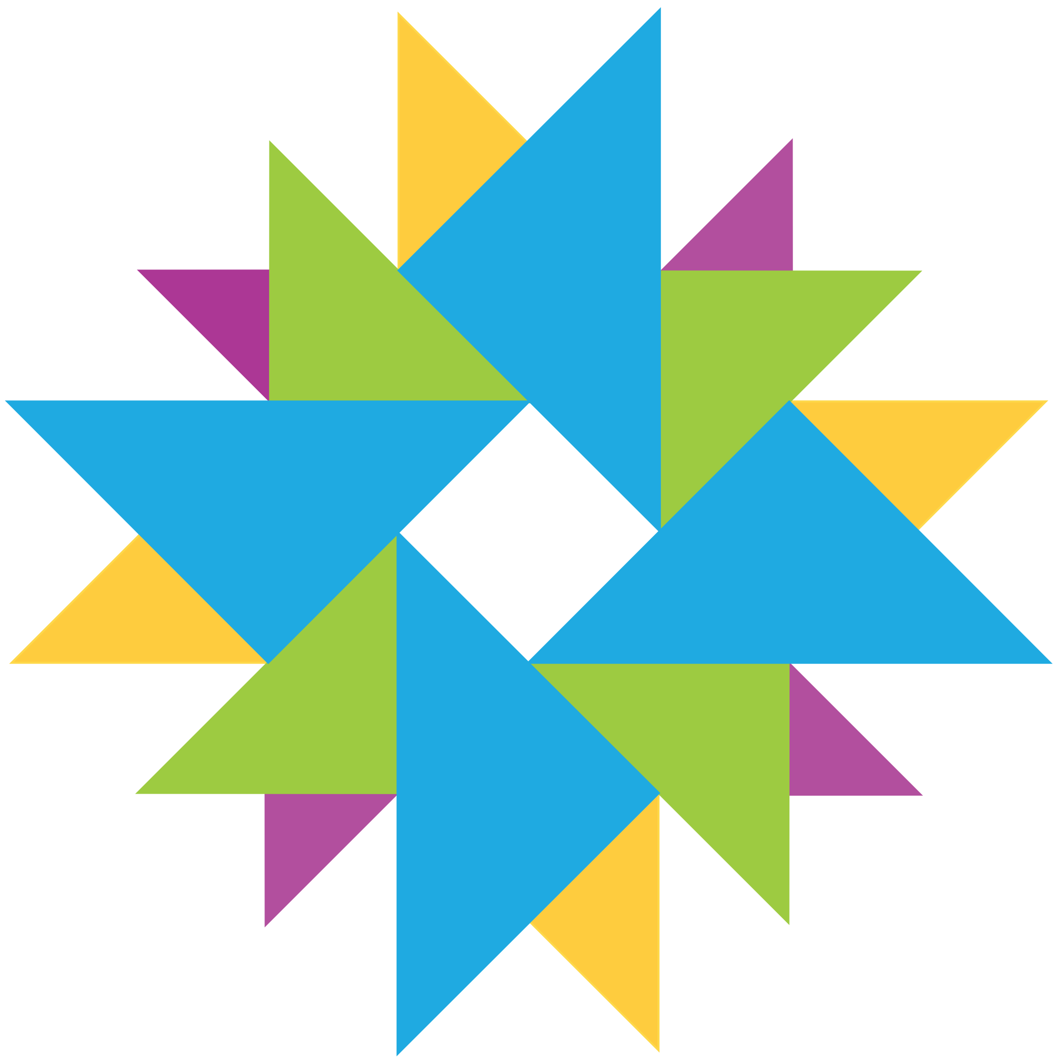
GOBIERNO DE EL SALVADOR

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Matemática

Segundo año de bachillerato



Tomo 1

Sugerencia metodológica
Segunda edición

ESMATE

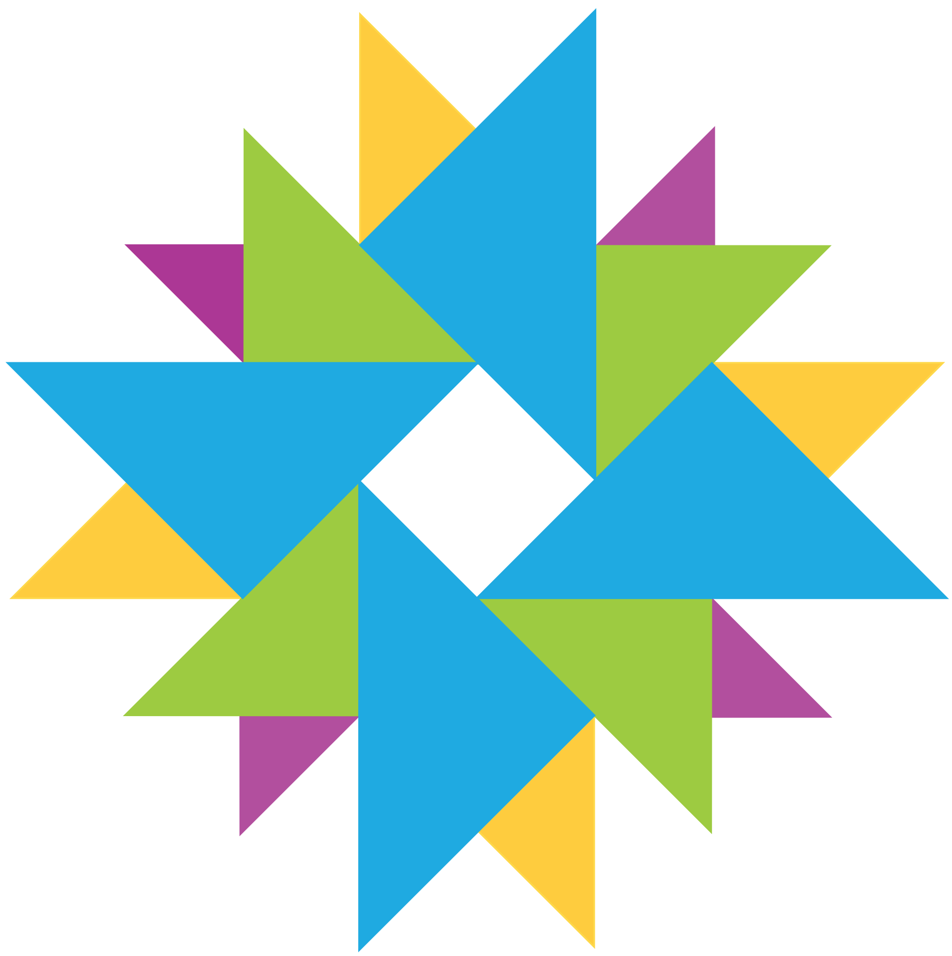
JICA

GOBIERNO DE EL SALVADOR

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Matemática

Segundo año de bachillerato



Tomo 1

Sugerencia metodológica
Segunda edición

ESMATE

JICA

Coordinación y revisión técnica
Francisco Antonio Mejía Ramos

Equipo técnico autoral y de diagramación del Ministerio de Educación
Ana Ester Argueta Aranda
Diana Marcela Herrera Polanco
César Omar Gómez Juárez
Francisco Antonio Mejía Ramos

Diseño y revisión de diagramación
Francisco René Burgos Álvarez
Judith Samanta Romero de Ciudad Real

Corrección de estilo
Marlene Elizabeth Rodas Rosales
Ana Esmeralda Quijada Cárdenas

Cooperación técnica de Japón a través de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA).

Primera edición © 2018.
Segunda edición © 2019.

Imagen de portada con fines educativos, en ella se ilustra un triángulo equilátero trisecado en un ángulo, a partir de esto se puede calcular el valor del lado del triángulo interior más grande.
La respuesta se encuentra al reverso de la contraportada.

510.712
M425 Matemática : segundo año de bachillerato [recurso electrónico] : tomo 1, sugerencia metodológica / Ana Ester Argueta Aranda, Diana Marcela Herrera Polanco, César Omar Gómez Juárez, Francisco Antonio Mejía Ramos. -- 2ª ed. -- San Salvador, El Salv. : MINED, 2019.
1 recurso electrónico, (288 p. : il., 28 cm.) -- (Esmate)
Datos electrónicos (1 archivo : pdf, 11 mb). -- www.mined.gob.sv/index.php/esmate.
ISBN 978-99961-348-7-6 (E-Book)
1. Matemáticas-Libros de texto. 2. Matemáticas-Ejercicios, problemas, etc. 3. Educación primaria-Libros de texto. I. Argueta Aranda, Ana Ester, coaut. II. Título.

Estimados docentes:

Reciban un cordial saludo, por medio del cual les expresamos nuestro agradecimiento por la importante labor que realizan en beneficio de la ciudadanía salvadoreña.

Como Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología (MINEDUCYT) a través del Proyecto de Mejoramiento de los Aprendizajes de Matemática en Educación Básica y Educación Media (ESMATE) hemos diseñado para ustedes la Sugerencia metodológica para la asignatura de Matemática, que se convertirá en una herramienta importante para la labor docente que realizan día con día.

El objetivo principal de este recurso es brindarles orientaciones concretas para el desarrollo de las clases de esta asignatura y lograr así una mejora significativa en los aprendizajes de los estudiantes salvadoreños.

Es importante destacar que la Sugerencia metodológica está en correspondencia con las clases propuestas en el Libro de texto diseñado para los estudiantes, concretizando de esta manera lo establecido en el Programa de estudio de Matemática.

No dudamos que aprovecharán al máximo este recurso y estamos seguros de que pondrán todo su esfuerzo y dedicación para seguir contribuyendo al desarrollo de nuestro querido país.

Atentamente,

Carla Evelyn Hananía de Varela
Ministra de Educación, Ciencia y Tecnología

Ricardo Cardona Alvarenga
Viceministro de Educación

Índice

I. Introducción

La presente Sugerencia metodológica (SM) forma parte de una serie de materiales elaborados por el equipo del Proyecto de Mejoramiento de los Aprendizajes de Matemática en Educación Básica y Educación Media (ESMATE) del Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología con la finalidad de contribuir a la mejora de los procesos de aprendizaje en la asignatura de Matemática.

En esta SM se explican con detalle todos los elementos que deben considerarse para realizar el proceso de aprendizaje, con base en la resolución de problemas planteados para lograr el desarrollo de las competencias en los estudiantes. Su uso permitirá al docente abordar la clase de forma efectiva y utilizar de manera adecuada el Libro de texto (LT).

Los principales objetivos que se pretenden lograr con el uso de esta sugerencia son los siguientes:

1. Orientar la planificación de la clase a partir de una propuesta de contenidos e indicadores organizados temporalmente en lecciones y unidades.
2. Ofrecer sugerencias metodológicas concretas y pertinentes que ayuden a los docentes y estudiantes en la comprensión de los contenidos.
3. Proponer estrategias concretas para el desarrollo de los indicadores de logros, que permitan el abordaje de las competencias matemáticas que deben alcanzar los estudiantes.

El MINEDUCYT ofrece al sistema educativo nacional estos materiales con la convicción de que el uso pertinente de estos permitirá fortalecer la práctica docente y así desarrollar de manera efectiva los aprendizajes de los estudiantes. Para lograr este propósito, a continuación se establecen los puntos de partida esenciales para su implementación:

1. **Importancia fundamental del aprendizaje de la matemática**: el desarrollo del razonamiento matemático genera competencias para resolver problemas complejos, analizar situaciones, ser creativos, críticos, eficientes, pragmáticos y lógicos; capacidades que les permitirán vivir como ciudadanos comprometidos consigo mismos y con el desarrollo sostenible de sus comunidades, ya que los saberes matemáticos permiten reconocer que la ciencia está presente en todo lo que nos rodea, por lo que cualquier objeto de la realidad puede ser utilizado como herramienta tecnológica que ayude a resolver situaciones problemáticas, las cuales enfrentará día con día cada estudiante.

2. **Rol fundamental del docente y protagonismo del estudiante:** la labor del docente se vuelve determinante en la formación del estudiante, de ahí su importancia para que el sistema educativo logre sus propósitos; estos materiales están estructurados de tal manera que el docente tenga herramientas oportunas para “asistir” el aprendizaje, es decir, con la mirada puesta en el logro del aprendizaje de cada estudiante, lo cual implica que estos últimos sean los protagonistas en las clases. Este protagonismo se evidencia con el alcance de los indicadores de logro en cada clase, los cuales se convierten en “peldaños” para desarrollar las competencias de unidad y buscan lograr que los estudiantes movilicen todos los saberes alcanzados para resolver exitosamente problemas simples y complejos, esto tiene como base, el conocimiento y la comprensión de cada indicador y su concreción en cada una de las clases propuestas.

3. **Secuencia de la clase, experiencia auténtica del aprendizaje**: el protagonismo del estudiante se traduce en la propuesta de la secuencia de las clases, de estas, la mayoría contiene los siguientes pasos o momentos:

   - Problema inicial
   - Solución del problema inicial
   - Conclusión (definición, teorema, resumen, generalización)
   - Problemas

El análisis de esta secuencia se desarrolla describiendo la intencionalidad de cada elemento de la clase. De esta forma, se propone un itinerario para que los estudiantes, asistidos por sus docentes, construyan los conceptos y logren las competencias requeridas.

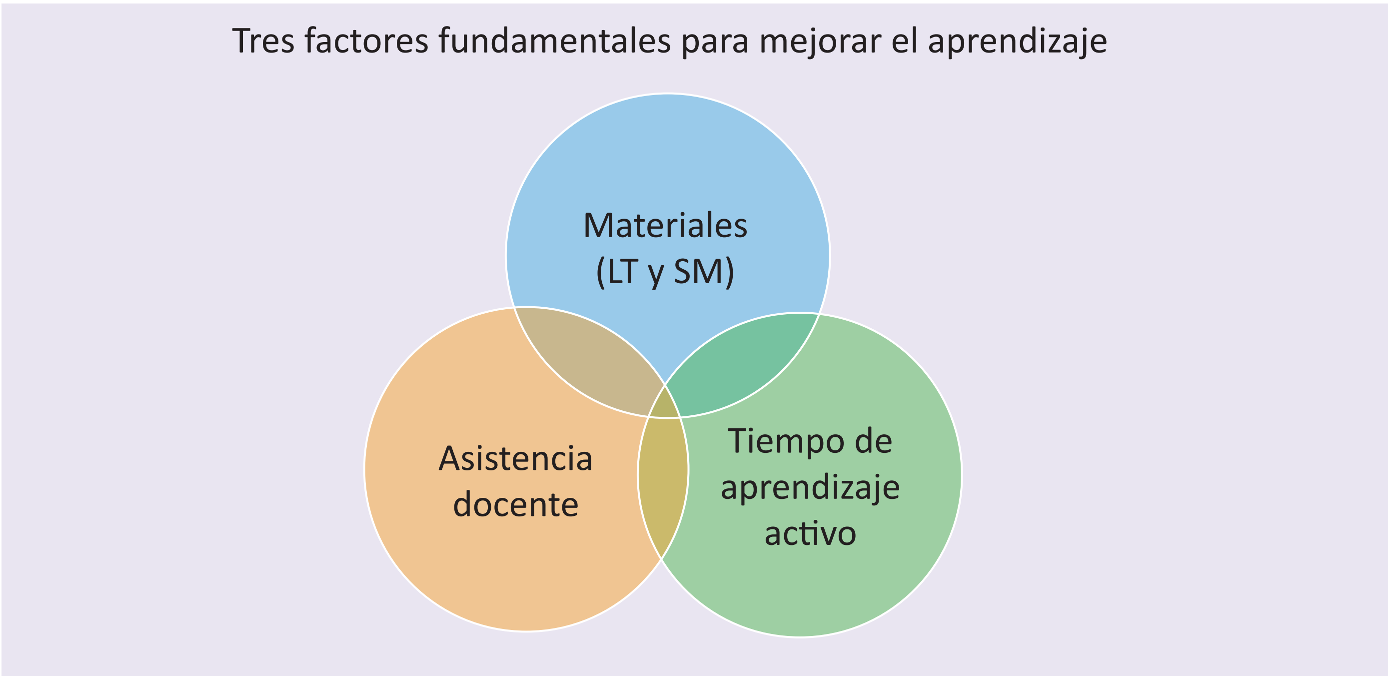
4. **Sintonía determinante con la gestión escolar**: para optimizar la efectividad de estos materiales educativos, otro aspecto fundamental a considerar es la generación de un ambiente propicio para el desarrollo de los aprendizajes, el cual está unido estrechamente con la gestión administrativa y organización de la institución educativa. Entre los elementos de dicha gestión, se destaca como determinante la cantidad de horas clase efectivas que el personal docente desarrolla en el año escolar; la propuesta de contenidos está planteada para que sean desarrollados durante al menos 192 horas clase al año, las cuales se deben garantizar como condición indispensable en el logro de los aprendizajes. Ya que oficialmente se dispone de 240 horas clase, las 48 restantes, pueden ser utilizadas por los docentes para realizar evaluaciones, capacitaciones y otras actividades que el Ministerio de Ecuación, Ciencia y Tecnología o el centro educativo requiera.

Entre los elementos de la estructura de este documento es importante mencionar el apartado **IV. Estructura de la Sugerencia metodológica**, donde se presenta la secuencia y el propósito de la clase, además, en algunas clases se describen las posibles dificultades que los estudiantes pueden presentar en algún punto específico de la clase. Otro de los elementos importantes a destacar es la resolución de los problemas planteados en la clase. También se propone un modelo de prueba de cada unidad, formulado en correspondencia directa con los indicadores de logro y los problemas planteados en cada clase, el cual puede ser de gran utilidad como una referencia para constatar los aprendizajes de cada estudiante en coherencia con todo el proceso.

Otro elemento relevante es el apartado **V. Orientación para el desarrollo de una clase de matemática con base en la resolución de problemas**, donde se describen cada uno de los elementos de la secuencia de la clase, las principales actividades que deben realizar los estudiantes en su proceso de aprendizaje y los docentes en la asistencia o mediación de los mismos. Se destacan además, los aspectos que sugieren acciones específicas en sintonía directa con el protagonismo del estudiante y la función mediadora del docente.

Esta Sugerencia y demás materiales educativos han sido elaborados con la participación activa de muchos docentes a nivel nacional, que con su experiencia y empeño por la formación de los estudiantes, han hecho aportes significativos a cada uno de los elementos de los mismos. Siguiendo esta dinámica de participación, se considera importante asumir estos materiales como una propuesta flexible y mejorable, donde el personal docente deberá hacer las adecuaciones que considere necesarias para apoyar el aprendizaje de sus estudiantes.

La meta con el uso de estos materiales educativos es el mejoramiento del aprendizaje de los estudiantes, quienes asumirán la responsabilidad del futuro del país; y como parte de la estrategia que se propone, a continuación se presentan los factores relacionados con dicha finalidad:



Los tres factores planteados constituyen las prioridades estratégicas para mejorar los aprendizajes; los **Materiales**, como el Libro de texto y la Sugerencia metodológica, el **Tiempo de aprendizaje activo** dentro de la clase y en el hogar y la **Asistencia** o **Facilitación** del docente para propiciar el aprendizaje.

Materiales

Para garantizar la efectividad y eficiencia del aprendizaje se necesita un material que tenga <u>la secuencia didáctica apropiada y el nivel de complejidad razonable</u>, basado en el nivel de comprensión de los estudiantes, es decir, los contenidos de dicho material tienen que ser académica y didácticamente adecuados y al mismo tiempo ser más amigables para el aprendizaje.

Para satisfacer la primera necesidad mencionada, en los dominios cognitivos que se desarrollarán en la asignatura de Matemática deben estar estrictamente reflejadas las competencias establecidas por el MINEDUCYT. Para cumplir la segunda necesidad, el contenido del LT debe corresponder lo más cercanamente posible a las necesidades académicas que tienen los estudiantes salvadoreños.

Tiempo de aprendizaje activo

Es importante destacar que como un paso previo a la elaboración de estos materiales de texto, el MINEDUCYT realizó una investigación en las aulas y detectó una característica no favorable: que el tiempo que se dispone en cada aula para el aprendizaje activo es insuficiente; en consecuencia, se ha limitado el desarrollo de las capacidades de los estudiantes, es así que en el LT que se ha elaborado, se recomienda a los docentes que aseguren un espacio de al menos 20 minutos para que cada uno de los estudiantes aprenda activamente por sí mismo o interactivamente con sus compañeros.

Aprendizaje activo

1. En forma individual
   ¿En qué momento se fortalecen los aprendizajes? Cuando un estudiante está trabajando individualmente, leyendo el LT, resolviendo problemas en su cuaderno de apuntes, etc., se aprende activamente. Por el contrario, cuando el estudiante solo está escuchando lo que está explicando el docente, se aprende menos porque su actitud de aprendizaje será pasiva en forma general.

   Por esta razón, se recomienda al docente que garantice un espacio de tiempo donde cada uno de sus estudiantes aprenda activamente de forma individual.

2. En forma interactiva
   En la práctica docente, muchas veces se provee asistencia a uno o dos alumnos en forma particular, dejando sin atención al resto de estudiantes. Es un hecho que es difícil brindar asistencia a cada estudiante aunque todos tienen la necesidad de aprender.

   ¿Existe otra alternativa para que todos los alumnos reciban asistencia oportuna?
   Se debe generar aprendizaje interactivo entre alumnos (o aprendizaje mutuo), ya que este tiene varias ventajas, primero, en el trabajo en parejas, si un estudiante no entiende un contenido, puede consultar a su compañero sin perder el tiempo (sin esperar la asistencia de parte del docente); segundo, el estudiante que explica a sus compañeros, profundiza su comprensión a través de la explicación en forma verbal; tercero, los alumnos a quienes no se puede dar asistencia en forma individual tendrán más oportunidad de aprender, y cuarto, se genera un ambiente de convivencia en el aula.

   Por lo que se recomienda que realicen primero el trabajo individual y luego el aprendizaje interactivo.

Se espera que cada uno de los estudiantes intente resolver los problemas y ejercicios planteados en las páginas del LT, durante (por lo menos) 20 minutos en cada clase. Con esta actividad individual (o interactiva) se pretende contribuir al fortalecimiento del aprendizaje de los estudiantes y por consiguiente a mejorarlo, así como incrementar la capacidad de interpretación de la situación problemática planteada.

Antes de finalizar este punto, cabe mencionar que, además del uso del LT en el aula, se debe garantizar como mínimo 20 minutos de aprendizaje activo en el hogar, resolviendo los problemas que no se lograron resolver en clase. Sumando 20 minutos en el hogar a otros 20 minutos de aprendizaje activo en la clase y esforzándose durante 192 días, se espera que se cumpla la siguiente relación: **(20 minutos + 20 minutos) × 192 días = mejora de aprendizajes**. A todos los docentes del país se les invita a estar conscientes de esta relación.

Asistencia y facilitación

El MINEDUCYT se propone cambiar el paradigma acerca del rol de los docentes, de **enseñar** hacia **asistir el aprendizaje**. Tradicionalmente, en el proceso de enseñanza se hacen esfuerzos por responder **¿qué es lo que hace el docente?**, en lugar de preocuparse por saber **¿qué es lo que lograron los estudiantes?**, centrarse en el aprendizaje es un esfuerzo genuino que debe ser la base para evaluar el desempeño docente.

Las actividades del docente deben ser planificadas para elevar el nivel de aprendizaje y preocuparse por el resultado de los estudiantes.

1. Elementos de una clase del Libro de texto

La siguiente página corresponde a la clase 2.4 de la unidad 5.

Indica el número de la lección.

Hace referencia al número de la clase.

Cuando aparezca este ícono, significa que los estudiantes pueden utilizar la calculadora para resolver el problema.

En el primer momento de la clase, el estudiante debe pensar una solución a partir de una situación problemática, la cual permite introducir el contenido que se desarrollará.

En este segundo momento de la clase, el libro de texto propone una o varias formas de resolver el problema planteado.

Se consolida el contenido, aquí se relaciona el problema inicial y la solución, para explicar con lenguaje matemático la finalidad del contenido.

En algunas clases se propone un problema más, para mejorar la comprensión del contenido.

Se presentan problemas y ejercicios para que el estudiante practique lo aprendido.

Indica la unidad a la que corresponde la clase.

2.4 Cambio de base de un logaritmo*

Problema inicial

¿Cómo calcularías el valor de $\log_2 5$ utilizando el logaritmo base 10?

La mayoría de calculadoras científicas solo permiten encontrar el valor de logaritmos de base 10 y e. El número neperiano: e = 2.718281828459045...

Solución

Sea $x = \log_2 5$. Entonces:

$2^x = 5$ por la definición de logaritmo,

$\log 2^x = \log 5$ se aplica logaritmo a ambos lados de la igualdad,

$x\log 2 = \log 5$ utilizando propiedades de logaritmo,

$x = \frac{\log 5}{\log 2}$.

El logaritmo base 10, usualmente, se denota sin la base: $\log_{10} a = \log a$.

Se utiliza la calculadora para determinar el cociente:

log 5 ÷ log 2 = ⇒ Pantalla de la calculadora

log 5 ÷ log 2
2.321928095

Por lo tanto, $\log_2 5 = 2.321928095...$

Definición

Sean a, b y c números positivos tales que $a \neq 1$ y $c \neq 1$. Se denomina **cambio de base** a la igualdad:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Ejemplo

1. Demuestra la propiedad del cambio de base para $c = 10$.

Se tiene que $x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b$.

Se aplica logaritmo base 10: $\log a^x = \log b$.

Se aplica la propiedad del logaritmo de una potencia $x\log a = \log b$.

Se despeja x: $x = \frac{\log b}{\log a}$, $\log a \neq 0$ ya que $a \neq 1$.

Por lo tanto, se tiene que $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$.

2. Calcula el valor de $\log_4 8$.

En este caso no es necesario utilizar la calculadora.

Se utiliza $c = 2$.

$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2} = \frac{3}{2}$.

Por lo tanto, $\log_4 8 = \frac{3}{2}$.

Se puede utilizar cualquier base.

$\log_4 8 = \frac{\log_3 8}{\log_3 4} = \frac{\log_3 2^3}{\log_3 2^2} = \frac{3\log_3 2}{2\log_3 2} = \frac{3}{2}$.

Problemas

1. Simplifica los siguientes logaritmos con la propiedad de cambio de base.

a) $\log_4 32$ b) $\log_4 \frac{1}{8}$ c) $\log_9 \sqrt{3}$ d) $\log_4 \frac{1}{\sqrt{2}}$

e) $\log_{\frac{1}{9}} 27$ f) $\log_{\frac{1}{27}} 3$ g) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{8}$ h) $\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

Observa que el argumento del logaritmo y la base son potencias de una misma base.

2. Calcula el valor de los siguientes logaritmos.

a) $\log_5 24$ b) $\log_2 \frac{1}{3}$ c) $\log_{\frac{1}{2}} 5$ d) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2}$

Utiliza $c = 10$.

Unidad 5

131

2. Aspectos importantes del Libro de texto

Clases con mayor nivel de dificultad: el título de algunas clases tienen un asterisco (*), esto significa que el nivel de dificultad es mayor comparado con el resto. El docente debe estar pendiente del trabajo de sus estudiantes, en el caso que no avancen, se puede dar una mayor orientación respecto a la solución del problema inicial. Por ejemplo:

2.4 Cambio de base de un logaritmo*

Problema inicial

¿Cómo calcularías el valor de $\log_2 5$ utilizando el logaritmo base 10?

La mayoría de calculadoras científicas solo permiten encontrar el valor de logaritmos de base 10 y e. El número neperiano: e = 2.718281828459045...

Solución

Información complementaria: en el libro se utilizan algunos elementos que facilitan el aprendizaje de los contenidos, como presaberes, pistas, información adicional relacionada con la historia de la matemática, y se representan con diferentes colores:

Presaberes	Pista	Información adicional

Distribución de las clases: el libro está compuesto por 8 unidades didácticas, cada una formada por diferentes lecciones y estas últimas compuestas por distintas clases. En la numeración del título de cada clase, el primer número indica la lección y el segundo indica la clase.

Además al finalizar cada unidad siempre aparecen algunos problemas sobre las temáticas abordadas, y en ocasiones también se desarrollan algunas prácticas en GeoGebra, como recurso tecnológico de la matemática.

Desarrollo de clases con el uso de GeoGebra: uno de los componentes innovadores en el Libro de texto es el uso del software matemático, para modelar procesos o construcciones con el fin de proporcionar herramientas que vayan acorde a la dinamización de la matemática. Para ello, al final de algunas unidades se proponen prácticas para que los estudiantes puedan verificar algunos resultados obtenidos en la unidad y se plantean algunas situaciones para que las resuelvan.

Desarrollo de clases introductorias utilizando material concreto: en algunas unidades se han diseñado clases que permitan introducir los contenidos, con el fin de potenciar la lógica, la intuición y el razonamiento espacial, y así facilitar la comprensión de los mismos.

1. Programación anual

Periodo	Mes	Unidad (Horas de clase)	Pág. de GM (Pág. de LT)	Contenidos
Primero	Enero	U1: Ecuaciones (10)	23 – 52 (7 – 18)	• Ecuaciones bicuadráticas • Ecuaciones radicales • Ecuaciones racionales • Sistemas de ecuaciones lineales y cuadráticas
	Enero Febrero	U2: Línea recta (26)	53 – 122 (19 – 48)	• Distancia entre dos puntos • División de un segmento en una razón dada • Punto medio de un segmento • Pendiente • Ecuación de una recta en su forma punto pendiente • Ecuación de una recta dados dos puntos • Rectas paralelas a los ejes de coordenadas • Forma general de la ecuación de una recta • Intersección de una recta con los ejes de coordenadas • Intersección entre rectas • Rectas paralelas y perpendiculares • Distancia de un punto a una recta • Ángulo de inclinación de una recta • Ángulo entre rectas • Práctica en GeoGebra
	Marzo	U3: Secciones cónicas – continúa en el segundo periodo – (12)	123 – 157 (49 – 61)	• Lugar geométrico de una ecuación y ecuación de un lugar geométrico • Ecuación canónica de una parábola • Desplazamientos paralelos de una parábola • Ecuación general de la parábola • Aplicaciones de la parábola
Segundo	Marzo Abril	U3: Secciones cónicas – continuación – (29)	158 – 228 (62 – 94)	• Ecuación canónica de una circunferencia • Desplazamientos paralelos de una circunferencia • Ecuación general de la circunferencia • Aplicaciones de la circunferencia • Ecuación canónica de una elipse • Elementos y propiedades de la elipse • Desplazamientos paralelos de una elipse • Ecuación general de la elipse • Aplicaciones de la elipse • Ecuación canónica de una hipérbola • Desplazamientos paralelos de una hipérbola • Ecuación general de la hipérbola • Aplicaciones de la hipérbola • Práctica en GeoGebra
	Abril Mayo	U4: Funciones trascendentales I (20)	229 – 288 (95 – 118)	• Exponente positivo, exponente negativo y cero • Multiplicación y división de raíces con igual índice • Raíz de raíz • Suma y resta de raíces semejantes • Potencia de una raíz • Exponente racional • Gráfica, simetría, dominio, rango y asíntotas • Desplazamientos verticales y horizontales • Ecuaciones exponenciales

Periodo	Mes	Unidad (Horas de clase)	Pág. de GM (Pág. de LT)	Contenidos
Tercero	Junio Julio	U5: Funciones trascendentales II (37)	293 –386 (119 – 160)	• Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva • Composición de funciones y función inversa • El logaritmo y sus propiedades • Operaciones con logaritmos • Gráfica, dominio, rango y monotonía de la función logarítmica • Ecuaciones logarítmicas • Logarítmo base 10 y natural • Razones trigonométricas • Círculo trigonométrico y periodicidad • Función seno, coseno y tangente • Periodo, amplitud y desplazamientos • Práctica en GeoGebra
	Julio Agosto	U6: Sucesiones aritméticas y geométricas (14)	387 – 434 (161 – 176)	• Término general y suma parcial de una sucesión aritmética • Término general y suma parcial de una sucesión geométrica
Cuarto	Agosto Septiembre	U7: Métodos de conteo (27)	435 – 496 (177 – 204)	• Conjunto, elemento y diagrama de Venn • Cardinalidad de un conjunto • Operaciones con conjuntos • Diagrama de árbol • Principio de la suma y de la multiplicación • Concepto de permutación • Permutaciones con repetición • Permutaciones circulares • Permutaciones con objetos repetidos • Conteo por el complemento • Concepto de combinaciones • Identidades combinatorias • Triángulo de Pascal • Binomio de Newton
	Octubre	U8: Probabilidad (17)	497 – 544 (205 – 222)	• Axiomas de Kolmogórov • Aplicación de los axiomas de Kolmogórov: probabilidad del complemento • Fórmula de la probabilidad condicional • Aplicaciones de la probabilidad condicional • Teorema de probabilidad total y teorema de Bayes • Experimentos independientes

Para desarrollar todo el contenido establecido, se debe cumplir la programación mostrada.

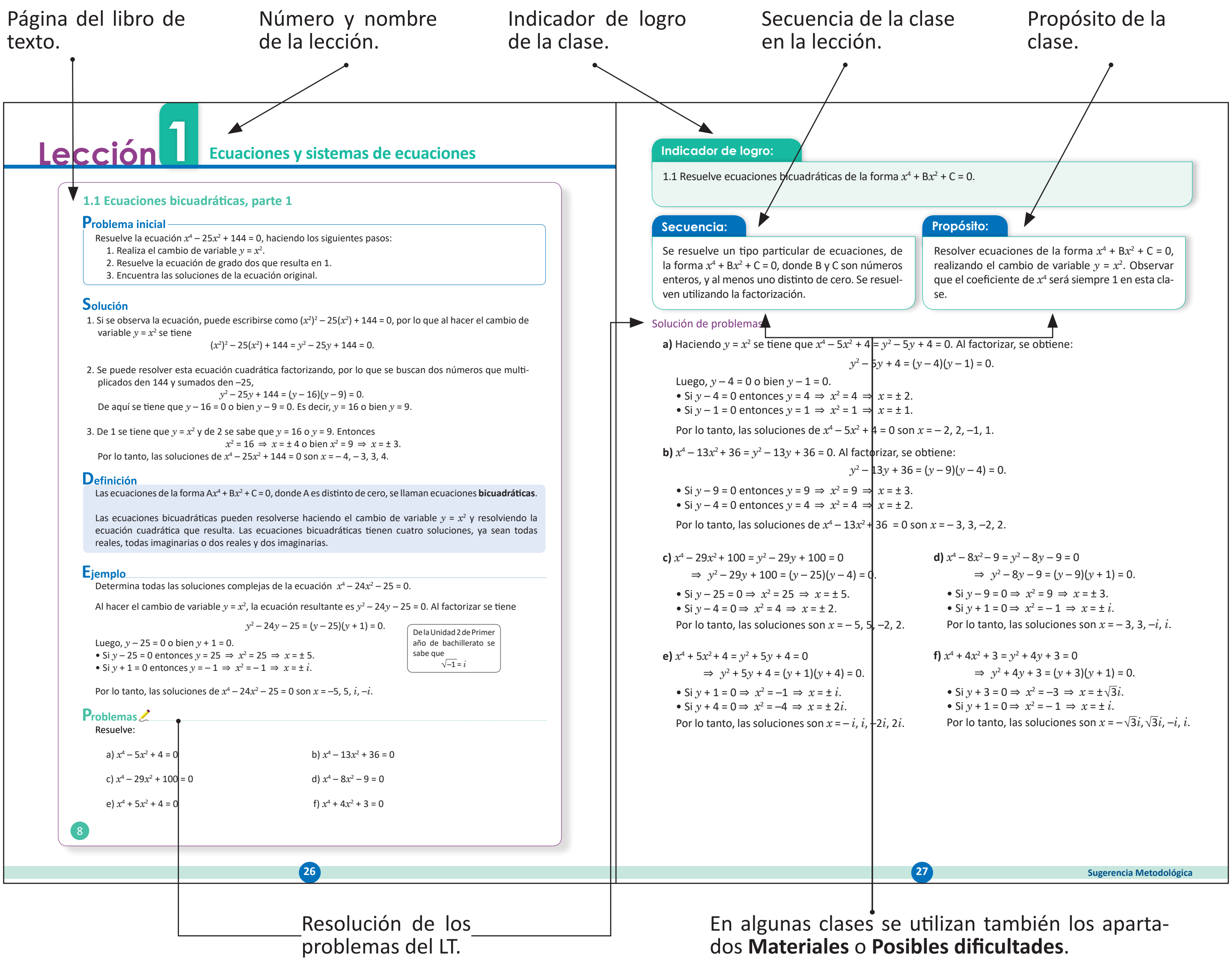
2. Apartados de la unidad

a) Competencia de la unidad: describe las capacidades que los estudiantes deben adquirir al finalizar la unidad.
b) Relación y desarrollo (entre los grados anteriores y el posteriores): muestra en qué grado los estudiantes aprendieron los saberes previos y en qué grado darán continuidad al contenido.
c) Plan de estudio de la unidad: presenta las clases de cada unidad.
d) Puntos esenciales de cada lección: describe los elementos importantes de las lecciones por unidad.

3. Prueba de la unidad

Se presenta un ejemplo de la prueba para medir tanto el nivel de comprensión por parte de los estudiantes como el nivel de alcance del objetivo de la unidad por parte de los docentes. Si el rendimiento es bajo en algunos problemas, los docentes deben pensar en cómo mejorarlo y al mismo tiempo, tratar que este bajo rendimiento no sea un obstáculo para el siguiente aprendizaje. De esta manera, los docentes podrán utilizar esta prueba para discutir con sus colegas, ya sea de la misma institución o de otras, sobre los resultados obtenidos.

4. Elementos de una página de la SM



Lección 1 Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

1.1 Ecuaciones bicuadráticas, parte 1

Problema inicial

Resuelve la ecuación $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$, haciendo los siguientes pasos:

1. Realiza el cambio de variable $y = x^2$.
2. Resuelve la ecuación de grado dos que resulta en 1.
3. Encuentra las soluciones de la ecuación original.

Solución

1. Si se observa la ecuación, puede escribirse como $(x^2)^2 - 25(x^2) + 144 = 0$, por lo que al hacer el cambio de variable $y = x^2$ se tiene
$$(x^2)^2 - 25(x^2) + 144 = y^2 - 25y + 144 = 0.$$
2. Se puede resolver esta ecuación cuadrática factorizando, por lo que se buscan dos números que multiplicados den 144 y sumados den -25,
$$y^2 - 25y + 144 = (y - 16)(y - 9) = 0.$$
De aquí se tiene que $y - 16 = 0$ o bien $y - 9 = 0$. Es decir, $y = 16$ o bien $y = 9$.
3. De 1 se tiene que $y = x^2$ y de 2 se sabe que $y = 16$ o $y = 9$. Entonces
$$x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4 \text{ o bien } x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3.$$
Por lo tanto, las soluciones de $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$ son $x = -4, -3, 3, 4$.

Definición

Las ecuaciones de la forma $Ax^4 + Bx^2 + C = 0$, donde A es distinto de cero, se llaman ecuaciones **bicuadráticas**.

Las ecuaciones bicuadráticas pueden resolverse haciendo el cambio de variable $y = x^2$ y resolviendo la ecuación cuadrática que resulta. Las ecuaciones bicuadráticas tienen cuatro soluciones, ya sean todas reales, todas imaginarias o dos reales y dos imaginarias.

Ejemplo

Determina todas las soluciones complejas de la ecuación $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$.

Al hacer el cambio de variable $y = x^2$, la ecuación resultante es $y^2 - 24y - 25 = 0$. Al factorizar se tiene
$$y^2 - 24y - 25 = (y - 25)(y + 1) = 0.$$
Luego, $y - 25 = 0$ o bien $y + 1 = 0$.

- Si $y - 25 = 0$ entonces $y = 25 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$.
- Si $y + 1 = 0$ entonces $y = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$.

De la Unidad 2 de Primer año de bachillerato se sabe que $\sqrt{-1} = i$

Por lo tanto, las soluciones de $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$ son $x = -5, 5, i, -i$.

Problemas

Resuelve:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

c) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ d) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

e) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$ f) $x^4 + 4x^2 + 3 = 0$

8

26

Indicador de logro:

1.1 Resuelve ecuaciones bicuadráticas de la forma $x^4 + Bx^2 + C = 0$.

Secuencia:

Se resuelve un tipo particular de ecuaciones, de la forma $x^4 + Bx^2 + C = 0$, donde B y C son números enteros, y al menos uno distinto de cero. Se resuelven utilizando la factorización.

Propósito:

Resolver ecuaciones de la forma $x^4 + Bx^2 + C = 0$, realizando el cambio de variable $y = x^2$. Observar que el coeficiente de x^4 será siempre 1 en esta clase.

Solución de problemas:

a) Haciendo $y = x^2$ se tiene que $x^4 - 5x^2 + 4 = y^2 - 5y + 4 = 0$. Al factorizar, se obtiene:
$$y^2 - 5y + 4 = (y - 4)(y - 1) = 0.$$
Luego, $y - 4 = 0$ o bien $y - 1 = 0$.

- Si $y - 4 = 0$ entonces $y = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.
- Si $y - 1 = 0$ entonces $y = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

Por lo tanto, las soluciones de $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ son $x = -2, 2, -1, 1$.

b) $x^4 - 13x^2 + 36 = y^2 - 13y + 36 = 0$. Al factorizar, se obtiene:
$$y^2 - 13y + 36 = (y - 9)(y - 4) = 0.$$

- Si $y - 9 = 0$ entonces $y = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$.
- Si $y - 4 = 0$ entonces $y = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.

Por lo tanto, las soluciones de $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ son $x = -3, 3, -2, 2$.

c) $x^4 - 29x^2 + 100 = y^2 - 29y + 100 = 0$
$\Rightarrow y^2 - 29y + 100 = (y - 25)(y - 4) = 0$.

- Si $y - 25 = 0 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$.
- Si $y - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = -5, 5, -2, 2$.

d) $x^4 - 8x^2 - 9 = y^2 - 8y - 9 = 0$
$\Rightarrow y^2 - 8y - 9 = (y - 9)(y + 1) = 0$.

- Si $y - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$.
- Si $y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = -3, 3, -i, i$.

e) $x^4 + 5x^2 + 4 = y^2 + 5y + 4 = 0$
$\Rightarrow y^2 + 5y + 4 = (y + 1)(y + 4) = 0$.

- Si $y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$.
- Si $y + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm 2i$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = -i, i, -2i, 2i$.

f) $x^4 + 4x^2 + 3 = y^2 + 4y + 3 = 0$
$\Rightarrow y^2 + 4y + 3 = (y + 3)(y + 1) = 0$.

- Si $y + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = -3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}i$.
- Si $y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = -\sqrt{3}i, \sqrt{3}i, -i, i$.

27 Sugerencia Metodológica

En el desarrollo de los problemas de algunas clases, se presenta información adicional e importante para el docente, esto se hace a través de un cuadro como el siguiente:

Información importante para el docente.

1. Recomendación pedagógica para el desarrollo de la clase

En consonancia con el Programa de Estudio anterior, esta nueva versión también sugiere el desarrollo de las clases de matemática basándose en el socioconstructivismo a través del enfoque de Resolución de Problemas. En las clases impartidas con este enfoque el centro del proceso de los aprendizajes son los estudiantes, por lo que ellos mismos construyen sus conocimientos y procedimientos a partir de la situación didáctica o problemática planteada. En este proceso, el rol principal del docente es facilitar o asistir en el aprendizaje de los estudiantes; para lo cual deberá seguir el procedimiento que se detalla a continuación:

Pasos	Proceso de aprendizaje (estudiante)	Proceso de asistencia de aprendizajes (docente)	Puntos que se deben tomar en cuenta en la asistencia
1	Verificación de la respuesta de los problemas de la tarea y recordatorio de presaberes.	Verificar la respuesta correcta de los problemas de la tarea correspondientes a los que quedaron pendientes en la clase anterior en el LT.	Utilizar como máximo 3 minutos para este paso.
2	Resolución individual del problema inicial de la clase.	Orientar para que lean el problema inicial de la clase, confirmar el nivel de comprensión de los estudiantes sobre el tema y luego invitarles a que resuelvan de manera individual (aprendizaje activo).	- Mientras los estudiantes resuelven el problema inicial, el docente debe desplazarse en el aula para verificar los avances y las dificultades que presenten. - Si tienen dificultades, indicarles que lean la solución del LT. - Utilizar como máximo 6 minutos.
3	Aprendizaje interactivo con sus compañeros.	Fomentar el trabajo entre compañeros para que consulten entre ellos las soluciones y dudas.	- En un primer momento, que trabajen por parejas, gradualmente puede aumentar el número de integrantes por equipo, hasta un máximo de cuatro. - Si tienen dificultades, indicarles que lean la solución del LT.
4	Socialización de la solución y la conclusión de la clase.	Orientar para que lean la solución y conclusión de la clase.	Si se considera necesario, se debe explicar la solución o invitarles a que socialicen la solución en plenaria.
5	Resolución del primer ítem de la sección de problemas y ejercicios (aprendizaje activo).	Indicar que resuelvan el primer ítem de la sección de problemas.	Si hay estudiantes que ya resolvieron el primer ítem, invitarles a que trabajen los demás ítems.

6	Evaluación del primer ítem de los problemas.	Verificar la solución del primer ítem de todos los estudiantes y asegurarse de que lo resolvieron correctamente.	- Mientras los estudiantes trabajan, el docente debe desplazarse en el aula revisando el primer ítem de todos los estudiantes. - Dependiendo de la dificultad, el docente puede explicar la solución o simplemente escribir la respuesta.
7	Resolución del resto de ítems.	Orientar para que realicen el resto de ítems. Luego verificar si las respuestas son correctas y orientar para que hagan nuevamente los problemas en los que se equivocaron.	A los estudiantes que terminan primero, se les indica que apoyen a sus compañeros.
8	Tomar nota de la tarea para la casa.	Asignar la tarea de los problemas que no se resolvieron del LT.	Si no se logran resolver todos los problemas de la clase del LT, se pueden asignar como tarea, pero analizando la cantidad de tareas que tengan los estudiantes.

Tal como se presentó en la estrategia para el mejoramiento de los aprendizajes de los estudiantes, se debe garantizar como mínimo 20 minutos de aprendizaje activo, esto se logrará si se sigue el proceso presentado anteriormente, sobre todo en los pasos 2, 3, 5 y 7.

2. Puntos importantes a considerar en la facilitación del aprendizaje

a. Uso adecuado del tiempo

En el Programa de Estudio se proporcionan los indicadores de logro y los contenidos que deben ser desarrollados en el número de horas de clase establecidas en este mismo documento curricular. Según el programa, se establece que una clase debe durar 45 minutos y la carga horaria anual es de 240 clases. De acuerdo con este lineamiento, en este tiempo se debe facilitar el aprendizaje de todos los contenidos planteados. En este sentido, se requiere una eficiencia en el aprendizaje en función del tiempo establecido. Alcanzar el indicador de logro en 45 minutos no es una tarea sencilla, por lo que, a continuación, se presentan algunas técnicas para la facilitación de los aprendizajes:

■ Ubicación de los pupitres de los estudiantes

La forma para ubicar los escritorios o pupitres puede variar dependiendo del propósito de la clase, sin embargo, en la clase de matemática básicamente se recomienda que los ubiquen en filas, es decir, todos los estudiantes hacia la pizarra debido a las siguientes razones:

a. Facilidad para desplazarse entre los pupitres para verificar el aprendizaje de los estudiantes.
b. Facilidad para el aprendizaje interactivo entre compañeros.
c. Comodidad en la postura de los estudiantes para ver la pizarra.

Distribución del LT antes de iniciar la clase

En las aulas se tienen establecidas normas de conducta, pero será necesario que se incluya una más: que oriente a los estudiantes a tener preparados los recursos o materiales necesarios antes del inicio de la clase. Una vez establecida esta norma, se pueden asignar algunos estudiantes para la distribución del LT, de tal manera que se responsabilicen de repartirlos antes de iniciar la clase.

Tiempo que puede destinar para el recordatorio o repaso

El tiempo de una clase es limitado y cada una tiene su indicador de logro, que todos los estudiantes deben alcanzar. Si se destinan más de 3 minutos en la parte inicial donde se recuerdan los presaberes, en la mayoría de los casos no se logrará alcanzar el indicador por falta de tiempo y este desfase irá provocando otros desfases en las clases posteriores; por consiguiente, en el año escolar no se conseguirá abordar todos los contenidos establecidos en el Programa de Estudio.

Cuando se detectan dificultades en la parte del recordatorio, muchas veces no se logra retroalimentar en un tiempo corto, sino que se requiere más tiempo para asegurar el presaber. Por ejemplo, en bachillerato usualmente se tienen dificultades en la resolución de ecuaciones, para reforzar este dominio se requiere de más tiempo para resolver problemas. Al desarrollar la parte del recordatorio entonces, el docente no debe olvidar que su propósito es dar una pista para resolver el problema de la clase de ese día, y el reforzamiento no es su propósito principal.

Tiempo que se debe destinar para la resolución individual en el Problema inicial de la clase

Tal como se estableció en el punto **1. Recomendación pedagógica para el desarrollo de la clase**, se deben utilizar 6 minutos. Muchas veces los estudiantes simplemente están esperando otra orientación del docente sin que sepan qué hacer en la resolución individual. En este caso, es mejor orientar un aprendizaje interactivo, invitándoles a que consulten con sus compañeros.

Tiempo insuficiente para terminar el contenido de una clase

Es posible que haya clases donde no alcance el tiempo por lo que quedarán ítems sin ser resueltos. Algunos docentes los toman como contenidos de otra clase, sin embargo, es mejor considerar dejarlos como tarea; en el caso de que los estudiantes estén sobrecargados de tareas, el docente puede tomar la decisión de reservar estos problemas sin resolver y utilizarlos para el reforzamiento previo a las pruebas o para asignar a los estudiantes que terminan rápido.

Formación del hábito de estudio en los tiempos extra en la escuela

En ocasiones, el tiempo de las clases no alcanza para la consolidación de los aprendizajes, en este caso, además de la asignación de la tarea, puede utilizarse una alternativa de aprovechamiento del tiempo extra en la escuela. Según los horarios de las escuelas no hay un tiempo extra, pero en la práctica, sí existe. Por ejemplo, cuando el docente atiende alguna visita o emergencia antes de iniciar la clase o la jornada, antes de que esta termine o cuando termina una clase en menos de 45 minutos, etc., por lo que será mejor aprovechar este espacio de tiempo para realizar los problemas pendientes del LT. Principalmente, se puede aprovechar el tiempo para reforzar los contenidos básicos donde hay mayor dificultad.

■ **Revisión de todos los problemas resueltos, garantizando que las respuestas sean correctas**

Revisar todos los problemas que hayan resuelto los estudiantes no es una tarea fácil, ya que implica bastante tiempo, por lo que se debe buscar una alternativa que resuelva esta situación. Para esto, es necesario formar dos hábitos en los estudiantes:

1. El hábito de autocorrección.
2. El hábito de realizar nuevamente los problemas donde se han equivocado.

Al formar el primer hábito, el docente consigue una opción para confirmar las respuestas correctas verbalmente o por escrito en la pizarra; para consolidarlo se puede invitar a los estudiantes a que intercambien los cuadernos para corregirse mutuamente. El segundo hábito, por su parte, permite que los estudiantes no se queden con dudas, lo que ayudará a la formación de su personalidad asignándole valor al esfuerzo y a la motivación al lograr el aprendizaje.

b. Planificación

En este documento se propone la planificación de cada clase, por lo que no es necesario elaborar en otra hoja la planificación, guión o carta didáctica, sino que deben basarse en las propuestas de este documento para impartir la clase. Incluso, si se considera necesario, se pueden escribir algunos puntos importantes con lápiz de grafito (ya que este documento pertenece a la escuela y no al docente, por lo que no debe escribir con lapicero). En caso de que se considere necesario realizar una adecuación de acuerdo con la particularidad de los estudiantes, puede hacerse siempre y cuando esté basado en el contenido propuesto en este documento.

c. Evaluar y brindar orientación necesaria desplazándose en el aula

Mientras los estudiantes resuelven el problema, el docente debe desplazarse en el aula para evaluar el nivel de comprensión del contenido, revisando el trabajo de los estudiantes y observando si han comprendido el enunciado.

Muchas veces se brinda asistencia individual a algunos estudiantes que han tenido dificultad, pero no alcanza el tiempo para atender a todos. La orientación debe realizarse de la siguiente manera: si el número de estudiantes que tienen dificultad es menor a cinco, brindar orientación individual, de lo contrario, es mejor brindar otro tipo de orientación, por ejemplo: explicación en plenaria, por grupo, a la hora de revisión de la respuesta correcta, entre otras.

d. Tratamiento a los estudiantes que terminan los problemas más rápido que el resto

Una sección está conformada por un grupo heterogéneo, por lo que siempre hay diferencias entre estudiantes, especialmente en el tiempo que se tardan en resolver los problemas. En la educación pública debe garantizarse igualdad de oportunidades para aprender, y en este sentido, si no se tiene orientación sobre qué hacer con los estudiantes que terminan los problemas antes que otros, ellos estarán perdiendo tiempo y se pueden convertir en un factor negativo para la disciplina del aula por no tener qué hacer. Para evitar esta situación y aprovechar el rendimiento de estos estudiantes, el docente puede establecer el siguiente compromiso: cuando terminen todos los problemas y los hayan revisado, entonces, ellos pueden orientar al resto de sus compañeros. De esta manera, los que tienen dificultades pueden recibir orientación de sus compañeros, mientras los estudiantes que orientan también lograrán interiorizar el aprendizaje de la clase. Así mismo, el docente puede preparar otra serie de problemas para la fijación del contenido u otro tipo de problemas que tienen carácter de desafío, para que los estudiantes puedan seguir desarrollando sus capacidades.

e. Revisión de los cuadernos de apuntes

Si no se brinda un monitoreo continuo sobre el uso del cuaderno, eventualmente puede que se utilice de manera desordenada, por lo que es necesario que se revise periódicamente su uso, en promedio, una vez al mes. La clave para esto es aumentar el número de revisiones al inicio del año escolar, de tal manera que los estudiantes sientan que están siendo monitoreados y se forme en ellos un hábito.

f. Revisión de las tareas

De la misma manera que la revisión de los cuadernos de apuntes, es necesario brindar un monitoreo continuo sobre la realización de las tareas. Además de verificar la realización de la tarea en el primer proceso de cada clase, se puede programar periódicamente la revisión, prestando especial atención a los estudiantes que hayan cumplido con todas, los que se hayan autorevisado con las respuestas correctas y los que resolvieron de nuevo los problemas donde se habían equivocado.

g. Formación del hábito de estudio en el hogar

Según el resultado de la prueba de matemática en el Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo (TERCE), el resultado de los alumnos que estudian más de 30 minutos en el hogar es claramente mejor que los que estudian menos o nada. El tiempo ideal de estudio dependerá del grado, pero por lo general se consideran necesarios 10 minutos por grado, más 10 minutos. Por ejemplo, para el caso de 3er grado es $10 \times 3 + 10 = 40$ minutos. Formar el hábito de estudio de los estudiantes en el hogar es tarea no solamente del docente, sino también de los padres de familia y no es nada fácil. Por lo que, al inicio, se podría formar el hábito de estudio a través de la asignación de tareas.

h. Ciclo de orientación, verificación, reorientación y felicitación

Como ciclo básico de todas las orientaciones que hace el docente, si se orienta una acción se debe dar el monitoreo o verificación del cumplimiento de la misma. Luego, si los estudiantes cumplen, se les debe felicitar porque ya pueden hacerlo; en caso contrario, hay que orientar nuevamente sobre el asunto. Esto aplica en todas las orientaciones. Por ejemplo, si se asigna una tarea, se verifica si el estudiante la cumple, se le felicita y si no la realiza se debe reorientar. Este ciclo aplica también en la asistencia del aprendizaje, si se orienta respecto a un contenido y a través de la prueba se verifica que lo hayan hecho correctamente, se debe felicitar; en caso contrario, se debe reorientar. El ciclo parece sencillo, pero para cumplirlo continuamente se debe formar el hábito.

1. Importancia de la aplicación de las pruebas

Los resultados que se obtienen al evaluar el aprendizaje de los estudiantes proporcionan al docente información valiosa que le permite tener un panorama real sobre el avance obtenido. Con base a esto, el docente puede tomar decisiones con el fin de garantizar que sus estudiantes alcancen los indicadores de logro de cada clase, desarrollen las competencias transversales y cumplan a su vez con las competencias de grado propuestas.

Cuando los resultados son positivos, el docente continúa mejorando su práctica, con el fin de que cada vez sea más efectiva.

Si los resultados no son tan favorables, será necesario que el docente autoevalúe su desempeño basado en los resultados del aprendizaje de cada estudiante, y ponga todo su empeño y esfuerzo para dar lo mejor de sí. Para ello, debe participar en procesos de formación e investigar sobre los contenidos donde considere que tenga mayores dificultades y podría incluso consultar con sus compañeros de trabajo.

Es importante destacar que el docente es uno de los actores más importantes en el ámbito educativo; por tal razón, debe asumir su rol como tal y autoevaluar su desempeño basado en los resultados del aprendizaje de cada estudiante.

Considerando lo anterior, debe hacer uso de las pruebas que contiene esta SM, las cuales buscan recolectar información valiosa y relacionada con la realidad de los aprendizajes, tanto adquiridos como no adquiridos.

2. Propósitos de las pruebas

Resumiendo lo anterior, se podría concluir que los propósitos son los siguientes:
- Obtener información en cuanto al nivel de comprensión de los contenidos por parte de los estudiantes.
- Diseñar estrategias de mejora en los contenidos donde los estudiantes salieron deficientes.
- Evaluar el desempeño del docente y mejorar su práctica basándose en el análisis de los resultados de la prueba.

3. Función de cada prueba

Son dos tipos de pruebas, de unidad y de periodo. Todas tienen el mismo propósito planteado, sin embargo, según convenga, se puede dar varias funciones a cada una de ellas. A continuación se plantean algunos ejemplos de cómo utilizarlas.

a. Prueba de unidad

Los ítems que aparecen en dicha prueba corresponden a los principales indicadores de logro (curriculares) los cuales están enunciados en las clases de cada unidad. Por lo tanto, el docente puede conocer el nivel de comprensión de los contenidos por parte de los estudiantes. Lo ideal es dar una retroalimentación una vez se detecten las dificultades; sin embargo, no siempre se tiene suficiente tiempo para impartir clases adicionales. En ese caso, se puede invitar a los estudiantes para que ellos mismos revisen y trabajen los ítems que no pudieron resolver en el momento de la aplicación de la prueba.

Se puede entregar la copia de las respuestas de la prueba que está en este documento para que la analicen en grupos, de esta forma, ellos pueden aprender interactivamente con sus compañeros; luego, el docente puede recoger la prueba revisada por los estudiantes y ésta podría ser una información referencial sobre el avance de sus estudiantes.

Antes de la aplicación de dicha prueba, es recomendable anunciarles a los estudiantes con el fin de que ellos repasen con antelación los contenidos de la unidad a evaluar.

b. Prueba de periodo

Los ítems que aparecen en esta prueba corresponden a los contenidos esenciales del respectivo periodo. El momento ideal para aplicar dicha prueba será un día antes de finalizar el periodo, ya que, en la última clase, se pueden retroalimentar los contenidos. Sin embargo, si no se puede hacer así, podría aplicarse en el último día del periodo y dar la retroalimentación en la primera clase del próximo.

Además de esto, aprovechando las Reflexiones Pedagógicas, se puede compartir el resultado de las pruebas con docentes de otros centros educativos. Así se podrá consultar cuáles son las dificultades que han encontrado, qué tipo de esfuerzos han aplicado otros docentes, entre otros temas que contribuyan al mejoramiento de los aprendizajes. Una vez establecido un grado de confianza con otros docentes, se podría establecer comunicación vía redes sociales, para compartir información que facilite procesos y contribuya a mejorar los aprendizajes de los estudiantes.

Al final de cada unidad y de cada periodo, estarán las pruebas respectivas, de manera que puedan ser fotocopiadas por cada docente, y posteriormente se encontrará la resolución y rúbrica de evaluación para cada ítem.

4. Uso de los resultados de la prueba

Ejemplo. Se supone que se aplica una prueba a estudiantes de segundo año de bachillerato, y de los resultados se presentan dos situaciones:

a. Respuesta correcta:

	Efectua la siguiente operación $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}$
Solución de los estudiantes	$\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^3\times 2}=2\sqrt[3]{2}$ $\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{2\times 3^3}=3\sqrt[3]{2}$ $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}=2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}=5\sqrt[3]{2}$
Porcentaje de estudiantes que resolvieron de esta forma	70%

b. Respuesta incorrecta:

	Efectua la siguiente operación $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}$
Solución de los estudiantes	$\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{16+54}=\sqrt[3]{70}$
Porcentaje de estudiantes que resolvieron de esta forma	60%

En las dos situaciones planteadas, ¿cómo se pueden analizar los resultados?

Información que el docente puede obtener de este resultado:

Capacidad adquirida	Capacidad no adquirida
Suma de raíces cúbicas	Simplificación de raíces cúbicas a la mínima expresión
Uso adecuado del algoritmo	Suma de raíces semejantes

Estrategia para aprovechar los resultados para la retroalimentación:

Posible consideración a corto plazo	Posible consideración a mediano plazo
Si se observa la misma situación con varios alumnos, será necesario reforzar haciéndoles un repaso sobre la simplificación de raíces cúbicas a la mínima expresión y la suma de raíces semejantes.	Se deberá promover una actividad de “aprendizaje interactivo entre alumnos” con el fin de hacerles un recordatorio de los contenidos anteriores con el apoyo y sugerencia de sus compañeros.
	Promover el autoestudio en la casa y en el centro educativo hasta que tengan dominio de este tipo de ítems.

Con lo anterior, el docente podrá dedicar su tiempo y esfuerzo a enfocarse en los contenidos que el estudiante no pudo contestar correctamente.

Para finalizar, a continuación se presenta el proceso del uso adecuado de las pruebas que el docente debe seguir:

a. Aplicar la prueba incluida en la SM en el momento oportuno.
   - Prueba de unidad (cada vez que se finalice una unidad).
   - Prueba de periodo (antes de finalizar cada periodo).

b. Revisar la prueba aplicada.

c. Analizar la información que se obtenga con respecto a los resultados.

d. Diseñar una estrategia para la retroalimentación.

e. En el caso de la prueba de periodo, se analizarán los resultados con los docentes de centros educativos cercanos durante la Reflexión Pedagógica para crear una estrategia de mejora.

Unidad 1. Ecuaciones

Competencia de la unidad

Resolver ecuaciones bicuadráticas, radicales, racionales y sistemas de ecuaciones lineales y cuadráticas, utilizando herramientas de resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas para aplicarlo en problemas algebraicos.

Relación y desarrollo

Tercer ciclo

Unidad 5: Ecuaciones de primer grado (7°)
- Igualdad de expresiones matemáticas
- Ecuación de primer grado
- Aplicaciones de ecuaciones de primer grado

Unidad 2: Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas (8°)
- Métodos para resolver ecuaciones de primer grado con dos incógnitas
- Aplicación de las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Unidad 3: Ecuación cuadrática (9°)
- Ecuación cuadrática
- Aplicaciones de la ecuación cuadrática

Primer año de bachillerato

Unidad 2: Operaciones con polinomios y números complejos
- Productos notables y factorización
- División de polinomios
- Ecuación cuadrática y números complejos

Segundo año de bachillerato

Unidad 1: Ecuaciones
- Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

Unidad 3: Secciones cónicas
- La parábola
- La circunferencia
- La elipse
- La hipérbola
- Práctica en GeoGebra

Plan de estudio de la unidad

Lección	Horas	Clases
1. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones	1	1. Ecuaciones bicuadráticas, parte 1
	1	2. Ecuaciones bicuadráticas, parte 2
	1	3. Ecuaciones radicales, parte 1
	1	4. Ecuaciones radicales, parte 2
	1	5. Ecuaciones radicales, parte 3
	1	6. Mínimo común múltiplo de polinomios
	1	7. Ecuaciones racionales
	1	8. Sistemas de ecuaciones
	1	9. Practica lo aprendido
	1	10. Problemas de la unidad
	1	Prueba de la unidad 1

10 horas clase + prueba de la unidad 1

Puntos esenciales de la lección

Lección 1: Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

Se resuelven ecuaciones bicuadráticas y se establece el número de soluciones reales e imaginarias que tienen. Luego se resuelven ecuaciones radicales; en este tipo de ecuaciones no se admiten soluciones complejas. Se establece el método de resolución de ecuaciones racionales, multiplicando por el mínimo común múltiplo de los denominadores para convertirlas a ecuaciones polinomiales. Se finaliza la unidad con la resolución de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas, donde una de ellas es lineal y la otra es de grado dos en una de las variables.

1.1 Ecuaciones bicuadráticas, parte 1

Problema inicial

Resuelve la ecuación $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$, haciendo los siguientes pasos:

1. Realiza el cambio de variable $y = x^2$.
2. Resuelve la ecuación de grado dos que resulta en 1.
3. Encuentra las soluciones de la ecuación original.

Solución

1. Si se observa la ecuación, puede escribirse como $(x^2)^2 - 25(x^2) + 144 = 0$, por lo que al hacer el cambio de variable $y = x^2$ se tiene
$$(x^2)^2 - 25(x^2) + 144 = y^2 - 25y + 144 = 0.$$

2. Se puede resolver esta ecuación cuadrática factorizando, por lo que se buscan dos números que multiplicados den 144 y sumados den -25,
$$y^2 - 25y + 144 = (y - 16)(y - 9) = 0.$$
De aquí se tiene que $y - 16 = 0$ o bien $y - 9 = 0$. Es decir, $y = 16$ o bien $y = 9$.

3. De 1 se tiene que $y = x^2$ y de 2 se sabe que $y = 16$ o $y = 9$. Entonces
$$x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4 \text{ o bien } x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3.$$
Por lo tanto, las soluciones de $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$ son $x = -4, -3, 3, 4$.

Definición

Las ecuaciones de la forma $\mathrm{A}x^4 + \mathrm{B}x^2 + \mathrm{C} = 0$, donde A es distinto de cero, se llaman ecuaciones **bicuadráticas**.

Las ecuaciones bicuadráticas pueden resolverse haciendo el cambio de variable $y = x^2$ y resolviendo la ecuación cuadrática que resulta. Las ecuaciones bicuadráticas tienen cuatro soluciones, ya sean todas reales, todas imaginarias o dos reales y dos imaginarias.

Ejemplo

Determina todas las soluciones complejas de la ecuación $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$.

Al hacer el cambio de variable $y = x^2$, la ecuación resultante es $y^2 - 24y - 25 = 0$. Al factorizar se tiene
$$y^2 - 24y - 25 = (y - 25)(y + 1) = 0.$$

De la Unidad 2 de Primer año de bachillerato se sabe que
$$\sqrt{-1} = i$$

Luego, $y - 25 = 0$ o bien $y + 1 = 0$.
- Si $y - 25 = 0$ entonces $y = 25 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$.
- Si $y + 1 = 0$ entonces $y = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$.

Por lo tanto, las soluciones de $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$ son $x = -5, 5, i, -i$.

Problemas

Resuelve:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

c) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$

d) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

e) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$

f) $x^4 + 4x^2 + 3 = 0$

Indicador de logro

1.1 Resuelve ecuaciones bicuadráticas de la forma $x^4 + Bx^2 + C = 0$.

Secuencia

Se resuelve un tipo particular de ecuaciones, de la forma $x^4 + Bx^2 + C = 0$, donde B y C son números enteros, y al menos uno distinto de cero. Se resuelven utilizando la factorización.

Propósito

Resolver ecuaciones de la forma $x^4 + Bx^2 + C = 0$, realizando el cambio de variable $y = x^2$. Observar que el coeficiente de x^4 será siempre 1 en esta clase.

Solución de problemas:

a) Haciendo $y = x^2$ se tiene que $x^4 - 5x^2 + 4 = y^2 - 5y + 4 = 0$. Al factorizar, se obtiene:

$$y^2 - 5y + 4 = (y - 4)(y - 1) = 0.$$

Luego, $y - 4 = 0$ o bien $y - 1 = 0$.

- Si $y - 4 = 0$ entonces $y = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.
- Si $y - 1 = 0$ entonces $y = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

Por lo tanto, las soluciones de $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ son $x = -2, 2, -1, 1$.

b) $x^4 - 13x^2 + 36 = y^2 - 13y + 36 = 0$. Al factorizar, se obtiene:

$$y^2 - 13y + 36 = (y - 9)(y - 4) = 0.$$

- Si $y - 9 = 0$ entonces $y = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$.
- Si $y - 4 = 0$ entonces $y = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.

Por lo tanto, las soluciones de $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ son $x = -3, 3, -2, 2$.

c) $x^4 - 29x^2 + 100 = y^2 - 29y + 100 = 0$

$\Rightarrow y^2 - 29y + 100 = (y - 25)(y - 4) = 0.$

- Si $y - 25 = 0 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$.
- Si $y - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = -5, 5, -2, 2$.

d) $x^4 - 8x^2 - 9 = y^2 - 8y - 9 = 0$

$\Rightarrow y^2 - 8y - 9 = (y - 9)(y + 1) = 0.$

- Si $y - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$.
- Si $y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = -3, 3, -i, i$.

e) $x^4 + 5x^2 + 4 = y^2 + 5y + 4 = 0$

$\Rightarrow y^2 + 5y + 4 = (y + 1)(y + 4) = 0.$

- Si $y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$.
- Si $y + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm 2i$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = -i, i, -2i, 2i$.

f) $x^4 + 4x^2 + 3 = y^2 + 4y + 3 = 0$

$\Rightarrow y^2 + 4y + 3 = (y + 3)(y + 1) = 0.$

- Si $y + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = -3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}i$.
- Si $y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = -\sqrt{3}i, \sqrt{3}i, -i, i$.

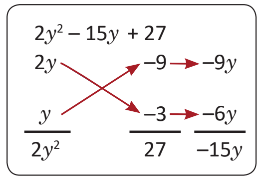
1.2 Ecuaciones bicuadráticas, parte 2

Problema inicial

Resuelve la ecuación $2x^4 - 15x^2 + 27 = 0$.

Solución

Al hacer el cambio de variable $y = x^2$ resulta $2y^2 - 15y + 27 = 0$. Al resolver la ecuación por factorización, se obtiene con el método de la tijera que $2y^2 - 15y + 27 = (2y - 9)(y - 3) = 0$.



De aquí resulta

- $2y - 9 = 0 \Rightarrow y = \frac{9}{2}$. Es decir, $x^2 = \frac{9}{2}$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

- $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$. Es decir, $x^2 = 3$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Por lo tanto, las soluciones de $2x^4 - 15x^2 + 27 = 0$ son $x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$.

Conclusión

Una expresión de la forma $\mathrm{A}x^4 + \mathrm{B}x^2 + \mathrm{C}$ puede factorizarse en la forma $(ax^2 + b)(cx^2 + d)$ mediante el método de la tijera. Con este recurso puede evitarse el cambio de variable $y = x^2$ para resolver las ecuaciones bicuadráticas.

Ejemplo

Resuelve la ecuación $2x^4 + 33x^2 + 16 = 0$.

Al factorizar $2x^4 + 33x^2 + 16$ con el método de la tijera se obtiene

$$2x^4 + 33x^2 + 16 = (2x^2 + 1)(x^2 + 16) = 0.$$

De aquí resulta

- $2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{2}$. Es decir,

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}i$$
$$= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

- $x^2 + 16 \Rightarrow x^2 = -16$. Es decir, $x = \pm 4i$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $2x^4 + 33x^2 + 16 = 0$ son $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2}i, -4i, 4i$.

Problemas

Resuelve:

a) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

b) $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$

c) $9x^4 - 40x^2 + 16 = 0$

d) $9x^4 + 5x^2 - 4 = 0$

e) $8x^4 - x^2 - 7 = 0$

f) $3x^4 + 4x^2 + 1 = 0$

Indicador de logro

1.2 Resuelve ecuaciones bicuadráticas de la forma $Ax^4 + Bx^2 + C = 0$.

Secuencia

Se continúa con la resolución de las ecuaciones bicuadráticas de la forma $Ax^4 + Bx^2 + C = 0$, con A, B, C enteros, A distinto de cero y B o C distinto de cero.

Propósito

Resolver ecuaciones de la forma $Ax^4 + Bx^2 + C = 0$. En esta clase, el coeficiente del término de mayor grado es distinto de 1. En esta ocasión, se resuelven las ecuaciones de manera directa, es decir, sin realizar el cambio de variable que se hizo en la clase anterior.

Solución de problemas:

a) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0 \Rightarrow (4x^2 - 1)(x^2 - 1) = 0$.

Entonces,

- $4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$.
- $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 1$.

b) $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0 \Rightarrow (9x^2 - 1)(4x^2 - 1) = 0$.

Entonces,

- $9x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{3}$.
- $4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

c) $9x^4 - 40x^2 + 16 = 0 \Rightarrow (9x^2 - 4)(x^2 - 4) = 0$.

Entonces,

- $9x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow x = \pm\frac{2}{3}$.
- $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -2, 2$.

d) $9x^4 + 5x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (9x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$.

Entonces,

- $9x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow x = \pm\frac{2}{3}$.
- $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -i, i$.

e) $8x^4 - x^2 - 7 = 0 \Rightarrow (8x^2 + 7)(x^2 - 1) = 0$.

Entonces,

- $8x^2 + 7 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{7}{8} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{14}}{4}i$.
- $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = -\frac{\sqrt{14}}{4}i, \frac{\sqrt{14}}{4}i$, $-1, 1$.

f) $3x^4 + 4x^2 + 1 = 0 \Rightarrow (3x^2 + 1)(x^2 + 1) = 0$.

Entonces

- $3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}i$.
- $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}i, \frac{\sqrt{3}}{3}i$, $-i, i$.

1.3 Ecuaciones radicales, parte 1

Problema inicial

Resuelve la ecuación $\sqrt{x} - 3 = 5$.

Solución

Para resolver una ecuación de esta forma, donde aparecen radicales, se despeja el radical para luego elevar al cuadrado.

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - 3 &= 5 \\ \sqrt{x} &= 5 + 3 && \text{se despeja el radical,} \\ \left(\sqrt{x}\right)^2 &= 8^2 && \text{se eleva al cuadrado,} \\ x &= 64. \end{aligned}$$

Al comprobar la solución, se tiene que $\sqrt{64} - 3 = 8 - 3 = 5$. Luego, $x = 64$ satisface la ecuación original, por lo tanto, $x = 64$ es la solución.

Definición

Una **ecuación radical** es aquella donde la incógnita o incógnitas aparecen bajo el signo radical.

Una ecuación radical puede convertirse a una ecuación donde no aparezcan radicales, despejando el radical y elevando al cuadrado.

Al haber resuelto la ecuación radical, hay que comprobar que los valores encontrados satisfacen la ecuación, sustituyéndolos en la ecuación original y comprobando la igualdad.

No se considerarán como soluciones aquellos valores que al comprobarlos en la ecuación original resulten números complejos.

Ejemplo

Resuelve $2\sqrt{2x + 1} - 6 = 0$.

Al despejar el radical y elevar al cuadrado se obtiene

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2x+1} - 6 &= 0 \\ 2\sqrt{2x+1} &= 6 \\ \sqrt{2x+1} &= 3 && \text{se despeja el radical,} \\ 2x + 1 &= 9 && \text{se obtiene una ecuación lineal la cual hay que resolver,} \\ 2x &= 8 \\ x &= 4. \end{aligned}$$

Al comprobar la solución se tiene: $2\sqrt{2(4) + 1} - 6 = 2\sqrt{9} - 6 = 2(3) - 6 = 6 - 6 = 0$. Por lo tanto, $x = 4$ es la solución de la ecuación.

Problemas

Resuelve las ecuaciones radicales.

a) $\sqrt{x + 3} = 4$

b) $\sqrt{x - 8} = 2$

c) $5 - \sqrt{3x + 1} = 0$

d) $5 + 3\sqrt{x} = 8$

e) $7 - \sqrt{x + 2} = 3$

f) $\sqrt{x + 3} = \sqrt{5x - 1}$

Indicador de logro

1.3 Calcula soluciones de ecuaciones radicales que pueden reducirse a ecuaciones lineales.

Secuencia

Se tiene un primer encuentro con la resolución de ecuaciones que contienen radicales, a las cuales se les llama ecuaciones radicales.

Las ecuaciones a resolver solo tienen radicales con índice 2, ya que las propiedades de potencias mayor que 2 se trabajan hasta la unidad 4.

Propósito

Resolver ecuaciones radicales de índice 2, que se reducen a ecuaciones lineales sencillas.

Solución de problemas:

a) $\sqrt{x+3} = 4 \Rightarrow x + 3 = 16 \Rightarrow x = 13$.

Al comprobar, se tiene que $\sqrt{13+3} = \sqrt{16} = 4$. ✓

Por lo tanto, $x = 13$ es la solución.

b) $\sqrt{x-8} = 2 \Rightarrow x - 8 = 4 \Rightarrow x = 12$.

Al comprobar, se tiene que $\sqrt{12-8} = \sqrt{4} = 2$. ✓

Por lo tanto, $x = 12$ es la solución.

c) $5 - \sqrt{3x+1} = 0 \Rightarrow \sqrt{3x+1} = 5 \Rightarrow 3x + 1 = 25 \Rightarrow x = 8$.

Al comprobar, se tiene que $5 - \sqrt{3(8)+1} = 5 - \sqrt{25} = 0$. ✓

Por lo tanto, $x = 8$ es la solución.

d) $5 + 3\sqrt{x} = 8 \Rightarrow 3\sqrt{x} = 3 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$.

Al comprobar, se tiene que $5 + 3\sqrt{1} = 8$. ✓

Por lo tanto, $x = 1$ es la solución.

e) $7 - \sqrt{x+2} = 3 \Rightarrow \sqrt{x+2} = 4 \Rightarrow x + 2 = 16 \Rightarrow x = 14$.

Al comprobar, se tiene que $7 - \sqrt{14+2} = 7 - \sqrt{16} = 3$. ✓

Por lo tanto, $x = 14$ es la solución.

f) $\sqrt{x+3} = \sqrt{5x-1} \Rightarrow x + 3 = 5x - 1 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$.

Al comprobar, se tiene que $\sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2 = \sqrt{5(1)-1}$. ✓

Por lo tanto, $x = 1$ es la solución.

1.4 Ecuaciones radicales, parte 2

Problema inicial

Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $\sqrt{4x^2 - 15} - 2x = -1$ b) $\sqrt{x^2 + 6x} - \sqrt{2x} = x$

Solución

a) De la misma forma que en la clase anterior, se despeja el radical y luego se eleva al cuadrado.

$$\sqrt{4x^2 - 15} - 2x = -1$$
$$\sqrt{4x^2 - 15} = 2x - 1$$
$$4x^2 - 15 = 4x^2 - 4x + 1 \quad \text{elevando al cuadrado y desarrollando,}$$
$$\cancel{4x^2} - 15 = \cancel{4x^2} - 4x + 1$$
$$4x = 16$$
$$x = 4.$$

Se comprueba que 4 sea solución de la ecuación sustituyendo en la ecuación original

$$\sqrt{4(4)^2 - 15} - 2(4) = \sqrt{64 - 15} - 8 = \sqrt{49} - 8 = 7 - 8 = -1$$

Por lo tanto, $x = 4$ es solución de la ecuación $\sqrt{4x^2 - 15} - 2x = -1$.

b) Esta ecuación tiene dos radicales, por lo que se procura que ambos queden en miembros distintos.

$$\sqrt{x^2 + 6x} - \sqrt{2x} = x$$
$$\left(\sqrt{x^2 + 6x}\right)^2 = \left(x + \sqrt{2x}\right)^2$$
$$x^2 + 6x = x^2 + 2x\sqrt{2x} + 2x \quad \text{desarrollando el binomio al cuadrado,}$$
$$\cancel{x^2} + 6x - 2x = \cancel{x^2} + 2x\sqrt{2x}$$
$$(4x)^2 = \left(2x\sqrt{2x}\right)^2$$
$$16x^2 = 4x^2(2x)$$
$$16x^2 - 4x^2(2x) = 0$$
$$4x^2(4 - 2x) = 0.$$

Es recomendable no dividir entre $4x^2$ ya que no se sabe si puede ser cero.

De aquí se tiene que $4x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, o bien $4 - 2x = 0 \Rightarrow x = 2$. Comprobando ambos valores en la ecuación original,

$x = 0$: $\sqrt{0^2 + 6(0)} - \sqrt{2(0)} \overset{¿?}{=} 0 \Rightarrow 0 = 0$ ✓

$x = 2$: $\sqrt{2^2 + 6(2)} - \sqrt{2(2)} \overset{¿?}{=} 2$
$\Rightarrow \sqrt{4 + 12} - \sqrt{4} \overset{¿?}{=} 2$
$\Rightarrow 4 - 2 \overset{¿?}{=} 2$
$\Rightarrow 2 = 2$ ✓

Luego, $x = 0$ y $x = 2$ son las soluciones de la ecuación $\sqrt{x^2 + 6x} - \sqrt{2x} = x$.

Conclusión

Al resolver ecuaciones radicales pueden resultar ecuaciones de grado mayor a 1 que pueden resolverse mediante factorización o mediante la fórmula general, cuando la ecuación resultante es una cuadrática que no pueda resolverse por factorización.

Problemas

Resuelve las ecuaciones radicales.

a) $x + 2 = \sqrt{x^2 + 1}$ b) $3\sqrt{2x - 1} = 3x$

c) $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{4x + 5} = -1$ d) $\sqrt{x + 7} + \sqrt{x - 1} - 2\sqrt{x + 2} = 0$

e) $\sqrt{3x - 11} + \sqrt{3x} = \sqrt{12x - 23}$ f) $\sqrt{9x - 8} - \sqrt{4x + 1} = \sqrt{x - 3}$

Indicador de logro

1.4 Resuelve ecuaciones radicales que pueden reducirse a ecuaciones lineales o cuadráticas.

Secuencia

Se resuelven ecuaciones radicales que se reducen a ecuaciones lineales o ecuaciones cuadráticas. Nuevamente, el índice del radical siempre es 2.

Propósito

Continuar con la resolución de ecuaciones radicales, en esta ocasión se aborda el caso en el cual es necesario elevar al cuadrado dos veces.

Solución de problemas:

Las siguientes soluciones no tienen comprobación, sin embargo, el estudiante deberá hacerlo.

a) $x + 2 = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow \cancel{x^2} + 4x + 4 = \cancel{x^2} + 1 \Rightarrow 4x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$.

b) $3\sqrt{2x - 1} = 3x \Rightarrow \sqrt{2x - 1} = x \Rightarrow 2x - 1 = x^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$.

c)
$$\sqrt{3x + 1} - \sqrt{4x + 5} = -1$$
$$\sqrt{3x + 1} = -1 + \sqrt{4x + 5}$$
$$3x + 1 = 1 - 2\sqrt{4x + 5} + 4x + 5$$
$$2\sqrt{4x + 5} = x + 5$$
$$4(4x + 5) = x^2 + 10x + 25$$
$$x^2 - 6x + 5 = 0$$
$$(x - 5)(x - 1) = 0$$

Entonces, $x = 5$ o $x = 1$.

d)
$$\sqrt{x + 7} + \sqrt{x - 1} - 2\sqrt{x + 2} = 0$$
$$\sqrt{x + 7} + \sqrt{x - 1} = 2\sqrt{x + 2}$$
$$x + 7 + 2\sqrt{x + 7}\sqrt{x - 1} + x - 1 = 4(x + 2)$$
$$2\sqrt{x^2 + 6x - 7} = 2x + 2$$
$$\sqrt{x^2 + 6x - 7} = x + 1$$
$$\cancel{x^2} + 6x - 7 = \cancel{x^2} + 2x + 1$$
$$4x = 8$$

Entonces, $x = 2$.

e)
$$\sqrt{3x - 11} + \sqrt{3x} = \sqrt{12x - 23}$$
$$3x - 11 + 2\sqrt{3x - 11}\sqrt{3x} + 3x = 12x - 23$$
$$2\sqrt{9x^2 - 33x} = 6x - 12$$
$$\sqrt{9x^2 - 33x} = 3x - 6$$
$$\cancel{9x^2} - 33x = \cancel{9x^2} - 36x + 36$$
$$3x = 36$$

Entonces, $x = 12$.

f)
$$\sqrt{9x - 8} - \sqrt{4x + 1} = \sqrt{x - 3}$$
$$9x - 8 - 2\sqrt{9x - 8}\sqrt{4x + 1} + 4x + 1 = x - 3$$
$$2\sqrt{36x^2 - 23x - 8} = 12x - 4$$
$$\sqrt{36x^2 - 23x - 8} = 6x - 2$$
$$36x^2 - 23x - 8 = 36x^2 - 24x + 4$$
$$x = 12$$

Entonces, $x = 12$.

1.5 Ecuaciones con radicales, parte 3

Problema inicial

Resuelve $x + \sqrt{4x + 1} = 5$.

Solución

Se despeja el radical y se eleva al cuadrado

$$\begin{aligned} x + \sqrt{4x + 1} &= 5 \\ \sqrt{4x + 1} &= 5 - x \\ \left(\sqrt{4x + 1}\right)^2 &= (5 - x)^2 \\ 4x + 1 &= 25 - 10x + x^2 \\ x^2 - 14x + 24 &= 0 \quad \text{se resuelve la ecuación cuadrática resultante,} \\ (x - 2)(x - 12) &= 0. \end{aligned}$$

Entonces, $x - 2 = 0$ o $x - 12 = 0$. Así, $x = 2$ o $x = 12$. Al comprobar las soluciones en la ecuación original se tiene:

$x = 2$: $2 + \sqrt{4(2) + 1} = 2 + \sqrt{8 + 1} = 2 + 3 = 5$ ✓

$x = 12$: $12 + \sqrt{4(12) + 1} = 12 + \sqrt{48 + 1} = 12 + 7 = 19 \neq 5$ ✗

Por lo tanto, $x = 2$ es la solución de $x + \sqrt{4x + 1} = 5$.

La razón por la cual las soluciones de la ecuación obtenida al elevar al cuadrado no necesariamente son las soluciones de la ecuación original es porque si $A^2 = B^2$ no significa que $A = B$.

Por ejemplo, $3^2 = (-3)^2$ pero $3 \neq -3$.

Conclusión

No hay una forma de determinar el número de soluciones de una ecuación radical, por lo que cada valor encontrado al resolver la ecuación debe comprobarse sustituyéndolo en la ecuación original.

Ejemplo

Resuelve $\sqrt{2x^2 - 1} = \sqrt{x}$.

En esta ocasión hay dos radicales, por lo que se procura que ambos queden en miembros distintos de la ecuación.

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{2x^2 - 1}\right)^2 &= \left(\sqrt{x}\right)^2 \\ 2x^2 - 1 &= x \\ 2x^2 - x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Esta ecuación puede resolverse por factorización y puede comprobarse que

$$2x^2 - x - 1 = (2x + 1)(x - 1) = 0.$$

Entonces, o bien $x = 1$ o bien $x = -\frac{1}{2}$. Lo primero que puede observarse es que x no puede ser $-\frac{1}{2}$, ya que el radical $\sqrt{x}$ no sería un número real.

Comprobando para $x = 1$, se tiene $\sqrt{2(1)^2 - 1} = \sqrt{2 - 1} = \sqrt{1} = 1$. ✓

Por lo tanto, $x = 1$ es la solución de $\sqrt{2x^2 - 1} = \sqrt{x}$.

Problemas

Resuelve cada ecuación radical.

a) $3x + \sqrt{x - 1} = 2x + 7$

b) $\sqrt{5x + 1} - \sqrt{2x + 1} = 2$

c) $2 - \sqrt{2x + 3} = 2x - 1$

d) $x = 2\sqrt{x + 2} + 1$

e) $\sqrt{3x + 10} = 5 - 3\sqrt{x + 3}$

f) $\sqrt{3x + 7} + \sqrt{2x + 6} = \sqrt{13 - 3x}$

Indicador de logro

1.5 Resuelve ecuaciones radicales reducibles a ecuaciones cuadráticas.

Secuencia

La diferencia entre esta clase y la anterior, es que durante el proceso de resolución de la ecuación puede obtenerse un valor de la incógnita que resulta no ser solución de la ecuación original.

Solución de problemas:

a)

$$3x + \sqrt{x-1} = 2x + 7$$
$$\sqrt{x-1} = -x + 7$$
$$x - 1 = x^2 - 14x + 49$$
$$x^2 - 15x + 50 = 0$$
$$(x-10)(x-5) = 0$$
$$\Rightarrow\ x = 10 \text{ o } x = 5$$

Al comprobar las soluciones se obtiene que la única solución es $x = 5$.

b)

$$\sqrt{5x+1} - \sqrt{2x+1} = 2$$
$$\sqrt{5x+1} = 2 + \sqrt{2x+1}$$
$$5x + 1 = 4 + 4\sqrt{2x+1} + 2x + 1$$
$$4\sqrt{2x+1} = 3x - 4$$
$$16(2x+1) = 9x^2 - 24x + 16$$
$$9x^2 - 56x = 0$$
$$x(9x - 56) = 0$$
$$\Rightarrow\ x = 0 \text{ o } x = \frac{56}{9}$$

Al comprobar las soluciones se obtiene que la única solución es $x = \frac{56}{9}$.

c)

$$2 - \sqrt{2x+3} = 2x - 1$$
$$-\sqrt{2x+3} = 2x - 3$$
$$2x + 3 = 4x^2 - 12x + 9$$
$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$
$$(2x-1)(x-3) = 0$$
$$\Rightarrow\ x = \frac{1}{2} \text{ o } x = 3.$$

Al comprobar las soluciones se obtiene que la única solución es $x = \frac{1}{2}$.

d)

$$x = 2\sqrt{x+2} + 1$$
$$2\sqrt{x+2} = x - 1$$
$$4(x+2) = x^2 - 2x + 1$$
$$x^2 - 6x - 7 = 0$$
$$(x-7)(x+1) = 0$$
$$\Rightarrow\ x = 7 \text{ o } x = -1$$

Al comprobar las soluciones se obtiene que la única solución es $x = 7$.

e)

$$\sqrt{3x+10} = 5 - 3\sqrt{x+3}$$
$$3x + 10 = 25 - 30\sqrt{x+3} + 9x + 27$$
$$5\sqrt{x+3} = x + 7$$
$$25(x+3) = x^2 + 14x + 49$$
$$x^2 - 11x - 26 = 0$$
$$(x-13)(x+2) = 0$$
$$\Rightarrow\ x = 13 \text{ o } x = -2$$

Al comprobar las soluciones se obtiene que la única solución es $x = -2$.

f)

$$\sqrt{3x+7} + \sqrt{2x+6} = \sqrt{13-3x}$$
$$3x + 7 + 2\sqrt{6x^2 + 32x + 42} + 2x + 6 = 13 - 3x$$
$$2\sqrt{6x^2 + 32x + 42} = -8x$$
$$\sqrt{6x^2 + 32x + 42} = -4x$$
$$6x^2 + 32x + 42 = 16x^2$$
$$5x^2 - 16x - 21 = 0$$
$$(5x-21)(x+1) = 0$$
$$\Rightarrow\ x = \frac{21}{5} \text{ o } x = -1$$

Al comprobar las soluciones se obtiene que la única solución es $x = -1$.

1.6 Mínimo común múltiplo de polinomios*

Problema inicial

Calcula el mínimo común múltiplo en cada caso.

a) 4, 6, 15   b) $6x$, $3x + 1$, $6x + 2$ c) $2m + 3$, $2m - 3$, $4m^2 - 9$

Factorizar polinomios es análogo a descomponer números en sus factores primos.

Solución

a) Para calcular el mínimo común múltiplo de 4, 6 y 15, se descompone cada número en sus factores primos.

$$4 = 2^2, \qquad 6 = 2(3), \qquad 15 = 3(5).$$

Luego, el mínimo común múltiplo de 4, 6 y 15 es $2^2(3)(5) = 4(3)(5) = 60$.

b) Para calcular el mínimo común múltiplo se hace de manera análoga que con números. Primero se factoriza cada expresión.

$6x = 2(3)x$, $3x + 1$ ya no puede factorizarse, $6x + 2 = 2(3x + 1)$.

Luego, el mínimo común múltiplo de $6x$, $3x + 1$ y $6x + 2$ es $2(3)(x)(3x+1) = 6(3x^2 + x) = 18x^2 + 6x$.

c) De igual manera que en b), se factoriza cada expresión y el mínimo común múltiplo será el producto de cada factor común y no común que aparece en cada factorización, con la mayor potencia que aparezca entre las tres expresiones.

$2m + 3$ y $2m - 3$ no pueden factorizarse y $4m^2 - 9 = (2m - 3)(2m + 3)$, por diferencia de cuadrados.

Por lo tanto, el mínimo común múltiplo de $2m + 3$, $2m - 3$ y $4m^2 - 9$ es $(2m - 3)(2m + 3)$.

Conclusión

El **mínimo común múltiplo** de dos o más números es el menor número entre sus múltiplos comunes, y se denota por mcm.

Para calcular el mínimo común múltiplo de dos o más números, se descompone cada número en sus factores primos y se toma el producto de cada factor común y no común, con la mayor potencia a la que aparece.

También puede calcularse el mcm de expresiones algebraicas de manera análoga: se factoriza completamente cada expresión y el mcm será el producto de todos los factores, común y no común, con la mayor potencia a la que aparece.

Ejemplo

Calcula el mcm de $x + y$, $x^2 + 2xy + y^2$ y $x^2 - y^2$.

