# 三角形の合同条件

5 ユニット

ユークリッドの著書「原論」は、数学の専門書で、文化史全体に渡って大きな影響及ぼしています。さらにその影響は、数学そのものや関連する科学以外のものにまで大きく及んでいます。第1巻の命題 16 から 26 までで、ユークリッドは、三角形の全般的な考察結果を提示しています。例えば、定規とコンパスを使用した構成要素の作図、三角形と四角形の合同、三角形の角や辺が等しくないことなどです。


Propositio .22.

Ropositis tribus lineis rectis quarū due quelibet simul iuncte reliquę sint longiores de tribus aliis lineis sibi e/qualibus triangulum constituere.

ユークリッドの著書「原論」の命題 1.22

図の合同という概念は、建設、備品や家具の組立、内装品のデザイン、自動車の製造、インフラの再整備などに応用されています。

合同の概念は、組になっている家具のデザインに使うことができます。

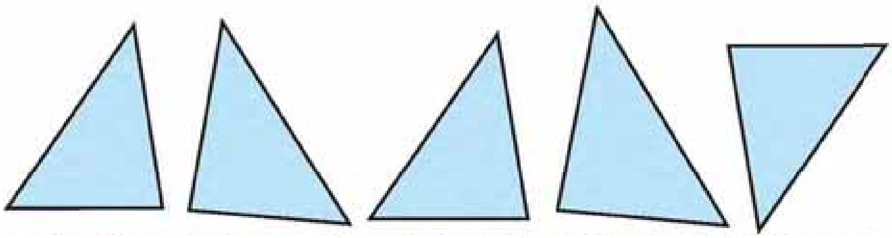
図の合同は、歩道橋のデザインに応用することができます。

このユニットでは、三角形の合同の意味と、二つかそれ以上の三角形が合同か否かを判定するための条件について学習します。また、数学的特徴を証明する際の応用方法や、日常生活の中の問題を解決するための応用方法についても学習します。

## 1.1 三角形の合同とは

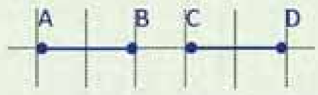
**P**

三角形2～5のうち、三角形1とぴったり重なる図形を見つけましょう。（裏返して重ねることもできます）



三角形1　三角形2　三角形3　三角形4　三角形5

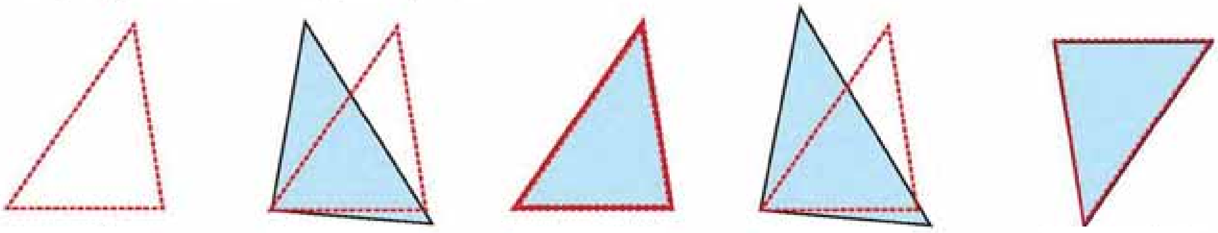
2つの線分の長さが同じであれば、その線分は等しいです。例：AB = CD




2つの角の大きさが同じであれば、その角は等しいです。例： ∢F = ∢H


**S**

三角形1を切り取りひとつずつ重ねていくと、すべての辺と角がぴったり重なるのは、三角形3と5だけであることがわかります。



三角形1　三角形2　三角形3　三角形4　三角形5

**C**

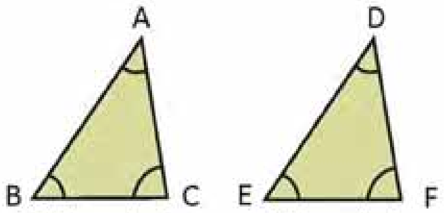
2つの図形があり、直接もしくはそのひとつを裏返してぴったりと重なるとき、その2つの図形は**合同**であるといいます。

合同な図形の頂点、辺、角はそれぞれ、**対応する**頂点、**対応する**辺、**対応する**角といいます。

図形において**対応する**要素のことを、**対応要素**ともいいます。

**E**

合同な三角形があります。対応する頂点、辺、角を見つけましょう。



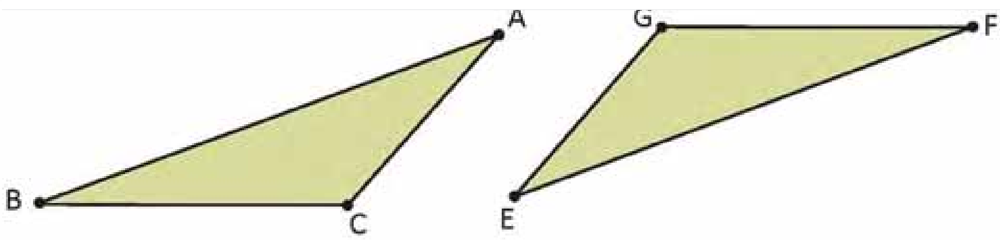

三角形1　三角形2

対応する頂点：A と D、B と E、C と F

対応する辺：AB と DE、BC と EF、CA と FD

対応する角： ∢A と ∢D、∢B と ∢E、∢C と ∢F

次の三角形は合同です。2つの図形を比較し、対応する頂点、辺、角を見つけましょう。

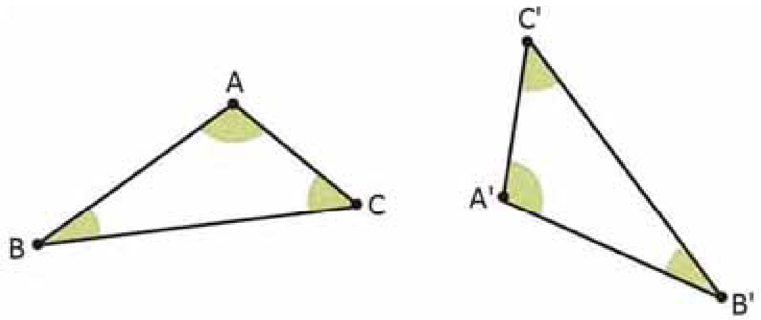



置き方が違っても、この2つの三角形は合同です。回したり裏返したりして重ねてみましょう。

# 1.2 三角形の合同

**P**

ΔABC と ΔA'B'C'は合同です。対応する辺と角を比較しましょう。

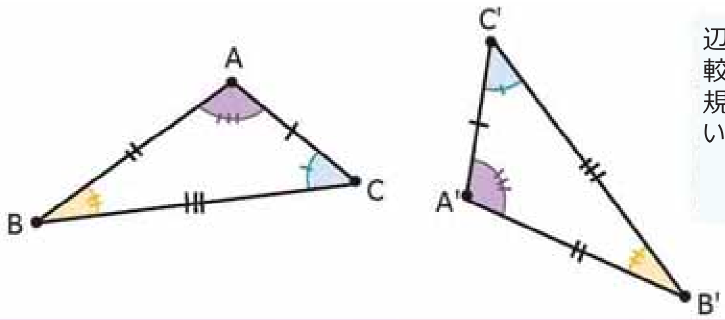



A'、B'、C'はそれぞれ"Aダッシュ"、"Bダッシュ"、"Cダッシュ"と読み、A、B、Cとは異なる頂点ですが、それぞれに対応していることを表しています。

**S**

対応する辺の長さと対応する角の大きさを比較すると、次のようになります。

| | |
|---|---|
| AB = A'B' | ∢A = ∢A' |
| AC = A'C' | ∢B = ∢B' |
| BC = B'C' | ∢C = ∢C' |

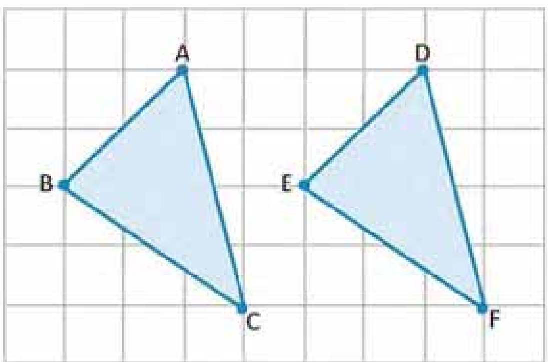


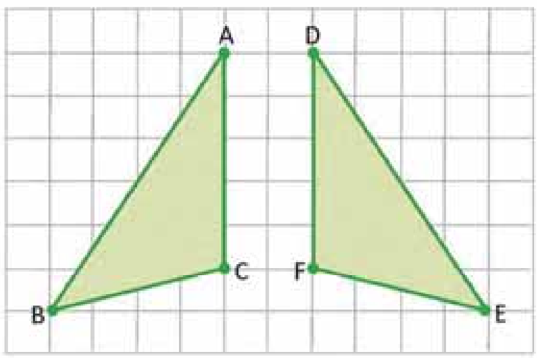

辺の長さと角の大きさを比較するときは、それぞれ定規、コンパス、分度器を使いましょう。

**C**

合同な三角形では、対応する辺の長さと対応する角の大きさが等しくなります。ΔABC と ΔA'B'C'が合同であることは記号 ≅ を使って表します。つまり、ΔABC ≅ ΔA'B'C' のように表し、**三角形ABCは三角形A'B'C'と合同である**と読みます。

次の三角形は合同な三角形です。対応する辺と角を見つけ、記号を使って三角形が合同であることを表しましょう。




三角形の合同を表すときは、対応する頂点をアルファベット順に書かなければなりません。

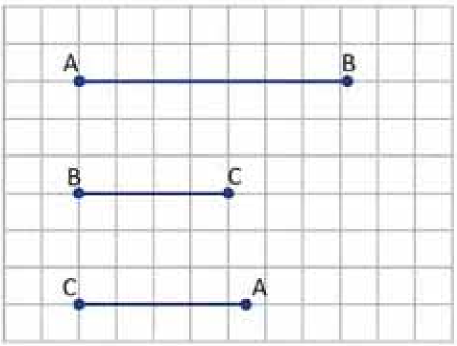
# 1.3 三角形の合同条件 (1)

P

コンパスと定規を使って、次の練習をしましょう。

a) 右にある3つの線分を辺として用いて、三角形を作図しましょう。

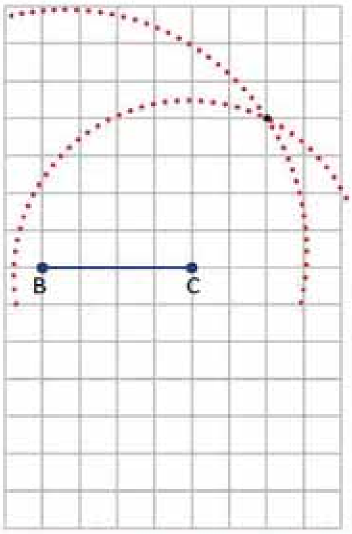
b) 自分が作図したものをクラスメイトのものと比べてみましょう。どんな三角形ができましたか。

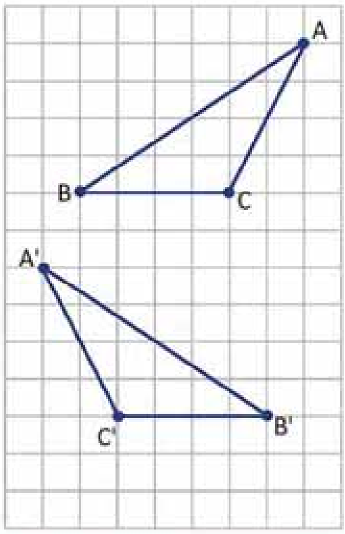



S

a) 次のように三角形を作図します。
- 長さBCの線分をひきます。
- 半径BAで中心がBの円をかき、次にCを中心に半径CAの円をかきます。
- 2つの円弧の交点を求めます。
- 点を結び、三角形ABCを作図します。

b) 三角形を比較すると、長さや大きさがすべて一致することがわかります。つまり、置き方に関係なく、辺と角がそれぞれ等しくなります。




C

三角形の合同条件 1：

3つの辺が等しい2つの三角形は、合同です。この条件を「**辺、辺、辺 （3辺）**」といい、つまり $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ のとき、AB = A'B'、AC = A'C'、BC = B'C' となります。

合同な三角形のペアを見つけましょう。

a) $\Delta ABC$; AB = 5, BC = 7, CA = 6

b) $\Delta DEF$; DE = 2, EF = 4, FD = 3

c) $\Delta GHI$; GH = 4, HI = 5, IH = 3

d) $\Delta JKL$; JK = 5, KL = 7, LJ = 8

e) $\Delta MNO$; MN = 3, NO = 4, OM = 5

f) $\Delta PQR$; PQ = 5, QR = 8, RP = 7

g) $\Delta STU$; ST = 7, TU = 5, US = 6

h) $\Delta XYZ$; XY = 4, YZ = 3, ZX = 2

エウクレイデスの『ユークリッド原論』は2300年のあいだ、類をみない素晴らしい書物として知られてきました。この文書は他の優れた作品と同じように繰り返し読まれ、そのたびに新しい側面が見出されてきました。この古代の書物は現在もなお、その巧妙さと優雅な数学的論理展開を愛する人々に無限の喜びを与えてくれています。W. ダンハム(1992)数学の知性—天才と定理でたどる数学史 p.116.

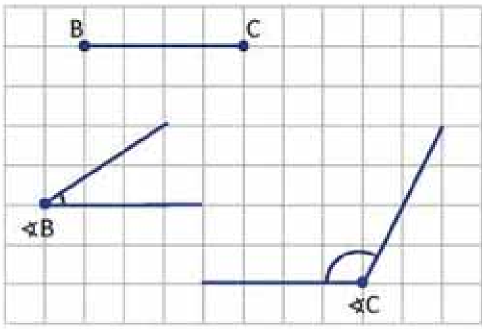
『ユークリッド原論』の命題I.22.でエウクレイデスは、次のように三角形の合同について述べています。「3つの線分が、別に与えられた3つのそれと等しい三角形を作図する。ただし、与えられた3つの線分において、どの2線分の和も残りの線分より大きいものとする。」

# 1.4 三角形の合同条件 (2)

**P** 定規と分度器を使って、次の練習をしましょう。

a) 右にある線分と2つの角を用いて、三角形を作図しましょう。2つの角は、線分の両端の角とします。

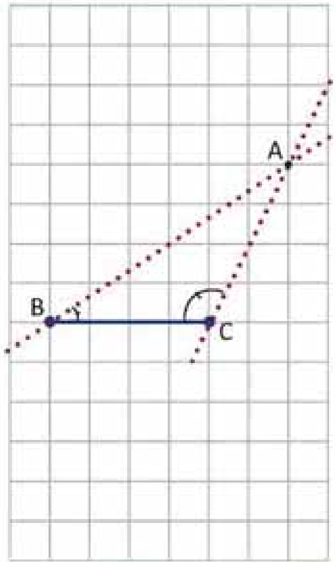
b) 作図した三角形をクラスメイトのものと比べてみましょう。どんな三角形ができましたか。

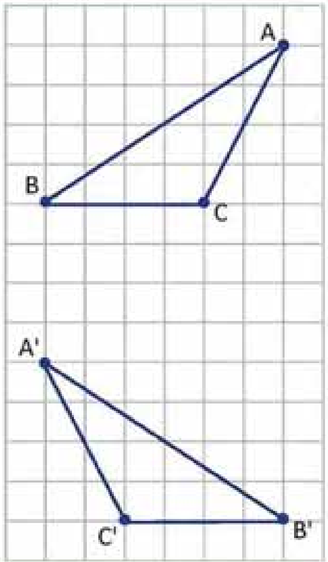



**S** a) 2つの角の大きさを線分の両端の角の大きさとし、三角形を作図します。

- 長さBCの線分をひきます。
- 線分BCの両端にあるBとCの角度を測ります。
- ∢B と ∢Cの角度でひかれた線の交点を見つけます。
- 頂点を結び、ΔABCを作ります。

b) 三角形を比較すると、長さや大きさがすべて一致することがわかります。つまり、置き方に関係なく、辺と角がそれぞれ等しくなります。




**C** 三角形の合同条件 2：

1辺とその両端の2角が等しい2つの三角形は、合同です。この条件を「**角、辺、角 （1辺2角）**」といいます。
ΔABC ≅ ΔA'B'C' のとき、∢B = ∢B'、BC = B'C'、∢C = ∢C' となります。

合同な三角形のペアを見つけましょう。

a) ΔABC; BC = 5, ∢B = 35°, ∢C = 100°

b) ΔDEF; EF = 6, ∢E = 50°, ∢F = 70°

c) ΔGHI; GH = 6, ∢G = 40°, ∢H = 110°

d) ΔJKL; JK = 5, ∢J = 60°, ∢K = 50°

e) ΔMNO; MO = 5, ∢M = 100°, ∢O = 35°

f) ΔPQR; PR = 6, ∢P = 110°, ∢R = 40°

g) ΔSTU; ST = 5, ∢T = 50°, ∢U = 60°

h) ΔXYZ; XZ = 6, ∢X = 60°, ∢Y = 50°

ユニット5

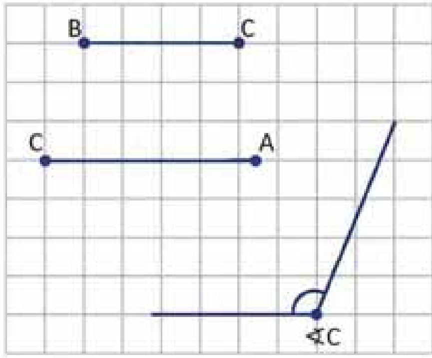
## 1.5 三角形の合同条件 (3)

**P**

定規と分度器、コンパスを使って、次の練習をしましょう。

a) 右にある2つの線分と角を用いて、三角形を作図しましょう。角は、2つの線分のあいだの角とします。

b) 作図した三角形をクラスメイトのものと比べてみましょう。どんな三角形ができましたか。

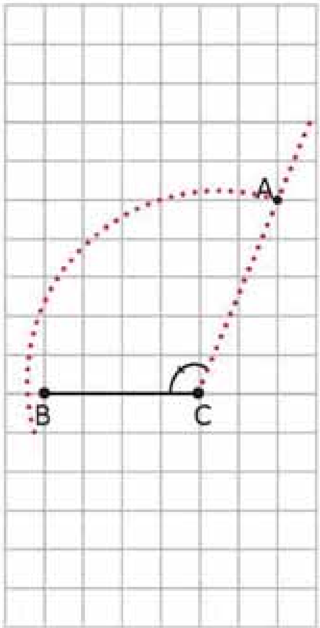


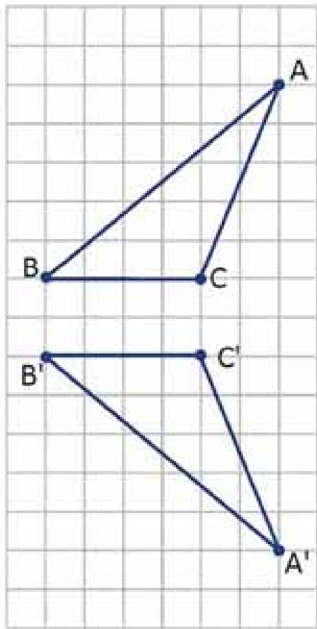

**S**

a) 与えられた2つの線分の長さとそのあいだの角の大きさをもとに、次のように三角形を作図します。

- 長さBCの線分をひきます。
- 角Cの大きさを測ります。
- 半径CAの円をかきます。
- 円と∢Cの角度でひかれた線の交点を記します。
- 点を結び、三角形ABCを作図します。

b) 三角形を比較すると、長さや大きさがすべて一致することがわかります。つまり、置き方に関係なく、辺と角がそれぞれ等しくなります。




**C**

三角形の合同条件 3：

2辺とそのあいだの角が等しい2つの三角形は、合同です。この条件を「**辺、角、辺　（2辺1角）**」といい、つまり $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ のとき、$BC = B'C'$、$\sphericalangle C = \sphericalangle C'$、$CA = C'A'$ となります。

合同な三角形のペアを見つけましょう。

a) $\Delta ABC$; $BC = 3$, $CA = 4$, $\sphericalangle C = 50°$

b) $\Delta DEF$; $EF = 3$, $FD = 5$, $\sphericalangle F = 60°$

c) $\Delta GHI$; $GH = 4$, $HI = 3$, $\sphericalangle H = 60°$

d) $\Delta JKL$; $JK = 5$, $KL = 4$, $\sphericalangle K = 50°$

e) $\Delta MNO$; $OM = 3$, $MN = 4$, $\sphericalangle M = 60°$

f) $\Delta PQR$; $RP = 4$, $PQ = 5$, $\sphericalangle P = 50°$

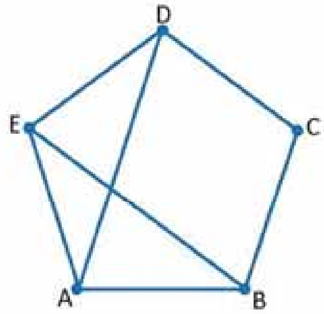
g) $\Delta STU$; $US = 4$, $TU = 3$, $\sphericalangle U = 50°$

h) $\Delta XYZ$; $YX = 5$, $XZ = 3$, $\sphericalangle X = 60°$

## 1.6 三角形の合同条件の応用

**P**

次の図が正五角形であるとき、なぜΔABE ≅ ΔEDAとなるか説明しましょう。




正五角形では、すべての辺の長さが等しく、また内角すべての角度も等しいです。

**S**

| 肯定 | 根拠 |
|---|---|
| EA = AE | 両三角形に共通 |
| AB = ED | 正五角形の辺 |
| ∢EAB = ∢DEA | 正五角形の内角 |
| ΔABE ≅ ΔEDA | 2辺1角の条件 |

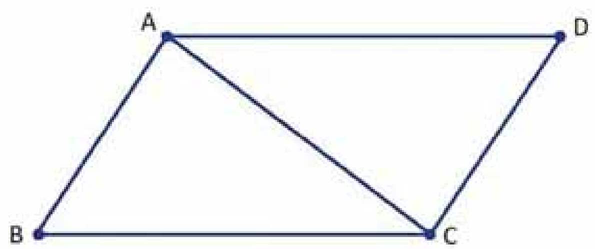
**C**

一連の理由がそれぞれ論理的に組み立てられ、またそのそれぞれがすでに正しいと認められている別の理由に裏付けされているとき、それを**証明**といいます。

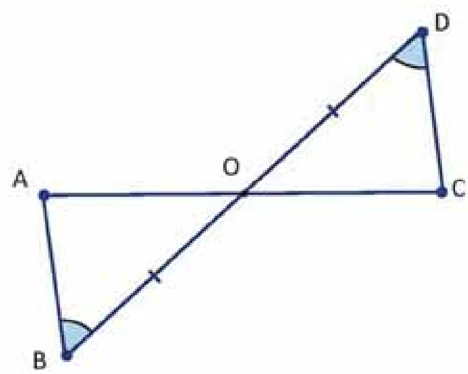
先に出題された問題において、正五角形の辺と内角の性質、また三角形の合同条件は、すでに正しいと認められていることがらであり、したがって、この解答を証明といいます。

次を証明しましょう。

1. 四角形ABCDがひし形で、ACがその対角線のとき、ΔABC ≅ ΔCDA であることを証明しましょう。




2. AB ∥ CD で、DO = BO のとき、ΔABO ≅ ΔCDO であることを証明しましょう。

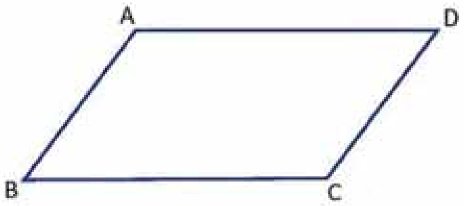



ユニット5

## 1.7 三角形の合同条件の応用

**P**

四角形ABCDにおいて、AD ∥ BC、BC = DAのとき、AB = CD であることを証明しましょう。

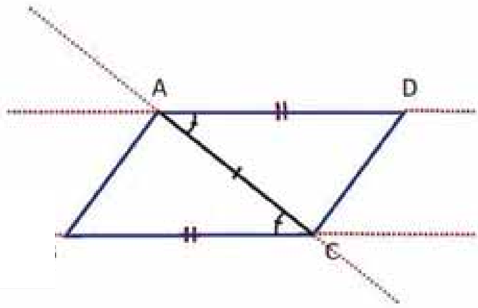



ABとDCを含む三角形の合同を利用して、辺が等しいことを証明します。

**S**

次を証明します： ΔABC ≅ ΔCDA

| 肯定 | 根拠 |
|---|---|
| BC = DA | 仮定 |
| CA = AC | 両三角形に共通する辺 |
| ∢BCA = ∢DAC | 平行線間にある内側の錯角 |
| ΔABC ≅ ΔCDA | 2辺1角の条件 |




したがって、合同な2つの三角形の対応する辺であることから、AB = CDであると結論づけられます。

**C**

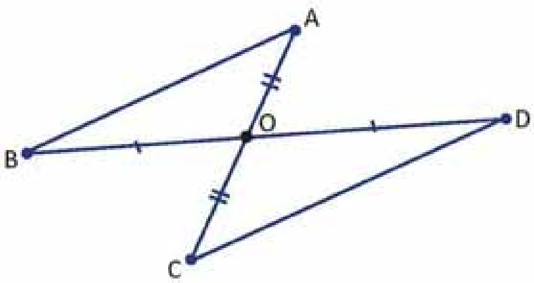
**証明は次のように組み立てられます。**
文中にある要素 （BC = DA） のことを、**仮定**といいます。

CA = AC
∢BCA = ∢DAC （すでに正しいと認められていることがら）
ΔABC ≅ ΔCDA

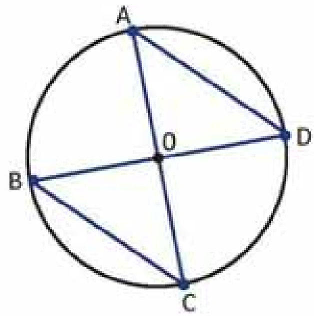
AB = CD （証明する根拠・ことがら。**結論**）

数学では、次のような形で表されます。
□ ならば、○ である。
□ の部分は仮定、○ の部分は結論といいます。

1. 線分ACとBDは点Oで交わります。BO = DO、AO = CO のとき、AB = CDであることを証明し、仮定と結論を書きましょう。



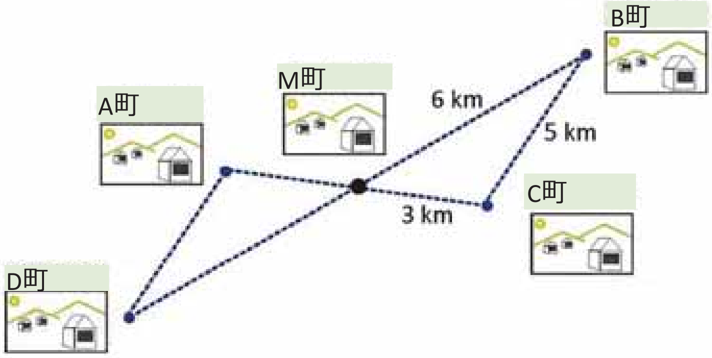

2. 次の円で、2つの直径ACとBDは円の中心Oで交わります。AD = CB であることを証明しましょう。



# 1.8 三角形の合同の応用 (1)

P

次の地図には5つの町があります。M町は、A町とC町、B町とD町のちょうど真ん中にあることからその名がつけられました。A町とD町はどれだけ離れていますか。




S

それぞれの町の距離を比較するとき、2つの三角形が形成されることがわかります。その三角形の要素の関係は次のようになります。

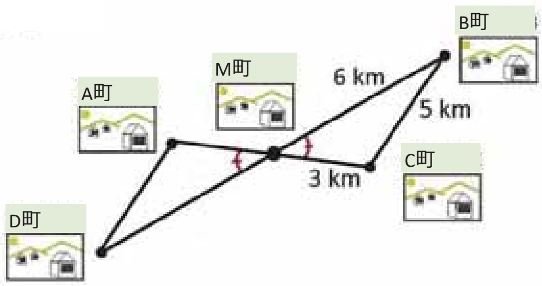
町の位置関係を観察し、AM = CM = 3 km

町の位置関係を観察し、MD = MB = 6 km

対頂角なので、∢AMD = ∢CMB

2辺1角の条件から、ΔAMD ≅ ΔCMB

2つの合同な三角形の対応する辺であることから、DA = BC




したがって、A町とD町は5 km離れています。

それぞれの項目で求められていることがらを分析し答えましょう。

1. 図1では、BC = EC、CA = CD、AB = DE です。

   a) 合同な三角形があるか見分け、考慮した合同条件を示しながら証明しましょう。
   b) θの値を計算しましょう。

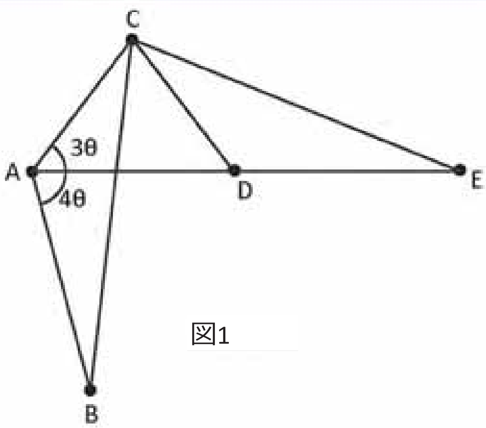



図1

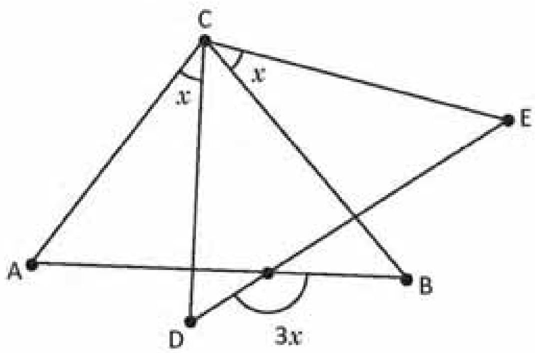



図2

2. 図2では、AC = DC、BC = EC です。

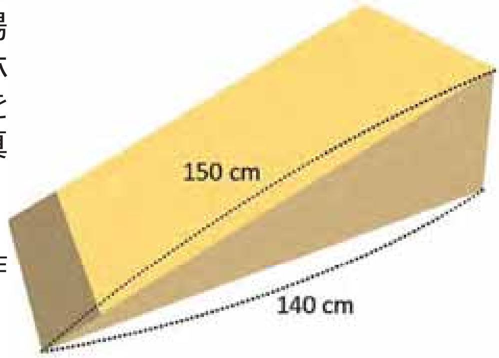
   a) 合同な三角形があるか見分け、考慮した合同条件を示しながら証明しましょう。
   b) $x$の値を計算しましょう。

