ユニット 7. ベクトルと複素数

このユニットのねらい

ベクトルの基本的概念とその演算を学び、それらを複素数の幾何学的表示と関係づけ、デカルト座標面上でのベクトルの表示と演算を複素数平面上の複素数と比較して、ベクトルに関する特に重要な結果を確立させ、それらの結果を他の分野で応用する。

関係と進歩

中学3年

ユニット1：多項式の掛け算（9学年）
- 多項式のかけ算
- 特別な多項式
- 因数分解

ユニット 3：二次方程式（9学年）
- 二次方程式
- 二次方程式の応用

高校 1 年

ユニット 2：多項式と複素数の計算
- 乗法公式と因数分解
- 多項式の除法
- 二次方程式と複素数

ユニット 5：斜三角形の解法
- 鋭角の三角比
- 非鋭角の三角比
- 解法の斜三角形

ユニット 6：三角方程式と恒等式
- 三角関数の公式
- 三角方程式

ユニット7：ベクトルと複素数
- ベクトル
- ベクトルの点乗積
- 複素数
- GeoGebraを使った演習

このユニットの学習計画

レッスン	時間	授業
1. ベクトル	1	1. ベクトル
	1	2. ベクトルの足し算と引き算
	1	3. 内積
	1	4. 底辺でのベクトルの座標
	1	5. 座標におけるベクトルの計算
	1	6. 点のベクトルと座標
	1	7. 平行度
	1	8. 学んだことで練習しましょう
2. ベクトルの内積	1	1. 直行投影
	1	2. 平行ベクトルの内積
	1	3. 平行ではない（共線ではない）ベクトルの内積
	1	4. 内積の三角関数的形状
	1	5. 直交平面内のベクトルの内積
	1	6. 学んだことで練習しましょう
	1	レッスン 1 とレッスン 2 のテスト
3. 複素数	1	1. 複素数の幾何学的表現
	1	2. 複素平面上の複素数の演算
	1	3. 複素数の三角関数式
	1	4. 複素数の三角関数式での積算
	1	5. 複素数の三角関数式での除算
	1	6. ド・モアブルの定理

レッスン	時間	授業
	1	7. 学んだことで練習しましょう
	2	8. このユニットの問題
4. GeoGebraを使った演習	1	1. ベクトルの基本概念
	1	2. 問題の解き方
	1	レッスン 3 のテスト

全25コマ + レッスン 1 とレッスン 2 のテスト + レッスン 3 のテスト

各レッスンの要点

レッスン 1：ベクトル
ベクトルのコンセプトを理解し、ベクトル、内積、底辺でのたし算とひき算を学ぶ事。

レッスン 2：ベクトルの内積
平行ベクトルの内積を理解し、直行投影を利用して適当なベクトルを二つと三角比形状を学ぶ事。

レッスン 3：複素数
ここでは正規直交基底でのベクトルの表現を複素平面上での複素数の幾何学的表現を学びます。複素数の掛け算と割り算及び表現に用いる複素数の三角方程式を学びます。

レッスン 4：GeoGebra を使った演習
ベクトルで作業する基本的なツールを使用し、ユニットにおいて解いた問の結果を確認する事。

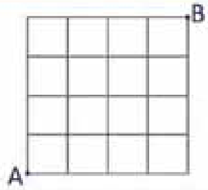
レッスン 1 ベクトル

1.1 ベクトル

導入問題

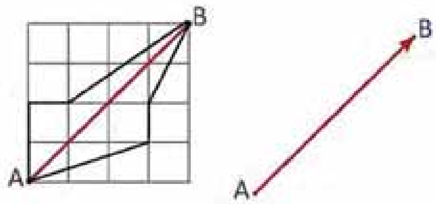
ある人がサンサルバドルの点 A に位置していて、点 B に移動したがっています。解を求めなさい。

a) A から B に行く方法を最低でも3つ。
b) A から B に行くための最短ルート。
c) B から A ではなく、A から B に行くルートであるという表現方法。



解法

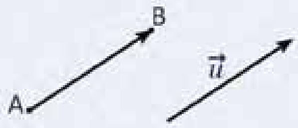
a) 右の図には A から B に行く選択肢がいくつか示されています。
b) A から B に行く最短ルートは赤色でしめされています。
c) このルートが A から B に続いていると表現する方法として出来るのは図に示されているような矢印を使う事です。



定義

A から**開始**し、B にて**終了**する矢印は**方向セグメント**として知られています。

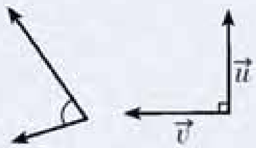
長さが等しく、同じ方角（傾斜）と方向（矢印の指す方向）を指すセグメントの集団は**ベクトル**として知られています。あるベクトルに依存するセグメントにあるベクトルを表します。該当するセグメントの開始点が A で終了点が B とした場合、ベクトルを $\overrightarrow{AB}$ とします。ベクトルの開始点と終了点で表現しない場合、小文字の a、b、c、等の様にも表記できます。例として、$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$。



二つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は表現するセグメントが同じ長さ、方角、方向であれば同じであり、平行移動により各々計算する事が出来ます。

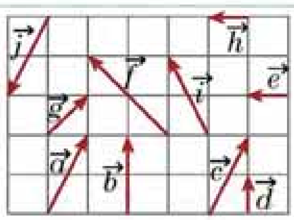
ベクトル $\vec{u}$ の長さは**ルール**としてベクトル $\vec{u}$ より知ることが出来、$\|\vec{u}\|$ として表現されます。ベクトル $\vec{u}$ はルールが 1 であれば、**単体**とします。よって、$\|\vec{u}\| = 1$ となります。

二つの**ベクトルの間の角度**については開始点を繋ぎ測定する事ができ、0° から 180° の値が用いられます。二つのベクトル、$\vec{u}$ と $\vec{v}$ は双方で出来る角度が 90° であれば、**直行投影**となります。

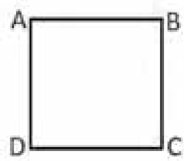


問題

1. 各マスの四角形が 1 とした場合、そこに記載のベクトルに関して次を答えてください。
   a) どのベクトルが同一ですか？
   b) いくつのベクトルが同一のルールを共有していますか？
   c) どのベクトルが単体ですか？
   d) どのベクトルが直行投影ですか？



2. ABCD の側面を 1 としたときに次を答えてください。
   a) どのベクトルが同一ですか？
   b) ベクトル $\overrightarrow{AC}$ のルールは？
   c) どのベクトルが単体ですか？
   d) どのベクトルが直行投影ですか？



達成の目安

1.1 証明を理解し通常のベクトル、同一のベクトル、単体のものと直行投影のルールを確認して下さい。

学習の流れ：

指定セグメント、セグメントの角度や長さ等の様な幾何学を通じて、ベクトルの定義を説明してください。

ねらい：

導入問題はベクトルを指定セグメントとして扱っており、この表現を用いてベクトルを学びます。

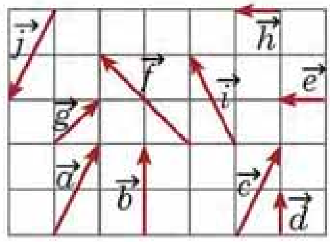
問題の解答：

1a) $\vec{a}=\vec{c}, \vec{e}=\vec{h}$

1b) $\vec{a}$、$\vec{c}$、$\vec{i}$ と $\vec{j}$ は同一で、$\vec{d}$、$\vec{e}$ と $\vec{h}$ は同一です。

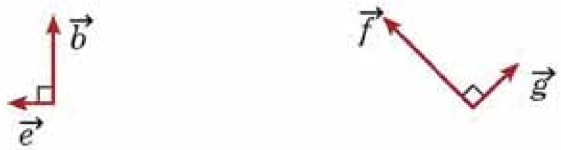
$\|\vec{a}\| = \|\vec{c}\| = \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

$\|\vec{d}\| = \|\vec{e}\| = \|\vec{h}\| = 1$



1c) $\vec{d}, \vec{e}, \vec{h}$

1d) $\vec{b}$と$\vec{e}$, $\vec{b}$と$\vec{h}$, $\vec{d}$と$\vec{e}$, $\vec{d}$と$\vec{h}$, $\vec{g}$と$\vec{f}$



文字式 b)では長さが一致するように二つのベクトルを上書きする事でルールの同一を確認できます。

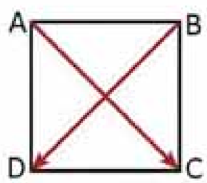
二つのベクトル間での角度は分度器や確認できている角度から確認する事が出来ます。

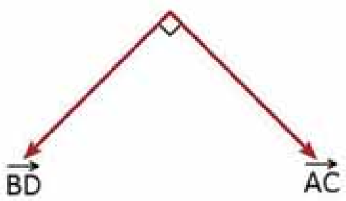
2a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$

2b) $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

2c) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CB}$

2d) $\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CD}$と$\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$と$\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$と$\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CA}$と$\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$と$\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CA}$と$\overrightarrow{DB}$





2c) での回答によりベクトルの同一性が確認できたので、最初の 4 つのベクトルのみで表現する事が出来ます。これは生徒の理解度に左右されます。$\overline{AB} = \overline{CD}$ が例としてあげられます。

文字式 d) では全ての直行投影ベクトルのペアを書く必要はありません。例として $\overline{AB}$ と $\overline{BC}$ は $\overline{BC}=\overline{AD}$ なので書かれていません。

生徒は四角の側面のみがベクトルとなりうるのではなく、傾斜もなりうるという事を認識しなくてはなりません。

レッスン 1

1.2 ベクトルの足し算と引き算

導入問題

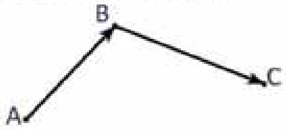
次の文字式を解いてください。

a) B を通過しながら A から C へ行く方法をベクトルで表現してください。

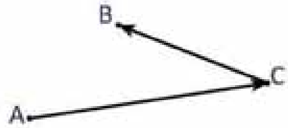
b) C を通過しながら A から B へ行く方法をベクトルで表現してください。

解法

a) 表現としては：



b) 表現としては：



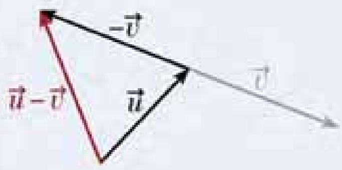
定義

ベクトル $\vec{u}$ の最終点を別のベクトル $\vec{v}$ の開始点とつなげると、**ベクトルのたし算**が確立されます。図の通り、そのベクトルの開始点を $\vec{u}$ とし、最終点を $\vec{v}$ となります。導入問題の文字式 a) では $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ が確認されます。

3つのベクトルにより $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ が確認され、$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$（交換法則）と $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$（結合法則）。

ベクトル $\overrightarrow{AB}$ によりベクトル $\overrightarrow{BA}$ が確定され、ベクトル $\overrightarrow{AB}$ の**相対**は $-\overrightarrow{AB}$ となるので、結果としては $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$ となります。

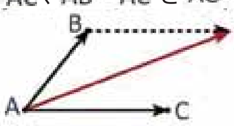
図に示す通り、ベクトル $\vec{u}$ とベクトル $\vec{v}$ の**ひき算**をベクトル $\vec{u}$ と $-\vec{v}$ のたし算 $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$ と確認します。導入問題の文字式 b) では $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$ が確認されます。



ひき算 $\vec{u}-\vec{u}=\vec{u}+(-\vec{u})$ を実施する事で分かるベクトルは零ベクトルとして知られており、$\vec{0}$ となるので、$\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$ となります。

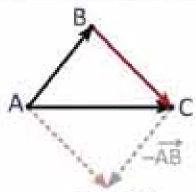
例

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ を描いてください。



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$



$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

これらのベクトルの表現はとても重要になります。

ユニット 7

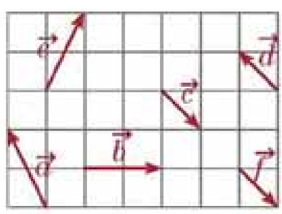
問題

ノートにマス目のベクトルを描き、各文字式の表すベクトルを特定してください。

a) $\vec{a}+\vec{b}$　　b) $\vec{a}+\vec{c}$　　c) $\vec{c}+\vec{d}$

d) $\vec{a}+\vec{e}+\vec{c}$　　e) $\vec{a}-\vec{b}$　　f) $\vec{d}-\vec{f}$

g) $\vec{c}-\vec{f}$　　h) $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$



179

達成の目安

1.2 ベクトルのたし算やひき算から出るベクトルを描きます。

学習の流れ：

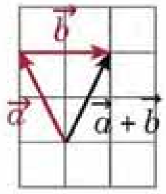
対抗ベクトルと零ベクトルのコンセプトよりベクトル間での計算方法を確認します。計算はセグメントを利用して実施します。後にこれを簡素化するための底辺と座標のコンセプトを説明します。

ねらい：

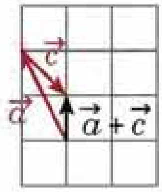
導入問題はベクトルのたし算のイメージをするためです。この定義にてひき算を表すイメージは、ベクトルのたし算と対立ベクトルで解けますが、例では元となるベクトルから確認します。

問題の解答：

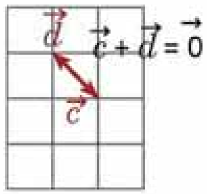
a)



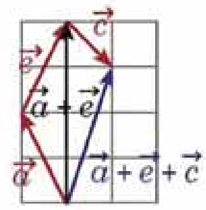
b)



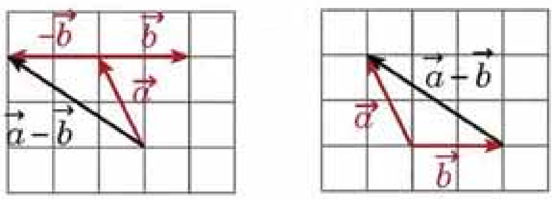
c)



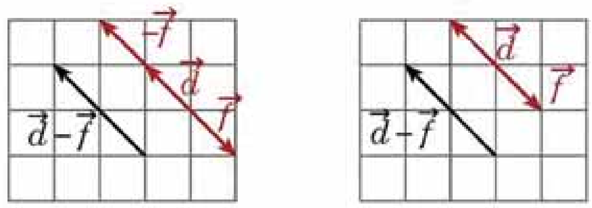
d)



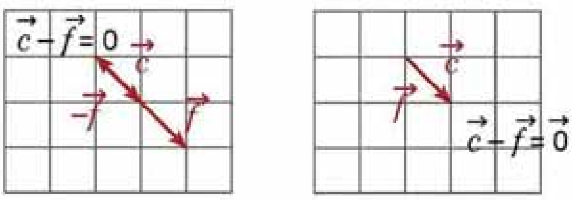
e)



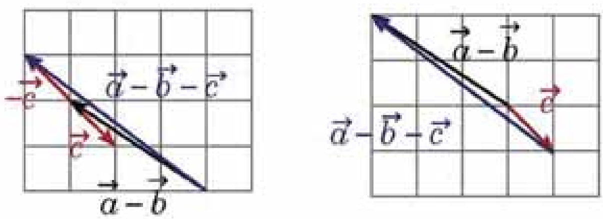
f)



g)



h)



文字式 d) では最初の 2 つのベクトルを関連付けて実施して、その後三番目を足します。文字式 e) よりひき算の違う二つの方法を説明します。一つ目は対立ベクトルのたし算より、二つ目は例のスキームを利用します。h) では e) の結果を復習します。

レッスン 1

1.3 内積

導入問題

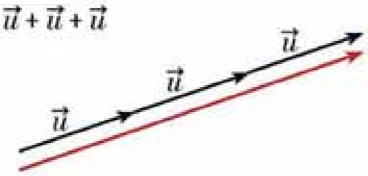
次のベクトルの足し算にて結果として得られるベクトルを描いてください。

a) $\vec{u}+\vec{u}+\vec{u}$

b) $-\vec{u}-\vec{u}$

解法

a) $\vec{u}+\vec{u}+\vec{u}$



b) $-\vec{u}-\vec{u}$

定義

ベクトル $\vec{u}$ と実数では $\vec{u}\neq\vec{0}$ と $r\neq 0$ なので内積が確認できるので $(r>1)$ もしくは $(0<r<1)$ 同一の方向にて $(r>0)$ もしくは反対側に $(r<0)$ 画で表現でき、結論として $r\vec{u}$。

内積では次が成り立ちます。$\|r\vec{u}\| = |r|\,\|\vec{u}\|$。$0\vec{u} = \vec{0}$ で、$r\vec{0}=\vec{0}$。

ベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ を考慮すると、実数 r と s、内積の次の特性が成り立ちます。

1. $r(s\vec{u}) = rs\vec{u}$　　2. $(r+s)\vec{u} = r\vec{u}+s\vec{u}$　　3. $r(\vec{u}+\vec{v}) = r\vec{u}+r\vec{v}$

$\vec{0}$ とは異なるベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ はこれらは表現するベクトルに対するセグメントが**平行**の場合、それ自体も平行となります。という事は実数 r が存在し、よって $\vec{u}=r\vec{v}$ 。

例

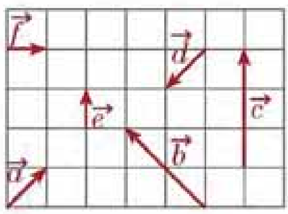
$\vec{u}$ と $\vec{v}$ より表現 $2(2\vec{u}+3\vec{v})-3(2\vec{u}-\vec{v})$ からなるベクトルを求めてください。

$$\begin{aligned}2(2\vec{u}+3\vec{v})-3(2\vec{u}-\vec{v}) &= 2(2\vec{u})+2(3\vec{v})+(-3)(2\vec{u})+(-3)(-\vec{v})\\ &= 4\vec{u}+6\vec{v}+(-6\vec{u})+3\vec{v}\\ &= -2\vec{u}+9\vec{v}\end{aligned}$$

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ を復習しよう。

問題

1. 自身のノートにマス目のベクトルを描き、各文字式が示すベクトルを求めましょう。



a) $4\vec{e}$　　b) $4\vec{a}$　　c) $\frac{1}{3}\vec{c}$

d) $-3\vec{f}$　　e) $-\frac{3}{2}\vec{b}$　　f) $2\vec{d}+3\vec{e}$

2. $\vec{u}$ と $\vec{v}$ より各表現の結果からなるベクトルを求めてください。

a) $4\vec{u}+3\vec{v}-\vec{u}-2\vec{v}$　　b) $(\vec{u}-2\vec{v})-(-3\vec{u}+2\vec{v})$　　c) $3(2\vec{u}+4\vec{v})$　　d) $3(-2\vec{u}+\vec{v})-2(3\vec{u}-4\vec{v})$

達成の目安

1.3 あるベクトルと内積を掛けた結果のベクトルを描いてください。

学習の流れ：

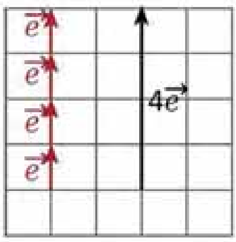
ベクトルのたし算もひき算も理解出来たところで、整数が負の数であれば積がベクトルのたし算を同様のベクトル整数にします。こちらの定義では平行ベクトルを理解する事が出来ます。

ねらい：

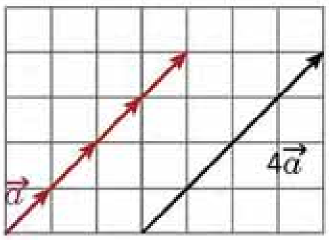
導入問題は内積を整数に対し小さくする事が出来ます。内積の定義ではどの整数も収縮と拡張により確定しています。他にも代数式の様にベクトルを計算する内積も理解します。

問題の解答：

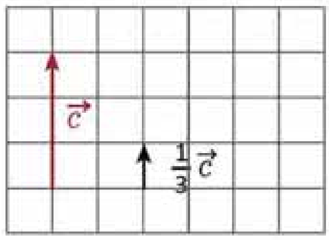
1a)



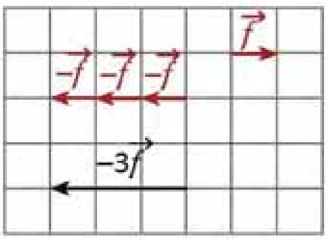
1b)



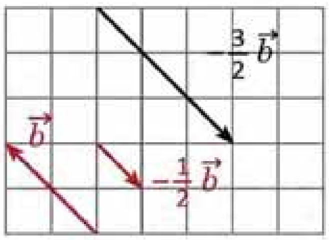
1c)



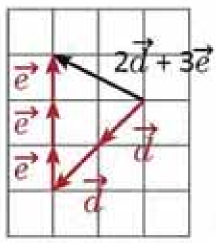
1d)



1e)



1f)



2a) $4\vec{u}+3\vec{v}-\vec{u}-2\vec{v}=3\vec{u}+\vec{v}$

2b) $(\vec{u}-2\vec{v})-(-3\vec{u}+2\vec{v})=4\vec{u}-4\vec{v}$

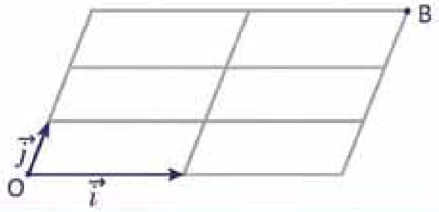
2c) $3(2\vec{u}+4\vec{v})=6\vec{u}+12\vec{v}$

2d) $3(-2\vec{u}+\vec{v})-2(3\vec{u}-4\vec{v})=-12\vec{u}+11\vec{v}$

1.4 底辺でのベクトルの座標*

導入問題

次の図は平行四辺形で、ベクトル $\overline{OB}$ とベクトル $\vec{i}$ と $\vec{j}$ を表します。

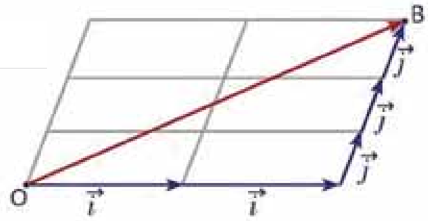


解法

ベクトル $\overline{OB}$ はベクトル $\vec{i}$ と $\vec{j}$ のたし算として合わせる事が出来ます。

$$\overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{i} + \vec{j} + \vec{j} + \vec{j}.$$

内積を利用して $\overline{OB} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ が成り立ちます。



まとめ

ベクトルのペア $\vec{i}$、$\vec{j}$ は双方とも $\vec{0}$ とは違い、平行でありません。これらは**ベクトルの底辺**として知られます。

点 O はベクトルの底辺の**原点**として知られ、全てのベクトル $\vec{u}$ では点 M となる $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ が成り立ちます。そして全てのベクトル $\overrightarrow{OM}$ では唯一の整数 x、y である $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ が存在します。そしてこれらのベクトルはペア $\overrightarrow{OM} = (x, y)$ として表せます。これらのペア (x, y) は $\overrightarrow{OM}$ のベクトルの座標として知られ、その底辺は $(\vec{i}, \vec{j})$ となります。

底辺が**直行投影**となるのは $\vec{i}$ と $\vec{j}$ が直行投影であり、底辺が**正規直行**系 となるのは直行投影でありながら $\vec{i}$ も $\vec{j}$ も単体（ルールはイコール 1）となる時です。

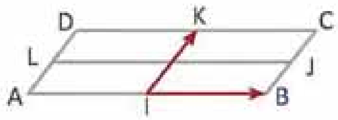
例

ベクトル $\overline{IC}$、$\overline{IB}$、$\overline{IK}$、$\overline{IJ}$、$\overline{IA}$、$\overline{ID}$ を底辺の $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IK})$ で座標を求めて下さい。

$\overrightarrow{IC} = (1)\overrightarrow{IB} + (1)\overrightarrow{IK}$　　$\overrightarrow{IB} = (1)\overrightarrow{IB} + (0)\overrightarrow{IK}$

$\overrightarrow{IK} = (0)\overrightarrow{IB} + (1)\overrightarrow{IK}$　　$\overrightarrow{IJ} = (1)\overrightarrow{IB} + \left(\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{IK}$

$\overrightarrow{IA} = (-1)\overrightarrow{IB} + (0)\overrightarrow{IK}$　　$\overrightarrow{ID} = (-1)\overrightarrow{IB} + (1)\overrightarrow{IK}$



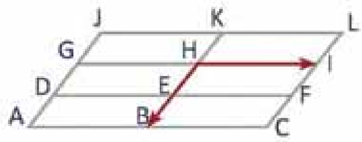
したがって、ベクトルの座標は $(1, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $(-1, 0)$, $(-1, 1)$ 。

問題

底辺 $(\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HB})$ を考慮し、各文字式のベクトルの座標を求めて下さい。

a) $\overrightarrow{HA}$　　b) $\overrightarrow{HK}$　　c) $\overrightarrow{HF}$　　d) $\overrightarrow{HJ}$

e) $\overrightarrow{HH}$　　f) $\overrightarrow{HI}$　　g) $\overrightarrow{HB}$　　h) $\overrightarrow{HE}$



ユニット 7

181

達成の目安

1.4 基底を利用しベクトルの座標を求めましょう。

学習の流れ：

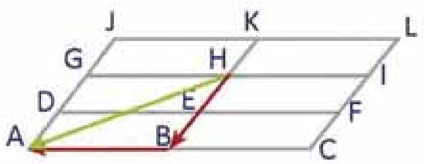
この授業ではベクトルを他の表し方をするために基底のコンセプトを学びます。これは後にベクトルのルールのための方程式を確認するためと、ベクトルから複素数を表現するために活用できます。

ねらい：

導入問題ではベクトルと内積のたし算を利用します。定義上、ベクトルの座標を書く際、利用した底辺を参考するべきとなります。例のように座標の順番の重要性を確認する事になります。

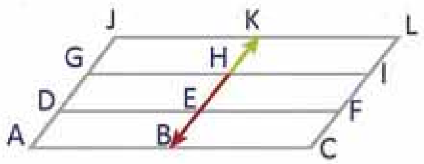
問題の解答：

a) $\overrightarrow{HA} = (-1)\overrightarrow{HI} + (1)\overrightarrow{HB}$



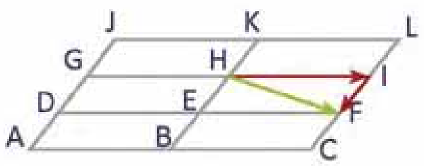
座標： $(-1, 1)$

b) $\overrightarrow{HK} = (0)\overrightarrow{HI} + \left(-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{HB}$



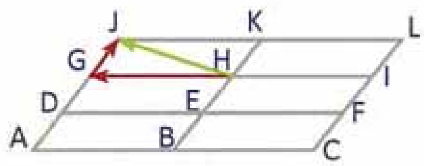
座標： $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

c) $\overrightarrow{HF} = (1)\overrightarrow{HI} + \left(\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{HB}$



座標： $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

d) $\overrightarrow{HJ} = (-1)\overrightarrow{HI} + \left(-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{HB}$



座標： $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

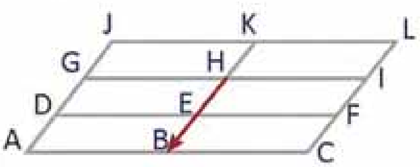
e) $\overrightarrow{HH} = (0)\overrightarrow{HI} + (0)\overrightarrow{HB}$

$(0, 0)$

f) $\overrightarrow{HI} = (1)\overrightarrow{HI} + (0)\overrightarrow{HB}$

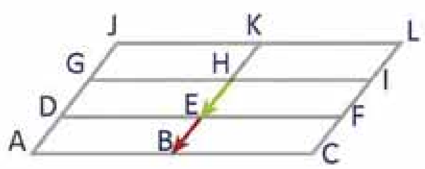
$(1, 0)$

g) $\overrightarrow{HB} = (0)\overrightarrow{HI} + (1)\overrightarrow{HB}$



座標： $(0, 1)$

h) $\overrightarrow{HE} = (0)\overrightarrow{HI} + \left(\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{HB}$



座標： $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

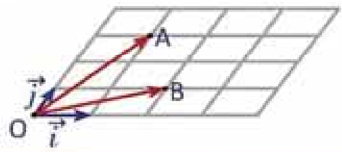
1.5 座標におけるベクトルの計算

導入問題

次のベクトルを底辺 $(\vec{i}, \vec{j})$ で求めてください。

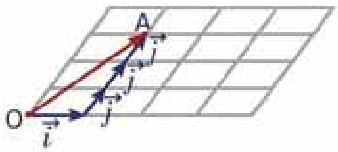
a) $\overrightarrow{OA}$　　b) $\overrightarrow{OB}$　　c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

d) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$　　e) $2\overrightarrow{OB}$　　f) $\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$



解法

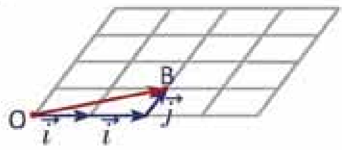
a)



$\overrightarrow{OA}=\vec{i}+3\vec{j}$

$\overrightarrow{OA}=(1, 3)$

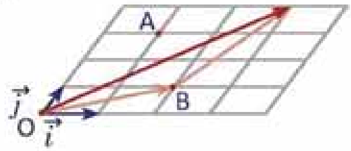
b)



$\overrightarrow{OB}=2\vec{i}+\vec{j}$

$\overrightarrow{OB}=(2, 1)$

c)



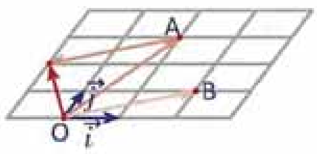
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{i}+\vec{j}$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=3\vec{i}+4\vec{j}$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(3, 4)$

$(3, 4)=(1+2, 3+1)$ です。

d)



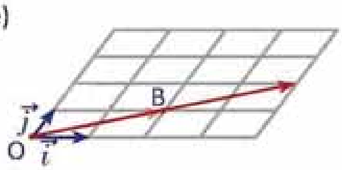
$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{i}+3\vec{j}-(2\vec{i}+\vec{j})$

$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=-\vec{i}+2\vec{j}$

$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=(-1, 2)$

$(-1, 2)=(1-2, 3-1)$ です。

e)



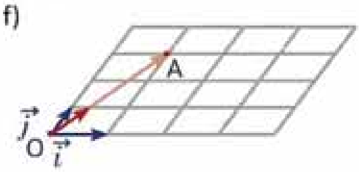
$2\overrightarrow{OB}=2(2\vec{i}+\vec{j})$

$2\overrightarrow{OB}=4\vec{i}+2\vec{j}$

$2\overrightarrow{OB}=(4, 2)$

$(4, 2)=(2\times 2, 2\times 1)$ です。

f)



$\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}(\vec{i}+3\vec{j})$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}\vec{i}+\vec{j}$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

$\left(\frac{1}{3}, 1\right)=\left(\frac{1}{3}\times 1, \frac{1}{3}\times 3\right)$ です。

まとめ

二つのベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ でその座標が $\vec{u}=(x, y)$ と $\vec{v}=(x', y')$ で整数 r の場合成り立つのは

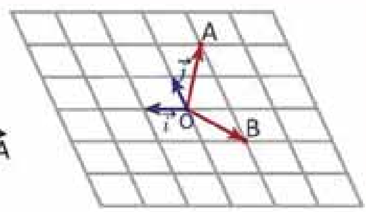
$\vec{u}+\vec{v}=(x+x', y+y')$　　$\vec{u}-\vec{v}=(x-x', y-y')$　　$r\vec{u}=(rx, ry)$

問題

次のベクトルを底辺 $\vec{i}$、$\vec{j}$ で求めてください。

a) $\overrightarrow{OA}$　　b) $\overrightarrow{OB}$　　c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$　　d) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$

e) $-3\overrightarrow{OB}$　　f) $\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$　　g) $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$　　h) $3\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OA}$



182

達成の目安

1.5 ベクトルの内積、たし算もしくはひき算の結果のベクトルの座標を求めてください。

学習の流れ：

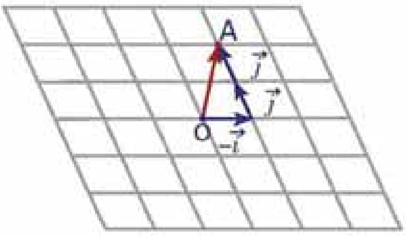
この授業では特定の基底より経たベクトルの座標を計算する事で推進されます。

ねらい：

導入問題ではベクトルのたし算がベクトルの座標を順番にたし算していくと可能であることを理解します。これは結果より確認する事が出来ます。

問題の解答：

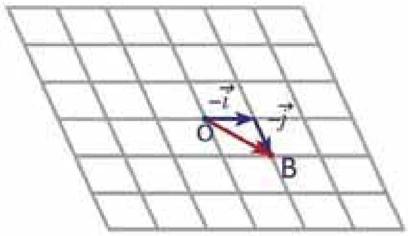
a)



