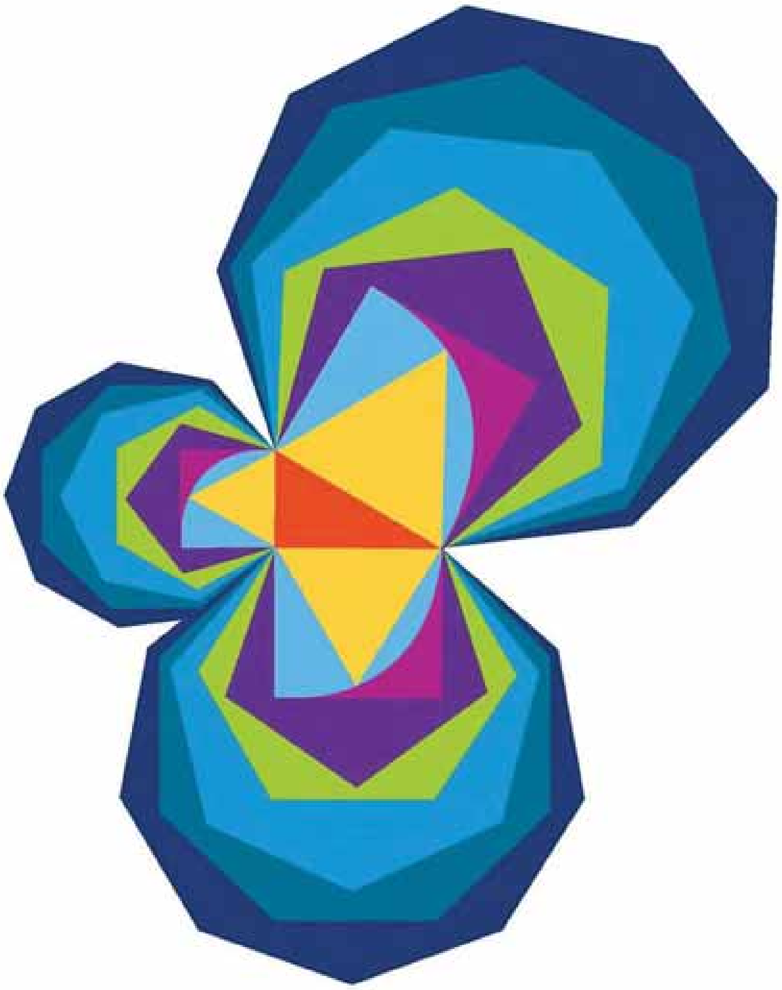
エルサルバドル政府

教育省

算数 9



教科書

第二版

Carla Evelyn Hananía de Varela
教育科学技術大臣

Ricardo Cardona Alvarenga
教育副大臣

Wilfredo Alexander Granados Paz
中等（第3サイクルおよび中等）教育局長
名誉代理

Janet Lorena Serrano de López
基礎教育局長
名誉代理

Santiago Alfredo Flores Amaya
予防社会プログラム局長
名誉代理

Gorka Iren Garate Bayo
科学技術イノベーション教育局長
名誉代理

Roberto Alejandro Rivera Campos
科学技術イノベーション教育課長

Félix Abraham Guevara Menjívar
科学技術イノベーション教育部長（数学）

Gustavo Antonio Cerros Urrutia
中等教育カリキュラム専門家部長

教育省執筆専門チーム

Ana Ester Argueta Aranda
Erick Amílcar Muñoz Deras
Reina Maritza Pleitez Vásquez
Diana Marcela Herrera Polanco
César Omar Gómez Juárez
Francisco Antonio Mejía Ramos
Norma Elizabeth Lemus Martínez
Salvador Enrique Rodríguez Hernández
Félix Abraham Guevara Menjívar

レイアウトチーム

Neil Yazdi Pérez Guandique
Francisco René Burgos Álvarez
Michael Steve Pérez Guandique
Judith Samanta Romero de Ciudad Real

文体修正

Mónica Marlene Martínez Contreras
Marlene Elizabeth Rodas Rosales

現職教員教育国家計画内の専門家チームによる全国レベルでの校正
国際協力機構（JICA）を通じた日本の技術協力

教育的見地から表紙の図では、辺の数が異なる多角形を用いてピタゴラスの定理と図形の相似を表現しています。

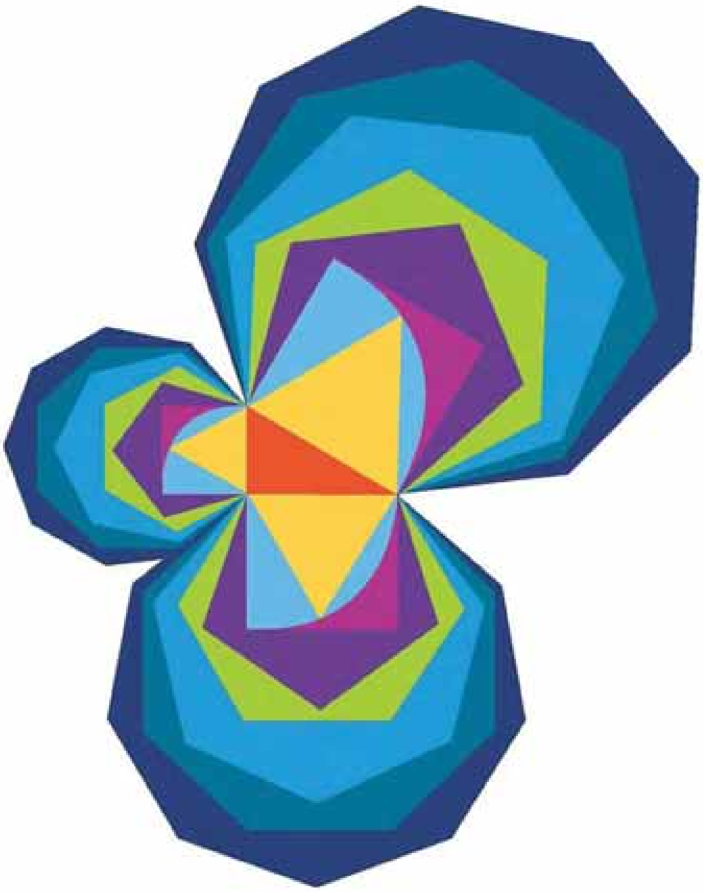
372.704 5
M425　算数 9：教科書／執筆チーム Ana Ester Argueta、Erick Amílcar Muñoz、Reina Maritza Pleitez、Diana Marcela Herrera、César Omar Gómez、Francisco Antonio Mejía、Norma Elizabeth Lemus、Salvador Enrique Rodríguez、Félix Abraham Guevara；レイアウト Neil Yazdi Pérez、Francisco René Burgos、Michael Steve Pérez、Judith Samanta Romero；文体修正 Mónica Marlene Martínez、Marlene Elizabeth Rodas. -- 第2版 -- サンサルバドル、エルサルバドル：教育省（MINED）、2018年。
188ページ：図解入り、28 cm -- （Esmate）
ISBN 978-99961-70-64-5（印刷）

1. 算数－教科書。2. 算数－教育。
I. Argueta Aranda、Ana Ester、1991年～、共著。II. タイトル。
BINA/jmh

エルサルバドル政府

教育省

算数 9



教科書

第二版

ESMATE

JICA

生徒の皆さんへ：

新しい学年に皆さんをお迎えし、皆さんがこれから算数のさらなる知識を得る機会を得ることを喜ばしく思います。

教育・科学技術省（MINEDUCYT）では、初等教育及び中等教育における算数教育向上計画（ESMATE）を通じ、皆さんのために様々な教育教材を開発してきました。その中のひとつが、いま皆さんが手にされている「教科書」です。

この強化には、皆さんが考える力を強化し、算数の能力を伸ばせるような問題やアクティビティがたくさん含まれています。そうした能力は、日常生活の問題を解決するために役に立つものです。

ですから、この教科書にある問題を一つ一つに、挑戦だと思って取り組んでみてください。皆さんが、私たちの国の発展に貢献してくれる模範的な市民となるために、この練習帳にすべての力を注いで取り組むことを期待しています。

Carla Evelyn Hananía de Varela
教育科学技術大臣

Ricardo Cardona Alvarenga
教育科学技術副大臣

教科書の紹介

第二版

第二版には国家教育システムに所属して3年目を迎える教員によるアドバイスや気付き点が盛り込まれています。

アイコン

「P」の文字は、「導入問題」を表わします。各授業では、まず最初に生徒に対し問題を提示して、その問題をどのように解くかを考えさせることが大切です。そのようにして授業で扱うテーマを導入することになります。

「S」の文字は、「解き方」を表わします。教科書ではこの段階で、提示された問題の解き方を1つ以上を載せています。

「C」の文字は、「結論」を表わし、内容の解説になっています。ここでは問題の解答を「P」と「S」に関連づけて、数式を使って表わしています。

「E」の文字は、例を表わします。学習内容の定着を図るために、必要な場合に追加問題を出しています。

鉛筆マークは文章題と計算問題のコーナーを示します。

補足情報

この教科書では、事前知識やヒント、また算数の歴史といった小話なども学習の助けとなるよう、それぞれ色を変えて紹介しています。

事前知識　　ヒント　　小話

アルベルト・サンチェス博士の絵が出てくる小話では、学習の対象となっている算数の歴史を紹介しています。

アルベルト・サンチェス
（1864～1896）

アルベルト・サンチェス博士は19世紀に活躍したエルサルバドル出身の数学者であり、その最も優れた業績の1つに、彼自身がコルノイデ（cornoide)と名付けた曲線の発見があります。
この曲線はこの本の裏表紙に描かれています。

授業配分

この教科書は8ユニットで構成されており、各ユニットには複数の課があり、それぞれの課は複数の授業で構成されています。各授業のタイトルについている番号は、最初の番号が何課であるかを示し、二つ目の番号が何番目の授業であるかを示しています。例えば、この教科書のユニット1のレッスン2の6回目の授業のタイトルは、以下のように表示されています。

レッスン番号を表示します。

2.6 乗法公式の組み合わせ

授業番号を表示します。

ユニット番号は、奇数ページの端に紫色で表示されています。

ユニット1

目次

多項式の乗法

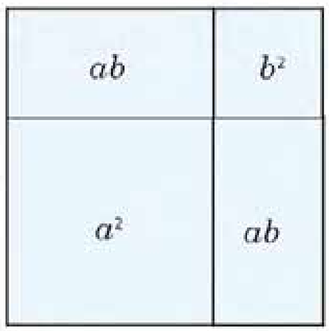
ユニット 1

アル＝フワーリズミーによって
書かれた本のページ

“アルヘブラ” 代数学という言葉はアラビア語のアルジャブル *al-jabr*が語源で、アラビア人の数学者で西暦825年頃に生まれたアル＝フワーリズミーによって算数と代数についてのその本で使われた用語で数学の歴史的発展に大変重要な役割を果たしました。その主な著作は アル・ジャブル・ワル・ムカバラ*Hisab al-yabr wa'l muqqabala*で"約分と消約との学"を意味して その“al-yabr”の部分が方程式の科学の同義の“álgebraアルヘブラ”に変わったものです。

ギリシャのユークリットの原論第二巻はいろいろな代数的表現で幾何学的論証を証明した幾何学的代数と呼ばれるものを探求しています。

例えば、命題4は次のように「もし直線が任意に二分されるならば、その線上に作られる正方形の全体は線分で作られる正方形と長方形の二倍に等しい」と述べています。この与件を図示したものが右の図の通りです。



ユークリットの原理の第2巻の
命題4の幾何学的図示

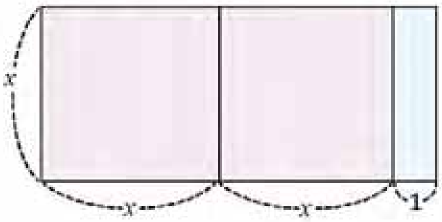
代数学の最も深い研究は、工学、計算機科学、数学、物理学、生物学、経済学と統計学の計算を簡略化しながら現在の数学の発展と基本原理の説明を可能としました。

このユニットのアプローチとして代数式の因数分解の為に乗法公式と幾何学的方法をさらに使い多項式による多項式の積を展開します。

1.1 単項式かける多項式

P

以下のパーツで作られる長方形の面積を二通りの方法で求めなさい。



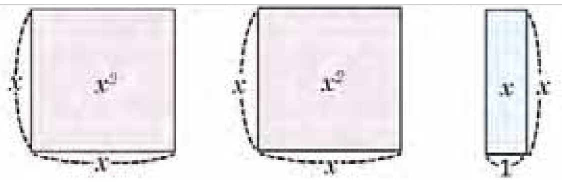
指数を使って表すと、
$a \times a = a^2$

S

1番目の方法：
長方形の高さはxで、底辺は、
$x + x + 1 = 2x + 1$ この３つのパーツで作られる長方形の面積は、
$x(2x + 1)$ です。

多項式とは1つの項もしくは2つ以上の項の和からなる代数式です。多項式のうち項が1つだけのものを**単項式**といいます。

2番目の方法：
長方形を３つのパーツに分けて、それぞれの面積を求めます。



それぞれのパーツの面積の和は、
$x^2 + x^2 + x = 2x^2 + x.$

よって、長方形の面積もまた、$2x^2 + x$

同じ長方形の面積がここに示した二つの方法で求められたことから、以下の式が成り立ちます。
$x(2x + 1) = 2x^2 + x$

積の求め方
1番目の方法は、代数的に、xに多項式$2x + 1$の項をそれぞれかける方法で表すこともできます。

$$\begin{aligned} x(2x + 1) &= x(2x) + x(1) \\ &= 2x^2 + x \end{aligned}$$

C

単項式かける二項式は、四則計算のルールに従って、まず最初に、二項式のそれぞれの項をかけます。例えば、

$$\begin{aligned} 2x(3x + 4) &= 2x(3x) + 2x(4) \\ &= 6x^2 + 8x \end{aligned}$$

この手順を**展開**といいます。

E

以下の式を展開しなさい。

a) $2x(x - y)$

$$\begin{aligned} 2x(x - y) &= 2x(x) - 2x(y) \\ &= 2x^2 - 2xy \end{aligned}$$

b) $(xy - y)(-2x)$

$$\begin{aligned} (xy - y)(-2x) &= xy(-2x) - y(-2x) \\ &= -2x^2y - (-2xy) \\ &= -2x^2y + 2xy \end{aligned}$$

1. 以下の代数式になる長方形を描きなさい。
   そしてそれをパーツに分けた時場合の面積を求めなさい。

   a) $x(3x + 2)$　　b) $2x(x + y)$

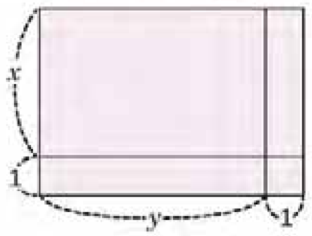
2. 以下の式を展開しなさい。

   a) $-x(xy + x)$　　b) $-3y(x - y)$　　c) $(xy + x)xy$　　d) $xy(xy + x + y)$

1.2 二項式かける二項式、第一部

P

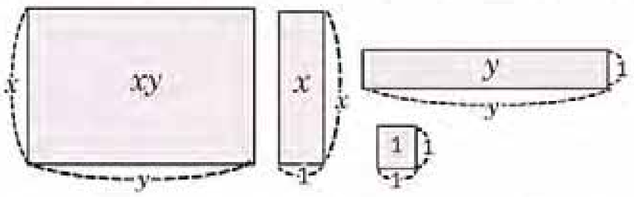
以下のパーツで作られる長方形の面積を二通りの方法で求めなさい。



S

1番目の方法： 長方形の高さは $y + 1$ で、底辺は $x + 1$ したがって、求められる面積の積は、
$(x + 1)(y + 1)$

2番目の方法：
長方形をセクションに分けてそれぞれの面積から求めます。



それぞれのパーツの面積の和は、
$xy + x + y + 1$
よって、長方形の面積もまた、
$xy + x + y + 1$

ここに示された二つの方法は同じ長方形の面積を表しています。よって、
$(x + 1)(y + 1) = xy + x + y + 1$

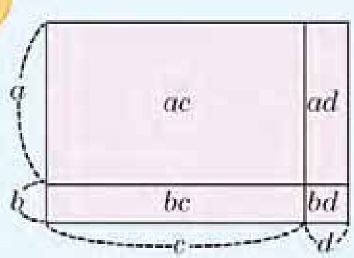
二つの項を持つ多項式を
二項式といいます。

積の求め方

最初の方法は、一つ目の二項式のそれぞれの項に二つ目の二項式のそれぞれの項をかけることで求めることができます。

$$\begin{aligned}(x + 1)(y + 1) &= x(y) + x(1) + 1(y) + 1(1)\\ &= xy + x + y + 1\end{aligned}$$

C



二項式に別の二項式をかける場合は、四則計算のルールに従って、一つ目の二項式のそれぞれの項に二つ目の二項式のそれぞれの項をかけます。

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

E

次の式を展開しなさい。$(2xy + x)(3y + 2)$

$$\begin{aligned}(2xy + x)(3y + 2) &= 2xy(3y) + 2xy(2) + x(3y) + x(2)\\ &= 6xy^2 + 4xy + 3xy + 2x\\ &= 6xy^2 + 7xy + 2x\end{aligned}$$

$4xy$と$3xy$それぞれの項はどちらもxyの部分を持つので同類項です。それらの和を求めるには、係数4と係数3を足して、文字の部分をそのままつなげます。

よって、$(2xy + x)(3y + 2) = 6xy^2 + 7xy + 2x$

展開しなさい。

a) $(2x + 1)(y + 1)$　　b) $(2x + 3)(3y + 2)$　　c) $(xy + 3x)(y + 1)$

d) $(2xy + 3y)(3x + 5)$　　e) $(x + 1)(x + y)$　　f) $(2x + 3)(x + y)$

1.3 二項式かける二項式、第二部

P

次の式を展開しなさい。$(2x-1)(y+3)$

$a-b$は次のような加法の式で表すことができます。

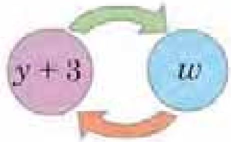
$$a-b=a+(-b)$$

S

二項式の一項目にある、符号が (–) であることに注意します。次の方法で式を展開することができます。

1. $2x-1$を次のような加法の式で表します。$2x+(-1)$ 前の授業で行ったのと同じ方法で式を展開します。

$$\begin{aligned}(2x-1)(y+3) &= [2x+(-1)](y+3)\\ &= 2x(y)+2x(3)+(-1)(y)+(-1)(3)\\ &= 2xy+6x+(-y)+(-3)\\ &= 2xy+6x-y-3\end{aligned}$$



2. $y+3=w$として、二項式かける単項式の展開をします。

$$\begin{aligned}(2x-1)(y+3) &= 2x(w)-1(w)\\ &= 2x(y+3)-(y+3)\\ &= 2xy+6x-y-3.\end{aligned}$$

$y+3$ を w に置き換え、
このように再びw を $y+3$ に戻し

よって、$(2x-1)(y+3)=2xy+6x-y-3$

C

二項式かける二項式の積は以下の二通りの方法で求めることができます。

1. $a-b=a+(-b)$ の式を作り、展開します。

$$\begin{aligned}(a-b)(c+d) &= [a+(-b)](c+d)\\ &= ac+ad+(-b)c+(-b)d\\ &= ac+ad+(-bc)+(-bd)\\ &= ac+ad-bc-bd\end{aligned}$$

2. $c+d=w$ と考え、二項式かける単項式の形の式を作り展開します。

E

展開しなさい。$(3x-5)(2y-4)$

最初の項を$3x+(-5)$ の式で表し、2つ目の項を$2y+(-4)$で表します。

$$\begin{aligned}(3x-5)(2y-4) &= [3x+(-5)][2y+(-4)]\\ &= 3x(2y)+3x(-4)+(-5)(2y)+(-5)(-4)\\ &= 6xy-12x-10y+20\end{aligned}$$

よって、$(3x-5)(2y-4)=6xy-12x-10y+20$

展開しなさい。

a) $(x+1)(y-1)$　b) $(x-1)(y-1)$　c) $(2x+2)(-y+2)$

d) $(-x-2)(2y-3)$　e) $(xy-x)(y+10)$　f) $(2xy-y)(5x-3)$

1.4 二項式かける三項式

P

$(x + 2)(xy + y + 1)$を展開しなさい。

多項式 $xy + y + 1$ には3つの項があるので、**三項式**といい、$(x + 2)(xy + y + 1)$ は二項式かける三項式の積です。

S

式は以下の方法で展開することができます。

1. 二項式 のそれぞれの項に三項式のそれぞれの項をかけます。

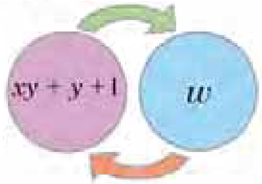
$$(x + 2)(xy + y + 1) = x(xy) + x(y) + x(1) + 2(xy) + 2(y) + 2(1)$$
$$= x^2y + xy + x + 2xy + 2y + 2$$
$$(x + 2)(xy + y + 1) = x^2y + 3xy + x + 2y + 2$$

2. $xy + y + 1 = w$ として、二項式に単項式をかける式で表すと $(x + 2)(xy + y + 1) = (x + 2)w$

$$\begin{aligned}(x + 2)(xy + y + 1) &= (x + 2)w\\ &= x(w) + 2(w)\\ &= x(xy + y + 1) + 2(xy + y + 1)\\ &= x^2y + xy + x + 2xy + 2y + 2\\ &= x^2y + 3xy + x + 2y + 2\end{aligned}$$

$xy + y + 1$をwに置き換え、

代入を再び戻します。



よって、$(x + 2)(xy + y + 1) = x^2y + 3xy + x + 2y + 2$

C

$(a + b)(c + d + e)$の積は二通りの方法で求めることができます。

1. 四則計算のルールに従って一項目のそれぞれの項に二項目のそれぞれの項をかけます。

$$(a + b)(c + d + e) = ac + ad + ae + bc + bd + be$$

多項式を展開した後は必ず同類項をまとめます。

2. $c + d + e = w$ として、二項式かける単項式になる式を展開します。

E

結論にある二つの方法で $(2x - 1)(2x - y + 3)$ を展開します。

1. まず、このような式を作ります。 $2x - 1 = 2x + (-1)$ y $2x - y + 3 = 2x + (-y) + 3$

$$\begin{aligned}(2x - 1)(2x - y + 3) &= (2x + (-1))(2x + (-y) + 3)\\ &= 2x(2x) + 2x(-y) + 2x(3) + (-1)(2x) + (-1)(-y) + (-1)(3)\\ &= 4x^2 - 2xy + 6x - 2x + y - 3\end{aligned}$$
$$(2x - 1)(2x - y + 3) = 4x^2 - 2xy + 4x + y - 3$$

2. $w = 2x - y + 3$ を使います。

$$\begin{aligned}(2x - 1)(2x - y + 3) &= (2x - 1)w\\ &= 2x(w) - w\\ &= 2x(2x - y + 3) - (2x - y + 3)\\ &= 4x^2 - 2xy + 6x - 2x + y - 3\end{aligned}$$
$$(2x - 1)(2x - y + 3) = 4x^2 - 2xy + 4x + y - 3$$

$2x - y + 3$ を w に置き換え、

再び戻しています。

自分のやりやすい方法で以下の式を展開しなさい。

a) $(2y + 1)(2xy - 3x + 1)$　　b) $(2xy - 3)(5x + 3y + 4)$　　c) $(2x - 3)(x - y - 4)$

1.5 三項式かける三項式

P

$(x - y + 1)(x + y + 3)$ を展開しなさい。

最初の三項式のそれぞれの項に二つ目の三項式のそれぞれの項をかける必要はありますか？

S

今までの授業で行っていたのは、最初の三項式のそれぞれの項に二つ目の三項式の項を（四則計算のルールに従って）かけて、（同類項がある場合は）同類項をまとめる方法でした。

$$\begin{aligned}(x - y + 1)(x + y + 3) &= x(x) + x(y) + x(3) + (-y)(x) + (-y)(y) + (-y)(3) + 1(x) + 1(y) + 1(3)\\ &= x^2 + yx + 3x - yx - y^2 - 3y + x + y + 3\\ &= x^2 + 4x - y^2 - 2y + 3\end{aligned}$$

よって、$(x - y + 1)(x + y + 3) = x^2 + 4x - y^2 - 2y + 3$

C

三項式かける三項式の積では、（四則計算のルールに従って）最初の三項式にあるそれぞれの項に二つ目の三項式にあるそれぞれの項をかけ、同類項をまとめます。

E

次の式を展開しなさい。$(3x - 2y + 3)(2x + 5y - 3)$

導入問題では、最初の三項式にあるそれぞれの項に二つ目の三項式にあるそれぞれの項をかけて、

$$\begin{aligned}(3x - 2y + 3)(2x + 5y - 3) &= 3x(2x) + 3x(5y) + 3x(-3) + (-2y)(2x) + (-2y)(5y) + (-2y)(-3) + 3(2x) + 3(5y) + 3(-3)\\ &= 6x^2 + 15xy - 9x - 4xy - 10y^2 + 6y + 6x + 15y - 9\\ &= 6x^2 + 15xy - 4xy - 9x + 6x - 10y^2 + 6y + 15y - 9\\ &= 6x^2 + 11xy - 3x - 10y^2 + 21y - 9\end{aligned}$$

よって、$(3x - 2y + 3)(2x + 5y - 3) = 6x^2 + 11xy - 3x - 10y^2 + 21y - 9$

以下の式を展開しなさい。

a) $(x + y + 1)(x + y + 3)$

b) $(x + y - 1)(x + y + 3)$

c) $(x - y - 1)(x + y + 3)$

d) $(x + y + 1)(x - y + 3)$

e) $(x + 3y + 4)(5x - 2y - 3)$

f) $(4x - 3y + 2)(2x - 6y - 3)$

1.6 復習問題

1. 以下の代数式になる長方形を描きなさい。そしてそれをパーツに分けた場合の面積を求めなさい。

a) $x(y+3)$

b) $(x+2)(y+1)$

2. 以下の式を展開しなさい。

単項式かける二項式：

a) $(-x)(y-5)$

b) $(4x)(xy+y)$

c) $(-xy)(x-y)$

d) $(-3xy+2y)(-xy)$

二項式かける二項式：

a) $(y+2)(2x+1)$

b) $(x+1)(xy+y)$

c) $(2x-5)(y+4)$

d) $(xy+3)(x-y)$

二項式かける三項式：

a) $(x+3)(3xy+2x+4y)$

b) $(y-2)(3xy+5x+y)$

c) $(xy-1)(-10xy+3x+2y)$

d) $(2x-3y)(-xy+4x-5y)$

三項式かける三項式：

a) $(x+y+1)(x-y+2)$

b) $(2x+5y-3)(-xy+3x+3)$

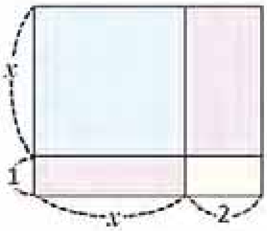
c) $(-xy+x-1)(2xy+2x+1)$

d) $(2xy+3y-6)(5xy+2y+10)$

2.1 $(x + a)(x + b)$ 型の積

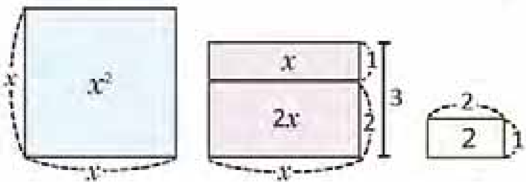
P

以下のパーツで作られる長方形の面積を二通りの方法で求めなさい。



S

1番目の方法： 長方形の高さは $x + 1$ で、底辺は $x + 2$ です。したがって面積はこのような式になります。
$(x + 1)(x + 2)$
2番目の方法： 長方形をセクションに分けてそれぞれの面積から求めます。



それぞれのパーツの面積の和は、
$x^2 + 2x + x + 2 = x^2 + 3x + 2$
よって、長方形の面積は次の式でも表すことができます。 $x^2 + 3x + 2$

ここに示された二つの方法は同じ長方形の面積を表しています。

よって、$(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$

積の求め方： 項x と項$2x$ はそれぞれ同類項であることに気付きます。よって係数を足して文字x をそのままつけます。

$$\begin{aligned}(x + 1)(x + 2) &= x^2 + (1 + 2)x + 1(2)\\ &= x^2 + 3x + 2\end{aligned}$$

C

$(x + a)(x + b)$ 型の二項式の積はこのように展開します。

$$(x + a)(x + b) = x^2 + \overbrace{(a + b)}^{a\text{と}b\text{の和}}x + \underbrace{ab}_{a\text{と}b\text{の積}}$$

