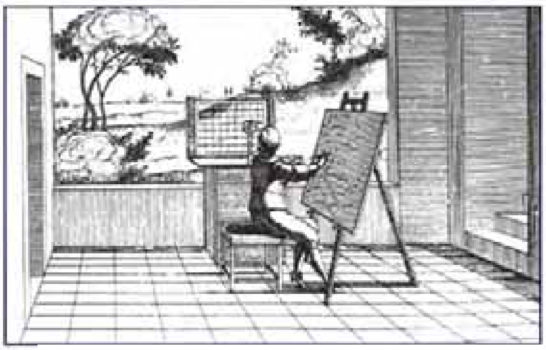
5 ユニット

図形の相似


ケフラー王、クフ王のピラミッド（エジプト）

紀元前4世紀のギリシャの数学者、ミレトスのタレスはエジプトのクフ王の大ピラミッドの高さを計測しました。彼は砂漠に棒をたて、地面に落ちた棒の影とピラミッドの影を比較してピラミッドの高さを測りました。タレスは太陽の光は平行に当たると考え、三角形の相似を応用してピラミッドの高さを測定したのです。

画像や写真を拡大・縮小したり、風景を描いたりするときにも、図形の相似を応用した手法が使われることがあります。描きたい風景などを四角の枠にあてはめて格子状の線を引きます。同じようにカンバスや紙を四角の枠にあてはめて格子状の線を引き、お互いの枠の絵が相似になるようにする方法です。


格子線を使って絵を描く画家

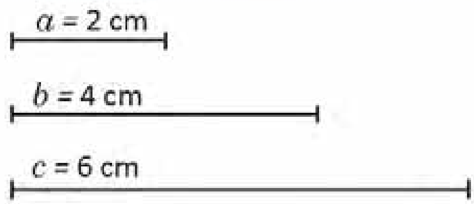
このユニットでは線分の比、図形の相似ならびにその特徴と作図について学習します。その過程で三角形の相似条件、中点連結の特性、平行線と線分の比の関係を扱います。また、図形の相似を応用し地図の縮尺を扱います。2つの相似の三角形の面積比、相似の立体の体積比なども学習します。

1.1 線分の比

P

a) 線分 a の長さは、線分 b の長さに対して何倍ですか?

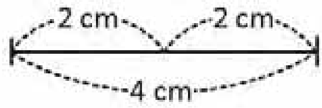
b) 線分 a の長さは、線分 c の長さに対して何倍ですか? 線分 b の は線分 c に対してどうなりますか?



S

a) 線分 a の長さを線分 b の長さと比較することにより、a は b の $\frac{1}{2}$ だと分かります。

b) 指数 $\frac{a}{c}$ を計算して、a の長さは c の長さの $\frac{1}{3}$ だと分かります。同様にして、b の長さは c の長さの $\frac{2}{3}$ だと分かります。

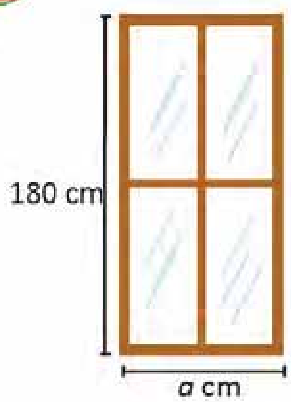


C

2つの線分の長さを表す数同士の指数を、**線分の比**と呼びます。この比は、いかなる単位を付けて表すこともありません。つまり、センチメートル、メートル、その他いかなる長さの単位も伴わないということです。

冒頭の設問では、線分 a と b の比は、$\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ であることから、$\frac{1}{2}$ です。これは 1 : 2 とも表し、「1 対 2」と読みます。a と b の順序に注意を払わなければなりません。一般に、線分の比は約分して記述します。

E



高さが 180 cm で、幅と高さの寸法の比が $\frac{4}{9}$ で与えられている窓の幅の寸法は、どれくらいでしょうか? (図参照)

窓の幅と高さを、この両者の比に等しくします。ここで、順序に気を付けなければなりませんよ。つまり、当てはまる場合に合わせて、短い方の長さ 割る 長い方の長さ、になるようにするか、又はその逆にします。

窓の幅の寸法のセンチメートル値を a で表します。もし、幅と高さの寸法が $\frac{4}{9}$ の比にあるのであれば:

$$\frac{幅}{高さ} = \frac{4}{9}$$

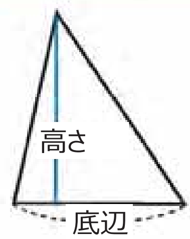
値を前の等式に代入して、a の値を移項して:

$$\frac{a}{180} = \frac{4}{9}$$
$$a = 180\left(\frac{4}{9}\right)$$
$$a = 80$$

よって、窓の幅の寸法は 80 cm になります。

1. 線分 a = 4 cm と線分 b = 20 cm の間の比を計算しましょう。

2. 三角形の底辺と高さは $\frac{5}{7}$ の比になっています。もし底辺の長さが 10 cm だとすると、三角形の高さはどれだけの寸法になりますか? (図参照)

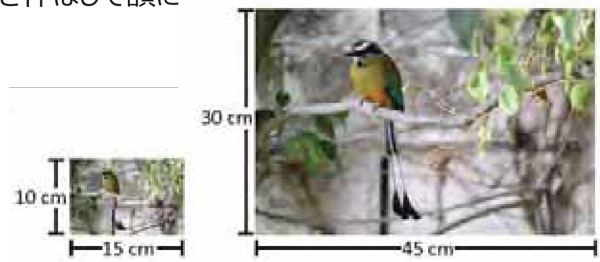


1.2 比例と線分

P

カルロスは、1 羽のトロゴスの写真を撮りましたので、これを引き伸ばして額に入れることにしました。

a) 小さい写真と引き伸ばした写真の高さの比は、どれだけになっていますか? 底辺同士ではどうですか?
b) これら 2 つの比の間には、どのような関係がありますか?



S

a) 小さい写真の高さは 10 cm で、引き伸ばした写真の高さは 30 cm です。つまり、両方の高さの比（小さい方 割る 引き伸ばした方）は $\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$ で、1 : 3 のように書き表すこともできます。底辺についても同様の手順で行い、両方の比は $\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$ または 1 : 3 になります。

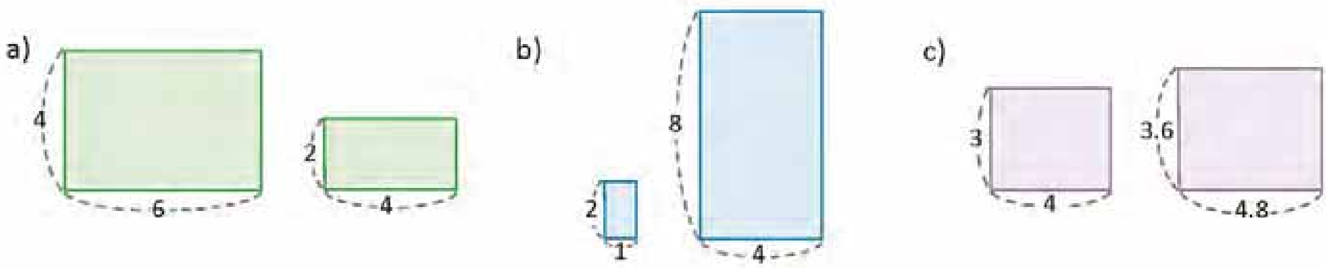
b) 両方の比を約分すると、結果は $\frac{1}{3}$ となり、すなわち等しくなります。
このようなことが起こるとき、写真の高さと底辺は「比例」している、といいます。

また、比を、大きい方の高さ 割る 小さいほうの高さ で計算して $\frac{30}{10}=\frac{3}{1}$ とし、3 : 1 と書き表すこともできます。底辺についても同じ方法で行うこともできますが、確実に同じ順序で行わなければなりません。

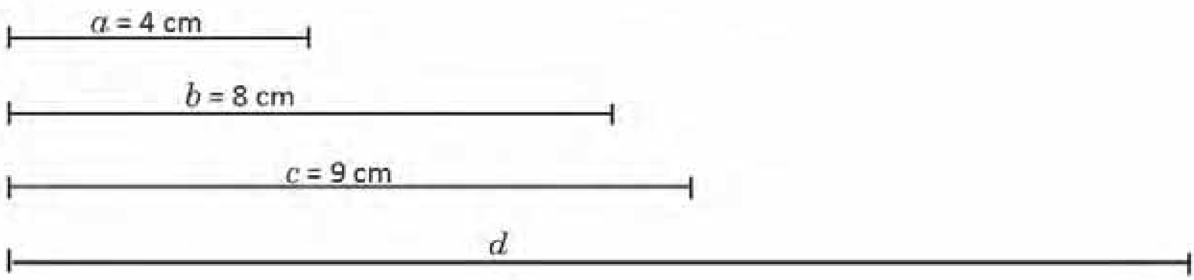
C

2つの比の同等性について、つまり 2 つの比がが等しいことを、**比例** と呼びます。例えば、$\frac{10}{30}=\frac{15}{45}$ で、この両者を約分して、$\frac{1}{3}$ または 1 : 3 と書き表すことができます。

1. 以下のような長方形の組が与えられるとき、それぞれの組で、底辺と高さは比例しているでしょうか? 自分の答えを証明しましょう。



2. 次の図では、線分 a と b が c と d に比例するようにするには、線分 d はどんな長さでないといけないでしょうか?

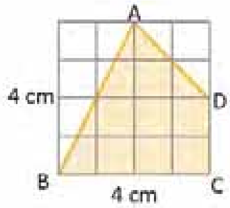


ユニット5

1.3 図形の相似

P

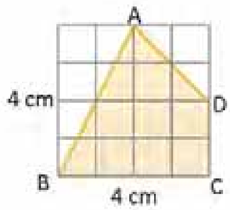
四角形 ABCD を、その形を変えることなしに、半分に縮小し、また 2 倍に拡大しましょう。

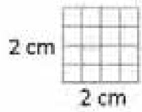


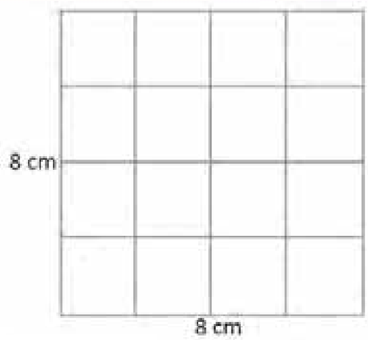
四角形の辺を、半分に縮小し、また 2 倍に拡大しましょう。

S

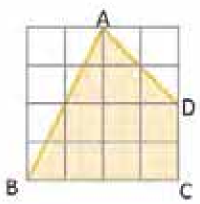
2 つの正方形で、一方は辺が 2 cm のもの、もう一方は辺が 8 cm のものを描きます。元の碁盤目状の四角には 16 の正方形がありますが、これと同じ形に 2 cm と 8 cm の正方形を、内部に 16 のマスができるように碁盤目状にします：

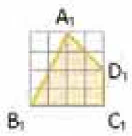


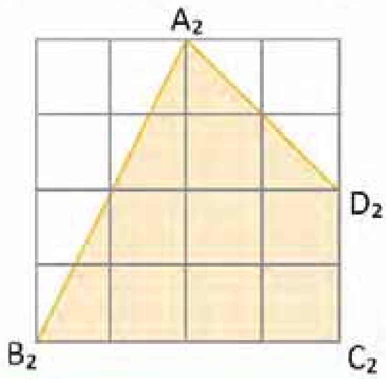




次に、両方の碁盤目状の四角に、四角形を、その形を保存して描きます。







小さい方の碁盤目状四角の中の正方形は、辺が 5 mm になっていて、大きい方の碁盤目状四角の中のものは辺が 2 cm になっています。

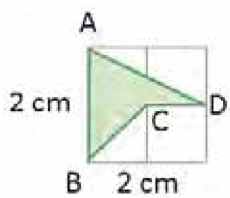
C

2 つかそれ以上の図形は、必ずしも同じ大きさでなくても（前例のように）、同じ形を持つとき、**相似**であるといいます。ある図形を縮小または拡大すると、結果として元の図形と相似な図形になります。

相似性を示すためには、記号 ~ を用います：四角形 ABCD ~ 四角形 $A_1B_1C_1D_1$ であり、これは「四角形 ABCD は四角形 $A_1B_1C_1D_1$ に相似である」（図形は対応する頂点の順に読んでいきます）と読み、また四角形 ABCD ~ 四角形 $A_2B_2C_2D_2$ です。

1. 右の四角形 ABCD を 2 倍に拡大し、その結果生じる図形を描きましょう。

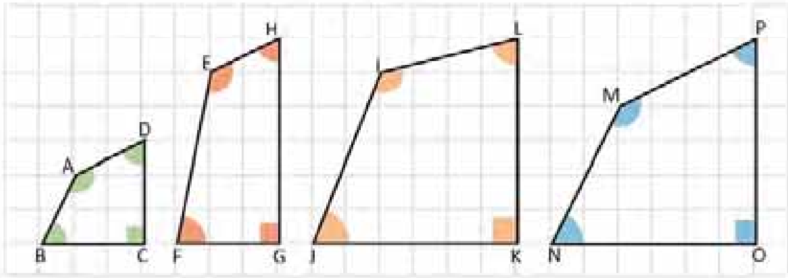
2. 四角形 ABCD を 3 倍に拡大するときには、碁盤目状四角の寸法はどのようになるでしょうか? その結果生じる図形を描きましょう。



1.4 相似な図形の特徴 第1部

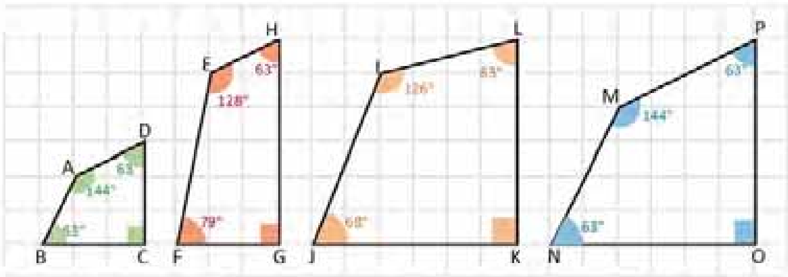
P

どの四角形が、四角形 ABCD と相似ですか?



S

四角形 ABCD を拡大すると、その結果は、これと相似なもう一つの四角形であり、ただその辺の長さが変わるのみで、その角の大きさは変わりません。分度器で四角形の角を計測して比較します：

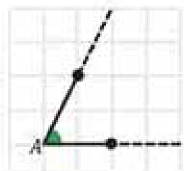


四角形 ABCD と四角形 EFGH の場合： ∢B は ∢F と合同でなく、よって、同じ形を持たないことから、EFGH は ABCD と相似ではありません。

ABCD の角を IJKL のそれと比較しても、同様のことが起こります：
∢J は ∢B と合同でありません。

最後に、四角形 ABCD と四角形 MNOP については： 前者の角は
後者の角と合同で、ABCD を 2 倍に拡大すると、その結果は MNOP と等しくなります。よって、MNOP は ABCD と相似です。

ある角の辺を延長した場合、その角の角度は保たれます。



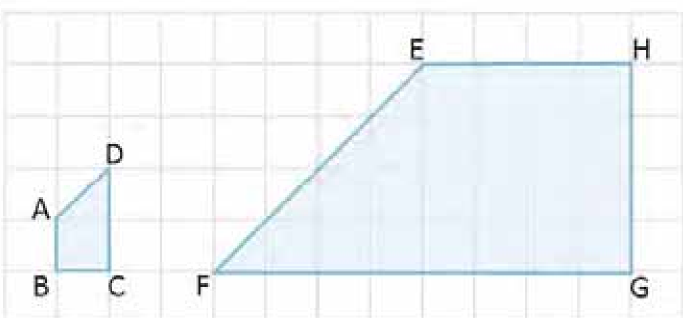
頂点が A である角の角度を示す際には、∢A と記述します。

C

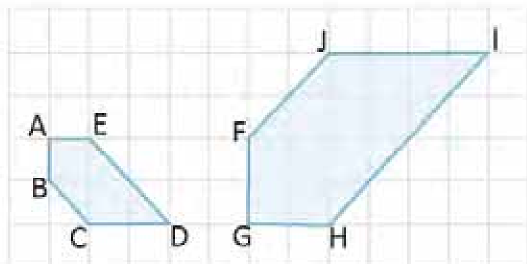
2つかそれ以上の相似な多角形については、その対応する角が合同となっています。言い換えれば、その角度が等しくなっています。多角形については、同じ位置にある角を **対応する角** といいます。

それぞれの多角形の組について、対応する角を認識しましょう。

a)



b)

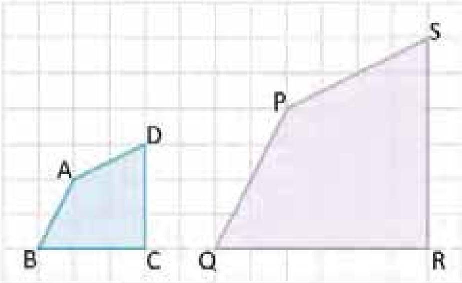


ユニット5

1.5 相似な図形の特徴 第2部

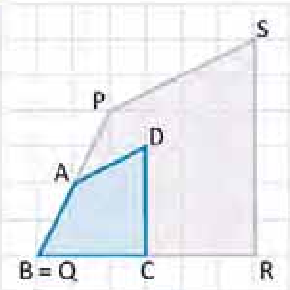
P

四角形 ABCD と四角形 PQRS は相似です。両四角形の対応する辺同士の比は、どのような関係になっていますか?



対応する辺 とは、同じ位置にあるもののことです。両方の四角形を重ね合わせて、それぞれの辺を比較するか、定規を用いて辺の長さを計測して、比を計算することができます。

S



頂点 B と頂点 Q が一致するようにして、四角形を重ね合わせます。図形から、以下が導きだされます：

$PQ = 2AB \Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{1}{2}$　　$QR = 2BC \Rightarrow \frac{BC}{QR} = \frac{1}{2}$

$RS = 2CD \Rightarrow \frac{CD}{RS} = \frac{1}{2}$　　$SP = 2DA \Rightarrow \frac{DA}{SP} = \frac{1}{2}$

比は等しく、よって対応する辺は比例しています。

C

2 つの相似な多角形では、その対応する辺は比例しています。冒頭の設問では：

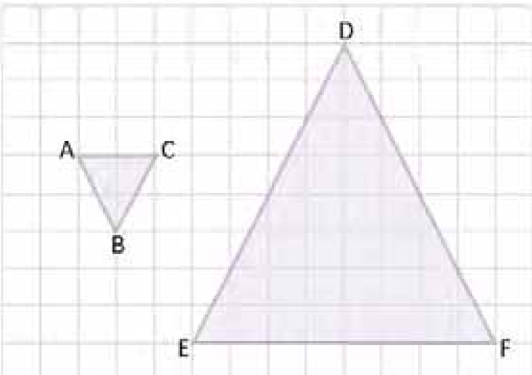
$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP} = \frac{1}{2}$$

対応する辺は、**対応辺** とも呼び、それらの間の比は**相似比** と称します。

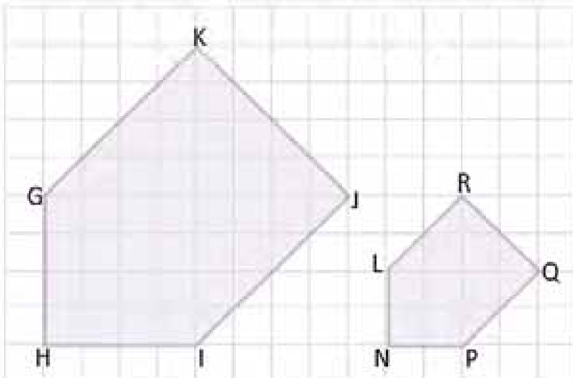
一般に、対応する辺が比例していて、対応する角が合同であるとき、その **2 つの多角形は相似です**。

図形では、三角形 ABC は三角形 FDE に相似で、五角形 GHIJK は LNPQR に相似です。それぞれの組について、対応する辺を識別し、その相似比を計算しましょう。

a)



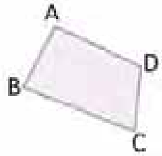
b)



1.6 相似な図形の作成

P

ボンド紙白紙のページの上に、次の四角形を描きましょう：

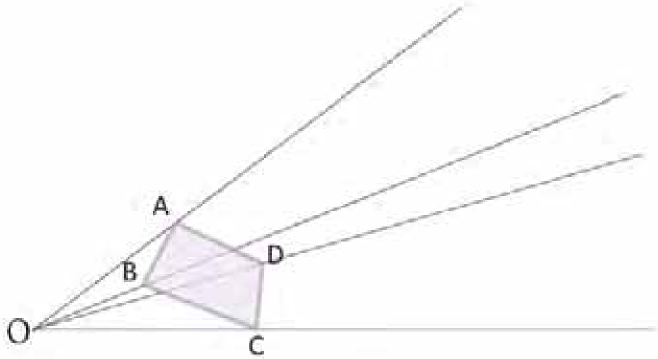


どのようにして、ABCD と相似な四角形で、比が 1 : 3 になっているものを描くことができますか?

S

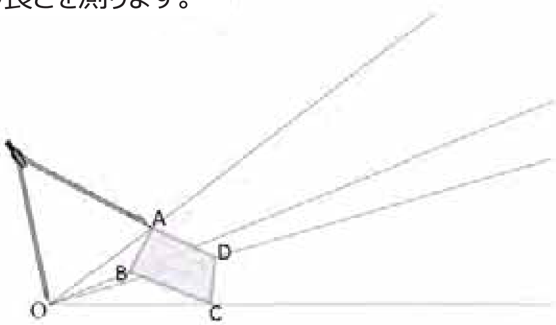
ABCD と相似な四角形で、比が 1 : 3 になっているものを描くためには、
以下を行います：

1. ある点を定め、O とします。点 O と、四角形のそれぞれの頂点を通る半直線を描きます。

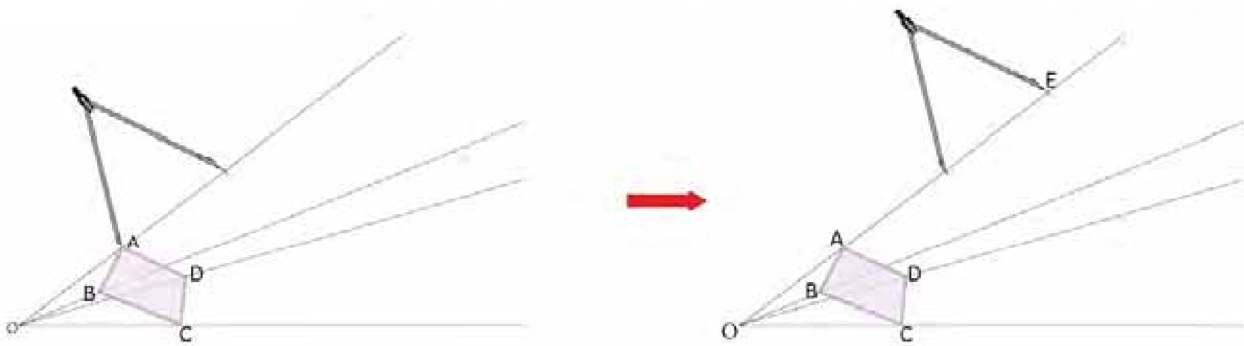


半直線 は、ある直線上の全ての点で、ある特定の点の片側にあるものから成っています。**始線** とも呼ばれます。

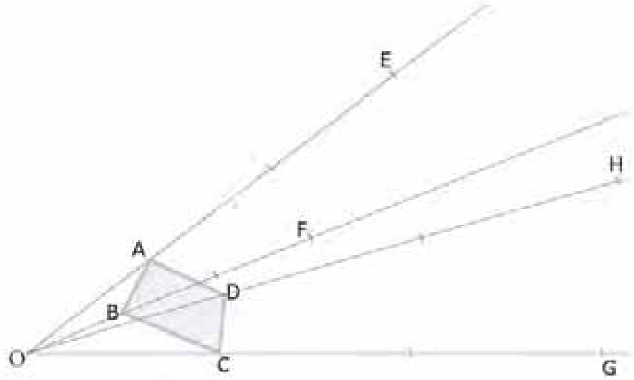
2. コンパスを用いて、OA の長さを測ります。



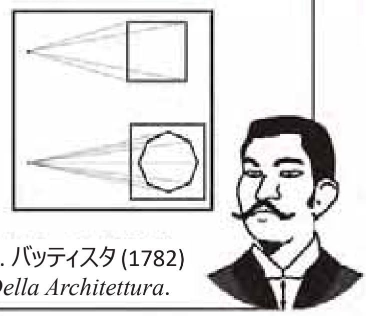
3. 半直線の上で頂点 A から発して、OE = 3OA を満たす点 E に印をつけます。これは、コンパスの支点を A に置き、半直線と交わるように弧を描いて行います。次に、コンパスの支点をその弧で描いた交点に置き、半直線と交わる第 2 の弧を描き、それが点 E となります：



4. 同様のことを他の 3 つの頂点に対しても行いますが、OB、OC、OD を計り、OF = 3OB、OG = 3OC、OH = 3OD を満たす点 F、点 G、点 H を見つけます：

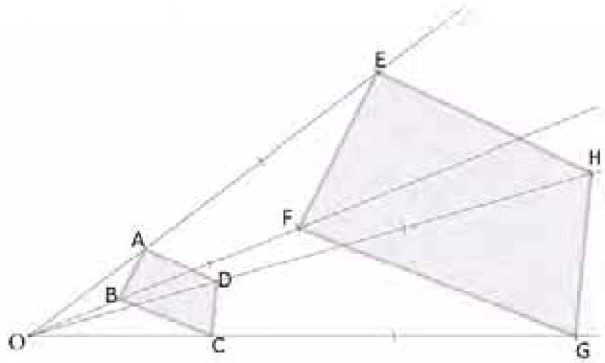


イタリア人の **レオン・バッティスタ・アルベルティ** は、建築士であると同時に、ルネサンスで初めての芸術理論家でもあり、この技術を自分の著作「絵画論（*Della pintura*）」で述べ、遠近法の法則について説明しています。ある物体の大きさは、それを長い距離から見るにつれて小さくなっていき、果てには一点に縮小してしまいます。



A. バッティスタ (1782)
Della Architettura.

5. 四角形 EFGH を形成するために、点同士を繋ぎましょう：



C

前述の、相似な図形を描き出すための技法は、**相似変換** として知られています。点 O は **相似変換の原点** と呼び、四角形 ABCD と四角形 EFGHは、一方が一方を **相似拡大/相似縮小** しているといい、その比は：

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} = \frac{1}{3}$$

相似比 と呼びます。

1. ここで描いた四角形は、比 1 : 3 で相似であることを確認しましょう。

2. 相似比が 1 : 2 である 2 つの三角形を描きましょう。

1.7 学んだことで練習しましょう

1. ある長方形の形をした教室の床の幅と長さの寸法は、3 : 4 の比になっています。

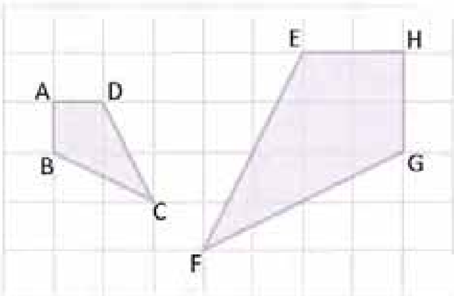
   a) もし教室の長さが 8 m であるとき、その幅はどれだけの寸法になりますか?

   b) 教室の床を、焼き物で敷きます。もし焼き物のタイルが、面積が 0.25 m2 で、その価格が $ 2.00 である場合には、床全体にこの焼き物を敷く場合には、いくらかかるでしょうか?

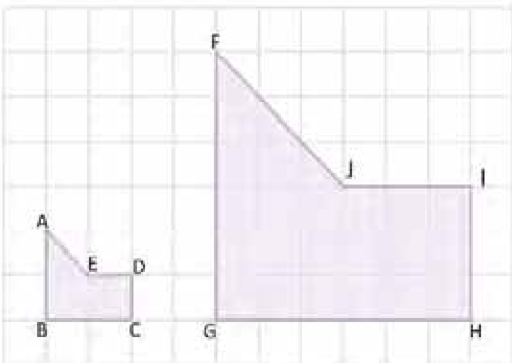
2. エルサルバドルの立法議会は、祖国の象徴法を発令しましたが、同法では、大国旗の寸法は、長さが 3.35 m で幅が 1.89 m としています。フリアは、国旗の縮小版を制作し、その幅を 20 cm にします。元版と縮小版が相似である場合には、フリアが制作する国旗の長さはどれだけの寸法になりますか? 答えを cm で、小数第 1 位までで求めましょう。

国旗の寸法は、両方の版で、cm または m で表されていなければなりません。

3. 四角形 ABCD と四角形 HGFE が互いに相似なことを確認しましょう。相似比はいくらですか?



4. 多角形 ABCDE と FGHIJ が相似であることを確認しましょう。相似比はいくらですか?

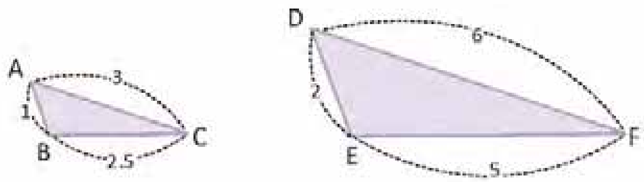


5. 相似比が 2 : 3 である 2 つの、一方が一方を相似拡大した三角形を描きましょう。

2.1 1 番目の三角形の相似条件

P

図の三角形ABCと三角形DEFはその辺の比が 1 : 2 です。相似ですか?



三角形の角の大きさを測るには、付録ページにある図を使ってください。

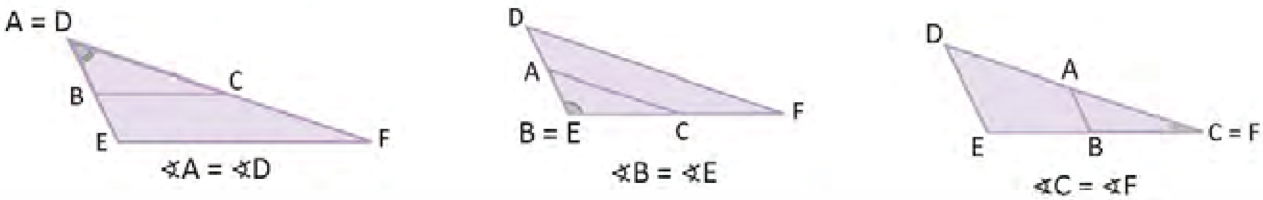
S

2 つの三角形の辺は比例しています。三角形の対応する角が等しいか確認しなければならず これは次の方法で行うことができます。

1. 分度器を使い、各三角形の角の大きさを測ります。

∢A = ∢D
∢B = ∢E
∢C = ∢F

2. 三角形を重ねて各頂点を比べます。



この2つの場合では、両方の三角形の対応する角が合同であることが確認されます。したがって、ΔABC ~ ΔDEF となります。

C

2 つの三角形の対応する辺が比例し、対応する角が合同であるとき、その三角形は相似です。

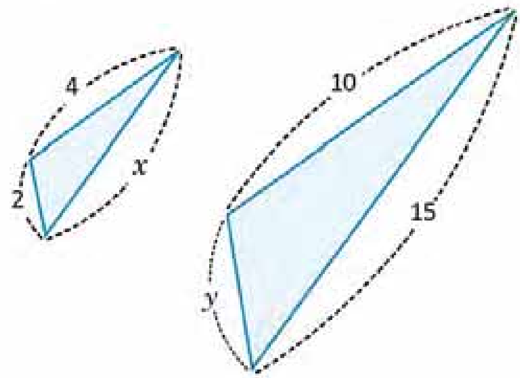
条件 LLL：
2 つの三角形の対応する辺が比例すれば、これも相似です。例えば、冒頭の問題の三角形 ABC とDEF は対応する辺が比例しています。つまり、

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{1}{2}$$

したがって、ΔABC と ΔDEF は相似です。

E

次の 2 つの三角形が相似になるには、x と y の値はいくつですか?