$\overrightarrow{OA} = -\vec{i} + 2\vec{j}$

$\overrightarrow{OA} = (-1, 2)$

b)



$\overrightarrow{OB} = -\vec{i} - \vec{j}$

$\overrightarrow{OB} = (-1, -1)$

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (-1 + (-1), 2 + (-1))$
$= (-2, 1)$

d) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (-1 - (-1), 2 - (-1))$
$= (-1 + 1, 2 + 1)$
$= (0, 3)$

e) $-3\overrightarrow{OB} = (-3(-1), -3(-1))$
$= (3, 3)$

f) $\frac{3}{2}\overrightarrow{OA} = \left(\frac{3}{2}(-1), \frac{3}{2}(2)\right)$
$= \left(-\frac{3}{2}, 3\right)$

g) $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} = (-1, 2) + (-2, -2)$
$= (-3, 0)$

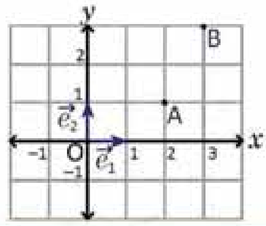
h) $3\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OA} = (-3, -3) - (-2, 4)$
$= (-1, -7)$

レッスン 1

1.6 点のベクトルと座標

導入問題

図上には A(2, 1) と B(3, 3) は 2 つの点で、正規直行底辺上に座標 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ を持ちます。

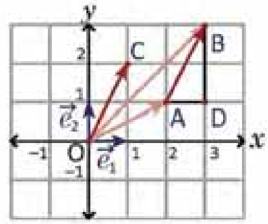


a) ベクトル $\overline{AB}$ の座標を計算してください。

b) ベクトル $\overline{AB}$ のルールを求めて下さい。

解法

a) $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ の正規直交基底上にて (2, 1) と (3, 3) を座標にもつベクトル $\overline{OA}$ と $\overline{OB}$ を考慮します。



すると、次の式が成り立ちます。

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$
$$\overrightarrow{AB} = (3, 3) - (2, 1)$$
$$\overrightarrow{AB} = (1, 2) = \overrightarrow{OC}.$$

b) このベクトルのルールはピタゴラスの公式を利用して ΔABD を計算する事で求めることができます。よって、

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

まとめ

ベクトル $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$、$\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ を定義する図上の点 E_1(1、0) と E_2(0、1) を考慮します。
ベクトル $\vec{e}_1$ と $\vec{e}_2$ は正規直交基底を構成します。

図上の点 A(x, y) では $\overrightarrow{OA} = (x, y)$ が成り立ち、底辺 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ となり、$\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ です。
B$(x'、y')$ が別の点であれば、下記のようになります。

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x' - x, y' - y) \qquad \text{そして、}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}.$$

問題

1. 点 A と B は上記の底辺 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ により、ベクトル $\overline{AB}$ の座標とベクトルのルールを確定します。

a) A = (2, 1); B = (3, 1)　　b) A = (3, 0); B = (1, 2)　　c) A = (1, 1); B = (0, 2)

d) A = (0, 1); B = (−2, 1)　　e) A = (−1, −3); B = (−1, −2)　　f) A = (1, −1); B = (1, −1)

2. ベクトル $\vec{u} = (2, 4)$ と点 A = (1, 3) の底辺 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ の座標を考慮し、$\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ を満たす点 B の座標を求めてください。

ユニット 7

達成の目安

1.6 直交座標系上にて点の座標として、適当なベクトルの座標を表してください。

学習の流れ：

今は直交座標系の最も単純なベクトル底辺を勉強し、座標の定義を学びます。

ねらい：

導入問題ではベクトルの違いを利用して 2 つの点からベクトルを描きます。そしてその座標よりルールを割り出す事が出来ます。

問題の解答：

1a) $\overrightarrow{OA} = (2, 1), \overrightarrow{OB} = (3, 1)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\\ &= (3, 1) - (2, 1)\\ &= (3 - 2, 1 - 1)\\ &= (1, 0)\end{aligned}$$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$

1b) $\overrightarrow{OA} = (3, 0), \overrightarrow{OB} = (1, 2)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\\ &= (1, 2) - (3, 0)\\ &= (1 - 3, 2 - 0)\\ &= (-2, 2)\end{aligned}$$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

1c) $\overrightarrow{OA} = (1, 1), \overrightarrow{OB} = (0, 2)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\\ &= (0, 2) - (1, 1)\\ &= (0 - 1, 2 - 1)\\ &= (-1, 1)\end{aligned}$$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} = \sqrt{2}$

1d) $\overrightarrow{OA} = (0, 1), \overrightarrow{OB} = (-2, 1)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\\ &= (-2, 1) - (0, 1)\\ &= (-2 - 0, 1 - 1)\\ &= (-2, 0)\end{aligned}$$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$

1e) $\overrightarrow{OA} = (-1, -3), \overrightarrow{OB} = (-1, -2)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\\ &= (-1, -2) - (-1, -3)\\ &= (-1 - (-1), -2 - (-3))\\ &= (0, 1)\end{aligned}$$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$

1f) $\overrightarrow{OA} = (1, -1), \overrightarrow{OB} = (1, -1)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\\ &= (1, -1) - (1, -1)\\ &= (1 - 1, -1 - (-1))\\ &= (0, 0)\end{aligned}$$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$

2. $\vec{u} = (2, 4)$ と A = (1, 3)、点 B は $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ です。

$AB = OB - OA$

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{OB} = (2 + 1, 4 + 3)$

$\overrightarrow{OB} = (3, 7)$

したがって、B = (3, 7)。

この点では座標を利用した際のベクトル計算の単純さに気付いて頂きたいです。しかし、視覚補助を活用する事も可能です。

1.7 平行度

導入問題

ベクトル $\vec{u}=(2, 3)$ を考慮し、$\vec{u}$ ($\vec{u} \parallel \vec{v}$) に平行なベクトル $\vec{v}=(x, -9)$ の値 x を求めてください。

解法

次を満たす整数 r を考慮します。

$$\vec{v}=r\vec{u}$$
$$(x, -9)=r(2, 3)$$
$$(x, -9)=(2r, 3r)$$

二つのベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ は $\vec{0}$ と違い、整数 r で $r\vec{u}=\vec{v}$ を満たす整数があると平行です。

そうすると順守すべきは

$$\begin{cases} x=2r \ldots (1) \\ -9=3r \ldots (2) \end{cases}$$

その後、方程式 (2) を解き、 $r=(-9)\div 3=-3.$

結果として最終的に r の値を (1) に代入し： $x=2(-3)=-6.$

したがってベクトル $\vec{v}$ の座標は(–6、–9)。

まとめ

ベクトル $\vec{u}=(x, y)\neq\vec{0}$ において他のベクト $\vec{v}$ は $\vec{u}$ に対し平行で、ただしそれは整数 r が $\vec{v}=(rx, ry)$ である事とします。

しかし、正規直行底辺にてベクトル $\vec{v}$ のルールにおいては次が成り立ちます。

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{(rx)^2+(ry)^2}=|r|\sqrt{x^2+y^2}=|r|\,\|\vec{u}\|.$$

ベクトル $u=(x,\ y)$ は違います。零ベクトルは x か y と違う場合（双方込み）。

すべての整数 r に対し $\sqrt{r^2}=|r|$ が成り立ちます。

例

ベクトル $\vec{u}=(-3, 4)$ に平行なベクトルでルールが 15 のものを特定してください。

もし $\vec{v}$ が $\vec{u}$ に平行なベクトルであれば、$\vec{v}=r\vec{u}$ が成り立ちますので、

$$\|\vec{v}\|=|r|\,\|\vec{u}\|$$
$$15=|r|\sqrt{(-3)^2+4^2}$$
$$15=5|r|$$
$$|r|=3$$
$$r=\pm3,$$

よってベクトルは：$3\vec{u}=3(-3, 4)=(-9, 12)$ と$-3\vec{u}=-3(-3, 4)=(9, -12)$。

問題

1. $\vec{v}$ の座標を計算し、$\vec{u}$ と $\vec{v}$ が平行になるようにしてください。

   a) $\vec{u}=(2, 1), \vec{v}=(x, 3)$　b) $\vec{u}=(3, 1), \vec{v}=(x, -3)$　c) $\vec{u}=(6, 3), \vec{v}=(2, x)$　d) $\vec{u}=(2, 4), \vec{v}=(-1, x)$

2. ベクトル $\vec{u}$ に対し適当なルールで平行なベクトルを特定してください。正規直交基底上にて座標を考慮してください。

   a) $\vec{u}=(4, 3)$, ルール 10　b) $\vec{u}=(-3, -4)$, ルール 1　c) $\vec{u}=(1, 2)$, ルール 5　d) $\vec{u}=(2, 2)$, ルール 4

3. A = (1, 2)、B = (3, 5) と D = (0, 0) の場合に、平行四辺形 ABCD 上の点 C の座標を見つけてください。

達成の目安

1.7 ベクトル間での平行の定義を利用し、座標で表されたベクトルの問題を解いてください。

学習の流れ：

平行のベクトルについては授業で説明をしました。1.3 内積について学びました。この授業ではベクトルの座標を利用して平行を学びます。そして平行だった場合のベクトルのルールの方程式を確認していきます。

ねらい：

導入問題を解くには生徒は平行の証明と整理偶数を利用します。例では他の平行するベクトルに関する問題とその解答が見られます。

問題の解答：

1a) $\vec{u} = (2, 1), \vec{v} = (x, 3)$

$v = r\vec{u}$

$(x, 3) = r(2, 1)$

$(x, 3) = (2r, r)$

$\begin{cases} x = 2r \ldots (1) \\ 3 = r \ldots (2) \end{cases}$

$r = 3$

$x = 2(3) = 6$

したがって、$\vec{v} = (6, 3)$ 。

1b) $\vec{v} = (-9, -3)$

1c) $\vec{v} = (2, 1)$

1d) $\vec{v} = (-1, -2)$

2a) $\vec{u} = (4, 3)$, ルール 10

$\vec{v} = r\vec{u}$

$\|\vec{v}\| = |r|\,\|\vec{u}\|$

$10 = |r|\sqrt{4^2 + 3^2}$

$10 = 5|r|$

$|r| = 2$

$r = \pm 2$

よってベクトルは：

$2\vec{u} = (8, 6)$ と$-2\vec{u} = (-8, -6)$.

2b) $\vec{u} = (-3, -4)$, ルール 1

ベクトルは：$\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$と$\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

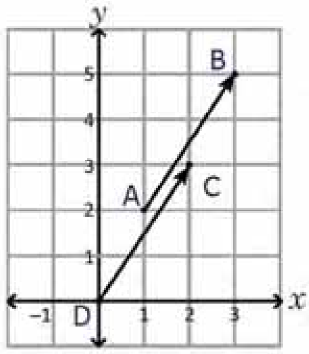
2c) $\vec{u} = (1, 2)$, ルール 5

ベクトルは：$(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$と$(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$

2d) $\vec{u} = (2, 2)$, ルール 4

ベクトルは：$(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$と$(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

3. A = (1, 2), B = (3, 5), D = (0, 0).



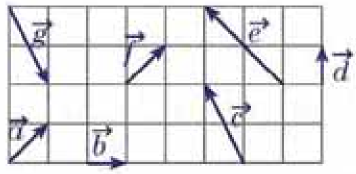
ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{DC}$ は平行もしくは同一でなくてはなりません。

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = (3, 5) - (1, 2) = (2, 3)$。

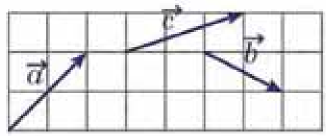
そして D = (0, 0) なので、C = (2, 3)。

1.8 学んだことで練習しましょう

1. 各マスの四角形が 1 とした場合、そこに記載のベクトルに関して次を答えてください。
   a) どのベクトルが同一ですか？
   b) いくつのベクトルが同一のルールを共有していますか？
   c) どのベクトルが単体ですか？
   d) どのベクトルが直行投影ですか？

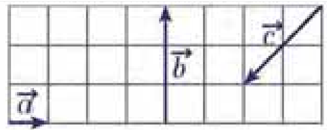


2. ノートにマス目のベクトルを描き、各文字式の表すベクトルを特定してください。



a) $\vec{a}+\vec{b}$　　b) $\vec{c}-\vec{b}$
c) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$　　d) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

3. ノートにマス目のベクトルを描き、各文字式の表すベクトルを特定してください。



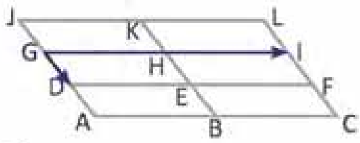
a) $4\vec{a}$　　b) $\frac{1}{3}\vec{b}$
c) $-\frac{3}{2}\vec{c}$　　d) $-3\vec{a}+\vec{b}$

4. $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の場合に、各表現の結果のベクトルを求めて下さい。

a) $2\vec{u}+\vec{v}-3\vec{u}-\vec{v}$　　b) $(3\vec{u}-\vec{v})-(-2\vec{v}-3\vec{u})$　　c) $-2(3\vec{u}-2\vec{v})$　　d) $2(-\vec{u}+3\vec{v})-3(\vec{u}+2\vec{v})$

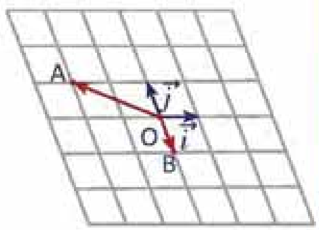
5. 底辺 $(\overrightarrow{GI}, \overrightarrow{GD})$ を考慮し、各文字式のベクトルの座標を求めて下さい。

a) $\overrightarrow{GC}$　　b) $\overrightarrow{GL}$　　c) $\overrightarrow{GB}$　　d) $\overrightarrow{GK}$



6. 次のベクトルを底辺 $\vec{i}, \vec{j}$ で求めてください。

a) $\overrightarrow{OA}$　　b) $\overrightarrow{OB}$　　c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$　　d) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$
e) $-2\overrightarrow{OB}$　　f) $\frac{5}{3}\overrightarrow{OB}$　　g) $\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$　　h) $-2\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}$



7. 点 A と B は上記の底辺 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ により、ベクトル $\overline{AB}$ の座標とベクトルのルールを確定します。

a) A = (3, 1); B = (4, 2)　　b) A = (−2, 1); B = (−3, 2)　　c) A = (−1, −1); B = (−3, −2)

8. ベクトル $\vec{u}=(-2,1)$ とベクトル $\overline{OA}=(3,5)$ の座標を考慮します。$\overline{OB}$ で $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ を満たすベクトルの座標を求めてください。

9. $\vec{v}$ の座標を計算し、$\vec{u}$ と $\vec{v}$ が平行になるようにしてください。

a) $\vec{u}=(1,3), \vec{v}=(x,12)$　　b) $\vec{u}=(3,9), \vec{v}=(x,-6)$

10. ベクトル $\vec{u}$ に対し適当なルールで平行なベクトルを特定してください。座標を考慮してください。
正規直交基底上にて。

a) $\vec{u}=(3,2)$, ルール 13　　b) $\vec{u}=(-2,-4)$, ルール 10

ユニット 7

185

達成の目安

1.8 ベクトルを利用して問題を解いて下さい。

問題の解答：

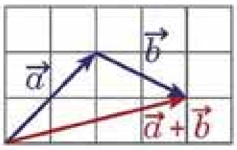
1a) $\vec{a}$と$\vec{f}$.

1b) $\vec{a}$と$\vec{f}$; $\vec{b}$と$\vec{d}$; $\vec{c}$と$\vec{g}$.

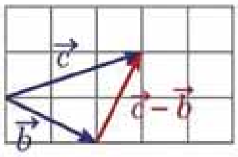
1c) $\vec{b}$と$\vec{d}$.

1d) $\vec{a}$と$\vec{e}$; $\vec{e}$と$\vec{f}$; $\vec{b}$と$\vec{d}$.

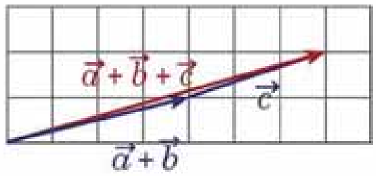
2a)



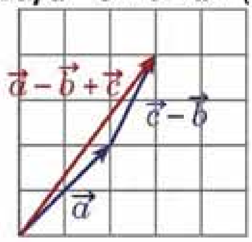
2b)



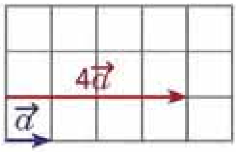
2c)



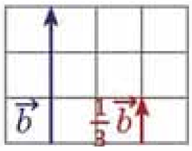
2d) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{c}-\vec{b})$



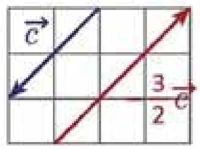
3a)



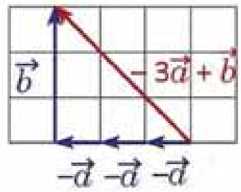
3b)



3c)



3d)



4a) $2\vec{u}+\vec{v}-3\vec{u}-\vec{v}=-\vec{u}$

4b) $(3\vec{u}-\vec{v})-(-2\vec{v}-3\vec{u})=6\vec{u}+\vec{v}$

4c) $-2(3\vec{u}-2\vec{v})=-6\vec{u}+4\vec{v}$

4d) $2(-\vec{u}+3\vec{v})-3(\vec{u}+2\vec{v})=-5\vec{u}$

5a) $(1, 2)$

5b) $(1, -1)$

5c) $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

5d) $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$

6a) $\overrightarrow{OA}=(-2, 1)$

6b) $\overrightarrow{OB}=(0, -1)$

6c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(-2, 1)+(0, -1)$
$=(-2, 0)$

6d) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=(-2, 1)-(0, -1)$
$=(-2, 2)$

6e) $-2\overrightarrow{OB}=(0, 2)$

6f) $\frac{5}{3}\overrightarrow{OB}=\left(0, -\frac{5}{3}\right)$

6g) $\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=(-2, -2)$

6h) $-2\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}=(4, 1)$

7a) $A=(3, 1)$; $B=(4, 2)$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$
$=(4, 2)-(3, 1)$
$=(1, 1)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+1^2}$
$=\sqrt{2}$

7b) $A=(-2, 1)$; $B=(-3, 2)$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$
$=(-3, 2)-(-2, 1)$
$=(-1, 1)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+1^2}$
$=\sqrt{2}$

7c) $A=(-1, -1)$; $B=(-3, -2)$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$
$=(-3, -2)-(-1, -1)$
$=(-2, -1)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}$
$=\sqrt{5}$

8. $\overrightarrow{AB}=(-2, 1)$
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$
$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}$
$\overrightarrow{OB}=(-2, 1)+(3, 5)$
$\overrightarrow{OB}=(1, 6)$

9a) $\vec{v}=(4, 12)$

9b) $\vec{v}=(-2, -6)$

10a) $(3\sqrt{13}, 2\sqrt{13})$、$(-3\sqrt{13}, -2\sqrt{13})$

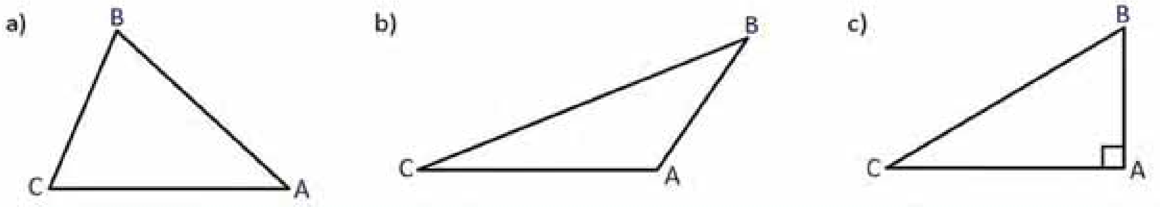
10b) $(2\sqrt{5}, 4\sqrt{5})$、$(-2\sqrt{5}, -4\sqrt{5})$

レッスン 2 ベクトルの内積

2.1 直行投影

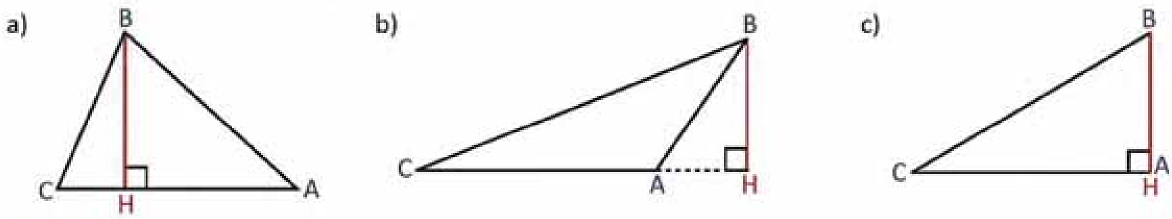
導入問題

以下の三角形のそれぞれについて、頂点 B から基底部 AC までの高さが求められる点を決定します。



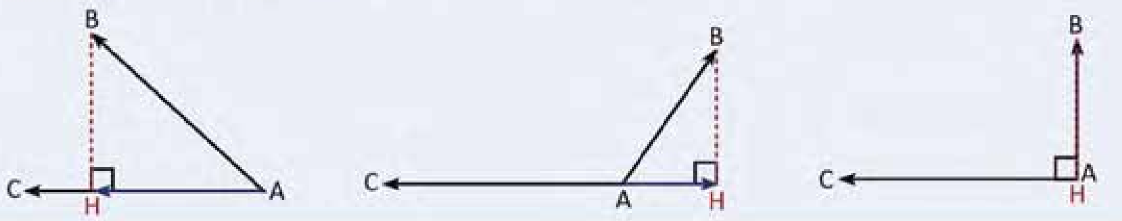
解法

各三角形の高さをポイントし、基底部の点を特定します。



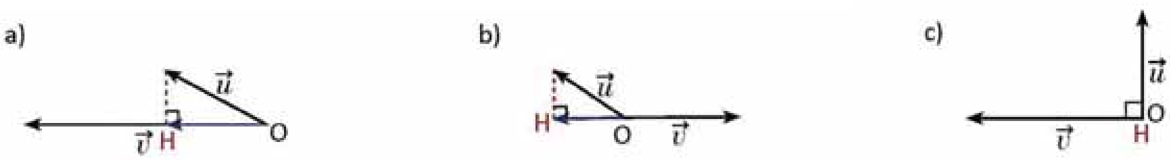
まとめ

$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の 2 つのベクトルが与えられると、$\overrightarrow{AC}$ 上の $\overrightarrow{AB}$ の直交投影はベクトル $\overrightarrow{AH}$ で定義され、$\overrightarrow{BH}$ が $\overrightarrow{AC}$ と直交することになります。



例

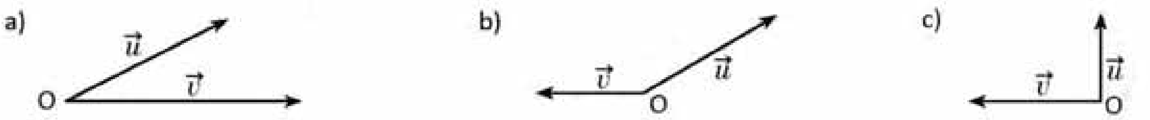
それぞれについて、$\vec{v}$上の $\vec{u}$ の 直交投影を決定してください。



問題

1. それぞれについて、$\vec{v}$ 上の $\vec{u}$ の 直交投影を描いてください。

2. それぞれについて、$\vec{u}$ 上の $\vec{v}$ の直交投影を描いてください 。



達成の目安

2.1 1つのベクトルを別のベクトルに直交投影したものを、様々なケースで描画します。

学習の流れ：

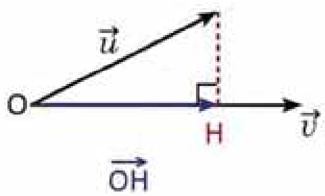
この課では、あるベクトルの直交投影が定義されていますが、この考え方は三角形の高さの線を引くことをベースにしています。直交投影は、任意の2つのベクトルのスカラー積を定義することができます。

ねらい：

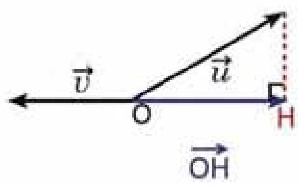
導入問題では、生徒はベクトルで定義可能な三角形の高さからベクトルの直交投影を求める処理について知ることができるようになります。生徒が最終的に直交投影を適切に表現できるようになる必要があります。

問題の解答：

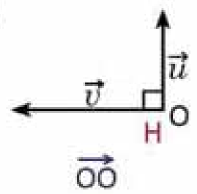
1a)



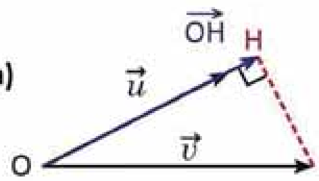
1b)



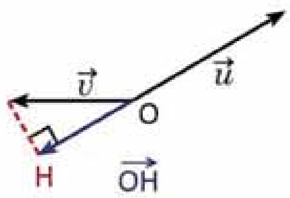
1c)



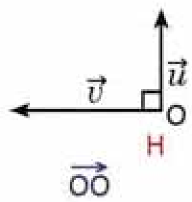
2a)



2b)



2c)



1c) と 2c) の直交投影はゼロベクトルです。

レッスン 2

2.2 平行ベクトルの内積

定義

$\vec{u}$ と $\vec{v}$ を 2 つの平行な（共線の）ベクトルとします 。$\vec{u}$ と $\vec{v}$ の内積は $\vec{u}\cdot\vec{v}$ で 表され、次のように定義されます。

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\begin{cases}\vec{u}\text{ と }\vec{v}\text{ が 同じ方向ならば、}\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\text{ です。}\\ \vec{u}\text{ と }\vec{v}\text{ が 違う方向ならば、}-\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\text{ です。}\end{cases}$$

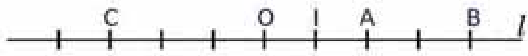
$\vec{u}=0$ または $\vec{v}=0$ のとき、$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ と定義されます。ここに数式を入力します。

例 1

線分 l は等分に分割されていて、$\overrightarrow{OI}$ ベクトルは 1 とします。下記を定義しなさい。

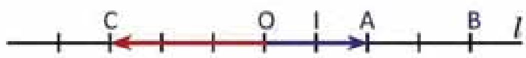
a) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$　　b) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$

c) $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{CB}$　　d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$



a) この場合は両方、$\overrightarrow{OA}$ も $\overrightarrow{OB}$ も同じ方向です。
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{OB}\|=2\times4=8.$

b) この場合 $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ は違う方向です。
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=-\|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{OC}\|=-(2\times3)=-6.$



c) この場合は両方、$\overrightarrow{IA}$ も $\overrightarrow{CB}$ も同じ方向です。
$\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{CB}=\|\overrightarrow{IA}\|\|\overrightarrow{CB}\|=1\times7=7.$

d) この場合 $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は違う方向です。
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|=-(2\times5)=-10.$

例 2

A と B は AB＝4 になるような 2 点とします。次の各条件について $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$ を計算しなさい。

a) A は BM の中間点です。　　b) B は AM の中間点です。　　c) M は AB の中間点です。

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-(4\times4)=-16$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=4\times8=32$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=4\times2=8$

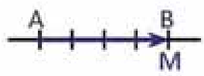
例 3

A と B は AB＝4 になるような 2点とします。各論理式の条件を満たす AB 線上の点 M を表しなさい。

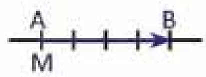
a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=8$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-12$

c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=16$



d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

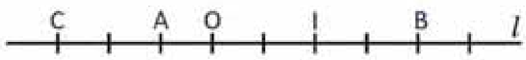


問題

1. 線分 l は等分に分割されていて、$\overrightarrow{OI}$ ベクトルは 1 とします。下記を定義しなさい。

a) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$　　b) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$

c) $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{CB}$　　d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$



2. A と B は AB＝2 になるような 2 点とします。次の各条件について $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$ を計算しなさい。

a) A は BM の中間点です。　　b) B は AM の中間点です。　　c) M は AB の中間点です。

3. A と B は AB＝6 になるような2点とします。各論理式の AB 線上に点 M を描きなさい。

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=24$　　b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-3$　　c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-36$　　d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

達成の目安

2.2 平行ベクトルの内積を計算する。

学習の流れ：

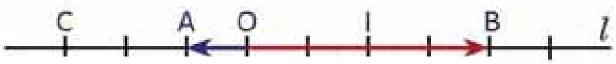
ここでは 7 年生で学習した正負の数の掛け算と関係がある平行ベクトルに対する 2 つのベクトルの内積の定義について学習します。次の授業では、この定義を直交射影を用いた任意の 2 つのベクトルに拡張します。

ねらい：

平行ベクトルの内積の定義は、正負の数の掛け算の確立方法に似ていますが、この場合はベクトルの方向が数の符号として作用します。つまり同じ方向を持つ 2 つのベクトルの内積は正であり、異なる場合は負です。

問題の解答：

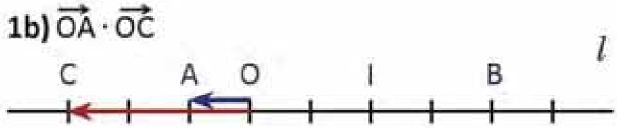
1a) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$



$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ は違う方向です。

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = -\|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{OB}\| = -\frac{1}{2}\times 2 = -1.$

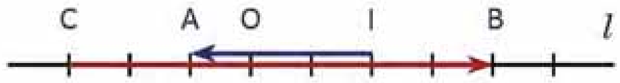
1b) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$



$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ は同じ方向です。

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = \|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{OC}\| = \frac{1}{2}\times\frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$

1c) $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{CB}$



$\overrightarrow{IA}$ と $\overrightarrow{CB}$ は違う方向です。

$\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{CB} = -\|\overrightarrow{IA}\|\|\overrightarrow{CB}\| = -\left(\frac{3}{2}\times\frac{7}{2}\right) = -\frac{21}{4}.$

1d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は違う方向です。

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\| = -\left(\frac{5}{2}\times 1\right) = -\frac{5}{2}.$

2a) A は BM の中間点です。

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = -(2\times 2) = -4$

2b) B は AM の中間点です。

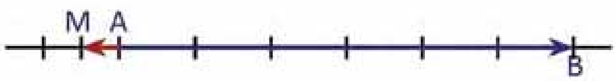
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 2\times 4 = 8$

2c) M は AB の中間点です。

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 2\times 1 = 2$

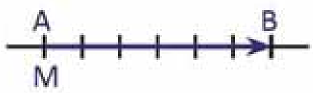
3a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 24$

3b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = -3$



3c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = -36$

3d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$



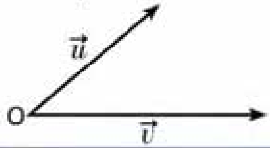
レッスン 2

2.3 平行ではない（共線ではない）ベクトルの内積

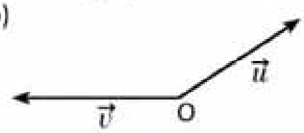
導入問題

ベクトル $\vec{v}$ の内積をベクトル $\vec{v}$ への $\vec{u}$ の投影で表現しなさい。

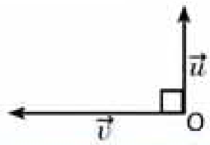
a)



b)



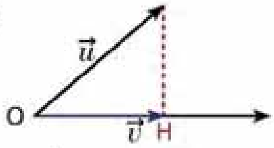
c)



解法

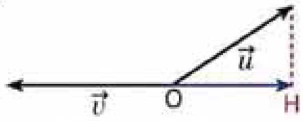
$\vec{u}$ の $\vec{v}$ への直交投影です。

a)



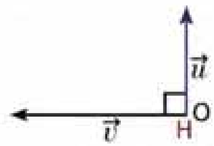
$\vec{v}\cdot\overrightarrow{OH} = \|\vec{v}\|\|\overrightarrow{OH}\|$

b)



$\vec{v}\cdot\overrightarrow{OH} = -\|\vec{v}\|\|\overrightarrow{OH}\|$

c)



$\vec{v}\cdot\overrightarrow{OH} = \vec{v}\cdot\vec{0} = 0$

定義

$\vec{u}$ と $\vec{v}$ は 2 つの非平行ベクトルであるとし、$\vec{u}'$ を $\vec{v}$ に対する $\vec{u}$ の直交投影、$\vec{v}'$ を $\vec{u}$ に対する $\vec{v}$ の直交投影とします。すると，$\vec{u}'\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v}'$ となります。ベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の内積は次式で定義されます。

