - (-3a - b + 5)$ b) $(5xy - 5y^2) + (-8xy + 8y^2)$ c) $(8t^2 + 2 - 4t) - (-t^2 - 2t + 7)$

3. 次の、ある数と多項式のかけ算とわり算を解きましょう。

a) $-7(10m - 8n)$ b) $10(2a - 5b) - 7(-2a + 3b)$ c) $(35x - 5z) \div 5$ d) $(-64x^2 + 16x) \div (-8)$

4. 計算を行い、同類項をまとめましょう。

a) $\frac{6m - 3n}{27} + \frac{m - 2n}{3}$ b) $\frac{2a + 5b}{3} - \frac{-3a + 6b}{5}$ c) $y - z - \frac{-9y - 3z}{7}$ d) $t - 2u - \frac{5t - u}{2}$

1.14 復習問題

1. 次の単項式と単項式のかけ算をしましょう。

a) $9t \times 6s$ b) $(-4n^2) \times 6n^3$ c) $7a \times 8ab$ d) $(-7a)^2$

2. 次の単項式のわり算をしましょう。

a) $36mx \div 9x$ b) $(-18st^2) \div 10s^2t$ c) $12ay^3 \div \frac{3}{5}a^2y$ d) $-\frac{2}{9}w^3 \div \frac{2}{3}w$

3. 次の式を解きましょう。結果を約分し最小の代数式にしましょう。

a) $4y \times 15y^3 \div 10y^2$ b) $(-5n)^2 \div 15mn^2 \times 12m$ c) $(-4ab)^3 \times (-2b) \div (-6b^4)$ d) $(-\frac{2}{3}w^4) \div (-w^3) \times (-\frac{9}{10}w)$

4. 示された式を解き、その後各多項式の数値を、示された変数の値を使って求めましょう。

a) $(2x - 5y) + (-4x + y)$ si $x = 3, y = -3$

b) $2(-x + y) - (3x - y)$ si $x = -1, y = 4$

c) $(-4x - 3y) + 5(x + y)$ si $x = 7, y = -5$

d) $-5(x - 2y) - (-4x - 6y)$ si $x = -4, y = 5$

2.1 連続する数のたし算

P

次のたし算を行い、5個の連続する数を足す手順を定義しましょう。

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \underline{\qquad\qquad}$$
$$13 + 14 + 15 + 16 + 17 = \underline{\qquad\qquad}$$
$$28 + 29 + 30 + 31 + 32 = \underline{\qquad\qquad}$$

S

たし算を行い、何らかのパターンがあるか探します。

$$1 + 2 + \boxed{3} + 4 + 5 = \underline{15} \quad (5 \times \boxed{3})$$
$$13 + 14 + \boxed{15} + 16 + 17 = \underline{75} \quad (5 \times \boxed{15})$$
$$28 + 29 + \boxed{30} + 31 + 32 = \underline{150} \quad (5 \times \boxed{30})$$

連続する数の和は、中心値の5倍のように思われます。

特定の場合の和に基づいて立てられた「推論」を実証します。

数学では、問題を解くのに色々な戦略を使うことができます。その1つが、この授業で使われている、特定の場合における結果を求め、「パターン」を探して「推論」を立てる方法です。つまり、全ての場合を満たすように思われるけれども論理的根拠がない考察は、直感的なものに過ぎないのです。後で、帰納的な方法を用いた推論を実際に示し説明します。

n を5個の項の和の最初の項とします。

$$\begin{array}{ccccc}
13, & 14, & 15, & 16, & 17 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
13, & 13+1, & 13+2, & 13+3, & 13+4 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
n, & n+1, & n+2, & n+3, & n+4
\end{array}$$

よって、一般的な連続する数の5個の項の和は以下のように表されます。

$$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) = 5n + 10 = 5 \times (n + 2).$$

したがって、推論は正しく、連続する5個の数の和は中心値（昇順で並べた時）の5倍です。

C

連続する5個の数の和について推論するためには、多項式の和の応用が必要でした。状況を表すために変数を使って、数が持つ様々な性質を証明することができます。

1. 中心値をn で表して連続する5個の数を書きましょう。その後、それらの数の和を n の項で表しましょう。

2. 連続する7個の数の和の性質を見つけ、証明しましょう。

2.2 ある数とその各桁の数字の順を逆にした数のたし算

P 次の、ある数とその各桁の数字の順を逆にした数のたし算を解きましょう。何らかのルールを満たすことを示しましょう。

12 + 21 = ______
63 + 36 = ______
91 + 19 = ______

S たし算を行い、何らかのパターンがあるか探します。

$$\begin{aligned}12 + 21 &= \underline{33} = 11 \times 3\\ 63 + 36 &= \underline{99} = 11 \times 9\\ 91 + 19 &= \underline{110} = 11 \times 10\end{aligned}$$

ある数とその各桁の数字の順を逆にした数の和は11の倍数になります。この命題は常に成り立つでしょうか。

上記の特定の場合の和に基づいて立てられた「推論」を証明します。y を一の位の値とし、x を十の位の値とし、10を基準として表した数を使って数を書きます。

$$\begin{aligned}63 &= 60 + 3\\ 63 &= 10 \times \underset{\downarrow}{6} + \underset{\downarrow}{3}\\ &= 10 \times x + y\end{aligned}$$

この場合、変数 x と y は桁の値、つまり0から9の数を表しており、十の位の値は考慮されていないことに注目しましょう。

よって、変数 x と y を使って表した、ある数とその各桁の数字の順を逆にした数の和は、以下のように表されます。

$$\begin{aligned}(10x + y) + (10y + x) &= 11x + 11y\\ &= 11(x + y)\end{aligned}$$

したがって、ある数とその各桁の数字の順を逆にした数の和は常に11の倍数になります。

C 数の性質を証明するためには、変数を状況に応じ適切に使い、規則性を特定し、規則性を表すために必要な代数式を応用する必要があります。

1. 4桁の数とその各桁の数字の順を逆にした数の和は11の倍数になるか判定しましょう。以下の場合を検討しましょう。

   a) 1 234 + 4 321

   b) 1 032 + 2 301

   c) 1 121 + 1 211

2. 問1で出た結果を証明しましょう。

2.3 日付のたし算

P

カレンダー上で色付けされている日にちのたし算を行いましょう。全体を通して何らかのルールを満たすことを示しましょう。

2017年2月

月	火	水	木	金	土	日
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28					

S

たし算を行い、何らかのパターンがあるか探します。

ピンク：　$2 + 8 + 9 + 10 + 16 = 45 = 5 \times 9$

青：　$14 + 20 + 21 + 22 + 28 = 105 = 5 \times 21$

色付けされている5日の和は、中央にある数の5倍のようです。

上記の特定の場合の和に基づいて立てられた「推論」を証明します。n を色付けされている部分の中央にある項とします。

よって、1日後は $n + 1$、1日前は $n - 1$ と表されます。
さらに、前の週の同じ曜日は $n - 7$、次の週の同じ曜日は $n + 7$ と表されます。

色付けされた5日の和は以下のように表されます。

$$\begin{array}{ccccccccc}
14 & + & 20 & + & 21 & + & 22 & + & 28 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
(21-7) & + & (21-1) & + & 21 & + & (21+1) & + & (21+7) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
(n-7) & + & (n-1) & + & n & + & (n+1) & + & (n+7) = 5n
\end{array}$$

したがって、カレンダー上でこのように色付けされた5日の和は、中央にある数の5倍になります。

C

複数の数を扱う時は、扱いやすい変数で表される数を選び、パターンを判別して代数式を使って表せるようにすることが大切です。

多項式を使って、次のカレンダー上で色付けされた日の和の規則を証明しましょう。

a)

2017年2月

月	火	水	木	金	土	日
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28					

b)

2017年2月

月	火	水	木	金	土	日
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28					

2017年2月

月	火	水	木	金	土	日
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28					

SU2

スライド 23

SU2 To PM/DTP
原文のc)という項目がありません。
SunFlare User, 2021/02/20

2.4 多項式を用いた問題の解

P

カルロスはお店でキャンディを買うのに、25セント持っています。ハチミツのキャンディは1個3セント、ユーカリのキャンディは1個2.5セントです。aをハチミツのキャンディの数とし、bをユーカリのキャンディの数として、状況を表す多項式を立てましょう。その後、カルロスが5個ハチミツのキャンディを買ったら、ユーカリのキャンディをいくつ買えばまだお釣りが出るか、答えましょう。

S

ハチミツのキャンディは1個3セント、ユーカリのキャンディは1個2.5セントで、25セント使うので、このような方程式が立てられます。

$$\text{ハチミツのキャンディの値段} \longrightarrow 3a + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ユーカリのキャンディの値段}}}{2.5b} = 25 \longleftarrow \text{カルロスが持っているお金}$$

問題では、カルロスがユーカリのキャンディをいくつ買うことができるか、つまりbを尋ねています。ハチミツのキャンディは5個買うので、$a = 5$です。以下のように方程式を作ります：

$$3a + 2.5b = 25$$

方程式の両辺に2を掛けます。

$$6a + 5b = 50$$

項6aを移動します。

$$5b = 50 - 6a$$

方程式の両辺を5で割ります。

$$b = \frac{50 - 6a}{5} = -\frac{6a}{5} + 10$$

最後に、カルロスがユーカリのキャンディをいくつ買うことができるか特定するため、$a = 5$を多項式$-\frac{6a}{5} + 10$に代入し、$\frac{-6 \times 5}{5} + 10 = -6 + 10 = 4$になります。

C

多項式を使って問題を解くには、次の手順を踏みます。

1. 問題における変数を見つけます。
2. 1つ前のステップで見つけた変数を使い、方程式を立てます。
3. 提示された問題を解くための変数について式を整理します。
4. 式を整理した後現れる多項式の変数の数値を代入します。

E

示される変数について式を整理し、[] の中の値を代入しましょう。

$\frac{1}{3}ab = 5$ $[a, b = 5]$. したがって、$\frac{1}{3}ab = 5$ $ab = 15$ $a = \frac{15}{b}$。 よって、$a = \frac{15}{5} = 3$。

方程式の両辺に3を掛けます。

方程式の両辺をbで割ります。

1. 示される変数について式を整理し、[] の中の値を代入しましょう。

a) $5x - 6y = 25$ $[x, y = 10]$　b) $3.5t + u = 7$ $[u, t = 4]$　c) $\frac{1}{6}wz = 10$ $[w, z = 15]$

2. 建築家がある家の壁をデザインしています。2種類のレンガがあり、1種類目は高さが10インチ、2種類目は高さが6インチあります。壁の高さが72インチの場合、1種類目のレンガの数をw、2種類目のレンガの数をzとし、状況を表す多項式を立てましょう。さらに、建築家は1種類目のレンガを壁に6列使うこととしました。この壁に、2種類目のレンガは何列使われますか。

2.5 復習問題

1. 9個の連続する数を足す手順を定義しましょう。

2. 3桁の数で十の位の値が百の位の値より2大きく、一の位の値より2小さい場合、その数とその各桁の数字の順を逆にした数の和は111の倍数となることを証明しましょう。

3. 多項式を使って、次のカレンダー上で色付けされた日の和の規則を見つけましょう。

a)

2017年2月

月	火	水	木	金	土	日
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28					

b)

2017年3月

月	火	水	木	金	土	日
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

4. カルロスはロロコ入りのチーズのププサを3つ、レブエルタスを2つ買い、全部で2.20ドル払いました。ロロコ入りのチーズのププサが1つ0.50ドルの時、レブエルタスの値段は1ついくらでしょうか。多項式と数値を使って解きましょう。

5. 面積が 200 m^2 の範囲を覆うために、すでに面積が20 m^2 の正方形を7個使ったとすると、面積が 10 m^2 の正方形はいくつ必要でしょうか。

6. アナのおじいさんは腎臓に問題があり、専門医から毎日2リットルの水を飲むよう勧められています。医師の勧めに従うためにはおじいさんは1日に何杯水を飲めばよいのか知るため、アナは家にあるコップの容量を知りたいと考えました。コップは円柱形とします。アナのおじいさんは毎日何杯水を飲めば良いか定義しましょう。どのように解くことができますか。

   注： この問題を解くために、学校または家にある円柱形のコップの寸法を測りましょう。

7. フィボナッチ数列（1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... ）の特徴の1つは、「数列内のどの連続する10の要素の和も、その集合の7番目の要素の11倍と等しい」ことです。数列の1項目から始める必要はありません。この性質の2つの例を示し、x を集合の7番目の要素として代数式を書きましょう。

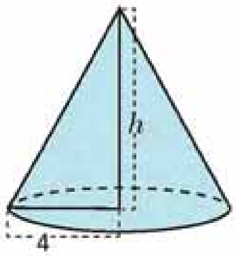
2.6 復習問題

次の問題を多項式の方程式として表し、その後数値を使って式を解きましょう。

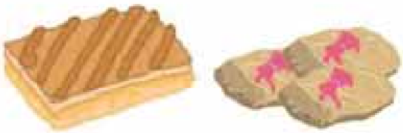
1. カルメンはガラスのビー玉を2つと金属の玉を4つ買い、1.90ドル払います。ガラスのビー玉が1つ0.25ドルする場合、金属の玉はいくらでしょうか。

2. マリオはパソコンのファイルのバックアップを取るために、1024 MB必要で、バックアップ用に容量が256 MBの*USB*メモリを3つ持っています。マリオがその作業をするために、容量が128 MBの*USB*メモリはいくつ必要でしょうか。

3. 円錐1つ分の体積は $8\pi \text{cm}^3$ です。円錐の半径が 4 cmの時、その円錐の高さを求めましょう。



4. ベアトリスは甘いパンを売っていますが、パイナップルジャム入りのパンの値段を忘れてしまいました。ただ、昨日ミゲルがパイナップルジャム入りのパン2つとコーンブレッド3つを買い、0.83ドル払ったのは覚えています。ベアトリスがコーンブレッドの値段は 0.11ドルと覚えているならば、パイナップルジャム入りのパンの値段はどのように知ることができるでしょうか。



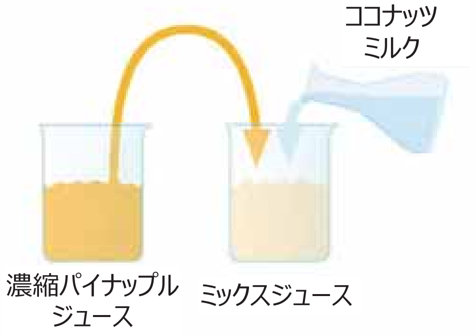
5. ホセはとうもろこしとフリホール豆を栽培しています。今年はフリホール豆を5キンタル分、とうもろこしを3キンタル分売ります。収穫物の売り上げで500ドル得る計画を立てました。
もしフリホール豆を1キンタル85ドルで売るつもりであれば、計画を達成するためにはとうもろこしを1キンタルいくらで売らなくてはならないでしょうか。

6. マリアの学校では、バレンタインデーのお祝いにあたり、いくつかスピーカーを設置しますが、音量が120デシベルを超えないように注意します。1個40デシベルのスピーカーが2つある場合、20デシベルのスピーカーはいくつ必要ですか。

ユニット 2

連立二元一次方程式

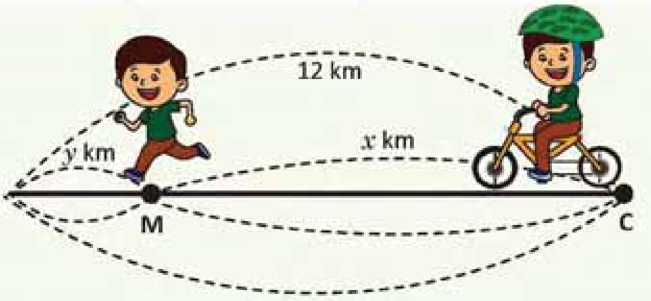
バビロニア人が線形連立方程式を解き、計測の問題とは関係ありませんが、未知数を長さや幅という用語で呼びました。数学はなんらかの数字を使ってできる演算に興味を持つことから始まり、この知識が算術から代数学への飛躍を可能にします。これに関連して、ディオファントスは符号を取り入れ、$x + y = 100$,　$x - y = 40$ のような、未知数が 2 つ、また 3 つある 1 次特別方程式の代数学を解きました。



ミックスジュースの調合

例えば、互いに交差する道路網における交通の流れを分析する、あるプロジェクトの予算を算出する、部分均衡を用いて需給を分析する、混合するための各要素の割合を決める、生産プロセスを最適化する等の様々な内容の状況を定型化するために連立方程式が使われます。

次回以降の授業では、例えば、幾何学、科学、経済学等の様々な内容で、日常生活の文章問題を解くために、連立二元一次方程式、連立方程式の解法、また、その応用問題を学習します。



速度を表すための数学的モデルの使用

1.1 一元一次方程式の解

P

以下の方程式を解きなさい。

a) $3 + 4(x - 2) = -3 - 5(x - 5)$

b) $0.2x - 0.03 = 0.17x + 0.21$

c) $\frac{7}{12}x + \frac{5}{6} = x$

S

a) $3 + 4(x - 2) = -3 - 5(x - 5)$

$$3 + 4x - 8 = -3 - 5x + 25$$
$$4x - 5 = -5x + 22$$
$$4x + 5x = 22 + 5$$
$$9x = 27$$
$$x = 3$$

b) $0.2x - 0.03 = 0.17x + 0.21$

$$20x - 3 = 17x + 21$$
$$20x - 17x = 21 + 3$$
$$3x = 24$$
$$x = 8$$

c) $\frac{7}{12}x + \frac{5}{6} = x$

$$12 \times \frac{7}{12}x + 12 \times \frac{5}{6} = 12 \times x$$
$$7x + 10 = 12x$$
$$7x - 12x = -10$$
$$-5x = -10$$
$$x = 2$$

1. 次の方程式を満たす x の値を求めなさい。

a) $3x - 8 = 4$

b) $-4x - 2 = -18$

c) $2x - 3 = -x - 9$

d) $11x - 15 = 12 + 2x$

e) $5(2x - 3) - 6 = 4x + 3$

f) $3(x - 2) + x = 5(x - 3) + 9$

2. 以下の方程式を解きなさい。

a) $0.5x - 1.2 = 0.4x + 3.3$

b) $3 + 0.8x = 2.4 + 0.9x$

c) $0.2x - 0.04 = 0.16x + 0.28$

d) $1.31x + 0.04 = 1.35x - 0.04$

3. 次の問題を解きなさい。

a) $\frac{1}{2}x - 3 = \frac{1}{4}x$

b) $-\frac{x}{3} - \frac{5}{6} = -\frac{4}{3}$

c) $-\frac{1}{4} = \frac{5}{4}x + \frac{5}{8}$

d) $-\frac{x+5}{2} = \frac{3}{4}$

e) $\frac{x-3}{3} = \frac{1}{6}x$

f) $-\frac{5x-4}{3} = -\frac{3}{4}$

g) $\frac{x+5}{12} = \frac{x+7}{24}$

h) $-\left(\frac{x+3}{2}\right) - \frac{x}{4} = \frac{3}{2}$

1.2 一元一次方程式の応用

P

次の状況を解決しましょう：外周が1200m ある湖があります。アナさんは時計回りに毎分140m の速さで走ります。ホセさんは反時計回りに毎分160m の速さで走ります。2人が同じ地点から同時に出発した場合、何分でもう一度出会う事になるでしょうか?

S

アナさんとホセさんが走った距離の合計は1200m に相当します。

	アナさん	ホセさん
速度（メートル / 分）	140m / 分	160m / 分
時間（分）	x	x
距離（メートル）	$140x$	$160x$

$$140x + 160x = 1\,200$$
$$300x = 1\,200$$
$$x = \frac{1\,200}{300}$$
$$x = 4$$

アナさんとホセさんは4分後に出会います。

1. フリアさんは本屋を営んでいます。本1冊の販売につき5ドルの利益があり、毎月の営業費用は150ドルです。赤字にならないためには最低何冊の本を販売する必要があるでしょうか?

2. 水槽に水が満タンに入っています。朝に1/4 使用し、昼に1/8 使用すると水槽に100ガロン残ります。タンクの容量はどの位でしょうか?

3. マルタさんはマルチメディア機器を1日20ドルの使用料と、店から機器を持出す時の手数料10ドルでレンタルしています。ホセさんは同じ商売を機器使用料1日18ドルと、機器の持出し時の手数料26ドルで行っています。カルロスさんはその機器を5日借りたいと思っています。2つの店でレンタルにかかる費用が同じになるのは何日間借りる場合でしょうか? カルロスさんはどちらの店で借りるべきでしょうか?

4. 遠足を実施するためにバスを1台契約しています。満席にした場合 1人当たりの輸送費用は10ドルとなりますが、10人が欠席しました。結局輸送費用は1人当たり15ドルとなりました。バスには座席が何席あるでしょうか?

5. 車がA市から時速60km で出発しました。2時間後同じ市から別の車が最初の車と同じルートを通って時速90km で出発しました。
   a) 別の車は何時間後に最初の車に追いつくでしょうか?
   b) A市とB市の距離が350km だとしたら、2台目の車は1台目の車に追いつく事ができるでしょうか?

1.3 二元一次方程式の意味

P

カルロスさんはバスケットボール選手です。2015年の決勝戦で合計でシュートを7本決めました。フリースローを何本、2ポイントを何本決めたでしょうか?

a) フリースローを x 本決め、2ポイントを y 本決めたと考えて、「7本決めた」状況を示す方程式を書きましょう。
b) x と y の値を解くために表を作りましょう。

S

a) フリースローを x 本、2ポイントを y 本と考えて、「7本決めた」状況の方程式を作ると、$x + y = 7$ となります。

b)

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	7	6	5	4	3	2	1	0
決めた本数合計	7	7	7	7	7	7	7	7

$x + y = 7$ という形の方程式は**二元一次方程式**といい、以前学んだようにこのような方程式は満たす値が2つ以上あります。

7学年で学習した方程式は一元一次方程式といいます。例えば：

$$5x + 6 = 21$$

今、x と y という2つの未知数があり、これを二元といいます。

E

カルロスさんによると、7本決めた事によって10ポイント取ったそうです。フリースローを何本、2ポイントを何本決めたでしょうか?

a) 「10ポイント取った」状況を示す方程式を書きましょう。
b) 既に書いた表に列を足し、新たな条件を満たす値のペアを求めましょう。

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	7	6	5	4	3	2	1	0
決めた本数合計：$x + y$	7	7	7	7	7	7	7	7
ポイント数合計：$x + 2y$	14	13	12	11	10	9	8	7

フリースローは x 本、2ポイントは y 本決めた事を常に考え「10ポイント取った」状況の式を作ると、$x + 2y = 10$ となります。

C

2つの条件を満たし、2つの条件を満たす x と y の値を求めるためには、2つの方程式を同時に作ります

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$$

2つの方程式の組み合わせは**2つの式の連立方程式**といい、この解は2つの方程式を満たす値のペアとなります。例題の場合、連立方程式の解は $x = 4$、$y = 3$ です。

次の問題を解きましょう。

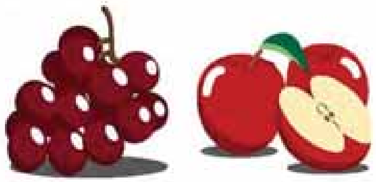
アナさんは財布に紙幣が8枚持っており、合計55ドルで5ドル紙幣と10ドル紙幣が入っています。
アナさんは5ドル紙幣を x 枚、10ドル紙幣を y 枚持っていると考えて、それぞれの紙幣は何枚あるでしょうか?

a) 「アナさんは紙幣を8枚持っている」状況を示す方程式を書きましょう。
b) 「合計55ドル」という状況を示す方程式を書きましょう。
c) 表を作りそれぞれの紙幣が何枚あるのかを求めましょう。

1.4 連立二元一次方程式

P

ビダ・サナ青果店では、ぶどう1ポンドとりんご1ポンドは5ドル、ぶどう1ポンドとりんご3ポンドは11ドルします。ぶどう1ポンドとりんご1ポンドはそれぞれいくらでしょうか？



a) 方程式でそれぞれの条件を示します。
b) それぞれの方程式を満たす値のペアを求めるために表を作ります。

S

a) ぶどう1ポンドの価格を x とし、りんご1ポンドの価格を y として考えます。

ぶどう1ポンドの価格 + りんご1ポンドの価格 $\longrightarrow$ $x + y = 5$

ぶどう1ポンドの価格 + りんご3ポンドの価格 $\longrightarrow$ $x + 3y = 11$

b) 表を作るために、2つの条件を考えます $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$

x	0	1	**2**	3	4	5
y	5	4	**3**	2	1	0
$x + y$	5	5	**5**	5	5	5
$x + 3y$	15	13	**11**	9	7	5

2つの条件を満たす x と y の値は $\mathbf{x = 2, y = 3}$ となります。つまり、ぶどう1ポンドの価格は2ドル、リンゴは3ドルとなります。

C

問題の2つの条件を満たす値は連立方程式の解といい、**連立方程式を解く**という事は2つの方程式を満たす値を求めるという事になります。

1. 次の値のペアのうち、どれが以下の連立方程式の解でしょうか？ $\begin{cases} x - y = 10 \\ 2x + y = 32 \end{cases}$

a) $x = 15,\quad y = 5$
b) $x = 20,\quad y = 6$
c) $x = 14,\quad y = 4$

2. 解が $x = 3$ と $y = 1$ となるのはどの連立方程式でしょうか？

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$

1.5 消去法の意味

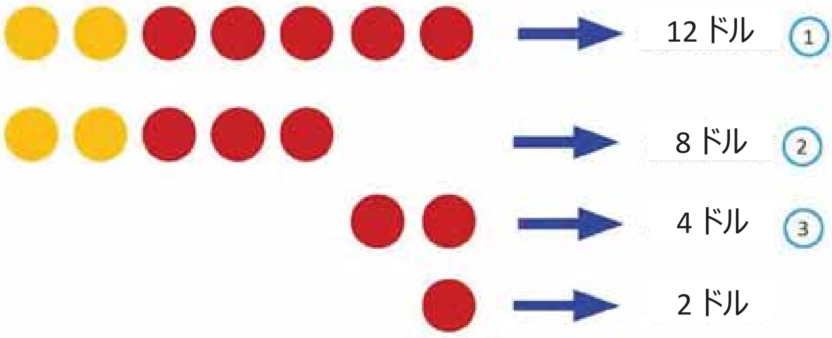
P

中央市場ではパイナップル 2個とスイカ 5個の価格は12ドルで、パイナップル 2個とスイカ 3個は8ドルです。パイナップル 1個とスイカ 1個の価格はそれぞれいくらでしょうか?

S

図で示してみると：

パイナップル 1個の価格 ● 、スイカ 1個の価格 ●。



パイナップル 1個の価格は 1ドルで、スイカ 1個の価格は 2ドル。

パイナップルの価格を x ドル、スイカの価格を y ドルとし、図 1と 2を解で示すと次のようになります：

$$\begin{cases} 2x + 5y = 12 & ① \\ 2x + 3y = 8 & ② \end{cases}$$

これらの方程式から次のように導き出されます：

$$2y = 4 \quad ③$$
$$y = 2$$

$2x + 3 \times 2 = 8$、以上より $x = 1$ となります。

C

係数の中の未知数のうちの1つが同じ符号と同じ絶対値を持つ連立方程式を解くためには：

1. 2つの方程式の左辺と右辺を引き算する事により差が導き出されます。
2. 未知数が1つある新たな方程式が導き出されます。
3. 導き出された方程式を解きます。
4. 連立方程式のどちらかに導き出された値を代入します。

$$\begin{array}{rr} & 2x + 5y = 12 \\ (-) & 2x + 3y = 8 \\ \hline & 2y = 4 \\ & y = 2 \end{array}$$

以上に述べた処理は、**消去**といいます。解いた連立方程式を例にすると、x は同じ絶対値と同じ符号の係数を持っています。

$$\begin{cases} 2x + 5y = 12 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$$

$y = 2$ を方程式 ② に代入すると

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 2x + 3 \times 2 &= 8 \\ 2x + 6 &= 8 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

引き算による消去を応用して連立方程式を解きなさい。

a) $\begin{cases} 2x + 7y = 22 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = 20 \\ 2x - 2y = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + 34y = 0 \\ 2x + 34y = 9 \end{cases}$

1.6 加法消去法

P

連立方程式を解きなさい。 $\begin{cases} 3x-5y=25 & ① \\ 5x+5y=15 & ② \end{cases}$

係数の符号を考え、減法を使うためにどのような計算を行うかを示します。

y の係数の符号と絶対値を考えましょう。

S

左辺と右辺を足すと、それぞれ2つの方程式は次のようになります：

$$\begin{array}{rl} & 3x-5y=25 \longrightarrow ① \\ (+) & \underline{5x+5y=15} \longrightarrow ② \\ & 8x \qquad = 40 \\ & \qquad x=5 \end{array}$$

一般的に代数を用いると、符号 x は取り除かれ、例えば 5 × 5 = 5(5) のように、かっこを用いた掛け算で表わされます。

② に *x* = 5 を代入し、*y* の値を求めます。

$$\begin{aligned} 5x+5y&=15 \\ 5(5)+5y&=15 \\ 5y&=15-25 \\ 5y&=-10 \\ y&=-2 \end{aligned}$$

連立方程式の解は、*x* = 5、*y* = -2 となります。

C

消去法を使って連立二元一次方程式を解くには、未知数の係数の絶対値と符号を常に検討する必要があります。

未知数のうちの 1つが同じ絶対値を持つが符号が異なるという係数の場合、方程式の両辺の項に対しそれぞれ加算を行います。

例えば前の問題で解いた方程式では、*y* の係数は同じ絶対値ですが符号は違います。

$$\begin{cases} 3x-5y=25 \\ 5x+5y=15 \end{cases}$$

このように消去法を使って連立方程式を解く時は3つ目の一元方程式を解きます。

- 解かれた方程式に *y* を含まない場合、*y* を**消去する**と言います。
- 解かれた方程式に *x* を含まない場合、*x* を**消去する**と言います。

引き算による消去を使って連立方程式を解きましょう。

a) $\begin{cases} 7x-4y=3 \\ 2x+4y=42 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+3y=20 \\ -2x+5y=-4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x+2y=4 \\ -3x-4y=-2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-2y=-7 \\ -2x+2y=2 \end{cases}$

1.7 加法または減法による消去法　その1

P

消去する未知数の係数の絶対値が同じでない時、どのように連立方程式に対して消去を行う事ができるでしょうか?

連立方程式を解きなさい： $\begin{cases} x + 3y = -4 & ① \\ 4x + 2y = 4 & ② \end{cases}$

S

$$
\begin{array}{lcr}
① \times 4 & \longrightarrow & 4x + 12y = -16 \\
② & \longrightarrow & (-)\ \ 4x + 2y\ \ = 4 \\
\hline
 & & 10y = -20 \\
 & & y = -2
\end{array}
$$

① に *y* を代入すると

$$
\begin{aligned}
x + 3y &= -4 \\
x + 3(-2) &= -4 \\
x - 6 &= -4 \\
x &= -4 + 6 \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

連立方程式の解は、*x* = 2、*y* = -2 となります。

等式の性質を復習しましょう：方程式に1つの数字を掛ける時、両辺の全ての項に掛け算をします。例えば、方程式 $x + 3y = -4$ に 4 を掛けると：

$$4(x + 3y) = 4(-4)$$

C

絶対値が同じである係数を持つ未知数がないが、未知数うちの1つの係数を分析するとその係数が他の係数の倍数である連立方程式を解くためには、次の事が必要です：

1. 消去するのに適切な未知数を特定する。
2. 係数の絶対値がもう1つの方程式の同一の未知数の係数と同じにできる数字で方程式に掛け算をする。
3. どのような計算を行うのかを決める：加算か減算。
4. 消去を行った方程式を解く。
5. 連立方程式の中の方程式のどれか1つに4番で求めた値を代入する。

解答した例題については、① の中に係数 1があるので、*x* を消去する事を選択しました。

加算または減算による消去法を使いながら連立方程式を解きなさい。

a) $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 3x + 5y = 17 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + 6y = 8 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 2y = 25 \\ 9x + 5y = 64 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 6x + 5y = -7 \end{cases}$

消去したい未知数を特定してから、係数が同じ絶対値になるように掛ける数字を考えましょう。

1.8 加法または減法による消去法　その2

連立方程式を解きましょう：
$$\begin{cases} 3x-4y=3 & \text{①} \\ 2x-3y=1 & \text{②} \end{cases}$$

未知数のうちの1つの係数が同じ絶対値を持つようにし、消去法を使うためには何をするべきでしょうか?

$$\begin{array}{lr} \text{①} \times 2 \longrightarrow & 6x-8y=6 \\ \text{②} \times 3 \longrightarrow & (-)\ 6x-9y=3 \\ \hline & y=3 \end{array}$$

② に y を代入すると

$$\begin{aligned} 2x-3y&=1 \\ 2x-3(3)&=1 \\ 2x-9&=1 \\ 2x&=1+9 \\ 2x&=10 \\ x&=5 \end{aligned}$$

連立方程式の解は、$x = 5$、$y = 3$ となります。

$$\begin{array}{lr} \text{①} \times 3 \longrightarrow & 9x-12y=9 \\ \text{②} \times 4 \longrightarrow & (-)\ 8x-12y=4 \\ \hline & x \qquad =5 \end{array}$$

① に x を代入すると

$$\begin{aligned} 3x-4y&=3 \\ 3(5)-4y&=3 \\ 15-4y&=3 \\ -4y&=3-15 \\ -4y&=-12 \\ y&=3 \end{aligned}$$

連立方程式の解は、$x = 5$、$y = 3$ となります。

消去を使いながら連立二元一次方程式を解くには以下の事項が必要です：

1. 消去する未知数を特定する。
2. 消去を行う未知数が同じ絶対値の係数になるような数字をそれぞれの方程式に掛ける。
3. 消去を行うために加算するのか減算するのかを特定する。
4. 消去を行った方程式を解く。
5. 連立方程式の中の方程式の1つに消去を行った方程式によって求められた値を代入する。

加算または減算による消去法を使いながら連立方程式を解きなさい。

a) $\begin{cases} 3x-2y=18 \\ 7x-5y=41 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+3y=37 \\ 3x+5y=58 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x-5y=-1 \\ 4x-3y=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{1}{2}x+2y=6 \\ \frac{1}{2}x-2y=0 \end{cases}$

係数の絶対値を等しくするには、まず消去する未知数を考えましょう。

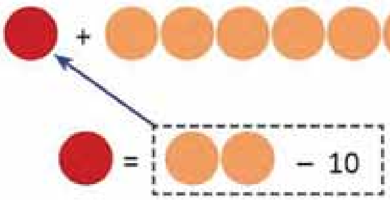
同じ絶対値の係数にするために、計算をより楽にするよう係数の最小公倍数を考えもいいでしょう。

1.9 代入の意味

中央市場では、豆 1キンタルととうもろこし 7キンタルの価格は440ドルで、豆 1キンタルの価格はとうもろこし 2キンタルより 10ドル少ない価格です。豆 1キンタルととうもろこし 1キンタルの価格はそれぞれいくらでしょうか?