結論で示された結果に従って、三角形が相似になるには、その辺が比例していれば十分です。
つまり $\frac{2}{y} = \frac{x}{15} = \frac{4}{10}$ です。

x の値を計算します：

$$\frac{x}{15} = \frac{4}{10}$$
$$x = 15\left(\frac{4}{10}\right)$$
$$x = 6$$

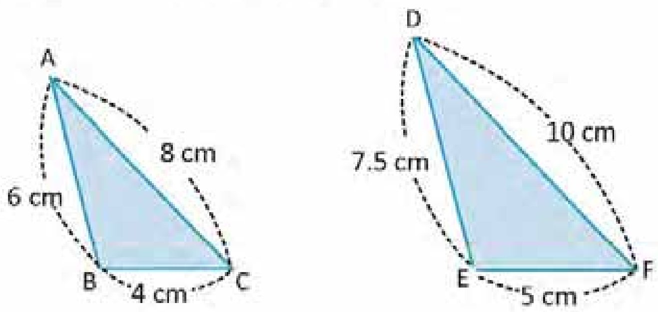
y の値を計算します：

$$\frac{2}{y} = \frac{4}{10}$$
$$\frac{2(10)}{4} = y$$
$$y = 5$$

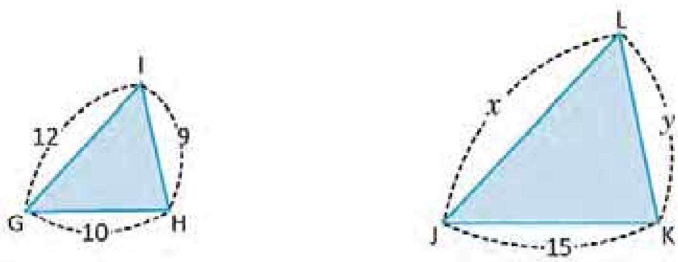
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

したがって、x と y の値はそれぞれ 6 と 5 です。

1. 結論で示された結果を使って、三角形 ABC と三角形 DEF が相似かどうか判定します。相似ならば、相似比を計算します。



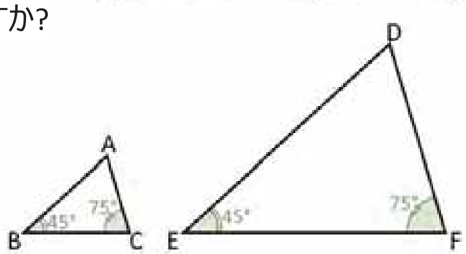
2. 三角形 GHI と三角形 JKL が相似になるには、x と y の値はいくつですか。



2.2 2 番目の三角形の相似条件

P

三角形 ABC と DEF で、∢B = ∢E, ∢C = ∢F となっています。∢A と ∢D の角度は何度ですか? 2 つの三角形は相似ですか?

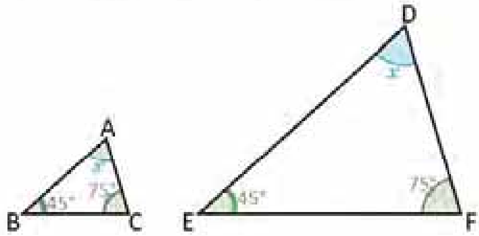


三角形はすべて、その内角を足すと 180° になり、2 つの三角形が相似となるには、対応する辺が比例すること、また、対応する角が合同でなければなりません。

S

3 つ目の角の大きさを x とし、これは 2 つの三角形で等しくなります。三角形の内角の和の性質を利用して、

$$45° + 75° + x = 180°$$
$$x = 180° - 120°$$
$$x = 60°$$



したがって、2 つの三角形の 3 つ目の角の大きさは 60° です。

ここでは、各自のノートに描いたそれぞれの三角形の辺の長さを定規で測り、対応する辺が比例していることを確認しなさい。

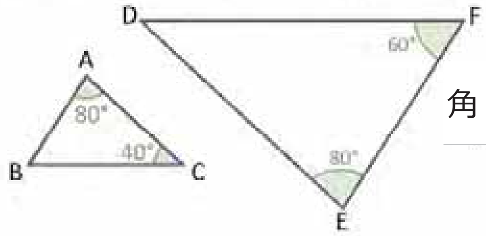
C

条件 AA：
2 つの三角形の対応する 2 組の角が合同なら、その三角形は相似です。

E

図に示す三角形は相似ですか? 解答の理由も述べなさい。

三角形のどれかで、3 つ目の角の値を計算しなさい。



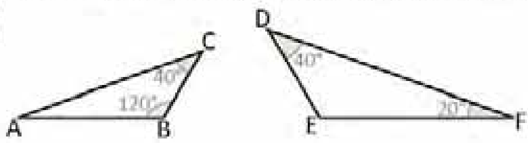
角 ∢A と ∢E は合同です。三角形の内角の和の性質から、

$$∢A + ∢B + ∢C = 180°$$
$$∢B = 180° - 120°$$
$$∢B = 60°$$

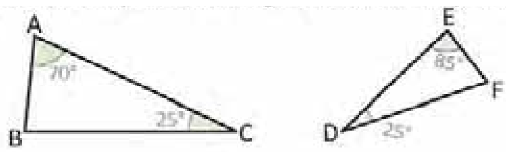
したがって、∢B と ∢F は合同です。2 番目の三角形の相似条件から、ΔABC ~ ΔEFD です。

1. 結論で示された結果を使い、各問の三角形は相似かどうか判定しなさい。

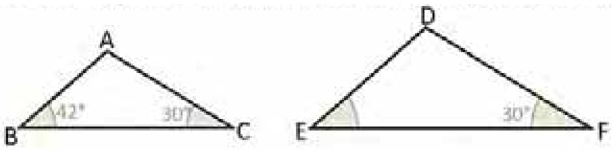
a)



b)



2. 三角形 ABC と DEF が相似になるには、角 EDF の値はいくつでなくてはなりませんか?



2.3 3 番目の三角形の相似条件

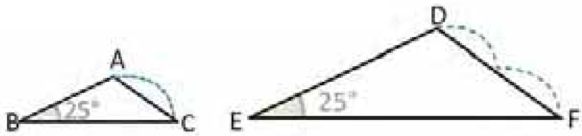
P 三角形 ABC と DEF は、対応する 1 角が合同で、その角に隣接する辺は 1 : 2 で比例しています。相似ですか?

定規（または、コンパス）を使い、$\overline{CA}$ と $\overline{FD}$ の比を計算しなさい。

S コンパスを使い、辺 CA の長さを測り、$\overline{CA}$ は $\overline{FD}$ の半分であることを確認（FD と比較）します。

したがって、

$$\frac{CA}{FD} = \frac{1}{2}$$

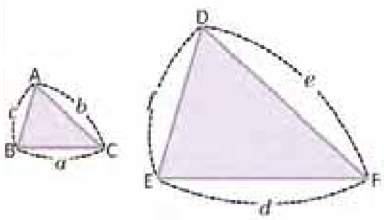
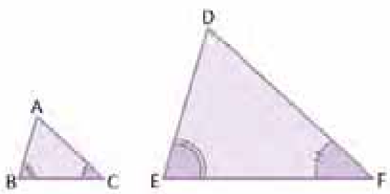
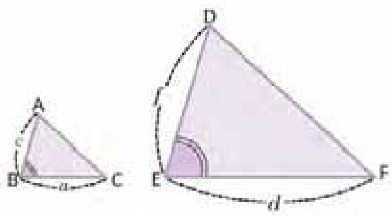


つまり、2 つの三角形の対応する辺は比例しています。1 番目の相似条件により、ΔABC ~ ΔDEF となります。

C 条件 LAL：
2 つの三角形で、対応する 1 角が合同で、その角に隣接する辺が比例すれば、その三角形は相似です。

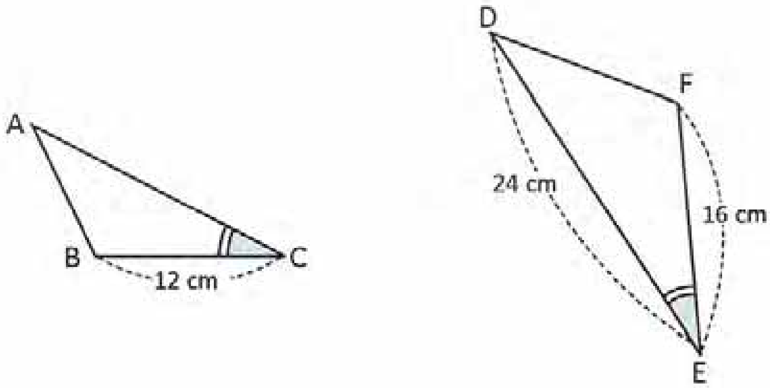
次に、三角形の 3 つの相似条件をまとめます。

三角形の相似条件　次の条件の少なくとも 1 つを満たせば、2 つの三角形は相似です。

1. 対応する辺が比例します。（条件 LLL）	2. 2 組の対応する角が合同です。（条件 AA）	3. 1 組の対応する角が合同で、その隣接する辺が比例します。（条件 LAL）
 $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$	 ∢B = ∢E ∢C = ∢F	 ∢B = ∢E $\frac{a}{d} = \frac{c}{f}$

ユニット5

次の三角形で、角 C と E が合同のとき、ΔABC が ΔDFE に相似となるには、辺 CA の長さはいくつでなければなりませんか?



1 組の対応する角（∢C と ∢E）が合同なので、相似となるには、この角に隣接する辺が比例していなければなりません。つまり、

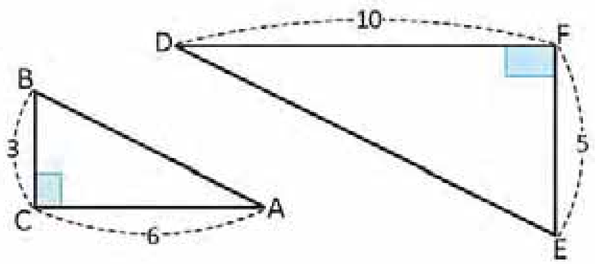
CA を求めるには、数値と置き換えます。

A:
$$\frac{BC}{FE} = \frac{CA}{ED}$$
$$\frac{12}{16} = \frac{CA}{24}$$
$$24\left(\frac{3}{4}\right) = CA$$
$$CA = 18$$

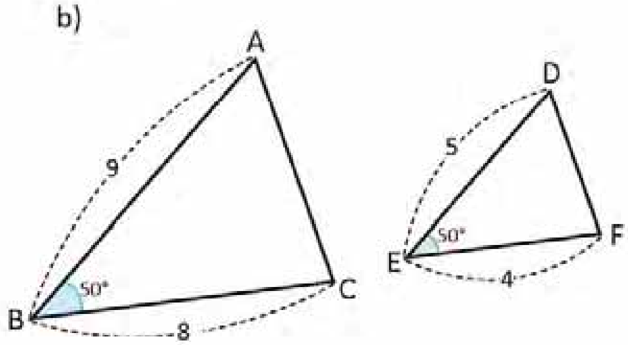
したがって、三角形 ABC と DFE が相似となるには、辺 CA の長さは 18 cm でなければなりません。

1. 条件 LAL を使って、次の三角形は相似かどうか判定しなさい。

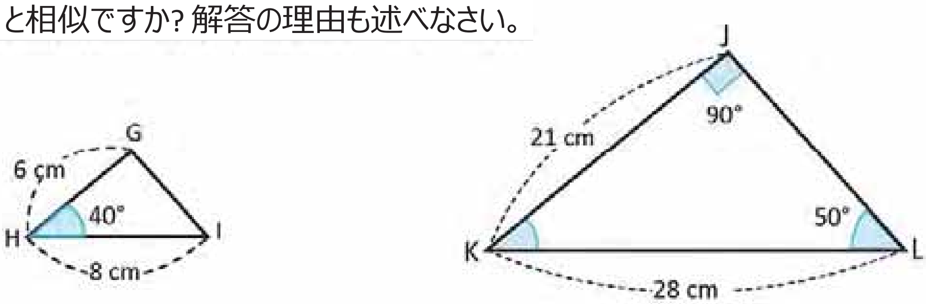
a)



b)

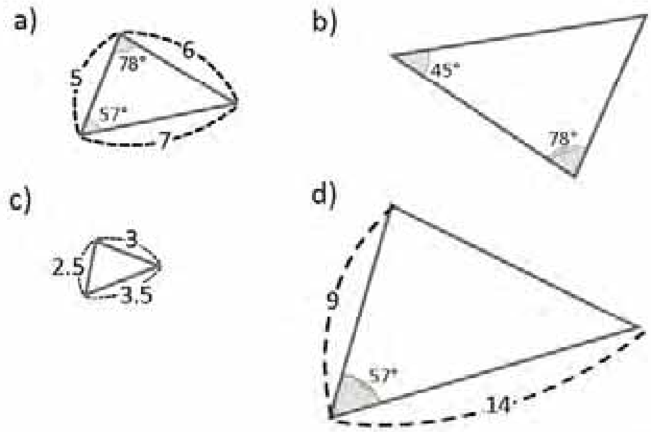


2. ΔGHI は ΔJKL と相似ですか? 解答の理由も述べなさい。

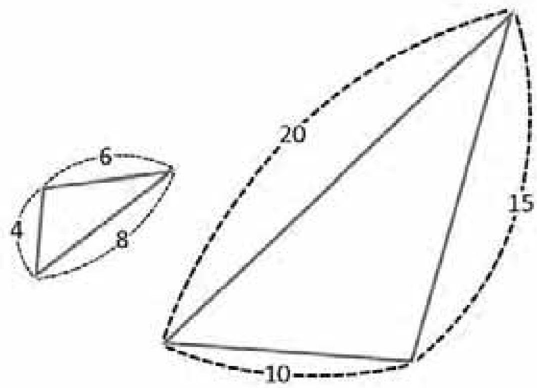


2.4 復習問題

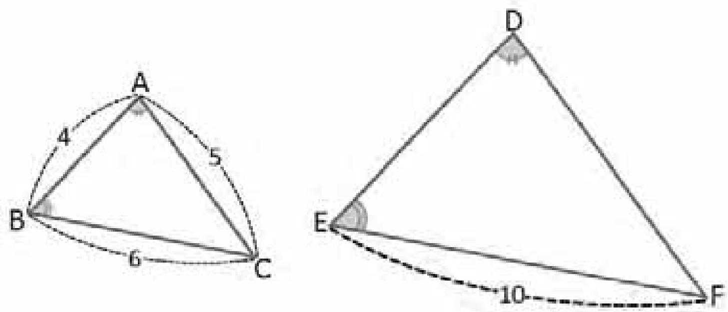
1. 右に示す三角形のうち、相似な三角形はどれですか。根拠となる相似条件を書きなさい。



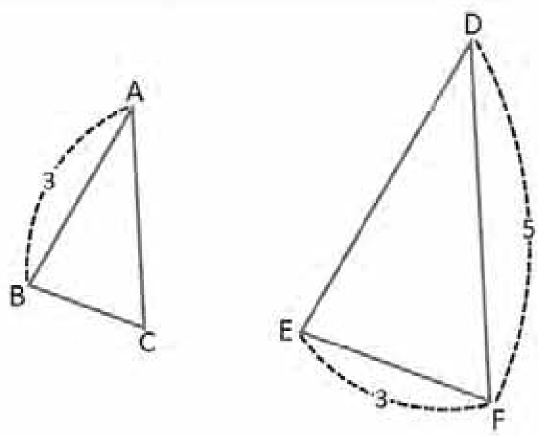
2. 図の三角形が相似であることを確かめなさい。使用した相似条件と相似比率を書きなさい。



3. 図形 ∢A = ∢D と ∢B = ∢E
   a) 相似の三角形と判断するために使われる条件はどれですか？
   b) $\overline{DE}$の長さをもとめましょう。

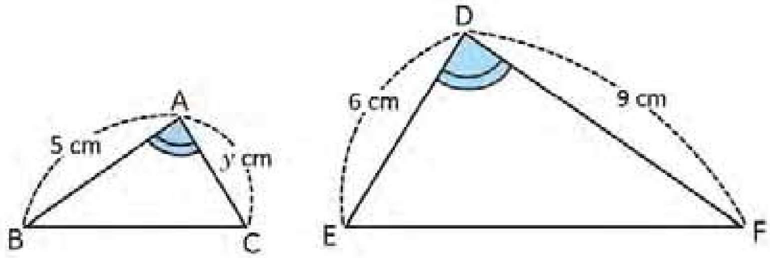


4. 三角形 ABC と DEF は相似で、比率は 2 : 3 です。$\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{DE}$ の長さはいくつでしょうか?

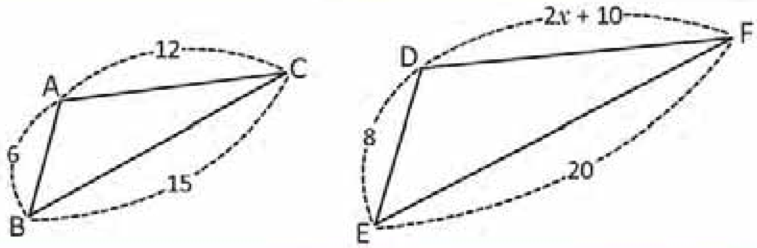


2.5 復習問題

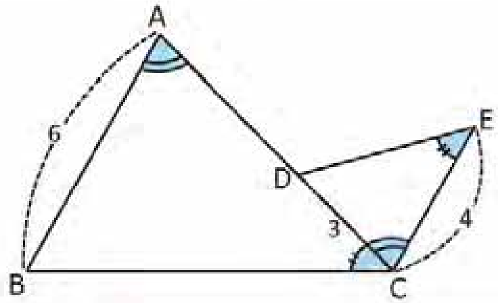
1. 三角形 ABC と DFE は ∢A = ∢D を満たします。y の値と 2 つの三角形が相似である条件を求めなさい。



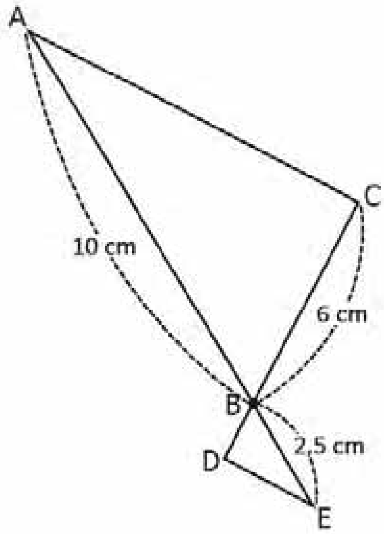
2. ΔABC ~ ΔDEF を満たす x の値はいくつでなければいけませんか？



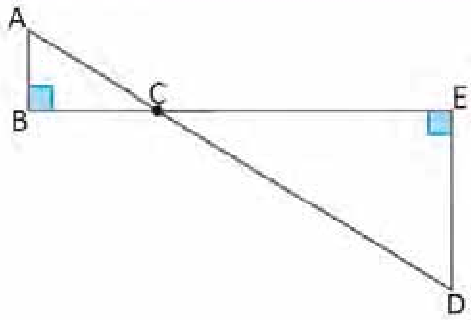
3. ∢BAC = ∢ECD かつ ∢ACB = ∢DEC のとき、AD の長さを求めなさい。



4. 図形では、AC と DE 部分が平行です。
   a) 三角形 ABC と EBD が相似と証明できる相似条件を使いなさい。
   b) BD の長さをもとめましょう。



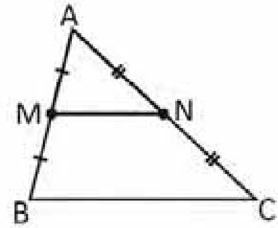
5. 三角形の ABC と DEC は相似ですか？答えを確かめましょう。



3.1 中点連結定理、パート 1

P

三角形 ABC において、M と N はそれぞれ線分 AB と線分 CA の中点です。三角形の相似を使い、$\overline{MN}$ と $\overline{BC}$ が平行であり、$MN = \frac{1}{2}BC$ であることを証明しましょう。



M と N が $\overline{AB}$ と $\overline{CA}$ の中点ならば、$AM = \frac{1}{2}AB$ 、$NA = \frac{1}{2}CA$ です。

S

三角形 AMN と三角形 ABC において：

$\frac{AM}{AB} = \frac{NA}{CA} = \frac{1}{2}$ （M と N はそれぞれ $\overline{AB}$ と $\overline{CA}$ の中点）

$\measuredangle MAN = \measuredangle BAC$ （両方の三角形に共通する角）

$\Delta AMN \sim \Delta ABC$ （二辺比夾角相等）

$\measuredangle NMA = \measuredangle CBA$ （三角形 AMN と三角形 ABC が相似のため）

$\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ （角 NMA と角 CBA は平行線の同位角）

$\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ （三角形 AMN と三角形 ABC の相似比）

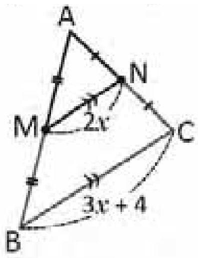
したがって、$\overline{MN}$ は $\overline{BC}$ と平行であり、$MN = \frac{1}{2}BC$ です。

C

中点連結定理：ある三角形の 2 つの辺の中点を結ぶ線分は底辺と平行であり、その長さは底辺の半分です。

E

M と N がそれぞれ $\overline{AB}$ と $\overline{CA}$ の中点ならば、x の値はいくつになりますか?



2つの線分が平行のとき、線分の上に>>の記号をつけて表します。

M と N が $\overline{AB}$ と $\overline{CA}$ の中点ならば、$\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ です。線分の値を入れ替えて x の値を求めましょう。

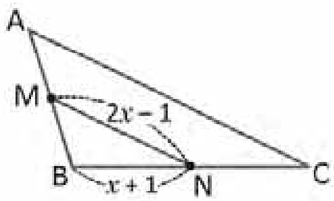
$$\frac{2x}{3x+4} = \frac{1}{2}$$
$$4x = 3x + 4$$
$$4x - 3x = 4$$
$$x = 4$$

したがって、x の値は 4 です。

三角形 ABC において、M と N はそれぞれ $\overline{AB}$ と $\overline{BC}$ の中点です。

a) BC = 8 cm のときの、x の値を計算しましょう。

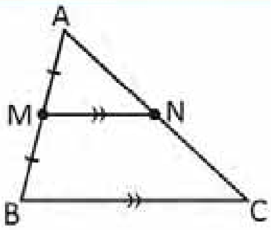
b) 辺 CA の長さを求めましょう。



3.2 中点連結定理、パート 2

P

三角形 ABC において、M は辺 $\overline{AB}$ の中点です。$\overline{BC}$ と平行で点 N で辺 $\overline{CA}$ と交わる線分を、M から引きます。三角形の相似を使い、N は $\overline{CA}$ の中点であり、 $MN = \frac{1}{2}BC$ であることを証明しましょう。



S

三角形 AMN と三角形 ABC において：

$\measuredangle MAN = \measuredangle BAC$ （両方の三角形に共通する角）

$\measuredangle NMA = \measuredangle CBA$ （平行線の同位角）

$\Delta AMN \sim \Delta ABC$ （二角相等）

$\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$ （M は $\overline{AB}$ の中点）

$\frac{NA}{CA} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ （三角形 AMN と ABC の相似比）

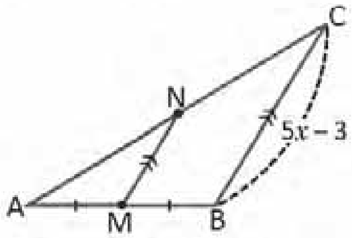
したがって、N は $\overline{CA}$ の中点であり $MN = \frac{1}{2}BC$ です。

C

ある三角形の 1 つの辺の中点から別の辺に平行する線を引くと、この線はもう 1 つの辺の中点と交わり、その長さは平行する線の半分になります。

E

M が $\overline{AB}$ の中点であり $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ 、MN = 3.5 のときの、x の値を計算しましょう。



M が $\overline{AB}$ の中点であり $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ ならば、$\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ です。前の問題の値を置き換えて x の値を求めましょう。

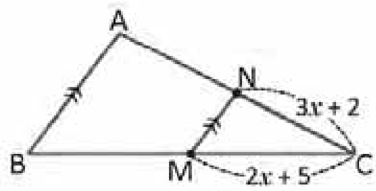
$$\frac{3.5}{5x-3} = \frac{1}{2}$$
$$2(3.5) = 5x - 3$$
$$7 + 3 = 5x$$
$$\frac{10}{5} = x$$
$$x = 2$$

したがって、x の値は 2 です。

三角形 ABC において、M は辺 $\overline{BC}$ の中点であり $\overline{NM} \parallel \overline{AB}$ です。

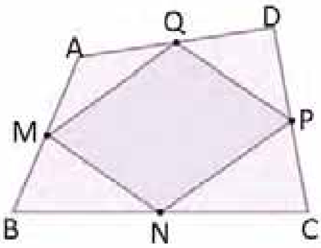
a) CA = 10 cm のときの、x の値を計算しましょう。

b) 辺 BC の長さを求めましょう。



3.3 四角形に内接した平行四辺形

ABCD は四角形であり、M、N、P、Q はそれぞれ $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 、$\overline{CD}$ 、$\overline{DA}$ の中点です。中点連結の定理を使い、MNPQ が平行四辺形であることを証明しましょう。



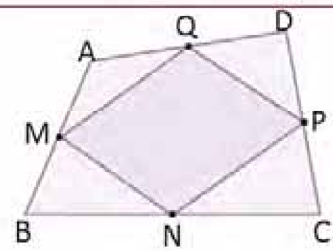
四角形の対角線を
引きます。

四角形の $\overline{BD}$ に対角線を引きます。

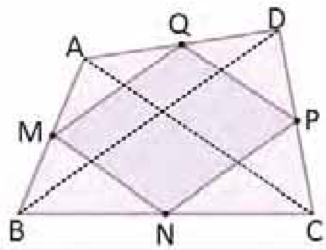
$\overline{MQ} \parallel \overline{BD}$ （中点連結定理より）

$\overline{BD} \parallel \overline{NP}$ （中点連結定理より）

よって、$\overline{MQ} \parallel \overline{NP}$



同じ方法で台形に対角線 $\overline{AC}$ を引き、$\overline{MN} \parallel \overline{QP}$ を証明することもできます。

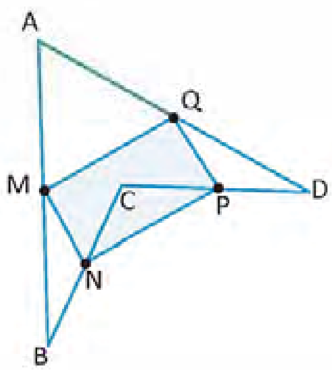


したがって $\overline{MQ} \parallel \overline{NP}$ 、$\overline{MN} \parallel \overline{QP}$ なので、MNPQ は平行四辺形です。

ある四角形の各辺の中点を結ぶと、平行四辺形ができます。

この結果は
バリニオンの定理として知られています。

四角形 ABCD では、M、N、P、Q はそれぞれ $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 、$\overline{CD}$ 、$\overline{DA}$ の中点です。MNPQ が平行四辺形であることを証明しましょう。



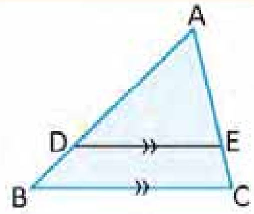
問題の四角形 ABCD は 180° より大きい角（∢DCB）を含み、**凹四角形**と呼ばれています。

3.4 平行線を利用した相似、パート 1

P

三角形 ABC において、辺 BC と平行の線分 DE を引きます（$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ）。
三角形 ADE と三角形 ABC は相似ですか? 自分の答えを証明しましょう。

どの三角形の相似条件を使うことができますか?



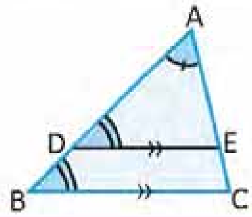
S

三角形 ADE と三角形 ABC において：

$\sphericalangle DAE = \sphericalangle BAC$ （両方の三角形に共通する角）

$\sphericalangle EDA = \sphericalangle CBA$ （平行線の同位角）

したがって、$\Delta ADE \sim \Delta ABC$ （二角相等）

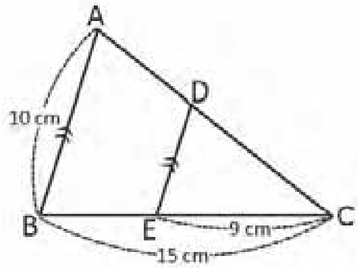


C

ある三角形の 1 つの辺と平行の線分は、残りの 2 つの辺とともにその三角形と相似の三角形を形成するので、次のようになります。 $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

E

三角形 ABC において、線分 DE は辺 AB に平行です。$\overline{DE}$ の長さを求めましょう。



線分 DE が辺 AB と平行ならば、上の結果より三角形 DEC と三角形 ABC は相似です。
したがって：

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EC}{BC}$$

上の AB、EC、BC の値を入れ替えます：

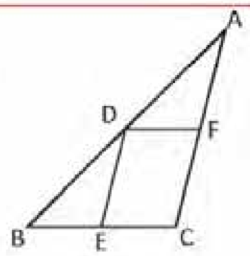
$$\frac{DE}{10} = \frac{9}{15}$$

$$DE = 10\left(\frac{3}{5}\right)$$

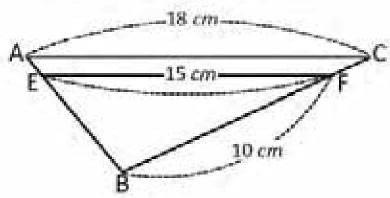
$$DE = 6$$

したがって、$\overline{DE}$ の長さは 6 cm です。

1. 三角形 ABC では、$\overline{DF} \parallel \overline{BC}$、$\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ です。
   a) どの三角形とどの三角形が相似ですか?
   b) どの線分とどの線分が比例していますか?