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}'\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v}'$$

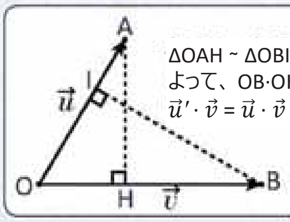
内積計算において，実数 r と 3 つのベクトル $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ は以下の性質を満たします。

1) $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|\|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|^2$

2) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

3) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$, $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$

4) $\vec{u}\cdot(r\vec{v}) = (r\vec{u})\cdot\vec{v} = r(\vec{u}\cdot\vec{v})$



$\Delta OAH \sim \Delta OBI$,
よって、$OB\cdot OH = OA\cdot OI$。そして
$\vec{u}'\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v}'$。

内積は，2 つのベクトルが直交する場合，0 であり，その逆も同様です。（ゼロではない 2 つの異なるベクトルの内積が 0 であれば、ベクトルは直交しています）。

例

A の直角三角形を ABC とします。内積を表しなさい。

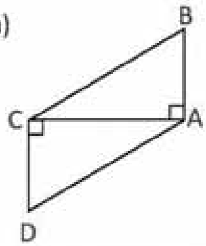
a) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$
$= \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$
$= AC^2$

b) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AC}$
$= -AC^2$

c) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AB}$
$= -AB^2$

d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA}\cdot\overrightarrow{CA}$
$= \vec{0}\cdot\overrightarrow{CA}$
$= 0$

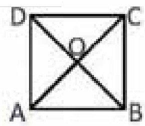
a)



問題

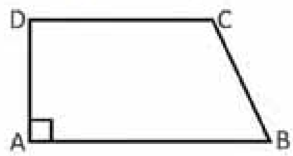
1. 正方形 ABCD があると考えて、次の内積を計算しなさい。以下の内積を計算しなさい。

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$　b) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AC}$　c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}$　d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$　e) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BO}$



2. AB=4、AD=2、CD=3 の直角台形 ABCD があります。
以下の内積を計算しなさい。

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$　b) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AC}$　c) $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}$　d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$



達成の目安

2.3 非平行ベクトルから直交投影を用いて内積を計算する

学習の流れ：

任意の 2 つのベクトルの内積は、平行ベクトルの積を直交投影に関連付けることで定義されます。また、2 つのベクトルが直交するのは内積がゼロである場合に限ります。

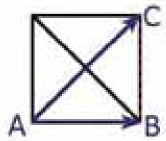
ねらい：

導入問題では、授業 2.1 で見たように直交投影の 3 つの場合、つまりベクトル間の角度が鋭角、鈍角、右の場合を解析して、ベクトルの内積を出します。定義の追加情報では、内積の定義をわかりやすく示しています。

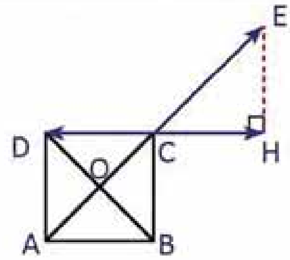
問題の解答：

まず、共通の始点を持つベクトルを描きます。

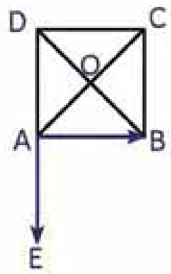
1a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$
$=\|AB\|^2$
$=4^2$
$=16$



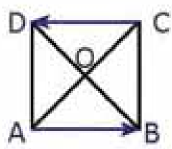
1b) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CE}$
$=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CH}$
$=-(4\times 4)$
$=-16$



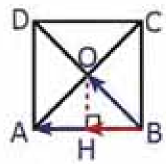
1c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$
$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA}$
$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{0}$
$=0$



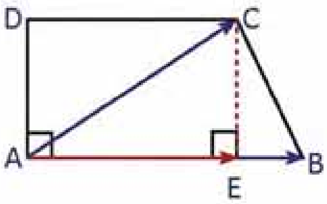
1d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-(4\times 4)$
$=-16$



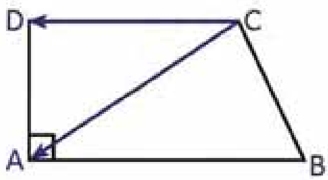
1e) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BO}$
$=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BH}$
$=4\times 2$
$=8$



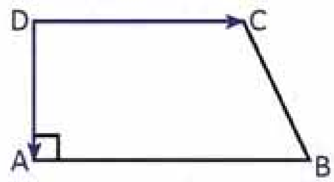
2a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}\cdot(-\overrightarrow{AC})$
$=-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})$
$=-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE})$
$=-(4\times 3)$
$=-12$



2b) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CD}\cdot(-\overrightarrow{CA})$
$=-(\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CA})$
$=-(\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CD})$
$=-(3\times 3)$
$=-9$



2c) $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DD}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{0}=0$



2d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-(4\times 3)=-12$

問題 1c) と 2c) では，生徒はベクトルが垂直なので内積がゼロであることがすぐにわかります。

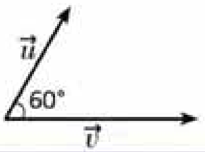
レッスン 2

2.4 内積の三角関数的形状

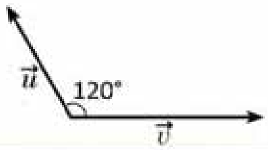
導入問題

$\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ であり、かつ、各ベクトル間の角度が $\alpha = 60°$ または $120°$ であることがわかっている場合の、$\vec{u}$ と $\vec{v}$ ベクトルの内積を計算しなさい。

a)



b)



三角比を使って内積を計算することができます。

参照すべき角度の三角比：

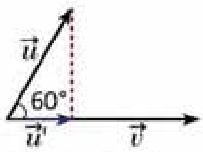
$\cos 60° = \frac{1}{2}$　$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$　$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$　$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$　$\text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

解法

$\vec{v}$ 上に $\vec{u}$ の直交投影 $\vec{u}'$ があります。

a)



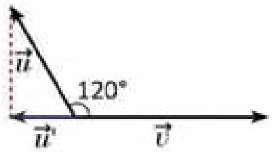
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}' \cdot \vec{v} = \|\vec{u}'\|\ \|\vec{v}\|$

右式より：　$\cos 60° = \dfrac{\|\vec{u}'\|}{\|\vec{u}\|}$

よって：　$\|\vec{u}'\| = \|\vec{u}\|\cos 60°$

よって　$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}'\|\ \|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos 60°$
$= 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 3$

b)



$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}' \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}'\|\ \|\vec{v}\|$

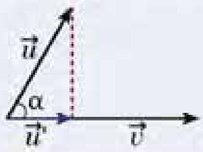
$\cos 120° = -\dfrac{\|\vec{u}'\|}{\|\vec{u}\|}$,

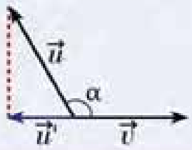
$\|\vec{u}'\| = -\|\vec{u}\|\cos 120°$,

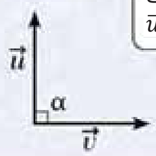
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}'\|\|\vec{v}\|\cos 120°$
$= 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -3.$

まとめ

$\vec{u}$ と $\vec{v}$ の 2 つのベクトルを考えると $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\| \cos \alpha$ となります。







この式 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\| \cos \alpha$ から、簡単に $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ と導けます。

A α は、ベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の間に形成される角度と言います。

例

次のベクトルでは右の通りになります。$\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{3}$ そして $\vec{u} \cdot \vec{v} = 9$。ベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の間に形成される角度を決定しなさい。

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|\cos \alpha$（α は $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の間の角度）になるので，ゆえに $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の間の角度を計算するには：

$$9 = 3(2\sqrt{3})\cos \alpha.$$

したがって $\cos \alpha = \dfrac{9}{6\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

$0° < \alpha \leq 180°$ なので、よって、$\alpha = 30°$。

このユニットの授業 1.1 で、2 つのベクトルの間の角度は 0° から 180° の間であることがわかっています。

問題

1. α が両方のベクトルの間に形成される角度であることを考えながら、$\vec{u}$ と $\vec{v}$ の内積を計算しなさい。

   a) $\|\vec{u}\| = 7$, $\|\vec{v}\| = 4$, $\alpha = 60°$　　b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 4$, $\alpha = 30°$　　c) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 45°$

2. 各論理式の $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の ベクトル間に形成される角度を言いなさい。

   a) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 4$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$　　b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 2$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$　　c) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = 3$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$

ユニット 7

達成の目安

2.4 内積の三角関数形式を用いてベクトルの内積を出す。

学習の流れ：

この授業では、内積と与えられた 2 つのベクトルの間に形成される角度の関係をしっかり学びます。

ねらい：

生徒は解答するにあたり，ベクトル間の与えられた角度の定義と三角比を用いて内積を計算します。

問題の解答：

1a) $\|\vec{u}\| = 7,\ \|\vec{v}\| = 4,\ \alpha = 60°$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos 60° = 7 \times 4 \times \frac{1}{2} = 14$$

1b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3},\ \|\vec{v}\| = 4,\ \alpha = 30°$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos 30° = \sqrt{3} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$$

1c) $\|\vec{u}\| = 2,\ \|\vec{v}\| = 2\sqrt{2},\ \alpha = 45°$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos 45° = 2 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$$

2a) $\|\vec{u}\| = 2,\ \|\vec{v}\| = 4,\ \vec{u}\cdot\vec{v} = 4$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha$$
$$4 = 2(4)(\cos\alpha)$$
$$\cos\alpha = \frac{1}{2}$$
$$\alpha = 60°$$

2b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3},\ \|\vec{v}\| = 2,\ \vec{u}\cdot\vec{v} = 3$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha$$
$$3 = \sqrt{3}(2)(\cos\alpha)$$
$$\cos\alpha = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\alpha = 30°$$

2c) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2},\ \|\vec{v}\| = 3,\ \vec{u}\cdot\vec{v} = -3$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha$$
$$-3 = \sqrt{2}(3)(\cos\alpha)$$
$$\cos\alpha = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\alpha = 135°$$

2.5 直交平面内のベクトルの内積

導入問題

直交基底 ($\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$)、$\vec{u}$ = (x, y) と $\vec{v}$ = (x', y') 2 つのベクトル $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$、$\vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ を考慮しながら $\vec{u} \cdot \vec{v}$ を決定しなさい。

解法

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j})$$

$= x\vec{i} \cdot x'\vec{i} + x\vec{i} \cdot y'\vec{j} + y\vec{j} \cdot x'\vec{i} + y\vec{j} \cdot y'\vec{j}$ 法則 3 による

$= xx'(\vec{i} \cdot \vec{i}) + xy'(\vec{i} \cdot \vec{j}) + yx'(\vec{j} \cdot \vec{i}) + yy'(\vec{j} \cdot \vec{j})$ 法則 4 による

$= xx'\|\vec{i}\|^2 + xy'(0) + yx'(0) + yy'\|\vec{j}\|^2$ なぜなら $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ は 直交するから、

$= xx'(1) + yy'(1)$ なぜなら $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ は 正常であるから。

$= xx' + yy'$

まとめ

直交基底上の 2 つのベクトル $\vec{u} = (x, y)$、$\vec{v} = (x', y')$ が与えられると、次のようになります。

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

例

ベクトルの内積を決定しなさい、$\vec{u}$ = (3, 2)、$\vec{v}$ = (1, 2) これらは直交基底上にあります。

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3 \times 1) + (2 \times 2)$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 + 4$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$$

問題

1. 各論理式内のベクトル $\vec{u} \cdot \vec{v}$ の内積を決定しなさい。ベクトルの座標が直交基底にあると考えてください。

a) $\vec{u} = (4, 1), \vec{v} = (2, 3)$　　b) $\vec{u} = (-2, 3), \vec{v} = (-1, -2)$　　c) $\vec{u} = (2, -3), \vec{v} = (-3, -2)$

2. ベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ を直交させる x の値を求めなさい。ベクトルの座標が直交基底にあると考えてください。

a) $\vec{u} = (-3, 1), \vec{v} = (2, x)$　　b) $\vec{u} = (1, 0), \vec{v} = (x, -2)$

c) $\vec{u} = (x, 2), \vec{v} = (-1, x)$　　d) $\vec{u} = (2, x), \vec{v} = (x, 5)$

e) $\vec{u} = (2, 1), \vec{v} = (x, 3)$　　f) $\vec{u} = (2 - x, 3), \vec{v} = (1, 2 + x)$　　g) $\vec{u} = (1 - x, x), \vec{v} = (3x, 2x - 1)$

ゼロの 2 つの異なるベクトルの内積が 0 であれば、ベクトルは直交しています。

3. 各論理式のベクトル間に形成される角度を決定しなさい。ベクトルの座標が直交基底にあると考えてください。

a) $\vec{u} = (4, 1), \vec{v} = (2, 3)$　　b) $\vec{u} = (-2, 3), \vec{v} = (-1, -2)$　　c) $\vec{u} = (2, -3), \vec{v} = (-3, -2)$

前の授業で例示した内積の方法を当てはめます。

達成の目安

2.5 直交基底の座標におけるベクトルの内積を求める。

学習の流れ：

内積は、ベクトルの性質を利用して直交基底上のベクトルの座標から決定されます。

ねらい：

直交基底にベクトルを書くと、内積の計算がしやすくなります。これで、生徒は 2 つのベクトルの座標を知るだけで、2 つのベクトル間の角度を求めることができるようになります。

問題の解答：

1a) $\vec{u} = (4, 1), \vec{v} = (2, 3)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (4 \times 2) + (1 \times 3)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 8 + 3$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 11$

1b) $\vec{u} = (-2, 3), \vec{v} = (-1, -2)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-2) \times (-1) + 3 \times (-2)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 - 6$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$

1c) $\vec{u} = (2, -3), \vec{v} = (-3, -2)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-3) + (-3) \times (-2)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 + 6$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

2a) $\vec{u} = (-3, 1), \vec{v} = (2, x)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$-3(2) + 1(x) = 0$

$x = 6$

2b) $\vec{u} = (1, 0), \vec{v} = (x, -2)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$x + 0(-2) = 0$

$x = 0$

2c) $\vec{u} = (x, 2), \vec{v} = (-1, x)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$x(-1) + 2(x) = 0$

$x = 0$

2d) $\vec{u} = (2, x), \vec{v} = (x, 5)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$2(x) + x(5) = 0$

$x = 0$

2e) $\vec{u} = (2, 1), \vec{v} = (x, 3)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$2(x) + 1(3) = 0$

$x = -\frac{3}{2}$

2f) $\vec{u} = (2 - x, 3), \vec{v} = (1, 2 + x)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$(2 - x)(1) + 3(2 + x) = 0$

$x = -4$

2g) $\vec{u} = (1 - x, x), \vec{v} = (3x, 2x - 1)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$(1 - x)(3x) + x(2x - 1) = 0$

$-x^2 + 2x = 0$

$x = 0$ または $x = 2$

3a) $\vec{u} = (4, 1), \vec{v} = (2, 3)$

$u \cdot v = (4 \times 2) + (1 \times 3) = 11$

$\|u\| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$

$\|v\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cos \alpha$

$11 = \sqrt{17}\sqrt{13} \cos \alpha$

$\cos \alpha = \frac{11}{\sqrt{221}}$

$\alpha = \cos^{-1} \frac{11}{\sqrt{221}}$

$\alpha \approx 42.27°$

3b) $\vec{u} = (-2, 3), \vec{v} = (-1, -2)$

$u \cdot v = -2(-1) + 3(-2) = -4$

$\|u\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$\|v\| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

$u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cos \alpha$

$-4 = \sqrt{13}\sqrt{5} \cos \alpha$

$\cos \alpha = -\frac{4}{\sqrt{65}}$

$\alpha = \cos^{-1} \left(-\frac{4}{\sqrt{65}}\right)$

$\alpha \approx 119.74°$

3c) $\vec{u} = (2, -3), \vec{v} = (-3, -2)$

$u \cdot v = 2(-3) + (-3)(-2) = 0$

$\|u\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

$\|v\| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

$u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cos \alpha$

$0 = \sqrt{13}\sqrt{13} \cos \alpha$

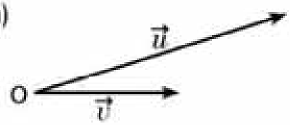
$\cos \alpha = 0$

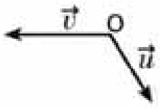
$\alpha = \cos^{-1} 0$

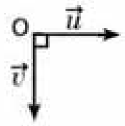
$\alpha = 90°$

2.6 復習問題

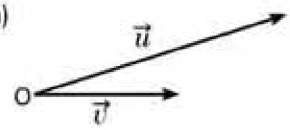
1. $\vec{u}$ の $\vec{v}$上への直交投影をそれぞれについて グラフ化しなさい。

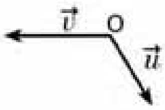
a) 

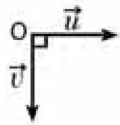
b) 

c) 

2. $\vec{v}$ の $\vec{u}$ 上へ の直交投影をそれぞれについて グラフ化しなさい。

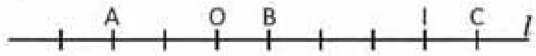
a) 

b) 

c) 

3. 線分 l は等分に分割されていて、$\overrightarrow{OI}$ ベクトルは 1 とします。下記を定義しなさい。

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$　　b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$



4. A と B は AB＝1 になるような2点とします。次の各条件について、$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$ を計算しなさい。

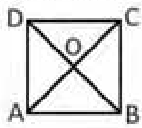
a) A は BM の中間点です　　b) B は AM の中間点です　　c) M は AB の中間点です

5. A と B は AB＝3 になるような 2 点とします。各問の各条件を満たす AB 線上の点Mを表しなさい。

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 2$　　b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -6$　　c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

6. O を中心とする三角形を含む正方形 ABCD があると考えて、次の内積を計算しなさい。以下の内積を計算しなさい。

a) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CA}$　　b) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BC}$　　c) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$



7. α が両方のベクトルの間に形成される角度であることを考えながら、$\vec{u}$ と $\vec{v}$ の内積を計算しなさい。

a) $\|\vec{u}\| = 6,\ \|\vec{v}\| = 5,\ \alpha = 60°$　　b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3},\ \|\vec{v}\| = 4,\ \alpha = 150°$

8. 各論理式の$\vec{u}$ と$\vec{v}$の ベクトル間に形成される角度を言いなさい。

a) $\|\vec{u}\| = 5,\ \|\vec{v}\| = 6,\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 15$　　b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3},\ \|\vec{v}\| = 2,\ \vec{u} \cdot \vec{v} = -3$

9. 各論理式内のベクトル $\vec{u} \cdot \vec{v}$ の内積を決定しなさい。ベクトルの座標が直交基底にあると考えてください。

a) $\vec{u} = (2, -1),\ \vec{v} = (-1, 0)$　　b) $\vec{u} = (-3, 4),\ \vec{v} = (-4, -2)$

10. $\vec{u}$ と $\vec{v}$ のベクトルが 直交になる x の値を求めなさい 。ベクトルの座標が直交基底にあると考えてください。

a) $\vec{u} = (1 - 3x, 2),\ \vec{v} = (2, 4 + 2x)$　　b) $\vec{u} = (2 - 3x, 2x),\ \vec{v} = (2x, 3x + 2)$

11. 各論理式のベクトル間に形成される角度を決定しなさい。ベクトルの座標が直交基底にあると考えてください。

a) $\vec{u} = (-5, 3),\ \vec{v} = (-6, -10)$　　b) $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \vec{v} = (0, 2)$

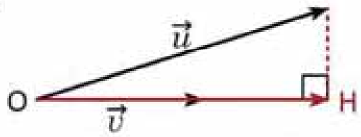
ユニット 7

達成の目安

2.6 ベクトルの内積に対応する問題を解く。

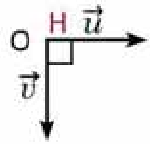
問題の解答：

1a)

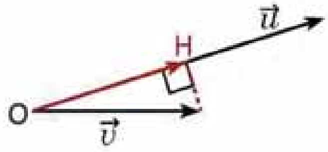


1b)

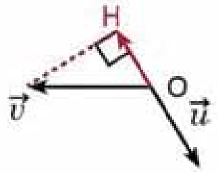
1c)



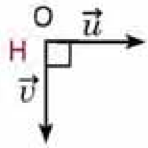
2a)



2b)



2c)



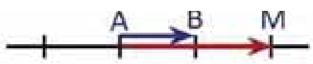
3a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$

3b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = -\left(\frac{1}{2} \times \frac{5}{4}\right) = -\frac{5}{8}$

4a) A は BM の中間点です

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -(1 \times 1) = -1$

4b) B は AM の中間点です

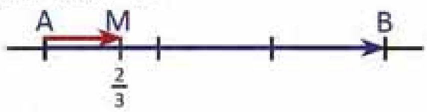


$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 1 \times 2 = 2$

4c) M は AB の中間点です

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

5a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 2$



5b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -6$

5c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

6a)
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{AD} \cdot (-\overrightarrow{AC}) \\
&= -(\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}) \\
&= -(\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD}) \\
&= -(3 \times 3) \\
&= -9
\end{aligned}$$

6b)
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{CD} \cdot (-\overrightarrow{CB}) \\
&= -(\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CC}) \\
&= -(\overrightarrow{CD} \cdot \vec{0}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

6c) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

正方形の対角線は
垂直になっています。

7a)
$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos 60° \\
&= 6 \times 5 \times \frac{1}{2} \\
&= 15
\end{aligned}$$

7b)
$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos 150° \\
&= \sqrt{3} \times 4 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= -6
\end{aligned}$$

8a)
$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos \alpha \\
15 &= 5(6)(\cos \alpha) \\
\cos \alpha &= \frac{1}{2} \\
\alpha &= 60°
\end{aligned}$$

8b)
$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos \alpha \\
-3 &= \sqrt{3}(2)(\cos \alpha) \\
\cos \alpha &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
\alpha &= 150°
\end{aligned}$$

9a) $\vec{u} = (2, -1), \vec{v} = (-1, 0)$
$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= 2 \times (-1) + (-1) \times 0 \\
\vec{u} \cdot \vec{v} &= -2 + 0 \\
\vec{u} \cdot \vec{v} &= -2
\end{aligned}$$

9b) $\vec{u} = (-3, 4), \vec{v} = (-4, -2)$
$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= (-3) \times (-4) + 4 \times (-2) \\
\vec{u} \cdot \vec{v} &= 12 - 8 \\
\vec{u} \cdot \vec{v} &= 4
\end{aligned}$$

10a) $\vec{u} = (1 - 3x, 2), \vec{v} = (2, 4 + 2x)$
$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= 0 \\
(1 - 3x)(2) + 2(4 + 2x) &= 0 \\
x &= 5
\end{aligned}$$

10b) $\vec{u} = (2 - 3x, 2x), \vec{v} = (2x, 3x + 2)$
$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= 0 \\
(2 - 3x)(2x) + 2x(3x + 2) &= 0 \\
x &= 0
\end{aligned}$$

11a) $\vec{u} = (-5, 3), \vec{v} = (-6, -10)$
$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|\cos \alpha \\
0 &= \sqrt{34}\ (2\sqrt{34})\cos \alpha \\
\cos \alpha &= 0 \\
\alpha &= 90°
\end{aligned}$$

11b) $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \vec{v} = (0\ , 2)$
$$\begin{aligned}
\cos \alpha &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\alpha &= 30°
\end{aligned}$$

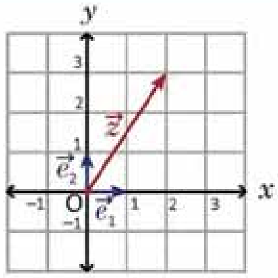
レッスン 3 複素数

3.1 複素数の幾何学的表現

導入問題

複素数 $z = 2 + 3i$ を念頭に置き、直交平面上にベクトル $\vec{z} = (2, 3)$ を $\vec{e}_1 = (1, 0)$ と $\vec{e}_2 = (0, 1)$ の直交ベクトルを基底として使って表しなさい。

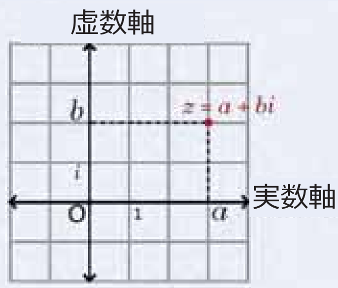
解法



まとめ

直交平面は、直交ベクトル基底であり、平面内の点 A の座標は、直交ベクトル基底のベクトル $\overrightarrow{OA}$ の座標と同じです ($\vec{e}_1, \vec{e}_2$)。

複素数 $z = a + bi$ は、第 1 座標（x 軸）を数 z の実数部 (a) とし、第 2 座標（y 軸）を数 z の虚数部 (b) とする平面上で表現することができます。



複素数が配置されている平面を**複素平面**といいます。横軸を**実軸**、縦軸を**虚軸**といいます。

複素数 $z = a + bi$ の**モジュール**をベクトル規則 (a, b) と定義し、$|z|$ と表記します。つまり、

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

例

数 $z = 2 + 3i$ のモジュールの解を求めなさい。

$$|z| = \sqrt{2^2 + 3^2}$$
$$= \sqrt{13}$$

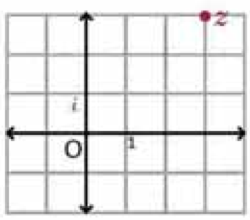
問題

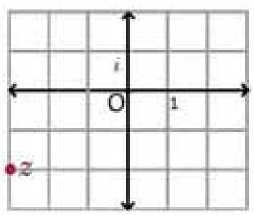
1. 各複素平面上で点にて表される複素数を示し、モジュールを求めなさい。

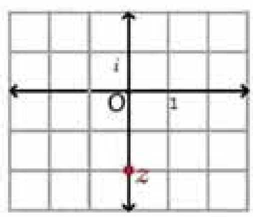
a) $z = 2 + 3i$　　b) $z = -4 - 2i$　　c) $z = -1 + 2i$

d) $z = 3 - i$　　e) $z = 4$　　f) $z = -4i$

2. 各複素平面上で表される複素数を示しなさい。

a)


b)


c)


3. $|z|^2 = z\bar{z}$ を証明しなさい。

複素数 $z = a + bi$ の共役数は $\bar{z} = a - bi$ であることを復習しよう。

達成の目安

3.1 複素平面上に複素数を表す。

学習の流れ：

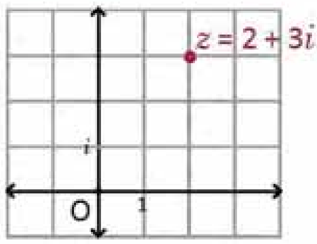
この課では、複素数の性質を複素平面での表現から学び、複素数とベクトルの等価性を確立します。

ねらい：

結論として、複素数は、座標が実部と虚部であるベクトルの最終点であり、平面の直交基底であることで表現が確立されます。

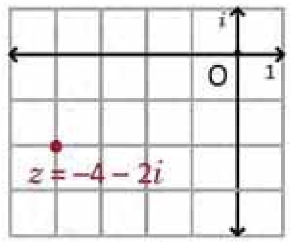
問題の解き方：

1a)



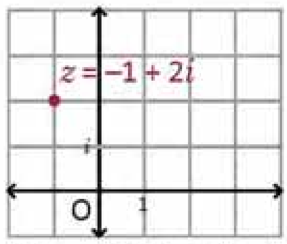
$|z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

1b)



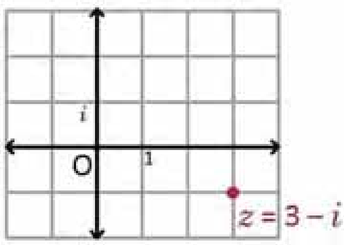
$|z| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$

1c)



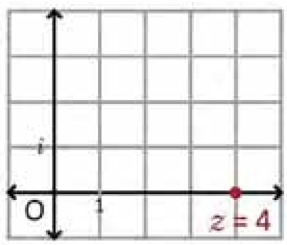
$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

1d)



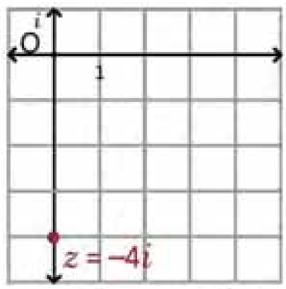
$|z| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

1e)



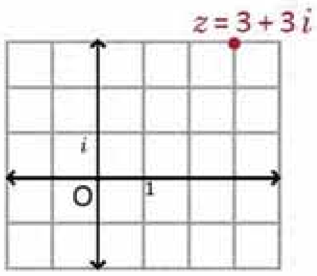
$|z| = \sqrt{4^2 + (0)^2} = 4$

1f)

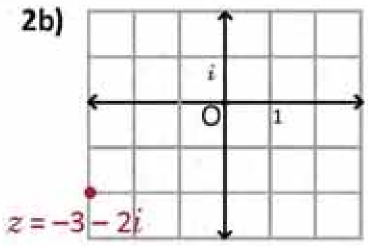


$|z| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4$

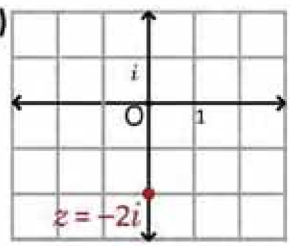
2a)



2b)



2c)



3. $|z|^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = a^2 + b^2$

$$
\begin{aligned}
z\bar{z} &= (a + bi)(a - bi) \\
&= a^2 - (bi)^2 \\
&= a^2 - b^2 i^2 \\
&= a^2 - b^2(-1) \\
&= a^2 + b^2
\end{aligned}
$$

よって、$|z|^2 = z\bar{z}$。

矢印ではなく点を使用する理由を生徒に強調してください。

3.2 複素平面上の複素数の演算

導入問題

複素数 $z = 2 + 2i$ と $w = 1 - 4i$ があると考えて、複素平面上で次の数を示しなさい。

a) z　　b) w　　c) $w + z$　　d) $w - z$　　e) $2w$

解法

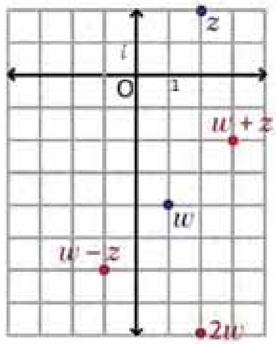
a) 点 (2, 2) を表します。

b) 点 (1, -4) を表します。

c) $w + z = 1 - 4i + 2 + 2i = 3 - 2i$、とすると、点 (3, -2) が提示されます。

d) $w - z = 1 - 4i - (2 + 2i) = -1 - 6i$、とすると、点 (–1, – 6) が提示されます。

e) $2w = 2(1 - 4i) = 2 - 8i$、とすると、点 (2, –8) が提示されます。



まとめ

2 つの複素数 $w= a + bi$ と $z = c + di$ があるとすると複素数 $w + z$ の和は $(a, b) + (c, d)$ で表される複素数と等価であることを満たします。

同様に、複素数 $w - z$ の引き算の差は、座標 $(a, b) - (c, d)$ で表される複素数に相当します。

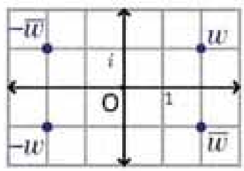
そして、ベクトル (ra, rb) で平面上で表される複素数は rw です。

平面内での複素数の演算は、平面内でのベクトル演算と同じようにすることに注意してください。

例

$w = 2 + i$ であると考え、複素数平面に数を示しなさい。

a) w　　b) $\overline{w}$　　c) $-w$　　d) $-\overline{w}$



問題

1. 複素数 $z = 2 - i$ と $w = 3 + 2i$ があると考えて、複素平面上に次の数を示しなさい。

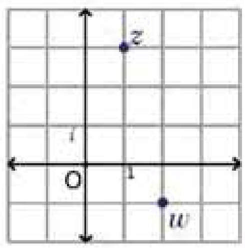
a) z　　b) w　　c) $w + z$　　d) $w - z$　　e) $z - w$

f) $2z$　　g) $-w$　　h) $\overline{z}$　　i) $-\overline{w}$　　j) $2w - 3z$

2. グラフ化した複素数を使って、次の複素数を示しなさい。

a) $w + z$　　b) $w - z$　　c) $z - w$

d) $-w$　　e) $-\overline{z}$　　f) $2w - z$



達成の目安

3.2 複素平面上での複素数の基本操作を示す。

学習の流れ：

前授業の複素数の表現は、その計算のために有効です。ですから複素数の足し算・引き算は、それぞれベクトルの座標による足し算・引き算と等価であることが確立されています。

