ユニット3：2次曲線

このユニットのねらい

４つの2次曲線それぞれがどのような方程式になるかを考え、分析することで、それぞれが持つ構造、要素、性質を定義し、様々な科学分野における応用問題を解くことができるようになることを目指します。

関連と発展

中学３年	高校１年	高校２年
ユニット４：２次関数の式 $y = ax^2 + c$ **(9°)** • 関数$y = ax^2$ • 関数$y = ax^2 + c$	**ユニット４：実関数** • 関数の定義 • ２次関数 • ２次関数の応用 • その他の関数 • GeoGebraを使った演習	**ユニット２：直線** • 点と切片 • 直線 • 直線間の相対位置 • GeoGebraを使った演習
		ユニット３：2次曲線 • 放物線 • 円 • 楕円 • 双曲線 • GeoGebraを使った演習

ユニット学習計画

レッスン	時間	授業
1. 放物線	1	1. 方程式の軌跡
	1	2. 軌跡の方程式
	1	3. 放物線の導入
	1	4. 放物線
	1	5. 平行移動
	1	6. 平方完成の手順
	1	7. 3.5 放物線の方程式（一般形）
	1	8. 直線と放物線
	1	9. パラメータ
	1	10. 復習問題
	1	11. 放物線の応用
	1	12. 復習問題
	2	1学期の期末テスト
2. 円	1	1. 円
	1	2. 円の平行移動
	1	3. 円の方程式（一般形）
	1	4. 円の接線

レッスン	時間	授業
	1	5. 円の割線
	1	6. 復習問題
	1	7. 円の応用
	1	レッスン1およびレッスン2のテスト
3.楕円	1	1. 楕円の導入
	1	2. 楕円
	1	3. 楕円の要素と性質
	1	4. 楕円の平行移動
	1	5. 楕円の方程式（一般形）
	1	6. 復習問題
	2	7. 楕円の応用
4.双曲線	1	1. 双曲線の導入
	1	2. 双曲線
	1	3. 双曲線の要素と性質
	1	4. 双曲線の平行移動
	1	5. 双曲線の方程式（一般形）
	1	6. 復習問題
	2	7. 双曲線の応用
	2	8. ユニット問題

レッスン	時間	授業
5.GeoGebraを使った演習	1	1. 2次曲線の作成
	1	2. 2 次関数（一般形）のグラフ
	1	3. 2次曲線の性質
	1	4. 円錐形の軌跡に関する問題
	1	第3課および第4課のテスト

全41コマ + 1 学期期末テスト + レッスン 1 およびレッスン2 のテスト + レッスン 3 及びレッスン4 のテスト

各レッスンの要点

レッスン 1：放物線

軌跡の定義からスタートし、数式と座標軸に示された軌跡を結びつける問題に少し取り組みながら、一般的な平行移動と平方完成の手順を学びます。放物線の内容に取り組む際は、まず放物線の定義から入り、その後要素を確認し、最終的に焦点の反射特性を利用した応用問題に取り組んだのち、さらに、放物線の割線と接線の学習を進めます。このユニットでは、平方完成の方法が最もシンプルで一度の計算で解を得ることができる放物線の方程式（一般形）を扱います。

レッスン 2：円

この軌跡は生徒たちは図形として学習済みです。この課では、条件を基に座標平面に描いた結果からその定義を分析することで方程式を組み立てます。そして、放物線を学習した時とほぼ同じ方法で他のテーマについても取り組みます。さらに、とても実用的でありながら、証明がやや複雑な、接点と接線について一通り学習し、最終的にはこの課やこのユニット全体を通して何度も使うことになる 2 次関数の式を正しく活用できる力を養う必要があります。

レッスン 3：楕円

この課の学習を始めるにあたっては、まず日常に使用している物の形状から、生徒が楕円という形状に慣れ親しみ、その定理と関連づけて覚えることができるように導入を行います。その後、楕円の定義や要素を扱い、最終的に楕円の持つ形状や焦点の反射特性を扱った応用問題に取り組みます。

レッスン 4：双曲線

ほぼ全ての2次曲線について学んだ後、双曲線に取り組みます。双曲線はそれまでに扱った図形に比べるとやや複雑ですが、今までとよく似た方法で、課題の取組みを通して生徒が双曲線の図形に慣れ親しみ、その公理と結びつけて覚えられるように導入を行います。そして、双曲線の定義や要素、性質について学んだのち、今まで同様、双曲線の形状や焦点の反射特性などを扱った応用問題に取り組みます。この課では、このユニットの各課でこれまで学習してきた内容に関する問題を扱い、学習内容の理解の定着を図ります。

レッスン 5 ：GeoGebra を使った演習

2次曲線に関する学習を全て終えた後、2次曲線のグラフ問題の練習にとても適しているとされる GeoGebra の各種ツールを用いた演習を行います。2次曲線の応用問題を復習し、論理的方法で導き出された結果を視覚化する演習に取り組みます。

レッスン 1 放物線

1.1 方程式の軌跡

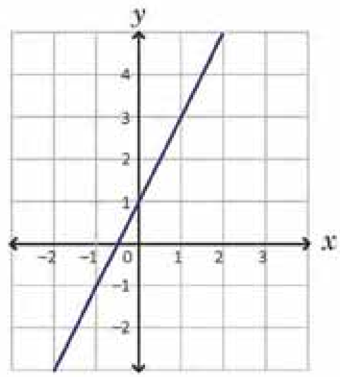
導入問題

次の方程式の条件を満たす点の集合を座標平面にグラフ化しなさい。

a) $y = 2x + 1$　　　b) $y = x^2 - 1$

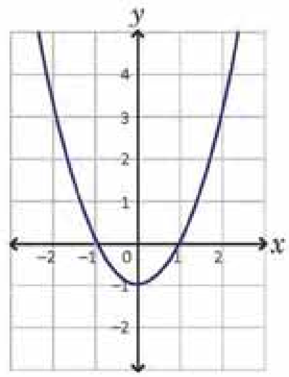
解法

a) これは 1 次関数の式で、座標グラフは以下になります。



したがって、$y = 2x + 1$ の条件を満たす点の集合は直線となります。

b) これは 2 次関数の式で、座標グラフは以下になります。



したがって、$y = x^2 - 1$ の条件を満たす点の集合は放物線となります。

定義

ある方程式の**軌跡**はその方程式の条件を満たす点の集合であり、特定の場合には、点や直線、円、放物線などと呼ばれる形になることがあります。

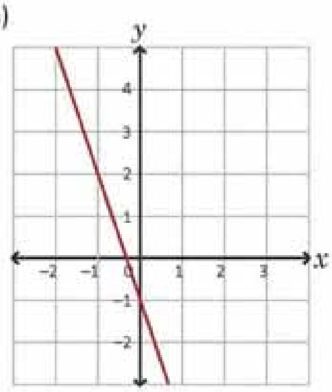
問題

1. それぞれの方程式の軌跡を座標平面に描きなさい

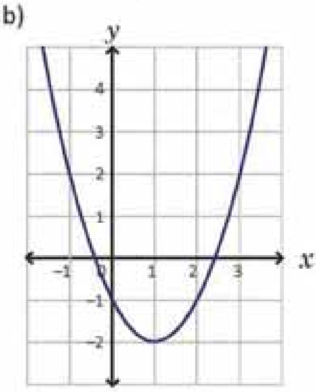
a) $y = x - 4$　　　b) $y = -3x + 2$　　　c) $y = x^2 - 3$

2. それぞれの図が示す軌跡の方程式を求めなさい。

a)



b)



達成の目安

1.1 方程式の軌跡を描きなさい。

学習の流れ

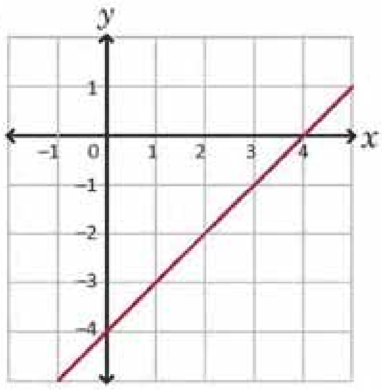
生徒たちは、前ユニットで直線について学習した際、座標平面に様々な図形を作成しているので、その中からなじみのある形を使って解析幾何学の概念を導入します。

ねらい

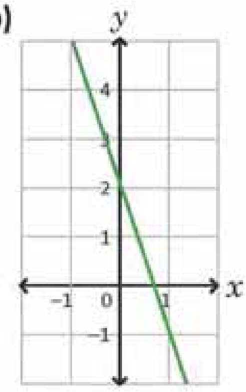
「導入問題」では、方程式の「軌跡」の概念を導入するために、直線や放物線など生徒達が既に学んだ関数の方程式を使います。

解答：

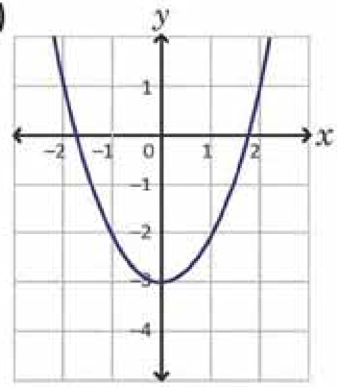
1a)



1b)



1c)



2a) 点 (0、–1)、(–1、2) を通る直線なので、

斜線の式は $\frac{2-(-1)}{-1-0} = -3$

y 軸との交点は –1

したがって、方程式は

$$y = -3x \quad \text{です。}$$

問 2 では、生徒が別の方程式を作る可能性もあります。例えば、b の設問では、二項式を展開したり、展開せず解答例のようにしたままである可能性があります。この問題では、あらかじめ教師が特定の形で表すように指示を与えていない限り、いずれの形式で表しても正解とみなすことができます。

2b) 右に 1、下に 2 移動した放物線になります。この放物線の頂点が原点を通る場合の式は $y = ax^2$ となり、点 (1、 1) を通ることになるので、以下となる必要があります。

$$1 = a(1)^2$$
$$1 = a$$

したがって、この軌跡の方程式は、放物線 $y = x^2$ が右に1、下に2移動したものであることから、$y + 2 = (x-1)^2$、つまり、$y = (x-1)^2 - 2$ となります。

1.2 軌跡の方程式*

導入問題

点 A (0、2) までの距離と点 B(4、0) までの距離が等しい点が軌跡となる方程式を作りなさい。

解法

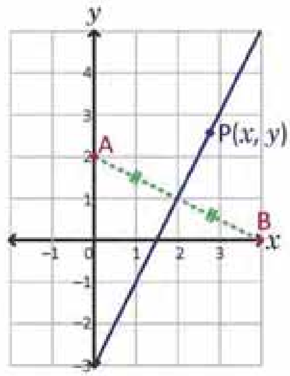
座標平面に点Aと点Bをとります。

少なくとも切片 AB の中間点は条件を満たす点です。

条件を満たす点 P(*x*, *y*) と2つの点の間の距離を利用します。

$$d(\mathrm{A}, \mathrm{P}) = d(\mathrm{P}, \mathrm{B})$$
$$\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2} \quad \text{2乗し、}$$
$$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-4y+4=\cancel{x^2}-8x+16+\cancel{y^2} \quad \text{整理し、}$$
$$8x-4y-12=0.$$

したがって、この軌跡の方程式は、$2x-y-3=0$ となり、そのグラフは、切片AB の中間点を通る傾き（線分 AB の垂直二等分線）であることが分かります。



2つの直線が垂直に交わっていることを確認してもいいです。

まとめ

特定の条件をもつ軌跡の方程式を得るには、点と点との距離や、点と線との距離などをヒントにしながら与えられた条件を満たす方程式を考えます。

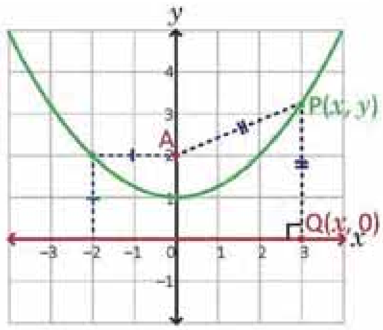
例

x 軸までの距離と点 A(0, 2) までの距離とが常に等しくなる点を軌跡とする方程式を求めなさい。

まず、条件を満たす点の1つは点 A と *x* 軸の間の中間点です。

条件を満たす点 P(*x*, *y*) の式を考えて、

$$d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = d(\mathrm{A}, \mathrm{P})$$
$$|y| = \sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2} \quad \text{2乗し、}$$
$$\cancel{y^2} = x^2+\cancel{y^2}-4y+4 \quad \text{整理し、}$$
$$x^2-4y+4=0.$$



そして、このような式にすることができます。 $y=\frac{1}{4}x^2+1$

したがって、この軌跡の方程式は、$x^2-4y+4=0$ となり、放物線であることが分かります。

問題

1. 点 A(2, −3) までの距離と点 B(0, −1) までの距離が同じになる点を軌跡とする方程式を求めなさい。
2. 直線 $y=-1$ までの距離が、常に点 A(0, 1) までの距離と同じになる点を軌跡とする方程式を求めなさい。
3. *y* 軸からの距離が2になる点を軌跡とする方程式を求めなさい。
4. *x* 軸からも *y* 軸からも同じ距離になる点を軌跡とする方程式を求めなさい。

達成の目安

1.2 提示された条件の軌跡となる方程式を求めなさい。

学習の流れ

生徒たちはここまでの学習で軌跡がどういうものかを理解できているので、座標平面にグラフを書いて方程式を解く問題に取り組むことができるでしょう。この授業では教師が生徒に対し、より多くのヒントを出す必要があるため、*マークをつけています。

ねらい

「例」は「導入問題」と似ているので、2つの点の間の距離または点と直線の間の距離を利用するよう促します。問題が解けたら、条件を指定した放物線の方程式（標準形）の問題に進みます。

解答：

1. 条件を満たす点 P(x, y) と 2 つの点の間の距離を利用して、

$$\begin{aligned} d(\mathrm{A, P}) &= d(\mathrm{P, B}) \\ \sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2} &= \sqrt{(x-0)^2+(y+1)^2} \quad \text{両辺それぞれを2乗し、} \\ \cancel{x^2}+\cancel{y^2}-4x+4+6y+9 &= \cancel{x^2}+\cancel{y^2}+2y+1 \\ -4x+4y+12 &= 0 \quad \text{−4で割り、} \\ x-y-3 &= 0. \end{aligned}$$

2. 条件を満たす点 P(x, y) と2つの点の間の距離と点から直線までの距離を利用して、

$$\begin{aligned} d(\mathrm{P}, l) &= d(\mathrm{A, P}) \quad l\text{: 直線 } y=-1, \\ |y-(-1)| &= \sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2} \quad \text{両辺それぞれを2乗し、} \\ \cancel{y^2}+2y+1 &= x^2+\cancel{y^2}-2y+1 \\ x^2-4y &= 0. \end{aligned}$$

3. 条件を満たす点 P(x, y) と点から直線までの距離を使って、

$$\begin{aligned} d(\mathrm{P, l}) &= 2 \\ |x-0| &= 2 \\ |x| &= 2 \\ x = 2 \text{ または } x &= -2 \end{aligned}$$

したがって、これは $x = 2$ または $x = -2$ の線上にある点です。

4. 条件を満たす点 P(x, y) と点から直線までの距離を使って、

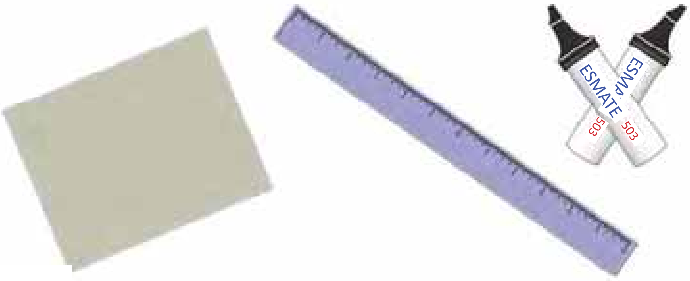
$$\begin{aligned} d(\mathrm{P}, l_1) &= d(\mathrm{P}, l_2) \quad l_1\text{： } x\text{ 軸、}l_2\text{： } y\text{ 軸} \\ |x| &= |y| \\ x = y \text{ または } x &= -y \end{aligned}$$

したがって、これは $y = x$ または $y = -x$ の線上になる点です。

1.3 導入方法

用意する物

- トレーシングペーパー
- マジック
- 定規



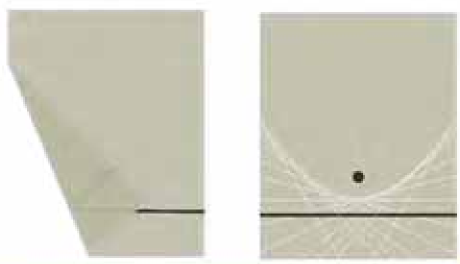
課題

1. 用紙の下の方に、用紙の幅の広い方の辺に平行する直線を一本引きなさい。

2. その直線の上の方で、紙の中心線上に点を打ちなさい。

3. 直線の端の部分が記入した点と重なるように用紙を折ります。

4. 直線の手前の部分から最後の部分まで同じことを繰り返しなさい。できた形を分析しなさい。



定義

用紙を折り曲げて出来た折り目にによってできた形が**放物線**です。その放物線上の各点において、最初につけた点までの距離と描きこんだ直線までの距離が等しくなっていることに注目しなさい。

問

1. 描きこんだ直線から点の位置が離れると放物線はどうなりますか。
2. 直線の下に点を描きこんだ場合は、どうなりますか。
3. 直線を垂直方向に引いて、その右または左に点を描きこんだ場合はどうなりますか。
4. 放物線になる点において点からの距離と直線からの距離が等しくなる理由を考えなさい。

達成の目安

1.3 放物線の軌跡を特定しなさい。

学習の流れ

生徒たちはここまでの学習で与えられた軌跡から方程式を得ることができるようになっているので、定義を基に放物線になるグラフを作成できるでしょう。

ねらい

この導入を行うことで、条件から放物線を連想できるようになることが期待されます。これにより、次のレッスンで放物線の方程式(標準形)を求めた際に、方程式（標準形）によりその軌跡が明確になると気づくことができるようになります。

用意する物

授業では、トレーシングペーパー、マジック、定規を使います。（各自それぞれ1つずつ必要です）

解答：

1. 折り目の傾きは線上の点からの距離が離れていくほど小さく水平に近い形になり、より開いた形の放物線を描きます。

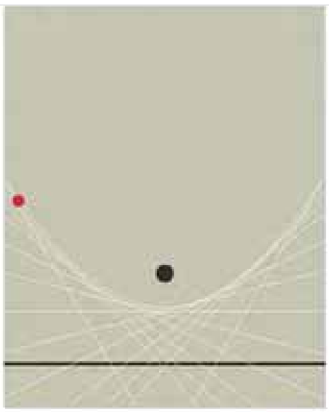
2. 放物線を描きますが、今度は折り目が逆さまになるので、下向きに開いた放物線になります。

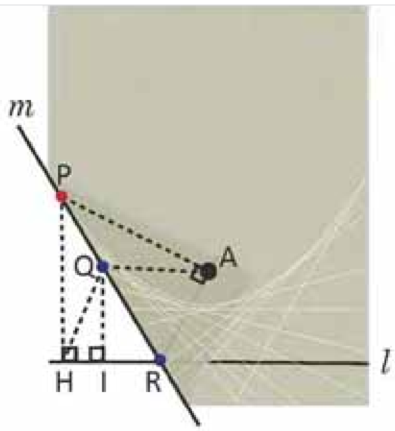
3. 折り目は垂直方向から傾いて水平方向に広がっていくので、右向きもしくは左向きに開いた放物線になります。

4. 書き込まれた直線 l と折り目 m との交点をR、点A に対応する点をHとした場合、折り目 m の線対称でRA = RH が成り立ち、点Hを通って 直線 l と垂直に交差する線と折り目 m との交点を P とした場合、折り曲げることで線が重なることから、$d(P, A) = d(P, H) = d(P, l)$ が成り立ちます。

   もし折り目（直線 m）の他の点をQとした場合、$d(Q, A) = d(Q, H) > d(Q, I) = d(Q, l)$ が成り立ちます。

   したがって、点 P は直線 m の中で唯一点 A と直線 l から等距離にある曲線上にある点です（線 m は点 P の接点をもつ円の接線です）。もちろんこの曲線は折り目を繋げてできる曲線です。





1.4 放物線*

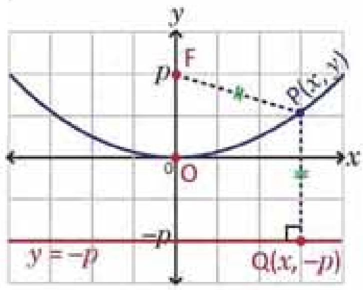
導入問題

直線 $y=-p$ までの距離と、点 F(0, p) までの距離が等しい軌跡をもつ方程式を求めなさい。

解法

一般的には、条件を満たす点 P(x, y) をとり、1点から直線までの距離と、2つの点の間の距離を使います。

直線 $y=-p$ は水平なので、$d(\mathrm{P, Q}) = |y-(-p)|$
等式 $d(\mathrm{P, Q}) = d(\mathrm{P, F})$ にあてはめて、



$$|y-(-p)| = \sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}$$ 2乗し、
$$|y+p|^2 = x^2+(y-p)^2$$ 展開し、
$$y^2+2yp+p^2 = x^2+y^2-2yp+p^2$$ 整理し、
$$4yp = x^2$$ y を取り出し、
$$y = \frac{1}{4p}x^2.$$

したがって、この軌跡は $a=\frac{1}{4p}$ の放物線 $y=ax^2$です。

定義

放物線**の位置を特定する方程式は** $y=\frac{1}{4p}x^2$ と表します。

この方程式では放物線の**頂点** が常に原点を通ります。
p の値をパラメータといいます。

点 F(0、p) は放物線の**焦点**といい、直線 $y=-p$ は放物線の**準線**といいます。
準線と垂直に交わり放物線の焦点を通る直線を**軸**といいます。

パラメータ p が負の数である式は下に向かって開いた放物線となります。

準線が $x=-p$ の垂線である場合、放物線は水平型で、方程式は次のように表します。

$$x=\frac{1}{4p}y^2$$

例 1

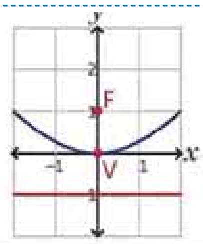
焦点 F(0, −3) 、準線 $y=3$ の放物線の方程式を求めなさい。

$p=-3$であることから、放物線の方程式は $y=\frac{1}{4(-3)}x^2$ となり、計算により $y=-\frac{1}{12}x^2$

したがって、方程式は $y=-\frac{1}{12}x^2$ となり、下に向かって開いた放物線になります。

例 2

放物線 $y=\frac{1}{4}x^2$ の焦点、準線、頂点を求め、座標平面上でそれぞれの位置を特定し、グラフ化しなさい。



ただし、$\frac{1}{4}=\frac{1}{4p}$ 、つまり $p=1$ とする。

焦点：F(0, 1)　準線： $y=-1$　頂点：V(0, 0)

問題

1. 各問にある焦点と準線をもつ方程式を求め、放物線グラフを作りなさい。

a) F(0, 2), $y=-2$　b) F(0, −1), $y=1$　c) F$\left(0, \frac{1}{8}\right)$, $y=-\frac{1}{8}$　d) F$\left(0, -\frac{1}{16}\right)$, $y=\frac{1}{16}$　e) F(2, 0), $x=-2$

2. 次の焦点と頂点の座標と準線の方程式を求め、座標平面に放物線グラフを作りなさい。

a) $y=2x^2$　b) $y=-x^2$　c) $y=\frac{1}{8}x^2$　d) $y=-\frac{1}{4}x^2$　e) $x=2y^2$

達成の目安

1.4 焦点と準線を基に、頂点を原点とする放物線の式を求めてグラフで表しなさい。

学習の流れ

放物線の定義とグラフの関係が理解できたら、与えられた条件をもとに方程式を作る練習をします。この授業は教師が生徒に対し、より多くのヒントを出す必要があるため、*マークをつけています。

ねらい

「導入問題」では、放物線の条件を提示して、その方程式を求めることができるようにしています。

解答：

1a) $p = 2$なので方程式は、
$y = \frac{1}{4(2)}x^2 = \frac{1}{8}x^2.$

1b) $p = -1$なので方程式は、 $y = \frac{1}{4(-1)}x^2 = -\frac{1}{4}x^2.$

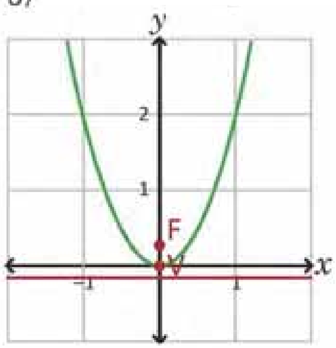
1c) $p = \frac{1}{8}$なので、方程式は $y = \frac{1}{4\left(\frac{1}{8}\right)}x^2 = \frac{1}{\frac{1}{2}}x^2 = 2x^2.$

1d) $p = -\frac{1}{16}$ なので、方程式は、
$y = \frac{1}{4\left(-\frac{1}{16}\right)}x^2 = -\frac{1}{\frac{1}{4}}x^2 = -4x^2.$

1e) $p = 2$で、直線が垂線で、点がその垂線の右にあることから、
xとyを式にあてはめて $y = \frac{1}{4p}x^2$ 、放物線の方程式は $x = \frac{1}{4(2)}y^2 = \frac{1}{8}y^2$ となります。

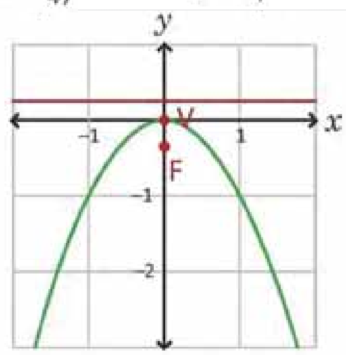
2a) p: $2 = \frac{1}{4p}$ の計算をし、$p = \frac{1}{8}$

焦点：$F\left(0, \frac{1}{8}\right)$ 準線：$y = -\frac{1}{8}$ 頂点：$V(0, 0)$



2b) p: $-1 = \frac{1}{4p}$ の計算をし、 $p = -\frac{1}{4}$

焦点：$F\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ 準線：$y = \frac{1}{4}$ 頂点：$V(0, 0)$

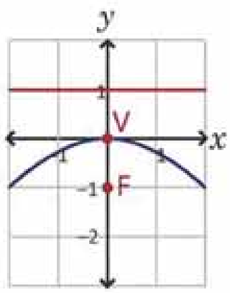


2d) p: $-\frac{1}{4} = \frac{1}{4p}$ の計算をし、$p = -1$

焦点：$F(0, -1)$ 準線： $y = 1$ 頂点：$V(0, 0)$

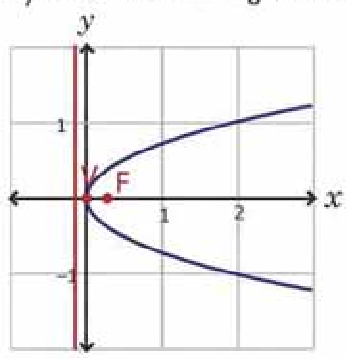
2e) p: $2 = \frac{1}{4p}$ の計算をし、 $p = \frac{1}{8}$

焦点：$\left(\frac{1}{8}, 0\right)$ 準線：$x = -\frac{1}{8}$ 頂点：$V(0, 0)$



問c は、問d とほぼ同じ方法で解くことができ、係数が正の数なので、その分簡単で、 要素は、

$F(0, 2)$、$y = -2$, $V(0, 0)$です。



レッスン 1

1.5 平行移動

導入問題

$y = (x - 2)^2 + 1$ の軌跡を座標平面上で垂直方向と水平方向に移動させなさい。焦点、頂点の座標を求め、準線の方程式を作りなさい。

関数 $f(x - h) + k$ のグラフは、関数 $f(x)$ が右に h、上に k 移動したものです。

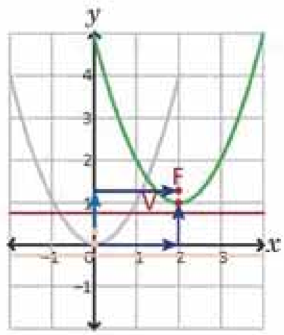
解法

関数 $y = (x - 2)^2 + 1$ のグラフは、関数 $y = x^2$ のグラフが右に2、上に 1 移動したものです。

$y = x^2$: $1 = \frac{1}{4p}$ を計算して p を特定します。$p = \frac{1}{4}$

そして、頂点、焦点の座標、準線の方程式は同じだけ移動します。

方程式	$y = x^2$	$y = (x - 2)^2 + 1$
焦点	$F\left(0, \frac{1}{4}\right)$	$F\left(0 + 2, \frac{1}{4} + 1\right) = F\left(2, \frac{5}{4}\right)$
頂点	$V(0, 0)$	$V(0 + 2, 0 + 1) = V(2, 1)$
準線	$y = -\frac{1}{4}$	$y = \frac{3}{4}$



一般的に

図形を水平方向に h 分移動させるには、変数 x を $x - h$ に置き換え、図形を垂直に k 分移動させるには、変数 y を $y - k$ に置き換えます。

したがって、放物線 $y = \frac{1}{4p}x^2$ が水平に h、垂直に k 移動した式は、$y - k = \frac{1}{4p}(x - h)^2$ となります。

移動した放物線 $y - k = \frac{1}{4p}(x - h)^2$ は以下の条件を満たします。

頂点：(h, k)　　焦点：$(h, p + k)$　　準線：$y = -p + k$

例

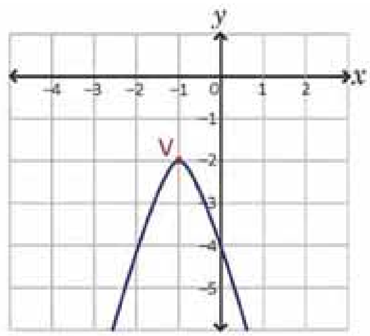
a) 放物線 $y = 2x^2$ を水平方向に -3 移動させ、垂直方向に 1 移動させた時にできる方程式を求めなさい。

x に $x - (-3)$ を代入し、y に $y - 1$ を代入し

$y - 1 = 2(x + 3)^2$、つまり、$y = 2(x + 3)^2 + 1$

b) $y + 2 = -2(x + 1)^2$ の放物線グラフを作成しなさい。

これは $y = -2x^2$ の放物線が水平方向に -1、垂直方向に -2 移動したものなので、右の図になります。



問題

1. 各問にある水平にh、垂直にk移動している方程式を求めなさい。

a) $y = x^2$, $h = 3$, $k = 2$　　b) $y = 3x^2$, $h = -1$, $k = 3$　　c) $y = -x^2$, $h = 1$, $k = -1$

d) $y = -2x^2$, $h = -2$, $k = -1$　　e) $y = 2x^2$, $h = 0$, $k = 3$　　f) $y = -3x^2$, $h = -2$, $k = 0$

2. 以下の方程式の放物線グラフを座標平面に描きなさい。そして焦点、頂点の座標と準線の方程式をそれぞれ求めなさい。

a) $y - 1 = (x - 4)^2$　　b) $y + 2 = 2(x - 3)^2$　　c) $y - 3 = -(x + 1)^2$　　d) $y + 1 = -2(x + 1)^2$

達成の目安

1.5 座標軸に対し平行移動させた放物線の式を作り、グラフを作成しなさい。

学習の流れ

高校 1 年の時に学習した実関数のユニットでは、1つの関数を持つグラフの平行移動を学びました。そこから発展させてあらゆる種類の方程式（必ずしも関数を使った式である必要はありません）の平行移動を学びます。

ねらい

「導入問題」と「例」では、生徒が平行移動を応用させて、放物線グラフを移動させ、焦点や頂点、準線などの点の位置を特定できるようになることを目指します。ここでは、値表を使わない方法でグラフを作成します。

解答：

1a) $y - 2 = (x - 3)^2$ 、よって $y = (x - 3)^2 + 2$

1b) $y - 3 = 3(x - (-1))^2$ 、よって $y = 3(x + 1)^2 + 3$

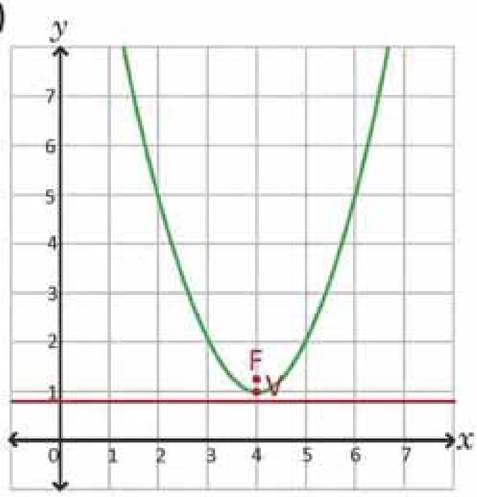
1c) $y - (-1) = -(x - 1)^2$ 、よって $y = -(x - 1)^2 - 1$

1d) $y - (-1) = -2(x - (-2))^2$ 、よって $y = -2(x + 2)^2 - 1$

1e) $y - 3 = 2(x - 0)^2$ 、よって $y = 2x^2 + 3$

1f) $y - 0 = -3(x - (-2))^2$ 、よって $y = -3(x + 2)^2$

2a)



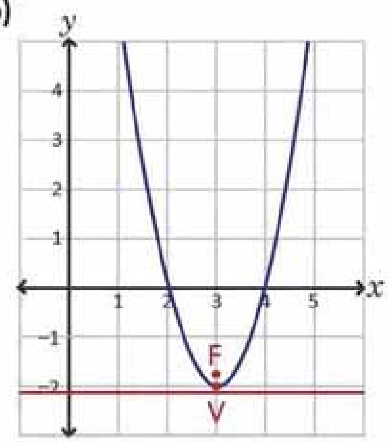
$p = \frac{1}{4}$

$F\left(4, \frac{5}{4}\right)$

$V\ (4, 1)$

$y = \frac{3}{4}$

2b)



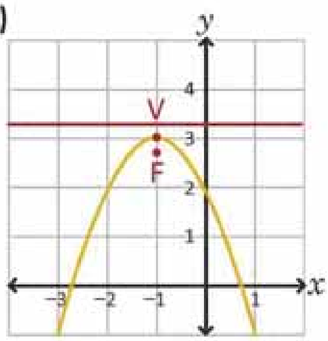
$p = \frac{1}{8}$

$F\left(3, -\frac{15}{8}\right)$

$V\ (3, -2)$

$y = -\frac{17}{8}$

2c)



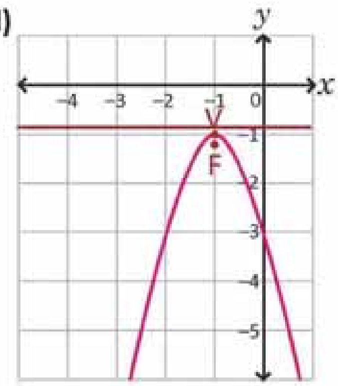
$p = -\frac{1}{4}$

$F\left(-1, \frac{11}{4}\right)$

$V\ (-1, 3)$

$y = \frac{13}{4}$

2d)



$p = -\frac{1}{8}$

$F\left(-1, -\frac{9}{8}\right)$

$V\ (-1, -1)$

$y = -\frac{7}{8}$

1.6 平方完成の手順

導入問題

多項式 $x^2 + 4x$ を $a(x - h)^2 + k$ の形に直しなさい。

解法

代数式の平方完成をするには、代数式を変えないように同じ回数だけ足し算や引き算をします。

$$x^2 + 4x = x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2$$
$$= (x^2 + 4x + 2^2) - 4$$
$$= (x + 2)^2 - 4$$

よって、$x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$

2項式の2乗を展開して、

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

"x"の係数を 2 で割って2乗することで、a^2 が得られます。

$$\left(\frac{2a}{2}\right)^2 = a^2$$

まとめ

代数式に適切な数字を足したり引いたりして完全な平方式に変換することを**平方完成** といい、これは数学問題を解くのに非常に役立つ方法です。

例

次の代数式を平方完成しなさい。

a) $x^2 - 8x$　　b) $x^2 - 4x + 2$　　c) $2x^2 + 12x + 10$　　d) $-3x^2 + 12x - 13$

a) $x^2 - 8x = (x^2 - 8x + 4^2) - 4^2$
$= (x - 4)^2 - 16$

b) $x^2 - 4x + 2 = (x^2 - 4x + 2^2) - 2^2 + 2$
$= (x - 2)^2 - 4 + 2$
$= (x - 2)^2 - 2$

c) $2x^2 + 12x + 10 = 2(x^2 + 6x) + 10$
$= 2(x^2 + 6x + 3^2 - 3^2) + 10$
$= 2[(x + 3)^2 - 9] + 10$
$= 2(x + 3)^2 - 18 + 10$
$= 2(x + 3)^2 - 8$

d) $-3x^2 + 12x - 13 = -3(x^2 - 4x) - 13$
$= -3(x^2 - 4x + 2^2 - 2^2) - 13$
$= -3[(x - 2)^2 - 4] - 13$
$= -3(x - 2)^2 + 12 - 13$
$= -3(x - 2)^2 - 1$

問題

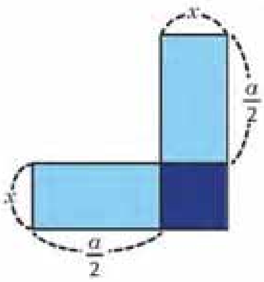
1. 次の代数式を平方完成しなさい。

a) $x^2 + 2x$　　b) $x^2 + 6x$　　c) $x^2 + 8x$　　d) $x^2 - 4x$　　e) $x^2 + 10x + 15$
f) $x^2 - 2x - 1$　　g) $2x^2 + 8x + 6$　　h) $3x^2 - 6x - 2$　　i) $-x^2 - 4x - 4$　　j) $-2x^2 + 8x + 3$

2. 右の図を使って、

a) 図の面積を求めなさい。

b) 正方形を作る場合に追加で必要となる長方形の面積を求めなさい。



達成の目安

1.6 代数式の平方完成をしなさい。

学習の流れ

平方完成の手順は中学 3 年次以降たくさんのユニットで扱ってきましたが、特に、このユニットでは頻繁に活用することになるので、正しく処理できるよう、常にその手順を復習する必要があります。

ねらい

「導入問題」では、次の授業で生徒が同じ方法を使えばよいと気付くことができるよう、移動した放物線を表す方程式（一般形）を扱います。問 2 は正方形に代数をあてはめてる問題です。

解答：

1a) $x^2 + 2x + (1)^2 - (1)^2 = (x + 1)^2 - 1$

1b) $x^2 + 6x + (3)^2 - (3)^2 = (x + 3)^2 - 9$

1c) $x^2 + 8x + (4)^2 - (4)^2 = (x + 4)^2 - 16$

1d) $x^2 - 4x + (2)^2 - (2)^2 = (x - 2)^2 - 4$

1e) $x^2 + 10x + (5)^2 - (5)^2 + 15 = (x + 5)^2 - 10$

1f) $x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2 - 1 = (x - 1)^2 - 2$

1g) $2x^2 + 8x + 6 = 2(x^2 + 4x + (2)^2 - (2)^2) + 6 = 2(x + 2)^2 - 8 + 6 = 2(x + 2)^2 - 2$

1h) $3x^2 - 6x - 2 = 3(x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2) - 2 = 3(x - 1)^2 - 3 - 2 = 3(x - 1)^2 - 5$

1i) $-x^2 - 4x - 4 = -(x^2 + 4x + (2)^2 - (2)^2) - 4 = -(x + 2)^2 + 4 - 4 = -(x + 2)^2$

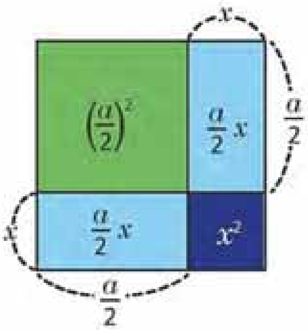
1j) $-2x^2 + 8x + 3 = -2(x^2 - 4x + (2)^2 - (2)^2) + 3 = -2(x - 2)^2 + 8 + 3 = -2(x - 2)^2 + 11$

2a) 青色の四角形の面積は x^2で、水色の長方形の面積は $\frac{a}{2}x$ なので、この図の面積は、

$$x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{a}{2}x = x^2 + ax.$$

2b) 一辺が $\frac{a}{2}$ の正方形の面積を足す必要があるので、全体の面積は、一片が $x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ で、もう一方が大きい正方形の面積、つまり $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2$ となるので、以下の式が成り立ちます。

$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2.$$

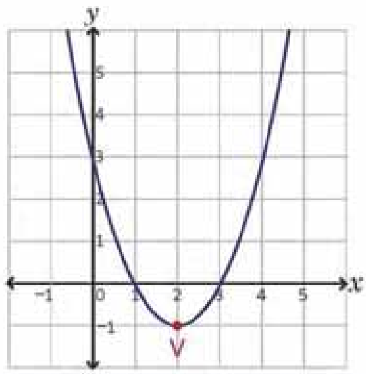


1.7 放物線の方程式（一般形）

導入問題

$-x^2 + 4x - 3 + y = 0$ の軌跡を表しなさい。

解法



y を取り出して、x を平方完成した式を作ります。

$$y = x^2 - 4x + 3$$
$$y = (x^2 - 4x + 2^2) - 2^2 + 3$$
$$y = (x - 2)^2 - 4 + 3$$
$$y = (x - 2)^2 - 1$$

別の式で表すと、$y - (-1) = (x - 2)^2$

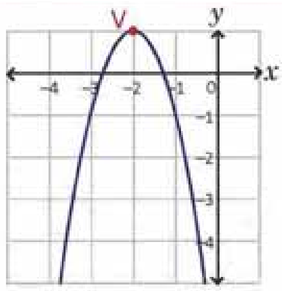
よって、$y - x^2 + 4x - 3 = 0$ の方程式は、$y = x^2$ の放物線グラフを右に 2、下に 1 移動させたグラフになります。

まとめ

放物線は $y - k = \frac{1}{4p}(x - h)^2$ の方程式を平方完成させて、右辺が 0 の等式で表すこともできます。

一般的に、$ax^2 + bx + cy + d = 0$ の形で表される方程式を垂直移動と水平移動させるには、平方完成をして $y - k = \frac{1}{4p}(x - h)^2$ の形の式に直します。$ax^2 + bx + cy + d = 0$ の形で表す方程式を放物線の方程式（一般形）**と言います。**

例



$2x^2 + 8x + 7 + y = 0$ の放物線グラフを作成しなさい。頂点、焦点の座標と準線を求めなさい。

y を取り出して、x を平方完成した式を作ります。

$$y = -2x^2 - 8x - 7$$
$$y = -2(x^2 + 4x) - 7$$
$$y = -2(x^2 + 4x + 2^2 - 2^2) - 7$$
$$y = -2(x + 2)^2 + 8 - 7$$
$$y = -2(x + 2)^2 + 1$$

したがって、これは、$y = -2x^2$ の放物線グラフを左に1、上に1移動させたグラフになります。

$-2 = \frac{1}{4p}$ を計算して p を特定します。$p = -\frac{1}{8}$

したがって、

方程式	$y = -2x^2$	$y = -2(x + 2)^2 + 1$
焦点	$F\left(0, -\frac{1}{8}\right)$	$F\left(-2, \frac{7}{8}\right)$
頂点	V (0, 0)	V (−2, 1)
準線	$y = \frac{1}{8}$	$y = \frac{9}{8}$

問題

各問の頂点の座標を求め、それぞれ放物線グラフを作成しなさい。

a) $x^2 + 2x + 2 - y = 0$　b) $x^2 - 4x + 3 - y = 0$　c) $x^2 + 4x + 5 + y = 0$　d) $-x^2 + 2x + 1 - y = 0$

e) $-2x^2 - 12x - 20 + y = 0$　f) $2x^2 - 8x + 5 + y = 0$　g) $3x^2 - 6x + 5 + y = 0$　h) $3x^2 + 6x + y + 6 = 0$

