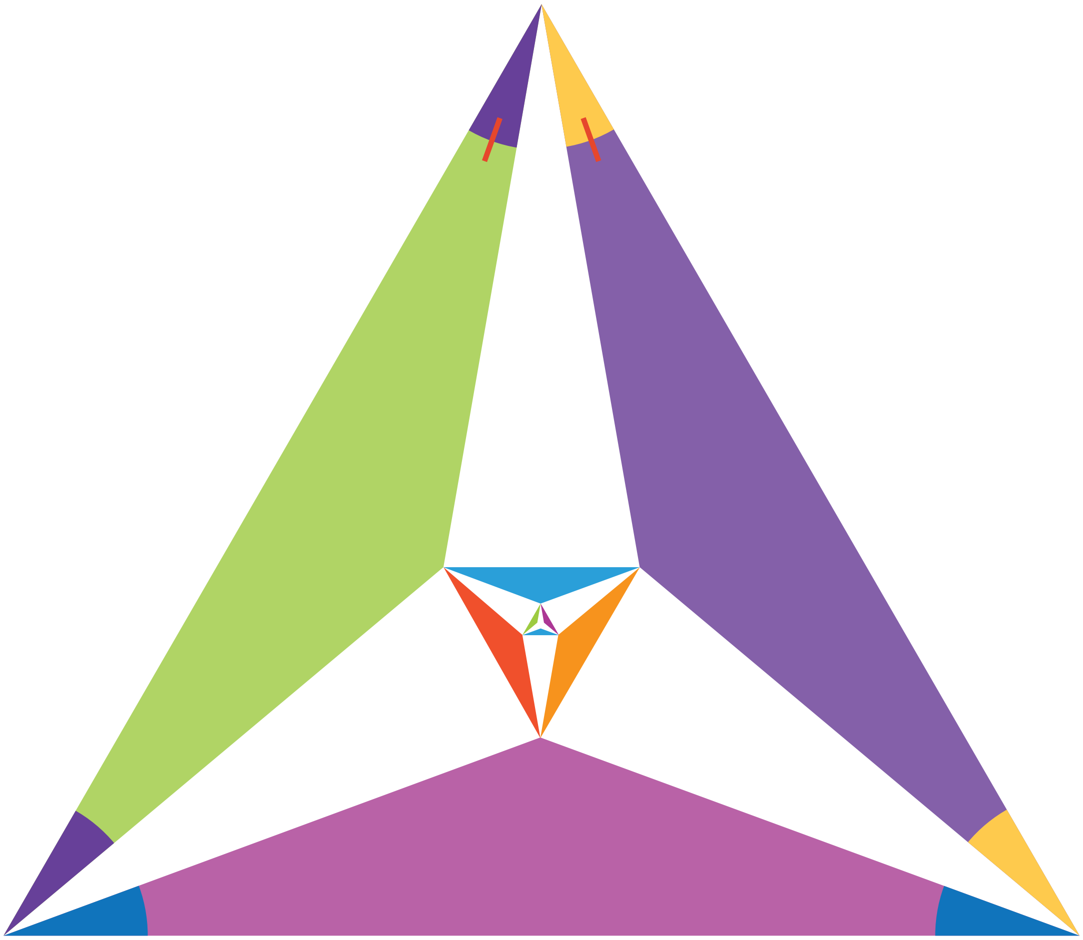
GOBIERNO DE
EL SALVADOR

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

Matemática

Primer año de bachillerato



Tomo 1

Sugerencia metodológica
Segunda edición

ESMATE

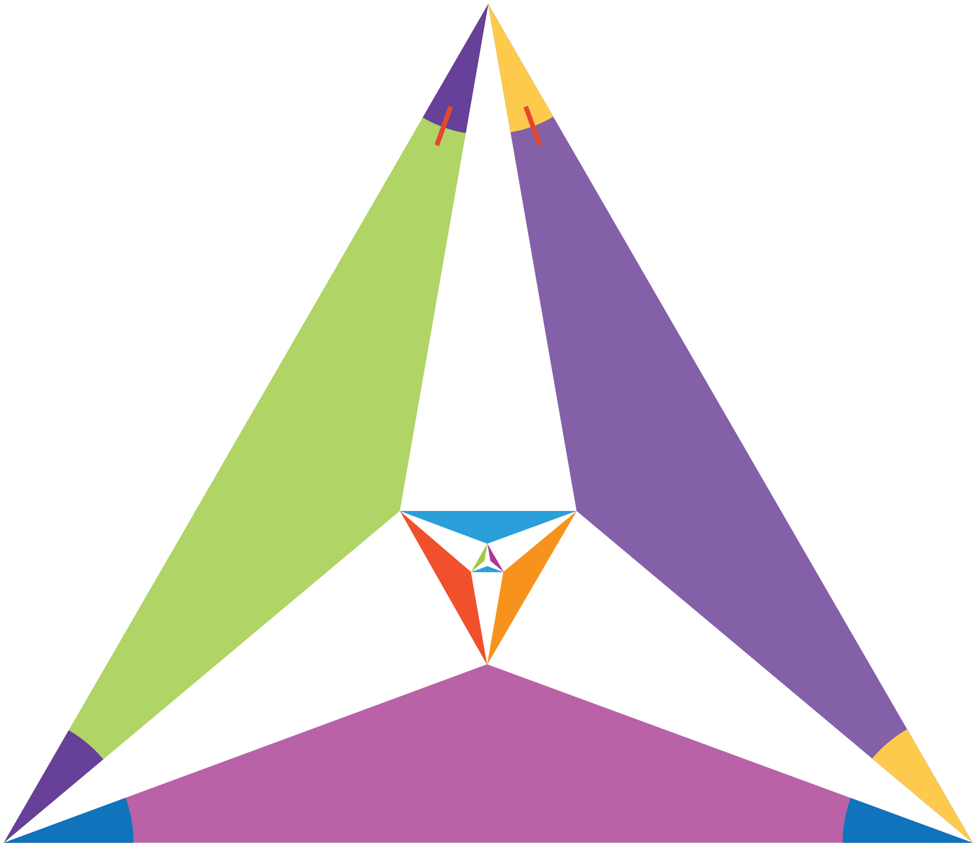
JICA

GOBIERNO DE
EL SALVADOR

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

Matemática

Primer año de bachillerato



Tomo 1

Sugerencia metodológica
Segunda edición

ESMATE

JICA

Carla Evelyn Hananía de Varela
Ministra de Educación, Ciencia y Tecnología

Ricardo Cardona Alvarenga
Viceministro de Educación

Wilfredo Alexander Granados Paz
Director Nacional de Educación Media (III Ciclo y Media)
Interino Ad Honorem

Janet Lorena Serrano de López
Directora Nacional de Educación Básica
Interina Ad Honorem

Santiago Alfredo Flores Amaya
Director Nacional de Prevención y Programas Sociales
Interino Ad Honorem

Gorka Iren Garate Bayo
Director Nacional de Educación en Ciencia, Tecnología e Innovación
Interino Ad Honorem

Roberto Alejandro Rivera Campos
Gerente de Educación en Ciencia, Tecnología e Innovación

Félix Abraham Guevara Menjívar
Jefe del Departamento de Educación en Ciencia,
Tecnología e Innovación (Matemática)

Gustavo Antonio Cerros Urrutia
Jefe del Departamento de Especialistas en Currículo
de Educación Media

Coordinación y revisión técnica
Francisco Antonio Mejía Ramos

Equipo técnico autoral y de diagramación del Ministerio de Educación
Ana Ester Argueta Aranda
Diana Marcela Herrera Polanco
César Omar Gómez Juárez
Francisco Antonio Mejía Ramos

Diseño y revisión de diagramación
Francisco René Burgos Álvarez
Judith Samanta Romero de Ciudad Real

Corrección de estilo
Marlene Elizabeth Rodas Rosales
Ana Esmeralda Quijada Cárdenas

Cooperación técnica de Japón a través de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA).

Imagen de portada con fines educativos, en ella se ilustra un triángulo equilátero trisecado en un ángulo, a partir de esto se puede calcular el valor del lado del triángulo interior más grande.
La respuesta se encuentra al reverso de la contraportada.

510.712
M425 Matemática : primer año de bachillerato [recurso electrónico] : tomo
1, sugerencia metodológica / Ana Ester Argueta Aranda, Diana Marcela
Herrera Polanco, César Omar Gómez Juárez, Francisco Antonio Mejía
Ramos. -- 2ª ed. -- San Salvador, El Salv. : MINED, 2019.
1 recurso electrónico, (288 p. : il., 28 cm.) -- (Esmate)
Datos electrónicos (1 archivo : pdf, 10 mb). --
www.mined.gob.sv/index.php/esmate.
ISBN 978-99961-348-5-2 (E-Book)
1. Matemáticas-Libros de texto. 2. Matemáticas-Ejercicios,
problemas, etc. 3. Educación primaria-Libros de texto. I. Argueta
Aranda, Ana Ester, coaut. II. Título.

Estimados docentes:

Reciban un cordial saludo, por medio del cual les expresamos nuestro agradecimiento por la importante labor que realizan en beneficio de la ciudadanía salvadoreña.

Como Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología (MINEDUCYT) a través del Proyecto de Mejoramiento de los Aprendizajes de Matemática en Educación Básica y Educación Media (ESMATE) hemos diseñado para ustedes la Sugerencia metodológica para la asignatura de Matemática, que se convertirá en una herramienta importante para la labor docente que realizan día con día.

El objetivo principal de este recurso es brindarles orientaciones concretas para el desarrollo de las clases de esta asignatura y lograr así una mejora significativa en los aprendizajes de los estudiantes salvadoreños.

Es importante destacar que la Sugerencia metodológica está en correspondencia con las clases propuestas en el Libro de texto diseñado para los estudiantes, concretizando de esta manera lo establecido en el Programa de estudio de Matemática.

No dudamos que aprovecharán al máximo este recurso y estamos seguros de que pondrán todo su esfuerzo y dedicación para seguir contribuyendo al desarrollo de nuestro querido país.

Atentamente,

Carla Evelyn Hananía de Varela
Ministra de Educación, Ciencia y Tecnología

Ricardo Cardona Alvarenga
Viceministro de Educación

Índice

I. Introducción

La presente Sugerencia metodológica (SM) forma parte de una serie de materiales elaborados por el equipo del Proyecto de Mejoramiento de los Aprendizajes de Matemática en Educación Básica y Educación Media (ESMATE) del Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología con la finalidad de contribuir a la mejora de los procesos de aprendizaje en la asignatura de Matemática.

En esta SM se explican con detalle todos los elementos que deben considerarse para realizar el proceso de aprendizaje, con base en la resolución de problemas planteados para lograr el desarrollo de las competencias en los estudiantes. Su uso permitirá al docente abordar la clase de forma efectiva y utilizar de manera adecuada el Libro de texto (LT).

Los principales objetivos que se pretenden lograr con el uso de esta sugerencia son los siguientes:

1. Orientar la planificación de la clase a partir de una propuesta de contenidos e indicadores organizados temporalmente en lecciones y unidades.
2. Ofrecer sugerencias metodológicas concretas y pertinentes que ayuden a los docentes y estudiantes en la comprensión de los contenidos.
3. Proponer estrategias concretas para el desarrollo de los indicadores de logros, que permitan el abordaje de las competencias matemáticas que deben alcanzar los estudiantes.

El MINEDUCYT ofrece al sistema educativo nacional estos materiales con la convicción de que el uso pertinente de estos permitirá fortalecer la práctica docente y así desarrollar de manera efectiva los aprendizajes de los estudiantes. Para lograr este propósito, a continuación se establecen los puntos de partida esenciales para su implementación:

1. **Importancia fundamental del aprendizaje de la matemática**: el desarrollo del razonamiento matemático genera en los estudiantes competencias para resolver problemas complejos, analizar situaciones, ser creativos, críticos, eficientes, pragmáticos y lógicos; capacidades que les permitirán vivir como ciudadanos comprometidos consigo mismos y con el desarrollo sostenible de sus comunidades, ya que los saberes matemáticos permiten reconocer que la ciencia está presente en todo lo que nos rodea, por lo que cualquier objeto de la realidad puede ser utilizado como herramienta tecnológica que ayude a resolver situaciones problemáticas, las cuales enfrentará día con día.

2. **Rol fundamental del docente y protagonismo del estudiante:** la labor del docente se vuelve determinante en la formación del estudiante, de ahí su importancia para que el sistema educativo logre sus propósitos; estos materiales están estructurados de tal manera que el docente tenga herramientas oportunas para "asistir" el aprendizaje, es decir, con la mirada puesta en el logro del aprendizaje de cada estudiante, lo cual implica que estos últimos sean los protagonistas en las clases. Este protagonismo se evidencia con el alcance de los indicadores de logro en cada clase, los cuales se convierten en "peldaños" para desarrollar las competencias de unidad y buscan lograr que los estudiantes movilicen todos los saberes alcanzados para resolver exitosamente problemas simples y complejos, esto tiene como base, el conocimiento y la comprensión de cada indicador y su concreción en cada una de las clases propuestas.

3. **Secuencia de la clase, experiencia auténtica del aprendizaje**: el protagonismo del estudiante se traduce en la propuesta de la secuencia de las clases, de estas, la mayoría contiene los siguientes pasos o momentos:

    - Problema inicial
    - Solución del problema inicial
    - Conclusión (definición, teorema, resumen, generalización)
    - Problemas

El análisis de esta secuencia se desarrolla describiendo la intencionalidad de cada elemento de la clase. De esta forma, se propone un itinerario para que los estudiantes, asistidos por sus docentes, construyan los conceptos y logren las competencias requeridas.

4. **Sintonía determinante con la gestión escolar**: para optimizar la efectividad de estos materiales educativos, otro aspecto fundamental a considerar es la generación de un ambiente propicio para el desarrollo de los aprendizajes, el cual está unido estrechamente con la gestión administrativa y organización de la institución educativa. Entre los elementos de dicha gestión, se destaca como determinante la cantidad de horas clase efectivas que el personal docente desarrolla en el año escolar; la propuesta de contenidos está planteada para que sean desarrollados durante al menos 192 horas clase al año, las cuales se deben garantizar como condición indispensable en el logro de los aprendizajes. Ya que oficialmente se dispone de 240 horas clase, las 48 restantes, pueden ser utilizadas por los docentes para realizar evaluaciones, capacitaciones y otras actividades que el Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología o el centro educativo requiera.

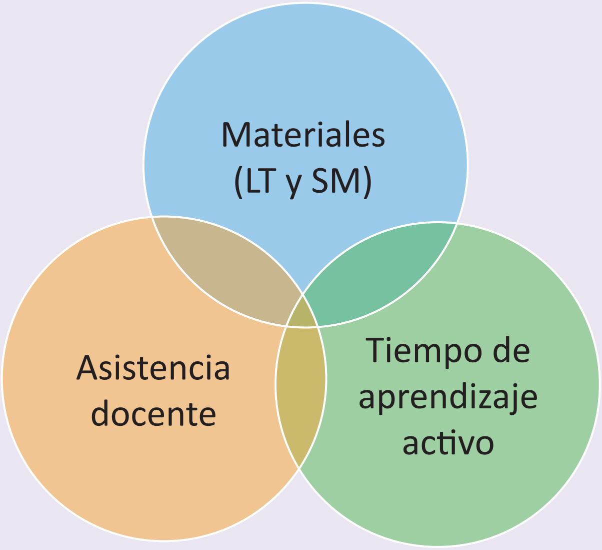
Entre los elementos de la estructura de este documento es importante mencionar el apartado **IV. Estructura de la Sugerencia metodológica**, donde se presenta la secuencia y el propósito de la clase, además, en algunas clases se describen las posibles dificultades que los estudiantes pueden presentar en algún punto específico de la clase. Otro de los elementos importantes a destacar es la resolución de los problemas planteados en la clase. También se propone un modelo de prueba de cada unidad, formulado en correspondencia directa con los indicadores de logro y los problemas planteados en cada clase, el cual puede ser de gran utilidad como una referencia para constatar los aprendizajes de cada estudiante en coherencia con todo el proceso.

Otro elemento relevante es el apartado **V. Orientación para el desarrollo de una clase de matemática con base en la resolución de problemas**, donde se describen cada uno de los elementos de la secuencia de la clase, las principales actividades que deben realizar los estudiantes en su proceso de aprendizaje y los docentes en la asistencia o mediación de los mismos. Se destacan además, los aspectos que sugieren acciones específicas en sintonía directa con el protagonismo del estudiante y la función mediadora del docente.

Esta Sugerencia y demás materiales educativos han sido elaborados con la participación activa de muchos docentes a nivel nacional, que con su experiencia y empeño por la formación de los estudiantes, han hecho aportes significativos a cada uno de los elementos de los mismos. Siguiendo esta dinámica de participación, se considera importante asumir estos materiales como una propuesta flexible y mejorable, donde el personal docente deberá hacer las adecuaciones que considere necesarias para apoyar el aprendizaje de sus estudiantes.

La meta con el uso de estos materiales educativos es el mejoramiento del aprendizaje de los estudiantes, quienes asumirán la responsabilidad del futuro del país; y como parte de la estrategia que se propone, a continuación se presentan los factores relacionados con dicha finalidad:

Tres factores fundamentales para mejorar el aprendizaje



Los tres factores planteados constituyen las prioridades estratégicas para mejorar los aprendizajes; los **Materiales**, como el Libro de texto y la Sugerencia metodológica, el **Tiempo de aprendizaje activo** dentro de la clase y en el hogar y la **Asistencia** o **Facilitación** del docente para propiciar el aprendizaje.

Materiales

Para garantizar la efectividad y eficiencia del aprendizaje se necesita un material que tenga la secuencia didáctica apropiada y el nivel de complejidad razonable, basado en el nivel de comprensión de los estudiantes, es decir, los contenidos de dicho material tienen que ser académica y didácticamente adecuados y al mismo tiempo ser más amigables para el aprendizaje.

Para satisfacer la primera necesidad mencionada, en los dominios cognitivos que se desarrollarán en la asignatura de Matemática deben estar estrictamente reflejadas las competencias establecidas por el MINEDUCYT. Para cumplir la segunda necesidad, el contenido del LT debe corresponder lo más cercanamente posible a las necesidades académicas que tienen los estudiantes salvadoreños.

Tiempo de aprendizaje activo

Es importante destacar que como un paso previo a la elaboración de estos materiales de texto, el MINEDUCYT realizó una investigación en las aulas y detectó una característica no favorable: que el tiempo que se dispone en cada aula para el aprendizaje activo es insuficiente; en consecuencia, se ha limitado el desarrollo de las capacidades de los estudiantes, es así que en el LT que se ha elaborado, se recomienda a los docentes que aseguren un espacio de al menos 20 minutos para que cada uno de los estudiantes aprenda activamente por sí mismo o interactivamente con sus compañeros.

Aprendizaje activo

1. En forma individual

   ¿En qué momento se fortalecen los aprendizajes? Cuando un estudiante está trabajando individualmente, leyendo el LT, resolviendo problemas en su cuaderno de apuntes, etc., se aprende activamente. Por el contrario, cuando el estudiante solo está escuchando lo que está explicando el docente, se aprende menos porque su actitud de aprendizaje será pasiva en forma general.

   Por esta razón, se recomienda al docente que garantice un espacio de tiempo donde cada uno de sus estudiantes aprenda activamente de forma individual.

2. En forma interactiva

   En la práctica docente, muchas veces se provee asistencia a uno o dos alumnos en forma particular, dejando sin atención al resto de estudiantes. Es un hecho que es difícil brindar asistencia a cada estudiante aunque todos tienen la necesidad de aprender.

   ¿Existe otra alternativa para que todos los alumnos reciban asistencia oportuna?
   Se debe generar aprendizaje interactivo entre alumnos (o aprendizaje mutuo), ya que este tiene varias ventajas, primero, en el trabajo en parejas, si un estudiante no entiende un contenido, puede consultar a su compañero sin perder el tiempo (sin esperar la asistencia de parte del docente); segundo, el estudiante que explica a sus compañeros, profundiza su comprensión a través de la explicación en forma verbal; tercero, los alumnos a quienes no se puede dar asistencia en forma individual tendrán más oportunidad de aprender, y cuarto, se genera un ambiente de convivencia en el aula.

   Por lo que se recomienda que realicen primero el trabajo individual y luego el aprendizaje interactivo.

Se espera que cada uno de los estudiantes intente resolver los problemas y ejercicios planteados en las páginas del LT, durante (por lo menos) 20 minutos en cada clase. Con esta actividad individual (o interactiva) se pretende contribuir al fortalecimiento del aprendizaje de los estudiantes y por consiguiente a mejorarlo, así como incrementar la capacidad de interpretación de la situación problemática planteada.

Antes de finalizar este punto, cabe mencionar que, además del uso del LT en el aula, se debe garantizar como mínimo 20 minutos de aprendizaje activo en el hogar, resolviendo los problemas que no se lograron resolver en clase. Sumando 20 minutos en el hogar a otros 20 minutos de aprendizaje activo en la clase y esforzándose durante 192 días, se espera que se cumpla la siguiente relación: **(20 minutos + 20 minutos) × 192 días = Mejora de aprendizajes**. A todos los docentes del país se les invita a estar conscientes de esta relación.

Asistencia y facilitación

El MINEDUCYT se propone cambiar el paradigma acerca del rol de los docentes, de **enseñar** hacia **asistir el aprendizaje**. Tradicionalmente, en el proceso de enseñanza se hacen esfuerzos por responder **¿qué es lo que hace el docente?**, en lugar de preocuparse por saber **¿qué es lo que lograron los estudiantes?**, centrarse en el aprendizaje es un esfuerzo genuino que debe ser la base para evaluar el desempeño docente.

Las actividades del docente deben ser planificadas para elevar el nivel de aprendizaje y preocuparse por el resultado de los estudiantes.

III. Estructura del Libro de texto

1. Elementos de una clase del Libro de texto

La siguiente página corresponde a la clase 4.7 de la unidad 4.

Indica el número de la lección.

Hace referencia al número de la clase.

Cuando aparezca este ícono, significa que los estudiantes pueden utilizar la calculadora para resolver el problema.

En el primer momento de la clase, el estudiante debe pensar una solución a partir de una situación problemática, la cual permite introducir el contenido que se desarrollará.

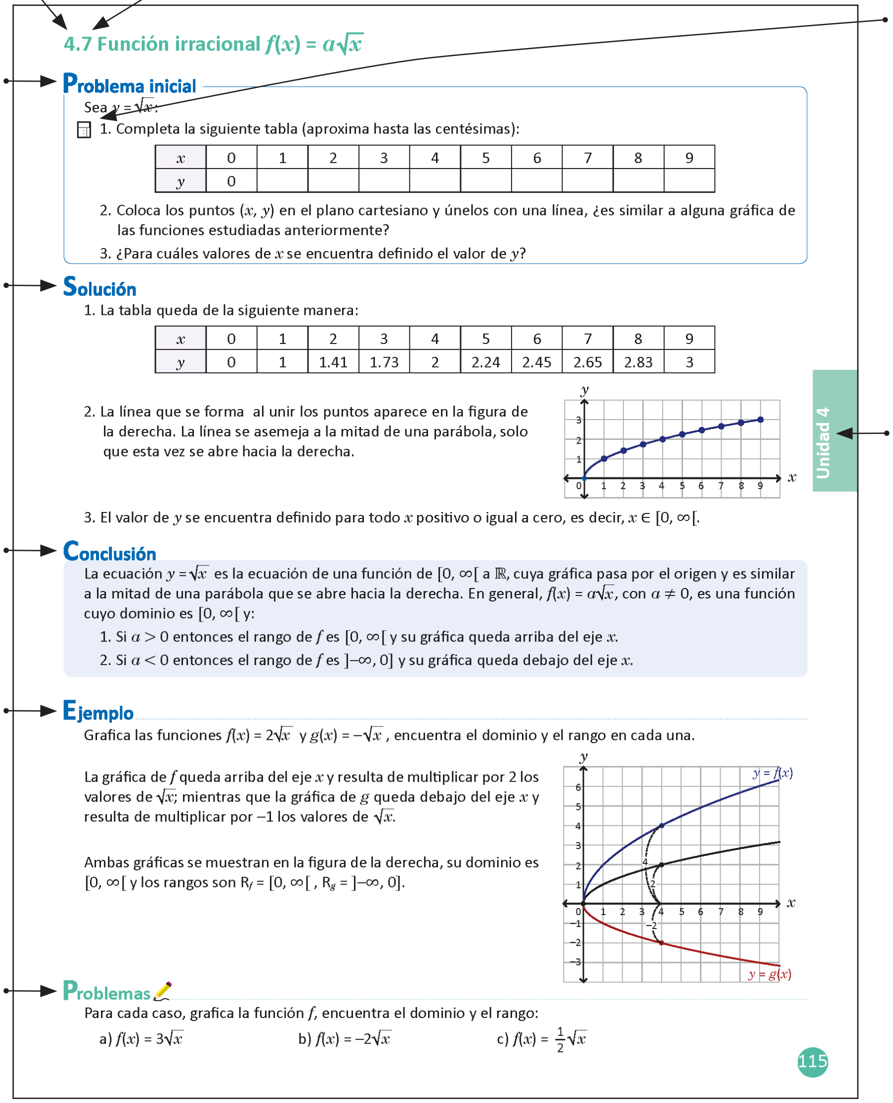
En este segundo momento de la clase, el libro de texto propone una o varias formas de resolver el problema planteado.

Indica la unidad a la que corresponde la clase.

Se consolida el contenido, aquí se relaciona el problema inicial y la solución, para explicar con lenguaje matemático la finalidad del contenido.

En algunas clases se propone un problema más, para mejorar la comprensión del contenido.

Se presentan problemas y ejercicios para que el estudiante practique lo aprendido.



4.7 Función irracional $f(x) = a\sqrt{x}$

Problema inicial

Sea $y = \sqrt{x}$:

▦ 1. Completa la siguiente tabla (aproxima hasta las centésimas):

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0									

2. Coloca los puntos (x, y) en el plano cartesiano y únelos con una línea, ¿es similar a alguna gráfica de las funciones estudiadas anteriormente?
3. ¿Para cuáles valores de x se encuentra definido el valor de y?

Solución

1. La tabla queda de la siguiente manera:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	1	1.41	1.73	2	2.24	2.45	2.65	2.83	3

2. La línea que se forma al unir los puntos aparece en la figura de la derecha. La línea se asemeja a la mitad de una parábola, solo que esta vez se abre hacia la derecha.

3. El valor de y se encuentra definido para todo x positivo o igual a cero, es decir, $x \in [0, \infty[$.

Conclusión

La ecuación $y = \sqrt{x}$ es la ecuación de una función de $[0, \infty[$ a $\mathbb{R}$, cuya gráfica pasa por el origen y es similar a la mitad de una parábola que se abre hacia la derecha. En general, $f(x) = a\sqrt{x}$, con $a \neq 0$, es una función cuyo dominio es $[0, \infty[$ y:

1. Si $a > 0$ entonces el rango de f es $[0, \infty[$ y su gráfica queda arriba del eje x.
2. Si $a < 0$ entonces el rango de f es $]-\infty, 0]$ y su gráfica queda debajo del eje x.

Ejemplo

Grafica las funciones $f(x) = 2\sqrt{x}$ y $g(x) = -\sqrt{x}$, encuentra el dominio y el rango en cada una.

La gráfica de f queda arriba del eje x y resulta de multiplicar por 2 los valores de $\sqrt{x}$; mientras que la gráfica de g queda debajo del eje x y resulta de multiplicar por −1 los valores de $\sqrt{x}$.

Ambas gráficas se muestran en la figura de la derecha, su dominio es $[0, \infty[$ y los rangos son $R_f = [0, \infty[$, $R_g =]-\infty, 0]$.

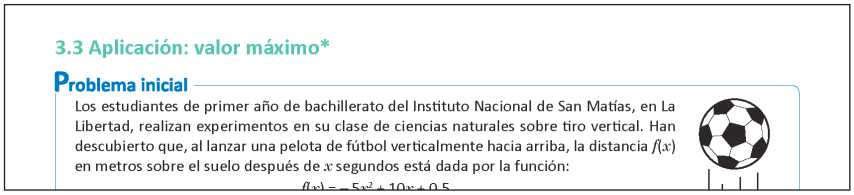
Problemas

Para cada caso, grafica la función f, encuentra el dominio y el rango:

a) $f(x) = 3\sqrt{x}$ b) $f(x) = -2\sqrt{x}$ c) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$

2. Aspectos importantes del Libro de texto

Clases con mayor nivel de dificultad: el título de algunas clases tienen un asterisco (*), esto significa que el nivel de dificultad es mayor comparado con el resto. El docente debe estar pendiente del trabajo de sus estudiantes, en el caso que no avancen, se puede dar una mayor orientación respecto a la solución del problema inicial. Por ejemplo:



3.3 Aplicación: valor máximo*

Problema inicial

Los estudiantes de primer año de bachillerato del Instituto Nacional de San Matías, en La Libertad, realizan experimentos en su clase de ciencias naturales sobre tiro vertical. Han descubierto que, al lanzar una pelota de fútbol verticalmente hacia arriba, la distancia $f(x)$ en metros sobre el suelo después de x segundos está dada por la función:

$$f(x) = -5x^2 + 10x + 0.5$$

Información complementaria: en el libro se utilizan algunos elementos que facilitan el aprendizaje de los contenidos, como presaberes, pistas, información adicional relacionada con la historia de la matemática, y se representan con diferentes colores:

Presaberes

Pista

Información adicional

Distribución de las clases: el libro está compuesto por 8 unidades didácticas, cada una formada por diferentes lecciones y estas últimas compuestas por distintas clases. En la numeración del título de cada clase, el primer número indica la lección y el segundo indica la clase.

Además, al finalizar cada unidad siempre aparecen algunos problemas sobre las temáticas abordadas, y en ocasiones también se desarrollan algunas prácticas en GeoGebra, como recurso tecnológico de la matemática.

Desarrollo de clases con el uso de GeoGebra: uno de los componentes innovadores en el Libro de texto es el uso del software matemático, para modelar procesos o construcciones con el fin de proporcionar herramientas que vayan acorde a la dinamización de la matemática. Para ello, al final de algunas unidades se proponen prácticas para que los estudiantes puedan verificar algunos resultados obtenidos en la unidad y se plantean algunas situaciones para que las resuelvan.

Desarrollo de clases introductorias utilizando material concreto: en algunas unidades se han diseñado clases que permitan introducir los contenidos, con el fin de potenciar la lógica, la intuición y el razonamiento espacial, y así facilitar la comprensión de los mismos.

1. Programación anual

Periodo	Mes	Unidad (Horas de clase)	Pág. de GM (Pág. de LT)	Contenidos
Primero	Enero	U1: Números reales (10)	23 – 50 (7 – 18)	• Operaciones con raíces cuadradas • Racionalización • Número neperiano y áureo • Números reales • Valor absoluto • Intervalos
		U2: Operaciones con polinomios y números complejos (37)	51 – 144 (19 – 60)	• Grado de un polinomio • Productos notables • Factor común monomio y polinomio • Trinomio de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$ • Trinomio cuadrado perfecto • Diferencia de cuadrados • Método de la tijera • División larga de polinomios • División sintética • Teorema del residuo • Teorema del factor • Resolución de ecuaciones cuadráticas usando factorización y la fórmula general • Número complejo: parte real y parte imaginaria • Operaciones con números complejos: suma, resta, multiplicación y división • Raíces cuadradas de números negativos • Discriminante de la ecuación cuadrática • Raíces de un polinomio
	Febrero			
	Marzo			
Segundo	Marzo	U3: Desigualdades (15)	145 – 182 (61 – 76)	• Solución algebraica de una desigualdad lineal • Solución gráfica de una desigualdad lineal • Aplicaciones de la desigualdad lineal • Desigualdad triangular • Desigualdad de las medias aritmética y geométrica • Desigualdades con expresiones racionales
	Abril	U4: Funciones reales (40)	183 – 288 (77 – 122)	• Definición de función • Gráfica de una función • Dominio y rango • Gráfica de una función cuadrática: parábola, vértice, dominio y rango • Desplazamientos verticales y horizontales • Forma general de la ecuación de la función cuadrática • Valor máximo o mínimo • Aplicaciones del valor máximo o mínimo • Intersección de la gráfica de una función cuadrática con los ejes de coordenadas • Desigualdades cuadráticas • Otras funciones reales • Práctica en GeoGebra
	Mayo			

Periodo	Mes	Unidad (Horas de clase)	Pág. de GM (Pág. de LT)	Contenidos
Tercero	Junio Julio	U5: Resolución de triángulos oblicuángulos (33)	293 –372 (123 – 160)	• Razones trigonométricas de un ángulo agudo • Triángulos rectángulos notables • Aplicaciones de las razones trigonométricas • Ángulo de depresión y elevación • Simetrías en el plano cartesiano • Ángulos en el plano cartesiano • Razones trigonométricas de cualquier ángulo • Área de un triángulo • Ley de los senos y ley del coseno • Resolución de triángulos • Aplicaciones de la ley de los senos y la ley del coseno
	Agosto	U6: Identidades y ecuaciones trigonométricas (15)	373 – 418 (161 – 176)	• Identidades trigonométricas de ángulos opuestos • Identidades trigonométricas de ángulos complementarios y suplementarios • Teorema de la adición • Teorema del ángulo doble • Teorema del ángulo medio • Ecuaciones trigonométricas
Cuarto	Agosto Septiembre	U7: Vectores y números complejos (25)	419 – 480 (177 – 204)	• Definiciones sobre vectores • Operaciones con vectores • Base y coordenadas • Paralelismo • Proyección ortogonal • Producto escalar de vectores paralelos y no paralelos • Forma trigonométrica del producto escalar • Representación geométrica de un número complejo • Resultados geométricos de las operaciones básicas con números complejos • Resultados geométricos de la multiplicación y división de números complejos • Fórmula de Moivre • Práctica en GeoGebra
	Octubre	U8: Estadística descriptiva (17)	481 – 528 (205 – 224)	• Definiciones básicas sobre estadística • Tipos de muestreo • Medidas de tendencia central y de dispersión • Coeficiente de variación • Cuartiles • Diagrama de caja y bigotes • Deciles y percentiles • Práctica en GeoGebra

Para desarrollar todo el contenido establecido, se debe cumplir la programación mostrada.

2. Apartados de la unidad

a) Competencia de la unidad: describe las capacidades que los estudiantes deben adquirir al finalizar la unidad.
b) Relación y desarrollo (entre los grados anteriores y el posteriores): muestra en qué grado los estudiantes aprendieron los saberes previos y en qué grado darán continuidad al contenido.
c) Plan de estudio de la unidad: presenta el contenido de las clases de cada unidad.
d) Puntos esenciales de cada lección: describe los elementos importantes de las lecciones por unidad.

3. Prueba de la unidad

Se presenta un ejemplo de la prueba para medir tanto el nivel de comprensión por parte de los estudiantes como el nivel de alcance del objetivo de la unidad por parte de los docentes. Si el rendimiento es bajo en algunos problemas, los docentes deben pensar en cómo mejorarlo y al mismo tiempo, tratar que este bajo rendimiento no sea un obstáculo para el siguiente aprendizaje. De esta manera, los docentes podrán utilizar esta prueba para discutir con sus colegas, ya sea de la misma institución o de otras, sobre los resultados obtenidos.

4. Elementos de una página de la SM

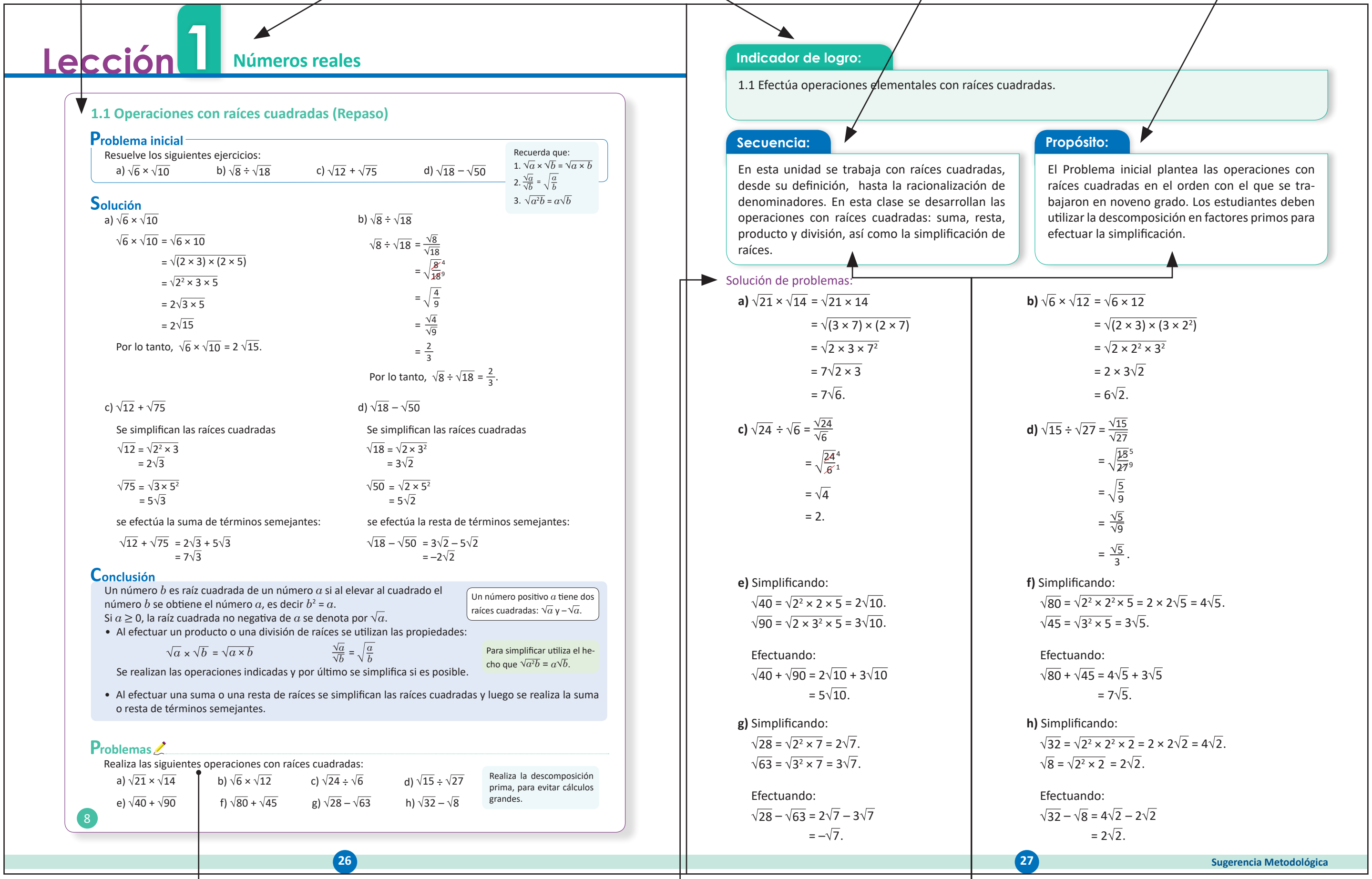
Página del libro de texto.

Número y nombre de la lección.

Indicador de logro de la clase.

Secuencia de la clase en la lección.

Propósito de la clase.



Lección 1 Números reales

1.1 Operaciones con raíces cuadradas (Repaso)

Problema inicial

Resuelve los siguientes ejercicios:

a) $\sqrt{6} \times \sqrt{10}$ b) $\sqrt{8} \div \sqrt{18}$ c) $\sqrt{12} + \sqrt{75}$ d) $\sqrt{18} - \sqrt{50}$

Recuerda que:
1. $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$
2. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
3. $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$

Solución

a) $\sqrt{6} \times \sqrt{10}$

$$\begin{aligned}\sqrt{6} \times \sqrt{10} &= \sqrt{6 \times 10}\\ &= \sqrt{(2 \times 3) \times (2 \times 5)}\\ &= \sqrt{2^2 \times 3 \times 5}\\ &= 2\sqrt{3 \times 5}\\ &= 2\sqrt{15}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt{6} \times \sqrt{10} = 2\sqrt{15}$.

b) $\sqrt{8} \div \sqrt{18}$

$$\begin{aligned}\sqrt{8} \div \sqrt{18} &= \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}}\\ &= \sqrt{\frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{18}^{9}}}\\ &= \sqrt{\frac{4}{9}}\\ &= \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt{8} \div \sqrt{18} = \frac{2}{3}$.

c) $\sqrt{12} + \sqrt{75}$

Se simplifican las raíces cuadradas

$$\begin{aligned}\sqrt{12} &= \sqrt{2^2 \times 3}\\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{75} &= \sqrt{3 \times 5^2}\\ &= 5\sqrt{3}\end{aligned}$$

se efectúa la suma de términos semejantes:

$$\begin{aligned}\sqrt{12} + \sqrt{75} &= 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}\\ &= 7\sqrt{3}\end{aligned}$$

d) $\sqrt{18} - \sqrt{50}$

Se simplifican las raíces cuadradas

$$\begin{aligned}\sqrt{18} &= \sqrt{2 \times 3^2}\\ &= 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{50} &= \sqrt{2 \times 5^2}\\ &= 5\sqrt{2}\end{aligned}$$

se efectúa la resta de términos semejantes:

$$\begin{aligned}\sqrt{18} - \sqrt{50} &= 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2}\\ &= -2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Conclusión

Un número b es raíz cuadrada de un número a si al elevar al cuadrado el número b se obtiene el número a, es decir $b^2 = a$.
Si $a \geq 0$, la raíz cuadrada no negativa de a se denota por $\sqrt{a}$.

- Al efectuar un producto o una división de raíces se utilizan las propiedades:

  $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

  Se realizan las operaciones indicadas y por último se simplifica si es posible.
- Al efectuar una suma o una resta de raíces se simplifican las raíces cuadradas y luego se realiza la suma o resta de términos semejantes.

Un número positivo a tiene dos raíces cuadradas: $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$.

Para simplificar utiliza el hecho que $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$.

Problemas

Realiza las siguientes operaciones con raíces cuadradas:

a) $\sqrt{21} \times \sqrt{14}$ b) $\sqrt{6} \times \sqrt{12}$ c) $\sqrt{24} \div \sqrt{6}$ d) $\sqrt{15} \div \sqrt{27}$

e) $\sqrt{40} + \sqrt{90}$ f) $\sqrt{80} + \sqrt{45}$ g) $\sqrt{28} - \sqrt{63}$ h) $\sqrt{32} - \sqrt{8}$

Realiza la descomposición prima, para evitar cálculos grandes.

8

26

Indicador de logro:

1.1 Efectúa operaciones elementales con raíces cuadradas.

Secuencia:

En esta unidad se trabaja con raíces cuadradas, desde su definición, hasta la racionalización de denominadores. En esta clase se desarrollan las operaciones con raíces cuadradas: suma, resta, producto y división, así como la simplificación de raíces.

Propósito:

El Problema inicial plantea las operaciones con raíces cuadradas en el orden con el que se trabajaron en noveno grado. Los estudiantes deben utilizar la descomposición en factores primos para efectuar la simplificación.

Solución de problemas:

a) $$\begin{aligned}\sqrt{21} \times \sqrt{14} &= \sqrt{21 \times 14}\\ &= \sqrt{(3 \times 7) \times (2 \times 7)}\\ &= \sqrt{2 \times 3 \times 7^2}\\ &= 7\sqrt{2 \times 3}\\ &= 7\sqrt{6}.\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}\sqrt{24} \div \sqrt{6} &= \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}\\ &= \sqrt{\frac{\cancel{24}^{4}}{\cancel{6}^{1}}}\\ &= \sqrt{4}\\ &= 2.\end{aligned}$$

e) Simplificando:

$\sqrt{40} = \sqrt{2^2 \times 2 \times 5} = 2\sqrt{10}$.
$\sqrt{90} = \sqrt{2 \times 3^2 \times 5} = 3\sqrt{10}$.

Efectuando:

$$\begin{aligned}\sqrt{40} + \sqrt{90} &= 2\sqrt{10} + 3\sqrt{10}\\ &= 5\sqrt{10}.\end{aligned}$$

g) Simplificando:

$\sqrt{28} = \sqrt{2^2 \times 7} = 2\sqrt{7}$.
$\sqrt{63} = \sqrt{3^2 \times 7} = 3\sqrt{7}$.

Efectuando:

$$\begin{aligned}\sqrt{28} - \sqrt{63} &= 2\sqrt{7} - 3\sqrt{7}\\ &= -\sqrt{7}.\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}\sqrt{6} \times \sqrt{12} &= \sqrt{6 \times 12}\\ &= \sqrt{(2 \times 3) \times (3 \times 2^2)}\\ &= \sqrt{2 \times 2^2 \times 3^2}\\ &= 2 \times 3\sqrt{2}\\ &= 6\sqrt{2}.\end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned}\sqrt{15} \div \sqrt{27} &= \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{27}}\\ &= \sqrt{\frac{\cancel{15}^{5}}{\cancel{27}^{9}}}\\ &= \sqrt{\frac{5}{9}}\\ &= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}}\\ &= \frac{\sqrt{5}}{3}.\end{aligned}$$

f) Simplificando:

$\sqrt{80} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 5} = 2 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$.
$\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \times 5} = 3\sqrt{5}$.

Efectuando:

$$\begin{aligned}\sqrt{80} + \sqrt{45} &= 4\sqrt{5} + 3\sqrt{5}\\ &= 7\sqrt{5}.\end{aligned}$$

h) Simplificando:

$\sqrt{32} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2} = 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.
$\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}$.

Efectuando:

$$\begin{aligned}\sqrt{32} - \sqrt{8} &= 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\\ &= 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

27 Sugerencia Metodológica

Resolución de los problemas del LT.

En algunas clases se utilizan también los apartados **Materiales** o **Posibles dificultades**.

En el desarrollo de los problemas de algunas clases, se presenta información adicional e importante para el docente, esto se hace a través de un cuadro como el siguiente:

Información importante para el docente.

V. Orientación para el desarrollo de una clase de matemática con base en la resolución de problemas

1. Recomendación pedagógica para el desarrollo de la clase

En consonancia con el Programa de Estudio anterior, esta nueva versión también sugiere el desarrollo de las clases de matemática basándose en el socioconstructivismo a través del enfoque de Resolución de Problemas. En las clases impartidas con este enfoque el centro del proceso de los aprendizajes son los estudiantes, por lo que ellos mismos construyen sus conocimientos y procedimientos a partir de la situación didáctica o problemática planteada. En este proceso, el rol principal del docente es facilitar o asistir en el aprendizaje de los estudiantes, para lo cual deberá seguir el procedimiento que se detalla a continuación:

Pasos	Proceso de aprendizaje (estudiante)	Proceso de asistencia de aprendizajes (docente)	Puntos que se deben tomar en cuenta en la asistencia
1	Verificación de la respuesta de los problemas de la tarea y recordatorio de presaberes.	Verificar la respuesta correcta de los problemas de la tarea correspondientes a los que quedaron pendientes en la clase anterior en el LT.	Utilizar como máximo 3 minutos para este paso.
2	Resolución individual del problema inicial de la clase.	Orientar para que lean el problema inicial de la clase, confirmar el nivel de comprensión de los estudiantes sobre el tema y luego invitarles a que resuelvan de manera individual (aprendizaje activo).	- Mientras los estudiantes resuelven el problema inicial, el docente debe desplazarse en el aula para verificar los avances y las dificultades que presenten. - Si tienen dificultades, indicarles que lean la solución del LT. - Utilizar como máximo 6 minutos.
3	Aprendizaje interactivo con sus compañeros.	Fomentar el trabajo entre compañeros para que consulten entre ellos las soluciones y dudas.	- En un primer momento, que trabajen por parejas, gradualmente puede aumentar el número de integrantes por equipo, hasta un máximo de cuatro. - Si tienen dificultades, indicarles que lean la solución del LT.
4	Socialización de la solución y la conclusión de la clase.	Orientar para que lean la solución y conclusión de la clase.	Si se considera necesario, se debe explicar la solución o invitarles a que socialicen la solución en plenaria.
5	Resolución del primer ítem de la sección de problemas y ejercicios (aprendizaje activo).	Indicar que resuelvan el primer ítem de la sección de problemas.	Si hay estudiantes que ya resolvieron el primer ítem, invitarles a que trabajen los demás ítems.

6	Evaluación del primer ítem de los problemas.	Verificar la solución del primer ítem de todos los estudiantes y asegurarse de que lo resolvieron correctamente.	- Mientras los estudiantes trabajan, el docente debe desplazarse en el aula revisando el primer ítem de todos los estudiantes. - Dependiendo de la dificultad, el docente puede explicar la solución o simplemente escribir la respuesta.
7	Resolución del resto de ítems.	Orientar para que realicen el resto de ítems. Luego verificar si las respuestas son correctas y orientar para que hagan nuevamente los problemas en los que se equivocaron.	A los estudiantes que terminan primero, se les indica que apoyen a sus compañeros.
8	Tomar nota de la tarea para la casa.	Asignar la tarea de los problemas que no se resolvieron del LT.	Si no se logran resolver todos los problemas de la clase del LT, se pueden asignar como tarea, pero analizando la cantidad de tareas que tengan los estudiantes.

Tal como se presentó en la estrategia para el mejoramiento de los aprendizajes de los estudiantes, se debe garantizar como mínimo 20 minutos de aprendizaje activo, esto se logrará si se sigue el proceso presentado anteriormente, sobre todo en los pasos 2, 3, 5 y 7.

2. Puntos importantes a considerar en la facilitación del aprendizaje

a. Uso adecuado del tiempo

En el Programa de Estudio se proporcionan los indicadores de logro y los contenidos que deben ser desarrollados en el número de horas de clase establecidas en este mismo documento curricular. Según el programa, se establece que una clase debe durar 45 minutos y la carga horaria anual es de 240 clases. De acuerdo con este lineamiento, en este tiempo se debe facilitar el aprendizaje de todos los contenidos planteados. En este sentido, se requiere una eficiencia en el aprendizaje en función del tiempo establecido. Alcanzar el indicador de logro en 45 minutos no es una tarea sencilla, por lo que, a continuación, se presentan algunas técnicas para la facilitación de los aprendizajes:

■ Ubicación de los pupitres de los estudiantes

La forma para ubicar los escritorios o pupitres puede variar dependiendo del propósito de la clase, sin embargo, en la clase de matemática básicamente se recomienda que los ubiquen en filas, es decir, todos los estudiantes hacia la pizarra debido a las siguientes razones:

a. Facilidad para desplazarse entre los pupitres para verificar el aprendizaje de los estudiantes.
b. Facilidad para el aprendizaje interactivo entre compañeros.
c. Comodidad en la postura de los estudiantes para ver la pizarra.

Distribución del LT antes de iniciar la clase

En las aulas se tienen establecidas normas de conducta, pero será necesario que se incluya una más: que oriente a los estudiantes a tener preparados los recursos o materiales necesarios antes del inicio de la clase. Una vez establecida esta norma, se pueden asignar algunos estudiantes para la distribución del LT, de tal manera que se responsabilicen de repartirlos antes de iniciar la clase.

Tiempo que puede destinar para el recordatorio o repaso

El tiempo de una clase es limitado y cada una tiene su indicador de logro, que todos los estudiantes deben alcanzar. Si se destinan más de 3 minutos en la parte inicial donde se recuerdan los presaberes, en la mayoría de los casos no se logrará alcanzar el indicador por falta de tiempo y este desfase irá provocando otros desfases en las clases posteriores; por consiguiente, en el año escolar no se conseguirá abordar todos los contenidos establecidos en el Programa de Estudio.

Cuando se detectan dificultades en la parte del recordatorio, muchas veces no se logra retroalimentar en un tiempo corto, sino que se requiere más tiempo para asegurar el presaber. Por ejemplo, en bachillerato usualmente se tienen dificultades en la resolución de ecuaciones, para reforzar este dominio se requiere de más tiempo para resolver problemas. Al desarrollar la parte del recordatorio entonces, el docente no debe olvidar que su propósito es dar una pista para resolver el problema de la clase de ese día, y el reforzamiento no es su propósito principal.

Tiempo que se debe destinar para la resolución individual en el Problema inicial de la clase

Tal como se estableció en el punto **1. Recomendación pedagógica para el desarrollo de la clase**, se deben utilizar 6 minutos. Muchas veces los estudiantes simplemente están esperando otra orientación del docente sin que sepan qué hacer en la resolución individual. En este caso, es mejor orientar un aprendizaje interactivo, invitándoles a que consulten con sus compañeros.

Tiempo insuficiente para terminar el contenido de una clase

Es posible que haya clases donde no alcance el tiempo por lo que quedarán ítems sin ser resueltos. Algunos docentes los toman como contenidos de otra clase, sin embargo, es mejor considerar dejarlos como tarea; en el caso de que los estudiantes estén sobrecargados de tareas, el docente puede tomar la decisión de reservar estos problemas sin resolver y utilizarlos para el reforzamiento previo a las pruebas o para asignar a los estudiantes que terminan rápido.

Formación del hábito de estudio en los tiempos extra en la escuela

En ocasiones, el tiempo de las clases no alcanza para la consolidación de los aprendizajes, en este caso, además de la asignación de la tarea, puede utilizarse una alternativa de aprovechamiento del tiempo extra en la escuela. Según los horarios de las escuelas no hay un tiempo extra, pero en la práctica, si existe. Por ejemplo, cuando el docente atiende alguna visita o emergencia antes de iniciar la clase o la jornada, antes de que esta termine o cuando termina una clase en menos de 45 minutos, etc., por lo que será mejor aprovechar este espacio de tiempo para realizar los problemas pendientes del LT. Principalmente, se puede aprovechar el tiempo para reforzar los contenidos básicos donde hay mayor dificultad.

■ Revisión de todos los problemas resueltos, garantizando que las respuestas sean correctas

Revisar todos los problemas que hayan resuelto los estudiantes no es una tarea fácil, ya que implica bastante tiempo, por lo que se debe buscar una alternativa que resuelva esta situación. Para esto, es necesario formar dos hábitos en los estudiantes:

1. El hábito de autocorrección.
2. El hábito de realizar nuevamente los problemas donde se han equivocado.

Al formar el primer hábito, el docente consigue una opción para confirmar las respuestas correctas verbalmente o por escrito en la pizarra; para consolidarlo se puede invitar a los estudiantes a que intercambien los cuadernos para corregirse mutuamente. El segundo hábito, por su parte, permite que los estudiantes no se queden con dudas, lo que ayudará a la formación de su personalidad asignándole valor al esfuerzo y a la motivación al lograr el aprendizaje.

b. Planificación

En este documento se propone la planificación de cada clase, por lo que no es necesario elaborar en otra hoja la planificación, guión o carta didáctica, sino que deben basarse en las propuestas de este documento para impartir la clase. Incluso, si se considera necesario, se pueden escribir algunos puntos importantes con lápiz de grafito (ya que este documento pertenece a la escuela y no al docente, por lo que no debe escribir con lapicero). En caso de que se considere necesario realizar una adecuación de acuerdo con la particularidad de los estudiantes, puede hacerse siempre y cuando esté basado en el contenido propuesto en este documento.

c. Evaluar y brindar orientación necesaria desplazándose en el aula

Mientras los estudiantes resuelven el problema, el docente debe desplazarse en el aula para evaluar el nivel de comprensión del contenido, revisando el trabajo de los estudiantes y observando si han comprendido el enunciado.

Muchas veces se brinda asistencia individual a algunos estudiantes que han tenido dificultad, pero no alcanza el tiempo para atender a todos. La orientación debe realizarse de la siguiente manera: si el número de estudiantes que tienen dificultad es menor a cinco, brindar orientación individual, de lo contrario, es mejor brindar otro tipo de orientación, por ejemplo: explicación en plenaria, por grupo, a la hora de revisión de la respuesta correcta, entre otras.

d. Tratamiento a los estudiantes que terminan los problemas más rápido que el resto

Una sección está conformada por un grupo heterogéneo, por lo que siempre hay diferencias entre estudiantes, especialmente en el tiempo que se tardan en resolver los problemas. En la educación pública debe garantizarse igualdad de oportunidades para aprender, y en este sentido, si no se tiene orientación sobre qué hacer con los estudiantes que terminan los problemas antes que otros, ellos estarán perdiendo tiempo y se pueden convertir en un factor negativo para la disciplina del aula por no tener qué hacer. Para evitar esta situación y aprovechar el rendimiento de estos estudiantes, el docente puede establecer el siguiente compromiso: cuando terminen todos los problemas y los hayan revisado, entonces, ellos pueden orientar al resto de sus compañeros. De esta manera, los que tienen dificultades pueden recibir orientación de sus compañeros, mientras los estudiantes que orientan también lograrán interiorizar el aprendizaje de la clase. Así mismo, el docente puede preparar otra serie de problemas para la fijación del contenido u otro tipo de problemas que tienen carácter de desafío, para que los estudiantes puedan seguir desarrollando sus capacidades.

e. Revisión de los cuadernos de apuntes

Si no se brinda un monitoreo continuo sobre el uso del cuaderno, eventualmente puede que se utilice de manera desordenada, por lo que es necesario que se revise periódicamente su uso, en promedio, una vez al mes. La clave para esto es aumentar el número de revisiones al inicio del año escolar, de tal manera que los estudiantes sientan que están siendo monitoreados y se forme en ellos un hábito.

f. Revisión de las tareas

De la misma manera que la revisión de los cuadernos de apuntes, es necesario brindar un monitoreo continuo sobre la realización de las tareas. Además de verificar la realización de la tarea en el primer proceso de cada clase, se puede programar periódicamente la revisión, prestando especial atención a los estudiantes que hayan cumplido con todas, los que se hayan autorevisado con las respuestas correctas y los que resolvieron de nuevo los problemas donde se habían equivocado.

g. Formación del hábito de estudio en el hogar

Según el resultado de la prueba de matemática en el Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo (TERCE), el resultado de los alumnos que estudian más de 30 minutos en el hogar es claramente mejor que los que estudian menos o nada. El tiempo ideal de estudio dependerá del grado, pero por lo general se consideran necesarios 10 minutos por grado, más 10 minutos. Por ejemplo, para el caso de 3er grado es $10 \times 3 + 10 = 40$ minutos. Formar el hábito de estudio de los estudiantes en el hogar es tarea no solamente del docente, sino también de los padres de familia y no es nada fácil. Por lo que, al inicio, se podría formar el hábito de estudio a través de la asignación de tareas.

h. Ciclo de orientación, verificación, reorientación y felicitación

Como ciclo básico de todas las orientaciones que hace el docente, si se orienta una acción se debe dar el monitoreo o verificación del cumplimiento de la misma. Luego, si los estudiantes cumplen, se les debe felicitar porque ya pueden hacerlo; en caso contrario, hay que orientar nuevamente sobre el asunto. Esto aplica en todas las orientaciones. Por ejemplo, si se asigna una tarea, se verifica si el estudiante la cumple, se le felicita y si no la realiza se debe reorientar. Este ciclo aplica también en la asistencia del aprendizaje, si se orienta respecto a un contenido y a través de la prueba se verifica que lo hayan hecho correctamente, se debe felicitar; en caso contrario, se debe reorientar. El ciclo parece sencillo, pero para cumplirlo continuamente se debe formar el hábito.

1. Importancia de la aplicación de las pruebas

Los resultados que se obtienen al evaluar el aprendizaje de los estudiantes proporcionan al docente información valiosa que le permite tener un panorama real sobre el avance obtenido. Con base a esto, el docente puede tomar decisiones con el fin de garantizar que sus estudiantes alcancen los indicadores de logro de cada clase, desarrollen las competencias transversales y cumplan a su vez con las competencias de grado propuestas.

Cuando los resultados son positivos, el docente continúa mejorando su práctica, con el fin de que cada vez sea más efectiva.

Si los resultados no son tan favorables, será necesario que el docente autoevalúe su desempeño basado en los resultados del aprendizaje de cada estudiante, y ponga todo su empeño y esfuerzo para dar lo mejor de sí. Para ello, debe participar en procesos de formación e investigar sobre los contenidos donde considere que tenga mayores dificultades y podría incluso consultar con sus compañeros de trabajo.

Es importante destacar que el docente es uno de los actores más importantes en el ámbito educativo; por tal razón, debe asumir su rol como tal y autoevaluar su desempeño basado en los resultados del aprendizaje de cada estudiante.

Considerando lo anterior, debe hacer uso de las pruebas que contiene esta SM, las cuales buscan recolectar información valiosa y relacionada con la realidad de los aprendizajes, tanto adquiridos como no adquiridos.

2. Propósitos de las pruebas

Resumiendo lo anterior, se podría concluir que los propósitos son los siguientes:

- Obtener información en cuanto al nivel de comprensión de los contenidos por parte de los estudiantes.
- Diseñar estrategias de mejora en los contenidos donde los estudiantes salieron deficientes.
- Evaluar el desempeño del docente y mejorar su práctica basándose en el análisis de los resultados de la prueba.

3. Función de cada prueba

Son dos tipos de pruebas, de unidad y de periodo. Todas tienen el mismo propósito planteado, sin embargo, según convenga, se puede dar varias funciones a cada una de ellas. A continuación se plantean algunos ejemplos de cómo utilizarlas.

a. Prueba de unidad

Los ítems que aparecen en dicha prueba corresponden a los principales indicadores de logro (curriculares) los cuales están enunciados en las clases de cada unidad. Por lo tanto, el docente puede conocer el nivel de comprensión de los contenidos por parte de los estudiantes. Lo ideal es dar una retroalimentación una vez se detecten las dificultades; sin embargo, no siempre se tiene suficiente tiempo para impartir clases adicionales. En ese caso, se puede invitar a los estudiantes para que ellos mismos revisen y trabajen los ítems que no pudieron resolver en el momento de la aplicación de la prueba.

Se puede entregar la copia de las respuestas de la prueba que está en este documento, para que los estudiantes la analicen en grupos, de esta forma, ellos pueden aprender interactivamente con sus compañeros; luego, el docente puede recoger la prueba revisada por los estudiantes y ésta podría ser una información referencial sobre el avance de sus estudiantes.

Antes de la aplicación de dicha prueba, es recomendable anunciarles a los estudiantes con el fin de que ellos repasen con antelación los contenidos de la unidad a evaluar.

b. Prueba de periodo

Los ítems que aparecen en esta prueba corresponden a los contenidos esenciales del respectivo periodo. El momento ideal para aplicar dicha prueba será un día antes de finalizar el periodo, ya que, en la última clase, se pueden retroalimentar los contenidos. Sin embargo, si no se puede hacer así, podría aplicarse en el último día del periodo y dar la retroalimentación en la primera clase del próximo.

Además de esto, aprovechando las Reflexiones Pedagógicas, se puede compartir el resultado de las pruebas con docentes de otros centros educativos. Así se podrán consultar cuáles son las dificultades que han encontrado, qué tipo de esfuerzos han aplicado otros docentes, entre otros temas que contribuyan al mejoramiento de los aprendizajes. Una vez establecido un grado de confianza con otros docentes, se podría establecer comunicación vía redes sociales, para compartir información que facilite procesos y contribuya a mejorar los aprendizajes de los estudiantes.

Al final de cada unidad y de cada periodo, estarán las pruebas respectivas, de manera que puedan ser fotocopiadas por cada docente, y posteriormente se encontrará la resolución y rúbrica de evaluación para cada ítem.

4. Uso de los resultados de la prueba

Ejemplo. Se supone que se aplica una prueba a estudiantes de primer año de bachillerato, y de los resultados se presentan dos situaciones:

a. Respuesta correcta:

	Desarrolla el siguiente producto notable: $(x + 3)^2$
Solución de los estudiantes	$x^2 + 6x + 9$
Porcentaje de estudiantes que resolvieron de esta forma	70%

b. Respuesta incorrecta:

	Desarrolla el siguiente producto notable: $(x + 3)^2$
Solución de los estudiantes	$x^2 + 9$
Porcentaje de estudiantes que resolvieron de esta forma	60%

En las dos situaciones planteadas, ¿cómo se pueden analizar los resultados?

Información que el docente puede obtener de este resultado:

Capacidad adquirida	Capacidad no adquirida
Desarrollo de un producto notable	Concepto de potencia
Uso adecuado del algoritmo	Concepto de multiplicación

Estrategia para aprovechar los resultados para la retroalimentación:

Posible consideración a corto plazo	Posible consideración a mediano plazo
Para facilitar la comprensión del desarrollo de un producto notable se sugiere utilizar recursos geométricos.	Se deberá promover una actividad de “aprendizaje interactivo entre alumnos” con el fin de hacerles un recordatorio de los contenidos anteriores con el apoyo y sugerencia de sus compañeros.
Si se observa la misma situación con varios alumnos, será necesario reforzar haciéndoles un recordatorio en la pizarra sobre el mismo tipo de ítem.	Promover el autoestudio en la casa y en el centro educativo hasta que tengan dominio de este tipo de ítems.

Con lo anterior, el docente podrá dedicar su tiempo y esfuerzo a enfocarse en los contenidos que el estudiante no pudo contestar correctamente.

Para finalizar, a continuación se presenta el proceso del uso adecuado de las pruebas que el docente debe seguir:

a. Aplicar la prueba incluida en la SM en el momento oportuno.
   - Prueba de unidad (cada vez que se finalice una unidad).
   - Prueba de periodo (antes de finalizar cada periodo).

b. Revisar la prueba aplicada.

c. Analizar la información que se obtenga con respecto a los resultados.

d. Diseñar una estrategia para la retroalimentación.

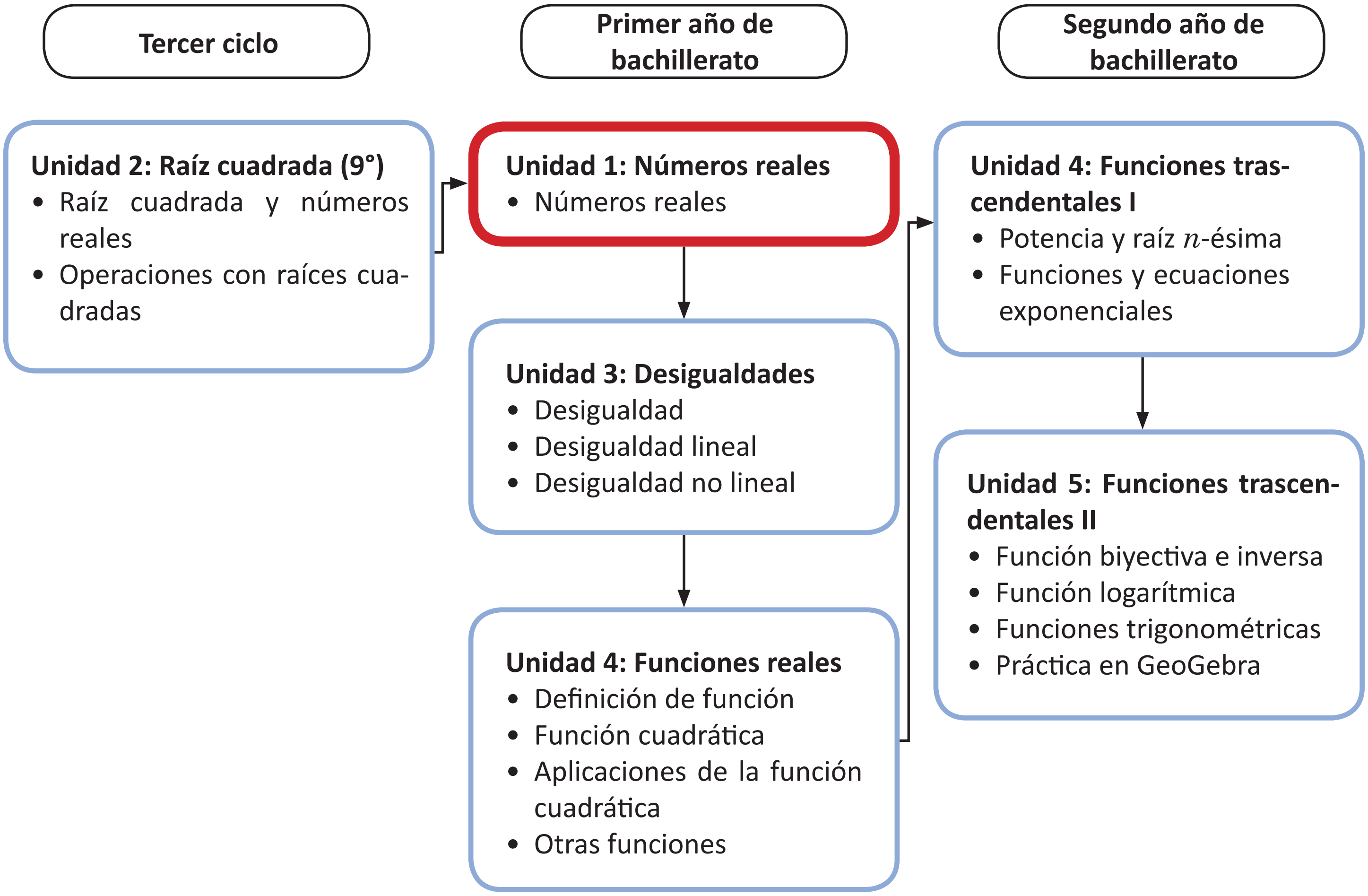
e. En el caso de la prueba de periodo, se analizarán los resultados con los docentes de centros educativos cercanos durante la Reflexión Pedagógica para crear una estrategia de mejora.

Unidad 1. Números reales

Competencia de la unidad

Utilizar las propiedades de orden, escritura y operaciones de los números reales para resolver problemas.

Relación y desarrollo



Tercer ciclo

Unidad 2: Raíz cuadrada (9°)
- Raíz cuadrada y números reales
- Operaciones con raíces cuadradas

Primer año de bachillerato

Unidad 1: Números reales
- Números reales

Unidad 3: Desigualdades
- Desigualdad
- Desigualdad lineal
- Desigualdad no lineal

Unidad 4: Funciones reales
- Definición de función
- Función cuadrática
- Aplicaciones de la función cuadrática
- Otras funciones

Segundo año de bachillerato

Unidad 4: Funciones trascendentales I
- Potencia y raíz n-ésima
- Funciones y ecuaciones exponenciales

Unidad 5: Funciones trascendentales II
- Función biyectiva e inversa
- Función logarítmica
- Funciones trigonométricas
- Práctica en GeoGebra

Plan de estudio de la unidad

Lección	Horas	Clases
1. Números reales	1	1. Operaciones con raíces cuadradas (Repaso)
	1	2. Operaciones combinadas con raíces cuadradas (Repaso)
	1	3. Racionalización con denominador $\sqrt{a}$
	1	4. Racionalización con denominador binomio
	1	5. Los números neperiano y áureo
	1	6. Definición de los números reales: la recta numérica
	1	7. Definición de los números reales: números decimales
	1	8. El valor absoluto de un número real
	1	9. Definición de intervalo
	1	10. Practica lo aprendido
	1	Prueba de la unidad 1

10 horas clase + prueba de la unidad 1

Puntos esenciales de la lección

Lección 1: Números reales

Se estudia la definición de raíz cuadrada, donde se observa la distinción entre la representación de la raíz cuadrada no negativa de un número real y las raíces cuadradas como soluciones de una ecuación cuadrática. Se trabajan las operaciones elementales y combinadas con raíces cuadradas, así como la racionalización simple y luego con denominador binomio. Se definen los números reales representados a través de la recta numérica y se aborda su representación escrita con números decimales. Se introduce el concepto de valor absoluto como función por medio de la noción de correspondencia. Por último se definen los intervalos y se estudian sus representaciones en la recta numérica y en la notación de conjuntos.

Lección 1 Números reales

1.1 Operaciones con raíces cuadradas (Repaso)

Problema inicial

Resuelve los siguientes ejercicios:

a) $\sqrt{6} \times \sqrt{10}$ b) $\sqrt{8} \div \sqrt{18}$ c) $\sqrt{12} + \sqrt{75}$ d) $\sqrt{18} - \sqrt{50}$

Recuerda que:

1. $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$
2. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
3. $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$

Solución

a) $\sqrt{6} \times \sqrt{10}$

$$\begin{aligned}\sqrt{6} \times \sqrt{10} &= \sqrt{6 \times 10}\\ &= \sqrt{(2 \times 3) \times (2 \times 5)}\\ &= \sqrt{2^2 \times 3 \times 5}\\ &= 2\sqrt{3 \times 5}\\ &= 2\sqrt{15}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt{6} \times \sqrt{10} = 2\sqrt{15}$.

b) $\sqrt{8} \div \sqrt{18}$

$$\begin{aligned}\sqrt{8} \div \sqrt{18} &= \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}}\\ &= \sqrt{\frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{18}^{9}}}\\ &= \sqrt{\frac{4}{9}}\\ &= \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt{8} \div \sqrt{18} = \frac{2}{3}$.

c) $\sqrt{12} + \sqrt{75}$

Se simplifican las raíces cuadradas

$$\begin{aligned}\sqrt{12} &= \sqrt{2^2 \times 3}\\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{75} &= \sqrt{3 \times 5^2}\\ &= 5\sqrt{3}\end{aligned}$$

se efectúa la suma de términos semejantes:

$$\begin{aligned}\sqrt{12} + \sqrt{75} &= 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}\\ &= 7\sqrt{3}\end{aligned}$$

d) $\sqrt{18} - \sqrt{50}$

Se simplifican las raíces cuadradas

$$\begin{aligned}\sqrt{18} &= \sqrt{2 \times 3^2}\\ &= 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{50} &= \sqrt{2 \times 5^2}\\ &= 5\sqrt{2}\end{aligned}$$

se efectúa la resta de términos semejantes:

$$\begin{aligned}\sqrt{18} - \sqrt{50} &= 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2}\\ &= -2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Conclusión

Un número b es raíz cuadrada de un número a si al elevar al cuadrado el número b se obtiene el número a, es decir $b^2 = a$.
Si $a \geq 0$, la raíz cuadrada no negativa de a se denota por $\sqrt{a}$.

Un número positivo a tiene dos raíces cuadradas: $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$.

- Al efectuar un producto o una división de raíces se utilizan las propiedades:

  $$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b} \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

  Se realizan las operaciones indicadas y por último se simplifica si es posible.

Para simplificar utiliza el hecho que $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$.

- Al efectuar una suma o una resta de raíces se simplifican las raíces cuadradas y luego se realiza la suma o resta de términos semejantes.

Problemas

Realiza las siguientes operaciones con raíces cuadradas:

a) $\sqrt{21} \times \sqrt{14}$ b) $\sqrt{6} \times \sqrt{12}$ c) $\sqrt{24} \div \sqrt{6}$ d) $\sqrt{15} \div \sqrt{27}$

e) $\sqrt{40} + \sqrt{90}$ f) $\sqrt{80} + \sqrt{45}$ g) $\sqrt{28} - \sqrt{63}$ h) $\sqrt{32} - \sqrt{8}$

Realiza la descomposición prima, para evitar cálculos grandes.

Indicador de logro

1.1 Efectúa operaciones elementales con raíces cuadradas.

Secuencia

En esta unidad se trabaja con raíces cuadradas, desde su definición, hasta la racionalización de denominadores. En esta clase se desarrollan las operaciones con raíces cuadradas: suma, resta, producto y división, así como la simplificación de raíces.

Propósito

El Problema inicial plantea las operaciones con raíces cuadradas en el orden con el que se trabajaron en noveno grado. Los estudiantes deben utilizar la descomposición en factores primos para efectuar la simplificación.

Solución de problemas:

a) $$\begin{aligned}\sqrt{21} \times \sqrt{14} &= \sqrt{21 \times 14}\\ &= \sqrt{(3 \times 7) \times (2 \times 7)}\\ &= \sqrt{2 \times 3 \times 7^2}\\ &= 7\sqrt{2 \times 3}\\ &= 7\sqrt{6}.\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}\sqrt{6} \times \sqrt{12} &= \sqrt{6 \times 12}\\ &= \sqrt{(2 \times 3) \times (3 \times 2^2)}\\ &= \sqrt{2 \times 2^2 \times 3^2}\\ &= 2 \times 3\sqrt{2}\\ &= 6\sqrt{2}.\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}\sqrt{24} \div \sqrt{6} &= \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}\\ &= \sqrt{\frac{\cancel{24}^{\,4}}{\cancel{6}^{\,1}}}\\ &= \sqrt{4}\\ &= 2.\end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned}\sqrt{15} \div \sqrt{27} &= \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{27}}\\ &= \sqrt{\frac{\cancel{15}^{\,5}}{\cancel{27}^{\,9}}}\\ &= \sqrt{\frac{5}{9}}\\ &= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}}\\ &= \frac{\sqrt{5}}{3}.\end{aligned}$$

e) Simplificando:

$\sqrt{40} = \sqrt{2^2 \times 2 \times 5} = 2\sqrt{10}.$

$\sqrt{90} = \sqrt{2 \times 3^2 \times 5} = 3\sqrt{10}.$

Efectuando:

$$\begin{aligned}\sqrt{40} + \sqrt{90} &= 2\sqrt{10} + 3\sqrt{10}\\ &= 5\sqrt{10}.\end{aligned}$$

f) Simplificando:

$\sqrt{80} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 5} = 2 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}.$

$\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \times 5} = 3\sqrt{5}.$

Efectuando:

$$\begin{aligned}\sqrt{80} + \sqrt{45} &= 4\sqrt{5} + 3\sqrt{5}\\ &= 7\sqrt{5}.\end{aligned}$$

g) Simplificando:

$\sqrt{28} = \sqrt{2^2 \times 7} = 2\sqrt{7}.$

$\sqrt{63} = \sqrt{3^2 \times 7} = 3\sqrt{7}.$

Efectuando:

$$\begin{aligned}\sqrt{28} - \sqrt{63} &= 2\sqrt{7} - 3\sqrt{7}\\ &= -\sqrt{7}.\end{aligned}$$

h) Simplificando:

$\sqrt{32} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2} = 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$

$\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}.$

Efectuando:

$$\begin{aligned}\sqrt{32} - \sqrt{8} &= 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\\ &= 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

1.2 Operaciones combinadas con raíces cuadradas (Repaso)

Problema inicial

Realiza las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{10})$

b) $(\sqrt{2}+\sqrt{15})(\sqrt{5}-\sqrt{6})$

Solución

a) $\sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{10}) = \sqrt{2}\times\sqrt{6}+\sqrt{2}\times\sqrt{10}$ Aplicando la propiedad distributiva,

$= \sqrt{2\times 6}+\sqrt{2\times 10}$

$= \sqrt{12}+\sqrt{20}$ se puede hacer la descomposición prima de una sola vez,

$= \sqrt{2^2\times 3}+\sqrt{2^2\times 5}$

$= 2\sqrt{3}+2\sqrt{5}.$

Por lo tanto, $\sqrt{2}\,(\sqrt{6}+\sqrt{10}) = 2\sqrt{3}+2\sqrt{5}$.

b) $(\sqrt{2}+\sqrt{15})(\sqrt{5}-\sqrt{6}) = \sqrt{2}\times\sqrt{5}-\sqrt{2}\times\sqrt{6}+\sqrt{15}\times\sqrt{5}-\sqrt{15}\times\sqrt{6}$ Efectuando el producto,

$= \sqrt{2\times 5}-2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-\sqrt{3^2\times 5\times 2}$ realizando la descomposición prima,

$= \sqrt{10}-2\sqrt{3}+5\sqrt{3}\ -3\sqrt{10}$

$= -2\sqrt{10}+3\sqrt{3}.$

Por lo tanto, $(\sqrt{2}+\sqrt{15})(\sqrt{5}-\sqrt{6}) = -2\sqrt{10}+3\sqrt{3}$.

Conclusión

En las operaciones combinadas con radicales se realizan los siguientes pasos:

1. Se efectúan las multiplicaciones y divisiones.
2. Se simplifican las raíces cuadradas.
3. Se efectúan las sumas y restas de raíces semejantes.

Recuerda la propiedad distributiva y los productos notables:

$$a\,(b+c) = ab+ac$$
$$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$$

Problemas

Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{2}(\sqrt{14}+\sqrt{5})$

b) $\sqrt{6}\,(\sqrt{3}-\sqrt{8})$

c) $\sqrt{5}\,(4\sqrt{10}+7\sqrt{15})$

d) $(2-\sqrt{18})(2+\sqrt{18})$

e) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$

f) $(\sqrt{8}-\sqrt{6})^2$

g) $(\sqrt{5}+\sqrt{12})(\sqrt{10}+\sqrt{24})$

h) $(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{21}-\sqrt{15})$

i) $(\sqrt{12}-4)(\sqrt{6}+9)$

Indicador de logro

1.2 Efectúa operaciones combinadas con raíces cuadradas.

Secuencia

En la clase anterior se trabajaron las operaciones con raíces separadamente; en esta clase se desarrollan las operaciones combinadas. Siempre se debe recalcar la simplificación de los resultados.

Propósito

En la Solución se sugiere a los estudiantes realizar el paso de la descomposición prima desde la multiplicación para no efectuar el producto. En los Problemas puede sugerirse a los estudiantes el uso del paréntesis para la multiplicación.

Solución de problemas:

a) $\sqrt{2}(\sqrt{14}+\sqrt{5}) = \sqrt{2}\times\sqrt{14}+\sqrt{2}\times\sqrt{5} = \sqrt{2\times 14}+\sqrt{2\times 5} = \sqrt{2^2\times 7}+\sqrt{10} = 2\sqrt{7}+\sqrt{10}$

b) $\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{8}) = \sqrt{6}\times\sqrt{3}-\sqrt{6}\times\sqrt{8} = \sqrt{6\times 3}-\sqrt{6\times 8} = \sqrt{2\times 3^2}-\sqrt{2^2\times 2^2\times 3} = 3\times\sqrt{2}-2\times 2\sqrt{3} = 3\sqrt{2}-4\sqrt{3}$

c)
$$\begin{aligned}\sqrt{5}(4\sqrt{10}+7\sqrt{15}\,) &= \sqrt{5}\times 4\sqrt{10}+\sqrt{5}\times 7\sqrt{15}\\ &= 4\sqrt{5\times 10}+7\sqrt{5\times 15}\\ &= 4\sqrt{2\times 5^2}+7\sqrt{3\times 5^2}\\ &= 4\times 5\times\sqrt{2}+7\times 5\times\sqrt{3}\\ &= 20\sqrt{2}+35\sqrt{3}\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}(2-\sqrt{18})(2+\sqrt{18}) &= 2^2-(\sqrt{18})^2\\ &= 4-18\\ &= -14\end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned}(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 &= (\sqrt{2})^2+2(\sqrt{2})(\sqrt{3})+(\sqrt{3})^2\\ &= 2+2\sqrt{2\times 3}+3\\ &= 2+2\sqrt{6}+3\\ &= 5+2\sqrt{6}\end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned}(\sqrt{8}-\sqrt{6})^2 &= (\sqrt{8})^2-2(\sqrt{8})(\sqrt{6})+(\sqrt{6})^2\\ &= 14-2\sqrt{8\times 6}\\ &= 14-2\sqrt{2^2\times 2^2\times 3}\\ &= 14-2\times 2\times 2\sqrt{3}\\ &= 14-8\sqrt{3}\end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned}(\sqrt{5}+\sqrt{12})(\sqrt{10}+\sqrt{24}) &= \sqrt{5}\times\sqrt{10}+\sqrt{5}\times\sqrt{24}+\sqrt{12}\times\sqrt{10}+\sqrt{12}\times\sqrt{24}\\ &= \sqrt{5\times 10}+\sqrt{5\times 24}+\sqrt{12\times 10}+\sqrt{12\times 24}\\ &= \sqrt{2\times 5^2}+\sqrt{5\times 2^2\times 2\times 3}+\sqrt{2^2\times 3\times 2\times 5}+\sqrt{2^2\times 2^2\times 2\times 3^2}\\ &= 5\sqrt{2}+2\sqrt{30}+2\sqrt{30}+2\times 2\times 3\sqrt{2}\\ &= 5\sqrt{2}+2\sqrt{30}+2\sqrt{30}+12\sqrt{2}\\ &= 17\sqrt{2}+4\sqrt{30}\end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned}(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{21}-\sqrt{15}) &= \sqrt{7}\times\sqrt{21}-\sqrt{7}\times\sqrt{15}-\sqrt{5}\times\sqrt{21}+\sqrt{5}\times\sqrt{15}\\ &= \sqrt{7\times 21}-\sqrt{7\times 15}-\sqrt{5\times 21}+\sqrt{5\times 15}\\ &= \sqrt{3\times 7^2}-\sqrt{105}-\sqrt{105}+\sqrt{3\times 5^2}\\ &= 7\sqrt{3}-2\sqrt{105}+5\sqrt{3}\\ &= 12\sqrt{3}-2\sqrt{105}\end{aligned}$$

i)
$$\begin{aligned}(\sqrt{12}-4)(\sqrt{6}+9) &= \sqrt{12}\times\sqrt{6}+\sqrt{12}\times 9-4\times\sqrt{6}-36\\ &= \sqrt{12\times 6}+9\sqrt{12}-4\sqrt{6}-36\\ &= \sqrt{2^2\times 2\times 3^2}+9\sqrt{2^2\times 3}-4\sqrt{6}-36\\ &= 6\sqrt{2}+18\sqrt{3}-4\sqrt{6}-36\end{aligned}$$

1.3 Racionalización con denominador $\sqrt{a}$

Problema inicial

Racionaliza el denominador y simplifica si es posible:

a) $\frac{3}{\sqrt{6}}$ b) $\frac{2}{\sqrt{20}}$

Solución

a)
$$\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$$
$$= \frac{3 \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}}$$
$$= \frac{{}^{1}\cancel{3}\sqrt{6}}{\cancel{6}_{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Multiplicando y dividiendo por $\sqrt{6}$, observa que $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 1$,

Por lo tanto, $\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

b) Simplificando la raíz cuadrada,
$$\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \times 5}$$
$$= 2\sqrt{5}$$

sustituyendo y racionalizando,
$$\frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{\cancel{2}^{1}}{{}_{1}\cancel{2}\sqrt{5}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$
$$= \frac{1 \times \sqrt{5}}{5}$$
$$= \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Por lo tanto, $\frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Conclusión

Para racionalizar el denominador de $\frac{b}{\sqrt{a}}$ se realizan los siguientes pasos:

1. Se multiplica por: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$.
2. Se simplifica el resultado cuando sea posible: $\frac{b}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{a}$.

Racionalizar una fracción es encontrar una fracción equivalente con denominador entero.

Problemas

1. Racionaliza el denominador y simplifica siempre que sea posible.

a) $\frac{5}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{7}{\sqrt{14}}$ c) $\frac{3}{\sqrt{15}}$ d) $\frac{4}{\sqrt{8}}$

e) $\frac{6}{\sqrt{18}}$ f) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{12}}$ g) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{10}}$ h) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{72}}$

Revisa si se simplifica antes de racionalizar.

2. Racionaliza el denominador y determina cuáles son iguales.

a) $\frac{2}{\sqrt{10}}$ b) $\frac{3}{\sqrt{7}}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ d) $\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{21}}$

e) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{21}}$ f) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ g) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ h) $\frac{3\sqrt{7}}{7\sqrt{3}}$

Indicador de logro

1.3 Racionaliza fracciones con denominador $\sqrt{a}$.

Secuencia

Ahora que ya se han utilizado las operaciones con raíces cuadradas se aborda la racionalización de fracciones con denominador $\sqrt{a}$, se sugiere simplificar antes para evitar cálculos grandes.

Posibles dificultades

En algunos problemas la división permite la simplificación por lo que es bueno mencionarla; sin embargo, puede dar lugar a confusión, en tal caso es mejor simplificar después de racionalizar.

Solución de problemas:

1a) $\frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$

1b) $\frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{7}{\sqrt{14}} \times \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = \frac{7\sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{2}$

1c) $\frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{3}{\sqrt{15}} \times \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = \frac{3\sqrt{15}}{15} = \frac{\sqrt{15}}{5}$

1d) Simplificando:

$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$.

Racionalizando:

$\frac{4}{\sqrt{8}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$

1e) Simplificando:

$\sqrt{18} = \sqrt{2 \times 3^2} = 3\sqrt{2}$.

Racionalizando:

$\frac{6}{\sqrt{18}} = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$

1f) Simplificando:

$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}$.

Racionalizando:

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}\times\sqrt{3}}{2 \times 3} = \frac{\sqrt{6\times 3}}{6} = \frac{\sqrt{2\times 3^2}}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{6}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

En este caso, también puede efectuar primero la división y luego racionalizar:

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{6}{12}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

1g) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{3}\times\sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{3 \times 10}}{10} = \frac{\sqrt{30}}{5}$

1h) Simplificando:

$\sqrt{72} = \sqrt{2^2 \times 2 \times 3^2} = 2 \times 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

Racionalizando:

$$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{72}} = \frac{\sqrt{15}}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{15}}{6\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{15}\times\sqrt{2}}{6 \times 2} = \frac{\sqrt{15 \times 2}}{12} = \frac{\sqrt{30}}{12}.$$

2a) $\frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

2b) $\frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

2c) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}\times\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{5 \times 2}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

2d) $\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{21}} \times \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{35}\times\sqrt{21}}{21} = \frac{\sqrt{3 \times 5 \times 7^2}}{21} = \frac{7\sqrt{15}}{21} = \frac{\sqrt{15}}{3}$

2e) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{21}} \times \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{27}\times\sqrt{21}}{21} = \frac{\sqrt{3^2\times 3^2\times 7}}{21} = \frac{3\times 3\sqrt{7}}{21} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

2f) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{7}}{7} = \frac{\sqrt{3 \times 7}}{7} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

2g) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{2 \times 5}}{5} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

2h) $\frac{3\sqrt{7}}{7\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{7}}{7\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{7}\times\sqrt{3}}{7 \times 3} = \frac{\sqrt{7 \times 3}}{7} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

Son iguales los siguientes pares:

a) y g)

b) y e)

f) y h)

1.4 Racionalización con denominador binomio

Problema inicial

¿De qué manera podrías racionalizar el denominador?

a) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

Solución

Recordando el producto notable “Suma por diferencia de binomios”: $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$

Se puede efectuar este producto para una suma por diferencia de dos raíces cuadradas:

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$$

El producto de una suma de raíces cuadradas, de números racionales, por su diferencia es un número racional.

Ahora se aplicará esto a los ejercicios propuestos.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ multiplicando y dividiendo por una resta de términos

$$= \frac{2 \times (\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}$$

$$= \frac{2 \times (\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2}$$

$$= \frac{2 \times (\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}.$$

Por lo tanto, $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}$.

b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ multiplicando y dividiendo por una suma de términos

$$= \frac{1 \times (\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1}$$

$$= \sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

Por lo tanto, $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$.

Definición

A la expresión $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ se le denomina la **conjugada** de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. La **conjugada** de una expresión de dos términos se obtiene cambiando el signo del segundo término. Dos expresiones son **conjugadas** si una es la **conjugada** de la otra.

Para **racionalizar** una fracción cuyo denominador sea suma o diferencia con raíces cuadradas, se multiplica y divide por la **conjugada** del denominador.

Ejemplo

Racionaliza el denominador $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-2}$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-2} \times \frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2}$$

la conjugada de $\sqrt{7}-2$ es $\sqrt{7}+2$,

$$= \frac{\sqrt{3} \times (\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}$$

efectuando el producto notable,
$(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2) = (\sqrt{7})^2 - (2)^2 = 7 - 4 = 3$,

$$= \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{7} + \sqrt{3} \times 2}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{21}+2\sqrt{3}}{3}.$$

Por lo tanto, $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-2} = \dfrac{\sqrt{21}+2\sqrt{3}}{3}$.

Problemas

Racionaliza el denominador de las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}+\sqrt{6}}$ d) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{8}+\sqrt{6}}$ f) $\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{5}}{\sqrt{15}-\sqrt{5}}$ g) $\dfrac{4}{\sqrt{10}+3}$ h) $\dfrac{\sqrt{14}+2}{1-\sqrt{7}}$

Indicador de logro

1.4 Racionaliza fracciones con denominador $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ o $a \pm \sqrt{b}$.

Secuencia

Con la base de las operaciones combinadas se estudia ahora la racionalización de fracciones con denominador binomio.

Propósito

En el Ejemplo se indica a los estudiantes que al efectuar el producto notable (suma por diferencia) escriban la diferencia de los cuadrados ya calculados, omitiendo el proceso.

Solución de problemas:

a) $\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6-2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b) $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})} = \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{7-5} = \sqrt{7}+\sqrt{5}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}+\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}\times(\sqrt{12}-\sqrt{6})}{(\sqrt{12}+\sqrt{6})(\sqrt{12}-\sqrt{6})} = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{12}-\sqrt{3}\times\sqrt{6}}{12-6} = \frac{\sqrt{3\times 12}-\sqrt{3\times 6}}{6} = \frac{\sqrt{2^2\times 3^2}-\sqrt{2\times 3^2}}{6} = \frac{6-3\sqrt{2}}{6} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{11}-\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{6}\times(\sqrt{11}+\sqrt{10})}{(\sqrt{11}-\sqrt{10})(\sqrt{11}+\sqrt{10})} = \frac{\sqrt{6}\times\sqrt{11}+\sqrt{6}\times\sqrt{10})}{11-10} = \frac{\sqrt{6\times 11}+\sqrt{6\times 10}}{1} = \sqrt{66}+\sqrt{2^2\times 3\times 5} = \sqrt{66}+2\sqrt{15}$

e) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{8}+\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{8}-\sqrt{6})}{(\sqrt{8}+\sqrt{6})(\sqrt{8}-\sqrt{6})} = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{8}-\sqrt{3}\times\sqrt{6}+\sqrt{2}\times\sqrt{8}-\sqrt{2}\times\sqrt{6}}{8-6} = \frac{\sqrt{3\times 8}-\sqrt{3\times 6}+\sqrt{2\times 8}-\sqrt{2\times 6}}{2}$

$= \frac{\sqrt{2^2\times 2\times 3}-\sqrt{2\times 3^2}+\sqrt{2^2\times 2^2}-\sqrt{2^2\times 3}}{2} = \frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}+4-2\sqrt{3}}{2}$

f) $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{5}}{\sqrt{15}-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{15}+\sqrt{5})(\sqrt{15}+\sqrt{5})}{(\sqrt{15}-\sqrt{5})(\sqrt{15}+\sqrt{5})} = \frac{(\sqrt{15})^2+2\sqrt{15}\times\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}{15-5} = \frac{15+2\sqrt{15\times 5}+5}{10} = \frac{20+2\sqrt{3\times 5^2}}{10} = \frac{20+2\times 5\sqrt{3}}{10} = 2+\sqrt{3}$

g) $\frac{4}{\sqrt{10}+3} = \frac{4\times(\sqrt{10}-3)}{(\sqrt{10}+3)(\sqrt{10}-3)} = \frac{4\sqrt{10}-12}{10-9} = \frac{4\sqrt{10}-12}{1} = 4\sqrt{10}-12$

h) $\frac{\sqrt{14}+2}{1-\sqrt{7}} = \frac{(\sqrt{14}+2)(1+\sqrt{7})}{(1-\sqrt{7})(1+\sqrt{7})} = \frac{\sqrt{14}\times 1+\sqrt{14}\times\sqrt{7}+2\times 1+2\times\sqrt{7}}{1-7} = \frac{\sqrt{14}+\sqrt{14\times 7}+2+2\sqrt{7}}{-6} = \frac{\sqrt{14}+\sqrt{2\times 7^2}+2+2\sqrt{7}}{-6}$

$= -\frac{\sqrt{14}+7\sqrt{2}+2+2\sqrt{7}}{6}$

1.5 Los números neperiano y áureo

Problema inicial

El número neperiano e

Su valor es 2.718281828459045... y puede aproximarse mediante la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ donde n es un número natural muy grande.

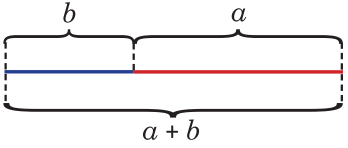
A partir de lo anterior realiza lo siguiente:

1. Observa que el valor numérico de la expresión anterior aumenta, si aumenta el valor de n.
2. Encuentra el valor numérico de la expresión anterior con los valores n = 1000, n = 10 000, n = 100 000.

El número áureo $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Es la razón de las longitudes de dos segmentos distintos a y b a través de la relación: La suma de las longitudes es al segmento mayor, como el segmento mayor es al segmento menor.

Algebraicamente, la proporción dada se escribe así:



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi$$

A partir de la proporción calcula ϕ.

Solución

1. Se evalúan los valores con una calculadora.

n	1	2	3	4
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2.25	2.3703...	2.4414...

Al aumentar el valor de n aumenta el valor de la expresión.

2. Se elabora una tabla con los valores dados.

n	1000	10 000	100 000
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2.71692...	2.71814...	2.71826...

Al tomar valores “muy grandes” de n, se aproxima al valor de e dado al principio.

$\phi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$ y $\frac{a}{b} = \frac{\phi}{1}$, luego $\frac{b}{a} = \frac{1}{\phi}$

$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$, sustituyendo en la proporción,

$\phi^2 = 1 + \phi$, multiplicando por ϕ,

$\phi^2 - \phi - 1 = 0$, transponiendo los términos del miembro izquierdo.

Se aplica la fórmula general de la ecuación cuadrática para a = 1, b = −1 y c = −1

$$\phi = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

ϕ es positivo, pues es la razón de longitudes.

Por lo tanto, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Conclusión

El número e es irracional, por lo que su valor exacto solo es aproximable.

Leonard Euler, en Introductio in Analysin infinitorum de 1748, dio dos expresiones para aproximar el valor de e.

$e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ y $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$

J.L. Coolidge. (1950). *The number e*.

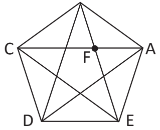
El número ϕ es irracional pues no puede escribirse como el cociente de dos números enteros.

El número áureo es una constante que aparece con frecuencia en diversos campos de la naturaleza: crecimiento de las hojas, esqueletos de los mamíferos, etc. Además, tiene presencia en el arte y la música, pues tal proporción, se cree, tiene relación con la percepción de la armonía y belleza.

Casans, A. (2001). *Aspectos estéticos de la divina proporción*.

Problemas

1. Utilizando la expresión $e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$, con n un número natural y $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$, aproxima el valor de e hasta n = 10.
2. En el pentágono regular ABCDE de lado 1 se han trazado todas las diagonales, realiza lo siguiente:
   a) Demuestra que ΔABC ~ ΔBFA.
   b) Demuestra que ΔBCF es isósceles.
   c) Demuestra que FA = $a - 1$, donde a es la longitud de la diagonal $\overline{\text{AC}}$.
   d) Demuestra que $a = \frac{1}{a-1}$.
   e) Encuentra el valor de a.



Indicador de logro

1.5 Realiza cálculos de los números neperiano y áureo.

Secuencia

Se presentan dos números reales que poseen como peculiaridad las siguientes características: el número neperiano se obtiene como aproximación de ciertas expresiones algebraicas y la razón áurea como una proporción geométrica.

Posibles dificultades

Respecto al problema 2, los estudiantes pueden haber olvidado varias nociones geométricas, por lo que se sugiere recordar las propiedades del pentágono regular como: todos los lados y ángulos tienen igual medida.

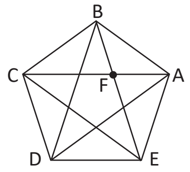
Solución de problemas:

1.

n	1	2	3	4	5
$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\dots+\frac{1}{n!}$	2	2.5	$2.\overline{6}$	$2.708\overline{3}$	$2.71\overline{6}$
n	6	7	8	9	10
$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\dots+\frac{1}{n!}$	$2.7180\overline{5}$	$2.71\overline{825396}$	2.7182787698...	2.7182815255...	2.7182818011...

2a) En el triángulo ABC.
∢ABC = 180° × 3 ÷ 5 =108°
AB = BC ⇒ ΔABC es isósceles ⇒ ∢BCA = ∢CAB.

Sea θ = ∢BCA = ∢CAB
⇒ 2θ + 108° = 180° ⇒ θ = 36°.
Así ∢BCA = ∢CAB = 36°.



Análogamente se prueba en ΔABE que
∢BEA = ∢ABE = 36°.
Por lo que en el triángulo BFA
∢ABE = ∢CAB = ∢FAB = 36°.

Por lo tanto, por criterio AA se tiene que
ΔABC ~ ΔBFA.

2b) En el triángulo BCF,
∢FBC = ∢ABC – ∢ABF
⇒ ∢FBC = 108° – 36° = 72°

Luego, ∢CFB es exterior al ΔABF
⇒ ∢CFB = ∢FAB + ∢ABF
⇒ ∢CFB = 36° + 36° = 72 °

⇒ ∢FBC = ∢CFB = 72°.

Por lo tanto, ΔBCF es isósceles.

2c) Se tiene que
CF + FA = AC ⇒ FA = AC – CF ⇒ FA = a – CF
ΔBCF es isósceles con ∢FBC = ∢CFB = 72°,
entonces CF = CB = 1.
Por lo tanto, FA = a – 1.

2d) Del resultado en 2a), ΔABC ~ ΔBFA, entonces

$$\frac{\text{AC}}{\text{BA}} = \frac{\text{BA}}{\text{FA}} \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{1}{a-1} \Rightarrow a = \frac{1}{a-1}.$$

2e) $a = \frac{1}{a-1} \Rightarrow a(a-1) = 1 \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0$

Aplicando la fórmula cuadrática: $a = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Como $a > 0$, $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (número áureo).

1.6 Definición de los números reales: la recta numérica

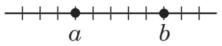
Problema inicial

1. Dibuja la recta numérica y ubica los siguientes números:

a) 3 b) −2 c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{9}{5}$ e) −2.5 f) 1.4 g) $\sqrt{5}$ h) ϕ i) −1 j) π

2. Clasifica cada uno de los números anteriores como racional e irracional.

En la recta numérica b está a la derecha de a si y solo si $a < b$.



Solución

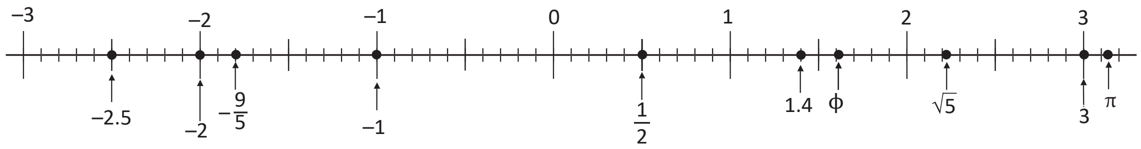
1. Se utilizan los valores aproximados en decimales de los números dados:

a) 3 = 3 b) −2 = −2 c) $\frac{1}{2}$ = 0.5 d) $-\frac{9}{5} = -1.8$ e) −2.5 = −2.5

f) 1.4 g) $\sqrt{5}$ = 2.236... h) ϕ = 1.618... i) −1 j) π = 3.141...

Antes de colocar los números en la recta numérica, se ordenan de menor a mayor.

$-2.5 < -2 < -\frac{9}{5} < -1 < \frac{1}{2} < 1.4 < \phi < \sqrt{5} < 3 < \pi$



a) 3 es racional b) −2 es racional c) $\frac{1}{2}$ es racional d) $-\frac{9}{5}$ es racional

e) $-2.5 = -\frac{5}{2}$ es racional f) $1.4 = \frac{7}{5}$ es racional g) $\sqrt{5}$ es irracional h) ϕ es irracional

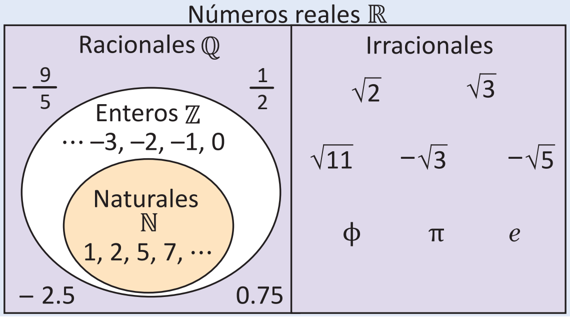
i) −1 es racional j) π es irracional

Definición

El conjunto de los **números reales** está formado por los números racionales y los números irracionales.