例えば、

$$\begin{aligned}(x + 3)(x + 2) &= x^2 + \overbrace{(3 + 2)}^{\text{和}}x + \overbrace{3(2)}^{\text{積}}\\ &= x^2 + 5x + 6\end{aligned}$$

E

$(x + 2)(x - 3)$を展開しなさい

$$\begin{aligned}(x + 2)(x - 3) &= (x + 2)[x + (-3)]\\ &= x^2 + (2 - 3)x + 2(-3)\\ &= x^2 - x - 6\end{aligned}$$

$a = 2$ 、$b = -3$で、$(x + 2)(x - 3) = (x + 2)[x + (-3)]$

よって、$(x + 2)(x - 3) = x^2 - x - 6$

展開しなさい。

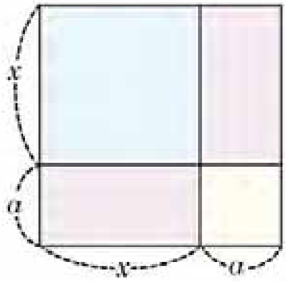
a) $(x + 3)(x + 5)$　　b) $(x + 4)(x - 5)$　　c) $(x - 5)(x + 2)$

d) $(y - 1)(y + 2)$　　e) $(y - 2)(y - 3)$　　f) $(y - \frac{1}{2})(y + \frac{3}{4})$

2.2 括弧でくくられた二項式の二乗、第一部

P

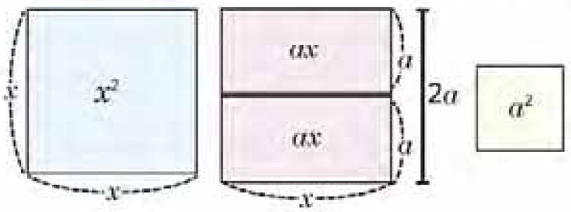
以下のパーツで作られる四角形の面積を二つの異なる方法で求めなさい。



辺lをもつ正方形の面積は l^2となります。

S

1番目の方法： 4つのパーツで作られる正方形の辺が $x + a$ なので、面積は $(x + a)^2$と等しくなります。
2番目の方法： 長方形をセクションに分けてそれぞれの面積から求めます。



それぞれのパーツの面積の和は、
$x^2 + ax + ax + a^2 = x^2 + 2ax + a^2$
よって、長方形の面積もまた、
$x^2 + 2ax + a^2$

ここに示された二つの方法は同じ長方形の面積を表しています。
よって、$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

積の求め方

$(x + a)^2$ は、前の授業で学んだ代数を用いて展開することもできます。

$$\begin{aligned}(x + a)^2 &= (x + a)(x + a)\\ &= x^2 + (a + a)x + a(a)\\ (x + a)^2 &= x^2 + 2ax + a^2\end{aligned}$$

C

$(x + a)^2$ 型を展開すると、

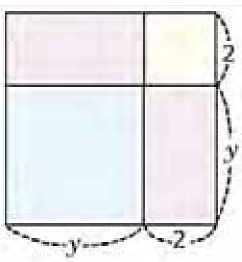
$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

例えば、

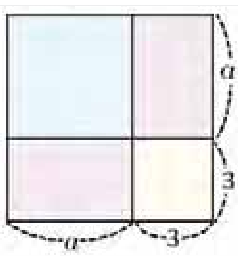
$$\begin{aligned}(x + 5)^2 &= x^2 + 2(5)x + 5^2\\ &= x^2 + 10x + 25^2\end{aligned}$$

1. 次の各問にある図形の面積を二通りの方法で求めなさい。

a)



b)



2. 展開しなさい。

a) $(x + 1)^2$
b) $(x + 3)^2$
c) $(x + \frac{1}{2})^2$
d) $(x + \frac{1}{4})^2$

2.3 括弧でくくられた二項式の二乗、第二部

P

$(x-a)^2$ を展開しなさい。

$(x-a)^2=[x+(-a)]^2$

S

$(x-a)^2$ を $[x+(-a)]^2$ と直し、前の授業で習った方法を使います。

$$\begin{aligned}(x-a)^2&=[x+(-a)]^2\\&=x^2+2(-a)x+(-a)^2\\&=x^2-2ax+a^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-a)^2&=(-a)(-a)\\&=a^2\end{aligned}$$

よって、$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$

C

$(x-a)^2$ 型はこのように展開します。

$$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$$

一般的に、$(x+a)^2$ と $(x-a)^2$ の展開は括弧でくくられた二項式の二乗といいます。

$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2 \text{ ....(1)}$$

$$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2 \text{ ....(2)}$$

E

展開しなさい。

$(x-2)^2$

括弧でくくられた二項式の二乗の (2) のパターンを使って、

$$\begin{aligned}(x-2)^2&=x^2-2(2)x+2^2\\&=x^2-4x+4\end{aligned}$$

よって、$(x-2)^2=x^2-4x+4$

展開しなさい。

a) $(x-1)^2$

b) $(x-3)^2$

c) $(x-4)^2$

d) $(x-\frac{1}{2})^2$

e) $(x-\frac{1}{4})^2$

f) $(x-\frac{1}{3})^2$

2.4 二項式の和と差の積

P

$(x+a)(x-a)$ を展開しなさい。

S

$(x-a)$ を $[x+(-a)]$ と直してから展開します。

$$\begin{aligned}(x+a)(x-a) &= (x+a)[x+(-a)]\\ &= x^2+(a-a)x+a(-a)\\ &= x^2+(0)x-a^2\\ &= x^2-a^2\end{aligned}$$

解説では、
$(x+a)[x+(-a)] \neq (x+a)^2$
つまり、この展開は括弧でくくられた二項式の二乗とは違う方法で展開しています。

よって、$(x+a)(x-a)=x^2-a^2$

C

$(x+a)(x-a)$ 型の展開は、**二項式の和と差の積**もしくは、単に**二項式の和と差**といい、次のように展開します。

$$(x+a)(x-a)=x^2-a^2$$

今までの授業（および今回の授業）で学んできた全ての展開は**乗法公式**といい、示される型は識別しやすく、そのまま使えます。

乗法公式	展開
$(x+a)(x+b)$ 型の展開	$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
括弧でくくられた二項式の二乗	$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$ .....(1) $(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$ .....(2)
二項式の和と差の積	$(x+a)(x-a)=x^2-a^2$

E

展開しなさい。

$$(x-2)(x+2)$$

二項式の和と差の積を使って、

$$\begin{aligned}(x-2)(x+2) &= x^2-2^2\\ &= x^2-4\end{aligned}$$

よって、$(x+2)(x-2)=x^2-4$

1. 展開しなさい。
   a) $(x+1)(x-1)$
   b) $(x+3)(x-3)$
   c) $(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})$
   d) $(x-\frac{1}{4})(x+\frac{1}{4})$

2. 以下の式を展開しなさい。
   a) $(y-8)(y-10)$
   b) $(x+11)^2$
   c) $(y-9)^2$
   d) $(y+\frac{4}{3})(y-\frac{4}{3})$

2.5 代入を使った乗法公式の展開

P

次の式を展開しなさい。$(3x + 4y)^2$

$(x + a)^2$と似た方法で展開することができるでしょうか？

S

$3x = w$、$4y = z$と置き換え、括弧でくくられた二項式の二乗の展開式を作ります。

$$\begin{aligned}(3x + 4y)^2 &= (w + z)^2 \\ &= w^2 + 2wz + z^2 \\ &= (3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2\end{aligned}$$

$3x$ を w、$4y$ を z に置き換え、

再び w を $3x$、z を $4y$ に戻します。

よって、$(3x + 4y)^2 = 9x^2 + 24xy + 16y^2$

C

可変数のある項をもった乗法公式の展開をするには、代入する方法で今までに覚えた乗法公式にあてはめる事ができます。以下の練習問題をすればそのことがよくわかるでしょう。

E

乗法公式を用いて展開しなさい。

$$(2x + 1)(2x + 3)$$

両方の括弧内に $2x$ があります。$2x = w$ に置き換えて、1回目の授業で学習したのと同じ方法で展開します。

$$\begin{aligned}(2x + 1)(2x + 3) &= (w + 1)(w + 3) \\ &= w^2 + (1 + 3)w + 1(3) \\ &= w^2 + 4w + 3 \\ &= (2x)^2 + 4(2x) + 3\end{aligned}$$

$2x$をwに置き換え、

再びwを$2x$に戻し、

よって、$(2x + 1)(2x + 3) = 4x^2 + 8x + 3$

展開しなさい。

a) $(5x - 3y)^2$

b) $(3x - 2)(3x - 3)$

c) $(2x + 3y)(2x - 3y)$

d) $(3y - \frac{1}{2})^2$

e) $(\frac{x}{3} - 2)(\frac{x}{3} - 3)$

f) $(3y + \frac{1}{5})(3y - \frac{1}{5})$

2.6 乗法公式の組み合わせ

P

展開しなさい。

a) $(x + y + 1)(x + y - 1)$

b) $(2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 5)$

それぞれの問にはどの乗法公式が使えますか？たとえば、最初の問の三項式には足し算 $x + y$ が共通しています。

S

a) どちらの三項式にも足し算 $x + y$ が共通で、一つ目の括弧にある 1 は正の数、二つ目の括弧にある 1 は負の数です。$x + y$ を w と置き換えて二項式の和と差の積の展開をします。

$$
\begin{aligned}
(x + y + 1)(x + y - 1) &= (w + 1)(w - 1) && x + y \text{ を } w \text{ に置き換え、}\\
&= w^2 - 1^2 \\
&= (x + y)^2 - 1 && \text{再び戻して、}\\
&= x^2 + 2xy + y^2 - 1.
\end{aligned}
$$

よって、$(x + y + 1)(x + y - 1) = x^2 + 2xy + y^2 - 1$

b) ここで展開することになるのは、括弧でくくられた二項式の二乗と $(x + a)(x + b)$ の部分です。それぞれを展開した後、同類項を整理します。

$$
\begin{aligned}
(2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 5) &= (2x)^2 - 2(2x)(1) + 1^2 + x^2 + (2 + 5)x + 2(5)\\
&= 4x^2 - 4x + 1 + x^2 + 7x + 10\\
&= 5x^2 + 3x + 11
\end{aligned}
$$

よって、$(2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 5) = 5x^2 + 3x + 11$

C

乗法公式の組み合わせを展開するには、

1. 式にあてはまる乗法公式を特定します。
2. 四則計算のルールに気を付けながら展開します。
3. 同類項があれば整理します。

以下の式を展開しなさい。

a) $(x - y + 1)(x - y - 1)$

b) $(xy + x + 2)(xy + x - 2)$

c) $(x + 3)^2 - (5x + 1)(5x + 2)$

d) $(y + 1)(y - 1) - (3y + 2)^2$

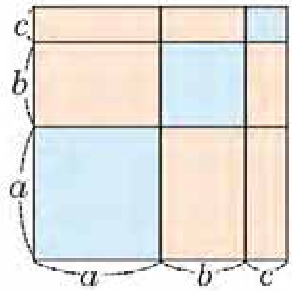
e) $(x^2 + 1)(x^2 - 1)$

f) $(y + 2)(y - 2) + (x^2 + 3)(x^2 - 3)$

2.7 括弧でくくられた三項式の二乗

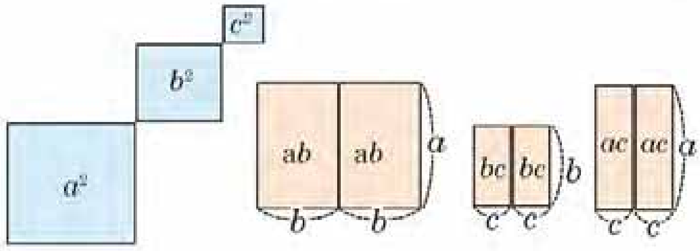
P

以下のパーツで作られる四角形の面積を二つの異なる方法で求めなさい。



S

1番目の方法： 辺$a + b + c$をもつ正方形なので、面積を表す式は、$(a + b + c)^2$となります。
2番目の方法： 正方形を同じサイズのパーツに分けて、それぞれの面積を求めます。



図で示すように、それぞれのパーツの面積の和は、

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$

展開します。 $b + c = w$ を使って括弧でくくられた二項式を展開をします。

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= (a + w)^2\\ &= a^2 + 2aw + w^2\\ &= a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2\\ &= a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2\\ &= a^2 + b^2 + c^2 + (2ab + 2ac + 2bc)\\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\end{aligned}$$

$b + c$ を w に置き換え、
再び w を $b + c$ に戻します。

よって、$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

この展開をする際は、通常展開式はこの順序にします。

C

$(a + b + c)^2$ 型 の展開は**括弧でくくられた三項式の二乗**といい、展開式は、

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$

E

展開しなさい。$(5x - 3y + 4)^2$

$5x - 3y + 4$ は $5x + (-3y) + 4$ と直すことができます。それで、括弧の中を次のように展開することができます。

$$\begin{aligned}(5x - 3y + 4)^2 &= (5x + (-3y) + 4)^2\\ &= (5x)^2 + (-3y)^2 + (4)^2 + 2(5x)(-3y) + 2(-3y)4 + 2(4)(5x)\\ &= 25x^2 + 9y^2 + 16 - 30xy - 24y + 40x\\ &= 25x^2 + 9y^2 - 30xy + 40x - 24y + 16\end{aligned}$$

展開しなさい。

a) $(x + y + 1)^2$

b) $(2x + y + 3)^2$

c) $(3x - 2y + 5)^2$

d) $(x - 5y - 1)^2$

2.8 数値と式の計算

P

$a^2 + b^2 = 6$、$ab = 3$ である場合の $(a + b)^2$ の値はいくらでしょう？

$(a + b)^2$、$a^2 + b^2$、ab にあてはまる乗法公式はどれでしょう？

S

この問題は a と b の値を求めているの**ではなく、**$(a + b)^2$ の値を求めています。$a^2 + b^2$ と ab が、括弧でくくられた二項式の二乗の展開にあてはまることに注目します。

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

上記に値を代入します。

加法では、加数の順序で和が変わることはありません。
$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a^2 + b^2) + 2ab\\ &= 6 + 2(3)\\ (a + b)^2 &= 12\end{aligned}$$

よって、$(a + b)^2$ の値は 12

E

98 × 102 を乗法公式を使って計算しなさい。

98 と 102 はそれぞれ 100 − 2 と 100 + 2 と表すことができます。

$$98 \times 102 = (100 - 2)(100 + 2)$$

上記は二項式の和と差の積です。

かけ算では、因数の並び方を入れ替えても積が変わることはありません。
$(100 - 2)(100 + 2) = (100 + 2)(100 - 2)$

$$\begin{aligned}98 \times 102 &= 100^2 - 2^2\\ &= 10000 - 4\\ 98 \times 102 &= 9996\end{aligned}$$

1. 以下の問題を解きなさい。

a) $a^2 + b^2 = 34$、$ab = 15$ である場合の $(a - b)^2$ の値を求めなさい。

b) $a - b = 2$、$a^2 - b^2 = 16$ である場合に $a + b$ の値を求めなさい。

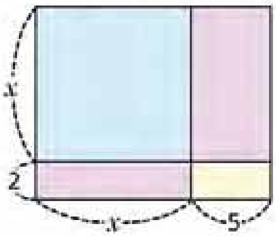
2. 乗法公式を使って以下の計算をしなさい。

a) 97×103　　b) 95×105　　c) 102^2　　d) 105^2

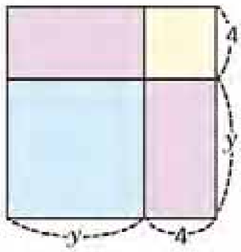
2.9 復習問題

1. 以下の図形の面積を二通りの方法で求めなさい。

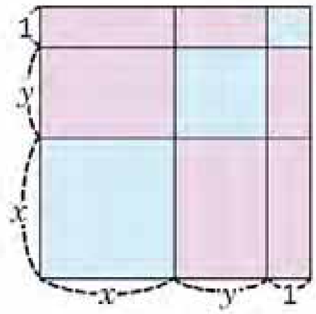
a)



b)



c)



2. 以下の $(x+a)(x+b)$ 型の展開をしなさい。

a) $(x+1)(x+9)$

b) $(x+3)(x-6)$

c) $(x+\frac{1}{3})(x+\frac{3}{6})$

d) $(y-\frac{1}{2})(y-\frac{3}{2})$

e) $(y-1)(y+2)$

f) $(x-4)(x-2)$

3. 次の括弧でくくられた二項式の二乗を展開しなさい。

a) $(x+6)^2$

b) $(y-6)^2$

c) $(x+\frac{1}{5})^2$

d) $(y-\frac{1}{4})^2$

e) $(x+5)^2$

f) $(y-2)^2$

g) $(x+2)^2$

h) $(y-\frac{1}{3})^2$

4. 以下の式を展開しなさい。

a) $(x+7)(x-7)$

b) $(x+10)(x-10)$

c) $(y+\frac{1}{5})(y-\frac{1}{5})$

d) $(y-\frac{2}{3})(y+\frac{2}{3})$

e) $(x+4)(x-4)$

f) $(x+9)(y-9)$

2.10 復習問題

1. 以下の式を展開しなさい。

a) $(6x-10)(6x-2)$

b) $(\frac{x}{2}+2)(\frac{x}{2}+4)$

c) $(5x-6y)^2$

d) $(6x+10y)^2$

e) $(2x-3)(2x-1)$

f) $(5x-3y)^2$

g) $(\frac{y}{3}-3)^2$

h) $(2x+\frac{1}{2})(2x-\frac{1}{2})$

2. 展開しなさい。

a) $(2x+y+2)(2x+y-2)$

b) $(x+y)(x-y)+(x+y)^2$

c) $(2x-3)^2-(5y-1)(5y+2)$

d) $(y^2+1)(y^2-1)-(y^2+1)^2$

e) $(5x+10y+3)^2$

f) $(4x-2y-6)^2$

3. 以下の問題を解きなさい。

a) $a^2+b^2=104$、$ab=20$である場合の、$(a-b)^2$の値を求めなさい。

b) $a+b=8$、$a^2-b^2=32$である場合の$a-b$の値を求めなさい。

c) $x+y=6$、$x^2+y^2=1$である場合のxyの値を求めなさい。

4. 乗法公式を使って以下の式の計算をしなさい。

a) 101^2

b) 102×101

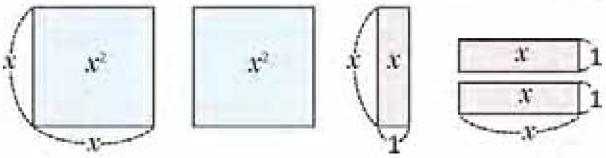
c) 49×51

d) 99^2

3.1 多項式の因数分解

P

アントニオは次のパーツを使って長方形をつくります。

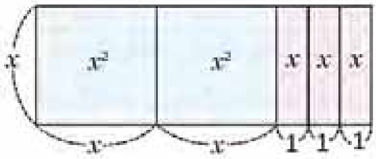


青色のパーツは一辺がxの正方形で、紫色のパーツは高さがx、底辺が1の長方形です。

a) どんな長方形になりますか。
b) 全体の面積はいくらですか。
c) アントニオがつくった長方形の底辺と高さはいくらですか。

S

a) 青色の正方形の1辺の長さは紫色の長方形の高さと等しくなります。（両方とも高さはx）この高さを同じにすれば長方形になります。



b) 面積は各パーツの面積の和と等しくなります、つまり、$x^2 + x^2 + x + x + x = 2x^2 + 3x$
c) 高さと底辺の寸法は次のようになります。

高さ $\longrightarrow$ x
底辺 $\longrightarrow$ $x + x + 1 + 1 + 1 = 2x + 3$

パーツでできた長方形の面積は高さ×底辺で計算します。

全体の面積は $2x^2 + 3x$です、したがって：

$$2x^2 + 3x = x(2x + 3).$$

C

多項式をより簡略化した多項式の積として表す手順を**因数分解**と言います。例えば、 $2x^2 + 3x$ を因数分解すると、積 $x(2x + 3)$ となり、 x と $2x + 3$ の各項を**因数**と言います。因数分解は多項式の展開の逆の手順です。

因数分解する

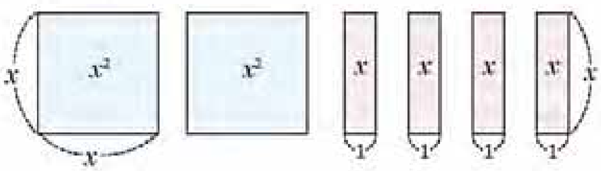
$$2x^2 + 3x = x(2x + 3)$$

展開する

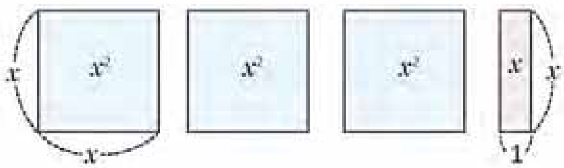
前の課で、長方形の寸法から面積を求めましたが、ここでは、全体の面積から長方形の寸法を求めます。

1. 各問で、与えられたパーツを使って長方形をつくり、高さと底辺の積として全体の面積を書きなさい。

a)



b)



2. 次の多項式の積にある因数を特定しなさい。

a) $2x(5x - 3)$　　b) $-x(3x + 2)$　　c) $(x + 4)(2x - 3)$　　d) $3x(x - 5)(2x - 1)$

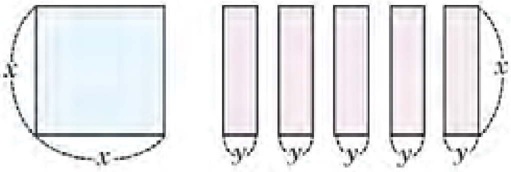
3.2 共通因数

P

以下のように行ってください。

a) 自分のノートにパーツによって示される面積を書きなさい。

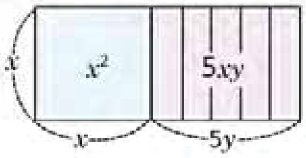
b) 長方形をつくり、高さと底辺を使って面積を書きなさい。



S

a) パーツの面積は、$x^2 + 5xy$

b) 長方形の面積は、



高さ → x

底辺 → $x + y + y + y + y + y = x + 5y$

面積は、 $x(x + 5y)$.

式を因数分解するには、$x^2 + 5xy$ を、より簡略化した多項式の積として書かなければなりません。次の式を見てください。

$$x^2 = x(x)$$
$$5xy = x(5y)$$

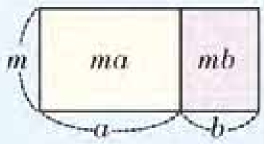
両項に共通して単項式 x があります。したがって、

$$x^2 + 5xy = x(x) + x(5y) \longrightarrow \text{共通項を特定します。}$$
$$= x(x + 5y) \longrightarrow \text{分配法則}$$

よって、$x^2 + 5xy = x(x + 5y)$

C

多項式のすべての項に共通する単項式がある場合は、この単項式を取り出し、分配法則を使って、多項式を因数分解します。$ma + mb = m(a + b)$



E

多項式を因数分解しなさい。

$$5y^2 - 10xy$$

5y^2と $5xy$ の項に共通するものは何ですか。

両方の多項式にある共通因数を特定しなければなりません。

$$5y^2 = 5(y)(y) = 5y(y)$$
$$10xy = 2(5)(x)(y) = 5y(2x)$$

係数の中の共通因数がその係数の最大公約数です。例えば、5と10の最大公約数は5です。

したがって、この因数を取り出し、分配法則を使います。

$$5y^2 - 10xy = 5y(y) - 5y(2x)$$
$$= 5y(y - 2x)$$

次の多項式を因数分解しなさい。

a) $2x^2 + xy$　　b) $10x^2 - 5xy$　　c) $x^2y + xy$

d) $2x^2y - 4xy$　　e) $2x^2y - 3xy + y$　　f) $3x^2 + 6y + 12xy$

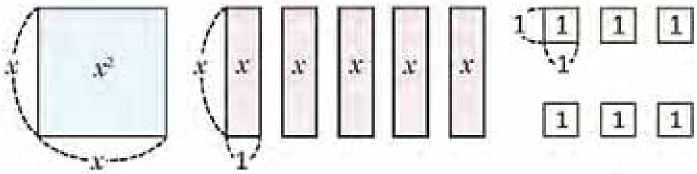
g) $x^2y + x^2 - x$　　h) $4xy - 6y$　　i) $xy + 16x^2y^2$

3.3 三項式 $x^2+(a+b)x+ab$ の型になる因数分解、第一部

P

アナは三項式 x^2+5x+6 を因数分解したいと思っています。因数分解をするために、次のように考えます。

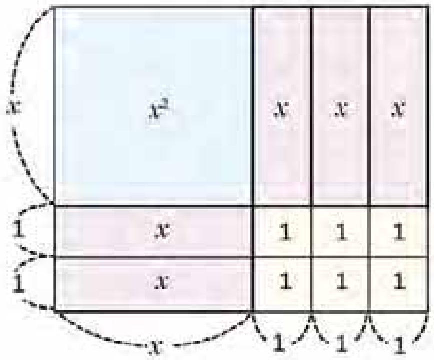
x^2+5x+6 は次のパーツからできている、長方形の面積です。したがって、
x^2+5x+6 を因数分解するには長方形の高さと底辺を求めなければなりません。



x^2+5x+6 はどのように因数分解できますか。

S

パーツでできた長方形が次の図に示してあります。長方形の高さは $(x+2)$ で、底辺は $(x+3)$ です。
したがって、$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$



$(x+2)(x+3)$ の積は $(x+a)(x+b)$ の形の乗法公式であることに注目すると、これは次のように展開します。

$$(x+a)(x+b)=x^2+\overbrace{(a+b)}^{a\text{と}b\text{の和}}x+\underbrace{ab}_{a\text{と}b\text{の積}}$$

したがって、x^2+5x+6 を因数分解するには和が +5 に、積が +6 になる2つの数字を求めなければなりません。
積が +6 になる数字（正の数と負の数）の組み合わせを試します。

組み合わせ	積	和
1と6	+6	+7
−1と−6	+6	−7
2と3	+6	+5
−2と−3	+6	−5

積が正の6でなければならないので、2つの数字はともに正の数、または負の数でなければなりません。これは乗法の符号の法則によるものです。
(+)(+) = +
(−)(−) = +

よって、$a=2$、$b=3$ したがって、$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

C

$(x + a)(x + b)$ の乗法公式で、三項式を因数分解するには次のように行います。

1. 三項式の項は x^2、文字 x のある別の項、及び変数のない別の項（定数項）とならなければなりません。

2. 符号の法則に注意して、積が定数項と等しく、かつ和が x の係数と等しくなる2つの数を求めます。

E

$y^2 + 13y + 30$ を因数分解しなさい。
積が +30 に、和が +13 になる2つの数字を求めなければなりません。和が正の数なので、したがって2つの数は正の数でなければなりません。

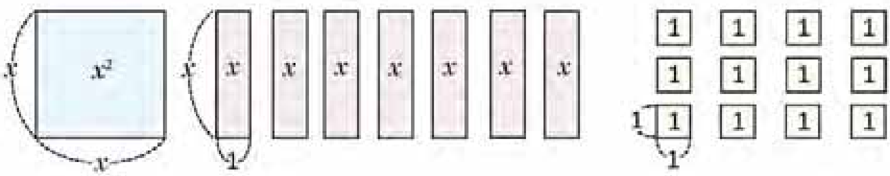
組み合わせ	積	和
1 と 30	+30	+31
2 と 15	+30	+17
3 と 10	+30	+13

よって $a = 3$, $b = 10$、したがって
$y^2 + 13y + 30 = (y + 3)(y + 10)$

1. 以下の図では、

a) 長方形になるように次のパーツを並べ替えなさい。

b) できた長方形の面積を底辺と高さを使って求めなさい。



2. 次の三項式を因数分解しなさい。

a) $x^2 + 3x + 2$

b) $x^2 + 9x + 20$

c) $y^2 + 8y + 12$

d) $y^2 + 11y + 30$

3.4 三項式 $x^2 + (a + b)x + ab$ の型になる因数分解、第二部

P

多項式を因数分解しなさい。

a) $x^2 - 13x + 36$　　b) $y^2 - 6y - 40$

S

a) 乗法公式 $(x + a)(x + b)$ で、三項式を因数分解するために、以下の条件を満たします。積が +36 に、和が −13 になる2つの数字を求めます。和が負で、積が正なので、2つの数字は共に負です。

