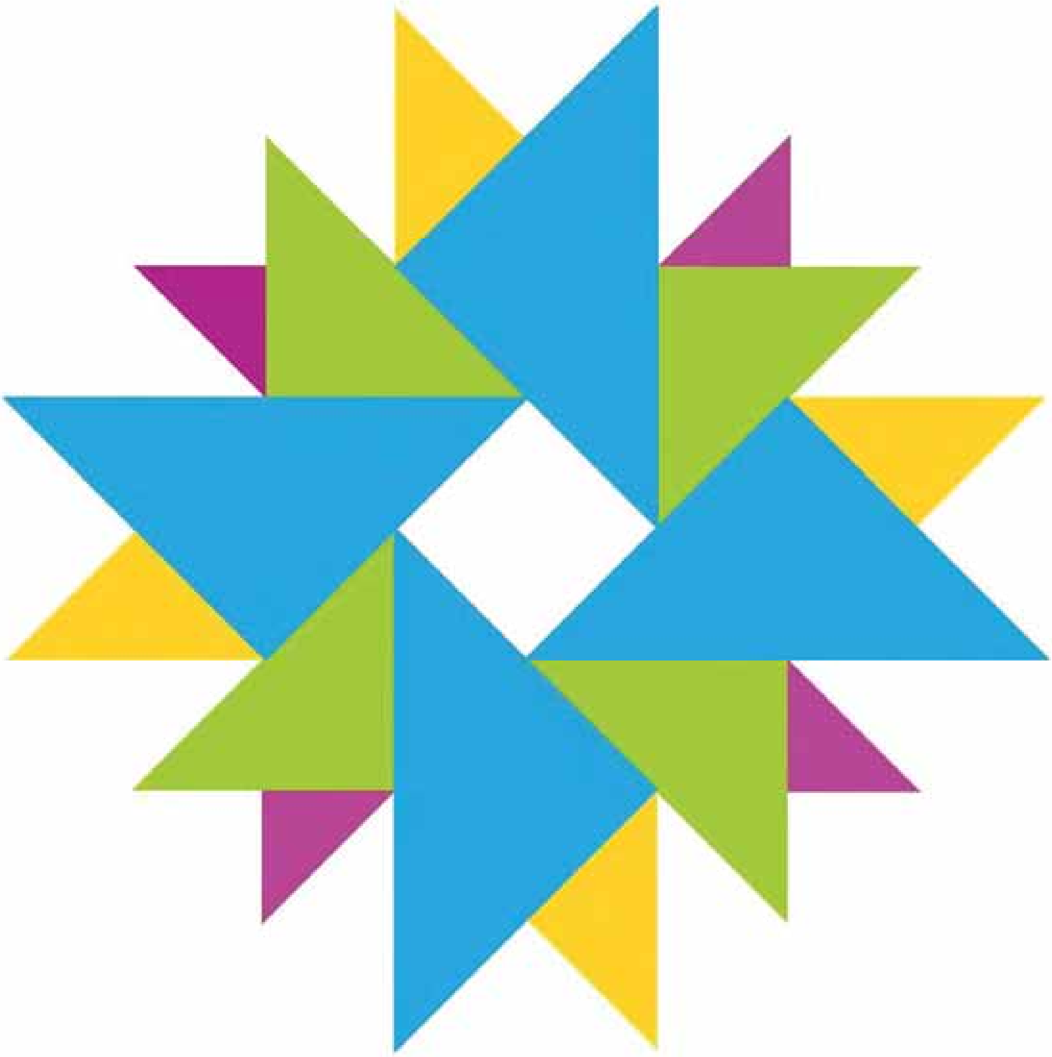
エルサルバドル政府

教育省

算数

高校2年



第1巻

指導案
第二版

ESMATE

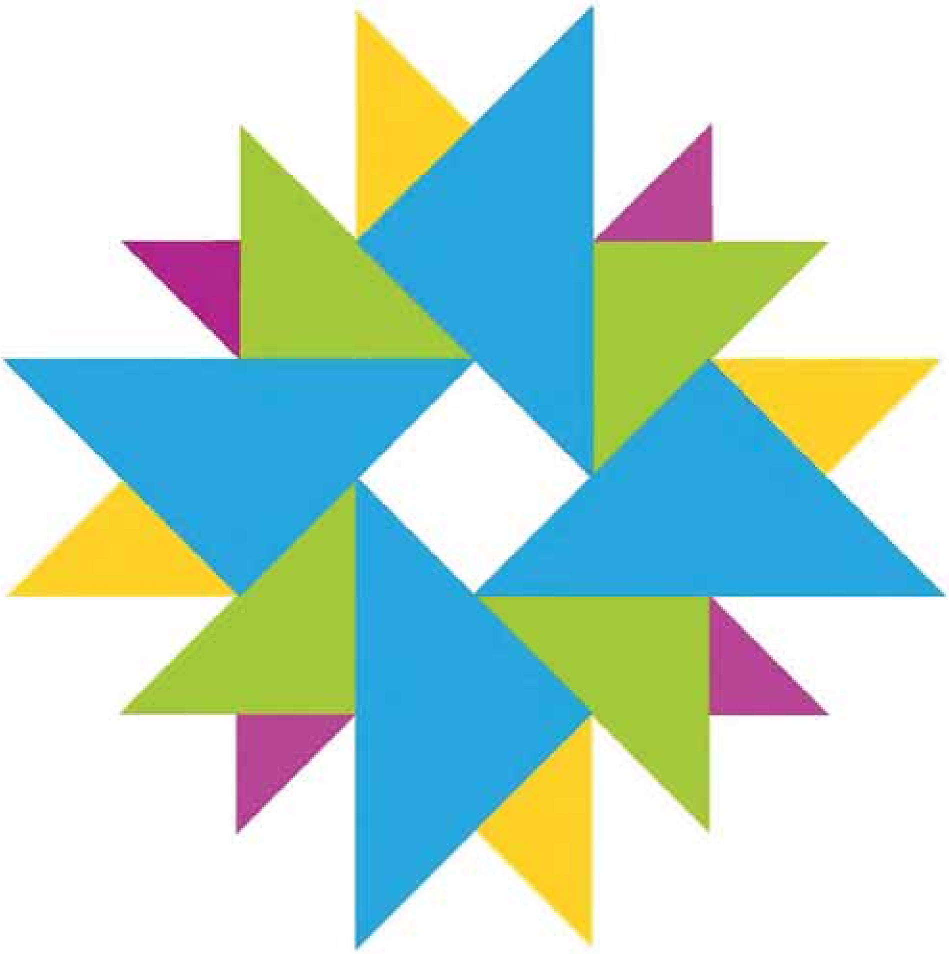
JICA

エルサルバドル政府

教育省

算数

高校2年



第1巻

指導案

第二版

調整および技術的校正
Francisco Antonio Mejía Ramos

教育省の執筆及びレイアウトチーム
Ana Ester Argueta Aranda
Diana Marcela Herrera Polanco
César Omar Gómez Juárez
Francisco Antonio Mejía Ramos

デザイン及びレイアウトの校正
Francisco René Burgos Álvarez
Judith Samanta Romero de Ciudad Real

文体修正
Marlene Elizabeth Rodas Rosales
Ana Esmeralda Quijada Cárdenas

国際協力機構（JICA）を通じた日本の技術協力

表紙の画像は教育的見地から、正三角形の内角を三等分し、それによりその中にできる最も大きい三角形の辺の値を求めることができる図を用いています。
答えは裏表紙にあります。

510.712
M425 算数：高校2年［電子資料］：、
指導案 第1巻／Ana Ester Argueta Aranda、Diana Marcela Herrera Polanco、César Omar Gómez Juárez、Francisco Antonio Mejía Ramos
-- 第2版 -- サンサルバドル、エルサルバドル：教育省（MINED）、2019年。
電子資料 1ファイル（288ページ；図解入り；28 cm -（Esmate）
電子データ（1ファイル：pdf、11 MB）--
www.mined.gob.sv/index.php/esmate.
ISBN 978-99961-348-7-6（電子書籍）
1. 算数 – 教科書。2. 数学 – 練習、問題、など。3. 初等教育 – 教科書。
I. Argueta Aranda、Ana Ester、共著。II. タイトル。

教師のみなさん

心からご挨拶を申し上げ、エルサルバドルの全国民のために重要な仕事をされていることに感謝します。

教育科学技術省（MINEDUCYT）は初中等教育算数・数学指導力向上プロジェクト（ESMATE）を通じて、みなさんのために算数・数学科目の教師用指導案を作成しました。この指導書は日常の指導活動で重要なツールとなるでしょう。

この資料は、当科目の授業を展開する方法を具体的に指導し、その結果エルサルバドルの生徒たちの学びを大きく向上させることを主な目的としています。

この指導案は生徒用の教科書に対応する授業内容の提案となっていることから、算数学習プログラムの規程を具体的に実現するものであると言えます。

みなさんがこの資料を最大限に活用し、私たちの愛する国の発展に貢献し続けるべく、全力で努力し献身されると確信しています。

敬具

Carla Evelyn Hananía de Varela
教育科学技術大臣

Ricardo Cardona Alvarenga
教育科学技術副大臣

目次

I. はじめに

本指導案（SM）は、数学科の学習プロセス改善に寄与することを目的とした教育省の初中等教育算数・数学指導力向上プロジェクト（ESMATE）のチームによって作成された教材の一部です。

本指導案では、生徒の学力を向上させるために出題された問題の解き方をベースに、学習過程において考慮すべき全てのポイントを詳しく解説しています。この指導案を使用することで、教師は授業を効果的に行い、教科書（LT）を十分に活用することができるでしょう。

この指導案を活用することで、主に以下の目標の達成を目指します。

1. 課とユニット毎に示される指標や単元の内容に沿った授業の進め方を提案すること。
2. 教師および生徒が内容を理解するのに役立つような具体的かつ適切な指導案を提示すること。
3. 生徒が身につけるべき算数・数学的学力を表す到達指標を達成できるように、具体的な指導案を提示すること。

教育科学技術省は、これらの教材を適切に用いることが教師の指導力を強化し、また生徒の学力向上にも大いに役立つと確信し、義務教育課程でこれらの教材を使うことを推奨しています。そのため以下にこの教材を用いる上で大切なポイントをまとめます。

1. **数学学習の重要性：**数学的思考を発達させることによって、複雑な問題を解き、問題の状況を分析し、創造的、批判的、効率的、実用主義的、論理的に考える能力を身につけることができます。これらの能力を身につけることで、責任ある一市民として、地域の持続可能な開発を伴いながら生活することが可能になります。というのも、日常生活のあらゆる場面には科学が関わっており、そのため生徒たちが日々直面する様々な問題を解決するための技術的ツールとして身近なあらゆる物を利用できるということを、数学的知識が気付かせてくれるからです。

2. **教師の基本的役割と生徒の主体性：**生徒の教育において教師が果たす役割は非常に重要で、教育の成果を出すためには、その資質が問われます。そこで、あくまで授業の主役は生徒自身であることをふまえ、各生徒の学習到達度に合わせ、適宜、教師が使える指導支援ツールとして用いることができるように、これらの教材が作成されました。主体性は、授業ごとの到達指標の達成度によって明らかになります。これらの指標の達成が、ユニット相応の学力を身につけ、既習の知識も使って簡単な問題から難しい問題まで正しく解けるようになるための「ステップ」となります。

3. **授業の流れと真の学び体験**：生徒の主体性は授業の流れの中に盛り込まれており、その多くは以下の手順や内容を含んでいます。

   - 導入問題
   - 導入問題の解法
   - まとめ（定義、定理、まとめ、応用）
   - 問題

この流れになる理由は授業の各要素のねらいで解説しています。生徒たちが教師のサポートを受けて思考力を磨き、必要な学力を身につけることができるように、このような流れに沿って授業を行うことを推奨します。

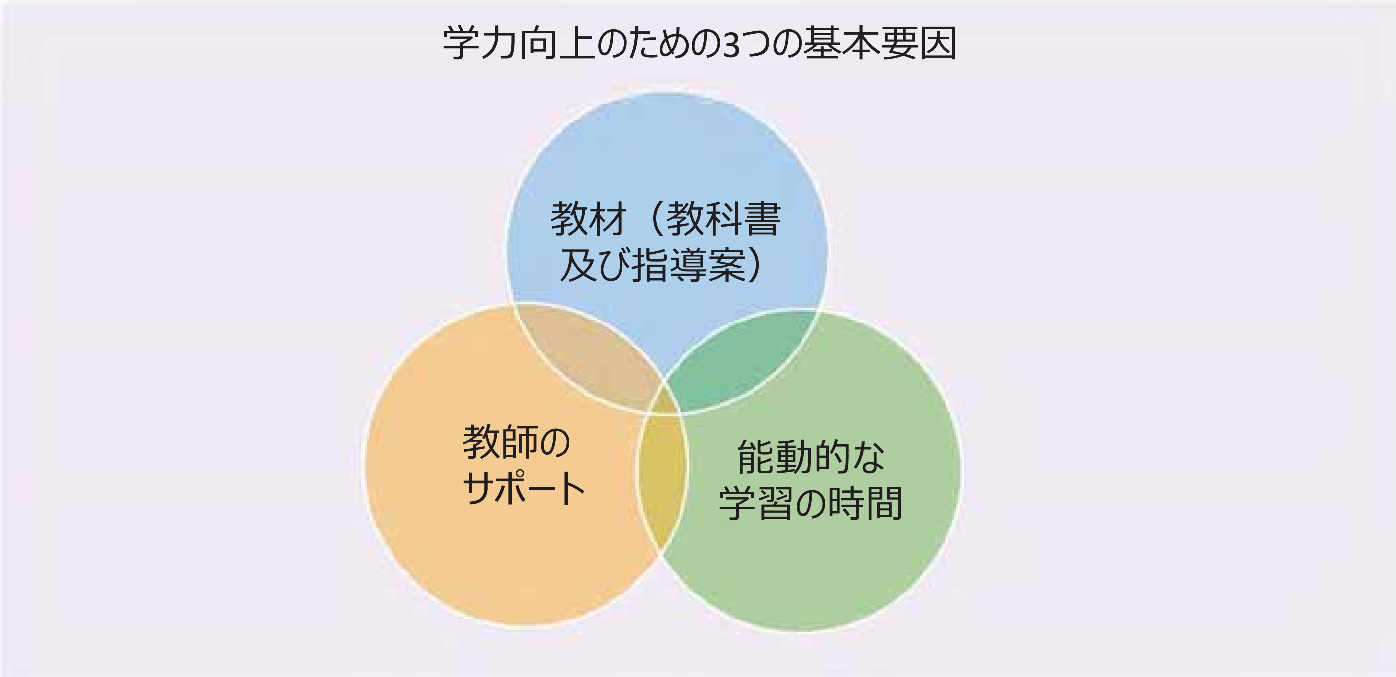
4. **学校運営との完全調和**：これらの学習教材の効果を最大限に引き出すために、もう1つ考慮すべき基本事項に、学習をするのに適した環境を整えるという問題があります。これは、行政と教育機関の運営に密接にかかわるテーマです。この管理については、教師が年間を通して実施する授業の時間数が大きく関わってきます。この指導書にある授業を実施して学習内容の到達指標を達成するためには、年間に少なくとも192時間の授業を行うことが必要になります。公式には240時間の授業を行うことができるため、残りの48時間は教師が評価、研修など、教育科学技術省または教育機関が要求する他の活動に充てることが可能です。

本書の構成要素のうち、**IV章、指導案の構成**は特に重要で、ここでは授業の流れとねらいが示されています。さらに一部の授業については、ある特定の時点で生徒がつまずく可能性のある問題点について記載されています。強調すべきもう１つの重要な要素は、授業で扱う問題に対する解法です。また、各授業の到達指標と授業で扱った問題に直接対応する各ユニットのテスト見本が示されています。 これは参考として非常に役立ち、学習プロセス全体を通じて生徒の学習理解度を測ることができます。

もう1つの重要な意義を持つ章は、**V章、問題の解法に基づき数学の授業を進めるための手引き**です。ここでは、授業の流れの各段階についての説明や、学習プロセスの中で生徒が主に取り組むべきこと、また教師が生徒に対して行うべきサポートや関与について解説しています。さらに、生徒の主体性とそれをスムーズにサポートする教師の役割に関し、具体的な方法を提案している点も注目に値します。

本書を含む教材の開発には、実際に生徒の教育や指導に携わった経験を持つ多くの教員が全国から参加しており、彼らの多大なる貢献によってこれらの教材が作成されました。この教材開発が参加型であったように、この教材の活用に関しても、各教師が生徒の学習に必要だと思う部分を適宜補いながら活用するべきで、あくまで柔軟に扱える改訂可能な教材として活用することが大切です。

これらの教材を用いる目的は、将来我が国を担うことになる生徒たちの学力の向上です。ここで提案する戦略の一部として、その目的に関する要因を以下に挙げます。



次に挙げる3つの要因は、学力を向上させるために非常に重要です。教科書と指導案からなる**教材、**授業中および家庭学習における**能動的な学習の時間**、そして学習を進める上での教師の**サポート**や**役割**です。

教材

学習効果や効率を良くするには、生徒たちの理解力に対し、学習の流れと問題難易度が適切であること、つまり、これらの教材の内容が学術的にも教育的にも十分である上に、さらに理解しやすいものであることが重要となります。

上記の最初の要件を満たすために、数学科で習得する学習内容は教育省が定める習熟度に厳密に沿ったものである必要があります。二つ目に掲げた要件については、教科書の内容がエルサルバドルの学生たちの学習ニーズにできる限り近いものである必要があります。

能動的な学習の時間

この教材が出来上がる前段階として教育科学技術省が学校教育の調査を行った際、その結果が満足いくものでなかったという点に触れておかなければなりません。その調査では、能動的な学習の時間が十分でなかったことが確認され、その結果、生徒の能力が十分に引き出せていないことが分かりました。そのため、今回作成されたこの教科書では教師に対し、生徒たち各自が能動的に、またはクラスメートと相互に学習するための時間を少なくとも20分は用意すべきであると提案しています。

能動的な学習

1. 個別学習形式
   学力がつくのはどの時点ですか？生徒が自分で教科書を読んでいる時や授業用ノートを使って自力で問題を解いている時が能動的な学習に相当します。反対に、教師の説明を生徒が一方的に聞いている時間は一般的に受け身学習となるため、能動的学習に比べ学び力が劣るとされます。

   その理由から、教師には生徒一人一人がそれぞれ個別に能動的に学習する時間を作るように勧めています。

2. 相互学習形式
   実際の授業では、教師が一人か二人の生徒に個別に対応している間、他の生徒が放置されてしまうという場面が多々あります。これは、生徒は全員学習しなくてはならないにも関わらず、教師が生徒全員に対応することが難しいという現実を表しています。

   他に、生徒全員が必要なサポートを受けられる方法はないのでしょうか？
   生徒同士で相互学習（または交互学習）させるべきです。相互学習には多くのメリットがあります。まず、ペアで行う学習は、もし片方の生徒が内容を理解していなければ、時間を無駄にすることなく（教師が対応してくれるのを待つ必要なく）もう一方の生徒に聞けばよいというメリット、二つ目は、クラスメートに説明する側の生徒も声に出して説明することで、自分の理解を深めることができるというメリット、三つ目は、教師が個別に対応できていない生徒たちが学ぶ機会を得るというメリット、そして四つ目は、教室に共生の雰囲気が生まれるというメリットです。

   したがってまず最初に個別形式の取組みを行い、その後相互形式の学習をもってくることを勧めます。

各授業では、生徒がそれぞれ教科書のページにある問題や練習問題を解くのに、（少なくとも）20分与えるのが理想です。この個別形式の学習（もしくは相互学習）で、生徒たちに学ぶ力がついて学力が向上し、それにより、出題される問題に対する理解度も上がることなどが期待されます。

この点について最後に、教室で教科書を使用することに加えて、授業中に解けなかった問題を解くために家庭での能動的な学習時間を最低20分は確保する必要があることを述べておきます。20分の家庭学習と授業中の20分の能動的学習を合わせ、それを192日間続けると、以下が達成されることになります。**(20分 + 20分) × 192日 = 学力の向上。** 我が国の全ての教師はこの点を意識すべきでしょう。

サポートと役割

教育科学技術省は教師の役割についての解釈を、**教えること**から**学習のサポート**へと切り替えることを提案しています。従来、教育課程においては、**生徒たちが何を得ることができるか**に焦点をあてる代わりに、 **教師がすべきことは何か**という問いに対する答えを模索してきました。学びに着目することが真の努力であり、教師の仕事に対する評価の基本になります。

教師は学力を高めることに注力し、生徒に学力がついたかどうか、その結果を常に注視すべきです。

1. 教科書内の1授業の構成

以下は、ユニット5の授業2.4のページです。

レッスンの番号を示しています。

授業の番号を示しています。

このアイコンが出てくるときは、生徒は問題を解くのに電卓を使ってよいことを示しています。

授業では、まず最初に生徒に対し問題を提示して、その問題をどのように解くかを考えさせる必要があります。そのようにして授業で扱うテーマを導入することになります。

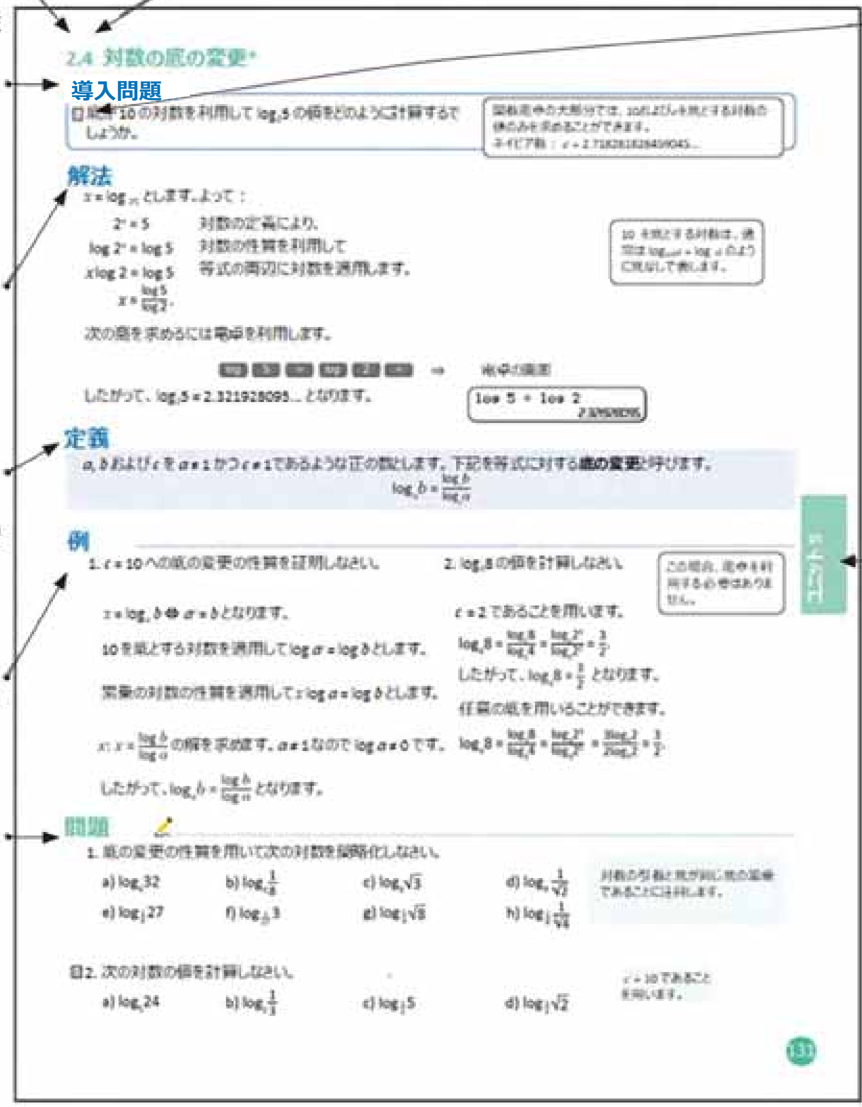
授業の第2ステップでは、提示された問題に対する1つまたは複数の解法が教科書の中で提案されます。

学習内容を定着させます。この部分で導入問題と解法を結び付けて、数学用語を用いてその単元の学習内容を説明しています。

授業によっては、学習内容の定着を図るために追加問題が出されています。

生徒が学習内容を復習できるように、問題や練習問題が出されています。

授業に対応するユニットを表示しています。


2.4 対数の底の変更*

導入問題

底が 10 の対数を利用して $\log_2 5$ の値をどのように計算するでしょうか。

解法

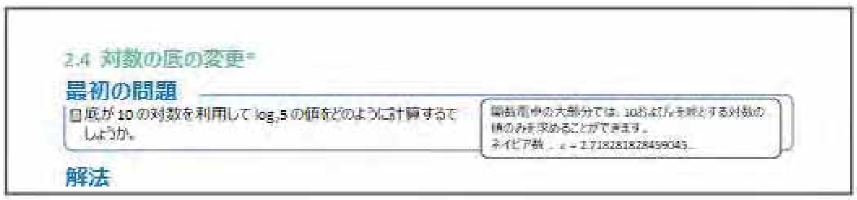
定義

例

問題

2. 教科書の重要な側面

難易度の高い授業：タイトルにアスタリスク（*）がついている授業は、他の授業に比べ難しい内容を扱うことを意味しています。教師は生徒の出来具合に合わせて、なかなか問題が解けない場合は、導入問題の解き方について、詳しい説明を与えても構いません。例えば：


2.4 対数の底の変更*

最初の問題

底が 10 の対数を利用して $\log_2 5$ の値をどのように計算するでしょうか。

解法

補足情報：教科書には、予備知識やヒント、数学の歴史に関する小話など、学習をスムーズにする要素が盛り込まれ、それぞれ色を変えて紹介されています。

予備知識	ヒント	小話

授業配分： この教科書は8ユニットで構成されており、各ユニットには複数の課があり、それぞれの課は複数の授業で構成されています。各授業のタイトルについている番号は、最初の数字が課の番号を示し、二つ目の数字が授業番号を示しています。

そして、各ユニットの最後には必ず、学習したテーマに関する問題があり、時には数学の技術的リソースとしてのGeoGebraを使った演習を行う場合もあります。

GeoGebraを活用した授業の展開：この教科書の革新的なコンテンツの1つに、数学の効率アップにつながるツールを使うことができる数学ソフトの利用があります。そのために、一部のユニットでは最後に、生徒がそのユニットで解いた問題の答えを確かめることができるようにソフトの利用を促したり、ソフトを使って解く問題を出していたりします。

具体的な物を用いた導入授業の実施：一部のユニットでは、論理的思考や洞察力、直感的思考、空間認識の力を伸ばす目的で、その単元の内容を導入できるような授業が組まれています。そうすることで、生徒に理解しやすいようものとなるよう工夫しています。

IV. 指導案の構成

1. 年間計画

学期	月	ユニット（授業時数）	GM のページ（教科書のページ）	内容
一学期	1月	ユニット1：方程式（10）	23～52 (7～18)	• 4次方程式 • 根号を含む方程式 • 有理方程式 • 連立一次方程式と連立二次方程式
	2月	ユニット2：直線（26）	53～122 (19～48)	• 2点間の距離 • 与えられた比での線分の分割 • 線分の中点 • 傾き • 点傾き型の直線の方程式 • 2点を与えられた直線の方程式 • 座標軸に平行な直線 • 直線の方程式の一般形 • 直線と座標軸の交点： • 2直線の交点 • 平行な直線と直角に交わる直線 • 点と直線の距離 • 直線の傾斜角 • 2直線のなす角 • GeoGebraを使った演習
	3月	ユニット3：二次曲線－2学期に続く－（12）	123～157 (49～61)	• 方程式の軌跡と軌跡の方程式 • 放物線の方程式（標準形） • 放物線の平行移動 • 放物線の方程式（一般形） • 放物線の応用
二学期	3月 4月	ユニット3：二次曲線－続き－（29）	158～228 (62～94)	• 円の方程式（標準形） • 円の平行移動 • 円の方程式（一般形） • 円の応用 • 楕円の方程式（標準形） • 楕円の要素と性質 • 楕円の平行移動 • 楕円の方程式（一般形） • 楕円の応用 • 双曲線の方程式（標準系） • 双曲線の平行移動 • 双曲線の方程式（一般形） • 双曲線の応用 • GeoGebraを使った演習
	5月	ユニット4：超越関数 I (20)	229～288 (95～118)	• 正の指数、負の指数、ゼロ • 指数が等しい累乗根の掛け算と割り算 • 二重根号 • 同じ累乗根の足し算と引き算 • 累乗根の累乗 • 有理数の指数 • グラフ、対称、定義域、値域、漸近線 • 縦方向または水平方向の移動 • 指数方程式

学期	月	ユニット（授業時数）	GM のページ（教科書のページ）	内容
三学期	6月 7月	ユニット5：超越関数 II (37)	293～386 (119～160)	• 単射関数、全射関数、全単射関数 • 関数の合成と逆関数 • 対数とその性質 • 対数の計算 • 対数関数のグラフ、定義域、値域、単調性 • 対数方程式 • 基数10の対数と自然対数 • 三角比 • 単位円と周期性 • 正弦関数、余弦関数、正接関数 • 周期、振幅、変位 • GeoGebraを使った演習
	8月	ユニット6：等差数列、等比数列 (14)	387～434 (161～176)	• 等差数列の一般項と部分和 • 等比数列の一般項と部分和
四学期	8月 9月	ユニット7：場合の数 (27)	435～496 (177～204)	• 集合、要素、ベン図 • 集合の濃度 • 集合の演算 • 樹形図 • 和の法則と積の法則 • 順列の概念 • 重複順列 • 円順列 • 同じものを含む順列 • 補集合による計算 • 組み合わせの概念 • 組み合わせの恒等式 • パスカルの三角形 • ニュートンの二項定理
	10月	ユニット8：確率 (17)	497～544 (205～222)	• コルモゴロフの公理 • コルモゴロフの公理の応用：補集合の確率 • 条件付き確率の公式 • 条件付き確率の応用 • 全確率の定理とベイズの定理 • 独立試行

決められた内容を全て行うためには、表示されている計画に従う必要があります。

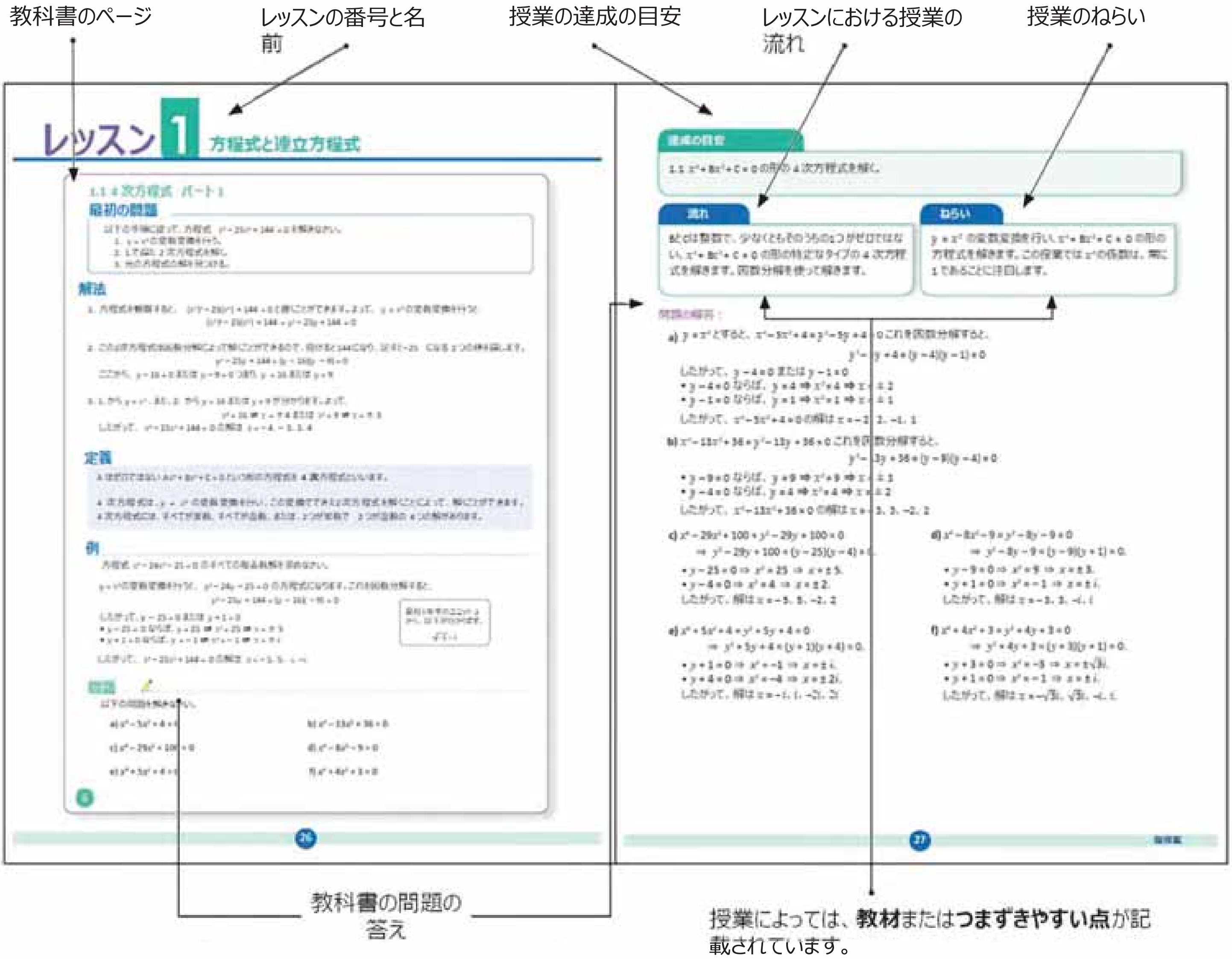
2. ユニット番号

a) このユニットのねらい：このユニットを終えた時点で生徒たちが習得していなければならない学力を示しています。
b) 関連および発展（前学年次までと次年次以降）：生徒が予備知識を学習した学年、また今後この内容の続きを学習する学年が示されています。
c) ユニット学習計画：各ユニットの授業が示されています。
d) 各レッスンの要点：ユニット毎の課で扱う重要事項が示されています。

3. ユニットテスト

生徒たちの理解度と教師によるユニット目標到達度を測るためのテストの例を紹介します。設問の正解率が悪い場合、教師はどのようにその問題を改善するかを考え、その正解率の低さが次の学習の妨げとならないように配慮する必要があります。このように、教師はこのテスト結果を踏まえて学内あるいは他校の教師仲間と議論することができます。