図で示してみると：

豆 1キンタルの価格を🔴、とうもろこし 1キンタルの価格を🟠とします。



🔴は🟠🟠 – 10と等しいので、🔴に🟠🟠 – 10 を代入します

豆 1キンタルの価格を x、とうもろこし 1キンタルの価格を y とすると、2つの条件を満たすには次のような連立方程式が立てられます：

$$\begin{cases} x + 7y = 440 & ① \\ x = 2y - 10 & ② \end{cases}$$

方程式 ② では $x = 2y - 10$ となります。

② を ① に代入すると次のようになります：

$$(2y - 10) + 7y = 440$$
$$2y - 10 + 7y = 440$$
$$9y = 440 + 10$$
$$9y = 450$$
$$y = 50$$

導き出された値 $y = 50$ を方程式 ② に代入します

$$x = 2(50) - 10$$
$$x = 100 - 10$$
$$x = 90$$

$$\begin{tikzcd} x = 2y - 10 \arrow[d] \\ x + 7y = 440 \arrow[d] \\ (2y - 10) + 7y = 440 \end{tikzcd}$$

未知数 x を方程式 $x + 7y = 440$ に代入する事によって、連立方程式の中の2つの方程式から新たに一元方程式が導き出されます。これを解くと、とうもろこし 1キンタルの価格は 50ドル、豆の価格は 90ドルとなります。

例題に示された通り、1つの未知数を対等な式と置き換えると1つの未知数に消去される方法を**代入**といいます。

代入を使って連立方程式を解きましょう。

a) $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ x = 9y - 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 9x - 3y = 12 \\ y = 11 - 2x \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - \frac{1}{2}y = 10 \\ \frac{1}{2}y = 9 - 2x \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 2y = 7 - x \end{cases}$

1.10 代入法

P

次の連立方程式を解くために代入法を使い、行った処理を書きましょう：

$$\begin{cases} 5x + y = 14 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases}$$

S

連立方程式は次の通りです：

$$5x + y = 14 \quad ①$$
$$2x + 3y = 16 \quad ②$$

係数が 1 の未知数を整理しましょう。

方程式 ① の y を整理して、$y = 14 - 5x$ と導き出します。

方程式 ② の y に $14 - 5x$ を代入します。

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 16 \\ 2x + 3(14 - 5x) &= 16 \\ 2x + 42 - 15x &= 16 \\ -13x + 42 &= 16 \\ -13x &= 16 - 42 \\ -13x &= -26 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} 5x + y = 14 \arrow[d] \\ y = 14 - 5x \arrow[d] \\ 2x + 3y = 16 \arrow[d] \\ 2x + 3(14 - 5x) = 16 \end{tikzcd}$$

$y = 14 - 5x$ に $x = 2$ を代入すると

$$\begin{aligned} y &= 14 - 5x \\ y &= 14 - 5(2) \\ y &= 14 - 10 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

連立方程式の解は、$x = 2$、$y = 4$ となります。

C

代入を使いながら連立二元一次方程式を解くには以下の事項が必要です：

1. より整理しやすい未知数を特定する。
2. 整理を行う。
3. 整理した未知数を他の方程式 2番に代入する。
4. 導き出された方程式を解く。

代入法を使って連立方程式を解きましょう。

a) $\begin{cases} 3x + y = 24 \\ 7x - 3y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 3y = -11 \\ 4x + 2y = 40 \end{cases}$

より整理しやすい未知数を特定するためには、係数に注目します。

c) $\begin{cases} x = y + 9 \\ 7x - 2y = 57 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = 5x + 4 \end{cases}$

1.11 連立二元方程式の解き方

P

次のように連立方程式があります $\begin{cases} 10x - 3y = 4 \\ 3y = 4x + 2 \end{cases}$

- これを解くために最も適切だと思う方法を示しなさい。あなたの答えを証明しなさい。
- 解を求めなさい。

S

- 引き算を使います。

$$\begin{cases} 10x - 3y = 4 & ① \\ 3y = 4x + 2 & ② \end{cases}$$

$$\begin{array}{rr} & 10x - 3y = 4 \\ (+) & -4x + 3y = 2 \\ \hline & 6x \quad\quad = 6 \\ & x = 1 \end{array}$$

- ②に次のものを代入します。

$$\begin{aligned} 3y &= 4(1) + 2 \\ 3y &= 4 + 2 \\ 3y &= 6 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

連立方程式の解は、$x = 1$、$y = 2$ となります。

- 代入を使います。

$$\begin{cases} 10x - 3y = 4 & ① \\ 3y = 4x + 2 & ② \end{cases}$$

- 方程式 ①に $3y$ を代入します。

$$\begin{aligned} 10x - 3y &= 4 \\ 10x - (4x + 2) &= 4 \\ 10x - 4x - 2 &= 4 \\ 6x &= 4 + 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

- ②に $x = 1$ を代入します。

$$\begin{aligned} 3y &= 4(1) + 2 \\ 3y &= 4 + 2 \\ 3y &= 6 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

連立方程式の解は、$x = 1$、$y = 2$ となります。

C

連立方程式を解く際は、方程式のタイプによって方法を選択する事ができます。

- 未知数が同じ絶対値の係数を持っている、またはその係数の 1つが他のものの倍数である時は、**消去**法を使う方がより楽です。
- 方程式の未知数が既に整理されている、または未知数に係数 1 がある時は、**代入**を使う方がより楽です。

1. 最も適切だと思う方法を使って連立方程式を解きましょう。

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ 2y = 5x - 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -3x + 4y = 6 \\ 9x - 8y = -18 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 2x + 11 \\ 5x + 6y = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$

2. 代入法を選択する方がよりやりやすいのはどのようなケースでしょうか?消去法を選択する方がよりやりやすいのはどのようなケースでしょうか?

1.12 係数が小数の連立方程式

P

連立方程式を解きなさい。

$$\begin{cases} 0.4x + 1.7y = 5.8 & ① \\ 0.1x + 0.3y = 1.2 & ② \end{cases}$$

係数を整数に変えて、既に勉強した方法の 1つを使いましょう。

S

1. 整数の係数を持つ方程式に変えましょう。

$$① \times 10 \longrightarrow 4x + 17y = 58$$
$$② \times 10 \longrightarrow x + 3y = 12$$

2. 方程式 ② の x を整理します。

$$x + 3y = 12$$
$$x = 12 - 3y \quad ③$$

3. 方程式 ① に x を代入します。

$$\begin{aligned} 4x + 17y &= 58 \\ 4(12 - 3y) + 17y &= 58 \\ 48 - 12y + 17y &= 58 \\ 5y &= 58 - 48 \\ 5y &= 10 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

4. ③ に $y = 2$ を代入します。

$$x = 12 - 3(2)$$
$$x = 6$$

連立方程式の解は、$x = 6$、$y = 2$ となります。

小数に 10、100、1000 を掛ける場合は、小数点を右の位に移動させたり、位にゼロを付け加える事に等しくなります。

$0.123 \times 10 = 1.23$
$0.123 \times 100 = 12.3$
$0.123 \times 1000 = 123$

$0.2 \times 10 = 2$
$0.2 \times 100 = 20$
$0.2 \times 1000 = 200$

方程式の両辺の全ての項に掛け算をする事を復習しましょう。

C

例題が示した通り、係数が小数である連立方程式を解くには、係数が整数となるような数字をそれぞれの方程式に掛け合わせてから、最も適切だと考える方法を適用します。

最も適切な方法を使って連立方程式を解きなさい。

a) $\begin{cases} 0.2x + 0.4y = 3 \\ 5x + y = 21 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 0.15x + 0.08y = 1 \\ 0.5x + 0.3y = 3.5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 0.2x + 0.3y = 0.1 \\ x + 0.5y = 3.5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 0.8x + 2y = 0.9 \\ 0.4x - 3y = -0.55 \end{cases}$

係数を整数に変えるためにそれぞれの方程式に対し、何の数字を掛けなければならないでしょうか?

係数を整数に変えなくても連立方程式を解く事はできますが、計算はより複雑になります。

係数を整数に変えずに連立方程式を解いてみて、その結果を比べましょう。

1.13 係数が分数の連立方程式

P 連立方程式を解きなさい。

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y = 12 & ① \\ \frac{7}{9}x + y = 15 & ② \end{cases}$$

係数を整数に変えて、既に勉強した消去法または減法のうち 1つを使いましょう。

S

1. 整数の係数を持つ方程式に変えましょう。

$$① \times 12 \longrightarrow 8x + 9y = 144$$
$$② \times 9 \longrightarrow 7x + 9y = 135$$

2. ①から②を引いて y を消去します。

$$\begin{aligned} ① &\longrightarrow & 8x + 9y &= 144 \\ ② &\longrightarrow & (-)\ 7x + 9y &= 135 \\ \hline & & x \qquad &= 9 \end{aligned}$$

7学年で勉強した等式の性質を応用しなければなりません。

方程式の両辺の全ての項に掛け算をする事を忘れてはなりません。

3. 方程式①に $x = 9$ を代入します。

$$\begin{aligned} 8(9) + 9y &= 144 \\ 9y &= 144 - 72 \\ 9y &= 72 \\ y &= 8 \end{aligned}$$

連立方程式の解は、$x = 9$、$y = 8$ となります。

C 例題に示される通り、係数が分数である連立方程式を解くには、分数の係数を整数に変えるような数をそれぞれの方程式に掛け合わせてから、最も適切だと考えられる解き方を適用します。

係数を整数に変えなくても連立方程式を解く事はできますが、計算はより複雑になります。

係数を整数に変えずに連立方程式を解いてみて、その結果を比べましょう。

最も適切な方法を使って連立方程式を解きなさい。

a) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 6 \\ 3x + 5y = 63 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = 3 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$

どの数字を掛け合わせるのかを知るため、分母の最小公倍数を考えましょう。

c) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y = -4 \\ x + \frac{1}{3}y = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{4}{3}x + \frac{2}{5}y = -2 \\ \frac{1}{3}x + y = 4 \end{cases}$

1.14 かっこを含む連立方程式

連立方程式を解きなさい。

$$\begin{cases} 8x - 3(x - y) = 50 & ① \\ 3(x + y) - (6y - 5x) = 41 & ② \end{cases}$$

かっこをまとめて同等の連立方程式を導き出して、既に勉強した消去法または減法のいずれかを適用しましょう。

1. 次に示される計算を行います：

$$① \longrightarrow 8x - 3x + 3y = 50 \longrightarrow 5x + 3y = 50$$
$$② \longrightarrow 3x + 3y - 6y + 5x = 41 \longrightarrow 8x - 3y = 41$$

2. ①と②を合算し *y* を消去します。

$$\begin{array}{rrl} ① \longrightarrow & & 5x + 3y = 50 \\ ② \longrightarrow & (+) & 8x - 3y = 41 \\ \hline & & 13x \quad = 91 \\ & & x = 7 \end{array}$$

7学年では、示された計算を行って四則演算の法則を使いながら、かっこをまとめる事を学習しました。

3. 方程式 ①に *x* を代入します

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 50 \\ 5(7) + 3y &= 50 \\ 3y &= 50 - 35 \\ 3y &= 15 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

連立方程式の解は、$x = 7$、$y = 5$ となります。

かっこがある連立二元一次方程式を解くには、例題の通り以下の事が必要です：

- かっこをまとめ、示された計算を行う事。
- 最も適切だと考える方法を使って連立方程式を解く事。

最も適切な方法を使って連立方程式を解きなさい。

a) $\begin{cases} 4x - 3y = 21 \\ 4(y - x) + y = -27 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2(x - y) + 34 = 0 \\ 3x + 5y = -7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 5(2x + y) = 19 \\ 5(6x + y) - 10 = 45 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{1}{2}(4x - 4) + \frac{3}{2}y = 2 \\ 3(2x + 34) - 5y = -4 \end{cases}$

1.15 $ax + by + c = 0$ の形の連立方程式

連立方程式を解きなさい。

$$\begin{cases} 0.8x + 1.3y - 14.5 = 0 & ① \\ 0.4x - 0.3y - 2.5 = 0 & ② \end{cases}$$

等式の一辺に未知数の項を 2つ残し、連立方程式のそれぞれの方程式を $ax + by = -c$ の形に変換します。

1. $ax + by = -c$ の形にするよう、独立した項である c を移項します。

$$\begin{array}{ll} ① \longrightarrow & 0.8x + 1.3y = 14.5 \\ ② \longrightarrow & 0.4x - 0.3y = 2.5 \end{array}$$

2. 係数を整数に変えるために 10 を掛けます。

$$\begin{array}{ll} \times 10 \longrightarrow & 8x + 13y = 145 \\ \times 10 \longrightarrow & 4x - 3y \;\; = 25 \end{array}$$

3. ① から ② を2倍したものを引き、x を消去します。

$$\begin{array}{lrr} ① & \longrightarrow & 8x + 13y = 145 \\ ② & \times 2 \longrightarrow & (-)\;\; \underline{8x - 6y = 50} \\ & & 19y = 95 \\ & & y = 5 \end{array}$$

4. 方程式 ② に $y = 5$ を代入します。

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 25 \\ 4x - 3(5) &= 25 \\ 4x - 15 &= 25 \\ 4x &= 25 + 15 \\ 4x &= 40 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

連立方程式の解は、$x = 10$、$y = 5$ となります。

$ax + by + c = 0$ の形の連立二元一次方程式を解くには、例題に示されている通り、以下の事をしなければなりません：

- 項の移項を行い、方程式を $ax + by = -c$ の形にする事。
- 最も適切だと考える方法を使って連立方程式を解く事。

最も適切な方法を使って連立方程式を解きなさい。

a) $\begin{cases} 2x + 5y + 1 = 0 \\ 3x - 2y - 8 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 5y - 4 = 0 \\ 15y = 4x + 3 \end{cases}$

$ax + by = -c$ の形にせずに連立方程式を解く事も試してみましょう。

1.16 復習問題

最も適切な方法を使って連立方程式を解きなさい。

1. $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 5x - 2y = -16 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + 4y = 3 \\ 6x - 5y = -11 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y = 16 \\ 5x - 3y = 32 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + y = 30 \\ 0.8x - 0.5y = -2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 0.8x - 0.2y = 7 \\ 0.4x + 2y = 14 \end{cases}$

1.17 復習問題

最も適切な方法を使って連立方程式を解きなさい。

1. $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 4 \\ x + y = 10 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y = 3 \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = -4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ \frac{x - 5}{4} = x + 2y \end{cases}$

4. $\begin{cases} x - 2(x + y) = 3y - 2 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 6x - 5y - 7 = 0 \\ -13x + 30y - 4 = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 0.2x + 0.3y + 0.2 = 0 \\ \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}y - \frac{5}{2} = 0 \end{cases}$

2.1 幾何学における連立方程式の応用

P

門のサイズを求めなさい。外周は16メートルで、底辺は高さよりも2メートル長いことがわかっています。

S

1. わかっている数とわからない数を特定し、未知数を定義しなさい。底辺はx、高さはyとします。

““外周は16mです” $\longrightarrow$ $2x + 2y = 16$

““底辺は高さよりも2m長いです” $\longrightarrow$ $y = x - 2$

2. 等式を求め、連立方程式を書きなさい

$$\begin{cases} 2x + 2y = 16 & ① \\ y = x - 2 & ② \end{cases}$$

問題が提起する条件それぞれに対応する方程式を書きます。

外周は：
2 (底辺) + 2 (高さ) = 16
$2x + 2y = 16$

3. 代入を応用して連立方程式を解きなさい。

$$\begin{aligned} 2x + 2(x - 2) &= 16 \\ 2x + 2x - 4 &= 16 \\ 4x - 4 &= 16 \\ 4x &= 20 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

- ②に、xの値＝5を代入しなさい

$$\begin{aligned} y &= 5 - 2 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

底辺は5m、高さは3mです。

4. 解答が状況に適しているか確認しなさい。
値は正の数なので、門のサイズには適しています。

C

連立二元一次方程式を使って問題を解くのに必要なのは：

1. 未知数で表わされる数を定義します。
2. 連立方程式を考えるために、問題の条件に合った方程式を書きます。
3. 連立方程式を解きます。
4. 解答が状況に適しているか確認します。

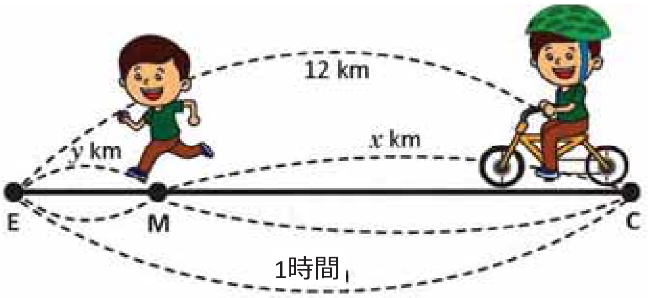
1. カルロスさんは、長方形の土地を相続しました。その長さと幅を足すと30メートルで、長さと幅の差は6メートルです：土地の長さと幅はどのくらいですか？

2. 長方形の底辺は、高さよりも20cm長いです。外周が172cmだと、長方形のサイズはどうなりますか？

2.2 自然科学における連立方程式の応用

アントニオは家から12km離れた学校に行くのに、家から市場までは自転車で時速20kmのスピードで向かい、そこから学校まで時速4kmのスピードで走ります。合計で1時間かかります。家から市場まで、市場から学校まではどのくらいの距離がありますか？

a) 距離と時間の関係を表す表を作りなさい。
b) 情報を表す連立方程式を書き、それを解きなさい。



a)

	家 (C) から 市場 (M) まで	市場 (M) から 学校 (E) まで	合計
距離	x km	y km	12 km
スピード	時速20 km	時速4km	- - - - - - - -
時間	$\frac{x}{20}$時間	$\frac{y}{4}$時間	1時間

$$\text{スピード} = \frac{\text{距離}}{\text{時間}}$$

$$\text{時間} = \frac{\text{距離}}{\text{スピード}}$$

b) 与えられた条件で連立方程式を考えます：

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ \frac{x}{20} + \frac{y}{4} = 1 \end{cases}$$

加減法を応用して解きます：

$$\begin{array}{lcr} ① & \longrightarrow & x + y = 12 \\ ② \times 20 & \longrightarrow & \underline{(-)\ x + 5y = 20} \\ & & -4y = -8 \\ & & y = 2 \end{array}$$

- ①にy＝2を代入します

$$x + 2 = 12$$
$$x = 10$$

x＝10km、y＝2kmの値は問題の二つの条件を満たします。したがって、家から市場までは10km、市場から学校までは2kmになります。

自然科学の問題を解くには、*x*と*y*で表される未知数の大きさを区別し示すことが重要です。その後方程式を作り、それを解きます。

1. カルロスは週末に車でビーチに行きました。家からビーチまで50kmあります。家からガソリンスタンドまで時速30kmで走行し、そこからビーチまで時速15kmで向かいました。合計で2時間かかりました。家からガソリンスタンドまで、ガソリンスタンドからビーチまではどのくらいの距離がありますか？

2. ボートが穏やかな水上を進み、時速25kmのスピードに達し、その後追い風で時速30kmになりました。桟橋から釣りのポイントに行くまで3時間半かかりました。穏やかな水上をどのくらいの時間進みましたか。また追い風を受けてからはどのくらいですか。2点の間の距離は92キロメートルと考えます。

2.3 算数における連立方程式の応用　その1

アナは15%割引されたドレスを買いました。お姉さんのベアトリスはアナのよりも25ドル高いドレスを買いました。しかし20%割引されたので、結局はアナよりも8ドル多くしか払いませんでした。割引前のそれぞれのドレスの値段はいくらでしたか？

a) それらの値段の関係を表す表を作りなさい。
b) 問題の条件を表す連立方程式を書き、それを解きなさい。

1.

	アナのドレス	ベアトリスのドレス	値段の比較
元の値段	xドル	yドル	$y = x + 25$
割引	xの15%	yの20%	- - - - - - - -
割引後の価格	0.85xドル	0.8yドル	$0.8y = 0.85x + 8$ ドル

2. 問題の条件を用いて連立方程式を考えます：

$$\begin{cases} y = x + 25 & \textcircled{1} \\ 0.8y = 0.85x + 8 & \textcircled{2} \end{cases}$$

- 方程式 ②の係数を整数に変えます

$$80y = 85x + 800$$

3. 代入の方法を応用します：

$$80(x + 25) = 85x + 800$$
$$80x + 2\,000 = 85x + 800$$
$$80x - 85x = 800 - 2\,000$$
$$x = 240$$

- ① の方程式に$x = 240$を代入します

$$y = 240 + 25$$
$$y = 265$$

4.

	割引前の価格	割引	割引後の価格
アナ	$240.00	$36.00	$204.00
ベアトリス	$265.00	$53.00	$212.00

するとアナはドレスに204.00ドル払い、ベアトリス は212.00ドル払ったことになります。

連立方程式を使ってパーセントの問題を解くには、大きさで表されるデータをxとyで示すことが重要です。その後連立方程式を考え、それを解きます。

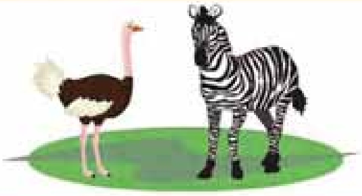
1. マリアはパンツとブラウスを買いました。これらの服の合計は70.00ドルでしたが、パンツは10%、ブラウスは20%の割引があったので、合計で59.00ドル払いました。それぞれの服の割引前の値段はいくらですか？

2. ある商人が2つの商品を200.00ドルで買い、それらを合計233.00ドルで売ります。販売時に2つのうちのひとつは25%の利益があり、もうひとつは20%の損失が出ます。それぞれをいくらで購入していますか？

2.4 算数における連立方程式の応用　その2

P

動物園にはダチョウとシマウマが7対8の比率でいます。それら全部で92本の足が数えられます。ダチョウは何羽、シマウマは何頭いますか？



S

1. ダチョウの数をy、シマウマの数をxとし、条件を表しなさい：

“7対8の比率”　$y:x = 7:8 \longrightarrow 8y = 7x$

“92本の足が数えられます”　$4x + 2y = 92 \longrightarrow 4x + 2y = 92$

2. 連立方程式を考えます：

$$\begin{cases} 8y = 7x & ① \\ 4x + 2y = 92 & ② \end{cases}$$

3. 連立方程式を解きます：

- 方程式 ①からyを消去します

$$y = \frac{7}{8}x$$

- ②の方程式に $y = \frac{7}{8}x$ を代入します

$$4x + 2\left(\frac{7}{8}x\right) = 92$$

$$4x + \frac{7}{4}x = 92$$

$$16x + 7x = 368$$

$$23x = 368$$

$$x = 16$$

- ①に、xの値＝16を代入します

$$y = \frac{7}{8}(16)$$

$$y = 7(2)$$

$$y = 14$$

したがって、ダチョウ14羽、シマウマ16頭となります。

- 比率の部分：

- 比例式の基本の特性。

$a:b = c:d$ とすると、こうなります：
$a \times d = b \times c$

C

連立方程式は、応用例に見られるような日常のさまざまな問題を解くのに使われます。

- 幾何学：平面図形の面積や外周など
- 自然科学：直線運動など
- 財務上の数学：パーセントなど
- 算数：比率、比例式など

1. 水道工事屋とその助手はトイレを3台設置して270.00ドル受け取り、7：2の比率で分けました。それぞれいくら受け取りますか？

2. 2人の兄弟の年齢は2：5の比率で、両方の年齢を足すと28歳です。それぞれ何歳ですか？

3. サッカー場の外周は432メートルです。幅と長さが5：7の比率だとしたら、それぞれ何メートルですか？

2.5 復習問題

これまでに学んだ戦略と解法を用いて、次の問題を解きなさい。

1. マリオは川で泳ぎの練習をします。最初は流れとは逆に泳ぐと、2キロメートル進むのに30分かかります。その後、流れにのって泳ぐと、同じ距離も15分ですみます。
   a) 問題に含まれるわからない数はいくつありますか？それはどれですか？
   b) 問題の中のわかっているデータはどれですか？
   c) 問題がこれらの数について与える条件は何ですか？これらの条件を、どのように数学的に表しますか？
   d) 川と比べてのマリオのスピードと、岸と比べての川のスピードはどのくらいですか？

2. カルロスは300ドルの支払いを5ドル札と10ドル札で払いました。支払いには合計45枚の札を使いました。それぞれの札を何枚使いましたか？

3. 2桁の数字は以下の通りです。10の位の数は1の位の数の2倍で、2つの数の差は3となります。その数字を計算しなさい。

4. フアンは8,000.00ドルの資金をもっていて、その一部は年金利5%の口座に、それ以外は年金利6%の口座に入れています。増えた資金は1年後には8,450.00ドルになることを踏まえ、それぞれの口座の金額を計算しなさい。

5. ミゲルは3箱の釘と5箱のネジを84.00ドルで買いました。ホセは5箱の釘と7箱のネジを買い、124.00ドル払うことになりました。釘とネジはそれぞれ1箱いくらですか？

2.6 復習問題

次の問題が解くことができ、その答えが論理的であるために、データと条件が十分であるかを見極めなさい。

1. エル・コラル農場では300リットルのミルクを、2リットルと5リットルのボトル計120本に詰めました。それぞれのサイズのボトルは何本ずつ使いましたか？

2. ある農園主は、トウモロコシとインゲン豆の種を蒔こうと決めました。1アールあたり、トウモロコシの種は4ドル、インゲン豆は8ドルかかります。人件費は1アールあたりトウモロコシが10ドル、インゲン豆が20ドルかかります。農園主が種に216ドル、人件費に5,400ドルを用意していたら、それぞれの種を何ヘクタールの土地に蒔くことができますか？

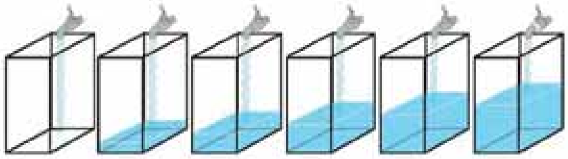
3. ある比率の分子に3を足し、分母から2をひくと、比率は6：7になります。しかし分子から5をひき、分母に2を足すと比率は2：5になります。比率の分子と分母の値は何ですか？

4. 手づくりジュースの業者は2種類のジュースを混ぜることにしました。注文に応えるには、混ぜたジュースの合計量が1420リットルでなくてはなりません。混ぜるココナッツジュースの量はパイナップルジュースの量の3分の2より120リットル多くなっています。 注文されたジュースを作るのにそれぞれのジュースを何リットルずつ混ぜないといけませんか？

ユニット 3

1 次関数

1637年、関数という言葉がはじめて用いられました。フランスの数学者ルネ・デカルトが、変数 x の n 乗を割り当てるにあたって用いました。1694 年には、ドイツの数学者ゴットフリート・ヴィルヘルム・ライプニッツが、この言葉を用いて、曲線のさまざまな形状を傾きと捉えました。近年では、1829 年、最も一般的な用いられ方が、ドイツの数学者ペーター・グスタフ・ルジューヌ・ディリクレ (1805-1859) によって提唱されました。関数を変数 x と y の相関関係と定義し、これを執筆するにあたって、値を y に機械的に割り当てる原則や写像を用いた人物です。



シンクが水でいっぱいになる時間は、
一次関数をもちいれば想定できます。

関数を利用すれば、実社会を数学用語で表すことができます。例えば、温度変動、惑星の動き、脳波、景気循環、心拍数、人口増加率などです。

関数について、この学年では、さまざまな科学現象や日常を想定するのに最も一般的な方法、一般的な特徴を、分析的かつ図式的に学びます。具体的には、一次関数とその因数を復習し、さまざまな場面の解決に用います。例えば、合計請求額を求めるにあたって、 月次消耗品費や固定費を参考にする場合などです。

上下水道公社
コールセンター 915

請求書 No.0905000F2241150
行政センター A6 ビル
電話番号：2255-5568、2555-5569、2555-5570

顧客名
サンマテオ郡 競馬場前 大通り 45 番地
サン・サルバドル

区分 口座番号 請求日

民事訴訟法改正版 民事訴訟法 問い合わせ消費量 上下水道公社 締日

サービス料

小計

三十八ドルと八十五セント

未払残高
合計請求額 $
エルサルバドル
コロン換算

上下水道公社：2018/09/25 銀行：2018/09/24

節水は全国民の責務です。「水を守りましょう」

ご自宅の漏水を直して、水の使いすぎを防ぎましょう。

合計消費量の記録

顧客支払証明書

合計請求金額は、一次関数で
求めることができます。

1.1 正比例の意味を復習する

P

マラソン選手がコースを最初の8分間で2 km 進みました。8 分以降もこのスピードで走り続ける場合、

1. 比例定数を求めなさい。
2. x 分後までに走った距離 y を表しなさい。
3. 42 km のコースを完走するのに、いくら時間がかかりますか。

S

1. x と y の1組の値が分かっているので、$y = ax$ の式に代入し、a の値を求めます。

$y = ax$ で、$x = 8, y = 2$ のとき、

$$2 = a(8)$$
$$\frac{2}{8} = a$$
$$a = \frac{1}{4}$$

2. x 分後の距離 y を表すと、$y = \frac{1}{4}x$

3. 42 km のコースを完走するのにかかる時間を求めるために、$y = 42$ の値を $y = \frac{1}{4}x$ に代入します。

$42 = \frac{1}{4}x$ なので、$x = 168$ 分になります。

よって、42 kmを完走するためには、2 時間48 分必要です。

1. ある自動車は、100 km走行する毎に5リットルのガソリンを消費します。

   a) 比例定数を求めなさい。
   b) x km走行するまでに消費したガソリンのリットル数 y を表しなさい。

   c) 1,250 km走行するためには、何リットルのガソリンが必要ですか。

2. 5 分間で38 リットルの水が蛇口から流れ出ます。表を完成させて質問に答えなさい。

時間	5	10		
水のリットル数	38	76		152

   a) リットル数は経過した時間に比例していますか。あなたの答えを証明しなさい。
   b) 228 リットルになるには、何分経過しなければなりませんか。

3. 写真3枚は5ドルです。写真6枚は9 ドルです。写真の枚数が値段に正比例しているか、推論しなさい。

4. 3 時間働いて、アルベルトは60ドル稼ぎました。受け取るお金が働いた時間に正比例する場合、8時間働いたときはいくらもらえますか。

1.2 正比例の応用

P

表は、正方形の1辺と周りの長さの関係を示しています。表を完成させて、以下を実施しなさい。

辺の長さ x (cm)	1	2	3	4	5
周りの長さ y (cm)	4	8			

1. 正方形の辺の長さ x とその周りの長さ y との間に正比例が存在するか判断し、$y = ax$ の関係を用いてあなたの答えを証明しなさい。

2. 正方形の辺が x のとき、周りの長さ y を表しなさい。

3. 正方形の辺の長さと周りの長さの関係をグラフで表しなさい。

S

表を完成させると、

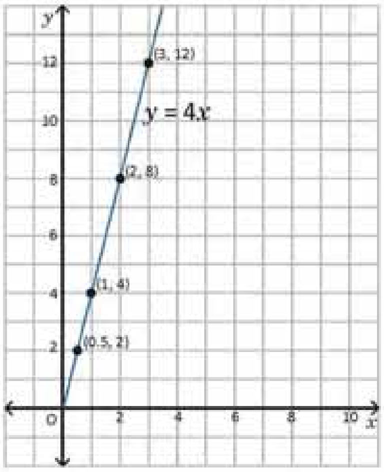
辺の長さ x (cm)	1	2	3	4	5
周りの長さ y (cm)	4	8	12	16	20

1. いくつかの x の値と、そられにそれぞれ対応する y の値が分かっているので、それらの商を計算し、比例定数を求めることができます。

$x = 2$、$y = 8$ ならば、$8 = a(2)$、$a = \frac{8}{2} = 4$、商はすべての場合において同じであることを確認することができます。

2. 比例定数は4 なので、$y = 4x$

3. 正方形の辺と周りの長さの関係を表すグラフを作成するためには、表の x と y の値のいくつかの組み合わせを平面上に表示する必要があります。次に、正方形の辺が取り得るすべての値を含めるために、直線の線分でつなぎます。



- $x = 0$で $y = 4(0) = 0$ なら、これは x が取り得る最小の値です。この場合、正方形は点になります。

- $x = 0.5$, $y = 4(0.5) = 2$。

このようにして、正方形の辺の長さを変えて、座標点をたくさん見つけることができます。

C

変数の1組の値から、正比例の関係を $y = ax$ の式で表すためには、

- 変数に値を代入し、方程式を作ります。
- 方程式の定数の値を求めます。
- 定数の値を $y = ax$ に代入します。

正比例 $y = ax$ のグラフを作成するためには、原点 O(0, 0） と別の1点を 用います。これらの点を通る直線を引きます。

1. サンサルバドルからサンミゲルに向かっている1台の車が、1時間で 50 km 走行しました。目的地に着くまでこのままのスピードで走り続けた場合、以下について答えなさい。

   a) 経過した時間 x と走行距離 y の間には正比例が存在するか判断し、あなたの答えを証明しなさい。

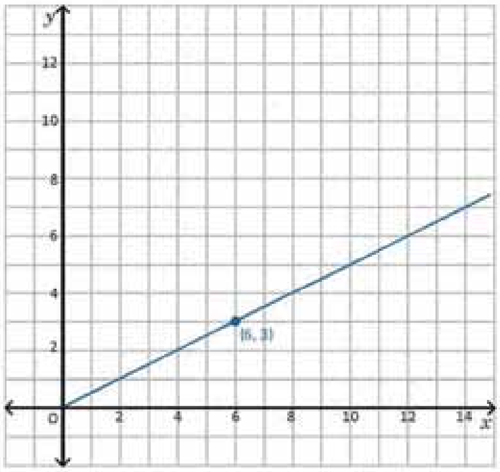
   b) x 時間経過後の走行距離 y を表しなさい。
   c) 経過した時間 x と走行距離 y の関係をグラフで表しなさい。