組み合わせ	積	和
−1 と −36	+36	−37
−2 と −18	+36	−20
−3 と −12	+36	−15
−4 と −9	+36	−13

したがって、

$$x^2 - 13x + 36 = [x + (-4)][x + (-9)]$$
$$= (x - 4)(x - 9)$$

因数分解が正しいかどうかを確かめるために $(x - 4)(x - 9)$を展開することができます。

よって、　$x^2 - 13x + 36 = (x - 4)(x - 9)$

b) ここでも、積が −40 に、和が −6 になる2つの数字を求めます。積が負 (−40)であるため、一つは正でもう一つは負でなければなりません。

組み合わせ	積	和
−1 と40	−40	+39
1 と −40	−40	−39
−2 と 20	−40	+18
2 と −20	−40	−18
−4 と 10	−40	+6
4 と −10	−40	−6

表には 5, −8 と −5, 8 の組み合わせがありませんが、条件を満たす数が既に見つかりました。

したがって、

$$y^2 - 6y - 40 = (y + 4)[y + (-10)]$$
$$= (y + 4)(y - 10)$$

よって、　$y^2 - 6y - 40 = (y + 4)(y - 10).$

C

$a > 0$ かつ、$b > 0$の場合、

三項式が $x^2 + ax + b$ の場合	積が $+b$ に、和が $+a$ になる2つの正の数を求めます。
三項式が $x^2 - ax + b$ の場合	積が $+b$ に、和が $-a$ になる2つの負の数を求めます。
三項式が $x^2 + ax - b$ 又は $x^2 - ax - b$ の場合	一つが正で、もう一つが負の2つの数字で、その積が$-b$ かつ、和が$+a$ 又は$-a$, のいずれか該当する数を求めます。

因数分解しなさい。

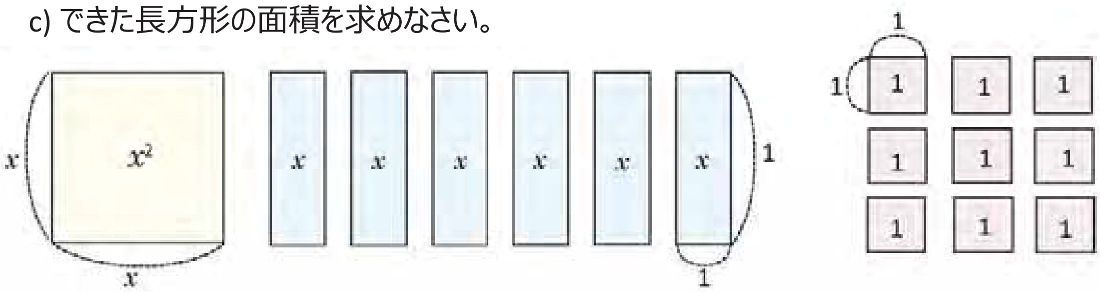
a) $x^2 + x - 2$　　b) $x^2 - 10x + 21$　　c) $x^2 - 7x - 30$

d) $y^2 - 4y - 32$　　e) $y^2 - 14y + 33$　　f) $x^2 + 13x + 42$

3.5 完全平方三項式の因数分解

P 以下のように行ってください。

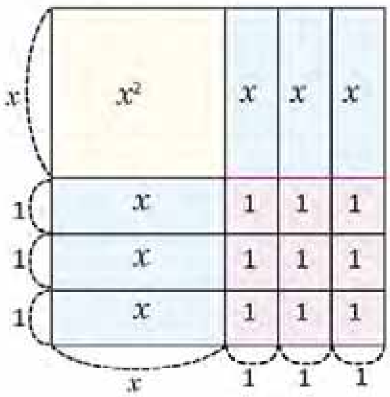
a) パーツによって示される面積を書きなさい。
b) 長方形になるようにパーツを並べなさい。
c) できた長方形の面積を求めなさい。



S a) パーツによって示される面積は、

$$x^2 + x + x + x + x + x + x + 9 = x^2 + 6x + 9.$$

b) パーツでできた長方形、



高さ → $x + 3$
底辺 → $x + 3$

c) できた長方形は正方形であることが分かります。その面積は、

$$(x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2$$

よって、 $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2.$

前回までの授業で、学んだことを使い、積が +9 に、和が +6 になる正の数2つ（この例題では）を求めることができます。

組み合わせ	積	和
1と9	+9	+10
3と3	+9	+6

したがって、$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)(x + 3)$
$= (x + 3)^2.$

因数分解は二項式の二乗となります。この乗法公式は次のように展開されます。

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2.$$

したがって、$x^2 + 6x + 9$ を二項式の二乗に因数分解するためには、2乗が9に、2倍が6になる数を求めなくてはならず、ここでは3になります。したがって、

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2.$$

C

$x^2 \pm 2ax + a^2$の形の三項式は**完全平方三項式**と言います。これを、二つ目の項の符号に合わせて、二項式の二乗として因数分解を行います。

完全平方三項式においては、定数項は常に負ではありません。

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

ある三項式が完全平方三項式であるかどうかを確かめるには、まず定数項がある数字の二乗になっているかを確かめ、次にその数字を2倍にしたものが一次の変数の係数となっているかを確かめます。例えば、

$$x^2 + 6x + 9$$

9が3の二乗 ($3^2 = 9$) で、さらに、3 の2倍は6、また一次の変数 x の係数と等しいので、これは完全平方三項式です。したがって、

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 &= x^2 + 2(3)x + 3^2 \\ &= (x + 3)^2. \end{aligned}$$

E

因数分解しなさい。

$$x^2 - 10x + 25$$

次の理由から完全平方三項式です。

a) 定数項がある数の二乗になっています。

25 は5の二乗です。 ($5^2 = 25$ であり、$a = 5$ となっています。)

b) x の係数は5の2倍です。

$$2a = 2(5) = 10.$$

二つ目の項は負ですので、したがって

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2.$$

因数分解しなさい。

a) $x^2 + 4x + 4$

b) $x^2 - 8x + 16$

c) $y^2 - 18y + 81$

d) $y^2 + 14y + 49$

e) $x^2 + x + \frac{1}{4}$

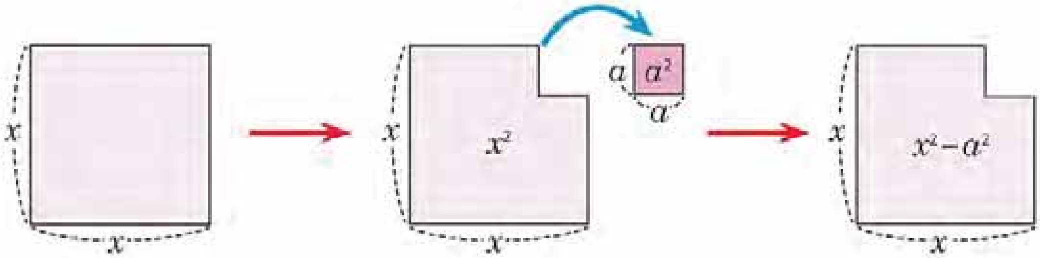
f) $y^2 - \frac{y}{2} + \frac{1}{16}$

3.6 二乗の差の因数分解

P

図形1では、一辺が x の正方形から一辺が a の正方形を切り取り（図形2）、結果として図形3のようになりました。その面積は $x^2 - a^2$ です。

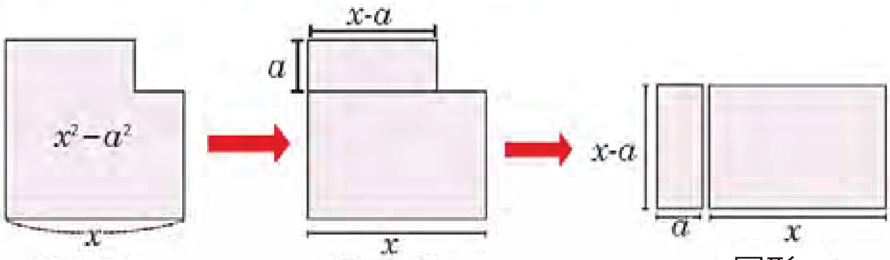
適切にカットして、図形2をパーツに分け、長方形にしなさい。



図形 1　図形2　図形3

S

次に示すように、カットし、そのパーツを再配置することができます。



図形 1　図形2　図形3

解答としては、長方形をこれらのパーツに分けましたが、これは長方形を分割し、法則を示すことを可能にする唯一の方法ではありません。

図形1の面積は $x^2 - a^2$ で、図形3の面積は $(x + a)(x - a)$ であることに注目します。
これらの式は同じ面積を表しているためです。したがって、$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$ とならなければなりません。

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a).$$

C

$x^2 - a^2$ の形の多項式を**二乗の差**と言い、乗法公式の $(x + a)(x - a)$ で因数分解します。つまり、次のようになります。

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a).$$

E

因数分解しなさい：$x^2 - 9$

$x^2 - 9$ を因数分解するには、定数項の9は3の二乗と等しく、したがって、

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= x^2 - 3^2 \\ &= (x + 3)(x - 3) \end{aligned}$$

よって、　$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3).$

因数分解しなさい。

a) $x^2 - 1$　　b) $x^2 - 16$　　c) $y^2 - 25$

d) $x^2 - y^2$　　e) $y^2 - \frac{1}{4}$　　f) $x^2 - \frac{1}{9}$

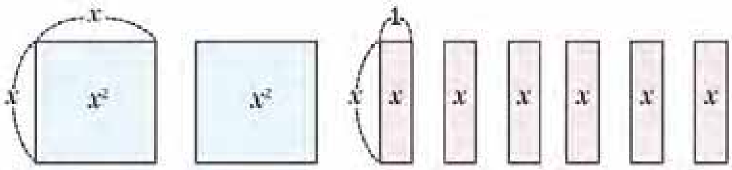
3.7 復習問題

次は、この授業までに確認した因数分解のまとめを提示します。

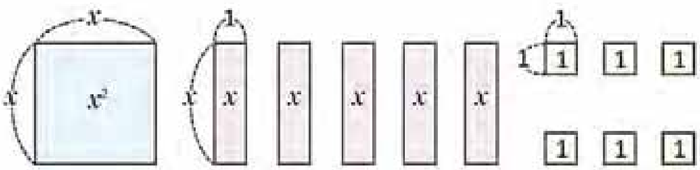
	因数分解すると	例
共通因数 $ma + mb + mc$	$m(a + b + c)$	$4x^2 + 6xy - 10x = 2x(2x + 3y - 5)$
以下の形の三項式 $x^2 + (a + b)x + ab$	$(x + a)(x + b)$	$x^2 + 2x - 35 = (x + 7)(x - 5)$
完全平方三項式 $x^2 + 2ax + a^2$.....(1) $x^2 - 2ax + a^2$.....(2)	$(x + a)^2$.....(1)	$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$
	$(x - a)^2$.....(2)	$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$
二乗の差 $x^2 - a^2$	$(x + a)(x - a)$	$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$

1. 各問で、与えられたパーツを使って長方形をつくり、高さと底辺の積として全体の面積を書きなさい。

a)



b)



2. 次の多項式の積にある因数を特定しなさい。

a) $5x(x - 1)$　　b) $(-2x)(x + 10)$

c) $(x + y)(5x - y)$　　d) $x(x - 5)(2x + 3)$

e) $2x(3x + 4)(y + 1)$　　f) $-y(2y + 9)(10 - 11y)$

3. 三項式 $x^2 - 11x + 18$ について、

a) 積が +18 に、和が −11 になる2つの数は共に正の数ですか、負の数ですか、それとも、一つが正でもう一つが負となりますか。解答の理由も述べなさい。

b) 三項式を因数分解しなさい。

4. 次の多項式を因数分解しなさい。

a) $10x^2 + 6xy$　　b) $7xy - 21y^2$

c) $-x^2 + 2xy - 3xy^2$　　d) $9x^2y - 15xy - 21xy^2$

e) $x^2 - 6x - 55$　　f) $y^2 + 5y - 50$

g) $x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{16}$　　h) $y^2 - \frac{5}{3}y + \frac{25}{36}$

i) $x^2 - 81$　　j) $y^2 - \frac{25}{36}$

3.8 変数への置き換えを利用した多項式の因数分解　第一部

P

次の多項式を因数分解しなさい。

a) $4x^2 + 12xy + 9y^2$

b) $4x^2 - 25y^2$

各例題で、共通因数を使うことができますか。前回までの授業で、学んだ方法の中でどれが使えますか。

S

a) 三項式の項に共通の単項式がありませんが、前回までの授業で学んだ方法の一つを直接使うことができます。最初の項は $2x$ の二乗で、三つ目の項は $3y$ の二乗だと注目してください。

$$(2x)^2 = 4x^2$$
$$(3y)^2 = 9y^2$$

また、$2(2x)(3y) = 12xy$、よって、$4x^2 + 12xy + 9y^2$ は完全平方三項式です。$2x = w$ 、$3y = z$ とし、完全平方三項式に因数分解します。

$$\begin{aligned} 4x^2 + 12xy + 9y^2 &= (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 && 2x = w、3y = z \text{とし、} \\ &= w^2 + 2wz + z^2 \\ &= (w+z)^2 && \text{因数分解し、} \\ &= (2x+3y)^2 && \text{再び、} w = 2x、z = 3y \text{に戻し} \end{aligned}$$

よって、$4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2$

b) 前の例題と同様に、二項式の項に共通の単項式がありません。最初の項は $2x$ の二乗で、二つ目の項は $5y$ の二乗となることに注目してください。

$$(2x)^2 = 4x^2$$
$$(5y)^2 = 25y^2$$

$2x = w$ 、$5y = z$ とし、完全平方三項式に因数分解します。

$$\begin{aligned} 4x^2 - 25y^2 &= (2x)^2 - (5y)^2 && 2x = w、5y = z \text{とし} \\ &= w^2 - z^2 && \text{因数分解し、} \\ &= (w+z)(w-z) && \text{再び戻して、} \\ &= (2x+5y)(2x-5y). \end{aligned}$$

よって、$4x^2 - 25y^2 = (2x + 5y)(2x - 5y)$

C

多項式を因数分解する場合、その項に共通する単項式が**ない**場合、変数へ置き換え、既に習った多項式に変換し、前回までの授業で学んだ形のどれかを使って、因数分解できます。

因数分解しなさい。

a) $9x^2 - 30x + 25$　　b) $16x^2 + 24xy + 9y^2$　　c) $\frac{x^2}{4} + 5x + 25$

d) $36x^2 - 25$　　e) $x^2 - 100y^2$　　f) $\frac{x^2}{4} - y^2$

3.9 変数への置き換えを利用した多項式の因数分解、 第二部

P

因数分解しなさい。

a) $(x-1)^2-(y+1)^2$

b) $(x+1)^2+2(x+1)y+y^2$

各多項式の中にある積を展開してはいけません。因数分解するために前の授業で使った手順と似たものを使います。

S

a) $(x-1)^2$ は $x-1$ の二乗で、$(y+1)^2$ は $y+1$ の二乗で、この2つは引き算であることに注目します。二乗の差として因数分解ができます。$x-1=w$、$y+1=z$ として、二乗の差を因数分解します。

$$\begin{aligned}(x-1)^2-(y+1)^2 &= w^2-z^2 && x-1=w、y+1=z\text{として}\\ &= (w+z)(w-z) && \text{因数分解し、}\\ &= (x-1+y+1)[x-1-(y+1)] && \text{再び戻して、}\\ &= (x+y)(x-y-2)\end{aligned}$$

よって、$(x-1)^2-(y+1)^2=(x+y)(x-y-2)$

b) $(x+1)^2$ は $x+1$ の二乗で、y^2 は y の二乗で、また二つ目の項は 2、$x+1$、y の積となっていることに注目します。したがって、多項式は完全平方三項式として因数分解できます。つまり、$x+1=w$ として、完全平方三項式を因数分解します。

$$\begin{aligned}(x+1)^2+2(x+1)y+y^2 &= w^2+2wy+y^2 && x+1=w\text{として}\\ &= (w+y)^2 && \text{因数分解し、}\\ &= (x+1+y)^2 && \text{あらたに } x+1=w \text{として置き換えます。}\\ &= (x+y+1)^2.\end{aligned}$$

よって、$(x+1)^2+2(x+1)y+y^2=(x+y+1)^2$

C

多項式を因数分解する場合、その項に共通する単項式が**ない**場合、変数へ置き換え、既に習った多項式に変換し、前回までの授業で学んだ形のどれかを使って、因数分解できます。

変数への置き換えを使うときは、因数分解をした後、再度置き換え、同類項をまとめ（もしあれば）、因数の項を整理しなければならないことを覚えておきます。

因数分解しなさい。

a) $4x^2-(y+2)^2$

b) $(x+3)^2-9y^2$

c) $(x-5)^2-(y-1)^2$

d) $y^2-2(x+3)y+(x+3)^2$

e) $4x^2-4x(y-7)+(y-7)^2$

f) $(x-2)^2+2(x-2)(y-3)+(y-3)^2$

3.10 連続した因数分解

P

次の多項式を因数分解しなさい。$2x^2 + 2x - 12$

前回までの授業で学んだ方法を直接使うことができますか。
まず最初に何をしなければならないでしょうか。

S

まず最初にしなければならないことは、全項から共通する因数を取り出すことです。この場合は2です。

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x - 12 &= 2(x)^2 + 2(x) - 2(6) \\ &= 2(x^2 + x - 6) \end{aligned}$$

括弧内の三項式は $(x + a)(x + b)$ の形で因数分解でき、積が -6、和が $+1$ となる、2つの数（一つは正でもう一つは負）は、3 と -2です。したがって、

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x - 12 &= 2(x^2 + x - 6) \\ &= 2(x + 3)(x - 2) \end{aligned}$$

よって、　$2x^2 + 2x - 12 = 2(x + 3)(x - 2)$.

C

多項式の因数分解をする際は、まず最初に共通となる単項式があるかどうか確認します。あれば、その単項式を取り出し、前回までの授業で習った方法のいずれかを使って二つ目の因数を因数分解します。

E

次の多項式を因数分解しなさい。$-2x^2y + 8xy - 8y$

まず、3つの項に共通する因数を取り出さなければなりません。この場合は $-2y$ です。

$$\begin{aligned} -2x^2y + 8xy - 8y &= (-2y)(x^2) + (-2y)(-4x) + (-2y)(4) \\ &= (-2y)(x^2 - 4x + 4) \\ &= (-2y)(x - 2)^2 \end{aligned}$$

$x^2 - 4x + 4$を因数分解して、

よって、$-2x^2y + 8xy - 8y = -2y(x - 2)^2$

次の多項式を因数分解しなさい。

a) $-2x^2 + 10x - 8$　　b) $2x^2 + 32x + 30$　　c) $3x^2 + 12x + 12$

d) $5xy^2 - 25xy + 30x$　　e) $2x^2 - 18$　　f) $-3y^2 + 300$

g) $-2x^2y + 8xy - 8y$　　h) $2x^2y - 12xy + 18y$　　i) $3x^2z - 12y^2z$

3.11 因数分解の組み合わせ

P

次の因数分解をしなさい。$18x^2 - 200y^2$

まず、例題にある共通因数を取り出さなければなりません。

S

x^2とy^2の係数には共通因数2があります。

$$\begin{aligned} 18x^2 - 200y^2 &= 2(9x^2) - 2(100y^2) \\ &= 2(9x^2 - 100y^2) \end{aligned}$$

$9x^2 = (3x)^2$、$100y^2 = (10y)^2$であることを念頭に置いて、

$$\begin{aligned} &= 2[(3x)^2 - (10y)^2] \\ &= 2(w^2 - z^2) \\ &= 2(w + z)(w - z) \\ &= 2(3x + 10y)(3x - 10y). \end{aligned}$$

$3x = w$、$10y = z$として、
因数分解し、
再び戻して、

$$18x^2 - 200y^2 = 2(3x + 10y)(3x - 10y).$$

C

一般的には、どんな多項式でも、因数分解をする際は、まず最初に共通する単項式が項の中にあるかどうか確認します。あれば、その単項式を取り出して二つ目の因数を因数分解します。多項式の項に共通する単 項 式 が **ない**場合、前回までの授業で学んだ方法のうちのいずれかを使って直接多項式を因数分解します。この手順は残りの因数のそれぞれに対し元の多項式が、最も簡略化された多項式の積となるまで繰り返されます。（それが可能なら）

正しく因数分解されたかどうか確認するために、全因数を掛けることができ、その結果は、元の多項式と同じでなければならないことを覚えておきます。

次の多項式を因数分解しなさい。

a) $-18x^2y^2 + 32$

b) $3x^2z - 12y^2z$

c) $18mn^2 + 6mn - 4m$

d) $27m^2 - 75n^2$

e) $12zx^2 + 36zxy + 27zy^2$

f) $36mn^2 + 24mn + 4m$

3.12 因数分解を用いた数式の計算

P

因数分解を使って、次の計算の答えを求めなさい。

a) $99^2 - 1$　　b) $35^2 - 15^2$

S

a) この式は二乗の差です。

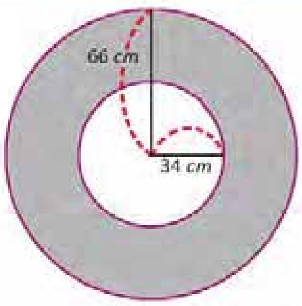
$$99^2 - 1 = (99 + 1)(99 - 1)$$
$$= (100)(98)$$
$$99^2 - 1 = 9\,800$$

b) この式も二乗の差です。

$$35^2 - 15^2 = (35 + 15)(35 - 15)$$
$$= (50)(20)$$
$$35^2 - 15^2 = 1\,000$$

E

影付きの領域の面積を計算しなさい。
（計算の答えは π の項で表したままにします）



2つの円の中心が同じ位置にある場合、**同心円**と言います。2つの円で囲まれた領域を**円環**と言います。

影付きの領域の面積を計算するには、大きい円の面積から小さい円の面積を引かなければなりません。大きい円の半径は 66 cm で、面積は、

$$\pi(66)^2 = 66^2\pi$$

小さい円の半径は 34 cm で、面積は、

$$\pi(34)^2 = 34^2\pi$$

したがって、影付きの領域の面積は、

$$66^2\pi - 34^2\pi = (66^2 - 34^2)\pi$$
$$= (66 + 34)(66 - 34)\pi$$
$$= (100)(32)\pi$$
$$66^2\pi - 34^2\pi = 3\,200\pi$$

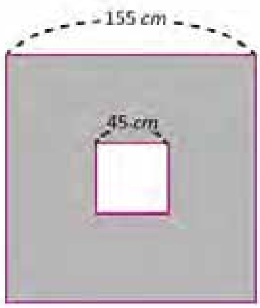
共通因数 π を取り出し、二乗の差として因数分解し、括弧の中の式を計算し、πの項で表したままにします。

よって、影付きの領域の面積は 3200π cm^2 です。

1. 因数分解を使って以下の式の計算をしなさい。

a) $35^2 - 25^2$　　b) $45^2 - 35^2$　　c) $98^2 - 4$

2. 影付きの領域の面積を計算しなさい。（四角形は両方とも正方形）



3.13 これまでの復習

1. 次の多項式を因数分解しなさい。

a) $3x^2 + 24x - 60$

b) $-4y^2 - 16y - 12$

c) $5x^2 - \frac{5}{4}$

d) $36x^2 - 60xy + 25y^2$

e) $4x^2 + 2xy + \frac{y^2}{4}$

f) $64x^2 - 49y^2$

g) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25}$

h) $(2x + 9)^2 - (3x - 2)^2$

i) $4x^2z - 16xyz + 16y^2z$

j) $5xy^2 + 105xy + 550x$

2. 因数分解を使って以下の式の計算をしなさい。

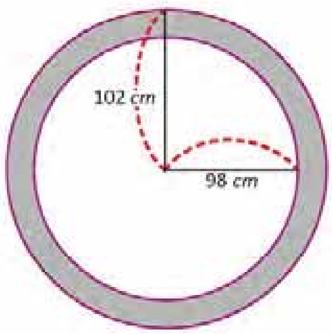
a) $75^2 - 25^2$

b) $95^2 - 25$

c) 101^2

d) 47×53

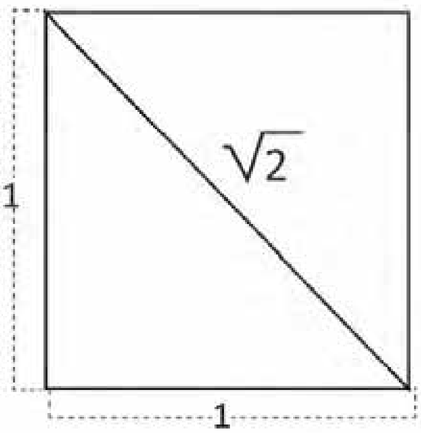
3. 影付きの領域の面積を計算しなさい。



4. 影付きの領域の面積を計算しなさい。

ユニット 2

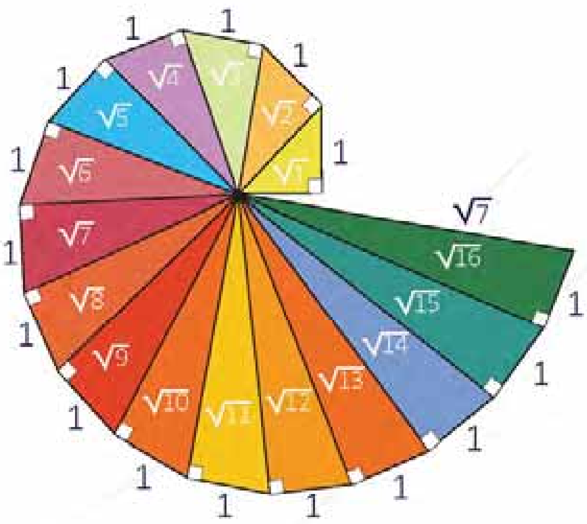
平方根



2の平方根。一辺が1の正方形の対角線。

数学の歴史では新しい数の集合の発見はいつも歓迎された訳ではありません。紀元前五世紀頃の無理数の場合もそうでした。
a.ギリシャの数学者ヒッパソスは一辺が1の正方形の対角線は分数として表現できない数であることを発見しその時代の思想家の憤慨を引き起こしこの種の数の存在を示した最初の人でした。

数学では実数までの数の普及と無限の数が存在するという知識は計算とか算数といった必要不可欠な分野の発展を可能にしてきました。さらに物の測定により高い精度を可能にし現在の物理や化学の発展を育んできました。数学で最も重要な無理数の一つは円周の長さをその直径で割り算して生ずる = 3.1415926535... 無限の小数点が続く数です。



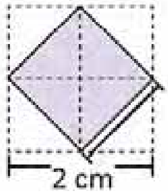
直角三角形よって得られる平方根の連続。

実数の概念を学習して数を有理数と無理数に分類し根号で数を表し平方根で演算してさらに日常の状況へその内容を適用します。

1.1 平方根の意味と記号

P

次の形は一辺が 1 cmの4つの正方形からなり、図のように内側の四角形を形作っています：



2乗すると2になる数を考えなさい

内側の正方形の面積と一辺の長さはいくつになりますか？

正方形の面積は次のように計算します：$A = L^2$

S

正方形の面積は、1 cm 角の各正方形の半分から成り立っているので、内側の正方形の面積は **2 cm²** になります。

知っている数の中に2乗するとその結果として2になる数があるかどうか、試してみると、

1 として試すと：	$1^2 = 1 < 2$	2 として試すと：	$2^2 = 4 > 2$	値は 1 と 2 の間にあります。
1.4 として試すと：	$1.4^2 = 1.96 < 2$	1.5 として試すと：	$1.5^2 = 2.25 > 2$	値は 1.4 と 1.5 の間にあります。
1.41 として試すと：	$1.41^2 = 1.9881 < 2$	1.42 として試すと：	$1.42^2 = 2.0164 > 2$	値は 1.41 と 1.42 の間にあります。
1.414 として試すと：	$1.414^2 = 1.9993 < 2$	1.415 として試すと：	$1.415^2 = 2.002 > 2$	値は 1.414 と 1.415 の間にあります。

最終的に、2乗すると2になるような少数を書くことは不可能です。よって、慣用的に、面積が2の正方形の一辺は $\sqrt{2}$**cm**で表すこととします。

C

$\sqrt{}$ の記号は、2乗するとその結果がこの記号の中にある数になるような、**負ではない**数を表します。

累乗根と呼ばれる$\sqrt{}$ の記号で表され、「平方根」と読みます。累乗根の中にある数を**被開平数**と言います。

累乗根 ⟶ $\sqrt{a}$ ⟵ 被開平数

例えば：$\sqrt{3}$ は「3の平方根」と読み、2乗すると結果として3になるような数を表します。

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

2乗すると結果が3になるような少数を書くことは不可能なことが分かります。

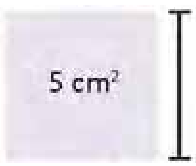
E

次の式を2乗すると、どんな数になりますか？

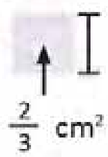
$\sqrt{\frac{2}{5}}$ 2乗すると ($\sqrt{\frac{2}{5}}$) ^{2} は数 $\frac{2}{5}$を表します。したがって、

$$\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 = \frac{2}{5}$$

1. 以下の正方形の辺の長さを求めなさい：

a) 

b) 

c) 

d) 

2. 以下の式を2乗するとなる数を求めなさい：

a) $\sqrt{7}$　b) $\sqrt{13}$　c) $\sqrt{\frac{3}{5}}$　d) $\sqrt{0.2}$

1.2 平方根の記号（根号）が付いた数の表し方

P

面積が 9 cm² の正方形の各辺の長さはいくつになるでしょう？

S

平方根の表記で各辺の長さを示します：$\sqrt{9}$ cm
これは $(\sqrt{9})^2 = 9$ ということです。

既知数の中に2乗するとその結果として9 になる数があるかどうか、試してみましょう。

2として試すと、$2^2 = 4 < 9$

3として試すと、$3^2 = 9$　よって$\sqrt{9}$ で表される数は3です。

したがって、$\sqrt{9} = 3$

そして、一辺の長さは：**3 cm**

C

累乗根の記号の中に書かれた数にはこの記号を使わずとも表すことができる数があります。これらの数は**完全平方数**として知られています。

例えば、$\sqrt{25}$は、2乗すると結果として25になる数を表します。

$$(\sqrt{25})^2 = 25$$

また、$\sqrt{25}$で表された数は5で、なぜなら：$5^2 = 25$

したがって、$\sqrt{25} = 5$

> $a > 0$ ならば、$\sqrt{a^2} = a$ となります。

E

以下の数を根号を使わず表しなさい。

a) $\sqrt{\frac{4}{9}}$

$\frac{1}{3}$として試すと；　$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

$\frac{2}{3}$として試すと；　$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

したがって、$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$となり、これは完全平方数です。

b) $\sqrt{0.16}$

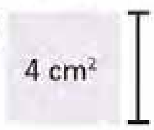
0.3 として試すと：$(0.3)^2 = 0.09$.