4. 指導案のページの要素



授業によっては、教師向けに問題を解く上でヒントになる補足情報や重要情報が盛り込まれています。それらは以下のような欄に示されています。

教師にとって大切な情報

1. 授業展開に関する教師向けアドバイス

以前の学習プログラムと同じく、この新バージョンにおいても、数学の授業では問題の解き方に焦点を当て、それをもとに授業展開する方法を提案しています。この方法で行われる授業では、学びのプロセスの主体は生徒となります。そのため、この方法では生徒たち自らが、学習状況や提示された問題に基づいて知識を身に付け、手順を考えます。このプロセスにおいて教師が果たすべき主な役割は、生徒たちの学習を促し、あるいはサポートすることです。そのために教師は以下の手順に従う必要があります。

手順	学びのプロセス（生徒）	学習サポートのプロセス（教師）	サポートする上での注意事項
1	宿題の問題の答え合わせと予備知識の確認	前回の授業でやり残して宿題にした教科書の問題の答え合わせをします。	この手順にかける時間は最大3分とします。
2	授業の導入問題を各自で解く。	授業の導入問題を読むように指示し、そのテーマに関する生徒たちの理解度を把握してから、各自で問題を解いてみるように指示を出します。（能動的学習）	- 生徒たちが導入問題を解いている間、教師は教室内を巡回し、生徒の進み具合やつまずき具合を確認します。 - 分からない場合は教科書に掲載されている解き方を参照するように促します。 - この手順にかける時間は最大6分とします。
3	クラスメートとの相互学習	クラスメート同士で解き方や分からない点を確認しあうことでしっかり学習します。	- まずは二人のペアをつくって取り組み、少しずつグループ人数を増やして最終的に4人までのグループで取り組ませます。 - 分からない場合は教科書に掲載されている解き方を参照するように促します。
4	解き方と授業のまとめの共有化	解き方と授業のまとめを発表するよう促します。	必要な場合には、解き方を説明するか、クラス全体で解き方を確認し合うよう誘導します。
5	問題と練習問題コーナーの最初の設問を解く（能動的学習）	問題コーナーの最初の問題を解くように指示します。	すでに最初の設問を解き終えた生徒がいる場合には、残りの設問も解くように伝えます。

6	最初の設問の答え合わせ	最初の問題について、生徒全員で答え合わせをして、正しく解けていたかどうかを確認します。	- 生徒たちが取り組んでいる間、教師は教室内を巡回し、生徒全員の最初の設問の答えを確認します。 - 難易度に応じて、教師が解き方を説明するか、または単に答えを書くだけでも構いません。
7	残りの問題の取組み	残りの問題を解くように指示を出します。次に、答えがあっているかを確かめ、間違えた問題については再度解いてみるよう促します。	早く終えた生徒たちには、クラスメートをサポートするように伝えます。
8	自宅で取り組む宿題をメモします。	教科書内でやり残した問題を宿題にします。	教科書にある授業用の問題を全て終えることが出来なかった場合には宿題にしても構いませんが、生徒たちの他の宿題の分量を考慮する必要があります。

生徒たちの学力向上の戦略に示されているように、最低20分の能動的学習時間を確保しなくてはなりません。これに関しては、上記の手順、特に手順2、3、5、7ができていれば達成されると思われます。

2. 学習を支援する上で考慮すべき重要なポイント

a. 適切な時間配分

学習プログラムには到達指標が示され、そのカリキュラムで指定されている授業時間内に学習すべき内容が示されています。プログラムにおいては、1つの授業は45分で構成され、年間240授業相当の時間数が設定されています。この枠にそって、その時間内で教科書にある全ての内容を学習できるようにする必要があります。この点については、与えられた時間に対する学習の効率化が必要となってきます。45分で達成の目安を達成することは容易ではありません。したがって、以下に学習をスムーズにすすめるテクニックの一部を紹介します。

生徒の机の配置

生徒の机の配置は授業のねらいによって変わることもありますが、数学の授業では基本的に、生徒たち全員が黒板に向かって座るよう机を横並びに配置することを推奨します。その理由は次の通りです。

a. 生徒たちの学習状況を確認するために巡回しやすい
b. クラスメートとの相互学習がしやすい
c. 生徒が黒板を見やすい

授業を始める前の教科書の配布

教室内では授業を受ける態度に関するきまりがありますが、それにもう1つルールを作った方が良いでしょう。つまり、授業が始まる前に、生徒が授業に必要な資料や教材の用意を済ませておくというルールです。このルールを決めたら、一部の生徒に教科書配布の係を割り当てることで、担当になった生徒たちが責任をもって授業開始前に教科書を配布するようになります。

振り返りと復習に充てる時間

授業時間は限られており、生徒全員が達成すべき達成の目安が授業ごとに設定されています。もし最初の予備知識を整理する段階で3分以上かかってしまった場合、おそらく時間が足りなくなって到達指標を達成することは難しくなると思われます。そしてその遅れが次の授業の遅れを招き、その結果、その年に履修すべき学習プログラムの内容を全て終えることができなくなる可能性があります。

振り返りの部分でつまずいた場合、短時間で内容を思い出すのは難しい場合が多く、予備知識の整理にもっと時間をかける必要もでてきます。たとえば、高校では大抵、方程式を解く段階でつまずく生徒が出ますが、方程式をマスターするには、問題を解くためにより多くの時間が必要になります。したがって、振り返りを進めるにあたって教師は、そのねらいはその日の授業の問題を解くためのヒントを与えることであり、復習することが主なねらいではないことを忘れてはなりません。

授業の導入問題に各自で取り組む時間

前述の**1.授業展開に関する教師向けアドバイス**で定めている通り、これには6分間を費やす必要があります。多くの場合、生徒たちは個別に取り組む際に何をすればよいか分からず、単に教師からの次の指示を待っています。そのような場合、生徒同士で確認し合うように、相互学習を促すのが良いでしょう。

時間不足で授業内容を全て網羅できない場合

時間が足りなくなって授業時間内に全てを終えられない場合もあるでしょう。別の授業で扱うことにする教師もいますが、できるだけ宿題として出した方がよいでしょう。もし生徒たちが他に宿題を多く抱えている場合は、教師はそれらの問題を手つかずのままにして、テスト前の補強として使うこともできます。あるいは、早く問題を終えた生徒たちに取り組ませてもよいでしょう。

授業時間外の校内学習の習慣づけ

時には十分に学習内容をまとめあげる前に授業時間が終了してしまうことがありますが、そのような場合には、宿題として課す以外に、学校にいる授業時間外の時間を有効活用させる方法もあります。学校の授業時間には延長時間はありませんが、実際には使える時間があります。例えば、教師が授業開始前や朝から来客や緊急の用事に対応する場合に教師が戻るまでの時間、または授業が45分かからず終わった場合などは、その時間を活用して教科書で手つかずとなっている問題に取り組ませるのが良いでしょう。主に、間違い易い基本的な内容の強化に多くの時間を割くのがよいでしょう。

解いた全ての問題の答え合わせと、その解答が正しいかどうかの確認

生徒が解いた問題を全てチェックするのは、とても時間のかかる作業で決して容易ではありませんので、何か他の方法をみつけなくてはなりません。そのためには、生徒たちが二つの習慣を身につける必要があります。

1. 自分で答え合わせをする習慣
2. 間違えた問題をもう一度解いてみるという習慣

生徒が一つ目の習慣を身につけるには、教師が口頭で答えを確認する方法と黒板に書いて答え合わせをさせる方法があります。またその際、生徒同士でノートを交換し、お互いに答え合わせをし合うという方法もあります。一方、二つ目の習慣については、生徒たちが分からないままにならず、努力を重視することで人格形成の助けとなり、本人の学習意欲を引き出す効果が期待できます。

b. 授業準備

本書では各授業の進め方を提案しているため、それ以外の授業計画、進行表、話す内容などを別紙で用意する必要はありません。逆に、本書の提案に基づいて授業を進める必要があります。さらには、必要と感じるのであれば、重要なポイントのみ鉛筆で書きこんでも構いません。（本書は学校の所有物であり、教師の私物ではありませんので、ボールペンで書きこむのは控えるべきです。）生徒の特性に合わせて授業の内容をアレンジする必要がある場合は、本書で提案されている内容に基づく範囲であればアレンジしても差し支えありません。

c. 教室内の巡回によるチェックと指導

生徒たちが問題を解いている間、教師は教室内を巡回し、生徒が設問を正しく理解して正解できているかチェックしながら、その理解度を確認します。

多くの場合、教師はつまずいている生徒を指導しますが、全員に対応するには時間が足りません。そこで以下の方法をとることを推奨します。もしつまずく生徒が5人以下である場合は個別にサポートし、そうでない場合は別の方法で指導するのがよいでしょう。例えば、全員に対して説明する、グループ別に説明をする、あるいは答え合わせの時に解説する、などの方法です。

d. 課題を他の生徒より早く終える生徒たちへ対応

問題コーナーでは難易度が低い問題も高い問題も含まれているため、特に問題を解くのに要する時間には常に生徒間でばらつきがあります。公共教育では、常に学ぶ機会の平等を保証しなくてはなりません。その意味では、他の生徒より早く課題を終えてしまう生徒に対して何をすべきか提案をしなければ、彼らの時間を無駄にしてしまいます。また、生徒が何もすることがないという状況は、教室の秩序面においても負の要素となってしまう可能性があります。このような状況を防ぎ、その生徒たちの能力を引き出すためにも、教師は次のルールを決めるとよいでしょう。全ての問題を解き終わり、答え合わせも終えた場合は、クラスメートのサポートに回ってもよい、とすることです。このようにして、つまずいている生徒はクラスメートにサポートしてもらうことができ、またサポートする側になる生徒も授業の学びを深めることができます。同様に、教師は授業内容の定着を図るために追加の問題を出しても構いませんし、生徒の能力をさらに引き出すように、挑戦問題のような別のタイプの問題を出しても構いません。

e. 授業用ノートの確認

教師が定期的にノートの使い方をチェックしないと、生徒によっては全く整理できないまま使用している場合があります。そのため、ノートの使い方は平均で月に1回程度、定期的にチェックする必要があります。ここでのポイントは、学年の最初にチェックの回数を増やし、生徒にチェックされているという意識をもたせ、きちんとノートをとる習慣を身につけさせることです。

f. 宿題のチェック

授業用ノートのチェックと同様に、宿題をきちんとしているかどうかを継続的にチェックする必要があります。授業の最初に宿題のチェックを行う以外に定期的なチェックを行っても良いでしょう。その際には、全てをきちんとこなした生徒、自己採点をして答えが合っていた生徒、間違えた問題をもう一度やり直した生徒に特に注意を払います。

g. 家庭学習の習慣づけ

第三回地域比較説明研究(TERCE)の算数・数学テストの結果によれば、30分以上家庭学習を行っている生徒は、家庭学習の時間がそれより少ないか全く行っていない他の生徒に比べ、明らかに優秀な成績を収めていることが分かっています。理想的な家庭学習の時間は学年によって異なりますが、一般的には年次×10分に10分を加えた時間が必要とされています。例えば、三年生の場合は、10 × 3 + 10 = 40分です。生徒たちに家庭学習をする習慣をつけさせるのは、教師だけでなく親にとっての課題でもあり、容易ではありません。したがって、まず最初は宿題を出すことで家庭学習の習慣を身につけさせることになるでしょう。

h. 指導し、確認し、再指導し、褒めるというサイクル

教師が行う指導サイクルの基本は、何かを指導した後、それがきちんと達成されているかをモニターする、または確認するというものです。そして、生徒たちが達成していた場合には褒めるべきで、逆にできていない時は、もう一度指導する必要があります。これは全ての指導に当てはまるものです。例えば、何か課題を与えた時、生徒がそれを達成できたかを確かめ、それができていれば褒め、できていなければ再度指導し直す必要があるということです。このサイクルは学習のサポートにも言えます。ある内容について指導し、テストを通してその問題を正しく解けていたことが確認できた場合は、褒めてあげるべきです。そうでない場合には再度指導する必要があります。このサイクルは単純に思えますが、継続的に行うためには習慣づける必要があります。

1. テスト実施の重要性

生徒たちの学力評価により得た結果は、教師にとって、実際の学習成果の全体像を把握する上でとても意味のある情報です。これに基づき教師は、生徒が各授業の到達指標に達しているか、横断的能力を身に付けたか、その学年に相応しい学力に達しているかなどを判断することができます。

結果が良い場合は、さらに学力を高められるよう、教師は引き続き良い授業を行う努力を続けます。

テストの結果があまり良くない場合は、教師は各生徒の学力評価と照らし合わせて自分の指導法を自己評価し、授業を改善するために全力を尽くす必要があります。そのためには、研修に参加し生徒のつまずきが多いと考えられる単元の内容を研究する必要があります。または、同僚に相談することもできます。

教育分野において教師が非常に重要な役割を担っていることを、今一度考える必要があります。そのため、その役目をしっかり果たし、各生徒の学力評価に基づいて自身の取組みを自己評価しなくてはなりません。

以上をふまえて、この指導案に含まれるテストを活用するべきです。テストを行うことで、生徒が身に付けた学力だけでなく習得していない部分も含め、学習の現状に関する貴重な情報を得ることができます。

2. テストのねらい

以上のことから、テストのねらいを以下のようにまとめることができます。

- 生徒たちの学習内容理解度を知る。
- 生徒たちがつまずいた単元の授業を改善する方法を考える。
- テスト結果の分析に基づいて教師としての取組みを評価し改善に努める。

3. 各テストの機能

テストの種類は2つあります。ユニットテストと学期毎のテストです。いずれも同じねらいで作られたものですが、必要に応じて様々な用途でそれぞれのテストを利用することが可能です。以下にテストの活用例について述べます。

a. ユニットテスト

テストに出てくる問題は、それぞれ主たる（単元の）到達指標に対応しており、その到達指標は各ユニットの授業で明示されているものです。したがって、教師は生徒の学習内容の理解度を把握することができます。テストをして理解できていないところが分かれば、その箇所を再学習することが理想ですが、常に追加授業を行うだけの十分な時間がとれるとは限りません。その場合、生徒たちに自分たちで復習し、テストの際に解けなかった問題をもう一度解くように指導しても構いません。

グループで確認できるよう、この指導書にあるテストの答えのコピーを生徒に渡しても構いません。そのようにすれば生徒たちは相互学習ができます。そして教師は、生徒たちが自分たちで見直したテスト用紙を回収し、それを元にして生徒の学習進度を把握するということも可能です。

テストを実施する前に、生徒たちに対しテスト範囲のユニットを示し、予めその内容を復習しておくように伝えると良いでしょう。

b. 学期ごとのテスト

このテストは、それぞれの学期に学習した重要単元の内容を含む問題で構成されています。タイミングとしては、最後の授業で学習内容の復習ができるように、その学期が終わる1日前にこのテストを行うのがよいでしょう。しかしながら、それが難しい場合は、学期の最終日にテストをして、次の学期の最初の授業で振り返り学習をすることもできます。

さらに、教員研修の際に他の学校の教師とテスト結果を共有するのもよいでしょう。そうすることで、どの単元で生徒がつまずきやすいか、また他の教師がどんな工夫をしているかなど、学習の改善につながる情報を得る事ができるでしょう。他の教師との信頼関係を築くことができれば、SNSを使って情報の共有などやりとりでき、さらには生徒たちの学習の改善につなげる手立て等も得やすくなるでしょう。

各教員がコピーできるように、各ユニットの最後と各学期の最後にそれぞれのテストが掲載されており、その先に各設問の解き方と評価基準も掲載されています。

4. テスト結果の利用

例。高校2年次の生徒にテストを実施したと仮定し、その結果として2通りの状況を以下に示します。

a. 正解：

	次の計算をしましょう。$\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}$
生徒たちの解き方	$\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^3\times 2}=2\sqrt[3]{2}$　$\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{2\times 3^3}=3\sqrt[3]{2}$ $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}=2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}=5\sqrt[3]{2}$
このように答えた生徒の割合	70%

b. 不正解：

	次の計算をしましょう。$\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}$
生徒たちの解き方	$\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{16+54}=\sqrt[3]{70}$
このように答えた生徒の割合	60%

先に述べた2通りの状況において、テストの結果をどのように評価することができるでしょうか？

この結果から教師が得られる情報

身についた学力	身につかなかった学力
立法根の足し算	立方根の最小値の式への簡約化
適切な計算手順	同じ累乗根の足し算

テスト結果を再学習に活かす方法

<table>
<tr><th>短期的配慮</th><th>中期的配慮</th></tr>
<tr><td rowspan="2">複数の生徒に同じ状況がみられる場合には、立方根の最小値の式への簡約化、および同じ累乗根の足し算についての復習をすることによって補強する必要があります。</td><td>既習内容の復習をするためにクラスメートからアドバイスを受けたり、助けてもらう「生徒同士の相互学習」を導入するべきでしょう。</td></tr>
<tr><td>同じタイプの問題を解けるようになるまで、自宅や学校で自己学習を促す必要があります。</td></tr>
</table>

以上から、教師は生徒が正しく答えることができなかった問題に的を絞って時間をかけたり工夫したりすることができます。

最後に、教師がとるべきテストの適切な活用方法を以下に説明します。

a. 指導案に含まれるテストを適切なタイミングで行う
   - ユニットのテスト （ユニットが終わるごとに実施するもの）
   - 学期毎のテスト （各学期が終わる前に実施するもの）

b. 実施したテストを見直す

c. テスト結果から得られた情報を分析する

d. 再学習の方法を考える

e. 学期ごとのテストの場合は、教員研修の際に指導改善案が出せるよう、その結果を近隣の学校で指導している教員と共に分析してもよいでしょう。

ユニット 1：方程式

このユニットのねらい

1次方程式および 2 次方程式を解くためのツールを用いて代数問題に適用し、4 次方程式、根号を含む方程式、連立 1 次方程式、連立 2 次方程式を解きます。

関連と発展

中学 3 年

ユニット 5：1 次方程式 (7)
- 数式の同等性
- 1 次方程式
- 1 次方程式の応用

ユニット 2：連立 2 元 1 次方程式 (8)
- 2 元 1 次方程式を解く方法
- 2 元 1 次方程式の応用

ユニット 3：2 次方程式 (9)
- 2 次方程式
- 2 次方程式の応用

高校 1 年

ユニット2：多項式の計算と複素数の計算
- 乗法公式と因数分解
- 多項式の除法
- 2 次方程式と複素数

高校 2 年

ユニット 1：方程式
- 方程式と連立方程式

ユニット3：円錐断面
- 放物線
- 円
- 楕円
- 双曲線
- GeoGebraを使った演習

このユニットでの学習計画

レッスン	時間	授業
1. 方程式と連立方程式	1	1. 4 次方程式　パート 1
	1	2. 4 次方程式　パート 2
	1	3. 根号を含む方程式　パート 1
	1	4. 根号を含む方程式　パート 2
	1	5. 根号を含む方程式　パート 3
	1	6. 多項式の最小公倍数
	1	7. 有理方程式
	1	8. 連立方程式
	1	9. 復習問題
	1	10. このユニットの問題
	1	ユニット 1　テスト

ユニット 1　授業10 時間 + テスト

この課の重要事項

レッスン 1：方程式と連立方程式

4 次方程式を解き、方程式が持つ実数解と虚数解の個数を明らかにします。その後、根号を含む方程式を解きます。この種の方程式では複素数解は認められません。有理方程式を解く方法を明確にし、有理方程式を多項式に変換するため、分母の最小公倍数を掛けます。最後に、1次方程式と、変数の1つが2次の方程式からなる、連立2元方程式を解いてユニットを終了します。

レッスン 1 方程式と連立方程式

1.1 4 次方程式　パート 1

導入問題

以下の手順に従って、方程式 $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$ を解きなさい。

1. $y = x^2$ の変数変換を行う。
2. 1.で得た 2 次方程式を解く。
3. 元の方程式の解を見つける。

解法

1. 方程式を観察すると、 $(x^2)^2 - 25(x^2) + 144 = 0$ と書くことができます。よって、$y = x^2$ の変数変換を行うと、

$$(x^2)^2 - 25(x^2) + 144 = y^2 - 25y + 144 = 0$$

2. この2次方程式は因数分解によって解くことができるので、掛けると144になり、足すと–25 になる 2 つの値を探します。

$$y^2 - 25y + 144 = (y - 16)(y - 9) = 0$$

ここから、$y - 16 = 0$ または $y - 9 = 0$ つまり、$y = 16$ または $y = 9$

3. 1. から $y = x^2$、また、2. から $y = 16$ または $y = 9$ が分かります。よって、

$$x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4 \text{ または } x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

したがって、$x^4 - 25x^2 + 144 = 0$ の解は $x = -4、-3、3、4$

定義

A はゼロではない $Ax^4 + Bx^2 + C = 0$ という形の方程式を **4 次**方程式といいます。

4 次方程式は、$y = x^2$ の変数変換を行い、この変換でできた2次方程式を解くことによって、解くことができます。
4 次方程式には、すべてが実数、すべてが虚数、または、2つが実数で 2 つが虚数の 4 つの解があります。

例

方程式 $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$ のすべての複素数解を求めなさい。

$y = x^2$の変数変換を行うと、$y^2 - 24y - 25 = 0$ の方程式になります。これを因数分解すると、

$$y^2 - 25y + 144 = (y - 16)(-9) = 0$$

したがって、$y - 25 = 0$ または $y + 1 = 0$

- $y - 25 = 0$ ならば、$y = 25 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$
- $y + 1 = 0$ ならば、$y = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$

したがって、$x^4 - 25x^2 + 144 = 0$ の解は $x = -5、5、i、-i$

高校1年生のユニット 2 から、以下が分かります。
$\sqrt{-1} = i$

問題

以下の問題を解きなさい。

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$　　b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

c) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$　　d) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

e) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$　　f) $x^4 + 4x^2 + 3 = 0$

達成の目安

1.1 $x^4 + Bx^2 + C = 0$ の形の 4 次方程式を解く。

学習の流れ

BとCは整数で、少なくともそのうちの1つがゼロではない、$x^4 + Bx^2 + C = 0$ の形の特定なタイプの 4 次方程式を解きます。因数分解を使って解きます。

ねらい

$y = x^2$ の変数変換を行い、$x^4 + Bx^2 + C = 0$ の形の方程式を解きます。この授業では x^4 の係数は、常に 1 であることに注目します。

問題の解答：

a) $y = x^2$ とすると、$x^4 - 5x^2 + 4 = y^2 - 5y + 4 = 0$ これを因数分解すると、

$$y^2 - 5y + 4 = (y - 4)(y - 1) = 0$$

したがって、$y - 4 = 0$ または $y - 1 = 0$

- $y - 4 = 0$ ならば、$y = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$
- $y - 1 = 0$ ならば、$y = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

したがって、$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ の解は $x = -2$、2、-1、1

b) $x^4 - 13x^2 + 36 = y^2 - 13y + 36 = 0$ これを因数分解すると、

$$y^2 - 13y + 36 = (y - 9)(y - 4) = 0$$

- $y - 9 = 0$ ならば、$y = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$
- $y - 4 = 0$ ならば、$y = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

したがって、$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ の解は $x = -3$、3、-2、2

c) $x^4 - 29x^2 + 100 = y^2 - 29y + 100 = 0$

$$\Rightarrow y^2 - 29y + 100 = (y - 25)(y - 4) = 0.$$

- $y - 25 = 0 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5.$
- $y - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2.$

したがって、解は $x = -5$、5、-2、2

d) $x^4 - 8x^2 - 9 = y^2 - 8y - 9 = 0$

$$\Rightarrow y^2 - 8y - 9 = (y - 9)(y + 1) = 0.$$

- $y - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3.$
- $y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i.$

したがって、解は $x = -3$、3、$-i$、i

e) $x^4 + 5x^2 + 4 = y^2 + 5y + 4 = 0$

$$\Rightarrow y^2 + 5y + 4 = (y + 1)(y + 4) = 0.$$

- $y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i.$
- $y + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm 2i.$

したがって、解は $x = -i$、i、$-2i$、$2i$

f) $x^4 + 4x^2 + 3 = y^2 + 4y + 3 = 0$

$$\Rightarrow y^2 + 4y + 3 = (y + 3)(y + 1) = 0.$$

- $y + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = -3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}i.$
- $y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i.$

したがって、解は $x = -\sqrt{3}i$、$\sqrt{3}i$、$-i$、i.

1.2 4次方程式　パート2

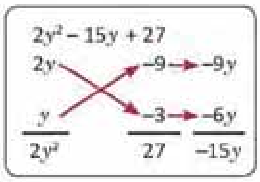
導入問題

方程式 $2x^4 - 15x^2 + 27 = 0$ を解きなさい。

解法

$y = x^2$ の変数変換を行うと、 $2y^2 - 15y + 27 = 0$ になります。因数分解によって方程式を解くとき、たすきがけ法を使うと、$2y^2 - 15y + 27 = (2y-9)(y-3) = 0$ になります。

ここから以下のようになります。



- $2y - 9 = 0 \Rightarrow y = \frac{9}{2}$. つまり、 $x^2 = \frac{9}{2}$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

- $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$. つまり、 $x^2 = 3$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

したがって、$2x^4 - 15x^2 + 27 = 0$ の解は $x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$.

まとめ

$Ax^4 + Bx^2 + C$ の形の方程式は、たすきがけ法によって、$(ax^2 + b)(cx^2 + d)$ の形に因数分解することができます。この方法を使うと、$y = x^2$ の変数変換を行わずに 4 次方程式を解くことができます。

例

方程式 $2x^4 + 33x^2 + 16 = 0$ を解きなさい。

たすきがけ法によって $2x^4 + 33x^2 + 16$ を因数分解すると、

$$2x^4 + 33x^2 + 16 = (2x^2 + 1)(x^2 + 16) = 0$$

ここから以下のようになります。

- $2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{2}$. つまり、

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}i$$
$$= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

- $x^2 + 16 \Rightarrow x^2 = -16$. つまり、 $x = \pm 4i$

したがって、方程式 $2x^4 + 33x^2 + 16 = 0$ の解は $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2}i, -4i, 4i$.

問題

以下の問題を解きなさい。

a) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

b) $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$

c) $9x^4 - 40x^2 + 16 = 0$

d) $9x^4 + 5x^2 - 4 = 0$

e) $8x^4 - x^2 - 7 = 0$

f) $3x^4 + 4x^2 + 1 = 0$

達成の目安

1.2 $Ax^4 + Bx^2 + C = 0$ の形の 4 次方程式を解く。

学習の流れ

A、B、C が整数で、A はゼロではなく、また、B または C がゼロではない、$Ax^4 + Bx^2 + C = 0$ の形の 4 次方程式を引き続き解きます。

ねらい

$Ax^4 + Bx^2 + C = 0$　の形の方程式を解きます。この授業では、最高次項の係数が 1 ではありません。今回は、直接方程式を解きます。つまり、前の授業で行った変数変換を行わずに解きます。

問題の解答：

a) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0 \Rightarrow (4x^2 - 1)(x^2 - 1) = 0.$

よって、

- $4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}.$
- $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

したがって、解は $x = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 1$

b) $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0 \Rightarrow (9x^2 - 1)(4x^2 - 1) = 0.$

よって、

- $9x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{3}.$
- $4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}.$

したがって、解は $x = -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}.$

c) $9x^4 - 40x^2 + 16 = 0 \Rightarrow (9x^2 - 4)(x^2 - 4) = 0.$

よって、

- $9x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow x = \pm\frac{2}{3}.$
- $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

したがって、解は $x = -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -2, 2$

d) $9x^4 + 5x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (9x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0.$

よって、

- $9x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow x = \pm\frac{2}{3}.$
- $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i.$

したがって、解は $x = -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -i, i.$

e) $8x^4 - x^2 - 7 = 0 \Rightarrow (8x^2 + 7)(x^2 - 1) = 0.$

よって、

- $8x^2 + 7 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{7}{8} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{14}}{4}i.$
- $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$

したがって、解は $x = -\frac{\sqrt{14}}{4}i, \frac{\sqrt{14}}{4}i,$
$-1, 1.$

f) $3x^4 + 4x^2 + 1 = 0 \Rightarrow (3x^2 + 1)(x^2 + 1) = 0$

よって、

- $3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}i.$
- $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i.$

したがって、解は $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}i, \frac{\sqrt{3}}{3}i,$
$-i, i$

1.3 根号を含む方程式 パート1

導入問題

方程式 $\sqrt{x}-3=5$ を解きなさい。

解法

根号を含むこのような形の方程式を解くためには、根号を外し、2 乗します。

$$\sqrt{x}-3=5$$
$$\sqrt{x}=5+3 \quad \text{根号を外し、}$$
$$(\sqrt{x})^2=8^2 \quad \text{2乗し、}$$
$$x=64.$$

解を確認するときは、$\sqrt{64}-3=8-3=5$ とします。すると、$x=64$ は、元の方程式を満たします。したがって、$x=64$ が解です。

定義

根号を含む方程式とは、根号の中に1つまたは複数の変数がある方程式のことです。

根号を含む方程式は、根号を外し2乗することによって、根号を含まない方程式に変換することができます。

根号を含む方程式を解いたら、見つけた値を元の方程式に代入して等式を確認して、値が方程式を満たすことを確認しなければなりません。

元の方程式で確認したときに複素数になる値は、解とは見なされません。

例

$2\sqrt{2x+1}-6=0$ を解きなさい。

根号を外し2乗すると、

$$2\sqrt{2x+1}-6=0$$
$$2\sqrt{2x+1}=6$$
$$\sqrt{2x+1}=3 \quad \text{根号を外し、}$$
$$2x+1=9 \quad \text{1 次方程式にし、これを解かなければなりません。}$$
$$2x=8$$
$$x=4.$$

解を確認するときは、$2\sqrt{2(4)+1}-6=2\sqrt{9}-6=2(3)-6=6-6=0$ したがって、$x=4$ がこの方程式の解です。

問題

根号を含む方程式を解きなさい。

a) $\sqrt{x+3}=4$
b) $\sqrt{x-8}=2$
c) $5-\sqrt{3x+1}=0$
d) $5+3\sqrt{x}=8$
e) $7-\sqrt{x+2}=3$
f) $\sqrt{x+3}=\sqrt{5x-1}$

10

達成の目安

1.3　1 次方程式にすることができる根号を含む方程式の解を求める。

学習の流れ

根号を含む方程式と呼ばれる、根号を含んだ方程式を初めて解きます。

ここでは平方根を含む方程式だけを解きます。3 乗以上の累乗根については、ユニット 4 までにその特性を学びます。

ねらい

簡単な1次方程式にすることができる平方根を含む方程式を解きます。

問題の解答：

a) $\sqrt{x+3}=4 \Rightarrow x+3=16 \Rightarrow x=13.$
確認するときは、$\sqrt{13+3}=\sqrt{16}=4.$ ✓
したがって、$x=13$ が解です。

b) $\sqrt{x-8}=2 \Rightarrow x-8=4 \Rightarrow x=12.$
確認するときは、$\sqrt{12-8}=\sqrt{4}=2.$ ✓
したがって、$x=12$ が解です。

c) $5-\sqrt{3x+1}=0 \Rightarrow \sqrt{3x+1}=5 \Rightarrow 3x+1=25 \Rightarrow x=8.$
確認するときは、$5-\sqrt{3(8)+1}=5-\sqrt{25}=0.$ ✓
したがって、$x=8$ が解です。

d) $5+3\sqrt{x}=8 \Rightarrow 3\sqrt{x}=3 \Rightarrow \sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1.$
確認するときは、$5+3\sqrt{1}=8.$ ✓
したがって、$x=1$ が解です。

e) $7-\sqrt{x+2}=3 \Rightarrow \sqrt{x+2}=4 \Rightarrow x+2=16 \Rightarrow x=14.$
確認するときは、$7-\sqrt{14+2}=7-\sqrt{16}=3.$ ✓
したがって、$x=14$ が解です。

f) $\sqrt{x+3}=\sqrt{5x-1} \Rightarrow x+3=5x-1 \Rightarrow 4x=4 \Rightarrow x=1.$
確認するときは、$\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2=\sqrt{5(1)-1}.$ ✓
したがって、$x=1$ が解です。

レッスン 1

1.4 根号を含む方程式 パート2

導入問題

以下の方程式を解きなさい。

a) $\sqrt{4x^2-15}-2x=-1$

b) $\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{2x}=x$

解法

a) 前の授業でやった方法と同じように、根号を外し、2 乗します。

$$\sqrt{4x^2-15}-2x=-1$$
$$\sqrt{4x^2-15}=2x-1$$
$$4x^2-15=4x^2-4x+1 \quad \text{2 乗して展開すると、}$$
$$\cancel{4x^2}-15=\cancel{4x^2}-4x+1$$
$$4x=16$$
$$x=4.$$

4 が方程式の解であることを、元の方程式に代入して確かめます。

$$\sqrt{4(4)^2-15}-2(4)=\sqrt{64-15}-8=\sqrt{49}-8=7-8=-1$$

したがって、$x=4$ が方程式 $\sqrt{4x^2-15}-2x=-1$ の解です。

b) この方程式には 2 つの根号があります。そこで、左辺と右辺に分かれるようにします。

$$\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{2x}=x$$
$$\left(\sqrt{x^2+6x}\right)^2=\left(x+\sqrt{2x}\right)^2$$
$$x^2+6x=x^2+2x\sqrt{2x}+2x \quad \text{2乗して二項式を展開し、}$$
$$\cancel{x^2}+6x-2x=\cancel{x^2}+2x\sqrt{2x}$$
$$(4x)^2=\left(2x\sqrt{2x}\right)^2$$
$$16x^2=4x^2(2x)$$
$$16x^2-4x^2(2x)=0$$
$$4x^2(4-2x)=0.$$

ゼロになるかどうかはわからないため、$4x^2$ で割らないことをお勧めします。

ここから、$4x^2=0 \Rightarrow x=0$ または $4-2x=0 \Rightarrow x=2$ 元の方程式で 2 つの値を確認すると

$x=0$: $\sqrt{0^2+6(0)}-\sqrt{2(0)}\overset{¿?}{=}0 \Rightarrow 0=0$ ✓

$x=2$: $\sqrt{2^2+6(2)}-\sqrt{2(2)}\overset{¿?}{=}2$
$\Rightarrow \sqrt{4+12}-\sqrt{4}\overset{¿?}{=}2$
$\Rightarrow 4-2\overset{¿?}{=}2$
$\Rightarrow 2=2$ ✓

よって、$x=0$ と $x=2$ が方程式 $\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{2x}=x$ の解になります。

まとめ

根号を含む方程式を解くと、2次以上の方程式になることがあります。その場合は、因数分解によって解くことができます。または、因数分解によって解くことができない2次方程式になった場合は、一般的な公式を使って解きます。