ねらい：

導入問題は、複素数で行った演算の結果を表すものです。つまり、複素数の演算は、その表現、動作座標によって確立されます。

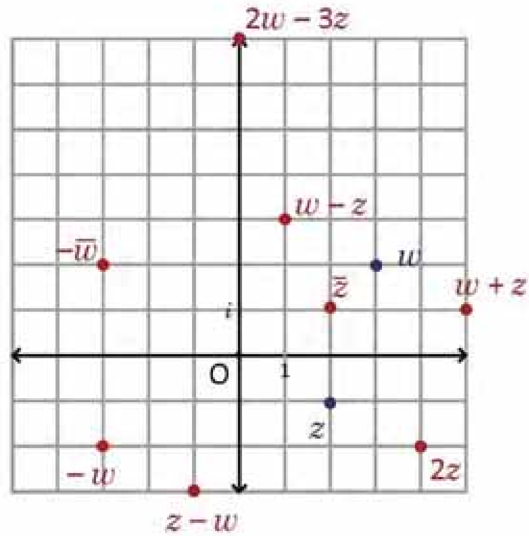
問題の解き方：

1a) $z = 2 - i$ **1b)** $w = 3 + 2i$ **1c)** $w + z = 5 + i$

1d) $w - z = 1 + 3i$ **1e)** $z - w = -1 - 3i$ **1f)** $2z = 4 - 2i$

1g) $-w = -3 - 2i$ **1h)** $\bar{z} = 2 + i$ **1i)** $-\overline{w} = -3 + 2i$

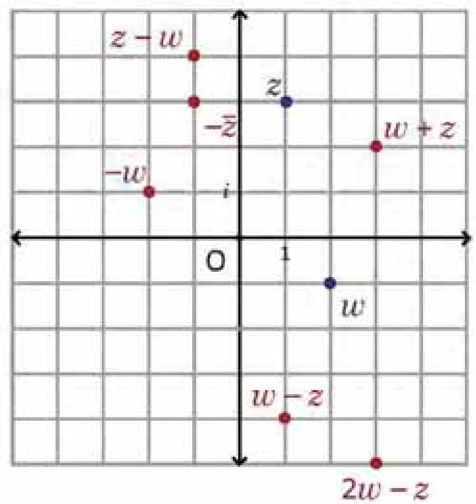
1j) $2w - 3z = 7i$



2. $z = 1 + 3i$, $w = 2 - i$

2a) $w + z = 3 + 2i$ **2b)** $w - z = 1 - 4i$ **2c)** $z - w = -1 + 4i$

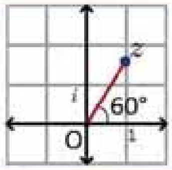
2d) $-w = -2 + i$ **2e)** $-\bar{z} = -1 + 3i$ **2f)** $2w - z = 3 - 5i$



3.3 複素数の三角関数式*

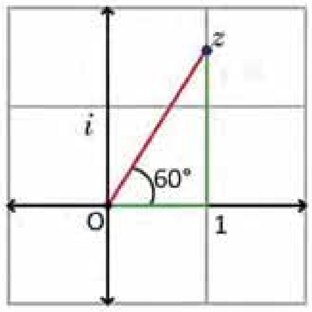
導入問題

三角比を用いて、弾性率が 2 で、実軸から Oz 線分までの角度が 60° の点で表される複素数を表現しなさい。



解法

平面ベクトルで表される複素数 z は、a を x ベクトル座標、b を y ベクトル座標とすると $z = a + bi$ の形で表されるべきです。



サインとコサインの定義からすると、

$\cos 60° = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{2}$　　　　$\text{sen } 60° = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{2}$

そして、$a = 2\cos 60°$、$b = 2\text{ sen } 60°$ となります。

したがって、このベクトルで表される複素数は、$2\cos 60° + (2\text{sen } 60°)i$ であり、次の式で表すことができます。

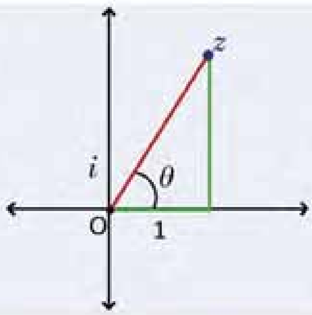
$$z = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i = 1 + \sqrt{3}i.$$

まとめ

z が複素数であるような実軸と Oz セグメントとの間に形成される角度は、複素数**引数**として知られており、arg(z)で表されます。θ が z の引数ならば、$\theta + 360°n$ の形の角度はすべて同じ複素数 z の引数になります。

モジュール $|z|$ と引数 θ を持つ複素数 z については、次のようになります。

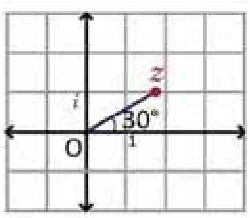
$$z = |z|(\cos\theta + i\text{ sen }\theta).$$



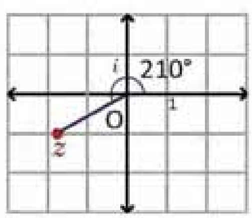
問題

1. 各複素平面上で表される複素数の式を表わし、そのモジュールを示しなさい。

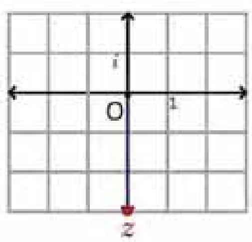
a) $|z| = 2$



b) $|z| = 2$



c) $|z| = 3$



2. モジュールと引数がそれぞれの文字式で示されている時の複素数 z を求めなさい。

a) $|z| = 2, \theta = 45°$　　b) $|z| = 3, \theta = 30°$　　c) $|z| = 1, \theta = 135°$　　d) $|z| = 2, \theta = 150°$

達成の目安

3.3 モジュールと引数を使用し、複素数を三角関数式で表現する。

学習の流れ：

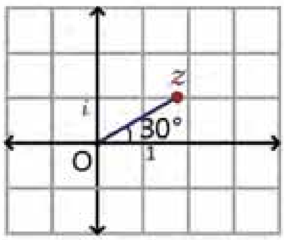
生徒は、与えられた複素数の三角関数式を導入するために、サインとコサインの比を覚えておかなければなりません。角度の和のコサインやサインなど他の性質も役に立つでしょう。

ねらい：

導入問題では、生徒は複素数をノルムと引数から書き出します。例題や問題集では、代表的な角度が使われているので、解答は平方根や分数の表示のままにしておかないといけません。

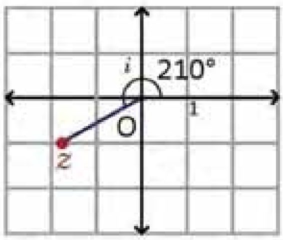
問題の解き方：

1a) $|z| = 2$



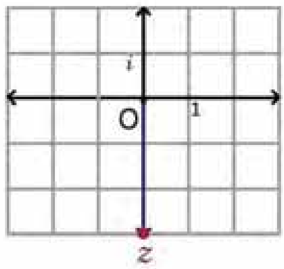
$z = 2(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)$
$= \sqrt{3} + i$

1b) $|z| = 2$



$z = 2(\cos 210° + i \text{ sen } 210°)$
$= -\sqrt{3} - i$

1c) $|z| = 3$



$z = 3(\cos 270° + i \text{ sen } 270°)$
$= -3i$

2a) $|z| = 2, \theta = 45°$

$z = 2(\cos 45° + i \text{ sen } 45°)$
$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$= \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

2b) $|z| = 3, \theta = 30°$

$z = 3(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)$
$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$
$= \sqrt{3} + i$

2c) $|z| = 1, \theta = 135°$

$z = 1(\cos 135° + i \text{ sen } 135°)$
$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$
$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

2d) $|z| = 2, \theta = 150°$

$z = 2(\cos 150° + i \text{ sen } 150°)$
$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\ \frac{1}{2}\right)$
$= -\sqrt{3} + i$

3.4 複素数の三角関数式での積算

導入問題

次の 2 つの複素数があると考えて、$z = |z|(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$、$w = |w|(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta)$で zw を求めなさい。

解法

$$zw = |z|(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha) \times |w|(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta)$$
$$= |z||w|(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta)$$
$$= |z||w|[(\cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta) + i\,(\text{sen}\,\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\beta\cos\alpha)]$$
$$= |z||w|[\cos(\alpha+\beta) + i\,\text{sen}(\alpha+\beta)]$$ （加法定理を適用）。

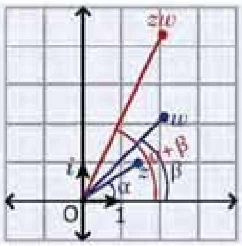
加法定理は：
$\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\beta\cos\alpha$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$

結果として得られる複素数はモジュールの乗算になり、その引数は2つの複素数の引数の和に等しくなります。

まとめ

2 つの複素数 $z = |z|(\cos\alpha + i\ \text{sen}\,\alpha)$ と $w = |w|(\cos\beta + i\ \text{sen}\,\beta)$ の乗算において、結果として得られる複素数はモジュールの乗算で、引数は乗算された数の引数の和になります。

$$zw = |z||w|[\cos(\alpha+\beta) + i\,\text{sen}(\alpha+\beta)]$$



例

zw si $z = 2(\cos 20° + i\,\text{sen}\,20°)$ と $w = 3(\cos 10° + i\,\text{sen}\,10°)$ の乗算を行いなさい。

$$zw = 2(\cos 20° + i\,\text{sen}\,20°) \times 3(\cos 10° + i\,\text{sen}\,10°)$$
$$= 2 \times 3\,[\cos(20° + 10°) + i\,\text{sen}(20° + 10°)]$$
$$= 6(\cos 30° + i\,\text{sen}\,30°)$$
$$= 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$
$$= 3\sqrt{3} + 3i$$

問題

1. 各文字式の zw 積を求めなさい。
   a) $z = \cos 14° + i\,\text{sen}\,14°$, $w = 2(\cos 16° + i\,\text{sen}\,16°)$
   b) $z = 2(\cos 40° + i\,\text{sen}\,40°)$, $w = 5(\cos 20° + i\,\text{sen}\,20°)$
   c) $z = 3(\cos 100° + i\,\text{sen}\,100°)$, $w = 4(\cos 50° + i\,\text{sen}\,50°)$
   d) $z = 6(\cos 110° + i\,\text{sen}\,110°)$, $w = \cos 160° + i\,\text{sen}\,160°$
   e) $z = 2(\cos 208° + i\,\text{sen}\,208°)$, $w = 2(\cos 107° + i\,\text{sen}\,107°)$
   f) $z = 3(\cos 140° + i\,\text{sen}\,40°)$, $w = 2(-\cos 170° + i\,\text{sen}\,10°)$
   g) $z = 5(\cos 170° + i\,\text{sen}\,10°)$, $w = 3(\cos 70° + i\,\text{sen}\,70°)$

2. 上記のそれぞれの文字式について、z, w, zw の各数字をグラフに示しなさい。

達成の目安

3.4 2 つの複素数の積を三角法を使って求める。

学習の流れ：

ユニット 6 では、角度の和のコサインとサインを学習しました。これらの公式は、三角関数の形式を使用して複素数積の特性を説明するために使います。

ねらい：

まとめでは、複素数の積が表わされていますが、このような図は結果の位置を特定して答えを確認する問題を解くのに役立ちます。

問題の解き方：

1a) $zw = (\cos 14° + i \text{ sen } 14°) \times 2(\cos 16° + i \text{ sen } 16°)$

$= 1 \times 2\,[\cos (14° + 16°) + i \text{ sen } (14° + 16°)]$

$= 2(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)$

$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right)$

$= \sqrt{3} + i$

1b) $zw = 2(\cos 40° + i \text{ sen } 40°) \times 5(\cos 20° + i \text{ sen } 20°)$

$= 2 \times 5\,[\cos (40° + 20°) + i \text{ sen } (40° + 20°)]$

$= 10(\cos 60° + i \text{ sen } 60°)$

$= 10\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 5 + 5\sqrt{3}i$

1c) $zw = -6\sqrt{3} + 6i$

1d) $zw = -6i$

1e) $zw = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$

1f) $\text{sen } 40° = \text{sen } (180° - 40°) = \text{sen } 140°$

$-\cos 170° = \cos (180° - 170°) = \cos 10°$

$zw = 3(\cos 140° + i \text{ sen } 140°) \times 2(\cos 10° + i \text{ sen } 10°)$

$= 6(\cos 150° + i \text{ sen } 150°)$

$= 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right)$

$= -3\sqrt{3} + 3i$

1g) $\text{sen } 10° = \text{sen } (180° - 10°) = \text{sen } 170°$

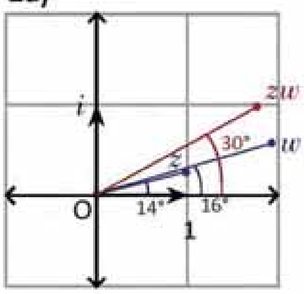
$zw = 5(\cos 170° + i\text{sen } 170°) \times 3(\cos 70° + i\text{sen } 70°)$

$= 15(\cos 240° + i \text{ sen } 240°)$

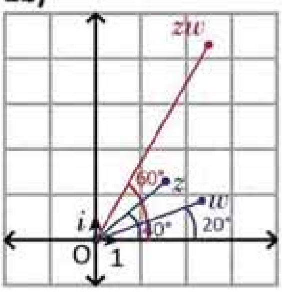
$= 15\left(-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= -\frac{15}{2} - \frac{15\sqrt{3}}{2}i$

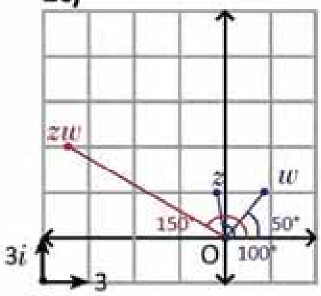
2a)



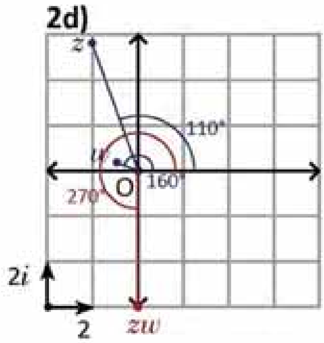
2b)



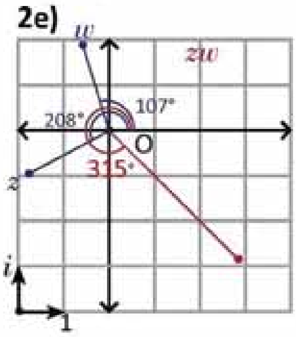
2c)



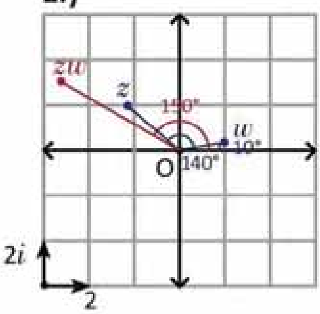
2d)



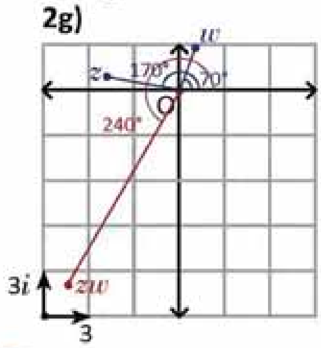
2e)



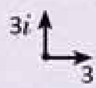
2f)



2g)



各グラフには、表示スケールが示されています。



3.5 複素数の三角関数式での除算

導入問題

$w = 2(\cos 40° + i\ \mathrm{sen}\ 40°)$ と考えます。$zw = 6(\cos 60° + i\ \mathrm{sen}\ 60°)$ を満たす z の値を求めなさい。

解法

$z = |z|(\cos\theta + i\ \mathrm{sen}\ \theta)$とすると、次のようになります。

$$zw = |z|(\cos\theta + i\ \mathrm{sen}\ \theta) \times 2(\cos 40° + i\ \mathrm{sen}\ 40°)$$
$$= 2|z|[\cos(40° + \theta) + i\ \mathrm{sen}(40° + \theta)],$$

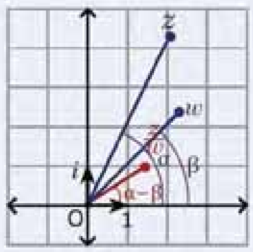
また、$zw = 6(\cos 60° + i\ \mathrm{sen} 60°)$ であることがわかっているので、

したがって
$$2|z| = 6$$
$40° + \theta = 60° + 360°n$ で、n は整数です。

よって、 $z = \frac{6}{2}[\cos(60° - 40°) + i\ \mathrm{sen}(60° - 40°)] = 3(\cos 20° + i\ \mathrm{sen}\ 20°).$

まとめ

2 つの複素数 $z = |z|(\cos\alpha + i\ \mathrm{sen}\ \alpha)$ と$w = |w|(\cos\beta + i\ \mathrm{sen}\ \beta)$ の除算において、得られる複素数はモジュールの除算で、その引数は配当の引数から除数の引数を引いたものに等しいことを満たしています。



$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}[\cos(\alpha - \beta) + i\ \mathrm{sen}(\alpha - \beta)]$$

特殊なケースとしては、$\frac{1}{w} = \frac{1}{|w|}[\cos(-\beta) + i\ \mathrm{sen}(-\beta)]$ とする必要があります。

例

$z = 4(\cos 50° + i\ \mathrm{sen}\ 50°)$ 、そして $w = \cos 20° + i\ \mathrm{sen}\ 20°$ と仮定して $\frac{z}{w}$ の除算をしなさい。

$$\frac{z}{w} = 4(\cos 50° + i\ \mathrm{sen}\ 50°) \div (\cos 20° + i\ \mathrm{sen}\ 20°)$$
$$= \frac{4}{1}[\cos(50° - 20°) + i\ \mathrm{sen}(50° - 20°)]$$
$$= 4(\cos 30° + i\ \mathrm{sen}\ 30°)$$
$$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$
$$= \frac{4\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{2}i$$
$$= 2\sqrt{3} + 2i$$

問題

1. 各文字式について $\frac{z}{w}$ の比率を求めなさい。
   a) $z = \cos 42° + i\ \mathrm{sen}\ 42°$と $w = 2(\cos 12° + i\ \mathrm{sen}\ 12°)$
   b) $z = 10(\cos 40° + i\ \mathrm{sen}\ 40°)$と $w = 2[\cos(-20°) + i\ \mathrm{sen}\ (-20°)]$
   c) $z = 5(\cos 110° + i\ \mathrm{sen}\ 110°)$と $w = \cos 170° + i\ \mathrm{sen}\ 170°$
   d) $z = 1$と $w = \cos 60° + i\ \mathrm{sen}\ 60°$
   e) $z = 3(\cos 207° + i\ \mathrm{sen}\ 207°)$と $w = 3(\cos 117° + i\ \mathrm{sen}\ 117°)$
   f) $z = 3(\cos 110° + i\ \mathrm{sen}\ 70°)$と $w = 2(\cos 20° + i\ \mathrm{sen}\ 20°)$
   g) $z = 6(-\cos 10° + i\ \mathrm{sen}\ 10°)$と $w = 2(\cos 80° + i\ \mathrm{sen}\ 80°)$

2. 上記の文字式それぞれについて、z, w と $\frac{z}{w}$ の各数字をグラフに示しなさい。

達成の目安

3.5 2 つの複素数の商を三角法を使って求める。

学習の流れ：

これまで複素数の足し算、引き算、積を見てきました。この授業では割り算を学びます。この場合、演算の商はノルムの商と引数の差である実数です。

ねらい：

導入問題では、複素数の除算の形を積から推理します。f と g の文字式の問題では、他の三角関数との同一性を使って複素数の引数を求める必要があります。

問題の解き方：

1a) $\frac{z}{w} = (\cos 42° + i \text{ sen } 42°) \div 2(\cos 12° + i \text{ sen } 12°)$

$= \frac{1}{2}[\cos(42° - 12°) + i \text{ sen }(42° - 12°)]$

$= \frac{1}{2}(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$

1b) $\frac{z}{w} = 10(\cos 40° + i \text{ sen } 40°) \div 2(\cos(-20°) + i \text{ sen }(-20°))$

$= \frac{10}{2}[\cos(40° - (-20°)) + i \text{ sen }(40° - (-20°))]$

$= 5(\cos 60° + i \text{ sen } 60°)$

$= 5\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$

1c) $\frac{z}{w} = 5\,[\cos(-60)° + i \text{ sen }(-60)°] = \frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$

1d) $\frac{z}{w} = \frac{1}{w} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

1e) $\frac{z}{w} = \cos 90° + i \text{ sen } 90° = i$

1f) $\text{sen } 70° = \text{sen }(180° - 70°) = \text{sen } 110°$

$\frac{z}{w} = 3(\cos 110° + i \text{ sen } 110°) \div 2(\cos 20° + i \text{ sen } 20°)$

$= \frac{3}{2}(\cos 90° + i \text{ sen } 90°)$

$= \frac{3}{2}i$

1g) $-\cos 10° = \cos(180° - 10°) = \cos 170°$

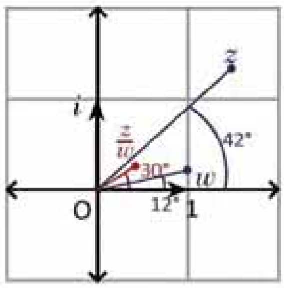
$\text{sen } 10° = \text{sen }(180° - 10°) = \text{sen } 170°$

$\frac{z}{w} = 6(\cos 170° + i \text{ sen } 170°) \div 2(\cos 80° + i \text{ sen } 80°)$

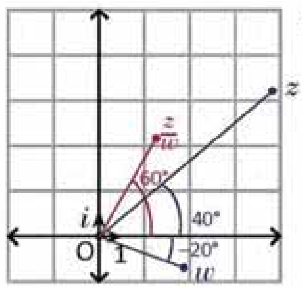
$= \frac{6}{2}(\cos 90° + i \text{ sen } 90°)$

$= 3i$

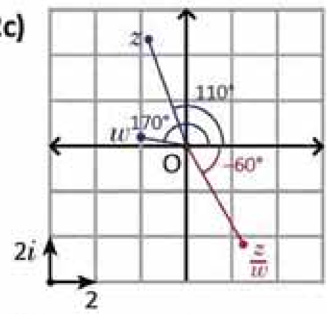
2a)



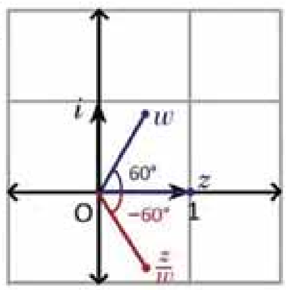
2b)



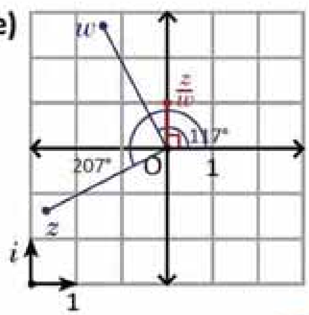
2c)



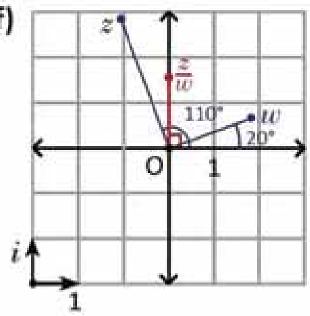
2d)



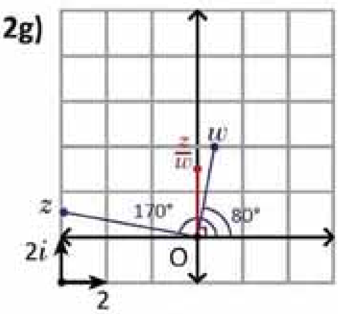
2e)



2f)



2g)



レッスン 3

3.6 ド・モアブルの定理

導入問題

$z = 2(\cos 15° + i \text{ sen } 15°)$ であると考え、z^2 と z^{-2} を求めなさい。

$z^{-n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n$ になります。

解法

$$z^2 = [2(\cos 15° + i \text{ sen } 15°)][2(\cos 15° + i \text{ sen } 15°)]$$
$$= 2^2[\cos(15° + 15°) + i \text{ sen}(15° + 15°)]$$
$$= 4(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)$$
$$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$
$$= 2\sqrt{3} + 2i$$

$$z^{-2} = \left(\frac{1}{z}\right)^2$$
$$= \left\{\frac{1}{2}[\cos(-15°) + i \text{ sen }(-15°)]\right\}^2$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2[\cos(-15° - 15°) + i \text{ sen}(-15° - 15°)]$$
$$= \frac{1}{4}[\cos(-30°) + i \text{ sen }(-30°)]$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3} - i}{8}$$

全体を通して

複素数が与えられた場合は $z = |z|(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)$：

$$z^2 = |z|^2(\cos 2\theta + i \text{ sen } 2\theta).$$

$z^0 = 1$ となります。

そして、整数 n については、次のようになります。

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i \text{ sen } n\theta).$$

この複素数の n 乗目の式は**ド・モアブルの定理**として知られています。

例

等式 $z^3 = 1$ を真とする複素数 z の値（値は複数のこともある）を求めなさい。

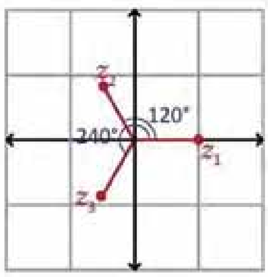
$z = |z|(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)$ con $0° \le \theta < 360°$ であると考えると,
$z^3 = |z|^3(\cos 3\theta + i \text{ sen } 3\theta) = 1(\cos 0° + i \text{ sen } 0°)$ となります。

このことから、$|z|^3 = 1$、したがって $|z| = 1$ となります。

さらに $3\theta = 360° \times n$ (n： 全数) そして $0° \le \theta < 360°$, $3\theta = 0°$, $3\theta = 360°$ または $3\theta = 720°$, このことから $\theta = 0°$, $\theta = 120°$ または $\theta = 240°$ になります。

$z^3 = 1$ son $z_1 = \cos 0° + i \text{ sen } 0°$、$z_2 = \cos 120° + i \text{ sen } 120°$, $z_3 = \cos 240° + i \text{ sen } 240°$ を満たす z 値が得られることから、下記のように表わすことができます。

$$z_1 = 1,\ z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$



z_1, z_2, z_3 で構成された三角形は正三角形であることに注目しましょう。この側面の長さを計算して確認することができます。

問題

1. 複素数 $z = 2(\cos 15° + i \text{ sen } 15°)$ の、解を求めなさい。

a) z^2　　b) z^3　　c) z^4　　d) z^6　　e) z^8

2. 複素数 $w = 3(\cos 20° + i \text{ sen } 20°)$ の、w^{-3} を求めなさい。
3. 等式 $z^4 = 1$ を真とする複素数 z の値（値は複数のこともある）を求めなさい。
4. 等式 $w^6 = 1$ を真とする複素数 w の値（値は複数のこともある）を求めなさい。

ユニット7

達成の目安

3.6 ド・モアヴルの公式を使って複素数を 1 乗に上げた結果を計算する。

学習の流れ：

複素数の指数を学びます。生徒は、軸上の角度だけでなく、頻出する角度の三角比を覚えなければなりません。

ねらい：

解答では、複素数の積のルールを用いて与えられた累乗を求めます。問題では、3 以上の指数が必要なものはありません。

問題の解き方：

1a) $z^2 = 2^2[\cos(2\times15°) + i\ \text{sen}(2\times15°)]$
$= 4(\cos 30° + i\ \text{sen}\ 30°)$
$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$
$= 2\sqrt{3} + 2i$

1b) $z^3 = 2^3[\cos(3\times15°) + i\ \text{sen}(3\times15°)]$
$= 8(\cos 45° + i\ \text{sen}\ 45°)$
$= 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$= 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$

1c) $z^4 = 2^4[\cos(4\times15°) + i\ \text{sen}(4\times15°)]$
$= 16(\cos 60° + i\ \text{sen}\ 60°)$
$= 16\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$= 8 + 8\sqrt{3}i$

1d) $z^6 = 2^6[\cos(6\times15°) + i\ \text{sen}(6\times15°)]$
$= 64(\cos 90° + i\ \text{sen}\ 90°)$
$= 64i$

1e) $z^8 = 2^8[\cos(8\times15°) + i\ \text{sen}(8\times15°)]$
$= 256(\cos 120° + i\ \text{sen}\ 120°)$
$= 256\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$= -128 + 128\sqrt{3}i$

2. $w^{-3} = 3^{-3}[\cos(-3\times20°) + i\ \text{sen}(-3\times20°)]$
$= \frac{1}{27}[\cos(-60°) + i\ \text{sen}(-60°)]$
$= \frac{1}{27}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$= \frac{1}{54} - \frac{\sqrt{3}}{54}i$

3. $z = |z|(\cos\theta + i\ \text{sen}\ \theta)$ con $0° \le \theta < 360°$ であると考えると,

$\Rightarrow z^4 = |z|^4(\cos 4\theta + i\ \text{sen}\ 4\theta) = 1(\cos 0° + i\ \text{sen}\ 0°)$.

さらに $4\theta = 360° \times n \Rightarrow \theta = 90° \times n$, con $0° \le \theta < 360°$ そして $|z|^4 = 1$、

$n = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow \theta = 0°, \theta = 90°, \theta = 180°$ または $\theta = 270°$ そして $|z| = 1$

$\Rightarrow z_1 = \cos 0° + i\ \text{sen}\ 0°, z_2 = \cos 90° + i\ \text{sen}\ 90°, z_3 = \cos 180° + i\ \text{sen}\ 180°, z_4 = \cos 270° + i\ \text{sen}\ 270°$

$\Rightarrow z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1, z_4 = -i$.

4. 等式 $w^6 = 1$ を真とする複素数 w の値（値は複数のこともある）を求めます。

$\Rightarrow w^6 = |w|^6(\cos 6\theta + i\ \text{sen}\ 6\theta) = 1(\cos 0° + i\ \text{sen}\ 0°)$.