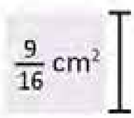
0.4 として試すと：$(0.4)^2 = 0.16$.

したがって、$\sqrt{0.16} = 0.4$ となり、これは完全平方数です。

1. 以下の正方形の辺の長さを求めなさい：

a) 

b) 

c) 

d) 

2. 以下の数を根号を使わず表しなさい：

a) $\sqrt{36}$　　b) $\sqrt{81}$　　c) $\sqrt{\frac{1}{25}}$　　d) $\sqrt{0.01}$

1.3 数の平方根

P

2乗するとその結果が9になる数を求めなさい。

S

2乗するとその結果が9になる数を探します。

この数が a ならば、
数 a は、方程式 $a^2 = 9$ を成り立たせます。
解は $a = 3$ と $a = -3$.

2乗すると 9 になる数は限定されていて、それは：3 と –3.

C

正の数 **a** の**平方根**は、2乗するとその結果が **a** になる数と定義されます。

よって、次を満たせば、数 **b** は **a** の平方根です： $b^2 = a$.

この等式を成り立たせる数は b と $-b$ ： $(-b)^2 = b^2 = a$.

また、**a** の平方根は **b** と **–b** であると言えます。

> 次の理由から、平方根を1つだけ持つ唯一の数は零だということに注目しましょう：それは、$0^2 = 0$ にしかならないからです。

例えば：9 の平方根は：

$(-3)^2 = 9$ と $3^2 = 9$ なので、3 と – 3

正および負の平方根を表すために、**プラスマイナス**と読む記号、± を使うことになります：

9 の平方根は：± 3

正の記号を持つ平方根は**平方根**として知られ、$\sqrt{a}$ と表記されます。例えば：

$$\sqrt{9},\ \sqrt{\frac{25}{4}},\ \sqrt{5}、等$$

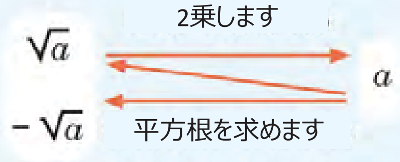
負の記号を持つ平方根は**負の平方根**として知られ、$\sqrt{a}$ の逆の数、つまり、$-\sqrt{a}$ となります。
例えば：

$$-\sqrt{9},\ -\sqrt{\frac{25}{4}},\ -\sqrt{5}、等$$

一般に正の数 **a** の場合次のようになります。

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

$$\left(-\sqrt{a}\right)^2 = a$$



注目しましょう：

$3=\sqrt{9}$ $\xrightarrow{\text{2乗します}}$ 9

$-3=-\sqrt{9}$ $\xleftarrow{\text{平方根を求めます}}$ 9

a がどんな数であれ実数ならば、$\sqrt{a^2}=|\ a\ |$になります。
例えば： $\sqrt{(-5)^2}=|-5\,|=5.$

記号｜｜は数の絶対値を表します。

E

以下の数の平方根を求めなさい：

a) $\frac{25}{4}$ 数を求めると： $\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$ と $-\sqrt{\frac{25}{4}}=-\frac{5}{2}.$

また、平方根は： $\pm\frac{5}{2}.$

b) 5 数を求めると： $\left.\begin{matrix}\sqrt{5}\\-\sqrt{5}\end{matrix}\right\}$ これらは根号を使わずに表すことはできません。

また、平方根は： $\pm\sqrt{5}.$

1. 2乗すると次のような結果になる数はそれぞれいくつでしょう：

a) 144 b) 169 c) 225

d) 121 e) $\frac{4}{9}$ f) $\frac{41}{36}$

2. 以下のそれぞれの数の平方根を求めなさい。

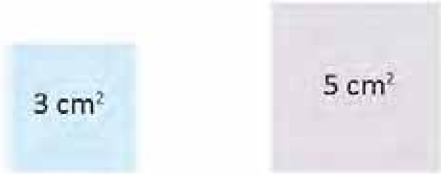
a) 25 b) 49 c) $\frac{9}{36}$

d) 10 e) 13 f) 0.04

1.4 平方根の大小関係

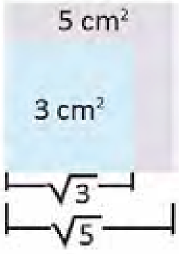
P

1つは 3 cm^2 、もう一方は、5 cm^2 の面積の異なる2つの正方形があります。
どちらの正方形がより長い辺を持っていますか？



S

各正方形の辺の長さを解析するために、次のように2つの正方形を配置することができます。



そして、このように2つの正方形を置くことで、3 cm^2 の面積の正方形の一辺は 5 cm^2 の面積の正方形の一辺より短い、ということが分かります。

"a" の面積の一辺は： $\sqrt{a}$.

よって、$3 < 5$ なので、$\sqrt{3} < \sqrt{5}$ のようになります。

C

一般的には、平方根の被開平数がもう一方の被開平数より小さいならば、よって、最初の平方根は2番目の平方根より小さくなり、したがって：

$a, b > 0$ の場合、$a < b$ ならば、よって $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

例えば：

$\sqrt{12}$ か $\sqrt{11}$ のどちらの数が大きいでしょう？

$11 < 12$ なので、よって $\sqrt{11} < \sqrt{12}$

被開平数は、正方形の面積と、また、累乗根は同じ正方形の一辺長さと関連することに注目しましょう。

E

負の数を比べる場合は、大きな絶対値を持っているものがより小さくなります。

以下の数の大小関係を明らかにしなさい：

a) 3 と $\sqrt{7}$

3 は $\sqrt{9}$ のように表されるので

また、$\sqrt{9}$ と $\sqrt{7}$ を比較すると

$9 > 7$ よって、$\sqrt{9} > \sqrt{7}$

したがって： $3 > \sqrt{7}$

b) $-\sqrt{15}$ y $-\sqrt{\frac{17}{2}}$

$\sqrt{15}$ と $\sqrt{\frac{17}{2}}$ を比較すると、

$\frac{17}{2} < 15$ よって、 $\sqrt{\frac{17}{2}} < \sqrt{15}$.

したがって、負の数であることから、次のようになる。

$$-\sqrt{\frac{17}{2}} > -\sqrt{15}.$$

1. <、>、= のなかから適切な記号を入れなさい。

a) $\sqrt{7}\ \square\ \sqrt{6}$　b) $2\ \square\ \sqrt{3}$　c) $0.7\ \square\ \sqrt{0.7}$

d) $-\sqrt{14}\ \square\ -\sqrt{13}$　e) $-\sqrt{\frac{2}{7}}\ \square\ -\frac{2}{7}$　f) $\sqrt{\frac{1}{2}}\ \square\ \sqrt{0.5}$

問題 c)、e)、f) では注意して、2乗したときにどちらが大きくなるか良く見てください。

2. 以下の数を小さい順に並べなさい。

a) $\sqrt{10}$　b) -5　c) 10　d) $-\sqrt{15}$　e) $\sqrt{\frac{100}{4}}$　f) $-\sqrt{1.5}$

1.5 有理数と無理数

P

以下の数を分数で表しなさい：

a) 7　　b) 0.25　　c) −2.3

S

a) 7

$7 = \frac{7}{1}$

1で割るとすべて、結果として元と同じ数になります。

b) 0.25

$0.25 \times \frac{100}{100} = \frac{25}{100}$ 1を掛けて

$= \frac{1}{4}$ 約分して

c) −2.3

$-2.3 \times \frac{10}{10} = -\frac{23}{10}$

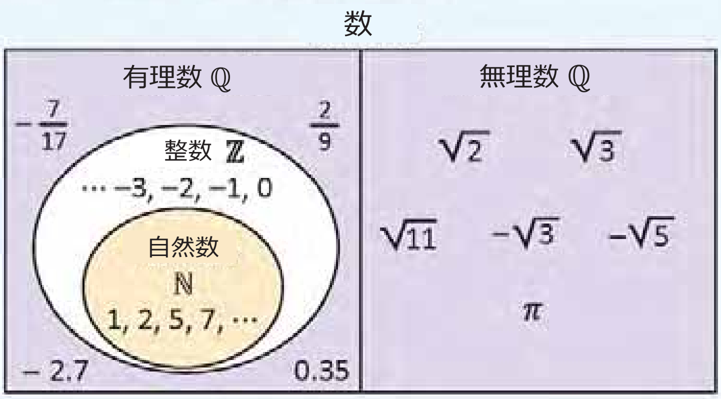
b) と c) では、小数点以下が消えるような数を探します。どちらの場合も、1を掛けており、すなわち数の値は同じです。

C

分数で表すことのできる数、つまり、$\frac{a}{b}$の形を持ち a と b が整数で、$b \neq 0$ である数を**有理数**と呼び、次のように表現（表記）します：ℚ.

上記の問題では、すべての数が分数で表せましたが、よって、それらの数は有理数となります。

$\frac{a}{b}$の形で表せない数は**無理数**と呼ばれ、次のように表現（表記）します：ℚ。例えば：$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi$



1. 以下の数を、各場合に応じて、有理数か無理数かで分類しなさい。

a) 8　　b) −0.09　　c) $-\sqrt{11}$　　d) $-\pi$

2. 以下の数を分数で表しなさい：

a) 2　　b) 0.35　　c) −6　　d) −1.5

3. 以下の分数を割り算して、少数で表しなさい。

a) $\frac{3}{5}$　　b) $\frac{5}{8}$　　c) $\frac{5}{11}$　　d) $\frac{4}{3}$

問題 1 の c) と d)では結果がどうなったかに注目してください。

1.6 少数の分数への変換

P

以下の数を分数で表しなさい。

a) 1.333333...

b) 0.262626...

数字の最後の3つの点は、小数点以下の部分が同じパターンを無限に繰り返すことを意味しています。

S

$x = 1.333333...$ を考えると、$10x$ と x の差を分析すると：

$$\begin{array}{rrl} & 10x = & 13.3333... \\ - & x = & 1.3333... \\ \hline & 9x = & 12.0000... \end{array}$$

x を求めると： $x = \dfrac{\overset{4}{\cancel{12}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} = \dfrac{4}{3}$.

したがって、 $x = 1.333333 = \dfrac{4}{3}$.

$x = 0.26262626...$ を考慮すると、$100x$ と x の差を分析すると：

$$\begin{array}{rrl} & 100x = & 26.262626... \\ - & x = & 0.262626... \\ \hline & 99x = & 26.000000... \end{array}$$

小数に10、100、1000 ... を掛けると、小数点はそれぞれ1スペース、2スペース、3スペース ... といったように右に移動します。

よって： $x = \dfrac{26}{99}$.

したがって：

$0.26262626 = \dfrac{26}{99}$.

13.333... から1.333... 、また、26.2626... から 0.2626... を引くと無限に循環する部分が除かれます。

C

小数部分に何桁かの数字を持ち、その何桁かの数字が無限に繰り返される小数は、 **循環小数**として知られています。このような数を表現するには、循環節（繰り返される数）の上に線、つまり、オーバーラインを用いることになります。したがって 1.873535... = $1.87\overline{35}$.

循環節が1桁または2桁の数を分数に変換するには：

1. 数を x で表し、$10x$（または $100x$）を計算します。
2. 循環節を除くために、$10x$（または $100x$）から x を引きます。
3. x を解き、この循環小数に相当する分数を約分します。

例えば： $2.\overline{15}$

1. $x = 2.\overline{15}$ $\quad 100x = 215.\overline{15}$

循環節 2桁

2.
$$\begin{array}{rrl} & 100x = & 215.1515... \\ - & x = & 2.1515... \\ \hline & 99x = & 213.0000... \end{array}$$

3. $x = \dfrac{\overset{71}{\cancel{213}}}{\underset{33}{\cancel{99}}} = \dfrac{71}{33}$

有理数はすべて、小数もしくは循環小数で表せます。

1. 以下の小数を循環小数か、循環小数ではないかで、分類しなさい。

a) 3.141592

b) 1.452727...

c) 14.7777...

d) 2.7272...

e) 0.873521

f) 1.8555...

2. 以下の循環小数を分数で表しなさい。

a) $0.\overline{4}$

b) $0.\overline{17}$

c) $3.\overline{5}$

d) $1.\overline{25}$

e) $0.\overline{741}$

f) $4.\overline{217}$

1.7 実数の定義

P

以下の数を数直線上で示しなさい。

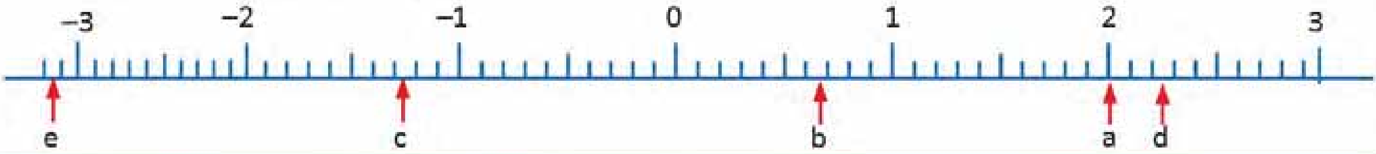
a) 2　　b) $\frac{2}{3}$　　c) $-1.271212...$　　d) $\sqrt{5}$　　e) $-\pi$

S

これらの数を小数で表したものを使って。

a) $2 = 2$　　b) $\frac{2}{3} = 0.\overline{6}$　　c) $-1.271212...$　　d) $\sqrt{5} = 2.236...$　　e) $-\pi = -3.141...$

数直線上に置いて。



C

数直線上の各点に1つの実数が相当し、またその逆も同様です。

有理数と無理数からなる集りは、**実数**として知られています。

実数は、次の記号で表されます：$\mathbb{R}$
例えば：

- 正数と負数の整数、および零は、有理数なので実数です。

$$2 = \frac{2}{1},\ -3 = \frac{-3}{1},\ 0 = \frac{0}{1}$$

- 正数と負数の分数は、有理数なので実数です。

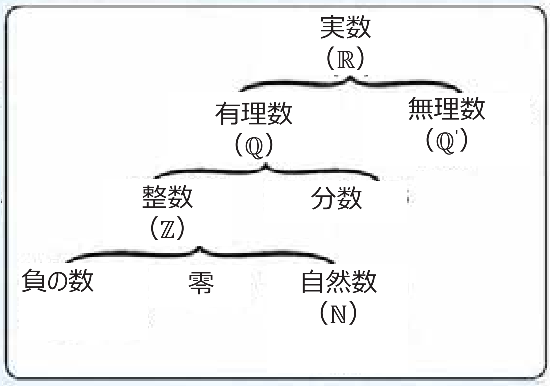
$$\frac{3}{5},\ -\frac{3}{5} = \frac{-3}{5}$$

- 有理数または無理数なので、小数になります。
  $0.7, -0.34, 0.\overline{3}, -1.2\overline{34}, 4.231574...$, 等。

- 無理数なので、平方根で表された数になります。

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{10}\ 等。$$

また、実数間では、たし算、引き算、掛け算、割り算ができます。



以下の数はなぜ実数なのか説明しなさい。

a) 7　　b) -15　　c) $\frac{5}{9}$　　d) -0.04

e) $3.141592...$　　f) $-1.45\overline{27}$　　g) $14.\overline{7}$　　h) $-2.\overline{72}$

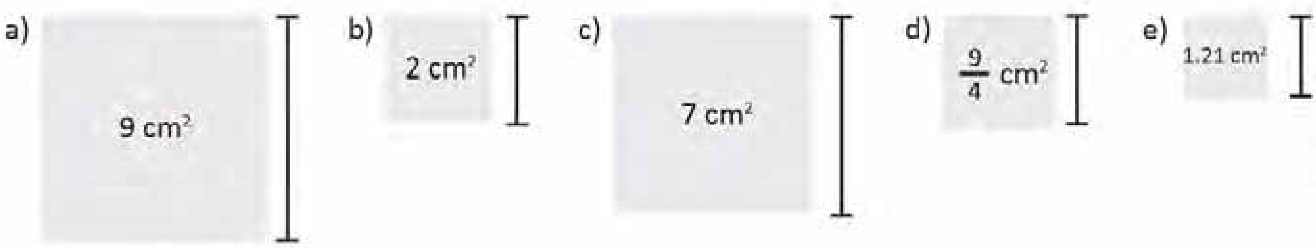
i) $\sqrt{7}$　　j) $-\sqrt{16}$　　k) π　　l) $-\sqrt{0.09}$

1.8 復習問題

1. 以下の判断が正しければ (V) また誤っていれば (F) としなさい。

   a) 零は有理数ではありません。 $\boxed{}$
   b) 分数で$0.\bar{9}$を表すと$\frac{9}{9}$ $\boxed{}$
   c) 等式$\sqrt{(-2)^2} = -2$は正しいです。 $\boxed{}$
   d) 数 $\sqrt{16}$ は有理数です。 $\boxed{}$
   e) 無理数の引き算をすると答えは常に別の無理数になります。 $\boxed{}$

2. 以下の正方形の辺の長さを求めなさい：



3. 以下の数の平方根を求めなさい：

   a) 81　　b) 17　　c) $\frac{16}{49}$　　d) 0.4

4. 以下の数を根号を使わず表しなさい：

   a) $\sqrt{36}$　　b) $-\sqrt{\frac{64}{25}}$　　c) $-\sqrt{0.36}$　　d) $\sqrt{2.25}$

1.9 復習問題

1. 以下の数のうち等しいのはどれとどれですか：

   a) $(\sqrt{2})^2$　　b) $\sqrt{2^2}$　　c) $(-\sqrt{2})^2$　　d) $\sqrt{(-2)^2}$

2. 以下の数を小さい順に並べなさい：

   a) $\sqrt{3}$　　b) 2　　c) -3　　d) $-\sqrt{2}$　　e) $\sqrt{\frac{5}{3}}$　　f) $-\sqrt{2.9}$

3. 以下の a) と b) の問題で：

   a) 示された累乗を用いて$\sqrt{15}$ の近似値を求めなさい。

$3.86^2 = \boxed{}$　　$3.87^2 = \boxed{}$　　$3.88^2 = \boxed{}$　　$3.89^2 = \boxed{}$

$$\boxed{} < \sqrt{15} < \boxed{}$$

   b) 計算機を用いて、以下の無理数の近似値を小数第2位まで求めなさい。

$$\boxed{} < \sqrt{7} < \boxed{}$$

$$\boxed{} < -\sqrt{14} < \boxed{}$$

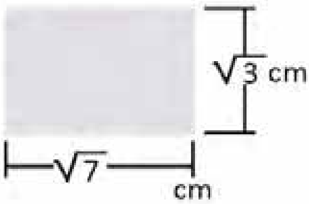
4. 以下の実数を有理数と無理数で分類しなさい。有理数ならば、$\frac{a}{b}$ の形で表しなさい。

   a) 15　　b) $-1.252547...$　　c) $\sqrt{7}$　　d) $-\sqrt{0.01}$

2.1 平方根のかけ算

P

高さ $\sqrt{3}$ cm 、底辺 $\sqrt{7}$ cm の長方形の面積を求めましょう。



S

面積を求めるには $\sqrt{3} \times \sqrt{7}$のかけ算が必要です。
以下のとおり計算します

累乗の公式では次が成り立ちます
$a^2b^2 = (ab)^2$

$$(\sqrt{3}\times\sqrt{7})^2 = (\sqrt{3}\times\sqrt{7})\times(\sqrt{3}\times\sqrt{7})$$
$$= (\sqrt{3})^2\times(\sqrt{7})^2$$
$$= 3\times 7$$

次のようになります　$(\sqrt{3}\times\sqrt{7})^2 = 3\times 7.$

次に正の平方根をとります：　$\sqrt{3}\times\sqrt{7} = \sqrt{3\times 7} = \sqrt{21}$
$= \sqrt{21}$ cm^2

C

一般的に、$a, b \geq 0$ のとき、$\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ を求めると
$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = a \times b$ が成り立ちます。
正の平方根をとって：
$$\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{a\times b}$$
各平方根の被開平数を乗算します。

例えば：
$$\sqrt{3}\times\sqrt{2} = \sqrt{3\times 2} = \sqrt{6}$$

E

次の平方根のかけ算をしましょう。

a) $(-\sqrt{2})\times\sqrt{8}$

符号の法則より：

$-(\sqrt{2}\times\sqrt{8}).$

そこから：

$-(\sqrt{2}\times\sqrt{8}) = -(\sqrt{2\times 8}) = -\sqrt{16} = -\sqrt{4^2} = -4.$

b) $(-\sqrt{5})\times(-\sqrt{3})$

符号の法則より：

$(-\sqrt{5})\times(-\sqrt{3}) = (\sqrt{5}\times\sqrt{3})$

そこから：

$(\sqrt{5}\times\sqrt{3}) = (\sqrt{5\times 3}) = \sqrt{15}.$

注目
$\sqrt{4^2} = 4$
しかし $\sqrt{(-4)^2}$ は -4 ではありません、なぜなら
$\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4.$

次の平方根のかけ算をしましょう。

a) $\sqrt{5}\times\sqrt{7}$　b) $\sqrt{2}\times\sqrt{8}$　c) $(-\sqrt{3})\times\sqrt{7}$　d) $(-\sqrt{10})\times(-\sqrt{7})$

e) $\sqrt{10}\times(-\sqrt{3})$　f) $\sqrt{3}\times(-\sqrt{12})$　g) $(-\sqrt{18})\times\sqrt{2}$　h) $(-\sqrt{50})\times(-\sqrt{2})$

2.2 平方根のわり算

P

$\sqrt{3} \div \sqrt{7}$ のわり算の方法を見つけます。

S

わり算を分数で表します： $\sqrt{3} \div \sqrt{7} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

累乗の公式では次が成り立ちます $\dfrac{a^2}{b^2} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^2$

また、平方根は次が成り立ちます： $(\sqrt{3})^2 = 3$ $(\sqrt{7})^2 = 7$

よって、 $\dfrac{(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{7})^2} = \dfrac{3}{7}$. 累乗の特徴から： $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2 = \dfrac{3}{7}$.

2乗して $\dfrac{3}{7}$ となる正の数は $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$ です。

正の平方根をとって： $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

したがって： $\sqrt{3} \div \sqrt{7} = \sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

C

一般的に、$a \geq 0, b > 0$ のとき、$\sqrt{a} \div \sqrt{b}$ を求めるには

分数で表し、次のようになります $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \dfrac{a}{b}$.

正の平方根をとって： $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

例えば： $\sqrt{3} \div \sqrt{5} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

各平方根の被開平数をわり算し、分数で表します。

E

次の平方根のわり算をしましょう：

a) $(-\sqrt{6}) \div \sqrt{10}$

符号の法則より：

$$(-\sqrt{6}) \div \sqrt{10} = -\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}\right).$$

そこから：

$$-\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}\right) = -\sqrt{\frac{6}{10}} = -\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

b) $(-\sqrt{8}) \div (-\sqrt{18})$

符号の法則より：

$$(-\sqrt{8}) \div (-\sqrt{18}) = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}}.$$

そこから：

$$\sqrt{\frac{8}{18}} = \sqrt{\frac{8}{18}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}.$$

次の平方根のわり算をしましょう。

a) $\sqrt{2} \div \sqrt{5}$ b) $\sqrt{2} \div \sqrt{8}$ c) $(-\sqrt{3}) \div \sqrt{6}$ d) $(-\sqrt{15}) \div (-\sqrt{6})$

e) $\sqrt{3} \div (-\sqrt{7})$ f) $\sqrt{27} \div (-\sqrt{12})$ g) $(-\sqrt{20}) \div \sqrt{5}$ h) $(-\sqrt{12}) \div (-\sqrt{3})$

2.3 根号を使わない数の表し方

P

$\sqrt{225}$ を根号を使わずに表します。

S

225を素因数分解で表します：
したがって、$225 = 3^2 \times 5^2$
平方根は以下のようになります：

$$\sqrt{225} = \sqrt{3^2 \times 5^2}$$

根号のかけ算を用いて：

$$\sqrt{3^2 \times 5^2} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{5^2} = 3 \times 5 = 15$$

したがって： $\sqrt{225} = 15.$

225の素因数分解は

225	3
75	3
25	5
5	5
1	

よって $225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 3^2 \times 5^2$

C

根号を使わない数の表し方：
1. 被開平数の素因数分解を解きます。
2. 累乗のかけ算部分の平方根を分けます。
3. 各平方根を計算し、結果をかけ算します。

例えば： $\sqrt{324}$

1. $324 = 2^2 \times 3^2 \times 3^2$
2. $\sqrt{324} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 3^2}$
   $= \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3^2}$
3. $\sqrt{324} = 2 \times 3 \times 3 = 18$

324	2
162	2
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

E

$\sqrt{\dfrac{400}{441}}$ を根号を使わずに表します。

$\sqrt{\dfrac{400}{441}} = \dfrac{\sqrt{400}}{\sqrt{441}}$ 分子と分母を処理します：

1. $400 = 2^2 \times 2^2 \times 5^2$　2. $\sqrt{400} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 5^2} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{5^2}$　3. $\sqrt{400} = 2 \times 2 \times 5 = 20$

1. $441 = 3^2 \times 7^2$　2. $\sqrt{441} = \sqrt{3^2 \times 7^2} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{7^2}$　3. $\sqrt{441} = 3 \times 7 = 21$

解説：

400	2
200	2
100	2
50	2
25	5
5	5
1	

441	3
147	3
49	7
7	7
1	

したがって： $\dfrac{\sqrt{400}}{\sqrt{441}} = \dfrac{20}{21}.$

以下の数を根号を使わずに表しましょう：

a) $\sqrt{900}$　　b) $-\sqrt{625}$　　c) $-\sqrt{441}$

d) $-\sqrt{\dfrac{49}{144}}$　　e) $\sqrt{\dfrac{81}{196}}$　　f) $-\sqrt{\dfrac{100}{121}}$

2.4 有理数と平方根のかけ算

P

$5 \times \sqrt{2}$ のかけ算をして、結果を1つの数の平方根で表します。

S

5を根号を使って $5 = \sqrt{25}$ と表します。

よって、$5 \times \sqrt{2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2}$ が求められます。

かけ算します。 $\sqrt{25} \times \sqrt{2} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{50}$.

したがって、 $5 \times \sqrt{2} = \sqrt{50}$.

> かけ算を表すには
> $5 \times \sqrt{2}$ は以下のように表すことができます：
> $5\sqrt{2}$

C

$a\sqrt{b}$は、$a, b \geq 0$ のとき $a \times \sqrt{b}$ のかけ算を記号で表したものです。

$a \times \sqrt{b}$ のかけ算をして、結果を1つの数の平方根で表すには：

1. a を根号で表します。

$$a = \sqrt{a^2}$$

2. 平方根をかけ算します。

$$a \times \sqrt{b} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} = \sqrt{a^2 \times b}$$

例えば： $3\sqrt{3}$

1. $3 = \sqrt{9}$

2. $3\sqrt{3} = 3 \times \sqrt{3} = \sqrt{9} \times \sqrt{3}$
$= \sqrt{9 \times 3}$
$= \sqrt{27}$

E

$\frac{\sqrt{5}}{3}$ を1つの数の平方根で表しましょう。

3 を根号で表すと $3 = \sqrt{9}$

次に、 $\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}}$.