2. グラフは、x 軸のケーキ数と y 軸のドルでの支払総額の関係を示しています。

   a) ケーキ2個でいくらですか。

   b) ケーキ数と代金の間の比例定数を求めなさい。

   c) ケーキ数 x と支払い額 y の関係を $y = ax$ の式で表しなさい。



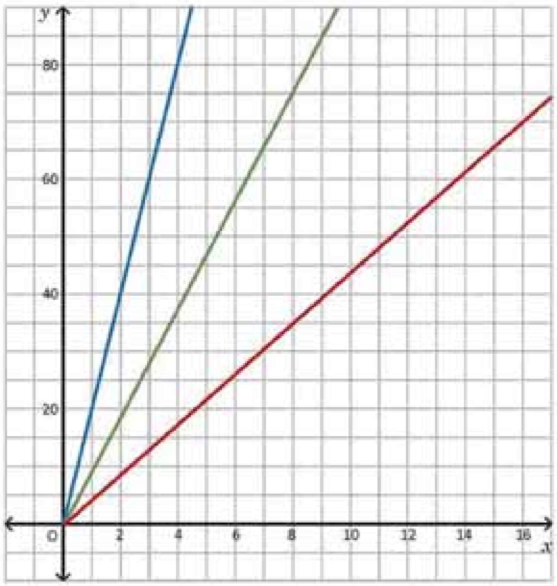
3. 1 分間に20ガロンの水を放出するポンプを使ってタンクをいっぱいにします。

   a) 3つの直線の中で、時間に基づくタンクの水量を表しているのはどれですか。

   b) 比例定数を求めなさい。

   c) x 分後にタンクの中にある水量 y を $y = ax$ の式で表しなさい。

   d) 15分後にタンクの中にある水量はいくらですか。



グラフから $y = ax$ の関数を書くためには、

- グラフが通る、値が整数の1点を選びます。
- 座標の x の値と y の値 を $y = ax$ 代入し、a の値を求めます。
- a を求めた値に置換し、$y = ax$ を書きます。

1.3 一次関数の意味

P

カルメンの家のシンクには5リットルの水が入っています。蛇口を開くと、1分あたり3リットルの水が流れます。表は、シンクに入っている水の、時間の経過に伴うリットル数の変化を表しています。空いている空間を埋めて、質問に答えなさい。

x（分）	0	1	2	3	4	...
y（リットル）	5	8	11			

a) 時間の経過に伴い、シンクの水量がどのように変化するか分析しなさい。x に正比例していますか。
b) 5分後にシンクの中にある水量はいくらですか。
c) x 分後にシンクの中にある水量はいくらですか。
d) y を x を使って表した方程式を書きなさい。

S

表を完成させると、

x（分）	0	1	2	3	4	...
y（リットル）	5	$5 + 3 = 8$	$8 + 3 = 11$	$11 + 3 = 14$	$14 + 3 = 17$	...

a) y が x に正比例しているか判断するためには、商を計算し、比較します。例えば、$\frac{8}{1} = 8$、$\frac{11}{2} = 5.5$
そして、このようにして、次々、時間が経過し、シンクの中の数量が増えるのに従い、すべてを比較します。そこから、比率 $\frac{y}{x}$ は一定ではないと結論付けることができます。よって、y はxに正比例していません。
b) 5分後、シンクには20リットルの水が入っています。$20 = 5 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 + 3(5)$
c) シンクに入っている水量は、最初に入っていたリットル数に、1分経過する毎に3リットルを足した量なので、x 分後は、$5 + 3x$ リットルになります。
d) x 分後の水量を考えると、$y = 5 + 3x$ または $y = 3x + 5$

C

上記の例のように、y を x の一次式として表すことができる x と y の2つの変数があるとき、**y は x の一次関数であるといい、一般的に、関数方程式と呼ばれる $y = ax + b$ の式で表されます。ここで、a は、変数間に比例関係があることを指しています。また、b** は定数です。b の値は、表の $x = 0$ になっている箇所を見て得ることができます。定数 **b** がゼロの値をとるとき、一次関数は正比例になり、**$y = ax$** の式で表されます。

上記の例に関しては、**$y = 3x + 5$** となり、この式で、$a = 3$ および $b = 5$ と特定することができます。したがって、シンクの水量は、経過した時間に正比例していないということです。

1 cm の高さまで水が入っている容器に、毎分3 cm の一定のペースで水が入り始めます。

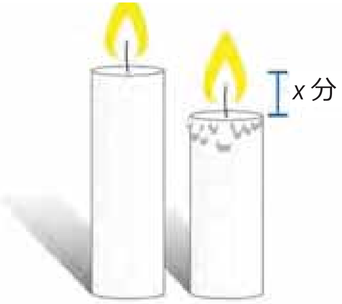
a) 次の表で、x は経過した分数を表し、y は容器に入った水の高さを表します。容器に入っている水量について、値を入れなさい。

x（分）	0	1	2	3	4	5	6	7	...
y（cm）	1	4	7	10					

b) 1分後の水の高さはいくらですか。また、2分後の水の高さはいくらですか。
c) x 分後の水の高さを求めなさい。
d) y を x を使って表した方程式を書きなさい。

1.4 一次関数

以下の各状況に対する変数間の関係が一次関数に相当するか、判断しなさい。



1. 140 ミリメートル（mm）の長さのろうそく1本に火を点けると、1分経過する毎に 4 mm 短くなります。火を点けてから x 分後のろうそくの長さを y とし、x の関数で表しなさい。

2. カルロスは、車1台販売する毎に200 ドルの給料を得ます。x 台の車を販売したときにカルロスが受け取る給料を y とし、y を x の関数で表しなさい。

1. 毎分 4 mm 短くなるので、x 分後は $4x$ 短くなっています。よって、当初140 mmだったろうそくの長さは、x 分後は $y = 140 - 4x$ となっているでしょう。すなわち、$y = -4x + 140$、これを $y = ax + b$ の式と比較すると、$a = -4$ および $b = 140$。したがって、一次関数です。

2. カルロスは、販売した車1台につき、200 ドル受け取ります。車を x 台販売したら、$200x$ の収入を得ます。したがって、車を x 台販売したときの彼の月給は、$y = 200x$ となり、$y = ax + b$ の式と比較すると、$a = 200$ および $b = 0$ なので、一次関数です。

式 $y = ax + b$ で $a < 0$ と、正比例の式 $y = ax$ も、一次関数のケースです。

- 式 $y = ax + b$ で $a < 0$ は、x が増えるにつれて、y は減少します。
- 式 $y = ax$ は、$b = 0$ の場合の一次関数です。

例えば、上記の状況 2 では、$y = 200x$ で $b = 0$ であり、一次関数であることが分かります。また、比率が $\frac{y}{x} = 200$である比例の関係です。

1. 一次関数の方程式を特定しなさい。

a) $y = 2x + 1$　b) $y = \frac{3}{x}$　c) $y = -3x + 2$　d) $y = 3x$

2. y を x の関数で表してから、一次関数であるかどうか分析しなさい。

a) 辺の長さが x である正方形の周りの長さ y
b) 底辺が x で、面積が 16 cm^2 の三角形の高さ y
c) 半径 x の円周 y

1.5 変化の割合の意味

P

マルタは裁縫工房を持っていますが、電気代として毎月10ドルの固定費と、1時間働く毎にプラス3ドルかかります。

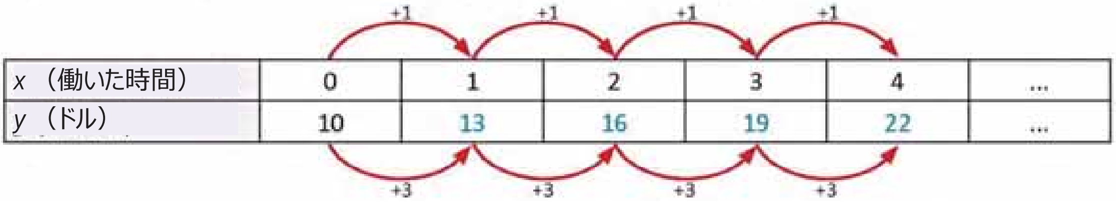
a) 1か月 x 時間働いたときに電気代として支払う1か月の合計金額を y として、次の表を完成させなさい。

x（働いた時間）	0	1	2	3	4	...
y（ドル）	10					

b) 8 時間働くなら、電気代としていくら払いますか。また、100 時間働くなら、いくら支払いますか。
c) y を x の一次関数として表しなさい。
d) x の値が変化するのに伴い、y の値がどのように変化するか、明らかにしなさい。

S

a) 働いた時間と支払う合計金額を入れて表を完成させると、



x（働いた時間）	0	1	2	3	4	...
y（ドル）	10	13	16	19	22	...

b) 1時間働く毎に3ドルの費用が発生するので、8時間働いたときに支払う合計金額は、$y = 10 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 10 + 3(8) = 10 + 24 = 34$ ドル。もし、100 時間働くのであれば、$y = 10 + 3(100) = 310$ ドル。
c) b） の答えを考慮すると、x 時間働いたときに支払う合計金額は、$y = 10 + 3x$、これは、$y = 3x + 10$ に等しいです。
d) x の値に対し、y の値がどのように変化するかを明らかにするためには、2つの異なる働いた時間数を用います。
1 時間と 3 時間

x の値の変化： $3 - 1 = 2$
y の値の変化： $19 - 13 = 6$ → $\dfrac{y\text{ の値の変化}}{x\text{ の値の変化}} = \dfrac{6}{2} = 3$、$y$ の値の変化は、x の値の変化の3倍です。

C

一次関数において、変数 y の変化を x の変化と比較するとき、この比率を変化の割合と呼びます。すなわち、**変化の割**$\dfrac{y\text{ の値の変化}}{x\text{ の値の変化}}$ 。

上記の例では、変化の割合は3です。これは、表の2つの任意の時間において、y の値を x の値と比較して確認することができます。

ミゲルは父親が買い物に行くのについていき、2ポンドのトマトが 3.00ドルするのを見ました。ミゲルが父親に、異なる量のトマトに対してどうやって値段を計算するのか尋ねると、父親はトマトのポンド数を、1ポンド当たりの値段に関連付けなければならないと説明しました。

a） ポンド数を x とし、値段を y として、欠けているデータを入れ、表を完成させなさい。

x（ポンド）	0	1	2	3	4	5	6	7	...
y（ドル）	0	15	3						...

b) トマトを10 ポンド買いたいならば、いくら払わなければなりませんか。
c) ある商人がトマトを50 ポンド買いたいとき、いくら払わなければなりませんか。
d) b) と c) の答えから、変化の割合を求めなさい。
e) ある商人がトマトを x ポンド買いたいとき、いくら払わなければなりませんか。

1.6 変化の割合

P

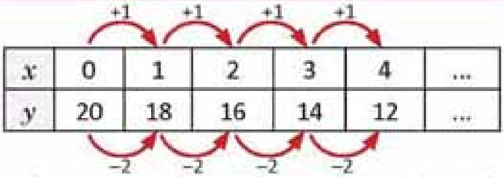
表のデータを観察しなさい。

x	0	1	2	3	4	…
y	20	18	16	14	12	…

a) y を x の一次関数として表しなさい。
b) x の値が 6 ならば、y はいくつですか。x の値が 9 ならば、y はいくつですか。
c) y の x に対する変化の割合を求めなさい。
d) a) の答えで、変化の割合を a の値と比較しなさい。どのように結論付けますか。

S

a) $x = 0$ のとき、$y = 20$ であるのと、x が1ずつ増えるにつれて、y は2減っていくことから、y を x の関数で表すと、$y = 20 - 2x$、これは $y = -2x + 20$ に等しいです。



x	0	1	2	3	4	…
y	20	18	16	14	12	…

b) yの値を求めるために、図で示しているように、表に表示されている値の変化を分析します。x が1ずつ増えるにつれて、y は2減ります。よって、

$$x = 6\text{なら、}y = 20 - 2(6) = 20 - 12 = 8$$
$$x = 9\text{なら、}y = 20 - 2(9) = 20 - 18 = 2$$

c) 2つの瞬間の値をとり、2つの変数における変化を求めます。x の値の変化：$4 - 1 = 3$　y の値の変化：$12 - 18 = -6$

変化の割合 $= \dfrac{y\text{の値の変化}}{x\text{の値の変化}}$ の式を使うと、変化の割合：$\dfrac{-6}{3} = -2$

d) 関数 $y = -2x + 20$ を一次関数の式 $y = ax + b$ と比較すると、$a = -2$ で、変化の割合は、a の値に等しいと結論づけることができます。

C

一次関数 $y = ax + b$ において、変化の割合は一定であり、a の値に等しいです。つまり、

$$\textbf{変化の割合} = \frac{y\text{の値の変化}}{x\text{の値の変化}} = a$$

変化の割合を求めるために式を考慮すると、

- **yの値の変化 $y = a \times$ (xの値の変化)**、すなわち、y の増加は x の増加に比例しています。
- a の値は、x が1ずつ増えるときの y の増加に等しいです。

E

次の各一次関数について、以下を実施しなさい。
1. 変化の割合を特定しなさい
2. $x = 4$ のときの、y の値を求めなさい。

a) $y = 3x - 5$　　b) $y = -2x + 3$

解答

a) 関数 $y = 3x - 5$ の場合は
1. 変化の割合：3
2. $x = 4$ のときのy の値

$$y = 3(4) - 5 = 12 - 5 = 7$$

b) 関数 $y = -2x + 3$ の場合は
1. 変化の割合：-2
2. $x = 4$ のときのy の値

$$y = -2(4) + 3 = -8 + 3 = -5$$

次の各一次関数について、以下を実施しなさい。
1. 変化の割合を特定しなさい
2. $x = 6$ のときの、y の値を求めなさい。

a) $y = 2x - 7$　　b) $y = -3x + 4$　　c) $y = \frac{1}{2}x + 1$

1.7 関数 $y = ax + b$ の特徴

P

3°C に保たれた冷蔵庫の中に水の入ったピッチャーがあり、その後、コンロで温め始めたところ、1分経過する毎に水温が2° C上がります。経過した時間を x、水温を y で表したとき、

a) ノートに次の表を作成し、完成させなさい。

x（分）	0	1	2	3	4	5	…
y（℃）	3						…

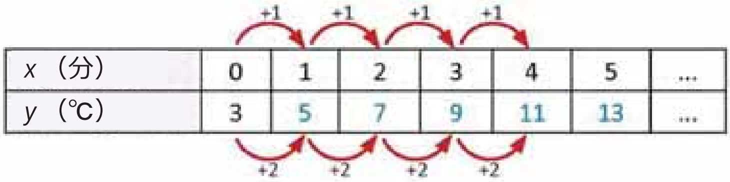
b) y を x の一次関数として表しなさい。
c) 平面に座標（x, y）を描きなさい。
d) その他の y の値、例えば、x の値が 0.5, 1.5などのときの値を求めなさい。求めた値の座標を描きなさい。

S

a) 1分経過する毎に、水温に 2°C足していくと、表は以下のようになります。

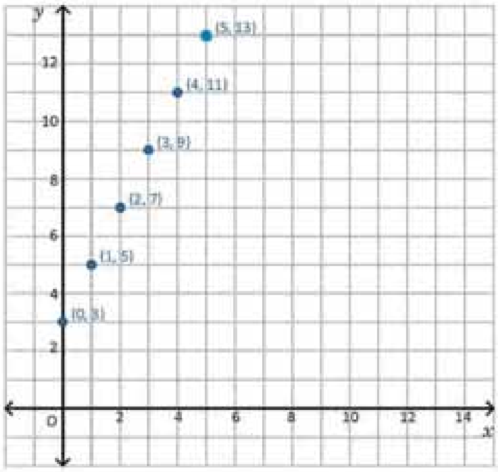
x（分）	0	1	2	3	4	5	…
y（℃）	3	5	7	9	11	13	…

b) y の値の変化を x の値の変化とともに分析すると、図に示されているように、x が1 増える毎に y は 2 増えます。そこから、$y = 2x + 3$



x（分）	0	1	2	3	4	5	…
y（℃）	3	5	7	9	11	13	…

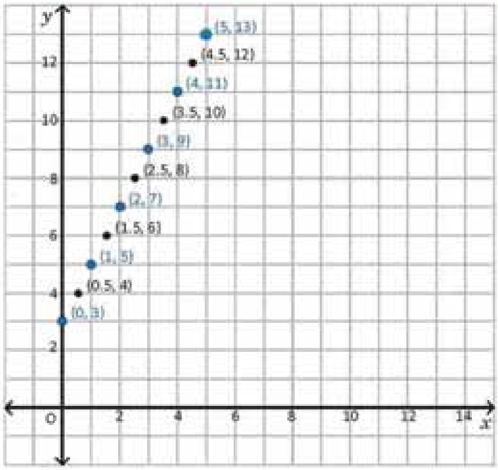
c) a) で求めた値を考慮に入れると、点は図に示されているように、描かれます。

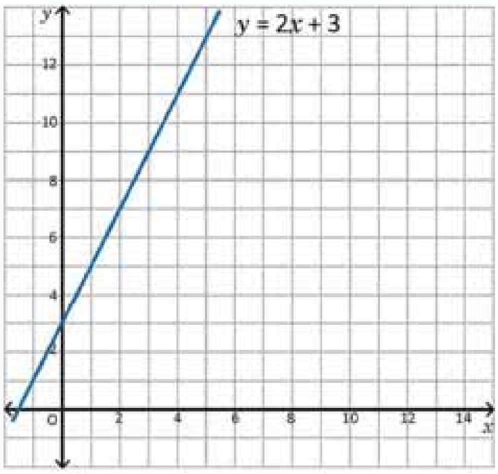


座標平面に座標を描くためには、

x の値を、水平な直線または x軸上に置き、そこから y の値だけ、正の数であれば上方向に、負の数であれば下方向に進みます。

d) 変数 x と y の他の値を求め、図上に描くと、点がだんだんくっついていき、図に示されているように、直線になります。

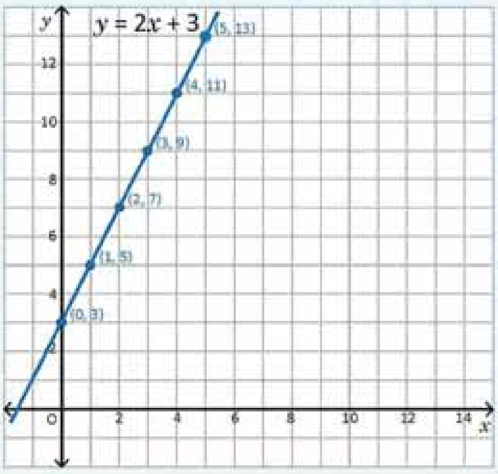




関数 $y = ax + b$ のグラフは直線です。少なくとも2つの座標の変数 x と y の値が分かれば、グラフを描くことができます。

例えば、関数 $y = 2x + 3$ の場合は、グラフは点 （0, 3） を通る直線になります。

すべての一次関数 $y = ax + b$ は、直線のグラフになり、必ず点 （0, b） を通ります。また、$b = 0$ の場合は、座標平面系の原点を通ります。



1. 提示されたフローに従って、ノートに表を作成し、完成させなさい。

x	…	0	1	2	3	4	5	…
$y = x + 5$	…	5	6					…

a) 平面に座標（x, y）を描きなさい。
b) 変数 x に他の値を代入し、y の他の値を求めなさい。
c) 関数のグラフを完成させなさい。

2. ノートに表を作成し、y の各値を求めて表を完成させなさい。

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
$y = 2x + 3$	…								…

a) 平面に座標（x, y）を描きなさい。
b) 変数 x に他の値を代入し、y の他の値を求めなさい。
c) 関数のグラフを完成させなさい。

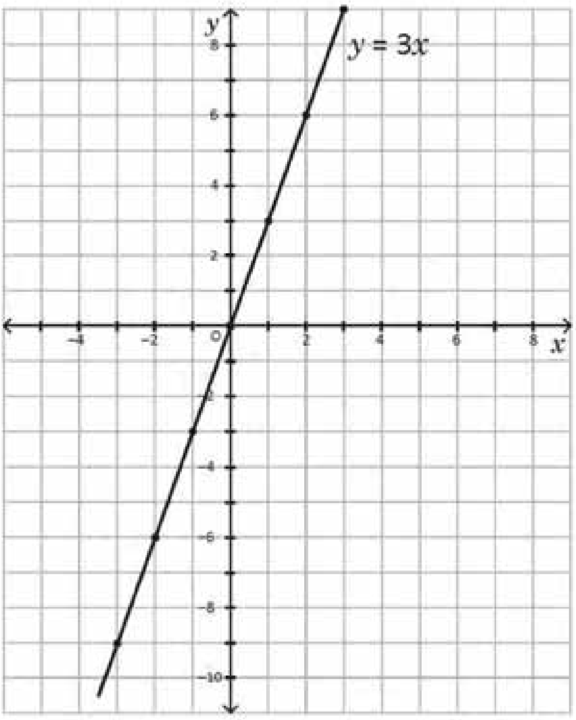
1.8 一次関数 $y = ax + b$ のグラフと $y = ax$ のグラフの関係

P

$y = 3x$ のグラフから、以下を実施しなさい。

a) 表を作成し、完成させ、関数 $y = 3x + 2$ のグラフを $y = 3x$ と同じ平面に描きなさい。

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
$y = 3x$	…	−9	−6	−3	0	3	6	9	…
$y = 3x + 2$	…								



b) $y = 3x$ のグラフと $y = 3x + 2$ のグラフの類似点と相違点を見つけなさい。

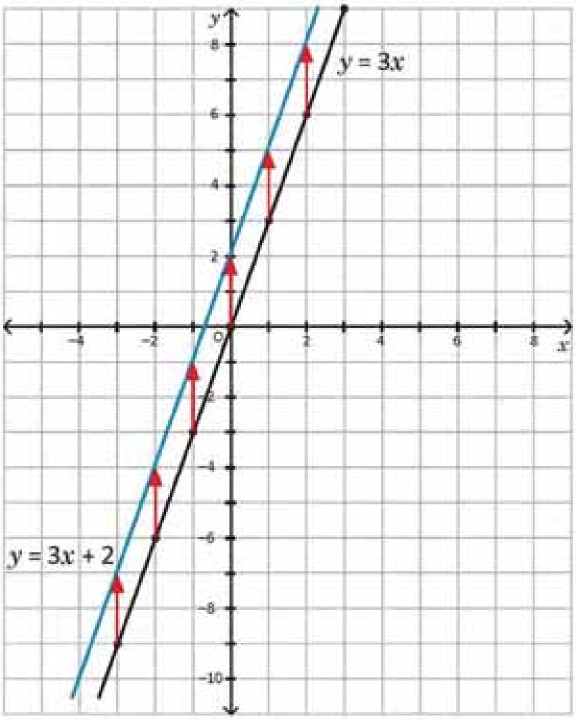
c) $x = 0$ と $x = 2$ の場合のグラフを比較しなさい。どのように結論付けますか。

S

a) 各関数の x に −3 から 3 までの整数の値を代入し、それぞれ対応する y の値を求めると、$y = 3x + 2$ の値は、$y = 3x$ の値に2を足した結果であることが分かります。表は次のようになります。

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
$y = 3x$	…	−9	−6	−3	0	3	6	9	…
$y = 3x + 2$	…	−7	−4	−1	2	5	8	11	…

b) 平面上に点を表示しそれらをつなぐと、右の平面に表示されているグラフになります。どちらのグラフも直線であることが分かります。変化の割合はどちらも3ですが、$y = 3x$ は y 軸と 0 で交差しているのに対し、$y = 3x + 2$ は y 軸と 2で交差している点が異なります。



c) $x = 0$ の場合、$y = 3x + 2$ における y の値は、$y = 3x$ に 2を足した値になります。$x = 2$ の場合も同じことが起きます。一般的に、$y = 3x + 2$ における y の値は、$y = 3x$ に2を足した値です。

関数 $y = ax + b$ のグラフは、点 $(0, b)$ を通り、関数 $y = ax$ のグラフに平行です。よって、$y = ax + b$ のグラフは、$y = ax$ のグラフを b の値だけ y 軸方向に移動させせたグラフになります。

- 定数 b は、$x = 0$ のときの y の値で、一次関数の **y**切片と呼ばれます。
- $b = 0$ で $y = ax$ の形の関数の場合、切片は座標系の原点（$x = 0$ および $y = 0$）になります。
- 関数 $y = ax + b$ のグラフは、関数 $y = ax$ のグラフに平行な直線です。

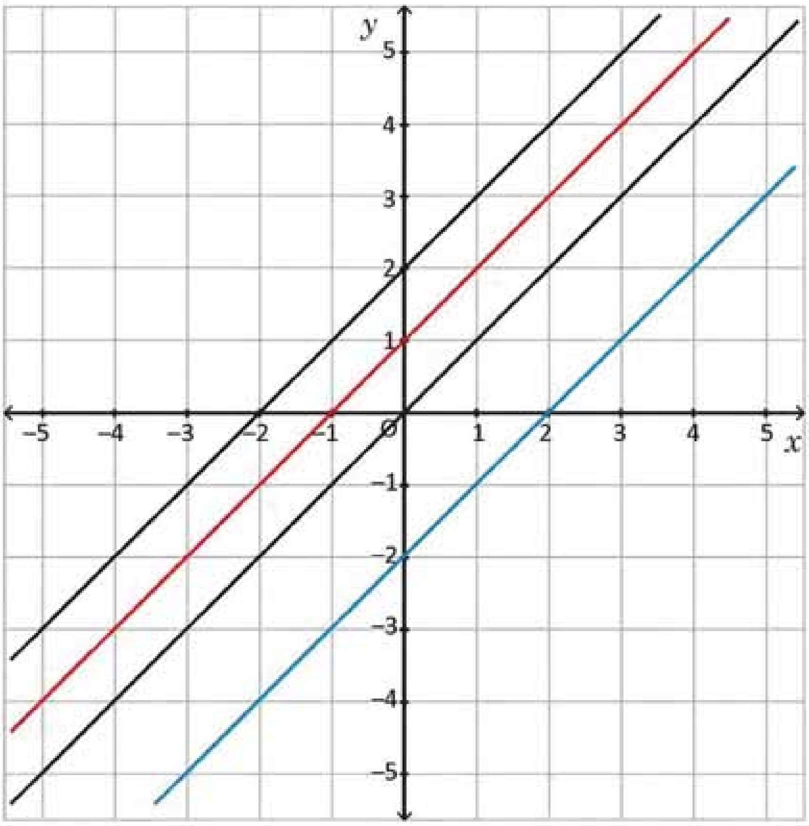
1. 以下の関数をそれぞれ該当するグラフに結び付けた後、相違点と類似点を特定しなさい。

a) $y = x + 2$

b) $y = x - 2$

c) $y = x + 1$

d) $y = x$



2. 冒頭の設問で求めた答えを考慮に入れ、関数のグラフ間にはどのような関係があるか、明らかにしなさい。

a) $y = 2x$

b) $y = 2x + 3$

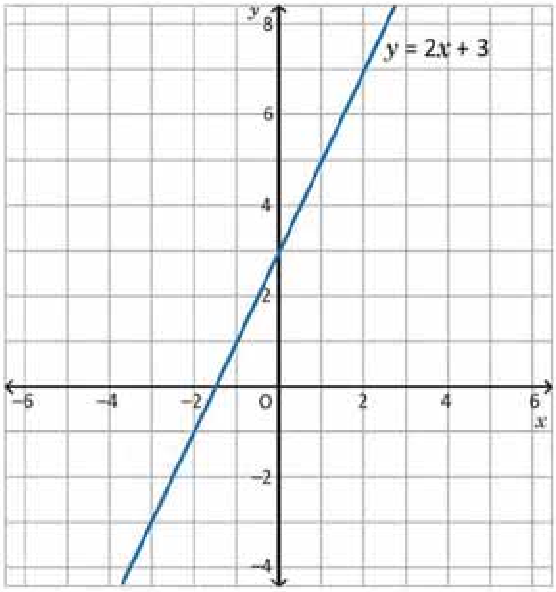
c) $y = 2x - 3$

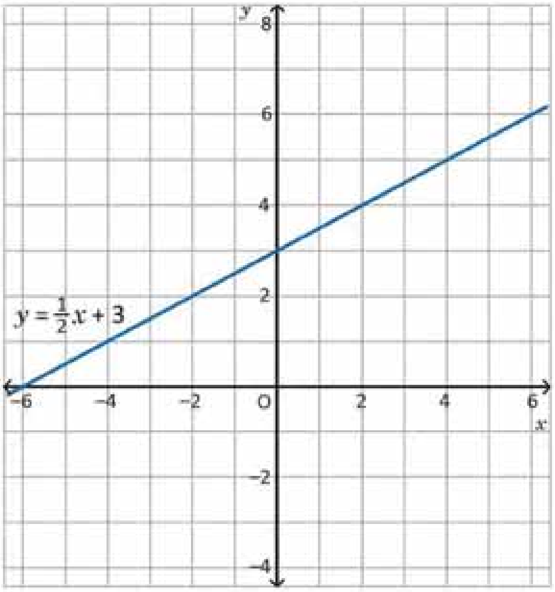
1.9 正の傾きのグラフの分析

P

各グラフの関数に関して、以下を実施しなさい。

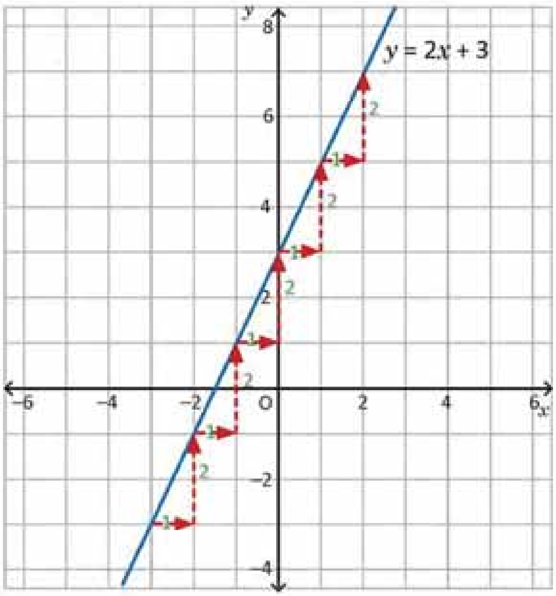
a) x の値が1またはその他の数増えると、y の値はどうなりますか。
b) x が 8のとき、y の値はいくらですか。
c) 変化の割合を求めなさい。

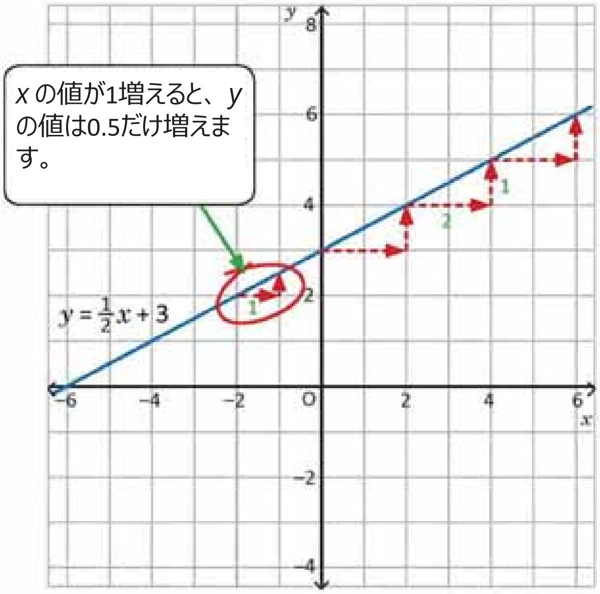




S

a) x の値が1増えると、y の値はどうなるか分析すると、




x の値が1増えると、y の値は0.5だけ増えます。

$y = 2x + 3$ のグラフでは、x が 1 増えたとき、y は 2 増えることを見ることができます。

$y = \frac{1}{2}x + 3$ のグラフでは、x の値が1増えたときに、y の値がどれだけ増えたかを正確に判断するのは難しいです。この場合、他の値を考慮することができます。例えば、x が 2 増えたとき、y は 1 増えます。

b) x が 8 のときの y の値を求めるためには、グラフを分析する必要があります。

$y = 2x + 3$のグラフでは、$x = 2$なら、$y = 7$

- a) から、x が1増える毎に y は2 増えています。したがって、2 から 8 までで x は 6 増えるので、y は12増えます。よって、$x = 8$ ならば、$y = 19$

$y = \frac{1}{2}x + 3$ のグラフでは、$x = 2$なら、$y = 4$

- a) から、x が2増える毎に y は1 増えています。したがって、2 から 8 までで x は 6 増えるので、y は3増えます。よって、$x = 8$ ならば、$y = 7$

c) 変化の割合を求めるために、式に代入します。

$$\textbf{変化の割合} = \frac{y\text{の値の変化}}{x\text{の値の変化}}$$

関数 $y = 2x + 3$の場合は

変化の割合 $= \frac{2}{1} = 2$

$a = 2$

x の値が1増えると、y の値は 2 増えます。

関数 $y = \frac{1}{2}x + 3$ の場合は

変化の割合 $= \frac{1}{2} = 0.5$

$a = \frac{1}{2}$

x の値が1増えると、y の値は $\frac{1}{2}$ 増えます。

一次関数 $y = ax + b$ の傾きは、変化の割合によって決まります。したがって、a が増えれば直線の傾きも増え、a が減れば直線の傾きも減ります。

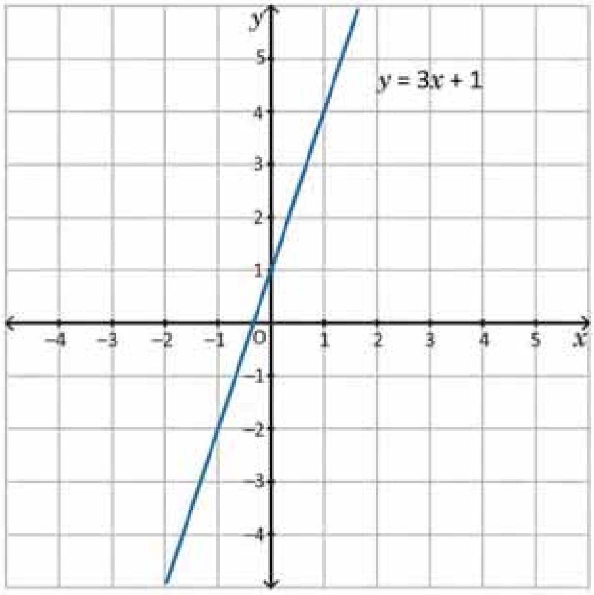
実施した例では、関数 $y = 2x + 3$ のグラフの傾きは、関数 $y = \frac{1}{2}x + 3$ のグラフの傾きよりも大きいです。

したがって、直線の傾きを変えたいのであれば、関数 $y = ax + b$ の a の値だけを変えます。

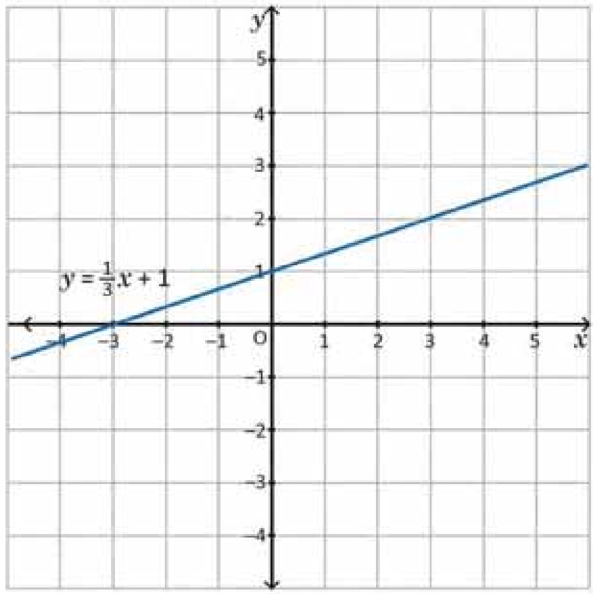
関数のグラフを見て、それぞれの場合に関して答えなさい。

a) x の値が1増えると、y の値はどうなりますか。
b) x が 6 のとき、y の値はいくらですか。
c) 変化の割合を求めなさい。

1.