El símbolo utilizado para representar el conjunto de los números reales es ℝ.

La recta numérica es una representación del conjunto de los números reales: a cada número real le corresponde un único punto en la recta y viceversa.



Problemas

1. Ubica los siguientes números en la recta numérica.

a) $\frac{2}{5}$ b) 1 c) −3 d) $\sqrt{3}$

e) $-\frac{8}{5}$ f) $-0.\overline{5}$ g) 2.9 h) 0.15

i) $-\frac{11}{10}$ j) e k) $\sqrt{2}$ l) $\frac{7}{3}$

2. Determina a cuáles de los siguientes conjuntos: ℕ, ℤ, ℚ pertenece cada número del problema 1 o si es un número irracional.

Indicador de logro

1.6 Ubica los números reales en la recta numérica.

Secuencia

En esta clase se explora la relación de orden de los números reales a través de la ubicación de puntos en la recta numérica. Posteriormente, el estudiante utilizará estos conocimientos para elaborar gráficas y establecer soluciones de desigualdades.

Posibles dificultades

Es posible que el orden no esté claro, por lo que es necesario que los estudiantes dibujen la recta numérica con marcas entre las unidades para diferenciar al menos los valores de las décimas entre los números.

Solución de problemas:

1a) $\frac{2}{5} = 0.4$

1b) 1

1c) -3

1d) $\sqrt{3} = 1.73...$

1e) $-\frac{8}{5} = -1.6$

1f) $-0.\overline{5} = -0.555...$

1g) 2.9

1h) 0.15

1i) $-\frac{11}{10} = -1.1$

1j) $e = 2.71....$

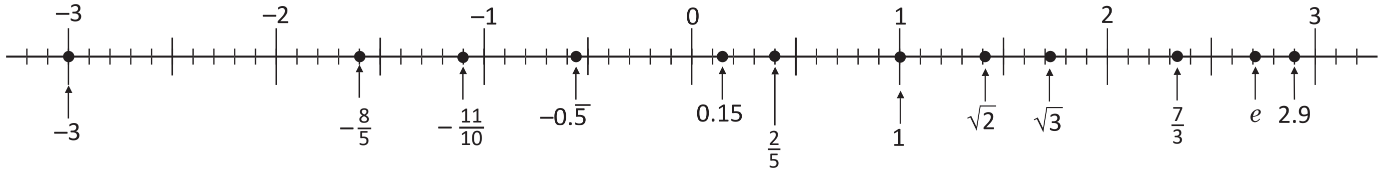
1k) $\sqrt{2} = 1.41....$

1l) $\frac{7}{3} = 2.333....$

Se ordenan de menor a mayor.

$$-3 < -\frac{8}{5} < -\frac{11}{10} < -0.5 < 0.15 < \frac{2}{5} < 1 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < \frac{7}{3} < e < 2.9$$

Se utilizan los valores aproximados en decimales de los números dados:



2a) $\frac{2}{5}$ es racional.

2b) 1 es natural.

2c) –3 es entero.

2d) $\sqrt{3} = 1.73...$ es irracional.

2e) $-\frac{8}{5}$ es racional.

2f) $-0.\overline{5} = -\frac{5}{9}$ es racional.

2g) $2.9 = \frac{29}{10}$ es racional.

2h) $0.15 = \frac{3}{20}$ es racional.

2i) $-\frac{11}{10}$ es racional.

2j) $e = 2.71...$ es irracional.

2k) $\sqrt{2} = 1.41...$ es irracional.

2l) $\frac{7}{3}$ es racional.

En el problema 2, pueden haber distintas soluciones. Por ejemplo, en 2b), 1 es natural, entero y racional.

1.7 Definición de los números reales: números decimales

Problema inicial

Escribe como un número decimal los siguientes números reales:

a) 3 b) –2 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{5}{3}$ e) $\frac{1}{6}$ f) $\sqrt{7}$ g) e h) π

Solución

a) 3.000..., es un número decimal, su parte entera es 3 y su parte decimal es 0.000...

b) –2.000..., es un número decimal, su parte entera es –2 y su parte decimal es 0.000...

c) $\frac{3}{2}$, se divide $\frac{3}{2} = 3 \div 2 = 1.5$.

d) $\frac{5}{3}$, se divide $\frac{5}{3} = 5 \div 3 = 1.\overline{6}$.

e) $\frac{1}{6}$, se divide $\frac{1}{6} = 1 \div 6 = 0.1\overline{6}$.

f) $\sqrt{7} = 2.645751...$

g) $e = 2.7182818...$

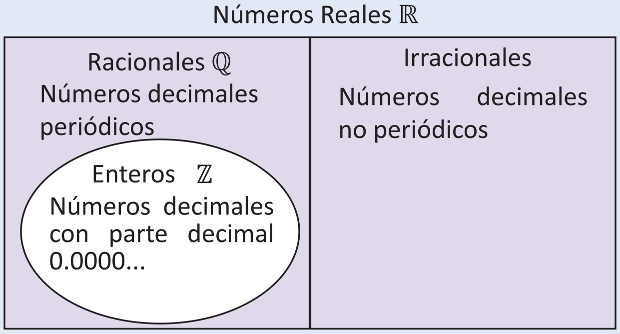
h) π = 3.141592...

Definición

Los números decimales se utilizan para representar partes de la unidad, por lo que un número decimal se escribe de la forma $a.bcdefg\ldots$ donde a es un número entero y los números b, c, d, e, f, $g\ldots$ pueden ser los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Al número a se le denomina la **parte entera** y al número $0.bcdefg\ldots$ se le denomina **parte decimal**.

Así, el conjunto de los **números reales** ℝ está formado por todos los números decimales:



Problemas

Clasifica cada uno de los siguientes números decimales como racional o irracional.

a) 0.125

b) 0.101001000100001...

c) 0

d) 5.75757575...

e) –7.321

f) 1.221212121212121...

g) –10

h) 3.333333...

i) 3.141592653589...

j) 4.12666666

k) 0.123456789101112...

l) –0.61803398874989...

Indicador de logro

1.7 Clasifica los números decimales en racionales e irracionales.

Secuencia

En noveno grado se estudió la definición de los números irracionales como aquellos números reales que no pueden representarse como el cociente de dos enteros. En esta clase se establecen las características de los números reales por su representación decimal.

Posibles dificultades

Es de observar que el concepto implícito de decimal periódico utilizado en la clase, incluye a los números enteros y los decimales con parte decimal finita, por la posibilidad de adicionar ceros en la parte decimal; en ese sentido, cada número real por su representación decimal es periódico o no periódico.

Solución de problemas:

a) 0.125 es racional pues es periódico.

b) 0.101001000100001... es irracional pues es no periódico.

c) 0 es racional pues es periódico.

d) 5.75757575... es racional pues es periódico.

e) –7.321 es racional pues es periódico.

f) 1.2212121212121... es racional pues es periódico.

g) –10 es racional pues es periódico.

h) 3.333333... es racional pues es periódico.

i) 3.1415926535... es irracional pues es no periódico.

j) 4.12666666 es racional pues es periódico.

k) 0.123456789101112... es irracional pues es no periódico.

l) –0.61803398874... es irracional pues es no periódico.

1.8 El valor absoluto de un número real

Problema inicial

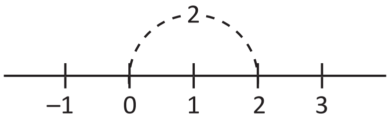
Calcula el valor absoluto de los siguientes números:

a) 2 b) –3 c) $\sqrt{7}$ d) $-\frac{3}{4}$

Solución

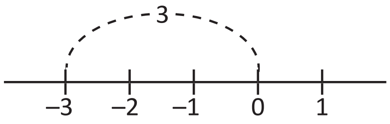
El valor absoluto de un número real es la distancia de ese número a cero en la recta numérica.

a) 2



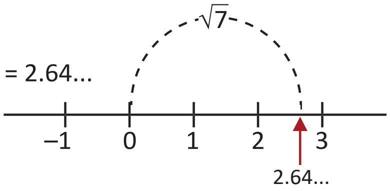
$|2| = 2$

b) –3



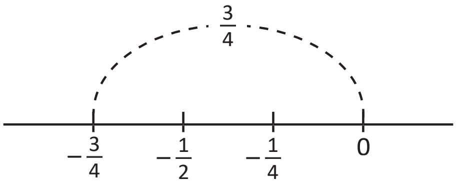
$|-3| = 3$

c) $\sqrt{7} = 2.64...$



$|\sqrt{7}| = \sqrt{7}$

d) $-\frac{3}{4}$



$\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$

El valor absoluto de un número positivo es el mismo número:

$|2| = 2$ $|\sqrt{7}| = \sqrt{7}$

El valor absoluto de un número negativo es igual a su número opuesto:

$|-3| = 3$ $\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$

Observa que:

$-(-3) = 3$ y $-\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$

Definición

Se observa que:

- El valor absoluto de un número positivo es el mismo número, es decir, si $a > 0$ entonces $|a| = a$.
- El valor absoluto de cero es cero: $|0| = 0$.
- El valor absoluto de un número negativo es su número opuesto: si $a < 0$ entonces $|a| = -a > 0$.
- Cada número real determina un único valor absoluto, es decir, un número tiene un único valor absoluto.

El valor absoluto de un número real a se define de la siguiente manera:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Recuerda que:

$\sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4$, $\sqrt{0^2} = \sqrt{0} = 0$ y $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

Por lo que, para todo número real a se cumple que:

$\sqrt{a^2} = |a|$

Problemas

1. Encuentra el valor absoluto de los siguientes números:

a) $\sqrt{6}$ b) $\frac{1}{70}$ c) –0.11111 d) –153

e) e f) $-\phi$ g) 0 h) $-\frac{1}{3}$

2. Sean a y b dos números positivos, demuestra que: si $a \geq b$ entonces $|a - b| = a - b$.

Indicador de logro

1.8 Calcula el valor absoluto de números reales.

Secuencia

En séptimo grado, los estudiantes utilizaron el valor absoluto con la definición de la distancia al origen, ahora se define como una regla de asignación utilizando la noción de correspondencia.

Propósito

En la Solución se hace la observación de que obtener el valor absoluto de un número negativo tiene el mismo resultado que obtener su opuesto, con el objetivo de inducir su definición como función.

Solución de problemas:

1a) $|\sqrt{6}| = \sqrt{6}$

1b) $\left|\frac{1}{70}\right| = \frac{1}{70}$

1c) $|-0.11111| = -(-0.11111) = 0.11111$

1d) $|-153| = -(-153) = 153$

1e) $|e| = e$

1f) $|-\phi| = -(-\phi) = \phi$

1g) $|0| = 0$

1h) $\left|-\frac{1}{3}\right| = -\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

2. $a \geq b > 0$

Por casos:

Caso 1: si $a = b \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow |a - b| = |0| = 0 = a - b$.

Caso 2: si $a > b \Rightarrow a - b > 0 \Rightarrow |a - b| = a - b$.

1.9 Definición de intervalo

Problema inicial

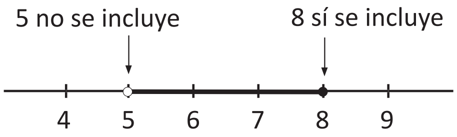
Escribe cómo se lee y representa en la recta numérica las siguientes desigualdades:

a) $5 < x \leq 8$　b) $-1 \leq x \leq 4$　c) $0 < x < 2$　d) $-3 \leq x < -1$

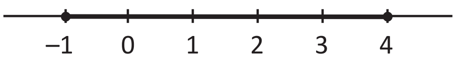
e) $x > 8$　f) $x < -4$　g) $x \leq 5$　h) $x \geq -2$

Solución

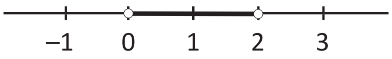
a) $5 < x \leq 8$, esta desigualdad se lee:
x mayor que 5 y menor o igual que 8.
Su representación en la recta es:



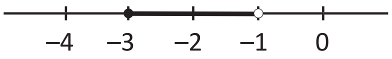
b) $-1 \leq x \leq 4$, esta desigualdad se lee:
x mayor o igual que -1 y menor o igual que 4.
Esta desigualdad se representa así:



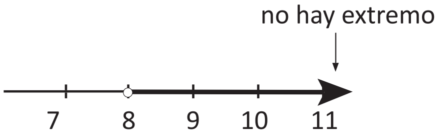
c) $0 < x < 2$, esta desigualdad se lee:
x mayor que 0 y menor que 2, por lo que su representación es:



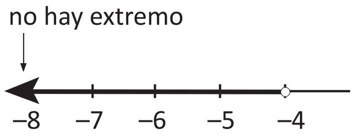
d) $-3 \leq x < -1$, esta desigualdad se lee:
x mayor o igual que -3 y menor que -1, por lo que su representación es:



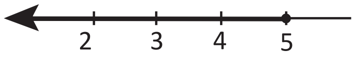
e) $x > 8$, esta desigualdad se lee:
x mayor que 8.
Se representa de la siguiente manera:



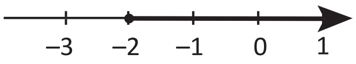
f) $x < -4$, esta desigualdad se lee:
x menor que -4.
Se representa de la siguiente manera:



g) $x \leq 5$, esta desigualdad se lee:
x menor o igual que 5.



h) $x \geq -2$, esta desigualdad se lee:
x mayor o igual que -2.



Definición

Un **intervalo** es una porción de la recta numérica representado por una semirrecta o un segmento de recta. Por ejemplo, los subconjuntos representados en el Problema inicial son intervalos: a), b), c) y d) son segmentos, y e), f), g) y h) son semirrectas.

Retomando el Problema inicial, la notación utilizada para representar un intervalo es:

a) $5 < x \leq 8 \Rightarrow]5, 8]$　b) $-1 \leq x \leq 4 \Rightarrow [-1, 4]$　c) $0 < x < 2 \Rightarrow]0, 2[$　d) $-3 \leq x < -1 \Rightarrow [-3, -1[$

A los números que aparecen en el intervalo se les llama **extremos del intervalo**.
Si el extremo del intervalo no se incluye, el corchete se escribe al revés : "]" al principio y "[" al final.

Lección 1

e) $x > 8 \Rightarrow]8, \infty[$ f) $x < -4 \Rightarrow]-\infty, -4[$ g) $x \leq 5 \Rightarrow]-\infty, 5]$ h) $x \geq -2 \Rightarrow [-2, \infty[$

El símbolo “∞” representa el infinito, mientras que “–∞” representa menos infinito. Estos símbolos en un intervalo indican que no existe otro número que sea extremo del intervalo.

El corchete correspondiente a –∞ o ∞ se coloca al revés, por ejemplo: “]–∞, 8]” y “]1, ∞[”.

La siguiente tabla resume la notación de los tipos de intervalos, su representación en la recta numérica y la notación como conjunto utilizando desigualdades:

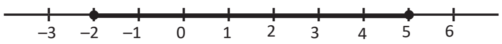
Tipo de intervalo	Notación de intervalo	Representación en la recta numérica	Notación de conjunto
Cerrado	$[a, b]$		$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
Semiabierto por la derecha	$[a, b[$		$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
Semiabierto por la izquierda	$]a, b]$		$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
Abierto	$]a, b[$		$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
Infinitos	$[a, \infty[$		$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
	$]a, \infty[$		$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
	$]-\infty, a]$		$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
	$]-\infty, a[$		$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

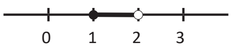
En la notación de conjunto, por ejemplo, el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ se lee: los elementos x que pertenecen a los números reales tal que x es mayor o igual que a y menor o igual que b.

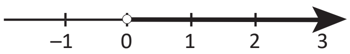
Problemas

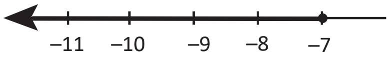
Representa los siguientes intervalos en las otras dos notaciones:

a)]–3, 0] b)]–∞, –5[c) [5, ∞[d)]2, 6[

e) 

f) 

g) 

h) 

i) $\{x \in \mathbb{R} \mid -9 < x < -5\}$

j) $\{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x \leq -2\}$

k) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -4\}$

l) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

Indicador de logro

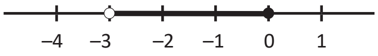
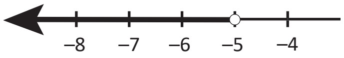
1.9 Representa intervalos en la recta numérica o en la notación de conjunto.

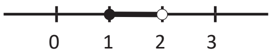
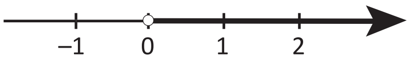
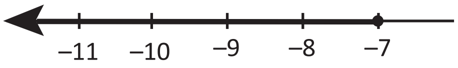
Secuencia

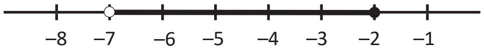
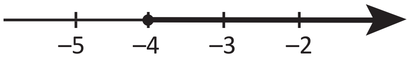
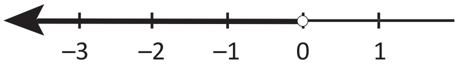
El estudiante conoció en Tercer Ciclo el conjunto de los números reales, así como algunos de sus subconjuntos. En esta clase conocerá otro tipo de subconjunto de los números reales: los intervalos, que son importantes para trabajar con desigualdades en la Unidad 3 y con funciones reales en la Unidad 4.

Propósito

Los estudiantes pueden representar números reales por medio de puntos en la recta numérica, por lo que en el Problema inicial se pretende que el estudiante deduzca la representación del segmento de recta o semirrecta para una desigualdad. Sin embargo, el primer ítem puede utilizarse como ejemplo.

Intervalo	Recta numérica	Notación de conjunto
a)]–3, 0]		$\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 0\}$
b)]–∞, –5[		$\{x \in \mathbb{R} \mid x < -5\}$
c) [5, ∞[		$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$
d)]2, 6[		$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 6\}$

	Recta numérica	Intervalo	Notación de conjunto
e)		[–2, 5]	$\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}$
f)		[1, 2[	$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$
g)		]0, ∞[	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
h)		]–∞, –7]	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -7\}$

Notación de conjunto	Intervalo	Recta numérica
i) $\{x \in \mathbb{R} \mid -9 < x < -5\}$	]–9, –5[	
j) $\{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x \leq -2\}$	]–7, –2]	
k) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -4\}$	[–4, ∞[	
l) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$	]–∞, 0[	

1.10 Practica lo aprendido

1. Racionaliza las siguientes fracciones:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ c) $\frac{1}{4+\sqrt{7}}$ d) $\frac{2}{2-\sqrt{3}}$

e) $\frac{\sqrt{3}+2}{1-\sqrt{3}}$ f) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{27}-\sqrt{8}}$ g) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ h) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}$

2. Sea n un número natural. Ubica en la recta numérica los números $\sqrt{n}$ tales que $2 < \sqrt{n} < 3$.

3. Encuentra el valor absoluto de los siguientes números:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}-\frac{3}{4}$ c) $\frac{5}{6}-\frac{1}{2}$ d) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

e) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ f) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ g) $\sqrt{10}-3$ h) $2\sqrt{7}-6$

Utiliza el resultado del problema 2 de la clase 1.8 y también que si a y b son números reales tales que $0 < a < b$ entonces $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

4. Justifica las siguientes afirmaciones:

a) Al efectuar la división $\sqrt{12} \div \sqrt{3}$ se obtiene un número entero.

b) Al efectuar la división $\sqrt{2} \div \sqrt{8}$ se obtiene un número racional.

c) El número áureo ϕ es menor que el neperiano e.

d) $\sqrt{2}+\sqrt{3} \neq \sqrt{5}$.

Utiliza la definición de raíz cuadrada.

e) Al efectuar la operación: $\phi^2 - \frac{1}{\phi}$ se obtiene un número entero.

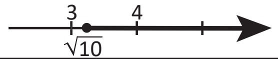
f) El valor absoluto de un número real nunca es un número negativo.

g) Sean a y b números reales, si $0 < b < a$ entonces $|b - a| = a - b$.

5. En los siguientes literales, ¿qué valores puede tomar la variable x para que la igualdad se cumpla?

a) $|x| = 1$ b) $|x| = 6$ c) $|x| = 0$ d) $|x + 1| = 3$

6. Completa el siguiente cuadro sobre las representaciones de intervalos.

Intervalo	Notación de conjunto	Representación en la recta numérica
$]-4, 7]$		
		
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 9\}$	
$[\sqrt{2}, \phi]$		
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$	
$[0, 2\pi[$		
	$\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$	
		

Indicador de logro

1.10 Resuelve problemas correspondientes a los números reales.

1a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

1b) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

1c) $\frac{4 - \sqrt{7}}{9}$

1d) $4 + 2\sqrt{3}$

1e) $-\frac{5 + 3\sqrt{3}}{2}$

1f) $\frac{13 + 5\sqrt{6}}{19}$

1g) Efectuando el cambio de variable $y = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{1}{y + \sqrt{5}} = \frac{y - \sqrt{5}}{(y + \sqrt{5})(y - \sqrt{5})} = \frac{y - \sqrt{5}}{y^2 - 5}$$

$$y^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{2 \times 3} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}.$$

Sustituyendo $y = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ y $y^2 = 5 + 2\sqrt{6}$

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{y - \sqrt{5}}{y^2 - 5} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{5 + 2\sqrt{6} - 5} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{2\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{6})}{2(6)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{6})2 + \sqrt{3}(\sqrt{6}) - \sqrt{5}(\sqrt{6})}{12} = \frac{\sqrt{2^2 \times 3} + \sqrt{2 \times 3^2} - \sqrt{30}}{12} = \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{30}}{12}.$$

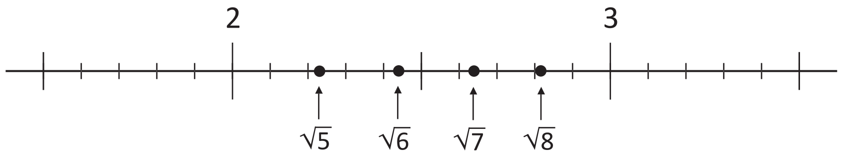
1h) $\frac{2 + 5\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{6}}{23}$

2. Para los números naturales la condición $2 < \sqrt{n} < 3$ equivale a la condición $4 < n < 9$.
Así los números naturales buscados son 5, 6, 7 y 8.

También se puede resolver a prueba y error.

Ahora utilizando su valor decimal para ubicarlos en la recta numérica.

$\sqrt{5} = 2.23...$ $\sqrt{6} = 2.44...$ $\sqrt{7} = 2.64...$ $\sqrt{8} = 2.82...$



3a) $\frac{5}{6}$

3b) $\frac{1}{12}$

3c) $\frac{1}{3}$

3d) $|\sqrt{2} + \sqrt{3}|$
La suma de dos números positivos es un número positivo, es decir $\sqrt{2} + \sqrt{3} > 0$ por lo que $|\sqrt{2} + \sqrt{3}| = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

3e) $\sqrt{7} - \sqrt{5}$.
Puesto que $5 < 7 \Rightarrow \sqrt{5} < \sqrt{7}$.
Aplicando el resultado del problema 2, clase 1.8 se tiene que $|\sqrt{7} - \sqrt{5}| = \sqrt{7} - \sqrt{5}$.

3f) $|\sqrt{2} - \sqrt{3}|$.
Puesto que $2 < 3 \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{3}$
$\Rightarrow \sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{2} + (-\sqrt{3})$ es un número negativo
$\Rightarrow |\sqrt{2} - \sqrt{3}| = -(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = -\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

3g) $\sqrt{10} - 3 = \sqrt{10} - \sqrt{9}$
$9 < 10 \Rightarrow \sqrt{9} < \sqrt{10} \Rightarrow 3 < \sqrt{10}$.
Aplicando el resultado del problema 2, clase 1.8 se tiene que $|\sqrt{10} - 3| = \sqrt{10} - 3$.

3h) $2\sqrt{7} - 6 = \sqrt{28} - \sqrt{36}$.
Puesto que $28 < 36 \Rightarrow \sqrt{28} < \sqrt{36}$
$\Rightarrow \sqrt{28} - \sqrt{36} = \sqrt{28} + (-\sqrt{36})$ es negativo
$\Rightarrow |2\sqrt{7} - 6| = -(2\sqrt{7} - 6) = 6 - 2\sqrt{7}$.

4a) $\sqrt{12} \div \sqrt{3} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$, es entero.

4b) $\sqrt{2} \div \sqrt{8} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{2}{8}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, es racional.

4c) Utilizando sus valores decimales: $\phi = 1.61803...$ y $e = 2.71828...$ por lo que $\phi < e$.

4d) Si $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ entonces $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5$.

Efectuando

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3$$
$$= 5 + 2\sqrt{6} \neq 5.$$

Por lo tanto, $\sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{5}$.

En la solución se ha utilizado la reducción al absurdo asumiendo que la suma de ambos números es la raíz cuadrada positiva de 5.

4e) $\phi^2 - \frac{1}{\phi}$

$$\phi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{2^2} = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{1}{\phi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \times \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = -\frac{2(1-\sqrt{5})}{4} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \phi^2 - \frac{1}{\phi} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} - \left(-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

4f) Efectuando la resolución por casos

Si $a > 0 \Rightarrow |a| = a > 0$.

Si $a < 0 \Rightarrow |a| = -a > 0$.

Si $a = 0 \Rightarrow |0| = 0$.

Por lo tanto, el valor absoluto de un número real nunca es negativo.

4g) $b - a$

El signo de $b + (-a)$, será el signo del mayor valor absoluto de los números $(-a)$ y b.

$|-a| = a$, $|b| = b$ y $0 < b < a$.

Así, $b - a < 0$, por lo tanto:

$|b - a| = -(b - a) = -b -(-a) = -b + a = a - b$.

5a) $|x| = 1 \Rightarrow x = 1$ o $x = -1$.

Por lo tanto, x puede tomar los valores 1 o –1.

5b) $|x| = 6 \Rightarrow x = 6$ o $x = -6$.

Por lo tanto, x puede tomar los valores 6 o –6.

5c) $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$.

Por lo tanto, x solo puede tomar el valor 0.

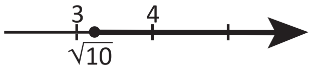
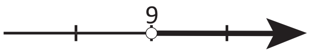
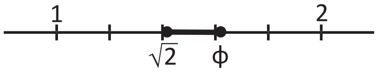
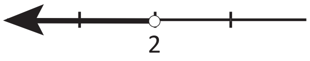
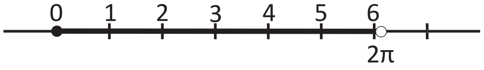
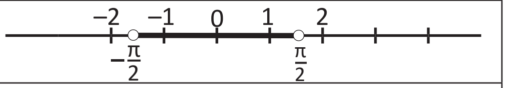
5d) $|x + 1| = 3 \Rightarrow x + 1 = 3$ o $x + 1 = -3$

Si $x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2$.

Si $x + 1 = -3 \Rightarrow x = -4$.

Por lo tanto, x puede tomar los valores 2 o –4.

6.

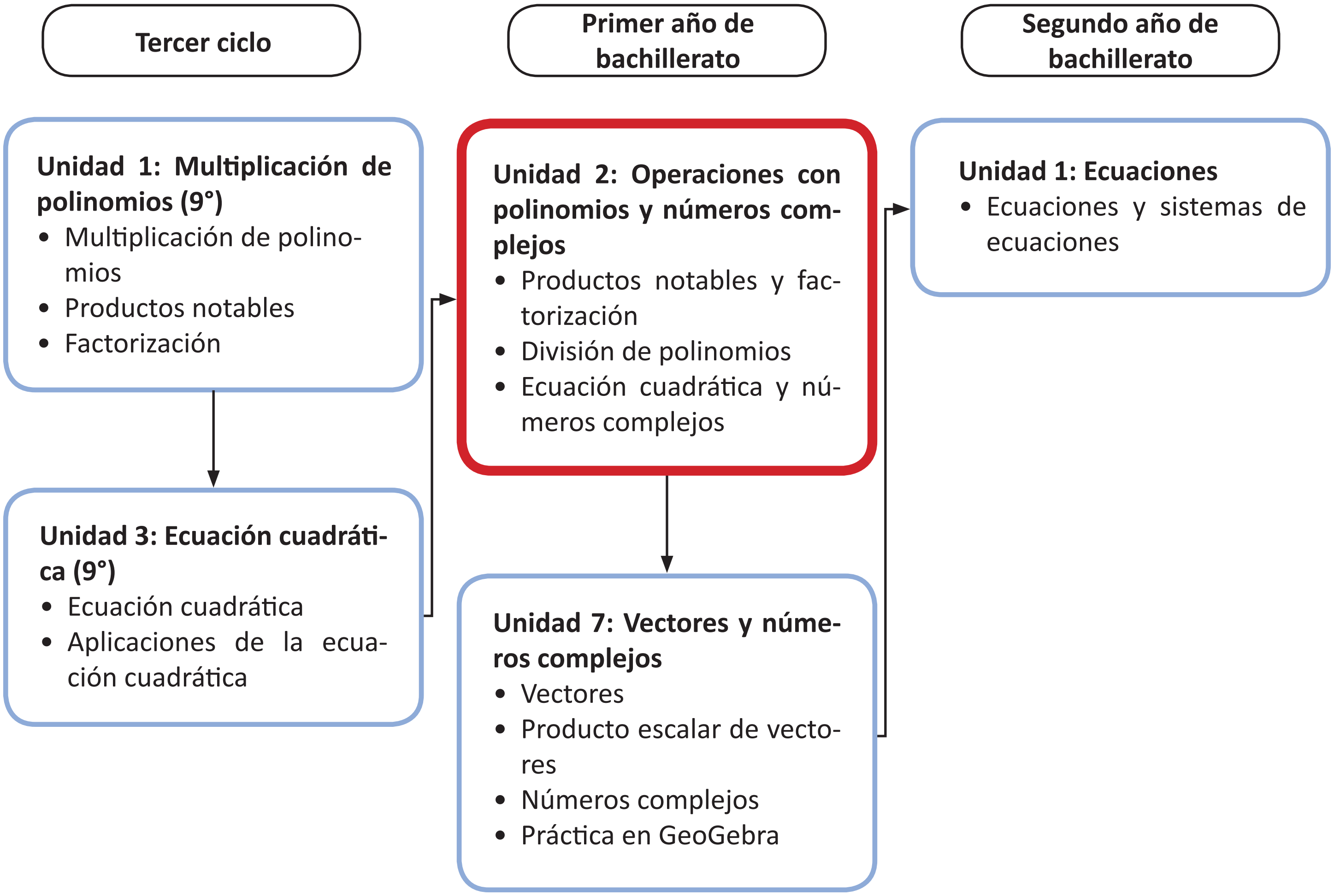
Intervalo	Notación de conjunto	Representación en la recta numérica
$]-4, 7]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq 7\}$	
$[\sqrt{10}, \infty[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \sqrt{10}\}$	
$]9, \infty[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 9\}$	
$[\sqrt{2}, \phi]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} \leq x \leq \phi\}$	
$]-\infty, 2[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$	
$[0, 2\pi[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\pi\}$	
$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$	$\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$	
$]-\infty, 5]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$	

Unidad 2. Operaciones con polinomios y números complejos

Competencia de la unidad

Adquirir habilidades en la factorización y división de polinomios, identificando las condiciones necesarias para la aplicación de los mismos y utilizarlos en la verificación de teoremas en álgebra y la resolución de problemas de matemática.

Relación y desarrollo



Tercer ciclo

Unidad 1: Multiplicación de polinomios (9°)
- Multiplicación de polinomios
- Productos notables
- Factorización

Unidad 3: Ecuación cuadrática (9°)
- Ecuación cuadrática
- Aplicaciones de la ecuación cuadrática

Primer año de bachillerato

Unidad 2: Operaciones con polinomios y números complejos
- Productos notables y factorización
- División de polinomios
- Ecuación cuadrática y números complejos

Unidad 7: Vectores y números complejos
- Vectores
- Producto escalar de vectores
- Números complejos
- Práctica en GeoGebra

Segundo año de bachillerato

Unidad 1: Ecuaciones
- Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

Plan de estudio de la unidad

Lección	Horas	Clases
1. Productos notables y factorización	1	1. Definición de monomio, polinomio y grado
	1	2. Productos de binomio por binomio, parte 1
	1	3. Productos de binomio por binomio, parte 2
	1	4. Productos de la forma $(ax + b)(cx + d)$
	1	5. Cubo de un binomio, parte 1
	1	6. Cubo de un binomio, parte 2
	1	7. Combinaciones de productos notables
	1	8. Practica lo aprendido
	1	9. Factor común monomio y polinomio
	1	10. Factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$
	1	11. Trinomio cuadrado perfecto y diferencia de cuadrados, parte 1
	1	12. Trinomio cuadrado perfecto y diferencia de cuadrados, parte 2
	1	13. Método de la tijera, parte 1
	1	14. Método de la tijera, parte 2
	1	15. Combinaciones de métodos de factorización, parte 1
	1	16. Combinaciones de métodos de factorización, parte 2
	1	17. Practica lo aprendido
	1	Prueba de la lección 1

Lección	Horas	Clases
2. División de polinomios	1	1. División de polinomio por monomio
	1	2. División de polinomio por polinomio
	1	3. División sintética, parte 1
	1	4. División sintética, parte 2
	1	5. Teorema del residuo
	1	6. Factorización utilizando el teorema del factor, parte 1
	1	7. Factorización utilizando el teorema del factor, parte 2
	1	8. Factorizaciones sucesivas
	1	9. Practica lo aprendido
3. Ecuación cuadrática y números complejos	1	1. Resolución de ecuaciones cuadráticas por factorización
	1	2. Resolución de ecuaciones cuadráticas con la fórmula general
	1	3. Definición de número complejo
	1	4. Suma, resta y multiplicación de números complejos
	1	5. División de números complejos
	1	6. Raíces cuadradas de números negativos
	1	7. Discriminante de la ecuación cuadrática
	1	8. Factorización de un polinomio
	1	9. Raíces de un polinomio
	1	10. Practica lo aprendido
	1	11. Problemas de la unidad
	1	Prueba de las lecciones 2 y 3
	2	Prueba del primer periodo

37 horas clase + prueba de la lección 1 + prueba de las lecciones 2 y 3 + prueba del primer periodo

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Productos notables y factorización de polinomios
En esta lección se hace un repaso de los productos notables vistos en noveno grado: producto de la forma $(mx + a)(mx + b)$, el cuadrado de un binomio $(ax \pm by)^2$ y la suma por la diferencia de binomios $(ax + by)(ax - by)$. Luego de ello se deduce el desarrollo de los productos de la forma $(ax + b)(cx + d)$ y del cubo de un binomio $(ax \pm by)^3$, y se trabajan combinaciones de productos notables. En la parte de factorización, primero se hace un repaso de los métodos vistos en noveno grado: factor común monomio, factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, la factorización de trinomios cuadrados perfectos y diferencia de cuadrados; es importante mencionar que, en la clase sobre factor común, se agrega el factor común polinomio, método conocido también como factorización por agrupación de términos. Posteriormente, se introduce la factorización de trinomios usando el método de la tijera y se trabajan combinaciones de los métodos de factorización.

Lección 2: División de polinomios
En la primera clase de la lección se repasa la división de un polinomio por un número, estudiada en octavo grado; con el mismo enfoque se desarrolla la división de un polinomio por un monomio. Luego, se introduce la división de polinomios utilizando el algoritmo de la misma, conocida también como "división larga de polinomios". Después de ello se trabaja el caso particular de la división de polinomios por un binomio de la forma $x - a$ utilizando la división sintética, procedimiento que se utiliza para comprobar y enunciar los teoremas del residuo y del factor. Para finalizar la lección, se retoman los contenidos vistos a lo largo de la misma y los de la lección 1 para factorizar polinomios en una variable de hasta grado tres, cuyo coeficiente de la variable con potencia 3 es 1.

Lección 3: Ecuación cuadrática y números complejos
Las primeras clases son un repaso de la solución de ecuaciones cuadráticas usando factorización en la forma $(x + a)(x + b)$ y el método de la tijera, y la solución de ecuaciones cuadráticas usando la fórmula general. Después se definen los números complejos, sus operaciones (suma, resta, multiplicación y división) y las raíces de números negativos. Todos estos contenidos son necesarios para que, más adelante, se trabaje la factorización de polinomios usando números complejos y definir qué son y cuántas raíces tiene un polinomio.

Lección 1 Productos notables y factorización de polinomios

1.1 Definición de monomio, polinomio y grado

Definición

A la expresión algebraica formada por una o más variables con exponentes enteros positivos, un número real llamado **coeficiente** y que solo involucra multiplicaciones se le llama **término**. La expresión formada por un término o por la suma de dos o más términos se conoce como **polinomio**, y al polinomio formado por un solo término se le llama **monomio**.

El término del polinomio que no posee variables se llama **término independiente**.

El **grado** es una característica relacionada con los exponentes de las variables, este se define de la siguiente forma:

1. El **grado de un término** es la suma de todos los exponentes de las variables. El grado del término independiente, es decir, aquel que no posee variable es igual a cero.
2. El **grado de un polinomio** puede dividirse en dos tipos:
   a) El **grado asociado a una variable** es el exponente mayor de la variable seleccionada.
   b) El **grado absoluto** es el mayor grado de los términos del polinomio.

Si en un polinomio aparece involucrada una sola variable entonces las definiciones a) y b) coinciden y el polinomio se llama **polinomio en una sola variable**.

Los términos de un polinomio pueden ordenarse de acuerdo al grado asociado a una variable o al grado de cada término. Ordenar de forma descendente es iniciar con el término de mayor grado hasta finalizar con el de menor grado, mientras que ordenar de forma ascendente es iniciar con el término de menor grado hasta finalizar con el de mayor grado.

Ejemplo 1

Para el polinomio $11 + 3xy - 5x^3y^2 + 8x^2y$ realiza lo siguiente:

1. Identifica las variables y los coeficientes del polinomio.
2. Identifica los términos del polinomio y calcula el grado de cada uno de ellos.
3. Calcula el grado asociado a cada una de las variables.
4. Calcula el grado absoluto del polinomio.

1. Las variables del polinomio son x y y; los coeficientes del polinomio son los siguientes:

$11 \longrightarrow$ término independiente
$-5 \longrightarrow$ coeficiente de x^3y^2
$3 \longrightarrow$ coeficiente de xy
$8 \longrightarrow$ coeficiente de x^2y

2. Los términos del polinomio son: 11, $3xy$, $-5x^3y^2$ y $8x^2y$. El grado de cada uno se calcula sumando los exponentes de las variables que aparecen en cada término, es decir:

Grado de 11 $\longrightarrow$ 0, pues no aparece variable alguna.
Grado de $3xy \longrightarrow 2$, pues las variables x y y tienen como exponente 1 y 1 respectivamente.

El grado del término independiente siempre será igual a cero.

Grado de $-5x^3y^2 \longrightarrow 5$, pues las variables x y y tienen como exponente 3 y 2 respectivamente.
Grado de $8x^2y \longrightarrow 3$, pues x y y tienen exponentes 2 y 1 respectivamente.

3. El grado asociado a la variable x es 3, ya que es el mayor exponente de la misma. El grado asociado a y es 2, pues es el mayor exponente de la variable.

4. El grado absoluto del polinomio es el mayor grado de los términos del polinomio, del literal b) puede comprobarse que el término $-5x^3y^2$ es el que posee mayor grado. Por tanto, el grado absoluto es 5.

Lección 1

Ejemplo 2

Para el polinomio $11 + 3xy - 5x^3y^2 + 8x^2y$ realiza lo siguiente:

1. Ordena los términos en forma ascendente y descendente con respecto a la variable x.
2. Ordena los términos en forma ascendente y descendente con respecto a la variable y.
3. Ordena el polinomio en forma ascendente y descendente con respecto a los términos.

1. En la forma ascendente se ordenan los términos empezando con el término de menor grado de la variable hasta llegar al término con mayor grado de la variable seleccionada; la forma descendente es lo contrario. Así, el polinomio ordenado con respecto a la variable x queda de la siguiente forma:

   Forma ascendente ⟶ $11 + 3xy + 8x^2y - 5x^3y^2$.

   Forma descendente ⟶ $-5x^3y^2 + 8x^2y + 3xy + 11$.

2. La variable y en los términos $3xy$ y $8x^2y$ tiene el mismo grado, entonces para ordenarlos se toma en consideración el exponente de la variable x. Así, en la forma ascendente irá primero el término cuyo exponente de x sea menor, y en la forma descendente irá primero el término cuyo exponente de x sea mayor.

   El polinomio ordenado con respecto a la variable y, de forma ascendente y descendente queda de la siguiente forma:

   Forma ascendente ⟶ $11 + 3xy + 8x^2y - 5x^3y^2 = 11 + (3x + 8x^2)y - 5x^3y^2$.

   Forma descendente ⟶ $-5x^3y^2 + 8x^2y + 3xy + 11 = -5x^3y^2 + (8x^2 + 3x)y + 11$.

   Se observa que el término independiente 11, en la forma ascendente para cualquier variable siempre va primero, mientras que en la forma descendente para cualquier variable se coloca al final.

3. Para ordenar con respecto a los términos, en la forma ascendente se inicia con el término de menor grado, mientras que en la forma descendente se inicia con el término de mayor grado. Entonces, el polinomio ordenado en ambas formas queda de la siguiente manera:

   Forma ascendente ⟶ $\underbrace{11}_{\text{Grado 0}} + \underbrace{3xy}_{\text{Grado 2}} + \underbrace{8x^2y}_{\text{Grado 3}} - \underbrace{5x^3y^2}_{\text{Grado 5}}$.

   Forma descendente ⟶ $-5x^3y^2 + 8x^2y + 3xy + 11$.

Generalmente, los términos de un polinomio se ordenan de forma descendente.

Problemas

1. En cada literal identifica las variables, los coeficientes y los términos del polinomio. Luego, calcula el grado de cada término, el grado asociado a cada variable y el grado absoluto del polinomio:
   a) $10xy + 5x^2y^2 - 2xy^2 - 6x^3y^3$
   b) $-3a^2b^3 + 4a^3b - ab^2 + b$
   c) $9m^2 - 12m^2n^3 + 2mn - 5mn^2 + 1$
   d) $8x^3 - 10 + 3x + 5x^2$

2. Para cada uno de los polinomios del numeral 1 realiza lo siguiente:
   a) ordena los términos del polinomio con respecto a cada variable, tanto de forma ascendente como descendente;
   b) ordena el polinomio con respecto a sus términos.

3. Sin desarrollar los productos, calcula la suma de los coeficientes del siguiente polinomio: $(x - 3)^2 + (x + 2)^2 + 9x - 10$.

No olvides que el término independiente también es un coeficiente.

Indicador de logro

1.1 Identifica las variables y coeficientes de un polinomio, y calcula el grado con respecto a una variable o a sus términos.

Secuencia

En esta clase se presentan las definiciones de polinomio y monomio, enunciadas también en octavo grado. Se define también el grado de una expresión algebraica, dependiendo si se habla del grado de un término o de un polinomio. Obsérvese que la definición de polinomio no restringe el uso de letras como a, b, c, etc.

Propósito

Se colocan las definiciones primero para homogeneizar el vocabulario utilizado a lo largo de la unidad y, por ende, en todo el primer y segundo año de bachillerato.

Solución de problemas:

1a) $10xy + 5x^2y^2 - 2xy^2 - 6x^3y^3$
- Variables: x, y
- Coeficientes: 10, 5, –2 y –6
- Términos y grados: $10xy$ (grado 2), $5x^2y^2$ (grado 4), $-2xy^2$ (grado 3) y $-6x^3y^3$ (grado 6).
- Grado asociado a cada variable: x posee grado 3, y y posee grado 3.
- Grado absoluto del polinomio: 6

1b) $-3a^2b^3 + 4a^3b - ab^2 + b$
- Variables: a, b
- Coeficientes: –3, 4, –1 y 1
- Términos y grados: $-3a^2b^3$ (grado 5), $4a^3b$ (grado 4), $-ab^2$ (grado 3) y b (grado 1).
- Grado asociado a cada variable: a posee grado 3, y b posee grado 3.
- Grado absoluto del polinomio: 5

1c) $9m^2 - 12m^2n^3 + 2mn - 5mn^2 + 1$
- Variables: m, n
- Coeficientes: 9, –12, 2, –5 y 1
- Términos y grados: $9m^2$ (grado 2), $-12m^2n^3$ (grado 5), $2mn$ (grado 2), $-5mn^2$ (grado 3) y 1 (grado 0).
- Grado asociado a cada variable: m posee grado 2, y n posee grado 3.
- Grado absoluto del polinomio: 5

1d) $8x^3 - 10 + 3x + 5x^2$
- Variables: x
- Coeficientes: 8, –10, 3 y 5
- Términos y grados: $8x^3$ (grado 3), –10 (grado 0), $3x$ (grado 1) y $5x^2$ (grado 2).
- Es un polinomio en una sola variable, el grado asociado coincide con el grado absoluto, el cual es 3.

2a) Sólo se colocarán los polinomios ordenados en la forma ascendente, pues en la forma descendente solo hay que invertir el orden en el que aparecen los términos:

Variable x: $10xy - 2xy^2 + 5x^2y^2 - 6x^3y^3$
Variable y: $10xy - 2xy^2 + 5x^2y^2 - 6x^3y^3$

Variable a: $b - ab^2 - 3a^2b^3 + 4a^3b$
Variable b: $b + 4a^3b - ab^2 - 3a^2b^3$

Variable m: $1 + 2mn - 5mn^2 + 9m^2 - 12m^2n^3$
Variable n: $1 + 9m^2 + 2mn - 5mn^2 - 12m^2n^3$

Variable x: $-10 + 3x + 5x^2 + 8x^3$

2b) Similar a 2a), solo se ordenará cada polinomio en su forma ascendente, pues en la descendente bastaría con invertir el orden en que aparecen los términos:

$$10xy - 2xy^2 + 5x^2y^2 - 6x^3y^3 \qquad b - ab^2 + 4a^3b - 3a^2b^3$$

$$1 + 9m^2 + 2mn - 5mn^2 - 12m^2n^3 \qquad -10 + 3x + 5x^2 + 8x^3$$

3. La suma de los coeficientes del polinomio puede obtenerse al sustituir $x = 1$:

$$(1 - 3)^2 + (1 + 2)^2 + 9(1) - 10 = 4 + 9 + 9 - 10 = 12$$

Por lo tanto, la suma de los coeficientes de $(x - 3)^2 + (x + 2)^2 + 9x - 10$ es igual a 12.

Lección 1

1.2 Productos de binomio por binomio, parte 1

Problema inicial

Desarrolla los siguientes productos notables:

a) $(x + 9)(x - 5)$ b) $(x + 3)^2$ c) $(x - 7)^2$ d) $(x + 4)(x - 4)$

Solución

a) El producto es de la forma $(x + a)(x + b)$ cuyo desarrollo es:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

utilizando lo anterior,

$$\begin{aligned}(x + 9)(x - 5) &= x^2 + (9 - 5)x + (9)(-5)\\ &= x^2 + 4x - 45\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x + 9)(x - 5) = x^2 + 4x - 45$.

b) El producto es el cuadrado de un binomio, cuyo desarrollo es:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

utilizando lo anterior,

$$\begin{aligned}(x + 3)^2 &= x^2 + 2(3)x + 3^2\\ &= x^2 + 6x + 9\end{aligned}$$

Luego, $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$.

c) También es el cuadrado de un binomio, cuyo desarrollo es:

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

utilizando lo anterior,

$$\begin{aligned}(x - 7)^2 &= x^2 - 2(7)x + 7^2\\ &= x^2 - 14x + 49\end{aligned}$$

Luego, $(x - 7)^2 = x^2 - 14x + 49$.

d) Es un producto de la suma por la diferencia de binomios cuyo desarrollo es:

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$$

utilizando lo anterior,

$$\begin{aligned}(x + 4)(x - 4) &= x^2 - 4^2\\ &= x^2 - 16\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x + 4)(x - 4) = x^2 - 16$.

Conclusión

Los productos notables son productos de polinomios cuyos resultados pueden identificarse y escribirse de manera directa. Sean a y b números reales cualesquiera:

Producto notable	Desarrollo
Producto de la forma **$(x + a)(x + b)$**	**$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$**
Cuadrado de un binomio	**$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$**
	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Suma por la diferencia de binomios	**$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$**

Problemas

Desarrolla los siguientes productos notables:

a) $(x + 3)(x + 10)$
b) $(y - 6)(y - 4)$
c) $(x - 8)(x + 2)$
d) $(y + 5)^2$
e) $(m - 2)^2$
f) $(x + 11)^2$
g) $(x + 3)(x - 3)$
h) $(10 + y)(10 - y)$
i) $(m - 6)(m + 6)$
j) $\left(y + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{3}{2}\right)$
k) $\left(x + \frac{4}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$
l) $\left(x + \frac{2}{3}\right)^2$
m) $\left(x + \sqrt{5}\right)^2$
n) $\left(y + 2\sqrt{3}\right)^2$
o) $\left(m + \frac{1}{5}\right)\left(m - \frac{1}{5}\right)$
p) $\left(\frac{4}{7} - x\right)\left(\frac{4}{7} + x\right)$
q) $\left(y + \sqrt{6}\right)\left(y - \sqrt{6}\right)$
r) $\left(x - 2\sqrt{10}\right)\left(x + 2\sqrt{10}\right)$

Indicador de logro

1.2 Realiza productos notables que son de la forma $(x + a)(x + b)$, $(a \pm b)^2$ y $(a + b)(a - b)$.

Secuencia

Después de conocer las definiciones más generales sobre polinomios, se trabajan los productos notables cuyo desarrollo será de mucha utilidad al momento de factorizar. Observe que el coeficiente de la variable en cada binomio es igual a 1.

Posibles dificultades

Si los estudiantes no recuerdan los productos notables desarrollados en noveno grado puede comenzar con la Conclusión y tomar el Problema inicial como ejemplos. No es el propósito de la clase deducir el desarrollo de los tres productos presentados, sino repasarlos o recordarlos.

Solución de problemas:

a) $(x + 3)(x + 10) = x^2 + (3 + 10)x + 3(10)$
$= x^2 + 13x + 30$

b) $(y - 6)(y - 4) = y^2 + (-6 - 4)y + (-6)(-4)$
$= y^2 - 10y + 24$

c) $(x - 8)(x + 2) = x^2 + (-8 + 2)x + (-8)(2)$
$= x^2 - 6x - 16$

d) $(y + 5)^2 = y^2 + 2(5)y + 5^2$
$= y^2 + 10y + 25$

e) $(m - 2)^2 = m^2 - 2(2)m + 2^2$
$= m^2 - 4m + 4$

f) $(x + 11)^2 = x^2 + 2(11)x + 11^2$
$= x^2 + 22x + 121$

g) $(x + 3)(x - 3) = x^2 - 3^2$
$= x^2 - 9$

h) $(10 + y)(10 - y) = 10^2 - y^2$
$= 100 - y^2$

i) $(m - 6)(m + 6) = m^2 - 6^2$
$= m^2 - 36$

j) $\left(y + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{3}{2}\right) = y^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)y + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)$
$= y^2 + 2y + \frac{3}{4}$

k) $\left(x + \frac{4}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = x^2 + \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right)x + \left(\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)$
$= x^2 + x - \frac{4}{9}$

l) $\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = x^2 + 2\left(\frac{2}{3}\right)x + \left(\frac{2}{3}\right)^2$
$= x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$

m) $\left(x + \sqrt{5}\right)^2 = x^2 + 2\left(\sqrt{5}\right)x + \left(\sqrt{5}\right)^2$
$= x^2 + 2\sqrt{5}x + 5$

n) $\left(y + 2\sqrt{3}\right)^2 = y^2 + 2\left(2\sqrt{3}\right)y + \left(2\sqrt{3}\right)^2$
$= y^2 + 4\sqrt{3}y + 12$

o) $\left(m + \frac{1}{5}\right)\left(m - \frac{1}{5}\right) = m^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2$
$= m^2 - \frac{1}{25}$

p) $\left(\frac{4}{7} - x\right)\left(\frac{4}{7} + x\right) = \left(\frac{4}{7}\right)^2 - x^2$
$= \frac{16}{49} - x^2$

q) $\left(y + \sqrt{6}\right)\left(y - \sqrt{6}\right) = y^2 - \left(\sqrt{6}\right)^2$
$= y^2 - 6$

r) $\left(x - 2\sqrt{10}\right)\left(x + 2\sqrt{10}\right) = x^2 - \left(2\sqrt{10}\right)^2$
$= x^2 - 40$

Lección 1

1.3 Productos de binomio por binomio, parte 2

Problema inicial

Desarrolla los siguientes productos:

a) $(4x + 3)(4x - 5)$ b) $(2x + y)^2$ c) $(3x - 2y)^2$ d) $(5x + 6y)(5x - 6y)$

Solución

a) El desarrollo del producto es similar al de $(x + a)(x + b)$, pues el término $4x$ aparece en cada binomio:

$$\begin{aligned}(4x + 3)(4x - 5) &= (4x)^2 + (3 - 5)(4x) + (3)(-5)\\ &= 16x^2 + (-2)(4x) - 15\\ &= 16x^2 - 8x - 15\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(4x + 3)(4x - 5) = 16x^2 - 8x - 15$.

c) El producto es, como el literal anterior, el cuadrado de un binomio:

$$\begin{aligned}(3x - 2y)^2 &= (3x)^2 - 2(3x)(2y) + (2y)^2\\ &= 9x^2 - 12xy + 4y^2\end{aligned}$$

Luego, $(3x - 2y)^2 = 9x^2 - 12xy + 4y^2$.

b) El producto es el cuadrado de un binomio:

$$\begin{aligned}(2x + y)^2 &= (2x)^2 + 2(2x)(y) + y^2\\ &= 4x^2 + 4xy + y^2\end{aligned}$$

Luego, $(2x + y)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$.

d) El producto es una suma por diferencia de binomios, y se desarrolla:

$$\begin{aligned}(5x + 6y)(5x - 6y) &= (5x)^2 - (6y)^2\\ &= 25x^2 - 36y^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(5x + 6y)(5x - 6y) = 25x^2 - 36y^2$.

En general

Sean a, b y m números reales cualesquiera. Entonces:

1. El producto $(mx + a)(mx + b)$ se desarrolla de forma similar al de la forma $(x + a)(x + b)$, es decir:
   $(mx + a)(mx + b) = (mx)^2 + (a + b)(mx) + ab$.
2. Los productos $(ax + by)^2$ y $(ax - by)^2$ son el cuadrado de un binomio y se desarrollan:
   $(ax + by)^2 = (ax)^2 + 2(ax)(by) + (by)^2$
   $(ax - by)^2 = (ax)^2 - 2(ax)(by) + (by)^2$.
3. El producto $(ax + by)(ax - by)$ es una suma por diferencia de binomios y se desarrolla:
   $(ax + by)(ax - by) = (ax)^2 - (by)^2$.

Los babilonios resolvían problemas como el siguiente: "encontrar dos números cuya suma (o diferencia) y producto fuesen conocidos" utilizando el producto notable del literal c). Por ejemplo, el "razonamiento babilónico" para encontrar dos números cuya suma sea 14 y producto sea 45, escrito en el lenguaje matemático actual es el siguiente:

14 corresponde a la suma de los números $7 + x$ y $7 - x$, el producto de ellos debe ser igual a 45:

$$(7 + x)(7 - x) = 45$$

de lo anterior se obtiene $49 - x^2 = 45$ cuya solución es $x = \pm 2$. Entonces, los números son 9 y 5.

Bunt, N. H., Jones, P. S. y Bedient, J. D. (1988). *The historical roots of elementary mathematics*.

Problemas

Desarrolla los siguientes productos notables:

a) $(2x + 9)(2x + 1)$
b) $(3x - 1)(3x + 5)$
c) $(5y - 4)(5y - 2)$
d) $(4x + 5y)^2$
e) $(2x - 7y)^2$
f) $(3y - 10x)^2$
g) $(2x + 5y)(2x - 5y)$
h) $(6w + z)(6w - z)$
i) $(8y - 3x)(8y + 3x)$
j) $\left(2n - \frac{1}{2}\right)\left(2n - \frac{1}{4}\right)$
k) $\left(\frac{1}{3}x + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{3}x - \frac{9}{2}\right)$
l) $\left(\frac{2}{3}y + 11\right)\left(\frac{2}{3}y - 5\right)$
m) $\left(\sqrt{2}\,x + y\right)^2$
n) $\left(\sqrt{3}\,w + \sqrt{5}\,z\right)^2$
o) $\left(4 - 3\sqrt{2}\,x\right)^2$
p) $\left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{9}y\right)\left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{9}y\right)$
q) $\left(\sqrt{5}\,x - \frac{3}{4}y\right)\left(\sqrt{5}\,x + \frac{3}{4}y\right)$
r) $\left(2\sqrt{2}\,x - 3\sqrt{3}y\right)\left(2\sqrt{2}\,x + 3\sqrt{3}\,y\right)$

Indicador de logro

1.3 Realiza productos notables que son de la forma $(mx + a)(mx + b)$, $(ax \pm by)^2$ y $(ax + by)(ax - by)$.

Secuencia

Se retoman los tres productos notables vistos en la clase anterior; esta vez se incluyen hasta dos variables en los polinomios, con coeficientes iguales o diferentes a 1. La idea es que se reconozcan o identifiquen los productos notables, independientemente de los coeficientes o la cantidad de variables que se utilizan.

Posibles dificultades

No es necesario que los estudiantes realicen los cálculos de las sumas o multiplicaciones de números directamente, pero sí deben identificar cada producto notable y utilizar el desarrollo correspondiente. Por ejemplo, para desarrollar $(2x + y)^2$ deben recordar que, se eleva al cuadrado $2x$, seguido del producto $2(2x)y$ y por último se eleva al cuadrado y.

Solución de problemas:

a) $$\begin{aligned}(2x + 9)(2x + 1) &= (2x)^2 + (9 + 1)(2x) + 9(1)\\ &= 4x^2 + 20x + 9\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}(3x - 1)(3x + 5) &= (3x)^2 + (-1 + 5)(3x) + (-1)(5)\\ &= 9x^2 + 12x - 5\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}(5y - 4)(5y - 2) &= (5y)^2 + (-4 - 2)(5y) + (-4)(-2)\\ &= 25y^2 - 30y + 8\end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned}(4x + 5y)^2 &= (4x)^2 + 2(4x)(5y) + (5y)^2\\ &= 16x^2 + 40xy + 25y^2\end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned}(2x - 7y)^2 &= (2x)^2 - 2(2x)(7y) + (7y)^2\\ &= 4x^2 - 28xy + 49y^2\end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned}(3y - 10x)^2 &= (3y)^2 - 2(3y)(10x) + (10x)^2\\ &= 9y^2 - 60xy + 100x^2\end{aligned}$$

Usualmente se toman las variables en orden alfabético. Por tanto, también es válido que la respuesta sea $100x^2 - 60xy + 9y^2$.

g) $$\begin{aligned}(2x + 5y)(2x - 5y) &= (2x)^2 - (5y)^2\\ &= 4x^2 - 25y^2\end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned}(6w + z)(6w - z) &= (6w)^2 - z^2\\ &= 36w^2 - z^2\end{aligned}$$

i) $$\begin{aligned}(8y - 3x)(8y + 3x) &= (8y)^2 - (3x)^2\\ &= 64y^2 - 9x^2\end{aligned}$$

j) $$\begin{aligned}\left(2n - \tfrac{1}{2}\right)\left(2n - \tfrac{1}{4}\right) &= (2n)^2 + \left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\right)(2n) + \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{1}{4}\right)\\ &= 4n^2 - \tfrac{3}{2}n + \tfrac{1}{8}\end{aligned}$$

k) $$\begin{aligned}\left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{3}{2}\right)\left(\tfrac{1}{3}x - \tfrac{9}{2}\right) &= \left(\tfrac{1}{3}x\right)^2 + \left(\tfrac{3}{2} - \tfrac{9}{2}\right)\left(\tfrac{1}{3}x\right) + \left(\tfrac{3}{2}\right)\left(-\tfrac{9}{2}\right)\\ &= \tfrac{1}{9}x^2 - x - \tfrac{27}{4}\end{aligned}$$

l) $$\begin{aligned}\left(\tfrac{2}{3}y + 11\right)\left(\tfrac{2}{3}y - 5\right) &= \left(\tfrac{2}{3}y\right)^2 + (11 - 5)\left(\tfrac{2}{3}y\right) + (11)(-5)\\ &= \tfrac{4}{9}y^2 + 4y - 55\end{aligned}$$

m) $\left(\sqrt{2}x + y\right)^2 = 2x^2 + 2\sqrt{2}xy + y^2$

n) $\left(\sqrt{3}w + \sqrt{5}z\right)^2 = 3w^2 + 2\sqrt{15}wz + 5z^2$

o) $\left(4 - 3\sqrt{2}x\right)^2 = 16 - 24\sqrt{2}x + 18x^2$

p) $\left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{9}y\right)\left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{9}y\right) = \frac{1}{25}x^2 - \frac{1}{81}y^2$

q) $\left(\sqrt{5}x - \frac{3}{4}y\right)\left(\sqrt{5}x + \frac{3}{4}y\right) = 5x^2 - \frac{9}{16}y^2$

r) $\left(2\sqrt{2}x - 3\sqrt{3}y\right)\left(2\sqrt{2}x + 3\sqrt{3}y\right) = 8x^2 - 27y^2$

1.4 Productos de la forma $(ax + b)(cx + d)$

Problema inicial

Desarrolla el producto $(2x + 5)(3x + 4)$. Encuentra una regla para productos de la forma $(ax + b)(cx + d)$.

Solución

Se multiplica cada uno de los términos del primer binomio por cada uno de los términos del segundo:

$$\begin{aligned} (2x + 5)(3x + 4) &= 2x(3x) + 2x(4) + 5(3x) + 5(4) && \text{multiplicar término a término,} \\ &= 2(3)x^2 + [2(4) + 5(3)]x + 5(4) && \text{propiedad conmutativa y distributiva,} \\ &= 6x^2 + [8 + 15]x + 20 && \text{desarrollar productos,} \\ &= 6x^2 + 23x + 20. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(2x + 5)(3x + 4) = 6x^2 + 23x + 20$. Un producto de la forma $(ax + b)(cx + d)$ se desarrolla como sigue:

$$\begin{aligned} (ax + b)(cx + d) &= ax(cx) + ax(d) + b(cx) + bd \\ &= acx^2 + (ad + bc)x + bd. \end{aligned}$$

Luego, $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$.

Conclusión

El producto de binomios de la forma $(ax + b)(cx + d)$ se desarrolla de la siguiente forma:

$$(ax + b)(cx + d) = \overbrace{ac}^{\text{Producto de } a \text{ y } c}x^2 + (\underbrace{ad + bc}_{\text{Producto de } a \text{ y } d \text{ más el producto de } b \text{ y } c})x + \overbrace{bd}^{\text{Producto de } b \text{ y } d}.$$

Ejemplo

Desarrolla el producto $(5x - 6)(2x + 7)$.
En este caso, $a = 5$, $b = -6$, $c = 2$ y $d = 7$. Luego:

$$\begin{aligned} (5x - 6)(2x + 7) &= 5(2)x^2 + [5(7) + (-6)(2)]x + (-6)(7) \\ &= 10x^2 + (35 - 12)x - 42 \\ &= 10x^2 + 23x - 42. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(5x - 6)(2x + 7) = 10x^2 + 23x - 42$.

Problemas

1. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x + 9)(3x + 1)$
b) $(4x + 1)(2x + 1)$
c) $(2x + 7)(3x - 2)$
d) $(4x + 3)(x - 2)$
e) $(-x + 7)(6x + 4)$
f) $(x - 8)(-2x - 5)$
g) $(3x - 10)(-2x + 3)$
h) $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(3x + \frac{5}{2}\right)$
i) $\left(5x - \frac{1}{4}\right)\left(6x - \frac{1}{10}\right)$

2. Para cada caso, determina el valor de los enteros a, b, c o d para que sea verdadera la igualdad:

a) $(ax - 7)(4x + d) = 12x^2 - 25x - 7$
b) $(5x + 4)(cx + d) = 10x^2 + 33x + 20$
c) $(ax + b)(cx + 6) = 2x^2 + 5x - 42$
d) $(ax + b)(cx + d) = 5x^2 + 23x + 12$

Dos polinomios de grado 2, $ex^2 + fx + g$ y $mx^2 + nx + p$ son iguales si $e = m$, $f = n$ y $g = p$.

Indicador de logro

1.4 Desarrolla el producto notable de la forma $(ax + b)(cx + d)$.

Secuencia

En esta clase se deduce la forma para el desarrollo de los productos de la forma $(ax + b)(cx + d)$, donde los números a y c son diferentes. Este producto notable servirá posteriormente para factorizar trinomios utilizando el método de la tijera.

Propósito

En el Problema inicial se deduce la regla para desarrollar el producto de $ax + b$ y $cx + d$. La Conclusión la presenta de manera general pues será aplicada tanto en el Ejemplo como en el numeral 1 del bloque de Problemas.

Posibles dificultades

Para el Problema Inicial, debe tener cuidado que los estudiantes no utilicen erróneamente el producto notable de la forma $(mx + a)(mx + b)$; si es necesario, recuerde el proceso para desarrollar productos de polinomios, es decir, término a término. Por otro lado, no es necesario que los estudiantes realicen los cálculos de las sumas o productos de números directamente, el propósito es aplicar correctamente la regla para el desarrollo de $(ax + b)(cx + d)$.

Solución de problemas:

1a) $(x + 9)(3x + 1) = 3x^2 + (1 + 27)x + 9$
$= 3x^2 + 28x + 9$

1b) $(4x + 1)(2x + 1) = 8x^2 + (4 + 2)x + 1$
$= 8x^2 + 6x + 1$

1c) $(2x + 7)(3x - 2) = 6x^2 + (-4 + 21)x - 14$
$= 6x^2 + 17x - 14$

1d) $(4x + 3)(x - 2) = 4x^2 + (-8 + 3)x - 6$
$= 4x^2 - 5x - 6$

1e) $(-x + 7)(6x + 4) = -6x^2 + (-4 + 42)x + 28$
$= -6x^2 + 38x + 28$

1f) $(x - 8)(-2x - 5) = -2x^2 + (-5 + 16)x + 40$
$= -2x^2 + 11x + 40$

1g) $(3x - 10)(-2x + 3) = -6x^2 + (9 + 20)x - 30$
$= -6x^2 + 29x - 30$

1h) $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(3x + \frac{5}{2}\right) = 3x^2 + \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\right)x + \frac{5}{4}$
$= 3x^2 + 4x + \frac{5}{4}$

1i) $\left(5x - \frac{1}{4}\right)\left(6x - \frac{1}{10}\right) = 30x^2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)x + \frac{1}{40}$
$= 30x^2 - 2x + \frac{1}{40}$

2a) $(ax - 7)(4x + d) = 12x^2 - 25x - 7$; entonces debe cumplirse $4a = 12$ y $-7d = -7$. De esto se obtiene $a = 3$ y $d = 1$, y se verifica $ad - 28 = -25$.

2b) $(5x + 4)(cx + d) = 10x^2 + 33x + 20$; entonces debe cumplirse $5c = 10$ y $4d = 20$. De esto se obtiene $c = 2$ y $d = 5$, y se verifica $5d + 4c = 33$.

2c) $(ax + b)(cx + 6) = 2x^2 + 5x - 42$; entonces debe cumplirse $ac = 2$ y $6b = -42$. De la segunda se obtiene $b = -7$. Para encontrar a y c se plantea además $6a - 7c = 5$ y se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} ac = 2 \\ 6a - 7c = 5 \end{cases}$$

como son números enteros se obtiene $a = 2$ y $c = 1$, y se verifica $6a + bc = 5$.

En d) se obtienen otras soluciones intercambiando los valores de a con c y b con d.

2d) $(ax + b)(cx + d) = 5x^2 + 23x + 12$; $a = 1$, $b = 4$, $c = 5$ y $d = 3$, o $a = -1$, $b = -4$, $c = -5$ y $d = -3$.

Lección 1

1.5 Cubo de un binomio, parte 1

Problema inicial

Desarrolla el producto:

$$(a + b)^3.$$

$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)^2(a + b)$

Solución

El producto $(a + b)^3$ es la potencia cúbica de $a + b$, y es igual a:

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$$

asociando los primeros dos factores se obtiene:

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= [(a + b)(a + b)](a + b)\\ &= (a + b)^2(a + b).\end{aligned}$$

Se desarrolla $(a + b)^2$ y se efectúa el producto de trinomio por binomio:

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) && \text{desarrollar el cuadrado de un binomio,}\\ &= a^2(a) + a^2(b) + 2ab(a) + 2ab(b) + b^2(a) + b^2(b) && \text{multiplicar término a término,}\\ &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 && \text{desarrollar los productos de monomios,}\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. && \text{reducir términos semejantes.}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Conclusión

El producto de la forma $(a + b)^3$ se llama **cubo de un binomio** y se desarrolla de la siguiente forma:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

El cubo de un binomio es igual al cubo del primer término, más el triple del cuadrado del primer término por el segundo, más el triple del primer término por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo término.

Ejemplo

Desarrolla el producto $(2x + y)^3$.

El producto $(2x + y)^3$ también es el cubo de un binomio, por tanto se desarrolla de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}(2x + y)^3 &= (2x)^3 + 3(2x)^2(y) + 3(2x)y^2 + y^3\\ &= 8x^3 + 3(4x^2)y + 6xy^2 + y^3\\ &= 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3.\end{aligned}$$

Luego, $(2x + y)^3 = 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$.

Problemas

Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x + 1)^3$

b) $(y + 4)^3$

c) $(m + 5)^3$

d) $(x + 2y)^3$

e) $(3x + y)^3$

f) $(m + 4n)^3$

g) $\left(m + \frac{1}{3}\right)^3$

h) $\left(y + \frac{1}{2}\right)^3$

i) $(3x + 2y)^3$

j) $\left(\frac{1}{3}x + 3y\right)^3$

k) $\left(\frac{2}{3}x + y\right)^3$

l) $\left(\frac{1}{3}m + \frac{1}{3}n\right)^3$

Indicador de logro

1.5 Realiza el producto notable de la forma $(ax + by)^3$.

Secuencia

Ya se ha recordado el desarrollo del cuadrado de un binomio. En esta clase, y utilizando el producto notable $(a + b)^2$, se deduce y aplica la regla para desarrollar cubos de binomios, cuando el segundo término se suma al primero.

Propósito

En el Problema inicial se deduce el desarrollo del producto de la forma $(a + b)^3$. En el Ejemplo y los Problemas debe utilizarse lo descrito en la Conclusión, aplicándolo a binomios que involucran hasta dos variables y cuyos coeficientes pueden ser enteros o fracciones.

Solución de problemas:

a) $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

b) $(y + 4)^3 = y^3 + 3y^2(4) + 3y(4^2) + 4^3$
$= y^3 + 12y^2 + 48y + 64$

c) $(m + 5)^3 = m^3 + 3m^2(5) + 3m(5^2) + 5^3$
$= m^3 + 15m^2 + 75m + 125$

d) $(x + 2y)^3 = x^3 + 3x^2(2y) + 3x(2y)^2 + (2y)^3$
$= x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$

e) $(3x + y)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2y + 3(3x)y^2 + y^3$
$= 27x^3 + 27x^2y + 9xy^2 + y^3$

f) $(m + 4n)^3 = m^3 + 3m^2(4n) + 3m(4n)^2 + (4n)^3$
$= m^3 + 12m^2n + 48mn^2 + 64n^3$

g) $\left(m + \frac{1}{3}\right)^3 = m^3 + 3m^2\left(\frac{1}{3}\right) + 3m\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3$
$= m^3 + m^2 + \frac{1}{3}m + \frac{1}{27}$

h) $\left(y + \frac{1}{2}\right)^3 = y^3 + 3y^2\left(\frac{1}{2}\right) + 3y\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3$
$= y^3 + \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{4}y + \frac{1}{8}$

i) $(3x + 2y)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2(2y) + 3(3x)(2y)^2 + (2y)^3$
$= 27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$

j) $\left(\frac{1}{3}x + 3y\right)^3 = \left(\frac{1}{3}x\right)^3 + 3\left(\frac{1}{3}x\right)^2(3y) + 3\left(\frac{1}{3}x\right)(3y)^2 + (3y)^3$
$= \frac{1}{27}x^3 + x^2y + 9xy^2 + 27y^3$

k) $\left(\frac{2}{3}x + y\right)^3 = \left(\frac{2}{3}x\right)^3 + 3\left(\frac{2}{3}x\right)^2y + 3\left(\frac{2}{3}x\right)y^2 + y^3$
$= \frac{8}{27}x^3 + \frac{4}{3}x^2y + 2xy^2 + y^3$

l) $\left(\frac{1}{3}m + \frac{1}{3}n\right)^3 = \left(\frac{1}{3}m\right)^3 + 3\left(\frac{1}{3}m\right)^2\left(\frac{1}{3}n\right) + 3\left(\frac{1}{3}m\right)\left(\frac{1}{3}n\right)^2 + \left(\frac{1}{3}n\right)^3$
$= \frac{1}{27}m^3 + \frac{1}{9}m^2n + \frac{1}{9}mn^2 + \frac{1}{27}n^3$

1.6 Cubo de un binomio, parte 2

Problema inicial

Desarrolla el producto:

$$(a - b)^3.$$

$(a - b)^3 = [a + (-b)]^3$

Solución

Se escribe $(a - b)^3$ como $[a + (-b)]^3$ y se desarrolla como el cubo de un binomio:

$$\begin{aligned}(a - b)^3 &= [a + (-b)]^3\\ &= a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3\\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Conclusión

El producto de la forma $(a - b)^3$ también es el **cubo de un binomio** y se desarrolla:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

En general, $(ax + by)^3$ y $(ax - by)^3$ también son productos notables y se les llama cubo de un binomio; se desarrollan de la siguiente forma:

$$(ax \overset{\text{Positivo}}{\overset{\downarrow}{+}} by)^3 = (ax)^3 \overset{\text{Positivo}}{\overset{\downarrow}{+}} 3(ax)^2(by) \overset{\text{Positivo}}{\overset{\downarrow}{+}} 3(ax)(by)^2 \overset{\text{Positivo}}{\overset{\downarrow}{+}} (by)^3.$$

$$(ax \underset{\text{Negativo}}{\underset{\uparrow}{-}} by)^3 = (ax)^3 \underset{\text{Negativo}}{\underset{\uparrow}{-}} 3(ax)^2(by) \underset{\text{Positivo}}{\underset{\uparrow}{+}} 3(ax)(by)^2 \underset{\text{Negativo}}{\underset{\uparrow}{-}} (by)^3.$$

Ejemplo

Desarrolla el producto $(2x - 3y)^3$.

El producto $(2x - 3y)^3$ también es el cubo de un binomio, por tanto se desarrolla de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}(2x - 3y)^3 &= (2x)^3 - 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 - (3y)^3\\ &= 8x^3 - 3(4x^2)(3y) + 3(2x)(9y^2) - 27y^3\\ &= 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3\end{aligned}$$

Luego, $(2x - 3y)^3 = 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$.

Problemas

1. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x - 1)^3$
b) $(y - 3)^3$
c) $(m - 10)^3$
d) $(4x - y)^3$
e) $(m - 5n)^3$
f) $(5x - 2y)^3$
g) $\left(x - \frac{1}{6}\right)^3$
h) $\left(y - \frac{1}{2}\right)^3$
i) $\left(m - \frac{2}{3}\right)^3$
j) $\left(\frac{1}{3}x - 2y\right)^3$
k) $\left(3m - \frac{1}{6}n\right)^3$
l) $\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y\right)^3$

2. Para cada caso, determina el valor de a o b para que sea verdadera la igualdad:

a) $(x + a)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
b) $(y - a)^3 = y^3 - 12y^2 + 48y - 64$
c) $(ax + by)^3 = 8x^3 + 60x^2y + 150xy^2 + 125y^3$
d) $(ax - by)^3 = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x^2y + \frac{1}{6}xy^2 - \frac{1}{27}y^3$

Indicador de logro

1.6 Realiza el producto notable de la forma $(ax - by)^3$.

Secuencia

En esta clase se deducirá el desarrollo del cubo de un binomio, cuando su segundo término se resta del primero, es decir, $(a - b)^3$. Además, se presenta en forma general el desarrollo del producto notable $(ax \pm by)^3$.

Propósito

En el Problema inicial se deduce el desarrollo del producto de la forma $(a - b)^3$ escribiéndolo como $[a + (- b)]^3$ para utilizar el resultado de la clase anterior. En el Ejemplo y los Problemas debe utilizarse lo descrito en la Conclusión, aplicándolo a binomios que involucran hasta dos variables y cuyos coeficientes pueden ser enteros o fracciones.

Posibles dificultades

Debe tenerse cuidado con el signo negativo del segundo término en los binomios.

Solución de problemas:

1a) $(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

1b) $(y - 3)^3 = y^3 - 3y^2(3) + 3y(9) - 27$
$= y^3 - 9y^2 + 27y - 27$

1c) $(m - 10)^3 = m^3 - 3m^2(10) + 3m(100) - 1000$
$= m^3 - 30m^2 + 300m - 1000$

1d) $(4x - y)^3 = (4x)^3 - 3(4x)^2y + 3(4x)y^2 - y^3$
$= 64x^3 - 48x^2y + 12xy^2 - y^3$

1e) $(m - 5n)^3 = m^3 - 3m^2(5n) + 3m(5n)^2 - (5n)^3$
$= m^3 - 15m^2n + 75mn^2 - 125n^3$

1f) $(5x - 2y)^3 = (5x)^3 - 3(5x)^2(2y) + 3(5x)(2y)^2 - (2y)^3$
$= 125x^3 - 150x^2y + 60xy^2 - 8y^3$

1g) $\left(x - \frac{1}{6}\right)^3 = x^3 - 3x^2\left(\frac{1}{6}\right) + 3x\left(\frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^3$
$= x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x - \frac{1}{216}$

1h) $\left(y - \frac{1}{2}\right)^3 = y^3 - 3y^2\left(\frac{1}{2}\right) + 3y\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$
$= y^3 - \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{4}y - \frac{1}{8}$

1i) $\left(m - \frac{2}{3}\right)^3 = m^3 - 3m^2\left(\frac{2}{3}\right) + 3m\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3$
$= m^3 - 2m^2 + \frac{4}{3}m - \frac{8}{27}$

1j) $\left(\frac{1}{3}x - 2y\right)^3 = \left(\frac{1}{3}x\right)^3 - 3\left(\frac{1}{3}x\right)^2(2y) + 3\left(\frac{1}{3}x\right)(2y)^2 - (2y)^3$
$= \frac{1}{27}x^3 - \frac{2}{3}x^2y + 4xy^2 - 8y^3$

1k) $\left(3m - \frac{1}{6}n\right)^3 = 27m^3 - \frac{9}{2}m^2n + \frac{1}{4}mn^2 - \frac{1}{216}n^3$

1l) $\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y\right)^3 = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x^2y + \frac{1}{6}xy^2 - \frac{1}{27}y^3$

2a) El desarrollo del miembro izquierdo es $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$, entonces debe ocurrir $3a = 6$, $3a^2 = 12$ y $a^3 = 8$. De la primera de estas ecuaciones se obtiene $a = 2$ y, al comprobarlo en las demás se satisfacen cada una. Por lo tanto, $a = 2$.

2b) Por un razonamiento similar a 2a) se obtiene $a = 4$.

2c) El desarrollo del miembro izquierdo es $a^3x^3 + 3a^2bx^2y + 3ab^2xy^2 + b^3y^3$, entonces debe ocurrir $a^3 = 8$, $3a^2b = 60$, $3ab^2 = 150$ y $b^3 = 125$. De la primera y última de estas ecuaciones se deducen $a = 2$ y $b = 5$; al comprobarlo en las demás se cumplen cada una. Por lo tanto, $a = 2$ y $b = 5$.

2d) Por un razonamiento similar a 2c) se obtiene $a = \frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{3}$.

1.7 Combinaciones de productos notables

Problema inicial

Desarrolla lo siguiente:

a) $(2x + 3)^3 - (2x - 3)^3$ b) $(a + b + c)^2$

Solución

a) Ambos productos, $(2x + 3)^3$ y $(2x - 3)^3$, son cubos de binomios. Una vez identificados los productos notables que aparecen en la expresión se desarrollan de acuerdo a lo visto en clases anteriores y se reducen los términos semejantes, si los hay:

$$\begin{aligned}\overbrace{(2x+3)^3}^{(1)} - \overbrace{(2x-3)^3}^{(2)} &= \overbrace{8x^3 + 3(2x)^2(3) + 3(2x)(3)^2 + 27}^{(1)} - \overbrace{[8x^3 - 3(2x)^2(3) + 3(2x)(3)^2 - 27]}^{(2)}\\ &= \cancel{8x^3} + 3(4x^2)(3) \cancel{+ 3(2x)(9)} \boxed{+ 27} - \cancel{8x^3} + 3(4x^2)(3) \cancel{- 3(2x)(9)} \boxed{+ 27}\\ &= 36x^2 + 27 + 36x^2 + 27\\ &= 72x^2 + 54\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(2x + 3)^3 - (2x - 3)^3 = 72x^2 + 54$.

b) Sea $a + b = x$; entonces $(a + b + c)^2 = (x + c)^2$ corresponde al cuadrado de un binomio:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (x+c)^2 && \text{sustituir } a + b = x,\\ &= x^2 + 2xc + c^2 && \text{desarrollar el cuadrado de un binomio,}\\ &= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 && \text{sustituir } x = a + b,\\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2\\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc).\end{aligned}$$

Luego, $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$.

En general

Al desarrollar combinaciones de productos notables:

1. Se identifican primero cuáles son los productos notables involucrados en la expresión.
2. Se desarrollan los productos teniendo cuidado con los signos.
3. Se reducen los términos semejantes, si los hay.

Problemas

1. Desarrolla lo siguiente:

a) $(5x + 11)(5x - 6) + (x - 2y)(x + 2y)$

b) $(10x - y)^2 + (x - 10y)^2$

c) $(x - 1)^2 + (x + 2)^2 + (x + 4)(x - 5)$

d) $(x + 4y)^3 + (x - 5y)^3$

e) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - 1\right)\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 1\right)$

f) $\left(\sqrt{2}\,x + \sqrt{3}\,y\right)\left(\sqrt{2}\,x - \sqrt{3}\,y\right) - (x + y + 1)^2$

2. Utiliza productos notables para resolver lo siguiente:

a) ¿Cuál es el valor numérico de $a^2 - b^2$ si $a + b = 25$ y $a - b = 10$?

b) ¿Cuál es el valor numérico de ab si $a^2 + b^2 = 58$ y $a + b = 10$?

c) Sin utilizar calculadora encuentra el resultado de 101^3.

Indicador de logro

1.7 Desarrolla operaciones con polinomios utilizando los productos notables.

Secuencia

En esta clase se retoman todos los productos notables estudiados anteriormente; en esta ocasión están incluidos dentro de expresiones algebraicas las cuáles hay que desarrollar y escribir en su mínima expresión.

Posibles dificultades

Recuerde a sus estudiantes que deben identificar los productos notables involucrados en la expresión algebraica antes de empezar a desarrollar. Aunque la factorización ya se ha visto en noveno grado no se recomienda utilizarla en este momento, pues el contenido se retomará posteriormente en esta unidad.

Solución de problemas:

1a) $(5x + 11)(5x - 6) + (x - 2y)(x + 2y) = (5x)^2 + (11 - 6)(5x) + 11(-6) + x^2 - (2y)^2$
$= 25x^2 + 25x - 66 + x^2 - 4y^2$
$= 26x^2 - 4y^2 + 25x - 66$

1b) $(10x - y)^2 + (x - 10y)^2 = (10x)^2 - 2(10x)y + y^2 + x^2 - 2x(10y) + (10y)^2$
$= 100x^2 - 20xy + y^2 + x^2 - 20xy + 100y^2$
$= 101x^2 - 40xy + 101y^2$

1c) $(x - 1)^2 + (x + 2)^2 + (x + 4)(x - 5) = x^2 - 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 + x^2 - x - 20$
$= 3x^2 + x - 15$

1d) $(x + 4y)^3 + (x - 5y)^3 = x^3 + 12x^2y + 48xy^2 + 64y^3 + x^3 - 15x^2y + 75xy^2 - 125y^3$
$= 2x^3 - 3x^2y + 123xy^2 - 61y^3$

1e) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - 1\right)\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 1\right) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^2 - 1^2$
$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2 - 1$

En 9° grado se demostró que:
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

1f) $\left(\sqrt{2}x + \sqrt{3}y\right)\left(\sqrt{2}x - \sqrt{3}y\right) - (x + y + 1)^2 = \left(\sqrt{2}x\right)^2 - \left(\sqrt{3}y\right)^2 - [x^2 + y^2 + 1 + 2(xy + x + y)]$
$= 2x^2 - 3y^2 - x^2 - y^2 - 1 - 2xy - 2x - 2y$
$= x^2 - 2xy - 4y^2 - 2x - 2y - 1$

2a) Se sabe que $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$; se sustituyen $a + b = 25$ y $a - b = 10$ en lo anterior:
$(25)(10) = a^2 - b^2$
$a^2 - b^2 = 250$
Por lo tanto, el valor numérico de $a^2 - b^2$ es 250.

En los problemas 2a) y 2b) NO deben encontrarse los valores de a y b.

2b) Se sabe que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; se despeja ab y se sustituyen $a^2 + b^2 = 58$ y $a + b = 10$:
$2ab = (a + b)^2 - (a^2 + b^2)$
$2ab = 100 - 58 = 42$
$ab = 21$
Por lo tanto, el valor numérico de ab es 21.

2c) $101^3 = (100 + 1)^3 = 100^3 + 3(100^2)(1) + 3(100)(1^2) + 1^3$
$= 1\,000\,000 + 30\,000 + 300 + 1$
$= 1\,030\,301$

1.8 Practica lo aprendido

1. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x + 7)(x - 5)$ b) $(m + 8)^2$ c) $(n - 6)\left(n - \frac{1}{2}\right)$

d) $(y - 10)(y + 8)$ e) $(y - 4)^2$ f) $(x + 6)^2$

g) $(x + 5)(x - 5)$ h) $\left(\frac{1}{7} - y\right)\left(\frac{1}{7} - y\right)$ i) $(n - 2\sqrt{2})(n + 2\sqrt{2})$

2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(3x + 7)(3x + 2)$ b) $\left(\frac{1}{2}y + 5\right)\left(\frac{1}{2}y - 9\right)$ c) $\left(5n - \frac{4}{5}\right)\left(5n - \frac{1}{5}\right)$

d) $(9x + 4y)^2$ e) $\left(3x - \frac{1}{3}y\right)^2$ f) $(2x + \sqrt{3}y)^2$

g) $(10m + 7n)(10m - 7n)$ h) $\left(\frac{1}{5}x - \frac{2}{3}y\right)\left(\frac{1}{5}x + \frac{2}{3}y\right)$ i) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$

3. Desarrolla los siguientes productos de la forma $(ax + b)(cx + d)$:

a) $(2x - 3)(x - 4)$ b) $(x + 6)(3x + 5)$ c) $(4y - 3)(5y + 2)$

d) $\left(2x + \frac{1}{3}\right)\left(3x + \frac{2}{3}\right)$ e) $\left(5n + \frac{1}{2}\right)\left(4n - \frac{4}{5}\right)$ f) $\left(\frac{1}{3}x - 8\right)\left(\frac{1}{4}x + 3\right)$

4. Determina los números enteros a, b, c o d para que sea verdadera la igualdad:

a) $(x + b)(cx - 6) = 2x^2 + 12x - 54$ b) $(2x - 5)(cx + d) = 6x^2 - 35x + 50$

c) $(ax + 1)(cx + 5) = 8x^2 + 22x + 5$ d) $(5x + b)(cx + d) = 10x^2 - 9x - 9$

5. Desarrolla los siguientes cubos de binomios:

a) $(m + 3)^3$ b) $(y + 10)^3$ c) $\left(x + \frac{1}{6}\right)^3$

d) $(y - 4)^3$ e) $(5 - m)^3$ f) $\left(x - \frac{1}{5}\right)^3$

g) $(10x + 3y)^3$ h) $\left(\frac{1}{5}m - 5n\right)^3$ i) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^3$

6. Desarrolla lo siguiente:

a) $(3x + 4)(3x - 4) - (2x + 5)(2x - 9)$ b) $(x + 3y)^2 + (2x - 5y)^2$
c) $(2x - y)^3 - (x + y)^3$ d) $(3x - 4y + 5)(3x - 4y - 5)$
e) $(3x - 7)(4x + 5) + (5x + 1)(5x - 6)$ f) $(x + 9)(2x - 11) + (x - 5)^2$

7. Resuelve lo siguiente:

a) ¿Cuál es el valor numérico de $(a - b)^2$ si $a^2 + b^2 = 40$ y $ab = 12$?
b) ¿Cuál es el valor numérico de $a + b$ si $a^2 - b^2 = 24$ y $a - b = 2$?
c) Utilizando productos notables, calcula el resultado de las siguientes operaciones:
- 103^2
- 105(95)
- 45(55)

d) Sea $x = 445$, calcula el resultado de la operación: 446(444) – 447(443) escribiendo las cantidades en términos de x y utilizando productos notables.
e) Demuestra que $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$.

Indicador de logro

1.8 Resuelve problemas correspondientes a productos notables.

Solución de problemas:

1a) $x^2 + 2x - 35$

1b) $m^2 + 16m + 64$

1c) $n^2 - \frac{13}{2}n + 3$

1d) $y^2 - 2y - 80$

1e) $y^2 - 8y + 16$

1f) $x^2 + 12x + 36$

1g) $x^2 - 25$

1h) $\frac{1}{49} - y^2$

1i) $n^2 - 8$

2a) $9x^2 + 27x + 14$

2b) $\frac{1}{4}y^2 - 2y - 45$

2c) $25n^2 - 5n + \frac{4}{25}$

2d) $81x^2 + 72xy + 16y^2$

2e) $9x^2 - 2xy + \frac{1}{9}y^2$

2f) $4x^2 + 4\sqrt{3}xy + 3y^2$

2g) $100m^2 - 49n^2$

2h) $\frac{1}{25}x^2 - \frac{4}{9}y^2$

2i) $x - y$

3a) $2x^2 - 11x + 12$

3b) $3x^2 + 23x + 30$

3c) $20y^2 - 7y - 6$

3d) $6x^2 + \frac{7}{3}x + \frac{2}{9}$

3e) $20n^2 - 2n - \frac{2}{5}$

3f) $\frac{1}{12}x^2 - x - 24$

4a) $b = 9$, $c = 2$

4b) $c = 3$, $d = -10$

4c) $a = 4$, $c = 2$

4d) $b = 3$, $c = 2$, $d = -3$

5a) $m^3 + 9m^2 + 27m + 27$

5b) $y^3 + 30y^2 + 300y + 1\,000$

5c) $x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x + \frac{1}{216}$

5d) $y^3 - 12y^2 + 48y - 64$

5e) $125 - 75m + 15m^2 - m^3$

Al ordenar los términos en 5e) se tiene $-m^3 + 15m^2 - 75m + 125$

5f) $x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{3}{25}x - \frac{1}{125}$

5g) $1\,000x^3 + 900x^2y + 270xy^2 + 27y^3$

5h) $\frac{1}{125}m^3 - \frac{3}{5}m^2n + 15mn^2 - 125n^3$

5i) $x\sqrt{x} + 3x\sqrt{y} + 3\sqrt{x}y + y\sqrt{y}$

6a) $5x^2 + 8x + 29$

6b) $5x^2 - 14xy + 34y^2$

6c) $7x^3 - 15x^2y + 3xy^2 - 2y^3$

6d) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 25$

6e) $37x^2 - 38x - 41$

6f) $3x^2 - 3x - 74$

7a) $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 40 - 24 = 16$

7b) $a + b = \frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{24}{2} = 12$

7c)
$$\begin{aligned} 103^2 &= (100 + 3)^2 \\ &= 10\,000 + 600 + 9 \\ &= 10\,609 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 105(95) &= (100 + 5)(100 - 5) \\ &= 10\,000 - 25 \\ &= 9\,975 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 45(55) &= (50 - 5)(50 + 5) \\ &= 2\,500 - 25 \\ &= 2\,475 \end{aligned}$$

7d)
$$\begin{aligned} 446(444) - 447(443) &= (445 + 1)(445 - 1) - (445 + 2)(445 - 2) \\ &= (x + 1)(x - 1) - (x + 2)(x - 2) \\ &= x^2 - 1 - x^2 + 4 \\ &= 3 \end{aligned}$$

sea $x = 445$,

7e)
$$\begin{aligned} (x + y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\ &= x^3 + y^3 + (3x^2y + 3xy^2) \\ &= x^3 + y^3 + 3xy(x + y) \end{aligned}$$

se aplican propiedades conmutativa y asociativa,

se extrae factor común $3xy$.

1.9 Factor común monomio y polinomio

Problema inicial

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $10x^2y + 6xy^2 - 8xy$

b) $xy + 3x + 2y + 6$

Identifica el factor común en los términos del polinomio del literal a). En el literal b) asocia las parejas de términos que tienen factor común.

Solución

a) Se debe identificar el factor común en los términos del polinomio:

$$\begin{aligned} 10x^2y &= 2(5)(x)(x)(y) &= 2xy(5x) \\ 6xy^2 &= 2(3)(x)(y)(y) &= 2xy(3y) \\ -8xy &= -2(4)(x)(y) &= -2xy(4) \end{aligned}$$

se extrae dicho factor y escribiendo como producto de un monomio por un polinomio se tiene:

$$\begin{aligned} 10x^2y + 6xy^2 - 8xy &= 2xy(5x) + 2xy(3y) - 2xy(4) \\ &= 2xy(5x + 3y - 4). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $10x^2y + 6xy^2 - 8xy = 2xy(5x + 3y - 4)$.

b) Los cuatro términos del polinomio no poseen factor común. Sin embargo, el primer y segundo término tienen factor común x; mientras que el tercer y cuarto término tienen factor común 2. Se asocian estas dos parejas y se extrae el factor común en cada caso:

$$\begin{aligned} xy + 3x + 2y + 6 &= (xy + 3x) + [2y + 2(3)] \\ &= x(y + 3) + 2(y + 3). \end{aligned}$$

sea $m = y + 3$; sustituyendo en la expresión anterior y extrayendo factor común m se obtiene:

$$\begin{aligned} xy + 3x + 2y + 6 &= xm + 2m \\ &= (x + 2)m. \end{aligned}$$

Luego, $xy + 3x + 2y + 6 = (x + 2)(y + 3)$.

Conclusión

Factorizar un polinomio significa escribirlo como producto de polinomios más simples; a dichos polinomios simples se les llama **factores**. Si todos los términos de un polinomio tienen en común un monomio, entonces se extrae ese monomio y se escribe como producto de un monomio por un polinomio:

$$ma + mb + mc = m(a + b + c).$$

Si los términos del polinomio no tienen factor común pero estos pueden asociarse en grupos de términos con un factor común diferente en cada grupo, entonces:

1. Se extrae el factor común en cada grupo.
2. Si al hacer lo anterior en la expresión quedan monomios multiplicados por un mismo polinomio, entonces se extrae este polinomio común:

$$\begin{aligned} ma + mb + na + nb &= m(a + b) + n(a + b) \\ &= (m + n)(a + b). \end{aligned}$$

Al proceso de factorizar asociando términos que tengan el mismo factor común también se le llama **factor común por agrupación de términos**.

Problemas

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 + xy^2$

b) $2a - 8ab$

c) $x^2y^2 - x^2y + xy$

d) $-10a^2b^2 + 5ab^2 - 15abc$

e) $-12xy^2 + 20x^2 + 16xy$

f) $12a^2b^2c - 6ab^2c^2 + 18a^2bc$

g) $mn - 4m + 3n - 12$

h) $xy - 2x - 5y + 10$

i) $2ab - 12a + b - 6$

j) $3xy - 7x - 12y + 28$

k) $6mn + 8m + 15n + 20$

l) $x^2y - 3xy^2 + 8x - 24y$

m) $\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x$

n) $10\sqrt{2}\,a^2b + 6\sqrt{2}\,ab$

o) $\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}mn + \frac{1}{3}m + \frac{1}{3}n$

Indicador de logro

1.9 Factoriza polinomios cuyo factor común es un monomio o un polinomio, utilizando las propiedades asociativa y distributiva.

Secuencia

En esta clase se repasa la factorización extrayendo el factor común monomio, vista en noveno grado. Se agrega además la factorización extrayendo el factor común polinomio, conocida también como factor común por agrupación de términos (en la clase no se utiliza este nombre, se espera que el estudiante identifique los casos donde debe agrupar los términos).

Propósito

En el Problema inicial, el literal a) es para recordar cómo factorizar extrayendo factor común; en el literal b) debe indicar que asocien o agrupen los términos, tal como dice el recuadro de la pista. En el bloque de Problemas los estudiantes deben identificar en cuáles polinomios es necesario asociar los términos para factorizar.

Posibles dificultades

Recuerde a los estudiantes, cuando resuelvan el bloque de Problemas, identificar si todos los términos del polinomio tienen factor común o es necesario agruparlos. También aclararles que la manera de asociar los términos puede ser diferente, pero deben llegar a la misma respuesta (los factores solamente aparecerán conmutados).

Solución de problemas:

a) $x^2 + xy^2 = x(x) + x(y^2)$
$= x(x + y^2)$

b) $2a - 8ab = 2a - 2a(4b)$
$= 2a(1 - 4b)$

c) $x^2y^2 - x^2y + xy = xy(xy) - xy(x) + xy$ $xy = 1xy$
$= xy(xy - x + 1)$

d) $-10a^2b^2 + 5ab^2 - 15abc = 5ab(-2ab + b - 3c)$

El resultado también puede ser $-5ab(2ab - b + 3c)$.

e) $-12xy^2 + 20x^2 + 16xy = 4x(-3y^2 + 5x + 4y)$

El resultado también puede ser $-4x(3y^2 - 5x - 4y)$.

f) $12a^2b^2c - 6ab^2c^2 + 18a^2bc = 6abc(2ab - bc + 3a)$

g) $mn - 4m + 3n - 12 = m(n - 4) + 3(n - 4)$
$= (m + 3)(n - 4)$

h) $xy - 2x - 5y + 10 = x(y - 2) - 5(y - 2)$
$= (x - 5)(y - 2)$

i) $2ab - 12a + b - 6 = 2a(b - 6) + (b - 6)$ $(b - 6) = 1(b - 6)$
$= (2a + 1)(b - 6)$

j) $3xy - 7x - 12y + 28 = x(3y - 7) - 4(3y - 7)$
$= (x - 4)(3y - 7)$

k) $6mn + 8m + 15n + 20 = 2m(3n + 4) + 5(3n + 4)$
$= (2m + 5)(3n + 4)$

l) $x^2y - 3xy^2 + 8x - 24y = xy(x - 3y) + 8(x - 3y)$
$= (xy + 8)(x - 3y)$

m) $\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x = \left(\frac{1}{2}x\right)(x^2) + \left(\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{1}{2}x\right) + \left(\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{1}{4}\right)$
$= \frac{1}{2}x\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$

También puede extraerse el factor común $\frac{1}{8}x$, de esta forma el resultado sería $\frac{1}{8}x(4x^2 + 2x + 1)$.

n) $10\sqrt{2}\,a^2b + 6\sqrt{2}\,ab = 2\sqrt{2}ab(5a) + 2\sqrt{2}ab(3)$
$= 2\sqrt{2}ab(5a + 3)$

o) $\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}mn + \frac{1}{3}m + \frac{1}{3}n = \frac{1}{2}m(m + n) + \frac{1}{3}(m + n)$
$= \left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{3}\right)(m + n)$

1.10 Factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$

Problema inicial

Factoriza los siguientes polinomios en la forma $(x + a)(x + b)$:

a) $x^2 + 10x + 16$

b) $y^2 - y - 20$

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

Solución

a) Para factorizar $x^2 + 10x + 16$ en la forma $(x + a)(x + b)$ deben buscarse dos números cuya suma sea igual a 10 y cuyo producto sea 16. Como la suma es positiva entonces ambos números deben ser positivos:

Pareja	Producto	Suma
1 y 16	16	17
2 y 8	16	10

Puedes desarrollar el producto $(x + 2)(x + 8)$ para verificar si la factorización es correcta.

Luego, $a = 2$ y $b = 8$, y $x^2 + 10x + 16 = (x + 2)(x + 8)$.

b) De forma similar al literal anterior, se buscan dos números cuya suma sea igual a –1 y cuyo producto sea –20. Como el producto de ambos es negativo, uno de ellos debe ser positivo y el otro negativo:

Pareja	Producto	Suma
–1 y 20	–20	19
–2 y 10	–20	8
–4 y 5	–20	1
4 y –5	–20	–1

Se puede descomponer el número 20 en sus factores primos para encontrar las parejas: 20 = 2(2)(5).

Por lo tanto, $a = 4$ y $b = -5$, y $y^2 - y - 20 = (y + 4)(y - 5)$.

Conclusión

Para poder factorizar un trinomio en el producto notable $(x + a)(x + b)$ debe verificarse que, dentro de los términos del trinomio se encuentren: x^2, otro término con variable x y el otro sin variable (término independiente). Sean m y n números positivos:

a) Si el trinomio es $x^2 + mx + n$ entonces se buscan **dos números positivos** cuyo producto sea n y cuya suma sea m.

b) Si el trinomio es $x^2 - mx + n$ entonces se buscan **dos números negativos** cuyo producto sea n y cuya suma sea $-m$.

c) Si el trinomio es $x^2 + mx - n$ o $x^2 - mx - n$ entonces se buscan **dos números, uno positivo y el otro negativo** cuyo producto sea $-n$ y cuya suma sea m o $-m$, según sea el caso.

Problemas

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 + 7x + 6$
b) $x^2 - 9x + 14$
c) $y^2 - 3y - 40$
d) $y^2 + 2y - 15$
e) $a^2 + 2a - 63$
f) $b^2 - 12b + 20$
g) $y^2 + 14y + 40$
h) $x^2 - 2x - 35$
i) $x^2 - 12x + 27$
j) $y^2 + 5y - 24$
k) $a^2 + 15a + 56$
l) $b^2 - 9b - 22$

2. Sin desarrollar los productos, factoriza cada uno de los siguientes polinomios:

a) $(x - 1)^2 - 2(x - 1) - 24$

Sustituye $y = x - 1$.

b) $(x + 1)^2 + 10(x + 1) + 21$
c) $(x - 2)^2 + 5(x - 2) - 50$
d) $(x - 3)^2 - 5(x - 3) + 6$

Indicador de logro

1.10 Factoriza trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$ en el producto notable $(x + a)(x + b)$.

Secuencia

En esta clase se repasa la factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$ vista en noveno grado. Para ello se recuerda el desarrollo del producto notable de la forma $(x + a)(x + b)$. En el bloque de Problemas se agregan casos donde debe realizarse un cambio de variable para utilizar esta factorización.