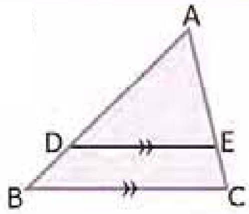
2. 三角形 ABC において、FE は辺 CA に平行です。辺 BC の長さを求めましょう。



3.5 平行線を利用した相似、パート2

P

三角形 ABC において、線分 DE は辺 BC に平行です。
$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ を証明してください。



AB を AD + DB、AC を AE + EC に置き換えます。

S

前回の授業により、次のようになります。

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

$\frac{AD+DB}{AD} = \frac{AE+EC}{AE}$　AB を AD + DB、AC を AE + EC に置き換えて、

$1 + \frac{DB}{AD} = 1 + \frac{EC}{AE}$

$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$　両辺から 1 をひき、

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$　両辺の逆数をとります。

次の比はそれぞれ等しいです（他も同様）。

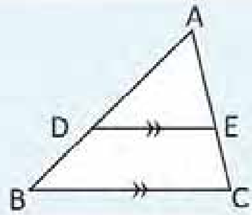
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC},\ \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC},\ \frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}.$$

C

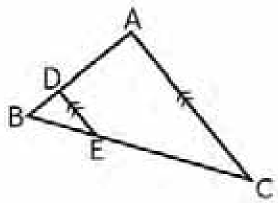
三角形と平行線に関する定理

ΔABC において DE ∥ BC なら、次が成り立ちます。

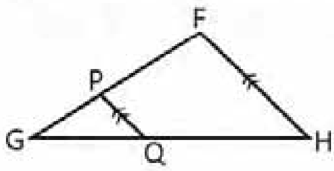
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}\ ,\ \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$



1. BD = 4 cm、DA = 10 cm、BE = 6 cm のとき、三角形 ABC の線分 $\overline{EC}$ の長さを求めてください。



2. PQ ∥ FH である三角形 FGH において、PG = 6 cm、GQ = 8 cm、QH = 12 cm のとき、三角形の辺 FG の長さを求めてください。

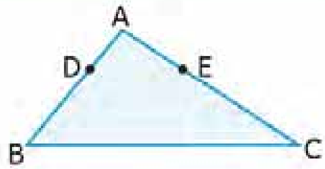


ユニット5

3.6 線分の比からの平行、パート1

P

三角形 ABC において、D 点と E 点はそれぞれ $\overline{AB}$ と $\overline{AC}$ にあります。そのため $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ が成り立ちます。$\overline{DE}$ に対して $\overline{BC}$ が平行であることを証明するために三角形の相似を利用してください。



S

$\overline{DE}$ に線をひいて三角形 ADE を作ります。

三角形 ADE と三角形 ABC において：

$\measuredangle DAE = \measuredangle BAC$ （両方の三角形に共通する角）

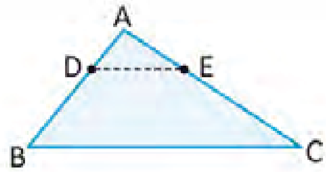
$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ （設問に書かれています）

$\Delta ADE \sim \Delta ABC$ （2 組の辺の長さとその間の角がそれぞれ等しい）

$\measuredangle EDA = \measuredangle CBA$ （三角形 ADE と三角形 ABC が相似のため）

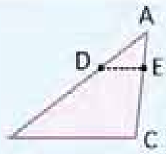
$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ （角 EDA と角 CBA は平行線の同位角）

よって、$\overline{DE}$ は $\overline{BC}$ に平行です。

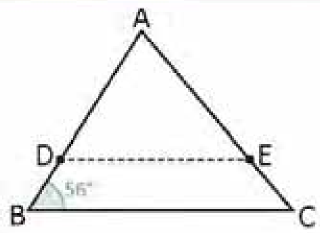


C

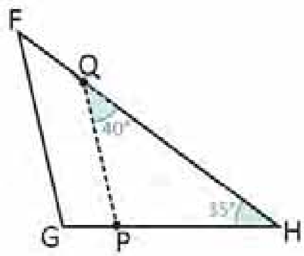
三角形 ABC において、点 D と点 E がそれぞれ辺 AB と辺 AC 上にあれば、$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ が成り立つので $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ となります。



1. 三角形 ABC において、点 D と点 E はそれぞれ辺 AB と AC 上にあり、$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ が成り立ちます。$\measuredangle EDA$ は何度ですか? 解答し説明しましょう。

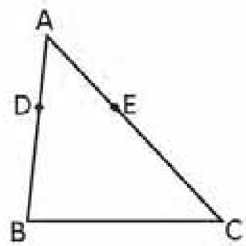


2. 三角形 FGH において、点 P と点 Q はそれぞれ辺 HG と辺 HF 上にあるので、$\frac{HP}{HG} = \frac{HQ}{HF}$ が成り立ちます。$\measuredangle HGF$ は何度ですか?
解答し説明しましょう。



3. 三角形 ABC において、点 D と点 E はそれぞれ辺 AB と AC 上にあり、$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ が成り立ちます。$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ を証明してください。

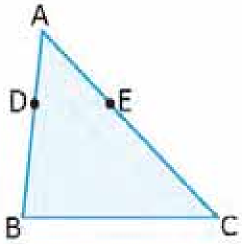
DB を AB – AD に、EC を AC – AE に置き換えてください。



3.7 線分の比からの平行、パート 2

P

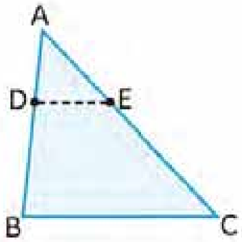
三角形 ABC において、D 点と E 点はそれぞれ AB と AC 上にあります。そのため $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ が成り立ちます。$\overline{DE}$ に対して $\overline{BC}$ が平行であることを証明するために三角形の相似を利用してください。



S

もし $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ なら $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ が成り立ちます。

前回の授業で見たように、DE ∥ BC です。



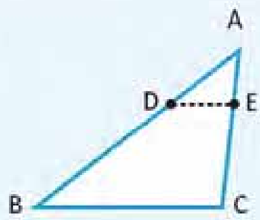
C

三角形と平行線に関する定理

三角形 ABC において、点 D と点 E がそれぞれ辺 $\overline{AB}$ と辺 $\overline{AC}$ 上にあります。

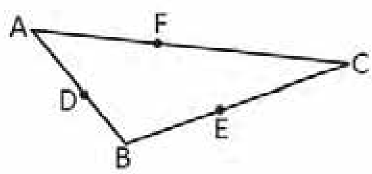
a) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ なら $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$です。

b) $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ なら $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$です。



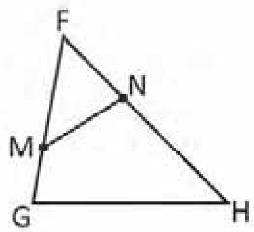
1. 三角形 ABC は次が成り立ちます： $\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC}$ と $\frac{CF}{FA} = \frac{CE}{EB}$.

   a) 点D、E 、F からなる線分のうち、どれが 辺 AC に対して平行ですか? 解答し説明しましょう。
   b) 点D、E 、F からなる線分のうち、どれが辺 AB に対し平行ですか? 解答し説明しましょう。
   c) $\overline{DF}$ は $\overline{BC}$ に対して平行ですか。



2. 三角形 FGH は次が成り立ちます： $\frac{FM}{FH} = \frac{FN}{FG}$

   三角形 FNM は三角形 FGH に相似ですか? 解答し説明しましょう。



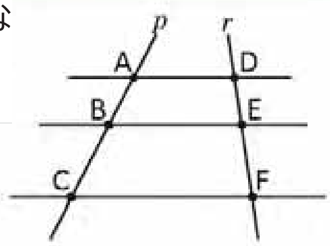
ユニット5

3.8 線分の比からの平行、パート 3

P

直線 p、r 上に図のような 3 本の平行な直線がひかれています。

$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ であることを証明しましょう。



AFに線をひき、三角形と平行線に関する定理を使います。

S

AF に線を引き、$\overline{AF}$ と $\overline{BE}$ の交点を M とします。

三角形 ACF において、三角形と平行線に関する定理によって、

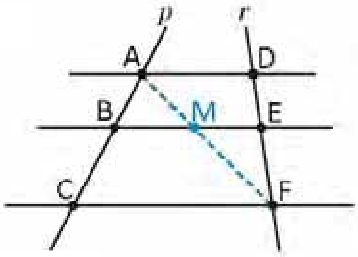
$\frac{AB}{BC} = \frac{AM}{MF}$

三角形 AFD において、三角形と平行線に関する定理によって、

$\frac{FM}{MA} = \frac{FE}{ED}$

両辺の逆数をとり、$\frac{MA}{FM} = \frac{ED}{FE}$。

したがって、$\frac{AB}{BC} = \frac{AM}{MF} = \frac{MA}{FM} = \frac{ED}{FE} = \frac{DE}{EF}$。



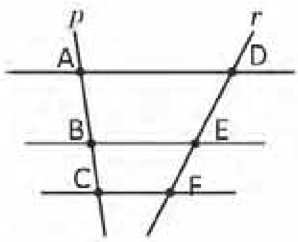
C

比と平行の定理

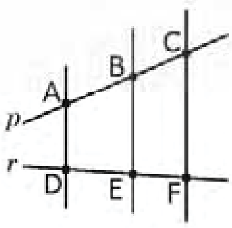
どんな 2 本の直線も、その上に複数の平行線が横切るとき、それによって直線上で区切られた線分は他の対応する線分と比例します。

この結果はタレスの定理として知られています。

1. 直線 p、r 上に図のような 3 本の平行な直線がひかれています。
   a) どの線分とどの線分が比例していますか?
   b) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ であることを証明しましょう。

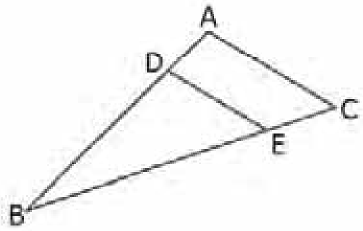


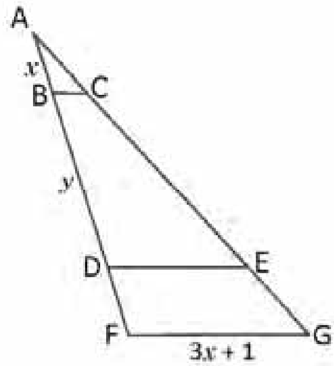
2. 直線 p、r 上に図のような 3 本の平行な直線がひかれています。AB = 3、DE = 2、EF = 1のとき、BC の値はいくつですか。



3.9 復習問題

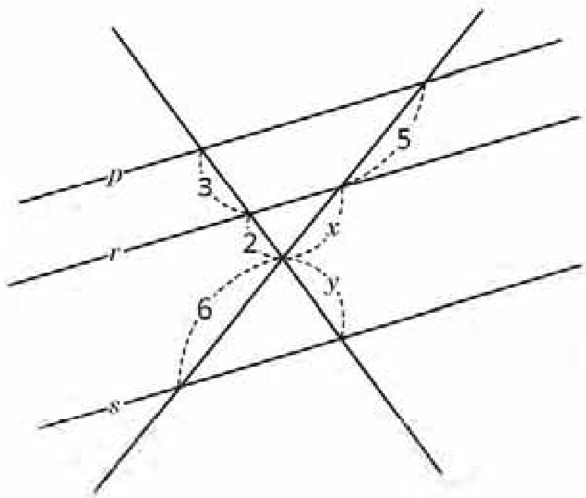
1. $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$ 、AC = 2、BD = 3、DA = 1 のとき、$\overline{DE}$ の長さを求めてください。



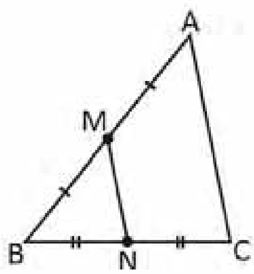


2. ΔAFG において、次が成り立ちます。$\overline{BC} \parallel \overline{DE} \parallel \overline{FG}$
   BC = 0.8 cm、DE = 3 cm、AF = 5 cm のとき、x と y の値を計算してください。

3. 直線 p と r は平行です。x と y の値を求めてください。



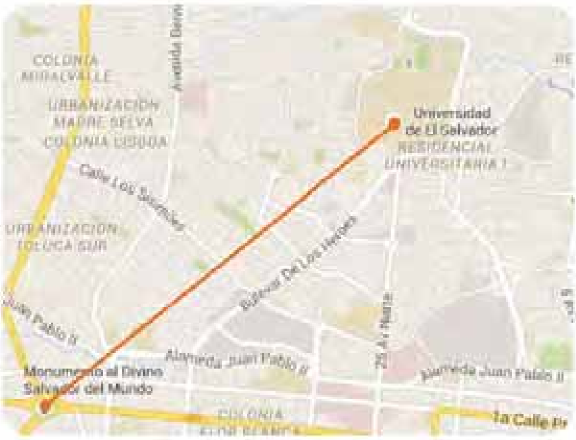
4. 図の三角形 ABC において、M と N はそれぞれ $\overline{AB}$ と $\overline{BC}$ の中点です。三角形 MBN の周りの長さが 8 のとき、ΔABC の周りの長さはいくつですか?



4.1 地図上の 2 点間の距離

P

アナがサンサルバドールの地図上の 2 点の距離を定規で測りました。2 点間の距離は 6 cm でした。地図の縮尺が 1 : 50,000 の場合、印のついた 2 つの場所の間の実際の距離はどれくらいでしょうか？



縮尺の数字は、地図上の 1 センチが現実の 50,000 cm に相当することを示しています。

S

2 地点の実際の距離を x とします。
よって、

$$\frac{6}{x} = \frac{1}{50\,000}$$

上記の式から x を求めます。： $6(50\,000) = x$

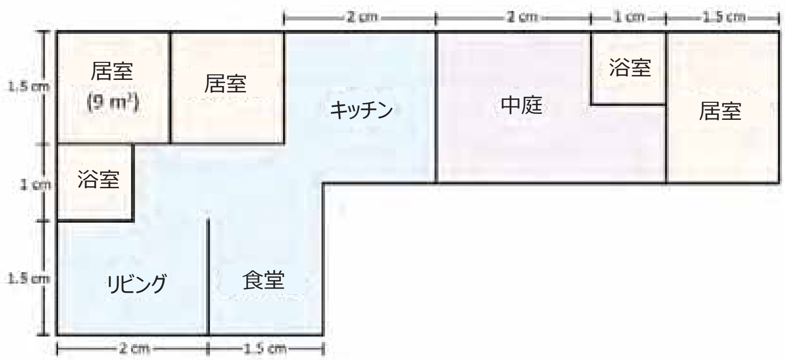
$$x = 300\,000$$

世界の救世主像とエルサルバドル大学の間の距離は 300,000 cm 又は 3 km です。

1. 次のエルサルバドルの地図は、サンタアナとサンサルバドルの間の実際の距離が 48 km で、地図上に描かれたセグメントが 1.5 cm の場合、どのような縮尺で描かれているのでしょうか？

両方の測定値は、同じ単位でなければなりません。

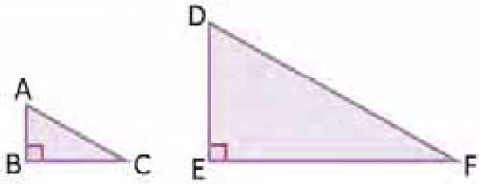
2. 次の図で：
   a) 縮尺は?
   b) 中庭の広さは (m^2)？
   c) 全体の広さは?



縮尺を知るには、定規で図面の長さを測ります。

4.2 相似多角形の面積

三角形の ABC と DEF の比率は 1 : 3 で相似しています。ΔABC と ΔDEF の面積の比は？



三角形の面積は：

$\frac{(底辺)\ (高さ)}{2}$

ABC の三角形の面積を $\frac{(BC)(AB)}{2}$、DEF の三角形の面積を $\frac{(EF)(DE)}{2}$ とします。よって、面積の比は以下のように計算します。

$$\frac{(ABC)}{(DEF)} = \frac{\frac{(BC)(AB)}{2}}{\frac{(EF)(DE)}{2}} = \frac{(BC)(AB)}{(EF)(DE)} = \left(\frac{BC}{EF}\right)\left(\frac{AB}{DE}\right)$$

(ABC) は三角形 ABC の面積です。従って、$\frac{(ABC)}{(DEF)}$ は、三角形 (ABC) と (DEF) の面積の比となります。

$\frac{BC}{EF} = \frac{1}{3}$ かつ $\frac{AB}{DE} = \frac{1}{3}$ であると仮定します。面積の比を代入します。

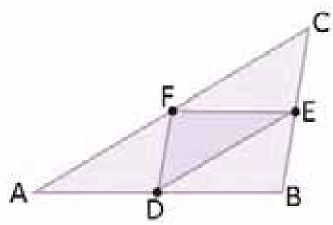
$$\frac{(ABC)}{(DEF)} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

したがって、ΔABC と ΔDEF の面積の比は、$\frac{1}{9}$ （相似比の 2 乗）に等しい。

2 つの相似図形の面積の比は、相似比の 2 乗に等しい。

1. 2 つの相似三角形の比は 2 : 3 です。その面積の比は?

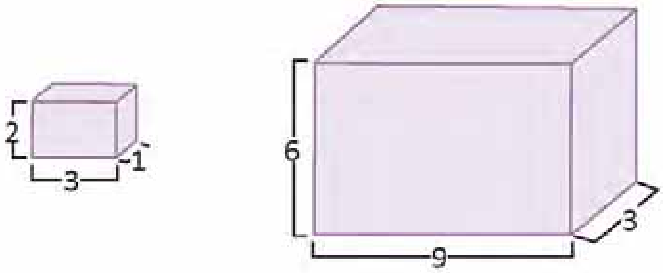
2. 三角形 ABC の D, E, F は、辺 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ の中間点です。ABC の三角形と DEF の三角形の面積の比は?



4.3 相似する立体の体積

P

図の直方体は相似しています。体積の比を求めましょう。



直方体の体積の求め方：
(高さ) (縦) (横)

S

小さい直方体の体積を V_1、大きいの直方体の体積を V_2 とします。したがって：

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{(2)(3)(1)}{(6)(9)(3)}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{3}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

約分すると：

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

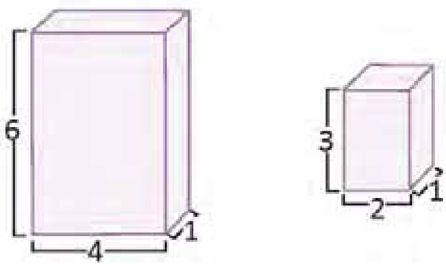
$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

したがって、V_1 の小さい直方体と V_2 の大きい直方体の体積の比は $\frac{1}{27}$ です。

C

2 つの相似する立体の体積の比は、相似比の 3 乗に等しい。

1. 次の直方体は相似していますか? あなたの答えを説明してみましょう。



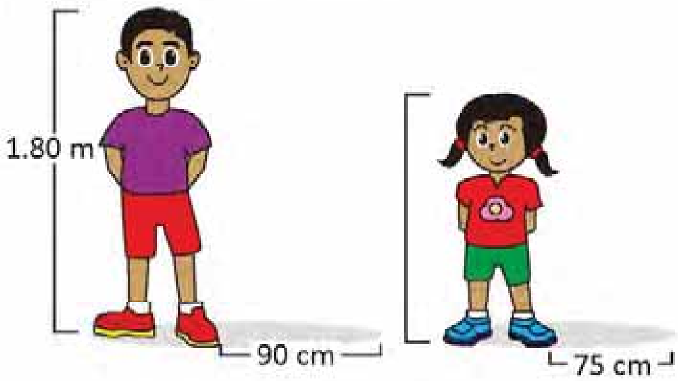
2. 2 つの円柱が 1 : 4 の比で相似である場合、体積の比はいくつですか。

4.4 三角形の相似を利用して解く問題

P

ある同じ時間にホセとマルタは校庭に立ちます。ホセの影は 90 cm の長さ、マルタの影は 75 cm の長さになりました。ホセの身長は 1.80 m です。マルタの身長は?

同じ時間の 2 つの物体の高さは、その影の長さに比例します。



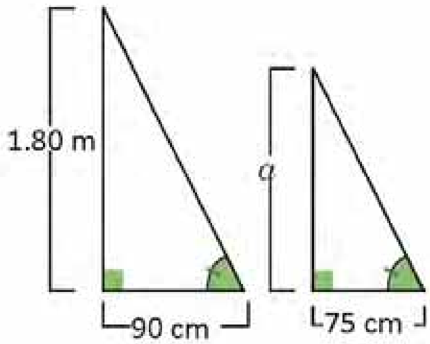
S

二人の身長と影の長さで二つの相似する直角三角形を作ることができます（三角形の相似条件）。
最初に、ホセの身長を cm に直します。

$$1.80\text{ m} = 180\text{ cm}$$

マルタの身長を cm で表します。相似する三角形にするには：

$$\frac{a}{180} = \frac{75}{90}$$



上の式を解きます。

$$a = 180\left(\frac{75}{90}\right)$$

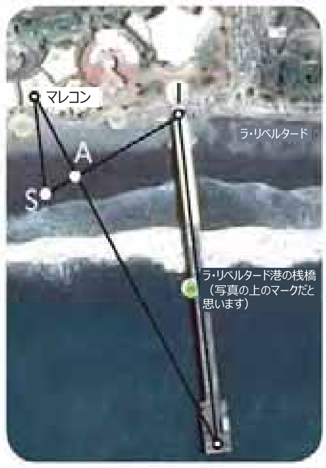
$$a = 150$$

従って、マルタの身長は 150 cm 又は 1.50 m になります。

1. ある時間帯の内務省の塔の影が 40 m になりました。同じ時に身長 1.82 m の男性の影は 1.40 m の長さになりました。内務省の塔の高さを求めましょう。

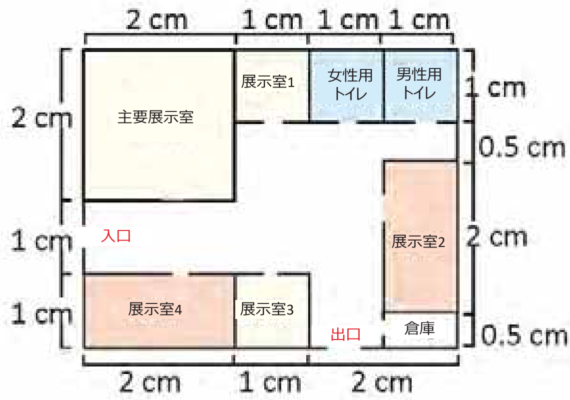
2. アントニオ (A) はライフガード (S) から 24 m 離れたビーチにいます。マレコンとライフガードの距離が 60 m で桟橋の長さが 200 m であった場合、アントニオと桟橋の端 (I) の距離は?

写真では、マレコンと S 地点を結ぶ線は桟橋と平行になっています。



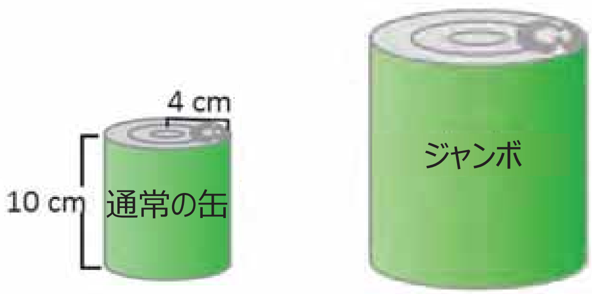
4.5 復習問題

1. 次の図面は博物館のもので、縮尺は 1 : 200 です。トイレと展示室 1 と 3 は同じ大きさで、展示室 2 の大きさは展示室 4 と同じです。

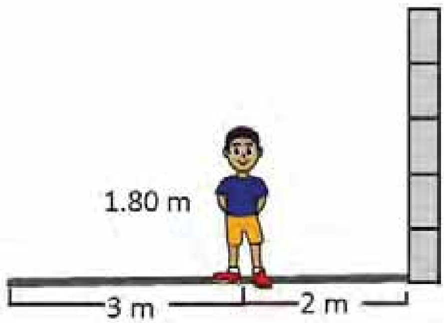


   a) 主要展示室の大きさは?
   b) 展示室 1 の面積は?
   c) 博術館の床全体を 25 cm × 25 cm のタイル敷きにする場合、タイルは何枚必要になるのでしょうか?

2. カルメンさんは缶詰の果物やジュースを販売しています。そのため、2 種類の缶を使用しています。高さ 10 cm で半径 4 cm の通常ものと体積が 540π cm^3 のジャンボ缶の 2 種類です。2 種類の缶が相似しているとしたら、ジャンボ缶の半径と高さは ?

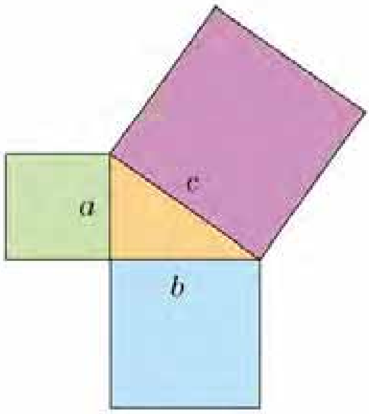


3. ホセは、自分の影の終わりが壁の影の終わりと一致するように、壁から 2 メートルのところに立ちました。ホセの身長を 1.80 m、影の長さを 3 m とすると、壁の高さは何 m になりますか ?



6 ユニット

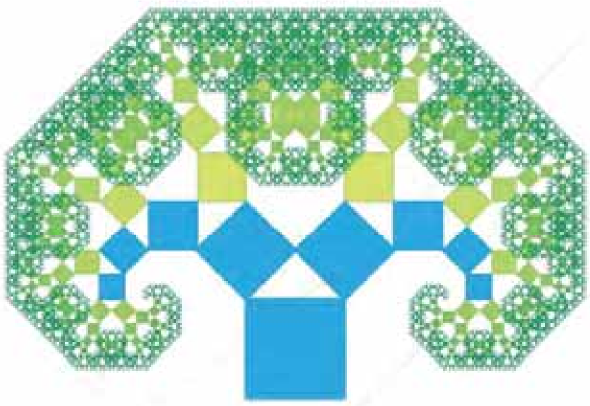
ピタゴラスの定理



ピタゴラスの定理の幾何学上の表記。

ピタゴラスの定理は、歴史上、あらゆる文明において、最もすばらしい定理のひとつとされています。歴史学者によると、紀元前1600年頃のバビロニアではこの定理を使って図形の対角線を計算していたそうです。しかしながら、広く知られる正式な最初の証明は、通常、哲学者・数学者であるギリシャ人、サモスのピタゴラスとされており、彼が最初の純粋な数学者と考えられています。この定理には、長い歴史の中で科学や数学の重要人物たちによってなされた証明が大量に含まれます。

古代、ピタゴラスの定理は、農地や物の高さを測ったり、角錐や円錐形といった立体の体積を得るために使われていました。現代でもこの定理は、工学から農業、物理学、天文学、芸術に至るまで、長さの計算が必要とされるあらゆる分野で不可欠とされています。数学においては、無理数の発見はもちろん、幾何学や計算のようなある種の分野を強化させたのです。



ピタゴラスの木。辺の上に直角三角形と四角形を繰り返し描くことで作成します。

このユニットでは、ピタゴラスの定理、その証明、この定理を使って数学問題を解くこと、日常生活への応用などを学びます。

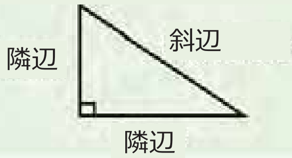
1.1 直角三角形の斜辺の計算、パート 1

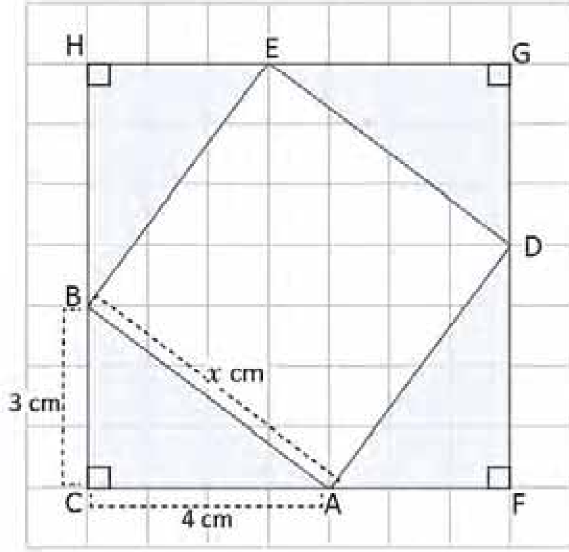
P

図のΔABC、ΔDAF、ΔEDG、ΔBEH は直角三角形であり合同です。

a) 正方形 CFGH の面積を求めましょう。
b) 四角形 ADEB の面積を求めましょう。
c) $\sphericalangle BAD = 90°$ であることを確認して、
　四角形 ADEB は正方形であることを証明しましょう。
d) 辺 AB の長さを求めましょう。

直角三角形において、90° の角に隣接する辺のことを**隣辺**と呼び、直角の反対側にある辺のことを**斜辺**と呼びます。





S

a) CF = 4 + 3 = 7 (cm)、したがって面積は：$7^2 = 49$ (cm^2)
b) 四角形 ADEB の面積は、正方形 FGHC から
　4 つの合同な三角形の面積を引くことで計算できます。

$$
\begin{aligned}
(ADEB) &= (FGHC) - (ABC) \times 4 \\
&= (4+3)^2 - \frac{3 \times 4}{2} \times 4 \\
&= 49 - 24 \\
&= 25\ (\text{cm})^2
\end{aligned}
$$

c) $\sphericalangle BAD = 180° - (\sphericalangle CAB + \sphericalangle DAF)$
　　$= 180° - (\sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC)$、$\Delta ABC \cong \Delta DAF$ であるため
　　$= 180° - 90° = 90°$

同様に $\sphericalangle ADE = \sphericalangle DEB = \sphericalangle EBA = 90°$ になります。

四角形 ADEB において辺と角は等しいので、これは正方形です。
d) 正方形 ADEB の面積は AB^2 であり、さらにその面積は 25 cm^2 です。したがって $AB^2 = 25$、AB = 5 (cm)

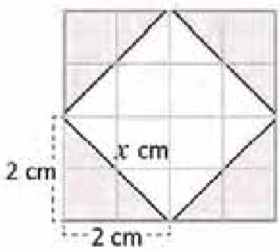
C

4 つの合同な直角三角形で正方形を形成しその面積を計算すると、隣辺から斜辺の長さを求めることができます。

考古学の記録によると、紀元前 2000 年頃エジプトで同じ長さの 12 本の縄を繋げました。このうちの連続する 5 本を伸ばし結び目から引っ張ったところ、1つの直角を含む確かな三角形が形成されました。この 3、4、5 の辺を持つ三角形は、エジプトの聖なる三角形として知られています。

W. ダンハム (2002). 数学の知性—天才と定理でたどる数学史

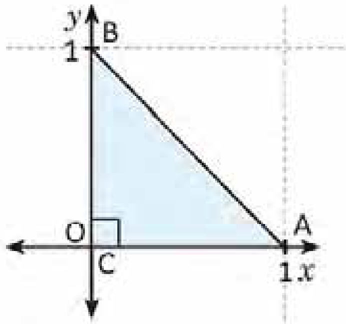
次の図形の x の値を求めましょう。



1.2 直角三角形の斜辺の計算、パート 2

P

A (1, 0)、B (0, 1)、C (0, 0) を頂点とする直角三角形の斜辺の長さを求めましょう。

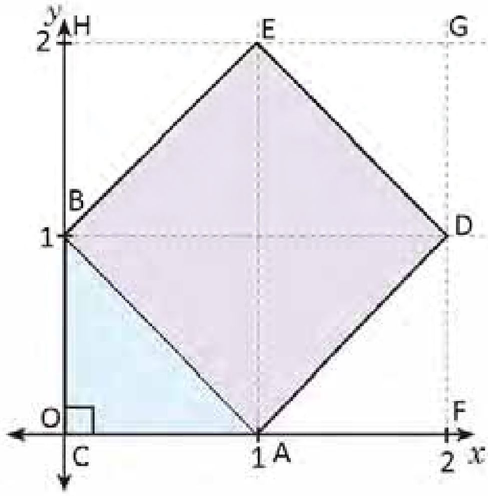


ある 1 点は、x 軸上の値を a、y 軸上の値を b とする (a, b) として座標平面上で表されます。

S

一辺が三角形 ABC の斜辺 AB となるような正方形を作ると、この正方形の頂点は A (1, 0), D (2, 1), E (1, 2), B (0, 1) となります。

三角形 ABC と合同の三角形を作ると、正方形 FGHC が形成されます。正方形 ADEB の面積は、正方形 FGHC の面積から 4 つの三角形の面積を引くことで求められます。



$$
\begin{aligned}
(ADEB) &= (FGHC) - (ABC) \times 4 \\
&= (2)^2 - \frac{1 \times 1}{2} \times 4 \\
&= 4 - 2 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

よって、$AB^2 = 2$ (ADEB の面積)

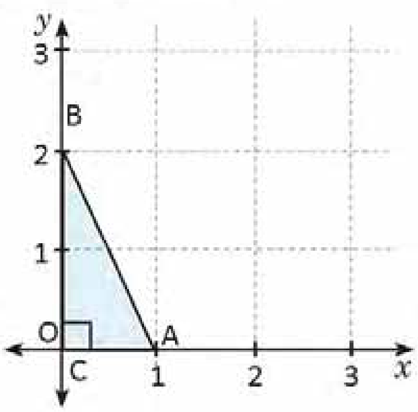
したがって、$AB = \sqrt{2}$ (正の平方根)

C

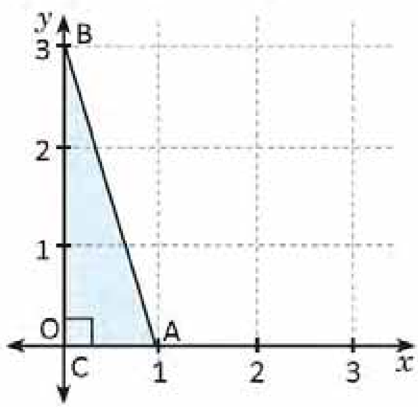
A (1, 0)、B (0, 1)、C (0, 0) を頂点とする直角三角形の斜辺の長さは $\sqrt{2}$ です。

各設問の頂点によって形成された三角形の斜辺を求めましょう。

a) A(1, 0), B(0, 2) と C(0, 0)



b) A(1, 0),B(0, 3) と C(0, 0)

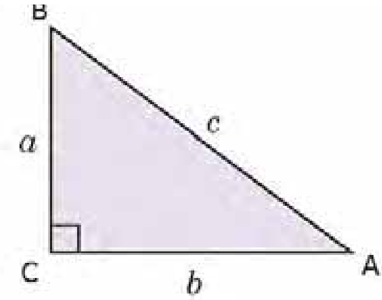


ユニット6

1.3 ピタゴラスの定理、パート 1

P

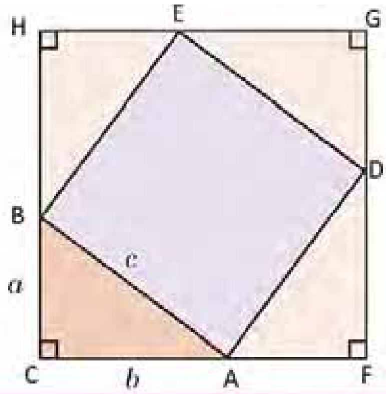
CA = b、AB = c、BC = a、∢BCA = 90° となるような ΔABC があります。1 の授業での手順を使い、$a^2 + b^2 = c^2$ であることを証明しましょう。



S

1 つの辺が斜辺 AB となる正方形を作ります。

斜辺が正方形 ADEB の残りの 3 つの辺となるような ΔABC と合同の 3 つの直角三角形を作ると、各辺の長さが $a + b$ となる正方形 CFGH が形成されます。