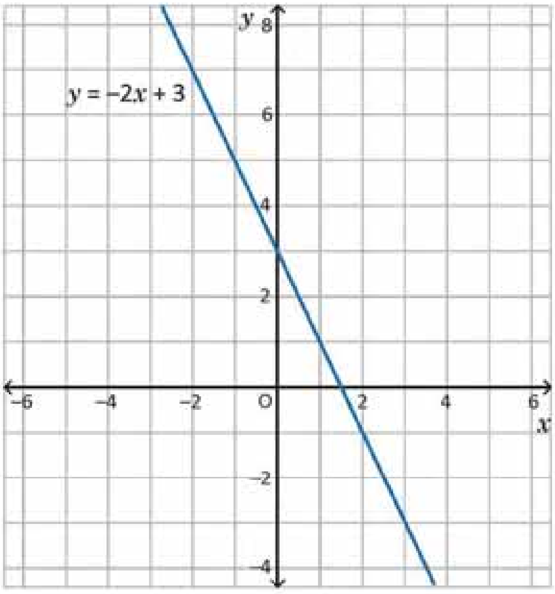
2.

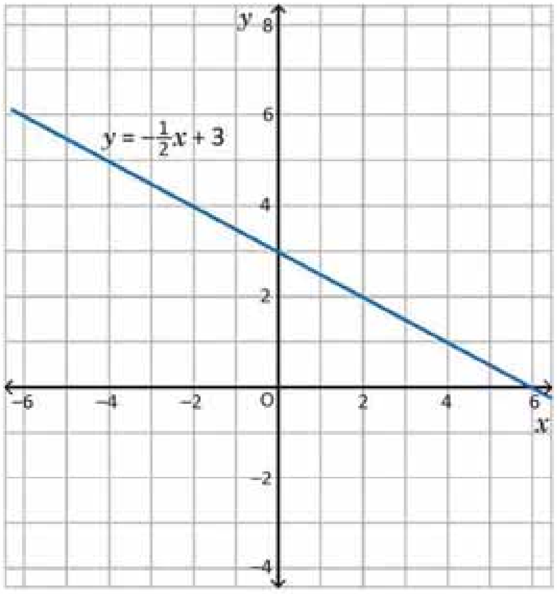


1.10 負の傾きのグラフの分析

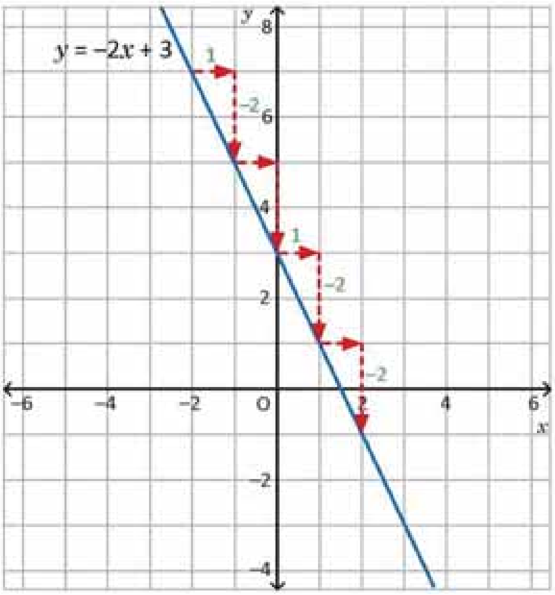
P 各グラフの関数に関して、以下を実施しなさい。

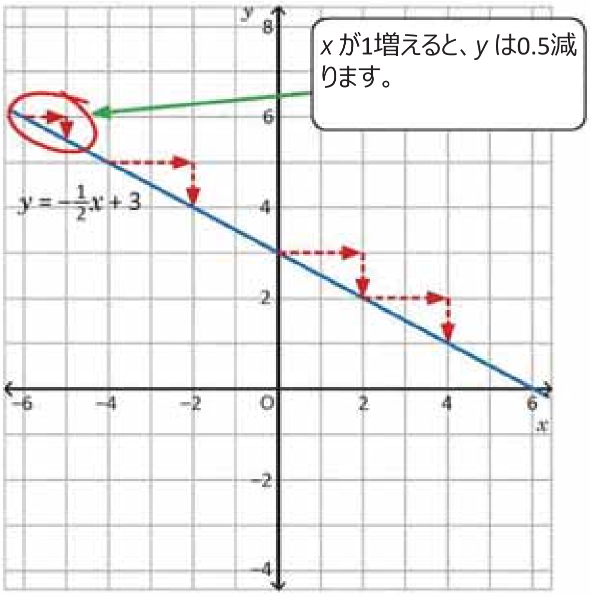
a) x の値が1またはその他の数増えると、y の値はどうなりますか。分析しなさい。
b) 変化の割合を求めなさい。





S a) x の値が1増えると、y の値はどうなるか分析すると、





x が1増えると、y は0.5減ります。

$y = 2x + 3$ のグラフでは、x が 1 増えたとき、y は 2 減ることを見ることができます。

$y = -\frac{1}{2}x + 3$ のグラフでは、x が1増えたときに、y がどれだけ増えるかを正確に判断するのは難しいです。この場合、他の値を考慮することができます。例えば、x が 2 増えたとき、y は 1 減ります。

b) 変化の割合（**変化の割合** $= \frac{y\text{の値の変化}}{x\text{の値の変化}}$）を求めるためには：

関数 $y = -2x + 3$の場合は、

変化の割合 $= \frac{-2}{1} = -2$

$a = -2$

x の値が1増えると、y の値は 2 減ります。

関数 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ の場合は、

変化の割合 $= \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$ -0.5

$a = -\frac{1}{2}$

x の値が1増えると、y の値は0.5または $\frac{1}{2}$ 減ります。

変数 x が1増えると、変数 y は減ります。よって、変化の割合は負です。すなわち、x 軸方向で右に1移動すると、関数のグラフに相当する直線は、変化の割合の値と同じだけ下に向かって移動します。

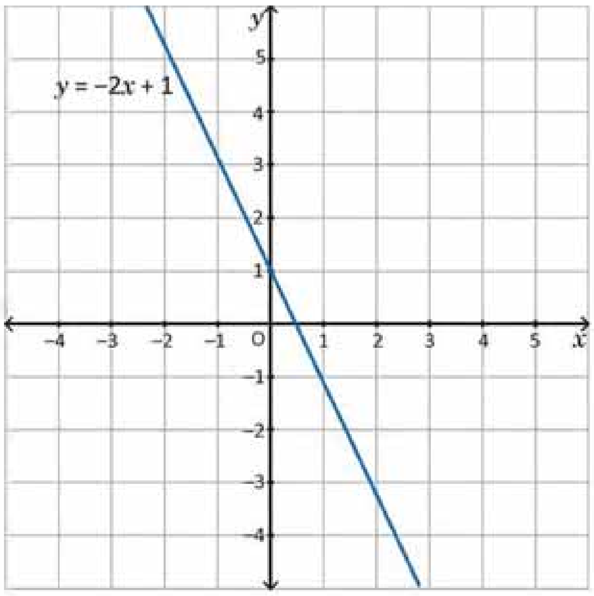
したがって、関数 $y = ax + b$ の場合は、

- **$a > 0$ ならば、x の値が1 増えると、y は a 増えます。**
  例： $y = 3x + 2$, $a > 0$ の場合は、x が 1 増えると、y は 3 増えます。

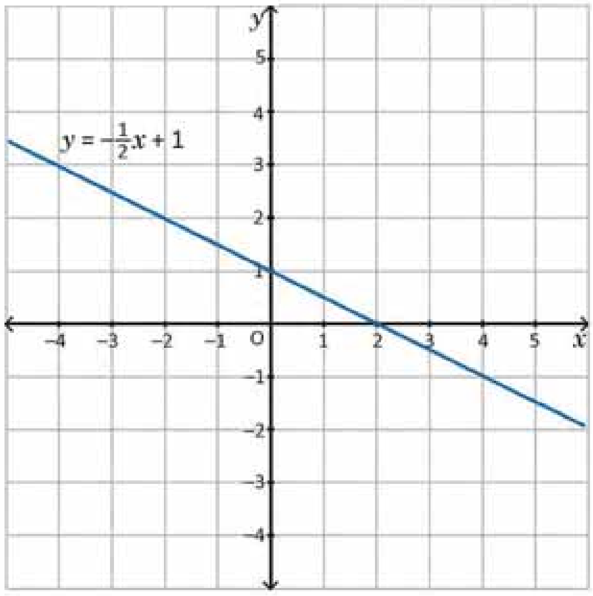
- **$a < 0$ ならば、x の値が1 増えると、y は a 減ります。**
  例： $y = -3x + 2$, $a < 0$ の場合は、x が 1 増えると、y は 3 減ります。

関数のグラフを見て、各場合に関して答えなさい。

a) x の値が1増えると、y の値はどうなりますか。
b) 変化の割合を求めなさい。



グラフ 1



グラフ 2

1.11 $y = ax + b$ のグラフの変化の割合と傾きの関係

P

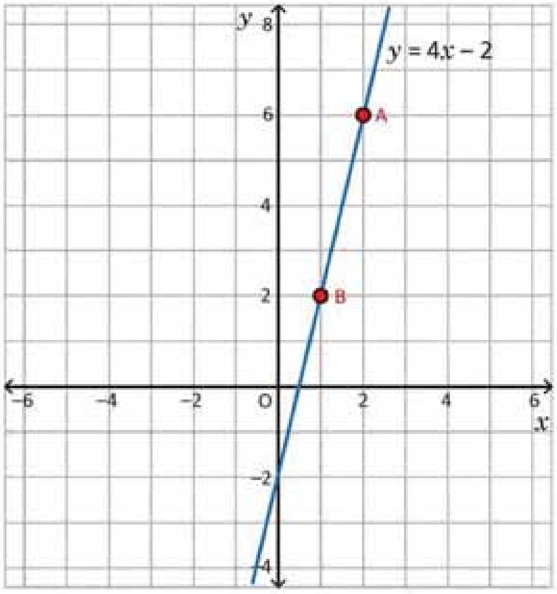
関数 $y = 4x - 2$ について、以下を実施しなさい。

a) 数を数えて変化の割合を求めなさい。

b) x と y について、値間の差を求めなさい。表示されている2つの点の座標を参照しなさい。

c) y 座標の値の差を x 座標の値の差で割った商を計算しなさい。

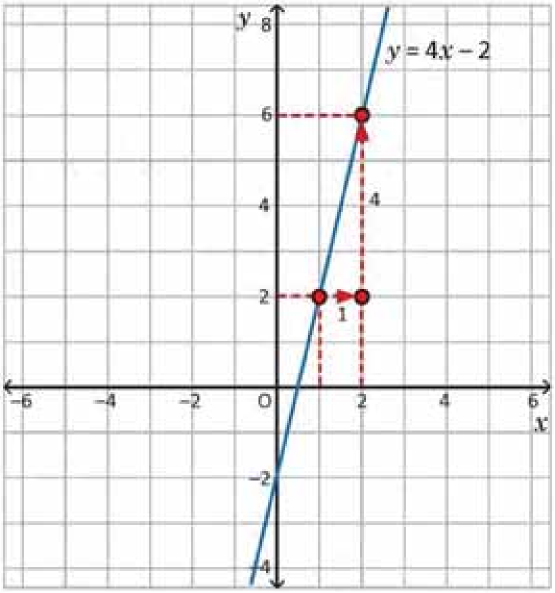
d) 上記の a) と c) で得た答えを比較しなさい。
どのように結論付けますか。



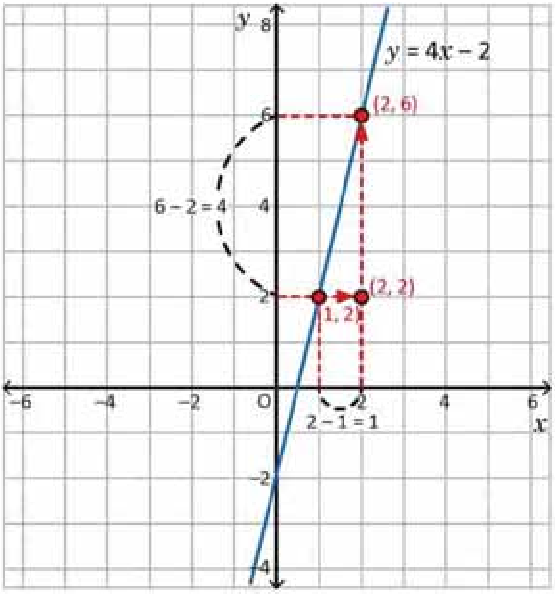
S

a) x の値が 1 増えたとき、y が増えた数を数えることによって変化の割合を求めると、

変化の割合 = $\frac{4}{1}$ = 4



b) x 座標の値の差と y 座標の値の差を求めるために、選んだ 2点（点Aと点B）の座標を引き算します。



y の値の差 $y = 6 - 2 = 4.$
x の値の差 $x = 2 - 1 = 1.$

c) y 座標の値の差を x 座標の値の差で割った商を計算すると、

$$\frac{y\text{ の値の差}}{x\text{ の値の差}} = \frac{4}{1} = 4$$

d) a) で得た答えと c) で得た答えを比較すると、同じであることが分かります。

一次関数 $y = ax + b$ のグラフ、変化の割合は傾きの値と一致し、与えられた2点の x 座標と y 座標のそれぞれの増加の商の計算によって求めることができます。

例えば、（1, 2） と （2, 6） ので2点を通る関数 $y = 4x - 2$ の場合は、

$$\textbf{変化の割合} = \textbf{傾き} = \frac{6-2}{2-1} = \frac{4}{1} = 4$$

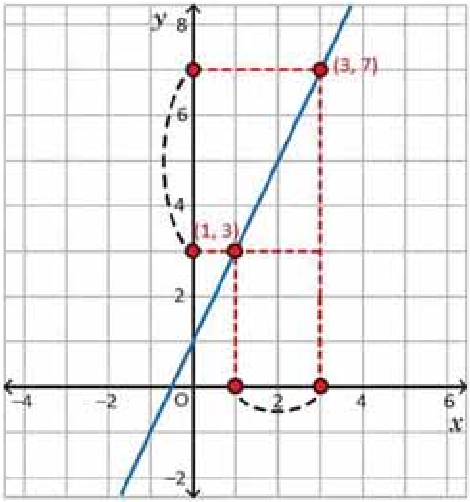
- P_1 (x_1, y_1) と P_2 (x_2, y_2) の2点を通る関数の場合はすべて, 傾きは以下の 式で計算されます。

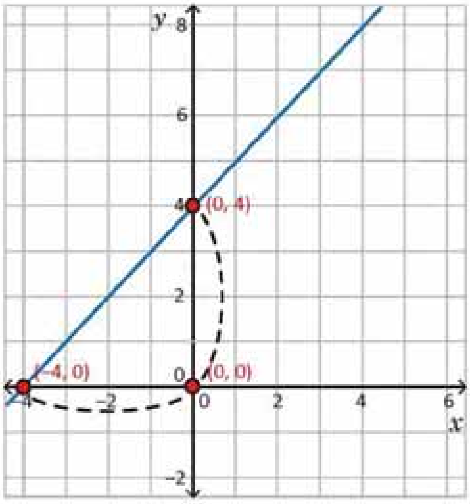
$$\textbf{傾き} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- 関数 $\mathbf{y} = ax + b$ の係数 a は、関数のグラフの直線の傾きに相当します。これは、変化の割合と同じ値になります。

以下に表示されているグラフの関数それぞれについて、以下を実施しなさい。

a) x が 1 進むと、y はいくつ進むか、求めることはできますか。あなたの答えを証明しなさい。
b) 表示された点の座標を考慮して、x と y の増加分を求めなさい。
c) 各グラフの関数の傾きを求めなさい。





日常生活では、様々な状況において傾きを利用します。例えば、屋根の傾斜や街道、あるいは、壁に立てかけたはしごに傾きがあります。数学では、特定の方法で何かの傾斜の程度を定義するために、傾きという言葉を使います。

写真には、直線の傾きを利用していることが明らかに分かる建築作品が映っています。これはフランスのミヨーにある世界で最も高い橋で、鉄筋コンクリート製です。

1.12 関数 $y = ax + b$ のグラフの傾きと切片

各関数について、傾きを計算し、グラブを分析して、グラフが y 軸と交差する箇所の y の値を求めなさい。

1. $y = 2x - 1$　　　　2. $y = -3x + 2$

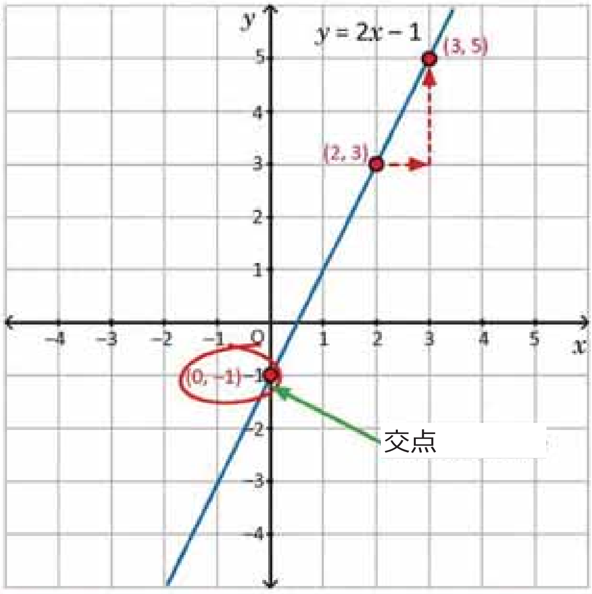
関数の傾きを求めるためには、a の値を特定するだけです。一方、b の値は、グラフが y 軸と交差する箇所の y の値なので、与えられた関数の場合は、

1. $y = 2x - 1$
   傾き：$a = 2$
   y 軸との交点：$b = -1$

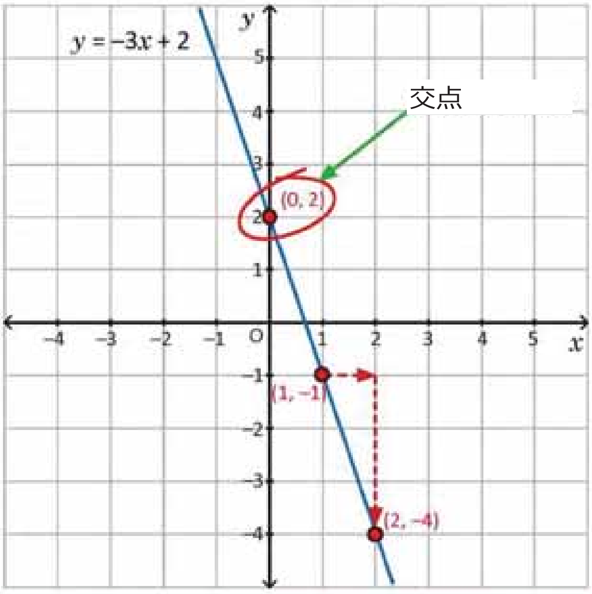
2. $y = -3x + 2$
   傾き： $a = -3$
   y 軸との交点：$b = 2$

関数のグラフを描くと、

1.



2.



関数 $y = ax + b$ のグラフの傾きおよび y軸との交点を特定するためには、係数 a の値が傾きを示し、定数 b は、グラフがy 軸と交差する箇所の yの値であることを考慮すればよいだけです。グラフが y軸と交差する箇所の値を**切片**と呼びます。

- よって、関数 $y = ax + b$ の場合、　傾き：a
  y 切片：b

b は、グラフ上では点　（0, b）に相当します。

- 例えば、関数 $y = 3x - 5$ のグラフは、傾き：3
  y 切片：-5

1.各関数について、傾きとy切片を特定しなさい。

a) $y = 3x + 2$　　b) $y = -2x + 1$　　c) $y = 5x - 2$　　d) $y = 2x - 5$

e) $y = x + 4$　　f) $y = x - 2$　　g) $y = -x + 6$　　h) $y = \frac{1}{2}x + 3$

2. 傾きとy切片を特定しなさい。

a) $y = 3x$　　b) $y = 2x$　　c) $y = -2x$　　d) $y = x$

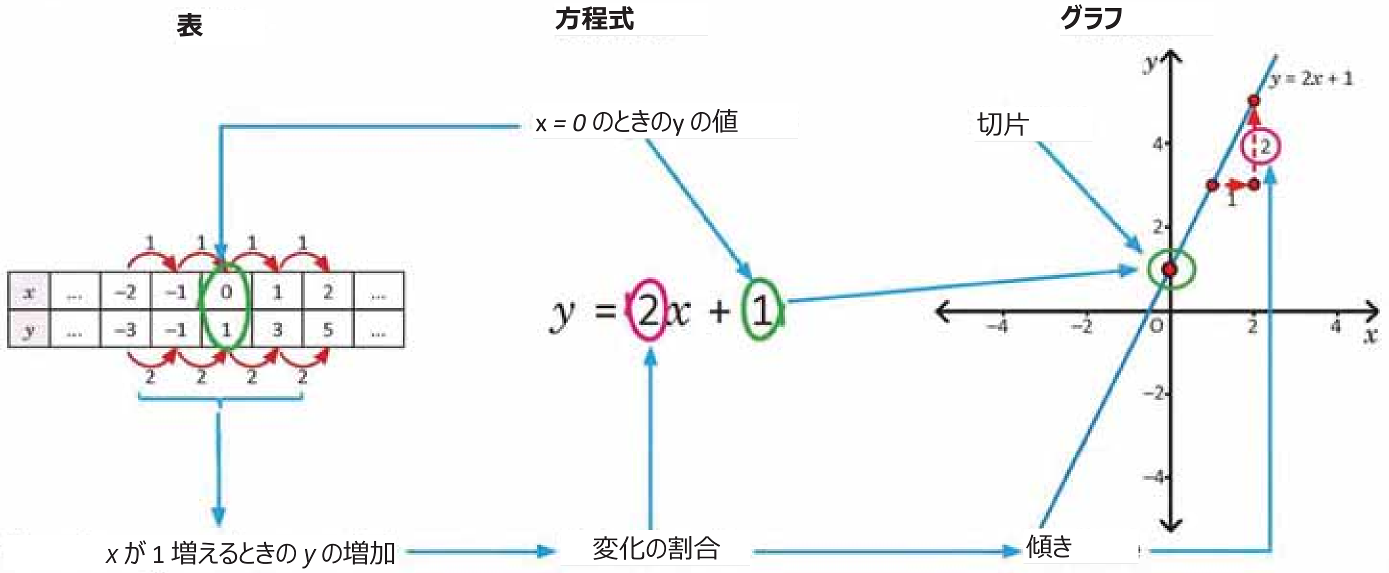
1.13 一次関数の表、方程式、グラフの関係

P

関数 $y = 2x + 1$ に関して、表、方程式、グラフの関係を特定しなさい。

S

関数 $y = 2x + 1$ を分析し、表の一部の x の値を方程式およびグラフと比較すると、以下を観察することができます。



$$y = 2x + 1$$

C

関数 $y = ax + b$ の表と方程式とグラフの関係を表した前の図では、以下を観察することができます。

表	方程式	グラフ
$x = 0$ のときの y の値	b	y切片
x が1増えたときの y の増加	a	傾き

各関数について、a と b の値および切片を求めなさい。その後、表、方程式、グラフの関係を特定しなさい。

a) $y = 3x + 1$

b) $y = 4x - 3$

c) $y = -2x + 5$

d) $y = -3x - 4$

e) $y = 5x - 4$

f) $y = -2x - 1$

g) $y = 2x - 3$

h) $y = -4x + 1$

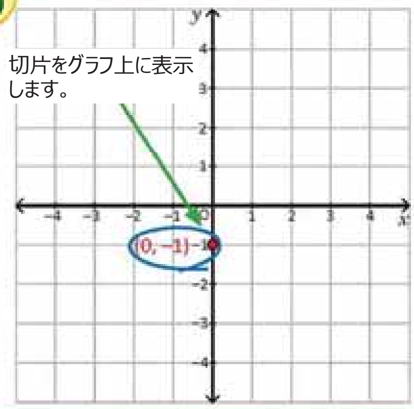
i) $y = -5x + 3$

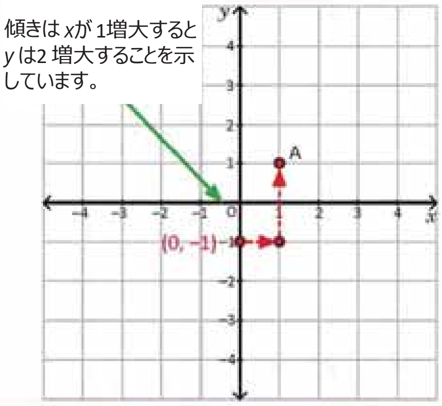
1.14 傾きと切片が与えられた一次関数のグラフの書き方

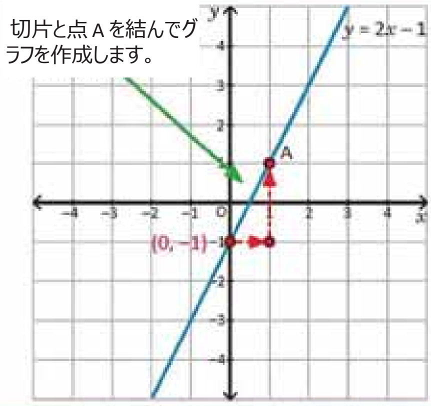
P

関数 $y = ax + b$ で, $a = 2$　$b = -1$ のグラフを作成しなさい。

S


切片をグラフ上に表示します。


傾きは xが 1増大すると y は2 増大することを示しています。


切片と点 A を結んでグラフを作成します。

C

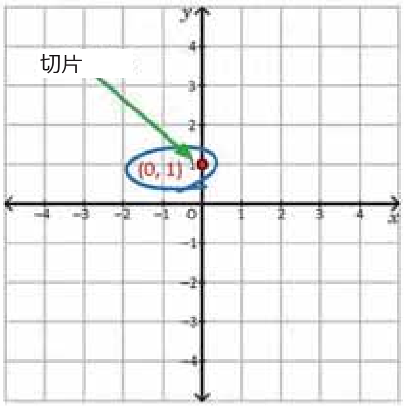
関数 $y = ax + b$ をグラフ化するには、前の例で応用したように、a と b の値から、点（0, b） を配置し、x の変動と y の変動を考慮に入れて、グラフが通過する新しい点を傾きから求めます。

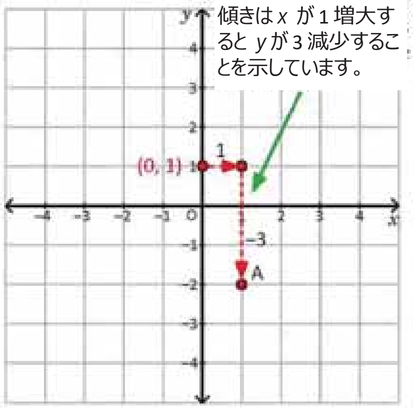
E

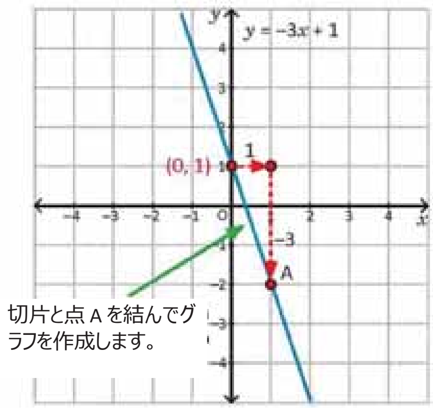
関数 $y = -3x + 1$ で a と b の値を特定し、グラフを作成します。

解答

関数 $y = -3x + 1$ を一次関数 $y = ax + b$ の式と比較すると、$a = -3$、 $b = 1$であることがわかります。


切片


傾きは x が 1 増大すると y が 3 減少することを示しています。


切片と点 A を結んでグラフを作成します。

1. 各問の関数 $y = ax + b$ のグラフを作成しなさい。

a) $a = 3$ 、$b = -2$の場合

b) $a = -2$ 、$b = 1$の場合

2. 各関数ごとに、a と b の値を特定しグラフを作成しなさい。

a) $y = 3x + 1$

b) $y = 2x - 2$

c) $y = -2x + 3$

d) $y = 2x - 3$

e) $y = x + 3$

f) $y = x - 2$

g) $y = \frac{1}{2}x + 3$

h) $y = -\frac{1}{3}x - 3$

1.15 一次関数の方程式とグラフの関係

P

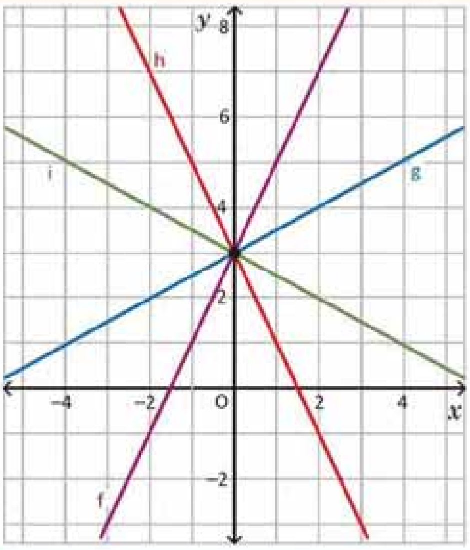
各関数をそれぞれのグラフに関連付け、答えを裏付けるために、a と b の値を検討しなさい。

a) $y = 2x + 3$

b) $y = \frac{1}{2}x + 3$

c) $y = -2x + 3$

d) $y = -\frac{1}{2}x + 3$



S

4つの関数の方程式をよく見ると、b = 3 であるため、すべて y = 3 で y 軸と交差します。 つまり、点（0, 3） を通過するということです。これは、グラフで確認できます。

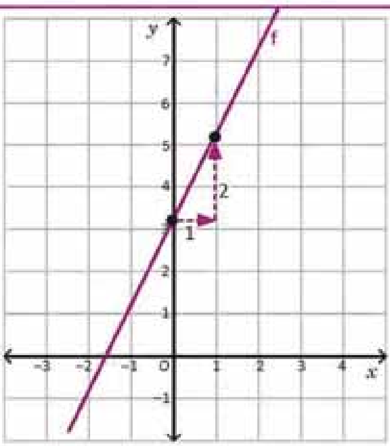
各関数の a の値を分析すると、次のようになります

a) 関数 $y = 2x + 3$ の $a = 2$ は、x が 1 増大すると、 y は2 増大することを示します（グラフ 1 を参照）。

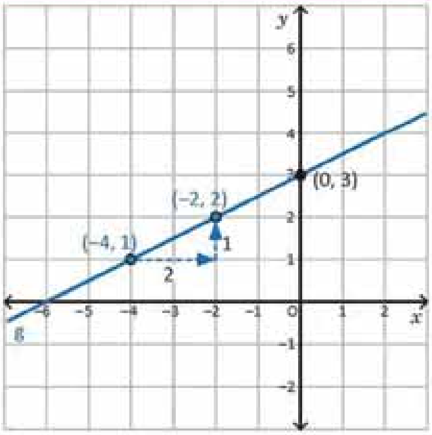
b) 関数 $y = \frac{1}{2}x + 3$ が $a = \frac{1}{2}$ を有する場合、x が 2 増大すると、y は1増大することを示します（グラフ 2 を参照）。

c) 関数 $y = -2x + 3$ の $a = -2$ は、x が 1 増大すると、y は2 減少することを示します（グラフ 3 を参照）。

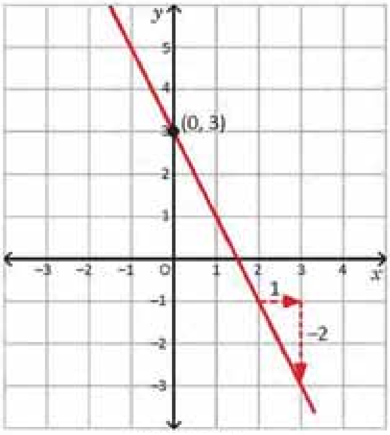
d) 関数 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ が $a = -\frac{1}{2}$ を有する場合、x が 2 増大すると、y は 1 増大することを示します（グラフ 4 を参照）。



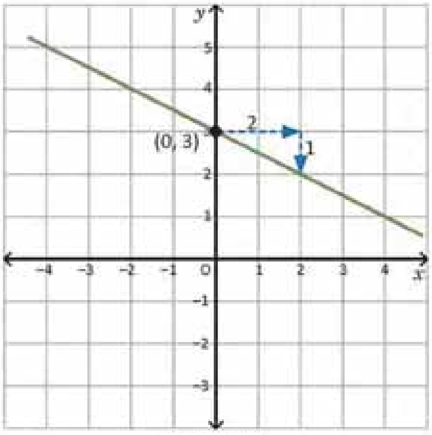
グラフ 1



グラフ 2



グラフ 3



グラフ 4

C

一次関数のグラフをそれぞれの数式に関連付けるには、以下を関連付けるだけです：

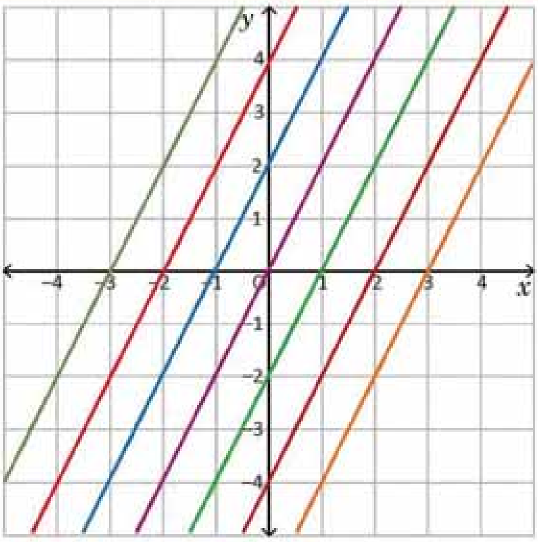
- グラフと y 軸の交点に伴う b の値。
- x が 1 増大したときの y の変動に伴う a の値。