問題

根号を含む方程式を解きなさい。

a) $x+2=\sqrt{x^2+1}$

b) $3\sqrt{2x-1}=3x$

c) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{4x+5}=-1$

d) $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x+2}=0$

e) $\sqrt{3x-11}+\sqrt{3x}=\sqrt{12x-23}$

f) $\sqrt{9x-8}-\sqrt{4x+1}=\sqrt{x-3}$

達成の目安

1.4 1 次方程式または2次方程式にすることができる根号を含む方程式を解く。

学習の流れ

1 次方程式または2次方程式になる根号を含む方程式を解きます。ここでも、常に平方根です。

ねらい

引き続き、根号を含む方程式を解きます。今回は、2 乗を 2 度行わなければならない場合を扱います。

問題の解答：

以下の解は確認されていませんが、生徒はこれを行わなければなりません。

a) $x + 2 = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow \cancel{x^2} + 4x + 4 = \cancel{x^2} + 1 \Rightarrow 4x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{4}.$

b) $3\sqrt{2x - 1} = 3x \Rightarrow \sqrt{2x - 1} = x \Rightarrow 2x - 1 = x^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1.$

c)
$$\sqrt{3x + 1} - \sqrt{4x + 5} = -1$$
$$\sqrt{3x + 1} = -1 + \sqrt{4x + 5}$$
$$3x + 1 = 1 - 2\sqrt{4x + 5} + 4x + 5$$
$$2\sqrt{4x + 5} = x + 5$$
$$4(4x + 5) = x^2 + 10x + 25$$
$$x^2 - 6x + 5 = 0$$
$$(x - 5)(x - 1) = 0$$

したがって、$x = 5$ または $x = 1$

d)
$$\sqrt{x + 7} + \sqrt{x - 1} - 2\sqrt{x + 2} = 0$$
$$\sqrt{x + 7} + \sqrt{x - 1} = 2\sqrt{x + 2}$$
$$x + 7 + 2\sqrt{x + 7}\sqrt{x - 1} + x - 1 = 4(x + 2)$$
$$2\sqrt{x^2 + 6x - 7} = 2x + 2$$
$$\sqrt{x^2 + 6x - 7} = x + 1$$
$$\cancel{x^2} + 6x - 7 = \cancel{x^2} + 2x + 1$$
$$4x = 8$$

よって、$x = 2$

e)
$$\sqrt{3x - 11} + \sqrt{3x} = \sqrt{12x - 23}$$
$$3x - 11 + 2\sqrt{3x - 11}\sqrt{3x} + 3x = 12x - 23$$
$$2\sqrt{9x^2 - 33x} = 6x - 12$$
$$\sqrt{9x^2 - 33x} = 3x - 6$$
$$\cancel{9x^2} - 33x = \cancel{9x^2} - 36x + 36$$
$$3x = 36$$

よって、$x = 12$

f)
$$\sqrt{9x - 8} - \sqrt{4x + 1} = \sqrt{x - 3}$$
$$9x - 8 - 2\sqrt{9x - 8}\sqrt{4x + 1} + 4x + 1 = x - 3$$
$$2\sqrt{36x^2 - 23x - 8} = 12x - 4$$
$$\sqrt{36x^2 - 23x - 8} = 6x - 2$$
$$36x^2 - 23x - 8 = 36x^2 - 24x + 4$$
$$x = 12$$

よって、$x = 12$

1.5 根号を含む方程式 パート3

導入問題

$x+\sqrt{4x+1}=5$ を解きなさい。

解法

根号を外し、2乗します。

$$x+\sqrt{4x+1}=5$$
$$\sqrt{4x+1}=5-x$$
$$\left(\sqrt{4x+1}\right)^2=(5-x)^2$$
$$4x+1=25-10x+x^2$$
$$x^2-14x+24=0$$ 得られた2次方程式を解くと、
$$(x-2)(x-12)=0.$$

したがって、$x-2=0$ または $x-12=0$ よって、$x=2$ または $x=12$ 元の方程式で解を確かめると、

$x=2$: $2+\sqrt{4(2)+1}=2+\sqrt{8+1}=2+3=5$ ✓

$x=12$: $12+\sqrt{4(12)+1}=12+\sqrt{48+1}=12+7=19\neq 5$ ✗

よって、$x=2$が $x+\sqrt{4x+1}=5$ の解です。

2乗して得られた方程式の解が、必ずしも元の方程式の解とは限りません。なぜなら、$A^2=B^2$は、必ずしも $A=B$ を意味するわけではないからです。

例えば、$3^2=(-3)^2$ですが、$3\neq -3$

まとめ

根号を含む方程式の解の数を確定する方法はないので、方程式を解いて得た各値を、元の方程式に代入して確認しなければなりません。

例

$\sqrt{2x^2-1}=\sqrt{x}$ を解きなさい。

今回は 2 つの根号があります。そこで、方程式の左辺と右辺に分かれるようにします。

$$\left(\sqrt{2x^2-1}\right)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2$$
$$2x^2-1=x$$
$$2x^2-x-1=0$$

この方程式は因数分解によって解くことができ、次のように確認することができます。

$$2x^2-x-1=(2x+1)(x-1)=0.$$

よって、$x=1$ または $x=-\frac{1}{2}$ 最初に見てわかるのは、x は$-\frac{1}{2}$ にはなり得ないことです。なぜなら、平方根 $\sqrt{x}$ が実数にならないからです。

$x=1$ として確認すると $\sqrt{2(1)^2-1}=\sqrt{2-1}=\sqrt{1}=1.$ ✓

したがって、$x=1$ が $\sqrt{2x^2-1}=\sqrt{x}$ の解です。

問題

各根号を含む方程式を解きなさい。

a) $3x+\sqrt{x-1}=2x+7$

b) $\sqrt{5x+1}-\sqrt{2x+1}=2$

c) $2-\sqrt{2x+3}=2x-1$

d) $x=2\sqrt{x+2}+1$

e) $\sqrt{3x+10}=5-3\sqrt{x+3}$

f) $\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+6}=\sqrt{13-3x}$

12

達成の目安

1.5 2 次方程式にすることができる根号を含む方程式を解く。

学習の流れ

この授業と前の授業の違いは、方程式を解くプロセスにおいて、元の方程式の解ではない変数の値を得る可能性があることです。

問題の解答：

a)
$$3x+\sqrt{x-1}=2x+7$$
$$\sqrt{x-1}=-x+7$$
$$x-1=x^2-14x+49$$
$$x^2-15x+50=0$$
$$(x-10)(x-5)=0$$
$\Rightarrow x=10$ または $x=5$

解を確認すると、$x=5$ がただ1つの解であることがわかります。

b)
$$\sqrt{5x+1}-\sqrt{2x+1}=2$$
$$\sqrt{5x+1}=2+\sqrt{2x+1}$$
$$5x+1=4+4\sqrt{2x+1}+2x+1$$
$$4\sqrt{2x+1}=3x-4$$
$$16(2x+1)=9x^2-24x+16$$
$$9x^2-56x=0$$
$$x(9x-56)=0$$
$\Rightarrow x=0$ または $x=\frac{56}{9}$

解を確認すると、$x=\frac{56}{9}$ がただ1つの解であることがわかります。

c)
$$2-\sqrt{2x+3}=2x-1$$
$$-\sqrt{2x+3}=2x-3$$
$$2x+3=4x^2-12x+9$$
$$2x^2-7x+3=0$$
$$(2x-1)(x-3)=0$$
$\Rightarrow x=\frac{1}{2}$ または $x=3$

解を確認すると、$x=\frac{1}{2}$ がただ1つの解であることがわかります。

d)
$$x=2\sqrt{x+2}+1$$
$$2\sqrt{x+2}=x-1$$
$$4(x+2)=x^2-2x+1$$
$$x^2-6x-7=0$$
$$(x-7)(x+1)=0$$
$\Rightarrow x=7$ または $x=-1$

解を確認すると、$x=7$がただ1つの解であることがわかります。

e)
$$\sqrt{3x+10}=5-3\sqrt{x+3}$$
$$3x+10=25-30\sqrt{x+3}+9x+27$$
$$5\sqrt{x+3}=x+7$$
$$25(x+3)=x^2+14x+49$$
$$x^2-11x-26=0$$
$$(x-13)(x+2)=0$$
$\Rightarrow x=13$ または $x=-2$

解を確認すると、$x=-2$ がただ1つの解であることがわかります。

f)
$$\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+6}=\sqrt{13-3x}$$
$$3x+7+2\sqrt{6x^2+32x+42}+2x+6=13-3x$$
$$2\sqrt{6x^2+32x+42}=-8x$$
$$\sqrt{6x^2+32x+42}=-4x$$
$$6x^2+32x+42=16x^2$$
$$5x^2-16x-21=0$$
$$(5x-21)(x+1)=0$$
$\Rightarrow x=\frac{21}{5}$ または $x=3$

解を確認すると、$x=-1$ がただ1つの解であることがわかります。

1.6 多項式の最小公倍数*

導入問題

各場合の最小公倍数を計算しなさい。

a) 4, 6, 15　　b) $6x, 3x+1, 6x+2$　　c) $2m+3, 2m-3, 4m^2-9$

多項式の因数分解は、素因数分解に似ています。

解法

a) 4、6、15の最小公倍数を計算するためには、各数を素因数分解します。

$4 = 2^2$,　　$6 = 2(3)$,　　$15 = 3(5)$

したがって、4、6、15の最小公倍数は、 $2^2(3)(5) = 4(3)(5) = 60$になります。

b) 多項式の最小公倍数は、数の最小公倍数と同じような方法で求めることができます。最初に各式を因数分解します。

$6x = 2(3)x$　　$3x + 1$ は因数分解することができません。　$6x + 2 = 2(3x + 1)$

したがって、$6x$、$3x + 1$、$6x + 2$の最小公倍数は、$2(3)(x)(3x+1) = 6(3x^2 + x) = 18x^2 + 6x$になります。

c) b)と同じように、各式を因数分解します。最小公倍数は、各因数分解において現れる各共通因数と共通因数でない数の、3つの式の中に現れる最も大きな指数がついているものの積になります。

$2m + 3$ と $2m - 3$ は因数分解できません。また、2 乗の差によって、$4m^2 - 9 = (2m - 3)(2m + 3)$

したがって、$2m + 3$、$2m - 3$ 、$4m^2 - 9$ の最小公倍数は、$(2m - 3)(2m + 3)$

まとめ

２つ以上の数の**最小公倍数**は、それらの数の複数の公倍数の中で最も小さいもので、mcmで表示されます。

２つ以上の数の最小公倍数を計算するためには、各数を素因数分解し、各共通因数と共通因数でない数の最も大きな指数がついているものをかけて求めます。

また、代数式の最小公倍数を同様の方法で計算することができます。各式を完全に因数分解します。最小公倍数は、最も大きい指数のついている共通因数および共通因数でないものすべての積です。

例

$x + y$、$x^2 + 2xy + y^2$ 、$x^2 - y^2$の最小公倍数を求めなさい。

前の各式を因数分解します。

$x + y, x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2, x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

注意：$(x + y)^2(x - y)$ を展開する必要はありません。

したがって、$x + y$、$x^2 + 2xy + y^2$ 、$x^2 - y^2$ の最小公倍数は、$(x + y)^2(x - y)$

問題

各場合の最小公倍数を求めなさい。

a) x^2, y^2, xy　　b) $x + 5, x^2 - 25, x - 5$
c) $3a + 6, a^2 - 4$　　d) $2, x - 3, 2x - 6$
e) $m - 1, m^2 - 1, m + 1$　　f) $3x + 15, x^2 - 25, 6x, x - 5$

達成の目安

1.6 2 項以上の多項式の最小公倍数を求める。

学習の流れ

2 項以上の多項式の最小公倍数は、2つ以上の数の最小公倍数と同じような方法で求めます。

生徒がなかなか「導入問題」を解くことができない場合、教員は生徒をより支援する必要があります。

ねらい

「導入問題」は3問です。1 問目は、2 数以上の最小公倍数を素因数分解を行って求める方法を復習すことを目的としています。2 問目と 3 問目は、1 問目の方法を応用し、それ以上因数分解できないところまで多項式を因数分解し、与えられた多項式の最小公倍数を求めることを目的としています。

問題の解答：

a) x^2, y^2, xy

最小公倍数は、x^2y^2

b) $x + 5, x^2 - 25, x - 5$

$x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$ なので、3つの多項式の最小公倍数は、$(x + 5)(x - 5) = x^2 - 25$

c) $3a + 6, a^2 - 4$

$3a + 6 = 3(a + 2)$ および $a^2 - 4 = (a + 2)(a - 2)$ よって、2つの多項式の最小公倍数は、

$$3(a + 2)(a - 2) = 3(a^2 - 4) = 3a^2 - 12.$$

d) $2, x - 3, 2x - 6$

$2x - 6 = 2(x - 3)$ なので、3つの多項式の最小公倍数は、$2(x - 3) = 2x - 6$

e) $m - 1, m^2 - 1, m + 1$

$m^2 - 1 = (m + 1)(m - 1)$ なので、3つの多項式の最小公倍数は、$(m + 1)(m - 1) = m^2 - 1$

f) $3x + 15, x^2 - 25, 6x, x - 5$

$3x + 15 = 3(x + 5), x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$ y $6x = (2)(3)x$.

よって、4つの多項式の最小公倍数は、

$$(2)(3)(x + 5)(x - 5)x = 6(x^2 - 25)x = 6x^3 - 150x.$$

1.7 有理方程式

導入問題

各方程式を解きなさい。

a) $\frac{x+1}{x-2}=4$

b) $\frac{1}{x+3}-\frac{3}{2x-1}=\frac{5}{2x^2+5x-3}$

解法

a) この形の方程式があるとき、最初にやらなければならないのは、 x がとり得る値を限定することです。なぜなら、定義されていないゼロでの割り算になる可能性があるからです。よって、この場合は、 $x-2$がゼロになるため、x は 2ではあり得ません。次に、分母を払う必要があります。そのために方程式全体に $x-2$をかけると、

$$(x-2)\left(\frac{x+1}{x-2}\right)=4(x-2)$$

$$\cancel{(x-2)}\left(\frac{x+1}{\cancel{x-2}}\right)=4(x-2)$$

$$x+1=4x-8$$ この一次方程式を解くと、

$$3x=9$$

$$x=3.$$

$x=3$ なら、分母 $x-2$ はゼロにはなりません。$3-2=1$
したがって、$x=3$ がこの方程式の解です。

b) ここでも、目的は分母を払うことです。この場合は、分母 3 つがそれぞれ異なるので、これらの最小公倍数を方程式に掛けなければなりません。

式 $x+3$ と $2x-1$ は因数分解できません。また、$2x^2+5x-3=(2x-1)(x+3)$、よって、分母 3 つの最小公倍数は、$(2x-1)(x+3)$ さらに、x は -3 や $\frac{1}{2}$ にはなり得ません。なぜなら、その場合、分母のいずれかがゼロになってしまうからです。よって、

$$(2x-1)(x+3)\left(\frac{1}{x+3}-\frac{3}{2x-1}\right)=(2x-1)(x+3)\left(\frac{5}{2x^2+5x-3}\right)$$

$$(2x-1)\cancel{(x+3)}\frac{1}{\cancel{x+3}}-\cancel{(2x-1)}(x+3)\left(\frac{3}{\cancel{2x-1}}\right)=\cancel{(2x-1)(x+3)}\left(\frac{5}{\cancel{2x^2+5x-3}}\right)$$

$$2x-1-3(x+3)=5$$

$$2x-1-3x-9-5=0$$

$$-x-15=0$$

$$x=-15$$

$x=-15$ なら、各分母に -15を代入しても、ゼロになる分母はありません。したがって、$x=-15$ がこの方程式の解です。

定義

分数を含み、分母のいずれかに変数がある方程式を**有理方程式**といいます。有理方程式では、変数は分母にあるため、いずれの分母もゼロにしないような変数の値を考える必要があります。

有理方程式を解くためには、まず、どのような変数の値がいずれかの分母をゼロにするか、分析しなければなりません。次に、分母の最小公倍数を方程式全体に掛け、その結果得られた方程式を解きます。元の方程式の分母のいずれかをゼロにする変数の値は排除します。

例

方程式 $\frac{4}{x-1}=\frac{3}{x^2-x}+\frac{x}{x-1}$ を解きなさい。

この場合は、x は 0 と 1の値をとることはできません。さらに $x-1$ と x^2-x の最小公倍数は、$x(x-1)$なので、

$$x(x-1)\left(\frac{4}{x-1}\right)=x(x-1)\left(\frac{3}{x^2-x}\right)+x(x-1)\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$x\cancel{(x-1)}\left(\frac{4}{\cancel{x-1}}\right)=\cancel{x(x-1)}\left(\frac{3}{\cancel{x^2-x}}\right)+x\cancel{(x-1)}\left(\frac{x}{\cancel{x-1}}\right)$$

$$4x=3+x^2$$

$$x^2-4x+3=0$$

$$(x-3)(x-1)=0$$

よって、$x=3$ または $x=1$しかしながら $x\neq 1$、よってこの解は排除されます。

したがって、$x=3$ が方程式 $\frac{4}{x-1}=\frac{3}{x^2-x}+\frac{x}{x-1}$ の解です。

> 元の方程式に代入して、$x=3$ が解であることを確認する必要はありません。なぜなら、$x\neq 1$ および $x\neq 0$なら、$x(x-1)$ を掛けるというのは、可逆演算だからです。
>
> $$\frac{4}{x-1}=\frac{3}{x^2-x}+\frac{x}{x-1}$$
>
> $$\times x(x-1)\ \downarrow \qquad \uparrow\ \div x(x-1)$$
>
> $$4x=3+x^2$$

問題

各有理方程式を解きなさい。

a) $\frac{1}{x}=3$

b) $\frac{3}{x}=\frac{1}{2}$

c) $\frac{4}{5x}-3=0$

d) $\frac{1}{2x+1}=3$

e) $x+3=\frac{2x^2}{2x-1}$

f) $\frac{x-4}{x-1}=\frac{1-x}{x+1}$

g) $\frac{2}{x-1}-\frac{3}{x+3}=0$

h) $\frac{1}{2x}+\frac{3}{5x}=\frac{11}{x^2}$

達成の目安

1.7 1 次または 2 次の多項式を含む、有理方程式を解く。

学習の流れ

少なくとも分母の1つに 1 次多項式がある有理方程式を解きます。前の授業の成果を使って、分母を払うために方程式に掛けなければならないものを決定し、多項方程式を得ます。

ねらい

「導入問題」に関しては、a) が有理方程式を解く方法を導こうとしているのに対し、b) では、a) で学んだ方法を確かなものにしようとしていることに加え、分母の最小公倍数を求める必要が顕著になっています。「例」を解くと、得られた x の値の1つは、元の方程式の解ではありません。なぜなら、分母の1つをゼロにしてしまうからです。

問題の解答：

a) 方程式の両辺に x を掛けます。

$$\frac{1}{x} = 3 \Rightarrow 1 = 3x \Rightarrow x = \frac{1}{3}.$$

b) x と 2 の最小公倍数は、$2x2x$ を両辺に掛けます。

$$\frac{3}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2(3) = 1(x) \Rightarrow x = 6.$$

c) $5x$ を両辺に掛けます。

$$\frac{4}{5x} - 3 = 0 \Rightarrow 4 - 3(5x) = 0(5x) \Rightarrow 4 - 15x = 0 \Rightarrow 15x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{15}.$$

d) $2x + 1$ を両辺に掛けます。

$$\frac{1}{2x+1} = 3 \Rightarrow 1 = 3(2x+1) \Rightarrow 1 = 6x + 3 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

e) $2x - 1$ を掛けます。

$$\begin{aligned} x + 3 &= \frac{2x^2}{2x-1} \\ (x+3)(2x-1) &= 2x^2 \\ 2x^2 + 5x - 3 &= 2x^2 \\ 5x - 3 &= 0 \\ x &= \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

f) 分母の最小公倍数は、$(x-1)(x+1)$
よって、

$$\begin{aligned} \frac{x-4}{x-1} &= \frac{1-x}{x+1} \\ (x-4)(x+1) &= (1-x)(x-1) \\ x^2 - 3x - 4 &= -x^2 + 2x - 1 \\ 2x^2 - 5x - 3 &= 0 \\ (2x+1)(x-3) &= 0 \end{aligned}$$

よって、$x = -\frac{1}{2}$ または $x = 3$

g) $x - 1$ と $x + 3$ の最小公倍数は $(x-1)(x+3)$ よって、

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+3} &= 0 \\ 2(x+3) - 3(x-1) &= 0 \\ 2x + 6 - 3x + 3 &= 0 \\ x &= 9. \end{aligned}$$

h) $2x$、$5x$、x^2 の最小公倍数は$10x^2$ よって、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x} + \frac{3}{5x} &= \frac{11}{x^2} \\ (10x^2)\left(\frac{1}{2x}\right) + (10x^2)\left(\frac{3}{5x}\right) &= (10x^2)\left(\frac{11}{x^2}\right) \\ 5x + 6x &= 110 \\ 11x &= 110 \\ x &= 10. \end{aligned}$$

1.8 連立方程式

導入問題

連立方程式のすべての解を求めなさい。 $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2-3x-y+2=0 \end{cases}$

解法

連立方程式の1つから変数の1つを消し、その後、別の方程式に代入します。

この場合は、1 次方程式の y を消す方がより簡単です。

$y=2-x$ ------------------ (1)

その後、もう1つの方程式に代入すると、

$$x^2-3x-y+2=x^2-3x-(2-x)+2=x^2-3x-2+x+2=x^2-2x=x(x-2)=0.$$

ここから、 $x=0$ または $x=2$

y の値を求めるために、 (1) に x の値を代入します。すると、$x=0$ のときは $y=2$、$x=2$ のときは $y=0$
したがって、連立方程式の解は、 $x=0$、$y=2$ と、$x=2$、$y=0$

まとめ

1つが 1 次方程式、もう1つが 2 次方程式の連立方程式を解くためには、方程式の1つから変数を1つ消し、別の方程式に代入し、その後、残った変数がある方程式を解きます。

2次方程式で次数が低い変数を 1 次方程式で消すのがお薦めです。

例

連立方程式を解きなさい。

$$\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+x+y-1=0 \end{cases}$$

1 次方程式の y を求めると、$y=x-2$ もう1つの方程式に代入します。

$$x^2+x+y-1=x^2+x+(x-2)-1=x^2+x+x-2-1=x^2+2x-3=0.$$

因数分解によって解くと、$(x-1)(x+3)=0$ よって、$x=1$ または $x=-3$

$x=1$ に対しては、$y=-1$ また、$x=-3$ に対しては $y=-5$ したがって、連立法的式の解は、
$x=1$、$y=-1$ と $x=-3$、$y=-5$

問題

各連立方程式を解きなさい。

a) $\begin{cases} x-y=0 \\ x^2+y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=3 \\ x^2+2x-y=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x+y-3=0 \\ x^2-7x-y+3=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x-y=-14 \\ x^2+5x+y=4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x+y=-5 \\ 2x^2-x+y=1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x-y=7 \\ -x^2+4x+2y=1 \end{cases}$

16

達成の目安

1.8 1つが 1 次方程式で、もう1つが変数の1つが 2 次の連立方程式を解く。

学習の流れ

1つが1次方程式で、もう1つが変数の1つが 2 次の連立方程式を解いてユニットを終了します。

ねらい

ねらいは、2 次方程式で1次の変数を、1 次方程式から消して、この種の連立方程式を解くことです。この消去を行うことは、2 次の変数を消去するより適しています。

問題の解答：

a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y = 2 \end{cases}$

$x - y = 0 \Rightarrow x = y$

したがって、$x^2 + y = 2 \Rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0$

$(x + 2)(x - 1) = 0$

$x = -2$ または $x = 1$

- $x = -2$ なら、$y = -2$
- $x = 1$ なら、$y = 1$

したがって、解は $x = -2$、$y = -2$ と
$x = 1$、$y = 1$

b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 + 2x - y = 3 \end{cases}$

$x - y = 3 \Rightarrow y = x - 3.$

したがって、$x^2 + 2x - y = 3 \Rightarrow x^2 + 2x - x + 3 = 3$

$x^2 + x = 0$

$x(x + 1) = 0$

よって、$x = 0$ または $x = -1$

- $x = 0$ なら、$y = -3$
- $x = -1$ なら、$y = -4$

したがって、解は $x = 0$、$y = -3$ と
$x = -1$、$y = -4$

c) $\begin{cases} 5x + y - 3 = 0 \\ x^2 - 7x - y + 3 = 0 \end{cases}$

$5x + y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3 - 5x$

したがって、$x^2 - 7x - y + 3 = 0$

$x^2 - 7x - 3 + 5x + 3 = 0$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x - 2) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ または $x = 2$

- $x = 0$ なら、$y = 3$
- $x = 2$ なら、$y = -7$

したがって、解は $x = 0$、$y = 3$ および
$x = 2$、$y = -7$ になります。

d) $\begin{cases} 2x - y = -14 \\ x^2 + 5x + y = 4 \end{cases}$

$2x - y = -14 \Rightarrow y = 2x + 14$

したがって、$x^2 + 5x + y = 4$

$x^2 + 5x + 2x + 14 = 4$

$x^2 + 7x + 10 = 0$

$(x + 5)(x + 2) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ または $x = 2$

- $x = -5$ なら、$y = 4$
- $x = -2$ なら、$y = 10$

したがって、解は $x = -5$、$y = 4$ および
$x = -2$、$y = 10$ になります。

e) $\begin{cases} 3x + y = -5 \\ 2x^2 - x + y = 1 \end{cases}$

$3x + y = -5 \Rightarrow y = -5 - 3x$

したがって、$2x^2 - x + y = 1$

$$\begin{aligned} 2x^2 - x - 5 - 3x - 1 &= 0 \\ 2x^2 - 4x - 6 &= 0 \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ (x-3)(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x = 3$ または $x = -1$

- $x = 3$ なら、$y = -14$
- $x = -1$ なら、$y = -2$

したがって、解は$x = 3$、$y = -14$ および
$x = -1$、$y = -2$

f) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ -x^2 + 4x + 2y = 1 \end{cases}$

$2x - y = 7 \Rightarrow y = 2x - 7$

したがって、$-x^2 + 4x + 2y = 1$

$$\begin{aligned} -x^2 + 4x + 2(2x - 7) &= 1 \\ -x^2 + 4x + 4x - 14 - 1 &= 0 \\ -x^2 + 8x - 15 &= 0 \\ x^2 - 8x + 15 &= 0 \\ (x-5)(x-3) &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x = 5$ または $x = 3$

- $x = 5$ なら、$y = 3$
- $x = 3$ なら、$y = -1$

したがって、解は $x = 5$、$y = 3$ と
$x = 3$、$y = -1$

1.9 復習問題

1. 以下の方程式のすべての複素数解を求めなさい。

a) $x^4-10x^2+9=0$

b) $x^4-9x^2=0$

c) $x^4-11x^2+30=0$

d) $x^4-16=0$

e) $x^4+2x^2-3=0$

f) $x^4+3x^2-10=0$

g) $4x^4-17x^2+4=0$

h) $2x^4+9=11x^2$

i) $3x^4+64=52x^2$

j) $2x^4-x^2-1=0$

2. 以下の根号を含む方程式を解きなさい。

a) $\sqrt{5x+9}=2x+3$

b) $\sqrt{2x+1}=x-1$

c) $\sqrt{2x+16}=2x+4$

d) $\sqrt{x}+x=\sqrt{3x+x^2}$

e) $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=7$

f) $\sqrt{x+16}-\sqrt{x}=2$

g) $\sqrt{3x+12}-1=\sqrt{5x+9}$

h) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-2}$

3. 以下の根号を含む方程式を解きなさい。

a) $\frac{3x-4}{3-x}=2$

b) $\frac{2}{x+1}=\frac{3}{x}$

c) $\frac{3}{x-2}=\frac{2}{x+3}$

d) $\frac{2x+3}{5x-1}=\frac{6x+4}{15x+2}$

e) $\frac{4x-7}{12x+3}=\frac{x-16}{3x+5}$

f) $\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x-2}=3$

4. 以下の連立方程式のすべての解を求めなさい。

a) $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+x-y+3=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y+3=0 \\ x^2-x-y-5=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x-y-12=0 \\ x^2+2x-y=8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+y=-8 \\ x^2+2x+y=-7 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 8x-y-20=0 \\ 3x^2-7x-y=2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x-y=4 \\ 2x^2+x+y=6 \end{cases}$

達成の目安

1.9 4 次方程式、根号を含む方程式、有理方程式および連立方程式の解を求める問題を解く。

問題の解答：

1a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \Rightarrow (x^2 - 9)(x^2 - 1) = 0.$

よって、

- $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3.$
- $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$

したがって、解は $x = -3$、3、-1、1

1b) $x = 0, -3, 3$

1c) $x = -\sqrt{6}, \sqrt{6}, -\sqrt{5}, \sqrt{5}$

1d) $x = -2, 2, -2i, 2i$

1e) $x = -1, 1, -\sqrt{3}i, \sqrt{3}i$

1f) $x = -\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{5}i, \sqrt{5}i$

1g) $x = -2, 2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

1h) $x = -1, 1, -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}$

1i) $x = -4, 4, -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}$

1j) $x = -1, 1, -\frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2}i$

2a) $x = 0$

2b) $x = 4$

2c) $x = 0$

2d) $x = 0, 1$

2e) $x = 9$

2f)

$$\begin{aligned}\sqrt{x+16} - \sqrt{x} &= 2\\ \sqrt{x+16} &= 2 + \sqrt{x}\\ x + 16 &= 4 + 4\sqrt{x} + x\\ 4\sqrt{x} &= 12\\ \sqrt{x} &= 3\\ x &= 9\end{aligned}$$

確認するときは、

$$\sqrt{25} - \sqrt{9} = 2.$$

したがって、$x = 9$ が解です。

2g) $x = -1$

2h) $x = 2$

3a) $\frac{3x-4}{3-x} = 2 \Rightarrow 3x - 4 = 2(3-x)$

$\Rightarrow 5x = 10$

$\Rightarrow x = 2$

3b) $x = -3$

3c) $x = -13$

3d) $x = -\frac{2}{7}$

3e) $x = -\frac{13}{188}$

3f) $x = \frac{10+\sqrt{7}}{3}, \frac{10-\sqrt{7}}{3}$

4a) $x = 0, y = 3$ および $x = -2, y = 5$

4b) $x = 4, y = 7$ および $x = -2, y = 1$

4c) $x = 2, y = 0$

4d) $x = 1, y = -10$ および $x = -1, y = -6$

4e) $x = 3, y = 4$ および $x = 2, y = -4$

4f) $x = -1 + \sqrt{6}, y = -7 + 3\sqrt{6}$

および $x = -1 - \sqrt{6}, y = -7 - 3\sqrt{6}$

1.10 このユニットの問題

1. 以下の 4 次方程式のすべての複素数解を求めなさい。

a) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

b) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$

c) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$

d) $-x^4 + 7x^2 - 12 = 0$

e) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

f) $8x^2 - 15 = x^4$

g) $3x^4 - 26x^2 - 9 = 0$

h) $12x^4 - 5x^2 - 3 = 0$

i) $-2x^4 - 9x^2 + 68 = 0$

j) $4x^4 = 13x^2 - 9$

k) $4x^4 = 5 - 19x^2$

l) $4x^4 + 91x^2 - 225 = 0$

2. 以下の根号を含む方程式を解きなさい。

a) $\sqrt{7-5x} = 8$

b) $x + \sqrt{5x+19} = -1$

c) $2\sqrt{x} - \sqrt{x-3} = \sqrt{5+x}$

d) $\sqrt{1+4\sqrt{x}} = \sqrt{x} + 1$

e) $3\sqrt{2x-3} + 2\sqrt{7-x} = 11$

f) $\sqrt{7-2x} - \sqrt{5+x} = \sqrt{4+3x}$

g) $\sqrt{2x+15} - 2 = \sqrt{6x+1}$

h) $\sqrt{x+1} + \sqrt{3x+4} = \sqrt{5x+9}$

3. 以下の根号を含む方程式を解きなさい。

a) $\frac{5x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x} = 2$

b) $\frac{2x}{x+6} + \frac{3x}{x+4} = x$

4. 以下の連立方程式のすべての解を求めなさい。

a) $\begin{cases} 6x - y + 2 = 0 \\ 2x^2 + 5x - y + 1 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 2y = 9 \\ 4x^2 - 12x - y + 9 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y - 8 = 0 \\ x^2 - 4x + 7y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x^2 - 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$

5. デカルト平面において、
a) $y = 2x - 2$ および $y = x^2 - 2x + 1$ の方程式をグラフ化しなさい。
b) a) で示した 2 つの方程式を満足させる x と y の値を見つけなさい。
c) 同じデカルト平面に座標 (x, y) を配置しなさい。ここでいう x と y は、b) で求めた値です。
d) c) で配置した点と、a) の方程式のグラフに何が起きますか。
e) 1つが 1 次方程式でもう1つが2次方程式の連立方程式を解くことに関して、何を結論付けることができますか。

達成の目安

1.10 方程式の問題を解く。

問題の解答：

1a) $x = -3, 3, -2i, 2i$

1b) $x = -i, i$

1c) $x = -\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{5}i, \sqrt{5}i$

1d) $x = -2, 2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$

1e) $x = -\sqrt{2}, \sqrt{2}, -1, 1$

1f) $x = -\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{5}, \sqrt{5}$

1g) $x = -3, 3, -\frac{\sqrt{3}}{3}i, \frac{\sqrt{3}}{3}i$

1h) $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}i, \frac{\sqrt{3}}{3}i$

1i) $x = -2, 2, -\frac{\sqrt{34}}{2}i, \frac{\sqrt{34}}{2}i$

1j) $x = -1, 1, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$

1k) $x = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{5}i, \sqrt{5}i$

1l) $x = -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -5i, 5i$

2a) $x = -\frac{57}{5}$

2b) $x = -3$

2c) $x = 4$

2d) $x = 0, 4$

2e) $x = 6$

2f) $x = -1$

2g) $x = \frac{1}{2}$

2h) $x = 0$

3a) $x = -\frac{1}{2}, 1$

3b) $x = \frac{-5+\sqrt{33}}{2}, \frac{-5-\sqrt{33}}{2}, 0$

4a) $x = -\frac{1}{2}, y = -1$ および $x = 1$、$y = 8$

4b) $x = \frac{9}{4}, y = \frac{9}{4}$ および $x = \frac{1}{2}, y = 4$

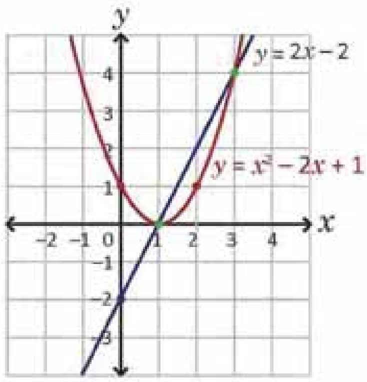
4c) $x = \frac{-17+3\sqrt{57}}{2}, y = \frac{-67+9\sqrt{57}}{2}$

y $x = \frac{-17-3\sqrt{57}}{2}, y = \frac{-67-9\sqrt{57}}{2}$

4d) $x = \frac{-1+\sqrt{41}}{4}, y = \frac{19-3\sqrt{41}}{4}$

y $x = \frac{-1-\sqrt{41}}{4}, y = \frac{19+3\sqrt{41}}{4}$

5a) $y = 2x - 2$ のグラフは直線です。$x = 0$ ならば、$y = -2$ また、$x = 1$ ならば、$y = 0$ したがって、グラフは座標 (0, −2) と (1, 0) を通ります。したがって、$y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ のグラフは、(1, 0) を頂点とする上が開いている放物線です。さらに、$x = 0$ なら、$y = 1$ また、$x = 2$ なら、$y = 1$ つまり、放物線は座標 (0, 1) と (2, 1) を通ります。