CFGH の面積は以下のように 2 つの方法で求められます：

方法 1

$A_1 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

方法 2

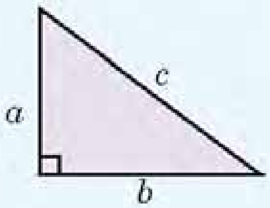
$A_2 = c^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right) = c^2 + 2ab.$

同じ範囲の面積を示しているので $A_1 = A_2$ になります。

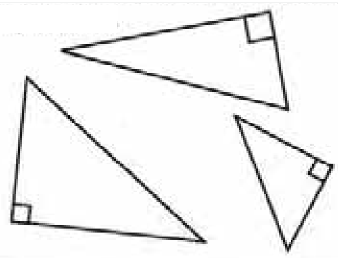
$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$

C

直角三角形で隣辺の長さの 2 乗を足した数は、斜辺の長さの 2 乗に等しくなります。つまり、三角形の辺が a、b、c のとき、$a^2 + b^2 = c^2$ が成立します。これは**ピタゴラスの定理**として知られています。

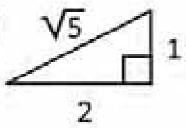


ピタゴラスの定理は直角三角形の位置に関わらず成立します。

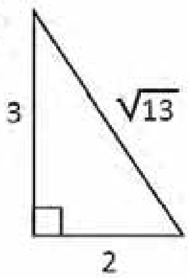


次の直角三角形においてピタゴラスの定理が成立することを確認しましょう。

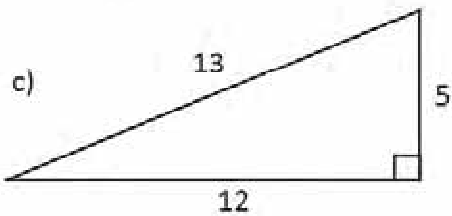
a)



b)

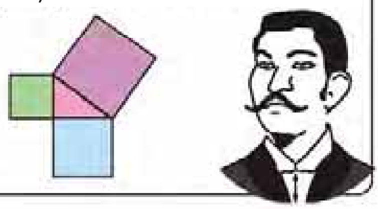


c)



エウクレイデス (紀元前 300 年) は次の命題を示しました：「直角三角形において、直角の対辺を含む正方形の面積は、他の 2 辺を含むそれぞれの正方形の面積の合計と等しくなる。」

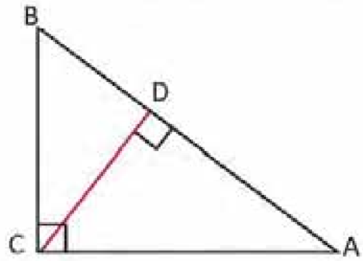
W. ダンハム (2002). 数学の知性―天才と定理でたどる数学史



1.4 ピタゴラスの定理、パート 2

P

$\Delta ABC \sim \Delta CBD$ と $\Delta ABC \sim \Delta ACD$ の相似を使い、ΔABC において $BC^2 + CA^2 = AB^2$ が成立することを証明しましょう。



S

頂点 C から辺 AB へ高さの線を引くと、直角三角形 ADC と直角三角形 CDB が形成されます。

$\Delta ABC \sim \Delta CBD$ (2 組の角が等しい)

$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{DB}$ (三角形 ABC と三角形 CBD が相似のため)

よって、$BC^2 = AB \times DB$ (比例式の基本特性)

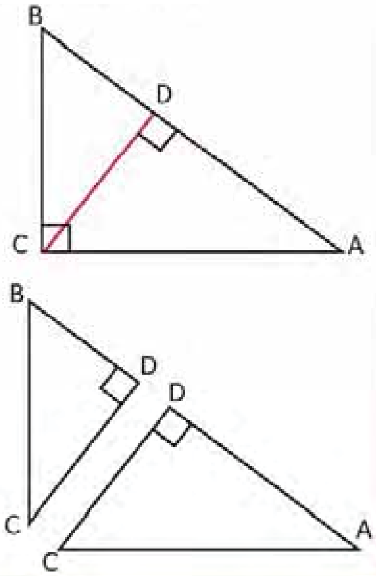
$\Delta ABC \sim \Delta ACD$ (2 組の角が等しい)

$\frac{AB}{CA} = \frac{CA}{AD}$ (三角形 ABC と三角形 ADC が相似のため)

よって、$CA^2 = AB \times AD$ (比例式の基本特性)

ゆえに、$CA^2 + BC^2 = AB \times AD + AB \times DB = AB \times (AD + DB) = AB^2$

したがって、$BC^2 + CA^2 = AB^2$

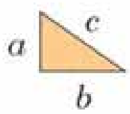


C

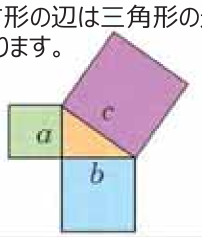
三角形の相似を使いピタゴラスの定理を証明することができます。

切り抜きを使ったピタゴラスの定理の確認： 1 番大きい正方形の面積 (c^2 の範囲) が、他の 2 つの正方形の面積の合計 (b^2 と a^2 の面積) と等しいことを確認しましょう。

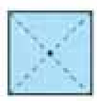
直角
三角形を1つ描きます。



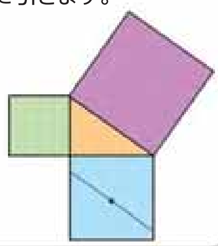
カラーページの3つの正方形を切り抜きます。それぞれの正方形の辺は三角形の辺にもなります。



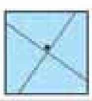
水色の正方形を対角線に沿って折り、再度広げて対角線同士の交差点に印をつけます。



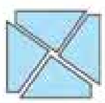
斜辺と平行になる線を、印を通るように引きます。



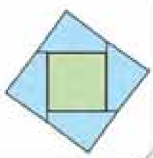
先ほどの線と垂直に交わる線を、印を通るように引きます。



水色の正方形を4つに切り分けます。



切り分けた4つの図形と正方形をくっつけます。

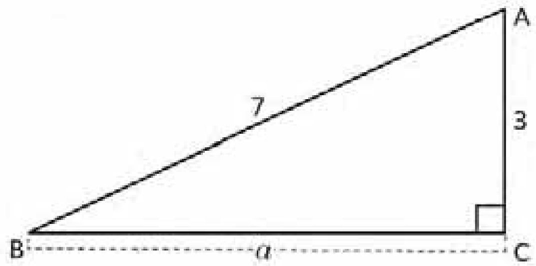


最も大きい正方形と合同な正方形を形成します。

1.5 隣辺の長さの計算

P

次の直角三角形 ABC において、隣辺 BC の長さ、つまり a の値を求めなさい。



S

直角三角形は $3^2 + a^2 = 7^2$ (ピタゴラスの定理) を満たすので、

a^2 を求め、 $a^2 = 7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40.$

平方根の定義から、$a^2 = 40 \Rightarrow a = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ となります。$a > 0$ なので、

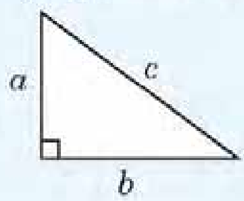
よって： $a = 2\sqrt{10}$.

直角三角形 ABC では、斜辺の長さは 7、また隣辺は 3 で、2 つ目の隣辺の長さは $2\sqrt{10}$ 。

C

一般的に、直角三角形において、辺 a、b、c は、$a^2 + b^2 = c^2$ を満たすため、
斜辺と隣辺は次のように求めることができます：

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$　　$a = \sqrt{c^2 - b^2}$　　$b = \sqrt{c^2 - a^2}$

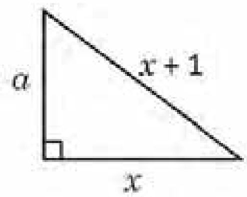


E

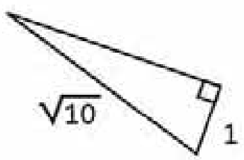
x を使い、隣辺 a の値を求めなさい。$x > 0$ とします。

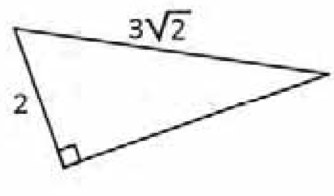
よって、$a^2 = (x + 1)^2 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1.$

したがって、$a = \sqrt{2x + 1}$.



次の三角形の不明な辺の長さを求めなさい：

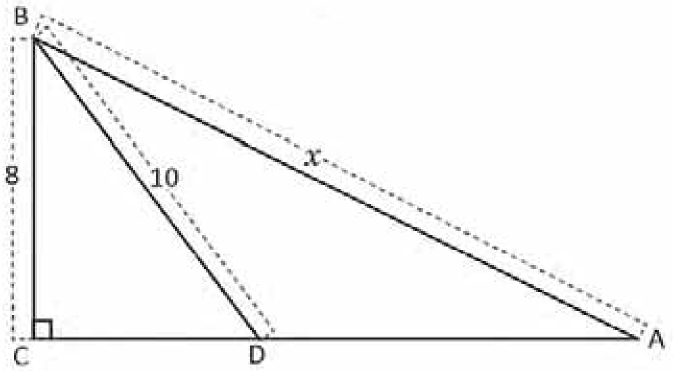




1.6 ピタゴラスの定理を使った問題の解法

P

三角形 ABC の斜辺の値を、ABD が二等辺三角形であることを考慮して、求めなさい。



S

x の値を求めるには、隣辺 CA の長さを知る必要があります。

ΔABD は二等辺なので、辺 DA の長さは 10。

ΔDBC にピタゴラスの定理をあてはめて：

$CD^2 + BC^2 = DB^2 \Rightarrow CD^2 + 8^2 = 10^2$

$\Rightarrow CD^2 = 36$, $CD > 0$ なので

$\Rightarrow CD = 6$

CA = CD + DA なので、CA = 10 + 6 = 16 となります。

最後に ΔABC にピタゴラスの定理をあてはめます：

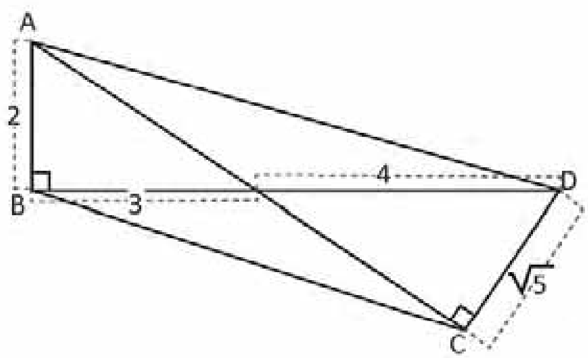
$x^2 = BC^2 + CA^2 \;\Rightarrow\; x^2 = 8^2 + 16^2 = 320.$

したがって、$x = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$ となります。

C

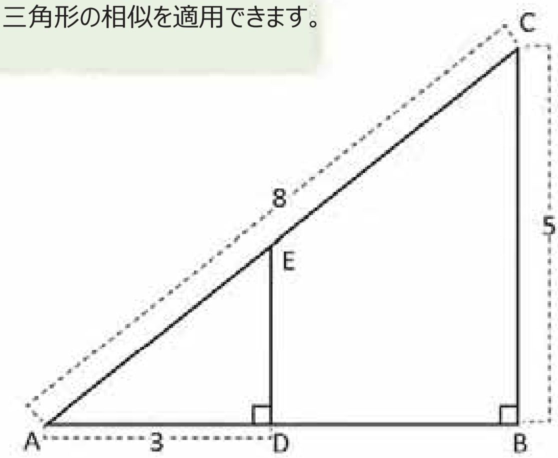
ピタゴラスの定理を用いて問題を解くには、図形の直角三角形を特定し、不明な辺の長さを求めるために、比例する値を用います。

1. 四角形 ABCD の斜辺 AC の長さを求めなさい。



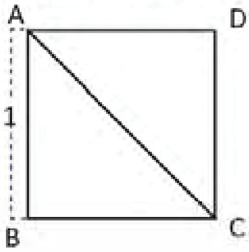
2. ΔADE の斜辺の長さを計算しなさい。

三角形の相似を適用できます。

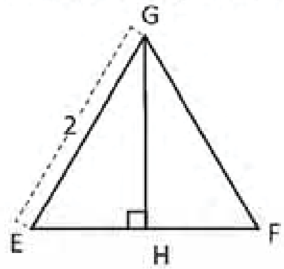


1.7 特別な三角形

1. 辺が 1 の四角 ABCD の斜辺 CA の長さはいくつでしょうか? ΔABC の角度はいくつでしょうか?



2. 辺の長さが 2 の正三角形 EFG の高さはいくつですか? ΔEFGの角度はいくつですか？



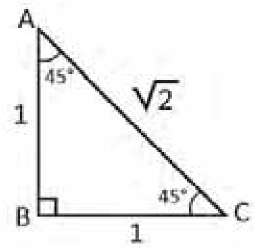
三角形の高さは、頂点から反対側の辺（またはその延長線）へ出る垂直な線分です。

1. 対角線 CA は三角形 ABC と ACD の斜辺です。斜辺 CA の長さを求めるには、これら三角形のどれにでもピタゴラスの定理をあてはめるだけです。

ΔABC において：$AB^2 + BC^2 = CA^2 \Rightarrow CA^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

$$\Rightarrow CA = \sqrt{2}$$

よって ABCD の斜辺は $\sqrt{2}$.



四角形 ABCD の対角線 CA は、∢DAB と ∢BCD の二等分線なので、ΔABC の角度 ∢CAB と ∢BCAは 45°。

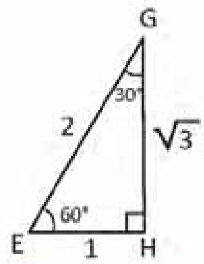
2. ΔEHG ≃ ΔFHG, EH = HF なのでしたがって、EH = 1。

ΔEHG において：$EH^2 + HG^2 = GE^2 \Rightarrow HG^2 = GE^2 - EH^2 = 2^2 - 1^2 = 3$

$$\Rightarrow HG = \sqrt{3}$$

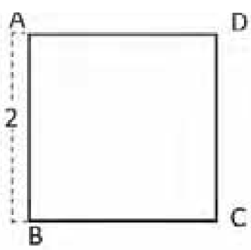
したがって、ΔEHG の高さは $\sqrt{3}$.

ΔEFG は正三角形なので ∢GEH = 60° であり、一方、内角の合計は 180° であることから、∢HGE = 30° です。

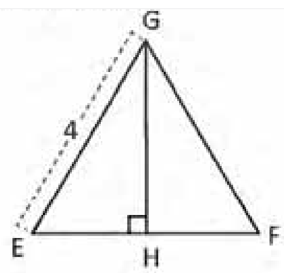


ABC と EHG の三角形は**特別な三角形**と呼ばれ、高校で三角法を学ぶ際に大いに役に立ちます。

1. 次の四角形の対角線の値はいくつですか？



2. 次の正三角形の高さはいくつでしょうか？

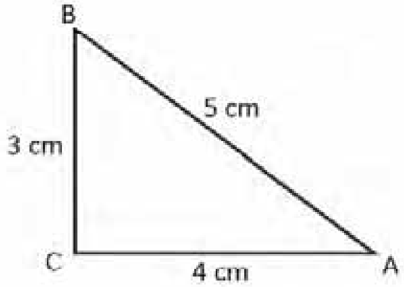


3. 問 2 の三角形 EFG の面積はいくつですか?

1.8 ピタゴラスの定理の逆

P

ΔABC において、$3^2 + 4^2 = 5^2$ を満たします。$\measuredangle ACB$ の値が $90°$ であることを証明しなさい。

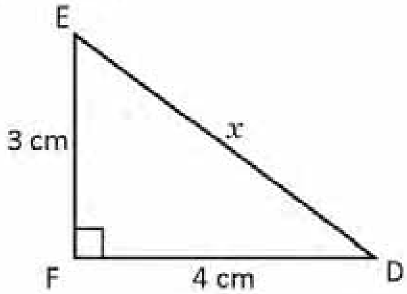


S

1. 三角形 ΔDEF は、辺 EF = 3 cm、辺 FD = 4 cm の直角三角形であるので、

2. ピタゴラスの定理を用いると、$DE^2 = EF^2 + FD^2$

$$\Rightarrow x^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$
$$\Rightarrow x = 5$$



3. CA = FD, AB = DE, BC = EF なので、$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ となります (3 辺の長さは等しい）。

4. $\Delta ABC \cong \Delta DEF$, $\measuredangle DFE = 90°$ なので、$\measuredangle ACB = 90°$ です。

したがって ΔABC は直角三角形です。

C

三角形の 3 辺 a、b、c が、$a^2 + b^2 = c^2$ の関係を満たすとき、その三角形は直角三角形です。
その斜辺は c です。この結果は**ピタゴラスの定理の逆**と呼ばれます。

E

3 つの辺の長さが 8, 15, 17 であるとき、直角三角形であるか調べなさい。

2 つの二乗の和が、別の 1 つの二乗と同じか調べます：
$15^2 + 8^2 = 289$, $17^2 = 289$　よって $15^2 + 8^2 = 17^2$.

直角三角形では、斜辺が直角の隣辺の長さより長いことに注目しましょう。

ピタゴラスの定理の逆により、三角形は直角を有する直角三角形であると結論を出すことができます。

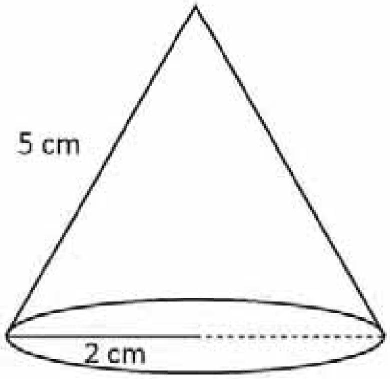
示された値が辺の長さであるとき、三角形は直角三角形か調べなさい。

a) 2 cm, 2 cm , 3 cm　　b) 4 cm, 5 cm , $\sqrt{41}$ cm　　c) 7, 24, 25　　d) 2, 3, 4

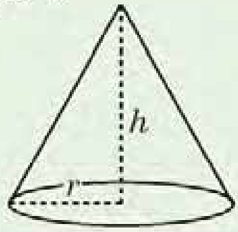
2.1 円錐の高さと体積の求め方

P

円錐の高さと体積を求めましょう。



円錐の半径 r と高さ h の体積は
$V_c = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ で求められます。



S

円錐の高さにあたる線を描くと、下記の通り、円錐の母線と半径、又、円錐の高さをもう一方の辺とした ΔABC のような直角三角形が構成され、ピタゴラスの定理を応用することが出来ます。

ΔABC は：$AB^2 = BC^2 + CA^2$

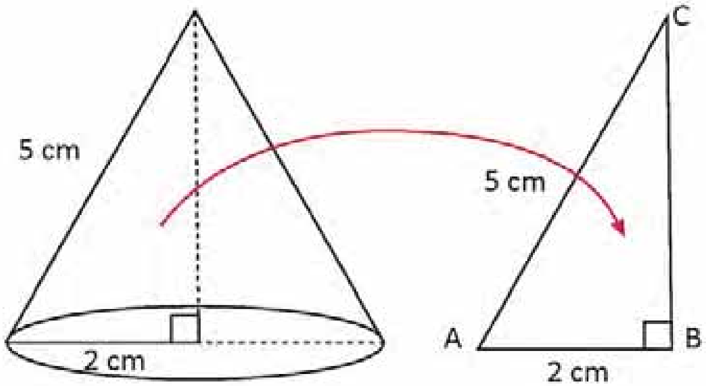
$\Rightarrow BC^2 = CA^2 - AB^2$

$= 5^2 - 2^2$

$= 25 - 4$

$\Rightarrow BC = \sqrt{21}$

したがって、円錐の高さは $\sqrt{21}$ cm となります。



円錐の体積を求める計算式は $V_c = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ で、$r = 2$ cm, $h = \sqrt{21}$ cm を計算式に当てはめると：

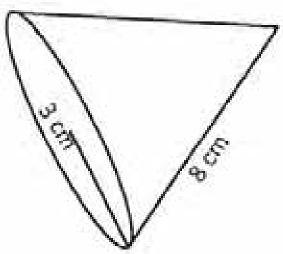
$$V_c = \frac{1}{3}\pi(2)^2\sqrt{21} = \frac{4\sqrt{21}\pi}{3}\ \text{cm}^3.$$

したがって、円錐の体積は $\frac{4\sqrt{21}\pi}{3}$ cm³ となります。

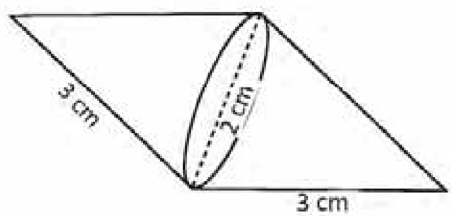
C

円錐の体積、又は高さを求めるとき、ピタゴラスの定理を応用します。

1. 以下の円錐の高さを求めましょう。



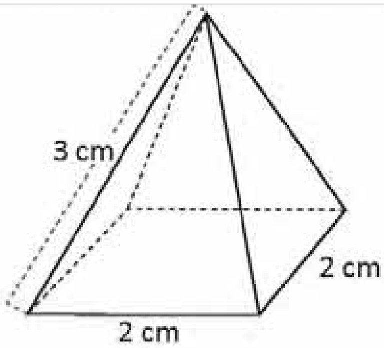
2. 以下の立体の体積を求めましょう。



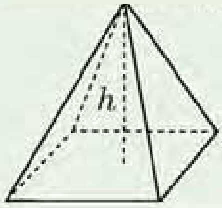
2.2 四角錐の高さと体積の計算

P

四角錐の高さと体積を求めましょう。

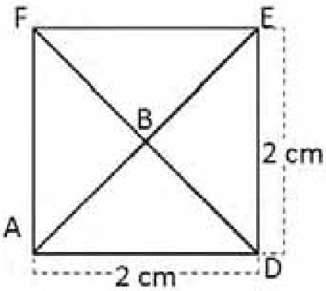


底面が A_B、高さが h の四角錐の体積は $V_P = \frac{1}{3}A_B h$ で求められます。



S

正四角錐の高さにあたる線を描くと、ABC の直角三角形が出来ます。斜辺の長さは分かっていますが、他の 2 辺の長さは分かりません。問題である正四角錐の高さにあたる BC の辺の長さを求めるには、まずは、AB の辺の長さから求める必要があります。

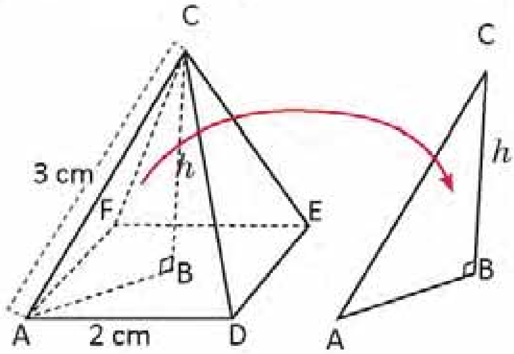


正四角錐の底面は正方形で、$\overline{AB}$ は対角線の半分にあたります。したがって、AD = 2 cm なので DE = 2 cm になります。

対角線 EA は ΔADE にピタゴラスの定理を適用して求めることが出来ます。

$$EA^2 = ED^2 + DA^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

$$\Rightarrow EA = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$



AB は対角線の半分なので AB = $\sqrt{2}$ cm です。この情報が分かっていれば、この場合も、ピタゴラスの定理を応用して、ΔABC の BC の辺の長さを求めることが出来ます：

$$CA^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow BC^2 = CA^2 - AB^2 = 3^2 - \sqrt{2}^2 = 9 - 2 = 7$$

$\Rightarrow BC = \sqrt{7}$ 、したがって　$h = \sqrt{7}$ (cm) となります。

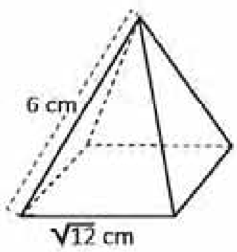
正四角錐の体積は $Vp = \frac{1}{3}A_B h$ で求めることが出来るので、この計算式に値をあてはめると、$A_B = 2 \times 2 = 4$ cm², $h = \sqrt{2}$ cm となります。

$$V_P = \frac{1}{3}(4)\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\ \text{cm}^3.$$

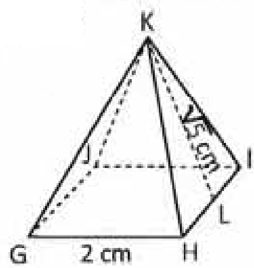
C

正四角錐の高さと体積を求める際には、ピタゴラスの定理を適用しましょう。

1. 正四角錐の高さを求めましょう



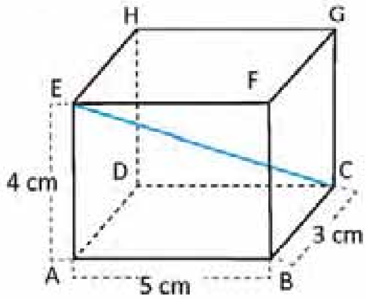
2. KL = 5 cm を二等辺三角形 KHI の高さとするとき、次の正四角錐の体積を求めましょう：



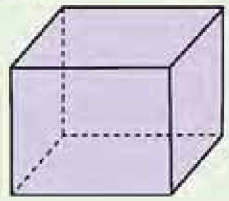
2.3 直方体の対角線の長さの求め方

P

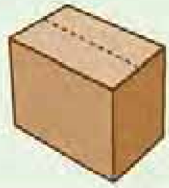
下記の直方体の対角線 CE の長さは何 cm でしょうか？



直方体は筒状になった柱体であり、隣接する面が直角に交わっています。



日常的に使う箱も直方体です。

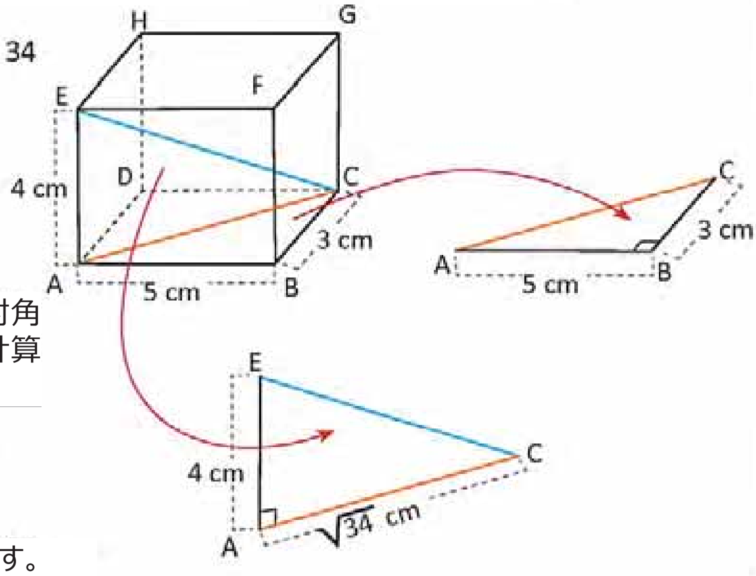


S

対角線 CE は ΔACE の斜辺にあたります。まずは、$\overline{AC}$ の辺の長さを求め、次に $\overline{CE}$ の長さを求めます。AC も同様に ΔACB の斜辺なので、ピタゴラスの定理を適用して長さを求めることができます：

ΔACBは、 $AC^2 = BA^2 + CB^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$

$\Rightarrow AC = \sqrt{34}$



AC と EA の辺の長さが分かっているので、CE の対角線の長さは、ΔEAC にピタゴラスの定理を用いて計算することができます。

$CE^2 = AC^2 + EA^2 = (\sqrt{34})^2 + 4^2 = 34 + 16 = 50$

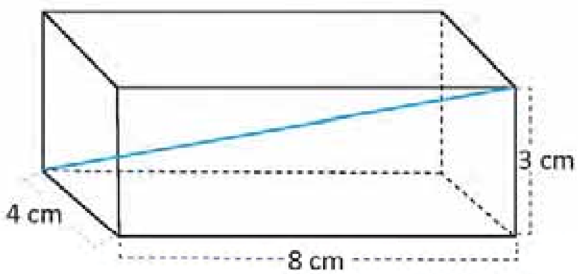
$\Rightarrow CE = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

したがって、この直方体の対角線の長さは $5\sqrt{2}$ です。

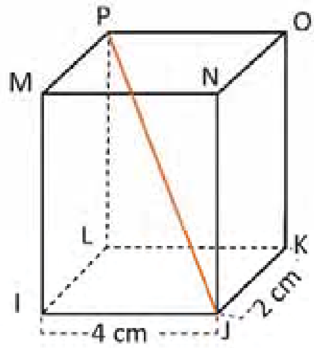
C

直方体の対角線の長さを求める際、ピタゴラスの定理を 2 回に分けて使います。

1. 直方体の対角線の長さの求め方



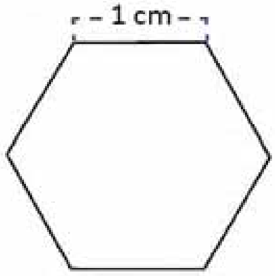
2. 下記の直方体において、対角線 JP = $3\sqrt{5}$ とするとき、高さは何 cm でしょうか？



2.4 六角形の面積の計算

P

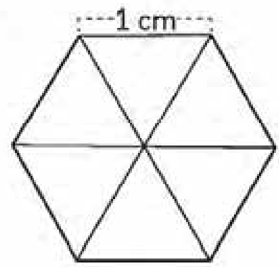
辺が 1 cm の正六角形の面積を計算しましょう。



正多角形は、全ての辺が同じ長さで、全ての内角が同じになることを満たしています。

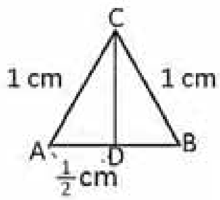
S

正六角形は、合同の正三角形 6 つから構成されています。
この場合、各三角形のそれぞれの辺は 1 cm です。



三角形の面積を求めて、その後 6 でかけると、
正六角形の面積が定まります。

6 つある三角形のどれかを選び、ΔABC と記述します。頂点 C からの高さを引き、ピタゴラスの定理を使うと長さがわかります：



$$CA^2 = AD^2 + DC^2 \Rightarrow DC^2 = CA^2 - AD^2$$

$$\Rightarrow DC^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow DC = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ΔABC の面積は：$(\Delta ABC) = \dfrac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(cm)^2$ です。

六角形の面積は $\dfrac{\sqrt{3}}{4} \times 6 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ $(cm)^2$ です。

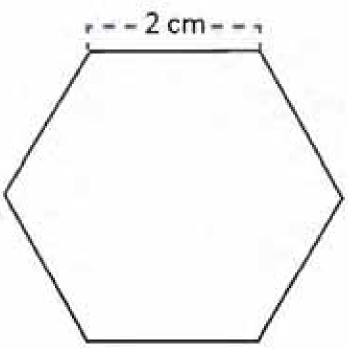
正多角形の中心から任意の辺に引いた垂直線 A は、**辺心距離**と呼ばれます。

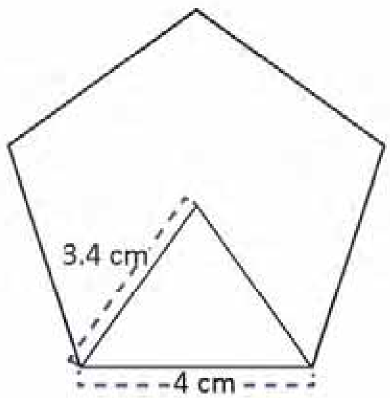
以前の問題では、DC の高さが六角形の辺心距離と一致しています。

C

正多角形の面積を計算するには、ピタゴラスの定理を使って正多角形の辺心距離を定めることができます。

次の正多角形の辺心距離の長さと面積を求めましょう。

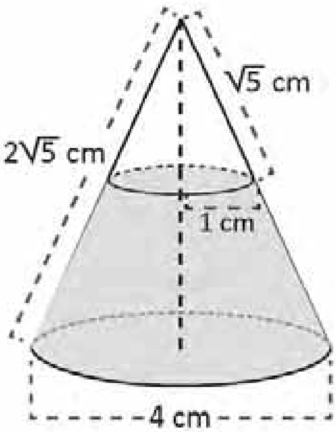




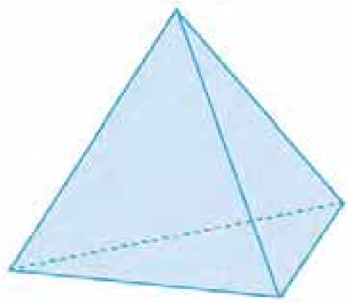
ユニット6

2.5 復習問題

1. 灰色の影がついた立体の体積を求めましょう。

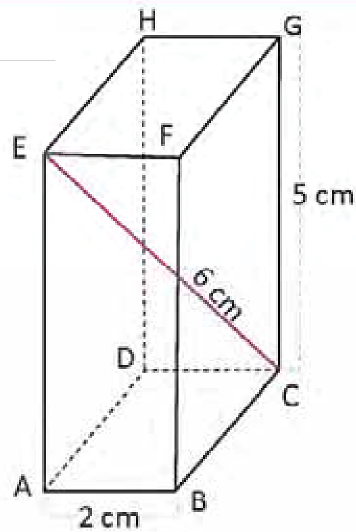


2. 三角形が正三角形で辺の長さが 3 の場合、角錐の合計面積を求めましょう。

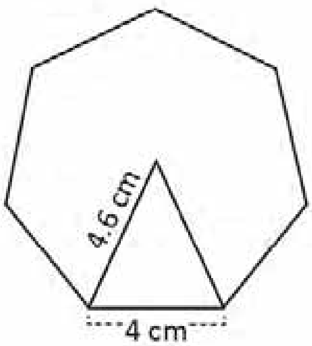


2.6 復習問題

1. 次の直方体の線分 BC の長さを計算しましょう。



2. 次の正七角形の面積を計算しましょう。



2.7 ピタゴラスの定理の応用

P

サンサルバドルにあるエルサルバドル大学の正門（点C）からフエンテ・ルミノーサ像（点B）までの距離は 554.8 m です。一方、フエンテ・ルミノーサから英雄たち大通りと 21 番通り西の交差点（点A）までの距離は 375.6 m です。点 A と点 C 間の距離を求めなさい。

S

前の状況では直角三角形 ABC が作られ、直角をはさむ辺 AB と BC の長さは知られています。ピタゴラスの定理を使うと、斜辺の長さ CA は：

$$CA^2 = AB^2 + BC^2 = 375.6^2 + 554.8^2 \approx 141\ 075.4 + 307\ 803.0 = 448\ 878.4$$

$$\Rightarrow CA \approx \sqrt{448878.4} \approx 670.$$

C

ピタゴラスの定理は長さを測るのに使用でき、エルサルバドル大学の正門と、英雄たち通りと 21 番通り西の交点の距離が 670 m であることが定められます。

サンサルバドルのリベルター広場の中心にあるプロセレス記念碑の高さを計算しましょう。この記念碑は、独立の最初の叫びから 100 周年を記念して 1911 年 11 月 5 日にマヌエル・エンリケ・アラウホ大統領により除幕され、青銅、大理石、花崗岩とコンクリートで彫られています。

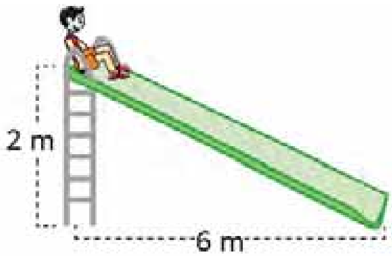
10.9 m

ユニット6

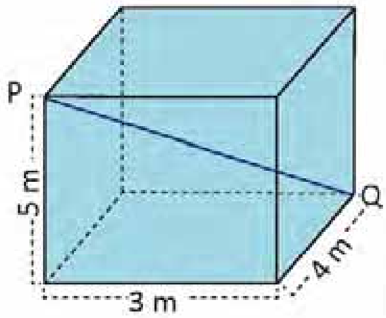
2.8 復習問題

1. マリオは長さが 13 フィートのはしごを持っています。ポールの 12 フィートの高さについている電球を換えようとしています。ポールの付け根部からどのような距離にはしごを置かねばなりませんか?

