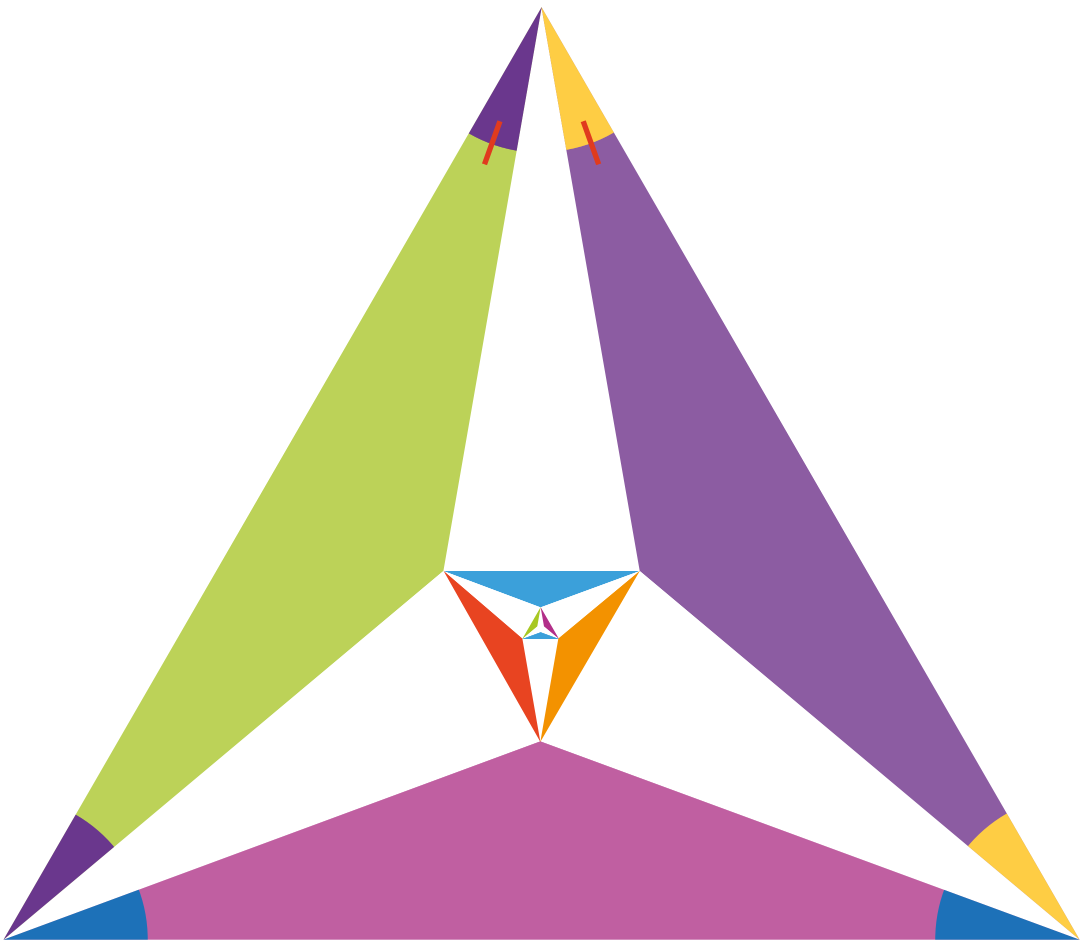
GOBIERNO DE EL SALVADOR

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Matemática

Primer año de bachillerato



Tomo 2

Sugerencia metodológica

Segunda edición

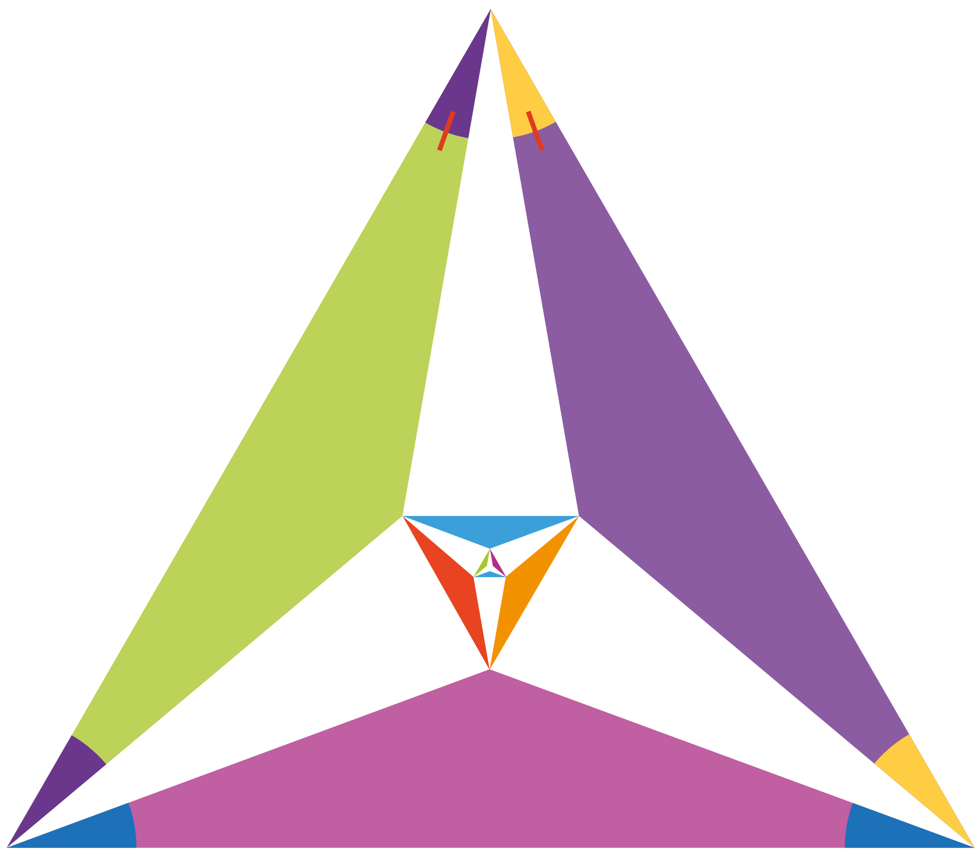
Bachillerato 1 Segunda edición Matemática Tomo 2 Sugerencia metodológica

GOBIERNO DE EL SALVADOR

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Matemática

Primer año de bachillerato



Tomo 2

Sugerencia metodológica
Segunda edición

ESMATE

JICA

Coordinación y revisión técnica
César Omar Gómez Juárez

Equipo técnico autoral y de diagramación del Ministerio de Educación
Ana Ester Argueta Aranda
Diana Marcela Herrera Polanco
César Omar Gómez Juárez
Francisco Antonio Mejía Ramos

Diseño y revisión de diagramación
Francisco René Burgos Álvarez
Judith Samanta Romero de Ciudad Real

Corrección de estilo
Marlene Elizabeth Rodas Rosales
Ana Esmeralda Quijada Cárdenas

Cooperación técnica de Japón a través de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA).

Primera edición © 2019.
Segunda edición © 2020.

Imagen de portada con fines educativos, en ella se ilustra un triángulo equilátero trisecado en un ángulo, a partir de esto se puede calcular el valor del lado del triángulo interior más grande.
La respuesta se encuentra al reverso de la contraportada.

510
M425 Matemática : primer año de bachillerato [recurso electrónico]: , sugerencia metodológica tomo 2 / Ana Ester Argueta Aranda, Diana Marcela Herrera Polanco, César Omar Gómez Juárez, Francisco Antonio Mejía Ramos;
s/v Diagramación Judith Samanta Romero de Ciudad Real, Francisco René Burgos Álvarez. --2ª. ed.. --
San Salvador, El Salv. : Ministerio de Educación (MINED), 2020.
1 recurso electrónico, (240 p. ; ilus. ; 28 cm. - (Esmate)

Datos electrónicos (1 archivo : pdf, 11 mb). -- http://www.mined.gob.sv.

ISBN 978-99961-355-8-3 (impreso)
1. Matemáticas-Libros de texto. 2. Matemáticas-Enseñanza -- Metodología. I. Argueta Aranda, Ana Ester, coaut. II. Título.
BINA

Estimados docentes:

Reciban un cordial saludo, por medio del cual les expresamos nuestro agradecimiento por la importante labor que realizan en beneficio de la ciudadanía salvadoreña.

Como Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología (MINEDUCYT) a través del Proyecto de Mejoramiento de los Aprendizajes de Matemática en Educación Básica y Educación Media (ESMATE) hemos diseñado para ustedes la Sugerencia metodológica para la asignatura de Matemática, que se convertirá en una herramienta importante para la labor docente que realizan día con día.

El objetivo principal de este recurso es brindarles orientaciones concretas para el desarrollo de las clases de esta asignatura y lograr así una mejora significativa en los aprendizajes de los estudiantes salvadoreños.

Es importante destacar que la Sugerencia metodológica está en correspondencia con las clases propuestas en el Libro de texto diseñado para los estudiantes, concretizando de esta manera lo establecido en el Programa de estudio de Matemática.

No dudamos que aprovecharán al máximo este recurso y estamos seguros de que pondrán todo su esfuerzo y dedicación para seguir contribuyendo al desarrollo de nuestro querido país.

Atentamente,

Carla Evelyn Hananía de Varela
Ministra de Educación, Ciencia y Tecnología

Ricardo Cardona Alvarenga
Viceministro de Educación y de Ciencia y Tecnología Ad Honorem

Índice

Unidad 5. Resolución de triángulos oblicuángulos

Competencia de la unidad

Resolver triángulos utilizando las herramientas de la trigonometría y aplicarlo a diferentes situaciones del entorno.

Relación y desarrollo

Tercer ciclo

Unidad 5: Figuras semejantes (9°)
- Semejanza
- Semejanza de triángulos
- Semejanza y paralelismo
- Aplicaciones de semejanza y triángulos semejantes

Unidad 6: Teorema de Pitágoras (9°)
- Teorema de Pitágoras
- Aplicación del teorema de Pitágoras

Primer año de bachillerato

Unidad 5: Resolución de triángulos oblicuángulos
- Razones trigonométricas de ángulos agudos
- Razones trigonométricas de ángulos no agudos
- Resolución de triángulos oblicuángulos

Unidad 6: Identidades y ecuaciones trigonométricas
- Identidades trigonométricas
- Ecuaciones trigonométricas

Unidad 7: Vectores
- Vectores
- Producto escalar de vectores
- Números complejos
- Práctica en GeoGebra

Segundo año de bachillerato

Unidad 5: Funciones trascendentales II
- Función biyectiva e inversa
- Función logarítmica
- Funciones trigonométricas
- Práctica en GeoGebra

Plan de estudio de la unidad

Lección	Horas	Clases
1. Razones trigonométricas de ángulos agudos	1	1. Razón trigonométrica
	1	2. Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo
	1	3. Triángulos rectángulos notables
	1	4. Razones trigonométricas de triángulos rectángulos notables
	1	5. Triángulo rectángulo conocidos un lado y un ángulo
	1	6. Triángulo rectángulo conocidos dos lados
	1	7. Practica lo aprendido
	1	8. Aplicación de las razones trigonométricas
	1	9. Ángulo de depresión
	1	10. Ángulo de elevación
	1	11. Actividad. Construcción de un clinómetro
	1	12. Aplicaciones de las razones trigonométricas
	1	Prueba de la lección 1
2. Razones trigonométricas de ángulos no agudos	1	1. Distancia entre dos puntos
	1	2. Simetrías en el plano cartesiano
	1	3. Ángulos
	1	4. Ángulos mayores a 360° y menores a –360°
	1	5. Razones trigonométricas de cualquier ángulo, parte 1
	1	6. Razones trigonométricas de cualquier ángulo, parte 2
	1	7. Razones trigonométricas de cualquier ángulo, parte 3
	1	8. Razones trigonométricas de cualquier ángulo, parte 4
	1	9. La identidad pitagórica

Lección	Horas	Clases
	1	10. Practica lo aprendido
3. Resolución de triángulos oblicuángulos	1	1. Área de un triángulo
	1	2. Ley de los senos
	1	3. Cálculo del ángulo de un triángulo conocidos dos lados y un ángulo, parte 1
	1	4. Cálculo del ángulo de un triángulo conocidos dos lados y un ángulo, parte 2
	1	5. Ley del coseno
	1	6. Cálculo de los ángulos de un triángulo conocidos sus tres lados
	1	7. Practica lo aprendido
	1	8. Aplicaciones de la ley de los senos y la ley del coseno
	1	9. Practica lo aprendido
	1	10. Problemas de la unidad
	1	11. Problemas de la unidad
	1	Prueba de las lecciones 2 y 3

33 horas clase + prueba de la lección 1 + prueba de las lecciones 2 y 3

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Razones trigonométricas de ángulos agudos
El desarrollo de la unidad inicia con la justificación de que las razones trigonométricas dependen únicamente del ángulo y no de la longitud de los lados del triángulo rectángulo. Se establecen las razones trigonométricas de los ángulos de los triángulos notables, y se calculan razones trigonométricas de cualquier ángulo agudo y ángulos conocidas algunas medidas de lados de triángulos rectángulos. Finalmente, se resuelven problemas que requieran el uso de razones trigonométricas.

Lección 2: Razones trigonométricas de ángulos no agudos
Se calculan razones trigonométricas de ángulos no agudos utilizando el plano cartesiano, y el contenido de la lección anterior (razones trigonométricas de los ángulos 30°, 45° y 60°) para el cálculo de razones trigonométricas de ángulos especiales (todos aquellos que pueden calcularse con los ángulos mencionados previamente). Se calculan ángulos que no necesariamente resulten en ángulos especiales.

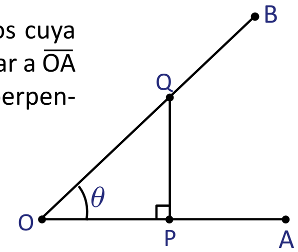
Lección 3: Resolución de triángulos oblicuángulos
Se establecen la ley de los senos y del coseno para la resolución de triángulos oblicuángulos y de problemas aplicados al entorno.

Lección 1 Razones trigonométricas de ángulos agudos

1.1 Razón trigonométrica*

Problema inicial

Se consideran los segmentos de recta $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ y el ángulo formado entre ellos cuya medida es θ. Sobre $\overline{OB}$ se toma un punto Q y se traza un segmento perpendicular a $\overline{OA}$ y que pase por Q. Se define por P el punto de intersección entre este segmento perpendicular y $\overline{OA}$, como muestra la figura.



Del triángulo rectángulo OPQ se definen las razones: $\frac{PQ}{OQ}$, $\frac{OP}{OQ}$ y $\frac{PQ}{OP}$.

Justifica que las razones definidas no dependen de las longitudes de los lados del triángulo rectángulo OPQ.

Solución

Se toma un punto cualquiera Q' sobre $\overline{OB}$ distinto de Q. Se traza un segmento perpendicular a $\overline{OA}$ que pase por Q' y sea P' la intersección de esta perpendicular y $\overline{OA}$, como muestra la figura. Luego, los triángulos OPQ y OP'Q' son semejantes por el criterio AA (denotado $\Delta OPQ \sim \Delta OP'Q'$), por lo tanto

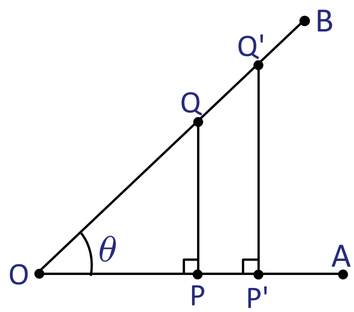
$$\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{OP}{OP'} = \frac{OQ}{OQ'}.$$

De $\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{OQ}{OQ'}$ se deduce que $\frac{PQ}{OQ} = \frac{P'Q'}{OQ'}$.

De $\frac{OP}{OP'} = \frac{OQ}{OQ'}$ se deduce que $\frac{OP}{OQ} = \frac{OP'}{OQ'}$.

De $\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{OP}{OP'}$ se deduce que $\frac{PQ}{OP} = \frac{P'Q'}{OP'}$.

En una proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se cumple que $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

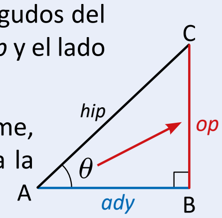


Entonces, $\frac{PQ}{OQ} = \frac{P'Q'}{OQ'}$, $\frac{OP}{OQ} = \frac{OP'}{OQ'}$ y $\frac{PQ}{OP} = \frac{P'Q'}{OP'}$.

Por lo tanto, las razones $\frac{PQ}{OQ}$, $\frac{OP}{OQ}$ y $\frac{PQ}{OP}$ no dependen de las longitudes de los lados del triángulo.

Definición

Sea ABC un triángulo rectángulo, recto en B y sea θ la medida de uno de los ángulos agudos del ΔABC. Se define a la hipotenusa del triángulo por *hip*, el lado opuesto al ángulo como *op* y el lado adyacente al ángulo como *ady*.



Nótese que el opuesto y adyacente en un triángulo dependerá de cuál ángulo se tome, y se debe tener especial cuidado cuando el triángulo está ubicado en otra posición a la mostrada en la figura.

Se definen las razones sen θ, cos θ y tan θ, como sen $\theta = \frac{op}{hip}$, cos $\theta = \frac{ady}{hip}$, tan $\theta = \frac{op}{ady}$, y se leen “seno de theta”, “coseno de theta” y “tangente de theta”, respectivamente.

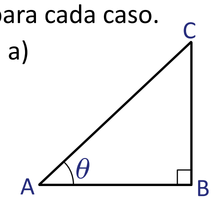
A las razones sen θ, cos θ y tan θ, se les llama **razones trigonométricas** del ángulo θ.

Problemas

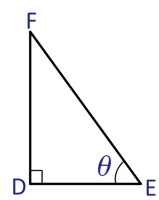
En un triángulo rectángulo, el lado que se opone al ángulo de 90° se conoce como **hipotenusa** y los dos lados que forman dicho ángulo se conocen como **catetos**. Además, la hipotenusa es el lado de mayor longitud.

Identifica la hipotenusa, el lado opuesto y adyacente del ángulo θ y expresa las razones trigonométricas para cada caso.

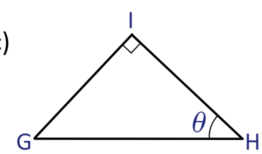
a)



b)



c)



Indicador de logro:

1.1 Establece las razones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo en términos de la hipotenusa, el lado opuesto y adyacente a dicho ángulo.

Secuencia:

Esta unidad es el inicio del estudio de la trigonometría. La teoría de ángulos, los triángulos rectángulos y la semejanza de triángulos son la principal base para el desarrollo de la unidad. Además se requiere del conocimiento de segmentos perpendiculares, de las proporciones y de sus propiedades.
Esta clase debe ser desarrollada con mayor apoyo por parte del docente.

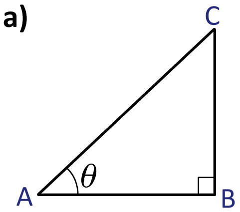
Propósito:

El objetivo principal de esta clase es justificar el hecho de que las razones trigonométricas dependen únicamente del ángulo y no de las longitudes de los lados del triángulo rectángulo en cuestión.

La sección de Problemas busca afianzar en el estudiante el hecho de identificar correctamente la hipotenusa de un triángulo rectángulo, el lado opuesto y adyacente de un ángulo dado.

Solución de problemas:

a)



La hipotenusa es *hip* = AC, el lado opuesto es *op* = BC, el lado adyacente es *ady* = AB.

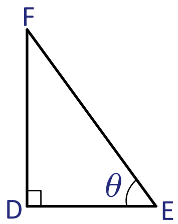
Las razones trigonométricas del triángulo ABC son:

$$\text{sen}\ \theta = \frac{op}{hip} = \frac{BC}{AC},$$

$$\cos\theta = \frac{ady}{hip} = \frac{AB}{AC},$$

$$\tan\theta = \frac{op}{ady} = \frac{BC}{AB}.$$

b)



La hipotenusa es *hip* = EF, el lado opuesto es *op* = DF, el lado adyacente es *ady* = DE.

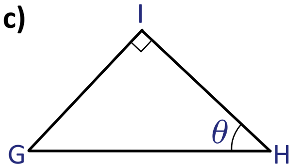
Las razones trigonométricas del triángulo DEF son:

$$\text{sen}\ \theta = \frac{op}{hip} = \frac{DF}{EF},$$

$$\cos\theta = \frac{ady}{hip} = \frac{DE}{EF},$$

$$\tan\theta = \frac{op}{ady} = \frac{DF}{DE}.$$

c)



La hipotenusa es *hip* = GH, el lado opuesto es *op* = GI, el lado adyacente es *ady* = HI.

Las razones trigonométricas del triángulo GHI son:

$$\text{sen}\ \theta = \frac{op}{hip} = \frac{GI}{GH},$$

$$\cos\theta = \frac{ady}{hip} = \frac{HI}{GH},$$

$$\tan\theta = \frac{op}{ady} = \frac{GI}{HI}.$$

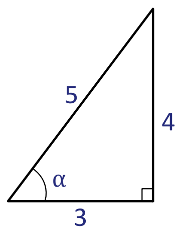
Lección 1

1.2 Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo

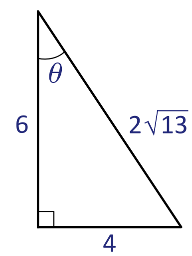
Problema inicial

Determina las tres razones trigonométricas para el ángulo α y θ.

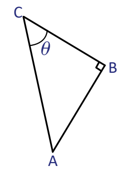
a)



b)



Hay que tener cuidado al elegir el lado opuesto y adyacente al ángulo. Por ejemplo, en el triángulo ABC, el opuesto de θ es $\overline{AB}$ y el lado adyacente θ a es $\overline{BC}$.



Solución

a) Se identifica la hipotenusa, el lado opuesto y el lado adyacente del ángulo α. En este caso, *hip* = 5, *op* = 4 y *ady* = 3, entonces,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{op}{hip} = \frac{4}{5}, \quad \cos\alpha = \frac{ady}{hip} = \frac{3}{5}, \quad \tan\alpha = \frac{op}{ady} = \frac{4}{3}.$$

b) Se identifica la hipotenusa, el lado opuesto y el lado adyacente del ángulo θ. En este caso, *hip* = $2\sqrt{13}$, *op* = 4 y *ady* = 6, entonces,

- $\operatorname{sen}\theta = \frac{op}{hip} = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \times \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, racionalizando el denominador.
- $\cos\theta = \frac{ady}{hip} = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, racionalizando el denominador.
- $\tan\theta = \frac{op}{ady} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Recuerda que para racionalizar una fracción, se multiplica y divide por el radical que aparece en el denominador de la fracción.

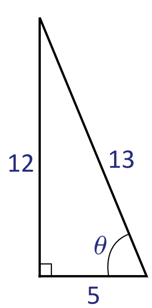
Definición

Si se conocen las medidas de los lados de un triángulo rectángulo pueden calcularse las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de uno de sus ángulos agudos, identificando la medida de la hipotenusa, del lado opuesto y adyacente de dicho ángulo y luego calculando las razones como se definieron en la clase 1.1.

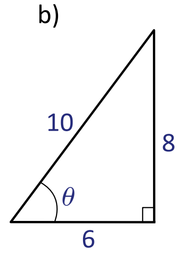
Problemas

1. Para cada uno de los siguientes triángulos, calcula las razones trigonométricas sen θ, cos θ y tan θ. Simplifica o racionaliza cuando sea posible.

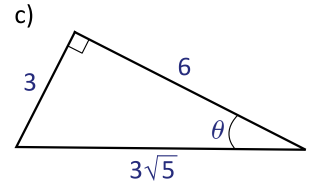
a)



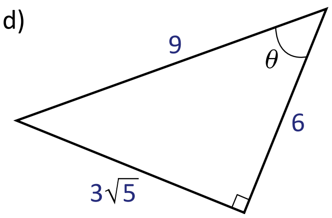
b)



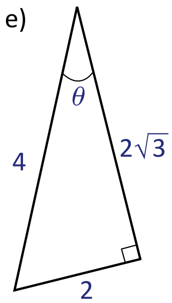
c)



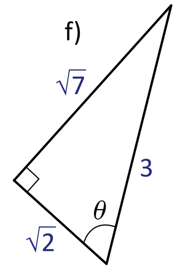
d)



e)



f)

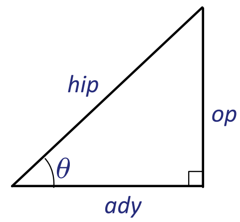


2. Se definen las razones trigonométricas cosecante, secante y cotangente de un ángulo agudo θ, denotadas por csc θ, sec θ y cot θ, respectivamente:

$$\csc\theta = \frac{hip}{op},$$

$$\sec\theta = \frac{hip}{ady},$$

$$\cot\theta = \frac{ady}{op}.$$



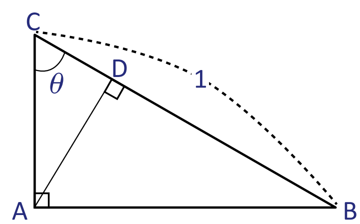
Encuentra las razones trigonométricas csc θ, sec θ y cot θ para los triángulos del Problema 1.

3. Con base a la definición en el Problema 2, demuestra que $\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$.

4. Con base a la definición en el Problema 2, demuestra que $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$.

5. Con base a la definición en el Problema 2, demuestra que $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$.

6. En la siguiente figura, ABC es un triángulo rectángulo, ∢CAB = 90°, ∢BCA = θ y BC = 1. Escribe los valores de las longitudes de los segmentos AC, AB, AD, BD y CD en términos del ángulo θ.



El nombre **trigonometría** deriva de palabras griegas que significan "*triángulo*" y "*medir*". Se llama así porque sus inicios tienen que ver principalmente con el problema de "*resolver un triángulo*" (calcular las medidas de los tres lados y tres ángulos, conocidos algunos de ellos).

Si bien la trigonometría nace por la necesidad de resolver triángulos, en la actualidad es utilizada para muchos ámbitos como por ejemplo, en la física (medición del movimiento de un péndulo), la astronomía (medir distancias entre estrellas) o cartografía (medir distancias entre dos puntos).

Alrededor del siglo II a.C., el matemático Hiparco (180-125 a.C.), nacido en Nicea, Asia Menor, es considerado el más destacado de los astrónomos griegos, inicia el uso de una tabla de cuerdas de la circunferencia que en cierto modo equivalía a una tabla rudimentaria de valores del seno.

Abbott , B.A. (1967). *Teach Yourself Trigonometry.*

Indicador de logro:

1.2 Calcula las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo agudo.

Secuencia:

Luego de haber aprendido a identificar la hipotenusa, el lado adyacente y opuesto de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, en esta clase se establecen las razones trigonométricas de un ángulo agudo a partir de un triángulo rectángulo cuyas medidas de los lados son conocidas.

Propósito:

Identificar la medida de la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo para establecer las razones trigonométricas de uno de los ángulos agudos de dicho triángulo.

Solución de problemas:

1a) Como *hip* = 13, *op* = 12 y *ady* = 5, entonces,

$\text{sen}\ \theta = \frac{op}{hip} = \frac{12}{13}$, $\cos\theta = \frac{ady}{hip} = \frac{5}{13}$, $\tan\theta = \frac{op}{ady} = \frac{12}{5}$.

1b) Como *hip* = 10, *op* = 8 y *ady* = 6, entonces,

$\text{sen}\ \theta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, $\tan\theta = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

1c) Como *hip* = $3\sqrt{5}$, *op* = 3 y *ady* = 6, entonces,

$\text{sen}\ \theta = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\theta = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\tan\theta = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

1d) Como *hip* = 9, *op* = $3\sqrt{5}$ y *ady* = 6, entonces,

$\text{sen}\ \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\cos\theta = \frac{2}{3}$, $\tan\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

1e) Como *hip* = 4, *op* = 2 y *ady* = $2\sqrt{3}$, entonces,

$\text{sen}\ \theta = \frac{1}{2}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

1f) Como *hip* = 3, *op* = $\sqrt{7}$ y *ady* = $\sqrt{2}$, entonces,

$\text{sen}\ \theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\tan\theta = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

2a) $\csc\theta = \frac{hip}{op} = \frac{13}{12}$, $\sec\theta = \frac{hip}{ady} = \frac{13}{5}$, $\cot\theta = \frac{ady}{op} = \frac{5}{12}$.

2b) $\csc\theta = \frac{5}{4}$, $\sec\theta = \frac{5}{3}$, $\cot\theta = \frac{3}{4}$.

2c) $\csc\theta = \sqrt{5}$, $\sec\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\cot\theta = 2$.

2d) $\csc\theta = \frac{3\sqrt{5}}{5}$, $\sec\theta = \frac{3}{2}$, $\cot\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

2e) $\csc\theta = 2$, $\sec\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\cot\theta = \sqrt{3}$.

2f) $\csc\theta = \frac{3\sqrt{7}}{7}$, $\sec\theta = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\cot\theta = \frac{\sqrt{14}}{7}$.

3. $\frac{1}{\text{sen}\ \theta} = 1 \div \frac{op}{hip} = 1 \times \frac{hip}{op} = \frac{hip}{op} = \csc\theta$

4. $\frac{1}{\cos\theta} = 1 \div \frac{ady}{hip} = 1 \times \frac{hip}{ady} = \frac{hip}{ady} = \sec\theta$

5. $\frac{1}{\tan\theta} = 1 \div \frac{op}{ady} = 1 \times \frac{ady}{op} = \frac{ady}{op} = \cot\theta$

6. Del ΔABC se tiene que

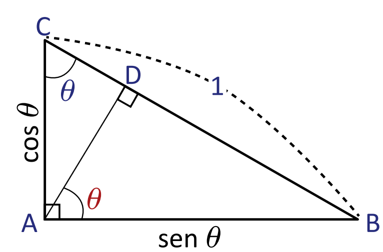
$\cos\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{1} \Rightarrow AC = \cos\theta$ y $\text{sen}\ \theta = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{1} \Rightarrow AB = \text{sen}\ \theta$.

Del ΔADC puede deducirse que ∢DAC = 90° – θ y por tanto, ∢DAB = θ.

Ahora, en el ΔABD se tiene:

$\cos\theta = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{\text{sen}\ \theta} \Rightarrow AD = \cos\theta\ \text{sen}\ \theta$ y $\text{sen}\ \theta = \frac{BD}{AB} = \frac{BD}{\text{sen}\ \theta} \Rightarrow BD = \text{sen}^2\theta$.

Luego, CD = BC – BD = 1 – $\text{sen}^2\theta$.

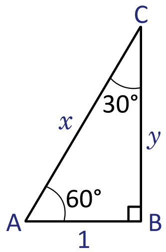


1.3 Triángulos rectángulos notables

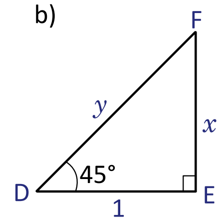
Problema inicial

Dados los siguientes triángulos rectángulos, encuentra el valor de x y y.

a)

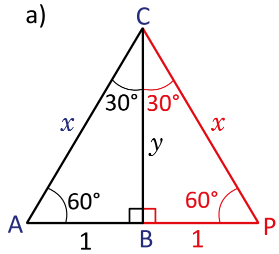


b)



Solución

a)



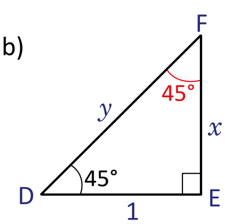
Si se refleja el triángulo ABC con respecto a $\overline{BC}$ se obtiene el triángulo APC. Como ∢BCA = 30° se tiene que ∢PCA = 60°. Resulta que el triángulo APC es equilátero, y por lo tanto x = AP = 2.

Luego, para encontrar el valor de y se aplica el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC: $x^2 = 1^2 + y^2$. Es decir,

$$y^2 = x^2 - 1^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3.$$

Como $y > 0$, entonces, $y = \sqrt{3}$.

b)



En el triángulo DEF, los ángulos FDE y DFE son complementarios, es decir, ∢FDE + ∢EFD = 90°; por lo tanto, ∢EFD = 45°. Se tiene entonces que el triángulo DEF es isósceles, y por lo tanto x = 1.

Para encontrar el valor de y se aplica el teorema de Pitágoras en el triángulo DEF.

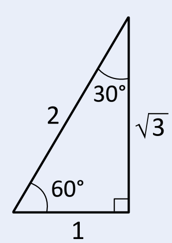
$$y^2 = 1^2 + x^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

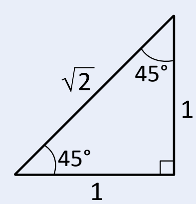
Como $y > 0$, entonces, $y = \sqrt{2}$.

Definición

Al triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos son de 30° y 60°, y al triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos son de 45° se les conoce como **triángulos notables**.

Se suele hacer referencia a estos triángulos como triángulo de 30 y 60; y triángulo de 45.

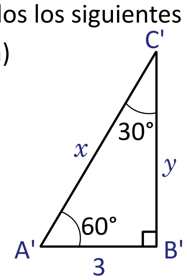




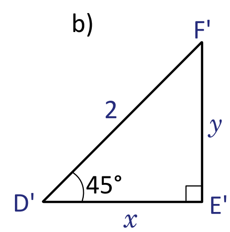
Ejemplo

Dados los siguientes triángulos, encuentra los valores de x y y.

a)

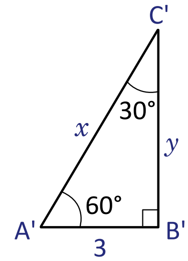


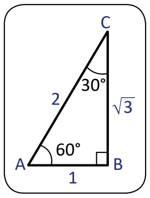
b)



a) Nótese que ΔA'B'C' ~ ΔABC, entonces,

$\frac{x}{2} = \frac{3}{1} \quad \Rightarrow \quad x = 3(2) = 6 \quad$ y $\quad \frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{3}{1} \quad \Rightarrow \quad y = 3\sqrt{3}$.

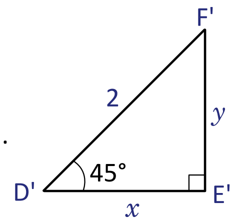


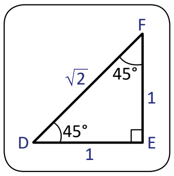


b) De igual forma que en a) ΔD'E'F' ~ ΔDEF, entonces,

$\frac{x}{1} = \frac{2}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Luego, como el ΔD'E'F' es isósceles se tiene que $y = \sqrt{2}$.

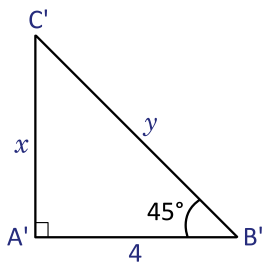




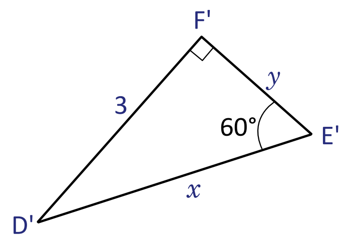
Problemas

Encuentra el valor de x y y en cada triángulo.

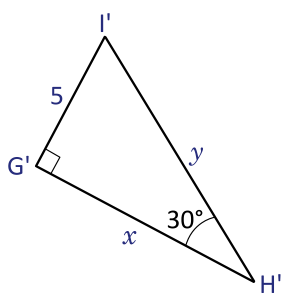
a)



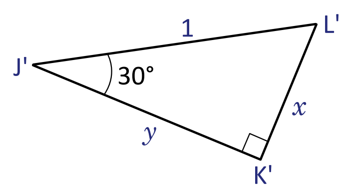
b)



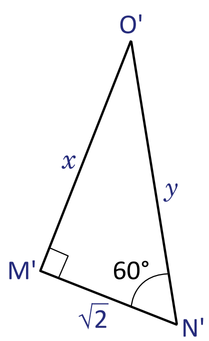
c)



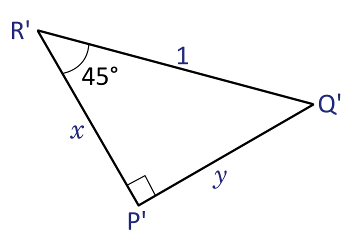
d)



e)



f)



Indicador de logro:

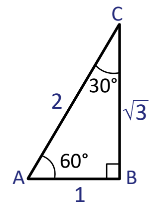
1.3 Utiliza los triángulos notables y semejanza para encontrar las medidas de los lados de un triángulo rectángulo.

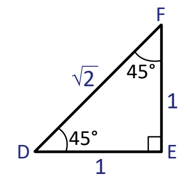
Secuencia:

Luego de haber calculado razones trigonométricas de un ángulo agudo a partir de un triángulo rectángulo dado, se definen los triángulos notables y las medidas de sus lados conociendo una de ellas.

Propósito:

Se calculan las medidas de los lados de los triángulos rectángulos de 30° y 60°, y el de 45° cuando se conoce una medida de ellas. El Ejemplo resuelve problemas similares a los del Problema inicial, pero utilizando semejanza con los triángulos establecidos en la Conclusión.



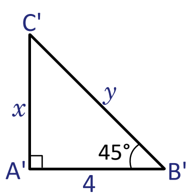


Solución de problemas:

Para resolver este problema, el estudiante puede hacerlo como se hizo en la Solución del Problema inicial o utilizando semejanza como se hizo en el Ejemplo.

Para ver la forma en que se nombran las figuras semejantes, léase la clase 1.3 (página 127) de la Unidad 5 del Libro de texto de noveno grado.

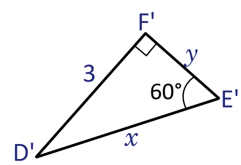
a) Como $\Delta A'B'C' \sim \Delta EFD$:



$\frac{x}{1} = \frac{4}{1} \Rightarrow x = 4,$

$\frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{4}{1} \Rightarrow y = 4\sqrt{2}.$

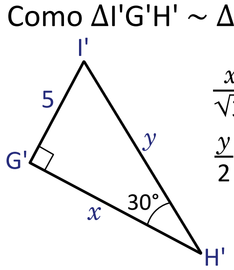
b) Como $\Delta D'E'F' \sim \Delta CAB$:



$\frac{x}{2} = \frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3},$

$\frac{y}{1} = \frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$

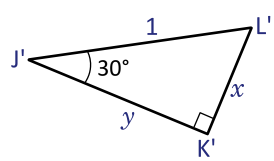
c) Como $\Delta I'G'H' \sim \Delta ABC$:



$\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{5}{1} \Rightarrow x = 5\sqrt{3},$

$\frac{y}{2} = \frac{5}{1} \Rightarrow y = 10.$

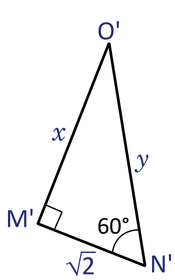
d) Como $\Delta L'K'J' \sim \Delta ABC$:



$\frac{x}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2},$

$\frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

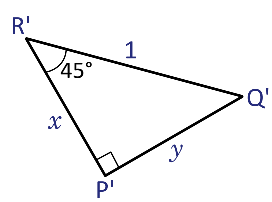
e) Como $\Delta N'M'O' \sim \Delta ABC$:



$\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{1} \Rightarrow x = \sqrt{6},$

$\frac{y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{1} \Rightarrow y = 2\sqrt{2}.$

f) Como $\Delta R'P'Q' \sim \Delta DEF$:



$\frac{x}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$

$y = x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

1.4 Razones trigonométricas de triángulos rectángulos notables

Problema inicial

Encuentra las tres razones trigonométricas de los ángulos 30°, 45° y 60°.

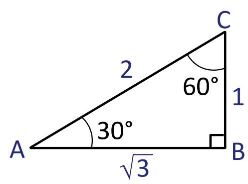
Solución

a) Para calcular las razones trigonométricas para 30° se utiliza el triángulo que se muestra en la figura. Identificando el lado opuesto y adyacente al ángulo de 30° se tiene que, *ady* = $\sqrt{3}$ y *op* = 1. Por lo tanto,

$$\text{sen } 30° = \frac{1}{2},$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

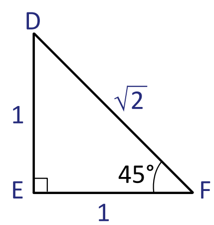


b) Se utiliza el triángulo mostrado en la figura para calcular las razones trigonométricas de 45°. Identificando el lado opuesto y adyacente al ángulo de 45°se tiene que, *ady* = *op* = 1. Por lo tanto,

$$\text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\tan 45° = \frac{1}{1} = 1.$$



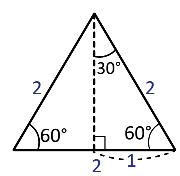
c) Para calcular las razones trigonométricas para 60° se utiliza el mismo triángulo ABC que se utilizó en a). En este caso, *ady* = 1 y *op* = $\sqrt{3}$. Por lo tanto,

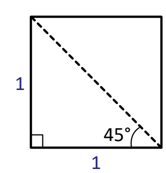
$$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2},$$

$$\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$

Una forma para recordar las razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60° es recordar cómo se construyen el triángulo de 30° y 60°, y el triángulo de 45°, como se muestra a continuación:





Conclusión

Las razones trigonométricas para los ángulos 30°, 45° y 60° se resumen en la siguiente tabla.

θ	30°	45°	60°
sen θ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos θ	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan θ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Cuando se calculen las razones trigonométricas de los ángulos 30°, 45° y 60° hay que utilizar los valores que aparecen en el cuadro.

Problemas

Encuentra las razones trigonométricas secante, cosecante y cotangente para los ángulos 30°, 45° y 60°.

Indicador de logro:

1.4 Determina las razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°.

Secuencia:

En la clase anterior se dedujeron las medidas de los lados de los triángulos notables, por lo que en esta clase se establecen las razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°.

Propósito:

Establecer las razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°, que son base importante para el resto del desarrollo de la unidad.

Solución de problemas:

El problema puede resolverse de dos formas:
- *Forma 1.* Utilizando la definición de las razones cosecante, secante y cotangente.
- *Forma 2.* Utilizando la relación de estas razones con las razones seno, coseno y tangente.

En la siguiente resolución se utiliza la segunda forma.

De los problemas 3, 4 y 5 de la clase 1.2 se sabe que,

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = 1 \div \operatorname{sen}\theta,\ \ \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = 1 \div \cos\theta,\ \ \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = 1 \div \tan\theta.$$

Entonces,

$$\csc 30° = 1 \div \operatorname{sen} 30° = 1 \div \frac{1}{2} = 2,$$

$$\sec 30° = 1 \div \cos 30° = 1 \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\cot 30° = 1 \div \tan 30° = 1 \div \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

$$\csc 45° = 1 \div \operatorname{sen} 45° = 1 \div \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

$$\sec 45° = 1 \div \cos 45° = 1 \div \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$$

$$\cot 45° = 1 \div \tan 45° = 1 \div 1 = 1.$$

$$\csc 60° = 1 \div \operatorname{sen} 60° = 1 \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

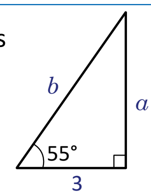
$$\sec 60° = 1 \div \cos 60° = 1 \div \frac{1}{2} = 2,$$

$$\cot 60° = 1 \div \tan 60° = 1 \div \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

1.5 Triángulo rectángulo conocidos un lado y un ángulo agudo

Problema inicial

Dado el siguiente triángulo, encuentra la medida de los dos lados faltantes. Aproxima hasta las décimas.



Solución

Como se conoce el valor de uno de los ángulos agudos del triángulo se pueden utilizar las razones trigonométricas para calcular la medida de los lados faltantes.

Se sabe que $\tan 55° = \frac{a}{3}$, entonces $a = 3\tan 55°$. Como 55° no es un ángulo de un triángulo notable, se calcula el valor de tan 55° con la calculadora, pero antes hay que configurarla de modo que los ángulos estén medidos en grados, realizando los siguientes pasos:

Presionar la tecla MODE dos veces y presionar la tecla [1].

Ahora que está configurada la calculadora, se introduce tan 55° como se muestra a continuación:

[tan] [5] [5] [=] $\Rightarrow$

Pantalla de la calculadora

```
tan 55
        1.428148007
```

Aproximando a un decimal se tiene que $a = 3\tan 55° \approx 3(1.4) = 4.2$. Para calcular el valor de b se considera el hecho que

$$\cos 55° = \frac{3}{b} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{3}{\cos 55°}$$

[3] [÷] [cos] [5] [5] [=] $\Rightarrow$

Pantalla de la calculadora

```
3÷cos 55
        5.230340387
```

Por lo tanto, $a \approx 4.2$ y $b \approx 5.2$.

Dependiendo del modelo de la calculadora, la tecla MODE puede aparecer de dos formas.
MODE CLR   MODE SETUP
Si tu calculadora tiene la segunda opción, debes presionar las teclas
SHIFT   MODE SETUP
y luego presionar la tecla [3].

En la calculadora, la función seno aparece como [sin].

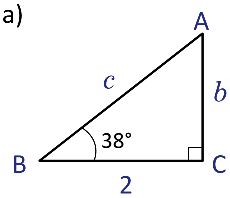
Conclusión

Dadas la medida de un lado y de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo pueden encontrarse las medidas de los lados restantes utilizando las razones trigonométricas del ángulo agudo.

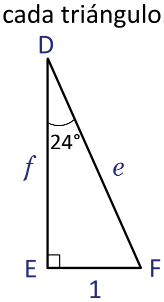
Problemas

Encuentra la medida de los lados faltantes en cada triángulo.

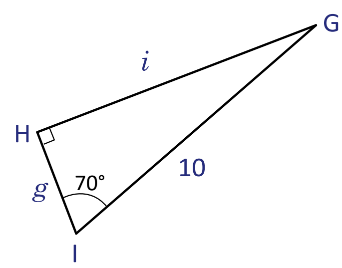
a)



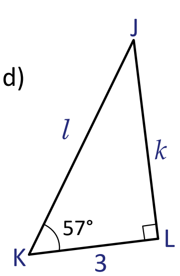
b)



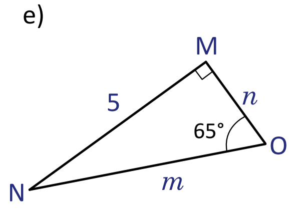
c)



d)



e)



Indicador de logro:

1.5 Encuentra la medida de los lados de un triángulo rectángulo conocidas la medida de un lado y un ángulo agudo utilizando razones trigonométricas.

Secuencia:

Luego de haber establecido las razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°, se calculan las medidas de los lados de un triángulo rectángulo utilizando razones trigonométricas, cuando se conocen la medida de uno de sus lados y un ángulo agudo. Se introduce además, el uso de la calculadora científica para el cálculo de razones trigonométricas distintas a las de los ángulos de 30° 45° y 60°.

Posibles dificultades:

El uso de la calculadora científica aporta dificultad al desarrollo de la clase, por lo tanto, es importante guiar al estudiante en el uso correcto de esta y recordarle en repetidas ocasiones que debe estar configurada en grados y no en radianes o gradianes. Véase la página 160 del Libro de texto.

Solución de problemas:

a) $\tan 38° = \frac{b}{2} \Rightarrow b = 2 \tan 38° \approx 1.6.$

$\cos 38° = \frac{2}{c} \Rightarrow c = \frac{2}{\cos 38°} \approx 2.5.$

Por lo tanto, $b \approx 1.6$ y $c \approx 2.5$.

b) $\text{sen } 24° = \frac{1}{e} \Rightarrow e = \frac{1}{\text{sen } 24°} \approx 2.5.$

$\tan 24° = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \frac{1}{\tan 24°} \approx 2.2.$

Por lo tanto, $e \approx 2.5$ y $f \approx 2.2$.

c) $\cos 70° = \frac{g}{10} \Rightarrow g = 10 \cos 70° \approx 3.4.$

$\text{sen } 70° = \frac{i}{10} \Rightarrow i = 10 \text{ sen } 70° \approx 9.4.$

Por lo tanto, $g \approx 3.4$ y $i \approx 9.4$.

d) $\tan 57° = \frac{k}{3} \Rightarrow k = 3 \tan 57° \approx 4.6.$

$\cos 57° = \frac{3}{l} \Rightarrow l = \frac{3}{\cos 57°} \approx 5.5.$

Por lo tanto, $k \approx 4.6$ y $l \approx 5.5$.

e) $\text{sen } 65° = \frac{5}{m} \Rightarrow m = \frac{5}{\text{sen } 65°} \approx 5.5.$

$\tan 65° = \frac{5}{n} \Rightarrow n = \frac{5}{\tan 65°} \approx 2.3.$

Por lo tanto, $m \approx 5.5$ y $n \approx 2.3$.

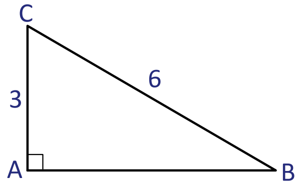
No es obligatorio utilizar la tangente y el coseno para calcular las medidas de los lados del triángulo; es decir, también puede utilizarse la razón seno. Se sugiere que, siempre que sea posible, se use una razón trigonométrica donde el valor que se desea encontrar quede como numerador, ya que se facilita el despeje de la incógnita.

1.6 Triángulo rectángulo conocidos dos lados

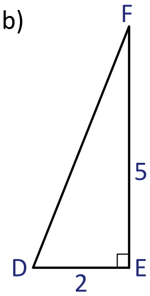
Problema inicial

En los siguientes triángulos, encuentra las medidas de los ángulos agudos.

a)



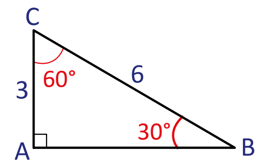
b)



En un triángulo ABC, se suele denotar a la medida del ángulo C por *C* (en cursiva).

Solución

a) Obsérvese que $\cos C = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. El ángulo que cumple esta condición es el ángulo de 60°, por lo tanto $C = 60°$ y $B = 30°$.

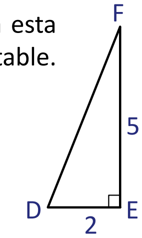


b) Del triángulo se tiene que $\tan D = \frac{5}{2}$. Para encontrar el valor del ángulo D que cumpla esta condición se utilizará una calculadora ya que la razón no corresponde a algún triángulo notable.

SHIFT tan⁻¹ | tan | (| 5 | ÷ | 2 |) | = $\Longrightarrow$

Pantalla de la calculadora

tan⁻¹(5÷2)
68.19859051



Aproximando a las décimas, se tiene que $D \approx 68.2°$. Luego, $F \approx 90° - 68.2° = 21.8°$.

La función de la calculadora $\tan^{-1}$ devuelve un ángulo que cumpla la condición que se le indique. Por ejemplo, $\tan^{-1} \frac{5}{2}$ devuelve el ángulo θ que cumple que $\tan \theta = \frac{5}{2}$, con θ entre $-90°$ y $90°$.

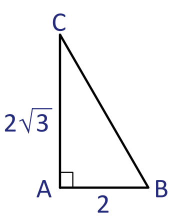
Conclusión

Dadas las medidas de dos lados de un triángulo rectángulo se pueden encontrar los ángulos agudos utilizando las razones trigonométricas.

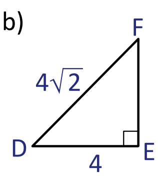
Problemas

Encuentra la medida de los ángulos agudos de los triángulos rectángulos.

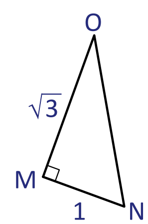
a)



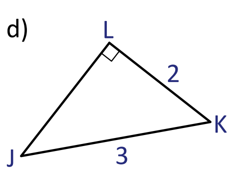
b)



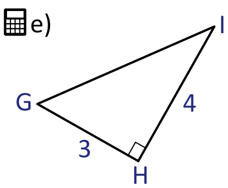
c)



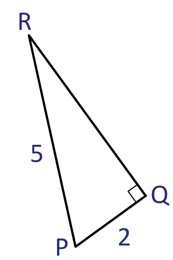
d)



e)



f)



Indicador de logro:

1.6 Encuentra la medida de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo conocidas las medidas de dos lados, utilizando las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Secuencia:

En esta clase se calculan ángulos agudos de triángulos rectángulos cuando se conocen las medidas de dos lados, utilizando las razones trigonométricas. Se utiliza la calculadora nuevamente, en esta ocasión para calcular ángulos.
No se profundiza sobre las razones trigonométricas inversas, ya que esto requiere del conocimiento de funciones biyectivas e inversas, tema que se estudiará en segundo año de bachillerato.

Propósito:

En el Problema inicial se calculan ángulos de triángulos rectángulos. En el literal a se obtiene una razón trigonométrica conocida, es decir, pueden determinarse los ángulos sin calculadora. En el literal b, en cambio, la razón no es conocida, por lo que se calculan los ángulos utilizando las funciones trigonométricas inversas de la calculadora.

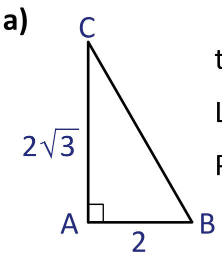
Posibles dificultades:

El uso de la calculadora para determinar ángulos al conocer el valor de la razón trigonométrica, ya que la calculadora se encuentre configurada en grados. El estudiante debe practicar para que comprenda que las teclas $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ y $\tan^{-1}$ devuelven medidas de ángulos.

Hay que utilizar la calculadora únicamente cuando aparece el ícono de esta.

Solución de problemas:

a)

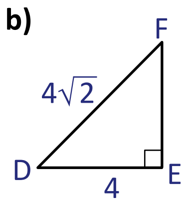


$\tan B = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow B = 60°$.

Luego, $C = 30°$.

Por lo tanto, $B = 60°$ y $C = 30°$.

b)

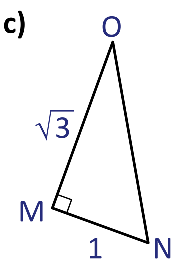


$\cos D = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow D = 45°$.

Por lo tanto, $D = F = 45°$.

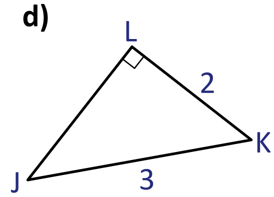
c)



$\tan N = \sqrt{3} \Rightarrow N = 60°$.

Por lo tanto, $N = 60°$ y $O = 30°$.

d)

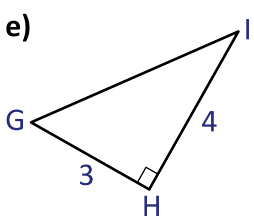


$\cos K = \frac{2}{3} \Rightarrow K \approx 48.2°$.

Luego, $J \approx 90° - 48.2° = 41.8°$.

Por lo tanto, $J \approx 41.8°$ y $K \approx 48.2°$.

e)

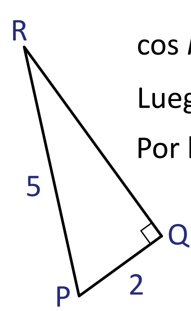


$\tan G = \frac{4}{3} \Rightarrow G = 53.1°$.

Luego, $I \approx 90° - 53.1° = 36.9°$.

Por lo tanto, $G \approx 53.1°$ e $I \approx 36.9°$.

f)



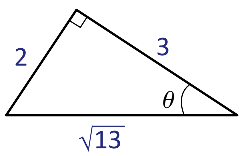
$\cos P = \frac{2}{5} \Rightarrow P \approx 66.4°$.

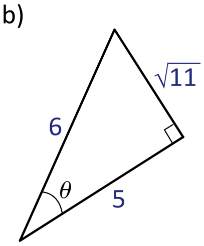
Luego, $R \approx 90° - 66.4° = 23.6°$.

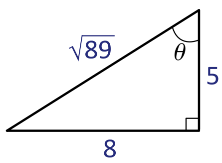
Por lo tanto, $P \approx 66.4°$ y $R \approx 23.6°$.

1.7 Practica lo aprendido

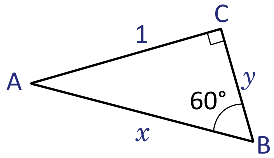
1. Determina las razones trigonométricas sen θ, cos θ y tan θ para cada uno de los siguientes triángulos.

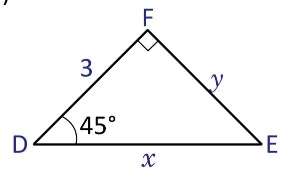
a)


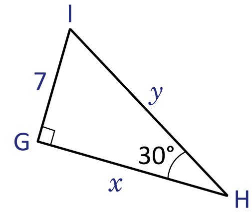
b)


c)


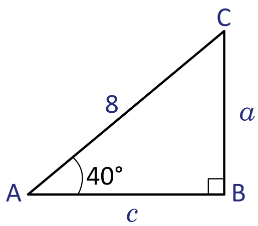
2. Determina el valor de x y y en cada triángulo.

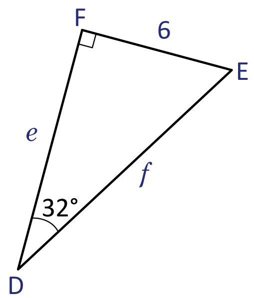
a)


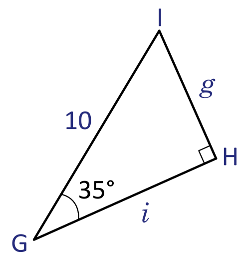
b)


c)


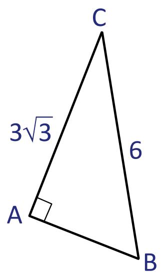
3. Calcula la medida de los lados faltantes en cada triángulo. Aproxima tu respuesta hasta las décimas.

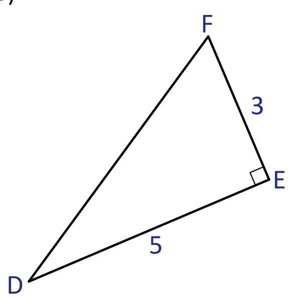
a)


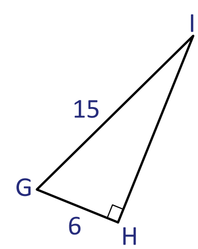
b)


c)


4. Calcula la medida de los ángulos agudos de los triángulos rectángulos hasta las décimas.

a)


b)


c)


Indicador de logro:

1.7 Resuelve problemas correspondientes a razones trigonométricas de ángulos agudos de triángulos rectángulos.

Solución de problemas:

1a) Como *hip* = $\sqrt{13}$, *op* = 2 y *ady* = 3, entonces,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{op}{hip} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13},\ \cos\theta = \frac{ady}{hip} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13},\ \tan\theta = \frac{op}{ady} = \frac{2}{3}.$$

1b) Como *hip* = 6, *op* = $\sqrt{11}$ y *ady* = 5, entonces,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{11}}{6},\ \cos\theta = \frac{5}{6},\ \tan\theta = \frac{\sqrt{11}}{5}.$$

1c) Como *hip* = $\sqrt{89}$, *op* = 8 y *ady* = 5, entonces,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{8}{\sqrt{89}} = \frac{8\sqrt{89}}{89},\ \cos\theta = \frac{5}{\sqrt{89}} = \frac{5\sqrt{89}}{89},\ \tan\theta = \frac{8}{5}.$$

2a) Utilizando semejanza con el triángulo de 30° y 60°:

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\frac{y}{1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2b) Como ΔDEF es isósceles, $y = 3$. Por otra parte, utilizando semejanza con el triángulo de 45°:

$$\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{3}{1} \Rightarrow x = 3\sqrt{2}.$$

Este problema también puede resolverse utilizando solo semejanza, es decir, sin utilizar el hecho de que el triángulo es isósceles, o aplicando el teorema de Pitágoras.

2c) Utilizando semejanza con el triángulo de 30° y 60°:

$$\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{7}{1} \Rightarrow x = 7\sqrt{3},\quad \frac{y}{2} = \frac{7}{1} \Rightarrow y = 14.$$

3a) $\cos 40° = \frac{c}{8} \Rightarrow c = 8\cos 40° \approx 6.1,$

$\operatorname{sen} 40° = \frac{a}{8} \Rightarrow a = 8 \operatorname{sen} 40° \approx 5.1.$

Por lo tanto, $c \approx 6.1$ y $a \approx 5.1$.

3b) $\tan 32° = \frac{6}{e} \Rightarrow e = \frac{6}{\tan 32°} \approx 9.6,$

$\operatorname{sen} 32° = \frac{6}{f} \Rightarrow f = \frac{6}{\operatorname{sen} 32°} \approx 11.3.$

Por lo tanto, $e \approx 9.6$ y $f \approx 11.3$.

3c) $\cos 35° = \frac{i}{10} \Rightarrow i = 10\cos 35° \approx 8.2$, $\operatorname{sen} 35° = \frac{g}{10} \Rightarrow g = 10 \operatorname{sen} 35° \approx 5.7.$

Por lo tanto, $i \approx 8.2$ y $g \approx 5.7$.

4a) Se tiene que $\cos C = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow C = 30°.$

Por lo tanto, $B = 60°$ y $C = 30°$.

4b) Como $\tan D = \frac{3}{5} \Rightarrow D = 31°.$

Luego, $F \approx 90° - 31° = 59°.$

Por lo tanto, $D \approx 31°$ e $F \approx 59°$.

4c) Como $\cos G = \frac{6}{15} \Rightarrow G = 66.4°$. Luego, $I \approx 90° - 66.4° = 23.6°$.

Por lo tanto, $G \approx 66.4°$ e $I \approx 23.6°$.

1.8 Aplicación de las razones trigonométricas

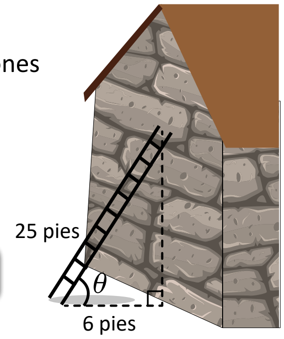
Problema inicial

Un carpintero compra una escalera de 25 pies y en las instrucciones de uso dice que la posición más segura para ubicarla sobre la pared es cuando el pie de la escalera se encuentra a 6 pies de la pared. ¿Qué ángulo forma la escalera con el suelo?

Solución

Se puede formar un triángulo rectángulo, como muestra la figura. Aplicando razones trigonométricas se tiene que

$$\cos\theta = \frac{6}{25}.$$



Utilizando la calculadora para calcular el ángulo se tiene

SHIFT $\cos^{-1}$ cos (6 ÷ 2 5) = $\Longrightarrow$

Pantalla de la calculadora

cos⁻¹(6÷25)
76.11345964

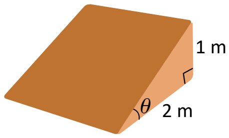
Entonces, el ángulo que forma la escalera con el suelo es aproximadamente 76°.

Conclusión

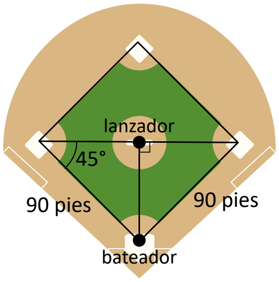
Las razones trigonométricas pueden utilizarse para calcular ángulos de inclinación que forman algunos objetos con superficies planas, para calcular distancias entre dos objetos o alturas de edificios o árboles.

Problemas

1. Un patinador hará una pirueta sobre una rampa cuyo largo es de 2 metros. Si la altura de la rampa es de 1 metro, ¿cuál es el ángulo de inclinación de la rampa?

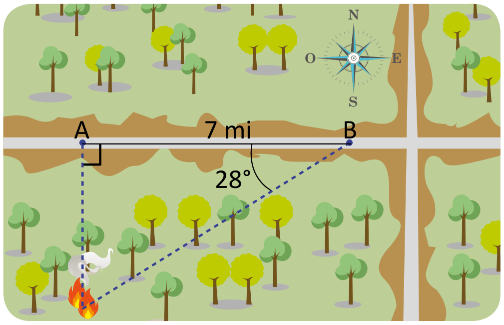


2. Las tres bases por las que debe pasar un beisbolista están sobre un cuadrado de 90 pies, como muestra la figura. ¿A qué distancia se encuentra el lanzador del bateador?



3. Una escalera de 20 pies yace sobre una pared y alcanza una altura de 16 pies, ¿cuál es el ángulo de inclinación de la escalera con respecto al suelo?

4. Un guardabosques que se encuentra en el punto A observa un incendio directamente al sur. Un segundo guardabosques en el punto B, a 7 millas del primer guardabosques observa el mismo incendio a 28° al suroeste, ¿qué tan lejos está el incendio del primer guardabosques?



Indicador de logro:

1.8 Utiliza triángulos rectángulos y razones trigonométricas para resolver problemas del entorno.

Secuencia:

Luego de haber resuelto problemas que requieran de la aplicación de razones trigonométricas para calcular ángulos o medidas de lados de triángulos rectángulos, se abordan problemas del entorno que pueden resolverse utilizando triángulos rectángulos y razones trigonométicas.

Propósito:

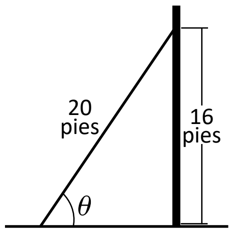
Con el Problema inicial se introduce el uso de las razones trigonométricas para resolver problemas del entorno. La elaboración de gráficos sencillos como ayuda visual para la resolución de los problemas es importante en este punto.

Solución de problemas:

1. De los datos que muestra la figura se tiene que tan $\theta = \frac{1}{2}$. Así, $\theta \approx 26.6°$. Por lo tanto, el ángulo de inclinación de la rampa es de 26.6° aproximadamente.

2. Se define d como la distancia entre el lanzador y el bateador. Puede observarse que sen 45° = $\frac{d}{90}$, entonces d = 90 sen 45° = $90\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45\sqrt{2}$. Es decir, $d \approx 63.6$.
Por lo tanto, la distancia a la que se encuentra el lanzador del bateador es de 63.6 pies aproximadamente.

3. Realizando un gráfico y ubicando los datos:

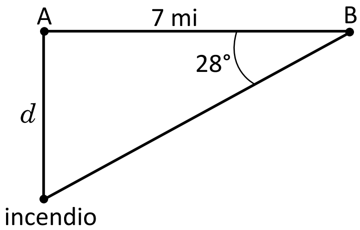


Con los datos que se conocen puede establecerse que

$$\text{sen}\ \theta = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}.$$

Es decir, $\theta \approx 53.1°$. Por lo tanto, el ángulo de inclinación de la escalera con respecto al suelo es de 53.1° aproximadamente.

4. Los datos que se tienen se muestran en el siguiente gráfico:



Con los datos que se conocen puede establecerse que

$$\tan 28° = \frac{d}{7} \Rightarrow d = 7 \tan 28° \approx 3.7.$$

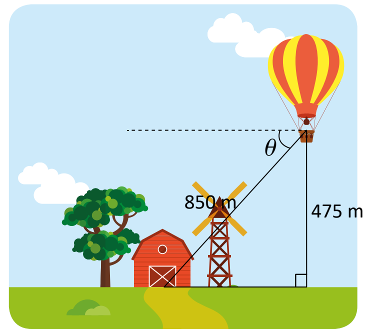
Por lo tanto, el primer guardabosques se encuentra a 3.7 millas aproximadamente del incendio.

Lección 1

1.9 Ángulo de depresión

Problema inicial

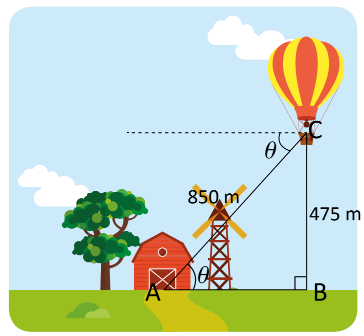
Un fotógrafo profesional desea tomarle una foto a una granja que observa desde un globo aerostático que está a una altura aproximada de 475 metros del suelo y a una distancia de 850 metros de la granja, observa la figura. ¿Cuánto mide el ángulo θ si la línea punteada es horizontal?



Solución

Se etiquetan con A, B y C los vértices del triángulo formado, como muestra la figura. Entonces, $\sphericalangle CAB = \theta$ ya que la línea punteada es paralela a $\overline{AB}$. Utilizando razones trigonométricas, se tiene que

$$\text{sen}\ \theta = \frac{475}{850}.$$



Utilizando la calculadora,

SHIFT sen^{-1}

sen (4 7 5 ÷ 8 5 0) =

↓

Pantalla de la calculadora

```
sen⁻¹(475÷850)
         33.97447595
```

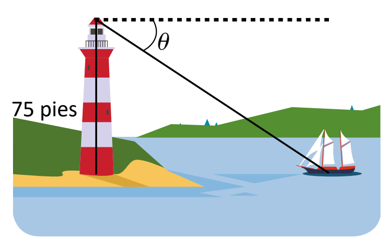
Por lo tanto, $\theta \approx 34°$.

Definición

Si un observador se encuentra por encima de un objeto, al ángulo que se forma entre una línea horizontal imaginaria y la línea de visión hacia el objeto se le llama **ángulo de depresión**. Por ejemplo, el ángulo θ que aparece en el dibujo del Problema inicial es un ángulo de depresión.

Problemas

1. Un faro tiene 75 pies de altura, y desde la punta de este se observa un bote de modo que el coseno del ángulo de depresión es $\frac{4}{5}$, ¿qué tan lejos está el bote del faro?



2. Desde la parte alta de un viejo edificio, un niño observa a un perro que se encuentra en la calle, de modo que se forma un ángulo de depresión de 37°. Si la altura del edificio es de 9 m, ¿a qué distancia de la base del edificio se encuentra el perro?

3. Un edificio tiene 100 metros de altura, y desde su punto más alto hay una persona observando unas ardillas comiendo en el suelo. La tangente del ángulo de depresión del observador es $\frac{5}{4}$, ¿a qué distancia están las ardillas de la base del edificio?

4. Una persona que mide 1.5 metros se encuentra en un muelle que sobresale 3.5 metros por encima del mar. La persona observa un bote con un ángulo de depresión de 10°, ¿a qué distancia está el bote del muelle?

Indicador de logro:

1.9 Utiliza las razones trigonométricas para calcular ángulos de depresión en problemas del entorno.

Secuencia:

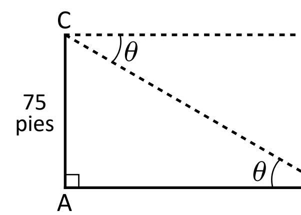
En esta clase se continúa con problemas de aplicación de la trigonometría; en esta ocasión se abordan problemas sobre ángulos de depresión. La elaboración de gráficos sencillos para la resolución de los problemas continúa siendo importante.

Propósito:

El Problema inicial pretende introducir la definición de ángulo de depresión y seguir consolidando el uso de las razones trigonométricas para resolver problemas del entorno.

Solución de problemas:

1. Elaborando un gráfico y ubicando los datos que se conocen, se tiene el dibujo de la derecha.
Por ángulos alternos internos entre paralelas, el ángulo ABC es igual a θ. Entonces,



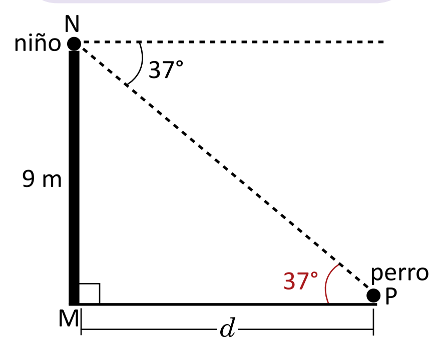
$$\cos\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5} \Rightarrow \theta \approx 36.9°.$$

Luego, $\tan\theta = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \tan 36.9° \approx \frac{75}{AB} \Rightarrow AB \approx \frac{75}{\tan 36.9°} \approx 99.9.$

Por lo tanto, el bote está a 99.9 millas del faro aproximadamente.

La forma de elaborar los gráficos es variada. El objetivo de hacer el gráfico es dar apoyo visual en la resolución de los problemas.

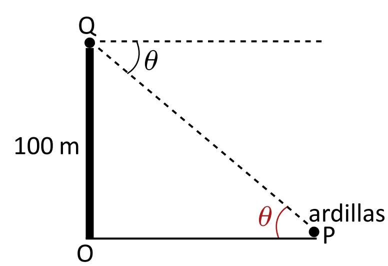
2. Elaborando un gráfico y ubicando los datos, se obtiene un gráfico como el de la derecha.
Por ángulos alternos internos entre paralelas, el ángulo MPN es igual a 37°. Entonces,



$$\tan 37° = \frac{9}{d} \Rightarrow d = \frac{9}{\tan 37°} \approx 11.9.$$

Por lo tanto, el perro se encuentra aproximadamente a 11.9 metros de la base del edificio.

3. Al elaborar un gráfico, como muestra la figura de la derecha, se deduce que el ángulo OPQ es igual a θ, por ángulos alternos internos entre paralelas. Luego,



$$\tan\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{100}{OP} = \frac{5}{4} \Rightarrow OP = \frac{4(100)}{5} = 80.$$

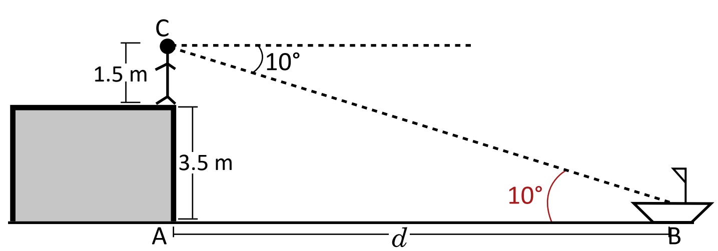
Por lo tanto, las ardillas están a 80 metros de la base del edificio.

4. Se elabora un gráfico y se ubican los datos, como muestra la figura de la derecha. El ángulo ABC es igual a 10°, por ángulos alternos internos.

Luego,

$$\tan 10° = \frac{3.5 + 1.5}{d} = \frac{5}{d} \Rightarrow d = \frac{5}{\tan 10°} \approx 28.4.$$

Por lo tanto, el bote está a 28.4 metros del muelle aproximadamente.



1.10 Ángulo de elevación

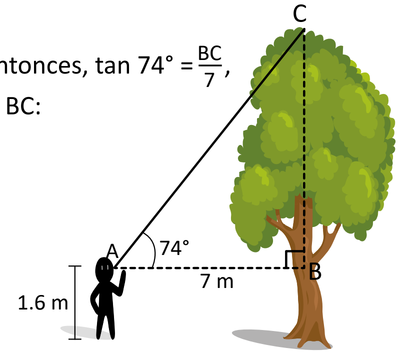
Problema inicial

Un guardabosques quiere calcular la altura de un árbol y para ello se coloca a 7 metros de la base del árbol y observa la punta de este con un ángulo de 74°. Si la altura del guardabosques es de 1.6 metros, ¿cuál es la altura del árbol?

Solución

Se forma un triángulo rectángulo auxiliar ABC como muestra la figura. Entonces, $\tan 74° = \frac{BC}{7}$, por lo que $BC = 7\tan 74°$. Se puede utilizar la calculadora para encontrar BC:

7 × tan 7 4 = ⟹ Pantalla de la calculadora: 7×tan 74 / 24.41190111



Al valor de BC hay que sumarle la altura del guardabosques, por lo que la altura del árbol es aproximadamente 24.4 + 1.6 = 26 metros.

Definición

Si un observador se encuentra por debajo de un objeto, al ángulo que se forma entre una línea horizontal imaginaria y la línea de visión hacia el objeto se le llama **ángulo de elevación**. Por ejemplo, del gráfico del Problema inicial, el ángulo de elevación es ∢CAB.

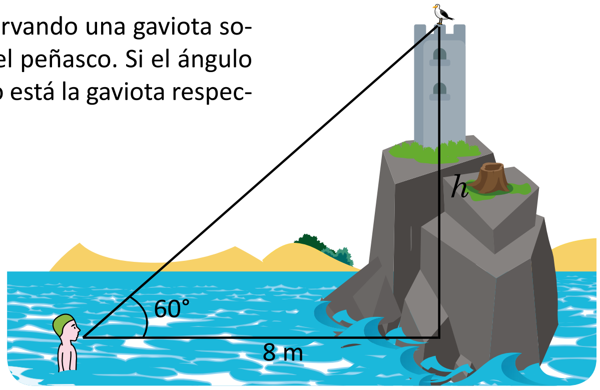
Problemas

1. Una guardabosques debe entrenar a un nuevo equipo de madereros para calcular la altura de los árboles. Como ejemplo, ella camina a 12 metros de la base de un árbol y estima que el ángulo de elevación desde el suelo a la punta del árbol es de 70°. Calcula la altura del árbol.