次の数を1つの数の平方根で表しましょう。

a) $3\sqrt{2}$ b) $5\sqrt{3}$ c) $4\sqrt{5}$

d) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{7}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{9}$

2.5 平方数でない被開平数の約分

P

a) $\sqrt{12}$ と b) $\sqrt{\frac{5}{9}}$ の式をどう約分しますか。

S

a) 12 を素因数分解します：

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3}$$

式を約分して：

$$\sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

したがって：

$$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

b) 根号を分数で表します：

$$\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}}$$

分母の平方根を約分して：

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

したがって：

$$\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

C

被開平数を元より小さくすることを平方根の**約分**といいます。
平方根の被開平数をできるだけ小さな値にすることを、平方根を**最小値の式に約分する**といいます。
a, b $\geq$ ***0*** **なら、**$\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$

たとえば、$\sqrt{90}$ を最小値の式に約分します。

90 を素因数分解して：

$$\sqrt{90} = \sqrt{3^2 \times 2 \times 5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{2 \times 5} = 3\sqrt{10}$$

解説：

90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$\sqrt{90}$ を最小値の式に約分すると $3\sqrt{10}$ になります。この被開平数はこれ以上小さくできません。**根号を使って計算をする際は、常に結果を最小値の式に約分します。**

E

$-\sqrt{396}$ を約分して最小値の式で表しましょう。
396 を素因数分解して：

$$-\sqrt{396} = -\sqrt{2^2 \times 3^2 \times 11} = -\sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{11} = -2 \times 3 \times \sqrt{11} = -6\sqrt{11}$$

解説：

396	2
198	2
99	3
33	3
11	11
1	

この被開平数をこれ以上小さくできないので、$-\sqrt{396}$ の最小値の式に約分した結果は： $-6\sqrt{11}$

1. 次の平方根を約分しましょう：

a) $\sqrt{18}$　b) $-\sqrt{\frac{6}{25}}$　c) $\sqrt{27}$　d) $-\sqrt{200}$　e) $-\sqrt{\frac{5}{81}}$

2. 次の平方根を最小値の式に約分しましょう。

a) $\sqrt{252}$　b) $-\sqrt{450}$　c) $\sqrt{405}$

2.6 約分を使った平方根のかけ算

P

$\sqrt{28} \times \sqrt{18}$ のかけ算をしましょう。

S

計算のまえに約分します。

$\sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = 2\sqrt{7}$

$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$

したがって：

$\sqrt{28} \times \sqrt{18} = 2\sqrt{7} \times 3\sqrt{2}$

$= 2 \times 3 \times \sqrt{7} \times \sqrt{2}$

$= 6\sqrt{14}$

最初からかけ算します。

$\sqrt{28} \times \sqrt{18} = \sqrt{28 \times 18}$

次に素因数で表します：

$\sqrt{28 \times 18} = \sqrt{7 \times 2^2 \times 3^2 \times 2}$

そして、約分します：

$\sqrt{7 \times 2^2 \times 3^2 \times 2} = 2 \times 3 \times \sqrt{7 \times 2}$

$= 6\sqrt{14}$

大きな数の計算をしなくていいように、かけ算をしないことに注目します。

28 × 18.

C

被開平数が大きな数の平方根のかけ算には次の方法を使います：

1. 可能なら各平方根を約分します。
2. 約分した平方根をかけ算します。
3. 可能なら約分します。

例えば：　$\sqrt{20} \times \sqrt{90}$

1. $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$　　$\sqrt{90} = 3\sqrt{10}$
2. $2\sqrt{5} \times 3\sqrt{10} = 2 \times 3 \times \sqrt{5} \times \sqrt{10} = 6\sqrt{50}$
3. $6\sqrt{50} = 6 \times 5\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$

E

$-\sqrt{98} \times \sqrt{80}$のかけ算をしましょう。

被開平数が大きいときは、かけ算の前に素因数分解します。

$-\sqrt{98} \times \sqrt{80} = -\sqrt{98 \times 80} = -\sqrt{2 \times 7^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 5}$

$= -7 \times 2 \times 2 \times \sqrt{2 \times 5}$

$= -28\sqrt{10}$

解説：

98	2		80	2
49	7		40	2
7	7		20	2
1			10	2
			5	5
			1	

次の平方根のかけ算をしましょう。

a) $\sqrt{20} \times \sqrt{12}$　　b) $\sqrt{75} \times \sqrt{50}$　　c) $\sqrt{18} \times (-\sqrt{50})$　　d) $(-\sqrt{27}) \times (-\sqrt{32})$

e) $\sqrt{10} \times \sqrt{14}$　　f) $\sqrt{8} \times \sqrt{6}$　　g) $\sqrt{12} \times (-\sqrt{15})$　　h) $\sqrt{96} \times (-\sqrt{20})$

2.7 分母の有理化

P

分母に平方根がない、$\frac{1}{\sqrt{2}}$ に同等の分数を見つけましょう。

S

同等となる分数は： $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

かけ算をします： $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

したがって： $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

分母と分子に同じ数を掛けたり割ったりすると、同等の分数になります。つまり、元の分数と同じ大きさの分数を表すということです。例えば：

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{2}{6}$$

計算機でそれぞれの値を確認しましょう。

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707106...$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707106...$$

分母の平方根が約分された式は計算機でも使いやすく、また分母が整数なので分数の計算がしやすくなることに注目します。

C

分母に平方根をもたない同等の分数を使って計算する方法を、**分母の有理化**といいます。

$a > 0$ のとき分数 $\frac{b}{\sqrt{a}}$ の分母を有理化するには次の方法を使います：

1. 分数 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$ をかけます。
2. かけ算をして、結果を約分します。

$$\frac{b}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{a}$$

例えば、$\frac{3}{\sqrt{6}}$ を有理化します：

1. $\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$
2. $\frac{3}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{3 \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

平方根の計算を行う際は常に分母の平方根を有理化しなければなりません。

E

次の数を有理化しましょう： a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ b) $-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}}$.

a) 1. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$

2. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3 \times 7}}{7} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

b) $\sqrt{12}$を約分します： $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

1. $-\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = -\left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$

2. $-\left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = -\left(\frac{\sqrt{5} \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}}\right) = -\left(\frac{\sqrt{5 \times 3}}{2 \times 3}\right) = -\frac{\sqrt{15}}{6}$

次の数を有理化しましょう。

a) $\frac{1}{\sqrt{7}}$　b) $-\frac{1}{\sqrt{11}}$　c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$　d) $\frac{8}{\sqrt{20}}$

e) $\frac{5}{\sqrt{3}}$　f) $\frac{7}{\sqrt{21}}$　g) $-\frac{12}{\sqrt{18}}$　h) $-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{24}}$

2.8 平方根のたし算とひき算

P

次の計算をしましょう：

a) $7\sqrt{3}+2\sqrt{3}$ b) $7\sqrt{3}-2\sqrt{3}$

S

a) $a=\sqrt{3}$ として： $7\sqrt{3}+2\sqrt{3}=7a+2a=9a=9\sqrt{3}$

b) $a=\sqrt{3}$ として： $7\sqrt{3}-2\sqrt{3}=7a-2a=5a=5\sqrt{3}$

$7a=a+a+a+a+a+a+a.$
$2a=a+a.$

C

平方根のたし算とひき算では、同じ被開平数の平方根の係数をたし算、ひき算します。

例： a) $6+5\sqrt{7}-3\sqrt{7}$ b) $3\sqrt{2}-4\sqrt{3}+2\sqrt{2}$

解説：
$\sqrt{2}+\sqrt{3}\neq\sqrt{5}$
$1.41...+1.73...\neq 2.23...$
$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ はこれ以上簡単にできません。

同じ被開平数をもつ数を見つけます：

$6+5\sqrt{7}-3\sqrt{7}$ | $3\sqrt{2}-4\sqrt{3}+2\sqrt{2}$

同じ被開平数の平方根の係数をたし算、ひき算します。

$6+5\sqrt{7}-3\sqrt{7}=6+(5-3)\sqrt{7}$ | $3\sqrt{2}-4\sqrt{3}+2\sqrt{2}=(3+2)\sqrt{2}-4\sqrt{3}$

したがって：

$6+5\sqrt{7}-3\sqrt{7}=6+2\sqrt{7}$ | $3\sqrt{2}-4\sqrt{3}+2\sqrt{2}=5\sqrt{2}-4\sqrt{3}$

$\sqrt{a}+\sqrt{a}$ のたし算に注意します。$\sqrt{a+a}=\sqrt{2a}$ **ではありません。** $2\sqrt{a}$ になります。

注意しましょう
かけ算： $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$
たし算： $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$

次の平方根の計算をしましょう。

a) $\sqrt{3}+4\sqrt{3}$ b) $9\sqrt{2}-7\sqrt{2}$ c) $\sqrt{5}-7\sqrt{5}$ d) $5\sqrt{6}+7\sqrt{6}+8$

e) $2\sqrt{2}-6-7\sqrt{2}$ f) $9\sqrt{5}+7\sqrt{5}+4\sqrt{7}$ g) $7\sqrt{6}-3\sqrt{2}+8\sqrt{2}$ h) $5\sqrt{7}-4\sqrt{3}-8\sqrt{7}$

2.9 約分と有理化を使った平方根のたし算とひき算

P

次の計算をしましょう： a) $\sqrt{18}-\sqrt{32}+\sqrt{50}$ b) $\sqrt{12}-\frac{6}{\sqrt{3}}$.

S

a) 各平方根を約分して：

$$\sqrt{18} = \sqrt{2\times 3^2} = 3\sqrt{2}$$
$$\sqrt{32} = \sqrt{2\times 4^2} = 4\sqrt{2}$$
$$\sqrt{50} = \sqrt{2\times 5^2} = 5\sqrt{2}$$

平方根をたし算します：

$$\sqrt{18}-\sqrt{32}+\sqrt{50} = 3\sqrt{2}-4\sqrt{2}+5\sqrt{2}$$
$$= (3-4+5)\sqrt{2}$$
$$= 4\sqrt{2}$$

b) 一方の平方根を約分し、もう一方は有理化して：

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2\times 3} = 2\sqrt{3}$$
$$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6}{3}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

平方根をひき算します：

$$\sqrt{12}-\frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}-2\sqrt{3}$$
$$= 0$$

同じ被開平数をもつ平方根を**同類項の平方根**といいます。

C

被開平数が異なる平方根のたし算とひき算は：

1. それぞれの項を最小の式に約分します。
2. できるものは平方根を有理化します。
3. 同類項でたし算とひき算を計算します。

例えば： $\sqrt{20}-\sqrt{45}+\frac{30}{\sqrt{5}}$.

1. $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
   $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
2. $\frac{30}{\sqrt{5}} = \frac{30}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{30}{5}\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$
3. $\sqrt{20}-\sqrt{45}+\frac{30}{\sqrt{5}}$
   $= 2\sqrt{5}-3\sqrt{5}+6\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

次の平方根の計算をしましょう：

a) $\sqrt{20}+\sqrt{45}$

b) $\sqrt{48}+\sqrt{75}+\sqrt{27}$

c) $\sqrt{12}-\sqrt{3}+\sqrt{27}$

d) $\sqrt{12}+\frac{3}{\sqrt{3}}$

e) $\sqrt{63}+\frac{28}{\sqrt{7}}$

f) $\sqrt{72}-\frac{8}{\sqrt{2}}$

g) $\sqrt{28}+\sqrt{7}+\frac{35}{\sqrt{7}}$

h) $\sqrt{98}-\sqrt{50}+\frac{18}{\sqrt{2}}$

i) $\sqrt{75}-\sqrt{12}-\frac{3}{\sqrt{3}}$

2.10 平方根の混合演算　パート1

P

計算しましょう　$\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+5)$.

S

$\sqrt{3}=a$ として

分配法則を使って：

分配法則により以下が成り立ちます：
$a(b+c)=ab+ac.$

$$\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+5)=a\,(a+5)=a^2+5a$$

$$\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+5)=(\sqrt{3})^2+5\,(\sqrt{3})$$

$$=3+5\sqrt{3}$$

C

たし算に対するかけ算の分配法則は実数、そして平方根に対しても成り立ちます。

3つの実数 a, b, c に対し、$a\,(b+c)=ab+ac$ が成り立ちます。

例えば：

$$\sqrt{5}\,(\sqrt{6}+\sqrt{5})=\sqrt{5}\,(\sqrt{6})+(\sqrt{5})^2$$

$$=\sqrt{30}+5$$

E

$\sqrt{5}(\sqrt{45}+7)$ を計算しましょう：

$\sqrt{45}$ を約分します：$\sqrt{45}=3\sqrt{5}$.

したがって：$\sqrt{5}\,(\sqrt{45}+7)=\sqrt{5}\,(3\sqrt{5}+7)=3\times(\sqrt{5})^2+7(\sqrt{5})=3\times5+7\sqrt{5}=15+7\sqrt{5}$.

次の平方根の計算をしましょう：

計算前に約分するか見直しましょう。

a) $\sqrt{7}\,(\sqrt{7}+6)$　b) $\sqrt{2}\,(\sqrt{2}-3)$　c) $\sqrt{5}\,(\sqrt{45}+3)$　d) $\sqrt{6}\,(\sqrt{24}+9)$

e) $\sqrt{3}\,(\sqrt{75}-4)$　f) $\sqrt{5}\,(\sqrt{20}-6)$　g) $\sqrt{7}\,(\sqrt{7}+\sqrt{3})$　h) $\sqrt{2}\,(\sqrt{18}+\sqrt{48})$

2.11 平方根の混合演算　パート2

P

$(\sqrt{5}+3)(\sqrt{2}+1)$ を計算しましょう。

S

かけ算を展開します：

$$(\sqrt{5}+3)(\sqrt{2}+1) = \sqrt{5}(\sqrt{2})+\sqrt{5}(1)+3(\sqrt{2})+3(1)$$
$$= \sqrt{10}+\sqrt{5}+3\sqrt{2}+3$$

$(a+b)(c+d)$ の計算は以下のようにします：

$$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd.$$

C

たし算に対するかけ算の分配法則は、実数、平方根、$(a+b)(c+d)$ に対しても成り立ちます。

4 つの実数 a、b、c、d に対し、$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$ が成り立ちます。

例えば：

$$(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$
$$(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \sqrt{7}(\sqrt{2})+\sqrt{7}(\sqrt{3})+\sqrt{3}(\sqrt{2})+(\sqrt{3})^2$$
$$= \sqrt{14}+\sqrt{21}+\sqrt{6}+3$$

E

$(\sqrt{2}+1)^2$ を計算しましょう。

乗法公式を適用します：

$$(\sqrt{2}+1)^2 = (\sqrt{2})^2+2(\sqrt{2})(1)+(1)^2$$
$$= 2+2\sqrt{2}+1$$
$$= 3+2\sqrt{2}$$

乗法公式を展開します：

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

次の平方根の計算をしましょう。解答は最小値の式に約分しましょう。

a) $(\sqrt{7}+2)(\sqrt{5}-4)$　　b) $(\sqrt{6}+5)(\sqrt{6}+4)$　　c) $(\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}-7)$

d) $(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})$　　e) $(\sqrt{5}+6)^2$　　f) $(\sqrt{3}-2)^2$

g) $(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{6})$　　h) $(\sqrt{6}-4)(\sqrt{2}-2)$　　i) $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)$

2.12 復習問題

1. 次の説明が正しいか（V） 誤り （F） か答えましょう。

a) $\sqrt{121} = 11$ したがって $\sqrt{12.1} = 1.1$

b) $\sqrt{8} \div \sqrt{2}$ のわり算の結果は有理数です。

c) $2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}$ の解は $2 \times 3 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ です。

d) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ の解は $\sqrt{2+3} = \sqrt{5}$ です。

e) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ を有理化すると $\sqrt{2}$ が得られます。

2. 次の平方根のかけ算をしましょう。

a) $\sqrt{7} \times \sqrt{2}$ b) $(-\sqrt{6}) \times \sqrt{10}$ c) $(-\sqrt{6}) \times (-\sqrt{14})$

3. 次の平方根のわり算をしましょう。

a) $\sqrt{5} \div \sqrt{7}$ b) $\sqrt{6} \div (-\sqrt{14})$ c) $(-\sqrt{6}) \div (-\sqrt{24})$

4. 以下の数を根号を使わずに表しましょう。

a) $\sqrt{900}$ b) $-\sqrt{\frac{400}{81}}$

5. 次の数を1つの数の平方根で表しましょう。

a) $2\sqrt{5}$ b) $7\sqrt{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ d) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

2.13 復習問題

1. 次の平方根を最小値の式に約分しましょう。

a) $\sqrt{27}$ b) $\sqrt{\frac{11}{64}}$ c) $\sqrt{405}$

2. 次の平方根のかけ算をしましょう。

a) $\sqrt{45} \times \sqrt{28}$ b) $\sqrt{30} \times \sqrt{21}$

3. 次の平方根を有理化しましょう。

a) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$ c) $\frac{30}{\sqrt{5}}$

4. 次の平方根の計算をしましょう。

a) $6\sqrt{7} + 9\sqrt{7}$ b) $13\sqrt{5} - 7 - 8\sqrt{5}$ c) $\sqrt{3} - 5\sqrt{7} + 4\sqrt{3}$

d) $\sqrt{75} + \sqrt{48}$ e) $\sqrt{28} - \sqrt{63} + \sqrt{7}$ f) $\sqrt{98} - \frac{20}{\sqrt{2}}$

5. 次の平方根の計算をしましょう。

a) $\sqrt{5}(\sqrt{5} - 6)$ b) $\sqrt{3}(\sqrt{75} - 8)$ c) $\sqrt{5}(\sqrt{7} - \sqrt{5})$

d) $(\sqrt{3} - 7)(\sqrt{3} - 5)$ e) $(\sqrt{8} + \sqrt{6})(\sqrt{8} - \sqrt{6})$ f) $(\sqrt{5} - 4)^2$

2.14 実数の問題の解き方

P

マリオの学校で進級用のシャツを購入します。購入費は$225です。シャツの枚数とシャツ1枚の値段が同じなら、シャツ1枚の値段はいくらですか。

S

- シャツ3枚なら、シャツ1枚の値段は$3になり、合計$9の出費となります。
- シャツ10枚なら、シャツ1枚の値段は$10になり、合計$100の出費となります。

シャツ1枚の値段を a とします。
問題では、シャツの枚数がシャツ1枚の値段と同じと述べています。

よって、1枚 a ドルの値段でシャツを a 枚買いました。合計費用は$225です。$a^2 = 225$が成り立ちます。

よって、シャツ1枚の値段は： $\sqrt{225}$.
素因数分解します： $\sqrt{3^2 \times 5^2} = 3 \times 5 = 15$.

$\sqrt{225}$は2乗すると225になる正の数であるのを復習しましょう。

シャツ1枚の値段は **$15** です。

C

次の手順で問題を解きます：

1. 問題を読んで情報を読み解きます。

2. できれば問題の状況を図式で表します。

3. 問題を解く方法を考えます。

4. 問題に対する解答を導きます。

5. 導いた解答が問題と矛盾していないか確認します。

1. カルメンの学校で大会用ユニフォームを購入します。購入費は$144です。ユニフォームの枚数とユニフォーム1枚の値段が同じなら、ユニフォーム1枚の値段はいくらですか。

2. チェスボードは正方形で64のマス目があります。チェスボードの1辺にはマス目がいくつありますか。

3. 1辺 0.25 mのタイルを正方形の土地に敷き詰めます。土地の面積が 25 m^2 なら、タイルは何枚必要ですか。

2.15 復習問題

1. 次の関係が成り立つ自然数 “a” を求めましょう：

$$3 < \sqrt{a} < 4$$

2. $\sqrt{5} \approx 2.236$ として、次の式の概算をだしましょう。

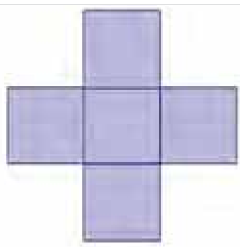
a) $\sqrt{20}$　　b) $\frac{1}{\sqrt{5}}$　　c) $\frac{15}{\sqrt{5}}$

3. $x = \sqrt{5} + \sqrt{7}$, $y = \sqrt{5} - \sqrt{7}$ として、次の代数式の値を求めましょう。

a) $(x + y)^2$　　b) xy　　c) $x^2 - y^2$

4. 次の条件を満たす2つの数字を求めましょう。2つの数の合計は318、1つの平方根はもう1つの平方根より20多い値と等しい。

5. 面積が 245 m^2 の次の図形の外周の長さを求めましょう。図形は正方形から構成されています。



6. 豆の苗を育てるため、トレーを使って苗床を作ります。豆の苗は170本あり、正方形のトレーを2つ使います。1つのトレーの1辺に7つの仕切りがあるとしたら、もう1つのトレーにはいくつの仕切りが必要ですか。

7. 高さ 10 m の建物から物体を落とします。時間が $t = \sqrt{\frac{10y}{49}}$ の式で表されるとき、物体を落下させてから何秒後に地面に落ちますか。（ y ： 物体が落ちる高さ）

8. フアンは 2500 m^2 ある正方形の土地に塀をめぐらそうと考えています。塀を1メートル作るのに$3.75かかるとしたら、土地全体を囲うのにいくらかかりますか。

ユニット 3

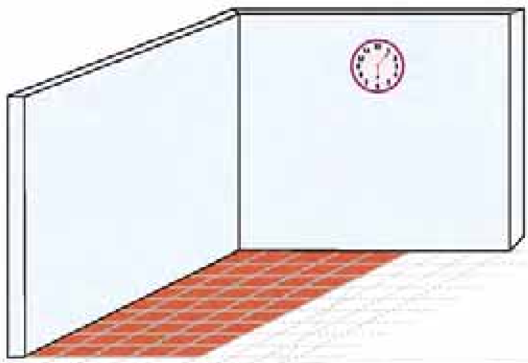
二次方程式

粘土板*BM 13901*は英国、ロンドンの大英博物館にある最も古い数学文書の*1*つです。*24*個の問題とその解答が載っています。

数学では、記号は数の表記に使われるだけではありません。記号的推論を行うための第1ステップは、問題解決の文脈において行われます。古代バビロニアでは、未知の数量に関する情報を示し、その後値を示していました。その一例は、紀元前18世紀にさかのぼる、粘土板BM 13901に見られます：「正方形の辺を7回、面積を11回足すと$6\frac{1}{4}$が得られる。」これを「挟み撃ち法」と呼び、方程式$ax^2 + bx + c = 0, c < 0$の解のプロセスとなります。

二次方程式の解は、インドやアラブの一部の数学者には口伝えで、また幾何構造を通じて知られていましたが、紀元1114年に生まれたインドの数学者バースカラにより、記号代数を用いてこの種の方程式を解く方法が知られました。

遥か昔の時代から、多くの計算者や水先案内人は土地を測るための技術に頼った方法を用いていました。現在、その計算法は建設で必要な資材の数量を知るため、金融分野で労働者に未払いの給料を知るため、さらに食べ物の割当量や遺産の配分を知るためなどに使われます。



もし正方形の煉瓦の数量と覆われる対象の面積が決まっていたら、二次方程式で表し、煉瓦の大きさを求めることができます。

これらの内容から、幾何学的手段を用いて因数分解と解の公式を活用しながら二次方程式を解くことの重要性が分かるでしょう。さらに、ある二次方程式に解があるか検討し、応用問題を解くための二次方程式を立てます。

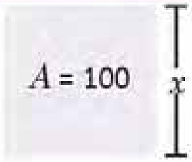
1.1 二次方程式の意味と定義

P

アントニオさんは豆を作るため正方形の土地を持っています。面積が 100 m² あるとすると、土地の各辺の長さはどのように求める事ができるでしょうか?

S

状況を絵で説明すると：



x を使って一辺の長さを記号化します。

土地の面積は 100 m² なので、方程式を立てる事ができます。

正方形の面積は：
$A = L^2$
L は正方形の一辺の長さとします。

$$x^2 = 100$$

土地の各辺の長さを求めるには、この方程式を解かなければなりません。

C

設問で立てた方程式は 100 を移項すると $x^2 = 100$ となり、$x^2 - 100 = 0$ と表す事もできます。この方程式では未知数が二乗されています。このようなタイプの方程式は**二次方程式**と呼ばれます。

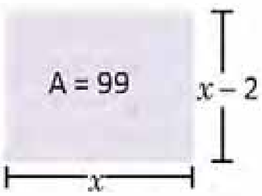
一般的に二次方程式は、a、b、c、および $a \neq 0$ である実数を用いて $ax^2 + bx + c = 0$ という形として定義されます。

方程式において移項するという事は、方程式の 1つの辺から他の辺へと移す事を意味します。

例：$2x^2 - 3 = 0$、$9x^2 - 3 = 0$、$(x + 5)^2 - 16 = 0$、$x^2 + 4x + 1 = 0$、$x^2 + 4x = 0$ など。

E

ミゲルさんは縦が横よりも 2m 長い長方形の形をした土地を持っていて、その面積は 99 m² です。縦の長さを x とし、問題が意味するところの方程式を求めなさい。

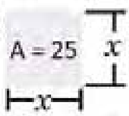


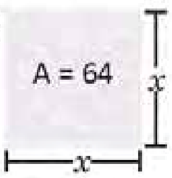
長方形の面積の求め方（A = 底辺 × 高さ）を使うと　$x(x - 2) = 99$

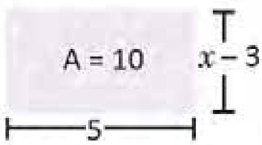
積を求めると：　$x^2 - 2x = 99$

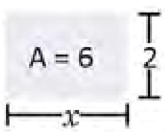
99 を移項すると：　$x^2 - 2x - 99 = 0$

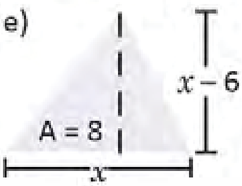
1. それぞれの図で分からない長さを求める方程式を答えなさい。

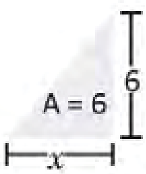
a)


b)


c)


d)


e)


f)


同じ問題は三角形でも考える事ができます。三角形の面積の求め方を復習しなければなりません。
$A = \dfrac{底辺 \times 高さ}{2}$

2. 前問で作られた方程式のうちどれが二次方程式かを答えなさい。
3. 2つの連続した整数でこれらを掛け合わせると 42 になる方程式を求めなさい。

1.2 二次方程式の解法

P

–4、–3、3、4 の数字のうち、どれが次の方程式の解になるのか答えなさい。

a) $3x = 12$　　b) $x^2 - x - 12 = 0$

S

–4 を使い両方の方程式に代入すると、

a) $3(-4) = -12$　　b) $(-4)^2 - (-4) - 12 = 16 + 4 - 12 = 8$

–4 はいずれの方程式でも解とはなりません。

–3 を使い両方の方程式に代入すると、

a) $3(-3) = -9$　　b) $(-3)^2 - (-3) - 12 = 9 + 3 - 12 = 0$

–3 は方程式 a) の解ではありませんが、方程式 b) の解となります。

3 を使い両方の方程式に代入すると、

a) $3(3) = 9$　　b) $(3)^2 - (3) - 12 = 9 - 3 - 12 = -6$

3はいずれの方程式でも解とはなりません。

4を使い両方の方程式に代入すると、

a) $3(4) = 12$　　b) $(4)^2 - (4) - 12 = 16 - 4 - 12 = 0$

4はどちらの方程式でも解となります。

よって、方程式 a) には解が1つ (4) あり、方程式 b) には解が 2つ (4 と -3) あります。

C

二次方程式を満たす未知数の値は**解**と呼ばれます。

二次方程式を解くプロセスはその全ての解を求める事になります。二次方程式では解が 2つまである可能性があります。

一次方程式では解は1つだけです。

1. かっこ内の数字のうち、どれが次の方程式の解になるのか答えなさい。

a) $x^2 - 9 = 0$　(−3, −1, 1, 3)　　b) $2x - 6 = 0$　(−3, −1, 1, 3)

c) $x^2 - 2x - 8 = 0$　(−4, −2, 2, 4)　　d) $2x + 8 = 0$　(−4, −2, 2, 4)

e) $x^2 + 4x + 3 = 0$　(−3, −1, 1, 3)　　f) $4x + 12 = 0$　(−3, −1, 1, 3)

g) $x^2 - 8x + 16 = 0$　(−4, −2, 2, 4)　　h) $x - 4 = 0$　(−3, −1, 1, 3)

2. 前問の方程式のうちどれが二次方程式で、どれが一次方程式かを答えなさい。答えを証明しなさい。

1.3 方程式 $x^2 = c$ の解法

P

1回目の授業のアントニオさんの問題で立てた二次方程式を解きなさい。

$$x^2 = 100$$

S

この方程式を解くには、数字の平方根の概念を使います。$x^2 = 100$ は x を二乗したら 100 となるという事を意味します。

よって、$x = \pm\sqrt{100}$となり、

根号を使わずに表すと、$x = \pm 10$ となります。

数字を二乗すると、その負の数を二乗した時と同じ計算結果が出ます。

$$3^2 = (-3)^2 = 9$$

アントニオさんの問題は土地の各辺の長さについてでしたので、負の解を考慮する事はできません。よって問題の解は：**10 m**。

C

$x^2 = c$ の形の二次方程式を解くには次のステップに従います。

例：$x^2 = \frac{1}{4}$

1. c の平方根を求めながら方程式を解きます。

$$x = \pm\sqrt{c}$$

2. なるべく根号を使わずに数字を表しましょう。

1. $x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$

2. $x = \pm\frac{1}{2}$

E

二次方程式 $x^2 - 20 = 0$ を解きなさい。

方程式 $x^2 = 20$ の 20 を移項します。

方程式 $x^2 = 81$ を解きます。　1. $x = \pm\sqrt{20}$　2. $x = \pm 2\sqrt{5}$

1. 次の二次方程式を解きなさい。

a) $x^2 = 16$　b) $x^2 = \frac{1}{9}$　c) $x^2 = \frac{4}{9}$　d) $x^2 - 1 = 0$

e) $x^2 - 9 = 0$　f) $x^2 - \frac{1}{4} = 0$　g) $\frac{16}{25} - x^2 = 0$　h) $\frac{4}{36} - x^2 = 0$

2. フリアさんの兄は 4歳年上で、妹は 4歳年下です。兄と妹の年齢を掛け合わせると 20になる場合、フリアさんの年齢はいくつでしょうか?