応用例では、すべての関数の b の値が同じであるため、同じ点 （0, b） を通って y 軸と交差します。

E

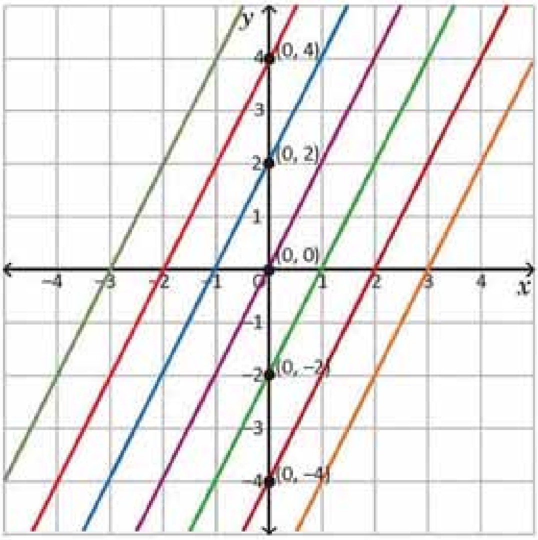
同じ平面上で次の関数をグラフ化し、結果を分析しましょう。どのように結論付けますか？

a) $y = 2x$
b) $y = 2x + 2$
c) $y = 2x + 4$
d) $y = 2x + 6$
e) $y = 2x - 2$
f) $y = 2x - 4$
g) $y = 2x - 6$

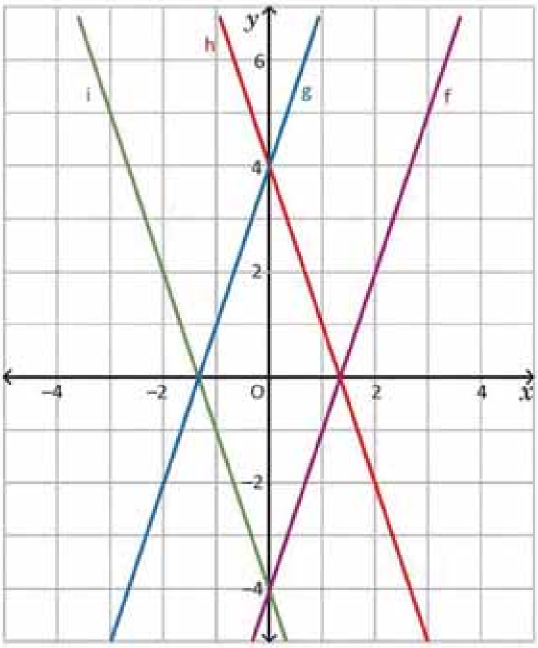


解答

- 7つの関数方程式をよく見ると、どれもすべて $a = 2$ という同じ傾きであることがわかります； つまり、x が 1 増大するごとに、y は 2 増大するということです。
- この場合、傾きからはグラフと関数方程式の関係は確立されません。よって、b の値をグラフと y 軸の交点に関連付けることにより、グラフと方程式の関係が確立されます。
- 各関数をそれぞれのグラフに関連付ける場合、関数の傾きが同じで、b の値のみが変化する場合、グラフは平行な直線であると結論付けることができます。



1. 各関数をそれぞれのグラフに関連付け、答えを裏付けるために、a と b の値を検討しなさい。
   a) $y = 3x + 4$
   b) $y = 3x - 4$
   c) $y = -3x + 4$
   d) $y = -3x - 4$



2. 以下の関数を分析し、a) と b) のグラフと c) と d) のグラフがどのような関係にあるか説明しなさい。
   a) $y = 4x + 4$
   b) $y = 4x - 4$
   c) $y = 5x + 1$
   d) $y = 5x - 1$

1.16 *x* の値を区切ったときの *y* の値

P

関数 $y = 5x - 3$ で、x が -1 から 4 の間にある場合、y はどの値からどの値の間にありますか？

S

値と値の間を求めるために、解決方法として2つ可能性が考えられます。

式から求める：

y の値を求めるために、式に x の値を代入し指示された演算を行います。

$x = -1$の場合

$y = 5(-1) - 3$

$y = -5 - 3$

$y = -8$

$(-1, -8)$

$x = 4$の場合

$y = 5(4) - 3$

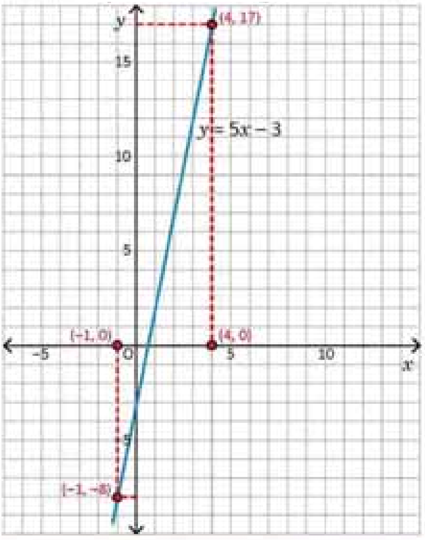
$y = 20 - 3$

$y = 17$

$(4, 17)$

関数 $y = 5x - 3$ で、x が-1 から 4 の間にある場合、y は -8 から 17 の値の間にあります。

グラフから求める



C

x がどの値とどの値の間にあるかがわかっている場合、y がどの値とどの値の間にあるかを判断するには、上記のオプションのどちらかを使うことができます。

- 方程式から求める：両端の x の値を代入すると、両端の y の値が分かります。
- グラフから求める方法： x の座標を特定し、対応する y の座標を求めます。

どちらのオプションを使うかは、グラフまたは関数の方程式を知っているかどうかによって異なります。

1. 各々の関数の方程式から、対応する x がどの値とどの値の間にあるかを知り、y のそれを求めなさい。

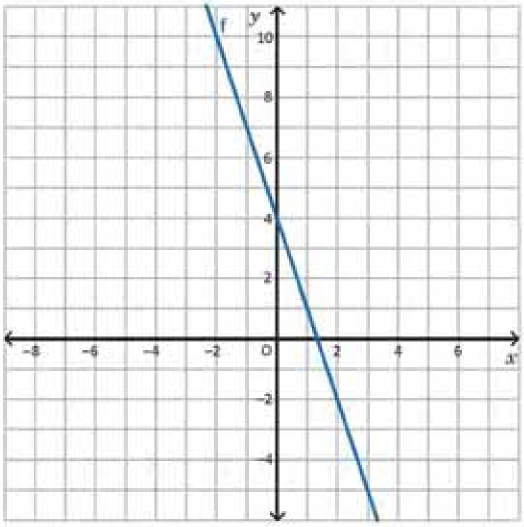
a) $y = 2x + 3$ で、x が-3から5の間にある場合、y はどの値の間にありますか？

b) $y = -x + 5$で、x が 2 から 5 の間にある場合、y はどの値とどの値の間にありますか？

c) $y = 3x - 5$ で、x が-1から4の間にある場合、y はどの値とどの値の間にありますか？

d) $y = \frac{2}{3}x - 5$ でx が -3 から -6 の間にある場合、y はどの値とどの値の間にありますか？

2. 右のグラフで、x が -2 と 3 の間にある場合、y がどの値とどの値の間にあるかを求めなさい。

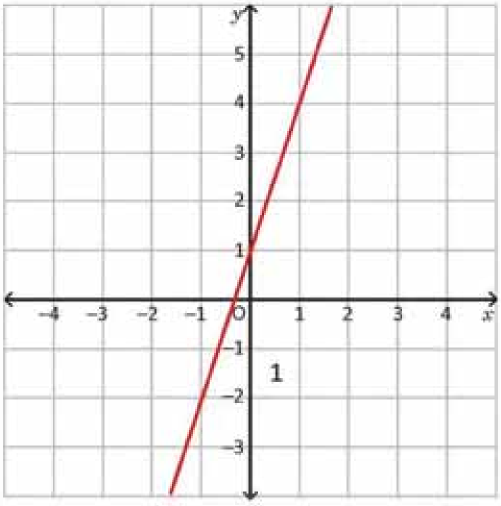


1.17 グラフから読みとる $y = ax + b$ の関数表示

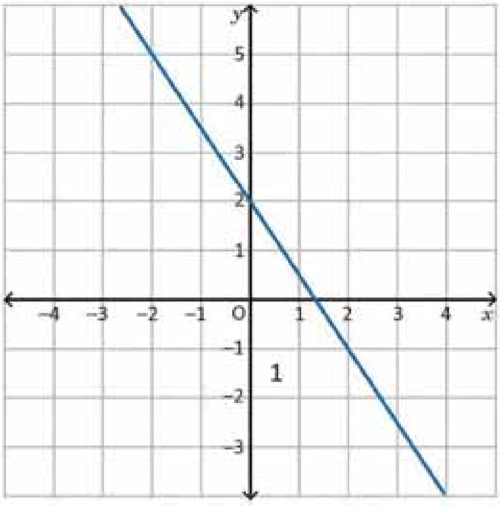
P

以下に示す各グラフの関数の方程式を書きなさい：

1.

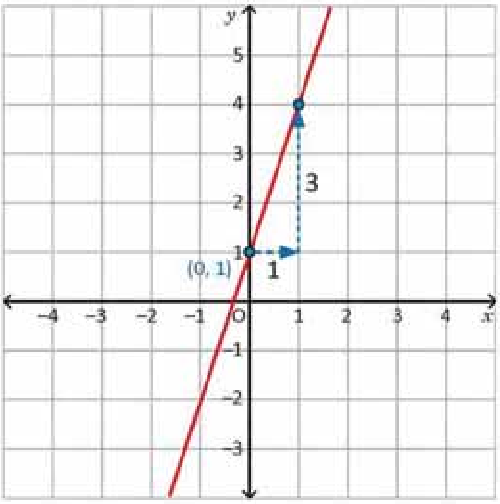


2.

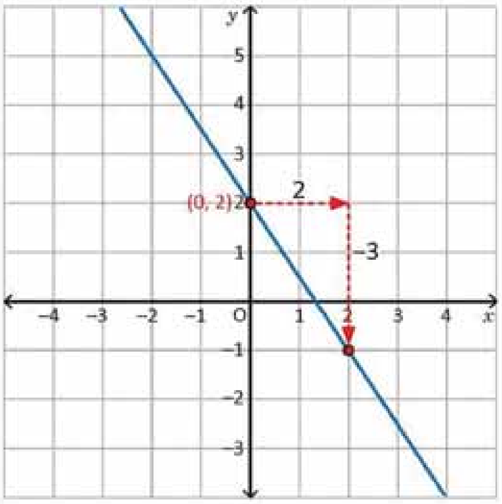


S

関数の数式を書くには、y 軸上の切片 b を特定し、傾き a を分析します。



$b = 1,\ a = \frac{3}{1} = 3,\ y = 3x + 1.$



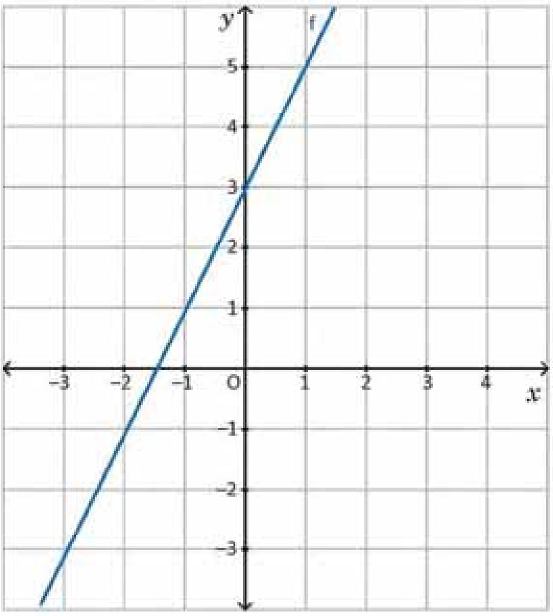
$b = 2,\ a = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2},\ y = -\frac{3}{2}x + 2.$

C

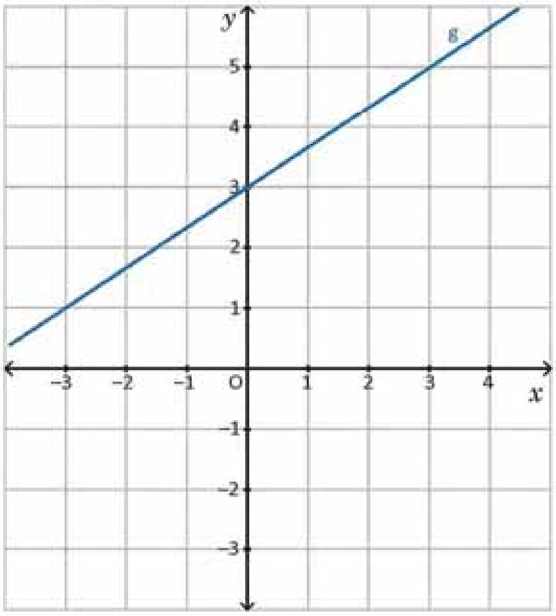
グラフをもとに $y = ax + b$ 形式の関数の方程式を書くには、応用例に示されているように、y 軸上の切片を特定し、直線の傾きを求める必要があります。

以下に示す各グラフの関数の方程式を書きなさい：

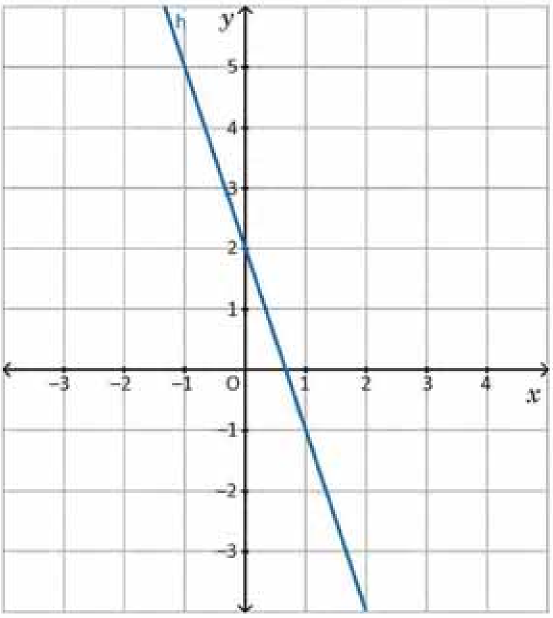
a)



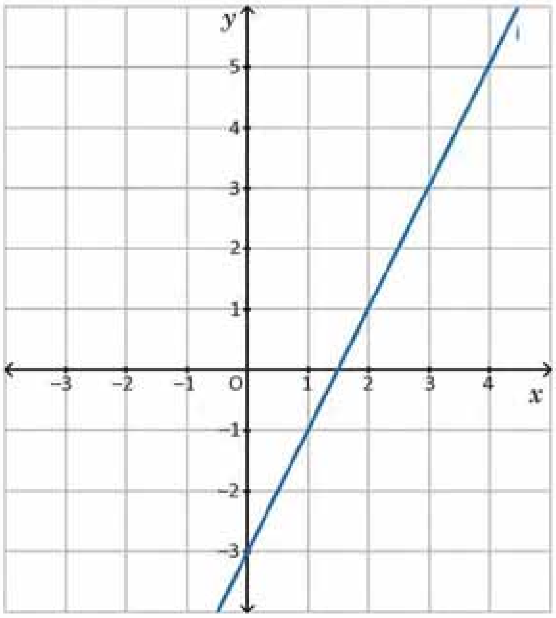
b)



c)



d)



1.18 グラフの1点と傾きから求める関数の方程式

P

グラフの傾きが $\frac{2}{3}$ で、点 （3, 4） を通過する一次関数の方程式を作成しなさい。

S

方程式を求めるために、与えられた要素を識別します。

与えられたデータから求める：

- 傾きは $\frac{2}{3}$、一次関数は$y = \frac{2}{3}x + b$ です。

- グラフは点 （3, 4） を通り、式に x と y の値を代入すると：

$$4 = \frac{2}{3}(3) + b$$

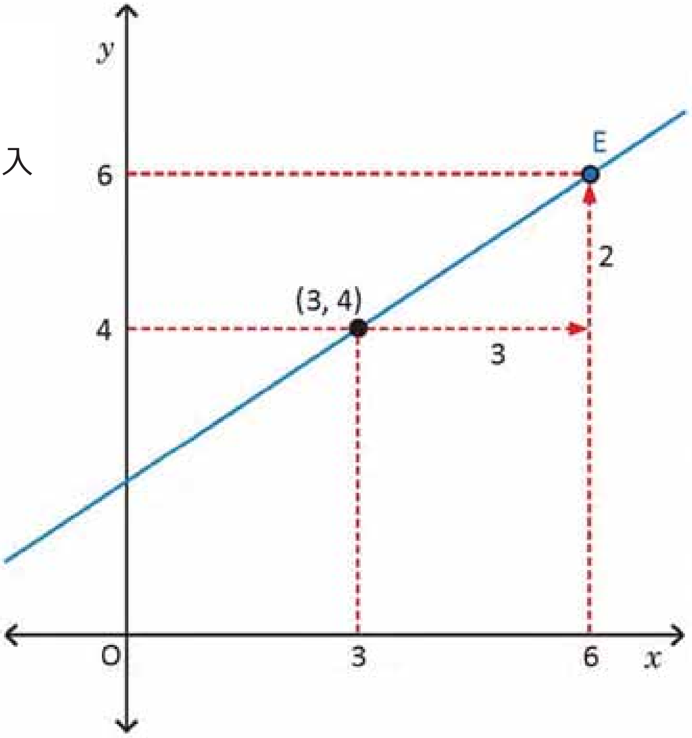
$$4 = 2 + b$$

$$2 = b$$

したがって、$y = \frac{2}{3}x + 2$ となります。

- グラフを作成するためには、すでに与えられた点 （3, 4） を取ります； 次に、傾きを使ってグラフが通る新しい点を探します。傾きは $\frac{2}{3}$ なので、（3, 4） から x を 3 右に、y を 2 上に移動させると、（6, 6） に到達します。

関数のグラフ表示



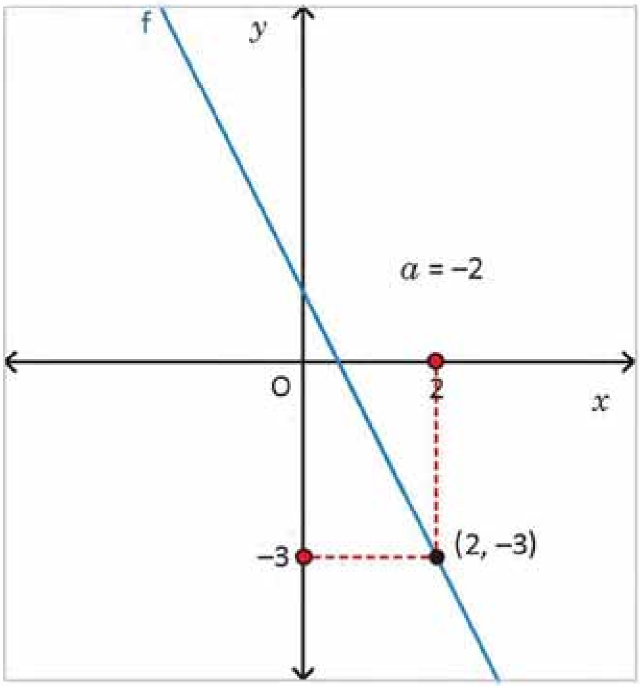
C

傾きとグラフが通る点のと座標 （x, y） がわかっている場合に一次関数の方程式を求めるには、次のようにします：

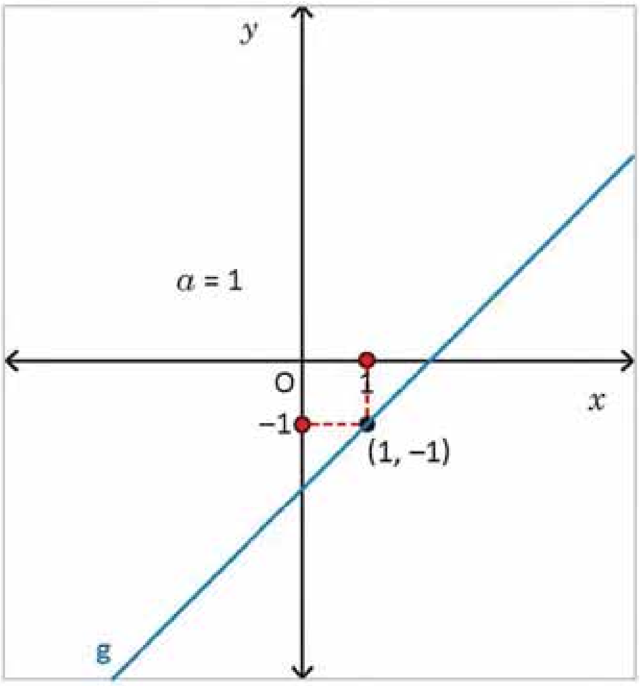
1. 傾きを計算式 $y = ax + b$ に代入します。
2. 点 （x, y） の座標値を $y = ax + b$ に代入し、b の値を計算します。
3. 見つかった値 a と b を用いて方程式 $y = ax + b$ を表します。

以下に示す各グラフの関数の方程式を書きなさい：

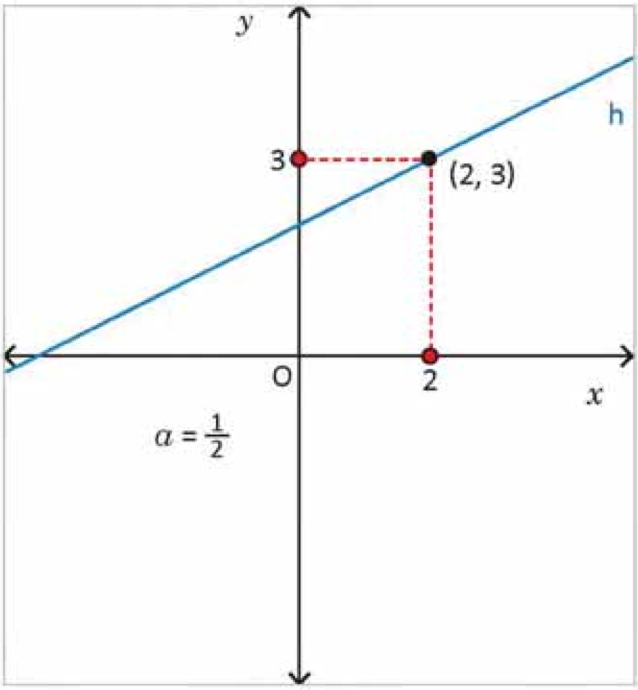
a)



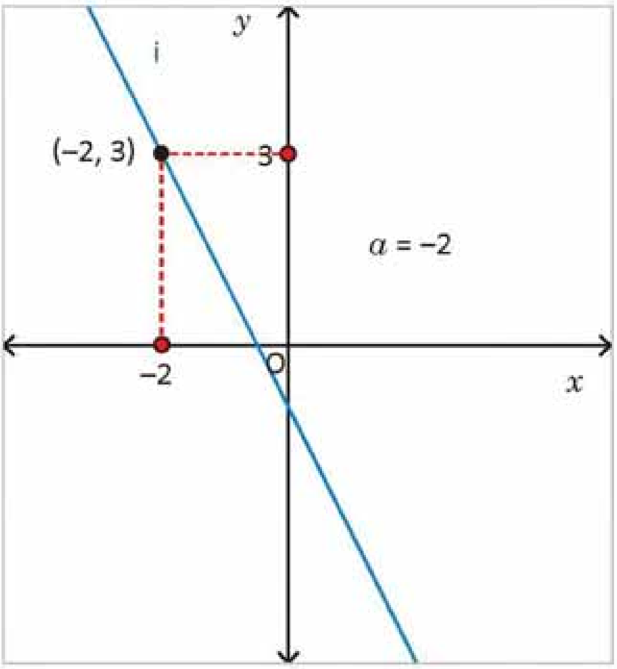
b)



c)



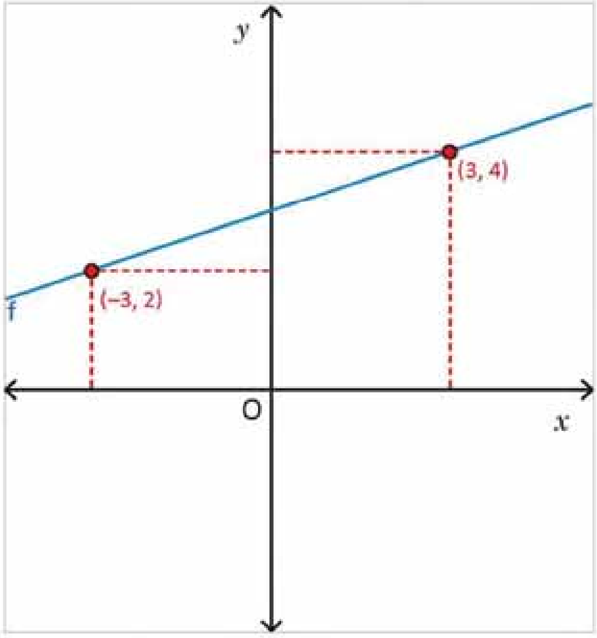
d)



1.19 グラフの2点から求める関数の方程式

P

与えられた2つの座標を持つグラフの関数について、$y = ax + b$ 形式の方程式で表しなさい。



S

関数の方程式は、次のいずれかの方法を用いて特定できます。

傾きを計算します：

- 点（−3, 2）と（3, 4）を通ります。したがって：

$$a = \frac{4-2}{3-(-3)} = \frac{2}{3+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- 関数 $y = \frac{1}{3}x + b$ のグラフは点（3, 4）を通り、値を代入すると次のようになります：

$$4 = \frac{1}{3}(3) + b$$
$$4 = 1 + b$$
$$3 = b$$
$$b = 3$$

したがって、一次関数は$y = \frac{1}{3}x + 3$ となります。

連立方程式を用いる方法：

点（−3, 2）と（3, 4）を通るので：

- 点（−3, 2）の場合、代入すると次のようになります：

  $2 = -3a + b$ ①

- 点（3, 4）の場合、代入すると次のようになります：

  $4 = 3a + b$ ②

方程式 ① と ② を連立方程式として解くと、$a = \frac{1}{3}$ と $b = 3$の値が求められ、したがって関数 $y = \frac{1}{3}x + 3$が作成できます。

C

グラフの2点 A（x_A, y_A）と B（x_B, y_B）の座標がわかっている場合、関数の方程式は次のようにして求められます：

1. 公式 $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ を用いて傾き a を求めます。

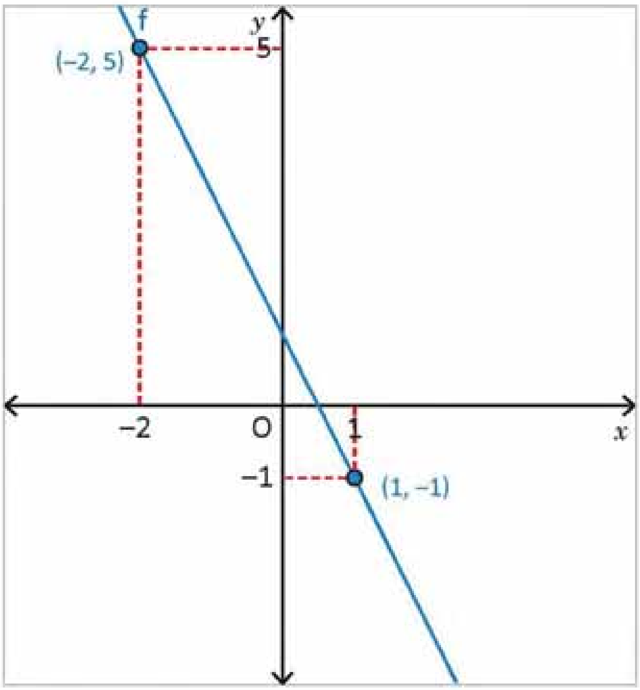
2. $y = ax + b$で a の値 を 1. で求めた値とし、与えられた点の座標のひとつを代入して、b の値を求めます。

3. 得られた値 a と b を代入して方程式 $y = ax + b$ を表します。

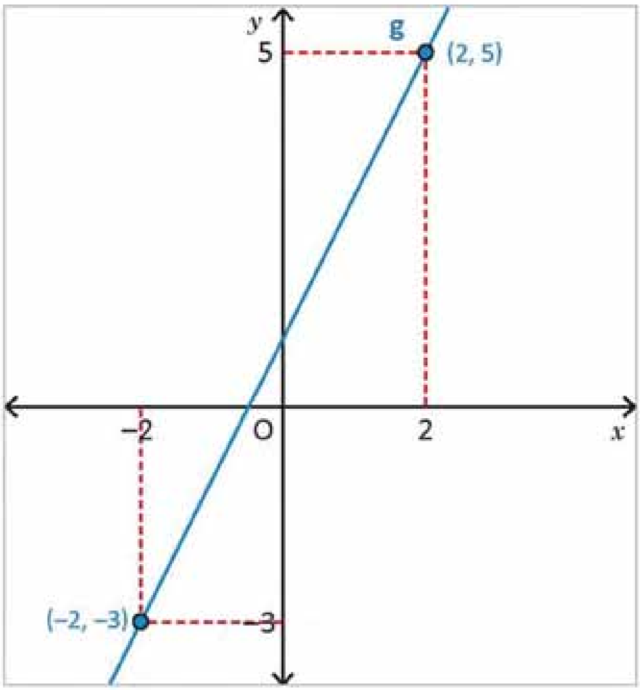
または、応用例が示すように、与えられた2点の座標を用いて、線形連立方程式を作ることもできます。

以下に示す各グラフの関数の方程式を書きなさい：

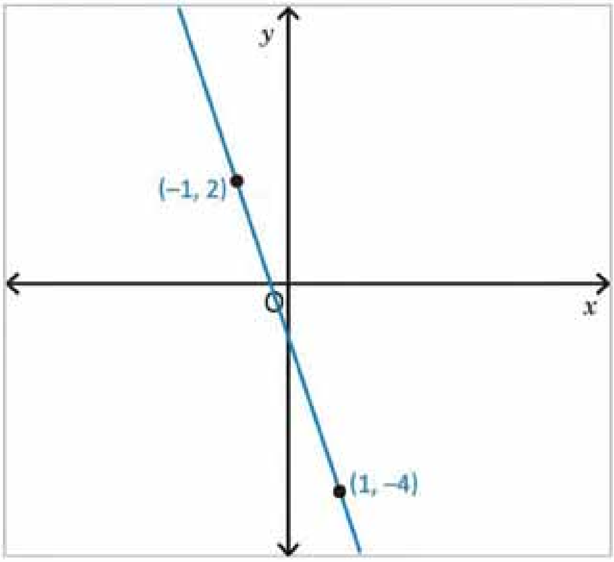
a)



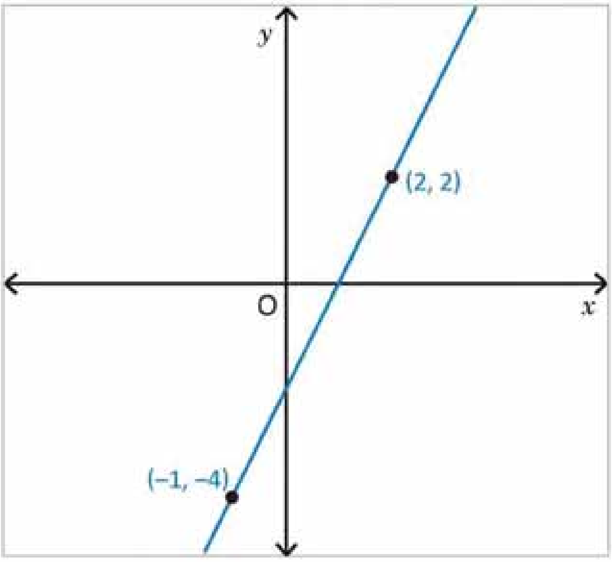
b)



c)



d)



1.20 軸との切片から求める関数の方程式

P

点 （–4, 0） と （0, 6） を通る一次関数の方程式を表しなさい。

S

点を通る一次関数の方程式を求めるには、次のことを考慮する必要があります：

- 点 （0, 6） の形式は （0, y） で、y 軸との切片に当てはまるので、$b = 6$ となります。
- 傾きは、点 （–4, 0） と （0, 6） の座標を用いて計算します。

$$a = \frac{6-0}{0-(-4)} = \frac{6}{0+4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

- 方程式を a とb の決定値を式 $y = ax + b$ に代入して表すと、$y = \frac{3}{2}x + 6$ が得られます。

（x, 0） と （0, y） 形式の点は、切片と呼ばれます。

（0, y） は y 軸との切片； （x, 0） は x 軸との切片となります。

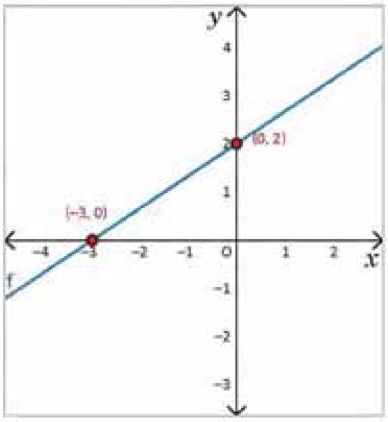
C

一次関数のグラフの （x, 0）、（0, y） 形式の2点の座標がわかっている場合、次のことを考慮して方程式を求めることができます

1. （0, y） の場合 ➡ $y = b$ は y 軸との切片に当てはまります。
2. 傾き $a = \frac{y-0}{0-x} = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x}$
3. 方程式は、a と b の計算値を式 $y = ax + b$ に代入して表します。