Se factoriza cada una de las expresiones anteriores:

$x + y$, $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$, $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

Observación: No es necesario desarrollar $(x + y)^2(x - y)$.

Por lo tanto, el mcm de $x + y$, $x^2 + 2xy + y^2$ y $x^2 - y^2$ es $(x + y)^2(x - y)$.

Problemas

Calcula el mcm para cada caso.

a) x^2, y^2, xy
b) $x + 5$, $x^2 - 25$, $x - 5$
c) $3a + 6$, $a^2 - 4$
d) 2, $x - 3$, $2x - 6$
e) $m - 1$, $m^2 - 1$, $m + 1$
f) $3x + 15$, $x^2 - 25$, $6x$, $x - 5$

Indicador de logro

1.6 Determina el mínimo común múltiplo de dos o más polinomios.

Secuencia

Se define el mínimo común múltiplo de dos o más polinomios haciendo la analogía con el mínimo común múltiplo de dos o más números.

Si el estudiante tiene muchas dificultades en la solución del Problema inicial, el docente debe brindar más apoyo.

Propósito

El Problema inicial tiene tres casos. El primero tiene el objetivo de recordar la forma de calcular el mcm de dos o más números descomponiéndolos en sus factores primos. El segundo y el tercero tienen como objetivo calcular el mcm de los polinomios dados, aplicando el método del primer problema, descomponiendo en factores los polinomios hasta que ya no puedan factorizarse más.

Solución de problemas:

a) x^2, y^2, xy

El mcm es x^2y^2.

b) $x + 5$, $x^2 - 25$, $x - 5$

Como $x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$ se tiene que el mcm de los tres polinomios es $(x + 5)(x - 5) = x^2 - 25$.

c) $3a + 6$, $a^2 - 4$

$3a + 6 = 3(a + 2)$ y $a^2 - 4 = (a + 2)(a - 2)$. Entonces el mcm de ambos polinomios es

$$3(a + 2)(a - 2) = 3(a^2 - 4) = 3a^2 - 12.$$

d) 2, $x - 3$, $2x - 6$

Como $2x - 6 = 2(x - 3)$, el mcm de los tres polinomios es $2(x - 3) = 2x - 6$.

e) $m - 1$, $m^2 - 1$, $m + 1$

Como $m^2 - 1 = (m + 1)(m - 1)$, se tiene que el mcm de los tres polinomios es $(m + 1)(m - 1) = m^2 - 1$.

f) $3x + 15$, $x^2 - 25$, $6x$, $x - 5$

$3x + 15 = 3(x + 5)$, $x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$ y $6x = (2)(3)x$.

Entonces, el mcm de los cuatro polinomios es

$$(2)(3)(x + 5)(x - 5)x = 6(x^2 - 25)x = 6x^3 - 150x.$$

1.7 Ecuaciones racionales

Problema inicial

Resuelve cada ecuación.

a) $\frac{x+1}{x-2} = 4$

b) $\frac{1}{x+3} - \frac{3}{2x-1} = \frac{5}{2x^2+5x-3}$

Solución

a) Cuando se tienen ecuaciones de esta forma, lo primero que hay que hacer es restringir los valores que puede tomar x, ya que pueden resultar divisiones entre cero, que no están definidas. Por lo tanto, en este caso, x no puede ser 2 ya que $x - 2$ se vuelve cero. Luego, hay que eliminar el denominador, y para ello se multiplica toda la ecuación por $x - 2$,

$$(x-2)\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = 4(x-2)$$

$$\cancel{(x-2)}\left(\frac{x+1}{\cancel{x-2}}\right) = 4(x-2)$$

$$x + 1 = 4x - 8 \qquad \text{se resuelve la ecuación lineal,}$$

$$3x = 9$$

$$x = 3.$$

Si $x = 3$ el denominador $x - 2$ no se anula: $3 - 2 = 1$.

Por lo tanto, $x = 3$ es la solución de la ecuación.

b) De nuevo, el objetivo es eliminar los denominadores. En este caso, como los tres denominadores son distintos, se debe multiplicar la ecuación por el mcm de estos.

Las expresiones $x + 3$ y $2x - 1$ no pueden factorizarse y $2x^2 + 5x - 3 = (2x - 1)(x + 3)$, por lo que el mcm de los tres denominadores es $(2x - 1)(x + 3)$. Además, x no puede ser -3 y $\frac{1}{2}$ ya que en ese caso algún denominador se vuelve cero. Entonces,

$$(2x-1)(x+3)\left(\frac{1}{x+3} - \frac{3}{2x-1}\right) = (2x-1)(x+3)\left(\frac{5}{2x^2+5x-3}\right)$$

$$(2x-1)\cancel{(x+3)}\,\frac{1}{\cancel{x+3}} - \cancel{(2x-1)}(x+3)\left(\frac{3}{\cancel{2x-1}}\right) = \cancel{(2x-1)(x+3)}\left(\frac{5}{\cancel{2x^2+5x-3}}\right)$$

$$2x - 1 - 3(x+3) = 5$$

$$2x - 1 - 3x - 9 - 5 = 0$$

$$-x - 15 = 0$$

$$x = -15$$

Si $x = -15$, ningún denominador se anula al evaluar -15 en cada uno de ellos. Por lo tanto, $x = -15$ es la solución de la ecuación.

Definición

Una ecuación que contiene fracciones y tal que la incógnita aparece en algún denominador se llama **ecuación racional**. Como en una ecuación racional la incógnita aparece en el denominador, se deben considerar valores de la incógnita que no hagan cero a algún denominador.

Para resolver una ecuación racional, primero debe analizarse qué valores de la incógnita hacen cero a algún denominador. Luego se multiplica toda la ecuación por el mcm de ellos y luego se resuelve la ecuación resultante. Se descartan aquellos valores de la incógnita que hagan cero a algún denominador en la ecuación original.

Lección 1

Ejemplo

Resuelve la ecuación $\frac{4}{x-1} = \frac{3}{x^2-x} + \frac{x}{x-1}$.

En este caso, x no puede tomar los valores de 0 y 1. Además, el mcm de $x-1$ y x^2-x es $x(x-1)$, entonces,

$$x(x-1)\left(\frac{4}{x-1}\right) = x(x-1)\left(\frac{3}{x^2-x}\right) + x(x-1)\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$x\cancel{(x-1)}\left(\frac{4}{\cancel{x-1}}\right) = \cancel{x(x-1)}\left(\frac{3}{\cancel{x^2-x}}\right) + x\cancel{(x-1)}\left(\frac{x}{\cancel{x-1}}\right)$$

$$4x = 3 + x^2$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-3)(x-1) = 0$$

Entonces, $x = 3$ o $x = 1$. Pero $x \neq 1$, por lo que esa solución queda descartada.

Por lo tanto, $x = 3$ es la solución de la ecuación $\frac{4}{x-1} = \frac{3}{x^2-x} + \frac{x}{x-1}$.

No es necesario comprobar que la solución es $x = 3$ sustituyendo en la ecuación original, porque si $x \neq 1$ y $x \neq 0$, entonces multiplicar por $x(x-1)$ es una operación reversible.

$$\begin{tikzcd} \frac{4}{x-1} = \frac{3}{x^2-x} + \frac{x}{x-1} \arrow[d, bend right, "\times x(x-1)"'] \\ 4x = 3 + x^2 \arrow[u, bend right, "\div x(x-1)"'] \end{tikzcd}$$

Problemas

Resuelve cada ecuación racional.

a) $\frac{1}{x} = 3$

b) $\frac{3}{x} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{4}{5x} - 3 = 0$

d) $\frac{1}{2x+1} = 3$

e) $x + 3 = \frac{2x^2}{2x-1}$

f) $\frac{x-4}{x-1} = \frac{1-x}{x+1}$

g) $\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+3} = 0$

h) $\frac{1}{2x} + \frac{3}{5x} = \frac{11}{x^2}$

Indicador de logro

1.7 Resuelve ecuaciones racionales, con polinomios de grado uno y dos.

Secuencia

Se resuelven ecuaciones racionales, donde en al menos un denominador aparece un polinomio lineal. Se utiliza el resultado de la clase anterior para determinar por cuánto hay que multiplicar la ecuación para simplificar los denominadores y obtener una ecuación polinomial.

Propósito

Con respecto al Problema inicial, el literal a) pretende introducir el método de resolución de una ecuación racional, mientras que el literal b procura afianzar el método estudiado en a), además de ser más notable la necesidad de buscar el mcm de los denominadores. Al resolver el Ejemplo, se obtiene un valor de x para el cual no es solución de la ecuación original, ya que hace cero uno de los denominadores.

Solución de problemas:

a) Multiplicando por x a ambos lados:

$$\frac{1}{x} = 3 \Rightarrow 1 = 3x \Rightarrow x = \frac{1}{3}.$$

b) El mcm de x y 2 es $2x$. Multiplicando por $2x$ a ambos lados:

$$\frac{3}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2(3) = 1(x) \Rightarrow x = 6.$$

c) Multiplicando por $5x$ a ambos lados:

$$\frac{4}{5x} - 3 = 0 \Rightarrow 4 - 3(5x) = 0(5x) \Rightarrow 4 - 15x = 0 \Rightarrow 15x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{15}.$$

d) Multiplicando por $2x + 1$ a ambos lados:

$$\frac{1}{2x+1} = 3 \Rightarrow 1 = 3(2x+1) \Rightarrow 1 = 6x + 3 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

e) Multiplicando por $2x - 1$:

$$x + 3 = \frac{2x^2}{2x-1}$$
$$(x+3)(2x-1) = 2x^2$$
$$2x^2 + 5x - 3 = 2x^2$$
$$5x - 3 = 0$$
$$x = \frac{3}{5}.$$

f) El mcm de los denominadores es $(x-1)(x+1)$. Entonces,

$$\frac{x-4}{x-1} = \frac{1-x}{x+1}$$
$$(x-4)(x+1) = (1-x)(x-1)$$
$$x^2 - 3x - 4 = -x^2 + 2x - 1$$
$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$
$$(2x+1)(x-3) = 0$$

Entonces, $x = -\frac{1}{2}$ o $x = 3$.

g) El mcm de $x - 1$ y $x + 3$ es $(x-1)(x+3)$. Entonces,

$$\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+3} = 0$$
$$2(x+3) - 3(x-1) = 0$$
$$2x + 6 - 3x + 3 = 0$$
$$x = 9.$$

h) El mcm de $2x$, $5x$ y x^2 es $10x^2$. Entonces,

$$\frac{1}{2x} + \frac{3}{5x} = \frac{11}{x^2}$$
$$(10x^2)\left(\frac{1}{2x}\right) + (10x^2)\left(\frac{3}{5x}\right) = (10x^2)\left(\frac{11}{x^2}\right)$$
$$5x + 6x = 110$$
$$11x = 110$$
$$x = 10.$$

1.8 Sistemas de ecuaciones

Problema inicial

Determina todas las soluciones del sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 - 3x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

Solución

Se despeja una de las incógnitas de una de las ecuaciones y luego se sustituye en la otra ecuación.

En este caso, resulta más fácil si se despeja y de la ecuación lineal,
$$y = 2 - x \qquad \text{------------------ (1)}$$
Luego, al sustituir y en la otra ecuación se tiene
$$x^2 - 3x - y + 2 = x^2 - 3x - (2 - x) + 2 = x^2 - 3x - 2 + x + 2 = x^2 - 2x = x(x - 2) = 0.$$

De aquí se tiene que $x = 0$ o $x = 2$.

Para determinar el valor de y se sustituye el valor de x en (1). Así, cuando $x = 0$, $y = 2$ y cuando $x = 2$, $y = 0$. Por lo tanto, las soluciones del sistema son $x = 0$, $y = 2$ y $x = 2$, $y = 0$.

Conclusión

Para resolver un sistema de ecuaciones, donde una de ellas es lineal y la otra es de grado 2, se despeja una de las variables en una de las ecuaciones y se sustituye en la otra, para luego resolver la ecuación en una variable resultante.

Es recomendable despejar en la ecuación lineal aquella variable que tiene menor grado en la ecuación de grado 2.

Ejemplo

Resuelve el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Despejando y de la ecuación lineal se tiene que $y = x - 2$. Sustituyendo en la otra ecuación
$$x^2 + x + y - 1 = x^2 + x + (x - 2) - 1 = x^2 + x + x - 2 - 1 = x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Al resolver por factorización se tiene que $(x - 1)(x + 3) = 0$, por lo que $x = 1$ o $x = -3$.

Para $x = 1$ se tiene que $y = -1$ y para $x = -3$ se tiene que $y = -5$. Por lo tanto, las soluciones del sistema son $x = 1$, $y = -1$ y $x = -3$, $y = -5$.

Problemas

Resuelve cada sistema de ecuaciones.

a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 + 2x - y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + y - 3 = 0 \\ x^2 - 7x - y + 3 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - y = -14 \\ x^2 + 5x + y = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x + y = -5 \\ 2x^2 - x + y = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ -x^2 + 4x + 2y = 1 \end{cases}$

16

Indicador de logro

1.8 Resuelve sistemas de ecuaciones donde una es lineal y la otra es de grado dos en una de las incógnitas.

Secuencia

Se culmina la unidad con la resolución de sistemas de ecuaciones, donde una de ellas es lineal y la otra es cuadrática en una de las variables.

Propósito

La idea es resolver este tipo de sistemas de ecuaciones despejando de la ecuación lineal aquella incógnita que tiene grado 1 en la ecuación cuadrática; hacer este despeje es más adecuado que despejar la que tiene grado 2.

Solución de problemas:

a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y = 2 \end{cases}$

$x - y = 0 \Rightarrow x = y.$

Luego, $x^2 + y = 2 \Rightarrow$
$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 &= 0 \\ (x + 2)(x - 1) &= 0 \\ x = -2 \text{ o } x &= 1 \end{aligned}$$

- Si $x = -2$ entonces $y = -2$.
- Si $x = 1$ entonces $y = 1$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = -2$, $y = -2$ y $x = 1$, $y = 1$.

b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 + 2x - y = 3 \end{cases}$

$x - y = 3 \Rightarrow y = x - 3.$

Luego, $x^2 + 2x - y = 3 \Rightarrow$
$$\begin{aligned} x^2 + 2x - x + 3 &= 3 \\ x^2 + x &= 0 \\ x(x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces $x = 0$ o $x = -1$.

- Si $x = 0$ entonces $y = -3$.
- Si $x = -1$ entonces $y = -4$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = 0$, $y = -3$ y $x = -1$, $y = -4$.

c) $\begin{cases} 5x + y - 3 = 0 \\ x^2 - 7x - y + 3 = 0 \end{cases}$

$5x + y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3 - 5x$

Luego, $x^2 - 7x - y + 3 = 0$
$$\begin{aligned} x^2 - 7x - 3 + 5x + 3 &= 0 \\ x^2 - 2x &= 0 \\ x(x - 2) &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x = 0$ o $x = 2$.

- Si $x = 0$ entonces $y = 3$.
- Si $x = 2$ entonces $y = -7$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = 0$, $y = 3$ y $x = 2$, $y = -7$.

d) $\begin{cases} 2x - y = -14 \\ x^2 + 5x + y = 4 \end{cases}$

$2x - y = -14 \Rightarrow y = 2x + 14$

Luego, $x^2 + 5x + y = 4$
$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 2x + 14 &= 4 \\ x^2 + 7x + 10 &= 0 \\ (x + 5)(x + 2) &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x = -5$ o $x = -2$.

- Si $x = -5$ entonces $y = 4$.
- Si $x = -2$ entonces $y = 10$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = -5$, $y = 4$ y $x = -2$, $y = 10$.

e) $\begin{cases} 3x + y = -5 \\ 2x^2 - x + y = 1 \end{cases}$

$3x + y = -5 \Rightarrow y = -5 - 3x$

Luego, $2x^2 - x + y = 1$

$$2x^2 - x - 5 - 3x - 1 = 0$$
$$2x^2 - 4x - 6 = 0$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

$\Rightarrow x = 3$ o $x = -1$

- Si $x = 3$ entonces $y = -14$.
- Si $x = -1$ entonces $y = -2$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = 3$, $y = -14$ y $x = -1$, $y = -2$.

f) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ -x^2 + 4x + 2y = 1 \end{cases}$

$2x - y = 7 \Rightarrow y = 2x - 7$

Luego, $-x^2 + 4x + 2y = 1$

$$-x^2 + 4x + 2(2x - 7) = 1$$
$$-x^2 + 4x + 4x - 14 - 1 = 0$$
$$-x^2 + 8x - 15 = 0$$
$$x^2 - 8x + 15 = 0$$
$$(x - 5)(x - 3) = 0$$

$\Rightarrow x = 5$ o $x = 3$.

- Si $x = 5$ entonces $y = 3$.
- Si $x = 3$ entonces $y = -1$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = 5$, $y = 3$ y $x = 3$, $y = -1$.

1.9 Practica lo aprendido

1. Determina todas las soluciones complejas de las siguientes ecuaciones.

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

b) $x^4 - 9x^2 = 0$

c) $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$

d) $x^4 - 16 = 0$

e) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$

f) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$

g) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

h) $2x^4 + 9 = 11x^2$

i) $3x^4 + 64 = 52x^2$

j) $2x^4 - x^2 - 1 = 0$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones radicales.

a) $\sqrt{5x + 9} = 2x + 3$

b) $\sqrt{2x + 1} = x - 1$

c) $\sqrt{2x + 16} = 2x + 4$

d) $\sqrt{x} + x = \sqrt{3x + x^2}$

e) $\sqrt{x} + \sqrt{x + 7} = 7$

f) $\sqrt{x + 16} - \sqrt{x} = 2$

g) $\sqrt{3x + 12} - 1 = \sqrt{5x + 9}$

h) $\sqrt{2x - 3} + \sqrt{x - 1} = \sqrt{3x - 2}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $\frac{3x - 4}{3 - x} = 2$

b) $\frac{2}{x + 1} = \frac{3}{x}$

c) $\frac{3}{x - 2} = \frac{2}{x + 3}$

d) $\frac{2x + 3}{5x - 1} = \frac{6x + 4}{15x + 2}$

e) $\frac{4x - 7}{12x + 3} = \frac{x - 16}{3x + 5}$

f) $\frac{2}{x - 3} + \frac{3}{x - 2} = 3$

4. Determina todas las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + x - y + 3 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x^2 - x - y - 5 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x - y - 12 = 0 \\ x^2 + 2x - y = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y = -8 \\ x^2 + 2x + y = -7 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 8x - y - 20 = 0 \\ 3x^2 - 7x - y = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2x^2 + x + y = 6 \end{cases}$

Indicador de logro

1.9 Resuelve problemas correspondientes a la resolución de ecuaciones bicuadráticas, radicales, racionales y sistemas de ecuaciones.

Solución de problemas:

1a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \Rightarrow (x^2 - 9)(x^2 - 1) = 0$.
Entonces,

- $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$.
- $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = -3, 3, -1, 1$.

1b) $x = 0, -3, 3$

1c) $x = -\sqrt{6}, \sqrt{6}, -\sqrt{5}, \sqrt{5}$

1d) $x = -2, 2, -2i, 2i$

1e) $x = -1, 1, -\sqrt{3}\,i, \sqrt{3}\,i$

1f) $x = -\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{5}\,i, \sqrt{5}\,i$

1g) $x = -2, 2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

1h) $x = -1, 1, -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}$

1i) $x = -4, 4, -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}$

1j) $x = -1, 1, -\frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2}i$

2a) $x = 0$

2b) $x = 4$

2c) $x = 0$

2d) $x = 0, 1$

2e) $x = 9$

2f)
$$\begin{aligned} \sqrt{x+16} - \sqrt{x} &= 2 \\ \sqrt{x+16} &= 2 + \sqrt{x} \\ x + 16 &= 4 + 4\sqrt{x} + x \\ 4\sqrt{x} &= 12 \\ \sqrt{x} &= 3 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Al comprobar se obtiene que
$$\sqrt{25} - \sqrt{9} = 2.$$
Por lo tanto, $x = 9$ es la solución.

2g) $x = -1$

2h) $x = 2$

3a)
$$\begin{aligned} \frac{3x-4}{3-x} = 2 &\Rightarrow 3x - 4 = 2(3 - x) \\ &\Rightarrow 5x = 10 \\ &\Rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

3b) $x = -3$

3c) $x = -13$

3d) $x = -\frac{2}{7}$

3e) $x = -\frac{13}{188}$

3f) $x = \frac{10 + \sqrt{7}}{3}, \frac{10 - \sqrt{7}}{3}$

4a) $x = 0, y = 3$ y $x = -2, y = 5$

4b) $x = 4, y = 7$ y $x = -2, y = 1$

4c) $x = 2, y = 0$

4d) $x = 1, y = -10$ y $x = -1, y = -6$

4e) $x = 3, y = 4$ y $x = 2, y = -4$

4f) $x = -1 + \sqrt{6}, y = -7 + 3\sqrt{6}$
y $x = -1 - \sqrt{6}, y = -7 - 3\sqrt{6}$

1.10 Problemas de la unidad

1. Determina todas las soluciones complejas de las siguientes ecuaciones bicuadráticas.

a) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

b) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$

c) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$

d) $-x^4 + 7x^2 - 12 = 0$

e) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

f) $8x^2 - 15 = x^4$

g) $3x^4 - 26x^2 - 9 = 0$

h) $12x^4 - 5x^2 - 3 = 0$

i) $-2x^4 - 9x^2 + 68 = 0$

j) $4x^4 = 13x^2 - 9$

k) $4x^4 = 5 - 19x^2$

l) $4x^4 + 91x^2 - 225 = 0$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones radicales.

a) $\sqrt{7 - 5x} = 8$

b) $x + \sqrt{5x + 19} = -1$

c) $2\sqrt{x} - \sqrt{x - 3} = \sqrt{5 + x}$

d) $\sqrt{1 + 4\sqrt{x}} = \sqrt{x} + 1$

e) $3\sqrt{2x - 3} + 2\sqrt{7 - x} = 11$

f) $\sqrt{7 - 2x} - \sqrt{5 + x} = \sqrt{4 + 3x}$

g) $\sqrt{2x + 15} - 2 = \sqrt{6x + 1}$

h) $\sqrt{x + 1} + \sqrt{3x + 4} = \sqrt{5x + 9}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $\frac{5x + 1}{x + 2} + \frac{x - 1}{x} = 2$

b) $\frac{2x}{x + 6} + \frac{3x}{x + 4} = x$

4. Determina todas las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 6x - y + 2 = 0 \\ 2x^2 + 5x - y + 1 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 2y = 9 \\ 4x^2 - 12x - y + 9 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y - 8 = 0 \\ x^2 - 4x + 7y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x^2 - 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$

5. En un mismo plano cartesiano:
   a) Grafica las ecuaciones $y = 2x - 2$ y $y = x^2 - 2x + 1$.
   b) Encuentra los valores x y y que satisfacen ambas ecuaciones mostradas en a).
   c) Ubica en el mismo plano cartesiano los pares ordenados (x, y), donde x y y son los calculados en b).
   d) ¿Qué sucede con los puntos ubicados en c) y las gráficas de las ecuaciones en a)?
   e) ¿Qué se puede concluir sobre resolver sistemas de ecuaciones donde una es una ecuación lineal y la otra es una ecuación cuadrática?

Indicador de logro

1.10 Resuelve problemas correspondientes a ecuaciones.

Solución de problemas:

1a) $x = -3, 3, -2i, 2i$

1b) $x = -i, i$

1c) $x = -\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{5}\,i, \sqrt{5}\,i$

1d) $x = -2, 2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$

1e) $x = -\sqrt{2}, \sqrt{2}, -1, 1$

1f) $x = -\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{5}, \sqrt{5}$

1g) $x = -3, 3, -\frac{\sqrt{3}}{3}i, \frac{\sqrt{3}}{3}i$

1h) $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}i, \frac{\sqrt{3}}{3}i$

1i) $x = -2, 2, -\frac{\sqrt{34}}{2}i, \frac{\sqrt{34}}{2}i$

1j) $x = -1, 1, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$

1k) $x = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{5}\,i, \sqrt{5}\,i$

1l) $x = -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -5i, 5i$

2a) $x = -\frac{57}{5}$

2b) $x = -3$

2c) $x = 4$

2d) $x = 0, 4$

2e) $x = 6$

2f) $x = -1$

2g) $x = \frac{1}{2}$

2h) $x = 0$

3a) $x = -\frac{1}{2}, 1$

3b) $x = \frac{-5+\sqrt{33}}{2}, \frac{-5-\sqrt{33}}{2}, 0$

4a) $x = -\frac{1}{2}, y = -1$ y $x = 1, y = 8$

4b) $x = \frac{9}{4}, y = \frac{9}{4}$ y $x = \frac{1}{2}, y = 4$

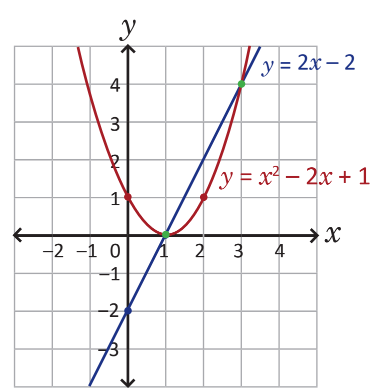
4c) $x = \frac{-17+3\sqrt{57}}{2}, y = \frac{-67+9\sqrt{57}}{2}$

y $x = \frac{-17-3\sqrt{57}}{2}, y = \frac{-67-9\sqrt{57}}{2}$

4d) $x = \frac{-1+\sqrt{41}}{4}, y = \frac{19-3\sqrt{41}}{4}$

y $x = \frac{-1-\sqrt{41}}{4}, y = \frac{19+3\sqrt{41}}{4}$

5a) La gráfica de $y = 2x - 2$ es una línea recta. Si $x = 0$ entonces $y = -2$, y si $x = 1$ entonces $y = 0$. Por lo tanto, la gráfica pasa por los puntos (0, –2) y (1, 0). Por otra parte, la gráfica de $y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ es una parábola abierta hacia arriba con vértice en (1, 0). Además, si $x = 0$, $y = 1$ y si $x = 2$, $y = 1$. Es decir, la parábola pasa por los puntos (0, 1) y (2, 1).



5b) Hay que resolver el sistema $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$

$2x - 2 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 3$ o $x = 1$

Si $x = 3$ entonces $y = 4$, y si $x = 1$ entonces $y = 0$.

5c) Observar los puntos verdes sobre la gráfica.

5d) Los puntos ubicados en c) coinciden con las intersecciones de las gráficas de $y = 2x - 2$ y $y = x^2 - 2x + 1$.

5e) Las soluciones del sistema representan los puntos de intersección de las gráficas.

Unidad 2. Línea recta

Competencia de la unidad

Deducir los conceptos sobre pendiente y ecuación de una línea recta a partir de sus características en el plano cartesiano para utilizarlo en la determinación de las posiciones relativas entre rectas y aplicarlo en la resolución de problemas y teoremas sobre geometría.

Relación y desarrollo

Tercer ciclo

Unidad 6: Proporcionalidad directa e inversa (7°)
- Proporcionalidad directa
- Proporcionalidad inversa
- Aplicación de proporcionalidad

Unidad 3: Función lineal (8°)
- Función lineal
- Función lineal y ecuación de primer grado con dos incógnitas
- Aplicación de la función lineal

Unidad 5: Figuras semejantes (9°)
- Semejanza
- Semejanza de triángulos
- Semejanza y paralelismo
- Aplicación de semejanza y triángulos semejantes

Unidad 6: Teorema de Pitágoras (9°)
- Teorema de Pitágoras
- Aplicación del teorema de Pitágoras

Primer año de bachillerato

Unidad 5: Resolución de triángulos oblicuángulos
- Razones trigonométricas de ángulos agudos
- Razones trigonométricas de ángulos no agudos
- Resolución de triángulos oblicuángulos

Segundo año de bachillerato

Unidad 2: Línea recta
- Puntos y segmentos
- Línea recta
- Posiciones relativas entre rectas
- Práctica en GeoGebra

Unidad 3: Secciones Cónicas
- La parábola
- La circunferencia
- La elipse
- La hipérbola
- Práctica en Geogebra

Plan de estudio de la unidad

Lección	Horas	Clases
1. Puntos y segmentos	1	1. Distancia entre dos puntos
	1	2. División de un segmento en una razón dada: recta numérica
	1	3. División de un segmento en una razón dada: plano cartesiano
	1	4. Punto medio de un segmento
	1	5. Aplicaciones
	1	6. Practica lo aprendido
2. Línea recta	1	1. Pendiente y definición de línea recta
	1	2. Ecuación de una recta: forma punto – pendiente
	1	3. Ecuación de una recta dados dos puntos
	1	4. Rectas paralelas a los ejes coordenados
	1	5. Forma general de la ecuación de una recta
	1	6. Practica lo aprendido
	1	Prueba de las lecciones 1 y 2
3. Posiciones relativas entre rectas	1	1 Intersección de una recta con el eje x
	1	2. Intersección de una recta con el eje y
	1	3. Intersección entre rectas
	1	4. Rectas paralelas
	1	5. Rectas perpendiculares
	1	6. Distancia de un punto a una recta
	1	7. Practica lo aprendido
	1	8. Ángulo de inclinación de una recta
	1	9. Ángulo entre rectas

Lección	Horas	Clases
	1	10. Aplicaciones
	1	11. Practica lo aprendido
	1	12. Problemas de la unidad
4. Práctica en GeoGebra	1	1. Práctica en GeoGebra: segmentos y ecuaciones de líneas rectas
	1	2. Práctica en GeoGebra: posiciones relativas entre rectas
	1	Prueba de la lección 3

26 horas clase + prueba de las lecciones 1 y 2 + prueba de la lección 3

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Puntos y segmentos
Se estudia analíticamente las propiedades de un segmento en el plano cartesiano utilizando los conceptos de distancia, división de un segmento en una razón dada y punto medio.

Lección 2: Línea recta
Se define la línea recta a partir del concepto de pendiente, se estudia cómo determinar la ecuación de una línea recta a partir de un punto y su pendiente o a partir de dos puntos dados, además de la forma de las ecuaciones de las rectas paralelas a los ejes coordenados y por último la forma general de la ecuación de una recta.

Lección 3: Posiciones relativas entre rectas
Se determinan los interceptos entre rectas, se abordan las rectas paralelas y perpendiculares, la distancia de un punto a una recta, el ángulo entre rectas y se estudian algunas aplicaciones geométricas.

Lección 4: Práctica en GeoGebra
Se graficarán en GeoGebra puntos, segmentos y rectas; se utilizarán las herramientas tales como punto de intersección, punto medio, ángulo entre rectas, entre otras, para comprobar varios problemas desarrollados a lo largo de la unidad.

Lección 1 Puntos y segmentos

1.1 Distancia entre dos puntos

Problema inicial

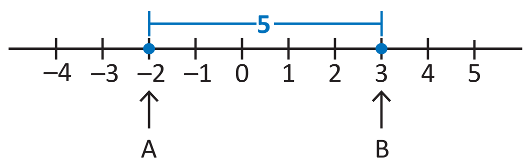
Calcula la distancia entre los puntos A y B si:

a) A(–2) y B(3) están sobre la recta numérica.
b) A(3, 4) y B(–1, 1) están sobre el plano cartesiano.

Dado p un número real, la notación P(p) indica que el punto P se encuentra en el valor p sobre la recta numérica.

Solución

a) Sobre la recta numérica se colocan los puntos A y B, cuyos valores son –2 y 3 respectivamente (ver figura); de acuerdo a esto la distancia entre ambos es 5:

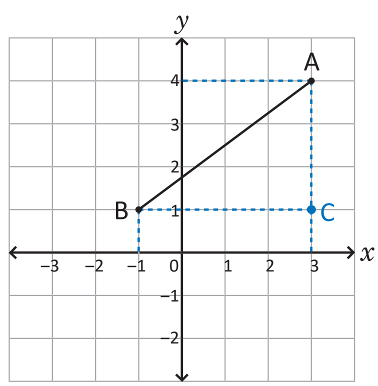


Por lo tanto, la distancia entre A y B es 5. Sin necesidad de la recta numérica, lo anterior también puede calcularse restando del valor de B el valor de A:

$$\begin{aligned} AB &= 3 - (-2) \\ &= 3 + 2 \\ &= 5. \end{aligned}$$

b) Sobre el plano cartesiano se colocan los puntos A y B cuyas coordenadas son (3, 4) y (–1, 1) respectivamente (ver figura); la distancia entre A y B es igual a la longitud del segmento AB.

Para ubicar un punto P(x_1, y_1) en el plano cartesiano se sitúa la coordenada x_1 sobre el eje x; a partir de esta se cuentan las unidades correspondientes a la coordenada y_1, hacia arriba si es positiva o hacia abajo si es negativa (en ambos casos en forma vertical).



Al formar el triángulo rectángulo ABC y utilizando el teorema de Pitágoras se obtiene:

$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$
$$AB = \sqrt{BC^2 + CA^2}.$$

Por hablar de distancia, AB siempre será mayor que cero.

La longitud del segmento BC es igual a calcular la distancia de –1 a 3 en el eje x, es decir:

$$BC = 3 - (-1) = 4.$$

De igual forma, la longitud del segmento CA es igual a calcular la distancia de 1 a 4 en el eje y, es decir:

$$CA = 4 - 1 = 3.$$

Se sustituyen BC y CA en $AB = \sqrt{BC^2 + CA^2}$ y se calcula el resultado:

$$
\begin{aligned}
AB &= \sqrt{4^2 + 3^2} \\
&= \sqrt{16 + 9} \\
&= \sqrt{25} \\
&= 5.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la distancia entre A y B es 5.

Conclusión

La distancia entre dos puntos A y B se simboliza como d(A, B) y se define de la siguiente forma:

a) Si A(a) y B(b) están sobre la recta numérica, entonces:

$$d(A, B) = |a - b|.$$

$|a - b|$ indica el valor absoluto de la resta $a - b$.

b) Si A(x_1, y_1) y B(x_2, y_2) están sobre el plano cartesiano, entonces:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Esta fórmula para calcular d(A, B) cuando A y B son puntos sobre el plano cartesiano también se utiliza si el segmento AB es paralelo a uno de los ejes de coordenadas.

Ejemplo

Para cada caso, calcula d(A, B) si:

a) A(–10) y B(6) b) A(–2, –1) y B(3, 2)

a) Como A y B están sobre la recta numérica:

$$
\begin{aligned}
d(A, B) &= |-10 - 6| \\
&= |-16| \\
&= -(-16) \\
&= 16.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, d(A, B) = 16.

Si x es un número real entonces el valor absoluto de x, denotado por $|x|$ se define de la siguiente forma:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

b) A y B están sobre el plano cartesiano, luego:

$$
\begin{aligned}
d(A, B) &= \sqrt{(-2 - 3)^2 + (-1 - 2)^2} \\
&= \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} \\
&= \sqrt{25 + 9} \\
&= \sqrt{34}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, d(A, B) = $\sqrt{34}$.

Problemas

Para cada caso, calcula la distancia entre los puntos A y B, es decir, d(A, B):

a) A(3) y B(7)	b) A(0) y B(6)	c) A(–1) y B(1)	d) A(–3) y B(–1)
e) A(–8) y B(0)	f) A(–3) y B(–10)	g) A(7) y B(2)	h) A(5) y B(–4)
i) A(5, 6) y B(2, 3)	j) A(3, 2) y B(–2, 1)	k) A(4, 6) y B(–5, –3)	l) A(7, 2) y B(1, –4)
m) A(–3, 4) y B(1, 3)	n) A(0, 0) y B(4, –5)	ñ) A(–5, 4) y B(2, –1)	o) A(6, –2) y B(6, –5)

Indicador de logro

1.1 Calcula la distancia entre dos puntos ubicados sobre la recta numérica o en el plano cartesiano.

Secuencia

El teorema de Pitágoras se estudió en noveno grado y será útil en esta clase para determinar la longitud de un segmento en el plano cartesiano. En primer año también se estudió la distancia entre dos puntos del plano.

Propósito

En la Conclusión se tienen dos fórmulas para la distancia, la segunda es suficiente para cualquier par de puntos; sin embargo, la primera es útil y simplifica algunos cálculos cuando los puntos están sobre una paralela a los ejes coordenados.

Solución de problemas:

En los problemas de la **a** al literal **h**, A y B están sobre la recta numérica.

a) $d(\text{A, B}) = |3 - 7| = |-4| = -(-4) = 4$
Por lo tanto, $d(\text{A, B}) = 4$.

b) $d(\text{A, B}) = |0 - 6| = |-6| = -(-6) = 6$
Por lo tanto, $d(\text{A, B}) = 6$.

c) $d(\text{A, B}) = |-1 - 1| = |-2| = -(-2) = 2$
Por lo tanto, $d(\text{A, B}) = 2$.

d) $d(\text{A, B}) = |-3 - (-1)| = |-2| = -(-2) = 2$
Por lo tanto, $d(\text{A, B}) = 2$.

e) $d(\text{A, B}) = |-8 - 0| = |-8| = -(-8) = 8$
Por lo tanto, $d(\text{A, B}) = 8$.

f) $d(\text{A, B}) = |-3 - (-10)| = |7| = 7$
Por lo tanto, $d(\text{A, B}) = 7$.

g) $d(\text{A, B}) = |7 - 2| = |5| = 5$
Por lo tanto, $d(\text{A, B}) = 5$.

h) $d(\text{A, B}) = |5 - (-4)| = |9| = 9$
Por lo tanto, $d(\text{A, B}) = 9$.

En los problemas de la **i** al literal **o**, A y B están sobre el plano cartesiano.

i) $$\begin{aligned} d(\text{A, B}) &= \sqrt{(5-2)^2 + (6-3)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 3^2} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$
Por lo tanto, $d(\text{A, B}) = 3\sqrt{2}$.

j) $$\begin{aligned} d(\text{A, B}) &= \sqrt{(3-(-2))^2 + (2-1)^2} \\ &= \sqrt{5^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$
Por lo tanto, $d(\text{A, B}) = \sqrt{26}$.

k) $$\begin{aligned} d(\text{A, B}) &= \sqrt{(4-(-5))^2 + (6-(-3))^2} \\ &= \sqrt{9^2 + 9^2} \\ &= 9\sqrt{2} \end{aligned}$$
Por lo tanto, $d(\text{A, B}) = 9\sqrt{2}$.

l) $$\begin{aligned} d(\text{A, B}) &= \sqrt{(7-1)^2 + (2-(-4))^2} \\ &= \sqrt{6^2 + 6^2} \\ &= 6\sqrt{2} \end{aligned}$$
Por lo tanto, $d(\text{A, B}) = 6\sqrt{2}$.

m) $$\begin{aligned} d(\text{A, B}) &= \sqrt{(-3-1)^2 + (4-3)^2} \\ &= \sqrt{(-4)^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{17} \end{aligned}$$
Por lo tanto, $d(\text{A, B}) = \sqrt{17}$.

n) $$\begin{aligned} d(\text{A, B}) &= \sqrt{(0-4)^2 + (0-(-5))^2} \\ &= \sqrt{(-4)^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{41} \end{aligned}$$
Por lo tanto, $d(\text{A, B}) = \sqrt{41}$.

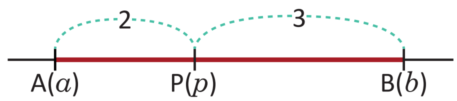
ñ) $d(\text{A, B}) = \sqrt{((-5)-2)^2 + (4-(-1))^2} = \sqrt{74}$
Por lo tanto, $d(\text{A, B}) = \sqrt{74}$.

o) $d(\text{A, B}) = \sqrt{(6-6)^2 + (-2-(-5))^2} = 3$
Por lo tanto, $d(\text{A, B}) = 3$.

1.2 División de un segmento en una razón dada: recta numérica

Problema inicial

Sobre la recta numérica se han colocado dos puntos A(a) y B(b) como se muestra en la figura de abajo. ¿Cuál es el valor del punto P que divide al segmento AB en razón 2:3?



$$\frac{d(\text{A, P})}{d(\text{P, B})} = \frac{2}{3}$$

Solución

Si P divide al segmento AB en razón 2:3 entonces:

$$\frac{d(\text{A, P})}{d(\text{P, B})} = \frac{2}{3}$$

De la figura se deduce $d(\text{A, P}) = |a - p| = p - a$ y $d(\text{P, B}) = |p - b| = b - p$, pues $p > a$ y $b > p$ respectivamente. Se sustituyen en lo anterior y se utiliza la propiedad fundamental de las proporciones:

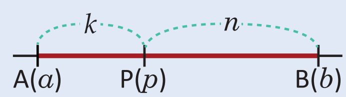
$$\begin{aligned} \frac{p-a}{b-p} &= \frac{2}{3} \\ 3(p-a) &= 2(b-p) \\ 3p - 3a &= 2b - 2p \\ 2p + 3p &= 3a + 2b \\ (2+3)p &= 3a + 2b \\ p &= \frac{3a+2b}{2+3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor del punto P es $\frac{3a+2b}{5}$.

En general

Dados dos puntos A(a) y B(b) sobre la recta numérica, el valor del punto P(p) que se encuentra sobre el segmento AB y lo divide en razón k:n es:

$$p = \frac{na + kb}{k + n}.$$



Ejemplo

Dados A(–3) y B(5), encuentra el valor del punto P(p) que divide al segmento AB en razón 3:1.

Para este caso, $a = -3$, $b = 5$, $k = 3$ y $n = 1$. Luego:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1(-3) + 3(5)}{3+1} \\ &= \frac{-3+15}{4} \\ &= \frac{12}{4} \\ &= 3. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor del punto P es 3.

Problemas

1. Para cada caso encuentra el valor del punto P(p) que divide al segmento AB en la razón dada:
   a) Razón 3:2, A(1) y B(6)
   b) Razón 2:5, A(– 4) y B(3)
   c) Razón 1:4, A(0) y B(5)
   d) Razón 2:3, A(– 10) y B(0)
   e) Razón 3:4, A(–16) y B(–2)
   f) Razón 1:3, A(–1) y B(7)

2. Sean A(–1) y B(b) dos puntos sobre la recta numérica. Si P(1) divide al segmento AB en razón 4:5, ¿cuál es el valor de b?

Indicador de logro

1.2 Encuentra el valor del punto que divide un segmento sobre la recta numérica en una razón dada.

Secuencia

En séptimo grado se estudiaron las razones y proporciones, en esta clase se aplicará para determinar un punto que divide un segmento en otros dos en una razón dada, esto se utilizará posteriormente para calcular el punto medio de un segmento.

Posibles dificultades

El uso de tres variables puede confundir a los estudiantes, por lo que se debe indicar que la respuesta al Problema inicial se escribe en términos de las variables a y b.

Solución de problemas:

1a) Para este caso, $a = 1$, $b = 6$, $k = 3$ y $n = 2$. Luego:

$$p = \frac{2(1) + 3(6)}{3 + 2} = \frac{2 + 18}{5} = \frac{20}{5} = 4.$$

Por lo tanto, el valor del punto P es 4.

1b) Para este caso, $a = -4$, $b = 3$, $k = 2$ y $n = 5$. Luego:

$$p = \frac{5(-4) + 2(3)}{2 + 5} = \frac{-20 + 6}{7} = -\frac{14}{7} = -2.$$

Por lo tanto, el valor del punto P es -2.

1c) Para este caso, $a = 0$, $b = 5$, $k = 1$ y $n = 4$. Luego:

$$p = \frac{4(0) + 1(5)}{1 + 4} = \frac{5}{5} = 1.$$

Por lo tanto, el valor del punto P es 1.

1d) Para este caso, $a = -10$, $b = 0$, $k = 2$ y $n = 3$. Luego:

$$p = \frac{3(-10) + 2(0)}{2 + 3} = -\frac{30}{5} = -6.$$

Por lo tanto, el valor del punto P es -6.

1e) Para este caso, $a = -16$, $b = -2$, $k = 3$ y $n = 4$. Luego:

$$p = \frac{4(-16) + 3(-2)}{3 + 4} = \frac{-64 - 6}{7} = -\frac{70}{7} = -10.$$

Por lo tanto, el valor del punto P es -10.

1f) Para este caso, $a = -1$, $b = 7$, $k = 1$ y $n = 3$. Luego:

$$p = \frac{3(-1) + 1(7)}{1 + 3} = \frac{-3 + 7}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Por lo tanto, el valor del punto P es 1.

2. Como $a = -1$, $k = 4$, $n = 5$ y $p = 1$, entonces,

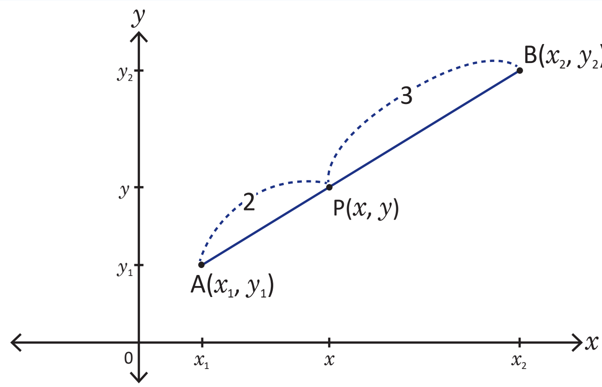
$$1 = \frac{5(-1) + 4(b)}{4 + 5} = \frac{-5 + 4b}{9} \Rightarrow -5 + 4b = 9 \Rightarrow 4b = 14 \Rightarrow b = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}.$$

Por lo tanto, el valor de b es $\frac{7}{2}$.

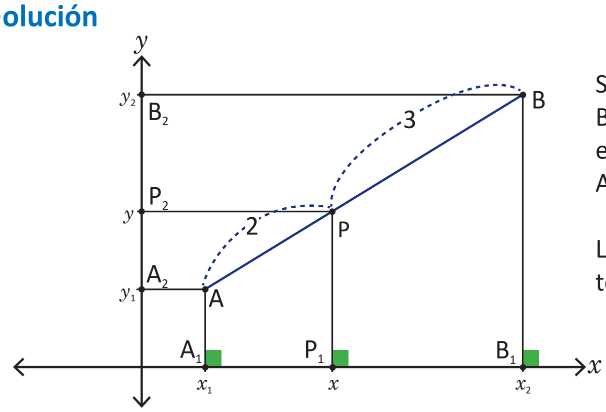
1.3 División de un segmento en una razón dada: plano cartesiano*

Problema inicial

Dos puntos A(x_1, y_1) y B(x_2, y_2) se colocan en el plano cartesiano como se muestra en la figura de la derecha. ¿Cómo encontrarías las coordenadas del punto P(x, y) que está sobre el segmento AB y lo divide en razón 2:3?



Solución



Se colocan sobre los ejes los puntos A$_1$(x_1, 0), P$_1$(x, 0), B$_1$(x_2, 0), A$_2$(0, y_1), P$_2$(0, y) y B$_2$(0, y_2) como se muestra en la figura de la izquierda y se trazan los segmentos AA$_1$, PP$_1$, BB$_1$, AA$_2$, PP$_2$ y BB$_2$.

Los segmentos AA$_1$, PP$_1$ y BB$_1$ son paralelos; por el teorema sobre la proporcionalidad y el paralelismo:

$$\frac{d(\mathrm{A}_1, \mathrm{P}_1)}{d(\mathrm{P}_1, \mathrm{B}_1)} = \frac{d(\mathrm{A}, \mathrm{P})}{d(\mathrm{P}, \mathrm{B})} = \frac{2}{3}.$$

Utilizando lo visto en la clase anterior, la coordenada x del punto P es:

$$x = \frac{3x_1 + 2x_2}{2 + 3}.$$

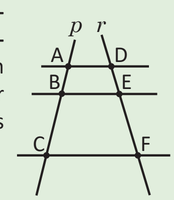
De manera similar se llega a que la coordenada y del punto P es:

$$y = \frac{3y_1 + 2y_2}{2 + 3}.$$

Por lo tanto, P$\left(\frac{3x_1 + 2x_2}{5}, \frac{3y_1 + 2y_2}{5}\right)$.

Teorema sobre la proporcionalidad y el paralelismo: si p y r son rectas cortadas por tres rectas paralelas (ver figura) entonces:

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EF}}$$



En general

Dados dos puntos A(x_1, y_1) y B(x_2, y_2) sobre el plano cartesiano, las coordenadas del punto P(x, y) que se encuentra sobre el segmento AB y lo divide en razón k:n son:

$$\left(\frac{nx_1 + kx_2}{k + n}, \frac{ny_1 + ky_2}{k + n}\right).$$

Problemas

Para cada caso encuentra las coordenadas del punto P(x, y) que divide al segmento AB en la razón dada:

a) Razón 1:3, A(–5, 1) y B(3, –3)

b) Razón 3:4, A(–2, –10) y B(5, 4)

c) Razón 3:2, A(1, 8) y B(6, –2)

d) Razón 4:5, A(–2, –9) y B(7, 0)

Indicador de logro

1.3 Encuentra las coordenadas del punto que divide un segmento en el plano cartesiano en una razón dada.

Secuencia

Ahora se aborda la división de un segmento cualquiera en el plano cartesiano, por lo que es necesario utilizar el teorema sobre la proporcionalidad y el paralelismo que se estudió en noveno grado. Luego se utilizará lo visto en la clase anterior, extendiendo la fórmula encontrada para la recta numérica al plano cartesiano. Si la pista es insuficiente para resolver el problema el docente deberá explicarlo.

Solución de problemas:

a) Como A(– 5, 1), B(3, –3), k = 1 y n = 3, entonces

$$P\left(\frac{3(-5)+1(3)}{1+3}, \frac{3(1)+1(-3)}{1+3}\right) = P(-3, 0).$$

b) Como A(–2, –10), B(5, 4), k = 3 y n = 4, entonces

$$P\left(\frac{4(-2)+3(5)}{3+4}, \frac{4(-10)+3(4)}{3+4}\right) = P(1, -4).$$

c) Como A(1, 8), B(6, –2), k = 3 y n = 2, entonces

$$P\left(\frac{2(1)+3(6)}{3+2}, \frac{2(8)+3(-2)}{3+2}\right) = P(4, 2).$$

d) Como A(–2, –9), B(7, 0), k = 4 y n = 5, entonces

$$P\left(\frac{5(-2)+4(7)}{4+5}, \frac{5(-9)+4(0)}{4+5}\right) = P(2, -5).$$

1.4 Punto medio de un segmento

Problema inicial

Encuentra el valor o coordenadas del punto medio del segmento AB si:

1. A(a) y B(b) están sobre la recta numérica.
2. A(x_1, y_1) y B(x_2, y_2) están sobre el plano cartesiano.

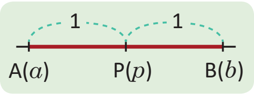
El punto medio divide al segmento AB en razón 1:1.

Solución

Encontrar el punto medio equivale a encontrar el punto que divide al segmento AB en razón 1:1, es decir, $k = 1$ y $n = 1$.

1. El valor p del punto medio P se calcula:

$$p = \frac{1a + 1b}{1 + 1} = \frac{a + b}{2}.$$



Por lo tanto, el valor del punto medio P es $\frac{a + b}{2}$.

2. Las coordenadas (x, y) del punto medio P se calculan:

$$x = \frac{1x_1 + 1x_2}{1 + 1} = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{1y_1 + 1y_2}{1 + 1} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto medio P son $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Conclusión

1. Si A(a) y B(b) son puntos sobre la recta numérica, entonces el valor del punto medio P(p) del segmento AB es:
$$p = \frac{a + b}{2}.$$

2. Si A(x_1, y_1) y B(x_2, y_2) son puntos sobre la recta numérica, entonces las coordenadas del punto medio P del segmento AB son:
$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Problemas

1. Para cada caso, calcula el valor del punto medio P del segmento AB:

a) A(1) y B(7)
b) A(0) y B(8)
c) A(–2) y B(4)
d) A(–4) y B(2)
e) A(–6) y B(–2)
f) A(–7) y B(–3)
g) A$\left(\sqrt{2}\right)$ y B$\left(3\sqrt{2}\right)$
h) A$\left(-\sqrt{3}\right)$ y B$\left(\sqrt{2}\right)$

2. Para cada caso, calcula las coordenadas del punto medio P del segmento AB:

a) A(1, 2) y B(3, 6)
b) A(–6, 4) y B(0, –2)
c) A(–4, –5) y B(2, 1)
d) A(1, 6) y B(4, 0)
e) A(–5, –1) y B(3, 1)
f) A$\left(0, \sqrt{2}\right)$ y B$\left(0, 6\sqrt{2}\right)$

Indicador de logro

1.4 Determina el valor o las coordenadas del punto medio de un segmento.

Secuencia

Ahora se deducen las fórmulas del punto medio de un segmento en la recta numérica y en el plano cartesiano.

Propósito

Con el Problema inicial se deduce la fórmula del punto medio utilizando lo visto en las dos clases anteriores y sabiendo que este punto divide al segmento en razón 1:1.

Solución de problemas:

En el problema 1, los puntos están sobre la recta numérica.

1a) A(1) y B(7)

$$p = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

1b) A(0) y B(8)

$$p = \frac{0+8}{2} = 4$$

1c) A(–2) y B(4)

$$p = \frac{-2+4}{2} = 1$$

1d) A(–4) y B(2)

$$p = \frac{-4+2}{2} = -1$$

1e) A(–6) y B(–2)

$$p = \frac{-6-2}{2} = -4$$

1f) A(–7) y B(–3)

$$p = \frac{-7-3}{2} = -5$$

1g) A($\sqrt{2}$) y B($3\sqrt{2}$)

$$p = \frac{\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

1h) A($-\sqrt{3}$) y B($\sqrt{2}$)

$$p = \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$$

En el problema 2, los puntos están sobre el plano cartesiano.

2a) A(1, 2) y B(3, 6)

Punto medio: $P\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = P(2, 4)$.

2b) A(–6, 4) y B(0, –2)

Punto medio: $P\left(\frac{-6+0}{2}, \frac{4-2}{2}\right) = P(-3, 1)$.

2c) A(–4, –5) y B(2, 1)

Punto medio: $P\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{-5+1}{2}\right) = P(-1, -2)$.

2d) A(1, 6) y B(4, 0)

Punto medio: $P\left(\frac{1+4}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = P\left(\frac{5}{2}, 3\right)$.

2e) A(–5, –1) y B(3, 1)

Punto medio: $P\left(\frac{-5+3}{2}, \frac{-1+1}{2}\right) = P(-1, 0)$.

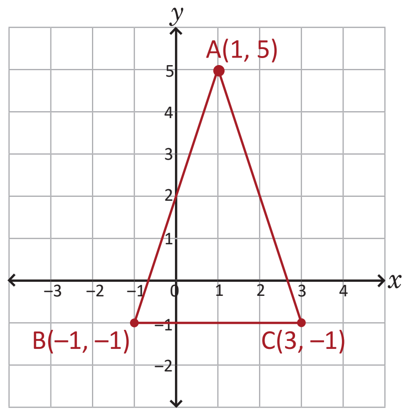
2f) A($0, \sqrt{2}$) y B($0, 6\sqrt{2}$)

Punto medio: $P\left(\frac{0+0}{2}, \frac{\sqrt{2}+6\sqrt{2}}{2}\right) = P\left(0, \frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$.

1.5 Aplicaciones

Problema inicial

Se colocan tres puntos A, B y C en el plano cartesiano cuyas coordenadas se presentan en la figura:



Demuestra que el triángulo ABC es isósceles.

Solución

Para que el ΔABC sea isósceles debe tener dos lados de igual longitud. A simple vista los lados AB y CA parecen cumplir esa condición. Se calcula la longitud del lado AB, que es igual a la distancia entre A y B:

$$\begin{aligned} d(\text{A, B}) &= \sqrt{[1-(-1)]^2 + [5-(-1)]^2} \\ &= \sqrt{4+36} \\ &= \sqrt{40} \\ &= 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

De manera similar se calcula la longitud del lado CA, es decir, la distancia entre C y A:

$$\begin{aligned} d(\text{C, A}) &= \sqrt{(3-1)^2 + (-1-5)^2} \\ &= \sqrt{4+36} \\ &= \sqrt{40} \\ &= 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

Luego, d(A, B) = d(C, A), es decir, el triángulo ABC tiene dos lados de igual longitud: AB y CA. Por lo tanto, el ΔABC es isósceles.

Problemas

1. Demuestra que el triángulo formado por los puntos A(3, 3), B(–3, –3) y C$\left(-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\right)$ es equilátero.
2. Demuestra que el triángulo formado por los puntos D(1, 4), E(–3, –2) y F(5, 1) es escaleno.
3. Demuestra que los puntos A(3, 7), B(–3, –1) y C(3, –1) forman un triángulo rectángulo.

Si los lados a, b y c de un triángulo cumplen la relación $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es rectángulo.

Indicador de logro

1.5 Resuelve problemas utilizando la distancia entre dos puntos y división de un segmento en una razón dada.

Secuencia

Se utilizan los conocimientos adquiridos en esta lección para resolver problemas geométricos.

Solución de problemas:

1. Para que el triángulo ABC sea equilátero, sus lados deben medir lo mismo. Es decir, las distancias d(A, B), d(B, C) y d(A, C) deben ser iguales. Calculando las tres distancias:

- $d(A, B) = \sqrt{(3-(-3))^2 + (3-(-3))^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$,
- $d(B, C) = \sqrt{(-3+3\sqrt{3})^2 + (-3-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 - 18\sqrt{3} + 9(3) + 9 + 18\sqrt{3} + 9(3)} = \sqrt{8(9)} = 6\sqrt{2}$,
- $d(A, C) = \sqrt{(3+3\sqrt{3})^2 + (3-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 18\sqrt{3} + 9(3) + 9 - 18\sqrt{3} + 9(3)} = \sqrt{8(9)} = 6\sqrt{2}$.

Por lo tanto, el triángulo ABC es equilátero.

2. Para que el triángulo sea escaleno, los tres lados deben tener distinta medida. Es decir, las distancias d(D, E), d(E, F) y d(D, F) deben ser distintas. Calculando las tres distancias:

- $d(D, E) = \sqrt{(1-(-3))^2 + (4-(-2))^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52}$,
- $d(E, F) = \sqrt{(-3-5)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{(-8)^2 + (-3)^2} = \sqrt{73}$,
- $d(F, D) = \sqrt{(1-5)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$.

Por lo tanto, el triángulo DEF es escaleno.

3. Por facilidad, se calcula AB^2, BC^2 y AC^2:

- $AB^2 = [d(A, B)]^2 = (3 + 3)^2 + (7 + 1)^2 = 6^2 + 8^2 = 100$.
- $BC^2 = [d(B, C)]^2 = (-3 - 3)^2 + (-1 + 1)^2 = (-6)^2 = 36$.
- $AC^2 = [d(A, C)]^2 = (3 - 3)^2 + (7 + 1)^2 = 8^2 = 64$.

Se observa que $BC^2 + AC^2 = 36 + 64 = 100 = AB^2$. Por el recíproco del teorema de Pitagóras, el triángulo ABC es rectángulo.

El recíproco del teorema de Pitágoras se estudió en 9° grado.

1.6 Practica lo aprendido

1. Para cada caso, calcula la distancia entre los puntos A y B:

a) A(–9) y B(–1)

b) A(0) y B(5)

c) $A\left(-\frac{3}{2}\right)$ y $B\left(\frac{7}{2}\right)$

d) $A\left(\sqrt{5}\right)$ y $B\left(3\sqrt{5}\right)$

e) A(–4, 0) y B (5, –2)

f) A(–1, 6) y B(3, –2)

g) $A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y $B\left(\frac{5}{2}, 3\right)$

h) $A\left(-\sqrt{2}, -3\right)$ y B(0, 2)

2. La distancia entre dos puntos A y B es $d(A, B) = 2\sqrt{13}$. Si las coordenadas de A son (–2, 5) y las de B son $(x, 1)$, ¿cuál es el valor de x?

3. La distancia entre dos puntos A y B es $d(A, B) = 2\sqrt{34}$. Si las coordenadas de A son $(-6, y)$ y las de B son (4, 4), ¿cuál es el valor de y?

4. Para cada caso, encuentra el valor del punto sobre el segmento AB que lo divide en la razón dada:

a) Razón 6:5, A(–10) y B(1)

b) Razón 3:1, A(–2) y B(2)

c) Razón 1:3, A(–6, 7) y B(2, 3)

d) Razón 1:2, A(–4, 0) y B(11, 6)

5. Para cada caso, encuentra el punto medio del segmento AB:

a) A(–1) y B(3)

b) $A\left(-2\sqrt{10}\right)$ y $B\left(\sqrt{10}\right)$

c) A(0, 7) y B(4, –11)

d) A(–5, –1.5) y B(3, 5.5)

6. ¿Cuál es la distancia entre un punto $P(x_1, y_1)$ y el origen (0, 0)?

7. Encuentra las coordenadas del punto B, si el punto medio entre A(–1, 3) y B es $P\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

8. Los vértices de un triángulo son A(2, 4), B(–2, –2) y C(4, 0). Si D y E son los puntos medios de los lados AB y BC respectivamente, demuestra que $DE = \frac{1}{2}AC$.

9. El vértice A de un triángulo ABC tiene coordenadas (–2, 4). Si los puntos medios de los lados AB y BC son (–3, 1) y (1, 0) respectivamente, ¿cuáles son las coordenadas de los vértices B y C?

10. El vértice A de un cuadrado ABCD tiene coordenadas (–4, 4). Si los puntos medios de los lados AB, BC y CD son (–2, 0), (4, –2) y (6, 4) respectivamente, ¿cuáles son las coordenadas de B, C y D?

Indicador de logro

1.6 Resuelve problemas correspondientes al cálculo de distancias entre puntos y división de segmentos en una razón dada.

Solución de problemas:

1a) $d(\text{A, B}) = |-9 - (-1)| = |-8| = -(-8) = 8$ **1b)** $d(\text{A, B}) = 5$ **1c)** $d(\text{A, B}) = 5$ **1d)** $d(\text{A, B}) = 2\sqrt{5}$

1e) $d(\text{A, B}) = \sqrt{(-4-5)^2 + (0-(-2))^2} = \sqrt{85}$ **1f)** $d(\text{A, B}) = 4\sqrt{5}$ **1g)** $d(\text{A, B}) = 2\sqrt{2}$ **1h)** $d(\text{A, B}) = 3\sqrt{3}$

2. $d(\text{A, B}) = \sqrt{(-2-x)^2 + (5-1)^2} = 2\sqrt{13} \Rightarrow (-2-x)^2 + 16 = 4(13) \Rightarrow x^2 + 4x - 32 = 0 \Rightarrow (x+8)(x-4) = 0$

Por lo tanto, $x = -8$ o $x = 4$.

3. $d(\text{A, B}) = \sqrt{(-6-4)^2 + (y-4)^2} = 2\sqrt{34} \Rightarrow 100 + (y-4)^2 = 4(34) \Rightarrow y^2 - 8y - 20 = 0 \Rightarrow (y+2)(y-10) = 0$

Por lo tanto, $y = -2$ o $y = 10$.

4a) $p = -4$ **4b)** $p = 1$ **4c)** P $(-4, 6)$ **4d)** P$(1, 2)$

5a) $p = 1$ **5b)** $p = -\frac{\sqrt{10}}{2}$ **5c)** P$(2, -2)$ **5d)** P$(-1, 2)$

6. Sea O(0, 0) el origen del plano cartesiano. Entonces, $d(\text{P, O}) = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

7. Sea B(x, y). Entonces $\left(\frac{-1+x}{2}, \frac{3+y}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Por tanto, $\frac{-1+x}{2} = \frac{3}{2}$ y $\frac{3+y}{2} = \frac{1}{2}$. De estas dos ecuaciones se deduce que $x = 4$ y $y = -2$. Por lo tanto, B$(4, -2)$.

8. Como D y E son los puntos medios de AB y BC, respectivamente, se tiene que

$$\text{D}\left(\frac{2+(-2)}{2}, \frac{4+(-2)}{2}\right) = \text{D}(0, 1) \text{ y } \text{E}\left(\frac{4+(-2)}{2}, \frac{0+(-2)}{2}\right) = \text{E}(1, -1).$$

Luego, $\text{DE} = \sqrt{(0-1)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{5}$. Por otra parte, $\text{AC} = \sqrt{(2-4)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Por lo tanto, $\text{DE} = \sqrt{5} = \frac{1}{2}(2\sqrt{5}) = \frac{1}{2}\text{AC}$.

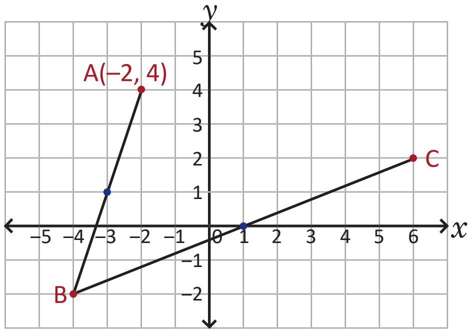
9. Sean B(x_1, y_1) y C(x_2, y_2). El punto medio de AB es $(-3, 1)$, entonces

$$\left(\frac{-2+x_1}{2}, \frac{4+y_1}{2}\right) = (-3, 1) \Rightarrow x_1 = -4 \text{ y } y_1 = -2.$$

Por tanto, B$(-4, -2)$. Luego, el punto medio de BC es $(1, 0)$, entonces

$$\left(\frac{-4+x_2}{2}, \frac{-2+y_2}{2}\right) = (1, 0) \Rightarrow x_2 = 6 \text{ y } y_2 = 2.$$

Por tanto, C$(6, 2)$.



10. Sean B(x_1, y_1), C(x_2, y_2) y D(x_3, y_3) El punto medio de AB es $(-2, 0)$, entonces

$$\left(\frac{-4+x_1}{2}, \frac{4+y_1}{2}\right) = (-2, 0) \Rightarrow x_1 = 0 \text{ y } y_1 = -4. \text{ Por tanto, B}(0, -4).$$

Luego, el punto medio de BC es $(4, -2)$, entonces

$$\left(\frac{0+x_2}{2}, \frac{-4+y_2}{2}\right) = (4, -2) \Rightarrow x_2 = 8 \text{ y } y_2 = 0. \text{ Por tanto, C}(8, 0).$$

Por último, el punto medio de CD es $(6, 4)$, entonces

$$\left(\frac{8+x_3}{2}, \frac{0+y_3}{2}\right) = (6, 4) \Rightarrow x_3 = 4 \text{ y } y_3 = 8. \text{ Por tanto, D}(4, 8).$$

2.1 Pendiente y definición de línea recta

Problema inicial

Con los puntos A(–2, –3), B(0, 1), C(1, 3) realiza lo siguiente:

1. Verifica que para cualquier pareja de puntos, el cociente $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es constante.
2. Ubica los puntos en el plano cartesiano. ¿Están todos sobre una misma línea recta?
3. Dado un punto P(2, y), ¿cuál debe ser el valor de y para que P se encuentre sobre la misma línea recta que A y B?

Solución

1. Las parejas posibles son A y B, A y C, B y C. Para cada pareja se calcula el cociente $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$:

A(–2, –3) y B(0, 1):

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-(-3)}{0-(-2)} = \frac{4}{2} = \mathbf{2}$$

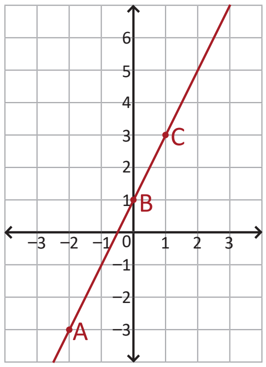
A(–2, –3) y C(1, 3):

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-(-3)}{1-(-2)} = \frac{6}{3} = \mathbf{2}$$

B(0, 1) y C(1, 3):

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{1-0} = \frac{2}{1} = \mathbf{2}$$

Por lo tanto, para cualquier pareja de puntos el cociente $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es constante.



2. Se ubican los puntos en el plano cartesiano como se muestra en la figura de la derecha. Utilizando una regla se verifica que, en efecto, los tres se encuentran sobre una misma línea recta.

3. De acuerdo a los numerales anteriores, para que P(2, y) se encuentre sobre la misma línea recta que A(–2, –3) y B(0, 1), el cociente $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ debe ser igual a 2 para cualesquiera pareja de puntos A, B o P. Basta con comprobar que se cumple para B y P:

$$\frac{y-1}{2-0} = 2$$
$$y = 5$$

También puede utilizarse la gráfica de 2 y deducir que el valor de y debe ser igual a 5 para que P(2, 5) esté sobre la misma línea recta que A(–2, –3) y B(0, 1).

Definición

Una **línea recta** es un conjunto de puntos tales que, al tomar dos de ellos cualesquiera y diferentes A(x_1, y_1) y B(x_2, y_2), el valor del cociente $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es siempre constante. A dicho cociente se le llama **pendiente de la recta** y se denota por la letra m, es decir:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Observa que

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_1 - y_2)}{-(x_1 - x_2)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Problemas

1. Para cada caso muestra que los puntos A, B y C están sobre la misma línea recta:
   a) A(0, –3), B(3, 0) y C(5, 2)
   b) A(–4, 1), B(0, 3) y C(6, 6)
   c) A(–3, 5), B(–1, –1) y C$\left(\frac{1}{3}, -5\right)$
   d) A(–3, 4), B$\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ y C(3, 0)

2. Sin graficar, justifica por qué los puntos D(–3, 1), E(1, –1) y F$\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ no están sobre la misma línea recta.

Indicador de logro

2.1 Identifica puntos sobre la misma línea recta utilizando el valor de su pendiente.

Secuencia

En Tercer Ciclo se estudió la función lineal a partir de la proporcionalidad directa. Ahora se define la recta a partir del concepto de pendiente, de esta forma será fácil deducir la ecuación de una línea recta posteriormente. Se inicia el estudio de la línea recta en el contexto de la geometría analítica.

Solución de problemas:

1a) A(0, –3), B(3, 0) y C(5, 2)

A(0, –3) y B(3, 0):

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-(-3)}{3-0} = \frac{3}{3} = 1$$

B(3, 0) y C(5, 2):

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-0}{5-3} = \frac{2}{2} = 1$$

Por lo tanto, A, B y C están sobre la misma recta.

1b) A(–4, 1), B(0, 3) y C(6, 6)

A(–4, 1) y B(0, 3):

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{0-(-4)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

A(–4, 1) y C(6, 6):

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-1}{6-(-4)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, A, B y C están sobre la misma recta.

1c) A(–3, 5), B(–1, –1) y $C\left(\frac{1}{3}, -5\right)$

A(–3, 5) y B(–1, –1):

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-5}{-1-(-3)} = \frac{-6}{2} = -3$$

A(–3, 5) y $C\left(\frac{1}{3}, -5\right)$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5-5}{\frac{1}{3}-(-3)} = \frac{-10}{\frac{10}{3}} = -10 \div \frac{10}{3} = -10 \times \frac{3}{10} = -3$$

Por lo tanto, A, B y C están sobre la misma recta.

1d) A(–3, 4), $B\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ y C(3, 0)

A(–3, 4) y C(3, 0)

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-4}{3-(-3)} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$B\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ y C(3, 0)

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-1}{3-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$$

Por lo tanto, A, B y C están sobre la misma recta.

2. D(–3, 1), E(1, –1) y $F\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

D(–3, 1) y E(1, –1)

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-1}{1-(-3)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

E(1, –1) y $F\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-\frac{3}{2}-(-1)}{\frac{3}{2}-1} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1$$

Por lo tanto, A, B y C no están sobre la misma recta.

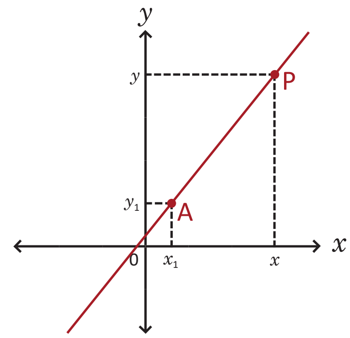
2.2 Ecuación de una recta: forma punto – pendiente*

Problema inicial

Demuestra que la ecuación de la recta l que pasa por un punto A(x_1, y_1) y tiene pendiente m es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Solución



Sea P(x, y) un punto cualquiera sobre la recta l diferente del punto A(x_1, y_1).
Por definición de línea recta, m es constante; entonces:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

Luego,

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta l es: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Definición

La ecuación de una recta l con pendiente conocida m y un punto A(x_1, y_1) perteneciente a la recta es:

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

A esta ecuación se le llama **forma punto – pendiente de la ecuación de la recta**; al despejar la variable y en lo anterior se obtiene:

$$y = mx - mx_1 + y_1$$

donde el coeficiente de la variable x es la pendiente de la recta y el valor de $-mx_1 + y_1$ es constante. Para graficar la recta l conociendo el punto A(x_1, y_1) sobre ella y su ecuación punto – pendiente se hace lo siguiente:

1. Sustituir un valor particular para x y encontrar el correspondiente valor en y.
2. Colocar sobre el plano cartesiano los puntos A(x_1, y_1) y el punto obtenido en el numeral 1; luego trazar la recta que pasa por ambos puntos.

Ejemplo

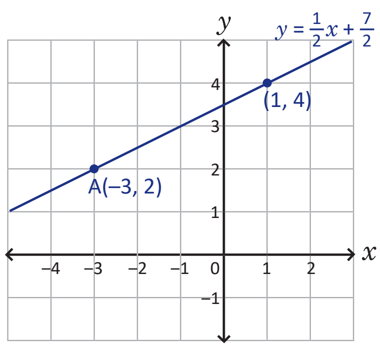
Encuentra la ecuación de la recta l cuya pendiente es $m = \frac{1}{2}$ y pasa por el punto A(–3, 2).

Se sustituyen los valores de m y (x_1, y_1) en la forma punto – pendiente:

$$y - 2 = \frac{1}{2}[x - (-3)]$$

$$y = \frac{1}{2}(x + 3) + 2$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$



Para graficar la recta, se sustituye un valor particular para x en la ecuación anterior, por ejemplo $x = 1$, y se encuentra su correspondiente valor y:

$$y = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4.$$

Se colocan los puntos A(–3, 2) y (1, 4) en el plano y se traza la recta que pasa por ambos puntos, como muestra la figura de la derecha.

Problemas

Encuentra la ecuación de la recta que tiene la pendiente dada y pasa por A; grafica la recta para cada caso:

a) Pendiente $m = 2$ y A(6, 7)

b) Pendiente $m = 1$ y A(–1, 0)

c) Pendiente $m = -1$ y A(–2, 6)

d) Pendiente $m = \frac{1}{2}$ y A(1, 8)

Indicador de logro

2.2 Determina la ecuación y grafica una recta utilizando el valor de su pendiente y las coordenadas del punto sobre ella.

Secuencia

En esta clase se dan dos condiciones mínimas para establecer la ecuación de una línea recta: un punto de esta y su pendiente; luego, para graficarla bastará utilizar la ecuación para determinar otro punto de la gráfica. Puede desarrollar el Problema inicial si es muy difícil para los estudiantes.

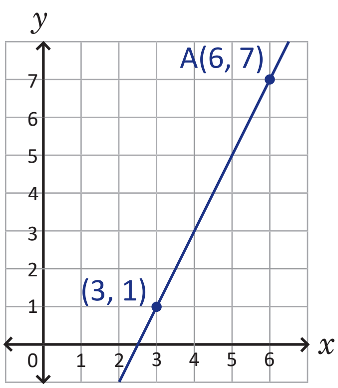
Propósito

Con el Problema inicial, se deducirá la forma punto-pendiente de la recta a partir de la definición de la clase anterior, esta forma permite determinar fácilmente puntos de la recta determinando el valor de y para un x dado.

Solución de problemas:

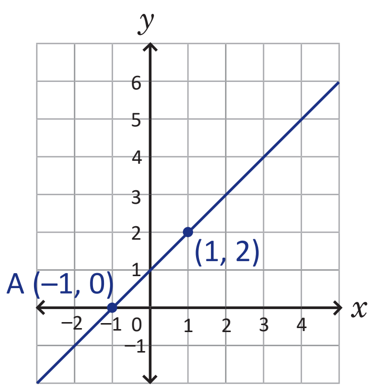
a) Pendiente $m = 2$, A(6, 7)

$$y - 7 = 2(x - 6)$$
$$y = 2x - 5$$
$$x = 3,\ y = 2(3) - 5 = 1,\ (3, 1)$$



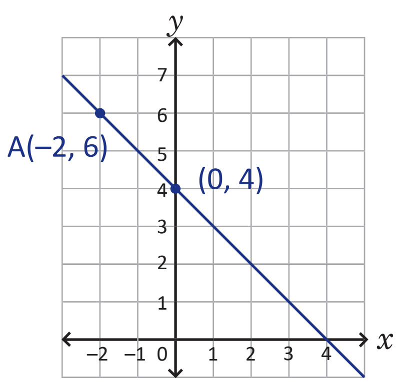
b) Pendiente $m = 1$, A(–1, 0)

$$y - 0 = 1[x - (-1)]$$
$$y = x + 1$$
$$x = 1,\ y = 1 + 1 = 2,\ (1, 2)$$



c) Pendiente $m = -1$, A(–2, 6)

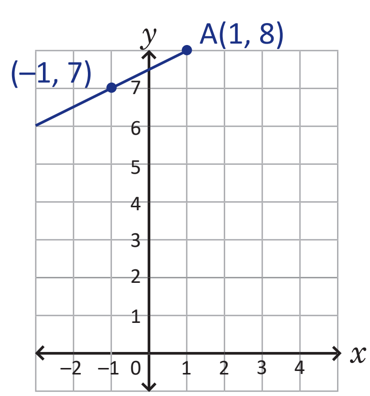
$$y - 6 = -1[x - (-2)]$$
$$y = -x - 2 + 6$$
$$y = -x + 4$$
$$x = 0,\ y = -0 + 4 = 4,\ (0, 4)$$



d) Pendiente $m = \frac{1}{2}$, A(1, 8)

$$y - 8 = \frac{1}{2}(x - 1)$$
$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 8$$
$$y = \frac{1}{2}x + \frac{15}{2}$$

$x = -1,\ y = 7,\ (-1, 7)$



2.3 Ecuación de una recta dados dos puntos

Problema inicial

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(–1, –3) y B(2, 9) y grafícala.

Solución

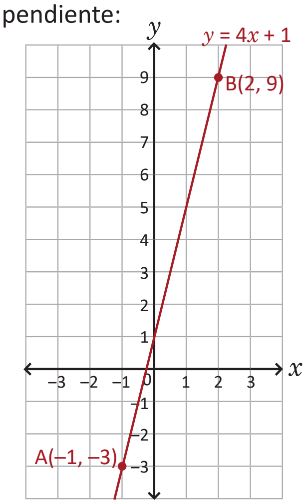
Para utilizar la ecuación punto – pendiente es necesario encontrar la pendiente de la recta. Por definición,

$$m = \frac{9-(-3)}{2-(-1)} = 4.$$

Se toman $x_1 = -1$, $y_1 = -3$ y se sustituyen los valores en la ecuación punto – pendiente:

> También puedes utilizar las coordenadas de B en la forma punto – pendiente y verificar que la ecuación es la misma.

$$y-(-3) = 4[x-(-1)]$$
$$y + 3 = 4(x+1)$$
$$y = 4x + 1$$



Por lo tanto, la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(–1, –3) y B(2, 9) es $y = 4x + 1$. Para graficarla basta con colocar dos puntos pertenecientes a la recta (estos pueden ser los puntos A y B dados en el enunciado del problema) y trazar la línea como lo muestra la figura de la derecha:

Conclusión

La ecuación de una recta l que pasa por dos puntos conocidos A(x_1, y_1) y B(x_2, y_2), con $x_1 \neq x_2$ es:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

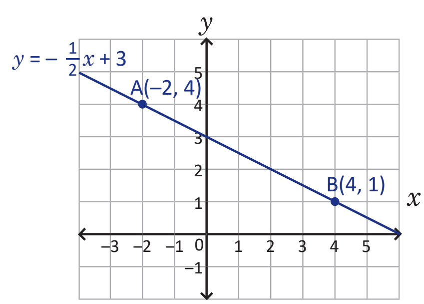
Para graficar la recta l se colocan los puntos A y B en el plano cartesiano, luego se traza la recta que pasa por ambos puntos. En general, para trazar la gráfica de una línea recta l basta con ubicar dos puntos pertenecientes a l y trazar la recta que pasa por ambos.

Ejemplo

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(–2, 4) y B(4, 1) y grafícala.

Se sustituyen los valores de x_1, y_1, x_2 y y_2:

$$y - 4 = \frac{1-4}{4-(-2)}[x-(-2)]$$
$$y = \frac{-3}{6}(x+2) + 4$$
$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$



La gráfica de $y = -\frac{1}{2}x + 3$ se muestra en la figura de la derecha.

Problemas

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B; grafica la recta para cada caso:

a) A(–3, –1) y B(1, –5)

b) A(2, –2) y B(3, 1)

c) A(0, –5) y B(6, 4)

d) A(0, 4) y B(12, –6)

Indicador de logro

2.3 Determina la ecuación y grafica la recta que pasa por dos puntos conocidos.

Secuencia

Ahora se estudia la forma de la ecuación de la recta a partir de dos de sus puntos.

Propósito

Para resolver el Problema inicial, se debe utilizar la forma punto-pendiente. Para dibujar la recta es suficiente utilizar los puntos proporcionados.

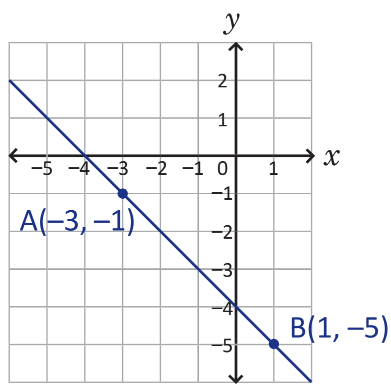
Solución de problemas:

a) A(–3, –1) y B(1, –5)

$$y - (-1) = \frac{-5 - (-1)}{1 - (-3)}[x - (-3)]$$

$$y = -(x + 3) - 1$$

$$y = -x - 4$$

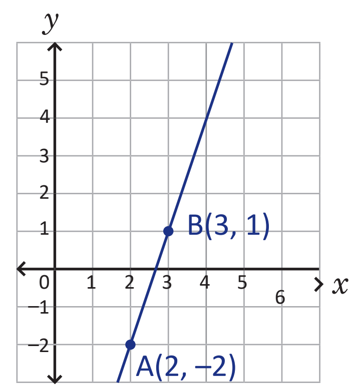


b) A(2, –2) y B(3, 1)

$$y - 1 = \frac{1 - (-2)}{3 - 2}(x - 3)$$

$$y = 3(x - 3) + 1$$

$$y = 3x - 8$$

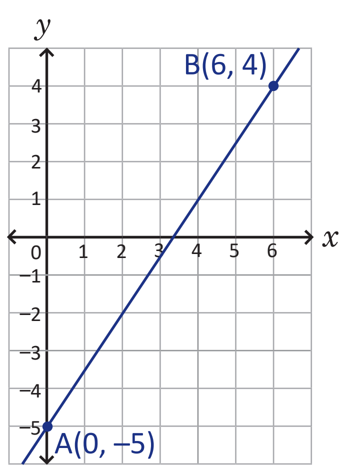


c) A(0, –5) y B(6, 4)

$$y - (-5) = \frac{4 - (-5)}{6 - 0}(x - 0)$$

$$y = \frac{9}{6}x - 5$$

$$y = \frac{3}{2}x - 5$$

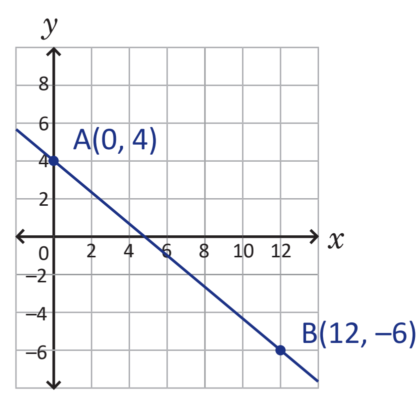


d) A(0, 4) y B(12, –6)

$$y - 4 = \frac{-6 - 4}{12 - 0}(x - 0)$$

$$y = \frac{-10}{12}x + 4$$

$$y = -\frac{5}{6}x + 4$$



2.4 Rectas paralelas a los ejes de coordenadas

Problema inicial

Para cada caso, grafica la recta que pasa por los puntos A y B, y deduce su ecuación:

a) A(1, 2) y B(3, 2)

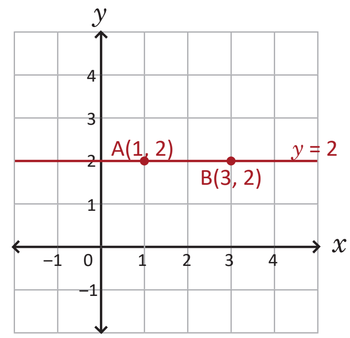
b) A(1, –1) y B(1, 3)

Solución

a) Se colocan los puntos A y B en el plano cartesiano y se traza la línea recta como lo muestra la figura de la derecha; el resultado es una recta horizontal, o sea, paralela al eje x. Su ecuación se encuentra utilizando lo visto en la clase anterior:

$$y - 2 = \frac{2-2}{3-1}(x-1)$$
$$y = \frac{0}{2}(x-1) + 2$$
$$y = 2$$

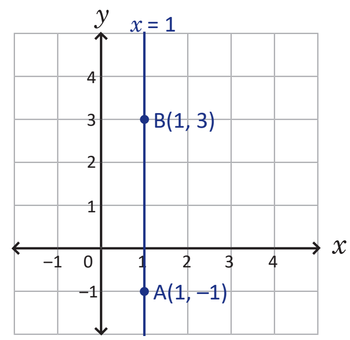
Por lo tanto, la ecuación de la recta es $y = 2$.



b) Al colocar los puntos A(1, –1) y B(1, 3) en el plano cartesiano y trazar la línea recta se obtiene una recta vertical, es decir, paralela al eje y. Si se calcula la pendiente de la misma se obtiene lo siguiente:

$$m = \frac{3-(-1)}{1-1} = \frac{4}{0}$$

Esto indica que la pendiente es indefinida. La primera coordenada de los puntos sobre la recta es siempre constante e igual a 1 (no así la segunda coordenada), por lo tanto, la ecuación de la recta es: $x = 1$.



Conclusión

La ecuación de una recta l paralela a uno de los ejes de coordenadas es:

a) $y = k$, si la recta es paralela al eje x. El punto $(0, k)$ pertenece a la recta l.

b) $x = k$, si la recta es paralela al eje y. El punto $(k, 0)$ pertenece a la recta l.

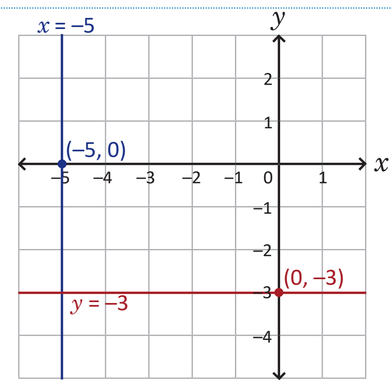
Ejemplo

Grafica las rectas $y = -3$ y $x = -5$.

Se ubican los puntos (0, –3) y (–5, 0). Luego, se traza la recta:

1. Paralela al eje x que pasa por (0, –3) en el caso de $y = -3$;
2. Paralela al eje y que pasa por (–5, 0) en el caso de $x = -5$.

Ambas rectas se presentan en la figura de la derecha.



Problemas

1. Encuentra la ecuación y grafica la recta que pasa por el punto A y es paralela a uno de los ejes de coordenadas:

   a) A(0, 4) y es paralela al eje x.

   b) $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y es paralela al eje x.

   c) A(5, 0) y es paralela al eje y.

   d) A(3, –1) y es paralela al eje y.

2. Demuestra que la pendiente de cualquier recta horizontal es igual a cero.

Indicador de logro

2.4 Encuentra la ecuación y grafica la recta paralela a uno de los ejes de coordenadas que pasa por un punto dado.

Secuencia

Las formas de la ecuación de la recta que se han estudiado hasta ahora no consideran el caso en el cual la recta es vertical, ya que se había estudiado como función, ahora se hace en el bloque de geometría analítica. En esta clase se estudian las ecuaciones de las rectas verticales y horizontales.

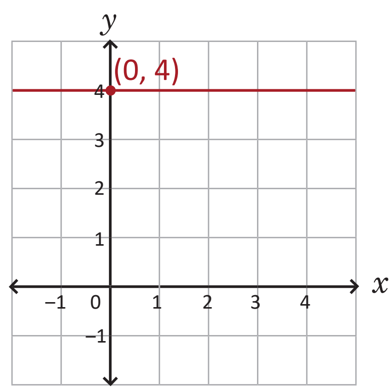
Propósito

En el problema inicial es posible deducir la ecuación de la recta horizontal utilizando las formas ya estudiadas, en el caso de la recta vertical el estudiante puede deducirla a partir de la gráfica.

Solución de problemas:

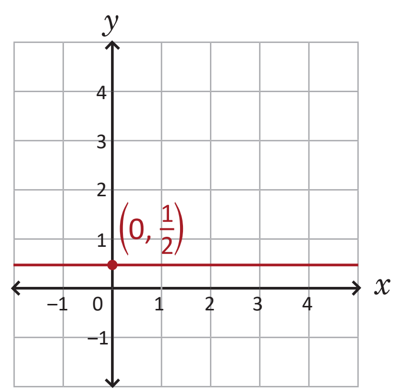
a) A(0, 4) y es paralela al eje x.

$y = 4$



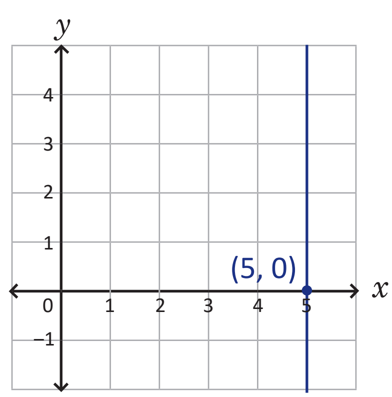
b) A $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y es paralela al eje x.

$y = \frac{1}{2}$



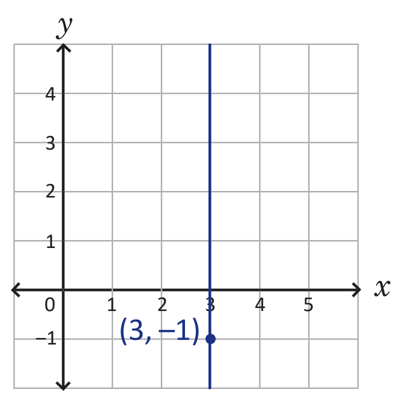
c) A(5, 0) y es paralela al eje y.

$x = 5$



d) A(3, –1) y es paralela al eje y.

$x = 3$



2. Sea k un número real.
Para calcular la pendiente de la recta $y = k$ basta tomar dos puntos sobre la recta, estos puede ser $(0, k)$ y $(1, k)$.
Entonces $m = \frac{k-k}{1-0} = 0$.

2.5 Forma general de la ecuación de una recta

Problema inicial

Grafica en un mismo plano cartesiano las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 3y + 6 = 0$ b) $y + 2 = 0$ c) $4x - 24 = 0$

Despeja y en los literales a) y b), y x en el literal c).

Solución

a) Se despeja la variable y:

$$3y = 2x + 6$$
$$y = \frac{2}{3}x + 2$$

Esta última es la ecuación de una línea recta, que pasa por los puntos (0, 2) y (3, 4).

b) Se despeja la variable y:

$$y = -2$$

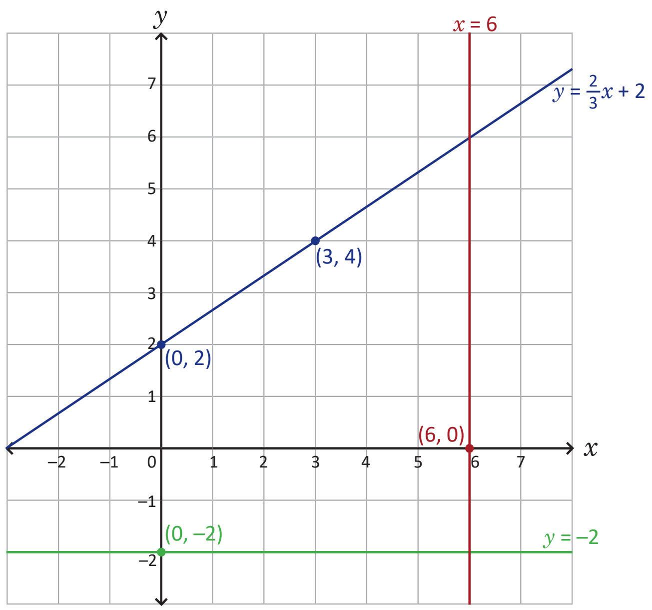
Esta última es la ecuación de una línea recta paralela al eje x que pasa por el punto (0, –2).

c) Se despeja la variable x:

$$4x = 24$$
$$x = 6$$

Esta última es la ecuación de una línea recta paralela al eje y que pasa por el punto (6, 0).

En el literal a), para encontrar los puntos (0, 2) y (3, 4) se sustituyeron los valores $x = 0$ y $x = 3$ en la ecuación de la recta y se encontraron sus respectivos valores $y = 2$ y $y = 4$.



Definición

La ecuación de la forma $ax + by + c = 0$, donde a, b y c son números reales (a y b no pueden ser cero al mismo tiempo), tiene por gráfica una línea recta.

A esta ecuación se le llama **forma general de la ecuación de una recta**.

La forma general de la ecuación de una recta no es única. Por ejemplo, las ecuaciones $2x - y + 1 = 0$, $-2x + y - 1 = 0$ y $4x - 2y + 2 = 0$ representan la misma recta. Los coeficientes de la segunda son los opuestos de los de la primera, y los coeficientes de la tercera son el doble de los de la primera.