Posibles dificultades

En los trinomios del Problema inicial, recuerde a los estudiantes que deben encontrar dos números enteros cuyo producto sea igual al término independiente y cuya suma sea igual al coeficiente de la variable con exponente 1. Por ser una clase de repaso, puede optar también por comenzar por la Conclusión.

Solución de problemas:

1a) El coeficiente de x es positivo al igual que el término independiente. Entonces deben encontrarse dos números positivos cuyo producto sea 6 y cuya suma sea 7:

Pareja	Producto	Suma
1 y 6	6	7

Por lo tanto, $x^2 + 7x + 6 = (x + 6)(x + 1)$.

1b) El coeficiente de x es negativo y el término independiente es positivo. Entonces deben encontrarse dos números negativos cuyo producto sea 14 y cuya suma sea –9:

Pareja	Producto	Suma
–1 y –14	14	–15
–2 y –7	14	–9

Por lo tanto, $x^2 - 9x + 14 = (x - 2)(x - 7)$.

1c) El término independiente es negativo. Entonces deben encontrarse dos números, uno positivo y otro negativo, cuyo producto sea –40 y cuya suma sea –3. Los que satisfacen lo anterior son 5 y –8; por lo tanto, $y^2 - 3y - 40 = (y + 5)(y - 8)$.

1d) El término independiente es negativo. Entonces deben encontrarse dos números, uno positivo y otro negativo, cuyo producto sea –15 y cuya suma sea 2. Los que satisfacen lo anterior son 5 y –3; por lo tanto, $y^2 + 2y - 15 = (y + 5)(y - 3)$.

1e) $a^2 + 2a - 63 = (a + 9)(a - 7)$

1f) $b^2 - 12b + 20 = (b - 2)(b - 10)$

1g) $y^2 + 14y + 40 = (y + 10)(y + 4)$

1h) $x^2 - 2x - 35 = (x + 5)(x - 7)$

1i) $x^2 - 12x + 27 = (x - 3)(x - 9)$

1j) $y^2 + 5y - 24 = (y + 8)(y - 3)$

1k) $a^2 + 15a + 56 = (a + 8)(a + 7)$

1l) $b^2 - 9b - 22 = (b + 2)(b - 11)$

2a) Sea $y = x - 1$, sustituyendo en el trinomio original se tiene $y^2 - 2y - 24$. Este último se factoriza en el producto $(y + 4)(y - 6)$; sustituyendo nuevamente $y = x - 1$ se obtiene:

$$\begin{aligned}(x - 1)^2 - 2(x - 1) - 24 &= [(x - 1) + 4][(x - 1) - 6]\\ &= (x + 3)(x - 7)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x - 1)^2 - 2(x - 1) - 24 = (x + 3)(x - 7)$.

2b) $(x + 1)^2 + 10(x + 1) + 21 = [(x + 1) + 7][(x + 1) + 3] = (x + 8)(x + 4)$

2c) $(x - 2)^2 + 5(x - 2) - 50 = [(x - 2) + 10][(x - 2) - 5] = (x + 8)(x - 7)$

2d) $(x - 3)^2 - 5(x - 3) + 6 = [(x - 3) - 2][(x - 3) - 3] = (x - 5)(x - 6)$

En los problemas 2b), 2c) y 2d), los estudiantes pueden utilizar una estrategia como la presentada en 2a), es decir, hacer el cambio de variable, o factorizar directamente. Queda a criterio de ellos factorizar como les resulte más comprensible.

1.11 Trinomio cuadrado perfecto y diferencia de cuadrados, parte 1

Problema inicial

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 + 12x + 36$ b) $y^2 - 100$

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$
$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$

Solución

a) El primer término del trinomio y el término independiente son cuadrados, pues x^2 es el cuadrado de x y 36 es el cuadrado de 6. Además, $12x = 2(6)(x)$.

Entonces: $x^2 + 12x + 36 = x^2 + 2(6)(x) + 6^2$.

Lo anterior corresponde al desarrollo del cuadrado de un binomio, $x^2 + 2(6)(x) + 6^2 = (x + 6)^2$.

Por lo tanto, $x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$.

b) Ambos términos del binomio son cuadrados: $y^2 - 100 = y^2 - 10^2$.

Lo anterior corresponde al desarrollo de una suma por diferencia de binomios, $y^2 - 10^2 = (y + 10)(y - 10)$.

Luego, $y^2 - 100 = (y + 10)(y - 10)$.

Conclusión

El trinomio de la forma $\mathbf{x^2 \pm 2ax + a^2}$ se llama **trinomio cuadrado perfecto**. Este se factoriza como el cuadrado de un binomio de acuerdo al signo del segundo término:

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2.$$

Para determinar si un trinomio es trinomio cuadrado perfecto debe comprobarse que el término independiente es el cuadrado de algún número, luego comprobar que el doble de ese número es igual al coeficiente de la variable de primer grado. Por otro lado, el polinomio de la forma $\mathbf{x^2 - a^2}$ se llama **diferencia de cuadrados**, y se factoriza:

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a).$$

Problemas

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 - 6x + 9$ b) $y^2 + 10y + 25$ c) $b^2 - 8b + 16$
d) $x^2 - 4$ e) $a^2 - 36$ f) $49 - y^2$
g) $b^2 + b + \frac{1}{4}$ h) $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$ i) $y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}$
j) $a^2 - \frac{1}{25}$ k) $b^2 - \frac{1}{64}$ l) $\frac{4}{9} - y^2$
m) $x^2 + 5x + \frac{25}{4}$ n) $y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{9}{16}$ o) $x^2 - \frac{7}{5}x + \frac{49}{100}$
p) $a^2 - \frac{36}{49}$ q) $y^2 - \frac{4}{121}$ r) $\frac{81}{64} - b^2$

2. Sin utilizar calculadora, determina el resultado de las siguientes operaciones:

a) $77^2 - 23^2$ b) $998^2 - 4$ c) $97^2 + 6(97) + 9$

Indicador de logro

1.11 Factoriza polinomios que son trinomios cuadrados perfectos o diferencia de cuadrados en los productos notables $(x \pm a)^2$ y $(x + a)(x - a)$.

Secuencia

En esta clase se repasa la factorización de trinomios cuadrados perfectos y diferencia de cuadrados, vista en noveno grado. Observe que el coeficiente de la variable con exponente dos siempre es 1. En el bloque de Problemas se agregan operaciones aritméticas que deben resolverse utilizando estas dos factorizaciones.

Posibles dificultades

Recuerde el desarrollo de los productos notables $(x \pm a)^2$ y $(x + a)(x - a)$ para que los estudiantes puedan factorizar los polinomios del Problema inicial. En el bloque de Problemas, en el numeral 2, si los estudiantes tienden a querer desarrollar los productos para calcular los resultados de las operaciones entonces desarrolle el literal a) como ejemplo.

Solución de problemas:

1a) $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2(3)(x) + 3^2$
$= (x - 3)^2$

1b) $y^2 + 10y + 25 = y^2 + 2(5)(y) + 5^2$
$= (y + 5)^2$

1c) $b^2 - 8b + 16 = b^2 - 2(4)b + 4^2$
$= (b - 4)^2$

1d) $x^2 - 4 = x^2 - 2^2$
$= (x + 2)(x - 2)$

1e) $a^2 - 36 = a^2 - 6^2$
$= (a + 6)(a - 6)$

1f) $49 - y^2 = 7^2 - y^2$
$= (7 + y)(7 - y)$

1g) $b^2 + b + \frac{1}{4} = b^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)b + \left(\frac{1}{2}\right)^2$
$= \left(b + \frac{1}{2}\right)^2$

1h) $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2$

1i) $y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9} = \left(y + \frac{1}{3}\right)^2$

1j) $a^2 - \frac{1}{25} = \left(a + \frac{1}{5}\right)\left(a - \frac{1}{5}\right)$

1k) $b^2 - \frac{1}{64} = \left(b + \frac{1}{8}\right)\left(b - \frac{1}{8}\right)$

1l) $\frac{4}{9} - y^2 = \left(\frac{2}{3} + y\right)\left(\frac{2}{3} - y\right)$

1m) $x^2 + 5x + \frac{25}{4} = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2$

1n) $y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{9}{16} = \left(y - \frac{3}{4}\right)^2$

1o) $x^2 - \frac{7}{5}x + \frac{49}{100} = \left(x - \frac{7}{10}\right)^2$

1p) $a^2 - \frac{36}{49} = \left(a + \frac{6}{7}\right)\left(a - \frac{6}{7}\right)$

1q) $y^2 - \frac{4}{121} = \left(y + \frac{2}{11}\right)\left(y - \frac{2}{11}\right)$

1r) $\frac{81}{64} - b^2 = \left(\frac{9}{8} + b\right)\left(\frac{9}{8} - b\right)$

2a) $77^2 - 23^2 = (77 + 23)(77 - 23)$
$= (100)(54)$
$= 5\,400$

2b) $998^2 - 4 = (998 + 2)(998 - 2)$
$= (1\,000)(996)$
$= 996\,000$

2c) $97^2 + 6(97) + 9 = 97^2 + 2(3)(97) + 3^2$
$= (97 + 3)^2$
$= (100)^2$
$= 10\,000$

1.12 Trinomio cuadrado perfecto y diferencia de cuadrados, parte 2

Problema inicial

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $49x^2 - 28xy + 4y^2$ b) $121x^2 - 16y^2$

Solución

a) El primer término del trinomio es el cuadrado de $7x$ y el tercer término es el cuadrado de $2y$:

$$(7x)^2 = 49x^2$$
$$(2y)^2 = 4y^2$$

además, $-2(7x)(2y) = -28xy$, por lo que $49x^2 - 28xy + 4y^2$ es un trinomio cuadrado perfecto y se factoriza:

$$\begin{aligned}49x^2 - 28xy + 4y^2 &= (7x)^2 - 2(7x)(2y) + (2y)^2\\ &= (7x - 2y)^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, $49x^2 - 28xy + 4y^2 = (7x - 2y)^2$.

b) El primer término es el cuadrado de $11x$ mientras que el segundo es el cuadrado de $4y$:

$$(11x)^2 = 121x^2$$
$$(4y)^2 = 16y^2$$

entonces $121x^2 - 16y^2$ es una diferencia de cuadrados y se factoriza:

$$\begin{aligned}121x^2 - 16y^2 &= (11x)^2 - (4y)^2\\ &= (11x + 4y)\,(11x - 4y)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $121x^2 - 16y^2 = (11x + 4y)(11x - 4y)$.

En general

El trinomio de la forma $a^2x^2 \pm 2abxy + b^2y^2$ es un trinomio cuadrado perfecto y se factoriza:

$$(ax)^2 + 2(ax)(by) + (by)^2 = (ax + by)^2$$
$$(ax)^2 - 2(ax)(by) + (by)^2 = (ax - by)^2.$$

El binomio de la forma $a^2x^2 - b^2y^2$ es una diferencia de cuadrados y se factoriza:

$$(ax)^2 - (by)^2 = (ax + by)\,(ax - by).$$

Problemas

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $4x^2 + 20xy + 25y^2$
b) $9x^2 - 12xy + 4y^2$
c) $25a^2 + 60ab + 36b^2$
d) $9x^2 - 100y^2$
e) $25x^2 - 16y^2$
f) $49a^2 - 4b^2$
g) $\frac{1}{4}x^2 + xy + y^2$
h) $9x^2 - 3xy + \frac{1}{4}y^2$
i) $\frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{16}y^2$
j) $\frac{1}{64}x^2 - 9y^2$
k) $\frac{25}{9}a^2 - \frac{1}{49}b^2$
l) $\frac{4}{81}x^2 - \frac{25}{16}y^2$
m) $4x^2 + 4\sqrt{2}\,xy + 2y^2$
n) $5a^2 - 2\sqrt{15}\,ab + 3b^2$
o) $6x^2 + 8\sqrt{3}\,xy + 8y^2$
p) $100a^2 - 7b^2$
q) $6x^2 - \frac{1}{25}y^2$
r) $8x^2 - 11y^2$

2. Sin desarrollar los productos, factoriza los siguientes polinomios:

a) $9x^2 + 6x(y + 2) + (y + 2)^2$ Sustituye $z = y + 2$.
b) $(a - 3)^2 - 10(a - 3)b + 25b^2$
c) $(2x + 1)^2 + 2(2x + 1)(3y - 4) + (3y - 4)^2$
d) $16a^2 - (b + 5)^2$
e) $(x + 9)^2 - (y - 9)^2$
f) $x^2 + y^2 + 2xy + 10x + 10y$

Indicador de logro

1.12 Factoriza polinomios que son trinomios cuadrados perfectos o diferencia de cuadrados en los productos notables $(ax \pm by)^2$ y $(ax + by)(ax - by)$.

Secuencia

En esta clase se continua con la factorización de trinomios cuadrados perfectos y diferencia de cuadrados. En los polinomios utilizados (Problema Inicial y el bloque de Problemas), el coeficiente de las variables con exponente dos es diferente de 1.

Posibles dificultades

Si los estudiantes no pueden factorizar los polinomios del Problema inicial, puede recordarles el desarrollo de los productos notables $(ax \pm by)^2$ y $(ax + by)(ax - by)$.

Solución de problemas:

1a) $$\begin{aligned} 4x^2 + 20xy + 25y^2 &= (2x)^2 + 2(2x)(5y) + (5y)^2 \\ &= (2x + 5y)^2 \end{aligned}$$

1b) $$\begin{aligned} 9x^2 - 12xy + 4y^2 &= (3x)^2 - 2(3x)(2y) + (2y)^2 \\ &= (3x - 2y)^2 \end{aligned}$$

1c) $25a^2 + 60ab + 36b^2 = (5a + 6b)^2$

1d) $9x^2 - 100y^2 = (3x + 10y)(3x - 10y)$

1e) $$\begin{aligned} 25x^2 - 16y^2 &= (5x)^2 - (4y)^2 \\ &= (5x + 4y)(5x - 4y) \end{aligned}$$

1f) $$\begin{aligned} 49a^2 - 4b^2 &= (7a)^2 - (2b)^2 \\ &= (7a + 2b)(7a - 2b) \end{aligned}$$

1g) $$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}x^2 + xy + y^2 &= \left(\tfrac{1}{2}x\right)^2 + 2\left(\tfrac{1}{2}x\right)y + y^2 \\ &= \left(\tfrac{1}{2}x + y\right)^2 \end{aligned}$$

1h) $9x^2 - 3xy + \frac{1}{4}y^2 = \left(3x - \frac{1}{2}y\right)^2$

1i) $\frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{16}y^2 = \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y\right)^2$

1j) $\frac{1}{64}x^2 - 9y^2 = \left(\frac{1}{8}x + 3y\right)\left(\frac{1}{8}x - 3y\right)$

1k) $\frac{25}{9}a^2 - \frac{1}{49}b^2 = \left(\frac{5}{3}a + \frac{1}{7}b\right)\left(\frac{5}{3}a - \frac{1}{7}b\right)$

1l) $\frac{4}{81}x^2 - \frac{25}{16}y^2 = \left(\frac{2}{9}x + \frac{5}{4}y\right)\left(\frac{2}{9}x - \frac{5}{4}y\right)$

1m) $4x^2 + 4\sqrt{2}xy + 2y^2 = \left(2x + \sqrt{2}y\right)^2$

1n) $5a^2 - 2\sqrt{15}ab + 3b^2 = \left(\sqrt{5}a - \sqrt{3}b\right)^2$

1o) $6x^2 + 8\sqrt{3}xy + 8y^2 = \left(\sqrt{6}x + 2\sqrt{2}y\right)^2$

1p) $100a^2 - 7b^2 = \left(10a + \sqrt{7}b\right)\left(10a - \sqrt{7}b\right)$

1q) $6x^2 - \frac{1}{25}y^2 = \left(\sqrt{6}x + \frac{1}{5}y\right)\left(\sqrt{6}x - \frac{1}{5}y\right)$

1r) $8x^2 - 11y^2 = \left(2\sqrt{2}x + \sqrt{11}y\right)\left(2\sqrt{2}x - \sqrt{11}y\right)$

2a) $$\begin{aligned} 9x^2 + 6x(y + 2) + (y + 2)^2 &= 9x^2 + 6xz + z^2 \\ &= (3x + z)^2 \\ &= (3x + y + 2)^2 \end{aligned}$$

Se sustituye $z = y + 2$.

2b) $$\begin{aligned} (a - 3)^2 - 10(a - 3)b + 25b^2 &= z^2 - 10zb + 25b^2 \\ &= (z - 5b)^2 \\ &= (a - 5b - 3)^2 \end{aligned}$$

Se sustituye $z = a - 3$.

2c) $$\begin{aligned} (2x + 1)^2 + 2(2x + 1)(3y - 4) + (3y - 4)^2 = w^2 + 2wz + z^2 &= (w + z)^2 \\ &= (2x + 1 + 3y - 4)^2 \\ &= (2x + 3y - 3)^2 \end{aligned}$$

Se sustituye $w = 2x + 1$ y $z = 3y - 4$.

2d) $16a^2 - (b + 5)^2 = (4a + b + 5)(4a - b - 5)$

2e) $$\begin{aligned} (x + 9)^2 - (y - 9)^2 &= (x + 9 + y - 9)(x + 9 - y + 9) \\ &= (x + y)(x - y + 18) \end{aligned}$$

2f) $x^2 + y^2 + 2xy + 10x + 10y = (x + y)^2 + 10(x + y) = (x + y)(x + y + 10)$

Lección 1

1.13 Método de la tijera, parte 1

Problema inicial

El polinomio $2x^2 + 13x + 15$ no es un trinomio cuadrado perfecto; sin embargo puede factorizarse en la forma $(ax + b)(cx + d)$ realizando lo siguiente:

1. Descomponer 2 y 15 como producto de dos factores.
2. En el siguiente esquema, sustituye los valores de a y c por los factores de 2, y los valores de b y d por factores de 15. Realiza las operaciones indicadas hasta que se cumpla $ad + bc = 13$.

$$\begin{tikzcd}
ax \arrow[d, "\text{Multiplicar}"'] \arrow[dr] & b \arrow[r] \arrow[d, "\text{Multiplicar}"] & bcx \arrow[d, "\text{Sumar}"] \\
cx \arrow[ur] & d \arrow[r] & adx \\
acx^2 & bd & (ad + bc)x
\end{tikzcd}$$

3. Escribe $2x^2 + 13x + 15$ como $(ax + b)(cx + d)$.

Solución

1. Los números 2 y 15 pueden descomponerse como producto de dos factores de las siguientes maneras:

$$2 = 1(2) \qquad 15 = \begin{cases} 1(15) \\ 3(5) \end{cases}$$

El producto es conmutativo, por tanto 1(2) = 2(1).

2. Se sustituyen los valores de a y c por los factores de 2, y los valores de b y d por factores de 15 hasta que $ad + bc = 13$:

- Si $a = 1$ y $c = 2$, $b = 1$ y $d = 15$:

$$\begin{tikzcd}
1x \arrow[d, "\text{Multiplicar}"'] \arrow[dr] & 1 \arrow[r] \arrow[d, "\text{Multiplicar}"] & 2x \arrow[d, "\text{Sumar}"] \\
2x \arrow[ur] & 15 \arrow[r] & 15x \\
2x^2 & 15 & \boxed{17x}\ \text{✗}
\end{tikzcd}$$

- Si $a = 1$ y $c = 2$, $b = 3$ y $d = 5$:

$$\begin{tikzcd}
1x \arrow[d, "\text{Multiplicar}"'] \arrow[dr] & 3 \arrow[r] \arrow[d, "\text{Multiplicar}"] & 6x \arrow[d, "\text{Sumar}"] \\
2x \arrow[ur] & 5 \arrow[r] & 5x \\
2x^2 & 15 & \boxed{11x}\ \text{✗}
\end{tikzcd}$$

- Si $a = 1$ y $c = 2$, $b = 5$ y $d = 3$:

$$\begin{tikzcd}
1x \arrow[d, "\text{Multiplicar}"'] \arrow[dr] & 5 \arrow[r] \arrow[d, "\text{Multiplicar}"] & 10x \arrow[d, "\text{Sumar}"] \\
2x \arrow[ur] & 3 \arrow[r] & 3x \\
2x^2 & 15 & \boxed{13x}\ \text{✓}
\end{tikzcd}$$

3. De lo anterior se obtiene: $2x^2 + 13x + 15 = (x + 5)(2x + 3)$.

Conclusión

Sea un trinomio de la forma $mx^2 + nx + p$ con m, n y p enteros diferentes de cero. Si existen a, b, c y d números enteros tales que $\boldsymbol{ac = m}$, $\boldsymbol{bd = p}$ y $\boldsymbol{ad + bc = n}$ entonces:

$$mx^2 + nx + p = (ax + b)(cx + d).$$

Problemas

Factoriza los siguientes polinomios utilizando el esquema del Problema inicial:

a) $3a^2 + 8a + 5$

b) $2x^2 + 7x + 3$

c) $2x^2 + 9x + 9$

d) $2y^2 + 11y + 12$

e) $3y^2 + 8y + 4$

f) $3a^2 + 17a + 20$

g) $4x^2 + 5x + 1$

h) $6x^2 + 11x + 3$

i) $8y^2 + 22y + 5$

j) $6y^2 + 23y + 20$

k) $6x^2 + 17x + 12$

l) $10a^2 + 27a + 18$

Indicador de logro

1.13 Utiliza el método de la tijera para factorizar trinomios en el producto $(ax + b)(cx + d)$ donde a, b, c y d son enteros positivos.

Secuencia

En noveno grado y en las clases anteriores, solamente se factorizaban trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$ o trinomios cuadrados perfectos. En esta clase se introduce el método de la tijera para factorizar trinomios en el producto notable $(ax + b)(cx + d)$. Observe que, tal como lo enuncia el indicador de logro, solo se utilizan trinomios cuyos valores de a, b, c y d son enteros positivos.

Propósito

El Problema inicial enuncia los pasos a seguir cuando se factoriza aplicando el método de la tijera; para esta clase solamente se tomarán trinomios cuyos coeficientes son positivos para que los estudiantes vayan familiarizándose con el procedimiento. Desde el literal a) hasta el f) el coeficiente de la variable con exponente 2 es un número primo, esto reduce el número de ensayos.

Posibles dificultades

Si con la Solución del Problema inicial los estudiantes aún tienen dificultades entonces desarrolle el literal a) del bloque de Problemas como un ejemplo, explicando paso a paso la solución del mismo.

Solución de problemas:

a)

$$\begin{tikzcd} 1a \arrow[d, "\text{Multiplicar}"'] \arrow[dr] & 1 \arrow[r] \arrow[d, "\text{Multiplicar}"] & 3a \arrow[d, "\text{Sumar}"] \\ 3a \arrow[ur] & 5 \arrow[r] & 5a \\ 3a^2 & 5 & \boxed{8a} \end{tikzcd}$$

Luego, $3a^2 + 8a + 5 = (a + 1)(3a + 5)$.

b)

$$\begin{tikzcd} 1x \arrow[d, "\text{Multiplicar}"'] \arrow[dr] & 3 \arrow[r] \arrow[d, "\text{Multiplicar}"] & 6x \arrow[d, "\text{Sumar}"] \\ 2x \arrow[ur] & 1 \arrow[r] & 1x \\ 2x^2 & 3 & \boxed{7x} \end{tikzcd}$$

Luego, $2x^2 + 7x + 3 = (x + 3)(2x + 1)$.

c)

$$\begin{tikzcd} 1x \arrow[d, "\text{Multiplicar}"'] \arrow[dr] & 3 \arrow[r] \arrow[d, "\text{Multiplicar}"] & 6x \arrow[d, "\text{Sumar}"] \\ 2x \arrow[ur] & 3 \arrow[r] & 3x \\ 2x^2 & 9 & \boxed{9x} \end{tikzcd}$$

Luego, $2x^2 + 9x + 9 = (x + 3)(2x + 3)$.

d)

$$\begin{tikzcd} 1y \arrow[d, "\text{Multiplicar}"'] \arrow[dr] & 4 \arrow[r] \arrow[d, "\text{Multiplicar}"] & 8y \arrow[d, "\text{Sumar}"] \\ 2y \arrow[ur] & 3 \arrow[r] & 3y \\ 2y^2 & 12 & \boxed{11y} \end{tikzcd}$$

Luego, $2y^2 + 11y + 12 = (y + 4)(2y + 3)$.

e)

$$\begin{tikzcd} 1y \arrow[d, "\text{Multiplicar}"'] \arrow[dr] & 2 \arrow[r] \arrow[d, "\text{Multiplicar}"] & 6y \arrow[d, "\text{Sumar}"] \\ 3y \arrow[ur] & 2 \arrow[r] & 2y \\ 3y^2 & 4 & \boxed{8y} \end{tikzcd}$$

Luego, $3y^2 + 8y + 4 = (y + 2)(3y + 2)$.

f)

$$\begin{tikzcd} 1a \arrow[d, "\text{Multiplicar}"'] \arrow[dr] & 4 \arrow[r] \arrow[d, "\text{Multiplicar}"] & 12a \arrow[d, "\text{Sumar}"] \\ 3a \arrow[ur] & 5 \arrow[r] & 5a \\ 3a^2 & 20 & \boxed{17a} \end{tikzcd}$$

Luego, $3a^2 + 17a + 20 = (a + 4)(3a + 5)$.

g)

$$\begin{tikzcd} 1x \arrow[d, "\text{Multiplicar}"'] \arrow[dr] & 1 \arrow[r] \arrow[d, "\text{Multiplicar}"] & 4x \arrow[d, "\text{Sumar}"] \\ 4x \arrow[ur] & 1 \arrow[r] & 1x \\ 4x^2 & 1 & \boxed{5x} \end{tikzcd}$$

Luego, $4x^2 + 5x + 1 = (x + 1)(4x + 1)$.

h)

$$\begin{tikzcd} 2x \arrow[d, "\text{Multiplicar}"'] \arrow[dr] & 3 \arrow[r] \arrow[d, "\text{Multiplicar}"] & 9x \arrow[d, "\text{Sumar}"] \\ 3x \arrow[ur] & 1 \arrow[r] & 2x \\ 6x^2 & 3 & \boxed{11x} \end{tikzcd}$$

Luego, $6x^2 + 11x + 3 = (2x + 3)(3x + 1)$.

i) $8y^2 + 22y + 5 = (2y + 5)(4y + 1)$

j) $6y^2 + 23y + 20 = (2y + 5)(3y + 4)$

k) $6x^2 + 17x + 12 = (2x + 3)(3x + 4)$

l) $10a^2 + 27a + 18 = (2a + 3)(5a + 6)$

1.14 Método de la tijera, parte 2

Problema inicial

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $2x^2 - 5x - 12$

b) $3y^2 - 11y + 8$

Utiliza el método visto en la clase anterior.

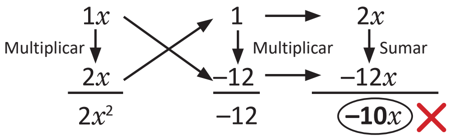
Solución

a) El coeficiente de x^2 y el término independiente deben escribirse como producto de dos números enteros. Como el término independiente es negativo entonces debe ser el resultado de multiplicar un número negativo por uno positivo. Los números 2 y –12 pueden escribirse como producto de dos factores de la siguiente forma:

$$2 = 1(2) \qquad -12 = \begin{cases} 1(-12) \text{ o } -1(12) \\ 2(-6) \text{ o } -2(6) \\ 3(-4) \text{ o } -3(4) \end{cases}$$

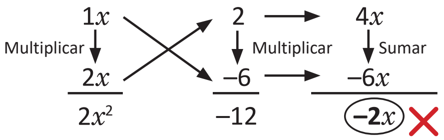
Debe tenerse en cuenta lo siguiente: el resultado de $ad + bc$ al sustituir $a = 1$, $c = 2$, $\mathbf{b = 1}$ y $\mathbf{d = -12}$ no será el mismo si se toman $a = 1$, $c = 2$, $\mathbf{b = -12}$ y $\mathbf{d = 1}$; es decir, intercambiar los valores de b y d dará un resultado diferente para $ad + bc$. El método de la tijera es, por tanto, una estrategia para factorizar trinomios que consiste en experimentar con posibles soluciones hasta encontrar la correcta; a esta estrategia de resolución de problemas se le llama **ensayo y error**.

- Si $a = 1$ y $c = 2$, $b = 1$ y $d = -12$:

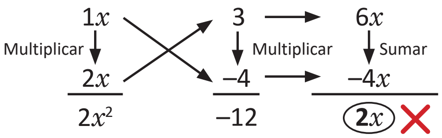


Al sustituir $b = -12$ y $d = 1$ el resultado de $ad + bc$ será igual a –23.

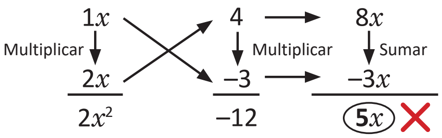
- Si $a = 1$ y $c = 2$, $b = 2$ y $d = -6$:



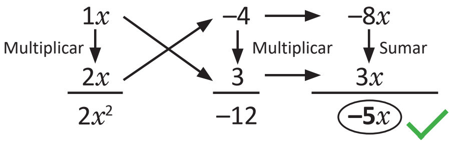
- Si $a = 1$ y $c = 2$, $b = 3$ y $d = -4$:



- Si $a = 1$ y $c = 2$, $b = 4$ y $d = -3$:



- Si $a = 1$ y $c = 2$, $b = -4$ y $d = 3$:

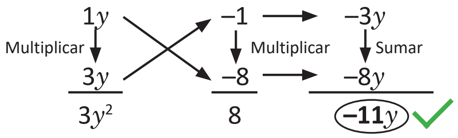


Luego, $2x^2 - 5x - 12 = (x - 4)(2x + 3)$.

b) Se toman a y c positivos; el coeficiente de y es negativo, mientras que el término independiente es positivo; esto indica que los números b y d deben ser ambos negativos. Teniendo en cuenta lo anterior, los números 3 y 8 pueden escribirse como producto de dos factores de las siguientes formas:

$$3 = 1(3) \qquad\qquad 8 = \begin{cases} -1(-8) \text{ o } -8(-1) \\ -2(-4) \text{ o } -4(-2) \end{cases}$$

- Si $a = 1$ y $c = 3$, $b = -1$ y $d = -8$:

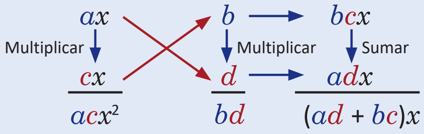


Por lo tanto, $3y^2 - 11y + 8 = (y - 1)(3y - 8)$.

Conclusión

Sea un trinomio de la forma $mx^2 + nx + p$ con m, n y p enteros diferentes de cero, y m positivo. Para factorizarlo en el producto de la forma $(ax + b)(cx + d)$ se realiza lo siguiente:

1. Se descomponen los números m y p en dos factores:
   a) si n y p son positivos entonces p debe escribirse como producto de dos números positivos;
   b) si n es negativo y p es positivo entonces p debe escribirse como producto de dos números negativos;
   c) si p es negativo entonces debe escribirse como producto de un número positivo y uno negativo.
2. En el siguiente esquema, se sustituyen los valores de a y c por los factores de m, y los valores de b y d por los factores de p, realizando todas las combinaciones hasta que $ad + bc = n$:



3. Se escribe $mx^2 + nx + p$ como $(ax + b)(cx + d)$.

Al método anterior para factorizar trinomios se le llama **método de la tijera** por la forma cruzada en que se multiplican ax y d, cx y b en el esquema; también se le conoce como método del aspa simple.

Problemas

1. Factoriza los siguientes polinomios utilizando el método de la tijera:

a) $2x^2 - x - 10$
b) $2y^2 - y - 15$
c) $3y^2 - 16y + 5$
d) $5x^2 + 2x - 3$
e) $5a^2 - 14a + 8$
f) $7x^2 - 5x - 2$
g) $4x^2 + 17x - 15$
h) $6y^2 - 17y + 12$
i) $8a^2 - 18a - 5$

2. Sea n un número entero tal que el trinomio $21x^2 + nx + 21$ puede factorizarse en el producto $(ax + b)(cx + d)$, con a, b, c y d números enteros. Explica por qué n es un número par.

3. El binomio $x + 1$ es un factor del trinomio $x^2 + mx - 2$, es decir, $x^2 + mx - 2 = (x + 1)(x - b)$. Además, el binomio $2x - 1$ es un factor del trinomio $nx^2 + 5x - 4$. Con base en lo anterior, calcula el resultado de $\frac{n}{m}$.

Indicador de logro

1.14 Utiliza el método de la tijera para factorizar trinomios en el producto $(ax + b)(cx + d)$ donde a, b, c y d son enteros cualesquiera.

Secuencia

En esta clase se continúa utilizando el método de la tijera para factorizar trinomios en el producto notable $(ax + b)(cx + d)$, en este caso los números a, b, c y d pueden ser enteros positivos o negativos.

Propósito

En los trinomios del Problema inicial y del bloque de Problemas se admiten coeficientes tanto positivos como negativos para que, en la Conclusión se generalice el método de la tijera.

Posibles dificultades

Si con la Solución del Problema inicial los estudiantes aún tienen dificultades para utilizar el método de la tijera entonces desarrolle el problema 1a) del bloque de Problemas como un ejemplo, explicando paso a paso la solución del mismo.

Solución de problemas:

1a)

$$\begin{tikzcd}
1x \arrow[d, "\text{Multiplicar}"'] \arrow[dr] & 2 \arrow[r] \arrow[d, "\text{Multiplicar}"] & 4x \arrow[d, "\text{Sumar}"] \\
\underline{2x} \arrow[ur] & \underline{-5} \arrow[r] & \underline{-5x} \\
2x^2 & -10 & \boxed{-x}
\end{tikzcd}$$

Luego, $2x^2 - x - 10 = (x + 2)(2x - 5)$.

1b)

$$\begin{tikzcd}
1y \arrow[d, "\text{Multiplicar}"'] \arrow[dr] & -3 \arrow[r] \arrow[d, "\text{Multiplicar}"] & -6y \arrow[d, "\text{Sumar}"] \\
\underline{2y} \arrow[ur] & \underline{5} \arrow[r] & \underline{5y} \\
2y^2 & -15 & \boxed{-y}
\end{tikzcd}$$

Luego, $2y^2 - y - 15 = (y - 3)(2y + 5)$.

1c) $3y^2 - 16y + 5 = (y - 5)(3y - 1)$

1d) $5x^2 + 2x - 3 = (x + 1)(5x - 3)$

1e) $5a^2 - 14a + 8 = (a - 2)(5a - 4)$

1f) $7x^2 - 5x - 2 = (x - 1)(7x + 2)$

1g) $4x^2 + 17x - 15 = (x + 5)(4x - 3)$

1h) $6y^2 - 17y + 12 = (2y - 3)(3y - 4)$

1i) $8a^2 - 18a - 5 = (2a - 5)(4a + 1)$

2. Como $21x^2 + nx + 21 = (ax + b)(cx + d)$ entonces se cumple lo siguiente: $ac = 21$, $bd = 21$ y $ad + bc = n$. De las primeras dos se deduce que a, c, b y d son todos impares (pues los resultados de los productos son iguales a un número impar). Entonces ad y bc también son números impares; pero su suma, $ad + bc$, dará como resultado un número par. Por lo tanto, $ad + bc = n$ es par.

Para la solución del numeral 2 no es necesario una demostración matemática exhaustiva. Basta con que los estudiantes tengan la idea intuitiva de por qué se cumple que n es par.

3. Si $x^2 + mx - 2 = (x + 1)(x - b)$ entonces $-b = -2$ y $1 - b = m$; de lo anterior resulta $b = 2$ y $m = -1$. Se sabe también que $nx^2 + 5x - 4 = (2x - 1)(cx + d)$, usando el método de la tijera:

$$\begin{tikzcd}
2x \arrow[d] \arrow[dr] & -1 \arrow[r] \arrow[d] & -cx \arrow[d] \\
\underline{cx} \arrow[ur] & \underline{d} \arrow[r] & \underline{2dx} \\
2cx^2 & -d & (-c + 2d)x
\end{tikzcd}$$

Luego, $-d = -4$ y $-c + 2d = 5$; al resolver las ecuaciones anteriores resulta $d = 4$ y $c = 3$. Finalmente, $2c = n$, es decir, $n = 6$ y $\frac{n}{m} = \frac{6}{-1} = -6$.

1.15 Combinaciones de métodos de factorización, parte 1

Problema inicial

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $6x^2y - 4x^2 + 30xy - 20x$ b) $6x^2y + 57xy + 27y$

Solución

a) Lo primero es extraer el factor común de los términos del polinomio, luego utilizar alguna de las factorizaciones vistas en las clases anteriores:

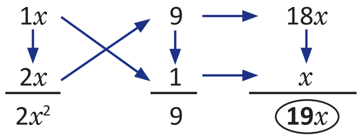
$$
\begin{aligned}
6x^2y - 4x^2 + 30xy - 20x &= 2x(3xy - 2x + 15y - 10) && \text{factor común } 2x,\\
&= 2x[(3xy - 2x) + (15y - 10)] && \text{asociar los términos dentro del corchete,}\\
&= 2x[x(3y - 2) + 5(3y - 2)] && \text{extraer factor común } x \text{ y } 5 \text{ respectivamente,}\\
&= 2x(x + 5)(3y - 2) && \text{extraer factor común } 3y - 2.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $6x^2y - 4x^2 + 30xy - 20x = 2x(x + 5)(3y - 2)$.

b) Igual que en el literal anterior, debe extraerse el factor común de los términos del polinomio y luego utilizar los métodos estudiados en clases anteriores para factorizar:

$$6x^2y + 57xy + 27y = 3y(2x^2 + 19x + 9) \qquad \text{factor común } 3y.$$

Se utiliza el método de la tijera para factorizar $2x^2 + 19x + 9$:



Por lo tanto, $6x^2y + 57xy + 27y = 3y(x + 9)(2x + 1)$.

En general

Cuando se factoriza un polinomio cualquiera, lo primero es verificar si sus términos tienen un monomio común, de ser así se extrae este monomio y se factoriza el otro polinomio utilizando cualquiera de los métodos vistos en las clases anteriores.

El Ministerio de Educación (MINED) ha elaborado una serie de videos sobre Matemática en lo cotidiano, uno de ellos presenta la factorización de polinomios. Puedes visualizarlo en el siguiente enlace:
https://goo.gl/ZgJVzs

Problemas

1. Factoriza los siguientes polinomios:
   - a) $20xy^2 - 20xy - 15x$
   - b) $90x^3 - 40xy^2$
   - c) $18x^3y + 12x^2y^2 + 2xy^3$
   - d) $6ab^3 - 33ab^2 + 36ab$
   - e) $225x^3y - 180x^2y^2 + 36xy^3$
   - f) $3a^2bc + 6a^2bd + 15a^2b - 2a^2c - 4a^2d - 10a^2$

2. Factoriza el polinomio $(x + 1)(x - 3y + 4)^2 - (x + 1)(2x + y - 5)^2$.

No desarrolles los productos, identifica en este caso el factor común.

Indicador de logro

1.15 Factoriza polinomios extrayendo el factor común monomio de sus términos.

Secuencia

En la clase se utilizan todos los métodos vistos en la lección para factorizar diferentes polinomios; en cada uno de ellos los estudiantes deben, primero, extraer el factor común de los términos y luego usar otra factorización.

Posibles dificultades

Recuerde a sus estudiantes que siempre deben verificar si los términos del polinomio poseen un factor común. Para no extenderse tanto en el Problema inicial puede repartir ambos problemas o trabajar solo uno y el otro dejarlo como ejemplo.

Solución de problemas:

1a)
$$\begin{aligned} 20xy^2 - 20xy - 15x &= 5x(4y^2 - 4y - 3) \\ &= 5x[(2y)^2 - 2(2y) - 3] \\ &= 5x(2y + 1)(2y - 3) \end{aligned}$$

extraer factor común $5x$,
factorizar $4y^2 - 4y - 3$ usando la factorización del trinomio de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$.

Para factorizar $4y^2 - 4y - 3$ también puede utilizarse el método de la tijera.

1b)
$$\begin{aligned} 90x^3 - 40xy^2 &= 10x(9x^2 - 4y^2) \\ &= 10x[(3x)^2 - (2y)^2] \\ &= 10x(3x + 2y)(3x - 2y) \end{aligned}$$

extraer factor común $10x$,
escribir $9x^2 = (3x)^2$ y $4y^2 = (2y)^2$,
factorizar diferencia de cuadrados.

1c)
$$\begin{aligned} 18x^3y + 12x^2y^2 + 2xy^3 &= 2xy(9x^2 + 6xy + y^2) \\ &= 2xy[(3x)^2 + 2(3x)(y) + y^2] \\ &= 2xy(3x + y)^2 \end{aligned}$$

extraer factor común $2xy$,
escribir $9x^2 = (3x)^2$ y $6xy = 2(3x)(y)$,
factorizar trinomio cuadrado perfecto.

1d)
$$\begin{aligned} 6ab^3 - 33ab^2 + 36ab &= 3ab(2b^2 - 11b + 12) \\ &= 3ab(b - 4)(2b - 3) \end{aligned}$$

extraer factor común $3ab$,
factorizar $2b^2 - 11b + 12$ usando el método de la tijera.

1e)
$$\begin{aligned} 225x^3y - 180x^2y^2 + 36xy^3 &= 9xy(25x^2 - 20xy + 4y^2) \\ &= 9xy[(5x)^2 - 2(5x)(2y) + (2y)^2] \\ &= 9xy(5x - 2y)^2 \end{aligned}$$

extraer factor común $9xy$,
$25x^2 = (5x)^2$, $20xy = 2(5x)(2y)$ y $4y^2 = (2y)^2$,
factorizar trinomio cuadrado perfecto.

1f)
$$\begin{aligned} 3a^2bc + 6a^2bd + 15a^2b - 2a^2c - 4a^2d - 10a^2 &= a^2(3bc + 6bd + 15b - 2c - 4d - 10) \\ &= a^2[3b(c + 2d + 5) - 2(c + 2d + 5)] \\ &= a^2(3b - 2)(c + 2d + 5) \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} (x + 1)(x - 3y + 4)^2 - (x + 1)(2x + y - 5)^2 &= (x + 1)[(x - 3y + 4)^2 - (2x + y - 5)^2] \\ &= (x + 1)[(x - 3y + 4) + (2x + y - 5)][(x - 3y + 4) - (2x + y - 5)] \\ &= (x + 1)(x - 3y + 4 + 2x + y - 5)(x - 3y + 4 - 2x - y + 5) \\ &= (x + 1)(3x - 2y - 1)(- x - 4y + 9) \end{aligned}$$

1.16 Combinaciones de métodos de factorización, parte 2

Problema inicial

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 - 2axy - 2bxy$ b) $2mx^2 - 2nx^2 + 5mx - 5nx - 3m + 3n$

Solución

a) Los términos del polinomio no poseen un factor común, sin embargo pueden asociarse aquellos que sí lo posean y extraer el factor común, o sea:

$$ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 - 2axy - 2bxy = (ax^2 + ay^2) + (bx^2 + by^2) + (-2axy - 2bxy) \quad \text{asociar términos;}$$

$$\left.\begin{aligned} &= a(x^2 + y^2) + b(x^2 + y^2) - 2xy(a + b) \\ &= (a + b)(x^2 + y^2) - 2xy(a + b) \end{aligned}\right\} \text{extraer el factor común en cada caso.}$$

Ahora se extrae el factor común polinomio $a + b$ y se factoriza el segundo factor:

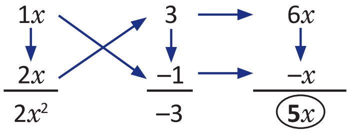
$$\begin{aligned} ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 - 2axy - 2bxy &= (a + b)(x^2 + y^2 - 2xy) && \text{extraer el factor común } a + b; \\ &= (a + b)(x^2 - 2xy + y^2) && \text{ordenar los términos;} \\ &= (a + b)(x - y)^2 && \text{factorizar } x^2 - 2xy + y^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 - 2axy - 2bxy = (a + b)(x - y)^2$.

b) De forma similar al literal anterior, se asocian los términos que posean factor común y se extrae dicho factor:

$$\begin{aligned} 2mx^2 - 2nx^2 + 5mx - 5nx - 3m + 3n &= 2x^2(m - n) + 5x(m - n) - 3(m - n) \\ &= (2x^2 + 5x - 3)(m - n) \end{aligned}$$

se factoriza $2x^2 + 5x - 3$ usando el método de la tijera:



Luego, $2x^2 + 5x - 3 = (x + 3)(2x - 1)$ y $2mx^2 - 2nx^2 + 5mx - 5nx - 3m + 3n = (x + 3)(2x - 1)(m - n)$.

En general

Al factorizar un polinomio, si sus términos NO poseen un monomio común entonces se asocian los términos que sí lo posean, se extrae el factor común polinomio y se aplica al otro factor cualquiera de los métodos vistos en las clases anteriores.

También pueden asociarse términos convenientemente para factorizar un polinomio, sin que estos tengan factor común.

Problemas

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $4a^2x + 4a^2y - b^2x - b^2y$

b) $2cm^2 + dm^2 + 50cn^2 + 25dn^2 + 20cmn + 10dmn$

c) $4a^2x - 12abx + 9b^2x - 8a^2y + 24aby - 18b^2y$

d) $(a + b)(c - d)^2 + 2(a + b)(c - d)(2c + 3d) + (a + b)(2c + 3d)^2$

Indicador de logro

1.16 Factoriza polinomios asociando términos que tienen factor común monomio.

Secuencia

En esta clase, los estudiantes deben asociar los términos de los polinomios presentados que posean factor común monomio; luego de ello, utilizar cualquiera de los métodos vistos en la lección.

Posibles dificultades

Tal como lo indica la Conclusión, recuerde a sus estudiantes que pueden asociar términos que posean factor común. Si considera extenso el Problema inicial, retome solo un literal, retome el otro como ejemplo opcional.

Solución de problemas:

Recuerde que, en la solución de cada literal, la manera de asociar los términos puede ser diferente pero siempre debe llegarse a la misma respuesta. La diferencia será que los factores en cada caso aparecerán conmutados.

a) $$\begin{aligned} 4a^2x + 4a^2y - b^2x - b^2y &= (4a^2x + 4a^2y) - (b^2x + b^2y) \\ &= 4a^2(x + y) - b^2(x + y) \\ &= (4a^2 - b^2)(x + y) \\ &= (2a + b)(2a - b)(x + y) \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2cm^2 + dm^2 + 50cn^2 + 25dn^2 + 20cmn + 10dmn &= (2cm^2 + 50cn^2 + 20cmn) + (dm^2 + 25dn^2 + 10dmn) \\ &= 2c(m^2 + 25n^2 + 10mn) + d(m^2 + 25n^2 + 10mn) \\ &= (2c + d)[m^2 + 2m(5n) + (5n)^2] \\ &= (2c + d)(m + 5n)^2 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 4a^2x - 12abx + 9b^2x - 8a^2y + 24aby - 18b^2y &= (4a^2x - 12abx + 9b^2x) - (8a^2y - 24aby + 18b^2y) \\ &= x(4a^2 - 12ab + 9b^2) - 2y(4a^2 - 12ab + 9b^2) \\ &= (x - 2y)(4a^2 - 12ab + 9b^2) \\ &= (x - 2y)[(2a)^2 - 2(2a)(3b) + (3b)^2] \\ &= (x - 2y)(2a - 3b)^2 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} (a + b)(c - d)^2 + 2(a + b)(c - d)(2c + 3d) + (a + b)(2c + 3d)^2 &= (a + b)[(c - d)^2 + 2(c - d)(2c + 3d) + (2c + 3d)^2] \\ &= (a + b)[(c - d) + (2c + 3d)]^2 \\ &= (a + b)(c - d + 2c + 3d)^2 \\ &= (a + b)(3c + 2d)^2 \end{aligned}$$

1.17 Practica lo aprendido

1. Factoriza los siguientes polinomios (factor común):

a) $4x^2y^2 + 6x^2y - 10xy$

b) $-15a^2b^2 + 12b^3 - 21b^2$

c) $-2a^2b^2c^2 - 20ab^2c - 10abc$

d) $\frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}xy - \frac{1}{8}x$

e) $2ax + bx + 6ay + 3by$

f) $3mx - 2my - 12nx + 8ny$

g) $5ax - 2bx + \frac{5}{3}ay - \frac{2}{3}by$

h) $2mx + 4nx - 3my - 6ny + 5m + 10n$

2. Factoriza los siguientes trinomios en la forma $(x + a)(x + b)$:

a) $x^2 - 17x + 70$

b) $y^2 + 3y - 40$

c) $a^2 - 3a - 54$

d) $b^2 + 14b + 33$

e) $m^2 + 2m - 35$

f) $n^2 - 8n - 20$

g) $4x^2 + 24x + 35$

h) $4y^2 - 24y + 27$

i) $9a^2 - 3a - 20$

En el problema 2, para los literales g), h) e i), realiza un cambio de variable de modo que el polinomio pueda transformarse en otro polinomio de la forma $m^2 + pm + q$ y luego factorizarlo en la forma $(m + a)(m + b)$.

3. Factoriza los siguientes polinomios (trinomio cuadrado perfecto y diferencia de cuadrados):

a) $x^2 + 18x + 81$

b) $y^2 - 20y + 100$

c) $a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{16}$

d) $b^2 - 16$

e) $y^2 - 121$

f) $\frac{1}{49} - a^2$

g) $25x^2 + 30xy + 9y^2$

h) $\frac{9}{4}a^2 - \frac{25}{49}b^2$

i) $900x^2 - \frac{121}{100}y^2$

4. Factoriza utilizando el método de la tijera:

a) $2x^2 + 19x + 45$

b) $3y^2 + 26y + 16$

c) $5a^2 - 27a - 18$

d) $3a^2 - 10a + 8$

e) $5b^2 + 13b - 6$

f) $10a^2 - 23a - 5$

g) $12y^2 - 23y + 5$

h) $8x^2 + 10x - 25$

i) $6x^2 + 11x + 4$

5. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $4x^3y - 100xy^3$

b) $5m^3 + 15m^2 - 350m$

c) $75a^3b - 60a^2b^2 + 12ab^3$

d) $-96x^3y - 144x^2y^2 - 54xy^3$

e) $4xy^3 - 26xy^2 + 42xy$

f) $60a^2m - 80a^2n + 30abm - 40abn$

6. Factoriza los siguientes polinomios sin desarrollar los productos:

a) $(5x - 2y + 9)^2 - (x - 8)^2$

b) $(a + 7)^2 + 2(a + 7)(b - 6) + (b - 6)^2$

c) $(2y + 3)^2 + 3(2y + 3) - 28$

d) $(6y - 1)^2 - 5(6y - 1) - 14$

e) $4(m + n)^2 - 4(m + n)(n - 2) + (n - 2)^2$

f) $3(4x + 1)^2 + 11(4x + 1) - 20$

7. Factoriza el siguiente polinomio: $amx + anx + amy + any + bmx + bnx + bmy + bny$

8. Utilizando factorización, calcula el resultado de las siguientes operaciones:

a) $999^2 - 1$

b) $550^2 - 450^2$

c) $98^2 + 4(98) + 4$

d) $995^2 + 3(995) - 10$

Indicador de logro

1.17 Resuelve problemas correspondientes a factorización de polinomios.

Solución de problemas:

1a) $2xy(2xy + 3x - 5)$

1b) $-3b^2(5a^2 - 4b + 7)$

1c) $-2abc(abc + 10b + 5)$

1d) $\frac{1}{2}x\left(xy - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\right)$

1e) $(2a + b)(x + 3y)$

1f) $(m - 4n)(3x - 2y)$

1g) $(5a - 2b)\left(x + \frac{1}{3}y\right)$

1h) $(m + 2n)(2x - 3y + 5)$

2a) $(x - 7)(x - 10)$

2b) $(y + 8)(y - 5)$

2c) $(a + 6)(a - 9)$

2d) $(b + 3)(b + 11)$

2e) $(m + 7)(m - 5)$

2f) $(n + 2)(n - 10)$

2g) $(2x + 5)(2x + 7)$

2h) $(2y - 3)(2y - 9)$

2i) $(3a + 4)(3a - 5)$

3a) $(x + 9)^2$

3b) $(y - 10)^2$

3c) $\left(a + \frac{1}{4}\right)^2$

3d) $(b + 4)(b - 4)$

3e) $(y + 11)(y - 11)$

3f) $\left(\frac{1}{7} + a\right)\left(\frac{1}{7} - a\right)$

3g) $(5x + 3y)^2$

3h) $\left(\frac{3}{2}a + \frac{5}{7}b\right)\left(\frac{3}{2}a - \frac{5}{7}b\right)$

3i) $\left(30x + \frac{11}{10}y\right)\left(30x - \frac{11}{10}y\right)$

4a) $(x + 5)(2x + 9)$

4b) $(y + 8)(3y + 2)$

4c) $(a - 6)(5a + 3)$

4d) $(a - 2)(3a - 4)$

4e) $(b + 3)(5b - 2)$

4f) $(2a - 5)(5a + 1)$

4g) $(3y - 5)(4y - 1)$

4h) $(2x + 5)(4x - 5)$

4i) $(2x + 1)(3x + 4)$

5a) $4xy(x + 5y)(x - 5y)$

5b) $5m(m + 10)(m - 7)$

5c) $3ab(5a - 2b)^2$

5d) $-6xy(4x + 3y)^2$

5e) $2xy(y - 3)(2y - 7)$

5f) $10a(2a + b)(3m - 4n)$

6a) $(6x - 2y + 1)(4x - 2y + 17)$

6b) $(a + b + 1)^2$

6c) $2(y + 5)(2y - 1)$

6d) $2(6y + 1)(3y - 4)$

6e) $(2m + n + 2)^2$

6f) $2(2x + 3)(12x - 1)$

7. $(a + b)(m + n)(x + y)$

8a) $999^2 - 1^2 = (999 + 1)(999 - 1) = 998\,000$

8b) $550^2 - 450^2 = (550 + 450)(550 - 450) = 100\,000$

8c) $98^2 + 2(98)(2) + 2^2 = (98 + 2)^2 = 10\,000$

8d) $995^2 + 3(995) - 10 = (995 + 5)(995 - 2) = 993\,000$

Lección 2 División de polinomios

2.1 División de polinomio por monomio

Problema inicial

Realiza las siguientes divisiones:

a) $(20xy + 16x - 4y) \div 4$

b) $(12ab - 21b^2) \div (3b)$

Para realizar la división de un polinomio por un número se multiplica el recíproco del número por cada término del polinomio.

Solución

a) Se cambia la división por la multiplicación con el número recíproco del divisor, es decir:

$$\begin{aligned}(20xy + 16x - 4y) \div 4 &= (20xy + 16x - 4y)\left(\frac{1}{4}\right)\\ &= 20xy\left(\frac{1}{4}\right) + 16x\left(\frac{1}{4}\right) - 4y\left(\frac{1}{4}\right)\\ &= 5xy + 4x - y\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(20xy + 16x - 4y) \div 4 = 5xy + 4x - y$.

b) Como en el literal anterior la división $(12ab - 21b^2) \div (3b)$ equivale a multiplicar $12ab - 21b^2$ por el recíproco de $3b$; al realizar esto se obtiene:

$$\begin{aligned}(12ab - 21b^2) \div (3b) &= (12ab - 21b^2)\left(\frac{1}{3b}\right)\\ &= 12ab\left(\frac{1}{3b}\right) - 21b^2\left(\frac{1}{3b}\right)\\ &= \frac{\overset{4}{\cancel{12}}a\cancel{b}}{\cancel{3}\cancel{b}} - \frac{\overset{7}{\cancel{21}}\overset{b}{\cancel{b^2}}}{\cancel{3}\cancel{b}}\\ &= 4a - 7b\end{aligned}$$

$$\frac{b^2}{b} = \frac{\cancel{b}(b)}{\cancel{b}} = b$$

Luego, $(12ab - 21b^2) \div (3b) = 4a - 7b$.

En general

Para dividir un polinomio entre un monomio se multiplica cada término del polinomio por el recíproco del monomio y se simplifica el resultado.

Ejemplo

Realiza la división $(15x^2y^2 - 40x^2y - 25xy) \div (-5xy)$.

Aplicando lo visto en la conclusión:

$$\begin{aligned}(15x^2y^2 - 40x^2y - 25xy) \div (-5xy) &= 15x^2y^2\left(-\frac{1}{5xy}\right) - 40x^2y\left(-\frac{1}{5xy}\right) - 25xy\left(-\frac{1}{5xy}\right)\\ &= -\frac{\overset{3}{\cancel{15}}\overset{x}{\cancel{x^2}}\overset{y}{\cancel{y^2}}}{\underset{1}{\cancel{5}}\cancel{x}\cancel{y}} + \frac{\overset{8}{\cancel{40}}\overset{x}{\cancel{x^2}}\cancel{y}}{\underset{1}{\cancel{5}}\cancel{x}\cancel{y}} + \frac{\overset{5}{\cancel{25}}\cancel{x}\cancel{y}}{\underset{1}{\cancel{5}}\cancel{x}\cancel{y}}\\ &= -3xy + 8x + 5\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(15x^2y^2 - 40x^2y - 25xy) \div (-5xy) = -3xy + 8x + 5$.

Problemas

Realiza las siguientes divisiones:

a) $(-8abc + 22a^2 - 18a) \div (2a)$

b) $(18xyz + 24x^2yz) \div (3xyz)$

c) $(-10a^2b^2 + 45a^2bc - 20abc) \div (-5ab)$

d) $(4x^2y^2z^2 - 40x^2y^2z - 32xy^2z^2) \div (-4xyz)$

e) $(8a^2b + 12ab^2) \div (10ab)$

f) $(-14xyz^2 + 15xy^2z^2 - 18xyz) \div (-6xy)$

g) $(-2ab^2 + 5ab^3) \div \left(\frac{1}{2}b\right)$

h) $(9xyz - 2xy) \div \left(-\frac{3}{2}xy\right)$

Indicador de logro

2.1 Realiza la división de un polinomio por un monomio multiplicando por el recíproco del divisor.

Secuencia

En octavo grado se trabajó la división de un polinomio por un número. En esta clase se repasa lo anterior y se generaliza el procedimiento para dividir un polinomio por un monomio.

Propósito

En el literal a) del Problema inicial se repasa la división de un polinomio por un número estudiada en octavo grado, transformándola en la multiplicación del polinomio por el recíproco del número; este mismo proceso se utiliza en el literal b) cuando se divide entre un monomio. La Conclusión generaliza este proceso, el cual debe ser utilizado tanto en el Ejemplo (el divisor es negativo) como en el bloque de Problemas.

Posibles dificultades

De ser necesario, debe recordarles el proceso a utilizar cuando se multiplican fracciones.

Solución de problemas:

a) $(-8abc + 22a^2 - 18a) \div (2a) = -8abc\left(\frac{1}{2a}\right) + 22a^2\left(\frac{1}{2a}\right) - 18a\left(\frac{1}{2a}\right)$

$$= -\frac{\overset{4}{\cancel{8}}\cancel{a}bc}{\cancel{2}\cancel{a}} + \frac{\overset{11}{\cancel{22}}\overset{a}{\cancel{a^2}}}{\cancel{2}\cancel{a}} - \frac{\overset{9}{\cancel{18}}\cancel{a}}{\cancel{2}\cancel{a}}$$

$$= -4bc + 11a - 9$$

b) $(18xyz + 24x^2yz) \div (3xyz) = 18xyz\left(\frac{1}{3xyz}\right) + 24x^2yz\left(\frac{1}{3xyz}\right)$

$$= \frac{\overset{6}{\cancel{18}}\cancel{x}\cancel{y}\cancel{z}}{\cancel{3}\cancel{x}\cancel{y}\cancel{z}} + \frac{\overset{8}{\cancel{24}}\overset{x}{\cancel{x^2}}\cancel{y}\cancel{z}}{\cancel{3}\cancel{x}\cancel{y}\cancel{z}}$$

$$= 6 + 8x$$

c) $(-10a^2b^2 + 45a^2bc - 20abc) \div (-5ab) = -10a^2b^2\left(-\frac{1}{5ab}\right) + 45a^2bc\left(-\frac{1}{5ab}\right) - 20abc\left(-\frac{1}{5ab}\right)$

$$= \frac{\overset{2}{\cancel{10}}\overset{a}{\cancel{a^2}}\overset{b}{\cancel{b^2}}}{\cancel{5}\cancel{a}\cancel{b}} - \frac{\overset{9}{\cancel{45}}\overset{a}{\cancel{a^2}}\cancel{b}c}{\cancel{5}\cancel{a}\cancel{b}} + \frac{\overset{4}{\cancel{20}}\cancel{a}\cancel{b}c}{\cancel{5}\cancel{a}\cancel{b}}$$

$$= 2ab - 9ac + 4c$$

d) $(4x^2y^2z^2 - 40x^2y^2z - 32xy^2z^2) \div (-4xyz) = -xyz + 10xy + 8yz$

e) $(8a^2b + 12ab^2) \div (10ab) = \frac{4}{5}a + \frac{6}{5}b$

f) $(-14xyz^2 + 15xy^2z^2 - 18xyz) \div (-6xy) = \frac{7}{3}z^2 - \frac{5}{2}yz^2 + 3z$

g) $(-2ab^2 + 5ab^3) \div \left(\frac{b}{2}\right) = -2ab^2\left(\frac{2}{b}\right) + 5ab^3\left(\frac{2}{b}\right)$

$$= -4ab + 10ab^2$$

h) $(9xyz - 2xy) \div \left(-\frac{3}{2}xy\right) = -6z + \frac{4}{3}$

Lección 2

2.2 División de polinomio por polinomio

Definición

Dados dos polinomios p y q en una variable, entonces existen los polinomios d y r tales que:

$$p = qd + r$$

donde r es cero o de grado menor a q. Como en la división de números: el polinomio $\boldsymbol{p}$ **es el dividendo**, $\boldsymbol{q}$ **el divisor**, $\boldsymbol{d}$ **es el cociente** y el polinomio $\boldsymbol{r}$ **es el residuo** de la división de p entre q.

El procedimiento para dividir polinomios es el siguiente:

1. Escribir la división en forma vertical y ordenar los términos del dividendo y el divisor según las potencias decrecientes de la variable. Si falta una potencia de la variable se coloca cero en el lugar correspondiente.
2. Dividir el primer término del dividendo por el primer término del divisor para obtener el primer término del cociente.
3. Multiplicar el divisor por el término del cociente encontrado en el paso 2. Luego, restar este resultado del dividendo.
4. Repetir este proceso, ahora con el resultado obtenido en el paso 3 como dividendo, hasta que el grado del polinomio del dividendo sea menor al grado del polinomio del divisor.

En Educación Básica se aprende a dividir números en forma vertical, ubicando los elementos de la división como sigue:

$$\begin{array}{c|c} \text{Dividendo} & \text{Divisor} \\ \cline{2-2} \text{Residuo} & \text{Cociente} \end{array}$$

A este procedimiento también se le conoce como **división larga** de polinomios.

Ejemplo 1

Realiza la división $(x^3 + 3x^2 - 5x - 4) \div (x + 2)$ y escribe el dividendo en la forma $qd + r$.

Los términos del dividendo y el divisor ya se encuentran ordenados de acuerdo a las potencias decrecientes de la variable. Se escribe $(x^3 + 3x^2 - 5x - 4) \div (x + 2)$ como la división en forma vertical de números:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 - 5x - 4 & x + 2 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, o sea $x^3 \div x$, para obtener el primer término del cociente:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 - 5x - 4 & x + 2 \\ \cline{2-2} & \boxed{x^2} \longleftarrow \text{Resultado de } x^3 \div x \end{array}$$

se multiplica el divisor por el primer término del cociente, o sea $(x + 2)(x^2) = x^3 + 2x^2$; este resultado se resta del dividendo:

Al restar $x^3 + 2x^2$ del dividendo, los términos del primero cambian de signo.

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^3} + 3x^2 - 5x - 4 & x + 2 \\ \cline{2-2} -\cancel{x^3} - 2x^2 & x^2 \\ \cline{1-1} 0 + x^2 - 5x - 4 & \end{array}$$

Repite el proceso, tomando $x^2 - 5x + 4$ como dividendo:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 - 5x - 4 & x + 2 \\ \cline{2-2} - x^3 - 2x^2 & x^2 \boxed{+ x} \longleftarrow \text{Resultado de } x^2 \div x \\ \cline{1-1} 0 + \cancel{x^2} - 5x - 4 & \\ -\cancel{x^2} - 2x & \\ \cline{1-1} 0 \quad - 7x - 4 & \end{array}$$

Restar el resultado de $(x + 2)(x)$ de $x^2 - 5x - 4$.

Ahora se toma $-7x-4$ como dividendo:

$$\begin{array}{rr|l}
 & x^3+3x^2-5x-4 & x+2 \\ \cline{3-3}
 & \underline{-x^3-2x^2} & x^2+x\boxed{-7} \longleftarrow \text{Resultado de } (-7x)\div x \\
 & 0+x^2-5x-4 & \\
 & \underline{-x^2-2x} & \\
 & 0-\cancel{7x}-4 & \\
\text{Restar el resultado de } (x+2)(-7) \text{ de } -7x-4. \longrightarrow & \underline{+\cancel{7x}+14} & \\
 & 0+10 &
\end{array}$$

Puedes desarrollar la operación:
$(x+2)(x^2+x-7)+10$
para comprobar si la división es correcta.

Luego, $x^3+3x^2-5x-4=(x+2)(x^2+x-7)+10$.

Ejemplo 2

Realiza la división $(2x^3-20x-50)\div(x^2+x-4)$. Escribe el dividendo en la forma $qd+r$.

El dividendo no posee el término con x^2, entonces se coloca cero en la posición donde “debería” estar este término al momento de escribir la división en forma vertical:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+0x^2-20x-50 & x^2+x-4 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

luego, se realiza el proceso visto en el ejemplo anterior:

$$\begin{array}{rr|l}
 & \cancel{2x^3}+0x^2-20x-50 & x^2+x-4 \\ \cline{3-3}
\text{Restar } (x^2+x-4)(2x) \text{ de } 2x^3-20x-50 \longrightarrow & \underline{-\cancel{2x^3}-2x^2+8x} & 2x-2 \\
 & 0-\cancel{2x^2}-12x-50 & \longrightarrow \text{Resultado de } (2x^3)\div x^2 \\
\text{Restar } (x^2+x-4)(-2) \text{ de } -2x^2-12x-50 \longrightarrow & \underline{\cancel{2x^2}+2x-8} & \longrightarrow \text{Resultado de } (-2x^2)\div x^2 \\
 & 0-10x-58 &
\end{array}$$

Por lo tanto, $2x^3-20x-50=(x^2+x-4)(2x-2)-10x-58$.

Problemas

1. Realiza las siguientes divisiones y escribe el dividendo en la forma $qd+r$:

a) $(x^3+x^2-5x+7)\div(x+3)$
b) $(x^3+2x^2-5x+7)\div(x-1)$
c) $(x^3+4x^2-8x-16)\div(x+5)$
d) $(x^3-6x^2+4x+19)\div(x-3)$
e) $(x^3+3x+9)\div(x+2)$
f) $(x^3-7x^2+11)\div(x-2)$
g) $(x^3+5x^2+5x+3)\div(x^2+4x+1)$
h) $(x^3+x^2-12x+2)\div(x^2+3x-6)$
i) $(x^3-5x^2+5x-1)\div(x-1)$
j) $(x^3+4x^2-6x-5)\div(x+5)$
k) $(2x^3-3x^2-x-2)\div(2x^2+x+1)$
l) $(3x^3+2x^2-2x-1)\div(3x^2-x-1)$

2. Encuentra el valor de a para que el residuo de la división $(x^3+2x^2-x+a)\div(x-2)$ sea igual a cero.

3. Efectúa la división $(2x^4+6x^3-x^2+3x-1)\div(2x^2+1)$.

Indicador de logro

2.2 Realiza la división de un polinomio por un polinomio utilizando el algoritmo de la división.

Secuencia

En esta clase se introduce el algoritmo de la división de polinomios, también conocido como "la división larga de polinomios". Para ello se recuerda la forma vertical de la división de números visto en educación básica, pues el proceso es similar para polinomios.

Propósito

La clase comienza con la Definición, pues con los Ejemplos se pretende ir haciendo el paso a paso descrito en la misma y que los estudiantes se apropien del algoritmo para utilizarlo en el bloque de Problemas. Observe que el numeral 2 requiere de un análisis más profundo y tener claro cuál es el residuo en una división.

Posibles dificultades

Puede desarrollar un ejercicio sobre división en forma vertical de números naturales vista en educación básica para comparar con el proceso en la división de polinomios.

Solución de problemas:

1a)

$$\begin{array}{rrrrl}
\cancel{x^3} + & x^2 & -\ 5x & +\ 7 & \big|\ \underline{x+3} \\
\underline{\cancel{-x^3}} & \underline{-\ 3x^2} & & & \ \ x^2-2x+1 \\
0 & \cancel{-\ 2x^2} & -\ 5x & +\ 7 & \\
 & \underline{\cancel{+\ 2x^2}} & \underline{+\ 6x} & & \\
 & 0 & \cancel{+\ x} & +\ 7 & \\
 & & \underline{\cancel{-\ x}} & \underline{-\ 3} & \\
 & & 0 & +\ 4 &
\end{array}$$

Luego, $x^3 + x^2 - 5x + 7 = (x + 3)(x^2 - 2x + 1) + 4$.

1b)

$$\begin{array}{rrrrl}
\cancel{x^3} & +\ 2x^2 & -\ 5x & +\ 7 & \big|\ \underline{x-1} \\
\underline{\cancel{-x^3}} & \underline{+\ x^2} & & & \ \ x^2+3x-2 \\
0 & \cancel{+\ 3x^2} & -\ 5x & +\ 7 & \\
 & \underline{\cancel{-\ 3x^2}} & \underline{+\ 3x} & & \\
 & 0 & \cancel{-\ 2x} & +\ 7 & \\
 & & \underline{\cancel{+\ 2x}} & \underline{-\ 2} & \\
 & & 0 & +\ 5 &
\end{array}$$

Luego, $x^3 + 2x^2 - 5x + 7 = (x - 1)(x^2 + 3x - 2) + 5$.

1c) $x^3 + 4x^2 - 8x - 16 = (x + 5)(x^2 - x - 3) - 1$

1d) $x^3 - 6x^2 + 4x + 19= (x - 3)(x^2 - 3x - 5) + 4$

1e) $x^3 + 3x + 9 = (x + 2)(x^2 - 2x + 7) - 5$

1f) $x^3 - 7x^2 + 11 = (x - 2)(x^2 - 5x - 10) - 9$

1g) $x^3 + 5x^2 + 5x + 3 = (x^2 + 4x + 1)(x + 1) + 2$

1h) $x^3 + x^2 - 12x + 2 = (x^2 + 3x - 6)(x - 2) - 10$

1i) $x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = (x - 1)(x^2 - 4x + 1)$

1j) $x^3 + 4x^2 - 6x - 5 = (x + 5)(x^2 - x - 1)$

1k) $2x^3 - 3x^2 - x - 2 = (2x^2 + x + 1)(x - 2)$

1l) $3x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = (3x^2 - x - 1)(x + 1)$

2. Al utilizar el algoritmo de la división para efectuar $(x^3 + 2x^2 - x + a) \div (x - 2)$ se obtiene como residuo $a + 14$; para que este sea igual a cero entonces debe ocurrir:

$$a + 14 = 0$$

De lo anterior se obtiene $a = -14$. Puede sustituirse este valor para verificar que el residuo de la división

$$(x^3 + 2x^2 - x - 14) \div (x - 2)$$

es igual a cero.

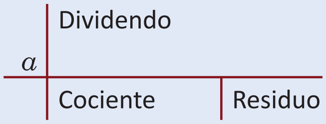
3. $2x^4 + 6x^3 - x^2 + 3x - 1 = (2x^2 + 1)(x^2 + 3x - 1)$

Aún no se ha estudiado sobre propiedades de las potencias, por lo que puede indicar a sus estudiantes que $x^2(x^2) = x^4$.

2.3 División sintética, parte 1

Definición

La **división sintética** es un método para realizar divisiones entre polinomios en una variable y se utiliza cuando el polinomio del divisor tiene la forma $x - a$. En este método se trabaja con el esquema:



Este método también funciona cuando se divide entre un polinomio de la forma $mx - a$. En este caso, se ubica el número $\frac{a}{m}$ en lugar de a.

El procedimiento es el siguiente:

1. Ordenar los términos del dividendo según las potencias decrecientes de la variable. Luego se escriben los coeficientes del dividendo en forma horizontal, en la parte con título "Dividendo".
2. Se escribe el primer coeficiente del dividendo en la parte con título "Cociente"; luego se multiplica este número por el valor de a y se escribe el resultado debajo del segundo coeficiente del dividendo.
3. Se suman las cantidades del paso 2, el resultado será el segundo coeficiente del cociente.
4. Repetir este proceso hasta obtener un número debajo del término independiente del dividendo.
5. El residuo será la suma de las cantidades de la última columna; los números a la izquierda del residuo corresponden a los coeficientes del polinomio del cociente, cuyo grado será uno menos que el grado del polinomio del dividendo.

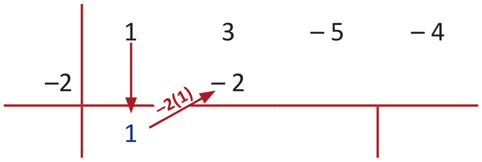
Ejemplo

Utiliza la división sintética para realizar $(x^3 + 3x^2 - 5x - 4) \div (x + 2)$. Escribe el dividendo en la forma $qd + r$.

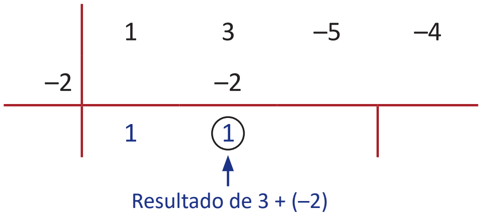
$x + 2 = x - (-2)$, es decir, $a = -2$

De acuerdo al esquema mostrado en la definición, se escriben los coeficientes del polinomio del dividendo en el lugar correspondiente, en forma horizontal; se sustituye también el valor de $a = -2$:

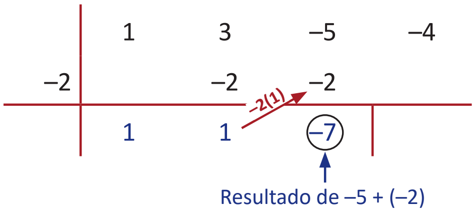
se escribe el primer coeficiente del dividendo en la parte correspondiente al cociente (este será el coeficiente de la variable con mayor potencia del polinomio del cociente). Este número se multiplica por –2 y se escribe el resultado debajo del segundo coeficiente del dividendo, o sea, debajo de 3:



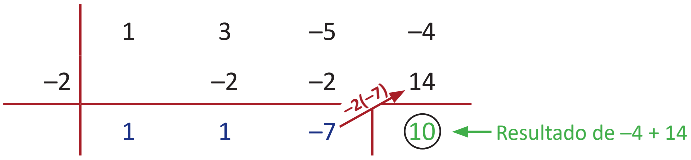
se efectúa la suma 3 + (–2) y el resultado será el segundo número del cociente:



se repite el proceso ahora multiplicando –2 por el segundo número del cociente, se escribe el resultado debajo de –5 y se suman ambas cantidades:



se multiplica –2 por –7, el resultado se escribe debajo de –4 y se suman ambas cantidades:



Este último resultado 10, corresponde al residuo de la división. Los números 1, 1 y –7 son los coeficientes del polinomio del cociente, cuyo grado será 2 pues el grado del polinomio del dividendo es 3; o sea, el polinomio del cociente es: $\boldsymbol{x^2 + x - 7}$.

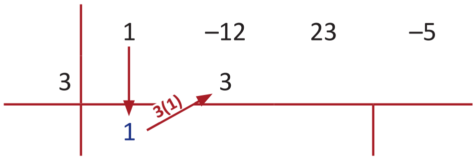
Por lo tanto, $x^3 + 3x^2 - 5x - 4 = (x + 2)(x^2 + x - 7) + 10$.

A la división sintética también se le conoce como **método de Ruffini** o **regla de Ruffini** debido al matemático italiano Paolo Ruffini (1765 - 1822), que además estudió Medicina, Filosofía y Literatura en la Universidad de Módena en Italia. Puedes comprobar que el resultado de la división sintética es el mismo que el de la división larga.

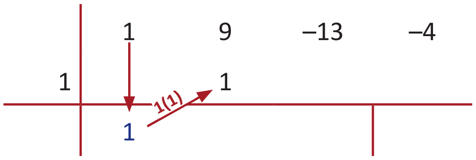
Problemas

Realiza las siguientes divisiones y escribe el dividendo en la forma $qd + r$:

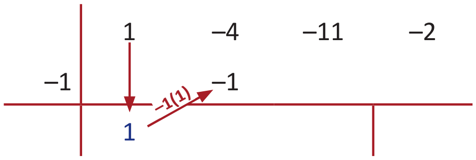
a) $(x^3 - 12x^2 + 23x - 5) \div (x - 3)$



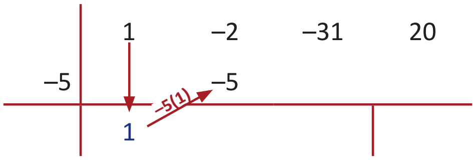
b) $(x^3 + 9x^2 - 13x - 4) \div (x - 1)$



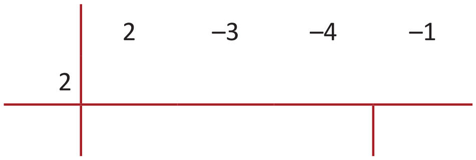
c) $(x^3 - 4x^2 - 11x - 2) \div (x + 1)$



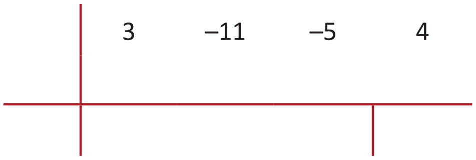
d) $(x^3 - 2x^2 - 31x + 20) \div (x + 5)$



e) $(2x^3 - 3x^2 - 4x - 1) \div (x - 2)$



f) $(3x^3 - 11x^2 - 5x + 4) \div (x - 4)$



Indicador de logro

2.3 Efectúa la división de un polinomio por un binomio de la forma $x - a$ utilizando la división sintética.

Secuencia

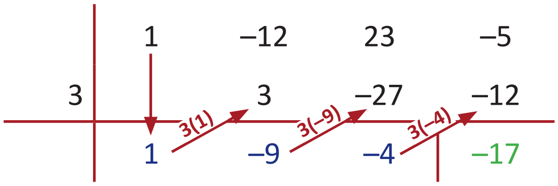
En la clase se plantea y utiliza el algoritmo de la división sintética cuando el divisor es un binomio de la forma $x - a$. Puede utilizarse la división larga de polinomios para comprobar que los resultados son iguales.

Propósito

Similar a la clase 2.2, se comienza con la Definición para que en los Ejemplos se desarrolle el paso a paso del proceso de la división sintética y los estudiantes no tengan mayor dificultad en el bloque de Problemas.

Solución de problemas:

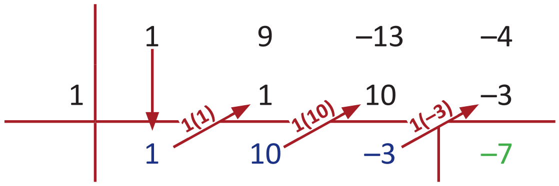
a) $(x^3 - 12x^2 + 23x - 5) \div (x - 3)$



$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -12 & 23 & -5 \\ 3 & & 3 & -27 & -12 \\ \hline & 1 & -9 & -4 & -17 \end{array}$$

$x^3 - 12x^2 + 23x - 5 = (x - 3)(x^2 - 9x - 4) - 17$

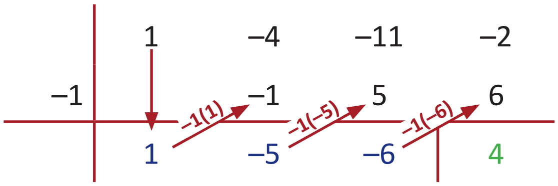
b) $(x^3 + 9x^2 - 13x - 4) \div (x - 1)$



$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 9 & -13 & -4 \\ 1 & & 1 & 10 & -3 \\ \hline & 1 & 10 & -3 & -7 \end{array}$$

$x^3 + 9x^2 - 13x - 4 = (x - 1)(x^2 + 10x - 3) - 7$

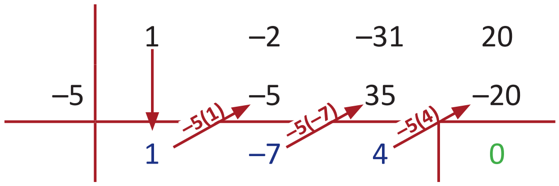
c) $(x^3 - 4x^2 - 11x - 2) \div (x + 1)$



$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & -11 & -2 \\ -1 & & -1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & -6 & 4 \end{array}$$

$x^3 - 4x^2 - 11x - 2 = (x + 1)(x^2 - 5x - 6) + 4$

d) $(x^3 - 2x^2 - 31x + 20) \div (x + 5)$



$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -31 & 20 \\ -5 & & -5 & 35 & -20 \\ \hline & 1 & -7 & 4 & 0 \end{array}$$

$x^3 - 2x^2 - 31x + 20 = (x + 5)(x^2 - 7x + 4)$

e) $(2x^3 - 3x^2 - 4x - 1) \div (x - 2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -3 & -4 & -1 \\ 2 & & 4 & 2 & -4 \\ \hline & 2 & 1 & -2 & -5 \end{array}$$

$2x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = (x - 2)(2x^2 + x - 2) - 5$

f) $(3x^3 - 11x^2 - 5x + 4) \div (x - 4)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -11 & -5 & 4 \\ 4 & & 12 & 4 & -4 \\ \hline & 3 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$3x^3 - 11x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(3x^2 + x - 1)$

2.4 División sintética, parte 2

Problema inicial

Realiza la división $(x^3 - 8) \div (x - 2)$. Escribe el dividendo en la forma $qd + r$.

Si falta una potencia de la variable debes colocar cero en el lugar correspondiente.

Solución

El polinomio $x^3 - 8$ no posee términos con las variables x^2 y x, entonces debe colocarse cero en el lugar correspondiente:

$$(x^3 + 0x^2 + 0x - 8) \div (x - 2)$$

Utilizando división sintética se obtiene lo siguiente:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 2 & \downarrow & 2 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

El polinomio del cociente es $x^2 + 2x + 4$ y el residuo es cero. Por lo tanto, $(x^3 - 8) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

En general

Al dividir dos polinomios en una variable, los términos del dividendo y del divisor siempre deben estar ordenados según las potencias decrecientes de la variable. Si falta una potencia de la variable se coloca cero en el lugar correspondiente.

Si el polinomio del divisor tiene la forma $x - a$ entonces se utiliza la división sintética; en cualquier otro caso se utiliza la división larga de polinomios.

Ejemplo

Realiza la división $(x^2 - 2x^3 - 20) \div (3 + x)$. Escribe el dividendo en la forma $qd + r$.

Deben ordenarse los polinomios del dividendo y del divisor de acuerdo a las potencias decrecientes de la variable, y colocar cero en el lugar donde falte una de las potencias:

$$(-2x^3 + x^2 + 0x - 20) \div (x + 3)$$

como el polinomio del divisor tiene la forma $x - a$ se utiliza división sintética, con $a = -3$:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -2 & 1 & 0 & -20 \\ -3 & \downarrow & 6 & -21 & 63 \\ \hline & -2 & 7 & -21 & 43 \end{array}$$

Luego, $-2x^3 + x^2 + 0 - 20 = (x + 3)(-2x^2 + 7x - 21) + 43$.

Problemas

1. Realiza las siguientes divisiones y escribe el dividendo en la forma $qd + r$:
   - a) $(x^3 - 40x + 12) \div (x - 6)$
   - b) $(2x^3 - 65x - 45) \div (x + 5)$
   - c) $(x^3 - 50) \div (x - 4)$
   - d) $(7x - 2x^3 - 5) \div (x + 2)$
   - e) $(10x^2 - 10 - 3x^3) \div (-3 + x)$
   - f) $\left(x^3 + \frac{1}{8}\right) \div \left(x + \frac{1}{2}\right)$
2. Determina el valor de a para que el residuo de la división $(x^3 - 27) \div (x - a)$ sea igual a cero.

Indicador de logro

2.4 Utiliza la división sintética cuando el dividendo no posee todas las potencias de la variable.

Secuencia

En esta clase se continúa con el algoritmo de la división sintética. En este caso, los polinomios tomados como dividendo no poseen todas las potencias de la variable.

Propósito

Tanto en el Problema inicial como en el Ejemplo y el bloque de Problemas, los estudiantes deben recordar que, tal y como se hace en la división larga de polinomios, deben colocar cero en el “espacio” correspondiente a la potencia de la variable que no aparezca.

Solución de problemas:

1a) $(x^3 + 0x^2 - 40x + 12) \div (x - 6)$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -40 & 12 \\ 6 & \downarrow & 6 & 36 & -24 \\ \hline & 1 & 6 & -4 & \multicolumn{1}{|c}{-12} \end{array}$$

$x^3 - 40x + 12 = (x - 6)(x^2 + 6x - 4) - 12$

1b) $(2x^3 + 0x^2 - 65x - 45) \div (x + 5)$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 0 & -65 & -45 \\ -5 & \downarrow & -10 & 50 & 75 \\ \hline & 2 & -10 & -15 & \multicolumn{1}{|c}{30} \end{array}$$

$2x^3 - 65x - 45 = (x + 5)(2x^2 - 10x - 15) + 30$

1c) $(x^3 + 0x^2 + 0x - 50) \div (x - 4)$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -50 \\ 4 & \downarrow & 4 & 16 & 64 \\ \hline & 1 & 4 & 16 & \multicolumn{1}{|c}{14} \end{array}$$

$x^3 - 50 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16) + 14$

1d) $(- 2x^3 + 0x^2 + 7x - 5) \div (x + 2)$

$$\begin{array}{c|cccc} & -2 & 0 & 7 & -5 \\ -2 & \downarrow & 4 & -8 & 2 \\ \hline & -2 & 4 & -1 & \multicolumn{1}{|c}{-3} \end{array}$$

$-2x^3 + 7x - 5 = (x + 2)(-2x^2 + 4x - 1) - 3$

1e) $(- 3x^3 + 10x^2 + 0x - 10) \div (x - 3)$

$$\begin{array}{c|cccc} & -3 & 10 & 0 & -10 \\ 3 & \downarrow & -9 & 3 & 9 \\ \hline & -3 & 1 & 3 & \multicolumn{1}{|c}{-1} \end{array}$$

$- 3x^3 + 10x^2 - 10 = (x - 3)(-3x^2 + x + 3) - 1$

1f) $\left(x^3 + 0x^2 + 0x + \frac{1}{8}\right) \div \left(x + \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & \downarrow & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ \hline & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \multicolumn{1}{|c}{0} \end{array}$$

$x^3 + \frac{1}{8} = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$

2. Usando la división sintética se obtiene lo siguiente:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -27 \\ a & \downarrow & a & a^2 & a^3 \\ \hline & 1 & a & a^2 & \multicolumn{1}{|c}{a^3 - 27} \end{array}$$

Debe ocurrir entonces que $a^3 - 27 = 0$, o sea, $a^3 = 27$. El número que satisface lo anterior es 3, pues $3^3 = 27$. Luego, $a = 3$; puede efectuarse $(x^3 - 27) \div (x - 3)$ y comprobar que el residuo es cero.

Lección 2

2.5 Teorema del residuo

Problema inicial

Dados los polinomios $p = 2x^3 - 9x^2 - 6x + 7$ y $q = x - 5$:

1. Encuentra el residuo de la división $p \div q$.
2. Sustituye $x = 5$ en el polinomio p. ¿A qué es igual este resultado?

Solución

1. Utilizando la división sintética:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & -9 & -6 & 7 \\
5 & \downarrow & 10 & 5 & -5 \\
\hline
 & 2 & 1 & -1 & \textcircled{2}
\end{array}$$

El residuo al realizar $p \div q$ es 2.

2. Al sustituir $x = 5$ en el polinomio p se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} 2(5)^3 - 9(5)^2 - 6(5) + 7 &= 2(125) - 9(25) - 30 + 7 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Este resultado es el residuo de la división $p \div q$.

Sean p, q, d y r polinomios en una variable x tales que $p = qd + r$ y $q = x - a$. Así:

$$p = (x - a)d + r$$

Sustituir $x = a$ en p será igual a sustituir $x = a$ en la expresión $(x - a)d + r$, cuyo resultado es igual a r:

$$(a - a)d + r = (0)d + r = r$$

Luego, el residuo al efectuar la división de polinomios $p \div q$ es igual a sustituir $x = a$ en el polinomio p.

Teorema

Sean p y q dos polinomios en una variable, con q de la forma $x - a$. El residuo al realizar la división $p \div q$ es igual al valor obtenido cuando se sustituye $x = a$ en el polinomio p. A este resultado se le conoce como **teorema del residuo** o **teorema del resto**.

Ejemplo

Encuentra el residuo que se obtiene al realizar la división $(x^3 + 8x^2) \div (x + 7)$.

Utilizando el teorema, el residuo será igual al valor obtenido al sustituir $x = -7$ en $x^3 + 8x^2$, es decir:

$$\begin{aligned} x^3 + 8x^2 &= (-7)^3 + 8(-7)^2 \\ &= -343 + 392 \\ &= 49 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el residuo de la división $(x^3 + 8x^2) \div (x + 7)$ es 49.

Problemas

1. Encuentra el residuo que se obtiene al realizar las siguientes divisiones:
   - a) $(3x^3 - 2x^2 + x - 2) \div (x - 1)$
   - b) $(x^3 + 2x^2 - 14x + 2) \div (x - 2)$
   - c) $(-x^3 + 9x^2 + 7x + 15) \div (x - 10)$
   - d) $(3x^3 - 5x) \div (x + 1)$
   - e) $(2x^3 - 4x^2 - 21x + 30) \div (x + 3)$
   - f) $(x^3 - 7x^2 + 55) \div (x + 1)$
   - g) $(x^3 - x^2 + x) \div \left(x - \frac{1}{2}\right)$
   - h) $(x^3 - x - 1) \div \left(x + \frac{1}{3}\right)$

2. En cada caso determina el valor de a para que el residuo de la división $p \div q$ sea igual a cero:
   - a) $p = x^3 - 4ax + 3$, $q = x - 1$
   - b) $p = -x^3 + ax^2 - ax + a^2$, $q = x - 2$

Indicador de logro

2.5 Calcula el residuo de la división de un polinomio por un binomio de la forma $x - a$ utilizando el teorema del residuo.

Secuencia

Luego de haber desarrollado la división de polinomios se presenta el teorema del residuo. Este será utilizado en la factorización de polinomios de grado tres que se estudiará en las siguientes clases.

Propósito

El Problema inicial pretende, mediante un caso particular, ejemplificar el resultado enunciado en el Teorema. El Ejemplo lo utiliza de una forma más concreta, misma que deben seguir los estudiantes en el numeral 1 del bloque de Problemas.

Solución de problemas:

1a) Utilizando el teorema del residuo, se sustituye $x = 1$ en el polinomio del dividendo, o sea:

$$\begin{aligned} 3(1)^3 - 2(1)^2 + 1 - 2 &= 3 - 2 + 1 - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego, el residuo de $(3x^3 - 2x^2 + x - 2) \div (x - 1)$ es igual a 0.

1b) Se sustituye $x = 2$ en el polinomio del dividendo:

$$\begin{aligned} (2)^3 + 2(2)^2 - 14(2) + 2 &= 8 + 8 - 28 + 2 \\ &= -10 \end{aligned}$$

Luego, el residuo de $(x^3 + 2x^2 - 14x + 2) \div (x - 2)$ es igual a -10.

1c) Sustituyendo $x = 10$ en el dividendo:

$$\begin{aligned} -(10)^3 + 9(10)^2 + 7(10) + 15 &= -1\,000 + 900 + 70 + 15 \\ &= -15 \end{aligned}$$

El residuo de $(-x^3 + 9x^2 + 7x + 15) \div (x - 10)$ es -15.

1d) Sustituyendo $x = -1$ en el dividendo:

$$\begin{aligned} 3(-1)^3 - 5(-1) &= -3 + 5 \\ &= 2 \end{aligned}$$

El residuo de $(3x^3 - 5x) \div (x + 1)$ es 2.

1e) Sustituyendo $x = -3$ en el dividendo:

$$\begin{aligned} 2(-3)^3 - 4(-3)^2 - 21(-3) + 30 &= -54 - 36 + 63 + 30 \\ &= 3 \end{aligned}$$

El residuo de $(2x^3 - 4x^2 - 21x + 30) \div (x + 3)$ es 3.

1f) Sustituyendo $x = -1$ en el dividendo:

$$\begin{aligned} (-1)^3 - 7(-1)^2 + 55 &= -1 - 7 + 55 \\ &= 47 \end{aligned}$$

El residuo de $(x^3 - 7x^2 + 55) \div (x + 1)$ es 47.

1g) Sustituyendo $x = \frac{1}{2}$ en el dividendo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} &= \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

El residuo de $(x^3 - x^2 + x) \div \left(x - \frac{1}{2}\right)$ es $\frac{3}{8}$.

1h) Sustituyendo $x = -\frac{1}{3}$ en el dividendo:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right) - 1 &= -\frac{1}{27} + \frac{1}{3} - 1 \\ &= -\frac{19}{27} \end{aligned}$$

El residuo de $(x^3 - x - 1) \div \left(x + \frac{1}{3}\right)$ es $-\frac{19}{27}$.

2a) Sustituyendo $x = 1$ en p:

$$1^3 - 4a(1) + 3 = -4a + 4$$

Debe ocurrir que $-4a + 4 = 0$, luego:

$$\begin{aligned} 4a &= 4 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, a debe ser igual a 1.

2b) Sustituyendo $x = 2$ en p:

$$-(2)^3 + a(2)^2 - a(2) + a^2 = a^2 + 2a - 8$$

Debe ocurrir que $a^2 + 2a - 8 = 0$; al resolver la ecuación se obtiene $a = -4$ y $a = 2$. Por lo tanto, el valor de a debe ser igual a -4 o 2.

Lección 2

2.6 Factorización utilizando el teorema del factor, parte 1

Problema inicial

Sea $p = x^3 + 4x^2 + x - 6$:

1. Verifica que el valor obtenido al sustituir $x = 1$ en el polinomio p es igual a cero.
2. Factoriza el polinomio p.

¿Cuál será el residuo al dividir p entre $x - 1$?

Solución

1. Sustituyendo $x = 1$ en el polinomio p se obtiene:

$$(1)^3 + 4(1)^2 + 1 - 6 = 1 + 4 - 5 = 0$$

es decir, el valor del polinomio p es igual a cero cuando $x = 1$.

2. Utilizando el teorema del residuo y con base en el resultado del literal a), el residuo al dividir el polinomio p entre $x - 1$ será igual a cero. Entonces p puede escribirse en la forma $(x - 1)d$, donde d es un polinomio de grado 2 (pues el producto es de grado 3). Para encontrar al polinomio d se realiza $p \div (x - 1)$:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 4 & 1 & -6 \\ 1 & & 1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & \textcircled{0} \end{array}$$

luego, $d = x^2 + 5x + 6$ y este se puede factorizar en $(x + 3)(x + 2)$. Por lo tanto,

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1)(x + 3)(x + 2).$$

Teorema

Sea p un polinomio cualquiera. Si el valor de p al sustituir $x = a$ es igual a cero entonces p puede escribirse en la forma $(x - a)d$, donde d es un polinomio de un grado menor que p. Este resultado se conoce como **teorema del factor**.

Ejemplo

Sea $p = x^3 - 7x + 6$. Verifica que si $x = -3$ entonces $p = 0$ y utiliza esto para factorizar el polinomio p.

Al sustituir $x = -3$ en p se obtiene:

$$(-3)^3 - 7(-3) + 6 = -27 + 21 + 6 = 0.$$

Por el teorema del factor, p puede escribirse en la forma $(x + 3)d$. Se utiliza división sintética para encontrar d:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ -3 & & -3 & 9 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & \textcircled{0} \end{array}$$

luego, $d = x^2 - 3x + 2$ y este se factoriza como el producto $(x - 1)(x - 2)$. Por lo tanto,

$$x^3 - 7x + 6 = (x + 3)(x - 1)(x - 2).$$

Problemas

Para cada caso verifica que el valor del polinomio p es cero si $x = a$; luego factoriza p:

a) $p = x^3 + 2x^2 - x - 2;\ a = 1$

b) $p = x^3 + 6x^2 + 11x + 6;\ a = -1$

c) $p = x^3 + 2x^2 - 5x - 6;\ a = 2$

d) $p = x^3 - 5x^2 - 2x + 24;\ a = -2$

e) $p = x^3 - 21x - 20;\ a = -4$

f) $p = x^3 - 9x^2 + 23x - 15;\ a = 5$

Indicador de logro

2.6 Utiliza el teorema del factor para factorizar polinomios de la forma $x^3 + mx^2 + nx + k$ cuando se conoce uno de sus factores lineales.

Secuencia

En esta clase se utilizan los procedimientos y resultados vistos en clases anteriores sobre división de polinomios y residuos, y el teorema del factor, para factorizar polinomios de grado a lo sumo 3. Observe que, en los polinomios utilizados, el coeficiente de x^3 es igual a 1.

Propósito

El Problema inicial sirve para mostrar el significado de que en la división de polinomios el residuo sea cero. Junto con el Teorema del Factor y el Ejemplo de la clase se presenta cómo factorizar un polinomio de grado 3, partiendo de uno de sus factores.

Solución de problemas:

a) Se sustituye $x = 1$ en el polinomio p:

$$1^3 + 2(1)^2 - 1 - 2 = 3 - 3 = 0$$

$p = x^3 + 2x^2 - x - 2$ puede escribirse en la forma $(x - 1)d$. Se usa división sintética para encontrar d:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & \downarrow & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & \multicolumn{1}{r|}{2} & 0 \end{array}$$

$d = x^2 + 3x + 2$, y se factoriza como $(x + 2)(x + 1)$. Por lo tanto,

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 2)(x + 1).$$

b) Se sustituye $x = -1$ en el polinomio p:

$$(-1)^3 + 6(-1)^2 + 11(-1) + 6 = -12 + 12 = 0$$

$p = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ puede escribirse en la forma $(x + 1)d$. Se usa división sintética para encontrar d:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & 11 & 6 \\ -1 & \downarrow & -1 & -5 & -6 \\ \hline & 1 & 5 & \multicolumn{1}{r|}{6} & 0 \end{array}$$

$d = x^2 + 5x + 6$, y se factoriza como $(x + 3)(x + 2)$. Por lo tanto,

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1)(x + 3)(x + 2).$$

c) Se sustituye $x = 2$ en el polinomio p:

$$2^3 + 2(2)^2 - 5(2) - 6 = 16 - 16 = 0$$

$p = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ puede escribirse en la forma $(x - 2)d$. Se usa división sintética para encontrar d:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -5 & -6 \\ 2 & \downarrow & 2 & 8 & 6 \\ \hline & 1 & 4 & \multicolumn{1}{r|}{3} & 0 \end{array}$$

$d = x^2 + 4x + 3$, y se factoriza como $(x + 3)(x + 1)$. Por lo tanto,

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x - 2)(x + 3)(x + 1).$$

d) Se sustituye $x = -2$ en el polinomio p:

$$(-2)^3 - 5(-2)^2 - 2(-2) + 24 = -28 + 28 = 0$$

$p = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ puede escribirse en la forma $(x + 2)d$. Se usa división sintética para encontrar d:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & -2 & 24 \\ -2 & \downarrow & -2 & 14 & -24 \\ \hline & 1 & -7 & \multicolumn{1}{r|}{12} & 0 \end{array}$$

$d = x^2 - 7x + 12$, y se factoriza como $(x - 3)(x - 4)$. Por lo tanto,

$$x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = (x + 2)(x - 3)(x - 4).$$

e) Se sustituye $x = -4$ en el polinomio p:

$$(-4)^3 - 21(-4) - 20 = -84 + 84 = 0$$

$p = x^3 - 21x - 20$ puede escribirse en la forma $(x + 4)d$. Al usar división sintética para encontrar d se obtiene $d = x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5)$. Por lo tanto,

$$x^3 - 21x - 20 = (x + 4)(x + 1)(x - 5).$$

f) Se sustituye $x = 5$ en el polinomio p:

$$5^3 - 9(5)^2 + 23(5) - 15 = 240 - 240 = 0$$

$p = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$ puede escribirse en la forma $(x - 5)d$. Al usar división sintética para encontrar d se obtiene $d = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$. Por lo tanto,

$$x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = (x - 5)(x - 1)(x - 3).$$

Lección 2

2.7 Factorización utilizando el teorema del factor, parte 2

Problema inicial

Sea $p = x^3 - 19x - 30$:

1. Encuentra los divisores (positivos y negativos) del término independiente.
2. Determina en cuál de ellos p es igual a cero; luego factoriza el polinomio p.

Solución

1. Los divisores del término independiente –30 son: ±1, ±2, ±3, ±5, ±6, ±10, ±15 y ±30 (se coloca "±" para indicar el divisor positivo y negativo), estos pueden encontrarse al descomponer 30 en sus factores primos.

2. Se sustituye el valor de x en el polinomio p por los números encontrados en el literal anterior:
   - a) si $x = 1$ entonces $(1)^3 - 19(1) - 30 = -48$;
   - b) si $x = -1$ entonces $(-1)^3 - 19(-1) - 30 = -12$;
   - c) si $x = 2$ entonces $(2)^3 - 19(2) - 30 = -60$;
   - d) si $x = -2$ entonces $(-2)^3 - 19(-2) - 30 = 0$.

   Por el teorema del factor, el polinomio p se puede escribir en la forma $(x + 2)d$; para encontrar d se utiliza división sintética:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -19 & -30 \\ -2 & \downarrow & -2 & 4 & 30 \\ \hline & 1 & -2 & -15 & \textcircled{0} \end{array}$$

   entonces $d = x^2 - 2x - 15$ y este se puede factorizar en $(x + 3)(x - 5)$. Por lo tanto,

$$x^3 - 19x - 30 = (x + 2)(x + 3)(x - 5).$$

Conclusión

Sea $p = x^3 + mx^2 + nx + k$; los posibles valores de a tales que p pueda escribirse en la forma $(x - a)d$ son los divisores del término independiente k.

Es decir, para factorizar $p = x^3 + mx^2 + nx + k$ puede realizarse lo siguiente:

1. Encuentra los divisores (positivos y negativos) del término independiente.
2. Determina cuál de ellos hace que el valor del polinomio sea igual a cero.
3. Realiza la división para escribir p en la forma $(x - a)d$, donde d es un polinomio de grado 2.
4. Factoriza d con cualquiera de los métodos vistos en las clases anteriores.

Problemas

1. Factoriza los siguientes polinomios:
   - a) $x^3 - 2x^2 - x + 2$
   - b) $x^3 + 2x^2 - x - 2$
   - c) $x^3 + x^2 - 14x - 24$
   - d) $x^3 - 5x^2 - 9x + 45$
   - e) $y^3 - 4y^2 + y + 6$
   - f) $y^3 - 3y^2 - 4y + 12$

2. Factoriza: $(x + 10)^3 + 1$.

   Sustituye $x + 10$ por y.

3. Encuentra la suma de los factores del polinomio: $x^3 - 13x - 12$.

Indicador de logro

2.7 Factoriza polinomios de la forma $x^3 + mx^2 + nx + k$ encontrando los divisores del término independiente y aplicando el teorema del factor.