2. Para calcular la altura a la que se encuentra una nube del suelo durante la noche, se dirige un rayo vertical de luz hacia un punto de ella. En algún punto sobre el suelo, a 135 pies de donde se emite el rayo, se determina que el ángulo de elevación hacia el tope del rayo es de 65°. ¿Cuál es la altura a la que se encuentra la nube?

3. Un niño está a 2 metros de un árbol y observa a un gato que ha quedado atrapado en la punta del árbol. Si la altura del niño es de 1 metro y el ángulo de elevación es de 60°, ¿a qué altura está el gato del suelo?

4. Un nadador está a 8 metros de un peñasco observando una gaviota sobre la punta de un viejo edificio que está sobre el peñasco. Si el ángulo de elevación del nadador es de 60°, ¿qué tan alto está la gaviota respecto al nivel del mar?



Unidad 5

Indicador de logro:

1.10 Utiliza las razones trigonométricas para calcular ángulos de elevación en problemas del entorno.

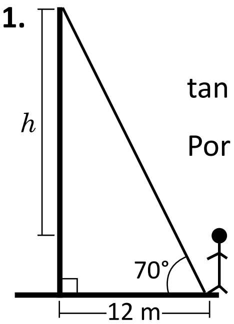
Secuencia:

Luego de haber introducido el ángulo de depresión, se introduce el ángulo de elevación y se resuelven problemas del entorno que lo involucren.

Solución de problemas:

Para los problemas que no tienen dibujo en su enunciado, se elabora un gráfico sencillo para facilitar su resolución.

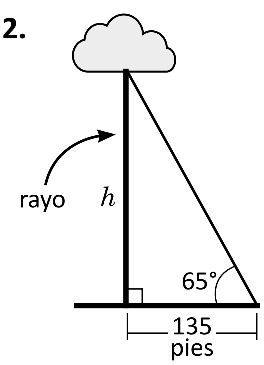
1.



$\tan 70° = \frac{h}{12} \Rightarrow h = 12 \tan 70° \approx 33.$

Por lo tanto, la altura del árbol es de aproximadamente 33 metros.

2.

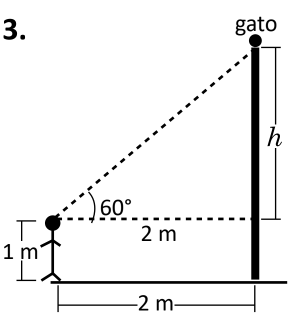


$\tan 65° = \frac{h}{135} \Rightarrow h = 135 \tan 65° \approx 289.5.$

Por lo tanto, la nube está a 289.5 pies del suelo aproximadamente.

En los problemas donde intervengan personas y su altura, se desprecia la distancia que hay desde los ojos hasta el límite de la cabeza.

3.



$\tan 60° = \frac{h}{2} \Rightarrow h = 2 \tan 60° = 2\sqrt{3} \approx 3.5.$

Luego, la altura a la que se encuentra el gato es de 3.5 + 1 = 4.5 metros aproximadamente.

4. De los datos proporcionados y del dibujo mostrado en el problema se tiene que

$$\tan 60° = \frac{h}{8} \Rightarrow h = 8 \tan 60° = 8\sqrt{3} \approx 13.9.$$

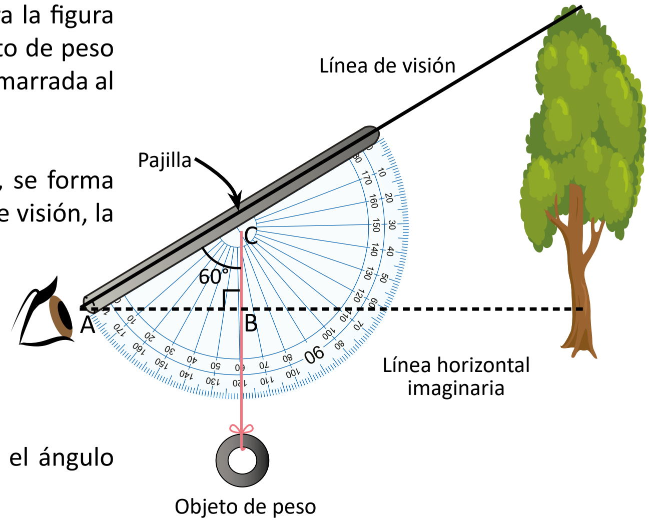
Por lo tanto, la gaviota está aproximadamente a 13.9 metros del nivel del mar.

1.11 Actividad. Construcción de un clinómetro

Un clinómetro es un aparato que se utiliza para medir inclinaciones en superficies, aunque también se utiliza para calcular alturas de edificios, árboles, postes, etc. Los clinómetros profesionales son sencillos de utilizar, y esta actividad muestra cómo construir uno.

Funcionamiento de un clinómetro

El observador coloca el clinómetro como muestra la figura y a través de un tubo observa el objeto. Un objeto de peso está amarrado a una cuerda y esta a su vez está amarrada al transportador.



Al colocar el clinómetro como muestra la figura, se forma un triángulo rectángulo (el ΔABC) entre la línea de visión, la línea horizontal imaginaria y el trozo de cuerda tensado. El ángulo que marca la cuerda en el transportador es el ángulo BCA. Entonces, en el ΔABC se tiene que:

$$\sphericalangle CAB = 90° - \sphericalangle BCA = 90° - 60° = 30°.$$

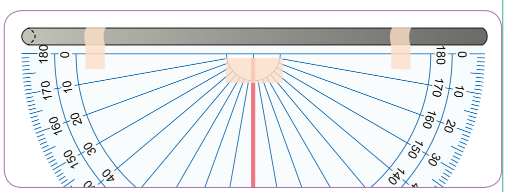
Se puede observar que con este procedimiento, el ángulo calculado corresponde al ángulo de elevación.

Materiales

- Un transportador
- Una pajilla
- Cinta adhesiva
- Lana o un trozo de cuerda
- Tijeras
- Un objeto pesado, puede ser una tuerca de 20 mm

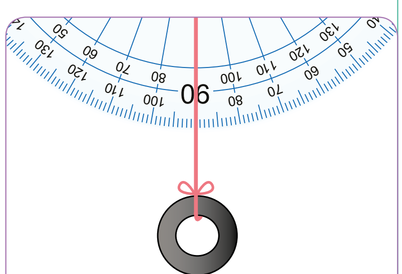
Actividad

1. Algunos transportadores tienen un hueco en su centro, por lo que puede amarrarse un trozo de cuerda en este hueco. Si no tiene el hueco, puede pegarse con un trozo de cinta adhesiva, donde está el centro del transportador. La longitud del trozo de cuerda debe sobrepasar al radio del transportador.



2. Cortar un trozo de pajilla, con longitud igual al diámetro del transportador. Pegar el trozo de pajilla con cinta adhesiva, con cuidado de no apretarla ya que hay que ver a través de ella.

3. En el extremo de la cuerda que quedó libre, amarrar la tuerca.



El clinómetro está listo para utilizarse.

Problemas

1. Calcula la altura de un árbol que se encuentre a tu alrededor utilizando el clinómetro para determinar el ángulo de elevación.
2. Con el clinómetro construido en la Actividad 1.11, ¿puedes calcular ángulos de depresión? Si la respuesta es afirmativa, explica cómo.

Indicador de logro:

1.11 Construye un clinómetro casero para hacer mediciones de ángulos de elevación.

Secuencia:

Luego de haber calculado ángulos de depresión y elevación, se elabora un clinómetro como herramienta para medir ángulos de elevación en el entorno.

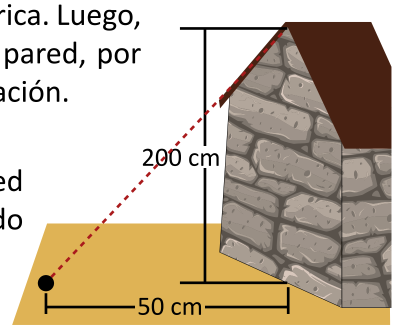
Propósito:

Construir una herramienta que sirva para medir ángulos de elevación, además de deducir el funcionamiento de dicha herramienta utilizando ángulos.

Solución de problemas:

1. Pueden medirse otros ángulos de elevación, como por ejemplo, el ángulo de elevación al observar el tope de un aro de baloncesto.

Como la idea es comprobar que el clinómetro funciona para el cálculo de la altura de objetos, puede medirse previamente una pared, con una cinta métrica. Luego, se ubica un punto en el suelo desde donde se medirá el tope de la pared, por ejemplo, a 50 centímetros, y a partir de ahí se mide el ángulo de elevación.

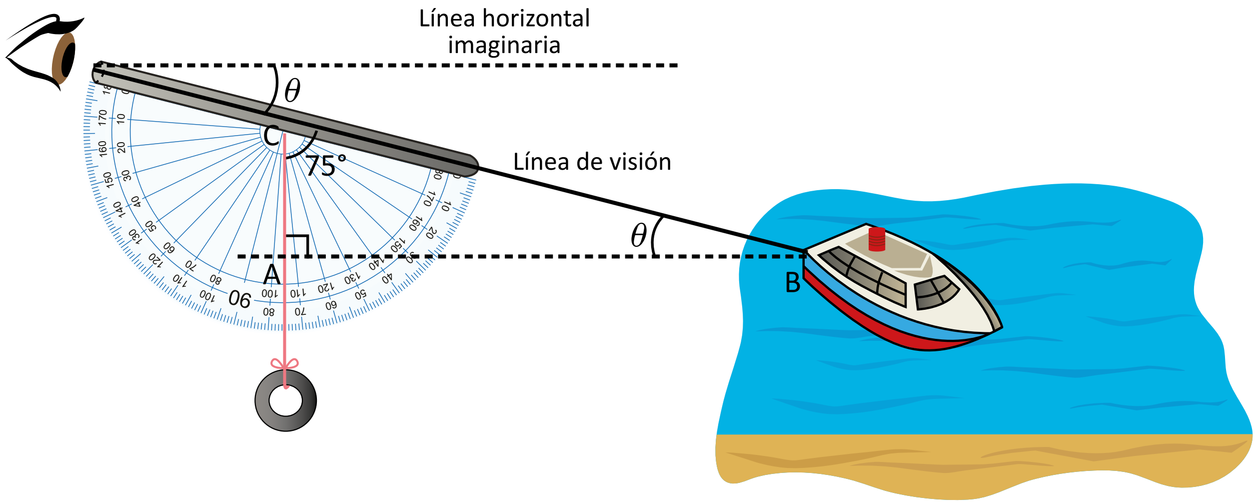


Al medir el ángulo de elevación, puede calcularse la altura de la pared utilizando la tangente del ángulo. Luego, se compara el valor obtenido con la altura original de la pared.

Este es un ejemplo, sin embargo, la pared puede tener menos altura y el punto en el suelo puede estar más lejos o más cerca.

El ángulo de elevación dependerá de la altura de la persona que haga la medición.

2. Se puede observar un objeto que esté por debajo de la línea horizontal imaginaria y al realizar esta acción, se obtiene un esquema como el siguiente:



Haciendo un análisis parecido al que se hizo con la medición de los ángulos de elevación, se tiene que el ángulo que marca la cuerda es el ángulo BCA del triángulo ABC. Además, el ángulo ABC del triángulo es igual al ángulo de depresión, θ. Entonces, del triángulo rectángulo ABC se tiene que $\theta = 90° - 75° = 15°$.

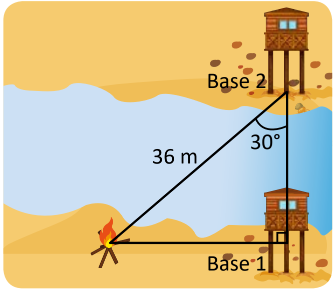
Por lo tanto, con el clinómetro se pueden medir ángulos de depresión, y es igual al complemento del ángulo que marca la cuerda de este.

1.12 Aplicaciones de las razones trigonométricas

1. Un pescador está a 12 km de un barco que se encuentra al este de él y observa un faro a 60° desde la línea de visión con el barco. ¿A qué distancia está el barco del faro si se encuentra en dirección sur del barco?

2. Un globo aerostático es amarrado a una roca con un lazo de 20 metros. El seno del ángulo que forma el lazo con el suelo es $\frac{3}{4}$, ¿qué tan alto está el globo?

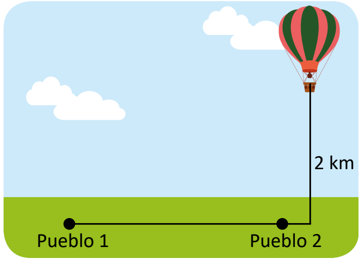
3. En el dibujo, ¿cuál es la distancia entre la Base 1 y la fogata?



4. Un hombre observa desde el tope de un faro una embarcación pesquera y estima que el ángulo de depresión es de 25°. Si la altura del faro es de 40 metros, ¿a qué distancia está la embarcación del faro?

5. Un hombre se encuentra en un edificio observando otro edificio que está a 100 m de distancia. El ángulo de elevación al tope del edificio es de 30° y el ángulo de depresión a la base es de 15°, ¿cuál es la altura del edificio que observa? Desprecia la altura del hombre.

6. Desde un globo aerostático a 2 km de altura, se observan dos pueblos. El ángulo de depresión a ambos pueblos es de 80° y 20°. ¿Qué distancia hay entre los pueblos?



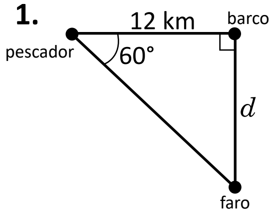
Unidad 5

Indicador de logro:

1.12 Resuelve problemas correspondientes a las aplicaciones de las razones trigonométricas al entorno.

Solución de problemas:

1.

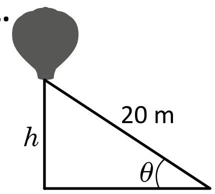


$\tan 60° = \frac{d}{12}$

$\Rightarrow d = 12 \tan 60° = 12\sqrt{3} \approx 20.8.$

Por lo tanto, el barco está a 20.8 kilómetros del faro aproximadamente.

2.



$\text{sen}\,\theta = \frac{3}{4} = \frac{h}{20} \Rightarrow h = \frac{3(20)}{4} = 15.$

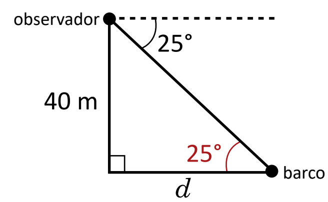
Por lo tanto, el globo está a 15 metros del suelo.

3. Sea d la distancia entre la Base 1 y la fogata. Entonces $\text{sen}\,30° = \frac{d}{36} \Rightarrow d = 36\,\text{sen}\,30° = 36\left(\frac{1}{2}\right) = 18.$

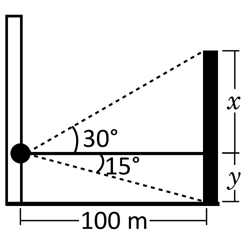
Por lo tanto, la Base 1 está a 18 metros de la fogata.

4. $\tan 25° = \frac{40}{d} \Rightarrow d = \frac{40}{\tan 25°} \approx 85.8.$

Por lo tanto, la embarcación está aproximadamente a 85.8 metros del faro.



5.



$\tan 30° = \frac{x}{100}$

$\Rightarrow x = 100 \tan 30°$

$\tan 15° = \frac{y}{100}$

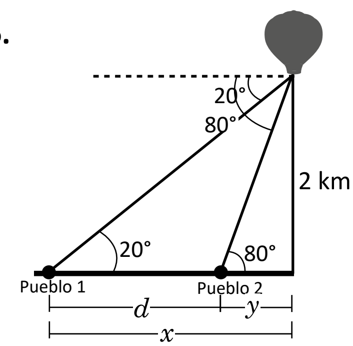
$\Rightarrow y = 100 \tan 15°$

La altura del edificio que observa el hombre es

$$\begin{aligned} x + y &= 100 \tan 30° + 100 \tan 15° \\ &= 100(\tan 30° + \tan 15°) \\ &\approx 84.5. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la altura del edificio que el hombre observa es de 84.5 metros.

6.



$\tan 20° = \frac{2}{x}$

$\Rightarrow x = \frac{2}{\tan 20°}$

$\tan 80° = \frac{2}{y}$

$\Rightarrow y = \frac{2}{\tan 80°}$

Luego, $d = x - y = \frac{2}{\tan 20°} - \frac{2}{\tan 80°} \approx 5.1.$

Por lo tanto, los pueblos están aproximadamente a 5.1 kilómetros de distancia.

Se recomienda hacer el cálculo hasta el final, para tener una mejor aproximación.

Si hay confusión en la pregunta del problema 6, hay que aclarar que se refiere a la distancia que hay entre los pueblos.

2.1 Distancia entre dos puntos

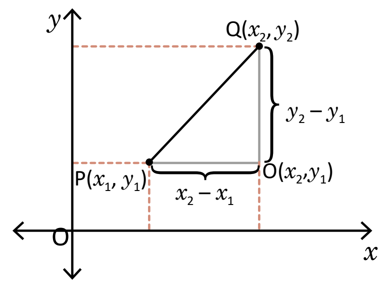
Problema inicial

Dados dos puntos P(x_1, y_1) y Q(x_2, y_2) en el plano cartesiano, ¿cuál es la distancia entre los puntos?

Se define la distancia entre dos puntos como la longitud del segmento de recta que une ambos puntos.

Solución

Supóngase que $x_1 \neq x_2$ y $y_1 \neq y_2$. Si se trazan rectas perpendiculares a los ejes que pasen por P y Q, como muestra la figura, el punto O tiene coordenadas (x_2, y_1). De aquí se deduce que OP = $x_2 - x_1$ y QO = $y_2 - y_1$. Luego, por el teorema de Pitágoras en el triángulo POQ, se tiene que



$$(\mathrm{PQ})^2 = (\mathrm{OP})^2 + (\mathrm{QO})^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Pero PQ > 0 por ser una distancia, entonces

$$\mathrm{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

Si $x_1 = x_2$ y $y_1 \neq y_2$, entonces la distancia de P a Q sería

$$\Rightarrow \quad \mathrm{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|.$$

De manera análoga, si $x_1 \neq x_2$ y $y_1 = y_2$, la distancia de P a Q sería

$$\Rightarrow \quad \mathrm{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|.$$

Para todo número real a se cumple que $\sqrt{a^2} = |a|$.

Definición

La distancia de dos puntos P y Q en el plano con coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) respectivamente, denotada por d(P, Q) está dada por

$$d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \mathrm{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ejemplo

Calcula la distancia entre los puntos P(–1, 3) y Q(2, 1).

La distancia es,

$$\begin{aligned} d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) &= \sqrt{(2-(-1))^2 + (1-3)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{9+4} \\ &= \sqrt{13}. \end{aligned}$$

Problemas

1. Calcula la distancia entre los puntos P y Q.

   a) P(–2, –1), Q(2, 2) b) P(7, 2), Q(4, –2) c) P(2, –2), Q(–8, 4)

   d) P(1, 1), Q(9, 2) e) P(0, 1), Q(3, 5) f) P(–3, 5), Q(7, –9)

   g) P(–1, 4), Q(2, 4) h) P(3, 2), Q(3, 2) i) P(–1, 0), Q(–1, 0)

2. Demostrar que si P(x_1, y_1) y Q(x_2, y_2), entonces d(P, Q) = d(Q, P).

Indicador de logro:

2.1 Calcula la distancia entre dos puntos del plano cartesiano.

Secuencia:

Se inicia la lección con la deducción y aplicación de la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos ubicados en el plano cartesiano.

Propósito:

Con el Problema inicial se deduce la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano, mientras que el Ejemplo muestra la forma de usarla.
Con respecto a la sección de Problemas, el problema 1 refuerza el uso de la fórmula, y el problema 2 muestra el hecho de que la distancia entre dos puntos P y Q es igual a la distancia entre Q y P.

Solución de problemas:

1a) $d(\text{P, Q}) = \sqrt{(2-(-2))^2+(2-(-1))^2} = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$

1b) $d(\text{P, Q}) = \sqrt{(4-7)^2+(-2-2)^2} = \sqrt{(-3)^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$

1c) $d(\text{P, Q}) = \sqrt{(-8-2)^2+(4-(-2))^2} = \sqrt{(-10)^2+6^2} = \sqrt{100+36} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}.$

1d) $d(\text{P, Q}) = \sqrt{(9-1)^2+(2-1)^2} = \sqrt{8^2+1^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}.$

1e) $d(\text{P, Q}) = \sqrt{(3-0)^2+(5-1)^2} = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$

1f) $d(\text{P, Q}) = \sqrt{(7-(-3))^2+(-9-5)^2} = \sqrt{10^2+(-14)^2} = \sqrt{100+196} = \sqrt{296} = 2\sqrt{74}.$

1g) $d(\text{P, Q}) = \sqrt{(2-(-1))^2+(4-4)^2} = \sqrt{3^2+0^2} = \sqrt{3^2} = 3.$

1h) $d(\text{P, Q}) = \sqrt{(3-3)^2+(2-2)^2} = \sqrt{0^2+0^2} = 0.$

1i) $d(\text{P, Q}) = \sqrt{(-1-(-1))^2+(0-0)^2} = 0.$

También se puede calcular la distancia tomando primero las coordenadas de Q y luego de P, solo hay que tener especial cuidado que debe ser en orden.

2. Se sabe que

$$d(\text{P, Q}) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Por otra parte, $(d(\text{Q, P}))^2 = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 = [-(x_2-x_1)]^2+[-(y_2-y_1)]^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$

Pero $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 = [d(\text{P, Q})]^2$, por lo tanto,

$$d(\text{P, Q}) = d(\text{Q, P}).$$

2.2 Simetrías en el plano cartesiano*

Problema inicial

Se toma el punto P(a, b) sobre el plano cartesiano. Determina lo siguiente respecto al punto P:

a) Las coordenadas del punto simétrico respecto al eje x.

b) Las coordenadas del punto simétrico respecto al eje y.

c) Las coordenadas del punto simétrico respecto al origen.

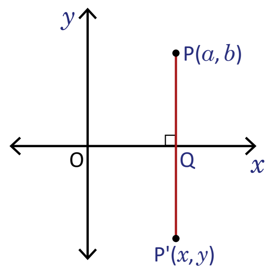
d) Las coordenadas del punto simétrico respecto a la recta $y = x$.

Solución

a) Sea P'(x, y) el punto simétrico de P respecto al eje x. Por propiedades de simetría, el segmento PP' es perpendicular al eje x y si Q es la intersección de dicho segmento con el eje, se satisface que PQ = P'Q.

Como el segmento PP' es vertical, solo la segunda coordenada de P' cambia. P y P' están a la misma distancia del eje x, por lo tanto la segunda coordenada de P' es el número opuesto a b, es decir $-b$.

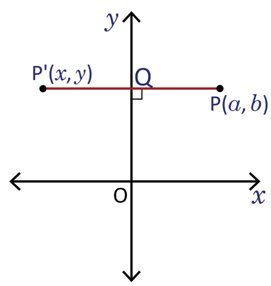
Por lo tanto, el simétrico de P(a, b) respecto al eje x es P'(a, $-b$).



b) Sea P'(x, y) el punto simétrico de P respecto al eje y. Por propiedades de simetría, el segmento PP' es perpendicular al eje y y si Q es la intersección de dicho segmento con el eje, se satisface que PQ = P'Q.

Como el segmento PP' es horizontal, solo la primera coordenada de P' cambia. P y P' están a la misma distancia del eje y, por lo tanto la primera coordenada de P' es el número opuesto a a, es decir $-a$.

Por lo tanto, el simétrico de P(a, b) respecto al eje y es P'($-a$, b).



c) Sea P'(x, y) el simétrico de P respecto al origen O. Por definición de simetría respecto a un punto, se tiene que OP = OP', es decir

$$(\text{OP})^2 = (\text{OP}')^2$$

$$\Rightarrow \quad (x-0)^2 + (y-0)^2 = (a-0)^2 + (b-0)^2$$

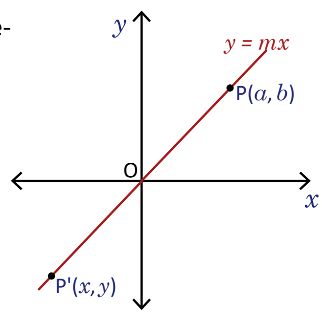
$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \quad \text{------------------ (1)}$$

Pero P y P' están sobre la recta $y = mx$, por lo que también se cumple que $b = ma$. Sustituyendo y y b en (1) se tiene

$$x^2 + m^2x^2 = a^2 + m^2a^2$$

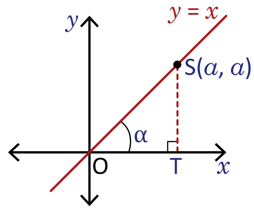
$$\Rightarrow \quad x^2(1 + m^2) = a^2(1 + m^2);$$

como $1 + m^2 \neq 0$ $\quad \Rightarrow \quad x^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad x = a$ o bien $x = -a$.

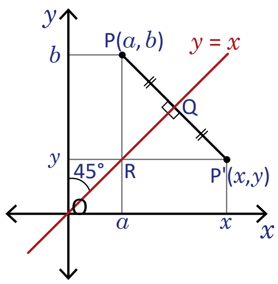


Si $x = a$ entonces $y = mx = ma = b$, por lo que P' resulta ser el mismo punto P. Si $x = -a$ entonces $y = mx = -ma = -b$, así P'($-a$, $-b$) es el simétrico de P respecto al origen. Por lo tanto, P'($-a$, $-b$).

d) Primero véase que, si se toma el punto S(a, a) sobre la recta $y = x$, al trazar el triángulo OTS se deduce que tan α = 1, por lo que α = 45°; es decir, la recta $y = x$ divide en dos partes iguales a los cuadrantes I y III del plano cartesiano.



Sea P(a, b) un punto del plano cartesiano y P'(x, y) su simétrico respecto a la recta $y = x$. El resultado no se ve afectado si consideramos a P sobre la recta $y = x$. Sea Q la intersección del segmento PP' y la recta $y = x$. Por propiedades de simetría, PP' es perpendicular a dicha recta y PQ = P'Q.



Se traza el segmento vertical PR. Los triángulos PQR y P'QR son congruentes ya que PQ = P'Q, QR es lado común y ∢PQR = ∢P'QR = 90° (criterio LAL). Por lo tanto,

PR = P'R y ∢PRQ = ∢P'RQ. ------------------ (2)

Pero ∢PRQ = 45°, ya que PR es paralela al eje y. Luego ∢P'RQ = 45°, por lo que ∢P'RP = 90°. Por tanto, P'R es perpendicular a PR y así P'R = $x - a$ y PR = $b - y$.

De (2) se tiene que PR = P'R, pero PR = $b - a$, por lo que $b - a$ = P'R = $x - a$, es decir $x = b$. De igual forma, $b - a$ = PR = $b - y$, es decir, $y = a$. Por lo tanto, las coordenadas de P' son (b, a).

Teorema

Si P(a, b) es un punto sobre el plano cartesiano entonces:

- P'(a, –b) es el punto simétrico de P respecto al eje x.
- P'(–a, b) es el punto simétrico de P respecto al eje y.
- P'(–a, –b) es el punto simétrico de P respecto al origen.
- P'(b, a) es el punto simétrico de P respecto a la recta $y = x$.

A la recta que tiene por ecuación $y = x$ se le conoce como **recta identidad**.

Ejemplo

Sean P(–1, 3) y Q(–2, –3) dos puntos en el plano. Determina el simétrico de P y Q respecto al eje x, respecto al eje y, respecto al origen y respecto a la recta identidad.

a) El simétrico de P respecto al eje x es P_1(–1, –3).
El simétrico de P respecto al eje y es P_2(1, 3).
El simétrico de P respecto al origen es P_3(1, –3).
El simétrico de P respecto a la recta identidad es P_4(3, –1).

b) El simétrico de Q respecto al eje x es Q_1(–2, 3).
El simétrico de Q respecto al eje y es Q_2(2, –3).
El simétrico de Q respecto al origen es Q_3(2, 3).
El simétrico de P respecto a la recta identidad es Q_4(–3, –2).

Problemas

1. Determina el simétrico de cada punto respecto al eje x, respecto al eje y, respecto al origen y respecto a la recta $y = x$.

a) P(1, 4) b) P(3, –2) c) P(–3, –1)

d) P(–5, 4) e) P(2, 0) f) P(0, –3)

2. ¿Puede encontrarse el simétrico respecto al origen de un punto P haciendo una simetría respecto al eje x y luego haciendo otra simetría respecto al eje y? Justifica tu respuesta.

Indicador de logro:

2.2 Determina las coordenadas del punto simétrico de un punto del plano cartesiano respecto al eje x, al eje y, al origen y a la recta identidad.

Secuencia:

En esta clase se establecen las coordenadas del punto simétrico de un punto del plano cartesiano. Las simetrías que se determinan son respecto a los ejes coordenados, al origen y respecto a la recta identidad $y = x$.

Propósito:

Esta clase, junto con la clase 2.1, tiene como objetivo establecer algunas herramientas necesarias para el cálculo de razones trigonométricas de ángulos no agudos. La simetría, en particular, se utilizará en toda la Lección 2.

Solución de problemas:

	Punto	Respecto al eje x	Respecto al eje y	Respecto al origen	Respecto a la recta identidad
1a)	(1, 4)	$P_1(1, -4)$	$P_2(-1, 4)$	$P_3(-1, -4)$	$P_4(4, 1)$
1b)	(3, –2)	$P_1(3, 2)$	$P_2(-3, -2)$	$P_3(-3, 2)$	$P_4(-2, 3)$
1c)	(–3, –1)	$P_1(-3, 1)$	$P_2(3, -1)$	$P_3(3, 1)$	$P_4(-1, -3)$
1d)	(–5, 4)	$P_1(-5, -4)$	$P_2(5, 4)$	$P_3(5, -4)$	$P_4(4, -5)$
1e)	(2, 0)	$P_1(2, 0)$	$P_2(-2, 0)$	$P_3(-2, 0)$	$P_4(0, 2)$
1f)	(0, –3)	$P_1(0, 3)$	$P_2(0, -3)$	$P_3(0, 3)$	$P_4(-3, 0)$

2. Sea $P(x, y)$ un punto en el plano cartesiano. Las coordenadas del punto simétrico de P respecto al origen son $(-x, -y)$.

Por otra parte, el simétrico de P con respecto al eje x tiene coordenadas $(x, -y)$. Ahora, el simétrico de $(x, -y)$ respecto al eje y tiene coordenadas $(-x, -y)$.

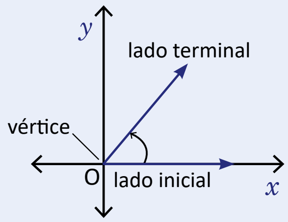
Por lo tanto, al calcular el simétrico de un punto respecto al eje x y luego al eje y se obtienen las coordenadas del simétrico del punto respecto al origen.

Lección 2

2.3 Ángulos

Definición

Se ubica un rayo sobre el eje x con punto inicial en el origen del plano cartesiano y se rota este rayo alrededor del origen; a la abertura entre el rayo inicial y el final se le llama **ángulo** y al rayo inicial se le llama **lado inicial** y al rayo final se le llama **lado terminal** del ángulo. Se dice que un ángulo está en **posición estándar** si su lado inicial está sobre el lado positivo del eje x y su vértice sobre el origen. Un ángulo puede medirse en grados y cada grado resulta de dividir una circunferencia en 360 partes iguales, siendo cada parte 1° (un grado).



Si un ángulo se genera mediante una rotación en el sentido antihorario será positivo, y una rotación en el sentido horario genera un ángulo negativo.

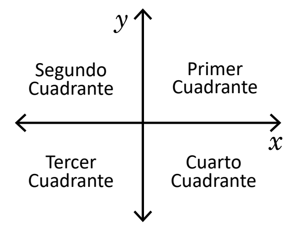
Dependiendo en qué cuadrante está el lado terminal del ángulo, se dice que el ángulo es de dicho cuadrante.

Ejemplo

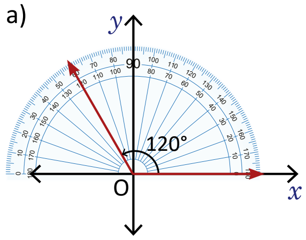
Dibuja cada ángulo en posición estándar e identifica a qué cuadrante pertenece.

a) 120° b) –70° c) –150°

Cuando se construye el plano cartesiano se obtienen cuatro secciones a las que se les llama cuadrantes y se enumeran a partir del cuadrante superior derecho y en sentido antihorario.



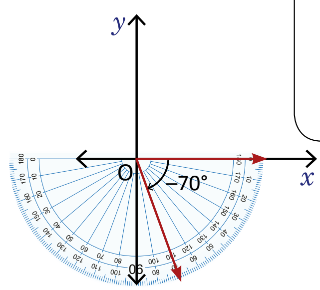
a)



Como el lado final está en el segundo cuadrante, 120° pertenece al segundo cuadrante.

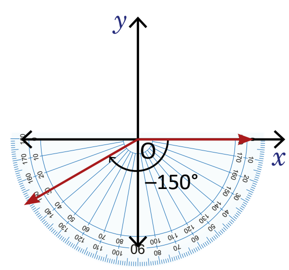
b) Para graficar este ángulo, como va en el sentido a las agujas del reloj, se coloca el transportador hacia abajo y se marca 70°.

Como el lado final está en el cuarto cuadrante, –70° pertenece al cuarto cuadrante.



c) Para graficar este ángulo, como va en el sentido a las agujas del reloj, se coloca el transportador hacia abajo y se marca 150°.

Como el lado final está en el tercer cuadrante, –150° pertenece al tercer cuadrante.



Problemas

Dibuja cada ángulo en posición estándar e identifica a qué cuadrante pertenece.

a) 80° b) 310° c) –170°

Indicador de logro:

2.3 Determina el signo y el cuadrante al que pertenece un ángulo en el plano cartesiano.

Secuencia:

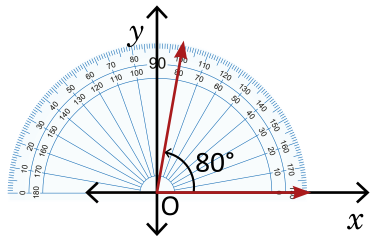
Esta clase es introductoria, en ella se define a un ángulo como la abertura entre dos rayos, uno de ellos ubicado sobre la parte positiva del eje x y el otro que gira alrededor del origen del plano cartesiano. Los elementos que componen un ángulo, ya han sido abordados en Educación Básica, por lo que esta es una extensión del concepto de ángulo. Además, se define el signo del ángulo dependiendo de si gira en sentido horario o antihorario, y se define la pertenencia del ángulo a un cuadrante del plano cartesiano.

Propósito:

Introducir ángulos mayores que 90° y menores que 0° y la identificación del cuadrante al que pertenecen, este último concepto es importante para el cálculo de razones trigonométricas, el signo de estas y la ubicación de ángulos en el plano cartesiano.

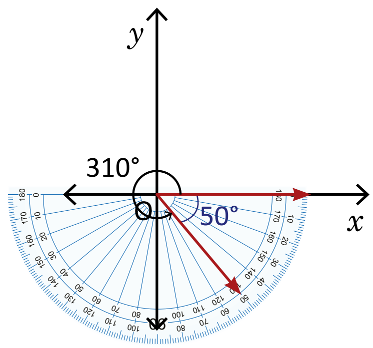
Solución de problemas:

a) Como el ángulo es positivo, se dibuja en el sentido contrario a las agujas del reloj. El lado final está en el primer cuadrante, por lo tanto 80° pertenece al primer cuadrante.



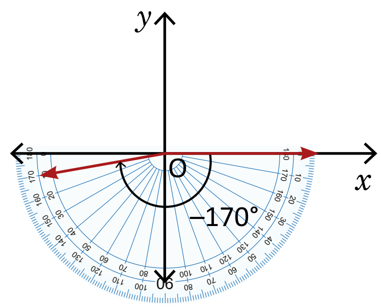
b) Como el transportador no mide ángulos mayores a 180°, en este caso se mide el ángulo que falta para dar la vuelta completa. Faltan 50° para llegar a 360°, se coloca el transportador y se miden los 50° que faltan para la vuelta completa.

Como el ángulo es positivo, se mide en el sentido contrario a las agujas del reloj. El lado final está en el cuarto cuadrante, por lo tanto 310° pertenece al cuarto cuadrante.



c) Como el ángulo es negativo, se mide en el sentido de las agujas del reloj. El lado final está en el tercer cuadrante, por lo tanto –170° pertenece al tercer cuadrante.

Si el transportador es un círculo, no es necesario girarlo.



2.4 Ángulos mayores a 360° y menores a –360°

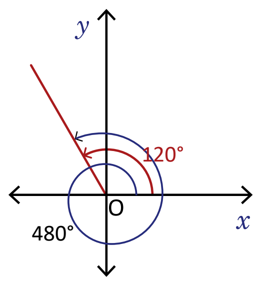
Problema inicial

Dibuja los ángulos 480°, 930°, 2 150° y –1 150°.

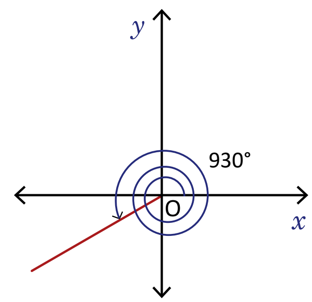
Solución

Para dibujar los ángulos, hay que recordar (de la clase anterior) que una circunferencia se ha dividido en 360 partes iguales y cada parte representa 1°, por lo tanto, un ángulo de 360° representa una vuelta completa.

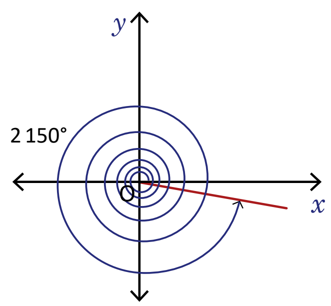
a) Se escribe 480° como 360° + 120°, entonces al dibujar el ángulo se obtiene



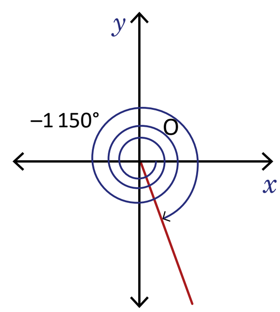
b) Observa que 930° = 360°(2) + 210°, entonces al dibujar se obtiene



c) Observa que 2 150° = 360°(5) + 350°, entonces al dibujar se obtiene



d) Como el ángulo es negativo hay que medirlo en el sentido de las agujas del reloj, además
–1 150° = –360°(3) – 70°



Observa que –1150° también puede escribirse como
360°(–3) – 70° = 360°(–3) – 70° + 360° – 360° = 360°(–4) + 290°
lo cual resulta más útil, ya que de este modo no se trabaja con ángulos negativos.

Conclusión

Para dibujar un ángulo mayor a 360° se determina cuántas vueltas completas contiene el ángulo y el lado terminal será el que corresponde al ángulo menor de 360° que queda al descomponer el ángulo.

Por ejemplo, si $\theta = 360°n + \theta'$, con n un número entero distinto de cero, n representa el número de vueltas completas que contiene el ángulo y $0 \leq \theta' < 360°$, el lado terminal de θ será igual al lado terminal del ángulo θ'. Si $n > 0$, el ángulo se mide en el sentido antihorario y si $n < 0$, el ángulo se mide en sentido horario.

Problemas

Dibuja cada ángulo.

a) 1 000° b) 990° c) 1 480°
d) –1 500° e) –1 315° f) –1 880°

Indicador de logro:

2.4 Grafica en el plano cartesiano ángulos mayores a 360° y menores a –360°.

Secuencia:

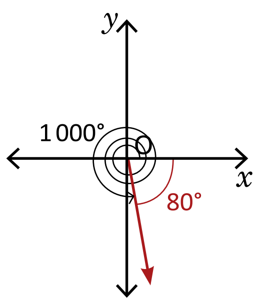
Se grafican ángulos mayores a 360° y menores a –360° mediante la identificación del número de vueltas completas que da.

Posibles dificultades:

Identificar el número de vueltas completas que hay en un ángulo puede significar una dificultad para el estudiante, especialmente cuando el ángulo es negativo. Este paso puede hacerse utilizando la división.

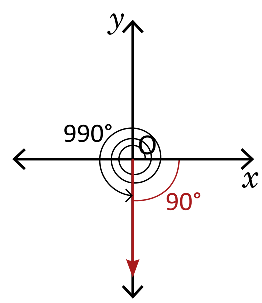
Solución de problemas:

a) 1 000° = 360°(2) + 280°.

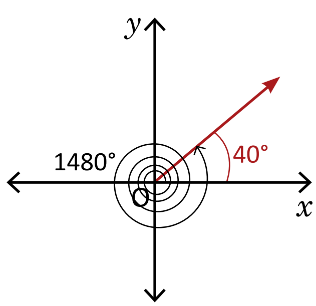


Para graficar un ángulo mayor que 360° o menor que –360° solo es necesario graficar el ángulo menor de 360° que se obtiene al descomponer el ángulo inicial.

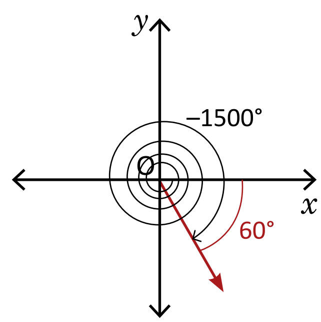
b) 990° = 360°(2) + 270°.



c) 1 480° = 360°(4) + 40°.

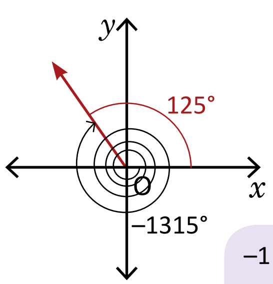


d) –1 500° = –360°(4) – 60°.



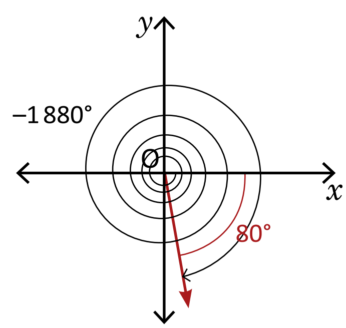
Para graficar ángulos negativos debe iniciarse del lado positivo del eje x.

e) –1 315° = –360°(3) – 235°.



–1 315° = –360°(3) – 235° + 360° – 360°
= –360°(4) + 125°

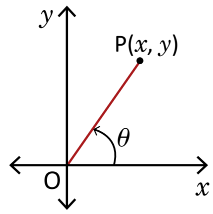
f) –1 880° = –360°(5) – 80°.



2.5 Razones trigonométricas de cualquier ángulo, parte 1

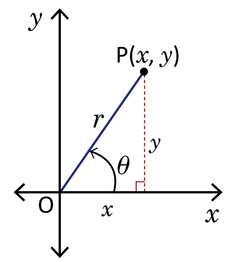
Problema inicial

Considera el ángulo θ de la figura. Expresa los valores seno, coseno y tangente del ángulo θ en términos de x y y.



Solución

Se dibuja un triángulo rectángulo tal que la hipotenusa es el lado terminal del ángulo y uno de los catetos está sobre el eje x, como muestra la figura. El punto final del lado terminal está determinado por el punto P con coordenadas (x, y), por lo que los catetos del triángulo miden x y y unidades.



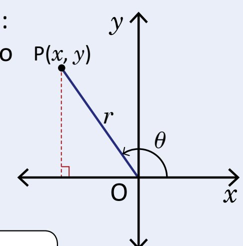
En el triángulo rectángulo, x es la longitud del lado adyacente y y es la longitud del lado opuesto a θ. Para determinar la longitud de la hipotenusa r se aplica el teorema de Pitágoras, obteniéndose $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, por lo tanto,

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}, \ \cos \theta = \frac{x}{r} \ \text{ y } \tan \theta = \frac{y}{x}.$$

Definición

Se definen las razones trigonométricas de cualquier ángulo θ de la siguiente manera:
Se coloca el ángulo θ en posición estándar y se toma un punto P(x, y) sobre el lado terminal. Se establece que r = OP = $\sqrt{x^2 + y^2}$, entonces

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}, \ \cos \theta = \frac{x}{r} \ \text{ y } \tan \theta = \frac{y}{x}.$$



Se define tan θ solo cuando $x \neq 0$.

De la definición de razones trigonométricas se establece lo siguiente:

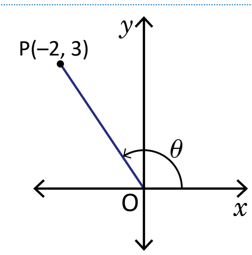
$$y = r\text{sen } \theta, \quad x = r\cos \theta.$$

Además, sen(360°$n + \theta$) = sen θ y cos(360°$n + \theta$) = cos θ.

Observar que $\tan \theta = \dfrac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}$.

Ejemplo

Determina las razones seno, coseno y tangente para el ángulo θ en la figura.



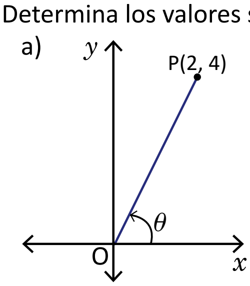
En este caso, $r = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$, por lo tanto,

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{r} = \frac{3}{\sqrt{13}}, \ \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{\sqrt{13}} = -\frac{2}{\sqrt{13}} \ \text{ y } \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}.$$

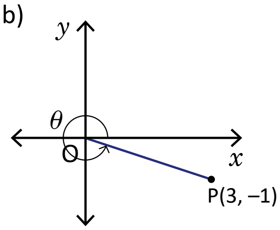
Problemas

Determina los valores seno, coseno y tangente de cada ángulo.

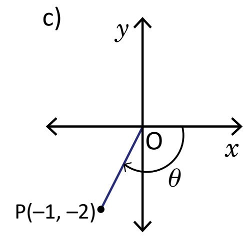
a)



b)



c)



Unidad 5

Indicador de logro:

2.5 Determina las razones trigonométricas de un ángulo definido por la parte positiva del eje x y $\overline{\text{OP}}$, donde P es un punto del plano cartesiano.

Secuencia:

Se definen las razones trigonométricas en términos de las coordenadas de un punto del plano cartesiano.

Propósito:

Como no se pueden construir triángulos rectángulos para los ángulos que no sean agudos, se definen las razones trigonométricas en términos de las coordenadas de un punto del plano cartesiano. Esta nueva definición coincide con la anterior cuando el ángulo es agudo, observando la relación entre las razones trigonométricas y las coordenadas del punto.

Solución de problemas:

a) $r = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, por lo tanto,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{y } \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{2} = 2.$$

b) $r = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$, por lo tanto,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\text{y } \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

c) $r = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$, por lo tanto,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{-2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5},$$

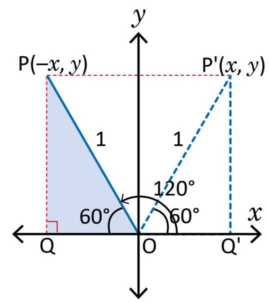
$$\text{y } \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2}{-1} = 2.$$

2.6 Razones trigonométricas de cualquier ángulo, parte 2

Problema inicial

Calcula los valores de sen 120°, cos 120° y tan 120°.

Solución



Se ubica el ángulo en posición estándar y se traza un triángulo OPQ de modo que OP = 1, como muestra la figura. Si se observa, el ∢QOP es igual a 180° – 120° = 60°, por lo que las razones sen 120°, cos 120° y tan 120° pueden calcularse tomando como referencia los valores de sen 60°, cos 60° y tan 60°.

Si se refleja el ΔOPQ con respecto al eje y, el resultado es el triángulo OP'Q'. Las coordenadas de P' son (cos 60°, sen 60°) y por ser P el simétrico de P', sus coordenadas son (–cos 60°, sen 60°), por lo tanto,

$$\text{sen } 120° = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2},$$

$$\tan 120° = \frac{\text{sen } 120°}{\cos 120°} = \frac{\text{sen } 60°}{-\cos 60°} = -\tan 60° = -\sqrt{3}.$$

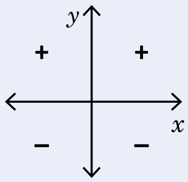
$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{r \text{ sen }\theta}{r\cos\theta} = \frac{\text{sen }\theta}{\cos\theta}$

Conclusión

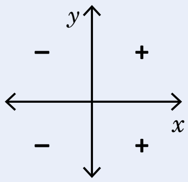
Si se tiene un ángulo distinto de 0°, 90°, 180° o 270° se define el **triángulo de referencia** como el triángulo rectángulo cuya hipotenusa de medida 1, es el lado terminal del ángulo y uno de sus catetos está sobre el eje x. En la solución del Problema inicial, el triángulo OPQ es el triángulo de referencia.

Para calcular razones trigonométricas de ángulos mayores a 90° se procede de la siguiente forma:

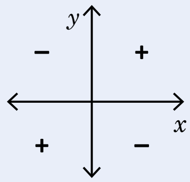
1. Se coloca el ángulo en posición estándar.
2. Se traza el triángulo de referencia siempre que sea posible.
3. Se calculan las razones del ángulo utilizando el ángulo agudo del triángulo de referencia que está comprendido entre el lado terminal del ángulo y el eje x. En este paso se determina el signo que tendrán las razones trigonométricas, dependiendo del cuadrante al que pertenece el ángulo. El signo del seno depende de y, el signo del coseno depende de x y el signo de la tangente depende del cociente $\frac{y}{x}$.



signos del seno



signos del coseno



signos de la tangente

Al ángulo agudo que se utiliza para calcular las razones trigonométricas se le conoce como **ángulo de referencia**.

Problemas

Calcula las razones trigonométricas de cada ángulo de la tabla y complétala. Cuando la razón no esté definida, escribe /.

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sen θ																	
cos θ																	
tan θ																	

Para calcular las razones trigonométricas de los ángulos 0°, 90°, 270° y 360° considera las coordenadas de x y y, que definen el ángulo en el plano cartesiano.

Indicador de logro:

2.6 Calcula las razones trigonométricas de ángulos en el plano cartesiano, utilizando los ángulos de los triángulos notables.

Secuencia:

En esta clase se define el triángulo y el ángulo de referencia de un ángulo no agudo, se utiliza para el cálculo de razones trigonométricas de ángulos no agudos menores o iguales que 360°, que pueden calcularse con los ángulos de triángulos notables. Se establecen además, los signos de las razones seno, coseno y tangente, dependiendo de a qué cuadrante pertenece el ángulo.
Si la solución del Problema inicial presenta mucha dificultad, el docente debe brindar más apoyo.

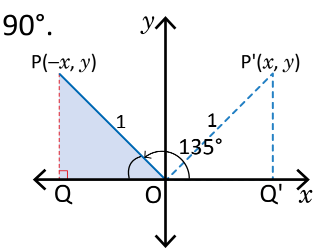
Solución de problemas:

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	–1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	–1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan θ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	–1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	–1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

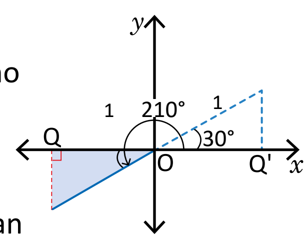
A continuación se muestra a detalle la deducción de algunas razones.

Para los ángulos 0°, 90°, 180° y 270° pueden considerarse también los puntos $(x, 0)$, $(0, y)$, $(-x, 0)$ y $(0, -y)$, respectivamente, con $x > 0$, $y > 0$.

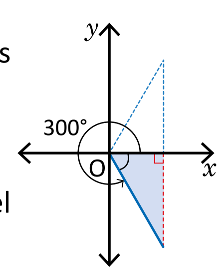
- Para las razones del ángulo 0° se considera el punto P(1, 0), entonces $r = 1$,
  $$\text{sen } 0° = \frac{0}{1} = 0, \quad \cos 0° = \frac{1}{1} = 1 \ \text{ y } \ \tan 0° = \frac{0}{1} = 0.$$
- De igual forma para 90°, se toma el punto P(0, 1). Entonces $r = 1$,
  $$\text{sen } 90° = \frac{1}{1} = 1, \quad \cos 90° = \frac{0}{1} = 0 \ \text{ y } \ \tan 90° = \frac{1}{0} \Rightarrow \text{ la tangente no está definida para } 90°.$$



- Para el ángulo de 135°, el ángulo de referencia es ∢QOP = 180° – 135° = 45°. El signo del seno es positivo, y el signo del coseno y la tangente es negativo. Por lo tanto,
  $$\text{sen } 135° = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ \text{ y } \ \tan 135° = -\tan 45° = -1.$$
- Para el ángulo de 180° se considera P(–1, 0). Entonces, sen 180° = 0, cos 180° = –1 y tan 180° = 0.



- Para 210°, el ángulo de referencia es 210° – 180° = 30°. En este caso, el signo del seno y del coseno es negativo mientras que el de la tangente es positivo. Así,
  $$\text{sen } 210° = -\text{sen } 30° = -\frac{1}{2}, \quad \cos 210° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ \text{ y } \ \tan 210° = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$
- Para 270° se considera el punto P(0, –1). Entonces, sen 270° = –1, cos 270° = 0 y tan 270° no está definida.



- Para 300°, el ángulo de referencia es 360° – 300° = 60°. El signo del seno y la tangente es negativo mientras que el del coseno es positivo. Entonces,
  $$\text{sen } 300° = -\text{sen } 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 300° = \cos 60° = \frac{1}{2} \ \text{ y } \ \tan 300° = -\tan 60° = -\sqrt{3}.$$
- El ángulo de 360°, representa una vuelta completa, por lo tanto coincide con los valores del ángulo 0°.

Observe que la tangente no está definida cuando el coseno toma el valor de cero.

Lección 2

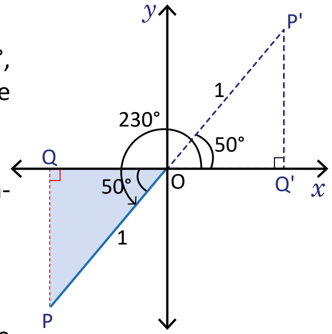
2.7 Razones trigonométricas de cualquier ángulo, parte 3

Problema inicial

a) Representa los valores de sen 230°, cos 230° y tan 230° en términos de un ángulo agudo.

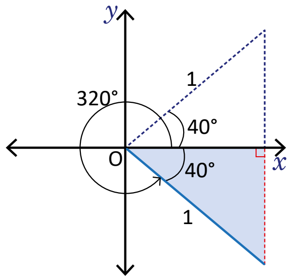
b) Representa los valores de sen 320°, cos 320° y tan 320° en términos de un ángulo agudo.

Solución



a) Se traza el triángulo de referencia. Si se observa, ∢POQ = 230° – 180° = 50°, por lo que las razones sen 230°, cos 230° y tan 230° pueden representarse tomando como referencia los valores de sen 50°, cos 50° y tan 50°.

El signo del seno y coseno es negativo y el de la tangente es positivo. Entonces, sen 230° = –sen 50°, cos 230° = –cos 50° y tan 230° = tan 50°.



b) En este caso, el ángulo de referencia es 360° – 320° = 40°. Puede observarse el gráfico de la derecha para analizar por qué se calcula de este modo.

El signo del seno y la tangente es negativo en el cuarto cuadrante, mientras que el coseno es positivo. Entonces,

sen 320° = – sen 40°, cos 320° = cos 40° y tan 320° = – tan 40°.

Conclusión

Los ángulos de referencia sirven para calcular razones trigonométricas de ángulos mayores a 90°.

La forma de calcular el ángulo de referencia depende del cuadrante al que pertenece dicho ángulo. Sea θ un ángulo cualquiera menor que 360°, entonces:

- Si θ pertenece al primer cuadrante, el ángulo de referencia es él mismo.
- Si θ pertenece al segundo cuadrante, el ángulo de referencia es 180° – θ.
- Si θ pertenece al tercer cuadrante, el ángulo de referencia es θ – 180°.
- Si θ pertenece al cuarto cuadrante, el ángulo de referencia es 360° – θ.

Ejemplo

Representa cos(–400°) en términos de un ángulo agudo.

Como –400° = –360° – 40°, el ángulo de referencia es 40°. El ángulo pertenece al cuarto cuadrante, por lo que el signo de cos(–400°) es positivo. Por lo tanto, cos(–400°) = cos 40°.

Problemas

Representa los valores de las razones trigonométricas en términos de los valores de sen θ, cos θ y tan θ, donde $0 \leq \theta < 90°$.

a) 100°	b) 175°	c) 220°
d) 250°	e) 290°	f) 310°
g) 405°	h) 570°	i) 630°
j) –780°	k) –940°	l) –1 000°

Unidad 5

Indicador de logro:

2.7 Representa las razones trigonométricas de ángulos no agudos en términos de ángulos que estén entre 0° y 90°.

Secuencia:

Luego de haber calculado razones trigonométricas utilizando triángulos notables se utilizan los ángulos de referencia para escribir una razón trigonométrica en términos de un ángulo agudo.

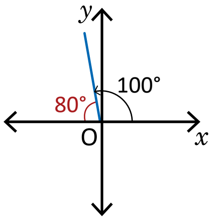
Propósito:

Se espera fortalecer en el estudiante el uso de los ángulos de referencia y su identificación en el plano cartesiano, los signos de las razones trigonométricas. No se calculan las razones trigonométricas, solo se escriben en términos de ángulos agudos.

Posibles dificultades:

Visualizar y calcular el ángulo de referencia. Es importante recordar que el ángulo de referencia es aquel ángulo agudo que se forma entre el lado final del ángulo y el eje x (observe que aquí, el eje x se refiere tanto al lado positivo como el negativo).

Solución de problemas:

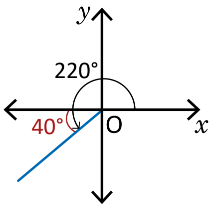


a) El ángulo de referencia de 100° es 180° – 100° = 80°. Como 100° está en el segundo cuadrante, el seno es positivo y el coseno y la tangente son negativos. Entonces,

sen 100° = sen 80°, cos 100° = – cos 80° y tan 100° = – tan 80°.

b) El ángulo de referencia es: 180° – 175° = 5°. Como 175° está en el segundo cuadrante, el seno es positivo y el coseno y la tangente son negativos. Entonces,

sen 175° = sen 5°, cos 175° = – cos 5° y tan 175° = – tan 5°.

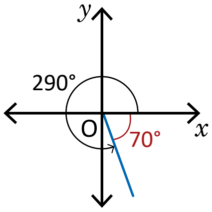


c) El ángulo de referencia de 220° es 220° – 180° = 40°. Como 220° está en el tercer cuadrante, el seno y el coseno son negativos y la tangente es positiva. Entonces,

sen 220° = – sen 40°, cos 220° = – cos 40° y tan 220° = tan 40°.

d) El ángulo de referencia es: 250° – 180° = 70°. Como 250° está en el tercer cuadrante, el seno y el coseno son negativos y la tangente es positiva. Entonces,

sen 250° = – sen 70°, cos 250° = – cos 70° y tan 250° = tan 70°.



e) El ángulo de referencia de 290° es 360° – 290° = 70°. Como 290° está en el cuarto cuadrante, el seno y la tangente son negativos y el coseno es positivo. Entonces,

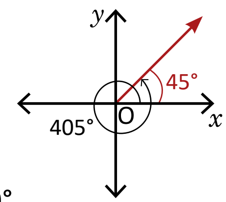
sen 290° = – sen 70°, cos 290° = cos 70° y tan 290° = – tan 70°.

f) El ángulo de referencia es: 360° – 310° = 50°. Como 310° está en el cuarto cuadrante, el seno y la tangente son negativos y el coseno es positivo. Entonces,

sen 310° = – sen 50°, cos 310° = cos 50° y tan 310° = – tan 50°.

g) El ángulo es mayor que 360° y 405° = 360° + 45°. Entonces el ángulo de referencia es 45°. Como 45° está en el primer cuadrante, también 405° lo está y por tanto, todas las razones son positivas. Por tanto,

sen 405° = sen 45°, cos 405° = cos 45° y tan 405° = tan 45°.



h) Como 570° = 360° + 210°, se determina el ángulo de referencia para 210°: 210° – 180° = 30°. Entonces,

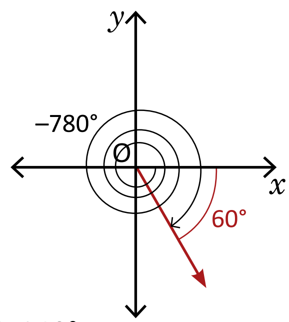
sen 570° = sen 210° = – sen 30°,
cos 570° = cos 210° = – cos 30° y
tan 570° = tan 210° = tan 30°.

i) Como 630° = 360° + 270°. El ángulo de referencia de 270° es 90°. Entonces,

sen 630° = sen 270° = – sen 90°, cos 630° = cos 270° = cos 90° y tan 630° no está definida.

j) Como –780° = –360°(2) – 60°, el ángulo de referencia es 60° y como –60° está en el cuarto cuadrante, el coseno es positivo y el seno y la tangente son negativos. Luego,

sen(–780°) = – sen 60°, cos(–780°) = cos 60° y tan(–780°) = – tan 60°.



k) Como –940° = –360°(2) – 220°. Se reescribe el ángulo de modo que se obtenga la suma de un ángulo positivo:

–940° = –360°(2) – 220° = –360°(2) – 220° + 360° – 360° = –360°(3) + 140°.

A partir de aquí, se calcula el ángulo de referencia de 140°, que es 180° – 140° = 40°. 140° está en el segundo cuadrante, y por tanto – 940° también lo está. Luego, el coseno y la tangente son negativos y el seno es positivo. Entonces,

sen(–940°) = sen 140° = sen 40°,
cos(–940°) = cos 140° = – cos 40° y
tan(–940°) = tan 140° = – tan 40°.

l) –1 000° = –360°(2) – 280° = –360°(2) – 280° + 360° – 360° = –360°(3) + 80°. Luego, el ángulo de referencia es 80°. Como 80° está en el primer cuadrante, todas las razones son positivas. Entonces,

sen(–1 000°) = sen 80°, cos(–1 000°) = cos 80° y tan(–1 000°) = tan 80°.

2.8 Razones trigonométricas de cualquier ángulo, parte 4*

Problema inicial

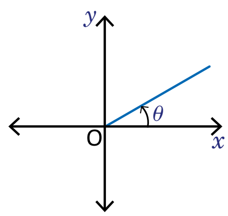
Si θ está entre 0° y 360°, calcula su valor para cada caso:

a) $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$ b) $\cos\theta = -\frac{3}{4}$

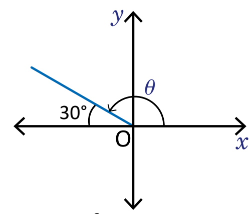
Solución

a) De acuerdo a la condición dada, sen θ es positivo. El seno es positivo en el primer y segundo cuadrante, y además $\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$. Entonces, hay dos posibles valores para θ si está entre 0° y 360°.

Entonces $\theta = 30°$ o bien $\theta = 180° - 30° = 150°$.



Para θ en el primer cuadrante

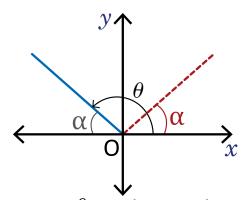


Para θ en el segundo cuadrante

b) De acuerdo a la condición dada, cos θ es negativo. El coseno es negativo en el segundo y tercer cuadrante. Para calcular el valor de θ se utiliza la calculadora. Se utiliza el valor absoluto de $-\frac{3}{4}$ en vez del propio valor.

Considerar el ángulo de referencia α, entonces $\cos\alpha = \frac{3}{4}$.

Se sabe que la función $\cos^{-1}$ de la calculadora devuelve el ángulo α que cumpla que $\cos\alpha = \frac{3}{4}$; es decir, $\cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = \alpha$.



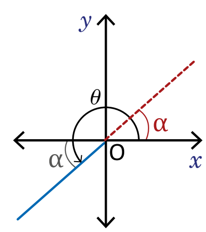
Para θ en el segundo cuadrante

Pero α es el ángulo de referencia y como θ está en el segundo cuadrante, se tiene que

$$\theta = 180° - \alpha = 180° - \cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 138.6°.$$

De igual forma, si θ está en el tercer cuadrante se tiene que

$$\theta = 180° + \cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 221.4°.$$



Para θ en el tercer cuadrante

> Cuando se determinan ángulos con calculadora hay que tener un cuidado especial: esta devuelve ángulos que están entre –90° y 90° para el seno y la tangente, y entre 0° y 180° para el coseno.

Conclusión

Para calcular el valor de un ángulo si se conoce una de sus razones trigonométricas, se utilizan ángulos de referencia. Además, si el ángulo se encuentra entre 0° y 360° generalmente habrán dos ángulos que satisfagan la condición impuesta.

Problemas

Calcula el valor de θ en cada caso si está entre 0° y 360°.

a) $\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\tan\theta = \sqrt{3}$

c) $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3}$ d) $\cos\theta = -\frac{4}{7}$

Indicador de logro:

2.8 Calcula el ángulo si se conoce una de sus razones trigonométricas.

Secuencia:

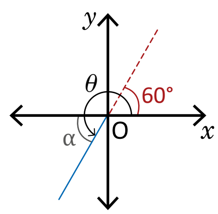
Se trabaja en el cálculo de ángulos cuando se conoce el valor de una razón trigonométrica. Este es el proceso inverso de encontrar razones trigonométricas, y se utilizan las funciones trigonométricas inversas de la calculadora cuando aparece el ícono de esta.
Si la solución del Problema inicial presenta muchas dificultades, el docente debe brindar más apoyo.

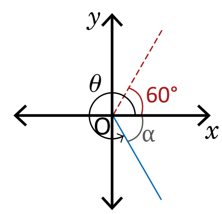
Solución de problemas:

a) El seno del ángulo es negativo, por lo tanto θ está en el tercer o cuarto cuadrante. Se sabe que

$$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

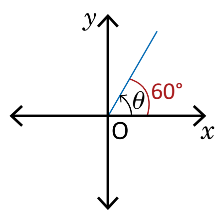
Entonces $\theta = 180° + 60° = 240°$ o $\theta = 360° - 60° = 300°$.

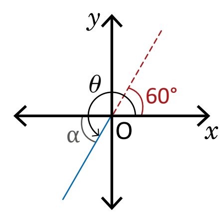




b) La tangente de un ángulo es positiva cuando el ángulo está en el primer o tercer cuadrante. Como $\tan 60° = \sqrt{3}$ se tiene que

$$\theta = 60° \text{ o } \theta = 180° + 60° = 240°.$$





c) El seno de un ángulo es positivo cuando el ángulo está en el primer o segundo cuadrante.

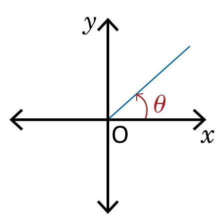
Sea α el ángulo de referencia, entonces $\text{sen } \alpha = \frac{2}{3}$.

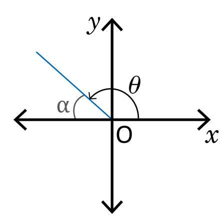
La función sen^{-1} de la calculadora devuelve el ángulo α que cumpla que $\text{sen } \alpha = \frac{2}{3}$; es decir, $\text{sen}^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = \alpha$. Pero α es el ángulo de referencia, y cuando θ está en el primer cuadrante,

$$\theta = \alpha = \text{sen}^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 41.8°,$$

y cuando θ está en el segundo cuadrante se tiene que

$$\theta = 180° - \alpha = 180° - \text{sen}^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 138.2°.$$





No hay que olvidar que la calculadora debe estar configurada en grados.

d) El coseno de un ángulo es negativo en el segundo o tercer cuadrante.

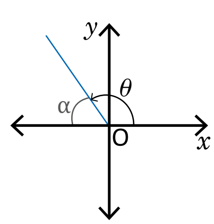
Sea α el ángulo de referencia, entonces $\cos \alpha = \frac{4}{7}$.

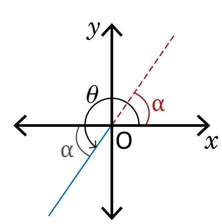
La función $\cos^{-1}$ de la calculadora devuelve el ángulo α que cumpla que $\cos \alpha = \frac{4}{7}$; es decir, $\cos^{-1}\left(\frac{4}{7}\right) = \alpha$. Pero α es el ángulo de referencia, y cuando θ está en el segundo cuadrante,

$$\theta = 180° - \alpha = 180° - \cos^{-1}\left(\frac{4}{7}\right) \approx 124.8°.$$

y cuando θ está en el tercer cuadrante se tiene que

$$\theta = 180° + \alpha = 180° + \cos^{-1}\left(\frac{4}{7}\right) \approx 235.2°.$$





Lección 2

2.9 La identidad pitagórica

Problema inicial

Se denota el cuadrado de una razón trigonométrica, (sen θ)^2, (cos θ)^2, etc., como sen$^2\theta$, cos$^2\theta$, etc.

Demuestra que para cualquier ángulo θ se cumple que sen$^2\theta$ + cos$^2\theta$ = 1.

Solución

Recordando que sen $\theta = \frac{y}{r}$ y cos $\theta = \frac{x}{r}$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces,

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1.$$

Conclusión

La identidad sen$^2\theta$ + cos$^2\theta$ = 1 se conoce como **identidad pitagórica** y es válida para cualquier ángulo θ.

Ejemplo 1

Determinar los valores de cos θ y tan θ si sen $\theta = \frac{5}{13}$ y θ está en el cuadrante I.

Utilizando la identidad pitagórica sen$^2\theta$ + cos$^2\theta$ = 1,

$$\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2\theta = \frac{25}{169} + \cos^2\theta = 1.$$

Entonces $\cos^2\theta = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169-25}{169} = \frac{144}{169}$. Luego, $\cos\theta = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$ o bien $\cos\theta = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$. Pero la otra condición inicial es que θ está en el cuadrante I y en el cuadrante I el coseno es positivo, por lo que $\cos\theta = \frac{12}{13}$.

Para calcular tan θ, recordar que $\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$, entonces

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \frac{5}{13} \div \frac{12}{13} = \frac{5}{13} \times \frac{13}{12} = \frac{5}{12}.$$

Por lo tanto, $\cos\theta = \frac{12}{13}$ y $\tan\theta = \frac{5}{12}$.

Ejemplo 2

Demuestra que $1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\text{sen}^2\theta}$ para cualquier ángulo θ.

Se sabe que $\tan\theta = \frac{y}{x}$, para (x, y) las coordenadas de un punto del plano. Entonces $\cot\theta = \frac{x}{y}$, así

$$1 + \cot^2\theta = 1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{y^2 + x^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2}.$$

Por otra parte, $\frac{1}{\text{sen}^2\theta} = 1 \div \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1 \times \frac{r^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2}$. Por lo tanto, $1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\text{sen}^2\theta}$.

Problemas

1. Determina los valores de sen θ y tan θ si $\cos\theta = -\frac{4}{5}$ y θ está en el cuadrante III.
2. Determina los valores de sen θ y tan θ si $\cos\theta = -\frac{7}{9}$ y $\tan\theta < 0$.
3. Determina los valores de cos θ y tan θ si sen $\theta = \frac{2}{3}$ y θ no está en el cuadrante I.
4. Demuestra que $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ para cualquier ángulo θ.
5. Determina los valores de sen θ y cos θ si $\tan\theta = -\frac{1}{2}$ y sen $\theta > 0$.
6. Demuestra que tan θ + cot θ = sec θ csc θ.
7. Demuestra que sec θ – cos θ = tan θ sen θ.

Puedes utilizar la estrategia aplicada en la solución del problema inicial.

Para el problema 5 puedes utilizar el resultado del problema 4.

Indicador de logro:

2.9 Calcula las razones trigonométricas de cualquier ángulo utilizando la identidad pitagórica si se conocen algunos datos de este.

Secuencia:

Se introduce la identidad pitagórica y se utiliza para calcular razones trigonométricas de un ángulo si se conoce una de ellas; también se demuestran algunas identidades trigonométricas utilizando la misma estrategia de la resolución del Problema inicial.

Propósito:

En el Problema inicial se deduce la identidad pitagórica. En el Ejemplo 1 se muestra la forma de aplicar la identidad pitagórica para resolver un problema en particular, mientras que el Ejemplo 2 demuestra otra identidad con la misma técnica utilizada en la resolución del Problema inicial.

Solución de problemas:

1. Utilizando la identidad pitagórica, $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$: $\Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$.

Como en el cuadrante III el seno es negativo, se tiene que $\operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{5}$. Luego,

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \left(-\frac{3}{5}\right) \div \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4}.$$

Por lo tanto, $\operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{5}$ y $\tan\theta = \frac{3}{4}$.

2. $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta + \left(-\frac{7}{9}\right)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \frac{49}{81} = \frac{32}{81}$.

Como $\cos\theta < 0$ y $\tan\theta < 0$, entonces θ está en el segundo cuadrante, por lo tanto, $\operatorname{sen}\theta > 0$. Es decir, $\operatorname{sen}\theta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$. Luego,

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{4\sqrt{2}}{9} \div \left(-\frac{7}{9}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9} \times \frac{9}{7} = -\frac{4\sqrt{2}}{7}.$$

Por lo tanto, $\operatorname{sen}\theta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ y $\tan\theta = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$.

3. $\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ y $\tan\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

4. $1 + \tan^2\theta = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2}$.

Por otra parte, $\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 \div \left(\frac{x}{r}\right)^2 = 1 \times \frac{r^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2}$. Por lo tanto, $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$.

5. Como la tangente es negativa y el seno es positivo, el ángulo está en el segundo cuadrante y por tanto el coseno es negativo. Utilizando la identidad del problema anterior:

$$1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = \frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Luego, como $\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \tan\theta\cos\theta = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Es decir, $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Cuando dos de los valores entre $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$ y $\tan\theta$ se conocen, es más adecuado utilizar la relación $\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ para calcular el valor restante.

6. $\tan\theta + \cot\theta = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{y^2 + x^2}{xy} = \frac{r^2}{xy}$. Por otro lado, $\sec\theta\csc\theta = \left(\frac{r}{x}\right)\left(\frac{r}{y}\right) = \frac{r^2}{xy}$.

Por lo tanto, $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta\csc\theta$.

7. $\sec\theta - \cos\theta = \frac{r}{x} - \frac{x}{r} = \frac{r^2 - x^2}{xr} = \frac{x^2 + y^2 - x^2}{xr} = \frac{y^2}{xr}$. Por otro lado, $\tan\theta\operatorname{sen}\theta = \left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{y}{r}\right) = \frac{y^2}{xr}$.

Por lo tanto, $\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta\operatorname{sen}\theta$.