1.4 方程式 $ax^2 = c$ の解法

P

マルタさんとマリオさんは「数字当てゲーム」をしています。マルタさんはマリオさんに、3倍すると12になる数について考えている、と言っています。マリオさんはマルタさんが考えている数字をどうしたら分かるでしょうか?

S

マルタさんが考えている数字を x で示します。
従ってマルタさんが考えている数字の3倍は「$3x$」で示されます。
それから3倍にした数字は 12 という事を示すために、次の方程式を作ります：
$x(3x) = 12$

それぞれの項に掛け算を行います：$3x^2 = 12$.

x^2 を整理すると、$x^2 = \frac{12}{3} \Rightarrow x^2 = 4$ となります。

方程式を解くと、$x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$ となります。

よって、マルタさんが考えている数字は、**+2 または –2** となるでしょう。

C

$ax^2 = c$ の形で $c \neq 0$ である二次方程式を解くには、次のステップに従います：

1. x^2 の項を整理します。
$$x^2 = \frac{c}{a}$$
2. $\frac{c}{a}$ の平方根を求めて方程式を解きます。
$$x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$$
3. 根号を使わずに求めるか、可能な場合は最小の式に簡略化します。

a の符号が c の符号と異なる場合は $\frac{c}{a}$ の符号は負になる事に注目しましょう。この時方程式は、負の数の平方根が定められていないので実数の解にはなりません。

E

二次方程式を解きなさい。 $3x^2 - 2 = 0$

方程式の -2 を移項します： $3x^2 = 2$

方程式 $3x^2 = 2$ を解きます。 1. $x^2 = \frac{2}{3}$ 2. $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

分母に累乗根がある場合は有理化しなければなりません。

1. 次の二次方程式を解きなさい。

a) $2x^2 = 18$ b) $-4x^2 = -1$ c) $x^2 = 7$

d) $-4x^2 + 4 = 0$ e) $10 - 2x^2 = 0$ f) $-x^2 + 2 = 0$

$x^2 = c$ の形の方程式は、$ax^2 = c$ の形の方程式で $a = 1$ の時における特別なケースです。

2. バスケットボールのコートの縦が横幅の 2倍で、面積が 450 m^2 である場合のコートの長さをそれぞれ求めなさい。

1.5 $(x + m)^2 = n$ の形の方程式の解

P

二次方程式 $(x + 1)^2 = 25$を解きなさい。

S

この方程式を解くために、まず括弧内の $x + 1$ を $w = x + 1$としてから平方根のアイデアを使うことを示します。

$w^2 = 25$ 　　$w = x + 1$と置き換えます、

$w = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

$x + 1 = \pm 5$ 　　あらたに $x + 1 = w$ と置き換えます。

方程式の一部を一つの違う文字で置き換える作戦は**変数の置換**として知られています。

つまり $x + 1 = 5$ と $x + 1 = -5$ です。

x をクリアすると $x = 5 - 1 = 4$ と $x = -5 - 1 = -6$

最後に方程式 $(x + 1)^2 = 25$ の解は $\mathbf{x = 4}$ **と** $\mathbf{x = -6}$ です。

C

式 $(x + m)^2 = n$ の二次方程式を解くには次のステップに従います。

1. 変数 $x + m$ を u で置き換える。
   $w^2 = n$
2. 式 $x^2 = n$ の方程式を解きます。
   $w = \pm\sqrt{n}$
3. 最初の変数を置き換えることになります。
   $x + m = \pm\sqrt{n}$
4. 初期変数を求めることになります。
   $x = -m \pm\sqrt{n}$

例えば：

$(x - 3)^2 = 7$ で $w = x - 3$ とすると

1. $w^2 = 7$
2. $w = \pm\sqrt{7}$
3. $x - 3 = \pm\sqrt{7}$
4. $x = 3 \pm\sqrt{7}$

注目
もし $n = 0$であれば、方程式のただ一つ解は $x = -m$ となります。

もし n が負であれば方程式は解が無いことになります。

E

二次方程式 $(x - 5)^2 - 12 = 0$ を解きなさい。

方程式 $(x - 5)^2 = 12$で -12 を置き換えなさい。

方程式 $(x - 5)^2 = 12$ を解きます。

1. $w^2 = 12$ 　2. $w = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$ 　3. $x - 5 = \pm 2\sqrt{3}$ 　4. $x = 5 \pm 2\sqrt{3}$

1. 次の二次方程式を解きなさい。

a) $(x + 4)^2 = 4$ 　b) $(x - 2)^2 = 2$ 　c) $(-x - 3)^2 = 8$ 　d) $(x + 2)^2 = 0$

e) $(x - 4)^2 - 16 = 0$ 　f) $(x + 3)^2 - 3 = 0$ 　g) $(-x + 6)^2 - 12 = 0$ 　h) $(1 - x)^2 = 0$

2. 豆畑の面積を144m^2 にしたければ、アントニオさんの正方形の土地の一辺をそれぞれどれだけ増やす必要がありますか。

アントニオさんの土地の側辺はそれぞれ10mでこの課の第3授業で定めたことを復習して下さい。

1.6 $x^2 + bx = 0$ 形の方程式の解

P

二次方程式 $x^2 + 5x = 0$を解きなさい。

S

次の法則はいずれの実数 A, B にも当てはまります。

もし $A \times B = 0$ であれば $A = 0$ または $B = 0$ です。

さらに式 $x^2 + 5x$ は共通因子 $x^2 + 5x = 0$ を取り出して因数分解できます。

そうして方程式： $x(x + 5) = 0$ が得られます。

$x = 0$ または $x + 5 = 0$ で満たされます。

線型方程式を解きます $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$

二次方程式 $x^2 + 5x = 0$ の解は： $x = 0$ または $x = -5$です。

C

式 $x^2 + bx = 0$ 二次方程式を解くには次のステップに従います：

1. 共通因子を使って因数分解します：

$$x(x + b) = 0$$

2. はじめに述べた法則を適用して解くべき線型方程式を定めます。

$$x = 0 \text{ または } x + b = 0$$

解 $x = 0$ はいつも式 $x^2 + bx = 0$ の方程式の解であることに注目しましょう。

3. 線型方程式 $x + b = 0$ を解いて二次方程式の解を定めます。

$$x = 0 \text{ または } x + b = 0 \Rightarrow x = -b$$

E

$ax^2 + bx = 0$ の方程式はどのように解きますか。例えば $3x^2 + 2x = 0$.

$x(a + bx) = 0$ を因数分解してから解をみつけます。

1. $x(3x + 2) = 0$
2. $x = 0$ または $3x + 2 = 0$
3. $x = 0$ または $x = -\dfrac{2}{3}$

$x = 0$ の解は式 $ax^2 + bx = 0$ の方程式の解であることに注目しましょう。

I

次の二次方程式を解きなさい。

a) $x^2 - 5x = 0$ b) $x^2 + x = 0$ c) $3x^2 + 5x = 0$ d) $4x^2 - x = 0$

e) $-x^2 + x = 0$ f) $-x^2 - 2x = 0$ g) $2x^2 + 8x = 0$ h) $-3x^2 + 6x = 0$

1.7 $x^2 + 2ax + a^2 = 0$ の形の方程式の解

P

二次方程式 $x^2 + 4x + 4 = 0$ を解きなさい。

S

完全平方三項式 $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 = 0$ を因数分解します

したがって：

$$x + 2 = 0$$
$$x = -2$$

完全二次三項式は因数分解すると：
$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$

C

$x^2 + 2ax + a^2 = 0$ の形の二次方程式を解くには次のステップに従います。

1. 完全平方三項式を使って式を因数分解します。
   $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2 = 0$
2. 授業6の始めに述べた法則を適用して $x + a = 0$ を解く線型方程式を定めます。
   $x + a = 0.$
3. 二次方程式の解を定めます。
   $x = -a$

E

次の二次方程式 $4x^2 + 4x + 1 = 0$を解きなさい。

1. $4x^2 + 4x + 1 = w^2 + 2w + 1 = 0$　　$w = 2x$ として
2. $(w + 1)^2 = (2x + 1)^2 = 0$　　$2x = w$ とあらためて置き換えて
3. $2x + 1 = 0.$

   $x = -\frac{1}{2}$

次の二次方程式を解きなさい。

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$　　b) $x^2 - 8x + 16 = 0$　　c) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

d) $9y^2 + 6y + 1 = 0$　　e) $y^2 - 10y + 25 = 0$　　f) $y^2 + 14y + 49 = 0$

1.8 $(x+a)(x+b)=0$ の形の方程式の解

P

$(x-2)(x-3)=0$ であれば次を満たすべきです、

S

二次方程式 $\underbrace{(x-2)}_{A} \times \underbrace{(x-3)}_{B} = 0$ を解きなさい。

$x-2=0$ または、$x-3=0$

線型方程式を解くと：

$x=2$ または $x=3$

A, Bがどのような実数であっても、$A \times B = 0$ のとき $A=0$ または $B=0$ が成り立ちます

C

$(x-a)(x-b)=0$ の形の二次方程式を解くには次のステップに従います。

1. 法則を適用して解くべき線型方程式を定めます。
   $x-a=0$ または、$x-b=0$
2. 線型方程式を解いて二次方程式の解法を決めます。
   $x=a$ または $x=b$

例えば：$(x+1)(x-4)=0$

1. $x+1=0$ または $x-4=0$
2. $x=-1$ または、$x=4$

E

二次方程式 $x^2+5x+6=0$ を解きなさい。

この場合、乗じて6加えて5となる2つの数字である3と2を該当する乗法公式で求め、まず式を因数分解します。

そこから：$x^2+5x+6=0 \Rightarrow (x+3)(x+2)=0$

1. $x+3=0$ または $x+2=0$
2. $x=-3$ または $x=-2$

式の形：
$x^2+(a+b)x+ab=0$
次の方法で因数分解します：
$x^2+(a+b)\,x+ab=(x+a)(x+b)$.

1. 次の二次方程式を解きなさい。

a) $(x-2)(x-1)=0$ b) $(x+5)(x-3)=0$ c) $(x-7)(x+2)=0$ d) $(x+4)(x+3)=0$

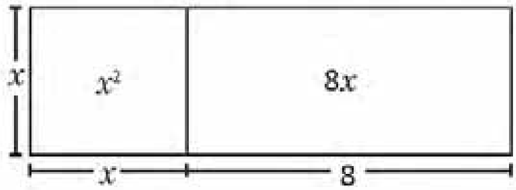
e) $x^2-7x+6=0$ f) $x^2-2x-8=0$ g) $x^2+x-6=0$ h) $x^2-4x+3=0$

2. 二つの連続する数字で二乗した後に加算すると25となる二つの数をみつけましょう。

1.9 面積を使った二次方程式の解法

P

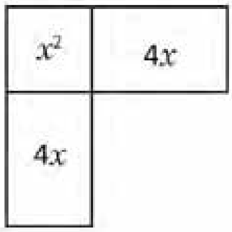
図の面積は 33 cm²です。幾何学的な釈明を使って x 側の長さを見つけなさい。



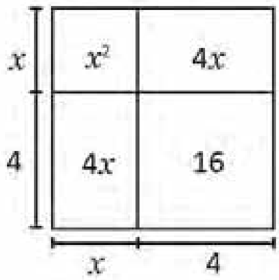
都合に合うように各部分を短くしたり適合させるように考えられます。

S

1. 長方形を二つの同じ部分に分割して、その一つの部分を90°回転させます。



2. 辺4 の正方形を完成させます。



3. 最初の図の面積は 33 cm² です。もし辺 4 の正方形を加えると前の図の面積は 49 cm²です。

従って、**(7 cm)² = 49 cm²** なので、辺は3 cmの値となるべきです。

代数的解法

$x^2 + 8x = 33$

1. $x^2 + 4x + 4x = 33$

2. $x^2 + 2(4x) + 4^2 = 33 + 4^2$

3. $(x + 4)^2 = 49$

解答： $x = 3$

C

二次方程式の正の解を見つけるのに幾何学的論証を使うことができます。

二次方程式は二つまでの解がありますが、ただある図の辺に関する事なので正のものだけを考慮します。

次の方程式の正の解を求めるのに幾何学的論証を使いましょう：

a) $x^2 + 2x = 8$

b) $x^2 + 10x = 56$

c) $x^2 + 6x = 27$

1.10 正方形を完成させる方程式の解法

P

二次方程式： $x^2 + 8x - 20 = 0$を解きなさい。

S

解くために $(x + m)^2 = n$ の形に変えて前の授業で学習したことを適用します。

-20 を置き換えます： $x^2 + 8x = 20$。

式の両辺に適当な数字を加え左辺の式が完全平方三項式となるようにします。

$$x^2 + 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 20 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$$

分数を簡略化していくつかの計算をして次の式が得られます：
$x^2 + 8x + 16 = 36$

左辺の式が完全平方三項式であるので $(x + 4)^2 = 36$ のような式になります。

> 二項式の二乗の展開の式は次の通りです：
>
> $$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$
>
> そして項 a^2 は "x" についている2以内の二乗に達する係数を割ることで得られます。
>
> $$\left(\frac{2a}{2}\right)^2 = a^2$$

$(x + m)^2 = n$： $x + 4 = \pm 6$ 式の方程式を解きますと ⇒ $x + 4 = 6$ または $x + 4 = -6$

従って、解は： $\boldsymbol{x = 2}$ **と** $\boldsymbol{x = -10}$です。

C

$x^2 + bx + c = 0$ の形の二次方程式を解くには次のステップで進めます：

例えば： $x^2 + 2x - 1 = 0$

1. c 項を右辺に移します。 — 1. $x^2 + 2x = 1$
2. 左辺の式が完全平方三項式になるように両辺の方程式にある適当な数字を加えます。 — 2. $x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{2}{2}\right)^2$
3. 式を簡略化して計算を実行します。 — 3. $(x + 1)^2 = 1 + 1 = 2$
4. $(x + m)^2 = n$ の形の方程式を解きます。 — 4. $x + 1 = \pm\sqrt{2}$ ⇒ $x = -1 \pm \sqrt{2}$

解は $x = -1 + \sqrt{2}$ または $x = -1 - \sqrt{2}$

この方法を使った二次方程式の解法は**完全平方**による解法として知られています。

次の二次方程式を解きなさい。

a) $x^2 + 4x + 3 = 0$　b) $x^2 - 6x + 5 = 0$　c) $x^2 - 6x - 7 = 0$　d) $x^2 - 8x + 16 = 0$

e) $x^2 + 2x - 2 = 0$　f) $x^2 - 4x + 2 = 0$　g) $x^2 + 5x + 5 = 0$　h) $x^2 + x - 1 = 0$

ユニット3

1.11 $ax^2 + bx + c = 0$ の形の方程式の解

次の式を解くためには次の a)、b)、c) のステップに従います。

$$3x^2 + 5x + 1 = 0$$

a) x^2 の係数で式を割って定数項を式の右辺に移します。
b) 適当な数を加えて二乗を完成させます。
c) 変数 x をもとめます。

a) $3x^2 + 5x + 1 = 0$

$x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{3} = 0$ 　3で割ります。

$x^2 + \frac{5}{3}x = -\frac{1}{3}$

b) $x^2 + \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{1}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2$ 　適切な数を加えます。

$\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{1}{3} + \frac{25}{36}$ 　完全平方します。

c) $\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25 - 12}{36}$ 　右の分数を加えます。

$x + \frac{5}{6} = \pm\frac{\sqrt{13}}{6}$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$ 　x をもとめます。

$ax^2 + bx + c = 0$ の形の二次方程式を解くには次のステップに従ってできます。

1. 式を x^2 の係数 a で割ります。
2. 定数項を右辺に移します。
3. 式の両辺に適切な数を加えて左辺の式が完全平方三項式になるようにします。
4. 式を簡略化して必要な計算を行います。
5. $(x + m)^2 = n$ の形の方程式を解きます。

次の二次方程式を解きなさい。

a) $2x^2 + 5x - 1 = 0$ 　b) $2x^2 - 3x - 4 = 0$ 　c) $5x^2 + 5x + 1 = 0$ 　d) $7x^2 + 7x + 1 = 0$

1.12 二次方程式の解の公式

P

一般二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ で $a \neq 0$ を解く公式をみつけましょう。

S

解くのに $x^2 + bx + c = 0$ の形に変形するのに "a" で割ることができて前の授業で学習したことを応用できます。

今度は二次方程式を解きます：

$$ax^2 + bx + c = 0$$

まず、係数が1になるように式の両辺を x^2 の係数で割ります。

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

次に $\frac{c}{a}$ を移行します。

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

完全平方を完成させます。

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

計算をします。

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

式の右辺の計算をします。

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

式を解きます。

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

C

$ax^2 + bx + c = 0$ の形の二次方程式を解くために解の最後に到達した公式を使えます。

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

この公式は二次方程式の解の公式として知られているものです。 そして二次方程式の解をみつけるために公式の a、b、c の値を置き換えます。

例えば　　$3x^2 + 5x + 1 = 0$

もし解の公式で $a = 3$、$b = 5$、$c = 1$ と置き換えると

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(3)(1)}}{2(3)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 12}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$$ が確認されます。

次の二次方程式を解きなさい。

a) $5x^2 - 3x - 1 = 0$　　b) $-4x^2 - x + 1 = 0$　　c) $x^2 + 3x - 9 = 0$　　d) $-4x^2 + 5x + 5 = 0$

1.13 二次方程式の解の公式の適用

P

二次方程式の解の公式を使って方程式を解きます。

a) $4x^2 + 2x - 1 = 0$

b) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

S

解の公式で置き換えます：

a) $a = 4, b = 2, c = -1$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(4)(-1)}}{2(4)}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8}$$

$$= \frac{\cancel{2}^{1}(-1 \pm 1\sqrt{5})}{\cancel{8}_{4}}$$

簡略化する必要があります。

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$ または $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$

b) $a = 3, b = 5, c = -2$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{6}$$

49の平方根を計算する必要があります。

$$= \frac{-5 \pm 7}{6}$$

$x = \frac{-5 + 7}{6}$　　$x = \frac{-5 - 7}{6}$

$x = \frac{1}{3}$ o $x = -2$

2つの解を計算します。

C

二次方程式の解の公式を適用するためには二次方程式のa、b、c の値を識別し、解を計算する際には簡略化や根を有理数として表す必要があります。

次の二次方程式を解きなさい。

a) $2x^2 + x - 1 = 0$　　b) $3x^2 - 5x - 2 = 0$　　c) $6x^2 + 5x + 1 = 0$　　d) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

e) $4x^2 + 20x + 25 = 0$　　f) $2x^2 - 4x + 1 = 0$　　g) $4x^2 + 6x + 1 = 0$　　h) $-2x^2 + 2x + 1 = 0$

1.14 二次方程式を解く方法

P

二次方程式 $x^2 + 7x + 12 = 0$ を因数分解、解の公式と平方完成を使って解きなさい。解法は同じですか。ノートにそれぞれの方法について自分の意見を書きましょう。

S

因数分解

$x^2 + 7x + 12 = 0$

$(x + 4)(x + 3) = 0$

$x = -4$ または $x = -3$

解の公式

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(1)(12)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2}$$

$$= \frac{-7 \pm 1}{2}$$

$x = -3$ または $x = -4$

平方完成

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

$$x^2 + 7x = -12$$

$$x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = -12 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = -12 + \frac{49}{4}$$

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{-48 + 49}{4}$$

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$x + \frac{7}{2} = \pm\frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2} \quad x = -\frac{7}{2} - \frac{1}{2}$$

$x = -3$ または $x = -4$

この場合、因数分解の方法を適用するのが最も容易で実用的でしたが、さらに解の公式の方法は少し多い計算が伴いますが、すべての場合に適用可能で、最後の平方完成方法はこの場合には複雑になりましたが、より簡単になる場合もあることを注目しましょう。

C

二次方程式の解の最も効率的な方法を選択するためにできるのは：

1. 因数分解を使って解く事です。
2. 因数分解をみつけることがもし出来ない場合、その他の二つの方法のいずれかを適用できます。

解の公式は全ての場合に適用できますが、他の方法を使った時より複雑な計算を伴う場合もあり得ます。

最も適切な方法を使って次の二次方程式を解きなさい。

a) $x^2 - \frac{4}{9} = 0$　b) $4x^2 - 16 = 0$　c) $(6 - x)^2 - 1 = 0$　d) $x^2 - 8x - 9 = 0$

e) $x^2 + 3x - 1 = 0$　f) $5x^2 + 10x = 0$　g) $x^2 - 10x + 25 = 0$　h) $5x^2 - 11x + 2 = 0$

ユニット3

1.15 復習問題

1. 授業で習った方法を使って次の式を解きなさい。

形 $ax^2 = c$.

a) $2x^2 = 2$　b) $-9x^2 = -1$　c) $3x^2 - 27 = 0$　d) $21 - 3x^2 = 0$　e) $-x^2 - 3 = 0$

形 $(x + m)^2 = n$.

a) $(x+1)^2 = 9$　b) $(-x+2)^2 = 3$　c) $(x-4)^2 - 12 = 0$　d) $(-3-x)^2 = 0$　e) $(5-x)^2 + 3 = 0$

形 $x^2 + bx + c = 0$ （完全平方を完成）

a) $x^2 + 2x - 3 = 0$　b) $x^2 + 4x - 12 = 0$　c) $x^2 + 6x + 9 = 0$　d) $x^2 - 2x - 8 = 0$　e) $x^2 - 8x + 12 = 0$

f) $x^2 + 4x - 1 = 0$　g) $x^2 + 2x + 4 = 0$　h) $x^2 - x - 6 = 0$　i) $x^2 - 5x + 3 = 0$　j) $x^2 - 5x + 6 = 0$

2. 解の公式を使って次の二次方程式を解きなさい。

a) $3x^2 - 11x + 6 = 0$　b) $4x^2 + 17x - 15 = 0$　c) $12x^2 - 13x + 3 = 0$　d) $4x^2 + 8x + 3 = 0$

e) $-3x^2 + 5x - 1 = 0$　f) $4x^2 - 7x + 2 = 0$　g) $3x^2 + 6x + 2 = 0$　h) $x^2 - 4x - 1 = 0$

1.16 復習問題

1. 因数分解を使って次の二次方程式を解きなさい。

形 $x^2 + bx = 0$.

a) $x^2 - 7x = 0$　b) $2x^2 - x = 0$　c) $x^2 + 3x = 0$　d) $4x^2 + 12x = 0$

形 $x^2 + 2ax + a^2 = 0$.

a) $x^2 - 2x + 1 = 0$　b) $x^2 - 8x + 16 = 0$　c) $16x^2 + 8x + 1 = 0$　d) $9x^2 + 12x + 4 = 0$

形 $(x + a)(x + b) = 0$.

a) $(x-1)(x-6) = 0$　b) $(x-3)(x+2) = 0$　c) $(x+5)(x-7) = 0$　d) $(x+2)(x+4) = 0$

形 $x^2 + (a + b)x + ab = 0$.

a) $x^2 - 9x + 8 = 0$　b) $x^2 - 2x - 24 = 0$　c) $x^2 + 7x - 18 = 0$　d) $x^2 - 11x + 28 = 0$

2. 次の方程式の正の解を求めるのに幾何学的論証を使いましょう：

a) $x^2 + 6x = 7$　b) $x^2 + 10x = 11$　c) $x^2 + 8x = 9$

2.1 二次方程式の判別式

P

公式を用いて次の2次方程式を解きなさい。被開平数の値に注目しなさい。

a) $2x^2 + 3x + 1 = 0$　　b) $4x^2 + 4x + 1 = 0$　　c) $2x^2 + x + 1 = 0$

S

a)
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$$
$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4}$$
$$= \frac{-3 \pm 1}{4}$$
$x = -\frac{1}{2}$ と $x = -1$

被開平数はゼロよりも大きく、2つの解があります。

b)
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(4)(1)}}{2(4)}$$
$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{8}$$
$$= \frac{\cancel{-4}^{-1}}{\cancel{8}_{2}} = -\frac{1}{2}$$

被開平数はゼロであり、解は1つです。

c)
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{4}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{4}$$

負の数の平方根が定義されていないので、よって $\pm\sqrt{7}$は実数ではないことに注目しなさい。

被開平数はゼロよりも小さく、実数には解がありません。

C

式 $b^2 - 4ac$ により与えられる公式の被開平数は、二次方程式の、いわゆる**判別式**です。

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow \text{判別式}$$

判別式が次の3つのケースのいずれかを満たすことができることに注目しなさい：

a) $b^2 - 4ac > 0$

$2x^2 + 3x + 1 = 0$、この場合、二次方程式は**2つの解**を持ちます。

b) $b^2 - 4ac = 0$

$4x^2 + 4x + 1 = 0$、この場合、二次方程式は**1つの解**しか持ちません。

c) $b^2 - 4ac < 0$

$2x^2 + x + 1 = 0$, この場合、二次方程式は**実数に解を持ちません。**

二次方程式が完全平方三項式なので、判別式はゼロになります。

1. 判別式の値をゼロと比べることで、次の二次方程式が解を持たない、1つ持つ、または2つ持つのか判断しなさい。

a) $x^2 + 6x - 9 = 0$　　b) $x^2 + 2x + 2 = 0$　　c) $x^2 - 2x + 1 = 0$　　d) $x^2 - 2x = 0$

e) $x^2 + 1 = 0$　　f) $5x^2 - 9x + 1 = 0$　　g) $4x^2 - 9 = 0$　　h) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

2. 式 $x^2 + bx = 0$, $b \neq 0$ の二次方程式はいくつの解を持つのか判断しなさい。

2.2 問題の解答における判別式の使用

P

和が4で積が5になるような2つの実数が存在しないことを証明しなさい。

S

2つの実数を x と y とします。$x + y = 4$ そして $xy = 5$ を満たさなければなりません。

一次方程式を次のように設定します：

$x + y = 4$	
$x^2 + xy = 4x$	方程式の両辺に x を掛けます。
$x^2 + 5 = 4x$	$xy = 5$ なので、
$x^2 - 4x + 5 = 0$	左辺に移項して整理します。

二次方程式の判別式を次のように分析します：

$(-4)^2 - 4(1)(5) < 0$

二次方程式の判別式：
$b^2 - 4ac < 0$

よって、この二次方程式では実数に解は存在しません。したがって、和が4で積が5になるような実数は存在しません。

C

二次方程式の判別式を用いて様々な問題を解くことができます。二次方程式を作り、その解を分析します。方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ において、

a) $b^2 - 4ac > 0$	実解が2つ存在する。
b) $b^2 - 4ac = 0$	実解が1つ存在する。
c) $b^2 - 4ac < 0$	実解が存在しない。