達成の目安

1.7 放物線の方程式（一般形）をもとに、頂点の座標を求め、放物線グラフを作成しなさい。

学習の流れ

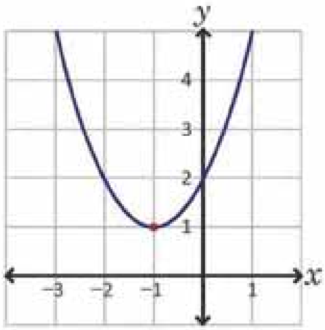
平方完成の方法を復習したら、放物線の方程式（一般形）を使って頂点の座標を求めて座標平面にグラフを描くことができます。

ねらい

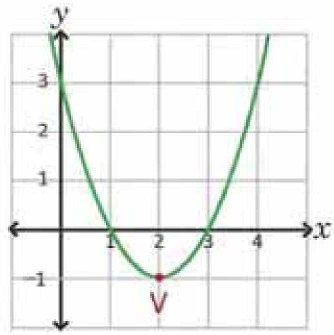
「導入問題」と前回と今回の授業で扱う「例」では、座標平面の 4 つの方向にそれぞれ移動させた放物線を扱い、その中には、座標軸を超えて移動させる問題もいくつかあります。

解答：

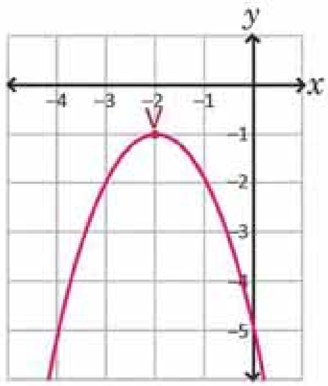
a) $y = x^2 + 2x + (1)^2 - (1)^2 + 2 = (x + 1)^2 + 1$



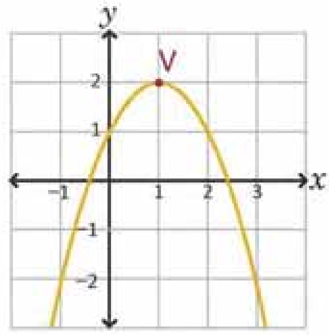
b) $y = x^2 - 4x + (2)^2 - (2)^2 + 3 = (x - 2)^2 - 1$



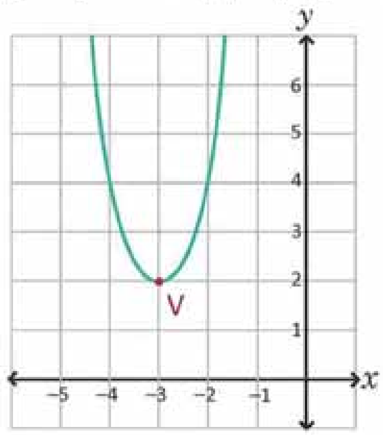
c) $y = -x^2 - 4x - (2)^2 + (2)^2 - 5 = -(x + 2)^2 - 1$



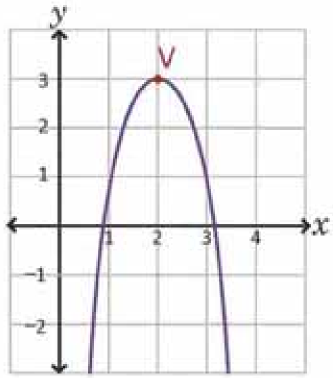
d) $y = -x^2 + 2x - (1)^2 + (1)^2 + 1 = -(x - 1)^2 + 2$



e) $y = 2[x^2 + 6x + (3)^2 - (3)^2] + 20 = 2(x + 3)^2 + 2$



f) $y = -2[x^2 - 4x + (2)^2 - (2)^2] - 5 = -2(x - 2)^2 + 3$



g) $y = -3[x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2] - 5= -3(x - 1)^2 - 2$

h) $y = -3[x^2 + 2x + (1)^2 - (1)^2] - 6 = -3(x + 1)^2 - 3$

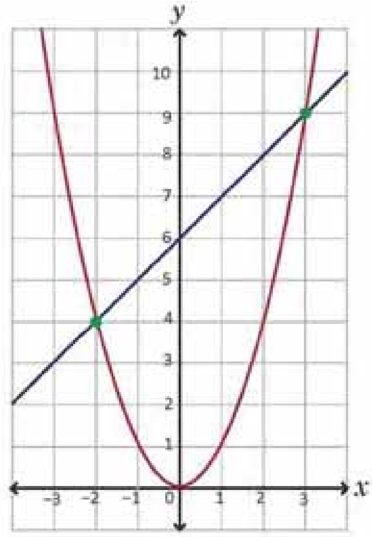
1.8 直線と放物線

導入問題

放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x + 6$ の交点の座標を求めなさい。

解法

ある点で2つのグラフが交わっている場合、その点は直線の方程式と放物線の方程式のどちらの条件も満たしていることになります。そのため、交点を求めるということは、連立方程式を解くことを意味します。



$$\begin{cases} y = x^2 & \text{------------ (1)} \\ y = x + 6 & \text{------------ (2)} \end{cases}$$

代入する方法を使って、

$$x^2 = x + 6 \quad \text{右辺をゼロの等式に直し、}$$
$$x^2 - x - 6 = 0 \quad \text{因数分解し、}$$
$$(x-3)(x+2) = 0 \quad \text{2 次関数の式をといて、}$$
$$x = 3 \text{ か } x = -2.$$

以下の x の値をあてはめて y の値を求めると、

$x = 3$ であれば、$y = 3 + 6 = 9$

$x = -2$ であれば、$y = -2 + 6 = 4$

よって、交点は (3, 9)、(–2, 4) となります。

まとめ

放物線と直線の交点の座標は、連立方程式の解と一致します。

連立方程式で解く時は3つのパターンがあります。

1. 直線が放物線と異なる2点で接する（割線）
2. 直線が放物線と1点で接する（接線または垂線）
3. 直線と放物線が接していない

問題

各問の放物線と直線の交点を求めなさい。座標平面にグラフを作成しなさい

a) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 3x \end{cases}$　b) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$　c) $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$　d) $\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = -x - 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ y = 5x - 4 \end{cases}$　f) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 1 \end{cases}$　g) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$　h) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x - 1 \end{cases}$

エニット 3

57

達成の目安

1.8 直線の方程式と放物線の方程式の交点の座標を方程式を使って求めなさい。

学習の流れ

放物線の方程式を学習したら、それらを利用して例えば直線などの他の図形との交点を求めることができます。

ねらい

特に直線と放物線の間にある交点の数を求める際の判別式で2次関数の知識を応用します。

解答：

a)

$x^2 = 3x$

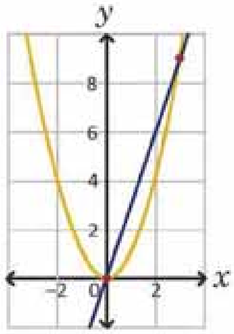
$x^2 - 3x = 0$

$x(x - 3) = 0$

$x = 0$ または $x = 3$

$y = 3(0) = 0$ または $y = 3(3) = 9$

交点は(0, 0) と (3, 9)



b)

$x^2 = 2x + 3$

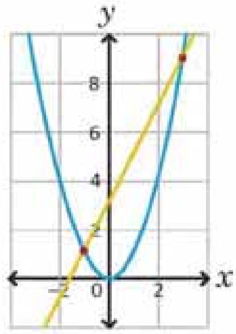
$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x + 1)(x - 3) = 0$

$x = -1$ または $x = 3$

$y = (-1)^2 = 1$ または $y = 3^2 = 9$

交点は (−1, 1) と (3, 9)



c)

$x^2 - 1 = x + 1$

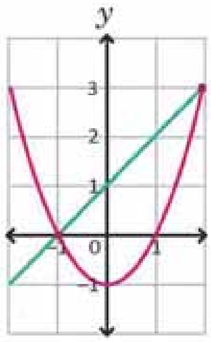
$x^2 - x - 2 = 0$

$(x - 2)(x + 1) = 0$

$x = 2$ または $x = -1$

$y = 2 + 1 = 3$ または $y = -1 + 1 = 0$

交点は (2, 3) と (−1, 0)



d)

$x^2 + 2x = -x - 2$

$x^2 + 3x + 2 = 0$

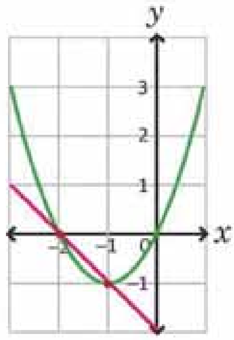
$(x + 2)(x + 1) = 0$

$x = -2$ または $x = -1$

$y = -(-2) - 2 = 0$ または

$y = -(-1) - 2 = -1$

交点は (−2, 0) と (−1, −1)



e)

$x^2 + 2 = 5x - 4$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

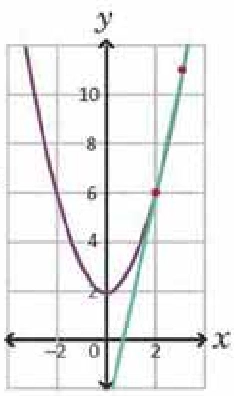
$(x - 2)(x - 3) = 0$

$x = 2$ または $x = 3$

$y = 5(2) - 4 = 6$ または

$y = 5(3) - 4 = 11$

交点は (2, 6) と (3, 11)



f)

$x^2 = 1$

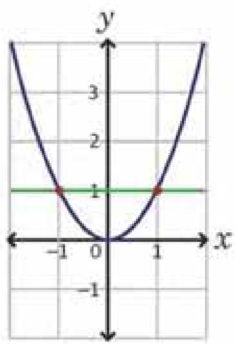
$x^2 - 1 = 0$

$(x - 1)(x + 1) = 0$

$x = 1$ または $x = -1$

$y = 1$

交点は (1, 1) と (−1, 1)



g)

$x^2 = 2x - 1$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x - 1)^2 = 0$

$x = 1 \quad y = 1^2 = 1$

(1, 1) が唯一の交点となることから、直線は放物線の接線です。

h)

$x^2 = x - 1$

$x^2 - x + 1 = 0$

解が実数ではないことから、この直線と放物線は接点をもちません。

生徒たちには、計算で得た数値を x に代入すれば y の値を求めやすくなることを伝えます。

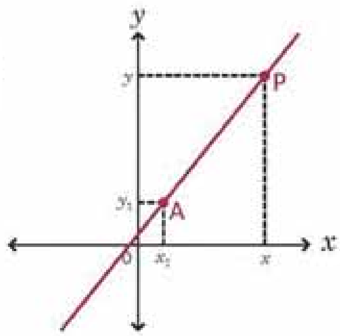
2.2 直線の方程式（点と傾き*）

導入問題

点 A(x_1, y_1) を通る傾き m をもつ直線 l の方程式が以下の式になることを証明しなさい。

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

解法



点 A(x_1, y_1) 以外の直線 l 上の点を P(x, y) とします。
直線の定義から、m は定数であることが分かっているので、

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

そして、

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

よって、直線lの方程式 は、$y - y_1 = m(x - x_1)$ であることが分かります。

定義

傾き m をもち点 A(x_1、y_1) を通る直線 l の方程式は以下のように表します。

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

この方程式を**直線の方程式（点と傾き）**といいます。変数 y を移項して、

$$y = mx - mx_1 + y_1$$

変数 x の係数が直線の傾きで、$-mx_1 + y_1$ の値は一定になっています。点 A(x_1, y_1) を通ることとその点と傾きの方程式が分かっている直線 l は、次の方法で描くことができます。

1. x に代数を入れて y の値を求めます。
2. 座標平面に点 A(x_1, y_1) と問 1 で得られた座標を描きこみます。その後、両点を通る直線を描きます。

例

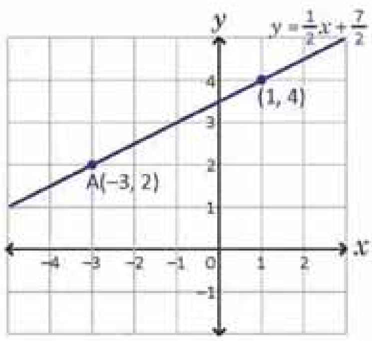
傾き $m = \frac{1}{2}$ で、点 A(−3, 2) を通る直線 l の方程式を求めなさい。

点と傾きの式に傾き m と (x_1、y_1) の値を代入します。

$$y - 2 = \frac{1}{2}[x - (-3)]$$

$$y = \frac{1}{2}(x + 3) + 2$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$



直線グラフを書くには、上の方程式のxに、たとえば、$x = 1$ と特定の値を代入し、y の値を求めます。

$$y = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4.$$

右図のように、座標平面に点 A(−3, 2) と (1, 4) を描きこみ、その両点を通る直線を引きます。

問題

それぞれの問で指定された傾きをもち点Aを通る直線の方程式を求め、それぞれグラフを作成しなさい。

a) 傾き $m = 2$、A(6, 7)
b) 傾き $m = 1$、A(−1, 0)
c) 傾き $m = -1$、A(−2, 6)
d) 傾き $m = \frac{1}{2}$、A(1, 8)

達成の目安

1.9 放物線の接線となる直線のパラメータを求めなさい。

学習の流れ

ここまでで直線と放物線の相対位置が理解できたので、ある直線が放物線の接線となるために必要なパラメータの設定の仕方を学習することができます。

ねらい

解答では、生徒が判別式を使って確認し、直線と放物線の相対位置と関連づけることが望ましいとされています。また平方完成させて問題を分析することも有効な手段です。

解答：

a) $x^2 = 6x - p$

$x^2 - 6x + p = 0$

平方完成をして、

$p = \left(\frac{6}{2}\right)^2$

$p = 9$

右辺を 0 の等式で確かめます。

$b^2 - 4ac = 0$

$(-6)^2 - 4(1)(p) = 0$

$36 - 4p = 0$

$p = 9$

b) $x^2 - 2x + 1 = 2x + p$

$x^2 - 4x + 1 - p = 0$

平方完成をして、

$1 - p = \left(\frac{4}{2}\right)^2$

$p = 1 - 4$

$p = -3$

右辺を 0 の等式で確かめます。

$b^2 - 4ac = 0$

$(-4)^2 - 4(1)(1 - p) = 0$

$12 + 4p = 0$

$p = -3$

c) $-x^2 - 3x = -x - p$

$x^2 + 2x - p = 0$

$-p = \left(\frac{2}{2}\right)^2$

$p = -1$

$b^2 - 4ac = 0$

$(2)^2 - 4(1)(-p) = 0$

$4p + 4 = 0$

$p = -1$

d) $-x^2 - 3x - 5 = 3x + p$

$x^2 + 6x + 5 + p = 0$

$5 + p = \left(\frac{6}{2}\right)^2$

$p = 9 - 5$

$p = 4$

$b^2 - 4ac = 0$

$(6)^2 - 4(1)(5 + p) = 0$

$16 - 4p = 0$

$p = 4$

e) $4x^2 = 4x - p$

$4x^2 - 4x + p = 0$

$\frac{p}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$p = 1$

$b^2 - 4ac = 0$

$(-4)^2 - 4(4)(p) = 0$

$16 - 16p = 0$

$p = 1$

f) $-3x^2 + 2x - 3 = -10x + p$

$3x^2 - 12x + 3 + p = 0$

$\frac{p+3}{3} = \left(\frac{4}{2}\right)^2$

$p = 12 - 3$

$p = 9$

$b^2 - 4ac = 0$

$(-12)^2 - 4(3)(p + 3) = 0$

$108 - 12p = 0$

$p = 9$

g) $x^2 = px - 4$

$x^2 - px + 4 = 0$

$4 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$

$p^2 = 16$

$p = \pm 4$

$b^2 - 4ac = 0$

$(p)^2 - 4(1)(4) = 0$

$p^2 = 16$

$p = \pm 4$

h) $-x^2 = px + 16$

$x^2 + px + 16 = 0$

$16 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$

$p^2 = 64$

$p = \pm 8$

$b^2 - 4ac = 0$

$(p)^2 - 4(1)(16) = 0$

$p^2 = 64$

$p = \pm 8$

生徒が二通りの方法で解く必要はなく、解答のチェックをしやすくするために両方の手順を紹介しています。

1.10 復習問題

1. 各問にある焦点と準線をもつ方程式を求め、放物線グラフを作りなさい。

a) $F(0, -2)$, $y = 2$　　b) $F\left(0, \frac{1}{12}\right)$, $y = -\frac{1}{12}$

2. 各問にある、水平方向にh分、垂直方向にk分移動している放物線の方程式を求めなさい。

a) $y = 4x^2$, $h = -2$, $k = 4$　　b) $y = -2x^2$, $h = -3$, $k = -3$

3. 次の代数式を平方完成しなさい。

a) $x^2 - 10x$　　b) $x^2 - 4x - 9$　　c) $-3x^2 + 6x - 2$

4. 次の放物線グラフを座標平面に描きなさい

a) $y = -2x^2$　　b) $y - 1 = -(x + 2)^2$　　c) $2x^2 + 4x - y = 0$

5. それぞれの放物線の頂点と焦点の座標と準線を求めなさい。

a) $y = \frac{1}{8}x^2$　　b) $y + 3 = 2(x + 5)^2$　　c) $3x^2 - 12x + 7 - y = 0$

6. 各問の放物線と直線の交点を求めなさい。座標平面にグラフを描きなさい。

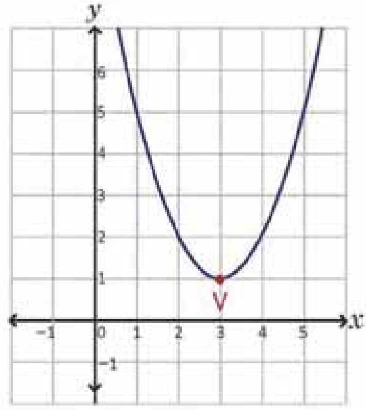
a) $\begin{cases} y = -x^2 + 2 \\ y = 4x - 3 \end{cases}$　　b) $\begin{cases} y = x^2 + 2x + 1 \\ y = -3x - 3 \end{cases}$　　c) $\begin{cases} y = -x^2 \\ x = -2 \end{cases}$

7. 以下の方程式で、直線がそれぞれの放物線の接線となるよう、パラメータ p の値（複数の場合もあります）を求めなさい。

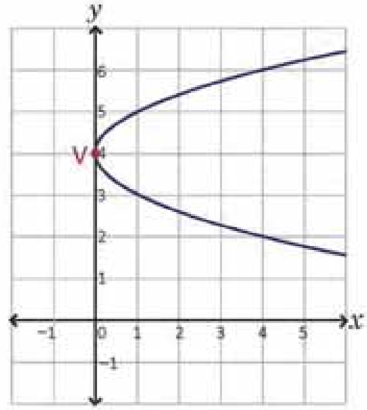
a) $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = 2x + p \end{cases}$　　b) $\begin{cases} y = -9x^2 - 6x - 2 \\ y = 6x + p \end{cases}$　　c) $\begin{cases} y = 4x^2 \\ y = px - 1 \end{cases}$

8. 各問のグラフになる方程式を求めなさい。

a)



b)



ユニット3

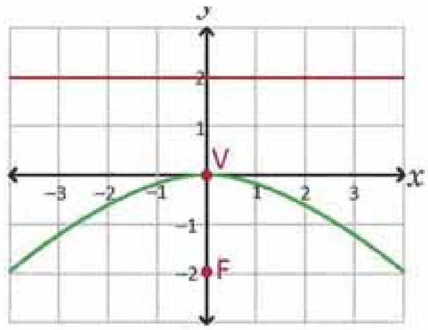
達成の目安

1.10 放物線に関する問題を解きなさい。

解答：

1a) $p=-2$なので、放物線の方程式は

$$y=\frac{1}{4(-2)}x^2=-\frac{1}{8}x^2.$$



1b) $p=\frac{1}{12}$ なので、$y=\dfrac{1}{4\left(\frac{1}{12}\right)}x^2=\dfrac{1}{\frac{1}{3}}x^2=3x^2$

2a) $y-4=4(x-(-2))^2$ よって $y=4(x+2)^2+4.$

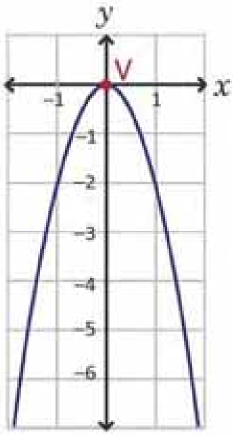
2b) $y-(-3)=-2(x-(-3))^2$ よって $y=-2(x+3)^2-3.$

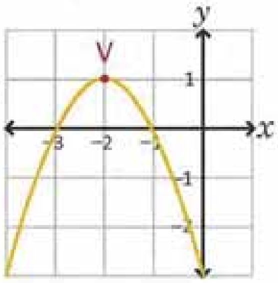
3a) $x^2-10x+(5)^2-(5)^2=(x-5)^2-25$

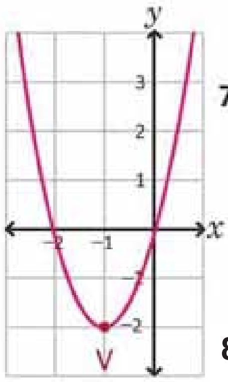
3b) $x^2-4x+(2)^2-(2)^2-9=(x-2)^2-13$

3c) $-3x^2+6x-2=-3(x^2-2x+(1)^2-(1)^2)-2$
$=-3(x-1)^2+3-2=-3(x-1)^2+1$

4a) $y=-2x^2$ **4b)** $y-1=-(x+2)^2$ **4c)** $y=2(x+1)^2-2$







5a) $y=\frac{1}{8}x^2$: V (0, 0), $p=2$, F(0, 2), $y=-2$.

5b) $y+3=2(x+5)^2$: V (−5, −3), $p=\frac{1}{8}$, F$\left(-5,-\frac{23}{8}\right)$, $y=-\frac{25}{8}$.

5c) $y=3(x-2)^2-5$: V (2, −5), $p=\frac{1}{12}$, F$\left(2,\frac{59}{12}\right)$, $y=-\frac{61}{12}$.

6a)

$$-x^2+2=4x-3$$
$$x^2+4x-5=0$$
$$(x-1)(x+5)=0$$

$x=1$ または $x=-5$

$y=4(1)-3=1$ または $y=4(-5)-3=-23$

交点は (1, 1) と (−5, −23)

6b) 交点は (−1, 0) と (−4, 9)

6c) 交点は 1 つのみで、(−2、−4)

7a) $x^2-4x+5=2x+p$
$x^2-6x+5-p=0$

平方完成し、

$5-p=\left(\frac{6}{2}\right)^2$

$p=5-9$

$p=-4$

右辺を 0 の等式で確かめます。

$b^2-4ac=0$

$(-6)^2-4(1)(5-p)=0$

$4p=-16$

$p=-4$

7b) $-9x^2-6x-2=6x+p$
$9x^2+12x+2+p=0$

$b^2-4ac=0$

$(12)^2-4(9)(2+p)=0$

$36p=72$

$p=2$

7c) $p=\pm4$

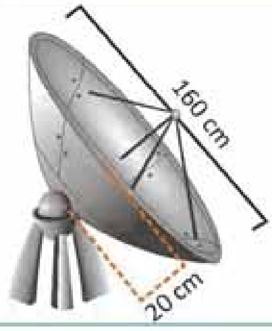
8a) 放物線 $y=x^2$ を右に3、上方向に 1 移動させた図形で、方程式は $y-1=(x-3)^2$ となります。

8b) 放物線 $x=y^2$ を上方向に 4 移動させた図形で、方程式は、$x=(y-4)^2$ となります。

1.11 放物線の応用*

導入問題

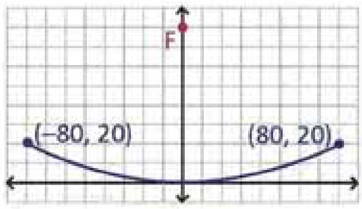
エルサルバドルの文化テレビ放送チャンネルのパラボラアンテナは直径 160 cm で、高さは 20 cm あります。雨で壊れてしまったアンテナの焦点を修理する場合、新しい焦点はパラボラアンテナの円盤の中心からどれぐらい離れた位置に取りつける必要がありますか。



放物線形状をもつ立体は、ある放物線を軸を中心に回転させてできる幾何学的な形をもった立体です。

解法

条件をもとに座標平面に型をとると、放物線 $y=\frac{1}{4p}x^2$ を活用すればよいことが分かります。



そして 160 cm の幅なので、放物線の長さは、x 座標の –80 から 80 までであると考えます。

そして高さは 20 cm なので、原点から y 軸上の点 20 までとみなします。

放物線の式は、 $y=\frac{1}{4p}x^2$ となり、点 (–80, 20) と 点 (80, 20) を通ります。

方程式に点 (80, 20) を代入し、p を求める式を作ります。

$$20=\frac{1}{4p}80^2 \quad \text{等式を解きます。}$$

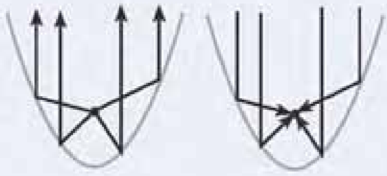
$$p=\frac{80^2}{80}=80$$

よって、焦点の座標は F(0, 80) です。

よって、パラボラアンテナの新しい焦点は頂点から 80 cm の位置に設置する必要があります。

まとめ

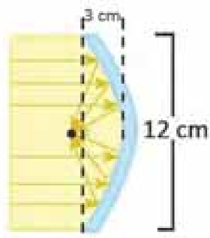
放物線では、焦点に重要な反射特性があり、焦点から伸びる線はいずれも、 同じ方向に向かって反射します。そしてまた軸に対して平行に入ってくる線は、焦点に向かって反射します。そのため、放物線は非常に役立つものとして、パラボラアンテナなどの日用品にも応用されています。



問題

1. インターネット信号を発信するパラボラアンテナが故障して、その焦点から信号を正しく発することができなくなっています。交換するには、焦点が円盤の中心からどれだけ離れた位置にあったかを調べなくてはなりません。アンテナの円周の直径が1 mで、高さが0.5 m である場合に、その焦点のくるべき位置を求めなさい。

2. 反射望遠鏡の鏡面は放物面になっており、直径が 12 cm で奥行きが 3 cm です。入射した光が集まるポイントの鏡面の中心からの距離を求めなさい。



達成の目安

1.11 焦点の反射特性を利用して放物線形状の物体を扱った応用問題を解きなさい。

学習の流れ

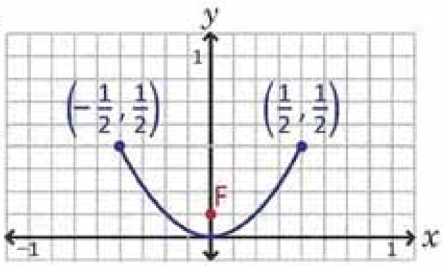
放物線の基本概念を一通り学習したら、放物線の反射特性を利用した日用品を扱った応用問題に取り組むことができます。この授業では教師が生徒に対し、より多くのヒントを出す必要があるため、* マークをつけています。

ねらい

問題の解答では、生徒は問題を解くために与えられた情報を数学的概念に基づいてグラフに表し、そこで得られた結果をあてはめて元の問題を解かなくてはなりません。

解答：

1. 幅 1 mなので、x 座標の　た$-\frac{1}{2}$　ま$\frac{1}{2}$幅を持つ放物線とみなします。



高さは 0.5 mなので、原点から y 軸上の点　ま$\frac{1}{2}$みなします。

したがって放物線の式は $y=\frac{1}{4p}x^2$ となり、点 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ と点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ を通過します。

方程式に点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ を代入し、p を求める式を作ります。

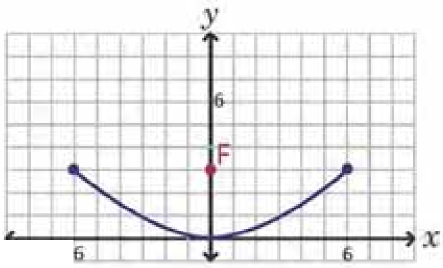
$\frac{1}{2}=\frac{1}{4p}\left(\frac{1}{2}\right)^2$　計算して、

$$p=\frac{2}{4(2^2)}=\frac{1}{8}$$

よって、焦点の座標は $F\left(0, \frac{1}{8}\right)$ です。

したがって、新しいパラボラアンテナの焦点は頂点から 12.5 cm の位置にこなければなりません。

2. 12 cm の幅なので、x 座標の –6 から 6 までの長さと、原点から y 軸上の 3 までの高さを持つ放物線と考えられます。



したがって、放物線の式は $y=\frac{1}{4p}x^2$ となり点 (–6, 3) と (6, 3) を通過します。

方程式に点 (6, 3) を代入して p を求める式を作ります。

$3=\frac{1}{4p}(6)^2$　等式を解いて、

$$p=\frac{36}{12}=3$$

よって焦点の座標は F(0, 3)です。

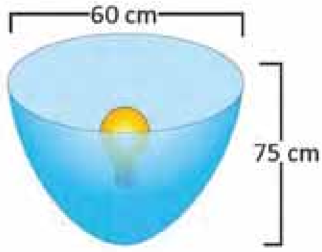
したがって、光は頂点から 3 cm の位置に集まります。

放物線が通る点を2つとる必要はなく、実際には1つあれば十分ですが、ここでは問題を分かり易く図で示すために2つの点を描いています。

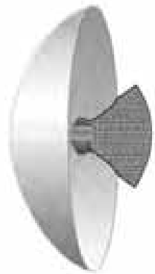
1.12 復習問題

次の放物線に関する応用問題を解きなさい。それぞれの条件を座標平面にグラフで表しなさい。

1. マリアの通う学校では、夜間照明に問題があり、その状況を改善するため、マリアは監視用の可動式放物線ライトを建設する計画をたてています。そのために、直径60 cm、高さ75 cmの放物線形状の受光器を利用する予定です。ある一定方向にのみ光を反射させるために、マリアは円盤の中心からどれだけ離した位置に焦点を配置するべきですか。



2. プロジェクターの反射鏡は放物面になっており、その焦点から光を発光します。反射鏡の直径が 12 cmで奥行きが 8 cmである場合、頂点から焦点までの距離はどれだけになりますか。



3. アントニオのコミュニティーでは、緊急事態に対応するため通報システムの設置を検討しています。アントニオは放物線スピーカーを設置すべきですが、直径 24 cm で奥行き 9 cm のスピーカーを用いる場合、同じ方向に向けて音が発せられるようにするには、発音装置をどの位置に取りつけるべきですか。

4. ホセはモンテクリスト国立公園へ家族旅行にでかけますが、煙を出さない様に、調理に薪を使わ無くて済むよう、太陽光を一点（焦点）に集めるための鉄製の放物面を持つ反射鏡をもって行きます。その反射鏡の直径が 1 m、高さが 0.25 mである場合、ホセはその反射鏡の頂点からどれぐらい離れた位置に焼き網を置くべきかを求めなさい。

5. 性の平等に関するイベントを行う会場で使う集音プレートは、頂点から12cmのところに焦点がくる放物線状に作られています。もしこのイベントの最中にプレートに破損が生じた場合、交換できる集音プレートは高さはいろいろありますが、直径は 8 cm のものしかありません。このパラボラ型の集音プレートが正しく機能するためには、どの高さの集音プレートを使うべきですか。

達成の目安

1.12 放物線の応用問題を解きなさい。

解答：

1. この問題は前回の授業の問題とよく似ており、放物線の式は $y=\frac{1}{4p}x^2$、点 (–30, 75) と (30, 75) を通ります。

方程式に点 (30,75) を代入してp を求める式を作ります。

$$75=\frac{1}{4p}(30)^2$$ 等式を解いて

$$p=\frac{30^2}{4(75)}=3$$

よって焦点の座標は F (0, 3)です。

したがって、焦点は頂点から3㎝の位置に取りつける必要があります。

2. 放物線の式は $y=\frac{1}{4p}x^2$ で、点(–6, 8) と (6, 8) を通ると考えます。

$8=\frac{1}{4p}(6)^2$ を計算して p を特定します。 $p=\frac{6^2}{4(8)}=\frac{9}{8}$

したがって、焦点は頂点から $\frac{9}{8}$ cm の位置になければなりません。

3. 放物線の式は $y=\frac{1}{4p}x^2$ で、点 (–12, 9) と (12, 9) を通ると考えます。

$9=\frac{1}{4p}(12)^2$ を計算して p を特定します。 $p=\frac{12^2}{4(9)}=4$

したがって、その焦点は頂点から 4㎝ の位置にこなければなりません。

4. 放物線の式は $y=\frac{1}{4p}x^2$ で、点 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ と $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ を通ると考えます。

$\frac{1}{4}=\frac{1}{4p}\left(\frac{1}{2}\right)^2$ を計算して p を特定します。 $p=\frac{4}{4(2^2)}=\frac{1}{4}$

よって、焼き網は放物線状器具のすぐ上、つまり、頂点から 0.25 cm のところに置く必要があります。

5. 放物線の式が $y=\frac{1}{4p}x^2$ で、この問題では焦点から頂点までの距離が提示されているので、p = 12、x は幅の半分と同じ長さになるので、x = 4です。

高さを特定するには y の値を求めるだけです。

$$y=\frac{1}{4p}x^2=\frac{1}{4(12)}4^2=\frac{4^2}{4(12)}=\frac{1}{3}$$

よって、音を反射するプレートが正しく機能するためには、その高さは約 $\frac{1}{3}$ cmであるべきです。

この授業で扱う放物線の応用問題はいずれもよく似た数式を使って解くことができます。手順のバリエーションを作る事よりも、むしろ当てはまりそうな方程式を全て試すことがポイントです。問 5 のみ、1つの点の座標がなく、パラメータの値と x 座標しか分からないという点で、解き方が他の問題と少し異なっています。

2.1 円

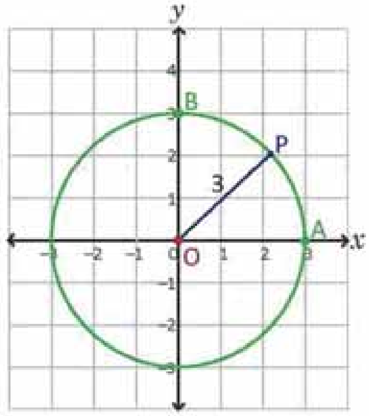
導入問題

原点 O(0、0) からの距離が 3 になる軌跡の方程式を作りなさい。

解法

まず条件を満たす点 A(3, 0) と点 B(0, 3) に印をつけます。

条件を満たす点 P(x, y) と2つの点の間の距離を利用します。



$$d(\mathrm{P}, \mathrm{O}) = 3$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 3$$ の式を2乗し、

$$x^2 + y^2 = 9.$$

よって、このグラフの方程式は、

$$x^2 + y^2 = 3^2$$ です。

定義

中心 と呼ばれる一点までの距離r**が定数である軌跡をもつグラフを**円**といいます。**

中心が座標平面の原点にある半径 r の円の方程式は、$x^2 + y^2 = r^2$ です。

例 1

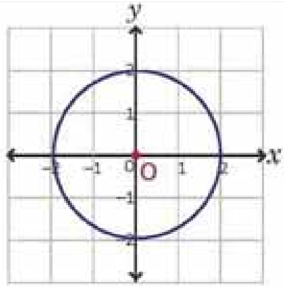
中心が原点にある半径 4 の円の方程式を求めなさい。

方程式は、$x^2 + y^2 = 4^2$ よって、$x^2 + y^2 = 16$と表すこともできます。

例 2

座標平面に $x^2 + y^2 = 4$ のグラフ（または軌跡）を描きなさい。

$x^2 + y^2 = 4$ の方程式は $x^2 + y^2 = 2^2$で表すことができるので、中心が原点の半径 2 の円になります。



問題

1. 各問にある半径を持ち原点に中心がある円の方程式を作りなさい。

a) $r = 1$　　b) $r = 6$　　c) $r = \frac{1}{2}$　　d) $r = \frac{1}{3}$　　e) $r = \sqrt{5}$

2. 以下の方程式を座標平面にグラフで表しなさい。

a) $x^2 + y^2 = 25$　　b) $x^2 + y^2 = 100$　　c) $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$　　d) $x^2 + y^2 = 3$

達成の目安

2.1 それぞれ指定された半径を持ち原点に中心がある円の方程式を考えなさい。

学習の流れ

放物線を学習したので、次は円の学習に進みます。放物線の方程式（一般形）から入ったのは、それが唯一、一度の平方完成で答えが求められるからです。円の学習では、x も y もそれぞれ平方完成をして求める必要があります。

ねらい

「導入問題」では、まず個々の円の方程式（標準形）をみつける練習をして、そこから同様に半径の値にしたがって方程式の定数の値が変わることを分析し、円の方程式（標準形）が $x^2 + y^2 = r^2$ の式になることを理解します。

解答：

1a) $x^2 + y^2 = 1^2$ よって $x^2 + y^2 = 1.$

1b) $x^2 + y^2 = 6^2$ よって $x^2 + y^2 = 36.$

1c) $x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ よって $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$

1d) $x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$ よって $x^2 + y^2 = \frac{1}{9}.$

1e) $x^2 + y^2 = \sqrt{5}^2$ よって $x^2 + y^2 = 5.$

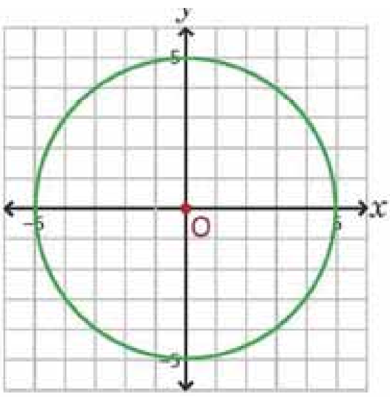
円の方程式(標準形)の問題の場合は、あまり扱うことはありませんが、1c) と 1d) の問では、$4x^2 + 4y^2 = 1$ と $9x^2 + 9y^2 = 1$ の方程式も有効とします。

2a) 半径 r の値を計算します。

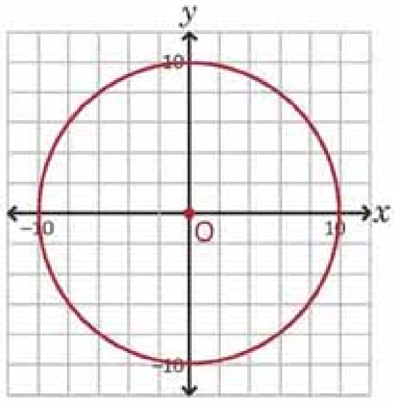
$$r = \sqrt{25} = 5.$$

中心が原点 (0、0) の半径 5 の円です。

2b) $r = \sqrt{100} = 10$ は中心が原点 (0、0) の半径 10 の円です。

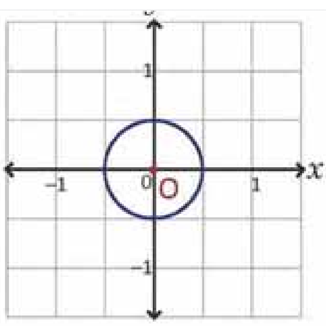


もし黒板やノートのスペースが狭すぎて足りない場合には、座標平面を縦横2枚ずつ、3枚ずつというように繋げても構いません。

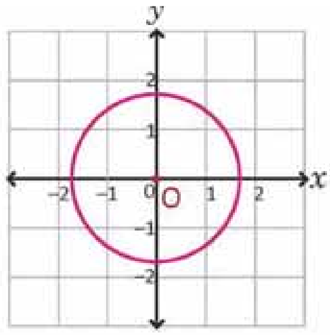


2c) $r = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ は原点 (0、0) を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円です。

2d) $r = \sqrt{3}$ で、原点 (0、0) を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円です。



問2d)のグラフは、半径が無理数のため、おおよその目安です。



2.2.円の平行移動*

導入問題

点 C(2、3) を通る半径 1の円の式を作りなさい。

解法 1

条件を満たす点 P(x, y)と点Pから点 C(2、3) までの距離を用いて、

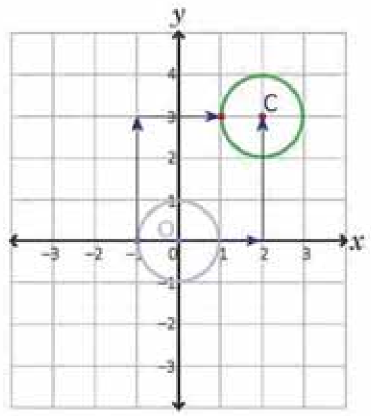
$$d(\mathrm{P}, \mathrm{C}) = 1$$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = 1 \quad \text{2乗し、}$$

$$(x-2)^2+(y-3)^2 = 1$$

解法 2

原点を中心とする半径 1 の円の方程式は、$x^2 + y^2 = 1$



したがって、中心が C(2, 3)で、半径 1 の円 は、原点を中心とする円を（図のように）右に2、上に 3 移動させたものです。

右に 2 移動させた円の方程式 は、$(x-2)^2 + y^2 = 1$ となります。

次に、上に 3 移動させた円の式は、$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ です。

よって、点 C(2, 3) を中心とする半径 1の円の式は、$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ です。

まとめ

点 C(h, k) を中心とする半径 r の円を式で表すと、

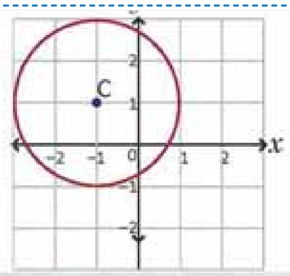
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

例 1

点 C(2、−1) を中心とする半径 2 の円の方程式を求めなさい。
方程式は、$(x-2)^2 + [y-(-1)]^2 = 2^2$となり、$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$ の式で表すこともできます。

例 2

座標平面に$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$のグラフ(または軌跡)を作成しなさい。



方程式 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$ を、$[x-(-1)]^2 + (y-1)^2 = 2^2$ に直し、中心が C(−1、1) の半径 2 の円であることが分かります。

問題

1. 各問の点Cが中心となる半径 rをもつ 円の方程式を求めなさい。

   a) C(4, 1), $r = 3$　　b) C(−2, 5), $r = 2$　　c) C(3, −4), $r = \frac{2}{3}$　　d) C(−2, −2), $r = \sqrt{6}$

2. 以下の方程式のグラフを座標平面に描きなさい。

   a) $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$　　b) $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$　　c) $(x+3)^2 + (y-4)^2 = \frac{25}{4}$　　d) $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 5$

ユニット 3

達成の目安

2.2 中心が原点ではない円の方程式を見つけてグラフを作成しなさい。

学習の流れ

この授業では、前回の授業で学習した円の方程式に、前課で学習した平行移動の知識を応用して考える必要があります。この授業では教師が生徒に対し、より多くのヒントを出す必要があるため、*マークをつけています。

ねらい

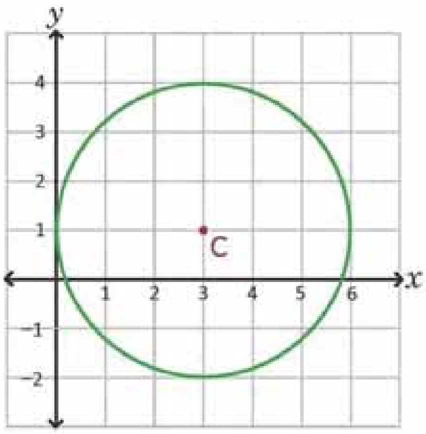
「導入問題」には2つの解答例があり、生徒が距離の概念、すなわち平行移動を利用することで方程式を作ることができる場合には、どちらも正しい解答となります。

解答：

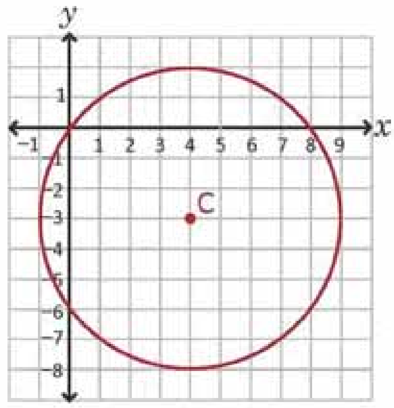
1a) $(x-4)^2+(y-1)^2=3^2$ または $(x-4)^2+(y-1)^2=9.$ **1b)** $(x+2)^2+(y-5)^2=2^2$ または $(x+2)^2+(y-5)^2=4$