2.10 Practica lo aprendido

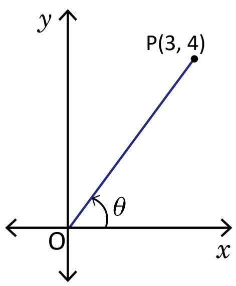
1. Dibuja cada ángulo.

a) $530°$ b) $780°$ c) $855°$

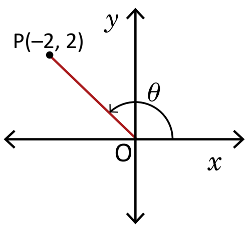
d) $-1\,360°$ e) $-1\,210°$ f) $-630°$

2. Determina las razones trigonométricas seno, coseno y tangente para cada ángulo.

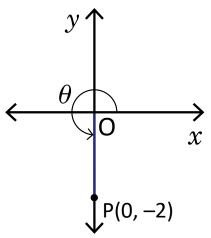
a)



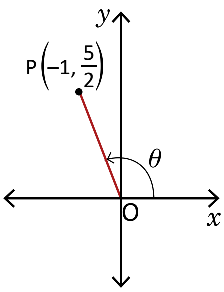
b)



c)



d)



3. Represente los valores de las razones trigonométricas en términos de los valores de sen θ, cos θ y tan θ, donde $0 \leq \theta < 90°$.

a) $165°$ b) $855°$ c) $2\,385°$

d) $-140°$ e) $-840°$ f) $-2\,190°$

4. Calcula el valor de θ en cada caso, donde $0° \leq \theta < 360°$.

a) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\tan\theta = 1$ c) $\operatorname{sen}\theta = -\frac{7}{9}$

5. Determina sen θ si $\cos\theta = \frac{5}{6}$ y θ no está en el cuadrante I.

6. Determina sen θ y cos θ si $\tan\theta = -\frac{1}{3}$ y θ está en el cuadrante II.

7. Demuestra que $\sec^2\theta + \csc^2\theta = \sec^2\theta\csc^2\theta$.

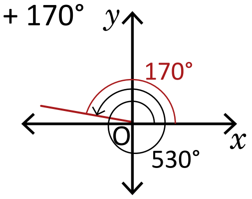
8. Demuestra que $(\tan\theta + \cot\theta)\tan\theta = \sec^2\theta$.

Indicador de logro:

2.10 Resuelve problemas correspondientes al cálculo de razones trigonométricas de ángulos no agudos.

Solución de problemas:

1a) $530° = 360° + 170°$



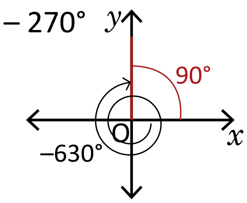
1b) $780° = 360°(2) + 60°$.

1c) $855° = 360°(2) + 135°$.

1d) $-1\,360° = -360°(3) - 280°$.

1e) $-1\,210° = -360°(3) - 130°$.

1f) $-630° = -360° - 270°$



2a) $r = \sqrt{9 + 16} = 5$, por lo tanto,

$\text{sen}\ \theta = \frac{y}{r} = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{5}$ y $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{3}$.

2b) $r = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$, por lo tanto,

$\text{sen}\ \theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\tan\theta = \frac{2}{-2} = -1$.

2c) $r = 2$, por lo tanto, $\text{sen}\ \theta = \frac{-2}{2} = -1$, $\cos\theta = \frac{0}{2} = 0$

y $\tan\theta$ no está definida.

2d) $r = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{29}{4}} = \frac{\sqrt{29}}{2}$, por lo tanto,

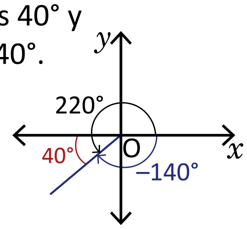
$\text{sen}\ \theta = \frac{5\sqrt{29}}{29}$, $\cos\theta = -\frac{2\sqrt{29}}{29}$ y $\tan\theta = -\frac{5}{2}$.

3a) sen 165° = sen 15°, cos 165° = – cos 15° y tan 165° = – tan 15°

3b) sen 855° = sen 135° = sen 45°, cos 855° = cos 135° = – cos 45°, tan 855° = tan 135° = – tan 45°

3c) sen 2 385° = sen 225° = – sen 45°, cos 2 385° = cos 225° = – cos 45° y tan 2 385° = tan 225° = tan 45°

3d) sen(–140°) = – sen 40°,
cos(–140°) = – cos 40° y
tan(–140°) = tan 40°.

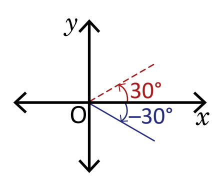


3e) – 840° = – 360°(2) – 120° = – 360°(3) + 240°

El ángulo de referencia de 240° es 240° – 180° = 60°.
Entonces

sen(–840°) = sen 240° = – sen 60°,
cos(–840°) = cos 240° = – cos 60° y
tan(–840°) = sen 240° = tan 60°.

3f) –2 190° = –360°(6) – 30°. El ángulo de referencia de – 30° se obtiene reflejándolo con respecto al eje x. El signo del seno y la tangente es negativo y el del coseno es positivo. Entonces, sen(–30°) = – sen 30°, cos(–30°) = cos 30° y tan(–30°) = – tan 30°.



4a) El coseno es negativo en el segundo y tercer cuadrante. Entonces

$$\theta = 180° - \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 180° - 30° = 150° \text{ o bien } \theta = 180° + \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 180° + 30° = 210°.$$

4b) La tangente es positiva en el primer y tercer cuadrante; además, tan 45° = 1, entonces

$$\theta = \tan^{-1}(1) = 45° \text{ o bien } \theta = 180° + \tan^{-1}(1) = 180° + 45° = 225°.$$

4c) $\theta = 180° + \text{sen}^{-1}\left(\frac{7}{9}\right) \approx 231.1°$ o bien $\theta = 360° - \text{sen}^{-1}\left(\frac{7}{9}\right) \approx 308.9°$.

5. $\text{sen}\ \theta = -\sqrt{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = -\frac{\sqrt{11}}{6}$

6. $\text{sen}\ \theta = \frac{\sqrt{10}}{10}$ y $\cos\theta = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$

7. $\sec^2\theta + \csc^2\theta = \frac{r^2}{x^2} + \frac{r^2}{y^2} = \frac{r^2y^2 + r^2x^2}{x^2y^2} = \frac{r^2(y^2 + x^2)}{x^2y^2} = \frac{r^4}{x^2y^2}$.

Por otra parte, $\sec^2\theta\csc^2\theta = \left(\frac{r^2}{x^2}\right)\left(\frac{r^2}{y^2}\right) = \frac{r^4}{x^2y^2}$. Por lo tanto, $\sec^2\theta + \csc^2\theta = \sec^2\theta\csc^2\theta$.

8. $(\tan\theta + \cot\theta)\tan\theta = \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right)\frac{y}{x} = \frac{r^2}{x^2}$. Por otra parte, $\sec^2\theta = \frac{r^2}{x^2}$. Por lo tanto, $(\tan\theta + \cot\theta)\tan\theta = \sec^2\theta$.

3.1 Área de un triángulo

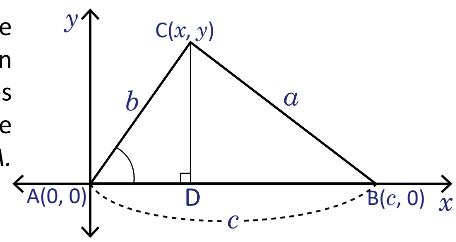
Problema inicial

Del triángulo ABC se conocen las medidas de los lados AC = b y AB = c, y la medida del ángulo A. Determina una fórmula para calcular el área del triángulo utilizando razones trigonométricas.

> Recuerda que en un triángulo suele referirse a los ángulos de acuerdo a las etiquetas de los vértices.

Solución

Se ubica el triángulo ABC sobre el plano cartesiano de modo que A(0, 0) y B(c, 0), con $c > 0$, y C(x, y), con $y > 0$. Como el área de un triángulo es igual a la mitad del producto de la base y la altura, es necesario calcular la longitud de la altura, la cual se corresponde con el valor de la coordenada en y del punto C; es decir, $y = b\text{sen } A$.



Ahora, la base es AB = c, entonces,

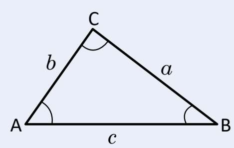
$$\text{Área del } \Delta\text{ABC} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{(\text{AB})(y)}{2} = \frac{c(b\text{sen } A)}{2} = \frac{bc\text{sen } A}{2}.$$

Teorema

Se denota por (ABC) el área de un triángulo ABC. Si se conocen las medidas de dos de los lados de un triángulo y el ángulo entre ellos, entonces puede calcularse el área utilizando trigonometría, de modo que

$$(\text{ABC}) = \frac{ab\text{sen } C}{2} = \frac{bc\text{sen } A}{2} = \frac{ca\text{sen } B}{2}.$$

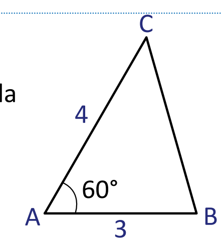
En adelante, se utilizará la notación
$(\text{ABC}) = \frac{1}{2}ab\text{sen } C = \frac{1}{2}bc\text{sen } A = \frac{1}{2}ca\text{sen } B.$



> Un triángulo posee tres alturas, que son aquellos segmentos de recta que parten de un vértice y cortan perpendicularmente al lado opuesto.

Ejemplo 1

Calcula el área del triángulo ABC que muestra la figura.



Como el ángulo conocido está entre los lados conocidos, se puede aplicar la fórmula del área directamente. Entonces,

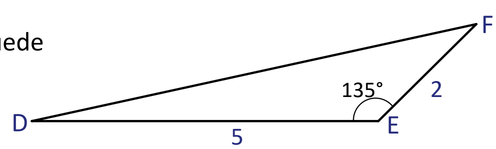
$$(\text{ABC}) = \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{4})(3)\text{sen } 60° = (2)(3)\text{sen } 60° = (\cancel{2})(3)\left(\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right) = 3\sqrt{3}.$$

Ejemplo 2

Determina el área del triángulo DEF que muestra la figura.

Como el ángulo conocido está entre los lados conocidos, se puede aplicar la fórmula del área directamente. Entonces,

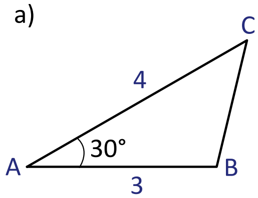
$$(\text{DEF}) = \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2})(5)\text{sen } 135° = 5\text{sen } 135° = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$



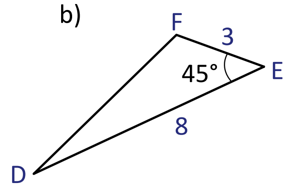
Problemas

1. Calcula el área de cada uno de los triángulos siguientes.

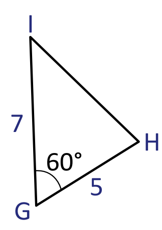
a)



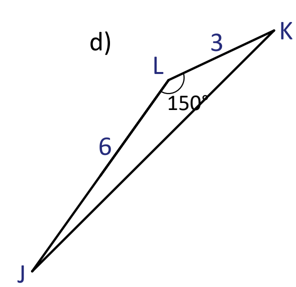
b)



c)



d)



2. Deduce la fórmula del área del triángulo ABC, del Problema inicial, si C tiene coordenadas (x, y), con $x < 0$ y $y > 0$.

Unidad 5

Indicador de logro:

3.1 Calcula el área de un triángulo oblicuángulo utilizando trigonometría.

Secuencia:

En la lección anterior se calcularon razones trigonométricas de ángulos no agudos, se utilizaron ángulos de referencia para escribir una razón en términos de ángulos agudos, y se calcularon ángulos si se conocían algunos datos trigonométricos de estos. En esta lección se utilizan las razones trigonométricas para resolver triángulos oblicuángulos mediante la ley de los senos y del coseno.

Propósito:

Deducir la fórmula para calcular el área de un triángulo mediante el uso de la trigonometría. Esta fórmula puede utilizarse únicamente si se conocen la medida de dos lados y del ángulo comprendido entre ellos.

Solución de problemas:

1a) (ABC) = $\frac{1}{\cancel{2}}(\overset{2}{\cancel{4}})(3)\text{sen } 30° = (2)(3)\text{sen } 30° = (\cancel{2})(3)\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) = 3$.

1b) (DEF) = $\frac{1}{\cancel{2}}(\overset{4}{\cancel{8}})(3)\text{sen } 45° = (4)(3)\text{sen } 45° = (\overset{2}{\cancel{4}})(3)\left(\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right) = 6\sqrt{2}$.

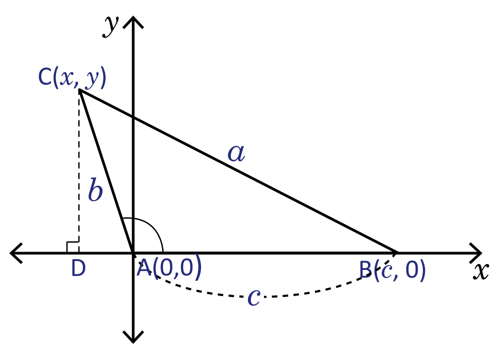
1c) (GHI) = $\frac{1}{2}(5)(7)\text{sen } 60° = \frac{1}{2}(35) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{35\sqrt{3}}{4}$.

Es recomendable dejar expresada la respuesta con los radicales o en fracción, sin embargo, en decimales también es válida.

1d) (JKL) = $\frac{1}{\cancel{2}}(3)(\overset{3}{\cancel{6}})\text{sen } 150° = 9 \text{ sen } 150° = 9\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2} = 4.5$.

Las medidas no tienen unidades, por lo que en la respuesta final no debe llevarlas.

2. Si $x < 0$ y $y > 0$ en C(x, y), entonces el punto queda ubicado en el segundo cuadrante y por tanto, el ángulo A es mayor que 90°. Observe la figura de la derecha.



La altura es y. El seno del ángulo BAC (el ángulo interno A del triángulo ABC) es igual al seno del ángulo DAC, que es igual a $\frac{\text{CD}}{b}$. Es decir, y = CD = b sen A.

La base del triángulo ABC es AB = c, entonces,

$$\text{Área del } \Delta\text{ABC} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{(\text{AB})(y)}{2} = \frac{c(b\text{sen } A)}{2} = \frac{bc\text{sen } A}{2}.$$

3.2 Ley de los senos*

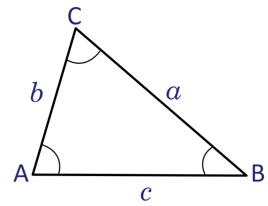
Problema inicial

Demuestra que en cualquier triángulo ABC se cumple que $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$.

Solución

Si se calcula el área del triángulo, se tienen tres maneras: $\frac{1}{2}ab\text{sen } C$, $\frac{1}{2}bc\text{sen } A$ y $\frac{1}{2}ca\text{sen } B$.
Pero el área es igual, no importa cómo se calcule, por lo tanto

$$\frac{1}{2}ab\text{sen } C = \frac{1}{2}bc\text{sen } A = \frac{1}{2}ca\text{sen } B.$$



Multiplicando por 2,

$$bc\text{sen } A = ac\text{sen } B = ab\text{sen } C,$$

dividiendo entre abc

$$\frac{bc\text{sen } A}{abc} = \frac{ac\text{sen } B}{abc} = \frac{ab\text{sen } C}{abc} \Rightarrow \frac{\cancel{b}\cancel{c}\text{sen } A}{a\cancel{b}\cancel{c}} = \frac{\cancel{a}\cancel{c}\text{sen } B}{\cancel{a}b\cancel{c}} = \frac{\cancel{a}\cancel{b}\text{sen } C}{\cancel{a}\cancel{b}c},$$

$$\Rightarrow \frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c}, \qquad \text{------------------ (1)}$$

sacando los recíprocos $\Rightarrow \frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$.

> Observa que las razones en la proporción relacionan el lado y el seno del ángulo opuesto a este.

Teorema (Ley de los senos)

En un triángulo ABC, se cumple que $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$.

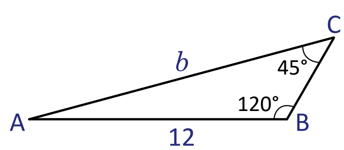
Como las igualdades anteriores son equivalentes a las igualdades en (1), se puede utilizar cualquiera de las dos indistintamente, según sea la necesidad.

Ejemplo

En un triángulo ABC calcula el valor de b si $c = 12$, $B = 120°$ y $C = 45°$.

Se dibuja el triángulo ABC y se ubican los datos. Aplicando el ley de los senos, se tiene

$$\frac{b}{\text{sen } 120°} = \frac{12}{\text{sen } 45°} \Rightarrow b = \frac{12\text{sen } 120°}{\text{sen } 45°} = 12\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \div \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{12\sqrt{3}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{12\sqrt{6}}{2}$$
$$= 6\sqrt{6}.$$



Por lo tanto, $b = 6\sqrt{6}$.

Problemas

Calcula los valores que se piden para el triángulo ABC.

a) El valor de b si $a = 3$, $A = 30°$ y $B = 45°$.

b) El valor de b si $a = 9$, $A = 60°$ y $B = 45°$.

c) El valor de c si $a = 6$, $A = 30°$ y $C = 135°$.

d) El valor de b si $c = 8$, $B = 55°$ y $C = 100°$.

e) El valor de c si $a = 6$, $A = 60°$ y $B = 75°$.

Indicador de logro:

3.2 Calcula la medida de un lado de un triángulo conocidas las medidas de dos ángulos y un lado opuesto a uno de estos ángulos, aplicando la ley de los senos.

Secuencia:

Se inicia la parte del cálculo de medidas de ángulos o lados de triángulos no necesariamente rectángulos. Se introduce la ley de los senos, deduciéndola para luego utilizarla en el cálculo de un lado del triángulo si se conocen dos ángulos y un lado opuesto a uno de estos ángulos.
La deducción de la ley de los senos se hace utilizando la fórmula para calcular el área de un triángulo vista en la Clase 3.1.
Esta clase debe tener más apoyo por parte del docente.

Propósito:

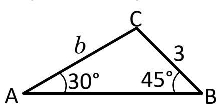
Establecer herramientas para el cálculo de medidas de lados y ángulos de cualquier triángulo, al conocerse algunas de sus medidas. Para los ángulos especiales, no es necesaria la calculadora.

Posibles dificultades:

Identificar el lado opuesto de un ángulo; las razones trigonométricas de ángulos especiales; puede consultarse la tabla del Problema 1 de la Clase 2.6 de esta unidad.

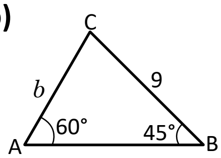
Solución de problemas:

a) Como se conocen dos ángulos, un lado opuesto a uno de estos y el lado que se desea calcular es opuesto al otro, puede aplicarse la ley de los senos.



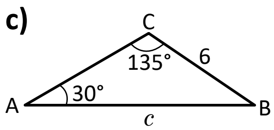
$$\frac{b}{\text{sen } 45°} = \frac{3}{\text{sen } 30°} \Rightarrow b = \frac{3 \text{ sen } 45°}{\text{sen } 30°} = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \div \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{\cancel{2}} \times \cancel{2} = 3\sqrt{2}$$

b)



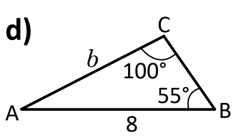
$$\frac{b}{\text{sen } 45°} = \frac{9}{\text{sen } 60°} \Rightarrow b = \frac{9 \text{ sen } 45°}{\text{sen } 60°} = 9\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}} = 9\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \overset{3}{\cancel{9}}\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 3\sqrt{6}$$

c)



$$\frac{c}{\text{sen } 135°} = \frac{6}{\text{sen } 30°} \Rightarrow c = \frac{6 \text{ sen } 135°}{\text{sen } 30°} = \overset{3}{\cancel{6}}\left(\frac{\sqrt{2}}{\underset{1}{\cancel{2}}}\right) \div \frac{1}{2} = 3\sqrt{2} \times 2 = 6\sqrt{2}$$

d)



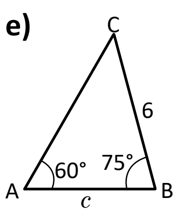
$$\frac{b}{\text{sen } 55°} = \frac{8}{\text{sen } 100°} \Rightarrow b = \frac{8 \text{ sen } 55°}{\text{sen } 100°} \approx 6.7$$

Pantalla de la calculadora

```
8sin 55÷sin 10
          6.65431028
```

No es necesario dibujar el triángulo de manera exacta. El objetivo de hacer el dibujo y ubicar los datos es para ayuda visual y para identificar la forma en que hay que aplicar la ley de los senos.

e)



En este caso no puede aplicarse la ley de los senos directamente, ya que no se conoce el ángulo opuesto del lado c. Sin embargo, puede calcularse ya que se conocen dos ángulos. Así,

$$C = 180° - 60° - 75° = 45°.$$

En este punto, puede aplicarse la ley de los senos. Entonces,

$$\frac{c}{\text{sen } 45°} = \frac{6}{\text{sen } 60°} \Rightarrow c = \frac{6 \text{ sen } 45°}{\text{sen } 60°} = \overset{3}{\cancel{6}}\left(\frac{\sqrt{2}}{\underset{1}{\cancel{2}}}\right) \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \overset{2}{\cancel{6}}\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 2\sqrt{6}.$$

3.3 Cálculo del ángulo de un triángulo conocidos dos lados y un ángulo, parte 1

Problema inicial

En cada uno de los siguientes casos, determina si puede construirse el triángulo y en caso afirmativo, calcula la medida del ángulo pedido.

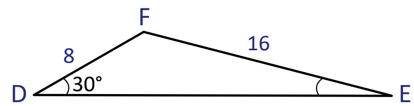
a) En el ΔDEF, d = 16, e = 8 y D = 30°. Calcula la medida del ángulo E.

b) En el ΔMNP, n = 20, p = 8 y P = 30°. Calcula la medida del ángulo N.

Solución

a) Se dibuja el triángulo DEF y se colocan los datos conocidos. Como se conocen dos lados y un ángulo opuesto a uno de estos se aplica la ley de los senos. Por comodidad, se utilizará (1) de la clase 3.2.

$$\frac{\text{sen } E}{8} = \frac{\text{sen } 30°}{16} \quad \Rightarrow \quad \text{sen } E = \frac{8 \text{sen } 30°}{16} = \frac{\cancel{8}\text{sen } 30°}{\cancel{16}} = \frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{4}.$$



Cuando sen $E = \frac{1}{4}$ se tiene que $E \approx 14.5°$ o bien $E \approx 180° - 14.5° = 165.5°$.

Se sabe que en un triángulo $D + E + F = 180°$. Es necesario comprobar que los valores de E encontrados tienen sentido.

Puede revisarse la clase 2.7 de esta unidad para ver por qué el ángulo E puede tener dos valores.

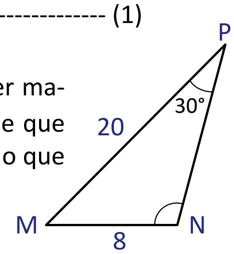
Para $E \approx 14.5°$ se tiene que $D + E \approx 30° + 14.5° = 44.5° < 180°$, por lo tanto $E \approx 14.5°$.

Para $E \approx 165.5°$ se tiene que $D + E \approx 30° + 165.5 = 195.5° > 180°$. Por lo tanto, E no puede tener un valor de 165.5°.

Luego, con los datos proporcionados puede construirse un solo triángulo y $E \approx 14.5°$.

b) Aplicando la ley de los senos se tiene que:

$$\frac{8}{\text{sen } 30°} = \frac{20}{\text{sen } N} \quad \Rightarrow \quad \text{sen } N = \frac{20 \text{ sen } 30°}{8} = \frac{\cancel{20} \text{ sen } 30°}{\cancel{8}} = 5\left(\frac{1}{2}\right) \div 2 = \frac{5}{4} \qquad \text{------------------ (1)}$$



Para sen $\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ se establecerá que esta razón trigonométrica no puede ser mayor que 1 o menor que –1. Para cualesquiera números reales x y y puede verse que $y^2 \leq x^2 + y^2$ (a un número positivo se le está sumando un número positivo). Por lo que $-\sqrt{x^2 + y^2} \leq y \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, al dividir todo entre $\sqrt{x^2 + y^2}$ se obtiene

$$-1 \leq \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 1, \text{ es decir, } -1 \leq \text{sen } \theta \leq 1.$$

Luego, de (1), como sen $N = \frac{5}{4} > 1$, no hay ángulo que cumpla esta condición ya que el seno no puede ser mayor a 1, y por lo tanto no puede construirse un triángulo con las medidas dadas.

Conclusión

Si se conocen las medidas de dos lados y un ángulo opuesto a uno de los lados conocidos, entonces puede determinarse si el triángulo puede construirse mediante la aplicación de la ley de los senos. Además, pueden calcularse todos los ángulos del triángulo mediante la aplicación de la misma.

Problemas

Determina cuántos triángulos ABC pueden construirse en cada caso, calcula además la medida del ángulo pedido de ser posible.

a) $b = 2$, $c = \sqrt{2}$ y $B = 45°$. Calcula C.

b) $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2}$ y $A = 120°$. Calcula B.

c) $b = 3$, $c = \sqrt{2}$ y $C = 150°$. Calcula B.

d) $b = 6$, $c = \sqrt{3}$ y $C = 135°$. Calcula B.

Indicador de logro:

3.3 Calcula la medida de un ángulo de un triángulo conocidos dos lados y un ángulo opuesto a uno de estos lados, aplicando la ley de los senos.

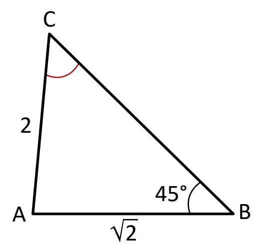
Secuencia:

En esta clase se continúa con la aplicación de la ley de los senos. En esta ocasión, se calcula un ángulo si se conocen dos lados, un ángulo opuesto y el ángulo a calcular es opuesto a uno de los lados conocidos. Por otra parte, es posible que con los datos conocidos, el triángulo no pueda construirse; la forma de determinar si se puede construir es observando si el valor del seno del ángulo a determinar es menor o igual que 1, y si ese es el caso, se debe verificar que el ángulo cumpla la condición de la suma de los ángulos internos de un triángulo.

Solución de problemas:

a) Al dibujar el triángulo y ubicar los datos se observa que se conocen dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos. Además, el ángulo a calcular es opuesto al otro lado conocido, por lo tanto, se puede aplicar la ley de los senos:

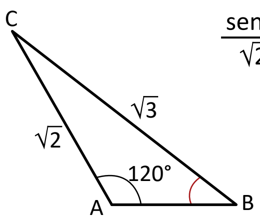
$$\frac{\text{sen } C}{\sqrt{2}} = \frac{\text{sen } 45°}{2} \Rightarrow \text{sen } C = \frac{\sqrt{2}\text{ sen } 45°}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$



Luego, el seno es igual a $\frac{1}{2}$ en 30°, por lo tanto, $C = 30°$ o bien $C = 180° - 30° = 150°$.

Si $C = 30°$ entonces $B + C = 75° < 180°$. Si $C = 150°$ entonces $B + C = 195° > 180°$, que es imposible, ya que $A + B + C = 180°$. Por lo tanto, puede construirse un triángulo con $C = 30°$.

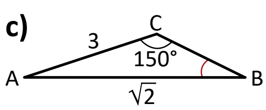
b)



$$\frac{\text{sen } B}{\sqrt{2}} = \frac{\text{sen } 120°}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{sen } B = \frac{\sqrt{2}\text{ sen } 120°}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}\left(\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2}\right) \times \frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Es decir, $B = 45°$ o bien $B = 180° - 45° = 135°$. Claramente B no puede ser 135° ($A + B > 180°$). Por lo tanto, con $B = 45°$ puede construirse un triángulo.

c)



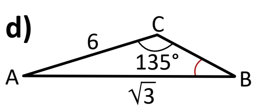
$$\frac{\text{sen } B}{3} = \frac{\text{sen } 150°}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{sen } B = \frac{3\text{ sen } 150°}{\sqrt{2}} = 3\,\frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} > 1.$$

Por lo tanto, el triángulo no puede construirse.

Una fracción es mayor que 1 si su numerador es mayor que el denominador.

Como $(3\sqrt{2})^2 > 4^2$ se tiene que $3\sqrt{2} > 4$. Por tanto, $\frac{3\sqrt{2}}{4} > 1$.

d)



$$\frac{\text{sen } B}{6} = \frac{\text{sen } 135°}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{sen } B = \frac{6\text{ sen } 135°}{\sqrt{3}}$$

$$= \cancel{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right) \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \cancel{3}\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{\cancel{3}}$$

$$= \sqrt{6} > 1.$$

Por lo tanto, el triángulo no puede construirse.

No es necesario construir el triángulo de manera exacta. Para el caso del literal c, el triángulo no se puede construir, pero sí se puede hacer el dibujo como un supuesto con el objetivo de que sirva de guía para aplicar correctamente la ley de los senos.

3.4 Cálculo del ángulo de un triángulo conocidos dos lados y un ángulo, parte 2

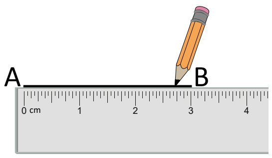
Problema inicial

Del triángulo ABC se sabe que a = 2 cm, c = 3 cm y A = 30°. Construye el triángulo y calcula la medida del ángulo C.

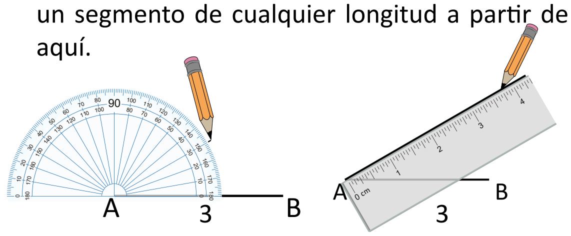
Solución

Puede construirse primero el triángulo de manera exacta como sigue:

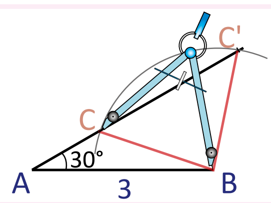
1. Trazar un segmento de longitud 3 cm. Se denota A el extremo inicial y B el extremo final.



2. Con vértice en A trazar un ángulo de 30° y trazar un segmento de cualquier longitud a partir de aquí.



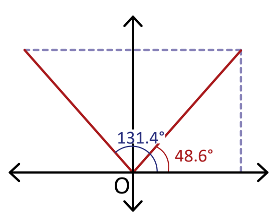
3. Con el compás, medir una amplitud de 2 cm y haciendo centro en B trazar un arco de circunferencia hasta cortar al segmento trazado en el Paso 2. En este paso, se determinan dos cortes, por lo que con las medidas proporcionadas pueden dibujarse dos triángulos.



Para calcular el valor del ángulo C, nótese que se conocen dos lados del triángulo y el ángulo conocido es opuesto a un lado conocido, por lo tanto puede aplicarse la ley de los senos:

$$\frac{2}{\operatorname{sen} 30°} = \frac{3}{\operatorname{sen} C} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} C = \frac{3 \operatorname{sen} 30°}{2} = 3\left(\frac{1}{2}\right) \div 2 = \frac{3}{4}.$$

Cuando sen $C = \frac{3}{4}$ se tiene que $C \approx 48.6°$ o bien $C \approx 180° - 48.6° = 131.4°$.



Hay que comprobar que ambos valores de C son válidos.

- Si $C \approx 48.6°$ se tiene que $A + C \approx 30° + 48.6° = 78.6° < 180°$.
- Si $C \approx 131.4°$ se tiene que $A + C \approx 30° + 131.4° = 161.4° < 180°$.

Luego, el valor del ángulo C con los datos dados puede ser aproximadamente 48.6° o 161.4°.

Conclusión

Si se conocen dos lados de un triángulo y un ángulo opuesto a uno de estos lados, en algunos casos, pueden construirse dos triángulos con dichas medidas. A este caso se le llama **caso ambiguo**.

Problemas

Para cada caso, determina cuántos triángulos pueden construirse con las medidas dadas, y calcula el ángulo pedido de ser posible.

a) a = 3, b = 4 y A = 30°. Calcula B.

b) a = 2, c = 1 y C = 20°. Calcula A.

c) a = 4, b = 6 y B = 60°. Calcula A.

Indicador de logro:

3.4 Determina el número de triángulos que pueden construirse cuando se conocen las medidas de dos lados y un ángulo opuesto a uno de estos.

Secuencia:

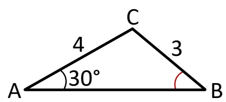
Luego de haber establecido la condición para que el seno de un ángulo exista, se calculan medidas de ángulos utilizando la ley de los senos. En este caso, puede obtenerse más de un triángulo.

Propósito:

Continuar con el uso de la ley de los senos para determinar ángulos de triángulos, e incluir el caso cuando se pueden construir dos triángulos conociendo dos lados y un ángulo opuesto a estos.

Solución de problemas:

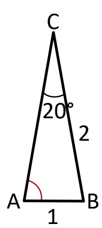
a)



$$\frac{\text{sen } B}{4} = \frac{\text{sen } 30°}{3} \Rightarrow \text{sen } B = \frac{4 \text{ sen } 30°}{3} = \cancel{4}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Entonces $B \approx 41.8°$ o bien $B \approx 180° - 41.8° = 138.2°$. Para cualquiera de estos dos valores, $A + B$ resulta ser menor que 180°. Por lo tanto, pueden construirse dos triángulos, uno con $B \approx 41.8°$ y otro con $B \approx 138.2°$.

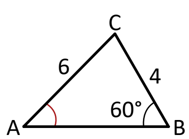
b)



$$\frac{\text{sen } A}{2} = \frac{\text{sen } 20°}{1} \Rightarrow \text{sen } A = 2 \text{ sen } 20° \Rightarrow A \approx 43.2° \text{ o bien } A \approx 180° - 43.2° = 136.8°.$$

Para ambos valores de A, el triángulo puede construirse (si $A \approx 43.2°$, $A + C \approx 63.2°$; si $A \approx 136.8°$, $A + C \approx 156.8°$). Por lo tanto, pueden construirse dos triángulos.

c)



$$\frac{\text{sen } A}{4} = \frac{\text{sen } 60°}{6} \Rightarrow \text{sen } A = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \text{ sen } 60°}{\underset{3}{\cancel{6}}} = \cancel{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\Rightarrow A = \text{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 35.3° \text{ o bien } A \approx 180° - 35.3° = 144.7°.$$

Se observa que para $A \approx 144.7°$ se obtiene que $A + B > 180°$. Por lo tanto, solo puede construirse un triángulo con $A \approx 35.3°$.

Fe de errata: En la solución los valores posibles para el ángulo C son 48.6° y 131.4°

Lección 3

3.5 Ley del coseno*

Problema inicial

Demuestra que en cualquier triángulo ABC se cumple que:

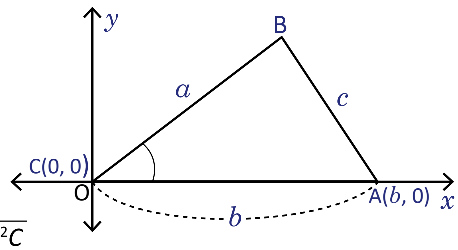
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Solución

Se ubica el triángulo ABC en el plano cartesiano de modo que A(b, 0) y C(0, 0).

Si (p, q) son las coordenadas del punto B, entonces

$$\cos C = \frac{p}{a} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} C = \frac{q}{a}.$$



Por lo que $p = a\cos C$ y $q = a\operatorname{sen} C$.

Ahora, la distancia del punto A al punto B es

$$\begin{aligned} d(\text{A, B}) &= \sqrt{(b - a\cos C)^2 + (0 - a\operatorname{sen} C)^2} \\ &= \sqrt{b^2 - 2ab\cos C + a^2\cos^2 C + a^2\operatorname{sen}^2 C} \\ &= \sqrt{a^2(\operatorname{sen}^2 C + \cos^2 C) + b^2 - 2ab\cos C} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}. \end{aligned}$$

Pero la distancia de A a B es la longitud del lado AB del triángulo, que es c. Entonces,

$$d(\text{A, B}) = c \ \Rightarrow \ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Teorema (Ley del coseno)

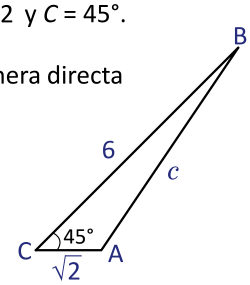
En un triángulo ABC se cumple que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

De igual forma se satisface que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B.$$

Ejemplo

Determina la medida del tercer lado de un triángulo ABC si se sabe que $a = 6$, $b = \sqrt{2}$ y $C = 45°$.



Dibujando el triángulo y ubicando los datos se observa que se puede aplicar de manera directa la ley del coseno. Así,

$$\begin{aligned} c^2 &= 6^2 + (\sqrt{2})^2 - 2(6)(\sqrt{2})\cos 45° \\ &= 36 + 2 - \cancel{12}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right) \\ &= 38 - 6(2) = 38 - 12 = 26. \end{aligned}$$

Como $c > 0$, se tiene que $c = \sqrt{26}$.

Problemas

Para cada caso, calcula la medida del tercer lado del triángulo.

a) En el ΔABC, $a = \sqrt{3}$, $b = 5$ y $C = 30°$.

b) En el ΔABC, $b = 6$, $c = 4$ y $A = 120°$.

c) En el ΔABC, $a = 9$, $c = 9\sqrt{3}$ y $B = 150°$.

d) En el ΔABC, $a = b = 4$ y $C = 60°$.

e) En el ΔABC, $a = \sqrt{2}$, $c = 2$ y $B = 135°$.

Indicador de logro:

3.5 Encuentra la medida de un lado de un triángulo si se conocen las medidas de dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, aplicando la ley del coseno.

Secuencia:

Se deduce la ley del coseno para luego calcular la medida de un lado de un triángulo si se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos. Si el estudiante tiene muchas dificultades para resolver el Problema inicial, el docente deberá brindar más apoyo.

Propósito:

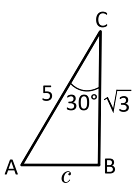
Proporcionar otra herramienta para calcular medidas de lados y ángulos de triángulos oblicuángulos. El Ejemplo tiene como objetivo mostrar la forma de utilizar la ley del coseno de manera directa.

Posibles dificultades:

Identificar la forma de aplicar la ley del coseno.

Solución de problemas:

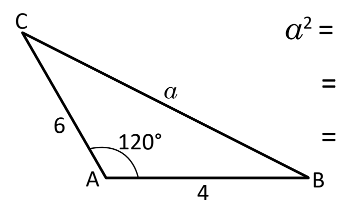
a)



$$\begin{aligned} c^2 &= (\sqrt{3})^2 + 5^2 - 2(\sqrt{3})(5)\cos 30° \\ &= 3 + 25 - \cancel{2}\sqrt{3}(5)\left(\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right) \\ &= 28 - 15 = 13 \end{aligned}$$

Como $c > 0$, se tiene que $c = \sqrt{13}$.

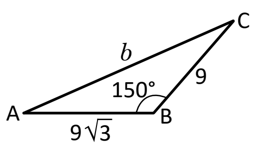
b)



$$\begin{aligned} a^2 &= 6^2 + 4^2 - 2(6)(4)\cos 120° \\ &= 52 - \cancel{2}(24)\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right) \\ &= 76 \end{aligned}$$

Como $a > 0$, se tiene que $a = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$.

c)



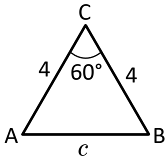
$$\begin{aligned} b^2 &= 9^2 + (9\sqrt{3})^2 - 2(9)(9\sqrt{3})\cos 150° \\ &= 81 + 81(3) - \cancel{2}(81\sqrt{3})\left(-\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right) \\ &= 324 + 81(3) = 567 \end{aligned}$$

Como $b > 0$, se tiene que $b = \sqrt{567} = 9\sqrt{7}$.

Son útiles algunas propiedades de divisibilidad cuando se descomponen números en factores primos. Por ejemplo, en la divisibilidad por 3 se tiene: un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
Así, 567 es divisible por 3 ya que $5 + 6 + 7 = 18$ es divisible por 3.

567	3
189	3
63	3
21	3
7	7
1	

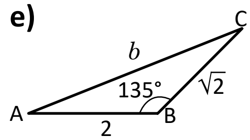
d)



$$\begin{aligned} c^2 &= 4^2 + 4^2 - 2(4)(4)\cos 60° \\ &= 32 - \cancel{2}(16)\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) \\ &= 16 \end{aligned}$$

Como $c > 0$, se tiene que $c = \sqrt{16} = 4$.

e)



$$\begin{aligned} b^2 &= (\sqrt{2})^2 + 2^2 - 2(\sqrt{2})(2)\cos 135° \\ &= 6 - 2(\sqrt{2})(\cancel{2})\left(-\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right) \\ &= 6 + 4 = 10 \end{aligned}$$

Como $b > 0$, se tiene que $b = \sqrt{10}$.

No es necesario aproximar, además, los problemas no requieren del uso de la calculadora.

3.6 Cálculo de los ángulos de un triángulo conocidos sus tres lados

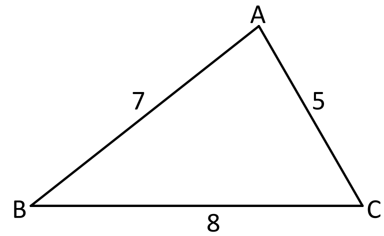
Problema inicial

Del triángulo ABC se sabe que $a = 8$, $b = 5$ y $c = 7$. Determina la medida de los tres ángulos del triángulo.

Solución

Se puede utilizar la ley del coseno para calcular un ángulo del triángulo. Utilizando $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$, entonces:

$$\begin{aligned} 7^2 &= 8^2 + 5^2 - 2(8)(5)\cos C \\ 2(8)(5)\cos C &= 8^2 + 5^2 - 7^2 \\ 80\cos C &= 64 + 25 - 49 \\ 80\cos C &= 40 \\ \cos C &= \frac{40}{80} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



Cuando $\cos C = \frac{1}{2}$ se tiene que $C = 60°$.

Para calcular otro ángulo se aplica nuevamente la ley del coseno

$$\begin{aligned} 5^2 &= 7^2 + 8^2 - 2(7)(8)\cos B \\ 2(7)(8)\cos B &= 8^2 + 7^2 - 5^2 \\ 112\cos B &= 64 + 49 - 25 \\ 112\cos B &= 88 \\ \cos B &= \frac{88}{112} = \frac{11}{14}. \end{aligned}$$

Cuando $\cos B = \frac{11}{14}$, $B \approx 38.2°$.

Luego, $A = 180° - B - C \approx 180° - 38.2° - 60° = 81.8°$.

Por lo tanto, $A \approx 81.8°$, $B \approx 38.2°$ y $C = 60°$.

Observa que para calcular el segundo ángulo también se puede utilizar la ley del seno.

$$\frac{7}{\text{sen } 60°} = \frac{5}{\text{sen } B} \quad \Rightarrow \quad \text{sen } B = \frac{5\text{sen } 60°}{7} = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \div 7 = \frac{5\sqrt{3}}{14}.$$

Cuando $\text{sen } B = \frac{5\sqrt{3}}{14}$, $B \approx 38.2°$ o bien $B \approx 180° - 38.2° = 141.8°$. Pero si $B \approx 141.8°$ entonces $B + C \approx 141.8° + 60° = 201.8°$, lo cual no puede ser en un triángulo. Por lo tanto $B \approx 38.2°$.
¿Por qué es preferible utilizar la ley del coseno?

Conclusión

Si se conocen las medidas de los tres lados de un triángulo pueden calcularse las medidas de sus tres ángulos mediante la ley del coseno.

Problemas

1. Para cada caso, determina la medida de los tres ángulos del triángulo si es posible.

   a) En el ΔABC, $a = \sqrt{3}$, $b = 1$ y $c = 2$

   b) En el ΔABC, $a = 1$, $b = \sqrt{2}$ y $c = \sqrt{5}$

   c) En el ΔABC, $a = 5$, $b = 3$ y $c = 7$

   d) En el ΔABC, $a = 6$, $b = 10$ y $c = 11$

   e) En el ΔABC, $a = \sqrt{3}$, $b = 12$ y $c = 9$

2. En el ΔABC expresa $\cos B$ en términos de los lados a, b y c.

Indicador de logro:

3.6 Calcula la medida de los ángulos de un triángulo si se conocen las medidas de sus tres lados.

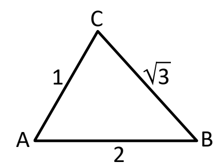
Secuencia:

Se continúa con el uso de la ley del coseno, en esta ocasión para calcular los ángulos de un triángulo si se conocen las medidas de sus tres lados.

Solución de problemas:

Para resolver estos problemas, puede elegirse cualesquiera de los tres ángulos y calcularlo con la ley del coseno, ya que se conocen las medidas de los tres lados del triángulo.

1a) Considerando $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$:



$$(\sqrt{3})^2 = 1^2 + 2^2 - 2(1)(2)\cos A \;\Rightarrow\; 4\cos A = 5 - 3 = 2 \;\Rightarrow\; \cos A = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; A = 60°.$$

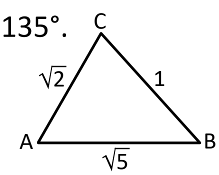
Para el cálculo de otro ángulo se considera $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$:

$$2^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 - 2(\sqrt{3})(1)\cos C \;\Rightarrow\; 2\sqrt{3}\cos C = 4 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; \cos C = 0 \;\Rightarrow\; C = 90°.$$

Luego, como $A = 60°$ y $C = 90°$ se tiene que $B = 180° - 60° - 90° = 30°$.

1b) Calculando el ángulo C:

$$(\sqrt{5})^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 - 2(1)(\sqrt{2})\cos C \;\Rightarrow\; 2\sqrt{2}\cos C = 3 - 5 = -2 \;\Rightarrow\; \cos C = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \;\Rightarrow\; C = 135°.$$

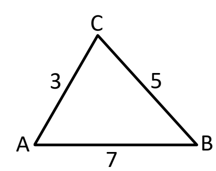


Calculando el ángulo B:

$$(\sqrt{2})^2 = (\sqrt{5})^2 + 1^2 - 2(\sqrt{5})(1)\cos B \;\Rightarrow\; 2\sqrt{5}\cos B = 4 \;\Rightarrow\; \cos B = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \;\Rightarrow\; B \approx 26.6°.$$

Luego, $A \approx 180° - 26.6° - 135° = 18.4°$.

1c) Calculando el ángulo A: $5^2 = 3^2 + 7^2 - 2(3)(7)\cos A \;\Rightarrow\; \cos A = \frac{33}{42} = \frac{11}{14} \;\Rightarrow\; A \approx 38.2°$.

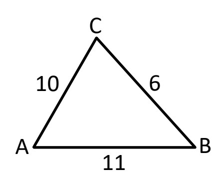


Calculando el ángulo C: $7^2 = 5^2 + 3^2 - 2(5)(3)\cos C \;\Rightarrow\; \cos C = -\frac{15}{30} = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; C = 120°$.

Luego, $B \approx 180° - 38.2° - 120° = 21.8°$.

No es necesario simplificar las fracciones cuando el cálculo del ángulo se hace con la calculadora.

1d) Calculando el ángulo B: $10^2 = 6^2 + 11^2 - 2(6)(11)\cos B \;\Rightarrow\; \cos B = \frac{19}{44} \;\Rightarrow\; B \approx 64.4°$.



Calculando el ángulo C: $11^2 = 6^2 + 10^2 - 2(6)(10)\cos C \;\Rightarrow\; \cos C = \frac{1}{8} \;\Rightarrow\; C \approx 82.8°$.

Luego, $A \approx 180° - 64.4° - 82.8° = 32.8°$.

1e) Calculando el ángulo A: $(\sqrt{3})^2 = 12^2 + 9^2 - 2(12)(9)\cos A \;\Rightarrow\; \cos C = \frac{37}{36} > 1$.

Por lo tanto, el triángulo no puede construirse.

2. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \;\Rightarrow\; 2ac\cos B = a^2 + c^2 - b^2 \;\Rightarrow\; \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

3.7 Practica lo aprendido

1. Calcula el área del triángulo ABC si se conocen los datos proporcionados en cada caso.

a) $a = 7$, $c = 4$ y $B = 45°$

b) $b = 10$, $c = 8$ y $A = 30°$

c) $a = 1$, $b = 2$ y $C = 45°$

d) $a = 4$, $b = 5$ y $C = 60°$

e) $a = 6$, $c = \sqrt{3}$ y $B = 120°$

2. En el triángulo ABC calcula el dato que se pide en cada caso, analizando si el resultado tiene sentido.

a) $b = 24$, $B = 38°$ y $C = 120°$. Calcula c.

b) $c = 10$, $A = 135°$ y $C = 30°$. Calcula a.

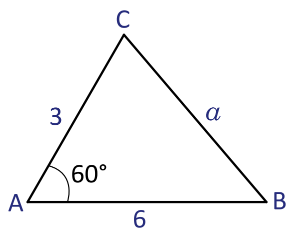
c) $a = 12$, $b = 16$ y $A = 45°$. Calcula el B.

d) $a = 3$, $b = 2$ y $B = 30°$. Calcula el A.

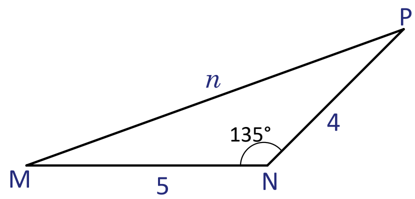
e) $b = 2$, $c = \sqrt{3}$ y $C = 120°$. Calcula el B.

3. Determina el valor del tercer lado en cada caso.

a)



b)

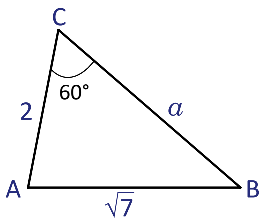


4. Calcula la medida de los tres ángulos del triángulo ABC para cada caso.

a) $a = 12$, $b = 7$ y $c = 6$

b) $a = 2$, $b = 3$ y $c = 4$

5. Determina la medida del tercer lado del triángulo ABC que muestra la figura.



Utiliza la ley del coseno y resuelve la ecuación cuadrática que resulta de ello.

6. Resuelve los siguientes triángulos, utilizando la ley de los senos y la ley del coseno.

a) $b = 21$, $A = 60°$, $B = 12°$

b) $a = 15$, $c = 7$, $B = 65°$

c) $a = 3$, $b = 2$, $c = 2$

d) $c = 3$, $B = 110°$, $C = 45°$

Resolver un triángulo significa encontrar todas las medidas de sus lados y ángulos.

Unidad 5

Indicador de logro:

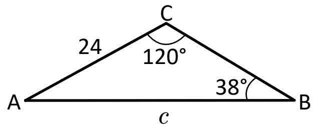
3.7 Resuelve problemas correspondientes a la resolución de triángulos oblicuángulos.

Solución de problemas:

1a) $(ABC) = \frac{1}{\cancel{2}}(\overset{2}{\cancel{4}})(7)\text{sen } 45°$
$= (\overset{1}{\cancel{2}})(7)\left(\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right) = 7\sqrt{2}$

1b) $(ABC) = 20$ **1c)** $(ABC) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **1d)** $(ABC) = 5\sqrt{3}$ **1e)** $(ABC) = \frac{9}{2}$

2a) Utilizando la ley de los senos:



$$\frac{c}{\text{sen } 120°} = \frac{24}{\text{sen } 38°}$$
$$\Rightarrow c = \frac{24 \text{ sen } 120°}{\text{sen } 38°} \approx 33.8.$$

2b) $a = 10\sqrt{2}$ **2c)** $B \approx 70.5°$ **2d)** $A \approx 48.6°$

2e) Al utilizar la ley de los senos, se obtiene que sen $B = 1$; es decir, $B = 90°$. Pero cuando $B = 90°$, $B + C = 210° > 180°$. Por lo tanto, el triángulo no puede construirse.

3a) $a^2 = 3^2 + 6^2 - 2(3)(6)\cos 60° = 9 + 36 - \cancel{2}(18)\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) = 45 - 18 = 27 \Rightarrow a = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

3b) $n^2 = 5^2 + 4^2 - 2(5)(4)\cos 135° = 41 + 20\sqrt{2} \Rightarrow n = \sqrt{41 + 20\sqrt{2}}$

4a) $12^2 = 7^2 + 6^2 - 2(7)(6)\cos A \Rightarrow \cos A = -\frac{59}{84} \Rightarrow A \approx 134.6°.$

$7^2 = 12^2 + 6^2 - 2(12)(6)\cos B \Rightarrow \cos B = \frac{131}{144} \Rightarrow B \approx 24.5°.$

Luego, $C \approx 180° - 134.6° - 24.5° = 20.9°.$

4b) $2^2 = 3^2 + 4^2 - 2(3)(4)\cos A \Rightarrow \cos A = \frac{7}{8} \Rightarrow A \approx 29°.$

$4^2 = 2^2 + 3^2 - 2(2)(3)\cos C \Rightarrow \cos C = -\frac{1}{4} \Rightarrow C \approx 104.5°.$

Luego, $B \approx 180° - 29° - 104.5° = 46.5°.$

5. $(\sqrt{7})^2 = a^2 + 2^2 - 2a(2)\cos 60° \Rightarrow 7 = a^2 + 4 - \cancel{2}(2a)\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow (a - 3)(a + 1) = 0$

Es decir, $a = 3$ o $a = -1$. Pero a representa una longitud, por lo tanto no puede ser negativa. Entonces $a = 3$.

6a) Se observa que C = 180° – 60° – 12° = 108°. Aplicando la ley de los senos se determina $a \approx 87.5$. Aplicando nuevamente la ley de los senos se determina que $c \approx 96.1$.

6b) Se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos. Se puede aplicar la ley del coseno y calcular el valor de b:

$$b^2 = 15^2 + 7^2 - 2(15)(7)\cos 65° = 274 - 210 \cos 65° \Rightarrow b \approx 13.6.$$

Utilizando ahora la ley del coseno para calcular el ángulo C:

$$7^2 \approx 15^2 + 13.6^2 - 2(15)(13.6)\cos C \Rightarrow \cos C = \frac{15^2 + 13.6^2 - 7^2}{2(15)(13.6)} \Rightarrow C \approx 27.8°.$$

Luego, $A \approx 180° - 65° - 27.8° = 87.2°$. Por tanto, $A \approx 87.2°$, $C \approx 27.8°$ y $b \approx 13.6°$.

6c) Utilizando la ley del coseno para calcular el valor de A se tiene que $A \approx 97.2°$. El triángulo es isósceles, entonces $C = B$ por lo que

$$A + B + C = 180° \Rightarrow A + B + B = 180° \Rightarrow 2B = 180° - A \Rightarrow B = \frac{180° - A}{2} \approx 41.4°.$$

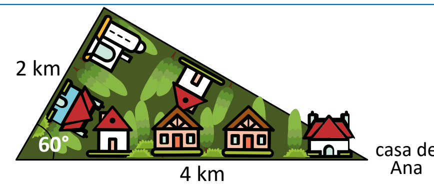
6d) Se observa que $A = 180° - 110° - 45° = 25°$. Luego, aplicando la ley de los senos se calcula el valor de b, obteniéndose $b \approx 4$. Aplicando nuevamente la ley de los senos se obtiene $a \approx 1.8$.

Lección 3

3.8 Aplicaciones de la ley de los senos y la ley del coseno

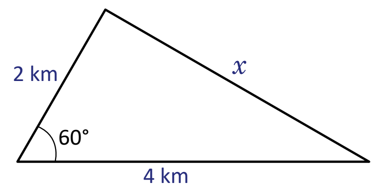
Problema inicial

Ana sale a correr cada mañana alrededor de su cuadra que tiene forma triangular. Primero recorre 4 km, luego 2 km y por último recorre la última calle para regresar a su casa. ¿Cuántos kilómetros corre Ana en total cada mañana si da una vuelta completa en su vecindario?



Solución

Para saber cuántos kilómetros corre Ana en total cada mañana, hay que encontrar la medida del tercer lado del vecindario. Como tiene forma triangular, se conocen dos lados y además el ángulo que se conoce es opuesto al lado que se desea calcular, se utiliza la ley del coseno.



$$x^2 = 4^2 + 2^2 - 2(4)(2)\cos 60° = 16 + 4 - 2(4)(\cancel{2})\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) = 20 - 8 = 12$$

Es decir, $x^2 = 12 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{12}$ o $x = -\sqrt{12}$.

Pero x representa una longitud por lo que no puede ser negativo. Entonces, $x \approx 3.5$ km. Luego, Ana corre cada mañana 4 km + 2 km + 3.5 km = 9.5 km, aproximadamente.

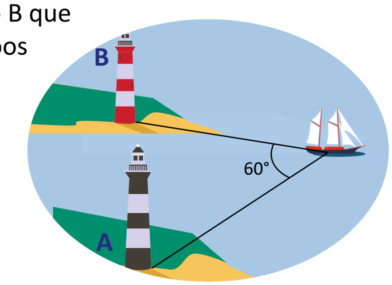
Conclusión

La ley de los senos y la ley del coseno pueden utilizarse para resolver problemas aplicados al entorno cuando dichos problemas involucren triángulos.

En algunos casos resulta útil aplicar la ley de los senos y en otras la ley del coseno, por ello es recomendable elaborar un dibujo y ubicar los datos conocidos y los datos que se desean calcular para identificar cuál de las dos leyes conviene utilizar.

Problemas

1. Un barco deja un faro A y navega 5 km. En este punto observa un faro B que está a 7 km del faro A. Si el ángulo entre las líneas de visión a ambos faros es de 60°, ¿a qué distancia está el bote del faro B?



2. Una casa tiene un patio en forma triangular y el dueño quiere ponerle grama, por lo que necesita calcular el área del patio para comprar la grama. Dos de los lados del patio miden 40 y 42 metros, y el ángulo opuesto al lado que mide 42 es de 120°. ¿Cuántos m^2 debe comprar de grama aproximadamente?

3. Un herrero desea construir un columpio usando dos triángulos isósceles en sus extremos. Si el ángulo distinto mide 30° y el lado opuesto a este quiere que mida 1 metro, ¿cuánto deben medir los otros dos lados?

4. Demuestra que el área de un paralelogramo es el producto de dos lados adyacentes y el seno del ángulo entre estos dos lados adyacentes.

Indicador de logro:

3.8 Utiliza la ley de los senos y la ley del coseno para resolver problemas que involucren triángulos oblicuángulos.

Secuencia:

Luego de haber deducido y aplicado la ley de los senos y del coseno, se resuelven problemas del entorno que requieran del uso de estas.

Propósito:

Consolidar el uso de la ley de los senos y del coseno, al resolver problemas del entorno.

Posibles dificultades:

Una de las dificultades que pueden tener los estudiantes al resolver problemas de aplicación, es identificar cuál de las leyes puede o debe utilizar. Además, identificar qué es lo que está calculando o qué es lo que debe calcular y cómo relacionarlo con el problema puede ser otra de las dificultades.

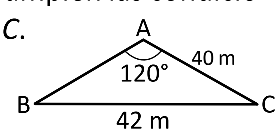
Solución de problemas:

1. Sea x la distancia que hay entre el barco y el faro B. Utilizando la ley del coseno para calcular el valor de x:

$$7^2 = 5^2 + x^2 - 2(5x)\cos 60° \Rightarrow 25 + x^2 - \cancel{2}(5x)\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) - 49 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x - 24 = 0$$
$$\Rightarrow (x-8)(x+3) = 0 \Rightarrow x = 8 \text{ o } x = -3.$$

Como x representa una distancia, no puede ser negativa. Por lo tanto, $x = 8$. Es decir, la distancia del barco al segundo faro es de 8 kilómetros.

2. No puede utilizarse la fórmula del área directamente, ya que los datos conocidos no cumplen las condiciones. Hay dos opciones: calcular la medida del lado c o calcular la medida del ángulo C.



Forma 1: $42^2 = c^2 + 40^2 - 2c(40)\cos 120°$

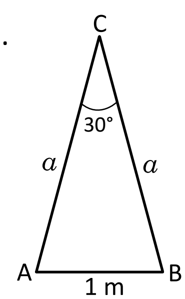
$$\Rightarrow c^2 + 40c - 164 = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{2}\left(-40 \pm \sqrt{40^2 + 4(164)}\right) = -20 \pm 2\sqrt{141}.$$

Luego, $c = -20 + 2\sqrt{141}$. Entonces, el área del jardín es $(ABC) = \frac{1}{2}(40)(-20 + 2\sqrt{141})\text{sen } 120° \approx 64.9 \text{ m}^2$.

Forma 2: $\frac{\text{sen } B}{40} = \frac{\text{sen } 120°}{42} \Rightarrow \text{sen } B = \frac{40 \text{ sen } 120°}{42} = \frac{10\sqrt{3}}{21} \Rightarrow B \approx 55.6°.$

Luego, $C \approx 180° - 120° - 55.6° = 4.4°$. Entonces, el área del jardín es $(ABC) = \frac{1}{2}(40)(42)\text{sen } 4.4° \approx 64.4 \text{ m}^2$.

3. Al representar los extremos del columpio con un triángulo, se tiene la figura de la derecha.

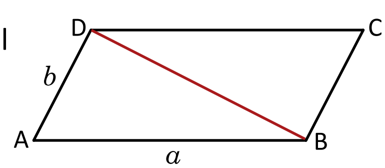


Utilizando la ley del coseno para calcular el valor de a:

$$1^2 = a^2 + a^2 - 2(a)(a)\cos 30° \Rightarrow 1 = 2a^2 - \cancel{2}(a^2)\left(\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right) \Rightarrow 2a^2 - \sqrt{3}a^2 = 1 \Rightarrow a^2(2-\sqrt{3}) = 1.$$
$$\Rightarrow a^2 = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3} \Rightarrow a = \sqrt{2+\sqrt{3}} \approx 1.9.$$

Por lo tanto, los lados de los extremos deben medir aproximadamente 1.9 metros.

4. Tomando el paralelogramo ABCD cuyos lados miden a y b, se traza la diagonal BD. Los triángulos ABD y CDB son congruentes, por el criterio LAL.



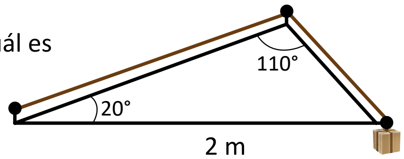
El área del triángulo ABD es $(ABD) = \frac{1}{2}ab \text{ sen } A$.

Como $\Delta ABD \cong \Delta CDB$, sus áreas son iguales. Entonces, $(ABCD) = (ABD) + (CDB) = 2(ABD) = ab\text{sen } A$.

Por lo tanto, el área de un paralelogramo es igual al producto de los lados adyacentes por el seno del ángulo comprendido entre ellos.

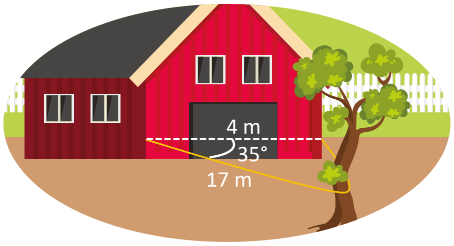
3.9 Practica lo aprendido

1. Una caja está sostenida por una cuerda, como muestra la figura. ¿Cuál es la longitud de la cuerda?

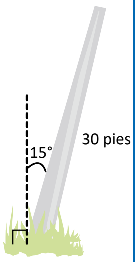


2. La capitana de un barco observa dos faros mientras navega. El barco se encuentra a 15 millas de un faro y a 20 millas del otro faro. Si la capitana determina que el ángulo entre las dos líneas de visión hacia los faros es de 120°, ¿cuál es la distancia entre los faros?

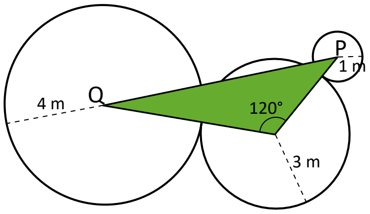
3. Un granjero tiene un establo y necesita hacer un corral extra. Para ello tiene un lazo de 38 metros y piensa atar el lazo como muestra la figura. ¿Tiene el granjero suficiente lazo si los nudos están a una distancia de 4 metros?



4. Un poste de 30 pies de largo se ha inclinado aproximadamente 15° de su posición original. El alcalde de la ciudad piensa sostenerlo con un cable de acero pero necesita calcular cuánto necesita de cable. Si amarra el cable a 100 pies de la base del poste, ¿cuánto necesita aproximadamente?



5. Se construirá la decoración de un jardín en forma triangular, como muestra la figura. Si cada vértice del triángulo es centro de la circunferencia sobre la que está, ¿cuál es la longitud de PQ?



6. Un grupo de exploradores está aprendiendo a navegar para un viaje de supervivencia. Sobre un mapa les han ubicado tres puntos que deben visitar, sin embargo, necesitan conocer las medidas de los ángulos para saber qué tanto deben girar. ¿Cuáles son los ángulos que deben girar para poder visitar los tres puntos?

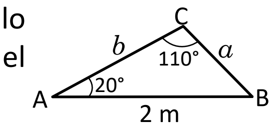
Unidad 5

Indicador de logro:

3.9 Resuelve problemas correspondientes a la aplicación de la ley de los senos y del coseno a problemas del entorno.

Solución de problemas:

1. Al dibujar el triángulo y ubicar los datos, se obtiene el gráfico de la derecha. El ángulo *B* es igual a 180° – 20° – 110° = 50°. Luego, utilizando la ley de los senos para calcular el valor de a:



$$\frac{a}{\text{sen } 20°} = \frac{2}{\text{sen } 110°} \Rightarrow a = \frac{2 \text{ sen } 20°}{\text{sen } 110°} \approx 0.7.$$

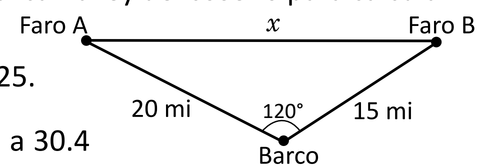
Se aplica nuevamente la ley de los senos para calcular el valor de b:

$$\frac{b}{\text{sen } 50°} = \frac{2}{\text{sen } 110°} \Rightarrow b = \frac{2 \text{ sen } 50°}{\text{sen } 110°} \approx 1.6.$$

> También es válido sumar los resultados de los lados y aproximar al final, en tal caso se obtiene 2.4 m.

Luego, la longitud de la cuerda es de aproximadamente 1.6 m + 0.7 m = 2.3 m.

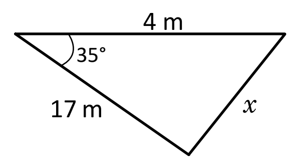
2. Elaborando un gráfico y ubicando los datos se observa que se puede aplicar la ley del coseno para calcular la distancia entre los faros.



$$x^2 = 20^2 + 15^2 - 2(20)(15)\cos 120° = 625 - \cancel{2}(300)\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right) = 625 + 300 = 925.$$

Entonces, $x = \sqrt{925} \approx 30.4$. Es decir, los faros están aproximadamente a 30.4 millas de distancia.

3. Si se considera que la figura formada es un triángulo, se tiene:

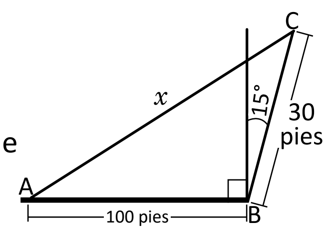


Para saber si le alcanza la cantidad de lazo que tiene hay que calcular el valor de x y luego ver si 17 + x es menor o igual que 38. Utilizando la ley del coseno:

$$x^2 = 4^2 + 17^2 - 2(4)(17)\cos 35° = 305 - 136 \cos 35° \approx 193.6.$$

Entonces $x \approx 13.9$. Luego, 17 + 13.9 = 30.9. Por tanto, el granjero tiene suficiente lazo.

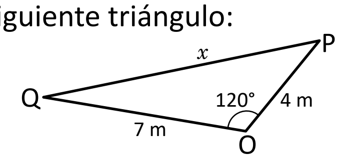
4. El ángulo *B* mide 90° + 15° = 105°. Por la ley del coseno:



$$x^2 = 100^2 + 30^2 - 2(100)(30)\cos 105° \approx 12\,452.9.$$

Entonces, $x \approx 111.6$. Es decir, necesita aproximadamente 111.6 pies de cable para amarrar el poste.

5. Se observa que las circunferencias son tangentes. Sea O el tercer vértice. Como cada vértice del triángulo cae en el centro de cada circunferencia, puede observarse que OQ = 4 + 3 = 7 y OP = 3 + 1 = 4. Se tiene el siguiente triángulo:

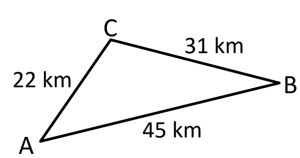


Como se desea conocer la longitud de $\overline{PQ}$, se aplica la ley del coseno:

$$x^2 = 7^2 + 4^2 - 2(7)(4)\cos 120° = 93.$$

Entonces, la longitud de PQ es de aproximadamente 9.6 metros.

6. Como se conocen los tres lados del triángulo, se aplica la ley del coseno.



$$31^2 = 22^2 + 45^2 - 2(22)(45)\cos A \Rightarrow \cos A = \frac{43}{55} \Rightarrow A \approx 38.6°.$$

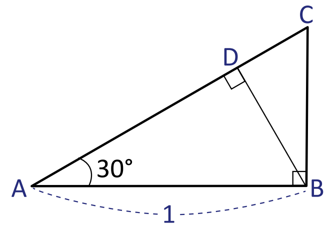
$$22^2 = 31^2 + 45^2 - 2(31)(45)\cos B \Rightarrow \cos B = \frac{1251}{1395} = \frac{139}{155} \Rightarrow B \approx 26.3°.$$

Luego, $C \approx 180° - 38.6° - 26.3° = 115.1°$.

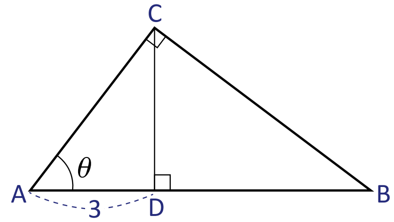
Aunque depende del orden en que visiten los puntos indicados, los ángulos que deben girar son 38.6°, 26.3° y de 115.1°.

3.10 Problemas de la unidad

1. De la siguiente figura, calcula las longitudes de los segmentos AD, DC, AC, BD y BC. Racionaliza cuando sea necesario.



2. De la siguiente figura, escribe las longitudes de los segmentos BC, AC, DB y AB en términos del ángulo θ.

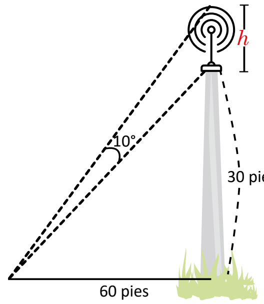


3. Un pentágono regular está inscrito en un círculo de radio 7. Calcula el perímetro del pentágono.

4. Una escalera de 30 pies de largo yace sobre una pared con una inclinación de 70°. Determina la distancia a la que se encuentra el pie de la escalera de la pared.

5. Desde la punta de un faro de 50 pies se observa un bote a un ángulo de depresión de 11°. ¿A qué distancia está el bote del faro?

6. Una antena vertical está montada en el tope de un poste de 30 pies de altura. Desde un punto a 60 pies de la base del poste, la antena subtiende un ángulo de 10°, como muestra la figura. Calcula la longitud h de la antena.



7. Calcula lo que se pide, si los datos se refieren a un triángulo rectángulo.

   a) Si $\cos\theta = \frac{1}{3}$, calcula $\operatorname{sen}\theta$.
   b) Si $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{4}$, calcula $\cos\theta$.
   c) Si $\tan\theta = 2$, calcula $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$.
   d) Si $\sec\theta = 7$, calcula $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$.

8. Calcula la distancia entre P y Q para cada caso.

   a) P(–1, 3) y Q(2, 5)
   b) P(2, 3) y Q(2, 6)

9. Calcula el perímetro del cuadrilátero ABCD que tiene por vértices A(–3, –1), B(0, 3), C(3, 4) y D(4, 1).

Indicador de logro:

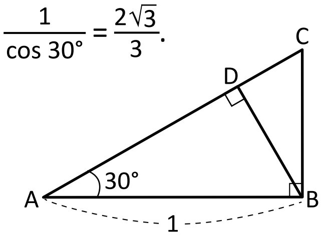
3.10 Resuelve problemas correspondientes a la resolución de triángulos oblicuángulos.

Solución de problemas:

1. En el ΔABC se tiene que $\tan 30° = \frac{BC}{1} \Rightarrow BC = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y $\cos 30° = \frac{1}{AC} \Rightarrow AC = \frac{1}{\cos 30°} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Ahora, en el ΔABD, $\cos 30° = \frac{AD}{1} \Rightarrow AD = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\text{sen } 30° = \frac{BD}{1} \Rightarrow BD = \frac{1}{2}$.

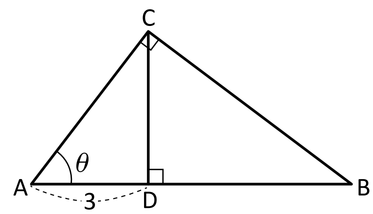
Para calcular DC: $DC = AC - AD = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.



2. En el ΔADC: $\cos\theta = \frac{3}{AC} \Rightarrow AC = \frac{3}{\cos\theta}$.

Luego, en el ΔABC: $\tan\theta = \frac{BC}{AC} \Rightarrow BC = AC \tan\theta = \frac{3\tan\theta}{\cos\theta}$,

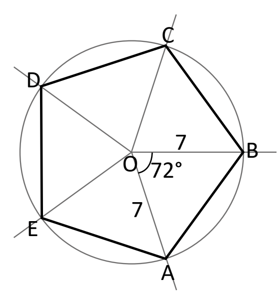
y $\cos\theta = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB = \frac{AC}{\cos\theta} = \frac{3}{\cos^2\theta}$.



Por último, $DB = AB - AD = \frac{3}{\cos^2\theta} - 3 = \frac{3 - 3\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{3(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{3\,\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = 3\tan^2\theta$.

3. Un pentágono regular puede construirse dividiendo una circunferencia en 5 partes iguales. Entonces, los ángulos AOB, BOC, COD, DOE, EOA son iguales a 72°(360° ÷ 5).

Un pentágono regular inscrito en una circunferencia cumple que los segmentos que unen el centro con los vértices del polígono son radios. Entonces, cada segmento OA, OB, OC, OD y OE tienen una longitud de 7.



Luego, los triángulos AOB, BOC, COD, DOE y EOA son isósceles. Considerando el ΔAOB:

$$(AB)^2 = 7^2 + 7^2 - 2(7)(7)\cos 72° = 2(7^2) - 2(7^2)\cos 72° = 2(7^2)(1 - \cos 72°)$$

Entonces, $AB = \sqrt{2(7^2)(1 - \cos 72°)} = 7\sqrt{2(1 - \cos 72°)}$. Por lo tanto, el perímetro del pentágono es

$$5AB = 35\sqrt{2(1 - \cos 72°)}.$$

4. Sea d la distancia que hay entre el pie de la escalera a la pared.

$\cos 70° = \frac{d}{30} \Rightarrow d = 30\cos 70° \approx 10.3$.

Por lo tanto, el pie de la escalera se encuentra aproximadamente a 10.3 pies de la pared.

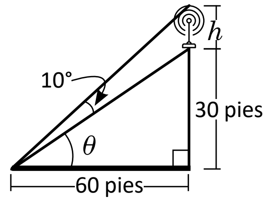
5. Sea d la distancia que hay entre el bote y el faro.

$\tan 11° = \frac{50}{d} \Rightarrow d = \frac{50}{\tan 11°} \approx 257.2$.

Por lo tanto, el bote está aproximadamente a 257.2 pies del faro.

6. Al elaborar un gráfico y ubicar los datos, se obtiene la figura que se muestra. Luego,

$$\tan\theta = \frac{30}{60} \Rightarrow \theta \approx 26.6°.$$



Por otra parte,

$$\tan(\theta + 10°) = \frac{30 + h}{60}$$

$$\Rightarrow\ 30 + h = 60\tan(\theta + 10°)$$

$$\Rightarrow\ h = 60\tan(\theta + 10°) - 30$$

$$\approx 60\tan(26.6° + 10°) - 30$$

$$= 60\tan 36.6° - 30$$

$$\approx 14.6.$$

Por lo tanto, la altura de la antena es de aproximadamente 14.6 pies.

7a) $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

7b) $\cos\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$

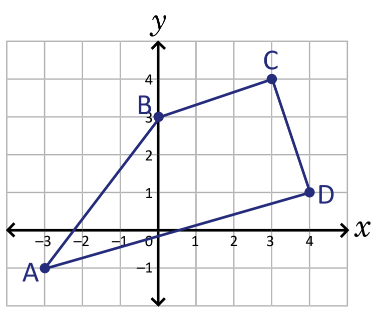
7c) $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

7d) $\cos\theta = \frac{1}{7}$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{4\sqrt{3}}{7}$

8a) $d(\text{P, Q}) = \sqrt{13}$.