1. 2つの数の和が4であり、それらの数を掛け合わせた結果は c になります。下記のようになるには、c はどのような値を取るでしょうか。
   a) 方程式が2つの実解を持つ。
   b) 方程式が1つの実解を持つ。
   c) 方程式が実解を持たない。

2. ある人が、自分の家の形は長方形で、その周辺の長さは 18 m、さらに面積は 21 m^2 だと言っています。その人が嘘を言っていることを証明しなさい。

3. ホセさんは、長方形で面積が 700 m^2 の土地を持っています。長さ 100 m の針金でその土地を囲うことはできるでしょうか。

2.3 二次方程式による問題の解答

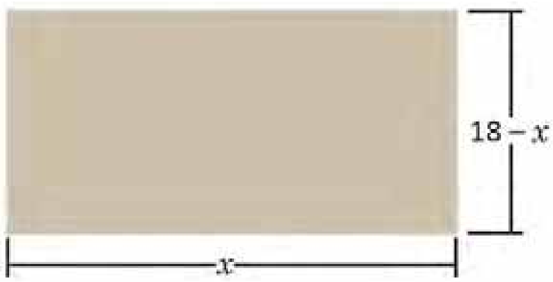
P

ファンさんは、面積が 72 m^2 で周辺の長さが 36 m の長方形の土地に自分の家を建てる予定です。建築許可の申請時には、土地の寸法の提示が要求されます。どのようにしてこの情報から土地の寸法を求めることができるでしょうか。

S

土地の長さを x で表すとすると、x を用いて幅をどのように表せるでしょうか。

長さと幅の和が周辺の長さの半分 $(\frac{36}{2} = 18)$ に等しいので、よって幅は「$18 - x$」となります。



面積の値を用いて方程式
$x\,(18 - x) = 72$ を作ります。

次のように展開します： $-x^2 + 18x = 72 \Rightarrow 0 = x^2 - 18x + 72$

次のように因数分解を利用します： $x^2 - 18x + 72 = 0 \Rightarrow (x - 12)(x - 6) = 0$

よって： $x - 12 = 0$ または $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 12$ または $x = 6$

x は長い方の辺なので： $x = 12$

よって、フアンさんの土地の幅は 6 になります。

したがって、フアンの土地の寸法は**長さ12 mで幅6 m** になります。

C

ある問題状況を解くには、一般的に次のステップを辿ることができます。

1. できればその問題状況の図式を作成する。
2. 問題がもたらす情報を特定し、未知数を表す数が何であるかを定義する。
3. 同じ未知数を用いてすべての数を表す。
4. 解かなければならない二次方程式を作成する（同等性を定める）。
5. 二次方程式を解く。
6. 解が問題に対して適当であるか分析する。

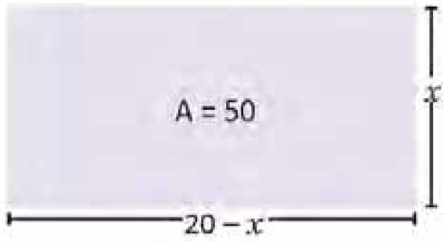
1. 周辺の長さが 28 mで面積が 48 m^2 の土地に家を建てます。土地の寸法はどれだけでしょうか。

1. 飛行機による km 単位の飛行距離は方程式 $x = 140t + 3t^2$ で与えられており、式中の t は離陸後の時間単位の飛行時間を表しています。この飛行機のエルサルバドルからコスタリカまでの運行が、両国間の距離を約775 kmとすれば、どのくらいの時間になるかを求めなさい。

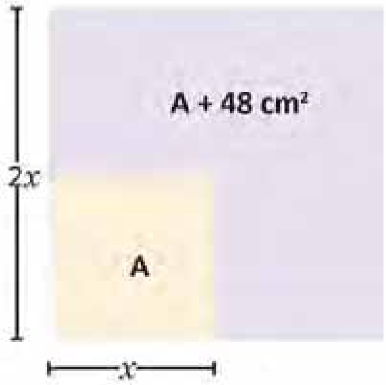
ユニット3

2.4 復習

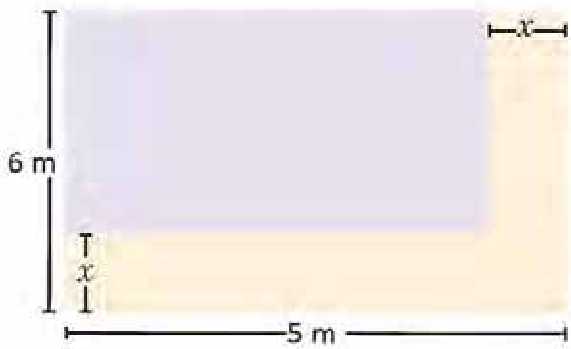
1. 次の長方形の寸法を求めなさい。



2. 正方形の辺を2倍にすると、その面積は48 cm² に増えます。正方形の辺の長さはどれだけでしょうか。



3. 図中、紫の陰影が施された長方形の面積は12 cm² です。x の値を求めなさい。

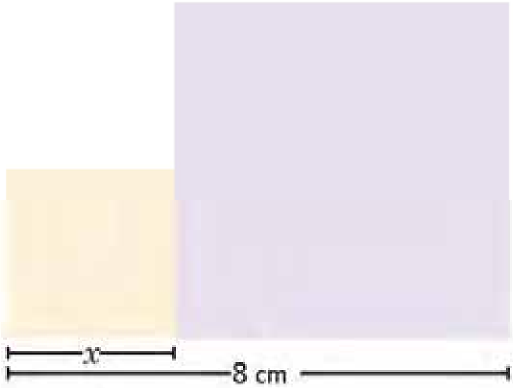


4. 2乗の和が25になるような2つの連続する整数を求めなさい。

5. 周辺の長さが 30 m で面積が 54 m² の土地に家を建てます。その土地の寸法はどれだけでしょうか。

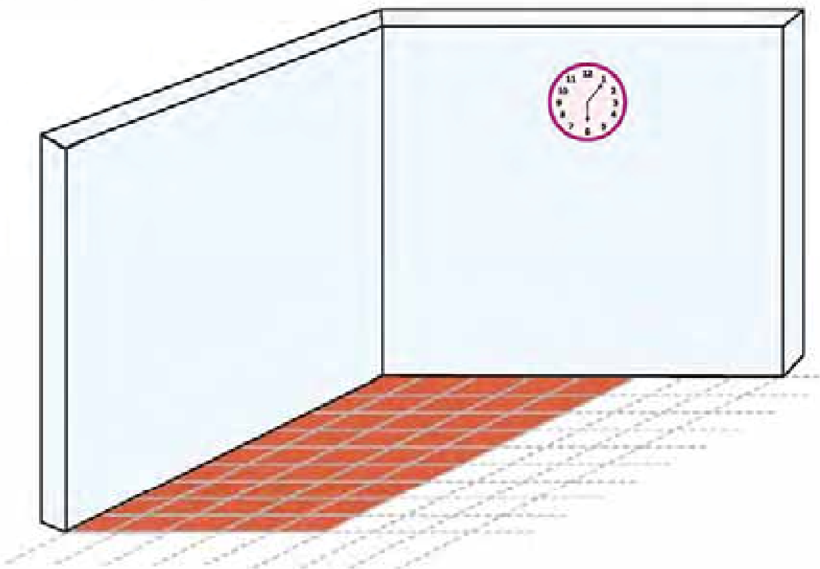
2.5 復習

1. 次の図は2つの正方形で構成されています。2つの面積の和が 34 cm² であれば、両方の辺の値はいくつでしょうか。



2. アナは面積が 400 cm² の正方形の鏡の木枠を作ります。鏡の辺の寸法はどれだけでしょうか。

3. 家に面積が 60 m² の床を敷くのに正方形の煉瓦を240個使用しました。使用した煉瓦の大きさを求めなさい。



エニット3

4. アナはビー玉5個入りの小袋を5つ買います。それらの小袋を買う店の女主人は、追加の小袋を1つ買うごとに各小袋にビー玉を1個増やしますと言いました。ビー玉を64個得るには、アナは小袋をいくつ買わなければならないでしょうか。

5. マリオはバスの運転手です。彼は、運賃0.40ドルを徴収すると、1回の運行で平均90人がバスに乗ること、そして運賃を1セント増やすごとに乗客が1人減ることを知っています。運行の終了時に42ドル得るには、マリオは運賃をいくら増やさなければならないでしょうか。

6. イルカが水から出たときの海抜高度は、方程式 $h = 7t - 5t^2$ で求められます。式中、t は、イルカが水から出た後に経過した時間であり、秒で表されます。イルカはどれだけの時間、水から出ているでしょうか。

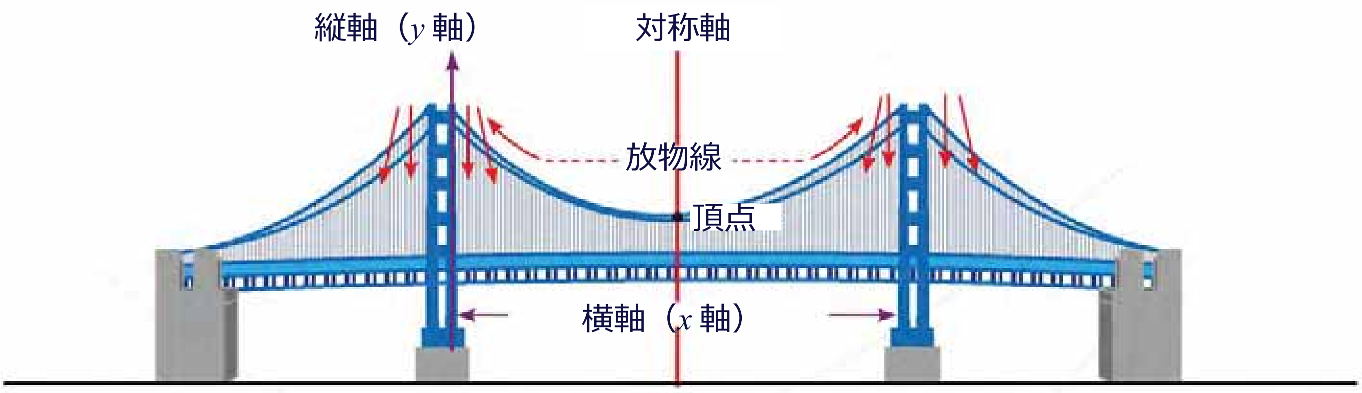
二次関数の式

$y = ax^2 + c$

ユニット 4

16世紀に、方程式の立式において現在使われる記号が導入されました。このような代数学の発展に好ましい変化において、強く影響を与えた数学者の1人がフランス人のフランソワ・ビエト（1540～1603）です。方程式の未知数と係数を表すために記号を用いたことで、二次、三次、四次方程式の研究を促進しました。それらの方程式は中世から「関数」と呼ばれるようになりました。

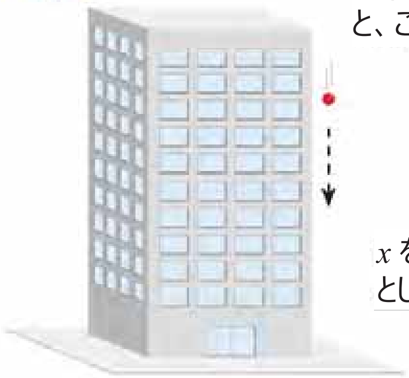
数学者たちの発見に基づき、現在二次関数の活用は自然科学の様々な分野（生物学、物理学、化学）で知られています。同様に、経済学、建築の建設でも活用され、人類に多大な貢献をしています。



このユニットでは、正方形の性質を利用して数量をまとめ、順序対を座標平面に表して関数 $y = x^2$ のグラフを書き、さらに関数 $y = ax^2$ の値の変動を表します。

1.1 2乗に正比例する関数　パート1

P



建物の上からボールを落とします。高さを地面に着くまでにボールが通過する距離とすると、この距離は次の表の通りに変わります。

x （秒）	0	1	2	3	4
y （m）	0	5	20	45	80

x を（ボールを落としてからの）経過時間とし、y を x 秒後にボールが通過した距離とします。

x がその時点での回数分だけ変化し、y が同一の数量で変化しているのなら、y は x に対して正比例しています。

a) x の値が0、1、2、3、4の時、y の値はいくつになるでしょうか？
y は x に対して正比例しているでしょうか？

b) ノートで次の表を完成させて答えましょう。
x^2 と y との間にはどのような関係があるでしょうか？

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1			
y	0	5	20	45	80

c) 5秒後にボールが通過した距離は全部でどのくらいでしょうか？

d) y を x を使って表しましょう。

S

a) x の値が0、1、2、3、4の時、y の値はそれぞれ0、5、20、45、80になります（表を参照しましょう）。

y が x に対して正比例する場合、x の値が二倍または三倍になると、y の値も二倍または三倍になります。しかし、この場合はそうなっていません。

$x = 1$ が二倍（$x = 2$）になった時、$y = 5$ であったのが その四倍になっています（$y = 20$）。
$x = 1$ が三倍（$x = 3$）になった時、$y = 5$ であったのが その九倍になっています（$y = 45$）。

x 3
x 2

x （秒）	0	1	2	3	4
y （m）	0	5	20	45	80

x 4
x 9

よって、y が正比例しているのは x に対してではありません。

b) 表は右のようになります。

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	9	16
y	0	5	20	45	80

x^2 の値のそれぞれを5倍にすると、y のそれぞれの値になります。

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	9	16
y	0	5	20	45	80

つまり、y は、5 に x^2 を掛けた数に等しくなります。

c) 5秒後にボールが通過した距離は、次にようになります。

$$5(5^2) = 5(25)$$
$$= 125 \text{ m}$$

d) $y = 5x^2$

$y = ax^2$ の時、**ある大きさ y は、もう一つの大きさ x の2乗に正比例します**。aで表す数が**定数**です。これは、変化しない実数です。

この例では、ボールが落ちてから通過する距離は、落ちてから経過する時間の2乗に正比例しています。

冒頭の設問では、定数 a は5に等しくなります。ここで提示した数は、実際の数量を概算した値です。実際の自然科学では、もっと細かく表す数字を用います。

1. 正方形の面積は、$a = \frac{1}{2}$ の時、その対角線の2乗に正比例します。

a) 次の表の各面積を求めましょう。x が正方形の対角線を表すとし（cm）、y がその面積（cm²）を表すとします。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64
y	0	0.5	2	4.5					

b) y（面積）を x（対角線）で表しましょう。

2. 円の面積は、その半径の2乗に正比例します。

a) 定数の値はいくつでしょうか?
b) x が円の半径を表し y がその面積を表す時、y を x で表しましょう。
c) 次の表の各面積の値を求めましょう。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64
y	0								

1.2 2乗に正比例する関数　パート2

P

変数 y は、変数 x の2乗に正比例しています。さらに、$x = 3$ の場合、$y = 18$ になります。
定数 a の値を求めて、関数 $y = ax^2$ の式を完成させましょう。

S

問題文で $y = ax^2$ とされています。

定数 a の値を求めるには、x に 3を、y に18を代入し、方程式を解きます。

$$18 = a(3)^2$$
$$18 = 9a$$
$$a = \frac{18}{9}$$
$$a = 2$$

したがって、$y = 2x^2$ となります。

C

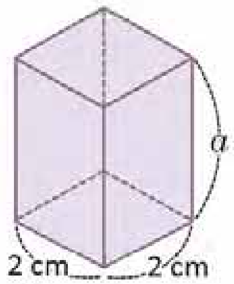
$y = ax^2$ であれば、定数 a の値は、x と y というひと組の提示されている変数に代入して、方程式を解いて求めます。
y が x の2乗に正比例するのであれば、**y は x の関数である** と言います。x に値を代入すると、その値のそれぞれに対して、y の値がただ一つに決まるからです。

通常、a、b、c が実数である関数 $y = ax^2 + bx + c$ は ($a \neq 0$)、**2次関数**と言います。関数 $y = ax^2$ と $y = ax^2 + c$ は、このユニットでは特別なケースとして学習します。2次関数の完全な形式は高校までに学習することになります。

1. 次の各設問では、y は x^2 に対して正比例しています。次のそれぞれの場合の定数の値を計算しましょう。

a) $x = 2$であれば、$y = 12$ となります。
b) $x = 3$であれば、$y = 18$ となります。
c) $x = 6$であれば、$y = 18$ となります。

2. 底面が正方形で高さが一定の角柱の容量は、底面の辺の2乗に比例して変わります。底面の辺が 2 cmの時に、容量は、12 cm³ に等しくなります。高さはどのくらいでしょうか?



角柱の容量は、高さに底面の面積を掛けた積に等しくなります。

1.3 関数 $y = x^2$

P

$y = x^2$ の時、$a = 1$ とします。

a) ノートで次の表を完成させましょう。

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	16								

b) デカルト平面に前の設問で得られた座標 (x, y) を配置し、次の質問に答えましょう。すべて直線上にありますか?

c) 次の表を完成させ、デカルト平面に座標を配置しましょう。どのような線が描けますか?

x	–1	–0.9	–0.8	–0.7	–0.6	–0.5	–0.4	–0.3	–0.2	–0.1	0
y	1	0.81									0

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	0.01									

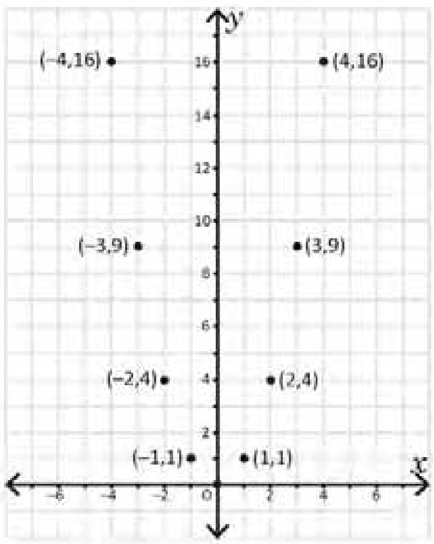
S

a) y の各値は、対応する値 x を2乗した値に等しくなります。記号に注意しなければなりません。例えば、$(-4)^2 = (-4)(-4) = 16$です。これに基づくと、表は次のようになります。

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

b) デカルト平面に点を配置するには、次のようにします。第一の座標を x 軸に置きます。ここから、次の座標まで該当する単位を数えます。正であれば上に向かい、負であれば下に向かいます（いずれにせよ縦方向の動きをします）。

こうすると、設問 a)で得られた各点の配置は、次のグラフに示す通りになります。明らかに各点は直線上にありません。

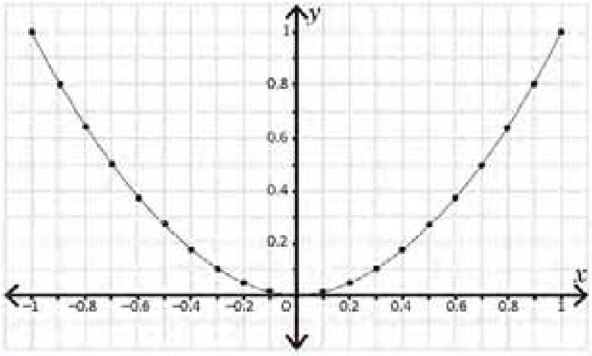


c) 表を埋めると次のようになります。

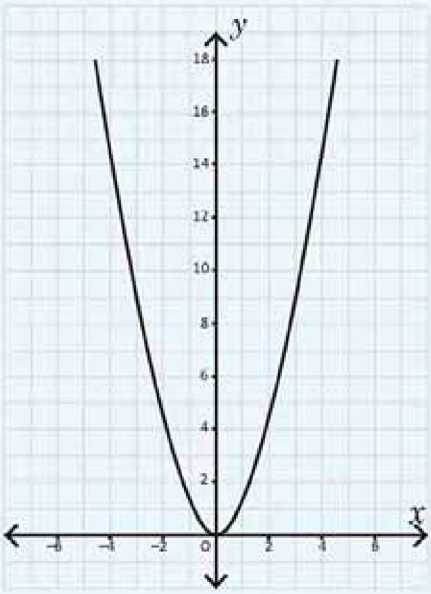
x	−1	−0.9	−0.8	−0.7	−0.6	−0.5	−0.4	−0.3	−0.2	−0.1	0
y	1	0.81	0.64	0.49	0.36	0.25	0.16	0.09	0.04	0.01	0

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1

各座標をつなぐと次のような線になります。



関数 $y = x^2$ をグラフで表した線を、**放物線**と言い、原点 (0,0) を通ります。



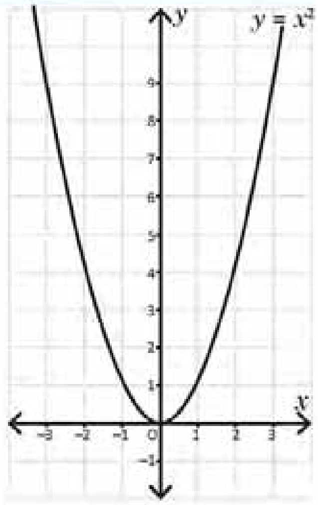
全ての2次関数は、グラフにすると放物線で表されます。その形は、$y = x^2$ の場合と似ています。

1. 始めの設問で得た結果を基にしますと、$x = -1$ の時、y の値とはどのような関係がありますか? $x = 1$ の時、y の値とはどのような関係がありますか?
   $x = -2$ の時や $x = 2$ の時と関係は同じでしょうか?
2. 通常、$x = -m$ や $x = m$ の時、y の値とはどのような関係がありますか?
3. $y = x^2$ のグラフをちょうど y 軸のところで「折った」とすると、両側にあるグラフの部分はどうなるでしょうか?

1.4 関数 $y = ax^2$; $a > 1$

P

$y = x^2$ のグラフをもとにして、次の設問に答えましょう。



a) 次の表を完成し、$y = x^2$ と同じ面に関数 $y = 2x^2$ のグラフを描きましょう。

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2
x^2	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4
$2x^2$	8								

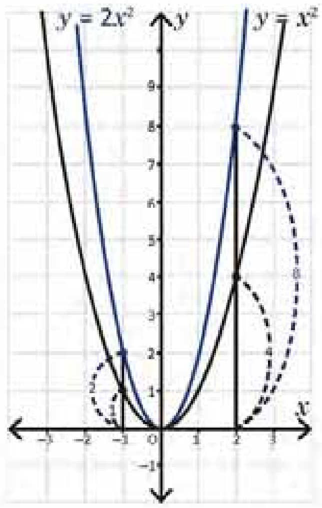
b) $y = x^2$ のグラフと $y = 2x^2$ のグラフでは何が似ていて何が異なるでしょうか?

c) この二つの関数で、$x = -1$ の時の y の値と、$x = 2$ の時の y の値を比較しましょう。どうなっているでしょうか?

S

a) $y = 2x^2$ の値は、$y = x^2$ の値に2を掛けた結果と同じです。表は次のようになります。

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2
x^2	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4
$2x^2$	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8



b) 二つのグラフの似ている点： 原点 (0, 0) を通ること、放物線であること、y 軸で折るとグラフの右側の部分と左側の部分が重なること。

二つのグラフの異なる点：原点以外の各点が一致しないこと。さらに、$y = 2x^2$ では、$y = x^2$「よりも y の値が大きくなっています」。

c) 表とグラフを見ると、$y = 2x^2$ の値は、$x = -1$ の時、$y = x^2$ の値の二倍です。$x = 2$ の時も同様です。通常、関数 $y = 2x^2$ の値は、関数 $y = x^2$ の値の二倍です。

$y = 2x^2$ のグラフは、$y = x^2$ のグラフを因数2の分だけ縦方向に拡大したものになっています。これを**拡大**と言います。

C

a が 1 よりも大きい数だとしますと ($a > 1$)、$y = ax^2$ のグラフを描くには、$y = x^2$ の全ての値に a を掛けます。放物線の**対称軸**は、放物線を一致する二つの部分に分ける垂直な線です。$y = ax^2$ の場合、対称軸は、y 軸になります。

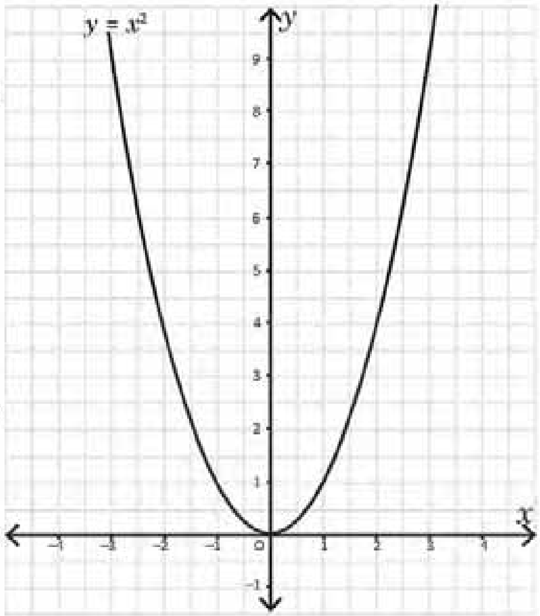
$y = x^2$ のグラフをもとに、次の関数のグラフを描きなさい：

a) $y = 3x^2$ b) $y = 4x^2$ c) $y = \frac{3}{2}x^2$

1.5 関数 $y = ax^2$; $0 < a < 1$

P

$y = x^2$ のグラフをもとにして、次の設問に答えましょう。



a) 次の表を完成し、$y = x^2$ と同じ面に関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフを描きましょう。

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$\frac{1}{2}x^2$							

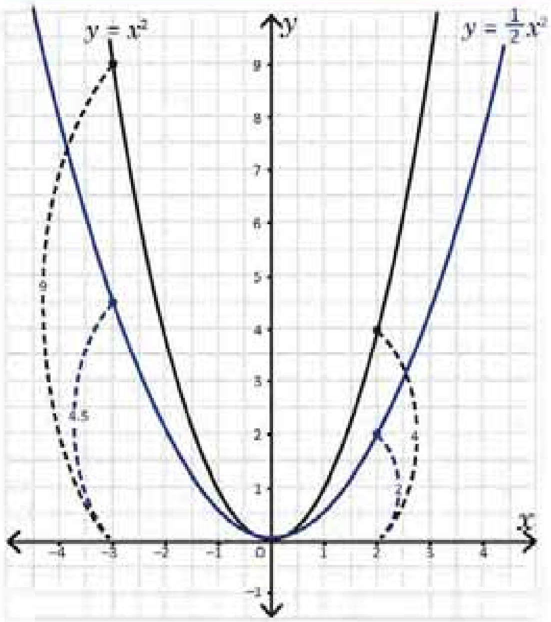
b) $y = x^2$ のグラフと $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフでは何が似ていて何が異なるでしょうか?

c) 二つの関数で、$x = -3$ の時と $x = 2$の時の y の値を比較しましょう。どうなっているでしょうか?

S

a) $y = \frac{1}{2}x^2$ の値は、$y = x^2$ の値に $\frac{1}{2}$ を掛けた結果と同じです。表は次のようになります。

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$\frac{1}{2}x^2$	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5



b) 二つのグラフの似ている点： 原点 (0, 0) を通ること、放物線であること、y 軸が対称軸であること。

二つのグラフの異なる点：原点以外の各点が一致しないこと。さらに、$y = \frac{1}{2}x^2$ では、$y = x^2$「よりも y の値が小さくなっています」。

c) 表とグラフを見ると、$y = \frac{1}{2}x^2$ の値は、$x = -3$ の時、$y = x^2$ の値の半分です。$x = 2$ の時も同様です。通常、関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ の値は関数 $y = x^2$ の値の $\frac{1}{2}$ です。

$y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフは、$y = x^2$ のグラフを因数 $\frac{1}{2}$ の分だけ縦方向に縮小したものになっています。これを**縮小**と言います。

C

a が 0 より大きく 1 より小さい時 ($0 < a < 1$)、$y = ax^2$ のグラフを描くには、$y = x^2$ の全ての値に a を掛けます。

次の関数のグラフを描きなさい。

a) $y = \frac{1}{3}x^2$　　b) $y = \frac{1}{4}x^2$　　c) $y = \frac{2}{3}x^2$

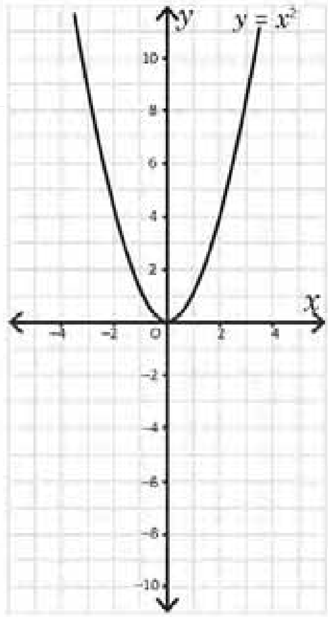
1.6 関数 $y = -ax^2$; $a > 0$

P

$y = x^2$ のグラフをもとにして、次の設問に答えましょう。

a) 次の表を完成し、$y = x^2$ と同じ面に関数 $y = -x^2$ のグラフを描きましょう。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$-x^2$	-9						



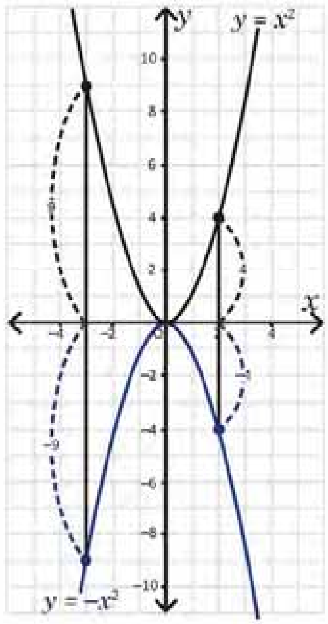
b) $y = x^2$ のグラフと $y = -x^2$ のグラフでは何が似ていて何が異なるでしょうか?

c) この二つの関数で、$x = -3$ の時の y の値と、$x = 2$ の時の y の値を比較しましょう。どうなっているでしょうか?