そして $6\theta = 360° \times n \Rightarrow \theta = 60° \times n$ と $0° \le \theta < 360°$ または $|w|^6 = 1$,

$n = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \Rightarrow \theta = 0°, \theta = 60°, \theta = 120°, \theta = 180°, \theta = 240°, \theta = 300°$ そして $|w| = 1$、

$\Rightarrow w_1 = \cos 0° + i\ \text{sen}\ 0°, w_2 = \cos 60° + i\ \text{sen}\ 60°, w_3 = \cos 120° + i\ \text{sen}\ 120°, w_4 = \cos 180° + i\ \text{sen}\ 180°,$
$w_5 = \cos 240° + i\ \text{sen}\ 240°$ または $w_6 = \cos 300° + i\ \text{sen}\ 300°$

$\Rightarrow w_1 = 1, w_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, w_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, w_4 = -1, w_5 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ または $w_6 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

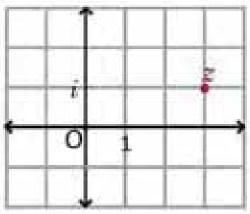
3.7 復習問題

1. 各複素平面上に以下の複素数を示し、モジュールを求めなさい。

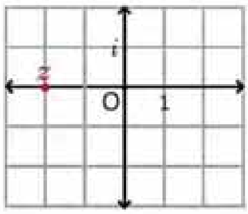
a) $z = -1 + 3i$　　b) $z = -2i$　　c) $z = -3$

2. 各複素平面上で表される複素数を示しなさい。

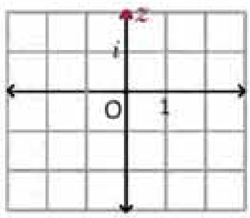
a)



b)



c)

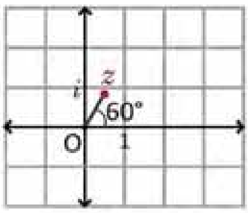


3. 複素数 $z = 1 - 2i$ と $w = -2 + 2i$ があると考えて、複素平面上に次の数を示しなさい。

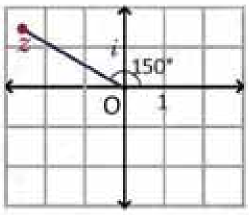
a) $z + w$　　b) $w - z$　　c) $z - w$　　d) $-3z$　　e) $\overline{w}$　　f) $-w + 2z$

4. 各複素平面上で表される複素数を示しなさい。

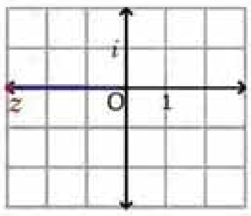
a) $|z| = 1$



b) $|z| = 3$



c) $|z| = 3$



5. モジュールと引数がそれぞれの文字式で示されている時の複素数を求めなさい。

a) $|z| = 4, \theta = 60°$　　b) $|z| = 1, \theta = 45°$　　c) $|z| = 2, \theta = 300°$　　d) $|z| = 3, \theta = 180°$

6. 各文字式の zw 積を求めなさい。

a) $z = 3(\cos 23° + i \operatorname{sen} 23°)$ と $w = 4(\cos 37° + i \operatorname{sen} 37°)$
b) $z = 2(\cos 41° + i \operatorname{sen} 41°)$ と $w = 5[\cos(-11°) + i \operatorname{sen}(-11°)]$
c) $z = 3(\cos 200° - i \operatorname{sen} 160°)$ と $w = 2(\cos 20° - i \operatorname{sen} 20°)$

7. 複素数 $z = \cos 10° + i \operatorname{sen} 10°$ の、解を求めなさい。

a) z^3　　b) z^6　　c) z^9

8. 複素数 $w = 2(\cos 9° + i \operatorname{sen} 9°)$ の、w^{5} を求めなさい。

9. 各文字式について $\frac{z}{w}$ 比率を求めなさい。

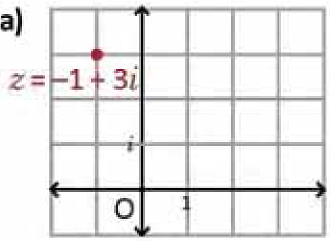
a) $z = \cos 25° + i \operatorname{sen} 25°$ と $w = 3[\cos(-35°) + i \operatorname{sen}(-35°)]$
b) $z = 6(\cos 21° + i \operatorname{sen} 21°)$ と $w = 3(\cos 9° - i \operatorname{sen} 9°)$
c) $z = 2(\cos 115° + i \operatorname{sen} 65°)$ と $w = 2(\cos 5° - i \operatorname{sen} 5°)$

達成の目安

3.7 複素数に対応する問題を解く。

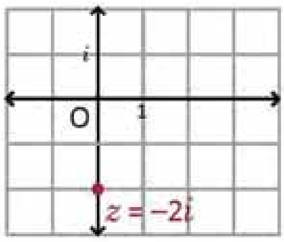
問題の解き方：

1a)



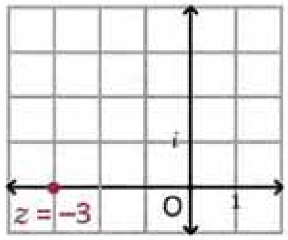
$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

1b)



$|z| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$

1c)



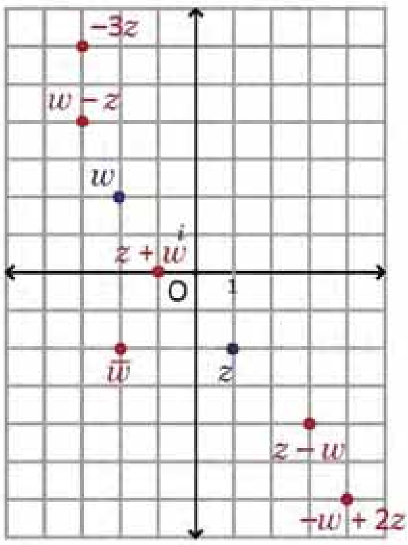
$|z| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$

2a) $z = 3 + i$

2b) $z = -2$

2c) $z = 2i$

3. $z = 1 - 2i$と$w = -2 + 2i$



4a) $z = \cos 60° + i \text{ sen } 60° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

4b) $z = 3(\cos 150° + i \text{ sen } 150°) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

4c) $z = 3(\cos 180° + i \text{ sen } 180°) = -3$

5a) $z = 4(\cos 60° + i \text{ sen } 60°) = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3}i$

5b) $z = \cos 45° + i \text{ sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

5c) $z = 2(\cos 300° + i \text{ sen } 300°) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \sqrt{3}i$

5d) $|z| = 3\,(\cos 180° + i \text{ sen } 180°) = -3$

6a) $z = 3(\cos 23° + i \text{ sen } 23°)$

$w = 4(\cos 37° + i\text{sen } 37°)$

$zw = 3 \times 4(\cos 60° + i \text{ sen } 60°$

$= 12\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 6 + 6\sqrt{3}\,i$

6b) $z = 2(\cos 41° + i \text{ sen } 41°)$

$w = 5[\cos(-11°) + i\text{sen}(-11°)]$

$zw = 2 \times 5(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)$

$= 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right)$

$= 5\sqrt{3} + 5i$

6c) $z = 3(\cos 200° + i \text{ sen } 200°)$

$w = 2(\cos(-20°)) + i\text{sen}(-20°)$

$zw = 3 \times 2(\cos 180° + i \text{ sen } 180°)$

$= 6(-1)$

$= -6$

7a) $z^3 = \cos 30° + i \text{ sen } 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ **7b)** $z^6 = \cos 60° + i \text{ sen } 60° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **7c)** $z^9 = \cos 90° + i \text{ sen } 90° = i$

8. $w = 2(\cos 9° + i\text{sen } 9°) \Rightarrow w^{-5} = 2^{-5}(\cos(-45°) + i\text{sen }(-45°)) = \frac{1}{32}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{64} - \frac{\sqrt{2}}{64}i.$

9a) $\frac{z}{w} = (\cos 25° + i\text{sen } 25°) \div 3[\cos(-35°) + i\text{sen}(-35°)] \;=\; \frac{1}{3}[\cos(25° - (-35°)) + i \text{ sen }(25° - (-35°))]$

$= \frac{1}{3}(\cos 60° + i \text{ sen } 60°) \;= \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$

9b) $\frac{z}{w} = 6(\cos 21° + i\text{sen } 21°) \div 3[\cos(-9°) + i\text{sen}(-9°)] = \frac{6}{3}(\cos 30° + i \text{ sen } 30°) \;= \sqrt{3} + i$

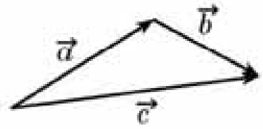
9c) $\frac{z}{w} = 2(\cos 115° + i\text{sen } 115°) \div 2[\cos(-5°) + i\text{sen}(-5°)] \;= \frac{2}{2}(\cos 120° + i \text{ sen } 120°) \;= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

3.8 このユニットの問題

問題 1〜4 の正しい解を求めなさい。

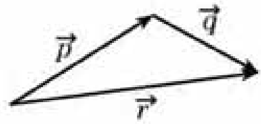
1. ベクトル $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ を足し合わせた結果のベクトルは、

a) $2\vec{a}$　　b) $2\vec{b}$　　c) $\vec{0}$　　d) $2\vec{c}$　　e) $-2\vec{c}$



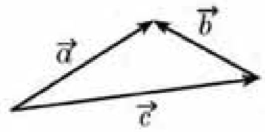
2. 演算 $\vec{p}+\vec{q}-\vec{r}$ の結果として得られるベクトルは、

a) $2\vec{p}$　　b) $2\vec{r}$　　c) $\vec{0}$　　d) $2\vec{q}$　　e) $-2\vec{r}$



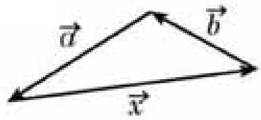
3. ベクトル $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ のノルムは もし $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 2$ で $\|\vec{c}\| = 4$ なら、

a) 2　　b) 4　　c) 6　　d) 9　　e) 0



4. 結果がベクトル x であるベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の式を求めよ。

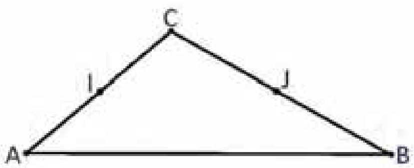
a) $2\vec{a}+\vec{b}$　　b) $\vec{a}+\vec{b}$　　c) $-(\vec{a}+\vec{b})$　　d) $\vec{a}-\vec{b}$



5. 以下のベクトル $\vec{u} = (2, 1)$, $\vec{v} = (1, 4)$ と $\vec{w} = (5, 6)$ で、$\vec{u}$ と $\vec{v}$ がベクトル基底を形成していることを証明し、この基底を基準とした $\vec{w}$ の座標を書きなさい。

6. 基底 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ のベクトル $\vec{u} = (2, 6)$ が与えられた場合の、ベクトル $\vec{u}$ の中点の座標を求めなさい。

7. 三角形 ABC と、AC の中間点である I と BC の中間点である J を考えると、次のようになります。$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ 。



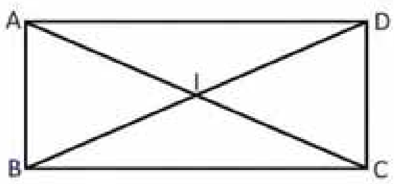
8. 以下を満たす点 P と Q があると考えます。

$$\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AQ} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$$

1.3 の授業で学んだことを応用します。

$\overrightarrow{PQ}$ がベクトル $\overrightarrow{BC}$ に平行であることを示しなさい。

9. ABCD を次のような長方形とします。AB = a と BC = b。$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 、$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$ 、$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}$、$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DI}$ と $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IA}$ を a と b の値で表しなさい。

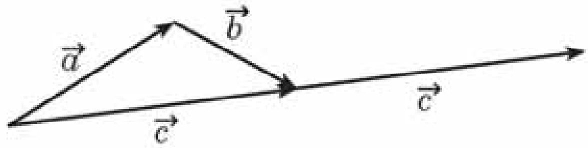


達成の目安

3.8 ベクトルや複素数の問題を解く。

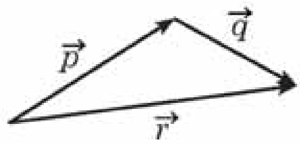
問題の解き方：

1. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{c}+\vec{c}=2\vec{c}$



正解： d) $2\vec{c}$

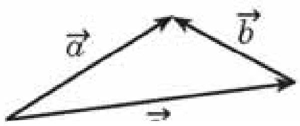
2. $\vec{p}+\vec{q}-\vec{r}=(\vec{p}+\vec{q})-\vec{r}=\vec{r}-\vec{r}=\vec{0}$



正解： c) $\vec{0}$

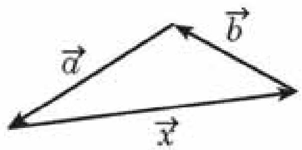
3. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+(\vec{c}+\vec{b})=\vec{a}+\vec{a}=2\vec{a}$

$\|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\|=\|2\vec{a}\|=|2|\,\|\vec{a}\|=2(3)=6$



正解： c) 6

4. $\vec{x}+\vec{b}+\vec{a}=\vec{0}\Rightarrow\vec{x}=-(\vec{a}+\vec{b})$



正解： c) $-(\vec{a}+\vec{b})$

5. $\vec{u}=(2,1)$, $\vec{v}=(1,4)$, $\vec{w}=(5,6)$

$\vec{u}$ と $\vec{v}$ は $\vec{0}$ ではありません。
ベクトルが平行であればその間の角度は 0° または 180° です。

$\vec{u}\cdot v=6$, $\|\vec{u}\|=\sqrt{5}$, $\|\vec{v}\|=\sqrt{17}$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\alpha$

$6=\sqrt{5}\sqrt{13}\cos\alpha$

$\cos\alpha=\frac{6}{\sqrt{65}}$

したがって、$\alpha\neq 0°$、180° です。

$\vec{u}$ と $\vec{v}$ は平行ではないので、ベクトル基底を形成します。

並列ではないことを確認する別の方法

もし $\vec{u}$ と $\vec{v}$ が平行な場合実数が存在します (r)。例えば $\vec{u}=r\vec{v}$、

$\Rightarrow(2,1)=r(1,4)\Rightarrow(2,1)=(r,4r)\Rightarrow 2=r$ と $1=4r$

$\Rightarrow r=2$ と $r=\frac{1}{4}$ ということはありません。

つまり、$\vec{u}=r\vec{v}$ となるような実数 r は存在しません。

よって、u と v は平行ではありません。

基底 $\vec{u},\vec{v}$ における $\vec{w}$ の座標をそこで (a,b) とすると $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$ で

$\Rightarrow(5,6)=a(2,1)+b(1,4)=(2a+b,\ a+4b)$

$$\Rightarrow\begin{cases}5=2a+b & \text{--------------------} \quad (1)\\ 6=a+4b & \text{--------------------} \quad (2)\end{cases}$$

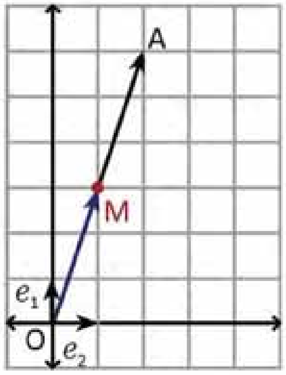
b を (1) のように表示すると、$b=5-2a$.

(2) に代入すると、$6=a+4(5-2a)\Rightarrow 6=-7a+20\Rightarrow a=2,\ b=1$.

よって、$(a,b)=(2,1)$です。

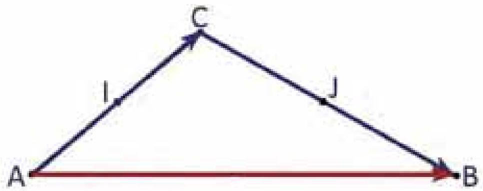
6. $\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(2, 6) = \left(\frac{1}{2}(2), \frac{1}{2}(6)\right) = (1, 3)$

Mをセグメントの中点 $\overline{OA}$ とすると
$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = (1, 3)$ です。

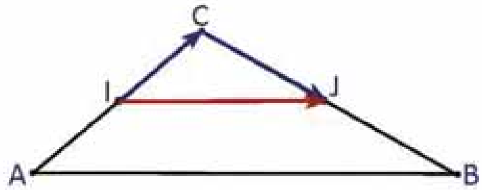


7.

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{IC}$ y $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CJ}$
$2\overrightarrow{IC} + 2\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{AB}$
$2(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CJ}) = \overrightarrow{AB}$
$2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$



$\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{IJ}$

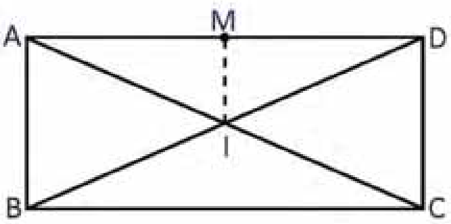
8. $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ $\quad$ $\overrightarrow{AQ} = 3\overrightarrow{AB} + 2AC$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP}$
$= 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - (2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC})$
$= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
$= \overrightarrow{CB}$
$= -\overrightarrow{BC}$ 、したがって PQ は BC に平行です。

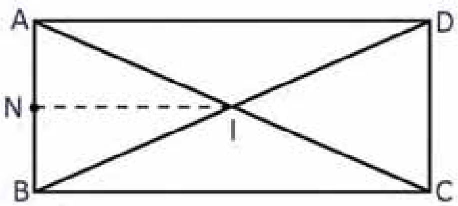
9. $\overrightarrow{AB} = a$ y $\overrightarrow{BC} = b$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = a^2$ $\quad$ $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = b^2$ $\quad$ $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2$ $\quad$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -a^2$ $\quad$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DI} = -(\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DI}) = -(\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DM}) = -\left(\overrightarrow{DA} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}\right) = -\frac{1}{2}b^2$

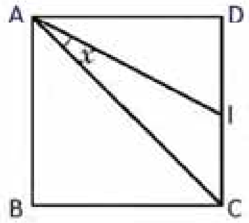


$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IA} = -(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}) = -(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AN}) = -\left(\overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = -\frac{1}{2}a^2$



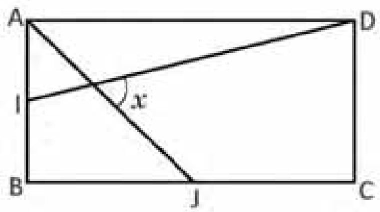
3.9 このユニットの問題

1. 正方形 ABCD の一辺で、I を $\overrightarrow{CD}$ の中点とします。角 x の値を求めなさい。



計算を容易にするために、$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AC}$ をベクトルの和として表してください。内積の三角関数式を使ってください。

2. 下の図において、ABCD は AB = 2、AD = 4 となるような長方形です。



a) J と I がそれぞれ辺 BC と AB の中点である場合の、AJ と DI の長さを求めなさい。

b) 角 x の値を求めなさい。

3. $\vec{u} = (a, b)$ を正規直交基底の非ゼロベクトルとします。任意の非ゼロの実数 r に対して、ベクトル $\vec{u}$ が $(rb, -ra)$ の形式のベクトルに直交することを証明しなさい。

4. 仮定ベクトル $\overrightarrow{OA} = (1, 4)$ と $\overrightarrow{OB} = (3, 2)$ が、もし I がベクトル $\overrightarrow{AB}$ の中点である場合のベクトル $\overrightarrow{OI}$ の座標を求めなさい。

5. 複素数を用いた次の演算の結果を求めなさい。

a) $(i-1)^8$　　b) $(1+i)^{-8}$

複素数の三角関数式を使ってください。

6. 複素数を用いた次の演算の結果を求めなさい。

a) $(i-1)(1-i)$　　b) $\frac{1-i}{1+i}$

複素数の三角関数式を使ってください。

7. 次の量を計算してください。

a) $|(i+1)(2-i)|$　　b) $\left|\frac{2-3i}{1+2i}\right|$　　c) $|(1+i)^{20}|$

8. 2 つの複素数 z と w に対して、次のことを満たすことを証明しなさい。

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

$|z|^2 = z\bar{z}$ と $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ を使ってください。

達成の目安

3.9 ベクトルや複素数の問題を解く。

問題の解き方：

1. $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DI})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$

$= \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{BC}$

$= 0 + 1 + \frac{1}{2} + 0$

$= \frac{3}{2}$

$\|AI\| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $\quad \|AC\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AI}\|\,\|\overrightarrow{AC}\|\cos x$

$\frac{3}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}(\sqrt{2})\cos x$

$\cos x = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$x \approx 18.43°$

2a) $\overrightarrow{AJ} = \sqrt{AB^2 + BJ^2}$

$= \sqrt{2^2 + 2^2}$

$= 2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{DI} = \sqrt{DA^2 + IA^2}$

$= \sqrt{4^2 + 1^2}$

$= \sqrt{17}$

2b) $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{ID} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ})\cdot(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AD})$

$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{AD}$

$= -2 + 0 + 0 + 8$

$= 6$

$\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{ID} = \|\overrightarrow{AJ}\|\,\|\overrightarrow{ID}\|\cos x$

$6 = (2\sqrt{2})(\sqrt{17})\cos x$

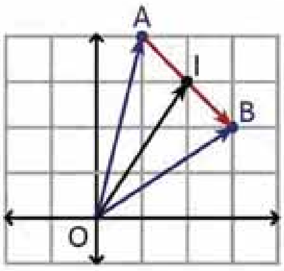
$\cos x = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$x \approx 59.04°$

3. $(a, b)\cdot(rb, -ra) = a(rb) + b(-ra) = arb - arb = 0.$

したがって、$u = (a, b)$ と $(rb, -ra)$ は、すべての非ゼロ実数 r に対して直交します。

4.



$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI}$

$= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$

$= (1, 4) + \frac{1}{2}[(3, 2) - (1,4)]$

$= (1,4) + \frac{1}{2}(2, -2)$

$= (1,4) + (1, -1)$

$= (2, 3)$

5a) $(i-1)^8$

$|i-1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow i - 1 = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$\Rightarrow i - 1 = \sqrt{2}\,(\cos 135° + i \text{ sen } 135°)$

$\Rightarrow (i-1)^8 = \sqrt{2}^8\,[\cos(8\times 135°) + i \text{ sen}(8\times 135°)]$

$= 16\,(\cos 1080° + i \text{ sen } 1080°)$

$= 16$

5b) $1 + i = \sqrt{2}(\cos 45° + i \text{ sen } 45°)$

$(1+i)^{-8} = \sqrt{2}^{-8}\,[\cos(-8\times 45°) + i \text{ sen}(-8\times 45°)] = \frac{1}{16}[\cos(-360°) + i \text{ sen}(-360°)] = \frac{1}{16}$

6a) $(i-1)(1-i) = [\sqrt{2}(\cos 135° + i \text{ sen } 135°)][\sqrt{2}\,(\cos(-45°) + i \text{ sen}(-45°))] = 2(\cos 90° + i \text{ sen } 90°) = 2i$

6b) $\frac{1-i}{1+i} = \frac{\sqrt{2}[\cos(-45°) + \text{sen}(-45°)]}{\sqrt{2}(\cos 45° + \text{sen } 45°)} = [\cos(-90°) + i \text{ sen}(-90°)] = -i$

7a) $|(i+1)(2-i)| = |i+1|\,|2-i| = \sqrt{1^2+1^2}\sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{2}\sqrt{5} = \sqrt{10}$

7b) $\left|\frac{2-3i}{1+2i}\right| = \frac{|2-3i|}{|1+2i|} = \frac{\sqrt{2^2+(-3)^2}}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{65}}{5}$

7c) $|(1+i)^{20}| = |1+i|^{20} = (\sqrt{1^2+1^2})^{20} = (\sqrt{2})^{20} = 1024$

8. $|z+w|^2 + |z-w|^2 = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) + (z-w)(\overline{z}-\overline{w})$

$= z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w} + z\overline{z} - z\overline{w} - \overline{z}w + w\overline{w}$

$= 2(z\overline{z} + w\overline{w}) = 2(|z|^2 + |w|^2)$

レッスン 4 GeoGebra を使った演習

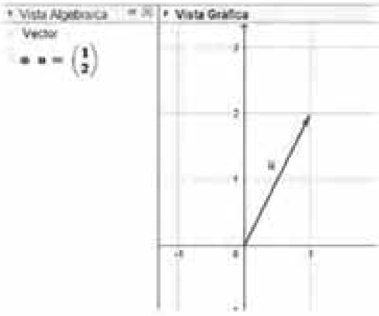
4.1 GeoGebra を使った演習 ： ベクトルの基本概念

この演習では、GeoGebra が持つベクトルの表現方法から、これらのベクトルを使ってできる操作やアプリケーションまで、ベクトルを操作するためのツールを使用します。表現の仕方から、これらのツールを使って問題を解決したり、答えを検証したりするための操作や応用までを行います。そのためには、この「演習」に記載されている手順に従ってください。次に、GeoGebra で、この演習の最後にある「課題」セクションの問題に取り組みます。

演習

GeoGebra でのベクトルの概念。

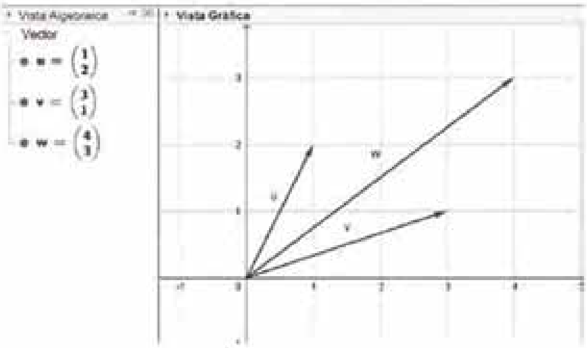
1.入力バー (la barra de entrada) に $\vec{u}=(1, 2)$ と入力して、ベクトル u = (1, 2) を直交参照でプロットします。GeoGebra では、大文字を入力すると点を、小文字を入力するとベクトルをグラフ化します。



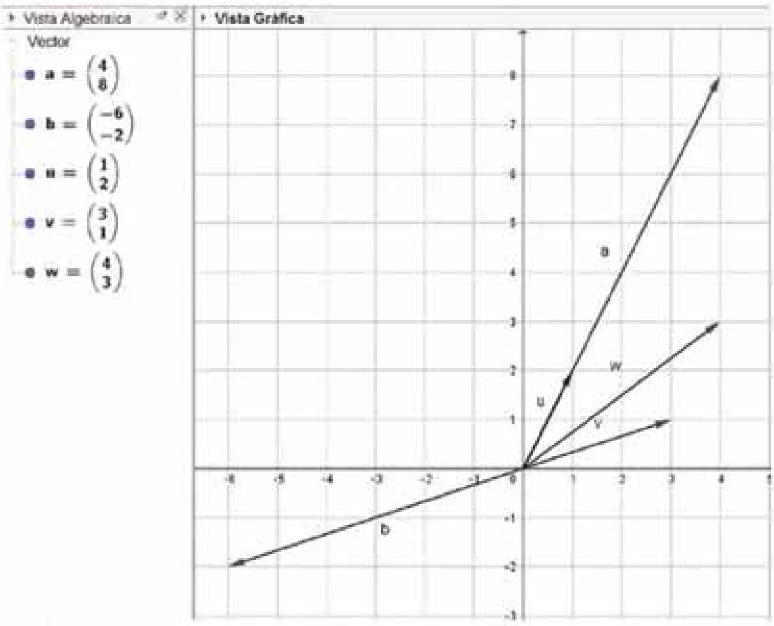
2. ベクトル $\vec{v}=(3, 1)$ をグラフ化し、v = (3, 1) と書きます。

3. ベクトル $\vec{u}+\vec{v}$ の加算を実行します。そのためには，入カバーに u + v と入力します。結果として得られたベクトルはグラフィックビュー (la Vista Gráfica) に、その座標は代数ビュー (la Vista Algebraica) に表示されます。

4. 3.にあるように、入力バーを使用して、$\vec{u}-\vec{v}$, $\vec{v}+\vec{u}$の操作を実行します。



5. また、スカラーで積を計算することも可能で、例えば、ベクトル $4\vec{u}$ を求めるには、入力バー 4u に書き込んだり、負の数で、例えば $-2\vec{v}$ のように書き込んだりすることができます。



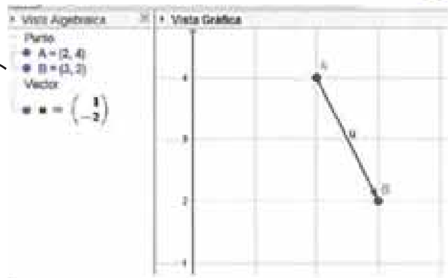
6. 出題された問題の解答を GeoGebra で確認し、正しいかどうかを確認してください。

ユニット 7

201

レッスン 4

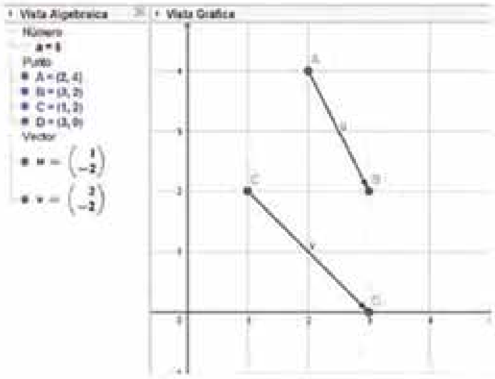
GeoGebra でのベクトルのコマンドの使用方法。



1. A = (2, 4) と B = (3, 2) の座標を持つ 2 点をグラフにします。ベクトル $\overrightarrow{AB}$ をプロットするには、入力バーにコマンドベクトル (A,B) を入力します。

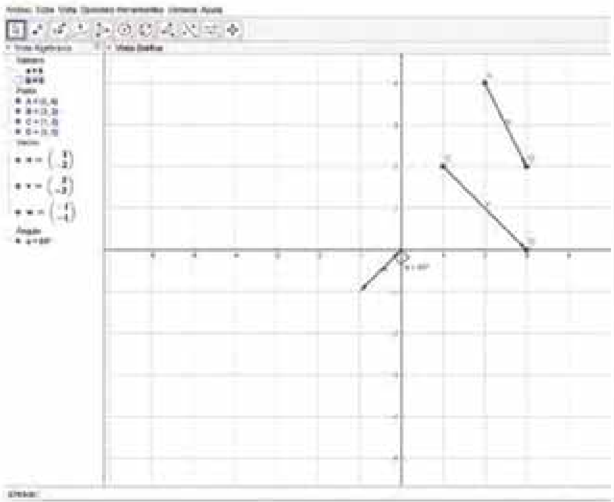
2. 1 の手順を用いて、点 C = (1, 2) と点 D = (3, 0) を持つベクトル $\overrightarrow{CD}$ をグラフ化します。

3. ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ の内積を計算するには、“u v” と入力するか、入力バーの ProductoEscalar(u, v) コマンドを使用します。代数ビューでは、変数 a に格納されている内積の値が表示されます。



4. ベクトル $\vec{w}$ = (-1, -1) をプロットし、変数 α に格納された代数ビューのベクトルの角度を出力する Anglo(w, v) コマンドを使用します。

5. 4 から、ベクトル $\vec{v}$ と $\vec{w}$ が垂直であることがわかります。入力バーの内積コマンド (el comando de producto escalar) を使って、この結果を確認してください。GeoGebra では最後に以下のような結果が得られます。



課題

GeoGebra で検証できるユニット問題の結果を検証し、ケースごとに分析し、最も適切なツールを使用してください。正しく解けなかった問題を直しましょう。

達成の目安

4.1 数学ソフトウェアを使用し、ベクトルを使って表現したり、操作を実行したりする。

学習の流れ：

GeoGebra でのベクトルの表現を紹介し、ベクトル間の足し算、引き算、内積の演算を行います。

ねらい：

演習では、授業 3.8 の問題の解答を確認することができます。さらに、他の授業で展開された問題の解答を確認することができます。

問題の解答：

3.8 の授業の問題

1. A、B そして C の 3 点が描かれています。A と C の点を x 軸上に、B を x 軸上の点とします。ベクトル $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ がプロットされます。ベクトル $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ が描かれます。

2. A、B そして C の 3 点が描かれています。A と C の点を x 軸上に、B を x 軸上の点とします。ベクトル $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{q} = \overrightarrow{BC}$ そして $\vec{r} = \overrightarrow{AC}$ がプロットされます。ベクトル $\vec{p} + \vec{q} - \vec{r}$ が描かれます。

3. 点 A(0,0), B(0,4) が描かれ、中心 A と B の 2 つの円を半径それぞれ 3 と 2 とします。これらの円の交点が決定され、C となります。円は隠されていて、さらに円 c を e のような名前に変更する必要があります。ベクトル $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ と $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ がプロットされます。$\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 2$, $\|\vec{c}\| = 4$ であることを確認してください。ベクトル $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ が描画され、そのノルムは入力バーに |a + b + c| と入力され計算されます。

4. A、B そして C の 3 点が描かれています。A と C の点を x 軸上に、B を x 軸上の点とします。ベクトル $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ そして $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ がプロットされます。答えには得られたベクトルが描かれています。

6. ベクトル $\overrightarrow{OA} = (2, 6)$ がプロットされ、ツールバーで点を見つけて中間点を選択し、グラフィカルビューでベクトルの始点と終点を選択します。点 B がプロットされ、ベクトル $\overrightarrow{OB}$ がプロットされます。

7. 点 A(0, 0) と B(6, 0) がプロットされ、ツールバーから多角形オプションが選択され、三角形 ABC がプロットされます。それらを I と J と名付けて、側面 AC と BC の中点を突き止めます。
ベクトル $\overrightarrow{AB}$ そして $\overrightarrow{IJ}$ がプロットされ、次にベクトル $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ がプロットされます。点 B と点 C を選択して移動させると、ベクトル $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{IJ}$ の座標が同じであることがわかります。

8. 点 A(0, 0) がプロットされ、平面内の他の 2 つの点が選択され、B、C と名付けられます。ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ がグラフ化され、ベクトル $\vec{p} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ と $\vec{q} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ （それぞれベクトル $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{AQ}$ ）がグラフ化されます。ベクトル P と Q の終点をプロットするには、入力バーに P = p と Q = q と入力し、ベクトル $\overrightarrow{BC}$ と $\overrightarrow{PQ}$ を m と n と名付けてプロットします。ベクトル $\overrightarrow{BC}$ と $\overrightarrow{PQ}$ の座標は逆であり、したがって平行であることがわかります。後者は、BC を通る線と P を通る平行線をプロットすることで確認できますが、この最後の線には点 Q が含まれています。