8b) $d(\text{P, Q}) = 3$

9. Resulta útil graficar el cuadrilátero en el plano cartesiano.



Para calcular el perímetro, se calculan las longitudes de los lados del cuadrilátero. Utilizando la fórmula de la distancia entre dos puntos:

- $d(\text{A, B}) = \sqrt{(0 - (-3))^2 + (3 - (-1))^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$
- $d(\text{B, C}) = \sqrt{10}$
- $d(\text{C, D}) = \sqrt{10}$
- $d(\text{A, D}) = \sqrt{53}$

Luego, el perímetro de ABCD es $5 + \sqrt{10} + \sqrt{10} + \sqrt{53} = 5 + 2\sqrt{10} + \sqrt{53}$.

3.11 Problemas de la unidad

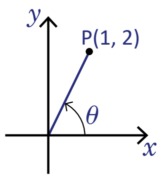
10. Determina el simétrico de cada punto respecto al eje x, respecto al eje y y respecto al origen. Grafica en cada caso.

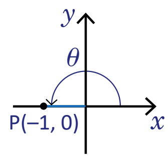
a) P(0, 3) b) $P\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ c) P(–2, 0) d) P(–1, –1)

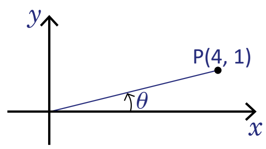
11. Dibuja cada ángulo e identifica a qué cuadrante pertenece.

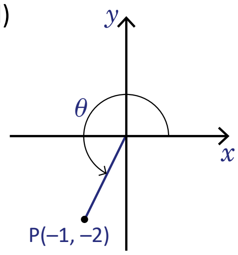
a) 800° b) –300° c) 1 050° d) –735°

12. Determina los valores de seno, coseno y tangente de θ en cada caso.

a)


b)


c)


d)


13. Representa los valores de las razones trigonométricas en términos de los valores de sen θ, cos θ y tan θ, donde $0° \leq \theta < 90°$.

a) 150° b) 370° c) 450° d) 535°

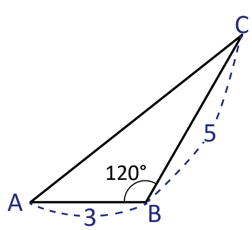
14. Determina los valores que se piden en cada caso.

a) sen θ y tan θ si cos $\theta = -\frac{1}{3}$ y $90° < \theta < 180°$.

b) tan θ si sen $\theta = \frac{3}{4}$ y θ está en el segundo cuadrante.

c) cos θ y sen θ si sec θ = 2 y θ está en el primer cuadrante.

15. Calcula el área del triángulo ABC.



16. Calcula los valores que se piden.

a) El valor de c si a = 3, A = 60° y C = 45°.

b) El valor de B si a = 1, $b = \sqrt{3}$ y A = 30°.

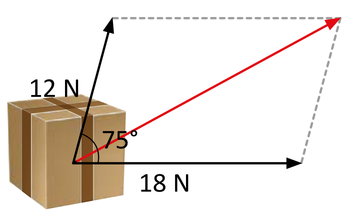
c) El valor de a si b = 2, $c = 2\sqrt{3}$ y A = 150°.

d) La medida de los tres ángulos si $a = b = 2$ y $c = \sqrt{3}$.

e) El valor de A si a = 4, b = 1 y B = 60°.

La unidad de medida de la fuerza aplicada a objetos es el newton y se simboliza por **N**.

17. Cuando dos fuerzas en direcciones distintas actúan sobre un objeto, la fuerza resultante es la diagonal del paralelogramo formado por las fuerzas aplicadas. Si dos fuerzas de 12 y 18 newtons actúan sobre un objeto a un ángulo de 75°, ¿cuál es el valor de la fuerza resultante?



Unidad 5

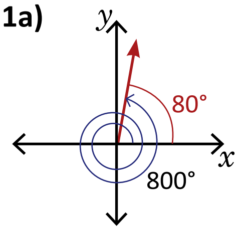
Indicador de logro:

3.11 Resuelve problemas correspondientes a la resolución de triángulos oblicuángulos.

Solución de problemas:

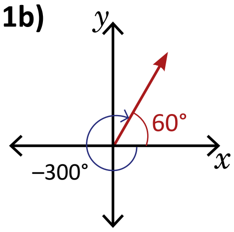
	Respecto al eje x	Respecto al eje y	Respecto al origen	Respecto a la recta identidad
10a)	$P_1(0, -3)$	$P_2(0, 3)$	$P_3(0, -3)$	$P_4(3, 0)$
10b)	$P_1\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	$P_2\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$	$P_3\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$	$P_4\left(-1, \frac{1}{2}\right)$
10c)	$P_1(-2, 0)$	$P_2(2, 0)$	$P_3(2, 0)$	$P_4(0, -2)$
10d)	$P_1(-1, 1)$	$P_2(1, -1)$	$P_3(1, 1)$	$P_4(-1, -1)$

11a)

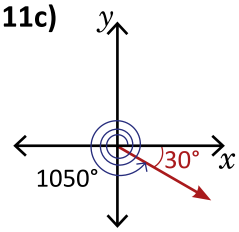


800° = 360°(2) + 80°

11b)

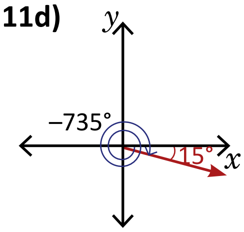


11c)



1050° = 360°(2) + 330°

11d)



–735° = –360°(2) – 15°

12a) $r = \sqrt{5}$, por lo tanto, sen $\theta = \frac{y}{r} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, cos $\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ y tan $\theta = \frac{y}{x} = 2$.

12b) $r = 1$, por lo tanto, sen $\theta = 0$, cos $\theta = -1$ y tan $\theta = 0$.

12c) $r = \sqrt{17}$, por lo tanto, sen $\theta = \frac{\sqrt{17}}{17}$, cos $\theta = \frac{4\sqrt{17}}{17}$ y tan $\theta = \frac{1}{4}$.

12d) $r = \sqrt{5}$, por lo tanto, sen $\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, cos $\theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ y tan $\theta = 2$.

13a) 150° = 180° – 30°. Entonces, sen 150° = sen 30°, cos 150° = – cos 30° y tan 150° = – tan 30°.

13b) 370° = 360° + 10°. Entonces, sen 370° = sen 10°, cos 370° = cos 10° y tan 370° = tan 10°.

13c) 450° = 360° + 90°. Entonces, sen 450° = sen 90°, cos 450° = cos 90° y tan 450° no está definida.

13d) 535° = 360° + 175°. Ángulo de referencia de 175° es 180° – 175° = 5°. Entonces,

sen 535° = sen 175° = sen 5°, cos 535° = cos 175° = – cos 5° y tan 535° = tan 175° = – tan 5°.

14a) sen $\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ y tan $\theta = -2\sqrt{2}$ **14b)** cos $\theta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ y tan $\theta = -\frac{3\sqrt{7}}{7}$ **14c)** cos $\theta = \frac{1}{2}$ y sen $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

15. (ABC) $= \frac{1}{2}(3)(5)\text{sen}120° = \frac{15\sqrt{3}}{4}$

16a) $c = \sqrt{6}$ **16b)** $B = 60°$ o $B = 120°$ **16c)** $a = 2\sqrt{7}$ **16d)** $A = B \approx 64.34°$, $C \approx 51.32°$

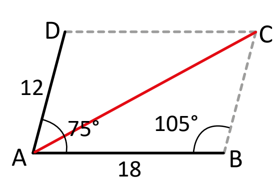
16e) sen $A = 2\sqrt{3} > 1$. Por lo tanto, el triángulo no puede construirse.

En 16d sugerir a los estudiantes aproximar hasta las centésimas.

17. Por propiedades del paralelogramo, el ángulo B es igual a 180° – 75° = 105°. Además, BC = 12. Para calcular la diagonal AC se puede utilizar la ley del coseno:

$$(AC)^2 = 18^2 + 12^2 - 2(18)(12)\cos 105° \approx 579.8 \Rightarrow AC \approx 24.1.$$

Por lo tanto, la fuerza resultante es de aproximadamente 24.1 newtons.



Unidad 6. Identidades y ecuaciones trigonométricas

Competencia de la unidad

Deducir identidades trigonométricas básicas mediante propiedades de simetría en el plano, para el cálculo de valores trigonométricos exactos y la resolución de ecuaciones trigonométricas.

Relación y desarrollo

Tercer ciclo	Primer año de bachillerato	Segundo año de bachillerato
Unidad 5: Figuras semejantes (9°) • Semejanza • Semejanza de triángulos • Semejanza y paralelismo • Aplicaciones de semejanza y triángulos semejantes	**Unidad 5: Resolución de triángulos oblicuángulos** • Razones trigonométricas de ángulos agudos • Razones trigonométricas de ángulos no agudos • Resolución de triángulos oblicuángulos	**Unidad 5: Funciones trascendentales II** • Función biyectiva e inversa • Función logarítmica • Funciones trigonométricas • Práctica en GeoGebra
Unidad 6: Teorema de Pitágoras (9°) • Teorema de Pitágoras • Aplicación del teorema de Pitágoras	**Unidad 6: Identidades y ecuaciones trigonométricas** • Identidades trigonométricas • Ecuaciones trigonométricas	

Plan de estudio de la unidad

Lección	Horas	Clases
1. Identidades trigonométricas	1	1. Identidades trigonométricas de los ángulos $-\theta$, $90° - \theta$ y $180° - \theta$
	1	2. Identidades trigonométricas de los ángulos $\theta + 180°$, $\theta - 180°$ y $90° + \theta$
	1	3. Ángulo adición
	1	4. Valores exactos de las razones trigonométricas, parte 1
	1	5. Ángulo doble
	1	6. Ángulo medio
	1	7. Valores exactos de las razones trigonométricas, parte 2
	1	8. Practica lo aprendido
2. Ecuaciones trigonométricas	1	1. Ecuaciones trigonométricas, parte 1
	1	2. Ecuaciones trigonométricas, parte 2 (uso de la identidad pitagórica)
	1	3. Ecuaciones trigonométricas, parte 3 (uso del ángulo doble del coseno)
	1	4. Ecuaciones trigonométricas, parte 4 (uso del ángulo doble del seno)
	1	5. Ecuaciones trigonométricas, parte 5
	1	6. Practica lo aprendido
	1	7. Problemas de la unidad
	1	Prueba de la unidad 6
	2	Prueba del tercer periodo

15 horas clase + prueba de la unidad 6 + prueba del tercer periodo

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Identidades trigonométricas
En esta lección se establecen las identidades trigonométricas más relevantes y el uso de ellas para el cálculo de valores exactos de razones trigonométricas.
Lección 2: Ecuaciones trigonométricas
Se resuelven ecuaciones trigonométricas utilizando las identidades establecidas en la Lección 1, además de utilizar otras herramientas como la identidad pitagórica y el método de tijera.

Lección 1 Identidades trigonométricas

1.1 Identidades trigonométricas de los ángulos $-\theta$, $90° - \theta$ y $180° - \theta$

Problema inicial

Demuestra que

1. $\cos(-\theta) = \cos\theta$ y $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$
2. $\cos(90° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$ y $\operatorname{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$
3. $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$ y $\operatorname{sen}(180° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$

Utiliza simetrías respecto al eje x, a la recta identidad y al eje y.

Solución

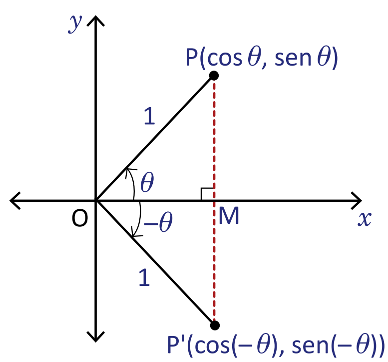
1. De la clase 2.2 de la Unidad 5 se sabe que si P es un punto del plano cartesiano con coordenadas (a, b), las coordenadas del punto simétrico P' respecto al eje x es $(a, -b)$.

   Sea el punto P(a, b) tal que OP = 1 y $\overline{\text{OP}}$ forme un ángulo θ con el eje x. Las coordenadas de P son $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Entonces, las coordenadas de su simétrico respecto al eje x es

   $$\text{P}'(\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta) \quad \text{------------------ (1)}$$

   Por otra parte, $\overline{\text{OP}'}$ forma un ángulo $-\theta$ con el eje x. Por lo tanto, las coordenadas de P' son

   $$(\cos(-\theta), \operatorname{sen}(-\theta)) \quad \text{------------------ (2)}$$



   Comparando (1) y (2) se tiene que $\cos(-\theta) = \cos\theta$ y $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$.

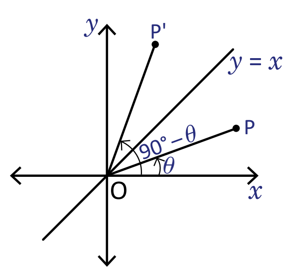
2. Se sabe que si P es un punto sobre el plano cartesiano con coordenadas (a, b), las coordenadas del punto P' simétrico respecto a la recta identidad es (b, a).

   Se considera P$(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, entonces su simétrico respecto a la recta identidad es

   $$\text{P}'(\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \quad \text{------------------ (3)}$$

   Como P' es el simétrico de P, se tiene que $\overline{\text{OP}'}$ forma un ángulo de $90° - \theta$ con el eje x; esto quiere decir que las coordenadas de P' son

   $$(\cos(90° - \theta), \operatorname{sen}(90° - \theta)) \quad \text{------------------ (4)}$$



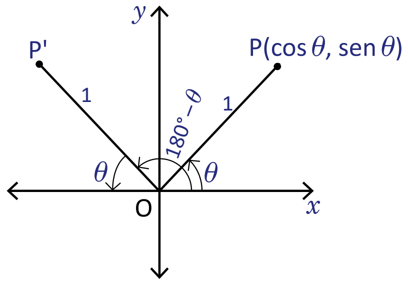
   De (3) y (4) puede determinarse que $\cos(90° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$ y $\operatorname{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$.

3. Se sabe que si P(a, b) es un punto del plano cartesiano, entonces P'$(-a, b)$ es su simétrico con respecto al eje y.

162

Si se considera P un punto del plano cartesiano, tal que OP = 1 y $\overline{OP}$ forme un ángulo θ con el eje x, sus coordenadas son ($\cos\theta$, sen θ). Entonces su simétrico respecto al eje y es

P'($-\cos\theta$, sen θ) ------------------ (5)



Por otra parte, $\overline{OP'}$ forma un ángulo de $180° - \theta$ con el eje x. Así, las coordenadas de P' son

($\cos(180° - \theta)$, sen$(180° - \theta)$) ------------------ (6)

Luego, de (5) y (6) se concluye que $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$ y sen$(180° - \theta)$ = sen θ.

Conclusión

Una **identidad trigonométrica** es una igualdad donde intervienen razones trigonométricas y es verdadera para cualquier valor del ángulo.

Para cualquier ángulo θ se cumplen las identidades de ángulos opuestos para el coseno y el seno

a) $\cos(-\theta) = \cos\theta$ b) sen$(-\theta) = -$sen θ

Para cualquier ángulo θ se cumplen las identidades de ángulos complementarios y suplementarios para el coseno y el seno

c) $\cos(90° - \theta)$ = sen θ d) sen$(90° - \theta) = \cos\theta$

e) $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$ f) sen$(180° - \theta)$ = sen θ

Además, se cumplen las siguientes identidades para la tangente

g) $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ h) $\tan(90° - \theta) = \frac{1}{\tan\theta}$ i) $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$

Ejemplo

Representa cada razón en términos de un ángulo θ tal que $0° \leq \theta < 90°$.

1. $\cos(-40°)$ 2. sen 120° 3. tan 320°

1. Utilizando la identidad de ángulos opuestos, $\cos(-40°) = \cos 40°$.
2. Utilizando la identidad de ángulos suplementarios, sen 120° = sen$(180° - 120°)$ = sen 60°.
3. En este caso se aplica primero la identidad de ángulos suplementarios

$$\tan 320° = -\tan(180° - 320°) = -\tan(-140°) = \tan 140° = -\tan(180° - 140°) = -\tan 40°.$$

Es decir, $\tan 320° = -\tan 40°$.

Problemas

1. Representa cada razón trigonométrica en términos de un ángulo θ tal que $0° \leq \theta < 90°$. Indica qué tipo de identidad o identidades hay que utilizar.

   a) $\cos(-30°)$ b) sen 170° c) sen 110°

   d) cos 250° e) $\tan(-60°)$ f) $\tan(-100°)$

2. Demuestra que $\tan(-\theta) = -\tan\theta$.
3. Demuestra que $\tan(90° - \theta) = \frac{1}{\tan\theta}$.
4. Demuestra que $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$.

Unidad 6

163

Indicador de logro:

1.1 Representa razones trigonométricas en términos de ángulos agudos utilizando las identidades trigonométricas de ángulos opuestos, complementarios y suplementarios.

Secuencia:

Se inicia la unidad con la deducción de tres identidades trigonométricas utilizando ángulos en el plano cartesiano y las simetrías de un punto respecto a los ejes coordenados, al origen y a la recta identidad.

Propósito:

Introducir identidades trigonométricas de ángulos opuestos, complementarios y suplementarios, para luego utilizarlas al reescribir una razón trigonométrica en términos de un ángulo agudo.

Solución de problemas:

1a) $\cos(-30°) = \cos 30°$

1b) $\operatorname{sen} 170° = \operatorname{sen}(180° - 170°) = \operatorname{sen} 10°$

O bien,

$\operatorname{sen} 170° = \cos(90° - 170°) = \cos(-80°) = \cos 80°$.

1c) $\operatorname{sen} 110° = \operatorname{sen}(180° - 110°) = \operatorname{sen} 70°$

O bien,

$\operatorname{sen} 110° = \cos(90° - 110°) = \cos(-20°) = \cos 20°$.

1d) $\cos 250° = -\cos(180° - 250°) = -\cos(-70°) = -\cos 70°$

Puede resolverse también con la identidad del ángulo complementario:

$\cos 250° = \operatorname{sen}(90° - 250°) = \operatorname{sen}(-160°) = -\operatorname{sen} 160° = -\operatorname{sen}(180° - 160°) = -\operatorname{sen}(20°)$.

1e) $\tan(-60°) = -\tan 60°$

1f) $\tan(-100°) = -\tan 100° = -[-\tan(180° - 100°)] = \tan 80°$.

Dependiendo de cómo se apliquen las identidades, puede obtenerse un resultado distinto, como puede observarse en los literales b, c y d del numeral 1.

2. $\tan(-\theta) = \dfrac{\operatorname{sen}(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \dfrac{-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$

3. $\tan(90° - \theta) = \dfrac{\operatorname{sen}(90° - \theta)}{\cos(90° - \theta)} = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$,

por otro lado,

$\dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{1}{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}} = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

Por lo tanto, $\tan(90° - \theta) = \dfrac{1}{\tan\theta}$.

4. $\tan(180° - \theta) = \dfrac{\operatorname{sen}(180° - \theta)}{\cos(180° - \theta)} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{-\cos\theta} = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$

1.2 Identidades trigonométricas de los ángulos $\theta + 180°$, $\theta - 180°$ y $90° + \theta$

Problema inicial

Demuestra que

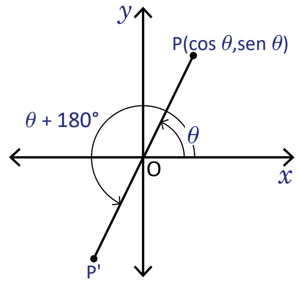
1. $\cos(\theta + 180°) = -\cos\theta$ y $\text{sen}(\theta + 180°) = -\text{sen}\,\theta$
2. $\cos(\theta - 180°) = -\cos\theta$ y $\text{sen}(\theta - 180°) = -\text{sen}\,\theta$
3. $\cos(90° + \theta) = -\text{sen}\,\theta$ y $\text{sen}(90° + \theta) = \cos\theta$

Utiliza la simetría respecto al origen y las identidades de la clase anterior.

Solución

a) Sea el punto P(a, b) tal que OP = 1 y $\overline{\text{OP}}$ forme un ángulo θ con el eje x. Las coordenadas de P son $(\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$. Entonces, las coordenadas de su simétrico respecto al origen son

$$\text{P}'(-\cos\theta, -\text{sen}\,\theta) \quad \text{------------------ (1)}$$



Pero $\overline{\text{OP}'}$ forma un ángulo de $\theta + 180°$ con el eje x, por lo que las coordenadas de P' son

$$(\cos(\theta + 180°), \text{sen}(\theta + 180°)) \quad \text{------------------ (2)}$$

Luego, de (1) y (2) se tiene que $\cos(\theta + 180°) = -\cos\theta$ y $\text{sen}(\theta + 180°) = -\text{sen}\,\theta$.

b) El ángulo $\theta - 180°$ puede reescribirse como $-(180° - \theta)$. Entonces,

$$\cos(\theta - 180°) = \cos(-(180° - \theta)) = \cos(180° - \theta) = -\cos\theta \text{ y}$$

$$\text{sen}(\theta - 180°) = \text{sen}(-(180° - \theta)) = -\text{sen}(180° - \theta) = -\text{sen}\,\theta.$$

c) El ángulo $90° + \theta$ puede reescribirse como $180° - (90° - \theta)$. Entonces,

$$\cos(90° + \theta) = \cos(180° - (90° - \theta)) = -\cos(90° - \theta) = -\text{sen}\,\theta \text{ y}$$

$$\text{sen}(90° + \theta) = \text{sen}(180° - (90° - \theta)) = \text{sen}(90° - \theta) = \cos\theta.$$

Conclusión

Para cualquier ángulo θ se cumple que

a) $\cos(\theta + 180°) = -\cos\theta$ b) $\text{sen}(\theta + 180°) = -\text{sen}\,\theta$

c) $\cos(\theta - 180°) = -\cos\theta$ d) $\text{sen}(\theta - 180°) = -\text{sen}\,\theta$

e) $\cos(90° + \theta) = -\text{sen}\,\theta$ f) $\text{sen}(90° + \theta) = \cos\theta$

Además, se cumplen las siguientes identidades para la tangente

g) $\tan(\theta + 180°) = \tan\theta$ h) $\tan(\theta - 180°) = \tan\theta$ i) $\tan(90° + \theta) = -\dfrac{1}{\tan\theta}$

Ejemplo

Representa cada razón en términos de un ángulo θ tal que $0° \leq \theta < 90°$.

a) cos 200° b) sen 130° c) tan 250°

a) Como $200° = 20° + 180°$, se tiene que $\cos 200° = -\cos 20°$.
b) Como $130° = 90° + 40°$, se tiene que $\text{sen}\,130° = \text{sen}(90° + 40°) = \cos 40°$.
c) Como $250° = 70° + 180°$, se tiene que $\tan 250° = \tan(70°)$.

Problemas

Representa cada razón trigonométrica en términos de un ángulo θ tal que $0° \leq \theta < 90°$.

a) sen 100° b) sen 215° c) cos 160°

d) cos 195° e) tan 205° f) tan 290°

Indicador de logro:

1.2 Representa razones trigonométricas en términos de ángulos agudos, utilizando las identidades trigonométricas de los ángulos $\theta + 180°$, $\theta - 180°$ y $90° + \theta$.

Secuencia:

Se continúa con la deducción de identidades trigonométricas básicas. En esta clase se utilizan las identidades que dedujeron en la clase anterior.

Propósito:

Introducir identidades trigonométricas de los ángulos $\theta + 180°$, $\theta - 180°$ y $90° + \theta$, para luego utilizarlas al reescribir una razón trigonométrica en términos de un ángulo agudo.

Posibles dificultades:

Identificar la forma correcta de aplicar las identidades, especialmente si hay cambio de signo. Por ejemplo, se puede observar lo siguiente:

$$\cos \underline{\mathbf{210°}} = -\cos(\underline{\mathbf{210°}} - 180°) = -\cos 30°.$$

En la identidad establecida en el literal c de la conclusión, el signo menos lo tiene $\cos\theta$ y no $\cos(\theta - 180°)$, distinto a como se ha utilizado en el ejemplo previo.

Solución de problemas:

a) *Forma 1.* $\text{sen } 100° = -\text{sen}(100° - 180°) = -\text{sen}(-80°) = \text{sen } 80°$.

Forma 2. Se observa que $100° = 90° + 10°$, entonces, $\text{sen } 100° = \text{sen}(90° + 10°) = \cos 10°$.

b) *Forma 1.* $\text{sen } 215° = \text{sen}(35° + 180°) = -\text{sen } 35°$.

Forma 2. $\text{sen } 215° = -\text{sen}(215° - 180°) = -\text{sen } 35°$.

c) *Forma 1.* $\cos 160° = -\cos(160° - 180°) = -\cos(-20°) = -\cos 20°$.

Forma 2. $\cos 160° = \cos(90° + 70°) = -\text{sen } 70°$.

d) *Forma 1.* $\cos 195° = -\cos(195° - 180°) = -\cos 15°$.

Forma 2. $\cos 195° = \cos(90° + 105°) = -\text{sen } 105° = \text{sen}(105° - 180°) = \text{sen}(-75°) = -\text{sen } 75°$.

e) *Forma 1.* $\tan 205° = \tan(205° - 180°) = \tan 25°$.

Forma 2. $\tan 205° = \tan(90° + 115°) = -\frac{1}{\tan 115°}$. Pero $\tan 115° = -\tan(180° - 115°) = -\tan 65°$, entonces

$$-\frac{1}{\tan 115°} = \frac{1}{\tan 65°}.$$

Por tanto, $\tan 205° = \frac{1}{\tan 65°}$.

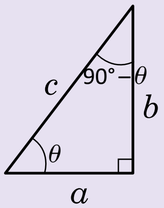
Aunque se dispone de la identidad $\tan(90° + \boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{\tan\boldsymbol{\theta}}$ es preferible trabajar con una que no sea fraccionaria.

f) *Forma 1.* $\tan 290° = \tan 110° = \tan(110° - 180°) = \tan(-70°) = -\tan 70°$.

Forma 2. $\tan 290° = \tan(290° - 180°) = \tan 110° = \tan(90° + 20°) = -\frac{1}{\tan 20°}$.

En a), c) y d) se han obtenido dos soluciones. Puede observarse que los ángulos agudos obtenidos siempre suman 90°.

Al determinar el seno del ángulo θ utilizando el triángulo de la derecha, se obtiene que $\text{sen } \theta = \frac{b}{c}$, y al determinar el coseno del ángulo $90° - \theta$ se obtiene que $\cos(90° - \theta) = \frac{b}{c}$.



Por tanto, $\text{sen } \theta = \cos(90° - \theta)$. De igual forma se puede deducir para $\text{sen}(90° - \theta)$. Esta es otra forma de deducir las identidades de los ángulos complementarios; sin embargo, esta forma se limita a ángulos agudos.

1.3 Ángulo adición*

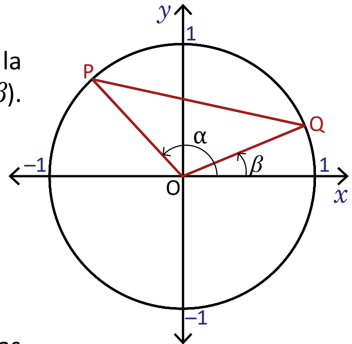
Problema inicial

Demuestra que

a) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$ b) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

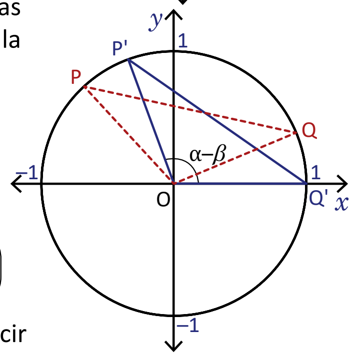
Solución

a) Se dibuja una circunferencia de radio 1 y el triángulo OPQ como muestra la figura. Las coordenadas de P son $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ y las de Q son $(\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$. El cuadrado de la distancia de P a Q es



$$\begin{aligned}(PQ)^2 &= (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2\\ &= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}^2\beta\\ &= (\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) + (\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\\ &= 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.\end{aligned}$$

Si se rota el triángulo OPQ un ángulo $-\beta$ respecto al origen, las coordenadas de P y Q rotados son $P'(\cos(\alpha - \beta), \operatorname{sen}(\alpha - \beta))$ y $Q'(1, 0)$. El cuadrado de la distancia de P' a Q' es



$$\begin{aligned}(P'Q')^2 &= (\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\operatorname{sen}(\alpha - \beta) - 0)^2\\ &= \cos^2(\alpha - \beta) - 2(1)\cos(\alpha - \beta) + 1 + \operatorname{sen}^2(\alpha - \beta)\\ &= [\cos^2(\alpha - \beta) + \operatorname{sen}^2(\alpha - \beta)] - 2\cos(\alpha - \beta) + 1\\ &= 1 - 2\cos(\alpha - \beta) + 1\\ &= 2 - 2\cos(\alpha - \beta).\end{aligned}$$

Por la identidad pitagórica, se sabe que $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, para cualquier θ.

Pero una rotación conserva distancias, por lo que $d(P, Q) = d(P', Q')$, es decir

$$(d(P, Q))^2 = (d(P', Q'))^2$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow\quad 2 - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta - 2\cos\alpha\cos\beta = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)\\ &\Rightarrow\quad -2(\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \cos\alpha\cos\beta) = -2\cos(\alpha - \beta)\\ &\Rightarrow\quad \cos(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \cos\alpha\cos\beta.\end{aligned}$$

b) Para demostrar esta parte, como $\operatorname{sen}\theta = \cos(90° - \theta)$ y $\cos\theta = \operatorname{sen}(90° - \theta)$, entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \cos(90° - (\alpha + \beta))\\ &= \cos((90° - \alpha) - \beta)\\ &= \cos(90° - \alpha)\cos\beta + \operatorname{sen}(90° - \alpha)\operatorname{sen}\beta\\ &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta.\end{aligned}$$

Teorema de la adición

Se satisfacen las siguientes identidades del ángulo adición:

a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$ b) $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

c) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$ d) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

Además, se satisfacen las siguientes identidades de la tangente:

e) $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$ f) $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

Las identidades b, c, e y f se dejan como ejercicio.

Problemas

Demuestra los literales b, c, e y f del teorema de la adición.

Observa que $\alpha + \beta = \alpha - (-\beta)$, $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$. Para las identidades b) y c) utiliza a) y b) de la clase 1.1.

Unidad 6

Indicador de logro:

1.3 Demuestra las identidades trigonométricas del ángulo adición.

Secuencia:

Continuando con las identidades trigonométricas, se deducen las identidades cos(α – β) y sen(α + β). El resto de las identidades se dejan como ejercicio para el estudiante.

Propósito:

Introducir las identidades trigonométricas del ángulo adición, las cuales se utilizan para calcular valores exactos de razones trigonométricas y para deducir las identidades del ángulo doble. Esta clase debe ser desarrollada por el docente.

Solución de problemas:

La numeración de los siguientes problemas es con base a cómo aparecen en la conclusión de la clase.

b) $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}(\alpha + (-\beta))$ reescribiendo el ángulo $\alpha - \beta$,

$= \operatorname{sen}\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \operatorname{sen}(-\beta)$ aplicando la identidad del seno del ángulo $\alpha + \beta$,

$= \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$ aplicando la identidad del ángulo opuesto.

c) $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta))$ reescribiendo el ángulo $\alpha + \beta$,

$= \cos\alpha \cos(-\beta) + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}(-\beta)$ aplicando la identidad del coseno del ángulo $\alpha - \beta$,

$= \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$ aplicando la identidad del ángulo opuesto.

e)

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\cancel{\cos\beta}} + \dfrac{\cancel{\cos\alpha}\operatorname{sen}\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}} - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1 - \left(\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)\left(\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}\right)}$$

$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

f)

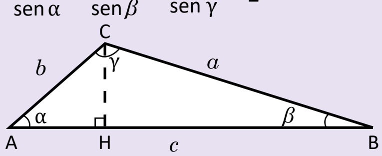
$$\tan(\alpha-\beta) = \tan(\alpha+(-\beta))$$

$$= \frac{\tan\alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan\alpha\tan(-\beta)}$$

$$= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

Otra opción para abordar el Problema Inicial es analizando el caso particular cuando en la ley de los senos se cumple que

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 1$$



a) Determina las longitudes de los lados del triángulo ABC a partir de la igualdad $\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 1$.

b) Determine las longitudes de los segmentos AH y BH en términos del ángulo α y β.

c) Por la suma de ángulos en un triángulo se tiene $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$. y que AB = AH + BH. Utilice esta información y concluya que: $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$.

1.4 Valores exactos de las razones trigonométricas, parte 1

Problema inicial

Calcula el valor exacto de sen 75°, cos 75° y tan 75° utilizando el hecho que 75° = 45° + 30°.

Solución

Como 75° = 45° + 30°, entonces

$$\begin{aligned}\text{sen } 75° = \text{sen}(45° + 30°) &= \text{sen } 45° \cos 30° + \cos 45° \text{ sen } 30°\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Puedes utilizar la tabla de la clase 2.6 de la Unidad 5.

Para calcular cos 75° se hace de la misma manera,

$$\begin{aligned}\cos 75° = \cos(45° + 30°) &= \cos 45° \cos 30° - \text{sen } 45° \text{ sen } 30°\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Para calcular tan 75° se utiliza el hecho que $\tan 75° = \dfrac{\text{sen}(75°)}{\cos(75°)}$, por lo que

$$\tan 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \div \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{3}.$$

Conclusión

Se pueden utilizar las identidades del ángulo adición para calcular valores exactos de razones trigonométricas de ángulos no conocidos.

Problemas

1. Utilizando las identidades del ángulo adición, calcula el valor exacto del seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos utilizando los ángulos especiales.

   a) 15° b) 105°

   c) 165° d) 195°

Los ángulos especiales son aquellos para los cuales las razones trigonométricas son conocidas (0°, 30°, 45°, 60°, 90° y 180°). Los ángulos 120°, 135°, 150°, 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315° y 330° también son especiales pero pueden calcularse con los primeros valores mencionados.

2. Utilizando las identidades del ángulo adición demuestra que

   a) $\cos(180° + \theta) = -\cos\theta$ b) $\text{sen}(180° - \theta) = \text{sen }\theta$

   c) $\cos(270° + \theta) = \text{sen }\theta$ d) $\text{sen}(270° + \theta) = -\cos\theta$

   e) $\cos(45° - \theta) = \text{sen}(45° + \theta)$ f) $\tan(45° + \theta) = \dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

   g) $\text{sen}(360° + \theta) = \text{sen }\theta$ h) $\cos(360° + \theta) = \cos\theta$

Indicador de logro:

1.4 Calcula valores exactos de razones trigonométricas utilizando ángulos especiales y las identidades del ángulo adición.

Secuencia:

Luego de haber establecido la identidad del ángulo adición, se calculan valores exactos de razones trigonométricas aplicando esta identidad.

Propósito:

Establecer que se pueden calcular valores exactos de razones trigonométricas utilizando la identidad del ángulo adición y los ángulos especiales.

Solución de problemas:

1a) $15° = 45° - 30°$

- $\operatorname{sen} 15° = \operatorname{sen}(45° - 30°) = \operatorname{sen} 45° \cos 30° - \cos 45° \operatorname{sen} 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
- $\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \operatorname{sen} 45° \operatorname{sen} 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
- $\tan 15°$:

Forma 1. $\tan 15° = \frac{\tan 45° - \tan 30°}{1 + \tan 45° \tan 30°} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + (1)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}.$

Al racionalizar se obtiene que $\tan 15° = 2 - \sqrt{3}$.

Forma 2. $\tan 15° = \frac{\operatorname{sen} 15°}{\cos 15°} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \div \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}.$

Al racionalizar se obtiene que $\tan 15° = 2 - \sqrt{3}$.

También puede utilizarse que $15° = 60° - 45°$.

Para resolver el problema 1 hay más de una forma de hacerlo, ya que un ángulo puede escribirse como la suma o resta de dos ángulos especiales de más de una forma. Por ejemplo,
$15° = 75° - 60° = 45° - 30° = 60° - 45° = 135° - 120°$
y así sucesivamente.

1b)
- $\operatorname{sen} 105° = \operatorname{sen}(60° + 45°) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$
- $\cos 105° = \cos(60° + 45°) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$
- $\tan 105° = -2 - \sqrt{3}.$

1c)
- $\operatorname{sen} 165° = \operatorname{sen}(180° - 15°) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$
- $\cos 165° = \cos(180° - 15°) = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$
- $\tan 165° = -2 + \sqrt{3}.$

$105° = 90° + 15° = 150° - 45° = 180° - 75°$, etc.

$165° = 90° + 75° = 120° + 45° = 150° + 15°$, etc.

1d)
- $\operatorname{sen} 195° = \operatorname{sen}(180° + 15°) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$
- $\cos 195° = \cos(180° + 15°) = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$
- $\tan 195° = 2 - \sqrt{3}.$

$195° = 90° + 75° = 120° + 45° = 150° + 15° = 180° - 15°$, etc.

2a) $\cos(180° + \theta) = \cos 180° \cos\theta - \operatorname{sen} 180° \operatorname{sen}\theta = (-1)\cos\theta - (0)\operatorname{sen}\theta = -\cos\theta$

2b) $\operatorname{sen}(180° - \theta) = \operatorname{sen} 180° \cos\theta - \cos 180° \operatorname{sen}\theta = (0)\cos\theta - (-1)\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta$

2c) $\cos(270° + \theta) = \cos 270° \cos\theta - \operatorname{sen} 270° \operatorname{sen}\theta = (0)\cos\theta - (-1)\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta$

2d) $\operatorname{sen}(270° + \theta) = \operatorname{sen} 270° \cos\theta + \cos 270° \operatorname{sen}\theta = (-1)\cos\theta + (0)\operatorname{sen}\theta = -\cos\theta$

2e) $\cos(45° - \theta) = \cos 45° \cos\theta + \operatorname{sen} 45° \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\theta.$

Por otra parte, $\operatorname{sen}(45° + \theta) = \operatorname{sen} 45° \cos\theta + \cos 45° \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\theta.$
Por lo tanto, $\cos(45° - \theta) = \operatorname{sen}(45° + \theta)$.

2f) $\tan(45° + \theta) = \frac{\tan 45° + \tan\theta}{1 - \tan 45° \tan\theta} = \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}.$

2g) $\operatorname{sen}(360° + \theta) = \operatorname{sen} 360° \cos\theta + \cos 360° \operatorname{sen}\theta = (0)\cos\theta + (1)\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta$

2h) $\cos(360° + \theta) = \cos 360° \cos\theta - \operatorname{sen} 360° \operatorname{sen}\theta = (1)\cos\theta - (0)\operatorname{sen}\theta = \cos\theta$

Lección 1

1.5 Ángulo doble

Problema inicial

Demuestra que

a) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\text{sen}^2\theta$

b) $\text{sen } 2\theta = 2\text{sen }\theta\cos\theta$

Solución

a) Se utiliza la fórmula del ángulo adición del coseno:

$$\cos 2\theta = \cos(\theta + \theta) = \cos\theta\cos\theta - \text{sen }\theta\text{ sen }\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta. \qquad (1)$$

De la identidad pitagórica $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ se deduce que $\cos^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta$, sustituyendo en (1) se tiene:

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta - \text{sen}^2\theta = 1 - 2\text{sen}^2\theta.$$

Si de la identidad pitagórica despejamos $\text{sen}^2\theta$ se tiene que $\text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$. Sustituyendo en (1) se tiene:

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) = \cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta = 2\cos^2\theta - 1.$$

b) Se utiliza la fórmula del ángulo adición del seno:

$$\text{sen } 2\theta = \text{sen}(\theta + \theta) = \text{sen }\theta\cos\theta + \cos\theta\text{ sen }\theta = \text{sen }\theta\cos\theta + \text{sen }\theta\cos\theta = 2\text{sen }\theta\cos\theta.$$

Teorema del ángulo doble

Para cualquier ángulo θ se satisfacen las identidades del ángulo doble

a) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\text{sen}^2\theta$

b) $\text{sen } 2\theta = 2\text{sen }\theta\cos\theta$

Además, para la tangente se tiene la siguiente identidad

c) $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

Ejemplo 1

Si $90° < \theta < 180°$ y $\text{sen }\theta = \frac{3}{5}$, ¿cuál es el valor de $\text{sen } 2\theta$ y $\cos 2\theta$?

Si se observa la fórmula del ángulo doble del seno y coseno se necesita calcular $\cos\theta$. Como θ está entre 90° y 180°, $\cos\theta$ es negativo. De la identidad pitagórica,

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1 \quad\Rightarrow\quad \cos^2\theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \quad\Rightarrow\quad \cos\theta = -\frac{4}{5}.$$

Luego, $\text{sen } 2\theta = 2\text{sen }\theta\cos\theta = 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$ y $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$.

Ejemplo 2

Si $\cos\theta = \frac{1}{4}$, ¿cuál es el valor de $\cos 2\theta$?

Como se conoce el valor de $\cos\theta$ se utiliza la identidad $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$.

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = 2\left(\frac{1}{16}\right) - 1 = \frac{1}{8} - 1 = -\frac{7}{8}.$$

Problemas

1. Si $0° < \theta < 90°$ y $\cos\theta = \frac{7}{9}$, ¿cuál es el valor de $\text{sen } 2\theta$ y $\cos 2\theta$?
2. Si $\text{sen }\theta = -\frac{\sqrt{7}}{3}$ determina el valor de $\cos 2\theta$.
3. Determina los valores de $\text{sen } 2\theta$, $\cos 2\theta$ y $\tan 2\theta$ si $\tan\theta = \frac{12}{5}$ y θ está en el tercer cuadrante.
4. Demuestra que $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$.

Indicador de logro:

1.5 Deduce y aplica las identidades trigonométricas del ángulo doble.

Secuencia:

La siguiente identidad trigonométrica que se aborda es la del ángulo doble, utilizando la identidad del ángulo adición. Además, se calculan razones trigonométricas del ángulo doble (2θ) si se conoce una razón del ángulo (θ).

Solución de problemas:

1. Como se conoce el valor de $\cos\theta$ se utiliza la identidad $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$:

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(\frac{7}{9}\right)^2 - 1 = 2\left(\frac{49}{81}\right) - 1 = \frac{17}{81}.$$

Para calcular $\text{sen}\, 2\theta$ hay que calcular $\text{sen}\,\theta$:

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\theta + \left(\frac{7}{9}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\theta = 1 - \frac{49}{81} = \frac{32}{81}.$$

Como $0° < \theta < 90°$ entonces $\text{sen}\,\theta$ es positivo. Por tanto, $\text{sen}\,\theta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$.

Luego, $\text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = 2\left(\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)\left(\frac{7}{9}\right) = \frac{56\sqrt{2}}{81}$.

2. Como se conoce el valor de $\text{sen}\,\theta$, se utiliza $\cos 2\theta = 1 - 2\,\text{sen}^2\theta$: $\cos 2\theta = 1 - 2\,\text{sen}^2\theta = 1 - 2\left(\frac{7}{9}\right) = -\frac{5}{9}$.

3. Se calculan primero los valores de $\text{sen}\,\theta$ y $\cos\theta$. Como θ está en el tercer cuadrante, $\text{sen}\,\theta$ y $\cos\theta$ son ambos negativos. Por el problema 4 de la clase 2.9 de la Unidad 5, página 141:

$$1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{144}{25} = \frac{169}{25} = \frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{25}{169} \Rightarrow \cos\theta = -\frac{5}{13}.$$

Luego, $\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \frac{12}{5} \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{12}{5}\cos\theta = \frac{12}{5}\left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{12}{13}$.

Por tanto,

- $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = -\frac{119}{169}$,
- $\text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = \frac{120}{169}$,
- $\tan 2\theta = \frac{\text{sen}\,2\theta}{\cos 2\theta} = -\frac{120}{119}$.

Para encontrar el valor de $\tan 2\theta$ en el problema 3 puede hacerse con la relación que hay con el seno y el coseno de 2θ o utilizar la identidad de c) en la conclusión de la clase.

4.
$$\begin{aligned}\tan 2\theta &= \tan(\theta + \theta)\\ &= \frac{\tan\theta + \tan\theta}{1 - \tan\theta\tan\theta}\\ &= \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}.\end{aligned}$$

Lección 1

1.6 Ángulo medio

Problema inicial

Demuestra que

a) $\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos\theta}{2}$ b) $\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{2}$

Solución

a) Del teorema del ángulo doble se sabe que

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$$

Si en esta expresión se hace $\alpha = \frac{\theta}{2}$ se obtendría

$$\cos\left(2\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1,$$

$$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1,$$

$$\Rightarrow \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos\theta}{2} \qquad \text{despejando } \cos^2\frac{\theta}{2}.$$

b) De igual forma que en a), del teorema del ángulo doble se tiene que

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha.$$

Haciendo $\alpha = \frac{\theta}{2}$ se obtiene

$$\cos\left(2\frac{\theta}{2}\right) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

$$\cos\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2},$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{2} \qquad \text{despejando } \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}.$$

Teorema del ángulo medio

Para cualquier ángulo θ se cumple que

a) $\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos\theta}{2}$ b) $\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{2}$

Además, para la tangente se cumple la identidad

c) $\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}$

Problemas

1. Demuestra el literal c) del teorema del ángulo medio.

2. Utilizando el resultado del Problema 1 demuestra que $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$.

Para el Problema 2, utiliza la relación de $\tan\frac{\theta}{2}$ con $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ y $\cos\frac{\theta}{2}$ y la identidad del ángulo doble del seno. Multiplica por un 1 conveniente.

3. Si se multiplica $\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}$ por $\frac{1 - \cos\theta}{1 - \cos\theta}$ se llega a que $\tan\frac{\theta}{2} = \pm\frac{1 - \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$. Esta última difiere del resultado del Problema 2 en el hecho que hay que elegir el signo + o –. Justifica por qué se elige solo el signo +.

Indicador de logro:

1.6 Deduce y aplica las identidades trigonométricas del ángulo medio.

Secuencia:

Se deduce la identidad del ángulo medio para el seno y el coseno. La identidad del ángulo medio de la tangente se propone como problema para el estudiante.

Propósito:

Las identidades que se establecen son el cuadrado de la razón trigonométrica del ángulo medio, para evitar la raíz cuadrada hasta que sea necesario el cálculo de razones trigonométricas.
Con respecto a la sección de Problemas, el Problema 1 es la deducción de la identidad del ángulo medio de la tangente. El Problema 2 establece otra forma de la identidad del ángulo medio de la tangente, identidad que puede utilizarse más adelante para la resolución de problemas.

Solución de problemas:

1. $\tan^2\frac{\theta}{2} = \dfrac{\text{sen}^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \dfrac{1-\cos\theta}{2} \div \dfrac{1+\cos\theta}{2} = \dfrac{1-\cos\theta}{\cancel{2}} \times \dfrac{\cancel{2}}{1+\cos\theta} = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}.$

2. $\tan\frac{\theta}{2} = \dfrac{\text{sen}\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \dfrac{\text{sen}\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} \times \dfrac{2\,\text{sen}\frac{\theta}{2}}{2\,\text{sen}\frac{\theta}{2}} = \dfrac{2\,\text{sen}^2\frac{\theta}{2}}{2\,\text{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \dfrac{1-\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}.$

Identidad del ángulo doble del seno

3. Partiendo del hecho que $\tan^2\frac{\theta}{2} = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$:

$$\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \times \frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta} = \frac{(1-\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)} = \frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta} = \frac{(1-\cos\theta)^2}{\text{sen}^2\theta}.$$

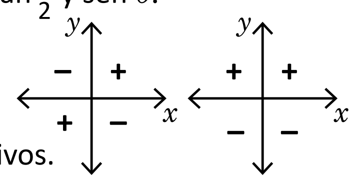
$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$
$\Rightarrow \text{sen}^2\theta = \cos^2\theta - 1$

Luego, $\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{(1-\cos\theta)^2}{\text{sen}^2\theta}} = \pm\dfrac{1-\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}.$

Al analizar el signo de $\dfrac{1-\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$ se observa que $1-\cos\theta$ es no negativo, para cualquier θ, por lo tanto, solo depende del signo de sen θ. Por otra parte, los signos de $\tan\frac{\theta}{2}$ y sen θ siempre coinciden, por lo tanto el signo que se debe elegir es el positivo (+). Se realiza un análisis de los signos de $\tan\frac{\theta}{2}$ y sen θ:

Si $0° < \frac{\theta}{2} < 90° \Rightarrow 0° < \theta < 180°$. Los signos de $\tan\frac{\theta}{2}$ y sen θ son ambos positivos.

Si $90° < \frac{\theta}{2} < 180° \Rightarrow 180° < \theta < 360°$. Los signos de $\tan\frac{\theta}{2}$ y sen θ son ambos negativos.



tangente seno

Se hace un análisis similar para los siguientes intervalos:

$$180° < \frac{\theta}{2} < 270°,\ 270° < \frac{\theta}{2} < 360°.$$

Por tanto, hay que tomar el signo positivo (+).

1.7 Valores exactos de las razones trigonométricas, parte 2

Problema inicial

1. Calcula los valores exactos de sen 22.5°, cos 22.5° y tan 22.5°.
2. Si $\cos\theta = \frac{3}{5}$, con θ en el cuarto cuadrante, determina el valor de $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$ y $\tan\frac{\theta}{2}$.

Solución

1. Observar que $22.5° = \frac{45°}{2}$. Además, 22.5° está en el primer cuadrante por lo que sen 22.5°, cos 22.5° y tan 22.5° son positivos.

$$\operatorname{sen}^2 22.5° = \operatorname{sen}^2\frac{45°}{2} = \frac{1-\cos 45°}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} 22.5° = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

$$\cos^2 22.5° = \cos^2\frac{45°}{2} = \frac{1+\cos 45°}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos 22.5° = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

$$\tan 22.5° = \frac{\operatorname{sen} 22.5°}{\cos 22.5°} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \div \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

2. Como θ está en el cuarto cuadrante significa que $270° < \theta < 360°$, por lo que $135° < \frac{\theta}{2} < 180°$; es decir, $\frac{\theta}{2}$ está en el segundo cuadrante y por lo tanto $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ es positivo y $\cos\frac{\theta}{2}$ y $\tan\frac{\theta}{2}$ son negativos. Así,

$$\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\frac{3}{5}}{2} = \frac{2}{5\times 2} = \frac{1}{5} \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\frac{3}{5}}{2} = \frac{\cancel{8}}{5\times \cancel{2}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \div \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{\cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{2\cancel{\sqrt{5}}} = -\frac{1}{2}.$$

Conclusión

Se pueden utilizar las fórmulas del ángulo medio para calcular valores exactos de razones trigonométricas.

Problemas

1. Utilizando las identidades del ángulo medio calcula las razones trigonométricas de cada ángulo.

a) 67.5° b) 105° c) 112.5° d) 165°

2. Para cada valor de $\cos\theta$ determina $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$ y $\tan\frac{\theta}{2}$.

a) $\cos\theta = \frac{3}{4}$, $0° < \theta < 90°$ b) $\cos\theta = -\frac{5}{12}$, $90° < \theta < 180°$

c) $\cos\theta = -\frac{1}{9}$, $180° < \theta < 270°$ d) $\cos\theta = \frac{1}{8}$, $270° < \theta < 360°$

3. Si $\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ y $180° < \theta < 270°$ determina el valor de $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$ y $\tan\frac{\theta}{2}$.

Indicador de logro:

1.7 Calcula valores exactos de razones trigonométricas utilizando las identidades del ángulo doble y del ángulo medio.

Secuencia:

Luego de haber deducido la identidad del ángulo medio, se calculan valores exactos de razones trigonométricas aplicando esta identidad. Además, se calculan razones trigonométricas del ángulo medio si se conoce alguna razón del ángulo y a qué cuadrante pertenece este último.

Solución de problemas:

1a) $67.5° = \frac{135°}{2}$ pertenece al primer cuadrante.

$$\operatorname{sen}^2 67.5° = \operatorname{sen}^2\frac{135°}{2} = \frac{1-\cos 135°}{2} = \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \div 2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} 67.5° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

$$\cos^2 67.5° = \cos^2\frac{135°}{2} = \frac{1+\cos 135°}{2} = \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \div 2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos 67.5° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

$$\tan 67.5° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \div \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})^2}{4-2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}+1.$$

$\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\operatorname{sen} 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

También puede utilizarse la identidad del Problema 2 de la clase 1.6:

$$\tan 67.5° = \frac{1-\cos 135°}{\operatorname{sen} 135°} = \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \div \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}+1.$$

Es conveniente utilizar la identidad del problema 2 en vez de la identidad c) de la Conclusión de la clase 1.6, ya que se evitan dos pasos: la racionalización y efectuar una raíz cuadrada.

1b) $$\operatorname{sen}^2 105° = \operatorname{sen}^2\frac{210°}{2} = \frac{1-\cos 210°}{2} = \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \div 2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} 105° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

$$\cos^2 105° = \cos^2\frac{210°}{2} = \frac{1+\cos 210°}{2} = \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \div 2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos 105° = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

$$\tan 105° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \div \left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = -\sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{4-3}} = -\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{1}} = -2-\sqrt{3}.$$

$\cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{sen} 210° = -\frac{1}{2}$

Si se utiliza la identidad $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$: $\tan 105° = \frac{1-\cos 210°}{\operatorname{sen} 210°} = \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \div \left(-\frac{1}{2}\right) = -2-\sqrt{3}$.

Compara el resultado del problema 1b) con el problema 1b) de la clase 1.4.

1c) $$\operatorname{sen}^2 112.5° = \operatorname{sen}^2\frac{225°}{2} = \frac{1-\cos 225°}{2} = \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \div 2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} 112.5° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

$$\cos^2 112.5° = \cos^2\frac{225°}{2} = \frac{1+\cos 225°}{2} = \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \div 2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos 112.5° = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

$$\tan 112.5° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \div \left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = -\sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})^2}{4-2}} = -\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -(\sqrt{2}+1).$$

$\cos 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\operatorname{sen} 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Si se utiliza la identidad $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$: $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \div \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -(\sqrt{2}+1)$.

$\cos 330° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{sen} 330° = -\frac{1}{2}$

1d) $$\operatorname{sen}^2 165° = \operatorname{sen}^2\frac{330°}{2} = \frac{1-\cos 330°}{2} = \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \div 2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} 165° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

$$\cos^2 165° = \cos^2\frac{330°}{2} = \frac{1+\cos 330°}{2} = \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \div 2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos 165° = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

$$\tan 165° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \div \left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right) = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = -\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{1}} = -2+\sqrt{3}.$$

Al utilizar la identidad $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$ se tiene que $\tan 165° = -2+\sqrt{3}$.

Hay que tener especial cuidado al determinar el signo de la razón trigonométrica. Podría haber confusión y determinar el signo de $\cos\theta$ y no el de $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ o $\cos\frac{\theta}{2}$.

2a) Como $0° < \theta < 90°$ entonces $0° < \frac{\theta}{2} < 45°$; por lo tanto, todas las razones trigonométricas son positivas.

$$\text{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} = \left(1-\frac{3}{4}\right) \div 2 = \frac{1}{8} \Rightarrow \text{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} = \left(1+\frac{3}{4}\right) \div 2 = \frac{7}{8} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\text{sen}\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \div \frac{\sqrt{14}}{4} = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}.$$

2b) Como $90° < \theta < 180°$ entonces $45° < \frac{\theta}{2} < 90°$; por lo tanto, todas las razones trigonométricas son positivas.

$$\text{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} = \left(1+\frac{5}{12}\right) \div 2 = \frac{17}{24} \Rightarrow \text{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{17}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{102}}{12}.$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} = \left(1-\frac{5}{12}\right) \div 2 = \frac{7}{24} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{42}}{12}.$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{102}}{12} \div \frac{\sqrt{42}}{12} = \frac{\sqrt{102}}{\sqrt{42}} = \frac{\sqrt{119}}{7}.$$

2c) Como $180° < \theta < 270°$ entonces $90° < \frac{\theta}{2} < 135°$; por lo tanto, $\text{sen}\frac{\theta}{2}$ es positivo y $\cos\frac{\theta}{2}$ y $\tan\frac{\theta}{2}$ son negativas.

$$\text{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} = \left(1+\frac{1}{9}\right) \div 2 = \frac{5}{9} \Rightarrow \text{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} = \left(1-\frac{1}{9}\right) \div 2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = -\frac{2}{3}.$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{5}}{3} \div \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

2d) Como $270° < \theta < 360°$ entonces $135° < \frac{\theta}{2} < 180°$; por lo tanto, $\text{sen}\frac{\theta}{2}$ es positivo y $\cos\frac{\theta}{2}$ y $\tan\frac{\theta}{2}$ son negativas.

$$\text{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} = \left(1-\frac{1}{8}\right) \div 2 = \frac{7}{16} \Rightarrow \text{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} = \left(1+\frac{1}{8}\right) \div 2 = \frac{9}{16} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = -\frac{3}{4}.$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{7}}{4} \div \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

3. Como $180° < \theta < 270°$ entonces $90° < \frac{\theta}{2} < 135°$; por lo tanto, $\text{sen}\frac{\theta}{2}$ es positivo y $\cos\frac{\theta}{2}$ y $\tan\frac{\theta}{2}$ son negativas.

Como $\text{sen}\,\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ entonces $\cos\theta = -\sqrt{1-\frac{5}{9}} = -\frac{2}{3}$. Luego,

$$\text{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} = \left(1+\frac{2}{3}\right) \div 2 = \frac{5}{6} \Rightarrow \text{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{30}}{6}.$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} = \left(1-\frac{2}{3}\right) \div 2 = \frac{1}{6} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{30}}{6} \div \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = -\sqrt{5}.$$

1.8 Practica lo aprendido

1. Escribe cada razón trigonométrica en términos de un ángulo θ tal que $0° \leq \theta < 90°$.

   a) $\text{sen}(-45°)$ b) $\text{sen } 210°$ c) $\text{sen } 350°$

   d) $\cos(-130°)$ e) $\cos(-80°)$ f) $\tan 135°$

2. Demuestra que:

   a) $\sec(-\theta) = \sec$ b) $\csc(-\theta) = -\csc \theta$

   c) $\cot(-\theta) = -\cot \theta$ d) $\sec(90° - \theta) = \csc \theta$

   e) $\csc(90° - \theta) = \sec \theta$ f) $\tan(\theta + 45°)\tan(45° - \theta) = 1$

3. Verifica que $\cot 75° = 2 - \sqrt{3}$.

4. Demuestra que:

   a) $\tan(\theta + 180°) = \tan \theta$ b) $\tan(\theta - 180°) = \tan \theta$

5. Demuestra que $\text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta) = 2\text{sen } \alpha \cos \beta$.

6. Determina $\text{sen } 2\theta$, $\cos 2\theta$ y $\tan 2\theta$ en cada caso.

   a) $\text{sen } \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$ y $0° < \theta < 90°$ b) $\text{sen } \theta = -\frac{1}{3}$ y $180° < \theta < 270°$

   c) $\sec \theta = \frac{\sqrt{13}}{2}$ y $270° < \theta < 360°$ d) $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ y $90° < \theta < 180°$

7. Calcula el valor exacto de $\cos 480°$ y $\text{sen } 480°$.

8. Para cada valor de $\text{sen } \theta$ determina $\text{sen } \frac{\theta}{2}$, $\cos \frac{\theta}{2}$ y $\tan \frac{\theta}{2}$.

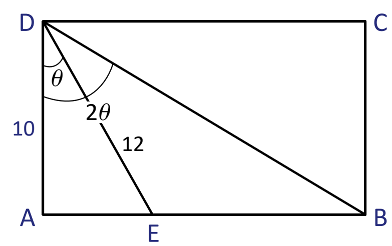
   a) $\text{sen } \theta = -\frac{4}{5}$ y $180° < \theta < 270°$ b) $\text{sen } \theta = \frac{5}{12}$ y $90° < \theta < 180°$

9. En la figura, ABCD es un rectángulo, donde AD = 10, DE = 12 y ∢BDA = 2∢EDA.

   a) Determina el valor de $\cos \theta$.

   b) Determina el valor de $\cos 2\theta$.

   c) Calcula la medida de BD.



Indicador de logro:

1.8 Resuelve problemas correspondientes a la resolución de identidades trigonométricas.

Solución de problemas:

1a) $\operatorname{sen}(-45°) = -\operatorname{sen} 45°$

1b) $\operatorname{sen} 210° = -\operatorname{sen}(210° - 180°) = -\operatorname{sen} 30°$

1c) $\operatorname{sen} 350° = -\operatorname{sen}(350° - 180°) = -\operatorname{sen} 170° = -\operatorname{sen}(180° - 170°) = -\operatorname{sen} 10° = -\cos 80°$

1d) $\cos(-130°) = \cos 130° = -\cos(180° - 130°) = -\cos 50° = -\operatorname{sen} 40°$

1e) $\cos(-80°) = \cos 80°$

1f) $\tan 135° = -\tan(180° - 135°) = -\tan 45°$

O bien, $\tan 135° = \tan(180° - 45°) = -\tan 45°$

2a) $\sec(-\theta) = \dfrac{1}{\cos(-\theta)} = \dfrac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$

2b) $\csc(-\theta) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(-\theta)} = \dfrac{1}{-\operatorname{sen}\theta} = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} = -\csc\theta$

2c) $\cot(-\theta) = \dfrac{1}{\tan(-\theta)} = \dfrac{1}{-\tan\theta} = -\dfrac{1}{\tan\theta} = -\cot\theta$

2d) $\sec(90° - \theta) = \dfrac{1}{\cos(90° - \theta)} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \csc\theta$

2e) $\csc(90° - \theta) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(90° - \theta)} = \dfrac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$

2f) $\dfrac{1}{\tan(\theta + 45°)} = \tan(90° - (\theta + 45°)) = \tan(45° - \theta)$

Entonces $\tan(\theta + 45°)\tan(45° - \theta) = 1$.

3. Se sabe que $\tan 75° = 2 + \sqrt{3}$, entonces

$$\cot 75° = \frac{1}{\tan 75°} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2 - \sqrt{3}.$$

al racionalizar

4a) $\tan(\theta + 180°) = \dfrac{\tan\theta + \cancelto{0}{\tan 180°}}{1 - \tan\theta\,\cancelto{0}{\tan 180°}} = \tan\theta$

4b) $\tan(\theta - 180°) = \dfrac{\tan\theta - \cancelto{0}{\tan 180°}}{1 + \tan\theta\,\cancelto{0}{\tan 180°}} = \tan\theta$

Para los problemas 4a) y 4b) también puede utilizarse la relación que hay entre la tangente y el seno y el coseno.

5. $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = (\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cancel{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}) + (\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cancel{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$

6a) $\cos 2\theta = 1 - 2\left(\dfrac{6}{9}\right) = -\dfrac{1}{3}$.

Por otra parte, $\cos\theta = \sqrt{1 - \dfrac{6}{9}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, entonces,

$\operatorname{sen} 2\theta = 2\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

$\tan 2\theta = -2\sqrt{2}$.

6b) $\cos 2\theta = \dfrac{7}{9}$, $\operatorname{sen} 2\theta = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}$ y $\tan 2\theta = \dfrac{4\sqrt{2}}{7}$

6c) $\cos 2\theta = -\dfrac{5}{13}$, $\operatorname{sen} 2\theta = -\dfrac{12}{13}$ y $\tan 2\theta = \dfrac{12}{5}$

6d) $\cos 2\theta = -\dfrac{1}{3}$, $\operatorname{sen} 2\theta = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ y $\tan 2\theta = 2\sqrt{2}$

7. *Forma 1*. Como $480° = 360° + 120°$, por los Problemas 2g) y 2h) de la clase 1.4, se tiene que

$$\cos 480° = \cos 120° = -\frac{1}{2} \text{ y } \operatorname{sen} 480° = \operatorname{sen} 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Forma 2. Como $480° = 2(240°)$, puede utilizarse la identidad del ángulo doble.

8a) $\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\dfrac{\theta}{2} = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ y $\tan\dfrac{\theta}{2} = -2$.

8b) $\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{12+\sqrt{119}}{6}}$,

$\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{12-\sqrt{119}}{6}}$,

$\tan\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{12+\sqrt{119}}{12-\sqrt{119}}} = \dfrac{\sqrt{263 + 24\sqrt{119}}}{5}$.

9a) El ΔAED es rectángulo, entonces $\cos\theta = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6}$.

9b) Como $\cos\theta = \dfrac{5}{6}$ y $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$, entonces

$$\cos 2\theta = 2\left(\frac{5}{6}\right)^2 - 1 = \frac{7}{18}.$$

9c) El ΔABD es rectángulo, entonces

$$\cos 2\theta = \frac{10}{BD} \Rightarrow BD = \frac{10}{\cos 2\theta} = 10 \div \frac{7}{18} = \frac{180}{7}.$$

2.1 Ecuaciones trigonométricas, parte 1*

Problema inicial

Resuelve $\tan^2\theta = 1$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Solución

Para resolver $\tan^2\theta = 1$. Como está elevado al cuadrado, se saca la raíz cuadrada a ambos lados y se tiene que $\tan\theta = \pm 1$. Esto significa que $\tan\theta = 1$ o bien $\tan\theta = -1$. Así,

Si $\tan\theta$ es positivo entonces el ángulo está en el primer o tercer cuadrante. Si $\tan\theta$ es negativo entonces el ángulo está en el segundo o cuarto cuadrante.

- $\tan\theta = 1$ cuando $\theta = 45°$ o $\theta = 180° + 45° = 225°$.
- $\tan\theta = -1$ cuando $\theta = 180° - 45° = 135°$ o $\theta = 360° - 45° = 315°$.

Por lo tanto, las soluciones de $\tan^2\theta = 1$ son $\theta = 45°, 135°, 225°, 315°$ cuando θ está entre $0°$ y $360°$.

Definición

Una **ecuación trigonométrica** es una ecuación donde la incógnita aparece como argumento de una razón trigonométrica.

Resolver una ecuación trigonométrica es encontrar todas las soluciones que satisfacen la igualdad.

El número de soluciones de una ecuación trigonométrica depende de los valores en los que se limita la incógnita; por ejemplo, la ecuación $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2}$ para $0° \leq \theta < 180°$ no tiene solución ya que $\operatorname{sen}\theta$ es positivo para ángulos que están entre $0°$ y $180°$.

Ejemplo

Resuelve $2\cos\theta - 6 = -4$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Para resolver se despeja $\cos\theta$ y se obtiene

$$\begin{aligned} & 2\cos\theta - 6 = -4 \\ \Rightarrow\quad & 2\cos\theta = -4 + 6 \\ \Rightarrow\quad & 2\cos\theta = 2 \\ \Rightarrow\quad & \cos\theta = 1 \end{aligned}$$

Como $\cos\theta$ es igual a 1 cuando $\theta = 0°$ se tiene que la solución de la ecuación $2\cos\theta - 6 = -4$ es $\theta = 0°$ cuando θ está entre $0°$ y $360°$.

Problemas

Resuelve las ecuaciones para $0° \leq \theta < 360°$.

a) $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{4}$

b) $\cos^2\theta = \frac{3}{4}$

c) $\tan^2\theta = 3$

d) $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{3}{4}$

e) $2\operatorname{sen}\theta - \sqrt{3} = 0$

f) $2\cos\theta + 3 = 4$

g) $4\operatorname{sen}\theta + 5 = 7$

h) $7\tan\theta = 2\sqrt{3} + \tan\theta$

Unidad 6

Indicador de logro:

2.1 Resuelve ecuaciones trigonométricas utilizando razones trigonométricas conocidas.

Secuencia:

La lección 2 consiste en la resolución de ecuaciones trigonométricas, y se inicia con la resolución de ecuaciones que requieran del uso de razones ya conocidas y estudiadas en la Unidad 5 de Primer año de bachillerato.

Propósito:

Resolver ecuaciones trigonométricas utilizando la teoría y herramientas vistas en la Unidad 5 de Primer año de bachillerato. Esta clase no requiere del uso de la calculadora.

Posibles dificultades:

Determinar los ángulos de razones trigonométricas conocidas; puede hacer referencia a la Lección 2 de la Unidad 5 de Primer año de Bachillerato.

Solución de problemas:

a) $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \pm\frac{1}{2}$.

- $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$ cuando $\theta = 30°$ o $\theta = 180° - 30° = 150°$.
- $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2}$ cuando $\theta = 180° + 30° = 210°$ o $\theta = 360° - 30° = 330°$.

Luego, las soluciones de $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{4}$ son $\theta = 30°, 150°, 210°, 330°$.

b) $\cos^2\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cuando $\theta = 30°$ o $\theta = 360° - 30° = 330°$.
- $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ cuando $\theta = 180° - 30° = 150°$ o $\theta = 180° + 30° = 210°$.

Luego, las soluciones de $\cos^2\theta = \frac{3}{4}$ son $\theta = 30°, 150°, 210°, 330°$.

c) $\tan^2\theta = 3 \Rightarrow \tan\theta = \pm\sqrt{3}$.

- $\tan\theta = \sqrt{3}$ cuando $\theta = 60°$ o $\theta = 180° + 60° = 240°$.
- $\tan\theta = -\sqrt{3}$ cuando $\theta = 180° - 60° = 120°$ o $\theta = 360° - 60° = 300°$.

Luego, las soluciones de $\tan^2\theta = 3$ son $\theta = 60°, 120°, 240°, 300°$.

d) $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Las soluciones de $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{3}{4}$ son $\theta = 60°, 120°, 240°, 300°$.

e) $2\operatorname{sen}\theta - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \theta = 60°$ o $\theta = 120°$.

f) $2\cos\theta + 3 = 4 \Rightarrow 2\cos\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta = 60°$ o $\theta = 300°$.

g) $4\operatorname{sen}\theta + 5 = 7 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta = 30°$ o $\theta = 150°$.

h) $7\tan\theta = 2\sqrt{3} + \tan\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \theta = 30°$ o $\theta = 210°$.

2.2 Ecuaciones trigonométricas, parte 2 (uso de la identidad pitagórica)

Problema inicial

Resuelve $2\cos^2\theta - \text{sen}\,\theta - 1 = 0$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Solución

Se reescribe la ecuación de modo que aparezca únicamente sen θ y para ello se utiliza la identidad pitagórica.

$$\begin{aligned} & 2\cos^2\theta - \text{sen}\,\theta - 1 = 0 \\ \Rightarrow\ & 2(1 - \text{sen}^2\theta) - \text{sen}\,\theta - 1 = 0 \\ \Rightarrow\ & 2 - 2\text{sen}^2\theta - \text{sen}\,\theta - 1 = 0 \\ \Rightarrow\ & -2\text{sen}^2\theta - \text{sen}\,\theta + 1 = 0 \\ \Rightarrow\ & 2\text{sen}^2\theta + \text{sen}\,\theta - 1 = 0 \end{aligned}$$

De la identidad pitagórica $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$ puede obtenerse que $\cos^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta$ o bien $\text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$.

Si se hace el cambio de variable $y = \text{sen}\,\theta$, la ecuación se transforma en $2y^2 + y - 1 = 0$.

Al factorizar el polinomio con el método de las tijeras se obtiene que $2y^2 + y - 1 = (2y - 1)(y + 1) = 0$. Pero $y = \text{sen}\,\theta$ por lo que se tienen dos ecuaciones trigonométricas:

- $2\text{sen}\,\theta - 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}$ y esto sucede cuando $\theta = 30°$ o $\theta = 180° - 30° = 150°$.
- $\text{sen}\,\theta + 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}\,\theta = -1$ y esto sucede cuando $\theta = 270°$.

También puede utilizarse la fórmula general para resolver $2y^2 + y - 1 = 0$.

Por lo tanto, las soluciones de $2\cos^2\theta - \text{sen}\,\theta - 1 = 0$ son $\theta = 30°, 150°, 270°$ cuando $0° \leq \theta < 360°$.

Conclusión

Algunas ecuaciones trigonométricas pueden transformarse en una ecuación cuadrática utilizando la identidad pitagórica, de modo que aparezca solo la razón seno o coseno.

Ejemplo

Resuelve $2\text{sen}^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Se reescribe la ecuación de modo que aparezca únicamente cos θ y para ello se utiliza la identidad pitagórica.

$$\begin{aligned} & 2\text{sen}^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0 \\ \Rightarrow\ & 2(1 - \cos^2\theta) + 3\cos\theta - 3 = 0 \\ \Rightarrow\ & 2 - 2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0 \\ \Rightarrow\ & -2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 1 = 0 \\ \Rightarrow\ & 2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0 \end{aligned}$$

Se factoriza $2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1$ por el método de la tijera

$2\cos\theta$	-1	$-\cos\theta$
$\cos\theta$	-1	$-2\cos\theta$
$2\cos^2\theta$	1	$-3\cos\theta$

Al considerar la ecuación con incógnita cos θ se tiene que $2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = (2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 1) = 0$.

Así, $2\cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$, es decir, $\theta = 60°$ o $\theta = 360° - 60° = 300°$.

O bien $\cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1$, es decir, $\theta = 0°$.

Por lo tanto, las soluciones de $2\text{sen}^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$ tal que $0° \leq \theta < 360°$ son $\theta = 0°, 60°, 300°$.

Problemas

Resuelve las ecuaciones para $0° \leq \theta < 360°$.

a) $2\cos^2\theta + \text{sen}\,\theta - 1 = 0$

b) $-3\text{sen}\,\theta + \cos^2\theta = 3$

c) $4\cos^2\theta + 4\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta - 7 = 0$

d) $2\text{sen}^2\theta - 3 = \cos\theta - 2$

Recuerda que $-1 \leq \text{sen}\,\theta \leq 1$ y $-1 \leq \cos\theta \leq 1$.

Indicador de logro:

2.2 Resuelve ecuaciones trigonométricas utilizando la identidad pitagórica para transformarlas en ecuaciones cuadráticas donde intervenga una sola razón trigonométrica.

Secuencia:

Se continúa con la resolución de ecuaciones trigonométricas, en esta ocasión aplicando la identidad pitagórica para convertir la ecuación a una ecuación cuadrática donde interviene una sola razón trigonométrica del ángulo θ.

Solución de problemas:

Las ecuaciones pueden resolverse haciendo el cambio de variable, sin embargo, la idea es que las resuelvan directamente.

a)
$$\begin{aligned} 2\cos^2\theta + \operatorname{sen}\theta - 1 &= 0 \\ 2(1 - \operatorname{sen}^2\theta) + \operatorname{sen}\theta - 1 &= 0 \\ 2 - 2\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}\theta - 1 &= 0 \\ 2\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta - 1 &= 0 \\ (2\operatorname{sen}\theta + 1)(\operatorname{sen}\theta - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, $2\operatorname{sen}\theta + 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta = 210°$ o $\theta = 330°$.

O bien $\operatorname{sen}\theta - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 1 \Rightarrow \theta = 90°$.

Por lo tanto, las soluciones son $\theta = 90°, 210°, 330°$.

b)
$$\begin{aligned} -3\operatorname{sen}\theta + \cos^2\theta &= 3 \\ -3\operatorname{sen}\theta + 1 - \operatorname{sen}^2\theta - 3 &= 0 \\ \operatorname{sen}^2\theta + 3\operatorname{sen}\theta + 2 &= 0 \\ (\operatorname{sen}\theta + 2)(\operatorname{sen}\theta + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces $\operatorname{sen}\theta + 2 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = -2 < -1$.
Por tanto, no hay solución para este caso.

O bien, $\operatorname{sen}\theta + 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = -1 \Rightarrow \theta = 270°$.