## 1.9 三角形の合同の応用 (2)

**P**

カルロスは、近日中に行われるローラーブレードの競技大会に出場します。練習用ランプもすでに用意してあります。彼のいとこであるホセもやる気になり、大会に参加するため、カルロスのと似たランプを作ろうとしています。カルロスは、図にあるような情報を載せた写真を送り、長さを記した2辺のあいだの角は13°であると言いました。

ホセは、カルロスからもらった3つの数字をもとに、どうやってランプを作ることができますか。

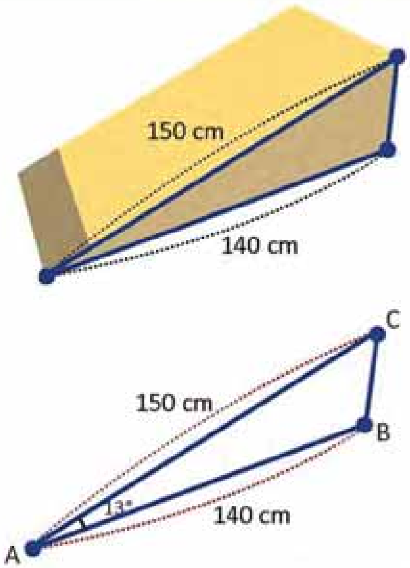



**S**

1. 問題の条件を復習しましょう。
   - 図に示された、長さのわかっている辺を特定します。
   - 長さのわかっている辺のあいだの角（13°）を示します。
   - 側面に三角形が形成されていることに注目します。

2. 三角形の合同条件を使います。
   2辺とそのあいだの角がわかっているので、2辺1角の条件を使い、新しいランプを作ることができます。

3. 数字を抜きだし、ランプを作ります。
   - 三角形に示されている値の通りに材料を測り、切ります。
   - 切った材料を配置します。はじめにベースとなるものを置き、その次に1枚目との交点が13°となるようにもう一枚を置きます。

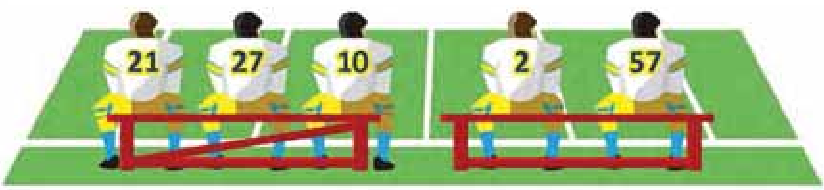



それぞれの項目で求められていることがらを分析し答えましょう。

1. 図のようなデザインの歩道があり、一部のピースを交換しなければなりません。アントニオは交換するピースを作る役目を担います。ピースを作るには、並んだピースを参考に、レプリカを作らなければなりません。

   a) 図にあるようなピースと完全に同じレプリカを作るには、アントニオは、最低何を何回測らなければなりませんか。

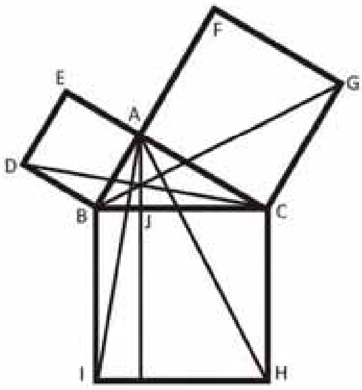
   b) 前問で導いた方法は、ピースのレプリカを作るための唯一の方法ですか。根拠づけて答えましょう。




2. 図を見て答えましょう。対角線に支えが入れてあるベンチはもう一つのベンチよりも安定しているのはどうしてでしょうか。根拠づけて答えましょう。

# 三角形と四角形の性質

6 ユニット

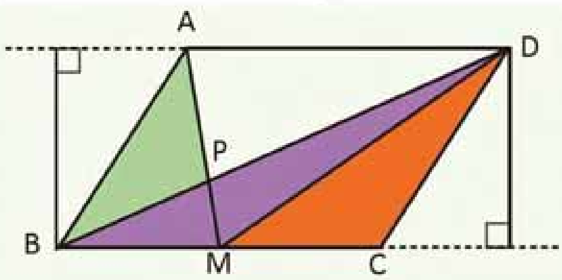



命題 I のイラスト。47、
テキストエウクレイデスの原理。

ギリシャの数学者で幾何学者のエウクレイデスは、平行四辺形と、高さと底辺が等しい三角形との関係を確立しました。 これらの関係は、提案Iに対応する画像が示すように、他の関係を示すために用いられました。（平行線の間に形成される参考書基本原理の 47。

三角形は、橋、窓、ドア、帆船、交通標識、衣服を吊るすためのフックなどを作るための基礎として用いられます。これは、三角形が変形できない唯一の図形であるためです。何をしても、三角形のままであり続けます。

レドンデル・マスフェラー歩道橋、サン・サルバドル。



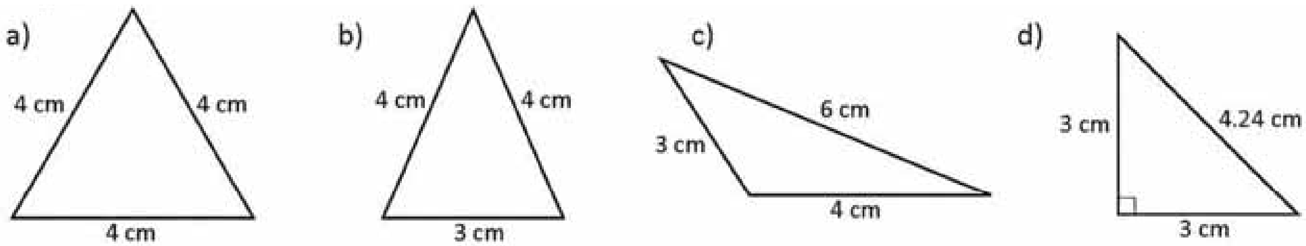

底辺と高さが等しい三角形。

このユニットの内容を応用する際には、三角形の合同条件、および三角形と四角形の面積の相関関係を用いて、三角形と四角形の特徴を理解し、説明してみせます。

## 1.1 二等辺三角形

**P**

辺の長さに注目して、次の三角形を分類しましょう。また、二等辺三角形の性質を答えましょう。




**S**

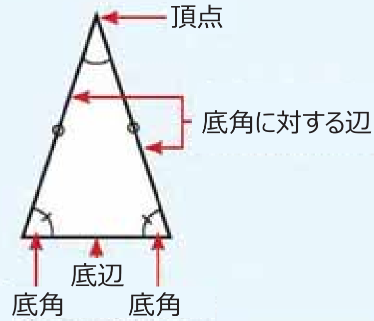
a) 3つの辺の長さが等しいので、**正三角形**です。
b) 2つの辺の長さが等しいので、**二等辺三角形**です。
c) 3つの辺の長さが異なるので、**不等辺三角形**です。
d) 2つの辺の長さが等しいので、**二等辺三角形**です。

三角形はそれぞれの角でも分類できることに注目しましょう。
a) 鋭角三角形です （3つの角が鋭角）。
b) これも鋭角三角形です。
c) 鈍角三角形です （1つの角が鈍角）。
d) 直角三角形です （1つの角が直角）。

**C**

二等辺三角形は2辺の長さが等しい三角形と定義され、2角の大きさが等しいという性質があります。

二等辺三角形の要素の名称は次の通りです。
**頂点：**2本の等辺が交わる点です。
**底辺：**頂点に対する辺です。
**底角：**底辺ともう2本の辺とでできた角です。
**底角に対する辺：**二等辺三角形の等辺です。

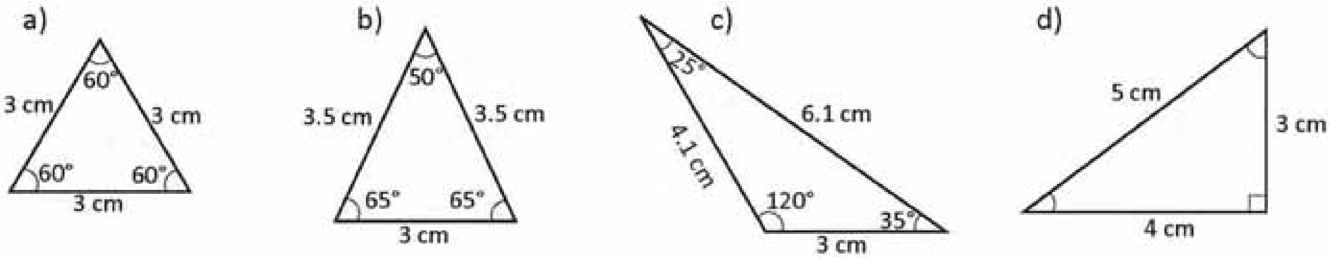



**E**

紙を使って二等辺三角形を作り、2辺と2角が等しいことを確かめましょう。次の手順で行います。
1. 図1のように、紙を長方形を作るように折ります。
2. できた長方形に対角線をひき、ハサミで切ります （図2）。
3. 中にできた三角形を真ん中で分けます。角と辺が一致することを確かめ、二等辺三角形であることを確認します。


図1　図2　図3

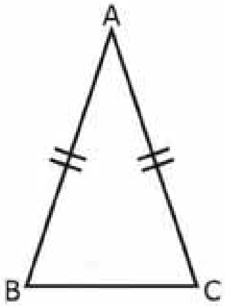
次の三角形を分類しましょう。答えの理由を説明し、二等辺三角形を形成する部分をいいましょう。



## 1.2 二等辺三角形の定理

**P**

ΔABCがAB = ACの二等辺三角形であるとき、∢ABC = ∢ACB であることを証明しましょう。




三角形の合同条件を応用して、「二等辺三角形の底角は等しい」（二等辺三角形は2つの辺が等しく、残りの辺を底辺と呼ぶ図形である） という定理を証明することができます。これは、*Pons Asinorum*、通称「ロバの橋」と呼ばれる有名な定理です。J. ピナスコ(2009).幾何学

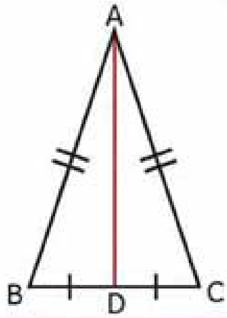
**S**

BCの中点Dへ、線分ADをひきます。

DB = DC （作図）

よって、ΔABD ≅ ΔACD （ADが共通で、仮定よりAB = AC、3辺の条件が成立）

したがって、∢ABC = ∢ACB （三角形の合同）

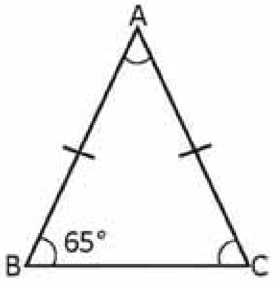



**C**

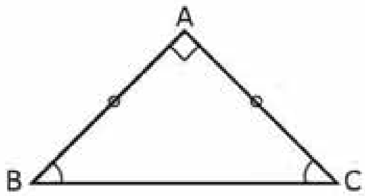
二等辺三角形の底角は等しくなります。

1. 上の定理を使って、それぞれの三角形の残りの角度を求めましょう。 o.

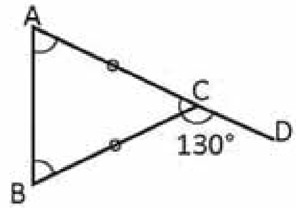
a)




b)




c)



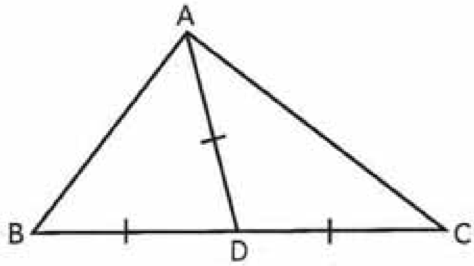

2. 次の図では、BD = CD = AD です。各問について、なぜ等しくなるのか証明しましょう。また、どのように証明したのか書きましょう。 teral

a) ∢DAB = ∢DBA

b) ∢DAC = ∢DCA

c) ∢DBA + ∢ACB = 90°

d) ∢CAB = 90°

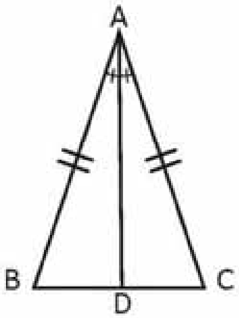



ユニット6

## 1.3 二等辺三角形の二等分線

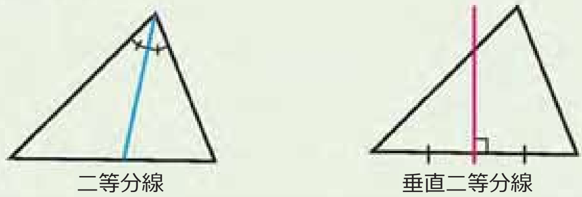
P

二等辺三角形ABCにおいて、等辺のあいだの角の二等分線は、対する辺の垂直二等分線であることを証明しましょう。




三角形の二等分線とは、3つの角それぞれを等しい角度に分け、対する辺までひく線分のことです。

線分の垂直二等分線は、その線分をちょうど半分に分ける垂直の直線です。




S

図を見ると、ΔABD ≅ ΔACD （2辺1角の条件、AB = AC、ADが共通、仮定より∢BAD = ∢CAD）

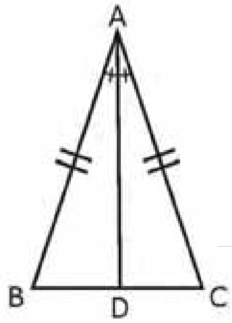
したがって、DB = DC （三角形の合同）

∢ADB = ∢ADC （三角形の合同） . . . (1)

∢ADB + ∢ADC = 180° （補角） . . . . . (2)

よって、2∢ADB = 180° ((1)・(2))

∢ADB = 90° であるから、AD ⊥BC



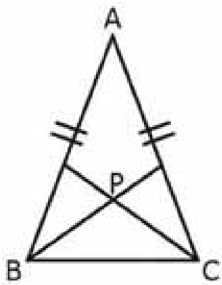

したがって、ADはBCの垂直二等分線である （DB = DC、AD ⊥ BC）。

C

二等辺三角形では、等辺のあいだの角の二等分線は、対する辺の垂直二等分線になります。

この結論により、等辺のあいだの角の二等分線は、二等辺三角形の高さでもあり、中線でもあることがわかります。

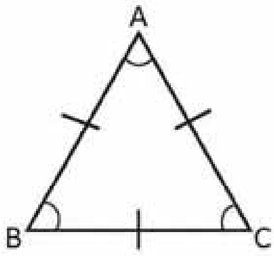
二等辺三角形ΔABCにおいて、底角の二等分線をひき、その交点をPとしたとき、ΔPBC が二等辺三角形であることを証明しましょう。



## 1.4 正三角形

**P**

正三角形ABCの角度が等しく、それぞれが60°であることを証明しましょう。




正三角形は3辺の長さが等しい図形です。

**S**

$\measuredangle ABC = \measuredangle BCA$ （AB = AC であるため） . . .(1)

$\measuredangle BCA = \measuredangle CAB$ （BC = BA であるため） . . .(2)

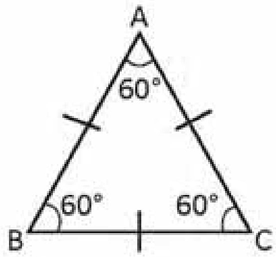
したがって、$\measuredangle ABC = \measuredangle BCA = \measuredangle CAB$ ((1)・(2))

角度を $x$ とします。

$3x = 180°$ （三角形の内角の和）

$x = 60°$ （計算の答え）

したがって、正三角形のそれぞれの角度は60°です。

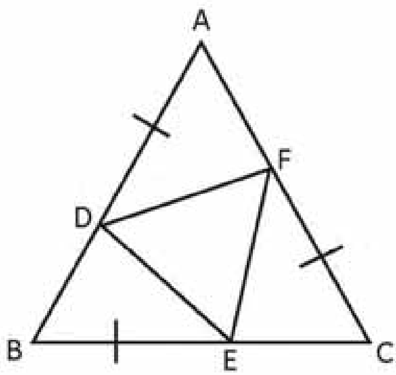



3角の大きさが等しい三角形を**等角三角形**といいます。

**C**

正三角形の内角はそれぞれ60°です。

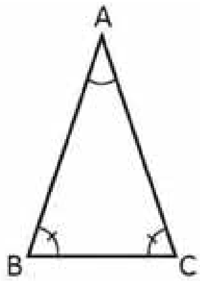
ΔABC は正三角形で、BE = CF = AD です。ΔDEF が正三角形であることを証明しましょう。



## 1.5 二等辺三角形と正三角形の定理

**P**

三角形の2つの角の大きさが等しいとき、その角に対する辺の長さも等しいことを証明しましょう。

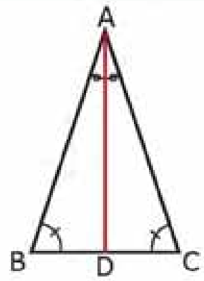



この結果から、2 つの角の大きさが等しいとき、その角に対する辺の長さも等しいといえます。

**S**

∢CAB の二等分線をひくと、次のことがわかります。

∢DBA = ∢DCA （仮定） . . .(1)
∢DAB = ∢DAC （二等分線の作図） . . .(2)
∢BDA = 180° – (∢DBA + ∢DAB) （三角形の内角の和の定理）
= 180° – (∢DCA + ∢DAC) (1・2)
= ∢CDA




つまり、ΔABD ≅ ΔACD （1辺2角の条件、ADが共通、∢BDA = ∢CDA、∢DAB = ∢DAC） 。

したがって、AB = CD （三角形の合同条件）

**C**

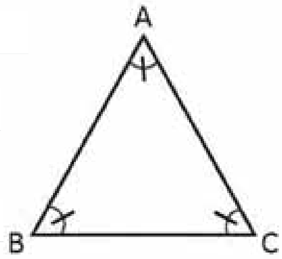
三角形の2つの角の大きさが等しいとき、対する辺の長さも等しくなります。

**E**

三角形のすべての角度が等しいとき、正三角形であることを証明しましょう。

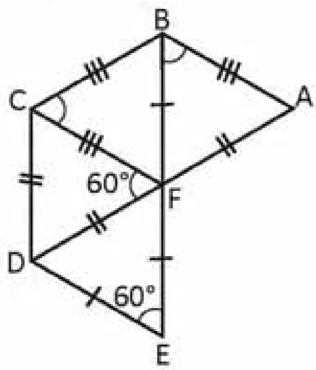
AB = AC （証明済みの結論より、∢BCA = ∢ABC） . . .(1)

CA = BC （証明済みの結論より、∢ABC = ∢CAB） . . .(2)




したがって、AB = BC = CA であるから、正三角形である ((1)・(2))。

次の図形を見て、ΔFAB、ΔFBC、ΔFCD、ΔFDE が正三角形であることを証明しましょう。



## 1.6 相反定理と反例

**P**

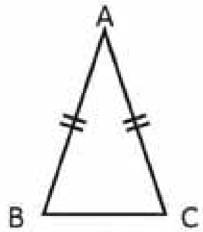
次の定理を比較し、その違いを答えましょう。

- 二等辺三角形ならば、2角の大きさが等しい。
- 2角の大きさが等しければ、二等辺三角形である。

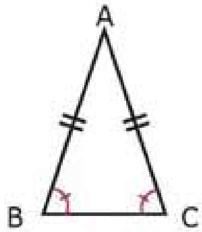
**S**

1つ目の定理「二等辺三角形ならば、2角の大きさが等しい」を分析します。

**真の条件（仮定）**：二等辺三角形である（2辺の長さが等しい）。 → 証明する条件（結論）：三角形の2つの角の大きさが等しい。授業2で証明済み。

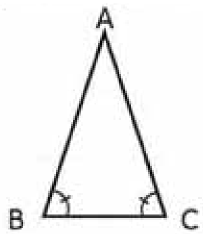



→

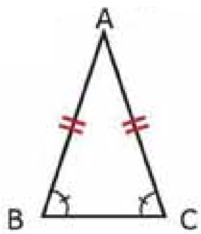



2つ目の定理「2角の大きさが等しいとき、二等辺三角形である」を分析します。

**真の条件（仮定）**：三角形の2つの角の大きさが等しい。 → 証明する条件（結論）：二等辺三角形である（2辺の長さが等しい）。授業5で証明済み。




→




1つ目の定理の仮定を2つ目では証明しなければならなく、また2つ目の定理の仮定を1つ目で証明しなければならないので、2つの定理は異なります。

**C**

ある定理の仮定と結論が別の定理で入れかわっているとき、それを**逆の定理**といいます。ある定理の逆は成立しない場合もあり、その場合は成立しないことを証明する例を挙げなければなりません。これを**反例**といいます。

**E**

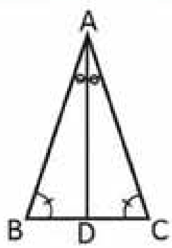
次の文章の逆を書きましょう。成立しない場合は、反例を示して正当化しましょう。「正三角形はすべて、二等辺三角形である」

**逆**：「二等辺三角形はすべて、正三角形である」成立しません。反例を見てみましょう。

**反例**：辺がそれぞれ5cm、5cm、6cmの三角形は二等辺三角形ですが、正三角形ではありません。

1. 逆をいいましょう。「三角形の3角が等しいとき、それは二等辺三角形である」の逆を書き、成立するかいいましょう。成立しない場合は、反例を挙げましょう。

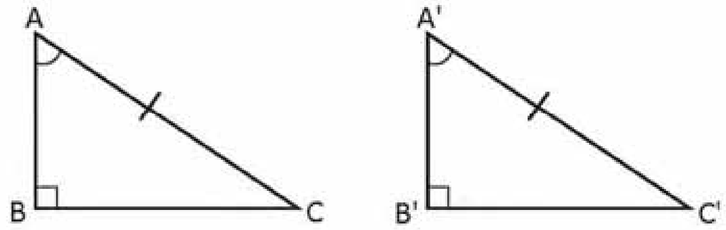
2. 逆をいいましょう。「三角形ABCにおいて、AB ＝ AC でADが∢CABの二等分線のとき、ADはBCの垂直二等分線である」の逆を書き、成立するかいいましょう。成立しない場合は、反例を挙げましょう。



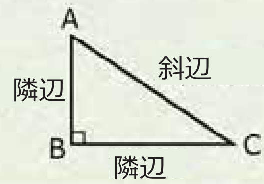
# 1.7 直角三角形の合同条件 (1)

P

直角三角形ΔABC と ΔA'B'C' において、∢CAB = ∢C'A'B'、∢ABC = ∢A'B'C' = 90°、AC = A'C' であるとき、ΔABC ≅ ΔA'B'C'となることを証明しましょう。




直角三角形の辺は次のように呼ばれることを復習しましょう。

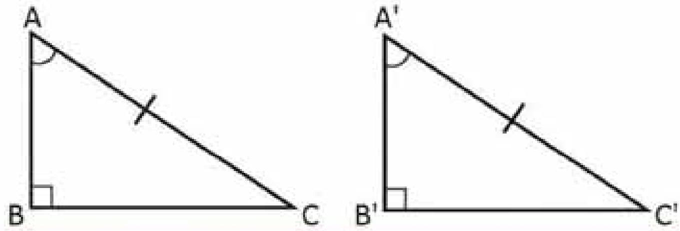



S

2つの三角形は直角三角形なので、それぞれ3つの角は等しくなります。

さらに、∢CAB = ∢ C'A'B'

したがって、ΔABC ≅ ΔA'B'C' （1辺2角の条件）

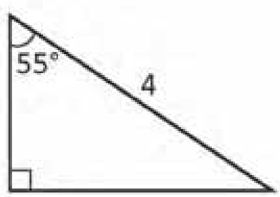



C

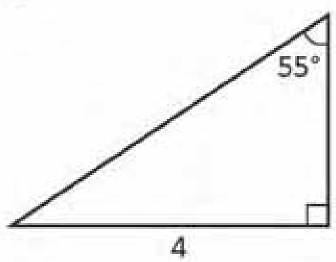
直角三角形において、斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいとき、合同となります。

次の直角三角形のうち、合同であるものを見つけましょう。自分の答えを証明しましょう。

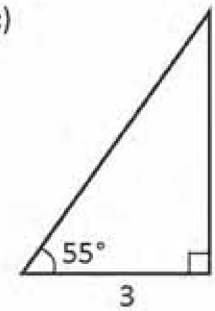
a)



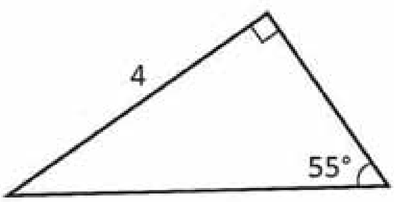

b)



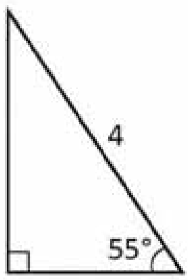

c)



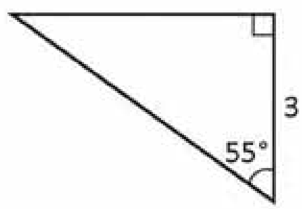

d)




e)

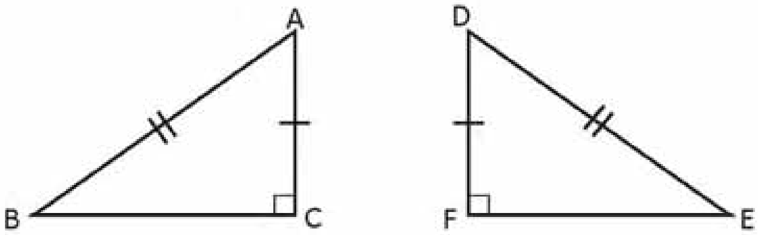



f)



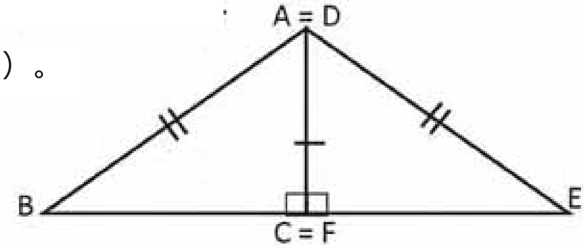
## 1.8 直角三角形の合同条件 (2)

AC = DF、AB = DE、∢ACB = ∢DFE = 90°のとき、ΔABC ≅ ΔDEF であることを証明しましょう。




AC と DFを一致させます。

頂点B、C、E は、一列に並んでいます （∢BCE = ∢BCA + ∢EFA = 90° + 90° = 180°） 。




よって、ΔABE は二等辺三角形です （B、C、Eが並び、AB = AE） 。

∢ABE = ∢AEB （ΔABE は二等辺三角形） 。

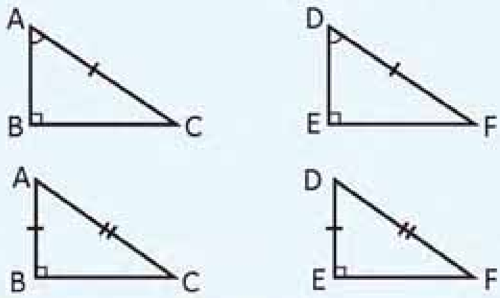
したがって、ΔABC ≅ ΔDEF （隣辺と斜辺が等しい） 。

**直角三角形の合同条件**

2つの直角三角形は、次の各場合に合同です。

1. 斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しい。

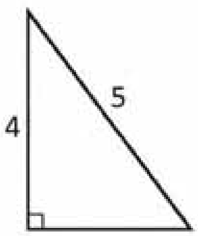
2. 斜辺と1つの隣辺がそれぞれ等しい。



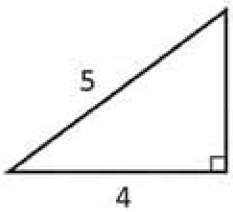

1. 次の直角三角形を、合同なグループに分けましょう。自分の答えを証明しましょう。

2辺1角の条件を考慮すると、2つの隣辺の長さが等しいときも、三角形は合同であることがわかります。

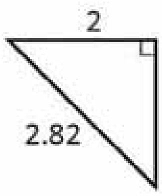
a)



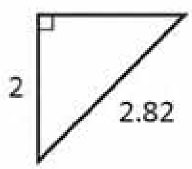

b)




c)



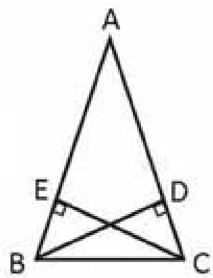

d)




2. 次の図で、AB = AC、BD ⊥ AC、CE ⊥ AB のとき、以下を証明しましょう。

a) ΔBCD ≅ ΔCBE

b) AE = AD



## 1.9 必要条件と十分条件

P

三角形ABCに関する2つの条件AとBについて考えましょう。

A：ABCは正三角形です。　　B：ABC は二等辺三角形です。

a) ΔABCで条件Aが成立するとき、条件Bも成立しますか。

b) ΔABCで条件Bが成立するとき、条件Aも成立しますか。

c) ΔABCで条件Bが成立しないとき、条件Aは成立しますか。

S

a) 正三角形は3つの辺が等しく、二等辺三角形は2辺だけが等しいです。条件Aが成立すると条件Bも成立するので、三角形ABCで条件Aが成立するとき、条件Bも成立します。

b) 二等辺三角形は、3つ目の辺（底辺）の長さが他2辺の長さと同じ場合と違う場合があります。つまり正三角形であるためには、二等辺三角形であるだけでは十分でなく、したがって必ずしも成立しません。

c) 二等辺三角形は2つの辺が等しく、正三角形は3つの辺が等しくなければならないので、二等辺三角形でない場合、正三角形でもありません。

C

命題「AならばB」が成立するとき、「AはBの十分条件である」といい、「BはAの必要条件である」といいます。

一方が偽ならばもう一方も偽となる場合、その条件は必要条件です。

次の各問において、AがBの必要条件ならばNを、AがBの十分条件であるならばSを書きましょう。

| | | |
|---|---|---|
| a) 三角形DEFにおいて： | A：DEFは二等辺三角形です。 | B：DEFは正三角形です。 |
| b) 三角形DEFにおいて： | A：DEFは直角三角形です。 | B：DEFは二等辺三角形です。 |
| c) 三角形DEFにおいて： | A：DEFは3つの角が等しいです。 | B：DEFは二等辺三角形です。 |
| d) 四角形DEFGにおいて： | A：DEFGは正方形です。 | B：DEFGは長方形です。 |

# 1.10 必要条件と十分条件の使い方

**P**

AはBの必要条件か十分条件かを答えましょう。次の三角形ABC と A'B'C' を見てください。

A: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C' = 90°$, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$, $AC = A'C'$.