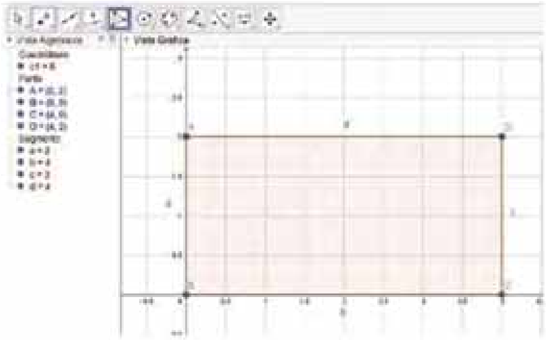
4.2 GeoGebra の演習： 問題を解く

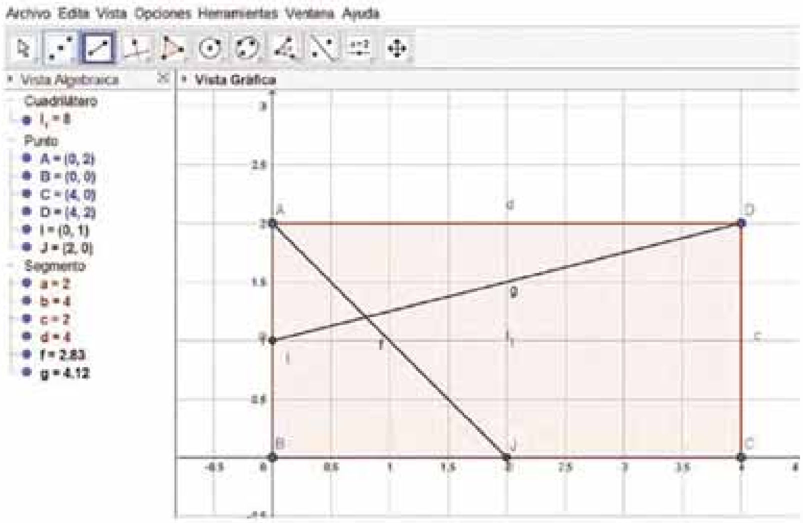
この練習では、前回の授業で習ったツールを使って、授業3.9のユニットの問題をいくつか解いていきます。そのためには、「演習」に記載されている手順に従ってください。次に、GeoGebraで、この演習の最後にある「課題」セクションの問題に取り組みます。

演習

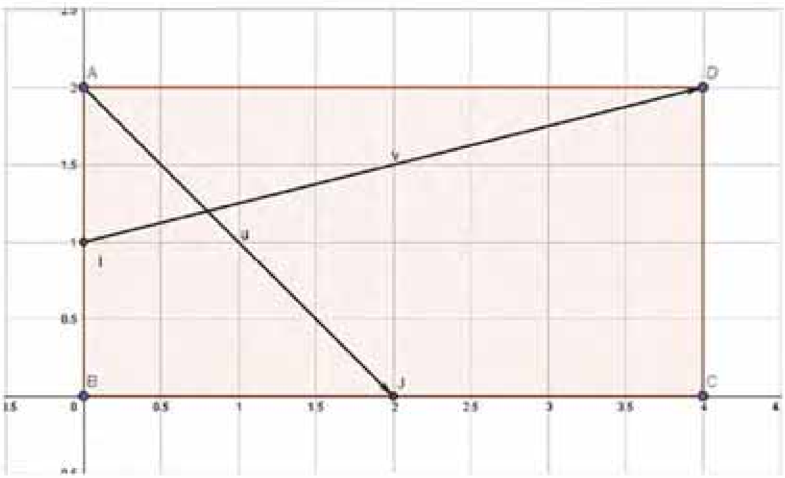
授業 3.9 の問題 2 をもう一度解きます。

1. 点 A = (0, 2), B = (0, 0), C = (4, 0), D = (4, 2) をプロットし、多角形ボタン (el botón de Polígono) を使用して、表示された矩形をプロットします。
2. そして、AB と BCの中点を中点ボタンでプロットします。下図のようにセグメント DI と AJ をプロットします。



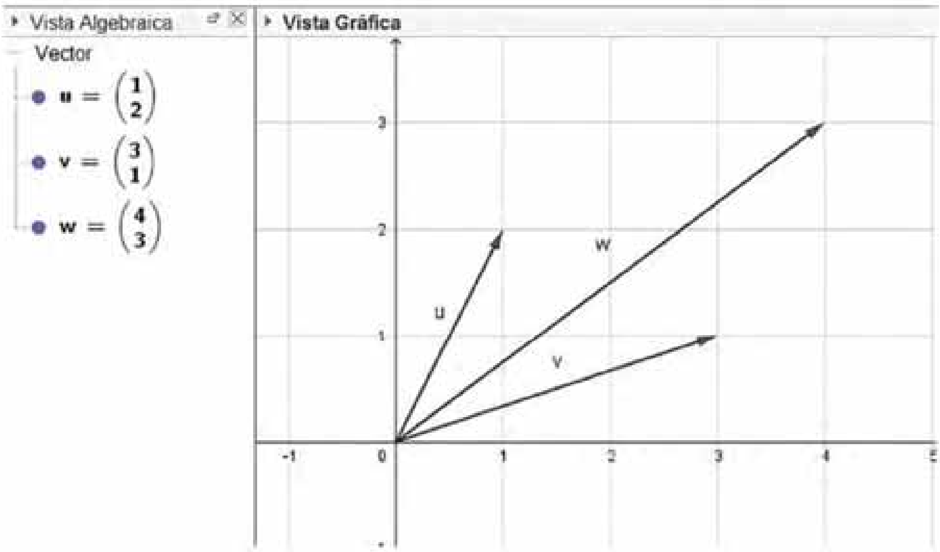


3.2 点間のベクトルを決定するコマンドを使用して、ベクトル $\overrightarrow{AJ}$ と $\overrightarrow{ID}$ をグラフ化します。



4. Ángulo(u, v) コマンドを使用して、ベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の間の角度を計算します。

5. この角度の測定値を確認するには、セグメント AJ と ID の交点をグラフ化し、角度測定オプションを使って角度 JED を測定します。両方の角度が等しいことを確認してください。

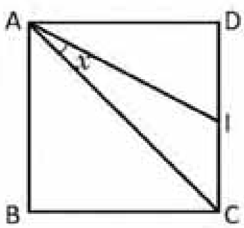


6. 最後にノートに書いた答えを確認すると、問題が正しく解けたかどうかが確認できます。

課題

- このユニットの授業 3.9 問題の 1・3・4 を解けるように操作してみましょう。続いて、GeoGebra で得られた解答と比較して、正しく解けたかどうかを確認してください。

- I が BC の中点である辺 1 の正方形 ABCD があるとします。角 x の値を求めなさい。



- $\vec{u}$ = (a, b) を正規直交基底の非ゼロベクトルとします。任意の非ゼロの実数 r に対して、ベクトル $\vec{u}$ が $(rb, -ra)$ の形式のベクトルに直交することを証明しなさい。

- 仮定ベクトル $\overrightarrow{OA}$ =(1,4) と $\overrightarrow{OB}$ =(3,2) で、もしベクトル $\overrightarrow{AB}$ の中点が I である場合のベクトル $\overrightarrow{OI}$ の座標を求めなさい。

テストの説明

4.2 数学ソフトウェアを使用して、ベクトルに関する問題を解きなさい。

学習の流れ：

引き続き問題をもう一度解いてみます。ここでは授業 3.9 の問題 2 を例として展開します。

ねらい：

この授業では、授業 3.9 の問題を GeoGebra ツールを使って確認します。

問題の解答：

1. 点 A(0, 0) と点 B(1, 0) をプロットし、点 A と点 B を選択して 4 辺多角形を作り、正多角形ツールを使って正方形 ABCD をプロットします。中点 I とセグメント AI と AC を描画します。角度 CAI を描きます。

3. スライダーを r という名で構築します。最小で -10、最大で 10、増分 0.1 でに十分です。
ベクトル (3, 2) を描き、次にベクトル (2r, -3r) を描きます。
角度ツールバーから角度を選択し、2 つのベクトルをクリックしてベクトル間の角度を描きます。
アニメーションを開始し、ベクトル間の角度の値を見ます。0° から 180° の間の角度を表示するには、基本オプションの角度プロパティで 0° から 180° の間の角度を選択します。

4. ベクトル $\vec{u}$ = (1, 4), $\vec{v}$ = (3,2) をグラフ化します。点 A = (1, 4) と点 B = (3,2) をグラフ化します。そして、$\overrightarrow{AB}$ の中点を決定します。

ユニット 8. 記述統計

このユニットのねらい

記述統計学の概念と定義を適用して、現実の現象のデータ系列を分析し、適切なタイミングで適切な判断を下すことができるようにします。

関係と進歩

中学3年

ユニット 7：帯グラフと円グラフ（7学年）
- 帯グラフ
- 円グラフ

ユニット 8：統計データの整理と分析（8 学年）
- 量的変数のための統計表とグラフ
- 代表値の測定
- 近似値と重要な桁

9 学年

ユニット 8：分散の測定
- 分散
- 典型的偏差の性質

高校 1 年

ユニット 8：記述的統計
- 標本抽出、統計量、パラメータ
- 位置の測定
- GeoGebra を使った演習

このユニットの学習計画

レッスン	時間	授業
1. 標本抽出、統計量、パラメータ	1	1. 以前の定義
	1	2. 標本の導入
	1	3. 確率標本
	1	4. 非確率標本
	1	5. 頻度表の見直し
	1	6. 代表値の測定
	1	7. 分散の測定
	1	8. 変動係数
	1	9. 復習問題
2. 位置の測定	1	1. 四分位数
	1	2. 箱ひげ図
	1	3. 箱ひげ図の分析
	1	4. 十分位数とパーセンタイル
	1	5. 復習問題
	2	6. このユニットの問題
3. GeoGebra を使った演習	1	1. 統計分析
	1	ユニット 8 の テスト
	2	第 4 期のテスト

全18コマ + ユニット 8 のテスト + 第 4 期のテスト

各レッスンの要点

レッスン 1：標本抽出、統計量、パラメータサンプリングの概念を紹介し、中心傾向の尺度や分散の尺度についての内容を見直す。

レッスン 2：位置の測定。四分位数と箱ひげ図の学習がポイントです。

レッスン 3：GeoGebra を使った演習。GeoGebra が提供する統計解析ツールを学習します。

レッスン 1 標本抽出、統計量、パラメータ

1.1 以前の定義

導入問題

「ブックフェア」には 1,000 名が参加しました。調査を通じて、人口の 15% がインタビューを受け、性別、年齢、好みの文学ジャンル、本の購入予算について質問されます。次の問いに答えなさい。

a) ブックフェアには何人が参加しましたか？
b) 何人がインタビューを受けましたか？
c) 面接対象者には何を尋ねられましたか？

解法

a) 合計 1,000 人が参加しました。

b) 1,000 人の 15% がインタビューを受けました。つまり、次のとおりです。 $1000 \times \frac{15}{100} = 150$

そのため、150 人にインタビューを行いました。

c) 性別、年齢、好みの文学ジャンル、本を購入するための予算について尋ねられました。

定義

- **母集団**は、同じ特性を持ち、結論を得ることに関心のある個人、オブジェクト、またはイベントの合計セットとして定義されます。
- 母集団の一部が調査のねらいで取得された場合、この選択されたグループは**標本**と呼ばれます。
- 調査する情報の種類は、**統計変数**と呼ばれます。統計変数は、さまざまな値を取る可能性があり、測定または観察できるプロパティです。

統計変数は、図に示すように分類できます。

- **定性変数**は、さまざまな品質、特性、またはモダリティを表します。
  - 名目上の定性変数を順序で定義することはできません。
    例：国、言語、婚姻状況、性別。
  - 通常の定性変数は、確立されたスケールに従って順序付けられたさまざまな値を取ることができます。例：悪い、平均、良い。

質的変数は、2 つの値のみを取る場合、二分されます。
例：はいといいえ、男性と女性。または、3 つ以上の値を取る場合はポリトミック。

- **量的変数**は数値を取ります。
  - 離散量変数は、負でない整数の数値を取ります。
    例：子供の数。
  - 連続定量変数は、特定の値の範囲内で任意の値を取ることができます。
    例：体重、身長、家族の費用。

206

レッスン 1

例

チャラテナンゴ市に住む 21,000 人のうち 2,000 人が「社会における女性の役割」に関するイベントに参加し、性別、身長、子供の数、家庭での料理の頻度などの情報を収集しています。その答えの選択肢は次のとおりです。決して、ほとんど決して、時々、ほとんど常にまたは常に。次のことがらについて答えなさい。

a) このイベントの人口と標本を特定します。

b) 変数を特定し、分類します。

c) 標本を採取する人口は、チャラテナンゴ市に住む 21,000 人です。
標本は、イベントに参加した 2,000人です。

d) 変数は、性別、年齢、子供の数、料理の頻度です。それらを分類すると、次のようになります。

質的変数		質的変数	
名目	• 性別	**離散**	• 子どもの数
序数	• 料理の頻度（決して、ほとんど決して、...、常にのように注文できます）	**継続的**	• 高さ

問題

1. 次の各状況について、母集団、標本、統計変数、およびそれらの分類を特定します。

a) エルサルバドール国立図書館は数学の本の状況を知りたがっています。これらは最初の 10 の棚から抽出され、良い、悪い、役に立たないものに分類されます。

b) エルサルバドールのすべての学齢期の子供たちのうち、9 年生の子供たちが電子音楽と楽器音楽のどちらが好きかを調べるために調査されます。

c) ロザレス国立病院では、肺疾患で入院している患者にインタビューし、その病院でどのように治療されているかを調べたいと考えています。

d) モンテクリスト国立公園では、すべてのヒノキの木が持つ寿命を知りたいと思います。

モンテクリスト国立公園は、サンタアナ県メタパン市にある保護された公園で、面積は 1973 ヘクタールです。

e) サンサルバドールの映画館では、コメディロマンス映画に参加する人にインタビューを行い、ロマンス、コメディ、またはその両方が好きかどうかを調べます。

2。以下に示す統計変数が質的変数（名目または順序）であるか、量的変数（離散または連続）であるかを判別します。

a) 人の血液型

b) 摂氏温度

c) 教育の程度

d) 宗教

e) 出生地

f) 生徒数

g) アイテムの価格

h) 50 人の子供における血糖値

i) 市町村ごとの診療所の数

j) 親の月収

k) 血圧

l) 痛みの強さ

達成の目安

1.1 母集団、標本、変数の定義を適用し、変数を定性的な名義と順序、または定量的な離散と連続に分類します。

学習の流れ：

3 番目のサイクルでは、統計ブロックは 7 年生から取り組んできました。 グラフの種類、次に母集団の中心傾向の測定値、次に分散の測定値について説明しました。このユニットでも同じ概念が使用されますが、標本と母集団で分けられます。

ねらい：

この授業は、母集団、標本、変数、および変数のタイプの基本概念を紹介することを目的としています。導入問題から、母集団と標本部分を入力できます。また、この例は、変数のセットをそのタイプに従って分類する方法を示しています。

問題の解き方：

1a) 人口：エルサルバドル国立図書館の数学の本。標本：最初の 10 個の棚。変数：数学の本の状態。タイプ：定性的順序。

1b) 人口：エルサルバドルの学齢期の子供。標本：9 年生の子供。変数：好きな音楽。タイプ：定性的名目。

1c) 人口：すべての入院患者。標本：肺疾患で入院した患者。変数：病気の段階。タイプ：定性的順序。

1d) 人口：モンテクリスト国立公園のすべての木。標本：ヒノキの木。変数：寿命。タイプ：連続定量。

この問題の場合、正確な年について言及するのが一般的であるため、寿命は離散的であると見なすことができますが、回答では、時間が連続であるため、連続変数であることが示唆されています。

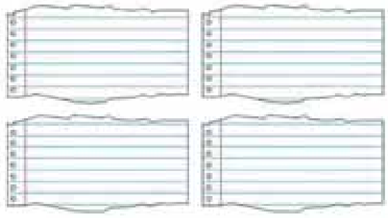
1e) 人口：コメディロマンス映画を見るために出席する人々。標本：サンサルバドール映画館でコメディロマンス映画を見に出席した人々。変数：好みの映画のジャンル。タイプ：定性的名目。

2a) 定性的名目。	**2b)** 継続的な定量。	**2c)** 定性的順序。
2d） 定性的名目。	**2a)** 定性的名目。	**2f)** 離散定量。
2g) 継続的な定量。	**2h)** 継続的な定量。	**2i)** 離散定量。
2j) 継続的な定量。	**2k)** 継続的な定量。	**2l)** 定性的順序。

レッスン 1

1.2 導入アクティビティ

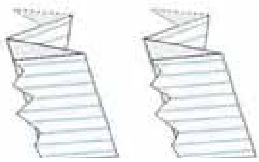
道具
– 紙片（各学生に 1 枚）
– マーカー



導入 1
次のプロセスを使用して、授業から 5 人の生徒を選択します。

1. 5枚の紙に「選択した」という言葉を書いてください。

2. すべての紙を折って、各生徒に1つずつ渡します。



3. 選ばれた生徒とは、「選ばれた」という言葉が書かれた紙片が出てきた生徒のことです。

課題 2
次のプロセスを使用して、授業から 5 人の生徒を選択します。

1. 1 から N までの生徒をリストします。N は教室の生徒の総数です。
2. 生徒は 1 から $\frac{N}{5}$ 以下の最大の整数 m までランダムに選ばれます（紙片やランダム電卓などを使用できます）。
3. 2番目に選択されたのは、前の番号と m の合計に最も近い番号のものです。
4. 3 番目に選択されたのは、2 番目の番号に m が追加されたものです。以下同様に、5 人の生徒が選択されるまで、たとえば、最初の生徒の番号が a の場合、選択された 5 人の生徒は、a、$a + m$、$a + 2m$、$a + 3m$、$a + 4m$ の番号の生徒になります。

たとえば、$N = 40$ および $a = 3$ の場合、$m = \frac{40}{5} = 8$ であり、選択された数値は次のとおりです。3、11、19、37、35。

定義
N 個の要素の母集団からn個の要素の標本を選択するアクションは、**標本**と呼ばれます。

母集団のすべての要素が選択される確率が等しい（アクティビティ1のように）標本のタイプは、**単純ランダム標本**として知られています。

母集団がリストされ、$\frac{N}{n}$ 以下の乱数が選択されるランダム標本のタイプの場合、N は母集団の合計、n は標本の合計であり、その他は前の値に $\frac{N}{n}$ を加算して選択されます。体系的な**ランダム標本**として知られています。

問題
1. 単純標本の 2 つの方法を記述します。

2. 体系的な**ランダム標本**の 2 つの形式を記述します。

3. ラッフルを行うとき、標本していますか？

達成の目安

1.2 単純で体系的なランダム標本手法を計画し、適用します。

学習の流れ：

前の授業で定義された理論的フレームワークから始めて、母集団を標本するためのさまざまな方法を決定できるようになりました。

ねらい：

このアクティビティでは、学生が単純で層化されたランダム標本を実行する手順を提案および実装するように動機付けられることが期待されます。

問題の解き方：

1. この問題では、学生はいくつかの方法に言及することができます。いくつかは次のようになります。
   - 数字を配り、他の 2 倍の数字から標本に必要な量をバッグから抽出すると、標本は描かれた数字に対応する数字の人になります。
   - 見知らぬ人に必要な生徒数を選ばせます。

> 必要に応じて、教師は、電卓に「ランダム」関数があり、一部の電卓では「Ran # 」として検出され、小数点以下 3 桁のランダムな 10 進数を返すことに言及できます。

2. この問題では、学生はいくつかの方法に言及することができます。いくつかは次のようになります。
   - 母集団全体に番号を付けてから、1 から 10 までの乱数（たとえば 3）を選択し、母集団から 3 の倍数をすべて抽出します。
   - 個体数が必要な標本と一致するグループに母集団を階層化すると、すべてのグループの 1 つがランダムに選択されます。

3. ラッフルのアイデアは、特定のグループの人々にある種の贈り物を届けることです。 ギフトが贈られる人の数がラッフルに参加する人の数より少ない限り、ラッフルが理にかなっていることは明らかです。そのため、ラッフルは参加した人口の一部を選択することに相当します。ただし、目的は、特性を調査したり、問題について結論を出すための調査を実行したりすることではありません。したがって、ラッフルは標本ではありませんが、ラッフルと非常によく似た手順で標本を行うことができます。

レッスン 1

1.3 確率標本*

導入問題

研究所には、高校生に関する次の情報があります。

	女の子	男の子
1年目	24	12
2年目	9	15

20人の高校生（1 年生または 2 年生、女の子または男の子）の標本を選択する方法を決定します。

解法

この問題では、人口には 4 種類の人々がいて、それぞれに対応する人口の割合を計算できます。

1 年生の女の子： $\frac{24}{60} \times 100 = 40\%$

1 年生の男の子： $\frac{12}{60} \times 100 = 20\%$

2 年生の女の子： $\frac{9}{60} \times 100 = 15\%$

2 年生の男の子： $\frac{15}{60} \times 100 = 25\%$

次に、20 人の学生の標本を取得するために、これらのパーセンテージを使用できます。
1 年生の女の子：20 の 40% は 8 です
1 年生の男の子：20 の 20% は 4 です
2 年生の女の子：20 の 15% は 3 です
2 年生の男の子：20 の 25% は 5 です

したがって、1 年生の女の子 8 人、1 年生の男の子 4 人、2 年生の女の子 3 人、2 年生の男の子 5 人を選択して、20 人の高校生の標本を抽出できます。

全体を通して

セクター（層）に分割された母集団に比例して適用される標本は、**層化標本**と呼ばれます。

グループを分割し、それらのいくつかをランダムに選択する必要がある母集団に適用される標本は、**クラスター標本**と呼ばれます。

確率標本は、母集団のすべての要素が標本に選択される可能性が同じであるすべての標本方法として定義されます。

単純ランダム標本、系統的、層化、およびクラスター標本は、すべて確率標本です。

例

クラスター標本を使用して、サンタアナ県の人々の好みの食べ物について調査を行う方法を決定します。

人口は、学生、サラリーマン、アスリート、フリーランサーなどのクラスターに分けることができます。そして、これらのクラスターの 2 つまたは 3 つをランダムに選択して、標本を取得します。

問題

次のデータを持つ近隣の 40 人の層化標本を実行します。

	女性	男性
若い	70	40
大人	30	60

達成の目安

1.3 日常の状況に確率標本を適用します。

学習の流れ：

この授業は、層化標本とクラスター標本に対処する確率標本手法で終了します。

つまづきやすい点：

層化抽出を実行するには、学生がパーセンテージを適用して、各層から選択する必要がある人数を決定する必要があります。

問題の解き方：

コロニーには合計で200人がいるので、各層のパーセンテージを計算します。

未成年の女性：	$\frac{70}{200} \times 100 = 35\%$	未成年の男性：	$\frac{40}{200} \times 100 = 20\%$
法定年齢の女性：	$\frac{30}{200} \times 100 = 15\%$	法定年齢の男性：	$\frac{60}{200} \times 100 = 30\%$

したがって、40 人の標本を取得するには、次のパーセンテージを使用できます。

未成年の女性：　40 の 35% は 14 です　　未成年の男性：　40 の 20% は 8 です

法定年齢の女性：40 の 15% は 6 です　　法定年齢の男性：40 の 30% は 12 です

したがって、コロニー全体から 40 人の標本を抽出し、14 人の未成年の女性、6 人の成人女性、8 人の未成年の男性、12 人の成人男性を選択できます。

1.4 非確率標本

定義

選択が調査対象の個人の特性に依存する標本では、**非確率標本**であると言われます。いくつかの非確率標本手法は次のとおりです。

- **便宜的抽出**：標本の選択は、施設または研究の特定の特性に基づいて行われます。
- **スノーボール標本**：知人が標本を選択することで構成されます。つまり、調査は既知の人を対象に行われ、目的の標本に到達するまで、既知の人を対象に行われます。標本が見つけにくい場合に使用します。
- **クォータ標本**：母集団はグループに分割され、グループごとに標本個体の数が設定されます。グループあたりの個体数は、評価の高い方法で作成されます。
- **裁量的な標本**：標本は、人々の特定の特性とトレーニングを考慮して行われます。

例1

調査では、食生活の調査を行いたいと考えており、最も連絡が取りやすいのは近所のバスケットボールチームのメンバーです。

この場合、便宜的抽出を行うことができますが、標本は母集団の傾向を反映していない可能性があります。

例2

エルサルバドルの犯罪集団の慣習や構造について知りたい調査では、身近な人に面接を行い、身近な人に近づくまで面接を行います。

この場合、スノーボール標本を行うことができます。この手法は、特定の人に情報を提供しない可能性のある人を選択するために選択でき、それらを知っている人から選択することをお勧めします。犯罪、政治、汚職などの問題を研究するために使用されます。

例3

調査は 100 人の大学生と 100 人の専門家に対して行われます。

この場合、クォータ標本を実行できます。これは、層による標本と同様の手法ですが、層ごとの人数の割り当ては、母集団から計算されません。

例4

授業で、数学オリンピックに参加する 4 人の生徒を選択します。

この場合、任意の標本を行うことができ、数学で最高の成績を収めた 4 人の学生を選択することができます。

問題

各状況での標本の種類の長所と短所を説明することにより、最も適切と思われる非確率的標本の種類を決定します。

a) 学生の好きな科目
b) 切手収集家が持っている切手の種類
c) エルサルバドルの各部門のセキュリティ
d) 水泳で競う 5 人の生徒を選ぶ

達成の目安

1.4 特定の状況に最も適切な非確率的標本手法を特定します。

学習の流れ：

前の授業が確率標本に対応するものを扱った後、授業は非確率標本技術を確立することに専念します。

ねらい：

これらのタイプの技術は通常、社会研究（および他の人道的分野）で使用され、これらの分野の現象を研究するためにさまざまな戦略を模索する必要があります。

問題の解き方：

a) これは各生徒の評価変数であるため、この場合、よりアクセスしやすい学校から情報を収集するのが自然である可能性があります。したがって、便宜的標本に入ります。

b) 切手収集家は（他の種類の収集家と同様に）自分の持ち物に非常に留まっている傾向があるため、個人的な方法でこれを調査することは困難になります。そして、さまざまな切手収集家から情報を取得するために、スノーボール技術を適用する必要がある可能性が非常に高いです。

c) 母集団のさまざまな部分の視点を取得するには、クォータ標本を実行すると便利な場合があります。この場合、確立されたグループはさまざまな部門に属します。

d) 選ばれた人は水泳能力のテストを受けるので、結果に有利な特性を持つ人を選ぶ任意の標本が便利です。

1.5 頻度表の見直し

導入問題

サンサルバドルの大都市圏のコミュニティでは、21歳未満の若者に質問し、次の情報を入手します。

a) 9 から始まり 21 で終わる 3 in 3 の 4 つの授業の度数分布の表に情報を整理します。
b) 度数分布表を作成し、これらのプールされたデータの算術平均「μ」、最頻値、および中央値を計算します。
c) 分散 (σ^2) と標準偏差を求めます。

年齢					
9	14	15	14	19	16
11	18	9	12	20	12
12	11	10	19	14	13
15	12	11	18	11	16
14	16	17	12	13	17

解法

a)

年齢	若者の数 (f)	中点 (Pm)	$f \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f(Pm - \mu)^2$
9～12	7	10.5	73.5	–4	16	112
12～15	11	13.5	148.5	–1	1	11
15～18	7	16.5	115.5	2	4	28
18～21	5	19.5	97.5	5	25	125
合計	**30**					

a) の解決策

各授業で、頻度で測定されたデータが下限以上で上限未満であることは事実です。ただし、最後の授業では上限以下です。

b) 算術平均を計算するために、列 $f \times Pm$ の値が加算され、合計データで除算されます。

$$\mu = \frac{\sum f \times Pm}{n} = \frac{73.5 + 148.5 + 115.5 + 97.5}{30} = 14.5$$

中央値を含む授業は、データ 15 と 16 が含まれているため、2 番目（12 から 15）です。

$$中央値 = \frac{12 + 15}{2} = 13.5$$

最も頻度の高い授業は 2 番目（12 から 15）です。

$$最頻値 = \frac{12 + 15}{2} = 13.5$$

c) 分散については、列 $f(Pm - \mu)^2$ の値が加算され、合計データで除算されます。

$$\sigma^2 = \frac{\sum f(Pm - \mu)^2}{n} = \frac{112 + 11 + 28 + 125}{30} = 9.2$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f(Pm - \mu)^2}{n}} = \sqrt{9.2} \approx 3.03$$

問題

スチョロス高速道路で交通警官が記録した速度は、右側の表にあります。彼は次のことを行います。

a) 度数分布表の情報を、40 から 120 までの 20 から 20 までの 4 つの授業に整理します。
b) 算術平均、最頻値、および中央値を計算しましょう。
c) 分散と標準偏差を計算しましょう。

速度 (km/h)						
60	65	40	80	80	90	45
70	100	70	50	80	55	118
75	65	90	85	70	100	55
110	70	95	70	80	115	100

達成の目安

1.5 度数分布表を作成し、グループ化されたデータの中心傾向と分散の測定値を計算します。

学習の流れ：

標本の概念といくつかの確率的および非確率的手法が確立されたら、中心傾向と分散の測定値を推定する方法に加えて、度数分布表のレビューが行われます。

ねらい：

この授業では、例として（覚えておくために）導入問題に取り組み、次に問題の部分で作業することができます。

問題の解き方：

a)

速度 (km/h)	頻度 (f)
40～60	5
60～80	9
80～100	8
100～120	6
合計	**28**

b)

速度 (km/h)	頻度 (f)	中点 (Pm)	$f \times Pm$
40～60	5	50	250
60～80	9	70	630
80～100	8	90	720
100～120	6	110	660
合計	**28**		

平均と標準偏差の計算のために表のデータを完成させるとき、学生に 10 分の 1 に近似することを提案します。

$$\mu = \frac{\sum f \times Pm}{n} = \frac{250 + 630 + 720 + 660}{28} \approx 80.7 \text{ (km/h)}$$

中央値はデータ 14 と 15 の間にあり、これらは異なる授業に分類されるため、中央値 = 80 と見なすことができます。

頻度が最も高い授業は 2 番目 (60～80) であるため、最頻値 = $\frac{60 + 80}{2}$ = 70 です。

c)

速度 (km/h)	頻度 (f)	中点 (Pm)	$f \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f(Pm - \mu)^2$
40～60	5	50	250	–30.7	942.5	4 712.5
60～80	9	70	630	–10.7	114.5	1 030.5
80～100	8	90	720	9.3	86.5	692
100～120	6	110	660	29.3	858.5	5 151
合計	**28**					

$$\sigma^2 = \frac{\sum f(Pm - \mu)^2}{n} \approx \frac{4712.5 + 1030.5 + 692 + 5151}{28} \approx 413.8$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f(Pm - \mu)^2}{n}} \approx \sqrt{413.8} \approx 20.3 \text{ (km/h)}$$

1.6 中心傾向の尺度

導入問題

ある会社は、先月の 30 の支店での販売記録と、30 の支店のうち 20 の記録を持っています。これらを以下に示します。

販売	枝の数 (f)
1,000 ドルから 2,000 ドル	5
2,000 ドルから 3,000 ドル	11
3,000 ドルから 4,000 ドル	8
4,000 ドルから 5,000 ドル	6
合計	**30**

販売	枝の数 (f)
1,000 ドルから 2,000 ドル	3
2,000 ドルから 3,000 ドル	7
3,000 ドルから 4,000 ドル	6
4,000 ドルから 5,000 ドル	4
合計	**20**

a) 30 ブランチの算術平均、中央値、および最頻値を決定します。

b) 20 の分岐の算術平均、中央値、および最頻値を決定します。

解法

a)

販売	枝の数 (f)	中点 (Pm)	$f \times Pm$
1,000 ドルから 2,000 ドル	5	1,500	7,500
2,000 ドルから 3,000 ドル	11	2,500	27,500
3,000 ドルから 4,000 ドル	8	3,500	28,000
4,000 ドルから 5,000 ドル	6	4,500	27,000
合計	**30**		90,000

平均値 $= \dfrac{90{,}000}{30} = 3{,}000$

中央値 $= \dfrac{2{,}000 + 3{,}000}{2} = 2{,}500$

最頻値 $= \dfrac{2{,}000 + 3{,}000}{2} = 2{,}500$

b)

販売	枝の数 (f)	中点 (Pm)	$f \times Pm$
1,000 ドルから 2,000 ドル	3	1,500	4,500
2,000 ドルから 3,000 ドル	7	2,500	17,500
3,000 ドルから 4,000ドル	6	3,500	21,000
4,000 ドルから 5,000 ドル	4	4,500	18,000
合計	**20**		61,000

平均値 $= \dfrac{61{,}000}{20} = 3{,}050$

中央値 = 3,000

最頻値 $= \dfrac{2{,}000 + 3{,}000}{2} = 2{,}500$

定義

母集団（30 のブランチなど）の中心傾向の尺度は、母集団**パラメーター**として知られており、多くの場合、次のように表されます。

母平均 = μ　　母平均 = Me　　母平均 = Mo

標本（20 のブランチなど）を参照する中心傾向の尺度は、**統計（または統計学者）**と呼ばれ、次のように表されます。

標本平均 = $\bar{x}$　　標本中央値 = $\tilde{x}$　　標本中央値 = $\hat{x}$

問題

授業の母集団を考慮して、クラスメートが家から学校に行くのにかかる時間に関する情報を収集し、母集団の 60% のランダム標本を実行して、標本の母集団と中心傾向のすべての測定値を計算します。