1c) $(x-3)^2+(y+4)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2$ または $x-3)^2+(y+4)^2=\frac{4}{9}.$ **1d)** $(x+2)^2+(y+2)^2=\sqrt{6}$ または $(x+2)^2+(y+2)^2=6.$

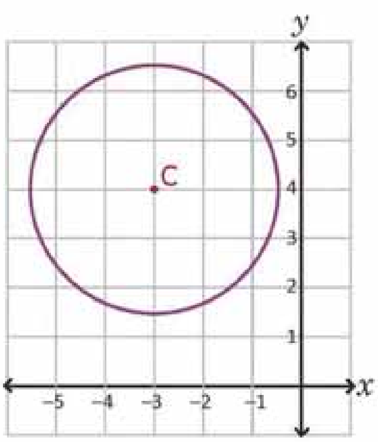
2a) 中心が (3, 1)で半径が 3



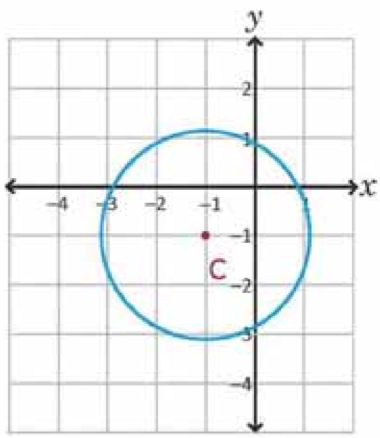
2b) 中心が (4, –3)で半径が 5



2c) 中心が (–3, 4)で半径が $\frac{5}{2}$



2d) 中心が (–1, –1) で半径が $\sqrt{5}$



2.3 円の方程式（一般形）

導入問題

座標平面に $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ のグラフを表しなさい。

解法

平方完成して $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ の式で表します。

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$$ 移項して同類項をまとめ、

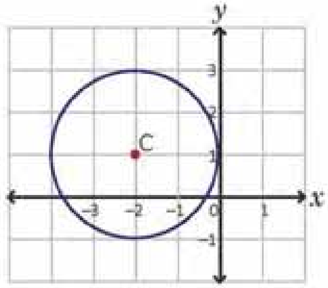
$$(x^2 + 4x) + (y^2 - 2y) + 1 = 0$$ 平方完成して、

$$(x^2 + 4x + 4) - 4 + (y^2 - 2y + 1) - 1 + 1 = 0$$ 整理し、

$$(x + 2)^2 - 4 + (y - 1)^2 - 1 + 1 = 0$$ 移項し、

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$$ 式の形を直して、

$$(x - (-2))^2 + (y - 1)^2 = 2^2.$$



よって$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$の方程式のグラフは 中心が C(−2, 1) の半径 2 の円です。

まとめ

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ の方程式の 2 乗を展開し、
右辺を 0 の等式にすることで円の方程式を表すことができます。

通常、$x^2 + y^2 + cx + dy + e = 0$ の方程式の中心と半径を求めるには、x とy をそれぞれ平方完成して、$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ の形の式に直します。$x^2 + y^2 + cx + dy + e = 0$ 形で表す式 を円の方程式（一般形）**といいます。**

例

座標平面に$4x^2 + 4y^2 - 16x + 8y + 19 = 0$ のグラフを表しなさい。

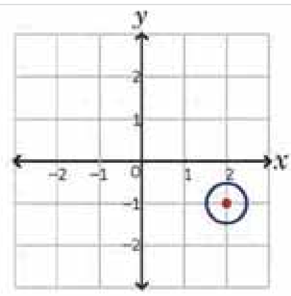
$$4x^2 + 4y^2 - 16x + 8y + 19 = 0$$ 両辺を4でわって、

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y + \frac{19}{4} = 0$$ 平方完成して、

$$(x - 2)^2 - 4 + (y + 1)^2 - 1 + \frac{19}{4} = 0$$ 約分して移項して、

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = \frac{1}{4}$$ 式の形を直して、

$$(x - 2)^2 + (y - (-1))^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$



これは点 C(2、−1) を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円です。

問題

次の方程式で円の中心と半径を求めなさい。座標平面に各方程式のグラフを作成しなさい。

a) $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 8 = 0$　b) $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$　c) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 4 = 0$　e) $x^2 + y^2 - 10y + 9 = 0$　f) $x^2 + y^2 + 6x + 8 = 0$

g) $4x^2 + 4y^2 - 32x - 16y + 71 = 0$　h) $9x^2 + 9y^2 + 54x + 18y + 74 = 0$

達成の目安

2.3 円の方程式（一般形）から円の中心と半径を求め、座標平面にグラフを作成しなさい。

学習の流れ

平方完成の手順を用いて、円の方程式（一般形）を前回の授業で覚えた形の式に変換して、座標平面にグラフを作成することができます。

ねらい

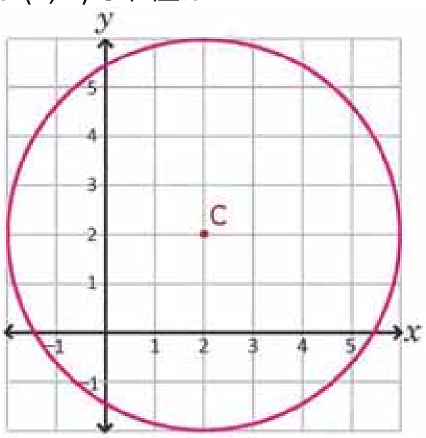
問題の難易度の基準は、円の半径が整数であるか分数であるか、また、移動が座標軸の上下左右のどちらに向かうのか、また座標軸上の移動になるのか、などによって変わります。

解答：

a) $(x^2 - 4x + 2^2) + (y^2 - 4y + 2^2) = 8 + 2^2 + 2^2$

$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 16$

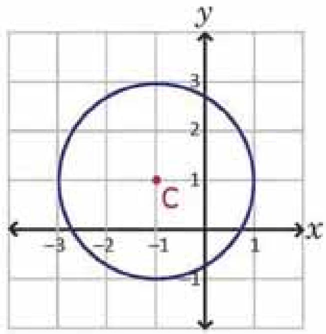
中心は (2, 2)で半径は 4



b) $(x^2 + 2x + 1^2) + (y^2 - 2y + 1^2) = 2 + 1^2 + 1^2$

$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$

中心は (–1, 1) で半径は 2



c) $(x^2 - 6x + 3^2) + (y^2 + 8y + 4^2) = -16 + 3^2 + 4^2$

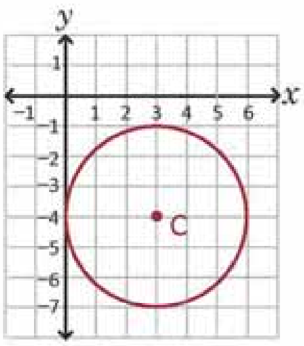
$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$

中心は (3, –4)で半径は 3

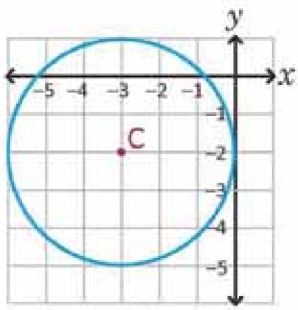
d) $(x^2 + 6x + 3^2) + (y^2 + 4y + 2^2) = -4 + 3^2 + 2^2$

$(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$

中心は (–3, –2)で半径は 3



分数を平方完成させるのは非常に複雑なプロセスになり、それを行うことがねらいではないため、分数の入った移動問題はここでは扱いません。後半の問題では、グラフの作成が必要になりますが、誌面の都合上ここでは図解していません。



e) $x^2 + (y^2 - 10y + 5^2) = -9 + 5^2$

$(x - 0)^2 + (y - 5)^2 = 16$

中心は(0, 5)で半径は 4

f) $(x^2 + 6x + 3^2) + y^2 = -8 + 3^2$

$(x + 3)^2 + (y - 0)^2 = 1$

中心は (–3, 0)で半径は 1

g) $4(x^2 - 8x + 4^2) + 4(y^2 - 4y + 2^2) = -71 + 4(4^2) + 4(2^2)$

$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = \frac{9}{4}$

中心は (4, 2)で半径は $\frac{3}{2}$

h) $9(x^2 + 6x + 3^2) + 9(y^2 + 2y + 1^2) = -74 + 9(3^2) + 9(1^2)$

$(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = \frac{16}{9}$

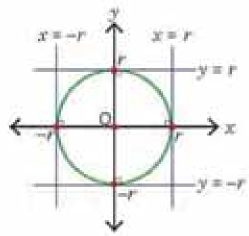
中心は (–3, –1) で半径は $\frac{4}{3}$

2.4 円の接線*

導入問題

点 P(x_1, y_1) において円 $x^2 + y^2 = r^2$ と接する接線の方程式が $x_1 x + y_1 y = r^2$ であることを証明しなさい。

解法

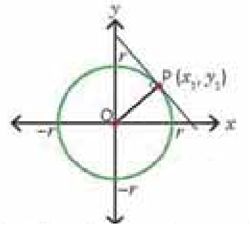


点 P(x_1, y_1) は $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ の軌跡です。

$x_1 = 0$ なら、$y_1 = r$ または $y_1 = -r$ 接線は $y = r$ または $y = -r$ であり、$y_1 y = r^2$ が成り立ちます。

よって、接線の方程式は $x_1 x + y_1 y = r^2$ となります。

$y_1 = 0$ の場合も同様の方法で解きます。



$x_1 \neq 0$ かつ $y_1 \neq 0$ である場合、半径 $\overline{OP}$ は点 P において接線に垂直に交わり、接線 $\overline{OP}$ の傾きは $\frac{y_1}{x_1}$ となるので、接線の傾きは $m = -\frac{x_1}{y_1}$ です。

傾きと点の方程式を m と P にあてはめて、

$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$ に y_1 をかけて、約分すると $x_1 x + y_1 y = x_1^2 + y_1^2 = r^2$ となります。

よって、点 P(x_1, y_1) において円 $x^2 + y^2 = r^2$ と接する接線を式で表すと、

$$x_1 x + y_1 y = r^2$$

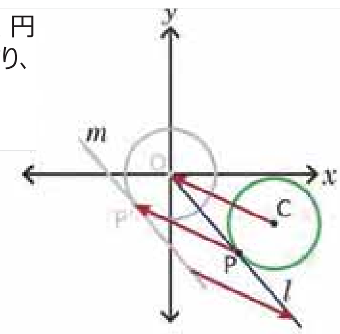
まとめ

点 (x_1, y_1) において円 $x^2 + y^2 = r^2$ と接する接線の方程式は $x_1 x + y_1 y = r^2$ です。例えば、点 P(−1, 1) において円 $x^2 + y^2 = 2$ と接する接線の方程式は以下の方法で作ることができます。

$$-1x + 1y = 2 \quad \text{よって} \quad x - y + 2 = 0$$

例

点 P(2, −4) において円 $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$ と接する接線の方程式を求めなさい。



円 $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$ は円 $x^2 + y^2 = 5$ が右に 4、下に 3 移動したものなので、円 $x^2 + y^2 = 5$ の接線を求め、点 P を左に 4、上に 3 移動させればよいです。つまり、P'(2 − 4、−4 + 3) = P'(−2、−1) となります。

ここで、「導入問題」の答えをあてはめて、接線 m は

$$-2x + (-1)y = 5 \text{ なので、} 2x + y + 5 = 0$$

そして直線を右に 4、下に 3 移動させ、

$$2(x - 4) + (y + 3) + 5 = 0 \text{ なので } 2x + y = 0$$

よって、点 P(2, −4) において円 $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$ と接する接線は、$2x + y = 0$

問題

各問の点Pにおいて円に接する接線の方程式を求めなさい。

a) $x^2 + y^2 = 25$, P(−3, 4)　　b) $x^2 + y^2 = 5$, P(1, 2)　　c) $x^2 + y^2 = 13$, P(2, −3)

d) $x^2 + y^2 = 10$, P(3, −1)　　e) $x^2 + y^2 = 1$, P(−1, 0)　　f) $x^2 + y^2 = 9$, P(0, −3)

g) $x^2 + (y - 4)^2 = 2$, P(−1, 3)　　h) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$, P(−1, −1)　　i) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 17$, P(3, 1)

達成の目安

2.4 提示された点において円に接する接線の方程式を求めなさい。

学習の流れ

円の基本概念を学んだら、円の接線について学習することができます。この授業では少し複雑な証明を扱うため、教師が生徒に対しより多くのヒントを出す必要があるため、*マークをつけています。

ねらい

この授業では円の接線の方程式を求めるとても実用的な方法（1.9 の授業で用いたメソッドよりはるかに簡単な方法）を学習します。円の接線は重要性も高く非常に奥深いので、この方程式の求め方はとても役立つはずです。

つまずきやすい点

解説では、2つのパターンで説明しています。1つ目は、接点の座標の1つがゼロ、つまり半径が垂直または水平になるパターンで、中学1年次の学習内容から接線は接点において垂直に接することを学んでいるので、このページの最初の図が示すように直線は水平もしくは垂直でなければならないことを利用して解くパターンです。そして2つ目のパターンは、直線の方程式をあてはめて、当学年のユニット 2 で学習した垂直の条件をあてはめて解く方法です。それぞれの結果を応用できることを達成の目安としていますが、このテーマを理解することは生徒にとっては非常に難しいかもしれません。

解答：

a) 点が円周上にあることを検証します。

$(-3)^2 + 4^2 = 25$

したがって点 P における接線の方程式は、

$-3x + 4y = 25$ よって $3x - 4y + 25 = 0$

c) $2x + (-3)y = 13$ よって $2x - 3y - 13 = 0$

e) $(-1)x + (0)y = 1$ よって $x = -1$

g) 点が円 $(-1)^2 + (3 - 4)^2 = 2$ の円周上にあることを検証します。

円を原点に移動させ、点 P を下に 4 移動させます。

$x^2 + y^2 = 2$, $P'(-1, 3 - 4) = P'(-1, -1)$

P′における接線は $(-1)x + (-1)y = 2$

そして元の位置（上に4）に移動させ、

$-x - (y - 4) = 2$ したがって $x + y - 2 = 0$

全ての問題で、常に点が円周上にあることを検証する必要があり、生徒が移動の仕方やどれが接線の点の移動であるかを理解できるようにする必要があります。

b) 点が円周上にあることを検証します。

$1^2 + 2^2 = 5$

したがって点 P における接線の方程式は、

$1x + 2y = 5$ つまり、$x + 2y - 5 = 0$

d) $3x + (-1)y = 10$ つまり、$3x - y - 10 = 0$

f) $(0)x + (-3)y = 9$ つまり、$y = -3$

h) 移動後の円と点は、

$x^2 + y^2 = 4$、$P'(-1 + 3、-1 + 1) = P'(2、0)$

接線は $2x + (0)y = 4$ つまり、$x = 2$

接線の元の位置は、$(x + 3) = 2$ よって $x = -1$ となります。

i) 移動後の円と点は、

$x^2 + y^2 = 17$、$P'(3 - 2、1 + 3) = P'(1、4)$

接線は $1x + 4y = 17$

接線の元の位置は、$(x - 2) + 4(y + 3) = 17$

よって$x + 4y - 7 = 0$です。

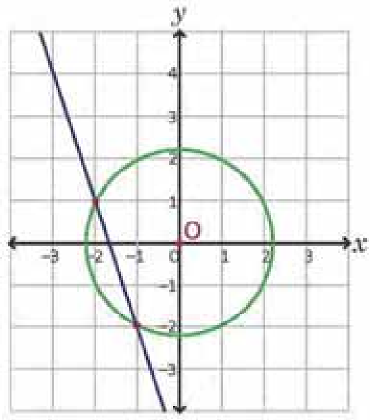
2.5 円の割線

導入問題

円 $x^2 + y^2 = 5$ と直線 $3x + y + 5 = 0$ の交点を求めなさい。

解法

交点は直線上と円周上にある点であることから、円と直線の交点を見つけることは、すなわち連立方程式を解くことと同じです。



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & \text{----------- (1)} \\ 3x + y + 5 = 0 & \text{----------- (2)} \end{cases}$$

代入する方法を使って方程式 (2) の y を求めます。

$$y = -3x - 5$$

方程式 (1) に代入し、

$$x^2 + (-3x - 5)^2 = 5$$
$$x^2 + 9x^2 + 30x + 25 - 5 = 0$$
$$10x^2 + 30x + 20 = 0$$
$$x^2 + 3x + 2 = 0$$
$$(x + 1)(x + 2) = 0$$
$$x = -1 \text{ または } x = -2$$

したがって直線 $y + 3x + 5 = 0$ と円 $x^2 + y^2 = 5$ が接する座標は $x = -1$ および $x = -2$ となり、y の座標は (2) の方程式にそれぞれ x の値を代入することで求めることができます。

$x = -1$ であれば、$y = -3(-1) - 5 = 3 - 5 = -2$

$x = -2$ であれば、$y = -3(-2) - 5 = 6 - 5 = 1$

したがって、交点は $(-1, -2)$ と $(-2, 1)$

まとめ

直線と円の交点を求めるには、1 次式と 2 次式の連立方程式を用いて代入法を使って解きます。

連立方程式に2つの実数の解があれば、その直線は円の割線であることを意味します。
連立方程式の解が 1 つの実数であれば、その直線は円の接線です。
連立方程式の解が実数でない場合は、その直線が円と接しないことを意味します。

交点の座標 （または点） の y の値は他の方程式に連立方程式で解いた値を代入することで求めることができます。

問題

次の各問の方程式のグラフにある交点の座標を求めなさい。

a) $x^2 + y^2 = 1;\ x + y = 0$　　b) $x^2 + y^2 = 25;\ x + y - 1 = 0$　　c) $x^2 + y^2 = 5;\ -x + y + 1 = 0$

d) $x^2 + y^2 = 13;\ x + 5y - 13 = 0$　　e) $x^2 + y^2 = 10;\ x - 2y - 5 = 0$　　f) $x^2 + y^2 = 17;\ 3x + 5y - 17 = 0$

達成の目安

2.5 直線と円との交点の座標を特定しなさい。

学習の流れ

接線について学習したので、割線と円との交点について学びながら 2 次式と 1 次式の連立方程式の解き方を学びます。

ねらい

問題セクションでは、簡単な問題から難しい問題へと挑戦し、生徒が、「まとめ」にある 3 つのパターンがあることを理解することをねらいます。「導入問題」では、幾何学問題に取り組みます。

解答：

a) 連立方程式を解きます。

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 & \text{-----}(1) \\ x+y=0 & \text{-----}(2) \end{cases}$$

(2) の式の y を取り出して (1) の式に代入し、

$$x^2+(-x)^2=1$$
$$2x^2=1$$
$$x^2=\frac{1}{2}$$
$$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2) の式に x を代入して y を求めます

$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ の場合、$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$、$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ の場合、$y=\frac{\sqrt{2}}{2}$

したがって、交点は、

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) と \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

b) 連立方程式を解きます。

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 & \text{-----}(1) \\ x+y-1=0 & \text{-----}(2) \end{cases}$$

(2) の式の y を取り出して (1) の式に代入し、

$$x^2+(1-x)^2=25$$
$$x^2-x-12=0$$

$x=4$ または $x=-3$

(2) の式に x を代入して y を求めます

$x=4$ の場合、$y=-3$、$x=-3$ の場合、$y=4$

したがって、交点は、(4, –3) と (–3, 4)

c) 連立方程式は、
$$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \text{-----}(1) \\ -x+y+1=0 & \text{---}(2) \end{cases}$$

2次方程式を解くと、

$$x^2-x-2=0$$

交点は、(2, 1) と (–1, –2)

d) 連立方程式は、
$$\begin{cases} x^2+y^2=13 & \text{-----}(1) \\ x+5y-13=0 & \text{--}(2) \end{cases}$$

2次方程式を解くと、

$$y^2-5y+6=0$$

交点は (–2, 3) と (3, 2)

e) 連立方程式は、
$$\begin{cases} x^2+y^2=10 & \text{-----}(1) \\ x-2y-5=0 & \text{---}(2) \end{cases}$$

2次方程式を解くと、

$$y^2+4y+3=0$$

交点は (–1, –3) と (3, –1)

f) 連立方程式は、
$$\begin{cases} x^2+y^2=17 & \text{-----}(1) \\ 3x+5y-17=0 & \text{-----}(2) \end{cases}$$

2次方程式を解くと、

$$x^2-3x-4=0$$

交点は、(4, 1) と (–1, 4)

a)、b)、c) では、任意の変数を代入でき、問題の難易度はどれも同じぐらいです。d) と e) では、変数 x を求める方法が簡単なので、生徒がそれに気付くようにもっていきます。f) では、どの変数も取り出して求めることができますが、どの問題もそれまでの問題に比べるとやや複雑な解き方になっています。

2.6 復習問題

1. 各問題で指定された半径を持ち原点に中心がある円の方程式を求めなさい

a) $r = 2$ b) $r = \sqrt{7}$

2. 以下の方程式のグラフを座標平面に描きなさい。

a) $x^2 + y^2 = 16$ b) $x^2 + y^2 = \frac{25}{4}$

3. 各問の点Cが中心となる半径 rをもつ 円の方程式を作りなさい。

a) C (3, –2), $r = 10$ b) C (4, –3), $r = \frac{2}{3}$

4. 以下の方程式のグラフを座標平面に描きなさい。

a) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$ b) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = \frac{9}{4}$

5. 次の方程式で円の中心と半径を求めなさい。それぞれの方程式に対応するグラフを座標平面に描きなさい。

a) $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 18 = 0$ b) $4x^2 + 4y^2 + 24x + 16y + 27 = 0$

6. 各問の点Pにおいて円に接する接線の方程式を求めなさい。

a) $x^2 + y^2 = 10$, P(–3, 1) b) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$, P(0, –4)

7. 次の各問の方程式のグラフにある交点の座標を求めなさい。

a) $x^2 + y^2 = 8$; $x - y = 0$ b) $x^2 + y^2 = 20$; $3x - y - 10 = 0$

8. 円 $x^2 + y^2 = 10$ と接する傾き–3の接線（または複数の接線）の方程式を求めなさい。

9. 点 P(2、0) において円 $x^2 + y^2 = 2$ と接する接線（または複数の接線）の方程式を求めなさい。

条件をよく理解するためにグラフを作成しても構いません。

10. 点 P(x_1, y_1) において円 $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ と接する接線が $(x_1 - h)(x - h) + (y_1 - k)(y - k) = r^2$であることを証明しなさい

ユニット 3

達成の目安

2.6 円に関する問題を解きなさい。

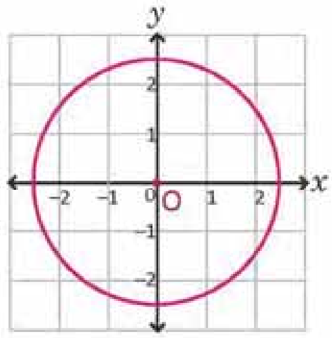
解答：

1a) $x^2 + y^2 = 22$ したがって $x^2 + y^2 = 4$

1b) $x^2 + y^2 = \sqrt{7}^2$ よって $x^2 + y^2 = 7$

2a) 中心が原点 (0、0)で半径 4 の円

2b) 中心が原点 (0、0)で半径 $\frac{5}{2}$ の円



3a) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 100$

3b) $(x-4)^2 + (y+3)^2 = \frac{4}{9}$

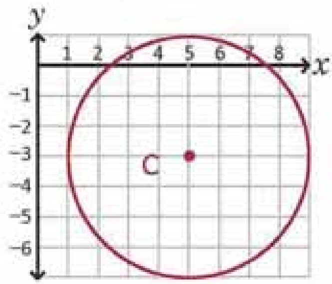
4a) 中心は $(-2, 3)$ で、半径は 3

4b) 中心は $(-1, -2)$ で、半径は $\frac{3}{2}$

5a) $(x^2 - 10x + 5^2) + (y^2 + 6y + 3^2) = -18 + 5^2 + 3^2$

$$(x-5)^2 + (y+3)^2 = 16$$

中心は(5, −3)で、半径は4



5b) $4(x^2 + 6x + 3^2) + 4(y^2 + 4y + 2^2) = -27 + 4(3^2) + 4(2^2)$

$$(x+3)^2 + (y+2)^2 = \frac{25}{4}$$

中心は (−3, −2)で、半径は $\frac{5}{2}$

6a) $(-3)x + 1y = 10$ よって$-3x + y - 10 = 0$

6b) 移動した円と点は、

$x^2 + y^2 = 5$, $P'(0-2, -4+3) = P'(-2, -1)$.

接線は、$-2x - y = 5$ です。

接線の元の位置は、

$-2(x-2) - (y+3) = 5$ よって $2x + y + 4 = 0$

7a) 連立方程式は、$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 & \text{------ (1)} \\ x - y = 0 & \text{------ (2)} \end{cases}$

2 次方程式を解くと、

$$x^2 = 4.$$

交点は、(2, 2) および (−2, −2)

7b) 連立方程式は、$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 & \text{------ (1)} \\ 3x - y - 10 = 0 & \text{------(2)} \end{cases}$

2次方程式を解くと、

$$x^2 - 6x + 8 = 0.$$

交点は、(4, 2) と (2, −4)

8. 連立方程式を解くと、

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 & \text{------ (1)} \\ y = -3x + b & \text{------ (2)} \end{cases}$$

右辺を 0 の等式に直すと、

$10x^2 - 6bx + (b^2 - 10) = 0$ となり、その結果、

$b^2 = 100$ になるので、$b = \pm 10$

直線は$y = -3x + 10$ および $y = -3x - 10$

9. $y = mx + b$ の方程式が考えられます。

(2, 0) を通るので、$0 = 2m + b$ が成り立ちます。

連立方程式を解くと、

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & \text{------ (1)} \\ y = mx - 2m & \text{------ (2)} \end{cases}$$

右辺を

$$(m^2 + 1)x^2 - 4m^2x + (4m^2 - 2)$$

0 の等式に直すと、$m^2 = 1$ となり、

$m = \pm 1$ 直線は $y = x - 2$ および $y = -x + 2$

10. 円の中心を原点に移動させ、点 P を水平に$-h$、垂直方向に$-k$ 移動させると、

$$x^2 + y^2 = r^2,\ P'(x_1 - h, y_1 - k).$$

点Pにおける接線の方程式は、

$$(x_1 - h)x + (y_1 - k)y = r^2.$$

そして元の位置に移動させ、

$$(x_1 - h)(x - h) + (y_1 - k)(y - k) = r^2.$$

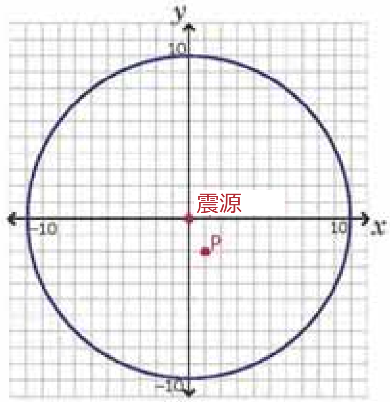
2.7 円の応用*

導入問題

エルサルバドルで起きた地震の震源はサンサルバドル市の市制200周年記念公園一帯でした。地震でその周囲 10 km が被災しました。もしアンティグオクスカトラン市が震源の東に 1 km、南に 2 km のところに位置していたら、この地震による被害を受けたでしょうか。

解法

条件をもとに座標平面に印をつけて、座標平面上で震源の位置を求めます。



地震は円から10 kmのところで起きたので、中心が震源で、半径が 10 の円のグラフを作ることができます。

$$x^2 + y^2 = 100$$

アンティグオクスカトラン市の位置を点 P(1, −2) とします。

その点が円の内側であれば被災したことになり、円の外側にあれば被災していないことになります。

方程式に、x と y と点 P の値を代入すると、

$$1^2 + (-2)^2 = 1 + 4 = 5$$

解は 100 以下(5 < 100) になるので、もし点が 100 と同じであれば円の中にあり、もし 100 より大きければ円の外にあります。

したがって、アンティグオクスカトラン市は市制 200 周年記念公園を震源とする地震で被災したことになります。

まとめ

日常の身近な問題には円の方程式を用いて解くことができるものもありますが、問題を解くにあたっては、座標平面にその条件を満たす座標を描きこみ、それをグラフ化し、そこから情報を得て、解答を得るというプロセスが必要です。

問題

1. エルサルバドルで起きた地震の震源はサンサルバドル市の市制 200 周年記念公園一帯でした。地震でその周囲 10 km が被災しました。
もしボケロン火山が震源の西に 7 km、北に 8 km のところに位置していたら、この地震による被害をうけましたか。

2. 燻煙機は円を描いて飛行し、農民の家を中心とした円と仮定して、13 m の範囲まで噴霧可能です。土地は長さ 30 m、幅 20 mで、農民の家はちょうどその土地の真ん中にあります。農民の家から西に 11 m、南に 5 mのところにあるフリホーレスのプランテーションは燻煙器によって噴霧されるでしょうか。

3. サンサルバドルの守護聖人のお祭りには、「ボラドーラ」と呼ばれる機械遊具が設置されます。この遊具の車輪は電源が切られている状態で半径2 mをカバーしており、そこから吊り下げられているイスの鎖が 1 mの長さである場合、コントロールブースをこの「ボラドーラ」の中心から東に 1 m、南に 3 mの場所に設置すれば、遊具の電源を入れてもそのコントロールブースには遊具が当たらずに済みますか。

達成の目安

2.7 円の性質と方程式を用いて領域の問題を解きなさい。

学習の流れ

円に関する基本概念を一通り学習したら、日用品を扱った応用問題を解くことができます。この授業では教師が生徒に対し、より多くのヒントを出す必要があるため、*マークをつけています。

ねらい

問題の解答では、生徒は問題を解くために与えられた情報を数学的概念に基づいてグラフに表し、そこで得られた結果をあてはめて元の問題を解かなくてはなりません。

解答：

1. 座標平面に印をつけて、座標平面上で震源の位置を求めることで、中心を原点（震源）とする半径 10 の円の方程式をあてはめることができます。

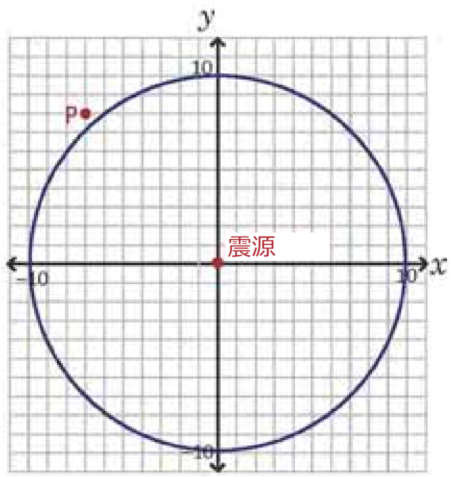
$$x^2 + y^2 = 100.$$

ボケロン火山の位置を点 P(−7, 8) とします。

方程式に、x とy と点 P の値を代入すると、

$$(-7)^2 + 8^2 = 49 + 64 = 113$$

解は 100 以上 (113 > 100) で、もし点が 100 と同じであれば円周上にあり、もし100 より小さければ円の中にあることになるので、ボケロン火山はサンサルバドル市を震源とする地震の影響は受けなかったことが分かります。



2. 燻煙機の噴霧範囲を円$x^2 + y^2 = 13^2$で表し、農民の家に対するフリホーレス工場の位置を点 (−11、−5) にして代入すると、$(-11)^2 + (-5)^2 = 121 + 25 = 146 < 169$ となります。よって、フリホーレス工場は燻煙機の噴霧が届く位置にあることが分かります。

3. 遊具は電源が切られた状態で半径2 mの円の大きさがあり、電源が入るとさらに1 m半径が伸び、計3 mに達することになります。この条件に、円 $x^2 + y^2 = 3^2$ の方程式をあてはめ、遊具のコントロールブースの設置位置を示す点 (1、−3) を代入すると、$1^2 + (-3)^2 = 1 + 9 = 10 > 9$ となります。したがって、コントロールブースは遊具「ボラドーラ」が当たらない範囲に設置される予定であることが分かります。

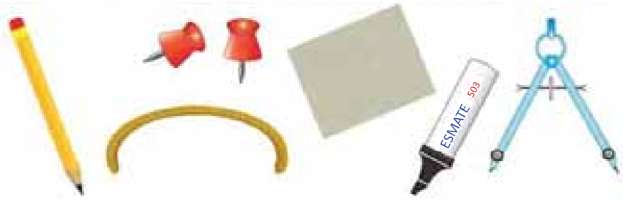
これらの問題は、2つの点の間の距離を求める式を使っても解くことができますが、生徒たちには円の概念を使って問題を解かせる方がいいです。

レッスン3 楕円

3.1 導入方法

用意する物

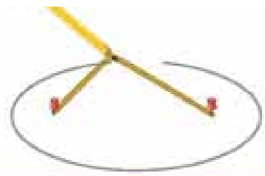
- 画鋲2個
- ひも
- 鉛筆
- トレーシングペーパー
- コンパス
- マジック



導入1

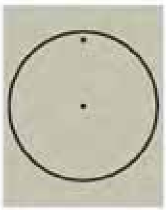
1. 十分なスペースのある場所に紐の先を画鋲でとめます。

2. 鉛筆の先で紐をピンとはるまで引っ張り、そのまま紐を貼った状態で鉛筆が元の位置にくるまで動かして線を引きます。

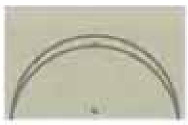


課題2

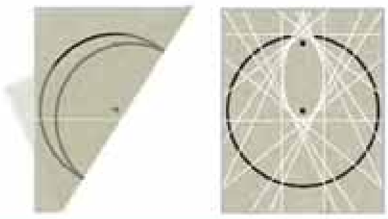
1. トレーシングペーパーに、できるだけ大きな円を描きなさい。そしてその円の中に1つの点を書きなさい。



2. 書いた点が円周上の点とぴったり重なるように紙を折りなさい。



3. 円周の手前の部分から最初に始めた部分にくるまで同じことを繰り返しなさい。できた形を分析しなさい。



定義

これらの課題にしたがってできる形を**楕円**といいます。それぞれの点において、点から2つの定点までの距離が一定に保たれていることを確認します。

問

1. 描かれた線上の点からそれぞれの画鋲までの距離を足すとどれだけになりますか。
2. 点から2つの画鋲までの距離の合計と紐の長さとの間にはどのような関係がありますか。
3. 課題2で点が円周上にある場合はどうなりますか。
4. 課題2で点が円の中心にある場合はどうなりますか。

ユニット3

69

達成の目安

1.3 楕円の軌跡を特定しなさい。

学習の流れ

楕円になる図形は生徒達がこれまで慣れ親しんできたものとは（少なくとも数式においては）一線を画すので、楕円の図形を識別できるようになる必要があります。

ねらい

この導入では、楕円の定義と図形を結びつけて覚えることを目指し、次の授業で楕円の方程式を解く際に、楕円の方程式(標準形)を使えばすぐにその軌跡が分かると復習できるように、2つの方法を紹介しています。

用意する物

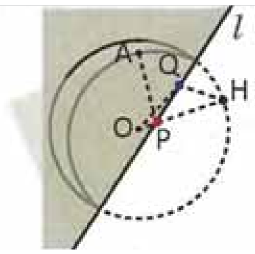
授業では画鋲（一人 2 個ずつ）、紐、鉛筆、定規、トレーシングペーパー、コンパスとマジック（各生徒一人にそれぞれ1つずつ）を使います。

解答：

課題 2 でできる形も楕円で、その構造を考えると以下であることが分かります。

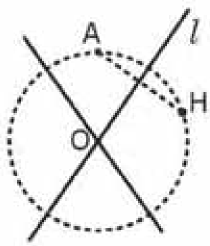
点 H が点 A と重なる円周上の点である場合、また点 P が半径 OH と折り目直線 l の交点である場合、$d(P, A) = d(P, H)$ が成り立つので、$d(P, O) + d(P, A) = d(P, O) + d(P, H) = d(O, H)$ となります。

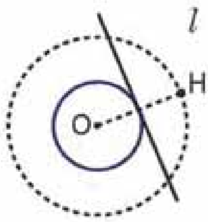
点 Q が折り目（直線 l）上の別の点であれば、$d(Q, A) = d(Q, H)$ となり、$d(Q, A) + d(Q, O) = d(Q, H) + d(Q, O) > d(O, H)$ になります。（三角不等式）



よって、直線 l と曲線は点 P だけで接する（l は点 P において曲線に接する接線）となります。

1. 生徒は図形からそれぞれの画鋲までの距離を測って合計する必要がありますが、その長さは紐の長さによって様々です。
2. 長さは同じになりますが、ここでは生徒は定規を使って長さを測ります。
3. これは課題 2 の説明をもとに考えることができます。A が円周上にあり、点 H と重なる場合、折り目（直線 l）は、切片 AH の垂直二等分線となることから、切片AHは円の中心を通ることが分かり、全ての線状にある唯一の点は円の中心で、他には存在しないため、この場合はにできる図形は 1 つの点となります。
4. 同様に、点が円の中心と重なる場合は、円周上の各点Hと折り目（直線 l）は半径 OH の垂直二等分線となり、全ての半径の垂直二等分線は作図した円の半径の半分の円の接線となり、元の円の半径の半分の円の円周になります。





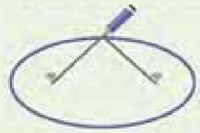
レッスン 3

3.2 楕円*

導入問題

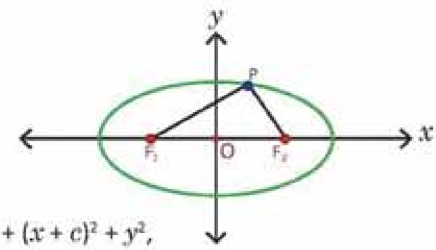
定点 $F_1(-c, 0)$ までの距離ともう1つの定点 $F_2(c, 0)$ までの距離との合計が常に $2a$ で、$0 < c < a$ の条件を満たす軌跡になる式を求めなさい。

この軌跡をもつ図形は**楕円**であることを復習しよう。



解法

条件を満たす点 P(x, y) と2つの点の間の距離を利用します。



$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

2乗し、 $(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2,$

整理し、 $a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx,$

2乗し、 $a^2[(x+c)^2 + y^2] = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2,$

整理し、 $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$

$0 < c < a$ から、$a^2 - c2 > 0$ が成り立ち、それによりbの値は、$b2 = a2 - c2$ で、$b > 0$ であることが分かります。
最後の等式にあてはめて、

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

等式の両辺を a^2b^2 でわって、$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の式で表すことができます。

定義

楕円**の軌跡を特定する方程式は** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ と表します。

定点F_1と定点 F_2 は楕円の**焦点**といい座標は、

$$F_1(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0) \text{ y } F_2(\sqrt{a^2 - b^2}, 0).$$

楕円の点からそれぞれの焦点までの距離の合計は$2a$です。

楕円の方程式が $a = b$ の場合は円になります。よって、円は楕円の特定の形であるといえます。

例

焦点が $F_1(-3, 0)$ と $F_2(3, 0)$ で $a = 5$ の楕円の方程式を求めなさい。

焦点の x 座標は $c = 3$ と $a = 5$ と仮説をたてて b を求める式を作ると、

$$a^2 - c^2 = b^2 \text{となり、} b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 = 4^2$$

よって、楕円の方程式は、$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ つまり、$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

問題

1. 各問の楕円の式を求めなさい。

a) $F_1(-4, 0), F_2(4, 0), a = 5$　　b) $F_1(-2, 0), F_2(2, 0), a = 3$　　c) $F_1(-1, 0), F_2(1, 0), a = 2$

2. それぞれの楕円の焦点の座標を求めなさい。

a) $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$　　b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$　　c) $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1$

達成の目安

3.2 焦点と半長軸を基に中心が原点の楕円の方程式を作りなさい。

学習の流れ

生徒たちは楕円の軌跡が分かるようになると、楕円グラフからその条件を満たす楕円の式を作ることができるようになります。この授業では教師が生徒に対し、より多くのヒントを出す必要があるため、*マークをつけています。

ねらい

解答では、 $b^2 = a^2 - c^2$ の関係は、楕円になるピタゴラスの定義ではなく、2乗の条件から導かれています。「例」では、条件をもとに楕円の方程式を作る方法を紹介しています。

解答：

1a) $c = 4$ 、 $a = 5$ なので、

$b^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 = 3^2$

よって、この楕円の式は、

$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$、つまり、$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

1b) $c = 2$ 、 $a = 3$ なので、

$b^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5 = (\sqrt{5})^2$

よって、この楕円の式は、

$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{\sqrt{5}^2} = 1$ 、つまり、 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$

1c) $c = 1$ 、 $a = 2$ なので、

$b^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 = (\sqrt{3})^2,$

よって、この楕円の式は、

$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$、つまり、$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$

2a) $a^2 = 5^2$、$b^2 = 3^2$ なので、

$c^2 = a^2 - b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 = 4^2,$

よって、この焦点は、

$F_1(-4, 0), F_2(4, 0).$

2b) $a^2 = 4$、$b^2 = 2$ なので、

$c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 2 = 2 = (\sqrt{2})^2,$

よって、この焦点は

$F_1(-\sqrt{2}, 0), F_2(\sqrt{2}, 0).$

2c) $a^2 = 7$ および $b^2 = 3$であることから、

$c^2 = a^2 - b^2 = 7 - 3 = 4 = 2^2,$

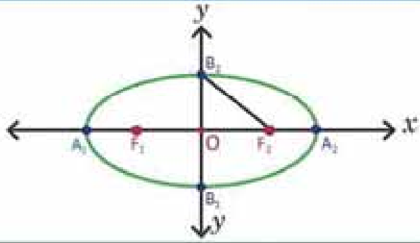
よって、この焦点は、

$F_1(-2, 0), F_2(2, 0).$

3.3 楕円の要素と性質

導入問題

楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ のグラフで 点 A_1、A_2、B_1、B_2 の座標を求めなさい。



解法

A_1 と A_2 は x 軸上にあることから、楕円の方程式に $y=0$ をあてはめて確認することができます。

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{0^2}{b^2}=1$ なので、 $\frac{x^2}{a^2}=1$ そこから、

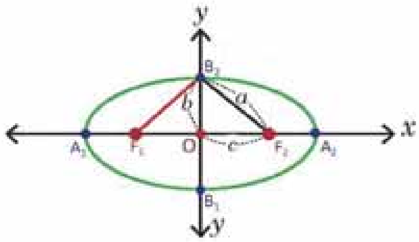
$$x^2=a^2$$
$$x=\pm a$$

同様に、B_1 と B_2 は y 軸上にあることから、楕円の方程式に $x=0$ をあてはめて、

$$y=\pm b$$

したがって、これらの点の座標は、

$A_1(-a, 0)$、$A_2(a, 0)$、$B_1(0, -b)$、$B_2(0, b)$です。

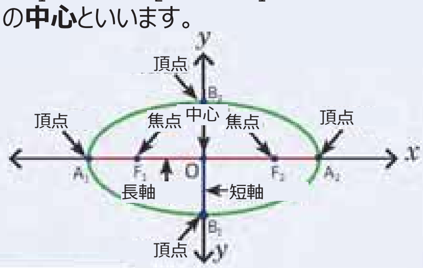


まとめ

楕円の両極の x 軸上とy 軸上にある点を**頂点**といい、それぞれの座標は、$A_1(-a, 0)$、$A_2(a, 0)$、$B_1(0, -b)$、$B_2(0, b)$ と表します。水平（もしくは垂直）方向の頂点の中間点を楕円の**中心**といいます。

楕円の焦点を通る切片とその両端が頂点になっている線分を楕円の**長軸**といい、その長さは $2a$ と表します。

両端が頂点になっている切片で、**長軸**と垂直に交差するものを楕円の短軸といい、その長さは2bと表します。



楕円グラフを作成するには、頂点 A_1 、A_2と、B_1 、B_2 を書き込み、長軸と短軸の線を引きます。

例

楕円 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ の頂点、焦点の座標と長軸と短軸の長さを求めなさい。そしてそれを座標平面にグラフで表しなさい。