Secuencia

En esta clase se factorizan polinomios de grado 3, encontrando primero un número entero a tal que al sustituir $x = a$ en el polinomio el resultado sea cero, y luego aplicar lo estudiado en la clase 2.6. Para ello se utiliza un resultado en álgebra sobre los divisores del término independiente del polinomio, por esa razón solo se incluyen polinomios cuyo coeficiente de la variable con exponente 3 es igual a 1.

Posibles dificultades

Recuerde a sus estudiantes que siempre deben tomar los divisores positivos y negativos del término independiente y probar con cuál de ellos el polinomio se hace cero. Para encontrar los divisores, pueden descomponer el término independiente en sus factores primos.

Solución de problemas:

1a) Los divisores de 2 son ±1 y ±2; al sustituir $x = 1$ en $x^3 - 2x^2 - x + 2$ se obtiene:

$$1^3 - 2(1)^2 - 1 + 2 = 3 - 3 = 0$$

Luego, $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)d$; se utiliza división sintética para encontrar d:

	1	−2	−1	2
1		1	−1	−2
	1	−1	−2	0

Es decir, $d = x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$, y:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x + 1)(x - 2).$$

1b) Los divisores de −2 son ±1 y ±2; al sustituir $x = 1$ en $x^3 + 2x^2 - x - 2$ se obtiene:

$$1^3 + 2(1)^2 - 1 - 2 = 3 - 3 = 0$$

Luego, $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)d$; se utiliza división sintética para encontrar d:

	1	2	−1	−2
1		1	3	2
	1	3	2	0

Es decir, $d = x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$, y:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2).$$

1c) $x^3 + x^2 - 14x - 24 = (x + 2)(x + 3)(x - 4)$

1d) $x^3 - 5x^2 - 9x + 45 = (x - 3)(x + 3)(x - 5)$

1e) $y^3 - 4y^2 + y + 6 = (y + 1)(y - 2)(y - 3)$

1f) $y^3 - 3y^2 - 4y + 12 = (y - 2)(y + 2)(y - 3)$

2. Al sustituir $y = x + 10$ se obtiene $y^3 + 1$. Los divisores de 1 son ±1; si $y = -1$ entonces:

$$(-1)^3 + 1 = -1 + 1 = 0$$

Luego, $y^3 + 1 = (y + 1)d$; al usar la división sintética para encontrar d se obtiene $d = y^2 - y + 1$; este polinomio no se puede factorizar, por tanto $y^3 + 1 = (y + 1)(y^2 - y + 1)$. Se sustituye $y = x + 10$:

El trinomio $y^2 - y + 1$ tiene raíces complejas.

$$\begin{aligned}(x + 10)^3 + 1 &= (x + 10 + 1)[(x + 10)^2 - (x + 10) + 1]\\ &= (x + 11)(x^2 + 20x + 100 - x - 10 + 1)\\ &= (x + 11)(x^2 + 19x + 91)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x + 10)^3 + 1 = (x + 11)(x^2 + 19x + 91)$.

3. Se debe factorizar $x^3 - 13x - 12$. Los divisores de −12 son ±1, ±2, ±3, ±4, ±6 y ±12. Al sustituir $x = -1$:

$$(-1)^3 - 13(-1) - 12 = -13 + 13 = 0$$

Luego, $x^3 - 13x - 12 = (x + 1)d$; si se utiliza la división sintética para encontrar d se obtiene $d = x^2 - x - 12$, el cual a su vez se factoriza en $(x + 3)(x - 4)$. Así, $x^3 - 13x - 12 = (x + 1)(x + 3)(x - 4)$; sumando sus factores:

$$(x + 1) + (x + 3) + (x - 4) = 3x.$$

2.8 Factorizaciones sucesivas

Problema inicial

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^3y^2 - 2x^2y^2 - 9xy^2 + 18y^2$

b) $n^3x^2 - n^3y^2 - 3n^2x^2 + 3n^2y^2 + 4x^2 - 4y^2$

Solución

a) Primero debe extraerse el factor común de los términos del polinomio, en este caso es y^2:

$$\begin{aligned} x^3y^2 - 2x^2y^2 - 9xy^2 + 18y^2 &= (x^3 - 2x^2 - 9x + 18)y^2 \\ &= y^2(x^3 - 2x^2 - 9x + 18) \end{aligned}$$

se factoriza $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ utilizando el teorema del factor y división sintética; en este caso, el polinomio es igual a cero cuando $x = 2$:

$$(2)^3 - 2(2)^2 - 9(2) + 18 = 8 - 8 - 18 + 18 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -2 & -9 & 18 \\ 2 & \downarrow & 2 & 0 & -18 \\ \hline & 1 & 0 & -9 & \textcircled{0} \end{array}$$

de lo anterior, $x^3y^2 - 2x^2y^2 - 9xy^2 + 18y^2 = y^2(x - 2)(x^2 - 9)$. El tercer factor, $x^2 - 9$, es una diferencia de cuadrados que se factoriza en el producto $(x + 3)(x - 3)$. Por lo tanto,

$$x^3y^2 - 2x^2y^2 - 9xy^2 + 18y^2 = y^2(x - 2)(x + 3)(x - 3).$$

b) No todos los términos tienen un monomio común, así que se asocian aquellos que lo posean y se extrae el factor común polinomio:

$$\begin{aligned} n^3x^2 - n^3y^2 - 3n^2x^2 + 3n^2y^2 + 4x^2 - 4y^2 &= n^3(x^2 - y^2) - 3n^2(x^2 - y^2) + 4(x^2 - y^2) \\ &= (n^3 - 3n^2 + 4)(x^2 - y^2) \end{aligned}$$

el polinomio $n^3 - 3n^2 + 4$ se factoriza usando el teorema del factor y división sintética, este se anula cuando $n = -1$:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & \downarrow & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \textcircled{0} \end{array}$$

de lo anterior, $n^3x^2 - n^3y^2 - 3n^2x^2 + 3n^2y^2 + 4x^2 - 4y^2 = (n + 1)(n^2 - 4n + 4)(x^2 - y^2)$. El factor $n^2 - 4n + 4$, es un trinomio cuadrado perfecto cuya factorización es $(n - 2)^2$ y $x^2 - y^2$ puede factorizarse por diferencia de cuadrados, siendo $(x - y)(x + y)$. Por lo tanto,

$$n^3x^2 - n^3y^2 - 3n^2x^2 + 3n^2y^2 + 4x^2 - 4y^2 = (n + 1)(n - 2)^2(x - y)(x + y).$$

En general

Para factorizar un polinomio p se extrae el monomio común de los términos del polinomio y se factoriza el segundo factor. Si no todos los términos tienen un monomio común entonces se asocian estos de forma conveniente y se factorizan por cualquiera de los métodos vistos en las clases anteriores. Este proceso se repite hasta dejar expresado el polinomio original como producto de polinomios en su más simple expresión.

Problemas

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $3xy^3 + 15xy^2 + 9xy - 27x$

b) $2abc^3 + 2abc^2 - 50abc - 50ab$

c) $m^3n^2 - 4m^2n^2 - 11mn^2 + 30n^2$

d) $4x^3y^2 - 16x^2y^2 - 12xy^2 + 72y^2 - x^3 + 4x^2 + 3x - 18$

Indicador de logro

2.8 Factoriza polinomios aplicando los métodos de factorización y división de polinomios..

Secuencia

En esta clase, para factorizar los polinomios los estudiantes deben aplicar los métodos vistos en las clases anteriores: factor común, factorización de trinomios, diferencia de cuadrados y división de polinomios.

Propósito

En ambos literales del Problema inicial debe, primero, extraerse el factor común de los términos (ya sea un monomio o un polinomio). Igual que en la lección anterior, al factorizar un polinomio lo primero es verificar si sus términos poseen factor común, y luego utilizar otro de los métodos estudiados. Esto se explica en la parte “En general”, y debe aplicarse en el bloque de Problemas.

Solución de problemas:

a) Se extrae el factor común $3x$ de los términos del polinomio:

$$3xy^3 + 15xy^2 + 9xy - 27x = 3x(y^3 + 5y^2 + 3y - 9)$$

Para factorizar $y^3 + 5y^2 + 3y - 9$ se usa el teorema del factor y división sintética: los divisores de -9 son ±1, ±3 y ±9. Si $y = 1$:

$$(1)^3 + 5(1)^2 + 3(1) - 9 = 9 - 9 = 0$$

Luego, $y^3 + 5y^2 + 3y - 9 = (y - 1)d$; usando división sintética para encontrar el polinomio d:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 5 & 3 & -9 \\ 1 & \downarrow & 1 & 6 & 9 \\ \hline & 1 & 6 & 9 & \vert\; 0 \end{array}$$

De lo anterior, $d = y^2 + 6y + 9 = (y + 3)^2$. Por lo tanto, $3xy^3 + 15xy^2 + 9xy - 27x = 3x(y - 1)(y + 3)^2$.

b)
$$\begin{aligned} 2abc^3 + 2abc^2 - 50abc - 50ab &= 2ab(c^3 + c^2 - 25c - 25) && \text{extraer factor común } 2ab, \\ &= 2ab[c^2(c + 1) - 25(c + 1)] && \text{asociar términos y extraer factor común,} \\ &= 2ab(c^2 - 25)(c + 1) && \text{extraer factor común } c + 1, \\ &= 2ab(c + 5)(c - 5)(c + 1) && \text{factorizar } c^2 - 25. \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} m^3n^2 - 4m^2n^2 - 11mn^2 + 30n^2 &= n^2(m^3 - 4m^2 - 11m + 30) && \text{extraer factor común } n^2, \\ &= n^2(m - 2)(m^2 - 2m - 15) && \text{usar el teorema del factor y los divisores de 30,} \\ &= n^2(m - 2)(m + 3)(m - 5) && \text{factorizar } m^2 - 2m - 15. \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 4x^3y^2 - 16x^2y^2 - 12xy^2 + 72y^2 - x^3 + 4x^2 + 3x - 18 &= 4y^2(x^3 - 4x^2 - 3x + 18) - (x^3 - 4x^2 - 3x + 18) \\ &= (4y^2 - 1)(x^3 - 4x^2 - 3x + 18) \\ &= (2y + 1)(2y - 1)(x + 2)(x^2 - 6x + 9) \\ &= (2y + 1)(2y - 1)(x + 2)(x - 3)^2 \end{aligned}$$

2.9 Practica lo aprendido

1. Realiza las siguientes divisiones:

a) $(x^2y - xy^2 + y^3) \div (-y)$

b) $(24m^2n^2 + 30mn^2 - 15mn) \div (3mn)$

c) $(-a^3b^2 + 2a^2b^2 - 5ab^2) \div (-ab^2)$

d) $(35x^3y^3z^3 - 25x^3y^2z^2 - 45x^2y^2z^3) \div (5x^2y^2z^2)$

e) $(m^3n + m^3n^2 - 3m^2n^2) \div \left(\frac{1}{3}m^2n\right)$

f) $(2x^3y^2 - 3x^2y^2 - 5xy) \div \left(-\frac{2}{3}xy\right)$

2. Realiza las siguientes divisiones utilizando la división larga y escribe el dividendo en la forma $qd + r$:

a) $(2x^3 + 3x^2 + 9) \div (x + 2)$

b) $(2x^3 - 7x^2 - 3x + 2) \div (x - 4)$

c) $(2y^3 - 13y^2 + 14y + 2) \div (y - 5)$

d) $(2y^3 + 5y^2 - 8y - 6) \div (2y + 1)$

e) $(3x^3 + 11x^2 - x - 3) \div (x^2 + 4x + 1)$

f) $(5y^3 - 8y^2 - 14y + 4) \div (y^2 - 2y - 2)$

3. Utiliza la división sintética para efectuar las siguientes divisiones de polinomios y escribe el dividendo en la forma $qd + r$:

a) $(x^3 - 9x^2 + 21x + 2) \div (x - 4)$

b) $(y^3 - 3y^2 - 6y - 11) \div (y - 5)$

c) $(2m^3 + 4m^2 + 3m + 8) \div (m + 3)$

d) $(3n^3 + 4n^2 - 6n - 7) \div (n + 2)$

e) $(a^3 - 37a - 1) \div (a - 6)$

f) $(b^3 + 8b^2 - 29) \div (b + 7)$

g) $(2x^3 + 1) \div (x - 1)$

h) $(y^3 + 2y^2 - y + 1) \div \left(y - \frac{1}{2}\right)$

i) $(x^3 + x^2 + x - 1) \div \left(x + \frac{1}{3}\right)$

j) $\left(y^3 + \frac{1}{27}\right) \div \left(y + \frac{1}{3}\right)$

4. Encuentra el residuo que se obtiene al realizar las siguientes divisiones:

a) $(x^3 + x^2) \div (x - 2)$

b) $(8y^3 - 5y) \div (y + 1)$

c) $(5m^3 + 11m^2 - 9) \div (m + 2)$

d) $(n^3 - 13n^2 + 29n + 10) \div (n - 3)$

e) $(y^3 + 4y^2 - 6y - 6) \div (y + 5)$

f) $\left(x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x - 1\right) \div \left(x - \frac{1}{2}\right)$

5. Sea k un número entero. Para cada caso determina el valor de k para que el residuo de la división $p \div q$ sea igual a cero:

a) $p = kx^3 + (k + 1)x^2 + (k - 4)x - 2;\ \ q = x + 1$

b) $p = x^3 + (k - 3)x^2 + (k + 4)x - 6k;\ \ q = x - 3$

c) $p = x^3 - k^2x^2 + 2kx + k - 1;\ \ q = x - 1$

d) $p = k^2x^3 + (k + 1)x^2 - 7x + 3k;\ \ q = x + 2$

6. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $-2xy^3 - 4xy^2 + 32xy + 64x$

b) $5x^3y^2 - 15x^2y^2 - 90xy^2 + 200y^2$

c) $-abc^3 - 9abc^2 - 11abc + 21ab$

7. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $4a^3b^2 + 24a^2b^2 - 60ab^2 - 400b^2 - 9a^3 - 54a^2 + 135a + 900$

b) $(x + 1)^3 - (x + 1)^2 - 30(x + 1) + 72$

Indicador de logro

2.9 Resuelve problemas correspondientes a división y factorización de polinomios.

Solución de problemas:

1a) $-x^2 + xy - y^2$

1b) $8mn + 10n - 5$

1c) $a^2 - 2a + 5$

1d) $7xyz - 5x - 9z$

1e) $3m + 3mn - 9n$

1f) $-3x^2y + \frac{9}{2}xy + \frac{15}{2}$

2a) $2x^3 + 3x^2 + 9 = (x + 2)(2x^2 - x + 2) + 5$

2b) $2x^3 - 7x^2 - 3x + 2 = (x - 4)(2x^2 + x + 1) + 6$

2c) $2y^3 - 13y^2 + 14y + 2 = (y - 5)(2y^2 - 3y - 1) - 3$

2d) $2y^3 + 5y^2 - 8y - 6 = (2y + 1)(y^2 + 2y - 5) - 1$

2e) $3x^3 + 11x^2 - x - 3 = (x^2 + 4x + 1)(3x - 1) - 2$

2f) $5y^3 - 8y^2 - 14y + 4 = (y^2 - 2y - 2)(5y + 2) + 8$

3a) $x^3 - 9x^2 + 21x + 2 = (x - 4)(x^2 - 5x + 1) + 6$

3b) $y^3 - 3y^2 - 6y - 11 = (y - 5)(y^2 + 2y + 4) + 9$

3c) $2m^3 + 4m^2 + 3m + 8 = (m + 3)(2m^2 - 2m + 9) - 19$

3d) $3n^3 + 4n^2 - 6n - 7 = (n + 2)(3n^2 - 2n - 2) - 3$

3e) $a^3 - 37a - 1 = (a - 6)(a^2 + 6a - 1) - 7$

3f) $b^3 + 8b^2 - 29 = (b + 7)(b^2 + b - 7) + 20$

3g) $2x^3 + 1 = (x - 1)(2x^2 + 2x + 2) + 3$

3h) $y^3 + 2y^2 - y + 1 = \left(y - \frac{1}{2}\right)\left(y^2 + \frac{5}{2}y + \frac{1}{4}\right) + \frac{9}{8}$

3i) $x^3 + x^2 + x - 1 = \left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{7}{9}\right) - \frac{34}{27}$

3j) $y^3 + \frac{1}{27} = \left(y + \frac{1}{3}\right)\left(y^2 - \frac{1}{3}y + \frac{1}{9}\right)$

4a) $2^3 + 2^2 = 8 + 4 = 12$

4b) $8(-1)^3 - 5(-1) = -8 + 5 = -3$

4c) $5(-2)^3 + 11(-2)^2 - 9 = -40 + 44 - 9 = -5$

4d) $3^3 - 13(3)^2 + 29(3) + 10 = 27 - 117 + 87 + 10 = 7$

4e) $(-5)^3 + 4(-5)^2 - 6(-5) - 6 = -125 + 100 + 30 - 6 = -1$

4f) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{4}$

5a) Se sustituye $x = -1$ en p:

$$k(-1)^3 + (k + 1)(-1)^2 + (k - 4)(-1) - 2 = -k + 3$$

Por el teorema del residuo, debe ocurrir que $-k + 3 = 0$, o sea, $k = 3$.

5b) Se sustituye $x = 3$ en p:

$$3^3 + (k - 3)(3)^2 + (k + 4)(3) - 6k = 6k + 12$$

Por el teorema del residuo, debe ocurrir que $6k + 12 = 0$, o sea, $k = -2$.

5c) Se sustituye $x = 1$ en p:

$$1^3 - k^2(1)^2 + 2k(1) + k - 1 = -k^2 + 3k$$

Debe ocurrir que $-k^2 + 3k = 0$, o sea, $k = 0$ o $k = 3$.

5d) Se sustituye $x = -2$ en p:

$$k^2(-2)^3 + (k + 1)(-2)^2 - 7(-2) + 3k = -8k^2 + 7k + 18$$

Luego, $-8k^2 + 7k + 18 = 0$, o sea, $8k^2 - 7k - 18 = 0$. Al resolver la ecuación anterior se obtiene $k = -\frac{9}{8}$ o $k = 2$.

En los problemas del numeral 5, puede sustituir el valor de k calculado en cada caso y comprobar que el residuo $p \div q$ es igual a cero.

6a) $-2x(y + 4)(y - 4)(y + 2)$

6b) $5y^2(x - 2)(x + 4)(x - 5)$

6c) $-ab(c - 1)(c + 3)(c + 7)$

7a)
$$\begin{aligned} 4b^2(a^3 + 6a^2 - 15a - 100) - 9(a^3 + 6a^2 - 15a - 100) &= (4b^2 - 9)(a^3 + 6a^2 - 15a - 100) \\ &= (2b + 3)(2b - 3)(a - 4)(a^2 + 10a + 25) \\ &= (2b + 3)(2b - 3)(a - 4)(a + 5)^2 \end{aligned}$$

7b) Sea $y = x + 1$; así, $(x + 1)^3 - (x + 1)^2 - 30(x + 1) + 72 = y^3 - y^2 - 30y + 72$, y:

$$y^3 - y^2 - 30y + 72 = (y - 3)(y^2 + 2y - 24) = (y - 3)(y + 6)(y - 4)$$

Pero $(y - 3)(y + 6)(y - 4) = (x + 1 - 3)(x + 1 + 6)(x + 1 - 4) = (x - 2)(x + 7)(x - 3)$. Por lo tanto:

$$(x + 1)^3 - (x + 1)^2 - 30(x + 1) + 72 = (x - 2)(x + 7)(x - 3).$$

3.1 Resolución de ecuaciones cuadráticas por factorización

Problema inicial

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando factorización:

a) $x^2 - 15x + 56 = 0$

b) $5x^2 + 11x - 12 = 0$

Si a y b son números reales tales que $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Solución

a) Para factorizar el polinomio se buscan dos números cuyo producto sea 56 y cuya suma sea igual a –15 (como el producto es positivo y la suma negativa ambos números deben ser negativos). Para encontrarlos puede descomponerse 56 en sus factores primos y buscar una combinación de ellos que cumplan lo dicho anteriormente. Se verifica entonces que: $(-8)(-7) = 56$ y $-8 - 7 = -15$, por lo que $x^2 - 15x + 56$ puede factorizarse en el producto $(x - 8)(x - 7)$. Luego:

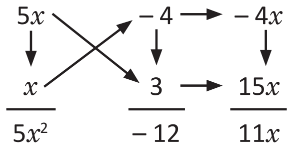
$$(x - 8)(x - 7) = 0$$

como el producto es cero, uno de los factores debe ser igual a cero:

$$x - 8 = 0 \quad \text{o} \quad x - 7 = 0.$$

Por lo tanto, las soluciones son $x = 8$ o $x = 7$.

b) Para factorizar $5x^2 + 11x - 12$ se descomponen 5 y –12 en dos factores y se aplica el método de la tijera:



entonces, $5x^2 + 11x - 12 = (5x - 4)(x + 3) = 0$, por lo que $5x - 4 = 0$ o $x + 3 = 0$. Entonces, $x = \frac{4}{5}$ o $x = -3$ son las soluciones de $5x^2 + 11x - 12 = 0$.

Definición

Una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$ se llama **ecuación cuadrática**. Para resolverla utilizando factorización se escribe $ax^2 + bx + c$ como producto de dos binomios lineales, se iguala cada uno de ellos a cero y se resuelven ambas ecuaciones lineales.

Ejemplo

Resuelve por factorización, la ecuación $\frac{5}{2}x^2 - 2 = -\frac{4}{3}x$.

Si se encuentra una ecuación equivalente a la dada pero cuyos coeficientes sean todos enteros, la factorización resultará más fácil. Así, al multiplicar ambos miembros por 6, se obtiene la ecuación equivalente $15x^2 - 12 = -8x$. Para utilizar factorización la ecuación debe estar igualada a cero: se pasa $-8x$ al miembro izquierdo y se obtiene la ecuación $15x^2 + 8x - 12 = 0$. Al factorizar por el método de la tijera se obtiene $(5x + 6)(3x - 2) = 0$, por lo que las soluciones de la ecuación son $x = -\frac{6}{5}$ y $x = \frac{2}{3}$.

Problemas

1. Calcula las soluciones de cada ecuación utilizando factorización.

a) $x^2 + 2x - 15 = 0$

b) $x^2 - 15x + 44 = 0$

c) $x^2 + 4x + 3 = 0$

d) $x^2 + 7x - 60 = 0$

e) $x^2 + 16x + 63 = 0$

f) $\frac{1}{4}x^2 - x - 15 = 0$

g) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3 = 0$

h) $3x^2 + 13x - 10 = 0$

i) $8x^2 - 38x + 35 = 0$

j) $4x^2 + 21x - 18 = 0$

k) $0.2x^2 + 0.3x - 0.2 = 0$

l) $\frac{3}{5}x^2 - \frac{1}{10}x - \frac{1}{5} = 0$

2. Encuentra una ecuación de grado 2 que tenga por soluciones a 1 y –15.

Indicador de logro

3.1 Resuelve ecuaciones cuadráticas utilizando factorización en la forma $(x + a)(x + b)$ o el método de la tijera.

Secuencia

Esta clase es un repaso de noveno grado sobre los métodos de solución de ecuaciones cuadráticas utilizando factorización. Se agregan casos donde el trinomio debe factorizarse usando el método de la tijera o aquellos con coeficientes fraccionarios o decimales donde debe multiplicarse la ecuación por un número entero.

Propósito

Esta clase y la siguiente (3.2) sirven para introducir la idea sobre las raíces de un polinomio, tomando primero ecuaciones cuadráticas. En esta clase no debe utilizarse la fórmula cuadrática para resolver las ecuaciones, sino hasta la siguiente.

Solución de problemas:

1a)
$$x^2 + 2x - 15 = 0$$
$$(x + 5)(x - 3) = 0$$
$$x + 5 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0$$
Las soluciones son $x = -5$ o $x = 3$.

1b)
$$x^2 - 15x + 44 = 0$$
$$(x - 4)(x - 11) = 0$$
$$x - 4 = 0 \quad \text{o} \quad x - 11 = 0$$
Las soluciones son $x = 4$ o $x = 11$.

1c)
$$x^2 + 4x + 3 = 0$$
$$(x + 3)(x + 1) = 0$$
$$x + 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0$$
Las soluciones son $x = -3$ o $x = -1$.

1d)
$$x^2 + 7x - 60 = 0$$
$$(x + 12)(x - 5) = 0$$
$$x + 12 = 0 \quad \text{o} \quad x - 5 = 0$$
Las soluciones son $x = -12$ o $x = 5$.

1e)
$$x^2 + 16x + 63 = 0$$
$$(x + 9)(x + 7) = 0$$
$$x + 9 = 0 \quad \text{o} \quad x + 7 = 0$$
Las soluciones son $x = -9$ o $x = -7$.

1f) Se multiplican ambos miembros por 4, obteniendo la ecuación equivalente:
$$x^2 - 4x - 60 = 0$$
$$(x + 6)(x - 10) = 0$$
$$x + 6 = 0 \quad \text{o} \quad x - 10 = 0$$
Las soluciones son $x = -6$ o $x = 10$.

1g) Se multiplican ambos miembros por 2, obteniendo la ecuación equivalente:
$$x^2 + 5x + 6 = 0$$
$$(x + 3)(x + 2) = 0$$
$$x + 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 2 = 0$$
Las soluciones son $x = -3$ o $x = -2$.

1h)
$$3x^2 + 13x - 10 = 0$$
$$(x + 5)(3x - 2) = 0$$
$$x + 5 = 0 \quad \text{o} \quad 3x - 2 = 0$$
Las soluciones son $x = -5$ o $x = \frac{2}{3}$.

1i)
$$8x^2 - 38x + 35 = 0$$
$$(2x - 7)(4x - 5) = 0$$
$$2x - 7 = 0 \quad \text{o} \quad 4x - 5 = 0$$
Las soluciones son $x = \frac{7}{2}$ o $x = \frac{5}{4}$.

1j)
$$4x^2 + 21x - 18 = 0$$
$$(x + 6)(4x - 3) = 0$$
$$x + 6 = 0 \quad \text{o} \quad 4x - 3 = 0$$
Las soluciones son $x = -6$ o $x = \frac{3}{4}$.

1k) Se multiplican ambos miembros por 10, obteniendo la ecuación equivalente:
$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$
$$(x + 2)(2x - 1) = 0$$
$$x + 2 = 0 \quad \text{o} \quad 2x - 1 = 0$$
Las soluciones son $x = -2$ o $x = \frac{1}{2}$.

1l) Se multiplican ambos miembros por 10, obteniendo la ecuación equivalente:
$$6x^2 - x - 2 = 0$$
$$(2x + 1)(3x - 2) = 0$$
$$2x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad 3x - 2 = 0$$
Las soluciones son $x = -\frac{1}{2}$ o $x = \frac{2}{3}$.

2. $(x - 1)(x + 15) = 0 \Rightarrow x^2 + 14x - 15 = 0$

3.2 Resolución de ecuaciones cuadráticas con la fórmula general

Problema inicial

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $2x^2 + 3x - 1 = 0$ b) $x^2 - 2x - 6 = 0$

Las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Solución

a) Esta ecuación no puede resolverse por factorización; cuando esto ocurre se resuelve utilizando la fórmula general. En este caso, $a = 2$, $b = 3$ y $c = -1$:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Entonces, las soluciones de $2x^2 + 3x - 1 = 0$ son:

$$x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \text{ y } x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}.$$

b) Si se intenta resolver la ecuación por factorización, se llega a que no es posible encontrar dos números enteros cuyo producto sea -6 y cuya suma sea -2. De forma similar al literal anterior, se utiliza la fórmula general con $a = 1$, $b = -2$ y $c = -6$:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4+24}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 1 \pm \sqrt{7}.$$

Entonces, las soluciones de $x^2 - 2x - 6 = 0$ son:

$$x = 1 + \sqrt{7} \text{ y } x = 1 - \sqrt{7}.$$

Observa que $\frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{2}$ se simplifica porque puede sacarse 2 como factor común en el numerador:

$$\frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{2} = \frac{2(1 \pm \sqrt{7})}{2} = 1 \pm \sqrt{7}.$$

Conclusión

Cuando una ecuación cuadrática no pueda resolverse mediante factorización, se utiliza la fórmula general.

Ejemplo

Resuelve la ecuación $x = 7 - \frac{4}{x}$.

Nótese que $x = 0$ no es solución de la ecuación. La ecuación puede llevarse a una ecuación cuadrática al multiplicar por x ambos miembros:

$$x^2 = 7x - 4 \Rightarrow x^2 - 7x + 4 = 0$$

esta ecuación no puede resolverse mediante factorización, por lo que al aplicar la fórmula general se obtiene:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 16}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

Entonces, las soluciones de $x = 7 - \frac{4}{x}$ son:

$$x = \frac{7 + \sqrt{33}}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{7 - \sqrt{33}}{2}.$$

Problemas

Calcula las soluciones de cada ecuación:

a) $3x^2 + x - 1 = 0$

b) $x^2 = -2(2x + 1)$

c) $x^2 - 3(2x + 1) = 0$

d) $2x(3 - x) = 3$

e) $x = x^2 - 1$

f) $x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{45}{4} = 0$

g) $2x = 8 - \frac{5}{x}$

h) $x = -3 + \frac{2}{x}$

Indicador de logro

3.2 Resuelve ecuaciones cuadráticas utilizando la fórmula general.

Secuencia

En esta clase se repasa la solución de ecuaciones cuadráticas usando la fórmula general. Se incluyen ecuaciones con términos fraccionarios cuyo denominador es igual a x y que se reducen a ecuaciones cuadráticas.

Posibles dificultades

Recuerde a los estudiantes, al momento de usar la fórmula general, incluir el signo de los coeficientes.

Solución de problemas:

a)

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 12}}{6}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

Las soluciones de $3x^2 + x - 1 = 0$ son:

$$x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{6} \quad \text{o} \quad x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{6}$$

b) La ecuación es equivalente a $x^2 + 4x + 2 = 0$:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$
$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2}$$
$$= \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

Las soluciones de $x^2 = -2(2x + 1)$ son:

$$x = -2 + \sqrt{2} \quad \text{o} \quad x = -2 - \sqrt{2}$$

c) La ecuación es equivalente a $x^2 - 6x - 3 = 0$:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)}$$
$$= \frac{6 \pm \sqrt{36 + 12}}{2}$$
$$= \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{3}$$

Las soluciones de $x^2 - 3(2x + 1) = 0$ son:

$$x = 3 + 2\sqrt{3} \quad \text{o} \quad x = 3 - 2\sqrt{3}$$

d) La ecuación es equivalente a $2x^2 - 6x + 3 = 0$:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(2)(3)}}{2(2)}$$
$$= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{4}$$
$$= \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Las soluciones de $2x(3 - x) = 3$ son:

$$x = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$$

e) La ecuación es equivalente a $x^2 - x - 1 = 0$:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$
$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2}$$
$$= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Las soluciones de $x = x^2 - 1$ son:

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

f) La ecuación es equivalente a $4x^2 - 30x + 45 = 0$:

$$x = \frac{30 \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(4)(45)}}{2(4)}$$
$$= \frac{30 \pm \sqrt{900 - 720}}{8}$$
$$= \frac{30 \pm 6\sqrt{5}}{8} = \frac{15 \pm 3\sqrt{5}}{4}$$

Las soluciones de $x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{45}{4} = 0$ son:

$$x = \frac{15 + 3\sqrt{5}}{4} \quad \text{o} \quad x = \frac{15 - 3\sqrt{5}}{4}$$

g) La ecuación es equivalente a $2x^2 - 8x + 5 = 0$; al resolverla se obtiene:

$$x = \frac{4 + \sqrt{6}}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{4 - \sqrt{6}}{2}$$

h) La ecuación es equivalente a $x^2 + 3x - 2 = 0$; al resolverla se obtiene:

$$x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$$

3.3 Definición de número complejo

Definición

Se llama **unidad imaginaria**, y se denota por i, al número que satisface $i^2 = -1$, es decir:

$$i = \sqrt{-1}\,.$$

Dados dos números reales cualesquiera a y b, el número de la forma $z = a + bi$ se llama **número complejo**. Al conjunto de todos los números complejos, es decir, aquellos de la forma $a + bi$ se le denota por $\mathbb{C}$.

Sea $z = a + bi$ un número complejo:

1. Si $b = 0$ entonces z es un número real.
2. Si a y b son diferentes de cero entonces z se llama **número imaginario.**
3. Si $a = 0$ y $b \neq 0$ entonces $z = bi$ se llama **número imaginario puro**.

Para denotar números complejos, usualmente se utilizan las letras z y w. Si se necesitan más de dos números complejos, se utilizan subíndices, por ejemplo, z_1, z_2, z_3, z_4, etc.

Al número a se le llama **parte real** de z, y se denota por Re(z); mientras que al número b se le llama **parte imaginaria** de z, y se denota por Im(z). Dos números complejos son iguales si sus correspondientes partes real e imaginaria son iguales, y viceversa.

Ejemplo 1

Para cada caso, determina Re(z) e Im(z):

a) $z = 5 - 7i$

b) $z = \sqrt{2} + i$

c) $z = \dfrac{-4 + 9i}{2}$

a) Re(z) = 5
Im(z) = –7

b) Re(z) = $\sqrt{2}$
Im(z) = 1

c) Lo primero es reescribir z:

$$z = \frac{-4}{2} + \frac{9i}{2} = -2 + \frac{9}{2}i$$

Luego, Re(z) = –2 e Im(z) = $\dfrac{9}{2}$.

Ejemplo 2

Sean $z = 2x + 3i$ y $w = 4 + (y - 1)i$ dos números complejos. Determina los valores de los números reales x y y para que se cumpla $z = w$.

Para que se cumpla la igualdad entre los números complejos z y w debe ocurrir:

$$\text{Re}(z) = \text{Re}(w) \qquad \text{Im}(z) = \text{Im}(w)$$
$$2x = 4 \qquad 3 = y - 1$$

al resolver ambas ecuaciones lineales se obtiene:

$$x = 2 \qquad 4 = y$$

Por lo tanto, para que se cumpla $z = w$ los valores de x y y deben ser 2 y 4 respectivamente.

Problemas

1. Para cada caso, determina la parte real y la parte imaginaria de z:

a) $z = -3 + 8i$
b) $z = \frac{1}{2} - 6i$
c) $z = \sqrt{5} - \sqrt{3}\,i$
d) $z = 11i$
e) $z = 3$
f) $z = \dfrac{-12 - i}{3}$

2. Para cada caso, determina los valores de los números reales x y y para que se cumpla $z = w$:

a) $z = (x + 1) + 5i$, $w = -6 + (4 - y)i$
b) $z = 10 - 3xi$, $w = 8y + 15i$
c) $z = (x + y) + 4i$, $w = -2x + 3yi$
d) $z = -x + 3yi$, $w = (y - 1) - xi$

Indicador de logro

3.3 Identifica la parte real y la parte imaginaria de un número complejo.

Secuencia

En la clase se definen los números complejos, su parte real e imaginaria y la condición para la igualdad de dos números complejos. Con este contenido los estudiantes lograrán más adelante calcular todas las raíces de un polinomio, sean reales o imaginarias.

Propósito

Esta clase solo trabaja lo relacionado a la parte real e imaginaria de un número complejo, para que los estudiantes se apropien del lenguaje matemático y del uso de la unidad imaginaria. En las siguientes clases se desarrollarán las operaciones básicas con números complejos.

Solución de problemas:

1a) $z = -3 + 8i$
$\text{Re}(z) = -3$; $\text{Im}(z) = 8$

1c) $z = \sqrt{5} - \sqrt{3}i$
$\text{Re}(z) = \sqrt{5}$; $\text{Im}(z) = -\sqrt{3}$

1e) $z = 3$
$\text{Re}(z) = 3$; $\text{Im}(z) = 0$

2a) Debe ocurrir que $\text{Re}(z) = \text{Re}(w)$, $\text{Im}(z) = \text{Im}(w)$:

$$\begin{aligned} \text{Re}(z) &= \text{Re}(w) & \text{Im}(z) &= \text{Im}(w) \\ x + 1 &= -6 & 5 &= 4 - y \\ x &= -6 - 1 & y &= 4 - 5 \\ x &= -7 & y &= -1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, para que $z = w$ los valores de x y y deben ser –7 y –1 respectivamente.

2c) Al igualar las partes imaginarias de ambos:

$$\begin{aligned} \text{Im}(z) &= \text{Im}(w) \\ 4 &= 3y \\ y &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Igualando las partes reales y sustituyendo y:

$$\begin{aligned} \text{Im}(z) &= \text{Im}(w) \\ x + y &= -2x \\ 3x &= -\frac{4}{3} \\ x &= -\frac{4}{9} \end{aligned}$$

Por lo tanto, para que $z = w$ los valores de x y y deben ser $-\frac{4}{9}$ y $\frac{4}{3}$ respectivamente.

1b) $z = \frac{1}{2} - 6i$
$\text{Re}(z) = \frac{1}{2}$; $\text{Im}(z) = -6$

1d) $z = 11i$
$\text{Re}(z) = 0$; $\text{Im}(z) = 11$

1f) $z = \frac{-12 - i}{3} = -\frac{12}{3} - \frac{1}{3}i = -4 - \frac{1}{3}i$
$\text{Re}(z) = -4$; $\text{Im}(z) = -\frac{1}{3}$

2b) Igualando las partes reales e imaginarias:

$$\begin{aligned} \text{Re}(z) &= \text{Re}(w) & \text{Im}(z) &= \text{Im}(w) \\ 10 &= 8y & -3x &= 15 \\ y &= \frac{10}{8} & x &= \frac{15}{-3} \\ y &= \frac{5}{4} & x &= -5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, para que $z = w$ los valores de x y y deben ser –5 y $\frac{5}{4}$ respectivamente.

2d) Al igualar las partes reales e imaginarias:

$$\begin{aligned} \text{Re}(z) &= \text{Re}(w) & \text{Im}(z) &= \text{Im}(w) \\ -x &= y - 1 & 3y &= -x \\ x &= -y + 1 & x &= -3y \end{aligned}$$

Se forma un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Utilizando el método de sustitución:

$$\begin{aligned} -y + 1 &= -3y \\ 2y &= -1 \\ y &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Así, $x = -3\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$. Por lo tanto, $x = \frac{3}{2}$ y $y = -\frac{1}{2}$.

3.4 Suma, resta y multiplicación de números complejos

Problema inicial

Sean $z = 3 + 7i$ y $w = 2 - 3i$. ¿Cuál es el resultado de las operaciones $z + w$, $z - w$ y zw?

Considera el número i como una variable para realizar las operaciones.

Solución

Como en la suma de polinomios, solo pueden sumarse aquellos términos que sean “semejantes”:

$$\begin{aligned} z + w &= 3 + 7i + 2 - 3i \\ &= (3 + 2) + [7 + (-3)]i \\ &= (3 + 2) + (7 - 3)i \\ &= 5 + 4i \end{aligned}$$

Para la resta deben cuidarse los signos de la parte real e imaginaria de w:

$$\begin{aligned} z - w &= 3 + 7i - (2 - 3i) \\ &= (3 - 2) + [7 - (-3)]i \\ &= (3 - 2) + (7 + 3)i \\ &= 1 + 10i \end{aligned}$$

La multiplicación se desarrolla como si fuese el producto de binomios, y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} zw &= (3 + 7i)(2 - 3i) \\ &= 3(2) + [3(-3) + 7(2)]i + 7(-3)i^2 \\ &= 6 + (-9 + 14)i - 21(-1) \\ &= 6 + 21 + 5i \\ &= 27 + 5i \end{aligned}$$

Por lo tanto, $z + w = 5 + 4i$, $z - w = 1 + 10i$ y $zw = 27 + 5i$.

Definición

La suma y **resta de los números complejos** $z = a + bi$ y $w = c + di$ se denotan por $z + w$ y $z - w$ respectivamente, y se definen:

$$z + w = (a + c) + (b + d)i$$
$$z - w = (a - c) + (b - d)i.$$

El **producto de los números complejos** $z = a + bi$ y $w = c + di$ se denotan por zw y se define:

$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

El **complejo conjugado** de $z = a + bi$, o simplemente conjugado de z, es otro número complejo denotado por $\overline{z}$ tal que $\overline{z} = a - bi$. Se llama **módulo** del número complejo $z = a + bi$ al número real denotado por $|z|$ y definido por:

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= (a + bi)(a - bi) \\ &= a^2 - b^2i^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Problemas

1. Para cada caso, calcula $z + w$, $z - w$ y zw. Además, encuentra el conjugado y el módulo de cada número:

a) $z = -5 + 4i$, $w = 2 - 3i$
b) $z = 4 - i$, $w = -6 + 4i$
c) $z = -3 - 2i$, $w = -5 + i$
d) $z = 8 - i$, $w = 12 + 3i$
e) $z = 5 - 2i$, $w = 6i$
f) $z = -3 + 8i$, $w = 2$

2. Sea $z = a + bi$ un número complejo. Demuestra lo siguiente:

a) $z + \overline{z} = 2\text{Re}(z)$
b) $z - \overline{z} = 2\text{Im}(z)i$

Indicador de logro

3.4 Efectúa la suma, resta y multiplicación de números complejos, y determina el conjugado y el módulo de un número complejo.

Secuencia

En esta clase se trabajan las operaciones de suma, resta y multiplicación de números complejos, haciendo una comparación con el desarrollo de las mismas en polinomios.

Propósito

En el bloque de Problemas, los estudiantes deben utilizar lo descrito en la Definición; es decir, identificar y sustituir los números a, b, c y d.

Solución de problemas:

1a) $z + w = (-5 + 2) + (4 - 3)i = -3 + i$

$z - w = (-5 - 2) + (4 + 3)i = -7 + 7i$

$zw = [-5(2) - 4(-3)] + [-5(-3) + 4(2)]i = 2 + 23i$

$\overline{z} = -5 - 4i$; $\overline{w} = 2 + 3i$

$|z| = \sqrt{(-5)^2 + 4^2} = \sqrt{41}$

$|w| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

1b) $z + w = (4 - 6) + (-1 + 4)i = -2 + 3i$

$z - w = (4 + 6) + (-1 - 4)i = 10 - 5i$

$zw = [4(-6) - (-1)4] + [4(4) + (-1)(-6)]i = -20 + 22i$

$\overline{z} = 4 + i$; $\overline{w} = -6 - 4i$

$|z| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$

$|w| = \sqrt{(-6)^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$

1c) $z + w = (-3 - 5) + (-2 + 1)i = -8 - i$

$z - w = (-3 + 5) + (-2 - 1)i = 2 - 3i$

$zw = [-3(-5) - (-2)1] + [-3(1) + (-2)(-5)]i = 17 + 7i$

$\overline{z} = -3 + 2i$; $\overline{w} = -5 - i$

$|z| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

$|w| = \sqrt{(-5)^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

1d) $z + w = (8 + 12) + (-1 + 3)i = 20 + 2i$

$z - w = (8 - 12) + (-1 - 3)i = -4 - 4i$

$zw = [8(12) - (-1)3] + [8(3) + (-1)(12)]i = 99 + 12i$

$\overline{z} = 8 + i$; $\overline{w} = 12 - 3i$

$|z| = \sqrt{8^2 + (-1)^2} = \sqrt{65}$

$|w| = \sqrt{12^2 + 3^2} = 3\sqrt{17}$

1e) $z + w = (5 + 0) + (-2 + 6)i = 5 + 4i$

$z - w = (5 - 0) + (-2 - 6)i = 5 - 8i$

$zw = (5 - 2i)6i = 30i - 12i^2 = 12 + 30i$

$\overline{z} = 5 + 2i$; $\overline{w} = -6i$

$|z| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$

$|w| = \sqrt{6^2} = 6$

1f) $z + w = (-3 + 2) + 8i = -1 + 8i$

$z - w = (-3 - 2) + 8i = -5 + 8i$

$zw = (-3 + 8i)2 = -6 + 16i$

$\overline{z} = -3 - 8i$; $\overline{w} = 2$

$|z| = \sqrt{(-3)^2 + 8^2} = \sqrt{73}$

$|w| = \sqrt{2^2} = 2$

2a)
$$\begin{aligned} z + \overline{z} &= (a + bi) + (a - bi) \\ &= (a + a) + (b - b)i \\ &= 2a + 0i \\ &= 2a \\ &= 2\text{Re}(z) \end{aligned}$$

2b)
$$\begin{aligned} z - \overline{z} &= (a + bi) - (a - bi) \\ &= (a - a) + (b + b)i \\ &= 0 + 2bi \\ &= 2bi \\ &= 2\text{Im}(z)i \end{aligned}$$

3.5 División de números complejos

Problema inicial

Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$. Para calcular $\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di}$ realiza los siguientes pasos:

1. Multiplica por $\frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{c-di}{c-di}$.
2. Efectúa los productos indicados.
3. Encuentra el resultado.

Solución

1. Al multiplicar por $\frac{\overline{w}}{\overline{w}}$ se está multiplicando por 1, o sea que la expresión original no se altera:

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \times \frac{c-di}{c-di}$$

$$= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}.$$

2. Al efectuar los productos indicados, se obtiene:

$$\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd+(-ad+bc)i}{c^2+d^2}.$$

3. La división de z entre w es entonces el número complejo:

$$\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i.$$

Definición

Sean los números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$. La división de z entre w se denota por $\frac{z}{w}$ y está dada por:

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i.$$

Ejemplo

Divide $4 + 3i$ entre $5 - i$.

En este caso, al multiplicar por el conjugado de $5 - i$ en el numerador y denominador, se tiene que:

$$\frac{4+3i}{5-i} = \frac{4+3i}{5-i} \times \frac{5+i}{5+i} = \frac{(4+3i)(5+i)}{5^2+1^2} = \frac{(20-3)+(4+15)i}{26} = \frac{17+19i}{26} = \frac{17}{26} + \frac{19}{26}i.$$

Por lo tanto, $\frac{4+3i}{5-i} = \frac{17}{26} + \frac{19}{26}i$.

Problemas

1. Para cada caso, calcula $\frac{z}{w}$:
   a) $z = 3$, $w = 2 + 4i$
   b) $z = 5$, $w = 2 - 7i$
   c) $z = -7i$, $w = 6 - 2i$
   d) $z = 2 + 9i$, $w = -3 - i$
   e) $z = -4 + 6i$, $w = 2 + 7i$
   f) $z = -3 - 2i$, $w = 5 + 2i$
   g) $z = 4 - 2i$, $w = -5i$
   h) $z = -2 + 6i$, $w = 3i$

2. Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$; realiza lo siguiente:
   a) Calcula $\frac{z}{w}$
   b) Calcula $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}$
   c) Calcula $\frac{\overline{z}}{\overline{w}}$
   d) Compara los resultados de b) y c)

Observa que el objetivo en cada una de las operaciones vistas con los números complejos es escribir la operación como un número complejo $u + vi$. Así, en el caso de la división, el objetivo es quitar el número complejo del denominador multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador.

Indicador de logro

3.5 Efectúa el cociente de dos números complejos multiplicando por el conjugado del divisor.

Secuencia

En esta clase se trabaja la operación de división (cociente) de dos números complejos. La estrategia a utilizar es la multiplicación por el conjugado del divisor (denominador), para escribir el resultado en la forma $u + vi$, donde u y v son números reales cualesquiera.

Propósito

Si bien la Definición indica el resultado de la operación de división para los números $z = a + bi$ y $w = c + di$, en la resolución del bloque de Problemas no deben sustituirse los valores de a, b, c y d, sino multiplicar por el conjugado del divisor y realizar las operaciones resultantes tal como lo establece el indicador de logro.

Solución de problemas:

1a) $\frac{z}{w} = \frac{3}{2 + 4i} \times \frac{2 - 4i}{2 - 4i} = \frac{3(2 - 4i)}{2^2 + 4^2} = \frac{6 - 12i}{4 + 16} = \frac{3}{10} - \frac{3}{5}i$

1b) $\frac{z}{w} = \frac{5}{2 - 7i} \times \frac{2 + 7i}{2 + 7i} = \frac{5(2 + 7i)}{2^2 + 7^2} = \frac{10 + 35i}{4 + 49} = \frac{10}{53} + \frac{35}{53}i$

1c) $\frac{z}{w} = \frac{-7i}{6 - 2i} \times \frac{6 + 2i}{6 + 2i} = \frac{-7i(6 + 2i)}{6^2 + 2^2} = \frac{14 - 42i}{36 + 4} = \frac{7}{20} - \frac{21}{20}i$

1d) $\frac{z}{w} = \frac{2 + 9i}{-3 - i} \times \frac{-3 + i}{-3 + i} = \frac{(-6 - 9) + (2 - 27)i}{9 + 1} = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$

1e) $\frac{z}{w} = \frac{-4 + 6i}{2 + 7i} \times \frac{2 - 7i}{2 - 7i} = \frac{(-8 + 42) + (28 + 12)i}{4 + 49} = \frac{34}{53} + \frac{40}{53}i$

1f) $\frac{z}{w} = \frac{-3 - 2i}{5 + 2i} \times \frac{5 - 2i}{5 - 2i} = \frac{(-15 - 4) + (6 - 10)i}{25 + 4} = -\frac{19}{29} - \frac{4}{29}i$

1g) $\frac{z}{w} = \frac{4 - 2i}{-5i} \times \frac{5i}{5i} = \frac{10 + 20i}{25} = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$

1h) $\frac{z}{w} = \frac{-2 + 6i}{3i} \times \frac{-3i}{-3i} = \frac{18 + 6i}{9} = 2 + \frac{2}{3}i$

2a) $\frac{z}{w} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2}i$

2b)
$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2}i \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{ad - bc}{c^2 + d^2}i\end{aligned}$$

2c)
$$\begin{aligned}\frac{\overline{z}}{\overline{w}} &= \frac{a - bi}{c - di} \\ &= \frac{a - bi}{c - di} \times \frac{c + di}{c + di} \\ &= \frac{(ac + bd) + (ad - bc)i}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{ad - bc}{c^2 + d^2}i\end{aligned}$$

2d) Los resultados son iguales, es decir:

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$$

3.6 Raíces cuadradas de números negativos*

Problema inicial

Sea x un número complejo. Determina todos los valores de x que satisfacen: $x^2 = -5$

$i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$

Solución

Se busca el número complejo tal que, al elevarlo al cuadrado, su resultado sea igual a –5; observa que –5 puede escribirse como el producto 5(–1), entonces: $x^2 = 5(-1) = 5i^2$,

luego, $x^2 = 5i^2$ se cumple para $x = \sqrt{5}\,i$ o $x = -\sqrt{5}\,i$. En efecto:

$$\left(\sqrt{5}\,i\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 i^2 = -5 \qquad \left(-\sqrt{5}\,i\right)^2 = \left(-\sqrt{5}\right)^2 i^2 = -5$$

Por lo tanto, los valores de x que satisfacen $x^2 = -5$ son $x = \sqrt{5}\,i$ y $x = -\sqrt{5}\,i$.

Definición

Sea a un número real positivo ($a > 0$). Las raíces cuadradas de $-a$ son $\sqrt{a}\,i$ y $-\sqrt{a}\,i$. Además:

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,i.$$

Ejemplo

Escribe los siguientes números en la forma $a + bi$:

a) $\sqrt{-3}\,\sqrt{-5}$

b) $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}}$

$-i^2 = -(-1) = 1$

Primero se escriben las raíces de números negativos en la forma $\sqrt{a}\,i$, luego se realizan las operaciones respectivas:

a) $\sqrt{-3}\,\sqrt{-5} = \left(\sqrt{3}\,i\right)\left(\sqrt{5}\,i\right)$

$= \sqrt{15}\,i^2$

$= -\sqrt{15}$

De lo anterior se concluye que:

$\sqrt{-3}\,\sqrt{-5} = -\sqrt{15}$.

b) $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}\,i}{\sqrt{5}}$

$= \sqrt{\frac{3}{5}}\,i$

Luego, $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3}{5}}\,i$.

En general, si a y b son números reales positivos:

1. $\sqrt{-a}\sqrt{-b} \neq \sqrt{(-a)(-a)}$
2. $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}} \neq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}\,i}\left(\frac{-i}{-i}\right)$

$= \sqrt{\frac{3}{5}}\left(\frac{-i}{-i^2}\right)$

$= \sqrt{\frac{3}{5}}\left(\frac{-i}{1}\right)$

$= -\sqrt{\frac{3}{5}}\,i$

Luego, $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}} = -\sqrt{\frac{3}{5}}\,i$.

También puedes multiplicar por el conjugado de $\sqrt{5}\,i$, o sea, $-\sqrt{5}\,i$ y verificar que se llega a la misma respuesta.

Problemas

1. Para cada caso, encuentra las raíces cuadradas de $-a$ si:

a) $a = 2$
b) $a = 3$
c) $a = 7$
d) $a = 10$
e) $a = 4$
f) $a = 25$
g) $a = \frac{1}{3}$
h) $a = \frac{1}{9}$

2. Escribe los siguientes números en la forma $a + bi$:

a) $\sqrt{-7}\,\sqrt{2}$
b) $\sqrt{7}\,\sqrt{-2}$
c) $\sqrt{-3}\,\sqrt{-7}$
d) $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-7}}$
e) $\frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{3}}$
f) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{-6}}$

Indicador de logro

3.6 Encuentra las raíces cuadradas de números reales negativos y los escribe en la forma $a + bi$.

Secuencia

Luego de haber definido y realizado las operaciones básicas con números complejos, en esta clase se encuentran las raíces cuadradas de números reales negativos (al igual que en noveno grado se encontraron las raíces cuadradas de números positivos). Esto sirve para que los estudiantes comprendan que si a es un número real positivo entonces $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$. Si los estudiantes tienen muchas dificultades para resolver el Problema inicial, el docente debe desarrollar la Solución.

Propósito

En el Problema inicial se retoma la definición de solución de una ecuación cuadrática; esta parte junto con la Definición de la clase sirven para introducir a los estudiantes en el cálculo de las soluciones de una ecuación y de las raíces de un polinomio, tomando también aquellas complejas. En el numeral 1 del bloque de Problemas los estudiantes deben utilizar lo descrito en la Definición, es decir, los resultados deben ser bastante inmediatos.

Posibles dificultades

En el numeral 2 del bloque de Problemas, recuerde a sus estudiantes que, antes de realizar las operaciones, deben escribir los radicales en la forma bi. En el caso de los literales d) y f) pueden multiplicar numerador y denominador por el conjugado del denominador o solamente por $-i$ tal como el literal c) del ejemplo.

Solución de problemas:

1a) $-a = -2$, luego las raíces de -2 son $\sqrt{2}i$ y $-\sqrt{2}i$.

1b) $-a = -3$, luego las raíces de -3 son $\sqrt{3}i$ y $-\sqrt{3}i$.

1c) $-a = -7$, luego las raíces de -7 son $\sqrt{7}i$ y $-\sqrt{7}i$.

1d) $-a = -10$, luego las raíces de -10 son $\sqrt{10}i$ y $-\sqrt{10}i$.

1e) $-a = -4$, luego las raíces de -4 son:

$$\sqrt{4}i = 2i \quad \text{y} \quad -\sqrt{4}i = -2i.$$

1f) $-a = -25$, luego las raíces de -25 son:

$$\sqrt{25}i = 5i \quad \text{y} \quad -\sqrt{25}i = -5i.$$

1g) $-a = -\frac{1}{3}$, luego las raíces de $-\frac{1}{3}$ son:

$$\sqrt{\frac{1}{3}}i = \frac{1}{\sqrt{3}}i \quad \text{y} \quad -\sqrt{\frac{1}{3}}i = -\frac{1}{\sqrt{3}}i.$$

1h) $-a = -\frac{1}{9}$, luego las raíces de $-\frac{1}{9}$ son:

$$\sqrt{\frac{1}{9}}i = \frac{1}{3}i \quad \text{y} \quad -\sqrt{\frac{1}{9}}i = -\frac{1}{3}i.$$

Pueden racionalizarse las fracciones y dejarlas expresadas como $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2a)
$$\begin{aligned}\sqrt{-7}\,\sqrt{2} &= \left(\sqrt{7}i\right)\sqrt{2}\\ &= \sqrt{14}i\end{aligned}$$

2b)
$$\begin{aligned}\sqrt{7}\,\sqrt{-2} &= \sqrt{7}\left(\sqrt{2}i\right)\\ &= \sqrt{14}i\end{aligned}$$

2c)
$$\begin{aligned}\sqrt{-3}\,\sqrt{-7} &= \left(\sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{7}i\right)\\ &= \sqrt{21}i^2\\ &= -\sqrt{21}\end{aligned}$$

2d)
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-7}} &= \frac{\sqrt{3}i}{\sqrt{7}i}\\ &= \sqrt{\frac{3}{7}}\end{aligned}$$

2e)
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{4}i}{\sqrt{3}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}i\end{aligned}$$

Puede racionalizarse el resultado y dejarlo expresado como $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2f)
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{-6}} &= \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}i}\left(\frac{-i}{-i}\right)\\ &= -2i\end{aligned}$$

3.7 Discriminante de la ecuación cuadrática

Problema inicial

De la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ se define el número $\Delta = b^2 - 4ac$. Para cada una de las siguientes ecuaciones calcula el valor de Δ, establece su signo y resuelve cada una utilizando la fórmula general (considera las soluciones complejas):

a) $2x^2 - 5x - 1 = 0$　　b) $x^2 - 2x + 1 = 0$　　c) $x^2 + 3x + 5 = 0$

Δ es una letra griega llamada "Delta".

Solución

a) Al calcular Δ se tiene:

$$\Delta = (-5)^2 - 4(2)(-1) = 25 + 8 = 33$$

es decir, $\Delta > 0$. Al resolver la ecuación utilizando la fórmula general (el valor de Δ es el radicando de la fórmula general):

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{33}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{4}.$$

La ecuación $2x^2 - 5x - 1 = 0$ tiene dos soluciones reales.

b) El valor de Δ es:

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = 0$$

o sea, $\Delta = 0$. Luego, el valor del radicando en la fórmula general es cero y:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

La ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$ tiene una solución real.

c) El valor de Δ es:

$$\Delta = 3^2 - 4(1)(5) = 9 - 20 = -11$$

es decir, $\Delta < 0$. Al resolver la ecuación utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{11}\,i}{2}.$$

La ecuación $x^2 + 3x + 5 = 0$ tiene dos soluciones complejas.

Definición

Dada una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b y c números reales y $a \neq 0$, se le llama **discriminante** de la ecuación cuadrática al número $\Delta = b^2 - 4ac$. El número y tipo de soluciones de la ecuación cuadrática puede determinarse de acuerdo a lo siguiente:

1. Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales, es decir, pertenecen a los números reales.
2. Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene una solución real.
3. Si $\Delta < 0$, la ecuación tiene dos soluciones imaginarias, es decir, de la forma $u + vi$ con $v \neq 0$.

Ejemplo

¿Cuál debe ser el valor de m para que la ecuación $x^2 + mx + 4 = 0$ tenga una solución real?
Para que tenga una solución real debe cumplirse que $\Delta = 0$, es decir $\Delta = m^2 - 16 = 0$. Luego, $m = 4$ o $m = -4$.
Por lo tanto, para que la ecuación $x^2 + mx + 4 = 0$ tenga una solución real m debe ser 4 o – 4.

Problemas

1. Determina si las soluciones de cada ecuación son reales o imaginarias:

a) $4x^2 + x - 3 = 0$　　b) $4x^2 + x + 14 = 0$

c) $9x^2 - 30x + 25 = 0$　　d) $15x^2 + 12 = -8x$

2. ¿Cuál debe ser el valor de m para que la ecuación $x^2 - 6x + 5 - m = 0$ tenga una solución real?

Indicador de logro

3.7 Determina el número de soluciones reales o imaginarias de una ecuación cuadrática utilizando su discriminante.

Secuencia

En esta clase se generaliza el número o tipo de soluciones de una ecuación cuadrática, considerando aquellas cuyo resultado son números complejos; lo anterior se realiza analizando el discriminante de la ecuación.

Propósito

En el numeral 1 del bloque de Problemas, los estudiantes deben utilizar lo descrito en la Definición, es decir, calcular el discriminante en cada caso (no deben resolver la ecuación). En el numeral 2 debe realizarse un análisis similar al mostrado en el Ejemplo.

Posibles dificultades

En el numeral 2 del bloque de Problemas puede suceder que los estudiantes asignen a c solamente el valor de 5; indíqueles que $c = 5 - m$.

Solución de problemas:

1a) $a = 4$, $b = 1$, $c = -3$; luego:

$$\Delta = 1^2 - 4(4)(-3) = 1 + 48 = 49$$

De lo anterior se tiene $\Delta > 0$, por lo tanto, la ecuación $4x^2 + x - 3 = 0$ tiene dos soluciones reales.

1b) $a = 4$, $b = 1$, $c = 14$; luego:

$$\Delta = 1^2 - 4(4)(14) = 1 - 224 = -223$$

De lo anterior se tiene $\Delta < 0$, por lo tanto, la ecuación $4x^2 + x + 14 = 0$ no tiene soluciones reales, sino dos soluciones imaginarias.

1c) $a = 9$, $b = -30$, $c = 25$; luego:

$$\Delta = (-30)^2 - 4(9)(25) = 900 - 900 = 0$$

De lo anterior se tiene $\Delta = 0$, por lo tanto, la ecuación $9x^2 - 30x + 25 = 0$ tiene una solución real.

1d) La ecuación es equivalente a $15x^2 + 8x + 12 = 0$, con $a = 15$, $b = 8$, $c = 12$; luego:

$$\Delta = 8^2 - 4(15)(12) = 64 - 720 = -656$$

De lo anterior se tiene $\Delta < 0$, por lo tanto, la ecuación $15x^2 + 12 = -8x$ no tiene soluciones reales, sino dos soluciones imaginarias.

2. En la ecuación cuadrática $x^2 - 6x + 5 - m = 0$: $a = 1$, $b = -6$ y $c = 5 - m$. Luego,

$$\begin{aligned}\Delta &= (-6)^2 - 4(1)(5 - m)\\ &= 36 - 20 + 4m\\ &= 4m + 16\end{aligned}$$

Para que la ecuación solo tenga una solución real debe ocurrir $\Delta = 0$, o sea, $4m + 16 = 0$:

$$\begin{aligned}4m &= -16\\ m &= -4\end{aligned}$$

Por lo tanto, $x^2 - 6x + 5 - m = 0$ tendrá solamente una solución real si $m = -4$.

3.8 Factorización de un polinomio*

Problema inicial

Utilizando números complejos factoriza el polinomio $x^2 + 12x + 40$.

Solución

Similar al caso de la factorización del trinomio de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, en este caso deben encontrarse dos números complejos cuyo producto sea igual a 40 y cuya suma sea igual a 12. Primero se resuelve la ecuación $x^2 + 12x + 40 = 0$ utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(1)(40)}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-12 \pm 4i}{2} = -6 \pm 2i$$

luego,

$$\begin{aligned} x &= -6 + 2i & \text{o} \quad x &= -6 - 2i \\ x - (-6 + 2i) &= 0 & \text{o} \quad x - (-6 - 2i) &= 0 \\ x + 6 - 2i &= 0 & \text{o} \quad x + 6 + 2i &= 0 \end{aligned}$$

sean $z = 6 - 2i$ y $w = 6 + 2i$; puede comprobarse que $zw = 40$ y $z + w = 12$, y se tiene:

$$(x + z)(x + w) = x^2 + (z + w)x + zw = x^2 + 12x + 40.$$

Por lo tanto, $x^2 + 12x + 40 = [x - (-6 + 2i)][x - (-6 - 2i)] = (x + 6 - 2i)(x + 6 + 2i)$.

Conclusión

Si x_1 y x_2 son las soluciones (reales o imaginarias) de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ entonces:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Ejemplo

Factoriza el polinomio $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$.

Los divisores del término independiente son $a = \pm1, \pm2, \pm7, \pm14$. Al sustituir $x = 2$ en el polinomio original se obtiene:

$$2^3 - 6(2)^2 + 15(2) - 14 = 8 - 24 + 30 - 14 = 0$$

por el teorema del factor, $x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = (x - 2)d$, donde d es un polinomio de grado 2; utilizando división sintética se obtiene:

$$x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = (x - 2)(x^2 - 4x + 7)$$

el siguiente paso es factorizar el polinomio $x^2 - 4x + 7$; esto puede realizarse utilizando la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(7)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = 2 \pm \sqrt{3}i.$$

Por lo tanto, $x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = (x - 2)[x - (2 + \sqrt{3}i)][x - (2 - \sqrt{3}i)] = (x - 2)(x - 2 - \sqrt{3}i)(x - 2 + \sqrt{3}i)$.

Problemas

Factoriza cada polinomio:

a) $x^2 - 12x + 40$

b) $5x^2 + 8x + 5$

c) $x^3 - 6x^2 + 2x + 24$

d) $x^3 + x + 10$

e) $x^3 - 3x^2 + 25x + 29$

f) $x^3 - 7x^2 + 20x - 50$

Indicador de logro

3.8 Factoriza polinomios de grado dos o tres utilizando números complejos.

Secuencia

En esta clase se utilizan los números complejos para escribir polinomios de hasta grado tres en la forma $a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, donde los números x_1, x_2 y x_3 son complejos. Esto dará paso a que, en la clase 3.9, se definan y calculen las raíces de un polinomio. Si los estudiantes tienen muchas dificultades para resolver el Problema inicial, el docente debe desarrollar la Solución.

Posibles dificultades

En esta clase se utiliza básicamente todo lo visto en lecciones anteriores, por ejemplo cómo factorizar un polinomio de grado tres, las raíces de números negativos, resolver una ecuación cuadrática, etc. Los estudiantes deben tener claridad de los procesos desarrollados en la clase.

Solución de problemas:

a) Se factoriza $x^2 - 12x + 40$ usando la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144-160}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{12 \pm 4i}{2} = 6 \pm 2i$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} x^2 - 12x + 40 &= [x-(6+2i)][x-(6-2i)] \\ &= (x-6-2i)(x-6+2i). \end{aligned}$$

c) Para factorizar $x^3 - 6x^2 + 2x + 24$ se utiliza lo visto en la lección 2. Los divisores de 24 son ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±8, ±12 y ±24; al sustituir $x = 4$ en el polinomio se obtiene:

$$4^3 - 6(4)^2 + 2(4) + 24 = 64 - 96 + 8 + 24 = 0$$

Luego, $x^3 - 6x^2 + 2x + 24 = (x-4)d$. Al usar división sintética para encontrar el polinomio d se obtiene $d = x^2 - 2x - 6$; este último se factoriza en el producto $(x-1-\sqrt{7})(x-1+\sqrt{7})$.

Por lo tanto,

$$x^3 - 6x^2 + 2x + 24 = (x-4)(x-1-\sqrt{7})(x-1+\sqrt{7}).$$

e) Los divisores de 29 son ±1 y ±29. Al sustituir $x = -1$ en $x^3 - 3x^2 + 25x + 29$:

$$(-1)^3 - 3(-1)^2 + 25(-1) + 29 = -1 - 3 - 25 + 29 = 0$$

Luego, $x^3 - 3x^2 + 25x + 29 = (x+1)d$. Al usar división sintética para encontrar el polinomio d se obtiene $d = x^2 - 4x + 29$; este último se factoriza en el producto $(x-2-5i)(x-2+5i)$.

Por lo tanto,

$$x^3 - 3x^2 + 25x + 29 = (x+1)(x-2-5i)(x-2+5i).$$

b) Se factoriza $5x^2 + 8x + 5$ usando la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64-100}}{10} = \frac{-8 \pm \sqrt{-36}}{10} = \frac{-8 \pm 6i}{10} = -\frac{4}{5} \pm \frac{3}{5}i$$

Por lo tanto,

$$5x^2 + 8x + 5 = 5\left(x + \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i\right)\left(x + \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right).$$

d) El proceso es similar al del literal anterior; los divisores de 10 son ±1, ±2, ±5 y ±10. Al sustituir $x = -2$ en $x^3 + x + 10$:

$$(-2)^3 - 2 + 10 = -8 + 8 = 0$$

Luego, $x^3 + x + 10 = (x+2)d$. Se usa división sintética para encontrar el polinomio d, obteniendo $d = x^2 - 2x + 5$; este último se factoriza en el producto $(x-1-2i)(x-1+2i)$.

Por lo tanto,

$$x^3 + x + 10 = (x+2)(x-1-2i)(x-1+2i).$$

f) Los divisores de –50 son ±1, ±2, ±5, ±10, ±25 y ±50. Al sustituir $x = 5$ en $x^3 - 7x^2 + 20x - 50$:

$$5^3 - 7(5)^2 + 20(5) - 50 = 125 - 175 + 100 - 50 = 0$$

Luego, $x^3 - 7x^2 + 20x - 50 = (x-5)d$. Al usar división sintética para encontrar el polinomio d se obtiene $d = x^2 - 2x + 10$; este último se factoriza en el producto $(x-1-3i)(x-1+3i)$.

Por lo tanto,

$$x^3 - 7x^2 + 20x - 50 = (x-5)(x-1-3i)(x-1+3i).$$

3.9 Raíces de un polinomio*

Problema inicial

Un número a (real o imaginario) es una raíz de un polinomio en variable x si al sustituir $x = a$ en el polinomio el resultado es cero. Calcula las raíces de los siguientes polinomios:

a) $3x - 12$ b) $2x^2 + 7x + 3$ c) $x^3 - 3x^2 + 25x + 29$

Solución

a) Para determinar las raíces de $3x - 12$ hay que encontrar los valores de x que hacen cero el polinomio; es decir, basta resolver la ecuación $3x - 12 = 0$ para determinar las raíces. La solución de la ecuación es $x = 4$, entonces 4 es la única raíz de $3x - 12$.

b) De igual forma que en el literal anterior, basta resolver la ecuación $2x^2 + 7x + 3 = 0$ para calcular las raíces del polinomio $2x^2 + 7x + 3$. Resolviendo por factorización:

$$2x^2 + 7x + 3 = (2x + 1)(x + 3) = 0.$$

Entonces $x = -\frac{1}{2}$ y $x = -3$ son las raíces del polinomio $2x^2 + 7x + 3$.

c) Como el polinomio es de grado 3 se utiliza el teorema del factor para determinar alguno de los valores que hacen cero el polinomio; se sustituye x por alguno de los números ±1, ±29:

$$\text{si } x = -1, \text{ entonces } (-1)^3 - 3(-1)^2 + 25(-1) + 29 = -1 - 3 - 25 + 29 = 0$$

se utiliza división sintética para realizar $(x^3 - 3x^2 + 25x + 29) \div (x + 1)$ y factorizar el polinomio original; de esto se obtiene:

$$x^3 - 3x^2 + 25x + 29 = (x + 1)(x^2 - 4x + 29)$$

una de las raíces del polinomio es $x = -1$. Se calculan ahora las raíces de $x^2 - 4x + 29$ resolviendo la ecuación $x^2 - 4x + 29 = 0$:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(29)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-100}}{2} = \frac{4 \pm 10i}{2} = 2 \pm 5i.$$

Por lo tanto, las raíces de $x^3 - 3x^2 + 25x + 29$ son $x = -1$, $x = 2 + 5i$ y $x = 2 - 5i$.

Conclusión

Sea p un polinomio en una variable:

1. Si p es de grado 1, entonces tiene una raíz compleja.
2. Si p es de grado 2 entonces tiene dos raíces complejas, contando aquellas que se repiten. Por ejemplo, el polinomio $x^2 + 2x + 1$ puede escribirse como $(x + 1)^2$ y $x = -1$ es una raíz doble.
3. Si p es de grado 3, entonces tiene tres raíces complejas, contando aquellas que se repiten.

Un polinomio de grado 1 se llama **lineal**, al de grado 2 se le conoce como polinomio **cuadrático** y si es de grado 3 se le llama polinomio **cúbico**. Un polinomio puede ser de grado n, para n un entero no negativo, y cuando es de una variable es de la forma:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

donde a_n es distinto de cero.

Un polinomio de grado n tiene n raíces complejas. Si $x_1, x_2, \ldots, x_r$ son las raíces (distintas) del polinomio $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ entonces puede factorizarse como:

$$a_n(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_r)^{m_r}$$

donde a los m_i se les llama **multiplicidades de la raíz** x_i y cumplen que:

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n.$$

Si un polinomio tiene una raíz imaginaria, el conjugado también es raíz.

Indicador de logro

3.9 Calcula las raíces de un polinomio de a lo sumo grado tres, usando números complejos.

Secuencia

En la clase se definen las raíces de un polinomio. Dado que ya se han trabajado números complejos, se indica, de manera general, cuántas raíces complejas tiene un polinomio de hasta grado tres. Si los estudiantes tienen muchas dificultades para resolver el Problema inicial, el docente debe desarrollar la Solución.

Propósito

La clase solo cuenta con el Problema inicial, su respectiva Solución y la Conclusión. Esto debido a que los procesos para encontrar las raíces de un polinomio vienen a ser los mismos estudiados durante toda la unidad. En el enunciado del Problema inicial y la Conclusión se indica qué es una raíz de un polinomio y cuántas puede llegar a tener.

Posibles dificultades

Verifique que los estudiantes tienen claro qué significa encontrar las raíces de un polinomio. Lo anterior se reduce a resolver una ecuación, pero es incorrecto decir "la raíz de $3x - 12 = 0$ es 4"; lo correcto es "la raíz de $3x - 12$ es 4 o $x = 4$".

Problemas propuestos:

La clase no cuenta con un bloque de Problemas. A continuación se proponen algunos problemas para desarrollarlos con los estudiantes, si lo considera necesario.

Calcula las raíces de los siguientes polinomios:

a) $-4x - 16$

El polinomio es de grado 1, solo tendrá una raíz compleja. Para encontrarla se resuelve la ecuación $-4x - 16 = 0$:

$$-4x = 16$$
$$x = -4$$

Por lo tanto, la raíz de $-4x - 16$ es $x = -4$.

b) $x^2 - 2x - 1$

El polinomio es de grado 2, tendrá entonces dos raíces complejas. Para encontrarlas se resuelve $x^2 - 2x - 1 = 0$ usando la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Por lo tanto, las raíces de $x^2 - 2x - 1$ son $x = 1 + \sqrt{2}$ y $x = 1 - \sqrt{2}$.

c) $x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

El polinomio es de grado 3, tiene entonces tres raíces complejas. Una de ellas se encuentra usando el teorema del factor, y buscando entre los divisores de -2 (±1 y ±2) el que hace cero el polinomio. Si $x = 1$:

$$1^3 - 3(1)^2 + 4(1) - 2 = 1 - 3 + 4 - 2 = 0$$

Se usa división sintética para calcular el cociente $(x^3 - 3x^2 + 4x - 2) \div (x - 1)$, donde resulta:

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (x - 1)(x^2 - 2x + 2)$$

Por medio de la fórmula cuadrática se obtienen las raíces de $x^2 - 2x + 2$, o sea, $x = 1 + i$ y $x = 1 - i$. Por lo tanto, las raíces de $x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ son $x = 1$, $x = 1 + i$ y $x = 1 - i$.

d) $x^3 - 3x^2 + x + 5$

El polinomio es de grado 3, tiene tres raíces complejas. Usando el teorema del factor, se busca entre los divisores de 5 (±1 y ±5) el que hace cero el polinomio. Si $x = -1$:

$$(-1)^3 - 3(-1)^2 - 1 + 5 = -1 - 3 - 1 + 5 = 0$$

Se usa división sintética para calcular el cociente $(x^3 - 3x^2 + x + 5) \div (x + 1)$, donde resulta:

$$x^3 - 3x^2 + x + 5 = (x + 1)(x^2 - 4x + 5)$$

Por medio de la fórmula cuadrática se obtienen las raíces de $x^2 - 4x + 5$, o sea, $x = 2 + i$ y $x = 2 - i$. Por lo tanto, las raíces de $x^3 - 3x^2 + x + 5$ son $x = -1$, $x = 2 + i$ y $x = 2 - i$.

3.10 Practica lo aprendido

1. Resuelve las siguientes ecuaciones, analizando primero si puede resolverse por factorización; de lo contrario, utiliza la fórmula general:

a) $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{12} = 0$
b) $x^2 + 5x = 0$
c) $x(3x + 10) = 77$
d) $15x^2 - 14 = 29x$
e) $22x^2 + 67x - 35 = 0$
f) $2.7x^2 + 4.2x + 0.8 = 0$
g) $x^2 - 6x + 12 = 0$
h) $x^2 + 5x + 6 = 0$
i) $x^2 - 2x + 26 = 0$
j) $6x^2 + x + 12 = 0$
k) $x^2 + 3x + 6 = 0$
l) $-3x^2 - 5 = -x$
m) $4x^2 + x + 14 = 0$
n) $15x^2 + 8x = -12$
o) $x^2 + 4x + 14 = 0$
p) $x^2 + 8x + 17 = 0$

2. Calcula el valor de x si:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}$$

¿Qué se puede observar de la expresión encerrada en el recuadro rojo?

$$x = 1 + \cfrac{1}{\boxed{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}$$

3. Sea $x = 2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{2 + \ddots}}}}$

Demuestra que $x = 3$.

4. Para cada caso, realiza $z + w$ y $z - w$:

a) $z = 2 - i$, $w = 3 + 7i$
b) $z = -3 + 2i$, $w = 2 - 4i$
c) $z = -6 - i$, $w = i$
d) $z = 2 + i$, $w = 8 - i$
e) $z = 1 - 3i$, $w = 5 - 2i$
f) $z = 9i$, $w = 5i$
g) $z = -5$, $w = 15i$
h) $z = 7 - 6i$, $w = -11 - 3i$

5. Para cada caso, realiza zw y $\frac{z}{w}$:

a) $z = -5 + 4i$, $w = 2 - 3i$
b) $z = 4 - i$, $w = -6 + 4i$
c) $z = -3 - 2i$, $w = -5 + i$
d) $z = 8 - i$, $w = 12 + 3i$
e) $z = 5 - 2i$, $w = 6i$
f) $z = -3 + 8i$, $w = 2$
g) $z = -9 + 7i$, $w = 4 + 9i$
h) $z = 7 - 6i$, $w = -11 - 3i$

6. Factoriza cada polinomio utilizando números complejos:

a) $4x^2 + x + 1$
b) $9x^2 + 28x + 50$
c) $x^3 - x^2 - 14x + 24$
d) $x^4 - 11x^3 + 40x^2 - 56x + 24$

Indicador de logro

3.10 Resuelve problemas correspondientes a ecuaciones cuadráticas y números complejos.

Solución de problemas:

1a) Se multiplican ambos miembros por 12, obteniendo la equivalente $12x^2 + 8x + 1 = 0$. Luego:

$$(6x + 1)(2x + 1) = 0, \text{ o sea, } x = -\frac{1}{6} \text{ y } x = -\frac{1}{2}.$$

1b) $x(x + 5) = 0$, o sea, $x = 0$ y $x = -5$.

1c) Se efectúa el producto para encontrar la equivalente $3x^2 + 10x - 77 = 0$. Luego:

$$(x + 7)(3x - 11) = 0, \text{ es decir, } x = -7 \text{ y } x = \frac{11}{3}.$$

1d) $(3x - 7)(5x + 2) = 0$, es decir, $x = \frac{7}{3}$ y $x = -\frac{2}{5}$.

1e) $(2x + 7)(11x - 5) = 0$, o sea, $x = -\frac{7}{2}$ y $x = \frac{5}{11}$.

1f) $(3x + 4)(9x + 2) = 0$, es decir, $x = -\frac{4}{3}$ y $x = -\frac{2}{9}$.

1g) Usando la fórmula cuadrática se encuentran las soluciones: $x = 3 + \sqrt{3}i$ y $x = 3 - \sqrt{3}i$.

1h) $(x + 2)(x + 3) = 0$, es decir, $x = -2$ y $x = -3$.

1i) Soluciones: $x = 1 + 5i$ y $x = 1 - 5i$.

1j) Soluciones: $x = -\frac{1}{12} + \frac{\sqrt{287}}{12}i$ y $x = -\frac{1}{12} - \frac{\sqrt{287}}{12}i$.

1k) Soluciones: $x = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i$ y $x = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i$.

1l) Soluciones: $x = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{59}}{6}i$ y $x = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{59}}{6}i$.

1m) Soluciones: $x = -\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{223}}{8}i$ y $x = -\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{223}}{8}i$.

1n) Soluciones: $x = -\frac{4}{15} + \frac{2\sqrt{41}}{15}i$ y $x = -\frac{4}{15} - \frac{2\sqrt{41}}{15}i$.

1o) Soluciones: $x = -2 + \sqrt{10}i$ y $x = -2 - \sqrt{10}i$.

1p) Soluciones: $x = -4 + i$ y $x = -4 - i$.

2. Observe que: $x > 0$ y la expresión encerrada en el recuadro es igual a x. Al sustituirla, se obtiene la ecuación $x = 1 + \frac{1}{x}$.

$$x = 1 + \cfrac{1}{\boxed{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}$$

Esta es equivalente a $x^2 - x - 1 = 0$ (con $x \neq 0$). Al resolverla por la fórmula cuadrática se obtiene la solución no negativa $x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$.

3. $x > 0$, y la expresión encerrada en el recuadro es igual a x. Al sustituirla, se obtiene la ecuación:

$$x = 2 + \cfrac{3}{\boxed{2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{2 + \ddots}}}}}$$

$$x = 2 + \frac{3}{x}$$

Esta es equivalente a $x^2 - 2x - 3 = 0$ (con $x \neq 0$), y su solución no negativa es $x = 3$.

4a) $z + w = 5 + 6i;\ z - w = -1 - 8i$

4b) $z + w = -1 - 2i;\ z - w = -5 + 6i$

4c) $z + w = -6;\ z - w = -6 - 2i$

4d) $z + w = 10;\ z - w = -6 + 2i$

4e) $z + w = 6 - 5i;\ z - w = -4 - i$

4f) $z + w = 14i;\ z - w = 4i$

4g) $z + w = -5 + 15i;\ z - w = -5 - 15i$

4h) $z + w = -4 - 9i;\ z - w = 18 - 3i$

5a) $zw = 2 + 23i;\ \frac{z}{w} = -\frac{22}{13} - \frac{7}{13}i$

5b) $zw = -20 + 22i;\ \frac{z}{w} = -\frac{7}{13} - \frac{5}{26}i$

5c) $zw = 17 + 7i;\ \frac{z}{w} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

5d) $zw = 99 + 12i;\ \frac{z}{w} = \frac{31}{51} - \frac{4}{17}i$

5e) $zw = 12 + 30i;\ \frac{z}{w} = -\frac{1}{3} - \frac{5}{6}i$

5f) $zw = -6 + 16i;\ \frac{z}{w} = -\frac{3}{2} + 4i$

5g) $zw = -99 - 53i;\ \frac{z}{w} = \frac{27}{97} + \frac{109}{97}i$

5h) $zw = -95 + 45i;\ \frac{z}{w} = -\frac{59}{130} + \frac{87}{130}i$

6a) $4x^2 + x + 1 = 4\left(x + \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{15}}{8}i\right)\left(x + \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{15}}{8}i\right)$

6b) $9x^2 + 28x + 50 = 9\left(x + \frac{14}{9} - \frac{\sqrt{254}}{9}i\right)\left(x + \frac{14}{9} + \frac{\sqrt{254}}{9}i\right)$

6c) $x^3 - x^2 - 14x + 24 = (x - 2)(x - 3)(x + 4)$

6d) $x^4 - 11x^3 + 40x^2 - 56x + 24 = (x - 2)(x - 3)(x - 3 - \sqrt{5})(x - 3 + \sqrt{5})$

En el problema 6b), los estudiantes pueden usar calculadora.

3.11 Problemas de la unidad

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $(x+y)^2-(x-y)^2$

b) $(x+y)^2+(x-y)^2$

2. Utiliza productos notables para calcular el resultado de las siguientes operaciones:

a) 190(210)

b) 96(104) – 94(106)

c) $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$

d) $\sqrt{100(101)(102)(103)+1}$

Toma $x=\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$ y calcula x^2.

Considera $x = 100$ y multiplica el primero con el último y el segundo con el tercero.

3. Considera los números complejos $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -2 + 3i$ y $z_3 = 1 - i$. Calcula el resultado de las siguientes operaciones:

a) $z_1 + z_2 + z_3$

b) $z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$

c) $z_1z_2z_3$

d) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$

e) $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_3}+\dfrac{z_3}{z_1}$

f) $\dfrac{z_1^2+z_2^2}{z_2^2+z_3^2}$

4. Desarrolla cada uno de los productos para demostrar las igualdades:

a) $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ac)x+abc$

b) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

c) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$

5. Encuentra un polinomio de segundo grado en una variable x que cumpla lo siguiente: el coeficiente de x y el término independiente sean iguales; los valores del polinomio al sustituir x por 1 y 2 sean 7 y 18 respectivamente.

6. Sean x y y números reales positivos. Factoriza los siguientes polinomios (puedes dejar los términos de los factores con raíces cuadradas):

a) $x+2\sqrt{x}+1$

b) $x-y$

c) $y+4\sqrt{y}+4$

d) $x-1$

7. Demuestra que para cualquier número complejo z, se cumple que $|z| \geq 0$.

8. Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$, ¿se cumple que $|zw| = |z||w|$?

9. Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$, ¿se cumple que $\left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{|z|}{|w|}$?

10. Determina los valores que puede tomar el número real m para que la ecuación $mx^2 + 2x + 1 = 0$ tenga dos soluciones reales.

11. Determina los valores que puede tomar el número real m para que la ecuación $x^2 + 2x + m = 0$ tenga dos soluciones imaginarias.

Indicador de logro

3.11 Resuelve problemas correspondientes a operaciones con polinomios y números complejos.

Solución de problemas:

1a)
$$\begin{aligned}(x+y)^2-(x-y)^2 &= [(x+y)+(x-y)][(x+y)-(x-y)] && \text{factorizar diferencia de cuadrados,}\\ &= (x\cancel{+y}+x\cancel{-y})(\cancel{x}+y\cancel{-x}+y) && \text{quitar paréntesis,}\\ &= (2x)(2y) && \text{reducir términos semejantes,}\\ &= 4xy && \text{desarrollar el producto.}\end{aligned}$$

1b)
$$\begin{aligned}(x+y)^2+(x-y)^2 &= x^2\cancel{+2xy}+y^2+x^2\cancel{-2xy}+y^2 && \text{desarrollar los cuadrados de los binomios,}\\ &= 2x^2+2y^2 && \text{reducir términos semejantes,}\\ &= 2(x^2+y^2) && \text{extraer factor común.}\end{aligned}$$

2a)
$$\begin{aligned}190(210) &= (200-10)(200+10) && \text{reescribir las cantidades,}\\ &= 200^2-10^2 && \text{efectuar suma por diferencia de binomios,}\\ &= 40\,000-100 && \text{calcular cuadrados,}\\ &= 39\,900 && \text{realizar resta.}\end{aligned}$$

2b)
$$\begin{aligned}96(104)-94(106) &= (100-4)(100+4)-(100-6)(100+6) && \text{reescribir las cantidades,}\\ &= 100^2-4^2-(100^2-6^2) && \text{efectuar suma por diferencia de binomios,}\\ &= \cancel{100^2}-16\cancel{-100^2}+36 && \text{calcular cuadrados y eliminar términos}\\ &= 20 && \text{realizar resta.}\end{aligned}$$

2c) Sea $x=\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$. Se calcula el resultado de x^2:

$$\begin{aligned}x^2 &= 3\cancel{+\sqrt{5}}-2\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)+3\cancel{-\sqrt{5}}\\ &= 6-2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}\\ &= 6-2\sqrt{9-5}\\ &= 2\end{aligned}$$

Es decir, $x^2=2$. Como $x>0$ entonces $x=\sqrt{2}$.

2d) Sea $x=100$, entonces $\sqrt{100(101)(102)(103)+1}=\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}$. Se desarrollan los productos $x(x+3)$ y $(x+1)(x+2)$, y se asocian términos "convenientemente":

$$\begin{aligned}\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} &= \sqrt{(x^2+3x)[(x^2+3x)+2]+1}\\ &= \sqrt{(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1}\\ &= \sqrt{[(x^2+3x)+1]^2}\\ &= (x^2+3x)+1\end{aligned}$$

Sustituyendo $x=100$ en x^2+3x+1 se obtiene como resultado 10 301. Por lo tanto,

$$\sqrt{100(101)(102)(103)+1}=10\,301.$$

3a) $z_1+z_2+z_3=(1-2+1)+(2+3-1)i=4i$.

3b) $z_1z_2=-8-i$; $z_2z_3=1+5i$; $z_3z_1=3+i$; luego $z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=-4+5i$.

3c) $z_1z_2=-8-i$ y $z_3=1-i$; luego $z_1z_2z_3=-9+7i$.

3d) $z_1^2=-3+4i$, $z_2^2=-5-12i$ y $z_3^2=-2i$; luego $z_1^2+z_2^2+z_3^2=-8-10i$. Lo anterior también puede resolverse tomando en cuenta que $z_1^2+z_2^2+z_3^2=(z_1+z_2+z_3)^2-2(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)$. Así:

$$\begin{aligned}z_1^2+z_2^2+z_3^2 &= (4i)^2-2(-4+5i)\\ &= -8-10i.\end{aligned}$$

3e) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{4}{13}-\frac{7}{13}i$, $\frac{z_2}{z_3}=-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i$ y $\frac{z_3}{z_1}=-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$; luego, $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}=-\frac{311}{130}-\frac{83}{130}i.$

3f) $z_1^2 + z_2^2 = -8 - 8i$ y $z_2^2 + z_3^2 = -5 - 14i$; luego, $\dfrac{z_1^2 + z_2^2}{z_2^2 + z_3^2} = \dfrac{152}{221} - \dfrac{72}{221}i$.

4a)
$$\begin{aligned} (x+a)(x+b)(x+c) &= [x^2 + (a+b)x + ab](x+c) && \text{desarrollar } (x+a)(x+b),\\ &= x^3 + (a+b)x^2 + abx + cx^2 + (ac+bc)x + abc && \text{desarrollar el producto resultante,}\\ &= x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x + abc && \text{asociar y extraer factor común.} \end{aligned}$$

4b)
$$\begin{aligned} (a+b)(a^2 - ab + b^2) &= a^3 - \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} + \cancel{a^2b} - \cancel{ab^2} + b^3 && \text{desarrollar el producto,}\\ &= a^3 + b^3 && \text{reducir términos semejantes.} \end{aligned}$$

4c)
$$\begin{aligned} (a^2+b^2)(x^2+y^2) &= a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy - 2abxy && \text{desarrollar el producto y sumar cero,}\\ &= (a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2) + (a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2) && \text{asociar términos,}\\ &= (ax+by)^2 + (ay-bx)^2 && \text{factorizar trinomios cuadrados perfectos.} \end{aligned}$$

5. Sea $ax^2 + bx + c$ el polinomio buscado. Como el coeficiente de x debe ser igual al término independiente entonces $b = c$, o sea, $ax^2 + bx + b$. Al sustituir $x = 1$ se obtiene $a + 2b$, y al sustituir $x = 2$ resulta $4a + 3b$. Según lo indicado en el enunciado del problema, $a + 2b = 7$ y $4a + 3b = 18$; la solución del sistema es $a = 3$ y $b = 2$. Por lo tanto, el polinomio buscado es $3x^2 + 2x + 2$.

6a) $x + 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} + 1)^2$

6b) $x - y = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$

6c) $y + 4\sqrt{y} + 4 = (\sqrt{y})^2 + 2(\sqrt{y})(2) + 2^2 = (\sqrt{y} + 2)^2$

6d) $x - 1 = (\sqrt{x})^2 - 1^2 = (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)$

7. Sea $z = a + bi$; entonces $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (ver Definición de la clase 3.4). Los números a^2 y b^2 son no negativos (pues a y b son reales), y por tanto su suma también lo será. Luego, $\sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$.

En este problema, basta con que el estudiante deduzca, intuitivamente, por qué la propiedad es verdadera. No se espera una demostración matemática muy rigurosa.

8. $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$, luego:

$$\begin{aligned} |zw| &= \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2} && \text{sustituyendo en la fórmula del módulo de un complejo,}\\ &= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} && \text{usando el resultado del problema 4c), con } x = d \text{ y } y = c. \end{aligned}$$

Además, $|z|\,|w| = \sqrt{a^2 + b^2}\,\sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$. Por lo tanto, sí se cumple $|zw| = |z|\,|w|$.

9. De la Definición de la clase 3.5 se tiene $\dfrac{z}{w} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{-ad+bc}{c^2+d^2}i = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$; luego:

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \sqrt{\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)^2 + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(ac+bd)^2 + (bc-ad)^2}{(c^2+d^2)^2}}$$

Del resultado del problema 4c) se deduce que $(ac + bd)^2 + (bc - ad)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$. Entonces:

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \sqrt{\frac{(a^2+b^2)\cancel{(c^2+d^2)}}{(c^2+d^2)^{\cancel{2}}}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}}$$

Además, $\dfrac{|z|}{|w|} = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}} = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{c^2+d^2}}$. Por lo tanto, $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$.

En los problemas 10 y 11, puede orientar a los estudiantes que los resuelvan a prueba y error.

10. Para que la ecuación tenga dos soluciones reales, el discriminante $\Delta = 4 - 4m = 4(1 - m)$ debe ser mayor que cero. Para que Δ sea mayor que cero, $1 - m$ debe ser mayor que cero. Al probar algunos valores:

- Para $m = -1$: $1 - m = 2$
- Para $m = 0$: $1 - m = 1$
- Para $m = 1$: $1 - m = 0$
- Para $m = 1.5$: $1 - m = -0.5$
- Para $m = 2$: $1 - m = -1$
- Para $m = 3$: $1 - m = -2$

Se observa entonces, que Δ será mayor que cero cuando m es menor a 1.

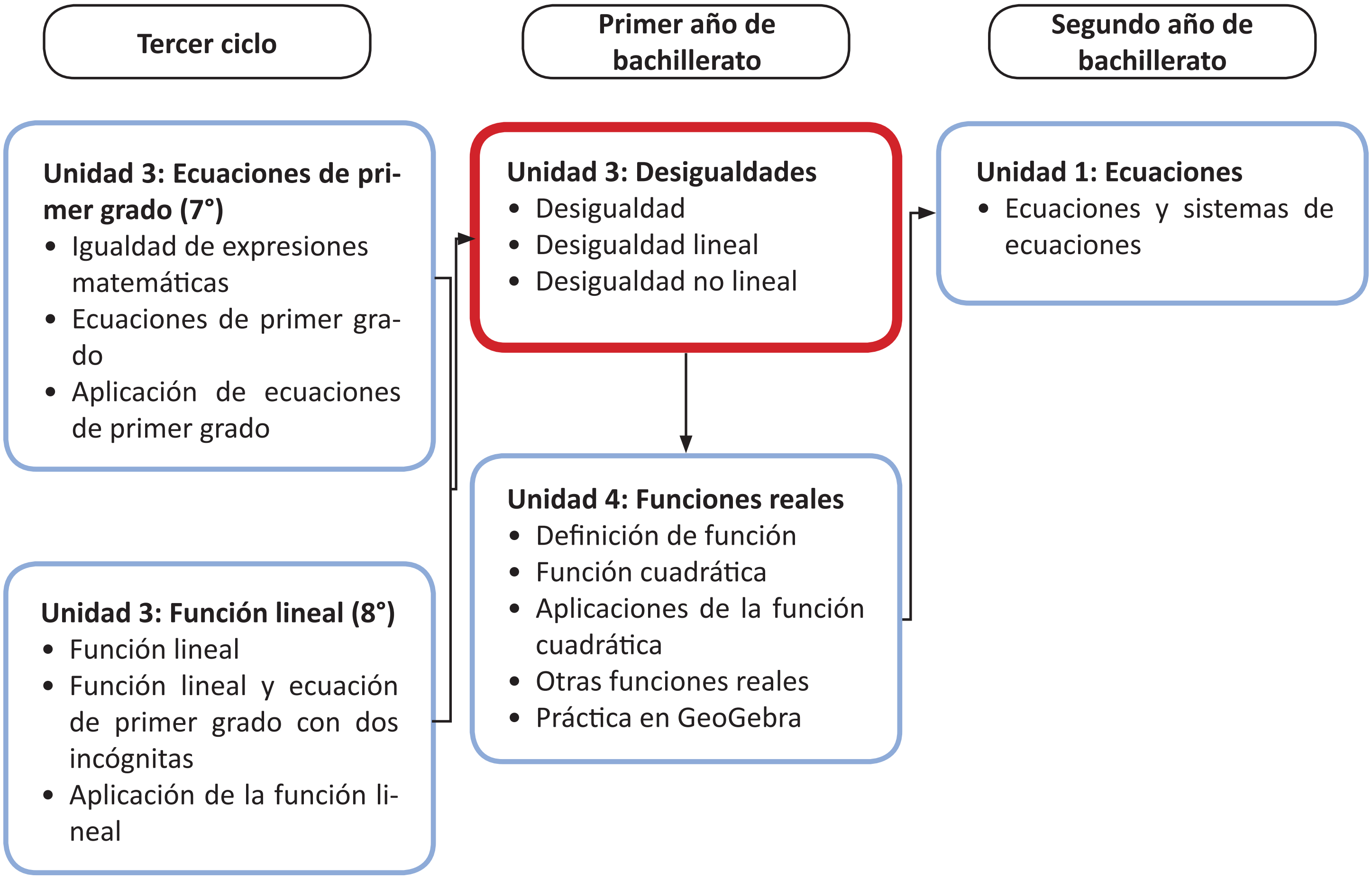
11. Para que la ecuación tenga dos soluciones reales, el discriminante $\Delta = 4 - 4m = 4(1 - m)$ debe ser menor que cero. Para que Δ sea menor que cero, $1 - m$ debe ser menor que cero. De la solución del problema 10 se puede observar que esto sucede cuando m es mayor que 1.

Unidad 3. Desigualdades

Competencia de la unidad

Resolver desigualdades lineales y no lineales con una variable haciendo uso de las propiedades de desigualdad para la demostración o comprobación de teoremas matemáticos, así como la interpretación y resolución de situaciones del entorno que impliquen el uso de las mismas.

Relación y desarrollo



Tercer ciclo

Unidad 3: Ecuaciones de primer grado (7°)
- Igualdad de expresiones matemáticas
- Ecuaciones de primer grado
- Aplicación de ecuaciones de primer grado

Unidad 3: Función lineal (8°)
- Función lineal
- Función lineal y ecuación de primer grado con dos incógnitas
- Aplicación de la función lineal

Primer año de bachillerato

Unidad 3: Desigualdades
- Desigualdad
- Desigualdad lineal
- Desigualdad no lineal

Unidad 4: Funciones reales
- Definición de función
- Función cuadrática
- Aplicaciones de la función cuadrática
- Otras funciones reales
- Práctica en GeoGebra

Segundo año de bachillerato

Unidad 1: Ecuaciones
- Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

Plan de estudio de la unidad

Lección	Horas	Clases
1. Desigualdad	1	1. Propiedades de las desigualdades, parte 1
	1	2. Propiedades de las desigualdades, parte 2
2. Desigualdad lineal	1	1. Definición de desigualdad lineal
	1	2. Solución de desigualdades lineales, parte 1
	1	3. Solución de desigualdades lineales, parte 2
	1	4. Solución de desigualdades lineales, parte 3
	1	5. Interpretación gráfica de una desigualdad lineal
	1	6. Aplicaciones de las desigualdades lineales
	1	7. Practica lo aprendido
3. Desigualdad no lineal	1	1. Actividad. Construcción de un triángulo dados sus lados
	1	2. Desigualdad triangular, parte 1
	1	3. Desigualdad triangular, parte 2
	1	4. Desigualdad de las medias aritmética y geométrica
	1	5. Desigualdades con expresiones racionales
	1	6. Problemas de la unidad
	1	Prueba de la unidad 3

15 horas clase + prueba de la unidad 3

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Desigualdad

En esta lección se enuncian las dos propiedades a utilizar en la resolución de desigualdades: cuando se suma o multiplica por un número real (diferente de cero) ambos miembros de la desigualdad. En las clases se parte de casos particulares para que los estudiantes verifiquen y deduzcan el resultado en cada situación.

Lección 2: Desigualdad lineal

La primera clase retoma la definición de desigualdad lineal vista en séptimo grado. Luego, similar a la resolución de ecuaciones de primer grado, se comienzan a resolver desigualdades lineales de formas específicas ($x + a \geq c$, $ax \geq c$) de tal manera que las propiedades vistas en la lección 1 se apliquen directamente, y por último llegar a la forma $ax + b \geq c$ (o $ax + b \leq c$). La lección finaliza con aplicaciones en la vida cotidiana, es decir, situaciones donde se planteen desigualdades lineales para encontrar e interpretar su solución de acuerdo al contexto.

Lección 3: Desigualdad no lineal

En esta lección se demuestran dos teoremas sobre desigualdades: la desigualdad triangular (tanto de las longitudes de un triángulo como del valor absoluto de números reales) y la desigualdad de las medias aritmética y geométrica. Se resuelven también desigualdades con expresiones racionales, cuyo numerador es un número real y cuyo denominador es un polinomio de grado 1 en una variable.

Lección 1 Desigualdad

1.1 Propiedades de las desigualdades, parte 1

Problema inicial

Escribe en el espacio en blanco el símbolo de desigualdad correcto, $\leq$, $\geq$, $<$ o $>$:

a) 1 ☐ -2

b) 3.5 ☐ $\frac{7}{2}$

c) $-3 + 2$ ☐ $5 + 2$

d) $-5 + 3$ ☐ $-7 + 3$

e) $\frac{1}{2} - 1$ ☐ $-1 - 1$

f) $1.5 - 5$ ☐ $4 - 5$

Solución

a) Un número positivo siempre será mayor que un número negativo. Entonces:

$$1 \boxed{>} -2$$

d) De igual forma al literal anterior, como $-5 > -7$ entonces:

$$-5 + 3 \boxed{>} -7 + 3$$

b) El número 3.5 es el decimal correspondiente a $\frac{7}{2}$. Se puede utilizar cualquiera de los símbolos $\leq$ o $\geq$:

$$3.5 \boxed{\geq} \frac{7}{2}$$

e) $\frac{1}{2} > -1$ y al restar 1 a ambos números se obtienen como resultados $-\frac{1}{2}$ y -2 respectivamente, es decir, la desigualdad se mantiene. Luego:

$$\frac{1}{2} - 1 \boxed{>} -1 - 1$$

c) $-3 < 5$ y al sumar 2 a ambos números se obtiene $-3 + 2 = -1$ y $5 + 2 = 7$, es decir, la desigualdad se mantiene. Luego:

$$-3 + 2 \boxed{<} 5 + 2$$

f) De forma similar al literal e), como $1.5 < 4$, entonces:

$$1.5 - 5 \boxed{<} 4 - 5$$

Conclusión

Los símbolos $\leq$, $\geq$, $<$ y $>$ se utilizan para representar relaciones entre cantidades distintas o iguales. Estos se leen como sigue:

$\leq$: menor o igual que

$\geq$: mayor o igual que

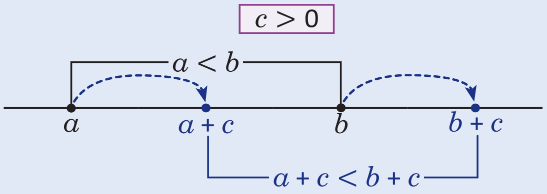
$<$: menor que

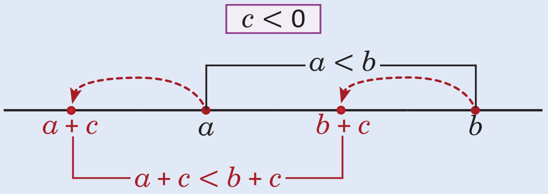
$>$: mayor que

La relación que indica cuando dos cantidades o expresiones matemáticas son distintas o iguales se llama **desigualdad**. En la desigualdad $a \leq b$, la cantidad a es el **miembro izquierdo** y la cantidad b es el **miembro derecho**.