達成の目安

1.6 プールされたデータで標本と母集団の中心傾向の尺度を見つけます。

学習の流れ：

度数分布表でデータを並べ替える方法を復習したので、母集団と標本の中心傾向の測定値を区別する予定です。

ねらい：

この授業では、母集団と標本の中心傾向の測定値の表記法の違いを強調する必要があります。 標本の代表性に応じて、これらの測定値は大きくまたは少し異なる場合があることに注意してください。

問題の解き方：

この問題では、各教室の特定のデータを収集し、データの収集、編成、計算、分析、および解釈の演習を行い、収集を行うことを目的としています。教師は次のオプションのいずれかを検討できます。

- 家から学校に行くのにかかる時間を一列に並べて各生徒に尋ね、それをボードに書きます。
- 空白のページを渡して時間を記録し、生徒ごとにコピーします。
- 前日に情報を収集し、入力した資料を準備します。
- 各行の 1 人の生徒に、対応する行から情報を収集させ、それをすべての生徒と共有します。

次に、収集されたデータを使用して、学生は中心傾向の測定値の計算を実行します。また、標本を確立するには、確率標本で見られる任意の方法を使用できます。単純ランダム標本にすることをお勧めします。

最後に、抽出された標本の中心傾向の測定値が計算されます。教師は、各ケースに適切な表記法が使用されていることを確認する必要があります。計算が行われた後、母集団と標本の中心傾向の測定値の間で比較分析を行うことができます。

1.7 分散の測定

導入問題

支店の売上データを使用して、各テーブルの分散と標準偏差を計算します。

販売	枝の数 (f)
1,000 ドルから 2,000 ドル	5
2,000 ドルから 3,000 ドル	11
3,000 ドルから 4,000 ドル	8
4,000 ドルから 5,000 ドル	6
合計	**30**

販売	枝の数 (f)
1,000 ドルから 2,000 ドル	3
2,000 ドルから 3,000 ドル	7
3,000 ドルから 4,000 ドル	6
4,000 ドルから 5,000 ドル	4
合計	**20**

標本の分散と標準偏差を計算するには、nで除算するのではなく、$n-1$で除算するため、推定のバイアスが少なくなります。

解法

販売	枝の数 (f)	中点 (Pm)	$f\times Pm$	$Pm-\mu$	$(Pm-\mu)^2$	$f(Pm-\mu)^2$
1,000 ドルから 2,000 ドル	5	1,500	7,500	−1,500	2,250,000	11,250,000
2,000 ドルから 3,000 ドル	11	2,500	27,500	−500	250000	2,750,000
3,000 ドルから 4,000 ドル	8	3,500	28,000	500	250000	2,000,000
4,000 ドルから 5,000 ドル	6	4,500	27,000	1,500	2,250,000	13,500,000
合計	**30**					29,500,000

分散 $= \dfrac{\sum f(Pm-\mu)^2}{30} \approx 983{,}333.3$　　偏差= $\sqrt{\dfrac{\sum f(Pm-\mu)^2}{30}} = \sqrt{983{,}333.3} \approx 991.63$

販売	枝の数 (f)	中点 (Pm)	$f\times Pm$	$Pm-\bar{x}$	$(Pm-\bar{x})^2$	$f(Pm-\bar{x})^2$
1,000 ドルから 2,000 ドル	3	1,500	4,500	−1,550	2,402,500	7,207,500
2,000 ドルから 3,000 ドル	7	2,500	17,500	−550	302,500	2,117,500
3,000 ドルから 4,000 ドル	6	3,500	21,000	450	202,500	1,215,000
4,000 ドルから 5,000 ドル	4	4,500	18,000	1,450	2,102,500	8,410,000
合計	**20**					18,950,000

分散 $= \dfrac{\sum f(Pm-\bar{x})^2}{19} \approx 997{,}368$　　偏差= $\sqrt{\dfrac{\sum f(Pm-\bar{x})^2}{19}} = \sqrt{997{,}368} \approx 998.68$

まとめ

母集団の場合、分散は σ^2 で表され、標準偏差は σ で表されます。次のように計算されます。

$$\sigma^2 = \frac{\sum f(Pm-\mu)^2}{N} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum f(Pm-\mu)^2}{N}}$$

標本の場合、分散は s^2 で示され、標準偏差は s で示されます。次のように計算されます。

$$s^2 = \frac{\sum f(Pm-\bar{x})^2}{n-1} \qquad s = \sqrt{\frac{\sum f(Pm-\bar{x})^2}{n-1}}$$

問題

標本と母集団の両方で、クラスメートが家から学校までどのくらいかかるについて前の授業で収集された情報を考慮して、分散と標準偏差を計算します。

達成の目安

1.7 プールされたデータで標本と母集団の分散の尺度を計算します。

学習の流れ：

標本と母集団の中心傾向の測定値に対処した後、標本と母集団の両方について同じ方法で、データの分散の対応する測定値に対処します。

ねらい：

この授業では、前の授業と同様に、母集団の分散の測定値と標本の測定値の表記法の違いを強調する必要があります。 この場合と同様に、分散と標本標準偏差の計算を調整する必要があります。

問題の解き方：

この問題では、前の授業で収集されたデータを引き続き調査し、標本と母集団の両方の分散を分析することを目的としています。教師は、それぞれの場合に適切な表記が使用されていることを確認する必要があります。計算が行われた後、母集団と標本の分散測定値の間で比較分析を行うことができます。

教師は、標本の場合、母集団に対する標本の偏りを避けるために、$n - 1$ で除算されていると言うことができます。 言い換えると、分散と標準偏差の値がこれらの測定値の母集団の値に近くなるようにします。教師が便利だと考える場合は、標本の分散の測定値を n と $n - 1$ で計算し、どちらが母集団の値に近いかを比較する演習を実行できます。このバイアスの補正は、ベッセル補正として知られています。

1.8 変動係数*

導入問題

次の表は、2016 年の人口の 5 歳と 17 歳の男性の身長の平均と標準偏差を示しています。

年齢	平均値	標準偏差
5 歳	110.4	4.74
17 歳	170.7	5.81

a) 2 つの母集団の分散の大きさを、標準偏差だけと比較できますか？

b) 両方の母集団について、商を計算します。

（標準偏差）÷（平均）

次に、それらを比較します。

解法

a) 17 歳のグループは標準偏差が大きいが、平均も大きいため、このグループの分散が大きいとは言えません。

b) 5 歳の人口：$4.74 \div 110.4 \approx 0.043$　　17 歳の人口：$5.81 \div 170.7 \approx 0.034$

この値を使用して、17 歳の人口の身長が5歳の人口よりも分散が少ないことを確認できます。

定義

変動係数は、データセットの標準偏差 s と算術平均 $\bar{x}$ のパーセンテージとして定義され、CV で表され、次のように計算されます。 $CV = \frac{s}{\bar{x}}(100)$

変動係数は、平均の差が大きい場合に、異なる母集団のデータの分散の大きさを比較するために使用されます。（平均間の差が小さい場合、または平均が等しい場合は、標準偏差を使用して比較できます）。一般に、平均が大きい場合、標準偏差は増加する傾向があります。

変動係数のパーセンテージは、データセットの算術平均の信頼性を決定するためにも使用されます。一般に、信頼性を決定するために、次の表をパラメーターとして使用できます。

CV 値	平均の代表性
0% – 10%	非常に代表的な平均
10% – 20%	かなり代表的な平均
20% – 30%	代表性のある平均
30% – 40%	代表性が疑わしい平均
40% 以上	代表的でない平均

例

基数 100 で採点した場合と比較して、基数 10 で採点した場合の試験の点数の分散はどうですか？

CV はどちらの場合も同じです。これは、基数 100 の平均と標準偏差の両方が、基数 10 の平均と標準偏差の 10 倍であるため、データの変動が等しいためです。

問題

次のデータは、4 つの異なるブランドで見つかった不良乳製品の量に関するものです。どのブランドの平均が最も信頼できるかを判断します。

ブランド 1： $\bar{x} = 14, s = 3$　　ブランド 2： $\bar{x} = 17, s = 2$　　ブランド 3： $\bar{x} = 12, s = 5$　　ブランド 4： $\bar{x} = 15, s = 1$

達成の目安

1.8 変動係数を使用して、さまざまなデータ系列の算術平均の代表性を分析します。

学習の流れ：

中心傾向の測定値と分散の測定値を使用した後、対応する変動係数を入力することができます。これは、算術平均の代表性を決定するためのパラメーターとして機能します。

ねらい：

変動係数は、2つのデータ系列間の結果を比較し、平均の代表性のパラメーターを持つための非常に便利なツールです。平均がより代表的であるほど、データがそれに近いためであることが明らかです。したがって、それらの分散は少なくなる傾向があります。

問題の解き方：

信頼性を判断するには、まず各ブランドの変動係数を計算するのが適切です。

ブランド 1：$CV = \frac{s}{\bar{x}}(100) = (3 \div 14)(100) = 21.4\%$

ブランド 2：$CV = \frac{s}{\bar{x}}(100) = (2 \div 17)(100) = 11.8\%$

ブランド 3：$CV = \frac{s}{\bar{x}}(100) = (5 \div 12)(100) = 41.7\%$

ブランド 4：$CV = \frac{s}{\bar{x}}(100) = (1 \div 15)(100) = 6.7\%$

ブランド 4 が最も代表的な平均を持っていることは明らかであり、次にブランド 2 がありますが、ブランド 2 の平均はブランド 4 の平均よりも大きいため、ブランド 4 が最も信頼できると予想されます。状態の悪い製品の量を測定するための基準がより定期的なデータを提示しているためです。

この部分で、教師は、平均値のみを分析すると、ブランド 3 が最適であることは明らかですが、データに多くのばらつきがあり、いくつかのことが起こっている可能性があること、またはブランドが大幅に改善されたか、さらに悪化したため、平均を信頼できず、このオプションを拒否するには、より多くの情報が必要になります。 一方、少なくともブランド 4 は最も正確な情報を提供し、その平均もブランド 3 の平均と大きく異なりません。

1.9 復習問題

1. 次の各状況で、母集団、標本、統計変数、およびそれらがどのように分類されるかを特定します。

   a) 教育政策の影響を判断するために、全国の 40 の学校で診断テストが実施されています。
   b) 乳製品の品質を知りたい場合は、国内の各スーパーマーケットで製品のユニットに対してテストが実行されます。
   c) エルサルバドルの農村部での平均所得を確定するために、国の各農村部から20人の調査が実施されます。

2. 以下に示す統計変数が、質的変数（名義変数または順序変数）であるか、量的変数（離散変数または連続変数）であるかを判別します。

   a）兄弟の数
   b）両親との関係（悪い、公正、良い）
   c）数学の試験の結果
   d）優先石鹸ブランド

3. 次の標本戦略を単純ランダムまたは系統的ランダムとして分類します。

   a) 母集団に 1 から 10 までの番号を付け（最後に繰り返します）、番号を選択して、その番号を持つすべての人が標本の一部になるようにします。
   b) 母集団に番号を付けて 3 つの数を削除すると、4 番目が選択され、次に別の 3 つと 4 番目が選択され、母集団全体がカバーされるまで続きます。
   c) 母集団にグループを作成し、それらのグループのうち 2 つをランダムに選択して標本にします。
   d) 母集団に番号を付け、サイコロを振ってその番号の母集団から人を選択し、もう一度それを転がして前の結果に追加し、他の人を選択します。

4. 次のデータを持つ会社の 30 人の学生の標本を作成します。

	女性	男性
生徒名	35	15
専門家	25	25

5. 各状況に最も適切と思われる非確率標本のタイプを決定します。

   a) ゼミ課題の社会調査
   b) 違法物質の配布形態。
   c）運転時に過敏性を示す人
   d) 陸上競技に参加する学生。

6. ショッピングセンターの駐車場では、車が駐車されたままの平均時間が計算され、駐車場全体と最初の 30 の位置について次のデータが取得されます。

時間	車の数
0 分から 1 時間	12
1 時間から 2 時間	30
2 時間から 3 時間	32
3 時間から 4 時間	16
合計	**90**

時間	車の数
0 分から 1 時間	4
1 時間から 2 時間	10
2 時間から 3 時間	11
3 時間から 4 時間	5
合計	**30**

   a) 母集団と標本の両方の平均、中央値、最頻値、分散、および標準偏差を計算します。
   b) 人々がモールで過ごす平均時間は 2 時間で、標準偏差は 0.8 時間であることを考えると、どちらの平均がより信頼できるでしょうか。

達成の目安

1.9 標本と母集団の統計とパラメータに対応する問題を解決します。

問題の解き方：

1a) 人口：全国の学校。標本：診断テストが実施されている 40 の学校。変数：教育政策の影響。タイプ：定性的順序（場合によっては定量的値を割り当てることもできますが、状況の条件により、許容可能、通常、許容不可能などのスケールがより適切です）。

1b) 人口：国内のすべてのスーパーマーケットの乳製品。 標本：各スーパーマーケットから抽出されたすべての製品。変数：乳製品の品質; タイプ：定性的順序。

1c) 人口：国の農村地域の人々。 標本：国の各農村地域からの 20 人。変数：平均収入。タイプ：連続定量。

2a）離散定量。 **2b）**定性的順序。 **2c）**継続的な定量。 **2d）**定性的名目。

3a）体系的なランダム標本。 **3c）**単純ランダム標本。

3c）体系的なランダム標本。 **3d）**単純ランダム標本。

4. 女性の学生：$\frac{35}{100} \times 100 = 35\%$　　男性の学生：$\frac{15}{100} \times 100 = 15\%$

女性の専門家：$\frac{25}{100} \times 100 = 25\%$　　男性の専門家：$\frac{25}{100} \times 100 = 25\%$

したがって、30 人の標本を取得するには、次のパーセンテージを使用できます。

女性の学生： 30 の 35% は 11 です　　男性の学生： 30 の 15% は 5 です

女性の専門家：30 の 25% は 7 です　　男性の専門家： 30 の 25% は 7 です

したがって、コロニー全体から 30 人の標本を抽出して、11 人の女性の学生、7 人の専門職の女性、5 人の男性の学生、7 人の男性の専門家を選択できます。

この特定の問題では、標本の値は整数ではなく、値は 10.5、7.5、4.5、および 7.5 ですが、標本をオーバーシュートしないように注意して整数値に近似する必要があります。また、常に最大の整数に近づき、標本を 32 人に超えることもできます。

5a）調査は身近な環境の人々に対して行われるため、便宜上の標本。

5b）セキュリティと機密性の両方のために、直接取得できない情報が必要なため、スノーボールの標本。

5c）異なる特性を持つ導体を分析すると便利なため、層による標本。

5d）陸上競技に対してより多くの態度を持つ人々が参加することが望ましいので、任意の標本。

6a) $\mu = \dfrac{6+45+80+56}{90} \approx 2.08$, $Me = 2.5$, $Mo = 2.5$, $\sigma^2 \approx \dfrac{31.2+12+6.4+32}{90} \approx 0.91$, $\sigma \approx \sqrt{0.91} \approx 0.95.$

$\bar{x} = \dfrac{2+15+27.5+17.5}{30} \approx 2.07$, $\tilde{x} = 2.5$, $\hat{x} = 2.5$, $s^2 \approx \dfrac{10.4+4+2.2+10}{29} \approx 0.92$, $s \approx \sqrt{0.92} \approx 0.96.$

6b）この場合、両方のデータの変動係数を比較できます。

$CV_1 = \frac{s}{\bar{x}}(100) \approx (0.95 \div 2.08)(100) \approx 45.7\%$　　$CV_2 = \frac{s}{\bar{x}}(100) \approx (0.8 \div 2)(100) = 40\%$

したがって、ショッピングセンターで費やされた時間の平均はもう少し代表的ですが、どの平均も対応する変数を代表していません。

レッスン 2 位置の測定

2.1 四分位数

導入問題

学年末に、先生が生徒の欠席日数を数えたところ、以下のデータを得ました。

4, 5, 6, 2, 4, 8, 10, 11, 13, 12, 11, 10, 12, 6, 7, 9, 8, 13, 14, 15

a) データ集合の中央値はいくつですか。
b) データを小さい順に並べた場合データ集合の前半の中央値はいくつになりますか。
c) データを小さい順に並べた場合データ集合の後半の中央値はいくつになりますか。

解法

a) データを並べ替えて中央値を算出しています。

2, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 13, 13, 14, 15

中央値は $\frac{9+10}{2} = 9.5$ です。

b) a) のデータ集合の前半を考えます。

2, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9

中央値は $\frac{6+6}{2} = 6$ です。

全体のデータが奇数 $(2n + 1)$ の場合 b) は最初の n 個のデータ、そして c) は最後の n 個のデータについて考えなければいけません。つまり中央値と一致するデータについては考えません。

c) a) のデータ集合の後半を考えます。

10, 10, 11, 11, 12, 12, 13, 13, 14, 15

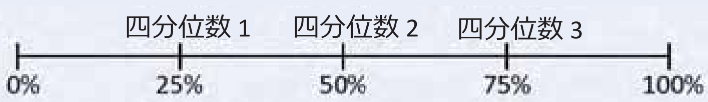
中央値は $\frac{12+12}{2} = 12$ です。

これは、教室にいる生徒の 25% が最大 6 回欠席、50% が最大 9.5 回欠席、75% が最大 12 回の欠席ということになります。

定義

データ集合を等量のデータで4分割する変数の値を「**四分位数**」といいます。

四分位数 1 にはその下のデータの 25%、四分位数 2 にはその下のデータの 50%、四分位数 3 にはその下のデータの 75% が集まっています。



四分位数 3 と四分位数 1 の差 (C3 – C1) は、**RI** で示される四分位数**間の範囲数**です。

問題

ある複数の医療機関で毎月のデング熱報告者数から得られた以下のデータ集合の 3 つの四分位を決定し、分析しなさい。

a) 3, 1, 4, 12, 10, 9, 11, 7, 12, 16, 3
b) 6, 3, 7, 8, 10, 15, 8, 12, 17, 2
c) 1, 3, 2, 5, 10, 14, 15, 13, 10, 5, 9, 3, 8
d) 4, 2, 5, 7, 10, 16, 12, 9, 14, 8, 5, 1

達成の目安

2.1 単純なデータ系列の二分位数を決定し、分析する。

学習の流れ：

サンプリングの部分で作業した後、データの集合を記述するため別の型の値が取り上げられます。位置の値はデータの近似形状を記述するのに役立ちます。

ねらい：

導入問題を解くためには、生徒が中央値の概念を応用して、必要な値をすべて見つけることが期待されます。

問題の解き方：

a) 1, 3, 3, 4, 7, 9, 10, 11, 12, 12, 16

四分位数 1 は 3、四分位数 2 は 9、四分位数 3 は 12 です。

b) 2, 3, 6, 7, 8, 8, 10, 12, 15, 17

四分位数 1 は 6、四分位数 2 は 8、四分位数 3 は 12 です。

c) 1, 2, 3, 3, 5, 5, 8, 9, 10, 10, 13, 14, 15

四分位数 1 は 3、四分位数 2 は 8、四分位数 3 は 11.5 です。

d) 1, 2, 4, 5, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16

四分位数 1 は 4.5、四分位数 2 は 7.5、四分位数 3 は 11 です。

それぞれの場合の四分位数の計算方法は異なります。

それぞれのケースで可能な分析は、データの 25%、50% または 75% での、より少ない値を求めることです。ですから、例えば a) と c) のデータの 25% は 1 から値 3 まで集中していますが、b) では 2 から 6 まで集中しているので、この 25% 以下のデータは他のデータ系列の 25% 以下よりも値域が大きいと考えることができます。

レッスン 2

2.2 箱ひげ図

導入問題

先生が収集した生徒の欠席データについて考えます。

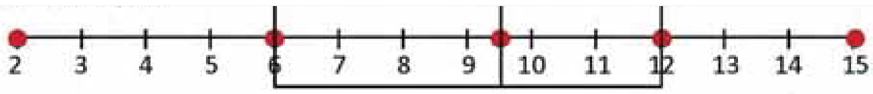
4, 5, 6, 2, 4, 8, 10, 11, 13, 12, 11, 10, 12, 6, 7, 9, 8, 13, 14, 15

a) 最小値、四分位数 1、四分位数 2、四分位数 3、最大値を数直線上に表しなさい。
b) 四分位数 1 から四分位数 3 までをカバーーする長方形を描きなさい。

解法

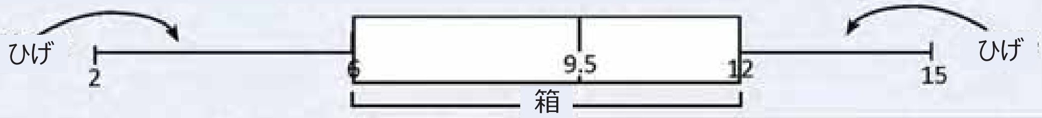
a) 最小値は 2、四分位 1 は 6、四分位 2 は 9.5、四分位 3 は 12、最大値は 15 となっています。よって、それらを直線上に表すると下記の図になります。

b) 長方形を描くとこうなります。



定義

作成されたダイアグラムは、**箱ひげ図**として知られています。

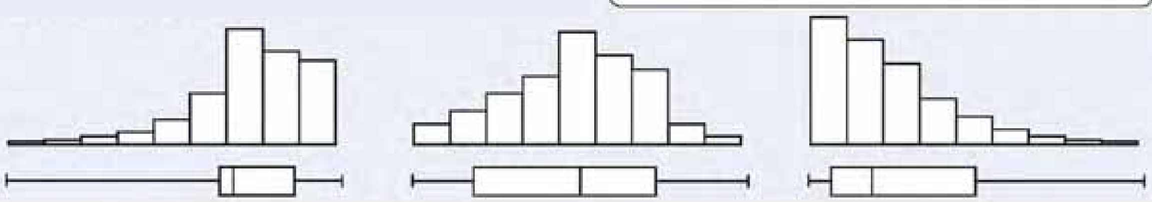


左のひげが右のひげよりも短い場合は、データの下方 25% の範囲がデータの上方 25% よりも狭いことを意味し、同じ様にボックスが狭い場合は、データの中間 50% の範囲が狭いことを意味します。

統計的には、箱図を構築するために、通常、分位間距離の 1.5 倍の値がパラメータとして使用され、ひげは、C1 - 1.5(RI) から C3 + 1.5(RI) の数直線の範囲内にある最初と最後の観測値で表されます。この構造は、データ集合内の外れ値の識別に役立ちます。

箱図の形状で、データの分布を記述するためのガイダンスが得られます。以下の箱図とそれに対応するヒストグラムを参照してください。

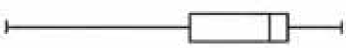
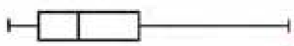
1つのヒストグラムは1つの箱図に相当します。しかしながら、1つの箱図が 2つ以上のヒストグラムに相当することもありえます。



問題

1. デング熱で報告された人のデータの箱図を作成し、分析しなさい。
   a) 3, 1, 4, 12, 10, 9, 11, 7, 12, 16, 3
   b) 6, 3, 7, 8, 10, 15, 8, 12, 17, 2
   c) 1, 3, 2, 5, 10, 14, 15, 13, 10, 5, 9, 3, 8
   d) 4, 2, 5, 7, 10, 16, 12, 9, 14, 8, 5, 1

2. 下の箱図を見て、データがどのように分布しているかを見積もりなさい。

a) 
b) 
c) 

ユニット 8

達成の目安

2.2 単純なデータ系列の箱ひげ図を作り、分析する。

学習の流れ：

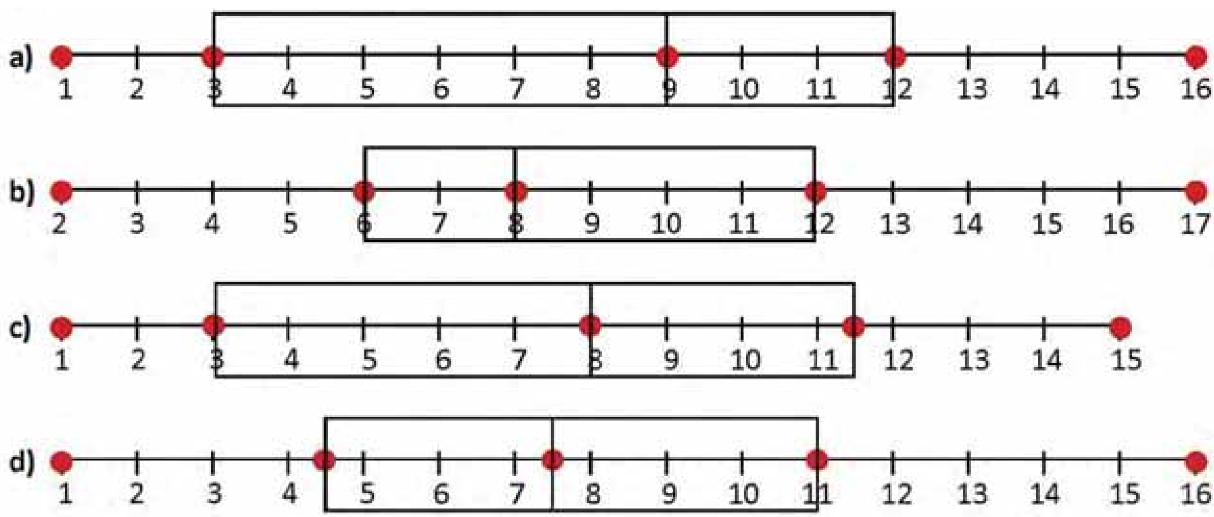
前回の授業で四分位数の定義を確立したので、今回の授業では、主として四分位数をベースとする箱ひげ図の分析を進めます。

ねらい：

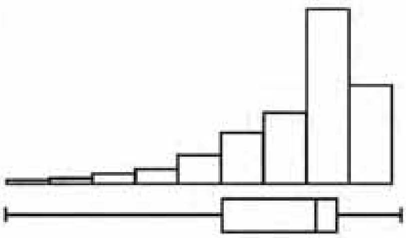
ヒストグラムから箱ひげ図の形状を推論できることは明らかです。しかし、この授業では、図で表すことができるヒストグラムを求める際、そのヒストグラムが持つ可能性を個別に見積もらせることを目的としています。

問題の解き方：

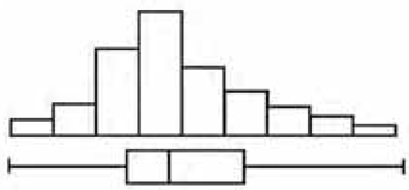
1. データ系列は先ほどの授業と同じですが、すでに四分位数は計算済みで、あとは図を描くだけです。



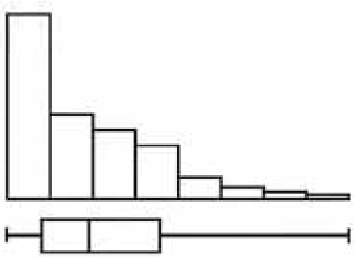
2a)



2b)



2c)



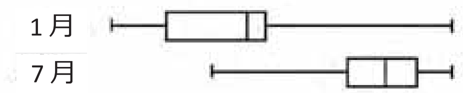
これらのヒストグラムはすべて、一般的に考えられる形状をマークしていますが、それは、それらが必ずしも与えられた箱ひげ図に関連するものであることを意味するものではなく、データの形状のある傾向が分析できるだけであることを意味しています。

レッスン 2

2.3 箱ひげ図の分析＊

導入問題

以下の 1 日の売上高を記録した月ごとの箱ひげ図2つをそれぞれの月別に示し、分析し回答しなさい。

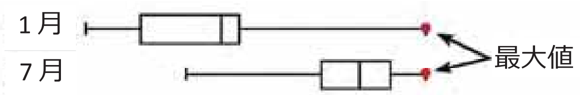


それぞれの月の日数は同じとしてください。

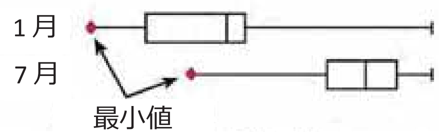
a) どちらの月の売上が最高でしたか？
b) どちらの月の売上が最悪でしたか？
c) 両方の月の四分位数間のばらつきはどのようになっていたかを求めなさい。
d) どちらの月が最高の販売数でしたか？

解法

a) 両図の最大値が同じなので、両月ともに最高の売上は等しくなりました。

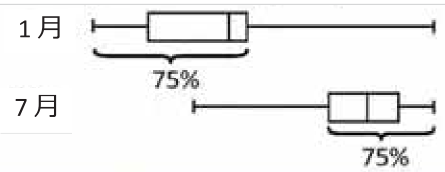


b) 1月に最悪の売り上げが起きました。図 1 の最小値が図 2 の最低値よりも低くなっているからです。



c) 1 月は、最も低い売上高の 25% は変動が少なく（範囲が狭い）、少ない売上に集中していて、売上高の最低 25% の範囲が大きく、1 月よりも高い売上高に達している 7 月とは異なっています。一方で、1 月の四分位間の範囲は 7 月の四分位間の範囲よりも大きく、つまり、これは 7 月よりも 1 月の方がこの範囲の変動が大きかったということです。結論として、主要売上の 25% を分析すると、1 月は非常に低い値から非常に大きな変動がありますが、7 月は範囲が小さく、非常に高い売上高に集中しています。

d) 少なくとも 1 月の最低売上高の 75% 以上が 7 月の 1 次四分位数以下であることから、7 月の売上高は 1 月の売上高よりも高いと考えられます。



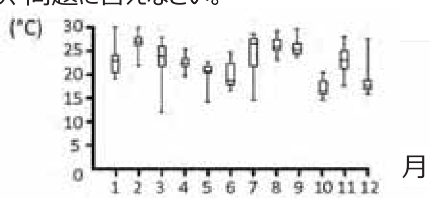
まとめ

箱図を使うと、それぞれの間で発生する可能性のあるデータの分散を評価してデータを比較するための貴重な情報が得られます。データを正確に記述するためには非常に有用なツールです。

問題

1 年の 12 ヶ月間のエルサルバドルの気温を以下の箱ひげ図で分析し、問題に答えなさい。

a) 気温の変化が最も大きかったのはどの月だったのでしょうか？
b) 気温の変化が最も小さかったのはどの月だったのでしょうか？



達成の目安

2.3 同一スケールのデータ系列の箱ひげ図を比較する。

学習の流れ：

一連のデータの箱ひげ図を紹介した後、様々な時点の箱ひげ図の表現の分析と解釈を重視し、そこから結論を導き出すようにします。

ねらい：

2 つ以上のグラフを比較することで、どのような情報を抽出できるかを確認し、統計データから導き出された結論を導き出し、それに基づいて判断できるようにします。

問題の解き方：

a) 箱ひげ図のグラフや範囲から、月 3（3 月）では最低気温の 25% がかなり変化していることがわかります。同様に月 12（12月）では、最高気温の 25% は非常に変動の大きい値（または少なくとも非常に大きな値が1回）がありました。しかしながら、この月の間は最低気温の 75% 以上はあまり大きな幅ではなかったことがわかります。したがって、12 月の気温変動は 3 月に比べてやや少ないです。

b) 月 4 の間は、他の月に比べるとすべての四分位数とその範囲でその形状が守られたさらに規則的な動きの図を可視化できます。また、8、9、10 などの他の月もその範囲は似ていますが、それらには四分位数の間でのより大きな変動があります。したがって、変動がより少ない月は 4（4 月）です。

2.4 十分位数と百分位数

導入問題

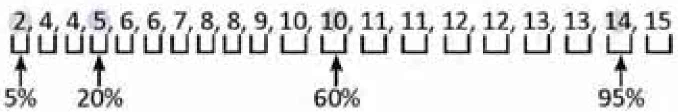
学年末に、先生が生徒の欠席日数を数えたところ、以下のデータを得ました。

4, 5, 6, 2, 4, 8, 10, 11, 13, 12, 11, 10, 12, 6, 7, 9, 8, 13, 14, 15

a) 欠席者数が最も少ない生徒の 20% が欠席した時の欠席数は最大何回でしたか？
b) 欠席者数が最も少ない生徒の 60% が欠席した時の欠席数は最大何回でしたか？
c) 欠席者数が最も少ない生徒の 5% が欠席した時の欠席数は最大何回でしたか？
d) 欠席者数が最も少ない生徒の 95% が欠席した時の欠席数は最大何回でしたか？

解法

データをソートして 20 等分（各部分 5%）に分けます。



a) 欠席が最も少ない生徒の 20% は、最大で 5 回欠席しています。
b) 欠席が最も少ない生徒の 60% は、最大で 10 回欠席しています。
c) 欠席が最も少ない生徒の 5% は、最大で 2 回欠席しています。
c) 欠席が最も少ない生徒の 95% は、最大で 14 回欠席しています。

定義

データ集合を等量のデータで 10 分割する変数の値を「**十分位数**」といいます。

各十分位数は前のものよりも 10% 多くのデータを集めます。最初の十分位数は 10% のデータを集め、2 番目の十分位数は 20% のデータを集め、その後 90% のデータを集める十分位数 9 まで続きます。

データ集合を等量のデータで 100 分割する変数の値を「**百分位数**」といいます。

各百分位数は前のものよりも 1% 多くのデータを集めます。最初の百分位数は 1% のデータを集め、2 番目は 2% のデータを集め、その後 99 のデータを集める十分位数 99 まで続きます。

n 個のデータの合計の十分位数 d を計算するためには、小さい方から大きい方に順番に並べ、$d\frac{n}{10}$ の値に最も近い位置にあるデータを探します。同様に、十分位数値を計算するには、値 $p\frac{n}{100}$ に最も近い位置にあるデータを探します。

問題

各データ系列に示された十分位数を計算し、それらのデータから得られる情報を分析しなさい。

a) 6, 9, 2, 10, 1, 7, 8, 2, 7, 5, 11, 12, 9, 5, 3, 10, 12, 7, 4, 8. 十分位数 3, 5 と 7。
b) 4, 6, 10, 15, 13, 7, 9, 5, 7, 7, 12, 14, 10, 9, 6, 11. 十分位数 4, 6 と 9。

達成の目安

2.4 単純なデータ系列の十分位数を求め、分析する。

学習の流れ：

この課の最後では、データ系列の形状をより詳細に分析できるように、位置の最終尺度である十分位数と百分位数を学びます。

ねらい：

この授業では、十分位数と百分位数の両方が導入問題に導入されています。しかし、ここでは定義を紹介するためだけにとどめています。なぜならデータ集合については、百分位数を計算することは（多くは繰り返し）あまり意味がないからです。そのため、下の問題では百分位数ではなく、十分位数だけを扱うものになっています。

問題の解き方：

a) データを順番に並べなさい。1, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 11, 12, 12.