5b) 連立方程式を解かなければなりません。 $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$

$2x - 2 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 3$ または $x = 1$

または $x = 1$　$x = 3$ ならば、$y = 4$、また、$x = 1$ ならば、$y = 0$

5c) グラフの緑色の点を見ます。

5d) c) で配置した点は、$y = 2x - 2$ のグラフと $y = x^2 - 2x + 1$ のグラフが交わる点に一致します。

5e) 連立方程式の解は、グラフが交わる点を意味します。

ユニット2：直線

このユニットのねらい

デカルト平面上での特性から傾きと直線の方程式の概念を推論し、2直線の位置関係の決定に用います。また、幾何学の問題と定理の解決に応用します。

関連と発展

初等教育第３期

ユニット６：正比例と反比例（第７学年）
- 正比例
- 反比例
- 比例の適用

ユニット３：１次関数(第８学年)
- １次関数
- １次関数と2 元 １ 次方程式
- １次関数の応用

ユニット５：相似な図形（第９学年）
- 相似
- 三角形の相似
- 相似と平行
- 相似と相似な三角形の応用

ユニット６：ピタゴラスの定理（第９学年）
- ピタゴラスの定理
- ピタゴラスの定理 の応用

高校１年

ユニット５：斜三角形の解法
- 鋭角の三角比
- 一般角の三角比
- 斜三角形の解法

高校２年

ユニット２：直線
- 点と線分
- 直線
- ２直線の位置関係
- GeoGebraを使った演習

ユニット３：円錐断面
- 放物線
- 円
- 楕円
- 双曲線
- GeoGebraを使った演習

このユニットでの学習計画

レッスン	時間	授業
1. 点と線分	1	1. 2 点間の距離
	1	2. 与えられた比での線分の分割 ： 数直線
	1	3. 与えられた比での線分の分割 ： デカルト平面
	1	4. 線分の中点
	1	5. 応用
	1	6. 復習問題
2. 直線	1	1. 直線の傾きと定義
	1	2. 直線の方程式 ： 点・傾き形
	1	3. 2 点を与えられた直線の方程式
	1	4. 座標軸に平行な直線
	1	5. 直線の方程式の一般形
	1	6. 復習問題
	1	レッスン 1 およびレッスン 2 のテスト
3. 2 直線の位置関係	1	1. 直線と x 軸の交点
	1	2. 直線と y 軸の交点
	1	3. 2直線の交点
	1	4. 平行な直線
	1	5. 直角に交わる直線
	1	6. 点と直線の距離
	1	7. 復習問題
	1	8. 直線の傾斜角
	1	9. 2 直線のなす角

レッスン	時間	授業
	1	10. 応用
	1	11. 復習問題
	1	12. このユニットの問題
4. GeoGebraを使った演習	1	1. GeoGebraを使った演習：線分と直線の方程式
	1	2. GeoGebraを使った演習：2直線の位置関係
	1	レッスン 3 テスト

全26コマ + レッスン 1 およびレッスン 2 テスト + レッスン 3 テスト

各レッスンの要点

レッスン 1：点と線分
デカルト平面上の線分の特徴を、距離、与えられた比での線分の分割および中点の概念を用いて、分析的に学習します。

レッスン 2：直線
傾きの概念から直線を定義し、直線の方程式を点と直線の傾きから求める方法、または、与えられた 2 点から求める方法を学習します。さらに、座標軸に平行な直線の方程式の形、そして、最後に直線の方程式の一般形を学習します。

レッスン 3：2 直線の位置関係
2直線の交点を求めます。また、平行な2直線および直角に交わる 2 直線、点と直線の距離、2直線のなす角を扱います。幾何学への応用も一部学びます。

レッスン 4：GeoGebraを使った演習
点、線分、直線をGeoGebraで図上に表示します。交点、中点、2 直線のなす角などのツールを用い、ユニットを通して実施するさまざまな問題を確認します。

レッスン 1 点と線分

1.1 2点間の距離

導入問題

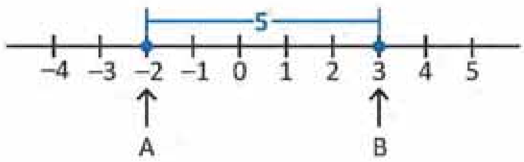
以下の場合の点 A と 点 B 間の距離を求めなさい。

a) A(−2) と B(3) は、数直線上にあります。
b) A(3, 4) と B(−1, 1) は、デカルト平面上にあります。

pは実数なので、P(p) という表記は、点Pが数直線上の p 値にあることを示しています。

解法

a) 数直線上に値がそれぞれ −2 と 3 の点 A と点 B を置きます（図を参照）。これに基づくと、2 点間の距離は 5。

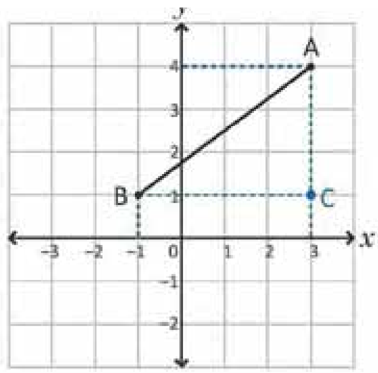


したがって、点 A と点 B の距離は 5。上記は、数直線を用いず、B の値から A の値を引いて求めることもできます。

$$\begin{aligned} AB &= 3 - (-2) \\ &= 3 + 2 \\ &= 5. \end{aligned}$$

b) デカルト平面上に 座標がそれぞれ (3, 4) と (−1, 1) の点 A と点 B を置きます（図を参照）。点 A と点 B の距離は、線分 AB の長さに等しくなります。

点 P(x_1, y_1) をデカルト平面上に置くために x_1 座標を x 軸上に置きます。
そこから、プラスなら上に向かって、マイナスなら下に向かって（どちらの場合も垂直に）y_1 座標に対応する位置に進みます。



直角三角形 ABC が形成されたら、ピタゴラスの定理を使って、

$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$
$$AB = \sqrt{BC^2 + CA^2}.$$

距離について話しているので、AB は常にゼロより大きくなります。

線分 BC の長さは、x 軸上で −1 から 3 までの距離を計算するのに等しいです。つまり、

$$BC = 3 - (-1) = 4.$$

同様に、線分 CA の長さは、y 軸上で 1 から 4 までの距離を計算するのに等しいです。つまり、

$$CA = 4 - 1 = 3.$$

BC と CA を $AB = \sqrt{BC^2 + CA^2}$ に代入し、計算すると、

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{4^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{16+9} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5. \end{aligned}$$

したがって、点 A と点 B 間の距離は 5

まとめ

点 A と 点 B 間の距離は、d(A, B)で表され、以下のように定義されます。

a) A(a) と B(b) が 数直線上にあるならば、

$$d(A, B) = |a - b|.$$

b) A(x_1, y_1) と B(x_2, y_2) がデカルト平面上にあるならば、

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

A と B がデカルト平面上の点であるときに d(A, B) を計算するためのこの公式は、線分 AB が座標軸の1つと平行な場合にも使用します。

$|a - b|$ は、引き算$a - b$の絶対値を示します。

例

各場合について、以下の場合の d(A, B) を求めなさい。

a) A(−10) とB(6)　　b) A(−2, −1) とB(3, 2)

a) A と B は数直線上にあるので、

$$\begin{aligned} d(A, B) &= |-10 - 6| \\ &= |-16| \\ &= -(-16) \\ &= 16. \end{aligned}$$

したがって、d(A, B) = 16

x が実数なら、$|x|$ によって表される x の絶対値は、以下のように定義されます。

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

b) A と B はデカルト平面上にあります。よって、

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(-2-3)^2 + (-1-2)^2} \\ &= \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{25+9} \\ &= \sqrt{34}. \end{aligned}$$

したがって、　$d(A, B) = \sqrt{34}$.

問題

各場合について、2 点 A、B 間の距離、すなわち d(A, B) を求めなさい。

a) A(3) と B(7)	b) A(0) と B(6)	c) A(−1) と B(1)	d) A(−3) と B(−1)
e) A(−8) と B(0)	f) A(−3) と B(−10)	g) A(7) と B(2)	h) A(5) と B(−4)
i) A(5, 6) と B(2, 3)	j) A(3, 2) と B(−2, 1)	k) A(4, 6) と B(−5, −3)	l) A(7, 2) と B(1, −4)
m) A(−3, 4) と B(1, 3)	n) A(0, 0) と B(4, −5)	ñ) A(−5, 4) と B(2, −1)	o) A(6, −2) と B(6, −5)

達成の目安

1.1 数直線上またはデカルト平面上の 2 点間の距離を計算する。

学習の流れ

第9学年ではピタゴラスの定理について学びましたが、この授業では、ピタゴラスの定理がデカルト平面上の線分の長さを求めるのに役立ちます。第 1 学年でも、平面の 2 点間の距離について学びました。

ねらい

結論として、距離の求め方は 2つあります。2つ目の求め方は、任意の2点間の距離を求めるには十分ですが、1つ目の求め方は、2 点が座標軸に平行な線上にある場合便利で、いくつかの計算を簡略化します。

解答：

a から **h** までの問題では、A と B は数直線上にあります。

a) $d(A, B) = |3-7| = |-4| = -(-4) = 4$

したがって、 $d(A, B) = 4.$

b) $d(A, B) = |0-6| = |-6| = -(-6) = 6$

したがって、 $d(A, B) = 6.$

c) $d(A, B) = |-1-1| = |-2| = -(-2) = 2$

したがって、 $d(A, B) = 2.$

d) $d(A, B) = |-3-(-1)| = |-2| = -(-2) = 2$

したがって、 $d(A, B) = 2.$

e) $d(A, B) = |-8-0| = |-8| = -(-8) = 8$

したがって、 $d(A, B) = 8.$

f) $d(A, B) = |-3-(-10)| = |7| = 7$

したがって、 $d(A, B) = 7.$

g) $d(A, B) = |7-2| = |5| = 5$

したがって、 $d(A, B) = 5.$

h) $d(A, B) = |5-(-4)| = |9| = 9$

したがって、 $d(A, B) = 9.$

i から **o** までの問題では、A と B はデカルト平面上にあります。

i) $$d(A, B) = \sqrt{(5-2)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

したがって、 $d(A, B) = 3\sqrt{2}.$

j) $$d(A, B) = \sqrt{(3-(-2))^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

したがって、 $d(A, B) = \sqrt{26}.$

k) $$d(A, B) = \sqrt{(4-(-5))^2 + (6-(-3))^2} = \sqrt{9^2 + 9^2} = 9\sqrt{2}$$

したがって、 $d(A, B) = 9\sqrt{2}.$

l) $$d(A, B) = \sqrt{(7-1)^2 + (2-(-4))^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$$

したがって、 $d(A, B) = 6\sqrt{2}.$

m) $$d(A, B) = \sqrt{(-3-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

したがって、 $d(A, B) = \sqrt{17}.$

n) $$d(A, B) = \sqrt{(0-4)^2 + (0-(-5))^2} = \sqrt{(-4)^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

したがって、 $d(A, B) = \sqrt{41}.$

ñ) $d(A, B) = \sqrt{((-5)-2)^2 + (4-(-1))^2} = \sqrt{74}$

したがって、 $l(A, B) = \sqrt{74}.$

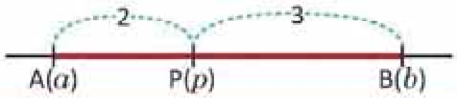
o) $d(A, B) = \sqrt{(6-6)^2 + (-2-(-5))^2} = 3$

したがって、 $d(A, B) = 3.$

1.2 与えられた比での線分の分割： 数直線

導入問題

下の図に示されているように、数直線上に A(a) と B(b) の 2 点があります。
線分 AB を 2：3 の比で分割する点Pの値はいくらですか。



$$\frac{d(\mathrm{A},\mathrm{P})}{d(\mathrm{P},\mathrm{B})} = \frac{2}{3}$$

解法

P が線分 AB を 2：3 の比で分割するのであれば、

$$\frac{d(\mathrm{A},\mathrm{P})}{d(\mathrm{P},\mathrm{B})} = \frac{2}{3}$$

図から $d(\mathrm{A},\mathrm{P}) = |a-p| = p-a$ また、$d(\mathrm{P},\mathrm{B}) = |p-b| = b-p$ と導くことができます。なぜなら、それぞれ $p > a$ および $b > p$ 上記に代入し、割合の基本的な性質を利用すると、

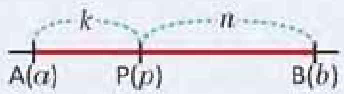
$$\begin{aligned}
\frac{p-a}{b-p} &= \frac{2}{3} \\
3(p-a) &= 2(b-p) \\
3p-3a &= 2b-2p \\
2p+3p &= 3a+2b \\
(2+3)p &= 3a+2b \\
p &= \frac{3a+2b}{2+3}
\end{aligned}$$

したがって、点 P の値は、$\frac{3a+2b}{5}$

一般的に

数直線上の 2 点 A(a) と B(b) が与えられるとき、線分 AB上にあり、線分 AB を $k：n$ の比で分割する点 P(p) の値は、

$$p = \frac{na+kb}{k+n}.$$



例

A(−3) と B(5) が与えられるとき、線分 AB を 3：1 の比で分割する点 P(p) の値を求めなさい。

この場合は、$a = -3$、$b = 5$、$k = 3$、$n = 1$　　したがって、

$$\begin{aligned}
p &= \frac{1(-3)+3(5)}{3+1} \\
&= \frac{-3+15}{4} \\
&= \frac{12}{4} \\
&= 3.
\end{aligned}$$

したがって、点 P の値は 3

問題

1. 各場合について、線分 AB を与えられた比で分割する点 P(p) の値を求めなさい。

a) 比 3：2　A(1)、B(6)　　b) 比 2：5　A(− 4)、B(3)　　c) 比 1：4　A(0)、B(5)
d) 比 2：3　A(− 10)、B(0)　　e) 比 3：4　A(−16)、B(−2)　　f) 比 1：3　A(−1)、B(7)

2. 数直線上にある 2 点を A(−1) と B(b) とします。P(1) が線分 AB を 4：5 の比で分割するならば、b の値はいくらですか。

達成の目安

1.2 数直線上の線分を与えられた比で分割する点の値を求める。

学習の流れ

第7学年では比率と割合を学びましたが、この授業では線分を与えられた比で分割する点を求めるために応用します。これは、その後、線分の中点を計算するために用います。

つまずきやすい点

3つの変数の使用は、生徒を混乱させる可能性があります。そのため「導入問題」の解答は、変数 a と b の表現で書かれていることを指摘しておかねばなりません。

解答：

1a) この場合は、$a = 1$、$b = 6$、$k = 3$、$n = 2$　したがって、

$$p = \frac{2(1) + 3(6)}{3 + 2} = \frac{2 + 18}{5} = \frac{20}{5} = 4.$$

したがって、点 P の値は 4

1b) この場合は、$a = -4$、$b = 3$、$k = 2$、$n = 5$　したがって、

$$p = \frac{5(-4) + 2(3)}{2 + 5} = \frac{-20 + 6}{7} = -\frac{14}{7} = -2.$$

したがって、点 P の値は -2

1c) この場合は、$a = 0$、$b = 5$、$k = 1$、$n = 4$　したがって、

$$p = \frac{4(0) + 1(5)}{1 + 4} = \frac{5}{5} = 1.$$

したがって、点 P の値は 1

1b) この場合は、$a = -10$、$b = 0$、$k = 2$、$n = 3$　したがって、

$$p = \frac{3(-10) + 2(0)}{2 + 3} = -\frac{30}{5} = -6.$$

したがって、点 P の値は -6

1e) この場合は、$a = -16$、$b = -2$、$k = 3$、$n = 4$
したがって、

$$p = \frac{4(-16) + 3(-2)}{3 + 4} = \frac{-64 - 6}{7} = -\frac{70}{7} = -10.$$

したがって、点 P の値は -10

1f) この場合は、$a = -1$、$b = 7$、$k = 1$、$n = 3$　したがって、

$$p = \frac{3(-1) + 1(7)}{1 + 3} = \frac{-3 + 7}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

したがって、点 P の値は 1

2. $a = -1$、$k = 4$、$n = 5$、$p = 1$ なので、

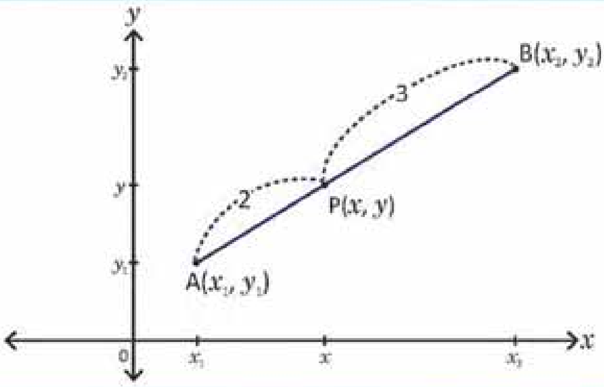
$$1 = \frac{5(-1) + 4(b)}{4 + 5} = \frac{-5 + 4b}{9} \Rightarrow -5 + 4b = 9 \Rightarrow 4b = 14 \Rightarrow b = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}.$$

したがって、b の値は $\frac{7}{2}$

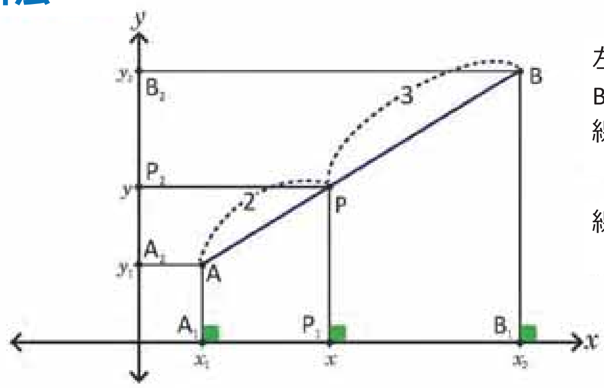
1.3 与えられた比での線分の分割：デカルト平面*

導入問題

右図で示されているように、A(x_1, y_1) と B(x_2, y_2) の 2 点がデカルト平面上にあります。線分 AB上にあり、線分 AB を 2：3 の比で分割している点 P(x, y) の座標を、どのように求めますか。



解法



左図に示されているように、点　$A_1(x_1,\ 0)$、$P_1(x,\ 0)$、$B_1(x_2, 0)$、$A_2(0, y_1)$、$P_2(0, y)$、$B_2(0, y_2)$ は軸上にあります。線分AA_1、PP_1、BB_1、AA_2、PP_2、BB_2を引きます。

線分AA_1、PP_1、BB_1は平行です。平行線と比の定理から、

$$\frac{d(A_1, P_1)}{d(P_1, B_1)} = \frac{d(A, P)}{d(P, B)} = \frac{2}{3}.$$

前の授業で学んだことを使うと、点 P の x 座標は、

$$x = \frac{3x_1 + 2x_2}{2+3}.$$

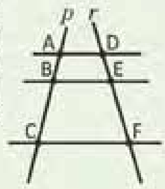
同じように、点 P の y 座標は、

$$y = \frac{3y_1 + 2y_2}{2+3}.$$

したがって、　$P\left(\frac{3x_1 + 2x_2}{5}, \frac{3y_1 + 2y_2}{5}\right)$.

平行線と比の定理：
p と r が 3 つの平行な直線によって分割された直線ならば（図を参照）

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$



一般的に

デカルト平面上にある2つの点 A(x_1, y_1) と B(x_2, y_2) が与えられたとき、線分 AB上にあり、線分 AB を k：n の比で分割する点 P(x, y) の座標は、

$$\left(\frac{nx_1 + kx_2}{k+n}, \frac{ny_1 + ky_2}{k+n}\right).$$

問題

各場合について、線分 AB を与えられた比で分割する点 P(x, y) の座標を求めなさい。

a) 比 1：3　A(−5, 1)、B(3, −3)
b) 比 3：4　A(−2, −10)、B(5, 4)
c) 比 3：2　A(1, 8)、B(6, −2)
d) 比 4：5　A(−2, −9)、B(7, 0)

達成の目安

1.3 デカルト平面上の線分を与えられた比で分割する点の座標を求める。

学習の流れ

今回は、デカルト平面上の任意の線分の分割を扱います。そのためには、第9学年で学習した平行線と比の定理を使う必要があります。その後、前の授業で学んだことを用い、 数直線に関して見つけた公式をデカルト平面に応用します。問題を解くためのヒントが不十分な場合は、教師が説明しなければなりません。

解答：

a) A(– 5, 1)、B(3, –3)、k = 1、n = 3 なので、

$$P\left(\frac{3(-5)+1(3)}{1+3}, \frac{3(1)+1(-3)}{1+3}\right) = P(-3, 0).$$

b) A(–2, –10)、B(5, 4)、k = 3、n = 4 なので、

$$P\left(\frac{4(-2)+3(5)}{3+4}, \frac{4(-10)+3(4)}{3+4}\right) = P(1, -4).$$

c) A(1, 8)、B(6, –2)、k = 3、n = 2 なので、

$$P\left(\frac{2(1)+3(6)}{3+2}, \frac{2(8)+3(-2)}{3+2}\right) = P(4, 2).$$

d) A(–2, –9)、B(7, 0)、k = 4、n = 5 なので、

$$P\left(\frac{5(-2)+4(7)}{4+5}, \frac{5(-9)+4(0)}{4+5}\right) = P(2, -5).$$

1.4 線分の中点

導入問題

以下の場合の、線分 AB の中点の値または座標を求めなさい。

1. A(a) と B(b) は数直線上にあります。
2. A(x , y) と B(x , y) はデカルト平面上にあります。

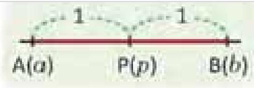
中点は線分AB を 1 : 1 の比で分割します。

解法

中点を求めることは、線分 AB を 1 : 1 の比で分割する点を求めることに等しいです。つまり、$k = 1$ および $n = 1$

1. 中点 P の値 p を計算すると、

$$p = \frac{1a + 1b}{1+1} = \frac{a+b}{2}.$$



したがって、中点 P の値は、$\dfrac{a+b}{2}$

2. 中点 P の座標 (x, y) を計算すると、

$$x = \frac{1x_1 + 1x_2}{1+1} = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{1y_1 + 1y_2}{1+1} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

したがって、中点 P の座標は、$\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

まとめ

1. A(a) と B(b) が数直線上の点であるなら、線分 AB の中点 P(p) の値は、

$$p = \frac{a+b}{2}.$$

2. A(x_1, y_1) と B(x_2, y_2) が数直線上の点であるなら、線分 AB の中点 P の座標は、

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

問題

1. 各場合について、線分 AB の中点 P の値を求めなさい。

a) A(1) と B(7)　　b) A(0) と B(8)　　c) A(−2) と B(4)　　d) A(−4) と B(2)
e) A(−6) と B(−2)　　f) A(−7) と B(−3)　　g) A$(\sqrt{2})$ と B$(3\sqrt{2})$　　h) A$(-\sqrt{3})$と B$(\sqrt{2})$

2. 各場合について、線分 AB の中点 P の座標を求めなさい。

a) A(1, 2) と B(3, 6)　　b) A(−6, 4) と B(0, −2)　　c) A(−4, −5) と B(2, 1)
d) A(1, 6) と B(4, 0)　　e) A(−5, −1) と B(3, 1)　　f) A$(0, \sqrt{2})$と B$(0, 6\sqrt{2})$

24

達成の目安

1.4 線分の中点の値または座標を求める。

学習の流れ

今回は、数直線上およびデカルト平面上の中点の公式を導き出します。

ねらい

「導入問題」で、前2 回の授業で学んだことを用い、中点は線分を 1：1 の比で分割することを知ったうえで、中点の公式を導き出します。

解答：

問題 1 では、2 点は数直線上にあります。

1a) A(1) と B(7)

$$p = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

1b) A(0) と B(8)

$$p = \frac{0+8}{2} = 4$$

1c) A(–2) と B(4)

$$p = \frac{-2+4}{2} = 1$$

1d) A(–4) と B(2)

$$p = \frac{-4+2}{2} = -1$$

1e) A(–6) と B(–2)

$$p = \frac{-6-2}{2} = -4$$

1f) A(–7) と B(–3)

$$p = \frac{-7-3}{2} = -5$$

1g) A($\sqrt{2}$) と B($3\sqrt{2}$)

$$p = \frac{\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

1h) A($-\sqrt{3}$) と B($\sqrt{2}$)

$$p = \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$$

問題 2 では、2 点はデカルト平面上にあります。

2a) A(1, 2) と B(3, 6)

中点： $P\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = P(2, 4)$

2b) A(–6, 4) と B(0, –2)

中点： $P\left(\frac{-6+0}{2}, \frac{4-2}{2}\right) = P(-3, 1)$

2c) A(–4, –5) と B(2, 1)

中点： $P\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{-5+1}{2}\right) = P(-1, -2)$

2d) A(1, 6) と B(4, 0)

中点： $P\left(\frac{1+4}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = P\left(\frac{5}{2}, 3\right)$

2e) A(–5, –1) と B(3, 1)

中点： $P\left(\frac{-5+3}{2}, \frac{-1+1}{2}\right) = P(-1, 0)$

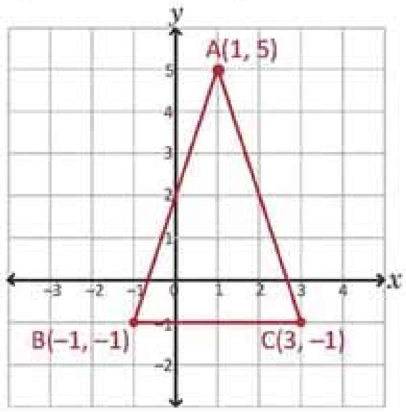
2f) A($0, \sqrt{2}$) と B($0, 6\sqrt{2}$)

中点： $P\left(\frac{0+0}{2}, \frac{\sqrt{2}+6\sqrt{2}}{2}\right) = P\left(0, \frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$

1.5 応用

導入問題

図に表示されている座標を持つ、A、B、C の 3 点がデカルト平面上にあります。



三角形 ABC が二等辺三角形であることを証明しなさい。

解法

ΔABC が二等辺三角形であるためには、長さが等しい2辺を持っていなければなりません。一見して、辺 AB と辺 CA はこの条件を満たしているように見えます。点 A と 点 B 間の距離に等しい辺ABの長さを計算します。

$$
\begin{aligned}
d(A, B) &= \sqrt{[1-(-1)]^2 + [5-(-1)]^2} \\
&= \sqrt{4+36} \\
&= \sqrt{40} \\
&= 2\sqrt{10}
\end{aligned}
$$

同じように、辺 CA の長さ、つまり、点 C と 点 A 間 の距離を計算します。

$$
\begin{aligned}
d(C, A) &= \sqrt{(3-1)^2 + (-1-5)^2} \\
&= \sqrt{4+36} \\
&= \sqrt{40} \\
&= 2\sqrt{10}
\end{aligned}
$$

したがって、$d(A, B) = d(C, A)$、すなわち、三角形 ABC は同じ長さの2辺AB と CA を持っています。よって、ΔABC は二等辺三角形です。

問題

1. 3 点 A(3, 3)、B(−3, −3)、$C\left(-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\right)$ によって形成される三角形が正三角形であることを証明しなさい。
2. 3 点 D(1, 4)、E(−3, −2)、F(5, 1) によって形成される三角形が不等辺三角形であることを証明しなさい。
3. 3 点 A(3, 7)、B(−3, −1)、C(3, −1) が直角三角形を形成することを証明しなさい。

三角形の 3 辺 a、b、c が、$a^2 + b^2 = c^2$ の関係を満たすとき、その三角形は直角三角形です。

達成の目安

1.5 2 点間の距離と与えられた比での線分の分割を用いて問題を解く。

学習の流れ

この課で獲得した知識を使って、幾何学問題を解きます。

解答：

1. 三角形 ABC が正三角形であるためには、3 辺が同じ長さでなければなりません。すなわち、d(A, B)、d(B, C)、d(A, C) は等しくなければなりません。3 つの距離を計算すると、

- $d(A, B) = \sqrt{(3-(-3))^2 + (3-(-3))^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2},$
- $d(B, C) = \sqrt{(-3+3\sqrt{3})^2 + (-3-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 - 18\sqrt{3} + 9(3) + 9 + 18\sqrt{3} + 9(3)} = \sqrt{8(9)} = 6\sqrt{2},$
- $d(A, C) = \sqrt{(3+3\sqrt{3})^2 + (3-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 18\sqrt{3} + 9(3) + 9 - 18\sqrt{3} + 9(3)} = \sqrt{8(9)} = 6\sqrt{2}.$

したがって、三角形 ABC は正三角形です。

2. 三角形が不等辺三角形であるためには、3 辺は異なる長さでなければなりません。すなわち、d(D, E)、d(E, F)、d(D, F) は異なっていなければなりません。3 つの距離を計算すると、

- $d(D, E) = \sqrt{(1-(-3))^2 + (4-(-2))^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52},$
- $d(E, F) = \sqrt{(-3-5)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{(-8)^2 + (-3)^2} = \sqrt{73},$
- $d(F, D) = \sqrt{(1-5)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5.$

したがって、三角形 DEF は不等辺三角形です。

3. 簡単にするため、AB^2、BC^2、AC^2 を計算します。

- $AB^2 = [d(A, B)]^2 = (3+3)^2 + (7+1)^2 = 6^2 + 8^2 = 100.$
- $BC^2 = [d(B, C)]^2 = (-3-3)^2 + (-1+1)^2 = (-6)^2 = 36.$
- $AC^2 = [d(A, C)]^2 = (3-3)^2 + (7+1)^2 = 8^2 = 64.$

$BC^2 + AC^2 = 36 + 64 = 100 = AB^2$ に注目します。ピタゴラスの定理の逆から、三角形 ABC は直角三角形になります。

ピタゴラスの定理の逆は第 9 学年で学びました。

1.6 復習問題

1. 各場合について、2 点 A、B 間の距離を求めなさい。

a) A(−9)、B(−1)
b) A(0)、B(5)
c) $A\left(-\frac{3}{2}\right)$、$B\left(\frac{7}{2}\right)$
d) $A(\sqrt{5})$、$B(3\sqrt{5})$
e) A(−4, 0)、B (5, −2)
f) A(−1, 6)、B(3, −2)
g) $A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$、$B\left(\frac{5}{2}, 3\right)$
h) $A(-\sqrt{2}, -3)$、B(0, 2)

2. 点 A と点 B 間の距離は $d(A, B) = 2\sqrt{13}$ です。A の座標が (−2, 5) で、B の座標が (x, 1) ならば、x の値はいくらですか。

3. 点 A と点 B 間の距離は $d(A, B) = 2\sqrt{34}$ です。Aの座標が (−6, y) で、B の座標が (4, 4) ならば、y の値はいくらですか。

4. 各場合について、線分 AB を与えられた比で分割する、線分 AB 上の点の値を求めなさい。

a) 比 6：5　A(−10)、B(1)
b) 比 3：1　A(−2)、B(2)
c) 比 1：3　A(−6, 7)、B(2, 3)
d) 比 1：2　A(−4, 0)、B(11, 6)

5. 各場合について、線分 AB の中点を求めなさい。

a) A(−1)、B(3)
b) $A(-2\sqrt{10})$、$B(\sqrt{10})$
c) A(0, 7)、B(4, −11)
d) A(−5, −1.5)、B(3, 5.5)

6. 点 $P(x_1, y_1)$ と原点 (0, 0) 間の距離はいくらですか。

7. A(−1, 3) と B の中点が $P\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ のとき、点 B の座標を求めなさい。

8. ある三角形の頂点が、A(2, 4)、B(−2, −2)、C(4, 0) です。D と E がそれぞれ辺 AB と 辺 BC の中点のとき、$DE = \frac{1}{2}AC$ を証明しなさい。

9. 三角形 ABC の頂点 A の座標は、(−2, 4) です。辺 AB と 辺 BC の中点がそれぞれ (−3, 1) と (1, 0) のとき、頂点 B と 頂点 C の座標はどうなりますか。

10. 四角形 ABCD の頂点 A の座標は、(−4, 4) です。辺 AB、辺 BC、辺 CD の中点がそれぞれ (−2, 0)、(4, −2)、(6, 4) のとき、頂点 B、頂点 C、頂点 D の座標をどうなりますか。

達成の目安

1.6 2 点間の距離を求める問題と、与えられた比での線分の分割に関する問題を解く。

解答：

1a) $d(\text{A, B}) = |-9-(-1)| = |-8| = -(-8) = 8$ **1b)** $d(\text{A, B}) = 5$ **1c)** $d(\text{A, B}) = 5$ **1d)** $d(\text{A, B}) = 2\sqrt{5}$

1e) $d(\text{A, B}) = \sqrt{(-4-5)^2 + (0-(-2))^2} = \sqrt{85}$ **1f)** $d(\text{A, B}) = 4\sqrt{5}$ **1g)** $d(\text{A, B}) = 2\sqrt{2}$ **1h)** $d(\text{A, B}) = 3\sqrt{3}$

2. $d(\text{A, B}) = \sqrt{(-2-x)^2 + (5-1)^2} = 2\sqrt{13} \Rightarrow (-2-x)^2 + 16 = 4(13) \Rightarrow x^2 + 4x - 32 = 0 \Rightarrow (x+8)(x-4) = 0$

したがって、$x = -8$ または $x = 4$

3. $d(\text{A, B}) = \sqrt{(-6-4)^2 + (y-4)^2} = 2\sqrt{34} \Rightarrow 100 + (y-4)^2 = 4(34) \Rightarrow y^2 - 8y - 20 = 0 \Rightarrow (y+2)(y-10) = 0$

したがって、$y = -2$ または $y = 10$

4a) $p = -4$ **4b)** $p = 1$ **4c)** P(−4, 6) **4d)** P(1, 2)

5a) $p = 1$ **5b)** $p = -\frac{\sqrt{10}}{2}$ **5c)** P(2, −2) **5d)** P(−1, 2)

6. デカルト平面の原点を O(0, 0) とします。よって、$d(\text{P, O}) = \sqrt{(x_1-0)^2 + (y_1-0)^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

7. B(x, y) とします。よって、$\left(\frac{-1+x}{2}, \frac{3+y}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ したがって、$\frac{-1+x}{2} = \frac{3}{2}$ および $\frac{3+y}{2} = \frac{1}{2}$ これら2つの方程式から導くと、$x = 4$ および $y = -2$ したがって、B(4, −2)

8. D と E がそれぞれ辺 AB と辺 BC の中点なので、

$$\text{D}\left(\frac{2+(-2)}{2}, \frac{4+(-2)}{2}\right) = \text{D}(0, 1) \text{ および } \text{E}\left(\frac{4+(-2)}{2}, \frac{0+(-2)}{2}\right) = \text{E}(1, -1)$$

よって、$\text{DE} = \sqrt{(0-1)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{5}$ 一方、$\text{AC} = \sqrt{(2-4)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

したがって、 $\text{DE} = \sqrt{5} = \frac{1}{2}(2\sqrt{5}) = \frac{1}{2}\text{AC}.$

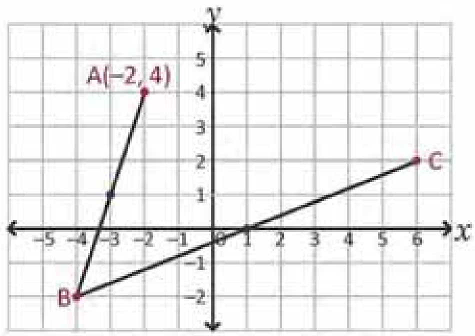
9. B(x_1, y_1) および C(x_2, y_2) とします。AB の中点は (−3, 1) なので、

$$\left(\frac{-2+x_1}{2}, \frac{4+y_1}{2}\right) = (-3, 1) \Rightarrow x_1 = -4、y_1 = -2.$$

したがって、B(−4, −2) 次に、BC の中点は(1, 0) なので、

$$\left(\frac{-4+x_2}{2}, \frac{-2+y_2}{2}\right) = (1, 0) \Rightarrow x_2 = 6、y_2 = 2.$$

したがって、C(6, 2).