Problemas

1. Grafica, en un mismo plano cartesiano, las rectas representadas por las siguientes ecuaciones:

   a) $3x + y - 5 = 0$ b) $x - 2y - 9 = 0$ c) $5y - 5 = 0$ d) $2x + 3 = 0$

2. Escribe las siguientes ecuaciones de líneas rectas en su forma general (utiliza coeficientes enteros):

   a) $y = -2x + \frac{5}{4}$ b) $y = \frac{3}{5}x + 2$ c) $y = -\frac{5}{6}$ d) $x = \frac{8}{3}$

Indicador de logro

2.5 Grafica líneas rectas cuya ecuación es de la forma $ax + by + c = 0$.

Secuencia

El estudiante debe comprender que todas las formas de la ecuación de la recta se pueden escribir en la forma general. Puede discutir las ventajas de la forma general y la forma punto-pendiente, posteriormente se confirmará en la resolución de problemas.

Solución de problemas:

1a) $3x + y - 5 = 0$

$$y = -3x + 5$$

Puntos $(0, 5), (1,2)$

1b) $x - 2y - 9 = 0$

$$-2y = -x + 9$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$$

Puntos $(1, -4), (3, -3)$

1c) $5y - 5 = 0$

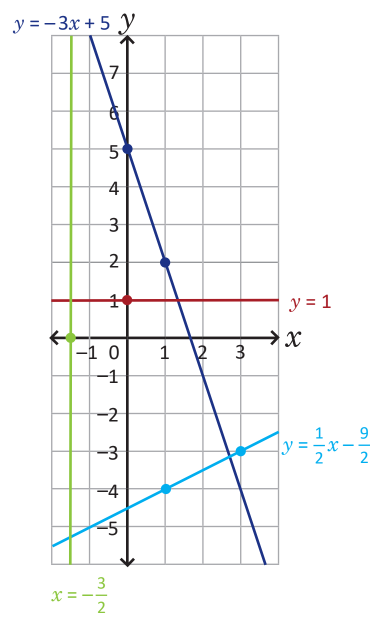
$$y = 1$$

Puntos $(0, 1)$

1d) $2x + 3 = 0$

$$x = -\frac{3}{2}$$

Punto $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$



2a)

$$y = -2x + \frac{5}{4}$$

$$4y = -8x + 5$$

$$8x + 4y - 5 = 0$$

2b)

$$y = \frac{3}{5}x + 2$$

$$5y = 3x + 10$$

$$-3x + 5y - 10 = 0$$

2c)

$$y = -\frac{5}{6}$$

$$6y = -5$$

$$6y + 5 = 0$$

2d)

$$x = \frac{8}{3}$$

$$3x = 8$$

$$3x - 8 = 0$$

2.6 Practica lo aprendido

1. Para cada literal, determina (sin graficar) si los puntos A, B y C se encuentran sobre la misma línea recta:

a) A(0, 7), B(2, 3) y C(3, 1)

b) A(–3, 5), B(1, 2) y C(5, –1)

c) A(–1, –6), B(0, –2) y C(1, 3)

d) A(–4, 8), B(2, 4) y C(20, –8)

2. Dados los puntos A(0, –3) y B(6, 4), ¿cuál debe ser el valor de x en C(x, 25) para que los puntos A, B y C estén sobre la misma línea recta?

3. Para cada literal encuentra la ecuación de la recta que tiene la pendiente dada y pasa por el punto A; grafícalas en un solo plano:

a) Pendiente $m = -4$, A(–3, 5)

b) Pendiente $m = 10$, A(1, –1)

c) Pendiente $m = \frac{1}{5}$, A(0, 4)

d) Pendiente $m = \frac{2}{5}$, A$\left(-2, -\frac{4}{5}\right)$

4. Demuestra que la ecuación de la recta que tiene pendiente conocida m y pasa por el punto (0, b) es $y = mx + b$.

A la ecuación de la recta escrita en la forma $y = mx + b$ se le conoce como forma punto – intercepto.

5. Para cada literal encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B; grafícalas en un solo plano cartesiano:

a) A(5, 1) y B(6, –2)

b) A(–4, –4) y B(2, 5)

c) A$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y B$\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

d) A(0, 0) y B$\left(2, -\frac{13}{4}\right)$

6. Para cada literal encuentra la ecuación de la recta paralela a uno de los ejes de coordenadas y pasa por el punto A; grafícalas en un solo plano cartesiano:

a) A(9, 0) y es paralela al eje y

b) A(–5, 2) y es paralela al eje x

c) A$\left(\frac{7}{2}, 5\right)$ y es paralela al eje y

d) A$\left(\frac{5}{6}, -\frac{9}{2}\right)$ y es paralela al eje x

7. Escribe las siguientes ecuaciones de líneas rectas en su forma general (utiliza coeficientes enteros):

a) $y = 4x + 3$

b) $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{6}$

c) $y = 4x - \frac{2}{3}$

d) $y = -\frac{x}{5} - 1$

8. Encuentra los valores de m y b en la ecuación $y = mx + b$ si la recta pasa por los puntos (–1, 0) y (3, 2).

Indicador de logro

2.6 Resuelve problemas correspondientes a la ecuación de la línea recta.

Solución de problemas:

1a) A(0, 7) y B(2, 3):

$\frac{3-7}{2-0} = \frac{-4}{2} = -2$

A(0, 7), C(3, 1):

$\frac{1-7}{3-0} = \frac{-6}{3} = -2$

A, B y C están sobre la misma recta.

1b) A(–3, 5), B(1, 2):

$\frac{2-5}{1-(-3)} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$

B(1, 2), C(5, –1):

$\frac{-1-2}{5-1} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$

A, B y C están sobre la misma recta.

1c) A(–1, –6), B(0, –2):

$\frac{-2-(-6)}{0-(-1)} = \frac{4}{1} = 4$

B(0, –2), C(1, 3):

$\frac{3-(-2)}{1-0} = \frac{5}{1} = 5$

A, B y C no están sobre la misma recta.

1d) A(–4, 8), B(2, 4)

$\frac{4-8}{2-(-4)} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$

B(2, 4), C(20, –8):

$\frac{-8-4}{20-2} = \frac{-12}{18} = -\frac{2}{3}$

A, B y C están sobre la misma recta.

2. $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{4-(-3)}{6-0} = \frac{7}{6}$

$\frac{25-4}{x-6} = \frac{7}{6}$

$21(6) = 7(x-6)$

$\frac{21(6)}{7} = x-6$

$18 = x-6$

$x = 24$

3a) $y-5 = -4[x-(-3)]$

$y = -4x-7$

3b) $y-(-1) = 10(x-1)$

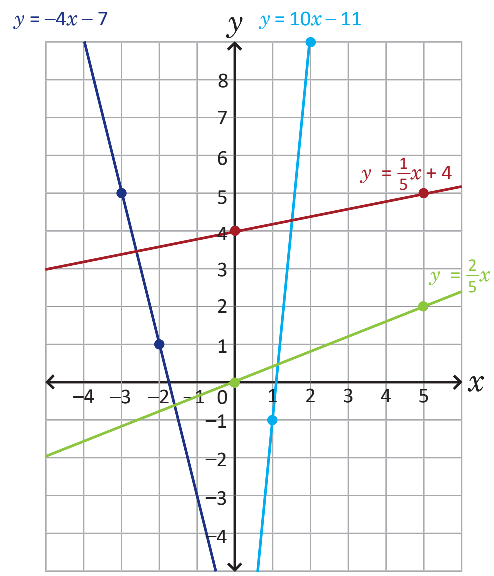
$y = 10x-11$

3c) $y-4 = \frac{1}{5}(x-0)$

$y = \frac{1}{5}x+4$

3d) $y-\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{2}{5}[x-(-2)]$

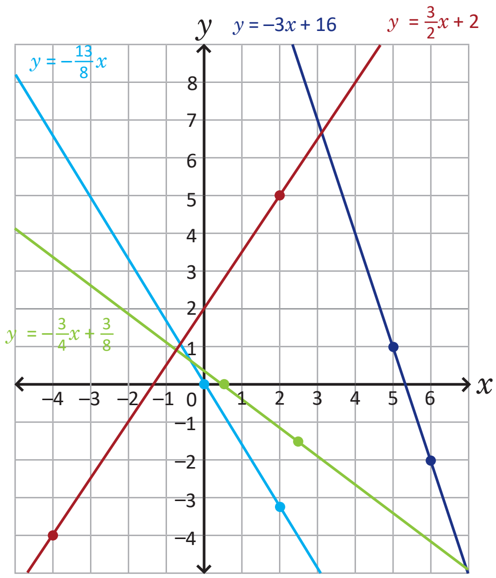
$y = \frac{2}{5}x$



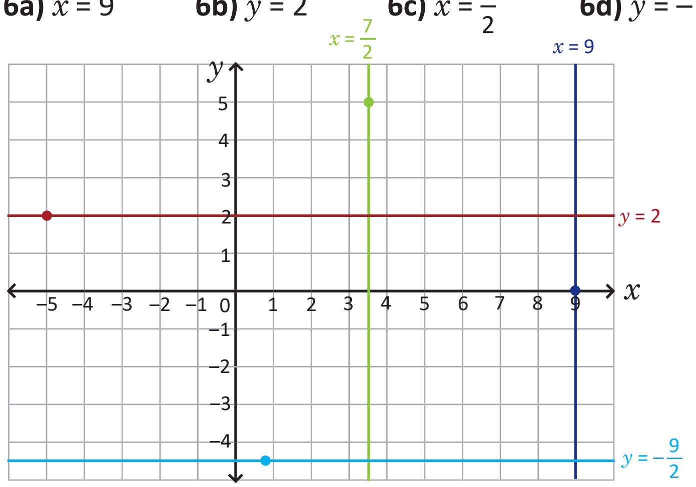
4. $y-b = m(x-0)$ entonces $y = mx+b$.

5a) $y = -3x+16$ **5b)** $y = \frac{3}{2}x+2$

5c) $y = -\frac{3}{4}x+\frac{3}{8}$ **5d)** $y = -\frac{13}{8}x$



6a) $x = 9$ **6b)** $y = 2$ **6c)** $x = \frac{7}{2}$ **6d)** $y = -\frac{9}{2}$



7a) $4x-y+3 = 0$ **7b)** $8x-6y+1 = 0$

7c) $12x-3y-2 = 0$ **7d)** $x+5y+5 = 0$

8. Evaluando los puntos (–1, 0) y (3, 2) en la ecuación $y = mx+b$ se tiene: $\begin{cases} 0 = -m+b \\ 2 = 3m+b \end{cases} \Rightarrow m = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$

3.1 Intersección de una recta con el eje x

Problema inicial

En cada literal, encuentra las coordenadas del punto de intersección de la recta con el eje x:

a) $y = 3x + 3$ b) $x + 2y - 2 = 0$

Punto de intersección se refiere al punto donde se cortan la recta y el eje x en este caso.

Solución

Sea A(x_1, y_1) el punto de intersección entre la recta y el eje x. En ambos casos, A se encuentra sobre el eje x, por tanto su segunda coordenada (y_1) es igual a cero y A(x_1, 0).

a) Si el punto A(x_1, 0) se encuentra sobre la recta, entonces satisface la ecuación:

$$y = 3x + 3$$

Se sustituyen las coordenadas de A en la ecuación anterior y se despeja x_1:

$$0 = 3x_1 + 3$$
$$3x_1 = -3$$
$$x_1 = -1$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto de intersección de la recta $y = 3x + 3$ con el eje x son A(–1, 0).

b) De forma similar al literal anterior, si el punto A(x_1, 0) se encuentra sobre la recta entonces satisface la ecuación:

$$x + 2y - 2 = 0$$

Se sustituyen las coordenadas de A en la ecuación anterior y se despeja x_1:

$$x_1 + 2(0) - 2 = 0$$
$$x_1 = 2$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto de intersección de la recta $x + 2y - 2 = 0$ con el eje x son A(2, 0).

Conclusión

Dada una recta l, las coordenadas del punto de intersección de la recta con el eje x son (x_1, 0) donde el valor de x_1 se calcula sustituyendo $y = 0$ y $x = x_1$ en la ecuación de la recta, y despejando el valor de x_1.

Problemas

1. Para cada literal, encuentra las coordenadas del punto de intersección de la recta con el eje x.

a) $y = 2x - 2$ b) $y = -\frac{x}{2} + 2$ c) $2x - 3y + 6 = 0$

d) $8x + 3y + 6 = 0$ e) $x = \sqrt{2}$ f) $y = \sqrt{3}$

2. Dada una recta con ecuación $ax + by + c = 0$ que no es paralela a ningún eje de coordenadas. Demuestra que las coordenadas del punto de intersección de la recta con el eje x son $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$.

3. Sea l una recta con ecuación $x = k$. Demuestra que las coordenadas del punto de interserrción de l con el eje x son (k, 0).

4. Sea l una recta paralela al eje x. ¿Existe un punto de intersección entre la recta l y el eje x? Justifica tu respuesta.

Indicador de logro

3.1 Encuentra las coordenadas del punto de intersección de una línea recta con el eje x.

Secuencia

En esta lección se estudian las propiedades de la recta iniciando, en esta clase, con la intersección con el eje x.

Propósito

En los Problemas, el estudiante determinará el punto de intersección en las distintas formas de la ecuación de la recta. Los problemas 2, 3 y 4 generalizan los resultados del problema 1.

Solución de problemas:

1a)
$$0 = 2x_1 - 2$$
$$2x_1 = 2$$
$$x_1 = 1$$
$$(1, 0)$$

1b)
$$0 = -\frac{x_1}{2} + 2$$
$$0 = -x_1 + 4$$
$$x_1 = 4$$
$$(4, 0)$$

1c)
$$2x_1 - 3(0) + 6 = 0$$
$$2x_1 = -6$$
$$x_1 = -3$$
$$(-3, 0)$$

1d)
$$8x_1 + 3(0) + 6 = 0$$
$$8x_1 = -6$$
$$x_1 = -\frac{3}{4}$$
$$\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$$

1e)
$$x = \sqrt{2}$$
$$x_1 = \sqrt{2}$$
$$(\sqrt{2}, 0)$$

1f) Los puntos de la gráfica de $y = \sqrt{3}$ son de la forma $(k, \sqrt{3})$, donde k es un número real, así la recta no interseca al eje x.

Otra solución: la recta es paralela al eje x por lo que no se intersecan.

2. $ax_1 + b(0) + c = 0$

$ax_1 + c = 0$, con $a \neq 0$ ya que la recta no es paralela al eje x.

$$x_1 = -\frac{c}{a}$$

Por lo tanto, el punto de intersección del eje x con la recta es $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$.

3. Los puntos de la recta $x = k$ son de la forma (k, l) donde l es un número real.
Un punto está sobre el eje x si su segunda coordenada es cero.
Entonces el punto de intersección de la recta $x = k$ con el eje x es el punto $(k, 0)$.

4. Una recta paralela al eje x es de la forma $y = l$ y sus puntos son de la forma (k, l).
Un punto está sobre el eje x si su segunda coordenada es cero.
Si $l = 0$ entonces $y = 0$, esta recta es precisamente el eje x.
Si $l \neq 0$ entonces la recta $y = l$ no interseca al eje x.

3.2 Intersección de una recta con el eje y

Problema inicial

Utilizando las ecuaciones de las rectas del Problema inicial de la clase anterior, encuentra las coordenadas del punto de intersección de cada recta con el eje y.

Solución

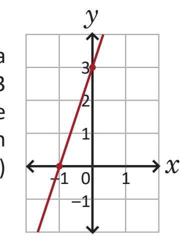
Sea B(x_1, y_1) el punto de intersección entre la recta y el eje y. En ambos casos, B se encuentra sobre el eje y, por tanto su primera coordenada (x_1) es igual a cero y B(0, y_1).

a) Si el punto B(0, y_1) se encuentra sobre la recta, entonces satisface la ecuación: $y = 3x + 3$. Se sustituyen las coordenadas de B en la ecuación anterior y se encuentra y_1:

$$y_1 = 3(0) + 3$$
$$y_1 = 3$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto de intersección de la recta $y = 3x + 3$ con el eje y son B(0, 3).

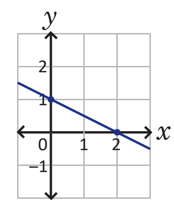
Gráficamente, la recta $y = 3x + 3$ corta a los ejes de coordenadas en los puntos (–1, 0) y (0, 3).



b) De manera similar al literal anterior, si el punto B(0, y_1) se encuentra sobre la recta entonces satisface la ecuación: $x + 2y - 2 = 0$. Se sustituyen las coordenadas de B en la ecuación anterior y se despeja y_1:

$$0 + 2y_1 - 2 = 0$$
$$2y_1 = 2$$
$$y_1 = 1$$

Gráficamente, la recta $x + 2y - 2 = 0$ corta a los ejes de coordenadas en los puntos (2, 0) y (0, 1).



Por lo tanto, las coordenadas del punto de intersección de la recta $x + 2y - 2 = 0$ con el eje y son B(0, 1).

Conclusión

Dada una recta l, las coordenadas del punto de intersección de la recta con el eje y son (0, y_1), donde el valor de y_1 se calcula sustituyendo $y = y_1$ y $x = 0$ en la ecuación de la recta, y despejando el valor de y_1.

Si l es paralela al eje x entonces su ecuación es de la forma $y = k$ y el punto de intersección de la recta con el eje y es (0, k). Si l es paralela al eje y entonces no hay intersección entre la recta y el eje y.

En general, a los puntos donde una línea recta corta a los ejes de coordenadas se les llaman **interceptos con los ejes**. La línea recta puede tener a lo sumo dos interceptos (uno en cada eje).

Problemas

1. Con las ecuaciones de las rectas dadas en el problema 1 de la clase anterior, encuentra las coordenadas del punto de intersección de cada recta con el eje y.

2. Para cada literal encuentra las coordenadas de los interceptos con los ejes:
   a) $2x - 3y - 6 = 0$ b) $4x + y + 2 = 0$

3. Sean p y q números reales diferentes de cero. Demuestra que los interceptos con los ejes de la recta con ecuación $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ son (p, 0) y (0, q). A esta ecuación se le llama **forma simétrica de la ecuación de una recta**.

Indicador de logro

3.2 Encuentra las coordenadas del punto de intersección de una línea recta con el eje y.

Secuencia

Ahora se estudia la intersección de una recta con el eje y, el razonamiento a utilizar para determinar el intercepto es análogo al de la clase anterior.

Solución de problemas:

1a) $y_1 = 2(0) - 2$
$y_1 = -2$
$(0, -2)$

1b) $y_1 = -\frac{0}{2} + 2$
$y_1 = 2$
$(0, 2)$

1c) $2(0) - 3y_1 + 6 = 0$
$-3y_1 = -6$
$y_1 = 2$
$(0, 2)$

1d) $8(0) + 3y_1 + 6 = 0$
$3y_1 = -6$
$y_1 = -2$
$(0, -2)$

1e) Los puntos de la gráfica de $x = \sqrt{2}$ son de la forma $(\sqrt{2}, k)$, donde k es un número real, así la recta no interseca al eje y.
Otra solución: la recta es paralela al eje y por lo que no se intersecan.

1f) $y = \sqrt{3}$
$y_1 = \sqrt{3}$
$(\sqrt{3}, 0)$

2a) $2x - 3y - 6 = 0$

Si $y = 0$

$2x_1 - 3(0) - 6 = 0$
$2x_1 = 6$
$x_1 = 3$
Intercepto con el eje x $(3, 0)$.

Si $x = 0$

$2(0) - 3y_1 - 6 = 0$
$-3y_1 = 6$
$y_1 = -2$
Intercepto con el eje y $(0, -2)$.

2b) $4x + y + 2 = 0$

Si $y = 0$

$4x_1 - (0) + 2 = 0$
$4x_1 = -2$
$x_1 = -\frac{1}{2}$
Intercepto con el eje x $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

Si $x = 0$

$4(0) + y_1 + 2 = 0$
$y_1 = -2$
Intercepto con el eje y $(0, -2)$.

3. $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$
$\frac{x}{p} + \frac{0}{q} = 1$
$\frac{x}{p} = 1$
$x = p$

Intercepto con el eje x $(p, 0)$.

$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$
$\frac{0}{p} + \frac{y}{q} = 1$
$\frac{y}{q} = 1$
$y = q$

Intercepto con el eje y $(0, q)$.

3.3 Intersección entre rectas

Problema inicial

Encuentra las coordenadas del punto de intersección entre las rectas con ecuaciones $y = -x + 3$ y $2x - 3y + 4 = 0$.

El punto de intersección entre las rectas satisface ambas ecuaciones.

Solución

Sea P(x, y) el punto de intersección entre ambas rectas. Esto indica que las coordenadas de P satisfacen tanto la primera como la segunda ecuación, y encontrar sus coordenadas equivale a resolver el sistema:

$$\begin{cases} y = -x + 3 & \text{---------} \ (1) \\ 2x - 3y + 4 = 0 & \text{---------} \ (2) \end{cases}$$

Se sustituye el valor de y de la ecuación (1) en la ecuación (2) y se despeja la variable x:

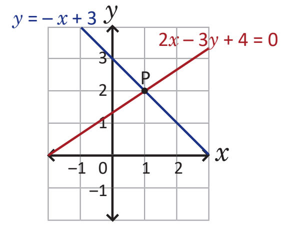
$$2x - 3(-x + 3) + 4 = 0$$
$$2x + 3x = 9 - 4$$
$$5x = 5$$
$$x = 1$$

Se sustituye el valor de x en la ecuación (1):

$$y = -1 + 3 = 2$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto de intersección entre las rectas es P(1, 2).

El punto donde se cortan las rectas de $y = -x + 3$ y $2x - 3y + 4 = 0$ es P(1, 2).



Conclusión

Dadas dos líneas rectas, las coordenadas del punto de intersección entre ambas (es decir, donde se cortan las líneas) se encuentra resolviendo el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas formadas por las ecuaciones de dichas rectas.

Si dos rectas diferentes se intersecan en un punto P este es único, es decir, no existe otro punto R diferente a P donde las rectas se crucen o se corten.

Problemas

1. Encuentra las coordenadas del punto de intersección entre cada pareja de rectas cuyas ecuaciones son:

a) $y = -3x - 8$ y $4x - 3y + 15 = 0$
b) $x + y - 2 = 0$ y $2x - y + 2 = 0$
c) $x + 2y + 6 = 0$ y $4x + 3y + 4 = 0$
d) $2x + 3y = 4$ y $4x - y = 8$
e) $y = x + 1$ y $x = -2$
f) $3x - 2y - 5 = 0$ y $y = 2$

2. Dadas dos rectas con ecuaciones $y = k_1$ y $x = k_2$, ¿cuáles son las coordenadas del punto de intersección entre ambas rectas?

3. Dadas dos rectas con ecuaciones $10x - 5y = 10$ y $10x - 5y = -25$, ¿se cortan estas en algún punto? Verifica gráficamente tu respuesta.

Indicador de logro

3.3 Determina las coordenadas del punto de intersección entre dos rectas.

Secuencia

Se determina el punto de intersección entre dos rectas dadas, utilizando los métodos para resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas que se estudiaron en Tercer Ciclo. Se verifica la utilidad de la forma general en el planteamiento del sistema de ecuaciones.

Solución de problemas:

1a) $\begin{cases} y = -3x - 8 & \text{---- (1)} \\ 4x - 3y + 15 = 0 & \text{---- (2)} \end{cases}$

Sustituyendo (1) en (2):

$4x - 3(-3x - 8) + 2 = 0$

$4x + 9x + 26 = 0$

$13x = -26$

$x = -2$

Entonces $y = -3(-2) - 8 = -2$.

Punto de intersección:

$(-2, -2)$.

1b) $\begin{cases} x + y - 2 = 0 & \text{---- (1)} \\ 2x - y + 2 = 0 & \text{---- (2)} \end{cases}$

Sumando (1) y (2) se tiene

$3x = 0$ entonces $x = 0$.

Sustituyendo en (1),

$0 + y - 2 = 0$

$y = 2$

Punto de intersección:

$(0, 2)$.

1c) $\begin{cases} x + 2y + 6 = 0 & \text{---- (1)} \\ 4x + 3y + 4 = 0 & \text{---- (2)} \end{cases}$

Despejando x en (1):

$x = -2y - 6$.

Sustituyendo en (2):

$4(-2y - 6) + 3y + 4 = 0$

$-8y - 24 + 3y + 4 = 0$

$-5y = 20$

$y = -4$

Entonces $x = -2(-4) - 6 = 2$.

Punto de intersección $(2, -4)$.

1d) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 & \text{---- (1)} \\ 4x - y = 8 & \text{---- (2)} \end{cases}$

Punto de intersección:

$(2, 0)$.

1e) $\begin{cases} y = x + 1 & \text{---- (1)} \\ x = -2 & \text{---- (2)} \end{cases}$

Punto de intersección:

$(-2, -1)$.

1f) $\begin{cases} 3x - 2y - 5 = 0 & \text{---- (1)} \\ y = 2 & \text{---- (2)} \end{cases}$

Punto de intersección:

$(3, 2)$.

2. $\begin{cases} y = k_1 \text{ ... (1)} \\ x = k_2 \text{ ... (2)} \end{cases}$

Ambas rectas pasan por el punto (k_2, k_1),
por lo tanto su punto de intersección es (k_2, k_1).

3. Si las rectas tienen punto de intersección, debe tener solución el sistema de ecuaciones:

$\begin{cases} 10x - 5y = 10 & \text{---- (1)} \\ 10x - 5y = -25 & \text{---- (2)} \end{cases}$

Restando (2) de (1) se tiene:

$0 = 35$.

Y esto no es cierto, por lo que el sistema no tiene solución y por lo tanto, las rectas no se cortan en ningún punto.

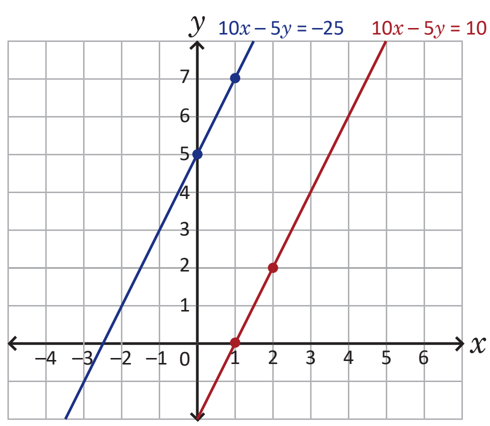
Puntos para $10x - 5y = -25$

$(0, 5)$ y $(1, 7)$

Puntos para $10x - 5y = 10$

$(1, 0)$ y $(2, 2)$

El método de solución utilizado se conoce como reducción al absurdo.



3.4 Rectas paralelas

Problema inicial

Dadas las rectas con ecuaciones $y = 2x + 3$ y $y = 2x - 5$:

1. ¿Cuál es el valor de la pendiente en cada recta?
2. ¿Se cortan las rectas en algún punto? Justifica tu respuesta.
3. Grafica ambas rectas en un mismo plano cartesiano. ¿Cómo son, una con respecto a la otra?

Si la ecuación de una recta está escrita en la forma $y = mx + b$ entonces el coeficiente de la variable x es la pendiente de la recta.

Solución

1. Las ecuaciones de las rectas están escritas en la forma $y = mx + b$, por tanto la pendiente de ambas rectas es igual a 2.

2. Para saber si se cortan las rectas debe resolverse el sistema:

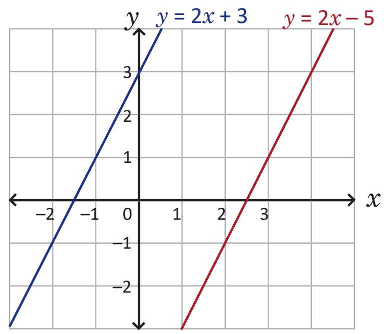
$$\begin{cases} y = 2x + 3 & \text{----------} \ (1) \\ y = 2x - 5 & \text{----------} \ (2) \end{cases}$$

Pero este sistema no tiene solución, ya que al sustituir (1) en (2) resulta:

$$2x + 3 = 2x - 5$$
$$2x - 2x = -3 - 5$$
$$0 = -8$$

Esto indica que las rectas NO se cortan en ningún punto.

3. Las gráficas de ambas rectas se presentan en la figura de la derecha. Como las rectas no se cortan en ningún punto, esto indica entonces que son paralelas.



Dos rectas son paralelas si, aunque se prolonguen, guardan la misma distancia entre sí.

Teorema

Dos (o más) líneas rectas no verticales son paralelas si y solo si tienen la misma pendiente. Esto quiere decir que si dos (o más) rectas son paralelas entonces tienen la misma pendiente y viceversa.

Ejemplo

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto A(1, 3) y es paralela a $2x + y - 1 = 0$.

Se despeja y en $2x + y - 1 = 0$ para encontrar el valor de la pendiente: $y = -2x + 1$; luego, $m = -2$. Como la recta pasa por A(1, 3), se utiliza la forma punto – pendiente de la ecuación de una recta:

$$y - 3 = -2(x - 1)$$
$$y = -2x + 5$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta que pasa por A(1, 3) y es paralela a $2x + y - 1 = 0$ es $y = -2x + 5$.

Problemas

1. Determina si las siguientes parejas de rectas son paralelas:
   a) $y = -4x + 7$; $y = -4x + 16$ b) $3x - 2y + 3 = 0$; $6x - 4y - 9 = 0$ c) $x - 2y + 5 = 0$; $x - 3y = 0$

2. Para cada literal, encuentra la ecuación de la recta paralela a la recta dada y que pasa por el punto A:
   a) $2x - y = 0$; A(4, 0) b) $x + 3y - 5 = 0$; A(3, 4)
   c) $y = 5$; A(0, –1) d) $x = 1$; A(3, –2)

Indicador de logro

3.4 Verifica el paralelismo entre rectas a partir del valor de sus pendientes.

Secuencia

En la lección 2 se estudiaron las rectas paralelas a los ejes coordenados, estas deben tenerse presentes en la resolución de problemas. Para esta clase se relaciona el paralelismo de dos rectas con sus pendientes.

Propósito

Con el Problema se establece la relación entre la pendiente de una recta y las rectas paralelas a esta, además se establece analíticamente que estas rectas no se cortan en un punto por medio del sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de la rectas, el cual no tienen solución.

Solución de problemas:

1a) $y = -4x + 7$; $y = -4x + 16$, son paralelas pues la pendiente de ambas es -4.

1b) $3x - 2y + 3 = 0$; $6x - 4y - 9 = 0$

Se escriben en la forma $y = mx + b$

$y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$; $y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$, son paralelas pues la pendiente de ambas es $\frac{3}{2}$.

1c) $x - 2y + 5 = 0$; $x - 3y = 0$

Se escriben en la forma $y = mx + b$: $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$; $y = \frac{1}{3}x$.

No son paralelas pues tienen pendientes distintas.

2a) $2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x \Rightarrow m = 2$ y A(4, 0)

Utilizando la forma punto-pendiente

$$y - 0 = 2(x - 4).$$

Por lo tanto, la recta es $y = 2x - 8$.

2b) $x + 3y - 5 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$ y A(3, 4)

Utilizando la forma punto-pendiente

$$y - 4 = -\frac{1}{3}(x - 3).$$

Por lo tanto, la recta es $y = -\frac{1}{3}x + 5$.

2c) $y = 5 \Rightarrow m = 0$ y A(0, –1).

Utilizando la forma punto-pendiente

$$y - (-1) = 0(x - 0).$$

Por lo tanto, la recta es $y = -1$.

2d) $x = 1$, es una recta vertical.

Así una recta paralela a esta debe ser vertical y pasar por el punto A(3, –2).

Por lo tanto, la recta es $x = 3$.

3.5 Rectas perpendiculares*

Problema inicial

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el origen y además es perpendicular a la recta con ecuación:

$$y = 3x.$$

¿Cuál es la relación entre las pendientes de ambas rectas?

Solución

La ecuación buscada es de la forma $y = mx$, ya que pasa por el origen; sea P(x, y) un punto cualquiera sobre ella. El punto A(1, 3) pertenece a $y = 3x$ pues sus coordenadas satisfacen la ecuación.

Si O es el origen entonces el triángulo POA es rectángulo (las rectas son perpendiculares). Por el teorema de Pitágoras:

$$d(\text{P, A})^2 = d(\text{P, O})^2 + d(\text{O, A})^2$$

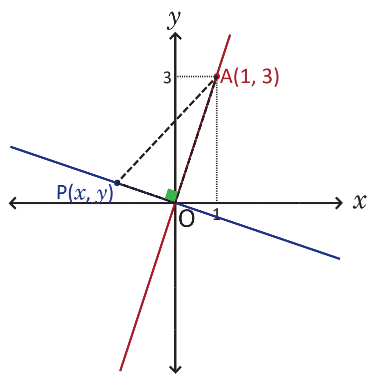
En la ecuación anterior: $d(\text{P, A})^2 = (x-1)^2 + (y-3)^2$, $d(\text{P, O})^2 = x^2 + y^2$ y $d(\text{O, A})^2 = 1^2 + 3^2$. Se sustituyen los valores y se despeja y en términos de x:

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = (x^2 + y^2) + (1 + 9)$$

$$\cancel{x^2} - 2x + \cancel{1} + \cancel{y^2} - 6y + \cancel{9} = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + \cancel{1} + \cancel{9}$$

$$-2x - 6y = 0$$

$$y = -\frac{1}{3}x$$



Por lo tanto, la ecuación de la recta perpendicular a $y = 3x$ que pasa por el origen es: $y = -\frac{1}{3}x$. Al comparar las pendientes de ambas rectas, que son 3 y $-\frac{1}{3}$ respectivamente, se observa que el resultado del producto de ellas es igual a –1.

Teorema

Dos rectas no verticales con pendientes m_1 y m_2 respectivamente son perpendiculares si y solo si el producto de sus pendientes es igual a –1, o sea:

$$m_1 m_2 = -1$$

Esto quiere decir que, si dos rectas son perpendiculares entonces el producto de sus pendientes es igual a –1 y viceversa.

Ejemplo

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto A(1, 3) y es perpendicular a $2x + y - 1 = 0$.

Al despejar y en $2x + y - 1 = 0$ se obtiene $y = -2x + 1$; luego, $m_1 = -2$. Si m_2 es la pendiente de la recta buscada entonces debe cumplir $m_1 m_2 = -1$; se sustituye m_1 y se despeja m_2:

$$-2m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = \frac{1}{2}$$

Por tanto, la ecuación de la recta perpendicular a $2x + y - 1 = 0$ que pasa por A(1, 3) es $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Problemas

1. Determina si las siguientes parejas de rectas son perpendiculares:

   a) $y = -2x$ y $y = \frac{x}{2}$

   b) $y = \frac{4}{3}x$ y $y = -\frac{3}{4}x$

   c) $x - y + 2 = 0$ y $3x + 2y + 6 = 0$

   d) $x - 2y + 2 = 0$ y $2x + y - 6 = 0$

2. Para cada caso encuentra la ecuación de la recta perpendicular a la recta dada que pasa por el punto P:

   a) $y = x$; P(3, 3)

   b) $y = -2x + 5$; P(–4, 3)

   c) $x - 4y + 4 = 0$; P(–1, 5)

   d) $y = 1$; P(1, –1)

Indicador de logro

3.5 Verifica perpendicularidad entre rectas utilizando sus pendientes.

Secuencia

Se determina la recta perpendicular a otra estudiando el caso particular en el que la recta pasa por el origen. El Problema inicial requiere el uso de la fórmula de la distancia y utilizar algún punto de la gráfica, si esto es muy difícil para los estudiantes el docente debe resolver este problema.

Propósito

Al resolver el Problema inicial se establece la relación entre las pendientes de dos rectas que son perpendiculares. Si se vuelve complicado plantear la solución, el docente debe intervenir. Los casos en los que una de las rectas es vertical u horizontal se aborda en los Problemas.

Solución de problemas:

1a) $y = -2x$ y $y = \frac{x}{2}$

$m_1 = -2 \qquad m_2 = \frac{1}{2}$

$m_1m_2 = -2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$

Son perpendiculares.

1b) $y = \frac{4}{3}x$ y $y = -\frac{3}{4}x$

$m_1 = \frac{4}{3} \qquad m_2 = -\frac{3}{4}$

$m_1m_2 = \frac{4}{3}\left(-\frac{3}{4}\right) = -1$

Son perpendiculares.

1c) $y = x + 2$ y $y = -\frac{3}{2}x - 3$

$m_1 = 1 \qquad m_2 = -\frac{3}{2}$

$m_1m_2 = 1\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

No son perpendiculares.

1d) $y = \frac{x}{2} + 1$ y $y = -2x + 6$

$m_1 = \frac{1}{2} \qquad m_2 = -2$

$m_1m_2 = \frac{1}{2}(-2) = -1$

Son perpendiculares.

2a) $y = x$; P(3, 3); $m_1 = 1$

$m_1m_2 = -1$
$1(m_2) = -1$
$m_2 = -1$

$y - 3 = -(x - 3)$
$y = -x + 6$

2b) $y = -2x + 5$; P(–4, 3); $m_1 = -2$

$m_1m_2 = -1$
$-2(m_2) = -1$
$m_2 = \frac{1}{2}$
$y - 3 = \frac{1}{2}[x - (-4)]$
$y = \frac{1}{2}x + 5$

2c) $y = \frac{x}{4} + 1$; P(–1, 5); $m_1 = \frac{1}{4}$

$m_1m_2 = -1$
$\frac{1}{4}(m_2) = -1$
$m_2 = -4$
$y - 5 = -4[x - (-1)]$
$y = -4x + 1$

2d) $y = 1$ es una recta horizontal.
Una recta perpendicular a esta debe ser vertical, además debe pasar por P(1, –1).
Entonces la recta es $x = 1$.

3.6 Distancia de un punto a una recta

Teorema

Dada una recta l con ecuación $ax + by + c = 0$ y P(x_1, y_1) un punto que no pertenece a l, la distancia desde P a la recta l se denota por $d(\text{P}, l)$ y:

$$d(\text{P}, l) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ejemplo

Para cada caso, encuentra la distancia del punto P a la recta l:

a) l: $2x - y + 1 = 0$ y P(2, 0)

b) l: $3x + 2y - 9 = 0$ y P(2, –2)

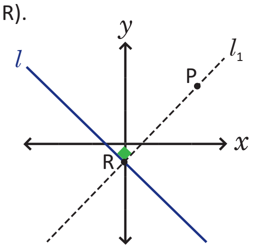
c) l: $y = \frac{x}{3} + \frac{8}{3}$ y P(0, 5)

a) Se sustituyen los valores: $a = 2$, $b = -1$, $c = 1$, $x_1 = 2$ y $y_1 = 0$:

$$d(\text{P}, l) = \frac{|2(2) + (-1)(0) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|4 + 0 + 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

Por lo tanto, la distancia desde P a la recta l es $\sqrt{5}$.

Si l_1 es la recta perpendicular a l que pasa por P y R es el punto de intersección entre l y l_1, entonces, calcular $d(\text{P}, l)$ equivale a encontrar $d(\text{P}, \text{R})$.



b) Se sustituyen los valores: $a = 3$, $b = 2$, $c = -9$, $x_1 = 2$ y $y_1 = -2$:

$$d(\text{P}, l) = \frac{|3(2) + (2)(-2) + (-9)|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{|6 - 4 - 9|}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13}$$

Por lo tanto, la distancia desde P a la recta l es $\frac{7\sqrt{13}}{13}$.

c) Primero debe escribirse la ecuación de la recta en la forma $ax + by + c = 0$. Al multiplicar toda la ecuación por 3 resulta:

$$3y = x + 8$$
$$x - 3y + 8 = 0$$

Luego se sustituyen los valores: $a = 1$, $b = -3$, $c = 8$, $x_1 = 0$ y $y_1 = 5$:

$$d(\text{P}, l) = \frac{|1(0) + (-3)(5) + 8|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{|0 - 15 + 8|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{7}{\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{10}}{10}.$$

Por lo tanto, la distancia desde P a la recta l es $\frac{7\sqrt{10}}{10}$.

Problemas

1. Encuentra la distancia del punto P a la recta l:

a) l: $x + 3y - 3 = 0$ y P(1, –1)

b) l: $2x + y - 4 = 0$ y P(0, 3)

c) l: $y = \frac{3}{4}x$ y P(1, –2)

d) l: $y = \frac{x}{5} + 1$ y P(3, –3)

2. Demuestra que la distancia del origen a la recta l: $ax + by + c = 0$ es $\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Indicador de logro

3.6 Calcula la distancia de un punto a una recta.

Secuencia

En esta clase se utiliza la fórmula de la distancia de un punto a una recta. El estudiante debe comprender qué longitud es la que calcula al utilizar la fórmula.

Propósito

No se deduce la fórmula de la distancia, por ser un problema extenso en resolver, sin embargo se espera que el estudiante sea capaz de utilizar adecuadamente la fórmula.

Solución de problemas:

1a) l: $x + 3y - 3 = 0$ y P(1, –1)

$$d(P, l) = \frac{|1 + 3(-1) - 3|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

1b) l: $2x + y - 4 = 0$ y P(0, 3)

$$d(P, l) = \frac{|2(0) + 3 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

1c) l: $3x - 4y = 0$ y P(1, –2)

$$d(P, l) = \frac{|3(1) - 4(-2)|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|11|}{5} = \frac{11}{5}$$

1d) l: $x - 5y + 5 = 0$ y P(3, –3)

$$d(P, l) = \frac{|3 - 5(-3) + 5|}{\sqrt{1^2 + (-5)^2}} = \frac{|23|}{\sqrt{26}} = \frac{23\sqrt{26}}{26}$$

2. $$d(P, l) = \frac{|a(0) + b(0) + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Puede revisar la demostración de la fórmula en:
https://youtu.be/P740MiWj2GU

3.7 Practica lo aprendido

1. Encuentra las coordenadas de los interceptos de cada recta con los ejes:

a) $y = 2x$
b) $5x + 2y + 10 = 0$
c) $y = \frac{x}{6} - 1$
d) $y = -8x + 4$
e) $y = 3$
f) $x = -4$

2. Encuentra las coordenadas del punto de intersección entre cada pareja de rectas:

a) $x + y - 2 = 0$; $4x - y + 7 = 0$
b) $y = -x$; $3x + y - 6 = 0$
c) $x + 2y + 2 = 0$; $y = 2x + 9$
d) $x - y - 1 = 0$; $y = 3$
e) $3x - y + 3 = 0$; $9x + 7y - 4 = 0$
f) $y = -5$; $x = \frac{1}{4}$

3. Determina si cada pareja de rectas son paralelas o perpendiculares:

a) $y = 3x - 5$; $y = 3x$
b) $y = \frac{x}{4} + 1$; $x - 4y + 2 = 0$
c) $y = -3x - 2$; $x - 3y + 1 = 0$
d) $y = -2$; $x = 1$

4. Encuentra la ecuación de la recta paralela a la recta l que pasa por el punto A:

a) l: $y = -2x + 5$; A(–2, –3)
b) l: $y = 3x + 4$; A(5, –1)

5. Encuentra la ecuación de la recta perpendicular a la recta l que pasa por el punto A:

a) l: $y = -5x - 1$; A(10, 1)
b) l: $3x - 4y + 8 = 0$; A(–6 , 0)

6. Dos rectas l_1 y l_2 se intersecan en el punto (–4, 4). Si l_1 pasa por (0, 12) y es perpendicular a l_2, ¿cuáles son las ecuaciones de ambas rectas?

7. Sea l la recta con ecuación $5x - 2y = 0$. Determina los valores de a y b para que la recta $ax + by + c = 0$:

a) Sea paralela a la recta l.
b) Sea perpendicular a la recta l.

Existen infinitas rectas paralelas y perpendiculares a l: $5x - 2y = 0$; basta con encontrar un par de valores para a y b en cada literal.

8. Sea l la recta con ecuación $x - 3y - 6 = 0$. Determina el valor de a en la recta con ecuación $ax + (a - 4)y + c = 0$ para que:

a) Sea paralela a la recta l.
b) Sea perpendicular a la recta l.

9. Para cada caso, encuentra la distancia del punto P a la recta l:

a) P(4, –9); l: $x + 4y - 2 = 0$
b) P(8, 5); l: $y = x$
c) P(0, –3); l: $y = -2x$
d) P(3, 1); l: $x = -3$

Indicador de logro

3.7 Resuelve problemas correspondientes a posiciones relativas entre rectas.

Solución de problemas:

1a) $y = 2x$

Intercepto en el eje x

$$0 = 2x \Rightarrow x = 0$$

(0, 0) y es también el intercepto con eje y.

1c) $y = \frac{x}{6} - 1$ Intercepto en el eje x (6, 0).

Intercepto en el eje y (0, –1).

1d) $y = -8x + 4$ Intercepto en el eje x $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Intercepto en el eje y (0, 4).

1b) $5x + 2y + 10 = 0$

Intercepto en el eje x

$$5x + 2(0) + 10 = 0$$

$\Rightarrow x = -2$

Por lo tanto, el intercepto en el eje x es (–2, 0).

Intercepto en el eje y

$$5(0) + 2y + 10 = 0$$

$\Rightarrow y = -5$

Por lo tanto, el intercepto en el eje y es (0, –5).

1e) $y = 3$

No tiene intercepto en el eje x.

Intercepto en el eje y (0, 3).

1f) $x = -4$

Intercepto en el eje x (–4, 0).

No tiene intercepto en el eje y.

2a) $\begin{cases} x + y - 2 = 0 & \text{----- (1)} \\ 4x - y + 7 = 0 & \text{----- (2)} \end{cases}$

Sumando (1) y (2) se tiene

$$5x + 5 = 0$$
$$x = -1$$

Sustituyendo en (1)

$$-1 + y - 2 = 0$$
$$y = 3$$

Punto de intersección (–1, 3).

2b) $\begin{cases} y = -x & \text{----- (1)} \\ 3x + y - 6 = 0 & \text{----- (2)} \end{cases}$

Sustituyendo (1) en (2)

$$3x - x - 6 = 0$$
$$x = 3$$

Sustituyendo en (1):

$$y = -3$$

Punto de intersección (3, –3).

2c) $\begin{cases} x + 2y + 2 = 0 & \text{----- (1)} \\ y = 2x + 9 & \text{----- (2)} \end{cases}$

Sustituyendo (2) en (1):

$$x + 2(2x + 9) + 2 = 0$$
$$x = -4$$

Sustituyendo en (2):

$y = 2(-4) + 9$

$y = 1$

Punto de intersección (–4, 1).

2d) $x - y - 1 = 0$; $y = 3$

Punto de intersección (4, 3).

2e) $3x - y + 3 = 0$; $9x + 7y - 4 = 0$

Punto de intersección $\left(-\frac{17}{30}, \frac{13}{10}\right)$.

2f) $y = -5$; $x = \frac{1}{4}$

Punto de intersección $\left(\frac{1}{4}, -5\right)$.

3a) $y = 3x - 5$; $y = 3x$

$m_1 = m_2 = 3$

Son paralelas.

3b) $y = \frac{x}{4} + 1$; $x - 4y + 2 = 0$

$$x - 4y + 2 = 0 \longrightarrow y = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$$

$m_1 = m_2 = \frac{1}{4}$

Son paralelas.

3c) $y = -3x - 2$; $x - 3y + 1 = 0$

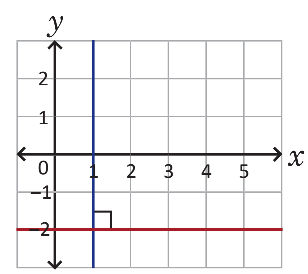
$$x - 3y + 1 = 0 \longrightarrow y = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$$

$$m_1 m_2 = -3\left(\frac{1}{3}\right) = -1$$

Son perpendiculares.

3d) $y = -2$; $x = 1$

Son perpendiculares.



4a) l: $y = -2x + 5$; A(–2, –3)

$m = -2$

$y - (-3) = -2[x - (-2)]$

$y = -2x - 7$

4b) l: $y = 3x + 4$; A(5, –1)

$m = 3$

$y - (-1) = 3(x - 5)$

$y = 3x - 16$

5a) l: $y = -5x - 1$; A(10, 1)

$m_1 = -5$

$m_1 m_2 = -1$

$-5m_2 = -1$

$m_2 = \frac{1}{5}$

$y - 1 = \frac{1}{5}(x - 10)$

$y = \frac{1}{5}x - 1$

5b) l: $3x - 4y + 8 = 0$; A(–6 , 0)

$3x - 4y + 8 = 0 \longrightarrow y = \frac{3}{4}x + 2$

$m_1 = \frac{3}{4} \Rightarrow m_1 m_2 = -1$

$\frac{3}{4}m_2 = -1$

$m_2 = -\frac{4}{3}$

$y - 0 = -\frac{4}{3}[x - (-6)]$

$y = -\frac{4}{3}x - 8$

6. La recta l_1 pasa por (–4, 4) y por (0, 12), entonces se utiliza la ecuación de la recta dados dos puntos:

$$y - 12 = \frac{12 - 4}{0 - (-4)}(x - 0)$$

Por lo tanto l_1: $y = 2x + 12$. Luego, l_2 es perpendicular a l_1 con pendiente $m_1 = 2$ y pasa por el punto (–4, 4).

Sea m_2 la pendiente de l_2 entonces $m_1 m_2 = -1$ entonces $m_2 = -\frac{1}{2}$.

Se utiliza la forma punto-pendiente:

$$y - 4 = -\frac{1}{2}[x - (-4)]$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

7. $5x - 2y = 0 \longrightarrow y = \frac{5}{2}x$ $\qquad ax + by + c = 0 \longrightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

7a) Se debe cumplir $-\frac{a}{b} = \frac{5}{2}$ basta tomar $a = 5$ y $b = -2$.

7b) Se debe cumplir $\frac{5}{2}\left(-\frac{a}{b}\right) = -1$ entonces $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$ basta tomar $a = 2$ y $b = 5$. El valor de c puede ser cualquier número real.

8. $x - 3y - 6 = 0 \longrightarrow y = \frac{1}{3}x - 2$ $\qquad ax + (a - 4)y + c = 0 \longrightarrow y = \frac{a}{4 - a}x + \frac{c}{4 - a}$

8a) $\frac{a}{4 - a} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3a = 4 - a \Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow a = 1$

8b) $\frac{a}{4 - a}\left(\frac{1}{3}\right) = -1 \Rightarrow \frac{a}{12 - 3a} = -1 \Rightarrow a = 3a - 12 \Rightarrow 2a = 12 \Rightarrow a = 6$

9a) P(4, –9); l: $x + 4y - 2 = 0$

$d(P, l) = \frac{|4 + 4(-9) - 2|}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = \frac{|-34|}{\sqrt{17}} = 2\sqrt{17}$

9b) P(8, 5); l: $x - y = 0$

$d(P, l) = \frac{|8 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|3|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

9c) P(0, –3); l: $2x + y = 0$

$d(P, l) = \frac{|2(0) + (-3)|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

9d) P(3, 1); l: $x + 3 = 0$

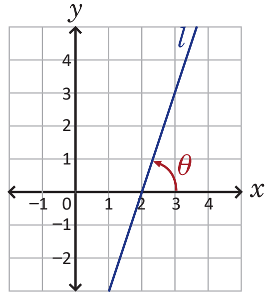
$d(P, l) = \frac{|3 + 3|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 6$

3.8 Ángulo de inclinación de una recta

Problema inicial

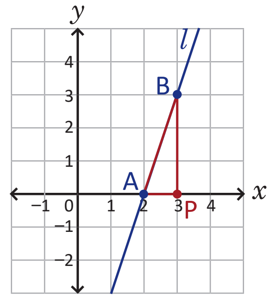
Dada la recta l: $y = 3x - 6$, ¿cuál es la medida del ángulo θ que va desde el eje x positivo hacia la recta? Aproxima hasta las décimas.

Forma el triángulo rectángulo APB con los puntos A(2, 0), P(3, 0) y B(3, 3) y utiliza razones trigonométricas en un triángulo rectángulo.



Solución

Los puntos A(2, 0) y B(3, 3) pertenecen a la recta l; se toma también el punto P(3, 0) sobre el eje x formándose el triángulo rectángulo APB como se muestra en la figura. Utilizando las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo:



$$\tan A = \frac{PB}{AP}$$

Nótese que la medida del ángulo θ es igual a la medida del ángulo cuyo vértice es A y el cociente $\frac{PB}{AP}$ corresponde al valor de la pendiente de la recta l, o sea 3. Luego:

$$\tan \theta = 3$$
$$\theta = \tan^{-1}(3)$$
$$\approx 71.6°$$

Por lo tanto, la medida del ángulo θ es aproximadamente 71.6°.

Definición

Dada una recta l, se llama **ángulo de inclinación** de la recta l al formado por el eje x positivo y la recta (en sentido antihorario). Si m es la pendiente de la recta l y θ su ángulo de inclinación entonces:

$$0° \leq \theta < 180° \text{ y } \tan \theta = m.$$

Ejemplo

Calcula el ángulo de inclinación de la recta l: $x + 2y + 1 = 0$ (aproxima hasta las décimas).

Se escribe la ecuación de la recta en la forma $y = mx + b$ para encontrar la pendiente:

$$2y = -x - 1$$
$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

Luego, $m = -\frac{1}{2}$ y:

$$\tan \theta = -\frac{1}{2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$\approx 153.4°$$

Si al calcular $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ en la calculadora obtuviste $-26.6°$, este es el ángulo medido desde el eje x positivo hacia la recta en sentido horario. Como el ángulo de inclinación debe ser en sentido antihorario basta con sumar al resultado anterior 180° ya que $\tan \theta = \tan(\theta + 180°)$.

Por lo tanto, el ángulo de inclinación de l: $x + 2y + 1 = 0$ es aproximadamente 153.4°.

Problemas

Calcula el ángulo de inclinación de las siguientes rectas (aproxima hasta las décimas):

a) $y = 2x + 7$ b) $y = -x + 1$ c) $x - 2y + 4 = 0$
d) $5x + 3y - 20 = 0$ e) $x + 1 = 0$ f) $y - 1 = 0$

Indicador de logro

3.8 Calcula el ángulo de inclinación de una recta utilizando su pendiente.

Secuencia

Ahora se establece la relación entre el ángulo formado por la recta y eje x con la pendiente de dicha recta. Se utilizará la tangente inversa que se vio en la unidad 5 de primer año.

Propósito

En la Definición, la restricción de los valores del ángulo facilitará, en la siguiente clase, la comprensión del ángulo determinado entre dos rectas.

Solución de problemas:

a) $y = 2x + 7$

$m = 2$

$\tan \theta = 2$

$\theta = \tan^{-1} 2$

≈ 63.4

b) $y = -x + 1$

$m = -1$

$\tan \theta = -1$

$\theta = \tan^{-1}(-1)$

$= 135°$

c) $x - 2y + 4 = 0 \longrightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$

$m = \frac{1}{2}$

$\tan \theta = \frac{1}{2}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

$\approx 26.6°$

d) $5x + 3y - 20 = 0 \longrightarrow y = -\frac{5}{3}x + \frac{20}{3}$

$m = -\frac{5}{3}$

$\tan \theta = -\frac{5}{3}$

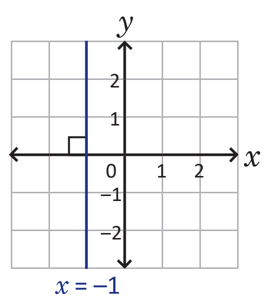
$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{3}\right)$

$\approx 121.0°$

e) $x + 1 = 0$

$x = -1$

$\theta = 90°$, ya que la recta es vertical.



f) $y - 1 = 0$

$m = 0$

$\tan \theta = 0$

$\theta = \tan^{-1} 0 = 0$

El estudiante también puede percatarse inmediatamente que el ángulo de la recta horizontal es cero.

3.9 Ángulo entre rectas

Teorema

Sean l_1 y l_2 dos rectas cualesquiera no perpendiculares con pendientes m_1 y m_2 respectivamente. Si α es el ángulo formado entre ambas rectas y medido de l_1 a l_2 en sentido antihorario, entonces:

$$\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

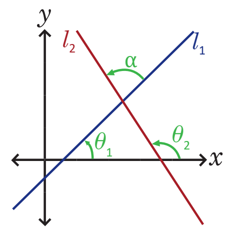
para $m_1 m_2 \neq -1$.

Si θ_1 y θ_2 son los ángulos de inclinación de l_1 y l_2 respectivamente entonces:

$$\theta_2 = \alpha + \theta_1$$
$$\alpha = \theta_2 - \theta_1$$

De lo anterior,

$$\tan \alpha = \tan(\theta_2 - \theta_1)$$
$$= \frac{\tan \theta_2 - \tan \theta_1}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2}$$
$$= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

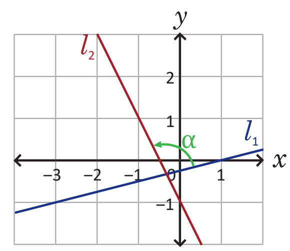


Ejemplo

¿Cuál es la medida del ángulo formado por las rectas l_1: $x - 4y - 1 = 0$ y l_2: $y = -2x - 1$ medido de l_1 a l_2? Aproxima hasta las décimas.

Primero deben determinarse las pendientes m_1 y m_2 de las rectas l_1 y l_2 respectivamente. Para el caso de l_1 se escribe su ecuación en la forma $y = m_1 x + b$:

$$4y = x - 1$$
$$y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$



Luego, $m_1 = \frac{1}{4}$ y $m_2 = -2$. Sea α el ángulo entre las rectas, medido de l_1 a l_2 en sentido antihorario (ver figura). Entonces:

$$\tan \alpha = \frac{-2 - \frac{1}{4}}{1 + \left(\frac{1}{4}\right)(-2)}$$

$$\tan \alpha = \frac{-\frac{9}{4}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\tan \alpha = -\frac{9}{2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{9}{2}\right)$$

$$\approx 102.5°$$

Si al calcular $\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{9}{2}\right)$ en la calculadora obtuviste como resultado −77.5° (aproximadamente) entonces este valor corresponde al ángulo medido desde l_1 hasta l_2 pero en sentido horario. Basta con sumar al resultado 180° pues:

$$\tan \theta = \tan(180° + \theta)$$

Por lo tanto, la medida del ángulo formado por las rectas l_1 y l_2 es 102.5°.

Problemas

1. Calcula el ángulo formado entre las rectas l_1 y l_2 (medido desde l_1 a l_2), aproxima hasta las décimas:
   a) l_1: $y = 5x$, l_2: $y = -5x$
   b) l_1: $y = x - 1$, l_2: $y = -2x + 7$
   c) l_1: $y = 4x - 4$, l_2: $y = -5x$
   d) l_1: $5x + 2y + 12 = 0$, l_2: $2x + 3y + 6 = 0$
   e) l_1: $2x - 7y - 2 = 0$, l_2: $2x + y + 2 = 0$
   f) l_1: $6x - y - 2 = 0$, l_2: $3x + 5y + 20 = 0$

2. Calcula la medida de los ángulos internos del triángulo cuyos vértices son los puntos A(−1, 6), B(−5, 3) y C(4, 1), aproxima hasta las décimas.

3. Dadas dos rectas l_1: $y = k$ y l_2: $y = mx + b$, con m y k números reales diferentes de cero. Demuestra que el ángulo entre las rectas l_1 y l_2 (medido desde l_1 a l_2) es igual al ángulo de inclinación de la recta l_2.

Indicador de logro

3.9 Calcula el ángulo formado entre dos rectas no paralelas usando los valores de sus pendientes.

Secuencia

Ahora se determina el valor del ángulo entre dos rectas dadas, los estudiantes deben recordar algunos conceptos geométricos de Tercer Ciclo, para interpretar el ángulo que se calcula al utilizar la fórmula, y también la relación entre el ángulo y la pendiente de la recta.

Posibles dificultades

Los estudiantes deben fijarse a partir de qué recta están midiendo el ángulo al utilizar la fórmula, sobre todo cuando resuelvan el problema 2.

Solución de problemas:

1a) $l_1: y = 5x$, $l_2: y = -5x$

$m_1 = 5 \quad m_2 = -5$

$\tan \alpha = \frac{-5-5}{1+5(-5)} = \frac{-10}{-24} = \frac{5}{12}$

$\alpha = \tan^{-1} \frac{5}{12} \approx 22.6°$

1b) $l_1: y = x - 1$, $l_2: y = -2x + 7$

$m_1 = 1 \quad m_2 = -2$

$\tan \alpha = \frac{-2-1}{1+1(-2)} = 3$

$\alpha = \tan^{-1} 3 \approx 71.6°$

1c) $l_1: y = 4x - 4$, $l_2: y = -5x$

$m_1 = 4 \quad m_2 = -5$

$\tan \alpha = \frac{-5-4}{1+4(-5)} = \frac{9}{19}$

$\alpha = \tan^{-1} \frac{9}{19} \approx 25.3°$

1d) $l_1: 5x + 2y + 12 = 0$, $l_2: 2x + 3y + 6 = 0 \longrightarrow l_1: y = -\frac{5}{2}x - 6$, $l_2: y = -\frac{2}{3}x - 2 \Rightarrow m_1 = -\frac{5}{2}, m_2 = -\frac{2}{3}$

$\tan \alpha = \frac{-\frac{2}{3} - \left(-\frac{5}{2}\right)}{1 + \left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{11}{16} \qquad \alpha = \tan^{-1} \frac{11}{16} \approx 34.5°$

1e) $l_1: 2x - 7y - 2 = 0$, $l_2: 2x + y + 2 = 0 \longrightarrow l_1: y = \frac{2}{7}x - \frac{2}{7}$, $l_2: y = -2x - 2 \Rightarrow m_1 = \frac{2}{7}, m_2 = -2$

$\tan \alpha = \frac{-2 - \frac{2}{7}}{1 + \frac{2}{7}(-2)} = -\frac{16}{3} \qquad \alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{16}{3}\right) \approx 100.6°$

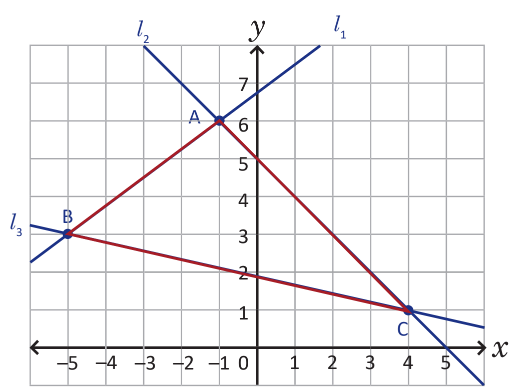
1f) $l_1: 6x - y - 2 = 0$, $l_2: 3x + 5y + 20 = 0 \longrightarrow l_1: y = 6x - 2$, $l_2: y = -\frac{3}{5}x - 4 \Rightarrow m_1 = 6, m_2 = -\frac{3}{5}$

$\tan \alpha = \frac{-\frac{3}{5} - 6}{1 + \left(-\frac{3}{5}\right)(6)} = \frac{33}{13} \qquad \alpha = \tan^{-1} \frac{33}{13} \approx 68.5°$

2. Sean l_1, l_2 y l_3 las rectas correspondientes a los segmentos AB, AC y BC respectivamente, con pendientes $m_1 = \frac{3}{4}$, $m_2 = -1$ y $m_3 = -\frac{2}{9}$.

Sea α el ángulo medido de l_1 a l_2 $\tan \alpha = \frac{-1 - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4}(-1)} = -7 \Rightarrow \alpha \approx 98.1°$.

Sea β el ángulo medido de l_2 a l_3 $\tan \alpha = \frac{-\frac{2}{9} - (-1)}{1 + \left(-\frac{2}{9}\right)(-1)} = \frac{7}{11} \Rightarrow \beta \approx 32.5°$.



Por la suma de los ángulos internos de un triángulo, el otro ángulo es $180° - (98.1° + 32.5°) = 49.4°$.

3. La pendiente de $l_1: y = k$ es $m_1 = 0$ y la de $l_2: y = mx + b$ es $m_2 = m$. Sea α el ángulo entre las rectas l_1 y l_2. Entonces $\tan \alpha = \frac{m - 0}{1 + 0(m)} = m$. Por lo tanto α es el ángulo de inclinación de l_2.

Otra solución: La recta $l_1: y = k$ es paralela al eje x por lo que el ángulo entre l_1 y l_2 es el ángulo de inclinación de l_2.

3.10 Aplicaciones

Problema inicial

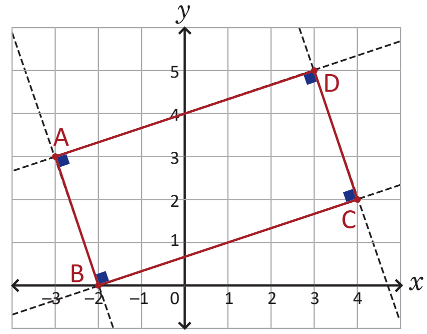
Demuestra que los puntos A(–3, 3), B(–2, 0), C(4, 2) y D(3, 5) forman un rectángulo.

Un rectángulo es un cuadrilátero que tiene 4 ángulos rectos.

Solución

Para que ABCD sea rectángulo debe cumplirse lo siguiente:

a) $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ b) $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ c) $\overline{CD} \perp \overline{DA}$



Si se cumplen estas tres condiciones entonces también el lado DA será perpendicular al lado AB.

a) Para demostrar que el lado AB es perpendicular al lado BC debe verificarse que la recta que pasa por A y B es perpendicular a la que pasa por B y C.

Pendiente de la recta que pasa por A(–3, 3) y B(–2, 0): $m_1 = \frac{0-3}{-2-(-3)} = -3$.

Pendiente de la recta que pasa por B(–2, 0) y C(4, 2): $m_2 = \frac{2-0}{4-(-2)} = \frac{1}{3}$.

Al efectuar el producto de las pendientes: $m_1 m_2 = -3\left(\frac{1}{3}\right) = -1$.

Por lo tanto, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$.

b) De forma similar al literal anterior se resuelve para este caso.

Pendiente de la recta que pasa por B(–2, 0) y C(4, 2): $m_2 = \frac{1}{3}$.

Pendiente de la recta que pasa por C(4, 2) y D(3, 5): $m_3 = \frac{5-2}{3-4} = -3$.

Al efectuar el producto de las pendientes: $m_2 m_3 = \frac{1}{3}(-3) = -1$.

Por lo tanto, $\overline{BC} \perp \overline{CD}$.

c) Al realizar un procedimiento similar a los literales anteriores se obtiene la pendiente de la recta que pasa por D y A, cuyo valor es $\frac{1}{3}$. El producto de las pendientes es igual a –1, luego: $\overline{CD} \perp \overline{DA}$.
Por lo tanto, ABCD es rectángulo.

Problemas

1. Demuestra que los puntos A(2, 3), B(0, –3), C(5, –2) y D(7, 4) forman un paralelogramo.

2. Demuestra que los puntos A(–4, 0), B(1, –1), C(6, 0) y D(1, 1) forman un rombo.

Un rombo es un cuadrilátero que tiene todos sus lados de igual longitud.

Indicador de logro

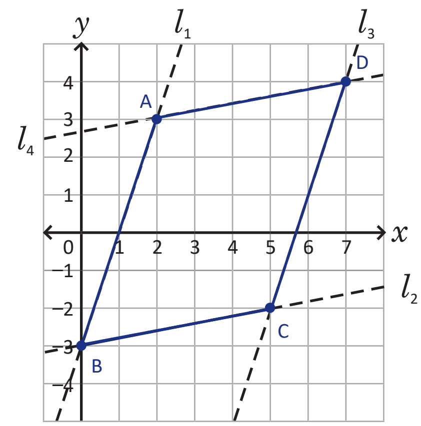
3.10 Resuelve problemas de geometría utilizando las relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre rectas y distancia entre dos puntos.

Secuencia

Se utilizan los conceptos de paralelismo, perpendicularidad entre rectas y distancia entre puntos para resolver problemas geométricos; en ese sentido se deben recordar algunas propiedades de las figuras utilizadas.

Solución de problemas:

1. Se demostrará que $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{CD}$ y que $\overline{BC}$ es paralelo a $\overline{AD}$.
Sean l_1, l_2, l_3 y l_4 las rectas que pasan por los puntos A y B; B y C; C y D; A y D, respectivamente, y pendientes respectivas m_1, m_2, m_3 y m_4.



Para demostrar que AB es paralela a CD basta demostrar que $m_1 = m_3$.

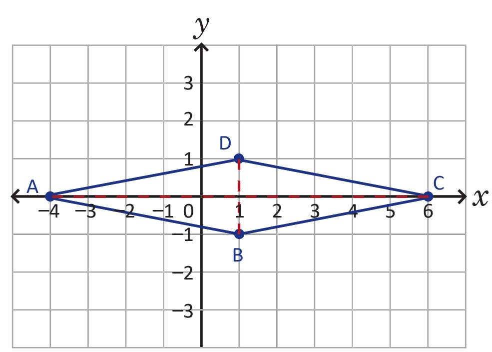
$$m_1 = \frac{-3-3}{0-2} = 3 \quad \text{y} \quad m_3 = \frac{-2-4}{5-7} = 3$$

Para demostrar que AD es paralela a BC basta demostrar que $m_2 = m_4$.

$$m_2 = \frac{-2-(-3)}{5-0} = \frac{1}{5} \quad \text{y} \quad m_4 = \frac{4-3}{7-2} = \frac{1}{5}$$

Por lo tanto ABCD es un paralelogramo.

2. *Solución 1*: Calculando las longitudes de los lados del cuadrilátero.



$AB = \sqrt{(1-(-4))^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$

$BC = \sqrt{(6-1)^2 + (0-(-1))^2} = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

$CD = \sqrt{(1-6)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

$AD = \sqrt{(1-(-4))^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

Así, AB = BC = CD = AD, por lo tanto ABCD es un rombo.

Solución 2: Demostrar que las diagonales son perpendiculares y que se intersecan en su punto medio.
La diagonal $\overline{BD}$ está sobre la recta vertical $x = 1$ y la diagonal $\overline{AC}$ está sobre la recta horizontal $y = 0$ (el eje x); por lo que, las diagonales son perpendiculares.

El punto medio de $\overline{BD}$ es $\left(\frac{1+1}{2}, \frac{1+(-1)}{2}\right) = (1, 0)$ y el punto medio de $\overline{AC}$ es $\left(\frac{6+(-4)}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (1, 0)$.
Así, las diagonales se intersecan en su punto medio.
Por lo tanto, ABCD es un rombo.

3.11 Practica lo aprendido

1. Demuestra que los puntos A(0, 3), B(4, –1), C(7, 2) y D(5, 4) forman un trapecio rectángulo.

Un cuadrilátero es trapecio rectángulo si tiene un par de lados opuestos paralelos y un ángulo recto.

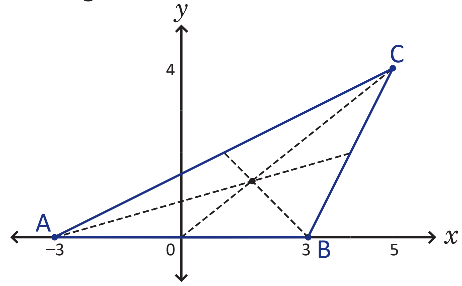
2. Con los puntos A(–3, 3), B(–5, –1), C(5, 1) y D(3, 5) se forma un cuadrilátero. Demuestra que el cuadrilátero formado por los puntos medios de los lados de ABCD es paralelogramo.

3. Encuentra la ecuación de la mediatriz del segmento formado por los puntos A(–1, 6) y B(7, 4).

La mediatriz de un segmento es la recta que corta al segmento en su punto medio y forma con él un ángulo recto.

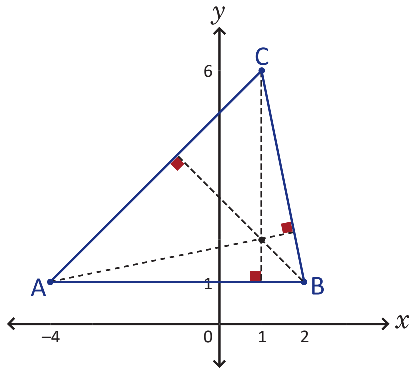
4. La **mediana** en un triángulo es el segmento que inicia en un vértice y termina en el punto medio del lado opuesto al vértice; en un triángulo pueden trazarse tres medianas (una por cada vértice). Se forma un triángulo cuyos vértices son A(–3, 0), B(3, 0) y C(5, 4); realiza lo siguiente:

   a) encuentra las coordenadas del punto medio de cada lado;
   b) encuentra las ecuaciones de las tres medianas del triángulo ABC (por ejemplo, una de ellas pasa por A(–3, 0) y por el punto medio del lado BC);
   c) verifica que las medianas se intersecan en un punto.



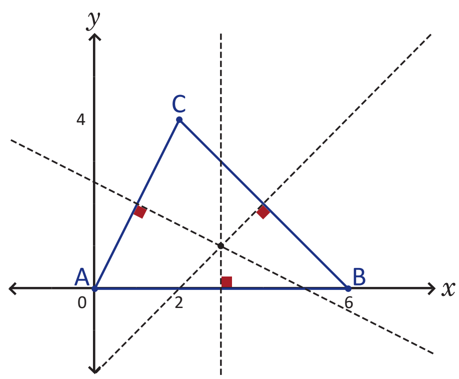
5. La **altura** en un triángulo es el segmento que inicia en un vértice y forma con el lado opuesto un ángulo recto; en un triángulo pueden trazarse tres alturas (una por cada vértice). Se forma un triángulo cuyos vértices son A(–4, 1), B(2, 1) y C(1, 6); realiza lo siguiente:

   a) encuentra las pendientes de las rectas que pasan por los puntos A y B, B y C, y C y A;
   b) encuentra las ecuaciones de las tres alturas del triángulo ABC (por ejemplo, una de ellas pasa por A(–4, 1) y es perpendicular al lado BC);
   c) verifica que las alturas se intersecan en un punto.



6. Se forma un triángulo con los puntos A(0, 0), B(6, 0) y C(2, 4); realiza lo siguiente:

   a) encuentra las coordenadas del punto medio de cada lado;
   b) encuentra las ecuaciones de las mediatrices del triángulo (por ejemplo, una de ellas pasa por el punto medio del lado AB y es perpendicular a este);
   c) verifica que las mediatrices se intersecan en un punto.

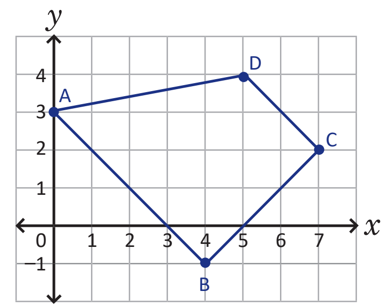


Unidad 2

Indicador de logro

3.11 Resuelve problemas de geometría utilizando las propiedades de puntos, segmentos y líneas rectas.

Solución de problemas:



1. Se probará que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son paralelos y que $\overline{AB}$ es perpendicular a $\overline{BC}$.

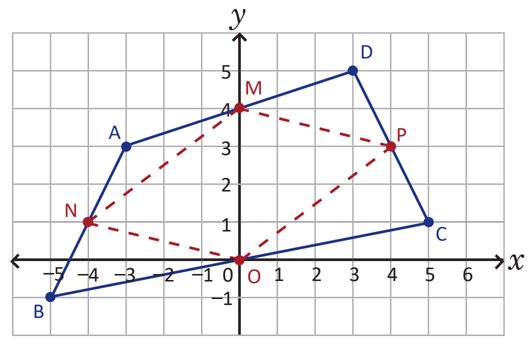
Sean m_1, m_2 y m_3 las pendientes de las rectas que pasan por A y B; B y C; C y D respectivamente.

$$m_1 = \frac{-1-3}{4-0} = -1,\ m_2 = \frac{2-(-1)}{7-4} = \frac{3}{3} = 1 \text{ y } m_3 = \frac{4-2}{5-7} = -1$$

Así, $m_1 = m_3$ entonces $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{CD}$.

También, $m_1 m_2 = -1$ por lo que $\overline{AB}$ es perpendicular a $\overline{BC}$.

Por lo tanto, ABCD es un trapecio rectángulo.



2. Se obtienen los puntos medios M, N, O y P de los segmentos AD, AB, BC y CD respectivamente.

$M\left(\frac{3+(-3)}{2}, \frac{5+3}{2}\right) = M(0, 4)$ $\quad N\left(\frac{-3+(-5)}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right) = N(-4, 1)$

$O\left(\frac{5+(-5)}{2}, \frac{1+(-1)}{2}\right) = O(0, 0)$ $\quad P\left(\frac{5+3}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = P(4, 3)$

Se prueba que los lados opuestos son paralelos, por medio de la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados:

Por M y N es $\frac{1-4}{-4-0} = \frac{3}{4}$. Por O y P es $\frac{3-0}{4-0} = \frac{3}{4}$. Así, $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{OP}$.

Por M y P es $\frac{3-4}{4-0} = -\frac{1}{4}$. Por N y O es $\frac{0-1}{0-(-4)} = -\frac{1}{4}$. Así, $\overline{MP}$ es paralelo a $\overline{NO}$.

Por lo tanto, MNOP es un paralelogramo.

3. Se encuentra la ecuación de la mediatriz del segmento formado por los puntos A(–1, 6) y B(7, 4).

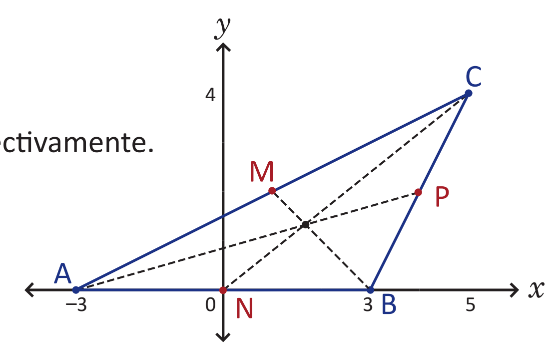
Se obtiene el punto medio de A y B: $\left(\frac{7+(-1)}{2}, \frac{4+6}{2}\right) = M(3, 5)$.

La pendiente de la recta que pasa por A y B es $\frac{4-6}{7-(-1)} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$.

Si m es la pendiente de la mediatriz, entonces $-\frac{1}{4}m = -1$ entonces $m = 4$.

Se obtiene la ecuación de la recta utilizando la forma punto-pendiente:

$$y - 5 = 4(x - 3)$$
$$y = 4x - 12 + 5$$
$$y = 4x - 7$$



4a) Sean M, N y P los puntos medios de los lados CA, AB y BC respectivamente.

$N\left(\frac{3+(-3)}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = N(0, 0)$, $P\left(\frac{5+3}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = P(4, 2)$,

$M\left(\frac{5+(-3)}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = M(1, 2)$

4b) Se obtiene las ecuaciones de las tres medianas:

Mediana AP

$y - 0 = \frac{2-0}{4-(-3)}(x-(-3))$

$y = \frac{2}{7}x + \frac{6}{7}$

Mediana CN

$y - 0 = \frac{4-0}{5-0}(x-0)$

$y = \frac{4}{5}x$

$y = \frac{4}{5}x$

Mediana BM

$y - 0 = \frac{2-0}{1-3}(x-3)$

$y = \frac{2}{-2}(x-3)$

$y = -x + 3$

4c) Se determina el punto de intersección de $\overline{\text{CN}}$ y $\overline{\text{BM}}$.

Se sustituye la ecuación de $\overline{\text{BM}}$ en la de $\overline{\text{CN}}$: $-x + 3 = \frac{4}{5}x \Rightarrow -5x + 15 = 4x \Rightarrow 9x = 15 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$.

Se sustituye $x = \frac{5}{3}$ en la ecuación de $\overline{\text{CN}}$: $y = \frac{4}{5}\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{4}{3}$.

El punto de intersección de la mediana CN y $\overline{\text{BM}}$ es $\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

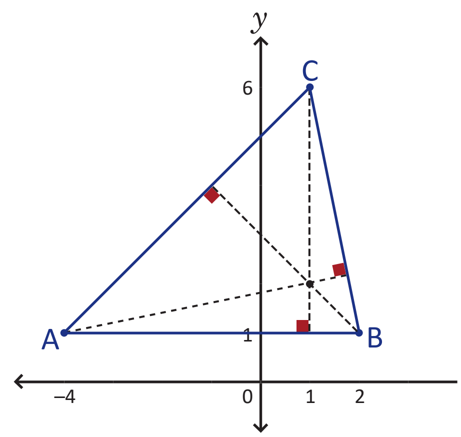
Ahora se comprueba que este punto está en la mediana AP: $y = \frac{2}{7}\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{6}{7} = \frac{10}{21} + \frac{18}{21} = \frac{28}{21} = \frac{4}{3}$.

Así, $\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$ está en la mediana AP.

Por lo tanto, todas las medianas se intersecan en el punto $\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

5a) Sean m_1, m_2 y m_3 las pendientes de las rectas que pasan por A y B, B y C, y C y A respectivamente.

$$m_1 = \frac{1-1}{2-(-4)} = 0,\ m_2 = \frac{6-1}{1-2} = -5 \text{ y } m_3 = \frac{1-6}{-4-1} = 1$$



5b) Sean n_1, n_2 y n_3 las pendientes de las alturas que pasan por C, A y B, respectivamente.

$\Rightarrow$ ya que AB es horizontal, la altura que pasa por C es $x = 1$.

Luego, $n_2(-5) = -1 \Rightarrow n_2 = \frac{1}{5} \Rightarrow$ la altura que pasa por A es

$$y - 1 = \frac{1}{5}(x+4) \Rightarrow y = \frac{1}{5}x + \frac{9}{5}.$$

Luego, $n_3(1) = -1 \Rightarrow\ n_3 = -1 \Rightarrow$ la altura que pasa por B es

$$y - 1 = -(x-2) \Rightarrow y = -x + 3.$$

5c) Se determina el punto de intersección de las tres alturas.

Si $x = 1$ entonces $y = \frac{1}{5} + \frac{9}{5} = \frac{10}{5} = 2$, luego en la otra altura $y = -1 + 3 = 2$.

Por lo tanto, las tres alturas se intersecan en el punto (1, 2).

6a) Sean M, N y P los puntos medios de los lados AB, BC y CA respectivamente.

$M\left(\frac{0+6}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = M(3, 0)$, $N\left(\frac{6+2}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = N(4, 2)$, $P\left(\frac{2+0}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = P(1, 2)$.

6b) Mediatriz que pasa por M(3, 0): $x = 3$.

Pendiente de BC: $\frac{4-0}{2-6} = -1$. Pendiente de la mediatriz: $m_2(-1) = -1 \Rightarrow m_2 = 1$.

Mediatriz que pasa por N(4, 2) : $y - 2 = 1(x-4) \Rightarrow y = x - 2$.

Pendiente de AC: $\frac{4-0}{2-0} = 2$. Pendiente de la mediatriz: $m_2(2) = -1 \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{2}$.

Mediatriz que pasa por P(1, 2) y tiene pendiente $-\frac{1}{2}$: $y - 2 = -\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

6c) Se determina el punto de intersección de las tres alturas.

Si $x = 3$ entonces $y = 3 - 2 = 1$, luego en la otra mediatriz $y = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1$.

Por lo tanto, las tres alturas se intersecan en el punto (3, 1).

3.12 Problemas de la unidad

1. Dados los puntos A(–5, 3) y B(4, –3), encuentra las coordenadas de los puntos C y D que dividen al segmento AB en tres partes iguales.

El punto C divide al segmento AB en razón 1:2.

2. Determina el valor de a para que el punto $P\left(a + 1, \frac{1}{a}\right)$ se encuentre sobre la recta con ecuación $2x - 3y + 3 = 0$.

3. Tres de los vértices de un paralelogramo ABCD son A(–5, 0), B(–2, –1) y C(5, 2). Encuentra las coordenadas del cuarto vértice.

4. Con el triángulo ABC cuyos vértices son A(0, 8), B(–4, 0) y C(10, 4) realiza lo siguiente:

   a) encuentra los puntos medios de los lados AB, BC y CA, y denótalos por D, E y F respectivamente;
   b) encuentra las coordenadas del punto que divide al segmento AE en razón 2:1;
   c) encuentra las coordenadas de los puntos que dividen a los segmentos BF y CD en razón 2:1. ¿Qué relación hay con el literal anterior?
   d) ¿Qué puedes concluir de este problema y el problema 4 de la clase 3.11?

5. Dos vértices consecutivos de un paralelogramo son A(–3, –1) y B(2, 2). Si la intersección de sus diagonales está en el punto P(3, 0), ¿cuáles son las coordenadas de sus otros dos vértices?

6. Los puntos medios de los lados AB, BC y CA de un triángulo son D(–1, –1), E(4, 2) y F(2, 3) respectivamente. Encuentra las coordenadas de los vértices A, B y C del triángulo.

7. Demuestra que si dos rectas con ecuaciones $ax + by + c = 0$ y $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ son perpendiculares entonces $aa_1 + bb_1 = 0$.

8. Demuestra que la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(x_1, y_1)$ y que además es paralela a la recta l: $ax + by + c = 0$ es $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$.

9. Las rectas l_1 y l_2 se cortan formando un ángulo de 135° (medido de l_1 a l_2). Si la pendiente de l_2 es igual a –3, ¿cuál es el valor de la pendiente de l_1?

10. Encuentra las coordenadas de los vértices B y C de un triángulo ABC, si las coordenadas de A son (–4, 0) y las ecuaciones de la altura y mediana trazadas desde B son $4x + y - 7 = 0$ y $2x - y + 1 = 0$ respectivamente.

Indicador de logro

3.12 Resuelve problemas correspondientes a la línea recta.

Solución de problemas:

1. El punto C que divide al segmento AB en razón 1:2 es $C\left(\frac{2(-5)+1(4)}{1+2}, \frac{2(3)+1(-3)}{1+2}\right) = C\left(\frac{-6}{3}, \frac{3}{3}\right) = C(-2, 1)$.

Luego, D es el punto medio del segmento BC: $D\left(\frac{4+(-2)}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) = D(1, -1)$.

2. Se evalúa el punto $P\left(a+1, \frac{1}{a}\right)$ en la ecuación de la recta $2x - 3y + 3 = 0$.

$2(a+1) - 3\left(\frac{1}{a}\right) + 3 = 0 \Rightarrow 2a(a+1) - 3 + 3a = 0 \Rightarrow 2a^2 + 5a - 3 = 0 \Rightarrow (a+3)(2a-1) = 0 \Rightarrow a = -3,\ a = \frac{1}{2}$

3. Si el punto $D(a, b)$ es el cuarto vértice entonces AD es paralela a BC y CD es paralela a AB.
Utilizando pendientes:

Las pendientes de las rectas AD y BC son iguales: $\frac{b-0}{a-(-5)} = \frac{2-(-1)}{5-(-2)} = \frac{3}{7} \Rightarrow 7b = 3a + 15$ ------ (1).

Las pendientes de las rectas CD y AB son iguales: $\frac{b-2}{a-5} = \frac{-1-0}{-2-(-5)} = \frac{-1}{3} \Rightarrow 3b - 6 = -a + 5 \Rightarrow a = -3b + 11$ ---(2).

Se sustituye (2) en (1): $7b = 3(-3b + 11) + 15 \Rightarrow 7b = -9b + 33 + 15 \Rightarrow 16b = 48 \Rightarrow b = 3$.

Se sustituye $b = 3$ en (2): $a = -3(3) + 11 = 2$.

Por lo tanto, el cuarto vértice del paralelogramo es D(2, 3).

4. Los vértices del triángulo ABC son A(0, 8), B(–4, 0) y C(10, 4).

4a) $D\left(\frac{0+(-4)}{2}, \frac{8+0}{2}\right) = D(-2, 4)$; $E\left(\frac{-4+10}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = E(3, 2)$; $F\left(\frac{0+10}{2}, \frac{8+4}{2}\right) = F(5, 6)$.

4b) El punto es $\left(\frac{1(0)+2(3)}{2+1}, \frac{1(8)+2(2)}{2+1}\right) = \left(\frac{6}{3}, \frac{12}{3}\right) = (2, 4)$.

4c) En el segmento BF: $\left(\frac{1(-4)+2(5)}{2+1}, \frac{1(0)+2(6)}{2+1}\right) = \left(\frac{6}{3}, \frac{12}{3}\right) = (2, 4)$.

En el segmento CD: $\left(\frac{1(10)+2(-2)}{2+1}, \frac{1(4)+2(4)}{2+1}\right) = \left(\frac{6}{3}, \frac{12}{3}\right) = (2, 4)$.

¿Qué relación hay con el literal anterior? El punto encontrado para cada segmento es el mismo.

4d) El punto de intersección de las medianas divide a cada una de ellas en dos segmentos que se encuentran en razón 2:1.

5. Las diagonales de un paralelogramo se intersecan en su punto medio.
Sean $C(a, b)$ y $D(c, d)$ los otros dos vértices del paralelogramo tal que AC y BD son sus diagonales.

Se calcula P como punto medio de AC:

$\Rightarrow P\left(\frac{a+(-3)}{2}, \frac{b+(-1)}{2}\right) = P(3, 0)$

$\Rightarrow \frac{a+(-3)}{2} = 3$ y $\frac{b+(-1)}{2} = 0$

$\Rightarrow a - 3 = 6$ y $b - 1 = 0$

$\Rightarrow a = 9$ y $b = 1$

Se calcula P como punto medio de BD:

$\Rightarrow P\left(\frac{c+2}{2}, \frac{d+2}{2}\right) = P(3, 0)$

$\Rightarrow \frac{c+2}{2} = 3$ y $\frac{d+2}{2} = 0$

$\Rightarrow c + 2 = 6$ y $d + 2 = 0$

$\Rightarrow c = 4$ y $d = -2$

Por lo tanto, las coordenadas de los otros vértices son: (9, 1) y (4, –2).

6. Sea A(a, b), B(c, d) y C(e, f) las coordenadas de los vértices del triángulo.

Se calculan los puntos medios: $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right) = (-1, -1)$; $\left(\frac{c+e}{2}, \frac{d+f}{2}\right) = (4, 2)$; $\left(\frac{a+e}{2}, \frac{b+f}{2}\right) = (2, 3)$.

Utilizando la coordenada en x se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} \frac{a+c}{2} = -1 \text{ --- (1)} \\ \frac{c+e}{2} = 4 \text{ --- (2)} \\ \frac{a+e}{2} = 2 \text{ --- (3)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c=-2 \text{ --- (1)} \\ c+e=8 \text{ --- (2)} \\ a+e=4 \text{ --- (3)} \end{cases}$$

Se resuelve el sistema, se resta (2) de (1), se obtiene:

$$a - e = -10 \text{ ----- (4)}$$

Se forma el sistema: $\begin{cases} a+e=4 \text{ ----- (3)} \\ a-e=-10 \text{ ----- (4)} \end{cases}$

Sumando (3) y (4): $2a = -6 \Rightarrow a = -3$.

Se sustituye en (3) y en (1): $-3 + e = 4 \Rightarrow e = 7$, $-3 + c = -2 \Rightarrow c = 1$.

Así, la solución del sistema es $a = -3$, $e = 7$, $c = 1$.

Utilizando la coordenada en y se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} \frac{b+d}{2} = -1 \text{ ----- (5)} \\ \frac{d+f}{2} = 2 \text{ ----- (6)} \\ \frac{b+f}{2} = 3 \text{ ----- (7)} \end{cases}$$

Su solución es: $b = 0$, $d = -2$, $f = 6$.

7. Si una de las rectas es vertical, por ejemplo $ax + by + c = 0$, se debe cumplir $b = 0$, y una recta perpendicular a esta es horizontal, entonces $a_1 = 0$. Entonces $aa_1 + bb_1 = a(0) + 0(b_1) = 0$.

Luego, si ninguna es vertical, entonces $b \neq 0$ y $b_1 \neq 0$.

Se reescriben las ecuaciones para obtener sus pendientes:

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \text{ y } a_1x + b_1y + c_1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1}$$

Al ser perpendiculares se cumple que $\left(-\frac{a}{b}\right)\left(-\frac{a_1}{b_1}\right) = -1 \Rightarrow aa_1 = -bb_1 \Rightarrow aa_1 + bb_1 = 0$.

8. Si $b \neq 0$, la recta $ax + by + c = 0$ se reescribe como $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, así su pendiente es $-\frac{a}{b}$.

Así la recta paralela a la recta $ax + by + c = 0$ que pasa por P(x_1, y_1) es:

$y - y_1 = -\frac{a}{b}(x - x_1) \Rightarrow b(y - y_1) = -a(x - x_1) \Rightarrow a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$.

Si $b = 0$, la recta tiene ecuación $ax + c = 0 \Rightarrow x = -\frac{c}{a}$, con $a \neq 0$.

Así, la recta paralela a la recta $ax + by + c = 0$ que pasa por P(x_1, y_1) es:

$x = x_1 \Rightarrow x - x_1 = 0$, esta ecuación puede reescribirse como $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$, ya que $b = 0$.

La recta $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$ es el desplazamiento paralelo de la recta l que pasa por P(x_1, y_1).

9. Sean m_1 y m_2 las pendientes de las rectas l_1 y l_2, respectivamente entonces $m_2 = -3$ y se cumple que

$$\tan 135° = \frac{-3 - m_1}{1 + m_1(-3)} \Rightarrow -1 = \frac{-3 - m_1}{1 + m_1(-3)} \Rightarrow -1 + 3m_1 = -3 - m_1 \Rightarrow 4m_1 = -2 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{2}.$$

10. El punto B es el punto de intersección de la altura y la mediana, así basta resolver el sistema:

$\begin{cases} 4x + y - 7 = 0 \text{ ---- (1)} \\ 2x - y + 1 = 0 \text{ ---- (2)} \end{cases}$ Con solución: $x = 1$, $y = 3$. Por lo tanto, el vértice B es (1, 3).