E

関数のグラフが示す点の座標を考慮に入れて、それぞれの式を表します。



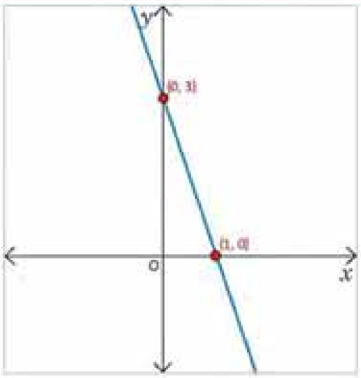
解答

グラフが示す点を通る一次関数の方程式を求めるには、前の例と同様の方法を用います。

- y 軸との切片を特定すると、$b = 2$ となります。
- 傾き $a = \frac{2}{-(-3)} = \frac{2}{3}$ を計算します。
- 得られた値を a と b に代入して方程式を表すと、式 $y = ax + b$ の場合、$y = \frac{2}{3}x + 2$ が得られます。

1. 点を通過する一次関数の方程式を表します。
   a) (0, 3)、(4, 0)
   b) (–2, 0)、(0, 4)
   c) (3, 0)、(0, 6)

2. 関数グラフ示す点の座標を考慮に入れて、それぞれの式を表します。



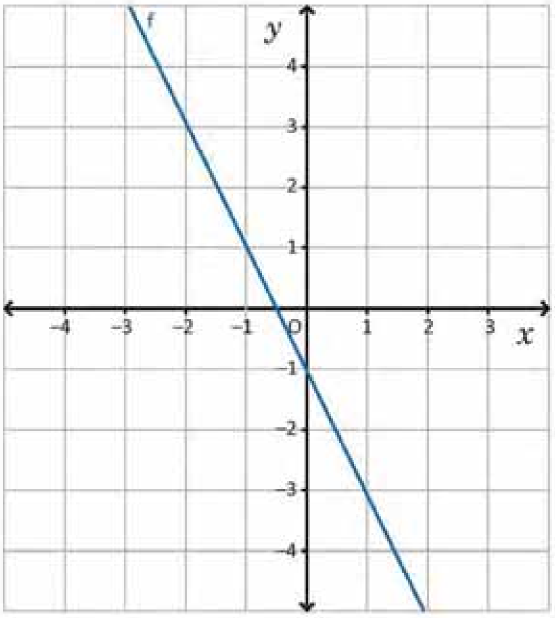
1.21 復習問題

提示された問題を、自分のノートで、順番に解いていきなさい。

1. ある日、アナは3ユーロと引き換えに3.6ドル、カルロスは7ユーロと引き換えに8.4ドルを支払いました。
   a) ユーロの価格 y とドルの価格 x が与える直線の方程式を求めます。
   b) 上記をグラフで表しましょう。
   c) 彼らは15ユーロと引き換えにいくら支払ったでしょうか？

2. 綿花栽培者は、1時間の作業で30 kg の綿を摘み取り、毎日、労働時間の始まりに30分かけて準備をします。この状況を表す一次関数は、方程式 $y = 30x - 15$ で得られます。ここでは y は何 kg を綿を摘み取ったかを表し x は何時間が経過したかを表します。
   a) 関数の表を作成し、グラフ化しなさい。
   b) 8 時間の労働で何 kg の綿が摘み取れますか？

3. プールにホースを使って中断することなく注水すると、水位は1時間ごとに15cmずつ増加します。プールの最初の水位が 12cm であった場合。
   a) 3時間後の水位は何cm になりますか？
   b) x 時間後の水位 y を書きなさい。



4. グラフの関数は、次のように作成します
   a) 切片を特定しなさい。
   b) 変化の割合を求めなさい。
   c) 関数の方程式を作成しなさい。

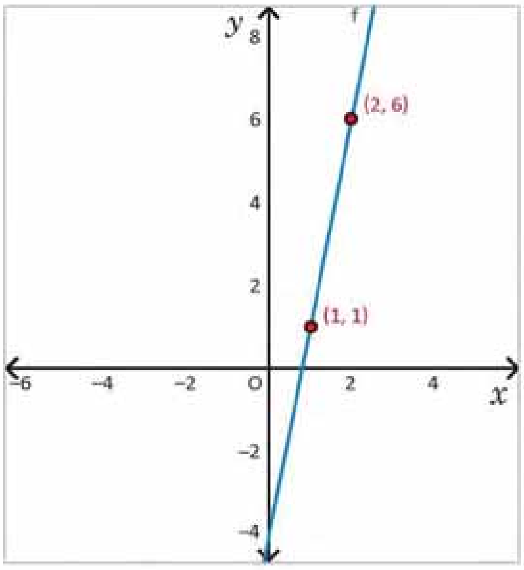
5. 同じ平面上で次の関数をグラフ化し、各数値について要求されていることを行いなさい。
   a) $y = 3x$　　b) $y = 3x + 1$
   c) $y = 3x - 1$　　d) $y = -3x + 1$
   e) $y = -3x - 1$　　f) $y = 3x + 2$
   g) $y = 3x + 3$　　h) $y = 3x + 5$

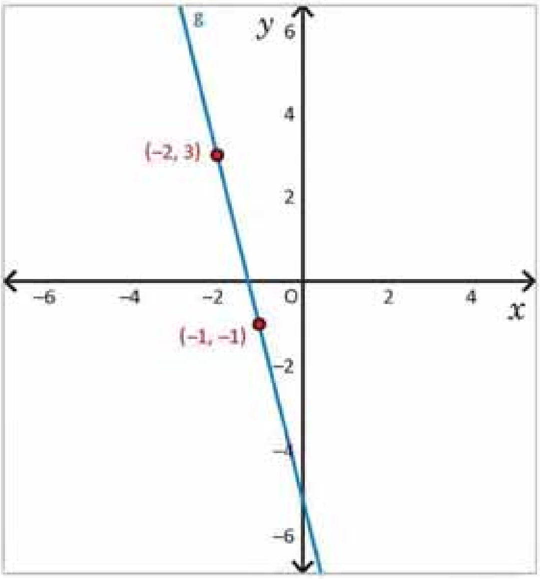
   I. 切片を特定しなさい。
   II. 変化の割合を求めなさい。
   III. どのように結論付けますか？

1.22 復習問題

提示された問題を、自分のノートで、順番に解いていきなさい。

1. 以下のグラフの関数について：
   a) x が1 進んだ場合、y がいくつ進むかを求め、自分の答えを立証しなさい。
   b) 表示された点の座標を考慮に入れて、x と y の増大分を求めなさい。
   c) 各グラフの関数の傾きを求めなさい。



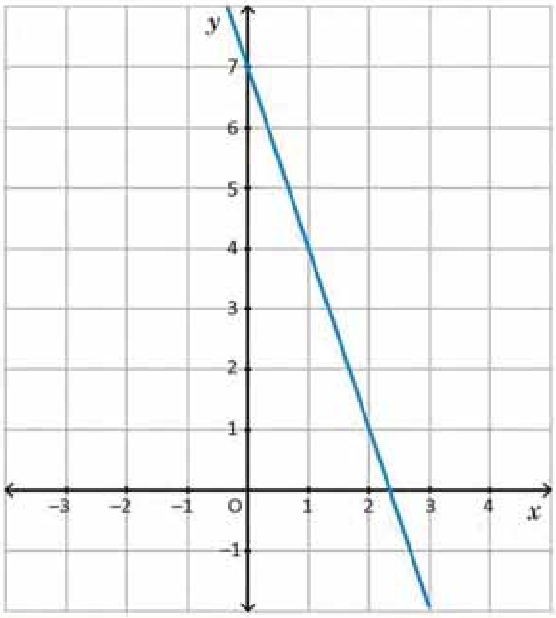


2. 以下の各関数の傾きと切片を特定しなさい：
   a) $y = x + 1$　　b) $y = 7x + 4$　　c) $y = -5x + 4$　　d) $y = \frac{5}{3}x - 2$

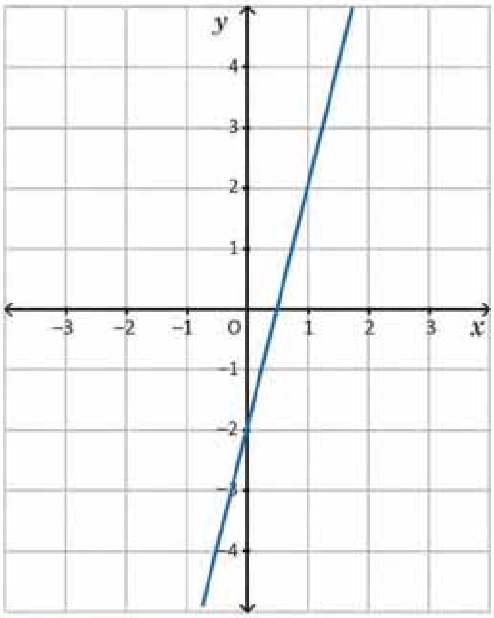
3. 各問について、y がどの値とどの値の間にあるかを求めます。
   a) $y = 8x - 10$、x は -1 から 5 の間にあります。　　$y = -6x + 5$、x は -2 から 3 の間にあります。

4. 各設問でグラフ化された関数を方程式で表しなさい：

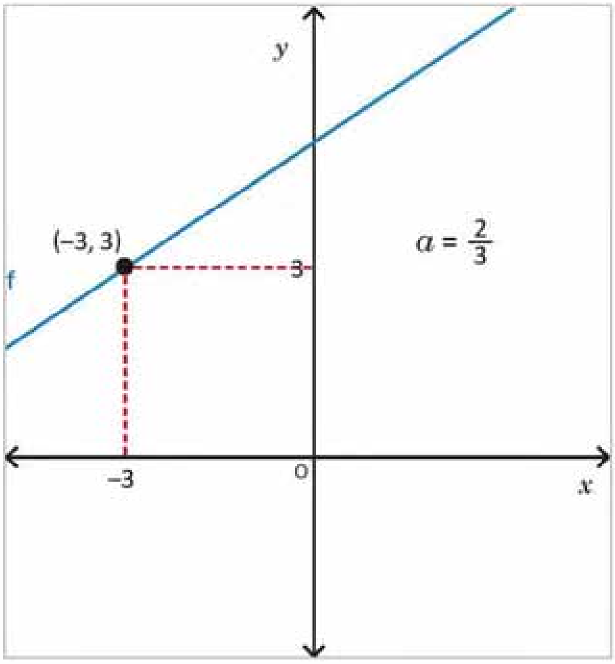
a)



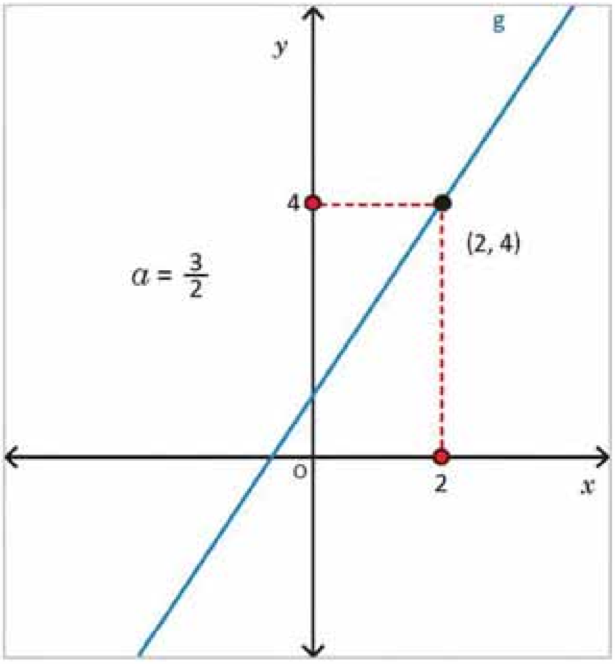
b)



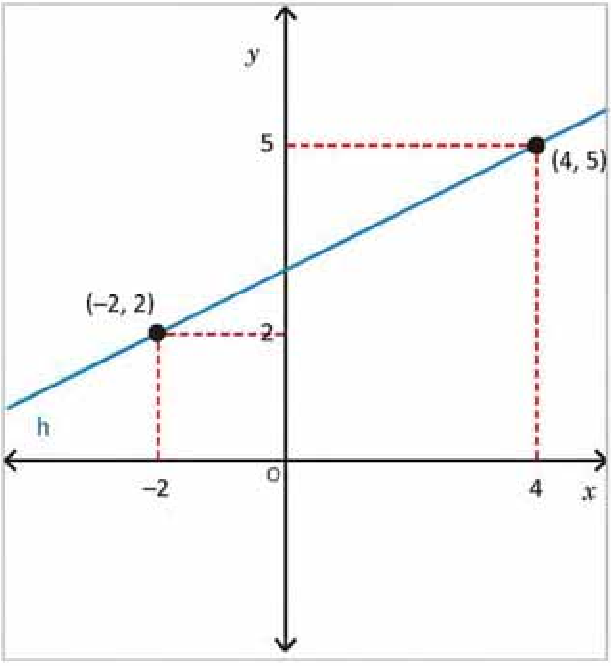
c)



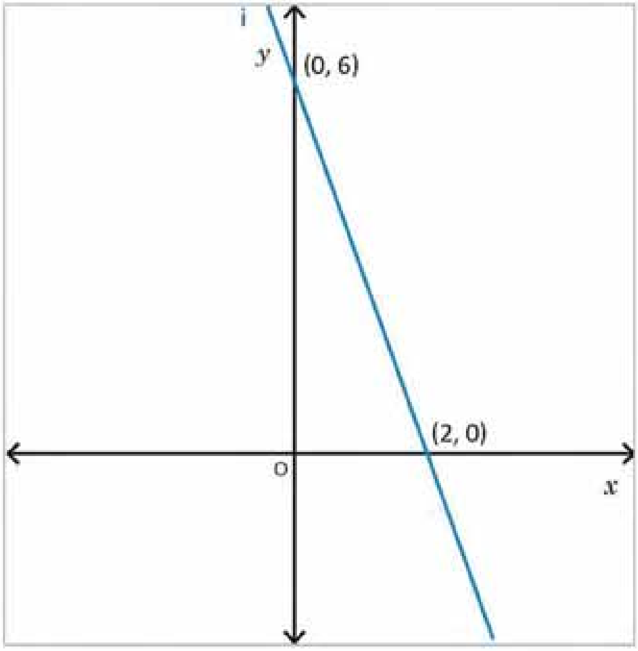
d)



e)



f)



5. 各問で与えられた情報を考慮に入れて、方程式 $y = ax + b$ を求めなさい。

a) 傾きが 3 で、点 （0, 5） を通ります。
b) 傾きが $\frac{3}{4}$ で、点 （4, 3） を通ります。
c) （0, −2） と （6, 2） の2点を通ります。
d) （−2, 1） と （−1, 3） の2点を通ります。
e) 関数 $y = 3x - 2$ のグラフと平行で、点 （0, 7） を通る関数。

2.1 二元一次方程式のグラフの書き方

P

方程式 $x + 2y + 4 = 0$ は、どのようなグラフに表すことができますか？

S

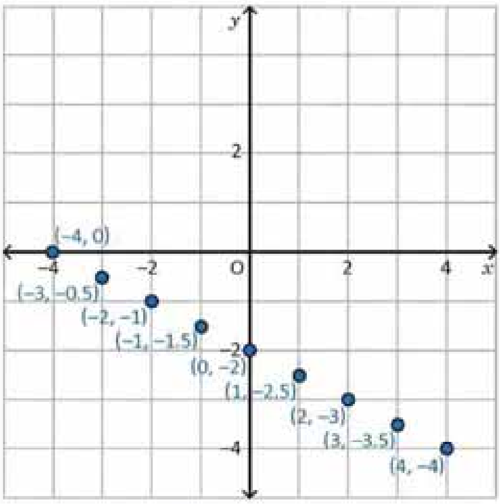
方程式$x + 2y + 4 = 0$をグラフで表すには、いくつかのxの値とそれぞれに対応するyの値を求め、それを平面上に順序対として表す必要があります。例えば、$x = -4$ の場合、方程式に代入すると、$-4 + 2y + 4 = 0$、$2y = 0$、よって、$y = 0$ となります。得られた値を表にまとめます。

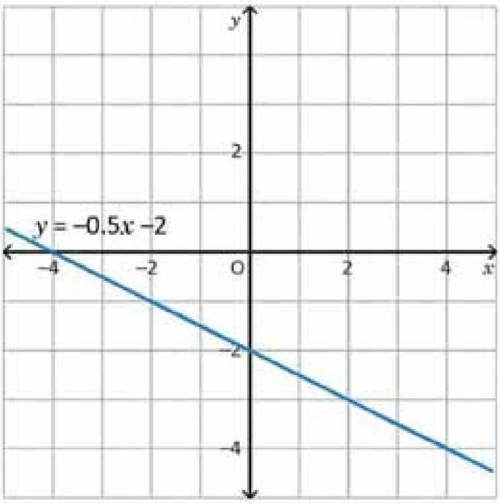
x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
y	…	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-2	$-\frac{5}{2}$	-3	$-\frac{7}{2}$	-4	…

計算を簡単にするために、方程式を y について解くことができます。x と 4 を右側に移動し、$x + 2y + 4 = 0 \Rightarrow 2y = -x - 4$、両辺を2で割り、 $y = -\frac{1}{2}x - 2$

もう一つの方法として、値xに対応するyの値を求め、さらにいくつかの xの値を代入します。

$x = -2$であれば、$y = -\frac{1}{2}(-2) -2$ 、よって、$y = -1$。





C

$ax + by + c = 0$の形の方程式をグラフに表すには、方程式が真となる x と y のいくつかの値を求め、これらを平面上に順序対として表す必要があります。

$ax + by + c = 0$の形の方程式のグラフ表示を一次関数のグラフと比較すると、いずれの場合もグラフは直線であり、方程式 $ax + by + c = 0$をグラフに表すには x に対応する y の値を求める必要があると結論づけることができます。

次の各方程式について、

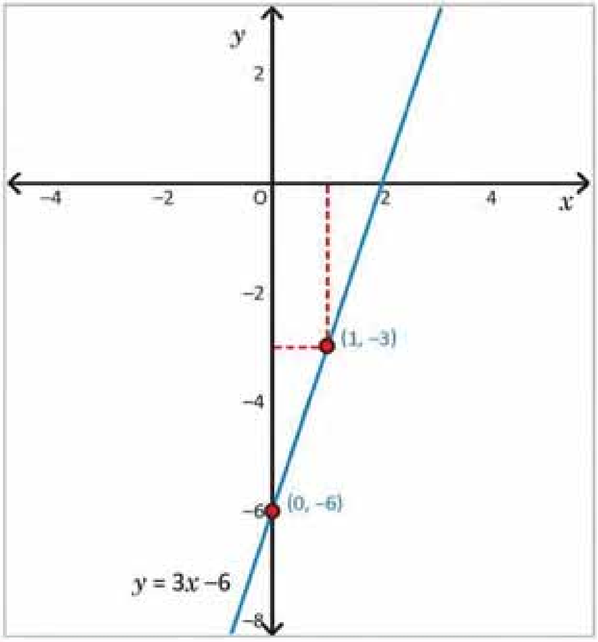
1. xに対応するyの値を求めましょう。
2. 順序対をまとめた表を作成しましょう。
3. 上記をグラフで表しましょう。

a) $-x + y - 3 = 0$　　b) $-2x + y - 2 = 0$　　c) $x + 2y - 6 = 0$

2.2 方程式$ax + by + c = 0$のグラフと関数$y = ax + b$の関係

方程式　$-6x + 2y + 12 = 0$　を　$y = ax + b$　の形に変形してからグラフに表しましょう。

- 方程式$-6x + 2y + 12 = 0$を$y = ax + b$の形に変形するには、次のようにしてyについて解きます。
  $-6x$ と 12 を右側に移動し、$2y = 6x - 12$、
  両辺を2で割り、$y = 3x - 6$



- 次に、これをグラフに表すと、傾き$a = 3$、切片 $b = -6$ となります。つまり、点（0, 6）を通ります。
- グラフ上のもう一つの点を求めます。

$x = 1$の場合

$$y = 3(1) - 6$$

$$y = -3$$

したがって、グラフは点（1, −3）を通ります。

点（0, −6）と（1, −3）を通るグラフを描きます。

二元一次方程式を直線の$y = ax + b$の形に変形するには、以下のようにする必要があります。

1. 方程式$6x + 2y + 12 = 0$をyについて解きます。
2. 傾きaと切片bを求めます。
3. 傾きと切片から、グラフ上の別の座標を求めます。
4. 求めた2つの点を通る直線を描きます。

以下の各方程式について、次のことを行いましょう：

1. 方程式をyについて解き、$y = ax + b$の形に変形しましょう。
2. グラフが通るもう一つの点を求めましょう。
3. グラフを描きましょう。

a）$-x + y = 6$
b）$2x + y = 10$
c）$3x - y = 1$

2.3 切片に基づく方程式$ax + by + c = 0$のグラフ

P

方程式$2x + y - 4 = 0$について、次のことを行いましょう。

1. $x = 0$の場合のy軸の切片を求めましょう。
2. $y = 0$の場合のx軸の切片を求めましょう。
3. 方程式のグラフを描きましょう。

S

座標軸との切片は次のとおりです。

1. $x = 0$であることから、y軸の切片は次のようになります。

$$\begin{aligned} 2(0) + y - 4 &= 0 \\ 0 + y - 4 &= 0 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

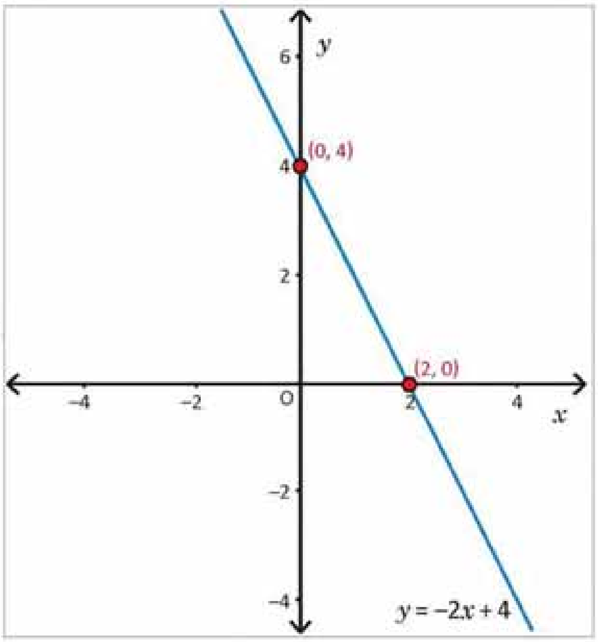
点（0, 4）が得られます。

2. x軸の切片は、$y = 0$であるのでこれを式$2x + y - 4 = 0$に代入し、

$$\begin{aligned} 2x + 0 - 4 &= 0 \\ 2x - 4 &= 0 \\ 2x &= 4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

点（2, 0）が得られます。

3. 点（0, 4）および（2, 0）を書き、グラフを描きます。



C

方程式$ax + by + c = 0$のグラフを描くには、2つの点が分かれば十分であり、x軸とy軸の切片を利用することができます。以下を行う必要があります。

1. y軸の切片（0, b）を求めます。
2. x軸の切片を求めます。$y = 0$とし、対応するxの値を計算し、点（x, 0）を求めます。
3. 切片を書き入れ、グラフを描きましょう。

各方程式について、次のことを行いましょう：

1. グラフのy軸とx軸の切片の値を求めましょう。
2. 方程式のグラフを描きましょう。

a) $3x + y = 6$　　b) $5x - 2y = 10$　　c) $3x - y = -6$

2.4 $a = 0$の場合の、$ax + by + c = 0$の形の方程式のグラフの書き方

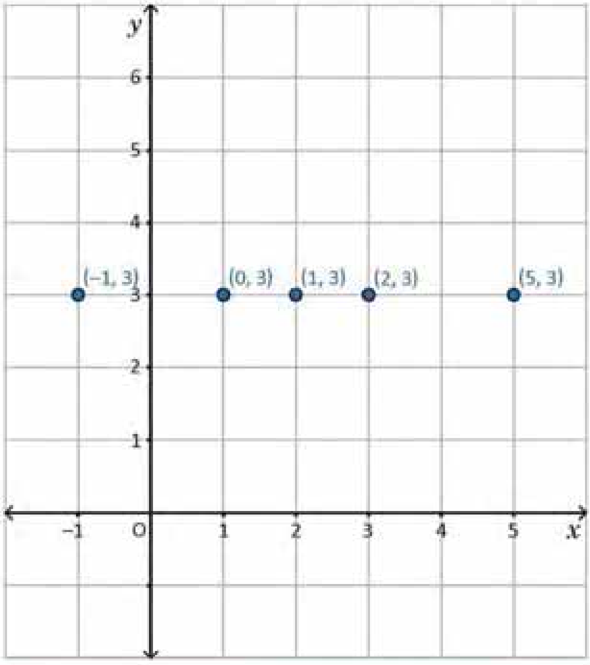
P

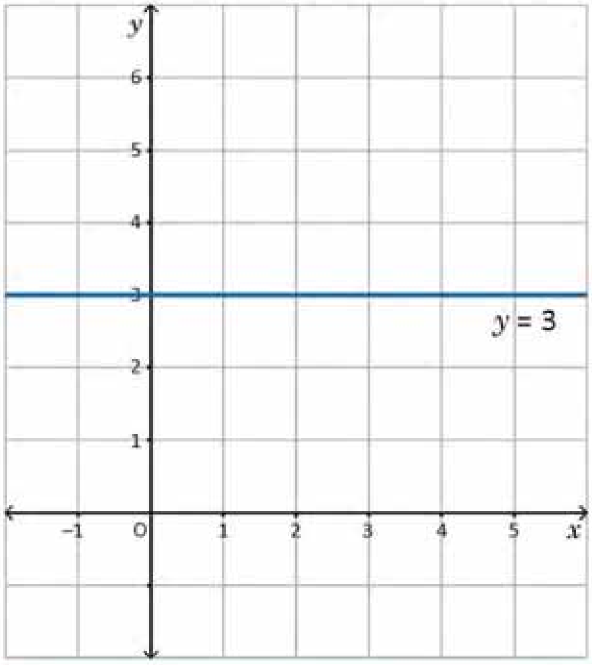
方程式$3y - 9 = 0$について、次のことを行いましょう。

1. 方程式をyについて解きましょう。
2. 等式を満たす少なくとも4組のxとyの値を求めましょう。
3. 方程式のグラフを描きましょう。

S

1. 方程式をyについて解くと、$3y = 9$となります。よって、$y = 3$。
2. 順序対を求めるには、方程式$y = 3$にはxが含まれていないことから、$y = 3$となるあらゆる順序対となります。例：（−1, 3）、（0, 3）、（1, 3）、（2, 3）、（5, 3）など。
3. よって、グラフに表すと次のようになります。





C

方程式$by + c = 0$をグラフに表すと、$y = -\frac{c}{b}$ の水平な直線を描きます。つまり、xはいかなる値にもなり得ます。したがって、グラフは展開例が示すようにx軸に平行な直線になります。

次の$by + c = 0$の形の各方程式について、

1. 未知数yについて解きましょう。
2. 上記を、点（0, $-\frac{c}{b}$）を通りx軸と平行な直線を描くグラフに表しましょう。

a) $2y - 10 = 0$

b) $-3y - 9 = 0$

c) $\frac{1}{2}y - 3y = 0$

d) $4y + 12 = 0$

2.5 $b = 0$の場合の、$ax + by + c = 0$の形の方程式のグラフの書き方

P

方程式$3x + 6 = 0$について、次のことを行いましょう。

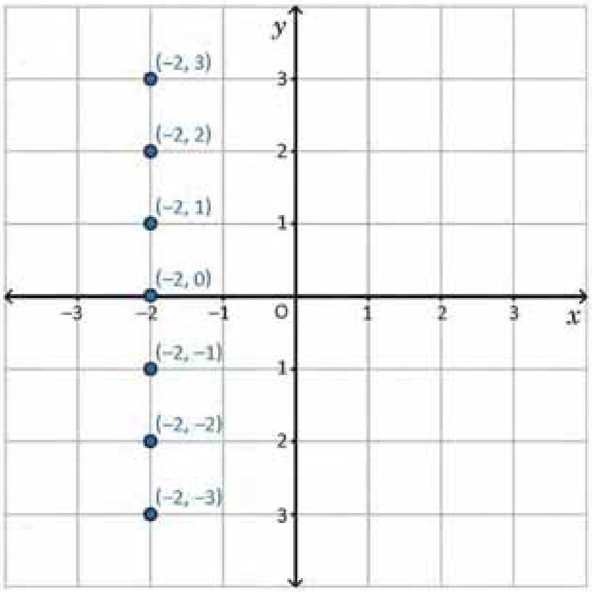
1. 方程式をxについて解きましょう。
2. 等式を満たす少なくとも4組のxとyの値を求めましょう。
3. 方程式のグラフを描きましょう。

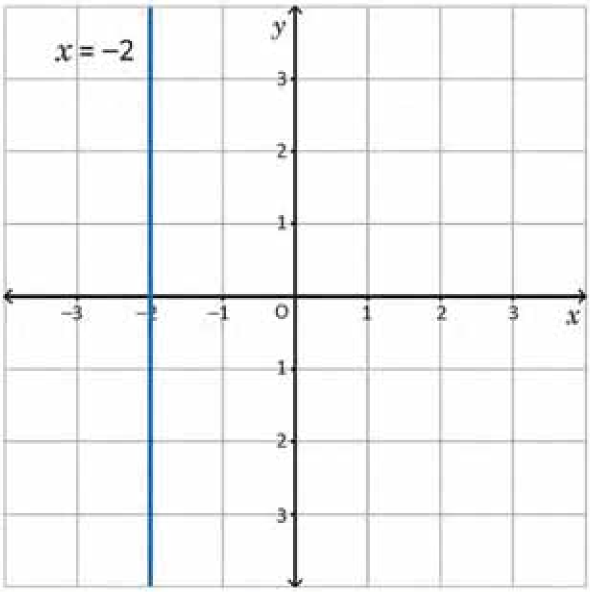
S

1. 方程式をxについて解くと、$3x = -6$となります。よって、$x = -2$。

2. 順序対を求めるには、方程式$x = -2$にはyが含まれていないことから、$x = -2$となるあらゆる順序対となります。例：（−2, −3）、（−2, −2）、（−2, −1）、（−2, 0）、（−2, 1）、（−2, 2）、（−2, 3）など。

3. よって、グラフに表すと次のようになります。





C

方程式$ax + c = 0$をグラフに表すと、$x = -\frac{c}{a}$ の垂直な直線だけが描かれます。つまり、yはいかなる値にもなり得ます。したがって、グラフは展開例が示すようにy軸に平行な直線になります。

次の$ax + c = 0$の各方程式について、

1. 未知数xについて解きましょう。
2. 上記を、点（$-\frac{c}{a}$, 0）を通りy軸と平行な直線を描くグラフに表しましょう。

a) $x - 2 = 0$

b) $-2x + 6 = 0$

c) $5x + 20 = 0$

d) $\frac{1}{2}x - 2 = 0$

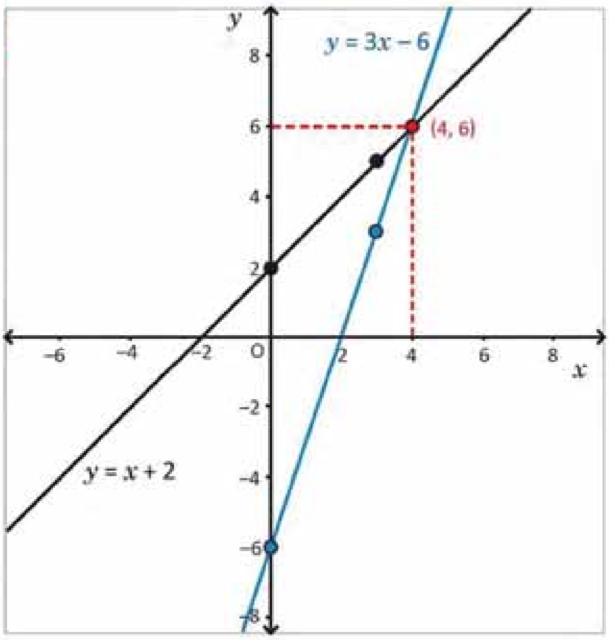
2.6 $ax + by + c = 0$ の形の2つの方程式のグラフの交点

P

連立方程式 $\begin{cases} -3x + y + 6 = 0 & ① \\ x - y + 2 = 0 & ② \end{cases}$ について、次のことを行いましょう。

1. 2つの方程式を$y = ax + b$の形に変形しましょう。
2. 2つの方程式のグラフを同じ平面上に描きましょう。
3. 2つの直線が交差する点の座標を求めましょう。
4. 交点の意味を解釈しましょう。

S



1. 方程式をyについて解くと、$\begin{cases} y = 3x - 6 & ① \\ y = x + 2 & ② \end{cases}$ となります。

2. 各方程式のグラフを取得するには、2つの点を特定します。この点は、y軸の切片および追加のもう一つの点とすることができます。

① $x = 3$の場合、次のようになります。 ②

$y = 3(3) - 6$
$y = 9 - 6$
$y = 3$

$y = x + 2$
$y = 3 + 2$
$y = 5$

以下の点を通ります。
(0, −6) および (3, 3)

以下の点を通ります。
(0, 2) および (3, 5)

3. y軸とx軸にそれぞれ平行な線を描くことで、2つのグラフが交差する点の座標が特定されます。グラフに示すように、点 （4, 6）となります。

4. 点 （4, 6） は2つの方程式のグラフに対応していることから、2つの方程式を満たしていると言えます。したがって、2つの二元一次方程式から成る連立方程式の解となります。よって、連立方程式の解は、$x = 4$, $y = 6$となります。

提示された連立方程式の解を求めるもう一つの方法は、すでに習った方法のいずれかを使うというものです。

C

連立二元一次方程式のグラフを同じ平面上に描く場合、2つのグラフが交差する点の座標が連立方程式の解となります。したがって、連立方程式はグラフを使って解くこともできます。2つのグラフを同じ平面上に表し、交点となる座標を特定します。

以下の各連立方程式について、次のことを行いましょう：

1. 2つの方程式を、傾き切片型に変形しましょう。
2. 2つの方程式のグラフを同じ平面上に描きましょう。
3. 2つの直線が交差する点の座標を求めましょう。
4. すでに習った方法を用いて解を求めましょう。

a) $\begin{cases} x + y = 7 & ① \\ -x + y = -1 & ② \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 8 & ① \\ -2x + y = -8 & ② \end{cases}$

2.7 グラフを利用した$ax + by + c = 0$ の形の連立方程式の解き方

P

次の連立方程式をグラフを使って解きましょう：
$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 & ① \\ -x - 3y = 3 & ② \end{cases}$$