10. B(x_1, y_1)、C(x_2, y_2)、D(x_3, y_3) とします。AB の中点は (−2, 0) なので、

$$\left(\frac{-4+x_1}{2}, \frac{4+y_1}{2}\right) = (-2, 0) \Rightarrow x_1 = 0、y_1 = -4 \text{ したがって、B}(0, -4)$$

次に、BC の中点は (4, −2) なので、

$$\left(\frac{0+x_2}{2}, \frac{-4+y_2}{2}\right) = (4, -2) \Rightarrow x_2 = 8、y_2 = 0 \text{ したがって、C}(8, 0)$$

最後に、CD の中点は (6, 4) なので、

$$\left(\frac{8+x_3}{2}, \frac{0+y_3}{2}\right) = (6, 4) \Rightarrow x_3 = 4、y_3 = 8 \text{ したがって、 D}(4, 8)$$

レッスン2 直線

2.1 直線の傾きと定義

導入問題

3点 A(−2, −3)、B(0, 1)、C(1, 3) について、以下を行いなさい。

1. どの 2 点の組み合わせでも、係数 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ は一定であることを確認しなさい。
2. デカルト平面上に 3 点を置きなさい。3 点とも同一直線上にありますか。
3. 点 P(2, *y*) が与えられたとき、P が A および B と同一直線上にあるためには、*y* の値はいくらにならなければならないですか。

解法

1. 可能な組み合わせは、A と B、A と C、B と C です。各組合せに関して、係数 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ を求めます。

A(−2, −3) と B(0, 1)

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{1-(-3)}{0-(-2)} = \frac{4}{2} = 2$$

A(−2, −3) と C(1, 3)

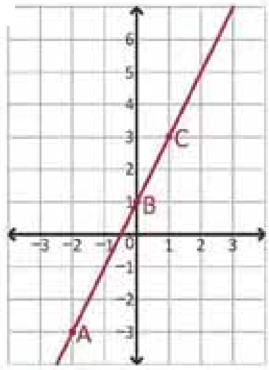
$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{3-(-3)}{1-(-2)} = \frac{6}{3} = 2$$

B(0, 1) と C(1, 3)

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{3-1}{1-0} = \frac{2}{1} = 2$$

したがって、どの 2 点の組み合わせでも、係数 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ は一定です。

2. 右図で示しているように、デカルト平面上に各点を置きます。定規を使って、実際に3点が同一直線上にあることを確認します。



3. 上記の問題 1 と 2 に基づくと、P(2, *y*) が A(−2, −3) および B(0, 1) と同一直線上にあるためには、係数 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ は、3 点 A、B、P のどの組み合わせに対しても 2 に等しくならなければなりません。B と P に関して遵守されていることを確認するだけで十分です。

$$\frac{y-1}{2-0} = 2$$
$$y = 5$$

また、問題 2 のグラフを使って、P(2, 5) が A(−2, −3) および B(0, 1) と同一直線上にあるためには、*y* の値が 5 でなければならないことを導くこともできます。

定義

直線とは、どのような異なる2点 A(x_1, y_1) と B(x_2, y_2) を取っても、係数 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ の値が常に一定である点の集まりです。この係数を**直線の傾き**と呼び、文字 *m* で表します。すなわち、

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

注目：

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-(y_1-y_2)}{-(x_1-x_2)} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

問題

1. 各場合について、3 点 A、B、C が同一直線上にあることを示しなさい。
   a) A(0, −3)、B(3, 0)、C(5, 2)
   b) A(−4, 1)、B(0, 3)、C(6, 6)
   c) A(−3, 5)、B(−1, −1)、C$\left(\frac{1}{3}, -5\right)$
   d) A(−3, 4)、B$\left(\frac{3}{2}, 1\right)$、C(3, 0)
2. 図上に表示せずに、なぜ 3 点 D(−3, 1)、E(1, −1)、F$\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ が同一直線上にないか、証明しなさい。

達成の目安

2.1 傾きの値を使って、同一直線上の点を特定する。

学習の流れ

初等教育第 3 期において、正比例から 1 次関数について学習しました。今回は、傾きの概念から直線を定義します。そうすれば、その後、直線の方程式を導くのが簡単になります。解析幾何学の枠組みにおける直線から学習を始めます。

解答：

1a) A(0, −3)、B(3, 0)、C(5, 2)

A(−2, −3) と B(0, 1)

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-(-3)}{3-0}=\frac{3}{3}=1$$

B(3, 0) と C(5, 2)

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-0}{5-3}=\frac{2}{2}=1$$

したがって、A、B、C は同一直線上にあります。

1b) A(−4, 1)、B(0, 3)、C(6, 6)

A(−4, 1) と B(0, 3)

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3-1}{0-(-4)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

A(−4, 1) と C(6, 6)

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{6-1}{6-(-4)}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

したがって、A、B、C は同一直線上にあります。

1c) A(−3, 5)、B(−1, −1)、$C\left(\frac{1}{3}, -5\right)$

A(−3, 5)、B(−1, −1):

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-1-5}{-1-(-3)}=\frac{-6}{2}=-3$$

A(−3, 5)、$C\left(\frac{1}{3}, -5\right)$

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-5-5}{\frac{1}{3}-(-3)}=\frac{-10}{\frac{10}{3}}=-10\div\frac{10}{3}=-10\times\frac{3}{10}=-3$$

したがって、A、B、C は同一直線上にあります。

1d) A(−3, 4), $B\left(\frac{3}{2}, 1\right)$、C(3, 0)

A(−3, 4)、C(3, 0)

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-4}{3-(-3)}=\frac{-4}{6}=-\frac{2}{3}$$

$B\left(\frac{3}{2}, 1\right)$、C(3, 0)

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-1}{3-\frac{3}{2}}=\frac{-1}{\frac{3}{2}}=-\frac{2}{3}$$

したがって、A、B、C は同一直線上にあります。

2. D(−3, 1)、E(1, −1)、$F\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

D(−3, 1) と E(1, −1)

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-1-1}{1-(-3)}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

E(1, −1) と $F\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-\frac{3}{2}-(-1)}{\frac{3}{2}-1}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=-1$$

したがって、A、B、C は同一直線上にはありません。

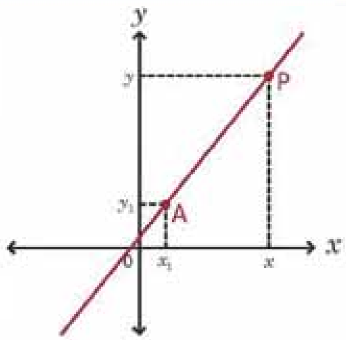
2.2 直線の方程式：点・傾き形*

導入問題

点 A (x_1, y_1) を通る傾き m をもつ直線 l の方程式が以下であることを証明しなさい。

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

解法



点 A(x_1, y_1) 以外の直線l上の任意の点を P(x, y) とします。
直線の定義から、m は定数なので、

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

よって、

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

したがって、直線 l の方程式 は、$y - y_1 = m(x - x_1)$

定義

傾き m をもち点 A (x_1, y_1) を通る直線lの方程式は、

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

この方程式を**直線の方程式（点・傾き形）**といいます。上の式の変数 y を求めると、

$$y = mx - mx_1 + y_1$$

ここでは変数xの係数が直線の傾きであり、$-mx_1 + y_1$ の値は定数になります。点 A(x_1, y_1) を通ることが分かっている直線 l をグラフに表すために、以下を行います。

1. x に特定の値を代入し、対応する y の値を求めます。
2. デカルト平面上に点 A(x_1, y_1) と 1 で求めた点を置きます。その後、両方の点を通る直線を引きます。

例

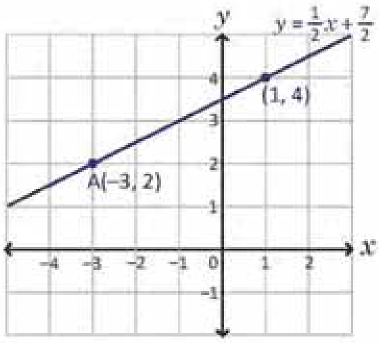
傾きが $m = \frac{1}{2}$ で、点 A$(-3, 2)$ を通る直線 l の方程式を求めなさい。

点・傾き形の式に傾き m と (x_1, y_1) の値を代入します。

$$y - 2 = \frac{1}{2}[x - (-3)]$$

$$y = \frac{1}{2}(x + 3) + 2$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$



直線のグラフを描くには、上の方程式の x に、たとえば $x = 1$など、特定の値を代入し、対応する y の値を求めます。

$$y = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4.$$

右図のように、平面上に点 A$(-3, 2)$ と $(1, 4)$ を置き、両方の点を通る直線を引きます。

問題

与えられた傾きをもち点Aを通る直線の方程式を求めなさい。そしてそれぞれ、直線のグラフを作成しなさい。

a) 傾き $m = 2$、A$(6, 7)$　　b) 傾き $m = 1$、A$(-1, 0)$

c) 傾き $m = -1$、A$(-2, 6)$　　d) 傾き $m = \frac{1}{2}$、A$(1, 8)$

達成の目安

2.2 直線の傾きの値と直線上の点の座標を用いて、直線の方程式とグラムを求める。

学習の流れ

この授業では、直線の方程式を明らかにするための最小限の条件である、直線上の 1 点と直線の傾きが与えられます。次に、直線のグラフを描くためには、グラフの別の点を決定するための方程式を利用するだけで十分です。生徒たちにとって非常に難しい場合は、「導入問題」を実施することができます。

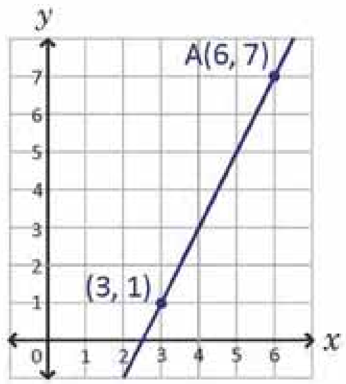
ねらい

「導入問題」で、前の授業の定義から、点・傾き形の直線の式を導き出します。この式によって簡単に直線上の点を求めることができ、与えられた x に対する y の値を求めます。

解答：

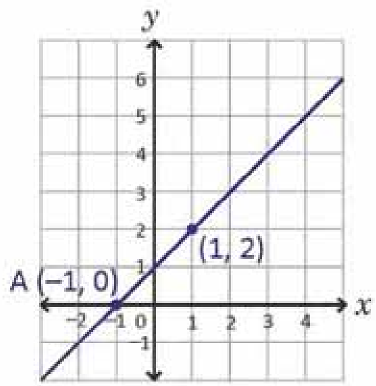
a) 傾き $m = 2$、A(6, 7)

$$y - 7 = 2(x - 6)$$
$$y = 2x - 5$$
$$x = 3,\ y = 2(3) - 5 = 1,\ (3, 1)$$



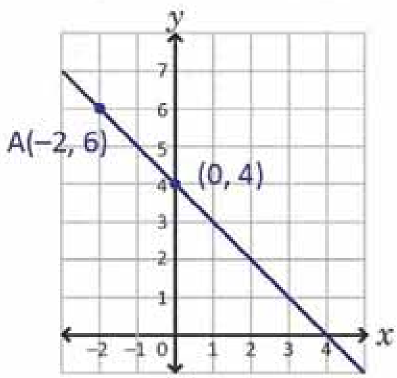
b) 傾き $m = 1$、A(−1, 0)

$$y - 0 = 1[x - (-1)]$$
$$y = x + 1$$
$$x = 1,\ y = 1 + 1 = 2,\ (1, 2)$$



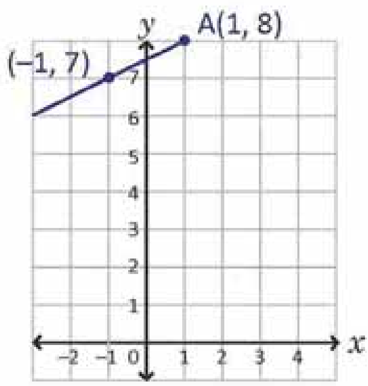
c) 傾き $m = -1$、A(−2, 6)

$$y - 6 = -1[x - (-2)]$$
$$y = -x - 2 + 6$$
$$y = -x + 4$$
$$x = 0,\ y = -0 + 4 = 4,\ (0, 4)$$



d) 傾き $m = \frac{1}{2}$、A(1, 8)

$$y - 8 = \frac{1}{2}(x - 1)$$
$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 8$$
$$y = \frac{1}{2}x + \frac{15}{2}$$
$$x = -1,\ y = 7,\ (-1, 7)$$



2.3 2点を与えられた直線の方程式

導入問題

点 A(−1, −3) と点 B(2, 9) を通る直線の方程式を求めなさい。また、そのグラフを作成しなさい

解法

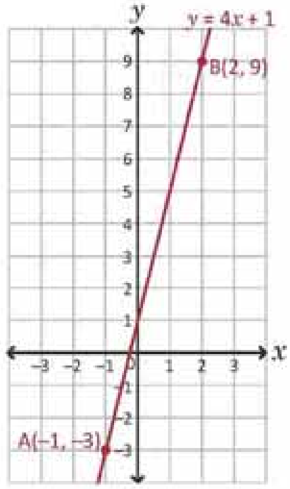
点・傾き形方程式を用いるためには、直線の傾きを見つける必要があります。定義から、

$$m = \frac{9-(-3)}{2-(-1)} = 4.$$

$x_1 = -1$、$y_1 = -3$ を用い、点・傾き形方程式に値を代入します。

B の座標を点・傾き形方程式に用い、方程式が同じになることを確認することもできます。

$$y-(-3) = 4[x-(-1)]$$
$$y+3 = 4(x+1)$$
$$y = 4x+1$$



したがって、点 A(−1, −3) と点 B(2, 9) を通る直線の方程式は、$y = 4x + 1$
直線のグラフを描くためには、右図のように、直線を通る2点を置き（問題文で与えられている点 A と 点 B でも構いません）、線を引くだけで十分です。

まとめ

$x_1 \neq x_2$ ではない 2 つの座標点 A(x_1, y_1) と B(x_2, y_2) を通る直線 l の方程式は、

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

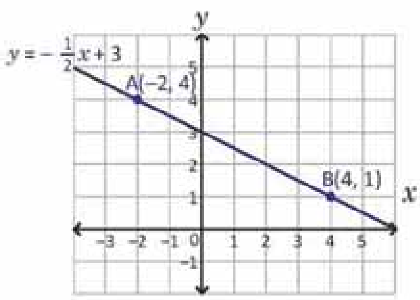
直線 l のグラフを描くには、デカルト平面上に点Aと点Bを置き、次に両方の点を通る直線を引きます。一般的に、直線 l のグラフを描くためには、直線 l に属する2点を置き、両方の点を通る直線を引くだけで十分です。

例

点 A(−2, 4) と点 B(4, 1) を通る直線の方程式を求めなさい。また、その直線のグラフを描きなさい。

x_1、y_1、x_2、y_2 の値を代入します。

$$y - 4 = \frac{1-4}{4-(-2)}[x-(-2)]$$
$$y = \frac{-3}{6}(x+2)+4$$
$$y = -\frac{1}{2}x+3$$



$y = -\frac{1}{2}x + 3$ のグラフは、右図に示されています。

問題

点 A と点 B を通る直線の方程式を求めなさい。また、それぞれ直線のグラフを描きなさい。

a) A(−3, −1)、B(1, −5)　　b) A(2, −2)、B(3, 1)

c) A(0, −5)、B(6, 4)　　d) A(0, 4)、B(12, −6)

達成の目安

2.3 わかっている 2 点を通る直線の方程式を求め、また、その直線のグラフを描く。

学習の流れ

今回は、直線上の 2 点から直線の方程式の形について学習します。

ねらい

「導入問題」を解くには、点・傾き形方程式を使わなければなりません。直線を描くためには、与えられた点を使うだけで十分です。

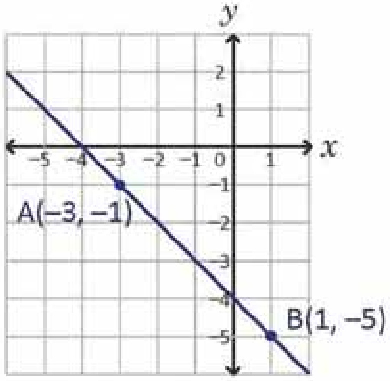
解答：

a) A(−3, −1)、B(1, −5)

$$y-(-1)=\frac{-5-(-1)}{1-(-3)}[x-(-3)]$$

$$y=-(x+3)-1$$

$$y=-x-4$$

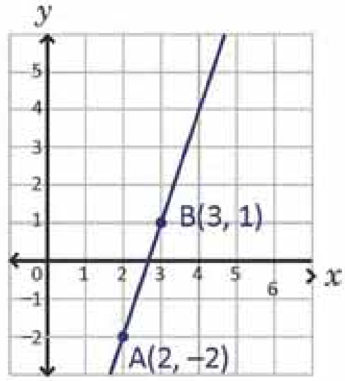


b) A(2, −2)、B(3, 1)

$$y-1=\frac{1-(-2)}{3-2}(x-3)$$

$$y=3(x-3)+1$$

$$y=3x-8$$

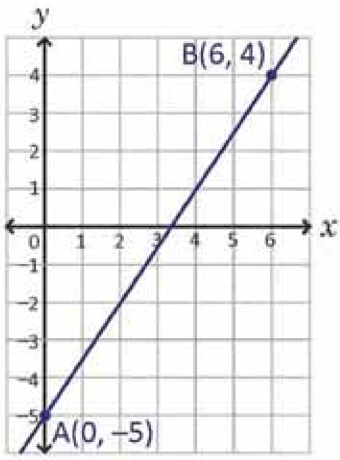


c) A(0, −5)、B(6, 4)

$$y-(-5)=\frac{4-(-5)}{6-0}(x-0)$$

$$y=\frac{9}{6}x-5$$

$$y=\frac{3}{2}x-5$$

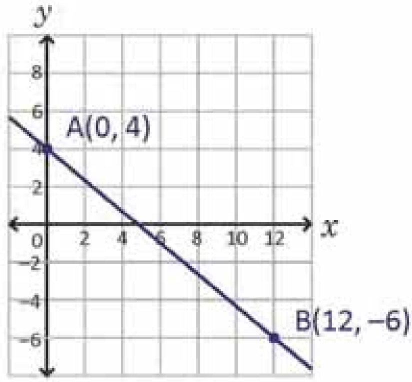


d) A(0, 4)、B(12, −6)

$$y-4=\frac{-6-4}{12-0}(x-0)$$

$$y=\frac{-10}{12}x+4$$

$$y=-\frac{5}{6}x+4$$



2.4 座標軸に平行な直線

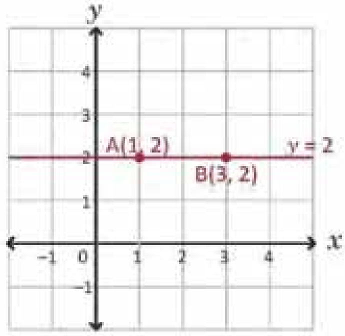
導入問題

各場合について、点 A と点 B を通る直線のグラフを描き、その方程式を求めなさい。

a) A(1, 2) 、B(3, 2)　　b) A(1, –1)、B(1, 3)

解法

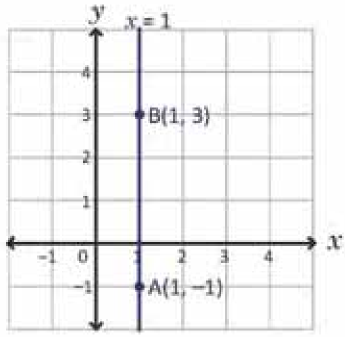
a) 右図のように、デカルト平面上に点 A と点 B を置き、直線を引きます。結果は、水平な直線、つまり、 x 軸に平行な直線です。この直線の方程式は、前の授業で学んだことを用いて求めます。



$$y - 2 = \frac{2-2}{3-1}(x-1)$$
$$y = \frac{0}{2}(x-1) + 2$$
$$y = 2$$

したがって、直線の方程式 は、$y = 2$

b) デカルト平面上に点 A(1, –1) と点 B(1, 3) を置き、直線を引くと、垂直な直線、つまり、y 軸に平行な直線になります。この直線の傾きを計算すると、以下のようになります。



$$m = \frac{3-(-1)}{1-1} = \frac{4}{0}$$

これは傾きが定義できないことを意味します。直線上の点のx座標は、常に一定で 1 に等しくなります（y 座標は一定ではありません）。

したがって、方程式は $x = 1$

まとめ

座標軸の1つと平行な直線 l の方程式は、

a) 直線が x 軸に平行ならば、$y = k$点 $(0, k)$ は直線 l 上の点です。

b) 直線が y 軸に平行ならば、$x = k$点 $(k, 0)$ は直線 l 上の点です。

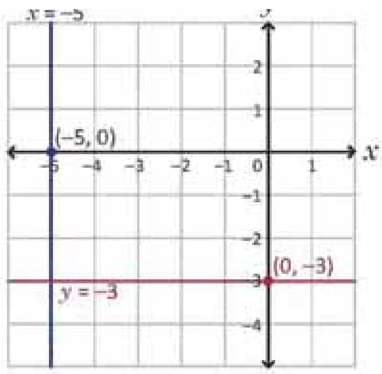
例

$y = -3$ と $x = -5$ のグラフを描きなさい。

点 (0, –3) と点 (–5, 0) を置きます。次に、直線を引きます。

1. $y = -3$ の場合は、(0, –3) を通る x 軸に平行な直線
2. $x = -5$ の場合は、(–5, 0) を通る y 軸に平行な直線

どちらの直線も右図に表示されています。



問題

1. 点 A を通り、座標軸の1つと平行な直線の方程式を求めなさい。また、この直線を引きなさい。

a) A(0, 4) を通り、x 軸と平行な直線　　b) $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ を通り、x 軸と平行な直線

c) A(5, 0) を通り、y 軸と平行な直線　　d) A(3, –1) を通り、y 軸と平行な直線

2. 水平な直線はすべて傾きがゼロであることを証明しなさい。

達成の目安

2.4 与えられた 1 点を通る、座標軸の1つと平行な直線の方程式を求め、また、この直線のグラフを描く。

学習の流れ

今まで学習してきた直線の方程式は、直線が垂直な場合を考慮していません。なぜなら、関数としてすでに学習済みだからです。今回は解析幾何学の枠組みの中で扱います。この授業では、垂直な直線と水平な直線について学習します。

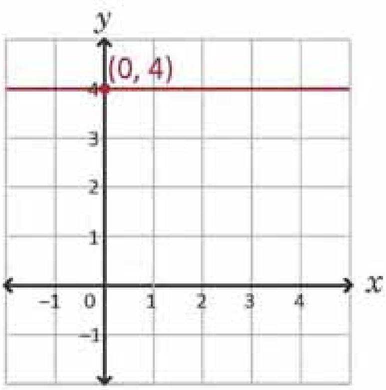
ねらい

「導入問題」では、すでに学習した式を使って、水平な直線の方程式を導くことができます。垂直な直線の場合、生徒はグラフからその方程式を導くことができます。

解答：

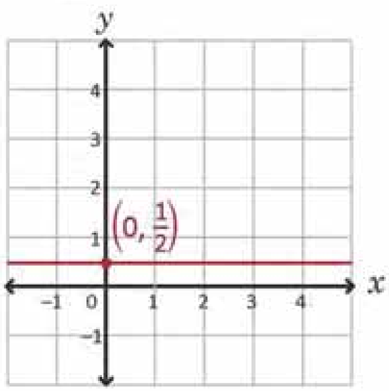
a) A(0, 4) を通り、x 軸と平行な直線

$y = 4$



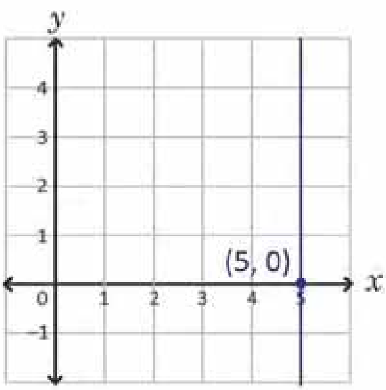
b) A $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ を通り、x 軸と平行な直線

$y = \frac{1}{2}$



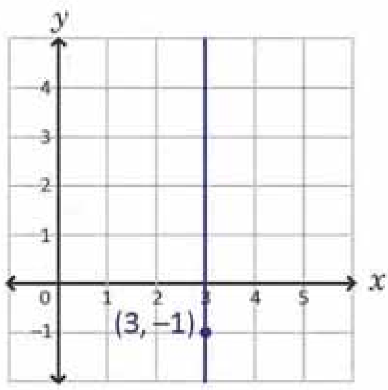
c) A(5, 0) を通り、y 軸と平行な直線

$x = 5$



d) A(3, –1) を通り、y 軸と平行な直線

$x = 3$



2. k を実数とします。
直線 $y = k$ の傾きを計算するためには、直線上の 2 点を取ればよいだけです。これらを (0, k) と (1, k) とすることができます。
よって、$m = \frac{k-k}{1-0} = 0$

2.5 直線の方程式の一般形

導入問題

同じデカルト平面上に以下の方程式のグラフを描きなさい。

a) $2x-3y+6=0$　　b) $y+2=0$　　c) $4x-24=0$

問 a) と b) では y を、問 c) では x を求めなさい。

解法

a) 変数 y を求めると、

$$3y=2x+6$$
$$y=\frac{2}{3}x+2$$

この最後の方程式が、x 軸に平行で、点 (0, −2) と (3, 4) を通る直線の方程式です。

b) 変数 y を求めると、

$$y=-2$$

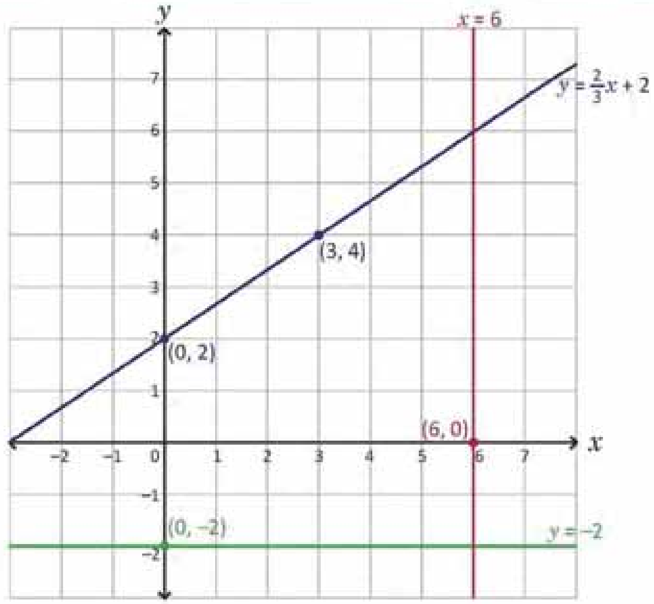
この最後の方程式が、x 軸に平行で、点 (0, −2) を通る直線の方程式です。

c) 変数 x を求めると、

$$4x=24$$
$$x=6$$

最後の方程式は、y 軸に平行で、点 (6, 0) を通る直線の方程式です。

a) では、点 (0, 2) と (3, 4) を求めるために、$x=0$ と $x=3$ を直線の方程式に代入し、$y=2$ と $y=4$ を求めました。



定義

a、b、c が実数 (a と b が同時にゼロであることはあり得ません) である、$ax+by+c=0$ の形の方程式のグラフは、直線になります。

この方程式を、**直線の方程式の一般形**と呼びます。

直線の方程式の一般形は、1つだけではありません。たとえば、方程式 $2x-y+1=0$、$-2x+y-1=0$、$4x-2y+2=0$ は同一直線を表します。
2つ目の方程式の係数は、1つ目の方程式の係数と符号が逆転しています。また、3つ目の方程式の係数は、1つの方程式の係数の2倍です。

問題

1. 同一デカルト平面上に、以下の方程式によって表される直線のグラフを描きなさい。

a) $3x+y-5=0$　　b) $x-2y-9=0$　　c) $5y-5=0$

2. 以下の直線の方程式を一般形で書きなさい(整数の係数を使うこと)。

a) $y=-2x+\frac{5}{4}$　　b) $y=\frac{3}{5}x+2$　　c) $y=-\frac{5}{6}$　　d) $x=\frac{8}{3}$

31

達成の目安

2.5 方程式が $ax + by + c = 0$ という形の直線のグラフを描く。

学習の流れ

生徒は、あらゆる形の直線の方程式は、一般形で書くことができることを理解しなければなりません。一般形と点・傾き形のメリットを議論することができます。その後、問題の解答で確認します。

解答：

1a) $3x + y - 5 = 0$

$y = -3x + 5$

点 (0, 5)、(1,2)

1b) $x - 2y - 9 = 0$

$-2y = -x + 9$

$y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$

点 (1, −4)、(3, −3)

1c) $5y - 5 = 0$

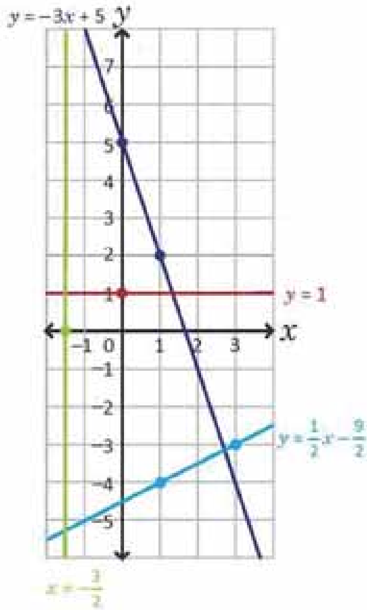
$y = 1$

点 (0, 1)

1d) $2x + 3 = 0$

$x = -\frac{3}{2}$

点 $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$



2a) $y = -2x + \frac{5}{4}$

$4y = -8x + 5$

$8x + 4y - 5 = 0$

2b) $y = \frac{3}{5}x + 2$

$5y = 3x + 10$

$-3x + 5y - 10 = 0$

2c) $y = -\frac{5}{6}$

$6y = -5$

$6y + 5 = 0$

2d) $x = \frac{8}{3}$

$3x = 8$

$3x - 8 = 0$

2.6 復習問題

1. 各問について、点A、B、C が同一直線上にあるかないか、（グラフを描かず）明らかにしなさい。

a) A(0, –3)、B(2, 3)、C(3, 1)　　b) A(–3, 5)、B(1, 2)、C(5, –1)

c) A(–1, –6)、B(0, –2)、C(1, 3)　　d) A(–4, 8)、B(2, 4)、C(20, –8)

2. 点 A(0, –3) と 点 B(6, 4) が与えられるとき、点A、B、C が同一直線上にあるためには、C(*x*, 25) の *x* の値はいくらでなければならないですか。

3. 各問について、与えられた傾きをもち、点 A を通る直線の方程式を求めなさい。また、同一平面上にすべての直線のグラフを描きなさい。

a) 傾き $m = -4$, A(–3, 5)　　b) 傾き $m = 10$, A(1, –1)

c) 傾き $m = \frac{1}{5}$, A(0, 4)　　d) 傾き $m = \frac{2}{5}$, $A\left(-2, -\frac{4}{5}\right)$

4. 値がわかっている傾き *m* をもち、点 (0, *b*) を通る直線の方程式が、$y = mx + b$ であることを証明しなさい。

> $y = mx + b$ の形式で書かれた直線の方程式は、点・切片形として知られています。

5. 各問について、点 A と点 B を通る直線の方程式を求めなさい。また、同一のデカルト平面にすべての直線のグラフを描きなさい。

a) A(5, 1)、B(6, –2)　　b) A(–4, –4)、B(2, 5)

c) $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$、$B\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$　　d) A(0, 0)、$B\left(2, -\frac{13}{4}\right)$

6. 各問について、座標軸の1つと平行であり、点Aを通る直線の方程式を求めなさい。また、同一デカルト平面にすべての直線のグラフを描きなさい。

a) A(9, 0) を通り、*y* 軸と平行な直線　　b) A(–5, 2) を通り、*x* 軸と平行な直線

c) $A\left(\frac{7}{2}, 5\right)$ を通り、*y* 軸と平行な直線　　d) $A\left(\frac{5}{6}, -\frac{9}{2}\right)$ を通り、*x* 軸と平行な直線

7.以下の直線の方程式を一般形で書きなさい（整数の係数を使うこと）。

a) $y = 4x + 3$　　b) $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{6}$

c) $y = 4x - \frac{2}{3}$　　d) $y = -\frac{x}{5} - 1$

8.直線が2点 (–1, 0)、(3, 2) を通るとき、方程式 $y = mx + b$ の *m* と *b* の値を求めなさい。

達成の目安

2.6 直線の方程式に関する問題を解く。

解答：

1a) A(1)、B(7)

$\frac{3-7}{2-0} = \frac{-4}{2} = -2$

A(0, 7), C(3, 1):

$\frac{1-7}{3-0} = \frac{-6}{3} = -2$

A、B、C は同一直線上にあります。

1b) A(−3, 5), B(1, 2):