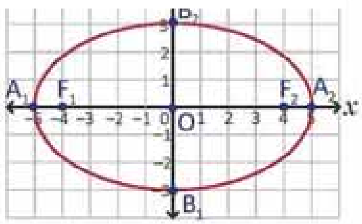
a、b、c の値を代入し、$a=5$, b と 3 y $c=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$

頂点 $\begin{cases} A_1(-5, 0), A_2(5, 0) \\ B_1(0, -3), B_2(0, 3) \end{cases}$

長軸の長さ $=2(5)=10$

短軸の長さ $=2(3)=6$

焦点 $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$



問題

それぞれの楕円の頂点と焦点の座標と長軸と短軸の長さを求めなさい。そしてそれを座標平面にグラフで表しなさい。

a) $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ c) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ d) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

達成の目安

3.3 楕円の方程式にあるグラフを作成するための要素を特定しなさい。

学習の流れ

楕円の方程式（標準形）をマスターしたら、生徒と一緒に、楕円を作る様々な要素を基にしてそれらをどのように座標平面に表すかに取り組みます。

ねらい

解答では、楕円がもつ一般的な様々な要素を紹介し、「例」では、それらの要素を使ってトレーシングペーパーにグラフで表す方法を確認します。

解答：

a) a、b、c の値を代入し、

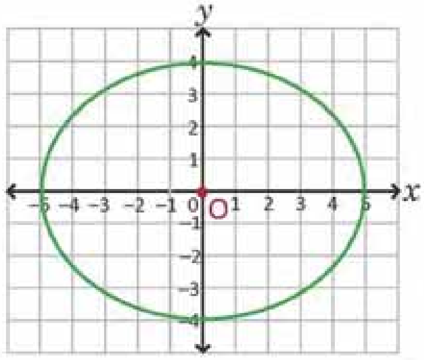
$a = 5, b = 4, c = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3.$

頂点 $\begin{cases} A_1(-5, 0), A_2(5, 0) \\ B_1(0, -4), B_2(0, 4) \end{cases}$

焦点 $F_1(-3, 0), F_2(3, 0)$

長軸の長さ = 2(5) = 10

短軸の長さ = 2(4) = 8



生徒が楕円グラフを書けるように、頂点の座標を書いて、その後長軸と短軸を書き込むだけで十分であることを教えても問題ありません。

b) a、b、c の値を代入し、

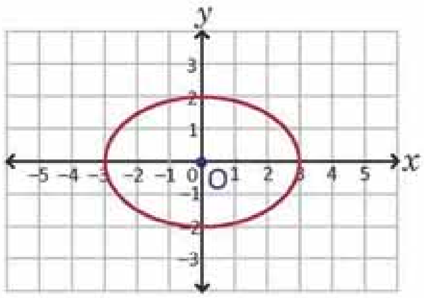
$a = 3, b = 2, c = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}.$

頂点 $\begin{cases} A_1(-3, 0), A_2(3, 0) \\ B_1(0, -2), B_2(0, 2) \end{cases}$

焦点 $F_1(-\sqrt{5}, 0), F_2(\sqrt{5}, 0)$

長軸の長さ = 2(3) = 6

短軸の長さ = 2(2) = 4



c) a、b、c の値を代入し、

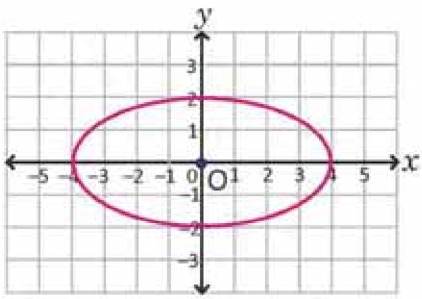
$a = 4, b = 2, c = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$

頂点 $\begin{cases} A_1(-4, 0), A_2(4, 0) \\ B_1(0, -2), B_2(0, 2) \end{cases}$

焦点 $F_1(-2\sqrt{3}, 0), F_2(2\sqrt{3}, 0)$

長軸の長さ = 2(4) = 8

短軸の長さ = 2(2) = 4



d) a、b、c の値を代入し、

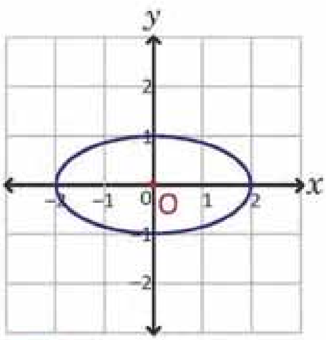
$a = 2, b = 1, c = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$

頂点 $\begin{cases} A_1(-2, 0), A_2(2, 0) \\ B_1(0, -1), B_2(0, 1) \end{cases}$

焦点 $F_1(-\sqrt{3}, 0), F_2(\sqrt{3}, 0)$

長軸の長さ = 2(2) = 4

短軸の長さ = 2(1) = 2



d)では、生徒は、分母の y^2 が 1^2 という点が理解できず間違うかもしれないので注意する必要があります。そのため、この問題は最後に取り組ませましょう。

3.4 楕円の平行移動

導入問題

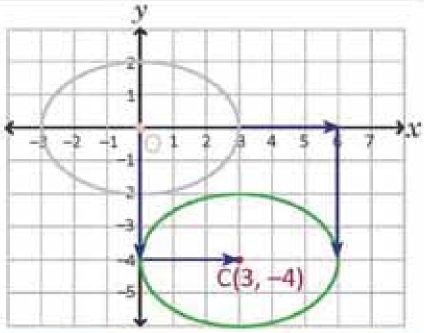
座標平面に $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{4}=1$ のグラフを描きなさい。

解法

楕円 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ を右に 3、下に 4 移動させることから式は、

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{4}=1.$$

よって、グラフは中心が (3, –4) にある楕円 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ になります。



まとめ

水平方向に h、垂直方向に k 移動させた楕円の方程式を式に表すと、

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

グラフを作るには、中心の位置を求め、そこが座標平面の原点であるかのように作成するか、原点でグラフを作り、それを移動させます。

グラフを水平方向に h、垂直方向に k 移動させるには、変数 x に $x-h$ を代入し、変数 y に $y-k$ をあてはめる点を復習しよう。

例 1

楕円 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ を水平方向に –3、垂直方向に 2 移動させた楕円の式を求めなさい。

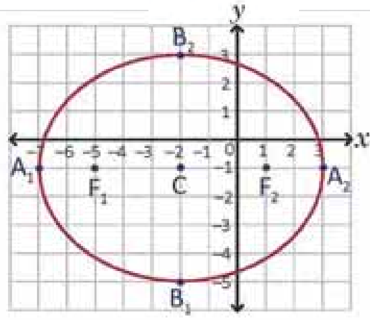
元の方程式の x を $[x-(-3)]$、y を $(y-2)$ に置き換え、$\frac{(x+3)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$

例 2

楕円の頂点、焦点の座標と長軸と短軸の長さを求めなさい。$\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$
そして全ての要素を使って座標平面にグラフで表しなさい。

この楕円は楕円 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ を水平方向に –2、垂直方向に–1 移動させたものとなります。
頂点と焦点が同じように移動する点がポイントです。

方程式	$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$	$\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$
頂点	$A_1(-5, 0), A_2(5, 0)$ $B_1(0, -4), B_2(0, 4)$	$A_1(-7, -1), A_2(3, -1)$ $B_1(-2, -5), B_2(-2, 3)$
焦点	$F_1(-3, 0), F_2(3, 0)$	$F_1(-5, -1), F_2(1, -1)$
長軸と短軸の長さ	$2a=10, 2b=8$	$2a=10, 2b=8$



問題

1. それぞれの問いにある水平方向に h、垂直方向に k 移動させた楕円を表す方程式を作りなさい。

a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1, h=-1, k=2$　　b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1, h=3, k=-1$　　c) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1, h=-2, k=-2$

2. 頂点と焦点の座標と長軸と短軸の長さを求めなさい。そしてそれぞれの楕円グラフを座標平面に描きなさい

a) $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$　　b) $\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$　　c) $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$

達成の目安

3.4 座標軸に対し平行移動させた楕円の式を求め作図しなさい。

学習の流れ

生徒たちはすでに楕円の方程式を理解しており、方程式からその楕円の要素を求める方法も分かっているので、タイミング的にはここで楕円の平行移動の学習に入るのがよいです。

ねらい

解答 では、生徒がすでに放物線の課で学び、円の課でも活用していたグラフや点の平行移動の知識を活用できるように説明しています。

解答：

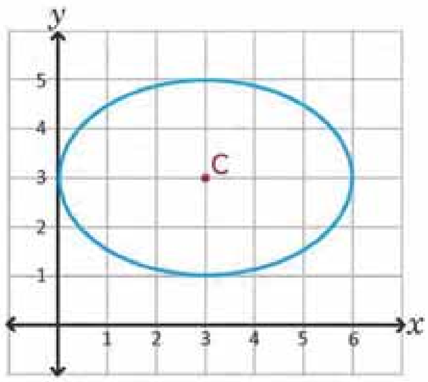
1a) $\frac{[x-(-1)]^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ よって、$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1.$

1b) $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{[y-(-1)]^2}{4} = 1$ よって、$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1.$

1c) $\frac{[x-(-2)]^2}{16} + \frac{[y-(-2)]^2}{7} = 1$ よって、$\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{7} = 1.$

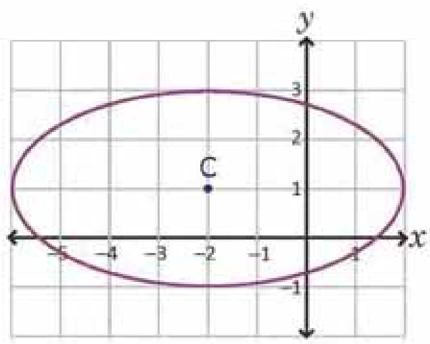
2a)

方程式	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$	$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$
頂点	$A_1(-3, 0), A_2(3, 0)$ $B_1(0, -2), B_2(0, 2)$	$A_1(0, 3), A_2(6, 3)$ $B_1(3, 1), B_2(3, 5)$
焦点	$F_1(-\sqrt{5}, 0)$, $F_2(\sqrt{5}, 0)$	$F_1(-\sqrt{5}+3, 3)$, $F_2(\sqrt{5}+3, 3)$
長軸と短軸の長さ	$2a = 6, 2b = 4$	$2a = 6, 2b = 4$



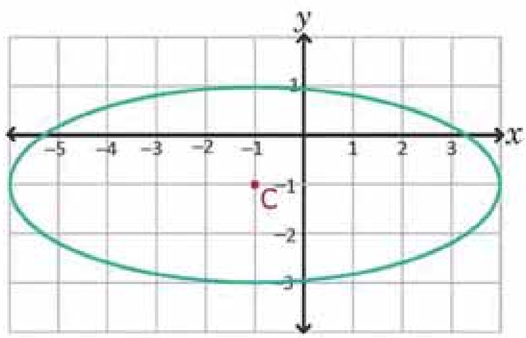
2b)

方程式	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$	$\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$
頂点	$A_1(-4, 0), A_2(4, 0)$ $B_1(0, -2), B_2(0, 2)$	$A_1(-6, 1), A_2(2, 1)$ $B_1(-2, -1), B_2(-2, 3)$
焦点	$F_1(-2\sqrt{3}, 0)$, $F_2(2\sqrt{3}, 0)$	$F_1(-2\sqrt{3}-2, 1)$, $F_2(2\sqrt{3}-2, 1)$
長軸と短軸の長さ	$2a = 8, 2b = 4$	$2a = 8, 2b = 4$



2c)

方程式	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$	$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$
頂点	$A_1(-5, 0), A_2(5, 0)$ $B_1(0, -2), B_2(0, 2)$	$A_1(-6, -1), A_2(4, -1)$ $B_1(-1, -3), B_2(-1, 1)$
焦点	$F_1(-\sqrt{21}, 0)$, $F_2(\sqrt{21}, 0)$	$F_1(-\sqrt{21}-1, -1)$, $F_2(\sqrt{21}-1, -1)$
長軸と短軸の長さ	$2a = 10, 2b = 4$	$2a = 10, 2b = 4$



3.5 楕円の方程式(一般形)

導入問題

座標平面に $9x^2 + 25y^2 - 18x - 100y - 116 = 0$ のグラフを作成しなさい。

$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ の形の式で表しなさい。

解法

x と y を平方完成させます。

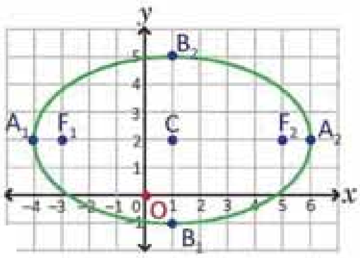
$$9x^2 + 25y^2 - 18x - 100y - 116 = 0$$

$$9(x^2 - 2x) + 25(y^2 - 4y) - 116 = 0$$ 整理して同類項をまとめ、

$$9(x-1)^2 + 25(y-2)^2 - 9 - 100 - 116 = 0$$ 平方完成し、

$$\frac{9(x-1)^2}{225} + \frac{25(y-2)^2}{225} = 1$$ 加算して 1 の等式を作り、

$$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$ 約分します。



よって、中心が $(1, 2)$、頂点が $A_1(-4, 2)$ と $A_2(6, 2)$、$B_1(1, -1)$ と $B_2(1, 5)$ の楕円グラフになります。

まとめ

楕円 $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ は平方完成して、右辺を 0 の等式にして表すことができます。

通常、$dx^2 + ey^2 + fx + gy + h = 0$ の式で表される楕円の中心と頂点（長軸と短軸）は、$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ のように x と y の平方完成を行うことで求めることができます。$dx^2 + ey^2 + fx + gy + h = 0$ の形の表す式を楕円の方程式（一般形）**といいます。**

例

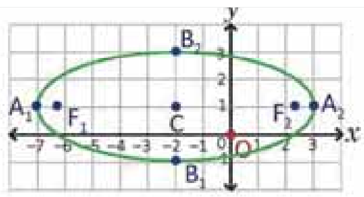
楕円 $4x^2 + 25y^2 + 16x - 50y - 59 = 0$ の頂点、焦点の座標と長軸と短軸の長さを求め、全ての要素を使って座標平面にグラフを描きなさい。

$$4x^2 + 25y^2 + 16x - 50y - 59 = 0$$

$$4(x+2)^2 + 25(y-1)^2 - 16 - 25 - 59 = 0$$

$$\frac{4(x+2)^2}{100} + \frac{25(y-1)^2}{100} = 1$$

$$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$



したがって楕円の中心は、点 $C(-2, 1)$ です。

この楕円は楕円 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ を水平方向に -2 、垂直方向に-1移動させたものと同じです。

方程式	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$	$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$
頂点	$A_1(-5, 0)$, $A_2(5, 0)$, $B_1(0, -2)$, $B_2(0, 2)$	$A_1(-7, 1)$, $A_2(3, 1)$, $B_1(-2, -1)$, $B_2(-2, 3)$
焦点	$F_1(-\sqrt{21}, 0)$, $F_2(\sqrt{21}, 0)$	$F_1(-2-\sqrt{21}, 1)$, $F_2(-2+\sqrt{21}, 1)$
軸の長さ	$2a = 10$, $2b = 4$	$2a = 10$, $2b = 4$

問題

楕円の頂点、焦点の座標と長軸と短軸の長さを求めなさい。そしてそれを座標平面にグラフで表しなさい。

a) $4x^2 + 9y^2 + 8x + 18y - 23 = 0$　b) $3x^2 + 4y^2 - 12x + 16y + 16 = 0$　c) $8x^2 + 9y^2 - 16x - 18y - 55 = 0$

d) $7x^2 + 16y^2 + 14x - 64y - 41 = 0$　e) $4x^2 + 9y^2 - 36y = 0$　f) $x^2 + 4y^2 + 4x = 0$

達成の目安

3.5 楕円の方程式（一般形）から楕円の要素を求め、座標平面にグラフを作成しなさい。

学習の流れ

生徒たちはここまでの学習で楕円の平行移動ができるようになっているので、平方完成の手順を使って楕円の方程式（一般形）に取り組みます。

ねらい

前回同様今回の授業でも、生徒が正確に理解できるように、座標平面の 4 方向それぞれへの移動を扱っています。

解答：

a) $4x^2 + 9y^2 + 8x + 18y - 23 = 0$

$$4(x+1)^2 + 9(y+1)^2 = 23 + 4 + 9$$

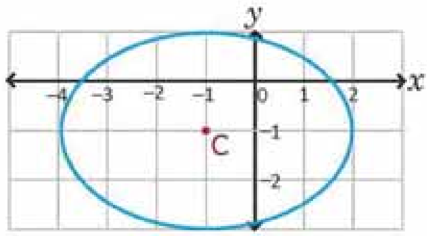
$$\frac{4(x+1)^2}{36} + \frac{9(y+1)^2}{36} = 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

$A_1(-4, -1)$, $A_2(2, -1)$, $B_1(-1, -3)$, $B_2(-1, 1)$

$F_1(-\sqrt{5} - 1, -1)$, $F_2(\sqrt{5} - 1, -1)$

$2a = 6$, $2b = 4$



b) $3x^2 + 4y^2 - 12x + 16y + 16 = 0$

$$3(x-2)^2 + 4(y+2)^2 = -16 + 12 + 16$$

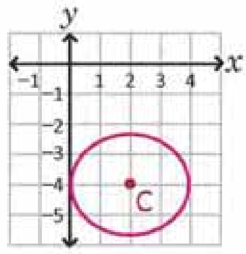
$$\frac{3(x-2)^2}{12} + \frac{4(y+4)^2}{12} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+4)^2}{3} = 1$$

$A_1(0, -4)$, $A_2(4, -4)$, $B_1(2, -\sqrt{3} - 4)$, $B_2(2, \sqrt{3} - 4)$

$F_1(1, -4)$, $F_2(3, -4)$

$2a = 4$, $2b = 2\sqrt{3}$



c) $8x^2 + 9y^2 - 16x - 18y - 55 = 0$

$$8(x-1)^2 + 9(y-1)^2 = 55 + 8 + 9$$

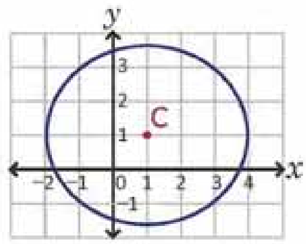
$$\frac{8(x-1)^2}{72} + \frac{9(y-1)^2}{72} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{8} = 1$$

$A_1(-2, 1)$, $A_2(4, 1)$, $B_1(1, -2\sqrt{2} + 1)$, $B_2(1, 2\sqrt{2} + 1)$

$F_1(0, 1)$, $F_2(2, 1)$

$2a = 6$, $2b = 4\sqrt{2}$



d) $7x^2 + 16y^2 + 14x - 64y - 41 = 0$

$$7(x+1)^2 + 16(y-2)^2 = 41 + 7 + 64$$

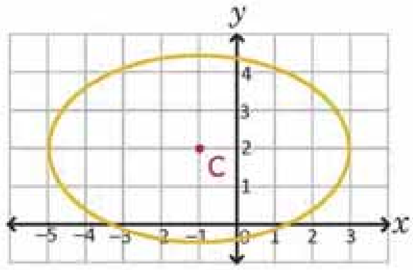
$$\frac{7(x+1)^2}{112} + \frac{16(y-2)^2}{112} = 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{7} = 1$$

$A_1(-5, 2)$, $A_2(3, 2)$, $B_1(-1, -\sqrt{7} + 2)$, $B_2(-1, \sqrt{7} + 2)$

$F_1(-4, 2)$, $F_2(2, 2)$

$2a = 8$, $2b = 2\sqrt{7}$



e) $4x^2 + 9y^2 - 36y = 0$

$$4x^2 + 9(y-2)^2 = 0 + 36$$

$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9(y-2)^2}{36} = 1$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

$A_1(-3, 2)$, $A_2(3, 2)$, $B_1(0, 0)$, $B_2(0, 4)$

$F_1(-\sqrt{5}, 2)$, $F_2(\sqrt{5}, 2)$

$2a = 6$, $2b = 4$

f) $x^2 + 4y^2 + 4x = 0$

$$(x+2)^2 + 4y^2 = 4$$

$$\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{4y^2}{4} = 1$$

$$\frac{(x+2)^2}{4} + y^2 = 1$$

$A_1(-4, 0)$, $A_2(0, 0)$, $B_1(-2, -1)$, $B_2(-2, 1)$

$F_1(-\sqrt{3} - 2, 0)$, $F_2(\sqrt{3} - 2, 0)$

$2a = 4$, $2b = 2$

3.6 復習問題

1. 各問の楕円の式を求めなさい。

a) $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$, $a = 3$ b) $F_1(-\sqrt{7}, 0)$, $F_2(\sqrt{7}, 0)$, $A_1(-4, 0)$, $A_2(4, 0)$

2. それぞれの楕円の焦点の座標を求めなさい。

a) $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ b) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ c) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

3. それぞれの楕円の頂点と焦点の座標と長軸と短軸の長さを求めなさい。そしてそれを座標平面にグラフで表しなさい。

a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ b) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

4. それぞれの問いにある水平方向にh、垂直方向に k 移動させた楕円を表す方程式を作りなさい。

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, $h = -2$, $k = -2$ b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, $h = 3$, $k = -2$

5. 頂点、焦点の座標と長軸と短軸の長さを求めなさい。そして各問の楕円グラフを座標平面に描きなさい。

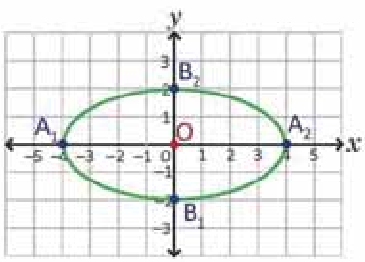
a) $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$ b) $\frac{(x+3)^2}{8} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$

6. それぞれの楕円の頂点と焦点の座標と長軸と短軸の長さを求めなさい。そしてそれを座標平面にグラフで表しなさい。

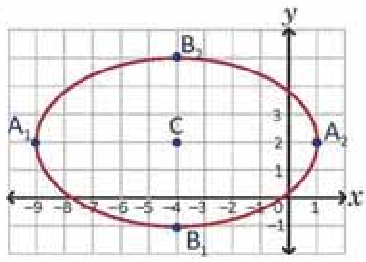
a) $4x^2 + 9y^2 - 16x + 36y + 16 = 0$ b) $4x^2 + 9y^2 + 24x = 0$

7. 以下の楕円の方程式をそれぞれ求めなさい。

a)



b)



達成の目安

3.6 楕円に関する問題を解きなさい。

解答：

1a) $b^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$ 、したがって式は、
$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$ 、よって $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$

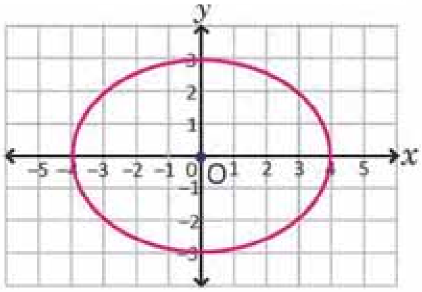
1b) $b^2 = 4^2 - \sqrt{7}^2 = 16 - 7 = 9$、したがって式は、
$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$、よって $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$

2a) $c^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5 = (\sqrt{5})^2$、焦点は、
$F_1(-\sqrt{5}, 0)$, $F_2(\sqrt{5}, 0)$.

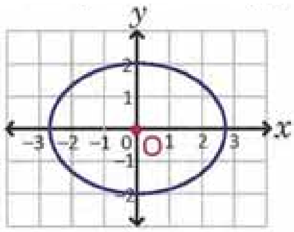
2b) $c^2 = 4 - 1 = 3 = (\sqrt{3})^2$、焦点は、
$F_1(-\sqrt{3}, 0)$, $F_2(\sqrt{3}, 0)$.

2c) $c^2 = 16 - 12 = 4 = 2^2$、焦点は、
$F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$.

3a)
頂点 $\begin{cases} A_1(-4, 0), A_2(4, 0) \\ B_1(0, -3), B_2(0, 3) \end{cases}$
焦点 $F_1(-\sqrt{7}, 0)$, $F_2(\sqrt{7}, 0)$
長軸の長さ = 2(4) = 8、
短軸の長さ = 2(3) = 6



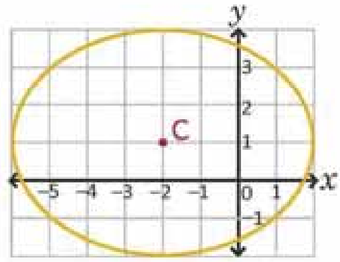
3b)
頂点 $\begin{cases} A_1(-2\sqrt{2}, 0), A_2(2\sqrt{2}, 0) \\ B_1(0, -2), B_2(0, 2) \end{cases}$
焦点 $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$
長軸の長さ = $2(2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$
短軸の長さ = 2(2) = 4



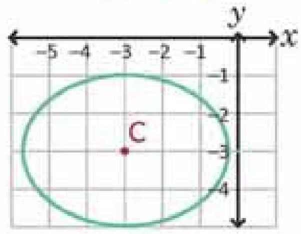
4a) $\frac{[x-(-2)]^2}{25} + \frac{[y-(-2)]^2}{16} = 1$、よって $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1.$

4b) $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{[y-(-2)]^2}{9} = 1$、よって $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1.$

5a) $A_1(-6, 1)$, $A_2(2, 1)$,
$B_1(-2, -2)$, $B_2(-2, 4)$
$F_1(-\sqrt{7} - 2, 1)$,
$F_2(\sqrt{7} - 2, 1)$
$2a = 8$, $2b = 6$



5b) $A_1(-2\sqrt{2} - 3, -3)$,
$A_2(2\sqrt{2} - 3, -3)$,
$B_1(-3, -5)$, $B_2(-3, -1)$
$F_1(-5, -3)$, $F_2(-1, -3)$
$2a = 4\sqrt{2}$, $2b = 4$



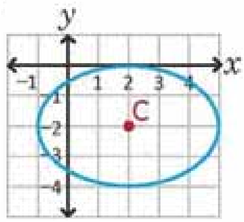
6a) $4x^2 + 9y^2 - 16x + 36y + 16 = 0$
$4(x-2)^2 + 9(y+2)^2 = -16 + 36 + 16$
$\frac{4(x-2)^2}{36} + \frac{9(y+2)^2}{36} = 1$
$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

$A_1(-1, -2)$, $A_2(5, -2)$,
$B_1(2, -4)$, $B_2(2, 0)$
$F_1(-\sqrt{5} + 2, -2)$,
$F_2(\sqrt{5} + 2, -2)$
$2a = 6$, $2b = 4$

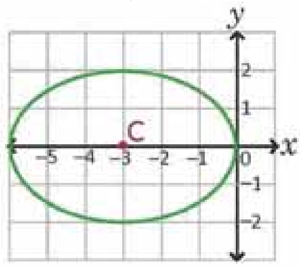
6b) $4x^2 + 9y^2 + 24x = 0$
$4(x+3)^2 + 9y^2 = 36$
$\frac{4(x+3)^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = 1$
$\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

$A_1(-6, 0)$, $A_2(0, 0)$,
$B_1(-3, -2)$, $B_2(-3, 2)$
$F_1(-\sqrt{5} - 3, 0)$,
$F_2(\sqrt{5} - 3, 0)$
$2a = 6$, $2b = 4$

6a)



6b)



7a) $a = 4$ と $b = 2$ であり、中心が原点 (0, 0) にあることが分かるので、方程式は、
$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$、よって $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$

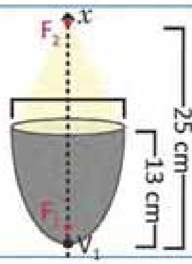
7b) $a = 5$、$b = 3$ で、中心は (–4, 2)、したがって方程式は、
$\frac{[x-(-4)]^2}{5^2} + \frac{(y-2)^2}{3^2} = 1$、よって $\frac{(x+4)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1.$

レッスン 3

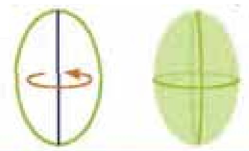
3.7 楕円の応用*

導入問題

高さ 13cm の半楕円形のランプ（楕円形の半分）に、1 つの焦点から発散する光でランプの頂点から 25cm 離れた位置にあるもう 1 つの焦点にスポットライトを浴びせるように設計します。ランプが正しく機能するために必要なランプの直径を求めなさい。



楕円形とは、楕円が長軸中心に回転することでできる立方体です。



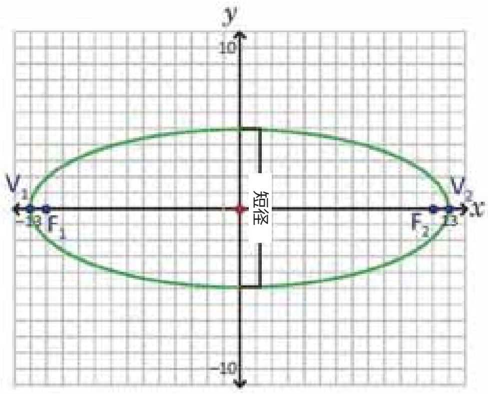
解法

中心が原点の楕円で、その頂点の1つの座標が (13, 0)、焦点の1つの座標が (12, 0) であることから、$a = 13$、$c = 12$ となり、

$$b^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25 = 5^2$$
$$a^2 = 13^2$$

そしてその楕円の方程式は、$\frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$

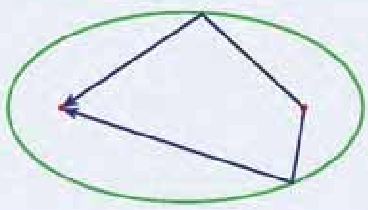
したがって、直径は楕円の短軸の長さ、すなわち $2b = 2(5) = 10$ です。
よって、ランプの直径は 10 cm になります。



まとめ

楕円の焦点には、重要な反射特性があります。楕円の一方の焦点から出る線はもう一方の焦点に正確に反射します。

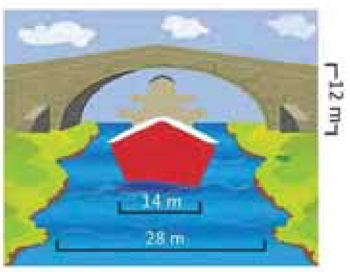
この放物線の反射特性に似た性質により、楕円または楕円形は科学分野、建築分野、音響分野そして芸術分野において活用されています。



問題

1. 一人の電気技師が劇場のために半楕円形のリフレクターを設計します。そのリフレクターは高さ13 cmで直径10 cmです。そのリフレクターの頂点からどれぐらいの距離に光が集まるのかを求めなさい。

2. 半楕円形の開口部を持ち長さ28 m、水面からの高さが12 mの橋が川の上にかかっています。その橋の下を幅14 mの船が安全に通過するためには、船の高さの最大値を何 mとする必要があるかを求めなさい。



船は垂直軸に対して対称であり、橋の真ん中を通過するものとします。また、船はすべての点で同じ高さであると考えてください。

エニット 3

75

達成の目安

3.7 焦点の性質と楕円の方程式を使って楕円形状の物に関する問題を解きなさい。

学習の流れ

楕円に関する基本概念を一通り学習したら、楕円の反射特性を利用した日用品を扱った応用問題を解くことができます。この授業では教師が生徒に対し、より多くのヒントを出す必要があるため、*マークをつけています。

ねらい

問題の解答では、生徒は問題を解くために与えられた情報を数学的概念に基づいてグラフに表し、そこで得られた結果をあてはめて元の問題を解かなくてはなりません。

解答：

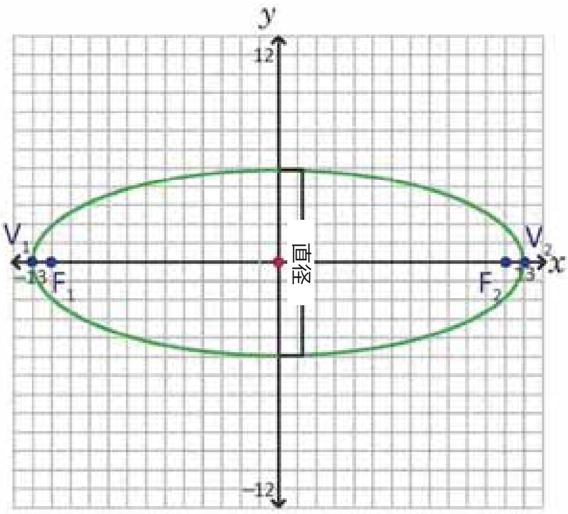
1. 中心が原点の楕円なので、長軸の頂点の1つの座標が (13, 0) で、短軸の頂点の 1 つの座標が (0, 5)であることから、$a = 13$、$b = 5$ となり、楕円の方程式は次のようになります。

$$\frac{x^2}{13^2}+\frac{y^2}{5^2}=1.$$

次に、楕円の反射特性により、光は次の座標を持つ焦点に集まります。

$$c^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 = 12^2,\ F_2 = (12, 0).$$

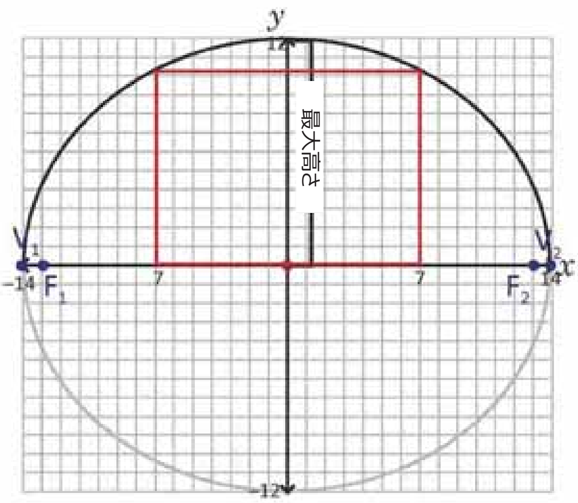
よって、リフレクターは頂点から 25 (13 + 12) mのところに光を集めます。



2. 楕円形の橋の高さは楕円の中心から離れるにつれて低くなるため、この問題は注意が必要です。船が安全に通過するためには、船が通過することになる中心から最も遠い地点の高さを計算する必要があります。

$a = 14$（全長の半分）および $b = 12$（橋の最大高さ）の楕円の方程式を使用すると、次のようになります。

$$\frac{x^2}{14^2}+\frac{y^2}{12^2}=1.$$



船の幅は 14 mなので、船が通過する中心から最も遠い点は $x = 7$ であるので、計算により y の値を求めます。

$$\frac{7^2}{14^2}+\frac{y^2}{12^2}=1$$
$$\frac{y^2}{12^2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$
$$\frac{y}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$y = 6\sqrt{3} \approx 10.39.$$

よって、船が安全に通過するために必要な船の最大高さは約 10.39 mです。

3.8 楕円の応用

以下の楕円を用いた問題を解きなさい。それぞれの条件を座標平面にグラフで表しなさい。

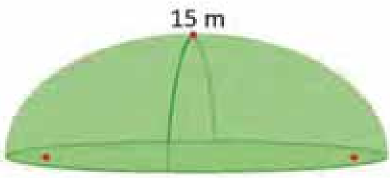
1. 半楕円形の形をした高架は、全長 12 mで、中心の最大高さは 3 mです。道路の中心から道路の両端に向かって 3 mの幅をもつトラックが、この高架下を通過するために必要なトラックの車高の最大値を求めなさい。

2. ある建築家とあるエンジニアが、幅 30 mの川にかかる半楕円形の橋の設計に取り組んでいます。橋は、その下を最大で幅 20 m、高さ 3 mの船が安全に通過できるようにする必要があります。この橋に必要な高さの上限を求めなさい。

3. 地球は楕円の地球周回軌道をぴったり 1 年かけて移動しますが、この地球周回軌道の焦点の1つは太陽です。地球が太陽に最も近い地点は近日点といい、約 1 億 4,700 万km離れた地点になります。一方、地球が太陽から最も遠くなる地点は遠日点といい、約 1 億 5,300 万km離れた地点になります。地球の周回軌道の方程式を書きなさい。

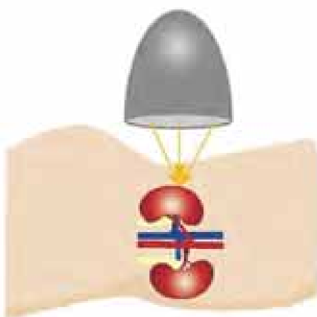
ドイツ人天文学者で数学者でもあるヨハネス・ケプラー氏は、研究の結果**惑星の運動に関する3つの法則**を発見しました。第1法則は次のように述べられています。「惑星は太陽の周りを楕円形に周回しており、その軌道は太陽を焦点の 1 つとする楕円軌道である」

4. 他の誰にも聞かれないように相手に秘密を発信できるように設計された建物があります。その建物は(楕円の焦点特性を利用して)半楕円形に設計されており、建物の一番高い部分の高さは 15 m、部屋の端から端までの距離は 34 mです。お互いがささやくような声で話していても、一方が他方の声を聞くことができるようにするために 2 人が立つべき位置を求めなさい。



もし2人が楕円の焦点になる位置にいれば、一方の焦点から出る音波は、もう一方の焦点に直接反射されます。

5. 腎臓結石の治療では、時々結石砕石術といわれる治療方法がとられています。この治療方法は楕円の焦点の性質を利用したもので、半楕円形のカバーのような装置が使用されます。楕円の焦点に衝撃波生成装置がついており、そこからでる衝撃波が、一方の焦点になる腎結石に作用を及ぼす仕組みの装置です。装置の高さが 13 cm、直径が 10 cmである場合、この装置を使って結石を粉砕するためには、結石がどれぐらい離れた位置にくるようにすればよいかを求めなさい。



達成の目安

3.8 楕円の応用問題を解きなさい。

解答：

1. この問題は、前回の授業で取り組んだ問 2 と非常によく似ており、今回の場合、$a = 6$ 、$b = 3$ が分かれば十分です。したがって楕円の式は $\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ なります。
あとは、$x = 3$ を利用して y の値を求めるだけです。
$\frac{3^2}{6^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ なので、$\frac{y^2}{3^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ そして、$\frac{y}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ よって、$y = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.6$
したがって、トラックが安全に通過するためのトラックの車高の最大値は約 2.6 mです。

2. 問題を楕円の方程式にあてはめると、$a = 15$（川幅の半分）であることが分かり、b の値は橋が位置すべき高さを表すので、方程式は $\frac{x^2}{15^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ となります。
幅 20 m、高さ 3 mの船を安全に通過させる必要があるので、楕円の方程式に、点 (10, 3) をあてはめて b の値を求めます。
$\frac{10^2}{15^2} + \frac{3^2}{b^2} = 1$ なので、$\frac{3^2}{b^2} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ そして、$\frac{3}{b} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ よって、$b = \frac{9\sqrt{5}}{5} \approx 4.02$
したがって、橋の高さの最大値は約 4.02 mです。

3. 問題のイラストからは、近日点までの距離と遠日点までの距離を合わせると、楕円の長軸の長さが得られることが分かります。また、遠日点までの距離から近日点までの距離を差し引くことにより、焦点間の距離も得られることが分かります。
$2a$ = 遠日点 + 近日点 = 153 + 147 = 300　なので、$a = 150$
$2c$ = 遠日点 – 近日点 = 153 – 147 = 6　なので、$c = 3$
b^2 の値が分かれば楕円の方程式を作ることができます。
$$b^2 = a^2 - c^2 = 150^2 - 3^2 = 22491.$$
よって、地球周回軌道の楕円の式は $\frac{x^2}{22500} + \frac{y^2}{22491} = 1$ です。

4. 問題には、2 つの頂点間の距離が 34 であり、高さは楕円の b の値、つまり $b = 15$ になることが分かるので、$2a = 34$　よって、$a = 17$ であることが分かります。後は c の値を求めるだけです。
$c^2 = a^2 - b^2 = 17^2 - 15^2 = 64 = 8^2$
$a - c = 17 - 8 = 9$ が頂点から焦点までの距離なので、人が立つ位置は、各頂点から 9 mの地点で、互いに16 m離れた位置（それぞれが中心から 8 mの位置）に立つ必要があります。

5. 問題文にある半楕円形の物体は、前回の授業の「導入問題」と同じように考えて、$a = 13$、$b = 5$ となり、$c^2 = a^2 - b^2 = 13^2 - 5^2 = 144 = 12^2$ の式が作れます。
よって、腎結石を粉砕できるようにするには、結石が衝撃波生成装置から12 cm離れた位置にくるようにしなくてはなりません。

レッスン4 双曲線

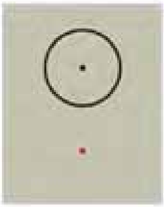
4.1 導入方法

用意する物

- トレーシングペーパー
- コンパス
- マジック
- 定規

課題

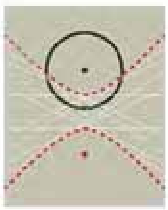
1. トレーシングペーパーに大きすぎない円を描き、その円の中心と、そこから垂直方向に揃えた点を1つ円の外側の少し離れた位置に描きます。



2. 描いた点が円の円周とぴったり重なるように紙を折りなさい。

3. 円周の手前の部分から最初に始めた部分にくるまで同じことを繰り返しなさい。できた形を分析しなさい。

4. できた図形は2つの集合になっており、円の中心は 1 つの集合の中にきて、円の外につけた点はもう 1 つの集合の中にきます。



定義

導入課題でできた2つの集合の形を**双曲線**といいます。そこにできた
双曲線のいずれの点も、ある 1 点から 2 つの定点までの距離の差が常に一定になっていることを確認しなさい。

質問

1. 円の外側に描く点を円からもっと遠ざけた場合はどうなりますか。
2. 円周の外側に描く点を円にもっと近づけた場合はどうなりますか。
3. 円周の外側に描く点が円の中心から垂直方向に揃っていない場合はどうなりますか。
4. 双曲線上の点から描かれた2つの定点までの距離の違いはどれだけですか。
5. 双曲線の点から描かれた2つの定点まで距離の差が常に一定となる理由を説明しなさい。

達成の目安

4.1 双曲線の軌跡を特定しなさい。

学習の流れ

双曲線に結びつく図形は、生徒たちがこれまで慣れ親しんできたものとは一線を画すので、楕円の時と同じように、双曲線となる図形を識別できるようになる必要があります。

ねらい

この導入を行うことで、条件から双曲線を連想できるようになることが期待されます。これにより、次の授業で双曲線の方程式（標準形）を求めた際に、方程式（標準形）によりその軌跡が明確になると気づくことができるようになります。

用意する物

授業ではトレーシングペーパー、コンパス、マジックを使います。（各自それぞれ1つずつ全て必要）

解答：

1. 生徒同士で比べることができます。遠い点を描いた生徒たちは、できた双曲線の形が開き気味だったり閉じ気味だったりすることに気付くでしょうが、重要なのは、点が円から遠いか近いかだけで形が決まる訳ではなく、半径の長さによっても形が変わることを認識することです。特に、円が同じ半径で描かれている場合は、点の位置が遠くなればなるほど、双曲線は開き気味になります。

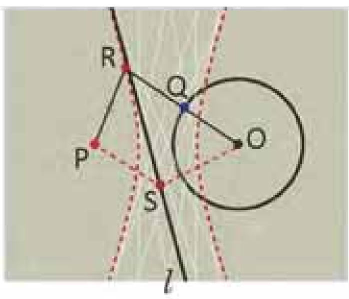
2. 生徒同士で比べることができますが、この場合は、双曲線は閉じ気味になり、頂点が焦点とほぼ一致する位置にあれば、できる図形は水平に開いた直線になります。

3. 双曲線はできるものの、斜めだったり、たわんだ形のものができます。このパターンは、生徒が確認できるように、教師があらかじめ結果を準備しておいても構いません。

4. この質問に対しては、生徒は定規を使って長さを測り、引き算でその差を求めることができます。もちろん、生徒たちが距離を比べて、同じだと確認できるのが一番いいですが、生徒には円の半径の長さと比較するようにアドバイスしても構いません。

5. これは最も難しい問題で、円周上の点 Q と点 R を折り目（線 l ）と $\overline{OQ}$ の交点と考えるところから入ります。

そしてそこから、$\overline{RQ}$ は $\overline{RP}$ と一致することがわかるので、RO と RP の距離の差は一定で半径に等しくなることが分かります。さらに、別の点 S をとって SO と SP の距離の差が常に半径よりも小さくなることを計算によって確認することもできます。（三角不等式）。

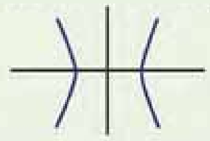


4.2 双曲線*

導入問題

2つの定点 $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ までの距離の差が常に$2a$で、$0 < a < c$ の条件を満たす軌跡をもつ図形の式を求めなさい。

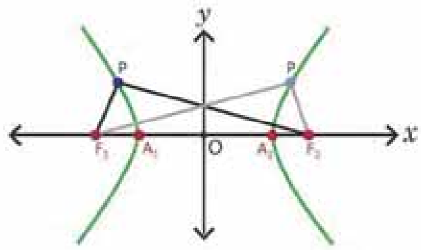
この軌跡をもつ図形は**双曲線**であることを復習しよう。



解法

点 P が左の集合にある場合、$d(P, F_2) - d(P, F_1) = 2a$ 点 P が右の集合にある場合、$d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$.