Sean a, b y c números reales cualesquiera; **si $a < b$ entonces $a + c < b + c$**. En general, si se suma (o resta) un número real a ambos miembros de una desigualdad entonces la desigualdad se mantiene.

La propiedad es válida para cualquier tipo de desigualdad: $a > b$, $a \geq b$, y $a \leq b$. Es decir, al sumar un número real c a ambos miembros a y b entonces la desigualdad se mantendrá.





Problemas

Escribe en el espacio en blanco el símbolo de desigualdad correcto:

a) $3 + 7$ ☐ $10 + 7$

b) $-1 + 4$ ☐ $5 + 4$

c) $-6 - 2$ ☐ $-9 - 2$

d) $-\frac{1}{2} - 5$ ☐ $-0.5 - 5$

e) $-0.25 + 5$ ☐ $-\frac{1}{4} + 5$

f) $4.5 + 1.2$ ☐ $1 + 1.2$

g) $-3 + 2.7$ ☐ $-1.9 + 2.7$

h) $-3 + \sqrt{2}$ ☐ $-1 + \sqrt{2}$

i) $\sqrt{2} - \frac{1}{2}$ ☐ $-\sqrt{3} - \frac{1}{2}$

Indicador de logro

1.1 Determina el símbolo de relación que hace verdadera una desigualdad cuando se suma el mismo número real a ambos miembros.

Secuencia

En los grados anteriores se han trabajado con los símbolos de desigualdad $>$, $<$, $\geq$ y $\leq$ para comparar cantidades. En esta clase se repasa esa noción y se enuncia, además, la propiedad de las desigualdades cuando se suma un número real a ambos miembros.

Propósito

En el Problema inicial, los estudiantes deben realizar los cálculos de las sumas (o restas) para escribir el símbolo de desigualdad adecuado. En el bloque de Problemas, los estudiantes deben establecer el símbolo de desigualdad sin realizar antes las operaciones, es decir, utilizando la propiedad descrita en la Conclusión.

Solución de problemas:

a) $3 + 7 \boxed{<} 10 + 7$; ya que $3 < 10$ y se está sumando 7 a ambos miembros de la desigualdad.

b) $-1 + 4 \boxed{<} 5 + 4$; ya que $-1 < 5$ y se está sumando 4 a ambos miembros de la desigualdad.

c) $-6 - 2 \boxed{>} -9 - 2$; ya que $-6 > -9$ y se está sumando -2 (o restando 2) a ambos miembros de la desigualdad.

d) $-\frac{1}{2} - 5 \boxed{\geq} - 0.5 - 5$; ya que -0.5 es el decimal correspondiente a la fracción $-\frac{1}{2}$. También pudo utilizarse el símbolo $\leq$.

e) $- 0.25 + 5 \boxed{\geq} -\frac{1}{4} + 5$; ya que -0.25 es el decimal correspondiente a la fracción $-\frac{1}{4}$. También pudo utilizarse el símbolo $\leq$.

f) $4.5 + 1.2 \boxed{>} 1 + 1.2$; ya que $4.5 > 1$ y se está sumando 1.2 a ambos miembros de la desigualdad.

g) $- 3 + 2.7 \boxed{<} 1.9 + 2.7$; ya que $-3 < 1.9$ y se está sumando 2.7 a ambos miembros de la desigualdad.

h) $- 3 + \sqrt{2} \boxed{<} - 1 + \sqrt{2}$; ya que $-3 < -1$ y se está sumando $\sqrt{2}$ a ambos miembros de la desigualdad.

i) $\sqrt{2} - \frac{1}{2} \boxed{>} -\sqrt{3} - \frac{1}{2}$; ya que $\sqrt{2} > -\sqrt{3}$ y se está sumando $-\frac{1}{2}$ $\left(\text{o restando } \frac{1}{2}\right)$ a ambos miembros de la desigualdad.

Lección 1

1.2 Propiedades de las desigualdades, parte 2

Problema inicial

Escribe en el espacio en blanco el símbolo de desigualdad correcto, $<$ o $>$:

a) 2(4) ☐ 5(4)
b) −5(3) ☐ 4(3)
c) −3(10) ☐ −9(10)
d) 6(−2) ☐ 3(−2)
e) 8(−4) ☐ −5(−4)
f) −11(−5) ☐ −7(−5)

Solución

a) $2 < 5$ y al aumentar 4 veces ambas cantidades resultan 2(4) = 8 y 5(4) = 20, es decir, la desigualdad se mantiene. Entonces:

$2(4)\ \boxed{<}\ 5(4)$

b) De forma similar al literal a), $-5 < 4$, al multiplicar por 3 ambos miembros la desigualdad se mantiene, y:

$-5(3)\ \boxed{<}\ 4(3)$

c) $-3 > -9$; si se aumentan 10 veces ambas cantidades la desigualdad se mantiene. Luego:

$-3(10)\ \boxed{>}\ -9(10)$

d) $6 > 3$, pero ahora ambas cantidades se multiplican por un número negativo obteniendo 6(−2) = −12 y 3(−2) = −6, es decir, la desigualdad se invierte:

$6(-2)\ \boxed{<}\ 3(-2)$

e) De forma similar al literal d), $8 > -5$ y al multiplicar por un número negativo ambos miembros se obtiene 8(−4) = −32 y −5(−4) = 20, o sea, la desigualdad se invierte:

$8(-4)\ \boxed{<}\ -5(-4)$

f) $-11 < -7$, y como en los literales anteriores, si se multiplica ambos miembros por un número negativo la desigualdad se invierte; entonces:

$-11(-5)\ \boxed{>}\ -7(-5)$

Conclusión

Sean a, b y c números reales tales que $\boldsymbol{a < b}$.

1. **Si $\boldsymbol{c > 0}$ entonces $\boldsymbol{ac < bc}$**, es decir, si se multiplica ambos miembros de una desigualdad por un número positivo entonces la desigualdad se mantiene.
2. **Si $\boldsymbol{c < 0}$ entonces $\boldsymbol{ac > bc}$**, es decir, si se multiplica ambos miembros de una desigualdad por un número negativo entonces la desigualdad se invierte.

La propiedad es válida también para las desigualdades $a > b$, $a \geq b$, y $a \leq b$.

Problemas

1. Escribe en el espacio en blanco el símbolo de desigualdad correcto:

a) 8(5) ☐ 11(5)
b) −3(6) ☐ −7(6)
c) 6(−3) ☐ −4(−3)
d) −10(−7) ☐ −5(−7)
e) 4.8(9) ☐ 1.3(9)
f) −3.5(−2) ☐ −3.6(−2)
g) $\frac{4}{5}(-4)$ ☐ $5(-4)$
h) $-\frac{8}{5}(3)$ ☐ $\frac{1}{2}(3)$
i) $10\left(\frac{1}{2}\right)$ ☐ $7\left(\frac{1}{2}\right)$
j) $-6.5\left(-\frac{1}{4}\right)$ ☐ $-4.3\left(-\frac{1}{4}\right)$
k) $\frac{8}{3}\left(\frac{5}{4}\right)$ ☐ $-\frac{1}{4}\left(\frac{5}{4}\right)$
l) $\sqrt{6}\,(-11)$ ☐ $\sqrt{3}\,(-11)$

2. Sean c y d números reales positivos tales que $c < d$. Escribe el símbolo de desigualdad correcto, $<$ o $>$ (justifica tu respuesta):

a) $3c$ ☐ $3d$
b) $-c$ ☐ $-d$
c) $5.6c$ ☐ $5.6d$
d) $-2c$ ☐ $-2d$
e) $-7c$ ☐ $-7d$
f) $\frac{3}{4}c$ ☐ $\frac{3}{4}d$

3. Sea a un número positivo. Demuestra lo siguiente:

a) Si $a > 1$ entonces $a^2 > a$;
b) Si $a < 1$ entonces $a^2 < a$.

Indicador de logro

1.2 Determina el símbolo de relación que hace verdadera una desigualdad cuando se multiplica el mismo número real a ambos miembros.

Secuencia

Se continúa con la verificación de las propiedades de las desigualdades. Se comprueba el resultado al multiplicar ambos miembros de una desigualdad por un número real diferente de cero, tanto el caso cuando el número es positivo como cuando es negativo.

Propósito

Similar a la clase 1.1, en el Problema inicial los estudiantes deben realizar los cálculos de los productos para establecer el símbolo de desigualdad adecuado, diferenciando cuando se multiplica por un número positivo o negativo. En el bloque de Problemas, en el numeral 1 deben utilizar las propiedades descritas en la Conclusión para determinar el símbolo de desigualdad sin realizar los cálculos de los productos.

Posibles dificultades

Verifique que los estudiantes invierten el símbolo de desigualdad cuando se multiplica por un número negativo; es importante hacer énfasis en este caso y evitar dificultades cuando se resuelvan desigualdades lineales.

Solución de problemas:

1a) $8(5)\ \boxed{<}\ 11(5)$; ya que $8 < 11$ y se multiplican ambos miembros por un número positivo (la desigualdad se mantiene).

1b) $-3(6)\ \boxed{>}\ -7(6)$; ya que $-3 > -7$ y se multiplican ambos miembros por un número positivo (la desigualdad se mantiene).

1c) $6(-3)\ \boxed{<}\ -4(-3)$; ya que $6 > -4$ y se multiplican ambos miembros por un número negativo (la desigualdad se invierte).

1d) $-10(-7)\ \boxed{>}\ -5(-7)$; ya que $-10 < -5$ y se multiplican ambos miembros por un número negativo (la desigualdad se invierte).

1e) $4.8(9)\ \boxed{>}\ 1.3(9)$

1f) $-3.5(-2)\ \boxed{<}\ -3.6(-2)$

1g) $\frac{4}{5}(-4)\ \boxed{>}\ 5(-4)$

1h) $-\frac{8}{5}(3)\ \boxed{<}\ \frac{1}{2}(3)$

1i) $10\left(\frac{1}{2}\right)\ \boxed{>}\ 7\left(\frac{1}{2}\right)$

1j) $-6.5\left(-\frac{1}{4}\right)\ \boxed{>}\ -4.3\left(-\frac{1}{4}\right)$

1k) $\frac{8}{3}\left(\frac{5}{4}\right)\ \boxed{>}\ -\frac{1}{4}\left(\frac{5}{4}\right)$

1l) $\sqrt{6}(-11)\ \boxed{<}\ \sqrt{3}(-11)$

2a) $3c\ \boxed{<}\ 3d$; pues se multiplicaron ambos miembros por un número positivo (3).

2b) $-c\ \boxed{>}\ -d$; pues se multiplicaron ambos miembros por un número negativo (–1).

2c) $5.6c\ \boxed{<}\ 5.6d$; pues se multiplicaron ambos miembros por un número positivo (5.6).

2d) $-2c\ \boxed{>}\ -2d$; pues se multiplicaron ambos miembros por un número negativo (–2).

2e) $-7c\ \boxed{>}\ -7d$; pues se multiplicaron ambos miembros por un número negativo (–7).

2f) $\frac{3}{4}c\ \boxed{<}\ \frac{3}{4}d$; pues se multiplicaron ambos miembros por un número positivo.

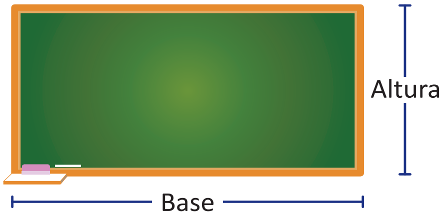
3a) Si en $a > 1$ se multiplican ambos miembros por a, entonces la desigualdad se mantiene (pues $a > 0$). Luego $a(a) > a(1)$, o sea, $a^2 > a$.

3b) Si en $a < 1$ se multiplican ambos miembros por a, entonces la desigualdad se mantiene (pues $a > 0$). Luego $a(a) < a(1)$, o sea, $a^2 < a$.

2.1 Definición de desigualdad lineal

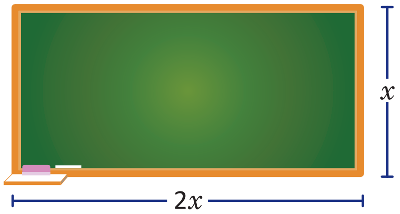
Problema inicial

La longitud de la base de una pizarra rectangular es el doble de su altura, y la medida de su perímetro es a lo sumo 7.20 m^2. Escribe una desigualdad que relacione el perímetro y la medida máxima que este puede tomar.



Solución

Sea x la longitud en metros de la altura de la pizarra como lo muestra la figura de abajo. De acuerdo al enunciado del problema la longitud en metros de su base será igual a $2x$ pues es el doble de la altura.



El perímetro de la pizarra se calcula:

$$2x + 2(2x) = 6x$$

es decir, la medida del perímetro de la pizarra es igual a $6x$. De acuerdo al problema, el perímetro es a lo sumo 7.20 m^2; esto es equivalente a decir que la medida del perímetro es menor o igual a 7.20 m^2. Por lo tanto, la desigualdad que relaciona el perímetro y la medida máxima de este es: $6x \leq 7.20$.

Definición

La desigualdad de dos expresiones matemáticas de grado 1 que involucra una variable se llama **desigualdad lineal**. En una desigualdad lineal, al valor desconocido que se representa por una variable se llama **incógnita**, al intervalo de los valores numéricos de la incógnita que cumplen con la desigualdad se llaman **solución de la desigualdad**.

En esta unidad, las variables únicamente podrán tomar valores reales, es decir, números reales.

Problemas

1. Escribe los siguientes enunciados como desigualdades lineales:
   a) Sara se tarda en llegar a su trabajo a lo sumo 1 hora con 15 minutos.
   b) Según el Ministerio de Medio Ambiente y Recursos Naturales (MARN), para el 2015 la cantidad de sismos no sentidos fue 11 veces la cantidad de sismos sentidos; mientras que en total se registró una cantidad superior a los 4 000 sismos en ese año.
   c) La edad de Mario es un tercio de la edad de Antonio, y la suma de sus edades es inferior a 28 años.
   d) El consumo de energía de una lavadora es 500 watts por hora. Al finalizar cierto tiempo, el consumo de energía superó los 3 500 watts por hora.

2. Beatriz y José deciden ahorrar durante todo el período escolar; al finalizar el año lectivo, el dinero ahorrado por Beatriz es superior a la mitad del dinero ahorrado por José. Escribe una desigualdad que relacione el dinero ahorrado por Beatriz y José.

Indicador de logro

2.1 Expresa situaciones de la vida cotidiana utilizando desigualdades lineales de una variable.

Secuencia

En esta clase se repasa lo visto en séptimo grado, sobre representación de relaciones entre expresiones matemáticas. Se define qué es una desigualdad lineal y las partes de la misma.

Propósito

Tanto en el Problema inicial como en el bloque de Problemas, no se pretende resolver las desigualdades, solamente plantearlas para que los estudiantes se familiaricen con el uso de letras para representar una variable en el contexto de las desigualdades.

Posibles dificultades

En el numeral 1 del bloque de Problemas, puede dar pistas sobre las cantidades que se están relacionando y la importancia de las frases "a lo sumo", "superior", "inferior" en cada literal, las cuáles indican una desigualdad. En el numeral 2, es necesario usar dos variables para las cantidades de dinero ahorradas por Beatriz y José.

Solución de problemas:

1a) Se debe relacionar el tiempo que se tarda Sara en llegar a su trabajo con el tiempo máximo que puede llegar a hacer (1 hora con 15 minutos o 75 minutos). Sea x el tiempo en minutos que se tarda Sara en llegar, desde su casa hasta su trabajo. Luego, $x \leq 75$.

1b) Se relacionan las cantidades de sismos, sentidos y no sentidos, con el total registrado en el año 2015 (que fue superior a los 4 000). Sea x la cantidad de sismos sentidos en el año 2015; entonces la cantidad de sismos no sentidos es igual a $11x$. Luego:

$$x + 11x > 4\,000$$
$$12x > 4\,000.$$

1c) Se relacionan las edades de Mario y Antonio con la cantidad máxima que puede tomar la suma de ellas (es inferior a 28 años). Sea x la edad en años de Mario, entonces la edad de Antonio es igual a $3x$. Luego:

$$x + 3x < 28$$
$$4x < 28.$$

Otra solución puede ser la siguiente: sea y la edad en años de Antonio, entonces la edad de Mario es igual a $\frac{1}{3}y$. Luego:

$$y + \frac{1}{3}y < 28$$
$$\frac{4}{3}y < 28.$$

1d) Sea x el tiempo en horas que estuvo funcionando la lavadora; entonces, al finalizar, el consumo de energía es $500x$. Luego:

$$500x > 3\,500.$$

2. Sea x el dinero ahorrado por Beatriz, y y el dinero ahorrado por José (ambos durante todo el período escolar). Luego:

$$x > \frac{1}{2}y.$$

Lección 2

2.2 Solución de desigualdades lineales, parte 1

Problema inicial

Determina todos los valores de x que satisfacen las siguientes desigualdades:

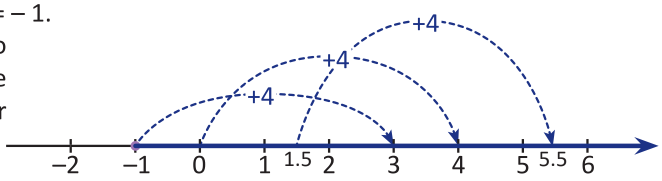
a) $x + 4 \geq 3$ b) $x - 5 < 2$

Solución

a) Deben encontrarse los números reales tales que al sumarles 4, el resultado es mayor o igual a 3. Resolver la ecuación lineal $x + 4 = 3$ equivale a encontrar el número real cuyo resultado al sumarle 4 es 3:

$$x + \cancel{4} - \cancel{4} = 3 - 4 \qquad \text{restar 4 a ambos miembros,}$$
$$x = -1.$$

En la figura de la derecha se observa lo siguiente: todos los números mayores que –1 satisfacen la desigualdad $x + 4 \geq 3$. Por lo tanto, $x + 4 \geq 3$ si $x \geq -1$.



Este resultado también puede obtenerse utilizando la propiedad vista en la clase 1.1, es decir, en la desigualdad original restar 4 a ambos miembros:

$$x + 4 \geq 3$$
$$x + \cancel{4} - \cancel{4} \geq 3 - 4 \qquad \text{restar 4 a ambos miembros no altera la desigualdad,}$$
$$x \geq -1.$$

Por lo tanto, la desigualdad $x + 4 \geq 3$ se cumple para $x \geq -1$. Utilizando intervalos, $x \geq -1$ se escribe $x \in [-1, \infty[$.

b) Usando propiedades de desigualdades, se suma 5 a ambos miembros:

$$x - 5 < 2$$
$$x - \cancel{5} + \cancel{5} < 2 + 5 \qquad \text{sumar 5 a ambos miembros no altera la desigualdad,}$$
$$x < 7.$$

Por lo tanto, la desigualdad $x - 5 < 2$ se cumple para $x < 7$; utilizando intervalos se escribe $x \in]-\infty, 7[$.

Conclusión

Sean b y c números reales cualesquiera. Para resolver una desigualdad lineal de la forma $x + b \geq c$ o $x + b \leq c$, esta debe escribirse como $x \geq d$ o $x \leq d$ sumando $-b$ a ambos miembros de la desigualdad:

1. $x + b \geq c$ se cumple para $x \geq c - b$; utilizando intervalos se escribe $x \in [c - b, \infty[$.
2. $x + b \leq c$ se cumple para $x \leq c - b$; utilizando intervalos se escribe $x \in]-\infty, c - b]$.

Si las desigualdades son $x + b > c$ o $x + b < c$ entonces en la solución no debe tomarse en cuenta el extremo $c - b$.

Problemas

1. Resuelve las siguientes desigualdades lineales (escribe la solución utilizando intervalos):

a) $x + 7 \geq 10$
b) $x - 3 > -8$
c) $x - 2 < 11$
d) $x + 4 \leq -6$
e) $x - 6 \geq 0$
f) $0 \geq x + 8$
g) $x + \frac{2}{3} < \frac{1}{3}$
h) $x - \frac{5}{2} > \frac{1}{2}$
i) $x + \frac{1}{4} \geq 1$
j) $x - \frac{4}{3} \leq -\frac{3}{4}$
k) $x + \frac{1}{2} < -4$
l) $x + \sqrt{2} \geq 5\sqrt{2}$

2. Utiliza la propiedad de las desigualdades vista en la clase 1.1 para justificar por qué la solución de $x + b \leq c$ es $x \in]-\infty, c - b]$.

Indicador de logro

2.2 Resuelve desigualdades lineales de la forma $x + b \geq c$ o $x + b \leq c$.

Secuencia

En esta clase se utiliza la propiedad de las desigualdades vista en la clase 1.1 (cuando se suma un número real a ambos miembros) para resolver desigualdades lineales del tipo $x + b \geq c$ o $x + b \leq c$ (se incluyen también las desigualdades estrictas $>$ y $<$).

Propósito

En el literal a) del Problema inicial se presenta una solución intuitiva para la desigualdad. Esta se comprueba luego con la solución algebraica usando la propiedad de la clase 1.1, misma que se utiliza para resolver el literal b). En el bloque de Problemas, los estudiantes deben utilizar lo descrito en la Conclusión, es decir, la solución algebraica de las desigualdades lineales.

Solución de problemas:

1a) $x + 7 \geq 10$

$x \geq 10 - 7$

$x \geq 3$

Entonces, $x + 7 \geq 10$ se cumple para $x \in [3, \infty[$.

1b) $x - 3 > -8$

$x > -8 + 3$

$x > -5$

Entonces, $x - 3 > -8$ se cumple para $x \in \,]-5, \infty[$.

1c) $x - 2 < 11$

$x < 11 + 2$

$x < 13$

Entonces, $x - 2 < 11$ se cumple para $x \in \,]-\infty, 13[$.

1d) $x + 4 \leq -6$

$x \leq -6 - 4$

$x \leq -10$

Entonces, $x + 4 \leq -6$ se cumple para $x \in \,]-\infty, -10]$.

1e) $x - 6 \geq 0$ se cumple para $x \in [6, \infty[$.

1f) $0 \geq x + 8$ se cumple para $x \in \,]-\infty, -8]$.

1g) $x + \frac{2}{3} < \frac{1}{3}$

$x < \frac{1}{3} - \frac{2}{3}$

$x < -\frac{1}{3}$

Entonces, $x + \frac{2}{3} < \frac{1}{3}$ se cumple para $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[$

1h) $x - \frac{5}{2} > \frac{1}{2}$

$x > \frac{1}{2} + \frac{5}{2}$

$x > 3$

Entonces, $x - \frac{5}{2} > \frac{1}{2}$ se cumple para $x \in \,]3, \infty[$.

1i) $x + \frac{1}{4} \geq 1$ se cumple para $x \in \left[\frac{3}{4}, \infty\right[$.

1j) $x - \frac{4}{3} \leq -\frac{3}{4}$ se cumple para $x \in \left]-\infty, \frac{7}{12}\right]$.

1k) $x + \frac{1}{2} < -4$

$x < -4 - \frac{1}{2}$

$x < -\frac{9}{2}$

Así, $x + \frac{1}{2} < -4$ se cumple para $x \in \left]-\infty, -\frac{9}{2}\right[$.

1l) $x + \sqrt{2} \geq 5\sqrt{2}$

$x \geq 5\sqrt{2} - \sqrt{2}$

$x \geq 4\sqrt{2}$

Así, $x + \sqrt{2} \geq 5\sqrt{2}$ se cumple para $x \in [4\sqrt{2}, \infty[$.

2. El número b es un número real cualquiera. Entonces, en la desigualdad $x + b \leq c$:

$x + b - b \leq c - b$ sumar $-b$ en ambos miembros no altera la desigualdad,

$x \leq c - b$

Luego, la solución de la desigualdad $x + b \leq c$ es $x \leq c - b$, en notación de intervalo: $x \in \,]-\infty, c - b]$.

2.3 Solución de desigualdades lineales, parte 2

Problema inicial

Determina todos los valores de x que satisfacen las siguientes desigualdades:

a) $3x > 12$

b) $-5x \leq -10$

Al multiplicar ambos miembros por un número real, si el número es positivo la desigualdad no se altera y si es negativo la desigualdad se invierte.

Solución

a) Para solucionar la desigualdad debe llevarse a la forma $x > d$, donde d es un número real. Para ello se multiplican ambos miembros de la desigualdad por $\frac{1}{3}$:

$$3x > 12$$

$$\cancel{3}x\left(\frac{1}{\cancel{3}}\right) > 12\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$x > 4$$

multiplicar por $\frac{1}{3}$ ambos miembros no altera la desigualdad.

Por lo tanto, la desigualdad $3x > 12$ se cumple para $x > 4$, es decir, si $x \in \left]4, +\infty\right[$.

b) De forma similar al literal anterior, se multiplican ambos miembros de la desigualdad por $-\frac{1}{5}$, esto hace que el símbolo de desigualdad se invierta de $\leq$ a $\geq$:

$$-5x \leq -10$$

$$-\cancel{5}x\left(-\frac{1}{\cancel{5}}\right) \geq -10\left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$x \geq 2$$

Por lo tanto, $-5x \leq -10$ se cumple para $x \geq 2$, es decir, si $x \in \left[2, +\infty\right[$.

Conclusión

Sea a un número real diferente de cero. Para resolver una desigualdad lineal de la forma $ax \geq c$ o $ax \leq c$ se multiplican ambos miembros de la desigualdad por el recíproco de a, es decir, $\frac{1}{a}$:

1. Si a es positivo, entonces las desigualdades $ax \geq c$ y $ax \leq c$ se cumplen para $x \geq \frac{c}{a}$ y $x \leq \frac{c}{a}$ respectivamente.
2. Si a es negativo, entonces las desigualdades $ax \geq c$ y $ax \leq c$ se cumplen para $x \leq \frac{c}{a}$ y $x \geq \frac{c}{a}$ respectivamente.

Si las desigualdades son $ax > c$ o $ax < c$ entonces en la solución no debe tomarse en cuenta el extremo $\frac{c}{a}$.

La solución $x \geq \frac{c}{a}$ se escribe utilizando intervalos como $x \in \left[\frac{c}{a}, \infty\right[$; mientras que $x \leq \frac{c}{a}$ se escribe: $x \in \left]-\infty, \frac{c}{a}\right]$.

Problemas

1. Resuelve las siguientes desigualdades lineales (escribe la solución utilizando intervalos):

a) $2x \leq 6$
b) $4x \geq 24$
c) $-3x > -33$
d) $-14 > 7x$
e) $-8x \geq 0$
f) $0 \geq 5x$
g) $-4x < 18$
h) $5x > -1$
i) $-\frac{1}{3}x \geq 3$
j) $\frac{2}{5}x < -1$
k) $\frac{5}{2}x \leq -\frac{5}{3}$
l) $-\sqrt{2}\,x > 1$

2. Para cada literal, determina todos los valores de x que satisfacen ambas desigualdades:

a) $\begin{cases} x + 2 > -3 \\ 3x > 9 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x - 5 \geq 2 \\ -2x > 10 \end{cases}$
c) $\begin{cases} x + 4 < 1 \\ 5x > -30 \end{cases}$

Para cada literal, representa la solución de cada desigualdad en la recta numérica. Luego, verifica los valores donde coinciden ambos intervalos.

Indicador de logro

2.3 Resuelve desigualdades lineales de la forma $ax \geq c$ o $ax \leq c$.

Secuencia

Las desigualdades lineales presentadas en esta clase son del tipo $ax \geq c$ o $ax \leq c$ (se incluyen las desigualdades estrictas $>$ y $<$), cuya solución se encuentra usando las propiedades vistas en la clase 1.2, tanto para a positivo como para a negativo.

Posibles dificultades

Recuerde a los estudiantes invertir la desigualdad cuando el coeficiente de la variable sea un número negativo. Además, si los estudiantes tienen dificultades para "pasar a dividir" directamente el coeficiente de la variable al otro lado de la desigualdad entonces pueden multiplicar por el recíproco y luego simplificar la fracción.

Solución de problemas:

1a) $2x \leq 6$

$x \leq \frac{6}{2}$

$x \leq 3$

Luego, $2x \leq 6$ se cumple si $x \in \,]-\infty, 3]$.

1b) $4x \geq 24$

$x \geq \frac{24}{4}$

$x \geq 6$

Luego, $4x \geq 24$ se cumple si $x \in [6, \infty[$.

1c) $-3x > -33$

$x < \frac{-33}{-3}$

$x < 11$

Luego, $-3x > -33$ se cumple si $x \in \,]-\infty, 11[$.

1d) $-14 > 7x$

$7x < -14$

$x < \frac{-14}{7}$

$x < -2$

Luego, $-14 > 7x$ (o su equivalente $7x < -14$) se cumple si $x \in \,]-\infty, -2[$.

1e) $-8x \geq 0$ se cumple si $x \in \,]-\infty, 0]$.

1f) $0 \geq 5x$ se cumple si $x \in \,]-\infty, 0]$.

1g) $-4x < 18$ se cumple si $x \in \left]-\frac{9}{2}, \infty\right[$.

1h) $5x > -1$ se cumple si $x \in \left]-\frac{1}{5}, \infty\right[$.

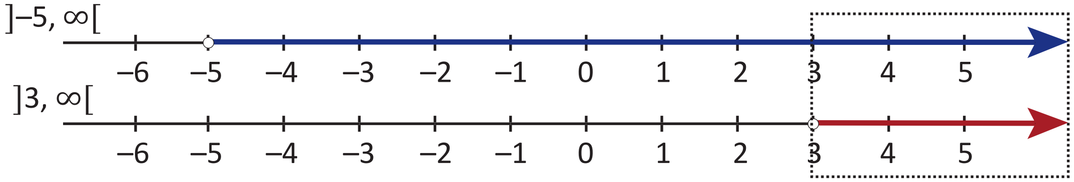
1i) $-\frac{1}{3}x \geq 3$ se cumple si $x \in \,]-\infty, -9]$.

1j) $\frac{2}{5}x < -1$ se cumple si $x \in \left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[$.

1k) $\frac{5}{2}x \leq -\frac{5}{3}$ se cumple si $x \in \left]-\infty, -\frac{2}{3}\right]$.

1l) $-\sqrt{2}x > 1$ se cumple si $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$.

2a) La desigualdad $x + 2 > -3$ se cumple si $x \in \,]-5, \infty[$; mientras que $3x > 9$ se cumple si $x \in \,]3, \infty[$. Los valores de x que satisfacen ambas desigualdades pueden encontrarse representando los intervalos $]-5, \infty[$ y $]3, \infty[$ en la recta numérica e identificar los valores donde coinciden:



Luego, el intervalo donde coinciden es $]3, \infty[$, es decir, los valores de x que satisfacen $x + 2 > -3$ y $3x > 9$ pertenecen al intervalo $]3, \infty[$.

2b) $x - 5 \geq 2$ si $x \in [7, \infty[$; mientras que $-2x > 10$ si $]-\infty, -5[$. Los intervalos $[7, \infty[$ y $]-\infty, -5[$ no coinciden en ningún valor (puede representarlos en la recta numérica para observarlo). Luego, no existen números reales que satisfagan $x - 5 \geq 2$ y $-2x > 10$.

2c) $x + 4 < 1$ si $x \in \,]-\infty, -3[$; mientras que $5x > -30$ si $]-6, \infty[$. Los intervalos $]-\infty, -3[$ y $]-6, \infty[$ coinciden en $]-6 , -3[$. Así, los valores de x que satisfacen $x + 4 < 1$ y $5x > -30$ pertenecen al intervalo $]-6 , -3[$.

2.4 Solución de desigualdades lineales, parte 3

Problema inicial

Resuelve las siguientes desigualdades lineales:

a) $2x + 7 > -9$ b) $6x - 5 \leq 2x + 15$

Solución

a) Se utilizan propiedades de desigualdades para llevarla a la forma $x > d$; primero deben realizarse las sumas o restas y luego las multiplicaciones:

$$2x + 7 > -9$$

$$2x + \cancel{7} - \cancel{7} > -9 - 7 \qquad \text{restar 7 a ambos miembros,}$$

$$\cancel{2}x\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) > -16\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \text{multiplicar por } \frac{1}{2} \text{ ambos miembros,}$$

$$x > -8.$$

Por lo tanto, la desigualdad $2x + 7 > -9$ se cumple para $x \in \,]-8, \infty[$.

Puede deducirse lo siguiente:
- Un término que se encuentra sumando en uno de los miembros pasa al otro miembro a restar y viceversa (**transposición de términos**).
- Al llegar a la forma $mx \leq n$, se escribe x con coeficiente 1 y se multiplica n por el recíproco de m.

b) Aplicando lo encontrado en el literal anterior, para resolver $6x - 5 \leq 2x + 15$ se realiza lo siguiente:

$$6x - 5 \leq 2x + 15$$

$$6x \leq 2x + 15 + 5 \qquad \text{se transpone 5 en el miembro derecho,}$$

$$6x - 2x \leq 20 \qquad \text{se transpone } 2x \text{ en el miembro izquierdo,}$$

$$4x \leq 20$$

$$x \leq 20\left(\frac{1}{4}\right) \qquad \text{se escribe } x \text{ con coeficiente 1 y se multiplica por } \frac{1}{4} \text{ el miembro izquierdo,}$$

$$x \leq 5.$$

Por lo tanto, la desigualdad $6x - 5 \leq 2x + 15$ se cumple para $x \in \,]-\infty, 5]$.

Conclusión

Para resolver una desigualdad lineal se hace lo siguiente:

1. Transponer términos para llevar la desigualdad a la forma $mx \geq n$ o $mx \leq n$.
2. Escribir la incógnita con coeficiente 1 y multiplicar el otro miembro por el recíproco de m.

Problemas

1. Resuelve las siguientes desigualdades lineales (escribe la solución utilizando intervalos):

a) $3x - 4 < 8$ b) $2 \leq 5x + 12$ c) $7x - 24 > -x$

d) $4x + 9 < 2x + 11$ e) $2x - 1 \leq 5x + 14$ f) $3x - 2 \geq x + 6$

g) $x - 4 \leq -2x - 9$ h) $3x + 16 < 7x + 2$ i) $6x + 3 \geq 4x - 1$

j) $\frac{1}{3}x - 2 \geq x - \frac{7}{2}$ k) $\frac{5}{2}x + \frac{1}{3} < -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$ l) $-4x - 5\sqrt{3} > x + 10\sqrt{3}$

2. Para cada literal, determina todos los valores de x que satisfacen ambas desigualdades:

a) $\begin{cases} -3x > 0 \\ 2x - 5 > -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 4 \leq 3x \\ 5x - 1 > 4x + 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 7 > -x - 5 \\ -2x > 3x - 10 \end{cases}$

Indicador de logro

2.4 Resuelve desigualdades lineales de la forma $ax + b \geq 0$ o $ax + b \leq 0$.

Secuencia

Se utilizan las propiedades de desigualdades para resolver desigualdades lineales de las formas $ax + b \geq 0$ o $ax + b \leq 0$ (incluyendo las desigualdades estrictas $>$ y $<$). Se hace una comparación con la transposición de términos realizada en la resolución de ecuaciones lineales.

Propósito

En las desigualdades del bloque de Problemas, los estudiantes deben utilizar la transposición de términos para llevar las desigualdades a la forma $mx \geq n$ (o similar, según sea el símbolo de desigualdad) tal como lo indica la Conclusión. Es decir, no es necesario indicar paso a paso lo de "sumar o restar" la misma cantidad a ambos miembros.

Solución de problemas:

1a) $3x - 4 < 8$

$$\begin{aligned} 3x &< 8 + 4 \\ 3x &< 12 \\ x &< 12\left(\tfrac{1}{3}\right) \\ x &< 4 \end{aligned}$$

Luego, $3x - 4 < 8$ se cumple si $x \in \,]-\infty, 4[$.

Luego de $3x < 12$, también puede escribirse directamente la fracción $\frac{12}{3}$ y efectuar el cociente, como en la clase anterior.

1b) $2 \leq 5x + 12$

$$\begin{aligned} 5x + 12 &\geq 2 \\ 5x &\geq 2 - 12 \\ x &\geq -10\left(\tfrac{1}{5}\right) \\ x &\geq -2 \end{aligned}$$

Luego, $2 \leq 5x + 12$ se cumple si $x \in [-2, \infty[$.

Los estudiantes pueden realizar el proceso con menos pasos, siempre y cuando no tengan dificultad en ello.

1c) $7x - 24 > -x$

$$\begin{aligned} 7x + x &> 24 \\ 8x &> 24 \\ x &> 24\left(\tfrac{1}{8}\right) \\ x &> 3 \end{aligned}$$

Luego, $7x - 24 > -x$ se cumple si $x \in \,]3, \infty[$.

1d) $4x + 9 < 2x + 11$

$$\begin{aligned} 4x - 2x &< 11 - 9 \\ 2x &< 2 \\ x &< 1 \end{aligned}$$

Luego, $4x + 9 < 2x + 11$ se cumple si $x \in \,]-\infty, 1[$.

1e) $2x - 1 \leq 5x + 14$ se cumple si $x \in [-5, \infty[$.

1f) $3x - 2 \geq x + 6$ se cumple si $x \in [4, \infty[$.

1g) $x - 4 \leq -2x - 9$ se cumple si $x \in \left]-\infty, -\frac{5}{3}\right]$.

1h) $3x + 16 < 7x + 2$ se cumple si $x \in \left]\frac{7}{2}, \infty\right[$.

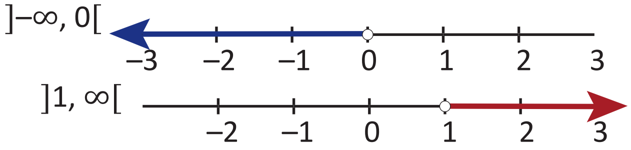
1i) $6x + 3 \geq 4x - 1$ se cumple si $x \in [-2, \infty[$.

1j) $\frac{1}{3}x - 2 > x - \frac{7}{2}$ se cumple si $x \in \left]-\infty, \frac{9}{4}\right[$.

1k) $\frac{5}{2}x + \frac{1}{3} < -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$ se cumple si $x \in \left]-\infty, \frac{14}{33}\right[$.

1l) $-4x - 5\sqrt{3} > x + 10\sqrt{3}$ se cumple si $x \in \,]-\infty, -3\sqrt{3}[$.

2a) $-3x > 0$ se cumple si $x \in \,]-\infty, 0[$ y $2x - 5 > -3$ se cumple si $x \in \,]1, \infty[$. Se colocan estos intervalos en la recta numérica:



No hay valores coincidentes en ambos. Luego, no hay números reales que satisfagan $-3x > 0$ y $2x - 5 > -3$.

2b) $x + 4 \leq 3x$ se cumple si $x \in [2, \infty[$ y $5x - 1 > 4x + 7$ se cumple si $x \in \,]8, \infty[$. Estos intervalos coinciden en $]8, \infty[$, es decir, los valores de x que satisfacen $x + 4 \leq 3x$ y $5x - 1 > 4x + 7$ pertenecen a $]8, \infty[$.

2c) $3x + 7 > -x - 5$ se cumple si $x \in \,]-3, \infty[$ y $-2x > 3x - 10$ se cumple si $x \in \,]-\infty, 2[$. Estos intervalos coinciden en $]-3, 2[$, es decir, los valores de x que satisfacen $3x + 7 > -x - 5$ y $-2x > 3x - 10$ pertenecen a $]-3, 2[$.

2.5 Interpretación gráfica de una desigualdad lineal

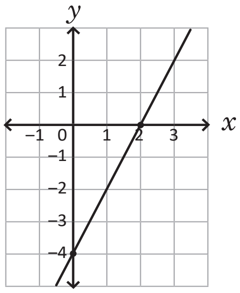
Problema inicial

Dada la función lineal $y = 2x - 4$:

1. Traza la gráfica de la función encontrando la intersección con los ejes de coordenadas.
2. Utilizando la gráfica de $y = 2x - 4$ determina los valores de x para los cuales $y \geq 0$.
3. ¿Cuál es la relación entre los valores de x encontrados en el literal anterior y la solución de $2x - 4 \geq 0$?

La gráfica de una función lineal $y = ax + b$ es una línea recta que pasa por los puntos $(0, b)$ y $(x, 0)$, donde el valor de x del segundo punto se encuentra al resolver $y = 0$.

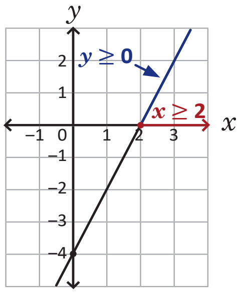
Solución



1. La intersección con el eje y es el punto $(0, -4)$; mientras que la intersección del eje x se encuentra resolviendo $y = 0$:

$$2x - 4 = 0$$
$$x = 2$$

se colocan los puntos $(0, -4)$ y $(2, 0)$ en el plano cartesiano y se traza la recta que pasa por ambos puntos como se muestra en la figura de la derecha.



2. Encontrar los valores de x para los cuales $y \geq 0$ significa, gráficamente, los números para los cuales la gráfica de $y = 2x - 4$ corta al eje x o queda arriba de este.

Se observa lo siguiente: $y \geq 0$ si $x \geq 2$, es decir, si $x \in [2, +\infty[$.

3. La solución de la desigualdad $2x - 4 \geq 0$ es $x \geq 2$, o sea, la misma encontrada en el literal anterior.

Conclusión

Resolver una desigualdad lineal de la forma $ax + b \geq 0$ o $ax + b \leq 0$ equivale a encontrar los valores de x para los cuales la gráfica de la función $y = ax + b$ corta al eje x o se encuentra arriba de este en el caso de $ax + b \geq 0$, o debajo de este en el caso de $ax + b \leq 0$.

Cuando las desigualdades son $>$ o $<$ no se toman en cuenta los valores donde $y = ax + b$ es igual a cero.

Problemas

1. Resuelve gráficamente las siguientes desigualdades:

a) $-2x + 6 < 0$

b) $5x - 5 > 0$

c) $-\frac{1}{2}x - 1 \geq 0$

2. ¿Será posible que una desigualdad lineal de la forma $ax + b \geq 0$ o $ax + b \leq 0$, con $a \neq 0$, no tenga solución? Justifica tu respuesta con base en la gráfica de $y = ax + b$.

3. Sea a un número positivo. Demuestra que la solución de la desigualdad $ax + b < 0$ es $\left]-\infty, -\frac{b}{a}\right[$.

Indicador de logro

2.5 Resuelve desigualdades lineales utilizando la gráfica de la función $f(x) = ax + b$.

Secuencia

En la clase se relaciona la solución algebraica de una desigualdad del tipo $ax + b \geq 0$ con los valores de x para los cuales la gráfica de la función $y = ax + b$ queda sobre el eje x. Un análisis similar debe hacerse para las desigualdades del tipo $ax + b > 0$, $ax + b \leq 0$ y $ax + b < 0$.

Propósito

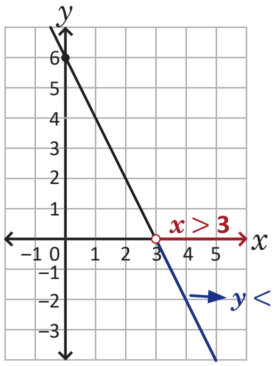
El análisis realizado en esta clase para la solución de las desigualdades, a partir de la gráfica de una función lineal, servirá en la interpretación de la solución de desigualdades cuadráticas, contenido que se estudiará en la siguiente unidad.

Solución de problemas:

1a) Sea $y = -2x + 6$; deben encontrarse los valores de x para los cuales la gráfica de $y = -2x + 6$ queda debajo del eje x. El punto de intersección de la gráfica de $y = -2x + 6$ con el eje y es (0, 6); mientras que para encontrar la intersección con el eje x se resuelve $y = 0$:

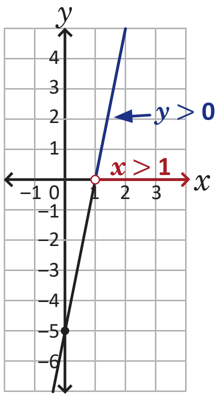
$$\begin{aligned} -2x + 6 &= 0 \\ 6 &= 2x \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Luego, el punto de intersección de la gráfica de $y = -2x + 6$ con el eje x es (3, 0); la gráfica se muestra en la figura. De ella se deduce que: $y = -2x + 6 < 0$ se cumple si $x > 3$; en notación de intervalo, para $x \in]3, \infty[$.



1b) Sea $y = 5x - 5$; deben encontrarse los valores de x para los cuales la gráfica de $y = 5x - 5$ queda arriba del eje x. El punto de intersección de la gráfica con el eje y es (0, –5); mientras que con el eje x es (1, 0). La gráfica queda como lo muestra la figura.

De ella se deduce que: $y = 5x - 5 > 0$ se cumple si $x > 1$; en notación de intervalo, para $x \in]1, \infty[$.



1c) Se realiza un análisis similar a los literales 1a y 1b. Por lo tanto, $y = -\frac{1}{2}x - 1 \geq 0$ se cumple si $x \leq -2$, o sea, si $x \in]-\infty, -2]$.

2. Sea $y = ax + b$, con $a \neq 0$ (tal como lo indica el enunciado del problema). Las soluciones de $y = ax + b \geq 0$ o $y = ax + b \leq 0$ son los valores de x para los cuales la gráfica de $y = ax + b$ queda arriba o debajo del eje x (ver Conclusión de la clase). Como la gráfica de una función lineal es una línea recta, esta siempre cortará en un único punto al eje x (pues $a \neq 0$), por lo tanto, siempre se podrán encontrar valores de x que satisfagan $y = ax + b \geq 0$ o $y = ax + b \leq 0$.

3. Se resuelve $ax + b < 0$ usando propiedades de desigualdades:

$$\begin{aligned} ax + b &< 0 \\ ax &< -b && \text{se transpone } -b \text{ en el miembro derecho,} \\ x &< -\frac{b}{a} && \text{se multiplica el miembro derecho por } \frac{1}{a}\text{, este número es positivo pues } a > 0. \end{aligned}$$

Luego, $ax + b < 0$ se cumple para $x < -\frac{b}{a}$, es decir, para $x \in \left]-\infty, -\frac{b}{a}\right[$.

2.6 Aplicaciones de las desigualdades lineales

Problema inicial

Mario contratará un servicio de internet para su negocio y debe decidir entre dos compañías A y B. La compañía A le cobrará \$9.50 por la instalación del módem y \$45.00 mensual; mientras que la compañía B le cobrará \$12.50 por la instalación del módem y \$43.50 mensual. Si Mario calcula el gasto total por la instalación y el pago mensual, ¿después de cuántos meses el servicio de la compañía B será más barato que el de la compañía A?

Solución

El gasto total por el servicio de la compañía A después de transcurrir x meses se calcula:

$$45x + 9.5,$$

mientras que el gasto total por el servicio de la compañía B después de transcurrir x meses será:

$$43.5x + 12.5$$

debe encontrarse la cantidad de meses que deben transcurrir para que:

$$\text{Gasto total B} < \text{Gasto total A}$$

$$43.5x + 12.5 < 45x + 9.5$$

se resuelve la desigualdad lineal:

$$12.5 - 9.5 < 45x - 43.5x$$

$$3 < 1.5x$$

$$2 < x.$$

En la solución pueden multiplicarse todos los términos de ambos miembros de la desigualdad por 10 para trabajar con números enteros.

Luego, el servicio de la compañía B será más barato que el de la compañía A después de dos meses, es decir, del tercer mes en adelante.

En general

Para resolver una situación que implique el uso de desigualdades lineales se realiza lo siguiente:

1. Determinar, según la información del problema, la cantidad que representa la incógnita.
2. Plantear una desigualdad lineal.
3. Resolver la desigualdad lineal e interpretar la solución.

Problemas

1. El Ministerio de Medio Ambiente y Recursos Naturales (MARN) registró en el 2015 que la cantidad de sismos no sentidos fue 11 veces la cantidad de sismos sentidos; si en total se registró una cantidad superior a los 4 000 sismos en ese año, ¿cuál fue la cantidad mínima de sismos sentidos?

2. La distancia y en kilómetros recorrida por un automóvil después de x horas está dada por la expresión $y = 70x$. ¿En cuántas horas recorrerá al menos 315 kilómetros de una carretera?

3. En la mayoría de países anglosajones se utiliza el grado Fahrenheit para medir la temperatura; por ejemplo en un día de agosto de 2017 la temperatura registrada en Canadá fue de 71°F (se lee “71 grados Fahrenheit”), mientras que en El Salvador ese mismo día la temperatura fue de 31°C (se lee “31 grados Celsius o centígrados”). La relación entre grados Celsius y grados Fahrenheit está dada por la ecuación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, donde C es la temperatura en grados Celsius y F en grados Fahrenheit. Si en un día de septiembre de 2 017 la temperatura mínima registrada en El Salvador fue de 20°C, ¿cuál fue la temperatura mínima en grados Fahrenheit?

Indicador de logro

2.6 Utiliza desigualdades lineales para interpretar matemáticamente y resolver situaciones de la vida cotidiana.

Secuencia

En esta clase se presentan situaciones que deben ser modeladas con desigualdades lineales para encontrar e interpretar la solución de la misma.

Posibles dificultades

Sobre el planteamiento de la desigualdad lineal, a partir de lo descrito en cada problema, para ello se pueden brindar algunas pistas que faciliten este proceso.

Solución de problemas:

1. Sea x la cantidad de sismos sentidos en el 2 015 (por la naturaleza de la situación, debe ser un número entero positivo); así, la cantidad de sismos no sentidos es igual a $11x$. Como en total se registró una cantidad superior a los 4 000 sismos en ese año entonces $x + 11x > 4\,000$. Resolviendo esta desigualdad:

$$\begin{aligned} 12x &> 4\,000 \\ x &> \frac{4\,000}{12} \end{aligned}$$

Es decir, $x > 333.\overline{3}$. Por lo tanto, la cantidad mínima de sismos sentidos en el 2 015 fue de 334.

2. Como la distancia recorrida debe ser al menos 315 km entonces y puede ser igual a 315 km o una cantidad superior a esta. Así, $y = 70x \geq 315$; resolviendo esta desigualdad:

$$\begin{aligned} 70x &\geq 315 \\ x &\geq \frac{315}{70} \\ x &\geq 4.5 \end{aligned}$$

Entonces, el automóvil recorrerá al menos 315 kilómetros en un tiempo de, al menos, 4.5 horas o 4 horas con 30 minutos.

3. Como la temperatura mínima registrada en El Salvador fue de 20°C entonces $C \geq 20$. Sustituyendo $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ en lo anterior y resolviendo la desigualdad para F:

$$\begin{aligned} \frac{5}{9}(F - 32) &\geq 20 \\ F - 32 &\geq 20\left(\frac{9}{5}\right) \\ F - 32 &\geq 36 \\ F &\geq 36 + 32 \\ F &\geq 68 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la temperatura mínima en grados Fahrenheit fue de 68°F.

2.7 Practica lo aprendido

1. Resuelve las siguientes desigualdades lineales (escribe la solución utilizando intervalos):

a) $5x - 7 < -2x$

b) $3x + 11 \geq 8x - 14$

c) $-4x + 9 \geq -5x - 15$

d) $-x - 10 < 9x - 8$

e) $2x - 6 \geq 4x + 5$

f) $\frac{3}{4}x + \frac{3}{2} \leq -\frac{5}{2}x + \frac{1}{5}$

g) $-\frac{4}{3}x + \frac{2}{5} > -\frac{1}{4} + \frac{5}{2}x$

h) $4x > x + 12\sqrt{3}$

i) $-3x - 9\sqrt{5} \leq -7x - 13\sqrt{5}$

j) $x + 4\sqrt{2} \geq \frac{1}{2}x + 10\sqrt{2}$

k) $6\sqrt{3}\,x - 9 < 2\sqrt{3}\,x + 7$

l) $\sqrt{6}\,x + 5 > x + 4$

2. Resuelve gráficamente las siguientes desigualdades:

a) $-3x + 12 \geq 0$

b) $4x + 8 < 0$

c) $\frac{1}{3}x - 2 \geq 0$

3. Resuelve las siguiente situaciones:

a) La edad de Mario es un tercio de la edad de Antonio. Si la suma de sus edades es inferior a 28 años, ¿cuál es la edad máxima que puede tener Mario?

b) La cantidad total de estudiantes de la Facultad de Odontología de la Universidad de El Salvador en el año 2017 fue de a lo sumo 717 estudiantes. Si la razón entre la cantidad de hombres y la cantidad de mujeres es 1 : 2, ¿cuál es la cantidad máxima de hombres que hay?

c) En San Salvador, en Agosto de 2017 el precio mínimo del quintal de frijol rojo de seda nacional fue de \$50.00, y el máximo de \$58.00. Un quintal equivale a 100 libras aproximadamente. ¿Cuál debe ser el precio mínimo por libra de frijol para obtener ganancia si:

- Se compra el quintal a \$50.00?
- Se compra el quintal a \$58.00?

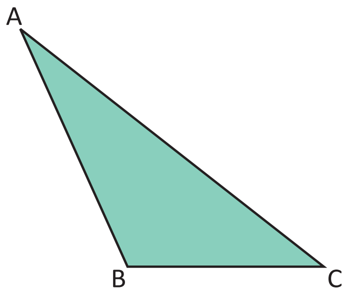
d) El ritmo de crecimiento de los niños, después de los dos años, es de al menos 6 centímetros por año hasta llegar a la adolescencia (15 años). ¿Cuál será la estatura mínima de un niño mayor de 10 años, si a los 7 años medía 1.19 m?

e) Carolina es vendedora de automóviles. Por la venta de un automóvil de \$6,000 obtiene una comisión del 3% sobre el precio de venta. ¿Cuántos automóviles de ese precio vendió Carolina como mínimo si su comisión al finalizar el año fue de más de \$1,080?

f) Las longitudes de la altura y la base de un rectángulo están en razón 3 : 4. Si el perímetro del rectángulo mide a lo sumo 105 cm, ¿cuál es la longitud máxima de la altura? ¿Y de la base?

g) En el triángulo ABC de la derecha, el lado AB mide 2 centímetros más que el lado BC, y el lado CA mide el doble del lado BC. Si la medida del perímetro del triángulo es menor o igual que 34 cm:

- ¿Cuál es la longitud máxima que puede tomar el lado BC?
- ¿Cuál es la longitud máxima que puede tomar el lado AB?
- ¿Cuál es la longitud máxima que puede tomar el lado CA?



Indicador de logro

2.7 Resuelve problemas correspondientes a desigualdades lineales.

Solución de problemas:

1a) $5x - 7 < -2x$ se cumple si $x \in \left]-\infty, 1\right[$.

1b) $3x + 11 \geq 8x - 14$ se cumple si $x \in \left]-\infty, 5\right]$.

1c) $-4x + 9 \geq -5x - 15$ se cumple si $x \in \left[-24, \infty\right[$.

1d) $-x - 10 < 9x - 8$ se cumple si $x \in \left]-\frac{1}{5}, \infty\right[$.

1e) $2x - 6 \geq 4x + 5$ se cumple si $x \in \left]-\infty, -\frac{11}{2}\right]$.

1f) $\frac{3}{4}x + \frac{3}{2} \leq -\frac{5}{2}x + \frac{1}{5}$ se cumple si $x \in \left]-\infty, -\frac{2}{5}\right]$.

1g)
$$-\frac{4}{3}x + \frac{2}{5} > -\frac{1}{4} + \frac{5}{2}x$$
$$\frac{2}{5} + \frac{1}{4} > \frac{5}{2}x + \frac{4}{3}x$$
$$\frac{13}{20} > \frac{23}{6}x$$
$$x > \frac{13}{20}\left(\frac{6}{23}\right)$$
$$x > \frac{39}{230} \quad \text{o sea, } x \in \left]\frac{39}{230}, \infty\right[.$$

1h)
$$4x > x + 12\sqrt{3}$$
$$4x - x > 12\sqrt{3}$$
$$3x > 12\sqrt{3}$$
$$x > 12\sqrt{3}\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$x > 4\sqrt{3}$$

Luego, $4x > x + 12\sqrt{3}$ se cumple si $x \in \left]4\sqrt{3}, \infty\right[$.

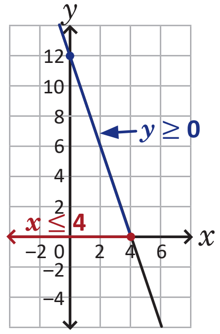
1i) La desigualdad se cumple si $x \in \left]-\infty, -\sqrt{5}\right]$.

1j) La desigualdad se cumple si $x \in \left[12\sqrt{2}, \infty\right[$.

1k) La desigualdad se cumple si $x \in \left]-\infty, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right[$.

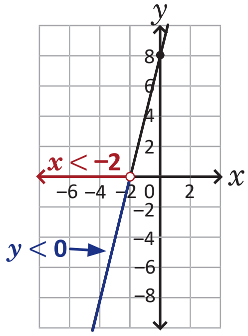
1l) La desigualdad se cumple si $x \in \left]-\frac{\sqrt{6}+1}{5}, \infty\right[$.

2a) Sea $y = -3x + 12$; su gráfica pasa por (0, 12) y (4, 0):



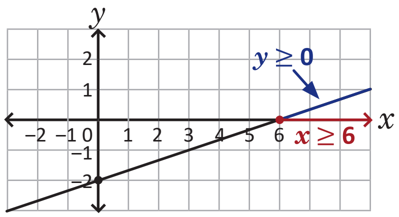
$y = -3x + 12 \geq 0$ si $x \in \left]-\infty, 4\right]$.

2b) Sea $y = 4x + 8$; su gráfica pasa por (0, 8) y (−2, 0):



$y = 4x + 8 < 0$ si $x \in \left]-\infty, -2\right[$.

2c) Sea $y = \frac{1}{3}x - 2$; su gráfica pasa por (0, −2) y (6, 0):



$y = \frac{1}{3}x - 2 \geq 0$ si $x \in \left[6, \infty\right[$.

3a) La desigualdad lineal a plantear es $4x < 28$ (ver solución del problema 1c de la clase 2.1), donde x es la edad en años de Mario. La desigualdad se cumple si $x < 7$, es decir, la edad máxima que puede tener Mario es 6 años.

3b) Si x representa la cantidad de estudiantes hombres en la Facultad de Odontología en el año 2017 entonces $2x$ es la cantidad de estudiantes mujeres en dicha facultad. La desigualdad a plantear es $x + 2x \leq 717$, la cual se cumple si $x \leq 239$. Luego, hay a lo sumo 239 hombres.

3c) Si se compra el quintal a $50.00 entonces el precio mínimo por libra de frijol es $0.51. Si se compra el quintal a $58.00 entonces el precio mínimo por libra de frijol es $0.59.

3d) La estatura mínima será de 1.37 metros.

3e) Carolina vendió, como mínimo, 7 automóviles de $6,000.

3f) La longitud máxima de la altura es 22.5 cm, y la de la base es 30 cm.

3g) Sea x la longitud (en centímetros) del lado BC; entonces $x + 2$ es la longitud del lado AB y $2x$ es la del lado CA. Como el perímetro es menor o igual que 34 cm entonces $x + (x + 2) + 2x \leq 34$. Lo anterior se cumple si $x \leq 8$, o sea, la longitud máxima del lado BC es 8 cm, la del lado AB es 10 cm y la del lado CA es 16 cm.

Lección 3 Desigualdad no lineal

3.1 Actividad. Construcción de un triángulo dados sus lados

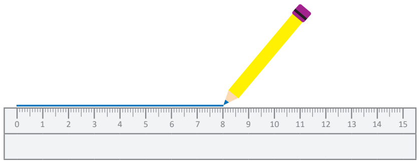
Materiales

- Regla y compás.
- Lápiz y cuaderno.

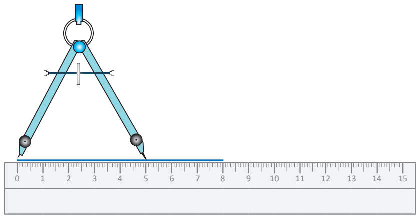
Actividad

Para dibujar un triángulo de lados 5, 7 y 8 centímetros se realiza lo siguiente:

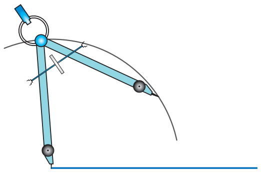
1. Traza el segmento de longitud 8 cm.



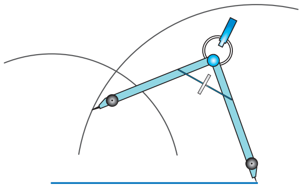
2. Con el compás toma la medida de otro de los lados, por ejemplo 5 cm.



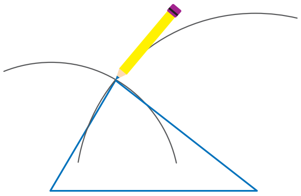
3. Coloca el compás en uno de los extremos del segmento dibujado en el numeral 1 y traza un arco de circunferencia.



4. Repite el proceso de los numerales 2 y 3, ahora tomando la medida de 7 cm y colocando el compás en el otro extremo del segmento.



5. Traza los segmentos que van desde el punto donde se cortan los arcos de circunferencia hacia cada uno de los extremos del segmento de 8 cm. Mide los lados del triángulo para verificar que, en efecto, miden 5, 7 y 8 centímetros.



Preguntas

1. Para cada caso, verifica si es posible trazar el triángulo de lados a, b y c:

   a) $a = 4$ cm, $b = 5$ cm y $c = 6$ cm

   b) $a = 8$ cm, $b = 10$ cm y $c = 15$ cm

   c) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm y $c = 7$ cm

   d) $a = 6$ cm, $b = 8$ cm y $c = 15$ cm

2. Para cada uno de los literales del ejercicio 1 realiza lo siguiente:

   a) Calcula las sumas $a + b$, $b + c$ y $a + c$.

   b) ¿Se cumplen las desigualdades $a + b > c$, $b + c > a$ y $a + c > b$?

Indicador de logro

3.1 Verifica si es posible trazar triángulos usando regla y compás dadas las longitudes de sus lados.

Materiales

Cuaderno de apuntes u hojas de papel bond blanco, regla (puede utilizar también las escuadras), compás, lápiz y borrador.

Secuencia

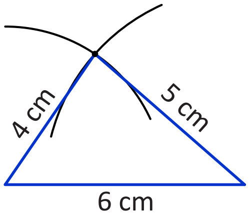
Esta clase sirve como introducción a la desigualdad triangular. Usando los instrumentos de geometría se verifica si es posible construir un triángulo a partir de las longitudes de sus lados.

Propósito

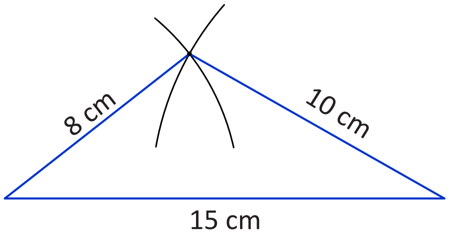
Esta clase no cuenta con Problema inicial; los estudiantes deben desarrollar la actividad descrita, siguiendo el paso a paso y utilizar este procedimiento en la resolución de los numerales del bloque de Preguntas.

Solución de problemas:

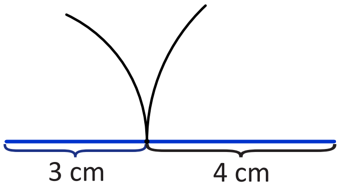
1a) Se dibuja el segmento de longitud c = 6 cm y se trazan los arcos de radios a = 4 cm y b = 5 cm:



1b) Se dibuja el segmento de longitud c = 15 cm y se trazan los arcos de radios a = 8 cm y b = 10 cm:

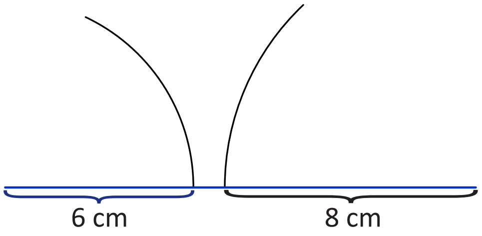


1c) Se dibuja el segmento de longitud c = 7 cm y se trazan los arcos de radios a = 3 cm y b = 4 cm:



Los arcos se cortan justo en el segmento de longitud 7 cm. Por tanto, no es posible trazar el triángulo.

1d) Se dibuja el segmento de longitud c = 15 cm y se trazan los arcos de radios a = 6 cm y b = 8 cm:



Los arcos no se cortan, por lo tanto no es posible trazar el triángulo.

2a)
- Si a = 4 cm, b = 5 cm y c = 6 cm: $a + b$ = 9 cm, $b + c$ = 11 cm y $a + c$ = 10 cm.
- Si a = 8 cm, b = 10 cm y c = 15 cm: $a + b$ = 18 cm, $b + c$ = 25 cm y $a + c$ = 23 cm.
- Si a = 3 cm, b = 4 cm y c = 7 cm: $a + b$ = 7 cm, $b + c$ = 11 cm y $a + c$ = 10 cm.
- Si a = 6 cm, b = 8 cm y c = 15 cm: $a + b$ = 14 cm, $b + c$ = 23 cm y $a + c$ = 21 cm.

2b) Debe verificarse en cada caso, si se cumplen las tres desigualdades.
- En el primer caso: 9 cm > 6 cm ($a + b > c$), 11 cm > 4 cm ($b + c > a$) y 10 cm > 5 cm ($a + c > b$). Por tanto, sí se cumplen $a + b > c$, $b + c > a$ y $a + c > b$.
- En el segundo caso: 18 cm > 15 cm ($a + b > c$), 25 cm > 8 cm ($b + c > a$) y 23 cm > 10 cm ($a + c > b$). Por tanto, sí se cumplen $a + b > c$, $b + c > a$ y $a + c > b$.
- En el tercer caso: $a + b$ = 7 cm, es decir, $a + b = c$ (no se cumple $a + b > c$).
- En el cuarto caso: 14 cm < 15 cm, es decir, $a + b < c$ (no se cumple $a + b > c$).

3.2 Desigualdad triangular, parte 1*

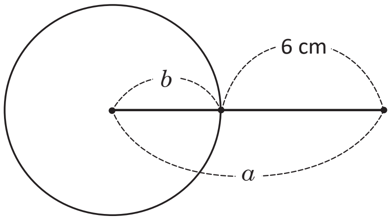
Problema inicial

Sean a = 10 cm, b = 4 cm y c un número positivo. ¿Qué valor puede tomar c para poder formar un triángulo de lados a, b y c?

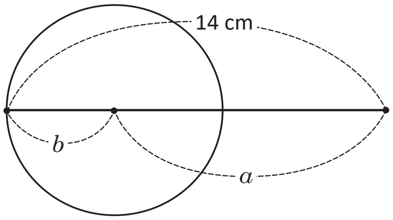
Traza el segmento de longitud a y tomando uno de los extremos como centro, traza una circunferencia de radio b.

Solución

Se traza el segmento a = 10 cm y una circunferencia de radio b = 4 cm y centro en uno de los extremos del segmento. Si dos de los vértices del triángulo son los extremos del segmento de longitud a entonces el tercer vértice debe estar sobre la circunferencia. En principio, el valor de c debe ser mayor que $a - b$ = 6 cm, de lo contrario no se podría formar un triángulo (ver figura de la derecha).

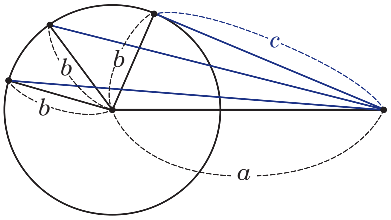


El valor de c también debe ser menor que $a + b$ = 14 cm; esto resulta de colocar el tercer vértice sobre la prolongación del segmento de longitud a como lo muestra la figura de la derecha y no se formaría un triángulo.



En cualquier otro lugar donde se coloque el tercer vértice, el valor de c siempre será mayor que 6 cm y menor que 14 cm. Por lo tanto:

$$a - b < c < a + b$$
$$6 < c < 14$$

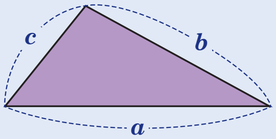


Por lo tanto, c puede tomar valores entre 6 cm y 14 cm para formar un triángulo.

Teorema

En todo triángulo, la suma de las longitudes de dos lados es mayor que el tercer lado; y la diferencia de las longitudes de dos lados es menor que el tercer lado, es decir:

a) $b - c < a < b + c$;
b) $a - c < b < a + c$;
c) $a - b < c < a + b$.



Si las longitudes de los lados de un triángulo son a, b y c de tal manera que $b \geq c$ entonces:
$b - c < a < b + c$.

Problemas

1. Dadas las longitudes de dos de los lados de un triángulo, determina los posibles valores que puede tomar el tercer lado:
   a) dos lados miden 9 y 14 centímetros respectivamente;
   b) dos lados miden 3 y 11 centímetros respectivamente;
   c) dos lados miden 13 y 7 centímetros respectivamente.

2. Sin elaborar la figura, justifica por qué con las longitudes 14 cm, 30 cm y 16 cm no se puede elaborar un triángulo.

Indicador de logro

3.2 Identifica los posibles valores para la longitud del lado de un triángulo dadas las longitudes de los otros dos.

Secuencia

En la clase se utiliza la idea de la construcción de triángulos a partir de sus lados vista en la clase 3.1 para deducir la desigualdad triangular. Si los estudiantes tienen muchas dificultades para resolver el Problema inicial, el docente debe desarrollar e ir explicando paso a paso la Solución.

Propósito

En el bloque de Problemas, los estudiantes deben utilizar lo descrito en el Teorema y no la construcción del triángulo como en el Problema inicial.

Solución de problemas:

1a) Sea c la longitud del tercer lado del triángulo; esta debe ser menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados y mayor que la diferencia de las mismas, o sea:

$$14 - 9 < c < 14 + 9$$
$$5 < c < 23$$

Por lo tanto, los posibles valores que puede tomar el tercer lado se encuentran entre los 5 y 23 cm (sin tomar en cuenta estos dos).

1b) Similar al literal 1a), si c es la longitud del tercer lado del triángulo, entonces:

$$11 - 3 < c < 11 + 3$$
$$8 < c < 14$$

Por lo tanto, los posibles valores que puede tomar el tercer lado se encuentran entre los 8 y 14 cm (sin tomar en cuenta estos dos).

1c) Si c es la longitud del tercer lado del triángulo entonces:

$$13 - 7 < c < 13 + 7$$
$$6 < c < 20$$

Por lo tanto, los posibles valores que puede tomar el tercer lado se encuentran entre los 6 y 20 cm (sin tomar en cuenta estos dos).

2. Sean a = 14 cm, b = 30 cm y c = 16 cm. Luego, $a + c$ = 30 cm, es decir, $a + c = b$. Pero, por el Teorema de la clase 3.2, para poder formar un triángulo, la suma de las longitudes de dos lados debe ser mayor que la longitud del tercero, lo cual no se cumple en este caso (la suma de a y c no es mayor que b). Por lo tanto, con las longitudes 14 cm, 30 cm y 16 cm no se puede elaborar un triángulo.

3.3 Desigualdad triangular, parte 2*

Problema inicial

Demuestra que, para cualesquiera valores reales a y b, con $a \leq b$ siempre se cumple la desigualdad:

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Separa por casos: cuando a y b son ambos positivos o iguales a cero; cuando uno es positivo o igual a cero y el otro negativo; y cuando ambos son negativos.

Solución

Para demostrar la desigualdad se separan los posibles casos para los números a y b, dependiendo si son positivos o iguales a cero, o negativos:

a) **Caso 1: $a \geq 0$ y $b \geq 0$**. Entonces, $|a| = a$, $|b| = b$ y $a + b \geq 0$; luego:

$$|a + b| = a + b = |a| + |b|$$

es decir, la desigualdad $|a + b| \leq |a| + |b|$ se cumple porque se cumple la igualdad.

b) **Caso 2: $a < 0$ y $b \geq 0$**. Entonces, $|a| = -a$, $|b| = b$ y $|a| + |b| = (-a) + b$.

- Si $a + b < 0$ entonces: $$|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b)$$

  pero $-b < b$ (ya que b es positivo), y se tiene $(-a) + (-b) < (-a) + b$ y por tanto, la desigualdad $|a + b| \leq |a| + |b|$ se cumple.

- El caso $a + b \geq 0$ queda como ejercicio.

El caso $a \geq 0$ y $b < 0$ se demuestra de forma similar al caso 2.

c) **Caso 3: $a < 0$ y $b < 0$**. Entonces, $|a| = -a$ y $|b| = -b$; además, la suma de a y b también será un número negativo y:

$$\begin{aligned} |a + b| &= -(a + b) \\ &= (-a) + (-b) \\ &= |a| + |b| \end{aligned}$$

es decir, la desigualdad $|a + b| \leq |a| + |b|$ se cumple porque se cumple la igualdad.

En General

Para cualesquiera números reales a y b, la desigualdad: $|a + b| \leq |a| + |b|$ siempre es verdadera, es decir, el valor absoluto de la suma de dos números es menor o igual que la suma de los valores absolutos de ambos números. A esta desigualdad se le llama **desigualdad triangular.**

Problemas

1. Verifica que la desigualdad triangular se cumple para las siguientes parejas de números a y b:

a) $a = 9$ y $b = 7$
b) $a = -8$ y $b = 10$
c) $a = -5$ y $b = -6$
d) $a = 11$ y $b = -13$
e) $a = -4$ y $b = 4$
f) $a = 8$ y $b = 8$
g) $a = 0$ y $b = -6$
h) $a = -\frac{4}{5}$ y $b = \frac{2}{5}$
i) $a = \sqrt{2}$ y $b = 3\sqrt{2}$

2. Demuestra que si $a < 0$, $b \geq 0$ y $a + b \geq 0$ entonces $|a + b| \leq |a| + |b|$.

3. Sean a, b y c números reales cualesquiera. Utiliza la desigualdad triangular para demostrar la desigualdad $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$.

Indicador de logro

3.3 Verifica la desigualdad triangular $|a + b| \leq |a| + |b|$ para números reales a y b.

Secuencia

Se demuestra la desigualdad triangular para los valores absolutos de los números reales a y b. Si los estudiantes tienen muchas dificultades para resolver el Problema inicial, el docente debe desarrollar e ir explicando paso a paso la Solución.

Posibles dificultades

El numeral 3 del bloque de Problemas puede desarrollarlo paso a paso con los estudiantes para que comprendan por qué la desigualdad es verdadera. Recuerde que no se esperan demostraciones matemáticas exhaustivas.

Solución de problemas:

1a) $|a + b| = |9 + 7| = |16| = 16$

$$\left.\begin{array}{l}|a| = |9| = 9\\ |b| = |7| = 7\end{array}\right. \Rightarrow |a| + |b| = 16$$

De lo anterior: $16 \leq 16$, es decir, se cumple la desigualdad $|a + b| \leq |a| + |b|$.

1b) $|a + b| = |-8 + 10| = |2| = 2$

$$\left.\begin{array}{l}|a| = |-8| = 8\\ |b| = |10| = 10\end{array}\right. \Rightarrow |a| + |b| = 18$$

De lo anterior: $2 \leq 18$, es decir, se cumple la desigualdad $|a + b| \leq |a| + |b|$.

1c) $|a + b| = |-5 - 6| = |-11| = 11$

$$\left.\begin{array}{l}|a| = |-5| = 5\\ |b| = |-6| = 6\end{array}\right. \Rightarrow |a| + |b| = 11$$

De lo anterior: $11 \leq 11$.

1d) $|a + b| = |11 - 13| = |-2| = 2$

$$\left.\begin{array}{l}|a| = |11| = 11\\ |b| = |-13| = 13\end{array}\right. \Rightarrow |a| + |b| = 24$$

De lo anterior: $2 \leq 24$.

1e) $|a + b| = |-4 + 4| = 0$; $|a| = 4$, $|b| = 4$ y $|a| + |b| = 8$. Luego, $0 \leq 8$.

1f) $|a + b| = |8 + 8| = 16$; $|a| = 8$, $|b| = 8$ y $|a| + |b| = 16$. Luego, $16 \leq 16$.

1g) $|a + b| = |0 - 6| = |-6| = 6$

$$\left.\begin{array}{l}|a| = |0| = 0\\ |b| = |-6| = 6\end{array}\right. \Rightarrow |a| + |b| = 6$$

De lo anterior: $6 \leq 6$.

1h) $|a + b| = \left|-\frac{4}{5} + \frac{2}{5}\right| = \left|-\frac{2}{5}\right| = \frac{2}{5}$

$$\left.\begin{array}{l}|a| = \left|-\frac{4}{5}\right| = \frac{4}{5}\\ |b| = \left|\frac{2}{5}\right| = \frac{2}{5}\end{array}\right. \Rightarrow |a| + |b| = \frac{4}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$$

De lo anterior: $\frac{2}{5} \leq \frac{6}{5}$.

1i) $|a + b| = |\sqrt{2} + 3\sqrt{2}| = |4\sqrt{2}| = 4\sqrt{2}$; $|a| = |\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|b| = |3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2}$ y $|a| + |b| = \sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$. Luego, $4\sqrt{2} \leq 4\sqrt{2}$.

2. Dados los números reales a y b tales que $a < 0$, $b \geq 0$ y $a + b \geq 0$ (según el enunciado del problema). Entonces $|a| = -a$, $|b| = b$ y $|a + b| = a + b$. Pero $a < -a$ (ya que a es negativo) y se tiene $a + b < -a + b$ y por lo tanto se cumple la desigualdad $|a + b| \leq |a| + |b|$.

3. Dados los números reales a, b y c, $a + b + c = (a + b) + c$ (propiedad asociativa de la suma). Así,

$$|a + b + c| = |(a + b) + c| \leq |a + b| + |c| \quad \text{por la desigualdad triangular.}$$

Además, $|a + b| \leq |a| + |b|$ y por tanto $|a + b| + |c| \leq |a| + |b| + |c|$. Luego,

$$|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|.$$

3.4 Desigualdad de las medias aritmética y geométrica

Problema inicial

Demuestra lo siguiente:

1. Si x es cualquier número real entonces $x^2 \geq 0$.
2. Si a y b son números reales no negativos entonces $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

En el literal a), separa por casos: $x > 0$ y $x < 0$. Para el literal b), utiliza el resultado de a) sustituyendo x por $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Solución

1. Si $x = 0$ entonces $x^2 = 0$ y se cumple la igualdad. Ahora se separan los posibles casos para el número x: cuando $x > 0$ y cuando $x < 0$.

   Caso 1, $x \geq 0$:

   $x\,(x) \geq 0\,(x)$ multiplicar ambos lados por un número positivo no altera la desigualdad,

   $x^2 \geq 0$.

   Caso 2, $x < 0$:

   $x\,(x) > 0\,(x)$ multiplicar ambos lados por un número negativo invierte la desigualdad,

   $x^2 > 0$.

   Por lo tanto, para cualquier número real x se cumple $x^2 \geq 0$.

2. Usando el resultado del literal anterior se sustituye x por $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, es decir, si $x = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ entonces:

   $$x^2 = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$$

   $$a - 2\left(\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b}\right) + b \geq 0 \qquad \text{desarrollar cuadrado de un binomio,}$$

   $$a + b \geq 2\sqrt{ab} \qquad \text{sumar } 2\sqrt{ab} \text{ a ambos lados de la desigualdad,}$$

   $$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \qquad \text{multiplicar por } \tfrac{1}{2} \text{ ambos lados de la desigualdad.}$$

   Por lo tanto, para cualquier pareja de números no negativos a y b se cumple: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Propiedad

1. Para todo número real a se cumple $a^2 \geq 0$; la igualdad se verifica si $a = 0$.
2. Si a y b son números no negativos cualesquiera entonces la desigualdad:

   $$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

   es verdadera; el miembro izquierdo de la desigualdad es la media aritmética de a y b, mientras que el miembro derecho es la media geométrica de a y b. A esta desigualdad se le llama **desigualdad de las medias aritmética y geométrica**.

Problemas

1. Verifica que la desigualdad de las medias aritmética y geométrica se cumple para las siguientes parejas de números a y b:

   a) $a = 9$ y $b = 4$
   b) $a = 8$ y $b = 18$
   c) $a = \frac{1}{4}$ y $b = \frac{1}{16}$
   d) $a = 10$ y $b = 90$
   e) $a = 25$ y $b = 49$
   f) $a = 6$ y $b = 30$

2. Utilizando la desigualdad de las medias aritmética y geométrica, demuestra lo siguiente:

   a) si x es un número no negativo entonces $1 + x \geq 2\sqrt{x}$;
   b) si a y b son números positivos entonces $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Indicador de logro

3.4 Verifica la desigualdad de las medias aritmética y geométrica para números reales no negativos.

Secuencia

En esta clase se demuestra una propiedad fundamental de los números reales ($x^2 \geq 0$), esta se utiliza luego para demostrar la desigualdad de las medias aritmética y geométrica para números reales no negativos.

Posibles dificultades

En el numeral 2 del bloque de Problemas, puede dar pistas a los estudiantes sobre cuáles deben ser los números a y b descritos en la Propiedad 2 para ser sustituidos en la desigualdad de las medias aritmética y geométrica.

Solución de problemas:

1a) $\frac{a+b}{2} = \frac{9+4}{2} = \frac{13}{2} = 6.5$

$\sqrt{ab} = \sqrt{9(4)} = \sqrt{36} = 6$

Luego, $6.5 \geq 6$, es decir, se cumple la desigualdad $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

1b) $\frac{a+b}{2} = \frac{8+18}{2} = \frac{26}{2} = 13$

$\sqrt{ab} = \sqrt{8(18)} = \sqrt{144} = 12$

Luego, $13 \geq 12$, es decir, se cumple la desigualdad $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

1c) $\frac{a+b}{2} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}{2} = \frac{\frac{5}{16}}{2} = \frac{5}{32}$

$\sqrt{ab} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{16}\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$

Luego, $\frac{5}{32} \geq \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

1d) $\frac{a+b}{2} = \frac{10+90}{2} = \frac{100}{2} = 50$

$\sqrt{ab} = \sqrt{10(90)} = \sqrt{900} = 30$

Luego, $50 \geq 30$.

1e) $\frac{a+b}{2} = \frac{25+49}{2} = \frac{74}{2} = 37$

$\sqrt{ab} = \sqrt{25(49)} = 5(7) = 35$

Luego, $37 \geq 35$.

1f) $\frac{a+b}{2} = \frac{6+30}{2} = \frac{36}{2} = 18$

$\sqrt{ab} = \sqrt{6(30)} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$

Luego, $18 \geq 6\sqrt{5}$, ya que $\sqrt{324} \geq \sqrt{180}$.

2a) Usando la desigualdad de las medias aritmética y geométrica, con $a = 1$ y $b = x$:

$\frac{1+x}{2} \geq \sqrt{1(x)}$ por la desigualdad de las medias aritmética y geométrica,

$1 + x \geq 2\sqrt{x}$ se multiplica el miembro derecho por el recíproco de $\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, la desigualdad $1 + x \geq 2\sqrt{x}$ es verdadera para todo número no negativo x.

2b) Como a y b son positivos, pueden definirse los números $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$ (ya que los denominadores son diferentes de cero). Entonces:

$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{2} \geq \sqrt{\frac{\cancel{a}}{\cancel{b}}\left(\frac{\cancel{b}}{\cancel{a}}\right)}$ por la desigualdad de las medias aritmética y geométrica,

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ se simplifican las fracciones y se multiplica el miembro derecho por el recíproco de $\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, la desigualdad $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ es verdadera para toda pareja de números positivos a y b.

3.5 Desigualdades con expresiones racionales

Problema inicial

Para cada literal, determina todos los valores de x que satisfacen la desigualdad:

a) $\frac{1}{x} > 0$ b) $\frac{1}{x-1} < 0$

Solución

a) Deben encontrarse todos los valores de x para los cuales el número $\frac{1}{x}$ es positivo. Es claro que $x = 0$ no es parte de la solución, pues se tendría la forma indeterminada $\frac{1}{0}$.

Ahora, para que la expresión $\frac{1}{x}$ sea positiva, el numerador y denominador deben ser ambos positivos o bien ambos negativos. Sin embargo, el numerador ya es positivo y por tanto debe ser $x > 0$.

Por tanto, la desigualdad $\frac{1}{x} > 0$ se cumple para $x > 0$, o sea $x \in]0, +\infty[$.

b) El proceso es similar al del literal anterior, solo que esta vez $\frac{1}{x-1}$ debe ser negativo. Como el numerador ya es positivo debe ser:

$$x - 1 < 0$$
$$x < 1$$

Por tanto, la desigualdad $\frac{1}{x-1} < 0$ se cumple para $x < 1$, o sea $x \in]-\infty, 1[$.

Conclusión

Sean a y b números reales cualesquiera, con $a \neq 0$.

1. Resolver la desigualdad $\frac{1}{ax+b} > 0$ significa encontrar los valores para los cuales la expresión es positiva. Esto ocurre solo si $ax + b > 0$.
2. Resolver la desigualdad $\frac{1}{ax+b} < 0$ significa encontrar los valores para los cuales la expresión es negativa. Esto ocurre solo si $ax + b < 0$.

Ejemplo

Resuelve la desigualdad $-\frac{1}{2x+3} < 0$.

Se multiplica por –1 ambos miembros, esto invierte la desigualdad:

$$\frac{1}{2x+3} > 0$$

entonces, $\frac{1}{2x+3} > 0$ solo si $2x + 3 > 0$:

$$2x > -3$$
$$x > -\frac{3}{2}$$

Por lo tanto, la desigualdad $-\frac{1}{2x+3} < 0$ se cumple para $x > -\frac{3}{2}$, es decir si $x \in \left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

No se consideran los símbolos ≥ y ≤ para estas desigualdades, ya que una expresión de la forma $\frac{1}{ax+b}$ nunca será igual a cero, por lo que no tiene sentido considerarlos.

Problemas

Resuelve las siguientes desigualdades (expresa la solución utilizando intervalos):

a) $\frac{1}{x+4} > 0$ b) $\frac{1}{2x-5} < 0$ c) $\frac{-1}{3x+1} > 0$

d) $-\frac{1}{1-x} > 0$ e) $\frac{1}{-2x+10} > 0$ f) $\frac{2}{4x-7} < 0$

g) $-\frac{3}{5x+6} > 0$ h) $\frac{-x-4}{x+5} > -1$ i) $\frac{x+2}{x+3} > 1$

En los problemas h) e i), pasa todo a un solo miembro de modo que en un miembro quede cero.

Indicador de logro

3.5 Resuelve desigualdades de la forma $\frac{1}{ax+b} > 0$ o $\frac{1}{ax+b} < 0$.

Secuencia

En la clase se resuelven desigualdades donde uno de sus miembros es una fracción con denominador igual a un polinomio lineal de una variable y el otro miembro es igual a cero. Se analiza el tipo de desigualdad para determinar los valores de la variable tales que la fracción sea un número positivo o un número negativo.

Posibles dificultades

En las desigualdades de los literales h) e i) del bloque de Problemas, indique a sus estudiantes que deben transponer términos y realizar sumas de fracciones para llevarlas a la forma $\frac{1}{ax+b} > 0$ o $\frac{1}{ax+b} < 0$.

Solución de problemas:

a) La desigualdad $\frac{1}{x+4} > 0$ se cumplirá solo si:

$$x + 4 > 0$$
$$x > -4$$

Luego, $\frac{1}{x+4} > 0$ si $x \in \left]-4, \infty\right[$.

b) La desigualdad $\frac{1}{2x-5} < 0$ se cumplirá solo si:

$$2x - 5 < 0$$
$$x < \frac{5}{2}$$

Luego, $\frac{1}{2x-5} < 0$ si $x \in \left]-\infty, \frac{5}{2}\right[$.

c) Se multiplican ambos miembros de $\frac{-1}{3x+1} > 0$ por -1 para obtener la equivalente $\frac{1}{3x+1} < 0$; esta segunda se cumplirá solo si:

$$3x + 1 < 0$$
$$x < -\frac{1}{3}$$

Luego, $\frac{-1}{3x+1} > 0$ si $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[$.

d) Se multiplican ambos miembros de $-\frac{1}{1-x} > 0$ por -1 para obtener la equivalente $\frac{1}{1-x} < 0$; esta segunda se cumplirá solo sí:

$$1 - x < 0$$
$$1 < x$$

Luego, $-\frac{1}{1-x} > 0$ si $x \in \left]1, \infty\right[$.

e) $\frac{1}{-2x+10} > 0$ se cumple si $x \in \left]-\infty, 5\right[$.

f) $\frac{2}{4x-7} < 0$ se cumple si $x \in \left]-\infty, \frac{7}{4}\right[$.

g) $-\frac{3}{5x+6} > 0$ es equivalente a $\frac{3}{5x+6} < 0$, la cual se cumple si $5x + 6 < 0$ (pues el numerador es positivo):

$$5x < -6$$
$$x < -\frac{6}{5}$$

Luego, $-\frac{3}{5x+6} > 0$ si $x \in \left]-\infty, -\frac{6}{5}\right[$.

h) Se utiliza transposición de términos y suma de fracciones:

$$\frac{-x-4}{x+5} + 1 > 0$$
$$\frac{-\cancel{x}-4+\cancel{x}+5}{x+5} > 0$$
$$\frac{1}{x+5} > 0$$

Esta última se cumple si $x > -5$. Por lo tanto, la solución de $\frac{-x-4}{x+5} > -1$ son los $x \in \left]-5, \infty\right[$.

i) Similar al literal h, se utiliza transposición de términos y suma de fracciones:

$$\frac{x+2}{x+3} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{\cancel{x}+2-\cancel{x}-3}{x+3} > 0 \Rightarrow \frac{-1}{x+3} > 0$$

La desigualdad $\frac{-1}{x+3} > 0$ se cumple si $x < -3$. Por lo tanto, la solución de $\frac{x+2}{x+3} > 1$ son los $x \in \left]-\infty, -3\right[$.

3.6 Problemas de la unidad

1. Resuelve las siguientes desigualdades lineales (escribe la solución utilizando intervalos):

a) $4x - 12\sqrt{7} \leq 20\sqrt{7}$

b) $x + 9\sqrt{5} \leq -x - 7\sqrt{5}$

c) $-5x + 3\sqrt{6} > -x + 5\sqrt{6}$

d) $11x + 2\sqrt{2} \geq 4x + 5\sqrt{2}$

e) $8x - 15\sqrt{2} < 5x - 6\sqrt{3}$

f) $\sqrt{10}\,x - 8 > \sqrt{2}\,x - 6$

2. Para cada literal, determina todos los valores de x que satisfacen ambas desigualdades:

a) $\begin{cases} 5x - 3 > 4x - 5 \\ -2x + 5 \leq -3x + 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x - 6 < 5x - 16 \\ x + 11 \geq -x - 15 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 7 < 5x + 1 \\ 6x > 3x + 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2x - 3 \leq x - 5 \\ 3x - 1 \geq 4x + 7 \end{cases}$

Para cada literal, representa la solución de cada desigualdad en la recta numérica. Luego, verifica los valores donde coinciden ambos intervalos.

3. Resuelve las siguientes situaciones:

a) José es un estudiante de primer año de bachillerato. Durante este año obtuvo las siguientes calificaciones en sus exámenes de período de matemática:

Período 1	7.6
Período 2	8.0
Período 3	8.2

Si José quiere que su promedio final en los exámenes sea mayor o igual a 8.0, ¿cuál debe ser la calificación mínima que ha de obtener en el examen del período 4 para lograrlo?

b) Julia rentará un auto para un viaje. La agencia A le cobrará $24.00 la renta del auto más $0.30 por cada kilómetro recorrido; mientras que la agencia B le cobrará $25.00 la renta del auto más $0.25 por cada kilómetro recorrido. ¿Cuál es la cantidad mínima de kilómetros que puede recorrer Julia hasta que el precio de la agencia A exceda al precio de la agencia B?

c) Un producto genera utilidad solo cuando el ingreso de la venta del producto excede al costo de producción. Una empresa de teléfonos celulares calcula que el costo C (en dólares) para producir x teléfonos celulares es:

$$C = 90x + 1\,000,$$

mientras que el ingreso R (en dólares) es: $R = 140x$.

¿Cuál debe ser la cantidad mínima de teléfonos celulares que deben venderse para obtener utilidad?

4. Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo. Demuestra que se cumple la siguiente desigualdad:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 3.$$

Utiliza el resultado de la clase 3.2 de esta unidad.

5. Utilizando la desigualdad de las medias aritmética y geométrica demuestra lo siguiente:

a) si $x > 0$ entonces $x + \frac{1}{x} \geq 2$;

b) si a, b y x son números positivos entonces $ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab}$.

Indicador de logro

3.6 Resuelve problemas correspondientes a desigualdades.

Solución de problemas:

1a) $4x - 12\sqrt{7} \leq 20\sqrt{7}$

$$\begin{aligned} 4x &\leq 20\sqrt{7} + 12\sqrt{7} \\ x &\leq 32\sqrt{7}\left(\tfrac{1}{4}\right) \\ x &\leq 8\sqrt{7} \end{aligned}$$

La desigualdad $4x - 12\sqrt{7} \leq 20\sqrt{7}$ se cumple si $x \in \left]-\infty, 8\sqrt{7}\right]$.

1b) $x + 9\sqrt{5} \leq -x - 7\sqrt{5}$

$$\begin{aligned} x + x &\leq -7\sqrt{5} - 9\sqrt{5} \\ 2x &\leq -16\sqrt{5} \\ x &\leq -8\sqrt{5} \end{aligned}$$

La desigualdad $x + 9\sqrt{5} \leq -x - 7\sqrt{5}$ se cumple si $x \in \left]-\infty, -8\sqrt{5}\right]$.

1c) $-5x + 3\sqrt{6} > -x + 5\sqrt{6}$

$$\begin{aligned} 3\sqrt{6} - 5\sqrt{6} &> -x + 5x \\ -2\sqrt{6} &> 4x \\ -\tfrac{1}{2}\sqrt{6} &> x \\ x &< -\tfrac{1}{2}\sqrt{6} \end{aligned}$$

La desigualdad $-5x + 3\sqrt{6} > -x + 5\sqrt{6}$ se cumple si $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\sqrt{6}\right[$.

1d) $11x + 2\sqrt{2} \geq 4x + 5\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} 11x - 4x &\geq 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \\ 7x &\geq 3\sqrt{2} \\ x &\geq \tfrac{3}{7}\sqrt{2} \end{aligned}$$

La desigualdad $11x + 2\sqrt{2} \geq 4x + 5\sqrt{2}$ se cumple si $x \in \left[\frac{3}{7}\sqrt{2}, \infty\right[$.

1e) $8x - 15\sqrt{2} < 5x - 6\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} 8x - 5x &< -6\sqrt{3} + 15\sqrt{2} \\ 3x &< -6\sqrt{3} + 15\sqrt{2} \\ x &< (-6\sqrt{3} + 15\sqrt{2})\left(\tfrac{1}{3}\right) \\ x &< (-6\sqrt{3})\left(\tfrac{1}{3}\right) + (15\sqrt{2})\left(\tfrac{1}{3}\right) \\ x &< -2\sqrt{3} + 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

La desigualdad $8x - 15\sqrt{2} < 5x - 6\sqrt{3}$ se cumple si $x \in \left]-\infty, 5\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right[$.

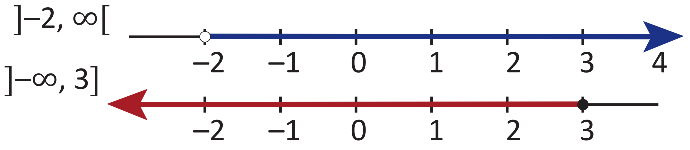
1f) $\sqrt{10}x - 8 > \sqrt{2}x - 6$

$$\begin{aligned} \sqrt{10}x - \sqrt{2}x &> -6 + 8 \\ (\sqrt{10} - \sqrt{2})x &> 2 \\ x &> \frac{2}{\sqrt{10} - \sqrt{2}} \\ x &> \frac{\sqrt{10} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Es recomendable efectuar la racionalización.

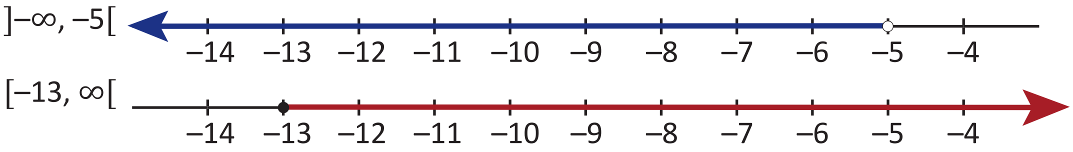
La desigualdad $\sqrt{10}x - 8 > \sqrt{2}x - 6$ se cumple si $x \in \left]\frac{\sqrt{10} + \sqrt{2}}{4}, \infty\right[$.

2a) La desigualdad $5x - 3 > 4x - 5$ se cumple para $x \in \left]-2, \infty\right[$; mientras que $-2x + 5 \leq -3x + 8$ se cumple para $x \in \left]-\infty, 3\right]$. Se representan ambas soluciones en la recta numérica para encontrar los valores donde coinciden:



De acuerdo a lo anterior, ambos intervalos coinciden en $\left]-2, 3\right]$. Por lo tanto, los valores de x que satisfacen las desigualdades $5x - 3 > 4x - 5$ y $-2x + 5 \leq -3x + 8$ pertenecen al intervalo $\left]-2, 3\right]$.

2b) La desigualdad $7x - 6 < 5x - 16$ se cumple para $x \in \left]-\infty, -5\right[$; mientras que $x + 11 \geq -x - 15$ se cumple para $x \in \left[-13, \infty\right[$. Representando ambas soluciones en la recta numérica:



Entonces, ambos intervalos coinciden en $[-13, -5[$. Por lo tanto, los valores de x que satisfacen las desigualdades $7x - 6 < 5x - 16$ y $x + 11 \geq -x - 15$ pertenecen al intervalo $[-13, -5[$.

2c) La desigualdad $3x - 7 < 5x + 1$ se cumple para $x \in \,]-4, \infty[$; mientras que $6x > 3x + 1$ se cumple para $x \in \left]\frac{1}{3}, \infty\right[$. Siguiendo un proceso como en 2a) y 2b) se deducen los valores de x que satisfacen ambas desigualdades, los cuales pertenecen al intervalo $\left]\frac{1}{3}, \infty\right[$.

2d) La desigualdad $-2x - 3 \leq x - 5$ se cumple para $x \in \left[\frac{2}{3}, \infty\right[$; mientras que $3x - 1 \geq 4x + 7$ se cumple para $x \in \,]-\infty, -8]$. Siguiendo un proceso como en 2a) y 2b) se verifica que los intervalos no coinciden en ningún valor, por lo tanto no hay valores reales de x que satisfagan ambas desigualdades.

3a) Sea x la calificación que debe obtener José en el periodo 4. Como el promedio final debe ser mayor o igual que 8.0 entonces:

$$\frac{7.6 + 8.0 + 8.2 + x}{4} \geq 8.0$$

Se resuelve la desigualdad anterior y se interpreta la solución:

$$\begin{aligned} 23.8 + x &\geq 32.0 \\ x &\geq 8.2 \end{aligned}$$

Así, la calificación mínima de José debe ser 8.2.

3b) Sea x la distancia en kilómetros recorrida por Julia. Luego, la agencia A le cobrará $24 + 0.3x$ dólares; mientras que la agencia B le cobrará $25 + 0.25x$ dólares. Si el precio de la agencia A debe exceder al de la agencia B entonces:

$$\begin{aligned} 24 + 0.3x &> 25 + 0.25x \\ 0.05x &> 1 \\ x &> 20 \end{aligned}$$

Por lo tanto, después de 20 kilómetros el precio de la agencia A será mayor que el de la agencia B.

3c) Para obtener utilidad debe ocurrir R > C, o sea, $140x > 90x + 1\,000$. Resolviendo esta desigualdad:

$$\begin{aligned} 140x &> 90x + 1\,000 \\ 50x &> 1\,000 \\ x &> 20 \end{aligned}$$

Por lo tanto, para obtener utilidad la empresa debe vender como mínimo 21 celulares.

4. Por ser las longitudes de los lados de un triángulo, los números a, b y c son positivos y las sumas $b + c$, $a + c$ y $a + c$ también serán números positivos. Por el teorema de la clase 3.2 sobre las longitudes de los lados de un triángulo se cumplen las desigualdades $a < b + c$, $b < a + c$ y $c < a + b$. Usando propiedades de desigualdades, si en $a < b + c$ se multiplica el miembro derecho por el recíproco de $b + c$ entonces la desigualdad no cambia, es decir:

$$a\left(\frac{1}{b + c}\right) < 1 \Rightarrow \frac{a}{b + c} < 1.$$

De forma similar se obtienen $\frac{b}{a + c} < 1$ y $\frac{c}{a + b} < 1$. Luego,

$$\begin{aligned} \frac{a}{b + c} + \frac{b}{a + c} + \frac{c}{a + b} &< 1 + 1 + 1 \\ \frac{a}{b + c} + \frac{b}{a + c} + \frac{c}{a + b} &< 3. \end{aligned}$$

5a) Como x es positivo, puede definirse el número $\frac{1}{x}$ (también será positivo). Usando la desigualdad de las medias aritmética y geométrica, y propiedades de desigualdades:

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{\cancel{x}\left(\frac{1}{\cancel{x}}\right)} \Rightarrow \frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq 1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

5b) Como a, b y x son positivos, los números ax y $\frac{b}{x}$ también serán positivos. Usando la desigualdad de las medias aritmética y geométrica, y propiedades de desigualdades:

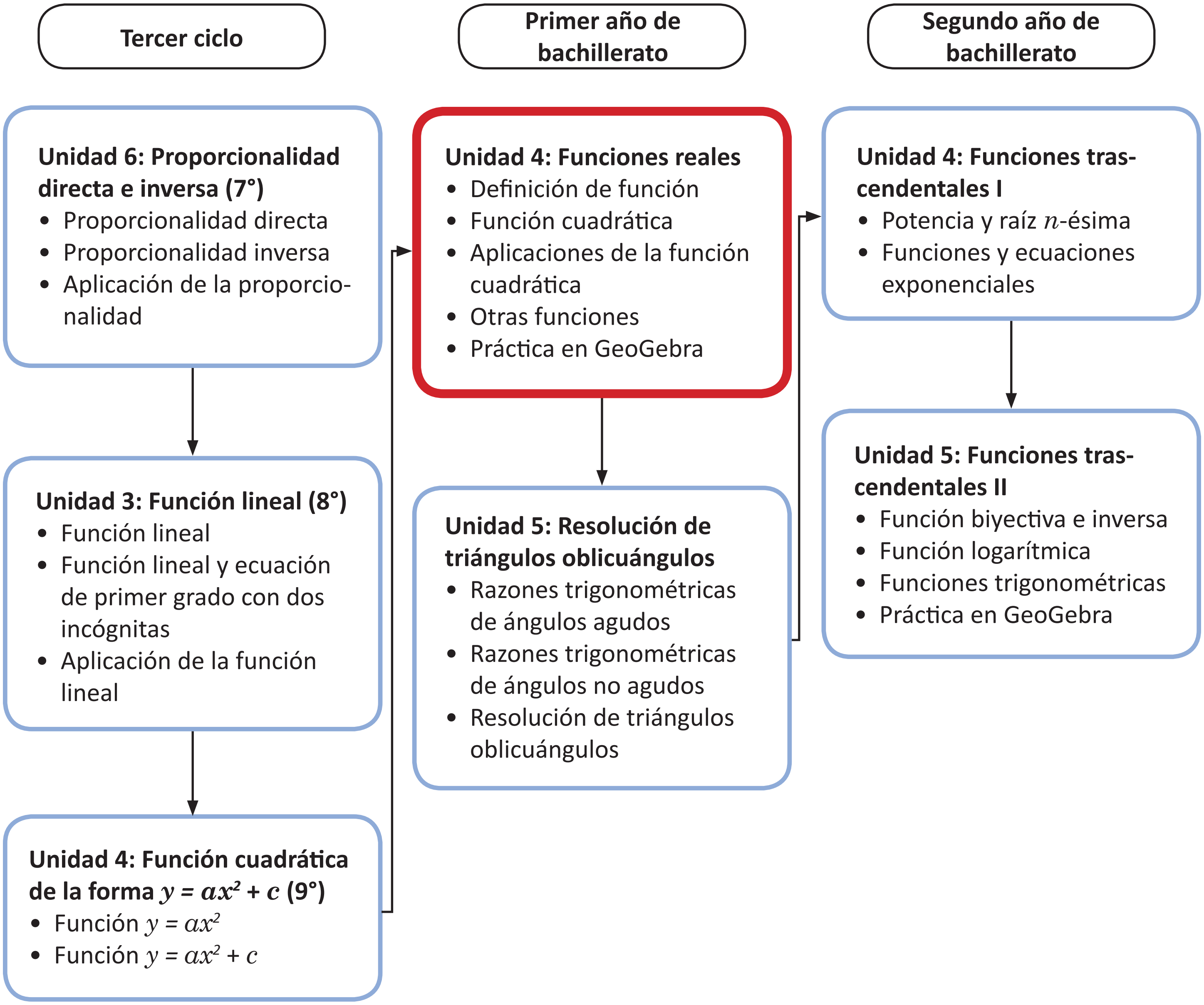
$$\frac{ax + \frac{b}{x}}{2} \geq \sqrt{a\cancel{x}\left(\frac{b}{\cancel{x}}\right)} \Rightarrow ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab}.$$

Unidad 4. Funciones reales

Competencia de la unidad

Identificar los elementos y características de las funciones cuadráticas, cúbicas de la forma $f(x) = ax^3$, racionales e irracionales, haciendo uso de tablas de valores y de sus gráficas para resolver problemas sobre monotonía y situaciones de la vida cotidiana, e interpretar gráficamente la solución de una desigualdad cuadrática.