$\frac{2-5}{1-(-3)} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$

B(1, 2), C(5, −1):

$\frac{-1-2}{5-1} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$

A、B、C は同一直線上にあります。

1c) A(−1, −6), B(0, −2):

$\frac{-2-(-6)}{0-(-1)} = \frac{4}{1} = 4$

B(0, −2), C(1, 3):

$\frac{3-(-2)}{1-0} = \frac{5}{1} = 5$

A、B、C は同一直線上にありません。

1d) A(−4, 8), B(2, 4)

$\frac{4-8}{2-(-4)} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$

B(2, 4), C(20, −8):

$\frac{-8-4}{20-2} = \frac{-12}{18} = -\frac{2}{3}$

A、B、C は同一直線上にあります。

2. $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{4-(-3)}{6-0} = \frac{7}{6}$

$\frac{25-4}{x-6} = \frac{7}{6}$

$21(6) = 7(x-6)$

$\frac{21(6)}{7} = x-6$

$18 = x-6$

$x = 24$

3a) $y-5 = -4[x-(-3)]$

$y = -4x-7$

3b) $y-(-1) = 10(x-1)$

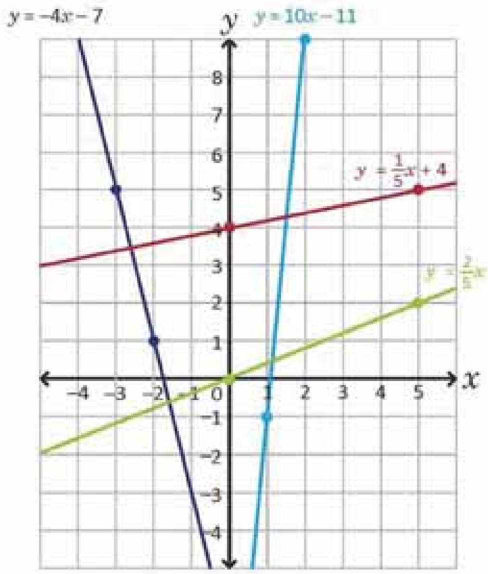
$y = 10x-11$

3c) $y-4 = \frac{1}{5}(x-0)$

$y = \frac{1}{5}x+4$

3d) $y-\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{2}{5}[x-(-2)]$

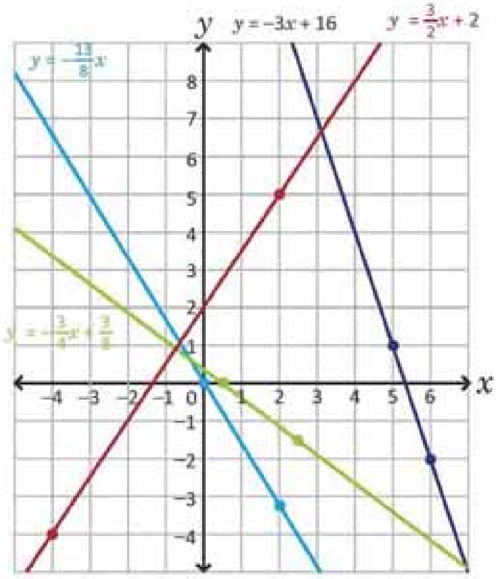
$y = \frac{2}{5}x$



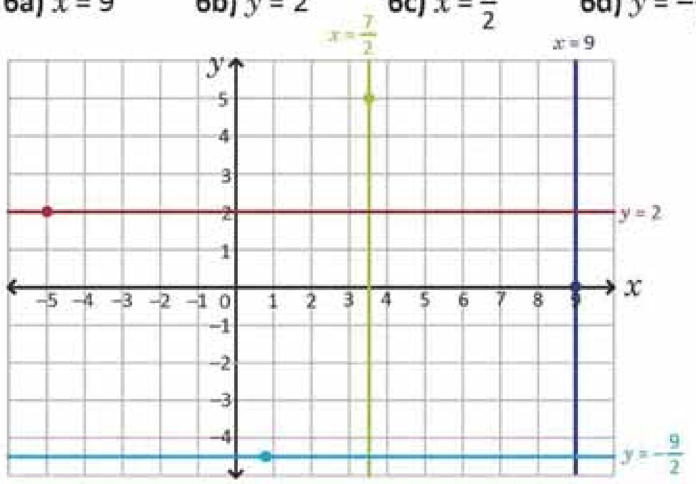
4. $y-b = m(x-0)$ なので、$y = mx+b$

5a) $y = -3x+16$　**5b)** $y = \frac{3}{2}x+2$

5c) $y = -\frac{3}{4}x+\frac{3}{8}$　**5d)** $y = -\frac{13}{8}x$



6a) $x = 9$　**6b)** $y = 2$　**6c)** $x = \frac{7}{2}$　**6d)** $y = -\frac{9}{2}$



7a) $4x-y+3 = 0$　**7b)** $8x-6y+1 = 0$

7c) $12x-3y-2 = 0$　**7d)** $x+5y+5 = 0$

8. 方程式 $y = mx+b$ に点 (−1, 0)、(3, 2) を代入すると、

$$\begin{cases} 0 = -m+b \\ 2 = 3m+b \end{cases} \Rightarrow m = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{2}$$

レッスン3 2直線の位置関係

3.1 直線と x 軸の交点

導入問題

各問において、直線とx 軸の交点の座標を求めなさい。

a) $y = 3x + 3$　　b) $x + 2y - 2 = 0$

この場合、交点とは直線とx軸が交差する点を指します。

解法

直線とx 軸の交点を A(x_1, y_1) とします。いずれの場合も、A は x 軸上にあります。したがって、y 座標 (y_1) はゼロであり、A(x_1, 0) となります。

a) A(x_1, 0) が直線上にあるならば、次の式を満たします。

$$y = 3x + 3$$

A の座標を上記の方程式に代入し、x_1 の値を求めます。

$$0 = 3x_1 + 3$$
$$3x_1 = -3$$
$$x_1 = -1$$

したがって、直線 $y = 3x + 3$ と x 軸の交点の座標は、A(−1, 0)

b) 前問と同様に、A(x_1, 0) が直線上にあるならば、次の式を満たします。

$$x + 2y - 2 = 0$$

A の座標を上記の方程式に代入し、x_1 の値を求めます。

$$x_1 + 2(0) - 2 = 0$$
$$x_1 = 2$$

したがって、直線 $x + 2y - 2 = 0$ と x 軸の交点の座標は、A(2, 0)

まとめ

直線 l が与えられているとき、直線と x 軸の交点の座標は、(x_1, 0)になり、x_1 の値は、$y = 0$ および $x = x_1$ を直線の方程式に代入し、x_1 の値を明らかにして、求めます

問題

1. 各問において、直線とx 軸の交点の座標を求めなさい。

a) $y = 2x - 2$　　b) $y = -\frac{x}{2} + 2$　　c) $2x - 3y + 6 = 0$

d) $8x + 3y + 6 = 0$　　e) $x = \sqrt{2}$　　f) $y = \sqrt{3}$

2. 座標軸のいずれとも平行ではない、方程式 $ax + by + c = 0$ の直線があります。直線と x 軸の交点の座標が $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ であることを証明しなさい。

3. 方程式 $x = k$ の直線を l とします。直線 l と x 軸の交点の座標が (k, 0)であることを証明しなさい。

4. x 軸に平行な直線を l とします。直線 l と x 軸の交点は存在しますか。あなたの答えを証明しなさい。

33

達成の目安

3.1 直線と x 軸の交点の座標を求める。

学習の流れ

この課では、直線の特性について学びます。まず、この授業で x 軸との交点から始めます。

ねらい

生徒は問題で、異なる形の直線の方程式において交点を求めます。問題 2、3、4 は、問題1の結果を一般化します。

解答：

1a) $0 = 2x_1 - 2$
$2x_1 = 2$
$x_1 = 1$
$(1, 0)$

1b) $0 = -\frac{x_1}{2} + 2$
$0 = -x_1 + 4$
$x_1 = 4$
$(4, 0)$

1c) $2x_1 - 3(0) + 6 = 0$
$2x_1 = -6$
$x_1 = -3$
$(-3, 0)$

1d) $8x_1 + 3(0) + 6 = 0$
$8x_1 = -6$
$x_1 = -\frac{3}{4}$
$\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$

1e) $x = \sqrt{2}$
$x_1 = \sqrt{2}$
$(\sqrt{2}, 0)$

1f) $y = \sqrt{3}$ のグラフの座標点は、$(k, \sqrt{3})$ の形になり、k は実数です。よって、直線は x 軸とは交差しません。

他の解答： 直線はx 軸と平行なので、交差しません。

2. $ax_1 + b(0) + c = 0$
$ax_1 + c = 0$、直線は x 軸と平行ではないので、$a \neq 0$
$x_1 = -\frac{c}{a}$

したがって、x 軸と直線の交点は、$\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$

3. 直線 $x = k$ の座標点は、(k, l) の形になり、l は実数です。
y 座標がゼロならば、1点は x 軸上にあります。
よって、直線 $x = k$ と x 軸の交点は、点 $(k, 0)$

4. x 軸と平行な直線は、$y = l$ の形になり、その直線上の点は、(k, l) になります。
y 座標がゼロならば、1 点は x 軸上にあります。
$l = 0$ ならば、$y = 0$ で、この直線は x 軸そのものです。
$l \neq 0$ ならば、直線は $y = l$ で、x 軸とは交差しません。

3.2 直線と y 軸の交点

導入問題

前の授業の「導入問題」にある直線の方程式を用い、各直線と y 軸との交点の座標を求めなさい。

解法

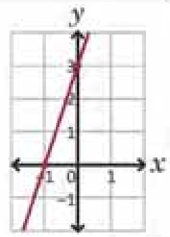
直線と y 軸の交点を $B(x_1, y_1)$ とします。いずれの場合も、B は y 軸上にあります。したがって、 x 座標 (x_1) はゼロであり、$B(0, y_1)$ となります。

a) 点 $B(0, y)$ が直線上にあるならば、方程式 $y = 3x + 3$ を満たします。B の座標を上記の方程式に代入し、y_1 の値を求めます。

$$y_1 = 3(0) + 3$$
$$y_1 = 3$$

したがって、直線 $y = 3x + 3$ と y 軸の交点の座標は、$B(0, 3)$

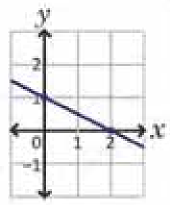
グラフを見ると、直線 $y = 3x + 3$ は、点 $(-1, 0)$、$(0, 3)$で座標軸と交差しています。



b) 前問と同様に、 $B(0, y_1)$ が直線上にあるならば、$x + 2y - 2 = 0$ の方程式を満たします。B の座標を上記の方程式に代入し、 y_1 の値を求めます。

$$0 + 2y_1 - 2 = 0$$
$$2y_1 = 2$$
$$y_1 = 1$$

グラフを見ると、直線 $x + 2y - 2 = 0$ は、点 $(2, 0)$と点$(0, 1)$で座標軸と交差しています。



したがって、直線 $x + 2y - 2 = 0$ と y 軸の交点の座標は、$B(0, 1)$

まとめ

直線 l が与えられているとき、直線と y 軸の交点の座標は、$(0, y_1)$になり、y_1 の値は、$y = y_1$ および $x = 0$ を直線の方程式に代入し、 y_1の値を明らかにして、求めます。

直線 l が x 軸と平行であれば、その方程式は $y = k$ の形になり、直線と y 軸の交点は、$(0, k)$。直線 l が y 軸と平行であれば、直線と y 軸の交点はありません。

一般的に、直線が座標軸と交差する点を**切片**と呼びます。直線は最大2つの切片（各軸上に1つ）を持つことができます。

問題

1. 前の授業の問題 1 で与えられた直線の方程式について、各直線と y 軸の交点の座標を求めなさい。

2. 以下の各問について、切片の座標を求めなさい。
   a) $2x - 3y - 6 = 0$　　b) $4x + y + 2 = 0$

3. p と q は、ゼロではない実数とします。方程式 $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ の直線の切片が $(p, 0)$ と $(0, q)$ であることを証明しなさい。この方程式を、**直線の方程式の対称形**と呼びます。

達成の目安

3.2 直線と y 軸の交点の座標を求める。

学習の流れ

今回は、直線と y 軸の交点について学習します。交点を求めるために使用する考え方は、前の授業の考え方に似ています。

解答：

1a) $y_1 = 2(0) - 2$
$y_1 = -2$
$(0, -2)$

1b) $y_1 = -\frac{0}{2} + 2$
$y_1 = 2$
$(0, 2)$

1c) $2(0) - 3y_1 + 6 = 0$
$-3y_1 = -6$
$y_1 = 2$
$(0, 2)$

1d) $8(0) + 3y_1 + 6 = 0$
$3y_1 = -6$
$y_1 = -2$
$(0, -2)$

1e) $x = \sqrt{2}$ のグラフの座標点は、$(\sqrt{2}, k)$ の形になり、k は実数です。よって、直線は y 軸とは交差しません。
他の解答： 直線は y 軸と平行なので、交差しません。

1f) $y = \sqrt{3}$
$y_1 = \sqrt{3}$
$(\sqrt{3}, 0)$

2a) $2x - 3y - 6 = 0$

$y = 0$ならば、
$2x_1 - 3(0) - 6 = 0$
$2x_1 = 6$
$x_1 = 3$
x 切片は、$(3, 0)$

$x = 0$ならば、
$2(0) - 3y_1 - 6 = 0$
$-3y_1 = 6$
$y_1 = -2$
y 切片は、$(0, -2)$

2b) $4x + y + 2 = 0$

$y = 0$ならば、
$4x_1 - (0) + 2 = 0$
$4x_1 = -2$
$x_1 = -\frac{1}{2}$
切片は、 $x\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

$x = 0$ならば、
$4(0) + y_1 + 2 = 0$
$y_1 = -2$
切片は、 $y\ (0, -2)$

3. $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$
$\frac{x}{p} + \frac{0}{q} = 1$
$\frac{x}{p} = 1$
$x = p$
x 切片は、$(p, 0)$

$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$
$\frac{0}{p} + \frac{y}{q} = 1$
$\frac{y}{q} = 1$
$y = q$
y 切片は、$(0, q)$

3.3 2直線の交点

導入問題

方程式 $y = -x + 3$ の直線と方程式 $2x - 3y + 4 = 0$ の直線の交点の座標を求めなさい。

2直線の交点は、どちらの方程式も満たします。

解法

2直線の交点を P(x, y) とします。これは、P の座標点が最初の方程式も2番目の方程式も満たすことを示し、座標点を求めるのは、連立方程式を解くことに相当します。

$$\begin{cases} y = -x + 3 & \text{----------} (1) \\ 2x - 3y + 4 = 0 & \text{----------} (2) \end{cases}$$

方程式 (1) の y の値を方程式 (2) に代入し、変数 x の値を求めます。

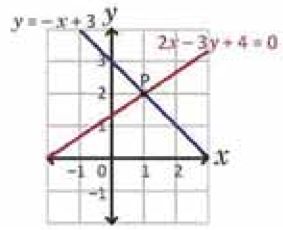
$$\begin{aligned} 2x - 3(-x + 3) + 4 &= 0 \\ 2x + 3x &= 9 - 4 \\ 5x &= 5 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

x の値を方程式 (1) に代入します。

$$y = -1 + 3 = 2$$

したがって、2直線の交点の座標は、P(1, 2)

方程式 $y = -x + 3$ の直線と方程式 $2x - 3y + 4 = 0$ の直線が交差する点は、P(1, 2)です。



まとめ

2 直線が与えられたとき、これらの交点の座標（つまり、2直線が交差すところ）は、これらの直線の方程式からなる連立 2 元 1 次方程式を解いて求めます。

異なる 2 直線が点 P で交差するとき、交点は1つだけです。つまり、2 直線が交差する、P ではない他の点 R は存在しません。

問題

1. 以下の方程式の各 2 直線の交点の座標を求めなさい。

a) $y = -3x - 8$、$4x - 3y + 15 = 0$
b) $x + y - 2 = 0$、$2x - y + 2 = 0$
c) $x + 2y + 6 = 0$、$4x + 3y + 4 = 0$
d) $2x + 3y = 4$、$4x - y = 8$
e) $y = x + 1$、$x = -2$
f) $3x - 2y - 5 = 0$、$y = 2$

2. 方程式 $y = k_1$ の直線と方程式 $x = k_2$ の直線が与えられたとき、2 直線の交点の座標を求めなさい。

3. 方程式 $10x - 5y = 10$ の直線と方程式 $10x - 5y = -25$ の直線が与えられたとき、2 直線はいずれかの点で交差しますか。グラフであなたの答えを確認しなさい。

達成の目安

3.3 2 直線の交点の座標を求める。

学習の流れ

初等教育第 3 期で学習した連立 2 元方程式を解くための方法を用して、与えられた 2 直線の交点を求めます。連立方程式の提起において一般形のメリットを確認します。

解答：

1a) $\begin{cases} y = -3x - 8 & \text{---- (1)} \\ 4x - 3y + 15 = 0 & \text{---- (2)} \end{cases}$

(1) を (2) に代入すると、

$4x - 3(-3x - 8) + 2 = 0$

$4x + 9x + 26 = 0$

$13x = -26$

$x = -2$

よって、$y = -3(-2) - 8 = -2$

交点は、

$(-2, -2)$

1b) $\begin{cases} x + y - 2 = 0 & \text{---- (1)} \\ 2x - y + 2 = 0 & \text{---- (2)} \end{cases}$

1) y (2) を足すと、

$3x = 0$ なので、$x = 0$

(1) に代入すると、

$0 + y - 2 = 0$

$y = 2$

交点は、

$(0, 2)$

1c) $\begin{cases} x + 2y + 6 = 0 & \text{---- (1)} \\ 4x + 3y + 4 = 0 & \text{---- (2)} \end{cases}$

(1) で x を求めると、

$x = -2y - 6$

(2) に代入し、

$4(-2y - 6) + 3y + 4 = 0$

$-8y - 24 + 3y + 4 = 0$

$-5y = 20$

$y = -4$

よって、$x = -2(-4) - 6 = 2$

交点は、$(2, -4)$

1d) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 & \text{---- (1)} \\ 4x - y = 8 & \text{---- (2)} \end{cases}$

交点は、$(2, 0)$

1e) $\begin{cases} y = x + 1 & \text{---- (1)} \\ x = -2 & \text{---- (2)} \end{cases}$

交点は、 $(-2, -1)$

1f) $\begin{cases} 3x - 2y - 5 = 0 & \text{---- (1)} \\ y = 2 & \text{---- (2)} \end{cases}$

交点は、$(3, 2)$

2. $\begin{cases} y = k_1 \ldots (1) \\ x = k_2 \ldots (2) \end{cases}$

どちらの直線も点 (k_2, k_1) を通るので、
交点は (k_2, k_1)

3. 2直線に交点があるなら、連立方程式には解がなければなりません。

$\begin{cases} 10x - 5y = 10 & \text{---- (1)} \\ 10x - 5y = -25 & \text{---- (2)} \end{cases}$

(1) から (2) を引くと、

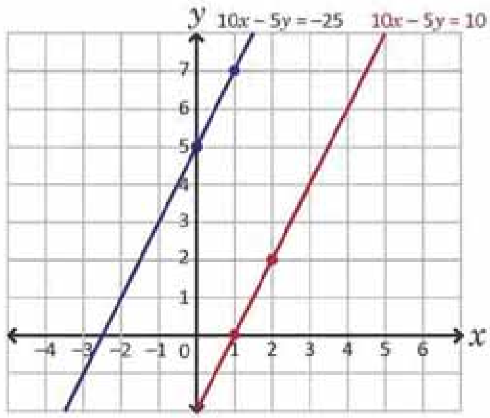
$0 = 35$

しかし、これは誤りです。したがって、連立方程式には解がありません。よって、2直線はいかなる点においても交差しません。

$10x - 5y = -25$ については、
$(0, 5)$、$(1, 7)$

$10x - 5y = 10$ については、
$(1, 0)$、$(2, 2)$

使用した解決手法は、背理法として知られています。



3.4 平行な直線

導入問題

方程式 $y = 2x + 3$ と $y = 2x - 5$ の2直線が与えられています。

1. 各直線の傾きの値はいくらですか。
2. 2 直線はいずれかの点で交差しますか。あなたの答えを証明しなさい。
3. 同一デカルト平面上に 2 直線を描きなさい。1 つの直線は他の直線に対してどうなっていますか。

直線の方程式が $y = mx + b$ の形で書かれているなら、変数 x の係数は直線の傾きです。

解法

1. 直線の方程式が、$y = mx + b$ という形で書かれているので、どちらの直線の傾きも2です。

2. 2 直線が交差するかどうかを知るためには、連立方程式を解かなくてはなりません。

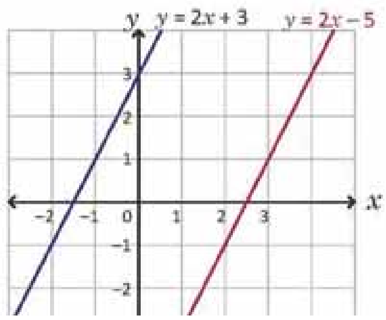
$$\begin{cases} y = 2x + 3 & \text{----------- (1)} \\ y = 2x - 5 & \text{----------- (2)} \end{cases}$$

しかし、この連立方程式には解がありません。なぜなら、(2) に (1) を代入すると、

$$2x + 3 = 2x - 5$$
$$2x - 2x = -3 - 5$$
$$0 = -8$$

これは、2 直線はいかなる点においても交差しないことを示しています。

3. どちらの直線のグラフも右図に表示されています。2 直線はいかなる点においても交差しないので、平行であることを示しています。



2 直線は平行です。直線を伸ばしても互いの距離を保ちます。

定理

垂直でない 2（またはそれ以上の）直線は、同じ傾きを持っているときのみ、平行です。これは、2（またはそれ以上の）直線が平行であるならば、同じ傾きを持っていて、平行でなければ、傾きが違うということです。直線の方程式を求めなさい。

例

点 A(1, 3) を通り、$2x + y - 1 = 0$ に平行な直線の方程式を求めなさい。

傾きの値を求めるために、$2x + y - 1 = 0$ において y を求めます。$y = -2x + 1$、よって $m = -2$. 直線は A(1, 3) を通るので、直線の方程式の点・傾き形を使います。

$$y - 3 = -2(x - 1)$$
$$y = -2x + 5$$

したがって、点 A (1, 3) を通り、$2x + y - 1 = 0$ に平行な直線の方程式は、$y = -2x + 5$

問題

1. 以下の直線の組み合わせが平行かどうか明らかにしなさい。
   a) $y = -4x + 7$; $y = -4x + 16$　　b) $3x - 2y + 3 = 0$; $6x - 4y - 9 = 0$　　c) $x - 2y + 5 = 0$; $x - 3y = 0$

2. 各問に対し、与えられた直線に平行で、点 A を通る直線の方程式を求めなさい。
   a) $2x - y = 0$; A(4, 0)　　b) $x + 3y - 5 = 0$; A(3, 4)
   c) $y = 5$; A(0, −1)　　d) $x = 1$; A(3, −2)

達成の目安

3.4 2 直線が平行であることを、それらの傾きの値から確認する。

学習の流れ

レッスン 2 では、座標軸と平行な直線について学習しました。問題を解くときに、これらの直線を考慮しなければなりません。この授業では、2直線の平行をそれらの傾きと関連付けます。

ねらい

問題を使って、1つの直線の傾きと、この直線に平行な直線との関係を確立します。さらに、直線の方程式によって形成された、解のない連立式によって、これらの直線が交差する点がないことを分析的に明らかにします。

解答：

1a) $y = -4x + 7$、$y = -4x + 16$ は、どちらの傾きも -4 なので平行です。

1b) $3x - 2y + 3 = 0$; $6x - 4y - 9 = 0$
$y = mx + b$ の形で書かれます。
$y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$; $y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$ は、どちらの傾きも $\frac{3}{2}$ なので平行です。

1c) $x - 2y + 5 = 0$; $x - 3y = 0$
$y = mx + b$: $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$; $y = \frac{1}{3}x$ の形で書かれます。
傾きが異なるので、平行ではありません。

2a) $2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x \Rightarrow m = 2$ y A(4, 0)
点・傾き形を使って、
$$y - 0 = 2(x - 4)$$
したがって、直線 は $y = 2x - 8$

2b) $x + 3y - 5 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$ y A(3, 4)
点・傾き形を使って、
$$y - 4 = -\frac{1}{3}(x - 3).$$
したがって、直線 は $y = -\frac{1}{3}x + 5$

2c) $y = 5 \Rightarrow m = 0$、A(0, −1)
点・傾き形を使って、
$$y - (-1) = 0(x - 0)$$
したがって、直線 は $y = -1$

2d) $x = 1$、垂直な直線です。
よって、この直線に平行な直線は、垂直でなければならず、点 A(3, −2) を通ります。
したがって、直線 は $x = 3$

3.5 直角に交わる直線*

導入問題

原点を通過し、さらに、以下の方程式の直線と直角に交わる直線の方程式を求めなさい。

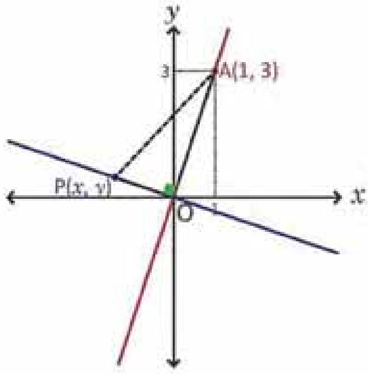
$$y = 3x$$

2 直線の傾き間の関係はどうなっていますか。

解法

原点を通るので、求める直線は $y = mx$ という形になります。この直線上の任意の点を P(x, y) とします。点 A(1, 3) は $y = 3x$ を通ります。なぜなら、その座標は方程式を満たすからです。

O を原点とすると、三角形 POA は直角三角形になります（直線は直角に交わります）。ピタゴラスの定理から、



上記の方程式で、$d(P, A)^2 = (x-1)^2 + (y-3)^2$、$d(P, O)^2 = x^2 + y^2$、$d(O, A)^2 = 1^2 + 3^2$。値を代入し、$y$ を x の項で明らかにすると、

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = (x^2 + y^2) + (1 + 9)$$
$$\cancel{x^2} - 2x + \cancel{1} + \cancel{y^2} - 6y + \cancel{9} = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + \cancel{1} + \cancel{9}$$
$$-2x - 6y = 0$$
$$y = -\frac{1}{3}x$$

したがって、$y = 3x$ に直角に交わり、原点を通る直線の方程式は、$y = -\frac{1}{3}x$ それぞれ 3 $-\frac{1}{3}$ である、両直線の傾きを比べると、傾きの積は、-1 であることがわかります。

定理

傾きがそれぞれ m_1 と m_2 の座標軸に垂直ではない 2 直線は、傾きの積が -1 に等しいときのみ、すなわち、以下のとき、直角に交わります。

$$m_1 m_2 = -1$$

これは、2 直線が直角に交わるならば、それらの傾きの積は -1であり、そうでないときは、積は -1ではないことを意味します。

例

点 A(1, 3) を通り、$2x + y - 1 = 0$ に直角に交わる直線の方程式を求めなさい。

$2x + y - 1 = 0$ においてy を求めると、$y = -2x + 1$、よって $m_1 = -2$ m_2 が求める直線の傾きなら、$m_1 m_2 = -1$ が成り立たなければなりません。m_1を代入し、m_2を求めると、

$$-2m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = \frac{1}{2}$$

したがって、$2x + y - 1 = 0$ に直角に交わり、A(1, 3) を通る直線の方程式は、$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

問題

1. 以下の直線の組み合わせが直角に交わるかどうか明らかにしなさい。

a) $y = -2x$ 、 $y = \frac{x}{2}$　　　b) $y = \frac{4}{3}x$ 、 $y = -\frac{3}{4}x$

c) $x - y + 2 = 0$ 、 $3x + 2y + 6 = 0$　　　d) $x - 2y + 2 = 0$ 、 $2x + y - 6 = 0$

2. 各場合について、与えられた直線に直角に交わり、点 P を通る直線の方程式を求めなさい。

a) $y = x$; P(3, 3)　　　b) $y = -2x + 5$; P(−4, 3)

c) $x - 4y + 4 = 0$; P(−1, 5)　　　d) $y = 1$; P(1, −1)

達成の目安

3.5 2 直線が直角に交わることを、それらの傾きを用いて確認する。

学習の流れ

直線が原点を通る特殊な場合について学び、他の直線に直角に交わる直線を求める。「導入問題」を解くためには、距離の公式を使うこと、また、グラフの任意の点を用いることが必要になります。これが生徒にとって非常に難しいなら、教師が「導入問題」を解かなければなりません。

ねらい

「導入問題」を解いて、直角に交わる2直線の傾き間の関係を明らかにします。問題を解くのが難しくなったら、教師が介入しなければなりません。問題では、直線が垂直または平行な場合を取り上げています。

解答：

1a) $y = -2x$、 $y = \frac{x}{2}$

$m_1 = -2 \quad m_2 = \frac{1}{2}$

$m_1 m_2 = -2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$

直角に交わります。

1b) $y = \frac{4}{3}x$、 $y = -\frac{3}{4}x$

$m_1 = \frac{4}{3} \quad m_2 = -\frac{3}{4}$

$m_1 m_2 = \frac{4}{3}\left(-\frac{3}{4}\right) = -1$

直角に交わります。

1c) $y = x + 2$、 $y = -\frac{3}{2}x - 3$

$m_1 = 1 \quad m_2 = -\frac{3}{2}$

$m_1 m_2 = 1\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

直角に交わりません。

1d) $y = \frac{x}{2} + 1$、 $y = -2x + 6$

$m_1 = \frac{1}{2} \quad m_2 = -2$

$m_1 m_2 = \frac{1}{2}(-2) = -1$

直角に交わります。

2a) $y = x$; P(3, 3); $m_1 = 1$

$m_1 m_2 = -1$
$1(m_2) = -1$
$m_2 = -1$
$y - 3 = -(x - 3)$
$y = -x + 6$

2b) $y = -2x + 5$; P(−4, 3); $m_1 = -2$

$m_1 m_2 = -1$
$-2(m_2) = -1$
$m_2 = \frac{1}{2}$
$y - 3 = \frac{1}{2}[x - (-4)]$
$y = \frac{1}{2}x + 5$

2c) $y = \frac{x}{4} + 1$; P(−1, 5); $m_1 = \frac{1}{4}$

$m_1 m_2 = -1$
$\frac{1}{4}(m_2) = -1$
$m_2 = -4$
$y - 5 = -4[x - (-1)]$
$y = -4x + 1$

2d) $y = 1$ は水平な直線です。
この直線に直角に交わる直線は垂直でなければならず、さらに、P(1, −1) を通らなければなりません。
よって、直線は $x = 1$

レッスン 3

3.6 点と直線の距離

定理

方程式 $ax + by + c = 0$ の直線 l と、この直線上の点ではない点 $P(x_1, y_1)$ が与えられているとき、P から直線 l までの距離は、$d(P, l)$ で表され、以下のようになります。

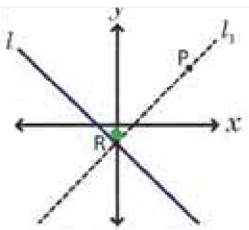
$$d(P, l) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

例

各場合について、点 P から直線 l までの距離を求めなさい。

a) l： $2x - y + 1 = 0$、P(2, 0)　　b) l： $3x + 2y - 9 = 0$、P(2, –2)　　c) l: $y = \frac{x}{3} + \frac{8}{3}$、P(0, 5)

l_1 が P を通る直線 l に直角に交わる直線であるなら、R は l と l_1 の交点です。よって、$d(P, l)$ を求めるのは、$d(P, R)$ を求めるのに等しいです。



a) 各値を代入します。$a = 2, b = -1, c = 1, x_1 = 2$ y $y_1 = 0$

$$d(P, l) = \frac{|2(2) + (-1)(0) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$$
$$= \frac{|4 + 0 + 1|}{\sqrt{4 + 1}}$$
$$= \frac{5}{\sqrt{5}}$$

したがって、P から直線 l までの距離は $\sqrt{5}$

b) 各値を代入します。$a = 3$、$b = 2$、$c = -9$、$x_1 = 2$、$y_1 = -2$

$$d(P, l) = \frac{|3(2) + (2)(-2) + (-9)|}{\sqrt{3^2 + 2^2}}$$
$$= \frac{|6 - 4 - 9|}{\sqrt{9 + 4}}$$
$$= \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13}$$

したがって、P から直線 l までの距離は $\frac{7\sqrt{13}}{13}$

c) まず、直線の方程式を $ax + by + c = 0$ の形で表す必要があります。方程式全体に 3 を掛けると、

$$3y = x + 8$$
$$x - 3y + 8 = 0$$

次に、各値を代入します。 $a = 1, b = -3, c = 8, x_1 = 0$、$y_1 = 5$

$$d(P, l) = \frac{|1(0) + (-3)(5) + 8|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}}$$
$$= \frac{|0 - 15 + 8|}{\sqrt{1 + 9}}$$
$$= \frac{7}{\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{10}}{10}.$$

したがって、P から直線 l までの距離は $\frac{7\sqrt{10}}{10}$

問題

1. 点 P から直線 l までの距離を求めなさい。
   - a) l: $x + 3y - 3 = 0$、 P(1, –1)　　b) l: $2x + y - 4 = 0$、 P(0, 3)
   - c) l: $y = \frac{3}{4}x$、 P(1, –2)　　d) l: $y = \frac{x}{5} + 1$、 P(3, –3)

2. 原点から直線 l： $ax + by + c = 0$ までの距離が $\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ であることを証明しなさい。

達成の目安

3.6 点と直線の距離を求める。

学習の流れ

この授業では、点と直線の距離の公式を使います。生徒は、公式を使って求めるのが何の長さであるかを理解しなければなりません。

ねらい

距離の公式は、解くのが大変な問題であるため、導き出すことはしませんが、生徒は公式を適切に使用できることが期待されます。

解答：

1a) l： $x + 3y - 3 = 0$、P(1, −1)

$$d(P, l) = \frac{|1 + 3(-1) - 3|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

1b) l： $2x + y - 4 = 0$、P(0, 3)

$$d(P, l) = \frac{|2(0) + 3 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

1c) l： $3x - 4y = 0$、P(1, −2)

$$d(P, l) = \frac{|3(1) - 4(-2)|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|11|}{5} = \frac{11}{5}$$

1d) l： $x - 5y + 5 = 0$、P(3, −3)

$$d(P, l) = \frac{|3 - 5(-3) + 5|}{\sqrt{1^2 + (-5)^2}} = \frac{|23|}{\sqrt{26}} = \frac{23\sqrt{26}}{26}$$

2. $$d(P, l) = \frac{|a(0) + b(0) + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

公式の証明を以下のページで確認することができます。
https：//youtu.be/P740MiWj2GU

3.7 復習問題

1. 各直線の切片の座標を求めなさい。

a) $y = 2x$ b) $5x + 2y + 10 = 0$

c) $y = \frac{x}{6} - 1$ d) $y = -8x + 4$

e) $y = 3$ f) $x = -4$

2. 各 2 直線の交点の座標を求めなさい。

a) $x + y - 2 = 0$; $4x - y + 7 = 0$ b) $y = -x$; $3x + y - 6 = 0$

c) $x + 2y + 2 = 0$; $y = 2x + 9$ d) $x - y - 1 = 0$; $y = 3$

e) $3x - y + 3 = 0$; $9x + 7y - 4 = 0$ f) $y = -5$; $x = \frac{1}{4}$

3. 各 2 直線が平行か、または、直角に交わるか、明らかにしなさい。

a) $y = 3x - 5$; $y = 3x$ b) $y = \frac{x}{4} + 1$; $x - 4y + 2 = 0$

c) $y = -3x - 2$; $x - 3y + 1 = 0$ d) $y = -2$; $x = 1$

4. 点 A を通る直線 l に平行な直線の方程式を求めなさい。

a) l: $y = -2x + 5$; A(−2, −3) b) l: $y = 3x + 4$; A(5, −1)

5. 点 A を通る直線 l に直角に交わる直線の方程式を求めなさい。

a) l: $y = -5x - 1$; A(10, 1) b) l: $3x - 4y + 8 = 0$; A(−6 , 0)

6. 2 直線 l_1 と l_2 は、点 (−4, 4) で交差します。l_1 が (0, 12) を通り、l_2 に直角に交わるならば、2 直線の方程式はどうなりますか。

7. 方程式 $5x - 2y = 0$ の直線を l とします。直線 $ax + by + c = 0$ が以下の場合の a と b の値を求めなさい。

a) 直線 l に平行 b) 直線 l に直角に交わる

l ： $5x - 2y = 0$ に平行な直線および直角に交わる直線は無限に存在します。a と b に対して、一組の値を求めるだけで十分です。

8. 方程式 $x - 3y - 6 = 0$ の直線を l とします。方程式 $ax + (a - 4)y + c = 0$ の直線が以下の場合の、a の値を求めなさい。

a) 直線 l に平行 b) 直線 l に直角に交わる

9. 各場合について、点 P から直線 l までの距離を求めなさい。

a) P(4, −9); l: $x + 4y - 2 = 0$ b) P(8, 5); l: $y = x$

c) P(0, −3); l: $y = -2x$ d) P(3, 1); l: $x = -3$

達成の目安

3.7 2 直線の位置関係の問題を解く。

解答：

1a) $y = 2x$

x 切片

$$0 = 2x \Rightarrow x = 0$$

(0, 0)、また、y切片も同じ。

1b) $5x + 2y + 10 = 0$

x 切片

$$5x + 2(0) + 10 = 0$$

$\Rightarrow x = -2$

したがって、x 切片は (–2, 0)

y 切片

$$5(0) + 2y + 10 = 0$$

$\Rightarrow y = -5$

したがって、y 切片は (0, –5)

1c) $y = \frac{x}{6} - 1$　x 切片 (6, 0)
y 切片 (0, –1)

1d) $y = -8x + 4$　x 切片 $x\left(\frac{1}{2}, 0\right)$
y 切片 (0, 4)

1e) $y = 3$
x 軸との交点はありません。
y 切片 (0, 3)

1f) $x = -4$
x 切片 (–4, 0)
y 軸との交点はありません。

2a) $\begin{cases} x + y - 2 = 0 & \text{----- (1)} \\ 4x - y + 7 = 0 & \text{----- (2)} \end{cases}$

(1) y (2) を足すと、

$$5x + 5 = 0$$
$$x = -1$$

(1) に代入し、

$$-1 + y - 2 = 0$$
$$y = 3$$

交点

(–1, 3).