Luego, para el vértice C(a, b). El punto medio de $\overline{AC}$ es M$\left(\frac{a-4}{2}, \frac{b}{2}\right)$ y M está en la mediana, así se puede sustituir en su ecuación (2): $2\left(\frac{a-4}{2}\right) - \frac{b}{2} + 1 = 0$ y se obtiene que $2a - b = 6$ ---- (1)

Ahora, la recta que pasa por A y C tiene pendiente $\frac{b-0}{a-(-4)} = \frac{b}{a+4}$.

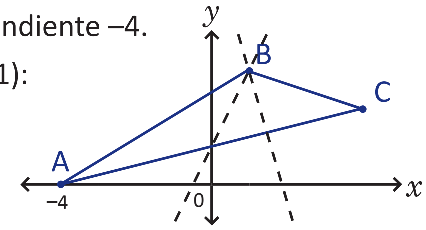
Se obtiene la pendiente de la altura $4x + y - 7 = 0 \Rightarrow y = -4x + 7$, tiene pendiente -4.

Se cumple que $-4\left(\frac{b}{a+4}\right) = -1 \Rightarrow 4b = a + 4 \Rightarrow a = 4b - 4$, se sustituye en (1):

$$2(4b - 4) - b = 6,$$

de donde se obtiene que $b = 2 \Rightarrow a = 4(2) - 4 = 4$.

Por lo tanto, C(a, b) = C(4, 2).



4.1 Práctica en GeoGebra: segmentos y ecuaciones de líneas rectas

En el año anterior aprendiste cómo graficar funciones en GeoGebra, realizar desplazamientos horizontales y verticales de funciones cuadráticas, graficar vectores y realizar operaciones con ellos. En esta práctica se utilizará el software para graficar segmentos y líneas rectas a partir de su ecuación.

Debes verificar si tu computadora cuenta con GeoGebra, para ello busca el ícono de la aplicación (es el que se encuentra en la esquina superior derecha de esta página). Caso contrario puedes descargar el software siguiendo el enlace: GeoGebra https://goo.gl/jRmmdc

Descarga (instala) "GeoGebra Clásico 5". También puedes descargar la app para el celular o trabajar "GeoGebra en línea" en los siguientes enlaces:

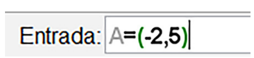
App → https://goo.gl/wf5mHx **En línea** → https://goo.gl/ThXbeB

Práctica

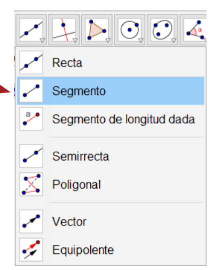
Puntos y segmentos en el plano cartesiano

1. Abre un nuevo archivo de GeoGebra dando clic (o doble clic) al ícono del software.

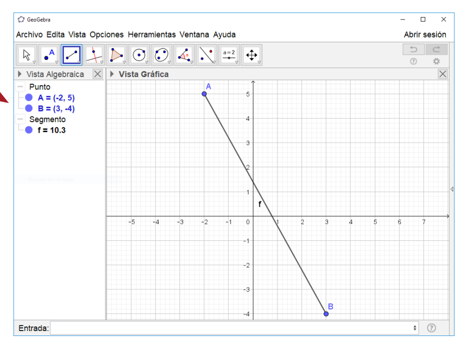
2. Para crear el segmento AB con A(–2, 5) y B(3, –4):
   a) Ubica primero los puntos en el plano, ya sea utilizando la herramienta Punto o la barra de entrada.



En GeoGebra los puntos se nombran con letras mayúsculas; si escribes "a=(-2,5)" obtendrás por resultado un vector.

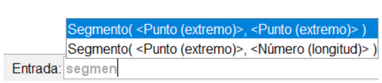


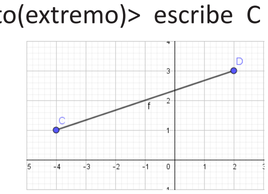
   b) Da clic sobre la parte inferior derecha de la herramienta Recta y selecciona Segmento.



   c) En la Vista Gráfica selecciona los puntos A y B. En la Vista Algebraica aparecerá el nombre del segmento y la longitud del mismo. Recuerda que la longitud del segmento AB es igual a la distancia entre los puntos A y B, que en este caso particular es 10.3 aproximadamente.

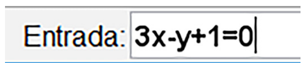
   d) También puedes crear segmentos usando la barra de entrada en lugar de la herramienta Segmento. Crea los puntos C(–4, 1) y D(2, 3); en la barra de entrada escribe la palabra segmento y elige la opción "Segmento(<Punto(extremo)>, <Punto(extremo)>)". En lugar de <Punto(extremo)> escribe C y D respectivamente.

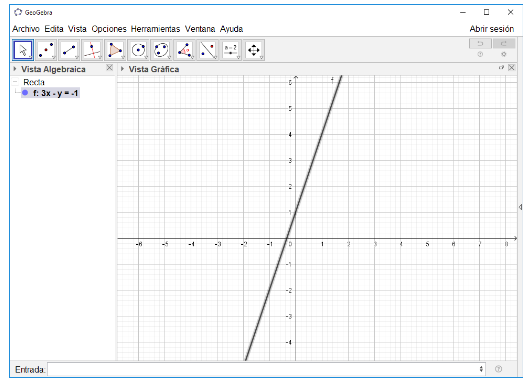




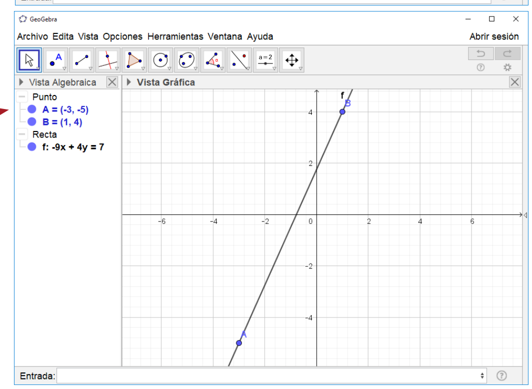
Líneas rectas:

3. Para trazar la gráfica de una línea recta cuya ecuación es conocida, simplemente se escribe dicha ecuación en la barra de entrada. Por ejemplo, para trazar la gráfica de $3x - y + 1 = 0$ se escribe 3x-y+1=0 y presiona enter:





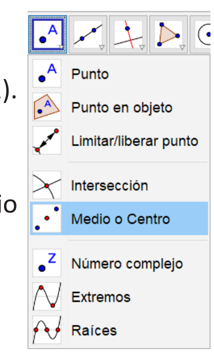
4. Para encontrar la ecuación y trazar la gráfica de una recta que pasa por dos puntos dados, se utiliza el comando Recta(<Punto>, <Punto>) en la barra de entrada. Por ejemplo, para encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(–3, –5) y B(1, 4) creas primero los puntos A y B; luego escribe Recta(A,B) y presionas enter. En la Vista Algebraica aparecerá la ecuación de la recta y en la Vista Gráfica la línea.



También puedes usar el comando anterior digitando Recta((-3,-5),(1,4)).

Actividades

1. **Punto medio de un segmento:**
   a) Abre una nueva ventana de GeoGebra y crea el segmento AB con A(–4, –3) y B(6, 1).



   b) Da clic sobre la parte inferior derecha de la herramienta "Punto" y selecciona "Medio o Centro".

   c) En la Vista Gráfica (o en la Vista Algebraica) da clic sobre los puntos A y B, aparecerá un nuevo punto C con coordenadas (1, –1) que corresponde al punto medio del segmento AB.
   d) Verifica las soluciones de los problemas 7, 8, 9 y 10 de la clase 1.6 (Practica lo aprendido).

2. **Pendiente de una recta:**
   a) En la barra de entrada escribe "pendiente" y automáticamente aparecerá la opción "Pendiente(<Recta, semirrecta o segmento>)".
   b) En lugar de <Recta, semirrecta o segmento> escribe la ecuación de la recta y presiona enter.
   c) ¿Qué ocurre si calculas la pendiente de las rectas $y = -2$ y $x = 3$? ¿Cuál es el valor de la pendiente de una recta vertical y de una horizontal?

3. Verifica las soluciones de los problemas desde la clase 2.2 hasta la 2.5 de esta unidad.

Indicador de logro

4.1 Utiliza un software matemático para elaborar segmentos y líneas rectas dados dos puntos o su ecuación, y para calcular coordenadas del punto medio y valor de la pendiente.

Secuencia

Se utilizarán las herramientas de GeoGebra para trazar puntos, segmentos y rectas. Esto permitirá al estudiante comprobar problemas desarrollados a lo largo de las lecciones 1 y 2 de esta unidad.

Solución de problemas:

1a) Escribir en la barra de entrada A=(–4, –3) y luego B=(6, 1). En la barra de herramientas dar clic sobre la parte inferior derecha de la herramienta Recta y seleccionar Segmento y seleccionar los dos puntos A y B.

1b) Dar clic sobre la parte inferior derecha de la herramienta Punto y seleccionar Medio o Centro.

1c) En la Vista Gráfica (o en la Vista Algebraica) dar clic sobre los puntos A y B, aparecerá un nuevo punto C con coordenadas (1, –1) que corresponde al punto medio de AB.

1d) Problema 7: Se grafica el punto A(–1, 3) y el punto solución (4, –2) luego se determina el punto medio con el procedimiento realizado en 1b) y 1c).

2a) En la barra de entrada se escribe Pendiente y automáticamente aparecerá la opción Pendiente(<Recta, semirrecta o segmento>).

2b) Puede escribirse la ecuación de una recta estudiada en alguna clase, por ejemplo:
$4x + y - 7 = 0$, $2x - y + 1 = 0$.

2c) Las rectas horizontales tienen pendiente cero y las verticales indefinida.

3. Clase 2.2: Para comprobar la respuesta en cada literal se grafica la recta obtenida, se determina su pendiente y se grafica el punto dado.

Clase 2.3: Se pueden graficar los puntos dados en cada literal y luego utilizar la barra de herramientas para graficar la recta que pasa por estos dos puntos o escribir en la barra de entrada Recta((–3, –1), (1, –5)), para el literal a), por ejemplo.

Clase 2.4: Para cada literal graficar el punto dado, luego dar clic sobre la parte inferior derecha de la herramienta Perpendicular y seleccionar Paralela. En la vista gráfica seleccionar el punto que se graficó y el eje x o el eje y según corresponda.

Clase 2.5: 1. Para cada literal se escribe la ecuación dada en la barra de herramientas.

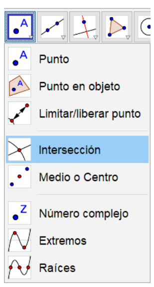
4.2 Práctica en GeoGebra: posiciones relativas entre rectas

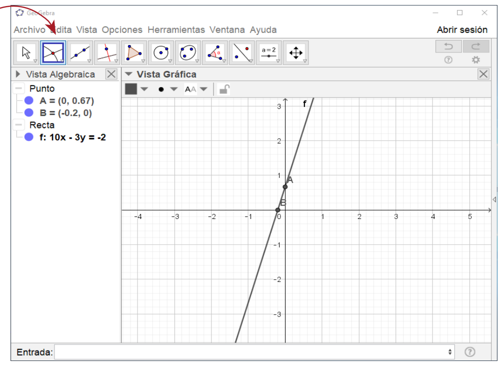
En esta práctica aprenderás a encontrar las coordenadas del punto de intersección de dos rectas, trazar rectas paralelas y perpendiculares y calcular el ángulo de inclinación de una recta.

Práctica

Intersecciones con los ejes de coordenadas y rectas:

1. Traza la recta $10x - 3y + 2 = 0$ (acerca la Vista Gráfica si lo crees necesario).
2. Da clic sobre la parte inferior derecha de la herramienta Punto y selecciona Intersección. En la Vista Gráfica da clic sobre el eje x (o el eje y) y después sobre la línea recta; en la Vista Algebraica aparecerán las coordenadas del punto de intersección de la recta con el eje x (o el eje y).

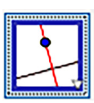


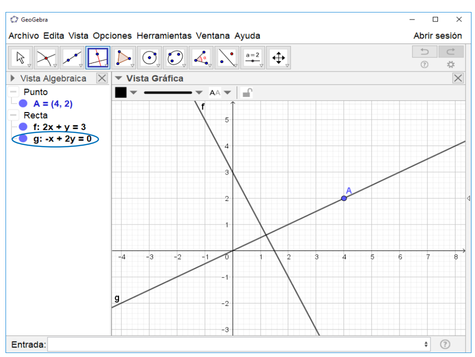


3. Para encontrar la intersección entre dos rectas se utiliza la misma herramienta; en este caso, en lugar de seleccionar alguno de los ejes de coordenadas se seleccionan ambas rectas.

Rectas paralelas y perpendiculares

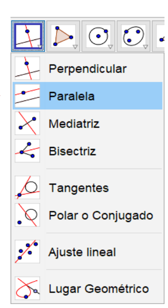
4. Abre una nueva ventana y traza la recta $2x + y - 3 = 0$.
   a) Para trazar una recta perpendicular a la anterior da clic sobre la herramienta Perpendicular; en la Vista Gráfica selecciona la recta $2x + y - 3 = 0$ (verás que aparece la recta perpendicular) y luego el lugar donde quieras colocarla, dependiendo de ello quedará determinada su ecuación en la Vista Algebraica.





En la ventana, la recta perpendicular se colocó en el punto (4, 2), por tanto su ecuación es $-x + 2y = 0$.

   b) Para trazar una recta paralela a $2x + y - 3 = 0$ da clic sobre la esquina inferior derecha de la herramienta Perpendicular y selecciona Paralela; en la Vista Gráfica da clic sobre la recta $2x + y - 3 = 0$ (verás que aparece la recta paralela) y luego selecciona el lugar donde quieras colocarla, dependiendo de ello quedará determinada su ecuación en la Vista Algebraica.

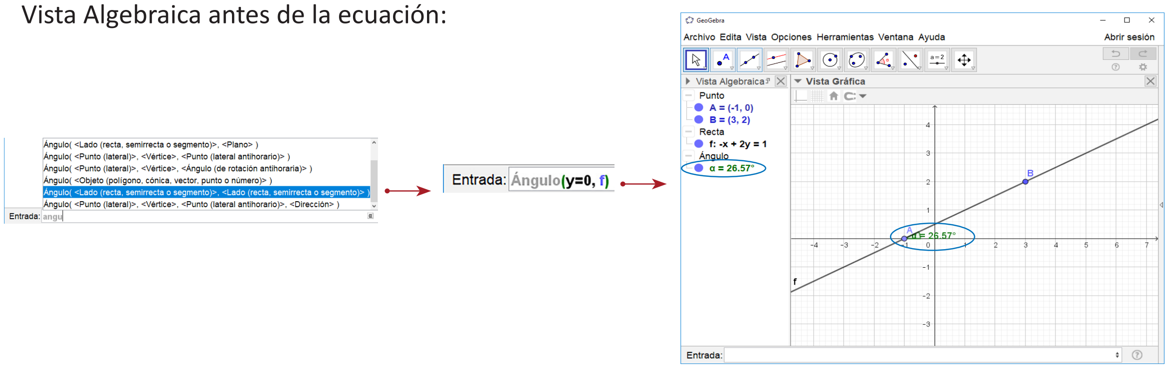


Unidad 2

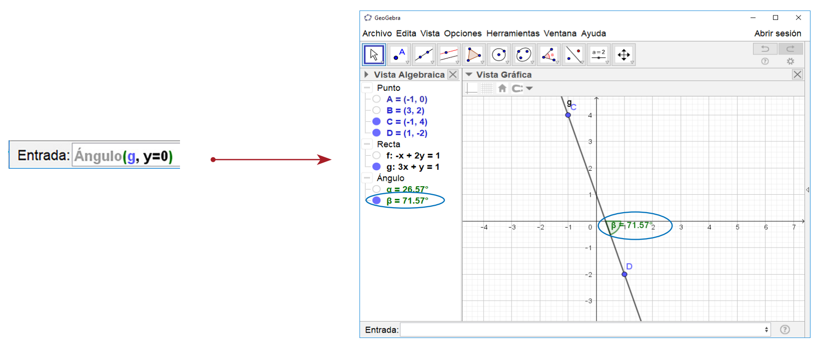
Ángulo de inclinación de una recta:

5. Para calcular el ángulo de inclinación debe tenerse en consideración la pendiente de la recta:

   a) Pendiente positiva: traza la gráfica de $x - 2y + 1 = 0$; en la barra de entrada escribe ángulo y en la lista selecciona Ángulo(<Lado(recta, semirrecta o segmento)>, <Lado(recta, semirrecta o segmento)>). En lugar de <Lado(recta, semirrecta o segmento)> escribe primero y=0 y luego la letra que aparece en la Vista Algebraica antes de la ecuación:



   b) Pendiente negativa: traza la gráfica de $3x + y - 1 = 0$; usando el comando Ángulo(<Lado(recta, semirrecta o segmento)>, <Lado(recta, semirrecta o segmento)>) escribe primero la letra que aparece en Vista Algebraica de la ecuación y luego y=0:



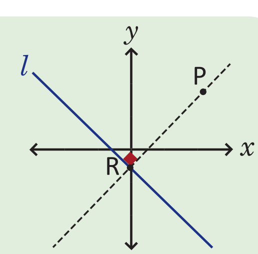
   Observa que GeoGebra devuelve el ángulo medido desde la recta $3x + y - 1 = 0$ hacia el eje positivo x. Entonces el ángulo de inclinación de la recta será igual a la diferencia de 180° menos el obtenido con el comando.

Actividades

1. Verifica tus soluciones de los problemas desde la clase 3.1 hasta la clase 3.5 sobre intersecciones con los ejes de coordenadas, intersecciones entre rectas, rectas paralelas y perpendiculares.

2. Utilizando la recta l: $y = -3x + 2$ y el punto P(−2, −1), determina el procedimiento con GeoGebra para calcular la distancia desde el punto P hasta la recta l.

Si l_1 es la recta perpendicular a l que pasa por P y R es el punto de intersección entre l y l_1 entonces, calcular d(P, l) equivale a encontrar d(P, R).



3. Dadas las rectas f: $x - y - 5 = 0$ y g: $6x - y - 21 = 0$, determina el procedimiento con GeoGebra para calcular el ángulo formado entre ambas rectas.

Indicador de logro

4.2 Utiliza un software matemático para encontrar las coordenadas del punto de intersección de dos rectas, calcular el ángulo de inclinación y el ángulo entre rectas, y elaborar rectas paralelas o perpendiculares.

Secuencia

Ahora se estudiarán en GeoGebra algunos de los conceptos utilizados en la lección 3 como paralelismo, perpendicularidad y ángulo entre rectas.

Propósito

Los numerales 2 y 3 de las actividades permitirán al estudiante describir procesos para resolver problemas en GeoGebra.

Solución de problemas:

1. Clase 3.1: Para el numeral 1, en cada literal graficar la recta dada, en la herramienta Punto seleccionar Intersección, luego seleccionar la recta graficada y el eje x.

Clase 3.2: Para el numeral 1, en cada literal graficar la recta dada, en la herramienta Punto seleccionar Intersección, luego seleccionar la recta graficada y el eje y.
Para el numeral 2, se sigue el mismo procedimiento: graficar la recta y se determinan los interceptos con los pasos hechos anteriormente.

Clase 3.3: Para el numeral 1, graficar las rectas dadas y utilizar la herramienta Intersección.
En el numeral 3 basta graficar las rectas dadas y ver que son paralelas. También puede utilizar la herramienta Intersección.

Clase 3.4: Para el numeral 1, en cada literal graficar las rectas dadas, se puede utilizar la herramienta Intersección, si no existe punto de intersección entre las rectas entonces son paralelas. Para el numeral 2, graficar la recta dada y el punto indicado, utilizar la herramienta Paralela, seleccionar el punto y la recta en la vista gráfica y se graficará la recta que se pide.

Clase 3.5: Numeral 1: para cada literal graficar las rectas dadas, luego utilizar la herramienta Ángulo y dar clic sobre las rectas, se graficará el ángulo entre las rectas.
Numeral 2: En cada literal graficar la recta y el punto dados. Utilizar la herramienta Perpendicular y seleccionar la recta y el punto, se graficará la recta buscada.

2. Graficar la recta y el punto P. Utilizar la herramienta Perpendicular y seleccionar la recta y el punto, se graficará la recta perpendicular a l que pasa por el punto P. Determinar el punto de intersección de l y su recta perpendicular. Se puede determinar la distancia entre P y el punto de intersección graficando el segmento que une estos dos puntos utilizando la herramienta Segmento; o también, puede escribir en la barra de entrada Distancia(P, Q) donde Q es el punto de intersección entre la recta y su perpendicular.

3. Graficar las rectas escribiéndolas en la barra de entrada, seleccionar la herramienta Ángulo y dar clic sobre las rectas dadas.

Unidad 3. Secciones cónicas

Competencia de la unidad

Determinar la estructura, elementos y propiedades de las cuatro secciones cónicas, deduciendo y analizando las ecuaciones de cada una de ellas, para utilizarlo en la resolución de problemas de aplicación en diferentes áreas científicas.

Relación y desarrollo

Tercer ciclo	Primer año de bachillerato	Segundo año de bachillerato
Unidad 4: Función cuadrática de la forma $y = ax^2 + c$ (9°) • Función $y = ax^2$ • Función $y = ax^2 + c$	**Unidad 4: Funciones reales** • Definición de función • Función cuadrática • Aplicaciones de la función cuadrática • Otras funciones • Práctica en GeoGebra	**Unidad 2: Línea recta** • Puntos y segmentos • Línea recta • Posiciones relativas entre rectas • Práctica en GeoGebra
		Unidad 3: Secciones cónicas • La parábola • La circunferencia • La elipse • La hipérbola • Práctica en GeoGebra

Plan de estudio de la unidad

Lección	Horas	Clases
1. La parábola	1	1. Lugar geométrico de una ecuación
	1	2. Ecuación de un lugar geométrico
	1	3. Actividad introductoria de parábola
	1	4. La parábola
	1	5. Desplazamientos paralelos
	1	6. Procedimiento para completar cuadrados perfectos
	1	7. Ecuación general de la parábola
	1	8. Líneas rectas y parábolas
	1	9. Determinación de parámetros
	1	10. Practica lo aprendido
	1	11. Aplicaciones de la parábola
	1	12. Practica lo aprendido
	2	Prueba del primer periodo
2. La circunferencia	1	1. La circunferencia
	1	2. Desplazamientos paralelos de la circunferencia
	1	3. Ecuación general de la circunferencia
	1	4. Recta tangente a una circunferencia

Lección	Horas	Clases
	1	5. Rectas secantes a una circunferencia
	1	6. Practica lo aprendido
	1	7. Aplicaciones de la circunferencia
	1	Prueba de las lecciones 1 y 2
3. La elipse	1	1. Actividad introductoria de elipse
	1	2. La elipse
	1	3. Elementos y propiedades de la elipse
	1	4. Desplazamientos paralelos de la elipse
	1	5. Ecuación general de la elipse
	1	6. Practica lo aprendido
	2	7. Aplicaciones de la elipse
4. La hipérbola	1	1. Actividad introductoria de la hipérbola
	1	2. La hipérbola
	1	3. Elementos y propiedades de la hipérbola
	1	4. Desplazamientos paralelos de la hipérbola
	1	5. Ecuación general de la hipérbola
	1	6. Practica lo aprendido
	2	7. Aplicaciones de la hipérbola
	2	8. Problemas de la unidad

Lección	Horas	Clases
5. Práctica en GeoGebra.	1	1. Construcción de secciones cónicas
	1	2. Gráfica de la ecuación general de las secciones cónicas
	1	3. Propiedades de las secciones cónicas
	1	4. Problemas sobre el lugar geométrico de cónicas
	1	Prueba de las lecciones 3 y 4

41 horas clase + prueba del primer periodo + prueba de las lecciones 1 y 2 + prueba de las lecciones 3 y 4

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: La parábola
Se estudia desde la definición de lugar geométrico, trabajando un poco sobre la forma de plantear un problema para encontrar la ecuación que determina un lugar geométrico descrito matemáticamente, y se definen procedimientos generales para los desplazamientos paralelos y para completar cuadrados perfectos. Se trabaja con los contenidos correspondientes de la parábola, iniciando con su definición, luego identificando sus elementos y finalmente estudiando sus aplicaciones utilizando la propiedad reflectora del foco; además, se hace un estudio de las rectas secantes y tangentes a la parábola. En esta unidad se aborda primero la parábola, puesto que en su ecuación general es más sencillo completar cuadrados, debido a que este procedimiento solamente es necesario hacerlo una vez.

Lección 2: La circunferencia
Este lugar geométrico ya es conocido por los estudiantes de manera geométrica. En esta lección se establece de manera analítica su ecuación a partir de su definición, utilizando los resultados que se tienen en el plano cartesiano, y se trabajan los demás temas de manera muy parecida a la parábola. Además, se abarca el contenido de las rectas tangentes a la circunferencia en un punto específico, de manera general, el cual es un resultado muy práctico pero con cierta complejidad en su demostración; finalmente, es necesario aplicar la resolución de ecuaciones cuadráticas de manera eficiente, pues será muy útil en esta lección y en general en toda la unidad.

Lección 3: La elipse
Para iniciar esta lección se realiza una actividad con la cual los estudiantes se puedan familiarizar con la forma geométrica de una elipse, y puedan asociarla con su definición formal, a partir de construcciones en algunos materiales de uso cotidiano; luego se realiza el estudio teórico de la elipse y sus elementos, para finalizar con las aplicaciones que tiene tanto su forma geométrica como la propiedad reflectora de sus focos.

Lección 4: La hipérbola

Después de haber abordado casi todas las secciones cónicas, se trabaja con la hipérbola, cuya complejidad es un poco mayor respecto de las figuras anteriores, de manera similar, se hace una actividad con los estudiantes para que puedan familiarizarse con la forma geométrica de una hipérbola, y logren asociarla con su definición formal; posteriormente se realiza el estudio teórico de la hipérbola, sus elementos y propiedades, y de manera análoga se estudian las aplicaciones que tiene ya sea por su forma geométrica o por la propiedad reflectora de sus focos. En esta lección también se abordan algunos problemas que tienen correspondencia con todas las lecciones trabajadas durante la unidad, con el fin de asegurar el aprendizaje y la comprensión de todos los contenidos.

Lección 5: Práctica en GeoGebra

Después de haber abordado todos los contenidos sobre secciones cónicas, se proponen algunas prácticas en GeoGebra como una herramienta muy potente para complementar la actividad matemática, con el fin de corroborar su aplicación en las gráficas de las secciones cónicas, de conocer las diferentes herramientas que tiene dicho software, y que puede ayudar a visualizar los resultados establecidos de manera teórica.

Lección 1 La parábola

1.1 Lugar geométrico de una ecuación

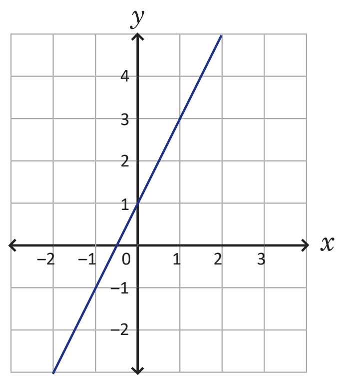
Problema inicial

Grafica en el plano cartesiano el conjunto de puntos que satisfacen las ecuaciones:

a) $y = 2x + 1$ b) $y = x^2 - 1$

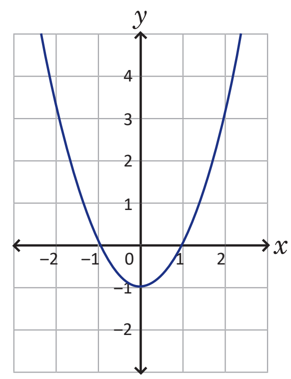
Solución

a) La ecuación es una función lineal y su gráfica en el plano es:



Por lo tanto, el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación $y = 2x + 1$ es una línea recta.

b) La ecuación es una función cuadrática y su gráfica en el plano es:



Por lo tanto, el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación $y = x^2 - 1$ es una parábola.

Definición

El **lugar geométrico** determinado por una ecuación es el conjunto de puntos que satisfacen dicha ecuación; en casos particulares pueden ser figuras conocidas como un punto, una línea recta, una circunferencia, una parábola, etc.

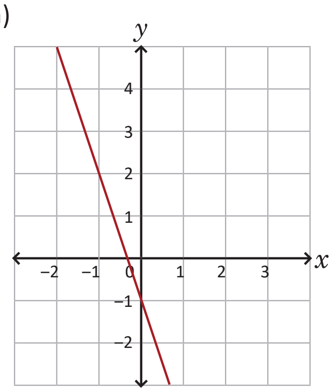
Problemas

1. Grafica en el plano cartesiano el lugar geométrico determinado por cada ecuación.

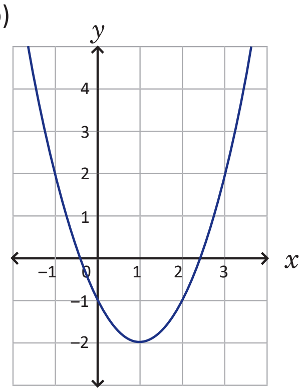
a) $y = x - 4$ b) $y = -3x + 2$ c) $y = x^2 - 3$

2. Determina las ecuaciones cuyo lugar geométrico corresponda a cada gráfica.

a)



b)



Indicador de logro

1.1 Grafica el lugar geométrico determinado por una ecuación.

Secuencia

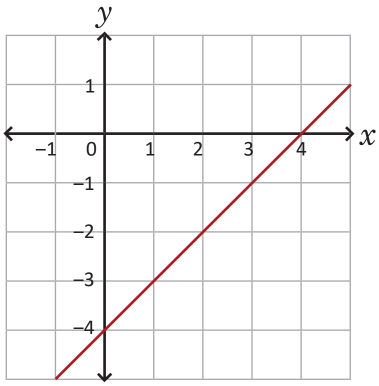
De la unidad anterior, sobre línea recta, los estudiantes han utilizado el plano cartesiano como lugar para graficar diferentes figuras geométricas, y se parte de las figuras que conoce para introducir conceptos sobre geometría analítica.

Propósito

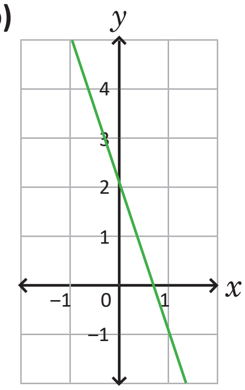
El Problema inicial utiliza las ecuaciones de funciones ya conocidas por los estudiantes, tales como la línea recta o la parábola, con el objetivo de introducir la definición del término "Lugar geométrico" de una ecuación.

Solución de problemas:

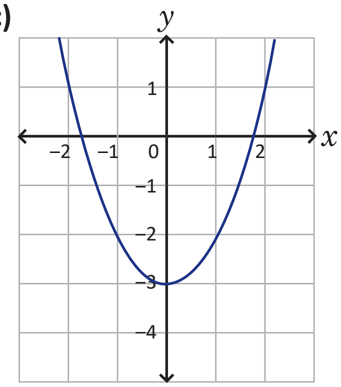
1a)



1b)



1c)



2a) Es una línea recta que pasa por los puntos (0, –1) y (–1, 2), entonces:

La pendiente es $\frac{2-(-1)}{-1-0} = -3$.

El intercepto con el eje y es –1.

Por lo tanto, la ecuación es:

$$y = -3x - 1.$$

En el numeral 2, considere que un estudiante puede expresar de diferente forma las ecuaciones, por ejemplo en el literal b, podría desarrollar el cuadrado del binomio o dejarlo indicado; en este caso cualquier forma de expresar la ecuación se podría considerar correcta, a menos que como docente brinde la indicación de expresarlo en una forma específica.

2b) Es una parábola desplazada 1 unidad a la derecha y 2 hacia abajo. Ahora si el vértice de esta parábola estuviera en el origen sería de la forma $y = ax^2$, y pasaría por el punto (1, 1), así se debe cumplir que:

$$1 = a(1)^2$$

$$1 = a$$

Por lo tanto, la ecuación que determina dicho lugar geométrico es la parábola $y = x^2$ desplazada 1 unidad a la derecha y 2 hacia abajo, es decir, $y + 2 = (x-1)^2$, o bien $y = (x-1)^2 - 2$.

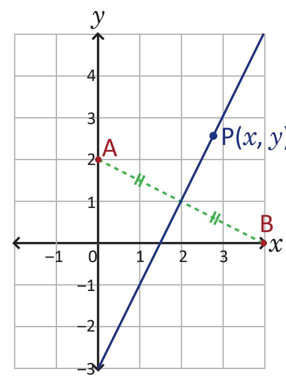
1.2 Ecuación de un lugar geométrico*

Problema inicial

Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto A (0, 2) es igual a la distancia al punto B(4, 0).

Solución

Se colocan los puntos A y B en el plano cartesiano.



Puedes comprobar que las rectas son perpendiculares.

En particular un punto que cumple es el punto medio del segmento AB.

Tomando en general los puntos P(x, y) que cumplen la condición y utilizando la distancia entre dos puntos:

$$d(\mathrm{A, P}) = d(\mathrm{P, B})$$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2} \quad \text{elevando al cuadrado,}$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 4y + 4 = \cancel{x^2} - 8x + 16 + \cancel{y^2} \quad \text{simplificando la ecuación,}$$

$$8x - 4y - 12 = 0.$$

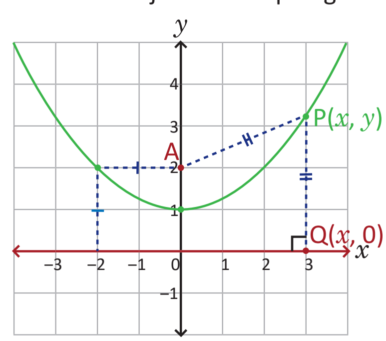
Por lo tanto, la ecuación que determina el lugar geométrico es $2x - y - 3 = 0$, y gráficamente es la recta perpendicular al segmento AB que pasa por su punto medio (mediatriz del segmento AB).

Conclusión

Para deducir la ecuación que determina un lugar geométrico con condiciones específicas, se plantea la ecuación que cumple las condiciones requeridas, aplicando conceptos de distancia entre puntos, entre punto y recta, etc.

Ejemplo

Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al eje x es siempre igual a la distancia al punto A(0, 2).



En particular un punto que cumple es el punto medio de la distancia entre el punto A y el eje x.

Planteando la ecuación para P(x, y) que cumple las condiciones:

$$d(\mathrm{P, Q}) = d(\mathrm{A, P})$$

$$|y| = \sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2} \quad \text{elevando al cuadrado,}$$

$$\cancel{y^2} = x^2 + \cancel{y^2} - 4y + 4 \quad \text{simplificando la ecuación,}$$

$$x^2 - 4y + 4 = 0.$$

Y se puede expresar como: $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$.

Por lo tanto, la ecuación que determina el lugar geométrico es $x^2 - 4y + 4 = 0$, y es una parábola.

Problemas

1. Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto A(2, –3) es igual a la distancia al punto B(0, –1).
2. Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a la recta $y = -1$ es siempre igual a la distancia al punto A(0, 1).
3. Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos que están a 2 unidades de distancia del eje y.
4. Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos que están a igual distancia del eje x como del eje y.

Indicador de logro

1.2 Deduce la ecuación que determina un lugar geométrico con condiciones dadas.

Secuencia

Ahora que los estudiantes ya saben qué es un lugar geométrico, se trabajarán problemas que brindan condiciones que determinan un lugar en el plano para deducir sus ecuaciones. Esta clase tiene asterisco, lo que indica que el docente debe dar mayor apoyo a sus estudiantes.

Propósito

El Ejemplo es un problema parecido al inicial, de modo que apliquen los conocimientos sobre distancia entre dos puntos o distancia entre punto y recta. Al resolverlo se avanza en la deducción de la ecuación canónica de la parábola, partiendo de un caso específico.

Solución de problemas:

1. Tomando en general los puntos P(x, y) que cumplen la condición y utilizando la distancia entre dos puntos:

$$d(\text{A, P}) = d(\text{P, B})$$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2} = \sqrt{(x-0)^2+(y+1)^2} \quad \text{elevando al cuadrado cada miembro,}$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 4x + 4 + 6y + 9 = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2y + 1$$

$$-4x + 4y + 12 = 0 \quad \text{dividiendo por } -4,$$

$$x - y - 3 = 0.$$

2. Tomando en general los puntos P(x, y) que cumplen la condición y utilizando la distancia entre dos puntos y distancia de un punto a una recta:

$$d(\text{P}, l) = d(\text{A, P}) \qquad l\text{: recta } y = -1,$$

$$|y-(-1)| = \sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2} \quad \text{elevando al cuadrado cada miembro,}$$

$$\cancel{y^2} + 2y + 1 = x^2 + \cancel{y^2} - 2y + 1$$

$$x^2 - 4y = 0.$$

3. Tomando en general los puntos P(x, y) que cumplen la condición y utilizando la distancia de un punto a una recta:

$$d(\text{P, l}) = 2$$

$$|x-0| = 2$$

$$|x| = 2$$

$$x = 2 \text{ o } x = -2$$

Por lo tanto, son los puntos que pertenecen a las rectas $x = 2$ o $x = -2$.

4. Tomando en general los puntos P(x, y) que cumplen la condición y utilizando la distancia de un punto a una recta:

$$d(\text{P}, l_1) = d(\text{P}, l_2) \qquad l_1\text{: el eje } x,\ l_2\text{: el eje } y.$$

$$|x| = |y|$$

$$x = y \text{ o } x = -y$$

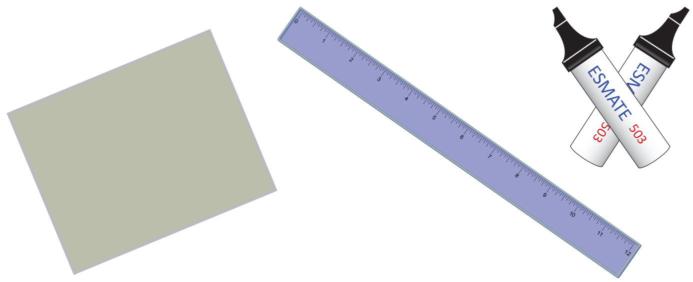
Por lo tanto, son los puntos que pertenecen a las rectas $y = x$ o $y = -x$.

Lección 1

1.3 Actividad introductoria

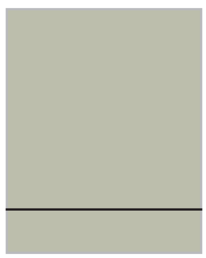
Materiales

- Hoja de papel vegetal
- Plumón
- Regla

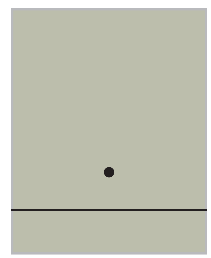


Actividad

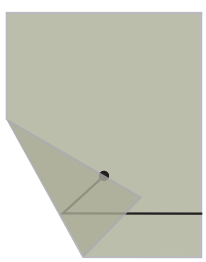
1. Dibuja una recta paralela al lado más angosto de la página, cercana al final de la misma.



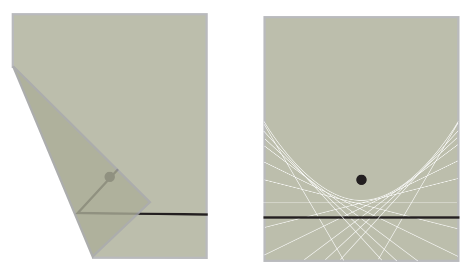
2. Dibuja un punto arriba de la recta, y en medio de la página.



3. Tomando el inicio de la recta, dobla la página hasta hacer coincidir el inicio de esta con el punto dibujado.



4. Realiza el mismo proceso con puntos cercanos en la línea recta hasta llegar al final de esta. Analiza la figura formada.



Definición

La figura que queda marcada por los cortes de los dobleces es una **parábola**. Observa que cada punto de ella cumple la condición de estar a igual distancia del punto dibujado como de la recta dibujada.

Preguntas

1. ¿Qué pasaría con la parábola si el punto se separa más de la recta dibujada?
2. ¿Qué pasaría si el punto se dibujara por debajo de la línea?
3. ¿Qué pasaría si la recta se dibujara vertical y con el punto a la derecha o izquierda de ella?
4. Analiza por qué se cumple que los puntos que determinan la parábola están a igual distancia del punto como de la recta.

Indicador de logro

1.3 Identifica el lugar geométrico de una parábola.

Secuencia

Ahora que los estudiantes ya han deducido ecuaciones para lugares geométricos específicos, se construirá la forma que tiene una parábola, basado en su definición.

Propósito

En la Actividad se espera que logren asociar la definición geométrica con la figura que conocen de la parábola, para que luego al deducir su ecuación canónica quede claro que esta ecuación define el lugar geométrico de una parábola.

Materiales

En la clase se utilizarán hojas de papel vegetal, plumón y regla (uno de cada uno por estudiante).

Solución de problemas:

1. Los dobleces tendrían una menor inclinación y tenderían a ser menos verticales conforme se aleje más el punto de la línea, entonces se formaría una parábola cada vez más abierta.

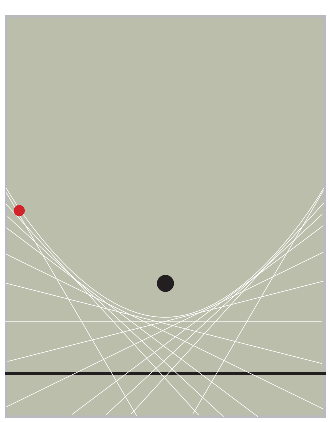
2. También se formaría una parábola pero abierta hacia abajo, porque ahora los dobleces quedarían al revés.

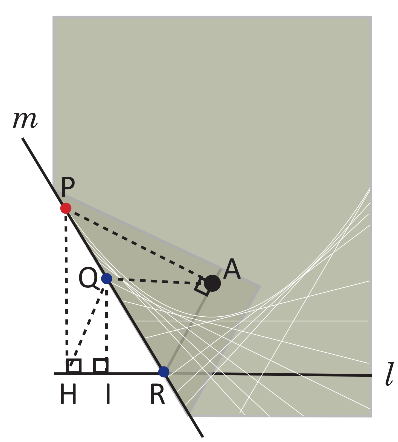
3. Los dobleces se inclinarían, partirían de una posición vertical e irían tendiendo a ser horizontales, entonces se formaría una parábola ya sea abierta hacia la derecha, o bien, abierta hacia la izquierda.

4. Considerando el doblez m, y sea R la intersección de dicho doblez con la recta dibujada l, sea H el punto que corresponde al punto A, se cumple que RA = RH, por ser simétricos respecto a m, y sea P el punto de intersección de m y la perpendicular a l que pasa por H, entonces, d(P, A) = d(P, H) = d(P, l), porque las líneas se sobreponen al hacer el doblez.

Si Q es otro punto del doblez (recta m) entonces d(Q, A) = d(Q, H) $>$ d(Q, I) = d(Q, l).

Por lo tanto, entre los puntos de la recta m solamente P está en la curva cuyos puntos equidistan al punto A y la recta l (m es tangente a la curva en el punto P). Luego, esta curva es la figura marcada por los cortes de los dobleces.





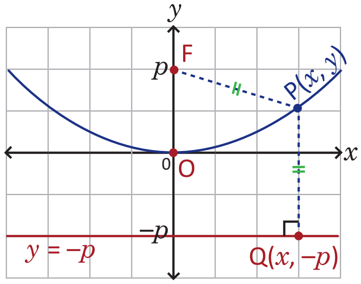
1.4 La parábola*

Problema inicial

Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a la recta $y = -p$ es igual a la distancia al punto F(0, p).

Solución

Se toman en general los puntos P(x, y) que cumplen la condición y se utiliza la distancia de un punto a una recta y la distancia de dos puntos.



Como la recta $y = -p$ es horizontal, $d(\text{P, Q}) = |y - (-p)|$.

Expresando la igualdad $d(\text{P, Q}) = d(\text{P, F})$:

$|y - (-p)| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2}$ elevando al cuadrado,

$|y + p|^2 = x^2 + (y - p)^2$ desarrollando los cuadrados,

$y^2 + 2yp + p^2 = x^2 + y^2 - 2yp + p^2$ simplificando,

$4yp = x^2$ despejando y,

$y = \frac{1}{4p}x^2.$

Por lo tanto, el lugar geométrico es una parábola de la forma $y = ax^2$, donde $a = \frac{1}{4p}$.

Definición

La ecuación que determina el espacio geométrico de **una parábola** está dada por: $y = \frac{1}{4p}x^2$.

En esta ecuación, **el vértice** de la parábola siempre estará en el origen (0, 0). El valor de p recibe el nombre de **parámetro**.

El punto F(0, p) es conocido como **el foco** de la parábola, la recta $y = -p$ es conocida como **la directriz** de la parábola. La recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco de la parábola se conoce como **eje**.

Si el parámetro p es negativo, la ecuación determina una parábola abierta hacia abajo.

Si la directriz es una recta vertical de la forma $x = -p$, la parábola sería horizontal y su ecuación sería:

$$x = \frac{1}{4p}y^2$$

Ejemplo 1

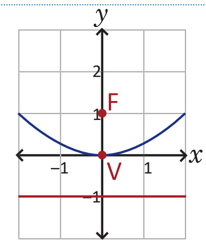
Determina la ecuación de la parábola con foco F(0, –3) y directriz $y = 3$.

El valor de $p = -3$, entonces la ecuación de la parábola es $y = \frac{1}{4(-3)}x^2$, simplificando queda: $y = -\frac{1}{12}x^2$.

Por lo tanto, la ecuación es $y = -\frac{1}{12}x^2$, y es una parábola abierta hacia abajo.

Ejemplo 2

Determina el foco, la directriz y el vértice de la parábola $y = \frac{1}{4}x^2$, luego localiza cada uno en el plano cartesiano y grafica la parábola.



Se tiene que $\frac{1}{4} = \frac{1}{4p}$, es decir, $p = 1$.

Foco: F(0, 1) Directriz: $y = -1$ Vértice: V(0, 0)

Problemas

1. Deduce la ecuación y grafica la parábola con el foco y la directriz indicada en cada literal.

a) F(0, 2), $y = -2$ b) F(0, –1), $y = 1$ c) F$\left(0, \frac{1}{8}\right)$, $y = -\frac{1}{8}$ d) F$\left(0, -\frac{1}{16}\right)$, $y = \frac{1}{16}$ e) F(2, 0), $x = -2$

2. Determina las coordenadas del foco, el vértice y la ecuación de la directriz, luego localízalos en el plano cartesiano y grafica la parábola.

a) $y = 2x^2$ b) $y = -x^2$ c) $y = \frac{1}{8}x^2$ d) $y = -\frac{1}{4}x^2$ e) $x = 2y^2$

Indicador de logro

1.4 Deduce y grafica la ecuación de una parábola con vértice en el origen dados el foco y la directriz.

Secuencia

Una vez asociada la definición de parábola con su gráfica, se deduce su ecuación a partir de las condiciones dadas en la definición. Esta clase tiene asterisco, lo que indica que el docente debe dar mayor apoyo a sus estudiantes.

Propósito

El Problema inicial plantea las condiciones de la definición de la parábola para poder deducir la ecuación que define su lugar geométrico.

Solución de problemas:

1a) El valor $p = 2$, entonces la ecuación de la parábola es: $y = \frac{1}{4(2)}x^2 = \frac{1}{8}x^2$.

1b) El valor $p = -1$, entonces $y = \frac{1}{4(-1)}x^2 = -\frac{1}{4}x^2$.

1c) El valor $p = \frac{1}{8}$, entonces $y = \frac{1}{4\left(\frac{1}{8}\right)}x^2 = \frac{1}{\frac{1}{2}}x^2 = 2x^2$.

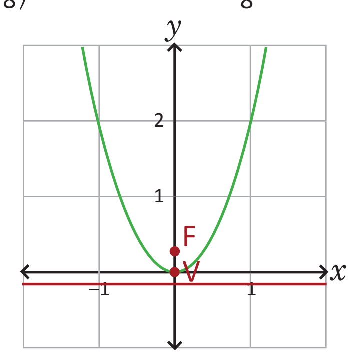
1d) El valor $p = -\frac{1}{16}$, entonces

$y = \frac{1}{4\left(-\frac{1}{16}\right)}x^2 = -\frac{1}{\frac{1}{4}}x^2 = -4x^2$.

1e) El valor $p = 2$, pero la recta es vertical y el punto está a la derecha de dicha recta, entonces intercambiando x y y en $y = \frac{1}{4p}x^2$ la ecuación de la parábola es $x = \frac{1}{4(2)}y^2 = \frac{1}{8}y^2$.

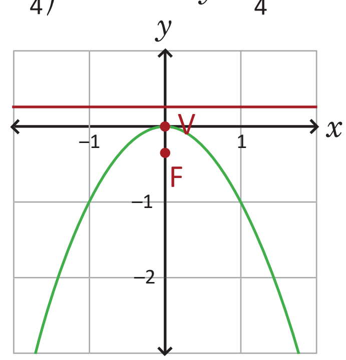
2a) Se calcula el valor de p: $2 = \frac{1}{4p}$, es decir, $p = \frac{1}{8}$.

Foco: $F\left(0, \frac{1}{8}\right)$ Directriz: $y = -\frac{1}{8}$ Vértice: V(0, 0)



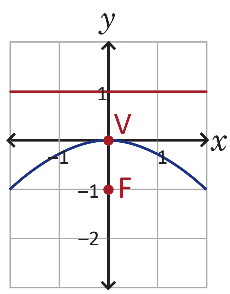
2b) Se calcula el valor de p: $-1 = \frac{1}{4p}$, es decir, $p = -\frac{1}{4}$.

Foco: $F\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ Directriz: $y = \frac{1}{4}$ Vértice: V(0, 0)



2d) Se calcula el valor de p: $-\frac{1}{4} = \frac{1}{4p}$, es decir, $p = -1$.

Foco: F (0, –1) Directriz: $y = 1$ Vértice: V(0, 0)

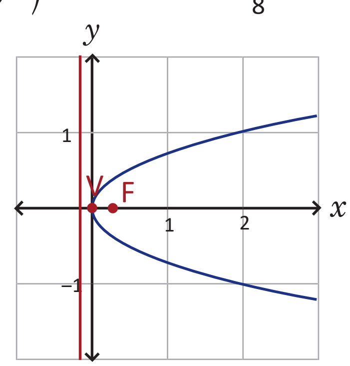


El literal c se puede resolver de manera muy parecida al literal d, siendo un poco más sencillo porque el coeficiente es positivo, y los elementos son:

F (0, 2), $y = -2$, V(0, 0).

2e) Se calcula el valor de p: $2 = \frac{1}{4p}$, es decir, $p = \frac{1}{8}$.

Foco: $F\left(\frac{1}{8}, 0\right)$ Directriz: $x = -\frac{1}{8}$ Vértice: V(0, 0)



1.5 Desplazamientos paralelos

Problema inicial

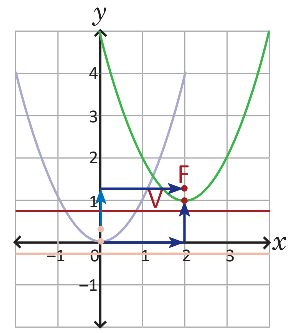
Aplica desplazamientos verticales y horizontales para graficar el lugar geométrico que determina la ecuación $y = (x - 2)^2 + 1$ en el plano cartesiano. Determina las coordenadas del foco, el vértice y la ecuación de la directriz.

La gráfica de la función $f(x - h) + k$, es la gráfica de la función $f(x)$ desplazada h unidades a la derecha y k unidades hacia arriba.

Solución

La gráfica de la función $y = (x - 2)^2 + 1$, es la gráfica de la función $y = x^2$ desplazada 2 unidades hacia la derecha y 1 unidad hacia arriba.

Determinando p de $y = x^2$: $1 = \frac{1}{4p}$, solucionando, $p = \frac{1}{4}$.



Además las coordenadas del vértice, el foco y la ecuación de la directriz se desplazan de igual manera.

Ecuación	$y = x^2$	$y = (x - 2)^2 + 1$
Foco	$F\left(0, \frac{1}{4}\right)$	$F\left(0 + 2, \frac{1}{4} + 1\right) = F\left(2, \frac{5}{4}\right)$
Vértice	V(0, 0)	V(0 + 2, 0 + 1) = V(2, 1)
Directriz	$y = -\frac{1}{4}$	$y = \frac{3}{4}$

En general

Para desplazar una gráfica horizontalmente h unidades, se cambia la variable x por la expresión $x - h$; y para desplazar una gráfica verticalmente k unidades se cambia la variable y por la expresión $y - k$.

Entonces la ecuación de una parábola de la forma $y = \frac{1}{4p}x^2$ desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente es: $y - k = \frac{1}{4p}(x - h)^2$.

En una parábola desplazada con ecuación $y - k = \frac{1}{4p}(x - h)^2$, se cumple que: $V(h, k)$ $F(h, p + k)$ Directriz: $y = -p + k$

Ejemplo

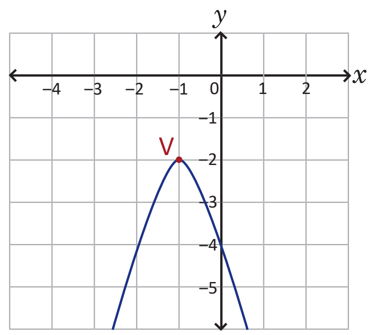
a) Determina la ecuación que resulta al desplazar la parábola $y = 2x^2$, –3 unidades horizontalmente y 1 unidad verticalmente.

Sustituyendo x por la expresión $x - (-3)$, y por la expresión $y - 1$:

$$y - 1 = 2(x + 3)^2, \text{ o bien } y = 2(x + 3)^2 + 1$$

b) Grafica la parábola determinada por la ecuación $y + 2 = -2(x + 1)^2$.

Es la ecuación de la parábola $y = -2x^2$ desplazada –1 unidad horizontalmente y –2 unidades verticalmente, como muestra la figura.



Problemas

1. Determina la ecuación de la parábola desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente, en cada literal.

a) $y = x^2$, $h = 3$, $k = 2$ b) $y = 3x^2$, $h = -1$, $k = 3$ c) $y = -x^2$, $h = 1$, $k = -1$

d) $y = -2x^2$, $h = -2$, $k = -1$ e) $y = 2x^2$, $h = 0$, $k = 3$ f) $y = -3x^2$, $h = -2$, $k = 0$

2. Grafica en el plano cartesiano la parábola determinada por las siguientes ecuaciones. Luego determina las coordenadas del foco, el vértice y la ecuación de la directriz de cada una.

a) $y - 1 = (x - 4)^2$ b) $y + 2 = 2(x - 3)^2$ c) $y - 3 = -(x + 1)^2$ d) $y + 1 = -2(x + 1)^2$

Indicador de logro

1.5 Encuentra y grafica la ecuación de una parábola desplazada paralelamente respecto a los ejes de coordenadas.

Secuencia

De la unidad de funciones reales vista en Primer año de bachillerato, se tiene un resultado para los desplazamientos paralelos de la gráfica de una función; a partir de ella se deduce la generalización de los desplazamientos paralelos para una ecuación cualquiera (no necesariamente función).

Propósito

En el Problema inicial y el Ejemplo, se espera que los estudiantes apliquen los desplazamientos paralelos para dibujar la gráfica de una parábola desplazada, para ubicar puntos específicos como el foco o el vértice y rectas como la directriz; en estos apartados y en los Problemas, no se espera que grafiquen utilizando tablas de valores.

Solución de problemas:

1a) $y - 2 = (x - 3)^2$, o bien $y = (x - 3)^2 + 2$.

1b) $y - 3 = 3(x - (-1))^2$, o bien $y = 3(x + 1)^2 + 3$.

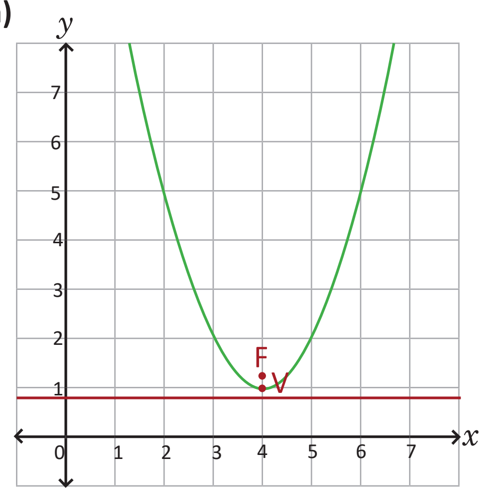
1c) $y - (-1) = -(x - 1)^2$, o bien $y = -(x - 1)^2 - 1$.

1d) $y - (-1) = -2(x - (-2))^2$, o bien $y = -2(x + 2)^2 - 1$.

1e) $y - 3 = 2(x - 0)^2$, o bien $y = 2x^2 + 3$.

1f) $y - 0 = -3(x - (-2))^2$, o bien $y = -3(x + 2)^2$.

2a)



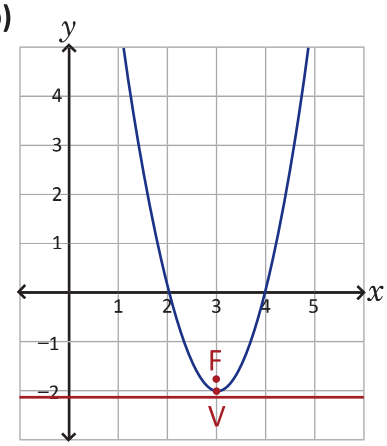
$p = \frac{1}{4}$

$F\left(4, \frac{5}{4}\right)$

V (4, 1)

$y = \frac{3}{4}$

2b)



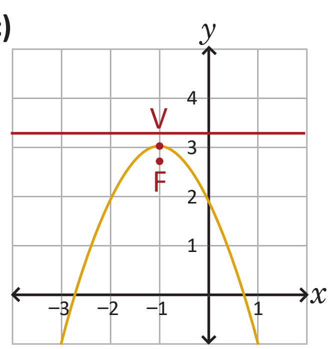
$p = \frac{1}{8}$

$F\left(3, -\frac{15}{8}\right)$

V (3, –2)

$y = -\frac{17}{8}$

2c)



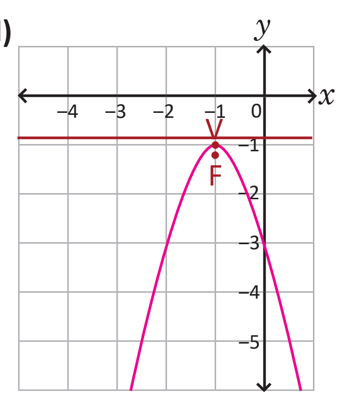
$p = -\frac{1}{4}$

$F\left(-1, \frac{11}{4}\right)$

V (–1, 3)

$y = \frac{13}{4}$

2d)



$p = -\frac{1}{8}$

$F\left(-1, -\frac{9}{8}\right)$

V (–1, –1)

$y = -\frac{7}{8}$

1.6 Procedimiento para completar cuadrados perfectos

Problema inicial

Escribe el polinomio $x^2 + 4x$ en la forma $a(x - h)^2 + k$.

Solución

Para completar el cuadrado perfecto en la expresión se suma y resta la misma cantidad para no alterar la expresión:

$$x^2 + 4x = x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2$$
$$= (x^2 + 4x + 2^2) - 4$$
$$= (x + 2)^2 - 4$$

Por lo tanto, $x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$.

En el desarrollo del cuadrado de un binomio se cumple que:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

El término a^2 puede obtenerse al dividir el coeficiente que acompaña a "x" entre 2 y elevarlo al cuadrado.

$$\left(\frac{2a}{2}\right)^2 = a^2$$

Conclusión

El método en el cual se suma y resta una cantidad adecuada para que una expresión se convierta en cuadrado perfecto se conoce como **completar cuadrados perfectos**, y es una estrategia muy útil para la resolución de problemas en matemática.

Ejemplo

Completa cuadrados perfectos en las siguientes expresiones algebraicas.

a) $x^2 - 8x$ b) $x^2 - 4x + 2$ c) $2x^2 + 12x + 10$ d) $-3x^2 + 12x - 13$

a) $x^2 - 8x = (x^2 - 8x + 4^2) - 4^2$
$= (x - 4)^2 - 16$

b) $x^2 - 4x + 2 = (x^2 - 4x + 2^2) - 2^2 + 2$
$= (x - 2)^2 - 4 + 2$
$= (x - 2)^2 - 2$

c) $2x^2 + 12x + 10 = 2(x^2 + 6x) + 10$
$= 2(x^2 + 6x + 3^2 - 3^2) + 10$
$= 2[(x + 3)^2 - 9] + 10$
$= 2(x + 3)^2 - 18 + 10$
$= 2(x + 3)^2 - 8$

d) $-3x^2 + 12x - 13 = -3(x^2 - 4x) - 13$
$= -3(x^2 - 4x + 2^2 - 2^2) - 13$
$= -3[(x - 2)^2 - 4] - 13$
$= -3(x - 2)^2 + 12 - 13$
$= -3(x - 2)^2 - 1$

Problemas

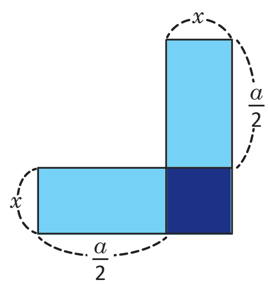
1. Completa cuadrados perfectos en las siguientes expresiones algebraicas.

a) $x^2 + 2x$ b) $x^2 + 6x$ c) $x^2 + 8x$ d) $x^2 - 4x$ e) $x^2 + 10x + 15$
f) $x^2 - 2x - 1$ g) $2x^2 + 8x + 6$ h) $3x^2 - 6x - 2$ i) $-x^2 - 4x - 4$ j) $-2x^2 + 8x + 3$

2. Utilizando la figura de la derecha:

a) Determina cuánto es el área de la figura mostrada.

b) Determina el área del rectángulo que debe agregarse para formar un cuadrado.



Unidad 3

Indicador de logro

1.6 Completa cuadrados perfectos en una expresión algebraica.

Secuencia

El procedimiento para completar cuadrados se ha venido desarrollando y utilizando durante muchas unidades desde noveno grado, sin embargo, siempre es necesario repasar este procedimiento para realizarlo eficientemente, porque en especial en esta unidad se aplicará con mucha frecuencia.

Propósito

El Problema inicial utiliza la forma general en que se expresa una parábola desplazada, para lograr que en la siguiente clase el estudiante reconozca que tiene que realizar el mismo procedimiento. El numeral 2 de los Problemas es para asociar la parte algebraica y geométrica de un cuadrado.

Solución de problemas:

1a) $x^2 + 2x + (1)^2 - (1)^2 = (x + 1)^2 - 1$

1b) $x^2 + 6x + (3)^2 - (3)^2 = (x + 3)^2 - 9$

1c) $x^2 + 8x + (4)^2 - (4)^2 = (x + 4)^2 - 16$

1d) $x^2 - 4x + (2)^2 - (2)^2 = (x - 2)^2 - 4$

1e) $x^2 + 10x + (5)^2 - (5)^2 + 15 = (x + 5)^2 - 10$

1f) $x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2 - 1 = (x - 1)^2 - 2$

1g) $2x^2 + 8x + 6 = 2(x^2 + 4x + (2)^2 - (2)^2) + 6 = 2(x + 2)^2 - 8 + 6 = 2(x + 2)^2 - 2$

1h) $3x^2 - 6x - 2 = 3(x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2) - 2 = 3(x - 1)^2 - 3 - 2 = 3(x - 1)^2 - 5$

1i) $-x^2 - 4x - 4 = -(x^2 + 4x + (2)^2 - (2)^2) - 4 = -(x + 2)^2 + 4 - 4 = -(x + 2)^2$

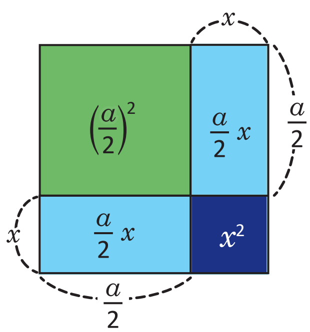
1j) $-2x^2 + 8x + 3 = -2(x^2 - 4x + (2)^2 - (2)^2) + 3 = -2(x - 2)^2 + 8 + 3 = -2(x - 2)^2 + 11$

2a) El área del cuadrado azul es x^2, y el área de uno de los rectángulos celestes es $\frac{a}{2}x$, por lo tanto, el área de la figura es:

$$x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{a}{2}x = x^2 + ax.$$

2b) Se debe agregar un cuadrado de lado $\frac{a}{2}$, y se puede constatar que el área es por un lado $x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, y por otro lado es el área del cuadrado grande, es decir, $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2$ y por lo tanto, se cumple que:

$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2.$$



1.7 Ecuación general de la parábola

Problema inicial

Grafica el lugar geométrico determinado por la ecuación $-x^2 + 4x - 3 + y = 0$.

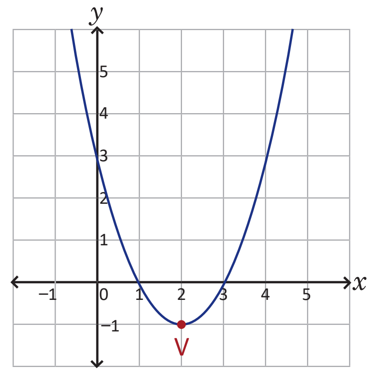
Solución

Despejando y y completando cuadrados perfectos para x.

$$y = x^2 - 4x + 3$$
$$y = (x^2 - 4x + 2^2) - 2^2 + 3$$
$$y = (x - 2)^2 - 4 + 3$$
$$y = (x - 2)^2 - 1$$

Expresando de otra manera: $y - (-1) = (x - 2)^2$.

Por lo tanto la ecuación $y - x^2 + 4x - 3 = 0$ es la gráfica de la parábola $y = x^2$ desplazada 2 unidades a la derecha y 1 unidad hacia abajo.



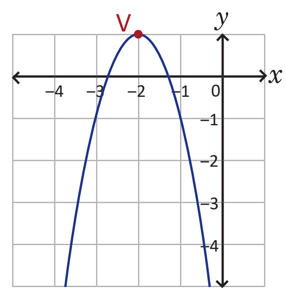
Conclusión

Una parábola puede ser representada desarrollando los cuadrados perfectos de la ecuación $y - k = \frac{1}{4p}(x - h)^2$ y dejando la ecuación igualada a 0.

En general, para determinar los desplazamientos verticales y horizontales en una ecuación de la forma $ax^2 + bx + cy + d = 0$, se completan cuadrados perfectos y se expresa en la forma $y - k = \frac{1}{4p}(x - h)^2$. A la ecuación de la forma $ax^2 + bx + cy + d = 0$ se le llama **ecuación general de la parábola**.

Ejemplo

Grafica la parábola determinada por la ecuación $2x^2 + 8x + 7 + y = 0$. Determina las coordenadas del vértice, el foco y la directriz.



Despejando y y completando cuadrados perfectos para x.

$$y = -2x^2 - 8x - 7$$
$$y = -2(x^2 + 4x) - 7$$
$$y = -2(x^2 + 4x + 2^2 - 2^2) - 7$$
$$y = -2(x + 2)^2 + 8 - 7$$
$$y = -2(x + 2)^2 + 1$$

Por lo tanto, es la parábola $y = -2x^2$ desplazada 2 unidades hacia la izquierda y 1 unidad hacia arriba.

Determinando p: $-2 = \frac{1}{4p}$, solucionando, $p = -\frac{1}{8}$.

Entonces:

Ecuación	$y = -2x^2$	$y = -2(x + 2)^2 + 1$
Foco	$F\left(0, -\frac{1}{8}\right)$	$F\left(-2, \frac{7}{8}\right)$
Vértice	V (0, 0)	V (–2, 1)
Directriz	$y = \frac{1}{8}$	$y = \frac{9}{8}$

Problemas

Para cada literal determina el vértice y grafica la parábola correspondiente.

a) $x^2 + 2x + 2 - y = 0$

b) $x^2 - 4x + 3 - y = 0$

c) $x^2 + 4x + 5 + y = 0$

d) $-x^2 + 2x + 1 - y = 0$

e) $-2x^2 - 12x - 20 + y = 0$

f) $2x^2 - 8x + 5 + y = 0$

g) $3x^2 - 6x + 5 + y = 0$

h) $3x^2 + 6x + y + 6 = 0$

Indicador de logro

1.7 Determina las coordenadas del vértice y traza la gráfica de una parábola a partir de su ecuación general.

Secuencia

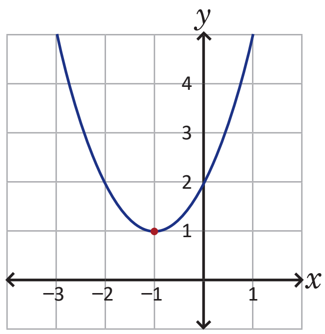
Una vez hecho el repaso sobre el procedimiento para completar cuadrados se puede trabajar con la ecuación general de la parábola, para encontrar su vértice y graficarla en el plano cartesiano.

Propósito

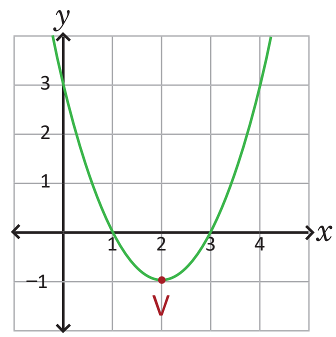
En el Problema inicial y Ejemplo de la clase anterior y la presente, se han tomado parábolas desplazadas a los cuatro cuadrantes del plano, y en los Problemas, algunas desplazadas sobre los ejes coordenados también.

Solución de problemas:

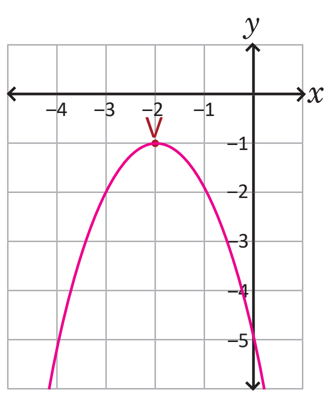
a) $y = x^2 + 2x + (1)^2 - (1)^2 + 2 = (x + 1)^2 + 1$



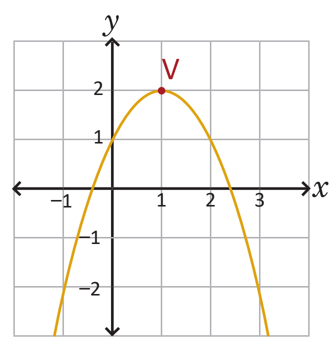
b) $y = x^2 - 4x + (2)^2 - (2)^2 + 3 = (x - 2)^2 - 1$



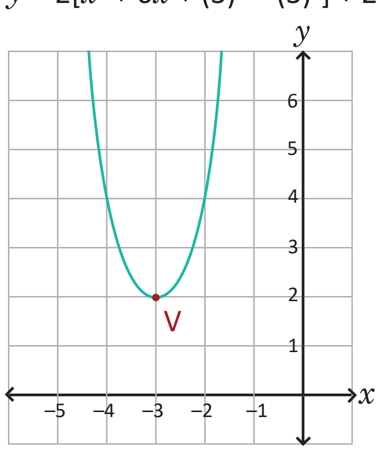
c) $y = -x^2 - 4x - (2)^2 + (2)^2 - 5 = -(x + 2)^2 - 1$



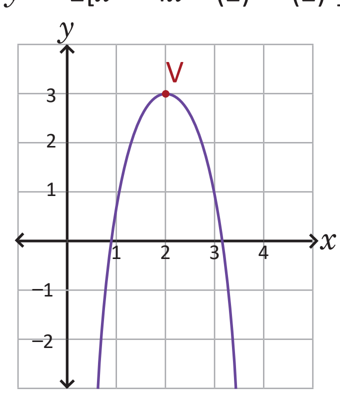
d) $y = -x^2 + 2x - (1)^2 + (1)^2 + 1 = -(x - 1)^2 + 2$



e) $y = 2[x^2 + 6x + (3)^2 - (3)^2] + 20 = 2(x + 3)^2 + 2$



f) $y = -2[x^2 - 4x + (2)^2 - (2)^2] - 5 = -2(x - 2)^2 + 3$



g) $y = -3[x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2] - 5 = -3(x - 1)^2 - 2$

h) $y = -3[x^2 + 2x + (1)^2 - (1)^2] - 6 = -3(x + 1)^2 - 3$

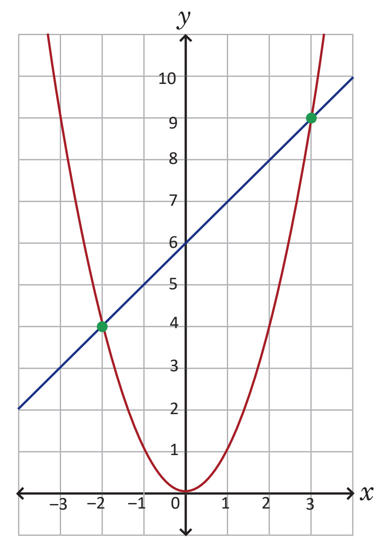
1.8 Líneas rectas y parábolas

Problema inicial

Determina las coordenadas de los puntos de intersección entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x + 6$.

Solución

Si un punto está en la intersección de las dos gráficas, dicho punto debe cumplir tanto la ecuación de la recta como la ecuación de la parábola. Así, determinar los puntos de intersección equivale a encontrar las soluciones del sistema de ecuaciones:



$$\begin{cases} y = x^2 & \text{---------- (1)} \\ y = x + 6 & \text{---------- (2)} \end{cases}$$

Utilizando el método de sustitución y solucionando:

$$\begin{aligned} x^2 &= x + 6 && \text{igualando a cero,} \\ x^2 - x - 6 &= 0 && \text{factorizando,} \\ (x - 3)(x + 2) &= 0 && \text{solucionando la ecuación cuadrática,} \\ x = 3 &\text{ o } x = -2. \end{aligned}$$

Determinando el valor de y para cada valor de x:

Si $x = 3$, entonces: $y = 3 + 6 = 9$.

Si $x = -2$, entonces: $y = -2 + 6 = 4$.

Por lo tanto, los puntos de intersección son (3, 9) y (–2, 4).

Conclusión

Las coordenadas de los puntos de intersección entre una parábola y una línea recta, corresponden a las soluciones del sistema formado por sus ecuaciones.

Al resolver el sistema pueden tenerse 3 casos:

1. La recta corta a la parábola en 2 puntos diferentes (es secante).
2. La recta corta a la parábola en 1 punto (es tangente o vertical).
3. La recta no corta a la parábola.

Problemas

Determina los puntos de intersección entre la parábola y la línea recta de cada literal. Realiza la gráfica en el plano cartesiano.

a) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 3x \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = -x - 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ y = 5x - 4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 1 \end{cases}$ g) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ h) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x - 1 \end{cases}$

Unidad 3

Indicador de logro

1.8 Encuentra las coordenadas de los puntos de intersección entre la ecuación de una línea recta y una parábola utilizando sus ecuaciones.

Secuencia

Una vez estudiadas las ecuaciones de la parábola se pueden utilizar para encontrar intersecciones con otras figuras geométricas como las líneas rectas.

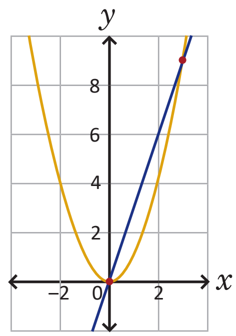
Propósito

Aplicar los conocimientos sobre ecuaciones cuadráticas, en especial el análisis del discriminante para determinar la cantidad de intersecciones que hay entre una recta y una parábola.

Solución de problemas:

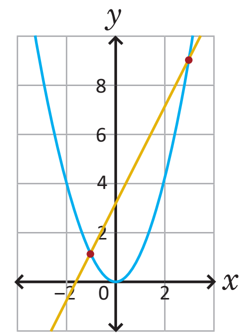
a)
$$x^2 = 3x$$
$$x^2 - 3x = 0$$
$$x(x - 3) = 0$$
$$x = 0 \text{ o } x = 3$$
$$y = 3(0) = 0 \text{ o } y = 3(3) = 9$$

Los puntos de intersección son (0, 0) y (3, 9).



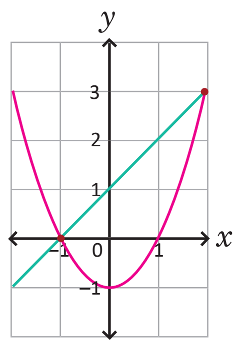
b)
$$x^2 = 2x + 3$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$(x + 1)(x - 3) = 0$$
$$x = -1 \text{ o } x = 3$$
$$y = (-1)^2 = 1 \text{ o } y = 3^2 = 9$$

Los puntos de intersección son (–1, 1) y (3, 9).



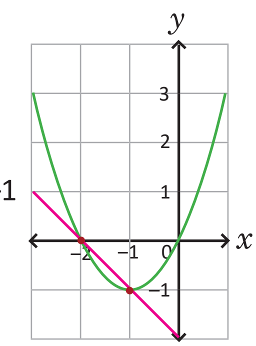
c)
$$x^2 - 1 = x + 1$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x - 2)(x + 1) = 0$$
$$x = 2 \text{ o } x = -1$$
$$y = 2 + 1 = 3 \text{ o } y = -1 + 1 = 0$$

Los puntos de intersección son (2, 3) y (–1, 0).



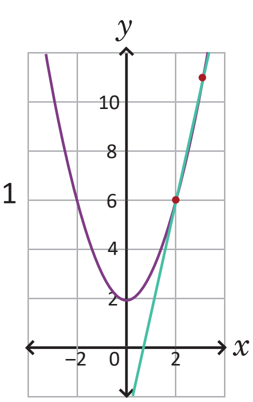
d)
$$x^2 + 2x = -x - 2$$
$$x^2 + 3x + 2 = 0$$
$$(x + 2)(x + 1) = 0$$
$$x = -2 \text{ o } x = -1$$
$$y = -(-2) - 2 = 0 \text{ o } y = -(-1) - 2 = -1$$

Los puntos de intersección son (–2, 0) y (–1, –1).



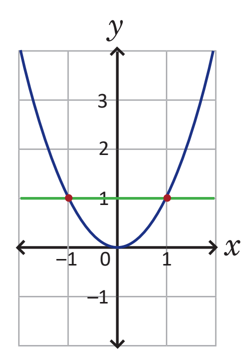
e)
$$x^2 + 2 = 5x - 4$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$(x - 2)(x - 3) = 0$$
$$x = 2 \text{ o } x = 3$$
$$y = 5(2) - 4 = 6 \text{ o } y = 5(3) - 4 = 11$$

Los puntos de intersección son (2, 6) y (3, 11).



f)
$$x^2 = 1$$
$$x^2 - 1 = 0$$
$$(x - 1)(x + 1) = 0$$
$$x = 1 \text{ o } x = -1$$
$$y = 1$$

Los puntos de intersección son (1, 1) y (–1, 1).



g)
$$x^2 = 2x - 1$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$(x - 1)^2 = 0$$
$$x = 1 \quad y = 1^2 = 1$$

El único punto de intersección es (1, 1), la recta es tangente a la parábola.

h)
$$x^2 = x - 1$$
$$x^2 - x + 1 = 0$$

No tiene solución en los números reales, entonces la recta y la parábola no se cortan en algún punto.

Recomendar a los estudiantes sustituir los valores encontrados para x en la ecuación que resulte más fácil para encontrar el valor de y.

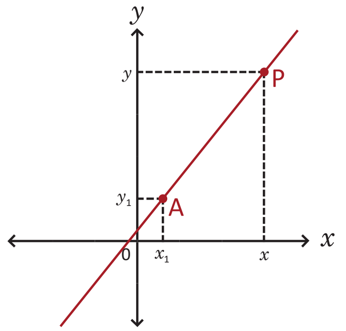
2.2 Ecuación de una recta: forma punto – pendiente*

Problema inicial

Demuestra que la ecuación de la recta l que pasa por un punto A(x_1, y_1) y tiene pendiente m es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Solución



Sea P(x, y) un punto cualquiera sobre la recta l diferente del punto A(x_1, y_1).
Por definición de línea recta, m es constante; entonces:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

Luego,

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta l es: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Definición

La ecuación de una recta l con pendiente conocida m y un punto A(x_1, y_1) perteneciente a la recta es:

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

A esta ecuación se le llama **forma punto – pendiente de la ecuación de la recta**; al despejar la variable y en lo anterior se obtiene:

$$y = mx - mx_1 + y_1$$

donde el coeficiente de la variable x es la pendiente de la recta y el valor de $-mx_1 + y_1$ es constante. Para graficar la recta l conociendo el punto A(x_1, y_1) sobre ella y su ecuación punto – pendiente se hace lo siguiente:

1. Sustituir un valor particular para x y encontrar el correspondiente valor en y.
2. Colocar sobre el plano cartesiano los puntos A(x_1, y_1) y el punto obtenido en el numeral 1; luego trazar la recta que pasa por ambos puntos.

Ejemplo

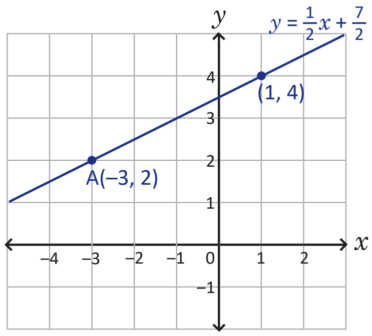
Encuentra la ecuación de la recta l cuya pendiente es $m = \frac{1}{2}$ y pasa por el punto A(–3, 2).

Se sustituyen los valores de m y (x_1, y_1) en la forma punto – pendiente:

$$y - 2 = \frac{1}{2}[x - (-3)]$$

$$y = \frac{1}{2}(x + 3) + 2$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$



Para graficar la recta, se sustituye un valor particular para x en la ecuación anterior, por ejemplo $x = 1$, y se encuentra su correspondiente valor y:

$$y = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4.$$

Se colocan los puntos A(–3, 2) y (1, 4) en el plano y se traza la recta que pasa por ambos puntos, como muestra la figura de la derecha.

Problemas

Encuentra la ecuación de la recta que tiene la pendiente dada y pasa por A; grafica la recta para cada caso:

a) Pendiente $m = 2$ y A(6, 7)

b) Pendiente $m = 1$ y A(–1, 0)

c) Pendiente $m = -1$ y A(–2, 6)

d) Pendiente $m = \frac{1}{2}$ y A(1, 8)

Indicador de logro

1.9 Determina el valor de un parámetro para que una línea recta sea tangente a una parábola.

Secuencia

Ahora que se conocen las posiciones relativas de una recta y una parábola, se puede estudiar la forma de establecer el valor de un parámetro de modo que se cumpla la condición de tangencia entre una recta y una parábola.

Propósito

En la Solución se espera que los estudiantes apliquen el análisis del discriminante y lo relacionen geométricamente con las posiciones relativas entre una recta y una parábola; también es válido analizar el problema completando cuadrados.

Solución de problemas:

a) $x^2 = 6x - p$

$x^2 - 6x + p = 0$

Completando cuadrados.

$p = \left(\frac{6}{2}\right)^2$

$p = 9$

Discriminante igual a cero.

$b^2 - 4ac = 0$

$(-6)^2 - 4(1)(p) = 0$

$36 - 4p = 0$

$p = 9$

b) $x^2 - 2x + 1 = 2x + p$

$x^2 - 4x + 1 - p = 0$

Completando cuadrados.

$1 - p = \left(\frac{4}{2}\right)^2$

$p = 1 - 4$

$p = -3$

Discriminante igual a cero.

$b^2 - 4ac = 0$

$(-4)^2 - 4(1)(1 - p) = 0$

$12 + 4p = 0$

$p = -3$

c) $-x^2 - 3x = -x - p$

$x^2 + 2x - p = 0$

$-p = \left(\frac{2}{2}\right)^2$

$p = -1$

$b^2 - 4ac = 0$

$(2)^2 - 4(1)(-p) = 0$

$4p + 4 = 0$

$p = -1$

d) $-x^2 - 3x - 5 = 3x + p$

$x^2 + 6x + 5 + p = 0$

$5 + p = \left(\frac{6}{2}\right)^2$

$p = 9 - 5$

$p = 4$

$b^2 - 4ac = 0$

$(6)^2 - 4(1)(5 + p) = 0$

$16 - 4p = 0$

$p = 4$

e) $4x^2 = 4x - p$

$4x^2 - 4x + p = 0$

$\frac{p}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$p = 1$

$b^2 - 4ac = 0$

$(-4)^2 - 4(4)(p) = 0$

$16 - 16p = 0$

$p = 1$

f) $-3x^2 + 2x - 3 = -10x + p$

$3x^2 - 12x + 3 + p = 0$

$\frac{p + 3}{3} = \left(\frac{4}{2}\right)^2$

$p = 12 - 3$

$p = 9$

$b^2 - 4ac = 0$

$(-12)^2 - 4(3)(p + 3) = 0$

$108 - 12p = 0$

$p = 9$

g) $x^2 = px - 4$

$x^2 - px + 4 = 0$

$4 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$

$p^2 = 16$

$p = \pm 4$

$b^2 - 4ac = 0$

$(p)^2 - 4(1)(4) = 0$

$p^2 = 16$

$p = \pm 4$

h) $-x^2 = px + 16$

$x^2 + px + 16 = 0$

$16 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$

$p^2 = 64$

$p = \pm 8$

$b^2 - 4ac = 0$

$(p)^2 - 4(1)(16) = 0$

$p^2 = 64$

$p = \pm 8$

No es necesario que el estudiante resuelva de las dos maneras, se colocan ambos procesos para facilitar la revisión de las respuestas.

1.10 Practica lo aprendido

1. Deduce la ecuación y grafica la parábola con el foco y la directriz indicada en cada literal.

   a) F(0, –2), $y = 2$ b) $F\left(0, \frac{1}{12}\right)$, $y = -\frac{1}{12}$

2. Determina la ecuación de la parábola desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente, en cada literal.

   a) $y = 4x^2$, $h = -2$, $k = 4$ b) $y = -2x^2$, $h = -3$, $k = -3$

3. Completa cuadrados perfectos en las siguientes expresiones algebraicas.

   a) $x^2 - 10x$ b) $x^2 - 4x - 9$ c) $-3x^2 + 6x - 2$

4. Grafica las siguientes parábolas en el plano cartesiano.

   a) $y = -2x^2$ b) $y - 1 = -(x + 2)^2$ c) $2x^2 + 4x - y = 0$

5. Determina las coordenadas del vértice, el foco y la directriz de cada parábola.

   a) $y = \frac{1}{8}x^2$ b) $y + 3 = 2(x + 5)^2$ c) $3x^2 - 12x + 7 - y = 0$

6. Determina los puntos de intersección entre la parábola y la recta de cada literal. Grafica en el plano cartesiano.

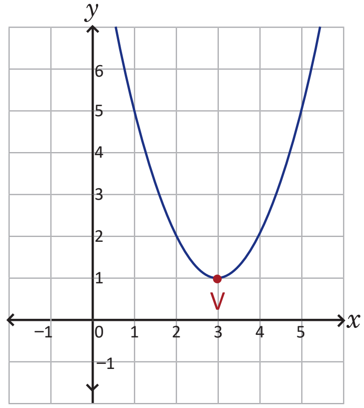
   a) $\begin{cases} y = -x^2 + 2 \\ y = 4x - 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x^2 + 2x + 1 \\ y = -3x - 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = -x^2 \\ x = -2 \end{cases}$

7. Determina el valor (o valores) del parámetro p en cada ecuación, para que la recta sea tangente a la parábola respectiva.

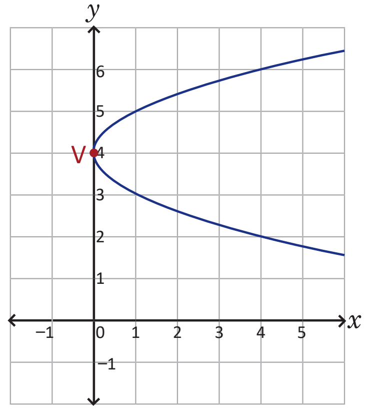
   a) $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = 2x + p \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = -9x^2 - 6x - 2 \\ y = 6x + p \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = 4x^2 \\ y = px - 1 \end{cases}$

8. Determina la ecuación que corresponde a la gráfica de cada literal.

   a)



   b)



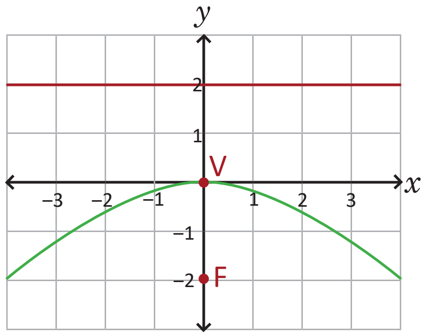
Unidad 3

Indicador de logro

1.10 Resuelve problemas correspondientes a la parábola.

Solución de problemas:

1a) El valor $p = -2$, entonces la ecuación de la parábola es: $y = \frac{1}{4(-2)}x^2 = -\frac{1}{8}x^2$.



1b) El valor $p = \frac{1}{12}$, entonces $y = \frac{1}{4\left(\frac{1}{12}\right)}x^2 = \frac{1}{\frac{1}{3}}x^2 = 3x^2$.

2a) $y - 4 = 4(x - (-2))^2$, o bien $y = 4(x + 2)^2 + 4$.

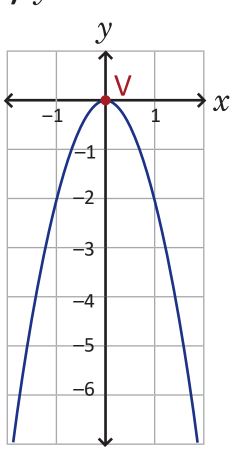
2b) $y - (-3) = -2(x - (-3))^2$, o bien $y = -2(x + 3)^2 - 3$.

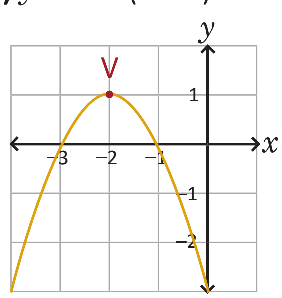
3a) $x^2 - 10x + (5)^2 - (5)^2 = (x - 5)^2 - 25$

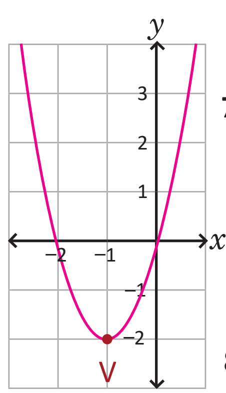
3b) $x^2 - 4x + (2)^2 - (2)^2 - 9 = (x - 2)^2 - 13$

3c) $-3x^2 + 6x - 2 = -3(x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2) - 2$
$= -3(x - 1)^2 + 3 - 2 = -3(x - 1)^2 + 1$

4a) $y = -2x^2$ **4b)** $y - 1 = -(x + 2)^2$ **4c)** $y = 2(x + 1)^2 - 2$







5a) $y = \frac{1}{8}x^2$: V (0, 0), $p = 2$, F(0, 2), $y = -2$.

5b) $y + 3 = 2(x + 5)^2$: V (–5, –3), $p = \frac{1}{8}$, F$\left(-5, -\frac{23}{8}\right)$, $y = -\frac{25}{8}$.

5c) $y = 3(x - 2)^2 - 5$: V (2, –5), $p = \frac{1}{12}$, F$\left(2, \frac{59}{12}\right)$, $y = -\frac{61}{12}$.

6a)
$$-x^2 + 2 = 4x - 3$$
$$x^2 + 4x - 5 = 0$$
$$(x - 1)(x + 5) = 0$$
$$x = 1 \text{ o } x = -5$$
$$y = 4(1) - 3 = 1 \text{ o } y = 4(-5) - 3 = -23$$

Los puntos de intersección son (1, 1) y (–5, –23).

6b) Los puntos de intersección son (–1, 0) y (–4, 9).

6c) Solamente hay un punto de intersección, el (–2, –4).

7a)
$$x^2 - 4x + 5 = 2x + p$$
$$x^2 - 6x + 5 - p = 0$$

Completando cuadrados.

$$5 - p = \left(\frac{6}{2}\right)^2$$
$$p = 5 - 9$$
$$p = -4$$

Discriminante igual a cero.

$$b^2 - 4ac = 0$$
$$(-6)^2 - 4(1)(5 - p) = 0$$
$$4p = -16$$
$$p = -4$$

7b)
$$-9x^2 - 6x - 2 = 6x + p$$
$$9x^2 + 12x + 2 + p = 0$$
$$b^2 - 4ac = 0$$
$$(12)^2 - 4(9)(2 + p) = 0$$
$$36p = 72$$
$$p = 2$$

7c) $p = \pm 4$

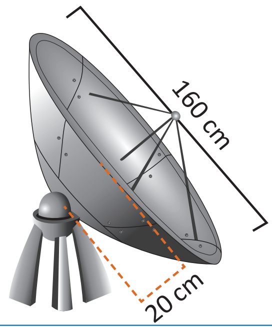
8a) Es la parábola $y = x^2$ desplazada 3 unidades a la derecha y 1 unidad hacia arriba, por lo tanto, la ecuación es: $y - 1 = (x - 3)^2$.

8b) Es la parábola $x = y^2$ desplazada 4 unidades hacia arriba, por lo tanto, la ecuación es: $x = (y - 4)^2$.