Relación y desarrollo



Tercer ciclo

Unidad 6: Proporcionalidad directa e inversa (7°)
- Proporcionalidad directa
- Proporcionalidad inversa
- Aplicación de la proporcionalidad

Unidad 3: Función lineal (8°)
- Función lineal
- Función lineal y ecuación de primer grado con dos incógnitas
- Aplicación de la función lineal

Unidad 4: Función cuadrática de la forma $y = ax^2 + c$ (9°)
- Función $y = ax^2$
- Función $y = ax^2 + c$

Primer año de bachillerato

Unidad 4: Funciones reales
- Definición de función
- Función cuadrática
- Aplicaciones de la función cuadrática
- Otras funciones
- Práctica en GeoGebra

Unidad 5: Resolución de triángulos oblicuángulos
- Razones trigonométricas de ángulos agudos
- Razones trigonométricas de ángulos no agudos
- Resolución de triángulos oblicuángulos

Segundo año de bachillerato

Unidad 4: Funciones trascendentales I
- Potencia y raíz n-ésima
- Funciones y ecuaciones exponenciales

Unidad 5: Funciones trascendentales II
- Función biyectiva e inversa
- Función logarítmica
- Funciones trigonométricas
- Práctica en GeoGebra

Plan de estudio de la unidad

Lección	Horas	Clases
1. Definición de función	1	1. Notación de funciones
	1	2. Gráfica de una función
	1	3. Dominio y rango de una función
2. Función cuadrática	1	1. Desplazamiento vertical
	1	2. Función de la forma $f(x) = a(x - h)^2$, $h > 0$
	1	3. Función de la forma $f(x) = a(x - h)^2$, $h < 0$
	1	4. Función de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$, parte 1
	1	5. Función de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$, parte 2
	1	6. Función de la forma $f(x) = ax^2 + bx$
	1	7. Función de la forma $f(x) = x^2 + bx + c$
	1	8. Función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$
	1	9. Condiciones iniciales
	2	10. Practica lo aprendido
	1	Prueba de las lecciones 1 y 2
3. Aplicaciones de la función cuadrática	1	1. Monotonía
	1	2. Variación: valor máximo o mínimo

Lección	Horas	Clases
	1	3. Aplicación: valor máximo
	1	4. Aplicación: valor mínimo
	1	5. Intersección de la gráfica de una función cuadrática con el eje y
	1	6. Intersección de la gráfica de una función cuadrática con el eje x
	1	7. Desigualdad cuadrática $ax^2 + bx + c \geq 0$, $a > 0$, parte 1
	1	9. Desigualdad cuadrática $ax^2 + bx + c \leq 0$, $a > 0$
	1	10. Desigualdad cuadrática, $a < 0$
	1	11. Cuadro de variación, parte 1
	1	12. Cuadro de variación, parte 2
	1	13. Practica lo aprendido
4. Otras funciones	1	1. Función $f(x) = x^3$
	1	2. Función $f(x) = ax^3$, $a > 0$
	1	3. Función $f(x) = -ax^3$, $a > 0$
	1	4. Función $f(x) = \frac{k}{x}$ y sus desplazamientos
	1	5. Gráfica de la función $h(x) = \frac{k}{x-p} + q$

Lección	Horas	Clases
	1	6. Gráfica de la función $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$
	1	7. Función irracional $f(x) = a\sqrt{x}$
	1	8. Función irracional $f(x) = \sqrt{ax}$
	1	9. Practica lo aprendido
	1	10. Problemas de la unidad
5. Práctica en GeoGebra	1	1. Generalidades
	1	2. Desplazamientos verticales
	1	3. Desplazamientos horizontales
	1	Prueba de las lecciones 3 y 4
	2	Prueba del segundo periodo

40 horas clase + prueba de las lecciones 1 y 2 + prueba de las lecciones 3 y 4 + prueba del segundo periodo

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Definición de función
En esta lección se introduce la notación $f(x)$ para funciones, las definiciones de dominio y rango de una función y la prueba de la recta vertical para determinar si una línea corresponde a la gráfica de una función.

Lección 2: Función cuadrática
La lección comienza con un repaso de los desplazamientos verticales de funciones lineales y cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2 + c$ vistos en octavo y noveno grado. Luego de ello, se verifica la relación entre los elementos (gráfica, dominio y rango) de $f(x) = ax^2$ y los de la función $g(x) = a(x - h)^2 + k$, usando desplazamientos horizontales y verticales. Este proceso se realiza paulatinamente, deduciendo primero los desplazamientos horizontales y después hacer combinaciones de desplazamientos. Finalmente se estudia la forma general de la ecuación de una función cuadrática, y el método de completar cuadrados para expresarla en la forma $a(x - h)^2 + k$.

Lección 3: Aplicaciones de la función cuadrática
Una vez estudiadas las generalidades de la función cuadrática (gráfica, dominio y rango), en esta lección se utilizan las características de la misma para resolver problemas sobre monotonía, cálculo de valores mínimo o máximo y desigualdades cuadráticas. En este último se interpreta la solución de la desigualdad usando la gráfica de una función cuadrática, y luego se resuelven mediante el cuadro de variación.

Lección 4: Otras funciones
En esta lección se utilizan tablas de valores para graficar de las funciones $f(x) = ax^3$, $f(x) = \frac{k}{x}$, $f(x) = a\sqrt{x}$ y $f(x) = \sqrt{ax}$ y a partir de estas deducir el dominio y el rango de cada una de ellas. Además, se grafican las funciones $f(x) = \frac{k}{x - p} + q$ como desplazamientos verticales y horizontales de la función $g(x) = \frac{k}{x}$; por otra parte, se grafica la función $h(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ al transformarla en la forma $f(x) = \frac{k}{x - p} + q$.

Lección 5: Práctica en GeoGebra
En esta lección se utiliza el software matemático GeoGebra para realizar gráficas de funciones, desplazamientos horizontales o verticales y la construcción de las gráficas de funciones a partir de un conjunto de puntos de la forma $(x, f(x))$.

Lección 1 Definición de función

1.1 Notación de funciones

Problema inicial

Encuentra el valor de y correspondiente al valor de x en cada función si:

a) $y = 5x - 1$; $x = -3$ b) $y = 4x^2$; $x = \frac{1}{2}$ c) $y = \frac{x^2}{2} + 5$; $x = 10$

Solución

En cada caso debe sustituirse el valor de x para encontrar y:

a)
$$\begin{aligned} y &= 5(-3) - 1 \\ &= -15 - 1 \\ &= -16 \end{aligned}$$

El valor correspondiente a $x = -3$ es $y = -16$.

b)
$$\begin{aligned} y &= 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 4\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

El valor correspondiente a $x = \frac{1}{2}$ es $y = 1$.

c)
$$\begin{aligned} y &= \frac{(10)^2}{2} + 5 \\ &= \frac{100}{2} + 5 \\ &= 55 \end{aligned}$$

El valor correspondiente a $x = 10$ es $y = 55$.

Definición

Dados dos conjuntos A y B, se llama **función de A en B** a la correspondencia que asigna a cada elemento x del conjunto A un único elemento y del conjunto B. Para denotar una función de A en B se escribe $\boldsymbol{f}$**: A ⟶ B**, al elemento x de A se le llama **variable independiente o preimagen**; mientras que el elemento y de B se llama **variable dependiente o imagen**. Cuando se trata con funciones, la variable y se escribe como $\boldsymbol{f(x)}$ y se lee "f de x".

Ya se han estudiado dos funciones específicas: la función lineal $f(x) = ax + b$ y la función $f(x) = ax^2 + c$. Ambas funciones son de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, pues los valores de x y y son números reales. Las funciones también pueden nombrarse utilizando otras letras, por ejemplo, $g(x)$ o $h(x)$.

Dado un valor particular $x = m$, para encontrar el valor de $f(m)$ se sustituye x por m en la **ecuación de la función** $\boldsymbol{f}$.

Ejemplo

Encuentra el valor de $f(x)$ en cada caso:

a) $f(x) = -2x + 7$; $x = -5$ b) $f(x) = 3x^2 + 2$; $x = 2$

$f(x)$ NO significa f multiplicado por x, sino la función f evaluada en x.

Deben sustituirse los valores de x en la ecuación de la función, según sea el caso. En el primer literal, el valor de la función evaluada en $x = -5$ se representa por $f(-5)$; mientras que en el segundo literal, el valor de la función evaluada en $x = 2$ se representa por $f(2)$.

a)
$$\begin{aligned} f(-5) &= -2(-5) + 7 \\ &= 10 + 7 \\ &= 17 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(-5) = 17$.

b)
$$\begin{aligned} f(2) &= 3(2)^2 + 2 \\ &= 3(4) + 2 \\ &= 14 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(2) = 14$.

Problemas

1. En cada caso encuentra el valor de $f(x)$, si x toma el valor dado:

a) $f(x) = x + 4$; $x = 0$
b) $f(x) = 4x - 6$; $x = 1$
c) $f(x) = -\frac{x}{3} + 1$; $x = 6$
d) $f(x) = -5x^2$; $x = 3$
e) $f(x) = x^2 + 4$; $x = -1$
f) $f(x) = -\frac{x^2}{2} - 2$; $x = 2$

2. Dada la función lineal $f(x) = 2x - 3$, ¿cuál debe ser el valor de x para que $f(x) = 5$?

3. Dada la función $f(x) = 4x^2 + 5$, ¿cuáles deben ser los valores de x para que $f(x) = 11$?

Indicador de logro

1.1 Calcula el valor de $f(x)$ usando la ecuación de la función y el valor de x.

Secuencia

En Tercer Ciclo, la ecuación de una función se escribía de la forma $y = ax + b$ o $y = ax^2 + c$. En esta clase se introduce la notación $f(x)$ para funciones; se utilizan también $g(x)$ o $h(x)$ en los casos donde se mencionan dos o más funciones, la definición (general) de una función y las variables independiente y dependiente.

Propósito

Esta clase es para que los estudiantes se familiaricen con la notación de funciones y con evaluar una función en un valor dado. Las funciones utilizadas en el bloque de Problemas corresponden a funciones lineales o cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2 + c$, ambas estudiadas en octavo y noveno grado, respectivamente.

Posibles dificultades

Verificar que los estudiantes escriben correctamente al momento de evaluar una función en un valor específico. Recordarles que $f(x)$ no significa f multiplicado por x.

Solución de problemas:

1a) El valor de la función evaluada en $x = 0$ se representa por $f(0)$. Se sustituye $x = 0$ en la ecuación de la función:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 + 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Luego, $f(0) = 4$.

1c) Se sustituye $x = 6$ en la ecuación de la función:

$$\begin{aligned} f(6) &= -\frac{1}{3}(6) + 1 \\ &= -2 + 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Luego, $f(6) = -1$.

1e) Se sustituye $x = -1$ en la ecuación de la función:

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^2 + 4 \\ &= 1 + 4 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Luego, $f(-1) = 5$.

2. Como $f(x) = 2x - 3$ entonces $2x - 3 = 5$. Se resuelve esta ecuación de primer grado con una incógnita:

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= 5 \\ 2x &= 8 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor de x debe ser igual a 4 para que se cumpla $f(x) = 5$.

1b) El valor de la función evaluada en $x = 1$ se representa por $f(1)$. Se sustituye $x = 1$ en la ecuación de la función:

$$\begin{aligned} f(1) &= 4(1) - 6 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Luego, $f(1) = -2$.

1d) Se sustituye $x = 3$ en la ecuación de la función:

$$\begin{aligned} f(3) &= -5(3)^2 \\ &= -5(9) \\ &= -45 \end{aligned}$$

Luego, $f(3) = -45$.

1f) Se sustituye $x = 2$ en la ecuación de la función:

$$\begin{aligned} f(2) &= -\frac{1}{2}(2)^2 - 2 \\ &= -\frac{1}{2}(4) - 2 \\ &= -4 \end{aligned}$$

Luego, $f(2) = -4$.

3. Como $f(x) = 4x^2 + 5$ entonces $4x^2 + 5 = 11$. Se resuelve esta ecuación cuadrática:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 5 &= 11 \\ 4x^2 &= 6 \\ x &= \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores de x deben ser igual a $\sqrt{\frac{3}{2}}$ o $-\sqrt{\frac{3}{2}}$.

1.2 Gráfica de una función

Problema inicial

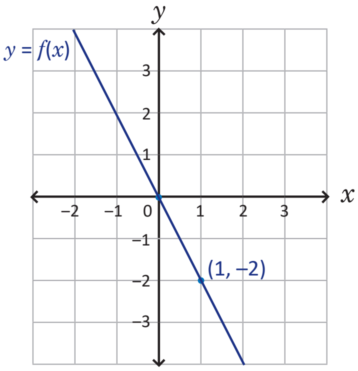
Dadas las funciones $f(x) = -2x$ y $g(x) = 2x^2$:

1. Elabora la gráfica de cada una de ellas.

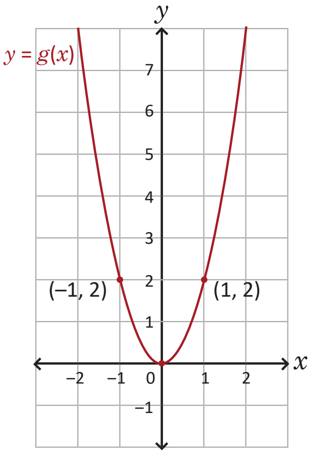
La gráfica de f es una línea recta mientras que la de g es una parábola.

2. Traza líneas rectas verticales en cada gráfica. ¿Cuántas veces cortan las rectas verticales a las gráficas de f y g?
3. Si se continúan trazando rectas verticales, ¿cuántas veces cortarán a las gráficas de las funciones f y g?

Solución

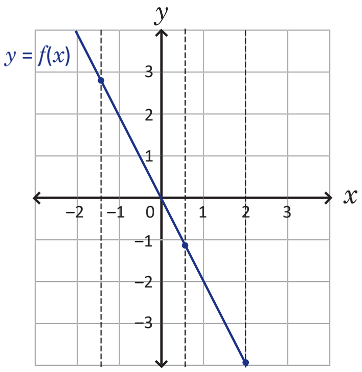


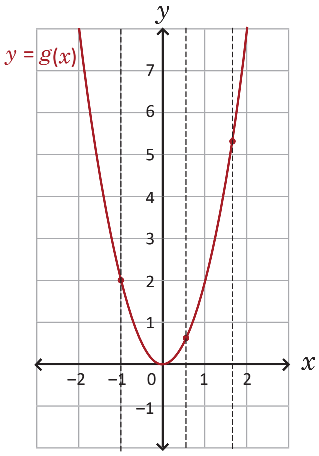
1. La función f es una función lineal y su gráfica es una línea recta que pasa por el origen. A partir de este, si x aumenta una unidad (es decir, $x = 1$) entonces $f(x)$ disminuye 2. La gráfica de $f(x) = -2x$ se presenta a la derecha.



La gráfica de la función g es una parábola con vértice en el origen. Para graficarla se buscan otros dos puntos a la izquierda y derecha del vértice: si $x = -1$ entonces $g(-1) = 2(-1)^2 = 2$ y el punto (–1, 2) pertenece a la parábola de g; de igual forma si $x = 1$ entonces $g(1) = 2(1)^2 = 2$ y el punto (1, 2) pertenece a la parábola. La gráfica de $g(x) = 2x^2$ se presenta a la derecha.

2. En cada gráfica se han trazado tres rectas verticales. Cada una de ellas corta a la gráfica de f o g, según sea el caso, en un único punto:





3. Sin importar la cantidad de rectas verticales que se tracen, cada una de ellas cortará a la gráfica de la función f o g (según sea el caso) en un único punto.

Conclusión

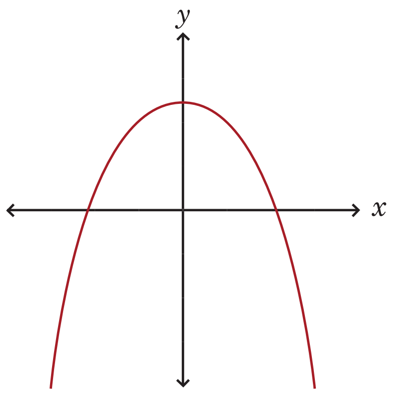
Una línea trazada en el plano cartesiano, cuyos valores de x se encuentran en un intervalo I, corresponde a la gráfica de una función si toda recta vertical trazada en el intervalo I corta a la línea en un único punto. A esta manera de reconocer gráficas de funciones se le conoce como **prueba de la recta vertical**.

Esto ocurre debido a la definición misma de función, a cada elemento x le corresponde un único elemento y. Las rectas verticales trazadas en cada gráfica representan un valor específico para x, si esta recta corta a la gráfica de una función en un único punto, entonces esto indica que para ese valor de x hay un único valor para $f(x)$ o $g(x)$.

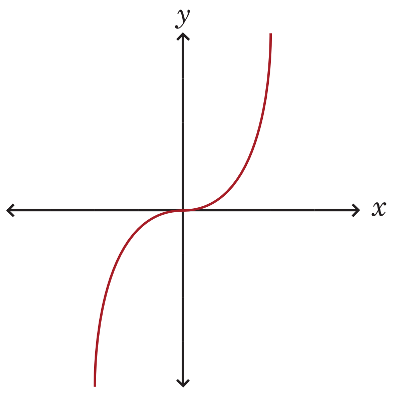
Problemas

Utilizando la prueba de la recta vertical determina, en cada caso, si la línea representa la gráfica de una función (no es necesario encontrar la ecuación de la función):

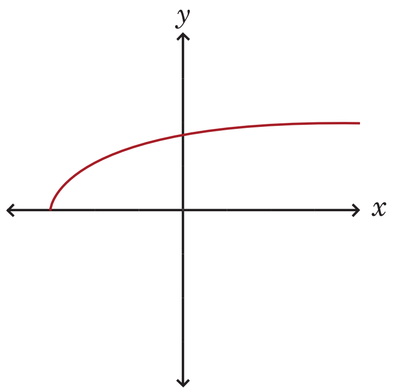
a)



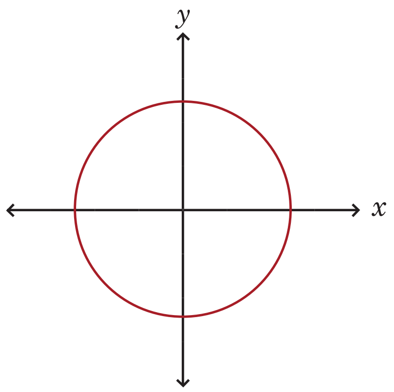
b)



c)



d)



Indicador de logro

1.2 Utiliza la prueba de la recta vertical para identificar gráficas de funciones.

Materiales

Plano cartesiano dibujado sobre un pliego de papel bond para elaborar las gráficas de las funciones del Problema inicial en la pizarra (puede forrar una tabla de madera con papel bond y luego con plástico o cinta ancha transparente, y dibujar una cuadrícula con plumón permanente; este recurso le servirá en las clases que involucran gráficas); metro o escuadra de madera.

Secuencia

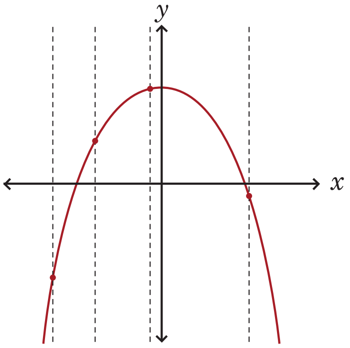
En esta clase se establece el método denominado "prueba de la recta vertical" para analizar si una línea trazada en el plano cartesiano corresponde a la gráfica de una función. Se parte de la definición de función para establecer por qué este método es efectivo para reconocer gráficas de funciones. Se pueden entregar fotocopias del plano cartesiano para elaborar la gráfica de la función.

Propósito

En grados anteriores solo se estudiaron funciones lineales (cuya gráfica es una línea recta) o cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2 + c$ (cuya gráfica es una parábola). Observe que, en el bloque de Problemas, las gráficas corresponden no solo a las ya conocidas sino también a funciones cúbicas, racionales y a la de una circunferencia. No se pretende que los estudiantes sepan la ecuación de la función, sino reconocer gráficas de funciones.

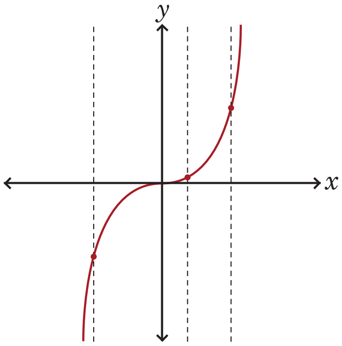
Solución de problemas:

a) Se trazan rectas verticales para verificar si cortan a la línea en un solo punto:



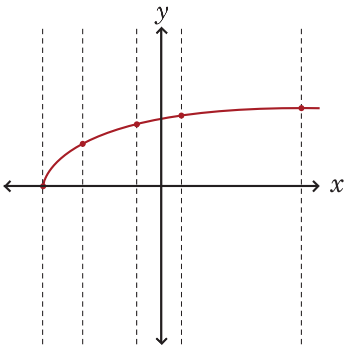
Por lo tanto, la gráfica corresponde a una función.

b) Se trazan rectas verticales para verificar si cortan a la línea en un solo punto:



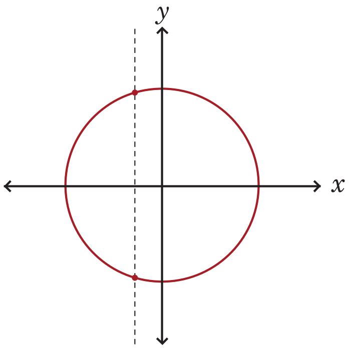
Por lo tanto, la gráfica corresponde a una función.

c) Utilizando la prueba de la recta vertical:



Por lo tanto, la gráfica corresponde a una función.

d) Utilizando la prueba de la recta vertical:



La recta corta a la línea en dos puntos. Por tanto, no corresponde a la gráfica de una función.

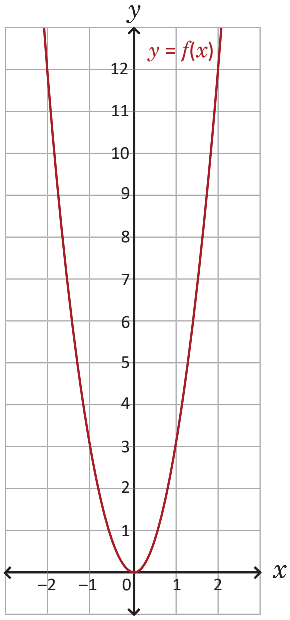
1.3 Dominio y rango de una función*

Problema inicial

Utilizando la ecuación y la gráfica de la función $f(x) = 3x^2$ responde lo siguiente:

1. ¿Para qué valores de x está definida $f(x)$?
2. ¿Cuáles son todos los posibles valores para $f(x)$?

Solución



La gráfica de la función es una parábola abierta hacia arriba con vértice en (0, 0) como se muestra en la figura de la derecha.

1. En la ecuación de la función $f(x) = 3x^2$, la variable independiente x puede tomar el valor de cualquier número real y siempre será posible encontrar su correspondiente $f(x)$. Por lo tanto, $f(x)$ está definida para cualquier número real que tome el valor de x.

2. En la gráfica de la función, el valor más pequeño que toma la variable dependiente $y = f(x)$ ocurre cuando $x = 0$. A medida que x aumenta o disminuye, el valor de $f(x)$ siempre aumentará (esto lo refleja el hecho de que la parábola se abre hacia arriba). Por lo tanto, los valores posibles para $f(x)$ son los números reales mayores o iguales a 0, es decir, los números pertenecientes al intervalo $[0, \infty[$.

Definición

El **dominio** de una función f se denota por D_f y es el conjunto de todos los números x para los cuales $f(x)$ está definida. El **rango** de una función f se denota por R_f y es el conjunto de todos los posibles valores para $f(x)$.

En el caso de las funciones lineales, tanto el dominio como el rango son el conjunto de los números reales, es decir $\mathbb{R}$. Mientras que para funciones de la forma $f(x) = ax^2$ el dominio es $\mathbb{R}$ y el rango depende del valor de a:

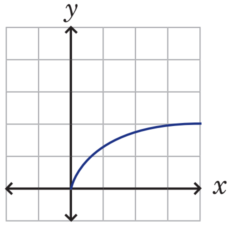
1. Si $a > 0$ entonces $R_f = [0, \infty[$.
2. Si $a < 0$ entonces $R_f =]-\infty, 0]$.

Problemas

1. Encuentra el dominio y el rango de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{3}x + 4$
b) $f(x) = -10x + 3$
c) $f(x) = -x - 5$
d) $f(x) = x^2$
e) $f(x) = 2x^2$
f) $f(x) = -x^2$
g) $f(x) = -3x^2$
h) $f(x) = 3x^2$
i) $f(x) = -2x^2$

2. La gráfica de una función se presenta en la figura de la derecha. Utilizando únicamente este recurso, ¿cuál es el dominio y el rango de la función?



Indicador de logro

1.3 Encuentra el dominio y rango de funciones lineales y de la forma $f(x) = ax^2$ utilizando la ecuación de la función.

Materiales

Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y trazar la gráfica de la función del Problema inicial; plano cartesiano con la gráfica del numeral 2 del bloque de Problemas para colocarlo en la pizarra.

Secuencia

En Tercer Ciclo solamente se estudiaron las ecuaciones y gráficas de las funciones lineales y cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2 + c$. En esta clase se definen, de manera general, los números que conforman el dominio o el rango de una función. Se utilizan además las notaciones D_f y R_f para ambos conjuntos.

Propósito

En el numeral 1 del bloque de Problemas, los estudiantes deben identificar en cada caso qué tipo de función es (lineal o cuadrática) y, usando lo establecido en la Definición, determinar el dominio y el rango; no es necesario que grafiquen la función de cada literal. Si las preguntas son muy complejas, el docente indica qué repuesta puede dar a cada pregunta.

Solución de problemas:

1a) La función $f(x) = \frac{1}{3}x + 4$ es una función lineal (es de la forma $f(x) = ax + b$, con $a = \frac{1}{3}$ y $b = 4$). Por lo tanto, $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = \mathbb{R}$.

1b) La función $f(x) = -10x + 3$ es una función lineal (es de la forma $f(x) = ax + b$, con $a = -10$ y $b = 3$). Por lo tanto, $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = \mathbb{R}$.

1c) Similar a los literales anteriores, la función $f(x) = -x - 5$ es una función lineal. Por lo tanto, $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = \mathbb{R}$.

1d) La función $f(x) = x^2$ es de la forma $f(x) = ax^2$, con $a = 1$. Luego, $D_f = \mathbb{R}$ y como $a > 0$ entonces $R_f = [0, \infty[$.

1e) La función $f(x) = 2x^2$ también es de la forma $f(x) = ax^2$, con $a = 2$, Luego, $D_f = \mathbb{R}$ y como $a > 0$ entonces $R_f = [0, \infty[$.

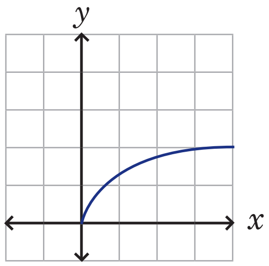
1f) La función $f(x) = -x^2$ también es de la forma $f(x) = ax^2$, con $a = -1$. Así, $D_f = \mathbb{R}$ y como $a < 0$ entonces $R_f =]-\infty, 0]$.

1g) Similar al literal 1f) , en la función $f(x) = -3x^2$, $a = -3$. Así, $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f =]-\infty, 0]$.

1h) Similar al literal 1e), en la función $f(x) = 3x^2$, $a = 3$. Así, $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = [0, \infty[$.

1i) Similar al literal 1f) , en la función $f(x) = -2x^2$, $a = -2$, Así, $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f =]-\infty, 0]$.

2. Sea $f(x)$ la función cuya gráfica está dada. Al observarla se verifica que "inicia" en el origen, o sea, el punto (0, 0). A medida que el valor de x aumenta entonces el valor de y también aumenta. Por lo tanto, $D_f = [0, \infty[$ y $R_f = [0, \infty[$.

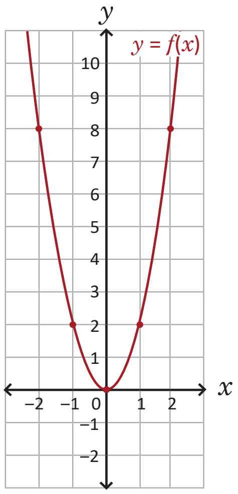


Lección 2 Función cuadrática

2.1 Desplazamiento vertical

Problema inicial

Utilizando la gráfica de la función $f(x) = 2x^2$ realiza lo siguiente:



1. Grafica las funciones $g(x) = 2x^2 + 3$ y $h(x) = 2x^2 - 2$. ¿Cuál es el dominio y el rango en cada una?

La gráfica de $g(x)$ corresponde a un desplazamiento de 3 unidades hacia arriba de la gráfica de f. ¿Hacia dónde será el desplazamiento de h?

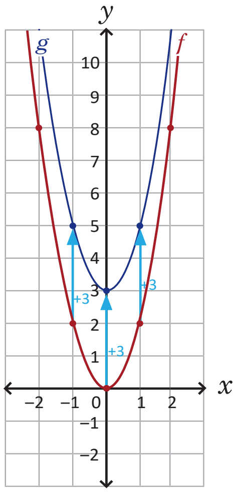
2. Explica qué le ocurre a la gráfica de f para obtener las gráficas de g y h.

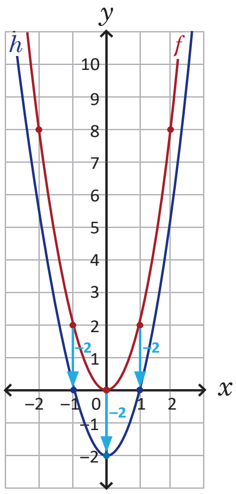
Solución

1. Para graficar $g(x) = 2x^2 + 3$ se desplaza verticalmente la gráfica de $f(x) = 2x^2$ tres unidades hacia arriba (ver figura de la derecha).

   Es decir, si el vértice de la gráfica de f es (0, 0) entonces el de g será (0, 3); si los puntos (–1, 2) y (1, 2) pertenecen a la parábola de f entonces los puntos (–1, 5) y (1, 5) pertenecen a la gráfica de g.

   De la gráfica de la función se deduce que: $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [3, \infty[$.





Mientras que para graficar $h(x) = 2x^2 - 2$ se desplaza verticalmente la gráfica de $f(x) = 2x^2$ dos unidades hacia abajo.

Es decir, si el vértice de la gráfica de f es (0, 0) entonces el de h será (0, –2); si los puntos (–1, 2) y (1, 2) pertenecen a la parábola de f entonces los puntos (–1, 0) y (1, 0) pertenecen a la gráfica de h.

De la gráfica de la función se deduce que: $D_h = \mathbb{R}$ y $R_h = [-2, \infty[$.

2. Utilizando $f(x) = 2x^2$:
   - a) la gráfica de la función $g(x) = 2x^2 + 3$ se obtiene desplazando verticalmente hacia arriba tres unidades la gráfica de $f(x) = 2x^2$;
   - b) la gráfica de la función $h(x) = 2x^2 - 2$ se obtiene desplazando verticalmente hacia abajo dos unidades la gráfica de $f(x) = 2x^2$.

Definición

Dada una función $f(x)$ y un número real k diferente de cero, la gráfica de la función $g(x) = f(x) + k$ es un **desplazamiento vertical de k unidades** de la gráfica de f, y: si $k > 0$ entonces la gráfica se desplaza hacia arriba, y si $k < 0$ entonces la gráfica se desplaza hacia abajo.

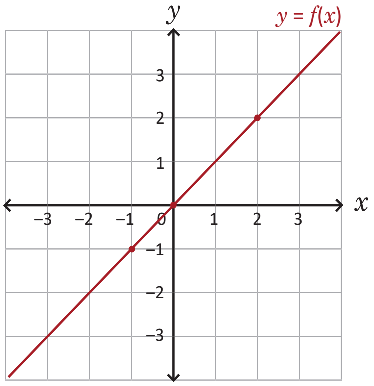
Si $f(x) = ax^2$ entonces la gráfica de $g(x) = ax^2 + k$ es una parábola con vértice en $(0, k)$, y:

1. Si $a > 0$ entonces $R_f = [k, \infty[$.
2. Si $a < 0$ entonces $R_f =]-\infty, k]$.

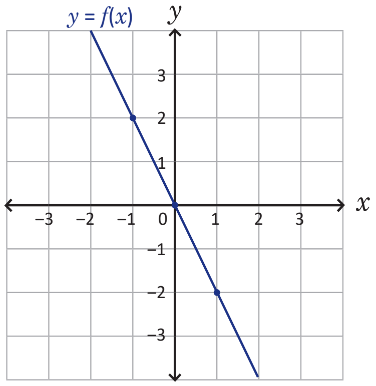
Problemas

Para cada caso y utilizando la gráfica de la función $f(x)$, grafica la función $g(x)$ y encuentra su dominio y rango:

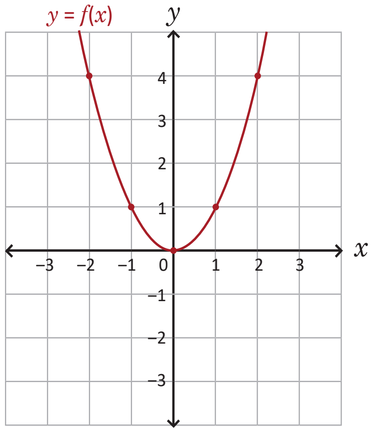
a) $f(x) = x$ y $g(x) = x + 1$



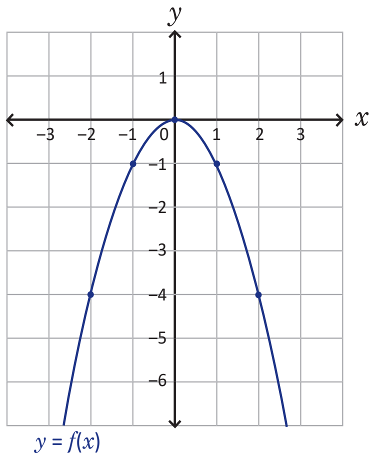
b) $f(x) = -2x$ y $g(x) = -2x - 3$



c) $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 + 2$



d) $f(x) = -x^2$ y $g(x) = -x^2 - 3$



Indicador de logro

2.1 Elabora la gráfica y encuentra el dominio y el rango de las funciones $g(x) = ax + b$ o $f(x) = ax^2 + c$, usando desplazamientos verticales.

Materiales

Plano cartesiano dibujado en papel bond con la gráfica de la función del Problema inicial para colocarlo en la pizarra (puede utilizarse también para resolver el bloque de Problemas); metro o escuadra de madera.

Secuencia

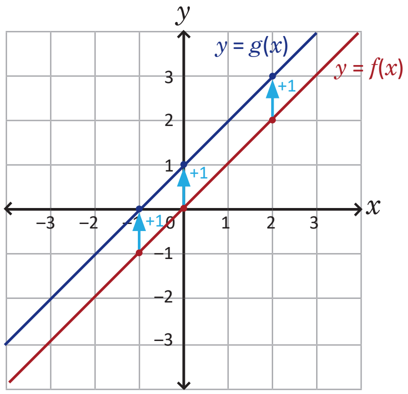
Los desplazamientos verticales se estudiaron en los contenidos de función lineal y función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + c$ en Tercer Ciclo. En esta clase se repasan dichos desplazamientos y se agrega la determinación del dominio y del rango de la función.

Posibles dificultades

Si los estudiantes no recuerdan cómo realizar los desplazamientos verticales puede comenzar con la Definición y desarrollar el Problema inicial como ejemplo.

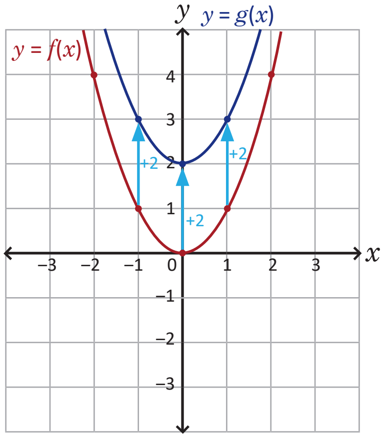
Solución de problemas:

a) Se desplaza la gráfica de f una unidad verticalmente hacia arriba para obtener la gráfica de g:



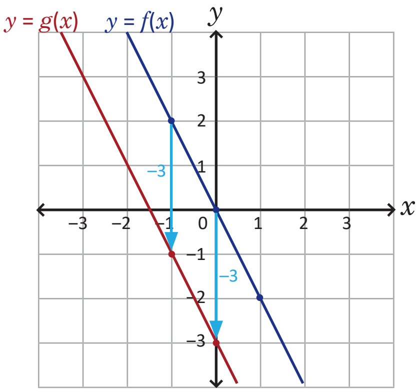
Luego, $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = \mathbb{R}$.

c) Se desplaza la gráfica de f dos unidades verticalmente hacia arriba para obtener la gráfica de g:



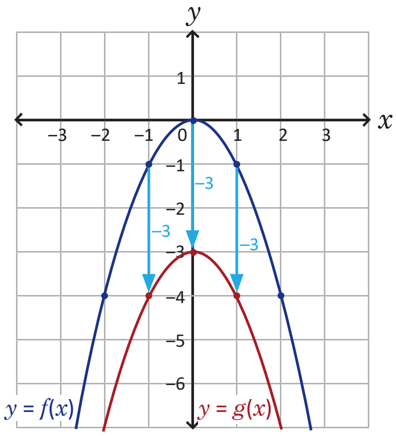
Luego, $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [2, \infty[$.

b) Se desplaza la gráfica de f tres unidades verticalmente hacia abajo para obtener la gráfica de g:



Luego, $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = \mathbb{R}$.

d) Se desplaza la gráfica de f tres unidades verticalmente hacia abajo para obtener la gráfica de g:



Luego, $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g =]-\infty, -3]$.

2.2 Función de la forma $f(x) = a(x - h)^2$, $h > 0$

Problema inicial

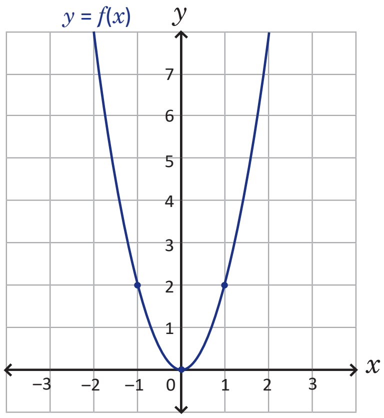
Utilizando la gráfica de la función $f(x) = 2x^2$ realiza lo siguiente:

1. Completa la tabla y grafica la función $g(x) = 2(x - 1)^2$:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	18	8	2	0	2	8	18
$g(x)$							

La gráfica de g es una parábola.

2. ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la gráfica de g? ¿Cuál es el dominio y rango de g?
3. ¿Cómo se debe desplazar la gráfica de f para obtener la de g?



Solución

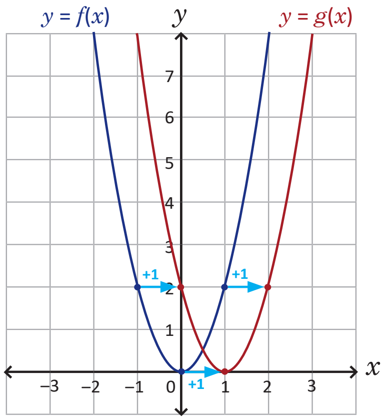
1. La tabla queda de la siguiente manera:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	18	8	2	0	2	8	18
$g(x)$	32	18	8	2	0	2	8

se observa lo siguiente: dado un valor de x, su correspondiente $g(x)$ es igual al valor de $f(x - 1)$. Por ejemplo, si $x = 0$:

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0 - 1) \\ &= f(-1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

La gráfica de g se muestra a la derecha.



2. Las coordenadas del vértice de la gráfica de g son (1, 0), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [0, \infty[$.

3. La gráfica de $f(x) = 2x^2$ se desplazó una unidad horizontalmente hacia la derecha para obtener la gráfica de $g(x) = 2(x - 1)^2$.

Conclusión

Sean $f(x) = ax^2$, donde a es cualquier número real diferente de cero, y $h > 0$. La gráfica de la función:

$$g(x) = f(x - h) = a(x - h)^2$$

es un **desplazamiento horizontal de h unidades hacia la derecha** de la gráfica de f. El vértice de la parábola es $(h, 0)$, $D_g = \mathbb{R}$ y:

1. Si $a > 0$ entonces $R_g = [0, \infty[$.
2. Si $a < 0$ entonces $R_g =]-\infty, 0]$.

Problemas

Utilizando la gráfica de $f(x)$, grafica la función $g(x)$ en cada caso. Encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y rango de la función g:

a) $f(x) = x^2$; $g(x) = (x - 2)^2$

b) $f(x) = -x^2$; $g(x) = -(x - 1)^2$

c) $f(x) = 2x^2$; $g(x) = 2(x - 2)^2$

d) $f(x) = -2x^2$; $g(x) = -2(x - 3)^2$

Indicador de logro

2.2 Grafica y encuentra el dominio y rango de la función $g(x) = a(x - h)^2$ para $h > 0$ usando desplazamientos horizontales de $f(x) = ax^2$.

Materiales

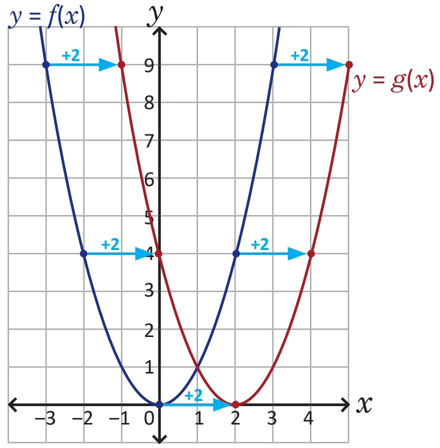
Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y resolver los numerales 1 y 3 del Problema inicial (puede utilizarse en la resolución del bloque de Problemas).

Secuencia

Similar a cuando se realizaron los desplazamientos verticales, se utiliza la gráfica de $f(x) = ax^2$ y tablas de valores para obtener la gráfica de la función $g(x) = f(x - h) = a(x - h)^2$ e identificar el desplazamiento horizontal de f; en este caso, el número h es positivo.

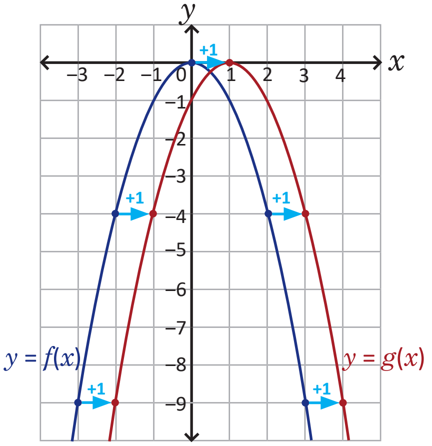
Solución de problemas:

a) Se desplaza la gráfica de $f(x) = x^2$ dos unidades horizontalmente hacia la derecha para obtener la gráfica de $g(x) = (x - 2)^2$:



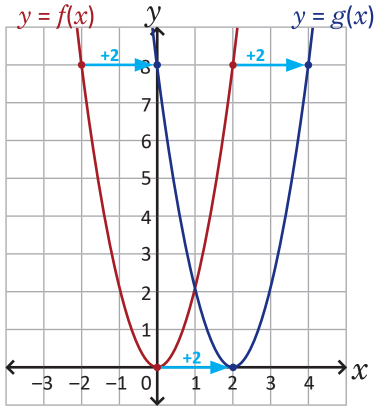
Las coordenadas del vértice son (2, 0), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [0, \infty[$.

b) Se desplaza la gráfica de $f(x) = -x^2$ una unidad horizontalmente hacia la derecha para obtener la gráfica de $g(x) = -(x - 1)^2$:



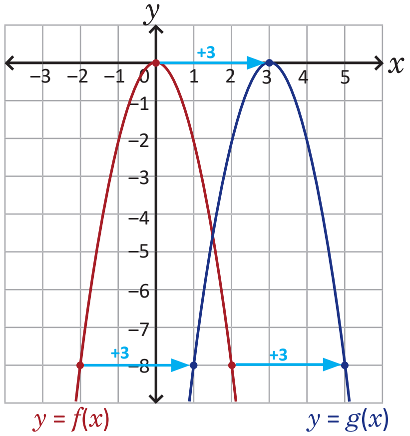
Las coordenadas del vértice son (1, 0), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g =]-\infty, 0]$.

c) Se desplaza la gráfica de $f(x) = 2x^2$ dos unidades horizontalmente hacia la derecha para obtener la gráfica de $g(x) = 2(x - 2)^2$.



Las coordenadas del vértice son (2, 0), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [0, \infty[$.

d) Se desplaza la gráfica de $f(x) = -2x^2$ tres unidades horizontalmente hacia la derecha para obtener la gráfica de $g(x) = -2(x - 3)^2$.



Las coordenadas del vértice son (3, 0), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g =]-\infty, 0]$.

2.3 Función de la forma $f(x) = a(x - h)^2$, $h < 0$

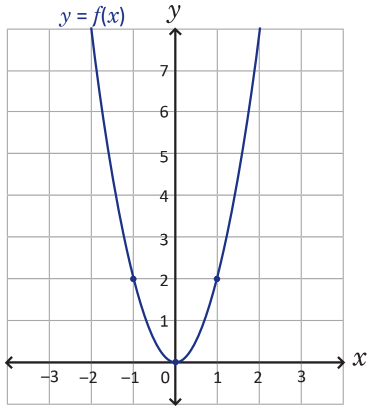
Problema inicial

Utilizando la gráfica de la función $f(x) = 2x^2$ realiza lo siguiente:

1. Completa la tabla y grafica la función $g(x) = 2(x + 1)^2$:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	18	8	2	0	2	8	18
$g(x)$							

La gráfica de g es una parábola.



2. ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la gráfica de g? ¿Cuál es el dominio y rango de g?

3. ¿Cómo se debe desplazar la gráfica de f para obtener la de g?

Solución

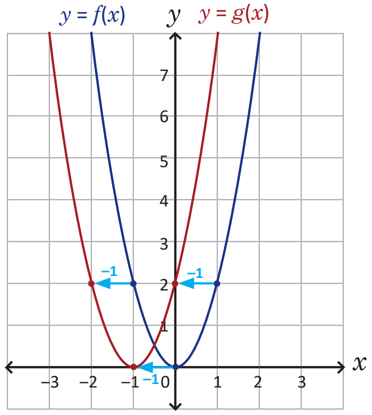
1. La tabla queda de la siguiente manera:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	18	8	2	0	2	8	18
$g(x)$	8	2	0	2	8	18	32

se observa lo siguiente: dado un valor de x, su correspondiente $g(x)$ es igual al valor de $f(x + 1)$. Por ejemplo, si $x = 0$:

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0 + 1) \\ &= f(1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

La gráfica de g se muestra a la derecha.



2. Las coordenadas del vértice de la gráfica de g son $(-1, 0)$, $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [0, +\infty[$.

3. La gráfica de $f(x) = 2x^2$ se desplazó una unidad horizontalmente hacia la izquierda para obtener la gráfica de $g(x) = 2(x + 1)^2$.

La ecuación de la función g también puede escribirse como $g(x) = 2[x - (-1)]^2$.

Conclusión

Sean $f(x) = ax^2$ donde a es cualquier número real diferente de cero, y $h < 0$. La gráfica de la función:

$$g(x) = f(x - h) = a(x - h)^2$$

es un **desplazamiento horizontal de h unidades hacia la izquierda** de la gráfica de f. El vértice de la parábola es $(h, 0)$, $D_g = \mathbb{R}$ y:

1. Si $a > 0$ entonces $R_g = [0, \infty[$.
2. Si $a < 0$ entonces $R_g =]-\infty, 0]$.

Problemas

Utilizando la gráfica de $f(x)$, grafica la función $g(x)$ en cada caso. Encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y rango de la función g:

a) $f(x) = x^2$; $g(x) = (x + 2)^2$

b) $f(x) = -x^2$; $g(x) = -(x + 1)^2$

c) $f(x) = 2x^2$; $g(x) = 2(x + 2)^2$

d) $f(x) = -2x^2$; $g(x) = -2(x + 3)^2$

Indicador de logro

2.3 Grafica y encuentra el dominio y el rango de la función $g(x) = a(x - h)^2$ para $h < 0$ usando desplazamientos horizontales de $f(x) = ax^2$.

Materiales

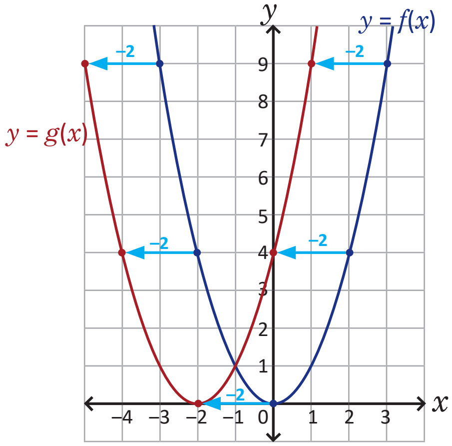
Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y resolver los numerales 1 y 3 del Problema inicial (puede utilizarse en la resolución del bloque de Problemas).

Secuencia

En esta clase se utiliza la gráfica de $f(x) = ax^2$ y tablas de valores para obtener la gráfica de la función $g(x) = f(x - h) = a(x - h)^2$ e identificar el desplazamiento horizontal de f cuando el número h es negativo.

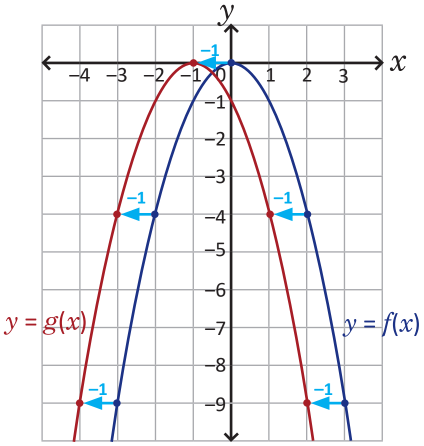
Solución de problemas:

a) Se desplaza la gráfica de $f(x) = x^2$ dos unidades horizontalmente hacia la izquierda para obtener la gráfica de $g(x) = (x + 2)^2$.



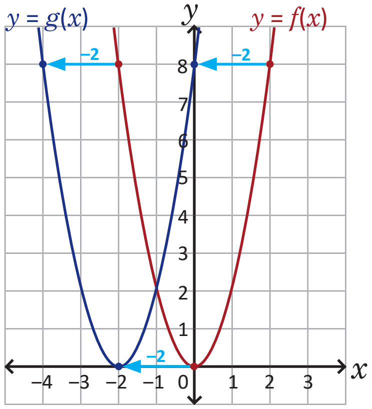
Las coordenadas del vértice son $(-2, 0)$, $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [0, \infty[$.

b) Se desplaza la gráfica de $f(x) = -x^2$ dos unidades horizontalmente hacia la izquierda para obtener la gráfica de $g(x) = -(x + 1)^2$.



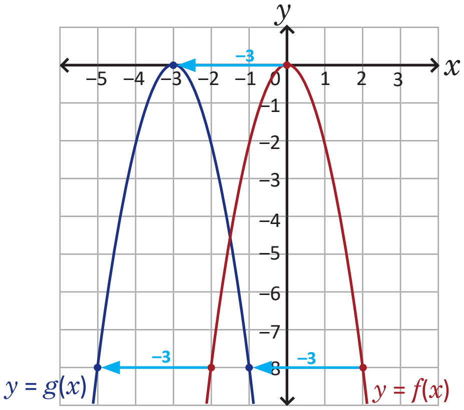
Las coordenadas del vértice son $(-1, 0)$, $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g =]-\infty, 0]$.

c) Se desplaza la gráfica de $f(x) = 2x^2$ dos unidades horizontalmente hacia la izquierda para obtener la gráfica de $g(x) = 2(x + 2)^2$.



Las coordenadas del vértice son $(-2, 0)$, $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [0, \infty[$.

d) Se desplaza la gráfica de $f(x) = -2x^2$ tres unidades horizontalmente hacia la izquierda para obtener la gráfica de $g(x) = -2(x + 3)^2$.

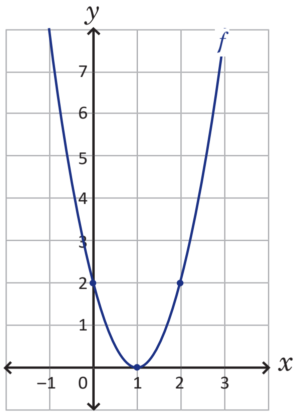


Las coordenadas del vértice son $(-3, 0)$, $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g =]-\infty, 0]$.

2.4 Función de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$, parte 1

Problema inicial

Utilizando la gráfica de la función $f(x) = 2(x - 1)^2$ realiza lo siguiente:

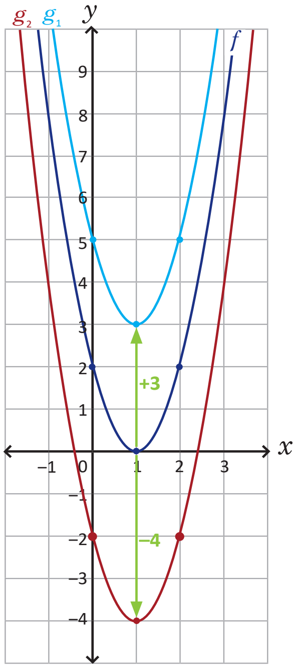


1. Grafica las funciones $g_1(x) = 2(x - 1)^2 + 3$ y $g_2(x) = 2(x - 1)^2 - 4$. Describe cómo se debe desplazar la gráfica de f para obtener cada gráfica.

La gráfica de $g(x) = f(x) + k$ es un desplazamiento vertical de k unidades de la gráfica de f, hacia arriba si k es positivo y hacia abajo si k es negativo.

2. Encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y el rango en cada caso.

Solución



1. Ambas funciones son de la forma $f(x) + k$, es decir, son desplazamientos verticales de k unidades.

   En el caso de $g_1(x) = 2(x - 1)^2 + 3$, $k = 3$ y por tanto la gráfica de f se desplaza tres unidades verticalmente hacia arriba. La parábola en color celeste de la figura de la derecha corresponde a la gráfica de g_1.

   En el caso de $g_2(x) = 2(x - 1)^2 - 4$, $k = -4$ y por tanto la gráfica de f se desplaza cuatro unidades verticalmente hacia abajo. La parábola en color rojo de la figura de la derecha corresponde a la gráfica de g_2.

2. Las coordenadas del vértice de la gráfica de la función g_1 son (1, 3) y además $D_{g_1} = \mathbb{R}$ y $R_{g_1} = [3, \infty[$.

   Mientras que las coordenadas del vértice de la gráfica de la función g_2 son (1, –4) y además $D_{g_2} = \mathbb{R}$ y $R_{g_2} = [-4, \infty[$.

Conclusión

Sean $f(x) = a(x - h)^2$ donde a y h son números reales cualesquiera, y a es diferente de cero. La gráfica de la función:

$$g(x) = a(x - h)^2 + k$$

donde k es un número real, es un **desplazamiento vertical de k unidades** de la gráfica de f. Si $k > 0$ el desplazamiento es hacia arriba, y si $k < 0$ el desplazamiento es hacia abajo. El **vértice de la parábola de g** es **(h, k)**, $D_g = \mathbb{R}$ y:

1. Si $a > 0$ entonces $R_g = [k, \infty[$.
2. Si $a < 0$ entonces $R_g =]-\infty, k]$.

Problemas

Utilizando la gráfica de $f(x)$, grafica la función $g(x)$ en cada caso. Encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y rango de la función g:

a) $f(x) = (x - 2)^2$; $g(x) = (x - 2)^2 + 3$

b) $f(x) = -(x - 1)^2$; $g(x) = -(x - 1)^2 + 2$

c) $f(x) = 2(x + 2)^2$; $g(x) = 2(x + 2)^2 - 1$

d) $f(x) = -2(x + 3)^2$; $g(x) = -2(x + 3)^2 - 4$

Indicador de logro

2.4 Grafica y encuentra el dominio y el rango de la función $g(x) = a(x - h)^2 + k$ usando desplazamientos verticales de $f(x) = a(x - h)^2$.

Materiales

Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y resolver el numeral 1 del Problema inicial (puede utilizarse en la resolución del bloque de Problemas).

Secuencia

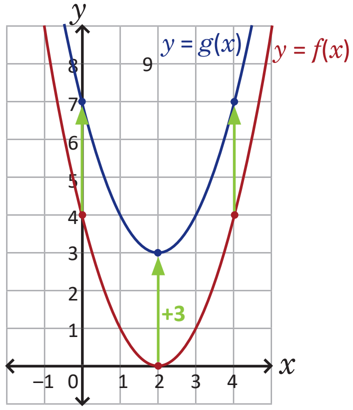
En esta clase, se parte de la gráfica de una función cuadrática de la forma $f(x) = a(x - h)^2$ para trazar la de $g(x) = a(x - h)^2 + k$ usando los desplazamientos verticales vistos en la clase 2.1 y determinar sus elementos: vértice, dominio y rango.

Propósito

Las gráficas de la función f de los literales del bloque de Problemas ya han sido trazadas en las clases 2.2 y 2.3 por tanto los estudiantes pueden retomarlas directamente. Esta clase les ayudará para identificar que pueden realizar desplazamientos horizontales y verticales a la vez.

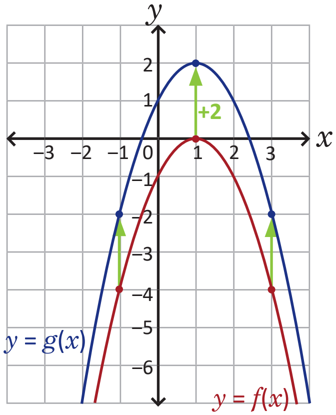
Solución de problemas:

a) Se desplaza la gráfica de $f(x) = (x - 2)^2$ tres unidades verticalmente hacia arriba para obtener la gráfica de $g(x) = (x - 2)^2 + 3$:



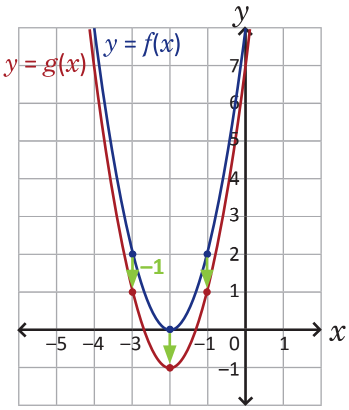
Las coordenadas del vértice son (2, 3), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [3, \infty[$.

b) Se desplaza la gráfica de $f(x) = -(x - 1)^2$ dos unidades verticalmente hacia arriba para obtener la gráfica de $g(x) = -(x - 1)^2 + 2$:



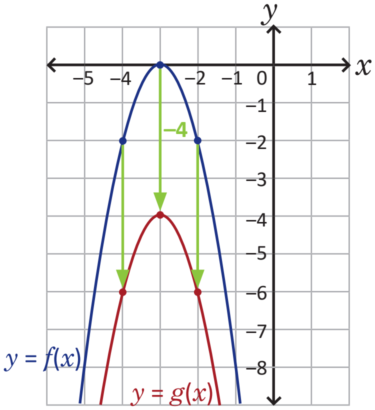
Las coordenadas del vértice son (1, 2), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g =]-\infty, 2]$.

c) La gráfica de g queda como sigue:



Las coordenadas del vértice son (−2, −1), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [-1, \infty[$.

d) La gráfica de g queda como sigue:



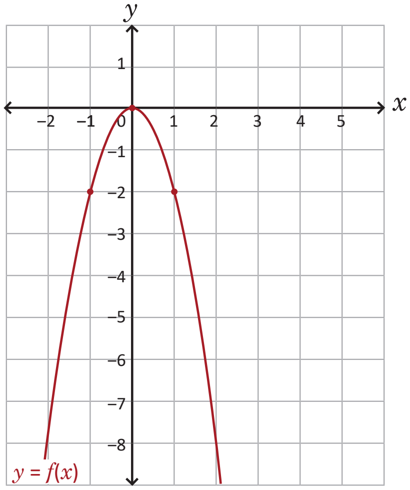
Las coordenadas del vértice son (−3, −4), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g =]-\infty, -4]$.

2.5 Función de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$, parte 2

Problema inicial

Utilizando la gráfica de la función $f(x) = -2x^2$ realiza lo siguiente:

1. Grafica la función $g(x) = -2(x - 3)^2 - 1$. Describe cómo se debe desplazar la gráfica de f para obtener g.
2. Encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y el rango de la función g.

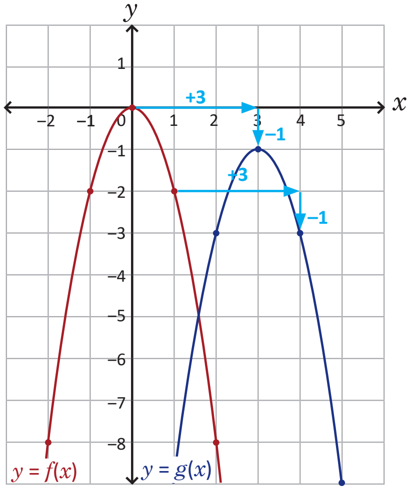


Solución

1. La función g es de la forma $f(x - h) + k$, es decir, combina desplazamientos tanto horizontales como verticales. En este caso, $h = 3$ y $k = -1$:

   Primero se desplaza la gráfica de f tres unidades horizontalmente hacia la derecha, luego se desplaza una unidad verticalmente hacia abajo. La gráfica de g corresponde a la parábola en color azul de la figura de la derecha.

2. Las coordenadas del vértice de la gráfica de g son (3, –1) y además $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g =]-\infty, -1]$.



Conclusión

Dada una función $f(x) = ax^2$, donde a es un número real diferente de cero. La gráfica de la función:

$$g(x) = a(x - h)^2 + k$$

es una parábola que resulta de desplazar **h unidades horizontalmente** y **k unidades verticalmente** la gráfica de f. El vértice de la gráfica de g es (h, k), $D_g = \mathbb{R}$ y:

1. Si $a > 0$ entonces $R_g = [k, \infty[$.
2. Si $a < 0$ entonces $R_g =]-\infty, k]$.

Problemas

Para cada caso, traza la gráfica de $f(x)$ y a partir de esta elabora la gráfica de $g(x)$. Encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y rango de g:

a) $f(x) = x^2$; $g(x) = (x + 1)^2 + 2$

b) $f(x) = -x^2$; $g(x) = -(x + 3)^2 - 3$

c) $f(x) = 3x^2$; $g(x) = 3(x - 2)^2 + 1$

d) $f(x) = -3x^2$; $g(x) = -3(x - 4)^2 - 2$

Indicador de logro

2.5 Grafica y encuentra el dominio y el rango de la función $g(x) = a(x - h)^2 + k$ usando desplazamientos horizontales y verticales de $f(x) = ax^2$.

Materiales

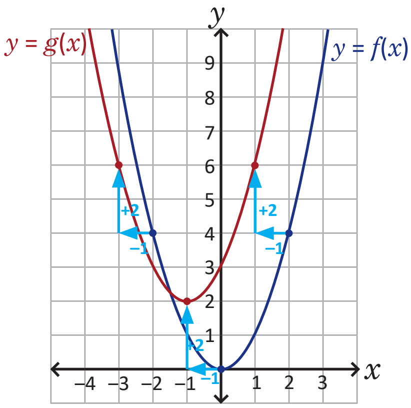
Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y resolver el numeral 1 del Problema inicial (puede utilizarse en la resolución del bloque de Problemas).

Secuencia

Se combinan desplazamientos horizontales y verticales para trazar la gráfica de una función cuadrática de la forma $g(x) = a(x - h)^2 + k$ a partir de la de $f(x) = ax^2$.

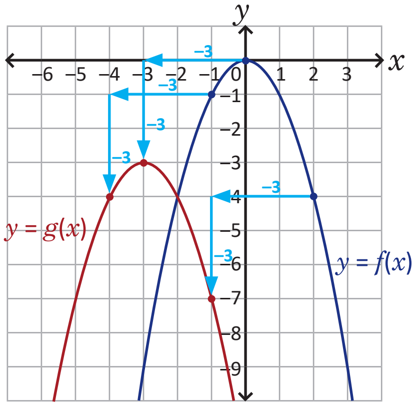
Solución de problemas:

a) En este caso, $h = -1$ y $k = 2$, la gráfica de f se desplaza una unidad horizontalmente hacia la izquierda y dos verticalmente hacia arriba para obtener la de g:



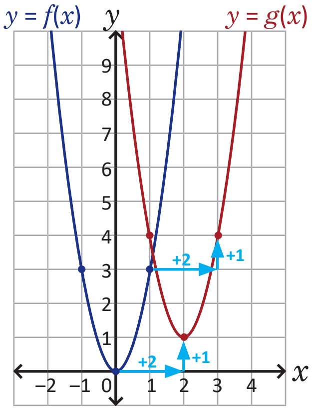
Las coordenadas del vértice son (–1, 2), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [2, \infty[$.

b) En este caso, $h = -3$ y $k = -3$; la gráfica de f se desplaza tres unidades horizontalmente hacia la izquierda y tres verticalmente hacia abajo para obtener la de g:



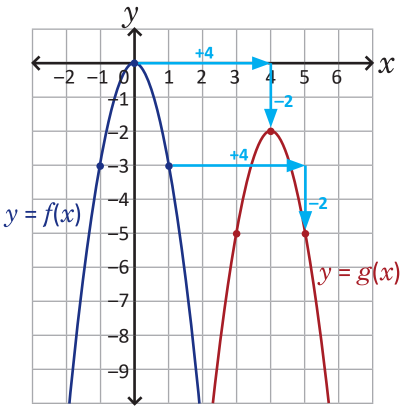
Las coordenadas del vértice son (–3, –3), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g =]-\infty, -3]$.

c) En este caso, $h = 2$ y $k = 1$; la gráfica de f se desplaza dos unidades horizontalmente hacia la derecha y una verticalmente hacia arriba para obtener la de g:



Las coordenadas del vértice son (2, 1), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [1, \infty[$.

d) En este caso, $h = 4$ y $k = -2$, la gráfica de f se desplaza cuatro unidades horizontalmente hacia la derecha y dos verticalmente hacia abajo para obtener la de g:



Las coordenadas del vértice son (4, –2), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g =]-\infty, -2]$.

Lección 2

2.6 Función de la forma $f(x) = ax^2 + bx$*

Problema inicial

Traza la gráfica y encuentra el dominio y rango de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 - 6x$ b) $g(x) = -2x^2 - 4x$

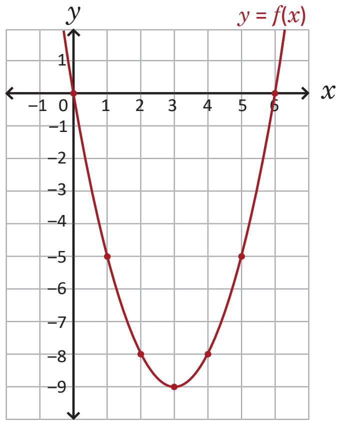
Completa los cuadrados en las ecuaciones de cada función.

Solución

a) Se completa el cuadrado en la ecuación de la función f:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 \\ &= (x^2 - 6x + \mathbf{3}^2) - \mathbf{3}^2 \\ &= (x - \mathbf{3})^2 - \mathbf{3}^2 \\ &= (x - \mathbf{3})^2 - 9 \end{aligned}$$

La función f es de la forma $a(x - h)^2 + k$: $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-9, \infty[$ y su gráfica es una parábola abierta hacia arriba con vértice en (3, –9) como lo muestra la figura de la derecha.

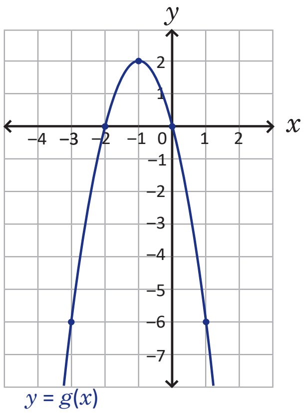


$f(x) = (x - 3)^2 - 9$ es un desplazamiento de 3 unidades horizontalmente a la derecha y 9 unidades verticalmente hacia abajo de la gráfica de $h(x) = x^2$.

b) De forma similar, se completa el cuadrado en la ecuación de la función g:

$$\begin{aligned} g(x) &= -2(x^2 + 2x) \\ &= -2\left[x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2\right] \\ &= -2[x^2 + 2x + \mathbf{1}^2 - \mathbf{1}^2] \\ &= -2[(x + \mathbf{1})^2 - 1] \\ &= -2(x + \mathbf{1})^2 + 2 \end{aligned}$$

La función g es de la forma $a(x - h)^2 + k$: $D_g = \mathbb{R}$, $R_g =]-\infty, 2]$ y su gráfica es una parábola abierta hacia abajo con vértice en (–1, 2) como lo muestra la figura de la derecha.



$g(x) = -2(x + 1)^2 + 2$ es un desplazamiento de 1 unidad horizontalmente a la izquierda y 2 unidades verticalmente hacia arriba de la gráfica de $h(x) = -2x^2$.

En resumen

Dada una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx$, esta puede llevarse a la forma $a(x - h)^2 + k$ completando cuadrados en la ecuación de la función f y su gráfica es una parábola, abierta hacia arriba si $a > 0$ o abierta hacia abajo si $a < 0$.

Problemas

Completa los cuadrados en cada caso para trazar la gráfica de f, y encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y rango de la función:

a) $f(x) = x^2 - 4x$ b) $f(x) = -x^2 + 2x$ c) $f(x) = 3x^2 + 6x$

Indicador de logro

2.6 Completa cuadrados en la ecuación de la función $f(x) = ax^2 + bx$ para trazar su gráfica y encontrar su dominio y rango.

Materiales

Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y trazar las gráficas de las funciones del Problema inicial (puede utilizarse en la resolución del bloque de Problemas).

Secuencia

En esta clase se comienzan a trabajar funciones cuadráticas cuya ecuación está expresada en su forma general. Si los estudiantes tienen muchas dificultades para resolver el Problema inicial, el docente debe desarrollar e ir explicando paso a paso la Solución.

Propósito

En la clase sólo se trabajan con funciones cuya ecuación es de la forma $ax^2 + bx$, esto para facilitar los cálculos al momento de completar cuadrados. En las clases 2.7 y 2.8 se agregan a las ecuaciones el término independiente.

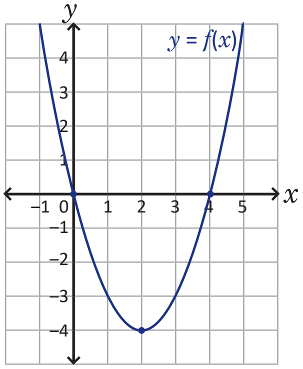
Solución de problemas:

a) Se completa el cuadrado en la ecuación de la función $f(x) = x^2 - 4x$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 \\ &= (x^2 - 4x + 2^2) - 2^2 \\ &= (x-2)^2 - 4 \end{aligned}$$

La gráfica de $y = x^2$ se desplaza 2 unidades horizontalmente a la derecha y 4 verticalmente hacia abajo para obtener la gráfica de $f(x) = (x-2)^2 - 4$.

Así, $f(x) = (x-2)^2 - 4$; su gráfica es una parábola abierta hacia arriba con vértice en (2, –4), $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-4, \infty[$.

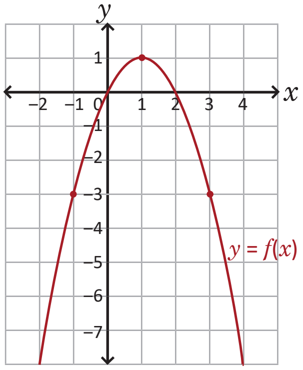


b) Se completa el cuadrado en la ecuación de la función $f(x) = -x^2 + 2x$:

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2 - 2x) \\ &= -\left[x^2 - 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{2}{2}\right)^2 \\ &= -(x^2 - 2x + 1^2) + 1^2 \\ &= -(x-1)^2 + 1 \end{aligned}$$

La gráfica de $y = -x^2$ se desplaza una unidad horizontalmente a la derecha y una verticalmente hacia arriba para obtener la gráfica de $f(x) = -(x-1)^2 + 1$.

Luego, $f(x) = -(x-1)^2 + 1$; su gráfica es una parábola abierta hacia abajo con vértice en (1, 1), $D_f = \mathbb{R}$, $R_f =]-\infty, 1]$.

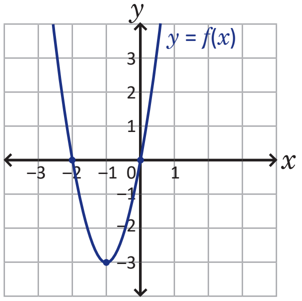


c) Se completa el cuadrado en la ecuación de la función $f(x) = 3x^2 + 6x$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x^2 + 2x) \\ &= 3\left[x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{2}{2}\right)^2 \\ &= 3(x^2 + 2x + 1^2) - 3 \\ &= 3(x+1)^2 - 3 \end{aligned}$$

La gráfica de $y = 3x^2$ se desplaza una unidad horizontalmente a la izquierda y 3 verticalmente hacia abajo para obtener la gráfica de $f(x) = 3(x+1)^2 - 3$.

Luego, $f(x) = 3(x+1)^2 - 3$; su gráfica es una parábola abierta hacia arriba con vértice en (–1, –3), $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-3, \infty[$.



2.7 Función de la forma $f(x) = x^2 + bx + c$

Problema inicial

Traza la gráfica y encuentra el vértice, el dominio y rango de la función:

$$f(x) = x^2 - 4x + 9.$$

Completa el cuadrado en la ecuación de f.

Solución

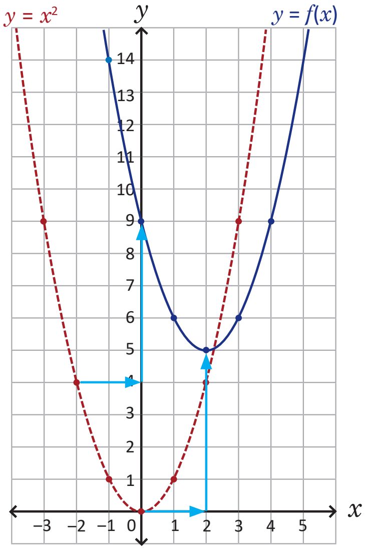
Se completa el cuadrado en la ecuación de la función f:

$$f(x) = \left[x^2 - 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2\right] + 9$$

$$= (x^2 - 4x + \mathbf{2}^2) - \mathbf{2}^2 + 9$$

$$= (x - \mathbf{2})^2 - 4 + 9$$

$$= (x - \mathbf{2})^2 + 5$$



luego la función f se ha reescrito en la forma $(x - h)^2 + k$: $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [5, \infty[$ y su gráfica es una parábola abierta hacia arriba con vértice en (2, 5) como lo muestra la figura de la derecha.

$f(x) = (x - 2)^2 + 5$ es un desplazamiento de 2 unidades horizontalmente a la derecha y 5 unidades verticalmente hacia arriba de la gráfica de $y = x^2$.

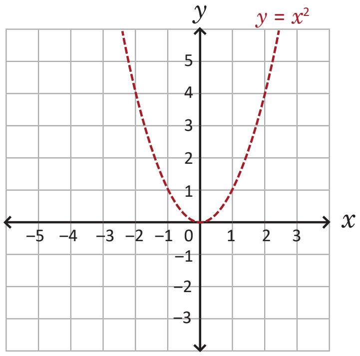
En resumen

Dada una función de la forma $f(x) = x^2 + bx + c$, esta puede llevarse a la forma $(x - h)^2 + k$ completando cuadrados en la ecuación de la función f y su gráfica es una parábola, abierta hacia arriba.

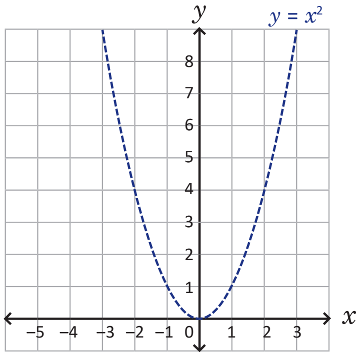
Problemas

Completa los cuadrados en cada caso para trazar la gráfica de f, encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y el rango de la función:

a) $f(x) = x^2 + 2x - 2$



b) $f(x) = x^2 + 4x + 5$



c) $f(x) = x^2 - 6x + 7$

d) $f(x) = x^2 - 8x + 18$

Indicador de logro

2.7 Completa cuadrados en la ecuación de la función $f(x) = x^2 + bx + c$ para trazar su gráfica y encontrar su dominio y rango.

Materiales

Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y trazar la gráfica de la función del Problema inicial (puede utilizarse en la resolución del bloque de Problemas).

Secuencia

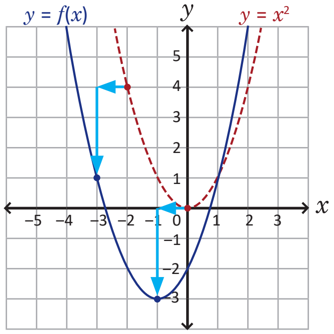
En las ecuaciones de las funciones presentadas en la clase se agrega el término independiente; además, en todas ellas el coeficiente de la variable x^2 es igual a 1, para facilitar los cálculos.

Solución de problemas:

a) Se completa el cuadrado en la ecuación de la función $f(x) = x^2 + 2x - 2$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{2}{2}\right)^2 - 2 \\ &= (x^2 + 2x + 1^2) - 1 - 2 \\ &= (x + 1)^2 - 3 \end{aligned}$$

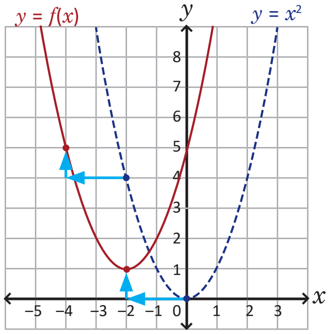
Su gráfica es una parábola abierta hacia arriba con vértice en (–1, –3), $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-3, \infty[$.



b) Se completa el cuadrado en la ecuación de la función $f(x) = x^2 + 4x + 5$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{4}{2}\right)^2 + 5 \\ &= (x^2 + 4x + 2^2) - 4 + 5 \\ &= (x + 2)^2 + 1 \end{aligned}$$

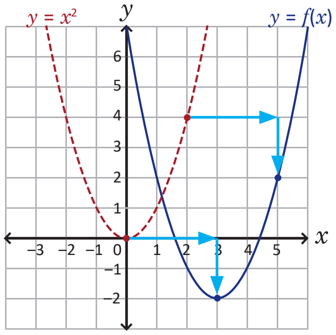
Su gráfica es una parábola abierta hacia arriba con vértice en (–2, 1), $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [1, \infty[$.



c) Completando el cuadrado:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[x^2 - 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 7 \\ &= (x^2 - 6x + 3^2) - 9 + 7 \\ &= (x - 3)^2 - 2 \end{aligned}$$

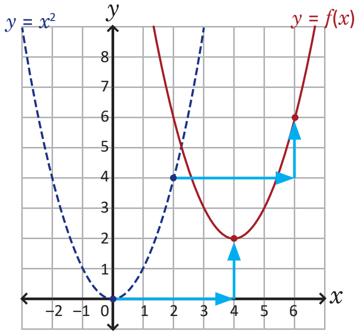
Su gráfica es una parábola abierta hacia arriba con vértice en (3, –2), $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-2, \infty[$.



d) Completando el cuadrado:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[x^2 - 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{8}{2}\right)^2 + 18 \\ &= (x^2 - 8x + 4^2) - 16 + 18 \\ &= (x - 4)^2 + 2 \end{aligned}$$

Su gráfica es una parábola abierta hacia arriba con vértice en (4, 2), $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [2, \infty[$.



2.8 Función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$

Problema inicial

Traza la gráfica y encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y rango de la función:

$$f(x) = -2x^2 - 12x - 16.$$

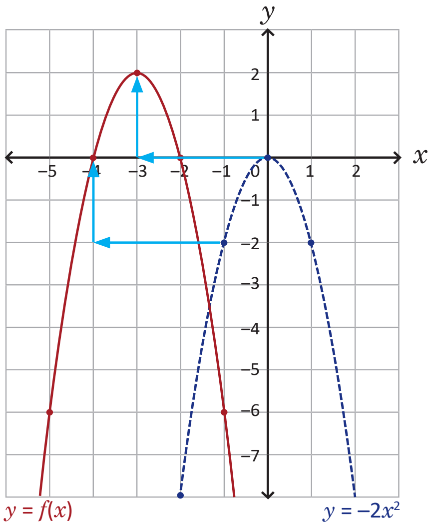
Completa el cuadrado en la ecuación de la función f.

Solución

Se completa el cuadrado en la ecuación de la función f:

$$\begin{aligned} f(x) &= -2[x^2 + 6x] - 16 \\ &= -2\left[x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2\right] - 16 \\ &= -2[x^2 + 6x + \mathbf{3}^2 - \mathbf{3}^2] - 16 \\ &= -2[(x + \mathbf{3})^2 - 9] - 16 \\ &= -2(x + \mathbf{3})^2 + 18 - 16 \\ &= -2(x + \mathbf{3})^2 + 2 \end{aligned}$$

luego, la función f se ha reescrito en la forma $a(x - h)^2 + k$: $D_f = \mathbb{R}$, $R_f =]-\infty, 2]$ y su gráfica es una parábola abierta hacia abajo con vértice en (–3, 2) como lo muestra la figura de la derecha.



La función $f(x) = -2(x + 3)^2 + 2$ es un desplazamiento de 3 unidades horizontalmente a la izquierda y 2 unidades verticalmente hacia arriba de la gráfica de $y = -2x^2$.

Definición

La función de la forma $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$, donde a, b y c son números reales cualesquiera y a es diferente de cero se llama **función cuadrática**.

Una función cuadrática también puede escribirse en la forma $\boldsymbol{a(x - h)^2 + k}$ completando el cuadrado en la ecuación de la función f y, por tanto, su gráfica es una parábola con vértice en el punto (h, k) que se abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.

El dominio de una función cuadrática siempre es igual al conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) y el rango dependerá del valor de a y de la segunda coordenada del vértice (h, k) de la gráfica de la función:

1. Si $a > 0$ entonces $R_g = [k, \infty[$.
2. Si $a < 0$ entonces $R_g =]-\infty, k]$.

Problemas

Completa los cuadrados en cada caso para trazar la gráfica de f, encuentra además las coordenadas del vértice, el dominio y el rango de la función:

a) $f(x) = -x^2 + 8x - 13$

b) $f(x) = 3x^2 + 12x + 11$

c) $f(x) = 2x^2 - 20x + 44$

d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$

Indicador de logro

2.8 Completa cuadrados en la ecuación de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ para trazar su gráfica y encontrar su dominio y rango.

Materiales

Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y trazar las gráfica de la función del Problema inicial (puede utilizarse en la resolución del bloque de Problemas).

Secuencia

Se continúa con funciones cuadráticas cuyas ecuaciones poseen término independiente. La diferencia con la clase 2.7 es que en esta, el coeficiente de la variable x^2 es diferente de 1.

Posibles dificultades

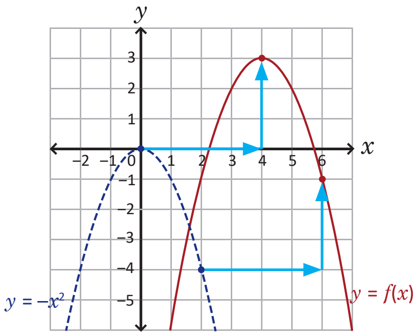
Verificar los procesos de los estudiantes al completar cuadrados; si tienen dificultades con los cálculos pueden realizarlos paso a paso para no olvidar algún término.

Solución de problemas:

a) Se completa el cuadrado en la ecuación de la función $f(x) = -x^2 + 8x - 13$:

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2 - 8x) - 13 \\ &= -\left[x^2 - 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2\right] - 13 \\ &= -(x^2 - 8x + 4^2) + 4^2 - 13 \\ &= -(x - 4)^2 + 3 \end{aligned}$$

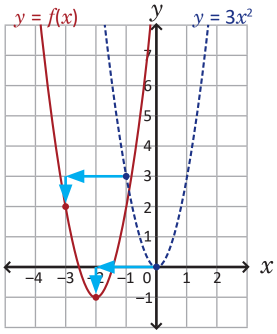
Su gráfica es una parábola abierta hacia abajo con vértice en (4, 3), $D_f = \mathbb{R}$, $R_f =]-\infty, 3]$.



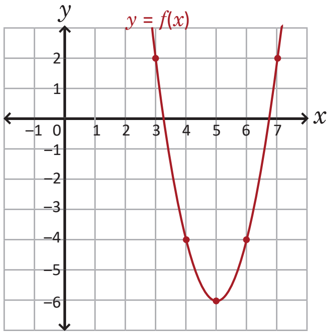
b) Se completa el cuadrado en la ecuación de la función $f(x) = 3x^2 + 12x + 11$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x^2 + 4x) + 11 \\ &= 3\left[x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2\right] + 11 \\ &= 3(x^2 + 4x + 2^2) - 3(2^2) + 11 \\ &= 3(x + 2)^2 - 1 \end{aligned}$$

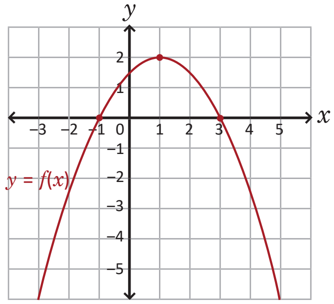
Su gráfica es una parábola abierta hacia arriba con vértice en (–2, –1), $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-1, \infty[$.



c) Al completar el cuadrado en la ecuación se obtiene $f(x) = 2(x - 5)^2 - 6$. La gráfica es una parábola abierta hacia arriba, con vértice en (5, –6), $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-6, \infty[$.



d) Al completar el cuadrado en la ecuación se obtiene $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + 2$. La gráfica es una parábola abierta hacia abajo, con vértice en (1, 2), $D_f = \mathbb{R}$, $R_f =]-\infty, 2]$.



2.9 Condiciones iniciales

Problema inicial

Encuentra la ecuación de la función cuadrática f en cada caso:
1. El vértice de la gráfica de f es (4, 5) y pasa por el punto (2, –7).
2. f es de la forma $ax^2 + bx$ y la gráfica pasa por los puntos (–1, –10) y (–4, –16).

Solución

1. Las condiciones iniciales indican las coordenadas del vértice de la gráfica de f, por tanto, es conveniente escribir la ecuación en la forma:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k \qquad \text{------------------ (1)}$$

sustituyendo los valores de h y k en (1), se tiene:

$$f(x) = a(x - 4)^2 + 5$$

ahora, si la gráfica pasa por el punto (2, –7) entonces cuando x =2, $f(2) = -7$. Se sustituye en la ecuación anterior y se despeja el valor de a:

$$-7 = a(2 - 4)^2 + 5$$
$$-7 = 4a + 5$$
$$-12 = 4a$$
$$-3 = a$$

Por lo tanto, la ecuación de la función es $f(x) = -3(x - 4)^2 + 5$.

$f(x) = -3(x - 4)^2 + 5$ también puede escribirse como:
$f(x) = -3x^2 + 24x - 43$.

2. Las condiciones iniciales indican que $f(x) = ax^2 + bx$. Si la gráfica de f pasa por el punto (–1, –10), entonces cuando $x = -1$, $f(-1) = -10$. Se sustituyen estos valores y se despeja a en la forma de la función:

$$-10 = a(-1)^2 + b(-1)$$
$$-10 = a - b$$
$$-10 + b = a \qquad \text{------------------ (2)}$$

de forma similar, cuando $x = -4$, $f(-4) = -16$. Se sustituyen estos valores, incluyendo el de a encontrado en (2), y se despeja el valor de b:

$$-16 = a(-4)^2 + b(-4)$$
$$-16 = (b - 10)16 - 4b$$
$$-16 = 16b - 160 - 4b$$
$$144 = 12b$$
$$12 = b$$

Luego, $a = 2$ y la ecuación de la función es $f(x) = 2x^2 + 12x$.

En resumen

Si f es una función cuadrática, entonces su ecuación puede escribirse en la forma $a(x - h)^2 + k$ o $ax^2 + bx + c$. Si en las condiciones iniciales se proporcionan las coordenadas del vértice de la gráfica de f entonces conviene escribirla en la forma $a(x - h)^2 + k$.

Problemas

1. Encuentra la ecuación de la función cuadrática f en cada caso:
   a) el vértice de la gráfica de f es (–2, 1) y pasa por el punto (0, 5);
   b) el vértice de la gráfica de f es (3, –6) y pasa por el punto (4, –8);
   c) f es de la forma $ax^2 + bx$ y su gráfica pasa por los puntos (8, 0) y (2, –12).

2. Encuentra la ecuación de una función cuadrática f si su gráfica pasa por los puntos (–2, 8), (0, 2) y (2, 4).

Indicador de logro

2.9 Encuentra la ecuación de una función cuadrática que satisface determinadas condiciones.

Secuencia

Conocidas las formas que puede tener la ecuación de una función cuadrática, en esta clase se plantean problemas donde los estudiantes deben encontrar la ecuación de la función que satisface determinadas condiciones.

Posibles dificultades

Recuerde a los estudiantes que, si bien pueden utilizar cualquiera de las formas para la ecuación de una función cuadrática, dependerá de las condiciones del problema el escoger una de ellas. De preferencia, deben utilizar la forma para la cual eviten el resolver sistemas de una ecuación cuadrática y otra lineal.

Solución de problemas:

1a) Como en el enunciado del problema se proporcionan las coordenadas del vértice entonces se escribe la ecuación de la función f en la forma $a(x - h)^2 + k$, o sea, $f(x) = a(x - h)^2 + k$. Al sustituir los valores de $h = -2$ y $k = 1$ se tiene $f(x) = a(x + 2)^2 + 1$; luego, si la gráfica pasa por (0, 5) entonces $f(0) = 5$:

$$\begin{aligned} a(0 + 2)^2 + 1 &= 5 \\ a(4) + 1 &= 5 \\ 4a &= 4 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x) = (x + 2)^2 + 1$.

1b) Similar a 1a) , $f(x) = a(x - h)^2 + k$; al sustituir los valores de $h = 3$ y $k = -6$ se tiene $f(x) = a(x - 3)^2 - 6$. Luego, si la gráfica pasa por (4, –8) entonces $f(4) = -8$:

$$\begin{aligned} a(4 - 3)^2 - 6 &= -8 \\ a(1) - 6 &= -8 \\ a &= -2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x) = -2(x - 3)^2 - 6$.

1c) En este caso, $f(x) = ax^2 + bx$; además, si la gráfica pasa por (8, 0) y (2, –12) entonces $f(8) = 0$ y $f(2) = -12$. Se sustituyen estos valores y se resuelve el sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

$$a(8)^2 + b(8) = 0 \ \Rightarrow 8a + b = 0 \ \Rightarrow b = -8a$$

$$a(2)^2 + b(2) = -12 \ \Rightarrow 2a + b = -6 \ \Rightarrow 2a - 8a = -6 \ \Rightarrow -6a = -6 \ \Rightarrow a = 1$$

Luego, $b = -8$ y $f(x) = x^2 - 8x$.

2. En el enunciado no se indican las coordenadas del vértice, solo se sabe que la gráfica de la función pasa por los puntos (–2, 8), (0, 2) y (2, 4). Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$, entonces $f(0) = 2$; o sea:

$$a(0)^2 + b(0) + c = 2 \Rightarrow c = 2$$

y $f(x) = ax^2 + bx + 2$. Se sustituyen los valores $f(-2) = 8$ y $f(2) = 4$, y se resuelve el sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

$$\begin{aligned} a(-2)^2 + b(-2) + 2 = 8 \ &\Rightarrow 4a \cancel{-2b} = 6 \\ a(2)^2 + b(2) + 2 = 4 \ &\Rightarrow \underline{4a \cancel{+2b} = 2} \\ &\quad\ \ 8a \quad\ \ = 8 \\ &\qquad\qquad a = 1 \end{aligned}$$

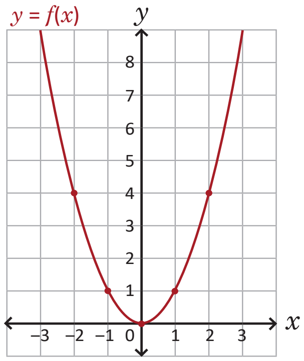
Recomendar a los estudiantes que comiencen evaluando el punto (0, 2).

Luego, $b = -1$ y $f(x) = x^2 - x + 2$.

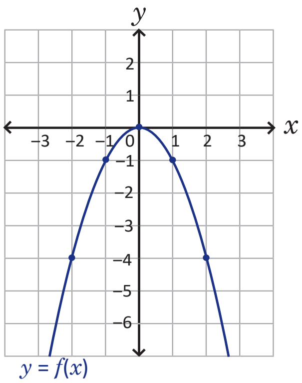
2.10 Practica lo aprendido

Utilizando la gráfica de f traza la gráfica de g; encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y el rango en cada caso:

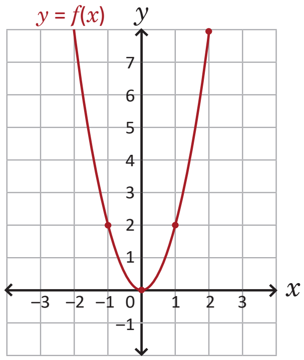
a) $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 + 3$



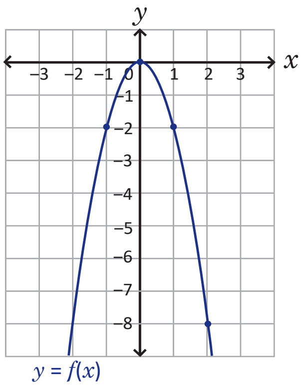
b) $f(x) = -x^2$ y $g(x) = -x^2 + 2$



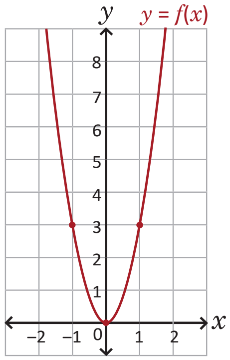
c) $f(x) = 2x^2$ y $g(x) = 2x^2 - 1$



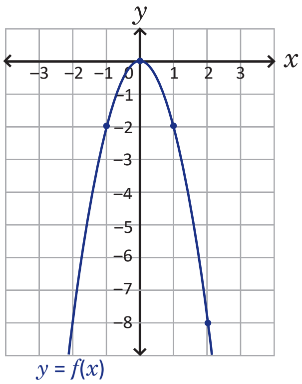
d) $f(x) = -2x^2$ y $g(x) = -2x^2 - 3$



e) $f(x) = 3x^2$ y $g(x) = 3(x - 4)^2$



f) $f(x) = -2x^2$ y $g(x) = -2(x - 1)^2$

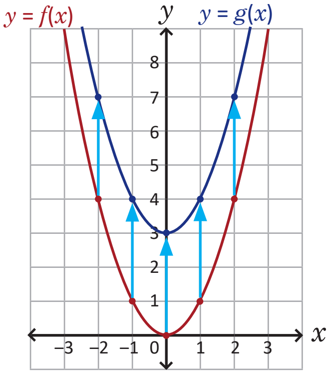


Indicador de logro

2.10 Resuelve problemas correspondientes a funciones cuadráticas.

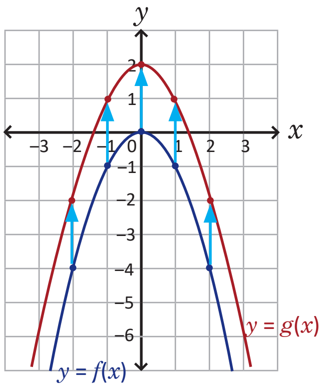
Solución de problemas:

a) Se desplaza la gráfica de $f(x) = x^2$ tres unidades verticalmente hacia arriba para obtener la gráfica de $g(x) = x^2 + 3$:



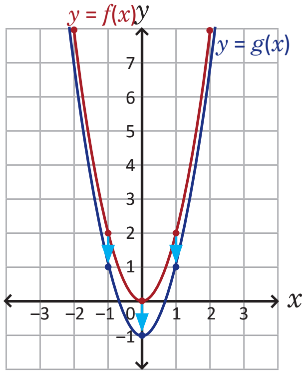
Las coordenadas del vértice de la gráfica de g son (0, 3), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [3, \infty[$.

b) Se desplaza la gráfica de $f(x) = -x^2$ dos unidades verticalmente hacia arriba para obtener la gráfica de $g(x) = -x^2 + 2$:



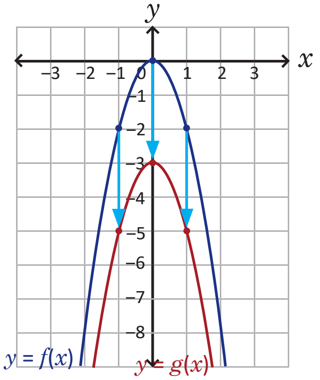
Las coordenadas del vértice de la gráfica de g son (0, 2), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g =]-\infty, 2]$.

c) Se desplaza la gráfica de $f(x) = 2x^2$ una unidad verticalmente hacia abajo para obtener la gráfica de $g(x) = 2x^2 - 1$:



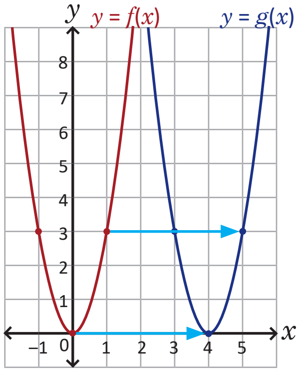
Las coordenadas del vértice de la gráfica de g son (0, –1), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [-1, \infty[$.

d) Se desplaza la gráfica de $f(x) = -2x^2$ tres unidades verticalmente hacia abajo para obtener la gráfica de $g(x) = -2x^2 - 3$:



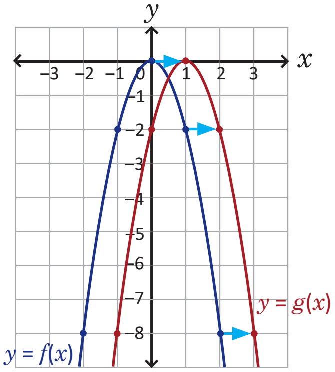
Las coordenadas del vértice de la gráfica de g son (0, –3), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g =]-\infty, -3]$.

e) La gráfica de $f(x) = 3x^2$ se desplaza cuatro unidades horizontalmente hacia la derecha:



Las coordenadas del vértice de la gráfica de g son (4, 0), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [0, \infty[$.

f) La gráfica de $f(x) = -2x^2$ se desplaza una unidad horizontalmente hacia la derecha:

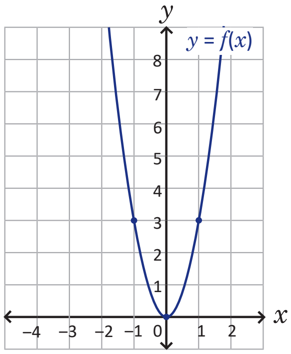


Las coordenadas del vértice de la gráfica de g son (1, 0), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g =]-\infty, 0]$.

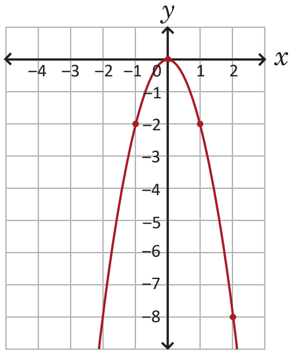
2.11 Practica lo aprendido

1. Utilizando la gráfica de f traza la gráfica de g; encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y el rango en cada caso:

a) $f(x) = 3x^2$ y $g(x) = 3(x + 2)^2$

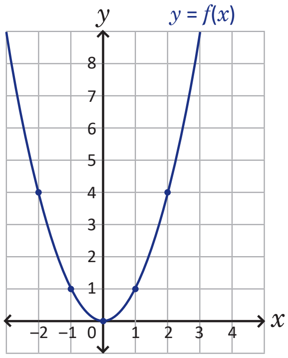


b) $f(x) = – 2x^2$ y $g(x) = – 2(x + 2)^2$

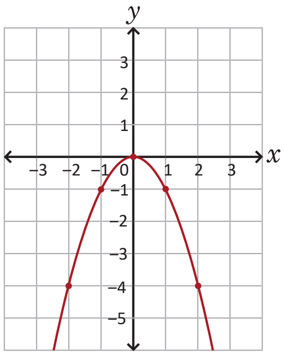


y = f(x)

c) $f(x) = x^2$ y $g(x) = (x – 4)^2 + 2$



d) $f(x) = – x^2$ y $g(x) = – (x + 1)^2 + 3$



y = f(x)

2. Completa los cuadrados en cada caso para trazar la gráfica de f, encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y el rango de la función:

a) $f(x) = – 3x^2 + 6x$	b) $f(x) = 5x^2 + 10x$	c) $f(x) = – x^2 – 4x$
d) $f(x) = x^2 – 2x + 2$	e) $f(x) = x^2 + 2x + 2$	f) $f(x) = x^2 – 10x + 23$
g) $f(x) = – x^2 – 4x – 7$	h) $f(x) = 2x^2 – 12x + 13$	i) $f(x) = – 3x^2 – 6x + 2$

3. Encuentra la ecuación de la función cuadrática f si:

a) la gráfica de f tiene vértice en (0, 0) y pasa por el punto (2, 2);

b) la gráfica de f tiene vértice en (0, –1) y pasa por el punto (–1, –3);

c) la gráfica de f tiene vértice en (3, 0) y pasa por el punto (2, 4);

d) la gráfica de f tiene vértice en (2, –5) y pasa por el punto (4, 3);

e) f es de la forma $ax^2 + bx$ y su gráfica pasa por los puntos (2, 0) y (–1, 3);

f) f es de la forma $ax^2 + bx$ y su gráfica pasa por los puntos (1, –4) y (4, 8);

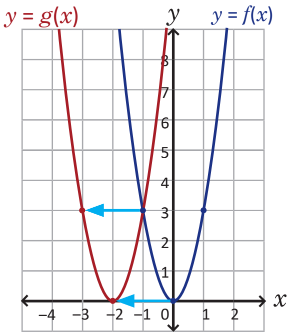
g) la gráfica de f pasa por los puntos (–2, 3), (0, –3) y (1, 0).