B: $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.


**S**

前回の授業で学習した合同条件により、条件A （$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C' = 90°$、$\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$、$AC = A'C'$） は条件Bが成立するための十分条件です。

2つの直角三角形が合同であるためには、辺と角がそれぞれ等しくなければならないという合同定義により、条件A （$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C' = 90°$、$\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$、$AC = A'C'$） は条件Bの必要条件です。

したがって、条件A （$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C' = 90°$、$\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$、$AC = A'C'$） はBの必要十分条件です（$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$）。

**C**

AがBの必要条件でもあり十分条件でもある場合、AはBの**必要十分条件**であるといいます。

AがBの必要十分条件であるとき、命題「AならばB」と逆「BならばA」が成立するということに注目しましょう。

例について考えます。命題「AならばB」は、2つの直角三角形で $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'=90°$、$\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$、$AC = A'C'$ が成立するとき、合同であるということを指しており、逆「BならばA」は、2つの三角形が合同のとき、辺と角はそれぞれ等しいということを表しています。

1. 三角形に関する次の条件で、AがBの必要十分条件であるかどうかを答えましょう。

| | |
|---|---|
| a) A：二等辺三角形 | B：2つの角の大きさが等しい |
| b) A：正三角形 | B：3つの角の大きさが等しい |
| c) A：二等辺三角形 | B：正三角形 |
| d) A：直角三角形 | B：正三角形 |

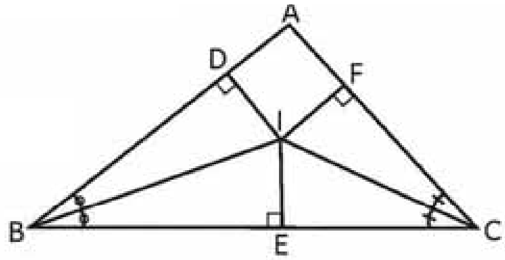
2. 必要十分条件が成立する文章をつくりましょう。

## 1.11 三角形の二等分線の性質

**P**

次の図で、BI と CI は三角形ABCの二等分線で、ID ⊥ AB、IE ⊥ BC、⊥ CA です。次のことがらを証明しましょう。

a) ID = IE = IF
b) 線分AIも三角形の二等分線である。




**S**

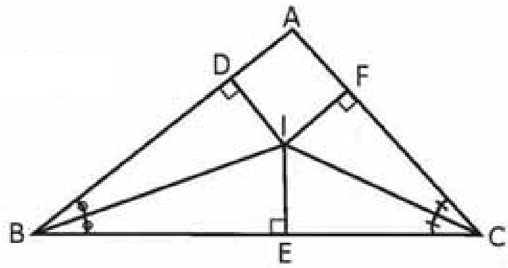
a) ΔEIB ≅ ΔDIB （直角三角形の合同条件1）

よって、ID = IE （合同） . . .(1)

ΔCIE ≅ ΔCIF （直角三角形の合同条件1）

よって、IE = IF （合同） . . .(2)

したがって、ID = IE = IF  ((1)・(2))

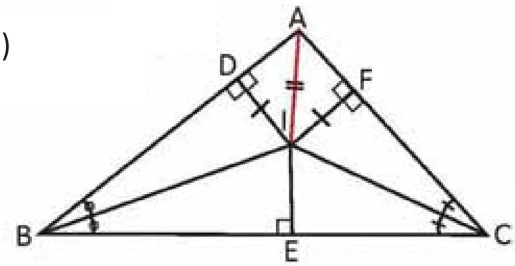



b) で ∢IAF = ∢IAD を証明するためには ΔFIA ≅ ΔDIA を証明する必要があります。

b) ΔFIA と ΔDIA では、ID = IF で、IA は共通 （**a**での証明・作図)
ΔFIA ≅ ΔDIA （直角三角形の合同条件2)

よって、∢IAF = ∢IAD

したがって、AIは ΔABC の二等分線です。




**C**

三角形の2つの二等分線が交差する点 “I” を、内心といいます。内心から三角形の辺までの距離は常に等しくなります （距離とは、点 “I” からそれぞれの辺に直角にひいた線分の長さをいいます） 。また、3つ目の二等分線も点 “I” を通ります。つまり、3つの二等分線が内心で交差することになります。

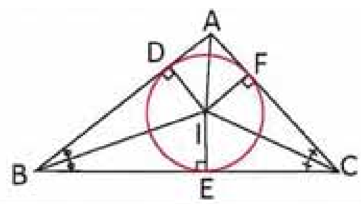
紙でつくった三角形を使って、3つの二等分線が同じ点 （**内心**） で交差していることを確かめましょう。

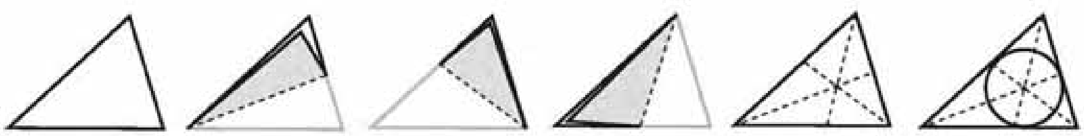
a) 三角形のそれぞれの角を半分に折ります。

b) 3つの二等分線が交差する点にしるしをつけます。

c) 内接円をかきます。

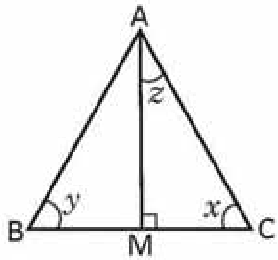
内心が3つの辺から等しい距離にあるとき、その距離と同じ長さを半径とする円をかくことができることに注目します。その円を**内接円**といいます。



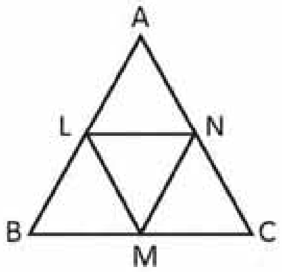



## 1.12 復習問題

1. 正三角形ABCで AM ⊥ BC のとき、次の問いに答えましょう。

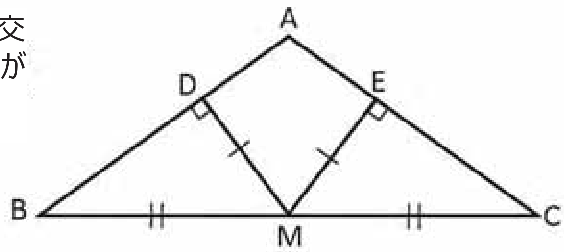



a) 線分AMをなんといいますか。
b) $x$、$y$、$z$の角の大きさを求めましょう。




2. 次の図で、L、M、Nは三角形ABCの辺の中点です。ΔLMN が正三角形であることを証明しましょう。

3. ΔABCで、辺BCの中点MからABとACに直角に交わる線をひき、交わった点をそれぞれDとEとします。MD ＝ ME であるとき、次のことがらを証明しましょう。




a) ΔBDM ≅ ΔCEM
b) ΔADM ≅ ΔAEM
c) ΔABC は二等辺三角形です。
d) 線分DEをひくと、DE // BC です。

4. 三角形に関する次の条件で、AはBの必要条件、十分条件、必要十分条件のどれに当てはまるか答えましょう。

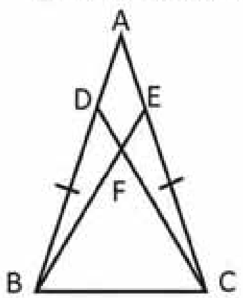
a) A：2つの三角形は合同である。
B：2つの三角形において、対するそれぞれの内角は等しい。

b) 2つの直角三角形において、
A：斜辺と1つの鋭角はそれぞれ等しい。
B：2つの三角形において、対するそれぞれの内角は等しい。

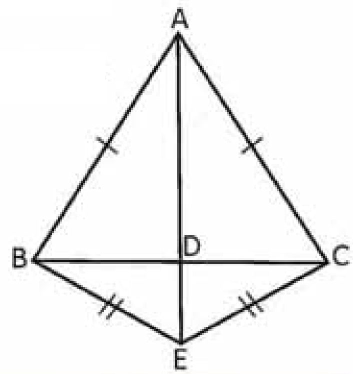
## 1.13 復習問題

1. 三角形に関する次の条件で、AはBの必要十分条件か答えましょう。

a) A：正三角形である；　B：角頂点の中線と高さは一致する。
b) A：角頂点の中線と二等分線は一致する。
B：角頂点の中線と垂直二等分線は一致する。




2. 二等辺三角形ΔABCの等辺ABとACにDとEの2点を置きます。BD = CE のとき、以下を証明しましょう。
a) BE = CD
b) BEとCDが点Fで交差するとき、BF = CF である。




3. 二等辺三角形 ΔABC と ΔEBC において、AE ⊥ BC であることを証明しましょう。
ヒント： 線分BCの垂直二等分線に注目しましょう。

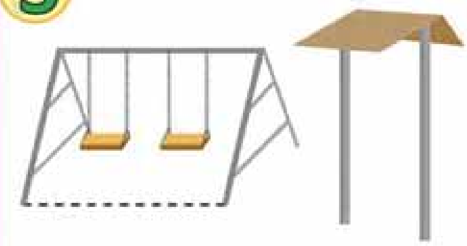
4. 必要十分条件が成立する文章をつくりましょう。

## 2.1 平行四辺形

**P**

a) 次の図から、平行四辺形と呼ばれる平面図形を選んでください。また、それらの図形がなぜ平行四辺形と呼ばれるか、その理由を答えてください。
b) 次に、あなたの周りにある平行四辺形の例を三つあげてください。

**S**



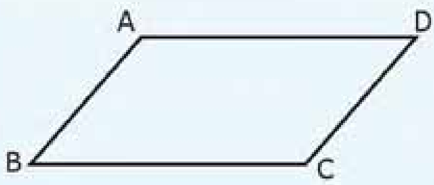
a) ブランコの支柱は四角形です。滑り台の屋根もまた同様に、2組の平行な対辺を有するため、平行四辺形になります。

b) 例1。黒板は平行四辺形です。例2。窓ガラス。
例3教員の机またはいくつかの机。

**C**

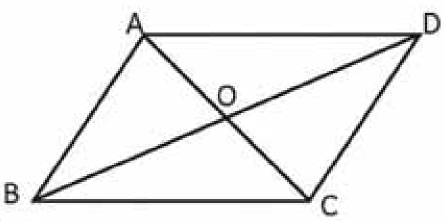
二組の平行な対辺を有する四角形を**平行四辺形**と言います。

長方形や正方形も同様に平行四辺形の条件を満たしていることを覚えておきましょう。



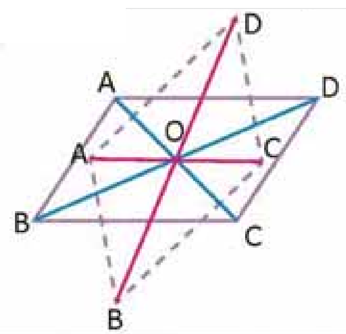

**E**

以下に示された平行四辺形ABCDには、対角線の交点が点Oで表されています。どの対の線分と角が等しいかを答えてください。

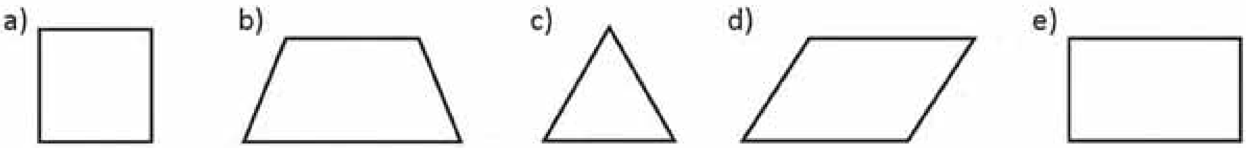



a) AB = DC, AD = BC
b) $\sphericalangle$ABC = $\sphericalangle$CDA, $\sphericalangle$BAD = $\sphericalangle$DCB
c) OA = OC, OB = OD
d) $\sphericalangle$AOB = $\sphericalangle$COD, $\sphericalangle$AOD = $\sphericalangle$COB
e) $\sphericalangle$ABO = $\sphericalangle$CDO, $\sphericalangle$BAO = $\sphericalangle$DCO
f) $\sphericalangle$ADO = $\sphericalangle$CBO, $\sphericalangle$DAO = $\sphericalangle$BCO

点Oを中心点にしてどの角を回転させても、平行四辺形を保ちます。




次の図形の中から平行四辺形を選んでください。それぞれについて証明してください。



## 2.2 平行四辺形の性質

**P**

平行四辺形について、以下のことを示しましょう。

1. 二組の等しい対辺を有します。
2. 二組の等しい対角を有します。
3. 二つの隣接補角を有します。

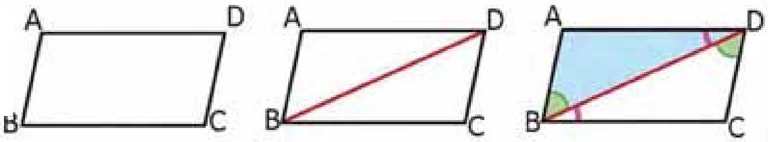

1. AB = DC; AD = BC
2. ∢DAB = ∢BCD および ∢ABC = ∢CDAであることを示すには、

対角線BDを描き、ΔDBA ≅ ΔBDCであることを示すだけで十分です。

**S**

仮定では、AB // DC および AD // BCとなります。

対角線BDを描くことで、




∢ABD =∢ CDB となります。（平行線間の内側の錯角のため）...(1)

∢ABD =∢ CDB （平行線間の内側の錯角のため） ...(2)

ΔDBA ≅ ΔBDC （(1)、(2) の二角夾辺相等の条件により、また、BDは共通です）。

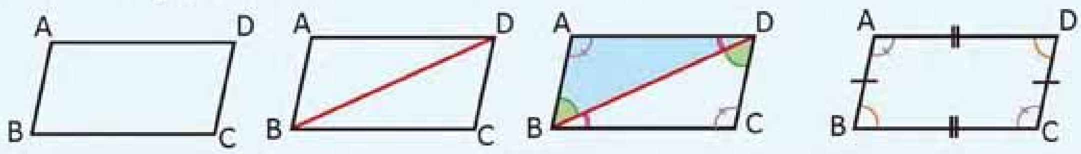
よって、AB = DC、AD = BC、∢DAB =∢ BCD、∢ABC =∢ CDAとなります。

最後に、∢ABC + ∢BCD = 180° （四角形の内角の和の半分）

∢ABC = ∢CDAであることに注目しましょう。なぜなら平行四辺形では、∢ ABD + ∢CBD = ∢CDB + ∢ADBが成り立ちます。

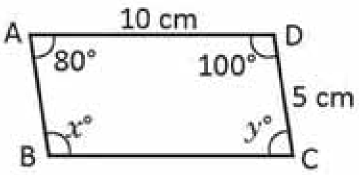
**C**

平行四辺形では、対辺や対角が等しく、隣接角は補角になります。




**E**

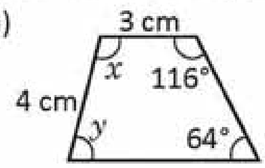
平行四辺形の特徴に応じた角と辺を示してください。



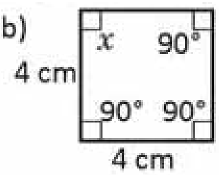

二組の対角は等しいため、∢$x$ = 100° および∢$y$ = 80° となり、また、二組の対辺が等しいため、辺AB = 5 cm および BC = 10 cmとなります。

1. 次の図から、平行四辺形であるかどうか辺や角を用いて説明し、平行四辺形である場合には、辺の長さと角の値を求めましょう。

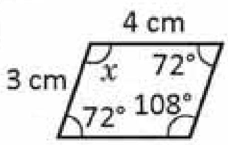
a)



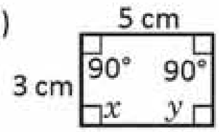

b)




c)

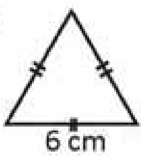



d)

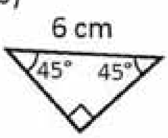



2. 次の三角形の中から、組み合わせた時に平行四辺形になる三角形を選んでください。また、それらがなぜ平行四辺形であるかを説明してください。

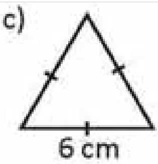
a)



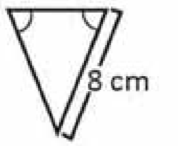

b)



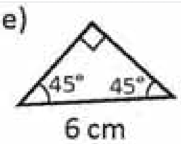

c)




d)




e)



## 2.3 平行四辺形の対角線

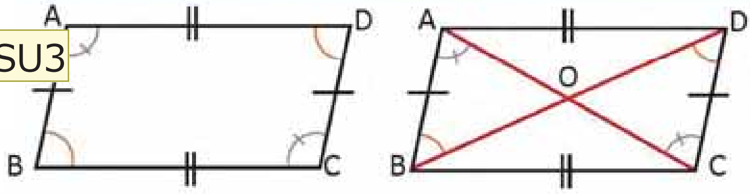
**P**

平行四辺形の対角線が、その中点で交わることを示しましょう。

四角形には2本の対角線があることを覚えておきましょう。

**S**

仮定では、AB // DCおよびAD // BCとなります。



平行四辺形の対角線を描くことで を導き出しSU3ます：

AB = DC （平行四辺形であるため） . . .(1)

∢ABO = ∢CDO （平行線の内側の錯角のため） . . .(2)

∢BAO = ∢DCO （平行線の内側の錯角であるため） . . .(3)

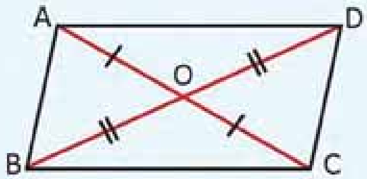
OA = OC および OB = OD であることを示すには、ΔOAB ≅ ΔOCDであることを示すだけで十分です。

よって、ΔOAB ≅ ΔOCD （(1)、(2) および (3)の二角夾辺相等の条件により） 。

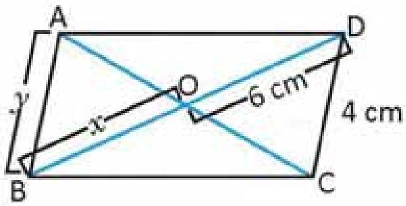
したがって、OA = OC および OB = OD （合同の定義により）となります。

**C**

平行四辺形の対角線が、その中点で交わることを示しましょう。



1. $x$と$y$の値を求めるために、平行四辺形$ABCD$のどの特徴を用いるべきかを書きましょう。

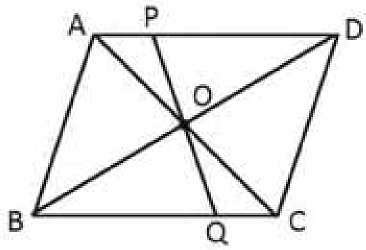



2. 次の図の平行四辺形ABCDの対角線ACとBCの交点をOとし、Oを通る線分をPQとします。以下の空欄を埋めて、PO = QOであることの説明を完成させましょう。

☐ = ☐ （平行四辺形の法則により） . . .(1)

☐ = ☐ （平行線間の内側の錯角により） . . .(2)

☐ = ☐ （対頂角である） . . .(3)



ΔAOP ≅ ΔCOQ （(1)、(2) 、(3)の二角夾辺相当の条件により） 。

したがって、PO = QO （☐） 。

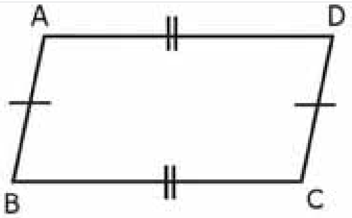
**スライド 136**

**SU3** To PM/DTP
「で　を導き～」スペースが開いており、図が入るかと思いきや原文では該当する図等はないようです。内容に関わることなので、こちらのチェック対象外かもしれませんが念のため報告しておきます。
SunFlare User, 2021/02/20

## 2.4 四角形が平行四辺形である場合の辺の条件

**P**

対角の対が等しい四角形が平行四辺形であることを示しましょう。




AD // BC および AB // DC であることを示すためには、 対角線BDを描いて、ΔABD ≅ ΔCDBであることを示すだけで十分です。

**S**

対角線BDを描きます。

したがって、ΔABD≅ ΔCDB （三辺比相等の条件により、AB = CD、AD = BC。仮定により、BDは共通です）。

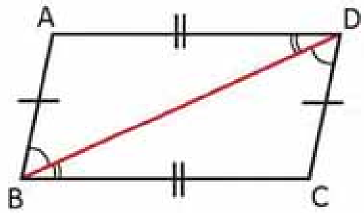
したがって、∢ABD = ∢CDB（合同の同位角であるため）。

したがって、AB // DC （∢ABD = ∢CDBであるため）となります。

同様に、∢ADB = ∢CBD （合同により）となります。

したがって、AD // BC （∢ADB = ∢CBDであるため）となります。

最後に、四角形ABCDは平行四辺形です。

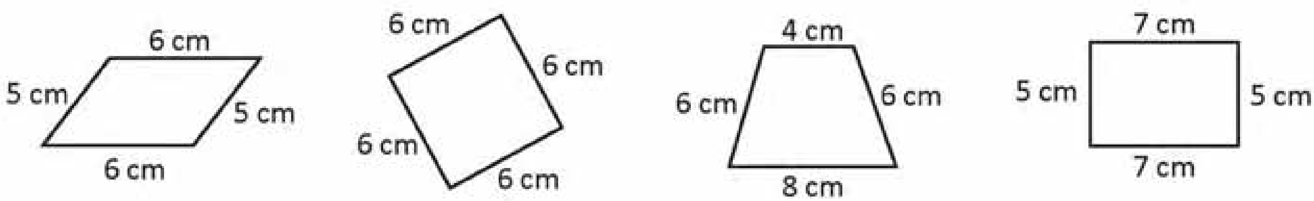



**C**

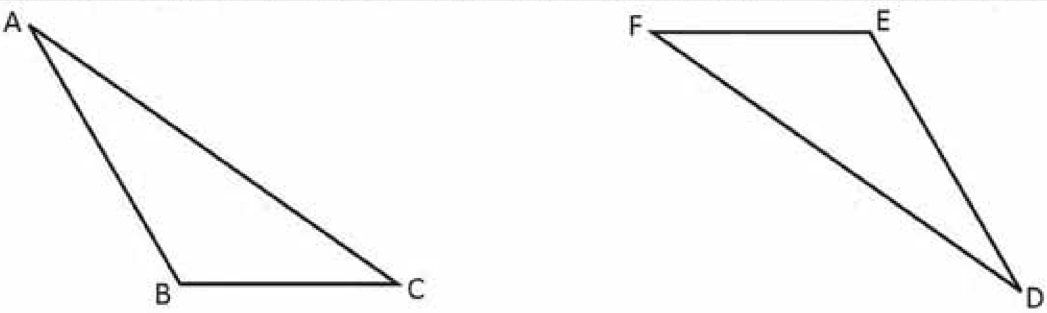
四角形の対辺の長さが等しい場合、その四角形は平行四辺形です。この定理は、「平行四辺形では、二組の対辺の長さは等しい」ことと相反います。

平行四辺形であるためには、四角形が等しい長さの対辺を有するために、必要十分条件だということに注目しましょう。

1. 次の四角形のうち、平行四辺形の条件を満たす四角形を述べてください。



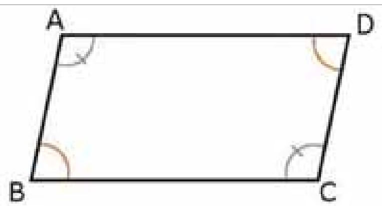

2. ΔABC および ΔDEFは合同です。これらの三角形を組み合わせると平行四辺形になる理由を説明してください。




ユニット6

## 2.5 四角形が平行四辺形である場合の角の条件

**P** 二組の対角の角度が等しい四角形が、平行四辺形であることを示しましょう。




辺BCと辺CDの延長上それぞれ点Eと点Fを取りましょう。AB // DC および BC // ADであることを示すには、∢ABC = ∢DCE、∢BCD = ∢ADFとなることを示すだけで十分です。

**S** 線分BCを点Eまで、線分CDを点Fまで延長します。

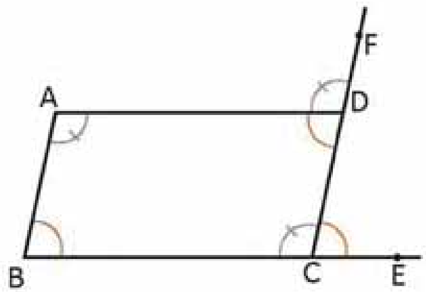
2∢ABC + 2∢BCD = 360° （四角形の内角の和、∢DAB = ∢BCD および ∢ABC = ∢CDA）。

したがって、∢ABC + ∢BCD = 180° （2で割ります） . . .(1)

また、∢BCD + ∢DCE = 180° （補角により） . . .(2)

よって、∢ABC = ∢DCE （(1)から(2)を引きます）。

したがって、AB // DC （等しい大きさの同位角であるため）。




同様に、BC // ADであることを示します。

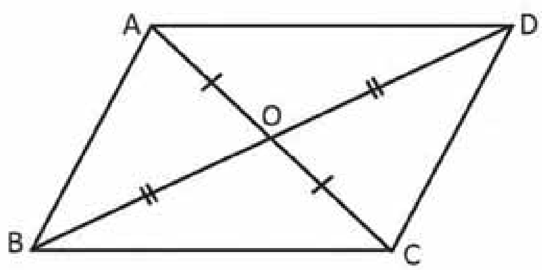
示し終えたら、四角形の対辺が平行であることを結論付けることができます。

したがって、四角形ABCDは平行四辺形です。

**C** 四角形の二組の対角が等しい時、その四角形は平行四辺形になります。これは相反定理です。「平行四辺形では、二組の対角は等しいです。」

平行四辺形であるためには、四角形が等しい長さの対角を持つことが必要十分条件です。

対角線が中点で交わる四角形が平行四辺形であることを示しましょう。



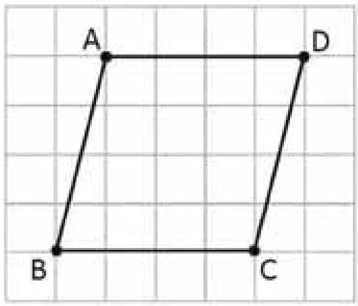

ABCDが平行四辺形であることを示すには、対辺の長さが等しいことを確かめるだけで十分です。そのために、平行四辺形の中にできる4つの三角形について考えることができます。

## 2.6 四角形が平行四辺形であるための十分条件

**P**

以下の順に従って、ノートに図形を描きましょう。次に解答しましょう。

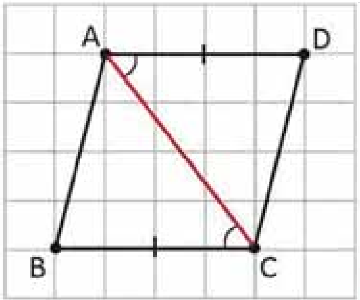
1. ノートの4マス分、または4cmの線分ADを描きましょう。
2. ノートの4マス分、または4cmの別の線分BCを描きましょう。
3. 線分ABとCDを描きましょう。




ABCDは平行四辺形ですか？前回の授業で学んだ条件を用いて、あなたの解答を論じましょう。

**S**

順序に従い図形を描いた結果AD=BC=4 cmとなり、またノートの罫線は平行であるためAD//BCとなります。




対角線ACを描きましょう。
したがって、$\Delta ABC \cong \Delta CDA$ （$\sphericalangle ACB = \sphericalangle CAD$ （平行線間の角であるため、AD = BC および ACは共通です）。
よって、AB = CD（合同により）

したがって、ABCDは平行四辺形となります。（二組の等しい角度の対角）

**C**

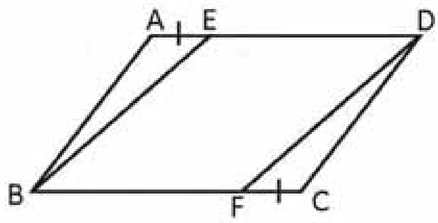
四角形が平行四辺形であるために以下のそれぞれの条件は必要十分です：

1. 二組の対辺が平行であること。
2. 二組の対辺が等しいこと。
3. 二組の対角が等しいこと。
4. 対角線が中点で交差していること。
5. 二組の対辺が平行かつ等しいこと。
6. 隣接角が補角であること。

1.は平行四辺形の定義に該当します。

**E**

AE = CFとなるように、平行四辺形ABCDの辺ADおよび辺BCからそれぞれ点Eおよび点Fを取ります。四角形EBFDが平行四辺形であることを示しましょう。



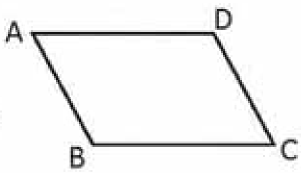

ED ∥ BF

ED = AD − AE = BC − FC = BF

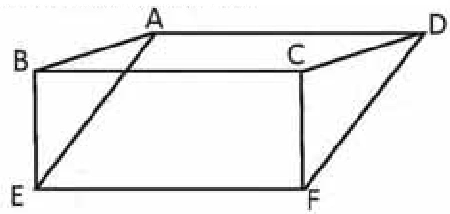
よって、四角形BFDEは平行四辺形です。（二組の平行かつ合同の対辺を有するため）。

1. 四角形ABCDにおいて、以下のいずれの条件の中から、四角形が平行四辺形であるための十分条件を示しましょう。

a) BA = AD, BC = CD
b) AB = DC, AD = BC
c) $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA$



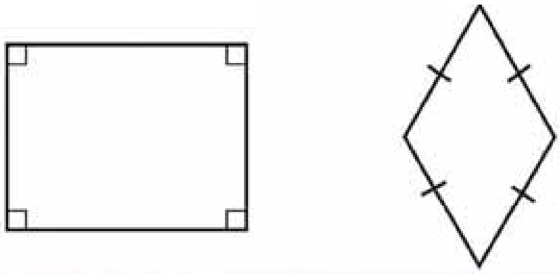

2. 図の中の四角形ABCDおよびBEFCは平行四辺形です。同じく、四角形AEFDが平行四辺形であることを示しましょう。



## 2.7 長方形とひし形の性質

**P**

長方形とひし形が平行四辺形であることを示しましょう。前回の授業で示した条件を用いましょう。



**長方形の定義：**4つの等しい直角を有する四角形です。

**ひし形の定義：**4つの等しい辺を有する四角形です。

**S**

- 長方形：二組の等しい対角を有するため、条件3により、平行四辺形となります。
- ひし形：二組の等しい対辺を有するため、条件2により、平行四辺形となります。

**C**

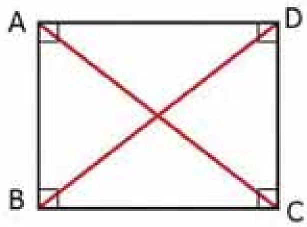
長方形は、その角および辺により平行四辺形となります。ひし形も同様にそうなります。