2. ミゲルは、滑り台を滑りたいのです。滑り台の一番高いところは、3.5 m です。地面に接する点と滑り台の付け根との距離は 6 m です。滑り台でどれだけの距離を滑りますか?



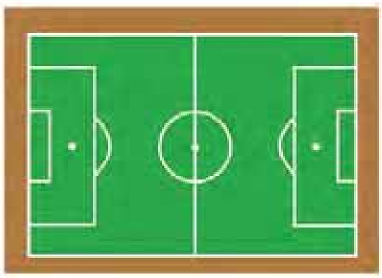
3. フアンさんは、コンクリートの貯水槽の P 点と Q 点の間にワイヤーを張る必要があります。ワイヤーはどのような長さになりますか?



2.9 復習問題

1. エル・サポテ学校では、平和についての行事を準備しています。そのため、ホセに、学校の塀に行事に関する文字を並べるように頼みました。完成までに何センチメートルのひもが必要ですか?

2. サン・サルバドールのクスカトラン・スタジアムのグリーンは、長さが 107 mで対角線は 127 m あります。フィールドの面積はどれくらいですか?



円周角と中心角

Μαθηματικη Συνταξις

Κλαυδιος Πτολεμαιος

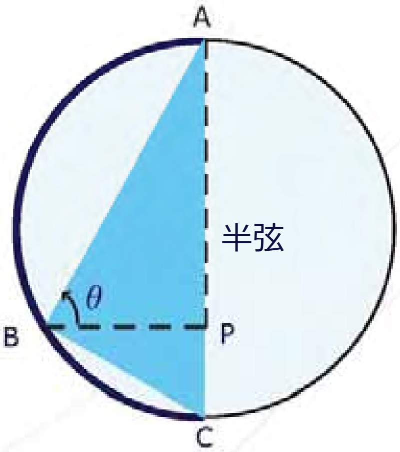
τὸν μὲν ὁμόκεντρον τῷ διὰ μέσων τῶν ζῳδίων κύκλον τὸν ΑΒΓΔ περὶ κέντρον τὸ Ε καὶ διάμετρον τὴν ΑΕΓ, τὸν δ' ἐπ' αὐτοῦ φερόμενον ἐπίκυκλον, ἐφ' οὗ κινεῖται ὁ ἀστήρ, τὸν ΖΗΘΚ περὶ κέντρον τὸ Α, φανερὸν καὶ οὕτως αὐτόθεν ἔσται, διότι τοῦ ἐπικύκλου ὁμαλῶς διερχομένου τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ὡς ἀπὸ τοῦ Α λόγου ἕνεκα ἐπὶ τὸ Β καὶ τοῦ ἀστέρος τὸν ἐπίκυκλον, ὅταν μὲν κατὰ τῶν Ζ καὶ Θ γένηται ὁ ἀστήρ, ἀδιαφόρως φανήσεται τῷ Α κέντρῳ τοῦ ἐπικύκλου, ὅταν δὲ κατὰ ἄλλων, οὐκέτι, ἀλλὰ κατὰ μὲν τοῦ Η φέρε εἰπεῖν γενόμενος πλείονα δόξει πεποιῆσθαι κίνησιν τῆς ὁμαλῆς τῇ ΑΗ περιφερείᾳ, κατὰ δὲ τοῦ Κ ἐλάσσονα ὁμοίως τῇ ΑΚ περιφερείᾳ.

天文学専門書「アルマゲスト」の
*1*ページ。

天文学は、獲物が豊富な時期、種まきの時期、冬の到来を予測するために古代文明で使用されていました。

ギリシア系エジプト人の数学者クラウディオス・プトレマイオス（2世紀）は、天文学の専門書「アルマゲスト」の中で、天動説（惑星が地球の周りを回る）に関する数学的記述を行ないました。彼が数学に対して貢献したことの一つが内接四辺形に関する定理で、円周角の重要な特性が用いられています。

三角法は、三角形の辺と角の関係について研究したもので、天文学の研究によって生まれました。インドの数学者、ヴァラーハミヒラ（6世紀）とブラフマグプタ（7世紀）は、半弦（1辺が円の直径となる円の内接三角形）および円周角の研究に基づく内接四辺形を利用して、様々な三角法の特性について述べました。



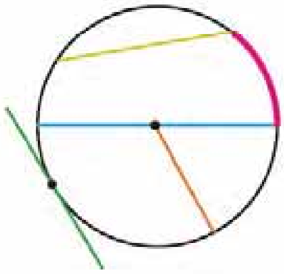
円周角ABCは直角です。この構造から、重要な比率が得られました。

ここで取り扱う内容には、円周角の定義から定理までが含まれています。これにより、中心角との関係を確立します。みなさんは、円周上の接線の作図や、接線と弦のなす角および円の弦と弧の関係の定義などを学習します。

1.1 円の部位

P

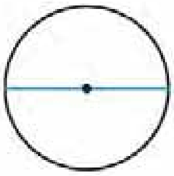
次の円に描かれた部位の名前を書きなさい：



S

線分

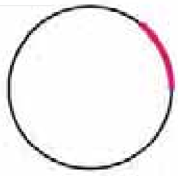
中心点から円周上の 1 点まで延びる線分を**半径**と呼びます。



円周上の 1 点から中心を通って別の 1 点まで延びる線分を**直径**と呼びます。

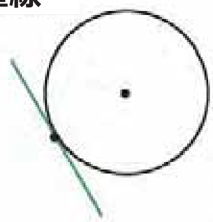
円周上の 1 点から別の 1 点まで延びる線分を**弦**と呼びます。

弧



2 点で区切られた円周部分を**弧**と呼びます。

直線



円に接する直線を**接線**と呼びます。

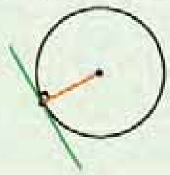
接線が円に接する点を**接点**と呼びます。

C

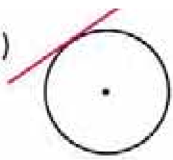
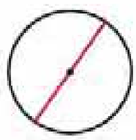
円の部位は以下のとおりです：

- 線分：半径、直径および弦
- 直線：接線
- 円の弧

接点に対する半径は、その接点に対して直角に交わります。



1. それぞれの円に示されている部位の名前を書きなさい：

a)  b)  c)  d)  e) 

2. 次の問いに答えなさい：

a) 直径の $\frac{1}{2}$ である部位の名前は何ですか。

b) 円で一番長い弦の名前は何でしょうか。

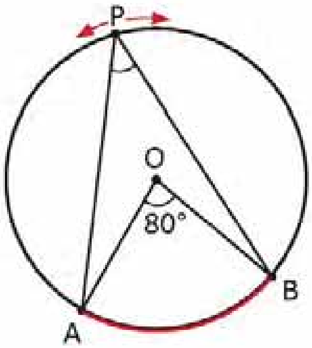
c) 接線と円の接点に対する半径は、どのようになっていますか。

d) 円周上に 2 つの点を置くと、弧はいくつできますか。

1.2 円周角の定義と大きさ

P

紙に作図し、点 P を円周の様々な場所に移動させて ∢BPA を測りなさい。∢BPA の大きさを ∢BOA の大きさと比べなさい。



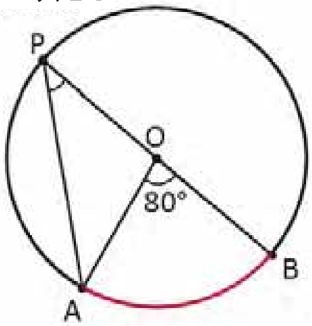
角 BOA は、その頂点が円の中心であるので**中心角**と呼ばれます。

∢BPA と ∢BOA が同じ弧 $\overset{\frown}{AB}$を共有していることに注目しなさい。

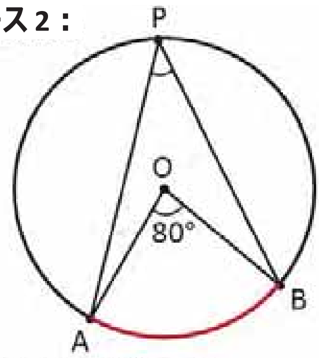
S

定規とコンパスを用いて作図し点 P を移動させることで、以下のケースが考えられます：

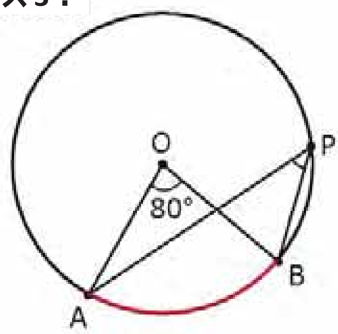
ケース 1：



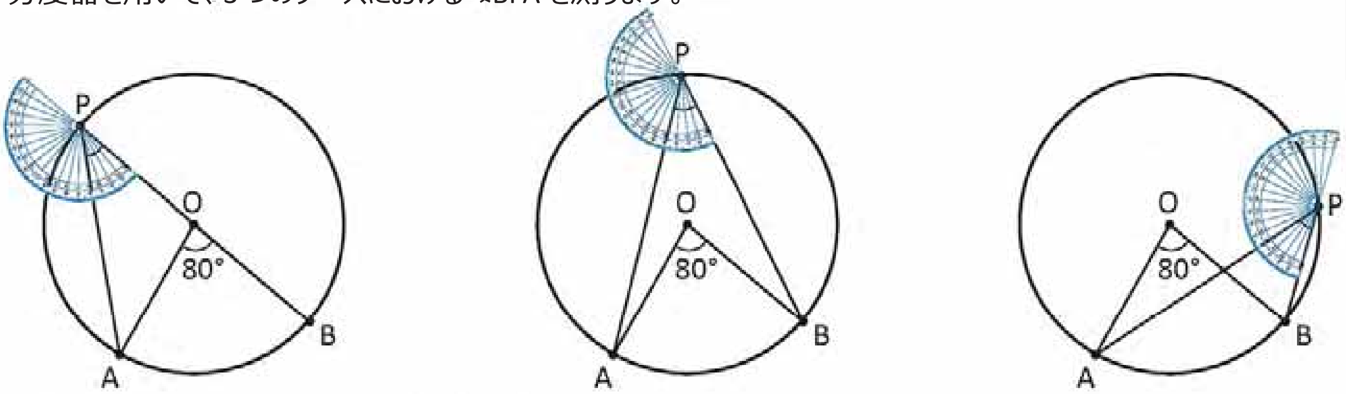
ケース 2：



ケース 3：



分度器を用いて、3 つのケースにおける ∢BPA を測ります。



3 つのケースにおいて ∢BPA = 40° の大きさになります。

かつ ∢BOA = 2∢BPA つまり ∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA となります。

C

頂点が円周上にある角を**円周角**と呼びます。

同じ弧に対するとは、同じ弧を共有することを意味します。

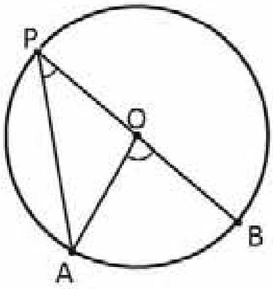
円において、任意の円周角と同じ弧に対する中心角の大きさは、その同じ弧に対する任意の円周角の大きさの 2 倍になります。

同じ弧に対する中心角の大きさが 160° である円周角の大きさを求めなさい。
冒頭問題のように図を利用しなさい。

1.3 円周角、パート 1

P

中心が ΔBPA のいずれかの辺上にあるとき、∢BOA = 2∢BPA であることを証明しなさい。



直径は、円の中心を通る弦です。

S

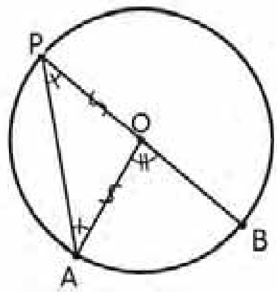
ΔAOP において：OP = OA （これらは円の半径であるため）。

よって、∢OPA = ∢PAO （等しい辺に対して等しい角が向き合うため）。

その一方で ∢BOA = ∢OPA + ∢PAO （∢BOA は ΔAOP の外角だから）。

したがって、∢BOA = 2∢OPA　　　∢OPA = ∢BPA なので、

よって、∢BOA = 2∢BPA



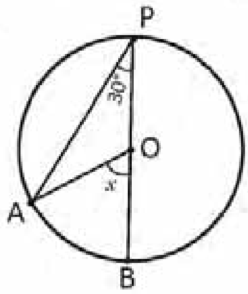
C

辺が円の直径と一致する円周角では、**円周角と同じ弧に対する中心角の大きさは、その円周角の大きさの 2 倍になります。**

E

次の各場合について x の値を求めなさい。

a)

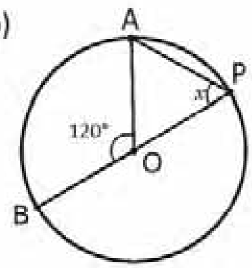


∢BOA = 2∢BPA なので

したがって、

$x = 2\,(30°) = 60°$

b)



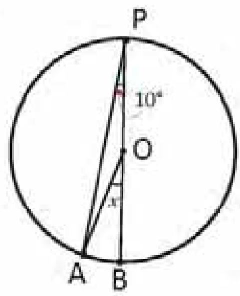
∢BOA = 2∢BPA なので

よって、$∢BPA = \frac{1}{2}∢BOA$

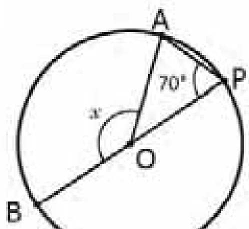
したがって、$x = \frac{120°}{2} = 60°$.

次の各場合について x の値を求めなさい。

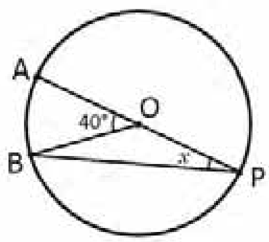
a)



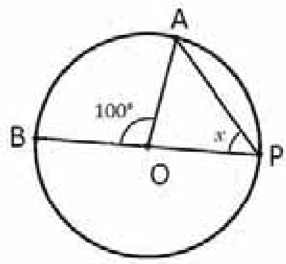
b)



c)



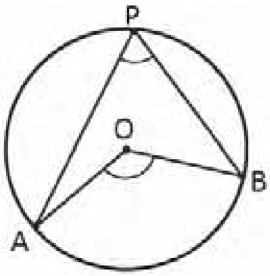
d)



1.4 円周角、パート 2

P

中心が ∢BPA の内側にあるとき、∢BOA = 2∢BPA であることを証明しなさい。



S

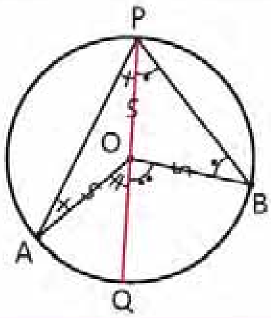
直径 QP を引きます。

∢QOA = 2∢QPA かつ ∢BOQ = 2∢BPO （授業 3 で学んだことから）。

両方の等式を足すと：

∢QOA + ∢BOQ = 2∢QPA + 2∢BPQ = 2(∢QPA + ∢BPQ).

したがって、∢BOA = 2∢BPA



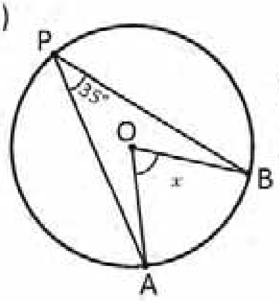
C

同じ弧に対する中心角を内側に持つ円周角においても、**中心角の大きさは、その円周角の大きさの 2 倍になります。**

E

次の各場合について x の値を求めなさい。

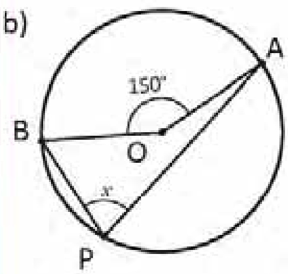
a)



∢BOA = 2∢BPA なので

したがって、x = 2 (35°) = 70°。

b)



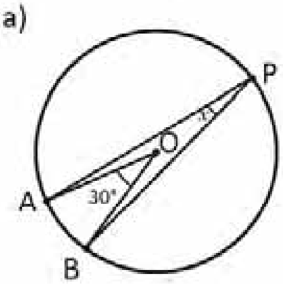
∢BOA = 2∢BPAなので

よって、∢BPA = $\frac{1}{2}$∢BOA.

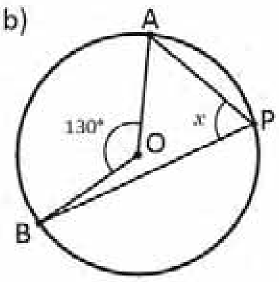
したがって、$x = \frac{150°}{2} = 75°$.

次の各場合について x の値を求めなさい。

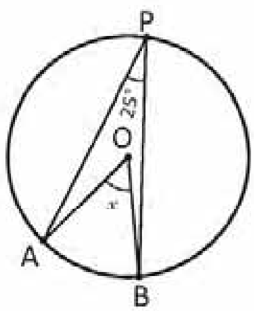
a)



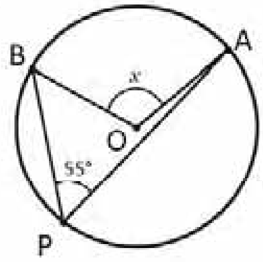
b)



c)



d)

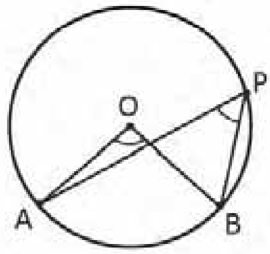


ユニット7

1.5 円周角の定理

P

中心が ∢BPA の外側にあるとき、∢BOA = 2∢BPA であることを証明しなさい。



S

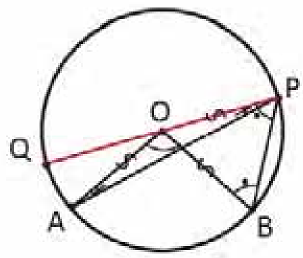
直径 QP を引きます。

∢AOQ = 2∢APQ かつ ∢BOQ = 2∢BPQ （授業 3 で学んだことから）。

∢BOA = ∢BOQ – ∢AOQ なので

よって、∢BOA = 2∢BPQ – 2∢APQ = 2(∢BPQ – ∢APQ) = 2∢BPA。

したがって、∢BOA = 2∢BPA。



C

円において、どのような円周角に関しても、**中心角の大きさは、同じ弧に対する円周角の大きさの2倍になります。**

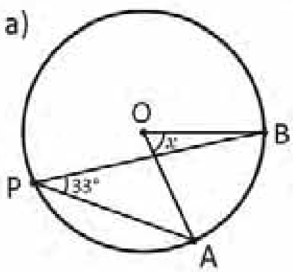
さらに、同じ弧に対する円周角の大きさは等しいです。

この結果は、**円周角の定理**として知られています。

E

次の各場合について x の値を求めなさい。

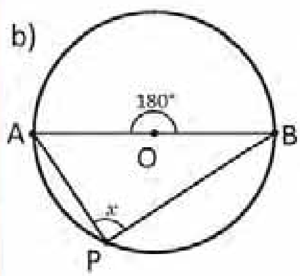
a)



∢BOA = 2∢BPAなので

したがって、$x = 2(33°) = 66°$.

b)



∢BOA = 2∢BPA なので

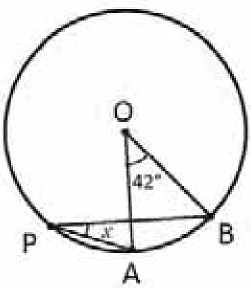
よって、$∢BPA = \frac{1}{2}∢BOA$.

したがって、$x = \frac{180°}{2} = 90°$.

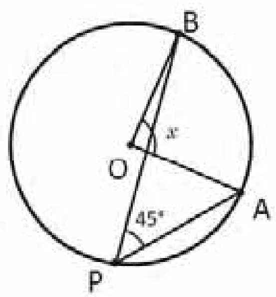
半円に対する円周角は90°になります。

次の各場合について x、y および z の値を求めなさい。

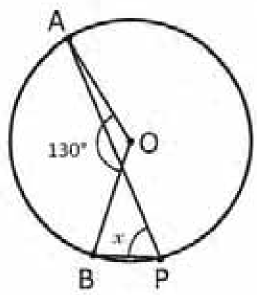
a)



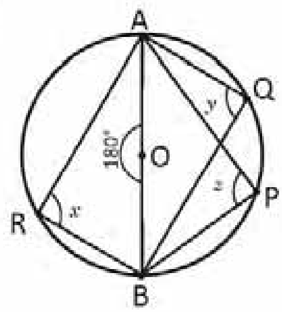
b)



c)



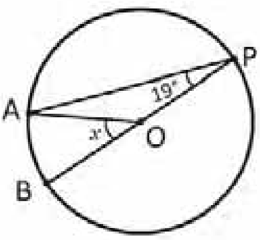
d)



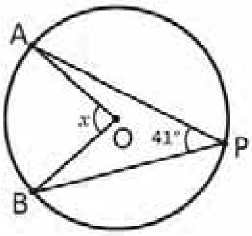
1.6 復習問題

1. 次の各場合について x の値を求めなさい。

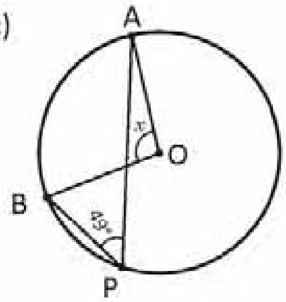
a)



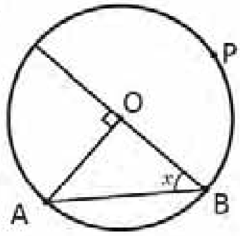
b)



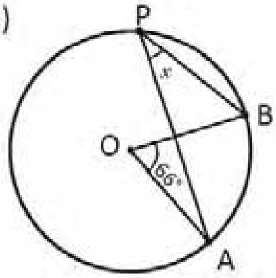
c)



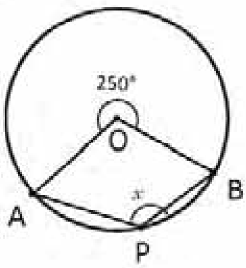
d)



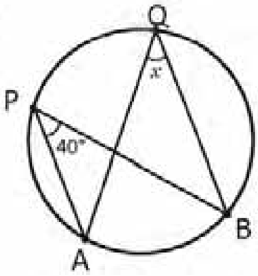
e)



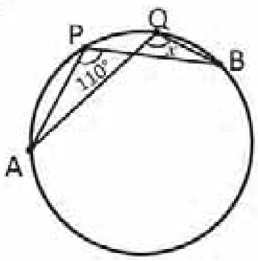
f)



g)

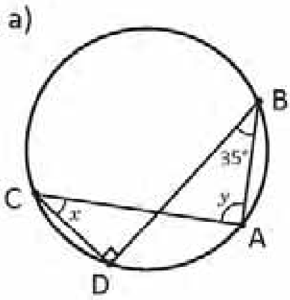


h)

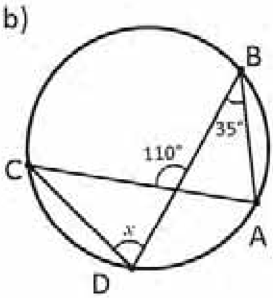


2. 次の各場合について x および y の値を求めなさい。

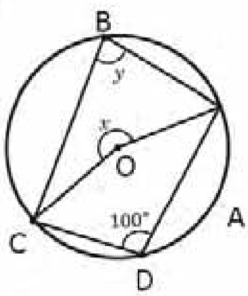
a)



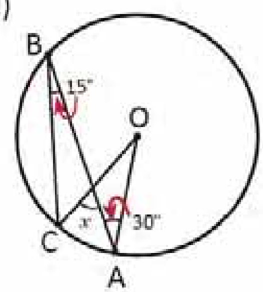
b)



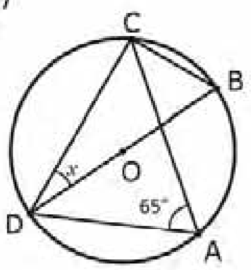
c)



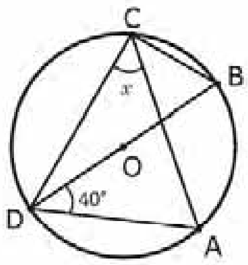
d)



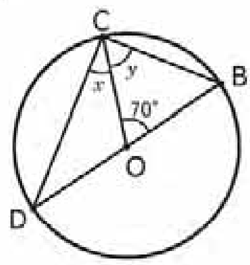
e)



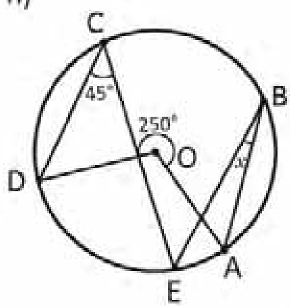
f)



g)



h)

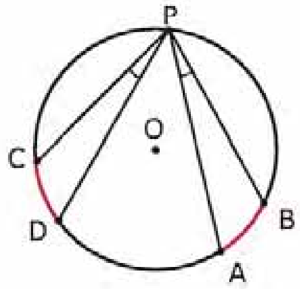


ユニット7

1.7 合同な弧

P

次の図で $\widehat{CD} = \widehat{AB}$ の場合、∢BPA の大きさを ∢DPC の大きさと比べなさい。



記号 $\widehat{AB}$ は、点 A と点 B の間に含まれる弧の部分を意味します。

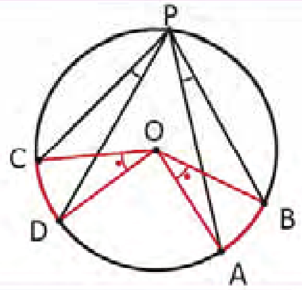
S

角 ∢BOA と ∢DOC を作図します。

∢BOA = ∢DOC （仮定により $\widehat{CD} = \widehat{AB}$ なので）。

∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA y ∢DPC = $\frac{1}{2}$ ∢DO （円周角なので）。

したがって、∢BPA = ∢DPC



C

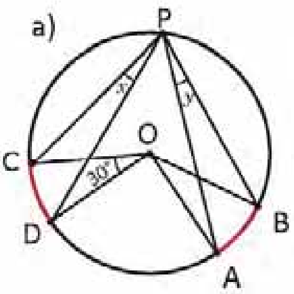
円において、長さの等しい弧に対する円周角は、大きさが等しいです。

2つの円周角の大きさが等しい場合、それらの円周角に対する弧の長さも等しくなります。

E

$\widehat{CD} = \widehat{AB}$ である次の各場合について x および y の値を求めなさい。

a)

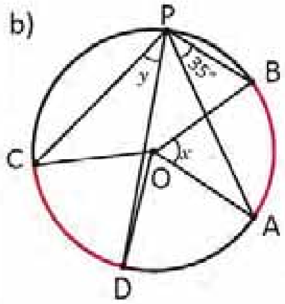


∢BOA = ∢DOC なので

したがって、

$x = y = \frac{30°}{2} = 15°$.

b)



∢BOA = 2∢BPA なので

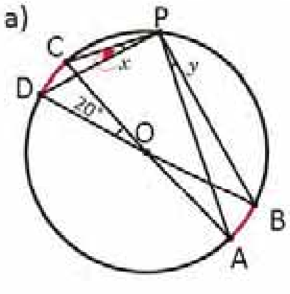
したがって、x = 2 (35°) = 70°

その一方で、∢BOA = ∢DOC

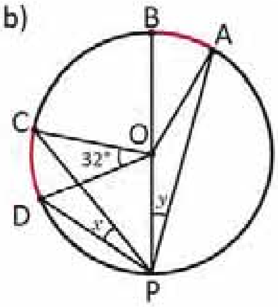
よって、y = ∢DPC = ∢BPA = 35°

次の各場合について x および y の値を求めなさい。$\widehat{AB} = \widehat{CD}$ とします。

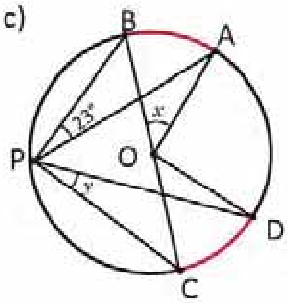
a)



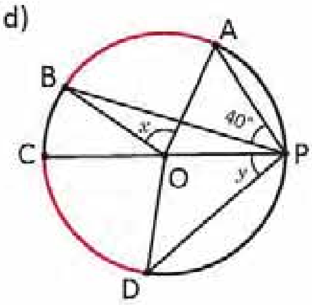
b)



c)



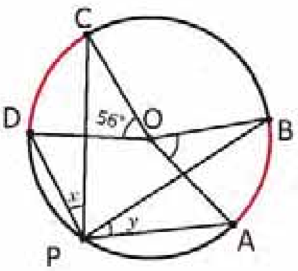
d)



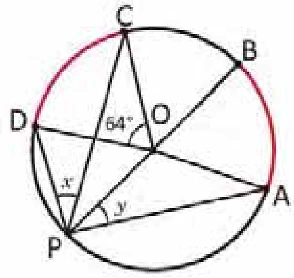
1.8 学んだことで練習しましょう

1. 次の各場合について x および y の値を求めなさい。$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ とします。