条件を満たす点 P(x, y) と2つの点の間の距離を利用します。



$$d(P, F_2) - d(P, F_1) = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$ 移項し、

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$ 2乗し、

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$ 整理し、

$$a^2[(x+c)^2 + y^2] = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$ を2乗し、

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$ 約分します。

$0 < a < c$であるので、$c^2 - a^2 > 0$ が成り立ち、その結果から、b を　$b > 0$の時には $b^2 = c^2 - a^2$と表すことができます。最後の等式にあてはめて、$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

この等式は、両辺を a^2b^2 でわって $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ と表すことができます。

定義

双曲線の軌跡を特定する方程式は $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ と表します

定点 F_1と F_2 は双曲線の**焦点** といい、その座標は、

$$F_1(-\sqrt{a^2+b^2}, 0) \text{ y } F_2(\sqrt{a^2+b^2}, 0).$$

双曲線上の点からそれぞれの焦点までの距離の差は常に$2a$です。

例

焦点 $F_1(-5, 0)$ と $F_2(5, 0)$ をもち、$a = 3$ である双曲線の方程式を作りなさい。

仮説条件から、焦点のx 座標が $c = 5$、$a = 3$ となることが分かるので、b を計算するには次の式を使います。

$$c^2 - a^2 = b^2\text{、なので、}\quad b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 = 4^2.$$

したがって、双曲線の方程式は $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$ 、つまり、$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ です。

問題

1. 各問の双曲線の式を作りなさい。

a) $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$, $a = 4$　　b) $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$, $a = 2$　　c) $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$, $a = 3$

2. それぞれの双曲線の焦点の座標を求めなさい。

a) $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$　　b) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$　　c) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$

達成の目安

4.2 焦点と a の値をもとに、中心を原点とする双曲線の方程式を作りなさい。

学習の流れ

生徒は双曲線の軌跡を識別できるようになると、条件をもとに式をたててグラフを描くことができるようになります。この授業では教師が生徒に対し、より多くのヒントを出す必要があるため、*マークをつけています。

ねらい

解答では、 $b^2 = c^2 - a^2$ を平方完成の条件と関連づけています。「例」では、条件をもとに双曲線の方程式を作る方法を紹介しています。

解答：

1a) $c = 5$、$a = 4$ なので、

$$b^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 = 3^2,$$

よって、双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1 \text{ なので } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

1b) $c = 3$、$a = 2$ であるので、

$$b^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5 = (\sqrt{5})^2,$$

よって、双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1 \text{ なので } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

1c) $c = 4$、$a = 3$ なので、

$$b^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7 = (\sqrt{7})^2,$$

よって、双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{7})^2} = 1 \text{ なので } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1.$$

2a) $a^2 = 4^2$ 、$b^2 = 3^2$ なので

$$c^2 = a^2 + b^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 = 5$$

よって、この焦点は、

$F_1(-5, 0)$、$F_2(5, 0)$.

2b) $a^2 = 5$ 、$b^2 = 4$ なので

$$c^2 = a^2 + b^2 = 5 + 4 = 9 = 3^2,$$

よって、この焦点は、

$F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$.

2c) $a^2 = 8$、$b^2 = 8$ になることから、

$$c^2 = a^2 + b^2 = 8 + 8 = 16 = 4^2,$$

よって、この焦点は、

$F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$.

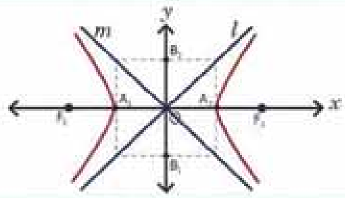
レッスン 4

4.3 双曲線の要素と性質

導入問題

双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ のグラフを使って、

a) 点 A_1と A_2 の座標を求めなさい。
b) $B_1(0, -b)$、$B_2(0, b)$ である場合に、この図に示されている長方形の対角線の方程式を求めなさい。



解法

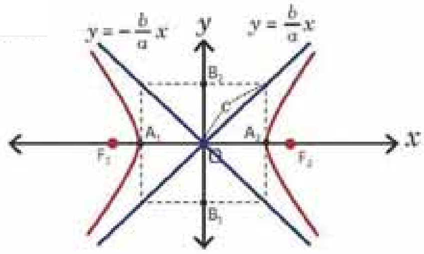
a) A_1とA_2 が x 軸上にあり、双曲線に属していることから双曲線の方程式は y = 0 であることが分かります。

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{0^2}{b^2}=1 \qquad \text{そこから} \qquad \frac{x^2}{a^2}=1$$

$$x^2=a^2$$

$$x=\pm a$$

よって、これらの点の座標は、$A_1(-a, 0)$、$A_2(a, 0)$



b) 直線 *l* が点 (a, b) と (0, 0) を通ることから方程式を使って2点を表すと $y=\frac{b}{a}x$

直線 *m* が点 $(-a, b)$ と (0, 0) を通ることから

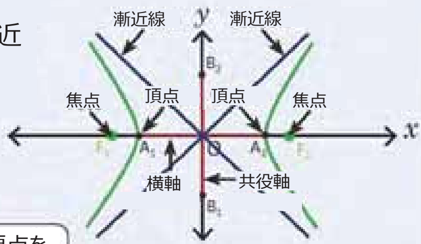
方程式を使って 2 点を表すと、 $y=-\frac{b}{a}x$

まとめ

双曲線の点A_1とA_2 は**頂点**といい、座標は $A_1(-a, 0)$、$A_2(a, 0)$ で表します。さらに、切片 A_1A_2 の中間点は双曲線の**中心**といいます。

直線 $y=\frac{b}{a}x$ と直線 $y=-\frac{b}{a}x$ **は** 双曲線の漸近線といい、双曲線に近接しても決して接しません。

双曲線の頂点と頂点を結ぶ切片を**横軸**、点 $(0, -b)$ と点 $(0, b)$ を結んだ直線を**共役軸といいます。**



双曲線を作成するには、まず漸近線と頂点を書きます。

例

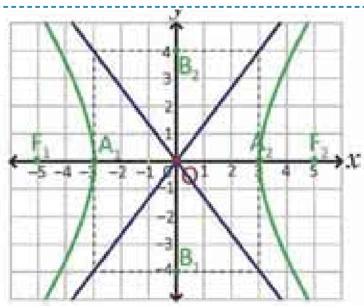
頂点と焦点の座標と 双曲線 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ の漸近線の式を求めなさい。そしてそれを座標平面にグラフで表しなさい。

a、*b*、*c* の値は $a=3, b=4, c=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$ なので、

頂点は $A_1(-3, 0)$、$A_2(3, 0)$ 、焦点は、$F_1(-5, 0)$、$F_2(5, 0)$

漸近線は、$y=\frac{4}{3}x, y=-\frac{4}{3}x$ となります。

この時にできる点A_1、 A_2、 B_1とB_2 をもつ長方形は、**漸近長方形**といい、その長方形の対角線から双曲線の漸近線を引くことができます。



問題

それぞれの双曲線の頂点の座標と、漸近線の式と焦点を求めなさい。そしてそれを座標平面にグラフで表しなさい。

a) $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$　　b) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$　　c) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$　　d) $x^2-y^2=1$

達成の目安

4.3 双曲線 の方程式の要素を座標平面に表しなさい。

学習の流れ

双曲線の方程式(標準形)をマスターしたら、生徒と一緒に、漸近線を含む双曲線を作る様々な要素をどのように座標平面に表せばよいかに取り組みます。

ねらい

解答では、一般的な双曲線の持つ異なる要素を紹介し、「例」で、それらの要素を使って座標平面にグラフで表す方法を確認します。

解答：

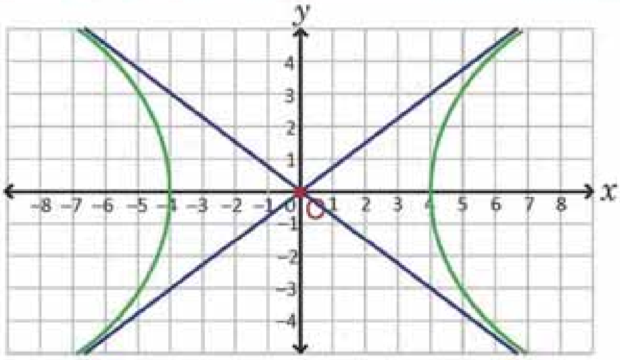
a) a、b、c の値を代入し、

$a = 4, b = 3, c = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$

頂点　$A_1(-4, 0), A_2(4, 0)$

焦点　$F_1(-5, 0), F_2(5, 0)$

漸近線　$y = \frac{3}{4}x,\ y = -\frac{3}{4}x$ となります。



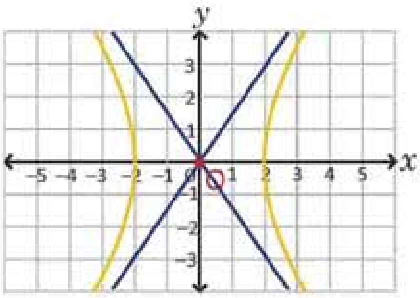
b) a、b、c の値を代入し、

$a = 2, b = 3, c = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$

頂点　$A_1(-2, 0), A_2(2, 0)$

焦点　$F_1(-\sqrt{13}, 0), F_2(\sqrt{13}, 0)$

漸近線　$y = \frac{3}{2}x,\ y = -\frac{3}{2}x$ となります。



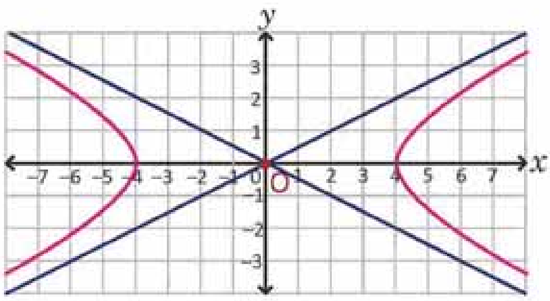
c) a、b、c の値を代入し、

$a = 4, b = 2, c = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$

頂点　$A_1(-4, 0), A_2(4, 0)$

焦点　$F_1(-2\sqrt{5}, 0), F_2(2\sqrt{5}, 0)$

漸近線　$y = \frac{1}{2}x,\ y = -\frac{1}{2}x$ となります。



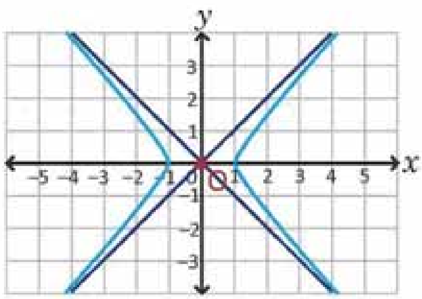
d) a、b、c の値を代入し、

$a = 1, b = 1, c = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$

頂点　$A_1(-1, 0), A_2(1, 0)$

焦点　$F_1(-\sqrt{2}, 0), F_2(\sqrt{2}, 0)$

漸近線　$y = x,\quad y = -x$ となります。



双曲線を正確に描くためには、式を使って他の点を探さなくてはならないため、輪郭に関してはあまり精度を要求しない方がいいです。

4.4 双曲線の平行移動

導入問題

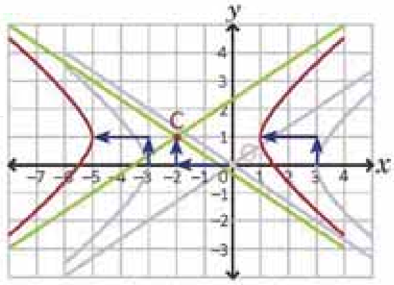
$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ のグラフを座標平面に作成しなさい。

解法

双曲線 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ を左に 2、上に 1 移動させることになるので、次の式になります。

$$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

したがって、これは中心が (–2, 1) の双曲線 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ のグラフになります。



まとめ

水平方向に h、垂直方向に k 移動させた双曲線を式で表すと

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

グラフを作るには、中心の位置を求め、そこが座標平面の原点であるかのように作成するか、原点でグラフを作り、それを移動させます。

グラフを水平方向に h 、垂直方向に k 動かすためには、変数 x を $x-h$ に、変数 y を $y-k$ に置き換える点を復習しよう。

例 1

双曲線 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ を水平方向に –4、垂直方向に –3 移動させた式を求めなさい。

元の方程式をもとに、x を $[x-(-4)]$ に、y を $[y-(-3)]$ に置き換えて計算します。

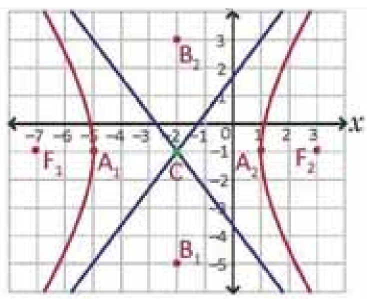
$$\frac{(x+4)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

例 2

双曲線 $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1$ の漸近線の頂点と焦点の座標と式を求めなさい。そして全ての要素を使って座標平面にグラフで表しなさい。

この双曲線は $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ を水平方向に –2、垂直方向に –1 移動させたものと等しいことから、中心は C(–2, –1) であると分かります。

方程式	$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$	$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1$
頂点	$A_1(-3, 0), A_2(3, 0)$	$A_1(-5, -1), A_2(1, -1)$
焦点	$F_1(-5, 0), F_2(5, 0)$	$F_1(-7, -1), F_2(3, -1)$
漸近線	$y = \frac{4}{3}x,\ y = -\frac{4}{3}x$	$y+1 = \frac{4}{3}(x+2) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$, $y+1 = -\frac{4}{3}(x+2) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x - \frac{11}{3}$



問題

1. それぞれの問いにある水平方向に h、垂直方向に k 移動させた楕円を表す方程式を作りなさい。

a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1, h = 3, k = 1$　b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1, h = 2, k = -4$　c) $\frac{x^2}{21} - \frac{y^2}{4} = 1, h = -3, k = -2$

2. それぞれの双曲線の頂点と焦点の座標と、漸近線の式を求めなさい。そしてそれを座標平面にグラフで表しなさい。

a) $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$　b) $\frac{(x-3)^2}{4} - (y+2)^2 = 1$　c) $(x+2)^2 - (y+1)^2 = 1$

達成の目安

4.4 座標軸に対して平行移動させた双曲線の方程式を求め、グラフを作成しなさい。

学習の流れ

生徒たちはすでに双曲線の方程式を理解しており、方程式からその双曲線の要素を求める方法も分かっているので、タイミング的にはここで双曲線の平行移動の学習に入るのがよいです。

ねらい

解答では、生徒がすでに放物線の課で学習し、円や楕円の課でも活用していたグラフや点の平行移動に関する知識を活用できるように説明しています。

解答：

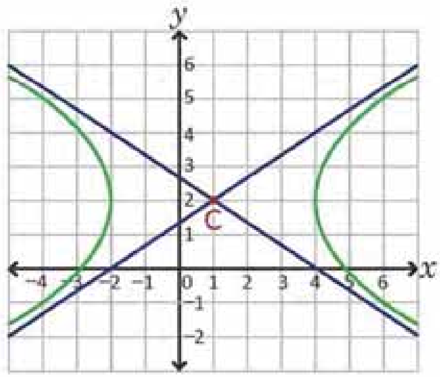
1a) $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

1b) $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{[y-(-4)]^2}{5} = 1$ なので、$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+4)^2}{5} = 1.$

1c) $\frac{[x-(-3)]^2}{21} - \frac{[y-(-2)]^2}{4} = 1$ なので、$\frac{(x+3)^2}{21} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1.$

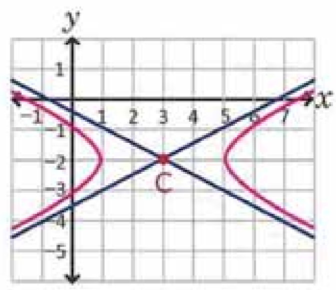
2a)

方程式	$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$	$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$
頂点	$A_1(-3, 0), A_2(3, 0)$	$A_1(-2, 2), A_2(4, 2)$
焦点	$F_1(-\sqrt{13}, 0), F_2(\sqrt{13}, 0)$	$F_1(-\sqrt{13}+1, 2), F_2(\sqrt{13}+1, 2)$
漸近線	$y = \frac{2}{3}x,\ y = -\frac{2}{3}x$	$y-2 = \frac{2}{3}(x-1) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3},$ $y-2 = -\frac{2}{3}(x-1) \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$



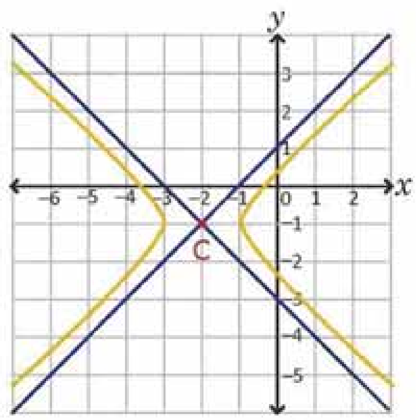
2b)

方程式	$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$	$\frac{(x-3)^2}{4} - (y+2)^2 = 1$
頂点	$A_1(-2, 0), A_2(2, 0)$	$A_1(1, -2), A_2(5, -2)$
焦点	$F_1(-\sqrt{5}, 0), F_2(\sqrt{5}, 0)$	$F_1(-\sqrt{5}+3, -2), F_2(\sqrt{5}+3, -2)$
漸近線	$y = \frac{1}{2}x,\ y = -\frac{1}{2}x$	$y-3 = \frac{1}{2}(x+2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 4,$ $y-3 = -\frac{1}{2}(x+2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2$



2c)

方程式	$x^2 - y^2 = 1$	$(x+2)^2 - (y+1)^2 = 1$
頂点	$A_1(-1, 0), A_2(1, 0)$	$A_1(-3, -1), A_2(-1, -1)$
焦点	$F_1(-\sqrt{2}, 0), F_2(\sqrt{2}, 0)$	$F_1(-\sqrt{2}-2, -1), F_2(\sqrt{2}-2, -1)$
漸近線	$y = x,\ y = -x$	$y+1 = (x+2) \Rightarrow y = x+1,$ $y+1 = -(x+2) \Rightarrow y = -x-3$



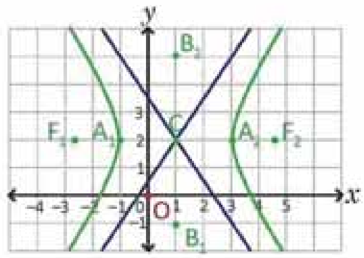
4.5 双曲線の方程式（一般形）

導入問題

$9x^2-4y^2-18x+16y-43=0$ を座標平面にグラフで表しなさい。

解法

x と y を平方完成させます。



$$9x^2-4y^2-18x+16y-43=0$$

$$9(x^2-2x)-4(y^2-4y)-43=0$$ 整理して同類項をまとめ

$$9(x-1)^2-4(y-2)^2-9+16-43=0$$ 平方完成し、

$$\frac{9(x-1)^2}{36}-\frac{4(y-2)^2}{36}=1$$ 加算をして右辺が 1 となる等式を作り、

$$\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{9}=1$$ 約分します。

したがって、中心が (1, 2)、頂点が $A_1(-1, 2)$、$A_2(3, 2)$ で、漸近線が

$y-2=\frac{3}{2}(x-1)$、つまり $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$; $y-2=-\frac{3}{2}(x-1)$、つまり $y=-\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$ になります。

まとめ

双曲線は、式 $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ を展開し、右辺が 0 の等式で表すことができます。

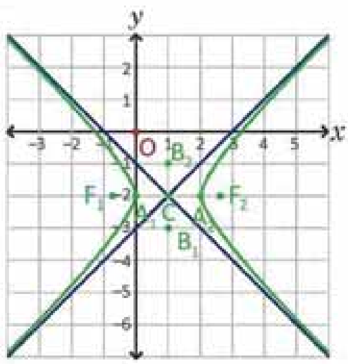
一般に、方程式が $dx^2-ey^2+fx+gy+h=0$ の形になっている双曲線の中心、頂点、および漸近線を求めるためには、x と y の平方完成をし、次の形の式に直します。

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1.$$

例

双曲線 $x^2-y^2-2x-4y-4=0$ の頂点、焦点、および漸近線の座標を求め、全ての要素を使って座標平面にグラフ化しなさい。

$$x^2-y^2-2x-4y-4=0$$
$$(x-1)^2-(y+2)^2-1+4-4=0$$
$$(x-1)^2-(y+2)^2=1$$



この双曲線は、$x^2-y^2=1$ が水平方向に 1、垂直方向に −2 平行移動したもので、中心 C は (1, −2) になります。

方程式	$x^2-y^2=1$	$(x-1)^2-(y+2)^2=1$
頂点	$A_1(-1, 0), A_2(1, 0)$	$A_1(0, -2), A_2(2, -2)$
焦点	$F_1(-\sqrt{2}, 0), F_2(\sqrt{2}, 0)$	$F_1(-\sqrt{2}+1, -2), F_2(\sqrt{2}+1, -2)$
漸近線	$y=x,\ y=-x$	$y=x-3,\ y=-x-1$

問題

各双曲線の頂点の座標と漸近線の方程式、および焦点を求めなさい。そしてそれを座標平面にグラフで表しなさい。

a) $4x^2-9y^2-16x+18y-29=0$ b) $25x^2-4y^2-100x-16y-16=0$ c) $x^2-4y^2+2x+8y-7=0$

d) $16x^2-9y^2+32x-54y-209=0$ e) $x^2-y^2-4y-8=0$ f) $4x^2-9y^2-8x-32=0$

達成の目安

4.5 双曲線の方程式(一般形)から双曲線の要素を求め、座標平面にグラフを作成しなさい。

学習の流れ

生徒たちはここまでの学習で双曲線の平行移動ができるようになっているので、平方完成の手順を使って双曲線の方程式(一般形)に取り組みます。

ねらい

前の授業と今回の授業では、生徒が正確に理解できるように、座標平面の4方向への移動の例が示されています。

解答：

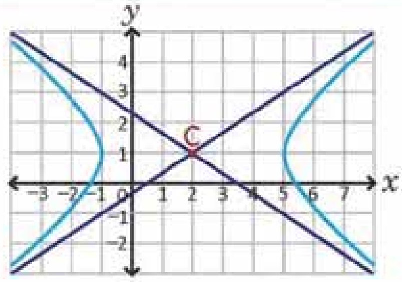
a) $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0$

$$4(x-2)^2 - 9(y-1)^2 = 29 + 16 - 9$$

$$\frac{4(x-2)^2}{36} - \frac{9(y-1)^2}{36} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

$A_1(-1, 1)$, $A_2(5, 1)$,
$F_1(-\sqrt{13} + 2, 1)$,
$F_2(\sqrt{13} + 2, 1)$
$y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$
$y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$



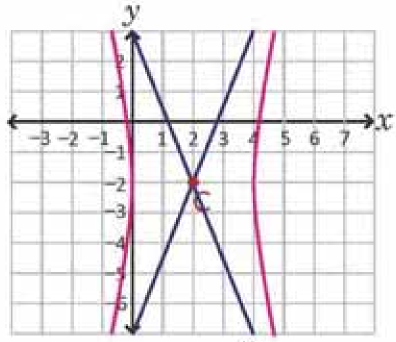
b) $25x^2 - 4y^2 - 100x - 16y - 16 = 0$

$$25(x-2)^2 - 4(y+2)^2 = 16 + 100 - 16$$

$$\frac{25(x-2)^2}{100} - \frac{4(y+2)^2}{100} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{25} = 1$$

$A_1(0, -2)$, $A_2(4, -2)$,
$F_1(-\sqrt{29} + 2, -2)$,
$F_2(\sqrt{29} + 2, -2)$
$y = \frac{5}{2}x - 7$
$y = -\frac{5}{2}x + 3$



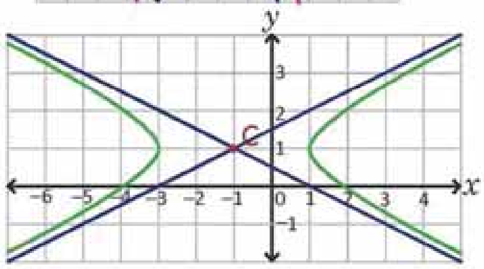
c) $x^2 - 4y^2 + 2x + 8y - 7 = 0$

$$(x+1)^2 - 4(y-1)^2 = 7 + 1 - 4$$

$$\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{4(y-1)^2}{4} = 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{4} - (y-1)^2 = 1$$

$A_1(-3, 1)$, $A_2(1, 1)$,
$F_1(-\sqrt{5} - 1, 1)$,
$F_2(\sqrt{5} - 1, 1)$
$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$



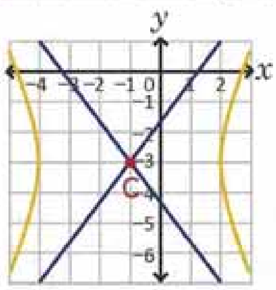
d) $16x^2 - 9y^2 + 32x - 54y - 209 = 0$

$$16(x+1)^2 - 9(y+3)^2 = 209 + 16 - 81$$

$$\frac{16(x+1)^2}{144} - \frac{9(y+3)^2}{144} = 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

$A_1(-4, -3)$, $A_2(2, -3)$,
$F_1(-6, -3)$, $F_2(4, -3)$
$y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$
$y = -\frac{4}{3}x - \frac{13}{3}$



e) $x^2 - y^2 - 4y - 8 = 0$

$$x^2 - (y+2)^2 = 8 - 4$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

$A_1(-2, -2)$, $A_2(2, -2)$,
$F_1(-2\sqrt{2}, -2)$,
$F_2(2\sqrt{2}, -2)$
$y = x - 2$
$y = -x - 2$

f) $4x^2 - 9y^2 - 8x - 32 = 0$

$$4(x-1)^2 - 9y^2 = 32 + 4$$

$$\frac{4(x-1)^2}{36} - \frac{9y^2}{36} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$A_1(-2, 0)$, $A_2(4, 0)$,
$F_1(-\sqrt{13} + 1, 0)$,
$F_2(\sqrt{13} + 1, 0)$
$y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$
$y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$

4.6 復習問題

1. 各問の双曲線の式を作りなさい。

a) $F_1(-5, 0), F_2(5, 0), a = 3$　　b) $F_1(-3, 0), F_2(3, 0)$ 、と頂点　$A_1(-2, 0), A_2(2, 0)$.

2. それぞれの双曲線の焦点の座標を求めなさい。

a) $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$　　b) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$　　c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

3. それぞれの双曲線の頂点と焦点の座標と、漸近線の式を求めなさい。そしてそれを座標平面にグラフで表しなさい。

a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$　　b) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

4. それぞれの問いにある水平方向に h、垂直方向に k 移動させた双曲線を表す方程式を作りなさい。

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1, h = 2, k = 3$　　b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1, h = -3, k = -1$

5. それぞれの双曲線の頂点、漸近線、焦点の座標を求めなさい。そして各問それぞれ座標平面にグラフで表しなさい。

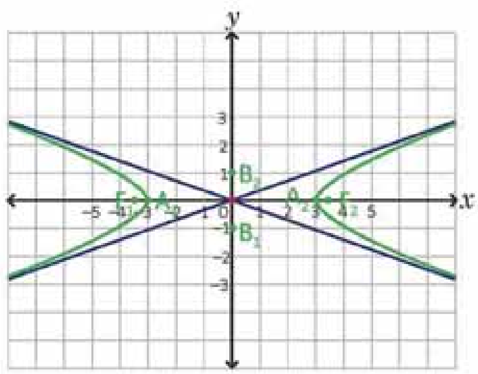
a) $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$　　b) $(x+1)^2 - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

6. それぞれの双曲線の頂点、漸近線、焦点の座標を求めなさい。そして各問それぞれ座標平面にグラフで表しなさい。

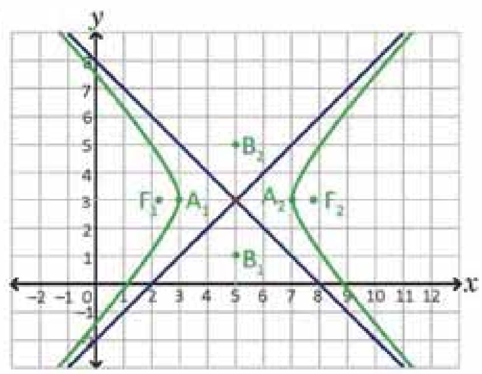
a) $x^2 - 4y^2 + 2x - 8y - 19 = 0$　　b) $9x^2 - y^2 + 6y - 18 = 0$

7. 以下の各グラフにあてはまる方程式を求めなさい。

a)



b)



達成の目安

4.6 双曲線に関する問題を解きなさい。

解答：

1a) $b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$ なので、
ecuación es: $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$、よって $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$

1b) $b^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$ なので、方程式は
$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$、よって $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$

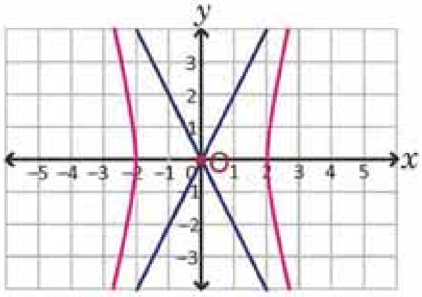
2a) $c^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13 = (\sqrt{13})^2$ なので、焦点は、
$F_1(-\sqrt{13}, 0), F_2(\sqrt{13}, 0).$

2b) $c^2 = 5 + 4 = 9 = 3^2$ なので、焦点は、
$F_1(-3, 0), F_2(3, 0).$

2c) $c^2 = 9 + 4 = 13 = (\sqrt{13})^2$ なので、焦点は、
$F_1(-\sqrt{13}, 0), F_2(\sqrt{13}, 0).$

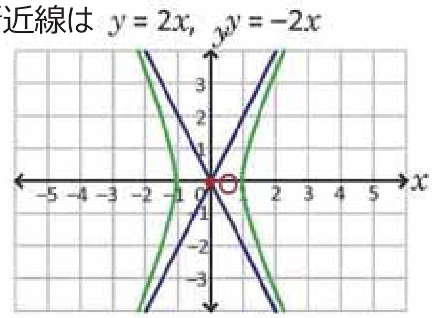
3a) 頂点 $A_1(-2, 0), A_2(2, 0)$
焦点 $F_1(-2\sqrt{5}, 0), F_2(2\sqrt{5}, 0)$

漸近線は $y = 2x, \quad y = -2x$



3b) 頂点 $A_1(-1, 0), A_2(1, 0)$
焦点 $F_1(-\sqrt{5}, 0), F_2(\sqrt{5}, 0)$

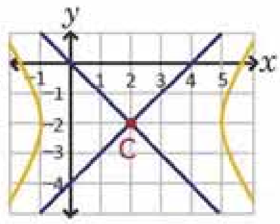
漸近線は $y = 2x, \quad y = -2x$



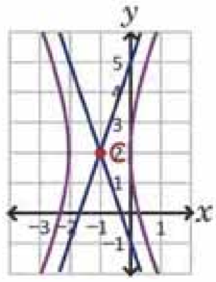
4a) $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{16} = 1.$

4b) $\frac{[x-(-3)]^2}{9} - \frac{[y-(-1)]^2}{9} = 1$ よって $\frac{(x+3)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1.$

5a) $A_1(-1, -2), A_2(5, -2),$
$F_1(-3\sqrt{2} + 2, -2),$
$F_2(3\sqrt{2} + 2, -2)$
$y = x - 4$
$y = -x$



5b) $A_1(-2, 2), A_2(0, 2),$
$F_1(-\sqrt{10} - 1, 2),$
$F_2(\sqrt{10} - 1, 2)$
$y = 3x + 5$
$y = -3x - 1$



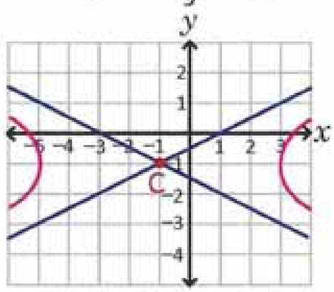
6a) $x^2 - 4y^2 + 2x - 8y - 19 = 0$
$(x+1)^2 - 4(y+1)^2 = 19 + 1 - 4$
$\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{4(y+1)^2}{16} = 1$
$\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$

$A_1(-5, -1), A_2(3, -1)$
$F_1(-2\sqrt{5} - 1, -1),$
$F_2(2\sqrt{5} - 1, -1)$
$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
$y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

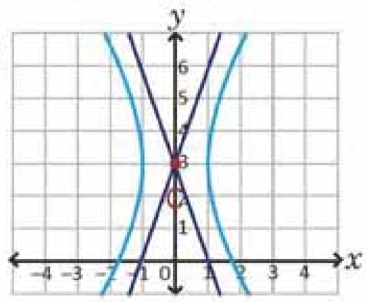
6b) $9x^2 - y^2 + 6y - 18 = 0$
$9x^2 - (y-3)^2 = 18 - 9$
$\frac{9x^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$
$x^2 - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

$A_1(-1, 3), A_2(1, 3),$
$F_1(-\sqrt{10}, 3),$
$F_2(\sqrt{10}, 3)$
$y = 3x + 3$
$y = -3x + 3$

6a)



6b)



7a) $a = 3$、$b = 1$で、中心が原点 (0, 0) にあることから、方程式は、

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{1^2} = 1 \quad \text{よって} \quad \frac{x^2}{9} - y^2 = 1.$$

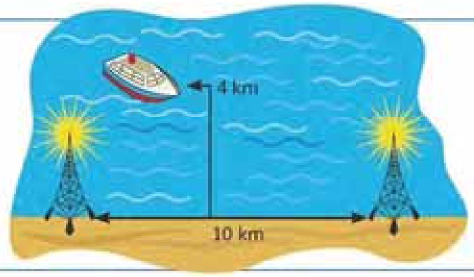
7b) $a = 2$、$d = 2$で、中心が点 (5, 3) にあることから、方程式は、

$$\frac{(x-5)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1.$$

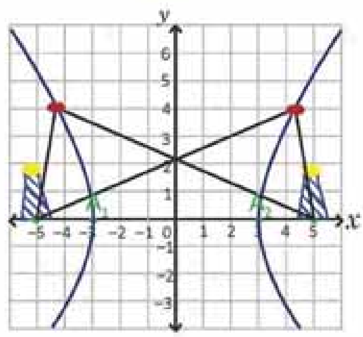
4.7 双曲線の応用*

導入問題

ある船は、海岸線沿いに 10 km の距離をあけて建てられている2つのタワーに向けて信号を送ります。タワーで信号を受信すると、船から一方のタワーまでの距離が、もう一方のタワーまでの距離より 6 km 離れていることが分かります。船が岸から 4 km の地点を航行していると仮定して、船が航行している可能性がある位置を求めなさい。



解法



タワーが双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ の焦点であると仮定して、2 つのタワーまでの距離の差は 6 km であることから、a の値はすぐに分かります。また 2 つのタワー（焦点）間の距離も分かっているので、c の値も求めることができます。

$$|d_2-d_1|=2a=6 \quad \text{なので、} \quad a=3,$$
$$2c=10 \quad \text{なので、} \quad c=5,$$
$$b^2=c^2-a^2=5^2-3^2=4^2.$$

よってこの条件から求められる双曲線の方程式は $\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=1$ です。

船の位置を特定するには、$y=4$ の場合の x の座標を求めればよいだけです。

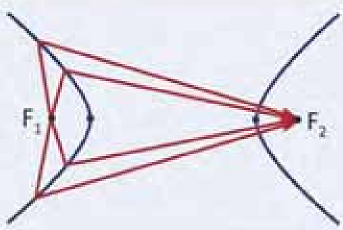
$$\frac{x^2}{3^2}-\frac{4^2}{4^2}=1 \qquad x^2 \text{を取り出して、}$$
$$x^2=2(3^2)$$
$$x=\pm3\sqrt{2}.$$

ロシアのCHAYKAナビゲーションシステムとLORANシステムは、船の位置を特定するためにこの原則を活用していますが、少しずつこれらのシステムに代わってGPS の利用が普及してきています。

まとめ

双曲線では、焦点は重要な反射特性を有します。一方の焦点から線が引かれると、それは双曲線のもう一方の焦点に正確に到達するように反射します。

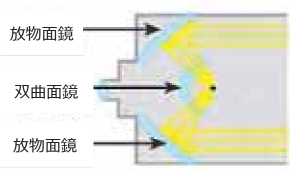
この反射特性は、楕円と放物線の性質に似ていて、さまざまな科学分野で双曲線を応用した器具が使用されています。



問題

1. 海岸線上に 26 km の距離をあけて建てられている CHAYKA システムのタワーが船から信号を受信すると、船から一方のタワーまでの距離が、もう一方のタワーまでの距離より 10km 離れていることが分かります。船が岸から12 kmを航行していると仮定して、船が航行している可能性がある位置を求めなさい。

2. Maksutov-Cassegrain 望遠鏡は、光信号を受信し、それを放物面鏡（カット面）から別の鏡の焦点にむけて反射することで機能するのですが、その別の鏡は図で示したような双曲面鏡です。双曲面鏡の機能とMaksutov-Cassegrain 望遠鏡がどのように機能するかを説明しなさい。



達成の目安

4.7 焦点の性質と双曲線の方程式を使用して、双曲面を持つ物体に関する問題を解きなさい。

学習の流れ

双曲線に関する基本概念を一通り学習したら、双曲線の反射特性を利用した日用品を扱った問題を解くことができます。応用この授業では教師が生徒に対し、より多くのヒントを出す必要があるため、* マークをつけています。

ねらい

問題の解答では、生徒は問題を解くために与えられた情報を数学的概念に基づいてグラフに表し、そこで得られた結果をあてはめて元の問題を解かなくてはなりません。

解答：

1. 「導入問題」を解くにあたっては、タワーを双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ の焦点であると仮定すれば、2つのタワーまでの距離の差が 10 km であることから、 a の値はすぐに求めることができます。2つのタワー間の距離が 26 km（焦点）であることもわかっているので、そこから c の値も求めることができます。

$|d_2-d_1|=2a=10$ なので、 $a=5$,
$2c=26$ なので、 $c=13$,
$b^2=c^2-a^2=13^2-5^2=12^2$.