Por lo tanto, la solución de $-3\operatorname{sen}\theta + \cos^2\theta = 3$ es $\theta = 270°$.

c)
$$\begin{aligned} 4\cos^2\theta + 4\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta - 7 &= 0 \\ 4 - 4\operatorname{sen}^2\theta + 4\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta - 7 &= 0 \\ 4\operatorname{sen}^2\theta - 4\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta + 3 &= 0 \\ (2\operatorname{sen}\theta - \sqrt{3})^2 &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, $2\operatorname{sen}\theta - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\Rightarrow \theta = 60°$ o $\theta = 120°$.

Para el problema c), se puede observar que

$4\operatorname{sen}^2\theta - 4\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta + 3 = (2\operatorname{sen}\theta)^2 - 2(2\operatorname{sen}\theta)(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2$,

por lo tanto, es un trinomio cuadrado perfecto.

También puede observarse que

$$\begin{array}{ccccc} 2\operatorname{sen}\theta & & -\sqrt{3} & & -2\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta \\ \downarrow & \times & \downarrow & & \\ 2\operatorname{sen}\theta & & -\sqrt{3} & + & -2\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta \\ \hline 4\operatorname{sen}^2\theta & & 3 & & -4\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta \end{array}$$

d)
$$\begin{aligned} 2\operatorname{sen}^2\theta - 3 &= \cos\theta - 2 \\ 2 - 2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 &= 0 \\ 2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 &= 0 \\ (2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, $2\cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta = 60°$ o $\theta = 300°$.

O bien, $\cos\theta + 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = 180°$.

Por lo tanto, las soluciones son $\theta = 60°, 180°, 300°$.

2.3 Ecuaciones trigonométricas, parte 3 (uso del ángulo doble del coseno)

Problema inicial

Resuelve la ecuación trigonométrica $\cos 2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 2 = 0$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Solución

> Recuerda que
> $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\text{sen}^2\theta$.

Utilizando la identidad del ángulo doble del coseno,

$$\begin{aligned} & \cos 2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 2 = 0 \\ \Rightarrow\quad & (2\cos^2\theta - 1) - 2\sqrt{2}\cos\theta + 2 = 0 \\ \Rightarrow\quad & 2\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0 \end{aligned}$$

Puede utilizarse la fórmula general para resolver esta ecuación, pero también puede utilizarse el método de la tijera observando que

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{2}\cos\theta & -1 & -\sqrt{2}\cos\theta \\ \sqrt{2}\cos\theta & -1 & -\sqrt{2}\cos\theta \\ \hline 2\cos^2\theta & 1 & -2\sqrt{2}\cos\theta \end{array}$$

Es decir, $2\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 1 = (\sqrt{2}\cos\theta - 1)(\sqrt{2}\cos\theta - 1) = (\sqrt{2}\cos\theta - 1)^2$. De aquí se tiene que

$$\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ahora, se sabe que $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ cuando θ toma el valor de 45° y de 315°. Por lo tanto, las soluciones de la ecuación original son $\theta = 45°, 315°$ cuando θ está entre 0° y 360°.

Conclusión

Cuando en una ecuación trigonométrica aparece un término $\cos 2\theta$, esta debe transformarse a una ecuación donde resulten solo términos con ángulo θ utilizando la identidad del ángulo doble del coseno, de modo que aparezca una misma razón. Normalmente, para resolverlas, se debe factorizar y luego igualar a cero los dos factores que se obtengan, teniéndose dos ecuaciones trigonométricas las cuales hay que resolver.

Ejemplo

Resuelve la ecuación $\cos 2\theta + 6\text{sen}^2\theta - 1 + (2\sqrt{2} - 2)\text{sen}\,\theta - \sqrt{2} = 0$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Sustituyendo la identidad $\cos 2\theta = 1 - 2\,\text{sen}^2\theta$ se obtiene $4\text{sen}^2\theta + (2\sqrt{2} - 2)\text{sen}\,\theta - \sqrt{2} = 0$

Como en el Problema inicial, esta ecuación puede resolverse con la fórmula general, pero puede notarse que

$$\begin{array}{ccc} 2\,\text{sen}\,\theta & \sqrt{2} & 2\sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta \\ 2\,\text{sen}\,\theta & -1 & -2\,\text{sen}\,\theta \\ \hline 4\text{sen}^2\theta & -\sqrt{2} & 2\sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta - 2\,\text{sen}\,\theta \end{array}$$

Por lo que $4\text{sen}^2\theta + (2\sqrt{2} - 2)\text{sen}\theta - \sqrt{2} = (2\text{sen}\,\theta + \sqrt{2})(2\text{sen}\,\theta - 1) = 0$. Entonces, $\text{sen}\,\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ cuando θ toma los valores de 225° y 315°, o bien $\text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}$ cuando θ toma los valores de 30° y 150°. Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $\cos 2\theta + 6\text{sen}^2\theta - 1 + (2\sqrt{2} - 2)\text{sen}\,\theta - \sqrt{2} = 0$ son $\theta = 30°, 150°, 225°, 315°$.

Problemas

Resuelve las ecuaciones para $0° \leq \theta < 360°$.

a) $\cos 2\theta + \cos\theta = 0$

b) $\cos 2\theta + 3\text{sen}\,\theta - 2 = 0$

c) $\cos 2\theta + \text{sen}\,\theta = 0$

d) $\cos 2\theta + 4\cos\theta = -3$

e) $\cos 2\theta - \sqrt{3}\cos\theta - 2 = 0$

Indicador de logro:

2.3 Resuelve ecuaciones trigonométricas aplicando la identidad del ángulo doble del coseno para transformarlas en ecuaciones cuadráticas donde aparezcan razones con ángulo θ.

Secuencia:

Se resuelven ecuaciones trigonométricas donde aparece el coseno del ángulo doble, y se transforman de modo que aparezcan solo razones del ángulo θ.

Solución de problemas:

a)

$$\cos 2\theta + \cos\theta = 0$$
$$(2\cos^2\theta - 1) + \cos\theta = 0$$
$$2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$$
$$(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) = 0$$
$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \text{ o } \cos\theta = -1$$

Entonces, $\theta = 60°, 180°, 300°$.

b)

$$\cos 2\theta + 3\,\text{sen}\,\theta - 2 = 0$$
$$(1 - 2\,\text{sen}^2\theta) + 3\,\text{sen}\,\theta - 2 = 0$$
$$2\,\text{sen}^2\theta - 3\,\text{sen}\,\theta + 1 = 0$$
$$(2\,\text{sen}\,\theta - 1)(\text{sen}\,\theta - 1) = 0$$
$$\Rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{1}{2} \text{ o } \text{sen}\,\theta = 1$$

Entonces, $\theta = 30°, 90°, 150°$.

c)

$$\cos 2\theta + \text{sen}\,\theta = 0$$
$$(1 - 2\,\text{sen}^2\theta) + \text{sen}\,\theta = 0$$
$$2\,\text{sen}^2\theta - \text{sen}\,\theta - 1 = 0$$
$$(2\,\text{sen}\,\theta + 1)(\text{sen}\,\theta - 1) = 0$$
$$\Rightarrow \text{sen}\,\theta = -\frac{1}{2} \text{ o } \text{sen}\,\theta = 1$$

Entonces, $\theta = 90°, 210°, 330°$.

d)

$$\cos 2\theta + 4\cos\theta = -3$$
$$(2\cos^2\theta - 1) + 4\cos\theta + 3 = 0$$
$$2\cos^2\theta + 4\cos\theta + 2 = 0$$
$$\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = 0$$
$$(\cos\theta + 1)^2 = 0$$
$$\Rightarrow \cos\theta = -1$$

Entonces, $\theta = 180°$.

e)

$$\cos 2\theta - \sqrt{3}\cos\theta - 2 = 0$$
$$(2\cos^2\theta - 1) - \sqrt{3}\cos\theta - 2 = 0$$
$$2\cos^2\theta - \sqrt{3}\cos\theta - 3 = 0$$
$$(2\cos\theta + \sqrt{3})(\cos\theta - \sqrt{3}) = 0$$
$$\Rightarrow \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ o } \cos\theta = \sqrt{3}$$

Cuando $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ se tiene que $\theta = 150°$ o $\theta = 210°$.

Cuando $\cos\theta = \sqrt{3}$, no hay solución ya que $\sqrt{3} > 1$.

Entonces, $\theta = 150°, 210°$.

2.4 Ecuaciones trigonométricas, parte 4 (uso del ángulo doble del seno)

Problema inicial

Resuelve la ecuación trigonométrica sen 2θ + cos $\theta = 0$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Solución

Utilizando la identidad del ángulo doble para el seno, se tiene

$$\begin{aligned} & \operatorname{sen} 2\theta + \cos\theta = 0 & \\ \Rightarrow\quad & 2\cos\theta \operatorname{sen}\theta + \cos\theta = 0 & \text{aplicando la identidad del ángulo doble,} \\ \Rightarrow\quad & \cos\theta(2\operatorname{sen}\theta + 1) = 0 & \text{factorizando,} \\ \Rightarrow\quad & \cos\theta = 0 \ \text{ o bien } \ 2\operatorname{sen}\theta + 1 = 0. & \end{aligned}$$

- Si cos $\theta = 0$ entonces $\theta = 90°$ o $\theta = 270°$.
- Si $2\operatorname{sen}\theta + 1 = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen}\theta = -1 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2}$. Luego, sen $\theta = -\frac{1}{2}$ cuando $\theta = 180° + 30° = 210°$ o cuando $\theta = 360° - 30° = 330°$.

Luego, las soluciones de sen 2θ + cos $\theta = 0$ tal que $0° \leq \theta < 360°$ son $\theta = 90°, 210°, 270°, 330°$.

Conclusión

Cuando en una ecuación trigonométrica aparece un término sen 2θ se utiliza la identidad del ángulo doble del seno, sen $2\theta = 2\cos\theta \operatorname{sen}\theta$, para transformarla a una ecuación donde aparezcan solo términos con ángulo θ. Normalmente, para resolverlas se factoriza, obteniendo dos valores trigonométricos para los cuales hay que determinar el ángulo que las satisface.

Ejemplo

Resuelve la ecuación sen $2\theta + 2\operatorname{sen}\theta = 0$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Al utilizar la identidad del ángulo doble del seno, se tiene,

$$\begin{aligned} & \operatorname{sen} 2\theta + 2\operatorname{sen}\theta = 0 \\ \Rightarrow\quad & 2\cos\theta \operatorname{sen}\theta + 2\operatorname{sen}\theta = 0 \\ \Rightarrow\quad & 2\operatorname{sen}\theta(\cos\theta + 1) = 0 \end{aligned}$$

De aquí se tiene que sen $\theta = 0$ o bien $\cos\theta + 1 = 0$.

- Si sen $\theta = 0$ entonces θ debe ser 0° o 180°.
- Si $\cos\theta + 1 = 0$ entonces $\cos\theta = -1$, por lo que $\theta = 180°$.

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación sen $2\theta + 2\operatorname{sen}\theta = 0$ son $\theta = 0°, 180°$.

Problemas

Resuelve las ecuaciones para $0° \leq \theta < 360°$.

a) sen 2θ + sen $\theta = 0$

b) sen $2\theta - \sqrt{3}$sen $\theta = 0$

c) sen 2θ = sen θ

d) sen $2\theta + \sqrt{2}$cos $\theta = 0$

e) sen 2θ – cos $\theta = 0$

f) sen 2θ + 2sen $\theta = 0$

Indicador de logro:

2.4 Resuelve ecuaciones trigonométricas aplicando la identidad del ángulo doble del seno para transformarla en una donde aparezcan razones con ángulo θ.

Secuencia:

Se resuelven ecuaciones trigonométricas donde aparece el seno del ángulo doble, y se transforman de modo que aparezcan solo razones del ángulo θ.

Solución de problemas:

a)

$$\text{sen } 2\theta + \text{sen } \theta = 0$$
$$2 \cos \theta \text{ sen } \theta + \text{sen } \theta = 0$$
$$\text{sen } \theta(2 \cos \theta + 1) = 0$$
$$\Rightarrow \text{ sen } \theta = 0 \text{ o } \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

Entonces, $\theta = 0°, 120°, 180°, 240°$.

b)

$$\text{sen } 2\theta - \sqrt{3}\text{sen } \theta = 0$$
$$2 \cos \theta \text{ sen } \theta - \sqrt{3}\text{sen } \theta = 0$$
$$\text{sen } \theta(2 \cos \theta - \sqrt{3}) = 0$$
$$\Rightarrow \text{ sen } \theta = 0 \text{ o } \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Entonces, $\theta = 0°, 30°, 180°, 330°$.

c)

$$\text{sen } 2\theta = \text{sen } \theta$$
$$2 \cos \theta \text{ sen } \theta - \text{sen } \theta = 0$$
$$\text{sen } \theta(2 \cos \theta - 1) = 0$$
$$\Rightarrow \text{ sen } \theta = 0 \text{ o } \cos \theta = \frac{1}{2}$$

Entonces, $\theta = 0°, 60°, 180°, 300°$.

d)

$$\text{sen } 2\theta + \sqrt{2}\cos \theta = 0$$
$$2 \cos \theta \text{ sen } \theta + \sqrt{2}\cos \theta = 0$$
$$\cos \theta(2 \text{ sen } \theta + \sqrt{2}) = 0$$
$$\Rightarrow \cos \theta = 0 \text{ o sen } \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Entonces, $\theta = 90°, 225°, 270°, 315°$.

e)

$$\text{sen } 2\theta - \cos \theta = 0$$
$$2 \cos \theta \text{ sen } \theta - \cos \theta = 0$$
$$\cos \theta(2 \text{ sen } \theta - 1) = 0$$
$$\Rightarrow \cos \theta = 0 \text{ o sen } \theta = \frac{1}{2}$$

Entonces, $\theta = 30°, 90°, 150°, 270°$.

f)

$$\text{sen } 2\theta + 2 \text{ sen } \theta = 0$$
$$2 \cos \theta \text{ sen } \theta + 2 \text{ sen } \theta = 0$$
$$2 \text{ sen } \theta(\cos \theta + 1) = 0$$
$$\Rightarrow \text{ sen } \theta = 0 \text{ o } \cos \theta = -1$$

Entonces, $\theta = 0°, 180°$.

2.5 Ecuaciones trigonométricas, parte 5*

Problema inicial

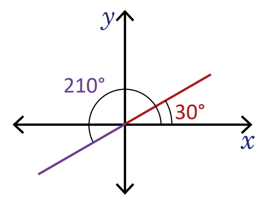
Resuelve la ecuación $\tan 2\theta = \cot\theta$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Solución

Se aplica la identidad del ángulo doble de tangente y además se utiliza el hecho de que $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$.

$$\tan 2\theta = \cot\theta \;\Rightarrow\; \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$$
$$\Rightarrow (2\tan\theta)(\tan\theta) = 1 - \tan^2\theta$$
$$\Rightarrow 2\tan^2\theta = 1 - \tan^2\theta$$
$$\Rightarrow 3\tan^2\theta = 1 \;\Rightarrow\; \tan^2\theta = \frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow \tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Luego, se tienen dos casos: cuando $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y cuando $\tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Así,



- Si $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ entonces $\theta = 30°$ o $\theta = 180° + 30° = 210°$.
- Si $\tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ entonces $\theta = 180° - 30° = 150°$ o $\theta = 360° - 30° = 330°$.

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación trigonométrica $\tan 2\theta = \cot\theta$ tal que $0° \leq \theta < 360°$ son $\theta = 30°, 150°, 210°, 330°$.

Conclusión

Cuando en una ecuación trigonométrica aparecen las razones secante, cosecante y cotangente se utilizan las relaciones entre estas y las razones coseno, seno y tangente para transformar la ecuación a una donde aparezcan únicamente estas últimas razones.

Ejemplo

Resuelve $\sec\theta\csc\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sec\theta = 0$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Puede observarse que hay un factor común $\sec\theta$, por lo que se puede resolver por factorización.

$$\sec\theta\csc\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sec\theta = 0 \;\Rightarrow\; \sec\theta\left(\csc\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 0$$

De aquí se tiene que, $\sec\theta = 0$ o bien $\csc\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3} = 0$. Así,

- $\sec\theta = 0$ significa que $\frac{1}{\cos\theta} = 0$. Pero esto no es posible, ya que una fracción puede ser cero solo cuando el numerador es cero. Por lo que esta ecuación no tiene solución.
- O bien, $\csc\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3} = 0$, es decir $\csc\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Pero $\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
  Esto sucede cuando θ toma los valores de 60° y 120°.

Por lo tanto, las soluciones de $\sec\theta\csc\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sec\theta = 0$ son $\theta = 60°, 120°$ cuando $0° \leq \theta < 360°$.

Problemas

Resuelve las ecuaciones para $0° \leq \theta < 360°$.

a) $2\sec\theta + 3 = \sec\theta + 5$

b) $\sec\theta\csc\theta + \sqrt{2}\csc\theta = 0$

c) $2\operatorname{sen}\theta + 1 = \csc\theta$

d) $3\csc\theta + 5 = \csc\theta + 9$

e) $4(\cot\theta + 1) = 2(\cot\theta + 2)$ $\quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$.

f) $\sec\theta + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

Indicador de logro:

2.5 Resuelve ecuaciones trigonométricas aplicando la relación entre las razones trigonométricas secante, cosecante y cotangente con las razones coseno, seno y tangente.

Secuencia:

Finaliza la unidad con la resolución de ecuaciones trigonométricas donde aparecen las razones cosecante, secante y cotangente; se resuelven utilizando la relación que hay con las razones seno, coseno y tangente.

Solución de problemas:

a) $2 \sec \theta + 3 = \sec \theta + 5$

$\sec \theta = 2$

$\cos \theta = \frac{1}{2}$

Entonces, $\theta = 60°, 300°$.

b) $\sec \theta \csc \theta + \sqrt{2} \csc \theta = 0$

$\csc \theta(\sec \theta + \sqrt{2}) = 0$

$\csc \theta = 0$ o $\sec \theta = -\sqrt{2}$

Cuando $\csc \theta = 0$ significa que $\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} = 0$, lo cual no es posible. Por tanto, no hay solución.

Si $\sec \theta = -\sqrt{2}$, entonces $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, es decir, $\theta = 135°$ o $\theta = 225°$.

Por tanto, $\theta = 135°$ o $\theta = 225°$.

c) $2 \operatorname{sen} \theta + 1 = \csc \theta$

$2 \operatorname{sen} \theta + 1 = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta}$

$2 \operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen} \theta - 1 = 0$

$(2 \operatorname{sen} \theta - 1)(\operatorname{sen} \theta + 1) = 0$

$\Rightarrow \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}$ o $\operatorname{sen} \theta = -1$

Entonces, $\theta = 30°, 150°, 270°$.

d) $3 \csc \theta + 5 = \csc \theta + 9$

$2 \csc \theta = 4$

$\csc \theta = 2$

$\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}$

Entonces, $\theta = 30°, 150°$.

e) $4(\cot \theta + 1) = 2(\cot \theta + 2)$

$2 \cot \theta = 0$

$\frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} = 0$

$\Rightarrow \cos \theta = 0$

Entonces, $\theta = 90°, 270°$.

f) $\sec \theta + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$\sec \theta = \sqrt{2}$

$\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Entonces, $\theta = 45°, 315°$.

2.6 Practica lo aprendido

Resuelve cada ecuación para $0° \leq \theta < 360°$.

a) $5(\cos\theta + 1) = 5$

b) $4\text{sen}\,\theta - 1 = 2\text{sen}\,\theta + 1$

c) $3(\tan\theta - 2) = 2\tan\theta - 7$

d) $3\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

e) $\tan^2\theta - 3 = 0$

f) $\cos^2\theta + \text{sen}\,\theta = 1$

g) $1 + \text{sen}\,\theta - \cos^2\theta = 0$

h) $\cos^3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta = 0$

i) $\cos 2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$

j) $3\cos 2\theta - 4\cos^2\theta + 2 = 0$

k) $\text{sen}\,2\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta = 0$

l) $\text{sen}\,2\theta = \tan\theta$

m) $2\tan\theta = 1 + \tan^2\theta$

n) $\tan\theta - 3\cot\theta = 0$

Para el Problema 1, calcula el valor de $\text{sen}(\alpha + \beta)$ y utiliza la identidad del ángulo adición.

2.7 Problemas de la unidad

1. Si $0° < \alpha < 90°$, $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$ y $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{4}{5}$, determina los valores de $\text{sen}\,\beta$, $\cos\beta$ y $\tan\beta$.

2. Si $0° \leq \theta < 360°$, resuelve cada ecuación.
   a) $\text{sen}\,2\theta - 3\cos\theta = 0$
   b) $\cos 2\theta - \text{sen}\,\theta - 1 = 0$

3. Si $A + B + C = 180°$, demuestra que $\text{sen}(B + C) = \text{sen}\,A$.

4. Si $\tan 35° = x$, deduce que
$$\frac{\tan 145° - \tan 125°}{1 + \tan 145°\tan 215°} = \frac{1}{x}.$$

5. El ángulo θ cumple que $\text{sen}(\theta + 30°) = \frac{3\sqrt{3}+4}{10}$ y $\text{sen}(\theta - 30°) = \frac{3\sqrt{3}-4}{10}$. Determina los valores de $\text{sen}\,\theta$ y $\cos\theta$.

Indicador de logro:

2.6 Resuelve problemas correspondientes a la resolución de ecuaciones trigonométricas.

Solución de problemas:

a) $5(\cos\theta + 1) = 5 \Rightarrow \cos\theta = 0$

Entonces, $\theta = 90°, 270°$.

b) $4\text{sen}\,\theta - 1 = 2\text{sen}\,\theta + 1 \Rightarrow \text{sen}\,\theta = 1 \Rightarrow \theta = 90°$

Entonces, $\theta = 90°$.

c) $3(\tan\theta - 2) = 2\tan\theta - 7 \Rightarrow \tan\theta = -1$

Entonces, $\theta = 135°, 315°$.

d) $3\tan\theta + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Entonces, $\theta = 150°, 330°$.

e) $\tan^2\theta - 3 = 0 \Rightarrow \tan\theta = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \theta = 60°, 120°, 240°, 300°$

Entonces, $\theta = 60°, 120°, 240°, 300°$.

f) $\cos^2\theta + \text{sen}\,\theta = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\theta - \text{sen}\,\theta = 0$

$\Rightarrow \text{sen}\,\theta(\text{sen}\,\theta - 1) = 0$

$\Rightarrow \text{sen}\,\theta = 0$ o $\text{sen}\,\theta = 1$

Entonces, $\theta = 0°, 90°, 180°$.

g) $1 + \text{sen}\,\theta - \cos^2\theta = 0 \Rightarrow \text{sen}^2\theta + \text{sen}\,\theta = 0$

$\Rightarrow \text{sen}\,\theta(\text{sen}\,\theta + 1) = 0$

$\Rightarrow \text{sen}\,\theta = 0$ o $\text{sen}\,\theta = -1$

Entonces, $\theta = 0°, 180°, 270°$.

h) $\cos^3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta\left(\cos^2\theta - \frac{3}{4}\right) = 0$

$\Rightarrow \cos\theta = 0$ o $\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Entonces, $\theta = 30°, 90°, 150°, 210°, 270°, 330°$.

i) $\cos 2\theta + \text{sen}^2\theta = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\theta = 0$

$\Rightarrow \text{sen}\,\theta = 0$

Entonces, $\theta = 0°, 180°$.

j) $3\cos 2\theta - 4\cos^2\theta + 2 = 0$

$3(2\cos^2\theta - 1) - 4\cos^2\theta + 2 = 0$

$2\cos^2\theta - 1 = 0$

$\cos^2\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Entonces, $\theta = 45°, 135°, 225°, 315°$.

k) $\text{sen}\,2\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta = 0$

$2\,\text{sen}\,\theta\cos^2\theta + 2\cos^2\theta = 0$

$2\cos^2\theta(\text{sen}\,\theta + 1) = 0$

$\Rightarrow \cos\theta = 0$ o $\text{sen}\,\theta = -1$

Entonces, $\theta = 90°, 270°$.

l) $\text{sen}\,2\theta = \tan\theta$

$2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$

$2\,\text{sen}\,\theta\cos^2\theta = \text{sen}\,\theta$

$\text{sen}\,\theta(2\cos^2\theta - 1) = 0$

$\Rightarrow \text{sen}\,\theta = 0$ o $\cos^2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Entonces, $\theta = 0°, 45°, 135°, 180°, 225°, 315°$.

m) $2\tan\theta = 1 + \tan^2\theta \Rightarrow \tan^2\theta - 2\tan\theta + 1 = 0$

$\Rightarrow (\tan\theta - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow \tan\theta = 1$

Entonces, $\theta = 45°, 225°$.

El m) también puede resolverse utilizando la relación de la tangente con el seno y el coseno, pero el proceso es más largo.

n) $\tan\theta - 3\cot\theta = 0 \Rightarrow \tan\theta - \frac{3}{\tan\theta} = 0, \tan\theta \neq 0 \Rightarrow \tan^2\theta = 3 \Rightarrow \tan\theta = \pm\sqrt{3}$

Entonces, $\theta = 60°, 120°, 240°, 300°$.

Indicador de logro:

2.7 Resuelve problemas correspondientes a identidades y ecuaciones trigonométricas

1. Como sen α = $\frac{3}{5}$ y 0° < α < 90°, entonces cos α = $\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$. Por otra parte,

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{4}{5}\cos\beta - \frac{3}{5}\operatorname{sen}\beta = -\frac{4}{5} \Rightarrow 4\cos\beta - 3\operatorname{sen}\beta = -4 \Rightarrow \cos\beta = \frac{3}{4}\operatorname{sen}\beta - 1.$$

Como $\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1$ entonces, $\operatorname{sen}^2\beta + \left(\frac{3}{4}\operatorname{sen}\beta - 1\right)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\beta + \frac{9}{16}\operatorname{sen}^2\beta - \frac{3}{2}\operatorname{sen}\beta + 1 = 1$

$$\Rightarrow \frac{25}{16}\operatorname{sen}^2\beta - \frac{3}{2}\operatorname{sen}\beta = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\beta\left(\frac{25}{16}\operatorname{sen}\beta - \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\beta = 0 \text{ o } \operatorname{sen}\beta = \frac{24}{25}$$

- Si $\operatorname{sen}\beta = 0$ entonces $\cos\beta = -1$ y $\tan\beta = 0$.
- Si $\operatorname{sen}\beta = \frac{24}{25}$ entonces $\cos\beta = -\frac{7}{25}$ y $\tan\beta = -\frac{24}{7}$.

2a) $\operatorname{sen} 2\theta - 3\cos\theta = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 3\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta(2\operatorname{sen}\theta - 3) = 0$

Es decir, $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = 90°$ o $\theta = 270°$, o bien, $2\operatorname{sen}\theta - 3 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{3}{2}$, esta ecuación no tiene solución. Por lo tanto, las soluciones son $\theta = 90°, 270°$.

2b) $\cos 2\theta - \operatorname{sen}\theta - 1 = 0 \Rightarrow 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta - 1 = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta(2\operatorname{sen}\theta + 1) = 0$

Es decir, $\operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0°$ o $\theta = 180°$, o bien, $2\operatorname{sen}\theta + 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 210°$ o $\theta = 330°$.

Por lo tanto, las soluciones son $\theta = 0°, 180°, 210°, 330°$.

3. Como $A + B + C = 180°$ entonces $B + C = 180° - A$. Por tanto,

$$\operatorname{sen}(B+C) = \operatorname{sen}(180° - A) = \operatorname{sen} A.$$

4. Se observa que 145° = 180° – 35°, 125° = 90° + 35° y 215° = 180° + 35°.

Luego, como $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta \Rightarrow \tan 145° = \tan(180° - 35°) = -\tan 35° = -x$.

De igual forma, $\tan(90° + \theta) = -\frac{1}{\tan\theta} \Rightarrow \tan 125° = \tan(90° + 35°) = -\frac{1}{\tan 35°} = -\frac{1}{x}$.

Y por último, como $\tan(180° + \theta) = \tan\theta \Rightarrow \tan 215° = \tan(180° + 35°) = \tan 35° = x$.

Sustituyendo en $\frac{\tan 145° - \tan 125°}{1 + \tan 145° \tan 215°}$ se tiene:

$$\frac{\tan 145° - \tan 125°}{1 + \tan 145° \tan 215°} = \frac{-x - \left(-\frac{1}{x}\right)}{1 + (-x)x} = \frac{-x^2 + 1}{x(1 - x^2)} = \frac{1 - x^2}{x(1 - x^2)} = \frac{1}{x}.$$

5. Por la identidad del ángulo adición del seno, se tiene,

$$\operatorname{sen}(\theta + 30°) = \operatorname{sen}\theta\cos 30° + \cos\theta\operatorname{sen} 30° = \operatorname{sen}\theta\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \cos\theta\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta}{2} + \frac{\cos\theta}{2} = \frac{3\sqrt{3} + 4}{10},$$

$$\operatorname{sen}(\theta - 30°) = \operatorname{sen}\theta\cos 30° - \cos\theta\operatorname{sen} 30° = \operatorname{sen}\theta\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \cos\theta\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta}{2} - \frac{\cos\theta}{2} = \frac{3\sqrt{3} - 4}{10}.$$

Si se suman ambas expresiones se tiene que $\frac{2\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{10} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$.

Por otra parte, si se restan se tiene que $\frac{2\cos\theta}{2} = \frac{8}{10} \Rightarrow \cos\theta = \frac{4}{5}$.

Unidad 7. Vectores y números complejos

Competencia de la unidad

Conocer los conceptos básicos sobre vectores, sus operaciones y relacionarlos con la representación geométrica de los números complejos, comparando la representación y las operaciones de vectores en el plano cartesiano con los números complejos en el plano complejo, para fundamentar los resultados más importantes sobre vectores y aplicarlos en otras áreas

Relación y desarrollo

Tercer ciclo

Unidad 1: Multiplicación de polinomios (9°)
- Multiplicación de polinomios
- Productos notables
- Factorización

Unidad 3: Ecuación cuadrática (9°)
- Ecuación cuadrática
- Aplicaciones de la ecuación cuadrática

Primer año de bachillerato

Unidad 2: Operaciones con polinomios y números complejos
- Productos notables y factorización
- División de polinomios
- Ecuación cuadrática y números complejos

Unidad 5: Resolución de triángulos oblicuángulos
- Razones trigonométricas de ángulos agudos
- Razones trigonométricas de ángulos no agudos
- Resolución de triángulos oblicuángulos

Unidad 6: Identidades y ecuaciones trigonométricas
- Identidades trigonométricas
- Ecuaciones trigonométricas

Unidad 7: Vectores y números complejos
- Vectores
- Producto escalar de vectores
- Números complejos
- Práctica en GeoGebra

Plan de estudio de la unidad

Lección	Horas	Clases
1. Vectores	1	1. Vectores
	1	2. Suma y resta de vectores
	1	3. Producto por escalar
	1	4. Coordenadas de un vector en una base
	1	5. Operaciones con vectores en coordenadas
	1	6. Vectores y coordenadas de puntos
	1	7. Paralelismo
	1	8. Practica lo aprendido
2. Producto escalar de vectores	1	1. Proyección ortogonal
	1	2. Producto escalar de vectores paralelos
	1	3. Producto escalar de vectores no paralelos (no colineales)
	1	4. Forma trigonométrica del producto escalar
	1	5. Producto escalar de vectores en el plano cartesiano
	1	6. Practica lo aprendido
	1	Prueba de las lecciones 1 y 2.
3. Números complejos	1	1. Representación geométrica de los números complejos
	1	2. Operaciones con números complejos en el plano complejo
	1	3. Forma trigonométrica de los números complejos
	1	4. Multiplicación de números complejos en su forma trigonométrica
	1	5. División de números complejos en su forma trigonométrica
	1	6. Fórmula de Moivre

Lección	Horas	Clases
	1	7. Practica lo aprendido
	2	8. Problemas de la unidad
4. Práctica en GeoGebra	1	1. Conceptos básicos sobre vectores
	1	2. Resolución de problemas
	1	Prueba de la lección 3

25 horas clase + prueba de las lecciones 1 y 2 + prueba de la lección 3

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Vectores
Se establece el concepto de vector, se definen las operaciones de suma y resta de vectores, producto por escalar y coordenadas respecto a una base.

Lección 2: Producto escalar de vectores
Se define el producto escalar de dos vectores paralelos, luego se define para dos vectores cualesquiera utilizando la proyección ortogonal y se deduce también su forma trigonométrica.

Lección 3: Números complejos
En esta parte se estudia la representación geométrica de los números complejos en el plano complejo a partir de la representación de vectores en una base ortonormal. Se estudia la forma trigonométrica de un número complejo que se utiliza para la multiplicación y división de números complejos y su representación.

Lección 4: Práctica en GeoGebra
Se utilizan las herramientas básicas para trabajar con vectores y comprobar la solución de los problemas desarrollados a lo largo de la unidad.

1.1 Vectores

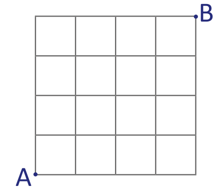
Problema inicial

Una persona se encuentra en un punto A dentro de la ciudad de San Salvador y desea dirigirse hacia el punto B. Determina:

a) Al menos 3 formas para llegar de A a B.

b) El camino más corto para llegar de A hasta B.

c) Una forma para representar que el camino va de A a B y no de B a A.

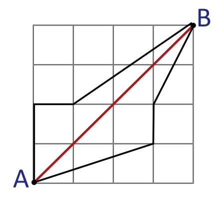


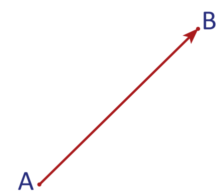
Solución

a) Algunas opciones para llegar de A a B se muestran en la figura de la derecha.

b) El camino más corto para llegar de A a B es el que está en color rojo.

c) Para representar que este camino va de A hacia B se puede utilizar una flecha que lo indique como lo muestra la figura.

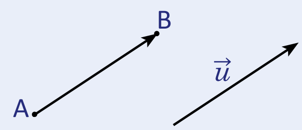




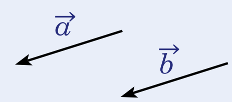
Definición

La flecha cuyo **punto inicial** es A y su **punto final** es B se conoce como **segmento dirigido**.

El conjunto de segmentos dirigidos que poseen la misma longitud, dirección (inclinación) y sentido (hacia donde apunta la flecha) se conoce como **vector**. Se representa un vector con cualquier segmento dirigido que pertenece a ese vector, si este segmento dirigido tiene su punto inicial A y su punto final B, se denota este vector por $\overrightarrow{AB}$; si no se expresan los vectores con sus puntos inicial y final se pueden usar las letras minúsculas a, b, c, ... por ejemplo, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

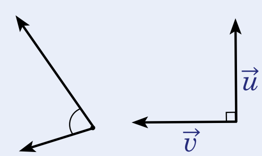


Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son iguales si los segmentos dirigidos que los representan tienen la misma longitud, dirección y sentido, es decir, uno se obtiene del otro por medio de un desplazamiento paralelo.



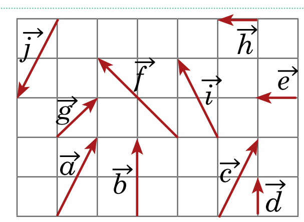
La longitud de un vector $\vec{u}$ se conoce por **norma** del vector $\vec{u}$, y se denota por $\|\vec{u}\|$. Un vector $\vec{u}$ es **unitario** si su norma es 1, es decir, $\|\vec{u}\| = 1$.

El **ángulo entre dos vectores** se mide al unir por los puntos iniciales ambos vectores y se utilizan valores de 0° hasta 180°. Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son **ortogonales** si el ángulo formado entre ellos es de 90°.

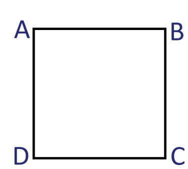


Problemas

1. Considerando los vectores en la cuadrícula donde el lado de cada cuadrado es 1, responde:
   a) ¿Cuáles vectores son iguales?
   b) ¿Cuáles vectores tienen la misma norma?
   c) ¿Cuáles vectores son unitarios?
   d) ¿Cuáles vectores son ortogonales?



2. Considerando el cuadrado ABCD de lado 1, determina:
   a) ¿Cuáles vectores son iguales?
   b) La norma del vector $\overrightarrow{AC}$.
   c) ¿Cuáles vectores son unitarios?
   d) ¿Cuáles vectores son ortogonales?



Indicador de logro:

1.1 Identifica la norma de un vector, vectores iguales, unitarios y ortogonales interpretando la definición.

Secuencia:

Se introduce la definición de vector y sus elementos a partir de conceptos geométricos conocidos como segmento dirigido, ángulo, longitud de un segmento, etc.

Propósito:

El Problema inicial induce la representación de un vector como segmento dirigido, con esta representación se realizará el estudio de los vectores.

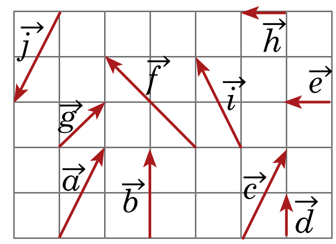
Solución de problemas:

1a) $\vec{a} = \vec{c}$, $\vec{e} = \vec{h}$

1b) Las de $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{i}$ y $\vec{j}$ son iguales y las de $\vec{d}$, $\vec{e}$ y $\vec{h}$ son iguales:

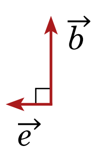
$\|\vec{a}\| = \|\vec{c}\| = \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

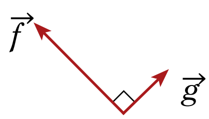
$\|\vec{d}\| = \|\vec{e}\| = \|\vec{h}\| = 1$



1c) $\vec{d}$, $\vec{e}$ y $\vec{h}$

1d) $\vec{b}$ y $\vec{e}$, $\vec{b}$ y $\vec{h}$, $\vec{d}$ y $\vec{e}$, $\vec{d}$ y $\vec{h}$, $\vec{g}$ y $\vec{f}$



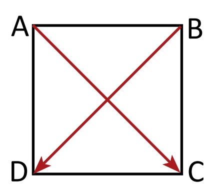


En el literal b) la igualdad de las normas se puede establecer al sobreponer dos vectores de tal manera que coincidan en longitud.

El ángulo entre los vectores se puede determinar midiendo con un transportador o por ángulos notables.

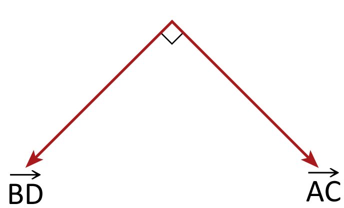
2a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$

2b) $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$



2c) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CB}$

2d) $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{BC}$,
$\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{DB}$



En virtud de la igualdad de vectores la respuesta en 2c) se puede expresar utilizando únicamente los primeros 4 vectores, esto dependerá del nivel de comprensión de los estudiantes ya que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, por ejemplo.

En el literal d) no es necesario que se escriban todas las parejas de vectores ortogonales, por ejemplo no se ha escrito $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ ya que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

El estudiante debe observar que no solo los lados de los cuadros definen vectores ortogonales sino también sus diagonales.

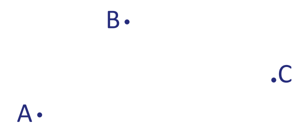
1.2 Suma y resta de vectores

Problema inicial

Resuelve los siguientes literales:

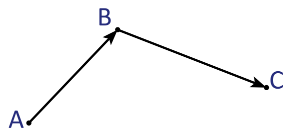
a) Representa con vectores la forma de ir de A hacia C pasando por B.

b) Representa con vectores la forma de ir de A hacia B pasando por C.

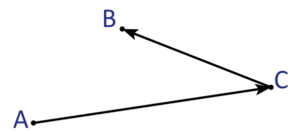


Solución

a) La representación sería:

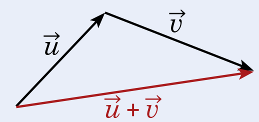


b) La representación sería:

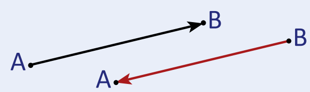


Definición

Al unir el punto final de un vector $\vec{u}$ con el punto inicial de otro vector $\vec{v}$, se define la operación **suma de vectores** como el vector determinado por el punto inicial de $\vec{u}$ con el punto final de $\vec{v}$, como lo muestra la figura. En el literal a) del Problema inicial se cumple que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

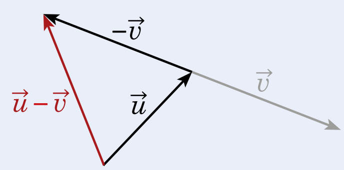


Dados 3 vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ se cumple que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (conmutatividad) y que $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ (asociatividad).



Dado un vector $\overrightarrow{AB}$, se define el vector $\overrightarrow{BA}$ como **el opuesto** del vector $\overrightarrow{AB}$, y se denota por $-\overrightarrow{AB}$, es decir, $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

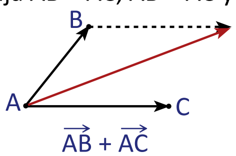
Se define la **resta** del vector $\vec{u}$ con el vector $\vec{v}$ como la suma del vector $\vec{u}$ con $-\vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ como lo muestra la figura. En el literal b) del Problema inicial se cumple que $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.

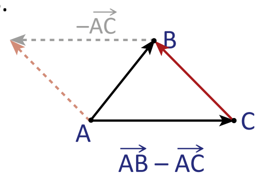


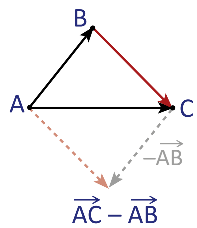
El vector que resulta de realizar la resta $\vec{u} - \vec{u} = \vec{u} + (-\vec{u})$ se conoce como **vector cero**, y se denota por $\vec{0}$ y cumple que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$.

Ejemplo

Dibuja $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.





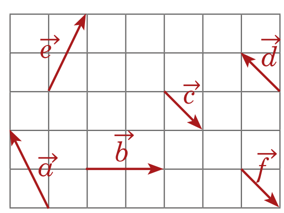


Estas representaciones de vectores son muy importantes.

Problemas

Dibuja en tu cuaderno los vectores de la cuadrícula y determina el vector que representa las operaciones de cada literal.

a) $\vec{a} + \vec{b}$
b) $\vec{a} + \vec{c}$
c) $\vec{c} + \vec{d}$
d) $\vec{a} + \vec{e} + \vec{c}$
e) $\vec{a} - \vec{b}$
f) $\vec{d} - \vec{f}$
g) $\vec{c} - \vec{f}$
h) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$



Unidad 7

Indicador de logro:

1.2 Dibuja el vector resultante de una suma o resta de vectores.

Secuencia:

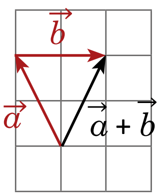
Se definen las operaciones entre vectores en las que se introducen los conceptos de vector opuesto y vector cero. Las operaciones se realizan utilizando los segmentos como tal, posteriormente se introducirán los conceptos de base y coordenadas que facilitan estas operaciones.

Propósito:

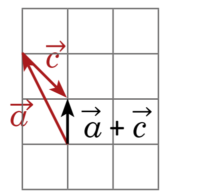
El Problema inicial proporciona una imagen de la suma de vectores. La imagen que representa la resta en la Definición se interpreta en términos de la suma de vectores y el vector opuesto, mientras que en el Ejemplo se interpreta a partir de los vectores originales.

Solución de problemas:

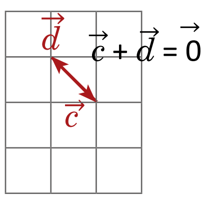
a)



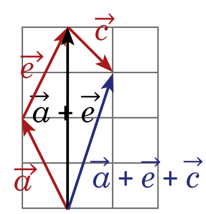
b)



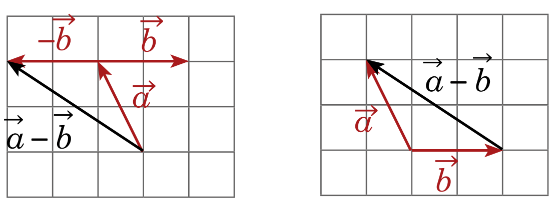
c)



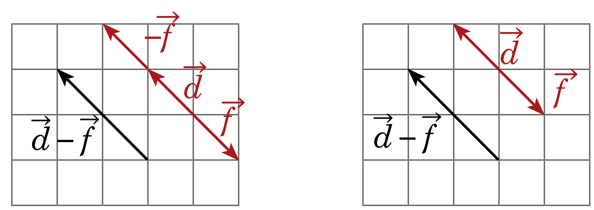
d)



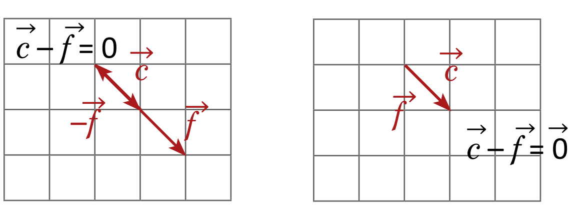
e)



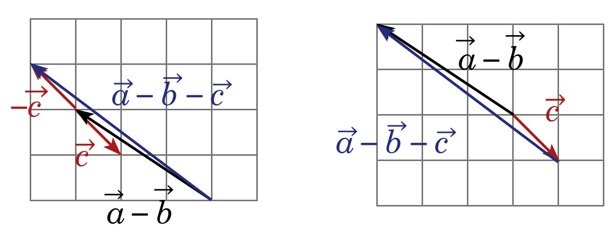
f)



g)



h)



En el literal d) se realiza asociando los primeros dos vectores y luego se suma el tercero. A partir del literal e) se muestra cómo realizar la resta de dos formas distintas, la primera es a partir de la suma del vector opuesto y la segunda aplicando el esquema del Ejemplo. En h) se ha retomado el resultado de e).

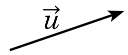
1.3 Producto por escalar

Problema inicial

Dibuja el vector que resulta en las siguientes sumas de vectores:

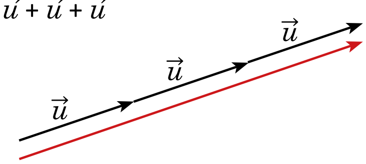
a) $\vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$

b) $-\vec{u} - \vec{u}$

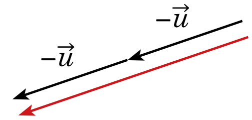


Solución

a) $\vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$



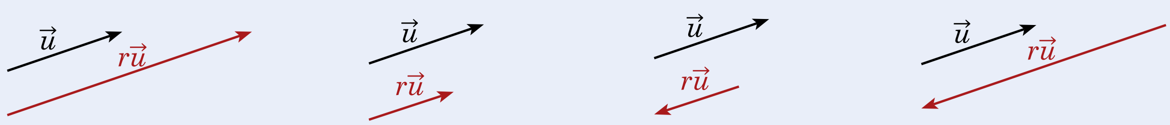
b) $-\vec{u} - \vec{u}$



Definición

Para un vector $\vec{u}$ y un número real r, de modo que $\vec{u} \neq \vec{0}$ y $r \neq 0$, se define el **producto por escalar** para representar dilataciones ($r > 1$) o contracciones ($0 < r < 1$) en el mismo sentido ($r > 0$) o en sentido contrario ($r < 0$), y se denota por $r\vec{u}$.

Para el producto por escalar se cumple que $\|r\vec{u}\| = |r|\,\|\vec{u}\|$. Se define que $0\vec{u} = \vec{0}$ y que $r\vec{0} = \vec{0}$.



Considerando los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, los números reales r y s, se cumplen las siguientes propiedades del producto por escalar:

1. $r(s\vec{u}) = rs\vec{u}$ 2. $(r + s)\vec{u} = r\vec{u} + s\vec{u}$ 3. $r(\vec{u} + \vec{v}) = r\vec{u} + r\vec{v}$

Se dice que dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ diferentes de $\vec{0}$ son **paralelos** (o colineales) cuando los segmentos dirigidos que representan estos vectores, son paralelos. Esto equivale a que existe un número real r tal que $\vec{u} = r\vec{v}$.

Ejemplo

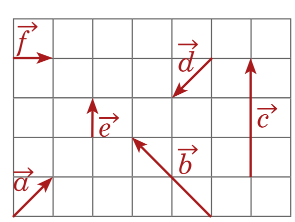
Determina en términos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ el vector resultante de la expresión $2(2\vec{u} + 3\vec{v}) - 3(2\vec{u} - \vec{v})$.

$$\begin{aligned} 2(2\vec{u} + 3\vec{v}) - 3(2\vec{u} - \vec{v}) &= 2(2\vec{u}) + 2(3\vec{v}) + (-3)(2\vec{u}) + (-3)(-\vec{v}) \\ &= 4\vec{u} + 6\vec{v} + (-6\vec{u}) + 3\vec{v} \\ &= -2\vec{u} + 9\vec{v} \end{aligned}$$

Recuerda que $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Problemas

1. Dibuja en tu cuaderno los vectores de la cuadrícula y determina el vector que representa cada literal.



a) $4\vec{e}$ b) $4\vec{a}$ c) $\frac{1}{3}\vec{c}$

d) $-3\vec{f}$ e) $-\frac{3}{2}\vec{b}$ f) $2\vec{d} + 3\vec{e}$

2. Determina en términos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ el vector resultante de cada expresión.

a) $4\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{u} - 2\vec{v}$ b) $(\vec{u} - 2\vec{v}) - (-3\vec{u} + 2\vec{v})$ c) $3(2\vec{u} + 4\vec{v})$ d) $3(-2\vec{u} + \vec{v}) - 2(3\vec{u} - 4\vec{v})$

Indicador de logro:

1.3 Dibuja el vector resultante de multiplicar un vector por un número escalar.

Secuencia:

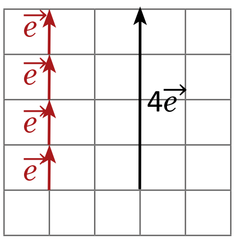
Ahora que ya se conocen las operaciones de suma y resta de vectores se define el producto por escalar que, en el caso que el escalar sea entero, generaliza la suma de un mismo vector un número entero de veces o la suma de su opuesto si el entero es negativo. Esta definición permite introducir el concepto de vectores paralelos.

Propósito:

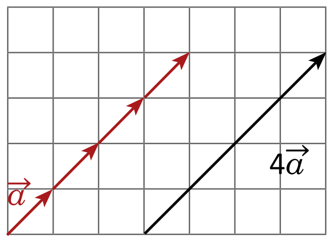
El Problema inicial permite inducir el producto por escalar al menos para números enteros. En la Definición el producto por escalar queda establecido para un número real cualquiera por medio de la noción de contracción y dilatación. Se establecen además propiedades del producto por escalar para operar los vectores como expresiones algebraicas.

Solución de problemas:

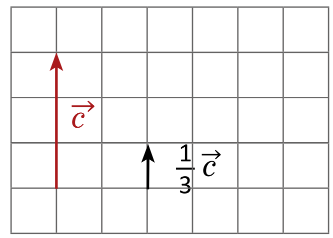
1a)



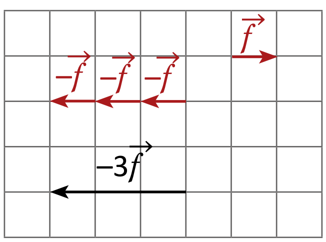
1b)



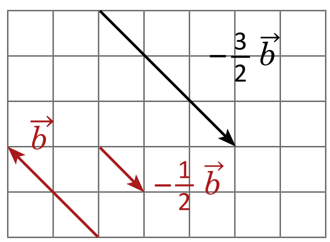
1c)



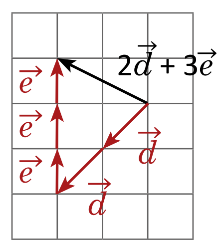
1d)



1e)



1f)



2a) $4\vec{u}+3\vec{v}-\vec{u}-2\vec{v}=3\vec{u}+\vec{v}$

2b) $(\vec{u}-2\vec{v})-(-3\vec{u}+2\vec{v})=4\vec{u}-4\vec{v}$

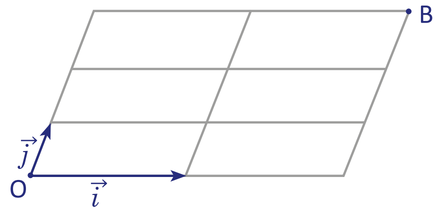
2c) $3(2\vec{u}+4\vec{v})=6\vec{u}+12\vec{v}$

2d) $3(-2\vec{u}+\vec{v})-2(3\vec{u}-4\vec{v})=-12\vec{u}+11\vec{v}$

1.4 Coordenadas de un vector en una base*

Problema inicial

La siguiente figura está formada por paralelogramos, expresa el vector $\overrightarrow{OB}$ con los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$.

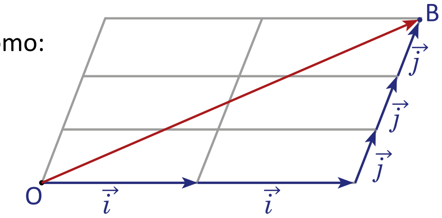


Solución

El vector $\overrightarrow{OB}$ se puede expresar como suma de vectores con $\vec{i}$ y $\vec{j}$ como:

$$\overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{i} + \vec{j} + \vec{j} + \vec{j}.$$

Utilizando el producto por escalar, se cumple que $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.



Conclusión

A una pareja de vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ ambos diferentes de $\vec{0}$ y no paralelos (no colineales) se les llama **base vectorial**.

El punto O se conoce como **origen** de la base vectorial, y para todo vector $\vec{u}$ se cumple que, existe un punto M tal que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. Además para todo vector $\overrightarrow{OM}$, existen dos números reales únicos x, y, tales que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, y se puede expresar el vector como un par ordenado $\overrightarrow{OM} = (x, y)$, a este par ordenado (x, y) se le conoce como **coordenadas** del vector $\overrightarrow{OM}$ en la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Una base es **ortogonal** cuando $\vec{i}$ y $\vec{j}$ son ortogonales, y se dice que una base es **ortonormal** cuando además de ser ortogonales, tanto $\vec{i}$ como $\vec{j}$ son unitarios (la norma es igual a 1).

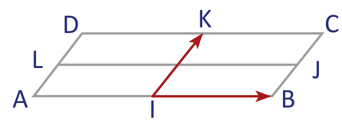
Ejemplo

Determina las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{ID}$ en la base $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IK})$.

$\overrightarrow{IC} = (1)\overrightarrow{IB} + (1)\overrightarrow{IK}$ $\qquad$ $\overrightarrow{IB} = (1)\overrightarrow{IB} + (0)\overrightarrow{IK}$

$\overrightarrow{IK} = (0)\overrightarrow{IB} + (1)\overrightarrow{IK}$ $\qquad$ $\overrightarrow{IJ} = (1)\overrightarrow{IB} + \left(\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{IK}$

$\overrightarrow{IA} = (-1)\overrightarrow{IB} + (0)\overrightarrow{IK}$ $\qquad$ $\overrightarrow{ID} = (-1)\overrightarrow{IB} + (1)\overrightarrow{IK}$



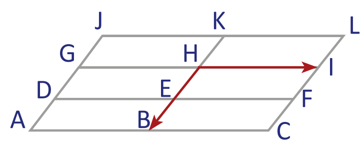
Por lo tanto, las coordenadas de los vectores son (1, 1), (1, 0), (0, 1), $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, (–1, 0), (–1, 1).

Problemas

Considerando la base $(\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HB})$, determina las coordenadas de los vectores de cada literal.

a) $\overrightarrow{HA}$ $\qquad$ b) $\overrightarrow{HK}$ $\qquad$ c) $\overrightarrow{HF}$ $\qquad$ d) $\overrightarrow{HJ}$

e) $\overrightarrow{HH}$ $\qquad$ f) $\overrightarrow{HI}$ $\qquad$ g) $\overrightarrow{HB}$ $\qquad$ h) $\overrightarrow{HE}$



Indicador de logro:

1.4 Determina las coordenadas de un vector utilizando una base vectorial.

Secuencia:

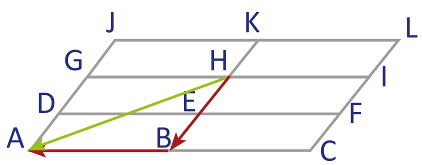
En esta clase se aborda el concepto de base vectorial para expresar un vector en términos de otros, esto servirá posteriormente para determinar una fórmula para la norma de un vector y describir los números complejos a partir de los vectores.

Propósito:

En el Problema inicial los estudiantes harán uso de la suma de vectores y del producto por escalar. En la Definición se observa que al escribir las coordenadas de un vector se debe hacer referencia a la base utilizada, así como en el Ejemplo donde se debe observar la importancia del orden de las coordenadas.

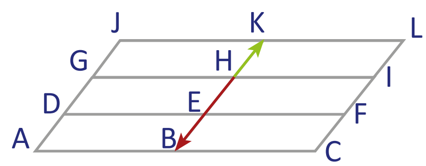
Solución de problemas:

a) $\overrightarrow{HA} = (-1)\overrightarrow{HI} + (1)\overrightarrow{HB}$



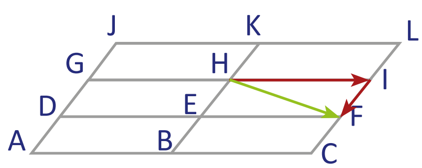
Coordenadas: $(-1, 1)$

b) $\overrightarrow{HK} = (0)\overrightarrow{HI} + \left(-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{HB}$



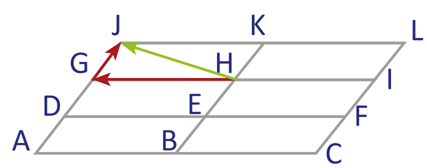
Coordenadas: $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

c) $\overrightarrow{HF} = (1)\overrightarrow{HI} + \left(\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{HB}$



Coordenadas: $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

d) $\overrightarrow{HJ} = (-1)\overrightarrow{HI} + \left(-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{HB}$



Coordenadas: $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

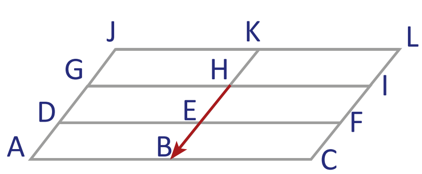
e) $\overrightarrow{HH} = (0)\overrightarrow{HI} + (0)\overrightarrow{HB}$

$(0, 0)$

f) $\overrightarrow{HI} = (1)\overrightarrow{HI} + (0)\overrightarrow{HB}$

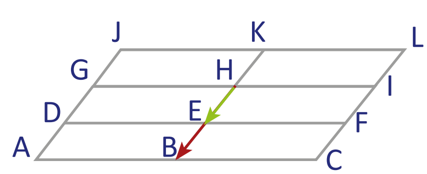
$(1, 0)$

g) $\overrightarrow{HB} = (0)\overrightarrow{HI} + (1)\overrightarrow{HB}$



Coordenadas: $(0, 1)$

h) $\overrightarrow{HE} = (0)\overrightarrow{HI} + \left(\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{HB}$



Coordenadas: $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

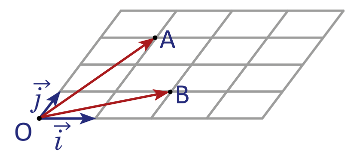
1.5 Operaciones con vectores en coordenadas

Problema inicial

Determina las coordenadas de los siguientes vectores en la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

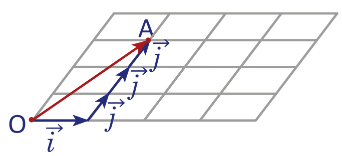
a) $\overrightarrow{OA}$ b) $\overrightarrow{OB}$ c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

d) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ e) $2\overrightarrow{OB}$ f) $\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$



Solución

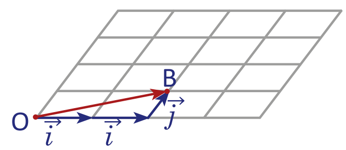
a)



$\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 3\vec{j}$

$\overrightarrow{OA} = (1, 3)$

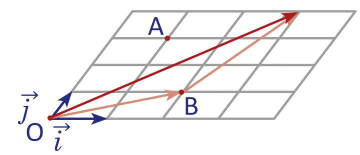
b)



$\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + \vec{j}$

$\overrightarrow{OB} = (2, 1)$

c)



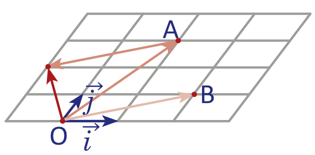
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{i} + \vec{j}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (3, 4)$

Nota que (3, 4) = (1 + 2, 3 + 1).

d)



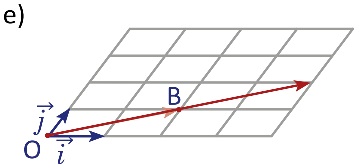
$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \vec{i} + 3\vec{j} - (2\vec{i} + \vec{j})$

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = -\vec{i} + 2\vec{j}$

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (-1, 2)$

Nota que (–1, 2) = (1 – 2, 3 – 1).

e)



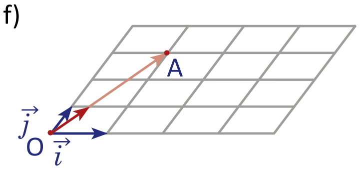
$2\overrightarrow{OB} = 2(2\vec{i} + \vec{j})$

$2\overrightarrow{OB} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$

$2\overrightarrow{OB} = (4, 2)$

Nota que (4, 2) = (2 × 2, 2 × 1).

f)



$\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}(\vec{i} + 3\vec{j})$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\vec{i} + \vec{j}$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$

Nota que $\left(\frac{1}{3}, 1\right) = \left(\frac{1}{3} \times 1, \frac{1}{3} \times 3\right)$.

Conclusión

Dado dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con coordenadas $\vec{u} = (x, y)$ y $\vec{v} = (x', y')$ y un número real r se cumple que

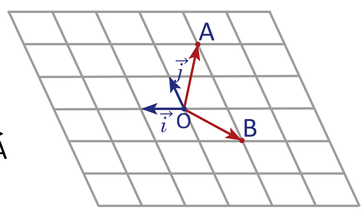
$\vec{u} + \vec{v} = (x + x', y + y')$ $\vec{u} - \vec{v} = (x - x', y - y')$ $r\vec{u} = (rx, ry)$

Problemas

Determina las coordenadas de los siguientes vectores en la base $\vec{i}, \vec{j}$.

a) $\overrightarrow{OA}$ b) $\overrightarrow{OB}$ c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ d) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$

e) $-3\overrightarrow{OB}$ f) $\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$ g) $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$ h) $3\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OA}$



Indicador de logro:

1.5 Determina las coordenadas del vector resultante de un producto por escalar, una suma o una resta de vectores.

Secuencia:

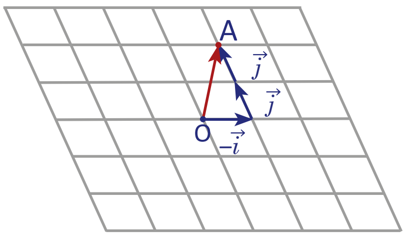
En esta clase se efectúan las operaciones entre vectores utilizando sus coordenadas en una base dada.

Propósito:

Con el Problema inicial se induce que la suma de vectores se puede realizar sumando ordenadamente las coordenadas entre los vectores, esto se consolida en la Conclusión.

Solución de problemas:

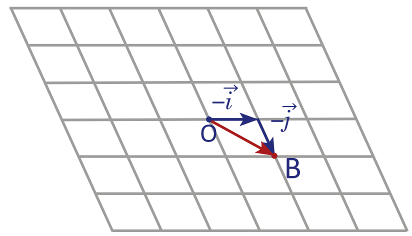
a)



$\overrightarrow{OA} = -\vec{i} + 2\vec{j}$

$\overrightarrow{OA} = (-1, 2)$

b)



$\overrightarrow{OB} = -\vec{i} - \vec{j}$

$\overrightarrow{OB} = (-1, -1)$

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (-1 + (-1), 2 + (-1))$
$= (-2, 1)$

d) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (-1 - (-1), 2 - (-1))$
$= (-1 + 1, 2 + 1)$
$= (0, 3)$

e) $-3\overrightarrow{OB} = (-3(-1), -3(-1))$
$= (3, 3)$

f) $\frac{3}{2}\overrightarrow{OA} = \left(\frac{3}{2}(-1), \frac{3}{2}(2)\right)$
$= \left(-\frac{3}{2}, 3\right)$

g) $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} = (-1, 2) + (-2, -2)$
$= (-3, 0)$

h) $3\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OA} = (-3, -3) - (-2, 4)$
$= (-1, -7)$

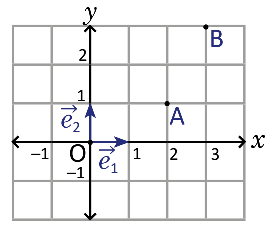
1.6 Vectores y coordenadas de puntos

Problema inicial

Sean A(2, 1) y B(3, 3) dos puntos en el plano, con coordenadas en la base ortonormal $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ que muestra la figura.

a) Calcula las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$.

b) Determina la norma del vector $\overrightarrow{AB}$.

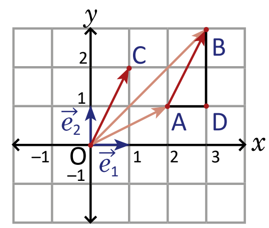


Solución

a) Considerando los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ con coordenadas (2, 1) y (3, 3) respectivamente en la base ortonormal $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Entonces se cumple que

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$
$$\overrightarrow{AB} = (3, 3) - (2, 1)$$
$$\overrightarrow{AB} = (1, 2) = \overrightarrow{OC}.$$



b) La norma de este vector se puede calcular aplicando el teorema de Pitágoras al ΔABD, de modo que

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Conclusión

Considerando en el plano los puntos $E_1(1, 0)$ y $E_2(0, 1)$ que definen los vectores $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$ y $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$. Se tiene que los vectores $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$ forman una base ortonormal.

Dado un punto A(x, y) en el plano, se cumple que $\overrightarrow{OA} = (x, y)$ en la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, y que $\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Si B(x', y') es otro punto, entonces se tiene que

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x' - x, y' - y) \qquad \text{y que,}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}.$$

Problemas

1. Dados los puntos A y B, determina las coordenadas y la norma del vector $\overrightarrow{AB}$ en la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ definida arriba.

a) A = (2, 1); B = (3, 1)

b) A = (3, 0); B = (1, 2)

c) A = (1, 1); B = (0, 2)

d) A = (0, 1); B = (−2, 1)

e) A = (−1, −3); B = (−1, −2)

f) A = (1, −1); B = (1, −1)

2. Considerando las coordenadas en la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de un vector $\vec{u} = (2, 4)$ y un punto A = (1, 3), determina las coordenadas de un punto B que cumpla que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Indicador de logro:

1.6 Expresa las coordenadas de un vector cualquiera en el plano cartesiano como coordenadas de un punto.

Secuencia:

Ahora se estudia la base vectorial más simple del plano cartesiano y se establece la norma en términos de las coordenadas.

Propósito:

El Problema inicial permite escribir un vector a partir de dos puntos dados utilizando la diferencia de vectores; además permite determinar su norma por medio de sus coordenadas.

Solución de problemas:

1a) $\overrightarrow{OA} = (2, 1)$, $\overrightarrow{OB} = (3, 1)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\\ &= (3, 1) - (2, 1)\\ &= (3 - 2, 1 - 1)\\ &= (1, 0)\end{aligned}$$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$

1b) $\overrightarrow{OA} = (3, 0)$, $\overrightarrow{OB} = (1, 2)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\\ &= (1, 2) - (3, 0)\\ &= (1 - 3, 2 - 0)\\ &= (-2, 2)\end{aligned}$$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

1c) $\overrightarrow{OA} = (1, 1)$, $\overrightarrow{OB} = (0, 2)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\\ &= (0, 2) - (1, 1)\\ &= (0 - 1, 2 - 1)\\ &= (-1, 1)\end{aligned}$$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} = \sqrt{2}$

1d) $\overrightarrow{OA} = (0, 1)$, $\overrightarrow{OB} = (-2, 1)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\\ &= (-2, 1) - (0, 1)\\ &= (-2 - 0, 1 - 1)\\ &= (-2, 0)\end{aligned}$$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$

1e) $\overrightarrow{OA} = (-1, -3)$, $\overrightarrow{OB} = (-1, -2)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\\ &= (-1, -2) - (-1, -3)\\ &= (-1 - (-1), -2 - (-3))\\ &= (0, 1)\end{aligned}$$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$

1f) $\overrightarrow{OA} = (1, -1)$, $\overrightarrow{OB} = (1, -1)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\\ &= (1, -1) - (1, -1)\\ &= (1 - 1, -1 - (-1))\\ &= (0, 0)\end{aligned}$$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$

2. $\vec{u} = (2, 4)$ y $A = (1, 3)$, el punto B es tal que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{OB} = (2 + 1, 4 + 3)$

$\overrightarrow{OB} = (3, 7)$

Por lo tanto, $B = (3, 7)$.

En este punto el estudiante debe percatarse de la facilidad de las operaciones de vectores utilizando las coordenadas, sin embargo es válido utilizar el recurso gráfico.

1.7 Paralelismo

Problema inicial

Considerando el vector $\vec{u} = (2, 3)$, determina el valor de x para que el vector $\vec{v} = (x, -9)$ sea paralelo a $\vec{u}$ ($\vec{u} \parallel \vec{v}$).

Solución

Se considera un número real r que cumple:

$$\vec{v} = r\vec{u}$$
$$(x, -9) = r(2, 3)$$
$$(x, -9) = (2r, 3r)$$

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ diferentes de $\vec{0}$ son paralelos si existe un número real r que cumple $r\vec{u} = \vec{v}$.

Y entonces se debe cumplir que

$$\begin{cases} x = 2r \ldots (1) \\ -9 = 3r \ldots (2) \end{cases}$$

Luego se resuelve la ecuación (2), y se tiene: $r = (-9) \div 3 = -3$.

Finalmente se sustituye el valor de r en (1): $x = 2(-3) = -6$.

Por lo tanto las coordenadas del vector $\vec{v}$ son $(-6, -9)$.

Conclusión

Dado un vector $\vec{u} = (x, y) \neq \vec{0}$, se tiene que otro vector $\vec{v}$ es paralelo a $\vec{u}$ si existe un número real r de modo que $\vec{v} = (rx, ry)$.

Además, en una base ortonormal, para la norma del vector $\vec{v}$ se cumple que

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(rx)^2 + (ry)^2} = |r|\sqrt{x^2 + y^2} = |r|\,\|\vec{u}\|.$$

Un vector $u = (x, y)$ es distinto del vector cero si x o y son distintos de cero (ambos inclusive).

Para todo número real r se cumple que $\sqrt{r^2} = |r|$.

Ejemplo

Determina los vectores paralelos al vector $\vec{u} = (-3, 4)$ que tienen norma 15.

Si $\vec{v}$ es un vector paralelo a $\vec{u}$ se cumple que $\vec{v} = r\vec{u}$, entonces:

$$\|\vec{v}\| = |r|\,\|\vec{u}\|$$
$$15 = |r|\sqrt{(-3)^2 + 4^2}$$
$$15 = 5|r|$$
$$|r| = 3$$
$$r = \pm 3,$$

por lo tanto los vectores son: $3\vec{u} = 3(-3, 4) = (-9, 12)$ y $-3\vec{u} = -3(-3, 4) = (9, -12)$.

Problemas

1. Calcula las coordenadas de $\vec{v}$ para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean paralelos.

   a) $\vec{u} = (2, 1)$, $\vec{v} = (x, 3)$ b) $\vec{u} = (3, 1)$, $\vec{v} = (x, -3)$ c) $\vec{u} = (6, 3)$, $\vec{v} = (2, x)$ d) $\vec{u} = (2, 4)$, $\vec{v} = (-1, x)$

2. Determina los vectores paralelos al vector $\vec{u}$ que tienen la norma indicada. Considera las coordenadas en una base ortonormal.

   a) $\vec{u} = (4, 3)$, norma 10 b) $\vec{u} = (-3, -4)$, norma 1 c) $\vec{u} = (1, 2)$, norma 5 d) $\vec{u} = (2, 2)$, norma 4

3. Encuentra las coordenadas del punto C de un paralelogramo ABCD, si se cumple que A = (1, 2), B = (3, 5) y D = (0, 0).

184

Indicador de logro:

1.7 Utiliza la definición de paralelismo entre vectores para resolver problemas con vectores expresados en coordenadas.

Secuencia:

Los vectores paralalelos se definieron en la clase 1.3 donde se trató el producto escalar. Para esta clase se estudia el paralelismo utilizando las coordenadas de los vectores y se demuestra la fórmula de la norma de un vector en términos de algún vector paralelo a este.

Propósito:

Para desarrollar el Problema inicial el estudiante debe utilizar la definición de paralelismo, la igualdad de pares ordenados. En el Ejemplo se muestra otro tipo de problemas sobre vectores paralelos y su solución.

Solución de problemas:

1a) $\vec{u} = (2, 1)$, $\vec{v} = (x, 3)$

$$v = r\vec{u}$$
$$(x, 3) = r(2, 1)$$
$$(x, 3) = (2r, r)$$
$$\begin{cases} x = 2r \ldots (1) \\ 3 = r \ldots (2) \end{cases}$$
$$r = 3$$
$$x = 2(3) = 6$$

Por lo tanto, $\vec{v} = (6, 3)$.

1b) $\vec{v} = (-9, -3)$

1c) $\vec{v} = (2, 1)$

1d) $\vec{v} = (-1, -2)$

2a) $\vec{u} = (4, 3)$, norma 10

$$\vec{v} = r\vec{u}$$
$$\|\vec{v}\| = |r|\,\|\vec{u}\|$$
$$10 = |r|\sqrt{4^2 + 3^2}$$
$$10 = 5|r|$$
$$|r| = 2$$
$$r = \pm 2$$

Por lo tanto los vectores son:
$2\vec{u} = (8, 6)$ y $-2\vec{u} = (-8, -6)$.

2b) $\vec{u} = (-3, -4)$, norma 1

Los vectores son: $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ y $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

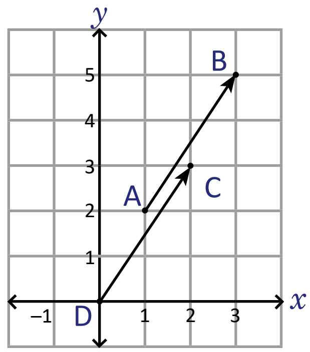
2c) $\vec{u} = (1, 2)$, norma 5

Los vectores son: $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ y $(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$.

2d) $\vec{u} = (2, 2)$, norma 4

Los vectores son: $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ y $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$.

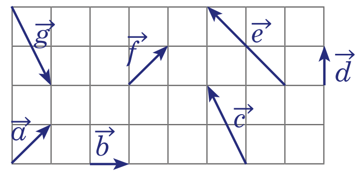
3. A = (1, 2), B = (3, 5), D = (0, 0).



Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ deben ser paralelos e iguales:
$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = (3, 5) - (1, 2) = (2, 3)$.
Ahora, ya que D = (0, 0), entonces C = (2, 3).

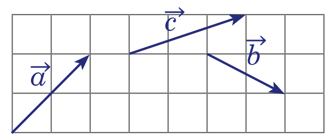
1.8 Practica lo aprendido

1. Considerando los vectores en la cuadrícula donde el lado de cada cuadrado es 1, responde:
   a) ¿Cuáles vectores son iguales?
   b) ¿Cuáles vectores tienen la misma norma?
   c) ¿Cuáles vectores son unitarios?
   d) ¿Cuáles vectores son ortogonales?