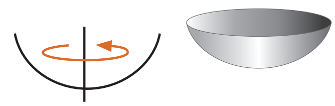
1.11 Aplicaciones de la parábola*

Problema inicial

Una antena parabólica de un canal de televisión de cultura de El Salvador tiene 160 centímetros de diámetro y una altura de 20 centímetros, si se desea reparar el foco de la antena que se dañó con la lluvia, ¿a qué distancia del centro del disco debe colocarse el nuevo foco de la antena parabólica?

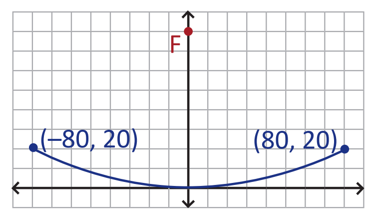


Una forma parabólica es un cuerpo geométrico, y resulta de girar una parábola alrededor de su eje.



Solución

Modelando la situación en el plano cartesiano, por conveniencia se puede utilizar una parábola de la forma $y = \frac{1}{4p}x^2$.



Entonces, como la parábola tiene ancho de 160 cm, se puede considerar la distancia desde el punto –80 hasta el punto 80 sobre el eje x.

Y dado que la altura es 20 cm, se puede considerar la distancia desde el punto 0 hasta el punto 20 sobre el eje y.

Entonces, la ecuación de la parábola es de la forma $y = \frac{1}{4p}x^2$ y pasa por los puntos (–80, 20) y (80, 20).

Para determinar p, se puede sustituir el punto (80, 20) en la ecuación, así:

$$20 = \frac{1}{4p}80^2 \quad \text{Resolviendo la ecuación.}$$

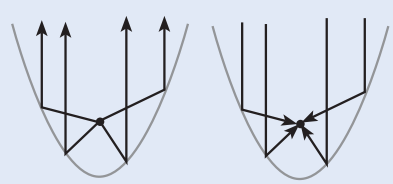
$$p = \frac{80^2}{80} = 80$$

Luego, las coordenadas del foco son F(0, 80).

Por lo tanto, el nuevo foco de la antena parabólica debe estar a 80 cm de distancia del vértice.

Conclusión

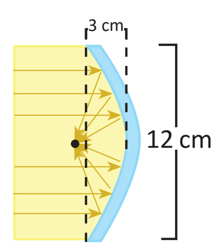
En una parábola, el foco cumple una propiedad reflectora importante: tomando cualquier línea desde el foco, esta será reflejada en una misma dirección, y también al recibir una línea paralela al eje, esta será reflejada hacia el foco. Esto vuelve a la parábola muy útil para su aplicación a objetos de la vida cotidiana, como la antena parabólica.



Problemas

1. Una antena parabólica que emite señal de internet tiene desperfectos, su foco no irradia correctamente la señal, al cambiarlo es necesario saber a qué distancia del centro del disco estaba. Determina dicha distancia si se sabe que el diámetro del disco es de 1 metro y su altura es de 0.5 metros.

2. Un espejo para un telescopio reflector tiene la forma parabólica de 12 cm de diámetro y 3 cm de profundidad, ¿a qué distancia del centro del espejo se concentrará la luz entrante?



Indicador de logro

1.11 Utiliza la propiedad reflectora del foco para resolver problemas de aplicación sobre objetos parabólicos.

Secuencia

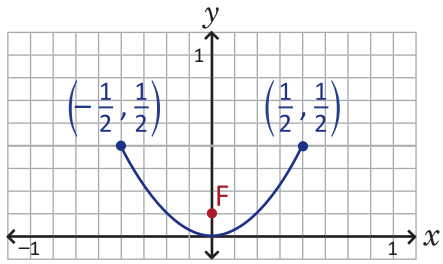
Después de abordar los conceptos básicos sobre la parábola, se pueden analizar y resolver algunos problemas sobre aplicaciones a la vida real, basados fundamentalmente en la propiedad reflectora de la parábola. Esta clase tiene asterisco, lo que indica que el docente debe dar mayor apoyo a sus estudiantes.

Propósito

En las soluciones a los Problemas, los estudiantes deben modelar una situación a partir de conceptos matemáticos, para resolverlos matemáticamente y luego interpretar la respuesta obtenida para dar solución al problema original.

Solución de problemas:

1. La parábola tiene ancho de 1 metro, se puede considerar la distancia desde el punto $-\frac{1}{2}$ hasta el punto $\frac{1}{2}$ sobre el eje x.



Y dado que la altura es 0.5 metros, se puede considerar la distancia desde el punto 0 hasta el punto $\frac{1}{2}$ sobre el eje y.

Entonces, la ecuación de la parábola es de la forma $y = \frac{1}{4p}x^2$ y pasa por los puntos $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Para determinar p, se puede sustituir el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ en la ecuación, así:

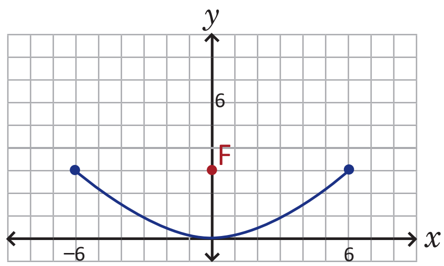
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4p}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{resolviendo la ecuación.}$$

$$p = \frac{2}{4(2^2)} = \frac{1}{8}$$

Luego, las coordenadas del foco son F $\left(0, \frac{1}{8}\right)$.

Por lo tanto, el nuevo foco de la antena parabólica debe estar a 12.5 cm de distancia del vértice.

2. Se puede considerar una parábola que tiene ancho de 12 cm, donde se considera la distancia desde el punto –6 hasta el punto 6 sobre el eje x, y la distancia del punto 0 al punto 3 sobre el eje y.



Entonces, la ecuación de la parábola es de la forma $y = \frac{1}{4p}x^2$ y pasa por los puntos (–6, 3) y (6, 3).

Para determinar p, se puede sustituir el punto (6, 3) en la ecuación, así:

$$3 = \frac{1}{4p}(6)^2 \quad \text{resolviendo la ecuación.}$$

$$p = \frac{36}{12} = 3$$

Luego, las coordenadas del foco son F (0, 3).

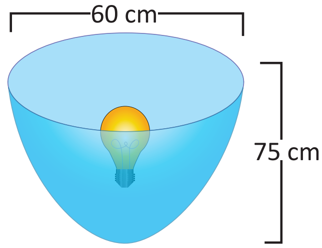
Por lo tanto, la luz se concentrará a 3 cm de distancia del vértice.

No es necesario obtener dos puntos por los que pasa la parábola, de hecho solamente se necesita uno, se colocan dos puntos para efectos de representar gráficamente el problema.

1.12 Practica lo aprendido

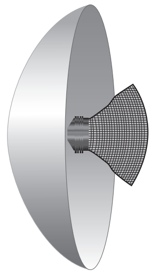
Resuelve los siguientes problemas de aplicación de parábola. Modela cada situación en el plano cartesiano.

1. En la escuela de María hay un problema de iluminación por las noches, y para mejorar la situación, María planea construir una lámpara parabólica móvil para el vigilante. Para ello cuenta con un recipiente parabólico de 60 centímetros de diámetro y 75 centímetros de altura. ¿A qué distancia del centro del disco debe colocar María el foco para que refleje la luz en una sola dirección?

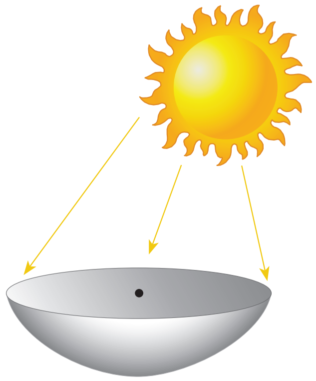


2. El reflector de un proyector tiene forma parabólica, con la fuente de luz en el foco. Si el reflector mide 12 centímetros de diámetro y 8 centímetros de profundidad, ¿a qué distancia del vértice está el foco?

3. En la comunidad de Antonio se quiere instalar un sistema de alarmas, en caso de cualquier emergencia. Antonio debe construir algunos parlantes parabólicos, si el recipiente parabólico tiene 24 cm de diámetro y 9 cm de profundidad, ¿dónde debe ser colocada la bocina para que emita el sonido en la misma dirección?



4. José va de viaje de campo con su familia al Parque Nacional Montecristo, ya que no desea contaminar, evita utilizar leña para cocinar, en cambio, lleva un recipiente parabólico de metal, de modo que refleje los rayos solares en un punto fijo (el foco). Determina a qué distancia del vértice del recipiente debe colocar José la parrilla para cocinar, si este tiene 1 metro de diámetro y 0.25 metros de altura.



5. Un plato receptor de sonido, que se emplea en eventos sobre la equidad de género, está construido en forma parabólica con su foco a 12 cm del vértice, si en uno de estos eventos se dañó el plato y en los repuestos tienen de todas alturas pero de anchura solo hay de 8 cm, ¿de qué altura debe ser el recipiente parabólico para que el plato receptor de sonido funcione idóneamente?

Indicador de logro

1.12 Resuelve problemas de aplicación de la parábola.

Solución de problemas:

1. Este problema es muy parecido a los resueltos en la clase anterior, la ecuación de la parábola es de la forma $y = \frac{1}{4p}x^2$ y pasa por los puntos (–30, 75) y (30, 75).

Para determinar p, se puede sustituir el punto (30, 75) en la ecuación, así:

$$75 = \frac{1}{4p}(30)^2 \text{ resolviendo la ecuación.}$$

$$p = \frac{30^2}{4(75)} = 3$$

Luego, las coordenadas del foco son F (0, 3).

Por lo tanto, el foco debe colocarse a 3 cm de distancia del vértice.

2. Considerando la parábola es de la forma $y = \frac{1}{4p}x^2$ que pasa por los puntos (–6, 8) y (6, 8).

Determinando p: $8 = \frac{1}{4p}(6)^2$, entonces, $p = \frac{6^2}{4(8)} = \frac{9}{8}$.

Por lo tanto, dicho foco debe estar a $\frac{9}{8}$ cm del vértice.

3. Considerando la parábola es de la forma $y = \frac{1}{4p}x^2$ que pasa por los puntos (–12, 9) y (12, 9).

Determinando p: $9 = \frac{1}{4p}(12)^2$, entonces, $p = \frac{12^2}{4(9)} = 4$.

Por lo tanto, dicho foco debe estar a 4 cm del vértice.

4. Considerando la parábola es de la forma $y = \frac{1}{4p}x^2$ que pasa por los puntos $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Determinando p: $\frac{1}{4} = \frac{1}{4p}\left(\frac{1}{2}\right)^2$, entonces, $p = \frac{4}{4(2^2)} = \frac{1}{4}$.

Por lo tanto, la parrilla debe colocarse justo encima del recipiente parabólico, es decir, a 0.25 cm del vértice.

5. Considerando la parábola es de la forma $y = \frac{1}{4p}x^2$, puesto que este problema brinda la distancia del foco al vértice, se tiene el valor de p = 12, y se tiene el valor de x, el cual sería igual a la mitad de la anchura, es decir x = 4.

Para determinar la altura, basta con encontrar el valor de y:

$$y = \frac{1}{4p}x^2 = \frac{1}{4(12)}4^2 = \frac{4^2}{4(12)} = \frac{1}{3}$$

por lo tanto, la altura para que el plato receptor de sonido funcione idóneamente debe ser de aproximadamente $\frac{1}{3}$ cm.

En esta clase de aplicaciones de la parábola, los problemas se resuelven matemáticamente haciendo un procedimiento muy parecido, el enfoque principal es ver todas las posibles aplicaciones, más que la variación en el procedimiento. Únicamente el problema 5 varía un poco en su resolución, pues no se tienen las coordenadas de un punto, solamente el valor del parámetro y la coordenada en x.

2.1 La circunferencia

Problema inicial

Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al origen O(0, 0) es igual a 3.

Solución

Se identifican en particular los puntos A(3, 0), B(0, 3) que cumplen la condición.

Tomando en general los puntos P(x, y) que cumplen la condición y utilizando la distancia entre dos puntos.

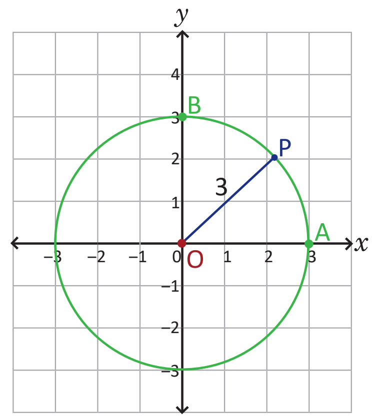
$$d(\text{P, O}) = 3$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 3 \quad \text{elevando al cuadrado,}$$

$$x^2 + y^2 = 9.$$

Por lo tanto, la ecuación que determina el lugar geométrico es:

$$x^2 + y^2 = 3^2.$$



Definición

El lugar geométrico de los puntos cuya distancia r a un punto fijo llamado **centro** se mantiene constante se conoce como **circunferencia**.

La ecuación que determina la gráfica de una circunferencia con centro en el origen del plano cartesiano y con radio r está dada por: $x^2 + y^2 = r^2$.

Ejemplo 1

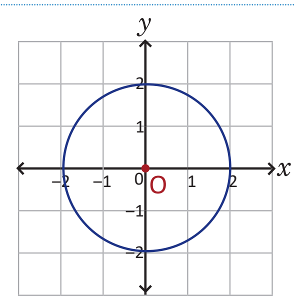
Determina la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y de radio 4.

La ecuación es, $x^2 + y^2 = 4^2$ o bien, expresado de otra manera, $x^2 + y^2 = 16$.

Ejemplo 2

Grafica en el plano cartesiano la figura (o lugar geométrico) determinada por la ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

Expresando la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ como $x^2 + y^2 = 2^2$, es una circunferencia con centro en el origen y radio 2.



Problemas

1. Deduce la ecuación de la circunferencia con centro en el origen con el radio dado en cada literal.

   a) $r = 1$ b) $r = 6$ c) $r = \frac{1}{2}$ d) $r = \frac{1}{3}$ e) $r = \sqrt{5}$

2. Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por las siguientes ecuaciones.

   a) $x^2 + y^2 = 25$ b) $x^2 + y^2 = 100$ c) $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ d) $x^2 + y^2 = 3$

Indicador de logro

2.1 Deduce y grafica la ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio dado.

Secuencia

Ahora que se ha visto la parábola, se continúa con la circunferencia; se da inicio con la parábola, pues para trabajar la ecuación general es la única en donde solo se completa cuadrados perfectos una vez, ahora en la circunferencia será necesario completar cuadrados tanto para x como para y.

Propósito

En el Problema inicial se pretende encontrar la ecuación canónica de una circunferencia particular y a partir de ella inducir que la ecuación canónica de la circunferencia es $x^2 + y^2 = r^2$, se prosigue de esta manera pues para la circunferencia es inmediato analizar que el valor constante de la ecuación cambia según el valor del radio.

Solución de problemas:

1a) $x^2 + y^2 = 1^2$ o bien $x^2 + y^2 = 1$.

1b) $x^2 + y^2 = 6^2$ o bien $x^2 + y^2 = 36$.

1c) $x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ o bien $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

1d) $x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$ o bien $x^2 + y^2 = \frac{1}{9}$.

1e) $x^2 + y^2 = \sqrt{5}^{\,2}$ o bien $x^2 + y^2 = 5$.

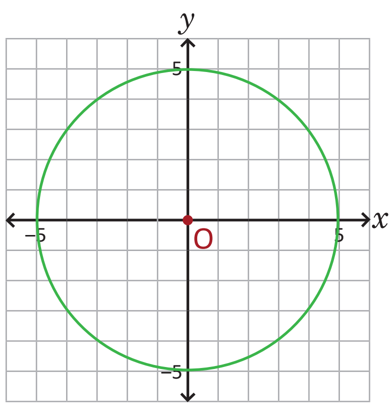
En 1c) y 1d) se pueden considerar válidas las ecuaciones $4x^2 + 4y^2 = 1$ y $9x^2 + 9y^2 = 1$, aunque no es muy habitual expresarlas de esa manera para el caso de la ecuación canónica de la circunferencia.

2a) Se calcula el valor de r:

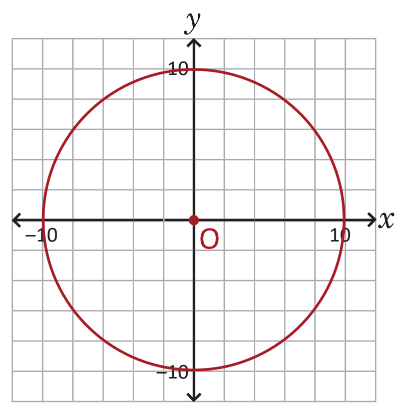
$$r = \sqrt{25} = 5.$$

Es una circunferencia de centro (0, 0) y radio 5.

2b) $r = \sqrt{100} = 10$, es una circunferencia de centro (0, 0) y radio 10.

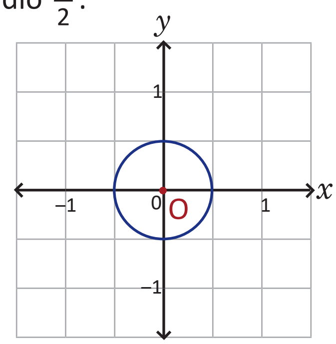


Si el espacio en la pizarra o el cuaderno es demasiado limitado, se puede optar por escalar el plano cartesiano según convenga de 2 en 2, 3 en 3, etc.

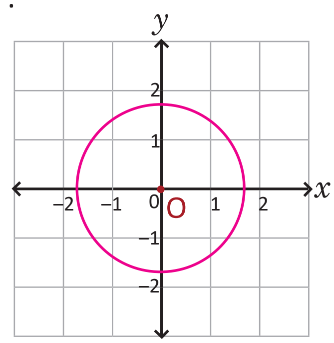


2c) $r = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, es una circunferencia de centro (0, 0) y radio $\frac{1}{2}$.

2d) $r = \sqrt{3}$, es una circunferencia de centro (0, 0) y radio $\sqrt{3}$.



La gráfica del problema 2d) es aproximada, por el valor irracional del radio.



Lección 2

2.2. Desplazamientos paralelos de la circunferencia*

Problema inicial

Deduce la ecuación de una circunferencia con centro en el punto C(2, 3) y radio 1.

Solución 1

Tomando en general los puntos P(x, y) que cumplen la condición y utilizando la distancia entre un punto P y el punto C(2, 3).

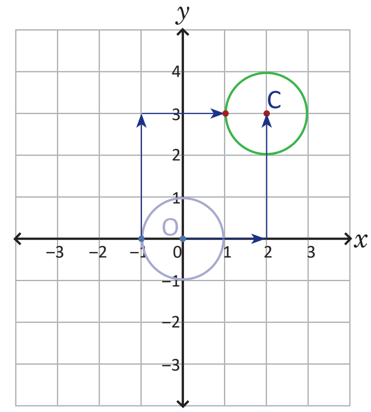
$$d(\text{P, C}) = 1$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = 1 \quad \text{elevando al cuadrado,}$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1.$$

Solución 2

Tomando la ecuación de la circunferencia de radio 1, con centro en el origen, $x^2 + y^2 = 1$.



Entonces, la circunferencia de radio 1 y centro C(2, 3) resulta de desplazar la circunferencia con centro en el origen, 2 unidades a la derecha y 3 unidades hacia arriba (como lo muestra la figura).

La ecuación de la circunferencia desplazada 2 unidades a la derecha es: $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

Ahora, la ecuación de la circunferencia desplazada 3 unidades hacia arriba es: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$.

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia con centro en el punto C(2, 3) y radio 1 es: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$.

Conclusión

La ecuación que determina la gráfica de una circunferencia con centro C(h, k) y radio r está dada por:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

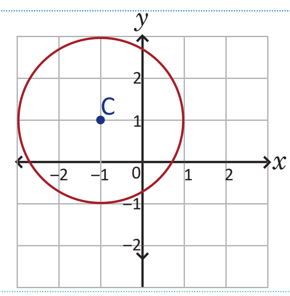
Ejemplo 1

Determina la ecuación de la circunferencia con centro C(2, −1) y radio 2.
La ecuación es, $(x-2)^2 + [y-(-1)]^2 = 2^2$ o bien, expresado de otra manera, $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$.

Ejemplo 2

Grafica en el plano cartesiano la figura (o lugar geométrico) determinado por la ecuación: $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$

Expresando la ecuación $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$ como $[x-(-1)]^2 + (y-1)^2 = 2^2$, es una circunferencia con centro C(−1, 1) y radio 2.



Problemas

1. Para cada literal deduce la ecuación de la circunferencia con centro en el punto C y radio r.
   a) C(4, 1), $r = 3$ b) C(−2, 5), $r = 2$ c) C(3, −4), $r = \frac{2}{3}$ d) C(−2, −2), $r = \sqrt{6}$

2. Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por las siguientes ecuaciones.
   a) $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$ b) $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$ c) $(x+3)^2 + (y-4)^2 = \frac{25}{4}$ d) $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 5$

Unidad 3

Indicador de logro

2.2 Encuentra y grafica la ecuación de una circunferencia cuyo centro es un punto diferente del origen.

Secuencia

En esta clase será necesario aplicar lo aprendido en la lección anterior sobre desplazamientos paralelos, además de la ecuación de la circunferencia, vista en la clase anterior. Esta clase tiene asterisco, lo que indica que el docente debe dar mayor apoyo a sus estudiantes.

Propósito

La Solución del Problema inicial presenta dos opciones, puesto que el estudiante puede deducir la ecuación a partir del concepto de distancia, o bien utilizando desplazamientos paralelos, y ambas opciones son igualmente correctas.

Solución de problemas:

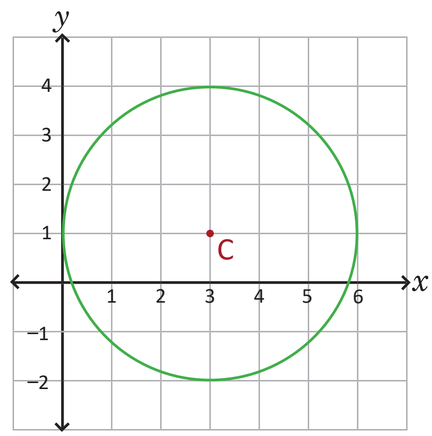
1a) $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 3^2$ o bien $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 9$.

1b) $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 2^2$ o bien $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 4$.

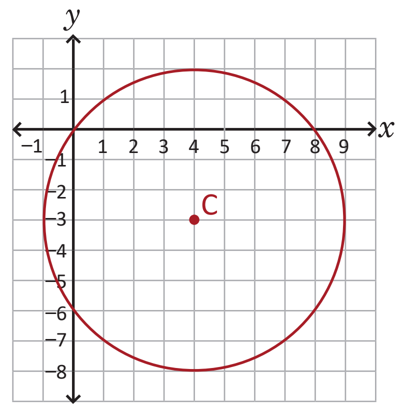
1c) $(x-3)^2 + (y+4)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ o bien $(x-3)^2 + (y+4)^2 = \frac{4}{9}$.

1d) $(x+2)^2 + (y+2)^2 = \sqrt{6}^2$ o bien $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 6$.

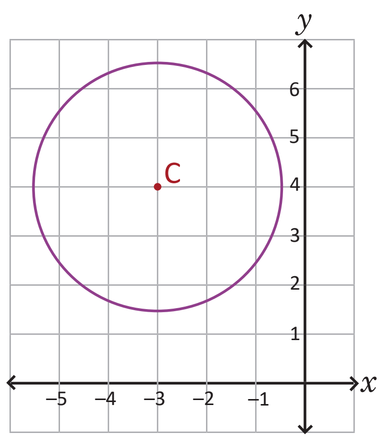
2a) Centro (3, 1) y radio 3.



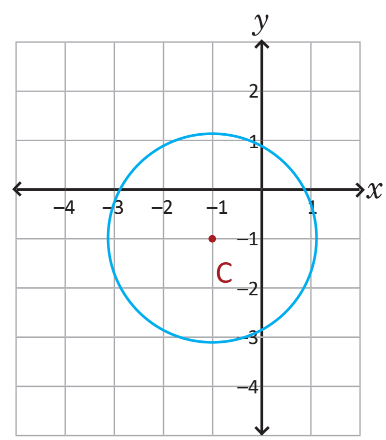
2b) Centro (4, –3) y radio 5.



2c) Centro (–3, 4) y radio $\frac{5}{2}$.



2d) Centro (–1, –1) y radio $\sqrt{5}$.



2.3 Ecuación general de la circunferencia

Problema inicial

Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por la ecuación $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$.

Solución

Completando cuadrados para expresar la ecuación en la forma $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$:

$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ reordenando y agrupando,

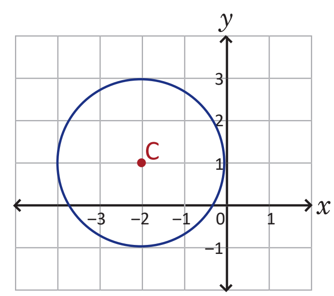
$(x^2 + 4x) + (y^2 - 2y) + 1 = 0$ completando cuadrados,

$(x^2 + 4x + 4) - 4 + (y^2 - 2y + 1) - 1 + 1 = 0$ simplificando,

$(x + 2)^2 - 4 + (y - 1)^2 - 1 + 1 = 0$ transponiendo,

$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ expresado de otra manera,

$(x - (-2))^2 + (y - 1)^2 = 2^2$.



Por lo tanto la figura determinada por la ecuación $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ es una circunferencia con centro C(−2, 1) y radio 2.

Conclusión

Una circunferencia puede ser representada desarrollando los cuadrados de la ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ y dejando la ecuación igualada a 0.

En general, para determinar el centro y el radio de una circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 + cx + dy + e = 0$, se completan cuadrados perfectos en x y y, se expresa en la forma $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$. A la ecuación de la forma $x^2 + y^2 + cx + dy + e = 0$ se le llama **ecuación general de la circunferencia.**

Ejemplo

Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por la ecuación $4x^2 + 4y^2 - 16x + 8y + 19 = 0$.

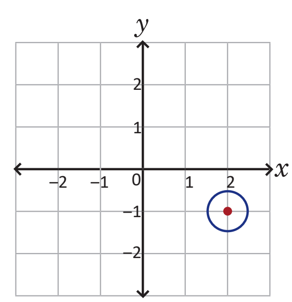
$4x^2 + 4y^2 - 16x + 8y + 19 = 0$ dividiendo por 4 cada miembro,

$x^2 - 4x + y^2 + 2y + \frac{19}{4} = 0$ completando cuadrados,

$(x - 2)^2 - 4 + (y + 1)^2 - 1 + \frac{19}{4} = 0$ simplificando y transponiendo,

$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = \frac{1}{4}$ expresado de otra manera,

$(x - 2)^2 + (y - (-1))^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.



Es una circunferencia con centro C(2, −1) y radio $\frac{1}{2}$.

Problemas

En las siguientes ecuaciones, determina el centro y el radio de las circunferencias. Grafica en el plano cartesiano la figura que corresponde a cada ecuación.

a) $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 8 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 4 = 0$

e) $x^2 + y^2 - 10y + 9 = 0$

f) $x^2 + y^2 + 6x + 8 = 0$

g) $4x^2 + 4y^2 - 32x - 16y + 71 = 0$

h) $9x^2 + 9y^2 + 54x + 18y + 74 = 0$

Indicador de logro

2.3 Determina el centro y el radio de una circunferencia a partir de su ecuación general y traza su gráfica en el plano cartesiano.

Secuencia

Utilizando el procedimiento para completar cuadrados perfectos, es posible transformar la ecuación general de la circunferencia a la forma de la clase anterior, para luego graficarla en el plano cartesiano.

Propósito

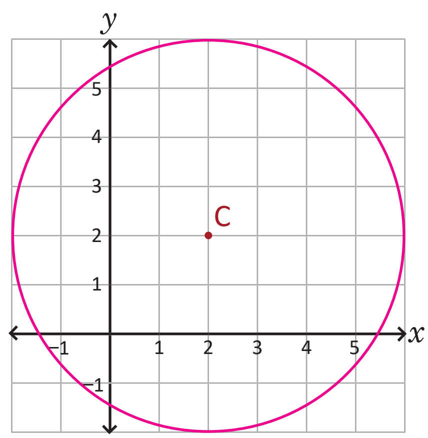
El criterio de dificultad de los Problemas está dado por el conjunto al que pertenece el radio de la circunferencia, si es entero o fracción, como también si el desplazamiento es al primer, segundo, tercer, cuarto cuadrante o un eje coordenado.

Solución de problemas:

a) $(x^2 - 4x + 2^2) + (y^2 - 4y + 2^2) = 8 + 2^2 + 2^2$

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 16$$

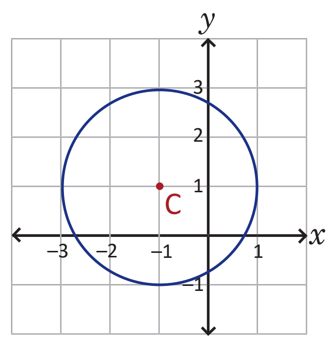
Centro (2, 2) y radio 4.



b) $(x^2 + 2x + 1^2) + (y^2 - 2y + 1^2) = 2 + 1^2 + 1^2$

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$$

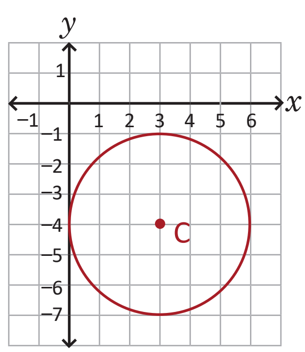
Centro (–1, 1) y radio 2.



c) $(x^2 - 6x + 3^2) + (y^2 + 8y + 4^2) = -16 + 3^2 + 4^2$

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$$

Centro (3, –4) y radio 3.

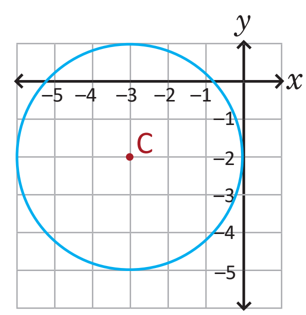


No se consideran problemas con desplazamientos fraccionarios, puesto que es muy complicado el proceso para completar cuadrados, y no es el objetivo de la clase. En los últimos problemas es necesario hacer la gráfica, no se muestra en esta página por cuestión de espacio.

d) $(x^2 + 6x + 3^2) + (y^2 + 4y + 2^2) = -4 + 3^2 + 2^2$

$$(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

Centro (–3, –2) y radio 3.



e) $x^2 + (y^2 - 10y + 5^2) = -9 + 5^2$

$$(x - 0)^2 + (y - 5)^2 = 16$$

Centro (0, 5) y radio 4.

f) $(x^2 + 6x + 3^2) + y^2 = -8 + 3^2$

$$(x + 3)^2 + (y - 0)^2 = 1$$

Centro (–3, 0) y radio 1.

g) $4(x^2 - 8x + 4^2) + 4(y^2 - 4y + 2^2) = -71 + 4(4^2) + 4(2^2)$

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = \frac{9}{4}$$

Centro (4, 2) y radio $\frac{3}{2}$.

h) $9(x^2 + 6x + 3^2) + 9(y^2 + 2y + 1^2) = -74 + 9(3^2) + 9(1^2)$

$$(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = \frac{16}{9}$$

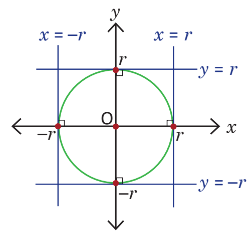
Centro (–3, –1) y radio $\frac{4}{3}$.

2.4 Recta tangente a una circunferencia*

Problema inicial

Demuestra que la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ en el punto P(x_1, y_1) está dada por: $x_1 x + y_1 y = r^2$.

Solución

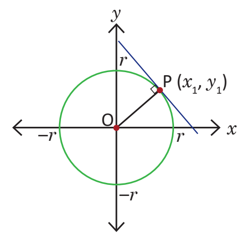


El punto P(x_1 , y_1) satisface la ecuación $x_1^2 + y_1^2 = r^2$.

Si $x_1 = 0$, entonces $y_1 = r$ o $y_1 = -r$. La recta tangente es: $y = r$ o $y = -r$ y se cumple que: $y_1 y = r^2$.

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente está dada por: $x_1x + y_1y = r^2$.

Si $y_1 = 0$, se procede análogamente.



Si $x_1 \neq 0$ y $y_1 \neq 0$, el radio $\overline{OP}$ es perpendicular a la tangente en el punto P, además la pendiente de $\overline{OP}$ es $\frac{y_1}{x_1}$, por lo tanto, la pendiente de la recta tangente es: $m = -\frac{x_1}{y_1}$.

Aplicando la ecuación punto-pendiente con m y P:

$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$ multiplicando por y_1 y simplificando: $x_1x + y_1y = x_1^2 + y_1^2 = r^2$.

Por lo tanto, la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ en el punto P(x_1, y_1) está dada por la ecuación:

$$x_1x + y_1y = r^2$$

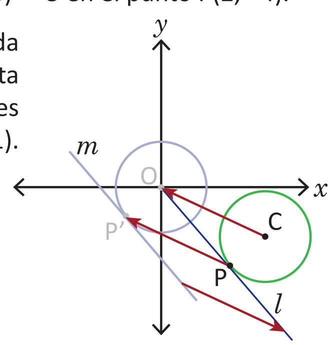
Conclusión

La ecuación de la tangente en el punto (x_1, y_1) de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ es $x_1x + y_1y = r^2$. Por ejemplo, para determinar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$ en el punto P(–1, 1), se puede hacer de la siguiente manera:

$$-1x + 1y = 2, \text{ o bien } x - y + 2 = 0.$$

Ejemplo

Determina la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$ en el punto P(2, –4).



La circunferencia $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ desplazada 4 unidades a la derecha y 3 hacia abajo, entonces se puede calcular la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ pero en el punto P desplazado 4 unidades a la izquierda y 3 hacia arriba, es decir, en el punto P'(2 – 4, –4 + 3) = P'(–2, –1).

Ahora aplicando el resultado del Problema inicial, la recta tangente m será:

$$-2x + (-1)y = 5, \text{ o bien } 2x + y + 5 = 0.$$

Y desplazando la recta 4 unidades a la derecha y 3 hacia abajo:

$$2(x - 4) + (y + 3) + 5 = 0, \text{ o bien } 2x + y = 0.$$

Por lo tanto, la recta tangente l a la circunferencia $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$ en el punto P(2, –4) es: $2x + y = 0$.

Problemas

Para cada literal determina la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto P.

a) $x^2 + y^2 = 25$, P(–3, 4)
b) $x^2 + y^2 = 5$, P(1, 2)
c) $x^2 + y^2 = 13$, P(2, –3)
d) $x^2 + y^2 = 10$, P(3, –1)
e) $x^2 + y^2 = 1$, P(–1, 0)
f) $x^2 + y^2 = 9$, P(0, –3)
g) $x^2 + (y - 4)^2 = 2$, P(–1, 3)
h) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$, P(–1, –1)
i) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 17$, P(3, 1)

Indicador de logro

2.4 Deduce la ecuación de la línea recta tangente a una circunferencia en un punto dado.

Secuencia

Una vez abarcados los conceptos básicos sobre circunferencia, se puede abordar lo correspondiente a las rectas tangentes a una circunferencia; esta clase es una demostración un poco compleja, y por ello tiene asterisco, por lo cual necesitará mayor apoyo por parte del docente.

Propósito

Esta clase provee un resultado muy práctico (más fácil que el método utilizado para la clase 1.9) para deducir la ecuación de la recta tangente a una circunferencia, lo cual puede resultar muy útil dado que las rectas tangentes a una circunferencia poseen gran interés y son muy importantes.

Posibles dificultades

En la demostración, la idea es considerar dos casos: uno, cuando alguna de las coordenadas del punto de tangencia es cero, en donde se sabe que el radio puede ser vertical u horizontal, y puesto que de séptimo grado se conoce que la recta tangente es perpendicular en el punto de tangencia, las rectas deben ser horizontales o verticales, como se muestra en la primera figura de la página; en el segundo caso se puede aplicar la ecuación de la línea recta y analizar las condiciones de perpendicularidad vistas en la unidad 2 de este grado. Comprender esta temática puede resultar muy difícil para los estudiantes, aunque el indicador de logro está basado únicamente en aplicar el resultado a casos pariculares.

Solución de problemas:

a) Se verifica que el punto pertenece a la circunferencia: $(-3)^2 + 4^2 = 25$.

Entonces la ecuación de la recta tangente en el punto P sería:

$$-3x + 4y = 25 \text{ o bien } 3x - 4y + 25 = 0.$$

c) $2x + (-3)y = 13$ o bien $2x - 3y - 13 = 0$.

e) $(-1)x + (0)y = 1$ o bien $x = -1$.

g) Se verifica que el punto pertenece a la circunferencia: $(-1)^2 + (3-4)^2 = 2$.

Se traslada la circunferencia al origen y se desplaza el punto P 4 unidades hacia abajo.

$x^2 + y^2 = 2$, P’$(-1, 3-4)$ = P’$(-1, -1)$

La recta tangente en P’ sería: $(-1)x + (-1)y = 2$.

Y se desplaza a su lugar original (4 unidades hacia arriba): $-x - (y-4) = 2$ o bien $x + y - 2 = 0$.

En todos los problemas siempre es necesario verificar que el punto pertenece a la circunferencia, también hay que intentar que los estudiantes comprendan cómo se desplaza y cuál debe ser el desplazamiento del punto de tangencia.

b) Se verifica que el punto pertenece a la circunferencia: $1^2 + 2^2 = 5$.

Entonces la ecuación de la recta tangente en el punto P sería:

$$1x + 2y = 5 \text{ o bien } x + 2y - 5 = 0.$$

d) $3x + (-1)y = 10$ o bien $3x - y - 10 = 0$.

f) $(0)x + (-3)y = 9$ o bien $y = -3$.

h) La circunferencia y punto desplazados son:

$x^2 + y^2 = 4$, P’$(-1 + 3, -1 + 1)$ = P’$(2, 0)$,

la recta tangente sería: $2x + (0)y = 4$, o bien $x = 2$.

La recta tangente en su lugar original es:
$(x + 3) = 2$ o bien $x = -1$.

i) La circunferencia y punto desplazados son:

$x^2 + y^2 = 17$, P’$(3 - 2, 1 + 3)$ = P’$(1, 4)$,

la recta tangente sería: $1x + 4y = 17$.

La recta tangente en su lugar original es:
$(x - 2) + 4(y + 3) = 17$ o bien $x + 4y - 7 = 0$.

Lección 2

2.5 Rectas secantes a una circunferencia

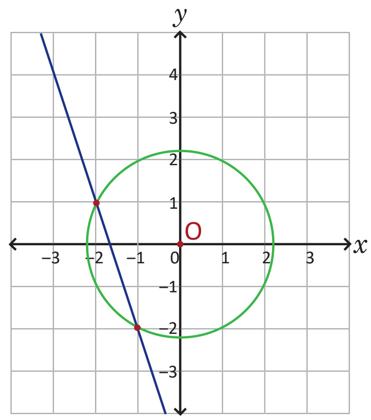
Problema inicial

Determina los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ con la recta $3x + y + 5 = 0$.

Solución

La intersección es un punto que está en la recta y también en la circunferencia, entonces encontrar los puntos de intersección entre una circunferencia y una recta equivale a resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & \text{----------} \ (1) \\ 3x + y + 5 = 0 & \text{----------} \ (2) \end{cases}$$



Utilizando el método de sustitución, despejando y en la ecuación (2).

$$y = -3x - 5$$

Sustituyendo en la ecuación (1) y resolviendo:

$$x^2 + (-3x - 5)^2 = 5$$
$$x^2 + 9x^2 + 30x + 25 - 5 = 0$$
$$10x^2 + 30x + 20 = 0$$
$$x^2 + 3x + 2 = 0$$
$$(x + 1)(x + 2) = 0$$
$$x = -1 \text{ o } x = -2$$

Entonces las coordenadas en x de los puntos donde se intersecan la recta $y + 3x + 5 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ son $x = -1$ y $x = -2$, y la coordenada en y puede determinarse sustituyendo cada valor de x en la ecuación (2):

$$\text{Si } x = -1, \text{ entonces } y = -3(-1) - 5 = 3 - 5 = -2$$
$$\text{Si } x = -2, \text{ entonces } y = -3(-2) - 5 = 6 - 5 = 1$$

Por lo tanto, los puntos de intersección son: $(-1, -2)$ y $(-2, 1)$.

Conclusión

Para determinar los puntos de intersección entre una recta y una circunferencia, se resuelve el sistema de ecuaciones, una lineal y otra cuadrática, utilizando el método de sustitución.

Si el sistema tiene dos soluciones reales, significa que la recta es secante a la circunferencia.
Si el sistema tiene una solución real, la recta es tangente a la circunferencia.
Si el sistema no tiene solución real, significa que la recta no corta a la circunferencia.

El valor de y de los puntos (o punto) de intersección se determinan sustituyendo en alguna ecuación los valores de las soluciones al sistema de ecuaciones que se resuelve.

Problemas

Determina los puntos de intersección de las gráficas determinadas por las ecuaciones de cada literal.

a) $x^2 + y^2 = 1;\ x + y = 0$
b) $x^2 + y^2 = 25;\ x + y - 1 = 0$
c) $x^2 + y^2 = 5;\ -x + y + 1 = 0$
d) $x^2 + y^2 = 13;\ x + 5y - 13 = 0$
e) $x^2 + y^2 = 10;\ x - 2y - 5 = 0$
f) $x^2 + y^2 = 17;\ 3x + 5y - 17 = 0$

Indicador de logro

2.5 Encuentra las coordenadas de los puntos de intersección de una recta y una circunferencia.

Secuencia

Ahora que ya se ha estudiado la tangencia se puede realizar una interpretación de la resolución de sistemas de una ecuación cuadrática y una lineal, estudiando los puntos de intersección de una recta secante y una circunferencia.

Propósito

El propósito de la sección de Problemas es que el estudiante se enfrente a los tres diferentes casos que se presentan en la Conclusión, intentando ir de lo más fácil a lo más complejo. En el Problema inicial se plantea el problema geométrico a resolver.

Solución de problemas:

a) Se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \text{-----}\ (1) \\ x + y = 0 & \text{-----}\ (2) \end{cases}$$

Despejando y de (2) y sustituyendo en (1):

$$x^2 + (-x)^2 = 1$$
$$2x^2 = 1$$
$$x^2 = \frac{1}{2}$$
$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Sustituyendo x en (2) y encontrando y:

Si $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, si $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Por lo tanto, los puntos de intersección son:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ y } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

b) Se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 & \text{-----}\ (1) \\ x + y - 1 = 0 & \text{-----}\ (2) \end{cases}$$

Despejando y de (2) y sustituyendo en (1):

$$x^2 + (1 - x)^2 = 25$$
$$x^2 - x - 12 = 0$$
$$x = 4 \text{ o } x = -3$$

Sustituyendo x de (2) y encontrando y:

Si $x = 4$, $y = -3$, si $x = -3$, $y = 4$.

Por lo tanto, los puntos de intersección son:

(4, –3) y (–3, 4).

c) El sistema es:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & \text{-----}\ (1) \\ -x + y + 1 = 0 & \text{---}\ (2) \end{cases}$$

La ecuación cuadrática que se resuelve es:

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Los puntos de intersección son: (2, 1) y (–1, –2).

d) El sistema es:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 & \text{-----}\ (1) \\ x + 5y - 13 = 0 & \text{--}\ (2) \end{cases}$$

La ecuación cuadrática que se resuelve es:

$$y^2 - 5y + 6 = 0.$$

Los puntos de intersección son: (–2, 3) y (3, 2).

e) El sistema es:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 & \text{-----}\ (1) \\ x - 2y - 5 = 0 & \text{---}\ (2) \end{cases}$$

La ecuación cuadrática que se resuelve es:

$$y^2 + 4y + 3 = 0.$$

Los puntos de intersección son: (–1, –3) y (3, –1).

f) El sistema es:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 & \text{-----}\ (1) \\ 3x + 5y - 17 = 0 & \text{-----}\ (2) \end{cases}$$

La ecuación cuadrática que se resuelve es:

$$x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Los puntos de intersección son: (4, 1) y (–1, 4).

En a), b) y c) se puede sustituir cualquier variable, y la dificultad es muy parecida en cualquier caso; en d) y e) se recomienda despejar la variable x, pues se hace más sencillo el cálculo, e intentar que los estudiantes identifiquen eso; y en f) se puede despejar cualquiera de las variables, sin embargo en cualquiera de los casos la resolución es un poco más compleja que en los literales anteriores.

2.6 Practica lo aprendido

1. Para cada literal deduce la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y el radio indicado.

   a) $r = 2$ b) $r = \sqrt{7}$

2. Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por las siguientes ecuaciones.

   a) $x^2 + y^2 = 16$ b) $x^2 + y^2 = \frac{25}{4}$

3. Deduce la ecuación de la circunferencia con centro en el punto C y el radio r de cada literal.

   a) C (3, –2), $r = 10$ b) C (4, –3), $r = \frac{2}{3}$

4. Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por las siguientes ecuaciones.

   a) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$ b) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = \frac{9}{4}$

5. En las siguientes ecuaciones, determina el centro y el radio de las circunferencias. Grafica en el plano cartesiano la figura que corresponde a cada ecuación.

   a) $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 18 = 0$ b) $4x^2 + 4y^2 + 24x + 16y + 27 = 0$

6. Determina la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto P de cada literal.

   a) $x^2 + y^2 = 10$, P(–3, 1) b) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$, P(0, –4)

7. Determina los puntos de intersección de las gráficas determinadas por las ecuaciones de cada literal.

   a) $x^2 + y^2 = 8$; $x - y = 0$ b) $x^2 + y^2 = 20$; $3x - y - 10 = 0$

8. Determina la ecuación de la recta (o rectas) tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 10$ cuya pendiente es –3.

9. Determina la ecuación de la recta (o rectas) tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$ que pasan por el punto P(2, 0).

   Puedes graficar para comprender mejor la situación.

10. Demuestra que la tangente en el punto P(x_1, y_1) de la circunferencia $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ es: $(x_1 - h)(x - h) + (y_1 - k)(y - k) = r^2$.

Unidad 3

Indicador de logro

2.6 Resuelve problemas correspondientes a la circunferencia.

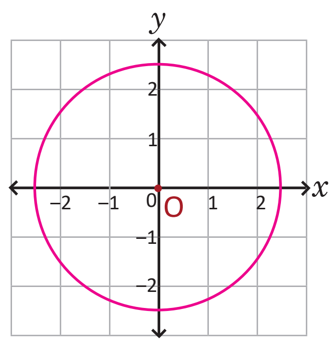
Solución de problemas:

1a) $x^2 + y^2 = 2^2$ o bien $x^2 + y^2 = 4$.

1b) $x^2 + y^2 = \sqrt{7}^2$ o bien $x^2 + y^2 = 7$.

2a) Es una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 4.

2b) Es una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio $\frac{5}{2}$.



3a) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 100$

3b) $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = \frac{4}{9}$

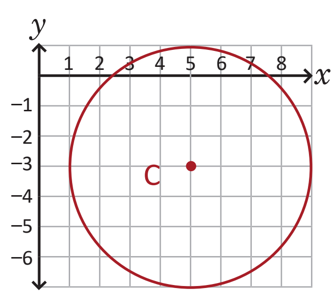
4a) Centro $(-2, 3)$ y radio 3.

4b) Centro $(-1, -2)$ y radio $\frac{3}{2}$.

5a) $(x^2 - 10x + 5^2) + (y^2 + 6y + 3^2) = -18 + 5^2 + 3^2$

$$(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

Centro $(5, -3)$ y radio 4.



5b) $4(x^2 + 6x + 3^2) + 4(y^2 + 4y + 2^2) = -27 + 4(3^2) + 4(2^2)$

$$(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = \frac{25}{4}$$

Centro $(-3, -2)$ y radio $\frac{5}{2}$.

6a) $(-3)x + 1y = 10$, o bien $-3x + y - 10 = 0$.

6b) La circunferencia y punto desplazados son:

$x^2 + y^2 = 5$, $P'(0 - 2, -4 + 3) = P'(-2, -1)$.

La recta tangente sería: $-2x - y = 5$.

La recta tangente en su lugar original es:
$-2(x - 2) - (y + 3) = 5$ o bien $2x + y + 4 = 0$.

7a) El sistema es: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 & \text{----- (1)} \\ x - y = 0 & \text{----- (2)} \end{cases}$

La ecuación cuadrática que se resuelve es:

$$x^2 = 4.$$

Los puntos de intersección son: $(2, 2)$ y $(-2, -2)$.

7b) El sistema es: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 & \text{----- (1)} \\ 3x - y - 10 = 0 & \text{-----(2)} \end{cases}$

La ecuación cuadrática que se resuelve es:

$$x^2 - 6x + 8 = 0.$$

Los puntos de intersección son: $(4, 2)$ y $(2, -4)$.

8. Se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 & \text{----- (1)} \\ y = -3x + b & \text{----- (2)} \end{cases}$$

Igualando el discriminante de la ecuación $10x^2 - 6bx + (b^2 - 10)$ a 0, se obtiene la ecuación: $b^2 = 100$, con soluciones $b = \pm 10$.

Las rectas son $y = -3x + 10$ y $y = -3x - 10$.

9. Se considera la ecuación de una recta $y = mx + b$.

Al pasar por $(2, 0)$ se cumple que $0 = 2m + b$.

Se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & \text{----- (1)} \\ y = mx - 2m & \text{----- (2)} \end{cases}$$

Igualando el discriminante de

$$(m^2 + 1)x^2 - 4m^2x + (4m^2 - 2)$$

a 0, se obtiene la ecuación: $m^2 = 1$, con soluciones $m = \pm 1$. Las rectas son $y = x - 2$ y $y = -x + 2$.

10. Trasladando el centro de la circunferencia al origen y trasladando el punto P, $-h$ unidades horizontalmente y $-k$ verticalmente, se tendría:

$$x^2 + y^2 = r^2,\ P'(x_1 - h, y_1 - k).$$

Cuya ecuación de la recta tangente en P sería:

$$(x_1 - h)x + (y_1 - k)y = r^2.$$

Y trasladando a la posición original:

$$(x_1 - h)(x - h) + (y_1 - k)(y - k) = r^2.$$

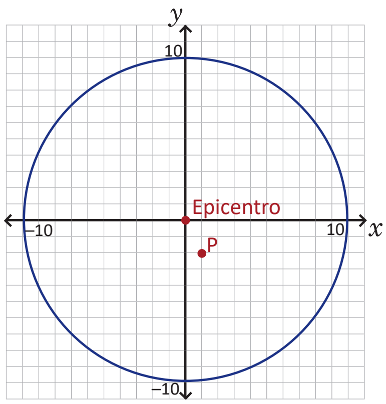
2.7 Aplicaciones de la circunferencia*

Problema inicial

El epicentro de un terremoto en El Salvador fue la ciudad de San Salvador, específicamente el parque Bicentenario de esta ciudad; el terremoto afectó a todos los lugares a 10 km a la redonda. Si la ciudad de Antiguo Cuscatlán se ubica a 1 km hacia el oriente y 2 km hacia el sur del epicentro, entonces ¿fue afectada por dicho terremoto?

Solución

Representando la situación en el plano cartesiano y ubicando el epicentro en el origen del plano cartesiano.



Dado que el terremoto tuvo un alcance de 10 km a la redonda, se puede modelar con la ecuación de la circunferencia con centro en el origen (epicentro) y radio 10, así:

$$x^2 + y^2 = 100$$

Ubicando Antiguo Cuscatlán en el punto P(1, –2).

Con el gráfico se puede observar que si el punto está dentro de la circunferencia entonces es afectado por el terremoto, y si está fuera no.

Analizando en la ecuación, si se sustituye el valor de x y de y del punto P se tiene:

$$1^2 + (-2)^2 = 1 + 4 = 5$$

El resultado es menor que 100 ($5 < 100$), si el punto fuera igual a 100 estaría en la circunferencia, y si fuera mayor que 100 entonces estaría fuera de la circunferencia.

Por lo tanto, Antiguo Cuscatlán sí fue afectado por el terremoto con epicentro en el parque Bicentenario.

Conclusión

Es posible resolver algunos problemas de la vida cotidiana utilizando ecuaciones de circunferencias, para ello es necesario modelar la situación en el plano cartesiano, a partir de ello se puede interpretar la información y dar solución a la situación.

Problemas

1. El epicentro de un terremoto en El Salvador fue la ciudad de San Salvador, específicamente el parque Bicentenario de esta ciudad; el terremoto afectó a todos los lugares a 10 km a la redonda. Si el volcán del Boquerón se ubica a 7 km hacia el poniente y 8 km hacia el norte del epicentro, entonces ¿fue afectado por dicho terremoto?

2. Una avioneta de fumigación vuela en círculos, y alcanza a fumigar hasta 13 m a la redonda, considerando como centro la casa de un campesino. El terreno tiene 30 metros de largo por 20 metros de ancho, y la casa del campesino se encuentra justo al centro del terreno. Determina si las plantaciones de frijol ubicadas a 11 metros al poniente de la casa y 5 metros al sur, llegan a ser fumigadas por la avioneta.

3. En las fiestas patronales de San Salvador se coloca el juego mecánico conocido como “la voladora”. Si esta rueda apagada cubre un radio de 2 metros y los asientos cuelgan de cadenas de 1 metro de longitud, determina si al ubicar la caseta de control a un metro al oriente y 3 metros al sur del centro de “la voladora”, dicha caseta no será impactada por la máquina al encenderse.

Indicador de logro

2.7 Utiliza las propiedades y la ecuación de la circunferencia para resolver problemas del entorno.

Secuencia

Después de abordar los conceptos básicos sobre la circunferencia, se pueden analizar y resolver algunos problemas sobre aplicaciones a la vida real. Esta clase tiene asterisco, lo que indica que el docente debe dar mayor apoyo a sus estudiantes.

Propósito

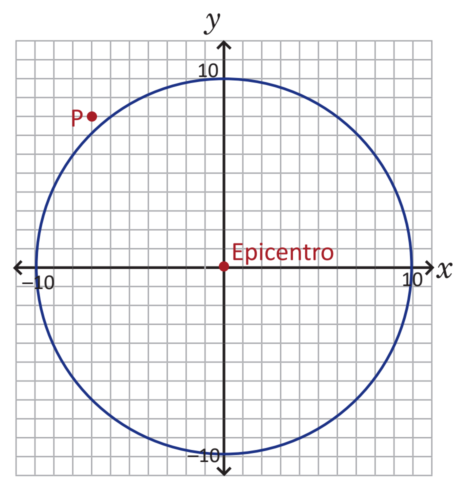
En las soluciones a los Problemas los estudiantes deben modelar una situación a partir de conceptos matemáticos, para resolverlos matemáticamente y luego interpretar la respuesta obtenida para dar solución al problema original.

Solución de problemas:

1. Representando la situación en el plano cartesiano y ubicando el epicentro en el origen del plano cartesiano, se puede modelar con la ecuación de la circunferencia con centro en el origen (epicentro) y radio 10, así:

$$x^2 + y^2 = 100.$$

Ubicando al volcán del Boquerón en el punto P(–7, 8).



Analizando en la ecuación, si se sustituye el valor de x y de y del punto P se tiene: $(-7)^2 + 8^2 = 49 + 64 = 113$.

El resultado es mayor que 100 ($113 > 100$), si el punto fuera igual a 100 estaría en la circunferencia, y si fuera menor que 100 entonces estaría dentro de ella, por lo tanto, el volcán del Boquerón no fue afectado por el terremoto con epicentro en la ciudad de San Salvador.

2. Se modela el alcance de la avioneta por la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 13^2$, y sustituyendo por el punto (–11, –5) en el que se ubican las plantas de frijol respecto de la casa del campesino, se obtiene que: $(-11)^2 + (-5)^2 = 121 + 25 = 146 < 169$, por lo tanto, las plantas de frijol son alcanzadas por la fumigación de la avioneta.

3. Puesto que la máquina tiene 2 metros de radio cuando está apagada, y encendida puede llegar un metro más lejos, es decir, puede llegar a cubrir un radio total de 3 metros, esta situación puede ser modelada por la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 3^2$ y sustituyendo por el punto (1, –3) en el que se ubica la caseta de control respecto el centro de la máquina, se obtiene que $1^2 + (-3)^2 = 1 + 9 = 10 > 9$, por lo tanto, la caseta está en una buena posición para no ser impactada por "la voladora".

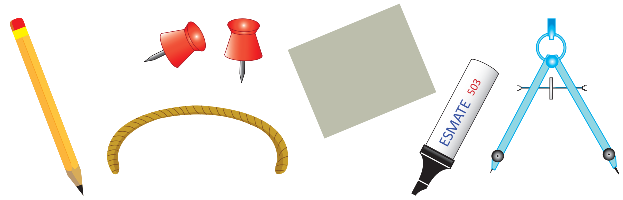
Estos problemas también pueden ser resueltos utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos, sin embargo, es mejor intentar que los estudiantes los resuelvan utilizando conceptos sobre circunferencia.

Lección 3 La elipse

3.1 Actividad introductoria

Materiales

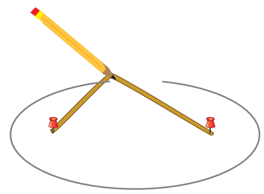
- 2 tachuelas
- Trozo de cuerda
- Lapicero
- Hoja de papel vegetal
- Compás
- Plumón



Actividad 1

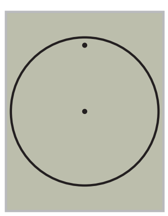
1. Asegura los extremos de la cuerda con las tachuelas sobre una superficie adecuada.

2. Toma la cuerda con la punta del lapicero hasta tensarla, desliza el lapicero manteniendo la cuerda tensada hasta llegar al punto donde iniciaste.

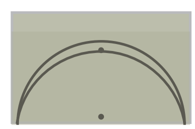


Actividad 2

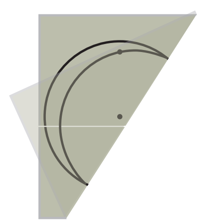
1. Dibuja una circunferencia lo más grande posible sobre el papel vegetal. Y coloca un punto adentro de dicha circunferencia.

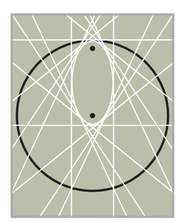


2. Dobla el papel de modo que el punto dibujado quede exactamente sobre un punto de la circunferencia.



3. Realiza el mismo proceso con puntos cercanos en la circunferencia hasta llegar al punto donde se inició. Analiza la figura formada.





Definición

La figura que queda marcada en ambas actividades es una **elipse**. Observa que cada punto de ella cumple la condición de que la suma de la distancia de un punto a dos puntos fijos se mantiene constante.

Preguntas

1. ¿Cuánto mide la suma de las distancias de un punto de la figura dibujada a cada tachuela?
2. ¿Cómo es la suma de la distancia de un punto a las dos tachuelas respecto de la longitud de la cuerda?
3. ¿Qué sucede si en la Actividad 2 el punto está sobre la circunferencia?
4. ¿Qué sucede si en la Actividad 2 el punto es el centro de la circunferencia?

Indicador de logro

3.1 Identifica el lugar geométrico de una elipse.

Secuencia

La figura geométrica asociada con la elipse no es algo con lo que los estudiantes estén familiarizados (al menos matemáticamente) hasta la fecha, y por eso es necesario que logren identificar la figura que determina una elipse.

Propósito

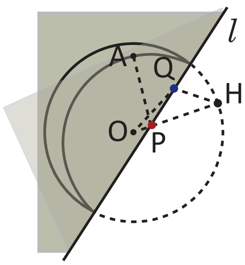
En la Actividad se espera que logren asociar la definición geométrica con la figura que se forma de la elipse, para luego, al deducir su ecuación canónica, quede claro que esta ecuación define el lugar geométrico de una elipse en la siguiente clase, para ello se proponen dos formas.

Materiales

En la clase se utilizarán tachuelas (2 por estudiantes), trozo de cuerda, lapicero, regla, hojas de papel vegetal, compás y plumón (uno de cada uno por estudiante).

Solución de problemas:

La figura que se forma en la actividad 2 también es una elipse, considerando la construcción se tiene que:

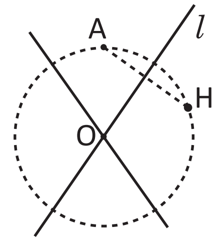


Si H es el punto de la circunferencia que se hace coincidir con el punto A, y P es la intersección del radio OH con la recta l del doblez, entonces se cumple que d(P, A) = d(P, H), entonces d(P, O) + d(P, A) = d(P, O) + d(P, H) = d(O, H).

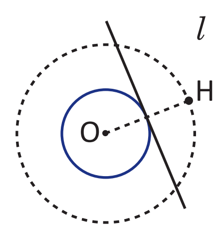
Si Q es otro punto del doblez (recta l) entonces d(Q, A) = d(Q, H), luego d(Q, A) + d(Q, O) = d(Q, H) + d(Q, O) > d(O, H) (por la desigualdad triangular).

Por lo tanto, la recta l y la curva solamente tienen en común el punto P (l es tangente a la curva en el punto P).

1. Los estudiantes deben medir las distancias de un punto de la figura a cada tachuela y sumarlas, este valor dependerá de la longitud del trozo de cuerda.
2. Las distancias son iguales, en esta parte se espera que los estudiantes midan con la regla.
3. Este caso se puede analizar a partir de la explicación de la actividad 2, cuando A está sobre la circunferencia, y al hacer coincidir con los puntos H, el doblez (recta l) será la mediatriz del segmento AH, y por propiedad esta recta pasa por el centro de la circunferencia, luego el único punto que está en todas las rectas es el centro de la circunferencia, y no puede haber otro, por lo tanto, en este caso la figura que queda determinada es un punto.



4. De manera similar, si el punto coincide con el centro de la circunferencia, entonces para cada punto H de la circunferencia, el doblez (recta l) será mediatriz del radio OH, y las mediatrices de todos los radios son tangentes a la circunferencia de la mitad del radio de la circunferencia dibujada, por lo tanto, la figura que se forma es una circunferencia de la mitad del radio de la original.



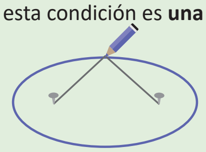
Lección 3

3.2 La elipse*

Problema inicial

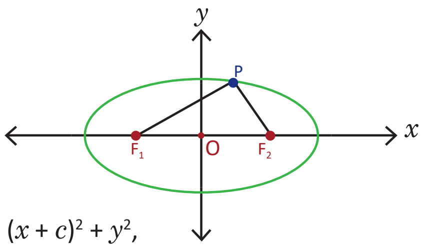
Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos que cumplen que su distancia a un punto fijo $F_1(-c, 0)$ sumada con la distancia a otro punto fijo $F_2(c, 0)$ es siempre igual a $2a$, donde $0 < c < a$.

Recuerda que el lugar geométrico que cumple esta condición es **una elipse**.



Solución

Tomando en general los puntos $P(x, y)$ que cumplen la condición y utilizando la distancia entre dos puntos.



$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

elevando al cuadrado: $(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2,$

simplificando: $a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx,$

elevando al cuadrado: $a^2[(x+c)^2 + y^2] = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2,$

simplificando: $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$

Dado que $0 < c < a$, se cumple que $a^2 - c^2 > 0$, y por ello es posible definir el número b tal que $b^2 = a^2 - c^2$, donde $b > 0$. Sustituyendo en la última igualdad:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividiendo por a^2b^2 ambos miembros de la igualdad se puede expresar como: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Definición

La ecuación que determina el lugar geométrico de **una elipse** está dada por: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Los puntos fijos F_1 y F_2 se conocen como **focos** de la elipse, y tienen coordenadas:

$$F_1(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0) \text{ y } F_2(\sqrt{a^2 - b^2}, 0).$$

Y la suma de las distancias de un punto de la elipse a cada uno de los focos es $2a$.

En la ecuación de la elipse, si $a = b$, el resultado es una circunferencia. Por lo tanto la circunferencia es un caso particular de la elipse.

Ejemplo

Deduce la ecuación de la elipse cuyos focos son $F_1(-3, 0)$ y $F_2(3, 0)$, y cumple que $a = 5$.

De la coordenada en x de los focos se deduce que $c = 3$ y $a = 5$ por hipótesis, para calcular b se tiene que:

$$a^2 - c^2 = b^2, \text{ entonces, } b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 = 4^2.$$

Por lo tanto, la ecuación de la elipse es: $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$, o bien, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$

Problemas

1. Deduce la ecuación de las elipses de cada literal.

   a) $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$, $a = 5$ b) $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$, $a = 3$ c) $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$, $a = 2$

2. Determina las coordenadas de los focos de cada elipse.

   a) $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ c) $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1$

Indicador de logro

3.2 Deduce la ecuación de una elipse con centro en el origen a partir de los focos y el valor del semieje mayor.

Secuencia

Una vez que los estudiantes reconocen el lugar geométrico que determina una elipse, se puede asociar la ecuación deducida de las condiciones de la definición con dicha figura geométrica. Esta clase tiene asterisco, lo que indica que el docente debe dar mayor apoyo a sus estudiantes.

Propósito

En la Solución, la relación $b^2 = a^2 - c^2$ está asociada a las condiciones de los cuadrados, no a la relación de Pitágoras que se cumple en la elipse. En el Ejemplo se presenta la forma de asociar la ecuación de la elipse con su definición.

Solución de problemas:

1a) Se tiene que $c = 4$ y $a = 5$ entonces:

$$b^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 = 3^2,$$

por lo tanto, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1, \text{ o bien, } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

1b) Se tiene que $c = 2$ y $a = 3$ entonces:

$$b^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5 = \left(\sqrt{5}\right)^2,$$

por lo tanto, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{\sqrt{5}^2} = 1, \text{ o bien, } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

1c) Se tiene que $c = 1$ y $a = 2$ entonces:

$$b^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 = \left(\sqrt{3}\right)^2,$$

por lo tanto, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1, \text{ o bien, } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

2a) Se tiene que $a^2 = 5^2$ y $b^2 = 3^2$ entonces:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 = 4^2,$$

por lo tanto, los focos son:

$$F_1(-4, 0), F_2(4, 0).$$

2b) Se tiene que $a^2 = 4$ y $b^2 = 2$ entonces:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 2 = 2 = \left(\sqrt{2}\right)^2,$$

por lo tanto, los focos son:

$$F_1(-\sqrt{2}, 0), F_2(\sqrt{2}, 0).$$

2c) Se tiene que $a^2 = 7$ y $b^2 = 3$ entonces:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 7 - 3 = 4 = 2^2,$$

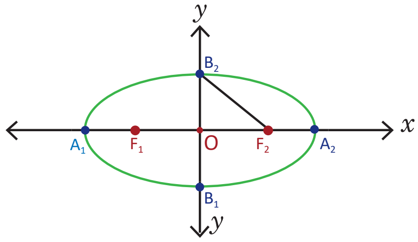
por lo tanto, los focos son:

$$F_1(-2, 0), F_2(2, 0).$$

3.3 Elementos y propiedades de la elipse

Problema inicial

En la gráfica de la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, determina las coordenadas de los puntos A_1, A_2, B_1 y B_2.



Solución

Dado que A_1 y A_2 están sobre el eje x, se puede evaluar la ecuación de la elipse en $y = 0$.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1$, entonces, $\frac{x^2}{a^2} = 1$ y resolviendo.

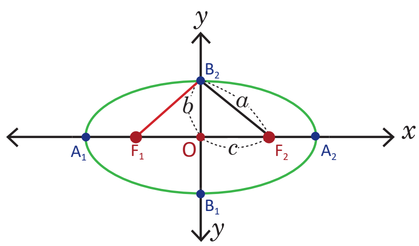
$$x^2 = a^2$$
$$x = \pm a$$

Análogamente, como B_1 y B_2 están sobre el eje y, se puede evaluar la ecuación de la elipse en $x = 0$ y se tiene que:

$$y = \pm b$$

Por lo tanto, las coordenadas de estos puntos son:

$A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$ y $B_2(0, b)$.

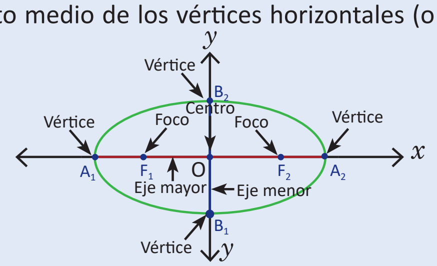


Conclusión

Los puntos extremos de la elipse que se encuentran sobre el eje x y sobre el eje y se llaman **vértices**, y tienen coordenadas $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$ y $B_2(0, b)$. El punto medio de los vértices horizontales (o verticales) se llama **centro** de la elipse.

El segmento de recta que pasa por los focos de la elipse y cuyos extremos son vértices de la misma, se llama **eje mayor** de la elipse, y su longitud mide $2a$.

El segmento de recta cuyos extremos son vértices de la misma y es perpendicular al eje mayor se llama **eje menor** de la elipse, y su longitud mide $2b$.



Para graficar la elipse, coloca los vértices A_1, A_2, B_1 y B_2; o bien traza los ejes mayor y menor.

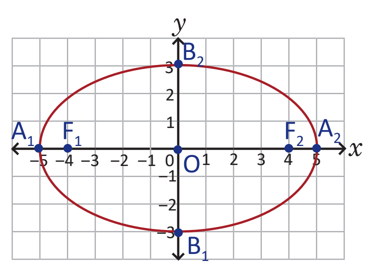
Ejemplo

Determina las coordenadas de los vértices, los focos, longitudes del eje mayor y el eje menor de la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Luego grafícala en el plano cartesiano.

Determinando los valores de a, b y c: $a = 5$, $b = 3$ y $c = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$.

Vértices $\begin{cases} A_1(-5, 0), A_2(5, 0) \\ B_1(0, -3), B_2(0, 3) \end{cases}$ Longitud del eje mayor = 2(5) = 10
Longitud del eje menor = 2(3) = 6

Focos $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$



Problemas

Determina las coordenadas de los vértices, los focos, y longitudes del eje mayor y el eje menor de cada elipse. Luego grafícala en el plano cartesiano.

a) $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ c) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ d) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

Indicador de logro

3.3 Identifica los elementos de una elipse dada su ecuación para graficarla en el plano cartesiano.

Secuencia

Una vez establecida la ecuación canónica de la elipse, se puede trabajar con los estudiantes los diferentes elementos que la conforman, y cómo graficarla en el plano cartesiano a partir de ellos.

Propósito

En la Solución se presentan los diferentes elementos que tiene una elipse en general, y luego se utiliza el Ejemplo para observar la manera de utilizar estos elementos para graficarla en el plano cartesiano.

Solución de problemas:

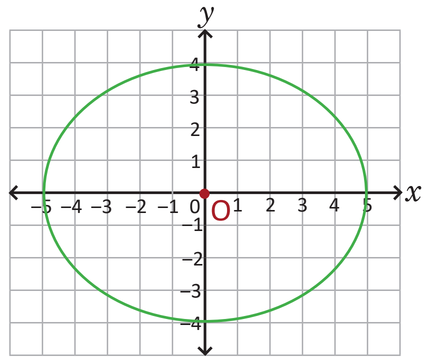
a) Determinando los valores de a, b, c:
$a = 5$, $b = 4$, $c = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$.

Vértices $\begin{cases} A_1(-5, 0), A_2(5, 0) \\ B_1(0, -4), B_2(0, 4) \end{cases}$

Focos $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$

Longitud del eje mayor = 2(5) = 10

Longitud del eje menor = 2(4) = 8



Para orientar a los estudiantes a graficar elipses, se puede aclarar que es suficiente con graficar los puntos de los vértices y luego hacer un bosquejo a partir de los ejes mayor y menor.

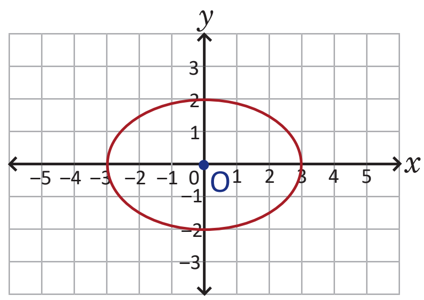
b) Determinando los valores de a, b, c:
$a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$.

Vértices $\begin{cases} A_1(-3, 0), A_2(3, 0) \\ B_1(0, -2), B_2(0, 2) \end{cases}$

Focos $F_1(-\sqrt{5}, 0)$, $F_2(\sqrt{5}, 0)$

Longitud del eje mayor = 2(3) = 6

Longitud del eje menor = 2(2) = 4



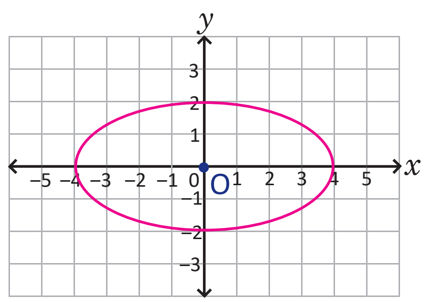
c) Determinando los valores de a, b, c:
$a = 4$, $b = 2$, $c = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Vértices $\begin{cases} A_1(-4, 0), A_2(4, 0) \\ B_1(0, -2), B_2(0, 2) \end{cases}$

Focos $F_1(-2\sqrt{3}, 0)$, $F_2(2\sqrt{3}, 0)$

Longitud del eje mayor = 2(4) = 8

Longitud del eje menor = 2(2) = 4



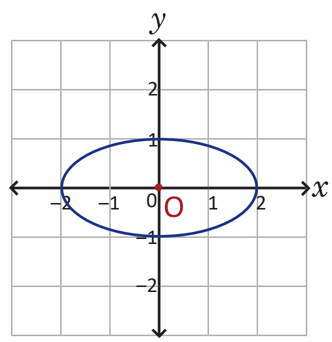
d) Determinando los valores de a, b, c:
$a = 2$, $b = 1$, $c = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

Vértices $\begin{cases} A_1(-2, 0), A_2(2, 0) \\ B_1(0, -1), B_2(0, 1) \end{cases}$

Focos $F_1(-\sqrt{3}, 0)$, $F_2(\sqrt{3}, 0)$

Longitud del eje mayor = 2(2) = 4

Longitud del eje menor = 2(1) = 2



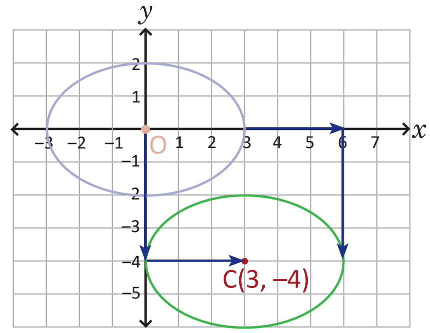
En d), los estudiantes pueden tener problemas en reconocer que el denominador de y^2 es 1^2, hay que tener cuidado para corregir los errores que puedan surgir, por esta razón es el último problema que resolverán.

3.4 Desplazamientos paralelos de la elipse

Problema inicial

Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por la ecuación $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{4}=1$.

Solución



Considerando la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ y desplazándola 3 unidades hacia la derecha y 4 unidades hacia abajo, se obtiene la ecuación:

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{4}=1.$$

Por lo tanto, la gráfica es la elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ con centro (3, –4).

Conclusión

La ecuación de una elipse desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente está dada por: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$.

Para graficarla, se puede ubicar el centro y graficarla como si este fuese el origen del plano cartesiano, o bien, graficarla en el origen y desplazarla.

Recuerda que para desplazar una gráfica h unidades horizontalmente, y k unidades verticalmente se cambia la variable x por la expresión $x-h$; y la variable y por la expresión $y-k$.

Ejemplo 1

Determina la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ desplazada –3 unidades horizontalmente y 2 unidades verticalmente.

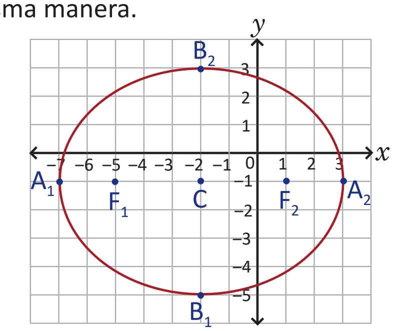
Tomando la ecuación original y reemplazando x por $[x-(-3)]$, y y por $(y-2)$: $\frac{(x+3)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$.

Ejemplo 2

Determina las coordenadas de los vértices, los focos, y las longitudes del eje mayor y eje menor de la elipse $\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$. Luego grafícala en el plano cartesiano con todos sus elementos.

Esta elipse es equivalente a la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ desplazada –2 unidades horizontalmente y –1 unidad verticalmente. Nota que los vértices y los focos se desplazan de la misma manera.

Ecuación	$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$	$\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$
Vértices	$A_1(-5, 0)$, $A_2(5, 0)$ $B_1(0, -4)$, $B_2(0, 4)$	$A_1(-7, -1)$, $A_2(3, -1)$ $B_1(-2, -5)$, $B_2(-2, 3)$
Focos	$F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$	$F_1(-5, -1)$, $F_2(1, -1)$
Longitudes del eje mayor y eje menor	$2a = 10$, $2b = 8$	$2a = 10$, $2b = 8$



Problemas

1. Para cada literal determina la ecuación de la elipse desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente.

   a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, $h=-1$, $k=2$ b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, $h=3$, $k=-1$ c) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$, $h=-2$, $k=-2$

2. Determina las coordenadas de los vértices, los focos, y longitudes del eje mayor y eje menor. Luego grafica en el plano cartesiano la elipse de cada literal.

   a) $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$ b) $\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$ c) $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$

Indicador de logro

3.4 Encuentra la ecuación de una elipse desplazada paralelamente respecto a los ejes de coordenadas y traza su gráfica.

Secuencia

Puesto que los estudiantes ya conocen la ecuación de la elipse y cómo encontrar los elementos de ella a partir de dicha ecuación, es un momento adecuado para introducir los desplazamientos paralelos en la elipse.

Propósito

En la Solución se espera que los estudiantes apliquen lo que ya conocen sobre desplazamientos paralelos tanto de una gráfica, como de un punto, que se vio en la lección sobre parábola y se siguió aplicando en circunferencia.

Solución de problemas:

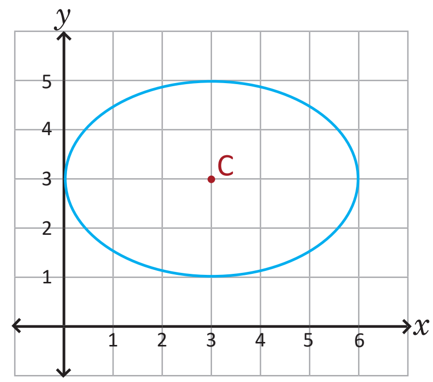
1a) $\frac{[x-(-1)]^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$, o bien, $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$.

1b) $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{[y-(-1)]^2}{4} = 1$, o bien, $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$.

1c) $\frac{[x-(-2)]^2}{16} + \frac{[y-(-2)]^2}{7} = 1$, o bien, $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{7} = 1$.

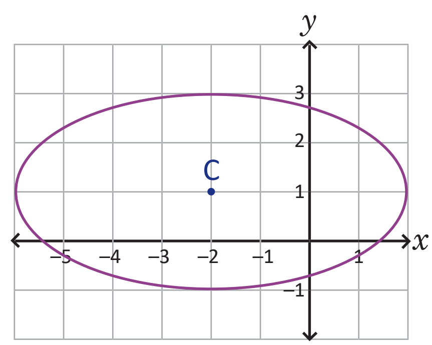
2a)

Ecuación	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$	$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$
Vértices	$A_1(-3, 0)$, $A_2(3, 0)$ $B_1(0, -2)$, $B_2(0, 2)$	$A_1(0, 3)$, $A_2(6, 3)$ $B_1(3, 1)$, $B_2(3, 5)$
Focos	$F_1(-\sqrt{5}, 0)$, $F_2(\sqrt{5}, 0)$	$F_1(-\sqrt{5} + 3, 3)$, $F_2(\sqrt{5} + 3, 3)$
Longitudes del eje mayor y eje menor	$2a = 6$, $2b = 4$	$2a = 6$, $2b = 4$



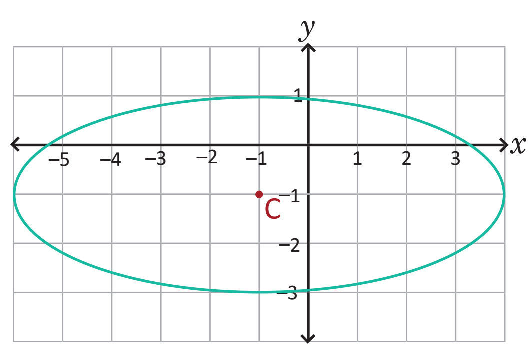
2b)

Ecuación	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$	$\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$
Vértices	$A_1(-4, 0)$, $A_2(4, 0)$ $B_1(0, -2)$, $B_2(0, 2)$	$A_1(-6, 1)$, $A_2(2, 1)$ $B_1(-2, -1)$, $B_2(-2, 3)$
Focos	$F_1(-2\sqrt{3}, 0)$, $F_2(2\sqrt{3}, 0)$	$F_1(-2\sqrt{3} - 2, 1)$, $F_2(2\sqrt{3} - 2, 1)$
Longitudes del eje mayor y eje menor	$2a = 8$, $2b = 4$	$2a = 8$, $2b = 4$



2c)

Ecuación	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$	$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$
Vértices	$A_1(-5, 0)$, $A_2(5, 0)$ $B_1(0, -2)$, $B_2(0, 2)$	$A_1(-6, -1)$, $A_2(4, -1)$ $B_1(-1, -3)$, $B_2(-1, 1)$
Focos	$F_1(-\sqrt{21}, 0)$, $F_2(\sqrt{21}, 0)$	$F_1(-\sqrt{21} - 1, -1)$, $F_2(\sqrt{21} - 1, -1)$
Longitudes del eje mayor y eje menor	$2a = 10$, $2b = 4$	$2a = 10$, $2b = 4$



3.5 Ecuación general de la elipse

Problema inicial

Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por la ecuación $9x^2 + 25y^2 - 18x - 100y - 116 = 0$.

Expresa la ecuación en la forma $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.

Solución

Completando cuadrados para x y para y:

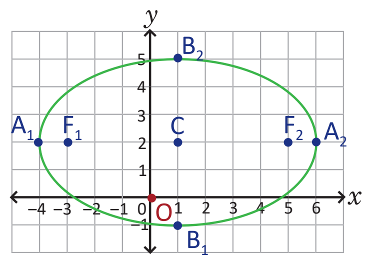
$$9x^2 + 25y^2 - 18x - 100y - 116 = 0$$

$$9(x^2 - 2x) + 25(y^2 - 4y) - 116 = 0 \quad \text{ordenando y agrupando,}$$

$$9(x-1)^2 + 25(y-2)^2 - 9 - 100 - 116 = 0 \quad \text{completando cuadrados,}$$

$$\frac{9(x-1)^2}{225} + \frac{25(y-2)^2}{225} = 1 \quad \text{sumando e igualando a 1,}$$

$$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \quad \text{simplificando.}$$



Por lo tanto, la gráfica es la elipse con centro (1, 2) y vértices $A_1(-4, 2)$, $A_2(6, 2)$, $B_1(1, -1)$ y $B_2(1, 5)$.

Conclusión

Una elipse puede ser representada desarrollando los cuadrados de la ecuación $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ y dejando la ecuación igualada a 0.

En general para determinar el centro y los vértices (eje mayor y menor) de una elipse cuya ecuación sea de la forma $dx^2 + ey^2 + fx + gy + h = 0$, se completan cuadrados perfectos en x y y, para expresarla en la forma $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$. A la ecuación de la forma $dx^2 + ey^2 + fx + gy + h = 0$ se le llama **ecuación general de la elipse.**

Ejemplo

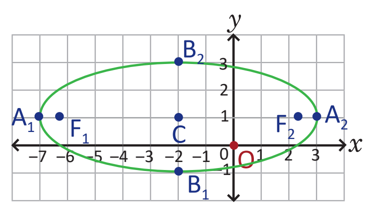
Determina las coordenadas de los vértices, los focos y longitudes del eje mayor y menor de la elipse: $4x^2 + 25y^2 + 16x - 50y - 59 = 0$ y grafícala en el plano cartesiano con todos sus elementos.

$$4x^2 + 25y^2 + 16x - 50y - 59 = 0$$

$$4(x+2)^2 + 25(y-1)^2 - 16 - 25 - 59 = 0$$

$$\frac{4(x+2)^2}{100} + \frac{25(y-1)^2}{100} = 1$$

$$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$



Entonces el centro de la elipse es el punto C(–2, 1).

Esta elipse es equivalente a la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ desplazada –2 unidades horizontalmente y 1 unidad verticalmente.

Ecuación	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$	$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$
Vértices	$A_1(-5, 0)$, $A_2(5, 0)$, $B_1(0, -2)$, $B_2(0, 2)$	$A_1(-7, 1)$, $A_2(3, 1)$, $B_1(-2, -1)$, $B_2(-2, 3)$
Focos	$F_1(-\sqrt{21}, 0)$, $F_2(\sqrt{21}, 0)$	$F_1(-2-\sqrt{21}, 1)$, $F_2(-2+\sqrt{21}, 1)$
Longitudes de los ejes	$2a = 10$, $2b = 4$	$2a = 10$, $2b = 4$

Problemas

Determina las coordenadas de los vértices, los focos y longitudes del eje mayor y menor de cada elipse. Luego grafícala en el plano cartesiano.

a) $4x^2 + 9y^2 + 8x + 18y - 23 = 0$
b) $3x^2 + 4y^2 - 12x + 16y + 16 = 0$
c) $8x^2 + 9y^2 - 16x - 18y - 55 = 0$
d) $7x^2 + 16y^2 + 14x - 64y - 41 = 0$
e) $4x^2 + 9y^2 - 36y = 0$
f) $x^2 + 4y^2 + 4x = 0$

Indicador de logro

3.5 Determina los elementos de una elipse a partir de su ecuación general y traza su gráfica en el plano cartesiano.

Secuencia

Ahora que los estudiantes ya han aplicado desplazamientos paralelos en la elipse, se trabaja con la ecuación general utilizando el procedimiento para completar cuadrados perfectos.

Propósito

En la clase anterior y en esta quedan ejemplificados los desplazamientos a los 4 cuadrantes del plano cartesiano, para que los estudiantes tengan claridad de los casos.

Solución de problemas:

a) $4x^2 + 9y^2 + 8x + 18y - 23 = 0$

$$4(x+1)^2 + 9(y+1)^2 = 23 + 4 + 9$$

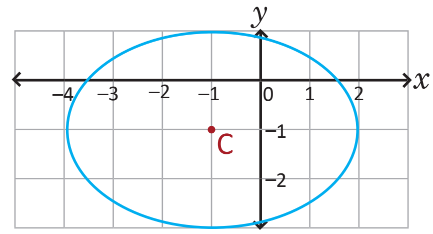
$$\frac{4(x+1)^2}{36} + \frac{9(y+1)^2}{36} = 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

$A_1(-4, -1)$, $A_2(2, -1)$, $B_1(-1, -3)$, $B_2(-1, 1)$

$F_1(-\sqrt{5} - 1, -1)$, $F_2(\sqrt{5} - 1, -1)$

$2a = 6$, $2b = 4$



b) $3x^2 + 4y^2 - 12x + 16y + 16 = 0$

$$3(x-2)^2 + 4(y+2)^2 = -16 + 12 + 16$$

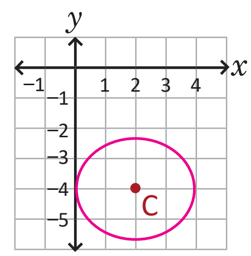
$$\frac{3(x-2)^2}{12} + \frac{4(y+4)^2}{12} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+4)^2}{3} = 1$$

$A_1(0, -4)$, $A_2(4, -4)$, $B_1(2, -\sqrt{3} - 4)$, $B_2(2, \sqrt{3} - 4)$

$F_1(1, -4)$, $F_2(3, -4)$

$2a = 4$, $2b = 2\sqrt{3}$



c) $8x^2 + 9y^2 - 16x - 18y - 55 = 0$

$$8(x-1)^2 + 9(y-1)^2 = 55 + 8 + 9$$

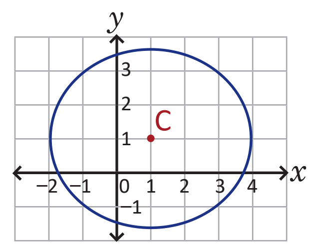
$$\frac{8(x-1)^2}{72} + \frac{9(y-1)^2}{72} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{8} = 1$$

$A_1(-2, 1)$, $A_2(4, 1)$, $B_1(1, -2\sqrt{2} + 1)$, $B_2(1, 2\sqrt{2} + 1)$

$F_1(0, 1)$, $F_2(2, 1)$

$2a = 6$, $2b = 4\sqrt{2}$



d) $7x^2 + 16y^2 + 14x - 64y - 41 = 0$

$$7(x+1)^2 + 16(y-2)^2 = 41 + 7 + 64$$

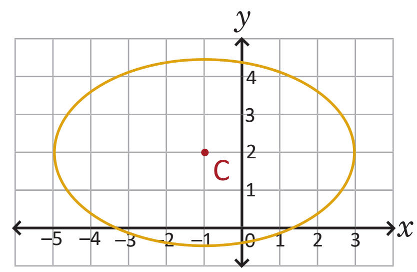
$$\frac{7(x+1)^2}{112} + \frac{16(y-2)^2}{112} = 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{7} = 1$$

$A_1(-5, 2)$, $A_2(3, 2)$, $B_1(-1, -\sqrt{7} + 2)$, $B_2(-1, \sqrt{7} + 2)$

$F_1(-4, 2)$, $F_2(2, 2)$

$2a = 8$, $2b = 2\sqrt{7}$



e) $4x^2 + 9y^2 - 36y = 0$

$$4x^2 + 9(y-2)^2 = 0 + 36$$

$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9(y-2)^2}{36} = 1$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

$A_1(-3, 2)$, $A_2(3, 2)$, $B_1(0, 0)$, $B_2(0, 4)$

$F_1(-\sqrt{5}, 2)$, $F_2(\sqrt{5}, 2)$

$2a = 6$, $2b = 4$

f) $x^2 + 4y^2 + 4x = 0$

$$(x+2)^2 + 4y^2 = 4$$

$$\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{4y^2}{4} = 1$$

$$\frac{(x+2)^2}{4} + y^2 = 1$$

$A_1(-4, 0)$, $A_2(0, 0)$, $B_1(-2, -1)$, $B_2(-2, 1)$

$F_1(-\sqrt{3} - 2, 0)$, $F_2(\sqrt{3} - 2, 0)$

$2a = 4$, $2b = 2$

3.6 Practica lo aprendido

1. Deduce la ecuación de las elipses de cada literal.

   a) $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$, $a = 3$

   b) $F_1(-\sqrt{7}, 0)$, $F_2(\sqrt{7}, 0)$, $A_1(-4, 0)$, $A_2(4, 0)$

2. Determina las coordenadas de los focos de cada elipse.

   a) $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

   b) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

   c) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

3. Determina las coordenadas de los vértices, los focos, las longitudes del eje mayor y el eje menor de cada elipse. Luego grafícala en el plano cartesiano.

   a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

   b) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

4. Para cada literal determina la ecuación de la elipse desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente.

   a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, $h = -2$, $k = -2$

   b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, $h = 3$, $k = -2$

5. Determina las coordenadas de los vértices, los focos, y las longitudes del eje mayor y eje menor. Luego grafica en el plano cartesiano la elipse de cada literal.

   a) $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

   b) $\frac{(x+3)^2}{8} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$

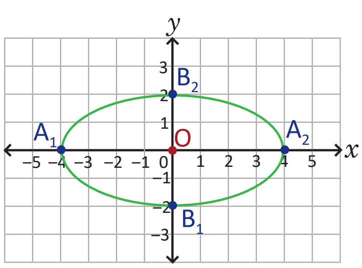
6. Determina las coordenadas de los vértices, los focos, y las longitudes del eje mayor y el eje menor de cada elipse. Luego grafícala en el plano cartesiano.

   a) $4x^2 + 9y^2 - 16x + 36y + 16 = 0$

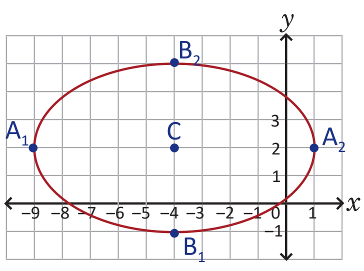
   b) $4x^2 + 9y^2 + 24x = 0$

7. Encuentra la ecuación que determina cada una de las siguientes elipses.

   a)



   b)



Indicador de logro

3.6 Resuelve problemas correspondientes a la elipse.

Solución de problemas:

1a) $b^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$, entonces la ecuación es: $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$, o bien, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$.

1b) $b^2 = 4^2 - \sqrt{7}^2 = 16 - 7 = 9$, entonces la ecuación es: $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$, o bien, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

2a) $c^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5 = \left(\sqrt{5}\right)^2$, y los focos son: $F_1(-\sqrt{5}, 0)$, $F_2(\sqrt{5}, 0)$.

2b) $c^2 = 4 - 1 = 3 = \left(\sqrt{3}\right)^2$, y los focos son: $F_1(-\sqrt{3}, 0)$, $F_2(\sqrt{3}, 0)$.

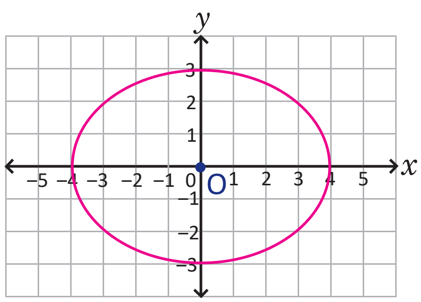
2c) $c^2 = 16 - 12 = 4 = 2^2$, y los focos son: $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$.