よって、この条件から求められる双曲線の方程式は $\frac{x^2}{5^2}-\frac{y^2}{12^2}=1$ となります。

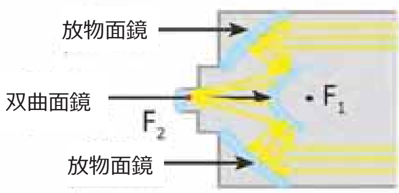
船の位置を特定するには、$y=12$ のときの x の座標を特定するだけで十分です。

$\frac{x^2}{5^2}-\frac{12^2}{12^2}=1$ 　x^2 を取り出して、

$$x^2=2(5^2)$$

$$x=\pm5\sqrt{2}$$

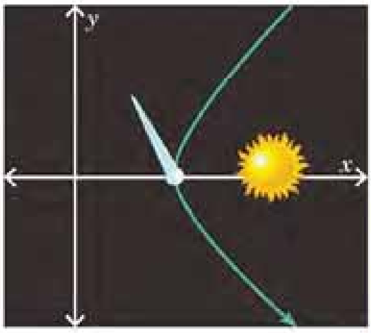
2. この問題では、生徒たちが、放物線の焦点の反射特性により、集められた光線が双曲面鏡と共有される焦点 F_1 に向かって反射されること、またその双曲面鏡の反射特性から、焦点 F_1 から双曲線のもう 1 つの焦点 F_2 に向けて光が反射することになり、それがすなわち望遠鏡が捉えているものを観察できる望遠鏡の接眼レンズになっていることを理解できれば十分です。



4.8 復習問題

以下の双曲線に関する応用問題を解きなさい。それぞれの条件を座標平面にグラフで表しなさい。

1. 宇宙では、彗星の軌道は、楕円形、放物線状、双曲線状などのさまざまである可能性があり、常にその軌道の焦点には太陽があります。軌道が双曲線になる彗星（歴史上一度だけ見られる）を例にとって式に表すと、



$$\frac{x^2}{20^2} - \frac{y^2}{21^2} = 1$$

この数字20と21の単位は100万の４乗、つまり数千億メートルとします。この軌道上で彗星が太陽に最も近くなる地点の太陽からの距離を求めなさい。

2. 原子力発電所の冷却塔は、一枚の双曲面の形に設計されていて、最上部は直径 3.75 m、高さ 9 m あり、塔の直径が最も小さくなっている部分は直径 3 m で高さ 6 m に位置しています。この塔の基部の直径はおおよそどれぐらいになりますか。

双曲面は、双曲線をそのいずれかの軸を中心にして回転させた結果生じる幾何学的形状の立体です。横軸**を中心に回転させた際にできる形を**2葉双曲面**といい、**共役軸**を中心に回転させた際にできる形を**1葉双曲面**といいます。**

3. ポリビーノタワーは、世界で初めて双曲面の形に設計された建造物でした。双曲面タワーの最も高い位置の直径が 45 m、地上からの高さが32 mで、タワーが最も細くなっている部分の直径が 4 m、高さが 16 m である場合の、タワーの基部の直径を求めなさい。

ポリビーノタワーはロシアのウラジミール・シューホフ技師により建設されたもので、双曲面タワーとしてシュホフ氏自身により 1896 年に特許を得ている建物です。

4. 小型飛行機がサンビセンテ市の上空を飛行し、$4y^2 - x^2 = 2{,}500$ の双曲線軌道を描きます。

小型飛行機が飛ぶ地点の地上からの距離について、最小値を求めなさい。

達成の目安

4.8 双曲線に関する応用問題を解きなさい。

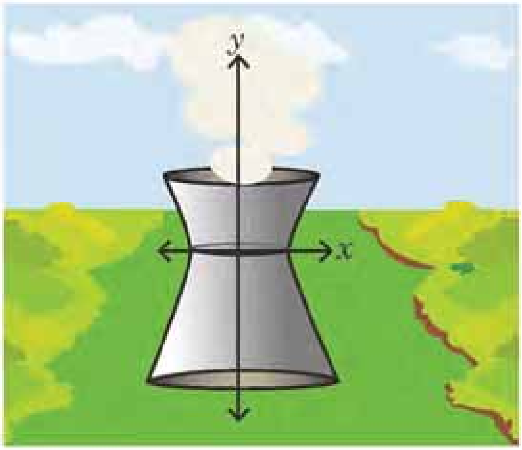
解答：

1. 太陽が焦点になるので、最短距離は双曲線の頂点の1つと仮定することができ、双曲線の方程式の *a*、*b*、*c* の値をあてはめて式を作ります。

$$a = 20,\ b = 21 \text{ y } c = \sqrt{20^2 + 21^2} = 29.$$

次に、太陽は点 $(c, 0)$ にあり、彗星が通過する双曲線軌道の頂点が点 $(a, 0)$ を通過するので、太陽と彗星の最短距離は、$c - a$ となり、最短距離は 29 – 20 = 9（100 万の 4 乗） mとなります。

2. 塔が最小半径を持つ部分の円の中心を座標平面の中心とみなし、その部分の直径が 3 m であることから、a = 1.5、さらに、共役軸から最も高い円周上の点までの距離が 1.875 で、横軸の 9 – 6 = 3 mの高さにあるため、双曲線は点 (1.875, 3) を通ることが分かります。次に、双曲線の方程式を利用します。



$$\frac{x^2}{1.5^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

双曲線の点 (1.875、3) をあてはめます。

$$\frac{1.875^2}{1.5^2} - \frac{3^2}{b^2} = 1.$$

小数を分数に直し、b^2 の値を求めます。

$$\frac{\left(\frac{\cancel{15}\,1}{\cancel{8}\,4}\right)^2}{\left(\frac{\cancel{15}\,1}{\cancel{10}\,5}\right)^2} - \frac{3^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{5^2}{4^2} - \frac{3^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{25}{16} - 1 = \frac{9}{b^2} \Rightarrow \frac{9}{16} = \frac{9}{b^2} \Rightarrow b^2 = 16.$$

したがって、双曲線の式は $\frac{x^2}{1.5^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$ となり、地上の高さに対応する点、つまり $y = -6$ をあてはめてx の値を求めます。

$$\frac{x^2}{1.5^2} - \frac{(-6)^2}{4^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1.5^2} = 1 + \frac{\cancel{36}\ 9}{\cancel{16}\ 4} \Rightarrow x^2 = 1.5^2\left(1 + \frac{9}{4}\right) \Rightarrow x^2 = 1.5^2\left(\frac{13}{4}\right) \Rightarrow x = \pm\frac{3\sqrt{13}}{4}.$$

以上により、最下部の直径は、（x の正の値をとって）$2 \times \frac{3\sqrt{13}}{4} = \frac{3\sqrt{13}}{2}$ となります。

3. 前の問題とよく似た方法で、b^2 値を求めます。 $\frac{(2\sqrt{5})^2}{2^2} - \frac{16^2}{b^2} = 1 \Rightarrow 5 - 1 = \frac{16^2}{b^2}$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{16^2}{4} = 4(16) = 64.$$

よって、双曲線の式は $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{8^2} = 1$ となり、地上の高さに対応する点、つまり $y = -16$ をあてはめて x の値を求めます。

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{(-16)^2}{8^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} = 1 + 4 \Rightarrow x^2 = 5(4) \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{5}.$$

よって、最下部の直径は $2 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

4. 双曲線の方程式（標準形）を用いて、2,500で割った式を作ります。$\frac{4y^2}{2500} - \frac{x^2}{2500} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{25^2} - \frac{x^2}{50^2} = 1$

次に、方程式を縦型の双曲線にあてはめます（x と y を入れ替えて同様の方法で考えます）。そうすることで、頂点が街に最も近いポイントになり、それが、点 (0, 25) になるので、小型飛行機が飛ぶ地点の地面からの距離の最小値は 25 mであることが分かります。

4.9 ユニット問題

水平方向の放物線の方程式はどのような式になるか考えなさい。

1. 以下の式で示される放物線をそれぞれ座標平面に描きなさい。

a) $x = 2y^2$　b) $x = -3y^2$　c) $x + 1 = (y - 2)^2$　d) $x + 2 = -(y + 1)^2$

垂直方向の楕円の方程式はどのような式になるか考えなさい。

2. 以下の式で示される楕円をそれぞれ座標平面に描きなさい。

a) $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$　b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$　c) $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$　d) $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

垂直方向の双曲線の方程式はどのような式になるか考えなさい。

3. 以下の式で表される双曲線をそれぞれ座標平面に作成しなさい。

a) $\frac{y^2}{2^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1$　b) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$　c) $\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$　d) $\frac{(y-2)^2}{4} - (x+1)^2 = 1$

4. 以下の方程式で表される図形をそれぞれ、放物線、円、楕円、双曲線に分類しなさい。

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a \neq b$　b) $y - k = \frac{1}{4p}(x - h)^2$　c) $x^2 + y^2 = r^2$　d) $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

e) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$　f) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$　g) $y = \frac{1}{4p}x^2$　h) $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1,\ a \neq b$

5. それぞれの式が示す図形がどの図形（放物線、円、楕円、双曲線） になるか答えなさい。

a) $9x^2 + 25y^2 - 54x - 144 = 0$　b) $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$　c) $y^2 + x + 4y + 4 = 0$

d) $4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 7 = 0$　e) $2x^2 - 4x - y + 4 = 0$　f) $x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$

g) $9x^2 + 4y^2 - 16y - 20 = 0$　h) $9x^2 - 9y^2 - 18x + 54 = 0$　i) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$

j) $9x^2 - 16y^2 - 18x - 32y - 151 = 0$　k) $y^2 + x + 2y + 3 = 0$　l) $25x^2 + 9y^2 - 50x + 18y - 191 = 0$

まとめ

学習した4つの図形（放物線、円、楕円、双曲線）は**円錐形**といい、それぞれを表す公式は以下の通りです。

$y = \frac{1}{4p}x^2$	$x^2 + y^2 = r^2$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
放物線	**円**	**楕円**	**双曲線**

それぞれの形にはバリエーションがあり、水平型や垂直型、移動した形もあり、あらゆる計算式を用いて表すことができ、また右辺を0の等式で表すこともできます。一般的に、上記の方程式はそれぞれの図形に対する**方程式（標準形）**とされているものです。

達成の目安

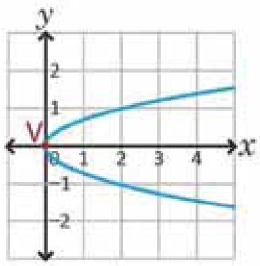
4.9 2次曲線に関する問題を解きなさい。

ねらい

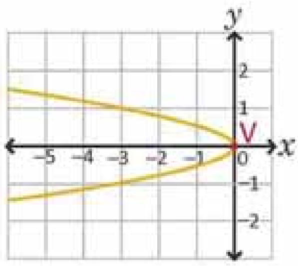
これらの問題では、生徒たちに、座標軸を入れ替えて、つまり、y軸がx軸になっていると考えて解くようアドバイスし、それぞれ全ての図形が、放物線、楕円、双曲線を 90° 回転させた形になっていることを認識させる必要があります。

解答：

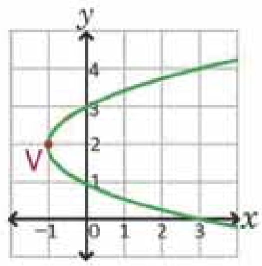
1a) $x = 2y^2$



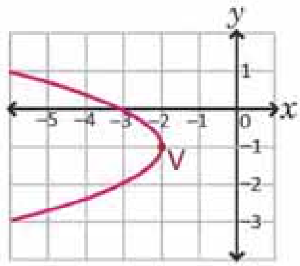
1b) $x = -3y^2$



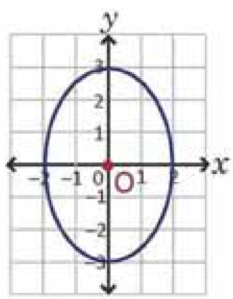
1c) $x + 1 = (y - 2)^2$



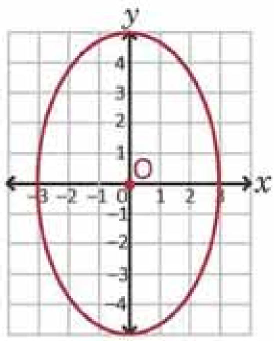
1d) $x + 2 = -(y + 1)^2$



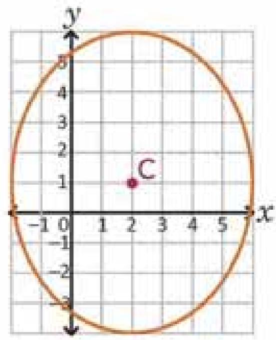
2a) $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$



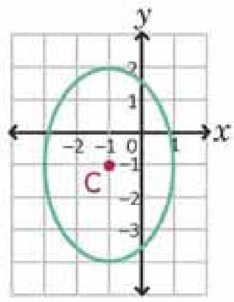
2b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$



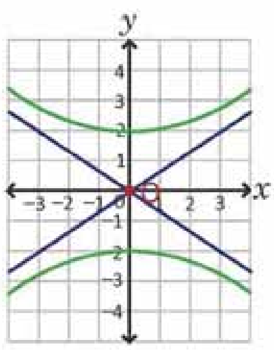
2c) $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$



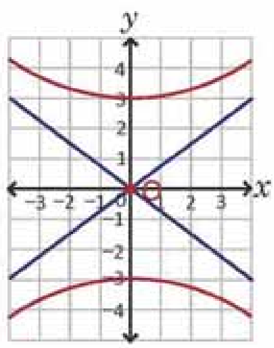
2d) $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$



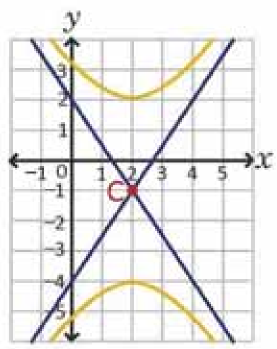
3a) $\frac{y^2}{2^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1$



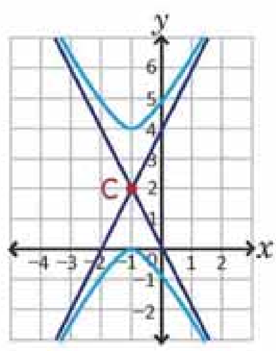
3b) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$



3c) $\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$



3d) $\frac{(y-2)^2}{4} - (x+1)^2 = 1$



4.

放物線	円	楕円	双曲線
b) $y-k=\frac{1}{4p}(x-h)^2$	c) $x^2+y^2=r^2$	a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	d) $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
g) $y=\frac{1}{4p}x^2$	e) $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$	h) $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	f) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

5. この問題では、2次曲線の方程式（一般形）の特徴を分析して特定できるように生徒を導くことができます。まず xy の項がないこと、次に x^2 もしくは y^2 の係数がゼロである場合は放物線になることが分かります。もしそれぞれの係数が等しくて正の場合には、それが円であるか点であるか、あるいは座標平面に図形として表されないものであるかを判断するために平方完成をして確かめます。もしそれぞれの係数が異なる正の場合は、それが楕円であるか、あるいは座標平面に図形として表されないものであるかを判断するために平方完成をして確かめます。そして、それぞれの係数が異なり、正負が混在している場合（一方が正でもう一方が負）は、それは双曲線となります。

5a) x^2 と y^2 の係数がそれぞれゼロでなく、正の数であるので、これは楕円であり、平方完成をすると、このような式になります。$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

5b) x^2 と y^2 の係数がゼロでなく、等しいので、これは円であり、平方完成をすると、このような式になります。
$x^2+(y+2)^2=1$

5c) x^2 の係数がゼロであるため、これは放物線です。

5d) x^2 と y^2 の係数がゼロでなく、正負が混在しているので、これは双曲線です。

5e) y^2 の係数がゼロであるため、これは放物線です。

5f) x^2 と y^2 の係数がゼロでなく、等しいので、これは円で、平方完成をするとこのような式になります。
$(x+1)^2+y^2=9$

5g) x^2 と y^2 の係数がゼロでなく、正の数なので、これは楕円で、平方完成をするとこのような式になります。
$\frac{x^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$

5h) x^2 と y^2 の係数がゼロでなく、正負が混在しているので、これは双曲線です。

5i) x^2 と y^2 の係数がゼロでなく、等しいので、これは円で、平方完成をするとこのような式になります。
$(x-1)^2+(y-1)^2=4$

5j) x^2 と y^2 の係数がゼロでなく、正負が混在しているので、これは双曲線です。

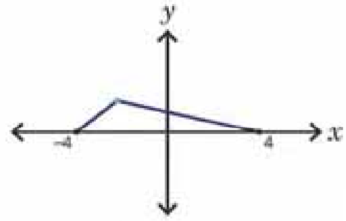
5k) x^2 の係数がゼロであるため、これは放物線です。

5l) x^2 と y^2 の係数がゼロでなく、正の数なので、これは楕円で、平方完成をするとこのような式になります。
$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{25}=1$

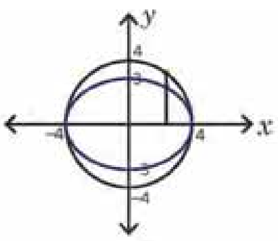
この問題では、その都度平方完成をすると非常に長い計算が必要になってしまうので、それはお勧めしません。2次曲線の方程式（一般形）を作ることに重点をおくことをお勧めします。平方完成させる必要があるのは、円と楕円の場合のみです。それに、この問題はGeoGebraの演習でも出てくるので、後で確認することが可能です。

4.10 ユニット問題

1. 三角形の底辺の長さは一定で、その頂点は点 (–4, 0) と (4, 0) にあります。可変辺の傾きが常に4となる場合にもう 1 つの頂点がくる座標を求めなさい。

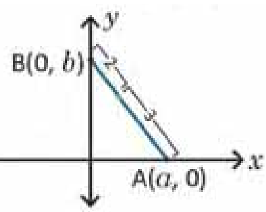


2. $x^2 + y^2 = 16$ の円がくる位置から y 軸の座標を $\frac{3}{4}$ ずつ減らした場合の軌跡を求めなさい。



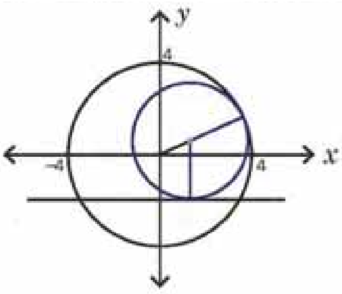
この演習では、楕円がまるで一定の比率で一定の方向に縮小された小さな円のように見えることを確認できます。

3. 点 A が x 軸上を移動し、点 B が y 軸上を移動する長さ 5 の切片 AB を座標平面上にあるとします。切片AB上で3：2 の比率になる座標を求めなさい。



座標を A(a, 0)、B(0, b) と仮定して、ピタゴラスの定理を使用して方程式を作ることができます。そして与えられた割合で分割された切片上の点の座標を計算すれば解けます。

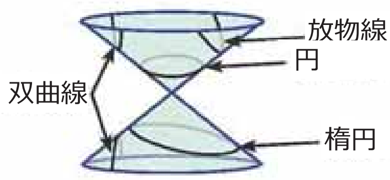
4. 接線 $y + 2 = 0$ と円 $x^2 + y^2 = 16$ に常に接点をもつ円になるように半径が変化する円の中心のが描く軌跡を求めなさい。上記の円は常に接線より上で円の内側を移動すると仮定します。



可変円の中心から直線までの距離と可変円の中心から固定円の中心までの距離との関係を求めなさい。

まとめ

すべての円錐形は、図に示すように、2つの紙でできた円錐を、平面にカットすることにしたがって得られる形であるので、このような名前がつけられています。



2次曲線に関する情報は、エルサルバドル教育省 (MINED) の公式ビデオ「2次曲線」（アドレス https：//goo.gl/Lq3dGW）で見られます。

達成の目安

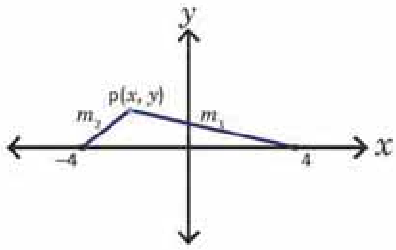
4.10 2次曲線に関する問題を解きなさい。

ねらい

問題を分析し、そこにある情報のひとつひとつを学習した内容や知識に基づいて数式で表現します。

解答：

1. もう一方の頂点は、点 P(x, y) と考えられるので、傾きの式にあてはめて、



$$m_1 = \frac{y-0}{x-4} = \frac{y}{x-4} \qquad m_2 = \frac{y-0}{x-(-4)} = \frac{y}{x+4}$$

次に、傾きが 4 にならないといけないので、$m_1 m_2 = 4$ となり、

$$\frac{y}{x-4} \times \frac{y}{x+4} = 4 \Rightarrow \frac{y^2}{x^2-16} = 4 \Rightarrow y^2 = 4(x^2-16) \Rightarrow y^2 - 4x^2 + 64 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1.$$

よって、問題の条件を満たす点がたどる軌跡は双曲線 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$ となります。

2. 円の y 座標をそれぞれ $\frac{3}{4}$ だけ減らした図形の点を P(x', y') とすると、その円の通る点の座標は $(x, y) = (x', \frac{4}{3}y')$ となり、次の式が成り立ちます。

$$x'^2 + \left(\frac{4}{3}y'\right)^2 = 16 \Rightarrow \frac{x'^2}{16} + \frac{\cancel{16}y'^2}{9(\cancel{16})} = 1 \Rightarrow \frac{x'^2}{4^2} + \frac{y'^2}{3^2} = 1.$$

よって、円 $x^2 + y^2 = 16$ の軌跡の y 座標をそれぞれ $\frac{3}{4}$ ずつ小さくした図形は $\frac{x'^2}{4^2} + \frac{y'^2}{3^2} = 1$ の楕円になります。

この問題は、円の方程式にあてはめる際に情報を正しく理解して正しく代入するよう注意する必要があります。

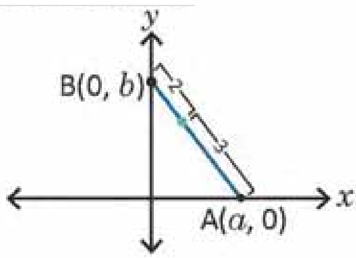
3. 切片AB上で 3：2 の比率になる点を点 P(x, y) と考えると、ピタゴラス定理により、$AO^2 + OB^2 = AB^2$ 、そして $a^2 + b^2 = 5^2$ であることが分かっているので、ユニット 2 直線で学習した割合の式をあてはめて、

$$(x, y) = \left(\frac{2(a)+3(0)}{3+2}, \frac{2(0)+3(b)}{3+2}\right) \Rightarrow \frac{2a}{5} = x、\frac{3b}{5} = y \Rightarrow a = \frac{5x}{2}、\ b = \frac{5y}{3}.$$

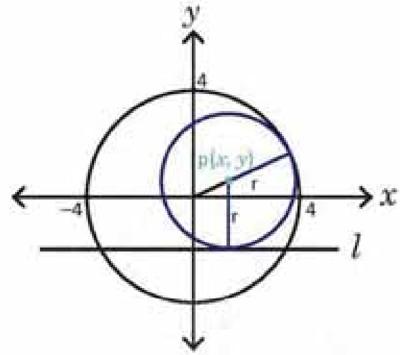
ここで、ピタゴラスの定理に基づいて方程式を置き換えます。

$$\left(\frac{5x}{2}\right)^2 + \left(\frac{5y}{3}\right)^2 = 25 \Rightarrow \frac{\cancel{25}x^2}{4(\cancel{25})} + \frac{\cancel{25}y^2}{9(\cancel{25})} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

したがって、3：2 の比率になる切片 AB の軌跡は、$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ の楕円になります。



4. 内周の中心を P(x, y) とすると、線 y = –2 までの距離は d(P, l) = y + 2 になります。また、円の中心と中心の間の距離は、



$$d(\mathrm{P}, \mathrm{O}) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

この距離は、大きな円の半径 (4) から小さな円の半径 (y + 2) を引いた差として求めることもできるので、

$$d(\mathrm{P}, \mathrm{O}) = 4 - (y + 2)$$

したがって、$\sqrt{x^2 + y^2} = 4 - (y + 2) \Rightarrow x^2 + y^2 = (2 - y)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 - 4y + y^2 \Rightarrow x^2 + 4y - 4 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x^2 + 1.$

よって、$y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ となる場合に円の中心が作る軌跡は、$-2\sqrt{3} < x < 2\sqrt{3}$ の一部となります。

5.1 GeoGebra演習：2次曲線の作成

この演習では、2次曲線の図形は変数を用いて作成されるので、中心、パラメータ、軸の長さなどの値をそれぞれ指定することで、同じ系統になる2次曲線(放物線、円、楕円、双曲線)を作成することができます。「演習」の手順にしたがって、円錐形を作成しなさい。次に、GeoGebraで、この演習の最後にある「課題」セクションの問題に取り組みます。

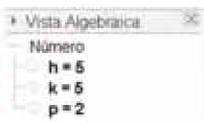
演習

パラメータ *p* と頂点 (*h*, *k*) を持つ放物線の作成

1. 入力バーに変数 *p* の値 2 を p = 2 と入力します。

2. 「Enter」を押すと、代数ビュー(左側のパネル)に右の式が表示されます。

3. 同様に、共に 5 の値を持つ変数 *h* と *k* を入力し、代数ビューに右の図のような結果が表示されるのを確認します。

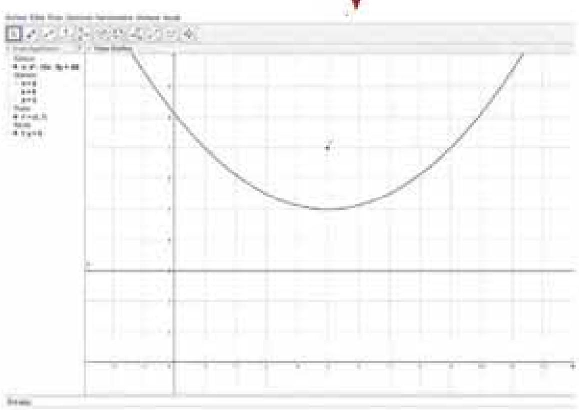


4. 入力バーに焦点 F = (h, k + p) を入力すると、点 F（焦点） がグラフィックビューに表示されます。

5. 入力バーに準線 y = k - p を入力すると、グラフィックビューに準線が表示されます。

6. 円錐形 ボタンの中から 放物線 を選択します。

7. 次に、（グラフィックビューまたは代数ビューのいずれかで）点 F を選択してから、準線を選択します。
下の図にあるグラフが作成されます。

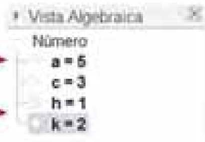


8. 変数*p*, *h*, *k*の値は、代数ビューでそれぞれをダブルクリックすると変更できるので、レッスン1の問題の答えを確認することができます。また代数ビューにある円錐形の方程式を右クリックすることですべてのオプションが表示され、放物線の方程式の形を確認することもできます。

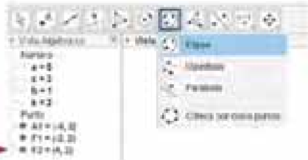
ユニット3

a, *c* の値と中心 (*h, k*) の値が分かっている楕円の作成。

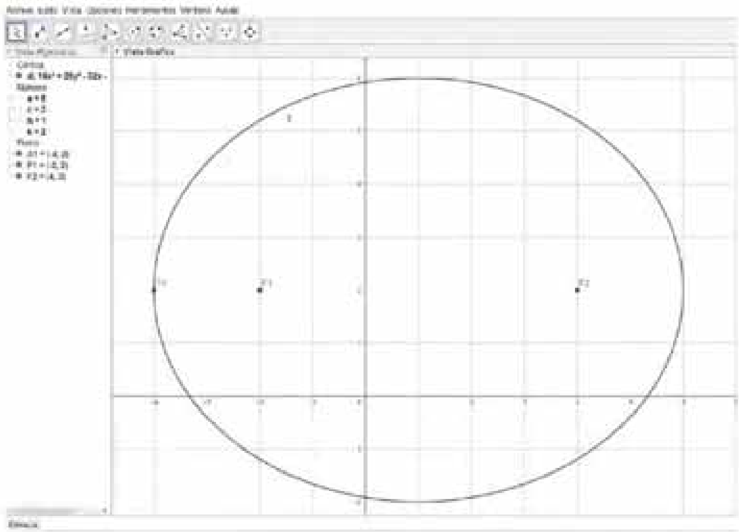
1. 入力バーから変数 *a*, *c*, *h*, *k* にそれぞれ 5、3、1、2 の値を入力します。代数ビューに、右の図に示す結果が表示されます。



2. 点 F_1、F_2、A_1 の座標に式 F1 = (h - c, k), F2 = (h + c, k), A1 = (h - a, k) と入力し、焦点と頂点をグラフ化します。グラフィックビューに点が表示されます。



3. 円錐形ボタンの中から楕円を選択します。
4. 次に、点F1を選択し、その後点F2を選択し、最後に点 A1（頂点）を選択します。以下に示すグラフが表示されます。



5. 変数 *a, c, h, k* の値は、代数ビューでそれぞれをダブルクリックすると変更できるので、レッスン 3 の問題の答えを確認することができます。また代数ビューにある円錐形の方程式を右クリックすることですべてのオプションが表示され、楕円の方程式の形を確認することもできます。

課題

1. 中心 (*h, k*)、半径*r*の円を作成しなさい。
2. *a*、*c* の値と中心 (*h*、*k*) をもつ双曲線の作成しなさい。
3. ユニット全体のレッスンで取り組んだ問題の答えを確かめて、正しいことを確認しなさい。
4. 水平な放物線を作成しなさい。
5. 垂直な楕円を作成しなさい。
6. 垂直な双曲線を作成しなさい。

達成の目安

5.1 数学ソフトウェアを使って、円錐形の方程式の標準形からグラフや要素を描画しなさい。

学習の流れ

生徒たちはここまでの学習で2次曲線の定理を理解できているので、GeoGebraのツールを用いて論理的な手順で学習内容を確かめることで、さらに理解を深めることができ、またGeoGebraももっと使えるようになります。

ねらい

この演習は、生徒たちがGeoGebraを一般的な方法で使用してさまざまな円錐形を作成することに焦点をあてています。また、このソフトウェアを使って、取り組んだ練習問題の結果にある変数を変えることで、学習内容を理論的に復習することもできます。

解答：

1. 円を作成するには、演習で行ったのと同じ方法で変数 r, h, k を設定し、円周ボタンの中から円（中心、半径）を選択するだけで十分です。

2. 双曲線を作成する方法は、楕円の作成とよく似ていて、演習で行ったのと同じやり方で変数 a, b, h, k を入力します。楕円の時と同じように、F1 = (h - c, k), F2 = (h + c, k) , A1 = (h - a, k) と入力してから、ボタン 円錐形 の中から 双曲線 を選んで最初に焦点を選択し、次に頂点を選択して、焦点と頂点をグラフ化するだけで十分です。

3. この設問は、円錐形のグラフを作る際に問題となる点を確認するためだけのものなので、1.4、1.5、1.10、2.1、2.2、2.6、3.3、3.4、3.6、4.3、4.4、4.6 のレッスン内容を引用してもいいし、ユニット2の直線問題に関する演習を使ってもいいです。

4. この問題は、変数 p, h, k を指定することになるので、垂直な放物線を作成する問題と非常によく似ていますが、焦点の式だけ F = (h + p, k) に変更する必要があります。また準線の式も x = h – p に変更する必要があります。あとは、同じように、円錐形 ボタンの中から放物線を選択し、焦点と準線を選択します。

5. この問題は、水平な楕円を作成する問題と非常によく似ていて、演習で行ったのと同じ方法で変数 a, c, h, k を入力し、焦点と頂点の式を F1 = (h, k - c), F2 = (h, k + c) , A1 = (h, k - a) に変更し、円錐形 ボタンの 楕円 メニューから最初に焦点を選択し、次に頂点を選択するだけで十分です。

6. この問題は、水平な双曲線を作成する問題と非常によく似ていて、演習で行ったのと同じ方法で変数 a, c, h, k を入力し、焦点と頂点の式を F1 = (h, k - c), F2 = (h, k + c) , A1 = (h, k - a) に変更します。そして円錐形ボタンの 双曲線 メニューの中から最初に焦点を選択し、次に頂点を選択するだけで十分です。

生徒には、後の課題に取り組む際に戻って確認できるよう、演習の初めから各課題を別々のファイルに保存することを勧めます。また、後のレッスン、特に5.3の授業で使えるよう、これらのファイルは、どこか決めた場所(コンピューターまたはUSBメモリなど)に保存しておくよう指導します。

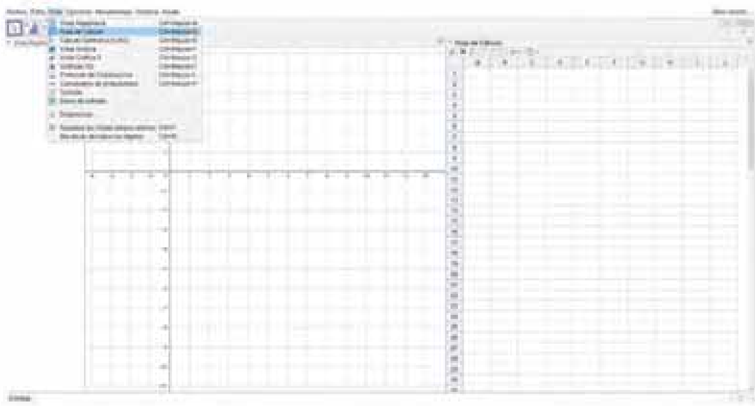
5.2 GeoGebraでの演習：円錐形の方程式（一般形）のグラフを作りなさい。

この演習では、円錐形の方程式（一般形）からグラフを作るためにGeoGebra 計算シートを使用します。方程式（一般形）を使うことで、円錐形の形を識別しやすくなります。また、代数ビューを使用して、方程式(標準形)の式を作ることができます。「演習」の部分に表示される手順に従い、方程式（一般形）に対応する円錐形グラフを作成します。その後、GeoGebraを使ってこの演習の最後にある「課題」セクションの問題に取り組みます。

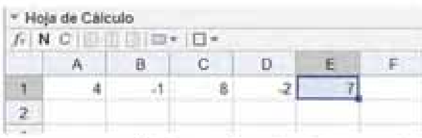
演習

指定された方程式（一般形）の円錐形のグラフを作りなさい。

1. ビュー メニューを開き、計算シートを選択します。



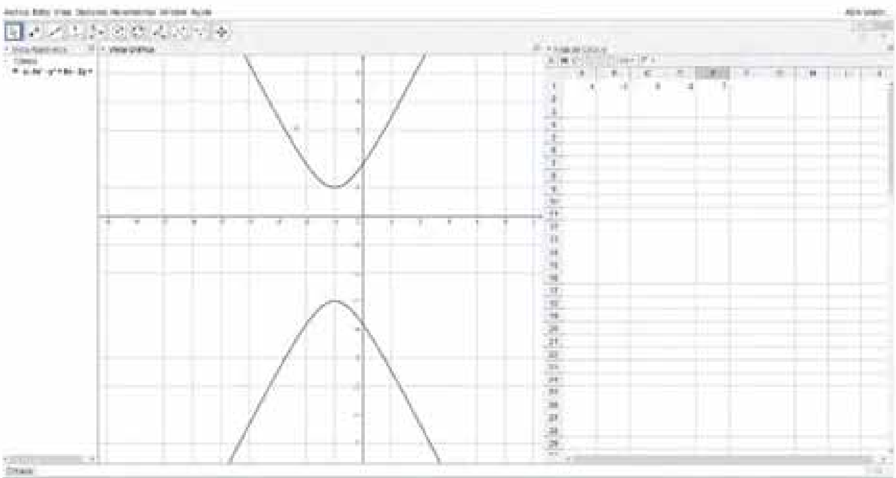
2. 行 1 に移動し、右の図のように、各列にそれぞれ 4 , −1 , 8 , −2 , 7 と入力します。



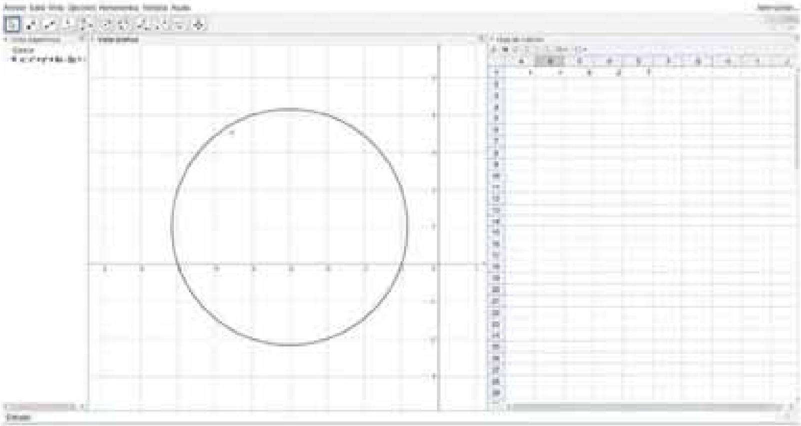
3. 次に、入力バーに、セル x^2, y^2, x, y の係数と定数にそれぞれ A1, B1, C1, D1 , E1 の値をあてはめた方程式（一般式）を A1*x^2 + B1*y^2 + C1*x + D1*y + E1 = 0 と入力します。

Entrada: A1*x^2 + B1*y^2 + C1*x + D1*y + E1 = 0

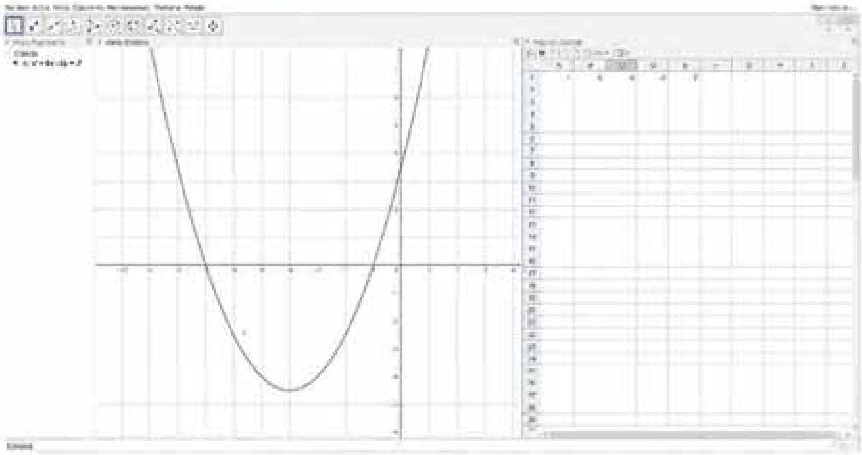
4. 方程式を入力すると、グラフビューにこの図のような双曲線のグラフが表示されます。



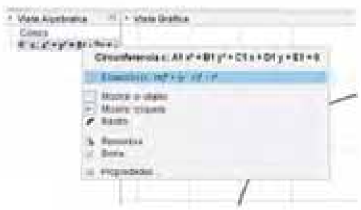
5. セル A1 と B1 の値を 1 に変えると円ができます。



6. セル B1 の値を 0 に変更すると、放物線ができます。



7. 図にあるように、方程式の上を右クリックして、方程式（標準形）を選択しなさい。



課題

次のそれぞれの式で表される円錐形の種類を特定し、授業 4.9 の問題 5 の答えが正しいかどうか確認し、間違っている場合は、どこが間違っていたかを確認しなさい。

a) $9x^2 + 25y^2 - 54x - 144 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$

c) $y^2 + x + 4y + 4 = 0$

d) $4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 7 = 0$

e) $2x^2 - 4x - y + 4 = 0$

f) $x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$

g) $9x^2 + 4y^2 - 16y - 20 = 0$

h) $9x^2 - 9y^2 - 18x + 54 = 0$

i) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$

j) $9x^2 - 16y^2 - 18x - 32y - 151 = 0$

k) $y^2 + x + 2y + 3 = 0$

l) $25x^2 + 9y^2 - 50x + 18y - 191 = 0$

達成の目安

5.2適切な数学ソフトウェアを利用して、方程式（一般形）から円錐形を描画しなさい。

学習の流れ

2次曲線の標準形を学習した後、2次曲線の方程式（一般形）の学習に進むことができます。

ねらい

この演習では、高校 1 年の時の記述式統計のユニットで使用したものと同じGeoGebraの計算シートを活用します。

解答：

この課題では、生徒たちはグラフをもとに、ユニット問題の答えを確認することになります。

a) 楕円グラフ

b) 円グラフ

c) 放物線グラフ

d) 双曲線グラフ

e) 放物線グラフ

f) 円グラフ

g) 楕円グラフ

h) 双曲線グラフ

i) 円グラフ

j) 双曲線グラフ

k) 放物線グラフ

l) 楕円グラフ

もし生徒が演習や他の課題をすぐに終えるようなら、レッスン1.7、2.3、3.5、4.5の問題で作ったグラフを確認するよう指示を与えるといいです。

5.3 GeoGebraでの演習：2次曲線の性質

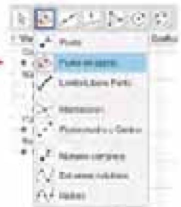
この演習では、GeoGebraのリソースを使って、各コンテンツのアプリケーションで用いた2次曲線（放物線、楕円、双曲線）の焦点の性質を**検証**します。まず「演習」にある手順にしたがって、プロパティを作成します。その後、GeoGebraを使ってこの演習の最後にある「課題」セクションの問題に取り組みます。

演習

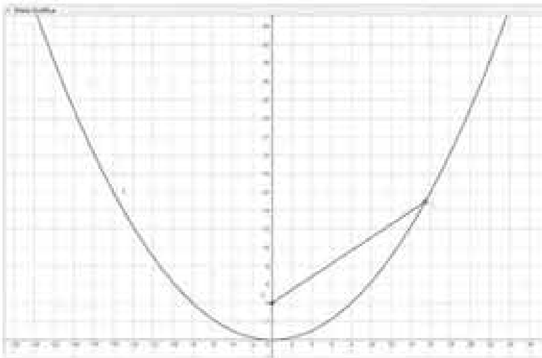
放物線の焦点特性の検証

焦点からの線はいずれも、軸に対し平行な同じ方向に向かって反射され、また、軸に対し平行に入ってくる線は、焦点に向かって反射されます。

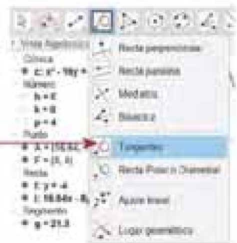
1. 演習 5.1 で作成したファイルを使用して、頂点 (0, 0)、パラメータ $p = 4$ の放物線のグラフを作りなさい。
2. 「点」ボタンの中の オブジェクトに点をうつ を選択し、放物線に点をつける方法で、放物線のどこにでも点を打つことができます。



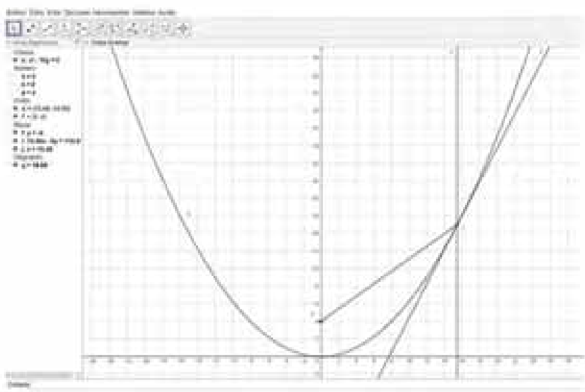
3. 図に示すように、焦点 (F) から放物線上につけた点まで伸びる切片を描画しなさい。



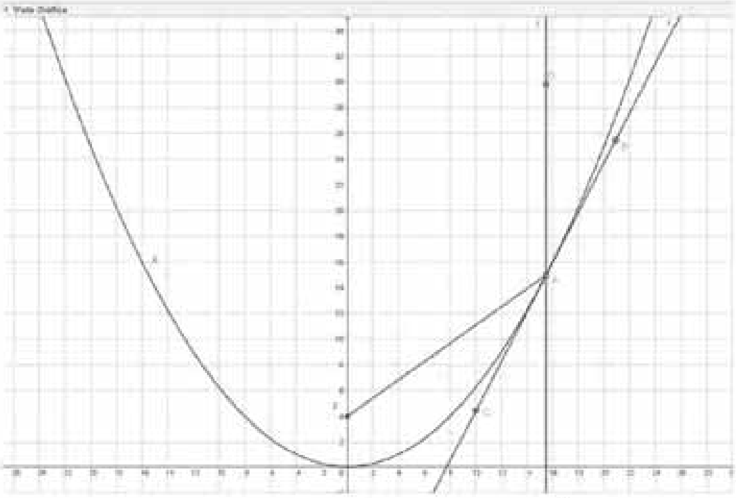
4. 線ボタンの中の 接線 を使って、点を選択してから放物線を選択し、問2で描画しした点で放物線に接する接線を作成しなさい。



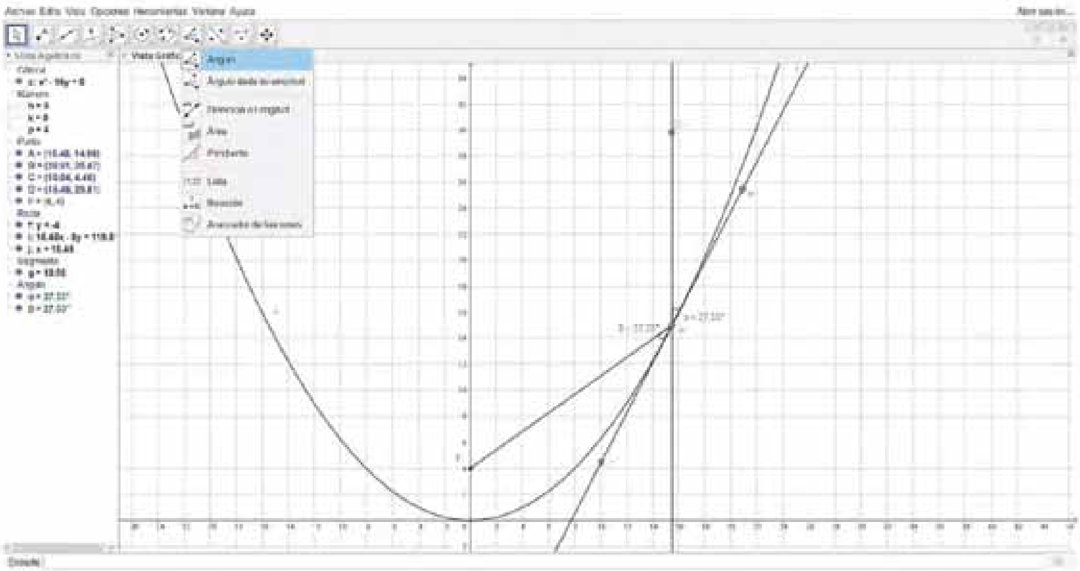
5. 線 ボタンの中の 平行線 を使って、点と y 軸を選択し、問2で作成した点を通る y 軸に平行な線を描画しなさい。以下の図が表示されます。



6. 図のように、点 B と点 C を接線上に配置し、点 D を y 軸に対し平行な線上に配置しなさい。



7. 図のように、角度ボタンの中の角度を使って、角 DAB と角 FAC の角度を測りなさい。



8. カーソルを使って、放物線上の点を移動させ、焦点から放出された線が反射される角度が、放物線の軸に平行な線に対して一定であることを確認しなさい。点を右クリックして、選択肢の中からアニメーションを選ぶことで、自動的に放物線上のすべての点の上を通過させることもできます。

課題

1. 楕円のアプリケーションで利用した楕円の焦点の性質を検証するために作図しなさい。

2. 双曲線のアプリケーションで使用した双曲線の焦点の性質を検証するために作図しなさい。

達成の目安

5.3 適切な数学的ソフトウェアを使って作図することで、さまざまな円錐形の焦点の性質を確認しなさい。

学習の流れ

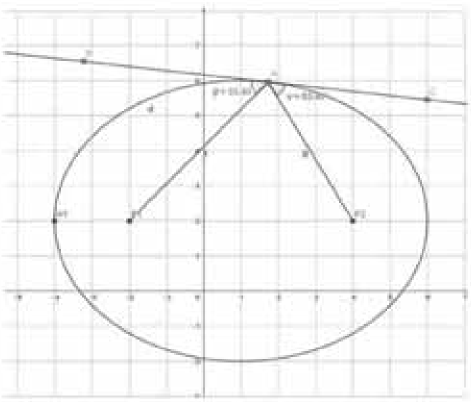
2次曲線の方程式の分析を終えたら、次に2次曲線の焦点の反射特性を検証することができます。

ねらい

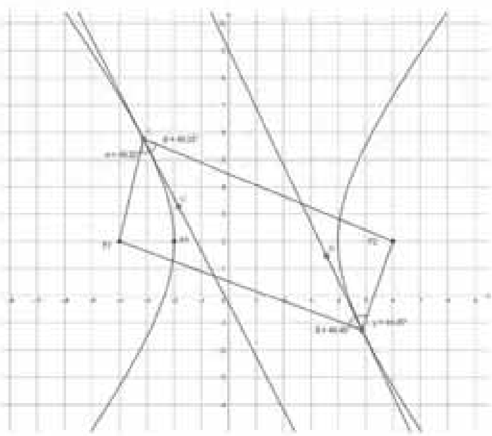
GeoGebraの作図を用いて、少なくとも2次曲線の反射特性に関する結果の検証ができます。