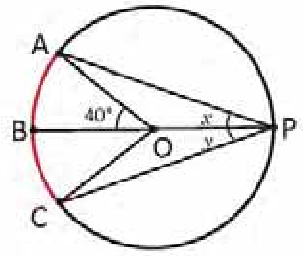
a) $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$



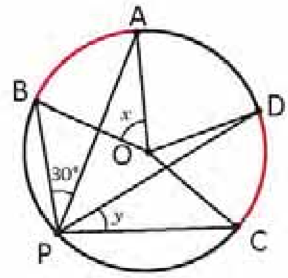
b) $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$



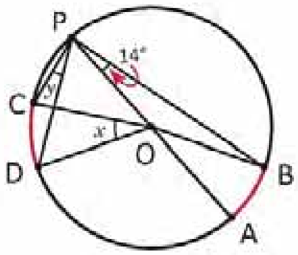
c) $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$



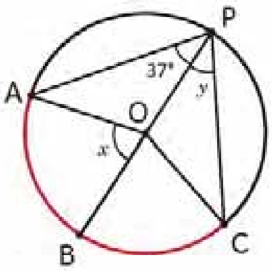
d) $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$



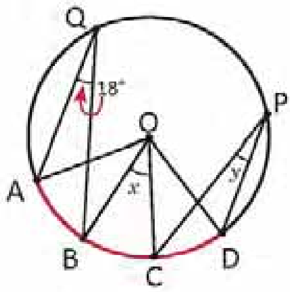
e) $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$



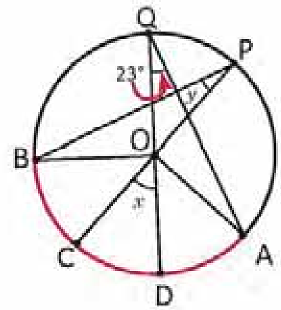
f) $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$



g) $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$

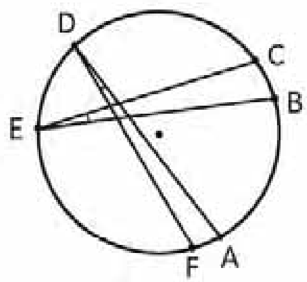


h) $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DA}$

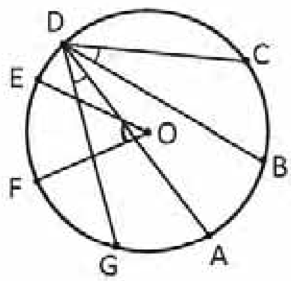


2. 以下の円において、長さの等しい弧を求めなさい。

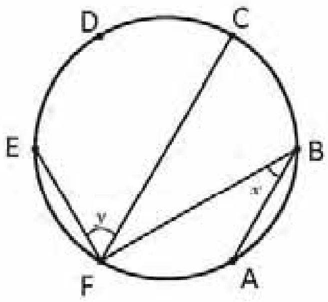
a) ∢ADF = ∢CEB



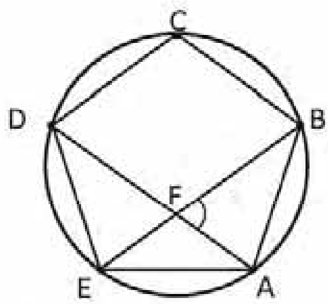
b) ∢FOE = 2∢CDB かつ ∢BDC = ∢ADG



3. 次の図において点 A、B、C、D、E、F が円周を6つの等しい弧に分割する場合、x と y の値を求めなさい。



4. 次の図において ABCDE は正多角形であり、対角線 AD と BE を引きます。∢BFA の大きさを求めなさい。

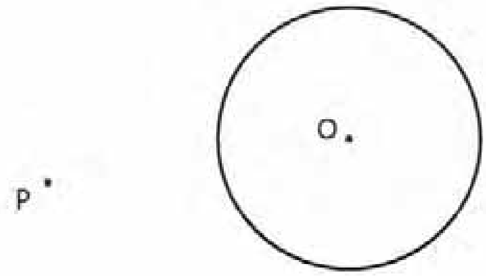


ユニット7

2.1 円に対する接線の作図

P

次の円と点 P が与えられるとき、定規とコンパスを使って、点 P を通り円の接線となるような直線を引きましょう。



S

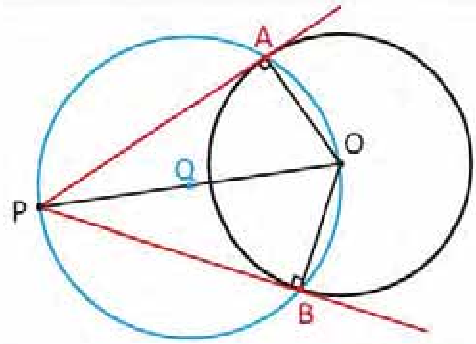
線分 PO の中点を取り、これを Q とします。

Q を中心とし、QO を半径とする円を描きます。

円と交わる点 A と点 B に印をつけます。

このとき、∢OAP = ∢PBO = 90° となります (両者の間は180° の弦となります)。

このため線分 PA と PB は O を中心とする円の接線です。



円のある点でその半径と直角に交わる直線を、その円の接線と呼びます。

C

解答にあるステップを経ることで、得られた円周角を使い、ある点 P を通る線分と与えられた円の接線を作図することができます。

1. この授業の最初に使用したものとは異なる円と、この円の外にある別の点 P を描き、点 P を通る接線を作図しましょう。

2. 授業の練習問題に基づいて次の問いに答えましょう：

   a) 線分 PA と PB の長さは同じですか。

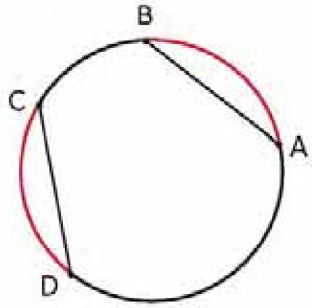
   b) それはなぜですか。

三角形の合同を使って答えを証明することができます。

2.2 円の弦と弧

P

以下の図では $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ です。弦 AB と CD の長さを比べましょう。



S

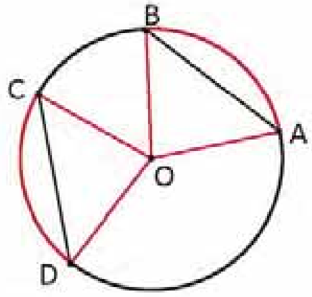
半径 OA, OB, OC と OD を描きます。

∢BOA = ∢DOC ($\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ なので)。

OA = OB = OC = OD (これらは円の半径であるため)。

よって、ΔBOA ≅ ΔDOC (二辺とその間の角が等しい三角形の合同条件による)。

したがって、AB = CD (三角形の合同条件による) となります。



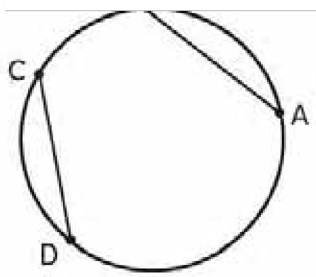
合同の定義 LAL を使うためには、二辺の長さとその間の角が同じである必要があります。

C

円において二つの弧の長さが同じとき、この弧を描く弦の長さも同じになります。

E

以下の図では AB = CD です。弧 $\overset{\frown}{AB}$ と $\overset{\frown}{CD}$ の長さを比べましょう。

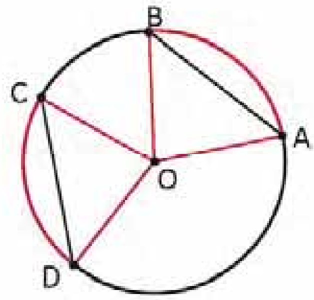


半径 OA, OB, OC と OD を描きます。

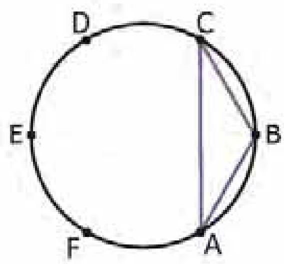
よって、ΔBOA ≅ ΔDOC (三辺が等しい三角形の合同条件による)。

よって、∢BOA = ∢DOC (三角形の合同条件による)。

したがって、$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ (中心角が同じため)。



次の点 A, B, C, D, E, F は円を同じ大きさの弧 6 つに分けます。次の各項に示される点を結んで作られる図形を分類しましょう。例を見ましょう：



a) ABC　　BA = BC ($\overset{\frown}{BA} = \overset{\frown}{BC}$ なので)。

答え：ABC は二等辺三角形です。

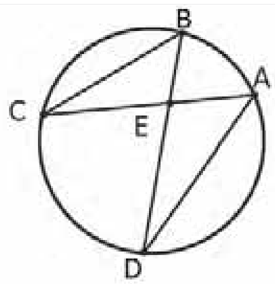
b) ABDE　　c) ACE　　d) ACD

e) ABCDEF　　f) DEF　　g) ABCD

2.3 三角形の相似への応用

P

次の図で、ΔAED ~ ΔBEC が成立するか確かめましょう。



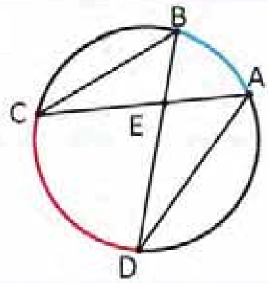
S

図では ∢AED = ∢BEC です (これらは対頂角です)。

∢DBC = ∢DAC (同じ弧から弦を引きます)。

しかし ∢EBC = ∢DBC で ∢DAE = ∢DAC です。

したがって、ΔAED ~ ΔBEC (二組の角がそれぞれ等しい相似条件による)。



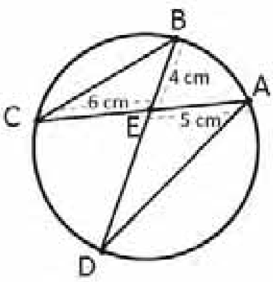
二組の角が等しい相似条件を適用するには、二つの角が合同であれば十分です。

C

二つの三角形の相似を証明するためには、同じ弧の円周角を見ることが必要です。

E

次の図において線分 ED の長さを求めましょう。



ΔAED ~ ΔBEC なので。

よって、$\frac{ED}{EC} = \frac{AE}{BE}$.

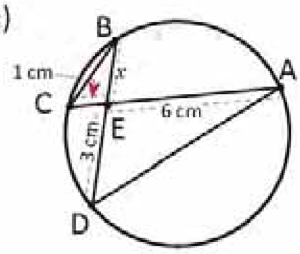
したがって、$ED = EC \times \frac{AE}{BE} = 6 \times \frac{5}{4} = 7.5$.

ED = 7.5 cm

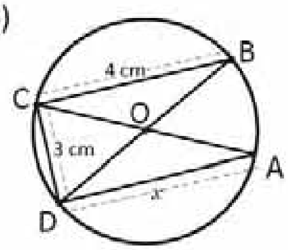
2つの三角形が相似の時、対応する辺の比は同じです。

1. 次の図において x を求めましょう。

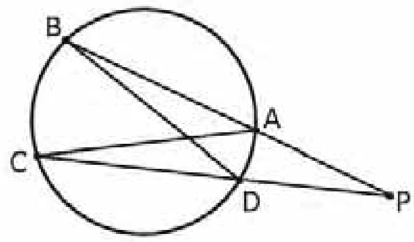
a)



b)



2. 次の図において、ΔACP ~ ΔDPBであるためにはどのような条件が必要か求めましょう。

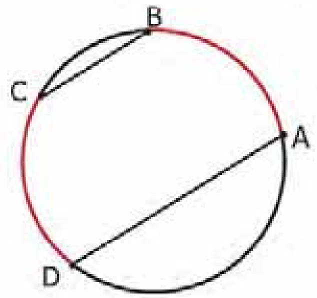


これ以上に何か必要ですか。

2.4 平行

P

次の図では $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ です。線分 AD と BC は平行か交わるか確かめましょう。

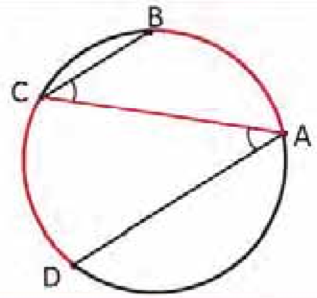


S

弦 AC を引きます。

よって $\sphericalangle BCA = \sphericalangle DAC$ となります ($\widehat{AB} = \widehat{CD}$ のため)。

したがって BC || AD となります　(錯角の大きさが等しいからです)。

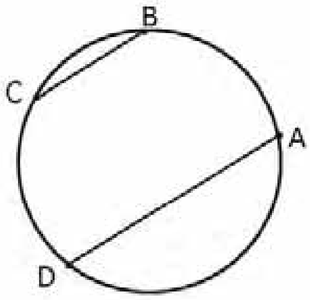


C

円において、同じ長さの弧があるとき、弧の最初の点と終わりの点を結んで作られる弦は平行になります。

E

円の弧 $\widehat{AB}$ と $\widehat{CD}$ について、BC || AD の場合、比べてみましょう。

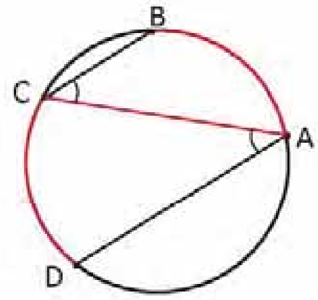


弦 AC を引きます。

$\sphericalangle BCA = \sphericalangle DAC$ (錯角だから)。

このため、$\widehat{AB} = \widehat{CD}$ (円周角の定理による)。

この結果は、最初の練習問題の逆になります。



次の項目のうち、ある円における 4 つの連続する点 A, B, C, D をつないだときに、少なくとも一組の平行な弦が得られるための十分な条件となるものはどれか考えましょう。

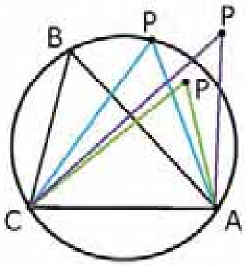
a) $\widehat{AC} = \widehat{AD}$　　b) $\sphericalangle DBC = \sphericalangle BDA$　　c) CB = DA　　d) $\widehat{CB} = \widehat{AD}$

e) AB = BC　　f) $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ADB$　　g) AC = BD　　h) $\Delta ABC \cong \Delta DCB$

2.5 円上の四つの点

P

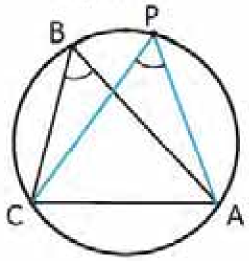
∢ABC = ∢APC であり、両方の角が線分 AC を共有するとします。このとき、点 A, B, C 及び P が同じ円上にあることを証明しましょう。



S

点 P については、円の上、中、外の 3 つの可能性があります。

選択肢 1

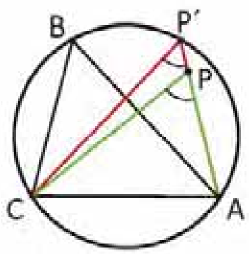


この場合：

∢**ABC = ∢APC**.

したがって、A, B, C 及び P は同じ円上になければなりません。

選択肢 2



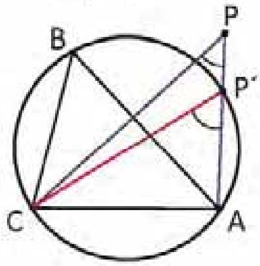
∢AP'Cを描くと

∢ABC = ∢AP'C < ∢APC となります。

∢APC = ∢AP'C + ∢P'CP のため。

したがって、∢**ABC < ∢APC** になります。

選択肢 3



∢AP'Cを描くと、

∢ABC = ∢AP'C > ∢APC となります。

∢AP'C = ∢APC + ∢PCP' のため。

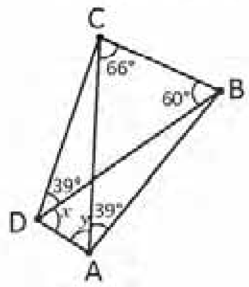
したがって、∢**ABC > ∢APC** になります。

C

もし二つの同じ大きさの角が、その開きで同じ線分を共有しているとき、四つの点は同じ円上にあります。

E

x と y の値を求めましょう。

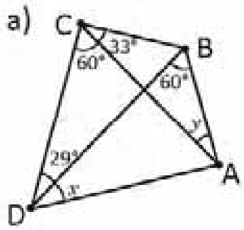


∢CAB = ∢CDB であり、両者は線分 CB を共有するため、A, B, C, D は同じ円上にあります。

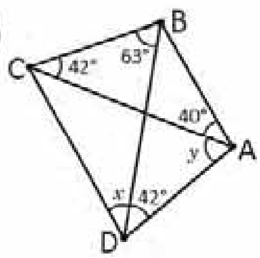
∢**BCA = ∢BDA** でなければならないため、x = 66° になります。
加えて、∢**CBD = ∢CAD** でなければならないため、y = 60° になります。

x と y の値を求めましょう。

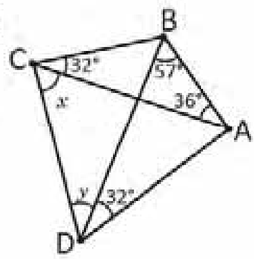
a)



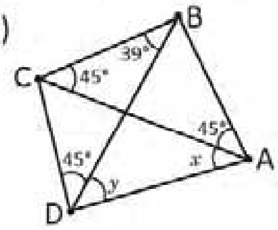
b)



c)

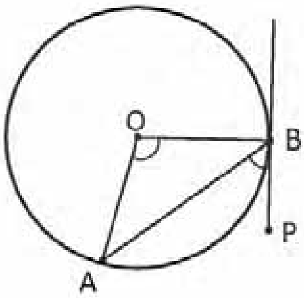


d)

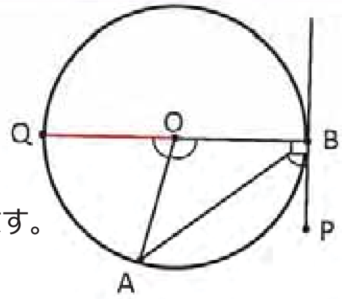


2.6 接線と弦のなす角

P 次の図において ∢ABP の大きさを ∢BOA と比べましょう。



S 直径 QB を引きます。



よって、∢AOQ = 2∢ABO となります (円周角の定理による)。

また、∢AOQ = 180° – ∢BOA となります (補角)。

よって 2 ∢ ABO = 180° – ∢BOA、すなわち、 $\sphericalangle ABO = 90° - \frac{\sphericalangle BOA}{2}$ となります。

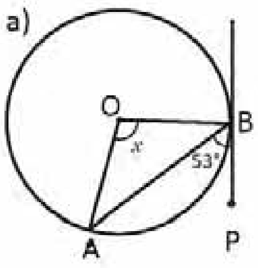
したがって、 $\sphericalangle PBA = \frac{\sphericalangle BOA}{2}$ 、または ∢BOA = 2∢PBA (PB ⊥ BOであるため余角になるため)。

C 接線と弦からなる角を次のように呼びます： **接線と弦のなす角。**

円において、**接線と弦のなす角は、その弦と同じ弧を描く中心角の半分の大きさになります。**

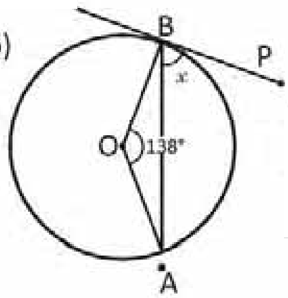
E 次の各場合について x の値を求めましょう。

a)



∢BOA = 2∢PBA なので。
したがって、x = 2 (53°) = 106°
になります。

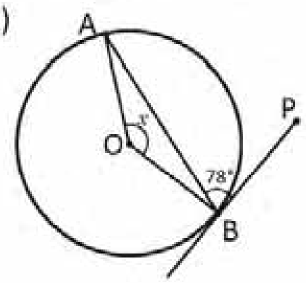
b)



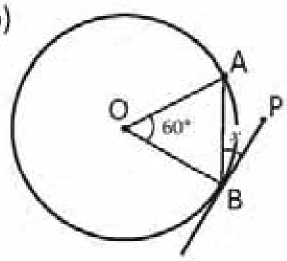
$\sphericalangle PBA = \frac{1}{2} \sphericalangle BOA$ なので、
したがって、$x = \frac{138°}{2} = 69°$
になります。

次の各場合について x の値を求めましょう。

a)



b)

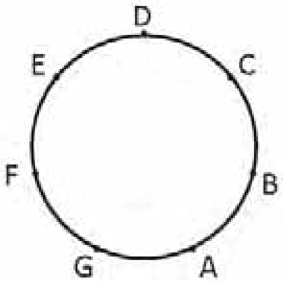


ユニット7

2.7 復習問題

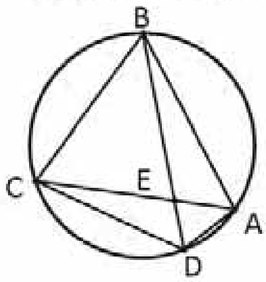
1. 円とその外側にある点 P を描き、定規とコンパスを使って、点 P を通る接線を引きましょう。

2. 次の点 A, B, C, D, E, F, G は円を同じ大きさの弧 7 つに分けます。次の項に示される点を結んで得られる図形を分類しましょう。



a) ABC　　b) ACDF　　c) ADG　　d) ABCDEFG

3. 次の図において A, B, C, D は同じ円上にあります。次の問いに答えなさい：



a) 次の角 ∢EAB と ∢EDC はどうなっていますか。

b) 次の各 ∢ABE と ∢ACD はどうなっていますか。それはなぜですか。

c) 次の三角形 ΔABE と ΔDCE はどうなっていますか。それはなぜですか。

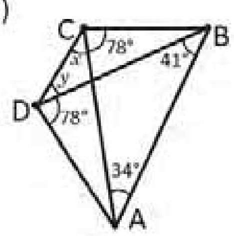
4. 次の項目のうち、ある円における 4 つの連続する点 A, B, C, D をつないだときに、少なくとも一組の平行な弦が得られるための十分な条件となるものはどれか考えましょう。

a) $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$　　b) ∢CAB = ∢CDB　　c) AC = AD　　d) ΔABC ~ ΔCDA

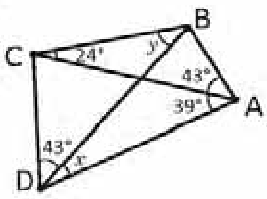
2.8 復習

次の場合ごとに x または y の値を求めましょう。

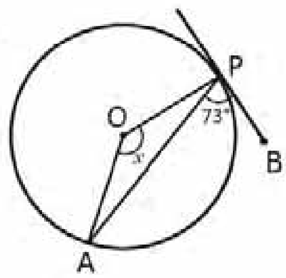
a)



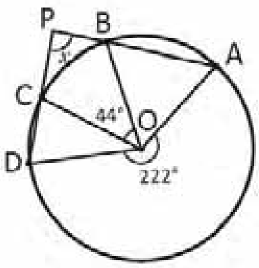
b)



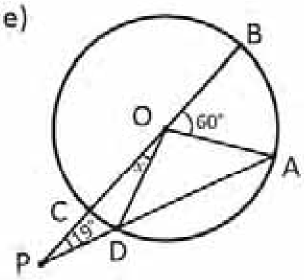
c)



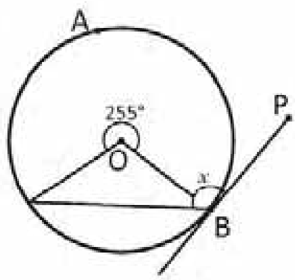
d)



e)



f)



ユニット 8

ばらつきの尺度

この図は、調査の対象となる各国の人口を、その特徴に基づき表しています。

古来より、統計は科学全般にとって非常に役立つことが分かっています。これは、個体に関する情報を計画、収集、整理し、あるいは現象を観察し、それによって母集団またはサンプルに共通する特徴を研究することができることから、調査プロセスにおける重要なツールとなりました。

一連のデータを分析するためには、データの大部分が位置する場所を示す代表値を知っているだけでは十分ではありません。ばらつきや変動の尺度を調べ、互いの情報がどれだけ近いのかを知ることも重要です。これらの尺度は、公共サービスの料金、数週間の気温、特定の母集団の行動に関する調査、ランナーによる走行距離などに活用されています。

このユニットを終了すると、度数分布表にあるデータをグループ化する方法が分かり、算術平均値、分散、標準偏差について理解できるでしょう。グループ化されたデータとグループ化されていないデータについては、日常生活の問題を用いて取り組みます。

1.1 散らばったデータの範囲

表には、サンサルバドルにある住宅地 2 区域の水道料金の月額（ドル）を示しています。

住宅地 1	
住宅	月額料金（ドル）
1	12
2	11
3	12
4	13
5	12
6	18

住宅地 2	
住宅	月額料金（ドル）
1	10
2	13
3	12
4	11
5	12
6	12
7	14

散らばったデータの平均値、中央値と最頻値はどのように計算しますか

a) 各住宅地の料金の平均値、中央値と最頻値を計算しましょう。

b) 各住宅地の、最も高い料金と最も低い料金の差を計算しましょう。どちらの住宅地の差額が大きいでしょうか？

a) 平均値 (μ) の計算は、全てのデータを足して、その結果をデータの数で割ります。中央値は、これらのデータを小さいものから大きいものへと順に並べた時に、中央の位置を占めるデータです。そして 最頻値は、最も頻度の高いデータ（出てくる回数が最も多いデータ）です。

住宅地 1：

$$\mu = \frac{12 + 11 + 12 + 13 + 12 + 18}{6}$$
$$= \frac{78}{6}$$
$$= 13$$

平均値は $13 です。

これらのデータを小さいものから大きいものへと順に並べると、次のようになります。

11, 12, 12, 12, 13, 18

データの数が偶数であるため、中央値は 3 と 4 の位置を占めるデータです。

$$\frac{12 + 12}{2} = 12$$

中央値は $12 です。最後に、住宅地 1 の最頻値は $12 です。なぜならば、出てくる回数が最も多いデータだからです。

住宅地 2：

$$\mu = \frac{10 + 13 + 12 + 11 + 12 + 12 + 14}{7}$$
$$= \frac{84}{7}$$
$$= 12$$

平均値は $12 です。

これらのデータを小さいものから大きいものへと順に並べると、次のようになります。
10, 11, 12, 12, 12, 13, 14
中央の位置（4 番目の位置）を占めるデータは 12 です。すなわち、住宅地 2 の中央値は $12 です。最後に、住宅地 2 の最頻値は $12 です。なぜならば、出てくる回数が最も多いデータだからです。

これまでの結果は次の表に要約されます。

	住宅地 1	住宅地 2
平均値	$13	$12
中央値	$12	$12
最頻値	$12	$12

b) 住宅地 1 の最高料金は $18 で、最低料金は $11 です。そしてその差は 18 – 11 = 7 です。住宅地 2 の最高料金は $14 で、最低料金は $10 です。そしてその差は 14 – 10 = 4 です。

よって、最高料金と最低料金の間の差額は、住宅地 1 での方が大きいです。

C

ばらつきの測定値は、その平均値からどれだけ各データがばらついているか、または集まっているかを示します。

範囲は、散らばっているデータのあるシリーズで、最大データと最小データの差と同じばらつきの測定値のことです。**範囲**は、**振幅**とも呼ばれています。冒頭の設問では、住宅地 1 の料金はより多くばらついています。なぜならば、その範囲の方が大きいからです。

1. シリーズ A と B の散らばったデータを観察しましょう。どっちのシリーズでデータはよりばらついていますか?

	シリーズ A	シリーズ B
1	20.3	20.9
2	20.8	20.5
3	21.0	24.0
4	20.5	29.5
5	21.1	21.0
6	20.2	19.1
7	20.4	16.4

2. マリアは、異なる 2 週間の気温を測定して、その結果を右の表に示しました。

a) 各週の平均値、中央値と最頻値を計算しましょう。

b) 各週の範囲を計算しましょう。どっちの週でデータはよりばらついていますか？

第 1 週	
曜日	気温
日曜日	32°
月曜日	31°
火曜日	29°
水曜日	30°
木曜日	30°
金曜日	29°
土曜日	29°

第 2 週	
曜日	気温
日曜日	35°
月曜日	34°
火曜日	32°
水曜日	30°
木曜日	30°
金曜日	27°
土曜日	25°

1.2 平均値との偏差

P

住宅地 1	
住宅	月額料金（ドル）
1	12
2	11
3	12
4	13
5	12
6	18

住宅地 2	
住宅	月額料金（ドル）
1	10
2	13
3	12
4	11
5	12
6	12
7	14

サンサルバドルにある住宅地 2 区域の水道料金の月額データのシリーズから、次のことを得ました。

	住宅地 1	住宅地 2
平均値	$13	$12
中央値	$12	$12

a) 平均値と中央値のどちらの値が各分布をより代表すると思いますか?

b) 両シリーズの、各データとその平均値との差を求めましょう。そして、これらの差とばらつきは、どのような関係にあるのでしょうか?

S

a) 住宅地 1 では、データの多くは平均値である $13 よりも小さいです。その理由は、6 番目のデータ ($18) がその他のデータとかなり違っているので、それが影響しているのです。そのため、この分布では、中央値がより代表的なデータになると考えられます。

住宅地 2 では、平均値と中央値は同じ値です。よって、この二つのどちらをこの分布の代表的なデータとしてもかまいません。

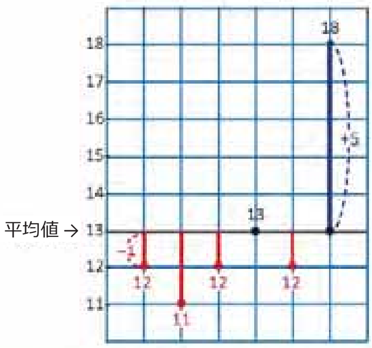
b) この表には、各データと平均値との間の差が示されています。

住宅地 1	
x	$x-\mu$
12	12−13 = −1
11	11−13 = −2
12	12−13 = −1
13	13−13 = 0
12	12−13 = −1
18	18−13 = 5

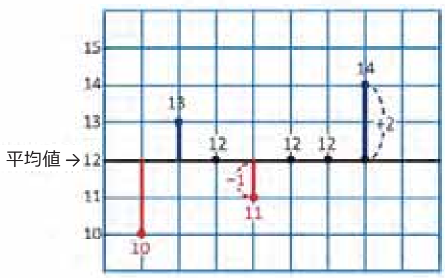
住宅地 2	
x	$x-\mu$
10	10−12 = −2
13	13−12 = 1
12	12−12 = 0
11	11−12 = −1
12	12−12 = 0
12	12−12 = 0
14	14−12 = 2

負の符号を考慮せず、これらの差は、その平均値からの各データの距離を反映します。前述は、次の図式で良く観察できます。

住宅地 1



住宅地 2



それらの図式では、住宅地 2 では、その平均値 ($12) からの各データの距離は小さく、住宅地 1 では、最後のデータが平均値 ($13) から比較的遠くにあることが観察されます。

C

ある分布における、各データ (x) とその平均値 (μ) との差を、平均値からの**偏差**（または単に偏差）と呼びます。$x - \mu$ で表し、各データと平均値との差を示します。全ての偏差の和は $\Sigma(x - \mu)$ で表しますが、それはいつもイコールゼロです。

全ての偏差の和 = 0 です。

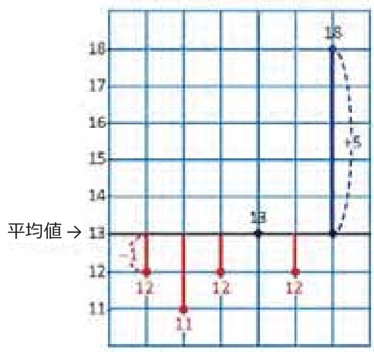
つまり、

$$\Sigma(x - \mu) = 0$$

E

冒頭の設問を使って、平均値からの全ての偏差の和はゼロであることを確認しましょう。

住宅地 1



図式で、負の距離の和の絶対値は正のそれと同じであることに気付くことができます。なので、結果はゼロになります。また、次の計算もできます。

$$\begin{aligned}\Sigma(x - \mu) &= (-1) + (-2) + (-1) + 0 + (-1) + 5\\ &= -1 - 2 - 1 - 1 + 5\\ &= -5 + 5\\ &= 0\end{aligned}$$

次の表には、散らばったデータ 3 シリーズが表示されています。

各表を完了し、偏差に基づいて、平均値に関連した次の質問に答えてください。

どの分布で、それぞれのデータは平均値から最もばらついているのでしょうか?