**E**

ひし形および長方形の対角線について以下の解答を示しましょう。

a) 長方形の対角線は等しいです。
b) ひし形の対角線は、垂直に交差します。

AC = DBであることを示すためには、ΔABC ≅ ΔDCBであることを示すだけで十分です。




1. 長方形ABCDに対角線ACおよびDBを描きましょう。

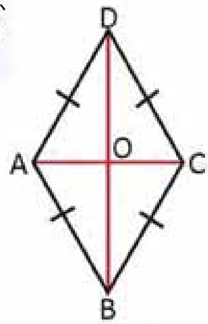
よって、ΔABC ≅ ΔDCB　（二辺比夾角相等により、AB = DC、BCは共通および∢ABC = ∢DCB = 90°）

したがって、AC = BD（合同条件により）

2. ひし形ABCDに対角線ACおよびBDを描きましょう。交わる点をOとします。

よって、ΔACDは、二等辺三角形です。（ひし形DA = DCであることにより）

BD ⊥ ACであることを示すためには、DOがΔACDの高さであることを示すだけで十分です。

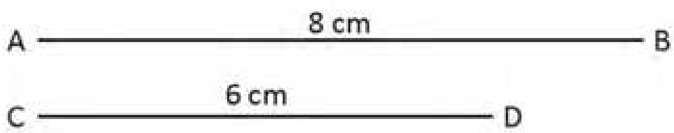



よって、DOはΔACDの二等分です。（平行四辺形であるため対角線が中点で交わることにより）

したがって、DB⊥AC（授業1.3によると、二等辺三角形では二等分線と二等分が一致するため）

1. 対角線が等しく、かつ中点で交わる四角形が長方形であることを示しましょう。

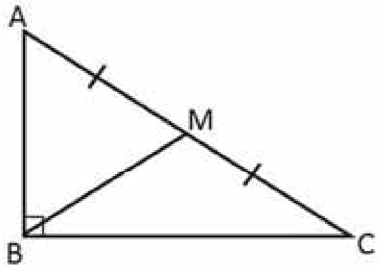
2. 対角線が線分ABおよびCDと等しいひし形を描きましょう。



## 2.8 長方形における対角線の性質の応用

**P**

直角三角形ABCについて、斜辺ACの中点をMとし、MA = MB = MCであることを示しましょう。




長方形では、対角線はその中点で交差することを覚えておきましょう。

**S**

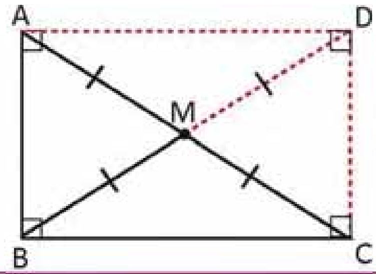
辺ABとBCおよび、平行四辺形Mであるため、中点で交わる対角線ACとBDの、長方形ABCDを描きましょう。

$BM = \frac{1}{2}BD$（平行四辺形ABCDの対角線であるため） . . .(1)

$MA = MC = \frac{1}{2}AC$（平行四辺形ABCDの対角線であるため） . . .(2)

また、AC = BD （ABCDは長方形です） . . .(3)

したがって、MA = MB = MC （(1), (2) および (3) より）。




**C**

すべての直角三角形では、対頂点から斜辺を結ぶ中点は、斜辺の半分の長さと等しい長さを有します。

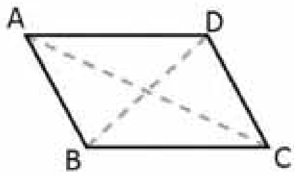
**E**

正方形は平行四辺形であるかを答えましょう。
正方形の4つの辺は等しいため、互いの対辺も等しいということになり、よって、正方形は平行四辺形になります。

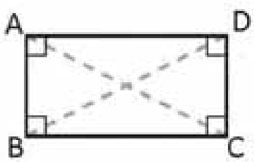
正方形は、4つの直角と4つの等しい長さを有する四角形であることを覚えておきましょう。

1. 平行四辺形が長方形、ひし形、または正方形であるために、それぞれ付け加えるべき条件を答えましょう。該当する条件を a から b の中から選びましょう。

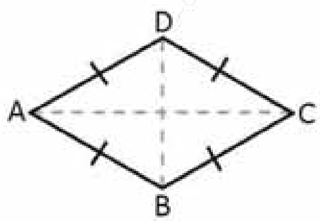
a) $\sphericalangle A = 90°$　b) AB = BC　c) AC = BD　d) AC⊥BD



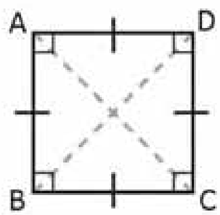

平行四辺形




長方形

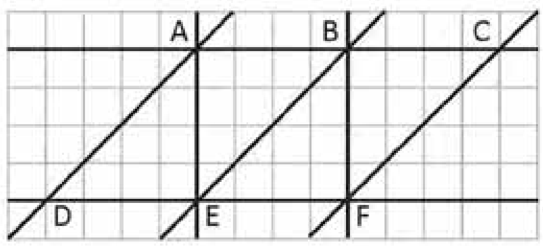



ひし形




正方形

2. 以下の図から、形成される平行四辺形を選んでください。次に、それらを長方形、正方形、ひし形、または平行四辺形に分けてください。

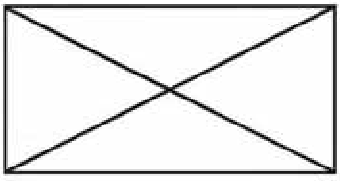


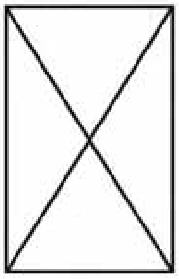

ユニット6

## 2.9 長方形の性質の相反定理

P

平行四辺形以外で、等しい対角線を有する四角形があるか答えましょう。



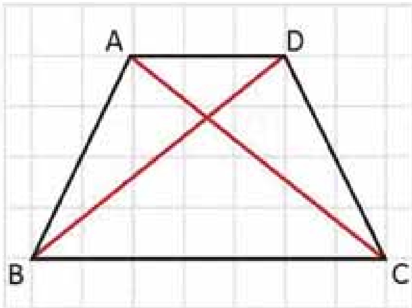


「長方形の対角線は等しい」ことの相反について考察しましょう。

台形は、一組のみの平行する辺を有する四角形です。

S

等脚台形を用いて （AB = DC および AD // BC）。
AC = DBであることを求めるために$\Delta ABC \cong \Delta DCB$であることを示すことができます。




したがって、解答は「はい」です。台形は一例で、他にも、対角線の等しい四角形はあります。

つまり、四角形の対角線が等しい場合でも、必ずしも長方形だというわけではなく、他の種類の 四角形である可能性もあります。

C

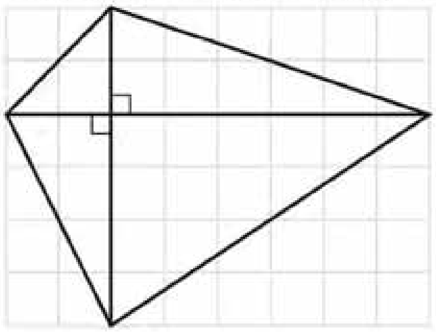
相反定理「長方形の対角線は等しい」、つまり、「四角形の対角線が等しい場合、その四角形は長方形である」というのは、提案の反例では成り立ちません。

相反定理の正確性を示すために、この場合、**反証**を用いました。

この場合は成立しないため、対角線が等しくなるために、長方形であることは**十分**条件ではあるが、**必要条件ではないと表すこともできます。**

E

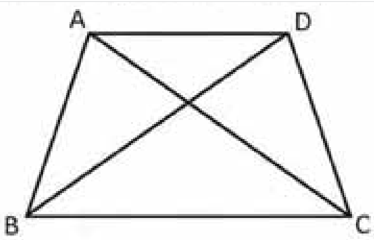
対角線が垂直に交わる四角形はひし形ですか？



示された四角形の対角線は垂直ですが、辺が等しくなくひし形ではないため、これは正しくありません。

この命題は、「ひし形の対角線は垂直に交わる」の相反定理です。

1. 平行四辺形ではない等脚台形の対角線が等しいことを示してください。

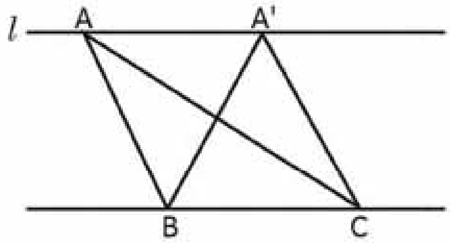



2. 対角線が垂直で、かつ中点で交わる四角形がひし形であることを示しましょう。

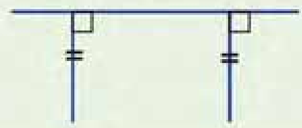
## 2.10 平行線と面積の関係

**P**

次の図では、線 *l* およびBCは平行です。三角形ABCとA'BCの面積が同じ理由を説明してください。




一組の平行線では、一本の平行線の二つの点ともう一本の平行線を結ぶ垂直な線の長さは等しいです。

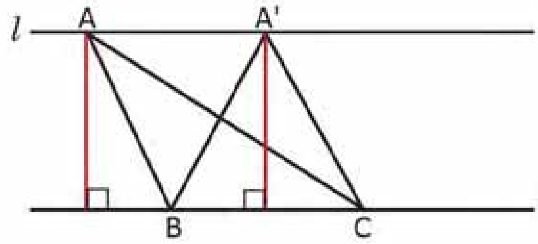


**S**

図の三角形ABCとA'BCは、底辺にあたる線分BC有し、また、頂点の1つは底辺BCの平行線上にあります。

これらの三角形は等しい底辺を有し、それぞれの高さを求めるとき、2本の平行線間にあるため、その2本は等しいです。

したがって、この2つの三角形の面積は等しいです。

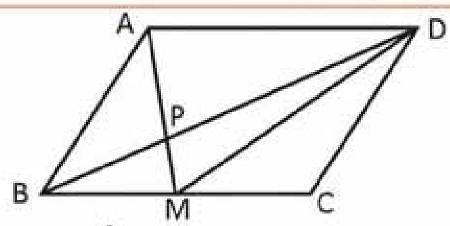



**C**

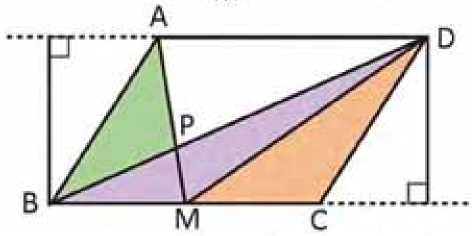
2本の平行線を有する場合、1本の直線からもう1本の直線に引かれた垂直な線分の長さは等しいです。

**E**

ABCDは平行四辺形です。Mは、線分BCの中点です。Pは線分BCと線分AMが交差する点です。面積の等しい三角形を示してください。

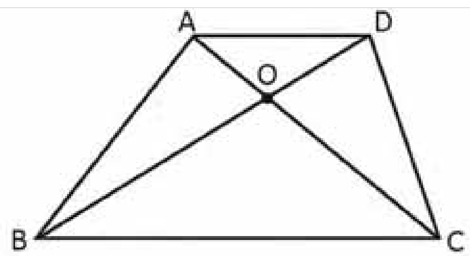



三角形ABD、AMD、BDCに加えて、三角形ABM、DBM、DMCの面積は等しいです。「平行線間の垂直な線分の長さは等しい」という法則から、これらの三角形の底辺と高さが等しいということを導くことができます。




同じように、ABMとDBMの面積が等しいことから、三角形ABPとDMPの面積が等しいことがわかります。また、互いの面積から等しい部分を引いています。（MPB）

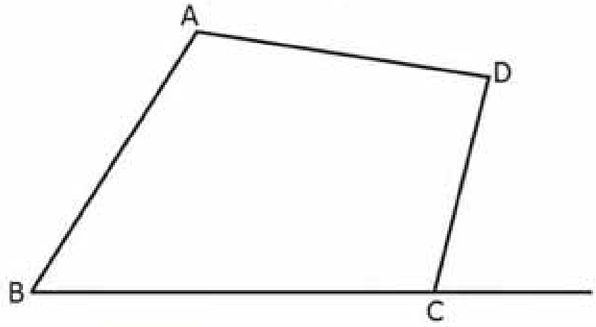
台形ABCDの対角線とAD // BCの交点をOとした場合、三角形AOBとDOCの面積が等しいことを示してください。



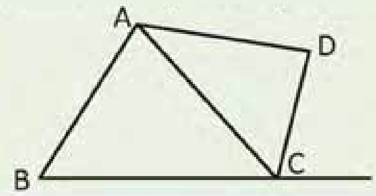
## 2.11 平行線と面積の間の関係の応用

P

次に示される四角形ABCDでは、線分BCの延長線上に点Eがあり、三角形ABEが出来上がります。このように、ΔABEが四角形ABCDと等しい面積を有する場合、点Eはどこに取らなければならないでしょうか？



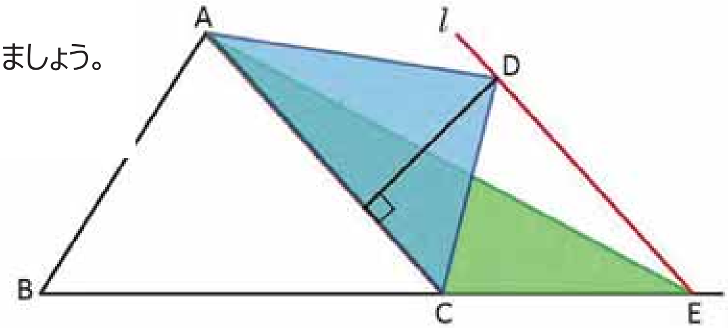

平行線と面積を関連付けて、三角形ACDと等しい面積の三角形を見つけてみましょう。




S

四角形ABCDと等しい面積を有するΔABEについて詳しく述べるために、以下の手順に従ってください。

1. 対角線ACを描きましょう。
2. 辺ACに平行で、頂点Dを通る$l$を描きましょう。辺BCの延長線上で交差する点Eを示しましょう。
3. 点Aから点Eまでの線分を描き、ΔABEを作図しましょう。




この作図から、
ΔDACの面積 = ΔEACの面積が成り立ちます。（平行線間に位置し、共通の底辺を有するため）。

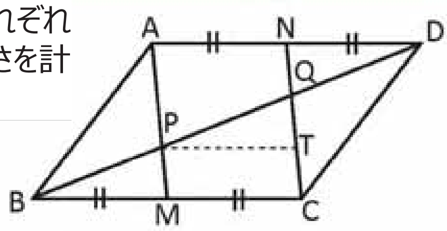
四角形ABCDの面積 = ΔABCの面積 + ΔDACの面積。
ΔABE の面積= ΔABCの面積 + ΔEACの面積。

したがって、ΔABEの面積 = 四角形ABCDの面積 （ΔDACの面積 = ΔEACの面積）。

C

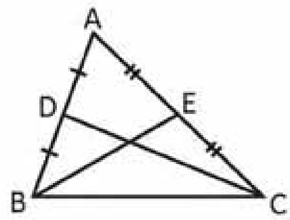
共通の底辺を持つ三角形は、対頂点と底辺を結ぶ直線が底辺と平行である場合、等しい面積を有します。

1. 平行四辺形ABCDでは、辺BCとADに中点MとNがあり、線分BDがそれぞれAMとCNで交差する点PとQを通り、BQ =12とした場合の、QDの長さを計算しましょう。




PTがMCと平行になるように、点Tを示してください。

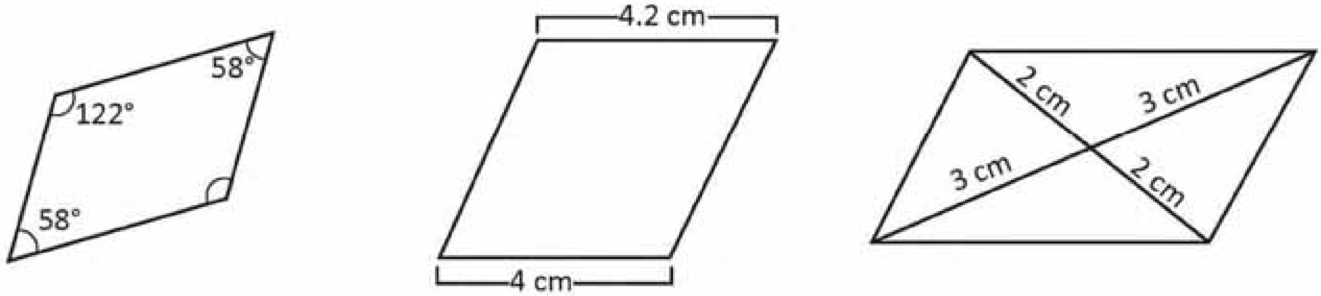
2. 三角形ABCでは、辺ABとACの中点をそれぞれDとEとします。BC と $DE = \frac{1}{2}BC$に平行になるように線分DEを描きましょう。証明してください。



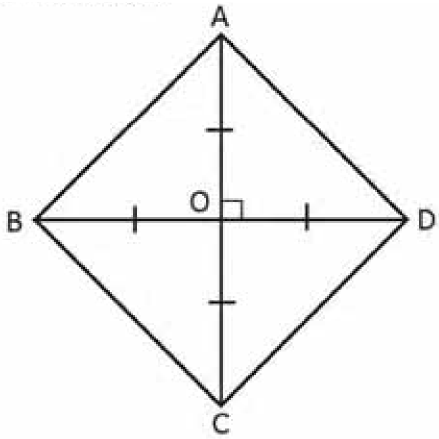

a) 三角形DBE、ADE、DCEの面積は等しいです。
b) 三角形DBEの二倍にあたる面積は、三角形ABEと三角形EBCの面積と等しいです。

## 2.12 復習問題

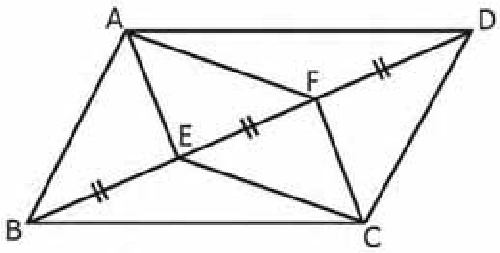
1. 次の四角形のうち、平行四辺形がどれが答えましょう。このレッスンの授業6で学んだ条件のうち、どの条件を適用するか示しましょう。



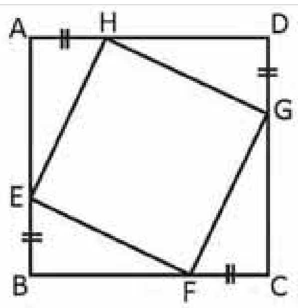

2. 対角線が中点で交わる等しい垂線の四角形が正方形であることを示しましょう。




3. 図の中では、点E および F は、平行四辺形ABCDの対角線BD上にあり、BE = EF = FDとします。
四角形AECFが平行四辺形であることを示しましょう。

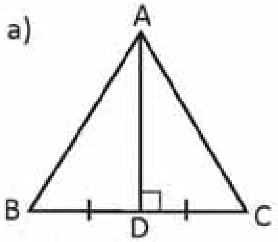



4. ABCDは正方形で、示された辺は合同です。EFGHも同様に正方形であることを示しましょう。

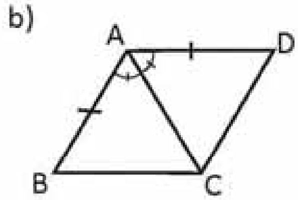


## 2.13 復習問題

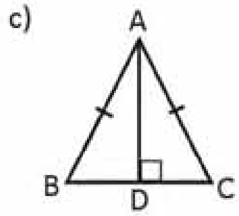
1. 表示された情報に基づいて、示された三角形が等しいか等しくないかを答えましょう。解答を説明してください。




$\Delta$ABD および $\Delta$ACD

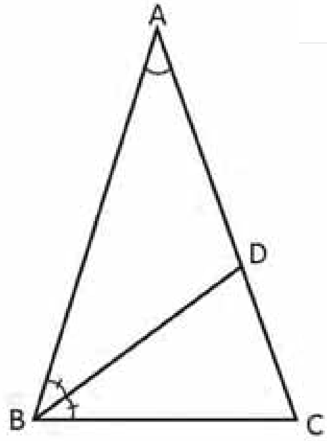



$\Delta$ABC および $\Delta$ACD

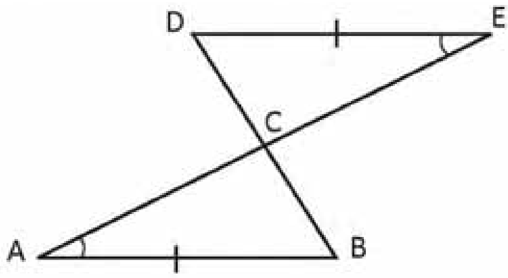



$\Delta$ABD および $\Delta$ACD

2. $\Delta$ABCでは、AB = ACおよび∢CAB=36°となります。DBは、点Dで辺ACと交わる∢ABCの二等分線です。BC = BD = DAであることを示しましょう。

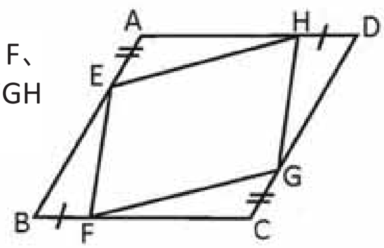



3. 次の図では、DE = AB および ∢DEC= ∢BACとなります。AD = BEであることを示しましょう。



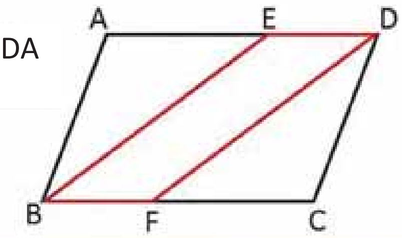

4. 平行四辺形ABCDに、それぞれ4本の辺AB、BC、CDおよびDAに4つの点E、F、GおよびHを描きます。そのためAE = CGおよびBF = DHとなります。四角形EFGHが平行四辺形であることを示しましょう。

[提案：$\Delta$AEH ≅ $\Delta$CGFであると推測して、AH = CFになることに注目しましょう。]



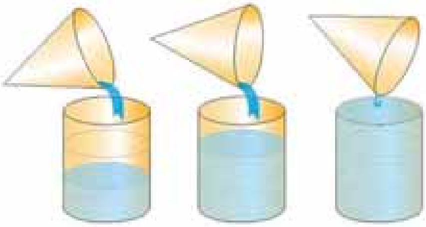

5. 図の四角形ABCDは平行四角形です。BEおよびDFはそれぞれ∢ABCと∢CDAの二等分線ということになります。

BE // DFであることを示しましょう。平行四辺形の条件3を用いましょう。



# 7 ユニット

# 立体の面積と体積

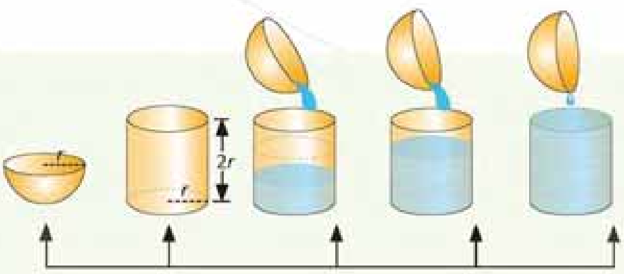


円錐と円柱の体積の関係の図。

数学者であり幾何学者のユークリデスは、教科書 XII の命題10「要素」の項で設定した角柱 と角錐の体積を次のように関係付けました。円錐の体積は同じ底面と高さを持つ円柱の体積の三分の一である。しかし、彼が立体の研究に専念した最初の人ではなかった事に言及することが重要です。なぜなら、プラトンが既に通常の立体：四面体、六面体（立方体）、八面体、十二面体、および、今日では正多面体として知られている二十面体の研究をしていたからです。

ロッテリア・ナショナルの建物 (1970)

日常生活で、立体は、装飾品の制作、建物の設計、スポーツ用品や教材の作成、薬品や化粧品、産業製品を保管するタンクの構築などの基礎として使用されます。




等しい底面

円柱の体積から球の体積の差し引く

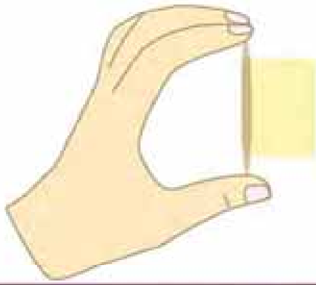
このユニットでは、最も一般的な立体の原点、それらの特徴、面積や体積の計算、円柱や円錐、球の間にある体積の関係；また、日常の様々な状況での使い方などを知ることができます。

## 1.1 回転体

**P**

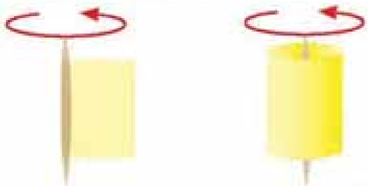
図のように、長方形に切った画用紙を用意します。

つまようじを軸にまわすと、どうなるでしょうか。
知っている立体ができるでしょうか。



**S**

長方形を曲げて回転させると、円柱になることがわかります。



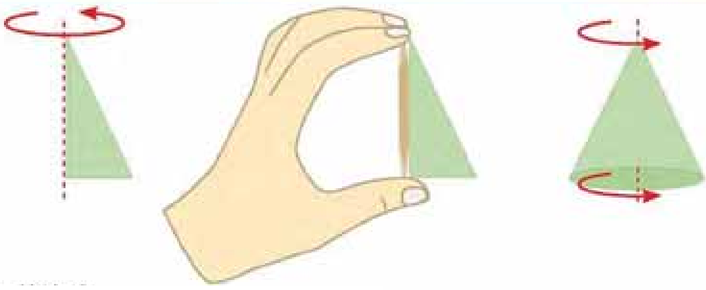
**C**

ひとつの平面図形を、軸を中心に回転させてできた立体を、**回転体**といいます。

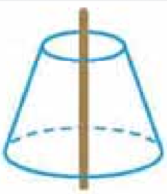
**E**

1. 隣辺を軸に直角三角形を回転させると、どんな立体ができますか。

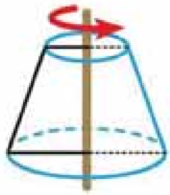
   できる立体は、円錐です。



2. 次の立体は、どんな平面図形からできるでしょうか。

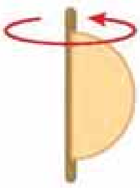


右の絵を見てわかるように、この立体をつくるのに回転させた平面図形は、等脚台形を半分にしたものです。

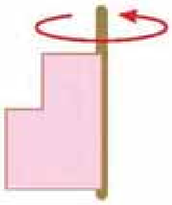


1. 回転させてできる立体を描きましょう。

a) 半円



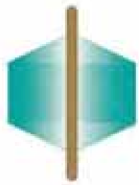
b) 長方形2つ



2. 次の立体図形をつくるために回転させた平面図形はなんでしょうか。

a)

b)

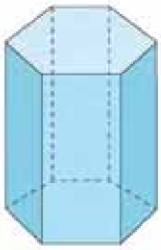


## 1.2 円錐と球の性質と要素

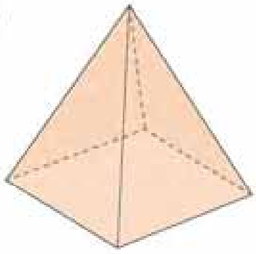
**P**

次の立体図形の性質をかきましょう。

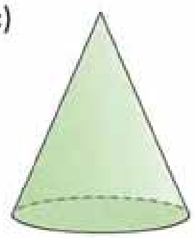
a)



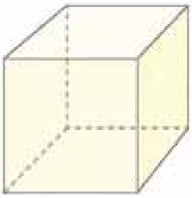
b)



c)

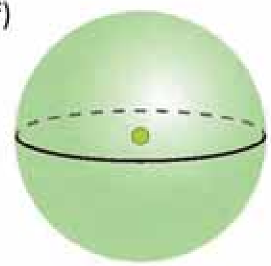


d)



e)

f)



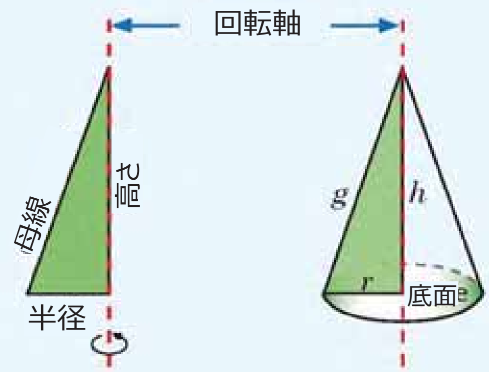
**S**

a) 多角形の底面が2つあり、面は平面です。
b) 底面は1つだけで、頂点が1つあります。また、面は平面です。
c) 円形の平面が1つと頂点があり、側面は曲面です。
d) すべての面が平面で正方形です。
e) 2つの底面は円で、側面は曲面です。
f) 表面が完全に曲面で、側面も底面もありません。

**C**

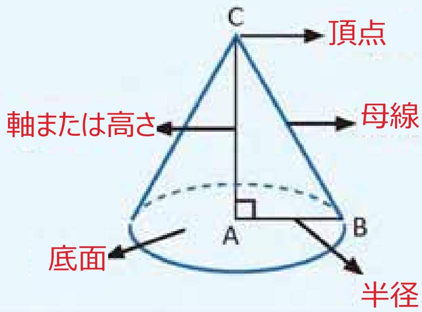
**円錐**は、円と曲面でできた立体です。

円錐は、回転体であると考えることもできます。円錐をつくるために回転する平面図形は、直角三角形です。隣辺のひとつが回転軸となります。

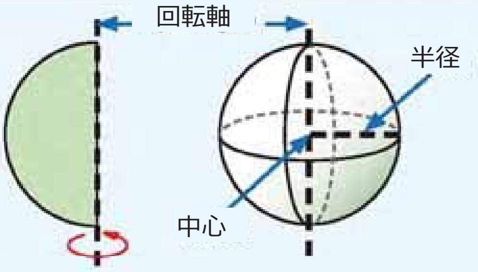



円錐を形成する要素は、次の通りです。

- 母線 (g)： 回転により円錐をつくる線分
- 底面： 円錐の土台となる円形の面
- 半径 (r)： 底面の半径
- 頂点
- 高さ (h)： 頂点と底面の中心を結ぶ線分。
  高さは回転軸と同じです。