Indicador de logro

2.11 Resuelve problemas correspondientes a funciones cuadráticas.

Solución de problemas:

1a)

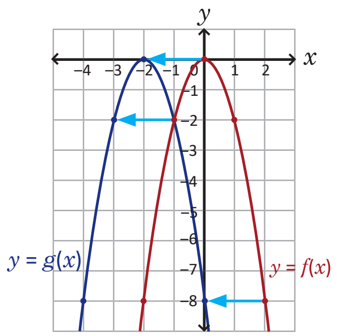


Vértice: $(-2, 0)$

$D_g = \mathbb{R}$

$R_g = [0, \infty[$

1b)

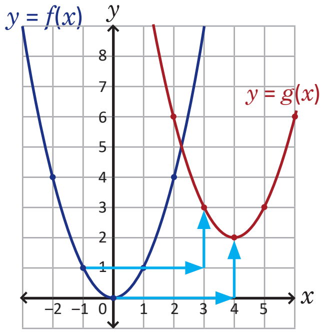


Vértice: $(-2, 0)$

$D_g = \mathbb{R}$

$R_g =]-\infty, 0]$

1c)

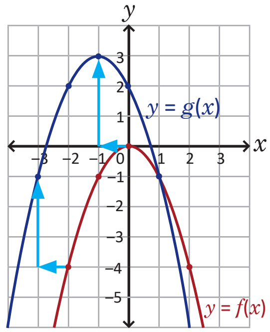


Vértice: $(4, 2)$

$D_g = \mathbb{R}$

$R_g = [2, \infty[$

1d)



Vértice: $(-1, 3)$

$D_g = \mathbb{R}$

$R_g =]-\infty, 3]$

2a) $f(x) = -3(x-1)^2 + 3$; vértice en $(1, 3)$, $D_f = \mathbb{R}$, $R_f =]-\infty, 3]$.

2b) $f(x) = 5(x+1)^2 - 5$; vértice en $(-1, -5)$, $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-5, \infty[$.

2c) $f(x) = -(x+2)^2 + 4$; vértice en $(-2, 4)$, $D_f = \mathbb{R}$, $R_f =]-\infty, 4]$.

2d) $f(x) = (x-1)^2 + 1$; vértice en $(1, 1)$, $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [1, \infty[$.

2e) $f(x) = (x+1)^2 + 1$; vértice en $(-1, 1)$, $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [1, \infty[$.

2f) $f(x) = (x-5)^2 - 2$, vértice en $(5, -2)$, $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-2, \infty[$.

2g) $f(x) = -(x+2)^2 - 3$; vértice en $(-2, -3)$, $D_f = \mathbb{R}$, $R_f =]-\infty, -3]$.

2h) $f(x) = 2(x-3)^2 - 5$; vértice en $(3, -5)$, $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-5, \infty[$.

2i) $f(x) = -3(x+1)^2 + 5$; vértice en $(-1, 5)$, $D_f = \mathbb{R}$, $R_f =]-\infty, 5]$.

Los estudiantes deben elaborar la gráfica en cada literal del problema 2.

3a) Como el vértice es $(0, 0)$ entonces $f(x) = ax^2$, Si pasa por $(2, 2)$ entonces $f(2) = 2$:

$$a(2)^2 = 2 \Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Luego, $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

3b) Como el vértice es $(0, -1)$ entonces $f(x) = ax^2 - 1$. Si $f(-1) = -3$ entonces:

$$a(-1)^2 - 1 = -3 \Rightarrow a = -2$$

Luego, $f(x) = -2x^2 - 1$.

3c) $f(x) = a(x-3)^2$, además $f(2) = 4$, es decir:

$$a(2-3)^2 = 4 \Rightarrow a = 4$$

Luego, $f(x) = 4(x-3)^2$.

3d) $f(x) = a(x-2)^2 - 5$; además $f(4) = 3$, o sea:

$$a(4-2)^2 - 5 = 3 \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

Luego, $f(x) = 2(x-2)^2 - 5$.

3e) $f(x) = ax^2 + bx$; además $f(2) = 0$ y $f(-1) = 3$:

$$\begin{aligned} a(2)^2 + b(2) = 0 \quad &\Rightarrow 2a + b = 0 \\ a(-1)^2 + b(-1) = 3 \Rightarrow &\quad a - b = 3 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema se tiene $a = 1$ y $b = -2$, luego, $f(x) = x^2 - 2x$.

3f) $f(x) = ax^2 + bx$; además $f(1) = -4$ y $f(4) = 8$:

$$\begin{aligned} a(1)^2 + b(1) = -4 \Rightarrow &\quad a + b = -4 \\ a(4)^2 + b(4) = 8 \quad &\Rightarrow 4a + b = 2 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema se tiene $a = 2$ y $b = -6$; luego, $f(x) = 2x^2 - 6x$.

3g) $f(x) = 2x^2 + x - 3$

3.1 Monotonía

Problema inicial

Dadas las funciones cuadráticas $f(x) = 2(x - 1)^2 - 5$ y $g(x) = - 2(x - 1)^2 + 5$ responde lo siguiente:

1. Si $- 1 \leq x \leq 1$, ¿entre cuáles números se encuentran $f(x)$ y $g(x)$?
2. Si $1 \leq x \leq 3$, ¿entre cuáles números se encuentra $f(x)$ y $g(x)$?

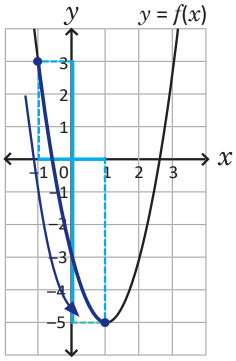
Utiliza las gráficas de f y g.

Solución

1. Se trazan las gráficas de las funciones para poder determinar los valores de $f(x)$ y $g(x)$: la parábola de f es abierta hacia arriba con vértice en (1, –5); mientras que la parábola de g es abierta hacia abajo con vértice en (1, 5). En ambas gráficas, sobre el eje x se ha sombreado en verde el intervalo [–1, 1] de los valores que toma x.

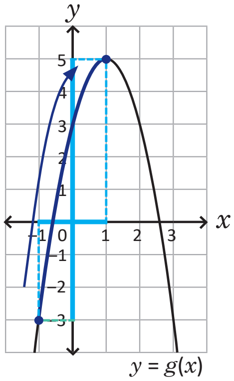
En f: a medida que x aumenta de –1 a 1, $f(x)$ disminuye de $f(-1) = 3$ a $f(1) = -5$.

Luego, $-5 \leq f(x) \leq 3$.



En g: a medida que x aumenta de –1 a 1, $g(x)$ aumenta de $g(-1) = -3$ a $g(1) = 5$.

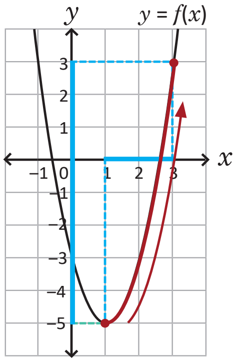
Luego, $-3 \leq g(x) \leq 5$.



2. Nuevamente, utilizando las gráficas de las funciones se concluye lo siguiente:

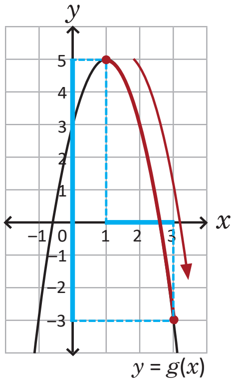
En f: a medida que x aumenta de 1 a 3, $f(x)$ aumenta de $f(1) = -5$ a $f(3) = 3$.

Luego, $-5 \leq f(x) \leq 3$.



En g: a medida que x aumenta de 1 a 3, $g(x)$ disminuye de $g(1) = 5$ a $g(3) = -3$.

Luego, $-3 \leq g(x) \leq 5$.



Definición

Una función f es **creciente** en un intervalo $[x_1, x_2]$ si a medida que x aumenta de x_1 a x_2 entonces $f(x)$ aumenta de $f(x_1)$ a $f(x_2)$, es decir, **si m y n pertenecen a $[x_1, x_2]$ con $m \leq n$ entonces $f(m) \leq f(n)$**. Por otro lado f es **decreciente** en un intervalo $[x_1, x_2]$ si a medida que x aumenta de x_1 a x_2 entonces $f(x)$ disminuye de $f(x_1)$ a $f(x_2)$, es decir, **si m y n pertenecen a $[x_1, x_2]$ con $m \leq n$ entonces $f(m) \geq f(n)$**.

Una función es **monótona** en $[x_1, x_2]$ si es creciente o decreciente en el intervalo.

Problemas

Para cada caso, determina si la función f es creciente o decreciente en el intervalo dado; escribe el intervalo donde se encuentran los valores de $f(x)$:

a) $f(x) = (x - 5)^2$; $5 \leq x \leq 7$

b) $f(x) = - 2x^2 + 3$; $0 \leq x \leq 2$

c) $f(x) = - 3(x - 3)^2 - 1$; $2 \leq x \leq 3$

d) $f(x) = (x + 2)^2 + 3$; $-5 \leq x \leq -3$

Indicador de logro

3.1 Determina la monotonía de una función cuadrática en un intervalo dado y encuentra el rango de valores para $f(x)$.

Materiales

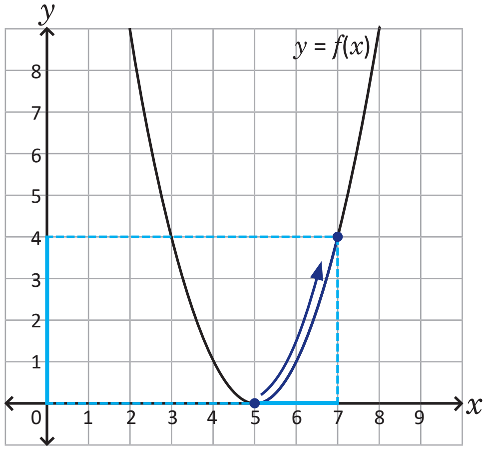
Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y trazar las gráficas de las funciones del Problema inicial (puede utilizarse en la resolución del bloque de Problemas).

Secuencia

En esta clase se analiza la monotonía de una función cuadrática en un intervalo dado. En el Problema inicial y en el bloque de Problemas el valor de h del vértice (h, k) no pertenece al intervalo dado o es uno de sus extremos, por lo cual la función es monótona en dicho intervalo.

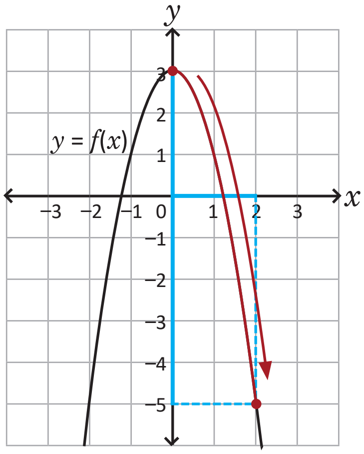
Solución de problemas:

a) Se traza la gráfica de $f(x) = (x - 5)^2$:



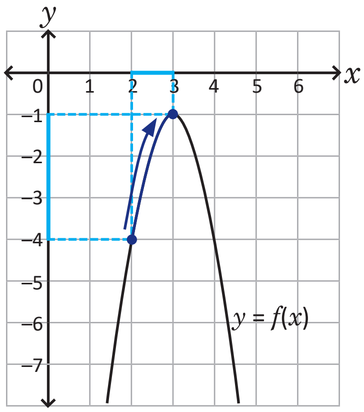
Si x aumenta de 5 a 7 entonces $f(x)$ aumenta de 0 a 4. Así, $f(x)$ es creciente en [5, 7] y $0 \leq f(x) \leq 4$.

b) Se traza la gráfica de $f(x) = -2x^2 + 3$:



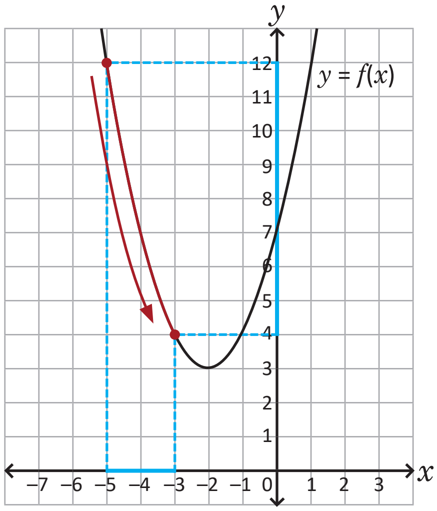
Si x aumenta de 0 a 2 entonces $f(x)$ disminuye de 3 a –5. Por lo tanto, $f(x)$ es decreciente en [0, 2] y $-5 \leq f(x) \leq 3$.

c) Se traza la gráfica de $f(x) = -3(x - 3)^2 - 1$:



Si x aumenta de 2 a 3 entonces $f(x)$ aumenta de –4 a –1. Por lo tanto, $f(x)$ es creciente en [2, 3] y $-4 \leq f(x) \leq -1$.

d) Se traza la gráfica de $f(x) = (x + 2)^2 + 3$:



Si x aumenta de –5 a –3 entonces $f(x)$ disminuye de 12 a 4. Luego, $f(x)$ es decreciente en [–5, –3] y $4 \leq f(x) \leq 12$.

3.2 Variación: valor máximo o mínimo

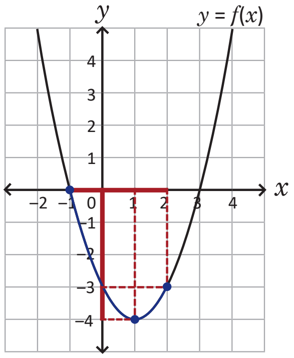
Problema inicial

Dadas las funciones cuadráticas $f(x) = (x - 1)^2 - 4$ y $g(x) = -x^2 - 4x - 1$ responde lo siguiente:

1. Si $-1 \leq x \leq 2$, ¿entre cuáles números se encuentra $f(x)$?
2. Si $-4 \leq x \leq 1$, ¿entre cuáles números se encuentra $g(x)$?

Utiliza las gráficas de f y g.

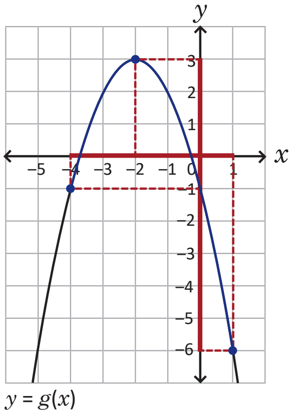
Solución



1. Se traza la gráfica de la función para poder determinar los valores de $f(x)$ como se muestra en la figura de la derecha. La parábola es abierta hacia arriba con vértice en $(1, -4)$.

   Sobre el eje x se ha sombreado en rojo el intervalo $[-1, 2]$ de los valores que toma x. Si $x = -1$ entonces $f(-1) = 0$ y si $x = 2$ entonces $f(2) = -3$; esto puede llevar a pensar que: $-3 \leq f(x) \leq 0$.

   Sin embargo, el valor mínimo de $f(x)$ se alcanza cuando $x = 1$, es decir, en $f(1) = -4$. Por lo tanto, $-4 \leq f(x) \leq 0$.



2. Primero se escribe g en la forma $a(x - h)^2 + k$ completando el cuadrado:

$$\begin{aligned} g(x) &= -(x^2 + 4) - 1 \\ &= -\left[x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2\right] - 1 \\ &= -[x^2 + 4x + 2^2 - 2^2] - 1 \\ &= -[(x + 2)^2 - 4] - 1 \\ &= -(x + 2)^2 + 4 - 1 \\ &= -(x + 2)^2 + 3 \end{aligned}$$

   La parábola se abre hacia abajo con vértice en $(-2, 3)$. Sobre el eje x se ha sombreado en rojo el intervalo $[-4, 1]$ de los valores que toma x. Si $x = -4$ entonces $g(-4) = -1$ y si $x = 1$ entonces $g(1) = -6$; para este caso, el valor máximo de $g(x)$ se alcanza cuando $x = -2$, es decir, en $g(-2) = 3$.
   Por lo tanto, $-6 \leq g(x) \leq 3$.

En resumen

Dada una función cuadrática $f(x) = a(x - h)^2 + k$ y $x_1 \leq h \leq x_2$:

1. Si $a > 0$ entonces el valor mínimo $f(x)$ se alcanza en $x = h$.
   Además si x es un número real tal que $x_1 \leq x \leq x_2$ y $f(x_1) < f(x_2)$ entonces $k \leq f(x) \leq f(x_2)$;
   caso contrario si $f(x_1) \geq f(x_2)$ entonces $k \leq f(x) \leq f(x_1)$.

2. Si $a < 0$ entonces el valor máximo $f(x)$ se alcanza en $x = h$.
   Además si x es un número real tal que $x_1 \leq x \leq x_2$ y $f(x_1) < f(x_2)$ entonces $f(x_1) \leq f(x) \leq k$;
   caso contrario si $f(x_1) > f(x_2)$ entonces $f(x_2) \leq f(x) \leq k$.

Problemas

Para cada caso, determina el intervalo donde se encuentran los valores de $f(x)$ si:

a) $f(x) = (x - 5)^2$; $2 \leq x \leq 6$

b) $f(x) = -2x^2 + 3$; $-2 \leq x \leq 1$

c) $f(x) = -3(x - 3)^2 - 1$; $2 \leq x \leq 5$

d) $f(x) = (x + 2)^2 + 3$; $-6 \leq x \leq 0$

e) $f(x) = 2(x - 6)^2 + 1$; $4 \leq x \leq 8$

f) $f(x) = -(x + 4)^2 - 2$; $-6 \leq x \leq -2$

Indicador de logro

3.2 Determina los valores que toma $f(x)$ a partir de los valores de x, siendo f una función cuadrática.

Materiales

Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y trazar las gráficas de las funciones del Problema inicial (puede utilizarse en la resolución del bloque de Problemas).

Secuencia

En esta clase se analiza el rango de valores que puede tomar una función cuadrática $f(x)$ cuando x se encuentra en un intervalo que contiene el valor h del vértice (h, k).

Propósito

A diferencia de la clase anterior donde la función f era creciente o decreciente en un intervalo dado, en esta clase, si $a \leq x \leq b$, no necesariamente se cumplirá que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ o $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$.

Posibles dificultades

Desde el literal a) hasta el d) del bloque de Problemas, los estudiantes pueden auxiliarse de las gráficas de las funciones trazadas en la clase anterior para determinar el rango de valores de f.

Solución de problemas:

a) Dada la función $f(x) = (x - 5)^2$, las coordenadas del vértice son (5, 0) y $2 \leq 5 \leq 6$. Como su gráfica es una parábola abierta hacia arriba entonces el valor mínimo de $f(x)$ se alcanza en $x = 5$.

Además, $f(2) = 9$ y $f(6) = 1$, es decir, $f(2) > f(6)$. Por lo tanto, $0 \leq f(x) \leq 9$.

b) Dada la función $f(x) = -2x^2 + 3$, las coordenadas del vértice son (0, 3) y $-2 \leq 0 \leq 1$. Como su gráfica es una parábola abierta hacia abajo entonces el valor máximo de $f(x)$ se alcanza en $x = 0$.

Además, $f(-2) = -5$ y $f(1) = 1$, es decir, $f(-2) < f(1)$. Por lo tanto, $-5 \leq f(x) \leq 3$.

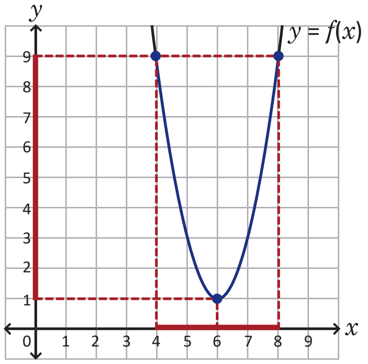
c) Dada la función $f(x) = -3(x - 3)^2 - 1$, las coordenadas del vértice son (3, –1) y $2 \leq 3 \leq 5$. Como su gráfica es una parábola abierta hacia abajo entonces el valor máximo de $f(x)$ se alcanza en $x = 3$.

Además, $f(2) = -4$ y $f(5) = -13$, es decir, $f(2) > f(5)$. Por lo tanto, $-13 \leq f(x) \leq -1$.

d) Dada la función $f(x) = (x + 2)^2 + 3$, las coordenadas del vértice son (–2, 3) y $-6 \leq -2 \leq 0$. Como su gráfica es una parábola abierta hacia arriba entonces el valor mínimo de $f(x)$ se alcanza en $x = -2$.

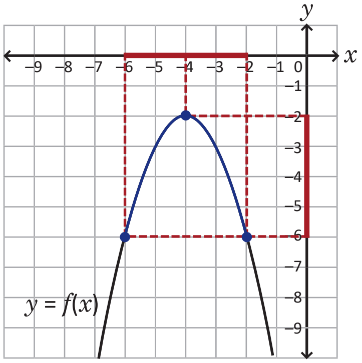
Además, $f(-6) = 19$ y $f(0) = 7$, es decir, $f(-6) > f(0)$. Por lo tanto, $3 \leq f(x) \leq 19$.

e) La gráfica de f se presenta a continuación:



Es una parábola abierta hacia arriba, con vértice en (6, 1), valor mínimo en $x = 6$ y $f(4) = f(8) = 9$. Por lo tanto, $1 \leq f(x) \leq 9$.

f) La gráfica de f se presenta a continuación:



Es una parábola abierta hacia abajo, con vértice en (–4, –2), valor máximo en $x = -4$ y $f(-6) = f(-2)$. Por lo tanto, $-6 \leq f(x) \leq -2$.

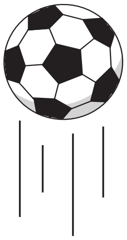
3.3 Aplicación: valor máximo*

Problema inicial

Los estudiantes de primer año de bachillerato del Instituto Nacional de San Matías, en La Libertad, realizan experimentos en su clase de ciencias naturales sobre tiro vertical. Han descubierto que, al lanzar una pelota de fútbol verticalmente hacia arriba, la distancia $f(x)$ en metros sobre el suelo después de x segundos está dada por la función:

$$f(x) = -5x^2 + 10x + 0.5$$

¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota? ¿Después de cuántos segundos alcanza la altura máxima?

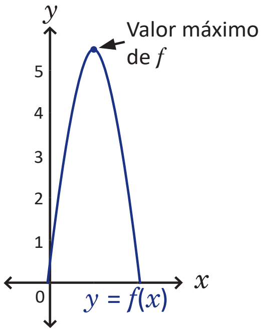


Solución

Si la pelota se lanza verticalmente hacia arriba llegará a un punto en que debe descender; el problema pide calcular cuántos metros se elevará desde el suelo y cuántos segundos transcurrirán después de ser lanzada antes que empiece a descender.

La función encontrada por los estudiantes que relaciona la distancia sobre el suelo después de x segundos es una función cuadrática, cuyo valor máximo para $f(x)$ se encuentra en el vértice de la gráfica de la función pues el coeficiente de x^2 es negativo. Entonces, el problema se reduce a encontrar las coordenadas del vértice de la gráfica de f:

$$\begin{aligned} f(x) &= -5(x^2 - 2) + 0.5 \\ &= -5\left[x^2 - 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2\right] + 0.5 \\ &= -5[x^2 - 2x + \mathbf{1}^2 - \mathbf{1}^2] + 0.5 \\ &= -5(x - \mathbf{1})^2 + 5 + 0.5 \\ &= -5(x - \mathbf{1})^2 + 5.5 \end{aligned}$$



El vértice de la gráfica de f es (1, 5.5) y la parábola se muestra en la figura de la derecha (solo se toma la parte que queda sobre el eje x pues $f(x)$ debe ser positivo o cero). Por lo tanto, la altura máxima que alcanza la pelota es 5.5 metros después de transcurrir 1 segundo.

En resumen

En problemas donde se plantea una función cuadrática cuyo coeficiente de x^2 es negativo y se desea conocer el valor máximo de una cantidad, este se encuentra en el vértice de la gráfica de la función.

Problemas

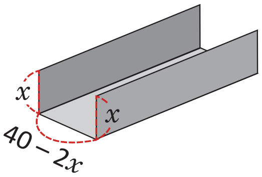
1. Carlos, un adolescente con discapacidad intelectual, es parte del equipo de baloncesto que participará en los Juegos Latinoamericanos de Olimpiadas Especiales. Si Carlos lanza la pelota hacia el aro en determinada posición, la distancia en metros de la pelota al suelo después de x segundos está dada por la función:

   $$f(x) = -5x^2 + 6x + 1.4$$

   ¿Cuál es la altura máxima que alcanzará la pelota lanzada por Carlos? ¿Cuántos segundos transcurrirán para alcanzar dicha altura?

2. Marta colocará un canal en el techo de su casa. Para ello dispone de una hoja rectangular metálica cuyos lados deben doblarse para formar el canal. Si la hoja tiene 40 centímetros de ancho, ¿cuántos centímetros debe doblarse en cada lado para que den al canal su mayor capacidad?

   La capacidad será máxima cuando el área de la sección transversal de lados x y $40 - 2x$ sea máxima.



Indicador de logro

3.3 Utiliza el valor máximo de una función cuadrática para resolver problemas de la vida cotidiana.

Secuencia

En esta clase se presentan situaciones problema que pueden ser modeladas usando funciones cuadráticas, y cuya solución se encuentra en el valor máximo de la función. Si los estudiantes tienen muchas dificultades para resolver el Problema inicial, el docente debe desarrollar e ir explicando paso a paso la Solución.

Propósito

En la clase anterior se definieron los casos para que una función cuadrática posea valor máximo o valor mínimo. Los estudiantes deben relacionar los contenidos de la clase anterior con la solución de los problemas presentados en esta clase, sin tener que trazar la gráfica de la función.

Solución de problemas:

1. Como el coeficiente de x^2 de la función $f(x) = -5x^2 + 6x + 1.4$ que proporciona la distancia de la pelota después de x segundos es negativo entonces f tiene un valor máximo en el vértice de la función; este se encuentra completando cuadrados:

$$\begin{aligned} f(x) &= -5(x^2 - 1.2x) + 1.4 \\ &= -5[x^2 - 1.2x + (0.6)^2 - (0.6)^2] + 1.4 \\ &= -5(x - 0.6)^2 + 1.8 + 1.4 \\ &= -5(x - 0.6)^2 + 3.2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la altura máxima que alcanzará la pelota lanzada por Carlos será de 3.2 metros; después de haber transcurrido 0.6 segundos.

Aclarar a los estudiantes que el proceso de completar cuadrados es el mismo si los coeficientes son decimales; aunque pueden convertir los decimales a fracción.

2. Sea A(x) la función que proporciona el área de la sección transversal del canal si la hoja se dobla a cada lado x centímetros. Para que el canal tenga su mayor capacidad entonces A(x) debe ser máxima; como esta sección tiene forma de rectángulo de base $40 - 2x$ y altura x entonces:

$$A(x) = (40 - 2x)x = -2x^2 + 40x$$

Similar al numeral 1, se completan cuadrados para encontrar el valor máximo:

$$\begin{aligned} A(x) &= -2[x^2 - 20x + (10)^2 - (10)^2] \\ &= -2(x - 10)^2 + 200 \end{aligned}$$

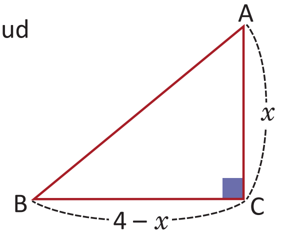
Por lo tanto, deben doblarse 10 centímetros en cada lado para que el canal tenga su mayor capacidad.

3.4 Aplicación: valor mínimo*

Problema inicial

En el triángulo rectángulo ABC, ¿cuál debe ser el valor de x para que la longitud de la hipotenusa sea mínima?

Por el teorema de Pitágoras:
$AB^2 = BC^2 + CA^2$,
además, $0 < x < 4$.



Solución

Utilizando el teorema de Pitágoras:

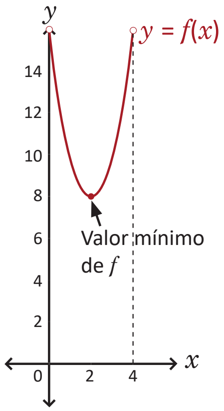
$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$

se sustituyen BC y CA por $4 - x$ y x, respectivamente, y se reducen los términos semejantes:

$$\begin{aligned} AB^2 &= (4 - x)^2 + x^2 \\ &= 16 - 8x + x^2 + x^2 \\ &= 2x^2 - 8x + 16 \end{aligned}$$

La longitud de la hipotenusa AB será mínima cuando AB^2 también sea mínima. Sea $f(x) = 2x^2 - 8x + 16$; como es una función cuadrática y el coeficiente de x^2 es positivo entonces la parábola se abre hacia arriba. Se completa el cuadrado para trazar la gráfica de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x^2 - 4x) + 16 \\ &= 2\left[x^2 - 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2\right] + 16 \\ &= 2[x^2 - 4x + \mathbf{2}^2 - \mathbf{2}^2] + 16 \\ &= 2[(x - \mathbf{2})^2 - 4] + 16 \\ &= 2(x - \mathbf{2})^2 - 8 + 16 \\ &= 2(x - \mathbf{2})^2 + 8 \end{aligned}$$



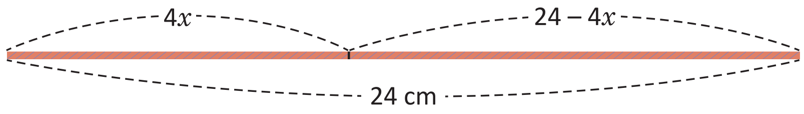
En la figura de la derecha se muestra la gráfica en el intervalo]0, 4[cuyo vértice es (2, 8). Por lo tanto, para que la longitud de la hipotenusa sea mínima, x debe ser igual a 2.

En resumen

En problemas donde se plantea una función cuadrática cuyo coeficiente de x^2 es positivo y se desea conocer el valor mínimo de una cantidad, este se encuentra en el vértice de la gráfica de la función.

Problemas

1. Encuentra dos números enteros cuya diferencia sea igual a 20 y su producto sea mínimo.
2. Un pedazo de lana de 24 cm de longitud se divide en dos partes con las que se formarán dos cuadrados. Si la primera parte tiene longitud $4x$ y la segunda tiene longitud $24 - 4x$, ¿cuál debe ser el valor de x que reduzca al mínimo la suma de las áreas de los dos cuadrados?



Indicador de logro

3.4 Utiliza el valor mínimo de una función cuadrática para resolver problemas de la vida cotidiana.

Secuencia

Similar a la clase 3.3, las situaciones problema abordadas en esta clase se modelan con funciones cuadráticas, ahora la solución se encuentra en el valor mínimo de la función. Si los estudiantes tienen muchas dificultades para resolver el Problema inicial, el docente debe desarrollar e ir explicando paso a paso la Solución.

Propósito

Usando los contenidos de la clase 3.2, los estudiantes deben escribir la ecuación de la función en la forma $a(x - h)^2 + k$ para encontrar el valor mínimo de la función, y sin necesidad de graficarla, interpretar la solución de la misma.

Solución de problemas:

1. Sea x uno de los números enteros buscados. El otro número entero será igual a $x - 20$, pues al calcular la diferencia de ambos se tiene:

$$x - (x - 20) = x - x + 20 = 20$$

Sea $f(x)$ la función que calcula el resultado del producto de los dos números enteros; luego:

$$f(x) = x(x - 20) = x^2 - 20x$$

Si el producto debe ser mínimo, entonces debe encontrarse el valor mínimo de la función $f(x)$. Como el coeficiente de x^2 es positivo entonces f tiene un valor mínimo en el vértice. Se completan cuadrados para encontrar las coordenadas del mismo:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 20x + 10^2) - 10^2 \\ &= (x - 10)^2 - 100 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x = 10$ y $x - 20 = -10$, es decir, los números enteros cuya diferencia es igual a 20 y su producto es mínimo son 10 y –10.

2. La primera parte tiene longitud $4x$, esto indica que el perímetro del primer cuadrado es igual a $4x$ y por tanto, la longitud de su lado será $(4x) \div 4 = x$. De forma similar, la segunda parte tiene longitud $24 - 4x$, o sea, el perímetro del segundo cuadrado es $24 - 4x$ y por tanto la longitud de su lado es $(24 - 4x) \div 4 = 6 - x$. Sea $g(x)$ la función que calcula la suma de las áreas de los dos cuadrados, entonces:

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 + (6 - x)^2 \\ &= x^2 + 36 - 12x + x^2 \\ &= 2x^2 - 12x + 36 \end{aligned}$$

Si se requiere del valor de x que reduzca al mínimo la suma entonces debe encontrarse el valor mínimo de la función $g(x)$. Como el coeficiente de x^2 es positivo, g posee un mínimo en el vértice:

$$\begin{aligned} g(x) &= 2(x^2 - 6x + 3^2 - 3^2) + 36 \\ &= 2(x^2 - 6x + 3^2) - 2(3^2) + 36 \\ &= 2(x - 3)^2 - 18 + 36 \\ &= 2(x - 3)^2 + 18 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor de x debe ser igual a 3 para que la suma de las áreas de los dos cuadrados sea mínima.

Lección 3

3.5 Intersección de la gráfica de una función cuadrática con el eje y

Problema inicial

Encuentra las coordenadas del punto de intersección de la gráfica de la función cuadrática f con el eje y si:

a) $f(x) = (x - 3)^2 - 4$ b) $f(x) = -2x^2 - 12x - 18$

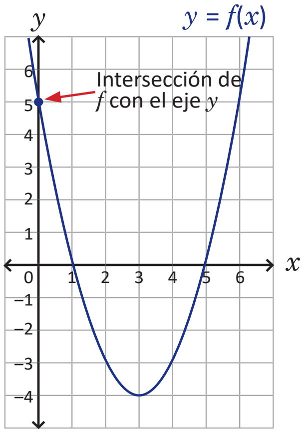
La primera coordenada del punto de intersección de la gráfica de f con el eje y es igual a cero.

Solución

a) La intersección de la gráfica de f con el eje y ocurre cuando $x = 0$, es decir, se debe calcular el valor de $f(0)$ y las coordenadas del punto de corte entre f y el eje y serán $(0, f(0))$.

$$\begin{aligned} f(0) &= (0 - 3)^2 - 4 \\ &= 9 - 4 \\ &= 5 \end{aligned}$$

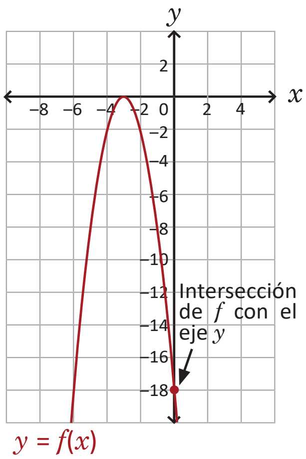
Por lo tanto, el punto de intersección de la gráfica de $f(x) = (x - 3)^2 - 4$ con el eje y es $(0, 5)$.



b) De forma similar al literal anterior, encontrar las coordenadas del punto de intersección de la gráfica de $f(x) = -2x^2 - 12x - 18$ con el eje y equivale a encontrar $(0, f(0))$:

$$\begin{aligned} f(0) &= -2(0)^2 - 12(0) - 18 \\ &= -18 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el punto de intersección de la gráfica de $f(x) = -2x^2 - 12x - 18$ con el eje y es $(0, -18)$.



En general

Las coordenadas del punto de intersección de la gráfica de una función f con el eje y son: $(0, f(0))$. Si f es una función cuadrática entonces la gráfica de f corta al eje y en un único punto.

Problemas

1. Para cada caso, determina las coordenadas del punto de intersección de la gráfica de f con el eje y:

a) $f(x) = -(x + 4)^2 + 6$ b) $f(x) = 3(x - 2)^2 - 10$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

d) $f(x) = -2x^2 + 7$ e) $f(x) = -5(x + 10)^2$ f) $f(x) = 2x^2 + 24x + 52$

g) $f(x) = -3x^2 + 6x - 11$ h) $f(x) = x^2 - x - \frac{3}{4}$ i) $f(x) = x^2 + 5x + \frac{1}{5}$

2. ¿Es posible que una función cualquiera tenga dos intersecciones con el eje y? Justifica tu respuesta.

Indicador de logro

3.5 Encuentra las coordenadas del punto de intersección de la gráfica de una función cuadrática con el eje y usando la ecuación de la función.

Secuencia

En octavo grado se calcularon las coordenadas del punto de intersección de la gráfica de una función lineal con el eje y. En esta clase se generalizan, para cualquier función, las coordenadas del punto de intersección de esta con el eje y sin necesidad de trazar la gráfica de la misma.

Propósito

En el numeral 1 del bloque de Problemas, no es necesario que los estudiantes grafiquen cada función, basta con encontrar las coordenadas usando la ecuación de la función y lo descrito en la parte En general.

Solución de problemas:

1a) Se evalúa la función en $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= -(0+4)^2 + 6 \\ &= -16 + 6 \\ &= -10 \end{aligned}$$

Luego, las coordenadas del punto de intersección de la gráfica de f con el eje y son (0, –10).

1c) Se evalúa la función en $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2}(0)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Las coordenadas del punto de intersección de la gráfica con el eje y son (0, 0).

1e) Se evalúa la función en $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= -5(0+10)^2 \\ &= -5(100) \\ &= -500 \end{aligned}$$

Las coordenadas del punto de intersección de la gráfica con el eje y son (0, –500).

1g) Similar a los literales anteriores:

$$\begin{aligned} f(0) &= -3(0)^2 + 6(0) - 11 \\ &= -11 \end{aligned}$$

Las coordenadas son (0, –11).

1i) Similar a los literales anteriores:

$$f(0) = (0)^2 + 5(0) + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

Las coordenadas son $\left(0, \frac{1}{5}\right)$.

1b) Se evalúa la función en $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= 3(0-2)^2 - 10 \\ &= 12 - 10 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Luego, las coordenadas del punto de intersección de la gráfica de f con el eje y son (0, 2).

1d) Se evalúa la función en $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= -2(0)^2 + 7 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Las coordenadas del punto de intersección de la gráfica con el eje y son (0, 7).

1f) Se evalúa la función en $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= 2(0)^2 + 24(0) + 52 \\ &= 52 \end{aligned}$$

Las coordenadas del punto de intersección de la gráfica con el eje y son (0, 52).

1h) Similar a los literales anteriores:

$$f(0) = (0)^2 - 0 - \frac{3}{4} = -\frac{3}{4}$$

Las coordenadas son $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$.

2. No es posible, ya que la definición de función indica que a cada elemento x le corresponde un único elemento $f(x)$. Entonces, si para encontrar la intersección con el eje y se evalúa la ecuación de la función en $x = 0$ entonces $f(0)$ solo tendrá una solución.

3.6 Intersección de la gráfica de una función cuadrática con el eje x

Problema inicial

Encuentra las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica de la función cuadrática f con el eje x si:

a) $f(x) = (x - 3)^2 - 4$ b) $f(x) = -2x^2 - 12x - 18$ c) $f(x) = 3x^2 + 2$

La segunda coordenada del punto de intersección de la gráfica de f con el eje x es igual a cero.

Solución

a) Los puntos de intersección de la gráfica de f con el eje x tienen segunda coordenada igual a cero, es decir, son de la forma $(x, 0)$. Para encontrar el valor de x se iguala a cero la ecuación de f y se resuelve la ecuación cuadrática:

$$\begin{aligned}(x-3)^2 - 4 &= 0\\ (x-3)^2 &= 4\\ x - 3 &= \pm 2\\ x &= 3 \pm 2 \longrightarrow x = 1 \text{ y } x = 5\end{aligned}$$

Observa la gráfica de $f(x) = (x - 3)^2 - 4$ trazada en la clase anterior.

Por lo tanto, los puntos de intersección de $f(x) = (x - 3)^2 - 4$ con el eje x son (1, 0) y (5, 0).

b) De forma similar al literal anterior, se iguala la ecuación de la función f y se resuelve la ecuación cuadrática (en este caso puede factorizarse el polinomio):

$$\begin{aligned}-2x^2 - 12x - 18 &= 0\\ x^2 + 6x + 9 &= 0\\ (x+3)^2 &= 0\\ x + 3 &= 0\\ x &= -3\end{aligned}$$

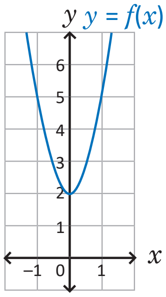
Observa la gráfica de $f(x) = -2x^2 - 12x - 18$ trazada en la clase anterior.

Por lo tanto, el punto de intersección de $f(x) = -2x^2 - 12x - 18$ con el eje x es (–3, 0).

c) Al igualar a cero la ecuación de la función:

$$3x^2 + 2 = 0$$

Esta ecuación cuadrática no tiene solución en los números reales. Esto quiere decir que la gráfica de la función f no corta al eje x, como lo muestra la figura de la derecha.



En general

Las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica de una función f con el eje x se encuentra igualando a cero la ecuación de f y resolviendo la ecuación cuadrática resultante:

1. Si la ecuación tiene dos soluciones reales $x = x_1$ y $x = x_2$ entonces la gráfica de f corta al eje x en los puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.
2. Si la ecuación tiene una solución real $x = x_1$ entonces la gráfica de f corta al eje x en el punto $(x_1, 0)$. Este punto es el vértice de la parábola y se dice que la gráfica de f es tangente al eje x.
3. Si la ecuación no tiene solución real entonces la gráfica de f no corta al eje x, es decir, la parábola se encuentra arriba del eje o debajo de este.

Problemas

Para cada caso, determina las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica de f con el eje x:

a) $f(x) = 3x^2$ b) $f(x) = -(x + 4)^2$ c) $f(x) = -(x + 6)^2 + 1$

d) $f(x) = (x - 5)^2 - 9$ e) $f(x) = -(x - 2)^2 - 4$ f) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

g) $f(x) = 3x^2 + 9x - 30$ h) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$ i) $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$

Indicador de logro

3.6 Encuentra las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica de una función cuadrática con el eje x a partir de la ecuación de la función.

Secuencia

En esta clase se calculan las coordenadas del punto de intersección de la gráfica de una función f con el eje x. Este contenido se utiliza más adelante para interpretar la solución de la desigualdades cuadráticas.

Propósito

En el bloque de Problemas, los estudiantes no deben graficar cada función, sino usar la ecuación de la función para encontrar las coordenadas tal como lo describe la parte En general.

Solución de problemas:

a) Se resuelve $3x^2 = 0$:

$$3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Luego, el punto de intersección de la gráfica de $f(x) = 3x^2$ con el eje x es (0, 0).

b) Se resuelve $-(x + 4)^2 = 0$:

$$(x + 4)^2 = 0 \Rightarrow x + 4 = 0$$
$$x = -4$$

Luego, el punto de intersección de la gráfica de $f(x) = -(x + 4)^2$ con el eje x es (–4, 0).

c) Se resuelve $-(x + 6)^2 + 1 = 0$:

$$(x + 6)^2 = 1$$
$$x + 6 = \pm 1$$
$$x = -6 \pm 1 \quad \Rightarrow \quad x = -7 \text{ y } x = -5$$

Luego, los puntos de intersección de la gráfica de $f(x) = -(x + 6)^2 + 1$ con el eje x son (–7, 0) y (–5, 0).

d) Se resuelve $(x - 5)^2 - 9 = 0$:

$$(x - 5)^2 = 9$$
$$x - 5 = \pm 3$$
$$x = 5 \pm 3 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \text{ y } x = 8$$

Luego, los puntos de intersección de la gráfica de $f(x) = (x - 5)^2 - 9$ con el eje x son (2, 0) y (8, 0).

e) Se resuelve $-(x - 2)^2 - 4 = 0$:

$$(x - 2)^2 = -4$$

Esta última ecuación no tiene soluciones reales; por lo tanto la gráfica de $f(x) = -(x - 2)^2 - 4$ no corta al eje x.

f) Se resuelve $f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$:

$$(x + 1)(x - 3) = 0$$
$$x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0$$
$$x = -1 \qquad\qquad x = 3$$

Luego, los puntos de intersección de la gráfica de $f(x) = x^2 - 2x - 3$ con el eje x son (–1, 0) y (3, 0).

g) Se resuelve $3x^2 + 9x - 30 = 0$:

$$3(x^2 + 3x - 10) = 0$$
$$3(x + 5)(x - 2) = 0$$
$$x + 5 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$
$$x = -5 \qquad\qquad x = 2$$

Entonces, los puntos de intersección de la gráfica de $f(x) = 3x^2 + 9x - 30$ con el eje x son (–5, 0) y (2, 0).

h) Se resuelve $\frac{1}{2}x^2 - 3 = 0$:

$$\frac{1}{2}x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 6$$
$$x = \pm\sqrt{6}$$

Los puntos de intersección de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$ con el eje x son $(-\sqrt{6}, 0)$ y $(\sqrt{6}, 0)$.

i) Si se calcula el discriminante de la ecuación $2x^2 - 12x + 23 = 0$ se obtiene lo siguiente:

$$\Delta = (-12)^2 - 4(2)(23) = 144 - 184 = -40.$$

De lo anterior, $\Delta < 0$ y la ecuación $2x^2 - 12x + 23 = 0$ no tiene soluciones reales. Por lo tanto, la gráfica de $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$ no corta al eje x.

3.7 Desigualdad cuadrática $ax^2 + bx + c \geq 0$, $a > 0$, parte 1*

Problema inicial

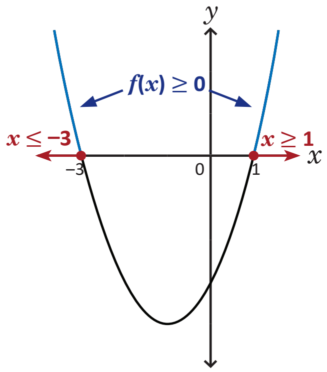
Determina todos los valores de x que satisfacen la desigualdad:

$$x^2 + 2x - 3 \geq 0$$

Solución

Sea $f(x) = x^2 + 2x - 3$; deben determinarse los valores de x para los cuales $f(x)$ es igual o mayor que cero, es decir, los puntos donde la gráfica de f corta al eje x o está arriba de este. Se encuentran las intersecciones con el eje x resolviendo la ecuación cuadrática $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned}&x^2 + 2x - 3 = 0\\&(x + 3)(x - 1) = 0\\&x + 3 = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0\\&\quad x = -3 \qquad\qquad x = 1\end{aligned}$$



La gráfica de f corta al eje x en los puntos (–3, 0) y (1, 0). Como el coeficiente de x^2 es positivo la parábola se abre hacia arriba como lo muestra la figura de la derecha.

Se observa lo siguiente: $f(x) \geq 0$ se cumple para $x \leq -3$ o $x \geq 1$; la desigualdad $x \leq -3$ denota al intervalo $]-\infty, -3]$; mientras que, $x \geq 1$ al intervalo $[1, +\infty[$. La solución $x \leq -3$ o $x \geq 1$ se escribe, utilizando intervalos:

$$x \in \,]-\infty, -3] \cup [1, \infty[$$

El símbolo “∪” indica que el valor de x está en el primer intervalo o en el segundo.

En general

Resolver una desigualdad de la forma $ax^2 + bx + c \geq 0$ con $a > 0$ significa encontrar todos los valores de x para los cuales $ax^2 + bx + c \geq 0$ es verdadero. Si se denota por $f(x) = ax^2 + bx + c$ entonces $f(x) \geq 0$ significa gráficamente encontrar los valores de x para los cuales la parábola de f corta o se encuentra arriba del eje x.

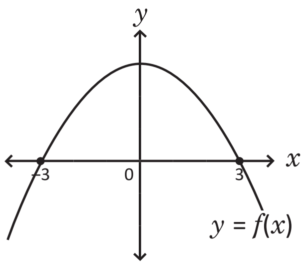
Si la gráfica de f corta al eje x en dos puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$, con $x_1 < x_2$, entonces $f(x) \geq 0$ se cumple para $x \leq x_1$ o $x \geq x_2$. Utilizando intervalos se escribe: $x \in \,]-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty[$.

Problemas

1. Para cada caso encuentra los valores de x para los cuales se satisface la desigualdad:

a) $x^2 - 4 \geq 0$
b) $4x^2 - 9 \geq 0$
c) $2x^2 + 4x \geq 0$
d) $x^2 - 10x + 21 \geq 0$
e) $x^2 + x - 20 \geq 0$
f) $x^2 + 7x + 6 \geq 0$
g) $x^2 - 4x - 45 \geq 0$
h) $x^2 - 8 \geq 0$
i) $9x^2 - 5 \geq 0$

2. Utilizando la gráfica de la función cuadrática f que se muestra a la derecha, determina los valores de x para los cuales se cumple $f(x) \geq 0$:



Indicador de logro

3.7 Resuelve desigualdades de la forma $f(x) \geq 0$, donde f es una función cuadrática cuya parábola es abierta hacia arriba y corta al eje x en dos puntos.

Secuencia

Se utiliza el contenido de la clase 3.6 para interpretar y resolver desigualdades de la forma $f(x) \geq 0$, donde f es una función cuadrática. Si los estudiantes tienen muchas dificultades para resolver el Problema inicial, el docente debe desarrollar e ir explicando paso a paso la Solución.

Propósito

La resolución de desigualdades cuadráticas se realizará por casos. En esta clase solo se resuelven desigualdades de la forma $ax^2 + bx + c \geq 0$, donde $a > 0$ y la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones reales.

Solución de problemas:

1a) Sea $f(x) = x^2 - 4$; se encuentran las intersecciones de la gráfica de f con el eje x resolviendo $f(x) = 0$:

$$x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4$$
$$x = \pm 2$$

La gráfica de f corta al eje x en $(-2, 0)$ y $(2, 0)$. Como la gráfica se abre hacia arriba entonces la desigualdad $f(x) = x^2 - 4 \geq 0$ se cumple para $x \leq -2$ o $x \geq 2$, usando intervalos se escribe:

$$x \in]-\infty, -2] \cup [2, \infty[.$$

1c) Sea $f(x) = 2x^2 + 4x$; se resuelve $f(x) = 0$:

$$2x^2 + 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x(x + 2) = 0$$
$$2x = 0 \quad \text{o} \quad x + 2 = 0$$
$$x = 0 \qquad\qquad x = -2$$

Como la gráfica se abre hacia arriba entonces la desigualdad $f(x) = 2x^2 + 4x \geq 0$ se cumple para $x \leq -2$ o $x \geq 0$, usando intervalos se escribe:

$$x \in]-\infty, -2] \cup [0, \infty[.$$

1e) Sea $f(x) = x^2 + x - 20$; se resuelve $f(x) = 0$:

$$x^2 + x - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x + 5)(x - 4) = 0$$
$$x + 5 = 0 \quad \text{o} \quad x - 4 = 0$$
$$x = -5 \qquad\qquad x = 4$$

Como la gráfica se abre hacia arriba entonces la desigualdad $f(x) = x^2 + x - 20 \geq 0$ se cumple para $x \leq -5$ o $x \geq 4$, usando intervalos se escribe:

$$x \in]-\infty, -5] \cup [4, \infty[.$$

1g) La desigualdad $x^2 - 4x - 45 \geq 0$ se cumple para $x \leq -5$ o $x \geq 9$, usando intervalos se escribe:

$$x \in]-\infty, -5] \cup [9, \infty[.$$

1b) Sea $f(x) = 4x^2 - 9$; similar a 1a) se resuelve la ecuación $f(x) = 0$:

$$4x^2 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{9}{4}$$
$$x = \pm \frac{3}{2}$$

Como la gráfica se abre hacia arriba entonces la desigualdad $f(x) = 4x^2 - 9 \geq 0$ se cumple para $x \leq -\frac{3}{2}$ o $x \geq \frac{3}{2}$, usando intervalos se escribe:

$$x \in \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right[.$$

1d) Sea $f(x) = x^2 - 10x + 21$; se resuelve $f(x) = 0$:

$$x^2 - 10x + 21 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - 3)(x - 7) = 0$$
$$x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x - 7 = 0$$
$$x = 3 \qquad\qquad x = 7$$

Como la gráfica se abre hacia arriba entonces la desigualdad $f(x) = x^2 - 10x + 21 \geq 0$ se cumple para $x \leq 3$ o $x \geq 7$, usando intervalos se escribe:

$$x \in]-\infty, 3] \cup [7, \infty[.$$

1f) Sea $f(x) = x^2 + 7x + 6$; se resuelve $f(x) = 0$:

$$x^2 + 7x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x + 6)(x + 1) = 0$$
$$x + 6 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0$$
$$x = -6 \qquad\qquad x = -1$$

Como la gráfica se abre hacia arriba entonces la desigualdad $f(x) = x^2 + 7x + 6 \geq 0$ se cumple para $x \leq -6$ o $x \geq -1$, usando intervalos se escribe:

$$x \in]-\infty, -6] \cup [-1, \infty[.$$

1h) $x^2 - 8 \geq 0$ se cumple para $x \leq -2\sqrt{2}$ o $x \geq 2\sqrt{2}$, usando intervalos se escribe:

$$x \in]-\infty, -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}, \infty[.$$

1i) La desigualdad $9x^2 - 5 \geq 0$ se cumple para $x \leq -\frac{\sqrt{5}}{3}$ o $x \geq \frac{\sqrt{5}}{3}$, usando intervalos se escribe:

$$x \in \left]-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{5}}{3}, \infty\right[.$$

2. $f(x) \geq 0$ se cumple para $-3 \leq x \leq 3$, usando intervalos se escribe: $x \in [-3, 3]$.

3.8 Desigualdad cuadrática $ax^2 + bx + c \geq 0$, $a > 0$, parte 2

Problema inicial

Determina todos los valores de x que satisfacen, en cada caso, la desigualdad:

a) $x^2 - 6x + 9 > 0$ b) $x^2 - 2x + 2 > 0$

Solución

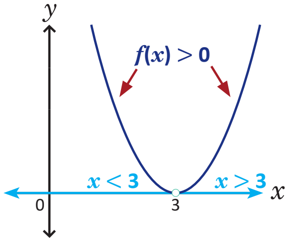
a) Sea $f(x) = x^2 - 6x + 9$; de forma similar a la clase anterior, resolver $f(x) = x^2 - 6x + 9 > 0$ equivale a encontrar los valores de x para los cuales la gráfica de f queda arriba del eje x; esta vez no deben incluirse los puntos donde $f(x) = 0$ ya que la desigualdad es estricta, sin embargo deben encontrarse las intersecciones con el eje x:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 &= 0 \\ (x-3)^2 &= 0 \\ x - 3 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

La gráfica de f corta al eje x en el vértice (3, 0) y es una parábola que se abre hacia arriba como lo muestra la figura de la derecha. Se cumple lo siguiente: $f(x)$ es positivo para cualquier número real x diferente de 3.

Por lo tanto, $x < 3$ o $x > 3$; utilizando intervalos se escribe:

$$x \in \,]-\infty, 3[\, \cup \,]3, \infty[.$$



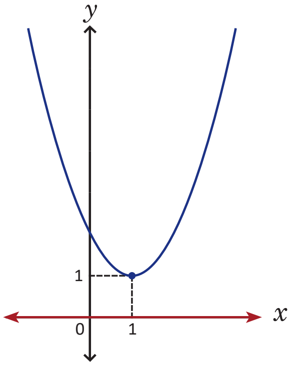
b) Sea $f(x) = x^2 - 2x + 2$; si se buscan las intersecciones de la gráfica de f con el eje x, se obtiene la ecuación:

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

Esta ecuación no tiene solución en los números reales. Si se completa el cuadrado para llevar a la forma $a(x - h)^2 + k$ se obtiene:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 2x) + 2 \\ &= \left[x^2 - 2x + \left(\tfrac{2}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{2}{2}\right)^2\right] + 2 \\ &= (x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + 2 \\ &= (x - 1)^2 + 1 \end{aligned}$$

La gráfica es una parábola abierta hacia arriba, con vértice en (1, 1) como muestra la figura de la derecha. Toda la gráfica queda sobre el eje x, por lo tanto $f(x) > 0$ para todo número real x.



En general

Dada la desigualdad $ax^2 + bx + c > 0$, con $a > 0$; al denotar por $f(x) = ax^2 + bx + c$:

1. Si la gráfica de f corta al eje x únicamente en el vértice $(h, 0)$ entonces $f(x) > 0$ se cumple para $x < h$ o $x > h$. Utilizando intervalos se escribe: $x \in \,]-\infty, h[\, \cup \,]h, \infty[$.
2. Si la gráfica de f NO corta al eje x entonces $f(x) > 0$ se cumple para todo número real x, es decir, la gráfica de f queda arriba del eje x.

Problemas

Para cada caso encuentra los valores de x para los cuales se satisface la desigualdad:

a) $2x^2 > 0$ b) $x^2 - 4x + 6 > 0$ c) $x^2 + 4x + 4 > 0$

d) $x^2 - 14x + 49 \geq 0$ e) $x^2 + 2x + 3 \geq 0$ f) $\frac{1}{3}x^2 \geq 0$

Indicador de logro

3.8 Resuelve desigualdades de la forma $f(x) \geq 0$, donde f es una función cuadrática cuya parábola es abierta hacia arriba y corta al eje x en uno o ningún punto.

Secuencia

Se continúa con la solución de desigualdades cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c \geq 0$, en esta clase la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene una o ninguna solución en los números reales.

Propósito

Similar a la clase anterior, en el bloque de Problemas no es necesario trazar las gráficas de las funciones, sino utilizar lo descrito en la parte En general para resolver las desigualdades.

Solución de problemas:

a) Sea $f(x) = 2x^2$, el punto de intersección entre la gráfica de f y el eje x está en el vértice (0, 0), y la gráfica se abre hacia arriba. Por lo tanto, la desigualdad $f(x) = 2x^2 > 0$ se cumple para $x < 0$ o $x > 0$, en notación de intervalo se escribe:

$$x \in]-\infty, 0[\cup]0, \infty[.$$

También puede utilizarse el siguiente razonamiento: si $x = 0$ entonces $2x^2 = 0$, para cualquier otro número real diferente de cero, $2x^2$ siempre será positivo. Por lo tanto, la desigualdad $2x^2 > 0$ se cumple para $x < 0$ o $x > 0$.

b) Sea $f(x) = x^2 - 4x + 6$, el vértice de la gráfica de f es (2, 2), es decir, se encuentra en el primer cuadrante. Además, la parábola se abre hacia arriba y por tanto no corta al eje x. Luego, la desigualdad $f(x) = x^2 - 4x + 6 > 0$ se cumple para todo número real x.

También puede utilizarse el siguiente razonamiento: sea $f(x) = x^2 - 4x + 6$, para determinar las intersecciones con el eje x se resuelve la ecuación $x^2 - 4x + 6 = 0$; sin embargo, al calcular el discriminante se obtiene:

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(6) = 16 - 24 = -8.$$

Es decir, $\Delta < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales y por tanto, la gráfica no corta al eje x. Como la parábola de f se abre hacia arriba entonces la desigualdad $x^2 - 4x + 6 > 0$ se cumple para todo número real x.

c) Sea $f(x) = x^2 + 4x + 4$; el punto de intersección entre la gráfica de f y el eje x está en el vértice (–2, 0), y la gráfica se abre hacia arriba. Por lo tanto, la desigualdad $x^2 + 4x + 4 > 0$ se cumple para $x < -2$ o $x > -2$, en notación de intervalo se escribe:

$$x \in]-\infty, -2[\cup]-2, \infty[.$$

d) Sea $f(x) = x^2 - 14x + 49$; el punto de intersección entre la gráfica de f y el eje x está en el vértice (7, 0), y la gráfica se abre hacia arriba. Entonces, la desigualdad $f(x) = x^2 - 14x + 49 \geq 0$ se cumple para todo número real x.

e) Sea $f(x) = x^2 + 2x + 3$; el vértice de la gráfica de la función es (–1, 2), es decir, se encuentra en el segundo cuadrante y como la parábola se abre hacia arriba entonces no corta al eje x. Por lo tanto, la desigualdad $f(x) = x^2 + 2x + 3 \geq 0$ se cumple para todo número real x.

f) Sea $f(x) = \frac{1}{3}x^2$, el vértice de la gráfica de la función es (0, 0) y se abre hacia arriba. Por lo tanto, la desigualdad $\frac{1}{3}x^2 \geq 0$ se cumple para todo número real x.

Lección 3

3.9 Desigualdad cuadrática $ax^2 + bx + c \leq 0$, $a > 0$

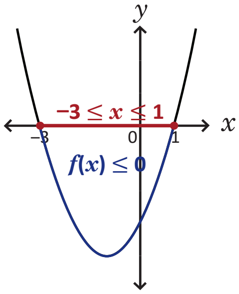
Problema inicial

Determina todos los valores de x que satisfacen, en cada caso, la desigualdad:

a) $x^2 + 2x - 3 \leq 0$ b) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ c) $x^2 - 2x + 2 < 0$

Utiliza las gráficas de la clase anterior.

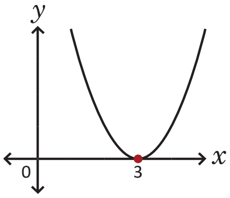
Solución



a) Sea $f(x) = x^2 + 2x - 3$; ahora deben encontrarse los valores de x para los cuales la gráfica de f queda debajo del eje x, incluyendo los puntos donde $f(x) = 0$.

La parábola de la función se muestra a la derecha, en ella se observa que $f(x) \leq 0$ si $-3 \leq x \leq 1$. Utilizando intervalos se escribe:

$$x \in [-3, 1].$$



b) Sea $f(x) = x^2 - 6x + 9$; en la clase anterior se llegó a $f(x) = (x - 3)^2$, cuya gráfica se muestra a la derecha; se deben encontrar los valores de x para los cuales $f(x)$ es menor o igual a cero. La parábola de la función queda siempre arriba del eje x, y es igual a cero en el vértice de la parábola. Por lo tanto, la desigualdad:

$$f(x) = (x - 3)^2 \leq 0$$

se cumple únicamente para $x = 3$.

c) Sea $f(x) = x^2 - 2x + 2$; en la clase anterior se concluyó que $f(x) > 0$ para todo número real x, es decir, la gráfica queda totalmente arriba del eje x. Por lo tanto, $f(x) = x^2 - 2x + 2 < 0$ no tiene solución.

En general

Resolver una desigualdad de la forma $ax^2 + bx + c \leq 0$, con $a > 0$, significa encontrar todos los valores de x para los cuales $ax^2 + bx + c \leq 0$ es verdadero. Si se denota por $f(x) = ax^2 + bx + c$, entonces $f(x) \leq 0$ significa gráficamente encontrar los valores de x para los cuales la parábola de f corta o se encuentra debajo del eje x. Para ello se encuentran las intersecciones de la gráfica de la función con el eje x:

1. Si la gráfica de f corta al eje x en dos puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$, con $x_1 < x_2$, entonces $f(x) \leq 0$ se cumple para $x_1 \leq x \leq x_2$. Utilizando intervalos se escribe: $x \in [x_1, x_2]$.
2. Si la gráfica de f corta al eje x únicamente en el vértice $(h, 0)$ entonces $f(x) \leq 0$ se cumple solo para $x = h$.
3. Si la gráfica de f no corta al eje x entonces $f(x) \leq 0$ no tiene solución.

En las desigualdades de la forma $ax^2 + bx + c < 0$ NO deben incluirse los puntos donde $f(x) = 0$; para el numeral 2, $f(x) < 0$ no tiene solución.

Problemas

Para cada caso encuentra los valores de x para los cuales se satisface la desigualdad:

a) $x^2 - 4 \leq 0$ b) $x^2 + 2x \leq 0$ c) $x^2 - 10x + 21 < 0$
d) $x^2 + 8x + 15 < 0$ e) $2x^2 \leq 0$ f) $x^2 - 10x + 25 < 0$
g) $x^2 - 4x - 3 \leq 0$ h) $x^2 + 2x - 8 < 0$ i) $x^2 + 8 \leq 0$

Indicador de logro

3.9 Resuelve desigualdades de la forma $f(x) \leq 0$, donde f es una función cuadrática cuya parábola es abierta hacia arriba.

Secuencia

Se resuelven desigualdades cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c \leq 0$, donde a es un número real positivo. Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$, en los problemas presentados en la clase la gráfica de f puede tener dos, uno o ningún punto de intersección con el eje x.

Propósito

Similar a las clases anteriores, en el bloque de Problemas no es necesario trazar las gráficas de las funciones, sino utilizar lo descrito en la parte En general para resolver las desigualdades.

Solución de problemas:

a) Sea $f(x) = x^2 - 4$; los puntos de intersección con el eje x son $(-2, 0)$ y $(2, 0)$, y la parábola es abierta hacia arriba. Luego, $f(x) = x^2 - 4 \leq 0$ se cumple para $-2 \leq x \leq 2$, en notación de intervalo:

$$x \in [-2, 2].$$

c) Sea $f(x) = x^2 - 10x + 21$; los puntos de intersección con el eje x son $(3, 0)$ y $(7, 0)$, y la parábola se abre hacia arriba. Luego, $f(x) = x^2 - 10x + 21 < 0$ se cumple para $3 < x < 7$, en notación de intervalo:

$$x \in]3, 7[.$$

e) Sea $f(x) = 2x^2$, el punto de intersección con el eje x es el vértice $(0, 0)$, y la parábola es abierta hacia arriba. Luego, $f(x) = 2x^2 \leq 0$ se cumple para $x = 0$.

g) Sea $f(x) = x^2 - 4x - 3$; los puntos de intersección con el eje x son $(2 - \sqrt{7}, 0)$ y $(2 + \sqrt{7}, 0)$, y la parábola es abierta hacia arriba (las intersecciones se encuentran resolviendo la ecuación cuadrática $x^2 - 4x - 3 = 0$ usando la fórmula general). Luego, la desigualdad $f(x) = x^2 - 4x - 3 \leq 0$ se cumple para $2 - \sqrt{7} \leq x \leq 2 + \sqrt{7}$, en notación de intervalo:

$$x \in [2 - \sqrt{7}, 2 + \sqrt{7}].$$

b) Sea $f(x) = x^2 + 2x$; los puntos de intersección con el eje x son $(-2, 0)$ y $(0, 0)$, y la parábola es abierta hacia arriba. Luego, $f(x) = x^2 + 2x \leq 0$ se cumple para $-2 \leq x \leq 0$, en notación de intervalo:

$$x \in [-2, 0].$$

d) Sea $f(x) = x^2 + 8x + 15$; los puntos de intersección con el eje x son $(-5, 0)$ y $(-3, 0)$, y la parábola es abierta hacia arriba. Luego, $f(x) = x^2 + 8x + 15 < 0$ se cumple para $-5 < x < -3$, en notación de intervalo:

$$x \in]-5, -3[.$$

f) Sea $f(x) = x^2 - 10x + 25$; el punto de intersección con el eje x es el vértice $(5, 0)$, y la parábola es abierta hacia arriba. Luego, la desigualdad $f(x) = x^2 - 10x + 25 < 0$ no tiene solución.

h) Sea $f(x) = x^2 + 2x - 8$; los puntos de intersección con el eje x son $(-4, 0)$ y $(2, 0)$, y la parábola se abre hacia arriba. Luego, $f(x) = x^2 + 2x - 8 < 0$ se cumple para $-4 < x < 2$, en notación de intervalo:

$$x \in]-4, 2[.$$

i) Sea $f(x) = x^2 + 8$; el vértice de la gráfica de f es $(0, 8)$ y la parábola se abre hacia arriba. Entonces, no hay intersección con el eje x y por tanto, la desigualdad $f(x) = x^2 + 8 \leq 0$ no tiene solución.

Lección 3

3.10 Desigualdad cuadrática, $a < 0$

Problema inicial

Determina todos los valores de x que satisfacen la desigualdad:

$$-x^2 + 4x - 3 < 0.$$

Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$

Solución

Utilizando propiedades de desigualdades, se multiplican ambos miembros de la desigualdad por – 1, esto hace que el símbolo “menor que” cambie a “mayor que”:

$$(-x^2 + 4x - 3)(-1) > 0(-1)$$

$$x^2 - 4x + 3 > 0 \qquad \text{-----------------} \ (1)$$

La desigualdad (1) se resuelve como lo visto en las clases anteriores. Primero se encuentran las intersecciones de $f(x) = x^2 - 4x + 3$ con el eje x:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

$$x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0$$

$$x = 1 \qquad\qquad x = 3$$

Entonces, $x^2 - 4x + 3 > 0$ si $x < 1$ o $x > 3$. Esta solución satisface también la desigualdad original:

$$-x^2 + 4x - 3 < 0.$$

Por lo tanto, $x \in \,]-\infty, 1[\, \cup \,]3, \infty[$.

En general

A las desigualdades de la forma:

a) $ax^2 + bx + c \geq 0$ b) $ax^2 + bx + c \leq 0$ c) $ax^2 + bx + c > 0$ d) $ax^2 + bx + c < 0$

donde a es cualquier número real diferente de cero, se les llama **desigualdades cuadráticas con una incógnita**. Si $a > 0$ entonces su solución está dada como en las clases 3.7, 3.8 y 3.9; si $a < 0$ entonces se multiplica por –1 ambos miembros de la desigualdad y se soluciona como en las clases 3.7, 3.8 y 3.9.

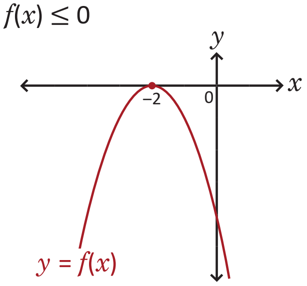
Problemas

1. Para cada caso encuentra los valores de x para los cuales se satisface la desigualdad:

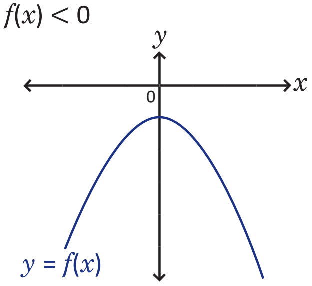
a) $-x^2 + 2x + 15 \leq 0$
b) $-(x + 3)^2 \leq 0$
c) $-x^2 + 1 \geq 0$
d) $-x^2 - 6x - 5 \leq 0$
e) $-2x^2 + 4x - 3 > 0$
f) $-x^2 + 8x - 16 \geq 0$
g) $-x^2 - 4x - 4 < 0$
h) $-2x^2 - 1 > 0$
i) $-x^2 + 5 > 0$

2. Utilizando la gráfica de f en cada caso, encuentra los valores de x que satisfacen la desigualdad:

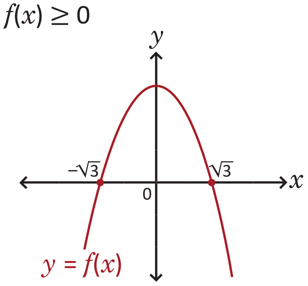
a) $f(x) \leq 0$



b) $f(x) < 0$



c) $f(x) \geq 0$



Indicador de logro

3.10 Aplica propiedades de desigualdad para resolver desigualdades cuadráticas cuyo coeficiente de x^2 es negativo.

Secuencia

En esta clase se resuelven desigualdades cuadráticas cuyo coeficiente de x^2 es negativo. Se aplica la propiedad de desigualdad sobre multiplicar ambos miembros por un número negativo y se utiliza lo visto en las clases anteriores.

Propósito

En el numeral 1 del bloque de Problemas no es necesario trazar las gráficas de las funciones, sino utilizar lo descrito en la parte En general para resolver las desigualdades.

Posibles dificultades

Sin cambiar el signo del coeficiente de x^2, puede utilizarse la gráfica de la función respectiva para resolver la desigualdad cuadrática, encontrando los intervalos donde esta queda arriba o abajo del eje x (como en el numeral 2 del bloque de Problemas). Sin embargo, los cálculos son más fáciles cuando el coeficiente de x^2 es positivo. Esto se notará en las clases donde se utilice el cuadro de variación.

Solución de problemas:

1a) Al multiplicar ambos miembros por –1 se obtiene $x^2 - 2x - 15 \geq 0$. Si $f(x) = x^2 - 2x - 15$ entonces las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ son $x = -3$ y $x = 5$; como la gráfica de f se abre hacia arriba, $f(x) \geq 0$ se cumple para $x \leq -3$ o $x \geq 5$. Por lo tanto, $-x^2 + 2x + 15 \leq 0$ si:

$$x \in]-\infty, -3] \cup [5, \infty[.$$

1c) Al multiplicar ambos miembros por –1 se obtiene $x^2 - 1 \leq 0$. Si $f(x) = x^2 - 1$ entonces las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ son $x = -1$ y $x = 1$; como la gráfica de f se abre hacia arriba, $f(x) \leq 0$ se cumple para $-1 \leq x \leq 1$. Por lo tanto, $-x^2 + 1 \geq 0$ si:

$$x \in [-1, 1].$$

1e) $-2x^2 + 4x - 3 = -2(x - 1)^2 - 1$, por lo que la desigualdad $-2x^2 + 4x - 3 > 0$ no tiene solución.

1g) La desigualdad $-x^2 - 4x - 4 < 0$ se cumple para $x < -2$ o $x > -2$, o sea, $x \in]-\infty, -2[\cup]-2, \infty[$.

1i) La desigualdad $-x^2 + 5 > 0$ se cumple para $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$, o sea, $x \in]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[$.

2b) La gráfica de la función f es una parábola abierta hacia abajo, no corta al eje x en ningún punto. Así, $f(x) < 0$ se cumple para todo número real x.

1b) Al multiplicar ambos miembros por –1 se obtiene $(x + 3)^2 \geq 0$. Si $f(x) = (x + 3)^2$ entonces su gráfica es una parábola abierta hacia arriba con vértice en (–3, 0). Luego, $f(x) \geq 0$ se cumple para todo número real x. Por lo tanto, $-(x + 3)^2 \leq 0$ si:

$$x \in \mathbb{R}.$$

1d) Al multiplicar ambos miembros por –1 se obtiene $x^2 + 6x + 5 \geq 0$. Si $f(x) = x^2 + 6x + 5$ entonces las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ son $x = -5$ y $x = -1$; como la gráfica de f se abre hacia arriba, $f(x) \geq 0$ se cumple para $x \leq -5$ o $x \geq -1$. Por lo tanto, $-x^2 - 6x - 5 \leq 0$ si:

$$x \in]-\infty, -5] \cup [-1, \infty[.$$

1f) La desigualdad $-x^2 + 8x - 16 \geq 0$ solo se cumple para $x = 4$.

1h) La desigualdad $-2x^2 - 1 > 0$ no tiene solución.

2a) La gráfica de la función f es una parábola abierta hacia abajo, corta al eje x en (–2, 0). Luego, $f(x) \leq 0$ se cumple para todo número real x.

2c) La gráfica de la función f es una parábola que se abre hacia abajo, corta al eje x en los puntos $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, 0)$. Luego, $f(x) \geq 0$ se cumple para $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$, o sea, $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

3.11 Cuadro de variación, parte 1*

Problema inicial

Resuelve la siguiente desigualdad cuadrática:

$$2x^2 - x - 3 > 0$$

Solución

Se escribe $2x^2 - x - 3$ como producto de binomios:

$$2x^2 - x - 3 = (x + 1)(2x - 3)$$

la desigualdad se convierte en $(x + 1)(2x - 3) > 0$. Para que este producto sea mayor que cero ambos binomios deben ser, o bien positivos o bien negativos. Es necesario dividir los números reales en intervalos y determinar, en cada intervalo, el signo de $x + 1$ y de $2x - 3$. Los intervalos a considerar se toman con base a las raíces del trinomio, a saber:

$$\begin{array}{ccc} (x + 1)(2x - 3) = 0 & & \\ x + 1 = 0 & \text{o} & 2x - 3 = 0 \\ x = -1 & & x = \frac{3}{2} \end{array}$$

Se construye una tabla como la siguiente, cuya línea superior simula la recta numérica donde se colocan los valores -1 y $\frac{3}{2}$ por ser las raíces del trinomio y se coloca cero en la línea vertical donde el factor es cero:

	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		∞
$x + 1$			0				
$2x - 3$					0		
$(x + 1)(2x - 3)$							

Para determinar el signo de cada factor en un intervalo basta tomar un número que se encuentre dentro del mismo y evaluarlo en el factor. Por ejemplo, -2 pertenece al intervalo $]-\infty, -1[$; entonces si $x = -2$ resulta $-2 + 1 = -1$ negativo para el primer factor y $2(-1) - 3 = -5$ negativo para el segundo factor. En la tabla se escriben los signos de los factores:

	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		∞
$x + 1$		$-$	0				
$2x - 3$		$-$			0		
$(x + 1)(2x - 3)$							

También se puede resolver la desigualdad lineal $x + 1 > 0$ para determinar los intervalos donde $x + 1$ es positivo y donde es negativo.

De forma similar se hace para los otros intervalos; la tabla queda de la siguiente manera:

	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		∞
$x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x + 1)(2x - 3)$							

Luego, se multiplican los signos de los factores en cada columna, por ejemplo en el intervalo $]-\infty, -1[$ los signos de los factores $x + 1$ y $2x - 3$ son "–" y "–" respectivamente, por tanto al multiplicarlos el resultado será "+":

	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		∞
$x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x + 1)(2x - 3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Los ceros sobre las líneas indican que en ese número el producto de los factores es igual a cero. Como interesa cuando $(x + 1)(2x - 3) > 0$ entonces los valores para x serán aquellos donde el producto es positivo.

Por lo tanto, $2x^2 - x - 3 = (x + 1)(2x - 3) > 0$ si $x \in \,]-\infty, -1[\, \cup \, \left]\frac{3}{2}, \infty\right[$.

En resumen

Si x_1 y x_2 son raíces del polinomio $ax^2 + bx + c$, con $x_1 < x_2$ entonces para resolver una desigualdad de la forma $ax^2 + bx + c > 0$ o $ax^2 + bx + c < 0$ se hace lo siguiente:

1. Se escribe $ax^2 + bx + c = pq$, donde p y q son binomios lineales cuyas raíces son x_1 y x_2, respectivamente.
2. Se dividen los números reales en los intervalos $]-\infty, x_1[$, $]x_1, x_2[$ y $]x_2, \infty[$.
3. Si n es un número que pertenece a cualquiera de los tres intervalos descritos en 2 y el valor de p o q es positivo o negativo al evaluar $x = n$ entonces p o q será positivo o negativo en todo el intervalo.
4. Se multiplican los signos de p y q en cada intervalo. La solución serán aquellos intervalos donde el producto sea positivo para el caso de $ax^2 + bx + c > 0$, o negativo para el caso de $ax^2 + bx + c < 0$.

A la tabla construida en la solución del Problema inicial se le llama **cuadro de variación**.

Problemas

1. Resuelve las siguientes desigualdades:

a) $2x^2 - x - 1 > 0$
b) $3x^2 + 8x - 3 < 0$
c) $3x^2 - 8x + 4 < 0$
d) $2x^2 + 9x + 4 > 0$
e) $-3x^2 - 4x + 15 > 0$
f) $-4x^2 + 7x - 3 < 0$
g) $6x^2 + x - 1 < 0$
h) $x^2 - 4x + 4 > 0$
i) $4x^2 - 1 < 0$

2. Antonio es dueño de una tienda de ropa. Ha estimado que la ganancia diaria en dólares en la venta de camisas está dado por la función $f(x) = x^2 - 14x - 32$, donde x es la cantidad de camisas vendidas en un día. ¿Cuántas camisas debe vender Antonio para obtener ganancias y no pérdidas?

Indicador de logro

3.11 Utiliza el cuadro de variación para resolver desigualdades cuadráticas.

Secuencia

En esta clase se utiliza el cuadro de variación para resolver desigualdades cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c > 0$ o $ax^2 + bx + c < 0$. Si los estudiantes tienen muchas dificultades para resolver el Problema inicial, el docente debe desarrollar e ir explicando paso a paso la Solución.

Posibles dificultades

Puede resolver el problema 1a) para explicar nuevamente la solución de una desigualdad cuadrática usando en cuadro de variación.

Solución de problemas:

1a) $2x^2 - x - 1 = (2x + 1)(x - 1)$, las raíces del trinomio son $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 1$.

	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		∞
$2x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x + 1)(x - 1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Luego, $2x^2 - x - 1 > 0$ si $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \,]1, \infty[$.

1b) $3x^2 + 8x - 3 = (x + 3)(3x - 1)$, las raíces del trinomio son $x = -3$ y $x = \frac{1}{3}$.

	$-\infty$		-3		$\frac{1}{3}$		∞
$x + 3$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x + 3)(3x - 1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Luego, $3x^2 + 8x - 3 < 0$ si $x \in \left]-3, \frac{1}{3}\right[$.

1c) La desigualdad $3x^2 - 8x + 4 < 0$ se cumple para $x \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[$.

1d) La desigualdad $2x^2 + 9x + 4 > 0$ se cumple para $x \in \,]-\infty, -4[\, \cup \left]-\frac{1}{2}, \infty\right[$.

1e) La desigualdad $-3x^2 - 4x + 15 > 0$ se cumple para $x \in \left]-3, \frac{5}{3}\right[$.

1f) La desigualdad $-4x^2 + 7x - 3 < 0$ se cumple para $x \in \left]-\infty, \frac{3}{4}\right[\cup \,]1, \infty[$.

1g) La desigualdad $6x^2 + x - 1 < 0$ se cumple para $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right[$.

1h) La desigualdad $x^2 - 4x + 4 > 0$ se cumple para $x \in \,]-\infty, 2[\, \cup \,]2, \infty[$.

1i) La desigualdad $4x^2 - 1 < 0$ se cumple para $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

2. Obtener ganancia significa que $f(x)$ debe ser mayor que cero. Las raíces del trinomio $x^2 - 14x - 32$ son $x = -2$ y $x = 16$; utilizando el cuadro de variación:

	$-\infty$		-2		16		∞
$x + 2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 16$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x + 2)(x - 16)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Así, $x^2 - 14x - 32 > 0$ se cumple para $]-\infty, -2[\, \cup \,]16, \infty[$. Por el contexto del problema no es posible tener cantidades negativas, por lo tanto debe vender más de 16 camisas.

3.12 Cuadro de variación, parte 2

Problema inicial

Resuelve la siguiente desigualdad cuadrática:

$$-6x^2 \geq -11x - 7$$

Deben dejarse todos los términos a un solo lado del símbolo "≥".

Solución

Deben dejarse todos los términos a un solo lado del símbolo "≥". Utilizando propiedades de desigualdades se suma $6x^2$ a ambos miembros de la desigualdad:

$$\cancel{-6x^2} \cancel{+6x^2} \geq -11x - 7 + 6x^2$$

$$0 \geq 6x^2 - 11x - 7$$

esta última es equivalente a $6x^2 - 11x - 7 \leq 0$. Se factoriza el trinomio como producto de dos binomios lineales, a saber:

$$6x^2 - 11x - 7 = (3x - 7)(2x + 1)$$

De lo anterior se obtienen las raíces del polinomio $x = -\frac{1}{2}$ y $x = \frac{7}{3}$. De forma similar a la clase anterior se construye el cuadro de variación para determinar los intervalos donde el polinomio es negativo:

	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{7}{3}$		∞
$3x - 7$		−		−	0	+	
$2x + 1$		−	0	+		+	
$(3x - 7)(2x + 1)$		+	0	−	0	+	

El símbolo "≤" indica que también deben tomarse en cuenta los valores de x para los cuales el polinomio $6x^2 - 11x - 7$ es igual a cero.

Entonces, $6x^2 - 11x - 7 = (3x - 7)(2x + 1) \leq 0$ si $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{7}{3}\right]$. Este intervalo también satisface la desigualdad original.

En resumen

En una desigualdad cuadrática se cumplen las siguientes propiedades:

1. Sumar o restar un número real a ambos miembros no altera la desigualdad.
2. Multiplicar o dividir ambos miembros de la desigualdad por un número real positivo no altera la desigualdad.
3. Multiplicar o dividir ambos miembros de la desigualdad por un número real negativo cambia el sentido de la desigualdad.

Problemas

1. Para cada caso, determina el intervalo donde se encuentran los valores de x si:

a) $6x^2 \geq 11x - 3$
b) $15x^2 + 2x \leq 1$
c) $31x + 15 \geq -10x^2$
d) $3x \geq -20x^2 + 2$
e) $-6x^2 + 23x - 7 \geq 0$
f) $9x^2 - 25 \geq 0$
g) $x^2 - 2 \leq 0$
h) $4x^2 - 3 \leq 0$
i) $x^2 \leq 1 + 2x$

2. Sean x_1 y x_2 las raíces del trinomio $x^2 + bx + c$ con $x_1 < x_2$. Utilizando el cuadro de variación demuestra que la solución de la desigualdad $x^2 + bx + c \leq 0$ es $[x_1, x_2]$.

Indicador de logro

3.12 Aplica propiedades de desigualdades y utiliza el cuadro de variación para resolver desigualdades cuadráticas.

Secuencia

En las desigualdades cuadráticas presentadas en esta clase deben utilizarse primero propiedades de desigualdad para llevarlas a la forma $p \geq 0$ donde p es un trinomio de grado 2 (se incluyen los símbolos $\leq$, $>$ y $<$), y luego aplicar lo visto en la clase 3.11.

Posibles dificultades

Recuerde a los estudiantes que las desigualdades cuadráticas siempre deben llevarse a la forma $ax^2 + bx + c \geq 0$ (o con los símbolos $\leq$, $>$ y $<$) para luego factorizar.

Solución de problemas:

1a) Al usar propiedades de desigualdades se obtiene $6x^2 - 11x + 3 \geq 0$. Las raíces del trinomio $6x^2 - 11x + 3$ son $x = \frac{1}{3}$ y $x = \frac{3}{2}$:

	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{2}$		∞
$3x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(3x - 1)(2x - 3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Luego, $6x^2 \geq 11x - 3$ si $x \in \left]-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right[$.

1b) Al usar propiedades de desigualdades se obtiene $15x^2 + 2x - 1 \leq 0$. Las raíces del trinomio $15x^2 + 2x - 1$ son $x = -\frac{1}{3}$ y $x = \frac{1}{5}$:

	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{5}$		∞
$3x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$5x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(3x + 1)(5x - 1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Luego, $15x^2 + 2x \leq 1$ si $x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right]$.

1c) La desigualdad $31x + 15 \geq -10x^2$ se cumple para $x \in \left]-\infty, -\frac{5}{2}\right] \cup \left[-\frac{3}{5}, \infty\right[$.

1d) La desigualdad $3x \geq -20x^2 + 2$ se cumple para $x \in \left]-\infty, -\frac{2}{5}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, \infty\right[$.

1e) La desigualdad $-6x^2 + 23x - 7 \geq 0$ se cumple para $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{7}{2}\right]$.

1f) La desigualdad $9x^2 - 25 \geq 0$ se cumple para $x \in \left]-\infty, -\frac{5}{3}\right] \cup \left[\frac{5}{3}, \infty\right[$.

1g) La desigualdad cuadrática $x^2 - 2 \leq 0$ se cumple para $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

1h) La desigualdad cuadrática $4x^2 - 3 \leq 0$ se cumple para $x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

1i) La desigualdad cuadrática $x^2 \leq 1 + 2x$ se cumple para $x \in [1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$.

2. Si x_1 y x_2 son las raíces del trinomio $x^2 + bx + c$ entonces $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$; deben encontrarse los valores de x para los cuáles se cumple la desigualdad $x^2 + bx + c \leq 0$, o sea, $(x - x_1)(x - x_2) \leq 0$. Se observa lo siguiente:

- Si $x < x_1$ también se cumple que $x < x_1$, entonces $x - x_1$ y $x - x_2$ serán números negativos.
- Si $x_1 < x < x_2$ entonces $x - x_1$ será positivo y $x - x_2$ será negativo.
- Si $x_2 < x$ entonces $x - x_1$ y $x - x_2$ serán números positivos.

	$-\infty$		x_1		x_2		∞
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Por lo tanto, la solución de la desigualdad $x^2 + bx + c \leq 0$ es $[x_1, x_2]$.

3.13 Practica lo aprendido

1. Determina si la función f es creciente o decreciente en el intervalo dado, luego escribe el intervalo donde se encuentran los valores de $f(x)$:

a) $f(x) = -(x + 3)^2 - 5; -7 \leq x \leq -4$

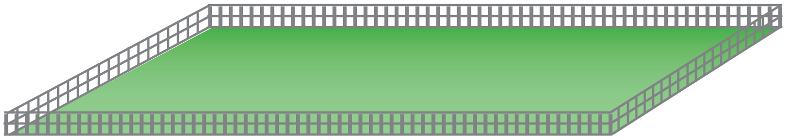
b) $f(x) = 2(x - 2)^2 - 4; -1 \leq x \leq 1$

2. En cada caso, determina el intervalo donde se encuentran los valores de $f(x)$ si:

a) $f(x) = -2(x + 3)^2 + 7; -4 \leq x \leq -1$

b) $f(x) = (x - 5)^2 - 8; 1 \leq x \leq 8$

3. En el Instituto Nacional Puerto El Triunfo construirán un huerto escolar en un terreno con forma rectangular, para promover el consumo de frutas y hortalizas, y así contribuir a la formación de valores y conocimientos en el cuido del medio ambiente. Si se cuenta con 32 metros de malla para cercar el terreno, ¿cuáles deben ser las dimensiones del terreno para tener la mayor área posible? ¿Cuál sería el área para el huerto escolar?



4. Una sastrería confecciona y distribuye trajes para hombre cuyo precio es de \$100.00. Si una tienda de ropa solicita 50 o más trajes, entonces el precio se reduce a razón de \$0.50 por el número pedido. ¿De qué cantidad debe ser el pedido para producir la máxima ganancia para la sastrería? No tomes en cuenta los costos de producción.

5. Un proyectil se lanza verticalmente hacia arriba desde el suelo. La altura alcanzada, en metros, después de x segundos está dada por la función:

$$f(x) = -5x^2 + 100x.$$

Calcula la altura máxima que alcanza el proyectil y el tiempo que tarda en llegar al suelo.

6. Encuentra dos números enteros cuya suma sea igual a 30 y la suma de sus cuadrados sea mínima.

7. Encuentra las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica de f con los ejes de coordenadas si:

a) $f(x) = (x - 3)^2 - 9$

b) $f(x) = -(x + 5)^2 + 4$

c) $f(x) = 2x^2 - 8$

d) $f(x) = 3x^2 + 4x - 1$

8. Resuelve las siguientes desigualdades:

a) $x^2 + 2x - 8 \geq 0$

b) $x^2 - 5x - 24 < 0$

c) $x^2 + 4x + 4 \leq 0$

d) $-\frac{1}{3}x^2 + 2 > 0$

e) $-x^2 - 6x \geq 10$

f) $2x^2 + 15 < 13x$

g) $-3x^2 - 11x + 4 > 0$

h) $5x^2 + 3x \leq 8$

i) $-4x^2 + 20x - 9 < 0$

j) $x^2 + 3x - 5 < 0$

Indicador de logro

3.13 Resuelve problemas correspondientes a aplicaciones de las funciones cuadráticas.

Solución de problemas:

1a) $f(x) = -(x + 3)^2 - 5$ es creciente en $-7 \leq x \leq -4$, y $-21 \leq f(x) \leq -6$.

1b) $f(x) = 2(x - 2)^2 - 4$ es decreciente $-1 \leq x \leq 1$, y $-2 \leq f(x) \leq 14$.

2a) Si $f(x) = -2(x + 3)^2 + 7$ y $-4 \leq x \leq -1$ entonces $-1 \leq f(x) \leq 7$.

2b) Si $f(x) = (x - 5)^2 - 8$ y $1 \leq x \leq 8$ entonces $-8 \leq f(x) \leq 8$.

3. Tener 32 m de malla para cercar significa que el perímetro del terreno debe medir 32 m. Como la forma es rectangular, sea x la longitud del largo del terreno y y la longitud del ancho (ambas medidas en metros); entonces $2x + 2y = 32$, o sea, $y = 16 - x$. Sea $f(x)$ la función que calcula el área del terreno a partir de la longitud x de su largo; entonces $f(x) = x(16 - x) = -x^2 + 16x$. La función f tiene un máximo en el vértice; al completar cuadrados se tiene: $f(x) = -(x - 8)^2 + 64$. Por lo tanto, las dimensiones del terreno deben ser 8 m de largo y 8 m de ancho para tener la mayor área posible, la cuál sería de 64 m^2.

4. Sea x la cantidad de trajes que confeccionará la sastrería (debe ser mayor o igual a 50 trajes). Como el precio se reduce a razón de \$0.50 por el número pedido entonces el precio de cada traje será de $100 - 0.5x$ dólares. Sea $g(x)$ la función que calcula la ganancia de la sastrería con base en la cantidad x de trajes solicitados, luego: $g(x) = x(100 - 0.5x) = -0.5x^2 + 100x$. La función g tiene un máximo en el vértice; al completar cuadrados se obtiene: $g(x) = -0.5(x - 100)^2 + 5\,000$. Por lo tanto, deben solicitar 100 trajes a la sastrería para que esta obtenga la máxima ganancia.

5. La función $f(x) = -5x^2 + 100x$ tiene un máximo en el vértice; al completar cuadrados se obtiene la expresión $f(x) = -5(x - 10)^2 + 500$. Luego, la altura máxima que alcanza el proyectil es de 500 m. Por otro lado, llegar al suelo indica que la distancia debe ser igual a cero, es decir, $f(x) = 0$. Las soluciones de la ecuación cuadrática $-5x^2 + 100x = 0$ son $x = 0$ y $x = 20$ (la primera corresponde al momento cuando se lanzó el proyectil). Por lo tanto, llegará al suelo después de 20 segundos.

6. Sea x uno de los número enteros; el otro será igual a $30 - x$. Si $f(x)$ es la función que calcula la suma de los cuadrados de ambos números entonces: $f(x) = x^2 + (30 - x)^2 = 2x^2 - 60x + 900$. Esta función tiene un valor mínimo en el vértice, al completar cuadrados se obtiene $f(x) = 2(x - 15)^2 + 450$. Por lo tanto, ambos números enteros deben ser igual a 15.

7a) Los puntos de intersección de la gráfica de $f(x) = (x - 3)^2 - 9$ con los ejes de coordenadas son $(0, 0)$ y $(6, 0)$.

7b) Los puntos de intersección de la gráfica de $f(x) = -(x + 5)^2 + 4$ con los ejes de coordenadas son $(0, -21)$, $(-7, 0)$ y $(-3, 0)$.

7c) Los puntos de intersección de la gráfica de $f(x) = 2x^2 - 8$ con los ejes de coordenadas son $(0, -8)$, $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

7d) Los puntos de intersección de la gráfica de $f(x) = 3x^2 + 4x - 1$ con los ejes de coordenadas son $(0, -1)$, $\left(-\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3}, 0\right)$ y $\left(-\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}, 0\right)$.

8a) $x^2 + 2x - 8 \geq 0$ se cumple si $x \in \,]-\infty, -4] \cup [2, \infty[$.

8b) $x^2 - 5x - 24 < 0$ se cumple si $x \in \,]-3, 8[$.

8c) $x^2 + 4x + 4 \leq 0$ se cumple si $x = -2$.

8d) $-\frac{1}{3}x^2 + 2 > 0$ se cumple si $x \in \,]-\sqrt{6}, \sqrt{6}[$.

8e) $-x^2 - 6x \geq 10$ no tiene solución.

8f) $2x^2 + 15 < 13x$ se cumple si $x \in \left]\frac{3}{2}, 5\right[$.

8g) $-3x^2 - 11x + 4 > 0$ se cumple si $x \in \left]-4, \frac{1}{3}\right[$.

8h) $5x^2 + 3x \leq 8$ se cumple si $x \in \left[-\frac{8}{5}, 1\right]$.

8i) $-4x^2 + 20x - 9 < 0$ si $x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{9}{2}, \infty\right[$.

8j) $x^2 + 3x - 5 < 0$ si $x \in \left]-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2}, -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2}\right[$.

Lección 4 Otras funciones reales

4.1 Función $f(x) = x^3$

Problema inicial

$x^3 = (x)(x)(x)$

Sea $y = x^3$:

1. Completa la siguiente tabla (aproxima hasta las centésimas):

x	–1	–0.8	–0.6	–0.4	–0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	–1										

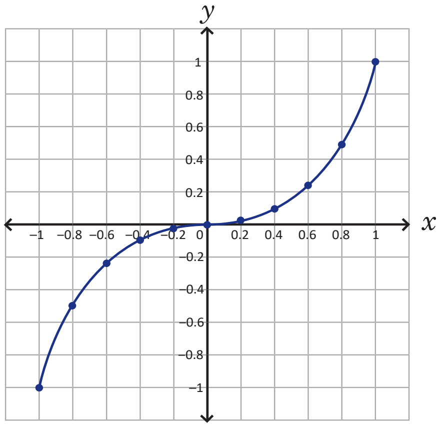
2. Ubica los pares ordenados (x, y) encontrados en el literal anterior. ¿Cómo es la línea que se forma?

Solución

1. Cada valor de y es igual a multiplicar el correspondiente valor de x por sí mismo tres veces. Debe cuidarse el signo, por ejemplo: $(–1)^3 = (–1)(–1)(–1) = –1$. De acuerdo con esto, la tabla queda de la siguiente manera:

x	–1	–0.8	–0.6	–0.4	–0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	–1	–0.51	–0.22	–0.06	–0.01	0	0.01	0.06	0.22	0.51	1

2. Los puntos del numeral anterior quedan situados como se muestra en la figura de la derecha. La línea que se forma no es recta y tampoco es una parábola.



x^3 es la potencia cúbica del número x; también se lee "x elevado al cubo".

Conclusión

La ecuación $y = x^3$ corresponde a una función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que asigna a cada número real x su valor elevado al cubo. Para la función $f(x) = x^3$: el dominio y rango son el conjunto de los números reales, su gráfica pasa por el origen y es creciente en todo su dominio.

Una función x de A en B significa que a cada elemento x del conjunto A le corresponde un único elemento y del conjunto B. Si la función es de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ entonces los valores para x son números reales y su correspondiente $f(x)$ también es un número real.

Problemas

1. Sea $f(x) = x^3$; completa la siguiente tabla y ubica los puntos $(x, f(x))$ en el plano cartesiano (aproxima hasta las centésimas). Utiliza los puntos encontrados en el problema 1 del Problema inicial para continuar la gráfica de f:

x	–2	–1.8	–1.6	–1.4	–1.2	1.2	1.4	1.6	1.8	2
$f(x)$										

2. ¿Qué relación hay entre los valores de $f(x) = x^3$ cuando $x = –1$ y $x = 1$? ¿Y si $x = –2$ y $x = 2$?

3. En general, ¿qué relación hay entre los valores de $f(x) = x^3$ cuando $x = –m$ y $x = m$?

Indicador de logro

4.1 Elabora la gráfica de la función de la forma $f(x) = x^3$ ubicando puntos en el plano cartesiano que satisfacen la ecuación de la función.

Materiales

Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y resolver el numeral 2 del Problema inicial.

Secuencia

La forma de introducir la función $y = x^3$ es similar a cuando se presentaron las funciones $y = x$ y $y = x^2$, es decir, usando tablas para calcular valores particulares y ubicando los pares (x, y) en el plano cartesiano.

Propósito

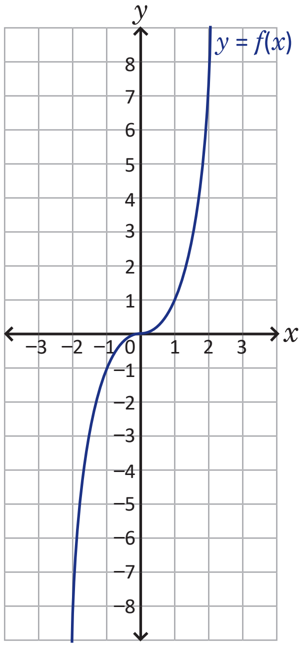
Si bien en el Problema inicial se utiliza la forma $y = x^3$, luego de definir la función en la Conclusión, para el bloque de Problemas los estudiantes deben utilizar la notación $f(x) = x^3$.

Solución de problemas:

1. La tabla queda de la siguiente manera:

x	–2	–1.8	–1.6	–1.4	–1.2	1.2	1.4	1.6	1.8	2
$f(x)$	–8	–5.83	–4.10	–2.74	–1.73	1.73	2.74	4.10	5.83	8

Si se toman valores menores que –2 para x, su correspondiente $f(x)$ será cada vez menor; mientras que si se toman valores mayores que 2 para x, su correspondiente $f(x)$ será cada vez mayor, tal como lo muestra la gráfica:



2. Sea $f(x) = x^3$; se calculan $f(–1)$ y $f(1)$: $f(–1) = –1$ y $f(1) = 1$, es decir, $f(–1) = – f(1)$. De forma similar, $f(–2) = –8$ y $f(2) = 8$; luego, $f(–2) = – f(2)$.

3. Para $x = –m$ y $x = m$: $f(–m) = (–m)^3 = –m^3$, y $f(m) = m^3$. Entonces se verifica que $f(–m) = –f(m)$.

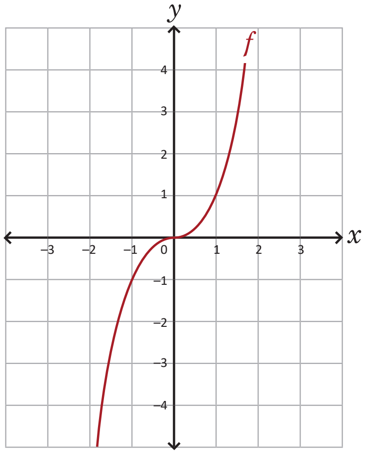
Con los problemas 2 y 3 se puede concluir que la gráfica es simétrica con respecto al origen.

Lección 4

4.2 Función $f(x) = ax^3$, $a > 0$

Problema inicial

Con la gráfica de $f(x) = x^3$, realiza lo siguiente:

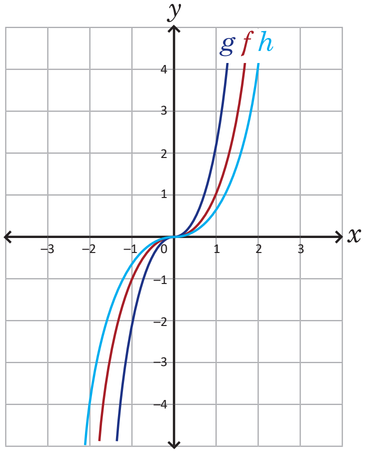


1. Utiliza los valores de $f(x)$ para completar la tabla y grafica las funciones $g(x) = 2x^3$ y $h(x) = \frac{1}{2}x^3$:

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	−8	−3.38	−1	−0.13	0	0.13	1	3.38	8
$g(x)$									
$h(x)$									

2. ¿Cuáles son las similitudes y diferencias de las funciones g y h con respecto a la función f?