解答：

1. 楕円の授業 5.1 で作成したファイルを使い、放物線の作図と同じ手順で、下図のように楕円上に点を描画し、次にそれぞれの焦点から楕円上の点までをつなぐ 2 つの切片を描画し、次に描画した点において楕円と接する接線を描画し、最後に切片と接線により形成される角の角度を測定することで、プロパティを検証します。



2. 双曲線の授業 5.1 で作成したファイルを使い、楕円の作図と同じように、下図のように、双曲線上に点を描画し、次にそれぞれの焦点から双曲線上の点までをつなぐ 2 つの切片を描画します。次に描画した点において双曲線と接する接線を描画し、最後に切片と接線により形成される角の角度を測定することで、プロパティを検証します。



5.4 GeoGebraを使って演習しなさい 円錐形の軌跡に関する問題

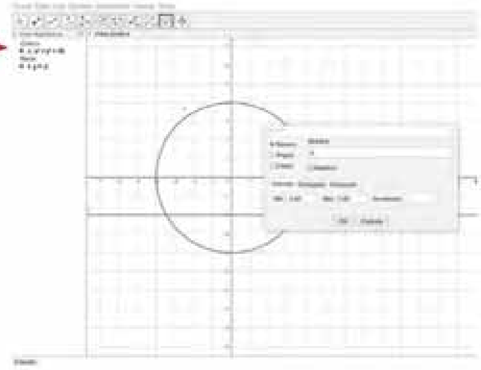
この演習では、GeoGebraリソースを利用して、4.10 の授業で解いた2次曲線の軌跡に関する問題の解答を**検証**します。「演習」の部分に表示される手順に従い、それぞれ指定された軌跡を描画します。その後、GeoGebraを使ってこの演習の最後にある「課題」セクションの問題に取り組みます。

演習

授業 4.10 の問題 4 を再掲しています。

接線 $y + 2 = 0$ と円 $x^2 + y^2 = 16$ に常に接点をもつ円になるように半径が変化する円の中心のが描く軌跡を求めなさい。上記の円は常に接線より上で円の内側を移動すると仮定します。

1. 入力バーを利用して、線 $y + 2 = 0$ と円 $x^2 + y^2 = 16$ を描画します。

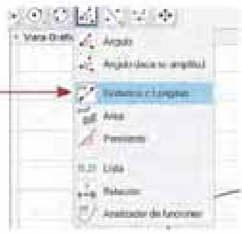


2. スライダーボタンを選択して、配置したい位置でグラフィックビューをクリックし、最小値 –3.46、最大値 3.46 を指定して「Enter」を押し、変数 a のスライダーを挿入します。

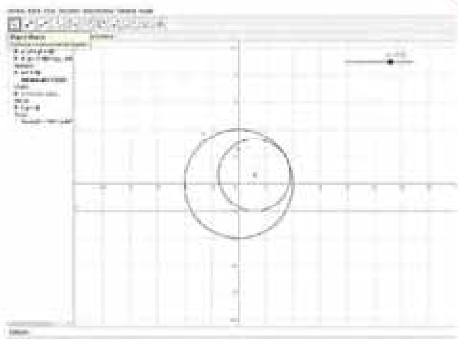
3. 問題の答え（$y = -\frac{x^2}{4} + 1$）を確認するには、入力バーに点 $C = (x, -\frac{x^2}{4} + 1)$ を次のように入力します。

C = (a, (–a^2 / 4) + 1)

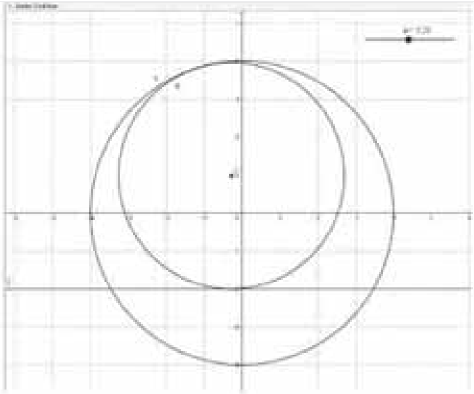
4. 角度ボタンの中から距離または長さを選択し、手順 3 でグラフ化した点 C を選択し、線 $y + 2 = 0$ を選択します。その後、点 C から線までの距離を示すラベルがグラフィックビューに表示され、代数ビューに、測定された距離の数値を格納する「distanceCf」という名前の変数が表示されます



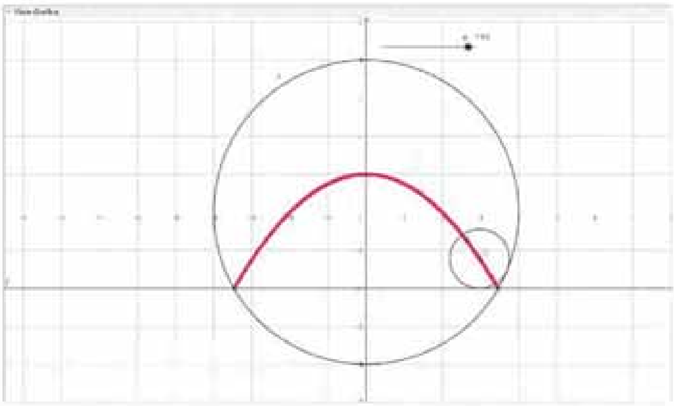
5. 次に、中心と半径のオプションを使って円を作成し、手順 3 で作成した点 C を中心として選択し、半径の入力バーに距離を「distanciaCf」と入力します。結果は下の図のようになります。



6. 手順 5 で作成した円は、線 $y + 2 = 0$ と円 $x^2 + y^2 = 16$ の両方に接していることを確認します。スライダーを水平に動かして、円がどのように動くかを見ることができます。



7. 点 C を右クリックし、残像 を選択し（必要に応じて点の色を変更できます）、スライダーをもう一度動かして、軌跡がどのようになるかを確認します。



8. 最後に、スライダーを右クリックして、アニメーションを選択すると、軌跡が自動的に描画され、答えが正しいことを確認できます。

課題

1. スライダーの最小値と最大値の範囲を変更し、線 $y + 2 = 0$ と円 $x^2 + y^2 = 16$ の円の接線がどうなるかに注目しながら観察し、その結果と結論を記述しなさい。

2. 授業 4.10 のユニット問題の問 2 と問 3 の答えを作図して、検証しなさい。
   a) $x^2 + y^2 = 16$ の円の y 座標をそれぞれ $\frac{3}{4}$ にした場合の軌跡を求めなさい。

   b) 座標平面上にある長さ 5 の切片 AB で、点 A が x 軸上を移動し、点 B が y 軸上を移動するとします。切片 AB が 3：2 の比率になる時の点の軌跡を求めなさい。

達成の目安

5.4 数学ソフトウェアを使用して、2次曲線に関する問題を解きなさい。

学習の流れ

GeoGebraを使った2次曲線の演習は最後にユニットの問題の解答が掲載されているので、解説をしっかり確認しなさい。

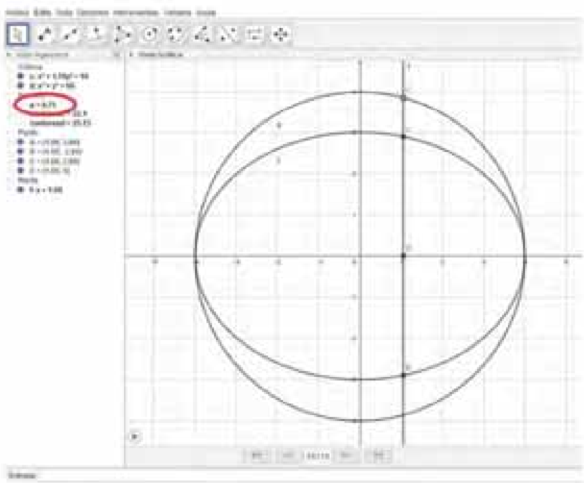
ねらい

残像ツールやアニメーションツールを使用して、ユニット問題の解答を確認しなさい。

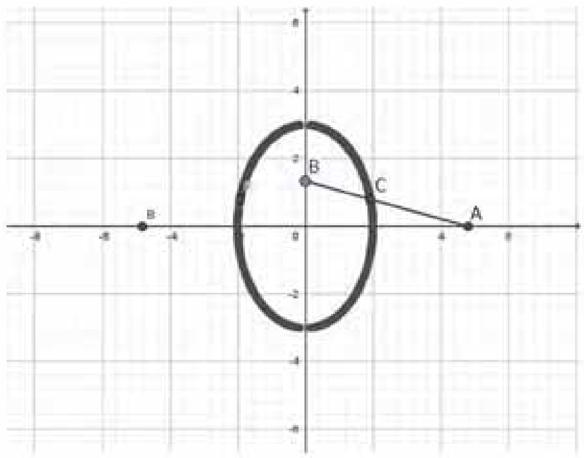
解答：

1. スライダーの範囲が変わると、円は直線とも円とも接した状態を維持したまま直線の上部から下部へ移動します。

2a) $x^2 + (\frac{4}{3}y)^2 = 16$ の式で表される図を描画することができるので、入力形式に注意して、x^2 + (4 /3y)^2 = 16 と入力します。すると、問題にある円が表示されます。与えられた比率を満たしていることを確認するには、円周上に点を配置し、その点を通る y 軸に平行な線を描いてから、直線と楕円の交点と、直線と x 軸との交点を求め、最後に、たとえば a = 距離(C, D)/距離 (A, D) 等と入力することで、その比率の値を維持する変数を作ることができます。結果は図のように表示されます。



2b) y 軸上に点を描き、次に半径 5 の円を描画して、円と x 軸の交点を特定し、両方の点に切片を描画します（これは長さ 5 の切片です）。次に、3：2 の比率で切片上にある点を求めるために、y 軸上にある点を中心とする半径 2 の円を描きます。そして、長さ 5 の切片と半径 2 の円との交点を見つけます。最後に、円を非表示にし、3：2 の比率になる点の残像表示を行い、y 軸に点のアニメーションを使用して、図のように楕円が描画されることを確認します。



この最後の問題は、別の方法でも確認することができます。直線上で 3：2 の比率になっている点を特定し、点が軸上を自由に動けるようにする方法です。

ユニット4：超越関数 I

このユニットのねらい

方程式を解き、指数関数の特徴を述べるため、実数の累乗の演算を、計算に役立つ性質を使って行います。

関連と発展

中学 3 年	高校 1 年	高校 2 年
ユニット 2：平方根（2 乗根）(9°) • 平方根と実数 • 平方根の演算	**ユニット 1 ：実数** • 実数	**ユニット 4：超越関数 I** • 累乗と n 乗根 • 指数関数と指数方程式
	ユニット 3：不等式 • 不等式 • 一次不等式 • 非線形不等式	**ユニット 5：超越関数 II** • 全単射関数と逆関数 • 対数関数 • 三角関数 • GeoGebraを使った演習
	ユニット4：実数の関数 • 関数の定義 • 2次関数 • 2次関数の応用 • その他の関数 • GeoGebraを使った演習	

このユニットでの学習計画

レッスン	時間	授業
1. 累乗とn乗根	1	1. 同一の底（てい）と自然数の指数を持つ累乗の性質
	1	2. 同一の自然数を指数とする累乗の性質
	1	3. ゼロ指数と負の指数
	1	4. 実数の n 乗根
	1	5. 根号を使わない数式
	1	6. n 乗根を使った演算
	1	7. n 乗根の加法、減法、累乗
	1	8. 有理数の指数
	1	9. 有理数の指数の性質
	1	10. 異なる根指数を持つ累乗根の演算
	1	11. 復習問題
2. 指数関数と指数方程式	1	1. 指数関数の定義
	1	2. 対称性のある指数関数
	1	3. 指数関数の特徴
	1	4. 指数関数の水平移動と垂直移動
	1	5. 対称性のある指数関数のグラフと移動
	1	6. 指数方程式
	1	7. 2次方程式へと単純化できる指数方程式
	1	8. 復習問題

レッスン	時間	授業
	1	9. このユニットの問題
	1	ユニット 4　テスト
	2	二学期テスト

全20コマ + ユニット 4 テスト + 二学期テスト

各レッスンの要点

レッスン 1：累乗と *n* 乗根

この課では、実数同士の演算を行うのに役立つ一連の手段となる累乗の性質を学習し、その後にn乗根を定義し、累乗根の演算を学習しますが、これらによって有理数の指数が容易に導入できるようになります。累乗根の簡約化は、先ず素因数分解において根指数が一定の指数より小さいことに注目し、乗法の性質を使って行います。あるいは、被開平数が単一の底の累乗で、そのべき指数は根指数より小さいが共通の因数を持っている場合は、よって、有理数の指数を簡約化に使います。

レッスン 2：指数関数と指数方程式

ここではすでに、整数の指数、有理数、無理数の累乗の知識を持っているので、実関数で表す指数関数の導入を行います。それに加え、対称性や移動といった方法を使ってグラフが描ける指数関数も学習します。最後に、累乗の定義と変数置換を用いて解が得られる指数方程式を学習します。

レッスン1 累乗とn乗根

1.1 同一の底と自然数の指数を持つ累乗の性質

導入問題

次の演算を行い、ある数の累乗でその答えを示しなさい。

a) $2^2 \times 2^3$　　b) $3^6 \div 3^2$　　c) $(2^2)^3$

解法

a が実数で、n が正の整数とすると、よって、

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n\text{ 倍}}$$

a^n：指数、累乗、底

a) $2^2 \times 2^3$

$$2^2 \times 2^3 = \underbrace{(2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)}_{5\text{倍}}$$
$$= 2^5$$

次のようになります。 $2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$

b) $3^6 \div 3^2$

$$3^6 \div 3^2 = \frac{3^6}{3^2}$$
$$= \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times \cancel{3} \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times \cancel{3}}$$ 簡約化して、
$$= \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{4\text{倍}}$$
$$= 3^4$$

次のようになります。 $3^6 \div 3^2 = 3^{6-2} = 3^4$

c) $(2^2)^3$

$$(2^2)^3 = (2^2) \times (2^2) \times (2^2)$$
$$= (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2)$$
$$= \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{6\text{倍}}$$
$$= 2^6$$

次のようになります。 $(2^2)^3 = 2^{2 \times 3} = 2^6$

定義

1. aと b が実数、mと n が正の整数とすると、同一の底を持つ累乗の演算するための公式は、

a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$　　b) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (si $a \neq 0$ y $m > n$)　　c) $(a^m)^n = a^{m \times n}$

上記の b) もまた分数 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$で表されます 。

a が実数ならば
$a^1 = a$

2. a は正の実数とすると、よって

a) n は偶数ならば、よって

$$(-a)^n = \underbrace{(-a) \times (-a) \times \cdots \times (-a)}_{\text{負数の偶数の数量}} = a^n$$

b) n が奇数ならば、よって

$$(-a)^n = \underbrace{(-a) \times (-a) \times \cdots \times (-a)}_{\text{負数の奇数の数量}} = -a^n$$

問題

以下の演算を単一の累乗で表しなさい。

a) $3^6 \times 3^4$　　b) $(-3)^2 \times (-3)^4$　　c) $(-2)^3 \times (-2)^2$

d) $5^7 \div 5^3$　　e) $(-2)^5 \div (-2)^3$　　f) $(-3)^8 \div (-3)^5$

g) $(6^5)^2$　　h) $(10^4)^3$　　i) $[(-3)^3]^5$

達成の目安

1.1 同一の底と正の指数を持つ積と商を累乗で表しなさい。

学習の流れ

第7学年では、2 乗と 3 乗の乗数を学習しましたが、ここでは自然数すべての指数に対して、この定義を拡大します。そして、段階的に指数の値を実数にまで拡げ導入します。この授業では、同一の底を持つ累乗の演算で用いる性質を把握させます。

ねらい

「定義」の第 2 項では、負の記号を累乗の前に残すという方法をとることで、問題の解を正数の累乗として表さなくてはならないことをはっきりさせ、したがって、生徒はこの指示を復習して問題を解かなくてはなりません。

解答：

a) $3^6 \times 3^4 = 3^{6+4} = 3^{10}$

b) $(-3)^2 \times (-3)^4 = (-3)^{2+4} = (-3)^6 = 3^6$

c) $(-2)^3 \times (-2)^2 = (-2)^{3+2} = (-2)^5 = -2^5$

d) $5^7 \div 5^3 = 5^{7-3} = 5^4$

e) $(-2)^5 \div (-2)^3 = (-2)^{5-3} = (-2)^2 = 2^2$

f) $(-3)^8 \div (-3)^5 = (-3)^{8-5} = (-3)^3 = -3^3$

g) $(6^5)^2 = 6^{5\times 2} = 6^{10}$

h) $(10^4)^3 = 10^{4\times 3} = 10^{12}$

i) $[(-3)^3]^5 = (-3)^{3\times 5} = (-3)^{15} = -3^{15}$

1.2 同一の自然数の指数を持つ累乗の性質

導入問題

次の演算を行い、ある数の累乗でその答えを示しなさい。

a) $2^3 \times 3^3$ b) $\frac{6^3}{2^3}$

解法

a) $2^3 \times 3^3$

$2^3 \times 3^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$ 結合すると、

$= \underbrace{6 \times 6 \times 6}_{3倍}$

$= 6^3$

次のようになります。 $2^3 \times 3^3 = (2 \times 3)^3 = 6^3$

b) $\frac{6^3}{2^3}$

上記の問題から次が得られます。$6^3 = 2^3 \times 3^3$.

等式の両辺を 2^3 で割ることで、次が得られます。

$\frac{6^3}{2^3} = \frac{\cancel{2^3} \times 3^3}{\cancel{2^3}} = 3^3$

次のようになります。 $\frac{6^3}{2^3} = \left(\frac{6}{2}\right)^3 = 3^3$

まとめ

- a と b が実数で 、m が正の整数とすると、同一の指数を持つ累乗の演算をするための公式は、

a) $a^m \times b^m = (a \times b)^m$ b) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ (si $b \neq 0$)

- b)の性質はこのような割り算で表されます。

$$a^m \div b^m = (a \div b)^m$$

- $a_1, a_2, \dots, a_n$ が実数とすれば、よって、

$$a_1^m \times a_2^m \times \cdots \times a_n^m = (a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n)^m$$

例

$2^2 \times 3^2 \times 5^2$ の積をただ1つの累乗で表しなさい。

$2^2 \times 3^2 \times 5^2 = (2 \times 3 \times 5)^2 = 30^2$

したがって、$2^2 \times 3^2 \times 5^2 = 30^2$

問題

以下の演算を単一の累乗で表しなさい。

a) $6^{10} \times 4^{10}$ b) $(-3)^7 \times 6^7$ c) $5^5 \times (-8)^5$

d) $(-2)^5 \times (-7)^5$ e) $12^5 \div 6^5$ f) $20^3 \div (-4)^3$

g) $(-24)^4 \div 3^4$ h) $(-15)^6 \div (-5)^6$ i) $(-35)^4 \div (-7)^4$

達成の目安

1.2 同一の正の指数を持つ積と商を、累乗で表しなさい。

学習の流れ

乗数の掛け算や割り算をするにあたり、同一の指数を有する場合の性質を確認させます。これまで、正の数の指数が関係する性質を学習してきました。ここでは改めて、前の授業で行ったように、累乗を正数と負数に適用します。

つまずきやすい点

生徒は累乗の性質、つまり、同一の底を持つ場合と同一指数を持つ場合とを混同する可能性があり、したがって、それぞれの問題に取り組むにあたっては、生徒にどちらの場合にあたるか注意するよう助言する必要があります。

解答：

a) $6^{10} \times 4^{10} = (6 \times 4)^{10} = 24^{10}$

b) $(-3)^7 \times 6^7 = (-3 \times 6)^7 = (-18)^7 = -18^7$

c) $(5)^5 \times (-8)^5 = (5 \times (-8))^5 = (-40)^5 = -40^5$

d) $(-2)^5 \times (-7)^5 = ((-2) \times (-7))^5 = 14^5$

e) $12^5 \div 6^5 = (12 \div 6)^5 = 2^5$

f) $20^3 \div (-4)^3 = (20 \div (-4))^3 = (-5)^3 = -5^3$

g) $(-24)^4 \div 3^4 = (-24 \div 3)^4 = (-8)^4 = 8^4$

h) $(-15)^6 \div (-5)^6 = (-15 \div (-5))^6 = 3^6$

i) $(-35)^4 \div (-7)^4 = (-35 \div (-7))^4 = 5^4$

1.3 指数がゼロと負の数の場合*

導入問題

$a^m \div a^n = a^{m-n}$ の性質が整数m と n のすべてに対し成り立つと仮定します。以下の 2 つの異なる方法で割り算をしなさい。

a) $6^3 \div 6^3$　　b) $3^3 \div 3^7$

解法

a) $6^3 \div 6^3$

割り算の性質を用いて

$6^3 \div 6^3 = 1$

この場合、指数の性質が証明されるならば、
よって、

$$6^3 \div 6^3 = 6^{3-3} = 6^0$$

したがって、$6^3 \div 6^3 = 6^0$ となります。

したがって、6^0 と 1 は同じ数を表します。

b) $3^3 \div 3^7$

式の簡約化を用いて

$$3^3 \div 3^7 = \frac{3^3}{3^7} = \frac{\cancel{3}\times\cancel{3}\times\cancel{3}}{3\times3\times3\times3\times\cancel{3}\times\cancel{3}\times\cancel{3}} = \frac{1}{3\times3\times3\times3} = \frac{1}{3^4}$$

したがって、 $3^3 \div 3^7 = \frac{1}{3^4}$ となります。

この場合、指数の性質が証明されるならば、
よって、

$$3^3 \div 3^7 = 3^{3-7} = 3^{-4}$$

したがって、$3^3 \div 3^7 = 3^{-4}$ となります。

よって 3^{-4}、$\frac{1}{3^4}$ は同じ数字を表します。

定義

a) **指数がゼロの場合**

a が $a \neq 0$で実数ならば、よって

$$a^0 = 1.$$

b) **指数が負の数の場合**

a が$a \neq 0$で 実数、n が正の整数ならば、よって

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

この定義に基づき、正の指数の性質もまた、指数が負の数とゼロの場合にも適用されます。a と b が実数、m とy n が整数ならば、

a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$　b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$　c) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

d) $a^m \times b^m = (a \times b)^m$　e) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

問題

1. 以下の関数を負の指数の累乗で書きなさい。

a) $\frac{1}{2^3}$　b) $\frac{1}{3}$　c) $\frac{1}{(-5)^5}$　d) $\frac{1}{10^8}$

2. 以下の負の指数の累乗を分数で書きなさい。

a) 2^{-7}　b) 3^{-5}　c) 5^{-1}　d) 7^{-2}

達成の目安

1.3　負の指数の累乗を、正の指数の分数で表しなさい、またその逆も同様にしなさい。

学習の流れ

負の指数もしくはゼロ指数の累乗を導入しますが、これによって、自然数の指数の性質を整数の指数の性質にまで適用することが可能となります。「導入問題」を解くことが、生徒にとって非常に困難ならば、教師が問題を解いてみせる必要があります。

ねらい

「導入問題」では、m と nが整数 の場合に$a^m \div a^n = a^{m-n}$ という性質が適用できる可能性を提起していますが、これは、 ($a^m \div a^n \rightarrow a^{m-n}$) が唯一の対応する関係にある時に意味があります。このことは、「解法」で、通常のやり方、および、指数を使って商を求めることを可能にします。

解答：

1a) $\frac{1}{2^3} = 2^{-3}$　**1b)** $\frac{1}{3} = 3^{-1}$　**1c)** $\frac{1}{(-5)^5} = (-5)^{-5}$　**1d)** $\frac{1}{10^8} = 10^{-8}$

2a) $2^{-7} = \frac{1}{2^7}$　**2b)** $3^{-5} = \frac{1}{3^5}$　**2c)** $5^{-1} = \frac{1}{5}$　**2d)** $7^{-2} = \frac{1}{7^2}$

生徒がすぐに問題を解いてしまった場合は、この課の「復習問題」の問題 1 の a) から j) を解くよう勧めてください。

レッスン 1

1.4 実数のn乗根

導入問題

次のそれぞれの方程式のx の実数の値を決定しなさい。

a) $x^3 = 27$　　　　b) $x^4 = 625$

解法

a) 27 の素因数分解は、

27	3
9	3
3	3
1	

$27 = 3^3$

したがって、$x = 3$ が、この方程式の解です。

したがって、3 を 27 の立方根と呼び、$3 = \sqrt[3]{27}$ で表されます。

b) 625 の素因数分解は、

625	5
125	5
25	5
5	5
1	

$625 = 5^4$

したがって、$x = 5$ が、方程式の解です。

5 を 625 の 4乗根と呼びます。 $5 = \sqrt[4]{625}$

また $x = -5$ となり、これがこの方程式の解です。

-5 を 625 の負の 4 乗根と呼びます。

$-5 = -\sqrt[4]{625}$

定義

n は正の整数とすると、$b^n = a$ の条件数を満たす数bは、a の **n 乗根**と呼ばれます。

実数のn乗根を扱う場合、2つのケースに分類されます。

1. もし n が奇数ならば、実数 a のそれぞれに対し単一の (n) 乗根 が対応し、$\sqrt[n]{a}$ で表されます。
2. もし n が偶数ならば、それぞれの正の実数 a に、2 つの実数の n 乗根が対応、すなわち、正数の $\sqrt[n]{a}$ と負数の $-\sqrt[n]{a}$ が対応します。

以下の条件の 1 つが満たされるならば、つまり、n が奇数、もしくは、n が偶数で $a > 0$ ならば、よって $\sqrt[n]{a^n} = a$ となります。

累乗根

根指数 ← $\sqrt[n]{a}$

被開平数

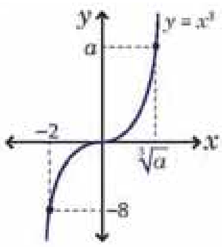
Si $n = 1 \Rightarrow \sqrt[1]{a} = a$.

Si $n = 2 \Rightarrow \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.

n が正の整数 ならば、よって $\sqrt[n]{0} = 0$

例

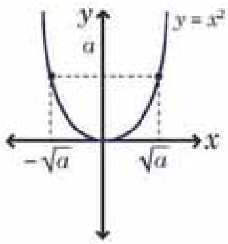
a) 数字 -8 は、立方根を 1 つだけ有します。



$-8 = (-2)^3 \Longrightarrow \sqrt[3]{-8} = -2.$

実数 a はすべて、1つの立方根 $\sqrt[3]{a}$ を有します。

b) 数字 -16 は、平方根を 2 つ有します。



$\sqrt{16} = 4$ y $-\sqrt{16} = -4$

実数 a はすべて、2 つの平方根 $\sqrt{a}$ と$-\sqrt{a}$ を有します。

問題

次の等式を n 乗根の表記法を用いて表しなさい。

a) $2^3 = 8$　　b) $(-5)^3 = -125$　　c) $3^4 = 81$　　d) $(-7)^4 = 2401$

e) $6^2 = 36$　　f) $(-2)^5 = -32$　　g) $(-4)^5 = -1024$　　h) $5^5 = 3125$

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$　　j) $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$　　k) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$　　l) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$

達成の目安

1.4 各数の累乗を n 乗根で書きなさい。

学習の流れ

第9学年（中 3 相当）で習ったように、実数の n 乗根の定義は、平方根の定義を、正の整数 n へと一般化します。実数の n 乗根だけが唯一使われます。

ねらい

「定義」では、nが偶数の場合 a の n 乗根は平方根（2乗根）と同じ扱い方を受けます。つまり、n 乗根は方程式 $b^n = a$ の実数の解であり、正の n 乗根は $\sqrt[n]{a}$ で、負の n 乗根は$-\sqrt[n]{a}$で表されますが、これは $\sqrt[n]{a}$ の加法の逆元です。

解答：

a) $2^3 = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{8} = 2$

b) $(-5)^3 = -125 \Rightarrow \sqrt[3]{-125} = -5$

c) $3^4 = 81 \Rightarrow \sqrt[4]{81} = 3$

d) $(-7)^4 = 2\,401 \Rightarrow -\sqrt[4]{2\,401} = -7$

e) $6^2 = 36 \Rightarrow \sqrt{36} = 6$

f) $(-2)^5 = -32 \Rightarrow \sqrt[5]{-32} = -2$

g) $(-4)^5 = -1\,024 \Rightarrow \sqrt[5]{-1\,024} = -4$

h) $5^5 = 3\,125 \Rightarrow \sqrt[5]{3\,125} = 5$

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} \Rightarrow \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$

j) $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$

k) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \Rightarrow -\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = -\frac{1}{2}$

l) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27} \Rightarrow \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$

問題の d) と k) では、累乗の底はその数の負の平方根を基にすることから、負の記号を累乗根の前に書くよう注意しなければなりません。

1.5 根号を使わない数字の表し方

導入問題

以下の数字を根号を使わず表しなさい。

a) $\sqrt[3]{729}$　　b) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$

数字の各桁の合計が3で割り切れるならば、その数字は割り切れます。

解法

a) $\sqrt[3]{729}$

$729 = 3^6$　　729 を分解

$= 3^3 \times 3^3$

$= (3 \times 3)^3$　　累乗の性質を使う場合は、根指数3の累乗の積で書き直し、

$= 9^3$。

つまり、9 を 3 乗すると、729 が得られます。

したがって、$\sqrt[3]{729} = 9$ となります。

b) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$

$\frac{16}{81} = \frac{2^4}{3^4}$　　16 と 81 を分解

$= \left(\frac{2}{3}\right)^4$　　累乗の性質を使う場合は、

よって、$\frac{2}{3}$ を4 乗すると $\frac{16}{81}$ が得られます。

したがって、$\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$ となります。

まとめ

実数 $\sqrt[n]{a}$ を根号を使わず書くには、次のように計算します。　　例： $\sqrt[3]{1728}$

1. a の素因数分解を書き、被関平数が、分数ならば分子と分母を分解しなさい。 → $1728 = 2^6 \times 3^3$
2. 指数 n の累乗の積で分解を表しなさい。 → $1728 = 2^3 \times 2^3 \times 3^3$
3. 同一の指数の累乗の積あるいは商の性質を用いなさい。 → $1728 = (2 \times 2 \times 3)^3 = 12^3$
4. $a = b^n$ の形の式が得られ、よって $\sqrt[n]{a} = b$。 → $\sqrt[3]{1728} = 12$

n が奇数の正数で a が実数ならば、よって $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$ となります。

n が偶数ならば、負の数の n 乗根は実数ではありません。

問題

以下の数字を根号を使わず表しなさい。

a) $\sqrt[4]{16}$　　b) $\sqrt[5]{243}$　　c) $\sqrt[7]{128}$　　d) $\sqrt[5]{100\,000}$

e) $\sqrt[3]{-216}$　　f) $\sqrt[8]{256}$　　g) $\sqrt[3]{\frac{512}{343}}$　　h) $\sqrt[6]{\frac{64}{729}}$

100

達成の目安

1.5 被開平数を素因数に分解して、n 乗根を計算しなさい。

学習の流れ

この授業では、実数の正確なn乗根を簡約化した形で、つまり根号を使わずに表します。それから、累乗根の簡約化を行いますが、係数への累乗根の分配はまだ予定しておらず、係数への指数の分配の性質とn乗根の定義自体を用いる予定です。累乗根の分配は、次の授業で取り組むことになります。

ねらい

n が奇数の数式 $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$ は、「まとめ」に示されていますが、被開平数が負の記号を有している時に問題を解くのに役立つでしょう。このような方法によって、この問題は、正数のn乗根の計算をすること、と言い換えられます。

解答：

左記の a) から h) の各項目を解くには、素因数への分解とn乗根の定義を用いることが求められます。

a) $16 = 2^4$
$\Rightarrow \sqrt[4]{16} = 2$

16	2
8	2
4	2
2	2
1	

b) $243 = 3^5$
$\Rightarrow \sqrt[5]{243} = 3$

243	3
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

c) $128 = 2^7 \Rightarrow \sqrt[7]{128} = 2$

d) $100\,000 = 2^5 \times 5^5$
$\Rightarrow 100\,000 = (2 \times 5)^5$
$\Rightarrow 100\,000 = 10^5$
$\Rightarrow \sqrt[5]{100\,000} = 10$

e) $\sqrt[3]{-216} = -\sqrt[3]{216}$
$216 = 2^3 \times 3^3$
$\Rightarrow 216 = (2 \times 3)^3$
$\Rightarrow 216 = 6^3$
$\Rightarrow \sqrt[3]{216} = 6$
$\Rightarrow \sqrt[3]{-216} = -\sqrt[3]{216} = -6$

f) $256 = 2^4 \times 2^4$
$\Rightarrow 256 = (2 \times 2)^4$
$\Rightarrow 256 = 4^4$
$\Rightarrow \sqrt[4]{256} = 4$

g) $512 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \Rightarrow 512 = (2 \times 2 \times 2)^3 \Rightarrow 512 = 8^3$
$343 = 7^3$
$\Rightarrow \frac{512}{343} = \frac{8^3}{7^3}$
$\Rightarrow \frac{512}{343} = \left(\frac{8}{7}\right)^3$
$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{512}{343}} = \frac{8}{7}$

h) $64 = 2^6$と$729 = 3^6$
$\Rightarrow \frac{64}{729} = \frac{2^6}{3^6}$
$\Rightarrow \frac{64}{729} = \left(\frac{2}{3}\right)^6$
$\Rightarrow \sqrt[6]{\frac{64}{729}} = \frac{2}{3}$

1.6 n 乗根の演算

導入問題

累乗根 1 つだけで以下の演算を表すために、n 乗根の定義を使いなさい。

a) $\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{20}$　　b) $\sqrt[4]{96}\div\sqrt[4]{3}$　　c) $\sqrt{\sqrt[3]{128}}$

解法

a) $\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{20}$

$(\sqrt[3]{6})^3=6$ と $(\sqrt[3]{20})^3=20$	立方根の定義を使い、
$(\sqrt[3]{6})^3\times(\sqrt[3]{20})^3=6\times 20$	上記の等式を各辺ごとに掛け合わせ、
$(\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{20})^3=6\times 20$	左辺に累乗の性質を適用することで、
$\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{20}=\sqrt[3]{6\times 20}$	累乗を立方根で表し、
$\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{20}=\sqrt[3]{120}$	その積を求めます。

したがって、 $\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{20}=\sqrt[3]{120}.$

b) $\sqrt[4]{96}\div\sqrt[4]{3}$

$(\sqrt[4]{96})^4=96$ と $(\sqrt[4]{3})^4=3$	4乗根の定義を用い、
$(\sqrt[4]{96})^4\div(\sqrt[4]{3})^4=96\div 3$	各辺を割り算し、
$(\sqrt[4]{96}\div\sqrt[4]{3})^4=96\div 3$	左辺に累乗の性質を適用することで、
$\sqrt[4]{96}\div\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{96\div 3}$	累乗を 4 乗根 ($\sqrt[4]{96}\div\sqrt[4]{3}>0$)で表し、
$\sqrt[4]{96}\div\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{32}$	割り算します。

したがって、 $\sqrt[4]{96}\div\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{32}.$

c) $\sqrt{\sqrt[3]{128}}$

$\left(\sqrt{\sqrt[3]{128}}\right)^2=\sqrt[3]{128}$	平方根の定義を用い、
$\left[\left(\sqrt{\sqrt[3]{128}}\right)^2\right]^3=(\sqrt[3]{128})^3=128$	立方根の定義を使い、
$\left(\sqrt{\sqrt[3]{128}}\right)^{2\times 3}=128$	累乗の性質を適用することで、
$\left(\sqrt{\sqrt[3]{128}}\right)^6=128$	積を求め、
$\sqrt{\sqrt[3]{128}}=\sqrt[6]{128}$	累乗を 6 乗根で表します $\left(\sqrt{\sqrt[3]{128}}>0\right)$

したがって、 $\sqrt{\sqrt[3]{128}}=\sqrt[6]{128}.$

ユニット 4

レッスン 1

まとめ

実行するために		以下が必要		n乗根で表して
a) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$	$\Rightarrow$	$(\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b})^n = a \times b$	$\Rightarrow$	$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$
b) $\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b}$	$\Rightarrow$	$(\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b})^n = a \div b$	$\Rightarrow$	$\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \div b}$
c) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$	$\Rightarrow$	$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m \times n} = a$	$\Rightarrow$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \times n]{a}$

n乗根を簡約化するために乗法の性質を用います。

$$\sqrt[n]{a^n \times b} = \sqrt[n]{a^n} \times \sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b}$$

$a_1, a_2, \dots, a_m$ が実数ならば、
よって、
$$\sqrt[n]{a_1} \times \sqrt[n]{a_2} \times \cdots \times \sqrt[n]{a_m} = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_m}$$

b) の性質もまた次のように用いられます。

b) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

累乗根を**簡約化**するとは、初めの値より小さい被開平数を用いて表すことです。

最小値の式 へ簡約化するとは、被開平数を可能な限り小さい値へと簡約化することです。

累乗根を使った演算を行った後は常に最小値の式へと簡約化しなければなりません。

例

1.「導入問題」の結果を簡約化しなさい。

a) $\sqrt[3]{120}$

$\sqrt[3]{120} = \sqrt[3]{2^3 \times 3 \times 5}$

$= 2\sqrt[3]{3 \times 5}$

$= 2\sqrt[3]{15}$

したがって、$\sqrt[3]{120} = 2\sqrt[3]{15}$ となります。

b) $\sqrt[4]{32}$

$\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^4 \times 2}$

$= 2\sqrt[4]{2}$

したがって、$\sqrt[4]{32} = 2\sqrt[4]{2}$

c) $\sqrt[6]{128}$

$\sqrt[6]{128} = \sqrt[6]{2^6 \times 2}$

$= 2\sqrt[6]{2}$

したがって、$\sqrt[6]{128} = 2\sqrt[6]{2}$

2. 以下の演算を行いなさい。

a) $\sqrt[8]{4} \times \sqrt[8]{8} \times \sqrt[8]{2} \times \sqrt[8]{4}$

$\sqrt[8]{4} \times \sqrt[8]{8} \times \sqrt[8]{2} \times \sqrt[8]{4} = \sqrt[8]{4 \times 8 \times 2 \times 4}$

$= \sqrt[8]{2^2 \times 2^3 \times 2 \times 2^2}$

$= \sqrt[8]{2^8}$

$= 2$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}$

$\dfrac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\dfrac{108}{4}}$

$= \sqrt[3]{27}$

$= \sqrt[3]{3^3}$

$= 3$

問題

次の演算をして、出た答えを最小値の式へと簡約化しなさい。

a) $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{10}$　　b) $-\sqrt[4]{75} \times \sqrt[4]{50}$　　c) $-\sqrt[3]{45} \times (-\sqrt[3]{81})$

d) $\sqrt[3]{320} \div \sqrt[3]{10}$　　e) $\sqrt[3]{486} \div (-\sqrt[3]{6})$　　f) $-\sqrt[4]{192} \div (-\sqrt[4]{6})$

g) $\sqrt{\sqrt{80}}$　　h) $-\sqrt{\sqrt[3]{640}}$　　i) $\sqrt[3]{-\sqrt{256}}$

数字の各桁の数の合計が 3 で割り切れるならば、その数は割り切れます。

達成の目安

1.6 積、商、等根の累乗根を、出た結果を最小値の式へと簡約化し決定しなさい。

学習の流れ

n乗根を使った演算を、ここでは乗法や除法、および、根が 1 つの累乗根の定義をもとに学習します。また、累乗根の乗法をもとに簡約化の概念を明確にします。

ねらい

「導入問題」では、累乗根をそのまま示し、すでに簡約化のための係数への累乗根の分配を学習しているので、「例」が指示するところまで簡約化をすることになります。「解法」では、n 乗根の定義と累乗の性質を使わなくてはなりません。「例」では、べき指数が根指数と等しくなるような方法で、係数への分解が用いられます。

解答：

a) $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{4 \times 10} = \sqrt[3]{2^3 \times 5} = 2\sqrt[3]{5}$

b) $-\sqrt[4]{75} \times \sqrt[4]{50} = -\sqrt[4]{75 \times 50} = -\sqrt[4]{2 \times 3 \times 5^4} = -5\sqrt[4]{6}$

c) $-\sqrt[5]{45} \times (-\sqrt[5]{81}) = \sqrt[5]{45 \times 81} = \sqrt[5]{3^5 \times 3 \times 5} = 3\sqrt[5]{15}$

d) $\sqrt[3]{320} \div \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{320 \div 10} = \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^2} = 2\sqrt[3]{4}$

e) $\sqrt[3]{486} \div (-\sqrt[3]{6}) = -\sqrt[3]{486 \div 6} = -\sqrt[3]{81} = -\sqrt[3]{3^3 \times 3} = -3\sqrt[3]{3}$

f) $-\sqrt[4]{192} \div (-\sqrt[4]{6}) = \sqrt[4]{192 \div 6} = \sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^4 \times 2} = 2\sqrt[4]{2}$

g) $\sqrt{\sqrt{80}} = \sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{2^4 \times 5} = 2\sqrt[4]{5}$

h) $-\sqrt{\sqrt[3]{640}} = -\sqrt[6]{640} = -\sqrt[6]{2^6 \times 2 \times 5} = -2\sqrt[6]{10}$

i) $\sqrt[3]{-\sqrt{256}} = -\sqrt[3]{\sqrt{256}} = -\sqrt[6]{256} = -\sqrt[6]{2^6 \times 2^2} = -2\sqrt[6]{4}$

割り算は分数を用い、それを簡約化することで、計算できますが、これは計算を容易にするためです。

1.7 加法、減法、n 乗根の累乗

導入問題

以下の演算を行いなさい。

a) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}$　　b) $(\sqrt[6]{4})^3$

2つの累乗根が等根で、同じ根指数と被開平数を持つならば、足し算もしくは引き算ができます。

解法

a) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}$

最小値の式へと簡約化し、

$\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^3\times 2}$　と　$\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{2\times 3^3}$

$=2\sqrt[3]{2}$　　$=3\sqrt[3]{2}$

等根の足し算をします。

$\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}=2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}$

$=5\sqrt[3]{2}$

したがって、　$\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}=5\sqrt[3]{2}$ となります。

b) $(\sqrt[6]{4})^3$

累乗を積で分解します。

$(\sqrt[6]{4})^3=\sqrt[6]{4}\times\sqrt[6]{4}\times\sqrt[6]{4}$

$=\sqrt[6]{4\times 4\times 4}$

$=\sqrt[6]{4^3}$　　累乗で表します。

簡約化して　$\sqrt[6]{4^3}=\sqrt[6]{(2^2)^3}=\sqrt[6]{2^6}=2.$

したがって、　$(\sqrt[6]{4})^3=2.$

まとめ

1. n乗根の足し算もしくは引き算をするためのステップは、
   - 累乗根を最小値の式に簡約化します。
   - 等根を加算もしくは減算します。

2.実数の累乗根の累乗は　$(\sqrt[n]{a})^m=\underbrace{\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{a}\times\cdots\times\sqrt[n]{a}}_{m\text{ 倍}}$　となり

n乗根の性質を用いて、　$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{m\text{ 倍}}}$

被開平数の累乗で書き直すと、　$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

数 $\sqrt[n]{a}$ は n が偶数で a が負の数ならば、実数ではありません。

すなわち、
$\sqrt{-1}, \sqrt{-2}, \sqrt{-3}, \sqrt[4]{-1}, \sqrt[4]{-2}, \sqrt[6]{-1}$ と $\sqrt[6]{-2}$ となり、これらは実数ではありません。

問題

1. 以下の演算をしなさい。

a) $\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}$　　b) $\sqrt[4]{32}+\sqrt[4]{512}$　　c) $\sqrt[4]{80}+\sqrt[4]{405}$　　d) $\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{135}$

e) $\sqrt[3]{500}-\sqrt[3]{108}$　　f) $\sqrt[3]{576}-\sqrt[3]{72}$　　g) $\sqrt[3]{486}-\sqrt[3]{144}$　　h) $\sqrt[4]{243}-\sqrt[4]{48}$

i) $(\sqrt[6]{27})^2$　　j) $(\sqrt[6]{8})^5$　　k) $(\sqrt[4]{25})^2$　　l) $(\sqrt[4]{27})^3$

2. $2=\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}-\sqrt[3]{-10+\sqrt{108}}$　であることを示すために、次のステップを踏んでください。
   a) $(1+\sqrt{3})^3=10+6\sqrt{3}$ であることを示し、次に立方根で等式を書いてください。
   b) $(-1+\sqrt{3})^3=-10+6\sqrt{3}$ であることを示し、次に立方根で等式を書いてください。
   c) 上の a) から l) の問題のうち立方根の引き算を行い答えを出してください。

ユニット 4

達成の目安

1.7 等根の足し算と引き算を行い、累乗根が1つの累乗で簡約化し、最小値の式で計算結果を書きなさい。

学習の流れ

ここでは、加法、減法、n乗根を学習します。根指数がべき指数より大きいならば、ここではまだ簡約化は行いません。

ねらい

「導入問題」とその「問題」は、等根同士の演算が可能になるような方法で行われます。「まとめ」の第 2 項では、等式は $\sqrt[n]{a}$ 引確に定義されている場合に限り、有効であるということを理解させなければなりません。

解答：

1a) $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{2^3 \times 3} + \sqrt[3]{3^3 \times 3} = 2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} = 5\sqrt[3]{3}$

1b) $\sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{512} = \sqrt[4]{2^4 \times 2} + \sqrt[4]{2^4 \times 2^4 \times 2} = 2\sqrt[4]{2} + 2 \times 2\sqrt[4]{2} = 2\sqrt[4]{2} + 4\sqrt[4]{2} = 6\sqrt[4]{2}$

1c) $\sqrt[4]{80} + \sqrt[4]{405} = \sqrt[4]{2^4 \times 5} + \sqrt[4]{3^4 \times 5} = 2\sqrt[4]{5} + 3\sqrt[4]{5} = 5\sqrt[4]{5}$

1d) $\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{135} = \sqrt[3]{2^3 \times 5} + \sqrt[3]{3^3 \times 5} = 2\sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{5} = 5\sqrt[3]{5}$

1e) $\sqrt[3]{500} - \sqrt[3]{108} = \sqrt[3]{2^2 \times 5^3} - \sqrt[3]{2^2 \times 3^3} = 5\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4}$

1f) $\sqrt[3]{576} - \sqrt[3]{72} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 3^2} - \sqrt[3]{2^3 \times 3^2} = 2 \times 2\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{9} = 4\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{9} = 2\sqrt[3]{9}$

1g) $\sqrt[3]{486} - \sqrt[3]{144} = \sqrt[3]{2 \times 3^3 \times 3^2} - \sqrt[3]{2^3 \times 2 \times 3^2} = 3\sqrt[3]{18} - 2\sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{18}$

1h) $\sqrt[4]{243} - \sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{3^4 \times 3} - \sqrt[4]{2^4 \times 3} = 3\sqrt[4]{3} - 2\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{3}$

1i) $(\sqrt[5]{27})^2 = \sqrt[5]{27^2} = \sqrt[5]{(3^3)^2} = \sqrt[5]{3^{3 \times 2}} = \sqrt[5]{3^6} = \sqrt[5]{3^5 \times 3} = 3\sqrt[5]{3}$

1j) $(\sqrt[6]{8})^5 = \sqrt[6]{8^5} = \sqrt[6]{(2^3)^5} = \sqrt[6]{2^{3 \times 5}} = \sqrt[6]{2^{15}} = \sqrt[6]{2^6 \times 2^6 \times 2^3} = 2 \times 2\sqrt[6]{2^3} = 4\sqrt[6]{8}$

1k) $(\sqrt[3]{25})^2 = \sqrt[3]{25^2} = \sqrt[3]{(5^2)^2} = \sqrt[3]{5^4} = \sqrt[3]{5^3 \times 5} = 5\sqrt[3]{5}$

1l) $(\sqrt[4]{27})^3 = \sqrt[4]{27^3} = \sqrt[4]{(3^3)^3} = \sqrt[4]{3^9} = \sqrt[4]{3^4 \times 3^4 \times 3} = 3 \times 3\sqrt[4]{3} = 9\sqrt[4]{3}$

場合によっては、左記の b) のように、被開平数における底へのべき指数の分配、もしくは、素数への分解もまた便利に用いることができます。

$$\sqrt[4]{2^4 \times 2^4 \times 2} = \sqrt[4]{(2 \times 2)^4 \times 2} = \sqrt[4]{4^4 \times 2} = 4\sqrt[4]{2}$$

2a) $(1 + \sqrt{3})^3 = 1^3 + 3(1)^2(\sqrt{3}) + 3(1)(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^3 = 1 + 3\sqrt{3} + 3(3) + \sqrt{3^3} = 1 + 3\sqrt{3} + 9 + \sqrt{3^2 \times 3}$
$= 1 + 3\sqrt{3} + 9 + 3\sqrt{3} = 10 + 6\sqrt{3}$

よって、　$1 + \sqrt{3} = \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}.$

2b) $(-1 + \sqrt{3})^3 = (-1)^3 + 3(-1)^2(\sqrt{3}) + 3(-1)(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^3 = -1 + 3\sqrt{3} - 9 + 3\sqrt{3} = -10 + 6\sqrt{3}$

よって、　$-1 + \sqrt{3} = \sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}}.$

2c) $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} - \sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3} - (-1 + \sqrt{3}) = 1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 2$

したがって、　$\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} - \sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}} = 2.$

レッスン 1

1.8 有理数の指数

導入問題

1. 次の式を簡約化し、その答を累乗で表してください。

a) $\sqrt{2^6}$　　b) $\sqrt[3]{2^{12}}$

2. $\sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2^2}$ であることを示してください。

すべての正の実数 a について以下であることを復習しよう。
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ y $\sqrt[n]{a^n} = a$.