3a) Vértices $\begin{cases} A_1(-4, 0), A_2(4, 0) \\ B_1(0, -3), B_2(0, 3) \end{cases}$

Focos $F_1(-\sqrt{7}, 0)$, $F_2(\sqrt{7}, 0)$

Longitud del eje mayor = 2(4) = 8

Longitud del eje menor = 2(3) = 6

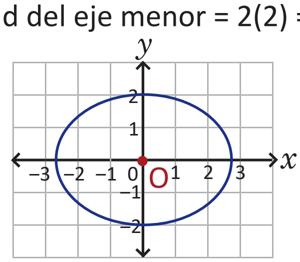


3b) Vértices $\begin{cases} A_1(-2\sqrt{2}, 0), A_2(2\sqrt{2}, 0) \\ B_1(0, -2), B_2(0, 2) \end{cases}$

Focos $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$

Longitud del eje mayor = $2(2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$

Longitud del eje menor = 2(2) = 4



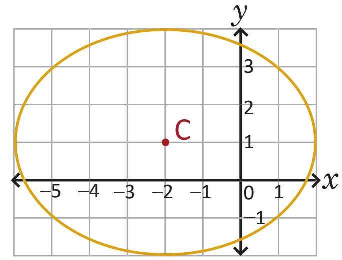
4a) $\frac{[x-(-2)]^2}{25} + \frac{[y-(-2)]^2}{16} = 1$, o bien, $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$.

4b) $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{[y-(-2)]^2}{9} = 1$, o bien, $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$.

5a) $A_1(-6, 1)$, $A_2(2, 1)$, $B_1(-2, -2)$, $B_2(-2, 4)$

$F_1(-\sqrt{7} - 2, 1)$, $F_2(\sqrt{7} - 2, 1)$

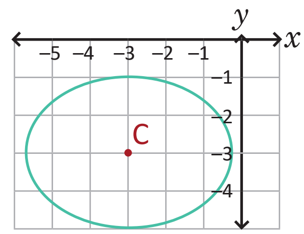
$2a = 8$, $2b = 6$



5b) $A_1(-2\sqrt{2} - 3, -3)$, $A_2(2\sqrt{2} - 3, -3)$, $B_1(-3, -5)$, $B_2(-3, -1)$

$F_1(-5, -3)$, $F_2(-1, -3)$

$2a = 4\sqrt{2}$, $2b = 4$



6a) $4x^2 + 9y^2 - 16x + 36y + 16 = 0$

$$4(x-2)^2 + 9(y+2)^2 = -16 + 36 + 16$$

$$\frac{4(x-2)^2}{36} + \frac{9(y+2)^2}{36} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

$A_1(-1, -2)$, $A_2(5, -2)$, $B_1(2, -4)$, $B_2(2, 0)$

$F_1(-\sqrt{5} + 2, -2)$, $F_2(\sqrt{5} + 2, -2)$

$2a = 6$, $2b = 4$

6b) $4x^2 + 9y^2 + 24x = 0$

$$4(x+3)^2 + 9y^2 = 36$$

$$\frac{4(x+3)^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = 1$$

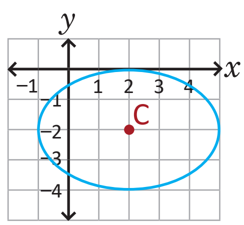
$$\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$A_1(-6, 0)$, $A_2(0, 0)$, $B_1(-3, -2)$, $B_2(-3, 2)$

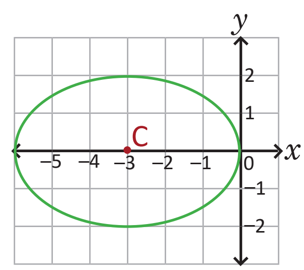
$F_1(-\sqrt{5} - 3, 0)$, $F_2(\sqrt{5} - 3, 0)$

$2a = 6$, $2b = 4$

6a)



6b)



7a) Se identifica que $a = 4$ y $b = 2$, y el centro está en (0, 0), por lo tanto, la ecuación es:

$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$, o bien, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

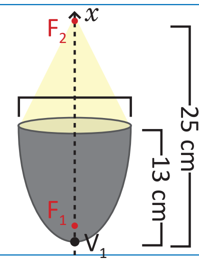
7b) Se identifica que $a = 5$ y $b = 3$, y el centro está en (–4, 2), por lo tanto, la ecuación es:

$\frac{[x-(-4)]^2}{5^2} + \frac{(y-2)^2}{3^2} = 1$, o bien, $\frac{(x+4)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$.

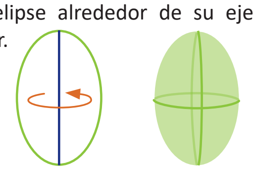
3.7 Aplicaciones de la elipse*

Problema inicial

Se diseña una lámpara con forma semi-elíptica (la mitad de una forma elíptica) de 13 cm de altura de modo que proyecta la luz emanada desde un foco hacia el otro que está a 25 cm de distancia del vértice de la lámpara. Determina de cuánto debería ser el diámetro de la lámpara para que funcione correctamente.



Una forma elíptica es un cuerpo geométrico que resulta de girar una elipse alrededor de su eje mayor.



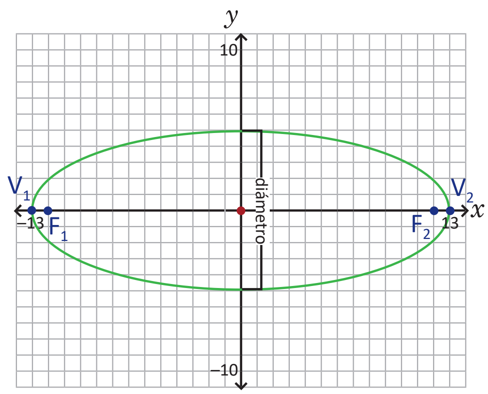
Solución

Considerando una elipse con centro en el origen, entonces uno de los vértices tendrá coordenadas (13, 0), y uno de los focos (12, 0), por lo tanto a = 13, c = 12, entonces:

$$b^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25 = 5^2$$
$$a^2 = 13^2$$

Y la ecuación de dicha elipse será: $\frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$.

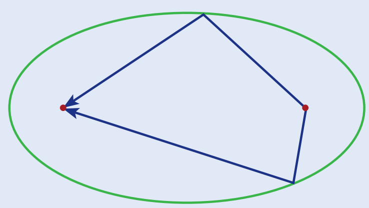
Entonces el diámetro estará dado por la medida del eje menor de la elipse, es decir, $2b = 2(5) = 10$.
Por lo tanto, el diámetro de la lámpara debe ser 10 cm.



Conclusión

En una elipse, los focos cumplen una propiedad reflectora importante: una línea tomada desde un foco de la elipse, será reflejada por esta exactamente sobre el otro foco.

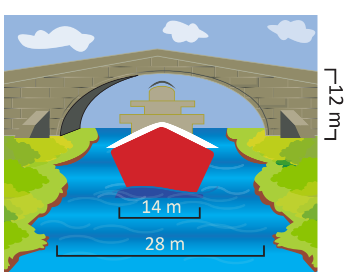
Esta propiedad reflectora parecida a la de la parábola hace que la elipse o las formas elípticas posean gran aplicación en ámbitos científicos, arquitectónicos, acústicos o artísticos.



Problemas

1. Una ingeniera eléctrica diseña un reflector de luz semi-elíptico para un teatro, dicho reflector tiene 13 centímetros de altura y 10 centímetros de diámetro. Determina a qué distancia del vértice del reflector concentrará la luz dicho reflector.

2. Un puente cuya abertura tiene forma semi-elíptica sobre un río tiene 28 metros de largo y una altura de 12 metros sobre el nivel del río. Determina la altura máxima que debe tener un barco de 14 metros de ancho para que pase con total seguridad bajo el puente.



Asume que el barco es simétrico respecto el eje vertical, y que pasa justo en medio del puente. Además piensa que el barco tiene la misma altura en todo punto.

Unidad 3

Indicador de logro

3.7 Utiliza las propiedades de los focos y la ecuación de la elipse para resolver problemas sobre objetos elípticos.

Secuencia

Después de abordar los conceptos básicos sobre la elipse, se pueden analizar y resolver algunos problemas sobre aplicaciones a la vida real, basados fundamentalmente en la propiedad reflectora de la elipse. Esta clase tiene asterisco, lo que indica que el docente debe dar mayor apoyo a sus estudiantes.

Propósito

En las soluciones a los Problemas los estudiantes deben modelar una situación a partir de conceptos matemáticos, para resolverlos e interpretar la respuesta obtenida para dar solución al problema original.

Solución de problemas:

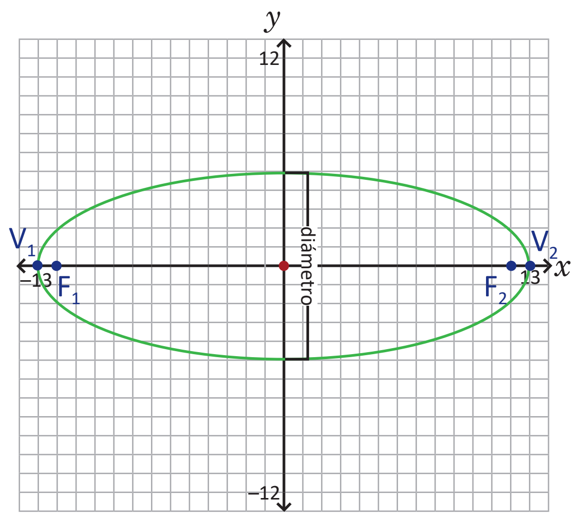
1. Considerando una elipse con centro en el origen, entonces uno de los vértices del eje mayor tendrá coordenadas (13, 0), y uno de los vértices del eje menor (0, 5), por lo tanto $a = 13$, $b = 5$, entonces la ecuación de la elipse será:

$$\frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1.$$

Entonces, por la propiedad reflectora de la elipse, se tendrá que la luz se concentra en el foco cuyas coordenadas son:

$$c^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 = 12^2,\ F_2 = (12, 0).$$

Por lo tanto, el reflector concentrará la luz a 25 (13 + 12) metros del vértice.



2. Para este problema hay que tener cuidado, pues la altura de los puentes elípticos disminuye conforme se aleja del centro de la elipse, entonces para asegurar que el barco pase con toda seguridad es mejor calcular la altura en el punto más lejano del centro por el que puede pasar el barco.

Utilizando la ecuación de la elipse con $a = 14$ (la mitad de la longitud total) y $b = 12$ (la altura máxima del puente):

$$\frac{x^2}{14^2} + \frac{y^2}{12^2} = 1.$$

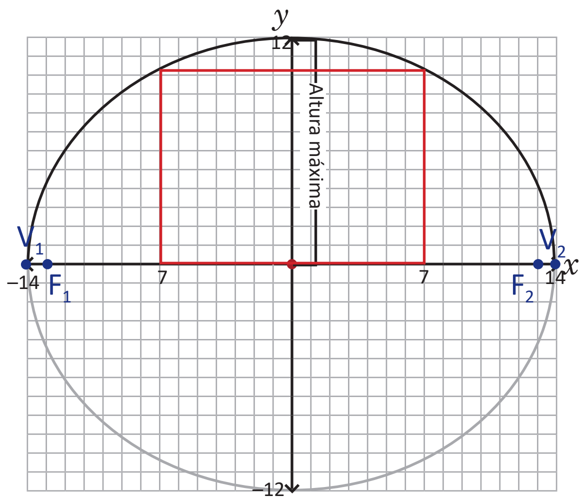
Puesto que el barco mide 14 metros de ancho, entonces el punto más lejano del centro por el que pasará el barco es en $x = 7$, y evaluando en la ecuación para determinar el valor de y:

$$\frac{7^2}{14^2} + \frac{y^2}{12^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{12^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{y}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = 6\sqrt{3} \approx 10.39.$$



Por lo tanto, la altura máxima que debe tener el barco para que pase con total seguridad debe ser aproximadamente de 10.39 metros.

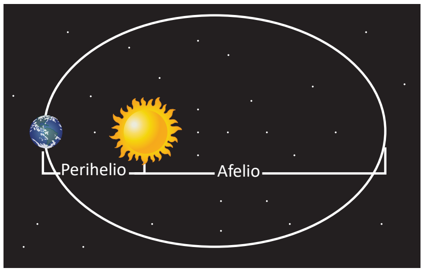
3.8 Aplicaciones de la elipse

Resuelve los siguientes problemas de aplicación de elipse. Modela cada situación en el plano cartesiano.

1. Un paso a desnivel construido en forma semi-elíptica tiene 12 metros de largo y una altura máxima de 3 metros a partir del centro. Determina la altura máxima que debe tener un camión para pasar por debajo del paso a desnivel, si la anchura de este camión es de 3 metros del centro de la calle hacia cada lado.

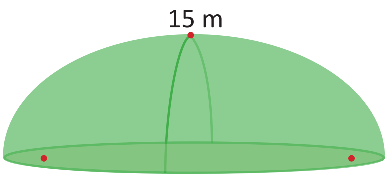
2. Una arquitecta y un ingeniero trabajan en el diseño de un puente con forma semi-elíptica para un río de 30 metros de ancho. El puente debe ser tal que un barco de a lo sumo 20 metros de ancho y 3 metros de alto pueda cruzar debajo de este con total seguridad. Determina la altura que debe tener el puente.

3. La Tierra cumple con recorrer una órbita elíptica en exactamente un año, dicha elipse tiene como uno de sus focos el Sol. El instante en el que la Tierra se ubica más cerca del Sol se conoce como perihelio y son aproximadamente 147 millones de kilómetros de distancia; mientras que el instante en el que está más alejada del Sol se conoce como afelio y se ubica a una distancia aproximada de 153 millones de kilómetros. Determina la ecuación de la órbita de la Tierra.



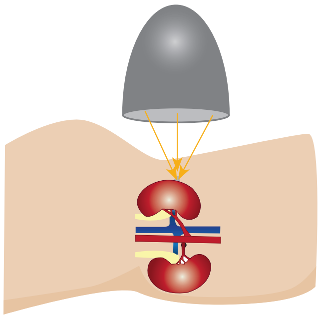
El astrónomo y matemático alemán Johannes Kepler, estudió y descubrió **las tres leyes del movimiento de los planetas**, la primera de las cuales se enuncia: *"Los planetas tienen movimientos elípticos alrededor del Sol, estando este situado en uno de los dos focos que contiene la elipse"*.

4. Una estructura arquitectónica fue diseñada para poder enviar secretos a otra persona sin que los demás los escuchen. La forma de su diseño es semi-elíptico (aprovechando las propiedades focales de la elipse), la altura de dicha estructura en el punto más alto es de 15 metros y la distancia entre los vértices del salón es de 34 metros. Determina la ubicación que deben tener dos personas para que uno pueda escuchar al otro aunque se hablen por susurros.



Si dos personas están sobre los focos de la elipse, las ondas de sonido que salgan de un foco serán reflejadas directamente hacia el otro foco.

5. Para curar los cálculos renales en una persona, en ocasiones se utiliza un procedimiento conocido como litotripcia. Este procedimiento utiliza una cubierta semi-elíptica, y se fundamenta en la propiedad de los focos de una elipse: se localiza un aparato generador de ondas de choque en el foco de la elipse y estas tendrán efecto sobre el otro foco, lugar donde se encuentra el cálculo renal. Si el aparato tiene 13 cm de altura y 10 cm de diámetro, determina a qué distancia podría estar el cálculo para poder pulverizarlo utilizando este aparato.



Indicador de logro

3.8 Resuelve problemas de aplicación de la elipse.

Solución de problemas:

1. Este problema es muy parecido al problema número 2 resuelto en la clase anterior, basta identificar que para este caso $a = 6$ y $b = 3$, entonces la elipse tendrá ecuación: $\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$.

Y ahora solo falta determinar el valor de y para $x = 3$:

$\frac{3^2}{6^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$, entonces, $\frac{y^2}{3^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, luego, $\frac{y}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, por lo tanto, $y = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.6$.

Por lo tanto, la altura máxima que debe tener el camión para que pase con total seguridad debe ser aproximadamente de 2.60 metros.

2. Si se modela el problema con la ecuación de la elipse, se puede identificar que $a = 15$ (la mitad de la anchura del río), y el valor de b representa la altura que debe tener el puente, entonces la ecuación es de la forma: $\frac{x^2}{15^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Puesto que un barco de 20 metros de ancho y 3 de alto debe cruzar con total seguridad, entonces el punto (10, 3) debe satisfacer la ecuación de la elipse, entonces sustituyendo y determinando el valor de b:

$\frac{10^2}{15^2} + \frac{3^2}{b^2} = 1$, entonces, $\frac{3^2}{b^2} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$, luego, $\frac{3}{b} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, por lo tanto, $b = \frac{9\sqrt{5}}{5} \approx 4.02$.

Por lo tanto, la altura máxima del puente debe ser aproximadamente 4.02 metros.

3. Utilizando la ilustración del problema, es claro que al sumar las distancias del perihelio y el afelio se tendrá la longitud del eje mayor de la elipse; y al restar al afelio el perihelio se obtendrá la distancia entre los focos:

$$2a = \text{afelio} + \text{perihelio} = 153 + 147 = 300, \text{ entonces } a = 150;$$
$$2c = \text{afelio} - \text{perihelio} = 153 - 147 = 6, \text{ entonces } c = 3.$$

Para determinar la ecuación de la elipse solamente hace falta el valor de b^2:

$$b^2 = a^2 - c^2 = 150^2 - 3^2 = 22\,491.$$

Por lo tanto, la ecuación de la elipse que determina la órbita es: $\frac{x^2}{22\,500} + \frac{y^2}{22\,491} = 1$.

4. Puesto que el problema menciona que la distancia entre los dos vértices es 34, y la altura provee el valor de b de la elipse, es decir, $b = 15$, entonces se puede determinar que $2a = 34$, y entonces $a = 17$, luego lo que se necesita es el valor de c: $c^2 = a^2 - b^2 = 17^2 - 15^2 = 64 = 8^2$.

Como $a - c = 17 - 8 = 9$, es la distancia del vértice al foco, entonces la personas deben ubicarse a 9 metros de distancia de cada vértice, o bien a 16 metros de distancia entre ellas (a 8 metros del centro cada persona).

5. El objeto semielíptico descrito es igual al del Problema inicial de la clase anterior, por lo tanto, se tendrá que $a = 13$ y $b = 5$, a partir de lo cual se puede determinar que $c^2 = a^2 - b^2 = 13^2 - 5^2 = 144 = 12^2$.

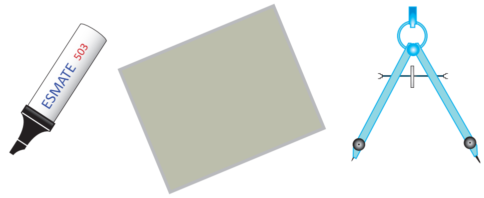
Por lo tanto, para poder pulverizar el cálculo renal, este debe estar a 12 cm de distancia del litotriptor.

Lección 4 La hipérbola

4.1 Actividad introductoria

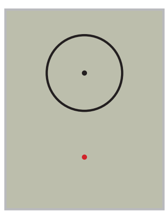
Materiales

- Hoja de papel vegetal
- Compás
- Plumón
- Regla

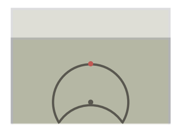


Actividad

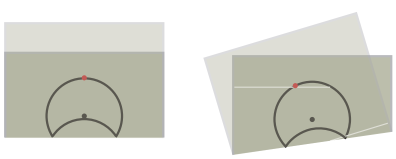
1. Dibuja una circunferencia no demasiado grande sobre el papel vegetal, coloca un punto en su centro y otro afuera un poco lejos de dicha circunferencia y alineados verticalmente.



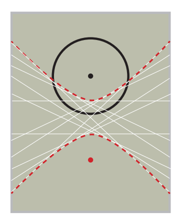
2. Dobla el papel de modo que el punto dibujado quede exactamente sobre un punto de la circunferencia.



3. Realiza el mismo proceso con puntos cercanos en la circunferencia hasta volver al punto con el que se inició. Analiza la figura formada.



4. La figura que se forma tiene dos ramas y el centro de la circunferencia está dentro de una rama y el punto dibujado fuera de la circunferencia está dentro de la otra.



Definición

La figura de las dos ramas que queda marcada en la actividad es una **hipérbola**. Observa que cada punto de ella cumple la condición de que la diferencia de la distancia de un punto a dos puntos fijos se mantiene constante.

Preguntas

1. ¿Qué sucede si el punto dibujado fuera de la circunferencia está más lejos de ella?
2. ¿Qué sucede si el punto dibujado fuera de la circunferencia está muy cerca de la circunferencia?
3. ¿Qué sucede si el punto dibujado fuera de la circunferencia no está alineado verticalmente con su centro?
4. ¿Cuánto es la diferencia de un punto de la hipérbola hacia los dos puntos fijos dibujados?
5. Explica por qué se cumple que la diferencia de un punto de la hipérbola a dos puntos fijos se mantiene constante.

Indicador de logro

4.1 Identifica el lugar geométrico de una hipérbola.

Secuencia

La figura geométrica asociada con la hipérbola no es algo con lo que los estudiantes estén familiarizados hasta la fecha, y por eso es necesario que logren identificar la figura que determina una hipérbola, al igual como lo hicieron con la elipse.

Propósito

En la Actividad se espera que logren asociar la definición geométrica con la figura que se forma de la hipérbola, para que luego, en la siguiente clase, al deducir su ecuación canónica quede claro que esta ecuación define el lugar geométrico de una hipérbola.

Materiales

En la clase se utilizarán hojas de papel vegetal, compás y plumón (uno de cada uno por estudiante).

Solución de problemas:

1. Los estudiantes pueden comparar entre ellos; algunos que dibujaron el punto más lejos observarán que las hipérbolas formadas se abren más o se abren menos, lo importante es que los estudiantes vean que no solamente influye el hecho de estar lejos o cerca de la circunferencia, sino también cuánto es el radio de esta. En particular, si se dibujan circunferencias con el mismo radio, mientras más lejos está el punto, las hipérbolas se abren un poco más.

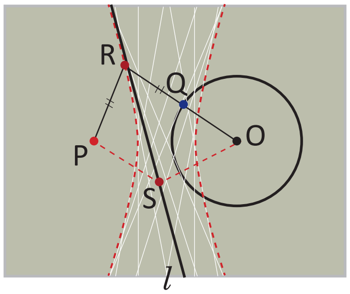
2. Los estudiantes pueden comparar entre ellos, en este caso las hipérbolas se van cerrando cada vez más al punto que los vértices casi coinciden con los focos, en ese caso se forma una línea recta horizontal.

3. Este caso puede ser elaborado con anticipación por el profesor, de modo que los estudiantes observen que también se forma una hipérbola, pero oblicua, o inclinada.

4. Para esta pregunta los estudiantes pueden utilizar regla para medir las distancias y luego restarlas, el profesor puede recomendar compararlas con la longitud del radio de la circunferencia; aunque lo ideal es que los estudiantes comparen las distancias y vean que son iguales.

5. Este es el numeral más difícil, y se puede comenzar tomando un punto Q de la circunferencia y tomar el punto R como la intersección entre el doblez (recta l) y $\overline{OQ}$.

A partir de ello se puede observar que $\overline{RQ}$ coincide con $\overline{RP}$, por lo tanto, la diferencia de las distancias RO – RP será constante e igual al radio. Además, se puede hacer el cálculo para comprobar que si se toma otro punto S, la diferencia de las distancias SO – SP siempre es menor que el radio (desigualdad triangular).

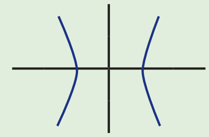


4.2 La hipérbola*

Problema inicial

Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos que cumplen que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ es siempre igual a $2a$, donde $0 < a < c$.

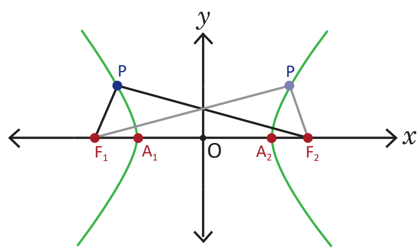
Recuerda que el lugar geométrico que cumple esta condición es **una hipérbola**.



Solución

Si el punto P está en la rama izquierda: $d(P, F_2) - d(P, F_1) = 2a$.

Si el punto P está en la rama derecha: $d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$.



Tomando en general los puntos $P(x, y)$ que cumplen la condición y utilizando la distancia entre dos puntos.

$$
\begin{aligned}
d(P, F_2) - d(P, F_1) &= \pm 2a \\
\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} &= \pm 2a \\
\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \text{transponiendo,} \\
(x-c)^2 + y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \quad \text{elevando al cuadrado,} \\
\pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= a^2 + cx \quad \text{simplificando,} \\
a^2[(x+c)^2 + y^2] &= a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \quad \text{elevando al cuadrado,} \\
(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2) \quad \text{simplificando.}
\end{aligned}
$$

Dado que $0 < a < c$, se cumple que $c^2 - a^2 > 0$, y por ello es posible definir el número b tal que $b^2 = c^2 - a^2$, donde $b > 0$. Sustituyendo en la última igualdad: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Esta igualdad se puede expresar como: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, dividiendo por a^2b^2 ambos miembros.

Definición

La ecuación que determina el lugar geométrico de una hipérbola está dada por: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Los puntos fijos F_1 y F_2 se conocen como **focos** de la hipérbola y tienen coordenadas:

$$F_1(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0) \text{ y } F_2(\sqrt{a^2 + b^2}, 0).$$

La diferencia de las distancias de un punto de la hipérbola a cada uno de los focos siempre es $2a$.

Ejemplo

Deduce la ecuación de la hipérbola con focos $F_1(-5, 0)$ y $F_2(5, 0)$ y $a = 3$.

De la coordenada en x de los focos se deduce que $c = 5$ y $a = 3$ por hipótesis, para calcular b se tiene que:

$$c^2 - a^2 = b^2, \text{ entonces, } b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 = 4^2.$$

Por lo tanto, la ecuación de la hipérbola es: $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$, o bien, $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

Problemas

1. Deduce la ecuación de la hipérbola de cada literal.

   a) $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$, $a = 4$ b) $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$, $a = 2$ c) $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$, $a = 3$

2. Determina las coordenadas de los focos de cada hipérbola.

   a) $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ b) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ c) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$

Indicador de logro

4.2 Deduce la ecuación de una hipérbola centrada en el origen dado los focos y el valor de a.

Secuencia

Una vez que los estudiantes reconocen el lugar geométrico que determina una hipérbola, se puede asociar la ecuación deducida de las condiciones de la definición y asociarla con dicha figura geométrica, esta clase tiene asterisco, lo que indica que el docente debe dar mayor apoyo a sus estudiantes.

Propósito

En la Solución, la relación $b^2 = c^2 - a^2$ está asociada a las condiciones de los cuadrados. En el Ejemplo se presenta la forma de asociar la ecuación de la hipérbola con su definición.

Solución de problemas:

1a) Se tiene que $c = 5$ y $a = 4$ entonces:

$$b^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 = 3^2,$$

por lo tanto, la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1, \text{ o bien, } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

1b) Se tiene que $c = 3$ y $a = 2$ entonces:

$$b^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5 = \left(\sqrt{5}\right)^2,$$

por lo tanto, la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1, \text{ o bien, } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

1c) Se tiene que $c = 4$ y $a = 3$ entonces:

$$b^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7 = \left(\sqrt{7}\right)^2,$$

por lo tanto, la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{7})^2} = 1, \text{ o bien, } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1.$$

2a) Se tiene que $a^2 = 4^2$ y $b^2 = 3^2$ entonces:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 = 5^2,$$

por lo tanto, los focos son:

$$F_1(-5, 0), F_2(5, 0).$$

2b) Se tiene que $a^2 = 5$ y $b^2 = 4$ entonces:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 5 + 4 = 9 = 3^2,$$

por lo tanto, los focos son:

$$F_1(-3, 0), F_2(3, 0).$$

2c) Se tiene que $a^2 = 8$ y $b^2 = 8$ entonces:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 8 + 8 = 16 = 4^2,$$

por lo tanto, los focos son:

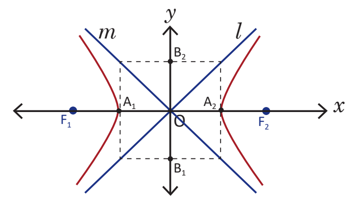
$$F_1(-4, 0), F_2(4, 0).$$

4.3 Elementos y propiedades de la hipérbola

Problema inicial

Utilizando la gráfica de la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$:

a) Determina las coordenadas de los puntos A_1 y A_2.
b) Determina la ecuación de las diagonales del rectángulo que muestra la figura, si $B_1(0, -b)$ y $B_2(0, b)$.

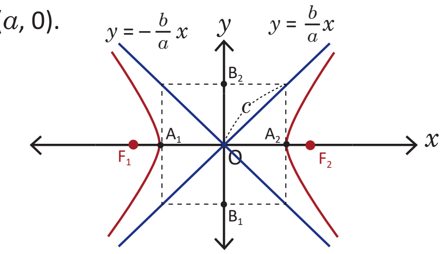


Solución

a) Dado que A_1 y A_2 están sobre el eje x, y pertenecen a la hipérbola, se puede evaluar la ecuación de la hipérbola en $y = 0$. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{0^2}{b^2} = 1$ y resolviendo: $\frac{x^2}{a^2} = 1$

$$x^2 = a^2$$
$$x = \pm a$$

Por lo tanto, las coordenadas de estos puntos son: $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$.



b) Para la recta l, dado que pasa por los puntos (a, b) y $(0, 0)$:

Utilizando la ecuación dos puntos: $y = \frac{b}{a}x$.

Para la recta m, dado que pasa por los puntos $(-a, b)$ y $(0, 0)$:

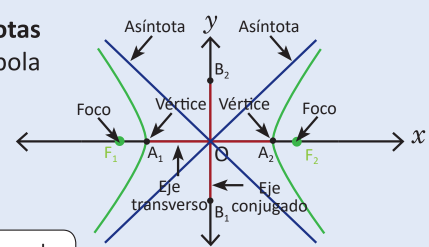
Utilizando la ecuación dos puntos: $y = -\frac{b}{a}x$.

Conclusión

Los puntos A_1 y A_2 de la hipérbola se llaman **vértices**, y tienen coordenadas $A_1(-a, 0)$ y $A_2(a, 0)$. Además, el punto medio del segmento A_1A_2 se conoce como **centro** de la hipérbola.

Las rectas que tienen ecuaciones $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$ se llaman **asíntotas** de la hipérbola, y cumplen que sus gráficas se aproximan a la hipérbola pero nunca la tocan.

El segmento de recta cuyos extremos son los vértices de la hipérbola se conoce como **eje transverso**, y el segmento de recta cuyos extremos son los puntos $(0, -b)$ y $(0, b)$ se conoce como **eje conjugado**.



Para graficar la hipérbola, primero traza las asíntotas y los vértices.

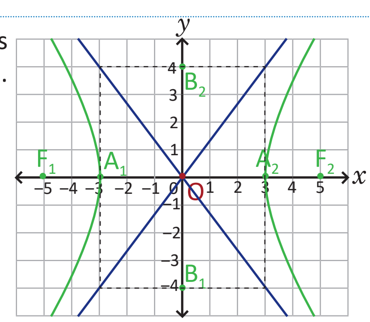
Ejemplo

Determina las coordenadas de los vértices, los focos y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Luego grafícala en el plano cartesiano.

Determinando los valores de a, b, c: $a = 3$, $b = 4$, $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Vértices: $A_1(-3, 0)$, $A_2(3, 0)$ Focos: $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$

Asíntotas: $y = \frac{4}{3}x$, $y = -\frac{4}{3}x$



Al rectángulo formado entre los puntos A_1, A_2, B_1 y B_2 en ocasiones se le llama **rectángulo asintótico**, y puede utilizarse para trazar las asíntotas de la hipérbola a partir de las diagonales de dicho rectángulo.

Problemas

Determina las coordenadas de los vértices, ecuaciones de las asíntotas y los focos de cada hipérbola. Luego grafícala en el plano cartesiano.

a) $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ c) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ d) $x^2 - y^2 = 1$

Unidad 3

Indicador de logro

4.3 Identifica los elementos de una hipérbola dada su ecuación para graficarla en el plano cartesiano.

Secuencia

Una vez establecida la ecuación canónica de la hipérbola, se puede trabajar con los estudiantes los diferentes elementos que la conforman incluyendo las asíntotas, y cómo graficarla en el plano cartesiano a partir de ellos.

Propósito

En la Solución se presentan los diferentes elementos que tiene una hipérbola en general, y luego se utiliza el Ejemplo para observar la manera de utilizar estos elementos para graficarla en el plano cartesiano.

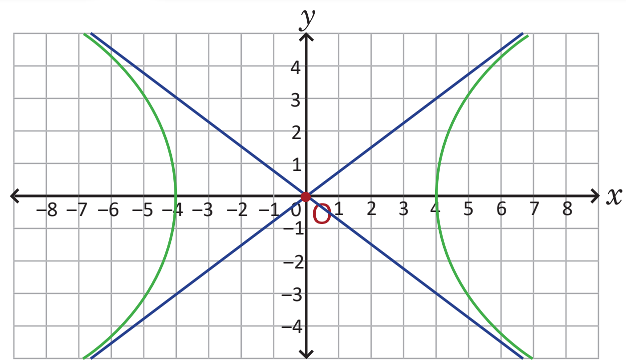
Solución de problemas:

a) Determinando los valores de a, b, c:
$a = 4$, $b = 3$, $c = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$.

Vértices $A_1(-4, 0)$, $A_2(4, 0)$

Focos $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$

Asíntotas $y = \frac{3}{4}x$, $y = -\frac{3}{4}x$

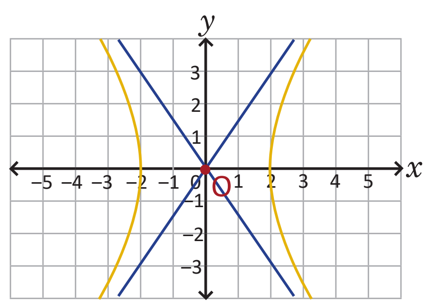


b) Determinando los valores de a, b, c:
$a = 2$, $b = 3$, $c = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

Vértices $A_1(-2, 0)$, $A_2(2, 0)$

Focos $F_1(-\sqrt{13}, 0)$, $F_2(\sqrt{13}, 0)$

Asíntotas $y = \frac{3}{2}x$, $y = -\frac{3}{2}x$

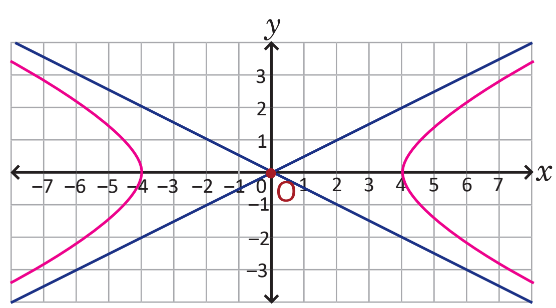


c) Determinando los valores de a, b, c:
$a = 4$, $b = 2$, $c = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Vértices $A_1(-4, 0)$, $A_2(4, 0)$

Focos $F_1(-2\sqrt{5}, 0)$, $F_2(2\sqrt{5}, 0)$

Asíntotas $y = \frac{1}{2}x$, $y = -\frac{1}{2}x$

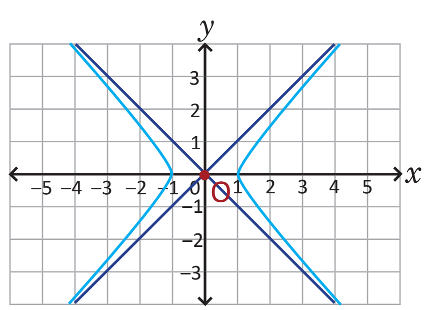


d) Determinando los valores de a, b, c:
$a = 1$, $b = 1$, $c = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Vértices $A_1(-1, 0)$, $A_2(1, 0)$

Focos $F_1(-\sqrt{2}, 0)$, $F_2(\sqrt{2}, 0)$

Asíntotas $y = x$, $y = -x$



Se recomienda no exigir tanta precisión en el bosquejo de la hipérbola, pues para ello sería necesario encontrar otros puntos utilizando su ecuación.

4.4 Desplazamientos paralelos de la hipérbola

Problema inicial

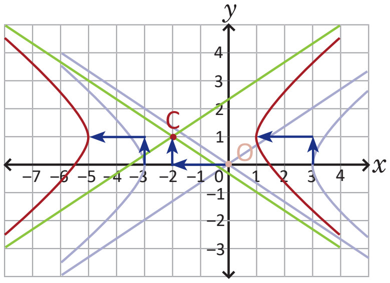
Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por la ecuación $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$.

Solución

Considerando la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ y desplazándola 2 unidades hacia la izquierda y 1 unidad hacia arriba, se obtiene la ecuación:

$$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

Por lo tanto, la gráfica es la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ con centro (–2, 1).



Conclusión

La ecuación de una hipérbola desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente está dada por: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.

Para graficarla, se puede ubicar el centro y graficarla como si este fuese el origen del plano cartesiano, o bien, graficarla en el origen y desplazarla.

Recuerda que para desplazar una gráfica h unidades horizontalmente, y k unidades verticalmente se cambia la variable x por la expresión $x - h$; y la variable y por la expresión $y - k$.

Ejemplo 1

Determina la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ desplazada –4 unidades horizontalmente y –3 unidades verticalmente.

Tomando la ecuación original y reemplazando x por $[x - (-4)]$, y y por $[y - (-3)]$.

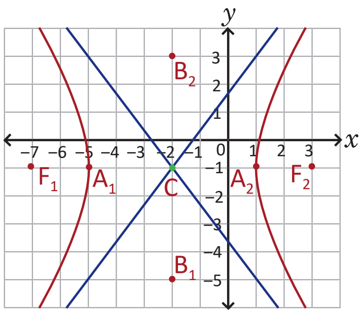
$$\frac{(x+4)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

Ejemplo 2

Determina las coordenadas de los vértices, los focos y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1$. Luego grafícala en el plano cartesiano con todos sus elementos.

Esta hipérbola es equivalente a $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ desplazada –2 unidades horizontalmente y –1 unidad verticalmente, es decir, tiene centro C(–2, –1).

Ecuación	$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$	$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1$
Vértices	$A_1(-3, 0)$, $A_2(3, 0)$	$A_1(-5, -1)$, $A_2(1, -1)$
Focos	$F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$	$F_1(-7, -1)$, $F_2(3, -1)$
Asíntotas	$y = \frac{4}{3}x,\ y = -\frac{4}{3}x$	$y + 1 = \frac{4}{3}(x+2) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$, $y + 1 = -\frac{4}{3}(x+2) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x - \frac{11}{3}$



Problemas

1. Para cada literal determina la ecuación de la elipse desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente.

a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, $h = 3$, $k = 1$ b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$, $h = 2$, $k = -4$ c) $\frac{x^2}{21} - \frac{y^2}{4} = 1$, $h = -3$, $k = -2$

2. Determina las coordenadas de los vértices, los focos y las ecuaciones de las asíntotas de cada hipérbola. Luego grafica en el plano cartesiano.

a) $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ b) $\frac{(x-3)^2}{4} - (y+2)^2 = 1$ c) $(x+2)^2 - (y+1)^2 = 1$

Indicador de logro

4.4 Encuentra y grafica la ecuación de una hipérbola desplazada paralelamente respecto a los ejes de coordenadas.

Secuencia

Puesto que los estudiantes ya conocen la ecuación de la hipérbola y cómo encontrar los elementos de ella a partir de dicha ecuación, es un momento adecuado para introducir los desplazamientos paralelos en la hipérbola.

Propósito

En la Solución se espera que los estudiantes apliquen lo que ya conocen sobre desplazamientos paralelos tanto de una gráfica, como de un punto, que se vio en la lección sobre parábola y se siguió aplicando en la de circunferencia y elipse.

Solución de problemas:

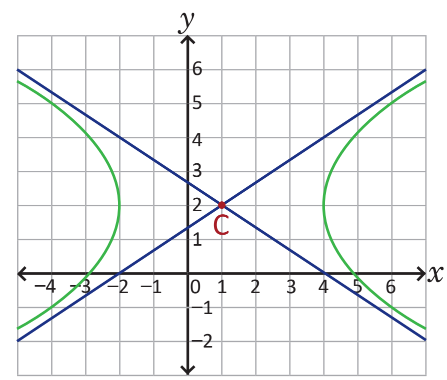
1a) $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

1b) $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{[y-(-4)]^2}{5} = 1$, o bien, $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+4)^2}{5} = 1$.

1c) $\frac{[x-(-3)]^2}{21} - \frac{[y-(-2)]^2}{4} = 1$, o bien, $\frac{(x+3)^2}{21} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$.

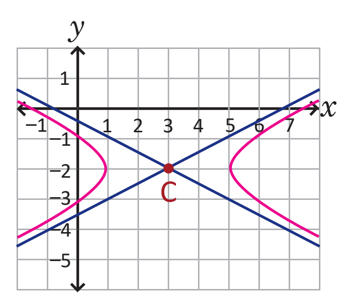
2a)

Ecuación	$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$	$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$
Vértices	$A_1(-3, 0)$, $A_2(3, 0)$	$A_1(-2, 2)$, $A_2(4, 2)$
Focos	$F_1(-\sqrt{13}, 0)$, $F_2(\sqrt{13}, 0)$	$F_1(-\sqrt{13}+1, 2)$, $F_2(\sqrt{13}+1, 2)$
Asíntotas	$y = \frac{2}{3}x$, $y = -\frac{2}{3}x$	$y - 2 = \frac{2}{3}(x-1) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$, $y - 2 = -\frac{2}{3}(x-1) \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$



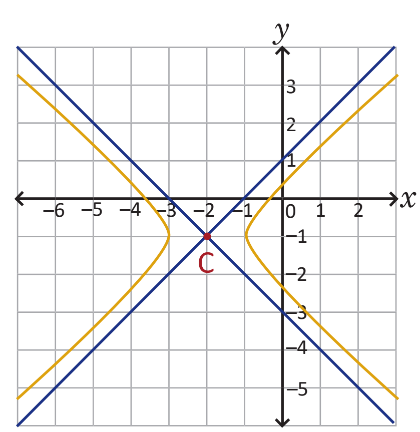
2b)

Ecuación	$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$	$\frac{(x-3)^2}{4} - (y+2)^2 = 1$
Vértices	$A_1(-2, 0)$, $A_2(2, 0)$	$A_1(1, -2)$, $A_2(5, -2)$
Focos	$F_1(-\sqrt{5}, 0)$, $F_2(\sqrt{5}, 0)$	$F_1(-\sqrt{5}+3, -2)$, $F_2(\sqrt{5}+3, -2)$
Asíntotas	$y = \frac{1}{2}x$, $y = -\frac{1}{2}x$	$y - 3 = \frac{1}{2}(x+2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 4$, $y - 3 = -\frac{1}{2}(x+2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2$



2c)

Ecuación	$x^2 - y^2 = 1$	$(x+2)^2 - (y+1)^2 = 1$
Vértices	$A_1(-1, 0)$, $A_2(1, 0)$	$A_1(-3, -1)$, $A_2(-1, -1)$
Focos	$F_1(-\sqrt{2}, 0)$, $F_2(\sqrt{2}, 0)$	$F_1(-\sqrt{2}-2, -1)$, $F_2(\sqrt{2}-2, -1)$
Asíntotas	$y = x$, $y = -x$	$y + 1 = (x+2) \Rightarrow y = x + 1$, $y + 1 = -(x+2) \Rightarrow y = -x - 3$



4.5 Ecuación general de la hipérbola

Problema inicial

Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por la ecuación $9x^2 - 4y^2 - 18x + 16y - 43 = 0$.

Solución

Completando cuadrados para x y para y:

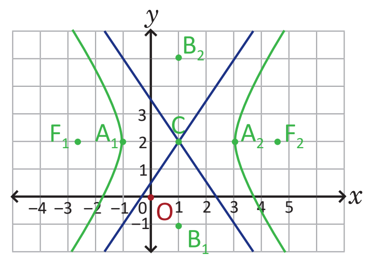
$$9x^2 - 4y^2 - 18x + 16y - 43 = 0$$

$$9(x^2 - 2x) - 4(y^2 - 4y) - 43 = 0 \quad \text{ordenando y agrupando,}$$

$$9(x-1)^2 - 4(y-2)^2 - 9 + 16 - 43 = 0 \quad \text{completando cuadrados,}$$

$$\frac{9(x-1)^2}{36} - \frac{4(y-2)^2}{36} = 1 \quad \text{sumando e igualando a 1,}$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \quad \text{simplificando.}$$



Por lo tanto, la gráfica es una hipérbola con centro (1, 2), vértices $A_1(-1, 2)$, $A_2(3, 2)$ y asíntotas

$y - 2 = \frac{3}{2}(x - 1)$, es decir, $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$; $y - 2 = -\frac{3}{2}(x - 1)$, es decir, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$.

Conclusión

Una hipérbola puede ser representada desarrollando los cuadrados de la ecuación $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ y dejándola igualada a 0.

En general, para determinar el centro, los vértices y asíntotas de una hipérbola cuya ecuación sea de la forma $dx^2 - ey^2 + fx + gy + h = 0$, se completan cuadrados perfectos en x y y, para expresar en la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

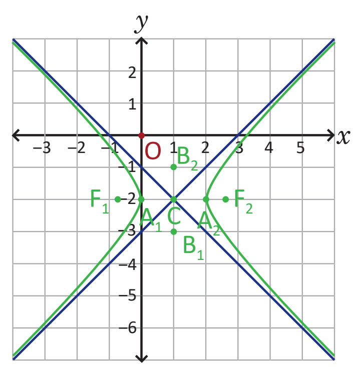
Ejemplo

Determina las coordenadas de los vértices, los focos y asíntotas de la hipérbola $x^2 - y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$, luego grafícala en el plano cartesiano con todos sus elementos.

$$x^2 - y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$$

$$(x-1)^2 - (y+2)^2 - 1 + 4 - 4 = 0$$

$$(x-1)^2 - (y+2)^2 = 1$$



Esta hipérbola es equivalente a $x^2 - y^2 = 1$ desplazada 1 unidad horizontalmente y −2 unidades verticalmente, es decir, tiene centro C(1, −2).

Ecuación	$x^2 - y^2 = 1$	$(x-1)^2 - (y+2)^2 = 1$
Vértices	$A_1(-1, 0)$, $A_2(1, 0)$	$A_1(0, -2)$, $A_2(2, -2)$
Focos	$F_1(-\sqrt{2}, 0)$, $F_2(\sqrt{2}, 0)$	$F_1(-\sqrt{2} + 1, -2)$, $F_2(\sqrt{2} + 1, -2)$
Asíntotas	$y = x$, $y = -x$	$y = x - 3$, $y = -x - 1$

Problemas

Determina las coordenadas de los vértices, las ecuaciones de las asíntotas y los focos de cada hipérbola. Luego grafícala en el plano cartesiano.

a) $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0$
b) $25x^2 - 4y^2 - 100x - 16y - 16 = 0$
c) $x^2 - 4y^2 + 2x + 8y - 7 = 0$
d) $16x^2 - 9y^2 + 32x - 54y - 209 = 0$
e) $x^2 - y^2 - 4y - 8 = 0$
f) $4x^2 - 9y^2 - 8x - 32 = 0$

Unidad 3

Indicador de logro

4.5 Determina los elementos de una hipérbola a partir de su ecuación general y traza su gráfica en el plano cartesiano.

Secuencia

Ahora que los estudiantes ya han aplicado desplazamientos paralelos en la hipérbola, se trabaja con la ecuación general utilizando el procedimiento para completar cuadrados perfectos.

Propósito

En la clase anterior y en esta quedan ejemplificados los desplazamientos a los 4 cuadrantes del plano cartesiano, para que los estudiantes tengan claridad de los casos.

Solución de problemas:

a) $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0$

$$4(x-2)^2 - 9(y-1)^2 = 29 + 16 - 9$$

$$\frac{4(x-2)^2}{36} - \frac{9(y-1)^2}{36} = 1$$

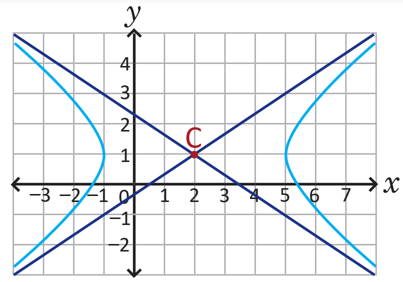
$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

$A_1(-1, 1)$, $A_2(5, 1)$,

$F_1(-\sqrt{13} + 2, 1)$,
$F_2(\sqrt{13} + 2, 1)$

$y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

$y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$



b) $25x^2 - 4y^2 - 100x - 16y - 16 = 0$

$$25(x-2)^2 - 4(y+2)^2 = 16 + 100 - 16$$

$$\frac{25(x-2)^2}{100} - \frac{4(y+2)^2}{100} = 1$$

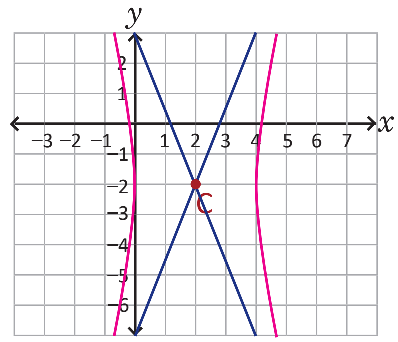
$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{25} = 1$$

$A_1(0, -2)$, $A_2(4, -2)$,

$F_1(-\sqrt{29} + 2, -2)$,
$F_2(\sqrt{29} + 2, -2)$

$y = \frac{5}{2}x - 7$

$y = -\frac{5}{2}x + 3$



c) $x^2 - 4y^2 + 2x + 8y - 7 = 0$

$$(x+1)^2 - 4(y-1)^2 = 7 + 1 - 4$$

$$\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{4(y-1)^2}{4} = 1$$

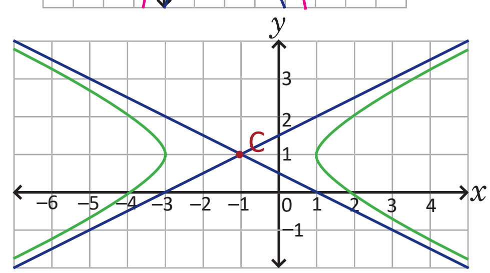
$$\frac{(x+1)^2}{4} - (y-1)^2 = 1$$

$A_1(-3, 1)$, $A_2(1, 1)$,

$F_1(-\sqrt{5} - 1, 1)$,
$F_2(\sqrt{5} - 1, 1)$

$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$



d) $16x^2 - 9y^2 + 32x - 54y - 209 = 0$

$$16(x+1)^2 - 9(y+3)^2 = 209 + 16 - 81$$

$$\frac{16(x+1)^2}{144} - \frac{9(y+3)^2}{144} = 1$$

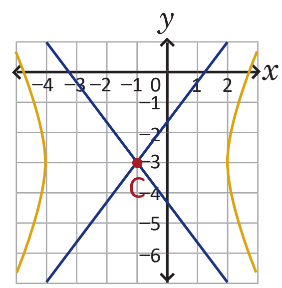
$$\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

$A_1(-4, -3)$, $A_2(2, -3)$,

$F_1(-6, -3)$, $F_2(4, -3)$

$y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$

$y = -\frac{4}{3}x - \frac{13}{3}$



e) $x^2 - y^2 - 4y - 8 = 0$

$$x^2 - (y+2)^2 = 8 - 4$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

$A_1(-2, -2)$, $A_2(2, -2)$,

$F_1(-2\sqrt{2}, -2)$,
$F_2(2\sqrt{2}, -2)$

$y = x - 2$
$y = -x - 2$

f) $4x^2 - 9y^2 - 8x - 32 = 0$

$$4(x-1)^2 - 9y^2 = 32 + 4$$

$$\frac{4(x-1)^2}{36} - \frac{9y^2}{36} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$A_1(-2, 0)$, $A_2(4, 0)$,

$F_1(-\sqrt{13} + 1, 0)$,
$F_2(\sqrt{13} + 1, 0)$

$y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$

$y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$

4.6 Practica lo aprendido

1. Deduce la ecuación de la hipérbola de cada literal.

a) $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$, $a = 3$ b) $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$, y vértices $A_1(-2, 0)$, $A_2(2, 0)$.

2. Determina las coordenadas de los focos de cada hipérbola.

a) $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ b) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

3. Determina las coordenadas de los vértices, los focos y las ecuaciones de las asíntotas de cada hipérbola. Luego grafícala en el plano cartesiano.

a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ b) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

4. Para cada literal determina la ecuación de la hipérbola desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente.

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, $h = 2$, $k = 3$ b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$, $h = -3$, $k = -1$

5. Determina las coordenadas de los vértices, las asíntotas y los focos de cada hipérbola. Luego grafícala en el plano cartesiano para cada literal.

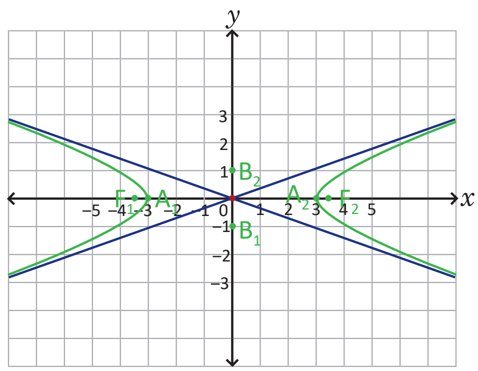
a) $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$ b) $(x+1)^2 - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

6. Determina las coordenadas de los vértices, las asíntotas y los focos de cada hipérbola. Luego grafícala en el plano cartesiano para cada literal.

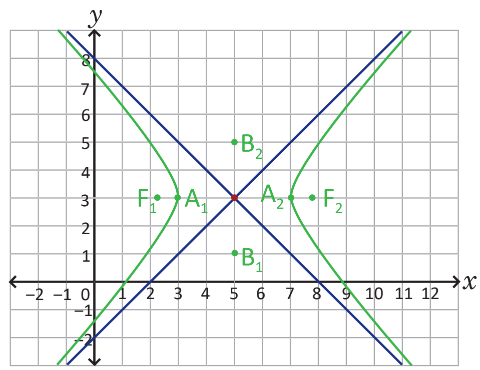
a) $x^2 - 4y^2 + 2x - 8y - 19 = 0$ b) $9x^2 - y^2 + 6y - 18 = 0$

7. Encuentra la ecuación que determina cada una de las siguientes gráficas.

a)



b)



Indicador de logro

4.6 Resuelve problemas correspondientes a la hipérbola.

Solución de problemas:

1a) $b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$, entonces la ecuación es: $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$, o bien, $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

1b) $b^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$, entonces la ecuación es: $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$, o bien, $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

2a) $c^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13 = \left(\sqrt{13}\right)^2$, y los focos son: $F_1(-\sqrt{13}, 0)$, $F_2(\sqrt{13}, 0)$.

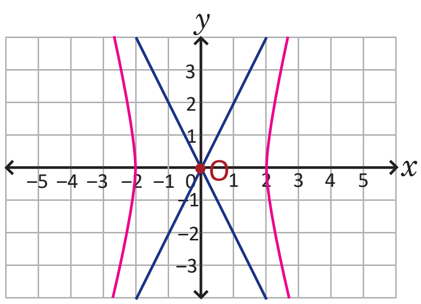
2b) $c^2 = 5 + 4 = 9 = 3^2$, y los focos son: $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$.

2c) $c^2 = 9 + 4 = 13 = \left(\sqrt{13}\right)^2$, y los focos son: $F_1(-\sqrt{13}, 0)$, $F_2(\sqrt{13}, 0)$.

3a) Vértices $A_1(-2, 0)$, $A_2(2, 0)$

Focos $F_1(-2\sqrt{5}, 0)$, $F_2(2\sqrt{5}, 0)$

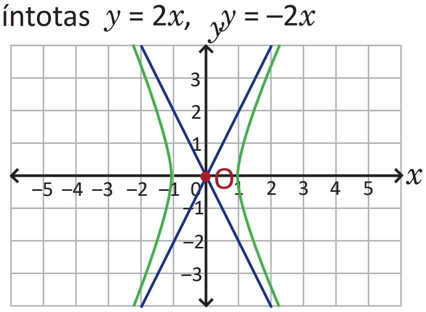
Asíntotas $y = 2x$, $y = -2x$



3b) Vértices $A_1(-1, 0)$, $A_2(1, 0)$

Focos $F_1(-\sqrt{5}, 0)$, $F_2(\sqrt{5}, 0)$

Asíntotas $y = 2x$, $y = -2x$



4a) $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{16} = 1.$

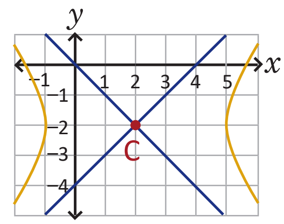
4b) $\frac{[x-(-3)]^2}{9} - \frac{[y-(-1)]^2}{9} = 1$, o bien, $\frac{(x+3)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1.$

5a) $A_1(-1, -2)$, $A_2(5, -2)$,

$F_1(-3\sqrt{2} + 2, -2)$,
$F_2(3\sqrt{2} + 2, -2)$

$y = x - 4$

$y = -x$

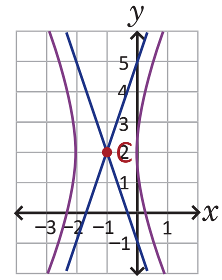


5b) $A_1(-2, 2)$, $A_2(0, 2)$,

$F_1(-\sqrt{10} - 1, 2)$,
$F_2(\sqrt{10} - 1, 2)$

$y = 3x + 5$

$y = -3x - 1$



6a) $x^2 - 4y^2 + 2x - 8y - 19 = 0$

$$(x+1)^2 - 4(y+1)^2 = 19 + 1 - 4$$

$$\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{4(y+1)^2}{16} = 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

$A_1(-5, -1)$, $A_2(3, -1)$

$F_1(-2\sqrt{5} - 1, -1)$,
$F_2(2\sqrt{5} - 1, -1)$

$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

6b) $9x^2 - y^2 + 6y - 18 = 0$

$$9x^2 - (y-3)^2 = 18 - 9$$

$$\frac{9x^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

$$x^2 - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

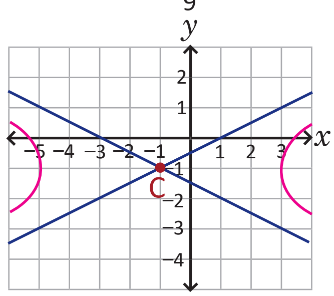
$A_1(-1, 3)$, $A_2(1, 3)$,

$F_1(-\sqrt{10}, 3)$,
$F_2(\sqrt{10}, 3)$

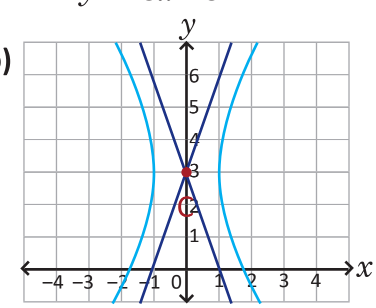
$y = 3x + 3$

$y = -3x + 3$

6a)



6b)



7a) Se identifica que $a = 3$ y $b = 1$, y el centro está en $(0, 0)$, por lo tanto, la ecuación es:

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{1^2} = 1, \text{ o bien, } \frac{x^2}{9} - y^2 = 1.$$

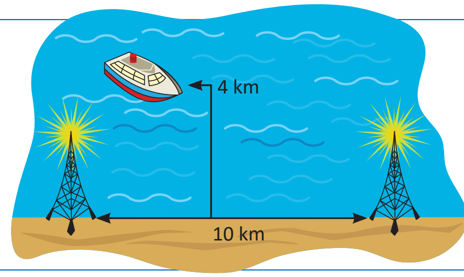
7b) Se identifica que $a = 2$ y $b = 2$, y el centro está en $(5, 3)$, por lo tanto, la ecuación es:

$$\frac{(x-5)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1.$$

4.7 Aplicaciones de la hipérbola*

Problema inicial

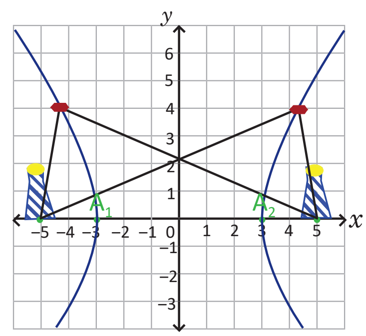
Un barco envía señales hacia dos torres ubicadas sobre la costa a 10 km una de la otra, si al recibir la señal se calcula que la ubicación del barco a una de las torres es 6 km más lejana que la distancia a la otra torre. Determina la posible posición del barco si este navega a 4 km de distancia de la costa.



Solución

Considerando la situación como una hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ cuyos focos son las torres, entonces dado que la diferencia de las distancias a las dos torres en ese instante es 6 km, se puede determinar el valor de a, y como también se conoce la distancia entre las dos torres (focos), es posible conocer el valor de c, así:

$$|d_2 - d_1| = 2a = 6, \text{ entonces } a = 3,$$
$$2c = 10, \text{ entonces } c = 5,$$
$$b^2 = c^2 - a^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2.$$



Por lo tanto, la ecuación de la hipérbola que modela la situación es: $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$.

Para localizar el barco bastará encontrar la coordenada en x cuando $y = 4$:

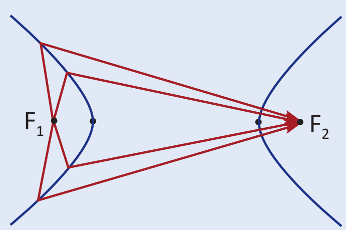
$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{4^2}{4^2} = 1 \quad \text{despejando } x^2:$$
$$x^2 = 2(3^2)$$
$$x = \pm 3\sqrt{2}.$$

El sistema de navegación ruso CHAYKA y el sistema LORAN utilizan este principio para la localización de navíos, sin embargo poco a poco este tipo de sistemas está siendo reemplazado por la localización GPS.

Conclusión

En una hipérbola los focos cumplen una propiedad reflectora importante: si se toma una línea desde un foco esta, será reflejada por la hipérbola exactamente sobre el otro foco.

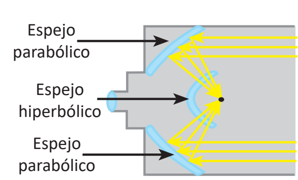
Esta propiedad reflectora parecida a la de la elipse y la parábola; hace de las formas hiperbólicas herramientas de aplicación en diversos ámbitos científicos.



Problemas

1. Las señales de un barco recibidas por un sistema CHAYKA cuyas torres están ubicadas sobre la costa a 26 km una de la otra, si al recibir la señal se calcula que la ubicación del barco a una de las torres es 10 km más lejana que la distancia a la otra torre. Determina la posible posición del barco si este navega a 12 km de distancia de la costa.

2. Un telescopio Maksutov-Cassegrain funciona de modo que recibe las señales de luz, y son reflejadas por un espejo parabólico (cortado) hacia el foco, el cual es foco de otro espejo, pero este es hiperbólico como lo muestra la figura. Determina la función del espejo hiperbólico y explica el funcionamiento del telescopio Maksutov-Cassegrain.



Indicador de logro

4.7 Utiliza las propiedades de los focos y la ecuación de la hipérbola para resolver problemas sobre objetos hiperbólicos.

Secuencia

Después de abordar los conceptos básicos sobre la hipérbola, se pueden analizar y resolver algunos problemas sobre aplicaciones a la vida real, basados fundamentalmente en la propiedad reflectora de la hipérbola. Esta clase tiene asterisco, lo que indica que el docente debe dar mayor apoyo a sus estudiantes.

Propósito

En las soluciones a los Problemas los estudiantes deben modelar una situación a partir de conceptos matemáticos, para luego resolverlos e interpretar la respuesta obtenida para dar solución al problema original.

Solución de problemas:

1. Resolviendo como el Problema inicial, se considera la situación como una hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ cuyos focos son las torres, entonces dado que la diferencia de las distancias a las dos torres en ese instante es 10 km, se puede determinar el valor de a, y como también se conoce que la distancia entre las dos torres es 26 km (focos), es posible conocer el valor de c, así:

$$|d_2 - d_1| = 2a = 10, \text{ entonces } a = 5,$$
$$2c = 26, \text{ entonces } c = 13,$$
$$b^2 = c^2 - a^2 = 13^2 - 5^2 = 12^2.$$

Por lo tanto, la ecuación de la hipérbola que modela la situación es: $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{12^2} = 1$.

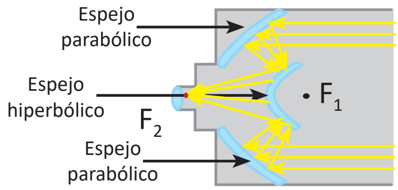
Para localizar el barco bastará con encontrar la coordenada en x cuando $y = 12$:

$$\frac{x^2}{5^2} - \frac{12^2}{12^2} = 1 \quad \text{despejando } x^2.$$

$$x^2 = 2(5^2)$$

$$x = \pm 5\sqrt{2}$$

2. Para este problema es suficiente con que los estudiantes comprendan que por la propiedad reflectora del foco de la parábola, los rayos de luz captados son reflejados hacia el foco F_1 el cual es compartido por el espejo hiperbólico, cuya propiedad hace reflejar los rayos desde dicho foco F_1 hacia el otro foco F_2 de la hipérbola, el cual en este caso coincide con el ocular del telescopio, en donde se observa lo que capta el telescopio.



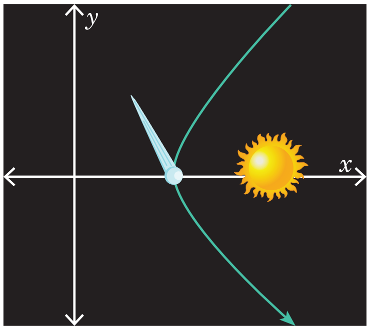
4.8 Practica lo aprendido

Resuelve los siguientes problemas de aplicación de hipérbola. Modela cada situación en el plano cartesiano.

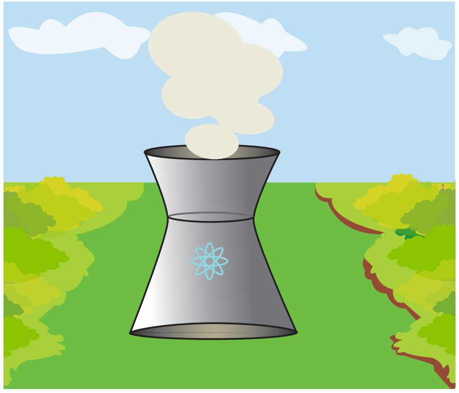
1. En el universo las trayectorias de un cometa pueden tener diversas formas, como elípticas, parabólicas o hiperbólicas, siempre teniendo al Sol como foco de dichas figuras. Tomando un cometa cuya trayectoria es hiperbólica (solo será visto una vez en la historia), cuya ecuación está dada por:

$$\frac{x^2}{20^2} - \frac{y^2}{21^2} = 1$$

   Donde los números 20 y 21 representan cuatrillones de metros. Determina la distancia mínima en que pasará el cometa con dicha trayectoria del sol.

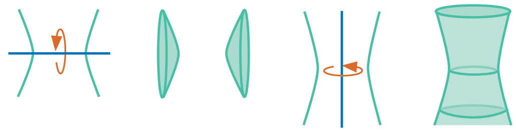


2. Las torres de enfriamiento de las plantas nucleares de energía se diseñan con forma de hiperboloide de una hoja, si el diámetro de la parte más alta es 3.75 m y se ubica a 9 m de altura, y el diámetro más pequeño es de 3 m y se ubica a 6 m de altura, determina aproximadamente el diámetro de la base de la torre.



Una forma de hiperboloide es un cuerpo geométrico que resulta de girar una hipérbola alrededor de alguno de sus ejes. Si se gira alrededor del **eje transverso** se conoce como **hiperboloide de 2 hojas** y si se gira alrededor del **eje conjugado** se conoce como **hiperboloide de 1 hoja**.

Hiperboloide de 2 hojas **Hiperboloide de 1 hoja**

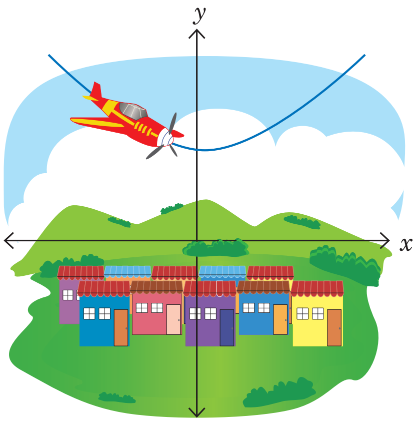


3. La torre de Polibino fue la primera estructura diseñada con forma de hiperboloide. Si el diámetro de la parte más alta de una torre hiperboloide es $4\sqrt{5}$ m y se ubica a 32 m de altura, y el diámetro más pequeño es de 4 m y se ubica a 16 m de altura, determina el diámetro de la base de la torre.

La torre de Polibino fue construida por el ingeniero ruso Vladimir Shújov, y la construcción de torres hiperboloides fue patentada por el mismo Shújov en el año 1896.

4. Una avioneta vuela sobre la ciudad de San Vicente y describe una trayectoria hiperbólica dada por la ecuación $4y^2 - x^2 = 2\,500$.

   Determina cuál es la menor distancia sobre el nivel del suelo a la que estará dicha avioneta.



Indicador de logro

4.8 Resuelve problemas de aplicación de la hipérbola.

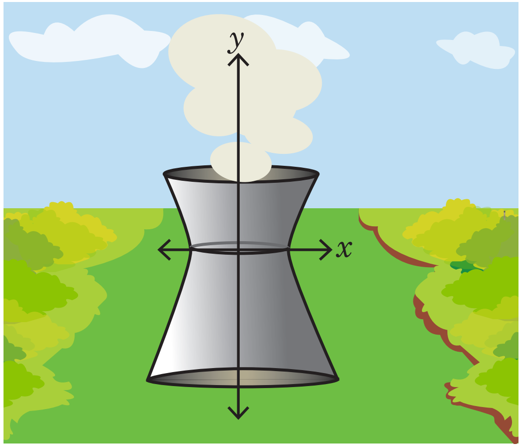
Solución de problemas:

1. Puesto que el sol es el foco, la menor distancia se dará en uno de los vértices de la hipérbola, calculando los valores a, b y c de la ecuación de la hipérbola se tiene que:

$$a = 20,\ b = 21 \text{ y } c = \sqrt{20^2 + 21^2} = 29.$$

Entonces el sol está en el punto $(c, 0)$ y el vértice de la trayectoria hiperbólica por la que pasa el cometa pasa por el punto $(a, 0)$, es decir, que la distancia mínima entre el sol y la trayectoria del cometa es $c - a$; entonces, la distancia mínima es 29 – 20 = 9 cuatrillones de metros.

2. Localizando el centro del plano cartesiano justo en el centro de la circunferencia de radio más pequeño de la torre, puesto que el diámetro en esta parte es de 3 m, entonces $a = 1.5$, y además se cumple que la distancia del eje conjugado a un punto en la circunferencia más alta es 1.875 y está a una altura respecto del eje transversal de 9 – 6 = 3 metros, por lo tanto, la hipérbola pasa por el punto (1.875, 3). Luego, utilizando la ecuación de la hipérbola:



$$\frac{x^2}{1.5^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Evaluando el punto (1.875, 3) en la hipérbola:

$$\frac{1.875^2}{1.5^2} - \frac{3^2}{b^2} = 1.$$

Expresando los decimales como fracciones y encontrando el valor de b^2:

$$\frac{\frac{\cancel{15^2}\,1}{\cancel{8^2}\,4}}{\frac{\cancel{15^2}\,1}{\cancel{10^2}\,5}} - \frac{3^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{5^2}{4^2} - \frac{3^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{25}{16} - 1 = \frac{9}{b^2} \Rightarrow \frac{9}{16} = \frac{9}{b^2} \Rightarrow b^2 = 16.$$

Por lo tanto, la hipérbola tiene ecuación $\frac{x^2}{1.5^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$, y evaluando en el punto que corresponde al nivel del suelo, es decir, $y = -6$, y encontrando x:

$$\frac{x^2}{1.5^2} - \frac{(-6)^2}{4^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1.5^2} = 1 + \frac{\cancel{36}\ 9}{\cancel{16}\ 4} \Rightarrow x^2 = 1.5^2\left(1 + \frac{9}{4}\right) \Rightarrow x^2 = 1.5^2\left(\frac{13}{4}\right) \Rightarrow x = \pm\frac{3\sqrt{13}}{4}.$$

Por lo tanto, el diámetro de la parte más baja (considerando el valor positivo de x) es $2 \times \frac{3\sqrt{13}}{4} = \frac{3\sqrt{13}}{2}$.

3. De manera muy similar al problema anterior, se calcula el valor de b^2: $\frac{(2\sqrt{5})^2}{2^2} - \frac{16^2}{b^2} = 1 \Rightarrow 5 - 1 = \frac{16^2}{b^2}$
$\Rightarrow b^2 = \frac{16^2}{4} = 4(16) = 64.$

Por lo tanto, la hipérbola tiene ecuación $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{8^2} = 1$, y evaluando en el punto que corresponde al nivel del suelo, es decir, $y = -16$, y encontrando x:

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{(-16)^2}{8^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} = 1 + 4 \Rightarrow x^2 = 5(4) \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{5}.$$

Por lo tanto, el diámetro de la parte más baja es $2 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$.

4. Se expresa la hipérbola en forma canónica, dividiendo por 2 500: $\frac{4y^2}{2\,500} - \frac{x^2}{2\,500} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{25^2} - \frac{x^2}{50^2} = 1.$

Luego se asocia la ecuación a una hipérbola vertical (analizar de manera análoga intercambiando x y y) por lo tanto, el vértice sería el punto más cerca a la ciudad, el cual está en el punto (0, 25), por lo tanto, la menor distancia a la que pasará la avioneta del suelo es de 25 metros.

4.9 Problemas de la unidad

Piensa cómo sería la ecuación de una parábola horizontal.

1. Grafica la parábola determinada por cada ecuación en el plano cartesiano.

a) $x = 2y^2$ b) $x = -3y^2$ c) $x + 1 = (y - 2)^2$ d) $x + 2 = -(y + 1)^2$

Piensa cómo sería la ecuación de una elipse vertical.

2. Grafica la elipse determinada por cada ecuación en el plano cartesiano.

a) $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ c) $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$ d) $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

Piensa cómo sería la ecuación de una hipérbola vertical.

3. Grafica la hipérbola determinada por cada ecuación en el plano cartesiano.

a) $\frac{y^2}{2^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1$ b) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ c) $\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$ d) $\frac{(y-2)^2}{4} - (x+1)^2 = 1$

4. Clasifica las siguientes ecuaciones según el tipo de figura que determinan en el plano cartesiano, parábola, circunferencia, elipse o hipérbola.

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a \neq b$ b) $y - k = \frac{1}{4p}(x-h)^2$ c) $x^2 + y^2 = r^2$ d) $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

e) $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ f) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ g) $y = \frac{1}{4p}x^2$ h) $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1,\ a \neq b$

5. Determina qué tipo de figura (parábola, circunferencia, elipse o hipérbola) corresponde a cada ecuación.

a) $9x^2 + 25y^2 - 54x - 144 = 0$ b) $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$ c) $y^2 + x + 4y + 4 = 0$

d) $4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 7 = 0$ e) $2x^2 - 4x - y + 4 = 0$ f) $x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$

g) $9x^2 + 4y^2 - 16y - 20 = 0$ h) $9x^2 - 9y^2 - 18x + 54 = 0$ i) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$

j) $9x^2 - 16y^2 - 18x - 32y - 151 = 0$ k) $y^2 + x + 2y + 3 = 0$ l) $25x^2 + 9y^2 - 50x + 18y - 191 = 0$

En resumen

Las cuatro figuras estudiadas (parábola, circunferencia, elipse e hipérbola) reciben el nombre de **cónicas**, y están dadas por los siguientes tipos de ecuaciones:

$y = \frac{1}{4p}x^2$	$x^2 + y^2 = r^2$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Parábola	**Circunferencia**	**Elipse**	**Hipérbola**

Estas figuras pueden tener variantes, como estar en posición horizontal o vertical, desplazadas o expresadas con todas las operaciones desarrolladas e igualadas a cero. En general, las ecuaciones presentadas arriba se conocen como: **ecuaciones canónicas** de dichas figuras.

Unidad 3

Indicador de logro

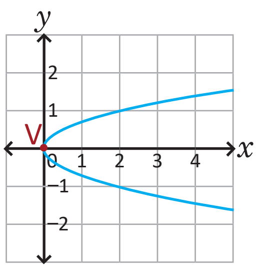
4.9 Resuelve problemas correspondientes a las secciones cónicas.

Propósito

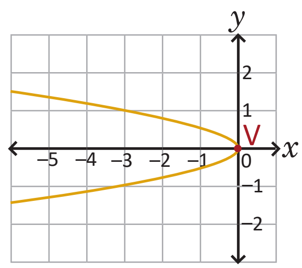
En estos problemas hay que orientar a los estudiantes a que los piensen como si se intercambiaran los ejes de coordenadas, es decir, como si el eje y fuera el eje x, e identificar que todas las graficas son parábolas, elipses o hipérbolas rotadas 90°.

Solución de problemas:

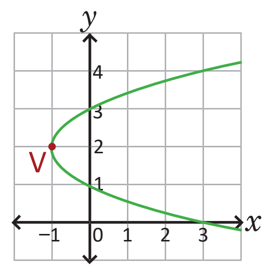
1a) $x = 2y^2$



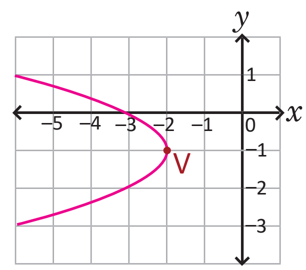
1b) $x = -3y^2$



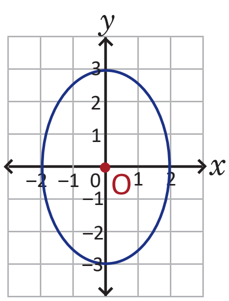
1c) $x + 1 = (y - 2)^2$



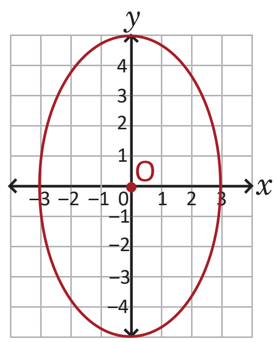
1d) $x + 2 = -(y + 1)^2$



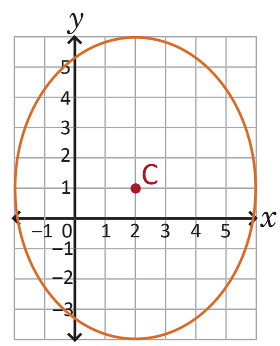
2a) $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$



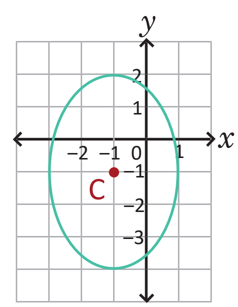
2b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$



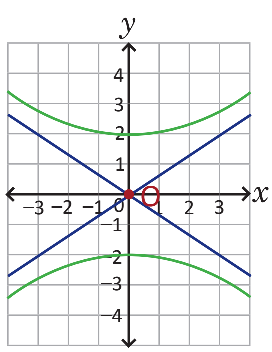
2c) $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$



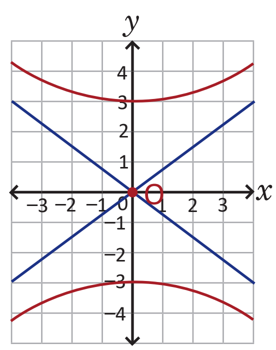
2d) $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$



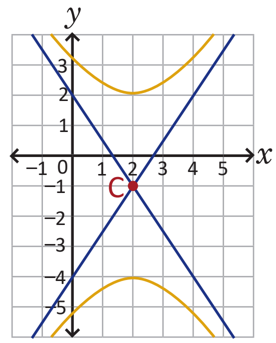
3a) $\frac{y^2}{2^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1$



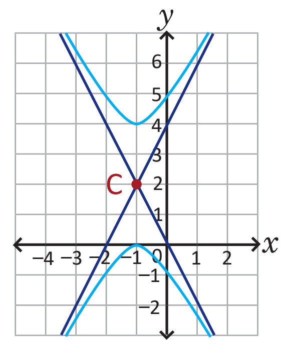
3b) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$



3c) $\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$



3d) $\frac{(y-2)^2}{4} - (x+1)^2 = 1$



4.

Parábolas	Circunferencias	Elipses	Hipérbolas
b) $y - k = \frac{1}{4p}(x - h)^2$	c) $x^2 + y^2 = r^2$	a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	d) $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
g) $y = \frac{1}{4p}x^2$	e) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	h) $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	f) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

5. En este problema se puede inducir a los estudiantes para que analicen e identifiquen las características de la ecuación general de las secciones cónicas. Primero se observa que no hay término xy, luego, si alguno de los coeficientes de x^2 o y^2 es cero, entonces es una parábola; si son iguales y positivos, entonces hay que completar cuadrados perfectos para determinar si es una circunferencia, un punto o no determina una figura en el plano cartesiano; si son diferentes y positivos, entonces hay que completar cuadrados perfectos para determinar si es una elipse o si no determina una figura en el plano cartesiano; y si son diferentes y alternados (uno positivo y el otro negativo), entonces es una hipérbola.

5a) Es elipse porque los coeficientes de x^2 y y^2 son diferentes de cero y positivos, y al completar cuadrados perfectos se llega a la ecuación: $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

5b) Es circunferencia porque los coeficientes de x^2 y y^2 son diferentes de cero e iguales, y al completar cuadrados perfectos se llega a la ecuación: $x^2 + (y + 2)^2 = 1$.

5c) Es parábola porque el coeficiente de x^2 es cero.

5d) Es hipérbola porque los coeficientes de x^2 y y^2 son diferentes de cero y alternados.

5e) Es parábola porque el coeficiente de y^2 es cero.

5f) Es circunferencia porque los coeficientes de x^2 y y^2 son diferentes de cero e iguales, y al completar cuadrados perfectos se llega a la ecuación: $(x + 1)^2 + y^2 = 9$.

5g) Es elipse porque los coeficientes de x^2 y y^2 son diferentes de cero y positivos, y al completar cuadrados perfectos se llega a la ecuación: $\frac{x^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$.

5h) Es hipérbola porque los coeficientes de x^2 y y^2 son diferentes de cero y alternados.

5i) Es circunferencia porque los coeficientes de x^2 y y^2 son diferentes de cero e iguales, y al completar cuadrados perfectos se llega a la ecuación: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

5j) Es hipérbola porque los coeficientes de x^2 y y^2 son diferentes de cero y alternados.

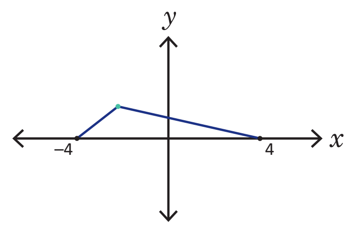
5k) Es parábola porque el coeficiente de x^2 es cero.

5l) Es elipse porque los coeficientes de x^2 y y^2 son diferentes de cero y positivos, y al completar cuadrados perfectos se llega a la ecuación: $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$.

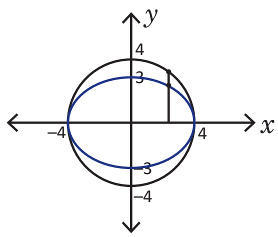
No se recomienda que en este problema se completen cuadrados perfectos para cada caso, porque se volvería un problema muy largo, es mejor hacer énfasis en el análisis de la ecuación general de las secciones cónicas, solamente es necesario completar cuadrados para el caso de la circunferencia y la elipse. Además, este problema será retomado en la práctica de GeoGebra para que posteriormente corroboren las respuestas.

4.10 Problemas de la unidad

1. La base de un triángulo tiene longitud fija y sus vértices se ubican en los puntos (–4, 0) y (4, 0), determina el lugar geométrico que describe el otro vértice si se cumple que el producto de las pendientes de los lados variables siempre es igual a 4.

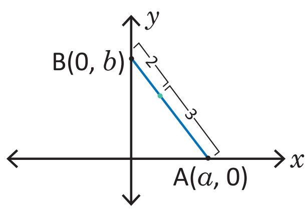


2. Determina el lugar geométrico que resulta de tomar una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 16$ y reducir las coordenadas en y de cada punto de ella a $\frac{3}{4}$.



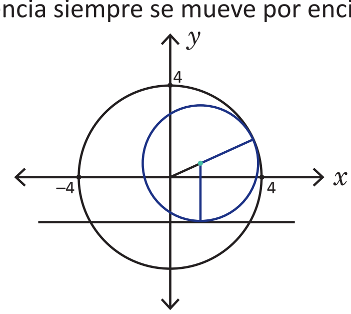
En este ejercicio se puede observar cómo una elipse puede ser vista como una circunferencia reducida respecto a una dirección a una razón constante.

3. Tomando un segmento AB de longitud 5 sobre el plano cartesiano, que cumple que el punto A se mueve sobre el eje x y el punto B sobre el eje y. Determina el lugar geométrico de los puntos del segmento AB que cumplen estar a una proporción 3:2.



Puedes asumir las coordenadas de A(a, 0) y las de B(0, b), utiliza el Teorema de Pitágoras para establecer una ecuación. Luego puedes calcular las coordenadas de un punto sobre un segmento dividido a una razón dada.

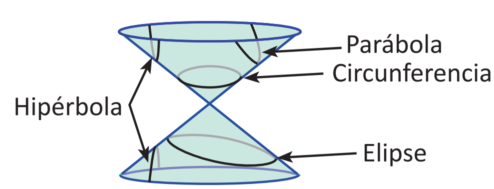
4. Identifica el lugar geométrico que determina el centro de una circunferencia cuyo radio varía de modo que siempre sea tangente a la recta $y + 2 = 0$ y a la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$. Asumiendo que dicha circunferencia siempre se mueve por encima de la recta y adentro de la circunferencia.



Determina la relación que existe entre las distancias del centro de la circunferencia variable a la recta y al centro de la circunferencia fija.

En resumen

Todas las figuras cónicas son llamadas de esta manera porque todas se pueden obtener de realizar cortes por un plano sobre un cono de doble hoja como lo muestra la figura.



Puedes encontrar información acerca de las cónicas en el video oficial del Ministerio de Educación de El Salvador (MINED) titulado “Cónicas”, en la dirección *https://goo.gl/Lq3dGW*.

Indicador de logro

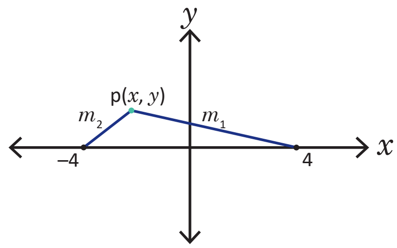
4.10 Resuelve problemas correspondientes a las secciones cónicas.

Propósito

Analizar los problemas e interpretar la información de cada uno para expresarlo de forma matemática a partir de conceptos ya conocidos.

Solución de problemas:

1. Se puede considerar el otro vértice como el punto P(x, y), entonces encontrando las pendientes:



$$m_1 = \frac{y-0}{x-4} = \frac{y}{x-4} \qquad m_2 = \frac{y-0}{x-(-4)} = \frac{y}{x+4}$$

entonces se debe cumplir que el producto de las pendientes debe ser 4, es decir $m_1m_2 = 4$, entonces:

$$\frac{y}{x-4} \times \frac{y}{x+4} = 4 \Rightarrow \frac{y^2}{x^2-16} = 4 \Rightarrow y^2 = 4(x^2-16) \Rightarrow y^2 - 4x^2 + 64 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1.$$

Por lo tanto, el lugar geométrico que describen los puntos que cumplen las condiciones del problema es la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$.

2. Se puede considerar el punto P(x', y') de la figura que redujo cada coordenada en y de la circunferencia en $\frac{3}{4}$, entonces el punto correspondiente en la circunferencia tendrá coordenadas $(x, y) = (x', \frac{4}{3}y')$, entonces satisface la ecuación de la circunferencia:

$$x'^2 + \left(\frac{4}{3}y'\right)^2 = 16 \Rightarrow \frac{x'^2}{16} + \frac{\cancel{16}y'^2}{9(\cancel{16})} = 1 \Rightarrow \frac{x'^2}{4^2} + \frac{y'^2}{3^2} = 1.$$

Por lo tanto, el lugar geométrico que resulta de tomar una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 16$ y reducir las coordenadas en y de cada punto de ella a $\frac{3}{4}$ es la elipse $\frac{x'^2}{4^2} + \frac{y'^2}{3^2} = 1$.

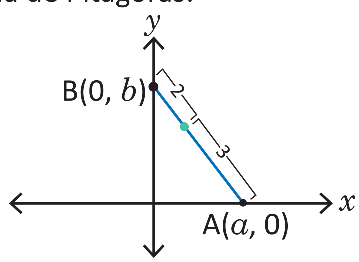
En este problema hay que tener cuidado e interpretar bien la información al momento de sustituir en la ecuación de la circunferencia.

3. Se pueden considerar los puntos P(x, y) que están en proporción 3:2 en el segmento AB, entonces por Pitágoras se sabe que $AO^2 + OB^2 = AB^2$, luego $a^2 + b^2 = 5^2$, además utilizando la fórmula de proporcionalidad vista en la Unidad 2 de línea recta:

$$(x, y) = \left(\frac{2(a)+3(0)}{3+2}, \frac{2(0)+3(b)}{3+2}\right) \Rightarrow \frac{2a}{5} = x \text{ y } \frac{3b}{5} = y \Rightarrow a = \frac{5x}{2} \text{ y } b = \frac{5y}{3}.$$

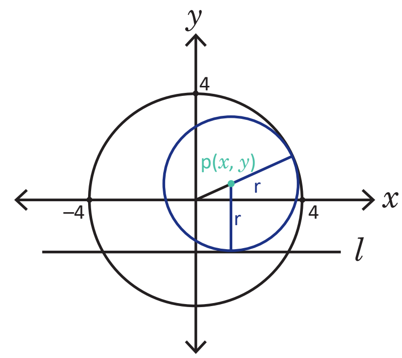
Ahora se sustituye en la ecuación planteada a partir de la relación del Teorema de Pitágoras:

$$\left(\frac{5x}{2}\right)^2 + \left(\frac{5y}{3}\right)^2 = 25 \Rightarrow \frac{\cancel{25}x^2}{4(\cancel{25})} + \frac{\cancel{25}y^2}{9(\cancel{25})} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1.$$



Por lo tanto, el lugar geométrico que resulta de los puntos del segmento AB que cumplen estar a una proporción 3:2 es la elipse $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$.

4. Considerando el centro de la circunferencia interior como P(x, y), entonces, la distancia a la recta $y = -2$ sería $d(P, l) = y + 2$; además la distancia entre los centros de las circunferencias es:



$$d(P, O) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dicha distancia también se puede calcular como la diferencia entre el radio de la circunferencia grande (4) menos el radio de la pequeña ($y + 2$), entonces:

$$d(P, O) = 4 - (y + 2).$$

Entonces, $\sqrt{x^2 + y^2} = 4 - (y + 2) \Rightarrow x^2 + y^2 = (2 - y)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 - 4y + y^2 \Rightarrow x^2 + 4y - 4 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$.

Por lo tanto, el lugar geométrico que determina el centro de la circunferencia es la parte de $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ donde $-2\sqrt{3} < x < 2\sqrt{3}$.

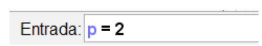
5.1 Práctica en GeoGebra: construcción de secciones cónicas

En esta práctica se construirán gráficas de secciones cónicas a partir del uso de variables, de modo que, al dar valores diferentes del centro, parámetro, longitudes de los ejes, etc., se puedan construir secciones cónicas de la misma familia (parábolas, circunferencias, elipses o hipérbolas). Sigue los pasos indicados en la parte de "Práctica" para construir la cónica. Luego trabaja en GeoGebra la parte "Actividades" que está al final de esta práctica.

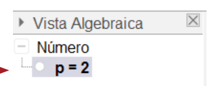
Práctica

Construcción de una parábola de parámetro p y vértice (h, k).

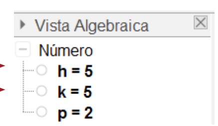
1. Ingresa en la barra de entrada la variable p con valor de 2 digitando p = 2.



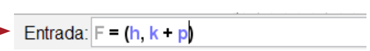
2. Presiona "enter" para obtener en la Vista Algebraica (panel izquierdo) la expresión de la derecha.



3. De la misma manera introduce las variables h y k, con valor de 5 para ambas variables, en la Vista Algebraica se tendrá un resultado como el que muestra la imagen de la derecha.