Solución



1. Los valores de $g(x)$ son el resultado de multiplicar por 2 los de $f(x)$; mientras que los de $h(x)$ son el resultado de multiplicar por $\frac{1}{2}$ los de $f(x)$. La tabla queda de la siguiente manera:

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	−8	−3.38	−1	−0.13	0	0.13	1	3.38	8
$g(x)$	$\times\frac{1}{2}$ −16	$\times 2$ −6.76	−2	−0.26	0	0.26	2	6.76	16
$h(x)$	−4	−1.69	−0.5	−0.07	0	0.07	0.5	1.69	4

Las gráficas de g y h se muestran en la figura de la derecha.

2. Similitudes entre las funciones:
   a) el dominio y el rango de las tres es $\mathbb{R}$;
   b) las gráficas de las tres funciones tienen la misma forma y pasan por el origen.

   Diferencias entre las funciones:
   a) todos los puntos, excepto el origen, no coinciden;
   b) si $x < 0$ entonces $g(x)$ está debajo de $f(x)$ y $h(x)$ está arriba de $f(x)$;
   c) si $x > 0$ entonces $g(x)$ está arriba de $f(x)$ y $h(x)$ está debajo de $f(x)$.

En resumen

La función $g(x) = ax^3$, con $a > 0$, tiene como dominio y rango el conjunto de los números reales y es creciente en todo su dominio; su gráfica pasa por el origen, tiene la misma forma que la gráfica de $f(x) = x^3$ y resulta de multiplicar por a los valores de $f(x)$.

Problemas

Utilizando la gráfica de $f(x) = x^3$ grafica las funciones $g(x) = 3x^3$ y $h(x) = \frac{1}{3}x^3$.

Elabora una tabla similar a la del Problema inicial.

Indicador de logro

4.2 Grafica funciones de la forma $g(x) = ax^3$ para $a > 0$ usando la gráfica de $f(x) = x^3$.

Materiales

Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y resolver el numeral 2 del Problema inicial (también puede utilizarse para la solución del bloque de Problemas).

Secuencia

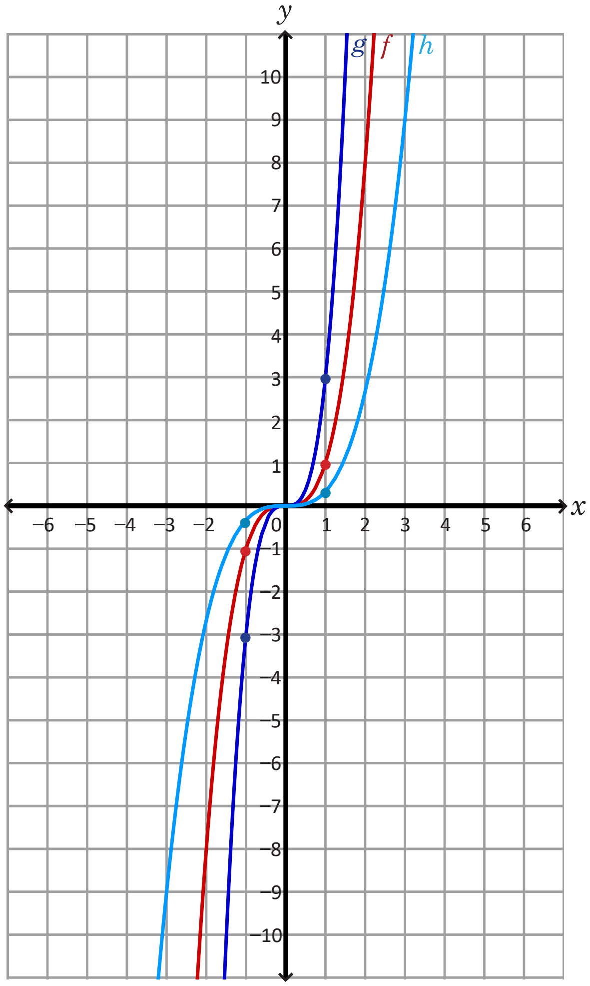
En esta clase se analizan las características de las funciones de la forma $g(x) = ax^3$, para $a > 0$, a partir de $f(x) = x^3$.

Solución de problemas:

Sean $f(x) = x^3$, $g(x) = 3x^3$ y $h(x) = \frac{1}{3}x^3$. Los valores de $g(x)$ resultan de multiplicar por 3 los de $f(x)$; mientras que los de $h(x)$ resultan de multiplicar por $\frac{1}{3}$ los de $f(x)$:

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	−8	−3.38	−1	−0.13	0	0.13	1	3.38	8
$g(x)$	$\times\frac{1}{3}$ −24 ×3	−10.14	−3	−0.39	0	0.39	3	10.14	24
$h(x)$	−2.67	−1.13	−0.33	−0.04	0	0.04	0.33	1.13	2.67

Las gráficas de ambas funciones se presentan a continuación:



4.3 Función $f(x) = -ax^3$, $a > 0$

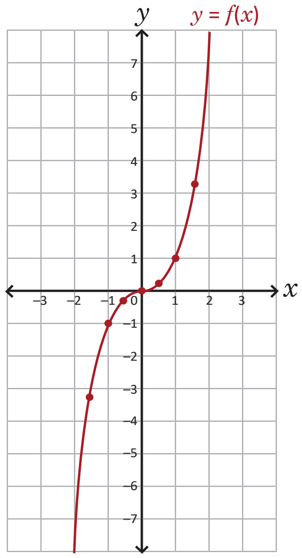
Problema inicial

Con la gráfica de $f(x) = x^3$, realiza lo siguiente:

1. Utiliza los valores de $f(x)$ para completar la tabla y grafica la función $g(x) = -x^3$:

x	–2	–1.5	–1	–0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	–8	–3.38	–1	–0.13	0	0.13	1	3.38	8
$g(x)$									

2. ¿Cuáles son las similitudes y diferencias entre las funciones f y g?



La función de la forma:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

donde a es un número real diferente de cero, se llama **función cúbica**; $f(x) = ax^3$ es un caso particular de la función cúbica.

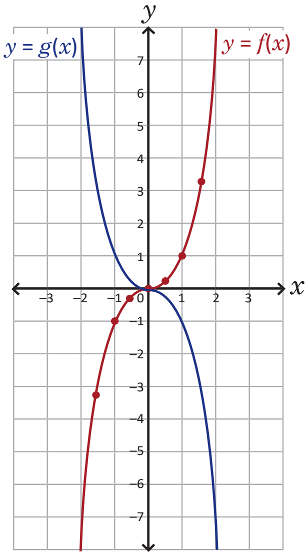
Solución

1. Los valores de $g(x)$ son el resultado de multiplicar por –1 los de $f(x)$; la tabla queda de la siguiente manera:

x	–2	–1.5	–1	–0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	–8	–3.38	–1	–0.13	0	0.13	1	3.38	8
$g(x)$	8	3.38	1	0.13	0	–0.13	–1	–3.38	–8

×(–1)

Las gráficas de f y g se muestran en la figura de la derecha.



2. Similitudes entre las funciones:
   a) el dominio y el rango de ambas es $\mathbb{R}$;
   b) las gráficas tienen la misma forma, y pasan por el origen.

   Diferencias entre las funciones:
   a) todos los puntos, excepto el origen, no coinciden;
   b) si $x < 0$ entonces $g(x)$ está sobre el eje x mientras que $f(x)$ está debajo del eje;
   c) si $x > 0$ entonces $g(x)$ está debajo del eje x mientras que $f(x)$ está sobre el eje.

En resumen

Si $f(x) = ax^3$ y $a > 0$ entonces la gráfica de la función $g(x) = -f(x) = -ax^3$ es una **reflexión con respecto al eje x** de la gráfica de la función f; tiene como dominio y rango el conjunto de los números reales y es decreciente en todo su dominio; su gráfica pasa por el origen, tiene la misma forma que la gráfica de f y resulta de multiplicar por –1 los valores de $f(x)$.

Problemas

Utilizando la gráfica de $f(x)$ grafica la función $g(x)$ en cada caso:

a) $f(x) = 2x^3$, $g(x) = -2x^3$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^3$, $g(x) = -\frac{1}{2}x^3$

c) $f(x) = 3x^3$, $g(x) = -3x^3$

Indicador de logro

4.3 Grafica funciones de la forma $g(x) = -ax^3$ para $a > 0$ usando la gráfica de $f(x) = x^3$.

Materiales

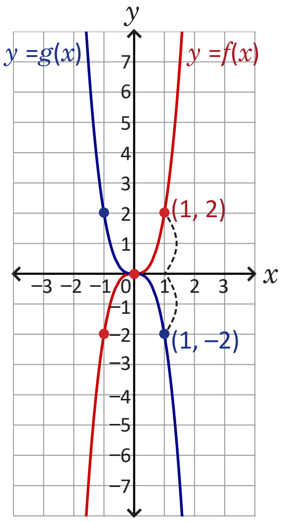
Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y resolver el numeral 2 del Problema inicial (también puede utilizarse para la solución del bloque de Problemas).

Secuencia

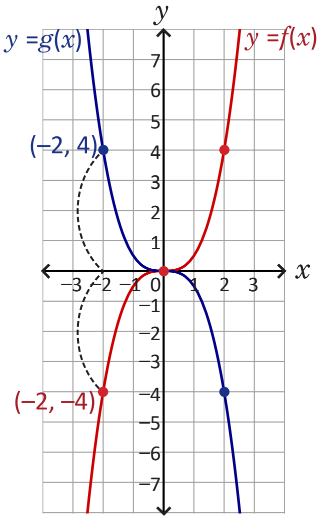
En esta clase se analizan las características de las funciones de la forma $g(x) = -ax^3$, para $a > 0$, a partir de $f(x) = x^3$. Observar que las funciones $f(x)$ del bloque de Problemas fueron graficadas en la clase 4.2, por lo que pueden ser utilizadas para resolver estos problemas.

Solución de problemas:

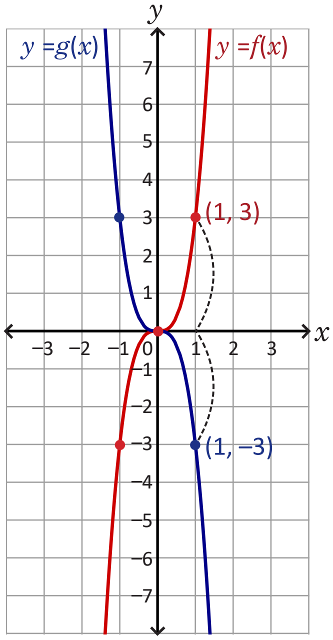
a) Sean $f(x) = 2x^3$ y $g(x) = -2x^3$, la gráfica de g es una reflexión con respecto al eje x de la gráfica de f:



b) Sean $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ y $g(x) = -\frac{1}{2}x^3$, la gráfica de g es una reflexión con respecto al eje x de la gráfica de f:



c) Sean $f(x) = 3x^3$ y $g(x) = -3x^3$, la gráfica de g es una reflexión con respecto al eje x de la gráfica de f, tal como lo muestra la figura de la derecha:



4.4 Función $f(x) = \frac{k}{x}$ y sus desplazamientos

Problema inicial

Sean $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = -\frac{2}{x}$:

1. Encuentra los valores de $f(x)$ y $g(x)$ correspondientes a cada valor de x en la siguiente tabla:

x	-8	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$												
$g(x)$												

2. Determina otros valores para f y g que no estén en 1, luego ubica los puntos $(x, f(x))$ y $(x, g(x))$ y traza las gráficas de ambas funciones.

3. Encuentra las ecuaciones de las funciones cuyas gráficas resultan de desplazar las de f y g una unidad horizontalmente hacia la derecha y tres unidades verticalmente hacia arriba.

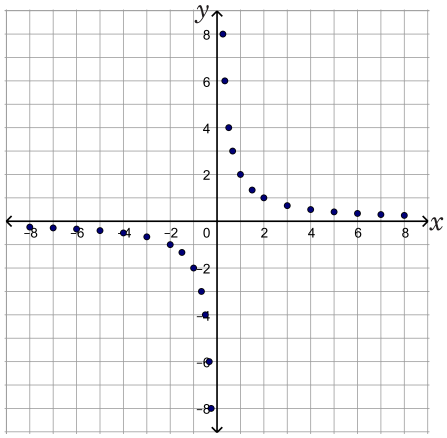
Solución

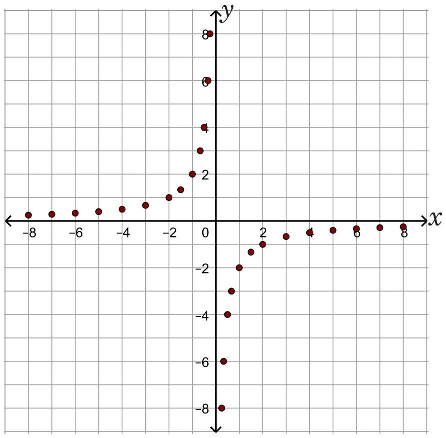
1. La tabla queda de la siguiente manera:

x	-8	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$	–0.25	–0.5	–1	–2	–4	–8	8	4	2	1	0.5	0.25
$g(x)$	0.25	0.5	1	2	4	8	–8	–4	–2	–1	–0.5	–0.25

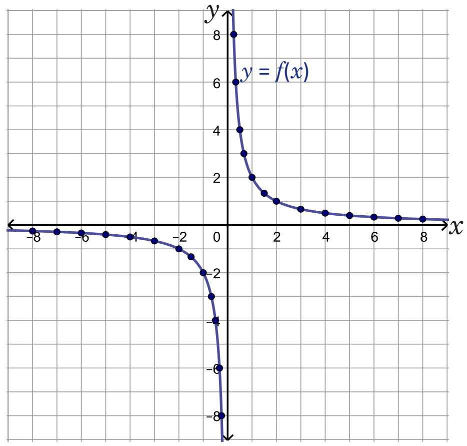
2. Se encuentran otros valores de f y g, por ejemplo para $x = -7, -6, -5, -3, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 3, 5, 6, 7$ y se ubican los puntos $(x, f(x))$ y $(x, g(x))$ en el plano cartesiano:

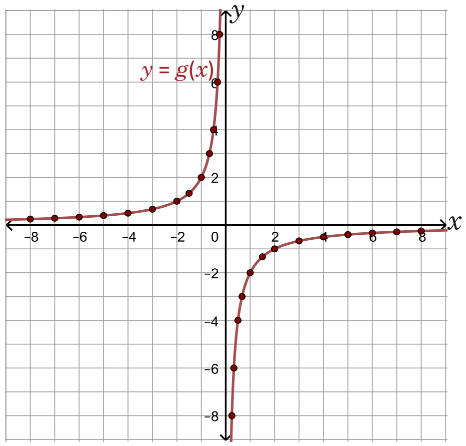
x	-7	-6	-5	-3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	3	5	6	7
$f(x)$	–0.29	–0.33	–0.4	–0.67	–1.33	–3	–6	6	3	1.33	0.67	0.4	0.33	0.29
$g(x)$	0.29	0.33	0.4	0.67	1.33	3	6	–6	–3	–1.33	–0.67	–0.4	–0.33	–0.29





Esto permite visualizar mejor la forma de cada gráfica, como se muestra a continuación:





3. Sea $h(x)$ la función cuya gráfica resulta de desplazar la de f una unidad horizontalmente hacia la derecha y tres unidades verticalmente hacia arriba. Si (a, b) es un punto sobre la gráfica de h entonces $(a - 1, b - 3)$ es un punto sobre la gráfica de f, es decir:

$$f(a - 1) = b - 3$$
$$b = f(a - 1) + 3$$

luego, la ecuación de $h(x)$ es $f(x - 1) + 3$, o sea, $h(x) = \frac{2}{x-1} + 3$.

De forma similar, si $l(x)$ es la función cuya gráfica resulta de desplazar la de g una unidad horizontalmente a la derecha y tres unidades verticalmente hacia arriba entonces:

$$l(x) = g(x - 1) + 3 = -\frac{2}{x-1} + 3.$$

Conclusión

Sea $f(x) = \frac{k}{x}$, con k un número real diferente de cero. A f se le llama **función de proporcionalidad inversa**; cuando el valor absoluto de x, o sea $|x|$, aumenta sin límites entonces la gráfica de f se acerca al eje x sin llegar a cortarlo; además, si $|x|$ se acerca a cero entonces la gráfica de $f(x)$ se acerca al eje y sin llegar a cortarlo.

En general, la gráfica de la función de proporcionalidad inversa tiene la misma forma que las del problema inicial según sea el caso ($k > 0$ o $k < 0$).

Lo anterior indica que la función de proporcionalidad inversa no posee intersecciones con los ejes de coordenadas; al **eje x** y al **eje y** se les llama **asíntota horizontal** y **asíntota vertical**, respectivamente, de la gráfica de $f(x) = \frac{k}{x}$.

Si $g(x)$ es la función cuya gráfica resulta de desplazar la de $f(x) = \frac{k}{x}$, p unidades horizontalmente y q unidades verticalmente entonces:

$$g(x) = \frac{k}{x-p} + q.$$

Si $p > 0$, el desplazamiento es hacia la derecha, y si $p < 0$, entonces es hacia la izquierda. Por otra parte, si $q > 0$, el desplazamiento es hacia arriba, y si $q < 0$, entonces es hacia abajo.

Problemas

Usando las funciones f y g del Problema inicial, encuentra las ecuaciones de las funciones cuyas gráficas resultan de desplazar las de f y g, p unidades horizontalmente y q unidades verticalmente:

a) $p = 2, q = 1$
b) $p = -2, q = 1$
c) $p = 2, q = -1$
d) $p = -2, q = -1$

Indicador de logro

4.4 Encuentra las ecuaciones de las funciones que resultan de desplazar horizontal y verticalmente la gráfica de la función $f(x) = \frac{k}{x}$.

Materiales

Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y resolver el numeral 2 del Problema inicial.

Secuencia

Se repasa la gráfica de la función de proporcionalidad inversa estudiada en séptimo grado. Se agregan además sus características (dominio, rango y asíntotas) así como los desplazamientos horizontales o verticales.

Propósito

En esta clase solo se recuerda cómo graficar la función de proporcionalidad inversa; se encuentra también la ecuación de la función que resulta de desplazar horizontal o verticalmente la gráfica de la proporcionalidad inversa; la gráfica de las funciones de la forma $f(x) = \frac{k}{x-p} + q$ se realizará hasta la clase 4.5. Se ha utilizado k, p y q para hacer una distinción entre la función cuadrática general. Sin embargo, con el fin de generalizar los desplazamientos puede sustituir dichas letras por a, h y k, respectivamente.

Solución de problemas:

a) Sean $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = -\frac{2}{x}$; sean f_1 y g_1 las funciones cuyas gráficas resultan de desplazar las de f y g (respectivamente) 2 unidades horizontalmente y 1 unidad verticalmente. Entonces:

$$f_1(x) = \frac{2}{x-2} + 1,$$

$$g_1(x) = -\frac{2}{x-2} + 1.$$

b) Similar al literal a), si $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = -\frac{2}{x}$, y f_1 y g_1 son las funciones cuyas gráficas resultan de desplazar las de f y g (respectivamente) –2 unidades horizontalmente y 1 unidad verticalmente entonces:

$$f_1(x) = \frac{2}{x-(-2)} + 1,$$
$$= \frac{2}{x+2} + 1.$$

$$g_1(x) = -\frac{2}{x-(-2)} + 1,$$
$$= -\frac{2}{x+2} + 1.$$

Recuerde que si $p > 0$, el desplazamiento es hacia la derecha, y si $p < 0$ entonces es hacia la izquierda. Por otra parte, si $q > 0$, el desplazamiento es hacia arriba y si $q < 0$ entonces es hacia abajo.

c) Si f_1 y g_1 son las funciones cuyas gráficas resultan de desplazar las de $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = -\frac{2}{x}$ (respectivamente), 2 unidades horizontalmente y –1 unidad verticalmente entonces:

$$f_1(x) = \frac{2}{x-2} + (-1) = \frac{2}{x-2} - 1,$$

$$g_1(x) = -\frac{2}{x-2} + (-1) = -\frac{2}{x-2} - 1.$$

d) Si f_1 y g_1 son las funciones cuyas gráficas resultan de desplazar las de $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = -\frac{2}{x}$ (respectivamente), –2 unidades horizontalmente y –1 unidad verticalmente entonces:

$$f_1(x) = \frac{2}{x-(-2)} + (-1) = \frac{2}{x+2} - 1,$$

$$g_1(x) = -\frac{2}{x-(-2)} + (-1) = -\frac{2}{x+2} - 1.$$

Lección 4

4.5 Gráfica de la función $h(x) = \frac{k}{x-p} + q$*

Problema inicial

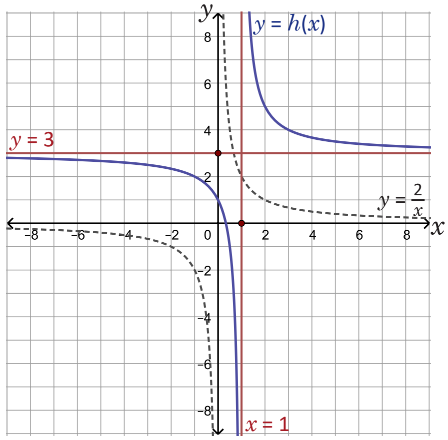
Sea $h(x) = \frac{2}{x-1} + 3$

1. Encuentra las ecuaciones de las asíntotas de la gráfica de h.
2. Traza las asíntotas del literal anterior, y luego la gráfica de h.
3. Encuentra el dominio y el rango de la función h.

Solución

1. De la clase anterior se sabe que la gráfica de $h(x)$ corresponde a un desplazamiento de una unidad horizontalmente y tres unidades verticalmente de la gráfica de $f(x) = \frac{2}{x}$. Las asíntotas se trasladan de la misma manera, es decir, si $y = 0$ (eje x) y $x = 0$ (eje y) son las asíntotas de f entonces $y = 3$ y $x = 1$ son las asíntotas de la gráfica de h.

2. La gráfica de $y = 3$ es una línea recta horizontal que pasa por (0, 3); mientras que $x = 1$ es una línea recta vertical que pasa por (1, 0). Luego de trazar las asíntotas se traza la gráfica de h, cuya forma es similar a la de $f(x) = \frac{2}{x}$:



3. En la ecuación de la función h, el denominador no puede ser igual a cero; esto se cumple si x es diferente de 1 y, por tanto, el dominio de h es $]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$. De la gráfica de $h(x)$ se deduce que su rango es $]-\infty, 3[\cup]3, \infty[$.

Conclusión

Sean k, p y q números reales, con k diferente de cero. Las asíntotas horizontal y vertical de la función $h(x) = \frac{k}{x-p} + q$ son $y = q$ y $x = p$, respectivamente. El dominio de la función h es $D_h =]-\infty, p[\cup]p, \infty[$, y su rango es $R_h =]-\infty, q[\cup]q, \infty[$.

Al momento de trazar la gráfica de h se recomienda primero trazar las asíntotas y luego la gráfica.

Problemas

Traza las asíntotas y la gráfica de la función $h(x)$ en cada caso; luego encuentra su dominio y su rango:

a) $h(x) = \frac{1}{x-2} + 1$

b) $h(x) = \frac{1}{x+2} + 1$

c) $h(x) = \frac{1}{x+1} - 1$

d) $h(x) = -\frac{1}{x-2} + 1$

Indicador de logro

4.5 Encuentra las ecuaciones y grafica las asíntotas de la función $f(x) = \frac{k}{x-p} + q$ para trazar la gráfica de f.

Materiales

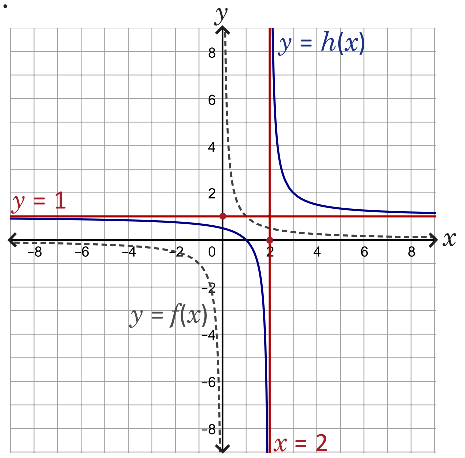
Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y resolver el Problema inicial (también puede utilizarse para la resolución del bloque de Problemas).

Secuencia

En esta clase se traza la gráfica de funciones de la forma $f(x) = \frac{k}{x-p} + q$. Si los estudiantes tienen muchas dificultades para resolver el Problema inicial, el docente debe desarrollar e ir explicando paso a paso la Solución.

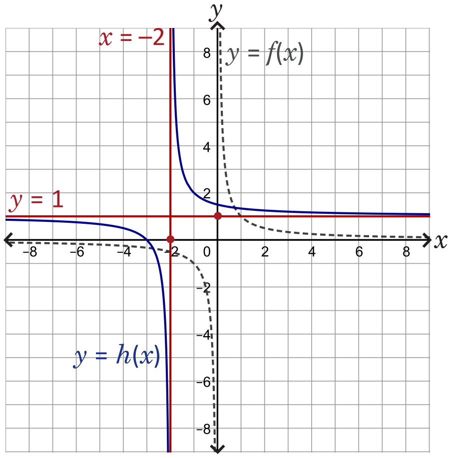
Solución de problemas:

a) Las asíntotas de $h(x) = \frac{1}{x-2} + 1$ son $y = 1$ y $x = 2$, y su gráfica resulta de desplazar la de $f(x) = \frac{1}{x}$, 2 unidades horizontalmente y 1 unidad verticalmente:



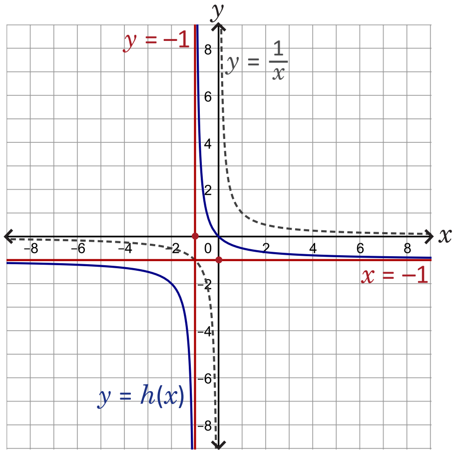
D_h =]−∞, 2[∪]2, ∞[, R_h =]−∞, 1[∪]1, ∞[.

b) Las asíntotas de $h(x) = \frac{1}{x+2} + 1$ son $y = 1$ y $x = -2$, y su gráfica resulta de desplazar la de $f(x) = \frac{1}{x}$, −2 unidades horizontalmente y 1 unidad verticalmente:



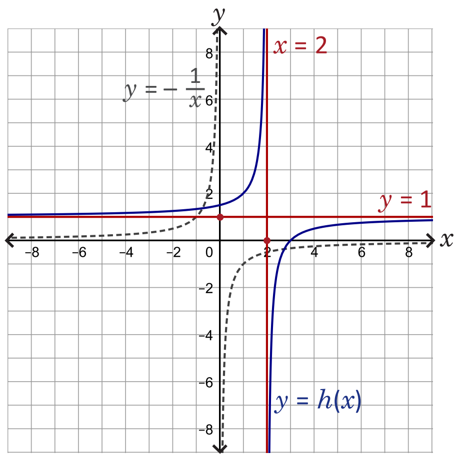
D_h =]−∞, −2[∪]−2, ∞[, R_h =]−∞, 1[∪]1, ∞[.

c) Las asíntotas de $h(x) = \frac{1}{x+1} - 1$ son $y = -1$ y $x = -1$:



D_h =]−∞, −1[∪]−1, ∞[, R_h =]−∞, −1[∪]−1, ∞[.

d) Las asíntotas de $h(x) = -\frac{1}{x-2} + 1$ son $y = 1$ y $x = 2$:



D_h =]−∞, 2[∪]2, ∞[, R_h =]−∞, 1[∪]1, ∞[.

4.6 Gráfica de la función $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

Problema inicial

Sea $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$:

1. Efectúa la división $(x + 1) \div (x - 2)$; escribe $\dfrac{x+1}{x-2}$ en la forma $\dfrac{k}{x-p} + q$.
2. Traza la gráfica de $f(x)$.

Solución

1. Utilizando la división sintética se obtiene lo siguiente:

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & 1 \\ 2 & \downarrow & 2 \\ \hline & 1 & \textcircled{3} \end{array}$$

En la división sintética se colocan los coeficientes de los polinomios del dividendo y divisor en la siguiente forma:

$$\begin{array}{c|cc} & \text{Dividendo} & \\ a & & \\ \hline & \text{Cociente} & \vert\ \text{Residuo} \end{array}$$

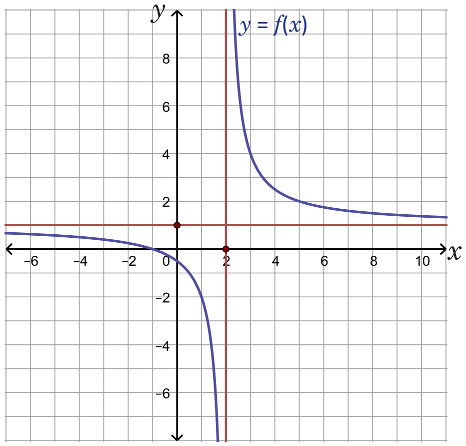
Luego, $x + 1 = 1(x - 2) + 3$. Se dividen ambos miembros de esta ecuación por $x - 2$:

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{1\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} + \frac{3}{x-2} = \frac{3}{x-2} + 1.$$

Por lo tanto, $\dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{3}{x-2} + 1$.

2. Del numeral anterior, $f(x) = \dfrac{3}{x-2} + 1$; entonces la gráfica de f se obtiene desplazando dos unidades horizontalmente y una unidad verticalmente la gráfica de $y = \dfrac{3}{x}$.

Las asíntotas de f son $y = 1$ y $x = 2$.



Conclusión

Sean a, b y d números reales no todos iguales a cero y $c \neq 0$; se le llama **función racional** a la función de la forma $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. La ecuación de f puede llevarse a la forma $\dfrac{k}{x-p} + q$ efectuando la división del polinomio del numerador entre el polinomio del denominador.

En general, una función racional es de la forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios cualesquiera, no solamente polinomios lineales.

Problemas

Para cada caso, escribe la ecuación de la función f en la forma $\dfrac{k}{x-p} + q$, luego traza las asíntotas y la gráfica de la función:

a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$

b) $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$

c) $f(x) = \dfrac{-x+3}{x-2}$

Indicador de logro

4.6 Escribe la función $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ en la forma $f(x) = \dfrac{k}{x - p} + q$ para encontrar sus asíntotas y trazar su gráfica.

Materiales

Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y resolver el Problema inicial (también puede utilizarse para la resolución del bloque de Problemas).

Secuencia

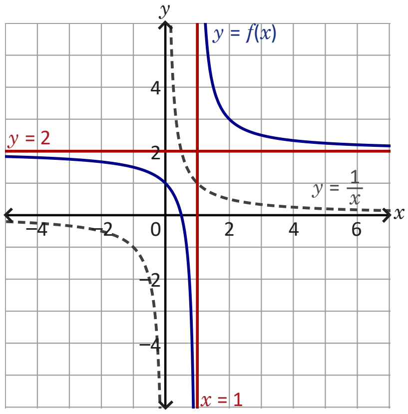
Se transforma la ecuación de una función racional cuyo numerador y denominador es un polinomio lineal en la forma $f(x) = \dfrac{k}{x - p} + q$, para utilizar lo visto en la clase 4.5 y trazar la gráfica de la misma.

Solución de problemas:

a) Al efectuar la división $(2x - 1) \div (x - 1)$ se obtiene: $2x - 1 = 2(x - 1) + 1$.
Luego:

$$\frac{2x-1}{x-1} = \frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 2$$

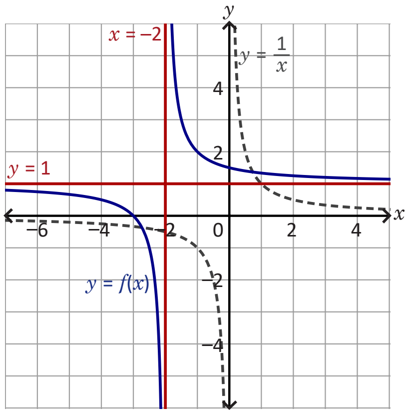
Así, $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + 2$, sus asíntotas son $y = 2$ y $x = 1$, y su gráfica resulta de desplazar la de $y = \dfrac{1}{x}$, 1 unidad horizontalmente y 2 unidades verticalmente, tal como lo muestra la figura de la derecha.



b) Al efectuar la división $(x + 3) \div (x + 2)$ se obtiene: $x + 3 = (x + 2) + 1$.
Luego:

$$\frac{x+3}{x+2} = \frac{\cancel{x+2}}{\cancel{x+2}} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x+2} + 1$$

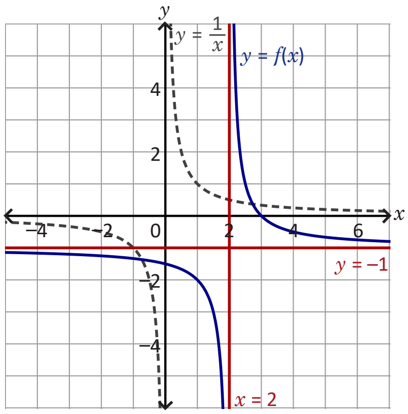
$f(x) = \dfrac{1}{x+2} + 1$; sus asíntotas son $y = 1$ y $x = -2$, y su gráfica resulta de desplazar la de $y = \dfrac{1}{x}$, −2 unidades horizontalmente y 1 unidad verticalmente.



c) Al efectuar la división $(-x + 3) \div (x - 2)$ se obtiene: $-x + 3 = -(x - 2) + 1$.
Luego:

$$\frac{-x+3}{x-2} = \frac{-(x-2)}{x-2} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-2} - 1$$

$f(x) = \dfrac{1}{x-2} - 1$; sus asíntotas son $y = -1$ y $x = 2$, y su gráfica resulta de desplazar la de $y = \dfrac{1}{x}$, 2 unidades horizontalmente y −1 unidad verticalmente.



4.7 Función irracional $f(x) = a\sqrt{x}$

Problema inicial

Sea $y = \sqrt{x}$:

1. Completa la siguiente tabla (aproxima hasta las centésimas):

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0									

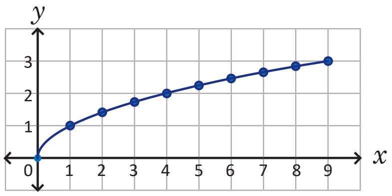
2. Coloca los puntos (x, y) en el plano cartesiano y únelos con una línea, ¿es similar a alguna gráfica de las funciones estudiadas anteriormente?
3. ¿Para cuáles valores de x se encuentra definido el valor de y?

Solución

1. La tabla queda de la siguiente manera:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	1	1.41	1.73	2	2.24	2.45	2.65	2.83	3

2. La línea que se forma al unir los puntos aparece en la figura de la derecha. La línea se asemeja a la mitad de una parábola, solo que esta vez se abre hacia la derecha.



3. El valor de y se encuentra definido para todo x positivo o igual a cero, es decir, $x \in [0, \infty[$.

Conclusión

La ecuación $y = \sqrt{x}$ es la ecuación de una función de $[0, \infty[$ a $\mathbb{R}$, cuya gráfica pasa por el origen y es similar a la mitad de una parábola que se abre hacia la derecha. En general, $f(x) = a\sqrt{x}$, con $a \neq 0$, es una función cuyo dominio es $[0, \infty[$ y:

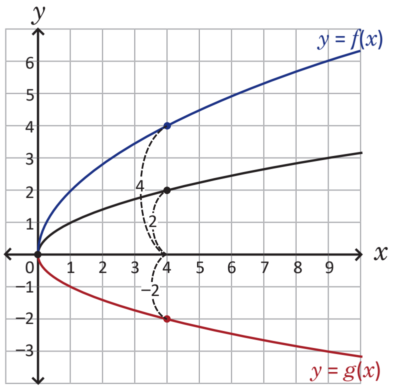
1. Si $a > 0$ entonces el rango de f es $[0, \infty[$ y su gráfica queda arriba del eje x.
2. Si $a < 0$ entonces el rango de f es $]-\infty, 0]$ y su gráfica queda debajo del eje x.

Ejemplo

Grafica las funciones $f(x) = 2\sqrt{x}$ y $g(x) = -\sqrt{x}$, encuentra el dominio y el rango en cada una.

La gráfica de f queda arriba del eje x y resulta de multiplicar por 2 los valores de $\sqrt{x}$; mientras que la gráfica de g queda debajo del eje x y resulta de multiplicar por –1 los valores de $\sqrt{x}$.

Ambas gráficas se muestran en la figura de la derecha, su dominio es $[0, \infty[$ y los rangos son $R_f = [0, \infty[$, $R_g =]-\infty, 0]$.



Problemas

Para cada caso, grafica la función f, encuentra el dominio y el rango:

a) $f(x) = 3\sqrt{x}$

b) $f(x) = -2\sqrt{x}$

c) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$

Indicador de logro

4.7 Grafica y encuentra el dominio y el rango de funciones irracionales de la forma $f(x) = a\sqrt{x}$.

Materiales

Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y resolver el Problema inicial (también puede utilizarse para la resolución del bloque de Problemas).

Secuencia

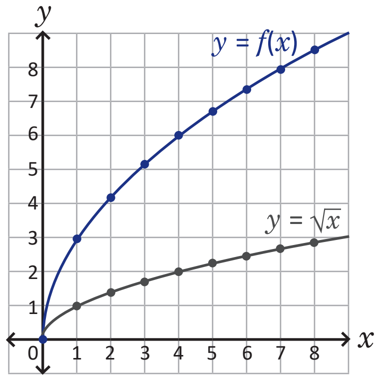
Utilizando valores particulares para x, se grafica la función $f(x) = \sqrt{x}$. A partir de ella se generalizan las características de la función $f(x) = a\sqrt{x}$: su gráfica, dominio y rango.

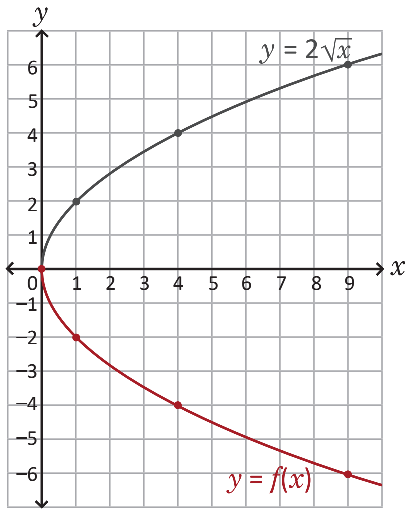
Solución de problemas:

a) En la función $f(x) = 3\sqrt{x}$, el valor de $a = 3$ es positivo, por tanto su gráfica queda arriba del eje x. Usando la tabla del Problema inicial, se multiplica por 3 los valores de $y = \sqrt{x}$:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$y = \sqrt{x}$	0	1	1.41	1.73	2	2.24	2.45	2.65	2.83	3
$f(x)$	0	3	4.23	5.19	6	6.72	7.35	7.95	8.49	9

Luego, $D_f = [0, \infty[$ y $R_f = [0, \infty[$.

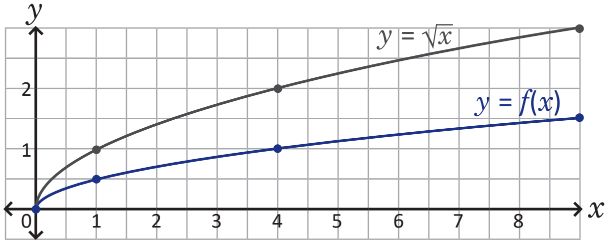




b) En la función $f(x) = -2\sqrt{x}$, el valor de $a = -2$ es negativo, por tanto, su gráfica queda debajo del eje x. En el Ejemplo de la clase se trazó la gráfica de $f(x) = 2\sqrt{x}$, basta con reflejarla con respecto al eje x para obtener la de $f(x) = -2\sqrt{x}$. Luego, $D_f = [0, \infty[$ y $R_f =]-\infty, 0]$.

c) En la función $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$, el valor de $a = \frac{1}{2}$ es positivo, por tanto su gráfica queda arriba del eje x. Usando la tabla del Problema inicial, se multiplica por $\frac{1}{2}$ los valores de $y = \sqrt{x}$:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$y = \sqrt{x}$	0	1	1.41	1.73	2	2.24	2.45	2.65	2.83	3
$f(x)$	0	0.5	0.71	0.86	1	1.12	1.23	1.33	1.42	1.5



Luego, $D_f = [0, \infty[$ y $R_f = [0, \infty[$.

4.8 Función irracional $f(x) = \sqrt{ax}$

Problema inicial

Sea $f(x) = \sqrt{-x}$:

1. ¿Cuál es el dominio de la función f?
2. Calcula los valores de $f(x)$ en la siguiente tabla, luego traza la gráfica de la función (aproxima hasta las centésimas):

x	–9	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0
$f(x)$										

3. ¿Cuál es el rango de la función?

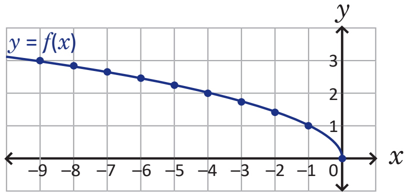
Solución

1. Los números dentro de la raíz deben ser mayores o iguales a cero; entonces el dominio de la función deben ser los números reales para los cuales $-x \geq 0$, es decir, $x \leq 0$. Por lo tanto $D_f =]-\infty, 0]$.

2. La tabla queda de la siguiente manera:

x	–9	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0
$f(x)$	3	2.83	2.65	2.45	2.24	2	1.73	1.41	1	0

La gráfica de f se muestra en la figura de la derecha:



3. El valor de $f(x) = \sqrt{-x}$ siempre será un número positivo o igual a cero, por lo tanto $R_f = [0, \infty[$.

En resumen

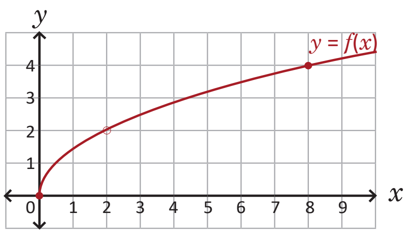
Las funciones de la forma $f(x) = a\sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{ax}$, donde a es un número real diferente de cero, son casos particulares de las llamadas **funciones iracionales**. Las gráficas de f y g pasan por el origen y se asemejan a la mitad de una parábola que se abre a lo largo del eje x. En el caso de la función g, su rango son los números reales positivos y el cero, o sea $[0, \infty[$, y:

1. Si $a > 0$ entonces el dominio de f es $[0, \infty[$ y su gráfica queda a la derecha del eje y.
2. Si $a < 0$ entonces el dominio de f es $]-\infty, 0]$ y su gráfica queda a la izquierda del eje y.

Ejemplo

Grafica la función $f(x) = \sqrt{2x}$, encuentra su dominio y su rango.

La gráfica de f queda a la derecha del eje y como se muestra en la figura de la derecha; $D_f = [0, \infty[$ y $R_f = [0, \infty[$.



La gráfica de $f(x) = \sqrt{2x}$ no es igual a la de $g(x) = 2\sqrt{x}$, sino a la de $h(x) = \sqrt{2}\sqrt{x}$.

Problemas

Para cada caso, grafica la función f, encuentra el dominio y el rango:

a) $f(x) = \sqrt{3x}$

b) $f(x) = \sqrt{-2x}$

c) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x}$

Indicador de logro

4.8 Grafica y encuentra el dominio y el rango de funciones irracionales de la forma $f(x) = \sqrt{ax}$.

Materiales

Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y resolver el Problema inicial (también puede utilizarse para la resolución del bloque de Problemas).

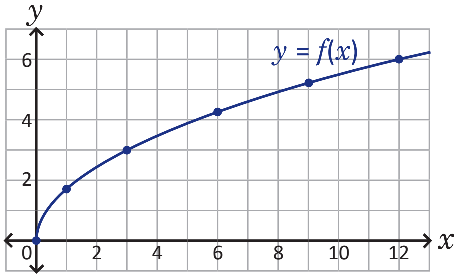
Secuencia

Utilizando valores particulares para x, se grafica la función $f(x) = \sqrt{-x}$. Luego, se generalizan las características de la función $f(x) = \sqrt{ax}$: su gráfica, dominio y rango.

Solución de problemas:

a) La forma de la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{3x}$ se asemeja a la mitad de una parábola; como $a = 3$ es positivo entonces esta queda sobre el eje x positivo. Pueden calcularse algunos valores particulares de $f(x)$ para trazar la gráfica de la función:

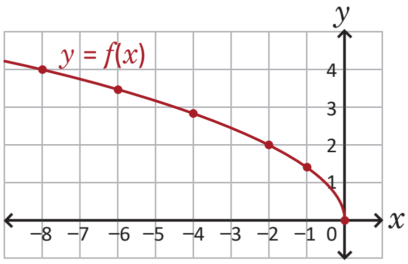
x	0	1	3	6	9	12
$f(x)$	0	1.73	3	4.24	5.20	6



Así, $D_f = [0, \infty[$ y $R_f = [0, \infty[$.

b) Similar al literal anterior, la forma de la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{-2x}$ se asemeja a la mitad de una parábola, esta vez queda sobre el eje x negativo pues $a < 0$. Se calculan algunos valores particulares de $f(x)$ para trazar la gráfica de la función:

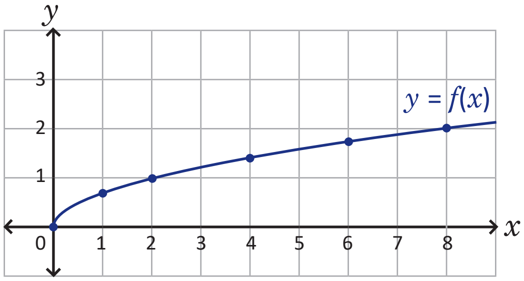
x	0	−1	−2	−4	−6	−8
$f(x)$	0	1.41	2	2.83	3.46	4



Luego, $D_f =]-\infty, 0]$ y $R_f = [0, \infty[$.

c) Como $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x}$, su gráfica queda sobre el eje x positivo. Calculando algunos valores particulares de $f(x)$:

x	0	1	2	4	6	8
$f(x)$	0	0.71	1	1.41	1.73	2

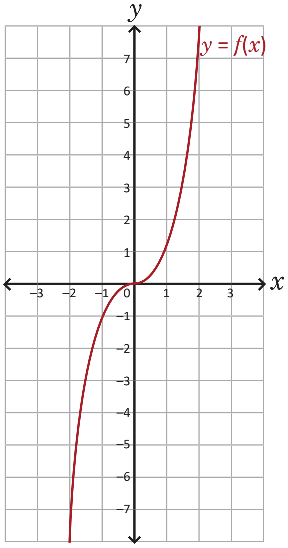


Luego, $D_f = [0, \infty[$ y $R_f = [0, \infty[$.

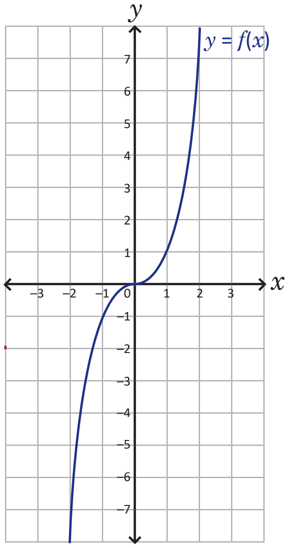
4.9 Practica lo aprendido

1. Utilizando la gráfica de $f(x) = x^3$, grafica la función g y encuentra su dominio y su rango:

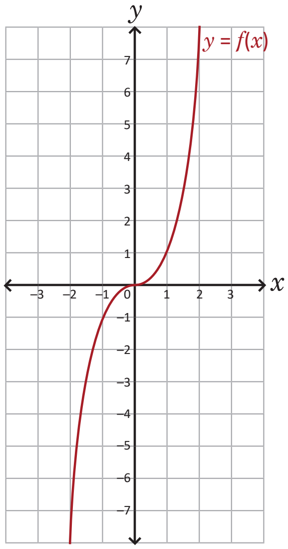
a) $g(x) = 4x^3$



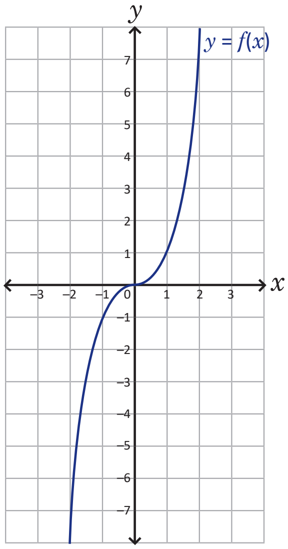
b) $g(x) = \frac{1}{4}x^3$



c) $g(x) = -4x^3$



d) $g(x) = -\frac{1}{4}x^3$



2. Para cada caso, grafica la función y encuentra su dominio y su rango.

a) $f(x) = \frac{-2x}{x-2}$

b) $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

3. Para cada caso, grafica la función y encuentra su dominio y su rango.

a) $f(x) = -3\sqrt{x}$

b) $f(x) = 4\sqrt{x}$

c) $f(x) = \sqrt{-3x}$

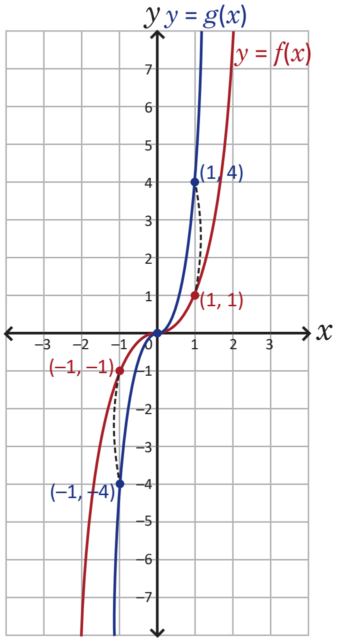
d) $f(x) = \sqrt{4x}$

Indicador de logro

4.9 Resuelve problemas correspondientes a funciones cúbicas, racionales o irracionales.

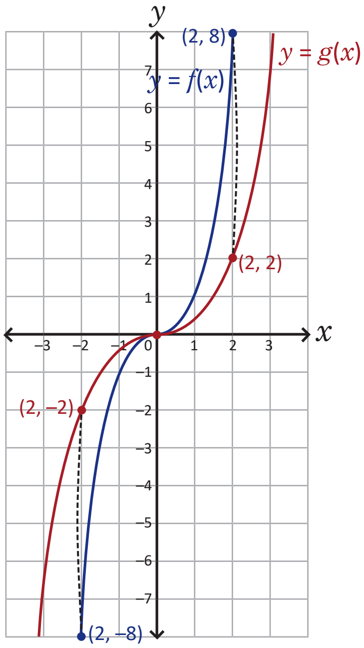
Solución de problemas:

1a) La gráfica de $g(x) = 4x^3$ queda como sigue:



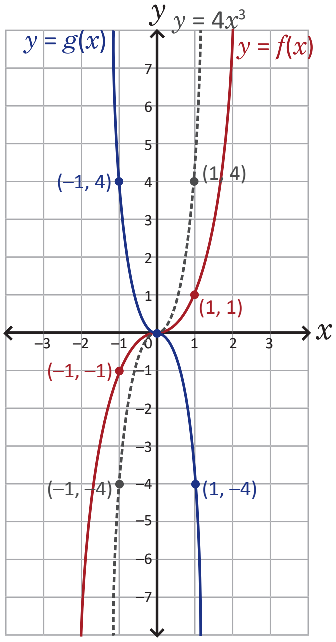
$D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = \mathbb{R}$.

1b) La gráfica de $g(x) = \frac{1}{4}x^3$ queda como sigue:



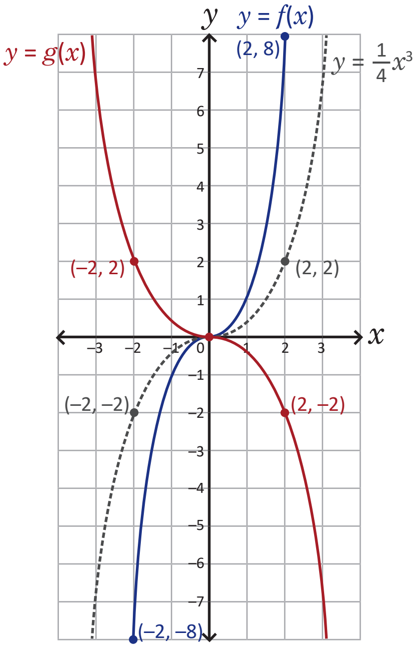
$D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = \mathbb{R}$.

1c) Puede reflejarse la gráfica de $y = 4x^3$ con respecto al eje x para obtener la de $g(x) = -4x^3$:



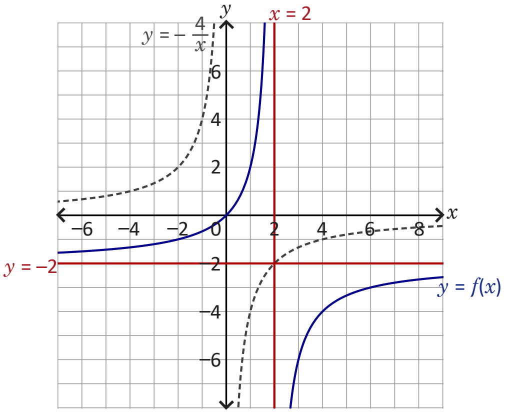
$D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = \mathbb{R}$.

1d) Puede reflejarse la gráfica de $y = \frac{1}{4}x^3$ con respecto al eje x para obtener la de $g(x) = -\frac{1}{4}x^3$:



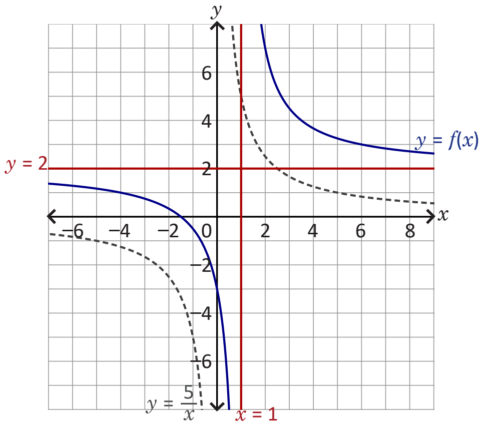
$D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = \mathbb{R}$.

2a) La ecuación de la función puede reescribirse como $f(x) = -\frac{4}{x-2} - 2$; sus asíntotas son $y = -2$ y $x = 2$, y su gráfica se obtiene desplazándola de $y = -\frac{4}{x}$, 2 unidades horizontalmente y –2 unidades verticalmente:



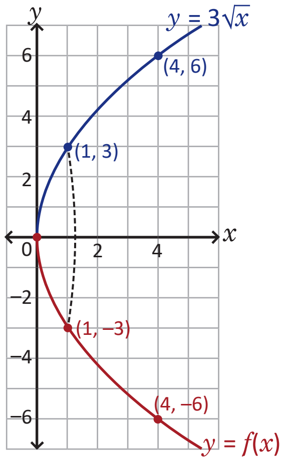
$D_f =]-\infty, 2[\cup]2, \infty[$, $R_f =]-\infty, -2[\cup]-2, \infty[$.

2b) La ecuación de la función puede reescribirse como $f(x) = \frac{5}{x-1} + 2$; sus asíntotas son $y = 2$ y $x = 1$, y su gráfica se obtiene desplazando la de $y = \frac{5}{x}$, 1 unidad horizontalmente y 2 unidades verticalmente:

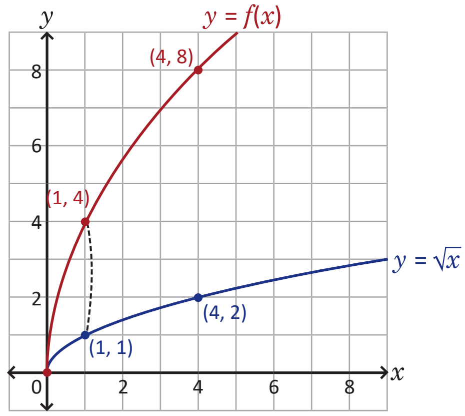


$D_f =]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$, $R_f =]-\infty, 2[\cup]2, \infty[$.

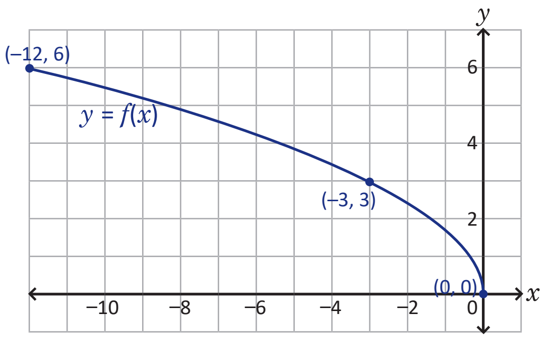
3a) Para $f(x) = -3\sqrt{x}$, $D_f = [0, \infty[$ y $R_f =]-\infty, 0]$. La gráfica de $y = 3\sqrt{x}$ se trazó en la clase 4.7, entonces la de $f(x) = -3\sqrt{x}$ se obtiene reflejando con respecto al eje x la de $y = 3\sqrt{x}$:



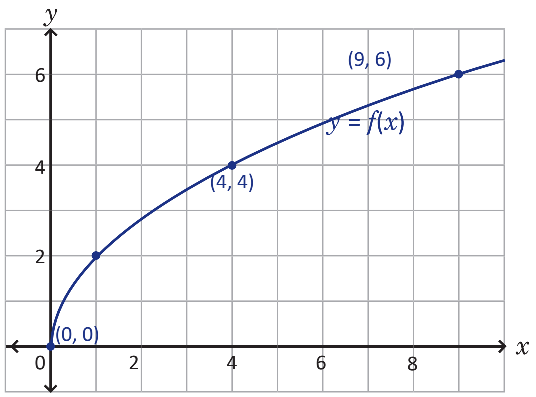
3b) Para $f(x) = 4\sqrt{x}$, $D_f = [0, \infty[$ y $R_f = [0, \infty[$. La gráfica de f queda arriba del eje x y resulta de multiplicar por 4 los valores de $\sqrt{x}$:



3c) La gráfica de la función $f(x) = \sqrt{-3x}$ se queda sobre el eje x negativo; $D_f = [0, \infty[$ y $R_f =]-\infty, 0]$.



3d) La gráfica de la función $f(x) = \sqrt{4x}$ se queda sobre el eje x positivo; $D_f = [0, \infty[$ y $R_f = [0, \infty[$.



4.10 Problemas de la unidad

1. Para cada caso, traza la gráfica de f, encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y el rango de la función:

   a) $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 3$ b) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^2 + 1$

   c) $f(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$

2. Encuentra la ecuación de la función cuadrática g si la gráfica pasa por los puntos (–12, 0), (–9, 3) y (–7, –5).

3. El sector de sol general del Estadio Nacional Jorge “Mágico” González tiene capacidad para 10 000 aficionados. En un determinado partido el precio del boleto para ese sector fue de $10.00 y en promedio asistieron 3 000 aficionados. Un estudio de mercado indicó que por cada dólar que se hubiera bajado al precio del boleto, el promedio de asistencia hubiese aumentado en 1 000. ¿Cuál debió haber sido el precio para obtener la máxima ganancia en la venta de boletos para el sector de sol general?

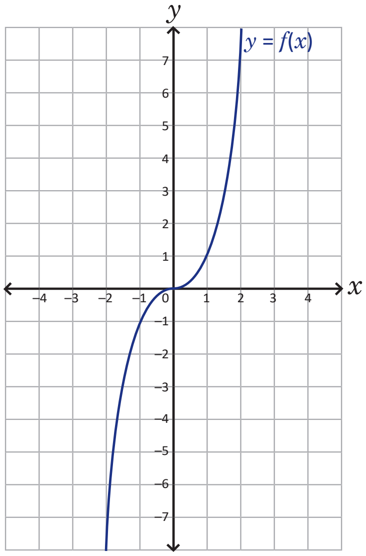
4. Resuelve las siguientes desigualdades:

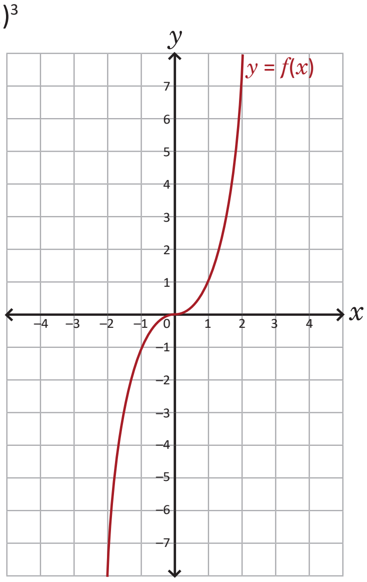
   a) $12x^2 - 5x - 2 \leq 0$ b) $4x > -4x^2 + 15$

   c) $2x^2 - x \leq 1$ d) $x^2 - 4x - 1 \geq 0$

5. Utilizando la gráfica de $f(x) = x^3$ traza la gráfica de la función g y encuentra el dominio y el rango:

   a) $g(x) = x^3 + 1$ b) $g(x) = (x - 2)^3$





6. Para cada caso, grafica la función f y encuentra el dominio y el rango:

   a) $f(x) = -\sqrt{-x}$ b) $f(x) = \sqrt{x} + 1$

   c) $f(x) = \sqrt{-x} - 3$ d) $f(x) = \sqrt{x - 1}$

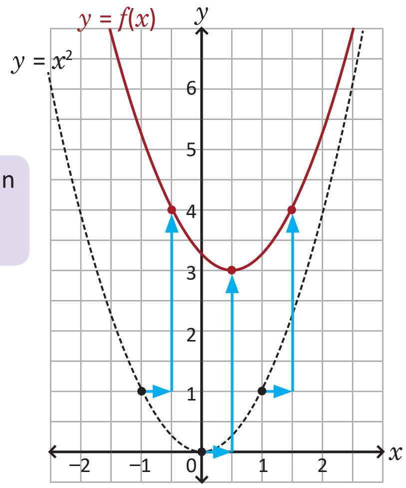
Indicador de logro

4.10 Resuelve problemas correspondientes a funciones reales.

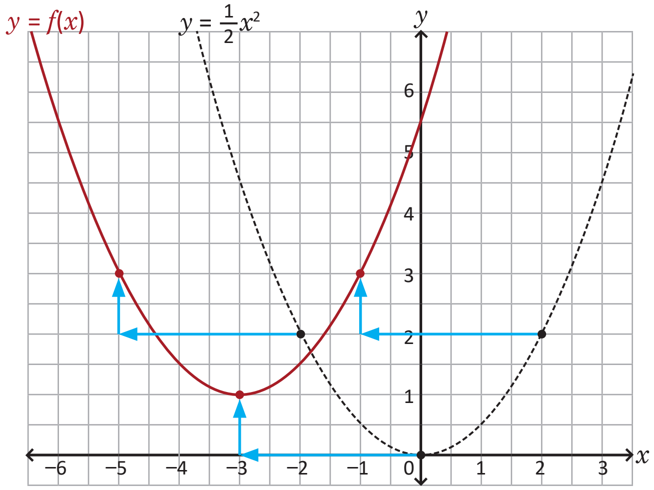
Solución de problemas:

1a) La gráfica de $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 3$ se obtiene desplazando la de $y = x^2$, $\frac{1}{2}$ unidades horizontalmente y 3 unidades verticalmente. Su vértice está en el punto $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$, $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = [3, \infty[$.

La escala utiliza da en la cuadrícula es de 0.5 cm × 0.5 cm.



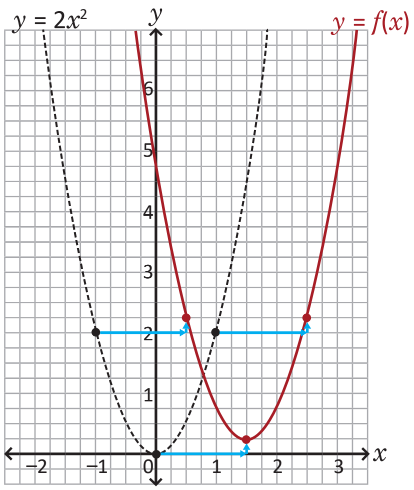
1b) La gráfica de $f(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^2 + 1$ se obtiene desplazando la de $y = \frac{1}{2}x^2$, −3 unidades horizontalmente y 1 unidad verticalmente. Su vértice está en el punto (−3, 1) , $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = [1, \infty[$.

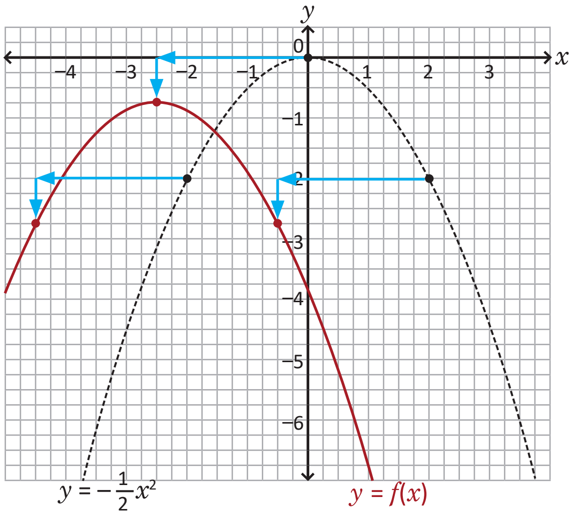


1c) La gráfica de $f(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ se obtiene desplazando la de $y = 2x^2$, $\frac{3}{2}$ unidades horizontalmente y $\frac{1}{4}$ unidades verticalmente. Su vértice está en el punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = \left[\frac{1}{4}, \infty\right[$.

1d) La gráfica de $f(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$ se obtiene desplazando la de $y = -\frac{1}{2}x^2$, $-\frac{5}{2}$ unidades horizontalmente y $-\frac{3}{4}$ unidades verticalmente. Su vértice es $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right)$, $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = \left]-\infty, -\frac{3}{4}\right]$.

La escala utilizada en la cuadrícula es de 0.25 cm × 0.25 cm.





2. Sea $g(x) = ax^2 + bx + c$; entonces $g(-12) = 0$, $g(-9) = 3$ y $g(-7) = -5$. Se sustituyen estos valores en la ecuación de la función y se utiliza el método de sustitución, es decir, se despeja una de las variables en una ecuación para sustituirla en la siguiente:

$$g(-12) = 0 \Rightarrow a(-12)^2 + b(-12) + c = 0 \Rightarrow 144a - 12b + c = 0 \Rightarrow c = -144a + 12b$$

$$g(-9) = 3 \Rightarrow a(-9)^2 + b(-9) + c = 3 \Rightarrow 81a - 9b - 144a + 12b = 3 \Rightarrow b = 21a + 1$$

$$g(-7) = -5 \Rightarrow a(-7)^2 + b(-7) + c = -5 \Rightarrow 49a - 7(21a + 1) - 144a + 12(21a + 1) = -5 \Rightarrow a = -1$$

Luego, $a = -1$, $b = -20$ y $c = -96$ (los valores de b y c se encuentran sustituyendo en las ecuaciones anteriores). Por lo tanto, $g(x) = -x^2 - 20x - 96$.

3. Sea x el precio que debe tener el boleto para el sector de sol general del estadio; si inicialmente costaba \$10.00 entonces la cantidad que bajó con respecto al precio original es $10 - x$ dólares. Según el estudio de mercado, por cada dólar que se reduce al precio original del boleto el promedio de asistencia aumenta 1 000, es decir, se tendrían $1\,000(10 - x)$ aficionados más, a parte de los 3 000 que asistieron. Luego, la cantidad de aficionados hubiese sido $3\,000 + 1\,000(10 - x)$, o sea, $-1\,000x + 13\,000$ personas. Sea f la función que calcula la ganancia (en dólares) de la venta de boletos para el sector de sol general; para obtenerla debe multiplicarse la cantidad de personas que asistieron al partido por el precio del boleto, es decir:

$$\begin{aligned} f(x) &= (-1\,000x + 13\,000)x \\ &= -1\,000x^2 + 13\,000x \end{aligned}$$

Esta función tiene un valor máximo en el vértice, se completa cuadrados para encontrarlo:

$$\begin{aligned} f(x) &= -1\,000[x^2 - 13x + (6.5)^2 - (6.5)^2] \\ &= -1\,000[x^2 - 13x + (6.5)^2] + 1\,000\,(6.5)^2 \\ &= -1\,000(x - 6.5)^2 + 42\,250 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el precio del boleto para el sector sol general debió ser de \$6.50 para obtener la máxima ganancia.

4a) $12x^2 - 5x - 2 = (4x + 1)(3x - 2)$; de esto se obtienen las raíces $x = -\frac{1}{4}$ y $x = \frac{2}{3}$. Usando el cuadro de variación resulta: $12x^2 - 5x - 2 \leq 0$ se cumple para $x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right]$.

4b) La desigualdad es equivalente a $4x^2 + 4x - 15 > 0$; además, $4x^2 + 4x - 15 = (2x + 5)(2x - 3)$, obteniéndose las raíces $x = -\frac{5}{2}$ y $x = \frac{3}{2}$. Usando el cuadro de variación resulta: $4x > -4x^2 + 15$ se cumple para $x \in \left]-\infty, -\frac{5}{4}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, \infty\right[$.

4c) La desigualdad es equivalente a $2x^2 - x - 1 \leq 0$; además, $2x^2 - x - 1 = (2x + 1)(x - 1)$, obteniéndose las raíces $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 1$. Usando el cuadro de variación:

	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		1	∞
$2x + 1$	$-$	0	$+$		$+$
$x - 1$	$-$		$-$	0	$+$
$(2x + 1)(x - 1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Luego, $2x^2 - x \leq 1$ se cumple si $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.

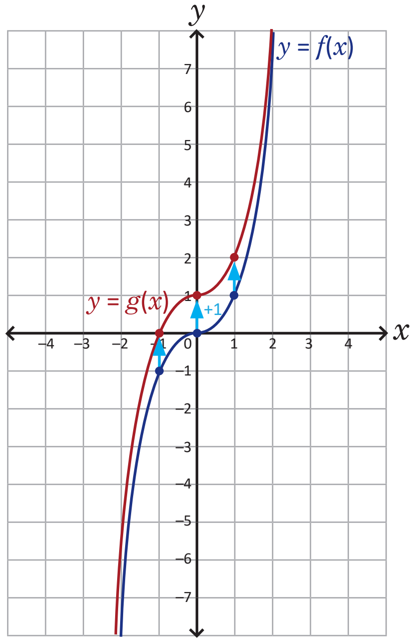
4d) $x^2 - 4x - 1 = [x - (2 - \sqrt{5})][x - (2 + \sqrt{5})]$, obteniéndose las raíces $x = 2 - \sqrt{5}$ y $x = 2 + \sqrt{5}$. Usando el cuadro de variación:

	$-\infty$	$2 - \sqrt{5}$		$2 + \sqrt{5}$	∞
$x - (2 - \sqrt{5})$	$-$	0	$+$		$+$
$x - (2 + \sqrt{5})$	$-$		$-$	0	$+$
$[x - (2 - \sqrt{5})][x - (2 + \sqrt{5})]$	$+$	0	$-$	0	$+$

Por lo tanto, la desigualdad $x^2 - 4x - 1 \geq 0$ se cumple si $x \in]-\infty, 2 - \sqrt{5}] \cup [2 + \sqrt{5}, \infty[$.

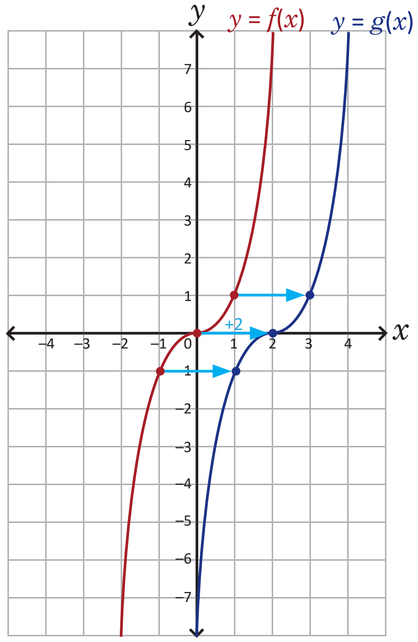
5a) Con base en la conclusión de la clase 2.1, $g(x) = f(x) + 1 = x^3 + 1$ y por tanto, la gráfica de $f(x) = x^3$ se desplaza verticalmente una unidad para obtener la gráfica de g:

$D_g = \mathbb{R}$
$R_g = \mathbb{R}$

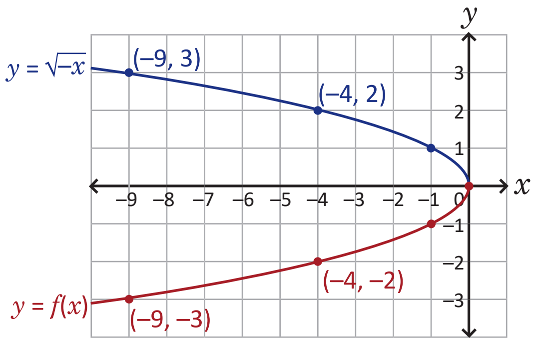


5b) Similar a lo desarrollado en la clase 2.2, la gráfica de $g(x) = f(x - 2) = (x - 2)^3$ se obtiene desplazando horizontalmente la de $f(x) = x^3$, 2 unidades horizontalmente:

$D_g = \mathbb{R}$
$R_g = \mathbb{R}$

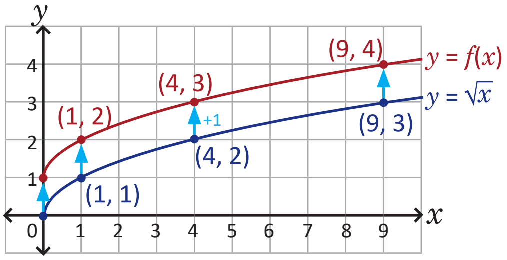


6a) La gráfica de $y = \sqrt{-x}$ se trazó en la clase 4.8; para graficar $f(x) = -\sqrt{-x}$ deben multiplicarse por -1 los valores de $y = \sqrt{-x}$:



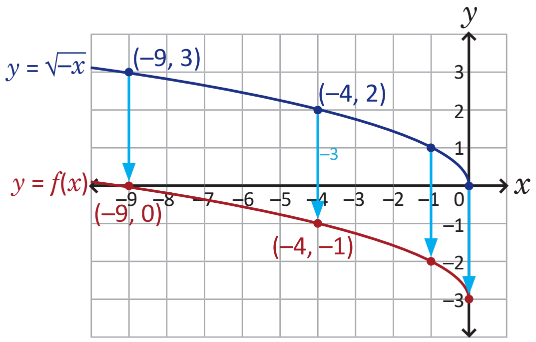
$D_f =]-\infty, 0]$ y $R_f =]-\infty, 0]$.

6b) Como en 5a), la gráfica de $f(x) = \sqrt{x} + 1$ se obtiene desplazando la de $y = \sqrt{x}$, una unidad verticalmente (la gráfica de $y = \sqrt{x}$ se trazó en la clase 4.7):



$D_f = [0, \infty[$ y $R_f = [1, \infty[$.

6c) La gráfica de $f(x) = \sqrt{-x} - 3$ se obtiene desplazando -3 unidades verticalmente la gráfica de $y = \sqrt{-x}$:



$D_f =]-\infty, 0]$ y $R_f = [-3, \infty[$.

6d) La gráfica de $f(x) = \sqrt{x - 1}$ se obtiene desplazando 1 unidad horizontalmente la gráfica de $y = \sqrt{x}$:

$D_f = [1, \infty[$ y $R_f = [0, \infty[$.

Lección 5 Práctica en GeoGebra

5.1 Práctica en GeoGebra: generalidades

GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas para todos los niveles educativos; en él pueden trabajarse contenidos relacionados con geometría, álgebra, estadística y cálculo, pues cuenta con numerosas herramientas fáciles de usar.

En esta clase explorarás la interfaz para conocer sobre sus generalidades y el uso de algunos comandos. Busca en tu computadora el ícono de GeoGebra (es el que aparece en la esquina superior derecha de esta página); si la PC no cuenta con el software puedes descargarlo de manera gratuita en el siguiente enlace:

GeoGebra https://goo.gl/jRmmdc

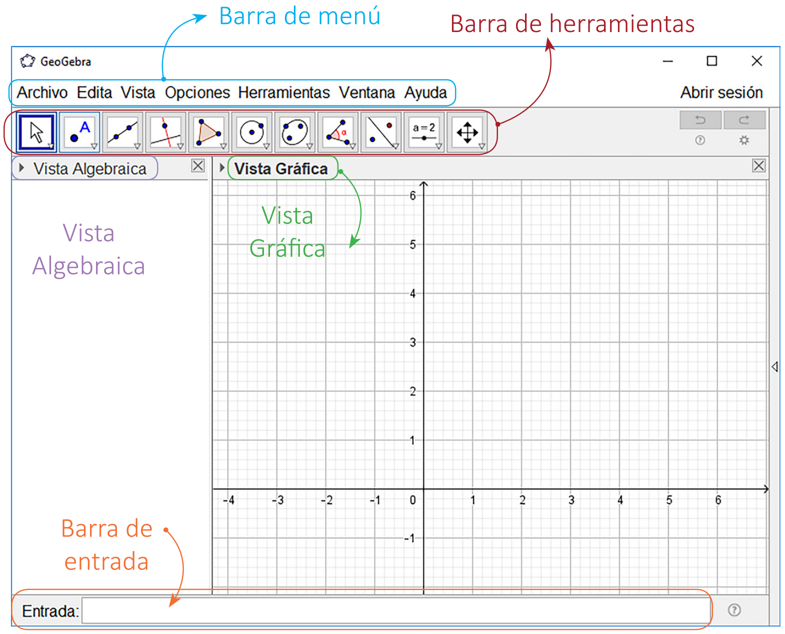
Asegúrate de descargar (instalar) "GeoGebra Clásico 5". También puedes descargar la app para el celular o trabajar "GeoGebra en línea" en los siguientes enlaces:

App → https://goo.gl/wf5mHx **En línea** → https://goo.gl/ThXbeB

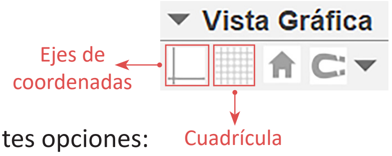
Práctica

Realiza lo siguiente:

1. Abre un nuevo archivo de GeoGebra dando clic al ícono del software. En la ventana puedes identificar las siguientes partes: la Barra de menú, la Barra de herramientas, la Vista Algebraica, la Vista Gráfica y la Barra de entrada.

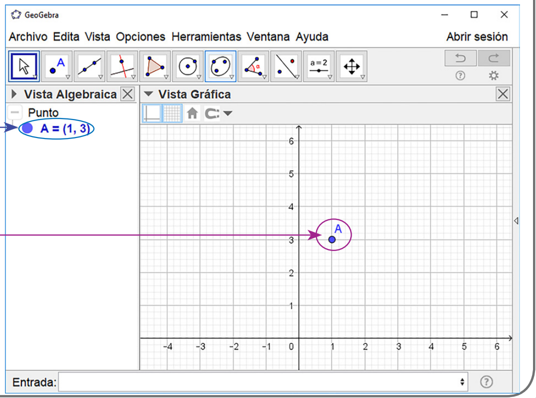


2. Da clic sobre el triángulo que se encuentra a la izquierda de Vista Gráfica. Puedes ocultar o aparecer los ejes de coordenadas y la cuadrícula.



3. Para ubicar puntos en el plano puedes realizar una de las siguientes opciones:
   a) En la barra de entrada escribir las coordenadas del punto en la forma (x, y). Por ejemplo, al escribir (1,3) y presionar Enter, automáticamente aparecerá en la Vista Algebraica el punto A = (1,3) y en la Vista Gráfica el punto sobre el plano cartesiano:

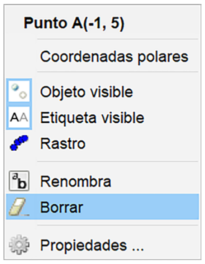
Entrada: **(1,3)**



GeoGebra designa los puntos con letras mayúsculas. Para denotar un punto con una letra específica, por ejemplo P(–2,5), se escribe en la barra de entrada:

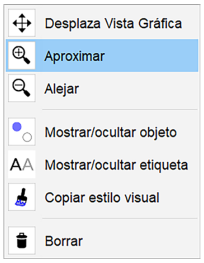
Entrada: **P=(–2,5)**

b) Selecciona la herramienta Punto. En la Vista Gráfica ubica el cursor en la posición donde quieras colocar el punto y luego da clic. Cuando las coordenadas del punto son números enteros es fácil utilizar esta herramienta y auxiliarse de la cuadrícula; caso contrario es mejor ingresar las coordenadas en la barra de entrada como en el literal anterior.



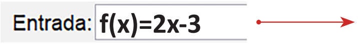
4. Para borrar objetos da clic derecho sobre ellos (ya sea en la Vista Algebraica o en la Vista Gráfica) y selecciona Borrar. Si lo que quieres es ocultar el objeto y no borrarlo, en el cuadro selecciona Objeto visible, desaparecerá de la Vista Gráfica pero permanecerá en la Vista Algebraica.

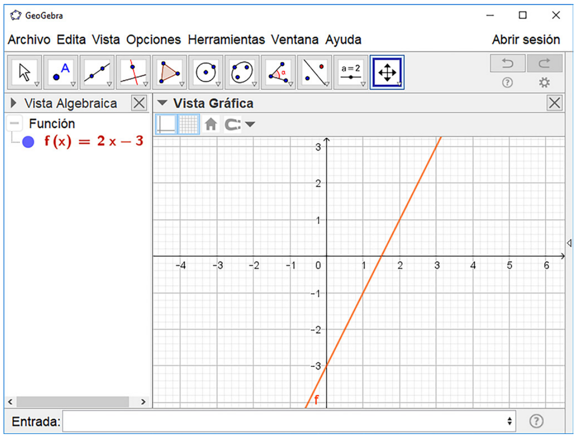
5. Para desplazar el plano cartesiano selecciona la herramienta Desplaza Vista Gráfica. Luego sobre la Vista Gráfica mantén presionado clic izquierdo y arrastra al lugar donde quieres colocar el plano.



6. Para acercar o alejar el plano cartesiano selecciona la esquina inferior derecha del ícono Desplaza Vista Gráfica y elige Aproximar o Alejar, luego da clic sobre la Vista Gráfica.

7. Para graficar funciones se utiliza la notación $f(x)$. Por ejemplo, para graficar la función $f(x) = 2x - 3$ se escribe f(x)=2x-3 en la barra de entrada seguido de Enter. En la Vista Algebraica aparecerá la ecuación de la función y en la Vista Gráfica su gráfica:


Entrada: f(x)=2x-3



Puedes usar también g(x), h(x), etc.; la variable x siempre debe estar en minúscula, de esa forma GeoGebra la reconocerá como una variable.

8. En GeoGebra, para graficar funciones cuadráticas, la potencia x^2 se escribe x^2. Por ejemplo, para graficar $f(x) = 3x^2$ se escribe en la barra de entrada f(x)=3x^2.

Actividades

1. Ubica los siguientes puntos en el plano cartesiano, utilizando la barra de entrada y la herramienta "Punto" en aquellos casos que sea posible:

a) A(–3, 4)

b) B(2, 7)

c) P(–6, 0)

d) $Q\left(4, -\frac{1}{2}\right)$

En GeoGebra la fracción $\frac{m}{n}$ se escribe m/n.

2. Grafica las siguientes funciones:

a) $f(x) = -x + 3$

b) $g(x) = \frac{2}{3}x - 5$

c) $h(x) = 4x^2$

d) $p(x) = -x^2$

e) $q(x) = \frac{x^2}{2}$

Indicador de logro

5.1 Explora las herramientas de un software matemático para ubicar puntos en el plano cartesiano y trazar las gráficas de funciones lineales y cuadráticas.

Secuencia

En esta clase se exploran las herramientas básicas del software GeoGebra. Se utiliza también para trazar las gráficas de funciones lineales o cuadráticas.

Propósito

Las funciones cuadráticas del numeral 2 de la parte Actividades son de la forma $f(x) = ax^2$, para que en la siguiente clase los estudiantes puedan visualizar los desplazamientos horizontales y verticales.

Solución de problemas:

1a) Usando la barra de entrada, se escribe:

Entrada: **A=(–3,4)**

Como las coordenadas del punto son números enteros, también puede utilizarse la herramienta Punto.

1b) Usando la barra de entrada, se escribe:

Entrada: **B=(2,7)**

Como las coordenadas del punto son números enteros, también puede utilizarse la herramienta Punto.

1c) Usando la barra de entrada, se escribe:

Entrada: **P=(–6,0)**

Como las coordenadas del punto son números enteros, también puede utilizarse la herramienta Punto.

1d) Usando la barra de entrada, se escribe:

Entrada: **Q=(4,-1/2)**

Observe que, en la Vista Algebraica aparece Q = (4, -0.5).

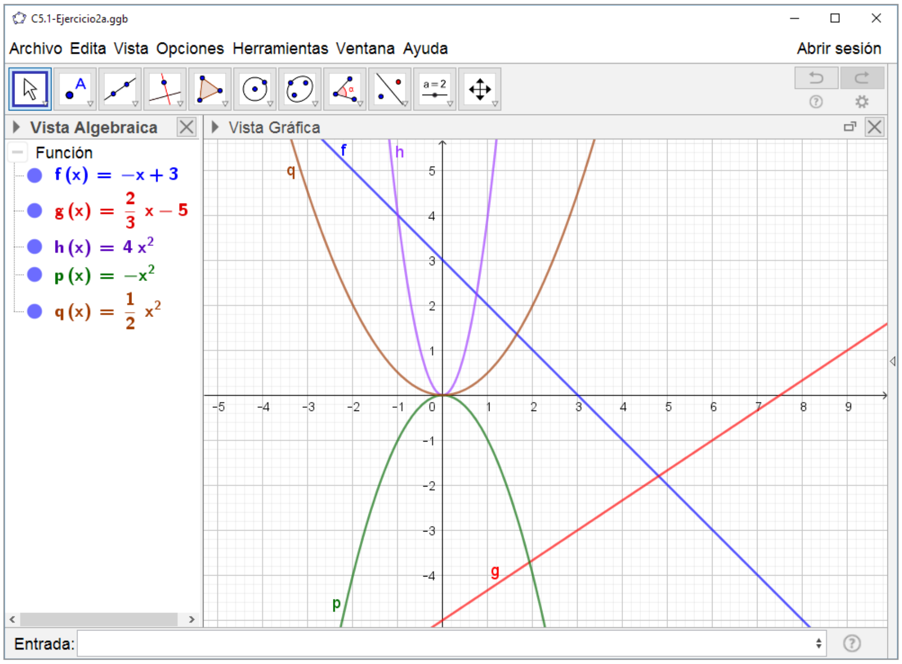
2a) En la barra de entrada se escribe f(x)=-x+3.

2b) En la barra de entrada se escribe g(x)=2/3x-5.

2c) En la barra de entrada se escribe h(x)=4x^2.

2d) En la barra de entrada se escribe p(x)=-x^2.

2e) En la barra de entrada se escribe q(x)=1/2x^2. La gráficas de las funciones de los literales, desde 2a) hasta 2e) se presentan a continuación:



Función

$f(x) = -x + 3$

$g(x) = \frac{2}{3}x - 5$

$h(x) = 4x^2$

$p(x) = -x^2$

$q(x) = \frac{1}{2}x^2$

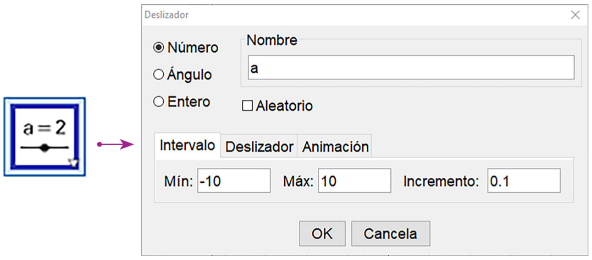
Lección 5

5.2 Práctica en GeoGebra: desplazamientos verticales

Esta práctica te ayudará a visualizar los desplazamientos verticales de funciones cuadráticas utilizando la herramienta Deslizador; un deslizador es una variable que toma valores determinados dentro de un intervalo indicado.

Práctica

1. Selecciona la herramienta Deslizador. Da clic sobre la Vista Gráfica, te aparecerá un cuadro de diálogo para especificar el nombre del deslizador, el tipo (número, ángulo o entero), el intervalo y el incremento. Nombra al deslizador **a**, en el intervalo coloca el valor mínimo –10 y el valor máximo 10, con un incremento de 0.1; luego selecciona OK:



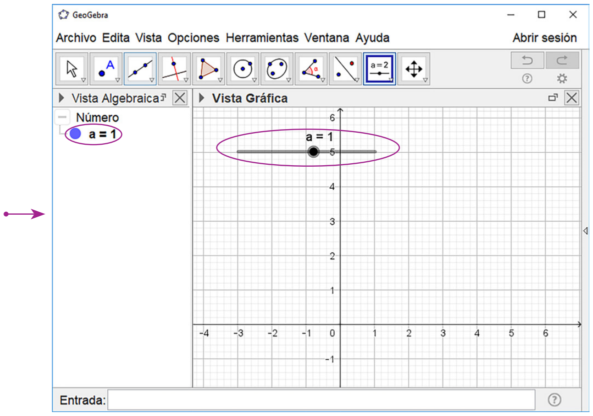
● Número
○ Ángulo
○ Entero

Nombre: a

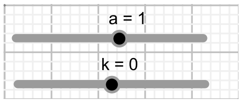
☐ Aleatorio

Intervalo | Deslizador | Animación

Mín: -10
Máx: 10
Incremento: 0.1



2. De forma similar crea otro deslizador, nómbralo **k** y asígnale las mismas características de **a** (intervalo e incremento). Coloca el cursor sobre el punto que aparece en el deslizador, muévelo hasta que **k** tenga el valor de cero.



3. Escribe en la barra de entrada f(x)=ax^2; en la Vista Algebraica aparecerá la función $f(x) = 1x^2$ y en la Vista Gráfica la parábola correspondiente. Mueve el deslizador **a**, primero para valores positivos y luego negativos; ¿qué ocurre con la gráfica de f? Anota lo que observas en tu cuaderno.

4. Escribe en la barra de entrada g(x)=f(x)+k.

5. Para determinar el vértice de la gráfica de g escribe en la barra de entrada extremo. Selecciona la opción Extremo(<Polinomio>); luego, en lugar de <Polinomio> escribe "y=g(x)", aparecerá en la Vista Algebraica las coordenadas del vértice y en la Vista Gráfica el punto.

Entrada: Extremo(y=g(x))

6. Mueve el deslizador **k**, primero para valores positivos y luego para negativos. ¿Qué ocurre con la gráfica y el vértice de la función si **k** es positivo o si es negativo? Anota lo que observas en tu cuaderno.

Actividades

Ahora utilizarás otra herramienta para construir la gráfica de la función $f(x) = x^2$ como se hizo en noveno grado, es decir, a partir de puntos:

1. Abre una nueva ventana. Crea un deslizador y nómbralo "**n**", con intervalo de –5 a 5 e incremento de 0.001. Mueve el deslizador hasta que **n** tenga el valor de –5, aleja la Vista Gráfica.
2. En la barra de entrada ingresa el punto "P=(n,n^2)". Luego da clic derecho sobre P y selecciona la opción "Rastro".
3. Da clic derecho sobre "**n**" y selecciona "Animación". Anota lo que observas en tu cuaderno.

Indicador de logro

5.2 Utiliza las herramientas de un software para visualizar los desplazamientos verticales de funciones cuadráticas y la elaboración de la parábola de $f(x) = x^2$ a partir de puntos.

Secuencia

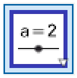
En esta clase se utiliza la herramienta Deslizador del software GeoGebra para verificar la relación entre la gráfica de $f(x) = ax^2$ y la de $g(x) = f(x) + k$.

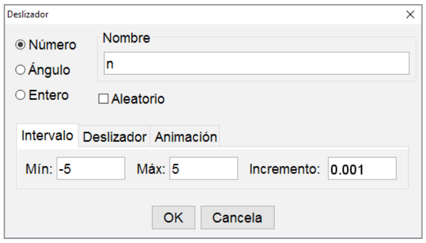
Propósito

Observe que, en la parte Actividades, la construcción de la gráfica de $f(x) = x^2$ se realiza utilizando la herramienta Deslizador y la opción Animación.

Solución de problemas:

1. Se selecciona la herramienta Deslizador, luego clic sobre cualquier parte de la Vista Gráfica:





Deslizador

● Número
○ Ángulo
○ Entero

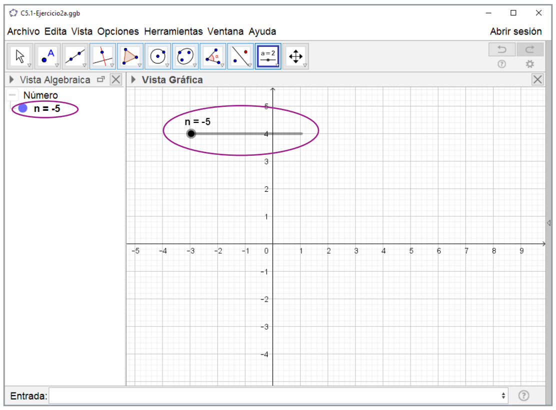
Nombre: n

☐ Aleatorio

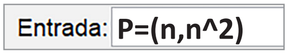
Intervalo | Deslizador | Animación

Mín: -5 Máx: 5 Incremento: 0.001

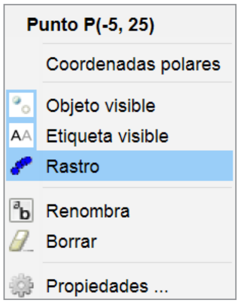
OK Cancela



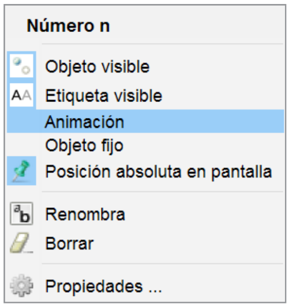
2. En la barra se escriben las coordenadas de P(n, n^2). Luego, clic derecho sobre el punto P en la Vista Algebraica, y se selecciona la opción Rastro.

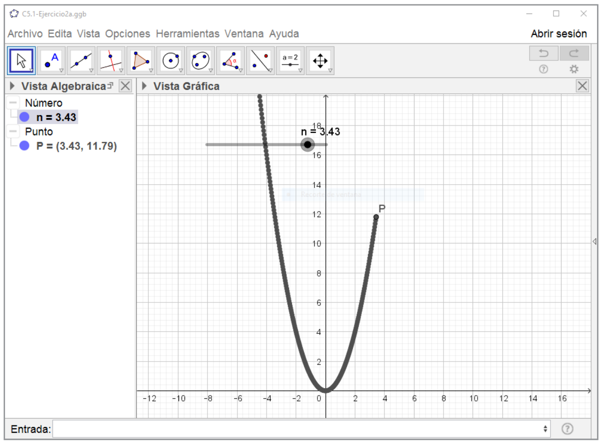


Entrada: P=(n,n^2)



3. Clic derecho sobre el número **n** en la Vista Algebraica, y se selecciona la opción Animación (para detenerla se da nuevamente clic derecho sobre el número **n** y se desmarca la opción Animación).





5.3 Práctica en GeoGebra: desplazamientos horizontales

Con esta práctica visualizarás los desplazamientos horizontales, combinaciones de desplazamientos horizontales, verticales y las gráficas de otras funciones que no son cuadráticas.

Práctica

Desplazamientos horizontales:

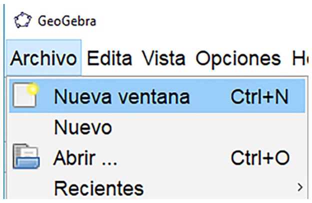
1. Crea dos deslizadores, al primero nómbralo **a** con intervalo de –10 a 10 e incremento 0.1, y al segundo nómbralo **h** y con las mismas características de **a** (intervalo e incremento). Mueve el deslizador **h** hasta que su valor sea igual a cero.

2. Crea las funciones "f(x)=ax^2" y "g(x)=f(x-h)" y encuentra el vértice de la gráfica de g.

3. Mueve el deslizador **a** de tal forma que sea diferente de 1. Luego activa la animación para el deslizador **h**, ¿qué ocurre con la gráfica y el vértice de g para valores positivos de **h**? ¿Y para valores negativos? Anota los resultados en tu cuaderno.

Combinaciones de desplazamientos horizontales y verticales:

1. Abre una nueva ventana en GeoGebra, ve al menú "Archivo" y selecciona "Nueva ventana".



2. Crea tres deslizadores, nómbralos **a**, **h** y **k**, y asígnales las siguientes características: intervalo de –10 a 10 e incremento de 0.1. Mueve los deslizadores **h** y **k** para que su valor sea cero.

3. Crea las funciones "f(x)=ax^2" y "g(x)=f(x-h)+k". Encuentra además el vértice de la gráfica de g.

4. Mueve el deslizador **a** de tal forma que sea diferente de 1. Luego mueve los deslizadores **h** y **k** en ese orden y sin activar la animación. Anota lo que le ocurre a la gráfica y el vértice de g con respecto a f.

Gráficas de otras funciones que no son cuadráticas:

1. Abre una nueva ventana en GeoGebra.

2. Crea el deslizador **m** y asígnale las siguientes características: intervalo de –4 a 4 e incremento de 0.001; mueve el deslizador para que su valor sea –4.

3. Crea el punto "P=(m,m^3)" y actívale el rastro. Luego activa la animación del deslizador **m**, ¿cuál es la función cuya gráfica se asemeja a la que se está elaborando?

4. Crea el deslizador **n** con intervalo de 0 a 30 e incremento 0.001; muévelo para que su valor sea 0.

5. Crea el punto "Q=(n, sqrt(n))" y actívale el rastro. Luego activa la animación del deslizador **n**, ¿cuál es la función cuya gráfica se asemeja a la que se está elaborando? ¿Para qué sirve el comando "sqrt"?

Actividades

1. Utiliza GeoGebra para comprobar si has elaborado correctamente las gráficas de las funciones de los problemas, desde la clase 2.1 hasta la clase 2.8.

2. Comprueba los resultados de las gráficas de la clase 4.9, y los problemas 5 y 6 de la clase 4.10.

Indicador de logro

5.3 Utiliza las herramientas de un software para visualizar los desplazamientos horizontales de funciones cuadráticas y la elaboración de otras funciones a partir de puntos.

Secuencia

En esta clase se utiliza la herramienta Deslizador del software GeoGebra para verificar la relación entre la gráfica de $f(x) = ax^2$ y las de $g(x) = f(x - h)$ y $h(x) = f(x - h) + k$.

Propósito

En la parte Actividades, los estudiantes deben utilizar lo visto en las prácticas para verificar las soluciones de algunos problemas de la unidad.

Solución de problemas:

1. En la barra de entrada, las funciones se escriben de la siguiente forma:

Clase 2.1 (se colocarán diferentes letras para las funciones en cada literal):
a) f(x)=x+1
b) g(x)=-2x-3
c) h(x)=x^2+2
d) p(x)=-x^2-3

Clase 2.2:
a) f(x)=(x-2)^2
b) g(x)=-(x-1)^2
c) h(x)=2(x-2)^2
d) p(x)=-2(x-3)^2

Clase 2.3:
a) f(x)=(x+2)^2
b) g(x)=-(x+1)^2
c) h(x)=2(x+2)^2
d) p(x)=-2(x+3)^2

Clase 2.4:
a) f(x)=(x-2)^2+3
b) g(x)=-(x-1)^2+2
c) h(x)=2(x+2)^2-1
d) p(x)=-2(x+3)^2-4

Clase 2.5:
a) f(x)=(x+1)^2+2
b) g(x)=-(x+3)^2-3
c) h(x)=3(x-2)^2+1
d) p(x)=-3(x-4)^2-2

Clase 2.6 (se puede escribir la ecuación de la función tal cual aparece en cada literal):
a) f(x)=x^2-4x
b) g(x)=-x^2+2x
c) h(x)=3x^2+6x

Clase 2.7:
a) f(x)=x^2+2x-2
b) g(x)=x^2+4x+5
c) h(x)=x^2-6x+7
d) p(x)=x^2-8x+18

Clase 2.8:
a) f(x)=-x^2+8x-13
b) g(x)=3x^2+12x+11
c) h(x)=2x^2-20x+44
d) p(x)=-1/2x^2+x+3/2

2. En la barra de entrada, las funciones se escriben de la siguiente forma:

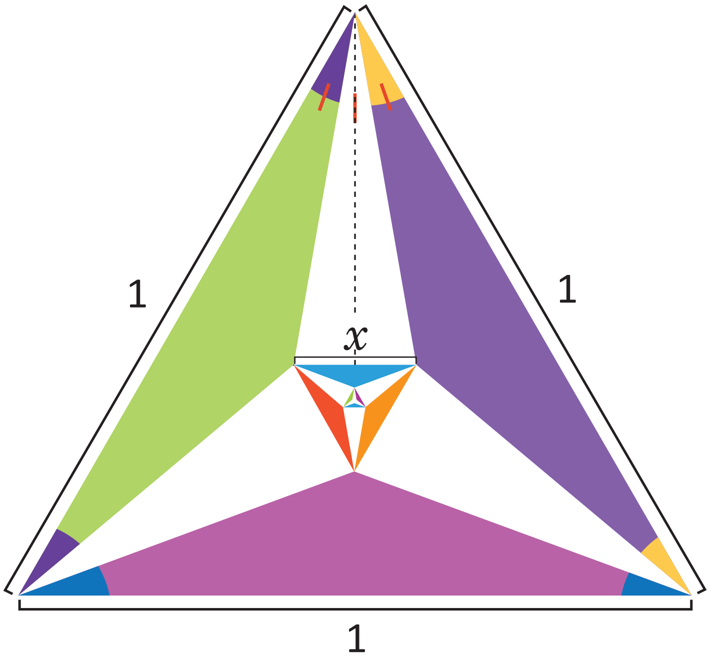
Clase 4.9 (se colocarán diferentes letras para las funciones en cada literal):
1a) f(x)=4x^3
1b) g(x)=1/4x^3
1c) h(x)=-4x^3
1d) p(x)=-1/4x^3

2a) f(x)=(-2x)/(x-2)
2b) g(x)=(2x+3)/(x-1)

3a) f(x)=-3sqrt(x)
3b) g(x)=4sqrt(x)
3c) h(x)=sqrt(-3x)
3d) p(x)=sqrt(4x)

Clase 4.10 (se colocarán diferentes letras para las funciones en cada literal):
5a) f(x)=x^3+1
5b) g(x)=(x-2)^3

6a) f(x)=-sqrt(-x)
6b) g(x)=sqrt(x)+1
6c) h(x)=sqrt(-x)-3
6d) p(x)=sqrt(x-1)



x = ¿?

Cada ángulo mide 20°, trazando las alturas punteadas se cumple que $h = \frac{1}{2\cos 20°}$ y entonces sen 10° = x cos 20°, por lo tanto $x = \frac{\text{sen } 10°}{\cos 20°}$.

REPÚBLICA DE EL SALVADOR EN LA AMÉRICA CENTRAL

Bachillerato

Sugerencia

Tomo 1

1