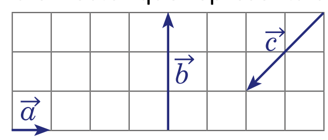
2. Dibuja en tu cuaderno los vectores de la cuadrícula y determina el vector que representa la operación de cada literal.

   a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $\vec{c} - \vec{b}$
   c) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ d) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$



3. Dibuja en tu cuaderno los vectores de la cuadrícula y determina el vector que representa cada literal.

   a) $4\vec{a}$ b) $\frac{1}{3}\vec{b}$
   c) $-\frac{3}{2}\vec{c}$ d) $-3\vec{a} + \vec{b}$

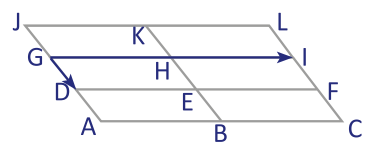


4. Determina en términos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ el vector resultante de cada expresión.

   a) $2\vec{u} + \vec{v} - 3\vec{u} - \vec{v}$ b) $(3\vec{u} - \vec{v}) - (-2\vec{v} - 3\vec{u})$ c) $-2(3\vec{u} - 2\vec{v})$ d) $2(-\vec{u} + 3\vec{v}) - 3(\vec{u} + 2\vec{v})$

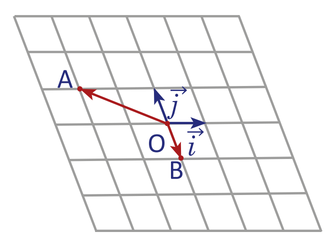
5. Considerando la base $(\overrightarrow{GI}, \overrightarrow{GD})$, determina las coordenadas de los vectores de cada literal.

   a) $\overrightarrow{GC}$ b) $\overrightarrow{GL}$ c) $\overrightarrow{GB}$ d) $\overrightarrow{GK}$



6. Determina las coordenadas de los siguientes vectores en la base $\vec{i}$, $\vec{j}$.

   a) $\overrightarrow{OA}$ b) $\overrightarrow{OB}$ c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ d) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$
   e) $-2\overrightarrow{OB}$ f) $\frac{5}{3}\overrightarrow{OB}$ g) $\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$ h) $-2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}$



7. Dados los puntos A y B, determina las coordenadas y la norma del vector $\overrightarrow{AB}$ en la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

   a) A = (3, 1); B = (4, 2) b) A = (–2, 1); B = (–3, 2) c) A = (–1, –1); B = (–3, –2)

8. Considerando las coordenadas de un vector $\vec{u} = (-2, 1)$ y un vector $\overrightarrow{OA} = (3, 5)$. Determina las coordenadas de un vector $\overrightarrow{OB}$ que cumpla que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

9. Calcula las coordenadas de $\vec{v}$ para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean paralelos.

   a) $\vec{u} = (1, 3)$, $\vec{v} = (x, 12)$ b) $\vec{u} = (3, 9)$, $\vec{v} = (x, -6)$

10. Determina los vectores paralelos al vector $\vec{u}$ que tienen la norma indicada. Considera las coordenadas en una base ortonormal.

   a) $\vec{u} = (3, 2)$, norma 13 b) $\vec{u} = (-2, -4)$, norma 10

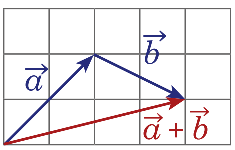
Indicador de logro:

1.8 Resuelve problemas utilizando vectores.

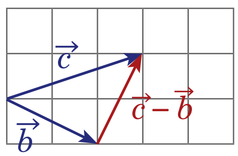
Solución de problemas:

1a) $\vec{a}$ y $\vec{f}$. **1b)** $\vec{a}$ y $\vec{f}$; $\vec{b}$ y $\vec{d}$; $\vec{c}$ y $\vec{g}$. **1c)** $\vec{b}$ y $\vec{d}$. **1d)** $\vec{a}$ y $\vec{e}$; $\vec{e}$ y $\vec{f}$; $\vec{b}$ y $\vec{d}$.

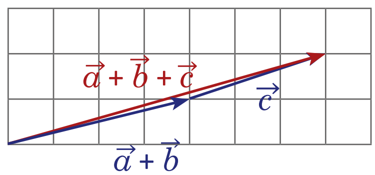
2a)



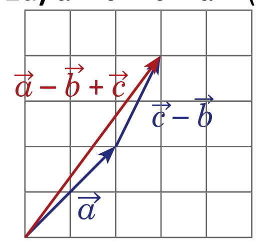
2b)



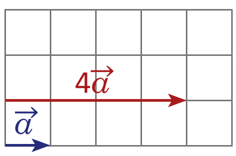
2c)



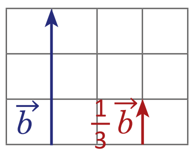
2d) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{c} - \vec{b})$



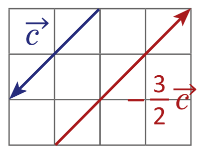
3a)



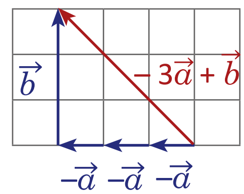
3b)



3c)



3d)



4a) $2\vec{u} + \vec{v} - 3\vec{u} - \vec{v} = -\vec{u}$

4b) $(3\vec{u} - \vec{v}) - (-2\vec{v} - 3\vec{u}) = 6\vec{u} + \vec{v}$

4c) $-2(3\vec{u} - 2\vec{v}) = -6\vec{u} + 4\vec{v}$

4d) $2(-\vec{u} + 3\vec{v}) - 3(\vec{u} + 2\vec{v}) = -5\vec{u}$

5a) $(1, 2)$ **5b)** $(1, -1)$ **5c)** $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ **5d)** $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$

6a) $\overrightarrow{OA} = (-2, 1)$

6b) $\overrightarrow{OB} = (0, -1)$

6c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (-2, 1) + (0, -1)$
$= (-2, 0)$

6d) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (-2, 1) - (0, -1)$
$= (-2, 2)$

6e) $-2\overrightarrow{OB} = (0, 2)$

6f) $\frac{5}{3}\overrightarrow{OB} = \left(0, -\frac{5}{3}\right)$

6g) $\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} = (-2, -2)$

6h) $-2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} = (4, 1)$

7a) A = (3, 1); B = (4, 2)

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$
$= (4, 2) - (3, 1)$
$= (1, 1)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 1^2}$
$= \sqrt{2}$

7b) A = (−2, 1); B = (−3, 2)

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$
$= (-3, 2) - (-2, 1)$
$= (-1, 1)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2}$
$= \sqrt{2}$

7c) A = (−1, −1); B = (−3, −2)

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$
$= (-3, -2) - (-1, -1)$
$= (-2, -1)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}$
$= \sqrt{5}$

8. $\overrightarrow{AB} = (-2, 1)$
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$
$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA}$
$\overrightarrow{OB} = (-2, 1) + (3, 5)$
$\overrightarrow{OB} = (1, 6)$

9a) $\vec{v} = (4, 12)$

9b) $\vec{v} = (-2, -6)$

10a) $(3\sqrt{13}, 2\sqrt{13})$ y $(-3\sqrt{13}, -2\sqrt{13})$

10b) $(2\sqrt{5}, 4\sqrt{5})$ y $(-2\sqrt{5}, -4\sqrt{5})$

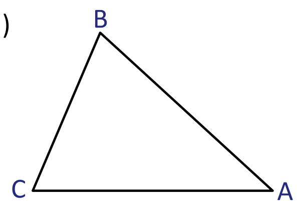
Lección 2 Producto escalar de vectores

2.1 Proyección ortogonal

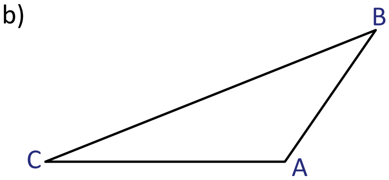
Problema inicial

Para cada uno de los siguientes triángulos determina el punto donde se interceptan la altura del vértice B a la base AC.

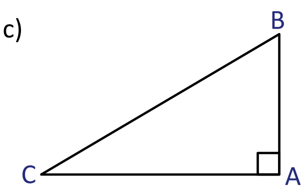
a)



b)



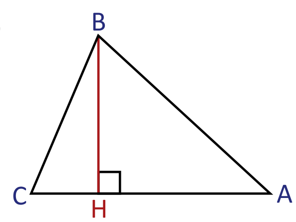
c)



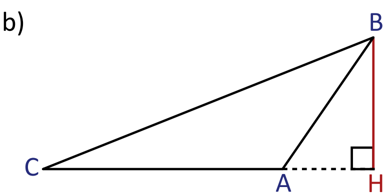
Solución

Trazando la altura de cada triángulo y localizando el punto de intercepción:

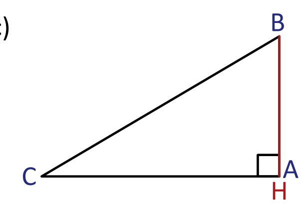
a)



b)

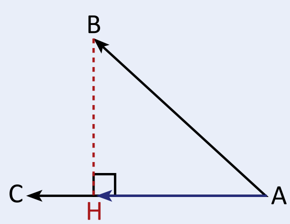


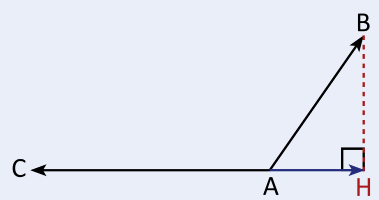
c)

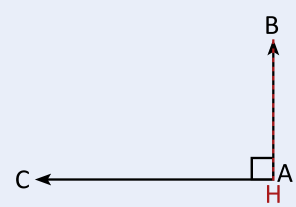


Conclusión

Dados dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ se define **la proyección ortogonal** de $\overrightarrow{AB}$ sobre $\overrightarrow{AC}$, por el vector $\overrightarrow{AH}$, y se cumple que $\overrightarrow{BH}$ es ortogonal a $\overrightarrow{AC}$.



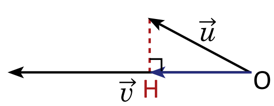




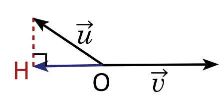
Ejemplo

Determina la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ para cada caso.

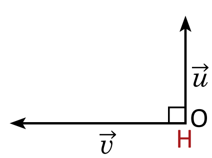
a)



b)



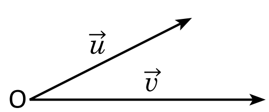
c)



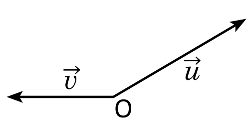
Problemas

1. Grafica la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ para cada caso.

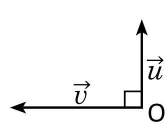
a)



b)

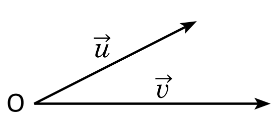


c)

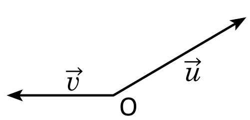


2. Grafica la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ para cada caso.

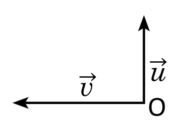
a)



b)



c)



Indicador de logro:

2.1 Dibuja la proyección ortogonal de un vector sobre otro en diferentes casos.

Secuencia:

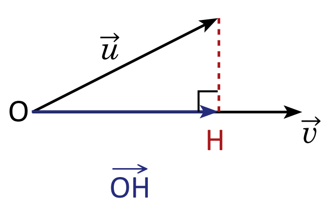
En esta lección se define la proyección ortogonal de un vector sobre otro, esta idea tiene como base el trazo de la altura de un triángulo. La proyección ortogonal permitirá definir el producto escalar para dos vectores cualesquiera.

Propósito:

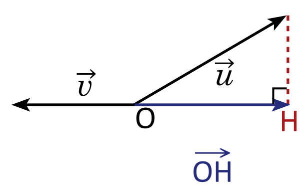
El problema inicial permitirá al estudiante conocer el proceso para determinar la proyección ortogonal de un vector a partir de la altura del triángulo definible por los vectores. En la Conclusión el estudiante debe apropiarse de la representación de la proyección ortogonal.

Solución de problemas:

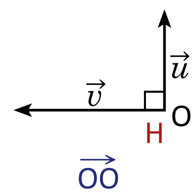
1a)



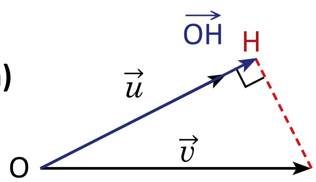
1b)



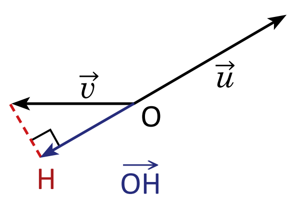
1c)



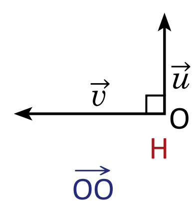
2a)



2b)



2c)



La proyección ortogonal en 1c) y 2c) es el vector cero.

2.2 Producto escalar de vectores paralelos

Definición

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores paralelos (colineales). Se denota el producto escalar de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ por $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y se define por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|, \text{ si } \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ tienen el mismo sentido.} \\ -\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|, \text{ si } \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ tienen diferente sentido.} \end{cases}$$

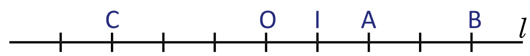
Cuando $\vec{u} = \vec{0}$ o $\vec{v} = \vec{0}$, se define $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$.

Ejemplo 1

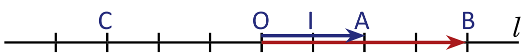
Las divisiones de la recta l son regulares y el vector $\overrightarrow{OI}$ es unitario, determina:

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$　　b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$

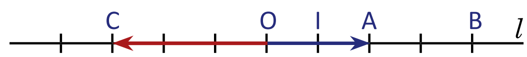
c) $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{CB}$　　d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$



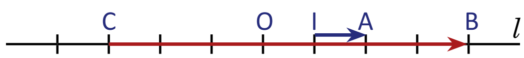
a) En este caso tanto $\overrightarrow{OA}$ como $\overrightarrow{OB}$ tienen el mismo sentido, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{OB}\| = 2 \times 4 = 8$.



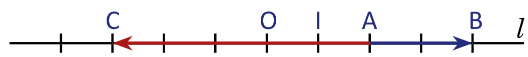
b) En este caso $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OC}$ tienen diferente sentido, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = -\|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{OC}\| = -(2 \times 3) = -6$.



c) En este caso tanto $\overrightarrow{IA}$ como $\overrightarrow{CB}$ tienen el mismo sentido, $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{CB} = \|\overrightarrow{IA}\|\|\overrightarrow{CB}\| = 1 \times 7 = 7$.



d) En este caso $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tienen diferente sentido, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\| = -(2 \times 5) = -10$.



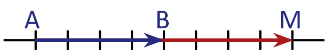
Ejemplo 2

Sean A y B dos puntos tales que AB = 4. Calcula $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$ para cada una de las siguientes condiciones.

a) A es el punto medio de BM.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -(4 \times 4) = -16$

b) B es el punto medio de AM.



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 4 \times 8 = 32$

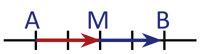
c) M es el punto medio de AB.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 4 \times 2 = 8$

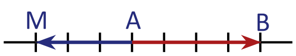
Ejemplo 3

Sean A y B dos puntos tales que AB = 4. Representa el punto M en la recta AB que cumpla las condiciones de cada literal.

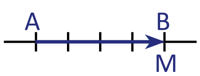
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 8$



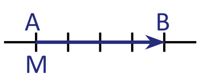
b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -12$



c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 16$



d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

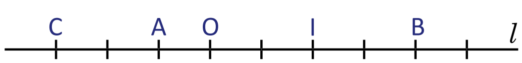


Problemas

1. Las divisiones de la recta l son regulares, y el vector $\overrightarrow{OI}$ es unitario, determina:

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$　　b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$

c) $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{CB}$　　d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$



2. Sean A y B dos puntos tales que AB = 2. Calcula $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$ para cada una de las siguientes condiciones.

a) A es el punto medio de BM.　　b) B es el punto medio de AM.　　c) M es el punto medio de AB.

3. Sean A y B dos puntos tales que AB = 6. Dibuja el punto M en la recta AB para cada literal.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 24$　　b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -3$　　c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -36$　　d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

Indicador de logro:

2.2 Calcula el producto escalar de vectores paralelos.

Secuencia:

Ahora se estudia la definición de producto escalar de dos vectores para vectores paralelos, que guarda cierta relación con la multiplicación de números positivos y negativos, que se estudió en séptimo grado. En la siguiente clase se extenderá esta definición para dos vectores cualesquiera utilizando la proyección ortogonal.

Propósito:

La definición de producto escalar para vectores paralelos es parecida a la forma en la que se estableció la multiplicación de números positivos y negativos, en este caso el sentido del vector hace las veces de signo para los números: el producto escalar de dos vectores que tienen el mismo sentido es positivo y si es diferente es negativo.

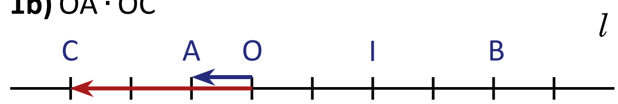
Solución de problemas:

1a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ tienen diferente sentido.

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{OB}\| = -\frac{1}{2} \times 2 = -1.$

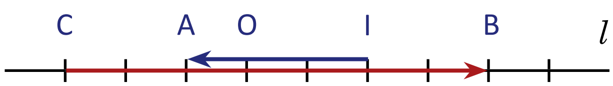
1b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$



$\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OC}$ tienen el mismo sentido.

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{OC}\| = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$

1c) $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{CB}$



$\overrightarrow{IA}$ y $\overrightarrow{CB}$ tienen diferente sentido.

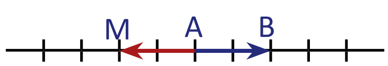
$\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{CB} = -\|\overrightarrow{IA}\|\|\overrightarrow{CB}\| = -\left(\frac{3}{2} \times \frac{7}{2}\right) = -\frac{21}{4}.$

1d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tienen diferente sentido.

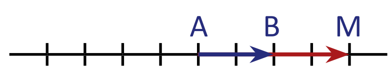
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\| = -\left(\frac{5}{2} \times 1\right) = -\frac{5}{2}.$

2a) A es el punto medio de BM.



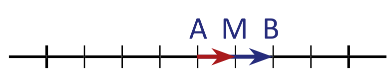
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -(2 \times 2) = -4$

2b) B es el punto medio de AM.



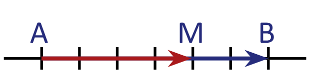
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 2 \times 4 = 8$

2c) M es el punto medio de AB.

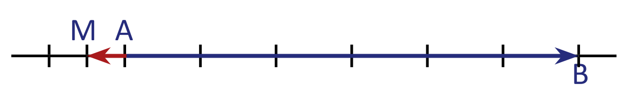


$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 2 \times 1 = 2$

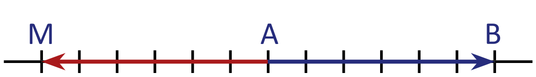
3a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 24$



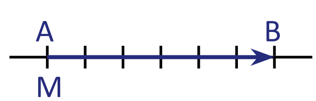
3b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -3$



3c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -36$



3d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

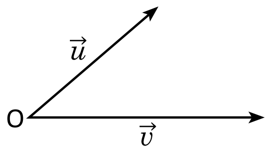


2.3 Producto escalar de vectores no paralelos (no colineales)

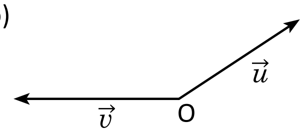
Problema inicial

Expresa el producto escalar del vector $\vec{v}$ con la proyección de $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$.

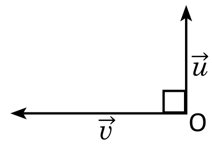
a)



b)



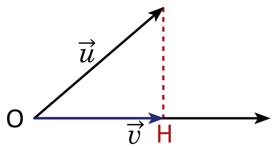
c)



Solución

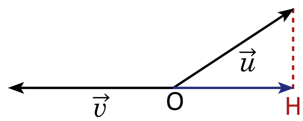
Se encuentra la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

a)



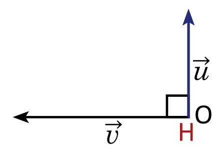
$\vec{v}\cdot\overrightarrow{OH} = \|\vec{v}\|\|\overrightarrow{OH}\|$

b)



$\vec{v}\cdot\overrightarrow{OH} = -\|\vec{v}\|\|\overrightarrow{OH}\|$

c)



$\vec{v}\cdot\overrightarrow{OH} = \vec{v}\cdot\vec{0} = 0$

Definición

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores no paralelos, y sea $\vec{u}'$ la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$, entonces $\vec{u}'\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v}'$. Se define el **producto escalar** de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ por:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}'\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v}'$$

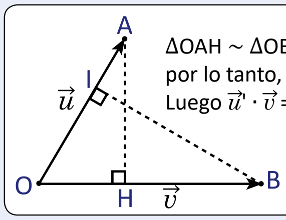
En el producto escalar se cumplen las siguientes propiedades para un número real r y tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$:

1) $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|\|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|^2$

2) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

3) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$, $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$

4) $\vec{u}\cdot(r\vec{v}) = (r\vec{u})\cdot\vec{v} = r(\vec{u}\cdot\vec{v})$



ΔOAH ~ ΔOBI,
por lo tanto, OB·OH = OA·OI.
Luego $\vec{u}'\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v}'$.

El producto escalar cumple que si dos vectores son ortogonales, entonces su producto escalar es 0 y viceversa (si el producto escalar de dos vectores diferentes de cero es 0 entonces los vectores son ortogonales).

Ejemplo

Sea ABC un triángulo rectángulo en A, expresa los productos escalares:

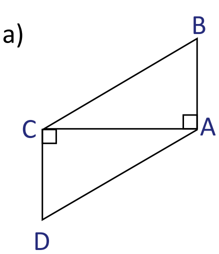
a) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$
$= \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$
$= AC^2$

b) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AC}$
$= -AC^2$

c) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AB}$
$= -AB^2$

d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA}\cdot\overrightarrow{CA}$
$= \vec{0}\cdot\overrightarrow{CA}$
$= 0$

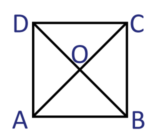
a)



Problemas

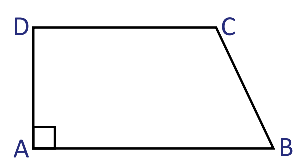
1. Considerando un cuadrado ABCD de lado 4. Calcula los siguientes productos escalares.

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}$ d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ e) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BO}$



2. Teniendo el trapecio rectángulo ABCD, con AB = 4, AD = 2 y CD = 3.
Calcula los siguientes productos escalares.

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$ b) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}$ d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$



Indicador de logro:

2.3 Efectúa el producto escalar de vectores no paralelos utilizando proyección ortogonal.

Secuencia:

Se define el producto escalar para dos vectores cualesquiera relacionando el producto para vectores paralelos con la proyección ortogonal; además, se cumple que dos vectores son ortogonales si y solo si su producto escalar es cero.

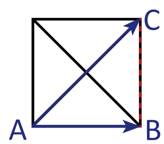
Propósito:

En el Problema inicial se observa el producto escalar de vectores analizando los tres casos de la proyección ortogonal vistos en la clase 2.1, es decir, cuando el ángulo entre los vectores es agudo, obtuso o recto. En la información adicional de la Definición se demuestra que el producto escalar está bien definido.

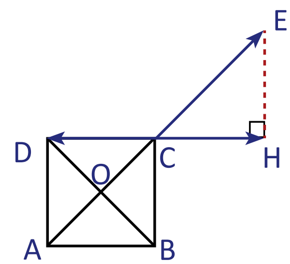
Solución de problemas:

Primero se dibujan los vectores con punto inicial común.

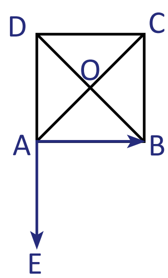
1a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$
$= \|AB\|^2$
$= 4^2$
$= 16$



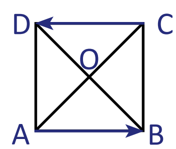
1b) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE}$
$= \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CH}$
$= -(4 \times 4)$
$= -16$



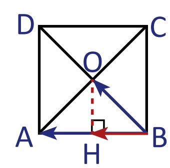
1c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$
$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA}$
$= \overrightarrow{AB} \cdot \vec{0}$
$= 0$



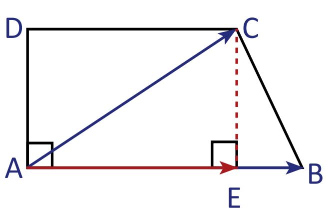
1d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -(4 \times 4)$
$= -16$



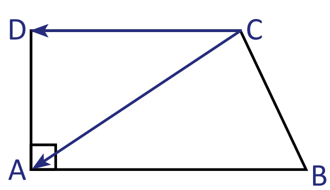
1e) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BO}$
$= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BH}$
$= 4 \times 2$
$= 8$



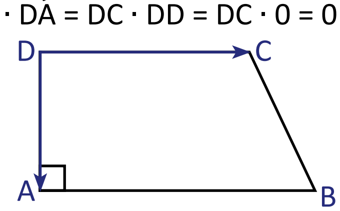
2a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} \cdot (-\overrightarrow{AC})$
$= -(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})$
$= -(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE})$
$= -(4 \times 3)$
$= -12$



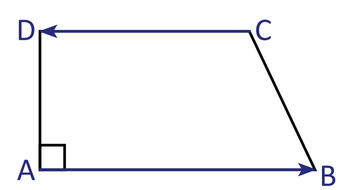
2b) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} \cdot (-\overrightarrow{CA})$
$= -(\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA})$
$= -(\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CD})$
$= -(3 \times 3)$
$= -9$



2c) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DD} = \overrightarrow{DC} \cdot \vec{0} = 0$



2d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -(4 \times 3) = -12$



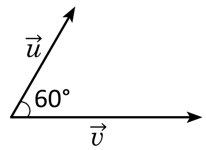
En los problemas 1c) y 2c) el estudiante puede observar inmediatamente que el producto escalar es cero por la perpendicularidad de los vectores.

2.4 Forma trigonométrica del producto escalar

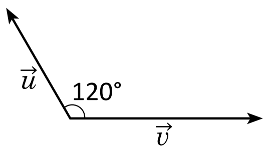
Problema inicial

Calcula el producto escalar de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ si se sabe que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ y el ángulo entre los vectores es $\alpha = 60°$ o $120°$.

a)



b)



Puedes utilizar razones trigonométricas para calcular el producto escalar.

Las razones trigonométricas de ángulos notables son:

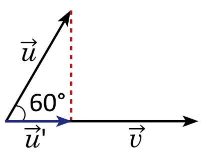
$\cos 60° = \frac{1}{2}$ $\quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$ $\quad \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Solución

Se encuentra la proyección ortogonal $\vec{u}'$ de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

a)



$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}' \cdot \vec{v} = \|\vec{u}'\|\ \|\vec{v}\|$

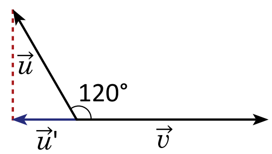
Puesto que: $\cos 60° = \dfrac{\|\vec{u}'\|}{\|\vec{u}\|}$

entonces: $\|\vec{u}'\| = \|\vec{u}\|\cos 60°$

por lo tanto $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}'\|\ \|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos 60°$

$= 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 3$

b)



$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}' \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}'\|\ \|\vec{v}\|$

$\cos 120° = -\dfrac{\|\vec{u}'\|}{\|\vec{u}\|}$,

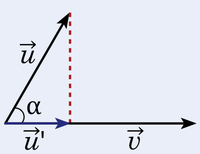
$\|\vec{u}'\| = -\|\vec{u}\|\cos 120°$,

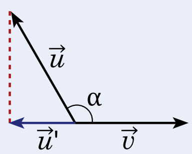
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}'\|\|\vec{v}\|\cos 120°$

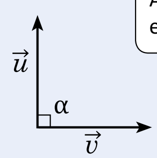
$= 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -3$.

Conclusión

Considerando dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se cumple que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos \alpha$.







A partir de la expresión $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos \alpha$ es sencillo demostrar que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

A α se le llama ángulo formado entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Ejemplo

En los siguientes vectores se cumple que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{3}$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 9$. Determina el ángulo formado entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Se cumple que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos \alpha$ (α es el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$) entonces para calcular el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$9 = 3(2\sqrt{3})\cos \alpha.$$

Luego $\cos \alpha = \dfrac{9}{6\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Como $0° < \alpha \leq 180°$, entonces $\alpha = 30°$.

De la clase 1.1 de esta unidad se sabe que el ángulo entre dos vectores está entre 0° y 180°.

Problemas

1. Calcula el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, considerando que α es el ángulo formado entre ambos vectores.
   a) $\|\vec{u}\| = 7$, $\|\vec{v}\| = 4$, $\alpha = 60°$ b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 4$, $\alpha = 30°$ c) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 45°$

2. Determina la medida del ángulo formado entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para cada literal.
   a) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 4$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$ b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 2$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$ c) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = 3$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$

Indicador de logro:

2.4 Realiza el producto escalar de vectores utilizando la forma trigonométrica del producto escalar.

Secuencia:

En esta clase se establece la relación entre el producto escalar y el ángulo formado entre dos vectores dados.

Propósito:

En la Solución los estudiantes calcularán el producto escalar utilizando la definición y las razones trigonométricas del ángulo dado entre los vectores.

Solución de problemas:

1a) $\|\vec{u}\| = 7$, $\|\vec{v}\| = 4$, $\alpha = 60°$

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos 60°\\ &= 7 \times 4 \times \frac{1}{2}\\ &= 14\end{aligned}$$

1b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 4$, $\alpha = 30°$

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos 30°\\ &= \sqrt{3} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= 6\end{aligned}$$

1c) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 45°$

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos 45°\\ &= 2 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= 4\end{aligned}$$

2a) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 4$ y $\vec{u}\cdot\vec{v} = 4$

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha\\ 4 &= 2(4)(\cos\alpha)\\ \cos\alpha &= \frac{1}{2}\\ \alpha &= 60°\end{aligned}$$

2b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 2$ y $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3$

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha\\ 3 &= \sqrt{3}(2)(\cos\alpha)\\ \cos\alpha &= \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \alpha &= 30°\end{aligned}$$

2c) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = 3$ y $\vec{u}\cdot\vec{v} = -3$

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha\\ -3 &= \sqrt{2}(3)(\cos\alpha)\\ \cos\alpha &= \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \alpha &= 135°\end{aligned}$$

2.5 Producto escalar de vectores en el plano cartesiano

Problema inicial

Considerando una base ortonormal $(\vec{i}, \vec{j})$, $\vec{u} = (x, y)$ y $\vec{v} = (x', y')$ dos vectores $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$. Determina $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Solución

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j}) \\
&= x\vec{i} \cdot x'\vec{i} + x\vec{i} \cdot y'\vec{j} + y\vec{j} \cdot x'\vec{i} + y\vec{j} \cdot y'\vec{j} && \text{por propiedad 3,} \\
&= xx'(\vec{i} \cdot \vec{i}) + xy'(\vec{i} \cdot \vec{j}) + yx'(\vec{j} \cdot \vec{i}) + yy'(\vec{j} \cdot \vec{j}) && \text{por propiedad 4,} \\
&= xx'\|\vec{i}\|^2 + xy'(0) + yx'(0) + yy'\|\vec{j}\|^2 && \text{porque } \vec{i}, \vec{j} \text{ son ortogonales,} \\
&= xx'(1) + yy'(1) && \text{porque } \vec{i}, \vec{j} \text{ son normales.} \\
&= xx' + yy'
\end{aligned}$$

Conclusión

Dados dos vectores $\vec{u} = (x, y)$, $\vec{v} = (x', y')$ en una base ortonormal, se cumple que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Ejemplo

Determina el producto escalar de los vectores $\vec{u} = (3, 2)$, $\vec{v} = (1, 2)$ en una base ortonormal.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3 \times 1) + (2 \times 2)$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 + 4$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$$

Problemas

1. Determina el producto escalar de los vectores $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en cada literal. Considera que las coordenadas de los vectores están en una base ortonormal.

a) $\vec{u} = (4, 1)$, $\vec{v} = (2, 3)$ b) $\vec{u} = (-2, 3)$, $\vec{v} = (-1, -2)$ c) $\vec{u} = (2, -3)$, $\vec{v} = (-3, -2)$

2. Encuentra el valor de x que hace que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales. Considera que las coordenadas de los vectores están en una base ortonormal.

a) $\vec{u} = (-3, 1)$, $\vec{v} = (2, x)$ b) $\vec{u} = (1, 0)$, $\vec{v} = (x, -2)$

c) $\vec{u} = (x, 2)$, $\vec{v} = (-1, x)$ d) $\vec{u} = (2, x)$, $\vec{v} = (x, 5)$

e) $\vec{u} = (2, 1)$, $\vec{v} = (x, 3)$ f) $\vec{u} = (2 - x, 3)$, $\vec{v} = (1, 2 + x)$ g) $\vec{u} = (1 - x, x)$, $\vec{v} = (3x, 2x - 1)$

Si el producto escalar de dos vectores diferentes de cero es 0, entonces los vectores son ortogonales.

3. Determina la medida del ángulo formado entre los vectores de cada literal. Considera que las coordenadas de los vectores están en una base ortonormal.

a) $\vec{u} = (4, 1)$, $\vec{v} = (2, 3)$ b) $\vec{u} = (-2, 3)$, $\vec{v} = (-1, -2)$ c) $\vec{u} = (2, -3)$, $\vec{v} = (-3, -2)$

Aplica la forma en que se utilizó el producto escalar en el ejemplo de la clase anterior.

Indicador de logro:

2.5 Determina el producto escalar de vectores en coordenadas de una base ortonormal.

Secuencia:

Se determina el producto escalar a partir de las coordenadas del vector en una base ortonormal utilizando las propiedades de los vectores.

Propósito:

Escribir un vector en una base ortonomal facilitará el cálculo del producto escalar. Ahora el estudiante será capaz de determinar el ángulo entre dos vectores conociendo únicamente sus coordenadas.

Solución de problemas:

1a) $\vec{u} = (4, 1), \vec{v} = (2, 3)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (4 \times 2) + (1 \times 3)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 8 + 3$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 11$

1b) $\vec{u} = (-2, 3), \vec{v} = (-1, -2)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-2) \times (-1) + 3 \times (-2)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 - 6$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$

1c) $\vec{u} = (2, -3), \vec{v} = (-3, -2)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-3) + (-3) \times (-2)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 + 6$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

2a) $\vec{u} = (-3, 1), \vec{v} = (2, x)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$-3(2) + 1(x) = 0$

$x = 6$

2b) $\vec{u} = (1, 0), \vec{v} = (x, -2)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$x + 0(-2) = 0$

$x = 0$

2c) $\vec{u} = (x, 2), \vec{v} = (-1, x)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$x(-1) + 2(x) = 0$

$x = 0$

2d) $\vec{u} = (2, x), \vec{v} = (x, 5)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$2(x) + x(5) = 0$

$x = 0$

2e) $\vec{u} = (2, 1), \vec{v} = (x, 3)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$2(x) + 1(3) = 0$

$x = -\frac{3}{2}$

2f) $\vec{u} = (2 - x, 3), \vec{v} = (1, 2 + x)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$(2 - x)(1) + 3(2 + x) = 0$

$x = -4$

2g) $\vec{u} = (1 - x, x), \vec{v} = (3x, 2x - 1)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$(1 - x)(3x) + x(2x - 1) = 0$

$-x^2 + 2x = 0$

$x = 0$ o $x = 2$

3a) $\vec{u} = (4, 1), \vec{v} = (2, 3)$

$u \cdot v = (4 \times 2) + (1 \times 3) = 11$

$\|u\| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$

$\|v\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cos \alpha$

$11 = \sqrt{17}\,\sqrt{13} \cos \alpha$

$\cos \alpha = \frac{11}{\sqrt{221}}$

$\alpha = \cos^{-1} \frac{11}{\sqrt{221}}$

$\alpha \approx 42.27°$

3b) $\vec{u} = (-2, 3), \vec{v} = (-1, -2)$

$u \cdot v = -2(-1) + 3(-2) = -4$

$\|u\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$\|v\| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

$u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cos \alpha$

$-4 = \sqrt{13}\sqrt{5} \cos \alpha$

$\cos \alpha = -\frac{4}{\sqrt{65}}$

$\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{4}{\sqrt{65}}\right)$

$\alpha \approx 119.74°$

3c) $\vec{u} = (2, -3), \vec{v} = (-3, -2)$

$u \cdot v = 2(-3) + (-3)(-2) = 0$

$\|u\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

$\|v\| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

$u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cos \alpha$

$0 = \sqrt{13}\sqrt{13} \cos \alpha$

$\cos \alpha = 0$

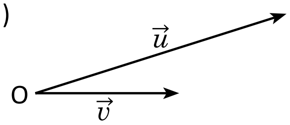
$\alpha = \cos^{-1} 0$

$\alpha = 90°$

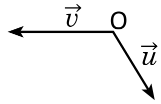
2.6 Practica lo aprendido

1. Grafica la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ para cada caso.

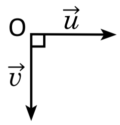
a)



b)

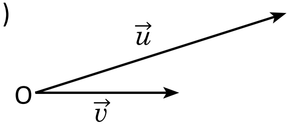


c)

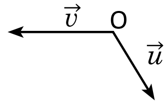


2. Grafica la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ para cada caso.

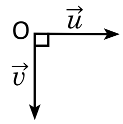
a)



b)

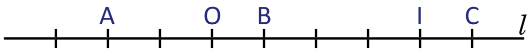


c)



3. Las divisiones de la recta l son regulares, y el vector $\overrightarrow{OI}$ es unitario, determina:

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$



4. Sean A y B dos puntos tales que AB = 1. Calcula $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$ para cada una de las siguientes condiciones.

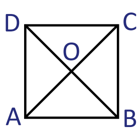
a) A es el punto medio de BM b) B es el punto medio de AM c) M es el punto medio de AB

5. Sean A y B dos puntos tales que AB = 3. Representa el punto M en la recta AB que cumpla las condiciones de cada literal.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 2$ b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -6$ c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

6. Considerando un cuadrado ABCD con centro O y lado 3. Calcula los siguientes productos escalares.

a) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CA}$ b) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$



7. Calcula el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, considerando que α es el ángulo formado entre ambos vectores.

a) $\|\vec{u}\| = 6$, $\|\vec{v}\| = 5$, $\alpha = 60°$ b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 4$, $\alpha = 150°$

8. Determina la medida del ángulo formado entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para cada literal.

a) $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 6$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 15$ b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 2$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$

9. Determina el producto escalar de los vectores $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en cada literal. Considera que las coordenadas de los vectores están en una base ortonormal.

a) $\vec{u} = (2, -1)$, $\vec{v} = (-1, 0)$ b) $\vec{u} = (-3, 4)$, $\vec{v} = (-4, -2)$

10. Encuentra el valor de x que hace que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales. Considera que las coordenadas de los vectores están en una base ortonormal.

a) $\vec{u} = (1 - 3x, 2)$, $\vec{v} = (2, 4 + 2x)$ b) $\vec{u} = (2 - 3x, 2x)$, $\vec{v} = (2x, 3x + 2)$

11. Determina la medida del ángulo formado entre los vectores de cada literal. Considera que las coordenadas de los vectores están en una base ortonormal.

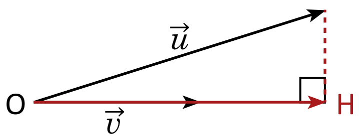
a) $\vec{u} = (-5, 3)$, $\vec{v} = (-6, -10)$ b) $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\vec{v} = (0, 2)$

Indicador de logro:

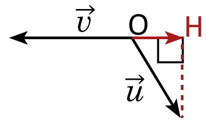
2.6 Resuelve problemas correspondientes al producto escalar de vectores.

Solución de problemas:

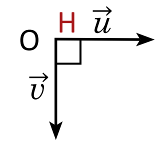
1a)



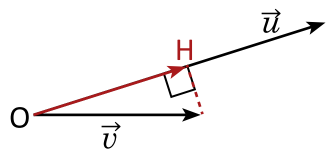
1b)



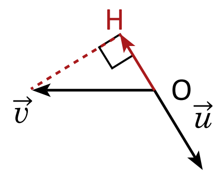
1c)



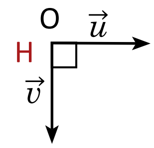
2a)



2b)



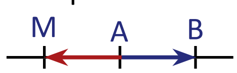
2c)



3a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$

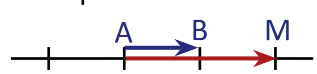
3b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = -\left(\frac{1}{2} \times \frac{5}{4}\right) = -\frac{5}{8}$

4a) A es el punto medio de BM



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -(1 \times 1) = -1$

4b) B es el punto medio de AM

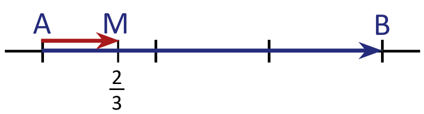


$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 1 \times 2 = 2$

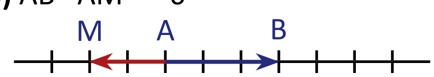
4c) M es el punto medio de AB

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

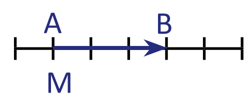
5a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 2$



5b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -6$



5c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$



6a)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{AD} \cdot (-\overrightarrow{AC})\\ &= -(\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC})\\ &= -(\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD})\\ &= -(3 \times 3)\\ &= -9\end{aligned}$$

6b)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{CD} \cdot (-\overrightarrow{CB})\\ &= -(\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CC})\\ &= -(\overrightarrow{CD} \cdot \vec{0})\\ &= 0\end{aligned}$$

6c) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$
Pues las diagonales del cuadrado son perpendiculares.

7a)
$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos 60°\\ &= 6 \times 5 \times \frac{1}{2}\\ &= 15\end{aligned}$$

7b)
$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos 150°\\ &= \sqrt{3} \times 4 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= -6\end{aligned}$$

8a)
$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos \alpha\\ 15 &= 5(6)(\cos \alpha)\\ \cos \alpha &= \frac{1}{2}\\ \alpha &= 60°\end{aligned}$$

8b)
$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos \alpha\\ -3 &= \sqrt{3}(2)(\cos \alpha)\\ \cos \alpha &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \alpha &= 150°\end{aligned}$$

9a) $\vec{u} = (2, -1), \vec{v} = (-1, 0)$
$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= 2 \times (-1) + (-1) \times 0\\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= -2 + 0\\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= -2\end{aligned}$$

9b) $\vec{u} = (-3, 4), \vec{v} = (-4, -2)$
$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= (-3) \times (-4) + 4 \times (-2)\\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= 12 - 8\\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= 4\end{aligned}$$

10a) $\vec{u} = (1 - 3x, 2), \vec{v} = (2, 4 + 2x)$
$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= 0\\ (1 - 3x)(2) + 2(4 + 2x) &= 0\\ x &= 5\end{aligned}$$

10b) $\vec{u} = (2 - 3x, 2x), \vec{v} = (2x, 3x + 2)$
$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= 0\\ (2 - 3x)(2x) + 2x(3x + 2) &= 0\\ x &= 0\end{aligned}$$

11a) $\vec{u} = (-5, 3), \vec{v} = (-6, -10)$
$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|\cos \alpha\\ 0 &= \sqrt{34}\ (2\sqrt{34})\cos \alpha\\ \cos \alpha &= 0\\ \alpha &= 90°\end{aligned}$$

11b) $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \vec{v} = (0\ , 2)$
$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \alpha &= 30°\end{aligned}$$

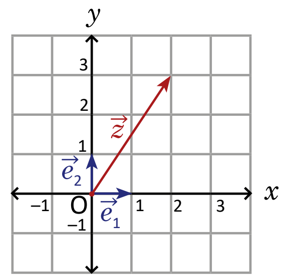
Lección 3 Números complejos

3.1 Representación geométrica de los números complejos

Problema inicial

Considerando el número complejo $z = 2 + 3i$, representa en el plano cartesiano el vector $\vec{z} = (2, 3)$ utilizando como base los vectores ortonormales $\vec{e}_1 = (1, 0)$ y $\vec{e}_2 = (0, 1)$.

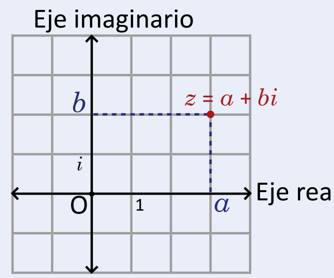
Solución



Conclusión

El plano cartesiano es una base de vectores ortonormales y las coordenadas de un punto A en el plano equivalen a las coordenadas del vector $\overrightarrow{OA}$ en la base ortonormal $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Un número complejo $z = a + bi$, se puede representar en un plano en donde la primera coordenada (eje x) es la parte real (a) del número z, y la segunda coordenada (eje y) es la parte imaginaria (b) del número z.



El plano donde se ubican los números complejos se conoce como **plano complejo**. El eje horizontal se conoce como **eje real** y el eje vertical se conoce como **eje imaginario**.

Se define el **módulo** del número complejo $z = a + bi$, como la norma del vector (a, b), y se denota por $|z|$, es decir:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Ejemplo

Determina el módulo del número $z = 2 + 3i$.

$$\begin{aligned}|z| &= \sqrt{2^2 + 3^2}\\ &= \sqrt{13}\end{aligned}$$

Problemas

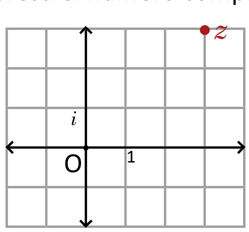
1. Representa los siguientes números complejos como puntos en el plano complejo y determina su módulo.

a) $z = 2 + 3i$ b) $z = -4 - 2i$ c) $z = -1 + 2i$

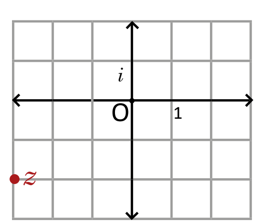
d) $z = 3 - i$ e) $z = 4$ f) $z = -4i$

2. Expresa el número complejo representado en cada plano complejo.

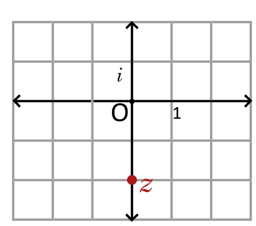
a)



b)



c)



3. Demuestra que $|z|^2 = z\bar{z}$.

Recuerda que el conjungado de un número complejo $z = a + bi$ es $\bar{z} = a - bi$.

Indicador de logro:

3.1 Representa un número complejo en el plano complejo.

Secuencia:

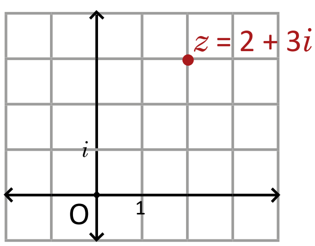
En esta lección se estudiarán las propiedades de los números complejos a partir de su representación en el plano complejo, estableciendo así la equivalencia entre números complejos y vectores.

Propósito:

En la Conclusión se establece que la representación de un número complejo es el punto final del vector cuyas coordenadas son la parte real e imaginaria, en la base ortonormal del plano.

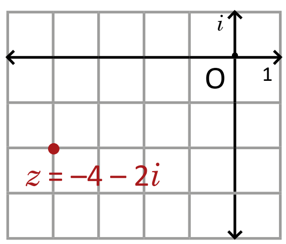
Solución de problemas:

1a)



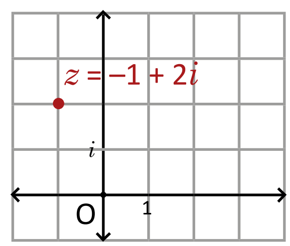
$|z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

1b)



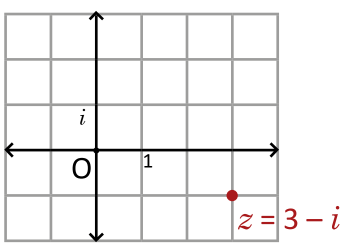
$|z| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$

1c)



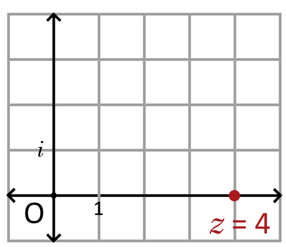
$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

1d)



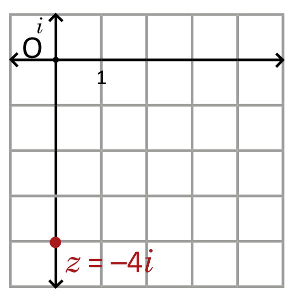
$|z| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

1e)



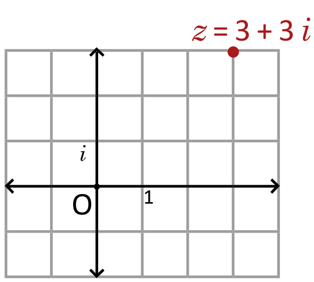
$|z| = \sqrt{4^2 + (0)^2} = 4$

1f)

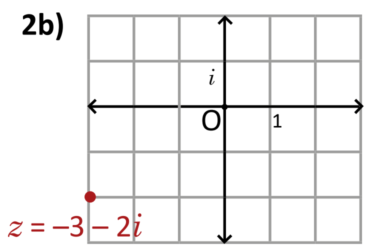


$|z| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4$

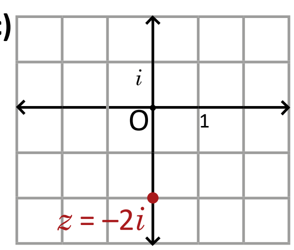
2a)



2b)



2c)



3. $|z|^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = a^2 + b^2$

$$
\begin{aligned}
z\bar{z} &= (a + bi)(a - bi) \\
&= a^2 - (bi)^2 \\
&= a^2 - b^2 i^2 \\
&= a^2 - b^2(-1) \\
&= a^2 + b^2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $|z|^2 = z\bar{z}$.

Hacer énfasis al estudiante del porqué se utilizan puntos y no saetas.

Lección 3

3.2 Operaciones con números complejos en el plano complejo

Problema inicial

Considerando los números complejos $z = 2 + 2i$ y $w = 1 - 4i$ representa los siguientes números en el plano complejo.

a) z b) w c) $w + z$ d) $w - z$ e) $2w$

Solución

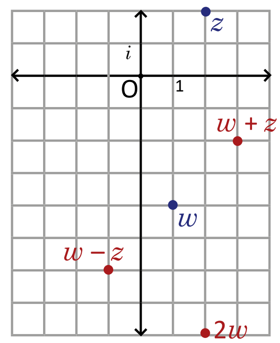
a) Se representa el punto (2, 2).

b) Se representa el punto (1, –4).

c) $w + z = 1 - 4i + 2 + 2i = 3 - 2i$, entonces se representa el punto (3, –2).

d) $w - z = 1 - 4i - (2 + 2i) = -1 - 6i$, entonces se representa el punto (–1, –6).

e) $2w = 2(1 - 4i) = 2 - 8i$, entonces se representa el punto (2, –8).



Conclusión

Dados dos números complejos $w = a + bi$ y $z = c + di$, se cumple que la suma de números complejos $w + z$ equivale al número complejo representado por las coordenadas $(a, b) + (c, d)$.

Análogamente, la resta de números complejos $w - z$ equivale al número complejo representado por las coordenadas $(a, b) - (c, d)$.

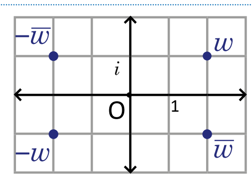
Y el número complejo que se representa en el plano por el vector (ra, rb) es rw.

Observar que las operaciones con números complejos en el plano complejo se comportan como las operaciones de vectores en el plano.

Ejemplo

Considerando $w = 2 + i$, representa en el plano complejo los números:

a) w b) $\overline{w}$ c) $-w$ d) $-\overline{w}$



Problemas

1. Considerando los números complejos $z = 2 - i$ y $w = 3 + 2i$ representa los siguientes números en el plano complejo.

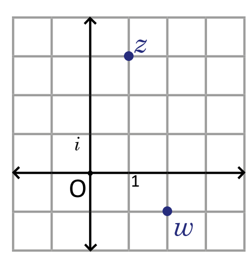
a) z b) w c) $w + z$ d) $w - z$ e) $z - w$

f) $2z$ g) $-w$ h) $\overline{z}$ i) $-\overline{w}$ j) $2w - 3z$

2. Utilizando los números complejos graficados en la figura, representa los siguientes números complejos.

a) $w + z$ b) $w - z$ c) $z - w$

d) $-w$ e) $-\overline{z}$ f) $2w - z$



Indicador de logro:

3.2 Representa las operaciones básicas con números complejos en el plano complejo.

Secuencia:

La representación de números complejos de la clase anterior es válida para sus operaciones, por lo que se establece que la suma y resta de números complejos equivale a la suma y resta de vectores por sus coordenadas, respectivamente.

Propósito:

En el Problema inicial se representan los resultados de las operaciones realizadas con números complejos. En la Conclusión se establecen las operaciones de números complejos por su representación, operando coordenadas.

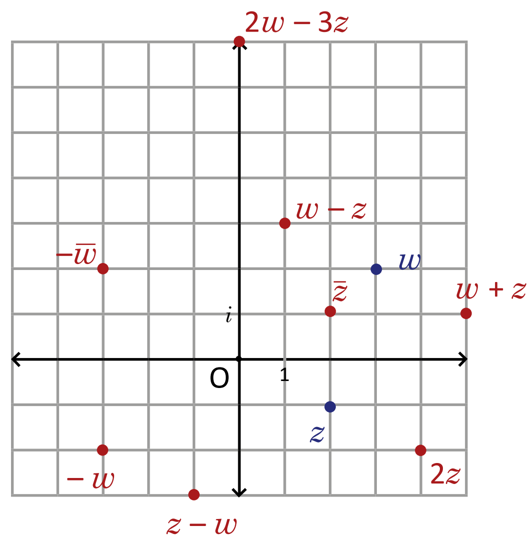
Solución de problemas:

1a) $z = 2 - i$ **1b)** $w = 3 + 2i$ **1c)** $w + z = 5 + i$

1d) $w - z = 1 + 3i$ **1e)** $z - w = -1 - 3i$ **1f)** $2z = 4 - 2i$

1g) $-w = -3 - 2i$ **1h)** $\bar{z} = 2 + i$ **1i)** $-\overline{w} = -3 + 2i$

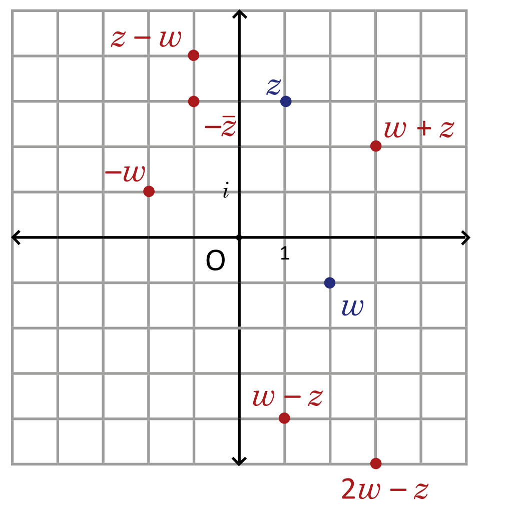
1j) $2w - 3z = 7i$



2. $z = 1 + 3i$, $w = 2 - i$

2a) $w + z = 3 + 2i$ **2b)** $w - z = 1 - 4i$ **2c)** $z - w = -1 + 4i$

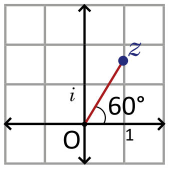
2d) $-w = -2 + i$ **2e)** $-\bar{z} = -1 + 3i$ **2f)** $2w - z = 3 - 5i$



3.3 Forma trigonométrica de los números complejos*

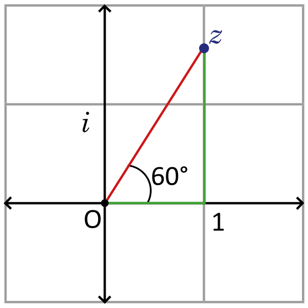
Problema inicial

Utiliza razones trigonométricas para expresar el número complejo representado por el punto cuyo módulo es 2 y el ángulo medido desde el eje real al segmento Oz es 60°.



Solución

Un número complejo z representado por el vector del plano, debe ser expresado en la forma $z = a + bi$ donde a es la coordenada del vector en x, y b es la coordenada del vector en y.



De la definición de seno y coseno se tiene que:

$\cos 60° = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{2}$ $\qquad$ $\text{sen } 60° = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{2}$

Luego, $a = 2 \cos 60°$ y $b = 2 \text{ sen } 60°$.

Por lo tanto, el número complejo representado por este vector es $2\cos 60° + (2\text{sen } 60°)i$, que puede ser expresado por:

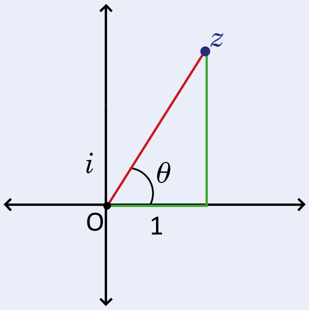
$$z = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i = 1 + \sqrt{3}i.$$

Conclusión

El ángulo formado entre el eje real y el segmento Oz, tal que z es un número complejo, se conoce como **argumento** del número complejo, y se representa por arg(z). Si θ es argumento de z, entonces todos los ángulos de la forma $\theta + 360°n$ son argumento del mismo número complejo z.

Para un número complejo z con módulo $|z|$ y argumento θ, se cumple que:

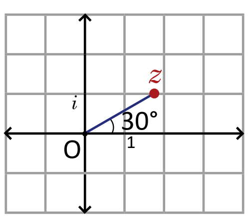
$$z = |z|(\cos \theta + i \text{ sen } \theta).$$



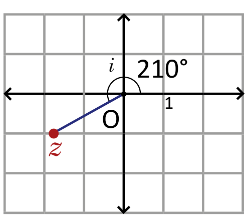
Problemas

1. Expresa el número complejo representado en cada plano complejo y cuyo módulo es el que se indica.

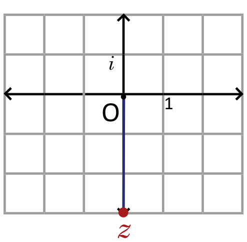
a) $|z| = 2$



b) $|z| = 2$



c) $|z| = 3$



2. Determina el número complejo z si su módulo y argumento es el que se indica en cada literal.

a) $|z| = 2$, $\theta = 45°$ $\qquad$ b) $|z| = 3$, $\theta = 30°$ $\qquad$ c) $|z| = 1$, $\theta = 135°$ $\qquad$ d) $|z| = 2$, $\theta = 150°$

194

Indicador de logro:

3.3 Expresa un número complejo en su forma trigonométrica utilizando su módulo y su argumento.

Secuencia:

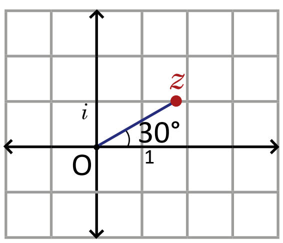
El estudiante debe recordar las razones seno y coseno para introducir en esta clase la representación trigonométrica de un número complejo dado. Otras propiedades como coseno y seno de la suma de ángulos también serán útiles.

Propósito:

En el Problema inicial el estudiante escribe el número complejo a partir de la norma y el argumento. En el Ejemplo y los Problemas se utilizan ángulos notables, por lo que en las respuestas deben dejar indicadas las raíces cuadradas y fracciones.

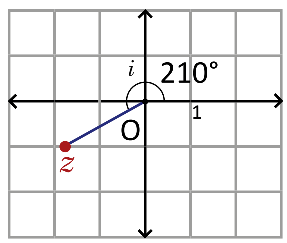
Solución de problemas:

1a) $|z| = 2$



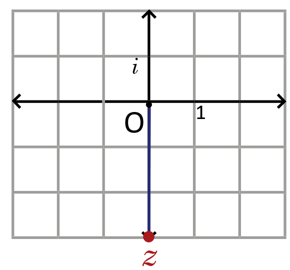
$z = 2(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)$
$= \sqrt{3} + i$

1b) $|z| = 2$



$z = 2(\cos 210° + i \text{ sen } 210°)$
$= -\sqrt{3} - i$

1c) $|z| = 3$



$z = 3(\cos 270° + i \text{ sen } 270°)$
$= -3i$

2a) $|z| = 2, \theta = 45°$

$z = 2(\cos 45° + i \text{ sen } 45°)$
$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$= \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

2b) $|z| = 3, \theta = 30°$

$z = 3(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)$
$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$
$= \sqrt{3} + i$

2c) $|z| = 1, \theta = 135°$

$z = 1(\cos 135° + i \text{ sen } 135°)$
$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$
$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

2d) $|z| = 2, \theta = 150°$

$z = 2(\cos 150° + i \text{ sen } 150°)$
$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right)$
$= -\sqrt{3} + i$

Lección 3

3.4 Multiplicación de números complejos en su forma trigonométrica

Problema inicial

Considerando dos números complejos $z = |z|(\cos \alpha + i \text{ sen } \alpha)$, y $w = |w|(\cos \beta + i \text{ sen } \beta)$, determina zw.

Solución

$$zw = |z|(\cos \alpha + i \text{ sen } \alpha) \times |w|(\cos \beta + i \text{ sen } \beta)$$

$$= |z||w|(\cos \alpha + i \text{ sen } \alpha)(\cos \beta + i \text{ sen } \beta)$$

$$= |z||w|[(\cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta) + i(\text{sen } \alpha \cos \beta + \text{sen } \beta \cos \alpha)]$$

$$= |z||w|[\cos(\alpha + \beta) + i \text{ sen}(\alpha + \beta)] \quad \text{(aplicando el teorema de adición).}$$

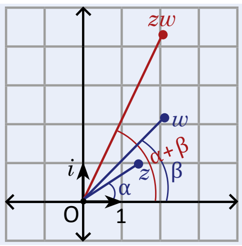
El teorema de adición es:
$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \text{sen } \beta \cos \alpha$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta$

El número complejo que resulta tiene como módulo la multiplicación de los módulos, y su argumento es igual a la suma de los argumentos de los dos complejos.

Conclusión

En la multiplicación de dos números complejos $z = |z|(\cos \alpha + i \text{ sen } \alpha)$ y $w = |w|(\cos \beta + i \text{ sen } \beta)$ se cumple que el número complejo resultante tiene como módulo la multiplicación de los módulos y el argumento es la suma de los argumentos de los números multiplicados.

$$zw = |z||w|[\cos(\alpha + \beta) + i \text{ sen}(\alpha + \beta)]$$



Ejemplo

Realiza la multiplicación zw si $z = 2(\cos 20° + i \text{ sen } 20°)$ y $w = 3(\cos 10° + i \text{ sen } 10°)$.

$$zw = 2(\cos 20° + i \text{ sen } 20°) \times 3(\cos 10° + i \text{ sen } 10°)$$

$$= 2 \times 3 [\cos(20° + 10°) + i \text{ sen}(20° + 10°)]$$

$$= 6(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)$$

$$= 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$= 3\sqrt{3} + 3i$$

Problemas

1. Determina el producto zw para cada literal.

   a) $z = \cos 14° + i \text{ sen } 14°$ y $w = 2(\cos 16° + i \text{ sen } 16°)$

   b) $z = 2(\cos 40° + i \text{ sen } 40°)$ y $w = 5(\cos 20° + i \text{ sen } 20°)$

   c) $z = 3(\cos 100° + i \text{ sen } 100°)$ y $w = 4(\cos 50° + i \text{ sen } 50°)$

   d) $z = 6(\cos 110° + i \text{ sen } 110°)$ y $w = \cos 160° + i \text{ sen } 160°$

   e) $z = 2(\cos 208° + i \text{ sen } 208°)$ y $w = 2(\cos 107° + i \text{ sen } 107°)$

   f) $z = 3(\cos 140° + i \text{ sen } 40°)$ y $w = 2(-\cos 170° + i \text{ sen } 10°)$

   g) $z = 5(\cos 170° + i \text{ sen } 10°)$ y $w = 3(\cos 70° + i \text{ sen } 70°)$

2. Grafica los números z, w y zw, para cada uno de los literales anteriores.

Indicador de logro:

3.4 Determina el producto de dos números complejos utilizando su forma trigonométrica.

Secuencia:

En la Unidad 6 se estudiaron el coseno y el seno de una suma de ángulos, estas fórmulas se utilizarán para explicar la propiedad del producto de número complejos utilizando su forma trigonométrica.

Propósito:

En la Conclusión se observa la representación del producto de números complejos, tal figura es útil en la resolución de problemas para ubicar la posición del resultado y constatar con la respuesta.

Solución de problemas:

1a) $zw = (\cos 14° + i \text{ sen } 14°) \times 2(\cos 16° + i \text{ sen } 16°)$

$= 1 \times 2\ [\cos (14° + 16°) + i \text{ sen } (14° + 16°)]$

$= 2(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)$

$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right)$

$= \sqrt{3} + i$

1b) $zw = 2(\cos 40° + i \text{ sen } 40°) \times 5(\cos 20° + i \text{ sen } 20°)$

$= 2 \times 5\ [\cos (40° + 20°) + i \text{ sen } (40° + 20°)]$

$= 10(\cos 60° + i \text{ sen } 60°)$

$= 10\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 5 + 5\sqrt{3}i$

1c) $zw = -6\sqrt{3} + 6i$

1d) $zw = -6i$

1e) $zw = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$

1f) $\text{sen } 40° = \text{sen } (180° - 40°) = \text{sen } 140°$

$-\cos 170° = \cos (180° - 170°) = \cos 10°$

$zw = 3(\cos 140° + i \text{ sen } 140°) \times 2(\cos 10° + i \text{ sen } 10°)$

$= 6(\cos 150° + i \text{ sen } 150°)$

$= 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right)$

$= -3\sqrt{3} + 3i$

1g) $\text{sen } 10° = \text{sen } (180° - 10°) = \text{sen } 170°$

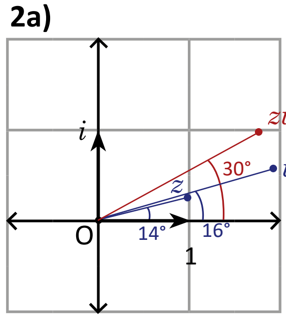
$zw = 5(\cos 170° + i\text{sen } 170°) \times 3(\cos 70° + i\text{sen } 70°)$

$= 15(\cos 240° + i \text{ sen } 240°)$

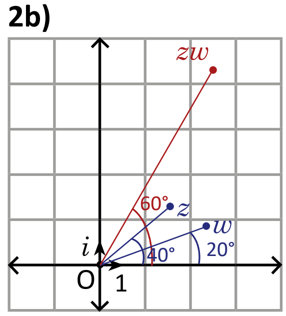
$= 15\left(-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= -\frac{15}{2} - \frac{15\sqrt{3}}{2}i$

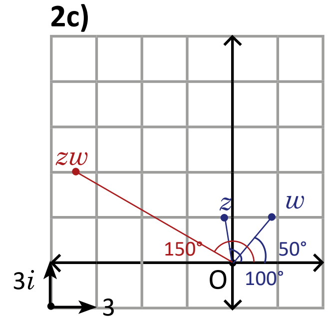
2a)



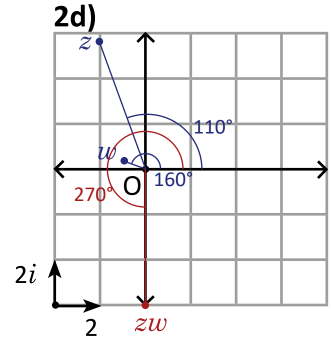
2b)



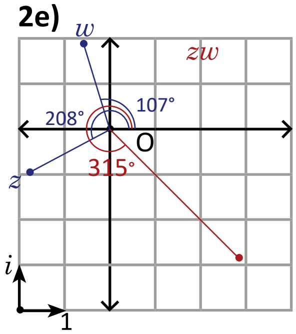
2c)



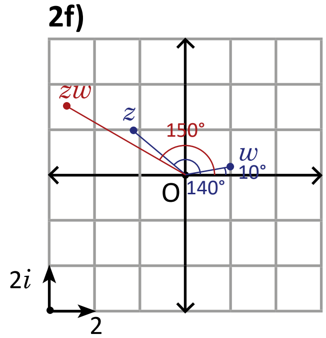
2d)



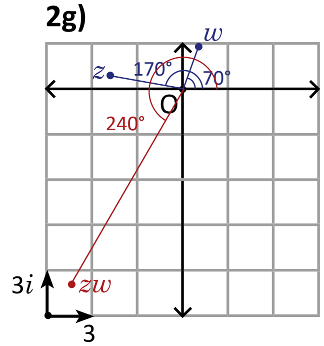
2e)



2f)



2g)



En cada gráfica se ha indicado la escala utilizada por medio de la representación: $3i$ ↑ → 3

3.5 División de números complejos en su forma trigonométrica

Problema inicial

Considerando $w = 2(\cos 40° + i \text{ sen } 40°)$. Determina el valor de z que cumple que $zw = 6(\cos 60° + i \text{ sen } 60°)$.

Solución

Tomando $z = |z|(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)$, entonces:

$$\begin{aligned} zw &= |z|(\cos\theta + i \text{ sen } \theta) \times 2(\cos 40° + i \text{ sen } 40°) \\ &= 2|z|[\cos(40° + \theta) + i \text{ sen}(40° + \theta)], \end{aligned}$$

además se sabe que $zw = 6(\cos 60° + i \text{ sen } 60°)$,

luego:

$$2|z| = 6$$
$$40° + \theta = 60° + 360°n \text{ con } n \text{ un número entero.}$$

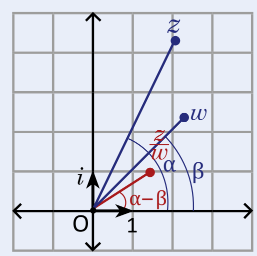
Por lo tanto, $z = \frac{6}{2}[\cos(60° - 40°) + i \text{ sen}(60° - 40°)] = 3(\cos 20° + i \text{ sen } 20°)$.

Conclusión

En la división de 2 números complejos $z = |z|(\cos\alpha + i \text{ sen } \alpha)$, y $w = |w|(\cos\beta + i \text{ sen } \beta)$ se cumple que el número complejo resultante tiene como módulo la división de los módulos y el argumento es igual al argumento del dividendo menos el argumento del divisor.

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}[\cos(\alpha - \beta) + i \text{ sen}(\alpha - \beta)]$$

Como caso especial, se tiene que $\frac{1}{w} = \frac{1}{|w|}[\cos(-\beta) + i \text{ sen}(-\beta)]$.



Ejemplo

Realiza la división $\frac{z}{w}$ si $z = 4(\cos 50° + i \text{ sen } 50°)$ y $w = \cos 20° + i \text{ sen } 20°$.

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= 4(\cos 50° + i \text{ sen } 50°) \div (\cos 20° + i \text{ sen } 20°) \\ &= \frac{4}{1}[\cos(50° - 20°) + i \text{ sen}(50° - 20°)] \\ &= 4(\cos 30° + i \text{ sen } 30°) \\ &= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{2}i \\ &= 2\sqrt{3} + 2i \end{aligned}$$

Problemas

1. Determina el cociente $\frac{z}{w}$ para cada literal.

   a) $z = \cos 42° + i \text{ sen } 42°$ y $w = 2(\cos 12° + i \text{ sen } 12°)$

   b) $z = 10(\cos 40° + i \text{ sen } 40°)$ y $w = 2[\cos(-20°) + i \text{ sen }(-20°)]$

   c) $z = 5(\cos 110° + i \text{ sen } 110°)$ y $w = \cos 170° + i \text{ sen } 170°$

   d) $z = 1$ y $w = \cos 60° + i \text{ sen } 60°$

   e) $z = 3(\cos 207° + i \text{ sen } 207°)$ y $w = 3(\cos 117° + i \text{ sen } 117°)$

   f) $z = 3(\cos 110° + i \text{ sen } 70°)$ y $w = 2(\cos 20° + i \text{ sen } 20°)$

   g) $z = 6(-\cos 10° + i \text{ sen } 10°)$ y $w = 2(\cos 80° + i \text{ sen } 80°)$

2. Grafica los números z, w y $\frac{z}{w}$, para cada uno de los literales anteriores.

Indicador de logro:

3.5 Determina el cociente de dos números complejos utilizando su forma trigonométrica.

Secuencia:

Se ha visto la suma, resta y producto de números complejos, en esta clase se estudia la división, en la que las operaciones realizadas son el cociente de las normas y la diferencia de los argumentos, que son números reales.

Propósito:

En el Problema inicial se deduce la forma de la división de números complejos a partir del producto. En los Problemas en los literales f y g será necesario utilizar otras identidades trigonométricas para determinar el argumento del complejo.

Solución de problemas:

1a) $\frac{z}{w} = (\cos 42° + i \text{ sen } 42°) \div 2(\cos 12° + i \text{ sen } 12°)$

$= \frac{1}{2}[\cos (42° - 12°) + i \text{ sen } (42° - 12°)]$

$= \frac{1}{2}(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$

1b) $\frac{z}{w} = 10(\cos 40° + i \text{ sen } 40°) \div 2(\cos (-20°) + i \text{ sen } (-20°)$

$= \frac{10}{2}[\cos (40° - (-20°)) + i \text{ sen } (40° - (-20°)]$

$= 5(\cos 60° + i \text{ sen } 60°)$

$= 5\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$

1c) $\frac{z}{w} = 5 [\cos (-60)° + i \text{ sen } (-60)°] = \frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$

1d) $\frac{z}{w} = \frac{1}{w} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

1e) $\frac{z}{w} = \cos 90° + i \text{ sen } 90° = i$

1f) sen 70° = sen (180° – 70°) = sen 110°

$\frac{z}{w} = 3(\cos 110° + i \text{ sen } 110°) \div 2(\cos 20° + i \text{ sen } 20°)$

$= \frac{3}{2}(\cos 90° + i \text{ sen } 90°)$

$= \frac{3}{2}i$

1g) –cos 10° = cos (180° – 10°) = cos 170°

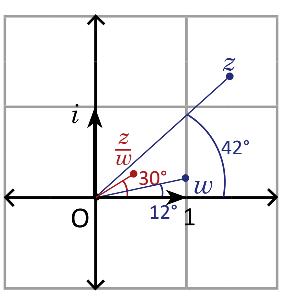
sen 10° = sen (180° – 10°) = sen 170°

$\frac{z}{w} = 6(\cos 170° + i \text{ sen } 170°) \div 2(\cos 80° + i \text{ sen } 80°)$

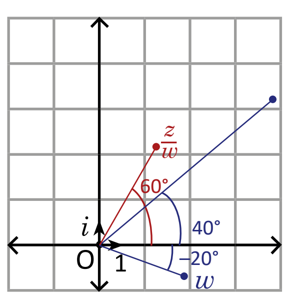
$= \frac{6}{2}(\cos 90° + i \text{ sen } 90°)$

$= 3i$

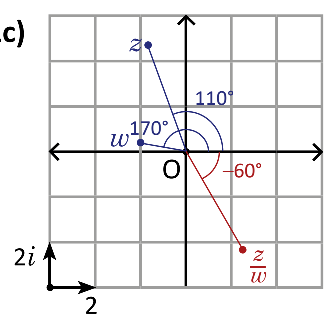
2a)



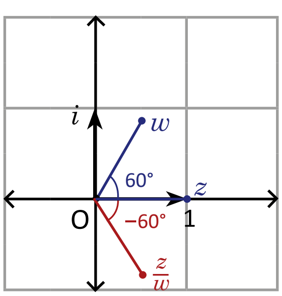
2b)



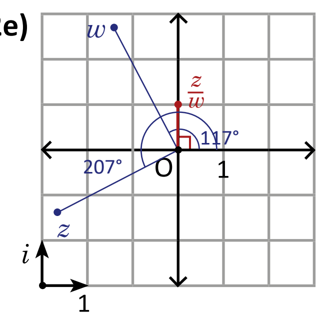
2c)



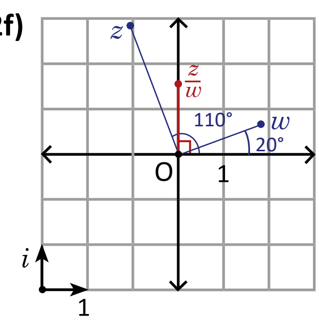
2d)



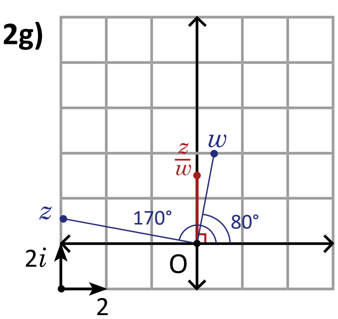
2e)



2f)



2g)



3.6 Fórmula de Moivre

Problema inicial

Considerando $z = 2(\cos 15° + i \text{ sen } 15°)$ determina z^2 y z^{-2}.