シリーズ A	
x	$x - \mu$
15	
4	
6	
3	
2	
平均値	
中央値	
範囲	

シリーズ B	
x	$x - \mu$
8	
9	
6	
7	
5	
平均値	
中央値	
範囲	

シリーズ C	
x	$x - \mu$
15	
5	
8	
10	
7	
平均値	
中央値	
範囲	

1.3 散らばったデータの分散

いくつかのデータに負の符号があったり、データが多かったりする場合は、平均値に対する偏差は解釈が難しいかも知れません。

表では、前回の授業のデータの平均値に対する偏差が示されています：

住宅地 1	
x	$x-\mu$
12	12 − 13 = − 1
11	11 − 13 = − 2
12	12 − 13 = − 1
13	13 − 13 = 0
12	12 − 13 = − 1
18	18 − 13 = 5

住宅地 2	
x	$x-\mu$
10	10 − 12 = − 2
13	13 − 12 = 1
12	12 − 12 = 0
11	11 − 12 = − 1
12	12 − 12 = 0
12	12 − 12 = 0
14	14− 12 = 2

a) 平均値に対する各偏差の二乗を計算しましょう。
b) 前項の偏差の二乗の算術平均値を計算しましょう。この算術平均値は σ^2（σ はギリシャ文字のシグマ）で表します。

a) 次の表を見てください。$(x-\mu)^2$ の列に、各偏差を二乗した値が示されています。

住宅地 1		
x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
12	12 − 13 = − 1	$(-1)^2 = 1$
11	11 − 13 = − 2	$(-2)^2 = 4$
12	12 − 13 = − 1	$(-1)^2 = 1$
13	13 − 13 = 0	$0^2 = 0$
12	12 − 13 = − 1	$(-1)^2 = 1$
18	18 − 13 = 5	$5^2 = 25$

住宅地 2		
x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
10	10−12 = −2	$(-2)^2 = 4$
13	13−12 = 1	$1^2 = 1$
12	12−12 = 0	$0^2 = 0$
11	11−12 = −1	$(-1)^2 = 1$
12	12−12 = 0	$0^2 = 0$
12	12−12 = 0	$0^2 = 0$
14	14−12 = 2	$2^2 = 4$

b) 前項の偏差の二乗の算術平均値（σ^2 で表される）は、各表の最後の列の全結果を合計して、それをデータの総数で割って計算します。

住宅地 1では：

$$\sigma^2 = \frac{1+4+1+0+1+25}{6} = \frac{32}{6} \approx 5.33$$

住宅地 2では：

$$\sigma^2 = \frac{4+1+0+1+0+0+4}{7} = \frac{10}{7} \approx 1.43$$

この値 (σ^2) は、平均値に対するデータのばらつきを計算するのにも役立ちます。平均に対する偏差が大きければ大きい程、σ^2 は大きく、結果として、データのばらつきが大きいです。

住宅地 1 の σ^2 は、偏差の二乗が 25 になる最後の値に影響されて住宅地 2 より σ^2 が大きい結果となっています。従って、住宅地 1 の料金のばらつきの方が大きいです。

C

偏差の二乗の算術平均値を**分散**と呼び、σ^2 で表し、次のように計算します：

$$分散 = \frac{偏差の二乗の合計}{データの総数}$$

つまり、

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma(x - \mu)^2}{n}$$

n がデータの総数で μ がデータ数列の算術平均値である場合。冒頭の問題では、住宅地 1 のデータ数列の分散は $\sigma^2 \approx 5.33$；一方、住宅地 2 のデータ数列の分散は $\sigma^2 \approx 1.43$ です。

この値は、データ数列の各データに敏感なので、分散は　範囲に反映しないばらつきの状況を明らかにします。平均に対する偏差が大きければ大きい程、算術平均値に対するデータのばらつきが大きいですが、中央値を分布の代表値として使うことができます。

表には、前回の授業のグループ化されていないデータ数列 3 例が示されています。

数列 A		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
15		
4		
6		
3		
2		

分散 (σ^2)	

数列 B		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
8		
9		
6		
7		
5		

分散 (σ^2)	

数列 C		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
15		
5		
8		
10		
7		

分散 (σ^2)	

各表を完成させ、それぞれのデータ数列の分散を計算しましょう。それを基に、どちらのデータ数列のばらつきがより大きいか証明しましょう。前回の授業の結果と比較しましょう。

1.4 散らばったデータの偏差

P

サンサルバドルにある住宅地 2 区域の水道料金の月額データで次のことを実行しましょう。

a) 両方の数列の分散の平方根を計算し、σ（二乗なし）で表しましょう。ばらつきがより大きい住宅地 1 の結果はまだ大きいですか?
b) 各住宅地のデータを数直線上に書きましょう。
c) 各算術平均値に σ のそれぞれの値を減算、加算しましょう。この数字を数直線上に書きましょう。
d) 数直線上で観察したことから、ばらつきがより大きいデータはどれですか?

住宅地 1	
住宅	月額（ドルで）
1	12
2	11
3	12
4	13
5	12
6	18
σ^2	5.33（ドルの二乗）

住宅地 2	
住宅	月額（ドルで）
1	10
2	13
3	12
4	11
5	12
6	12
7	14
σ^2	1.43（ドルの二乗）

S

a) 住宅地 1 のデータの分散の平方根は：

$$\sigma = \sqrt{5.33}$$
$$\approx 2.31$$

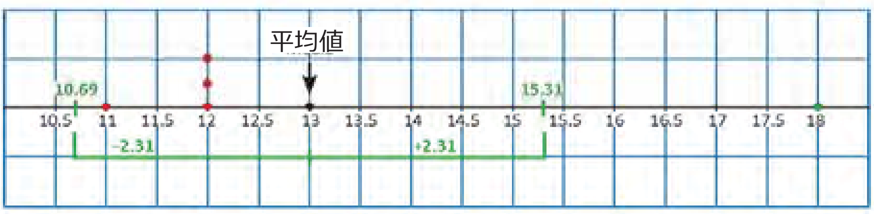
一方、住宅地 2 のデータの分散の平方根は：

$$\sigma = \sqrt{1.43}$$
$$\approx 1.20$$

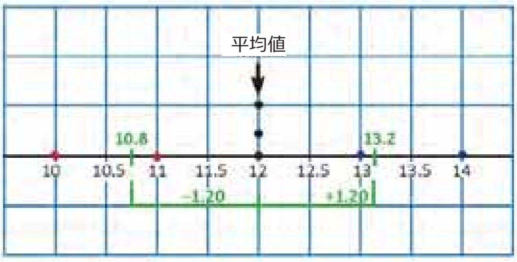
住宅地 1 の結果は、住宅地 2 の結果よりもまだ大きいです。

b) 各点はデータの 1 つを表します；2 つまたはそれ以上等しいデータ値がある場合は、対応する値上に垂直に配置されます。（赤い点は平均値より小さい値、青い点は大きい値、そして黒い点は平均値と同じ値です。）

c) **住宅地 1 の数列で：**平均値 (13) からの距離 σ にあるデータの数を知るためには、μ に σ (2.31) の値を減算、加算します、それぞれ結果は 10.69 と 15.31 になります。下記の図では、6 個のデータ数列のうち 5 個が算術平均値から 2.31 の距離にあることが観察されます。



住宅地 2 の数列で：平均値 (12) に σ (1.20) を減算、加算すると、それぞれ 10.8 と 13.2 になります。
下記の図では、7 個のデータ数列のうち 5 個が算術平均値から 1.20 の距離にあることが観察されます。



d) 2 つのデータ数列には目立った違いはありませんが、住宅地 2 の σ がより小さい事実は、住宅地 1 のデータより住宅地 2 のデータの方が算術平均値からより近い距離にあることを示しています。よって、住宅地 1 の月額の方がばらつきが大きいです（これは、$18 というデータに表れています）。

C

分散の平方根は**標準偏差**と名づけ、σ で表し、次のように計算します：

$$\text{標準偏差} = \sqrt{\text{分散}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{偏差の二乗の合計}}{\text{データの総数}}}$$

つまり、

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\mu)^2}{n}}$$

標準偏差は**標準偏差**とも呼びます。

標準偏差は、平均値 μ に対する偏差の平均の一種を示します。つまり、算術平均値に対する各データの距離の平均であり、二乗の単位で表す分散とは異なります。

標準偏差が大きければ大きい程、算術平均値に対するデータのばらつきは大きいですが、中央値をデータ数列の代表値として使用することができます。標準偏差は常にゼロより大きいかゼロに等しいので、負の数字には決してなりません。

前回の授業の練習のデータ数列 A, B と C で次を実行しましょう：

数列 A		
x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
15		
4		
6		
3		
2		

σ^2	
σ	

数列 B		
x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
8		
9		
6		
7		
5		

σ^2	
σ	

数列 C		
x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
15		
5		
8		
10		
7		

σ^2	
σ	

a) 各数列の標準偏差を計算しましょう。
b) 各数列で、平均値に対する標準偏差の距離を示すデータの値を求めましょう。

1.5 データのまとめ

P

カルロスとアントニオはマキリシュアット本屋で働いています。30 日間、日々のノートの販売数を記録しました。結果は下記の通りです：

カルロス				
5	15	23	11	20
10	6	9	10	22
15	21	15	16	34
20	18	13	26	18
16	22	21	24	12
14	17	19	16	11

アントニオ				
9	15	5	18	22
13	17	11	24	14
19	22	23	10	11
20	12	16	28	18
10	13	21	17	8
21	20	15	15	6

それぞれの枠が一日を表します。

a) ノートの販売数を 5 冊ずつ 6 グループに分類し、5 冊から始めて 35 冊で終わるようにします。
b) グループを表に整理し、それぞれのグループの合計を求めましょう。

S

a) グループは 6 で、最初のグループは 5 で始まり、最後は 35 で終わるべきなので、5〜10冊、10〜15冊、15〜20冊、20〜25冊、25〜30冊、30〜35冊のグループとなります。前項に従うと、カルロスのノートの販売数は、次のように分類されます：

カルロス			16			
			19			
			17	24		
		11	16	21		
		14	18	22		
		12	18	20		
		13	16	21		
	9	10	15	22		
	6	10	15	20		
	5	11	15	23	26	34
	5〜10	**10〜15**	**15〜20**	**20〜25**	**25〜30**	**30〜35**

"5〜10" のグループに、5、6、7、8 と 9 と該当する販売数を書き込み、最後の数 (10) は、次のグループに書き込みます。その他のグループも同じようにします。

アントニオのノートの販売数も、同じように分類します。

8日の間に、アントニオは20〜25冊売りました。

アントニオ						
			15			
		13	15	20		
		10	17	21		
		12	18	21		
		11	16	20		
	6	10	19	23		
	8	14	17	22		
	5	11	18	24		
	9	13	15	22	28	
	5〜10	**10〜15**	**15〜20**	**20〜25**	**25〜30**	**30〜35**

b) 表は次のようになります。

ノートの販売数	日数	
	カルロス	アントニオ
5～10	3	4
10～15	7	8
15～20	10	9
20～25	8	8
25～30	1	1
30～35	1	0
合計	**30**	**30**

この数字は、アントニオが20～25冊売った日数を表しています。

冒頭の問題のように、データ集合を整理した表を、**度数分布表**と呼びます。

データの間隔は**階級**と呼ばれ、各階級に対応するデータの合計は**頻度**と呼ばれます。階級の大きさは階級幅と呼ばれ、階級の最大値と最低値は**階級限度**と呼ばれます。

例えば、冒頭の問題の最初の授業では、階級限度は 5 と 10 で、最小値は 5、最大値は 10、階級幅は 5 となりました。各階級の真ん中にある数字は**中点**と呼ばれ、Pm で表し、次の方程式で求めます：

$$Pm = \frac{\text{最大値} + \text{最小値}}{2}$$

最初の階級の中央点は：

$$Pm = \frac{5+10}{2} = 7.5$$

モラサン県の 2 集落で、21 歳未満の住民の調査をし、次の結果を得ました：

集落 1					
9	14	15	14	19	16
11	18	9	12	20	12
12	11	10	19	14	13
15	12	11	18	11	16
14	16	17	12	13	17

集落 2					
14	13	9	17	15	9
9	14	15	20	18	12
13	10	9	11	10	13
16	12	12	11	10	13
18	11	14	10	19	9

a) 各集落の 21 歳未満の住人を 3 人ずつ 4 グループに分類し、9 から始めて 21 で終わるようにしましょう。
b) データを度数分布表に整理しましょう。
c) 作成した表にもう一列設けて、各階級値を示しましょう。

1.6 算術平均と一連のデータの範囲

P

カルロスとアントニオは、本屋「マキリシュアット」で働いています。1か月間、1日当たりのノートの販売数を記録し、次の表を作成しました。

ノートの販売数	日数		各階級の階級値 (Pm)	$f_C \times Pm$	$f_A \times Pm$
	カルロス (f_C)	アントニオ (f_A)			
5 ～10	3	4	7.5	22.5	30.0
10～15	7	8			
15～20	10	9			
20～25	8	8			
25～30	1	1			
30～35	1	0			
合計	30	30			

a) 表を完成し、（カルロスとアントニオの）それぞれのデータの算術平均を求めましょう。どうなるでしょうか。
b) それぞれのデータにおいて、度数がゼロでない最後の階級の上限値と度数がゼロでない最初の階級の下限値を求めましょう。
c) それぞれのデータについて、b)で求めた上限値と下限値の差を求めましょう。データのばらつきが大きいのはどちらのデータですか。

S

a) 表の数値は次のようになります。

ノートの販売数	日数		各階級の階級値 (Pm)	$f_C \times Pm$	$f_A \times Pm$
	カルロス (f_C)	アントニオ (f_A)			
5 ～10	3	4	7.5	22.5	30.0
10～15	7	8	12.5	87.5	100.0
15～20	10	9	17.5	175.0	157.5
20～25	8	8	22.5	180.0	180.0
25～30	1	1	27.5	27.5	27.5
30～35	1	0	32.5	32.5	0.0
合計	30	30			

カルロスのデータの算術平均を次のように計算します。

$$\mu = \frac{\text{積の和 } f \times Pm}{\text{日数}}$$

$$\mu = \frac{22.5 + 87.5 + 175.0 + 180.0 + 27.5 + 32.5}{30}$$

$$= \frac{525}{30}$$

$$= 17.5$$

アントニオのデータの算術平均も、カルロスの場合と同じように計算すると、答えは 16.5になります。

b) カルロスの事例では、頻度がゼロでない最後の階級は 30〜35 の階級で、頻度は 1、その最大値は 35です。そして、頻度がゼロでない最初の階級は 5〜10（頻度は 3）の階級で、その最小値は 5 です。

頻度がゼロでない最初の階級。

頻度がゼロでない最後の階級。

ノートの販売数	日数 カルロス (f_C)
5～10	3
10～15	7
15～20	10
20～25	8
25～30	1
30～35	1
合計	30

同様に、アントニオの場合にも 2 つの階級が見つかります。

頻度がゼロでない最初の階級。

頻度がゼロでない最後の階級。

ノートの販売数	日数 アントニオ (f_A)
5～10	4
10～15	8
15～20	9
20～25	8
25～30	1
30～35	0
合計	30

c) アントニオの数列での差は：
35 – 5 = 30
そして、アントニオの数列での差は：30 – 5 = 25

したがって、カルロスのデータ数列に、より大きいばらつきが見られます。

C グループ化されたデータ数列の**範囲**は、頻度がゼロでない最後の階級の最大値と頻度がゼロでない最初の階級の最小値の差です。グループ化されたデータ数列の**算術平均値は**、このように計算します：

$$\mu = \frac{\text{製品の合計 } f \times Pm}{\text{データの総数}}$$

ある学校では、8 学年と 9 学年の生徒が一日にテレビを見る時間を分で記録します、データは次の度数分布表に示されてます：

分	8 学年 (f_1)	9 学年 (f_2)	Pm	$f_1 \times Pm$	$f_2 \times Pm$
30〜40	0	3	35	0	105
40〜50	10	8			
50〜60	11	9			
60〜70	12	12			
70〜80	11	10			
80〜90	6	8			
合計	50	50			

a) 表を完成し、各データ数列の算術平均値を求め、比較しましょう。
b) 範囲を比較して、どのデータ数列により多くのばらつきが見られるか確認しましょう。

1.7 一連のデータの分散

P 表には、30 日間でカルロスが販売したノートの数が示されています：

ノートの販売数	日数 カルロス (fc)	中点 (Pm)	$f \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f(Pm - \mu)^2$
5 ~ 10	3	7.5	22.5	−10	100	300
10 ~ 15	7	12.5	87.5			
15 ~ 20	10	17.5	175.0			
20 ~ 25	8	22.5	180.0			
25 ~ 30	1	27.5	27.5			
30 ~ 35	1	32.5	32.5			
合計	30					
算術平均値 (μ)	**17.5**					

a) 表を完成させ、最後の列のデータの合計を計算しましょう。
b) このグループ化されたデータ数列の分散をどのように計算しますか?

S a) 完成した表を以下に示します。

ノートの販売数	日数 カルロス (fc)	中点 (Pm)	$f \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f(Pm - \mu)^2$
5 ~ 10	3	7.5	22.5	-10	100	300
10 ~ 15	7	12.5	87.5	-5	25	175
15 ~ 20	10	17.5	175.0	0	0	0
20 ~ 25	8	22.5	180.0	5	25	200
25 ~ 30	1	27.5	27.5	10	100	100
30 ~ 35	1	32.5	32.5	15	225	225
合計	**30**					
算術平均値 (μ)	**17.5**					

最後の列のデータの合計、$f(Pm - \mu)^2$、は以下です：

$$300 + 175 + 0 + 200 + 100 + 225 = 1000$$

b) 分散を計算するには a) で計算した合計結果をデータの総数で割るだけです。つまり：

$$\sigma^2 = \frac{1000}{30}$$

$$\approx 33.33$$

グループ化されていないデータ数列と同様、分散は二乗の単位で表されます。この事例の場合は、“日数の二乗”です。

従って、$\sigma^2 \approx 33.33$

C

グループ化されたデータ数列の分散は次のように計算します：

$$\text{分散} = \frac{\text{製品の合計}\ f(Pm-\mu)^2}{\text{データの総数}}$$

つまり、

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f(Pm-\mu)^2}{n}$$

n がデータの総数である場合、Σ は合計の符号、f は各階級の頻度、Pm は各階級の中点、そして、μ はデータ数列の算術平均値です。

分散が大きければ大きい程、算術平均値からのデータのばらつきは大きいです。

1. 表を完成させ、アントニオのノートの販売数の分散を計算しましょう。その後、分散を比較して、どのデータ数列により多くのばらつきが見られるか確認しましょう。

ノートの販売数	日数 カルロス (fc)	中点 (Pm)	$f \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm-\mu)^2$	$f(Pm-\mu)^2$
5～10	4	7.5	30.0	–9	81	324
10～15	8	12.5	100.0			
15～20	9	17.5	157.5			
20～25	8	22.5	180.0			
25～30	1	27.5	27.5			
30～35	0	32.5	0.0			
合計	30					
算術平均値 (μ)	16.5					

2. 授業 5 のモラサン 2 集落のグループ化されたデータ数列を使って、以下に答えましょう：

a) 次の表を完成させ、集落 1 のデータの分散を計算しましょう：

年齢	人数	中点 (Pm)	$f_1 \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm-\mu)^2$	$f_1(Pm-\mu)^2$
	集落 1 (f_1)					
9～12	7	10.5	73.5	–4	16	112
12～15	11	13.5	148.5			
15～18	7	16.5	115.5			
18～21	5	19.5	97.5			
合計	30					
算術平均値 (μ)	14.5					

b) 前述のように、集落 2 の表を作成し、そのデータの分散を計算しましょう。
c) 前項を基に、次の問いに答えましょう。どの集落でデータのばらつきがより大きいですか?

1.8 標準偏差

30 日間でカルロスとアントニオが売ったノート数のデータ数列の標準偏差を計算し、どちらの方がばらつきが大きいか証明しましょう。

ノートの販売数	日数	
	カルロス (f_C)	アントニオ (f_A)
5～10	3	4
10～15	7	8
15～20	10	9
20～25	8	8
25～30	1	1
30～35	1	0
合計	**30**	**30**
算術平均 (μ)	**17.5**	**16.5**
分散 (σ^2)	33.33	29

階級に分類されたデータでも、標準偏差値は分散の平方根と同じです。
カルロスのデータ数列の：

$$\sigma = \sqrt{33.33}$$
$$\approx 5.77$$

そして、アントニオのデータ数列の：

$$\sigma = \sqrt{29}$$
$$\approx 5.39$$

カルロスの分布の標準偏差は、アントニオのそれより大きいので、カルロスの分布データのばらつきはその算術平均 17.5 に対してより大きいことが結論付けられます。

グループ化されたデータ数列の標準偏差は次のように計算します：

$$標準偏差 = \sqrt{分散}$$

つまり、

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f(Pm - \mu)^2}{n}}$$

n がデータの総数である場合、Σ は合計の符号、f は各階級の頻度、Pm は各階級の中点、そして、μ はデータ数列の算術平均値です。グループ化されたデータ同様、グループ化されていないデータでも、標準偏差は常にゼロより大きいかゼロに等しいので、負の数字には決してなりません。

前回の授業の練習 2 を基に、モラサン 2 集落のグループ化されたデータ数列の標準偏差 (σ) を計算し、この数値を基に答えましょう。どちらの集落のばらつきがより大きいですか？

1.9 復習問題

1. 次のデータは、8 人の生徒の身長をセンチメートルで表しています：

163, 162, 164, 163, 164, 162, 161, 185

a) データ数列の算術平均、中央値、および範囲を計算しましょう。
b) 分布を表すために、平均値、中央値のどちらを選びますか？ 自分の答えを証明しましょう。

2. 次の表に示されたデータを使って、データ数列 B、C と D のうち標準偏差がデータ数列 A と等しいのはどれか答えましょう。自分の答えを証明しましょう。

A	B	C	D
25	30	35.5	28
24	29	34.5	27
25	30	35.5	28
26	31	36.5	29
23	28	33.5	26
21	26	31.5	21
25	30	35.5	28
24	29	34.5	27
23	28	33.5	23
22	27	32.5	22

3. 次のグループ化されていないデータ数列を観察しましょう。

	数列A
1	30
2	25
3	11
4	20
5	14
6	26

	数列B
1	18
2	20
3	19
4	21
5	22

a) 各数列の算術平均値に対する偏差と標準偏差を計算しましょう。
b) 標準偏差を比較して、どのデータ数列に、より多くのばらつきが見られるか確認しましょう。

4. 次のデータは、事務所で働く 9 人の体重をポンドで表しています。

160 l、200 l、164 l、130 l、140 l、162 l、161 l、185 l、154 l

a) データ数列の算術平均、中央値、および範囲を計算しましょう。
b) 分布を表すために、平均値、中央値のどちらを選びますか？ 自分の答えを証明しましょう。

1.10 復習問題

1. ある衣料品店は A と B の支店を持っています。100 日間各支店で応対した顧客数を記録します。データは次の表に示されます：

顧客数	日数	
	支店 A	支店 B
50～60	15	17
60～70	20	21
70～80	24	27
80～90	22	20
90～100	19	15

a) 各支店の分散を計算しましょう。
b) 分散を基にすると、どの支店でより大きいばらつきが見られますか?

2. ある学校の 9 学年の生徒の体重をポンドで調査しました。結果は次の表に示されています：

ポンドでの体重	A 組	B 組
120～130	7	5
130～140	12	9
140～150	13	12
150～160	10	14
160～170	8	10

算術平均値に対して体重のばらつきがより大きいのは何組かを標準偏差を使って確認しましょう。

3. あるグループに属する人の身長を次の表にインチで示します。$\mu = 67.45$ であるとして、

身長	f	Pm
60 - 62	1	61
62 - 64	4	63
64 - 66	8	65
66 - 68	30	67
68 - 70	37	69

a) 分散を計算しましょう。
b) 標準偏差を計算しましょう。

2.1 ある変数の標準偏差、プラス定数

P

ある会社では、10 人の従業員の給料を $50 上げることにしました。右の表には、以前の給料と現在の給料が示されています。

a) その両シリーズのデータのそれぞれの平均値を求めましょう。
b) 両シリーズのデータの標準偏差を計算して、比較しましょう。何が起きてますか?
c) もしも昇給が $60 だとすれば、現在の給料の標準偏差はどうなりますか?

従業員	以前の給料（ドル）	現在の給料（ドル）
1	485	535
2	488	538
3	486	536
4	489	539
5	486	536
6	485	535
7	488	538
8	487	537
9	500	550
10	486	536

S

a) 以前の給料の平均値は、次のように計算しましょう。

$$\mu = \frac{485 + 488 + 486 + 489 + 486 + 485 + 488 + 487 + 500 + 486}{10}$$

$$= 488$$

もしもシリーズ A の全てのデータにある定数を足して、その結果シリーズ B を得たとすれば、シリーズ B の平均値は、シリーズ A の平均値に定数を足した値と同じです。

同様に、現在の給料の平均値を計算しましょう。その結果、538 が得られます。よって、以前の給料の平均値は $488 で、現在の給料のそれは $538 です。

b) 次の表には、以前の給料の平均値 $488 からのそれぞれの偏差と、それぞれの自乗を表示しています。

従業員	以前の給料（ドル）	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
1	485	−3	9
2	488	0	0
3	486	−2	4
4	489	1	1
5	486	−2	4
6	485	−3	9
7	488	0	0
8	487	−1	1
9	500	12	144
10	486	−2	4
平均値 (μ)	**488**		

したがって、標準偏差は次のように計算しましょう。

$$\sigma = \sqrt{\frac{9+0+4+1+4+9+0+1+144+4}{10}}$$

$$= \sqrt{\frac{176}{10}}$$

$$= 4.2$$

同様に、現在の給料の標準偏差を計算しましょう。その結果も 4.2 となります。すなわち、各データに 50 を足しても、平均値とは違い、標準偏差は影響を受けませんでした。

c) もしも昇給が $60 であったとすると、そのときも標準偏差は以前の給料で計算した値と同じです。すなわち、4.2 となります。

もしも、ある分布 A の各データに、ある同じ定数 c (c は、どれでも良い数) をプラスして、他の分布 B を得たとします。そのとき、分布 B の標準偏差は、分布 A の標準偏差と同じです。

1. A と B の 2 つのシリーズのデータが示されている表を見てください。この両方の分布のそれぞれの標準偏差は同じなのでしょうか? あなたの解答を説明しながら、標準偏差を計算してください。

	シリーズ A	シリーズ B
1	25.1	37.1
2	26.4	38.4
3	27.5	39.5
4	20.7	32.7
5	21.2	33.2

2. 住宅地セントロアメリカでは、水道料金の月額が $5 上がることになりました。
この変更を考慮した上での分布の標準偏差の値はいくつになりますか?

住宅	請求料金 （ドル）
1	10.50
2	10.60
3	12.20
4	11.50
5	12.90
6	11.40
7	12.60
8	12.50
9	11.30
10	35.50

2.2 ある変数をある定数で掛けた時の標準偏差

P

5 人のランナーが、2 月の練習では 1 週間に走る距離を 2 倍にすると決めました。表には、1 月に走った距離と 2 月に走ろうとしている距離が表示されています。

a) 各シリーズのデータの標準偏差を計算しましょう。

b) 2 月の標準偏差と 1 月の標準偏差との商を求めましょう。これら 2 つのデータの間の関係は何ですか?

ランナー	走った距離（メートル）	
	1月	2月
1	150	300
2	160	320
3	145	290
4	165	330
5	150	300

S

a) 標準偏差を計算するには、各シリーズのデータの平均値が必要です。1 月の平均値は次のように得ます。

$$\mu = \frac{150 + 160 + 145 + 165 + 150}{5} = 154.$$

平均値 154 m からの各偏差の自乗を計算して、その結果を示したものが次の表です。

ランナー	1月	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
1	150	–4	16
2	160	6	36
3	145	–9	81
4	165	11	121
5	150	–4	16
平均値 (μ)	**154**		

$$\sigma = \sqrt{\frac{16 + 36 + 81 + 121 + 16}{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{270}{5}}$$

$$= 7.35$$

1 月の標準偏差は 7.35 です。

2 月のデータでは、距離が 2 倍に伸びたので（2 で掛けたので）、2 月の平均値も 2 倍に増えました。すなわち、308 m になりました。標準偏差は 1 月のと同じ方法で計算しますので、結果は 14.7 となります。

b) 商は、次のようになります。

$$\frac{2\text{月の標準偏差}}{1\text{月の標準偏差}} = \frac{14.7}{7.35} = 2$$

すなわち、2 月の標準偏差は、1 月の標準偏差の 2 倍だということです。各データに正の数を掛けた時は、その標準偏差もその数で掛けた値になります。

C

もしも、ある分布 A の各データに、ある同じ定数 c (c は、ある正の数) を掛けて、他の分布 B を得たとします。そのとき、分布 B の標準偏差は、分布 A の標準偏差に定数 c を掛けるのと同じです。

1. 下記の表には、3 つのシリーズのデータが表示されています。

a) シリーズ B を得るために、シリーズ A に掛けなければならない数はどれですか? また、シリーズ C を得るには?

b) シリーズ A の標準偏差を計算しましょう。それに基づいて、シリーズ B と C の標準偏差を計算しましょう。

A	B	C
12.5	18.75	5.0
11.0	16.5	4.4
11.5	17.25	4.6
12.8	19.2	5.12
12.2	18.30	4.88

2. あるシリーズのデータで、その分布の平均値は 35 で、標準偏差は 17.07 です。もしも各データが半分に削減された場合は、その新しい標準偏差の値はいくつになりますか?