十分位数 3：$d \frac{n}{10} = 3 \times 2 = 6$, ゆえに, 6 番目の値、つまり 5。

十分位数 5：$d \frac{n}{10} = 5 \times 2 = 10$, ゆえに, 10 番目の値、つまり 7。

十分位数 7：$d \frac{n}{10} = 7 \times 2 = 14$, ゆえに, 10 番目の値、つまり 9。

b) データを順番に並べなさい。4, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 9, 9, 10, 10, 11, 12, 13, 14, 15.

十分位数 4：$d \frac{n}{10} = 4 \times 1.6 = 6.4$, ゆえに, 6 番目の値、つまり 7。

十分位数 6：$d \frac{n}{10} = 6 \times 1.6 = 9.6$, ゆえに, 10 番目の値、つまり 10。

十分位数 9：$d \frac{n}{10} = 9 \times 1.6 = 14.4$, ゆえに, 14 番目の値、13。

2.5 復習問題

1. 視力障害リハビリセンター、『エウヘニア・ドュエニャス』に新規登録された人の数から得られた以下のデータ集合の 3 つの四分位数を求めなさい。その後、各四分位数が提供する情報を分析しなさい。

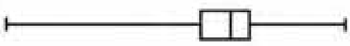
a) 5, 10, 8, 6, 3, 2, 8, 12, 5, 1, 7, 9, 4

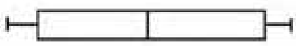
b) 3, 2, 5, 9, 10,15, 7, 9, 12, 10, 3, 1

2. 視力障害リハビリセンター、『エウヘニア・ドュエニャス』に在籍している人のデータ（数字 1）の箱図を作成し、分析しなさい。

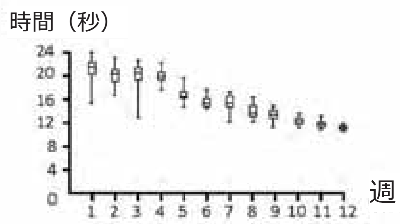
3. 下の箱図を見て、データがどのように分布しているかをヒストグラムを使って見積もりなさい。

a) 

b) 

c) 

4. あるアスリートの 12 週間のトレーニング期間中の 100 メートル平地疾走時間についての、以下のパフォーマンス箱図を分析しなさい。



a) どの週に最高のパフォーマンスが得られたのでしょうか？

b) どの週で一番パフォーマンスが悪かったのでしょうか？

c) どの週に最速タイムを記録したのでしょうか？

d) 7 週目のパフォーマンスはどうでしたか？

e) このトレーニングからどのような結論が導き出されますか？

5. 各データ系列に示された十分位数を計算し、それらのデータから得られる情報を分析しなさい。

a) 10, 6, 7, 11, 13, 8, 9, 5, 9, 10, 12, 12, 7, 9, 11, 15, 4, 6. 十分位数 2、4 と 8。

b) 10, 5, 7, 11, 8, 9, 12, 7, 6, 10, 9, 8, 14, 13, 9, 11, 5. 十分位数 3, 7 と 9。

c) 8, 5, 4, 2, 1, 7, 3, 9, 10, 9, 8, 6, 2, 11, 3, 14, 11, 8, 13, 10, 6, 12, 10, 4, 3. 十分位数 1, 5 と 7。

達成の目安

2.5 位置の計測に関する問題を解く。

問題の解き方：

1a) 1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 12

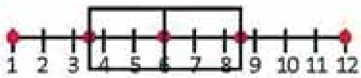
四分位数 1 は 3.5、四分位数 2 は 6、四分位数 3 は 8.5 です。

1b) 1, 2, 3, 3, 5, 7, 9, 9, 10, 10, 12, 15

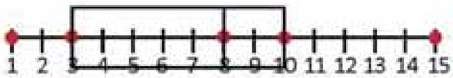
四分位数 1 は 3、四分位数 2 は 8、四分位数 3 は 10 です。

2.1 の授業の問題で行った分析と同様の分析を行います。

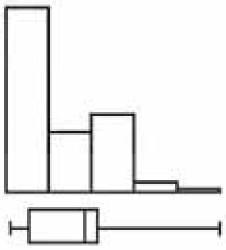
2a)



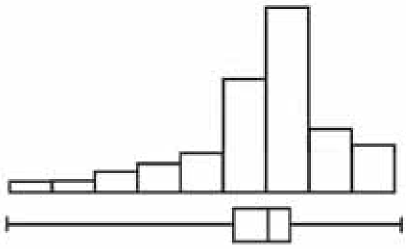
2b)



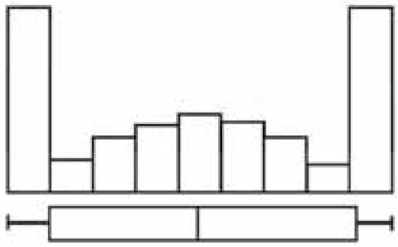
3a)



3b)



3c)



4a) 12 週目であるのは間違いないでしょう。これには 2 つ理由があります。まず第一に、最高タイムが 1 つある、そして第二にほとんどのタイムが非常に狭い範囲に集中しているからです。

4b) 4 週目には非常に遅いタイムの数値が集中しています。1〜3 週目にも低いタイムが集中していますが、しかし、少なくとも何度かは 4 週目より高いタイムがあるため、最悪のパフォーマンスは 4 週目の期間であることがわかります。

4c) 最高タイムは 12 週目に出しました。

4d) 最低タイムが 25% はかなりの許容範囲ですが全体的に 7 週目の成績はあまり良くありません。75% は少し高かったのですが、特筆すると前週の方がパフォーマンスが良かったからです。

4e) 一般的には（特殊な場合を除いて）週を追うごとに改善する傾向があるので、良いトレーニングだったと考えられます。一方、良いタイムを出せた週がありましたが、これは、アストリートが常に高タイムを出す準備ができていることを示すものではないと言えます。12 週目にあったように、タイムの高低が小さな範囲に集中するような結果を出すようにした方が良いでしょう。

5a) データを順番に並べなさい。4, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 13, 15.

十分位数 2： $d\frac{n}{10} = 2 \times 1.8 = 3.6$, ゆえに, 4 番目の値、つまり 6。

十分位数 4： $d\frac{n}{10} = 4 \times 1.8 = 7.2$, ゆえに, 7 番目の値、つまり 8。

十分位数 8：$d\frac{n}{10} = 8 \times 1.8 = 14.4$, ゆえに, 10 番目の値、11。

5b) データを順に並べると：5, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 12, 13, 14.

十分位数 3 は 7、十分位数7は 10、そして十分位数 9 は 12。

5c) データを順に並べると：1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 10, 11, 11, 12, 13, 14.

十分位数 1 は 2、十分位数 5 は 8、そして十分位数 7 は 10。

2.6 ユニットの問題

コンピュータの負荷の持続時間を評価することを目的とした、あるノート PC の品質管理を行います。そのために、50 台のコンピュータのサンプルを採取し、以下のデータを記録します。

バッテリー持続時間（時間）	ノート PC の数
0 ～ 2	10
2 ～ 4	15
4 ～ 6	9
6 ～ 8	9
8 ～ 10	5
10 ～ 12	2

a) 変数を特定し、分類しなさい。

b) この品質管理には、どのような種類のサンプリングが最も適していますか？

c) このタイプのノート PC の平均的なバッテリーの持続時間はどれくらいですか？

d) このタイプのノート PC で最も顕著に見られるバッテリー持続時間は、どのくらいですか？

e) このデータ集合の中央値は何ですか？

f) このサンプルの分散と標準偏差を計算しなさい。

g) これらのデータの変動係数を計算しなさい。

h) データ集合の平均はどのくらいデータ全体を如実にあらわしていますか？

i) 以下の情報は、別のタイプのノート PC のバッテリー持続時間についてです。

バッテリー持続時間（時間）	ノート PC の数
0 ～ 2	8
2 ～ 4	17
4 ～ 6	13
6 ～ 8	8
8 ～ 10	3
10 ～ 12	1

バッテリー持続時間一番長いことが要求されるコンピュータを購入する必要がある場合、どのタイプのノート PC をを購入するのが適していますか？またその理由は何ですか？問題の最初のノート PC とここで述べたノート PC を比較しなさい。

達成の目安

2.6 記述的統計に対応する問題を解く。

問題の解き方：

a) 変数は電池持続時間を表し、連続した量的変数です。

b) ノート PC は 1 種類だけなので、一番良くて簡単なのは単純なランダムサンプリングでしょう。

バッテリー持続時間（時間）	ノート PC の台数 (f)	中間点 (Pm)	$f \times Pm$	$Pm - \bar{x}$	$(Pm - \bar{x})^2$	$f(Pm - \bar{x})^2$
0 ～ 2	10	1	10	–3.6	12.96	129.6
2 ～ 4	15	3	45	–1.6	2.56	38.4
4 ～ 6	9	5	45	0.4	0.16	1.44
6 ～ 8	9	7	63	2.4	5.76	51.84
8 ～ 10	5	9	45	4.4	19.36	96.8
10 ～ 12	2	11	22	6.4	40.96	81.92
合計	**50**					

c) $\bar{x} = \dfrac{10 + 45 + 45 + 63 + 45 + 22}{50} = 4.6.$　　**d)** $\hat{x} = 3$　　**e)** $\tilde{x} = 4$

f) $s^2 = \dfrac{129.6 + 38.4 + 1.44 + 51.84 + 96.8 + 81.92}{49} \approx 8.16,\ s \approx \sqrt{8.16} \approx 2.86.$

g) $CV = \frac{s}{\bar{x}}(100) \approx (2.86 \div 4.6)(100) \approx 62.2\%$

単純級数として並べたときのサンプルの中間要素の位置が 25.5、つまり 2 と 3 の中間にあることから、中央値に授業の限界値を代入するのが便利だと考えられています。 ただし、中央値授業の中点の値（50 ÷ 2 = 25）を取ることもできます。

h) 変動係数から、平均値は代表値ではないと結論づけられます。

平均値が代表値かどうかを決定するために、生徒に授業 1.8 の表を復習させるとよいでしょう。

i) 平均値と標準偏差を計算します。

バッテリー持続時間 (時間)	ノート PC の台数 (f)	中間点 (Pm)	$f \times Pm$	$Pm - \bar{x}$	$(Pm - \bar{x})^2$	$f(Pm - \bar{x})^2$
0 ～ 2	8	1	8	–3.36	11.29	90.32
2 ～ 4	17	3	51	–1.36	1.85	31.45
4 ～ 6	13	5	65	0.64	0.41	5.33
6 ～ 8	8	7	56	2.64	6.97	55.76
8 ～ 10	3	9	27	4.64	21.53	64.59
10 ～ 12	1	11	11	6.64	44.09	44.09
合計	**50**					

$\bar{x} = \dfrac{8 + 51 + 65 + 56 + 27 + 11}{50} = 4.36,\quad s^2 \approx 5.95,\ s \approx \sqrt{5.95} \approx 2.44,\ CV \approx (2.44 \div 4.36)(100) \approx 55.96\%.$

このケースでは、2 番目のタイプのノート PC の平均がより代表値に近いのですが、（違いは最小なので） より適したラップトップの種類を決定することは少し困難になります。また、平均持続時間は少し低くなっているので、この場合は計算からのデータではどちらを購入してもほぼ同じになると判断されます。

2.7 ユニットの問題

以下は、走り幅跳びの選手の過去8週間の1週間あたりのパフォーマンスのデータです。テーブルには、跳んだ長さ (m) が記録されています。

第 1 週	3.5	3.8	3.7	3.8	3.9	3.7	4.0
第 2 週	3.8	4.2	4.3	4.2	4.4	4.6	4.6
第 3 週	4.5	4.8	4.7	4.9	4.9	5.3	5.2
第 4 週	5.2	5.5	5.7	5.6	5.8	5.9	6.0
第 5 週	5.8	6.3	6.5	6.8	6.8	6.9	6.8
第 6 週	6.7	6.9	7.0	6.5	6.8	7.0	7.1
第 7 週	6.9	7.2	7.3	7.2	7.4	7.1	7.5
第 8 週	7.4	7.7	7.8	7.6	7.9	7.8	7.9

a) 各週のデータの四分位数を近似しなさい。

b) 各週の箱ひげ図を構築しなさい。

c) 箱ひげ図を使って、アスリートの 8 週間のパフォーマンスを比較する図を作成しなさい。

d) どの週に最高のパフォーマンスが得られましたか ?

e) どの週で一番パフォーマンスが悪かったですか ?

f) どの週に最高記録が出ましたか ?

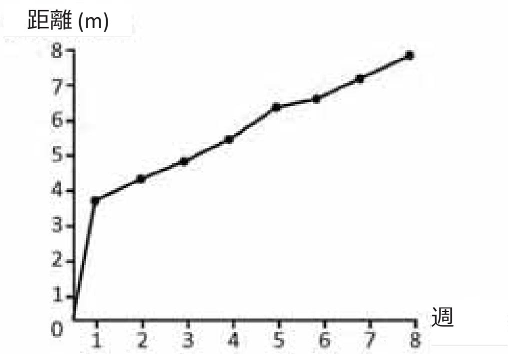
g) 7 週目のパフォーマンスはどうでしたか ?

h) どの週から、5 m 以上跳べる可能性が高いですか ?

i) 1 週目のトレーニングで 4 m 以上跳べるようになったと考えていいのですか ? なぜですか ?

j) このトレーニングからどのような結論が導き出されますか ?

k) 以下のグラフは、各週の平均値を使って作成したのもです。c) で作成したものを下のものとを比べて良い点を指摘しなさい。



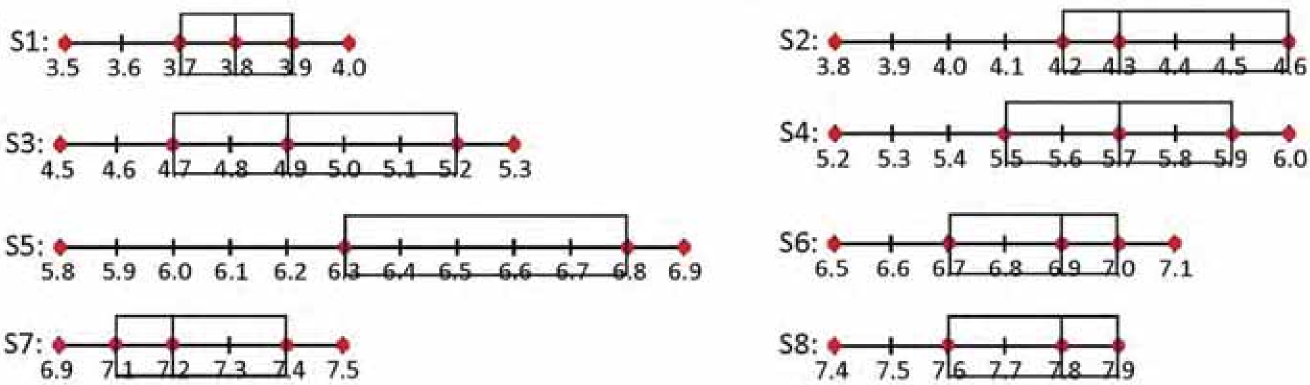
達成の目安

2.7 記述的統計に対応する問題を解く。

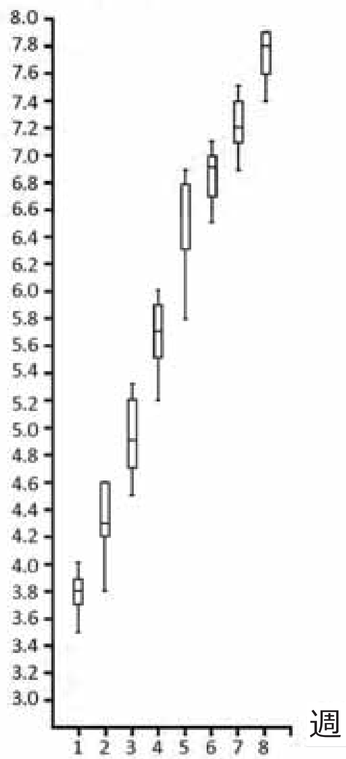
問題の解き方：

a) 第 1 週：C1 = 3.7, C2 = 3.8, C3 = 3.9　第 2 週：C1 = 4.2, C2 = 4.3, C3 = 4.6
第 3 週：C1 = 4.7, C2 = 4.9, C3 = 5.2　第 4 週：C1 = 5.5, C2 = 5.7, C3 = 5.9
第 5 週：C1 = 6.3, C2 = 6.8, C3 = 6.8　第 6 週：C1 = 6.7, C2 = 6.9, C3 = 7.0
第 7 週：C1 = 7.1, C2 = 7.2, C3 = 7.4　第 8 週：C = 7.6, C2 = 7.8, C3 = 7.9

b)



c) 距離 (m)



d) 最高のパフォーマンスを発揮したのは第 8 週の間でした。なぜなら四分位数 1 と最高値データの間の範囲が非常に小さいからです。

e) 3週目はデータの 75% が、4 週目や 5 週目と同様に、非常に大きな範囲に分布していました。

f) 第 8 週の間。

g) 非常に規則的で、ほとんどすべての四分位数が非常に似たような範囲でデータを分割しています。また選手は非常に満足できる跳躍距離を記録しました。

h) 3 週目以降は 5 m を超えたのは 50% 弱でした。しかし、4 週目以降は確実にそれを上回るようになりました。

i) いいえ、理由はその週の跳躍でそれができていても、ほぼ 100% のデータはそれを下回っているからです。そのため、その週に達成することはほぼ不可能でしょう。

j) とても良いトレーニングでした。各週を追うごとに大きな改善の余地が見え、6 週目からは若干規則正しくなり非常に良い記録が出ました。

k) 平均値のグラフでは、改善の傾向しか見えませんし各週、データの安定性や対称性が高い週の結果の動きを知ることはできません。したがって、箱ひげ図を使用すると、より詳細な情報を抽出することができます。またデータの範囲からの分散についてのアイデアを得ることができるなどの他の利点もあります。

3.1 GeoGebra 演習：統計解析

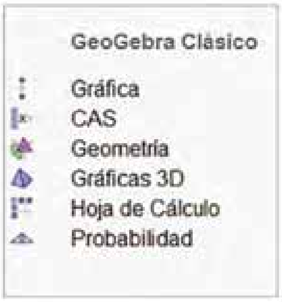
この演習では、GeoGebra リソースを使用して変数の統計分析を実行し、ユニットで提起された状況に基づいて箱図とひげ図を作成します。まず「演習」にある手順にしたがって、図を作成し、そして必要な分析をします。次に、GeoGebra で、この演習の最後にある「課題」セクションの問題に取り組みます。

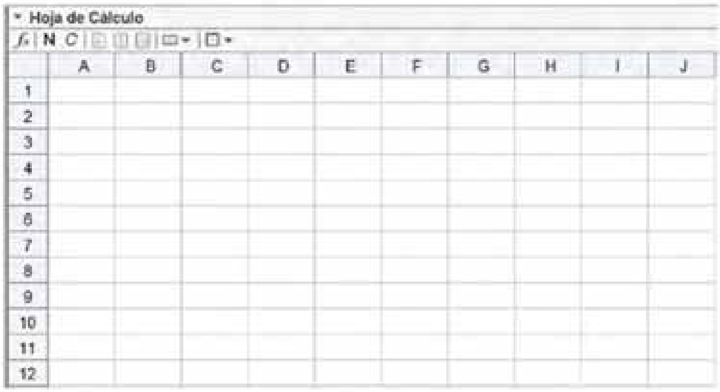
演習

授業 1.5 の問題のデータに戻ります。

速度 (km/h)						
60	65	40	80	80	90	45
70	100	70	50	80	55	120
75	65	90	85	70	100	55
110	70	95	70	80	115	100

1. スプレッドシートビュー (la vista de hoja de cálculo) を使用します。このためには、スプレッドシートオプションで GeoGebra を起動したときに開くメニューを使用するか、またはビューメニューからスプレッドシートオプション (opción Hoja de Cálculo) をクリックします。以下のようなウィンドウが開きます。

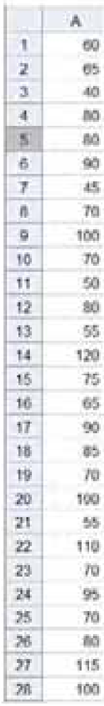


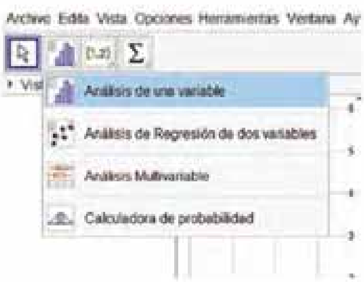


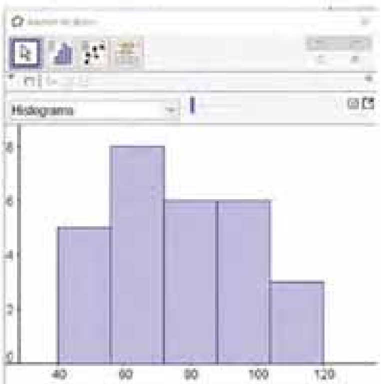
2. スプレッドシートビューの A 列に速度表のデータを 1 つずつ入力します。

3. マウスの左ボタンを押したまま、入力されたデータをすべて選択すると、そこが水色の濃淡で表示されます。

4. 「変数を分析する (Análisis de una variable)」ボタンを押すと "データソース" と呼ばれるテキストボックスが開きますが、それは前のステップで選択したデータが表示されます。「分析する (Analiza)」ボタンを押すと、下のようなグラフが表示されます。



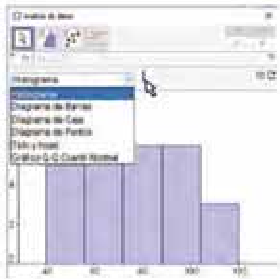




ユニット 8

223

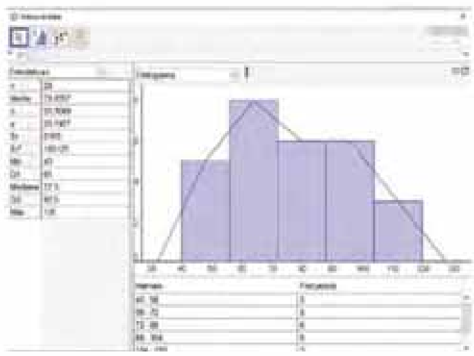
5. 選択肢を広げると、提示されているグラフがヒストグラムであること、また、棒グラフ（基礎教育で学ぶ）、ヒストグラム（8 年生で学ぶ）、箱図（このユニットで学ぶ）や、これまで学んでこなかった種類のグラフなど様々なな種類の統計グラフが選択できることに気づくでしょう。



6. 右上の表示オプション (las opciones de la vista) を拡張することができます。その中で、頻度表オプション (las opciones de tabla de frecuencias)（手動で作成することができます）にチェックを入れると、自動的に頻度分布表を作成します。そして、頻度多角形オプション (la opción polígono de frecuencias) にチェックを入れると、以下の結果が得られます。

7. 最後に、+のアイコンが付いている左上の統計学 (Estadísticas) オプションを選択します。これで、平均、標準偏差（標本と母集団）、分級数、中央値、最小値、最大値などの統計情報が得られます。

8. この問題の解決方法をチェックして、自分の答えを確認し、必要に応じて修正してください。



課題

GeoGebra の表計算ツールを使って、授業 2.7 のユニット問題を解いてみましょう。これを行うには、各週のデータを比較する必要があるので、各行に一週間のデータを入力、例えば、A 列に 1 週目のデータを、B 列に 2 週目のデータを入力していき、H 列に 8 週目のデータに達するまで行います。
次に、すべてのデータを選択し、多変量解析オプションを使用します。

達成の目安

3.1 数学ソフトウェアを使用して、データ系列の記述的統計分析を実行する。

学習の流れ：

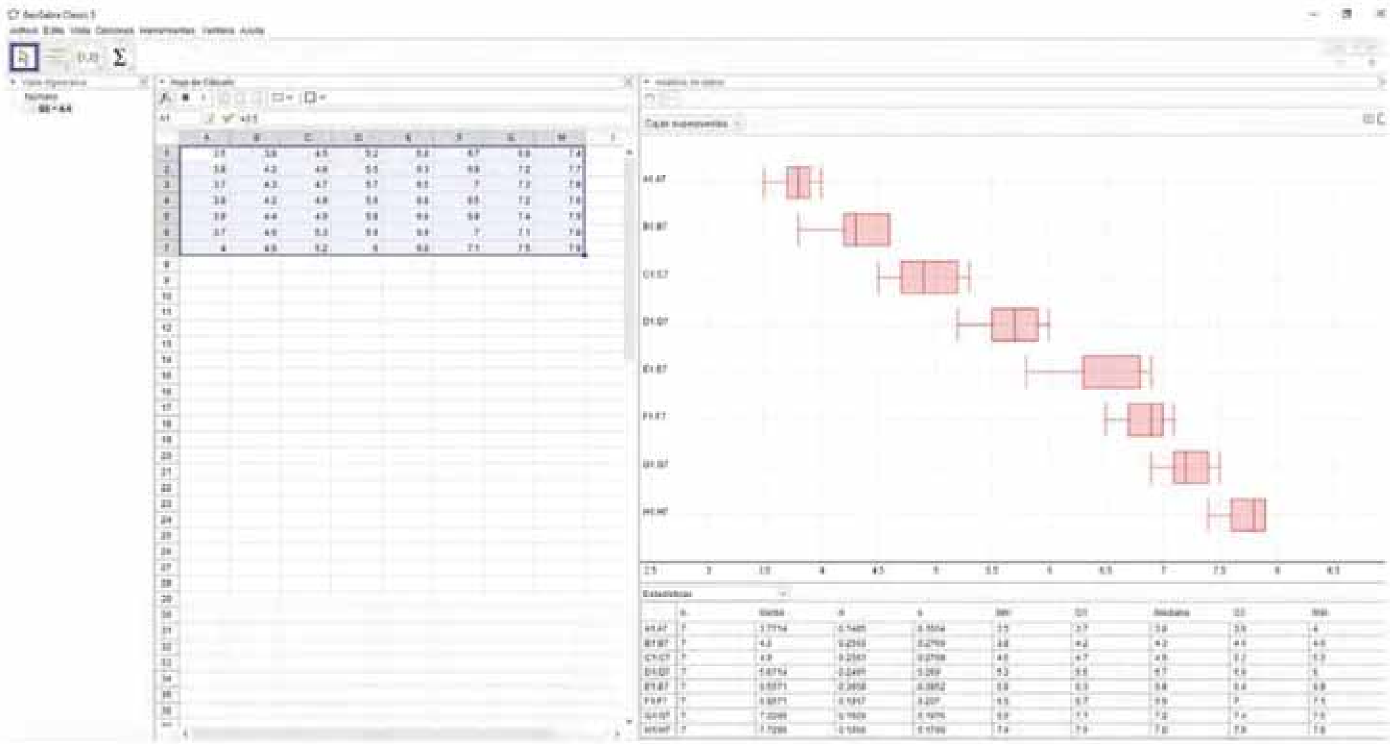
記述的統計学の基本的な概念を一通り学習した後、GeoGebra を用いてデータ系列の統計解析を行います。

ねらい：

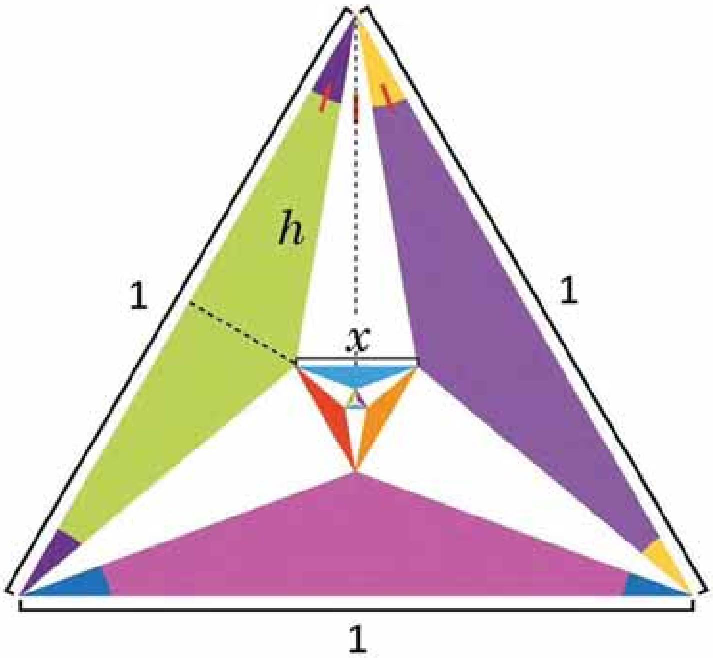
計算ではなく、ソフトウエアで実行された計算の解釈や分析が優先される統計分析の実行方法を、ソフトを使って文脈化しましょう。

問題の解答：

問題に基づいた入力に続いて、GeoGebra では以下のような結果が得られます。



GeoGebra を使用すると、授業 2.7 で作成したグラフを簡単に生成することができ、分析と結果の正しい解釈に重点的に行うことができます。このパートでは、現在はすべての統計解析がソフトウェアを使用していることを強調する必要がありますが、それは、計算ミスの減少などの側面に加え、効率性を考慮して、巨大なデータベース（センサスや大規模なサンプル調査から得られる）を扱うためには、対応するパラメータや統計量の計算を行うことはマンパワー的に不可能であるという事実を強調する必要があります。最後に、Geogebra は数学の異なる分野を扱うための多くのツールを提供しており， 教訓的な意図を持って統計解析を行うには十分ですが、巨大なデータベースを扱うのには適していないことに注意が必要です。この目的のためには、通常 R (libre)、Stata (comercial)、SPSS (comercial) など、様々な統計ソフトが使用されています。



x = ?

それぞれの角は20°です。高さを示す点線を引くと、$h = \dfrac{1}{2\cos 20°}$ なので、sin 10°= x cos 20° が成立し、よって、$x = \dfrac{\text{sen } 10°}{\cos 20°}$ となります。

REPÚBLICA DE EL SALVADOR EN LA AMÉRICA CENTRAL

高校 1 第2版 数学 第2巻 指導案