S

a) $y = -x^2$ の値は、$y = x^2$ の値に-1を掛けた結果と同じです。表は次のようになります。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9 $\times(-1)$	4 $\times(-1)$	1 $\times(-1)$	0 $\times(-1)$	1	4	9
$-x^2$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9



b) 二つのグラフの似ている点： 原点 (0, 0) を通ること、放物線であること、y 軸が対称軸であること。

二つのグラフの異なる点：原点以外の各点が一致しないこと。さらに、$y = -x^2$ は、x 軸の下に描かれることになります。

c) 表とグラフを見ると、$y = -x^2$ の値は、$x = -3$ の時、$y = x^2$ の値の負の値になっています。$x = 2$ の時も同様です。通常、関数 $y = -x^2$ の値は、関数 $y = x^2$ の値の負の値です。

C

a が 0 よりも大きい数だとしますと ($a > 0$)、$y = -ax^2$ のグラフを描くには、$y = ax^2$ の全ての値に-1を掛けます。関数 $y = -ax^2$ は、関数 $y = ax^2$ のグラフを **x 軸に関して対称移動させたもの**です。この場合、$y = -ax^2$ の放物線が下に向かって開いていると言います。

$y = -2x^2$ と $y = -\frac{1}{2}x^2$ のグラフを描きましょう。また、それらのグラフを $y = 2x^2$ と $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフと比較しましょう。

1.7 $y = ax^2$ の特徴

P

$y = x^2$ と $y = -x^2$ ：のグラフを使って次の設問に答えましょう。

a) 関数 $y = 3x^2$、$y = -3x^2$、$y = \frac{1}{3}x^2$、$y = -\frac{1}{3}x^2$ のグラフを同じ面に描きましょう（前の授業で描いたグラフを使いましょう）。

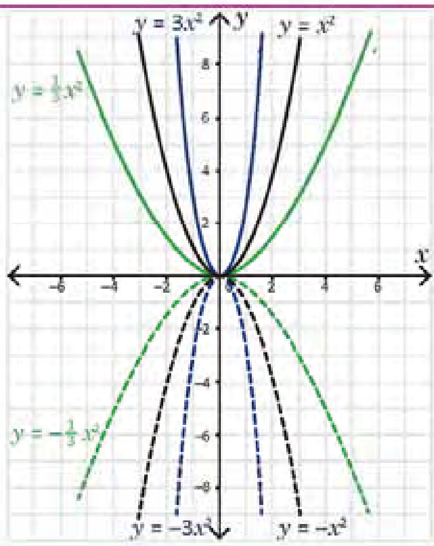
b) a が 0 以外の実数の場合（つまり、正の数の場合も負の数の場合もあり得ます）、関数 $y = ax^2$ のグラフの特徴を書いてみましょう。

S

a) 関数 $y = -3x^2$ のグラフは、$y = 3x^2$ のグラフを x 軸に関して対称移動させたものです。同様に、$y = -\frac{1}{3}x^2$ のグラフは、$y = \frac{1}{3}x^2$ のグラフを x 軸に関して対称移動させたものです。

b) 関数 $y = ax^2$ の特徴は次の通りです。

- a の値に関係なく、$y = ax^2$ のグラフは原点 (0, 0) を通る放物線で、y 軸が対称軸です。
- a の絶対値が 1 より大きい時、放物線は y 軸に近づきますが、a の絶対値が 0 と 1 との間にある時は、放物線は y 軸から遠ざかります。
- $a > 0$ の時、放物線は上に向かって開いた形状になります。
- $a < 0$ の時、放物線は下に向かって開いた形状になります。

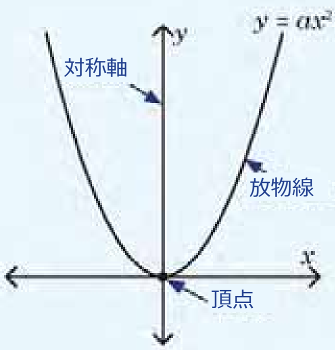


C

関数 $y = ax^2$ のグラフを放物線と呼び、y 軸が対称軸となっています。放物線とその対称軸が交差する点を**頂点**と呼びます。$y = ax^2$ の場合、頂点は原点 (0, 0) に一致します。

a の絶対値が 1 より大きい時、放物線は y 軸に近づきますが、a の絶対値が 0 と 1 との間にある時は、放物線は y 軸から遠ざかります。

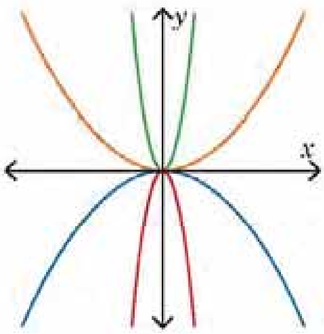
$a > 0$ の場合、放物線は上に向かって開きます。$a < 0$ の場合、放物線は下に向かって開きます。



次のそれぞれの関数を表すグラフを右の図からそれぞれ選びましょう。選んだ理由を説明しましょう。

a) $y = -\frac{1}{7}x^2$　　　b) $y = -8x^2$

c) $y = 7x^2$　　　d) $y = \frac{1}{8}x^2$



1.8 $y = ax^2$ の変動　パート1

P

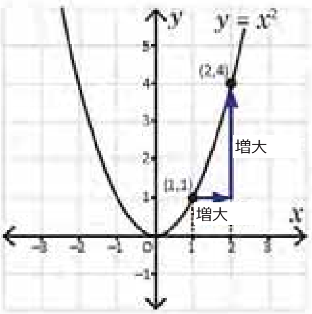
$y = x^2$ と $y = -x^2$ のグラフをもとにして、次の設問に答えましょう。

a) x の値が 1 から 2 に増える時、y の値は $y = x^2$ と $y = -x^2$ とでどのように変わるでしょうか?
b) x の値が -2 から -1 に増える時、y の値は $y = x^2$ と $y = -x^2$ とでどのように変わるでしょうか?

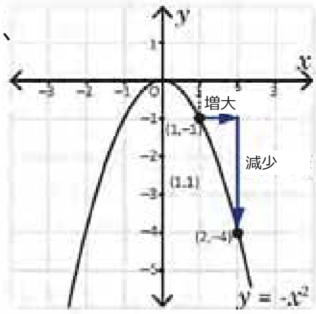
S

a) $y = x^2$ と $y = -x^2$ のグラフを見ますと、次の結論が導き出せます。

x の値が1から2に増える時、y の値は1から4に増えます。

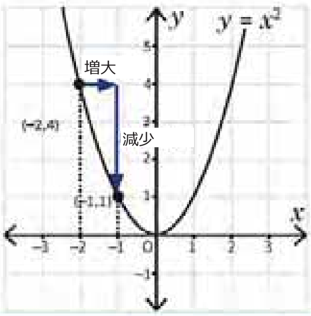


x の値が1から2に増える時、y の値は-1から-4に減ります。

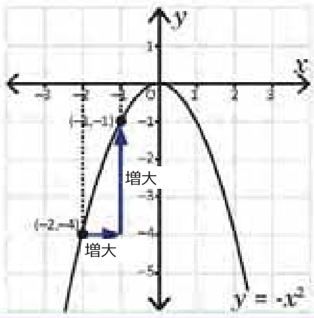


b) 前の設問と同様に、次の結論が導き出せます。

x の値が-2から-1に増える時、y の値は4から1に減ります。

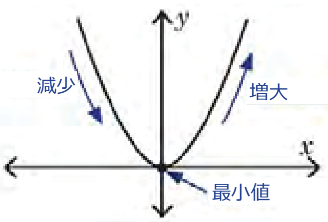
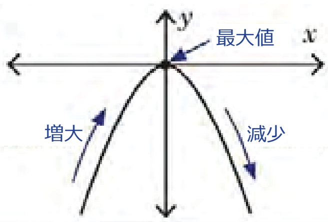


x の値が-2から-1に増える時、y の値は-4から-1に増えます。



C

関数が $y = ax^2$ で a の値が 0 以外の実数である場合（正または負）の場合で、x の値が増え続けるとき、次のようになります。

a > 0	***a*** < 0
a)　$x < 0$ の時、y の値は減ります。 b)　$x > 0$ の時、y の値は増えます。 c)　$x = 0$ であれば、$y = 0$ になります。この場合、$y = 0$ で、これは関数 $y = ax^2$ の**最小**値であると言います。	a)　$x < 0$ の時、y の値は増えます。 b)　$x > 0$ の時、y の値は減ります。 c)　$x = 0$ であれば、$y = 0$になります。この場合、$y = 0$で、これは関数 $y = ax^2$の**最大**値であると言います。
	

1. 関数 $y = x^2$ と $y = -x^2$ のグラフから、x の値が2から3に増えると、y の値は、それぞれの場合でどのように変わるでしょうか?　x の値が-3から -2に増えた場合はどうでしょうか?
2. 関数 $y = x^2$ では、$y = -4$ を満たす x の値はあるでしょうか?解答し説明しましょう。

1.9 $y = ax^2$ の変動　パート2

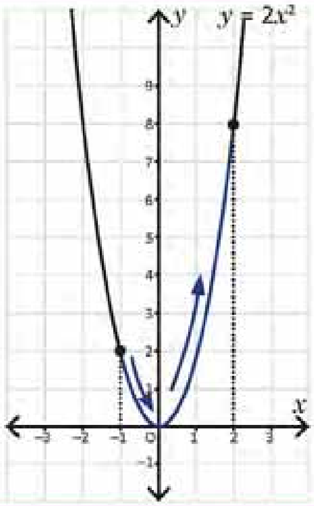
P

関数 $y = 2x^2$ で x の値が -1 と 2 の間にある時、y の値はどの値とどの値の間にあるでしょうか?

$y = 2x^2$のグラフを使いましょう。

S

y の値を求めるには、まず $x = -1$ から放物線まで、次に $x = 2$ から放物線までの垂直方向の線分を描きます。



次のことが分かります。
- y の値の最小値は 0 です（$x = 0$ の時）。
- y の値の最大値は 8 です（$x = 2$ の時）。

よって、y の値は 0 と 8 との間にあります。

C

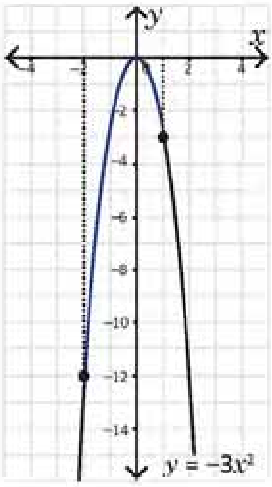
変数 x がとる値を**定義域**、変数 y がとる値を**域値**と言います。この二つの概念については高校でより掘り下げて学習します。

E

関数 $y = -3x^2$ で x の値が -2 と 1 の間にある時、y の値はどの値とどの値の間にあるでしょうか?

- y の値の最小値は -12 です（$x = -2$ の時）。
- y の値の最大値は 0 です（$x = 0$ の時）。

よって、y の値は -12 と 0 との間にあります。

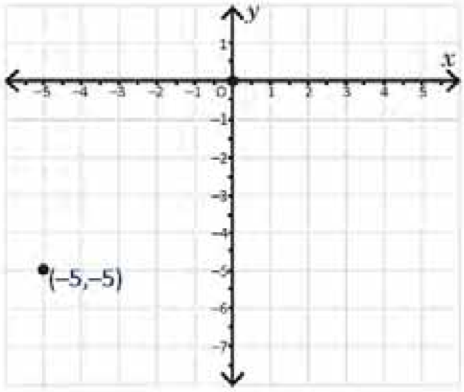


1. 関数 $y = 3x^2$ の場合、x の値が -2 と 3 の間にある時、y の値はどの値とどの値の間にあるでしょうか?
2. 関数 $y = -2x^2$ の場合、x の値が 2 と 4 の間にある時、y の値はどの値とどの値の間にあるでしょうか?
3. 関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ の場合、x の値が -1 と 2 の間にある時、y の値はどの値とどの値の間にあるでしょうか?

1.10 復習

1. 関数 $y = -\frac{1}{5}x^2$ の表とグラフを完成させましょう。

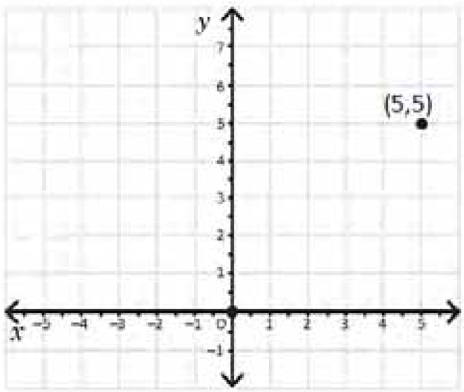
x	-5	-3	0	3	5
x^2	25	9	0	9	25
$-\frac{1}{5}x^2$		-1.8			-5



$x = -5$ の時も $x = 5$ の時も、y の値は同じ -5になります。通常、$x = -m$ の時も $x = m$ の時も、y の値は同じ値になります。

2. 関数 $y = -\frac{1}{5}x^2$ の表とグラフを完成させましょう。前のグラフと比較しましょう。

x	-5	-3	0	3	5
x^2	25	9	0	9	25
$\frac{1}{5}x^2$					



3. 次の各設問では、y は x^2 に対して正比例しています。次のそれぞれの場合の定数の値を計算しましょう。

a) $x = 2$ であれば、$y = 24$ です。
b) $x = 8$ であれば、$y = 16$ です。
c) $x = 2$ であれば、$y = -6$ です。

4. 同じ平面上で次の関数のグラフを描きましょう。

a) $y = \frac{3}{2}x^2$　　b) $y = \frac{2}{3}x^2$　　c) $y = -\frac{3}{2}x^2$　　d) $y = -\frac{2}{3}x^2$

5. $y = \frac{1}{6}x^2$ と $y = -\frac{1}{6}x^2$ のグラフで、

a) x の値が1から6に増える時、y の値は二つのグラフでどのように変わるでしょうか?
b) x の値が-12から-6に増える時、y の値は二つのグラフでどのように変わるでしょうか?

6. $y = 2x^2$ の場合、

a) x の値が-1と3との間にある時、y の値はどの値とどの値の間にあるでしょうか?
b) x の値が-2と4との間にある時、y の値はどの値とどの値の間にあるでしょうか?

1.11 復習

1. $y = -6x^2$ の場合

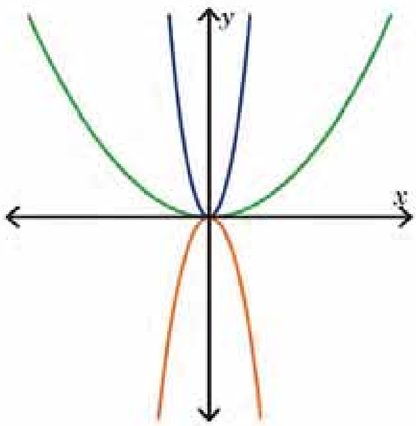
   a) x の値が-3と2との間にある時、y の値はどの値とどの値の間にあるでしょうか?
   b) x の値が-1と1との間にある時、y の値はどの値とどの値の間にあるでしょうか?

2. 左のそれぞれの関数を表すグラフを右の図からそれぞれ選びましょう。

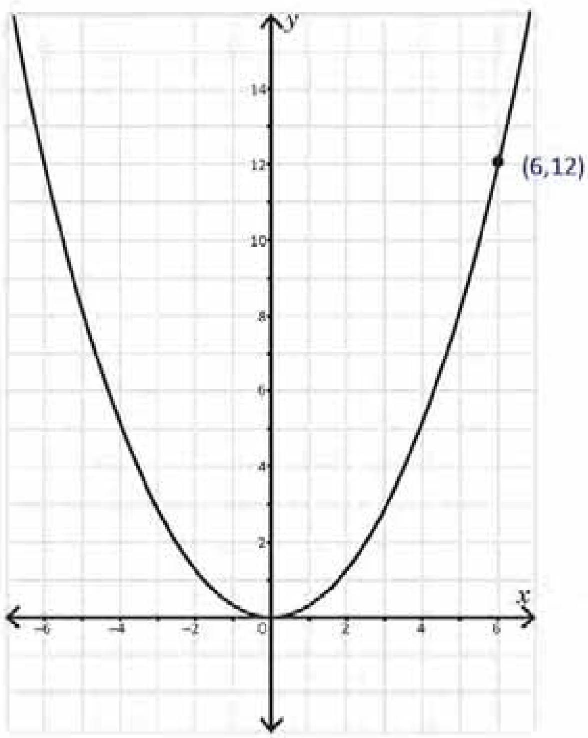
   a) $y = \frac{2}{5}x^2$

   b) $y = -\frac{5}{2}x^2$

   c) $y = 9x^2$



3. 次のグラフは関数 $y = ax^2$ のものです。a の値はいくつでしょうか?



2.1 関数 $y = ax^2 + c; c > 0$

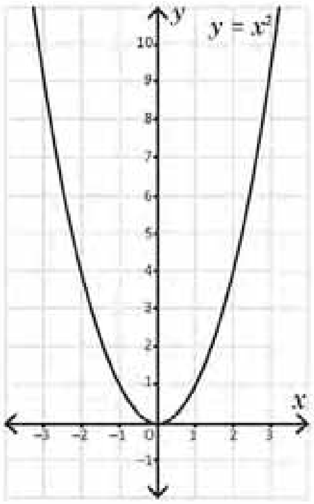
P

$y = x^2$ のグラフをもとにして、

a) 関数 $y = x^2 + 2$ の表とグラフを完成させましょう。

x	−2	−1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 + 2$	6				

$y = x^2 + 2$ のグラフは放物線になります。



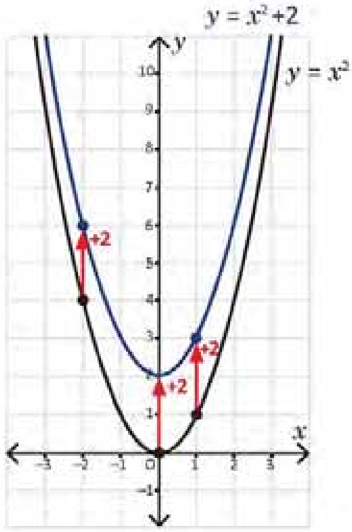
b) $y = x^2$ のグラフと $y = x^2 + 2$ のグラフでは何が似ていて何が異なるでしょうか?

c) $y = x^2 + 2$ のグラフを描く時、$y = x^2$ のグラフがどうなるか自分の言葉で説明してみましょう。

S

a) $y = x^2 + 2$ の値は、$y = x^2$ の値に2を足した値です。表は次のようになります。

x	−2	−1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 + 2$	6	3	2	3	6



b) 二つのグラフの似ている点：　二つとも放物線で、y 軸が変わらずに対象軸であること。

二つのグラフの異なる点：　重なる点がないこと。さらに、$y = x^2$ では (0, 0) が頂点ですが、$y = x^2 + 2$では (0, 2) が頂点で二単位分上にあることです。

c) $y = x^2 + 2$ のグラフを描く時、$y = x^2$ のグラフが二単位分上に移動します。

C

a が 0 以外の実数で（正の値または負の値）で c が正の数 ($c > 0$) である時、$y = ax^2 + c$ のグラフは、$y = ax^2$ のグラフを**単位 c の分だけ縦方向に**（上に）**移動したもの**になります。$y = ax^2 + c$ の対称軸は、y軸で、その頂点は $(0, c)$ になります。

次の関数のグラフを描きましょう。それぞれの場合について頂点がどうなるか書きましょう。

a) $y = x^2 + 3$　　b) $y = -x^2 + 3$　　c) $y = -2x^2 + 2$

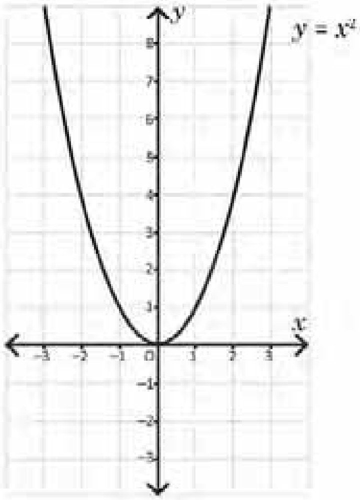
2.2 関数 $y = ax^2 + c$; $c < 0$

P

$y = x^2$ のグラフをもとにして、

a) 関数 $y = x^2 - 2$ の表とグラフを完成させましょう。

x	−2	−1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 - 2$	2				



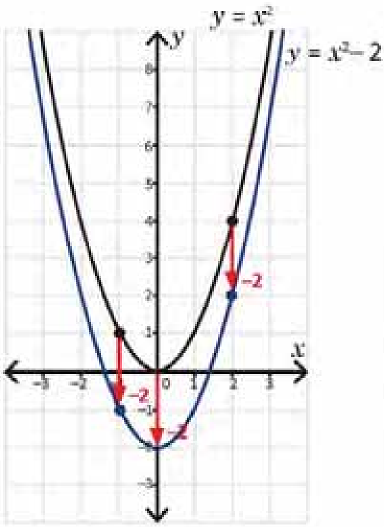
b) $y = x^2$ のグラフと $y = x^2 - 2$ のグラフでは何が似ていて何が異なるでしょうか?

c) $y = x^2 - 2$ のグラフを描く時、$y = x^2$ のグラフがどうなるか自分の言葉で説明してみましょう。

S

a) $y = x^2 - 2$ の値は、$y = x^2$ の値から2を引いた値です。表は次のようになります。

x	−2	−1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 - 2$	2	−1	−2	−1	2



b) 二つのグラフの似ている点： 二つとも放物線で、y 軸が変わらずに対象軸であること。
二つのグラフの異なる点： 重なる点がないこと。さらに、$y = x^2$ では (0, 0) が頂点ですが、$y = x^2 - 2$ では (0, − 2) が頂点で二単位分下にあることです。

c) $y = x^2 - 2$ のグラフを描く時、$y = x^2$ のグラフが二単位分下に移動します。

C

a が 0 以外の実数で（正の値または負の値） で c が負の数 ($c < 0$) である時、$y = ax^2 + c$ のグラフは、$y = ax^2$ のグラフを**単位 c の分だけ縦方向に**（下に） **移動したもの**になります。$y = ax^2 + c$ の対称軸は、y 軸で、その頂点は (0, c) になります。

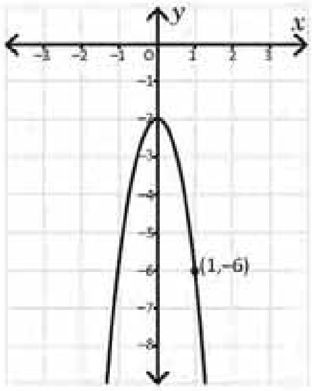
次の関数のグラフを描きましょう。それぞれの場合について頂点がどうなるか書きましょう。

a) $y = x^2 - 3$　　b) $y = -x^2 - 3$　　c) $y = 2x^2 - 2$

2.3 関数の方程式を求めるための最初の条件

P

関数 $y = ax^2 + c$ が、図のとおりのグラフになるためには、a と c の値はいくつでなければならないでしょうか?

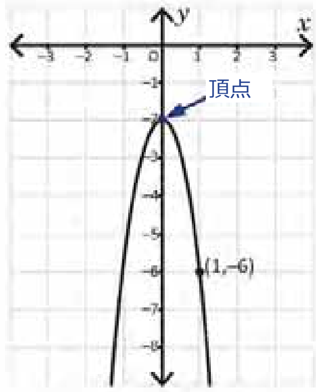


この設問では、a と c の値が正の値であるか否かについて何も言っていません。つまり、それらの値が負の数である場合もあり得ます。グラフを使って頂点を求めましょう。

S

この設問では、この関数が $y = ax^2 + c$ の形式であるとされています。グラフから、次の結論が導き出せます。

1. 放物線が下に向かって開いているので、a の値は負の値です。
2. 頂点は $(0, c)$ です。これは問題文から分かります。
3. 頂点が (0, 0) の「下に」あるので、c の値は負の値です。



グラフを見ると、頂点が (0, −2) にあることが確認できます。従って $c = -2$ です。(1, −6) の点は放物線上にあります。つまり、$x = 1$ の時、$y = -6$ になるということです。これらの値と c の値を $y = ax^2 + c$ に代入し、a を求めます。

$$\begin{aligned} -6 &= a(1)^2 + (-2) \\ a - 2 &= -6 \\ a &= -6 + 2 \\ a &= -4 \end{aligned}$$

よって、a の値と c の値は、それぞれ−4と−2です。関数は、$y = -4x^2 - 2$ になります。

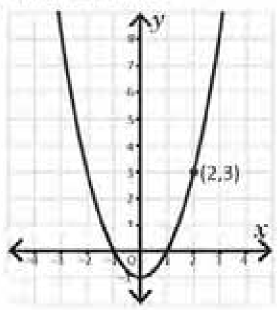
C

関数 $y = ax^2 + c$ とそのグラフ上の点 (m, n) から、a と c の値（正の数にも負の数にもなり得ます）を求めるには、次のようにします。

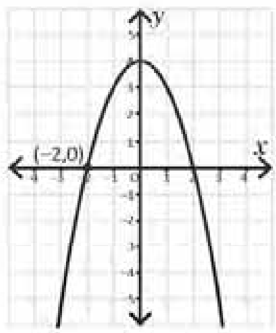
1. グラフ上で、放物線の頂点 $(0, c)$ の位置を見つけます。もし (0, 0) の上にあるのなら、c の値は正の数になり、(0, 0) の下にあるのなら、c の値は負の数になります。
2. n と m と c の値を代入して a の値を求めます。そうしますと、$n = am^2 + c$ になります。

1. 次のグラフは、$y = ax^2 + c$ の形式をとる関数のグラフです。それぞれについて a と c の値を求めましょう。

a)



b)



2. グラフが点 (1, 4) と点 (2, 10) を通る関数 $y = ax^2 + c$ の a と c の値を求めましょう。

ユニット4

2.4 復習

1. 次の関数のグラフを描き、それぞれの頂点を示しましょう。

a) $y = -3x^2 + 1$　b) $y = 3x^2 - 1$　c) $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$　d) $y = -\frac{1}{4}x^2 - 2$

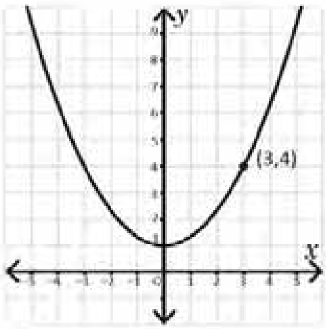
2. 次の関数の頂点を示しましょう。

a) $y = 2x^2 - \frac{1}{2}$　b) $y = 2x^2 + \frac{1}{2}$　c) $y = -2x^2 - \frac{1}{2}$

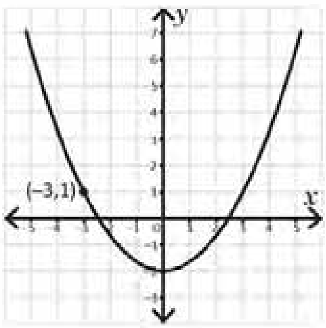
d) $y = -2x^2 + \frac{1}{2}$　e) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$　f) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$

3. 次のグラフは、$y = ax^2 + c$ の形式をとる関数のグラフです。それぞれの a の値と c の値を求めましょう。

a)



b)



4. 次の関数のそれぞれを表すグラフを次の図から選びましょう。

a) $y = -5x^2 + 2$　b) $y = 5x^2 + 2$

c) $y = \frac{1}{5}x^2 - 3$　d) $y = -\frac{1}{5}x^2 - 3$