2b) $\begin{cases} y = -x & \text{----- (1)} \\ 3x + y - 6 = 0 & \text{----- (2)} \end{cases}$

(1) を (2) に代入すると、

$$3x - x - 6 = 0$$
$$x = 3$$

(1)に代入し、

$$y = -3$$

交点

(3, –3).

2c) $\begin{cases} x + 2y + 2 = 0 & \text{----- (1)} \\ y = 2x + 9 & \text{----- (2)} \end{cases}$

(2) を (1) に代入すると、

$$x + 2(2x + 9) + 2 = 0$$
$$x = -4$$

(1) に代入し、

$y = 2(-4) + 9$
$y = 1$

交点

(–4, 1).

2d) $x - y - 1 = 0;\ y = 3$
交点 (4, 3)

2e) $3x - y + 3 = 0;\ 9x + 7y - 4 = 0$
交点 $\left(-\frac{17}{30}, \frac{13}{10}\right)$

2f) $y = -5;\ x = \frac{1}{4}$
交点 $\left(\frac{1}{4}, -5\right)$

3a) $y = 3x - 5;\ y = 3x$

$m_1 = m_2 = 3$

平行です。

3b) $y = \frac{x}{4} + 1;\ x - 4y + 2 = 0$

$$x - 4y + 2 = 0 \longrightarrow y = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$$

$m_1 = m_2 = \frac{1}{4}$

平行です。

3c) $y = -3x - 2$; $x - 3y + 1 = 0$

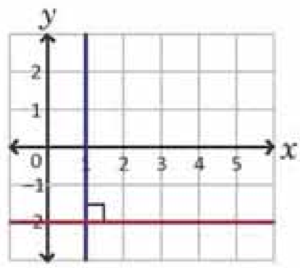
$$x - 3y + 1 = 0 \longrightarrow y = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$$

$m_1 m_2 = -3\left(\frac{1}{3}\right) = -1$

直角に交わります。

3d) $y = -2;\ x = 1$

直角に交わります。



4a) $l: y = -2x + 5$; A$(-2, -3)$

$m = -2$

$y - (-3) = -2[x - (-2)]$

$y = -2x - 7$

4b) $l: y = 3x + 4$; A$(5, -1)$

$m = 3$

$y - (-1) = 3(x - 5)$

$y = 3x - 16$

5a) $l: y = -5x - 1$; A$(10, 1)$

$m_1 = -5$

$m_1 m_2 = -1$

$-5m_2 = -1$

$m_2 = \frac{1}{5}$

$y - 1 = \frac{1}{5}(x - 10)$

$y = \frac{1}{5}x - 1$

5b) $l: 3x - 4y + 8 = 0$; A$(-6, 0)$

$3x - 4y + 8 = 0 \longrightarrow y = \frac{3}{4}x + 2$

$m_1 = \frac{3}{4} \Rightarrow m_1 m_2 = -1$

$\frac{3}{4}m_2 = -1$

$m_2 = -\frac{4}{3}$

$y - 0 = -\frac{4}{3}[x - (-6)]$

$y = -\frac{4}{3}x - 8$

6. 直線 l_1 は、$(-4, 4)$ と $(0, 12)$ を通るので、2 点を与えられたときの直線の方程式を使います。

$$y - 12 = \frac{12 - 4}{0 - (-4)}(x - 0)$$

したがって、l_1： $y = 2x + 12$次に、l_2 は、傾き $m_1 = 2$ で、点 $(-4, 4)$ を通る直線 l_1に直角に交わります。

l_2 の傾きを m_2 とすると、$m_1\, m_2 = -1$　　よって、$m_2 = -\frac{1}{2}$

点・傾き形を使って、

$$y - 4 = -\frac{1}{2}[x - (-4)]$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

7. $5x - 2y = 0 \longrightarrow y = \frac{5}{2}x$　　　$ax + by + c = 0 \longrightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

7a) $-\frac{a}{b} = \frac{5}{2}$ を満たさなければなりません。$a = 5$、$b = -2$ で十分です。

7a) $\frac{5}{2}\left(-\frac{a}{b}\right) = -1$ を満たさなければなりません。よって $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$。$a = 2$、$b = 5$ で十分です。c の値は、任意の実数。

8. $x - 3y - 6 = 0 \longrightarrow y = \frac{1}{3}x - 2$　　$ax + (a - 4)y + c = 0 \longrightarrow y = \frac{a}{4 - a}x + \frac{c}{4 - a}$

8a) $\frac{a}{4 - a} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3a = 4 - a \Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow a = 1$

8b) $\frac{a}{4 - a}\left(\frac{1}{3}\right) = -1 \Rightarrow \frac{a}{12 - 3a} = -1 \Rightarrow a = 3a - 12 \Rightarrow 2a = 12 \Rightarrow a = 6$

9a) P$(4, -9)$; $l: x + 4y - 2 = 0$

$d(P, l) = \frac{|4 + 4(-9) - 2|}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = \frac{|-34|}{\sqrt{17}} = 2\sqrt{17}$

9b) P$(8, 5)$; $l: x - y = 0$

$d(P, l) = \frac{|8 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|3|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

9c) P$(0, -3)$; $l: 2x + y = 0$

$d(P, l) = \frac{|2(0) + (-3)|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

9d) P$(3, 1)$; $l: x + 3 = 0$

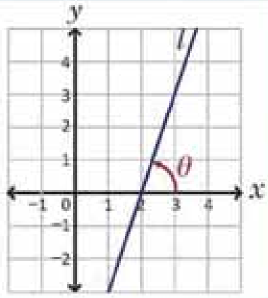
$d(P, l) = \frac{|3 + 3|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 6$

3.8 直線の傾斜角

導入問題

直線 l： $y = 3x - 6$ が与えられているとき、x 軸の正の部分から直線に向かう角θの大きさはいくらですか。小数点第 1 位までの概数で求めなさい。

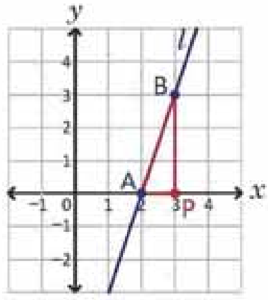
A(2, 0)、P(3, 0)、B(3, 3) の 3 点で直角三角形 APB を作り、直角三角形における三角比を用います。



解法

2 点 A(2, 0) と B(3, 3) は、直線 l 上の点です。また、点 P(3, 0) は、x 軸上にあり、図に示すように直角三角形 APB が形成されます。直角三角形における三角比を用いて、

$$\tan A = \frac{PB}{AP}$$



角θの大きさは、Aを頂点とする角の大きさに等しいことに注目しましょう。また、係数 $\frac{PB}{AP}$ は、直線 l の傾きの値、すなわち、3です。よって、

$$\tan\theta = 3$$
$$\theta = \tan^{-1}(3)$$
$$\approx 71.6°$$

したがって、角θの大きさはおおよそ 71.6°

定義

直線 l が与えられたとき、x 軸の正の部分と直線がなす（反時計回り方向の）角を直線 l の**傾斜角**と呼びます。m が直線 l の傾きで、その傾斜角が θ ならば、

$$0° \leq \theta < 180° \text{ で、} \tan\theta = m$$

例

直線 l ： $x + 2y + 1 = 0$ の傾斜角を求めなさい（小数点第 1 位までの概数）。

傾きを求めるために、直線の方程式を $y = mx + b$ pの形で表します。

$$2y = -x - 1$$
$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

よって、$m = -\frac{1}{2}$ で

$$\tan\theta = -\frac{1}{2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$\approx 153.4°$$

$\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ を計算機で計算すると、 –26.6°という値になります。これは、x 軸の正の部分から時計回りの方向で直線に向かって測った角度です。傾斜角は、反時計回りの方向でないといけないので、前の答えに180° を足せば良いだけです。なぜなら、tan θ = tan(θ + 180°) だからです。

したがって、直線 l ： $x + 2y + 1 = 0$ の傾斜角は、おおよそ153.4°

問題

以下の直線の傾斜角を求めなさい（小数第 1 位までの概数）。

a) $y = 2x + 7$　　b) $y = -x + 1$　　c) $x - 2y + 4 = 0$

d) $5x + 3y - 20 = 0$　　e) $x + 1 = 0$　　f) $y - 1 = 0$

40

達成の目安

3.8 直線の傾斜角を、直線の傾きを使って求める。

学習の流れ

今回は、直線と x 軸がなす角と直線の傾きとの関係を明らかにします。第 1 学年のユニット 5 で学んだタンジェントの逆関数を使います。

ねらい

「定義」では、角の値を制限することによって、2 直線のなす角について、次の授業で理解するのが容易になります。

解答：

a) $y = 2x + 7$

$m = 2$

$\tan\theta = 2$

$\theta = \tan^{-1} 2$

≈ 63.4

b) $y = -x + 1$

$m = -1$

$\tan\theta = -1$

$\theta = \tan^{-1}(-1)$

$= 135°$

c) $x - 2y + 4 = 0 \longrightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$

$m = \frac{1}{2}$

$\tan\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

$\approx 26.6°$

d) $5x + 3y - 20 = 0 \longrightarrow y = -\frac{5}{3}x + \frac{20}{3}$

$m = -\frac{5}{3}$

$\tan\theta = -\frac{5}{3}$

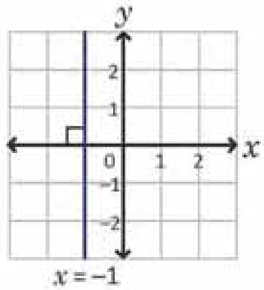
$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{3}\right)$

$\approx 121.0°$

e) $x + 1 = 0$

$x = -1$

直線は垂直なので、
θ = 90°



f) $y - 1 = 0$

$m = 0$

$\tan\theta = 0$

$\theta = \tan^{-1} 0 = 0$

生徒はまた、水平な直線の角度はゼロであることをすぐに理解できます。

3.9 2直線のなす角

定理

直角に交わらず、傾きがそれぞれ m_1 と m_2 の任意の2 直線を l_1と l_2とします。α が2直線のなす角で、反時計回りで l_1 から l_2 までの大きさならば、

$$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

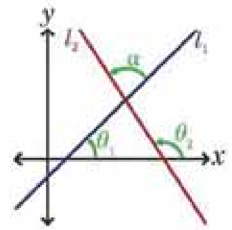
$m_1 m_2 \neq -1$

θ_1 と θ_2 が、それぞれ l_1 と l_2 の傾斜角ならば、

$$\theta_2 = \alpha + \theta_1$$
$$\alpha = \theta_2 - \theta_1$$

上記より、

$$\tan\alpha = \tan(\theta_2 - \theta_1)$$
$$= \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$
$$= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$



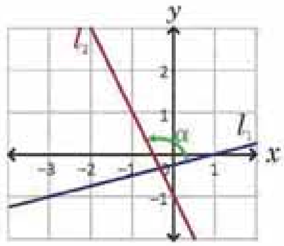
ユニット2

例

直線 l_1： $x - 4y - 1 = 0$ と直線 l_2： $y = -2x - 1$ のなす角で、l_1から l_2へ測定する角の大きさはいくらですか。小数点第 1 位までの概数で求めなさい。

まず、直線 l_1と l_2の 傾き m_1と m_2をそれぞれ求めなければなりません。l_1 の場合は、$y = m_1x + b$ の形の方程式を書きます。

$$4y = x - 1$$
$$y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$



よって、$m_1 = \frac{1}{4}$ で、$m_2 = -2$。2 直線のなす角で、l_1 から l_2へ 反時計回りで測った角を α とします（図を参照）。　よって、

$$\tan\alpha = \frac{-2 - \frac{1}{4}}{1 + \left(\frac{1}{4}\right)(-2)}$$

$$\tan\alpha = \frac{-\frac{9}{4}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\tan\alpha = -\frac{9}{2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{9}{2}\right)$$

$$\approx 102.5°$$

計算機で $\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{9}{2}\right)$ を計算して、答えとして –77.5°（概数）の値を得たならば、この値は、l_1 から l_2 まで時計回りで測った角度に相当します。$\tan\theta = \tan(180° + \theta)$ となり、答えに180°を足すだけで十分です。

したがって、2直線 l_1と l_2 のなす角の大きさは、102.5°

問題

1. 直線 l_1と l_2のなす角（l_1から l_2に測った角）の大きさを、小数点第 1 位までの概数で求めなさい。

   a) $l_1: y = 5x,\ l_2: y = -5x$
   b) $l_1: y = x - 1,\ l_2: y = -2x + 7$
   c) $l_1: y = 4x - 4,\ l_2: y = -5x$
   d) $l_1: 5x + 2y + 12 = 0,\ l_2: 2x + 3y + 6 = 0$
   e) $l_1: 2x - 7y - 2 = 0,\ l_2: 2x + y + 2 = 0$
   f) $l_1: 6x - y - 2 = 0,\ l_2: 3x + 5y + 20 = 0$

2. 頂点が A(–1, 6)、B(–5, 3)、C(4, 1) の 3 点である三角形の内角の大きさを小数点第 1 位までの概数で求めなさい。

3. 2 直線 l_1： $y = k$ と l_2： $y = mx + b$ があります。m と k はゼロではない実数です。2 直線 l_1と l_2のなす角（l_1から l_2へ測った角）が直線 l_2の傾斜角に等しいことを証明しなさい。

達成の目安

3.9 平行ではない 2 直線がなす角をそれらの傾きの値を用いて求める。

学習の流れ

今回は、与えられた 2 直線のなす角の値を求めます。公式を使って求める角を解釈するためには、生徒は、初等教育第 3 期の幾何学的概念を一部を復習しなければなりません。また、角と直線の傾きの関係も復習する必要があります。

つまずきやすい点

生徒は、公式を使うにあたり、どの直線から角を測っているかに注目しなければなりません。特に問題 2 を解くときには注意が必要です。

解答：

1a) $l_1: y = 5x$, $l_2: y = -5x$

$m_1 = 5 \quad m_2 = -5$

$\tan\alpha = \dfrac{-5-5}{1+5(-5)} = \dfrac{-10}{-24} = \dfrac{5}{12}$

$\alpha = \tan^{-1}\dfrac{5}{12} \approx 22.6°$

1b) $l_1: y = x - 1$, $l_2: y = -2x + 7$

$m_1 = 1 \quad m_2 = -2$

$\tan\alpha = \dfrac{-2-1}{1+1(-2)} = 3$

$\alpha = \tan^{-1} 3 \approx 71.6°$

1c) $l_1: y = 4x - 4$, $l_2: y = -5x$

$m_1 = 4 \quad m_2 = -5$

$\tan\alpha = \dfrac{-5-4}{1+4(-5)} = \dfrac{9}{19}$

$\alpha = \tan^{-1}\dfrac{9}{19} \approx 25.3°$

1d) $l_1: 5x + 2y + 12 = 0$, $l_2: 2x + 3y + 6 = 0 \longrightarrow l_1: y = -\frac{5}{2}x - 6$, $l_2: y = -\frac{2}{3}x - 2 \Rightarrow m_1 = -\frac{5}{2}, m_2 = -\frac{2}{3}$

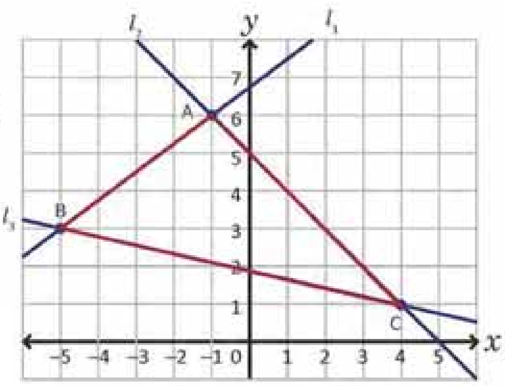
$\tan\alpha = \dfrac{-\frac{2}{3}-\left(-\frac{5}{2}\right)}{1+\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)} = \dfrac{11}{16} \qquad \alpha = \tan^{-1}\dfrac{11}{16} \approx 34.5°$

1e) $l_1: 2x - 7y - 2 = 0$, $l_2: 2x + y + 2 = 0 \longrightarrow l_1: y = \frac{2}{7}x - \frac{2}{7}$, $l_2: y = -2x - 2 \Rightarrow m_1 = \frac{2}{7}, m_2 = -2$

$\tan\alpha = \dfrac{-2-\frac{2}{7}}{1+\frac{2}{7}(-2)} = -\dfrac{16}{3} \qquad \alpha = \tan^{-1}\left(-\dfrac{16}{3}\right) \approx 100.6°$

1f) $l_1: 6x - y - 2 = 0$, $l_2: 3x + 5y + 20 = 0 \longrightarrow l_1: y = 6x - 2$, $l_2: y = -\frac{3}{5}x - 4 \Rightarrow m_1 = 6, m_2 = -\frac{3}{5}$

$\tan\alpha = \dfrac{-\frac{3}{5}-6}{1+\left(-\frac{3}{5}\right)(6)} = \dfrac{33}{13} \qquad \alpha = \tan^{-1}\dfrac{33}{13} \approx 68.5°$



2. 傾きがそれぞれ $m_1 = \frac{3}{4}$、$m_2 = -1$、$m_3 = -\frac{2}{9}$ の線分 AB、AB、BC に対応する直線を l_1、l_2、l_3 とします。

l_1から l_2 に測った角をα とし、$\tan\alpha = \dfrac{-1-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}(-1)} = -7 \Rightarrow \alpha \approx 98.1°$

l_2 から l_3に測った角を β とし, $\tan\alpha = \dfrac{-\frac{2}{9}-(-1)}{1+\left(-\frac{2}{9}\right)(-1)} = \dfrac{7}{11} \Rightarrow \beta \approx 32.5°$

三角形の内角の和によって、もう1つの角は、180° − (98.1° + 32.5°) = 49.4°

3. l_1 ： $y = k$ の傾きは、$m_1 = 0$ で、 l_2 ： $y = mx + b$ の傾きは、$m_2 = m$。2 直線 l_1 と l_2のなす角を α とします。
よって、$\tan\alpha = \dfrac{m-0}{1+0(m)} = m$ したがって、α は l_2の傾斜角です。
別の解答直線 l_1 ： $y = k$ は x 軸に平行です。したがって、l_1 と l_2のなす角は、l_2の傾斜角になります。

レッスン 3

3.10 応用

導入問題

4点 A(−3, 3)、B(−2, 0)、C(4, 2)、D(3, 5) が長方形を形成することを証明しなさい。

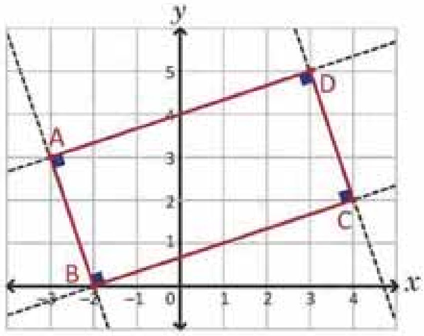
長方形は 4 つの直角を持つ四角形です。

解法

ABCD が長方形であるためには、以下を満たさなければなりません。

a) $\overline{AB}\perp\overline{BC}$　　b) $\overline{BC}\perp\overline{CD}$　　c) $\overline{CD}\perp\overline{DA}$

これらの 3 つの条件を満たすのであれば、辺 DA も辺 AB に直角に交わっています。



a) 辺 AB が辺 BC に直角に交わっていることを証明するためには、A と B を通る 直線が B と C を通る直線に直角に交わっていることを確認しなければなりません。

A(−3, 3) と B(−2, 0) を通る直線の傾きは、$m_1 = \frac{0-3}{-2-(-3)} = -3$

B(−2, 0) と C(4, 2) を通る直線の傾きは、$m_2 = \frac{2-0}{4-(-2)} = \frac{1}{3}$

傾き同士を掛けると、$m_1 m_2 = -3\left(\frac{1}{3}\right) = -1$

したがって、$\overline{AB}\perp\overline{BC}$

b) この場合も、a) と同じように解きます。

B(−2, 0) と C(4, 2) を通る直線の傾きは、$m_2 = \frac{1}{3}$

C(4, 2) と D(3, 5) を通る直線の傾きは、$m_3 = \frac{5-2}{3-4} = -3$

傾き同士を掛けると、$m_2 m_3 = \frac{1}{3}(-3) = -1$

したがって、$\overline{BC}\perp\overline{CD}$

c) a) および B) と同様のやり方を行い、D と Aを通る直線の傾きを求めると、その値は$\frac{1}{3}$
傾き同士の積は、−1 なので、$\overline{CD}\perp\overline{DA}$
したがって、ABCD は長方形です。

問題

1. 4 点 A(2, 3)、B(0, −3)、C(5, −2)、D(7, 4) が平行四辺形を形成することを証明しなさい。

2. 4 点 A(−4, 0)、B(1, −1)、C(6, 0)、D(1, 1) がひし形を形成することを証明しなさい。

ひし形とは、すべての辺が同じ長さの四角形です。

達成の目安

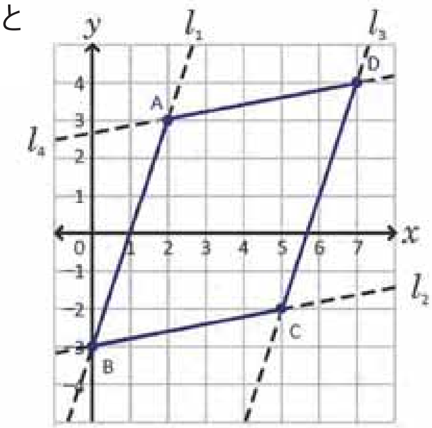
3.10 2 直線の平行と垂直の関係と、2 点間の距離を用いて、幾何学問題を解く。

学習の流れ

幾何学的問題を解くために、直線の平行・垂直の考え方および2点間の距離の考え方を用います。そのような意味において、用いた図形の特徴の一部を復習しなければなりません。

解答：

1. $\overline{AB}$ が $\overline{CD}$ に平行であること、また、$\overline{BC}$ が $\overline{AD}$ に平行であることを証明します。それぞれ点 A と B、点 B と C、点 C と D、点 A と D を通る直線を l_1、l_2、l_3、l_4と し、傾きをそれぞれ m_1、m、m_3、m_4とします。



AB が CD に平行であることを証明するためには、$m_1 = m_3$を証明すれば十分です。

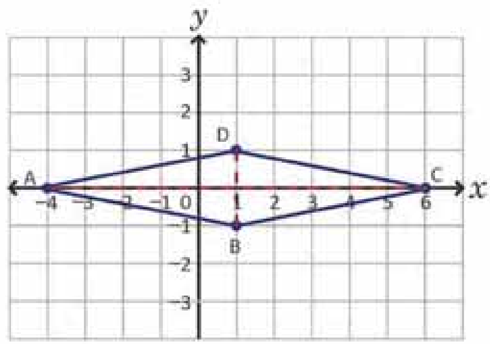
$$m_1 = \frac{-3-3}{0-2} = 3、\quad m_3 = \frac{-2-4}{5-7} = 3$$

AD が BC に平行であることを証明するためには、$m_2 = m_4$を証明すれば十分です。

$$m_2 = \frac{-2-(-3)}{5-0} = \frac{1}{5}、\quad m_4 = \frac{4-3}{7-2} = \frac{1}{5}$$

したがって、ABCD は平行四辺形です。

2. 解答 1：四角形の辺の長さを求めます。



$AB = \sqrt{(1-(-4))^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$

$BC = \sqrt{(6-1)^2 + (0-(-1))^2} = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

$CD = \sqrt{(1-6)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

$AD = \sqrt{(1-(-4))^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

よって、AB = BC = CD = AD、したがって、ABCD はひし形です。

解答2：対角線が直角に交わっていること、また、中点で交差していることを証明します。対角線 $\overline{BD}$ は、$x = 1$ の垂直な直線上にあり、対角線 $\overline{AC}$ は、$y = 0$ の水平な直線（x軸）上にあります。したがって、対角線は直角に交わっています。

$\overline{BD}$ の中点は $\left(\frac{1+1}{2}, \frac{1+(-1)}{2}\right) = (1, 0)$、また $\overline{AC}$ の中点は $\left(\frac{6+(-4)}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (1, 0)$
よって、対角線は中点で交差しています。
したがって、ABCD は、ひし形です。

3.11 復習問題

1. 4点 A(0, 3)、B(4, −1)、C(7, 2)、D(5, 4) が直角台形を形成することを証明しなさい。

1 組の 平行な対辺と1直角をもつ四角形は直角台形です。

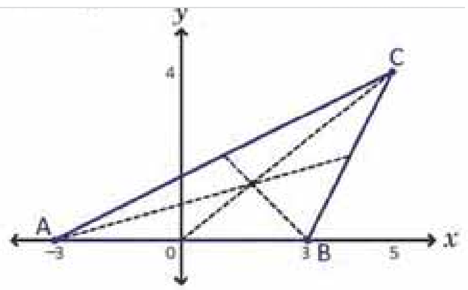
2. 4 点 A(−3, 3)、B(−5, −1)、C(5, 1)、D(3, 5) で四角形が形成されます。四角形 ABCD の各辺の中点によって形成される四角形は平行四辺形であることを証明しなさい。

3. 点 A(−1, 6) と 点 B(7, 4) によって形成される線分の垂直二等分線の方程式を求めなさい。

線分の垂直二等分線は、線分を中点で分割し、線分と直角をなす直線です。

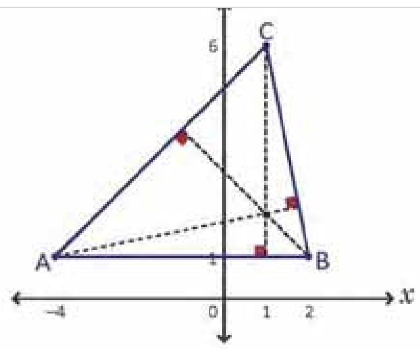
4. 三角形の**中線**は、1つの頂点から始まりその頂点の反対側にある辺の中点で終わる線分です。三角形においては 3 つの中線を引くことができます（各頂点に対し 1 つ）。頂点が A(−3, 0)、B(3, 0)、C(5, 4) である三角形を作り、以下を行いなさい。

a) 各辺の中点の座標を求めなさい。
b) 三角形 ABC の 3 つの中線の方程式を求めなさい（例えば、中線の 1 つは点 A(−3, 0) と辺 BC の中点を通ります）。
c) 中線が1点で交差することを確認しなさい。



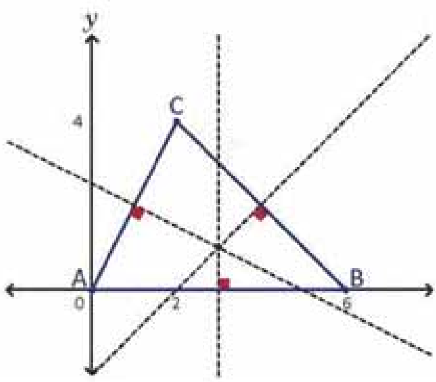
5. 三角形の**高さを表す線分**は、1つの頂点から始まり反対側にある辺と直角をなす線分です。三角形においては3つの高さを表す線分を引くことができます（各頂点に対し1つ）。頂点が A(−4, 1)、B(2, 1)、C(1, 6) である三角形を作り、以下を行いなさい。

a) 点 A と点 B、点 B と点 C、点 C と点 A を通る直線の傾きを求めなさい。
b) 三角形 ABC の 3 つの高さを表す線分の方程式を求めなさい（例えば、そのうちの1つは点 A(−4, 1) を通り、辺 BC と直角に交わります）。
c) 高さを表す線分が 1 点で交差することを確認しなさい。



6. 点 A(0, 0)、点 B(6, 0)、点 C(2, 4) で三角形を作り、以下を行いなさい。

a) 各辺の中点の座標を求めなさい。
b) 三角形の垂直二等分の方程式を求めなさい（例えば、そのうちの 1 つは辺 AB の中点を通り、辺 AB と直角に交わります）。
c) 垂直二等分線が 1 点で交差することを確認しなさい。



ユニット 2

43

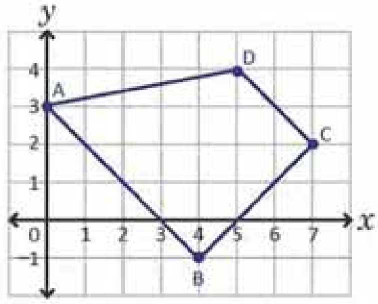
達成の目安

3.11 点、線分、直線の特性を利用し、幾何学問題を解く。

解答：

1. $\overline{AB}$ と $\overline{CD}$ が平行であり、$\overline{AB}$ が $\overline{BC}$ と直角に交わることを証明します。

A と B、B と C、C と D を通る直線の傾きを、それぞれ m_1、m_2、m_3 とします。



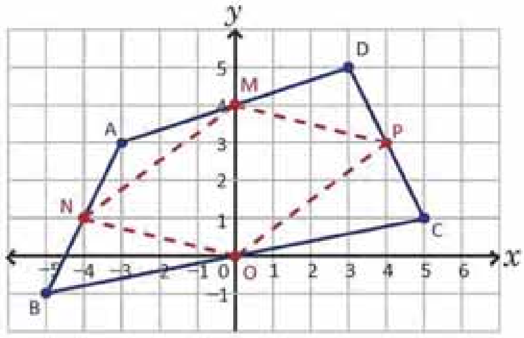
$$m_1 = \frac{-1-3}{4-0} = -1,\ m_2 = \frac{2-(-1)}{7-4} = \frac{3}{3} = 1、\ m_3 = \frac{4-2}{5-7} = -1$$

よって、$m_1 = m_3$ したがって、$\overline{AB}$ は $\overline{CD}$ に平行です。

また、$m_1 m_2 = -1$ したがって、$\overline{AB}$ は $\overline{BC}$ と直角に交わります。

したがって、ABCD は直角台形です。

2. それぞれ、線分AD、AB、BC、CD の中点M、N、O、P を求めます。



$M\left(\frac{3+(-3)}{2}, \frac{5+3}{2}\right) = M(0, 4)$　　$N\left(\frac{-3+(-5)}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right) = N(-4, 1)$

$O\left(\frac{5+(-5)}{2}, \frac{1+(-1)}{2}\right) = O(0, 0)$　　$P\left(\frac{5+3}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = P(4, 3)$

与えられた点を通る直線の傾きによって、対辺が平行であることを証明します。

M と N を通る直線の傾きは、$\frac{1-4}{-4-0} = \frac{3}{4}$　O と P を通る直線の傾きは、$\frac{3-0}{4-0} = \frac{3}{4}$ よって、$\overline{MN}$ は $\overline{OP}$ に平行です。

M と P を通る直線の傾きは、$\frac{3-4}{4-0} = -\frac{1}{4}$　N と O を通る直線の傾きは、$\frac{0-1}{0-(-4)} = -\frac{1}{4}$ よって、$\overline{MP}$ は $\overline{NO}$ に平行です。