3. ある本屋が、月曜日から金曜日までの 2 週間、販売した本の数を記録しました。

a) 第 2 週のデータを得るためには、第 1 週のデータにどの数を掛けなければならないでしょうか?

b) その 2 つの週の標準偏差を計算しましょう。

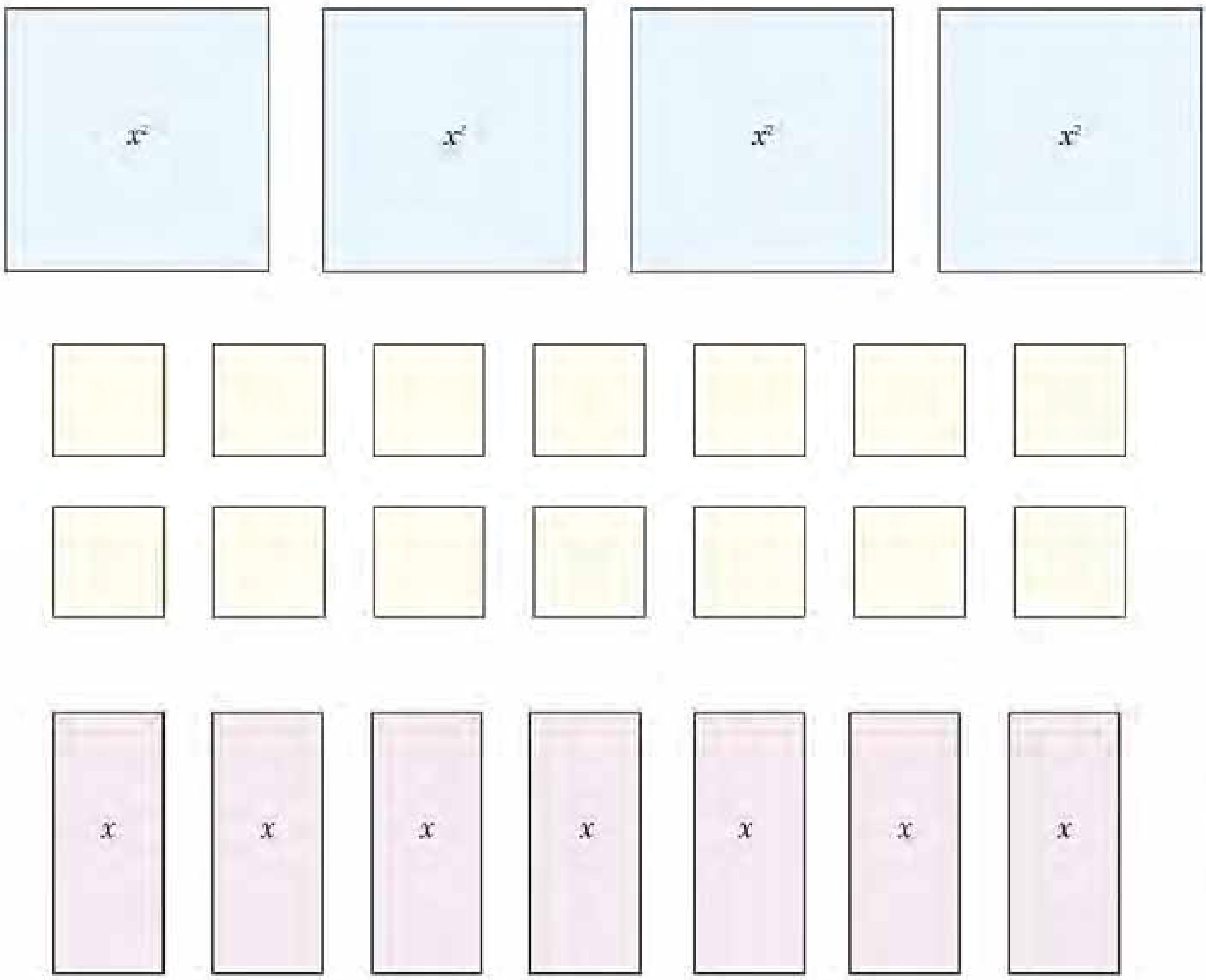
曜日	売られた本の数	
	第1週	第2週
月曜日	8	24
火曜日	9	27
水曜日	5	15
木曜日	7	21
金曜日	11	33

付録

以下の教材は本教科書の一部の授業において役立ちます。これらは切り取り用ではなく、必要な場合にコピーを取って使用するためのものです。

ユニット 1： 多項式の乗法

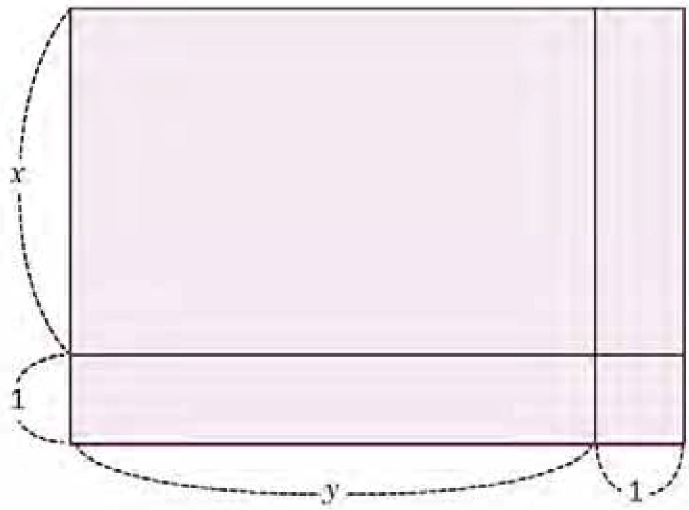
授業1.1、2.1、3.1、3.3、3.5で使用することができる図



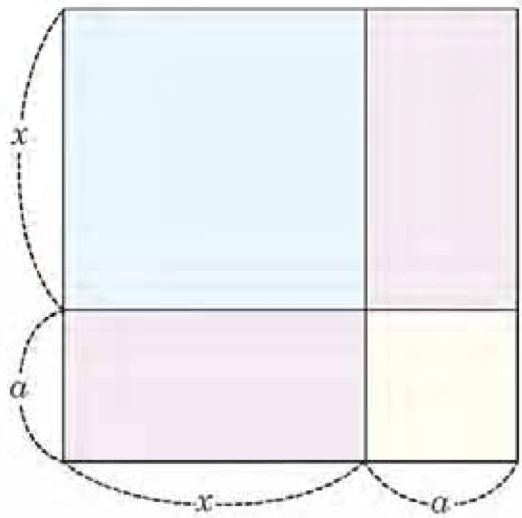
ユニット1： 多項式の乗法

授業 1.1、2.1、3.1、3.3、3.5で使用することができる図

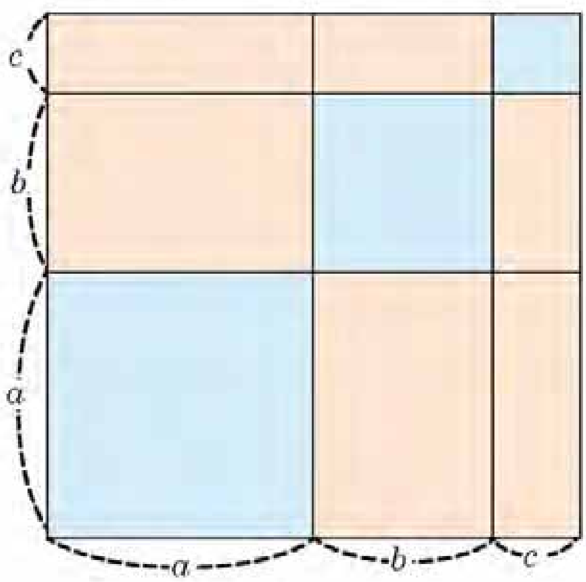
授業： 1.2



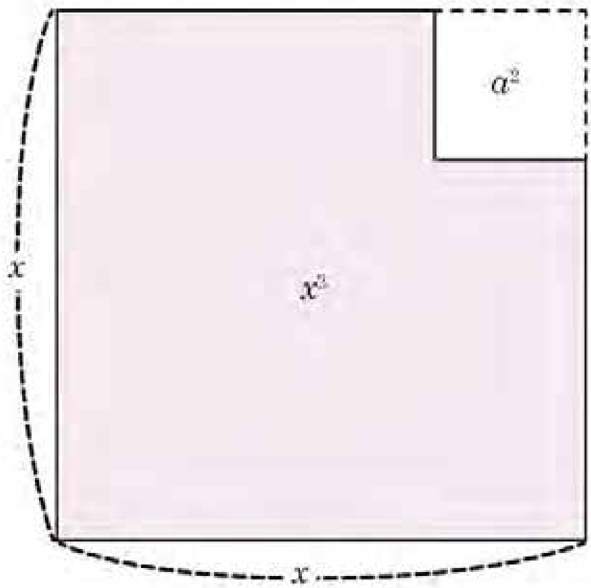
授業： 2.2



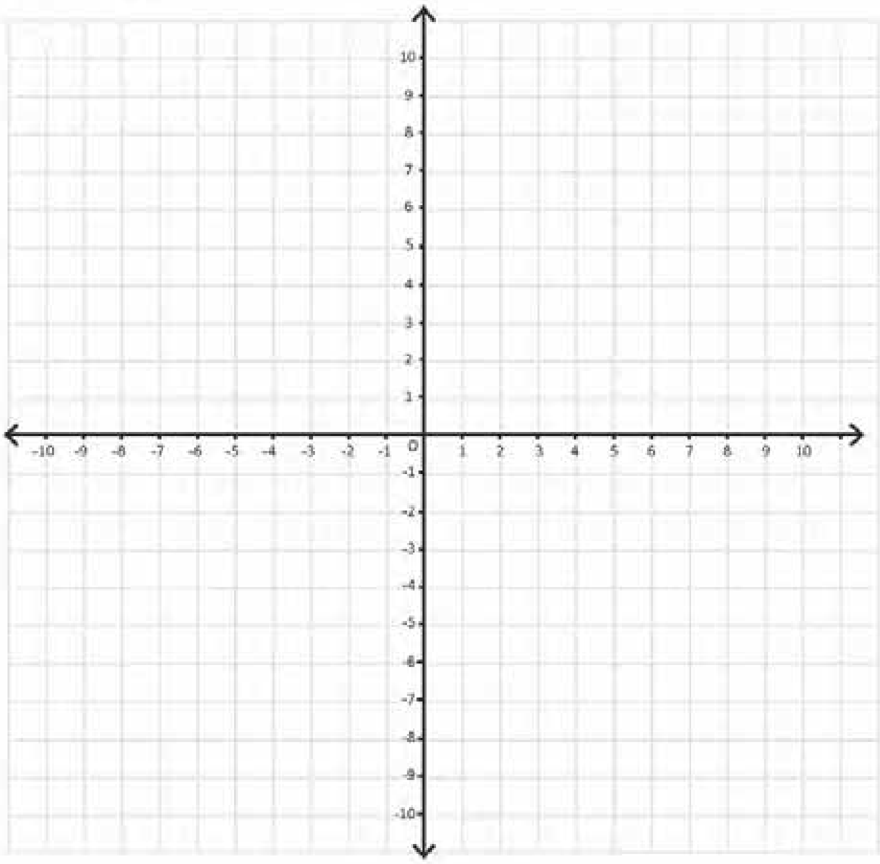
授業： 2.7



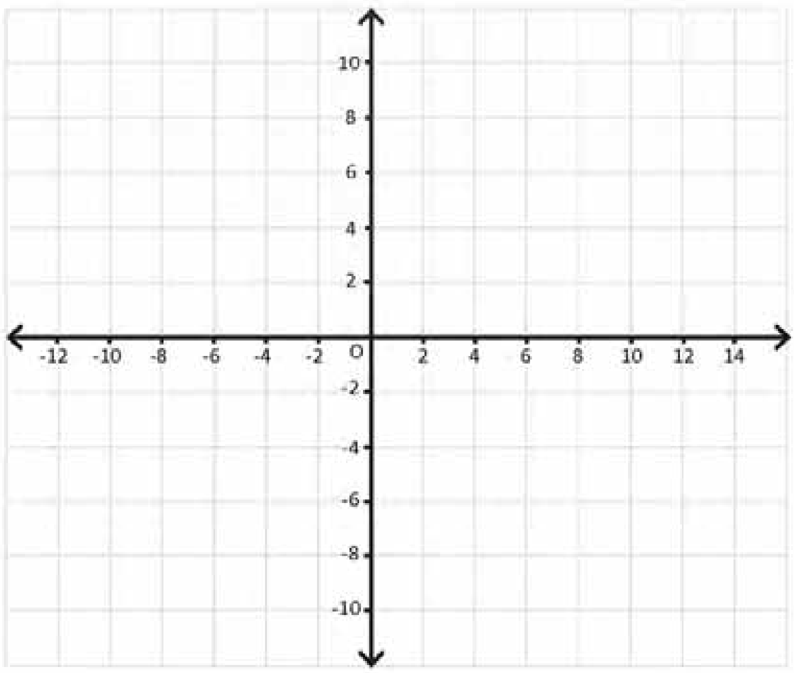
授業： 3.6



ユニット 4： 2次関数の式 $y = ax^2 + c$
授業1.4、1.5、1.8、1.9、2.1、2.2、2.3 で使用することができる図



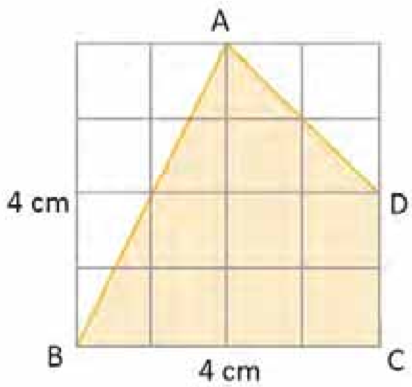
授業： 1.6



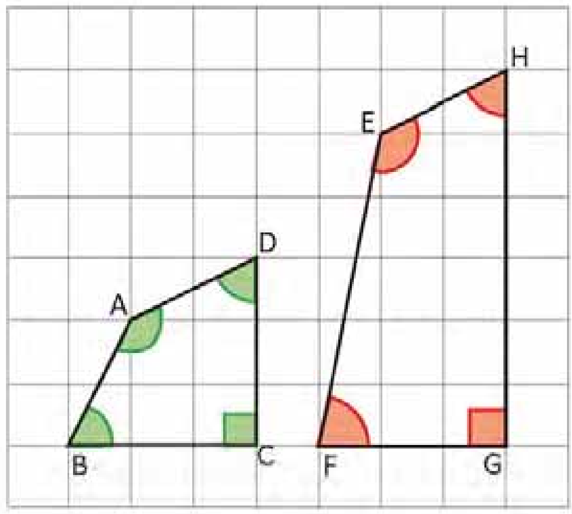
ユニット 5： 相似な図形

以下の授業で使用することができる図

授業 1.3

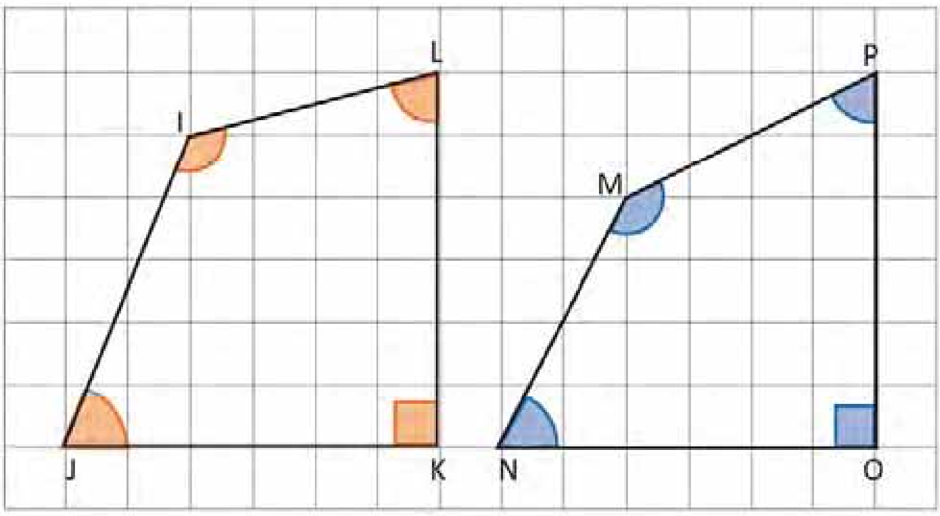


授業 1.4



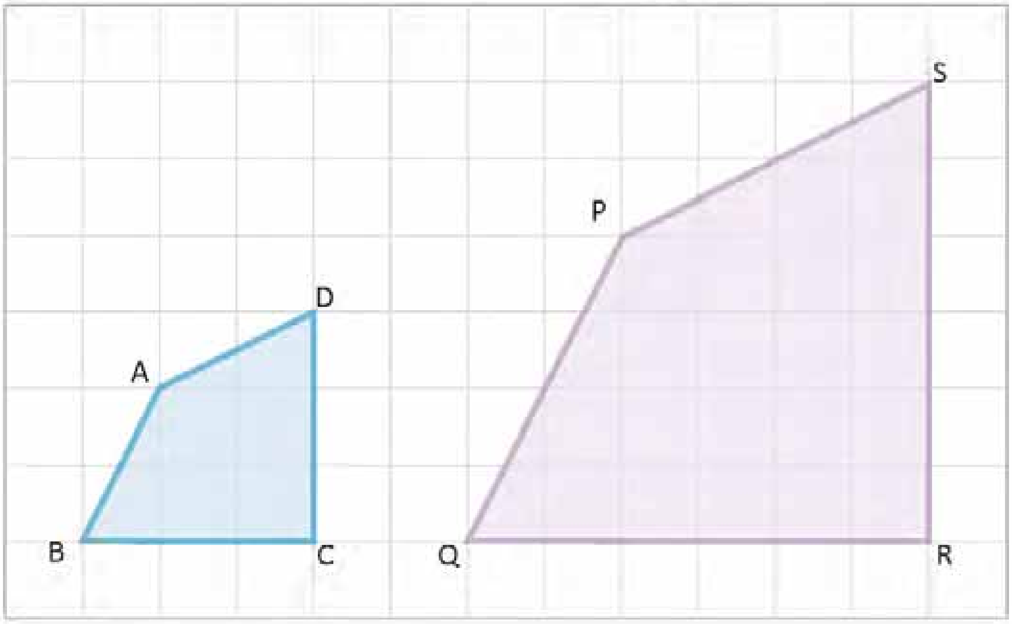
授業 1.4

授業 1.5

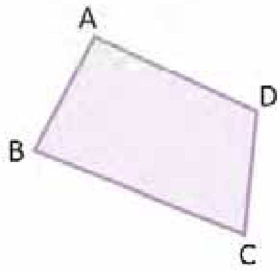


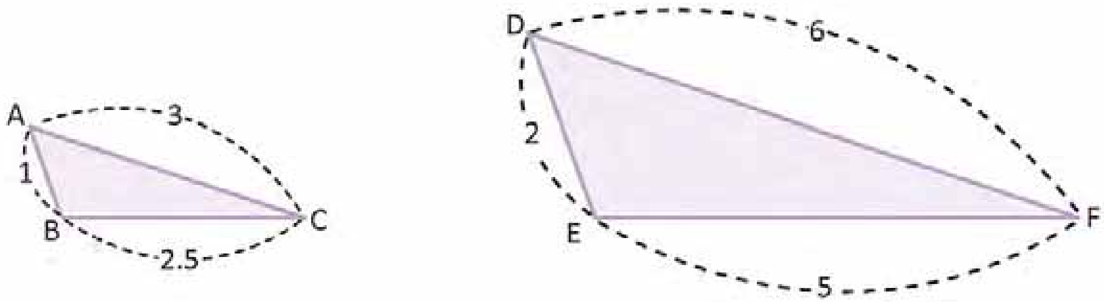
以下の授業で使用することができる図

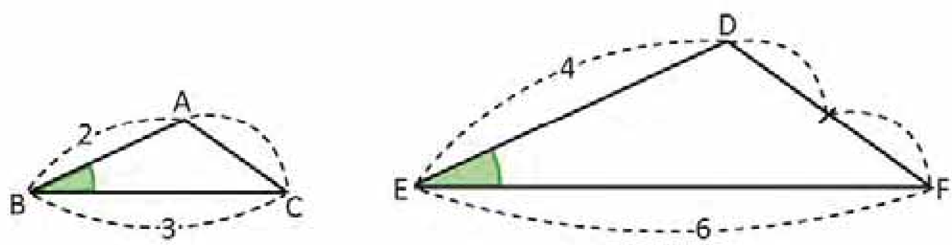
授業 5　　　　　　　　　　　　授業 5



授業 1.6

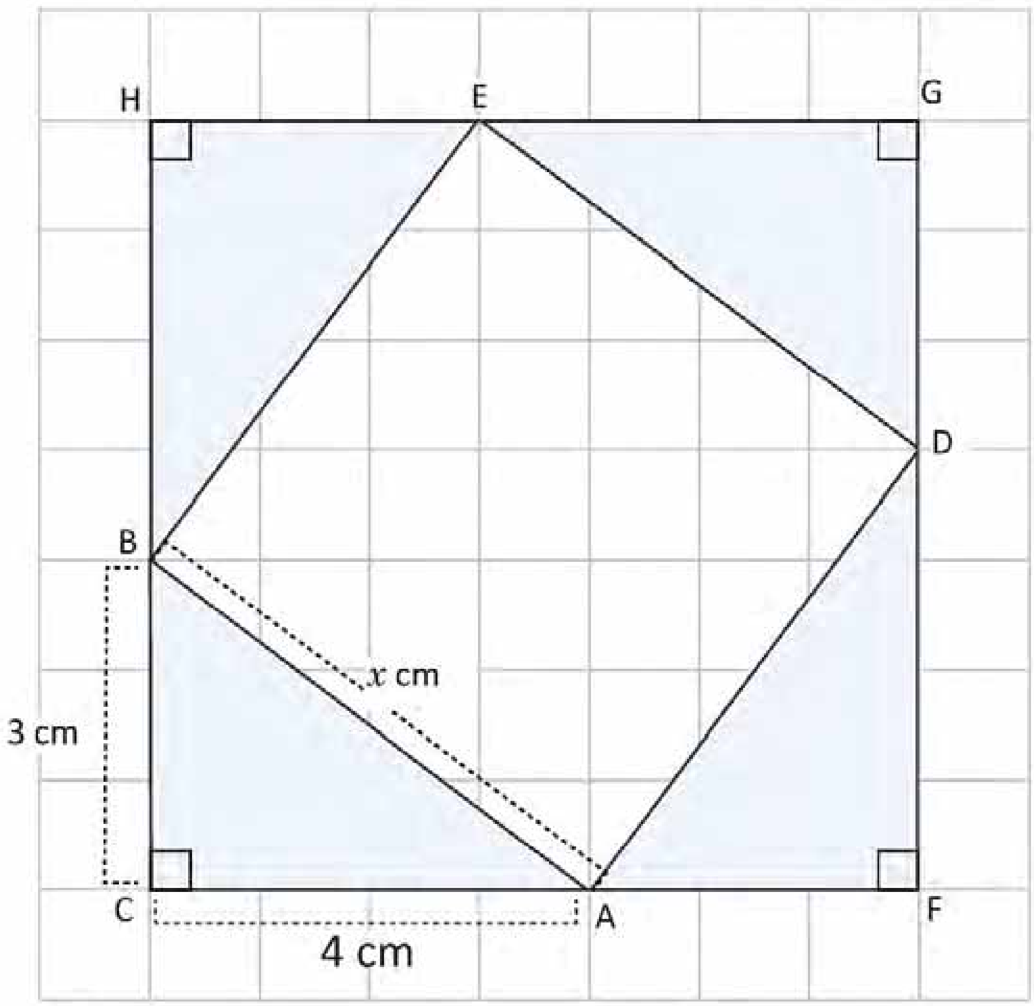




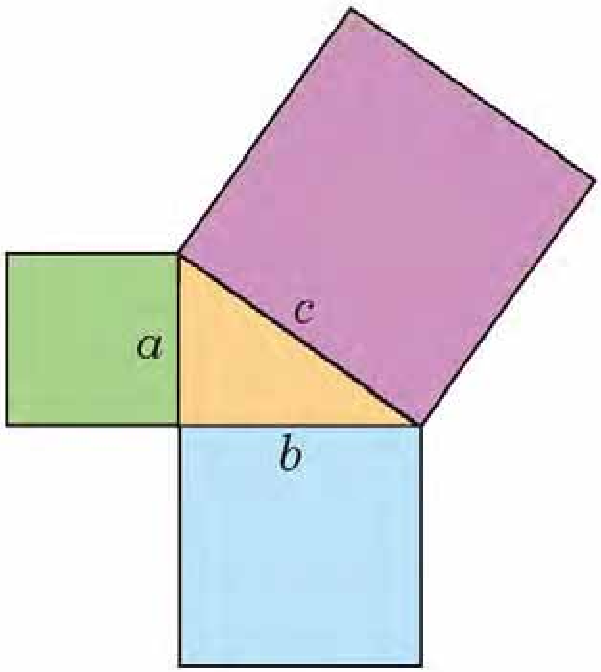


以下の授業で使用することができる図

授業 1.1



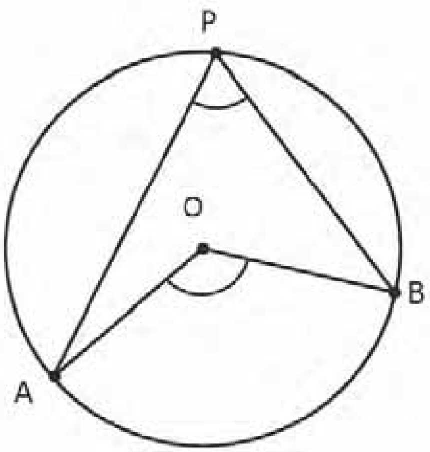
授業 1.4



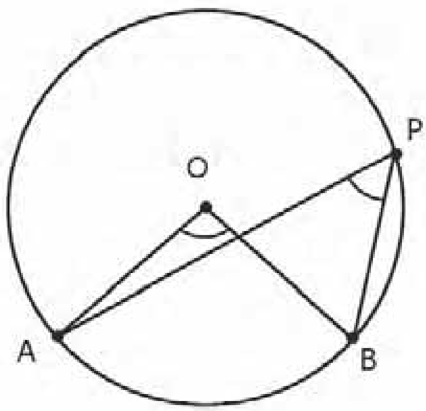
ユニット 7： 円周角と中心角

以下の授業で使用することができる図

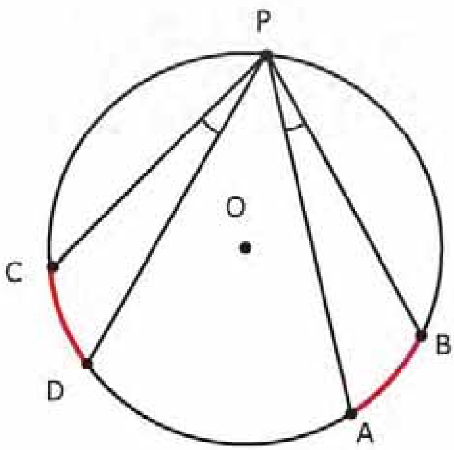
授業 1.4



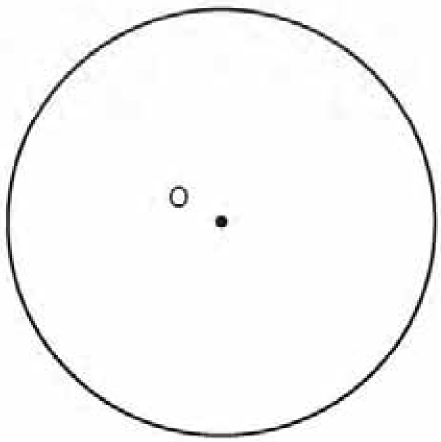
授業 1.5



授業 1.7



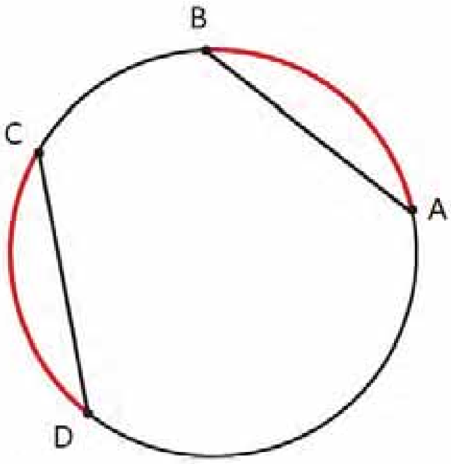
授業 2.1



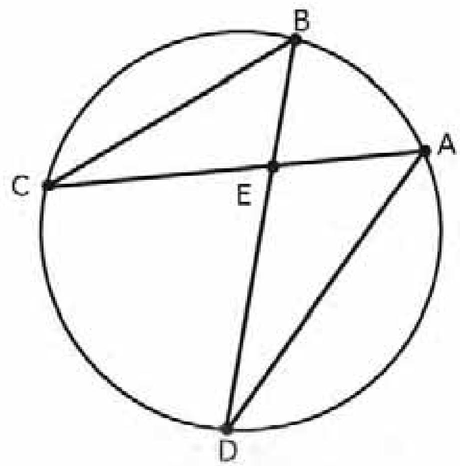
ユニット 7： 円周角と中心角

以下の授業で使用することができる図

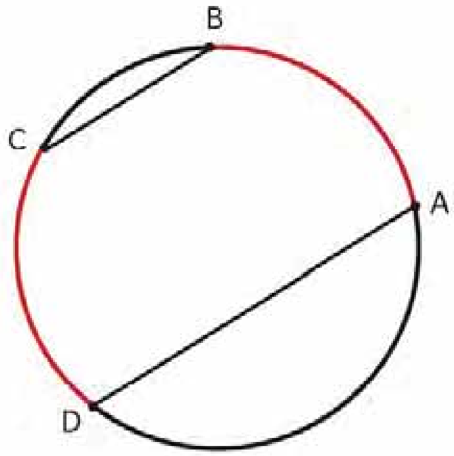
授業 2.2



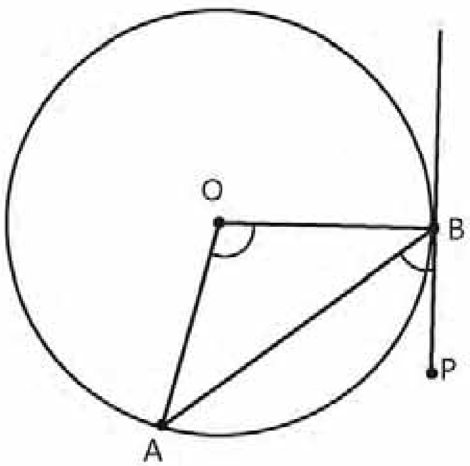
授業 2.3



授業 2.4



授業 2.6



中学生用数学テスト

日付： ________________________________

名前： ________________________________ **セクション：** ______

年齢： ______歳 **生徒番号：** ______ **性別：** □ 男 □ 女

学校名： ________________________________

指示： 提示された各問題において、計算式も明記しなければなりません。

1. マリアは家を出て、学校に向かって毎分50メートルの速さで歩いています。12分後に姉のフアナが家を出て、学校に向かって毎分 80 メートルの速さで歩きます。フアナはマリアに何分で追いつくでしょうか。家から学校までの距離は 2,000 メートルです。

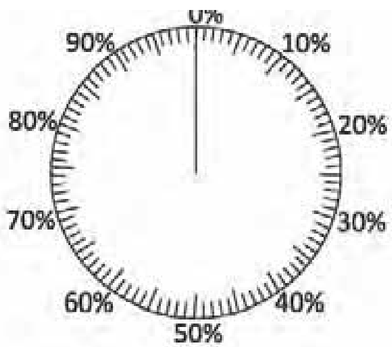
答え：

分

2. ある学校で子供の日のお祝いに何が食べたいか生徒達に質問しました。回答は次の表のとおりです。 データを表す円グラフを作成しましょう。

カテゴリー	人数
チキン	45
牛・豚肉	25
魚	15
七面鳥	10
その他	5
合計	100

生徒達が食べたいもののパーセンテージ

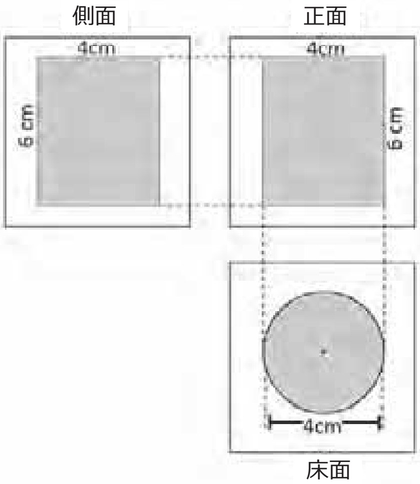


3. 以下の状況において、y を x で表し、正比例か反比例か、または、そのいずれでもないか判断しましょう。100 リットルの水が入っている容器から水を使用します。使用した水のリットル量を x とし、容器に残っている水の量を y とします。

答え：
$y =$

正比例	反比例	どちらでもない

4. 以下の投影図になる立体の表面積を求めしょう。



答え：

cm^2

5. 一定の速度で流れるある川沿いにA市とB市の2つの市があります。 一隻の船がA市からB市に行くのに5時間かかり、戻ってくるのに10時間かかりました。A市とB市の距離は、川沿いに60 kmであることを考慮し、川の流速を求めましょう。

答え：

km/h

点数	データ数
0 - 2	1
2 - 4	2
4 - 6	6
6 - 8	8
8 - 10	3
合計	20

6. 表はあるデータの分布を表しています。

「 0 - 2」は、0以上で、かつ 2より小さいことを意味します。

a) 算術平均を求めましょう。

答え：

b) 最も度数が多い階級の階級値を求めましょう。

答え：

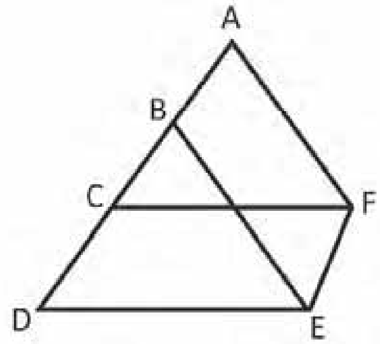
分

7. ある1次関数のグラフは、傾きが -2 で、$2x + y + 1 = 0$ のグラフと $x - 3y - 10 = 0$のグラフの交点を通ります。
この1次関数の式を求めましょう。

答え：

$y =$

8. 次の図において、AB = CD で、CD ∥ FE および CF ∥ DE です。
AF = BE を証明しましょう。



9. 方程式 $2x^2 + ax + b = 0$ の解は、$\frac{3}{2}$ と -1 です。a と b の値を求めましょう。

答え：
$a =$, $b =$

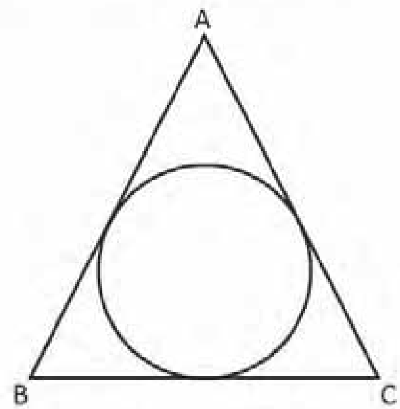
10. 関数 $y = ax^2 + c$ の、$-3 \leq x \leq 1$ の区間における 最大値と最小値は、それぞれ 1 と -8 です。a と c の値を求めましょう。

答え：
$a =$, $c =$

11. 次のデータの分散を求めましょう。
5、8、3、11、7、2

分散 =

12. 次の図において、AB = AC = 5 で、BC = 4 です。円の面積を求めましょう。（ヒント： ΔABC の面積を考えましょう。）



REPÚBLICA DE EL SALVADOR EN LA AMÉRICA CENTRAL