Se define $z^{-n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n$.

Solución

$$
\begin{aligned}
z^2 &= [2(\cos 15° + i \text{ sen } 15°)][2(\cos 15° + i \text{ sen } 15°)]\\
&= 2^2[\cos(15° + 15°) + i \text{ sen}(15° + 15°)]\\
&= 4(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)\\
&= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\\
&= 2\sqrt{3} + 2i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z^{-2} &= \left(\frac{1}{z}\right)^2\\
&= \left\{\frac{1}{2}[\cos(-15°) + i \text{ sen }(-15°)]\right\}^2\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^2[\cos(-15° - 15°) + i \text{ sen}(-15° - 15°)]\\
&= \frac{1}{4}[\cos(-30°) + i \text{ sen }(-30°)]\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\\
&= \frac{\sqrt{3} - i}{8}
\end{aligned}
$$

En general

Se cumple que dado un número complejo $z = |z|(\cos \theta + i \text{ sen } \theta)$:

$$z^2 = |z|^2(\cos 2\theta + i \text{ sen } 2\theta).$$

Se define $z^0 = 1$.

Y para un número entero n se cumple que:

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i \text{ sen } n\theta).$$

Esta expresión para la potencia n-ésima de un número complejo se conoce como **fórmula de Moivre**.

Ejemplo

Encuentra el valor (o valores) del número complejo z que hace cierta la igualdad $z^3 = 1$.

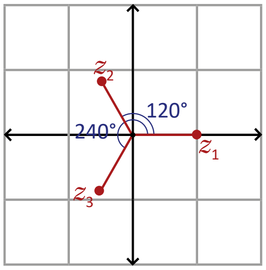
Considerando $z = |z|(\cos \theta + i \text{ sen } \theta)$ con $0° \leq \theta < 360°$,
entonces $z^3 = |z|^3(\cos 3\theta + i \text{ sen } 3\theta) = 1(\cos 0° + i \text{ sen } 0°)$.

De lo cual se deduce que $|z|^3 = 1$, y por lo tanto $|z| = 1$.

Además como $3\theta = 360° \times n$ (n: número entero) y $0° \leq \theta < 360°$, $3\theta = 0°$, $3\theta = 360°$ o $3\theta = 720°$, de lo cual se tendrá que $\theta = 0°$, $\theta = 120°$ o $\theta = 240°$.

Por lo tanto, los valores de z que cumplen que $z^3 = 1$ son $z_1 = \cos 0° + i \text{ sen } 0°$, $z_2 = \cos 120° + i \text{ sen } 120°$, $z_3 = \cos 240° + i \text{ sen } 240°$; que se pueden expresar como:

$$z_1 = 1,\ z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$



Observa que el triángulo que forman z_1, z_2 y z_3 es un triángulo equilátero. Puedes comprobarlo calculando las longitudes de los lados de este.

Unidad 7

Problemas

1. Para el número complejo $z = 2(\cos 15° + i \text{ sen } 15°)$. Determina:

   a) z^2 b) z^3 c) z^4 d) z^6 e) z^8

2. Para el número complejo $w = 3(\cos 20° + i \text{ sen } 20°)$, determina w^{-3}.
3. Encuentra el valor (o valores) del número complejo z que hace cierta la igualdad $z^4 = 1$.
4. Encuentra el valor (o valores) del número complejo w que hace cierta la igualdad $w^6 = 1$.

Indicador de logro:

3.6 Calcula el resultado de elevar un número complejo a una potencia utilizando la fórmula de Moivre.

Secuencia:

Se estudia la potencia de un número complejo. Los estudiantes deben recordar las razones trigonométricas de los ángulos notables así como de los ángulos sobre los ejes.

Propósito:

En la Solución se utilizará la regla del producto de números complejos para determinar las potencias dadas. En los Problemas no es necesario desarrollar las potencias mayores a 3.

Solución de problemas:

1a) $z^2 = 2^2[\cos(2 \times 15°) + i \text{ sen}(2 \times 15°)]$
$= 4(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)$
$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$
$= 2\sqrt{3} + 2i$

1b) $z^3 = 2^3[\cos(3 \times 15°) + i \text{ sen}(3 \times 15°)]$
$= 8(\cos 45° + i \text{ sen } 45°)$
$= 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$= 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$

1c) $z^4 = 2^4[\cos (4 \times 15°) + i \text{ sen } (4 \times 15°)]$
$= 16(\cos 60° + i \text{ sen } 60°)$
$= 16\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$= 8 + 8\sqrt{3}i$

1d) $z^6 = 2^6[\cos(6 \times 15°) + i \text{ sen}(6 \times 15°)]$
$= 64(\cos 90° + i \text{ sen } 90°)$
$= 64i$

1e) $z^8 = 2^8[\cos(8 \times 15°) + i \text{ sen}(8 \times 15°)]$
$= 256(\cos 120° + i \text{ sen } 120°)$
$= 256\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$= -128 + 128\sqrt{3}i$

2. $w^{-3} = 3^{-3}[\cos(-3 \times 20°) + i \text{ sen}(-3 \times 20°)]$
$= \frac{1}{27}[\cos(-60°) + i \text{ sen}(-60°)]$
$= \frac{1}{27}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$= \frac{1}{54} - \frac{\sqrt{3}}{54}i$

3. Sea $z = |z|(\cos \theta + i \text{ sen } \theta)$ con $0° \leq \theta < 360°$,
$\Rightarrow z^4 = |z|^4(\cos 4\theta + i \text{ sen } 4\theta) = 1(\cos 0° + i \text{ sen } 0°)$.
Luego $4\theta = 360° \times n \Rightarrow \theta = 90° \times n$, con $0° \leq \theta < 360°$ y $|z|^4 = 1$,
para $n = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow \theta = 0°, \theta = 90°, \theta = 180°$ o $\theta = 270°$ y $|z| = 1$
$\Rightarrow z_1 = \cos 0° + i \text{ sen } 0°, z_2 = \cos 90° + i \text{ sen } 90°, z_3 = \cos 180° + i \text{ sen } 180°, z_4 = \cos 270° + i \text{ sen } 270°$,
$\Rightarrow z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1, z_4 = -i$.

4. Se encuentra el valor (o valores) del número complejo w que hace cierta la igualdad $w^6 = 1$.
$\Rightarrow w^6 = |w|^6(\cos 6\theta + i \text{ sen } 6\theta) = 1(\cos 0° + i \text{ sen } 0°)$.
Luego $6\theta = 360° \times n \Rightarrow \theta = 60° \times n$, con $0° \leq \theta < 360°$ y $|w|^6 = 1$,
para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \Rightarrow \theta = 0°, \theta = 60°, \theta = 120°, \theta = 180°, \theta = 240°, \theta = 300°$ y $|w| = 1$,
$\Rightarrow w_1 = \cos 0° + i \text{ sen } 0°, w_2 = \cos 60° + i \text{ sen } 60°, w_3 = \cos 120° + i \text{ sen } 120°, w_4 = \cos 180° + i \text{ sen } 180°$,
$w_5 = \cos 240° + i \text{ sen } 240°$ o $w_6 = \cos 300° + i \text{ sen } 300°$
$\Rightarrow w_1 = 1, w_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, w_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, w_4 = -1, w_5 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ o $w_6 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

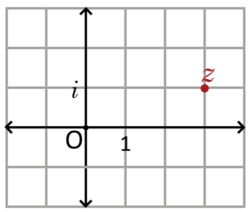
3.7 Practica lo aprendido

1. Representa los siguientes números complejos en el plano complejo y determina su módulo.

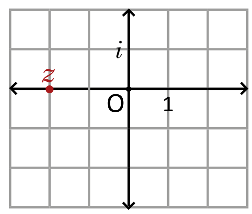
a) $z = -1 + 3i$ b) $z = -2i$ c) $z = -3$

2. Expresa el número complejo representado en cada plano complejo.

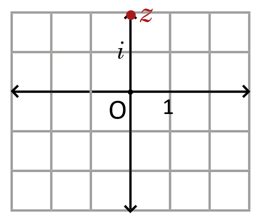
a)



b)



c)

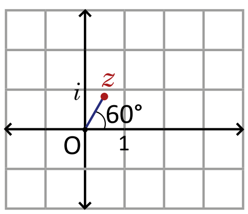


3. Considerando los números complejos $z = 1 - 2i$ y $w = -2 + 2i$ representa los siguientes números en el plano complejo.

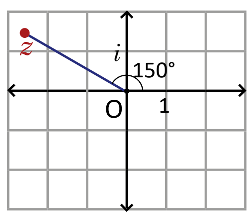
a) $z + w$ b) $w - z$ c) $z - w$ d) $-3z$ e) $\overline{w}$ f) $-w + 2z$

4. Expresa el número complejo representado en cada plano complejo.

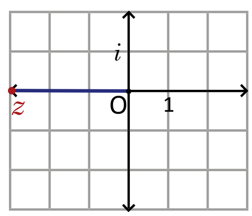
a) $|z| = 1$



b) $|z| = 3$



c) $|z| = 3$



5. Determina el número complejo que tiene módulo y argumento que indica cada literal.

a) $|z| = 4$, $\theta = 60°$ b) $|z| = 1$, $\theta = 45°$ c) $|z| = 2$, $\theta = 300°$ d) $|z| = 3$, $\theta = 180°$

6. Determina el producto zw para cada literal.

a) $z = 3(\cos 23° + i\,\text{sen}\ 23°)$ y $w = 4(\cos 37° + i\,\text{sen}\ 37°)$
b) $z = 2(\cos 41° + i\,\text{sen}\ 41°)$ y $w = 5[\cos(-11°) + i\,\text{sen}(-11°)]$
c) $z = 3(\cos 200° - i\,\text{sen}\ 160°)$ y $w = 2(\cos 20° - i\,\text{sen}\ 20°)$

7. Para el número complejo $z = \cos 10° + i\,\text{sen}\ 10°$. Determina:

a) z^3 b) z^6 c) z^9

8. Para el número complejo $w = 2(\cos 9° + i\,\text{sen}\ 9°)$. Determina w^{-5}.

9. Determina el cociente $\frac{z}{w}$ para cada literal:

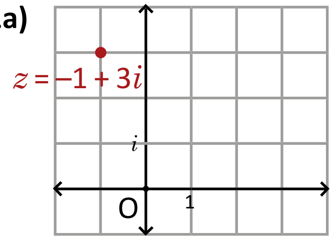
a) $z = \cos 25° + i\,\text{sen}\ 25°$ y $w = 3[\cos(-35°) + i\,\text{sen}(-35°)]$
b) $z = 6(\cos 21° + i\,\text{sen}\ 21°)$ y $w = 3(\cos 9° - i\,\text{sen}\ 9°)$
c) $z = 2(\cos 115° + i\,\text{sen}\ 65°)$ y $w = 2(\cos 5° - i\,\text{sen}\ 5°)$

Indicador de logro:

3.7 Resuelve problemas correspondientes a números complejos.

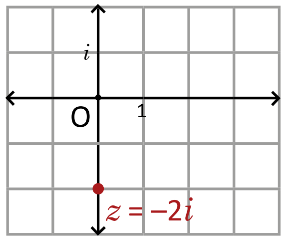
Solución de problemas:

1a)



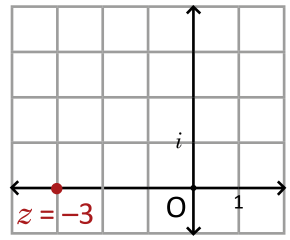
$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

1b)



$|z| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$

1c)



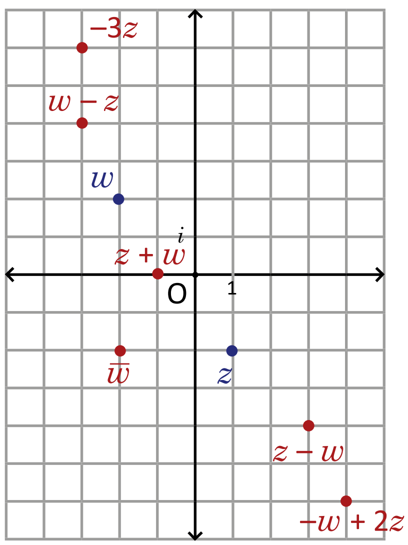
$|z| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$

2a) $z = 3 + i$

2b) $z = -2$

2c) $z = 2i$

3. $z = 1 - 2i$ y $w = -2 + 2i$



4a) $z = \cos 60° + i \text{ sen } 60° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

4b) $z = 3(\cos 150° + i \text{ sen } 150°) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

4c) $z = 3(\cos 180° + i \text{ sen } 180°) = -3$

5a) $z = 4(\cos 60° + i \text{ sen } 60°) = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3}\,i$

5b) $z = \cos 45° + i \text{ sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

5c) $z = 2(\cos 300° + i \text{ sen } 300°) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \sqrt{3}\,i$

5d) $|z| = 3\,(\cos 180° + i \text{ sen } 180°) = -3$

6a) $z = 3(\cos 23° + i \text{ sen } 23°)$

$w = 4(\cos 37° + i\text{sen } 37°)$

$zw = 3 \times 4(\cos 60° + i \text{ sen } 60°$

$= 12\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 6 + 6\sqrt{3}\,i$

6b) $z = 2(\cos 41° + i \text{ sen } 41°)$

$w = 5[\cos(-11°) + i\text{sen}(-11°)]$

$zw = 2 \times 5(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)$

$= 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right)$

$= 5\sqrt{3} + 5i$

6c) $z = 3(\cos 200° + i \text{ sen } 200°)$

$w = 2(\cos(-20°)) + i\text{sen}(-20°)$

$zw = 3 \times 2(\cos 180° + i \text{ sen } 180°)$

$= 6(-1)$

$= -6$

7a) $z^3 = \cos 30° + i \text{ sen } 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ **7b)** $z^6 = \cos 60° + i \text{ sen } 60° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **7c)** $z^9 = \cos 90° + i \text{ sen } 90° = i$

8. $w = 2(\cos 9° + i\text{sen } 9°) \Rightarrow w^{-5} = 2^{-5}(\cos(-45°) + i\text{sen}(-45°)) = \frac{1}{32}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{64} - \frac{\sqrt{2}}{64}i.$

9a) $\frac{z}{w} = (\cos 25° + i\text{sen } 25°) \div 3[\cos(-35°) + i\text{sen}(-35°)] \;=\; \frac{1}{3}[\cos(25° - (-35°)) + i \text{ sen } (25° - (-35°))]$

$= \frac{1}{3}(\cos 60° + i \text{ sen } 60°) \;= \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$

9b) $\frac{z}{w} = 6(\cos 21° + i\text{sen } 21°) \div 3[\cos(-9°) + i\text{sen}(-9°)] = \frac{6}{3}(\cos 30° + i \text{ sen } 30°) \;= \sqrt{3} + i$

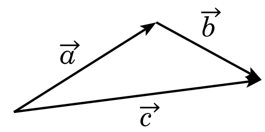
9c) $\frac{z}{w} = 2(\cos 115° + i\text{sen } 115°) \div 2[\cos(-5°) + i\text{sen}(-5°)] \;=\; \frac{2}{2}(\cos 120° + i \text{ sen } 120°) \;= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

3.8 Problemas de la unidad

En los problemas del 1 al 4, determina la respuesta correcta.

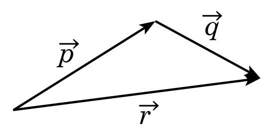
1. El vector que resulta de sumar los vectores $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ es:

   a) $2\vec{a}$ b) $2\vec{b}$ c) $\vec{0}$ d) $2\vec{c}$ e) $-2\vec{c}$



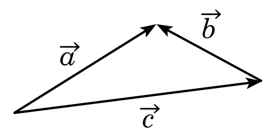
2. El vector que resulta de la operación $\vec{p} + \vec{q} - \vec{r}$ es:

   a) $2\vec{p}$ b) $2\vec{r}$ c) $\vec{0}$ d) $2\vec{q}$ e) $-2\vec{r}$



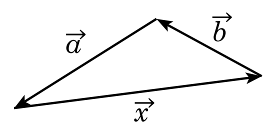
3. La norma del vector $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ si $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 2$ y $\|\vec{c}\| = 4$ es:

   a) 2 b) 4 c) 6 d) 9 e) 0



4. Determina la expresión con los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ cuyo resultado sea el vector $\vec{x}$.

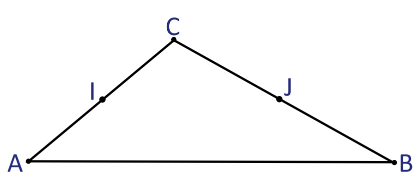
   a) $2\vec{a} + \vec{b}$ b) $\vec{a} + \vec{b}$ c) $-(\vec{a} + \vec{b})$ d) $\vec{a} - \vec{b}$



5. Sean los vectores $\vec{u} = (2, 1)$, $\vec{v} = (1, 4)$ y $\vec{w} = (5, 6)$, verifica que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base vectorial y escribe las coordenadas de $\vec{w}$ respecto a esta base.

6. Dado el vector $\vec{u} = (2, 6)$ en la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, determina las coordenadas del punto medio del vector $\vec{u}$.

7. Considerando el triángulo ABC, y siendo I el punto medio de AC y J el punto medio de BC, demuestra que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



8. Considerando los puntos P y Q que cumplen:

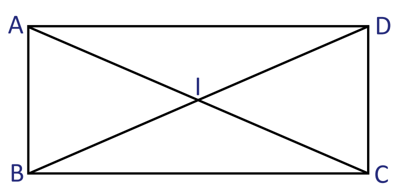
$$\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AQ} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$$

Utiliza lo aprendido en la clase 1.3.

   Demuestra que $\overrightarrow{PQ}$ es paralelo al vector $\overrightarrow{BC}$.

9. Sea ABCD un rectángulo tal que: AB = a y BC = b. Expresa $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DI}$ y $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IA}$ con los valores a y b.

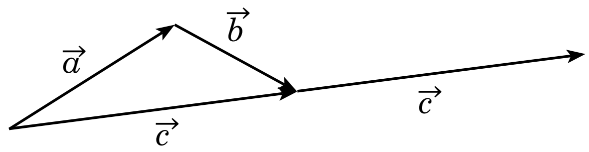


Indicador de logro:

3.8 Resuelve problemas correspondientes a vectores y números complejos

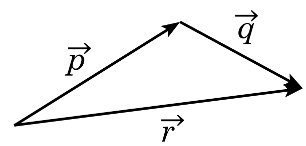
Solución de problemas:

1. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{c} + \vec{c} = 2\vec{c}$



Respuesta correcta: d) $2\vec{c}$

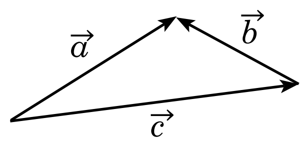
2. $\vec{p} + \vec{q} - \vec{r} = (\vec{p} + \vec{q}) - \vec{r} = \vec{r} - \vec{r} = \vec{0}$



Respuesta correcta: c) $\vec{0}$

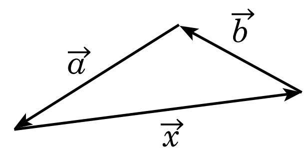
3. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + (\vec{c} + \vec{b}) = \vec{a} + \vec{a} = 2\vec{a}$

$\|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\| = \|2\vec{a}\| = |2|\,\|\vec{a}\| = 2(3) = 6$



Respuesta correcta: c) 6

4. $\vec{x} + \vec{b} + \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = -(\vec{a} + \vec{b})$



Respuesta correcta: c) $-(\vec{a} + \vec{b})$

5. $\vec{u} = (2, 1)$, $\vec{v} = (1, 4)$ y $\vec{w} = (5, 6)$

$\vec{u}$ y $\vec{v}$ son distintos de $\vec{0}$.

Si los vectores son paralelos entonces el ángulo entre ellos es 0° o 180°.

$\vec{u} \cdot v = 6$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{17}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\| \cos\alpha$

$6 = \sqrt{5}\,\sqrt{13} \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{65}}$

Así, $\alpha \neq 0°, 180°$.

$\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son paralelos, por lo tanto forman una base vectorial.

Otra forma para verificar que no son paralelos

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos existe un número real r tal que $\vec{u} = r\vec{v}$,

$\Rightarrow (2, 1) = r(1, 4) \Rightarrow (2, 1) = (r, 4r) \Rightarrow 2 = r$ y $1 = 4r$

$\Rightarrow r = 2$ y $r = \frac{1}{4}$ lo cual no es posible.

Por lo que no existe un número real r tal que $\vec{u} = r\vec{v}$.

Por lo tanto u y v no son paralelos.

Luego si las coordenadas de $\vec{w}$ en la base $\vec{u}, \vec{v}$ son (a, b) entonces $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

$\Rightarrow (5, 6) = a(2, 1) + b(1, 4) = (2a + b, a + 4b)$

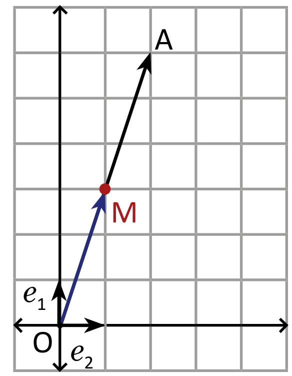
$$\Rightarrow \begin{cases} 5 = 2a + b & \text{--------------------} \quad (1) \\ 6 = a + 4b & \text{--------------------} \quad (2) \end{cases}$$

Despejando b en (1): $b = 5 - 2a$.

Sustituyendo en (2): $6 = a + 4(5 - 2a) \Rightarrow 6 = -7a + 20 \Rightarrow a = 2, b = 1$.

Por lo tanto, $(a, b) = (2, 1)$.

6. $\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(2, 6) = \left(\frac{1}{2}(2), \frac{1}{2}(6)\right) = (1, 3)$

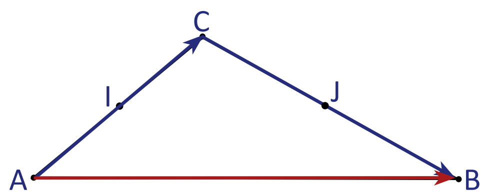


Si M es el punto medio del segmento $\overrightarrow{OA}$,

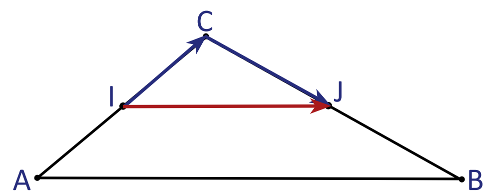
entonces $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = (1, 3)$.

7.

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{IC}$ y $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CJ}$
$2\overrightarrow{IC} + 2\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{AB}$
$2(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CJ}) = \overrightarrow{AB}$
$2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$



$\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{IJ}$

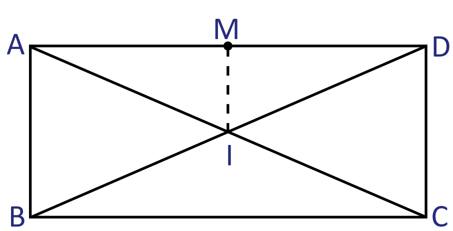
8. $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ $\quad\overrightarrow{AQ} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP}$
$= 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - (2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC})$
$= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
$= \overrightarrow{CB}$
$= -\overrightarrow{BC}$, por lo tanto PQ es paralela a BC.

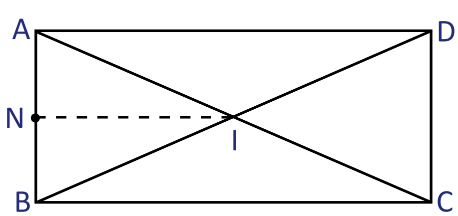
9. $\overrightarrow{AB} = a$ y $\overrightarrow{BC} = b$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = a^2$ $\quad\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = b^2$ $\quad\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2$ $\quad\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -a^2$ $\quad\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DI} = -(\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DI}) = -(\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DM}) = -\left(\overrightarrow{DA} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}\right) = -\frac{1}{2}b^2$

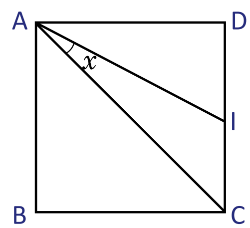


$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IA} = -(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}) = -(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AN}) = -\left(\overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = -\frac{1}{2}a^2$



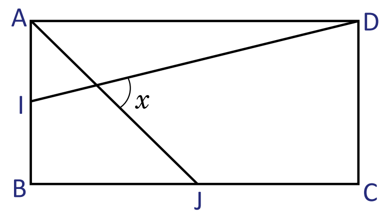
3.9 Problemas de la unidad

1. Considera un cuadrado ABCD de lado 1 y sea I el punto medio de $\overline{CD}$. Determina la medida del ángulo x.



Expresa $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC}$ como suma de vectores que faciliten el cálculo. Utiliza la forma trigonométrica del producto escalar.

2. En la siguiente figura, ABCD es un rectángulo tal que AB = 2 y AD = 4.



a) Determina la longitud de AJ y DI, si J e I son puntos medios de los lados BC y AB respectivamente.

b) Determina la medida del ángulo x.

3. Sea $\vec{u} = (a, b)$ un vector diferente de cero, en una base ortonormal. Demuestra que el vector $\vec{u}$ es ortogonal a los vectores de la forma $(rb, -ra)$ para cualquier número real r diferente de cero.

4. Considerando los vectores $\overrightarrow{OA} = (1, 4)$ y $\overrightarrow{OB} = (3, 2)$ determina las coordenadas del vector $\overrightarrow{OI}$ si I es el punto medio del vector $\overrightarrow{AB}$.

5. Determina el resultado de las siguientes operaciones con número complejos.

a) $(i - 1)^8$

b) $(1 + i)^{-8}$

Utiliza la forma trigonométrica de un número complejo.

6. Determina el resultado de las siguientes operaciones con números complejos.

a) $(i - 1)(1 - i)$

b) $\frac{1 - i}{1 + i}$

Utiliza la forma trigonométrica de un número complejo.

7. Calcula las siguientes cantidades.

a) $|(i + 1)(2 - i)|$

b) $\left|\frac{2 - 3i}{1 + 2i}\right|$

c) $|(1 + i)^{20}|$

8. Demuestra que para 2 números complejos z y w se cumple que:

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

Utiliza $|z|^2 = z\bar{z}$ y que $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.

Indicador de logro:

3.9 Resuelve problemas correspondientes a vectores y números complejos.

Solución de problemas:

1. $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$

$= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{BC}$

$= 0 + 1 + \frac{1}{2} + 0$

$= \frac{3}{2}$

$\|AI\| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $\quad \|AC\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AI}\|\ \|\overrightarrow{AC}\| \cos x$

$\frac{3}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}(\sqrt{2}) \cos x$

$\cos x = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$x \approx 18.43°$

2a) $\overrightarrow{AJ} = \sqrt{AB^2 + BJ^2}$

$= \sqrt{2^2 + 2^2}$

$= 2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{DI} = \sqrt{DA^2 + IA^2}$

$= \sqrt{4^2 + 1^2}$

$= \sqrt{17}$

2b) $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{ID} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}) \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD})$

$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{AD}$

$= -2 + 0 + 0 + 8$

$= 6$

$\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{ID} = \|\overrightarrow{AJ}\|\ \|\overrightarrow{ID}\| \cos x$

$6 = (2\sqrt{2})(\sqrt{17}) \cos x$

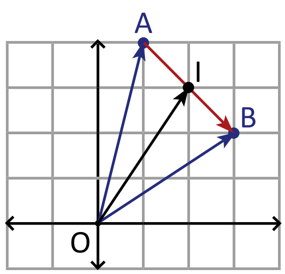
$\cos x = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$x \approx 59.04°$

3. $(a, b) \cdot (rb, -ra) = a(rb) + b(-ra) = arb - arb = 0.$

Por lo tanto $u = (a, b)$ y $(rb, -ra)$ son ortogonales para todo número real r distinto de cero.

4.



$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI}$

$= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$

$= (1, 4) + \frac{1}{2}[(3, 2) - (1,4)]$

$= (1,4) + \frac{1}{2}(2, -2)$

$= (1,4) + (1, -1)$

$= (2, 3)$

5a) $(i - 1)^8$

$|i - 1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow i - 1 = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$

$\Rightarrow i - 1 = \sqrt{2}\,(\cos 135° + i \text{ sen } 135°)$

$\Rightarrow (i - 1)^8 = \sqrt{2}^8\,[\cos(8 \times 135°) + i \text{ sen}(8 \times 135°)]$

$= 16\,(\cos 1\,080° + i \text{ sen } 1\,080°)$

$= 16$

5b) $1 + i = \sqrt{2}(\cos 45° + i \text{ sen } 45°)$

$(1 + i)^{-8} = \sqrt{2}^{-8}\,[\cos(-8 \times 45°) + i \text{ sen}(-8 \times 45°)] = \frac{1}{16}[\cos(-360°) + i \text{ sen}(-360°)] = \frac{1}{16}$

6a) $(i - 1)\,(1 - i) = [\sqrt{2}(\cos 135° + i \text{ sen } 135°)][\sqrt{2}\,(\cos(-45°) + i \text{ sen}(-45°))] = 2(\cos 90° + i \text{ sen } 90°) = 2i$

6b) $\frac{1 - i}{1 + i} = \frac{\sqrt{2}[\cos(-45°) + \text{sen}(-45°)]}{\sqrt{2}(\cos 45° + \text{sen } 45°)} = [\cos(-90°) + i \text{ sen}(-90°)] = -i$

7a) $|(i + 1)(2 - i)| = |i + 1|\,|2 - i| = \sqrt{1^2 + 1^2}\sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}\sqrt{5} = \sqrt{10}$

7b) $\left|\frac{2 - 3i}{1 + 2i}\right| = \frac{|2 - 3i|}{|1 + 2i|} = \frac{\sqrt{2^2 + (-3)^2}}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{65}}{5}$

7c) $|(1 + i)^{20}| = |1 + i|^{20} = (\sqrt{1^2 + 1^2})^{20} = (\sqrt{2})^{20} = 1\,024$

8. $|z + w|^2 + |z - w|^2 = (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) + (z - w)(\overline{z} - \overline{w})$

$= z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w} + z\overline{z} - z\overline{w} - \overline{z}w + w\overline{w}$

$= 2(z\overline{z} + w\overline{w}) = 2(|z|^2 + |w|^2)$

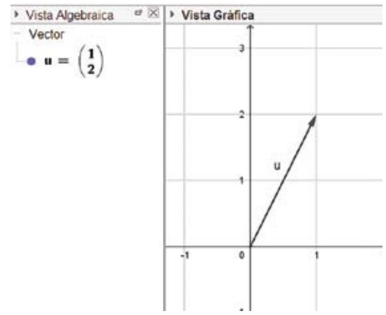
4.1 Práctica en GeoGebra: conceptos básicos sobre vectores

Para esta práctica se utilizarán las herramientas que posee GeoGebra para trabajar con vectores, desde la forma como se representan, hasta las operaciones y aplicaciones que se pueden hacer con estas herramientas para resolver problemas y verificar respuestas. Para ello sigue los pasos indicados en la parte de Práctica. Luego trabaja en GeoGebra la parte Actividades que está al final de esta práctica.

Práctica

Conceptos de vectores en GeoGebra.

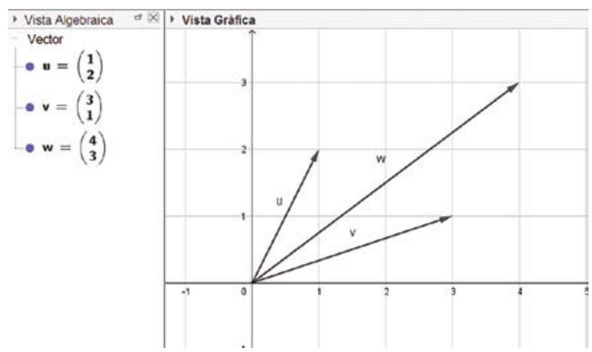
1. Grafica en la referencia ortonormal el vector $\vec{u} = (1,\ 2)$, digitando en la barra de entrada u = (1, 2). En GeoGebra, si se digita la letra en mayúscula grafica un punto y si se digita en minúscula, grafica un vector.



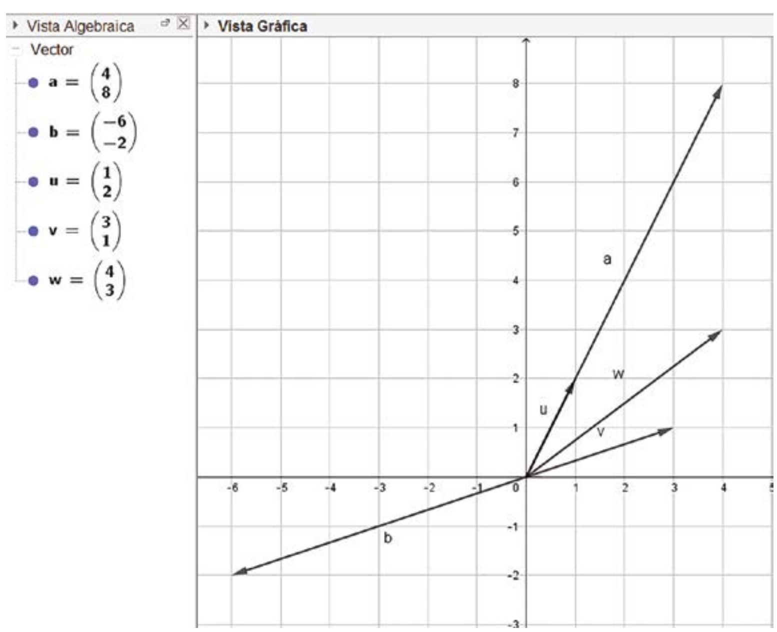
2. Grafica el vector $\vec{v} = (3,\ 1)$, escribiendo v = (3, 1).

3. Realiza la suma de vectores $\vec{u} + \vec{v}$, para ello digita en la barra de entrada u + v. En la Vista Gráfica se observará el vector resultante y en la Vista Algebraica sus coordenadas.

4. Realiza las operaciones $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{v} + \vec{u}$, utilizando la barra de entrada, tal como en el numeral 3.



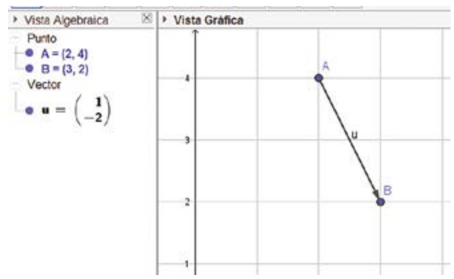
5. También es posible calcular el producto por escalar, por ejemplo, para determinar el vector $4\vec{u}$, se puede escribir en la barra de entrada 4u, o con números negativos, por ejemplo $-2\vec{v}$.



6. Verifica en GeoGebra las respuestas a los problemas planteados, y corrobora si están correctos.

Lección 4

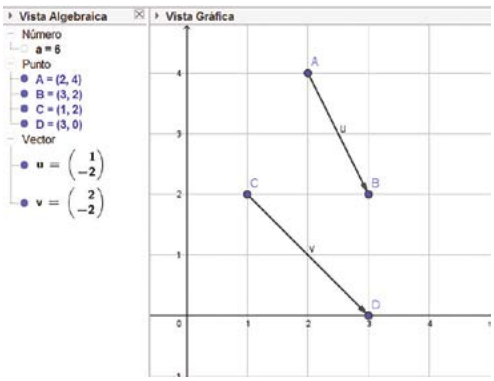
Uso de comandos para vectores en GeoGebra.



1. Grafica dos puntos con coordenadas A = (2, 4) y B = (3, 2). Para representar el vector $\overrightarrow{AB}$, digitar en la barra de entrada el comando vector (A, B).

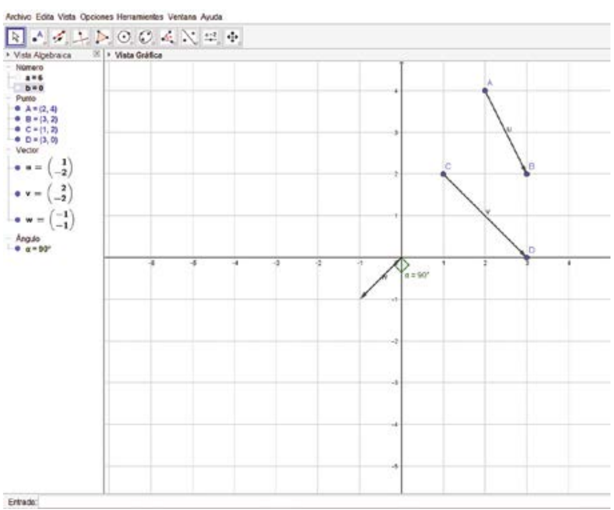
2. Grafica el vector $\overrightarrow{CD}$ con los puntos C = (1, 2) y D = (3,0) utilizando el procedimiento del numeral 1.

3. Es posible calcular el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, digitando "u v" o utilizando el comando ProductoEscalar(u, v) en la barra de entrada. En la Vista Algebraica aparece el valor del producto escalar guardado en la variable a.



4. Grafica el vector $\overrightarrow{w} = (-1, -1)$, y utiliza el comando Ángulo(w, v) el cual dará como resultado el ángulo de los vectores en la Vista Algebraica guardados en una variable α.

5. Del numeral 4 se sabe que los vectores $\vec{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son perpendiculares, verifica este resultado utilizando el comando de producto escalar en la barra de entrada. Al finalizar se obtendrán los siguientes resultados en GeoGebra.



Actividades

Verifica los resultados de los problemas de la unidad que se pueden constatar con GeoGebra, analiza cada caso y utiliza la herramienta más conveniente. Corrige los problemas que no fueron resueltos correctamente.

Indicador de logro:

4.1 Utiliza un software matemático para representar y efectuar operaciones con vectores.

Secuencia:

Se introduce la representación de vectores en GeoGebra y se trabaja con las operaciones entre estos: suma, resta y producto por escalar.

Propósito:

La práctica permitirá al estudiante comprobar las respuestas de los problemas de la clase 3.8; además, se pueden verificar las respuestas de los problemas desarrollados en otras clases.

Solución de problemas:

Problemas de la clase 3.8:

1. Se dibujan tres puntos A, B y C. Con A y C puntos en el eje x y B un punto por encima del eje x. Se grafican los vectores $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ y $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Se dibuja el vector $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

2. Se dibujan tres puntos A, B y C. Con A y C puntos en el eje x y B un punto por encima del eje x. Se grafican los vectores $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{q} = \overrightarrow{BC}$ y $\vec{r} = \overrightarrow{AC}$. Se dibuja el vector $\vec{p} + \vec{q} - \vec{r}$.

3. Se dibujan los puntos A(0,0), B(0,4), se construyen dos circunferencias de centro A y B, con radios 3 y 2 respectivamente. Se determina el punto de intersección de estas circunferencias y se renombra C. Se ocultan las circunferencias, además, será necesario renombrar como e la circunferencia c. Se grafican los vectores $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ y $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Compruebe que $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 2$, $\|\vec{c}\| = 4$ Se dibuja el vector $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ y se calcula su norma escribiendo en la barra de entrada |a + b + c|.

4. Se dibujan tres puntos A, B y C. Con A y C puntos en el eje x y B un punto por encima del eje x. Se grafican los vectores $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ y $\vec{x} = \overrightarrow{AC}$. Se dibuja el vector que obtuvo como respuesta.

6. Se grafica el vector $\overrightarrow{OA} = (2, 6)$, luego en la barra de herramientas buscar Punto y seleccionar Punto medio, seleccionar los puntos inicial y final del vector en la vista gráfica, se graficará el punto B, luego se grafica el vector $\overrightarrow{OB}$.

7. Se grafican los puntos A(0, 0) y B(6, 0), se selecciona la opción polígono de la barra de herramientas y se grafica el triángulo ABC. Se localizan los puntos medios de los lados AC y BC, nombrándolos I y J. Se grafican los vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{IJ}$, luego se grafica el vector $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Al seleccionar y mover los puntos B y C se puede observar que las coordenadas de los vectores $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{IJ}$ son las mismas.

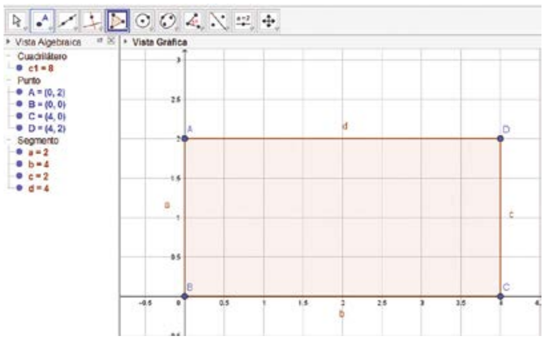
8. Se grafica el punto A(0, 0) y se selecciona otros dos puntos del plano nombrándolos B y C. Se grafican los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, luego graficar los vectores $\vec{p} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ y $\vec{q} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ (que son los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{AQ}$ respectivamente). Para graficar los puntos finales de los vectores P y Q, se escribe en la barra de entrada P = p y Q = q, luego graficar los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{PQ}$, nombrándolos m y n. Se puede observar que las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son opuestas y, por lo tanto, los vectores son paralelos. Esto último se puede comprobar trazando la recta que pasa por BC y luego la paralela a esta que pasa por P, esta última recta contiene al punto Q.

4.2 Práctica en GeoGebra: resolución de problemas

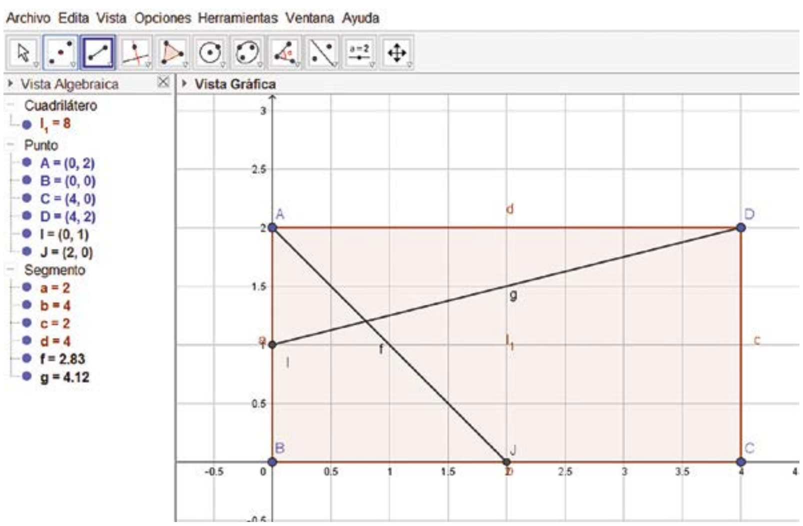
Para esta práctica se utilizarán las herramientas aprendidas en la clase anterior para solucionar algunos problemas de la clase 3.9 de los problemas de la unidad. Para ello, sigue los pasos indicados en la parte de Práctica. Luego trabaja en GeoGebra la parte Actividades que está al final de esta práctica.

Práctica

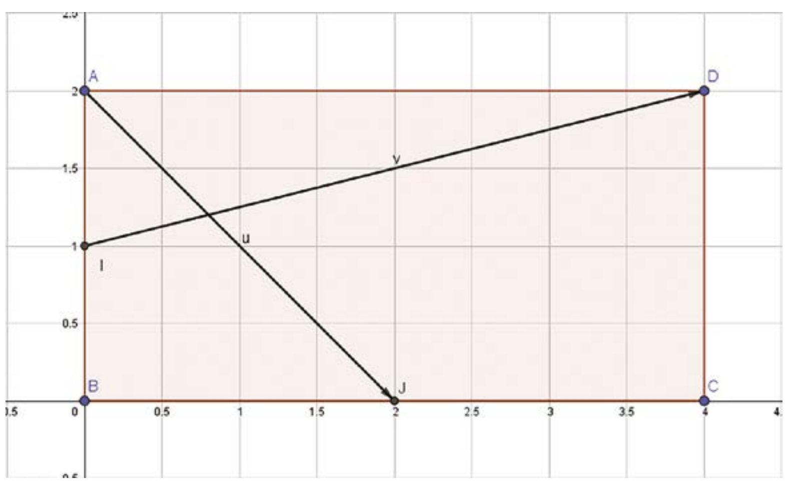
Resolución del problema 2 de la clase 3.9.



1. Grafica los puntos A = (0, 2), B = (0, 0), C = (4, 0) y D = (4, 2), luego utiliza el botón de Polígono y grafica el rectángulo indicado.
2. Luego grafica el punto medio de AB y de BC, utilizando el botón de Punto medio. Traza los segmentos DI y AJ como lo muestra la figura de abajo.

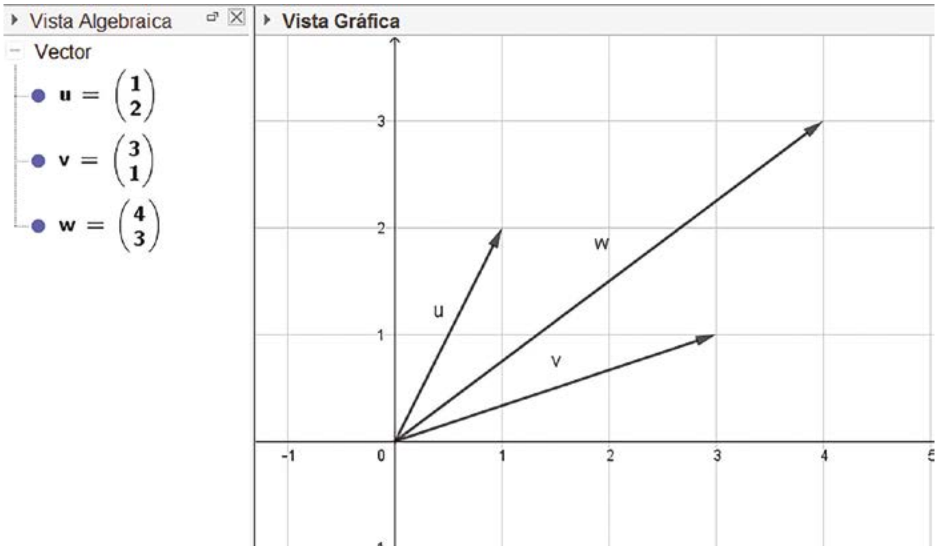


3. Utilizando los comandos para determinar el vector comprendido entre dos puntos, grafica los vectores $\overrightarrow{AJ}$ y $\overrightarrow{ID}$.



4. Utilizando el comando Ángulo(u, v) calcula el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

5. Para verificar la medida de este ángulo, grafica el punto que se encuentra en la intersección de los segmentos AJ e ID, y utiliza la opción de medir ángulo, para medir el ángulo JED. Verifica que ambos ángulos tienen igual medida.

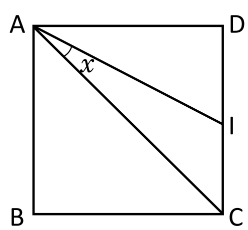


6. Finalmente puedes corroborar si fue resuelto correctamente el problema, contrastando tu respuesta de tu cuaderno.

Actividades

- Realiza una construcción que permita resolver el problema 1, 3 y 4 de la clase 3.9 sobre problemas de la unidad, luego verifica que lo resolviste correctamente comparando tu respuesta con la obtenida en GeoGebra.

- Considerando un cuadrado ABCD de lado 1, siendo I el punto medio de BC. Determina la medida del ángulo x.



- Sea $\vec{u} = (a, b)$ un vector diferente de cero, en una base ortonormal. Demuestra que el vector $\vec{u}$ es ortogonal a los vectores de la forma $(rb, -ra)$ para cualquier número real r diferente de cero.

- Considerando los vectores $\overrightarrow{OA} = (1, 4)$ y $\overrightarrow{OB} = (3, 2)$ determina las coordenadas del vector $\overrightarrow{OI}$ si I es el punto medio del vector $\overrightarrow{AB}$.

Descripción de la prueba:

4.2 Utiliza un software matemático para resolver problemas con vectores.

Secuencia:

Continuando con la resolución de problemas; se desarrolla el problema 2 de la clase 3.9 como ejemplo.

Propósito:

En esta clase se comprobarán mediante el uso de las herramientas de GeoGebra los problemas de la clase 3.9.

Solución de problemas:

1. Se grafican los puntos A(0, 0) y B(1, 0) y se utiliza la herramienta Polígono regular para graficar el cuadrado ABCD, seleccionando los puntos A y B y construyendo el polígono de 4 lados. Trazar el punto medio I y los segmentos AI y AC. Dibujar el ángulo CAI.

3. Construir un deslizador con nombre r, bastará colocar en mínimo –10 y 10 en máximo con incremento 0.1. Dibujar el vector (3, 2) y luego el vector (2r, -3r). Dibujar el ángulo entre los vectores seleccionando en la barra de herramientas Ángulo y luego dé clic sobre los dos vectores. Inicie animación y observe el valor del ángulo entre los vectores. Para visualizar un ángulo entre 0° y 180°, puede buscar en las propiedades de ángulo la opción básico y selección Ángulo entre 0° y 180°.

4. Graficar los vectores $\vec{u}$ = (1, 4), $\vec{v}$ = (3,2). Graficar los puntos A = (1, 4) y B = (3,2). Luego determine el punto medio de $\overrightarrow{AB}$.

Unidad 8. Estadística descriptiva

Competencia de la unidad

Analizar series de datos de fenómenos de la realidad, aplicando conceptos y definiciones sobre estadística descriptiva, para tomar decisiones adecuadas en los momentos oportunos.

Relación y desarrollo

Tercer ciclo

Unidad 7: Gráfica de faja y circular (7°)
- Gráfica de faja
- Gráfica circular

Unidad 8: Organización y análisis de datos estadísticos (8°)
- Tablas y gráficas estadísticas para variables cuantitativas
- Medidas de tendencia central
- Valor aproximado y dígitos significativos

Noveno grado

Unidad 8: Medidas de dispersión
- Dispersión
- Propiedades de la desviación típica

Primer año de bachillerato

Unidad 8: Estadística descriptiva
- Muestreo, estadísticos y parámetros
- Medidas de posición
- Práctica en GeoGebra

Plan de estudio de la unidad

Lección	Horas	Clases
1. Muestreo, estadísticos y parámetros	1	1. Definiciones previas
	1	2. Actividad introductoria de muestreo
	1	3. Muestreo probabilístico
	1	4. Muestreo no probabilístico
	1	5. Repaso de tablas de frecuencia
	1	6. Medidas de tendencia central
	1	7. Medidas de dispersión
	1	8. Coeficiente de variación
	1	9. Practica lo aprendido
2. Medidas de posición	1	1. Cuartiles
	1	2. Diagrama de caja y bigotes
	1	3. Análisis del diagrama de caja y bigotes
	1	4. Deciles y percentiles
	1	5. Practica lo aprendido
	2	6. Problemas de la unidad
3. Práctica en GeoGebra	1	1. Análisis estadístico
	1	Prueba de la unidad 8
	2	Prueba del cuarto periodo

18 horas clase + prueba de la unidad 8 + prueba del cuarto periodo

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Muestreo, estadísticos y parámetros. Se introduce el concepto de muestreo y se repasarán los contenidos sobre medidas de tendencia central y medidas de dispersión.

Lección 2: Medidas de posición. Se dará énfasis al estudio de los cuartiles y los diagramas de caja y bigotes.

Lección 3: Práctica en GeoGebra. Se estudiará la herramienta de análisis estadístico que provee GeoGebra.

1.1 Definiciones previas

Problema inicial

A la “Feria del Libro” asistieron 1 000 personas. Por medio de una encuesta se entrevista al 15% de la población y se les pregunta acerca de: sexo, edad, género literario preferido, presupuesto para la compra de libros. Responde:

a) ¿Cuántas personas asistieron a la Feria del Libro?
b) ¿Cuántas personas fueron entrevistadas?
c) ¿Qué se les preguntó a las personas entrevistadas?

Solución

a) Asistieron un total de 1 000 personas.

b) Se entrevistó el 15% de 1 000, es decir: $1\,000 \times \frac{15}{100} = 150$.

Por lo tanto, se entrevistaron 150 personas.

c) Se les preguntó acerca del sexo, edad, género literario preferido y presupuesto para comprar libros.

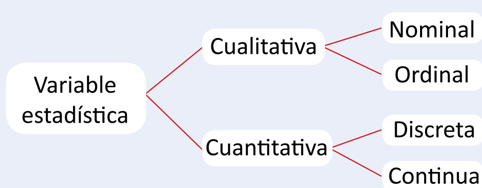
Definiciones

- Se define **población** como un conjunto total de individuos, objetos o eventos que tienen las mismas características y sobre el que se está interesado en obtener conclusiones.

- Si se toma a una parte de la población con el propósito de ser estudiada, a este grupo seleccionado se le llama **muestra**.

- Al tipo de información que se desea investigar se le llama **variable estadística**. Una variable estadística es una propiedad que es susceptible a tomar diferentes valores y que pueden medirse u observarse.

Las variables estadísticas pueden clasificarse tal como muestra el esquema.



- Las **variables cualitativas** expresan distintas cualidades, características o modalidades.
  – Las variables cualitativas nominales no pueden definirse mediante un orden. Por ejemplo: país, idioma, estado civil, sexo.

  – Las variables cualitativas ordinales pueden tomar distintos valores ordenados siguiendo una escala establecida. Por ejemplo: malo, regular, bueno.

Una variable cualitativa es dicotómica si toma solo dos valores. Por ejemplo: sí y no, hombre y mujer; o politómica si toma tres o más valores.

- Las **variables cuantitativas** toman valores numéricos.
  – Las variables cuantitativas discretas toman valores numéricos enteros no negativos. Por ejemplo: número de hijos.
  – Las variables cuantitativas continuas pueden tomar cualquier valor dentro de un intervalo específico de valores. Por ejemplo: el peso, altura, gastos familiares.

Lección 1

Ejemplo

A un evento sobre "El rol de la mujer en la sociedad" asisten un total de 2 000 personas de las 21 000 que habitan el municipio de Chalatenango, y de ellas se recoge la siguiente información: sexo, estatura, cantidad de hijos y cuán a menudo cocina en la casa; cuyas opciones de respuesta son: nunca, casi nunca, a veces, casi siempre o siempre. Responde los siguientes literales:

a) Identifica la población y la muestra en este evento.

b) Identifica las variables y clasifícalas.

a) La población de la cual se obtiene la muestra son las 21 000 personas que habitan el municipio de Chalatenango.

La muestra son las 2 000 personas que asistieron al evento.

b) Las variables son: sexo, edad, cantidad de hijos y periodicidad con que cocina. Al clasificarlas se obtiene:

Variables cualitativas		Variables cuantitativas	
Nominales	• Sexo	***Discretas***	• Cantidad de hijos
Ordinales	• Periodicidad con que cocina (se puede ordenar como nunca, casi nunca, ... , siempre)	***Continuas***	• Estatura

Problemas

1. Para cada una de las siguientes situaciones, identifica la población, la muestra, las variables estadísticas y su clasificación.

   a) En la Biblioteca Nacional de El Salvador se desea conocer el estado de los libros de Matemática y estos se extraen de los primeros 10 estantes para categorizarlos como bueno, malo o inservible.

   b) De todos los niños en edad escolar de El Salvador, se encuesta a los que están en noveno grado para conocer si les gusta la música electrónica o la instrumental.

   c) En el Hospital Nacional Rosales se desea entrevistar a los pacientes que están hospitalizados por enfermedades pulmonares y saber el trato que reciben en dicho hospital.

   d) En el Parque Nacional Montecristo se desea saber los años de vida que tienen todos los árboles cipreses que hay.

   e) En un cine de San Salvador se entrevista a los que asisten a una película de comedia-romance para investigar si les gusta más las de romance, comedia o ambas.

El Parque Nacional Montecristo es un parque protegido que está ubicado en el municipio de Metapán, departamento de Santa Ana y tiene una extensión de 1973 hectáreas.

2. Determina si las variables estadísticas presentadas a continuación son variables cualitativas (nominales u ordinales) o variables cuantitativas (discretas o continuas).

   a) El grupo sanguíneo de una persona
   b) Temperatura en grados centígrados
   c) Grado de escolaridad
   d) Religión
   e) Lugar de nacimiento
   f) Número de alumnos
   g) El precio de un artículo
   h) Valores de la glucosa en 50 niños
   i) Número de clínicas médicas por municipio
   j) El ingreso mensual de un padre de familia
   k) Presión arterial
   l) Intensidad del dolor

Unidad 8

207

Indicador de logro:

1.1 Aplica las definiciones de población, muestra y variable, y clasifica las variables entre cualitativas nominales y ordinales o cuantitativas discretas y continuas.

Secuencia:

En tercer ciclo se ha trabajado en el bloque de estadística desde séptimo grado, abordando los tipos de gráficas, luego las medidas de tendencia central (para poblaciones) y luego las medidas de dispersión, en esta unidad se trabajarán los mismos conceptos, pero dividiendo entre muestra y población.

Propósito:

En esta clase se pretende introducir los conceptos básicos sobre población, muestra, variables y tipos de variables, a partir del Problema inicial se puede introducir la parte de población y muestra, y en el Ejemplo se presenta la forma de clasificar un conjunto de variables según su tipo.

Solución de problemas:

1a) Población: los libros de matemática de la Biblioteca Nacional de El Salvador; muestra: los primeros 10 estantes; variable: estado de los libros de Matemática; tipo: cualitativa ordinal.

1b) Población: los niños en edad escolar de El Salvador; muestra: los niños de noveno grado; variable: música preferida; tipo: cualitativa nominal.

1c) Población: todos los pacientes hospitalizados; muestra: los pacientes hospitalizados por enfermedades pulmonares; variable: etapa de la enfermedad; tipo: cualitativa ordinal.

1d) Población: todos los árboles del Parque Nacional Montecristo; muestra: los árboles de ciprés; variable: años de vida; tipo: cuantitativa continua.

Para este problema, los años de vida pueden considerarse discretos, ya que es habitual mencionar años exactos, sin embargo, en la respuesta se sugiere que es una variable continua, puesto que el tiempo es continuo.

1e) Población: las personas que asisten a ver películas de comedia-romance; muestra: las personas que asistieron a ver una película de comedia-romance en el cine de San Salvador; variable: género de la película que prefiere; tipo: cualitativa nominal.

2a) Cualitativa nominal.

2b) Cuantitativa continua.

2c) Cualitativa ordinal.

2d) Cualitativa nominal.

2e) Cualitativa nominal.

2f) Cuantitativa discreta.

2g) Cuantitativa continua.

2h) Cuantitativa continua.

2i) Cuantitativa discreta.

2j) Cuantitativa continua.

2k) Cuantitativa continua.

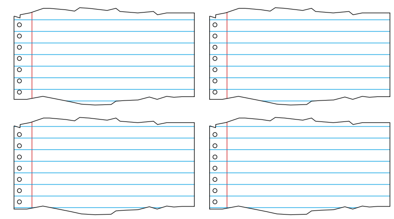
2l) Cualitativa ordinal.

Lección 1

1.2 Actividad introductoria

Materiales

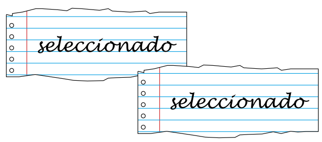
- Pedacitos de papel (uno por cada estudiante)
- Plumón



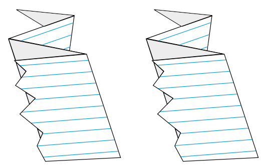
Actividad 1

Seleccionar 5 estudiantes del salón de clase utilizando el siguiente proceso:

1. Escribir en 5 de los pedacitos de papel la palabra “seleccionado”.



2. Doblar todos los papelitos y entregar uno a cada estudiante.



3. Los estudiantes seleccionados son aquellos a quienes les apareció un papelito con la palabra “seleccionado”.

Actividad 2

Seleccionar 5 estudiantes del salón de clase utilizando el siguiente proceso:

1. Numerar los estudiantes del 1 a N, siendo N la cantidad total de estudiantes que hay en el salón.
2. Se escoge un estudiante al azar del 1 al mayor entero m menor o igual que $\frac{N}{5}$ (se pueden usar papelitos, o el aleatorio de la calculadora , etc.)
3. El segundo seleccionado es el que tiene el número más cercano a la suma del anterior y m.
4. El tercer seleccionado es el que tiene el número del segundo sumándole m. Y así sucesivamente hasta seleccionar los 5 estudiantes, por ejemplo si el primer estudiante tiene el número a, los 5 estudiantes seleccionados serían los que tienen los número: a, $a + m$, $a + 2m$, $a + 3m$, $a + 4m$.

Por ejemplo, si $N = 40$ y $a = 3$, entonces $m = \frac{40}{5} = 8$ y los números seleccionados son: 3, 11, 19, 37, 35.

Definiciones

A la acción de seleccionar de una población de N elementos una muestra de n elementos se conoce como **muestreo**.

El tipo de muestreo en el que todos los elementos de la población tienen igual probabilidad de ser seleccionados (como en la actividad 1) se conoce como **muestreo aleatorio simple**.

Al tipo de muestreo aleatorio en el que se lista la población, y se escoge un número aleatorio menor o igual que $\frac{N}{n}$ donde N es el total de la población y n es el total de la muestra, y se seleccionan los demás sumándole al anterior $\frac{N}{n}$ se conoce como **muestreo aleatorio sistemático**.

Problemas

1. Escribe 2 formas de muestreo aleatorio simple.

2. Escribe 2 formas de muestreo aleatorio sistemático.

3. ¿Al realizar una rifa se está realizando un muestreo?

Indicador de logro:

1.2 Planifica y aplica técnicas de muestreo aleatorio simple y sistemático.

Secuencia:

Partiendo del marco teórico definido en la clase anterior, ahora es posible determinar diferentes métodos para realizar muestras de una población.

Propósito:

Se espera que en esta actividad los estudiantes se motiven a plantear e implementar procedimientos para realizar muestreos aleatorios simples y estratificados.

Solución de problemas:

1. En este problema los estudiantes pueden mencionar varias formas, algunas pueden ser:

- Repartir números, y luego a partir de otros números doblados, extraer de una bolsa la cantidad que se requiera para la muestra, la muestra será las personas cuyos números corresponden con los números extraídos.

- Que una persona desconocida seleccione la cantidad de estudiantes que se necesita.

De manera opcional, el docente puede mencionar que la calculadora tiene una función "aleatoria" que se puede encontrar como "Ran#" en algunas calculadoras y devuelve un número decimal aleatorio de 3 decimales.

2. En este problema los estudiantes pueden mencionar varias formas, algunas pueden ser:

- Numerar a toda la población, luego escoger un número al azar entre 1 y 10, por ejemplo 3, y luego extraer de la población todos los múltiplos de 3.

- Estratificar la población en grupos cuya cantidad de individuos coincida con la muestra requerida, y luego se seleccione al azar uno de todos los grupos.

3. Puesto que la idea de una rifa es entregar algún tipo de obsequio a un grupo de personas determinado, es claro que una rifa tiene sentido siempre y cuando la cantidad de personas a quienes se entregará el obsequio es menor a la cantidad de personas que asisten a la rifa; es por ello que una rifa equivale a seleccionar una parte de la población que asistió, sin embargo, el objetivo no es estudiar alguna característica o realizar algún estudio para establecer conclusiones acerca de algún problema, por lo tanto, una rifa no es un muestreo, por otro lado, un muestreo si se puede realizar siguiendo un procedimiento muy parecido al de una rifa.

1.3 Muestreo probabilístico*

Problema inicial

En un instituto se cuenta con la siguiente información de los estudiantes de bachillerato:

	Niñas	Niños
Primer año	24	12
Segundo año	9	15

Determina una forma para seleccionar una muestra de 20 estudiantes que cursen bachillerato (primero o segundo año, niñas o niños).

Solución

En este problema se tiene 4 tipos de personas para la población, se puede calcular el porcentaje de la población que le corresponde a cada uno:

Niñas de Primer año: $\frac{24}{60} \times 100 = 40\%$

Niños de Primer año: $\frac{12}{60} \times 100 = 20\%$

Niñas de Segundo año: $\frac{9}{60} \times 100 = 15\%$

Niños de Segundo año: $\frac{15}{60} \times 100 = 25\%$

Entonces para obtener la muestra de 20 estudiantes se pueden utilizar estos porcentajes:
Niñas de Primer año: 40% de 20 es 8
Niños de Primer año: 20% de 20 es 4
Niñas de Segundo año: 15% de 20 es 3
Niños de Segundo año: 25% de 20 es 5

Por lo tanto se puede extraer una muestra de 20 estudiantes de bachillerato, seleccionando 8 niñas de primer año, 4 niños de primer año, 3 niñas de segundo año y 5 niños de segundo año.

En general

El muestreo que se aplica proporcionalmente a una población que está dividida en sectores (estratos) se conoce como **muestreo estratificado**.

El muestreo que se aplica a una población donde es necesario dividir grupos y seleccionar aleatoriamente algunos de ellos se conoce como **muestreo por conglomerado**.

Se define el **muestreo probabilístico** como todos aquellos métodos de muestreo donde todos los elementos de la población tienen las mismas posibilidades de ser seleccionados para la muestra.

El muestreo aleatorio simple, el sistemático, el estratificado y el muestreo por conglomerado son todos muestreos probabilísticos.

Ejemplo

Utilizando muestreo por conglomerado determina la forma de realizar un estudio acerca de la comida preferida de las personas en el departamento de Santa Ana.

Se puede dividir la población en conglomerados: estudiantes, empleados de oficina, deportistas, profesionales independientes, etc. Y se seleccionan al azar 2 o 3 de estos conglomerados para obtener la muestra.

Problemas

Realiza un muestreo estratificado de 40 personas de una colonia que tiene los siguientes datos:

	Femenino	Masculino
Menor de edad	70	40
Mayor de edad	30	60

Indicador de logro:

1.3 Aplica el muestreo probabilístico a situaciones de la vida cotidiana.

Secuencia:

En esta clase se concluye con las técnicas de muestreo probabilístico, abordando el muestreo estratificado y el muestreo por conglomerados.

Posibles dificultades:

Para realizar el muestreo estratificado, es necesario que los estudiantes apliquen el tanto por ciento, para determinar la cantidad de personas que es necesario seleccionar de cada estrato.

Solución de problemas:

Puesto que en total la colonia tiene 200 personas, luego calculado los porcentajes para cada estrato:

Mujeres menores de edad: $\frac{70}{200} \times 100 = 35\%$

Mujeres mayores de edad: $\frac{30}{200} \times 100 = 15\%$

Hombres menores de edad: $\frac{40}{200} \times 100 = 20\%$

Hombres mayores de edad: $\frac{60}{200} \times 100 = 30\%$

Entonces para obtener la muestra de 40 personas se pueden utilizar estos porcentajes:

Mujeres menores de edad: 35% de 40 es 14

Mujeres mayores de edad: 15% de 40 es 6

Hombres menores de edad: 20% de 40 es 8

Hombres mayores de edad: 30% de 40 es 12

Por lo tanto se puede extraer una muestra de 40 personas de toda la colonia, seleccionando 14 mujeres menores de edad, 6 mujeres mayores de edad, 8 hombres menores de edad y 12 hombres mayores de edad.

1.4 Muestreo no probabilístico

Definición

En un muestreo cuando la selección depende de las características de los individuos que se desean estudiar, se dice que es un **muestreo no probabilístico**. Algunas técnicas de muestreo no probabilístico son:

- **Muestreo por conveniencia**: la selección de la muestra se hace basada en la facilidad o las características específicas del estudio.
- **Muestreo por bola de nieve**: consiste en seleccionar la muestra por medio de conocidos, es decir, se hace el estudio a personas conocidas, para que estas lo hagan a personas conocidas de ellas y así hasta llegar a la muestra que se desea. Se utiliza cuando es difícil encontrar la muestra.
- **Muestreo por cuotas**: se divide la población por grupos y se establece una cantidad de individuos de muestra por cada grupo, la cantidad de individuos por grupo se realiza de manera apreciativa.
- **Muestreo discrecional**: el muestreo se hace considerando las características y formación específicas de las personas.

Ejemplo 1

En una investigación se desea realizar una encuesta de hábitos alimenticios, y las personas con las que se tiene mayor facilidad de contacto son los miembros del equipo de baloncesto de una colonia.

En este caso se puede realizar un muestreo por conveniencia, pero puede que la muestra no refleje la tendencia de la población.

Ejemplo 2

En una investigación se desea saber sobre las costumbres y estructura de los grupos delincuenciales en El Salvador, para ello se realiza una entrevista a personas cercanas y luego estas personas la hacen a personas cercanas a ellas, hasta llegar a personas cercanas a estos grupos.

En este caso se puede realizar un muestreo por bola de nieve. Esta técnica se puede escoger para seleccionar personas que pueden no brindar información a una persona particular y es mejor selecionarla a partir de personas que los conozcan, se utiliza para estudiar temas de delincuencia, política, corrupción, etc.

Ejemplo 3

Se realiza una encuesta a 100 universitarios y 100 profesionales.

En este caso se puede realizar un muestreo por cuotas. Es una técnica parecida al muestreo por estratos, pero la asignación de la cantidad de personas por estrato no se calcula a partir de la población.

Ejemplo 4

En un salón de clase se desea seleccionar 4 estudiantes para participar en una olimpíada de matemática.

En este caso se puede realizar un muestreo discrecional, se pueden seleccionar los 4 estudiantes que tienen mejor rendimiento en matemática.

Problemas

Determina qué tipo de muestreo no probabilístico consideras más adecuado explicando las ventajas y desventajas de los tipos de muestreo para cada situación.

a) Materia favorita de un estudiante
b) Tipos de estampillas que tienen los filatelistas
c) Seguridad en cada departamento de El Salvador
d) Escoger 5 estudiantes para competir en natación

Indicador de logro:

1.4 Identifica la técnica de muestreo no probabilístico más adecuada para situaciones específicas.

Secuencia:

Luego que en las clases anteriores se abordara lo correspondiente al muestreo probabilístico, también se dedicará una clase para establecer las técnicas de muestreo no probabilístico.

Propósito:

Este tipo de técnicas normalmente se utilizan en los estudios sociales (y otras áreas humanísticas), en donde es necesario buscar estrategias diversas para estudiar los fenómenos de dichas áreas.

Solución de problemas:

a) Puesto que es una variable apreciativa de cada estudiante, en este caso podría resultar natural recolectar información del centro escolar con mayor accesibilidad, por lo cual entraría en un muestreo por conveniencia.

b) Los filatelistas (como cualquier tipo de coleccionista), suelen ser muy reservados con sus pertenencias, por lo cual se volvería difícil que se pueda investigar esto de manera personal, y es muy probable que sea necesario aplicar la técnica de la bola de nieve, para lograr captar información de diferentes filatelistas.

c) Para obtener el punto de vista de diferentes partes de la población, podría ser útil realizar un muestreo por cuotas, en el cual los grupos que se establecen pertenecerían a departamentos diferentes.

d) Puesto que las personas seleccionadas serán sometidos a una prueba sobre sus capacidades en natación, resulta conveniente un muestreo discrecional, en el cual se seleccionen las personas cuyas características favorezcan sus resultados.

1.5 Repaso de tablas de frecuencia

Problema inicial

En una comunidad del área metropolitana de San Salvador se pregunta la edad a jóvenes menores de 21 años, obteniendo la siguiente información:

a) Organiza la información en una tabla de distribución de frecuencias en 4 clases de 3 en 3, iniciando en 9 y terminando en 21.
b) Elabora una tabla de distribución de frecuencias y calcula la media aritmética (μ), la moda y la mediana para estos datos agrupados.
c) Calcula la varianza (σ^2) y la desviación típica (o desviación estándar σ).

Edades					
9	14	15	14	19	16
11	18	9	12	20	12
12	11	10	19	14	13
15	12	11	18	11	16
14	16	17	12	13	17

Solución

a)

Edades	Cantidad de jóvenes (f)	Punto medio (Pm)	$f \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f(Pm - \mu)^2$
9 a 12	7	10.5	73.5	–4	16	112
12 a 15	11	13.5	148.5	–1	1	11
15 a 18	7	16.5	115.5	2	4	28
18 a 21	5	19.5	97.5	5	25	125
TOTAL	**30**					

Solución de a)

En cada clase se cumple que los datos contados en la frecuencia son mayores o iguales al límite inferior y menores al límite superior, excepto en la última clase, donde es menor o igual al límite superior.

b) Para calcular la media aritmética se suman los valores de la columna $f \times Pm$ y se divide por el total de datos.

$$\mu = \frac{\sum f \times Pm}{n} = \frac{73.5 + 148.5 + 115.5 + 97.5}{30} = 14.5$$

La clase que contiene la mediana es la segunda (12 a 15) porque en ella se encuentran los datos 15 y 16.

$$\text{Mediana} = \frac{12 + 15}{2} = 13.5$$

La clase con la mayor frecuencia es la segunda (12 a 15).

$$\text{Moda} = \frac{12 + 15}{2} = 13.5$$

c) Para la varianza se suman los valores de la columna $f(Pm - \mu)^2$ y se divide por el total de datos.

$$\sigma^2 = \frac{\sum f(Pm - \mu)^2}{n} = \frac{112 + 11 + 28 + 125}{30} = 9.2$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f(Pm - \mu)^2}{n}} = \sqrt{9.2} \approx 3.03$$

Problemas

Las velocidades que registra un policía de tránsito en la carretera de Los Chorros están en la tabla de la derecha, realiza lo siguiente:

a) Organiza la información en una tabla de distribución de frecuencias en 4 clases de 20 en 20, iniciando en 40 y terminando en 120.
b) Calcula la media aritmética, la moda y la mediana.
c) Calcula la varianza y la desviación típica.

Velocidad en km/h						
60	65	40	80	80	90	45
70	100	70	50	80	55	118
75	65	90	85	70	100	55
110	70	95	70	80	115	100

Indicador de logro:

1.5 Elabora tablas de frecuencia y calcula las medidas de tendencia central y de dispersión para datos agrupados.

Secuencia:

Una vez establecidos los conceptos sobre muestreo y algunas técnicas probabilísticas y no probabilísticas, se hará un repaso sobre las tablas de frecuencia, además de la forma para estimar las medidas de tendencia central y de dispersión.

Propósito:

En esta clase se puede abordar el Problema inicial como un ejemplo (para recordar) y luego trabajar con la parte de Problemas.

Solución de problemas:

a)

Velocidad en km/h	Frecuencia (f)
40 a 60	5
60 a 80	9
80 a 100	8
100 a 120	6
TOTAL	**28**

b)

Velocidad en km/h	Frecuencia (f)	Punto medio (Pm)	$f \times Pm$
40 a 60	5	50	250
60 a 80	9	70	630
80 a 100	8	90	720
100 a 120	6	110	660
TOTAL	**28**		

Sugerir a los estudiantes aproximar hasta las decimas cuando complete los datos en las tablas para el cálculo de la media y la desviación típica.

$$\mu = \frac{\sum f \times Pm}{n} = \frac{250 + 630 + 720 + 660}{28} \approx 80.7 \text{ (km/h)}$$

Puesto que la mediana está entre el dato 14 y 15, y estos caen en clases diferentes, se puede considerar que Mediana = 80.