したがって、MNOP は平行四辺形です。

3. 点 A(−1, 6) と 点 B(7, 4) によって形成される線分の垂直二等分線の方程式を求めなさい。

A と B の中点は、$\left(\frac{7+(-1)}{2}, \frac{4+6}{2}\right) = M(3, 5)$

A と B を通る直線の傾きは、$\frac{4-6}{7-(-1)} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$

m が垂直二等分線の傾きであるなら、$-\frac{1}{4}m = -1$ よって、$m = 4$

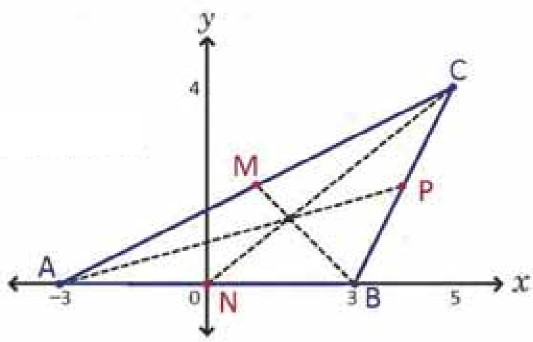
点・傾き形を使って直線の方程式を求めると、

$$y - 5 = 4(x-3)$$
$$y = 4x - 12 + 5$$
$$y = 4x - 7$$

4a) 辺 CA、辺 AB、辺 BC の中点をそれぞれ、M、N、P とします。

$N\left(\frac{3+(-3)}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = N(0, 0)$, $P\left(\frac{5+3}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = P(4, 2)$,

$M\left(\frac{5+(-3)}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = M(1, 2)$



4b) 3つの中線の方程式は、

中線 AP

$$y-0=\frac{2-0}{4-(-3)}(x-(-3))$$
$$y=\frac{2}{7}x+\frac{6}{7}$$

中線 CN

$$y-0=\frac{4-0}{5-0}(x-0)$$
$$y=\frac{4}{5}x$$
4

中線 BM

$$y-0=\frac{2-0}{1-3}(x-3)$$
$$y=\frac{2}{-2}(x-3)$$
$$y=-x+3$$

4c) $\overline{CN}$ と $\overline{BM}$ の交点を求めます。

$\overline{BM}$ の方程式を $\overline{CN}$ の方程式に代入します。$-x+3=\frac{4}{5}x \Rightarrow -5x+15=4x \Rightarrow 9x=15 \Rightarrow x=\frac{5}{3}$

$x=\frac{5}{3}$ を $\overline{CN}$ の方程式に代入します。 $y=\frac{4}{5}\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{4}{3}$

中線CN と $\overline{BM}$ の交点は $\left(\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right)$

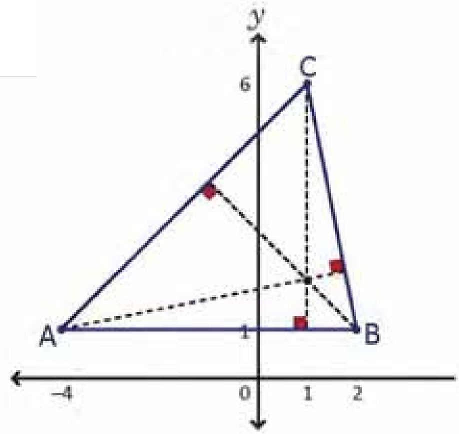
今回は、この点が中線 AP 状にあることを確認します。$y=\frac{2}{7}\left(\frac{5}{3}\right)+\frac{6}{7}=\frac{10}{21}+\frac{18}{21}=\frac{28}{21}=\frac{4}{3}$

よって、$\left(\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right)$ は、中線 AP上にあります。

したがって、すべての中線は点 $\left(\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right)$ で交わります。

5a) A と B、B と C、C と A を通る直線の傾きを、それぞれ m_1、m_2、m_3とします。

$$m_1=\frac{1-1}{2-(-4)}=0,\ m_2=\frac{6-1}{1-2}=-5 \text{ y } m_3=\frac{1-6}{-4-1}=1$$



5b) C、A、B を通る高さを表す線分の傾きをそれぞれ、n_1、n_2、n_3とします。

⇒ AB は水平なので、C を通る高さを表す線分は $x=1$

次に、 $n_2(-5)=-1 \Rightarrow n_2=\frac{1}{5} \Rightarrow$ A を通る高さを表す線分は

$$y-1=\frac{1}{5}(x+4) \Rightarrow y=\frac{1}{5}x+\frac{9}{5}.$$

次に、 $n_3(1)=-1 \Rightarrow\ n_3=-1 \Rightarrow$ B を通る高さを表す線分は

$$y-1=-(x-2) \Rightarrow y=-x+3.$$

5c) 3 つの高さを表す線分の交点を求めます。

$x=1$ ならば、 $y=\frac{1}{5}+\frac{9}{5}=\frac{10}{5}=2$ 、次にもう 1 つの高さを表す線分において、$y=-1+3=2$

したがって、すべての高さを表す線分は点 (1, 2) で交わります。

6a) 辺 AB、辺 BC、辺 CAの中点をそれぞれ、M、N、P とします。

$$M\left(\frac{0+6}{2},\frac{0+0}{2}\right)=M(3,0),\ N\left(\frac{6+2}{2},\frac{0+4}{2}\right)=N(4,2),\ P\left(\frac{2+0}{2},\frac{4+0}{2}\right)=P(1,2).$$

6b) M(3, 0) を通る垂直二等分線は、$x=3$

BCの傾きは、 $\frac{4-0}{2-6}=-1$ 垂直二等分線の傾きは、$m(-1)=-1 \Rightarrow m=1$

N(4, 2) を通る垂直二等分線は、$y-2=1(x-4) \Rightarrow y=x-2$

ACの傾きは、 $\frac{4-0}{2-0}$ 垂直二等分線の傾きは、$m_2(2)=-1 \Rightarrow m_2=-\frac{1}{2}$

P(1, 2) を通り、$-\frac{1}{2}$ の傾きを持つ垂直二等分線は、$y-2=-\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

6c) 3 つの高さを表す線分の交点を求めます。

$x=3$ ならば、$y=3-2=1$、次に別の垂直二等分線において $y=-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=1$

したがって、すべての高さを表す線分は点 (3, 1)で交わります。

3.12 このユニットの問題

1. 点 A(−5, 3) と点 B(4, −3) が与えられているとき、線分 AB を 3 等分する点Cと 点Dの座標を求めなさい。

点 C は、線分 AB を 1：2 の比で分割します。

2. 点 $P\left(a+1,\ \frac{1}{a}\right)$ が方程式 $2x-3y+3=0$ の直線上にあるときの a の値を求めなさい。

3. 平行四辺形 ABCD の頂点の3つは、A(−5, 0)、B(−2, −1)、C(5, 2) です。4つ目の頂点の座標を求めなさい。

4. 頂点が A(0, 8)、B(−4, 0)、C(10, 4) である三角形 ABC で以下を行いなさい。

   a) 辺 AB、辺 BC、辺 CA の中点を求め、それぞれ D、E、F で表しなさい。
   b) 線分 AE を 2：1 の比で分割する点の座標を求めなさい。
   c) 線分 BF と線分 CD を 2：1 の比で分割する点の座標を求めなさい。前問とどのような関係がありますか。
   d) この問題と 3.11 の授業の問題 4 から何を結論付けることができますか。

5. A(−3, −1) と B(2, 2) は、ある平行四辺形の連続する 2 つの頂点です。2 つの対角線の交点が点 P(3, 0) であるとき、残り 2 つの頂点の座標はいくらですか。

6. ある三角形の辺A B、辺 BC、辺 CAの中点は、それぞれ D(−1, −1)、E(4, 2)、F(2, 3) です。この三角形の頂点 A、B、C の座標を求めなさい。

7. 方程式 $ax+by+c=0$ と $a_1x+b_1y+c_1=0$ の 2 直線が直角に交わるならば、$aa_1+bb_1=0$であることを証明しなさい。

8. 点 $P(x_1, y_1)$ を通り、さらに、直線 l： $ax+by+c=0$ に平行な直線の方程式は、$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$ であることを証明しなさい。

9. l_1と l_2が 135°の角（l_1から l_2に測った角）をなして交差しています。l_2の傾きが −3 ならば、l_1の傾きの値はいくらですか。

10. 三角形 ABC の頂点 A の座標が (−4, 0) で、頂点 B から引いた高さを表す線分と中線の方程式が、それぞれ、$4x+y-7=0$ と $2x-y+1=0$ であるとき、頂点 B と頂点 C の座標を求めなさい。

達成の目安

3.12 直線に関する問題を解く。

解答：

1. 線分 AB を 1：2 の比で分割する点 C は、$C\left(\frac{2(-5)+1(4)}{1+2}, \frac{2(3)+1(-3)}{1+2}\right) = C\left(\frac{-6}{3}, \frac{3}{3}\right) = C(-2, 1)$

次に、D は線分 BC の中点です。$D\left(\frac{4+(-2)}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) = D(1, -1)$

2. 点 $P\left(a+1, \frac{1}{a}\right)$ を直線の方程式 $2x-3y+3=0$ に代入します。

$2(a+1)-3\left(\frac{1}{a}\right)+3=0 \Rightarrow 2a(a+1)-3+3a=0 \Rightarrow 2a^2+5a-3=0 \Rightarrow (a+3)(2a-1)=0 \Rightarrow a=-3,\ a=\frac{1}{2}$

3. 点 $D(a, b)$ を 4つ目の頂点とすると、AD は BC に平行で、CD は AB に平行です。
傾きを使って、

直線 AD と直線BC の傾きは同じです。$\frac{b-0}{a-(-5)} = \frac{2-(-1)}{5-(-2)} = \frac{3}{7} \Rightarrow 7b = 3a + 15$ ------ (1)

直線 CD と直線AB の傾きは同じです。$\frac{b-2}{a-5} = \frac{-1-0}{-2-(-5)} = \frac{-1}{3} \Rightarrow 3b-6=-a+5 \Rightarrow a=-3b+11$ ---(2)

(2) を (1) に代入します。$7b = 3(-3b+11)+15 \Rightarrow 7b=-9b+33+15 \Rightarrow 16b=48 \Rightarrow b=3$

$b=3$ を (2) に代入します。$a=-3(3)+11=2$

したがって、平行四辺形の 4 つ目の頂点は D(2, 3)

4. 三角形 ABC の頂点は、A(0, 8)、B(−4, 0)、C(10, 4)

4a) $D\left(\frac{0+(-4)}{2}, \frac{8+0}{2}\right) = D(-2, 4)$; $E\left(\frac{-4+10}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = E(3, 2)$; $F\left(\frac{0+10}{2}, \frac{8+4}{2}\right) = F(5, 6)$.

4b) 点は $\left(\frac{1(0)+2(3)}{2+1}, \frac{1(8)+2(2)}{2+1}\right) = \left(\frac{6}{3}, \frac{12}{3}\right) = (2, 4)$

4c) 線分 BF 上：$\left(\frac{1(-4)+2(5)}{2+1}, \frac{1(0)+2(6)}{2+1}\right) = \left(\frac{6}{3}, \frac{12}{3}\right) = (2, 4)$

線分 CD 上：$\left(\frac{1(10)+2(-2)}{2+1}, \frac{1(4)+2(4)}{2+1}\right) = \left(\frac{6}{3}, \frac{12}{3}\right) = (2, 4)$

前問とどのような関係がありますか。各線分に対して求めた点が同じです。

4d) 中線の交点が、各中線を 2：1 の比で 2 つの線分に分割しています。

5. 平行四辺形の対角線は、その中点で交差しています。
平行四辺形の他の 2 つの頂点を、AC と BD がその対角線となるよう、$C(a, b)$ と $D(c, d)$ とします。

P を AC の中点として求めます。

$\Rightarrow P\left(\frac{a+(-3)}{2}, \frac{b+(-1)}{2}\right) = P(3, 0)$

$\Rightarrow \frac{a+(-3)}{2} = 3$、$\frac{b+(-1)}{2} = 0$

$\Rightarrow a-3=6$、$b-1=0$

$\Rightarrow a=9$、$b=1$

P をBDの中点として求めます。

$\Rightarrow P\left(\frac{c+2}{2}, \frac{d+2}{2}\right) = P(3, 0)$

$\Rightarrow \frac{c+2}{2} = 3$、$\frac{d+2}{2} = 0$

$\Rightarrow c+2=6$、$d+2=0$

$\Rightarrow c=4$、$d=-2$

したがって、他の頂点の座標は、(9, 1)、(4, −2)

6. この三角形の頂点の座標を、A(a, b)、B(c, d)、C(e, f) とします。

中点を求めます。$\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right) = (-1, -1)$; $\left(\frac{c+e}{2}, \frac{d+f}{2}\right) = (4, 2)$; $\left(\frac{a+e}{2}, \frac{b+f}{2}\right) = (2, 3)$

x 座標を用いて、以下の連立方程式を立てます。

$$\begin{cases} \frac{a+c}{2} = -1 \text{ --- (1)} \\ \frac{c+e}{2} = 4 \text{ --- (2)} \\ \frac{a+e}{2} = 2 \text{ --- (3)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c=-2 \text{ --- (1)} \\ c+e=8 \text{ --- (2)} \\ a+e=4 \text{ --- (3)} \end{cases}$$

連立方程式を解き、(1) から (2) を引きます。

$$a-e=-10 \text{ ----- (4)}$$

連立方程式ができます $\begin{cases} a+e=4 \text{ ----- (3)} \\ a-e=-10 \text{ ----- (4)} \end{cases}$

(3) と (4) を足すと、$2a = -6 \Rightarrow a = -3$

(3) と (1) に代入します。$-3 + e = 4 \Rightarrow e = 7$, $-3 + c = -2 \Rightarrow c = 1$

よって、連立方程式の解は、$a = -3$、$e = 7$、$c = 1$

y 座標を用いて、以下の連立方程式を立てます。

$$\begin{cases} \frac{b+d}{2} = -1 \text{ ----- (5)} \\ \frac{d+f}{2} = 2 \text{ ----- (6)} \\ \frac{b+f}{2} = 3 \text{ ----- (7)} \end{cases}$$

解は、

$b = 0$、$d = -2$、$f = 6$

7. 直線の 1 つが垂直ならば、例えば $ax + by + c = 0$で、$b = 0$でなければなりません。また、この直線に直角に交わる直線は水平です。よって、$a_1 = 0$よって、$aa_1 + bb_1 = a(0) + 0(b_1) = 0$

次に、いずれの直線も垂直でないならば、$b \neq 0$ および $b_1 \neq 0$

傾きを求めるために方程式を書き直します。

$$ax+by+c=0 \Rightarrow y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b} \text{、} a_1x+b_1y+c_1=0 \Rightarrow y=-\frac{a_1}{b_1}x-\frac{c_1}{b_1}$$

直角に交わるとき、$\left(-\frac{a}{b}\right)\left(-\frac{a_1}{b_1}\right) = -1 \Rightarrow aa_1 = -bb_1 \Rightarrow aa_1 + bb_1 = 0$ を満たさなければなりません。

8. $b \neq 0$ ならば、直線 $ax + by + c = 0$ を $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ と書き直します。よって、直線の傾きは $-\frac{a}{b}$

よって、直線 $ax + by + c = 0$ に平行で、P(x_1, y_1) を通る直線は、

$$y - y_1 = -\frac{a}{b}(x - x_1) \Rightarrow b(y - y_1) = -a(x - x_1) \Rightarrow a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$

直線 $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$ は、P(x_1 , y_1) を通る直線 l を平行移動したものです。

$b = 0$ ならば、直線の方程式は $ax + c = 0 \Rightarrow x = -\frac{c}{a}$ で、$a \neq 0$

よって、直線 $ax + by + c = 0$ に平行で、P(x_1, y_1) を通る直線は、

$x = x_1 \Rightarrow x - x_1 = 0$、この直線は、$b = 0$ なので、$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$ と書き直すことができます。

9. 直線 l_1 と l_2 の傾きをそれぞれ、m_1 と m_2とするならば、$m_2 = -3$ で 、以下を満たします。

$$\tan 135° = \frac{-3-m_1}{1+m_1(-3)} \Rightarrow -1 = \frac{-3-m_1}{1+m_1(-3)} \Rightarrow -1+3m_1 = -3-m_1 \Rightarrow 4m_1 = -2 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{2}.$$

10. 点B は高さを表す線分と中線の交点です。よって、連立方程式を解くだけで十分です。

$\begin{cases} 4x+y-7=0 \text{ ---- (1)} \\ 2x-y+1=0 \text{ ---- (2)} \end{cases}$ 解は、$x = 1$、$y = 3$ したがって、頂点Bは (1, 3)

次に、頂点C(a, b) です。$\overline{AC}$ の中点は M$\left(\frac{a-4}{2}, \frac{b}{2}\right)$、Mは中線上にあります。よって、その方程式 (2) に代入することができます。$2\left(\frac{a-4}{2}\right) - \frac{b}{2} + 1 = 0$ そして次の式になります。$2a - b = 6$ ---- (1)

次に、A と C を通る直線の傾きは $\frac{b-0}{a-(-4)} = \frac{b}{a+4}$

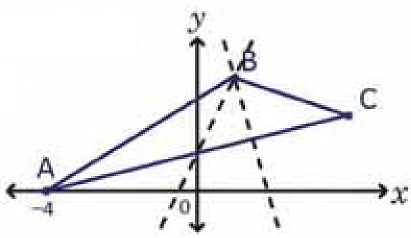
高さを表す線分の傾きは、$4x + y - 7 = 0 \Rightarrow y = -4x + 7$、傾きは -4 です。

$-4\left(\frac{b}{a+4}\right) = -1 \Rightarrow 4b = a + 4 \Rightarrow a = 4b - 4$ を満たします。(1) に代入します。

$$2(4b-4) - b = 6,$$

これより、$b = 2 \Rightarrow a = 4(2) - 4 = 4$

したがって、C(a, b) = C(4, 2)



レッスン4 GeoGebraを使った演習

4.1 GeoGebraを使った演習：線分

昨年は、GeoGebraで関数をグラフ化する方法、2 次関数の水平移動･垂直移動のやり方、ベクトルをグラフ化し、それらを使用して操作を実行する方法を学びました。この演習では、線分と直線をその方程式から図上に表示するソフトウェアを使用します。

パソコンにGeoGebraが入っているか確認する必要があります。そのために、アプリケーションアイコン（このページの右上の隅にあるもの）を探します。アプリケーションが入っていない場合は、以下のリンクに従い、ダウンロードすることができます。

GeoGebra https://goo.gl/jRmmdc

ダウンロード（インストール）“GeoGebra Clásico 5”。以下のリンクから携帯電話用アプリケーションをダウンロードすることもできますし、オンラインでGeoGebra を使うことも可能です。

アプリケーション → https：//goo.gl/wf5mHx　**オンライン** → https：//goo.gl/ThXbeB

演習

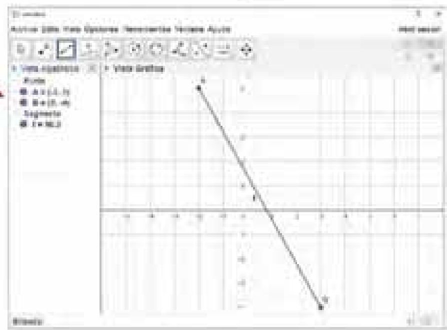
デカルト平面上の点と線分

1. ソフトウェアのアイコンをクリック（またはダブルクリック）して、GeoGebra の新しいファイルを開いてください。

2. A(−2, 5) と B(3, −4) の線分ABを作成するためには、
   a) 点ツールまたは入力バーを使って、平面上に 2 点を配置してください。

GeoGebra では、点は大文字で表記します。「a=(-2,5)」で入力すると、ベクトルになります。

   b) 直線 ツールの右下の部分をクリックし、線分を選択してください。



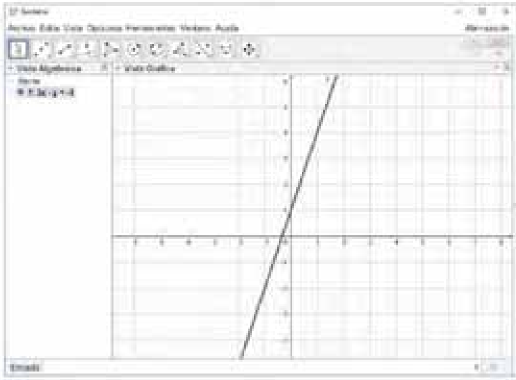
   c) グラフィックスビューで、点 A と点 B を選択してください。数式ビューに線分の名前と長さが表示されます。線分 AB の長さは、点 A と点 B 間の距離に等しいことを復習しよう。この場合は、およそ 10.3 です。

   d) また、線分ツールの代わりに、入力バーを使って線分を作成することもできます。点 C(−4, 1) と点 D(2, 3) を作成しましょう。 入力バーに線分という言葉を記入し、「線分(<点(端)>, <点(端)>)」を選択してください。<点(端)>の部分に、それぞれ C と D を入力してください。

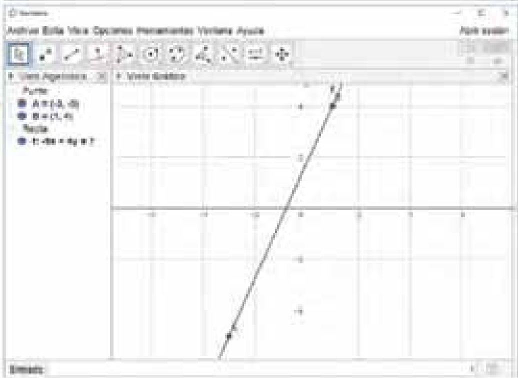
ユニット 2

直線：

3. 方程式がわかっている直線のグラフを描くためには、入力バーに方程式を入力するだけです。例えば、 $3x - y + 1 = 0$ のグラフを描くためには、3x-y+1=0 を記入し、入力を押します。



4. 2点を通る直線の方程式を求め、グラフを描くためには、入力バーの直線 (<点>, <点>) コマンドを使用します。例えば、 点A(−3, −5) と点 B(1, 4) を通る直線の方程式を求めるには、まず、点A と点 B を作成します。次に、 直線 (A,B) を記入し、入力を押します。数式ビューには直線の方程式が表示され、グラフィックスビューには直線が現れます。



また、前述のコマンドを使用し、直線 ((-3,-5),(1,4)) を入力してもよいです。

課題

1. 線分の中点

a) GeoGebraの新しい画面を開き、A(−4, −3) の B(6, 1) の線分 AB を作成します。

b)「点」ツールの右下部分をクリックし、「中点または中心」を選択してください。

c) グラフィックスビュー(または数式ビュー)で、点 A と点B をクリックすると、線分 AB の中点である、座標 (1, −1) の新たな点 C が表示されます。

d) 授業 1.6 の問題 7、8、9、10（復習問題）の解答を確認しましょう。

2. 直線の傾き

a) 入力バーに「傾き」と記入すると、「傾き(<直線、半直線または線分>)」のオプションが現れます。

b) <直線、半直線または線分>の部分に直線の方程式を記入し、入力を押します。

c) 直線 $y = -2$ および直線 $x = 3$ の傾きを計算すると、どうなりますか。垂直な直線および水平な直線の傾きの値はいくらですか。

3. 授業 2.2 から 2.5 までの問題の解答を確認しましょう。

達成の目安

4.1 2 点またはその方程式が与えられたときの線分と直線を作成し、中点の座標と傾きの値を求めるために数学ソフトウェアを使用する。

学習の流れ

点や線分、直線を描くために GeoGebra のツールを使用します。これによって、生徒はこのユニットのレッスン1およびレッスン 2 を通して実施してきた問題を確認することができます。

解答：

1a) 入力バーに A=(–4, –3) を入力し、次に B=(6, 1) を入力します。ツールバーで直線 ツールの右下部分をクリックし、線分を選択し、2点A とBを選択します。

1b) 点 ツールの右下部分をクリックし、中点 または中心を選択します。

1c) グラフィックスビュー（または数式ビュー）で、点 A と点 B をクリックすると、線分ABの中点である、座標 (1, –1) の新たな点 C が表示されます。

1d) 問題 7：点 A(–1, 3) と、解答の点 (4, –2) のグラフを描き、1b) および 1c) で行った方法を用いて中点を求めます。

2a) 入力バーに傾きを記入すると、自動的に、傾き（<直線、半直線または線分>）のオプションが現れます。

2b) いずれかの授業で学習した直線の方程式を記入してかまいません。例えば、

$4x + y - 7 = 0$、$2x - y + 1 = 0$

2c) 水平な直線の傾きはゼロで、垂直な直線の傾きは定義できません。

3. 授業 2.2：各問の答えを確認するために、与えられた直線のグラフを描き、傾きを求めます。また、与えられた点を図上に表示します。

授業 2.3：各問で与えられた点をグラフに表示することができます。次に、これらの2点を通る直線を描くためにツールバーを使います。または、例えば a) 問について、直線 ((–3, –1), (1, –5)) を入力バーに記入します。

授業 2.4：各問に対し、与えられた点を図上に表示し、次に直角 ツールの右下部分をクリックし、平行を選択します。グラフィックスビューで、図上に表示された点と、x 軸またはy 軸のどちらか該当する方を選択します。

授業 2.5：1. 各問に関して、与えられた方程式をツールバーに記入します。

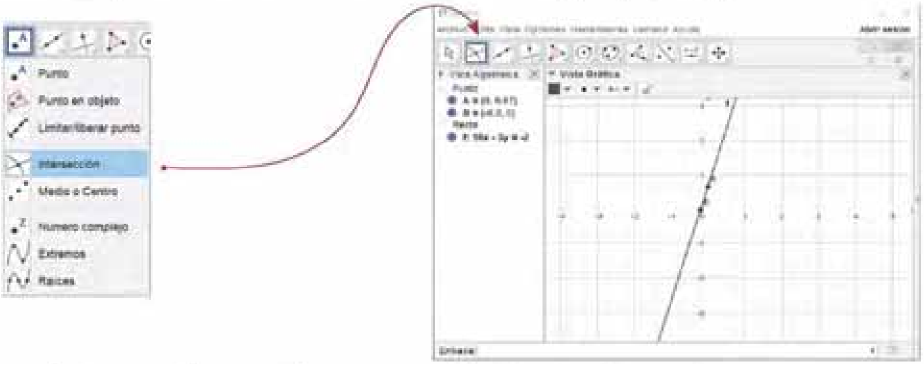
4.2 GeoGebraを使った演習：2直線の位置関係

この演習では、2直線の交点の座標の求め方、平行な直線と直角に交わる直線の描き方、直線の傾斜角の求め方を学びます。

演習

座標軸と直線の交点：

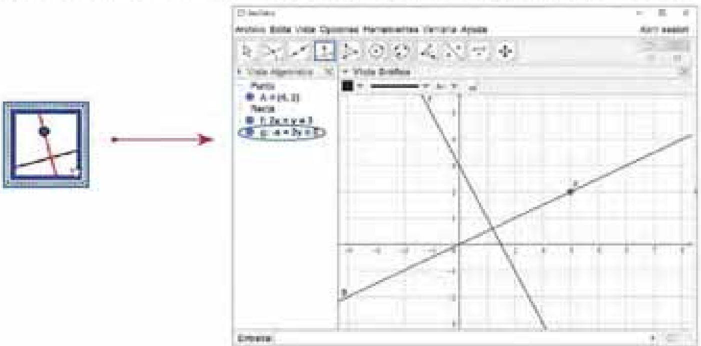
1. 直線 $10x-3y+2=0$ を描きなさい（必要だと思ったら、グラフィックスビューを拡大してください）。
2. 点ツールの右下部分をクリックし、交点を選択します。グラフィックスビューで x 軸(または y 軸)をクリックした後、直線をクリックします。数式ビューに x 切片または y 切片の座標が表示されます。



3. 2直線間の交点を求めるために、同じツールを使います。この場合は、座標軸のどちらかを選択する代わりに、2直線を選択します。

平行な直線と直角に交わる直線

4. 新たな画面を開き、直線 $2x+y-3=0$ を描きます。
   a) 前の直線に直角に交わる直線を描くためには、直角ツールをクリックします。グラフィックスビューで、直線 $2x+y-3=0$ を選択します（直角に交わる直線が現れるのがわかります）。次に、直線を置きたい場所を選択します。それによって、数式ビューの方程式が決まります。



画面では、直角に交わる直線が点 (4, 2) 上に置かれたので、方程式は es $-x+2y=0$

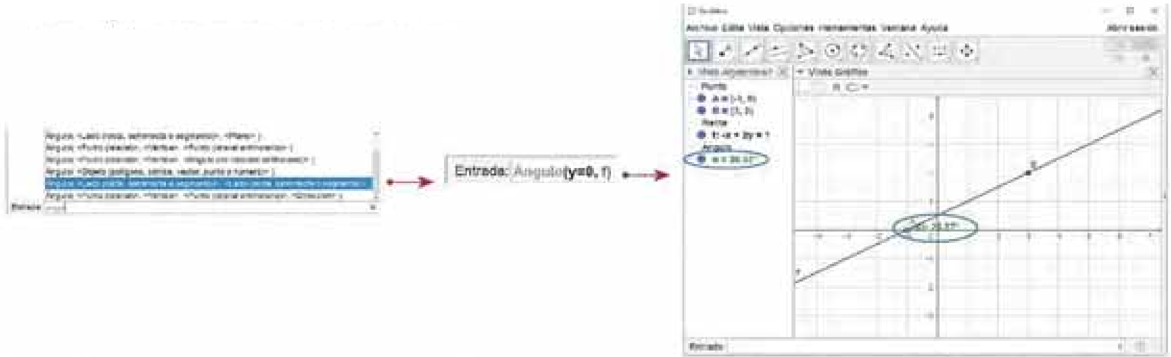
   b) $2x+y-3=0$ に平行な直線を引くためには、直角 ツールの右下の角をクリックし、平行を選択します。グラフィックスビューで、直線 $2x+y-3=0$ をクリックします（平行な直線が現れるのがわかります）。次に、直線を置きたい場所を選択します。それによって、数式ビューの方程式が決まります。

レッスン 4

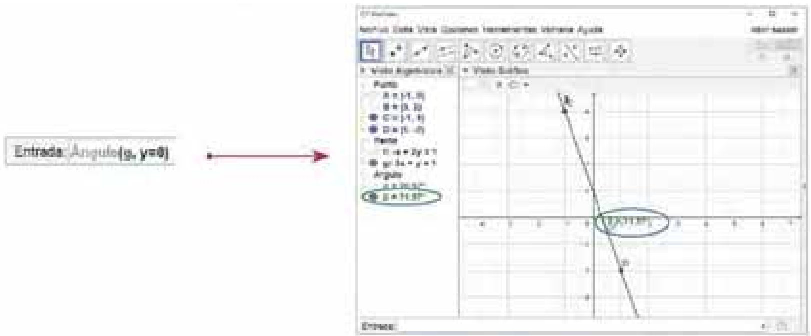
直線の傾斜角

5. 傾斜角を求めるためには、直線の傾きを考慮に入れなければなりません。

a) 正の傾き：　$x-2y+1=0$のグラフを描きます。入力バーに角度を記入し、リストで角度（< 辺 (直線、半直線または線分) >、< 辺 (直線、半直線または線分) > ）を選択します。< 辺 (直線、半直線または線分) > の部分に、まず y=0 を記入し、次に、方程式の前に数式レビューに表示される文字を記入します。



b) 負の傾き：$3x+y-1=0$のグラフを描きます。角度（< 辺 (直線、半直線または線分) >、< 辺 (直線、半直線または線分) >）コマンドを使い、まず、方程式の数式レビューに表示される文字を入力し、次に y=0 を入力します。



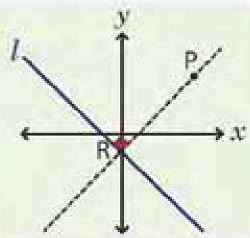
GeoGebra が、直線 $3x+y-1=0$ から x 軸の正の部分に向かって測ったた角度を表示するのを見てください。よって、直線の傾斜角は、180° からコマンドで得た角度を引いた差に等しくなります。

課題

1. 座標軸との交点、2 直線の交点、平行な直線、直角に交わる直線に関する授業 3.1 から授業 3.5 までの問題の解答を確認しましょう。

2. 直線 l：$y=-3x+2$ と点 P(−2, −1) を使って、点 P から直線 l までの距離を求めるために、GeoGebra を用いたやり方を明らかにしましょう。

l_1が P を通る直線 l に直角に交わる直線であるなら、R は l と l_1 の交点です。よって、$d(\mathrm{P}, l)$ を求めるのは、$d(\mathrm{P, R})$を求めるのに等しいです。



3. 直線 f：$x-y-5=0$ と g：$6x-y-21=0$ が与えられているとき、2 直線がなす角を求めるために、GeoGebraを使ったやり方を明らかにしましょう。

達成の目安

4.2 数学ソフトウェアを使って、2 直線の交点の座標を求める、傾斜角と 2 直線がなす角を計算する、また、平行な直線または直角に交わる直線を作成する。

学習の流れ

今回は、 平行、直角、2 直線がなす角など、レッスン3で使用した一部の概念について、GeoGebraで学習します。

ねらい

「課題」の 2 と 3 によって、生徒は GeoGebraで問題を解くためのプロセスを記述することができます。

解答：

1. 授業 3.1：1 については、各問において与えられた直線をグラフで表示し、点ツールで交点を選択し、次に、グラフ化された直線と x 軸を選択します。

授業 3.2：1 については、各問において与えられた直線をグラフで表示し、点ツールで交点を選択し、次に、グラフ化された直線と y 軸を選択します。
2 については、同じやり方を続けます。直線をグラフで表示し、上記で実施したステップを用い、交点を求めます。

授業 3.3：1 については、与えられた直線をグラフで表示し、交点ツールを使用します。
3 においては、与えられた直線をグラフ化し、平行であることを見るだけで十分です。また、交点ツールを使うこともできます。

授業 3.4：1 については、各問で、与えられた直線をグラフで表示します。交点ツールを使用することができます。直線間に交点が存在しないのであれば、2 直線は平行です。2 については、与えられた直線と示された点をグラフで表示し、平行ツールを使用し、グラフィックスビューで点と直線を選択すると、求めた直線のグラフが表示されます。

授業 3.5：1： 各問に関して、与えられた直線のグラフを表示した後、角ツールを使い、直線上でクリックすると、2直線がなす角が図上に表示されます。
2：各問に関して、与えられた直線と点を図上に表示します。直角ツールを使用し、直線と点を選択すると、求める直線のグラフが表示されます。

2. 直線と点 P を図上に表示します。直角ツールを使用し、直線と点を選択すると、点 P を通る直線 l に直角に交わる直線のグラフが表示されます。直線 l とこれに直角に交わる直線との交点を求めます。P と交点との距離を、線分ツールを用いて、これらの 2 点を結ぶ線分を図上に表示し、求めることができます。あるいは、入力バーに 距離 (P, Q) を入力することもできます。ここでQ は、直線とそれに直角に交わる直線との交点です。

3. 直線を入力バーに入力して、直線のグラフを描き、角ツールを選択し、与えられた直線上でクリックします。