方程式をグラフに表すために、x軸とy軸の交点を求めることができます。

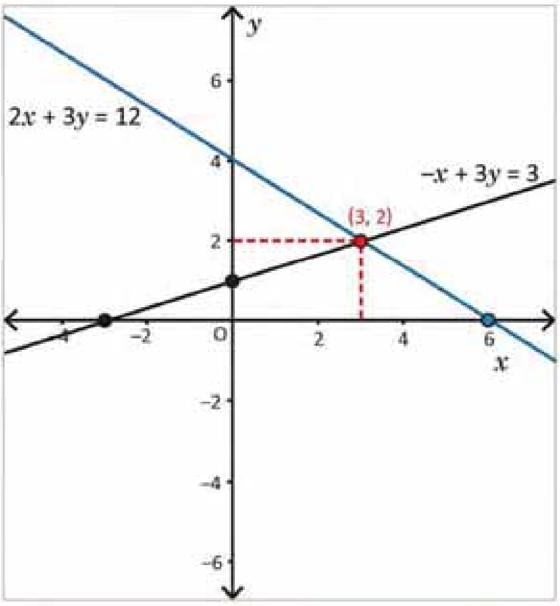
S

グラフを用いて連立方程式を解くには、交点を利用することができます。次のように行います。

1. 各方程式について、x軸とy軸との交点の座標を求めます。

2. 交点に基づいて、2つの方程式のグラフを同じ平面上に描きます。

方程式	y切片 ($x = 0$)	x切片 ($y = 0$)	順序対
$2x + 3y = 12$	$2(0) + 3y = 12$ $y = 4$ $(0, 4)$	$2x + 3(0) = 12$ $x = 6$ $(6, 0)$	$(0, 4)$ 、$(6, 0)$
$-x + 3y = 3$	$-(0) + 3y = 3$ $y = 1$ $(0, 1)$	$-x + 3(0) = 3$ $x = -3$ $(-3, 0)$	$(0, 1)$ 、$(-3, 0)$



3. グラフを作成し、交点を求めます。

4. 解を分析します。グラフに示すように、連立方程式の解は $x = 3, y = 2$です。

C

連立方程式の解をグラフを用いて求めるには、交点を利用して次のように行います。

1. x軸と y軸それぞれとの交点を求めます。
2. 交点を平面上に表し、グラフを作成します。
3. 両直線の交点のxとyの値を求めます。

以下の連立方程式のすべての解をグラフを使って求めましょう。

a) $\begin{cases} 3x + 4y = 12 & ① \\ x + 4y = -4 & ② \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + y = -2 & ① \\ -x + 2y = 2 & ② \end{cases}$

2.8 復習問題

これまでに学んできた問題を解くための戦略と方法を用いて、次の問題を解きましょう。

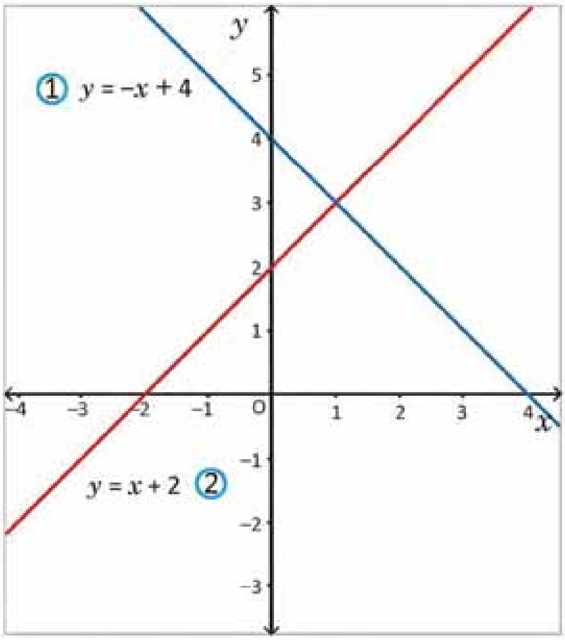
1. 以下の各一次方程式について、次のことを行いましょう：
    - yについて解きましょう。可能であれば$y = ax + b$の形に変形しましょう。
    - 可能であれば、それぞれの軸との交点を求めましょう。
    - 上記を座標平面上にグラフで表しましょう。

a) $2x + y = 6$　　b) $x + 3y = 12$　　c) $3x + 4y = 12$　　d) $5x - 3y = 15$

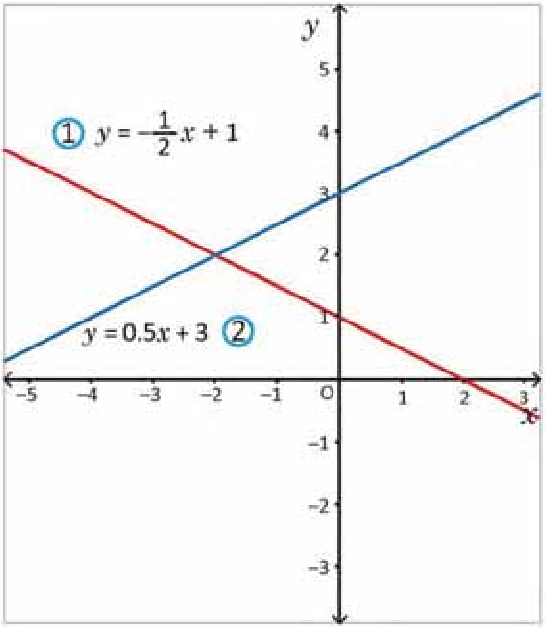
e) $\frac{1}{2}y - 3 = 0$　　f) $3y + 9 = 0$　　g) $\frac{1}{3}x - 1 = 0$　　h) $2x + 6 = 0$

2. 連立方程式を構成する各方程式とそれぞれ対応するグラフを関連付け、解を求めましょう。

a)



b)



3. 以下の各連立方程式について、次のことを行いましょう：
    - 方程式を $y = ax + b$の形で表しましょう。
    - 2つの方程式のグラフを同じ平面上に描きましょう。
    - 連立方程式の解を求めましょう。

a) $\begin{cases} -2x + 5y = 10 & ① \\ 2x + 3y = 6 & ② \end{cases}$　　b) $\begin{cases} x - y = 1 & ① \\ 2x + 3y = 12 & ② \end{cases}$　　c) $\begin{cases} -x + 2y = -6 & ① \\ -2x - y = -2 & ② \end{cases}$　　d) $\begin{cases} -x + y = -1 & ① \\ x + y = 3 & ② \end{cases}$

4. 各連立方程式をグラフに表し、解があればそれを示してあなたの答えを証明しましょう。

a) $\begin{cases} 4x + 6y = 12 & ① \\ 2x + 3y = 6 & ② \end{cases}$　　b) $\begin{cases} -x + 3y = 5 & ① \\ -x + 3y = -2 & ② \end{cases}$　　c) $\begin{cases} -x + 3y = 3 & ① \\ -3x - y = 9 & ② \end{cases}$　　d) $\begin{cases} -3x + 4y = 0 & ① \\ -4x - 3y = 0 & ② \end{cases}$

3.1 一次関数の応用　パート1

カルロスの家の毎月の水道料金請求書には、次のような項目が反映されています：下水道サービス料月額3.00ドル、消費水量1立方メートル（m^3）につき0.50ドル。

1. 16 m^3使用した月には、いくら支払う必要がありますか？
2. x立法メートルの水を消費した場合に支払う合計額yを書きましょう。
3. 立方メートル単位の水消費量と合計支払額の関係を表す関数をグラフに表しましょう。

1. 16 m^3の水を消費したときにカルロスが支払うべき金額を求めるには、下水道サービス料 + 0.50 × 総消費水量m^3と考えます。

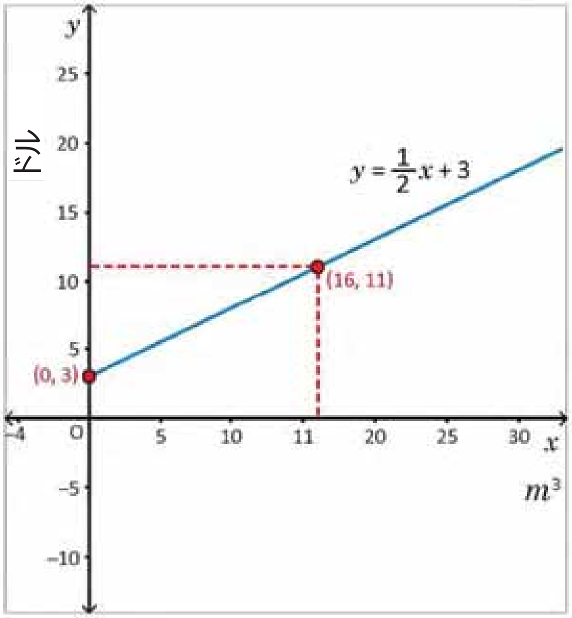
$$3 + 0.5(16) = 3 + 8 = 11.$$

16 m^3に対し11ドルを支払う必要があります。

2. 前項に基づき、x m^3に置き換えると、$y = 3 + 0.5x$となり、これは$y = 0.5x + 3$と等しくなります。

3. 水を消費しなかった場合の料金と16 m^3を消費した場合の料金が分かれば、図に示すようにグラフを描くことができます。

x が消費量を表すことから、$x \geq 0$、したがって、xが負の値の場合はグラフが表示されません。



一次関数を用いて問題を解くにあたって必要となるのは、2つの変数 xとyを特定し、yをxの一次関数として考えてから提示された条件に対して解答することだけです。

華氏（F）と摂氏（C）の関係は次のとおりです。

- 0° Cは32° Fに相当し、100° Cは212° Fに相当します。
- x° Cがy° Fに等しく、xの一次関数である場合、2つの変数を関連付ける方程式を求めましょう。

1. 最低気温が摂氏0° C、最高気温が摂氏15° Cを記録した冬の1日の気温差を求め、華氏温度で表しましょう。

2. 華氏温度計が摂氏温度計の3倍の数値を示すのは何度のときですか？

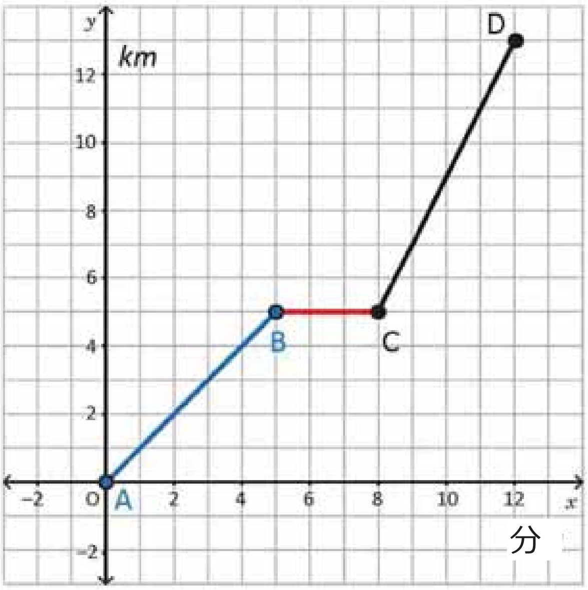
3.2 一次関数の応用　パート2

P

マリオはレースに参加しました。5分後に苦しくなり停止し、3分経って回復してからレースを再開し、遅れを取り戻すために速度を上げました。x分にyキロメートル走ったと考え、次の問いに答えましょう。

1. マリオが停止したのは、出発地点からどれくらいの距離ですか？

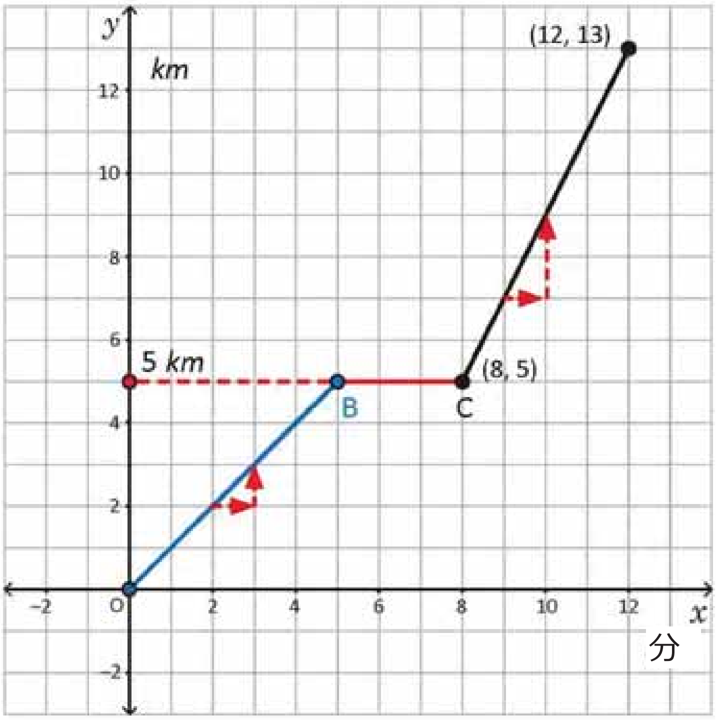
2. 停止の前後いずれについても、レースがx分経過したときの移動距離yを式で表しましょうい。



S

1. マリオがいた地点の距離を求めるには、停止した地点を通りx軸に平行な線を描きます。マリオが出発地点から5kmのところで停止したことが分かります。

2. 停止の前と後の距離
   - 停止する前の変化率を求めると、1分経過するごとにマリオは1km進んだことが分かります。つまり、$a = 1$です。したがって、停止する前の距離yは、$y = x$です。
   - 停止した後の変化率を求めると、1分経過するごとにマリオは2km進んだことが分かります。つまり、$a = 2$で、さらには点（12, 13）を通ります。このことから、$y = ax + b$に代入することでb の値が得られます。



$$13 = 2(12) + b$$
$$13 = 24 + b$$
$$13 - 24 = b$$
$$-11 = b$$

したがって、停止した後の距離yは、$y = 2x - 11$と表すことができます。

マリアは家を出て、家から1500m離れた学校に向かいました。

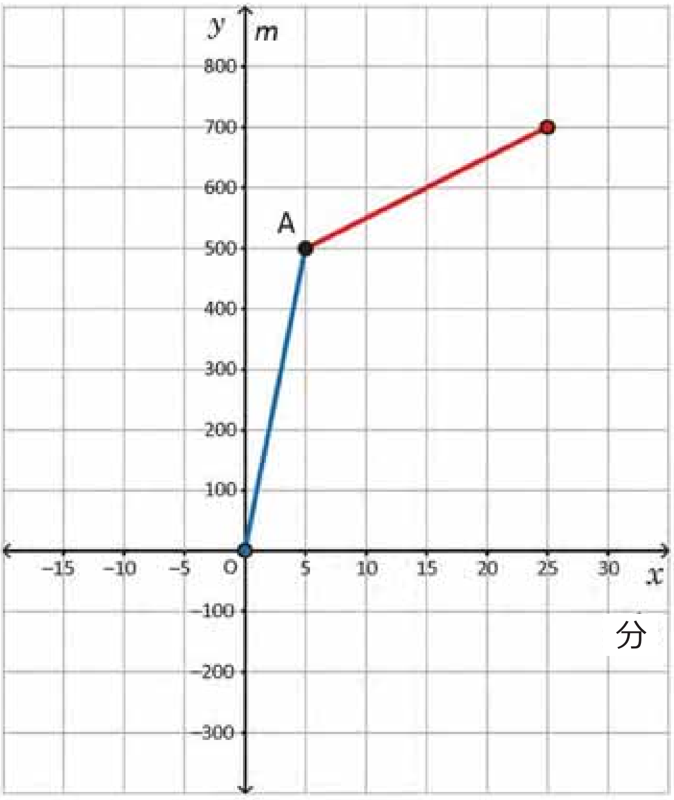
家から地点Aまでは自転車で移動し、そこから先は歩いて行きました。グラフは、家を出てから経過した時間x（分）と移動距離y（メートル）の関係を表しています。

a) 自転車で移動している間の速度をメートル毎分で求めましょう。

b) 0分から5分までの経過時間x分と移動距離yメートルの関係を式で表しましょう。

c) マリアが歩いているときの速度はどのくらいですか？

d) 5分から25分までの経過時間x分と移動距離yメートルの関係を式で表しましょう。



3.3 一次関数の応用　パート3

長方形ABCDにおいて、点Eは長方形の辺を点Aから点BとCを通って点Dに移動します。点Eがx cm移動したとき、三角形AEDの面積はy cm^{2}になります。図を見て答えましょう。

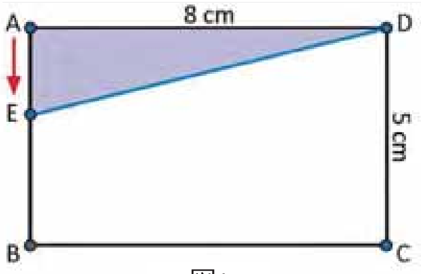


図1

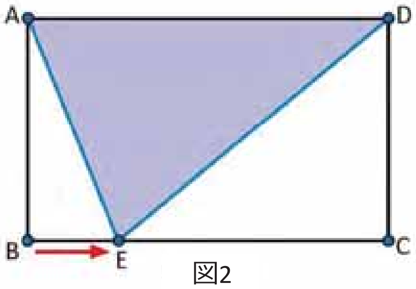


図2

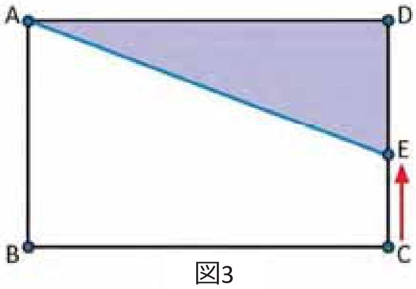


図3

1. 次の場合に、三角形AEDの面積がどうなるのか説明しましょう。

   a) Eは辺AB上を移動します。つまり、$0 \leq x \leq 5$。
   b) Eは辺BC上を移動します。つまり、$5 \leq x \leq 13$。
   c) Eは辺CD上を移動します。つまり、$13 \leq x \leq 18$。

2. EがAからBに移動する場合の、三角形AEDの面積yを式で表しましょう。（図1を参照）。

3. EがBからCに移動する場合の、三角形AEDの面積yを式で表しましょう。（図2を参照）。

4. EがCからDに移動する場合の、三角形AEDの面積yを式で表しましょう。（図3を参照）。

1. それぞれの場合について、点Eの動きを見ると次のように結論づけることができます。
   a) Eが辺AB上を移動する場合、三角形AEDの面積は増加します。
   b) Eが辺BC上を移動する場合、三角形の面積は一定になります。なぜなら、常に底辺が8 cm、高さが5 cmであるからです。
   c) Eが辺CD上を移動する場合、三角形の面積はゼロになるまで減少します。

2. Eが辺AB上を移動する場合の三角形AEDの面積は、底辺が8 cm、高さをxとして計算することができます。よって、$y = \frac{1}{2}(8)(x) = 4x$、つまり、$0 \leq x \leq 5$の場合、$y = 4\,x$となります。

3. 三角形AEDの面積は、Eが辺BC上を移動する場合には底辺が8 cm、高さが5 cmであるため、面積は$y = \frac{8(5)}{2}$です。つまり、$5 \leq x \leq 13$の場合、$y = 20$となります。

4. 三角形AEDの面積は、Eが辺CD上を移動する場合には底辺が8 cm、高さが（$18 - x$） cmです。よって、面積は $y = \frac{1}{2}(8)(18 - x) = 4(18 - x) = 72 - 4x$です。つまり、$13 \leq x \leq 18$の場合、$y = -4\,x + 72$となります。

次の場合について、三角形AEDの面積を同じ平面上にグラフで表しましょう。

a) Eは辺AB上を移動します。
b) Eは辺BC上を移動します。
c) Eは辺CD上を移動します。

3.4 復習問題

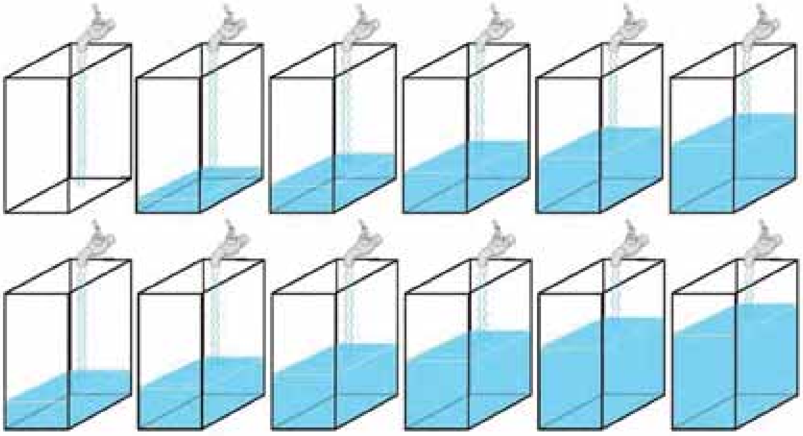
これまでに学んできた問題を解くための戦略と方法を用いて、次の問題を解きましょう。

1. フアンさんは、クローゼットを製造する零細企業を家族経営しています。この零細企業には、月額800ドルの賃貸料を支払っている小さな店舗があり、月給600ドルの従業員が2人います。クローゼット1個あたりの原材料費と物流費を合わせると100ドルに達し、販売単価は150ドルです。

   a) クローゼットをx個製造したときの**総費用**yを一次関数で表し、グラフを描きましょう。
   b) クローゼットをx個販売した場合の**総収入**yを一次関数で表し、グラフを描きましょう。（収入 = 単価 × 販売個数として考えましょう）。
   c) クローゼットをx個販売した場合の**総利益**（利益 = 総収入– 総費用）yを一次関数で表しましょう。

   d) フアンさんが負債を負わないようにするには、1カ月あたり少なくとも何個のクローゼットを販売する必要がありますか？

2. ミゲルは家のシンクを洗いました。その後、蛇口を開き、1分経過するごとにシンクの水位が1センチメートル上昇したことに気付きました。一方、叔母さんのシンクには2センチメートルの水位まで水が入っていましたが、蛇口を開くとミゲルの場合と同様に水量が増加しました。どちらのシンクも高さが90 cmであることを考慮し、次のことを行いましょう。



   a) 異なる時刻に水量を測り、結果を表にまとめましょう。
   b) シンクが一杯になる時刻を特定することは可能ですか？
   c) ミゲルのシンクへの注水データと叔母のシンクへの注水データを比較することは可能ですか？これらに関連はありますか？

3. 年末のバーゲンセールが始まり、ある店ではすべての商品に20%の割引が適用されます。

   a) 割引後の値段yと元の値段xの関係を表す方程式を書きましょう。
   b) 元の値段が60.00ドルであるシャツには、いくら支払えば良いですか？
   c) さまざまな値段の商品を考慮に入れ、元の値段xと割引後の値段yの関係を表すグラフを作成しましょう。

3.5 復習問題

これまでに学んできた問題を解くための戦略と方法を用いて、次の問題を解きましょう。

1. ある町には2つの電話会社があります。

   - A社は、月額15.00ドルの定額料金に加え、1分間の利用料0.05ドルを提示しています。
   - B社は、1分あたりの利用料0.25ドルのみを請求します。

   a) 両社について、利用時間x分と1カ月の支払金額yの関係を表す一次関数を同じ平面上でグラフに表しましょう。
   b) 通話が月に70分未満であった場合、どちらの会社と契約するべきですか？
   c) 2つの会社のどちらと契約しても変わりないのは、どのような場合ですか？
   d) どのような場合にA社と契約するべきですか？

2. ある町には、駐車場に関する規制があります。規則には、1分ごとに一定の金額を支払う必要があり、最低時間の定めはないことが示されています。

   - ホセが1.10ドルを入れると、パーキングメーターには45分（3/4時間）利用可能と表示されます。
   - ベアトリスが3.30ドルを入れると、利用可能時間は3時間半です。

   a) 金額と時間の関係を表す方程式を求めましょう。
   b) グラフを描きましょう。
   c) 40分（2/3時間）駐車するには、いくら支払う必要がありますか？
   d) 4.50ドルを支払う場合、駐車可能な時間はどのくらいですか？

3. マルタは自動車販売員です。月額800ドルの固定給に加えて、自動車の販売1台につき100ドルの手数料を受け取ります。x台の自動車を販売した月のマルタの給料を表す関数を求め、グラフに描きましょう。

4. フリアは、毎月両親から軽食代10.00ドルに加え、掃除をした日には0.50ドルをもらいます。掃除をx日おこなった月末にフリアが受け取る金額を表す関数を求め、グラフに描きましょう。

5. あるタイヤ修理店の労働者の日給は、固定基準額に修理したタイヤ1本につき2ドルを足した合計となっています。ある日、12本のタイヤを修理した後で、従業員は日給が44ドルになると計算しました。

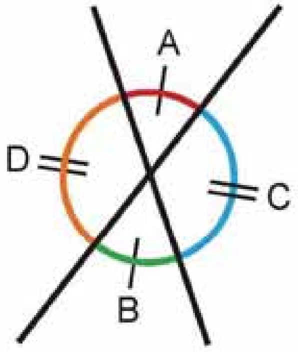
   a) 労働者の固定日給はいくらですか？
   b) x本のタイヤを修理した場合の労働者の給料を表す関数はどのようになりますか？
   c) 労働者の日給を表す一次関数をグラフに描きましょう。

6. ある飲料水の請求書では、固定料金が3.00ドル、水1立方メートルの代金が1.50ドルです。一次関数を利用して清算金額を計算することを考慮に入れ、

   a) x立方メートルに対する合計請求額yを求める方程式を書きましょう。
   b) 消費水量xと支払額yの関係を表すグラフを作成しましょう。
   c) 12月の消費量が28 m^3だった場合、この月の請求額はいくらですか？

平行線と多角形の角

ユニット 4



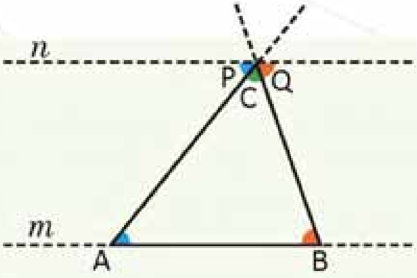
この図は、対頂角が等しいことを示しています。
出典：ピナスコ, フアン・パブロ (2009)『*Las Geometrías*（幾何学）』

ミレトスのタレス（ミレトゥス、タルキア；紀元前 620 －紀元前 545）は一連の一般的理論結果、つまり定理を最初に証明したとされる数学者です。それらを最初にどのように証明したかは知られていませんが、今日、これらの定理は基礎幾何学の一部を成し、その中には以下のものがあります。

- 対頂角は等しいです。
- 二つの平行線と一つの横断線がある場合、内側の錯覚は合同です。

角と平行線はさまざまな状況で用いられ、その例としては以下があげられます。建物の建築、門扉、階段、鉄道、道路；楽器や電線の設計、マンション設計、など。

高速道路ブルバール・モンセニョール・ロメロ



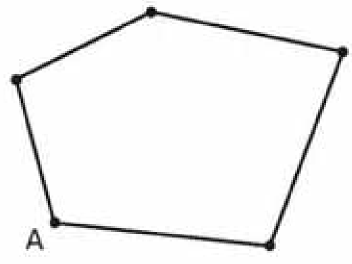
三角形の内角についてのピタゴラスの定理を証明する図

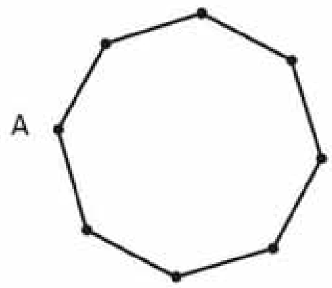
このユニットの内容を学習することで、三角形の内角同士の関係を復習することになるはずです、そして、このことは多角形の内角と外角や、平行線の間に形成される角と角の関係とその日常生活への応用を学習するうえで、基本として役に立つことでしょう。

1.1 多角形の内角の和、パート1

頂点Aから対角線を引き、多角形を三角形分割して、以下を求めましょう。

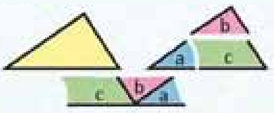
a) 五角形の内角の和はどのくらいですか？
b) 辺の数と分割されてできる三角形の数の違いはどれくらいですか？
c) 八角形の内角の和はどのくらいですか？
d) 辺の数と分割されてできる三角形の数の違いはどれくらいですか？



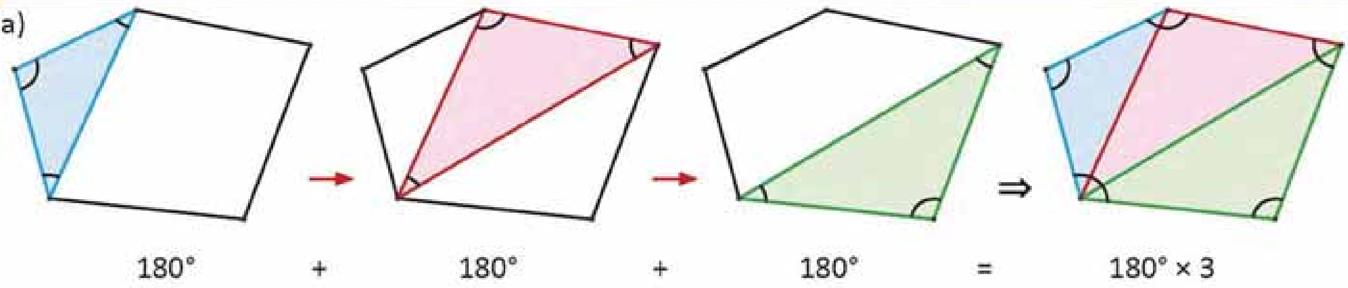


多角形の一つの頂点のから可能な限りの対角線を引いて三角形に分割できます。

三角形の内角の和は180度であることを復習してください。



a)



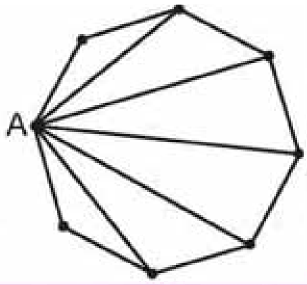
五角形は3つの三角形に分割されます。三角形の内角の和は180度です、従って：

五角形の内角の和 = 180° + 180° + 180° = 180° × 3

b) 辺の数と形成される三角形の数の違いは：5 – 3 = 2；また、五角形の内角の和は 180° × (5 – 2)

c) 八角形では、6つの三角形ができ、内角の和180° × 6が求められます。

d) 辺の数と形成される三角形の数の違いは：8 – 6 = 2



全ての多角形において、対角線を引くと辺の数より2つ少ない数の三角形ができます。よって、*n* 辺の多角形の内角の和は、180° × (*n* – 2) です。

以下の図形の内角の和を求めましょう。

a) 九角形　　b) 十二角形

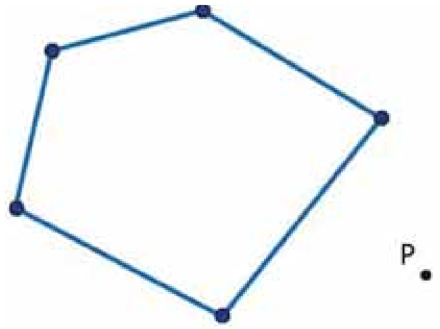
九角形は辺が9、十二角形は辺が12あります。

1.2 多角形の内角の和、パート2

P

多角形の内角の和を求めるための3つの異なる三角形分割の方法を見つけましょう。

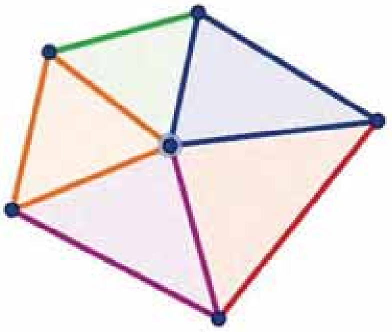
a) 内部の一点から
b) 辺の一点から
c) 外部の一点Pから
d) 結果を前回の授業で出した結果と比べましょう。



S

次の3事例を考慮して、次のようになります：

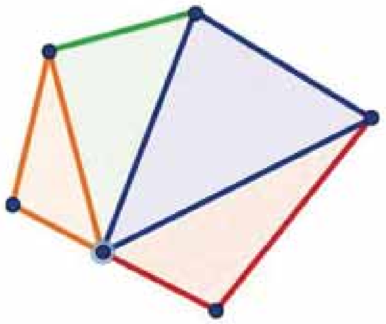
a) 五角形の内部に一点を書き、そこから 各頂点に向かって線分を引いて三角形分割をします。



五角形の内角の和 = 180° × 5 – 360°; 選ばれた内部の点に形成される角度を差し引きます。

五角形の内角の和
= 180° × 5 – 180° × 2
= 180° × 3 = 540°

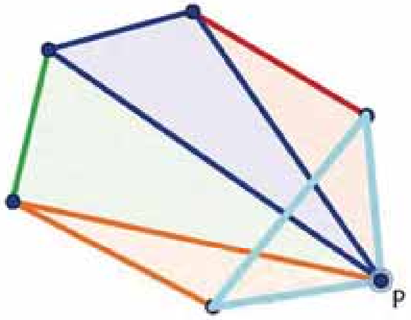
b) 五角形の任意の一辺に一点を書き、そこから隣り合っていない各頂点に向かって線分を引いて三角形分割をします。



五角形の内角の和 = 180° × 4 – 180°; 選択された辺にできる平角を差し引きます。

五角形の内角の和
=180° × 4 – 180°
= 180° × 3 = 540°

c) 五角形の外部に一点を書き、そこから各頂点に向かって線分を引きます。



五角形の内角の和 = 180° × 4 – 180°; 選択された外部の点と五角形の辺で形成された三角形の内角の和を差し引きます。

五角形の内角の和
=180° × 4 – 180°
= 180° × 3 = 540°

d) 前の3項目で得た結果を比較すると、互いに全く同じで、前回の授業の結果と同じになることが分かります。

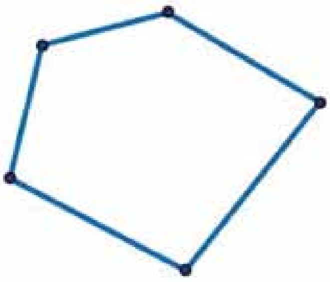
C

多角形の内角の和は異なった三角形分割を使って求めることができます、これは：

a) 任意の頂点から引く対角線が交わらないように注意して、
b) 多角形の内部の一点から三角形分割して。
c) 多角形の一辺から三角形分割して。
d) 多角形の外部の一点から三角形分割して。