La clase con la mayor frecuencia es la segunda (60 a 80), entonces, Moda = $\frac{60 + 80}{2}$ = 70.

c)

Velocidad en km/h	Frecuencia (f)	Punto medio (Pm)	$f \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f(Pm - \mu)^2$
40 a 60	5	50	250	–30.7	942.5	4 712.5
60 a 80	9	70	630	–10.7	114.5	1 030.5
80 a 100	8	90	720	9.3	86.5	692
100 a 120	6	110	660	29.3	858.5	5 151
TOTAL	**28**					

$$\sigma^2 = \frac{\sum f(Pm - \mu)^2}{n} \approx \frac{4\,712.5 + 1\,030.5 + 692 + 5\,151}{28} \approx 413.8$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f(Pm - \mu)^2}{n}} \approx \sqrt{413.8} \approx 20.3 \text{ (km/h)}$$

Lección 1

1.6 Medidas de tendencia central

Problema inicial

De una empresa se tiene el registro de ventas del último mes en sus 30 sucursales y un registro de 20 de sus 30 sucursales, las cuales se muestran a continuación:

Ventas	Cantidad de sucursales (f)
De \$1,000 a \$2,000	5
De \$2,000 a \$3,000	11
De \$3,000 a \$4,000	8
De \$4,000 a \$5,000	6
TOTAL	**30**

Ventas	Cantidad de sucursales (f)
De \$1,000 a \$2,000	3
De \$2, 000 a \$3,000	7
De \$3,000 a \$4,000	6
De \$4,000 a \$5,000	4
TOTAL	**20**

a) Determina la media aritmética, mediana y moda para las 30 sucursales.

b) Determina la media aritmética, mediana y moda para las 20 sucursales.

Solución

a)

Ventas	Cantidad de sucursales (f)	Punto medio (Pm)	$f \times Pm$
De \$1,000 a \$2,000	5	1,500	7,500
De \$2,000 a \$3,000	11	2,500	27,500
De \$3,000 a \$4,000	8	3,500	28,000
De \$4,000 a \$5,000	6	4,500	27,000
TOTAL	**30**		90,000

$$\text{Media} = \frac{90{,}000}{30} = 3{,}000$$

$$\text{Mediana} = \frac{2{,}000 + 3{,}000}{2} = 2{,}500$$

$$\text{Moda} = \frac{2{,}000 + 3{,}000}{2} = 2{,}500$$

b)

Ventas	Cantidad de sucursales (f)	Punto medio (Pm)	$f \times Pm$
De \$1,000 a \$2,000	3	1,500	4,500
De \$2,000 a \$3,000	7	2,500	17,500
De \$3,000 a \$4,000	6	3,500	21,000
De \$4,000 a \$5,000	4	4,500	18,000
TOTAL	**20**		61,000

$$\text{Media} = \frac{61{,}000}{20} = 3{,}050$$

$$\text{Mediana} = 3{,}000$$

$$\text{Moda} = \frac{2{,}000 + 3{,}000}{2} = 2{,}500$$

Definición

Las medidas de tendencia central referentes a una población (tal como las 30 sucursales) se conocen como **parámetros** de la población y a menudo se denotan:

Media Poblacional = μ Mediana Poblacional = Me Moda Poblacional = Mo

Las medidas de tendencia central referentes a una muestra (tal como las 20 sucursales) se conocen como **estadísticos (o estadígrafos)** y se denotan:

Media Muestral = $\bar{x}$ Mediana Muestral = $\tilde{x}$ Moda Muestral = $\hat{x}$

Problemas

Considerando la población del salón de clase, recopila la información sobre el tiempo que se tardan tus compañeros en llegar desde la casa a la escuela, luego realiza una muestra aleatoria del 60% de la población y calcula todas las medidas de tendencia central, tanto para la población como para la muestra.

Indicador de logro:

1.6 Calcula las medidas de tendencia central para una muestra y una población en datos agrupados.

Secuencia:

Ahora que se ha recordado la manera de ordenar datos en una tabla de distribución de frecuencias, se pretende diferenciar entre las medidas de tendencia central de una población y de una muestra.

Propósito:

En esta clase hay que dar énfasis a las diferencias de la notación entre las medidas de tendencia central de una población y de una muestra, además de hacer notar que dependiendo de la representatividad de la muestra, puede que los valores de estas medidas difieran mucho o poco.

Solución de problemas:

En este problema la intención es recoger los datos particulares de cada salón, y hacer un ejercicio de recolección, organización, cálculo, análisis e interpretación de los datos, para hacer la recolección; el docente puede considerar alguna de las siguientes opciones:

- Preguntar a cada estudiante por fila el tiempo que tarda en llegar de la casa a la escuela, y anotarlo en la pizarra.
- Pasar una página en blanco para que anoten el tiempo, y luego fotocopiarla para cada estudiante.
- Recoger la información un día antes, y preparar el material digitado.
- Que un estudiante de cada fila recoja la información de la fila correspondiente, y luego se comparta con todos los estudiantes.

Luego, con los datos recolectados, los estudiantes realizan el cálculo de las medidas de tendencia central. Y para establecer la muestra se puede utilizar cualquiera de los métodos vistos en el muestreo probabilístico, se recomienda que sea un muestreo aleatorio simple.

Finalmente se calculan las medidas de tendencia central para la muestra extraída, el docente debe verificar que se esté utilizando la notación adecuada para cada caso. Después de haber realizado el cálculo, se puede hacer el análisis comparativo entre las medidas de tendencia central de la población y la muestra.

1.7 Medidas de dispersión

Problema inicial

Con los datos de las ventas de las sucursales, calcula la varianza y la desviación típica, para cada tabla.

Ventas	Cantidad de sucursales (f)
De \$1,000 a \$2,000	5
De \$2,000 a \$3,000	11
De \$3,000 a \$4,000	8
De \$4,000 a \$5,000	6
TOTAL	**30**

Ventas	Cantidad de sucursales (f)
De \$1,000 a \$2,000	3
De \$2,000 a \$3,000	7
De \$3,000 a \$4,000	6
De \$4,000 a \$5,000	4
TOTAL	**20**

Para calcular la varianza y la desviación típica de una muestra no se divide por n sino por $n - 1$, para que la estimación tenga menor sesgo.

Solución

Ventas	Cantidad de sucursales (f)	Punto medio (Pm)	$f \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f(Pm - \mu)^2$
De \$1, 000 a \$2, 000	5	1,500	7,500	–1,500	2,250, 000	11,250,000
De \$2, 000 a \$3, 000	11	2,500	27,500	–500	250 000	2,750,000
De \$3, 000 a \$4, 000	8	3,500	28,000	500	250 000	2,000,000
De \$4, 000 a \$5, 000	6	4,500	27,000	1,500	2,250, 000	13,500,000
TOTAL	**30**					29,500,000

Varianza = $\dfrac{\sum f(Pm - \mu)^2}{30} \approx 983, 333.3$ Desviación = $\sqrt{\dfrac{\sum f(Pm - \mu)^2}{30}} = \sqrt{983, 333.3} \approx 991.63$

Ventas	Cantidad de sucursales (f)	Punto medio (Pm)	$f \times Pm$	$Pm - \overline{x}$	$(Pm - \overline{x})^2$	$f(Pm - \overline{x})^2$
De \$1,000 a \$2,000	3	1,500	4,500	–1,550	2,402,500	7,207,500
De \$2,000 a \$3,000	7	2,500	17,500	–550	302,500	2,117,500
De \$3,000 a \$4,000	6	3,500	21,000	450	202,500	1,215,000
De \$4,000 a \$5,000	4	4,500	18,000	1,450	2,102,500	8,410,000
TOTAL	**20**					18,950,000

Varianza = $\dfrac{\sum f(Pm - \overline{x})^2}{19} \approx 997, 368$ Desviación = $\sqrt{\dfrac{\sum f(Pm - \overline{x})^2}{19}} = \sqrt{997, 368} \approx 998.68$

Conclusión

Para una población, la varianza se denota por σ^2 y la desviación típica se denota por σ. Y se calcula de la siguiente manera:

$$\sigma^2 = \frac{\sum f(Pm - \mu)^2}{N} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum f(Pm - \mu)^2}{N}}$$

Para una muestra la varianza se denota por s^2 y la desviación típica se denota por s. Y se calcula de la siguiente manera:

$$s^2 = \frac{\sum f(Pm - \overline{x})^2}{n - 1} \qquad s = \sqrt{\frac{\sum f(Pm - \overline{x})^2}{n - 1}}$$

Problemas

Considerando la información recopilada en la clase anterior sobre el tiempo que se tardan tus compañeros en llegar desde la casa a la escuela, tanto en la muestra como en la población calcula la varianza y la desviación típica.

Unidad 8

Indicador de logro:

1.7 Calcula las medidas de dispersión para una muestra y una población en datos agrupados.

Secuencia:

Después de abordar las medidas de tendencia central para muestras y poblaciones, se aborda lo correspondiente a las medidas de dispersión de los datos, de igual manera tanto para muestras como para poblaciones.

Propósito:

En esta clase, al igual que en la anterior, hay que dar énfasis a las diferencias de la notación entre las medidas de dispersión de una población y de una muestra, así como que en este caso es necesario hacer un ajuste en el cálculo de la varianza y la desviación típica muestral.

Solución de problemas:

En este problema la intención es continuar estudiando los datos recopilados en la clase anterior, haciendo el análisis de la dispersión de estos, tanto para la muestra como para la población, el docente debe verificar que se esté utilizando la notación adecuada para cada caso. Después de haber realizado el cálculo, se puede hacer el análisis comparativo entre las medidas de dispersión de la población y la muestra.

El docente puede mencionar que para el caso de la muestra, se divide por $n - 1$, para evitar el sesgo de la muestra respecto de la población, o en otras palabras, para que los valores de la varianza y la desviación típica se aproximen más a los valores poblacionales de estas medidas. Si el docente considera conveniente, puede realizar el ejercicio de calcular las medidas de dispersión de la muestra con n y con $n - 1$, y luego comparar cuál es más aproximado al los valores de la población. Esta corrección sobre el sesgo es conocida como corrección de Bessel.

1.8 Coeficiente de variación*

Problema inicial

La siguiente tabla muestra la media y la desviación típica de la estatura de personas del sexo masculino con edades de 5 y 17 años de una población para el año 2016:

Edad	Media	Desviación típica
5 años	110.4	4.74
17 años	170.7	5.81

a) ¿Se puede comparar la magnitud de dispersión de las dos poblaciones solo con la desviación típica?

b) Para ambas poblaciones calcula el cociente:

(desviación típica) ÷ (media)

Luego compáralos.

Solución

a) Aunque el grupo de 17 años tiene mayor desviación típica, no se puede decir que este grupo tiene mayor dispersión, porque la media también es mayor.

b) Población de 5 años: 4.74 ÷ 110.4 ≈ 0.043 Población de 17 años: 5.81 ÷ 170.7 ≈ 0.034

Este valor puede utilizarse para determinar que la estatura de la población de 17 años tiene menor dispersión que la de 5 años.

Definición

Se define el **coeficiente de variación** como el porcentaje de la desviación típica s y la media aritmética $\overline{x}$ de un conjunto de datos, se denota por CV, y se calcula: $CV = \frac{s}{\overline{x}}(100)$.

El coeficiente de variación se utiliza para comparar *la magnitud* de la dispersión de los datos de diferentes poblaciones, cuando la diferencia de las medias es grande (si la diferencia entre las medias es poca, o las medias son iguales se puede utilizar la desviación típica para comparar); por lo general cuando la media es grande, la desviación típica tiende a aumentar.

El porcentaje del coeficiente de variación también se utiliza para determinar la confiabilidad de la media aritmética de un conjunto de datos, en general para determinar la confiabilidad se puede usar la siguiente tabla como parámetro:

Valor de CV	**Representatividad de la media**
0% – 10%	Media altamente representativa
10% – 20%	Media bastante representativa
20% – 30%	Media con representatividad
30% – 40%	Media con representatividad dudosa
40% o más	Media no representativa

Ejemplo

¿Cómo es la dispersión de las notas de un exámen si se califica con base 10 respecto de calificarlo base 100?

El CV es igual para ambos casos, puesto que base 100 tanto la media como la desviación típica es 10 veces la media y la desviación típica de calificarlo base 10, por lo tanto la variación de los datos es igual.

Problemas

Los siguientes datos son sobre la cantidad de productos lácteos en malas condiciones que se han encontrado en 4 marcas diferentes. Determina la media de qué marca es más confiable.

Marca 1: $\overline{x}$ = 14, s = 3 Marca 2: $\overline{x}$ = 17, s = 2 Marca 3: $\overline{x}$ = 12, s = 5 Marca 4: $\overline{x}$ = 15, s = 1

Indicador de logro:

1.8 Utiliza el coeficiente de variación para analizar la representatividad de la media aritmética en series de datos diferentes.

Secuencia:

Después de haber trabajado con las medidas de tendencia central y las de dispersión, es posible introducir lo correspondiente al coeficiente de variación, lo cual puede servir de parámetro para determinar la representatividad de la media aritmética.

Propósito:

El coeficiente de variación puede resultar una herramienta muy útil para comparar resultados entre dos series de datos y tener un parámetro de la representatividad de la media, está claro que mientras más representativa es la media, es debido a que los datos se aproximan más a ella, y por lo tanto, la dispersión de los mismos tenderá a ser menor.

Solución de problemas:

Para determinar la confiabilidad, primero sería adecuado calcular los coeficientes de variación de cada marca:

Marca 1: $CV = \frac{s}{\bar{x}}(100) = (3 \div 14)(100) = 21.4\%$

Marca 2: $CV = \frac{s}{\bar{x}}(100) = (2 \div 17)(100) = 11.8\%$

Marca 3: $CV = \frac{s}{\bar{x}}(100) = (5 \div 12)(100) = 41.7\%$

Marca 4: $CV = \frac{s}{\bar{x}}(100) = (1 \div 15)(100) = 6.7\%$

A partir de lo cual resulta claro que la marca 4 posee la media más representativa, luego está la marca 2, sin embargo, la media de la marca 2 es mayor que la de la marca 4, por lo cual se esperaría que la marca 4 sería la más confiable, puesto que sus patrones para medir la cantidad de productos en malas condiciones ha presentado datos más regulares.

En esta parte el docente puede mencionar que si analizamos únicamente la media, está claro que la mejor sería la marca 3, sin embargo posee mucha dispersión en sus datos, lo cual indica que pueden estar pasando varias cosas, o bien que la marca mejoró mucho o bien que empeoró mucho, y por eso no se puede confiar en la media y se necesitaría más información para declinarse por esta opción; por otro lado al menos la marca 4 da la información más certera, además que su media tampoco difiere en gran medida de la media de la marca 3.

1.9 Practica lo aprendido

1. En cada una de las siguientes situaciones, identifica la población, la muestra, las variables estadísticas y cómo se clasifican.
   a) Para determinar el impacto de una política educativa se realiza una prueba diagnóstica a 40 escuelas de todo el país.
   b) Se desea saber la calidad de un producto lácteo y para ello se realiza una prueba a una unidad del producto en cada supermercado del país.
   c) Para establecer el ingreso promedio que tiene una persona en el área rural de El Salvador se realiza una encuesta a 20 personas de cada área rural del país.

2. Determina si las variables estadísticas presentadas a continuación son: variables cualitativas (nominales u ordinales) o variables cuantitativas (discretas o continuas).
   a) Cantidad de hermanos
   b) Relación con sus padres (mala, regular, buena)
   c) Resultados de un examen de matemática
   d) Marca de jabón preferida

3. Clasifica las siguientes estrategias de muestreo como aleatorio simple o aleatorio sistemático.
   a) Numerar la población del 1 al 10 (se repite al finalizar) y luego escoger un número, de modo que todos los que tengan ese número serán parte de la muestra.
   b) Numerar la población y eliminar 3 números y el cuarto es escogido, luego otros 3 y el cuarto es escogido, y así sucesivamente hasta abarcar toda la población.
   c) Hacer grupos en una población y seleccionar 2 de esos grupos al azar para que sean la muestra.
   d) Numerar la población, tirar un dado y seleccionar la persona de la población con ese número, luego tirarlo de nuevo y sumárselo al resultado anterior para seleccionar la otra persona y así sucesivamente.

4. Realiza una muestra de 30 estudiantes de una empresa que dispone de los siguientes datos:

	Femenino	Masculino
Estudiantes	35	15
Profesionales	25	25

5. Determina qué tipo de muestreo no probabilístico consideras más adecuado para cada situación.
   a) Investigación social para una tarea de seminario
   b) Forma de distribución de sustancias ilícitas.
   c) Personas que presentan mayor irritabilidad al conducir
   d) Estudiantes que participan en atletismo.

6. En un estacionamiento de centro comercial se calcula el tiempo promedio que permanece un carro estacionado, y se obtienen los siguientes datos para todo el estacionamiento y para los primeros 30 puestos:

Tiempo	Cantidad de carros
De 0 a 1 hora	12
De 1 a 2 horas	30
De 2 a 3 horas	32
De 3 a 4 horas	16
TOTAL	**90**

Tiempo	Cantidad de carros
De 0 a 1 hora	4
De 1 a 2 horas	10
De 2 a 3 horas	11
De 3 a 4 horas	5
TOTAL	**30**

   a) Calcula media, mediana, moda, varianza y desviación típica tanto para la población como para la muestra.
   b) Considerando que el tiempo promedio que las personas permanecen en el centro comercial es 2 horas con una desviación típica de 0.8 horas, ¿qué promedio es más confiable?

Indicador de logro:

1.9 Resuelve problemas correspondientes a estadísticos y parámetros en muestras y poblaciones.

Solución de problemas:

1a) Población: las escuelas de todo el país; muestra: las 40 escuelas en las que se realiza la prueba diagnóstica; variable: impacto de la política educativa; tipo: cualitativa ordinal (en ocaciones también puede asignarse un valor cuantitativo, sin embargo por las condiciones de la situación, sería más adecuada una escala como aceptable, regular, no aceptable, etc.).

1b) Población: el producto lácteo de todos los supermercados del país; muestra: el conjunto de los productos extraídos de cada supermercado; variable: calidad del producto lácteo; tipo: cualitativa ordinal.

1c) Población: personas en el área rural del país; muestra: las 20 personas de cada área rural del país; variable: ingreso promedio; tipo: cuantitativa continua.

2a) Cuantitativa discreta. **2b)** Cualitativa ordinal. **2c)** Cuantitativa continua. **2d)** Cualitativa nominal.

3a) Muestreo aleatorio sistemático. **3b)** Muestreo aleatorio simple.

3c) Muestreo aleatorio sistemático. **3d)** Muestreo aleatorio simple.

4. Mujeres estudiantes: $\frac{35}{100} \times 100 = 35\%$ Hombres estudiantes: $\frac{15}{100} \times 100 = 15\%$

Mujeres profesionales: $\frac{25}{100} \times 100 = 25\%$ Hombres profesionales: $\frac{25}{100} \times 100 = 25\%$

Entonces para obtener la muestra de 30 personas se pueden utilizar estos porcentajes:

Mujeres estudiantes: 35% de 30 es 11 Hombres estudiantes: 15% de 30 es 5

Mujeres profesionales: 25% de 30 es 7 Hombres profesionales: 25% de 30 es 7

Por lo tanto se puede extraer una muestra de 30 personas de toda la colonia, seleccionando 11 mujeres estudiantes, 7 mujeres profesionales, 5 hombres estudiantes y 7 hombres profesionales.

En este problema en particular, los valores para las muestras no son enteros, y los valores son 10.5, 7.5, 4.5 y 7.5, sin embargo, deben aproximarse a un valor entero teniendo el cuidado de no sobrepasar la muestra. También se podría aproximar siempre al entero mayor y sobrepasar la muestra a 32 personas.

5a) Muestreo por conveniencia, puesto que se hará la investigación a personas del entorno cercano.

5b) Muestreo por bola de nieve, puesto que se requiere información que no se puede obtener de forma directa, tanto por seguridad como por confidencialidad.

5c) Muestreo por estratos, puesto que sería conveniente analizar conductores con diferentes características.

5d) Muestreo discrecional, dado que es preferible que participen las personas con más actitudes para el atletismo.

6a) $\mu = \frac{6 + 45 + 80 + 56}{90} \approx 2.08$, Me = 2.5, Mo = 2.5, $\sigma^2 \approx \frac{31.2 + 12 + 6.4 + 32}{90} \approx 0.91$, $\sigma \approx \sqrt{0.91} \approx 0.95$.

$\bar{x} = \frac{2 + 15 + 27.5 + 17.5}{30} \approx 2.07$, $\tilde{x} = 2.5$, $\hat{x} = 2.5$, $s^2 \approx \frac{10.4 + 4 + 2.2 + 10}{29} \approx 0.92$, $s \approx \sqrt{0.92} \approx 0.96$.

6b) Para este caso se pueden comparar los coeficientes de variación de ambos datos:

$CV_1 = \frac{s}{\bar{x}}(100) \approx (0.95 \div 2.08)(100) \approx 45.7\%$ $CV_2 = \frac{s}{\bar{x}}(100) \approx (0.8 \div 2)(100) = 40\%$

Por lo tanto, es un poco más representativa la media del tiempo que permanecen en el centro comercial, sin embargo, ninguna de las medias es representativa de la variable correspondiente.

2.1 Cuartiles

Problema inicial

Al finalizar el año escolar el profesor cuenta las inasistencias de sus estudiantes y obtiene los siguientes datos:

4, 5, 6, 2, 4, 8, 10, 11, 13, 12, 11, 10, 12, 6, 7, 9, 8, 13, 14, 15

a) ¿Cuál es la mediana del conjunto de datos?
b) ¿Cuál es la mediana de la primera mitad del conjunto de datos ordenados de menor a mayor?
c) ¿Cuál es la mediana de la segunda mitad del conjunto de datos ordenados de menor a mayor?

Solución

a) Se ordenan los datos y se calcula la mediana:

$$\underbrace{2, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9}, \underbrace{10, 10, 11, 11, 12, 12, 13, 13, 14, 15}$$

La mediana es $\frac{9 + 10}{2} = 9.5$.

b) Considerando la primera mitad del conjunto de datos del literal a):

$$\underbrace{2, 4, 4, 5, 6}, \underbrace{6, 7, 8, 8, 9}$$

La mediana es $\frac{6 + 6}{2} = 6$.

Si el total de datos fuera impar ($2n + 1$) para b) se tendrían que considerar los primeros n datos y para c) los últimos n datos, es decir, sin considerar el dato que coincide con la mediana.

c) Considerando la segunda mitad del conjunto de datos del literal a):

$$\underbrace{10, 10, 11, 11, 12}, \underbrace{12, 13, 13, 14, 15}$$

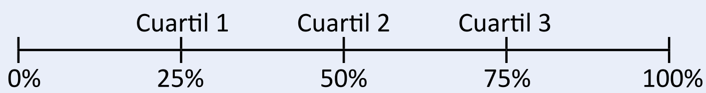
La mediana es $\frac{12 + 12}{2} = 12$.

Esto significa que el 25% de los estudiantes del salón tiene a lo sumo 6 inasistencias, el 50% de los estudiantes tiene a lo sumo 9.5 inasistencias y el 75% tiene a lo sumo 12 inasistencias.

Definición

Los valores de una variable que dividen al conjunto de datos en cuatro partes con igual cantidad de datos se conoce como **cuartiles**.

El cuartil 1 concentra al 25% de los datos menores a este, el cuartil 2 concentra al 50% de los datos menores a él, el cuartil 3 concentra al 75% de los datos menores a él.



La diferencia entre el cuartil 3 y el cuartil 1 (C3 – C1) se conoce como **rango intercuartílico**, denotado por **RI**.

Problemas

Determina y analiza los 3 cuartiles de los siguientes conjuntos de datos obtenidos de la cantidad de personas reportadas con dengue en cada mes por algunos centros asistenciales.

a) 3, 1, 4, 12, 10, 9, 11, 7, 12, 16, 3
b) 6, 3, 7, 8, 10, 15, 8, 12, 17, 2
c) 1, 3, 2, 5, 10, 14, 15, 13, 10, 5, 9, 3, 8
d) 4, 2, 5, 7, 10, 16, 12, 9, 14, 8, 5, 1

Indicador de logro:

2.1 Determina y analiza los cuartiles de una serie de datos simple.

Secuencia:

Luego de trabajar con la parte de muestreo, se abarcarán otro tipo de medidas para describir una serie de datos, las medidas de posición ayudan a describir la forma aproximada de los datos.

Propósito:

Para resolver el Problema inicial se espera que los estudiantes apliquen el concepto de la mediana, para encontrar todos los valores requeridos.

Solución de problemas:

a) 1, 3, 3, 4, 7, 9, 10, 11, 12, 12, 16

El cuartil 1 es 3, el cuartil 2 es 9 y el cuartil 3 es 12.

b) 2, 3, 6, 7, 8, 8, 10, 12, 15, 17

El cuartil 1 es 6, el cuartil 2 es 8 y el cuartil 3 es 12.

c) 1, 2, 3, 3, 5, 5, 8, 9, 10, 10, 13, 14, 15

El cuartil 1 es 3, el cuartil 2 es 8 y el cuartil 3 es 11.5.

d) 1, 2, 4, 5, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16

El cuartil 1 es 4.5, el cuartil 2 es 7.5 y el cuartil 3 es 11.

En cada literal, la forma de calcular los cuartiles es diferente.

El análisis que pueden hacer en cada caso es determinar el valor para el cual el 25%, 50% o 75% de los datos son inferiores a él; así por ejemplo, el 25% de los datos a) y c) se concentran de 1 hasta el valor 3, sin embargo, en b) se concentran de 2 hasta 6, con lo cual se puede pensar que el 25% menor de los datos tiene mayor rango que el 25% menor de las demás series de datos.

2.2 Diagrama de caja y bigotes

Problema inicial

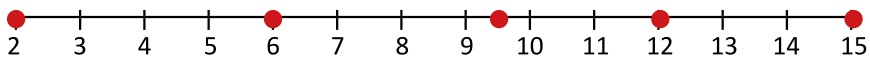
Considerando los datos de las inasistencias de los estudiantes que recolectó el profesor:

4, 5, 6, 2, 4, 8, 10, 11, 13, 12, 11, 10, 12, 6, 7, 9, 8, 13, 14, 15

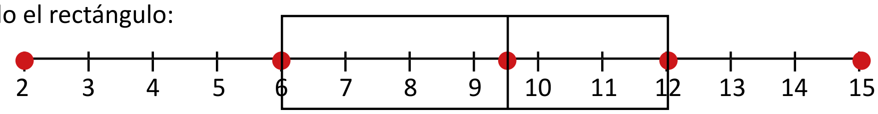
a) Ubica en una recta numérica el valor mínimo, el cuartil 1, el cuartil 2, el cuartil 3 y el valor máximo.
b) Dibuja un rectángulo que cubra desde el cuartil 1 hasta el cuartil 3.

Solución

a) El valor mínimo es 2, el cuartil 1 es 6, el cuartil 2 es 9.5, el cuartil 3 es 12 y el valor máximo es 15; entonces al ubicarlos en una recta se tiene:

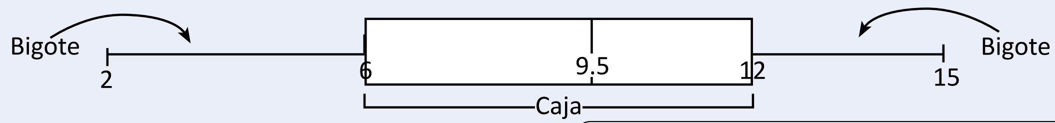


b) Dibujando el rectángulo:



Definición

El diagrama elaborado se conoce como **diagrama de caja y bigotes**.

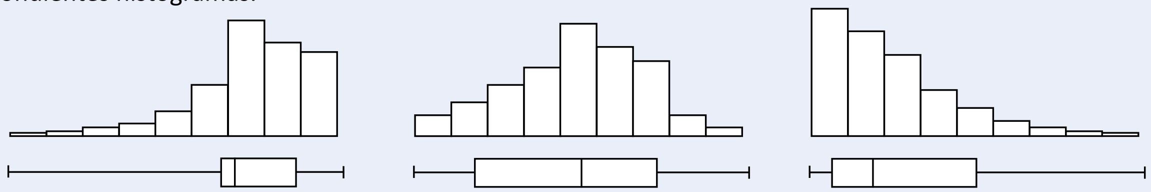


Si el bigote de la izquierda es más corto que el de la derecha significa que el 25% de los datos menores tienen menor rango que el 25% de los datos mayores, así mismo si una caja es angosta significa que el 50% central de los datos tienen rango más estrecho.

La forma del diagrama de caja puede orientar para la descripción de la forma de distribución de los datos, observa los diagramas de caja siguientes y sus correspondientes histogramas.

Estadísticamente, para construir el diagrama de caja se suele utilizar como parámetro el valor de 1.5 veces el rango intercuartílico y los bigotes se representan por la primera y última observación que queda dentro del rango de C1 – 1.5(RI) hasta C3 + 1.5(RI). Esta construcción ayuda a la identificación de datos atípicos en un conjunto de datos.

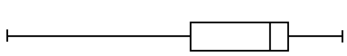
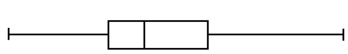
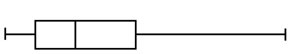
A un histograma le corresponde un diagrama de caja, pero un diagrama de caja puede corresponder a dos o más histogramas.



Problemas

1. Elabora y analiza el diagrama de caja de los datos de las personas reportadas con dengue.
   a) 3, 1, 4, 12, 10, 9, 11, 7, 12, 16, 3
   b) 6, 3, 7, 8, 10, 15, 8, 12, 17, 2
   c) 1, 3, 2, 5, 10, 14, 15, 13, 10, 5, 9, 3, 8
   d) 4, 2, 5, 7, 10, 16, 12, 9, 14, 8, 5, 1

2. Observa los siguientes diagramas de caja y estima la forma en que se distribuyen los datos.

a)  b)  c) 

Indicador de logro:

2.2 Elabora y analiza el diagrama de caja y bigotes de una serie de datos simple.

Secuencia:

Puesto que en la clase anterior se estableció la definición de los cuartiles, en esta clase se procederá a analizar la gráfica de caja y bigotes, cuyo fundamento principal son los cuartiles.

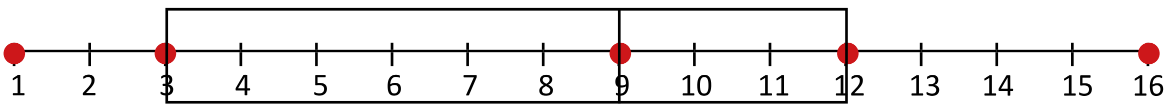
Propósito:

Está claro que a partir de un histograma sí se puede inferir la forma del diagrama de caja y bigotes, sin embargo en esta clase, cuando se pide el histograma que puede estar representado por un diagrama, el objetivo es que el estudiante imagine las posibilidades que puede tener el histograma para cada caso.

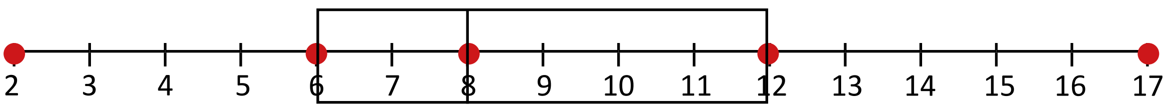
Solución de problemas:

1. Las series de datos son las mismas de la clase anterior, por lo cual ya se tienen calculados los cuartiles, y solamente falta realizar el diagrama.

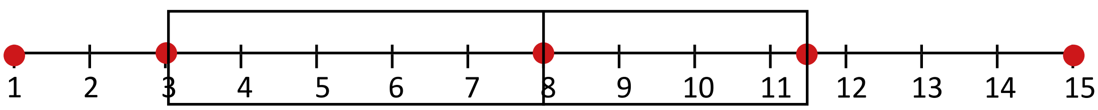
a)



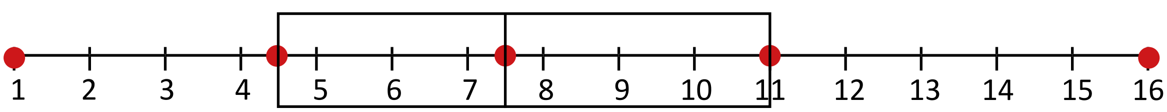
b)



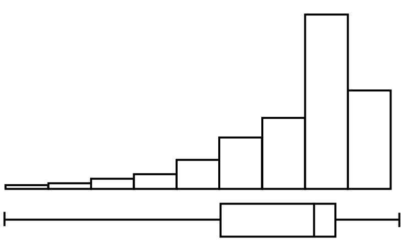
c)



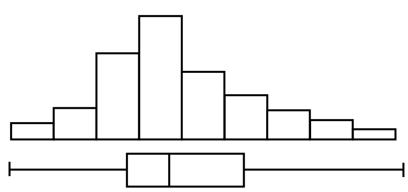
d)



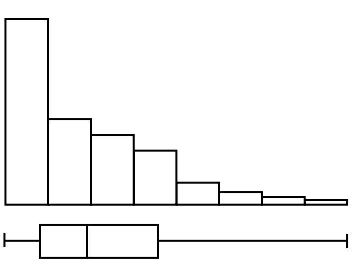
2a)



2b)



2c)

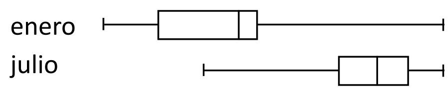


Todos estos histogramas marcan una forma posible general, lo cual no significa que necesariamente sean los que están asociados al diagrama de caja y bigotes dado, únicamente se puede analizar cierta tendencia en la forma de los datos.

2.3 Análisis del diagrama de caja y bigotes*

Problema inicial

A continuación se presentan dos diagramas de caja correspondientes a las ventas registradas por día durante dos meses diferentes, analiza y luego responde:

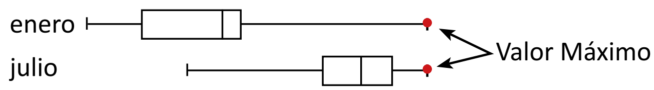


Nota que la cantidad de días es igual para ambos meses.

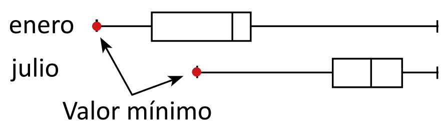
a) ¿En qué mes se dio la mejor venta?
b) ¿En qué mes sucedió la peor venta?
c) Determina cómo fue la variabilidad entre los cuartiles de ambos meses.
d) ¿En qué mes hubo mayor cantidad de ventas?

Solución

a) La mejor venta fue igual en ambos meses, puesto que el valor máximo en ambos diagramas es el mismo.

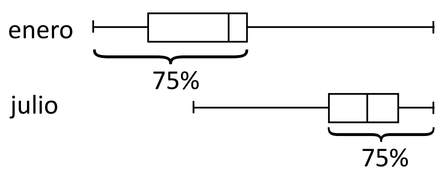


b) La peor venta sucedió en enero, puesto que el valor mínimo del diagrama 1 es menor que el valor mínimo del diagrama 2.



c) El 25% de ventas más bajas, enero tuvo poca variabilidad (rango estrecho) y se concentra en ventas bajas, al contrario de julio, cuyo 25% de ventas más bajas tiene mayor rango y alcanza ventas más altas que enero, por otro lado el rango intercuartílico de enero es mayor que el rango intercuartílico de julio, lo cual significa que hubo más variabilidad en este rango en enero que en julio; finalmente, al analizar el 25% de ventas mayores se determina una variabilidad muy grande en enero viniendo de valores muy bajos, sin embargo en julio el rango es pequeño y se concentra en ventas muy altas.

d) Al menos el 75% de las ventas más bajas de enero están por debajo del cuartil 1 de julio, por esta razón se puede considerar que las ventas de julio fueron mejores que las de enero.

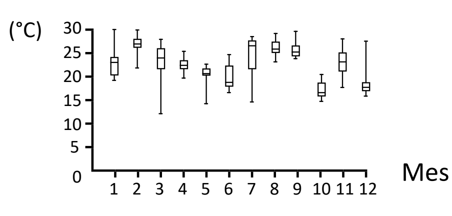


Conclusión

El diagrama de caja brinda información muy valiosa para la comparación de datos valorando la dispersión que pueda existir entre ellos y es una herramienta muy útil para describir los datos de manera certera.

Problemas

Analiza los siguientes diagramas de caja de la temperatura de El Salvador durante los 12 meses del año, luego responde las preguntas.



a) ¿En qué mes variaron más las temperaturas?
b) ¿En qué mes variaron menos las temperaturas?

218

Indicador de logro:

2.3 Compara los diagramas de caja y bigotes de series de datos en una misma escala.

Secuencia:

Luego de haber introducido el diagrama de caja para una serie de datos, se procurará enfatizar en el análisis y la interpretación de la representación de varios diagramas de caja y bigotes para momentos diferentes, y lograr obtener conclusiones a partir de ellos.

Propósito:

Se espera que los estudiantes logren identificar qué información pueden extraer al comparar dos o más gráficos, para lograr establecer conclusiones y tomar decisiones en función de las conclusiones establecidas a partir de los datos estadísticos.

Solución de problemas:

a) A partir de los gráficos y del rango que se puede apreciar en los diagramas de caja, se puede visualizar que en el mes 3 (marzo) el 25% de las temperaturas más bajas, varió bastante, de manera parecida el mes 12 (diciembre) el 25% de las temperaturas más altas tuvieron valores muy variables (o al menos un valor muy grande) sin embargo, durante este mes se logra apreciar que al menos el 75% de las temperaturas más bajas no tuvo un rango muy grande, y por lo tanto, su variación se aprecia un poco menor que la del mes 3.

b) Durante el mes 4 se logra visualizar el diagrama con comportamiento más regular respecto de los demás, valorando su forma en todos los cuartiles y su rango, además, a pesar que hay otros meses como el 8, 9 o el 10 cuyo rango es parecido, pero en ellos se marca alguna mayor variabilidad entre algunos de sus cuartiles, por lo tanto, el mes que se aprecia con menor variación es el 4 (abril).

2.4 Deciles y percentiles

Problema inicial

Al finalizar el año escolar el profesor cuenta las inasistencias de sus estudiantes y obtiene los siguientes datos:

4, 5, 6, 2, 4, 8, 10, 11, 13, 12, 11, 10, 12, 6, 7, 9, 8, 13, 14, 15

a) ¿Cuál fue el número máximo de inasistencias que tuvo el 20% de los estudiantes con menos inasistencias?
b) ¿Cuál fue el número máximo de inasistencias que tuvo el 60% de los estudiantes con menos inasistencias?
c) ¿Cuál fue el número máximo de inasistencias que tuvo el 5% de los estudiantes con menos inasistencias?
d) ¿Cuál fue el número máximo de inasistencias que tuvo el 95% de los estudiantes con menos inasistencias?

Solución

Se ordenan los datos y se dividen en 20 partes iguales (cada una equivale a un 5%).

2, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 13, 13, 14, 15

5% 20% 60% 95%

a) El 20% de estudiantes con menos inasistencias tiene a lo sumo 5 inasistencias.
b) El 60% de estudiantes con menos inasistencias tiene a lo sumo 10 inasistencias.
c) El 5% de estudiantes con menos inasistencias tiene a lo sumo 2 inasistencias.
c) El 95% de estudiantes con menos inasistencias tiene a lo sumo 14 inasistencias.

Definición

Los valores de una variable que dividen al conjunto de datos en diez partes con igual cantidad de datos cada una se conoce como **deciles**.

Cada decil concentra 10% más de los datos que el anterior, el primero concentra el 10% de los datos, el segundo el 20% de los datos y así sucesivamente hasta el decil 9 que concentra el 90% de los datos.

D1 D2 D3 D4 D5 D6 D7 D8 D9

0% 10% 20% 30% 40% 50% 60% 70% 80% 90% 100%

Los valores de una variable que dividen al conjunto de datos en cien partes con igual cantidad de datos cada una, se conoce como **percentiles**.

Cada percentil concentra 1% más de los datos que el anterior, el primero concentra el 1% de los datos, el segundo el 2% de los datos y así sucesivamente hasta el percentil 99 que concentra el 99% de los datos.

Para calcular el decil d de un total de n datos, se ordenan los datos de menor a mayor y se busca el dato cuya posición se aproxime más al valor $d\frac{n}{10}$. Análogamente para calcular el valor del percentil p, se busca el dato cuya posición se aproxima más al valor $p\frac{n}{100}$.

Problemas

Calcula los deciles indicados en cada serie de datos, luego analiza la información que proveen estos datos.

a) 6, 9, 2, 10, 1, 7, 8, 2, 7, 5, 11, 12, 9, 5, 3, 10, 12, 7, 4, 8. Deciles 3, 5 y 7.
b) 4, 6, 10, 15, 13, 7, 9, 5, 7, 7, 12, 14, 10, 9, 6, 11. Deciles 4, 6 y 9.

Unidad 8

219

Indicador de logro:

2.4 Determina y analiza los deciles y percentiles de una serie de datos simple.

Secuencia:

Para finalizar esta lección se estudian las últimas medidas de posición, los deciles y percentiles, con lo cual se puede realizar un análisis más detallado de la forma que tiene la serie de datos.

Propósito:

En esta clase se introducen tanto deciles como percentiles en el Problema inicial, sin embargo esto únicamente es para introducir la Definición, puesto que para la serie de datos del Problema inicial no tiene mucho sentido calcular percentiles (muchos se repetirán); por esta razón es que en los Problemas no se refiere a percentiles, sino únicamente a deciles.

Solución de problemas:

a) Ordenando los datos: 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 11, 12, 12.

Decil 3: $d\,\frac{n}{10}$ = 3 × 2 = 6, por lo tanto, es el valor en la sexta posición, es decir, 5.

Decil 5: $d\,\frac{n}{10}$ = 5 × 2 = 10, por lo tanto, es el valor en la décima posición, es decir, 7.

Decil 7: $d\,\frac{n}{10}$ = 7 × 2 = 14, por lo tanto, es el valor en la décimo cuarta posición, es decir, 9.

b) Ordenando los datos: 4, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 9, 9, 10, 10, 11, 12, 13, 14, 15.

Decil 4: $d\,\frac{n}{10}$ = 4 × 1.6 = 6.4, por lo tanto, es el valor en la sexta posición, es decir, 7.

Decil 6: $d\,\frac{n}{10}$ = 6 × 1.6 = 9.6, por lo tanto, es el valor en la décima posición, es decir, 10.

Decil 9: $d\,\frac{n}{10}$ = 9 × 1.6 = 14.4, por lo tanto, es el valor en la décimo cuarta posición, es decir, 13.

2.5 Practica lo aprendido

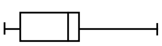
1. Determina los 3 cuartiles de los siguientes conjuntos de datos obtenidos de la cantidad de personas nuevas que son matriculadas en el Centro de Rehabilitación de Ciegos “Eugenia Dueñas”. Luego analiza la información que brinda cada cuartil.

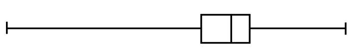
   a) 5, 10, 8, 6, 3, 2, 8, 12, 5, 1, 7, 9, 4

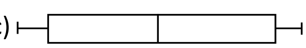
   b) 3, 2, 5, 9, 10,15, 7, 9, 12, 10, 3, 1

2. Elabora y analiza el diagrama de caja de los datos de las personas matriculadas en el Centro de Rehabilitación de Ciegos “Eugenia Dueñas” (numeral 1).

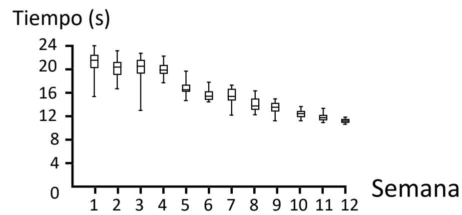
3. Observa los siguientes diagramas de caja y estima la forma en que se distribuyen los datos usando histogramas.

   a) 

   b) 

   c) 

4. Analiza los siguientes diagramas de caja del desempeño de un atleta en el tiempo que tarda para recorrer 100 metros planos durante 12 semanas de entrenamiento.



   a) ¿En qué semana se obtuvo el mejor rendimiento?

   b) ¿En qué semana tuvo el peor rendimiento?

   c) ¿En qué semana marcó el mejor tiempo?

   d) ¿Cómo fue el desempeño en la semana 7?

   e) ¿Qué conclusiones puedes sacar del entrenamiento del atleta?

5. Calcula los deciles indicados en cada serie de datos, luego analiza la información que proveen estos datos.

   a) 10, 6, 7, 11, 13, 8, 9, 5, 9, 10, 12, 12, 7, 9, 11, 15, 4, 6. Deciles 2, 4 y 8.

   b) 10, 5, 7, 11, 8, 9, 12, 7, 6, 10, 9, 8, 14, 13, 9, 11, 5. Deciles 3, 7 y 9.

   c) 8, 5, 4, 2, 1, 7, 3, 9, 10, 9, 8, 6, 2, 11, 3, 14, 11, 8, 13, 10, 6, 12, 10, 4, 3. Deciles 1, 5 y 7.

Indicador de logro:

2.5 Resuelve problemas correspondientes a las medidas de posición.

Solución de problemas:

1a) 1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 12

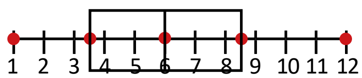
El cuartil 1 es 3.5, el cuartil 2 es 6 y el cuartil 3 es 8.5.

El análisis es semejante al realizado en los problemas de la clase 2.1.

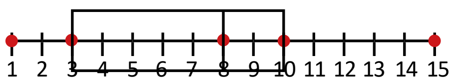
1b) 1, 2, 3, 3, 5, 7, 9, 9, 10, 10, 12, 15

El cuartil 1 es 3, el cuartil 2 es 8 y el cuartil 3 es 10.

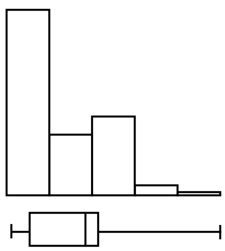
2a)



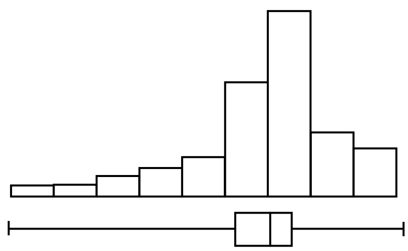
2b)



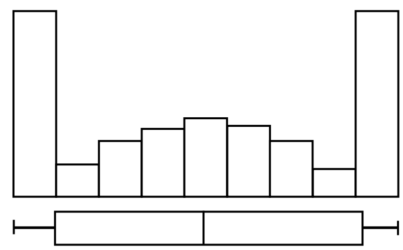
3a)



3b)



3c)



4a) Se podría asegurar que fue durante la semana 12 por dos razones; primero: porque obtuvo uno de los tiempos más bajos, y segundo: porque la mayoría de tiempos están concentrados en un rango muy pequeño.

4b) Durante la semana 4 se observa concentración de tiempos muy altos, aunque en las semanas de la 1 a la 3 también se concentra en tiempos altos, sin embargo, se registró al menos algunos tiempos más bajos que durante la semana 4, por lo tanto, se aprecia que su peor rendimiento es durante la semana 4.

4c) El mejor tiempo fue marcado durante la semana 12.

4d) El 25% de los tiempos más bajos son bastante aceptables, sin embargo, en general no es muy bueno el desempeño de la semana 7, puesto que el 75% de los tiempos resultaron un poco altos, en especial porque la semana anterior tuvo un mejor desempeño.

4e) En general, se marca una tendencia a mejorar semana tras semana (excepto particularidades), por lo cual se puede pensar que fue un buen entrenamiento; por otro lado, cabe destacar que aunque hubo semanas que alcanzó buenos tiempos, esto no indica que el atleta está preparado para garantizar un buen tiempo, sino que debe intentarse concentrar los resultados en un rango pequeño, tal como sucede en la semana 12.

5a) Ordenando los datos: 4, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 13, 15.

Decil 2: $d\,\frac{n}{10}$ = 2 × 1.8 = 3.6, por lo tanto, es el valor en la cuarta posición, es decir, 6.

Decil 4: $d\,\frac{n}{10}$ = 4 × 1.8 = 7.2, por lo tanto, es el valor en la séptima posición, es decir, 8.

Decil 8: $d\,\frac{n}{10}$ = 8 × 1.8 = 14.4, por lo tanto, es el valor en la décimo cuarta posición, es decir, 11.

5b) Al ordenar los datos: 5, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 12, 13, 14.

El decil 3 es 7, el decil 7 es 10, y el decil 9 es 12.

5c) Al ordenar los datos: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 10, 11, 11, 12, 13, 14.

El decil 1 es 2, el decil 5 es 8, y el decil 7 es 10.

2.6 Problemas de la unidad

Se realiza el control de calidad de un tipo de laptop, cuyo objetivo es evaluar el tiempo de duración de la carga de la computadora, para ello se toma una muestra de 50 computadoras y se registran los siguientes datos:

Duración de la batería en horas	Cantidad de laptops
0 a 2	10
2 a 4	15
4 a 6	9
6 a 8	9
8 a 10	5
10 a 12	2

a) Identifica la variable a estudiar y clasifícala.

b) ¿Qué tipo de muestreo es el más adecuado para este control de calidad?

c) ¿Cuánto tiempo dura en promedio la batería de una laptop de este tipo?

d) ¿Cuánto tiempo es más frecuente que dure la batería de una laptop de este tipo?

e) ¿Cuál es el valor de la mediana de este conjunto de datos?

f) Calcula la varianza y la desviación típica de esta muestra.

g) Calcula el coeficiente de variación de estos datos.

h) ¿Cómo es la representatividad de la media para el conjunto de datos?

i) La siguiente información es acerca de la duración de la batería de otro tipo de laptop:

Duración de la batería en horas	Cantidad de laptops
0 a 2	8
2 a 4	17
4 a 6	13
6 a 8	8
8 a 10	3
10 a 12	1

Si se necesita comprar una computadora en la que se requiera la mejor duración de la batería, ¿qué tipo de laptop sería más adecuado comprar? ¿por qué? Compara entre la laptop inicial y la mencionada en el literal i.

Indicador de logro:

2.6 Resuelve problemas correspondientes a estadística descriptiva.

Solución de problemas:

a) La variable es el tiempo de duración de la batería y es de tipo cuantitativa continua.

b) Puesto que solo es un tipo de laptop, lo mejor y más sencillo sería un muestreo aleatorio simple.

Duración de la batería en horas	Cantidad de laptops (f)	Punto medio (Pm)	$f \times Pm$	$Pm - \bar{x}$	$(Pm - \bar{x})^2$	$f(Pm - \bar{x})^2$
0 a 2	10	1	10	–3.6	12.96	129.6
2 a 4	15	3	45	–1.6	2.56	38.4
4 a 6	9	5	45	0.4	0.16	1.44
6 a 8	9	7	63	2.4	5.76	51.84
8 a 10	5	9	45	4.4	19.36	96.8
10 a 12	2	11	22	6.4	40.96	81.92
TOTAL	**50**					

c) $\bar{x} = \dfrac{10 + 45 + 45 + 63 + 45 + 22}{50} = 4.6.$ **d)** $\hat{x} = 3$ **e)** $\tilde{x} = 4$

Se considera conveniente asignar a la mediana el valor límite de la clase ya que la posición del elemento medio de la muestra al ordenarse como serie simple es 25.5, es decir entre la clase 2 y 3; sin embargo, también puede tomarse el valor del punto medio de la clase mediana (50 ÷ 2 = 25).

f) $s^2 = \dfrac{129.6 + 38.4 + 1.44 + 51.84 + 96.8 + 81.92}{49} \approx 8.16,\ s \approx \sqrt{8.16} \approx 2.86.$

g) $CV = \frac{s}{\bar{x}}(100) \approx (2.86 \div 4.6)(100) \approx 62.2\%$

h) A partir del coeficiente de variación, se puede concluir que la media es no representativa.

Para determinar la representatividad de la media, puede recomendar a sus estudiantes revisar la tabla de la clase 1.8.

i) Calculando la media y desviación típica:

Duración de la batería en horas	Cantidad de laptops (f)	Punto medio (Pm)	$f \times Pm$	$Pm - \bar{x}$	$(Pm - \bar{x})^2$	$f(Pm - \bar{x})^2$
0 a 2	8	1	8	–3.36	11.29	90.32
2 a 4	17	3	51	–1.36	1.85	31.45
4 a 6	13	5	65	0.64	0.41	5.33
6 a 8	8	7	56	2.64	6.97	55.76
8 a 10	3	9	27	4.64	21.53	64.59
10 a 12	1	11	11	6.64	44.09	44.09
TOTAL	**50**					

$\bar{x} = \dfrac{8 + 51 + 65 + 56 + 27 + 11}{50} = 4.36,\quad s^2 \approx 5.95,\ s \approx \sqrt{5.95} \approx 2.44,\ CV \approx (2.44 \div 4.36)(100) \approx 55.96\%.$

En este caso se vuelve un poco difícil determinar cuál tipo de laptop sería más adecuada, puesto que aunque la media del segundo tipo de laptop es más representativa (por una diferencia mínima), también la duración promedio es un poco más baja, entonces para este caso con los datos calculados se determina que comprar una u otra sería casi lo mismo.

2.7 Problemas de la unidad

A continuación se presentan los datos obtenidos por semana durante las últimas 8 semanas del rendimiento de un atleta de salto largo, en el cuadro se registra la longitud saltada en metros:

Semana 1	3.5	3.8	3.7	3.8	3.9	3.7	4.0
Semana 2	3.8	4.2	4.3	4.2	4.4	4.6	4.6
Semana 3	4.5	4.8	4.7	4.9	4.9	5.3	5.2
Semana 4	5.2	5.5	5.7	5.6	5.8	5.9	6.0
Semana 5	5.8	6.3	6.5	6.8	6.8	6.9	6.8
Semana 6	6.7	6.9	7.0	6.5	6.8	7.0	7.1
Semana 7	6.9	7.2	7.3	7.2	7.4	7.1	7.5
Semana 8	7.4	7.7	7.8	7.6	7.9	7.8	7.9

a) Realiza una aproximación de los cuartiles para los datos de cada semana.

b) Construye el diagrama de caja y bigotes para cada semana.

c) Realiza un diagrama que compare el desempeño del atleta durante las 8 semanas mediante los diagramas de caja y bigotes.

d) ¿En qué semana se obtuvo el mejor rendimiento?

e) ¿En qué semana tuvo el peor rendimiento?

f) ¿En qué semana marcó el mejor salto?

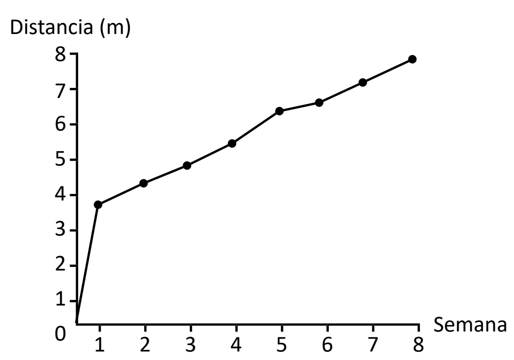
g) ¿Cómo fue el desempeño en la semana 7?

h) ¿A partir de qué semana se puede asegurar con mayor probabilidad que el atleta puede realizar un salto de al menos 5 metros?

i) ¿Se puede pensar que después del entrenamiento de la semana 1, el atleta era capaz de saltar al menos 4 metros? ¿por qué?

j) ¿Qué conclusiones puedes sacar del entrenamiento del atleta?

k) El siguiente gráfico ha sido elaborado con los promedios de cada semana, establece las ventajas entre el diagrama elaborado en el literal c) y el diagrama presentado a continuación.



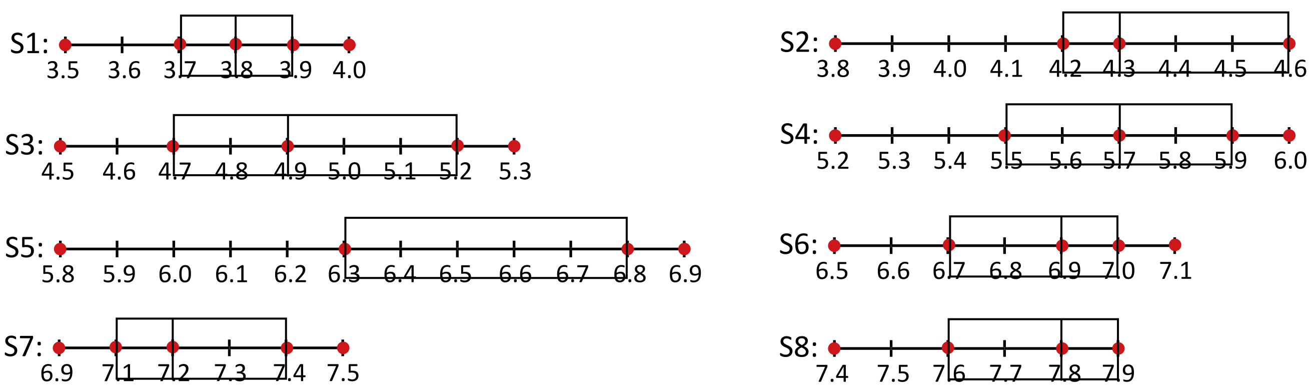
Indicador de logro:

2.7 Resuelve problemas correspondientes a estadística descriptiva.

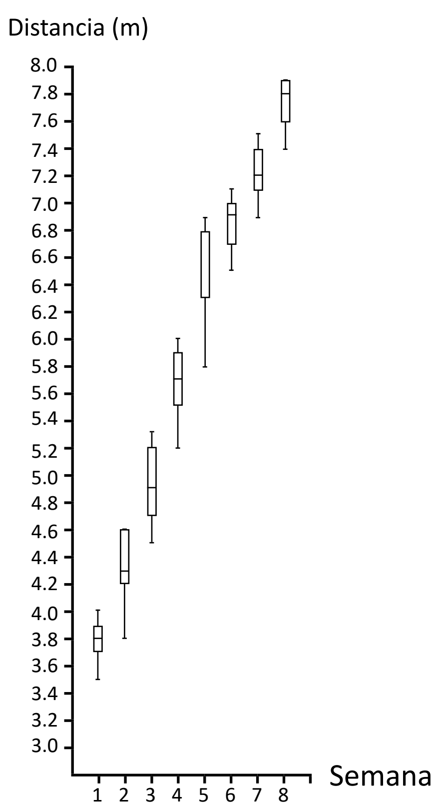
Solución de problemas:

a) Semana 1: C1 = 3.7, C2 = 3.8, C3 = 3.9; semana 2: C1 = 4.2, C2 = 4.3, C3 = 4.6; semana 3: C1 = 4.7, C2 = 4.9, C3 = 5.2; semana 4: C1 = 5.5, C2 = 5.7, C3 = 5.9; semana 5: C1 = 6.3, C2 = 6.8, C3 = 6.8; semana 6: C1 = 6.7, C2 = 6.9, C3 = 7.0; semana 7: C1 = 7.1, C2 = 7.2, C3 = 7.4; semana 8: C = 7.6, C2 = 7.8, C3 = 7.9.

b)



c)



d) El mejor rendimiento fue durante la semana 8, puesto que el rango entre el cuartil 1 y el dato superior es muy poco.

e) Durante la semana 3 el 75% de los datos se distribuyeron en un rango muy grande, muy parecido a la semana 4 y 5.

f) Durante la semana 8.

g) Fue bastante regular, casi todos los cuartiles dividen los datos en rangos muy parecidos, y el atleta presentó saltos de longitud muy aceptable.

h) A partir de la semana 3 poco menos del 50% de los datos sobrepasan los 5 metros, sin embargo, a partir de la semana 4 con total seguridad los sobrepasa.

i) No, porque a pesar que logró esa marca en los saltos de esa semana, casi el 100% de los datos está por debajo de esa marca, por lo tanto, sería casi imposible que el atleta lo lograra en esa semana.

j) Fue un entrenamiento muy bueno, que presentó grandes márgenes de mejora entre cada semana, y que a partir de la semana 6 se reguló un poco y sus marcas fueron muy buenas.

k) En el gráfico de los promedios únicamente se puede apreciar la tendencia de mejora, pero no se logra saber el comportamiento de los resultados en cada semana, las semanas con mayor estabilidad y simetría en los datos. Por lo tanto, el gráfico con diagramas de caja puede ser utilizado para extraer información con más detalle, incluso se puede tener una idea sobre la dispersión a partir del rango de los datos, entre otras ventajas.

3.1 Práctica en GeoGebra: análisis estadístico

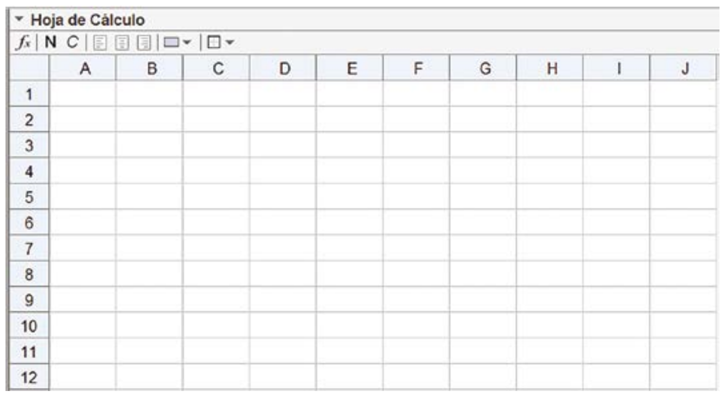
Para esta práctica se utilizarán los recursos de GeoGebra para realizar análisis estadístico de una variable, y construir diagramas de caja y bigotes sobre las situaciones planteadas en la unidad. Para ello sigue los pasos indicados en la parte de Práctica y construye los diagramas y el análisis necesario. Luego trabaja en GeoGebra la parte Actividades que está al final de esta práctica.

Práctica

Retomando los datos del problema de la clase 1.5:

Velocidad en Km/h						
60	65	40	80	80	90	45
70	100	70	50	80	55	120
75	65	90	85	70	100	55
110	70	95	70	80	115	100

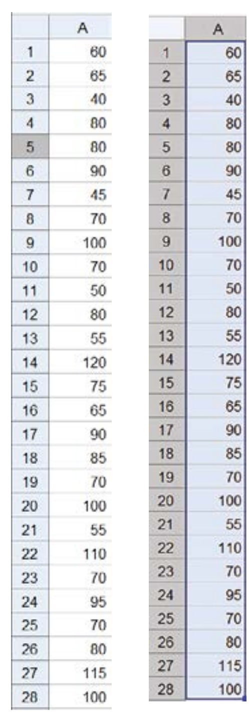
1. Se utilizará la vista de hoja de cálculo, para ello puedes utilizar el menú que se abre al iniciar GeoGebra en la opción Hoja de Cálculo, o bien, desde el menú vista dando click en la opción Hoja de Cálculo, y se abrirá una ventana como la que se muestra abajo.

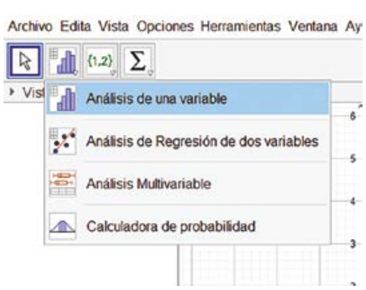


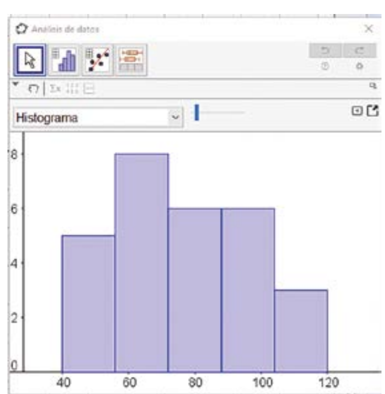
2. Ingresa los datos de la tabla de velocidades uno por uno en la columna A de la vista de Hoja de Cálculo.

3. Manteniendo presionado el clic izquierdo, selecciona todos los datos que se ingresaron, estos quedarán sombreados en un color azul suave.

4. Ahora utiliza el botón Análisis de una variable, luego se abrirá un cuadro de texto llamado "Fuente de datos", en ella aparecerán los datos seleccionados en el paso anterior, presiona Analiza y se mostrará una gráfica como la que se muestra a continuación.



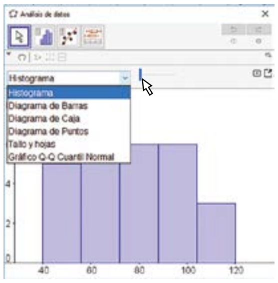




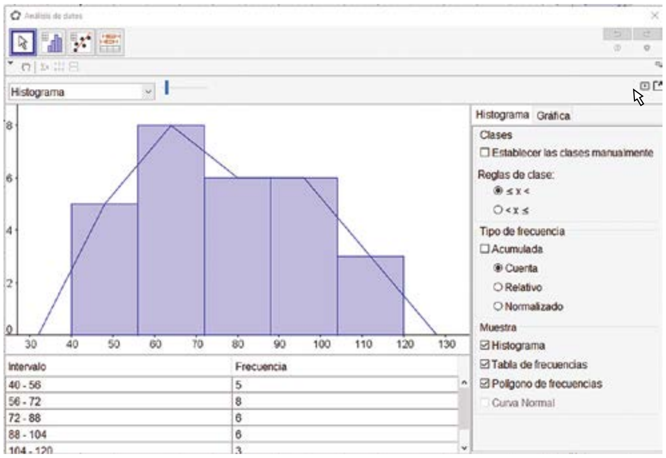
Unidad 8

223

5. Al expandir las opciones, puedes notar que la gráfica que se presenta es un histograma, y que es posible seleccionar diferentes tipos de gráficos estadísticos, entre los cuáles están el diagrama de barras (estudiado en educación básica), histograma (estudiado en 8° grado), diagrama de caja (estudiado en esta unidad) y otros diagramas que no se han estudiado por el momento.

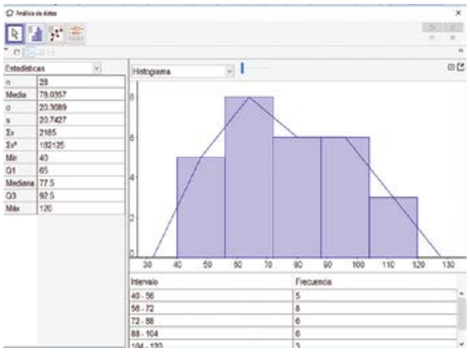


6. En la parte superior derecha puedes extender las opciones de la vista, en ella marca las opciones de tabla de frecuencias (la cual puedes construir manualmente) que creará una tabla de distribución de frecuencias de forma automática; y marca la opción polígono de frecuencias, y se obtendrá el siguiente resultado.



7. Finalmente selecciona la opción Estadísticas, ubicado en la parte superior izquierda, con ícono de un símbolo de sumatorio, así se obtendrán algunos estadísticos como la media, la desviación estándar (muestral y poblacional), cuartiles, mediana, mínimo, máximo, etc.

8. Comprueba la resolución de este problema, verificando tu respuesta y luego corrige si es necesario.



Actividades

Utiliza la herramienta de la hoja de cálculo de GeoGebra para resolver el problema de la clase 2.7 acerca de problemas de la unidad, para ello, como se requiere comparar datos por cada semana, ingresa en cada columna los datos de una semana, por ejemplo, los datos de la semana 1 en la columna A, la semana 2 en la columna B, y así sucesivamente hasta llegar a la semana 8 en la columna H. Luego selecciona todos los datos, y utiliza la opción de análisis multivariante.

Indicador de logro:

3.1 Utiliza un software matemático para realizar el análisis estadístico descriptivo de una serie de datos.

Secuencia:

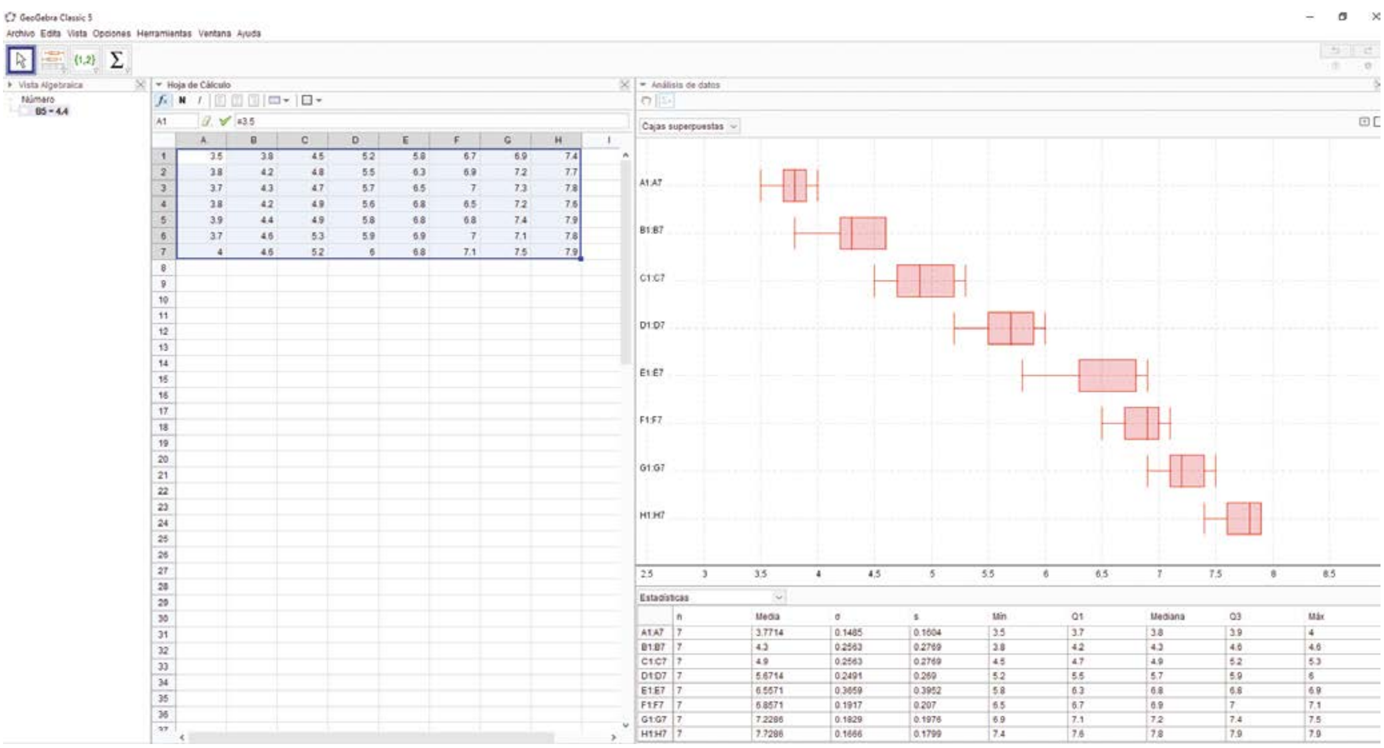
Luego de haber desarrollado todos los contenidos sobre los conceptos básicos de estadística descriptiva, se utilizará GeoGebra para hacer y realizar el análisis estadístico de series de datos.

Propósito:

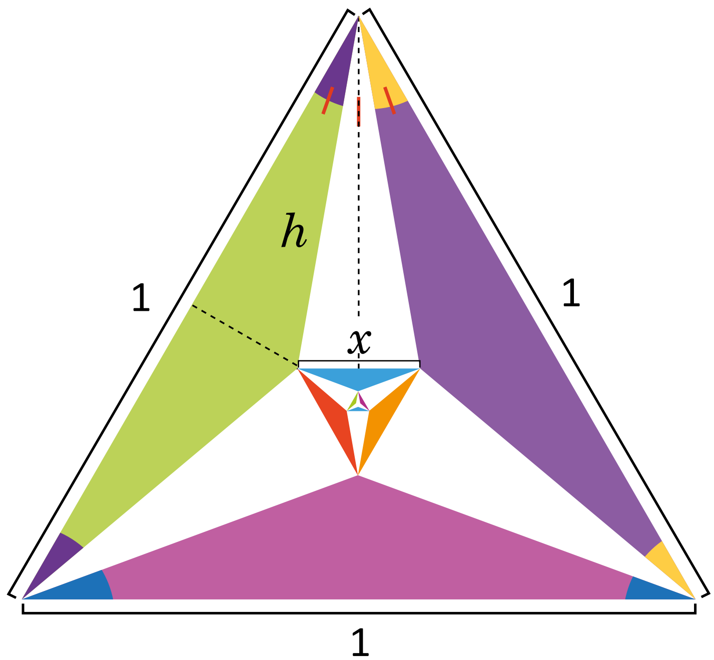
Utilizar software y contextualizar la forma de realizar análisis estadístico, en donde no es prioritario el cálculo, sino la interpretación y análisis que se pueda realizar de los cálculos realizados por el software.

Solución de problemas:

Siguiendo las indicaciones del problema, se obtendrá el siguiente resultado en GeoGebra:



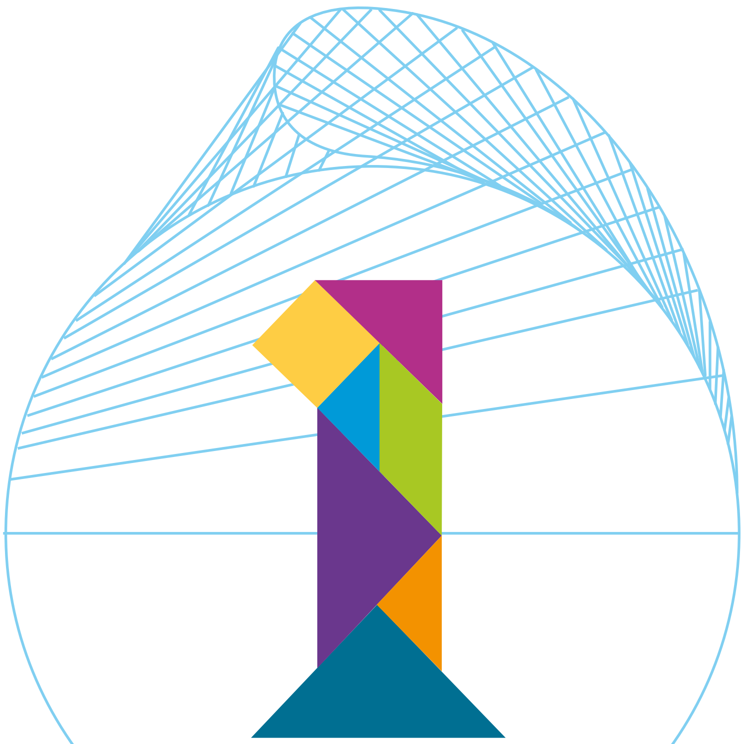
Con GeoGebra es muy sencillo generar la gráfica que se realizó en la clase 2.7, y con lo cual el énfasis puede ser en el análisis y la correcta interpretación de los resultados. En esta parte hay que destacar que, actualmente todos los análisis estadísticos utilizan software, debido a la eficiencia que esto supone, además de aspectos como reducción de errores de cálculo, y el hecho de que para trabajar con bases de datos gigantes (obtenidas de censos o estudios muestrales a gran escala) es humanamente imposible realizar el cálculo de los parámetros y estadísticos correspondientes. Finalmente, cabe destacar que Geogebra presenta muchas herramientas para trabajar diferentes áreas de la matemática, y es suficiente para realizar análisis estadístico con intención didáctica, sin embargo, no es un software adecuado para trabajar bases de datos gigantes; para ello se suelen usar diferentes softwares estadísticos como: R (libre), Stata (comercial), SPSS (comercial), etc.



x = ¿?

Cada ángulo mide 20°, trazando las alturas punteadas se cumple que $h = \dfrac{1}{2\cos 20°}$ y entonces sen 10° = x cos 20°, por lo tanto $x = \dfrac{\text{sen } 10°}{\cos 20°}$.

REPÚBLICA DE EL SALVADOR EN LA AMÉRICA CENTRAL



Bachillerato

Bachillerato 1 Segunda edición

Matemática Tomo 2

Sugerencia metodológica