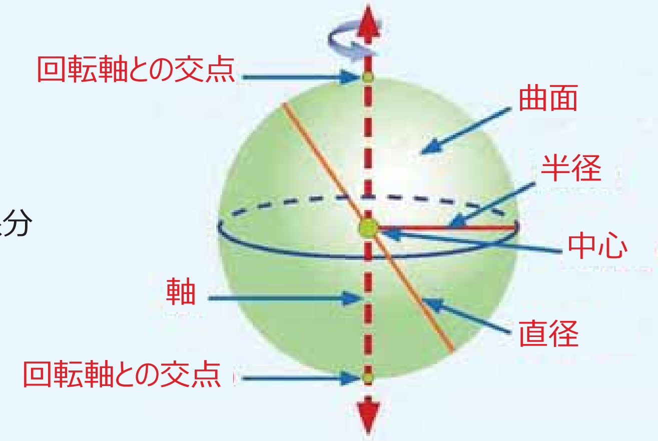
**球**は、1つの曲面で形成された丸い立体です。直径を軸に半円を回転させてできる回転体であると考えることもできます。



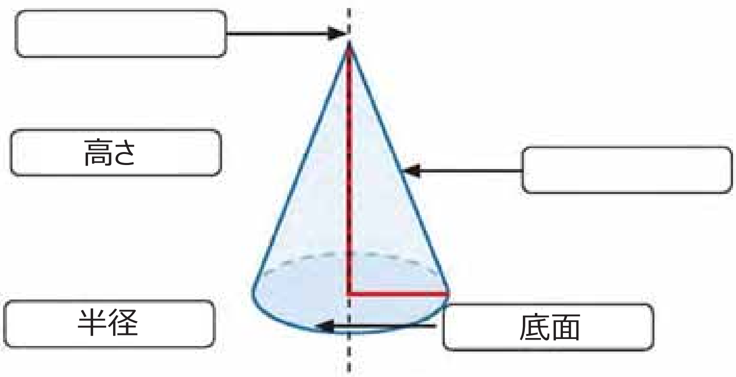

曲面にあるあらゆる点から**中心**までの距離は等しくなります。

球の要素は次の通りです。

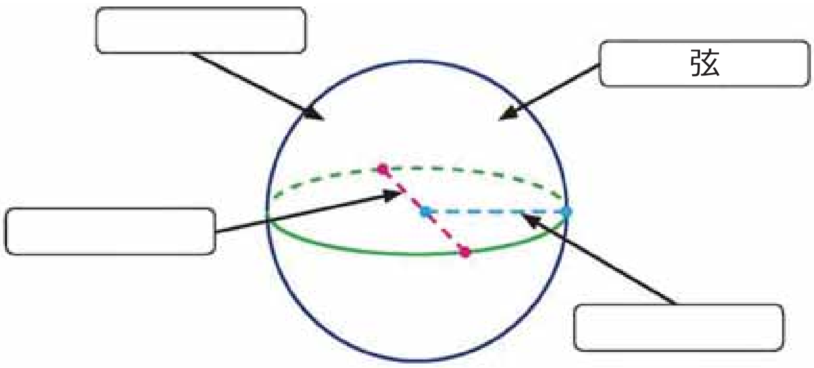
- 中心： 球面上のあらゆる点までの長さが等しい球体内部の点
- 半径： 中心から球面上のあらゆる点までの距離
- 弦： 球面上にあるいずれかの2つの点を結んだ線分
- 直径： 球の中心を通る弦
- 回転軸との交点： 回転軸と球面が交差する点




1. 次の立体をノートに写し、空欄に当てはまる部分の名称をかきましょう。また、名称がどの要素を指すのか、矢印で示しましょう。




2. それぞれ当てはまる部分に球の要素の名称を入れ、足りない要素を書き足しましょう。

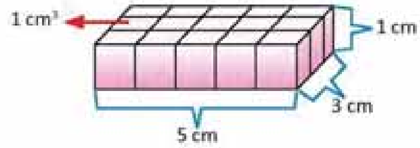


## 2.1 角柱と円柱の体積

**P**

次の問題に答えましょう。

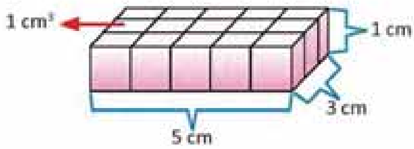
1) 図のような1 $cm^3$ の立方体でできた土台があります。
   a) このひとつのかたまりが4つ分積み重なると、どのような立体になりますか。
   b) 積み重なってできた立体の体積を推測しましょう。

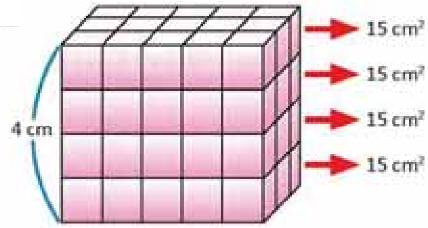



2) 半径3cm、高さ1cmの円盤があります。
   a) この円盤が5つ分積み重なると、どのような立体になりますか。
   b) 積み重なってできた立体の体積を考えましょう。


**S**

1. a) 直方体になります。
   b) $V = 15\ cm^2 \times 4\ cm$




2. a) 円柱になります。
   b) $V = 9\pi\ cm^2 \times 5\ cm$


円柱は二つの円と湾曲した表面からなる立体です。湾曲した表面を側面、二つの円の形をした面を底面とよびます。

角柱の体積は：
角柱の体積 = 底面積 × 高さ

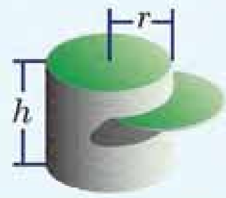
半径$r$ の円の面積公式により求められます：

円の面積 = 円周率π × 半径²

**C**

円柱の体積も角柱の体積と同様に求められると推測できます。つまり、円柱の体積は底面積 （底面積 = 円周率π × 半径²) かける高さの解と同じです。

円柱の体積 = 底面積 × 高さ = 半径²・円周率π × 高さ




**E**

次の連続する立方体は、側面の数が増えると底面はどのような形になるか考えましょう。

底面の形は円に近づきます。したがって、底面を囲む側面の数が増えると角柱の体積は円柱の体積に近づく。

底面積と高さを用いて次の立体の体積を求めましょう。

a)



b)

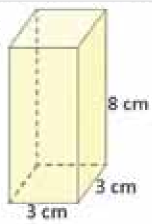


c)



d)



e)



f)
高さ：4 cm

面積：8cm²

ユニット7

## 2.2 角柱と四角錐の体積の比較

**P**

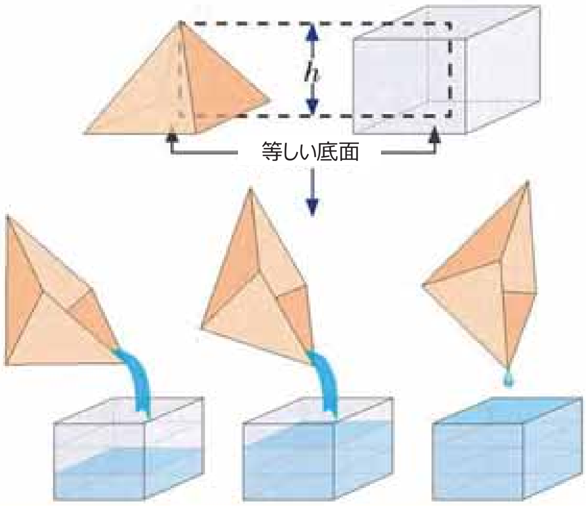
底面と高さが同じ角柱と四角錐があるとき、角柱の体積は四角錐の体積のいくらぶんですか。
導き出した答えから何が分かりますか。

多面体は平面からなり体積がある立方体です。

角錐は多角形の底辺といくつかの側面からなり、三角形でひとつの頂点を持つ。

**S**

次の問題に出てくる角錐と角柱は、水に強い素材で作られています。




角柱の体積に角錐の体積がどのくらい入るか調べるために、角錐の容器に水を満たし角柱の容器に注ぎます。すると、3回これを繰り返したところで角柱に水がいっぱいになります。

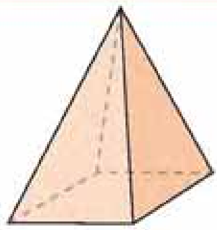
この結果から、角柱は角錐の三倍の体積であることが分かります。つまり、角錐の体積は角柱の体積の三分の一です。

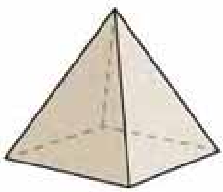
**C**

角錐の体積は、底面積に高さをかけた値を三分の一にしたものに等しいです：

$$\text{角錐の体積} = \frac{1}{3} \times A_B \times h$$

1. 底辺が4cm、高さ9cmの角錐の体積を求めましょう。



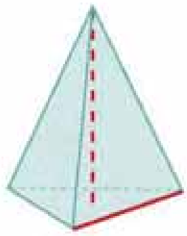


2. 底辺が2cm、体積が16m³の角錐の高さを求めましょう。

3. ギザの大ピラミッドは古代世界の七不思議で唯一現存する建造物です。現在、高さは137m、底辺は230mです。体積はおよそどのくらいですか。

## 2.3 三角錐の体積

面積が図のような底面で、高さが7cmの三角錐の体積を求めましょう。




この例題の底面は三角形であることに注目しましょう。

角錐の体積は体積 = $\frac{1}{3}$ × 底面積 × 高さと等しく、この場合底面は三角形なので、底面積は：

$$A_B = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = \frac{6 \times 4}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ cm}^2.$$

また、角錐の体積は：角錐の体積 = $\frac{1}{3} \times 12 \times 7 = 28 \text{ cm}^3$

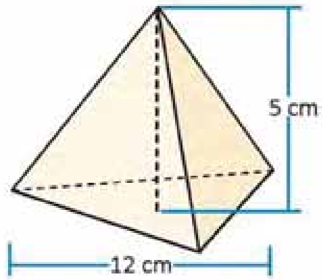
三角錐の体積は四角錐の体積と同じ方法で求められます。角錐の面積 = $\frac{1}{3}$SU4面積 × 高さ。
通常、体積はどのような底面の角錐でも同じように求められます。

図のように、底辺の三角形の高さが6cmである角錐の体積を求めましょう。

底面積 = $\frac{1}{2} \times 12 \times 6 = \frac{12 \times 6}{2} = 36 \text{ cm}^2$

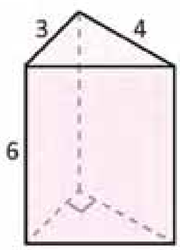
したがって、角錐の体積は：

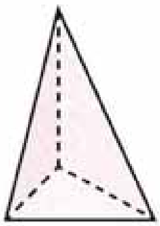
角錐の体積 = $\frac{1}{3}$×底面積 × 高さ = $\frac{1}{3}$ 36 × 5 = 60 cm$^3$



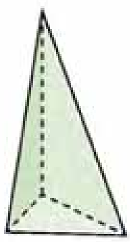

1. つぎの角柱と角錐の体積を求めましょう。

a)



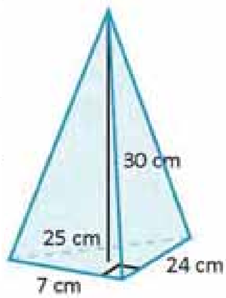



b)

2. 底面積が 25 cm$^2$ 、高さが 9 cmの角錐の体積を求めましょう。

3. 図のような直角三角形の底辺で、高さが30cmの角錐の体積を求めましょう。




ユニット7

## スライド 153

**SU4** To DTP
背景が白のままです。
SunFlare User, 2021/02/20

## 2.4 円錐の体積

**P**

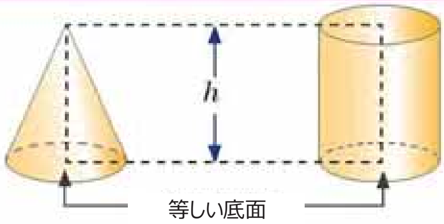
底面が合同な円柱と円錐があるとき、円柱の体積は円錐の体積のいくらぶんですか。また、結果から何が分かりますか。

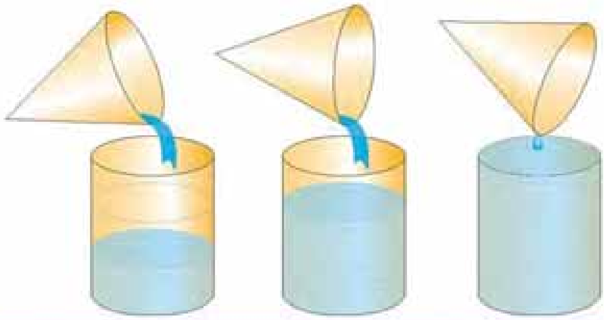
**S**

次の問題に出てくる円錐と円柱は、水に強い素材で作られています。

円柱の体積に円錐の体積がどのくらい入るか調べるために、円錐の容器に水を満たし円柱の容器に注ぎます。すると、3回これを繰り返したところで円柱に水がいっぱいになります。

この結果から、円柱は円錐の三倍の体積であることが分かります。つまり、円錐の体積は円柱の体積の三分の一です。



**C**

円錐の体積は円柱の体積の三分の一です。つまり、底面積に高さをかけた値を三分の一にしたものに等しいです。

$$\text{円錐の体積} = \frac{1}{3}A_B \times h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

**E**

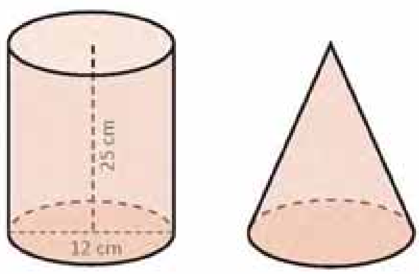
角錐の体積は、底面積に高さをかけた値を三分の一にしたものに等しいです。次の立方体を観察しましょう。

側面の数を増やすと、角錐の底面はどのような形に近づくでしょうか。

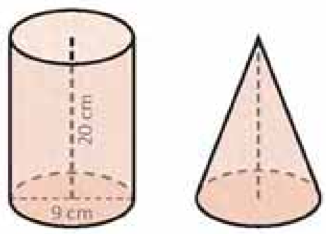
解き方。
底面の形は円に近づきます。このように、角錐の側面が増えるにつれ円錐に近づきます。

円柱の体積を求め、円柱と等しい底面と高さの円錐の体積も求めましょう。

a)




b)



## 2.5 球の体積

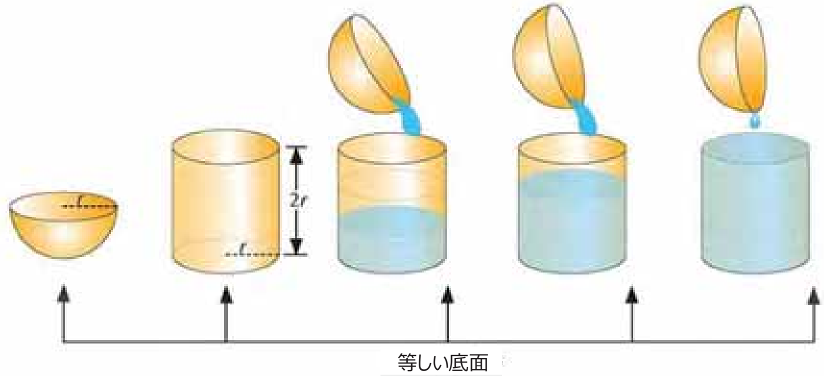
**P**

半径が等しい球と円柱があり、円柱の高さは直径と同様です。
円柱の体積は球の体積のいくらぶんですか。また、結果から何が分かりますか。

**S**

この問題に出てくる球と円柱は、水に強い素材で作られています。

球の半分は空であると考えます。半球に水を満たし、円柱に注ぎます。円柱を水で満たすにはこの動作を三回繰り返します。




この結果から、球の体積は円柱の体積の三分の一であることが分かります。しかしながら、球は二つの半球でできています。したがって、球の体積は円柱の体積の三分の二です。

球の体積は、底面が球の半径と等しく、高さが球の直径と等しい円柱の三分の二の体積と同様です。つまり、

球の体積 = $\frac{2}{3}$(円柱の体積) = $\frac{2}{3}r^2h$ （しかし円柱の高さは半径の2倍)

$= \frac{2}{3}\pi r^2(2r) = \frac{2}{3}(2\pi r^3) = \frac{4}{3}\pi r^3$

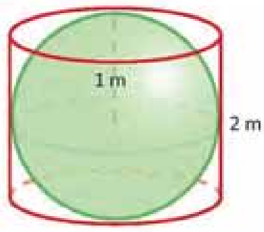
半分の球は半球と呼ばれます。

**C**

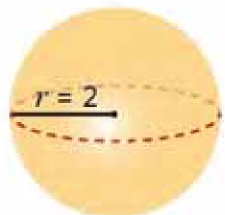
球の体積は円柱の体積の三分の二です。つまり、底面積に高さをかけた値を三分の二にしたものに等しいです。

球の体積 = $\frac{2}{3}$円柱の体積) = $\frac{4}{3}\pi r^3$

1. 2mの高さの円柱の中に描かれた球の体積を求めましょう。




2. 次の球の体積を求めましょう。

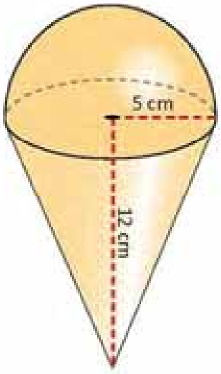



3.半径10cmの半球の体積を求めましょう。

ユニット7

## 3.1 複合立体の体積

**P** 次の立体の体積を求めましょう：




この立体は、既に学習した立体図形に分解することができます。

**S** まず、半球の体積を求めます：

$$\frac{1}{2}V_{球} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{4}{6}(\pi \times 5^3) = \frac{500}{6}\pi = \frac{250}{3}\pi = 83.3\pi \text{ cm}^3。$$

次に、円錐の体積を求めます：

$$V_{円錐} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 5^2 \times 12 = 100\pi \text{ cm}^3。$$

よって、この立体の体積は次のようになります：

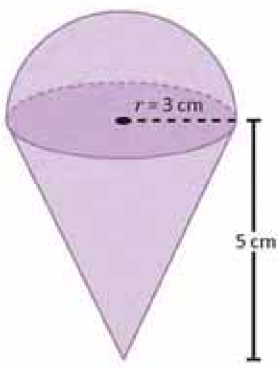
$$V = \frac{1}{2}V_{球} + V_{円錐} = \frac{250}{3}\pi \text{ cm}^3 + 100\pi \text{ cm}^3 = \frac{550}{3}\pi \text{ cm}^3 \approx 183.3\pi \text{ cm}^3。$$

**C** 複合立体の体積は、次のようにして求めます：

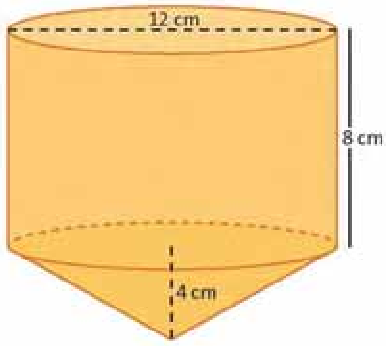
- 立体を既に学習した立体図形に分解し、それぞれの体積を求めます。
- 求めた体積を合計します。

次の立体の体積を求めましょう：

a)




b)



## 3.2 復習問題

1. 円錐形の紙コップの半径は3 cm、高さは9 cmです。水はどれだけ入りますか?

考え方

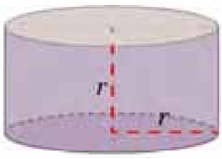
1 $cm^3$ = 1 *ml* = 0.0338135 f*l* oz
（f*l* oz： 液量オンス)。

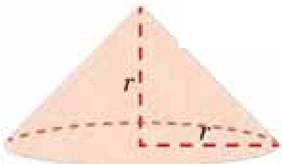
2. 半径18 cmの球形の容器に溜められる水の量はいくらですか?

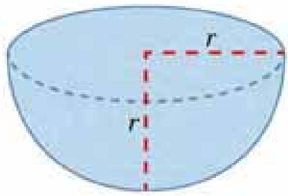
3. 直径が16 cmのボールの体積を求めましょう。

4. 次の立体図形の体積を求めましょう：


5. 3つの立体の体積を比べましょう。どのような関係が見つかりましたか?




6. 私たちの地球の半径を6 370 kmとして、数字$\pi$のさまざまな近似値を使って地球の体積を求めましょう：

a) 3　　b) 3.14　　c) $\pi$

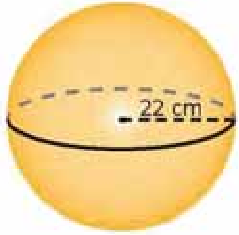
7. 底面の円周（円周の長さ)が8$\pi$ mで、高さが6.3 mの円柱形のタンクの体積を求めましょう。

8. ある製薬研究所では、アルコールを、直径が4 cm、高さが10 cmの円柱形のフラスコに入れています。アルコールの入ったフラスコの容積を、リットルの単位で求めましょう。

## 3.3 復習問題

1. 次の立体の体積を求めましょう：



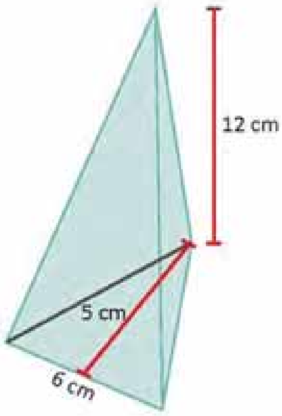

2. 半径が5 cmの円柱の体積が$300\pi$ cm$^3$である場合、この円柱の高さはいくつですか?

3. 体積が$60\pi$ cm$^3$で、底面の半径が8 cmの円柱の高さを求めましょう。

4. 高さが15 cmで、直径が8 cmの円柱の体積を求めましょう。

5. ある正角錐の底面は、一辺が10 cmの正方形です。正角錐の高さは15 cmです。この正角錐の体積を求めましょう。

6. ある三角錐は高さが12 cmで、その底面の三角形の高さは5 cm、底辺は6 cmです。この三角錐の体積を求めましょう。




7. 体積が$135\pi$ cm$^3$で、半径が9 cmの円錐の高さはいくつですか?

8. 底面の半径が4 cmで、高さが9 cmの円錐の体積を求めましょう。

9. 体積が$36\pi$ cm$^3$の球の半径を求めましょう。

# 4.1 円錐の展開図と弧の長さ

**P**

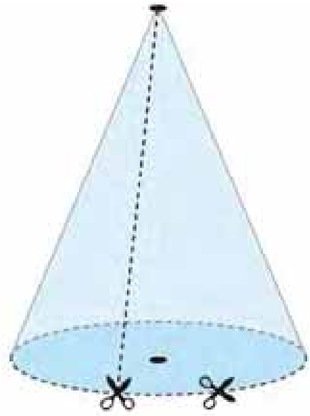
紙の円錐が与えられたら、図に示されているよう切断し、さらに、円も縁に沿って切断しますが、このとき円錐の残りの部分から切り離さないでおきます。

a) どのような形になりましたか？自分のノートに描きましょう。

b) それは何という図形ですか？

c) 展開された円錐に、すでに学習した幾何学的図形のどれが見られますか？説明しなさい。

d) 図面上で、円錐の母線と半径を特定します。円錐の型紙の弧の長さはいくらですか？



**S**

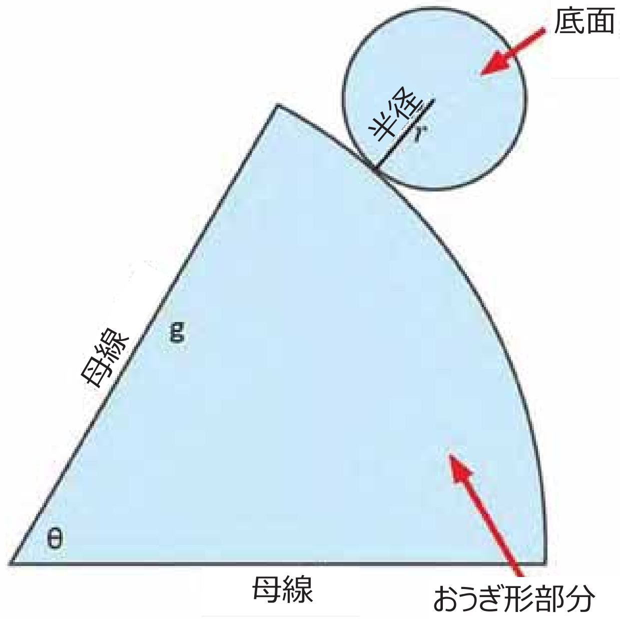
a）表示通りに円錐を切断すると、右の図が示すような図形の組み合わせになります。

b）幾何学立体を表す複合図形は、立体の**型紙**または**展開図**として知られています。

c）円錐の型紙は、円錐の半径に当てはまる半径$r$の円と、半径が円錐の母線gであるおうぎ形部分で成り立っています。

d）底面の円周は$2\pi r$であり、円錐を再び組み立てると、おうぎ形部分の弧が底面の円周を包み込みます。したがって、弧の長さは：

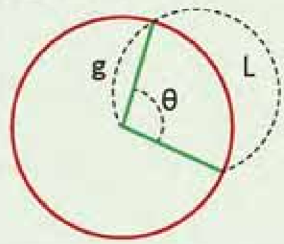
$$L = 2\pi r$$




弧の長さを計算する別の方法は、おうぎ形部分の半径gと、円錐の母線に当たる半径2つのによって切り取られた円の一部分である中心角に基づくやり方です； おうぎ形部 分の弧は、円周全体の $\frac{\theta}{360}$ 倍であるため、この部分の弧の長さは次のようになります：

$$L = 2\pi g \times \frac{\theta}{360^\circ} = \frac{\theta}{180^\circ}\pi g$$

おうぎ形部分は、2つの半径によって切り取られた円の一部分で、中心角θを成しています。




ユニット 7

**C**

円錐の型紙は、円錐の底面である半径$r$の円、半径が円錐の母線で中心角θのおうぎ形部分によって成り立っています。 tor

おうぎ形部分の弧の長さを計算する公式は次のとおりです：

$$L = 2\pi r \text{ ...(1)}$$

$$L = \frac{\theta}{180^\circ}\pi g \text{ ...(2)}$$

**E**

以下の問題で弧の長さを求めましょう：

a) 底面の半径は$r$ = 8 cmです。
b) 母線g = 12cm、中心角θ= 240°

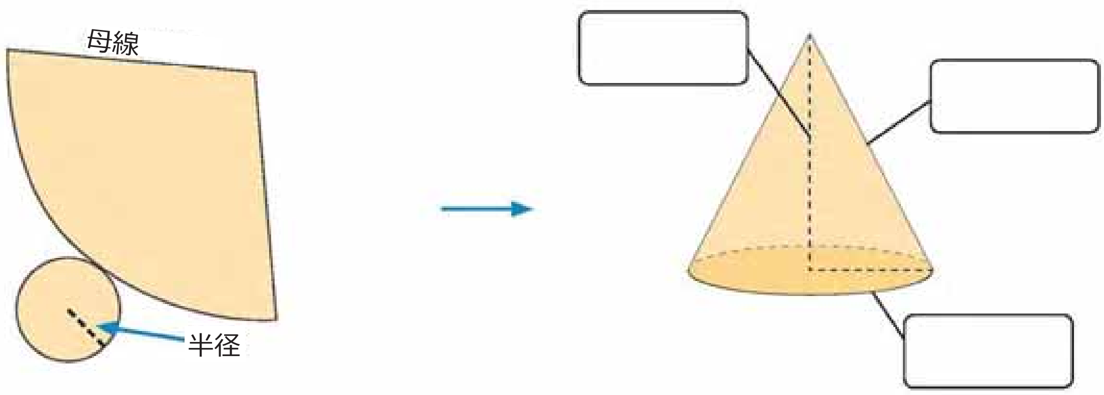
解答。

a) $L = 2\pi r$；したがって、$L = 2\pi \times 8 = 16\pi$；または、

b) $L = \frac{\theta}{180^\circ}$；したがって、$L = \frac{240^\circ}{180^\circ}\pi \times 12 = \frac{4}{3}\pi \times 12 = 4\pi \times 4 = 16\pi$。

すでに学習済みの要素によって弧の長さの計算に用いられる公式が特定されるということを理解することが重要です。

1. 次の円錐の型紙の図を参考にして、示された部位の名前を記入しましょう。




2. 母線が10cmで中心角が60°の円錐の弧の長さを求めましょう。

3. 半径が5cmの円錐の弧の長さを求めましょう。

## 4.2 円錐の型の要素間にある関係

**P**

前回の授業の公式を用いて、次の部分の値を求めましょう。

1. おうぎ形部分の中心角θと円錐の母線$g$が与えられたときの、半径$r$。
2. 母線$g$と円錐の半径$r$が与えられたときの、おうぎ形部分の中心角θ。
3. おうぎ形部分の中心角θと弧の長さが与えられたときの、母線$g$。
4. おうぎ形部分の中心角θと弧の長さLが与えられたときの、母線$g$。

**S**

次の公式が使えます； 弧の長さLを求めましょう。

$L = 2\pi r$ ....(1) $L = \frac{\theta}{180^\circ}\pi g$ ....(2)

1. （1）と（2）から、次の相関関係が得られます。 a

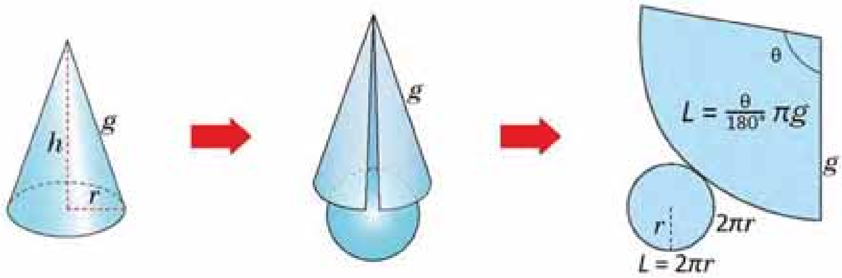
$$2\pi r = \frac{\theta}{180^\circ}\pi g$$

$$r = \frac{\theta}{360^\circ} g \text{ .... (3)}$$

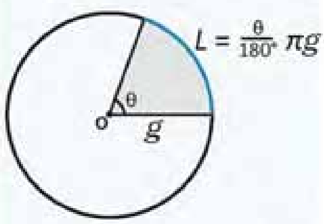
2. Por (3), $\theta = \frac{360^\circ}{g} r$ ............. (4)