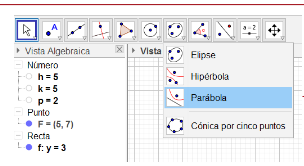


4. Grafica el foco, digitando en la barra de entrada F = (h, k + p), el punto F (foco) aparecerá en la vista gráfica.

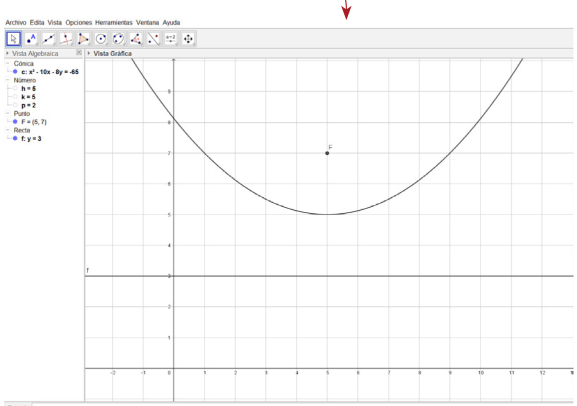


5. Grafica la directriz, digitando en la barra de entrada y = k – p, la recta directriz aparecerá en la vista gráfica.

6. En el botón de cónicas, selecciona la opción Parábola.



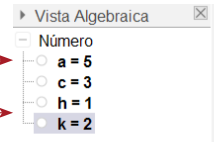
7. A continuación selecciona el punto F (ya sea en la Vista Gráfica o en la Algebraica) y luego selecciona la recta directriz. Se obtendrá la gráfica que se muestra abajo.



8. Puedes cambiar los valores de las variables p, h, k dando doble clic sobre ellas en la Vista Algebraica para corroborar las respuestas de los problemas de la lección 1. También puedes ver las formas de la ecuación de la parábola dando clic derecho sobre la ecuación de la cónica en la Vista Algebraica para expandir todas las opciones.

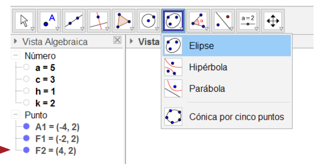
Construcción de una elipse conocidos los valores de a, c y centro (h, k).

1. Ingresa las variables a, c, h y k desde la barra de entrada con valores de 5, 3, 1 y 2 respectivamente. En la Vista Algebraica se obtendrá un resultado como el que muestra la figura de la derecha.

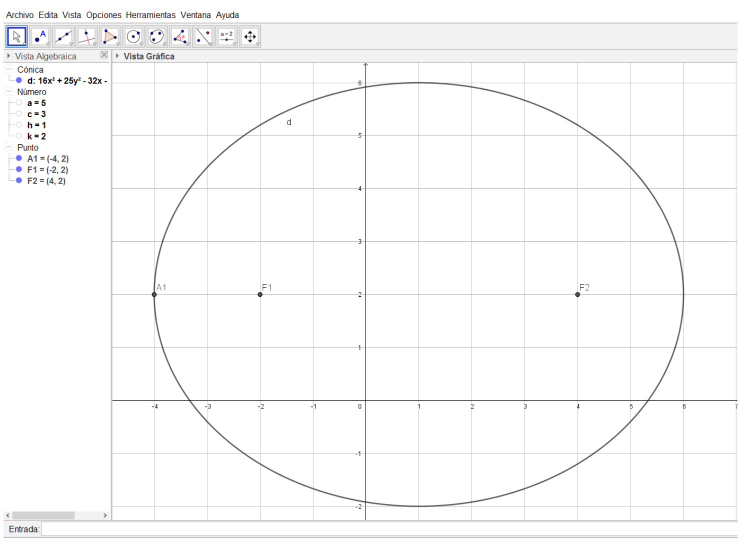


2. Grafica los focos y un vértice, digitando las coordenadas de los puntos F_1, F_2 y A_1 de la forma F1 = (h - c, k), F2 = (h + c, k) y A1 = (h - a, k). Los puntos aparecerán en la vista gráfica.

3. En el botón de cónicas, selecciona la opción Elipse.



4. A continuación selecciona el punto F1 luego selecciona el punto F2 y finalmente el punto A1 (vértice). Se obtendrá la gráfica que se muestra abajo.



5. Puedes cambiar los valores de las variables a, c, h y k dando doble clic sobre ellas en la Vista Algebraica para corroborar las respuestas de los problemas de la lección 3. También puedes ver las formas de la ecuación de la elipse dando clic derecho sobre la ecuación de la cónica en la Vista Algebraica para expandir todas las opciones.

Actividades

1. Construye una circunferencia con los valores del centro (h, k) y el radio r.
2. Construye una hipérbola con valores de a, c y centro (h, k).
3. Verifica las respuestas de los problemas que resolviste durante las clases de toda la unidad y corrobora que están correctos.
4. Contruye una parábola horizontal.
5. Contruye una elipse vertical.
6. Contruye una hipérbola vertical.

Indicador de logro

5.1 Utiliza un software matemático para graficar y localizar los elementos de las cónicas a partir de su forma canónica.

Secuencia

Ahora que los estudiantes ya conocen los contenidos teóricos sobre las secciones cónicas, se enriquecerá introduciendo la herramienta de GeoGebra para realizar y comprobar los procedimientos teóricos y conocer más sobre este software matemático.

Propósito

Esta práctica está enfocada en que los estudiantes construyan las diferentes cónicas en GeoGebra de manera general y luego puedan cambiar los valores variables para cada ejercicio resuelto y comprobar el trabajo realizado de forma teórica a partir de este software.

Solución de problemas:

1. Para construir la circunferencia es suficiente crear las variables r, h, k de manera análoga a como se hizo en la práctica y luego utilizar la opción circunferencia (centro, radio) del botón circunferencia.

2. Para construir la hipérbola es muy parecido a la construcción de la elipse, ya que es suficiente crear las variables a, b, h, k de manera análoga a como se hizo en la práctica y luego graficar los focos y un vértice al igual que en la elipse, haciendo F1 = (h - c, k), F2 = (h + c, k) y A1 = (h - a, k), para luego utilizar la opción hipérbola del botón cónicas y seleccionar primero los focos y luego el vértice.

3. Este apartado es únicamente para comprobar los problemas que tenían que ver con graficar alguna cónica, y pueden ser tomados de las clases: 1.4, 1.5, 1.10, 2.1, 2.2, 2.6, 3.3, 3.4, 3.6, 4.3, 4.4 y 4.6; y algún resultado sobre rectas, aplicando las prácticas de la unidad 2.

4. Este problema es muy similar a la parábola vertical, pues se deben crear las variables p, h, k; solamente hay que cambiar la fórmula para el foco, que ahora será F = (h + p, k) y también hay que cambiar la ecuación de la directriz que ahora será x = h – p, luego de manera similar se selecciona la opción parábola del botón cónicas y luego seleccionar el foco y la directriz.

5. Este problema es muy parecido a la construcción de la elipse horizontal, es suficiente crear las variables a, c, h, k de manera análoga a como se hizo en la práctica y solamente cambiar cómo se definen los focos y el vértice, haciendo F1 = (h, k - c), F2 = (h, k + c) y A1 = (h, k - a), para luego utilizar la opción elipse del botón cónicas y seleccionar primero los focos y luego el vértice.

6. Este problema es muy parecido a la construcción de la hipérbola horizontal, es suficiente crear las variables a, c, h, k de manera análoga a como se hizo en la práctica y solamente cambiar cómo se definen los focos y el vértice, haciendo F1 = (h, k - c), F2 = (h, k + c) y A1 = (h, k - a), para luego utilizar la opción hipérbola del botón cónicas y seleccionar primero los focos y luego el vértice.

Se recomienda que los estudiantes guarden cada actividad en archivos separados, desde el inicio de la práctica, pues pueden retomarlos para la realización de las demás actividades; además, se recomienda que estos archivos estén guardados en algún espacio determinado (ya sea de una computadora o de una memoria USB) para las clases posteriores, en especial para la clase 5.3.

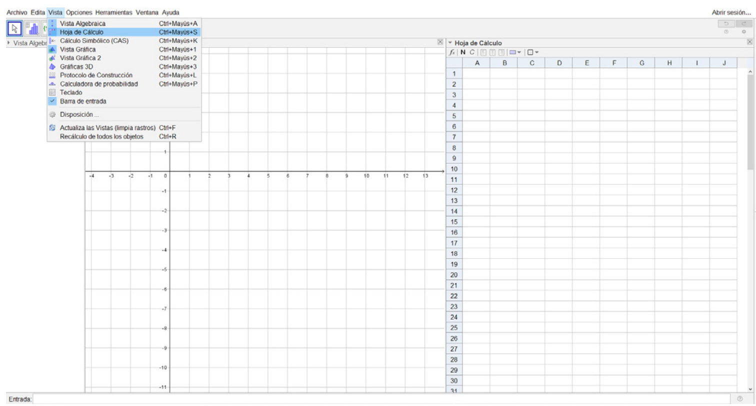
5.2 Práctica en GeoGebra: gráfica de la ecuación general de cónicas

En esta práctica se utilizará la Hoja de Cálculo de GeoGebra para graficar cónicas dada una ecuación en forma general, así será más sencillo identificar el tipo de cónica que está expresada, e incluso se puede utilizar la Vista Algebraica para obtener la ecuación en forma canónica. Para ello sigue los pasos indicados en la parte de "Práctica" y construye la ecuación general para graficar la cónica correspondiente. Luego trabaja en GeoGebra la parte "Actividades" que está al final de esta práctica.

Práctica

Gráfica de la cónica dada por su ecuación general.

1. Abre el menú Vista y selecciona la opción Hoja de Cálculo.



2. Ubícate en la fila 1 y digita los valores 4, −1, 8, −2, 7, uno en cada columna, como lo muestra la figura de la derecha.

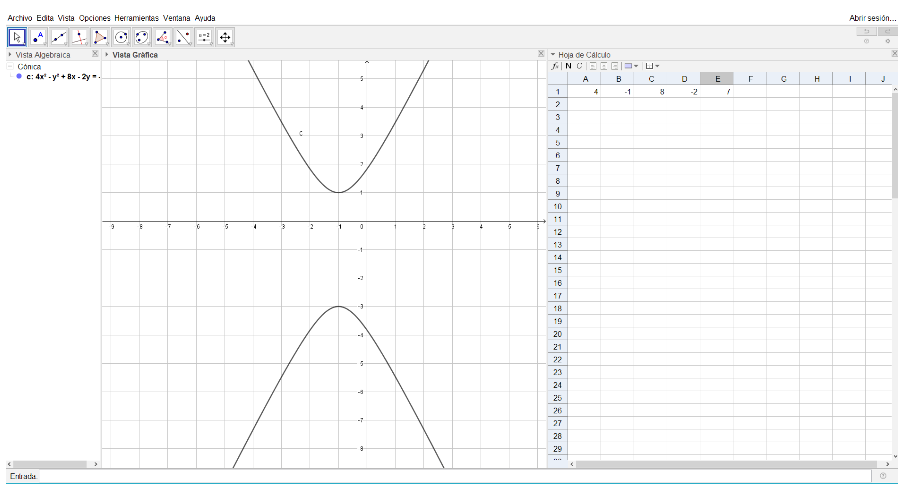
Hoja de Cálculo

	A	B	C	D	E	F
1	4	-1	8	-2	7	
2						

3. Ahora digita en la barra de entrada la ecuación general, tomando como coeficiente de x^2, y^2, x, y y la constante, los valores de la celda A1, B1, C1, D1 y E1 respectivamente, de la siguiente manera: A1*x^2 + B1*y^2 + C1*x + D1*y + E1 = 0.

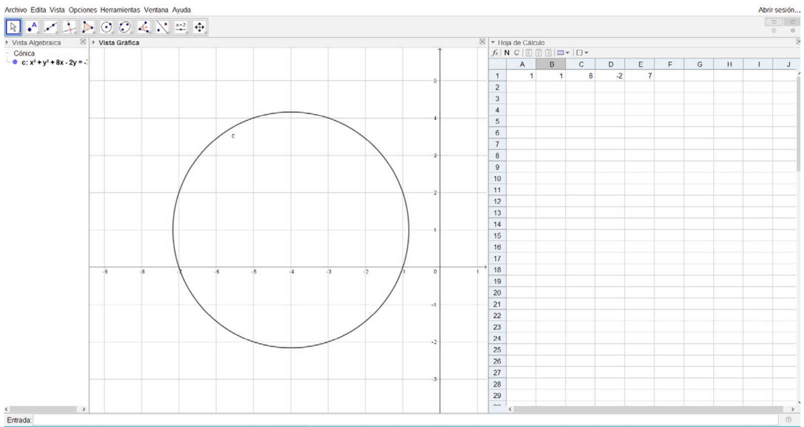
Entrada: A1*x^2 + B1*y^2 + C1*x + D1*y + E1 = 0

4. Al introducir la ecuación se muestra la gráfica de una hipérbola en la Vista Gráfica, como lo muestra la imagen de abajo.

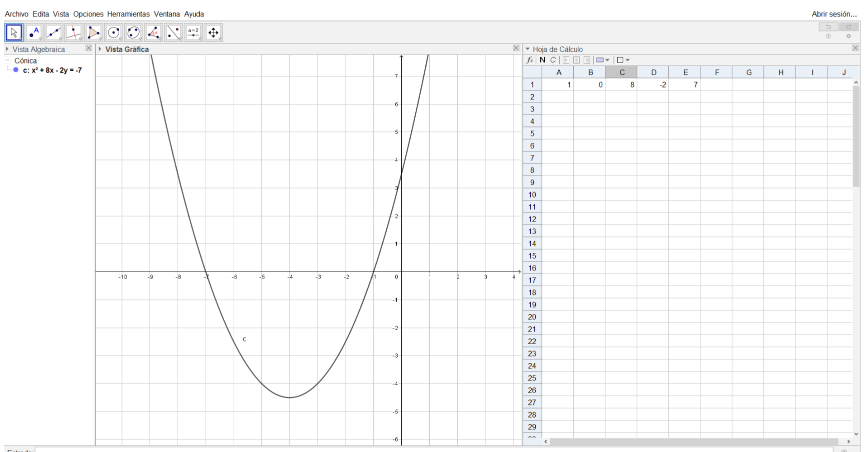


Unidad 3

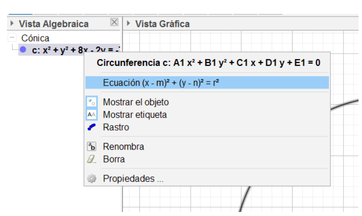
5. Cambiando el valor de las celdas A1 y B1 a 1, se obtiene la gráfica de una circunferencia.



6. Cambiando el valor de la celda B1 a 0, se obtiene una parábola.



7. Cambia la ecuación a la forma canónica, dando clic derecho sobre la ecuación y seleccionándola. Como muestra la figura.



Actividades

Identifica qué tipo de cónica es cada una de las siguientes ecuaciones, verifica si tu respuesta del problema 5 de la clase 4.9 es correcta, si no, determina cuál fue el error.

a) $9x^2 + 25y^2 - 54x - 144 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$

c) $y^2 + x + 4y + 4 = 0$

d) $4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 7 = 0$

e) $2x^2 - 4x - y + 4 = 0$

f) $x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$

g) $9x^2 + 4y^2 - 16y - 20 = 0$

h) $9x^2 - 9y^2 - 18x + 54 = 0$

i) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$

j) $9x^2 - 16y^2 - 18x - 32y - 151 = 0$

k) $y^2 + x + 2y + 3 = 0$

l) $25x^2 + 9y^2 - 50x + 18y - 191 = 0$

Indicador de logro

5.2 Grafica la cónica determinada por una ecuación general utilizando un software matemático adecuado.

Secuencia

Después de abordar las formas canónicas de las secciones cónicas, se puede avanzar a analizar la ecuación general de las secciones cónicas.

Propósito

En la práctica se utilizará el entorno de la Hoja de Cálculo, así como se utilizó en Primer año de Bachillerato en la práctica en GeoGebra de la unidad de estadística descriptiva.

Solución de problemas:

En esta actividad se espera que los estudiantes corroboren a partir de la gráfica, la respuesta que dieron en los problemas de la unidad.

a) La gráfica es una elipse.

b) La gráfica es una circunferencia.

c) La gráfica es una parábola

d) La gráfica es una hipérbola.

e) La gráfica es una parábola.

f) La gráfica es una circunferencia.

g) La gráfica es una elipse.

h) La gráfica es una hipérbola.

i) La gráfica es una circunferencia.

j) La gráfica es una hipérbola.

k) La gráfica es una parábola.

l) La gráfica es una elipse.

Si los estudiantes terminan rápidamente la práctica y las actividades propuestas, entonces se puede indicar que los estudiantes corroboren las gráficas de los problemas de las clases 1.7, 2.3, 3.5, 4.5.

5.3 Práctica en GeoGebra: propiedades de las secciones cónicas

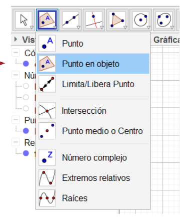
En esta práctica se utilizarán los recursos de GeoGebra para **verificar** las propiedades de los focos de las secciones cónicas (parábola, elipse e hipérbola) que se utilizaron en las aplicaciones de estos contenidos. Para ello sigue los pasos indicados en la parte de "Práctica" y construye la propiedad. Luego trabaja en GeoGebra la parte "Actividades" que está al final de esta práctica.

Práctica

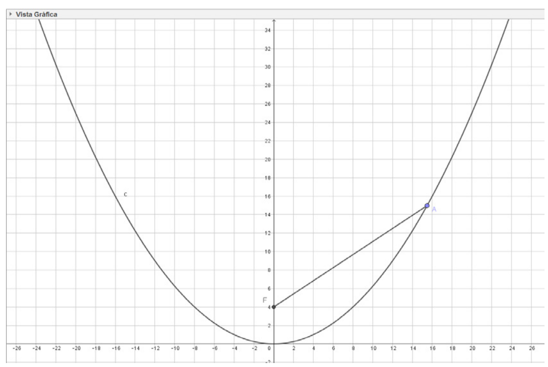
Verificación de la propiedad del foco de una parábola.

Cualquier línea desde el foco será reflejada en una misma dirección paralela al eje, y también al recibir una línea paralela al eje, esta será reflejada hacia el foco.

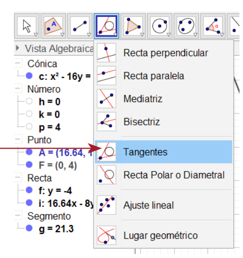
1. Utilizando el archivo creado en la práctica 5.1, grafica una parábola con vértice (0, 0) y parámetro $p = 4$.
2. En el botón Punto, selecciona la opción Punto sobre objeto y localiza un punto en la parábola, de tal modo que pueda moverse alrededor de toda la parábola.



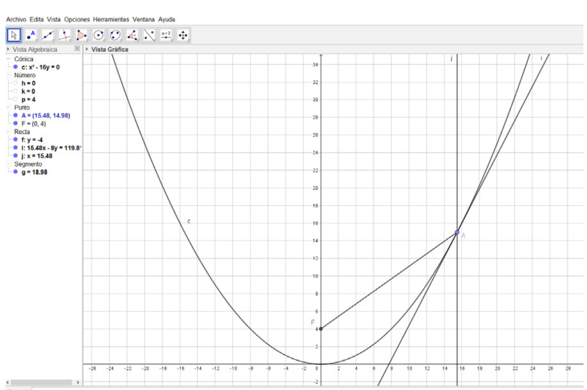
3. Dibuja un segmento de recta que vaya desde el foco (F) hasta el punto localizado en la parábola, tal como lo muestra la figura de abajo.



4. Grafica una recta tangente a la parábola en el punto dibujado en el numeral 2, utilizando el botón de Rectas, opción Tangentes, y seleccionando el punto y luego la parábola.

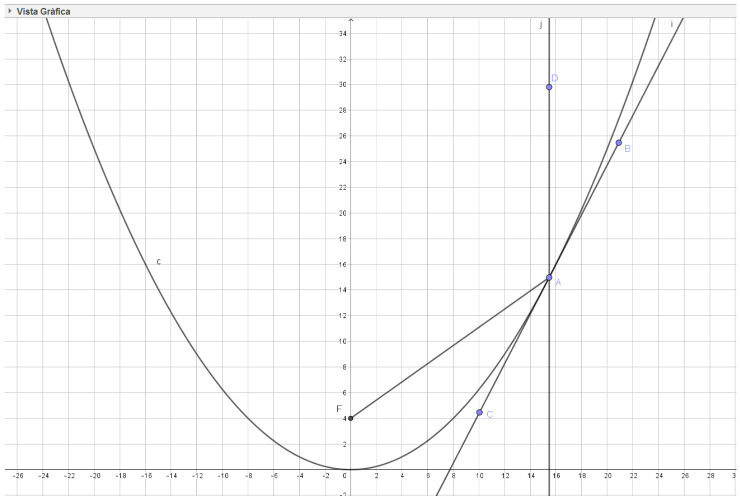


5. Dibuja una recta paralela al eje y que pasa por el punto dibujado en el numeral 2, utilizando el botón Rectas, opción Recta paralela, seleccionando el punto y el eje y. Se obtiene la siguiente figura:

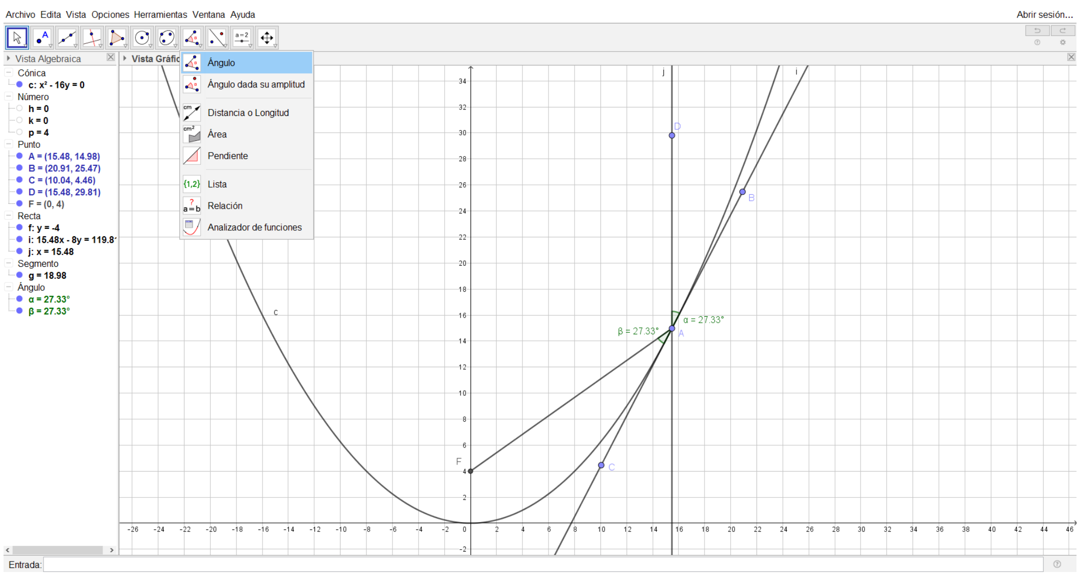


Unidad 3

6. Coloca los puntos B y C sobre la recta tangente, y el punto D sobre la recta paralela al eje y, tal como lo muestra la figura.



7. Mide los ángulos DAB y FAC, utilizando el botón de ángulos, opción Ángulo, tal como lo muestra la figura.



8. Con el cursor puedes mover el punto sobre la parábola y verificar que el ángulo con que se refleja la recta emitida por el foco se mantiene constante respecto de la recta paralela al eje de la parábola. También puedes dar clic derecho sobre el punto y marcar la opción animación para recorrer todos los puntos de la parábola de manera automática.

Actividades

1. Realiza una contrucción para verificar la propiedad de los focos de una elipse que se utilizó en las aplicaciones sobre la elipse.

2. Realiza una construcción para verificar la propiedad de los focos de una hipérbola que se utilizó en las aplicaciones sobre la hipérbola.

Indicador de logro

5.3 Comprueba las propiedades de los focos de las diferentes cónicas realizando construcciones en un software matemático adecuado.

Secuencia

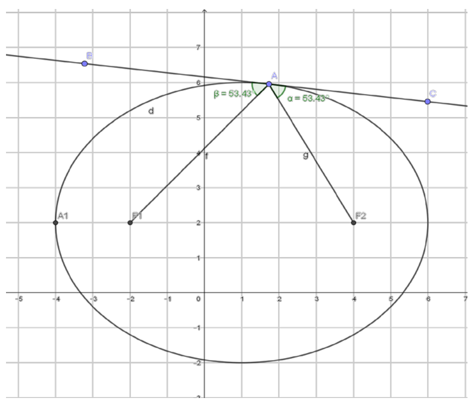
Después de realizar el análisis de las ecuaciones de las secciones cónicas, se puede verificar las propiedades reflectoras de los focos de las secciones cónicas.

Propósito

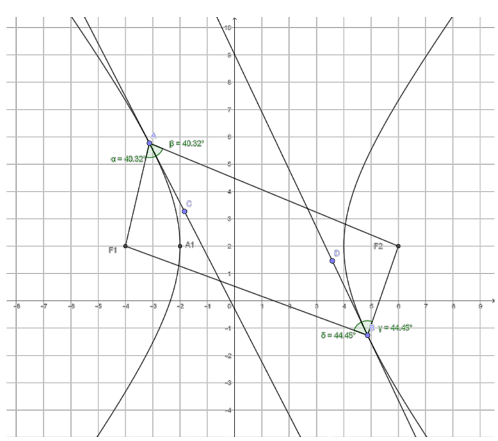
Tener al menos la verificación del resultado sobre las propiedades reflectoras de las secciones cónicas, utilizando construcciones en GeoGebra.

Solución de problemas:

1. Se utiliza el archivo creado en la clase 5.1 para elipses, se dibuja un punto sobre la elipse, y luego se trazan dos segmentos de recta, que vayan de cada foco al punto sobre la elipse, y de manera parecida a lo que se hizo en la parábola, ahora se traza la tangente a la elipse en el punto dibujado, y finalmente se verifica la propiedad realizando la medición de los ángulos formados por los segmentos y la recta tangente como lo muestra la figura de abajo.



2. Se utiliza el archivo creado en las actividades de la clase 5.1 para hipérbolas, se dibuja un punto sobre la hipérbola, y luego se trazan dos segmentos de recta, que vayan de cada foco al punto sobre la hipérbola, y de manera parecida a lo que se hizo en la elipse, ahora se traza la tangente a la hipérbola en el punto dibujado, y finalmente se verifica la propiedad realizando la medición de los ángulos formados por los segmentos y la recta tangente como lo muestra la figura de abajo.



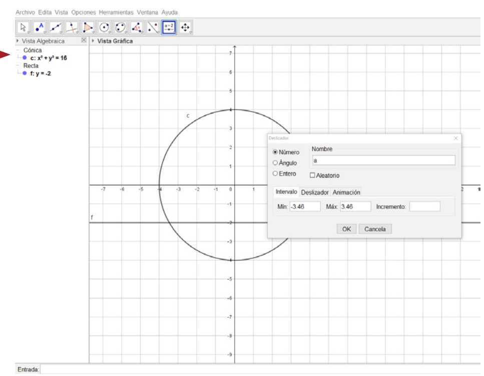
5.4 Práctica en GeoGebra: problemas sobre el lugar geométrico de las cónicas

En esta práctica se utilizarán los recursos de GeoGebra para **verificar** las respuestas de los problemas sobre lugar geométrico de secciones cónicas que se resolvieron en la clase 4.10. Para ello sigue los pasos indicados en la parte de "Práctica" y construye los lugares geométricos correspondientes. Luego trabaja en GeoGebra la parte "Actividades" que está al final de esta práctica.

Práctica

Retomando el problema 4 de la clase 4.10:

Identifica el lugar geométrico que determina el centro de una circunferencia cuyo radio varía de modo que siempre sea tangente a la recta $y + 2 = 0$ y a la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$. Asumiendo que dicha circunferencia siempre se mueve por encima de la recta y adentro de la circunferencia.

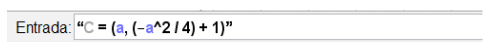


1. Utiliza la barra de entrada para graficar la recta $y + 2 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$.

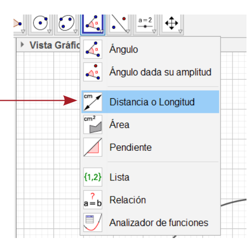
2. Inserta un deslizador con la variable a, seleccionando el botón deslizador y dando un clic sobre la Vista Gráfica en el lugar que se quiere colocar, usar el valor mínimo de –3.46 y máximo de 3.46 y presionar "enter".

3. Para comprobar la respuesta del problema, la cual es "$y = -\frac{x^2}{4} + 1$", ingresa en la barra de Entrada el punto C = $\left(x, -\frac{x^2}{4} + 1\right)$, escribiendo:

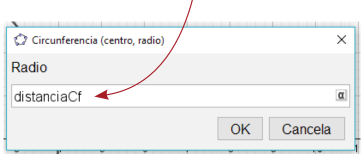
   C = (a, (–a^2 / 4) + 1)

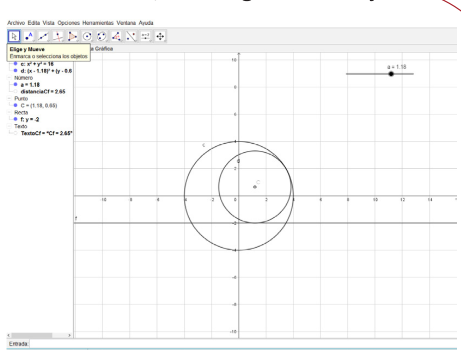


4. En el botón de Ángulo selecciona la opción Distancia o Longitud, selecciona el punto C graficado en el paso 3, y la recta $y + 2 = 0$. Después de ello aparecerá en la Vista Gráfica una etiqueta que muestra la distancia del punto C a la recta, y en la Vista Algebraica aparecerá una variable con nombre "distanciaCf", la cual almacena el valor numérico de la distancia medida.

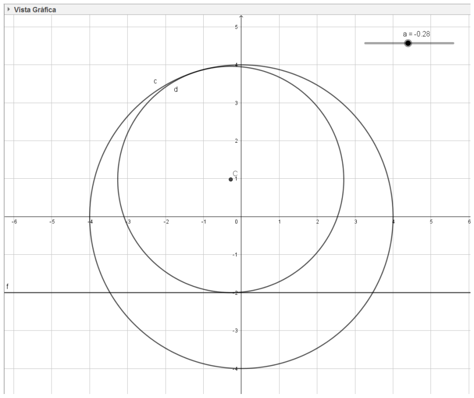


5. Ahora construye una circunferencia, utilizando la opción de centro y radio, luego selecciona como centro el punto C, construido en el paso 3, y en la entrada del radio escribe la variable que almacena la distancia, es decir, "distanciaCf". Se puede observar el resultado obtenido, en la figura de abajo.

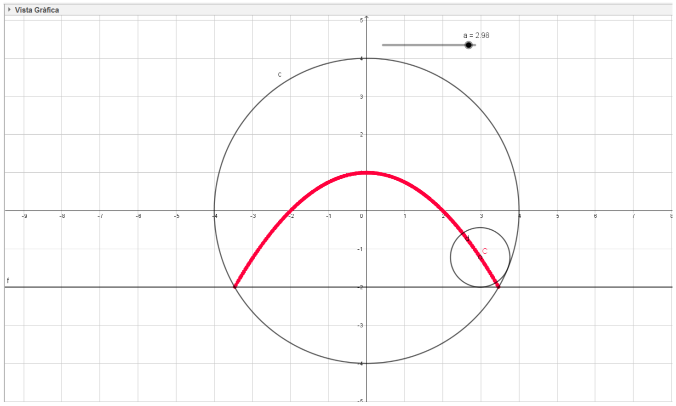




6. Observa que la circunferencia graficada en el paso 5 es tangente tanto a la recta $y + 2 = 0$ como a la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$. Puedes mover el deslizador horizontalmente y ver cómo se mueve dicha circunferencia.



7. Haz clic derecho sobre el punto C y selecciona la opción rastro (se puede cambiar el color del punto, si se desea), ahora mueve el deslizador de nuevo y observa cómo se marca el lugar geométrico con el rastro.



8. Finalmente puedes dar clic derecho sobre el deslizador y seleccionar la opción animación para correr automáticamente el lugar geométrico y comprobar que la respuesta es correcta.

Actividades

1. Cambia el rango entre el valor mínimo y el máximo del deslizador, observa el resultado y escribe la conclusión de este resultado, enfocándote en la tangencia de la circunferencia con la recta $y + 2 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$.

2. Realiza una construcción para verificar la respuesta al problema 2 y 3 de los problemas de la unidad de la clase 4.10:
   a) Determina el lugar geométrico que resulta de tomar una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 16$ y reducir las coordenadas en y de cada punto de ella a $\frac{3}{4}$.

   b) Tomando un segmento AB de longitud 5 sobre el plano cartesiano, que cumple que el punto A se mueve sobre el eje x y el punto B sobre el eje y. Determina el lugar geométrico de los puntos del segmento AB que cumplen estar a una proporción 3:2.

Indicador de logro

5.4 Utiliza un software matemático para resolver problemas sobre secciones cónicas.

Secuencia

Por último, las prácticas en GeoGebra de secciones cónicas finalizan con las soluciones de los problemas de la unidad, para corroborar las soluciones planteadas.

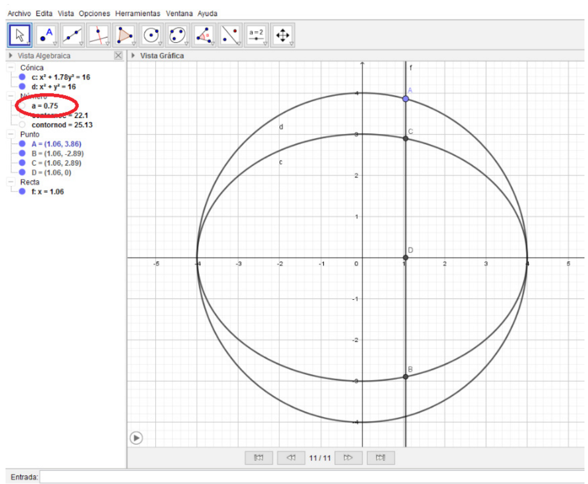
Propósito

Utilizar las herramientas de rastro y animación para comprobar la solución de los problemas de la unidad.

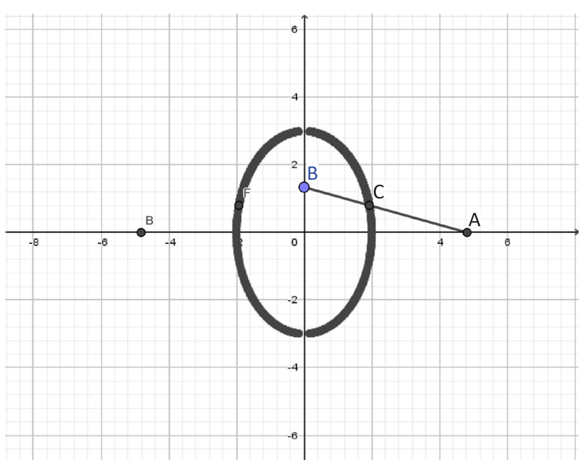
Solución de problemas:

1. Cuando se cambia el rango del deslizador, la circunferencia sigue manteniéndose tangente tanto a la recta como a la circunferencia, sin embargo, pasa de la parte de arriba a la parte de abajo de la recta.

2a) Se puede dibujar la solución encontrada dada la ecuación $x^2 + (\frac{4}{3}y)^2 = 16$, teniendo cuidado en introducirla digitando x^2 + (4 /3y)^2 = 16, y luego graficar la circunferencia dada en el problema. Para comprobar que se cumple la proporción dada, se puede colocar un punto sobre la circunferencia, luego trazar una recta paralela al eje y que pasa por el punto dibujado y luego colocar los puntos de intersección de la recta con la elipse, y de la recta con el eje x, finalmente se puede generar una variable que guarde el valor de la razón digitando por ejemplo a = Distancia(C, D)/Distancia(A, D); y se dará el resultado tal como lo muestra la imagen.



2b) Se dibuja un punto sobre el eje y, luego puede trazarse una circunferencia de radio 5, para localizar los puntos de intersección entre la circunferencia y el eje x, y trazar los segmentos hacia ambos puntos (este es el segmento de longitud 5); luego para determinar el punto que está sobre el segmento a una proporción 3:2, se puede trazar una circunferencia de radio 2 y centro el punto que está sobre el eje y; después encontrar los puntos de intersección con los segmentos de longitud 5 y la circunferencia de radio 2; finalmente se pueden invisibilizar las circunferencias, poner rastro a los puntos que cumplen la proporción 3:2, y utilizar la animación del punto en el eje y para verificar que en efecto se grafica una elipse, como lo muestra la imagen.



Este último problema puede realizarse de otra forma, localizando el punto que está sobre la recta en razón 3:2, y dejando los puntos sobre los eje moviéndose libremente.

Unidad 4. Funciones trascendentales I

Competencia de la unidad

Realizar operaciones con potencias de números reales, utilizando las propiedades que facilitan su desarrollo, para resolver ecuaciones y describir las características de las funciones exponenciales.

Relación y desarrollo

Tercer ciclo

Unidad 2: Raíz cuadrada (9°)
- Raíz cuadrada y números reales
- Operaciones con raíces cuadradas

Primer año de bachillerato

Unidad 1: Números reales
- Números reales

Unidad 3: Desigualdades
- Desigualdad
- Desigualdad lineal
- Desigualdad no lineal

Unidad 4: Funciones reales
- Definición de función
- Función cuadrática
- Aplicaciones de la función cuadrática
- Otras funciones
- Práctica en GeoGebra

Segundo año de bachillerato

Unidad 4: Funciones trascendentales I
- Potencia y raíz n-ésima
- Funciones y ecuaciones exponenciales

Unidad 5: Funciones trascendentales II
- Función biyectiva e inversa
- Función logarítmica
- Funciones trigonométricas
- Práctica en GeoGebra

Plan de estudio de la unidad

Lección	Horas	Clases
1. Potencia y raíz n-ésima	1	1. Propiedades de potencias con igual base y exponente natural
	1	2. Propiedades de potencias con igual exponente natural
	1	3. Exponente cero y exponente negativo
	1	4. Raíz n-ésima de un número real
	1	5. Expresión de números sin el símbolo radical
	1	6. Operaciones con raíces n-ésimas
	1	7. Suma, resta y potencia de raíces n-ésimas
	1	8. Exponente racional
	1	9. Propiedades de los exponentes racionales
	1	10. Operaciones con raíces de distinto índice
	1	11. Practica lo aprendido
2. Funciones y ecuaciones exponenciales	1	1. Definición de la función exponencial
	1	2. Funciones exponenciales simétricas
	1	3. Características de las funciones exponenciales
	1	4. Desplazamientos horizontales y verticales de la función exponencial
	1	5. Gráfica de funciones exponenciales con simetría y desplazamientos
	1	6. Ecuaciones exponenciales
	1	7. Ecuaciones exponenciales que se reducen a ecuaciones cuadráticas
	1	8. Practica lo aprendido

Lección	Horas	Clases
	1	9. Problemas de la unidad
	1	Prueba de la unidad 4
	2	Prueba del segundo periodo

20 horas clase + prueba de la unidad 4 + prueba del segundo periodo

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Potencia y raíz n-ésima
En esta lección se estudian las propiedades de las potencias que constituyen un conjunto de herramientas para efectuar operaciones entre números reales, luego se define la raíz n-ésima y se estudian las operaciones con radicales, estas se facilitan al introducir el exponente racional. La simplificación de una raíz se realiza en primer lugar observando que el índice de la raíz sea menor a algún exponente en la descomposición prima y utilizando la propiedad de la multiplicación. Otro caso es cuando el radicando es una potencia de una sola base y su exponente es menor que el índice pero con factores en común, entonces se utiliza el exponente racional para simplificarla.

Lección 2: Funciones y ecuaciones exponenciales
Ahora que se tiene el conocimiento de las potencias con exponentes enteros, racionales e irracionales se introduce la función exponencial como una función real. Se estudian además aquellas funciones exponenciales que se grafican por medio de simetrías y desplazamientos. Por último se estudian las ecuaciones exponenciales que se resuelven por medio de la definición de potencia y la sustitución de variable.

Lección 1 Potencia y raíz n-ésima

1.1 Propiedades de potencias con igual base y exponente natural

Problema inicial

Efectúa las siguientes operaciones expresando tu respuesta como la potencia de un número.

a) $2^2 \times 2^3$ b) $3^6 \div 3^2$ c) $(2^2)^3$

Solución

Si a es un número real y n un entero positivo, entonces $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n\text{- veces}}$

a^n: exponente, potencia, base

a) $2^2 \times 2^3$

$$2^2 \times 2^3 = \underbrace{(2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)}_{5\text{-veces}}$$
$$= 2^5$$

Se cumple que: $2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$.

b) $3^6 \div 3^2$

$$3^6 \div 3^2 = \frac{3^6}{3^2}$$
$$= \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times \cancel{3} \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times \cancel{3}} \quad \text{simplificando,}$$
$$= \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{4\text{- veces}}$$
$$= 3^4$$

Se cumple que: $3^6 \div 3^2 = 3^{6-2} = 3^4$.

c) $(2^2)^3$

$$(2^2)^3 = (2^2) \times (2^2) \times (2^2)$$
$$= (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2)$$
$$= \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{6\text{-veces}}$$
$$= 2^6$$

Se cumple que: $(2^2)^3 = 2^{2 \times 3} = 2^6$.

Definición

1. Si a y b son números reales, m y n enteros positivos, las reglas para efectuar operaciones con potencias de igual base son:

   a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ b) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (si $a \neq 0$ y $m > n$) c) $(a^m)^n = a^{m \times n}$

   La propiedad del literal b) también se escribe como fracción: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

   Si a es un número real: $a^1 = a$

2. Si a es un número real positivo, entonces:

   a) Si n es par entonces:
   $$(-a)^n = \underbrace{(-a) \times (-a) \times \cdots \times (-a)}_{\text{cantidad par de números negativos}} = a^n$$

   b) Si n es impar entonces
   $$(-a)^n = \underbrace{(-a) \times (-a) \times \cdots \times (-a)}_{\text{cantidad impar de números negativos}} = -a^n$$

Problemas

Expresa las siguientes operaciones como una sola potencia.

a) $3^6 \times 3^4$ b) $(-3)^2 \times (-3)^4$ c) $(-2)^3 \times (-2)^2$

d) $5^7 \div 5^3$ e) $(-2)^5 \div (-2)^3$ f) $(-3)^8 \div (-3)^5$

g) $(6^5)^2$ h) $(10^4)^3$ i) $[(-3)^3]^5$

Indicador de logro

1.1 Expresa como potencia, productos y cocientes con igual base y exponente positivo.

Secuencia

En séptimo grado se estudiaron las potencias con exponentes dos y tres, ahora se expande esta definición para todo exponente natural; se introducirán paso a paso los valores de los exponentes hasta los números reales. En esta clase se establecen las propiedades utilizadas en las operaciones con potencias que tienen la misma base.

Propósito

En el numeral 2 de la Definición se establece que toda potencia de un número negativo debe expresarse como la potencia de un número positivo de tal manera que el signo quede antes de la potencia, por lo que en la solución de los problemas los estudiantes deben reflejar el uso de esta indicación.

Solución de problemas:

a) $3^6 \times 3^4 = 3^{6+4} = 3^{10}$

b) $(-3)^2 \times (-3)^4 = (-3)^{2+4} = (-3)^6 = 3^6$

c) $(-2)^3 \times (-2)^2 = (-2)^{3+2} = (-2)^5 = -2^5$

d) $5^7 \div 5^3 = 5^{7-3} = 5^4$

e) $(-2)^5 \div (-2)^3 = (-2)^{5-3} = (-2)^2 = 2^2$

f) $(-3)^8 \div (-3)^5 = (-3)^{8-5} = (-3)^3 = -3^3$

g) $(6^5)^2 = 6^{5\times 2} = 6^{10}$

h) $(10^4)^3 = 10^{4\times 3} = 10^{12}$

i) $[(-3)^3]^5 = (-3)^{3\times 5} = (-3)^{15} = -3^{15}$

1.2 Propiedades de potencias con igual exponente natural

Problema inicial

Efectúa las siguientes operaciones expresando tu respuesta como la potencia de un número.

a) $2^3 \times 3^3$

b) $\frac{6^3}{2^3}$

Solución

a) $2^3 \times 3^3$

$2^3 \times 3^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$; asociando,

$= \underbrace{6 \times 6 \times 6}_{\text{3-veces}}$

$= 6^3$

Se cumple que: $2^3 \times 3^3 = (2 \times 3)^3 = 6^3$.

b) $\frac{6^3}{2^3}$

Del problema anterior se tiene: $6^3 = 2^3 \times 3^3$.

Al dividir ambos miembros de la igualdad por 2^3 se tiene:

$$\frac{6^3}{2^3} = \frac{\cancel{2^3} \times 3^3}{\cancel{2^3}} = 3^3$$

Se cumple que: $\frac{6^3}{2^3} = \left(\frac{6}{2}\right)^3 = 3^3$.

Conclusión

- Si a y b son números reales y m es un entero positivo, las reglas para efectuar operaciones de potencias con igual exponente son:

  a) $a^m \times b^m = (a \times b)^m$

  b) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ (si $b \neq 0$)

- La propiedad b) se expresa como división así:

$$a^m \div b^m = (a \div b)^m$$

- Si $a_1, a_2, \dots, a_n$ son números reales, entonces:

$$a_1^m \times a_2^m \times \cdots \times a_n^m = (a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n)^m$$

Ejemplo

Expresa el producto $2^2 \times 3^2 \times 5^2$ como una sola potencia.

$2^2 \times 3^2 \times 5^2 = (2 \times 3 \times 5)^2 = 30^2$

Por lo tanto, $2^2 \times 3^2 \times 5^2 = 30^2$.

Problemas

Expresa las siguientes operaciones como una sola potencia.

a) $6^{10} \times 4^{10}$

b) $(-3)^7 \times 6^7$

c) $5^5 \times (-8)^5$

d) $(-2)^5 \times (-7)^5$

e) $12^5 \div 6^5$

f) $20^3 \div (-4)^3$

g) $(-24)^4 \div 3^4$

h) $(-15)^6 \div (-5)^6$

i) $(-35)^4 \div (-7)^4$

Unidad 4

Indicador de logro

1.2 Expresa como potencia productos y cocientes con igual exponente positivo.

Secuencia

Se establecen las propiedades cuando al multiplicar o dividir potencias se tienen exponentes iguales. Hasta aquí se han estudiado las propiedades que involucran exponentes positivos; de nuevo, se aplican potencias a cantidades positivas y negativas, como en la clase anterior.

Posibles dificultades

Los estudiantes pueden confundir las propiedades de potencias: el caso cuando tienen igual base con el caso en el que tienen igual exponente, por lo que debe sugerirles que observen qué caso se cumple al trabajar cada problema.

Solución de problemas:

a) $6^{10} \times 4^{10} = (6 \times 4)^{10} = 24^{10}$

b) $(-3)^7 \times 6^7 = (-3 \times 6)^7 = (-18)^7 = -18^7$

c) $(5)^5 \times (-8)^5 = (5 \times (-8))^5 = (-40)^5 = -40^5$

d) $(-2)^5 \times (-7)^5 = ((-2) \times (-7))^5 = 14^5$

e) $12^5 \div 6^5 = (12 \div 6)^5 = 2^5$

f) $20^3 \div (-4)^3 = (20 \div (-4))^3 = (-5)^3 = -5^3$

g) $(-24)^4 \div 3^4 = (-24 \div 3)^4 = (-8)^4 = 8^4$

h) $(-15)^6 \div (-5)^6 = (-15 \div (-5))^6 = 3^6$

i) $(-35)^4 \div (-7)^4 = (-35 \div (-7))^4 = 5^4$

1.3 Exponente cero y exponente negativo*

Problema inicial

Asume que la propiedad $a^m \div a^n = a^{m-n}$ se cumple para todo entero m y n. Efectúa las siguientes divisiones de dos maneras distintas:

a) $6^3 \div 6^3$ b) $3^3 \div 3^7$

Solución

a) $6^3 \div 6^3$

Utilizando las propiedades de la división

$6^3 \div 6^3 = 1.$

Si las propiedades de exponentes se verifican en este caso, entonces:

$6^3 \div 6^3 = 6^{3-3}$

$= 6^0$

Por lo tanto, $6^3 \div 6^3 = 6^0$.

Así 6^0 y 1 representan el mismo número.

b) $3^3 \div 3^7$

Utilizando la simplificación:

$3^3 \div 3^7 = \frac{3^3}{3^7}$

$= \frac{\cancel{3}\times\cancel{3}\times\cancel{3}}{3\times 3\times 3\times 3\times\cancel{3}\times\cancel{3}\times\cancel{3}}$

$= \frac{1}{3\times 3\times 3\times 3}$

$= \frac{1}{3^4}$

Por lo tanto, $3^3 \div 3^7 = \frac{1}{3^4}$.

Si las propiedades de exponentes se verifican en este caso, entonces:

$3^3 \div 3^7 = 3^{3-7}$

$= 3^{-4}$

Por lo tanto, $3^3 \div 3^7 = 3^{-4}$

Entonces 3^{-4} y $\frac{1}{3^4}$ representan el mismo número.

Definición

a) **El exponente cero.**

Si a es un número real con $a \neq 0$ entonces:

$$a^0 = 1.$$

b) **El exponente negativo.**

Si a es un número real con $a \neq 0$ y n un número entero positivo entonces:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Con esta definición las propiedades de exponentes positivos se aplican también a los exponentes negativos y cero. Si a y b son reales, m y n enteros:

a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ c) $(a^m)^n = a^{m\times n}$

d) $a^m \times b^m = (a \times b)^m$ e) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

Problemas

1. Escribe las siguientes fracciones como una potencia con exponente negativo:

a) $\frac{1}{2^3}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{(-5)^5}$ d) $\frac{1}{10^8}$

2. Escribe las siguientes potencias con exponente negativo como fracciones:

a) 2^{-7} b) 3^{-5} c) 5^{-1} d) 7^{-2}

Indicador de logro

1.3 Expresa potencias con exponentes negativos como fracciones con exponente positivo y viceversa.

Secuencia

Se introduce la potencia con exponente negativo o cero, esto permite llevar las propiedades de los exponentes naturales hacia los exponentes enteros. Si el desarrollo del Problema inicial es muy difícil para los estudiantes debe desarrollarlo el docente.

Propósito

En el Problema inicial se plantea la posibilidad de aplicar la propiedad $a^m \div a^n = a^{m-n}$ donde m y n son enteros, que tiene sentido al ser una asignación única ($a^m \div a^n \rightarrow a^{m-n}$). Esto permitirá desarrollar en la Solución el cociente de manera habitual y desarrollarlo con exponentes.

Solución de problemas:

1a) $\frac{1}{2^3} = 2^{-3}$ **1b)** $\frac{1}{3} = 3^{-1}$ **1c)** $\frac{1}{(-5)^5} = (-5)^{-5}$ **1d)** $\frac{1}{10^8} = 10^{-8}$

2a) $2^{-7} = \frac{1}{2^7}$ **2b)** $3^{-5} = \frac{1}{3^5}$ **2c)** $5^{-1} = \frac{1}{5}$ **2d)** $7^{-2} = \frac{1}{7^2}$

Si los estudiantes terminan rápido, invítelos a desarrollar el problema 1, literales del a) al j) del Practica lo aprendido de esta lección.

1.4 Raíz n-ésima de un número real

Problema inicial

Determina un valor real de x en cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $x^3 = 27$ b) $x^4 = 625$

Solución

a) La descomposición prima de 27 es:

$$\begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$27 = 3^3$

Por lo tanto $x = 3$, es solución de la ecuación.

Así, a 3 se le denomina la raíz cúbica de 27 y se denota por $3 = \sqrt[3]{27}$.

b) La descomposición prima de 625 es:

$$\begin{array}{r|l} 625 & 5 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$625 = 5^4$

Por lo tanto, $x = 5$ es solución de la ecuación.

A 5 se le denomina la raíz cuarta de 625: $5 = \sqrt[4]{625}$.

También $x = -5$, es solución de la ecuación.

A –5 se le denomina raíz cuarta negativa de 625:
$-5 = -\sqrt[4]{625}$

Definición

Sea n un entero positivo, un número b que cumple la condición $b^n = a$ es llamado **raíz n-ésima** de a.

Al trabajar con raíces n-ésimas de números reales se distinguen dos casos:

1. Si n es impar, a cada número real a le corresponde una única raíz n-ésima y se denota por $\sqrt[n]{a}$.
2. Si n es par, a cada número real positivo a le corresponden dos raíces n-ésima reales, una positiva $\sqrt[n]{a}$ y una negativa $-\sqrt[n]{a}$.

Si se cumple una de las siguientes condiciones: n es impar o n es par y $a > 0$ entonces $\sqrt[n]{a^n} = a$.

índice ← $\sqrt[n]{a}$ → radical

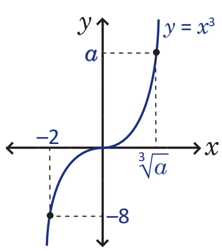
radicando

Si $n = 1 \Rightarrow \sqrt[1]{a} = a$.
Si $n = 2 \Rightarrow \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.

Si n es un entero positivo entonces $\sqrt[n]{0} = 0$.

Ejemplo

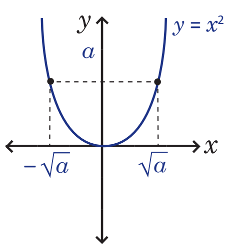
a) El número –8 tiene una única raíz cúbica:



$-8 = (-2)^3 \Longrightarrow \sqrt[3]{-8} = -2.$

Todo número real a tiene una única raíz cúbica $\sqrt[3]{a}$.

b) El número 16 tiene dos raíces cuadradas:



$\sqrt{16} = 4$ y $-\sqrt{16} = -4$

Todo número real positivo a tiene dos raíces cuadradas $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$.

Problemas

Expresa las siguientes igualdades utilizando la notación de raíz n-ésima.

a) $2^3 = 8$ b) $(-5)^3 = -125$ c) $3^4 = 81$ d) $(-7)^4 = 2401$

e) $6^2 = 36$ f) $(-2)^5 = -32$ g) $(-4)^5 = -1024$ h) $5^5 = 3125$

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$ j) $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$ k) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ l) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$

99

Unidad 4

Indicador de logro

1.4 Escribe potencias de números como raíces n-ésimas.

Secuencia

La definición de raíz n-ésima de un número real generaliza la definición de raíz cuadrada, vista en noveno grado, para un entero positivo n. Se utilizan únicamente las raíces n-ésimas reales.

Propósito

En la Definición, la raíz n-ésima de a donde n es par tiene el mismo tratamiento que para el de la raíz cuadrada: las raíces n-ésimas son las soluciones reales de la ecuación $b^n = a$, la raíz n-ésima positiva se denota por $\sqrt[n]{a}$ y la negativa por $-\sqrt[n]{a}$, que es el opuesto aditivo de $\sqrt[n]{a}$.

Solución de problemas:

a) $2^3 = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{8} = 2$

b) $(-5)^3 = -125 \Rightarrow \sqrt[3]{-125} = -5$

c) $3^4 = 81 \Rightarrow \sqrt[4]{81} = 3$

d) $(-7)^4 = 2\,401 \Rightarrow -\sqrt[4]{2\,401} = -7$

e) $6^2 = 36 \Rightarrow \sqrt{36} = 6$

f) $(-2)^5 = -32 \Rightarrow \sqrt[5]{-32} = -2$

g) $(-4)^5 = -1\,024 \Rightarrow \sqrt[5]{-1\,024} = -4$

h) $5^5 = 3\,125 \Rightarrow \sqrt[5]{3\,125} = 5$

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} \Rightarrow \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$

j) $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$

k) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \Rightarrow -\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = -\frac{1}{2}$

l) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27} \Rightarrow \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$

En los literales d) y k) se debe tener cuidado de escribir el signo negativo antes del radical ya que la base de la potencia hace referencia a la raíz negativa del número.

1.5 Expresión de números sin el símbolo radical

Problema inicial

Expresa los siguientes números sin el símbolo radical.

a) $\sqrt[3]{729}$ b) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$

Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es divisible por tres.

Solución

a) $\sqrt[3]{729}$

$729 = 3^6$ se descompone 729,

$= 3^3 \times 3^3$ se reescribe como producto de potencias de índice 3,

$= (3 \times 3)^3$ al utilizar propiedades de potencia,

$= 9^3$.

Es decir, al elevar 9 al cubo se obtiene 729.

Por lo tanto, $\sqrt[3]{729} = 9$.

b) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$

$\frac{16}{81} = \frac{2^4}{3^4}$ se descomponen 16 y 81,

$= \left(\frac{2}{3}\right)^4$ al utilizar propiedades de potencia,

entonces al elevar $\frac{2}{3}$ a la cuarta se obtiene $\frac{16}{81}$.

Por lo tanto, $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$.

Conclusión

Para escribir sin radical el número real $\sqrt[n]{a}$ realiza lo siguiente:

Ejemplo: $\sqrt[3]{1728}$

1. Escribe la descomposición prima de a, si el radicando es una fracción se descompone el numerador y el denominador. ⟶ $1728 = 2^6 \times 3^3$
2. Expresa la descomposición como producto de potencias con exponente n. ⟶ $1728 = 2^3 \times 2^3 \times 3^3$
3. Utiliza la propiedad de producto o división de potencias con el mismo exponente. ⟶ $1728 = (2 \times 2 \times 3)^3 = 12^3$
4. Se obtiene una expresión de la forma $a = b^n$, entonces $\sqrt[n]{a} = b$. ⟶ $\sqrt[3]{1728} = 12$

Si n es un entero impar y a un número real entonces $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$.

Si n es par, las raíces n-ésimas de números negativos no son números reales.

Problemas

Expresa los siguientes números sin el símbolo radical.

a) $\sqrt[4]{16}$ b) $\sqrt[5]{243}$ c) $\sqrt[7]{128}$ d) $\sqrt[5]{100\,000}$

e) $\sqrt[3]{-216}$ f) $\sqrt[4]{256}$ g) $\sqrt[3]{\frac{512}{343}}$ h) $\sqrt[6]{\frac{64}{729}}$

Indicador de logro

1.5 Calcula raíces n-ésimas descomponiendo el radicando en factores primos.

Secuencia

En esta clase se expresa la raíz n-ésima exacta de un número real de forma simplificada, es decir, sin el símbolo radical; a partir de aquí se efectúa la simplificación de raíces, sin embargo, no se contempla aún la distribución del radical sobre los factores, si no que se utiliza la propiedad de la distribución del exponente sobre los factores y la definición misma de raíz n-ésima. La distribución del radical se abordará en la siguiente clase.

Propósito

La expresión $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$, donde n es impar, que se muestra en la Conclusión será util en aquellos problemas cuando el radicando tiene signo negativo; de esta manera se traslada el problema a calcular la raíz n-ésima de un número positivo.

Solución de problemas:

En la solución de cada literal se espera el uso de la descomposición en factores primos y la definición de raíz n-ésima.

a) $16 = 2^4$

$\Rightarrow \sqrt[4]{16} = 2$

$$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

b) $243 = 3^5$

$\Rightarrow \sqrt[5]{243} = 3$

$$\begin{array}{r|l} 243 & 3 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

c) $128 = 2^7 \Rightarrow \sqrt[7]{128} = 2$

d) $100\,000 = 2^5 \times 5^5$

$\Rightarrow 100\,000 = (2 \times 5)^5$

$\Rightarrow 100\,000 = 10^5$

$\Rightarrow \sqrt[5]{100\,000} = 10$

e) $\sqrt[3]{-216} = -\sqrt[3]{216}$

$216 = 2^3 \times 3^3$

$\Rightarrow 216 = (2 \times 3)^3$

$\Rightarrow 216 = 6^3$

$\Rightarrow \sqrt[3]{216} = 6$

$\Rightarrow \sqrt[3]{-216} = -\sqrt[3]{216} = -6$

f) $256 = 2^4 \times 2^4$

$\Rightarrow 256 = (2 \times 2)^4$

$\Rightarrow 256 = 4^4$

$\Rightarrow \sqrt[4]{256} = 4$

g) $512 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \Rightarrow 512 = (2 \times 2 \times 2)^3 \Rightarrow 512 = 8^3$

$343 = 7^3$

$\Rightarrow \dfrac{512}{343} = \dfrac{8^3}{7^3}$

$\Rightarrow \dfrac{512}{343} = \left(\dfrac{8}{7}\right)^3$

$\Rightarrow \sqrt[3]{\dfrac{512}{343}} = \dfrac{8}{7}$

h) $64 = 2^6$ y $729 = 3^6$

$\Rightarrow \dfrac{64}{729} = \dfrac{2^6}{3^6}$

$\Rightarrow \dfrac{64}{729} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^6$

$\Rightarrow \sqrt[6]{\dfrac{64}{729}} = \dfrac{2}{3}$

1.6 Operaciones con raíces n-ésimas

Problema inicial

Utiliza la definición de raíz n-ésima para expresar con un solo radical las siguientes operaciones.

a) $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{20}$ b) $\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{128}}$

Solución

a) $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{20}$

$(\sqrt[3]{6})^3 = 6$ y $(\sqrt[3]{20})^3 = 20$ se utiliza la definición de raíz cúbica,

$(\sqrt[3]{6})^3 \times (\sqrt[3]{20})^3 = 6 \times 20$ se multiplican miembro a miembro las igualdades anteriores,

$(\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{20})^3 = 6 \times 20$ al aplicar propiedades de potencia en el miembro izquierdo,

$\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{6 \times 20}$ se expresa la potencia como raíz cúbica,

$\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{120}$ se efectúa el producto.

Por lo tanto, $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{120}$.

b) $\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3}$

$(\sqrt[4]{96})^4 = 96$ y $(\sqrt[4]{3})^4 = 3$ se utiliza la definición de raíz cuarta,

$(\sqrt[4]{96})^4 \div (\sqrt[4]{3})^4 = 96 \div 3$ se divide miembro a miembro,

$(\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3})^4 = 96 \div 3$ al aplicar propiedades de potencia en el miembro izquierdo,

$\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{96 \div 3}$ se expresa la potencia como raíz cuarta ($\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3} > 0$),

$\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{32}$ se efectúa la división.

Por lo tanto, $\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{32}$.

c) $\sqrt{\sqrt[3]{128}}$

$\left(\sqrt{\sqrt[3]{128}}\right)^2 = \sqrt[3]{128}$ se utiliza la definición de raíz cuadrada,

$\left[\left(\sqrt{\sqrt[3]{128}}\right)^2\right]^3 = (\sqrt[3]{128})^3 = 128$ se utiliza la definición de raíz cúbica,

$\left(\sqrt{\sqrt[3]{128}}\right)^{2 \times 3} = 128$ al aplicar propiedades de potencia,

$\left(\sqrt{\sqrt[3]{128}}\right)^6 = 128$ se efectúa el producto,

$\sqrt{\sqrt[3]{128}} = \sqrt[6]{128}$ se expresa la potencia como raíz sexta $\left(\sqrt{\sqrt[3]{128}} > 0\right)$.

Por lo tanto, $\sqrt{\sqrt[3]{128}} = \sqrt[6]{128}$.

Conclusión

Para efectuar:	Se tiene que:	Escribiendo como raíz n-ésima:
a) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$ ⇒	$(\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b})^n = a \times b$ ⇒	$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$
b) $\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b}$ ⇒	$(\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b})^n = a \div b$ ⇒	$\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \div b}$
c) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ ⇒	$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m \times n} = a$ ⇒	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\times n]{a}$

Para simplificar una raíz n-ésima se utiliza la propiedad de la multiplicación:

$$\sqrt[n]{a^n \times b} = \sqrt[n]{a^n} \times \sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b}$$

Si $a_1, a_2, \dots, a_m$ son números reales entonces:
$\sqrt[n]{a_1} \times \sqrt[n]{a_2} \times \cdots \times \sqrt[n]{a_m} = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_m}$

La propiedad b) también se utiliza así:

b) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

Simplificar una raíz es expresarla con un radicando menor al inicial.

Simplificar a la mínima expresión es simplificar el radicando al menor valor posible.

Después de efectuar una operación con radicales siempre debe simplificarse a la mínima expresión.

Ejemplo

1. Simplifica los resultados del Problema inicial.

a) $\sqrt[3]{120}$

$\sqrt[3]{120} = \sqrt[3]{2^3 \times 3 \times 5}$
$= 2\sqrt[3]{3 \times 5}$
$= 2\sqrt[3]{15}$

Por lo tanto, $\sqrt[3]{120} = 2\sqrt[3]{15}$.

b) $\sqrt[4]{32}$

$\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^4 \times 2}$
$= 2\sqrt[4]{2}$

Por lo tanto, $\sqrt[4]{32} = 2\sqrt[4]{2}$.

c) $\sqrt[6]{128}$

$\sqrt[6]{128} = \sqrt[6]{2^6 \times 2}$
$= 2\sqrt[6]{2}$

Por lo tanto, $\sqrt[6]{128} = 2\sqrt[6]{2}$.

2. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\sqrt[8]{4} \times \sqrt[8]{8} \times \sqrt[8]{2} \times \sqrt[8]{4}$

$\sqrt[8]{4} \times \sqrt[8]{8} \times \sqrt[8]{2} \times \sqrt[8]{4} = \sqrt[8]{4 \times 8 \times 2 \times 4}$
$= \sqrt[8]{2^2 \times 2^3 \times 2 \times 2^2}$
$= \sqrt[8]{2^8}$
$= 2$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}$

$\dfrac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\dfrac{108}{4}}$
$= \sqrt[3]{27}$
$= \sqrt[3]{3^3}$
$= 3$

Problemas

Efectúa las siguientes operaciones, simplifica a la mínima expresión tu respuesta.

a) $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{10}$ b) $-\sqrt[4]{75} \times \sqrt[4]{50}$ c) $-\sqrt[5]{45} \times (-\sqrt[5]{81})$

d) $\sqrt[3]{320} \div \sqrt[3]{10}$ e) $\sqrt[3]{486} \div (-\sqrt[3]{6}\,)$ f) $-\sqrt[4]{192} \div (-\sqrt[4]{6}\,)$

g) $\sqrt{\sqrt{80}}$ h) $-\sqrt{\sqrt[3]{640}}$ i) $\sqrt[3]{-\sqrt{256}}$

Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es divisible por 3.

102

Indicador de logro

1.6 Determina el producto, cociente y raíz de raíces simplificando los resultados a su mínima expresión.

Secuencia

Se estudian las operaciones con raíces n-ésimas a partir de la definición; en este caso la multiplicación y división, así como la raíz de una raíz; además, se deja por sentado el concepto de simplificación a partir de la multiplicación de raíces.

Propósito

En el Problema inicial se dejan indicadas las raíces, pues se simplificarán hasta el Ejemplo, una vez que ya se ha tratado la distribución del radical sobre los factores para simplificar. En la Solución se debe utilizar la definición de raíz n-ésima y las propiedades de potencia. En el Ejemplo, la descomposición en factores se utiliza de tal modo que los exponentes sean igual al índice de la raíz.

Solución de problemas:

a) $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{4 \times 10} = \sqrt[3]{2^3 \times 5} = 2\sqrt[3]{5}$

b) $-\sqrt[4]{75} \times \sqrt[4]{50} = -\sqrt[4]{75 \times 50} = -\sqrt[4]{2 \times 3 \times 5^4} = -5\sqrt[4]{6}$

c) $-\sqrt[5]{45} \times (-\sqrt[5]{81}) = \sqrt[5]{45 \times 81} = \sqrt[5]{3^5 \times 3 \times 5} = 3\sqrt[5]{15}$

d) $\sqrt[3]{320} \div \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{320 \div 10} = \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^2} = 2\sqrt[3]{4}$

e) $\sqrt[3]{486} \div (-\sqrt[3]{6}) = -\sqrt[3]{486 \div 6} = -\sqrt[3]{81} = -\sqrt[3]{3^3 \times 3} = -3\sqrt[3]{3}$

Las divisiones pueden calcularse utilizando fracciones y simplificándolas, esto para facilitar los cálculos.

f) $-\sqrt[4]{192} \div (-\sqrt[4]{6}) = \sqrt[4]{192 \div 6} = \sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^4 \times 2} = 2\sqrt[4]{2}$

g) $\sqrt{\sqrt{80}} = \sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{2^4 \times 5} = 2\sqrt[4]{5}$

h) $-\sqrt{\sqrt[3]{640}} = -\sqrt[6]{640} = -\sqrt[6]{2^6 \times 2 \times 5} = -2\sqrt[6]{10}$

i) $\sqrt[3]{-\sqrt{256}} = -\sqrt[3]{\sqrt{256}} = -\sqrt[6]{256} = -\sqrt[6]{2^6 \times 2^2} = -2\sqrt[6]{4}$

1.7 Suma, resta y potencia de raíces n-ésimas

Problema inicial

Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54}$

b) $(\sqrt[6]{4})^3$

Dos raíces pueden sumarse o restarse si son semejantes es decir, si tienen igual índice e igual radicando.

Solución

a) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54}$

Simplificando a la mínima expresión:

$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^3 \times 2}$ y $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2 \times 3^3}$

$= 2\sqrt[3]{2}$ $\qquad$ $= 3\sqrt[3]{2}$

Se efectúa la suma de raíces semejantes:

$\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} = 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2}$

$= 5\sqrt[3]{2}$

Por lo tanto, $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} = 5\sqrt[3]{2}$.

b) $(\sqrt[6]{4}\,)^3$

Se descompone la potencia como producto:

$(\sqrt[6]{4}\,)^3 = \sqrt[6]{4} \times \sqrt[6]{4} \times \sqrt[6]{4}$

$= \sqrt[6]{4 \times 4 \times 4}$

$= \sqrt[6]{4^3}$ se expresa como potencia.

Simplificando: $\sqrt[6]{4^3} = \sqrt[6]{(2^2)^3} = \sqrt[6]{2^6} = 2$.

Por lo tanto, $(\sqrt[6]{4})^3 = 2$.

Conclusión

1. Los pasos para realizar suma o resta de raíces n-ésimas son:
   - Simplificar las raíces a la mínima expresión.
   - Sumar o restar raíces semejantes.

2. La potencia de una raíz real cumple $(\sqrt[n]{a})^m = \underbrace{\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \times \cdots \times \sqrt[n]{a}}_{m\text{-veces}}$

   Utilizando las propiedades de raíz n-ésima: $(\sqrt[n]{a}\,)^m = \sqrt[n]{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m\text{-veces}}}$

   Reescribiendo como potencia el radicando: $\boldsymbol{(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}}$

El número $\sqrt[n]{a}$ no es real, si n es par y a negativo.

Por ejemplo:
$\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[4]{-2}$, $\sqrt[6]{-1}$ y $\sqrt[6]{-2}$, no son números reales.

Problemas

1. Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81}$ b) $\sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{512}$ c) $\sqrt[4]{80} + \sqrt[4]{405}$ d) $\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{135}$

e) $\sqrt[3]{500} - \sqrt[3]{108}$ f) $\sqrt[3]{576} - \sqrt[3]{72}$ g) $\sqrt[3]{486} - \sqrt[3]{144}$ h) $\sqrt[4]{243} - \sqrt[4]{48}$

i) $(\sqrt[5]{27})^2$ j) $(\sqrt[6]{8})^5$ k) $(\sqrt[3]{25})^2$ l) $(\sqrt[4]{27})^3$

2. Para demostrar que $2 = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} - \sqrt[3]{-10 + \sqrt{108}}$, realiza los siguientes pasos:

a) Demuestra que $(1 + \sqrt{3})^3 = 10 + 6\sqrt{3}$, luego escribe esta igualdad como raíz cúbica.

b) Demuestra que $(-1 + \sqrt{3})^3 = -10 + 6\sqrt{3}$, luego escribe esta igualdad como raíz cúbica.

c) Efectúa la resta de las raíces cúbicas de los literales anteriores y concluye.

Indicador de logro

1.7 Suma y resta raíces semejantes y simplifica la potencia de una raíz escribiendo los resultados en su mínima expresión.

Secuencia

Ahora se estudia la suma, resta y potencia de raíces n-ésimas. Si el índice es mayor que el exponente la simplificación no se efectúa aún.

Propósito

El Problema inicial y los Problemas se desarrollan de tal manera que puedan efectuarse operaciones entre raíces semejantes. En la Conclusión, en el numeral 2 se debe entender que la igualdad es valida siempre que $\sqrt[n]{a}$ esté bien definida.

Solución de problemas:

1a) $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{2^3 \times 3} + \sqrt[3]{3^3 \times 3} = 2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} = 5\sqrt[3]{3}$

1b) $\sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{512} = \sqrt[4]{2^4 \times 2} + \sqrt[4]{2^4 \times 2^4 \times 2} = 2\sqrt[4]{2} + 2 \times 2\sqrt[4]{2} = 2\sqrt[4]{2} + 4\sqrt[4]{2} = 6\sqrt[4]{2}$

1c) $\sqrt[4]{80} + \sqrt[4]{405} = \sqrt[4]{2^4 \times 5} + \sqrt[4]{3^4 \times 5} = 2\sqrt[4]{5} + 3\sqrt[4]{5} = 5\sqrt[4]{5}$

1d) $\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{135} = \sqrt[3]{2^3 \times 5} + \sqrt[3]{3^3 \times 5} = 2\sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{5} = 5\sqrt[3]{5}$

1e) $\sqrt[3]{500} - \sqrt[3]{108} = \sqrt[3]{2^2 \times 5^3} - \sqrt[3]{2^2 \times 3^3} = 5\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4}$

1f) $\sqrt[3]{576} - \sqrt[3]{72} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 3^2} - \sqrt[3]{2^3 \times 3^2} = 2 \times 2\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{9} = 4\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{9} = 2\sqrt[3]{9}$

1g) $\sqrt[3]{486} - \sqrt[3]{144} = \sqrt[3]{2 \times 3^3 \times 3^2} - \sqrt[3]{2^3 \times 2 \times 3^2} = 3\sqrt[3]{18} - 2\sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{18}$

1h) $\sqrt[4]{243} - \sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{3^4 \times 3} - \sqrt[4]{2^4 \times 3} = 3\sqrt[4]{3} - 2\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{3}$

1i) $(\sqrt[5]{27})^2 = \sqrt[5]{27^2} = \sqrt[5]{(3^3)^2} = \sqrt[5]{3^{3 \times 2}} = \sqrt[5]{3^6} = \sqrt[5]{3^5 \times 3} = 3\sqrt[5]{3}$

1j) $(\sqrt[6]{8})^5 = \sqrt[6]{8^5} = \sqrt[6]{(2^3)^5} = \sqrt[6]{2^{3 \times 5}} = \sqrt[6]{2^{15}} = \sqrt[6]{2^6 \times 2^6 \times 2^3} = 2 \times 2\sqrt[6]{2^3} = 4\sqrt[6]{8}$

1k) $(\sqrt[3]{25})^2 = \sqrt[3]{25^2} = \sqrt[3]{(5^2)^2} = \sqrt[3]{5^4} = \sqrt[3]{5^3 \times 5} = 5\sqrt[3]{5}$

1l) $(\sqrt[4]{27})^3 = \sqrt[4]{27^3} = \sqrt[4]{(3^3)^3} = \sqrt[4]{3^9} = \sqrt[4]{3^4 \times 3^4 \times 3} = 3 \times 3\sqrt[4]{3} = 9\sqrt[4]{3}$

En algunos casos, como el literal b, también puede utilizar la distribución del exponente sobre la base en el radicando o utilizar la descomposición en primos convenientemente:

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{2^4 \times 2^4 \times 2} &= \sqrt[4]{(2 \times 2)^4 \times 2}\\ &= \sqrt[4]{4^4 \times 2}\\ &= 4\sqrt[4]{2}\end{aligned}$$

2a) $(1 + \sqrt{3})^3 = 1^3 + 3(1)^2(\sqrt{3}) + 3(1)(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^3 = 1 + 3\sqrt{3} + 3(3) + \sqrt{3^3} = 1 + 3\sqrt{3} + 9 + \sqrt{3^2 \times 3}$
$= 1 + 3\sqrt{3} + 9 + 3\sqrt{3} = 10 + 6\sqrt{3}$

Entonces, $1 + \sqrt{3} = \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}$.

2b) $(-1 + \sqrt{3})^3 = (-1)^3 + 3(-1)^2(\sqrt{3}) + 3(-1)(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^3 = -1 + 3\sqrt{3} - 9 + 3\sqrt{3} = -10 + 6\sqrt{3}$

Entonces, $-1 + \sqrt{3} = \sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}}$.

2c) $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} - \sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3} - (-1 + \sqrt{3}) = 1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 2$

Por lo tanto, $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} - \sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}} = 2$.

1.8 Exponente racional

Problema inicial

1. Simplifica las siguientes expresiones, escribe tu respuesta como una potencia.
   a) $\sqrt{2^6}$
   b) $\sqrt[3]{2^{12}}$

2. Demuestra que $\sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2^2}$.

Recuerda que para todo número real a positivo:
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\times n]{a}$ y $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Solución

1. a) $\sqrt{2^6} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2^2}$

$= 2 \times 2 \times 2$

$= 2^3$.

Por lo tanto, $\sqrt{2^6} = 2^3$.

Se observa que $3 = \frac{6}{2}$ $\begin{matrix}\longrightarrow \text{exponente}\\ \longrightarrow \text{índice}\end{matrix}$

b) $\sqrt[3]{2^{12}} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3}$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 2^4$.

Por lo tanto, $\sqrt[3]{2^{12}} = 2^4$.

Se observa que $4 = \frac{12}{3}$ $\begin{matrix}\longrightarrow \text{exponente}\\ \longrightarrow \text{índice}\end{matrix}$

2. $\sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{\sqrt{2^4}}$ por propiedades de raíces n-ésimas,

$= \sqrt[3]{\sqrt{(2^2)^2}}$ al aplicar propiedades de potencia,

$= \sqrt[3]{2^2}$ se utiliza que $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Por lo tanto, $\sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2^2}$. Se observa que $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ $\begin{matrix}\longrightarrow \text{exponente}\\ \longrightarrow \text{índice}\end{matrix}$

Definición

Si a es un número real positivo, m y n son números enteros y n es positivo, se define:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Una potencia con exponente racional $\frac{m}{n}$ es la raíz n-ésima de una potencia m-ésima.

Además, si r es un entero positivo se cumple que $\sqrt[nr]{a^{mr}} = \sqrt[n]{a^m}$, por lo que es válida la simplificación de exponentes racionales, para todo $a > 0$:

$$a^{\frac{mr}{nr}} = a^{\frac{m}{n}}$$

Problemas

1. Escribe las siguientes raíces como potencias con exponente fraccionario, simplifica si se puede.
   a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3^3}$ c) $\sqrt[3]{2}$ d) $\sqrt[3]{3^2}$
   e) $\sqrt[4]{5^2}$ f) $\sqrt[5]{2^{10}}$ g) $\sqrt[5]{6^3}$ h) $\sqrt[6]{5^2}$

2. Escribe las siguientes potencias fraccionarias como raíces de una potencia.
   a) $5^{\frac{1}{2}}$ b) $3^{\frac{5}{2}}$ c) $2^{\frac{5}{2}}$ d) $7^{\frac{3}{8}}$
   e) $12^{\frac{3}{7}}$ f) $11^{\frac{7}{2}}$ g) $9^{\frac{5}{3}}$ h) $10^{\frac{1}{4}}$

Indicador de logro

1.8 Utiliza exponentes racionales para representar raíces n-ésimas de un número y viceversa.

Secuencia

En esta clase se realiza la extensión de los valores que pueden ir en el exponente: desde los enteros hacia los racionales, utilizando la definición de exponente racional como la raíz n-ésima de un número real.

Propósito

En el Problema inicial se plantean dos situaciones: la primera es para inducir que el exponente puede ser una fracción y la segunda para ejemplificar la posibilidad de efectuar la simplificación en el exponente; por lo que, es pertinente hacer la observación planteada en la Solución.

Solución de problemas:

1a) $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

1b) $\sqrt{3^3} = 3^{\frac{3}{2}}$

1c) $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$

1d) $\sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}}$

1e) $\sqrt[4]{5^2} = 5^{\frac{2}{4}} = 5^{\frac{1}{2}}$

1f) $\sqrt[5]{2^{10}} = 2^{\frac{10}{5}} = 2^2$

1g) $\sqrt[5]{6^3} = 6^{\frac{3}{5}}$

1h) $\sqrt[6]{5^2} = 5^{\frac{2}{6}} = 5^{\frac{1}{3}}$

2a) $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

2b) $3^{\frac{5}{2}} = \sqrt{3^5} = 9\sqrt{3}$

2c) $2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5} = 4\sqrt{2}$

2d) $7^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{7^3}$

2e) $12^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{12^3}$

2f) $11^{\frac{7}{2}} = \sqrt{11^7} = 11^3\sqrt{11}$

2g) $9^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{9^5} = 27\sqrt[3]{3}$

2h) $10^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{10}$

1.9 Propiedades de los exponentes racionales

Problema inicial

Realiza las siguientes operaciones expresando tu respuesta como potencia con exponente racional.

a) $2^{\frac{5}{4}} \times 2^{\frac{3}{4}}$ b) $3^{\frac{10}{3}} \div 3^{\frac{1}{3}}$ c) $(8^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$ d) $3^{\frac{2}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}}$ e) $32^{\frac{3}{4}} \div 2^{\frac{3}{4}}$

Solución

a) $2^{\frac{5}{4}} \times 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^5} \times \sqrt[4]{2^3}$ se escribe como raíz,

$= \sqrt[4]{2^5 \times 2^3}$

$= \sqrt[4]{2^8}$

$= 2^{\frac{8}{4}}$

$= 2^2$.

Por lo tanto, $2^{\frac{5}{4}} \times 2^{\frac{3}{4}} = 2^2$. Observa que: $2^{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}} = 2^2$.

b) $3^{\frac{10}{3}} \div 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3^{10}} \div \sqrt[3]{3^1}$ se escribe como raíz,

$= \sqrt[3]{3^{10} \div 3^1}$

$= \sqrt[3]{3^9}$

$= 3^{\frac{9}{3}}$

$= 3^3$.

Por lo tanto, $3^{\frac{10}{3}} \div 3^{\frac{1}{3}} = 3^3$. Se observa que: $3^{\frac{10}{3}-\frac{1}{3}} = 3^3$.

c) $(8^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = (\sqrt[3]{8^2})^{\frac{1}{2}}$ se escribe como raíz cúbica,

$= \sqrt[2]{\sqrt[3]{8^2}}$ se escribe como raíz cuadrada,

$= \sqrt[6]{8^2}$

$= 8^{\frac{2}{6}}$

$= 8^{\frac{1}{3}}$.

Por lo tanto $(8^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{3}}$. Se observa que: $8^{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{3}}$.

d) $3^{\frac{2}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} \times \sqrt[3]{9^2}$ se escribe como raíz,

$= \sqrt[3]{3^2 \times 9^2}$

$= \sqrt[3]{(3 \times 9)^2}$

$= \sqrt[3]{27^2}$

$= 27^{\frac{2}{3}}$.

Por lo tanto $3^{\frac{2}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}} = 27^{\frac{2}{3}}$.

Observa que: $(3 \times 9)^{\frac{2}{3}} = 27^{\frac{2}{3}}$.

e) $32^{\frac{3}{4}} \div 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{32^3} \div \sqrt[4]{2^3}$ se escribe como raíz,

$= \sqrt[4]{32^3 \div 2^3}$

$= \sqrt[4]{(32 \div 2)^3}$

$= \sqrt[4]{16^3}$

$= 16^{\frac{3}{4}}$.

Por lo tanto, $32^{\frac{3}{4}} \div 2^{\frac{3}{4}} = 16^{\frac{3}{4}}$. Se observa que: $(32 \div 2)^{\frac{3}{4}} = 16^{\frac{3}{4}}$.

Conclusión

1. Las propiedades con exponentes enteros se aplican también a los exponentes racionales. Si a y b son números reales positivos, m y n son números racionales, entonces:

   a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ c) $(a^m)^n = a^{m \times n}$ d) $a^m \times b^m = (a \times b)^m$ e) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

2. Para simplificar una potencia racional se debe verificar que la base sea la menor posible.

Ejemplo

Simplifica las respuestas de los literales c), d) y e) del problema inicial.

c) $8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{\cancel{3}\times 1}{\cancel{3}}} = 2$ d) $27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{\cancel{3}\times 2}{\cancel{3}}} = 3^2$ e) $16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{\cancel{4}\times 3}{\cancel{4}}} = 2^3$

Problemas

Realiza las siguientes operaciones, simplifica tu respuesta.

a) $2^{\frac{7}{5}} \times 2^{\frac{8}{5}}$ b) $9^{\frac{1}{5}} \times 9^{\frac{3}{10}}$ c) $25 \div 25^{\frac{1}{2}}$ d) $27^{\frac{5}{3}} \div 27$

e) $(9^{\frac{9}{7}})^{\frac{7}{6}}$ f) $(8^{\frac{10}{9}})^{\frac{3}{2}}$ g) $16^{\frac{5}{6}} \times 4^{\frac{5}{6}}$ h) $98^{\frac{1}{2}} \div 2^{\frac{1}{2}}$

Unidad 4

Indicador de logro

1.9 Aplica las propiedades de los exponentes, combinando exponentes racionales y enteros.

Secuencia

Se realizan las operaciones entre potencias cuyos exponentes son racionales, de manera análoga a como se realizaron con exponentes enteros, esto permitirá posteriormente efectuar operaciones entre raíces cuyo índice es distinto. Además, para simplificar se debe revisar si la potencia tiene la menor base posible.

Propósito

En la Solución del Problema inicial se debe utilizar la definición del exponente racional. La observación realizada en cada literal es para mostrar la utilidad de las propiedades que permiten desarrollar la operación en menos pasos y sin utilizar explícitamente la definición.

Solución de problemas:

a) $2^{\frac{7}{5}} \times 2^{\frac{8}{5}} = 2^{\frac{7}{5}+\frac{8}{5}} = 2^{\frac{15}{5}} = 2^3$

b) $9^{\frac{1}{5}} \times 9^{\frac{3}{10}} = 9^{\frac{1}{5}+\frac{3}{10}} = 9^{\frac{2}{10}+\frac{3}{10}} = 9^{\frac{5}{10}} = 9^{\frac{1}{2}} = (3^2)^{\frac{1}{2}} = 3^{2\times\frac{1}{2}} = 3$

c) $25 \div 25^{\frac{1}{2}} = 25^{1-\frac{1}{2}} = 25^{\frac{2}{2}-\frac{1}{2}} = 25^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5^{2\times\frac{1}{2}} = 5$

d) $27^{\frac{5}{3}} \div 27 = 27^{\frac{5}{3}-1} = 27^{\frac{5}{3}-\frac{3}{3}} = 27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^{3\times\frac{2}{3}} = 3^2$

e) $\left(9^{\frac{9}{7}}\right)^{\frac{7}{6}} = 9^{\frac{9}{7}\times\frac{7}{6}} = 9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^{2\times\frac{3}{2}} = 3^3$

f) $\left(8^{\frac{10}{9}}\right)^{\frac{3}{2}} = 8^{\frac{10}{9}\times\frac{3}{2}} = 8^{\frac{5}{3}} = (2^3)^{\frac{5}{3}} = 2^{3\times\frac{5}{3}} = 2^5$

g) *Forma 1:* $16^{\frac{5}{6}} \times 4^{\frac{5}{6}} = (16 \times 4)^{\frac{5}{6}} = (2^4 \times 2^2)^{\frac{5}{6}} = (2^6)^{\frac{5}{6}} = 2^{6\times\frac{5}{6}} = 2^5$

Forma 2: $16^{\frac{5}{6}} \times 4^{\frac{5}{6}} = (2^4)^{\frac{5}{6}} \times (2^2)^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{20}{6}} \times 2^{\frac{10}{6}} = 2^{\frac{30}{6}} = 2^5$

h) $98^{\frac{1}{2}} \div 2^{\frac{1}{2}} = (98 \div 2)^{\frac{1}{2}} = (49)^{\frac{1}{2}} = (7^2)^{\frac{1}{2}} = 7^{2\times\frac{1}{2}} = 7$

También se pueden reescribir las potencias con la menor base posible antes de efectuar las operaciones.

1.10 Operaciones con raíces de distinto índice

Problema inicial

Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3}$

b) $\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[12]{9}$

Solución

Se escribe cada raíz como exponente racional:

a) $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3}$

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3} &= 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}}\\ &= 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}\\ &= 3^{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}}\\ &= 3^1\\ &= 3.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3} = 3$.

b) $\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[12]{9}$

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[12]{9} &= 9^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{1}{3}} \div 9^{\frac{1}{12}}\\ &= 9^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}}\\ &= 9^{\frac{3}{12}+\frac{4}{12}-\frac{1}{12}}\\ &= 9^{\frac{6}{12}}\\ &= 9^{\frac{1}{2}}\\ &= (3^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{simplificando}\\ &= 3.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[12]{9} = 3$.

Conclusión

Para operar raíces con distinto índice, se realizan los siguientes pasos:

1. Cada raíz se escribe como potencia con exponente racional.
2. Se efectúan las operaciones utilizando propiedades de exponentes racionales.
3. Se simplifica el resultado.

Ejemplo

Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{32} \times \sqrt[3]{4} \div \sqrt[6]{2}$

$$\begin{aligned}\sqrt{32} \times \sqrt[3]{4} \div \sqrt[6]{2} &= \sqrt{2^5} \times \sqrt[3]{2^2} \div \sqrt[6]{2}\\ &= 2^{\frac{5}{2}} \times 2^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{6}}\\ &= 2^{\frac{5}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}\\ &= 2^{\frac{15}{6}+\frac{4}{6}-\frac{1}{6}}\\ &= 2^{\frac{18}{6}}\\ &= 2^3\\ &= 8.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt{32} \times \sqrt[3]{4} \div \sqrt[6]{2} = 8$.

b) $\sqrt{3} \times \sqrt[6]{3}$

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \times \sqrt[6]{3} &= 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{6}}\\ &= 3^{\frac{3}{6}+\frac{1}{6}}\\ &= 3^{\frac{4}{6}}\\ &= 3^{\frac{2}{3}} \qquad \text{no se puede simplificar,}\\ &= \sqrt[3]{3^2} \qquad \text{se escribe como raíz,}\\ &= \sqrt[3]{9}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt{3} \times \sqrt[6]{3} = \sqrt[3]{9}$.

Problemas

Realiza las siguientes operaciones, simplifica tu respuesta.

a) $\sqrt{8} \times \sqrt[4]{8} \div \sqrt[12]{8}$

b) $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3}$

d) $\sqrt[4]{4} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[12]{32}$

e) $\sqrt{243} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[6]{3}$

f) $\sqrt[4]{25} \div \sqrt[6]{5}$

Indicador de logro

1.10 Aplica las propiedades de los exponentes racionales para realizar operaciones de raíces con distinto índice.

Secuencia

La utilidad de los exponentes racionales se muestra en esta clase al efectuar operaciones entre raíces con diferente índice.

Propósito

Dado que las operaciones se indican con raíces n-ésimas entonces la respuesta se expresa como una raíz, como se muestra en el Ejemplo b).

Solución de problemas:

a) $\sqrt{8} \times \sqrt[4]{8} \div \sqrt[12]{8} = 8^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{1}{4}} \div 8^{\frac{1}{12}} = 8^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}} = 8^{\frac{6}{12}+\frac{3}{12}-\frac{1}{12}} = 8^{\frac{8}{12}} = 8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3 \times \frac{2}{3}} = 2^2 = 4$

b) $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}} = 3^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{3^5}$

c) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3} = 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 3^{\frac{2}{6}+\frac{1}{6}} = 3^{\frac{3}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

d) $\sqrt[4]{4} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[12]{32} = 4^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 32^{\frac{1}{12}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times (2^5)^{\frac{1}{12}} = 2^{\frac{2}{4}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{5}{12}} = 2^{\frac{2}{4}+\frac{1}{3}+\frac{5}{12}} = 2^{\frac{6}{12}+\frac{4}{12}+\frac{5}{12}} = 2^{\frac{15}{12}} = 2^{\frac{5}{4}}$

$= \sqrt[4]{2^5} = \sqrt[4]{2^4 \times 2} = 2\sqrt[4]{2}$

e) $\sqrt{243} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[6]{3} = 243^{\frac{1}{2}} \times 9^{\frac{1}{3}} \div 3^{\frac{1}{6}} = (3^5)^{\frac{1}{2}} \times (3^2)^{\frac{1}{3}} \div 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{5}{2}} \times 3^{\frac{2}{3}} \div 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{5}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = 3^{\frac{15}{6}+\frac{4}{6}-\frac{1}{6}} = 3^{\frac{18}{6}} = 3^3 = 27$

f) $\sqrt[4]{25} \div \sqrt[6]{5} = 25^{\frac{1}{4}} \div 5^{\frac{1}{6}} = (5^2)^{\frac{1}{4}} \div 5^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{2}{4}} \div 5^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{2}} \div 5^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{3}{6}-\frac{1}{6}} = 5^{\frac{2}{6}} = 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$

Si la potencia que aparece en el radicando tiene un exponente mayor que 2, puede dejarla expresada sin efectuarla, como en b).

En d) también se puede efectuar la simplificación escribiendo la fracción impropia como un entero más una fracción propia:

$$2^{\frac{5}{4}} = 2^{1+\frac{1}{4}} = 2 \times 2^{\frac{1}{4}} = 2\sqrt[4]{2}.$$

Además, no es necesario simplificar el exponente de $2^{\frac{2}{4}}$ porque debe reescribirse como fracción equivalente con exponente 12.