E

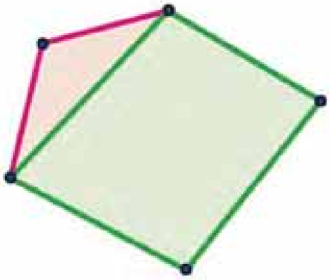
既に使った方法と異なる方法で五角形の内角の和を求めましょう。



五角形を四角形および/または三角形に分割することを考えましょう。

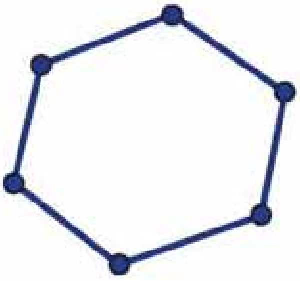
四角形や三角形に分割して、角の和を求めることができます。

$$\begin{aligned} \text{内角の和} &= 180° + 360° \\ &= 180° + 2 \times 180° \\ &= 3 \times 180° \end{aligned}$$

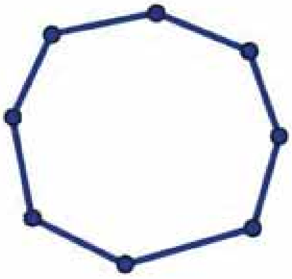


以下の図形の内角の和を求めましょう。

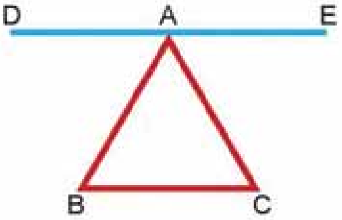
六角形



八角形



数字に依存する数学の問題を、図形と関係ある幾何学的問題と関連付けたことにより、数学の始まりにおけるピタゴラスは、ある意味、数学の中心的存在です：それに加えて、ピタゴラスまたは彼のアカデミーは2つの重要な成果をもたらしました、その1つは："全ての三角形において、内角の和は2つの直角に等しい"。

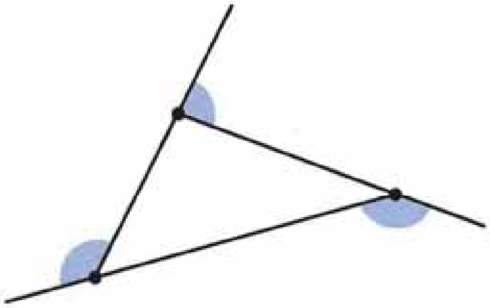


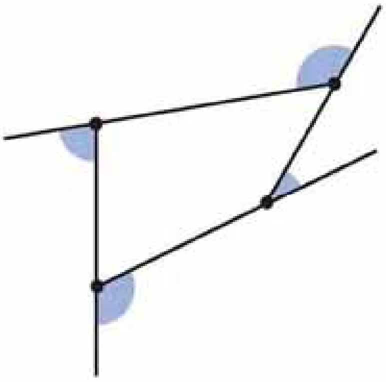
この授業で学んだ方法のうち少なくとも2つを使って計算しましょう。

1.3 多角形の外角の和

P

これらの多角形の外角の和を求めましょう。

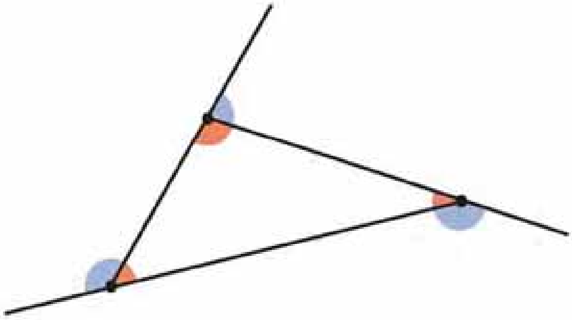




外角とは、多角形の 1 つの辺とこれに隣接する辺の延長とがなす角です。

外角の和を出すには、各頂点から1つだけ角を取ります。

S

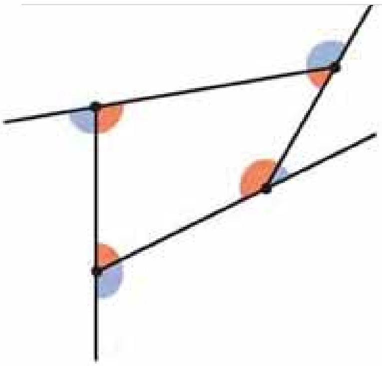


三角形の各頂点では、内角とそれに対応する外角を足すと 180°の角が形成されます。他の頂点の内角と外角の和を加えると 180° × 3 になります。

しかし、180° × 3 には内角の和 180° × （3 – 2）が含まれています；従って、三角形の外角の和は次のようになります：
180° × 3 – 180° (3 – 2) = 180° × [3 – (3 – 2)]
= 180° × 2= 360°

三角形の外角の和は360°です。

それでは、次の四角形の外角の和はどのくらいでしょう？



四角形では、各内角と対応する外角の和は 180°になります。よって、180° × 4 になり、内角の和 180° × (4 – 2) を差し引くと：
180° × 4 – 180° × (4– 2) = 180° × [4 – (4 – 2)]
=180° × 2 = 360° となります。

四角形の外角の和は360 °です。

C

- 多角形の外角の和は、辺の数とは無関係です。
- 多角形の外角の和は360°です。

以下の図形の外角の和を求めましょう

a) 五角形

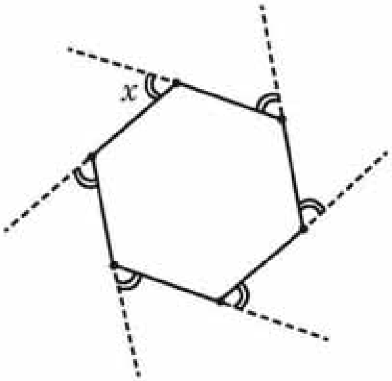
b) 六角形

1.4 正多角形の内角の和

P

示された正六角形の以下の値を求めましょう：

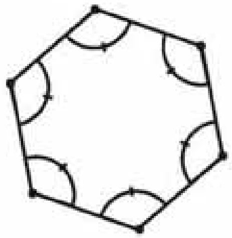
a) 各内角の角度。
b) x の値。



正多角形の内角はすべて同じです。

S

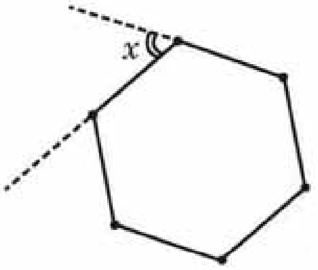
a)



六角形の内角の合計は180° × (6 – 2) = 720°です、よって：

各内角の角度は $\frac{720°}{6} = 120°$ です。

b)

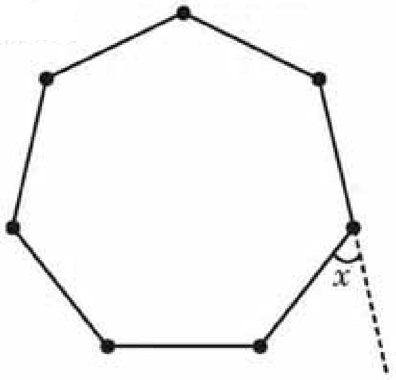


a) の結果から各内角の角度は120°になります。x は外角ですから、x + 120° = 180°、よって x = 60° になります。

C

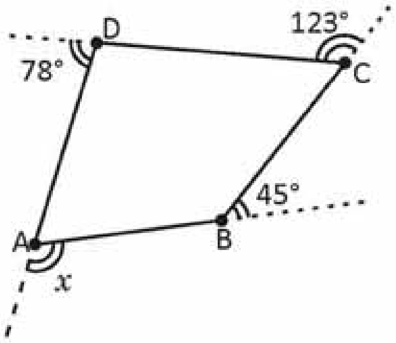
正多角形では、全ての内角は等しく、その和は 180° × （n – 2） になります。さらに、全ての外角も互いに等しくなります。

1.正七角形の各内角の角度と x の値を求めましょう。

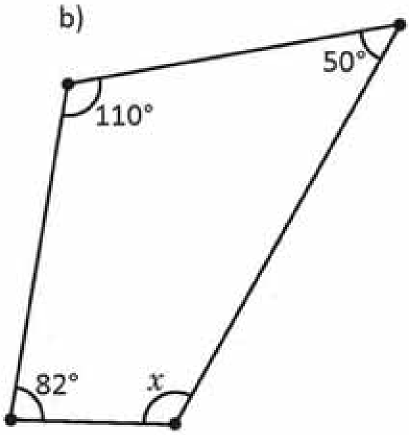


2. それぞれの事例の角度 x を求めましょう。

a)



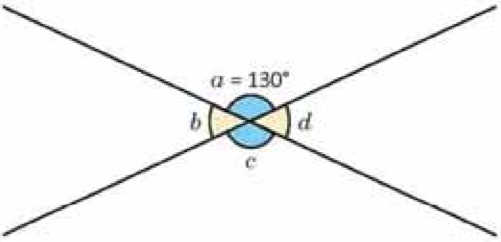
b)



四角形の内角と外角の和に関する知識を活用しましょう。

2.1 対頂角

$\sphericalangle a$ が130°なら、図の他の角の角度はどのくらいですか？



2つの角のうち1つが2辺の延長線上にあるなら、2つの角は対頂角です。

頂点の2つの対角は同じです。

補角であるから、$a + b = 180°$になり、よって、$\sphericalangle b = 50°$。

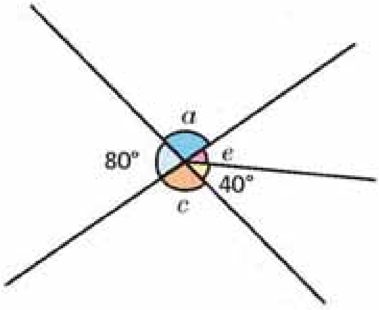
$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle a = \sphericalangle c\\ \sphericalangle b = \sphericalangle d\end{array}\right\}$$ 頂点が反対側にあるため。

対頂角と補角を利用して、共通の頂点に形成される角の角度を見つけることができます。

従って、$\sphericalangle a = \sphericalangle c = 130°$ y $\sphericalangle b = \sphericalangle d = 50°$。

2本の直線が交差すると2対の対頂角が形成され、その角度は、そのうちの1つの値を知っていれば求めることができます。

示された角の角度を求めましょう。



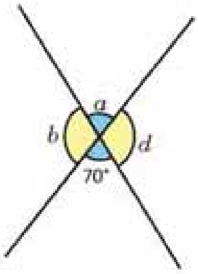
補角であるから$\sphericalangle c + 80° = 180°$、よって、$\sphericalangle c = 100°$。

$$\left.\begin{array}{r}\sphericalangle a = \sphericalangle c\\ \sphericalangle e + 40° = 80°\end{array}\right\}$$ 頂点が反対側にあるため。

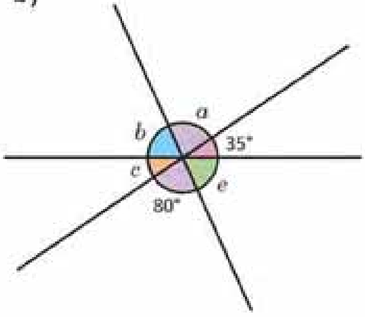
従って、$\sphericalangle a = \sphericalangle c = 100°$ および $\sphericalangle e = 80° - 40° = 40°$

以下に示される角の角度を求めましょう。

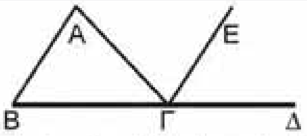
a)



b)



ピタゴラスによって確立されたギリシアの伝統的な数学は、プラトン・アカデミーの数学的研究の基礎であり、エウクレイデスの手によって、著書「原論」の中で正規の幾何学的モデルになりました。この著書の1巻での命題 I.32 で ＂三角形をなす辺のうち、1 辺を延長させると、その外角は2つの内対角の和に等しく、 三角形の3つの内角は2つの直角と等しい"、ことが確立されました。とはいえ、ピタゴラスは既にこの定理を平行線を使って証明していました。



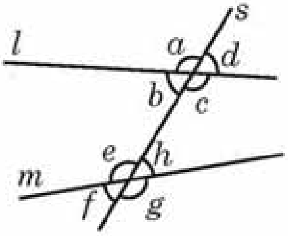
証明図
I.32、エウクレイデスによる。

2.2 同位角と錯角

P

次の図で特定します：

1. 直線 *l* と *m* の間にある角。
2. 直線 *l* と *m* の間にない角。
3. *s* の左または右にある角。



S

1. ∢*b* と ∢*c*
∢*e* と ∢*h*
直線 *l* と *m* の間。

2. ∢*a* と ∢*d*
∢*f* と ∢*g*
直線 *l* と *m* の外側。

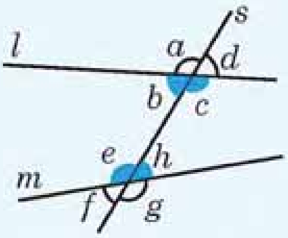
3. ∢*a* と ∢*e*
∢*b* と ∢*f*
s の左側。

∢*d* と ∢*h*
∢*c* と ∢*g*
s の右側。

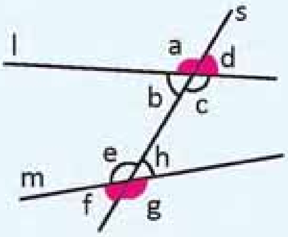
C

識別された角には、角を形成する直線に対する位置によって、次に示すように、特別な名称が与えられます：

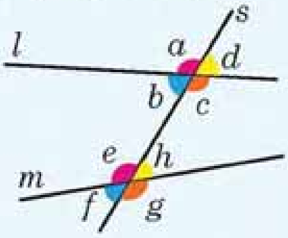
内角：
∢*b*, ∢*c*, ∢*e* と ∢*h*



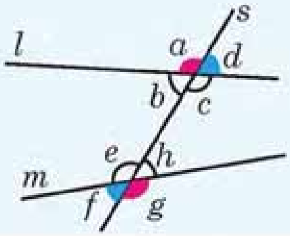
外角：
∢*a*, ∢*d*、∢*f* と ∢*g*



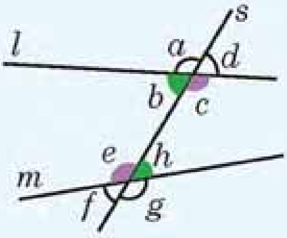
同位角：
∢*a* と∢*e*、∢*d* と∢*h*,
∢*b* と ∢*f*、∢*c* と ∢*g*



外側の錯角：
∢*a* と∢*g*、∢*d* と∢*f*

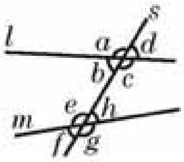


内側の錯角：
∢b と∢*h*、∢c と∢e



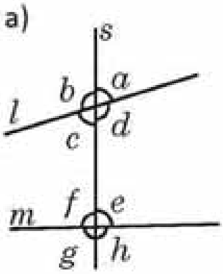
2本またはそれ以上の直線を切る直線を割線と呼びます。

図では、s は割線。

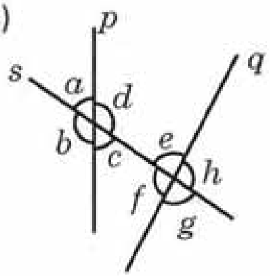


内角、外角、内側の錯角、外側の錯角および同位角に該当する文字を書きましょう。

a)



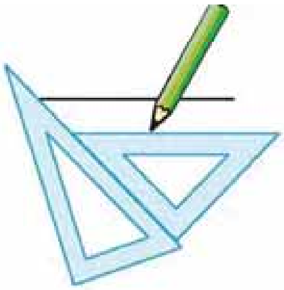
b)



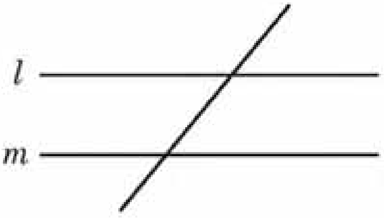
2.3 同位角の特性評価

l と *m*の平行線を描き、1本の割線を引きましょう、同位角間の角度の間にはどんな関係がありますか？

1. 三角定規を使って平行線を描きます。

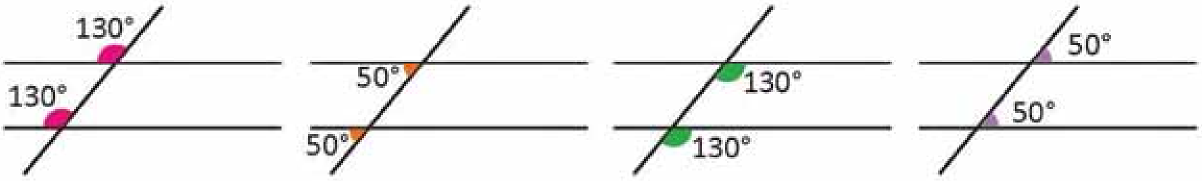


2. 作成した平行線に割線を引きます。



2本の直線が平行であることを示すためには、記号∥ を使います。つまり、直線 *m* が 直線 *l* と平行なら、*m* ∥ *l* と表します。

3. 分度器で角度を測ります。

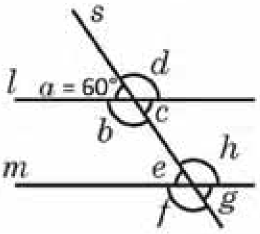


平行線が、1本の割線で切られている場合、同位角は同じです。

これは、その逆にも当てはまります。つまり、1本の割線で切られた2本の直線の間にできる同位角が 同じならば、その2直線は平行です。

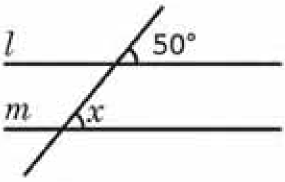
l ∥ *m* および角度 ∢*a* = 60°です、残りの角の角度を求めましょう。

∢*a* + ∢*d* = 180°、補角であるから ⇒ ∢*d* = 120°。
∢*c* = ∢*a* = 60° および∢*b* = ∢*d* =120°、頂点が反対側にあるため。
∢*e* = ∢*a* = 60°、∢*g* = ∢*c* = 60°、
∢f = ∢b = 120° および ∢h = ∢*d* =120°、同位角なので。

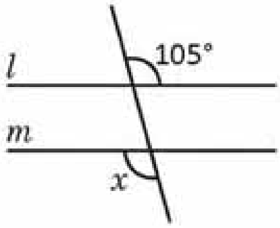


l // *m*であるなら。*x* の値を求めましょう。

a)



b)

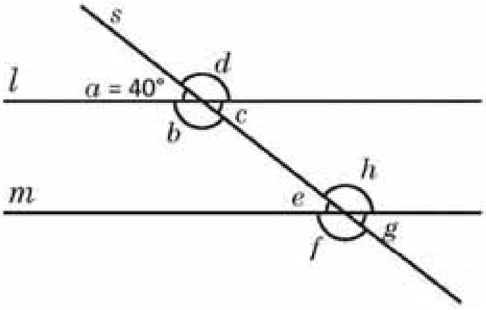


2.4 同位角の特性評価

P

直線 *l*, *m*, は平行線で、*s* が割線の時、次を実行しましょう。

1. 残りの角の角度を計算しましょう。
2. 対になっている内側の錯角、外側の錯角の間にはどのような関係があるか明らかにしましょう。



S

1. 角の角度を計算して

$\sphericalangle a + \sphericalangle b = 180°$　補角であるから、

$\sphericalangle b = 140°$

$\sphericalangle c = \sphericalangle a = 40°$
$\sphericalangle d = \sphericalangle b = 140°$
} 対頂角です。

$\sphericalangle e = \sphericalangle a = 40°$
$\sphericalangle f = \sphericalangle b = 140°$
$\sphericalangle h = \sphericalangle d = 140°$
$\sphericalangle g = \sphericalangle c = 40°$
} 平行線の間の同位角です。

2.

$\sphericalangle b$ y $\sphericalangle h$
$\sphericalangle c$ y $\sphericalangle e$
} 内側の錯角で、同じ角度です。

$\sphericalangle b = \sphericalangle h = 140°$ および $\sphericalangle c = \sphericalangle e = 40°$。

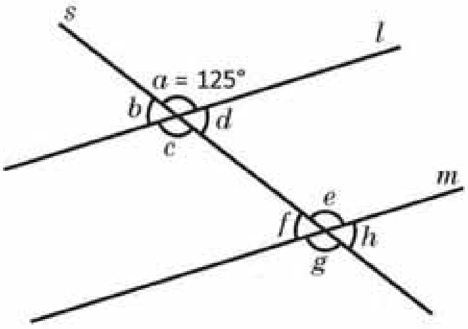
$\sphericalangle a$ y $\sphericalangle g$
$\sphericalangle d$ y $\sphericalangle f$
} 外側の錯角で、同じ角度です。

$\sphericalangle a = \sphericalangle g = 40°$ および $\sphericalangle d = \sphericalangle f = 140°$

C

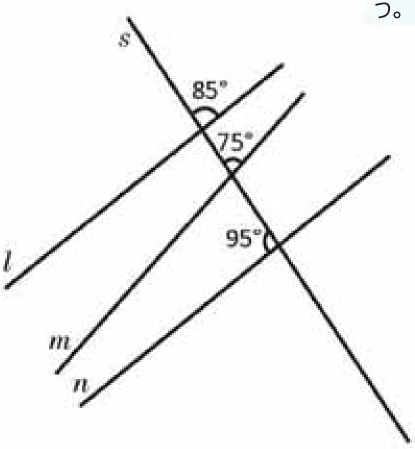
2本の平行線が1本の割線で切られている場合、内側の錯角と外側の錯角は同じです。これは、その逆にも当てはまります。つまり、1本の割線で切られた2本の直線の間の内側の錯角同士または外側の錯角同士が同じならば、その直線は平行です。

1. *l* ∥ *m* だから、内側の錯角のペアと外側の錯角のペアを識別し、それぞれの角度を求めましょう。



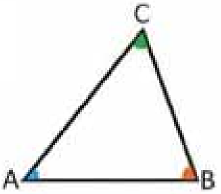
2. どの直線が平行線か識別しましょう。あなたの解答を証明しましょう。

角度を検討しましょう。



2.5 三角形の内角の定理の演繹

∢A, ∢B および ∢C,が三角形の内角なら、 ∢A + ∢B + ∢C = 180°であることを証明しましょう。

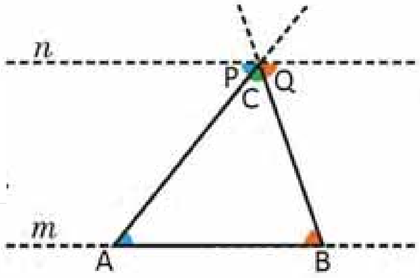


割線で切られた平行直線間の角の関係を使いましょう。

三角形の辺ABの延長線 *m* を作ります。頂点 C から直線 *m* に平行に直線 *n* を 引きます。

∢P + ∢C + ∢Q = 180°（平角を形成して）。

∢P = ∢A; ∢Q = ∢B（平行線間の内側の錯角のため）。



よって、∢A + ∢B + ∢C = 180° （代入して）。

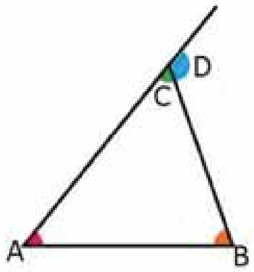
従って、任意の三角形の内角の和は180°です。

三角形の内角の和が 180°であることを証明するためには、1本の平行線を引き、平行線間の角の性質を利用することが必要でした。

1. 空欄を埋めて、“∢D が頂点Cの外角ならば、その角度は三角形ABCの他の2つの内角の和に等しい”； ということを証明しましょう。

解答
以下を証明しましょう

∢D が ∢C の外角なら、∢D= ∢A + ∢B となります。



三角形の辺ABの延長線 *m* を作ります。頂点 C から直線 *m* に平行に直線 *n* を 引きます。

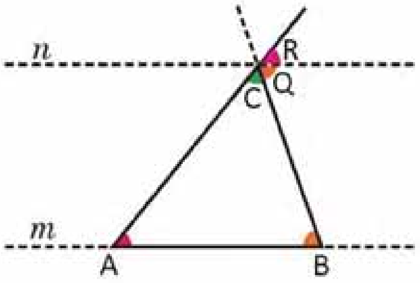
n // □（作図によって）。

∢Q = ∢B . . . (1) （平行線の間の □ であるから）。

∢R = □ . . . (2)（平行線の間の同位角なので）。

∢D = ∢Q + ∢R . . . (3) （作図によって）。

∢D = ∢B + ∢A (1), (2) および (3)のため。



よって、三角形の外角は隣接しない2つの内角の和と同じです。

2. 定理を証明する他の方法を探しましょう。そのために、三角形の2つの内角の和を利用することができます。

ユニット4

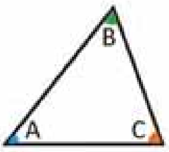
2.6 演繹の要素

P

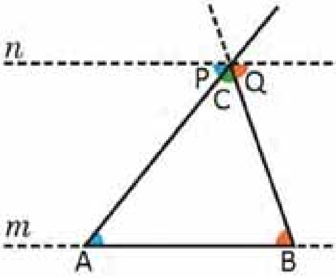
例を見て、演繹の要素を明らかにしましょう。

∢A、∢B および ∢C 、が三角形の内角なら：

∢A + ∢B + ∢C = 180°



∢A、∢B および ∢C、は三角形ABCの内角です。 → **仮説**



肯定	証明
1. $n \parallel m$.	作図によって。平角を作成することによって。
2. ∢P + ∢C + ∢Q = 180°	
3. ∢P = A; ∢Q = ∢B.	平行線間の内側の錯角のため。
4. ∢A + ∢B + ∢C = 180°	他動性のため。

→ **証明された肯定**

→ **結論**

演繹は、数学的に証明できる肯定によって、仮設から結論に達することを助ける方法です。

肯定は論理的根拠のある命題です。

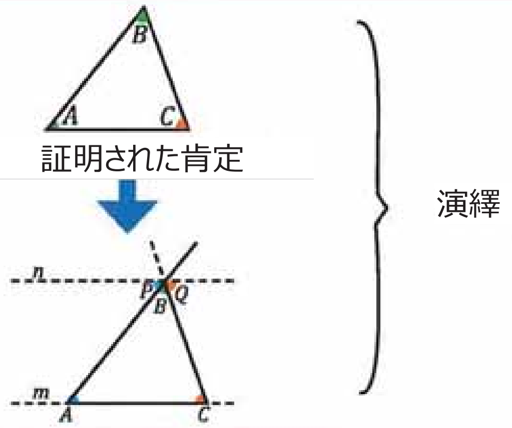
証明は、肯定を真実とする論拠です。

S

演繹には次のものがあります：

1. 仮説。
2. 証明による肯定。
3. 結論。

右の図では、演繹の流れを図で表しています。



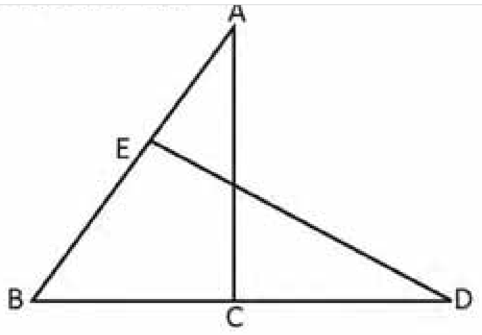
C

“ □ ならば、 よって、◯ ” のような表現を**命題**と言います。

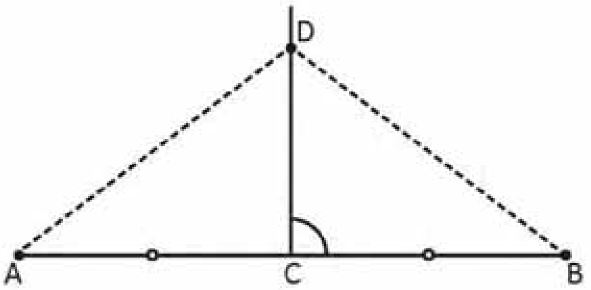
□ で示された部分は**仮説**と呼び；◯ で示された部分は**結論**と呼びます。

仮説と結論を識別しましょう。

1. 図の上で、∢CAB = ∢BDE および AB = DB, であれば、BC = BEです。



2. D点が、線分ABの二等分線上にあれば、DA = DBです。



2.7 平行線間の角の特性の応用

P

カルロスは、高さ 560 cm の階段を設計する必要があります、 階段は 18 cm の蹴込みと高さの半分の所に踊り場が必要です。設計に必要な段数、階段の傾斜や角度を知るために、カルロスはどんな計算をしなければなりませんか？

S

まず、問題の条件を考えることが必要です。

1. 階段の高さは 560 cmです。
2. 280 cmの所に踊り場が必要です。
3. 蹴上は、18 cmあるべきです。

まず最初は蹴上の数を見つけることです：

$$\frac{280\text{ cm}}{18\text{ cm}} = 15.56$$ 、約 16です。

次に、蹴上の実際の寸法を決めます：

$$\frac{280\text{ cm}}{16\text{ cm}} = 17.5\text{ cm}$$

“ブロンデル”の法則を適用して、次のようになります：

$$2 \times 17.5 + H = 64$$
$$H = 64 - 35$$
$$H = 29$$

従って 踏み板の寸法は29 cmあるべきです。

踏み板と蹴上の関係は $\frac{17.5}{29} = 0.6034$; 約 $\frac{17}{29}$です（図3参照）。

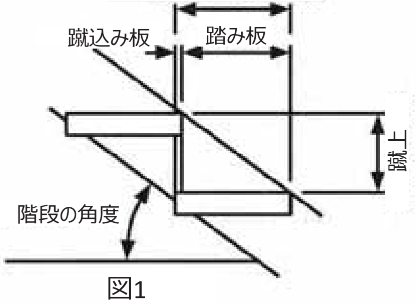


図1

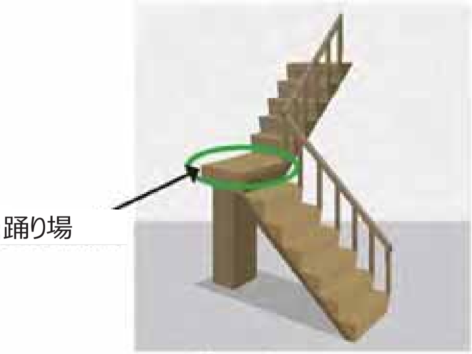


図2

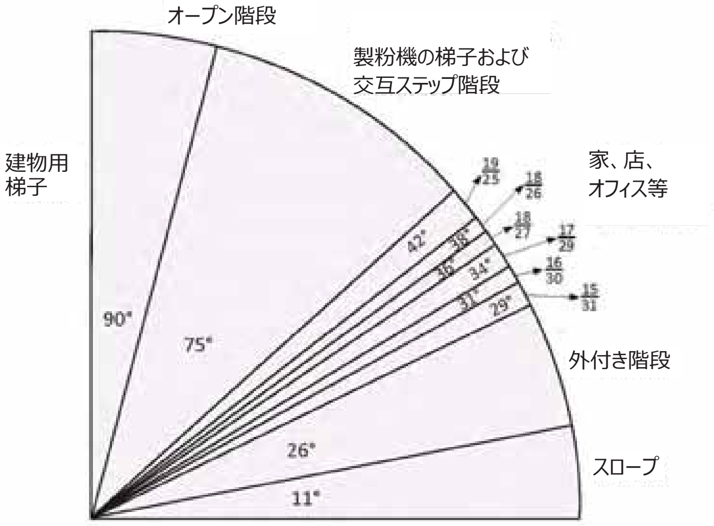


図3

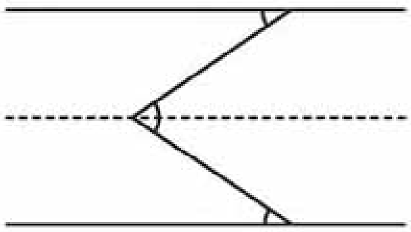
サンティアゴ・フランシスコ・ブロンデルはフランスの建築家で都市計画者で、18世紀の最も重要な建築理論家のうちの一人でした。彼が貢献したものの一つは、 階段の踏み板と蹴込みの関係を確立した“ブロンデルの法則”です （図 1参照））。ブロンデルの法則は次の関係を確立します：CH が蹴上の寸法で、H が踏み板の寸法とすると、2CH + H = 64 cmです。

踏み板は階段の足が乗る部分で、蹴上は2段の踏み板の高さで決まります。

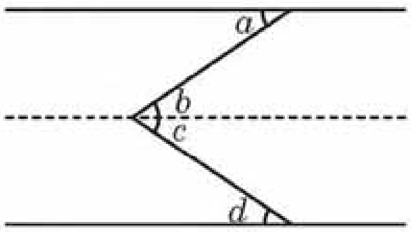
275 センチメートル以上の階段では、“踊り場” （図2参照）を設けることが推奨されます。踊り場は、階段の区切りごとに設けられる平らな場所です。

傾斜の角度は、踏み板と蹴上の比率で決まります（図3参照）。一般的に、最も快適な階段の傾斜は31° から37° とされています。

踊り場の高さに平行線をひいて、以下が得られます



以下の角度が形成されることに注目しましょう：



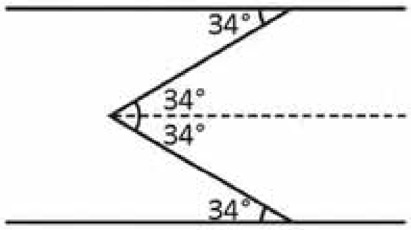
$\measuredangle d$ = 34° 踏み板と蹴上の比率です。

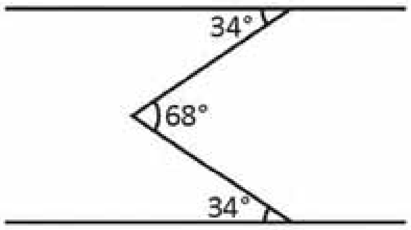
$\measuredangle d$ = $\measuredangle c$ 平行線間の内側の錯角のため。

$\measuredangle b$ = 34° 階段の上半分の部分なので、同じ傾斜であるべきです。

$\measuredangle b$ = $\measuredangle a$ 内側の錯角のため

次に$\measuredangle a = \measuredangle b = \measuredangle c = \measuredangle d = 34°$





この情報で、カルロスは自分の設計の報告を完成することができます。

平行線間の角の特徴を適用して、未知の角度を計算する必要がある日常生活の問題を解決することが可能です。

サンタテクラ市役所は、通りと大通りの交差点における角度を知る必要があります。測量士はもう角度を測定して、そのデータは、10^a から 14^aまでの大通りと同様、9^aから 13^a までの通りは平行であることを考慮して、地図に示されています。示された角の角度を求めましょう。