3. Por (3), $g = \frac{360^\circ}{\theta} r$ ............. (5)

4. Por (2), $g = \frac{180^\circ}{\theta\pi} L$ ............. (6)




おうぎ形部分の弧の長さ。




中心角θと母線$g$ の相関関係。

**C**

円錐の部位の値は、底辺の円周の比率がおうぎ形部分の弧の長さに等しい場合に計算できます、つまり：

$$L = 2\pi r \text{ ....(1)}, \ 2\pi r = \frac{\theta}{180^\circ}\pi g$$

円錐の半径： r
おうぎ形部分の中心角： θ
円錐の母線： g
おうぎ形部分の弧の長さ：L

**E**

母線$g$ = 30 cmと円錐の半径が与えられたときの、おうぎ形部分の中心角θを求めましょう。
$r$ = 4 cm。

解答。

$2\pi r = \frac{\theta}{180^\circ} \times \pi g$； 次に、$\theta = \frac{360^\circ}{g} \times r$、各値を代入すると、次の結果が得られます：

$$\theta = \frac{360^\circ}{g} \times r = \frac{360^\circ}{30} \times 4 = 48^\circ$$ ；したがって、θ = 48°。

1. 母線 $g$ = 18 cm、円錐の半径が$r$ = 9 cmのとき、円錐の展開面のおうぎ形部分の中心角θを求めましょう。
2. 母線$g$ = 6 cm、展開のおうぎ形部分の中心角がθ = 120°のとき、円錐の半径$r$を求めましょう。
3. 円錐の半径が4cm、おうぎ形部分の中心角が60°のとき、円錐の展開図の母線を求めましょう。
4. おうぎ形部分の角度がθ= 120°で、弧の長さが L = 8π cmのとき、円錐の展開図の母線を求めましょう。

# 4.3 円錐の表面積

**P**

円錐の型紙は、次の部位で成り立っています：

a) おうぎ形部分の中心角が $\theta = \frac{360^\circ}{g} \times r$ の円錐の側面、$g$は円錐の母線、つまりおうぎ形部分の半径、

b) 半径$r$の円。

円錐の側面と円の面積を表しましょう。全体の面積はいくらですか？

**S**

a) 円錐$A_{側面}$の面積、つまり円錐の型紙のおうぎ形部分の中心角θから得られるおうぎ形の面積は、半径gの円の総面積 ；$\pi g^2$に比例します：

$$A_{側面} = \pi g^2 \times \frac{\theta}{360^\circ} \ldots (1)$$

したがって、（1）と $\theta = \frac{360^\circ}{g} \times r$ を代入すると、次のようになります：

$$A_{側面} = \pi g^2 \times \frac{\theta}{360^\circ}$$

$$= \pi g^2 \times \frac{1}{360^\circ} \times \theta$$

$$= \pi g^2 \times \frac{1}{360^\circ} \times \frac{360^\circ}{g} \times r.$$

$$A_{側面 al} = \pi r g$$

b) 底面の面積は：$A_{底面} = \pi r^2$。

総面積は、側面の面積と底面の面積の合計になります、つまり：

$$A_{総面積} = A_{側面} + A_{底面} = \pi r g + \pi r^2 = \pi r(g + r)。$$

**C**

円錐の半径が$r$、母線が$g$のとき、円錐の側面と総面積を計算するために円錐の展開図を用います：

**側面の面積$A_{側面}$**：これは、円錐の展開図上のおうぎ形部分の面積です。おうぎ形部分の面積は次のようにして求めます：

$$A_{側面} = \pi r g$$

**総面積$A_{総面積}$**：これは、側面の面積と底面の面積の合計です。円錐の底面は円であるため、総面積は次のようにして求めます：

$$A_{総面積} = A_{側面} + A_{底面} = \pi r g + \pi r^2 = \pi r(g + r)。$$

1. 図が示す円錐の側面と総面積を計算しましょう：


2. 次の特徴を備えた円錐の母線を求めましょう：半径$r$ = 6 cm、側面の面積$A_{側面}$ =120$\pi$ cm²。

# 4.4 球の表面積

**P**

球と半径$r$の円があるとき、円の面積と球の面積とを比較してどのような相関関係がありますか？、また球の表面積についてどのように結論付けることができますか？

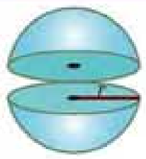
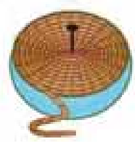
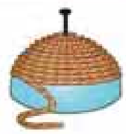
**S**

この問題を解くには、切断が可能な球を1個、ひもを1本、釘を1本用意する必要があります。次に以下を行います：

1. 球を2等分に切断し、2つの半球にします（図Aを参照）。
2. 片方の半球の円の中心にひもを固定し、円全体を覆うように巻いていき、余分な部分をカットします（図Bを参照）。次に、巻いたひもをほどきます。
3. 球の極のひとつにひもを固定し、巻いていきます（図Cを参照）。球が覆われるまでこのプロセスを繰り返します。

この手順を実行すると、球全体を覆うために、最初のと同じ長さのひもを3本カットする必要があることに気付くはずです。

この結果から、球の表面積は同じ半径の円の面積の4倍になることが分かります。

| 半径$r$の球（ボール）を半分に切断しましょう | 円形の領域の中心に刺したピンの周囲にひもを巻き付けましょう | ひもを半球に巻き付けましょう |
|---|---|---|
|  図 A |  図 B |  図 C |

**C**

半径$r$の円の面積は$\pi r^2$であるため、球の表面積は次のようになります：

$$A_{球} = 4\pi r^2$$

**E**

**球の表面積を確認する別の方法**

球の表面積と、半径が球の半径に等しく、高さが球の直径である円柱の側面の面積と比較すると、何が分かりますか？球の表面積と 円柱の側面の面積は、どのような相関関係がありますか？

上記と同じ操作を行うことができますが、今回は円柱をひもで覆い、次に球を同じひもで覆います。

解答。
半径$r$の球の表面積は半径$r$、高さ$2r$の円柱の側面の面積に等しいと結論付けることができます。つまり、$A = 2\pi rh = 2\pi r(2r) = 4\pi r^2$ ということです。

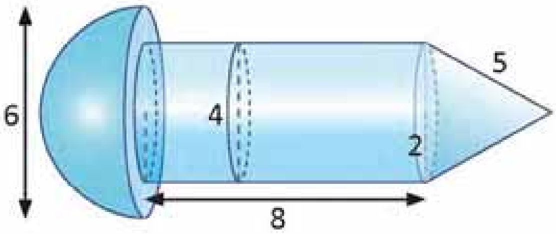
1. 直径が12 cmの球の総表面積はいくらになりますか？

2. 面積が$144\pi$ cm$^2$の球の直径はいくらですか？

## 5.1 複合立体の表面積

**P**

次の立体の表面積を求めてください：




| | |
|---|---|
| 半球の面積： | $A_{半球} = \frac{1}{2}(4\pi r^2)$ |
| 円柱の側面積： | $A_{側面} = 2\pi rh$ |
| 円錐の側面積： | $A_{L円錐} = \pi rg$ |
| 円の面積： | $A_{円} = \pi r2$ |

**S**

まず、半球の面積を求めます：

$$A_{半球} = \frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2 \times \pi \times 3^2 = 18\pi\ cm^2。$$

次に、円柱の側面積を求めます：

$$A_{側面} = 2\pi rh = 2\pi \times 2 \times 8 = 32\pi\ cm^2。$$

円錐の側面積：

$$A_{L円錐} = \pi rg = \pi \times 2 \times 5 = 10\pi\ cm^2。$$

次に、半球の底面積から円柱の底面積を引きます：

$$A_{円} = \pi\left(\frac{6}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 9\pi - 4\pi = 5\pi\ cm^2。$$

したがって、図形Aの面積：

$$A_{図形} = A_{半球} + A_{側面} + A_{L円錐} + A_{円} = 18\pi + 32\pi + 10\pi + 5\pi = 65\pi\ cm^2。$$

**C**

複合立体の側面積を求めるためには、問題に出てくる立体を一つずつ足す、または引きます。

1. 図1に出てくる図形の面積を求めましょう。

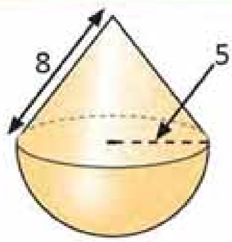



図1

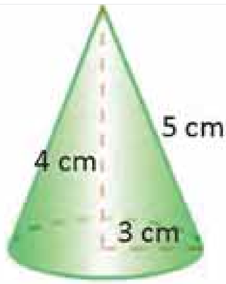
2. 以下の半径の球体の表面積を求めましょう。5 cm、10 cm、50 cm。球体のそれぞれの面積にはどんな関係があるか答えましょう。

3. 穀物を貯蔵するための、図2のような、天井が半球状になっている円柱の穴蔵を建てようとしています。円柱の壁の高さが10mで、側面積が100π $m^2$である場合の、円柱の半径を求めましょう。

図2

## 5.2 復習問題

1. 高さ4cm、母線5cm、底面の半径が3cmの円柱の側面積と総面積を求めましょう。



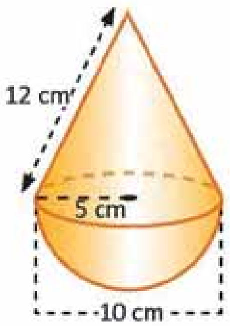

2. 半径10㎝の半球の面積を求めましょう。

3. 体積が$144\pi$ cm³の球体の面積を求めましょう。

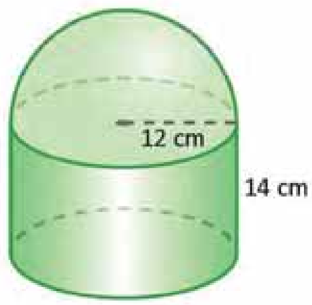
4. 半径4cmの球体が厚さ1cmの金属層で覆われています。この球体を覆うために必要な金属の量を求めましょう。

5. 次の図形の表面積を求めましょう。

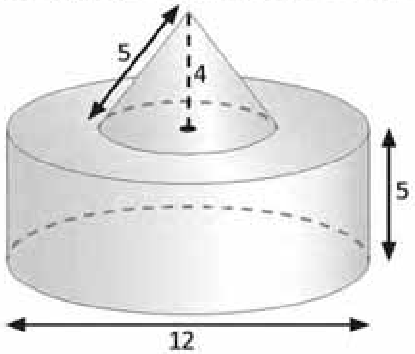
a)




b)




6. 円錐の半径が6cmである場合、次の図形の体積を求めましょう。




ユニット7

## 5.3 復習問題

**幾何学的な立体の体積**

円柱の体積：$V_{円柱} = A_B \times h = \pi r^2 h$

円錐の体積：$V_{円錐} = \frac{1}{3} \times A_B \times h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

正四角錐の体積：$V_{正四角錐} = \frac{1}{3} A_B \times h$

球体の体積：$V_{球体} = \frac{4}{3}\pi r^3$

**幾何学的な立体の面積：**

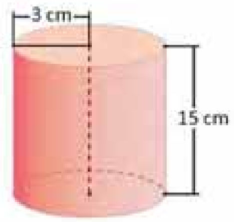
円柱の側面積：$A_{側面} = 2\pi r h$

円錐の総面積：$V_{円錐} = \pi r(g + r)$

円柱の総面積：$A_{円柱} = 2\pi r(h + r)$

球体の面積：$A_{球体} = 4\pi r^2$

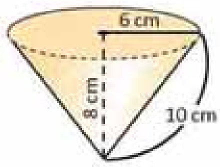
1. 半径3cm、高さ15cmの円柱の体積を求めましょう。




2.次の立体の面積と体積を求めましょう：

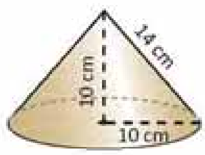
a)


b)

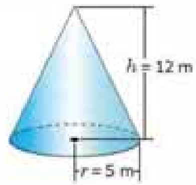



c)

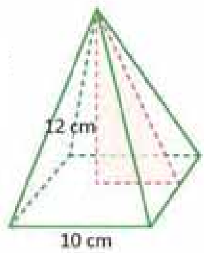

3. 半径10cmの長方錐（高さ＝半径)の総面積を求めましょう。




4. 次の円錐の体積を求めましょう：




5. 底面の辺が10cmで高さ12cmの四角錐の体積を求めましょう。

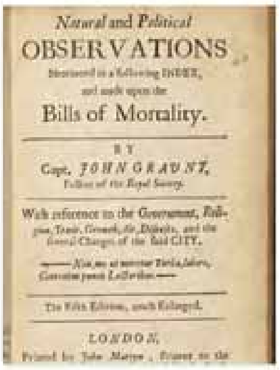



6. 底面の半径7cm、高さ24cm、母線25cmの円錐の総面積と体積を求めましょう。

7.次の複合立体の総面積と体積を求めましょう。

ユニット 8

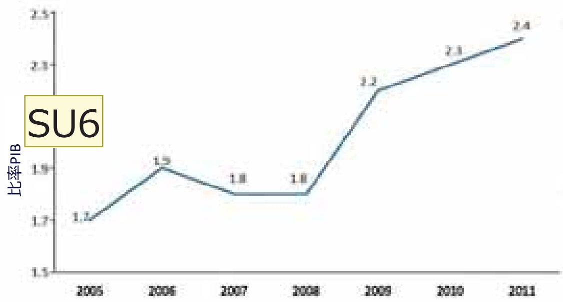
# 統計データの整理と分析



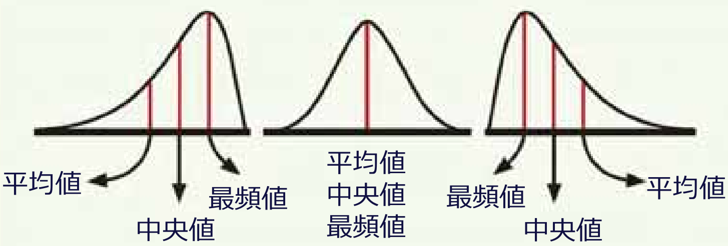

1662 年にジョン・グラントが行った研究の画像。

統計学は、エジプト文明、バビロニア文明、ローマ文明など、さまざまな文明の政治的、法的、行政的組織と直接かかわりのある業務から生まれました。こういった業務を行うために、公務員たちは家畜の数や征服した領土の富の定期的な勘定はもちろん、出生、結婚、死亡を記録する義務があったからです。しかし科学的な統計学の基礎を初めて築いたのは、ロンドン市の生命表をもとに研究を行ったジョン・グラント (1620 – 1674) でした。

統計学はさまざまな分野で重要な役割を果たしています。 例えば、教育、経済、技術、社会、福祉の各分野において、予測を行い、意思決定を簡易化するモデルを生成するために、データの収集、比較、分析が簡単に行える仕様のツールを提供しています。例えば、ソーシャルネットワークは、内部アプリケーションの開発における継続的な統計分析によって成長が促進されます。




保健省、健康に関する社会的排除の調査、2011 年 12 月。




中心傾向の尺度の相関関係

このユニットの内容の応用では、データを表に整理し、それらをグラフで表し、中心傾向の尺度として知られている代表値を特定するとともに、その性質のいくつかとよくある状況での用途を学習します。

## スライド 167

**SU6** To PM/DTP
この図上部分にあるはずの原文のテキストボックスが反映されていません。
SunFlare User, 2021/02/20

## 1.1 データのまとめ

カルメンさんは美容室エル・ブエン・グストのオーナーで、お客さん全員に応対するにはA支店とB支店の2店舗を開く必要がありました。以下、A支店で秘書の日に応対したお客さん30人の年齢の記録データが示されます。

1. 20歳から40歳まで、4歳ごとに5グループにデータを分類しましょう。
2. どのグループにお客さんが最も集中していますか?
3. 一番高い年齢のお客さんの数は何人ですか?
4. 32歳未満のお客さんの数は何人ですか?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 24 | 23 | 28 | 30 | 29 | 31 |
| 27 | 26 | 24 | 30 | 32 | 29 |
| 21 | 22 | 27 | 33 | 30 | 24 |
| 24 | 21 | 26 | 24 | 30 | 39 |
| 24 | 22 | 22 | 24 | 21 | 20 |

1. データを分類すべく、まずグループが作られます。20歳から始め4歳ごとなので、グループは20～24歳、24～28歳、28～32歳、32～36歳、そして36～40歳になります。データの分類を促進すべく登場する順番に従って表に書き続けると、右の表のようになります。
2. 24～28歳の年齢グループに、最も多い数のお客さんが集中します（11）。
3. 応対したお客さんの最高齢は39歳です（最大のデータです）。
4. 応対した32歳未満のお客さんの数を定めるべく、最初の3つのグループに入る人たちの数を数えます：8 + 11 + 8 = 27なので、お客さん27人が32歳未満です。

| 20～24 | 24～28 | 28～32 | 32～36 | 36～40 |
|---|---|---|---|---|
| | 24 | | | |
| | 24 | | | |
| | 24 | | | |
| 20 | 26 | 30 | | |
| 21 | 24 | 30 | | |
| 22 | 24 | 29 | | |
| 22 | 27 | 30 | | |
| 21 | 24 | 31 | | |
| 22 | 26 | 29 | | |
| 21 | 27 | 30 | 33 | |
| 23 | 24 | 28 | 32 | 39 |

数列データをグループに整理するには、以下の方法が使われます：

1. 作成するグループの数と配慮すべき制限を考慮してカテゴリーを定めます。
2. データを一つずつ所属するグループに配置します。ここで注意すべきは、下限と同じかそれ以上であるものの、上限よりは下の数字を入れることになります。作成される例で示されるように、例えばグループ1の20～24歳では20歳以上であるものの24歳未満の人全員が入ります。つまり、24歳の人のデータは次のグループに入ります。

次に、カルメンさんの美容室エル・ブエン・グストB支店で秘書の日に応対したお客さん30人の年齢の記録データが示されます。

1. 20歳から40歳まで、4歳ごとに5グループにデータを分類しましょう。
2. どのグループにお客さんが最も集中していますか?
3. 一番高い年齢のお客さんの数は何人ですか?
4. 32歳以上のお客さんの数は何人ですか?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 22 | 24 | 22 | 30 |
| 27 | 34 | 35 | 29 | 28 |
| 24 | 21 | 20 | 23 | 26 |
| 23 | 26 | 20 | 29 | 36 |
| 28 | 29 | 24 | 23 | 34 |
| 24 | 21 | 20 | 36 | 24 |

## 1.2 頻度表

P

美容室のA支店で
秘書の日に応対したお客さん30人の
データを再度扱います。

1.グループを表に整理しましょう。
2.それぞれのグループのデータ総数を定めて
　結果を書きましょう。

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 24 | | | |
| | 24 | | | |
| | 24 | | | |
| 20 | 26 | 30 | | |
| 21 | 24 | 30 | | |
| 22 | 24 | 29 | | |
| 22 | 27 | 30 | | |
| 21 | 24 | 31 | | |
| 22 | 26 | 29 | | |
| 21 | 27 | 30 | 33 | |
| 23 | 24 | 28 | 32 | 39 |
| **20～24歳** | **24～28歳** | **28～32歳** | **32～36歳** | **36～40歳** |

S

1. データをグループにすべく表が作成され、最初の列ではグループが配置されます。

2. それぞれのグループに入るデータを数え、表の結果に入れると、列2が得られます。

| 年齢 | お客さんの数 |
|---|---|
| 20 - 24 | 8 |
| 24 - 28 | 11 |
| 28 - 32 | 8 |
| 32 - 36 | 2 |
| 36 - 40 | 1 |
| **合計** | **30** |

C

作成された例のように、数列データのグループが整理されている表は**頻度分布表**と呼ばれ、作成されたデータグループはそれぞれ**階級**と呼ばれ、例ではデータが5階級に整理されているといえます。また、それぞれの階級に対応するデータの合計は、**頻度**と呼ばれます。

このため、頻度分布表で数列データを整理するには、以下が必要です：
- 必要な数の階級でデータを整理します。
- それぞれの階級に属するデータを数えて、頻度を定義します。

マリオとカルロスは毎日午後会ってバスケットをしています。先月はそれぞれがプレイした時間の記録をつけて、以下のようなデータが示されました：

**マリオ**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 13 | | | |
| 11 | 15 | | 21 | |
| 12 | 14 | | 21 | |
| 11 | 13 | 16 | 20 | |
| 12 | 15 | 17 | 19 | |
| 11 | 13 | 16 | 20 | |
| 10 | 14 | 17 | 19 | 23 |
| 12 | 13 | 18 | 20 | 22 |
| **10～13** | **13～16** | **16～19** | **19～22** | **22～24** |

**カルロス**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | 24 |
| | | | 21 | 22 |
| | | 17 | 21 | 24 |
| | 13 | 18 | 20 | 22 |
| 11 | 13 | 16 | 19 | 23 |
| 11 | 14 | 16 | 19 | 22 |
| 11 | 13 | 18 | 19 | 22 |
| 10 | 15 | 17 | 20 | 23 |
| **10～13** | **13～16** | **16～19** | **19～22** | **22～25** |

1. 頻度分布表のデータを整理しましょう。
2. 結果を完成させて、一番長くプレイしたのはどちらか答えましょう。

## 1.3 頻度表の要素

P

表には、カルメンさんの美容室エル・ブエン・グストA支店で秘書の日に応対したお客さん30人の年齢が含まれています。

1. それぞれの階級の大きさを決めます。
2. それぞれの階級の中央にある数の値を計算します。
3. 平均が30である値の階級の頻度はいくらですか?

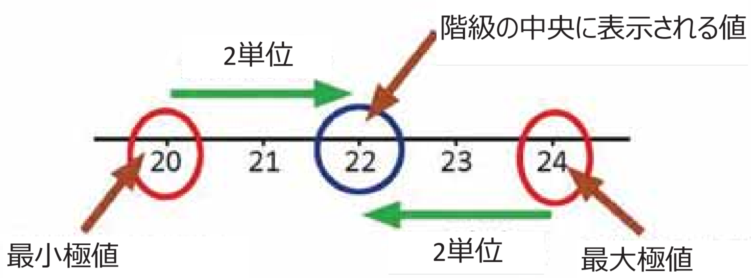
| 年齢 | お客さんの数 |
|---|---|
| | $f$ |
| 20 - 24 | 8 |
| 24 - 28 | 11 |
| 28 - 32 | 8 |
| 32 - 36 | 2 |
| 36 - 40 | 1 |
| **合計** | **30** |

S

1. 最初の頻度のサイズを分析する場合、4単位と等しいことが観察できます。
   例：


各階級の極値をひくことで計算できます。24 – 20 = 4。

2. 最初の階級を観察すると、階級の中央にある数値が得られ、図的には以下示されるように、極値のどちらかからの単位の数と同じになります：




| 年齢 | お客さんの数 | 平均値 |
|---|---|---|
| | $f$ | |
| 20 - 24 | 8 | 22 |
| 24 - 28 | 11 | 26 |
| 28 - 32 | 8 | 30 |
| 32 - 36 | 2 | 34 |
| 36 - 40 | 1 | 38 |
| **合計** | **30** | |

極値をたして2つで割ることができます：

$$\frac{24+20}{2} = \frac{44}{2} = 22$$

3. 表を観察すると、平均値が30である階層は28～32の階層はであり、頻度は8だとわかります。

C

階層の規模は**階層の幅**と呼ばれ、極値は**階層の限界値**と呼ばれます。例えば20～24である最初の階層では、階層の限界は20～24で、以下のようになります

下限 = 最小極値 = 20
上限 = 最大極値 = 24 → 階級の幅 = 24 – 20 = 4。

どの階級の幅を定める場合にも、以下の等式が使われます：

階級の幅 = 上限 – 下限

各階級の真ん中にある数字は**中点**と呼ばれ、等式で決定されます：

$$中点 = \frac{上限 + 下限}{2}$$

1. 表には、カルメンさんの美容室エル・ブエン・グストB支店で秘書の日に応対したお客さん30人の年齢が含まれています。

   a) 階級の幅を決めましょう。
   b) それぞれの階級の中点を計算しましょう。
   c) 中点が26である階級の頻度はいくらですか?

| 年齢 | お客さんの数 *f* |
|---|---|
| 20 - 24 | 11 |
| 24 - 28 | 8 |
| 28 - 32 | 6 |
| 32 - 36 | 3 |
| 36 - 40 | 2 |
| **合計** | **30** |

2. 頻度表が示す内容では、健康な成人男性100名の最大血圧の測定結果が示されています。データを分析して答えましょう：

   a) 階級の幅を決めましょう。
   b) 分布の階級の中点を計算しましょう。
   c) 平均で125 mmHgの血圧を持つ男性は何人ですか?

| 血圧 (mmHg) | 男性の数 *f* |
|---|---|
| 100 - 110 | 4 |
| 110 - 120 | 18 |
| 120 - 130 | 38 |
| 130 - 140 | 55 |
| 140 - 150 | 17 |
| 150 - 160 | 6 |
| **合計** | 138 |

3. 学年のクラスメートの身長を確かめ、データをコピーして以下を行いましょう：

   a) 最小のデータと最小のデータを特定し、5つのグループに分類しましょう。
   b)頻度表のデータを整理しましょう。
   c) 階級の上下限と、それぞれの頻度を定めます。
   d)それぞれの階級の中点を計算しましょう。

## 1.4 統計グラフ

**P**

表には、美容室エル・ブエン・グストA支店で秘書の日に応対したお客さん30人の年齢の記録が含まれています。

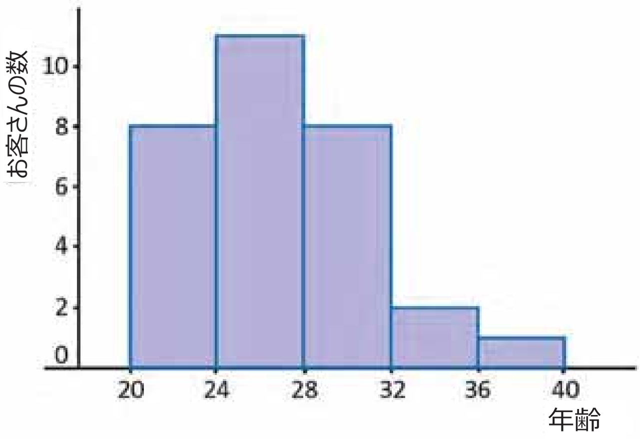
1. それぞれの階級の頻度を、長方形で表現しましょう。
2. 美容室A支店で応対されたお客さんの分布を示すグラフにはどんな特徴がありますか。
3. 各階級の中点と頻度を、整理された偶数として描きましょう。
4. 以前の数値でグラフ化された点の線分と結びましょう。

| 年齢 | *f* |
|---|---|
| 20 - 24 | 8 |
| 24 - 28 | 11 |
| 28 - 32 | 8 |
| 32 - 36 | 2 |
| 36 - 40 | 1 |
| **合計** | **30** |

**S**

1. それぞれの頻度で階級の長方形を通じて表現するには、以下を行います：

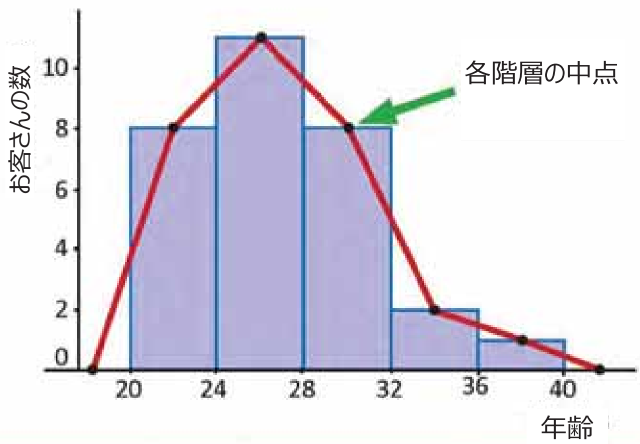
- 階級の限界値を横軸に記載します。
- 各階級の頻度に対応するお客さんの数を、縦軸に記載します。
- 各階級の幅については、各階級の頻度と対応する高さの長方形を描きます。




2. グラフを観察すると、前半の長方形の方が高く、すなわち応対したお客さんの大半が20歳～32歳であることがわかります。さらに、階級の上限が次の階級の下限と等しいため、長方形はお互いにくっつきます。

3. 頻度が0の下の階級と上の階級に広げ、各頻度で中点を順序列としてグラフ化すると、それぞれの長方形の上部の中央にある点が得られます。

4. 点をつなぐと右のグラフのように、最初の階級の中点から始まり、最後の中点で終わる開いた折れ線が得られます。



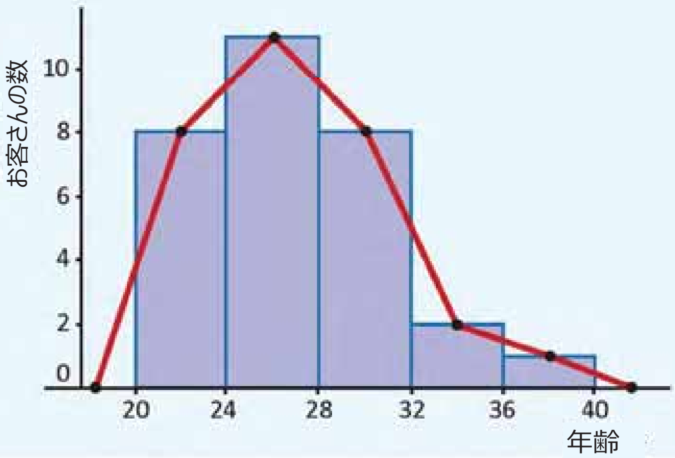
頻度に関して階層を表現する場合に得られるグラフは**ヒストグラム**と呼ばれ、この作成には以下が行われます：

- 階級の限界値を横軸に記載します。
- 縦軸には頻度が示され、データの分布頻度の値を考慮して、適切な尺度が模索されます。
- 幅が階級と、高さが各階級の頻度と対応する高さの長方形を描きます。

ヒストグラムを観察すると、以下のことが言えます

- 山の形に似ており、一番高いところに最も多いデータの集中があることが示されています。
- ヒストグラムを構成する長方形は、階級の頻度に比例した面積を持ちます。

データの分布の形状を強調することが大切になる場合があり、この場合には各長方形の上部の中央点にある点が、特定点の線分とつながります。その後、一番若い階級の前にあり頻度が0の仮想の階級の中央点と左端をつなげ、一番年齢の高い階級のあとにありやはり頻度が0の下層階級の中央点と右端をつなげます。得られるグラフは**折れ線グラフ**と呼ばれます。