1.11 Practica lo aprendido

1. Efectúa las siguientes operaciones, expresa el resultado utilizando potencias con exponente positivo:

a) $5^6 \times 5^5$ b) $(-4) \times (-4)^2$ c) $2^6 \times 2^{-3}$ d) $3^{-7} \times 3^7$

e) $(-6)^{-1} \times (-6)^{-2}$ f) $3^9 \div 3^6$ g) $2 \div 2^4$ h) $(-5)^2 \div (-5)^{-3}$

i) $4^{-5} \div 4^3$ j) $(-2)^{-3} \div (-2)^{-2}$ k) $(4^2)^3$ l) $[(-3)^2]^{-3}$

m) $(2^{-4})^3$ n) $(6^{-1})^{-1}$ o) $(5^{-2})^{-2}$ p) $[(-2)^{-3}]^{-5}$

2. Realiza los siguientes ejercicios, expresa el resultado utilizando potencias con exponente positivo:

a) $3^4 \times 5^4$ b) $2^{-6} \times 3^{-6}$ c) $(-4)^2 \times 8^2$ d) $(-6)^{-3} \times (-5)^{-3}$

e) $9^5 \div 3^5$ f) $16^{-2} \div (-2)^{-2}$ g) $(-35)^7 \div 5^7$ h) $(-18)^{-4} \div (-3)^{-4}$

3. Realiza las siguientes operaciones simplificando tu respuesta:

a) $\sqrt[5]{12} \times \sqrt[5]{24}$ b) $\sqrt[3]{-20} \times \sqrt[3]{25}$ c) $\sqrt[3]{48} \div \sqrt[3]{6}$ d) $\sqrt[3]{80} \div \sqrt[3]{-5}$

e) $\sqrt{\sqrt{324}}$ f) $\sqrt[3]{56} + \sqrt[3]{189}$ g) $\sqrt[4]{64} - \sqrt[4]{4}$ h) $(\sqrt[3]{24})^2$

4. Simplifica las siguientes raíces:

Escribe cada raíz como potencia racional.

a) $\sqrt[4]{4}$ b) $\sqrt[6]{9}$ c) $\sqrt[6]{27}$ d) $\sqrt[6]{16}$

5. Efectúa las siguientes operaciones, simplifica tu respuesta a la mínima expresión:

a) $\sqrt[6]{9} \times \sqrt[4]{9}$ b) $\sqrt{8} \times \sqrt[8]{8} \times \sqrt[8]{2}$ c) $\sqrt{27} \div \sqrt[3]{3}$ d) $\sqrt[6]{8} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[6]{2}$

6. Realiza las siguientes operaciones:

a) $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9})$ b) $(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9})$

Exponente irracional

El número $\sqrt{2}$ es irracional, por lo que su valor solo es aproximable: $\sqrt{2} = 1.414213...$

Considera la siguiente sucesión de potencias racionales:
$3^1 = 3$, $3^{1.4} = 4.655536...$, $3^{1.41} = 4.706965...$, $3^{1.414} = 4.727695...$, $3^{1.4142} = 4.728733...$

La sucesión se aproxima al número real 4.728804...
Los exponentes de la sucesión se aproximan al valor $\sqrt{2}$. Por lo que, se dirá que la sucesión se aproxima al valor $3^{\sqrt{2}}$.

De esta forma, si x es un número irracional y $a > 0$, es posible definir la potencia a^x siguiendo el proceso anterior.

Por lo tanto, la potencia a^x está definida para todo número real x y $a > 0$. Las propiedades vistas anteriormente se generalizan para todo exponente real. Si a y b son números reales positivos, r y s números reales:

a) $a^r \times a^s = a^{r+s}$ b) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ c) $(a^r)^s = a^{r \times s}$ d) $a^r \times b^r = (a \times b)^r$ e) $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

107

Indicador de logro

1.11 Resuelve problemas utilizando potencias y raíces n-ésimas.

Solución de problemas:

1a) $5^6 \times 5^5 = 5^{6+5} = 5^{11}$

1b) $(-4) \times (-4)^2 = (-4)^{1+2} = (-4)^3 = -4^3$

1c) $2^6 \times 2^{-3} = 2^{6+(-3)} = 2^{6-3} = 2^3$

1d) $3^{-7} \times 3^7 = 3^{-7+7} = 3^0 = 1$

1e) $(-6)^{-1} \times (-6)^{-2} = (-6)^{-1+(-2)} = (-6)^{-3} = \frac{1}{(-6)^3} = -\frac{1}{6^3}$

1f) $3^9 \div 3^6 = 3^{9-6} = 3^3$

1g) $2 \div 2^4 = 2^{1-4} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

1h) $(-5)^2 \div (-5)^{-3} = (-5)^{2-(-3)} = (-5)^{2+3} = (-5)^5 = -5^5$

1i) $4^{-5} \div 4^3 = 4^{-5-3} = 4^{-8} = \frac{1}{4^8}$

1j) $(-2)^{-3} \div (-2)^{-2} = (-2)^{-3-(-2)} = (-2)^{-3+2} = (-2)^{-1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

1k) $(4^2)^3 = 4^{2\times 3} = 4^6$

1l) $[(-3)^2]^{-3} = (-3)^{2\times(-3)} = (-3)^{-6} = \frac{1}{(-3)^6} = \frac{1}{3^6}$

1m) $(2^{-4})^3 = 2^{-4\times 3} = 2^{-12} = \frac{1}{2^{12}}$

1n) $(6^{-1})^{-1} = 6^{(-1)\times(-1)} = 6$

1o) $(5^{-2})^{-2} = 5^{-2\times(-2)} = 5^4$

1p) $((-2)^{-3})^{-5} = (-2)^{-3\times(-5)} = (-2)^{15} = -2^{15}$

2a) $3^4 \times 5^4 = (3\times 5)^4 = 15^4$

2b) $2^{-6} \times 3^{-6} = (2\times 3)^{-6} = 6^{-6} = \frac{1}{6^6}$

2c) $(-4)^2 \times 8^2 = (-4\times 8)^2 = (-32)^2 = 32^2$

2d) $(-6)^{-3} \times (-5)^{-3} = (-6\times(-5))^{-3} = 30^{-3} = \frac{1}{30^3}$

2e) $9^5 \div 3^5 = (9\div 3)^5 = 3^5$

2f) $16^{-2} \div (-2)^{-2} = (16\div(-2))^{-2} = (-8)^{-2} = \frac{1}{(-8)^2} = \frac{1}{8^2}$

2g) $(-35)^7 \div 5^7 = (-35\div 5)^7 = (-7)^7 = -7^7$

2h) $(-18)^{-4} \div (-3)^{-4} = (-18\div(-3))^{-4} = 6^{-4} = \frac{1}{6^4}$

3a) $\sqrt[5]{12} \times \sqrt[5]{24} = \sqrt[5]{12\times 24} = \sqrt[5]{2^5\times 3^2} = 2\sqrt[5]{3^2} = 2\sqrt[5]{9}$

3b) $\sqrt[3]{-20} \times \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{-20\times 25} = \sqrt[3]{-2^2\times 5^3} = -5\sqrt[3]{4}$

3c) $\sqrt[3]{48} \div \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{48\div 6} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

3d) $\sqrt[3]{80} \div \sqrt[3]{-5} = \sqrt[3]{80\div(-5)} = \sqrt[3]{-16} = -\sqrt[3]{2^3\times 2} = -2\sqrt[3]{2}$

3e) $\sqrt{\sqrt{324}} = \sqrt{\sqrt{2^2\times 3^2\times 3^2}} = \sqrt{2\times 3\times 3} = \sqrt{2\times 3^2} = 3\sqrt{2}$

3f) $\sqrt[3]{56} + \sqrt[3]{189} = \sqrt[3]{2^3\times 7} + \sqrt[3]{3^3\times 7} = 2\sqrt[3]{7} + 3\sqrt[3]{7} = 5\sqrt[3]{7}$

3g) $\sqrt[4]{64} - \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^4\times 2^2} - \sqrt[4]{2^2} = 2\sqrt[4]{4} - \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2}$
$= 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

3h) $(\sqrt[3]{24})^2 = \sqrt[3]{24^2} = \sqrt[3]{(2^3\times 3)^2} = \sqrt[3]{2^3\times 2^3\times 3^2} = 4\sqrt[3]{9}$

4a) $\sqrt[4]{4} = 4^{\frac{1}{4}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

4b) $\sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{3}$

4c) $\sqrt[6]{27} = \sqrt{3}$

4d) $\sqrt[6]{16} = \sqrt[3]{4}$

5a) $\sqrt[6]{9} \times \sqrt[4]{9} = 9^{\frac{1}{6}} \times 9^{\frac{1}{4}} = 9^{\frac{5}{12}}$
$= 3^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{3^5}$

5b) $\sqrt{8} \times \sqrt[8]{8} \times \sqrt[8]{2} = 4$

5c) $\sqrt{27} \div \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[6]{3}$

5d) $\sqrt[6]{8} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[6]{2} = 2\sqrt[3]{2}$

6a) $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}) = \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9}$
$= \sqrt[3]{8} - \cancel{\sqrt[3]{12}} + \cancel{\sqrt[3]{18}} + \cancel{\sqrt[3]{12}} - \cancel{\sqrt[3]{18}} + \sqrt[3]{27}$
$= \sqrt[3]{2^3} + \sqrt[3]{3^3} = 2 + 3 = 5$

6b) $(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}) = -1$

La definición de exponente irracional presentada en el recuadro de información adicional completa la posibilidad de utilizar cualquier exponente real, así es posible definir la función exponencial como una función real.

2.1 Definición de la función exponencial

Problema inicial

Para cada literal completa la tabla y grafica la función dada.

a) $f(x) = 2^x$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	−2	−1	0	1	2
y					

Solución

a) $f(x) = 2^x$

Si $x = -2$ se tiene $f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

Si $x = -1$ se tiene $f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

Si $x = 0$ se tiene $f(0) = 2^0 = 1$

Si $x = 1$ se tiene $f(1) = 2^1 = 2$

Si $x = 2$ se tiene $f(2) = 2^2 = 4$

x	−2	−1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Si $x = -2$ se tiene $f(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = (2^{-1})^{-2} = 2^2 = 4$

Si $x = -1$ se tiene $f(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = (2^{-1})^{-1} = 2^1 = 2$

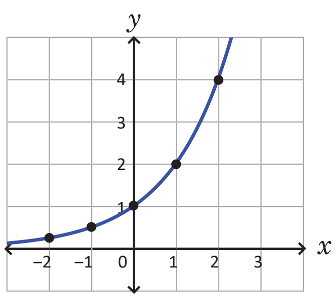
Si $x = 0$ se tiene $f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

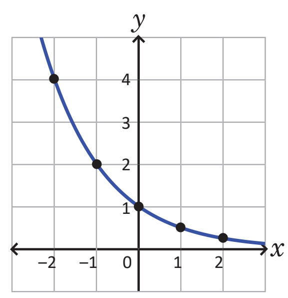
Si $x = 1$ se tiene $f(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

Si $x = 2$ se tiene $f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

x	−2	−1	0	1	2
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Se traza una curva sobre los puntos obtenidos en cada caso.





Definición

Sea a un número real positivo y diferente de 1. La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$ se llama **función exponencial**. Al número a se le llama **base**.

La gráfica de la función exponencial $f(x) = a^x$ pasa por los puntos (0, 1) y (1, a).

> En la función exponencial la variable x está en el exponente.

Si se cumple que $0 < a < 1$, entonces $f(x) = a^x$, se puede escribir de la forma $f(x) = b^{-x}$, donde $b = \frac{1}{a} > 1$. Por ejemplo $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}$.

Problemas

Grafica las siguientes funciones exponenciales:

a) $f(x) = 3^x$ b) $f(x) = 3^{-x}$ c) $f(x) = 4^x$ d) $f(x) = 4^{-x}$

Indicador de logro

2.1 Grafica funciones exponenciales utilizando tablas y localizando puntos en el plano cartesiano.

Secuencia

En la lección anterior quedó definida la potencia para todo exponente real, por lo que ahora se define la función exponencial y se elabora su gráfica a partir de la ubicación de puntos en el plano cartesiano.

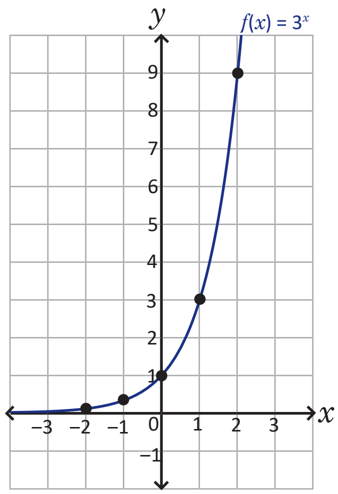
Posibles dificultades

Al elaborar la gráfica debe darse la indicación de que la gráfica no corta al eje x, incluso puede sugerir probar valores en la calculadora para observar el comportamiento de la gráfica.

Solución de problemas:

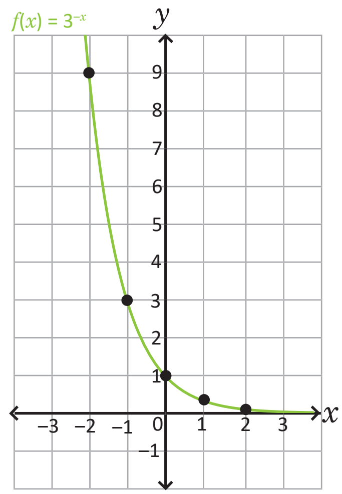
a)

x	–2	–1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9



b)

x	–2	–1	0	1	2
y	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

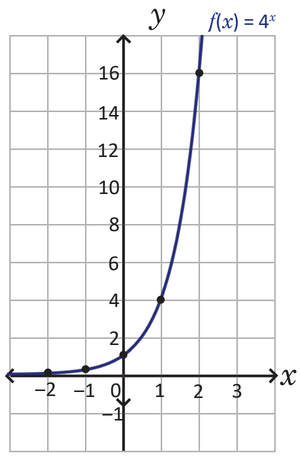


c)

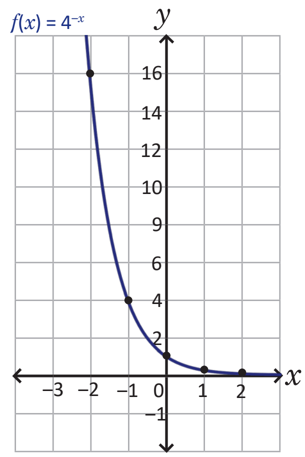
x	–2	–1	0	1	2
y	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16

d)

x	–2	–1	0	1	2
y	16	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$



Las gráficas de los literales c) y d) pueden elaborarse a escala o hasta $y = 4$.



2.2 Funciones exponenciales simétricas

Problema inicial

1. Grafica las siguientes funciones en un mismo plano cartesiano.
   a) $f_1(x) = 3^x$ b) $f_2(x) = 3^{-x}$ c) $f_3(x) = -3^x$
2. Compara la coordenada en x de los puntos de $f_1(x)$ y $f_2(x)$ que tienen la misma coordenada en y.
3. Compara la coordenada en y de los puntos de $f_1(x)$ y $f_3(x)$ que tienen la misma coordenada en x.

Solución

1. a) $f_1(x) = 3^x$

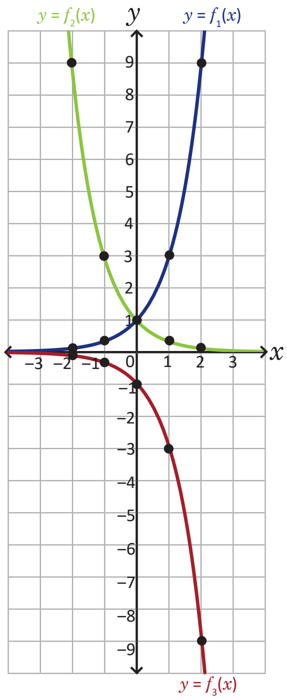
x	−2	−1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

b) $f_2(x) = 3^{-x}$

x	−2	−1	0	1	2
y	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

c) $f_3(x) = -3^x$

x	−2	−1	0	1	2
y	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{3}$	−1	−3	−9



2.

$f_1(x) = 3^x$	$f_2(x) = 3^{-x}$
$\left(-2, \frac{1}{9}\right)$	$\left(2, \frac{1}{9}\right)$
$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$	$\left(1, \frac{1}{3}\right)$
(0, 1)	(0, 1)
(1, 3)	(−1, 3)
(2, 9)	(−2, 9)

Si (x, y) es un punto de la gráfica de f_1 entonces $(-x, y)$ es un punto de la gráfica de f_2. Las gráficas son simétricas respecto al eje y.

3.

$f_1(x) = 3^x$	$f_3(x) = -3^x$
$\left(-2, \frac{1}{9}\right)$	$\left(-2, -\frac{1}{9}\right)$
$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$	$\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$
(0, 1)	(0, −1)
(1, 3)	(1, −3)
(2, 9)	(2, −9)

Si (x, y) es un punto de la gráfica de f_1 entonces $(x, -y)$ es un punto de la gráfica de f_2. Las gráficas son simétricas respecto al eje x.

Se observa que:
- La gráfica de la función $y = 3^{-x}$ es simétrica a la gráfica de la función $y = 3^x$ respecto al eje y.
- La gráfica de la función $y = -3^x$ es simétrica a la gráfica de la función $y = 3^x$, respecto al eje x.

Conclusión

1. Las funciones $y = a^x$ y $y = a^{-x}$ son simétricas respecto al eje y.
   Para graficar $y = a^{-x}$ se cambia el signo a la coordenada en x de los puntos de la gráfica de $y = a^x$.

2. Las funciones $y = a^x$ y $y = -a^x$ son simétricas respecto al eje x.
   Para graficar $y = -a^x$ se cambia el signo a la coordenada en y de los puntos de la gráfica de $y = a^x$.

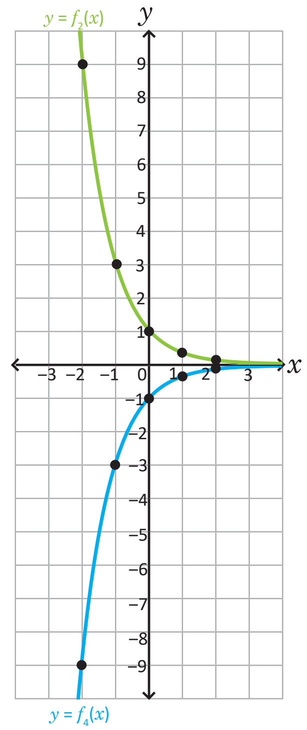
3. Las funciones $y = a^{-x}$ y $y = -a^{-x}$, son simétricas respecto al eje x.
   Para graficar $y = -a^{-x}$ se cambia el signo a la coordenada en y de los puntos de la gráfica de $y = a^{-x}$.

Ejemplo

Grafica la función $f_4(x) = -3^{-x}$.

Para graficar $f_4(x) = -3^{-x}$ se cambia el signo a la coordenada en y de los puntos de la gráfica de $f_2(x) = 3^{-x}$.

$f_2(x) = 3^{-x}$	$f_4(x) = -3^{-x}$
$\left(2, \frac{1}{9}\right)$	$\left(2, -\frac{1}{9}\right)$
$\left(1, \frac{1}{3}\right)$	$\left(1, -\frac{1}{3}\right)$
(0, 1)	(0, –1)
(–1, 3)	(–1, –3)
(–2, 9)	(–2, –9)



Problemas

1. Grafica las siguientes funciones en el mismo plano cartesiano utilizando las simetrías:
   $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^{-x}$, $f_3(x) = -2^x$ y $f_4(x) = -2^{-x}$.

2. Grafica la función $f_4(x) = -3^{-x}$ a partir de la función $f_1(x) = 3^x$.

Comprueba que f_4 es simétrica a f_1 respecto al origen: si (a, b) está en la gráfica de f_1 entonces $(-a, -b)$ está en la gráfica de f_4.

Indicador de logro

2.2 Grafica funciones exponenciales utilizando simetrías respecto de los ejes de coordenadas y el origen.

Secuencia

Teniendo clara la forma de las gráficas de las funciones exponenciales a^x y a^{-x} se estudian ahora aquellas que pueden obtenerse aplicando simetrías respecto a los ejes coordenados y el origen, que se estudió en la unidad 5 de primer año.

Propósito

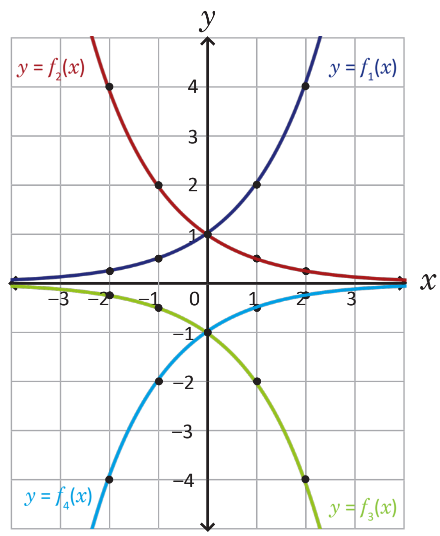
En el Problema inicial el estudiante realiza la comparación de las coordenadas de algunos puntos, de esta manera no solo visualiza la simetría de manera gráfica sino también por medio de su definición.

Solución de problemas:

1. Se cambia el signo a la primera coordenada. Se cambia el signo a la segunda coordenada.

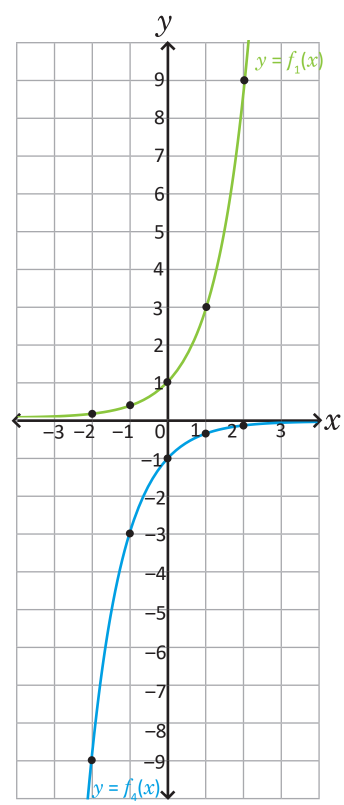
$f_1(x) = 2^x$	$f_2(x) = 2^{-x}$	$f_3(x) = -2^x$	$f_4(x) = -2^{-x}$
(2, 4)	(–2, 4)	(2, –4)	(–2, –4)
(1, 2)	(–1, 2)	(1, –2)	(–1, –2)
(0, 1)	(0, 1)	(0, –1)	(0, –1)
$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$	$\left(1, \frac{1}{2}\right)$	$\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(1, -\frac{1}{2}\right)$
$\left(-2, \frac{1}{4}\right)$	$\left(2, \frac{1}{4}\right)$	$\left(-2, -\frac{1}{4}\right)$	$\left(2, -\frac{1}{4}\right)$

Se cambia el signo a la segunda coordenada.



2. Sea (a, b) un punto en la gráfica de $f_1(a) = 3^b$ entonces $(a, b) = (a, 3^a)$.
Se comprueba que $(-a, -b)$ está en la gráfica de $f_4(x) = -3^{-x}$.
Evaluando $f_4(-a) = -3^{-(-a)} = -3^a = -b$.
Por lo que $(-a, -b)$ es un punto de la gráfica de $f_4(x) = -3^{-x}$.

$f_2(x) = 3^x$	$f_4(x) = -3^{-x}$
(2, 9)	(–2, –9)
(1, 3)	(–1, –3)
(0, 1)	(0, –1)
$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$	$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$
$\left(-2, \frac{1}{9}\right)$	$\left(-2, \frac{1}{9}\right)$

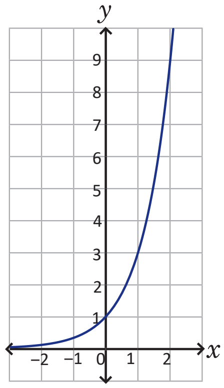


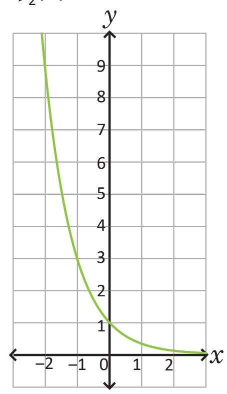
2.3 Características de las funciones exponenciales

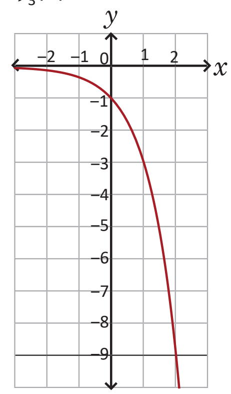
Problema inicial

Se muestran las siguientes funciones y sus gráficas:

1. $f_1(x) = 3^x$
2. $f_2(x) = 3^{-x}$
3. $f_3(x) = -3^x$







Para cada una de las gráficas determina:

a) Interceptos con los ejes

b)Dominio y rango

c) Si la función es creciente o decreciente

d) Asíntotas de la función

f es una función creciente si $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.
f es una función decrecientes si $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$.

Solución

1. $f_1(x) = 3^x$

a) Interceptos con los ejes:
Eje y: $f_1(0) = 3^0 = 1$, el intercepto es (0, 1).
Eje x: No existe un valor real x tal que $3^x = 0$.

b) Dominio y rango:
$D_{f_1} = \mathbb{R}$
$R_{f_1} =]0,\infty[$

c) La función es creciente:
Si $b < c$ entonces $3^b < 3^c$

d) Asíntotas de la función:
$y = 0$ es asíntota horizontal de la función, pues la gráfica de f_1 se aproxima a la recta $y = 0$ a medida que x disminuye su valor.

2. $f_2(x) = 3^{-x}$

a) Interceptos con los ejes:
Eje y: $f_2(0) = 3^{-0} = 3^0 = 1$, el intercepto es (0, 1).
Eje x: No existe un valor real x tal que $3^{-x} = 0$.

b) Dominio y rango:
$D_{f_2} = \mathbb{R}$
$R_{f_2} =]0,\infty[$

c) La función es decreciente:
Si $b < c$ entonces $3^{-b} > 3^{-c}$

d) Asíntotas de la función:
$y = 0$ es asíntota horizontal de la función.

3. Las gráficas de las funciones $f_3(x) = -3^x$ y $f_1(x) = 3^x$ son simétricas respecto al eje x.

	Intercepto en el eje y	Dominio	Rango	Creciente o Decreciente	Asíntota
$f_1(x) = 3^x$	(0, 1)	$\mathbb{R}$	$]0, \infty[$	Creciente Si $b < c$ entonces $3^b < 3^c$	$y = 0$
$f_3(x) = -3^x$	(0, −1)	$\mathbb{R}$	$]-\infty, 0[$	Decreciente Si $b < c$ entonces $-3^b > -3^c$	$y = 0$

Conclusión

La siguiente tabla reúne las características de las gráficas de las funciones $f_1(x) = a^x$, $f_2(x) = a^{-x}$ y $f_3(x) = -a^x$ donde $a > 1$.

	$f_1(x) = a^x$	$f_2(x) = a^{-x}$	$f_3(x) = -a^x$
Intercepto en el eje y	(0, 1)	(0, 1)	(0, –1)
Dominio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Rango	$R_{f_1} =]0, +\infty[$ $= \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$	$R_{f_2} =]0, +\infty[$	$R_{f_2} =]-\infty, 0[$ $= \{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\}$
Creciente o Decreciente	Creciente Si $b < c$ entonces $a^b < a^c$	Decreciente Si $b < c$ entonces $a^{-b} > a^{-c}$	Decreciente Si $b < c$ entonces $-a^b > -a^c$
Asíntota	$y = 0$	$y = 0$	$y = 0$

Además, observa que las funciones f_1, f_2 y f_3 no tienen intercepto con el eje x.

Si a es un número real tal que $a > 1$, entonces:
- La función $f(x) = a^x$, se llama **función exponencial creciente**.
- La función $f(x) = a^{-x}$, se llama **función exponencial decreciente**.

Problemas

1. Utiliza la simetría respecto al eje x para completar las características de la función $f(x) = -a^{-x}$ a partir de las características de la función $f(x) = a^{-x}$, $a > 1$.

	Intercepto en el eje y	Dominio	Rango	Creciente o Decreciente	Asíntota
$f(x) = a^{-x}$	(0, 1)	$\mathbb{R}$	$]0, \infty[$	Decreciente Si $b < c$ entonces $a^{-b} > a^{-c}$	$y = 0$
$f(x) = -a^{-x}$		$\mathbb{R}$			$y = 0$

2. Determina el intercepto en el eje y, dominio, rango, monotonía y asíntotas de las siguientes funciones.

   a) $f_1(x) = 2^x$ b) $f_2(x) = 2^{-x}$ c) $f_3(x) = -2^x$ d) $f_4(x) = -2^{-x}$

3. Resuelve las siguientes desigualdades utilizando la gráfica de la función $y = 2^x$.

   a) $2^x \geq 1$ b) $2^x < 1$

4. Demuestra que la función $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ es creciente en $[0, \infty[$, desarrollando los siguientes pasos:

   a) Demuestra que si $c \neq 0$ y $d \neq 0$ entonces $\left(c + \frac{1}{c}\right) - \left(d + \frac{1}{d}\right) = (c - d)\left(1 - \frac{1}{cd}\right)$.

   b) De a) prueba que $(2^b + 2^{-b}) - (2^a + 2^{-a}) = (2^b - 2^a)\left(1 - \frac{1}{2^{a+b}}\right)$.

   c) De b) concluya que si $0 \leq a < b$ entonces $f(a) < f(b)$.

5. Demuestra que la función $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ es decreciente en $]-\infty, 0]$.

Indicador de logro

2.3 Determina las características de una función exponencial dada (dominio, rango, monotonía y asíntotas).

Secuencia

Algunas características de las funciones que se estudiaron en primer año se establecieron gráficamente; de igual manera se establecerán las características de las funciones exponenciales como la monotonía, el dominio, el rango y la asíntota. Las otras se estudiarán por medio de su definición.

Propósito

Algunas de las características se pueden justificar de manera intuitiva, es por eso que en la Solución se establece la asíntota horizontal sin realizar una descripción formal, de hecho se puede utilizar la calculadora para evaluar los valores. La monotonía se puede establecer gráficamente.

Solución de problemas:

1. Utilizando que la función $f(x) = a^{-x}$ puede obtenerse cambiando el signo a la segunda coordenada de los puntos de $f(x) = -a^{-x}$.

Intercepto en el eje y: (0, 1) en $f_1(x) = a^{-x} \Rightarrow (0, -1)$ en $f_2(x) = -a^{-x}$.

Dominio: no cambia porque son valores en la variable x.

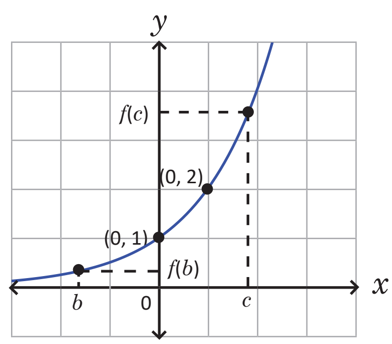
Rango: $R_{f_1} =]0, \infty[= \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\} \Rightarrow R_{f_2} = \{y \in \mathbb{R} \mid -y > 0\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\} =]-\infty, 0[$.

Creciente o decreciente
Se sabe que si $b < c$ entonces $a^{-b} > a^{-c}$, multiplicando por -1 esta desigualdad, se tiene que si $b < c$ entonces $-a^{-b} < -a^{-c}$, es decir si $b < c$ entonces $f_2(b) < f_2(c)$.

	Intercepto en el eje y	Dominio	Rango	Creciente o Decreciente	Asíntota
$f_1(x) = a^{-x}$	(0, 1)	$\mathbb{R}$	$]0, \infty[$	Decreciente Si $b < c$ entonces $a^{-b} > a^{-c}$	$y = 0$
$f_2(x) = -a^{-x}$	(0, −1)	$\mathbb{R}$	$]-\infty, 0[$	Creciente Si $b < c$ entonces $-a^{-b} < -a^{-c}$	$y = 0$

2a) Se obtienen las características de $f_1(x) = 2^x$ a partir de su gráfica.

Intercepto en el eje y	Dominio	Rango	Creciente o Decreciente	Asíntota
(0, 1)	$\mathbb{R}$	$]0, \infty[$	Creciente Si $b < c$ entonces $2^b < 2^c$	$y = 0$



2b) Se obtienen las características de $f_2(x) = 2^{-x}$ a partir de la simetría con $f(x) = 2^x$.

El intercepto (0, 1) no cambia por ser cero su coordenada en x.

El dominio es $\mathbb{R}$ y el rango: $R_{f_2} =]0, \infty[$.

Creciente o decreciente
Se sabe que si $b < c$ entonces $2^b < 2^c$,

$$\frac{1}{2^b 2^c}(2^b) < \frac{1}{2^b 2^c}(2^c), \text{ se multiplica por } \frac{1}{2^b 2^c}$$
$$\frac{1}{2^c} < \frac{1}{2^b}$$
$$2^{-c} < 2^{-b}$$

Así si $b < c$, entonces $2^{-b} > 2^{-c}$ por lo que la función es decreciente.

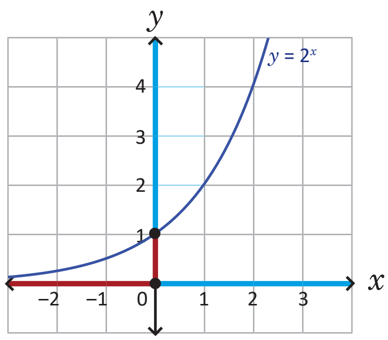
La monotonía también se puede analizar por medio de la gráfica.

La asíntota no cambia $y = 0$.

En resumen, para b), c) y d):

	Intercepto en el eje y	Dominio	Rango	Creciente o Decreciente	Asíntota
$f_2(x) = 2^{-x}$	(0, 1)	$\mathbb{R}$	$]0, \infty[$	Decreciente Si $b < c$ entonces $2^{-b} > 2^{-c}$	$y = 0$
$f_3(x) = -2^{x}$	(0, –1)	$\mathbb{R}$	$]-\infty, 0[$	Decreciente Si $b < c$ entonces $-2^{b} > -2^{c}$	$y = 0$
$f_4(x) = -2^{-x}$	(0, –1)	$\mathbb{R}$	$]-\infty, 0[$	Creciente Si $b < c$ entonces $-2^{-b} < -2^{-c}$	$y = 0$

3.



Por medio de la gráfica se tiene que

3a) $2^x \geq 1$ entonces $x \geq 0$, es decir que se cumple para $x \in [0, \infty[$.

3b) $2^x < 1$ entonces $x < 0$, es decir que se cumple para $x \in \,]-\infty, 0[$.

También se puede utilizar la monotonía:
Si $x \geq 0 \Rightarrow 2^x \geq 2^0 = 1$ y $x < 0 \Rightarrow 2^x < 2^0 = 1$,
entonces $2^x \geq 2^0$ solo si $x \geq 0$ y $2^x < 2^0$ solo si $x < 0$.

4a) $\left(c + \frac{1}{c}\right) - \left(d + \frac{1}{d}\right) = (c - d) + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d}\right) = (c - d) + \left(\frac{d - c}{cd}\right) = (c - d) - \left(\frac{c - d}{cd}\right) = (c - d)\left(1 - \frac{1}{cd}\right)$

4b) Tomando $c = 2^b$ y $d = 2^a$ se tiene que

$$\left(c + \frac{1}{c}\right) - \left(d + \frac{1}{d}\right) = (2^b + 2^{-b}) - (2^a + 2^{-a}) = (2^b - 2^a)\left(1 - \frac{1}{2^{a+b}}\right).$$

4c) $f(b) - f(a) = (2^b - 2^a)\left(1 - \frac{1}{2^{a+b}}\right)$

Como $0 \leq a < b$ entonces $2^a < 2^b$, es decir, $0 < 2^b - 2^a$. Por otra parte, como $0 < a + b$, entonces

$$1 < 2^{a+b} \Rightarrow \frac{1}{2^{a+b}} < 1 \Rightarrow 0 < 1 - \frac{1}{2^{a+b}}.$$

$\Rightarrow f(b) - f(a) = (2^b - 2^a)\left(1 - \frac{1}{2^{a+b}}\right) > 0 \Rightarrow f(a) < f(b).$

5 $f(b) - f(a) = (2^b - 2^a)\left(1 - \frac{1}{2^{a+b}}\right)$

Como $a < b \leq 0$ entonces $2^a < 2^b$, es decir, $0 < 2^b - 2^a$. Por otra parte, como $a + b < 0$, entonces

$$2^{a+b} < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{2^{a+b}} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^{a+b}} < 0,$$

$\Rightarrow f(b) - f(a) = (2^b - 2^a)\left(1 - \frac{1}{2^{a+b}}\right) < 0 \Rightarrow f(a) > f(b)$

Lección 2

2.4 Desplazamientos horizontales y verticales de la función exponencial

Problema inicial

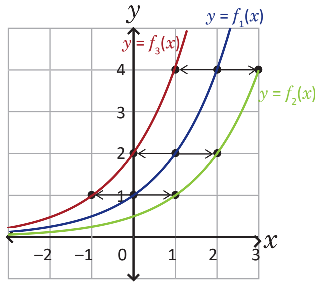
1. Grafica las funciones de cada literal en un mismo plano cartesiano.
   a) $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^{x-1}$ y $f_3(x) = 2^{x+1}$ b) $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^x - 1$ y $f_3(x) = 2^x + 1$

2. Describe la gráfica de las funciones $f_2(x)$, $f_3(x)$ como un desplazamiento horizontal o vertical de la función $f_1(x)$.

Solución

a) $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^{x-1}$, $f_3(x) = 2^{x+1}$

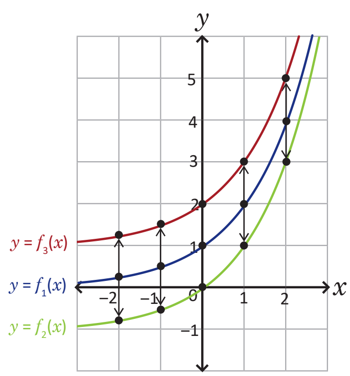
x	-2	-1	0	1	2
$f_1(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f_2(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$f_3(x)$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



Al dibujar las gráficas de las funciones se observa que:
- La gráfica de $f_2(x)$ es un desplazamiento horizontal de 1 unidad hacia la derecha de la función $f_1(x)$.
- La gráfica de $f_3(x)$ es un desplazamiento horizontal de 1 unidad hacia la izquierda de la función $f_1(x)$.

b) $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^x - 1$, $f_3(x) = 2^x + 1$

x	-2	-1	0	1	2
$f_1(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f_2(x)$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	3
$f_3(x)$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	2	3	5



- La gráfica de $f_2(x)$ es un desplazamiento vertical de 1 unidad hacia abajo de la función $f_1(x)$.
- La gráfica de $f_3(x)$ es un desplazamiento vertical de 1 unidad hacia arriba de la función $f_1(x)$.

La asíntota horizontal de $f(x) = a^x + k$ es $y = k$.

Conclusión

La gráfica de la función $f(x) = a^{x-h}$ es un desplazamiento horizontal de h unidades de la función $f(x) = a^x$.
- Si $h > 0$ el desplazamiento es hacia la derecha.
- Si $h < 0$ el desplazamiento es hacia la izquierda.

La gráfica de la función $f(x) = a^x + k$ es un desplazamiento vertical de k unidades de la función $f(x) = a^x$.
- Si $k > 0$ el desplazamiento es hacia arriba.
- Si $k < 0$ el desplazamiento es hacia abajo.

Problemas

1. A partir de la gráfica de $f(x) = 3^x$ grafica las siguientes funciones:
   a) $f(x) = 3^{x-2}$ b) $f(x) = 3^{x+1}$ c) $f(x) = 3^x - 3$

2. A partir de la gráfica de $f(x) = 4^x$ grafica las siguientes funciones:
   a) $f(x) = 4^{x-1}$ b) $f(x) = 4^{x+2}$ c) $f(x) = 4^x + 2$

Unidad 4

Indicador de logro

2.4 Grafica funciones exponenciales utilizando desplazamientos horizontales y verticales.

Secuencia

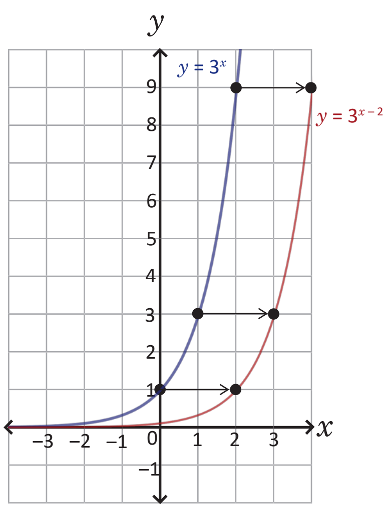
En primer año se graficaron los desplazamientos de funciones. En esta clase se utiliza la misma dinámica para establecer los desplazamientos en las funciones exponenciales, es decir, se comparan las gráficas de las funciones para luego establecer los desplazamientos.

Propósito

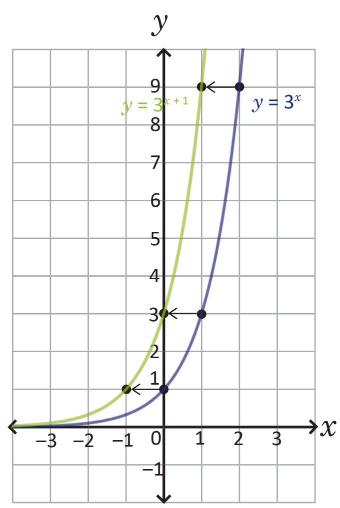
Debido a que solo algunos estudiantes recordarán el concepto de desplazamiento con claridad, la Solución permitirá observar los desplazamientos de las gráficas a partir de la función más simple.

Solución de problemas:

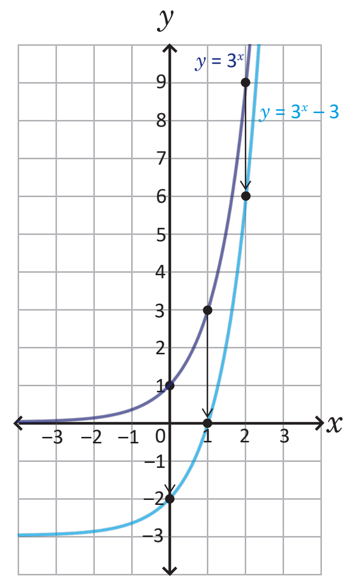
1a) $f(x) = 3^{x-2}$



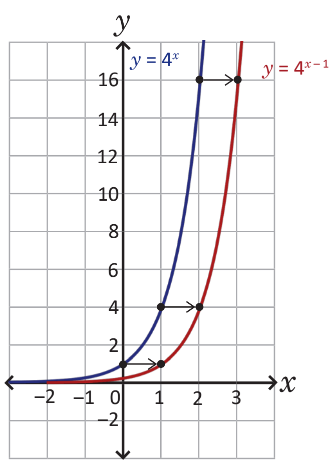
1b) $f(x) = 3^{x+1}$



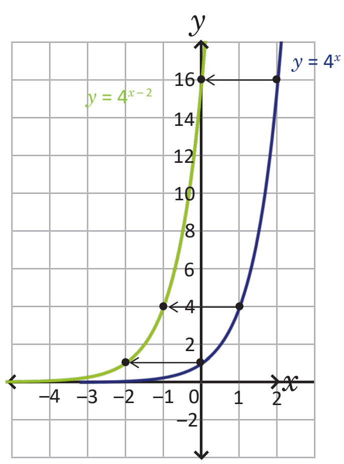
1c) $f(x) = 3^x - 3$



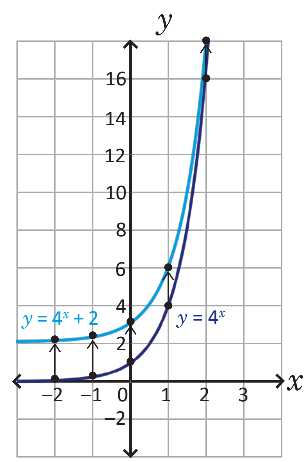
2a) $f(x) = 4^{x-1}$



2b) $f(x) = 4^{x+2}$



2c) $f(x) = 4^x + 2$



2.5 Gráfica de funciones exponenciales con simetría y desplazamientos*

Problema inicial

En cada literal traza la gráfica de $f(x)$ a partir de la gráfica de $f_1(x) = 2^x$, utiliza simetría y desplazamientos.

a) $f(x) = 2^{x-1} + 1$ b) $f(x) = 2^{-(x-1)} - 1$

La simetría se aplica si la potencia es negativa o si la variable tiene signo negativo.

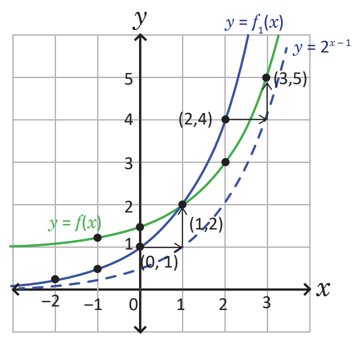
Solución

a) La gráfica de f_1 se dibujó en la clase 2.1.

Se grafica $y = 2^{x-1}$, como un desplazamiento de una unidad hacia la derecha de f_1.

Se grafica $f(x) = 2^{x-1} + 1$, como un desplazamiento de una unidad hacia arriba de y.

Si (x, y) es un punto de $f_1(x)$, entonces el punto $(x + 1, y + 1)$ es un punto de la gráfica de $f(x)$.

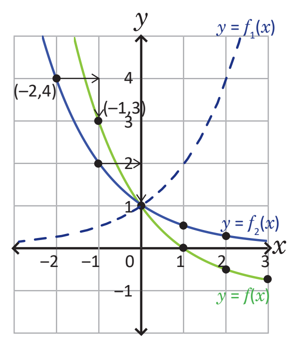


b) Se grafica $f_2(x) = 2^{-x}$ a partir de la simetría con la gráfica de f_1 respecto al eje y.

Se puede escribir $f(x) = f_2(x - 1) - 1$.

Así, $f(x)$ es un desplazamiento de una unidad a la derecha y una unidad hacia abajo de $f_2(x)$.

Sea (x, y) un punto de $f_2(x)$, entonces el punto $(x + 1, y - 1)$ es un punto de la gráfica de $f(x)$.

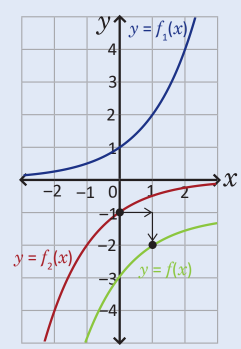


Conclusión

Para elaborar la gráfica de una función exponencial $f(x)$ se realizan los siguientes pasos:

1. Se dibuja la gráfica de $f_1(x) = a^x$.
2. Se dibuja una función $f_2(x)$ de acuerdo a los signos de la potencia y el exponente de $f(x)$:
   - a^{-x} se utiliza simetría respecto al eje y.
   - $-a^x$ se utiliza simetría respecto al eje x.
   - $-a^{-x}$ se utiliza simetría respecto al origen.
3. Desplazamiento, escribiendo $f(x) = f_2(x - h) + k$ entonces el punto (x, y) de la gráfica de f_2 se desplaza al punto $(x + h, y + k)$ de la gráfica de f.

Ejemplo: $f(x) = -2^{-(x-1)} - 1$



1. $f_1(x) = 2^x$

Simetría respecto al origen.

2. $f_2(x) = -2^{-x}$

Desplazamiento

3. $f(x) = -2^{-(x-1)} - 1$

Problemas

Grafica las siguientes funciones utilizando simetrías y desplazamientos:

a) $f(x) = 3^{x-2} + 1$ b) $f(x) = 4^{-x-1} - 3$ c) $f(x) = -2^{x-1} + 2$ d) $f(x) = -3^{-x+1} - 3$

e) $f(x) = 3^{-x+1} + 2$ f) $f(x) = 2^{-x-2} + 1$ g) $f(x) = -3^{x-1} - 1$ h) $f(x) = -3^{-x-2} + 2$

Indicador de logro

2.5 Elabora la gráfica de funciones exponenciales utilizando simetría y desplazamientos.

Secuencia

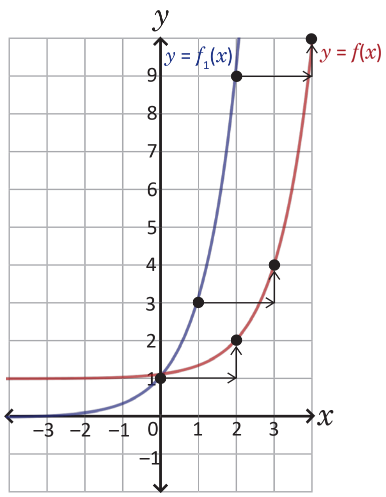
Ahora se grafican funciones exponenciales utilizando la simetría y los desplazamientos al mismo tiempo; si el Problema inicial representa mucha dificultad deberá ser resuelto por el docente.

Propósito

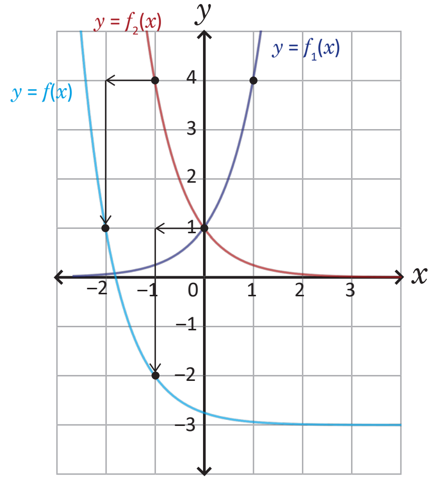
En la Conclusión se establece un proceso general para graficar funciones exponenciales, en el caso del paso 2 debe aclararse que no se utiliza cuando la potencia y la variable en el exponente tienen signo positivo.

Solución de problemas:

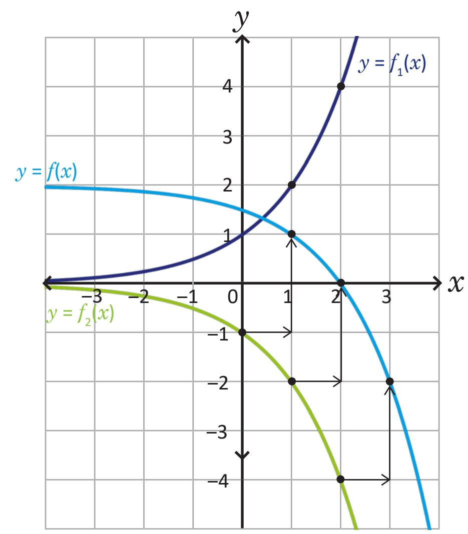
a) $f_1(x) = 3^x$
$f(x) = f_1(x - 2) + 1 = 3^{x-2} + 1$



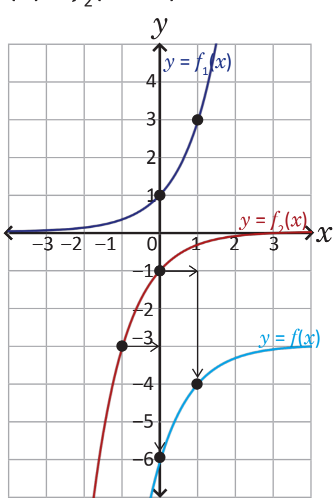
b) $f_1(x) = 4^x$; $f_2(x) = 4^{-x}$
$f(x) = f_2(x - (-1)) - 3 = 4^{-x-1} - 3$



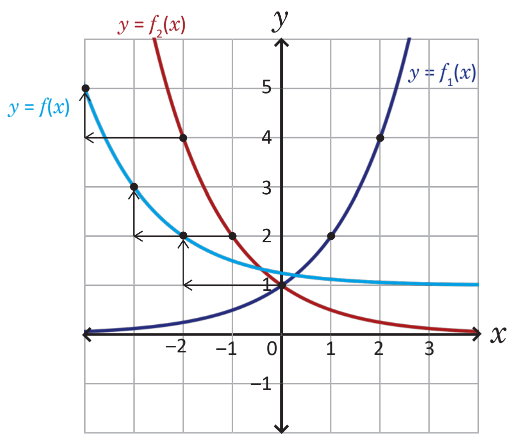
c) $f_1(x) = 2^x$; $f_2(x) = -2^x$
$f(x) = f_2(x - 1) + 2 = -2^{x-1} + 2$



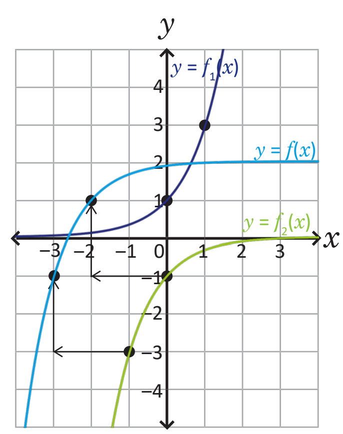
d) $f_1(x) = 3^x$; $f_2(x) = -3^{-x}$
$f(x) = f_2(x - 1) - 3 = -3^{-x+1} - 3$



f) $f_1(x) = 2^x$; $f_2(x) = 2^{-x}$
$f(x) = f_2(x - (-2)) + 1 = 2^{-x-2} + 1$



h) $f_1(x) = 3^x$; $f_2(x) = -3^{-x}$
$f(x) = f_2(x - (-2)) + 2 = -3^{-x-2} + 2$



El problema e) no se resuelve por motivos de espacio.

2.6 Ecuaciones exponenciales

Problema inicial

Encuentra una solución para cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $5^x = 25$ b) $2^x = \frac{1}{8}$ c) $4^x = 8$ d) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 81$

Solución

a) $5^x = 25$

Descomponiendo $25 = 5^2$,

sustituyendo $5^x = 5^2$.

Por lo tanto, $x = 2$.

b) $2^x = \frac{1}{8}$

Descomponiendo $8 = 2^3$,

sustituyendo $2^x = \frac{1}{2^3}$,

escribiendo con exponente negativo $2^x = 2^{-3}$.

Por lo tanto, $x = -3$.

c) $4^x = 8$

Descomponiendo $4 = 2^2$ y $8 = 2^3$,

sustituyendo $(2^2)^x = 2^3$,

aplicando propiedades de potencia $2^{2x} = 2^3$,

entonces $2x = 3$.

Por lo tanto, $x = \frac{3}{2}$.

d) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 81$

Descomponiendo $9 = 3^2$ y $81 = 3^4$,

sustituyendo $\left(\frac{1}{3^2}\right)^x = 3^4$,

escribiendo con exponente negativo: $(3^{-2})^x = 3^4$,

aplicando propiedades de potencia: $3^{-2x} = 3^4$,

entonces $-2x = 4$.

Por lo tanto, $x = -2$.

Definición

Una **ecuación exponencial** es aquella que tiene términos de la forma a^x con $a > 0$ y $a \neq 1$.

Para resolver una ecuación exponencial se realiza lo siguiente:

1. Se escriben todos los términos en la misma base para obtener una igualdad de potencias con la misma base: $a^r = a^s$.
2. Se igualan los exponentes $r = s$ y se resuelve esta ecuación.

Ejemplo: $27^x = \frac{1}{9}$

$27^x = (3^3)^x = 3^{3x}$ y $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$

$\longrightarrow$ $3^{3x} = 3^{-2}$

$\longrightarrow$ $3x = -2$

Por lo tanto, $x = -\frac{2}{3}$.

Problemas

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $2^x = 16$ b) $3^{-x+1} = 9^{x+2}$ c) $5^{3x-4} = \frac{1}{25}$ d) $2^{2x-3} = \frac{1}{4}$

e) $2^{5x+7} = \frac{1}{8}$ f) $9^{3x+1} = 27^{-2x-2}$ g) $8^{-x+3} = 4^{x+2}$ h) $4^{2x-1} = \frac{1}{2}$

Indicador de logro

2.6 Resuelve ecuaciones exponenciales utilizando igualdad de potencias con la misma base.

Secuencia

Se introducen las ecuaciones exponenciales, para resolverlas se tiene como base la descomposición en factores primos. Estas ecuaciones surgen en algunos problemas de la unidad 6.

Propósito

La igualación de exponentes que se encuentra en en el numeral 2 de la Definición viene del hecho de que: si $a \neq 1$, $a > 0$, entonces $a^b = a^c \Leftrightarrow b = c$, porque la función $y = a^x$ es monótona.

Solución de problemas:

a) $2^x = 16$

$2^x = 2^4$

$x = 4$

b) $3^{-x+1} = 9^{x+2}$

$3^{-x+1} = (3^2)^{x+2}$

$3^{-x+1} = 3^{2x+4}$

$-x + 1 = 2x + 4$

$-3 = 3x$

$x = -1$

c) $5^{3x-4} = \frac{1}{25}$

$5^{3x-4} = \frac{1}{5^2}$

$5^{3x-4} = 5^{-2}$

$3x - 4 = -2$

$3x = -2 + 4$

$3x = 2$

$x = \frac{2}{3}$

d) $2^{2x-3} = \frac{1}{4}$

$2^{2x-3} = \frac{1}{2^2}$

$2^{2x-3} = 2^{-2}$

$2x - 3 = -2$

$2x = -2 + 3$

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$

e) $2^{5x+7} = \frac{1}{8}$

$2^{5x+7} = \frac{1}{2^3}$

$2^{5x+7} = 2^{-3}$

$5x + 7 = -3$

$5x = -3 - 7$

$5x = -10$

$x = -2$

f) $9^{3x+1} = 27^{-2x-2}$

$(3^2)^{3x+1} = (3^3)^{-2x-2}$

$3^{6x+2} = 3^{-6x-6}$

$6x + 2 = -6x - 6$

$12x = -8$

$x = \frac{-8}{12}$

$x = -\frac{2}{3}$

g) $8^{-x+3} = 4^{x+2}$

$(2^3)^{-x+3} = (2^2)^{x+2}$

$2^{-3x+9} = 2^{2x+4}$

$-3x + 9 = 2x + 4$

$-5x = -5$

$x = 1$

h) $4^{2x-1} = \frac{1}{2}$

$(2^2)^{2x-1} = 2^{-1}$

$2^{4x-2} = 2^{-1}$

$4x - 2 = -1$

$4x = 1$

$x = \frac{1}{4}$

2.7 Ecuaciones exponenciales que se reducen a ecuaciones cuadráticas

Problema inicial

A partir de la ecuación exponencial: $4^x - 2^x = 2$ realiza lo siguiente:

a) Escribe 4^x como potencia de 2.

b) Sustituye y en lugar de 2^x en la ecuación.

c) Resuelve la ecuación resultante.

d) En las soluciones encontradas sustituye 2^x en lugar de y.

e) Resuelve las ecuaciones resultantes.

Solución

a) Se representa 4^x como una potencia de 2:

$4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$ al descomponer $4 = 2^2$.

Así, se obtiene la ecuación $(2^2)^x - 2^x = 2$.

b) Al utilizar que $(2^2)^x = (2^x)^2$ se tiene:

$$\begin{array}{ccccc} (2^x)^2 & - & 2^x & = & 2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ y^2 & - & y & = & 2 \end{array}$$

c) Resuelve la ecuación resultante.
$y^2 - y = 2$ es una ecuación cuadrática, resolviendo:

$$y^2 - y - 2 = 0$$

$$(y-2)(y+1) = 0$$

$$y = 2 \quad \text{o} \quad y = -1$$

d) En las soluciones encontradas sustituye 2^x en lugar de y.

$$\begin{array}{ccc} y = 2 & \text{o} & y = -1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 2^x = 2 & \text{o} & 2^x = -1 \end{array}$$

e) Resuelve las ecuaciones resultantes.

$2^x = 2$ o $2^x = -1$, esta ecuación no tiene solución,

$2^x = 2^1$ ya que $2^x > 0$, para todo x real.

$x = 1$

Por lo tanto, la solución es $x = 1$.

Conclusión

Una ecuación exponencial, en la que aparece una suma o resta de potencias, se puede reducir a una ecuación cuadrática si una de las bases es el cuadrado de la otra.

Este tipo de ecuaciones se representa así: $p(a^x)^2 + qa^x + r = 0$.

Para resolverla se realiza lo siguiente:
1. Se efectúa el cambio de variable $y = a^x$.
2. Se resuelve la ecuación $py^2 + qy + r = 0$, del paso anterior.
3. En las soluciones encontradas $y = y_1$, $y = y_2$, se sustituye y por a^x: $a^x = y_1$ y $a^x = y_2$.
4. Por último se resuelven ambas ecuaciones, si se puede. Estas son las soluciones de la ecuación original.

Problemas

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales reduciéndolas a ecuaciones cuadráticas.

a) $4^x - 2^x - 12 = 0$

b) $9^x - 2(3^x) + 1 = 0$

c) $4^x - 6(2^x) + 8 = 0$

d) $5(25^x) - 26(5^x) + 5 = 0$

e) $9^{x+1} + 8(3^x) - 1 = 0$

f) $4^{x+2} - 5(2^{x+1}) + 1 = 0$

Si una potencia tiene la forma a^{x+r}, con r un número real, se reescribe $a^{x+r} = a^r(a^x)$.
Por ejemplo, $2^{x+1} = 2(2^x)$.

Indicador de logro

2.7 Resuelve ecuaciones exponenciales que se reducen a ecuaciones cuadráticas por medio de un cambio de variable.

Secuencia

Ahora se resuelven ecuaciones exponenciales que pueden reducirse a ecuaciones cuadráticas, utilizando un cambio de variable. Por lo tanto, será necesario que el estudiante recuerde los métodos para resolver este tipo de ecuaciones que ya se han estudiado en las unidades de ecuaciones y secciones cónicas.

Posibles dificultades

El Problema inicial plantea al estudiante el proceso para resolver la ecuación dada. En la Solución, al sustituir la potencia por la variable auxiliar puede haber confusión si no se tiene claro la posibilidad de alternar los exponentes en la potencia de una potencia (ver literal b).

Solución de problemas:

a) $4^x - 2^x - 12 = 0$, $y = 2^x$

$\Rightarrow 4^x - 2^x - 12 = y^2 - y - 12 = (y-4)(y+3) = 0$

$\Rightarrow y - 4 = 0$ o $y + 3 = 0$

$\Rightarrow y = 4$ o $y = -3$

$\Rightarrow$ Si $2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$.

$\Rightarrow$ Si $2^x = -3$ no tiene solución.

Por lo tanto, la solución es $x = 2$.

b) $9^x - 2(3^x) + 1 = 0$, $y = 3^x$

$\Rightarrow 9^x - 2(3^x) + 1 = y^2 - 2y + 1 = (y-1)^2 = 0$

$\Rightarrow y - 1 = 0$

$\Rightarrow y = 1$

$\Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x = 0$

Por lo tanto, la solución es $x = 0$.

c) $4^x - 6(2^x) + 8 = 0$, $y = 2^x$

$\Rightarrow 4^x - 6(2^x) + 8 = y^2 - 6y + 8 = (y-4)(y-2) = 0$

$\Rightarrow y - 4 = 0$ o $y - 2 = 0$

$\Rightarrow y = 4$ o $y = 2$

$\Rightarrow$ Si $2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$.

$\Rightarrow$ Si $2^x = 2 \Rightarrow x = 1$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = 1$, $x = 2$.

d) $5(25^x) - 26(5^x) + 5 = 0$, $y = 5^x$

$\Rightarrow 5(25^x) - 26(5^x) + 5 = 5y^2 - 26y + 5$

$= (y-5)(5y-1) = 0$

$\Rightarrow y - 5 = 0$ o $5y - 1 = 0$

$\Rightarrow y = 5$ o $y = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow 5^x = 5$ o $5^x = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow$ Si $5^x = 5 \Rightarrow x = 1$.

$\Rightarrow$ Si $5^x = \frac{1}{5} \Rightarrow 5^x = 5^{-1} \Rightarrow x = -1$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = 1$, $x = -1$.

e) $9^{x+1} + 8(3^x) - 1 = 0$, $y = 3^x$

$\Rightarrow 9^{x+1} + 8(3^x) - 1 = 9(9^x) + 8(3^x) - 1 = 9y^2 + 8y - 1$

$= (y+1)(9y-1) = 0$

$\Rightarrow y + 1 = 0$ o $9y - 1 = 0$

$\Rightarrow y = -1$ o $y = \frac{1}{9}$

$\Rightarrow$ Si $3^x = -1$ no tiene solución.

$\Rightarrow$ Si $3^x = \frac{1}{9} \Rightarrow 3^x = 3^{-2} \Rightarrow x = -2$.

Por lo tanto, la solución es $x = -2$.

f) $4^{x+2} - 5(2^{x+1}) + 1 = 0$, $y = 2^x$

$\Rightarrow 4^{x+2} - 5(2^{x+1}) + 1 = 16(4^x) - 10(2^x) + 1$

$= 16y^2 - 10y + 1$

$= (2y-1)(8y-1) = 0$

$\Rightarrow 2y - 1 = 0$ o $8y - 1 = 0$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}$ o $y = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow$ Si $2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x = 2^{-1} \Rightarrow x = -1$.

$\Rightarrow$ Si $2^x = \frac{1}{8} \Rightarrow 2^x = 2^{-3} \Rightarrow x = -3$.

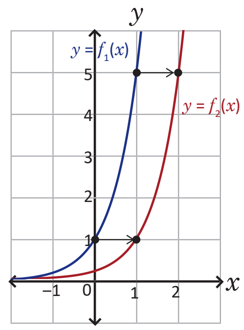
Por lo tanto, las soluciones son $x = -2$, $x = -3$.

2.8 Practica lo aprendido

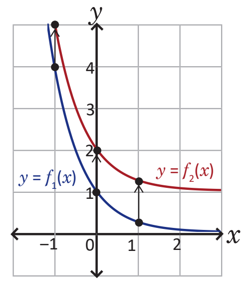
1. Justifica las siguientes afirmaciones.
   a) La gráfica de las funciones $y = 2^x$ y $y = 2^{-x}$ son simétricas respecto al eje y.
   b) La gráfica de las funciones $y = 3^x$ y $y = -3^x$ son simétricas respecto al eje x.
   c) Si (a, b) es un punto de la gráfica de la función $y = 3^x$ entonces $(-a, -b)$ es un punto de $y = -3^x$.

2. Utilizando las gráficas de las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$. Determina la ecuación de $f_2(x)$ a partir de $f_1(x)$.

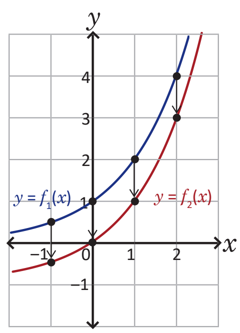
   a) $f_1(x) = 5^x$



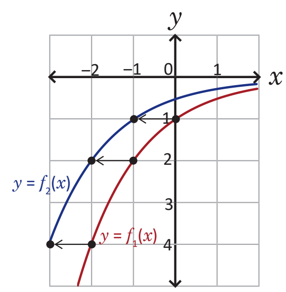
   b) $f_1(x) = 4^{-x}$



   c) $f_1(x) = 2^x$



   d) $f_1(x) = -2^{-x}$



3. Grafica las siguientes funciones y describe sus características: interceptos con los ejes, dominio, rango, asíntota de la función y crecimiento o decrecimiento.

   a) $f(x) = 2^{x-3} - 2$ b) $f(x) = 3^{-x-1} + 4$ c) $f(x) = 5^{-x+2} + 2$ d) $f(x) = -4^{x-1} - 1$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

   a) $2^{3x-1} = 32$ b) $3^{-2x+3} = \frac{1}{27}$ c) $4^{3x-3} = 1$

   d) $25^{x+3} = \frac{1}{5}$ e) $7^{-2x-4} = 49$ f) $16^{x-3} = 8^{2x-1}$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales reduciéndolas a ecuaciones cuadráticas:

   a) $9^x - 4(3^x) + 3 = 0$ b) $6^{2x} - 5(6^x) - 6 = 0$ c) $3^{2x+3} - 4(3^{x+1}) + 1 = 0$

Unidad 4

Indicador de logro

2.8 Resuelve problemas sobre funciones y ecuaciones exponenciales.

Solución de problemas:

1a) Si (a, b) está en la gráfica de $y = 2^x \Rightarrow b = 2^a$.
Evaluando $-a$ en $y = 2^{-x}$ se tiene que $y = 2^{-(-a)} = 2^a = b \Rightarrow (-a, b)$ está en la gráfica de $y = 2^{-x}$.
Los puntos (a, b) y $(-a, b)$ son simétricos respecto al eje y.
Por lo tanto, la gráfica de las funciones $y = 2^x$ y $y = 2^{-x}$ son simétricas respecto al eje y.

1b) Si (a, b) está en la gráfica de $y = 3^x \Rightarrow b = 3^a$.
Evaluando a en $y = -3^x$ se tiene que $y = -3^a = -3^a = -b \Rightarrow (a, -b)$ está en la gráfica de $y = -3^x$.
Los puntos (a, b) y $(a, -b)$ son simétricos respecto al eje x.
Por lo tanto, las gráficas de las funciones $y = 3^x$ y $y = -3^x$ son simétricas respecto al eje x.

1c) Si (a, b) está en la gráfica de $y = 3^x$ entonces $b = 3^a$.
Evaluando $-a$ en $y = -3^{-x}$ se tiene que $y = -3^{-(-a)} = -3^a = -b \Rightarrow (-a, -b)$ está en la gráfica de $y = -3^{-x}$.

2a) $f_1(x) = 5^x$, $f_2(x) = 5^{x-1}$

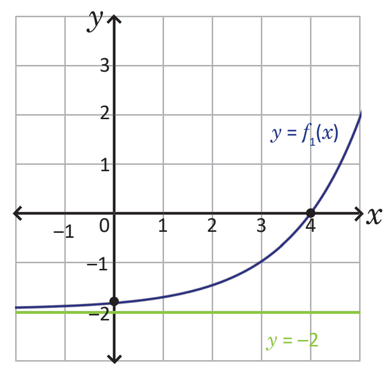
2b) $f_1(x) = 4^{-x}$, $f_2(x) = 4^{-x} + 1$

2c) $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^x - 1$

2d) $f_1(x) = -2^{-x}$, $f_2(x) = -2^{-(x-(-1))} = -2^{-(x+1)}$

3a) $f_1(x) = 2^{x-3} - 2$. La gráfica se obtiene después de trasladar la de $y = 2^x$, 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia abajo.

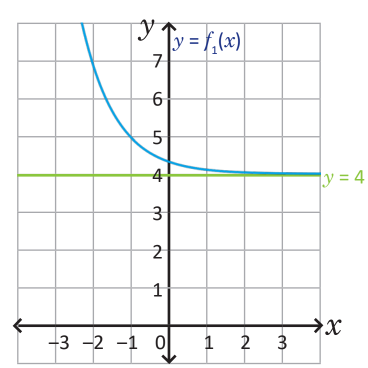
Interceptos con los ejes:
Eje y: $f_1(0) = 2^{0-3} - 2 = 2^{-3} - 2 = \frac{1}{8} - 2 = -\frac{15}{8}$, el intercepto es $\left(0, -\frac{15}{8}\right)$.
Eje x: $2^{x-3} - 2 = 0 \Rightarrow 2^{x-3} = 2 \Rightarrow x - 3 = 1 \Rightarrow x = 4$, el intercepto es $(4, 0)$.



Dominio y rango: $D_{f_1} = \mathbb{R}$, $R_{f_1} =]-2, \infty[$.

La función es creciente:
Si $b < c$ entonces $b - 3 < c - 3 \Rightarrow 2^{b-3} < 2^{c-3} \Rightarrow 2^{b-3} - 2 < 2^{c-3} - 2$
$\Rightarrow f(b) < f(c)$.
Asíntotas de la función: $y = -2$.

3b) $f(x) = 3^{-x-1} + 4$. La gráfica se obtiene después de trasladar la de $y = 3^{-x}$, 1 unidad a la izquierda y 4 unidades hacia abajo.
Interceptos con los ejes
Eje y: $\left(0, \frac{13}{3}\right)$.
Eje x: $3^{-x-1} + 4 = 0 \Rightarrow 3^{-x-1} = -4$, por lo tanto, no tiene.



Dominio y rango: $D_{f_1} = \mathbb{R}$, $R_{f_1} =]4, \infty[$.

La función es decreciente.

Asíntotas de la función: $y = 4$.

3c) $f(x) = 5^{-x+2} + 2$. La gráfica se obtiene después de trasladar la de $y = 5^{-x}$, 2 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba.

Interceptos con los ejes

Eje y: (0, 27).

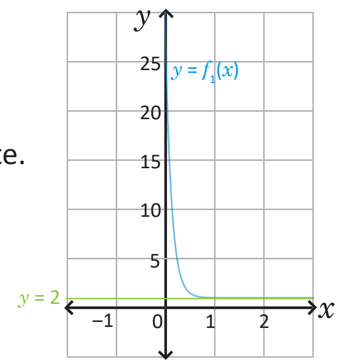
Eje x: no tiene.

Dominio y rango:

$D_{f_1} = \mathbb{R}$, $R_{f_1} =]2, \infty[$.

La función es decreciente.

Asíntotas de la función: $y = 2$.



3d) $f(x) = -4^{x-1} - 1$. La gráfica se obtiene después de trasladar la de $y = -4^{x}$, 1 unidad a la derecha y una unidad hacia abajo.

Interceptos con los ejes

Eje y: $\left(0, -\frac{5}{4}\right)$.

Eje x: no tiene.

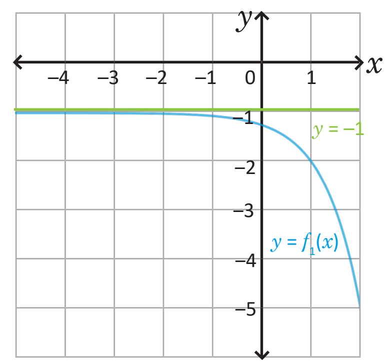
Dominio y rango:

$D_{f_1} = \mathbb{R}$,

$R_{f_1} =]-\infty, -1[$.

La función es decreciente.

Asíntotas de la función: $y = -1$.



4a) $2^{3x-1} = 32$

$2^{3x-1} = 2^5$

$3x - 1 = 5$

$3x = 6$

$x = 2$

4b) $3^{-2x+3} = \frac{1}{27}$

$3^{-2x+3} = 3^{-3}$

$-2x + 3 = -3$

$-2x = -6$

$x = 3$

4c) $4^{3x-3} = 1$

$4^{3x-3} = 4^0$

$3x - 3 = 0$

$3x = 3$

$x = 1$

4d) $25^{x+3} = \frac{1}{5}$

$(5^2)^{3x-1} = 5^{-1}$

$5^{6x-2} = 5^{-1}$

$6x - 2 = -1$

$6x = 1$

$x = \frac{1}{6}$

4e) $7^{-2x-4} = 49$

$7^{-2x-4} = 7^2$

$-2x - 4 = 2$

$-2x = 6$

$x = -3$

4f) $16^{x-3} = 8^{2x-1}$

$(2^4)^{x-3} = (2^3)^{2x-1}$

$2^{4x-12} = 2^{6x-3}$

$4x - 12 = 6x - 3$

$-2x = 9$

$x = -\frac{9}{2}$

5a) $9^x - 4(3^x) + 3 = 0$, $y = 3^x$

$\Rightarrow 9^x - 4(3^x) + 3 = y^2 - 4y + 3 = (y-3)(y-1) = 0$

$\Rightarrow y - 3 = 0$ o $y - 1 = 0$

$\Rightarrow y = 3$ o $y = 1$

$\Rightarrow$ Si $3^x = 3 \Rightarrow x = 1$.

$\Rightarrow$ Si $3^x = 1 \Rightarrow x = 0$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = 1$, $x = 0$.

5b) $6^{2x} - 5(6^x) - 6 = 0$, $y = 6^x$

$\Rightarrow 6^{2x} - 5(6^x) - 6 = y^2 - 5y - 6 = (y-6)(y+1) = 0$

$\Rightarrow y - 6 = 0$ o $y + 1 = 0$

$\Rightarrow y = 6$ o $y = -1$

$\Rightarrow$ Si $6^x = 6 \Rightarrow x = 1$.

$\Rightarrow$ Si $6^x = -1$ no tiene solución.

Por lo tanto, la solución es $x = 1$.

5c) $3^{2x+3} - 4(3^{x+1}) + 1 = 0$, $y = 3^x$

$\Rightarrow 3^{2x+3} - 4(3^{x+1}) + 1 = 27(3^{2x}) - 12(3^x) + 1 = 27y^2 - 12y + 1 = (3y-1)(9y-1)$

$\Rightarrow 3y - 1 = 0$ o $9y - 1 = 0$

$\Rightarrow y = \frac{1}{3}$ o $y = \frac{1}{9}$

$\Rightarrow$ Si $3^x = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = 3^{-1} \Rightarrow x = -1$.

$\Rightarrow$ Si $3^x = \frac{1}{9} \Rightarrow 3^x = 3^{-2} \Rightarrow x = -2$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = -1$, $x = -2$.

2.9 Problemas de la unidad

1. Simplifica las siguientes expresiones:

   a) $\frac{(3^{-2})^3 \times (3^4)^2}{3^{-5}}$ b) $\left[\frac{2^2 \times (2^4)^{-2}}{2^7}\right]^{-1}$ c) $\frac{25^{-4} \times 5^{-3}}{5^{-5}}$ d) $\frac{3^{-4} \times 6^8}{2^4}$

2. En los siguientes literales se tienen dos números reales, establece cuál es el mayor de ellos.

   a) $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{2}$ b) $\sqrt{3}$ y $\sqrt[4]{5}$ c) $\sqrt[3]{12}$ y $\sqrt{6}$ d) 4 y $\sqrt[3]{68}$

Utiliza el hecho que $a < b \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ y el exponente racional, para escribir las raíces con índice común. Para $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt[4]{2}$:
$\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{12}} = \sqrt[12]{2^4}$ y $\sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{2^3}$

3. En los siguientes literales determina cuál de los dos números reales es el mayor de ellos:

   a) $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{4}$ b) $\sqrt[4]{8}$ y $\sqrt[5]{16}$ c) $\sqrt[4]{125}$ y $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{\frac{1}{27}}$ y $\sqrt[3]{\frac{1}{81}}$

Escribe cada radicando como una potencia

4. Efectúa el producto $(\sqrt{3} - \sqrt[4]{48} + 2)(\sqrt{3} + \sqrt[4]{48} + 2)$.

5. Racionaliza el denominador de la fracción $\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$ realizando los siguientes pasos:

   a) Escribe $\sqrt[3]{3}$ como una potencia.

   b) Resuelve la ecuación $\sqrt[3]{3}x = 3$, escribe la solución como una potencia.

   c) Efectúa $\frac{2}{\sqrt[3]{3}} \times \frac{x}{x}$, con x la solución del literal anterior.

6. Racionaliza el denominador de las siguientes fracciones.

   a) $\frac{6}{\sqrt[3]{9}}$ b) $\frac{4}{\sqrt[4]{2}}$ c) $\frac{10}{\sqrt[4]{8}}$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

   a) $2^{4x-2} = 8^{x+1}$ b) $3^{3x} = 27^{2x+3}$ c) $2^{-x} = \sqrt{2}$

   d) $2^{\frac{x}{2}} \times 4^{\frac{x}{3}} = 128$ e) $9^x - 4(3^{x+1}) + 27 = 0$ f) $4^{-x} - 2^{-x+2} + 4 = 0$

   g) $(4^{x-3})(6^{x+1})(3^{2x-6}) = 6$ h) $12^{x-2} = 2^{2x-4}$ i) $-3^x - 9(3^{-x}) + 10 = 0$

8. Justifica las siguientes afirmaciones:

   a) $\sqrt{5}$ y $\sqrt[4]{25}$ representan el mismo número.
   b) Las gráficas de $y = 2^x$ y $y = -2^x$ no se intersecan en ningún punto.
   c) $y = 2^x$ y $y = 4^x$ se intersecan en un solo punto.

9. Grafica las siguientes funciones.
   a) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ b) $f(x) = 2^x - 2^{-x}$

10. Determina para cada función del problema anterior lo que se pide:
    a) Dominio y rango b) Los intervalos donde es creciente o decreciente.

Indicador de logro

2.9 Resuelve problemas utilizando propiedades de los exponentes y funciones exponenciales.

Solución de problemas:

1a) $\frac{(3^{-2})^3 \times (3^4)^2}{3^{-5}} = 3^7$

1b) $\left[\frac{2^2 \times (2^4)^{-2}}{2^7}\right]^{-1} = 2^{13}$

1c) $\frac{25^{-4} \times 5^{-3}}{5^{-5}} = 5^{-6}$

1d) $\frac{3^{-4} \times 6^8}{2^4} = 6^4$

2a) $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ y $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \sqrt{2} = 2^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{2^3}$ y $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{2^2}$

Así, ya que $2^2 < 2^3 \Rightarrow \sqrt[6]{2^2} < \sqrt[6]{2^3} \Rightarrow \sqrt[3]{2} < \sqrt{2}$.

2b) $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$ y $\sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \sqrt{3} = 3^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt[4]{9}$ y $\sqrt[4]{5}$

Así, ya que $5 < 9 \Rightarrow \sqrt[4]{5} < \sqrt[4]{9} \Rightarrow \sqrt[4]{5} < \sqrt{3}$.

2c) $\sqrt[3]{12} = 12^{\frac{1}{3}}$ y $\sqrt{6} = 6^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \sqrt[3]{12} = 12^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{12^2} = \sqrt[6]{144}$ y $\sqrt{6} = 6^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{6^3} = \sqrt[6]{216}$

Así, ya que $144 < 216 \Rightarrow \sqrt[6]{144} < \sqrt[6]{216} \Rightarrow \sqrt[3]{12} < \sqrt{6}$.

2d) $4 = 4^{\frac{1}{1}}$ y $\sqrt[3]{68} = 68^{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow 4 = 4^{\frac{3}{3}} = \sqrt[3]{4^3} = \sqrt[3]{64}$ y $\sqrt[3]{68}$

Así, ya que $64 < 68 \Rightarrow \sqrt[6]{64} < \sqrt[6]{69} \Rightarrow 4 < \sqrt[3]{68}$.

3a) $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ y $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}$

Así, ya que $2 > 1$ y $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} \Rightarrow 2^{\frac{1}{2}} < 2^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt[3]{4}$.

3b) $\sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}}$ y $\sqrt[5]{16} = \sqrt[5]{2^4} = 2^{\frac{4}{5}}$

Así, ya que $2 > 1$ y $\frac{3}{4} < \frac{4}{5} \Rightarrow 2^{\frac{3}{4}} < 2^{\frac{4}{5}} \Rightarrow \sqrt[4]{8} < \sqrt[5]{16}$.

3c) $\sqrt[4]{125} = \sqrt[4]{5^3} = 5^{\frac{3}{4}}$ y $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$

Así, ya que $5 > 1$ y $\frac{1}{2} < \frac{3}{4} \Rightarrow 5^{\frac{1}{2}} < 5^{\frac{3}{4}} \Rightarrow \sqrt{5} < \sqrt[4]{125}$.

3d) $\sqrt{\frac{1}{27}} = \sqrt{\frac{1}{3^3}} = \sqrt{3^{-3}} = 3^{-\frac{3}{2}}$ y $\sqrt[3]{\frac{1}{81}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3^4}} = \sqrt[3]{3^{-4}} = 3^{-\frac{4}{3}}$

Así, ya que $3 > 1$ y $-\frac{3}{2} < -\frac{4}{3} \Rightarrow 3^{-\frac{3}{2}} < 3^{-\frac{4}{3}} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{27}} < \sqrt[3]{\frac{1}{81}}$.

4. Sea $y = \sqrt{3} + 2$

$\Rightarrow (\sqrt{3} - \sqrt[4]{48} + 2)(\sqrt{3} + \sqrt[4]{48} + 2) = (y - \sqrt[4]{48})(y + \sqrt[4]{48}) = y^2 - \sqrt{48} = y^2 - \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 3} = y^2 - 4\sqrt{3}$

Calculando $y^2 = (\sqrt{3} + 2)^2 = 7 + 4\sqrt{3} \Rightarrow$ $(\sqrt{3} - \sqrt[4]{48} + 2)(\sqrt{3} + \sqrt[4]{48} + 2) = y^2 - 4\sqrt{3} = 7 + 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 7$.

5a) $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}$

5b) $\sqrt[3]{3}x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt[3]{3}} = \frac{3}{3^{\frac{1}{3}}} = 3^{1-\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}}$

5c) $\frac{2}{\sqrt[3]{3}} \times \frac{x}{x} = \frac{2}{3^{\frac{1}{3}}} \times \frac{3^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{2}{3}}} = \frac{2 \times 3^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}} = \frac{2\sqrt[3]{3^2}}{3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}} = \frac{2\sqrt[3]{9}}{3}$

6a) $\frac{6}{\sqrt[3]{9}} = \frac{6}{3^{\frac{2}{3}}}$

Luego $\sqrt[3]{9}x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt[3]{9}} = \frac{3}{3^{\frac{2}{3}}} = 3^{1-\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{3}}$,

$\Rightarrow \frac{6}{\sqrt[3]{9}} = \frac{6}{3^{\frac{2}{3}}} \times \frac{3^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}} = \frac{6 \times 3^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}} = \frac{6\sqrt[3]{3}}{3} = 2\sqrt[3]{3}$.

6b) $\frac{4}{\sqrt[4]{2}} = \frac{4}{2^{\frac{1}{4}}} = \frac{4}{2^{\frac{1}{4}}} \times \frac{2^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{3}{4}}} = \frac{4 \times 2^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{3}{4}}} = \frac{4\sqrt[4]{2^3}}{2} = 2\sqrt[4]{8}$

6c) $\frac{10}{\sqrt[4]{8}} = \frac{10}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{10}{2^{\frac{3}{4}}} = \frac{10}{2^{\frac{3}{4}}} \times \frac{2^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}} = \frac{10 \times 2^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{1}{4}}} = \frac{10\sqrt[4]{2}}{2} = 5\sqrt[4]{2}$

7a) $2^{4x-2} = 8^{x+1}$

$2^{4x-2} = (2^3)^{x+1}$

$2^{4x-2} = 2^{3x+3}$

$4x - 2 = 3x + 3$

$x = 5$

7b) $3^{3x} = 27^{2x+3}$

$x = -3$

7c) $2^{-x} = \sqrt{2}$

$x = -\frac{1}{2}$

7d) $2^{\frac{x}{2}} \times 4^{\frac{x}{3}} = 128$

$x = 6$

7e) $9^x - 4(3^{x+1}) + 27 = 0$, $y = 3^x$

Sustituyendo se tiene $y^2 - 12y + 27 = 0$.

Las soluciones son $x = 1$, $x = 2$.

7f) $4^{-x} - 2^{-x+2} + 4 = 0$, $y = 2^{-x}$

Sustituyendo se tiene $y^2 - 4y + 4 = 0$.

Las solución es $x = -1$.

7g)
$$(4^{x-3})(6^{x+1})(3^{2x-6}) = 6$$
$$[(2^2)^{x-3}](6^{x+1})(3^{2x-6}) = 6$$
$$(2^{2x-6})(6^{x+1})(3^{2x-6}) = 6$$
$$(6^{2x-6})(6^{x+1}) = 6$$
$$6^{3x-5} = 6$$
$$3x - 5 = 1$$
$$x = 2$$
Por lo tanto, la solución es $x = 2$.

7h)
$$12^{x-2} = 2^{2x-4}$$
$$[(2^2)(3)]^{x-2} = 2^{2x-4}$$
$$[(2^2)^{x-2}](3^{x-2}) = 2^{2x-4}$$
$$(2^{2x-4})(3^{x-2}) = 2^{2x-4}$$
$$3^{x-2} = 1$$
$$x = 2$$
Por lo tanto, la solución es $x = 2$.

7i) $-3^x - 9(3^{-x}) + 10$, $y = 3^x$

$-y - 9y^{-1} + 10 = 0$

Se tiene que $y \neq 0$

$\Rightarrow -y(-y - 9y^{-1} + 10) = -y(0)$

$\Rightarrow y^2 + 9yy^{-1} - 10y = 0$

$\Rightarrow y^2 - 10y + 9 = 0$

$\Rightarrow (y - 9)(y - 1) = 0 \Rightarrow y = 9$ o $y = 1$

$\Rightarrow 3^x = 9$ o $3^x = 1 \Rightarrow x = 2$ o $x = 0$.

Por lo tanto, la soluciones son $x = 2$, $x = 0$.

8a) $\sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{5^2} = 5^{\frac{2}{4}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

8b) $y = 2^x$ y $y = -2^x$.

Si tienen un punto en común (a, b)

$\Rightarrow b = 2^a$ y $b = -2^a \Rightarrow 2b = 2^a - 2^a = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow 2^a = 0$, pero esto no es posible para ningún número real a.

8c) Si tienen un punto en común (a, b)

$\Rightarrow b = 2^a$ y $b = 4^a \Rightarrow 2^a = 4^a \Rightarrow 2^a = (2^2)^a \Rightarrow 2^a = 2^{2a} \Rightarrow a = 2a \Rightarrow a = 0 \Rightarrow b = 1$.

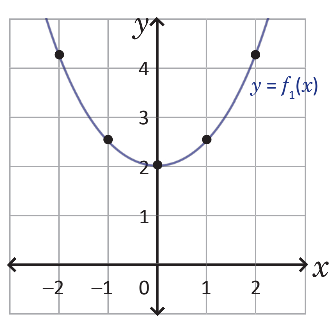
El único punto en común es (0, 1).

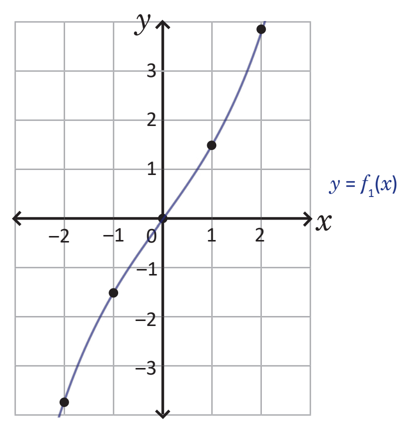
9a)

x	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	4.25	2.5	2	2.5	4.25

9b)

x	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	−3.75	−1.5	0	1.5	3.75





Utilizando los resultados de los problemas 4 y 5 se puede deducir que está función alcanza su mínimo valor en $x = 0$.

Una vez estén bien trazadas las gráficas de las funciones del problema 9 se puede establecer la monotonía gráficamente. Para la función $f(x) = 2^x - 2^{-x}$ también se puede establecer con un proceso similar al desarrollado en el problema 4 de la clase 2.3.

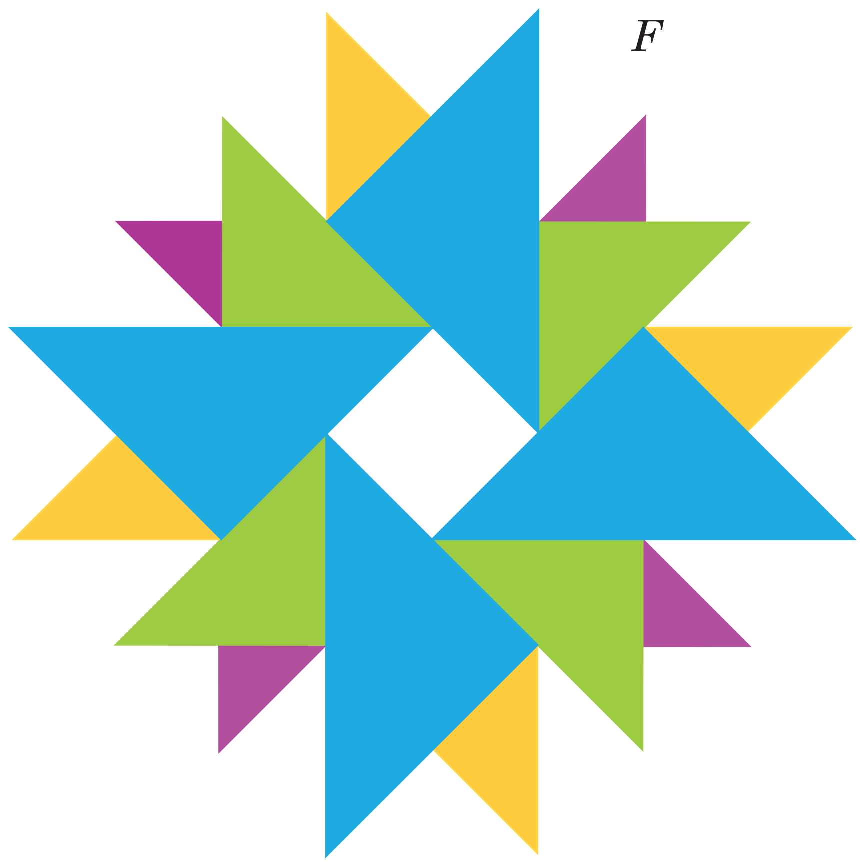
10a) Gráficamente

La función $f(x) = 2^x + 2^{-x}$, tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $[2, +\infty[$.

La función $f(x) = 2^x - 2^{-x}$, tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $\mathbb{R}$.

10b) La función $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ es creciente en el intervalo $[0, +\infty[$ y decreciente en el intervalo $]-\infty, 0]$.

La función $f(x) = 2^x - 2^{-x}$ es creciente en $\mathbb{R}$.



F

Área F = ¿?

La figura está formada por 4 triángulos de cada color, entonces se tiene que:

$$\text{Área } F = 4T_1 + 4T_2 + 4T_3 + 4T_4 = 4(T_1 + T_2 + T_3 + T_4) = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}\right)$$

Entonces del contenido de sucesiones geométricas: Área $F = 4\left(\frac{2^4 - 1}{2^4}\right) = \frac{15}{4}$.

REPÚBLICA DE EL SALVADOR EN LA AMÉRICA CENTRAL

Bachillerato

Sugerencia Tomo 1 Matemática Segunda edición 2 Bachillerato