表には、美容室エル・ブエン・グストB支店で秘書の日に応対したお客さん30人の年齢の登記簿が含まれています。

1. ヒストグラムを通じてデータを表現しましょう。
2. 美容室の支店Bで対応されるお客さん30人の年齢の分布を示すグラフの特徴は何ですか?
3. ヒストグラムから折れ線グラフを作成しましょう。

| 年齢 | *f* |
|---|---|
| 20 - 24 | 11 |
| 24 - 28 | 8 |
| 28 - 32 | 6 |
| 32 - 36 | 3 |
| 36 - 40 | 2 |
| **合計** | **30** |

## 1.5 折れ線グラフの使用

**P**

学校の8年生が2つの組で試験を行い、右の表にその結果が示されています。情報から以下のことを行いましょう：

1. 2組から得られた結果を比べることはできますか?比べられない場合、2つの組の結果を比べられる方法を分析しましょう。
2. 各階級で結果がグループ化されている生徒の割合を計算しましょう。
3. 折れ線グラフでデータを表現します。

| 点数 | A組 | B組 |
|---|---|---|
| | $f_A$ | $f_B$ |
| 0 - 20 | 3 | 5 |
| 20 - 40 | 5 | 8 |
| 40 - 60 | 12 | 17 |
| 60 - 80 | 6 | 10 |
| 80 - 100 | 4 | 5 |
| **合計** | **30** | **45** |

**S**

1. 2つの組の生徒数が違うので頻度を比べるのは意味がありません。たとえば40～60の階級にはA組では30人中12人の生徒が、B組は45人中17人が含まれています。

   頻度を比べられないので、頻度そのものを使うかわりに頻度合計に占める各階級の頻度の割合を計算することができます。例えば、最初の階級の0～20ではA組は $\frac{3}{30}$ = 0.10でB組は$\frac{5}{45}$であり、組全体に対して計算を行うことで、以下の表のデータが得られます。

| 点数 | A組 | B組 |
|---|---|---|
| 0 - 20 | 0.10 | 0.11 |
| 20 - 40 | 0.17 | 0.18 |
| 40 - 60 | 0.40 | 0.38 |
| 60 - 80 | 0.20 | 0.22 |
| 80 - 100 | 0.13 | 0.11 |
| **合計** | **1.00** | **1.00** |

2. 階級の割合を$x$と呼び、頻度の合計が組の生徒100%に対応することを考慮すると、最初の階級の割合を計算するには以下の形になります：

   A組に対して：
   3/30 = $x$/100%、ここから $x = \frac{3}{30} \times 100\%$ であることが得られます。
   B組に対して：
   5/45 = $x$/100%、ここから $x = \frac{5}{45} \times 100\%$ であることが得られます。

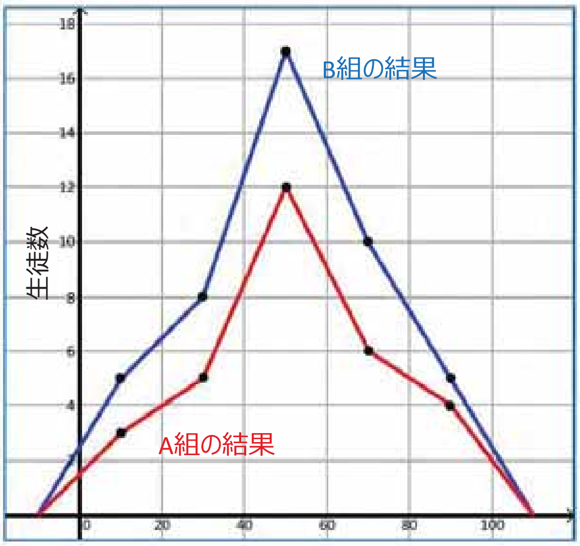
   前の項目と結果を比べると、ある階級の割合は、頻度の割合と頻度総数に100%をかけることで得られます。つまり、前の表の結果に100%をかけることのみで表の結果が計算でき、次の階級である20～40に対しては、以下のことがわかります：
   A組： 0.17 × 100% = 17%。
   B組： 0.18 × 100% = 18%。

| 点数 | A組 | B組 |
|---|---|---|
| 0 - 20 | 10 | 11 |
| 20 - 40 | 17 | 18 |
| 40 - 60 | 40 | 38 |
| 60 - 80 | 20 | 22 |
| 80 - 100 | 13 | 11 |
| **合計** | **100%** | **100%** |

このように残りの階級でも割合が決まり、表の結果が得られます。

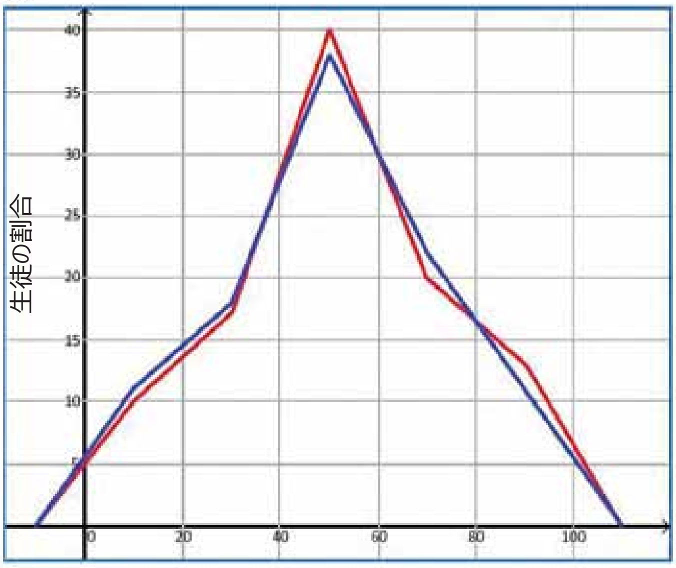
3. 同じ図で折れ線グラフを使ってそれぞれの組の結果を表現するとグラフ1が得られ、ここでは異なる数のデータがあることから比較はできませんが、頻度のかわりに割合を使うと、2つの組の結果の間でグラフの比較を行うことができます（グラフ2を参照）。

1.




グラフ1

2.




グラフ2

統計データの比較は通常、それぞれの階層の頻度で直接比較することはできません。その場合には、各階層の頻度と頻度合計の割合を計算する 必要があります。前の例 $\frac{\text{頻度}}{\text{頻度合計}}$ で見たように、の商は**相対頻度 ($f_r$)** と呼ばれます。頻度合計がデータの数 ($n$) と等しいことを鑑み、$f_r = \frac{\text{頻度}}{\text{頻度合計}} = \frac{f}{n}$ となります。

100に対応する頻度をかけることで得られる積は**百分率相対度数** ($f_r\%$) と呼ばれ、すなわち $f_r\% = \frac{\text{頻度}}{\text{頻度合計}} \times 100 = \frac{f}{n} \times 100$ が、数列データ1つまたは複数の分析や比較を簡単にすべく、分布の各階級に対応するデータの割合を決めるために使われます。

ミゲルは農園を持っており、コーヒーを収穫するために労働者を2班に分けました。表では、ある日収穫したコーヒーの数の記録が、班ごとに表示されています。この情報で以下を行いましょう：

1. 相対割合と相対割合百分率を計算しましょう。
2. 相対割合の折れ線グラフでデータを表現しましょう。
3. どちらの班の労働者が、よりよい成果を達成しましたか?

| コーヒー袋 | 1班 | 2班 |
|---|---|---|
| 0 - 3 | 1 | 2 |
| 3 - 6 | 2 | 4 |
| 6 - 9 | 3 | 7 |
| 9 - 12 | 5 | 8 |
| 12 - 15 | 6 | 10 |
| 15 - 18 | 5 | 7 |
| 18 - 21 | 2 | 5 |
| 21 - 24 | 1 | 2 |
| **合計** | **25** | **45** |

## 1.6 統計データの解釈

ブエナビスタ国立研究所では来年の入試を行い、その結果を表で示しています。計算をそれぞれ分析・実行し、その後答えましょう：

1. 40点未満の点数を取った生徒の割合は何パーセントですか?
2. 70点以上の点数を取った生徒の割合は何パーセントですか?
3. 試験で少なくとも50点取った人だけが入学できる場合、生徒のうち何人が合格しますか?

| 点数 | 生徒の数 |
|---|---|
| 0 - 10 | 1 |
| 10 - 20 | 6 |
| 20 - 30 | 10 |
| 30 - 40 | 16 |
| 40 - 50 | 22 |
| 50 - 60 | 25 |
| 60 - 70 | 12 |
| 70 - 80 | 9 |
| 80 - 90 | 7 |
| 90 - 100 | 2 |
| **合計** | **110** |

まず、各階級での割合を計算する必要があります。たとえば：

- 階級1： $f_r\% = \frac{1}{110} \times 100\% = 0.9\%$
- 階級2： $f_r\% = \frac{6}{110} \times 100\% = 5.5\%$

| 点数 | 生徒の割合 |
|---|---|
| 0 - 10 | 0.9 |
| 10 - 20 | 5.5 |
| 20 - 30 | 9.1 |
| 30 - 40 | 14.5 |
| 40 - 50 | 20.0 |
| 50 - 60 | 22.7 |
| 60 - 70 | 10.9 |
| 70 - 80 | 8.2 |
| 80 - 90 | 6.4 |
| 90 - 100 | 1.8 |
| **合計** | **100%** |

1. 40点未満の生徒の割合は、それぞれの点数に対応する階級の割合を足して求められます：0.9 + 5.5 + 9.1 + 14.5 = 30%.

2. 70点以上取った生徒のパーセントを定めるには、前の場合と同じ方法で以下のパーセントを合計します：8.2 + 6.4 + 1.8 = 16.4%となり、近似値は16%になります。

3. 少なくとも試験で50点を取った生徒が合格するなら、生徒総数を定めるべく、それぞれの階級での頻度が合計されます：
25 + 12 + 9 + 7 + 2 = 55となり、合格した生徒は55人だけです。

体育の授業では、生徒それぞれがサッカー場のトラックを走るのにかかる時間が秒単位で計測されました。

1. 10秒未満で走った生徒のパーセントは?
2. 12秒以上かかって走った生徒のパーセントは?
3. 足の速い生徒50%を選ぶ場合、
受け入れられる最大の時間は何秒ですか?

| 秒単位の時間 | 生徒の数 |
|---|---|
| 8 - 9 | 11 |
| 9 - 10 | 10 |
| 10 - 11 | 8 |
| 11 - 12 | 5 |
| 12 - 13 | 3 |
| 13 - 14 | 2 |
| 14 - 15 | 1 |
| **合計** | **40** |

## 1.7 復習問題

きちんとした形で、提起された状況で求められたことを行いましょう。

1. 次に、ある保健所が行った3歳児の体重計測結果がポンドで示されます。

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 28 | 32 | 38 | 25 | 27 | 37 | 19 | 26 | 35 | 23 |
| 30 | 26 | 18 | 33 | 29 | 21 | 34 | 28 | 31 | 39 |
| 29 | 35 | 30 | 31 | 22 | 34 | 25 | 16 | 30 | 29 |
| 24 | 34 | 20 | 26 | 31 | 23 | 35 | 29 | 30 | 27 |
| 29 | 28 | 27 | 31 | 30 | 31 | 28 | 26 | 29 | 33 |

a) 一番軽い体重と一案重い体重を見つけましょう。
b) 4ポンドの幅の階級6つでグループ化されたデータの表を作りましょう。
c) ヒストグラムを通じてデータの分布を表現しましょう。
d) ヒストグラムから折れ線グラフを作成しましょう。

2. ある心理学者が患者それぞれが見た映画の数について記録を行い、これらのデータを年齢別に大人と子どもに分けました。

**子ども**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 15 | 22 | 19 | 15 | 17 | 18 | 20 | 17 | 12 |
| 16 | 16 | 17 | 21 | 23 | 18 | 20 | 21 | 20 | 20 |
| 15 | 18 | 17 | 19 | 20 | 23 | 22 | 10 | 17 | 19 |
| 19 | 21 | 20 | 18 | 18 | 24 | 11 | 19 | 31 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 18 | 18 | 39 | 18 | 19 | 16 |

**大人**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 12 | 5 | 8 | 13 | 10 | 12 | 8 | 7 | 9 |
| 11 | 10 | 9 | 9 | 11 | 15 | 12 | 17 | 14 | 10 |
| 9 | 8 | 15 | 16 | 10 | 14 | 7 | 16 | 9 | 1 |
| 4 | 11 | 12 | 7 | 9 | 10 | 3 | 11 | 14 | 8 |
| 12 | 5 | 10 | 9 | 7 | 11 | 14 | 10 | 15 | 9 |

a) 子どもが見る映画の数のデータについて、以下を行いましょう：

- 階級の幅が4で、8階級の頻度表にデータを整理しましょう。
- 子どもが見る映画の数で一番多いのは?
- ヒストグラムを通じて情報を表現しましょう。

b) 大人が見る映画の数のデータについて、以下を行いましょう：

- 6階級で頻度表にデータを整理しましょう（階級の幅は3を使います）。
- 階級の中で大人の数が一番多いのはどれですか?
- ヒストグラムを通じて情報を表現しましょう。

c) 折れ線グラフを通じて分布を比べることはできますか?自分の答えを証明しましょう。

d) 分布の類似点と相違点を少なくとも1つ書きましょう。

## 1.8 復習問題

きちんとした形で、提起された状況で求められたことを行いましょう。

1. ジョークを話し終えてから誰かが笑い出すまでに過ぎる時間は、反応時間と呼ばれます。この状況においてジョークの語りは、笑いという反応を引き起こす刺激です。数人のグループが行われ、ジョークを受けたメンバーの反応が計測され、0.1秒(ds)単位で以下のデータが記録されました。

| 時間 (ds) | 人の数 |
|---|---|
| 13 - 19 | 4 |
| 19 - 25 | 9 |
| 25 - 31 | 36 |
| 31 - 37 | 32 |
| 37 - 43 | 12 |
| 43 - 49 | 7 |
| **合計** | **100** |

   a) 折れ線グラフを通じて分布を表現しましょう。
   b) 反応時間が19ds以上37ds未満だった人は何人ですか?
   c) 反応時間が37ds以上だった人は何人ですか?
   d) 反応に25dsから31dsかかった人たちの階級の平均反応時間を計算しましましょう。
   e) 25ds以前に反応した人の割合を定めましょう。反応に31ds以上かかった人の割合を定めましょう。
   f) 反応に31ds以上かかった人の割合を定めましょう。

2. ある工場で切断機がきちんと調整されているかを知るためにねじ1000本の長さを測り、以下のデータが得られました：

| 長さ（mm） | ねじの数 |
|---|---|
| 67 - 72 | 5 |
| 72 - 77 | 95 |
| 77 - 82 | 790 |
| 82 - 87 | 100 |
| 87 - 92 | 10 |
| **合計** | **1000** |

   a) ヒストグラムを通じて情報を表現しましょう。
   b) 77～87 mmの長さのネジが合格とみなされる場合、不良品とみなされるネジの割合は何パーセントですか?
   c) 77 mm未満の長さのネジの割合を計算しましょう。
   d) 87 mm以上の長さのネジの割合を計算しましょう。

3. 表は、サッカーのあるシーズン中にプレイされたさまざまな試合で記録されたゴールの時間を示すものです。ノートの表を完成させて、それぞれで求められていることを行いましょう。

| 時間（分） | ゴール ($f$) | 中点 | $f_r$ | $f_r$% |
|---|---|---|---|---|
| 0 - 15 | 5 | | | |
| 15 - 30 | 6 | | | |
| 30 - 45 | 8 | | | |
| 45 - 60 | 7 | | | |
| 60 - 75 | 8 | | | |
| 75 - 90 | 6 | | | |
| **合計** | | | | |

   a) それぞれのヒストグラムを作成しましょう。
   b) 折れ線グラフを通じて情報を表現しましょう。
   c) 前半（最初の45分）で記録されたゴールはいくつですか?
   d) 試合の後半で記録されたゴールの割合はいくつですか?
   e) 30分～60分の間に記録されたゴールの割合はいくつですか?

## 2.1 中心傾向の尺度の方向

**P**

データは、パン屋の支店で応対されたお客さんの総数の記録に対応します。

| 支店A | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 23 | 38 | 40 | 19 | 31 |
| 49 | 26 | 24 | 30 | 32 | |

| 支店B | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 22 | 24 | 20 | 30 | 57 |
| 34 | 46 | 29 | 28 | 24 | 21 |

1. 両支店で応対されたお客さんの数を、少ないものから多いものに整理します。
2. 両支店で応対されたお客さんの最小数と最大数を特定します。
3. 支店2店のデータの中央値を決めましょう。
4. パン屋さんの2店舗で応対されたお客さんの数についてのデータで、最頻値はどれですか?
5. パン屋の支店のデータの算術平均を計算しましょう。

**S**

1. パン屋さんの両支店で応対されたお客さんのデータを整理すると、以下のことが言えます：

支店A：14, 19, 23, 24, 26, 30, 31, 32, 38, 40, 49
支店B：10, 20, 21, 22, 24, 24, 28, 29, 30, 34, 46, 57

2. 両支店で応対されたお客さんの最小数と最大数：

支店A
最少人数：14人
最多人数：49人
A支店で応対されたお客さんの数は、14人から49人の間で揺れ動いています。

支店B
最少人数：10人
最多人数：57人
B支店で応対されたお客さんの数は、10人から57人の間で揺れ動いています。

3. 中央値が数列データの中央の場所を占めるデータなので、それぞれのシリーズにおいて以下が存在します：

支店A
14, 19, 23, 24, 26, 30, 31, 32, 38, 40, 49

データは11個なので、中央値は中央の位置を占めるデータです。すなわち6番目であり、このため中央値 = 30です。

支店B
10, 20, 21, 22, 24, 24, 28, 29, 30, 34, 46, 57

データは12個なので、中央の値2つを取って両者の中央点が計算されます。すなわち： 中央点 = $\frac{24+28}{2} = 26$です。

4. 数列2つを観察すると、以下のように結論付けられます。

- A支店では、全てのデータは1回しか現れないので、最頻値はありません。
- B支店では24という数字が2回現れるので、最頻値 = 24です。

5. 算術平均を計算するには、基礎教育で習ったように、データ全てをたして、データ数でわる必要があります。
算術平均 = $\frac{\text{データの数全ての和}}{\text{データの数}}$ であり、支店の和のデータに関しては、以下が得られます：

支店A：14, 23, 38, 40, 19, 31, 49, 26, 24, 30, 32。

$$\text{算術平均} = \frac{14 + 23 + 38 + 40 + 19 + 31 + 49 + 26 + 24 + 30 + 32}{11} = \frac{326}{11} = 29.6\text{。}$$

支店B：10, 22, 24, 20, 30, 57, 34, 46, 29, 28, 24, 21。

$$\text{算術平均} = \frac{10 + 22 + 24 + 20 + 30 + 57 + 34 + 46 + 29 + 28 + 24 + 21}{12} = \frac{345}{12} = 28.8\text{。}$$

初等教育で習ったように、数列データを記述できる代表値を計算できます。これは以前の例で計算済みであり、次に詳細が記されます：

**中央値**は小さい数から大きな数に整列された場合、数列データの中央位置を占める値です。中央値を定めるには、以下の場合が考慮されます：

a) $n$の数が奇数の場合、中央値は真ん中の位置を占めるデータ$x$です。この場合、中央の位置を定めるべく公式 $\frac{n+1}{2}$ が使われ、支店Aの先ほどの例では$n$ = 11なので、中央値の位置は： $\frac{11+1}{2} = \frac{12}{2} = 6$。

b) データの数$n$が偶数の場合、中央のデータの間にあるデータであり、数列のどの位置にも対応しない値になります。例えば$n$ = 12のB支店の場合、中央の位置 $\frac{12+1}{2} = \frac{13}{2} = 6.5$定めると、中央値はデータ6とデータ7の間にある値だと示されます。この場合、中央値 = 中央にあるデータ2つの平均値です。

**最頻値**は、一連の数字の中で最も多く現れる値です。すなわち、最も頻繁に出てくるデータが最頻値です。全ての数値が同じ頻度で登場するデータの場合、数列には最頻値はない、または欠如していると言います。

**算術平均 (μ)** は、データの数$n$の間でデータ全て$x$ の和を割った結果で、**平均**とも呼ばれます。算術平均 $= \frac{x\text{すべての和}}{n}$。

以下の数列は、小さなお店ラ・エスキーナの支店2つでの最近15日のドル建てでの売上に対応します：

支店1： 125, 35, 50, 40, 80, 100, 70, 50, 125, 75, 80, 90, 80, 80, 35.
支店2： 100, 75, 50, 80, 60, 40, 70, 75, 140, 90, 75, 70, 150, 50, 90.

各支店のデータから、以下のことを行いましょう：

1. 最少から最多にデータを並び替えましょう。
2. 最小数と最大数を割り出しましょう。
3. 中央値を求めなさい。
4. 最頻値の値を特定します。
5. 算術平均を求めましょう。
6. どの支店での収入がより大きいか見定めることはできますか?

## 2.2 算術平均

**P**

頻度分布で整理される数列データの算術平均を定める方法は?
表には、カルメンさんの美容室エル・ブエン・グストA支店で秘書の日に応対したお客さん30人の年齢の記録が含まれています。以下の通り行いましょう：

| 年齢 | お客さんの数 $f$ |
|---|---|
| 20 - 24 | 8 |
| 24 - 28 | 11 |
| 28 - 32 | 8 |
| 32 - 36 | 2 |
| 36 - 40 | 1 |
| **合計** | **30** |

1. それぞれの階級の中点を計算しましょう。
2. それぞれの中点と頻度をかけます。
3. 2番目の数値欄に得られた結果を足し、データ数で得られた結果を割ります。
4. 3項で得られた結果を、このユニットの授業1のデータの算術平均と比べましょう。

ユニットの第1階級を見直しましょう。

**S**

1. 以前の授業で頻度分布の中央点の計算方法を学んでいるので、計算するには中央点 $= \frac{\text{上部の点} + \text{下部の点}}{2}$ という公式が適用され、前の表に別の列を追加して結果を書きます。例えば階級1では：

$$Pm = \frac{24 + 20}{2} = 22$$

| 年齢 | お客さんの数 $f$ | 中央点：($Pm$) |
|---|---|---|
| 20 - 24 | 8 | 22 |
| 24 - 28 | 11 | 26 |
| 28 - 32 | 8 | 30 |
| 32 - 36 | 2 | 34 |
| 36 - 40 | 1 | 38 |
| **合計** | **30** | |

2. 各頻度に階級中央点をかけ、新しい列を表に追加して結果を追加します。たとえば階級1の場合にはこのような形です：

$$\text{中央点} \times \text{頻度} = Pm \times f = 22 \times 8 = 176$$

| 年齢 | お客さんの数 $f$ | 中央点：($Pm$) | $Pm \times f$ |
|---|---|---|---|
| 20 - 24 | 8 | 22 | 176 |
| 24 - 28 | 11 | 26 | 286 |
| 28 - 32 | 8 | 30 | 240 |
| 32 - 36 | 2 | 34 | 68 |
| 36 - 40 | 1 | 38 | 38 |
| **合計** | **30** | | **808** |

3. 先ほどの数値欄で得られた結果を足し、得られた結果をデータ数で割ります。

$$\frac{Pm \times f\text{の全ての積の和}}{\text{データ数}} = \frac{808}{30} = 26.9$$

一般的に、計算ではなくデータの分析が目的である企業では、平均または算術平均は、Excel、CalcやGeoGebraといった情報処理ソフトウェアの使用を通じて決めることができます。

例えば、美容室エル・ブエン・グストのA支店で対応されるお客さんの平均年齢を定めることができます。

美容室「エル・ブエン・グスト」のA支店のお客さん30人の年齢に対応するデータを入力して算術平均を計算すると、μ = 26.2となります。

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 24 | 23 | 28 | 30 | 29 | 31 |
| 27 | 26 | 24 | 30 | 32 | 29 |
| 21 | 22 | 27 | 33 | 30 | 24 |
| 24 | 21 | 26 | 24 | 30 | 39 |
| 24 | 22 | 22 | 24 | 21 | 20 |

4. 3項の結果は26.9となり、情報処理ソフトウェアの使用により計算された頻度分布に整理しないデータの算術平均は上記の通り26.2であり、両方の値の違いは小さいため、平均年齢を計算するには2つの方法のうちどちらでも使用できます。

C

頻度分布で整理される数列データの算術平均を定めるには、算術平均 = $\frac{Pm \times f\text{の積すべての和}}{\text{データ数}}$ であり、前出の例で示されているとおりです。

1. 表には、カルメンさんの美容室エル・ブエン・グストB支店で秘書の日に対応したお客さん30人の年齢の記録が含まれています。

   a) 表を埋めましょう。
   b) 算術平均を計算しましょう。

2. 2支店の算術平均を比べると、どちらのほうが対応されるお客さんの平均年齢が高いですか?

| 年齢 | お客さんの数 ($f$) | 中央点 ($Pm$) | $f \times Pm$ |
|---|---|---|---|
| 20 - 24 | 11 | | |
| 24 - 28 | 8 | | |
| 28 - 32 | 6 | | |
| 32 - 36 | 3 | | |
| 36 - 40 | 2 | | |
| **合計** | **30** | | |

## 2.3 算術平均の特性

**P**

以下の状況を分析して、その後それぞれで求められていることを実行しましょう。

A社には従業員が25名いて、平均給与は350ドルですが、B社には従業員が15人しかいないものの、平均給与は600ドルです。

1. 従業員への給料に各企業が支払う月額を計算しましょう。
2. B社が50ドルの賃上げを行うと、新しい給料はいくらになりますか?
3. A社の従業員は来年からの賃上げを要請しており、社長は2つの選択肢を提案しています。それぞれの場合、新たな平均給料を計算しましょう。どちらの選択肢を従業員に推奨しますか? なぜですか?
   a) 65ドルの一律引き上げ。
   b) 現在の給料から20%引き上げ。

**S**

この状況を解くには、問題で提供された情報が検討されます。

| 企業A<br>平均賃金 = 算術平均 = $350 | 企業B<br>平均賃金 = 算術平均 = $600 |
|---|---|

1. 月額は、平均給料を各企業の従業員数でかけることで決められます。

| 月額 = 350 × 25 = 8 750 | 月額 = 600 × 15 = 9 000 |
|---|---|

2. 会社が従業員全体の給料を50ドル増やすと、毎月
   支払う額の合計は

   9 000 + 15(50) = 9 000 + 750 = 9 750で、従業員数で合計額を割ると以下のようになります：
   $\frac{9\,750}{15} = 650$; 新しい給料が650ドルの場合、平均値が50ドル上がることに着目します。

3. 提案2つを検討して新しい給料を決める場合、以下の選択肢があります：

| 選択肢1： 65ドルの一律引き上げ | 選択肢2： 現在の給料から20%引き上げ |
|---|---|
| 現在の平均給与：350 | 現在の平均給与：350 |
| 月額：8750 | 月額：8750 |
| 新しい平均給与： 8 750 + 65 × 25 = 10 375 | 新しい平均給与：8 750 + 20%(8 750) = 10 500 |
| 新しい平均給与： $\frac{10\,375}{25} = 415$ | 新しい平均給与： $\frac{10\,500}{25} = 420$ |

根拠：
- 最初の選択肢を推奨します。というのも2つ目の選択肢よりも平均給料は5ドル少ないですが、全員同じ額を受け取りより公平です。その一方で2番目の選択肢の場合、給料が多い人がより増額される一方、給料が少ない人はそれほど給料が増えないからです。

算術平均の定義$\mu = \frac{データ全ての和 (x)}{n}$から、数列データの和は算術平均の$n$倍に等しくなります。すなわち、$n\mu$ = データ全ての和 $x$です。算術平均にはいくつかの特性があり、その中で注目すべきものは以下の通りです：

- 変数全ての値に同じ数字がたされる場合、算術平均もこの数だけ増えます。例えば、数列3, 4, 5, 4, 9が$\mu = 5$で、それぞれのデータに2をたすと数列5, 6, 7, 6, 11になり、平均は$\mu = 5 + 2 = 7$です。

- 変数全ての値に同じ数字がかけられる場合、算術平均もこの数だけ倍増えます。例えば、数列3, 4, 5, 4, 9が$\mu = 5$で、それぞれのデータを2倍すると数列6, 8, 10, 8, 18になり、平均$\mu = 5(2) = 10$です。

以下の状況を分析して、その後それぞれで求められていることを実行しましょう。

1. 1か月間マルティネス医師は、診察した問診患者が行った支払いの記録を付け、最後に計算して平均で75ドルの支払い結果を得ました。次の月にはプロモーションを行うことを考えており、以下の2つの提案があります：

   a) 支払い時点でのコスト総額からの10%割引。
   b) 支払い時点で10ドルの割引。

   いずれの場合においても支払いの中央値を計算します。患者へのメリットがより大きいと思われる選択肢はどれですか? なぜですか?

2. スーパーではレジ担当は、1日の仕事が終わると平均で$3,500.00の売上を記録します。売上を増やすべく、管理人はレジ全員に以下の選択肢を提供しました：

   a) 1日の仕事での総額を10%増やす。
   b) この時点で制定された目標から300ドル増やす。

   いずれの場合においても売上の中央値を計算します。会社へのメリットがより大きいと思われる選択肢はどれですか?自分の答えを証明しましょう。

3. 技術者3人の平均給与は$900.00で、その他技術者7人の平均給与は$1,050.00です。技術者10人の平均給与はいくらですか?

4. 運転手は平均時速120 kmで2時間運転しており、その後1時間は時速90 kmで旅行しました。全体を通じての平均時速を計算しましょう。

## 2.4 中央値と最頻値

P

頻度分布に整理された数列データの中で中央値と最頻値を特定できる方法は?
表には、美容室エル・ブエン・グストA支店で秘書の日に応対したお客さん30人の年齢の記録が含まれています。

1. 中央値のある階級を特定しましょう。
2. 中央値のある階級の平均点を計算しましょう。
3. 最も頻度の多い階級を特定しましょう。
4. 最も頻度の多い階級の中央点を計算しましょう。

| 年齢 | お客さんの数 |
|---|---|
| 20 - 24 | 8 |
| 24 - 28 | 11 |
| 28 - 32 | 8 |
| 32 - 36 | 2 |
| 36 - 40 | 1 |
| **合計** | **30** |

S

1. 平均値が中央を占める値なので、中央のデータがある階級を特定することが欠かせず、このためには合計の半分まで頻度を足します。データの合計が30なので半分は15となり、このため中央値のある階級は2番目です。すなわち8 + 11 = 19です。
2. 2つ目の階級の中央点は$Pm = \frac{24+28}{2} = \frac{52}{2} = 26$ です。
3. この分布において最も頻度の多い階級は2番目の、24～28です。
4. 最も頻度の多い階級の中央点は26です。

| 年齢 | お客さんの数 | 累積データ |
|---|---|---|
| 20 - 24 | 8 | 8 |
| 24 - 28 | 11 | 19 |
| 28 - 32 | 8 | 27 |
| 32 - 36 | 2 | 29 |
| 36 - 40 | 1 | 30 |
| **合計** | **30** | |

中央値がある階級の中央の点は、数列の中心位置を占めるデータにほぼ近くなっています。すなわち、中央値に対応しています。その一方で、最も頻繁な階級の中央の点は、最頻値にほぼ対応しています。

C

頻度の分布がある場合には、中央値と最頻値を決めるさまざまな方法がありますが、ここでは**近似値**として知られる方法のみが考慮されます。ただし

**中央値を定めるには：**
- 中央の位置を占めるデータがある階級 $\frac{n}{2}$ **中央値階級**が特定されます。
- 中央値の近似値は、中央値階級の平均値です。

**最頻値を決めるには：**
- その頻度で**最頻値階級**の階級が特定されます。
- 最頻値の近似値は、最頻値階級の平均値です。

1. 表には、美容室エル・ブエン・グストB支店で秘書の日に応対したお客さん30人の年齢が含まれています。
   a) 最頻値を求めなさい。
   b) 中央値を求めなさい。

2. データ分布の折れ線グラフを作り、最頻値の値を求めましょう。

| 年齢 | お客さんの数 |
|---|---|
| 20 - 24 | 11 |
| 24 - 28 | 8 |
| 28 - 32 | 6 |
| 32 - 36 | 3 |
| 36 - 40 | 2 |
| **合計** | **30** |

## 2.5 中心傾向の尺度の特性

**P**

数列データA、BとCを比べましょう。

A: 3, 4, 5, 5, 7, 8, 10　　B: 3, 4, 5, 5, 7, 8, 20　　C: 9, 12, 15, 15, 21, 24, 30

1. それぞれの数列に対して、最頻値、中央値と平均値を決めましょう。
2. 数列データAの10を数列データBの20と取り換えると、中心傾向の以下の長さそれぞれの値はどうなるでしょうか?
3. 数列データAに3をかけると、数列データCが生成されます。中心傾向の以下の長さそれぞれの値はどうなるでしょうか?

**S**

1. それぞれの数列の中心傾向の尺度を定めるべく、別々に作業が行われます：

数列Aについて： 3, 4, 5, 5, 7, 8, 10　最頻値 = 5 中央値 = 5　$\mu = \frac{3+4+5+5+7+8+10}{7} = 6$

数列Bについて： 3, 4, 5, 5, 7, 8, 20　最頻値 = 5 中央値 = 5　$\mu = \frac{3+4+5+5+7+8+20}{7} = 7.4$

数列Cについて：9, 12, 15, 15, 21, 24, 30 最頻値 = 5 中央値 = 15 $\mu = \frac{9+12+15+15+21+24+30}{7} = 18$

2. 数列Aと数列Bの最頻値、中央値と算術平均を比べる場合、最頻値と中央値の値が維持されるものの、算術平均が増えることを観察できます。

3. 数列Aと数列Cの最頻値、中央値と算術平均を比べる場合、3倍されていることが観察できます。例えば数列A向けの最頻値と中央値は5で数列Cの場合には15だとすると、数列Aの平均は6で数列Cの平均は18です。

**C**

中心傾向の尺度の特性と使用

データが最小から最大へ、またはその逆に配置される場合、最頻値、中央値と平均値は一連の数字の真ん中に来る傾向がことから、中心傾向の尺度と呼ばれます。

- **最頻値と中央値**は、質的（数的ではない）および量的（数的な）なデータ列向けに使うことができ、またデータ列の極値に影響を受けることはありません。これは、前の例の2項で示されているとおりです。

- **算術平均**は量的数列データ（数字）のみに使われます。データ全体の値全てを考慮するという意味で平均は信頼できますが、前の例の2項で示された通り、データの残りを代表しない極端な値の影響を受ける場合があります。

それぞれの数列データで最頻値、中央値と平均値を決めます：

A) 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5
B) 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 9
C) 0, 2, 2, 4, 4, 6, 6, 6, 8, 10
D) 0, 5, 5, 10, 10, 15, 15, 15, 20, 25

1. 得られたデータを比較すると、どのように結論付けますか?
2. 数列Aのデータそれぞれに6をたすと、中心傾向の尺度3つには何が起きますか?

## 2.6 復習問題

ノートでは、それぞれの場合に求められる内容を整理した形で実施しましょう。

1. ジョークを話し終えてから誰かが笑い出すまでに過ぎる時間は、反応時間と呼ばれます。この状況においてジョークの語りは、笑いという反応を引き起こす刺激です。数人のグループが行われ、ジョークを受けたメンバーの反応が計測され、0.1秒(ds)単位で以下のデータが記録されました。

| 時間 (ds) | 人数 |
|---|---|
| 13 - 19 | 4 |
| 19 - 25 | 9 |
| 25 - 31 | 36 |
| 31 - 37 | 32 |
| 37 - 43 | 12 |
| 43 - 49 | 7 |
| **合計** | **100** |

a) 反応の平均時間を計算しましょう。
b) 反応時間の最頻値を計算しましょう。
c) 時間の中央値を計算しましょう。

2. ある工場で切断機がきちんと調整されているかを知るべくねじ1000本の長さを測り、以下のデータが得られました：

| 長さ（mm） | ねじの数 |
|---|---|
| 67 - 72 | 5 |
| 72 - 77 | 95 |
| 77 - 82 | 790 |
| 82 - 87 | 100 |
| 87 - 92 | 10 |
| **合計** | **1000** |

a) ネジの平均の長さを計算しましょう。
b) 長さの最頻値を計算しましょう。
c) 数列の中央値を計算しましょう。

3. 表では、サッカーのあるシーズンでさまざまな試合で記録されたゴールの時間が記されています。表を完成され、それぞれの項目で求められていることがらを答えましょう。

| 時間（分） | ゴール ($f$) |
|---|---|
| 0 - 15 | 5 |
| 15 - 30 | 6 |
| 30 - 45 | 7 |
| 45 - 60 | 8 |
| 60 - 75 | 7 |
| 75 - 90 | 6 |
| **合計** | **39** |

a) 平均時間を計算しましょう。
b) 時間の最頻値を計算しましょう。
c) 中央値を計算しましょう。

4. 表では、少年少女30人のサンプルで体重がキログラムで詳細に記録されています。表を完成され、それぞれの項目で求められていることがらを答えましょう。

| 体重 (kg) | 少年少女の数 |
|---|---|
| 24.5 - 27.5 | 3 |
| 27.5 - 30.5 | 7 |
| 30.5 - 33.5 | 10 |
| 33.5 - 36.5 | 6 |
| 36.5 - 39.5 | 3 |
| 39.5 - 42.5 | 1 |
| **合計** | **30** |

a) 平均体重を計算しましょう。
b) 体重の最頻値を計算しましょう。
c) 中央値を計算しましょう。

## 2.7 復習問題

ノートでは、それぞれの場合に求められる内容を整理した形で実施しましょう。

1. オレンジ30個を絞って、採れたジュースの量を、センチリットル(cl)単位で測りました。計算は以下の通りです：
   35, 60, 48, 39, 40, 39, 45, 38, 46, 50, 51, 59, 56, 55, 49, 47, 48, 49, 56, 53, 47, 50, 52, 57, 58, 52, 60, 65, 46, 51.
   a) 30～38の階級で始めて、8 clの幅の間隔でデータを整理しましょう。
   b) 頻度表を作り、折れ線グラフで表現しましょう。
   c) 中央値、平均値と最頻値を求めましょう。

2. ある農協の農家が、各地区ごとに収穫されたトウモロコシをキンタル単位で記録しました。計算は以下の通りです：
   32, 37, 54, 70, 74, 75, 76, 109 , 66, 77, 90, 96, 30, 41, 42, 69, 36 , 59, 60, 55, 70, 47, 32, 99, 48.

   a) 最小から最大にデータを並び替えましょう。
   b) 30～46の階級で始めて、16の幅の間隔でデータを整理しましょう。
   c) 最頻値、平均値と中央値を求めましょう。
   d) 代表値の計算を終えると、どの結論を出すことができますか?

3. 農協では、平均給与は160ドルです。2017年から平均給与は200ドルになります。農協に従業員が50人いる場合：
   a) 2016年人件費として毎月支払っていた金額は?
   b) 2017年人件費として毎月支払う必要のある金額は?
   c) 月額人件費の増額を定めましょう。

4. クラスメートそれぞれの年齢を質問して、そのあとで決めましょう：
   a) 年齢の平均値、最頻値と中央値。
   b) 来年も同じクラスメートの場合、平均値、最頻値と中央値の年齢はどうなりますか?
   c) 全員が10年後も一緒だと仮定すると、平均年齢はどうなりますか?

5. カルロスさんはお店を持っており、利益の記録を毎月つけています。毎月平均で300ドル利益が出ていることに、年末に気が付きました。
   a) 1年を通じて得られた利益総額を定めましょう。
   b) 2017年に利益が10%増加すると、新しい月平均利益はいくらでしょうか?

6. アントニオさんは電気代として毎月平均で14ドル支払っています。年間の電気代を計算しましょう。

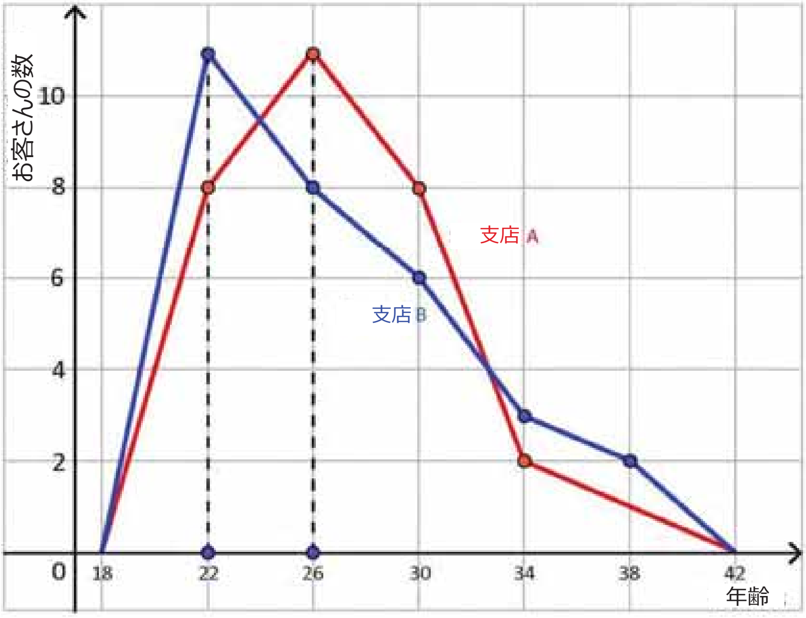
7. カルメンは電子工学を勉強しており、毎月平均で200ドル使っています。
   a) 1年間に使う学費の総額を計算しましょう。
   b) 学業が平均で6年続く場合、総支出額を計算しましょう。

## 2.8 平均値、最頻値と中央値の関係

P

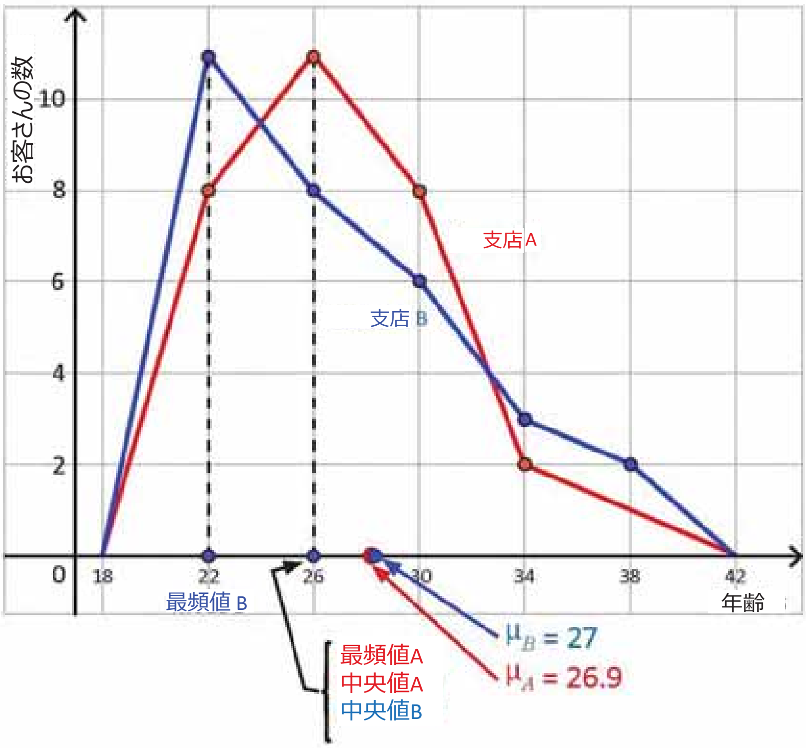
グラフは、カルメンさんの美容室エル・ブエン・グストA支店とB支店それぞれで、秘書の日に応対したお客さん30人の年齢の記録です。

1. 縦の線を引いて、最頻値の値を特定します。
2. 最頻値、中央値と平均値を比較して、それぞれの配分において、最頻値に対して平均値や中央値に対応する場所がどこか特定します（これらの値は、以前の授業で計算済みです）。




S

1. グラフでは折れ線グラフの一番上の点から水平線または$x$軸、$x$軸を切る点に引かれる垂直の線が表示され、これは最頻値の近似値となります。支店Aは26歳で、支店Bは22歳です。

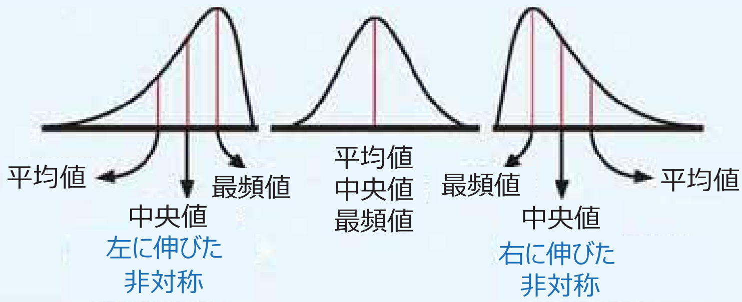



2. 最頻値、中央値と平均値を比べると、以下が得られます：

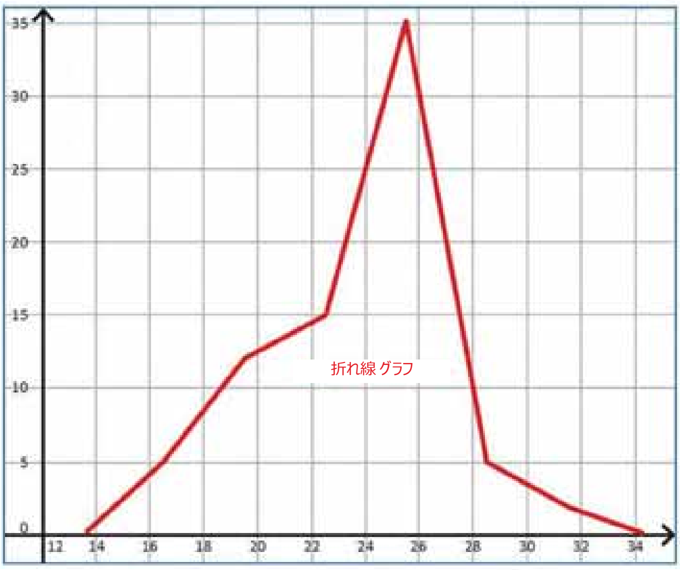
- A支店に対応する分布は、最頻値 = 26、中央値 = 26そして$\mu$ = 26.9となり、すなわち最頻値と中央値は同じで、算術平均はそれより大きいことがわかります。
- B支店に対応する分布は、最頻値 = 22、中央値 = 26そして$\mu$ = 27となり、すなわち最頻値は中央値よりも小さく、中央値は算術平均とりも小さいことがわかります。

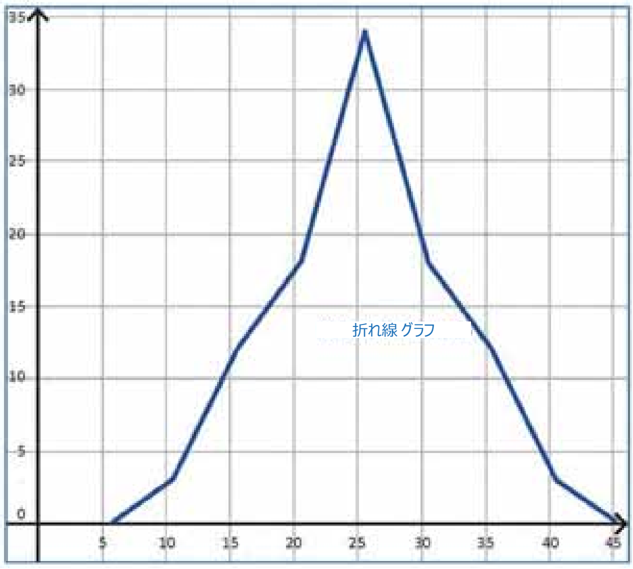
頻度分布についてはグラフの形式は、最頻値、中央値と算術平均との間にある関係により異なります。すなわち：

- 頻度分布において最頻値、中央値と算術平均の値が同じ場合には、対称分布であると呼ばれます。
- 頻度分布において最頻値、中央値と算術平均の値が、平均値 > 中央値 > 最頻値の関係にある場合、分布は非対称的、または右裾が伸びた（右に向かって伸びている）と呼ばれます。
- 頻度分布において最頻値、中央値と算術平均の値が、平均値 < 中央値 < 最頻値の関係にある場合、分布は非対称的、または左裾が伸びた（左に向かって伸びている）と呼ばれます。




1. データの分布に対応する次のグラフの形を見て、その後それぞれに対して以下を行いましょう：
   a) 最頻値の近似値を特定します。
   b) グラフの形状から平均と、最頻値と中央値の間の関係を特定しましょう。




2. ある教育施設のPAES 2016の結果分布には、以下の代表値があります： 算術平均 7.7、最頻値6.5そして中央値7.0。
   a) 代表的な3つの値の関係から、この教育施設のPAESの結果に対応する分布種別を説明しましょう。
   b) 与えられた値を表現する分布の概要を作成しましょう。

**PAES**は、公立・私立の中等教育機関を卒業した生徒に対してエルサルバドル文部省が行う、学習適性試験です。

## 3.1 近似値

**P**

33÷7の値を計算し、以下を行いましょう：

1. 結果を四捨五入して小数点第二位まで求めましょう。
2. 真の値と四捨五入した値を見分けましょう。
3. 真の値の範囲を計算しましょう。

> 理科で使う数は二種類あります。数えて得られた数または定義された数と、測定から得られた数です。
>
> 数えて得られた数または定義された数は、正確な値を示すことができますが、測定された数の正確な値は分かりません。

**S**

33÷7の商を計算すると、結果は4.714で余りは2になりますが、計算機で商を計算した場合、結果は4.714285714285714...になります。

1. 結果を四捨五入して小数点第二位まで求めると、4.71になります。
2. 小数点第二位まで概算したことにより、最大で絶対値0.005の誤差が生じます。これは、数字4.71の1に続く桁が5以上になると、4.72に近似することを意味しています。

| | |
|---|---|
| 33 | 7 |
| 50 | 4.714 |
| 10 | |
| 30 | |
| 2 | |

$$(4.714285714285714...) - (4.71) = 0.004285714...$$

3. 誤差を考慮に入れると、真の値の範囲を求めることができます。 つまり、四捨五入して得られた4.71は、例として次に挙げる数をはじめ、多くの値を表しているといえます：
   4.705、4.706、4.707、4.708、4.709、4.710、4.711、4.712； 4.715に達すると、四捨五入した結果が4.72になります。したがって、4.71は4.705から4.715の間にあると理解できますが、4.715は含まれません。つまり、$4.705 \leq 4.71 < 4.715$ということです。

**C**

割り算のプロセスまたは計算機を使って商を計算する場合、最大8桁、若しくはそれ以上の桁を求めることができます。2つまたは3つの重要な数を四捨五入して求めるには、基礎教育で学んだ四捨五入の規則を用います。

- 四捨五入する最初の桁が5未満の場合、その桁とそれに続くすべての桁は単純に切り捨てます。
- 四捨五入する最初の桁が5より大きいか、最初の桁が5で後に続く桁がゼロ以外の場合、後続のすべての桁を切り捨て、維持する最後の桁の値を1増大します。

四捨五入した後に得られる数を**近似値**、すべての桁を含めた結果を**真の値または正確な値**といいます。真の値と近似値の間に生じる差を**誤差**といいます。

誤差の絶対値は、ある数の後続の単位の最大半分にすることができます。たとえば、四捨五入して12という単位まで求めた場合、誤差の絶対値は最大で0.5になる可能性があります。したがって、真の値は11.5～12.5の間にあります； つまり：

$$11.5 \leq 12 < 12.5$$

四捨五入して小数点第一位まで求めた結果が8.4である場合、誤差の絶対値は最大0.05になる可能性があるため、真の値は8.35～8.45にあります。つまり、$8.35 \leq 8.4 < 8.45$ということです。

次の各問に答えなさい：

1. それぞれの問の指示に従って、近似値を求めましょう。
2. 誤差の絶対値を計算しましょう。
3. 真の値の絶対値の範囲を求めしょう。

**小数点第一位を四捨五入します：**

a) 3.5465　b) 5.23178　c) 2.4751

**計算して小数点第二位を四捨五入します：**

d) 18 ÷ 7　e) 10 ÷ 3　f) 26 ÷ 11

## 3.2 有効数字

**P**

2007年に県別の人口を反映した人口調査が実施されました。 たとえば、クスカトランの人口は231 480人、アウアチャパンの人口は319 503人でした。

1. 二つの県の人口の千の位を四捨五入しましょう。
2. 1以上の数にできるだけ多くの10の累乗を掛けて、おおよその人口を書き表しましょう。

10の累乗は次のとおりです：

$10 = 10^1$
$100 = 10^2$
$1000 = 10^3$, など。

**S**

1. 二つの県の人口データの千の位を四捨五入すると、次のようになります：

**クスカトラン**

千の位に当たる桁は1であり、四捨五入する際、規則を考慮に入れる必要があります。直後の桁が4なので、後続の桁を単純に切り捨て、

231 480 ≈ 231 000になります。

この場合、231 000は230 500から231 499の範囲にあります。つまり、230 500 ≤231 000 <231 500ということです。したがって、2、3、1が重要な桁になります。

**アウアチャパン**

千の位に当たる桁は9であり、四捨五入する際、規則を考慮に入れる必要があります。直後の桁が5であるため、1増大して、

319 503 ≈ 320 000になります。

この場合、320,000は319,500から320,499の範囲にあります。つまり、319,500 ≤ 320,000 < 320,500 ということです。したがって、3、2、0が重要な桁になります。

2. ある数に10の最大の累乗を掛けた積として表すと、次のようになります：

$231\,000 = 2.31 \times 10^5$
整数部分に2を残し、残りの桁を数えて10の累乗の指数にします。このとき、小数点の後に他の2つの重要な桁（3と1）を置くことを忘れないようにします。

$320\,000 = 3.20 \times 10^5$
整数部分に3を残し、残りの桁を数えて10の累乗の指数にします。このとき、小数点の後に他の2つの重要な桁（2と0）を置くことを忘れないようにします。

**C**

ある値を四捨五入したとき、または何らかの測定または計算を行ったとき、実際の数を表す桁、したがって真の値を決定するための情報となる桁を、**重要な桁**または**重要な桁の数字**といいます。重要な桁の値を決定するために、次に挙げる特定の規則を考慮に入れます：

1. ゼロを含まない数では、すべての桁が重要な桁です； 例えば、345には3つの重要な桁があります。

2. 重要な桁間のゼロもすべて重要な桁です。例えば、2 109には4つの重要な桁があります。

3. ゼロ以外の最初の桁の左側にあるゼロは、小数点の位置を固定するためだけのもので、重要な桁ではありません。たとえば、0.048の場合、重要な桁の数字は2つだけです。

4. 小数点の右側に桁がある数では、ゼロ以外の最後の数の右側にあるゼロは重要な桁です。 たとえば、$3.20000 \times 10^5$には、6つの重要な桁の数字があります。

5. 小数点がなく、1つ以上のゼロ（4700など）で終わる数では、末尾にあるゼロが重要な桁である場合とそうでない場合があります。そのような数は重要な桁の数字について曖昧です。重要な桁の数字の数を特定するには、その数をどのようにして求めたかに関する追加情報が必要になります。測定で得られた数である場合、ゼロはおそらく重要な桁ではありません。数えて得られた数または定義された数である場合、（数え方が完璧であると想定して）すべての桁が重要になります。

   ある数の重要な桁の数字についての曖昧さを避けるためには、応用問題の問2が示すように、数と10の累乗（整数部分がひと桁の数字である数）×（10の累乗）の積として、$1 \leq a < 10$の条件下で、$a \times 10^n$ 、の形で表します。このように表された数をことを、**科学的記数法**で表された数といいます。

   科学的記数法は、非常に大きな数または非常に小さな数を簡易に表すために用いられます。この学年では、非常に大きな数の場合のみを学習します。

中央アメリカまたは中央アメリカの領土面積は**507 900**平方キロメートルです。

1. 次の場合を考慮に入れて、中央アメリカの領土面積を科学的記数法で表しましょう：
   a) 重要な桁の数字が2つの場合。
   b) 重要な桁の数字が3つの場合。
   c) 重要な桁の数字が4つの場合。

2. それぞれの場合を分析して、真の値の絶対値の範囲を求めしょう。

解答。
1. 科学的記数法で表す場合、次のようになります：
   a) $507\,900 \approx 5.1\ 10^5$　　b) $507\,900 \approx 5.08 \times 10^5$　　c) $507\,900 = 5.079 \times 10^5$

2. それぞれの場合を分析すると、次のようになります：
   a) $5.05 \leq 5.1 < 5.15$　　b) $5.075 \leq 5.08 < 5.085$　　c) $5.0785 \leq 5.079 < 5.0795$

したがって、取得しなければならない重要な桁の数字は、扱っているデータの誤差をどれだけ小さくしたいかによって異なります。

次の値を科学的記数法で4つの重要な桁の数字で表しましょう。これを行うためには、四捨五入して左から四桁目まで求める必要があります。

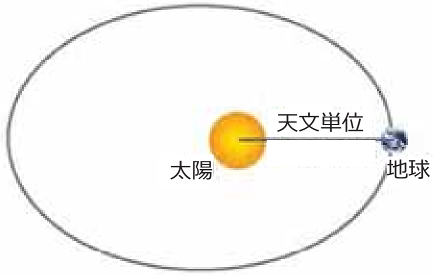
a) 504.70　　b) 257 800　　c) 3 400 587　　d) 72 130 000 000

## 3.3 科学的記数法の値

**P**

次の説明文を読み、各問で求められていることを行いましょう。「 天文単位（*ua*）は長さの単位であり、地球と太陽の間の平均距離とほぼ等しく、国際単位系によると、実験で測定された*ua*の値は***149 597 870.7 km***です」。

1. 値を四捨五入して百万の位まで求めましょう。
2. 重要な桁が何であるかを特定しましょう。
3. 四捨五入した値を科学的記数法で表しましょう。




**S**

1. 149 597 870.7を四捨五入して百万の位まで求めると、150 000 000になります。

2. 150 000には3つの重要な桁があります：1、5、0。そして、残りのゼロは四捨五入から取得されたものです。

3. 科学的記数法で150 000 000を表すには、1の後に小数点を置き、小数点の右側の桁を数えます。 つまり、150 000 000 = 1.50000000 × $10^8$になります。重要な桁は最初の3桁だけなので、小数点の後には二桁だけが残ります；よって、1.50 × $10^8$。

次の各説明文で、太字が示すデータに対して、各問で指示されていることを行いましょう。

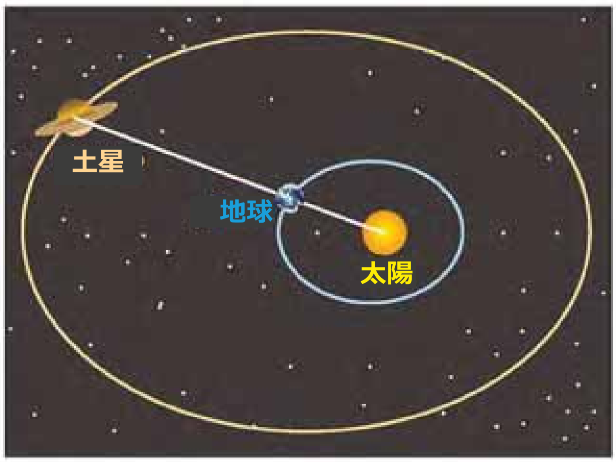
a) それぞれを四捨五入して、4つの重要な桁の数字を求めましょう。
b) 科学的記数法（整数部分がひと桁の数字である数）×（10の累乗）で表しましょう。

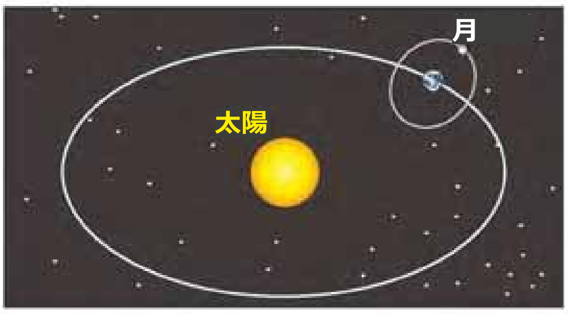
1. 真空での光の速度は**299792 458** m /秒です。

2. 光年は、光が一年間に移動する距離のことです。約**9 460 800 000 000** kmに相当します。

3. 土星は太陽系で二番目に大きい惑星です。また、地球から見ることができる唯一の環を持つ惑星で、太陽からの平均距離は約**1 429 400 000**キロメートルです。

4. 天王星は1781年にウィリアム・ハーシェルによって発見され、赤道半径は**25 559**キロメートルです。




5. 月が地球を周回する平均距離は**384 403**kmです。

REPÚBLICA DE EL SALVADOR EN LA AMÉRICA CENTRAL