解法

1. a) $\sqrt{2^6} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2^2}$

$= 2 \times 2 \times 2$

$= 2^3$.

したがって、 $\sqrt{2^6} = 2^3$.

$3 = \frac{6}{2}$ → 指数 / 根指数 ということが分かります。

b) $\sqrt[3]{2^{12}} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3}$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 2^4$.

したがって、 $\sqrt[3]{2^{12}} = 2^4$ となります。

$4 = \frac{12}{3}$ → 指数 / 根指数 ということが分かります。

2. $\sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{\sqrt{2^4}}$

$= \sqrt[3]{\sqrt{(2^2)^2}}$

$= \sqrt[3]{2^2}$

n乗根の性質によって、
累乗の性質を適用するには、
$\sqrt[n]{a^n} = a$ であることを用います。

したがって、 $\sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2^2}$. $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ → 指数 / 根指数 であることが分かります。

定義

a は正の実数で、m と n は整数、n は正の数ならば、次のように定義されます。

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

有理数の指数を持つ累乗 $\frac{m}{n}$ は、m 乗のn乗根です。

さらに、r が正の整数ならば、$\sqrt[nr]{a^{mr}} = \sqrt[n]{a^m}$ となり、その結果、有理数の指数の簡約化は、すべての$a > 0$に対して有効となります。

$$a^{\frac{mr}{nr}} = a^{\frac{m}{n}}$$

問題

1.以下の累乗根を分数の指数を用いた累乗で書き、可能なら簡約化しなさい。

a) $\sqrt{2}$　　b) $\sqrt{3^3}$　　c) $\sqrt[3]{2}$　　d) $\sqrt[3]{3^2}$

e) $\sqrt[4]{5^2}$　　f) $\sqrt[5]{2^{10}}$　　g) $\sqrt[3]{6^3}$　　h) $\sqrt[6]{5^2}$

2.以下の分数の累乗を累乗が 1 つの累乗根で書きなさい。

a) $5^{\frac{1}{2}}$　　b) $3^{\frac{3}{2}}$　　c) $2^{\frac{3}{2}}$　　d) $7^{\frac{1}{8}}$

e) $12^{\frac{3}{7}}$　　f) $11^{\frac{7}{3}}$　　g) $9^{\frac{3}{7}}$　　h) $10^{\frac{1}{4}}$

達成の目安

1.8　有理数のべき指数をある数のn乗根を表すために使い、また、逆も同様に行いなさい。

学習の流れ

この授業では、指数を使うことで可能となる整数から有理数までの数の拡大を、実数のn乗根と言った有理数の指数の定義を用いて行います。

ねらい

「導入問題」では 2つの状況を想定しています。第 1 はべき指数は分数である可能性があると推論させるため、第2は、べき指数の簡素化ができる場合の実例を挙げるためですが、その結果、「解法」で提起された手順に注目するのは理にかなったことです。

解答：

1a) $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

1b) $\sqrt{3^3} = 3^{\frac{3}{2}}$

1c) $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$

1d) $\sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}}$

1e) $\sqrt[4]{5^2} = 5^{\frac{2}{4}} = 5^{\frac{1}{2}}$

1f) $\sqrt[5]{2^{10}} = 2^{\frac{10}{5}} = 2^2$

1g) $\sqrt[5]{6^3} = 6^{\frac{3}{5}}$

1h) $\sqrt[6]{5^2} = 5^{\frac{2}{6}} = 5^{\frac{1}{3}}$

2a) $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

2b) $3^{\frac{5}{2}} = \sqrt{3^5} = 9\sqrt{3}$

2c) $2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5} = 4\sqrt{2}$

2d) $7^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{7^3}$

2e) $12^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{12^3}$

2f) $11^{\frac{7}{2}} = \sqrt{11^7} = 11^3\sqrt{11}$

2g) $9^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{9^5} = 27\sqrt{3}$

2h) $10^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{10}$

1.9 有理数の指数の性質

導入問題

以下の演算をし、答えを有理数の指数の累乗で表しなさい。

a) $2^{\frac{5}{4}} \times 2^{\frac{3}{4}}$　　b) $3^{\frac{10}{3}} \div 3^{\frac{1}{3}}$　　c) $(8^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$　　d) $3^{\frac{2}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}}$　　e) $32^{\frac{3}{4}} \div 2^{\frac{3}{4}}$

解法

a) $2^{\frac{5}{4}} \times 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^5} \times \sqrt[4]{2^3}$　　累乗根で表し、

$= \sqrt[4]{2^5 \times 2^3}$

$= \sqrt[4]{2^8}$

$= 2^{\frac{8}{4}}$

$= 2^2.$

したがって、$2^{\frac{5}{4}} \times 2^{\frac{3}{4}} = 2^2$ となります。$2^{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}} = 2^2$ であることが示されます。

b) $3^{\frac{10}{3}} \div 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3^{10}} \div \sqrt[3]{3^1}$　　累乗根で表し、

$= \sqrt[3]{3^{10} \div 3^1}$

$= \sqrt[3]{3^9}$

$= 3^{\frac{9}{3}}$

$= 3^3.$

したがって、$3^{\frac{10}{3}} \div 3^{\frac{1}{3}} = 3^3$ となります。$3^{\frac{10}{3}-\frac{1}{3}} = 3^3$ であることが示されます。

c) $(8^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = (\sqrt[3]{8^2})^{\frac{1}{2}}$　　立方根で表され、

$= \sqrt{\sqrt[3]{8^2}}$　　平方根で表され、

$= \sqrt[6]{8^2}$

$= 8^{\frac{2}{6}}$

$= 8^{\frac{1}{3}}.$

したがって、$(8^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{3}}$ となります。$8^{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{3}}$ であることが示されます。

d) $3^{\frac{2}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} \times \sqrt[3]{9^2}$　　累乗根で表し、

$= \sqrt[3]{3^2 \times 9^2}$

$= \sqrt[3]{(3 \times 9)^2}$

$= \sqrt[3]{27^2}$

$= 27^{\frac{2}{3}}.$

したがって、$3^{\frac{2}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}} = 27^{\frac{2}{3}}$.

$(3 \times 9)^{\frac{2}{3}} = 27^{\frac{2}{3}}$ であることが示されます。

e) $32^{\frac{3}{4}} \div 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{32^3} \div \sqrt[4]{2^3}$　　累乗根で表し、

$= \sqrt[4]{32^3 \div 2^3}$

$= \sqrt[4]{(32 \div 2)^3}$

$= \sqrt[4]{16^3}$

$= 16^{\frac{3}{4}}.$

したがって、$32^{\frac{3}{4}} \div 2^{\frac{3}{4}} = 16^{\frac{3}{4}}$ となります。$(32 \div 2)^{\frac{3}{4}} = 16^{\frac{3}{4}}$ であることが示されます。

まとめ

1. 指数が整数の場合の性質はまた指数が有理数の場合にも応用されます。a と b が、正の実数ならば、m と n は有理数であり、よって、

a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$　　b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$　　c) $(a^m)^n = a^{m \times n}$　　d) $a^m \times b^m = (a \times b)^m$　　e) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

2. 有理数の累乗を簡約化するためには、底が最小値であることを確認する必要があります。

例

以下の「導入問題 」の c)、d) 、e) の答えを簡約化しなさい。

c) $8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{\cancel{3} \cdot 1}{\cancel{3}}} = 2$　　d) $27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{\cancel{3} \cdot 2}{\cancel{3}}} = 3^2$　　e) $16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{\cancel{4} \cdot 3}{\cancel{4}}} = 2^3$

問題

以下の演算を行い、その解答を簡約化しなさい。

a) $2^{\frac{7}{5}} \times 2^{\frac{8}{5}}$　　b) $9^{\frac{1}{5}} \times 9^{\frac{3}{10}}$　　c) $25 \div 25^{\frac{1}{2}}$　　d) $27^{\frac{2}{3}} \div 27$

e) $(9^{\frac{9}{7}})^{\frac{7}{6}}$　　f) $(8^{\frac{10}{9}})^{\frac{3}{2}}$　　g) $16^{\frac{3}{2}} \times 4^{\frac{3}{4}}$　　h) $98^{\frac{1}{2}} \div 2^{\frac{1}{2}}$

ユニット 4

105

達成の目安

1.9 指数の性質を、有理数と整数の指数を組み合わせて、適用しなさい。

学習の流れ

指数が有理数である累乗同士の演算は、整数の指数同士で行うのと同じように行いますが、この方法が後に、根指数の異なる累乗根同士の演算を可能にすることになります。それに加え、簡約化するには、累乗が最小値の底を有しているかどうかを見直す必要があります。

ねらい

「導入問題」の「解法」では、有理数の指数の定義を使う必要があります。「解法」の a) から e) でなされた各解説は、より少ないステップで、定義をあえて使うことなく、演算が可能となるような性質の有用性を示すためです。

解答：

a) $2^{\frac{7}{5}} \times 2^{\frac{8}{5}} = 2^{\frac{7}{5}+\frac{8}{5}} = 2^{\frac{15}{5}} = 2^3$

b) $9^{\frac{1}{5}} \times 9^{\frac{3}{10}} = 9^{\frac{1}{5}+\frac{3}{10}} = 9^{\frac{2}{10}+\frac{3}{10}} = 9^{\frac{5}{10}} = 9^{\frac{1}{2}} = (3^2)^{\frac{1}{2}} = 3^{2\times\frac{1}{2}} = 3$

c) $25 \div 25^{\frac{1}{2}} = 25^{1-\frac{1}{2}} = 25^{\frac{2}{2}-\frac{1}{2}} = 25^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5^{2\times\frac{1}{2}} = 5$

d) $27^{\frac{5}{3}} \div 27 = 27^{\frac{5}{3}-1} = 27^{\frac{5}{3}-\frac{3}{3}} = 27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^{3\times\frac{2}{3}} = 3^2$

e) $\left(9^{\frac{9}{7}}\right)^{\frac{7}{6}} = 9^{\frac{9}{7}\times\frac{7}{6}} = 9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^{2\times\frac{3}{2}} = 3^3$

f) $\left(8^{\frac{10}{9}}\right)^{\frac{3}{2}} = 8^{\frac{10}{9}\times\frac{3}{2}} = 8^{\frac{5}{3}} = (2^3)^{\frac{5}{3}} = 2^{3\times\frac{5}{3}} = 2^5$

g) 方法 *1*： $16^{\frac{5}{6}} \times 4^{\frac{5}{6}} = (16\times 4)^{\frac{5}{6}} = (2^4\times 2^2)^{\frac{5}{6}} = (2^6)^{\frac{5}{6}} = 2^{6\times\frac{5}{6}} = 2^5$

方法 *2*： $16^{\frac{5}{6}} \times 4^{\frac{5}{6}} = (2^4)^{\frac{5}{6}} \times (2^2)^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{20}{6}} \times 2^{\frac{10}{6}} = 2^{\frac{30}{6}} = 2^5$

h) $98^{\frac{1}{2}} \div 2^{\frac{1}{2}} = (98\div 2)^{\frac{1}{2}} = (49)^{\frac{1}{2}} = (7^2)^{\frac{1}{2}} = 7^{2\times\frac{1}{2}} = 7$

演算を行う前に、最小値の底を持つ累乗へと書き直すこともできます。

レッスン 1

1.10 異なる根指数を持つ累乗根の演算

導入問題

以下の演算をしなさい。

a) $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3}$　　b) $\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[12]{9}$

解法

それぞれの累乗根を有理数のべき指数で表します。

a) $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3}$

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3} &= 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}} \\ &= 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} \\ &= 3^{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}} \\ &= 3^{1} \\ &= 3.\end{aligned}$$

したがって、　$\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3} = 3$　となります。

b) $\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[12]{9}$

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[12]{9} &= 9^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{1}{3}} \div 9^{\frac{1}{12}} \\ &= 9^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}} \\ &= 9^{\frac{3}{12}+\frac{4}{12}-\frac{1}{12}} \\ &= 9^{\frac{6}{12}} \\ &= 9^{\frac{1}{2}} \\ &= (3^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{簡約化して} \\ &= 3.\end{aligned}$$

したがって、　$\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[12]{9} = 3$　となります。

まとめ

異なる根指数を持つ累乗根を計算するためには、次のステップを実行します。
1. それぞれの累乗根は、有理数のべき指数の累乗で表されます。
2. 演算は、有理数のべき指数の性質を用いて行われます。
3. 結果を簡約化します。

例

以下の演算を行いなさい。

a) $\sqrt{32} \times \sqrt[3]{4} \div \sqrt[6]{2}$

$$\begin{aligned}\sqrt{32} \times \sqrt[3]{4} \div \sqrt[6]{2} &= \sqrt{2^5} \times \sqrt[3]{2^2} \div \sqrt[6]{2} \\ &= 2^{\frac{5}{2}} \times 2^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{6}} \\ &= 2^{\frac{5}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} \\ &= 2^{\frac{15}{6}+\frac{4}{6}-\frac{1}{6}} \\ &= 2^{\frac{18}{6}} \\ &= 2^3 \\ &= 8.\end{aligned}$$

したがって、　$\sqrt{32} \times \sqrt[3]{4} \div \sqrt[6]{2} = 8$　となります。

b) $\sqrt{3} \times \sqrt[6]{3}$

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \times \sqrt[6]{3} &= 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{6}} \\ &= 3^{\frac{3}{6}+\frac{1}{6}} \\ &= 3^{\frac{4}{6}} \\ &= 3^{\frac{2}{3}} \qquad \text{簡約化ができず、} \\ &= \sqrt[3]{3^2} \qquad \text{累乗根で表し、} \\ &= \sqrt[3]{9}.\end{aligned}$$

したがって、　$\sqrt{3} \times \sqrt[6]{3} = \sqrt[3]{9}$　となります。

問題

以下の演算を行い、その解答を簡約化しなさい。

a) $\sqrt{8} \times \sqrt[4]{8} \div \sqrt[12]{8}$　　b) $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3}$　　c) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3}$

d) $\sqrt[4]{4} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[12]{32}$　　e) $\sqrt{243} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[6]{3}$　　f) $\sqrt[4]{25} \div \sqrt[6]{5}$

達成の目安

1.10 有理数のべき指数の性質を、異なる根指数を持つ累乗根の演算を行うために応用しなさい。

学習の流れ

有理数の累乗の有用性については、この授業で、異なる根指数を持つ累乗根間の演算を行う際に説明します。

ねらい

演算はn乗根を使って示されるので、よって、「例」の b) で示したように、解は累乗根 1 つで表されます。

解答：

a) $\sqrt{8} \times \sqrt[4]{8} \div \sqrt[12]{8} = 8^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{1}{4}} \div 8^{\frac{1}{12}} = 8^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}} = 8^{\frac{6}{12}+\frac{3}{12}-\frac{1}{12}} = 8^{\frac{8}{12}} = 8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3\times\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$

b) $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}} = 3^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{3^5}$

c) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3} = 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 3^{\frac{2}{6}+\frac{1}{6}} = 3^{\frac{3}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

d) $\sqrt[4]{4} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[12]{32} = 4^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 32^{\frac{1}{12}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times (2^5)^{\frac{1}{12}} = 2^{\frac{2}{4}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{5}{12}} = 2^{\frac{2}{4}+\frac{1}{3}+\frac{5}{12}} = 2^{\frac{6}{12}+\frac{4}{12}+\frac{5}{12}} = 2^{\frac{15}{12}} = 2^{\frac{5}{4}}$

$= \sqrt[4]{2^5} = \sqrt[4]{2^4 \times 2} = 2\sqrt[4]{2}$

e) $\sqrt{243} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[6]{3} = 243^{\frac{1}{2}} \times 9^{\frac{1}{3}} \div 3^{\frac{1}{6}} = (3^5)^{\frac{1}{2}} \times (3^2)^{\frac{1}{3}} \div 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{5}{2}} \times 3^{\frac{2}{3}} \div 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{5}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = 3^{\frac{15}{6}+\frac{4}{6}-\frac{1}{6}} = 3^{\frac{18}{6}} = 3^3 = 27$

f) $\sqrt[4]{25} \div \sqrt[6]{5} = 25^{\frac{1}{4}} \div 5^{\frac{1}{6}} = (5^2)^{\frac{1}{4}} \div 5^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{2}{4}} \div 5^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{2}} \div 5^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{3}{6}-\frac{1}{6}} = 5^{\frac{2}{6}} = 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$

被開平数に2より大きなべき指数を持つ累乗がある場合、上記の b) のように、その累乗を計算せずに、そのまま表すことができます。

d) の場合もまた、仮分数を整数プラス真分数で表すことで、簡約化を行うことができます。

$$2^{\frac{5}{4}} = 2^{1+\frac{1}{4}} = 2 \times 2^{\frac{1}{4}} = 2\sqrt[4]{2}.$$

また、指数12を持つ同値の分数で書き直さなければならないため、$2^{\frac{2}{4}}$ のべき指数の簡約化は必要ありません。

1.11 復習問題

1. 以下の演算を実行し、結果を正の指数の累乗を用いて表しなさい。

a) $5^6 \times 5^5$　b) $(-4) \times (-4)^2$　c) $2^6 \times 2^{-3}$　d) $3^{-7} \times 3^7$

e) $(-6)^{-1} \times (-6)^{-2}$　f) $3^9 \div 3^6$　g) $2 \div 2^4$　h) $(-5)^2 \div (-5)^{-3}$

i) $4^{-5} \div 4^3$　j) $(-2)^{-3} \div (-2)^{-2}$　k) $(4^2)^3$　l) $[(-3)^2]^{-3}$

m) $(2^{-4})^3$　n) $(6^{-1})^{-1}$　o) $(5^{-2})^{-2}$　p) $[(-2)^{-3}]^{-5}$

2. 以下の演習を行い、結果を正の指数の累乗を用いて表しなさい。

a) $3^4 \times 5^4$　b) $2^{-6} \times 3^{-6}$　c) $(-4)^2 \times 8^2$　d) $(-6)^{-3} \times (-5)^{-3}$

e) $9^5 \div 3^5$　f) $16^{-2} \div (-2)^{-2}$　g) $(-35)^7 \div 5^7$　h) $(-18)^{-4} \div (-3)^{-4}$

3. 以下の演算を行い、その答えを簡約化しなさい。

a) $\sqrt[3]{12} \times \sqrt[3]{24}$　b) $\sqrt[3]{-20} \times \sqrt[3]{25}$　c) $\sqrt[3]{48} \div \sqrt[3]{6}$　d) $\sqrt[3]{80} \div \sqrt[3]{-5}$

e) $\sqrt{\sqrt{324}}$　f) $\sqrt[3]{56} + \sqrt[3]{189}$　g) $\sqrt[4]{64} - \sqrt[4]{4}$　h) $(\sqrt[3]{24})^2$

4. 以下の累乗根を簡約化しなさい。

それぞれの累乗根を有理数の累乗で書きなさい。

a) $\sqrt[4]{4}$　b) $\sqrt[6]{9}$　c) $\sqrt[6]{27}$　d) $\sqrt[8]{16}$

5. 以下の演習を行い、その答を同じ数式の展開へと簡約化しなさい。

a) $\sqrt[6]{9} \times \sqrt[4]{9}$　b) $\sqrt{8} \times \sqrt[8]{8} \times \sqrt[4]{2}$　c) $\sqrt{27} \div \sqrt[3]{3}$　d) $\sqrt[6]{8} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[4]{2}$

6. 以下の演算を行いなさい。

a) $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9})$　b) $(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9})$

無理数のべき指数

ルート 2（2のルート記号付き）は、無理数で、その結果、その値は近似値にしかなりません。 $\sqrt{2} = 1.414213...$

次の有理数の数列を考えなさい。
$3^1 = 3$,　$3^{1.4} = 4.655536...$,　$3^{1.41} = 4.706965...$,　$3^{1.414} = 4.727695...$,　$3^{1.4142} = 4.728733...$

この数列は、実数の4.728804...に近似します。
この数列のべき指数は、$\sqrt{2}$ の値に近似します。すなわち、この数列は、$3^{\sqrt{2}}$ の値に近似すると言えます。

このような形で、x が無理数で $a > 0$ ならば、前述の手順にしたがって累乗 a^x を定義することが可能です。

したがって、累乗 a^x はすべての実数 x と $a > 0$ に対し定義されます。これまで見てきた性質は、実数の指数すべてに対して一般化できます。a と b が正の実数ならば、r と s は実数となります。

a) $a^r \times a^s = a^{r+s}$　b) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$　c) $(a^r)^s = a^{r \times s}$　d) $a^r \times b^r = (a \times b)^r$　e) $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

ユニット 4

達成の目安

1.11 問題を累乗と n 乗根を用いて解きなさい。

解答：

1a) $5^6 \times 5^5 = 5^{6+5} = 5^{11}$

1b) $(-4) \times (-4)^2 = (-4)^{1+2} = (-4)^3 = -4^3$

1c) $2^6 \times 2^{-3} = 2^{6+(-3)} = 2^{6-3} = 2^3$

1d) $3^{-7} \times 3^7 = 3^{-7+7} = 3^0 = 1$

1e) $(-6)^{-1} \times (-6)^{-2} = (-6)^{-1+(-2)} = (-6)^{-3} = \frac{1}{(-6)^3} = -\frac{1}{6^3}$

1f) $3^9 \div 3^6 = 3^{9-6} = 3^3$

1g) $2 \div 2^4 = 2^{1-4} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

1h) $(-5)^2 \div (-5)^{-3} = (-5)^{2-(-3)} = (-5)^{2+3} = (-5)^5 = -5^5$

1i) $4^{-5} \div 4^3 = 4^{-5-3} = 4^{-8} = \frac{1}{4^8}$

1j) $(-2)^{-3} \div (-2)^{-2} = (-2)^{-3-(-2)} = (-2)^{-3+2} = (-2)^{-1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

1k) $(4^2)^3 = 4^{2\times 3} = 4^6$

1l) $[(-3)^2]^{-3} = (-3)^{2\times(-3)} = (-3)^{-6} = \frac{1}{(-3)^6} = \frac{1}{3^6}$

1m) $(2^{-4})^3 = 2^{-4\times 3} = 2^{-12} = \frac{1}{2^{12}}$

1n) $(6^{-1})^{-1} = 6^{(-1)\times(-1)} = 6$

1o) $(5^{-2})^{-2} = 5^{-2\times(-2)} = 5^4$

1p) $((-2)^{-3})^{-5} = (-2)^{-3\times(-5)} = (-2)^{15} = -2^{15}$

2a) $3^4 \times 5^4 = (3 \times 5)^4 = 15^4$

2b) $2^{-6} \times 3^{-6} = (2 \times 3)^{-6} = 6^{-6} = \frac{1}{6^6}$

2c) $(-4)^2 \times 8^2 = (-4 \times 8)^2 = (-32)^2 = 32^2$

2d) $(-6)^{-3} \times (-5)^{-3} = (-6 \times (-5))^{-3} = 30^{-3} = \frac{1}{30^3}$

2e) $9^5 \div 3^5 = (9 \div 3)^5 = 3^5$

2f) $16^{-2} \div (-2)^{-2} = (16 \div (-2))^{-2} = (-8)^{-2} = \frac{1}{(-8)^2} = \frac{1}{8^2}$

2g) $(-35)^7 \div 5^7 = (-35 \div 5)^7 = (-7)^7 = -7^7$

2h) $(-18)^{-4} \div (-3)^{-4} = (-18 \div (-3))^{-4} = 6^{-4} = \frac{1}{6^4}$

3a) $\sqrt[5]{12} \times \sqrt[5]{24} = \sqrt[5]{12 \times 24} = \sqrt[5]{2^5 \times 3^2} = 2\sqrt[5]{3^2} = 2\sqrt[5]{9}$

3b) $\sqrt[3]{-20} \times \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{-20 \times 25} = \sqrt[3]{-2^2 \times 5^3} = -5\sqrt[3]{4}$

3c) $\sqrt[3]{48} \div \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{48 \div 6} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

3d) $\sqrt[3]{80} \div \sqrt[3]{-5} = \sqrt[3]{80 \div (-5)} = \sqrt[3]{-16} = -\sqrt[3]{2^3 \times 2} = -2\sqrt[3]{2}$

3e) $\sqrt{\sqrt{324}} = \sqrt{\sqrt{2^2 \times 3^2 \times 3^2}} = \sqrt{2 \times 3 \times 3} = \sqrt{2 \times 3^2} = 3\sqrt{2}$

3f) $\sqrt[3]{56} + \sqrt[3]{189} = \sqrt[3]{2^3 \times 7} + \sqrt[3]{3^3 \times 7} = 2\sqrt[3]{7} + 3\sqrt[3]{7} = 5\sqrt[3]{7}$

3g) $\sqrt[4]{64} - \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^4 \times 2^2} - \sqrt[4]{2^2} = 2\sqrt[4]{4} - \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2}$
$= 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

3h) $(\sqrt[3]{24})^2 = \sqrt[3]{24^2} = \sqrt[3]{(2^3 \times 3)^2} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 3^2} = 4\sqrt[3]{9}$

4a) $\sqrt[4]{4} = 4^{\frac{1}{4}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

4b) $\sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{3}$

4c) $\sqrt[6]{27} = \sqrt{3}$

4d) $\sqrt[6]{16} = \sqrt[3]{4}$

5a) $\sqrt[6]{9} \times \sqrt[4]{9} = 9^{\frac{1}{6}} \times 9^{\frac{1}{4}} = 9^{\frac{5}{12}}$
$= 3^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{3^5}$

5b) $\sqrt{8} \times \sqrt[8]{8} \times \sqrt[8]{2} = 4$

5c) $\sqrt{27} \div \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[6]{3}$

5d) $\sqrt[6]{8} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[6]{2} = 2\sqrt[3]{2}$

6a) $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}) = \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9}$
$= \sqrt[3]{8} - \cancel{\sqrt[3]{12}} + \cancel{\sqrt[3]{18}} + \cancel{\sqrt[3]{12}} - \cancel{\sqrt[3]{18}} + \sqrt[3]{27}$
$= \sqrt[3]{2^3} + \sqrt[3]{3^3} = 2 + 3 = 5$

6b) $(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}) = -1$

追加情報欄で示された無理数の指数の定義は、いかなる実数の指数も使用できる可能性を満たすもので、したがって、指数関数は 1つの実関数で定義することが可能です。

2.1 指数関数の定義

導入問題

以下の a) と b) のそれぞれについて、与えられた関数の表とグラフを完成させなさい。

a) $f(x) = 2^x$　　b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	−2	−1	0	1	2
y					

解法

a) $f(x) = 2^x$

$x = -2$ ならば $f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$ となります。

$x = -1$ ならば $f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ となります。

$x = 0$ ならば $f(0) = 2^0 = 1$ となります。

$x = 1$ならば $f(1) = 2^1 = 2$ となります。

$x = 2$ ならば $f(2) = 2^2 = 4$ となります。

x	−2	−1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$x = -2$ ならば $f(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = (2^{-1})^{-2} = 2^2 = 4$ となります。

$x = -1$ ならば $f(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = (2^{-1})^{-1} = 2^1 = 2$ となります。

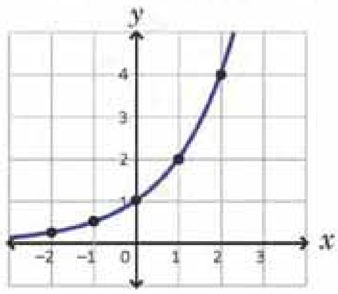
$x = 0$ ならば $f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ となります。

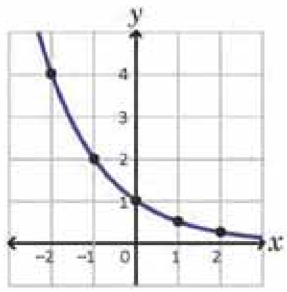
$x = 1$ ならば $f(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$ となります。

$x = 2$ ならば $f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ となります。

x	−2	−1	0	1	2
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

それぞれの場合、得られた複数の点上をなぞる曲線となります。





定義

a は実数で、1以外でなくてはならなりません。関数 f ：$f(x) = a^x$ で定義された $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は**指数関数**と呼ばれます。数 a を**底**と呼びます。

指数関数において、変数 x は指数にあります。

指数関数 $f(x) = a^x$ のグラフは、点 (0, 1) と (1, a) を通ります。

$0 < a < 1$ が満たされるならば、よって $f(x) = a^x$ となり、$b = \frac{1}{a} > 1$ の場合、$f(x) = b^{-x}$ の形で表せます。

例えば、　$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}$.

問題

以下の指数関数のグラフを描いてください。

a) $f(x) = 3^x$　　b) $f(x) = 3^{-x}$　　c) $f(x) = 4^x$　　d) $f(x) = 4^{-x}$

達成の目安

2.1 指数関数のグラフを、表を用い、デカルト平面上の点の位置を確認して描きなさい。

学習の流れ

先の課では、実数の指数すべてに対する累乗が定義されましたが、そのため、ここでは指数関数を定義し、デカルト平面上の各点の位置をもとにそのグラフを描くことにします。

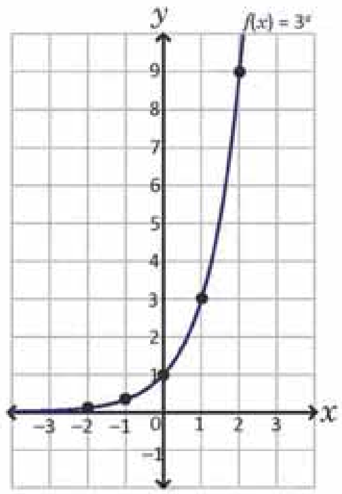
つまずきやすい点

グラフを描くときは、グラフがx軸を切ったりしてしないよう指示を出す必要があり、グラフがどうなるか確かめるため、計算機を使って値の確認することも提案できるでしょう。

解答：

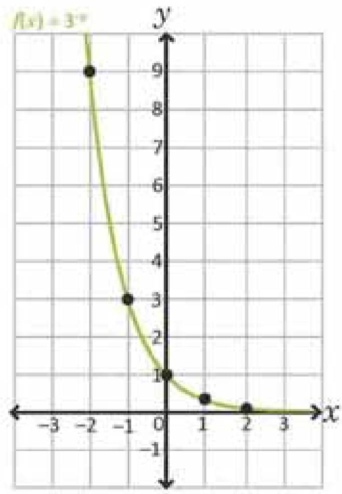
a)

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9



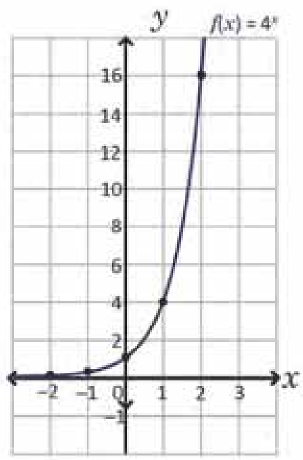
b)

x	-2	-1	0	1	2
y	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$



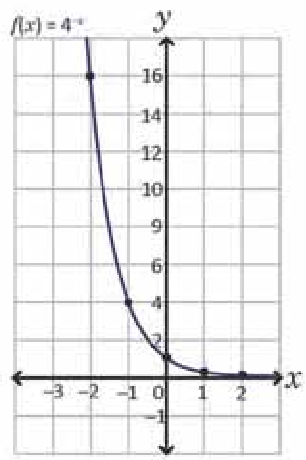
c)

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16



d)

x	-2	-1	0	1	2
y	16	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$



問題 c) と d) のグラフは縮小や拡大をして、もしくは、$y = 4$ の場合 まで描くことができます。

2.2 対称性のある指数関数

導入問題

1.以下の関数のグラフを同一のデカルト平面で描きなさい。

a) $f_1(x) = 3^x$　　b) $f_2(x) = 3^{-x}$　　c) $f_3(x) = -3^x$

2. y 軸の座標が同じである $f_1(x)$ と $f_2(x)$ のそれぞれの点の x の座標を比較しなさい。

3. x 軸の座標が同じ $f_1(x)$ と $f_3(x)$ のそれぞれの点のy の座標を比較しなさい。

解法

1. a) $f_1(x) = 3^x$

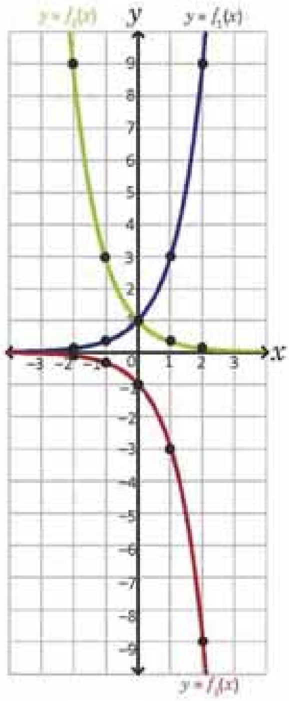
x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

b) $f_2(x) = 3^{-x}$

x	-2	-1	0	1	2
y	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

c) $f_3(x) = -3^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-3	-9



2.

$f_1(x) = 3^x$	$f_2(x) = 3^{-x}$
$\left(-2, \frac{1}{9}\right)$	$\left(2, \frac{1}{9}\right)$
$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$	$\left(1, \frac{1}{3}\right)$
$(0, 1)$	$(0, 1)$
$(1, 3)$	$(-1, 3)$
$(2, 9)$	$(-2, 9)$

$(x,$ と$)$ が f_1 のグラフ上の点ならば、よって $(-x, y)$ は f_2 のグラフ上の点となります。これらのグラフは y 軸に関して対称です。

3.

$f_1(x) = 3^x$	$f_3(x) = -3^x$
$\left(-2, \frac{1}{9}\right)$	$\left(-2, -\frac{1}{9}\right)$
$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$	$\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$
$(0, 1)$	$(0, -1)$
$(1, 3)$	$(1, -3)$
$(2, 9)$	$(2, -9)$

(x, y) が f_1 のグラフ上の点ならば、よって $(x, -y)$ は f_2のグラフ上の点となります。これらのグラフは x 軸に関して対称です。

以下のことが分かります。

- $y = 3^{-x}$ のグラフは、y 軸に関して関数 $y = 3^x$ のグラフと対称です。
- 関数 $y = 3^{-x}$ のグラフは、x 軸に関して、関数 $y = 3^x$ のグラフと対称です。

レッスン 2

まとめ

1. 関数 $y = a^x$ と $y = a^{-x}$ は y 軸に関して対称です。
   $y = a^{-x}$ のグラフを描くために、$y = a^x$ のグラフの各点のx軸の座標に関しての記号を入れ替えます。

2. 関数 $y = a^x$ と $y = -a^x$ はx軸に関して対称です。
   $y = -a^x$ のグラフを描くために、$y = a^x$ のグラフの各点のy軸の座標に関しての記号を入れ替えます。

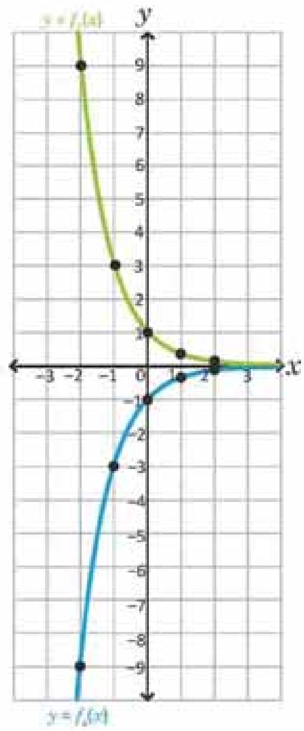
3. 関数 $y = a^{-x}$ と $y = -a^{-x}$ は x軸に関して対称です。
   $y = -a^{-x}$ のグラフを描くために、$y = a^{-x}$ のグラフの各点のy軸の座標に関しての記号を入れ替えます。

例

$f_4(x) = -3^{-x}$ をグラフで描きなさい。

$f_4(x) = -3^{-x}$ のグラフを描くために、$f_2(x) = 3^{-x}$ のグラフの各点の y 軸の座標関してのの記号を入れ替えます。

$f_2(x) = 3^{-x}$	$f_4(x) = -3^{-x}$
$\left(2, \frac{1}{9}\right)$	$\left(2, -\frac{1}{9}\right)$
$\left(1, \frac{1}{3}\right)$	$\left(1, -\frac{1}{3}\right)$
(0, 1)	(0, −1)
(−1, 3)	(−1, −3)
(−2, 9)	(−2, −9)



問題

1. 次の関数のグラフを、対称性を用いて、同じデカルト平面上に描きなさい。
   $f_1(x) = 2^x, f_2(x) = 2^{-x}, f_3(x) = -2^x$ y $f_4(x) = -2^{-x}$.

2. 関数 $f_4(x) = 3^x$ をもとに関数 $f_1(x) = -3^{-x}$ のグラフを書きなさい。

f_4 が原点について f_1 に関して対称であることを確認してください。 (a, b) が f_1 のグラフ上にあるならば、よって $(-a, -b)$ は f_4 のグラフ上にあります。

達成の目安

2.2 指数関数のグラフを座標軸と原点に関する対称性を使って描きなさい。

学習の流れ

指数関数a^xと a^{-x}のグラフの形をはっきり把握したうえで、ここでは、座標軸と原点に対する対称性を適用して得られるグラフの形を学習しますが、このことはすでに第1学年のユニット 5 で学習しています。

ねらい

「導入問題」において、生徒はいくつかの点の座標の比較を行いますが、このようにして、対称性を単にグラフ上だけでなく、その定義によってもまた視覚化することになります。

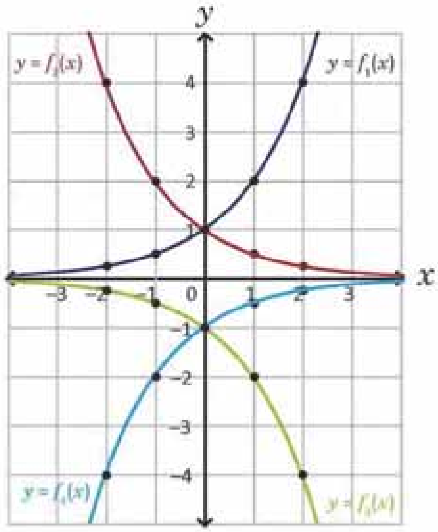
解答：

1. 第 1 象限に関して記号を入れ替えます。

第 2 象限に関して記号を入れ替えます。

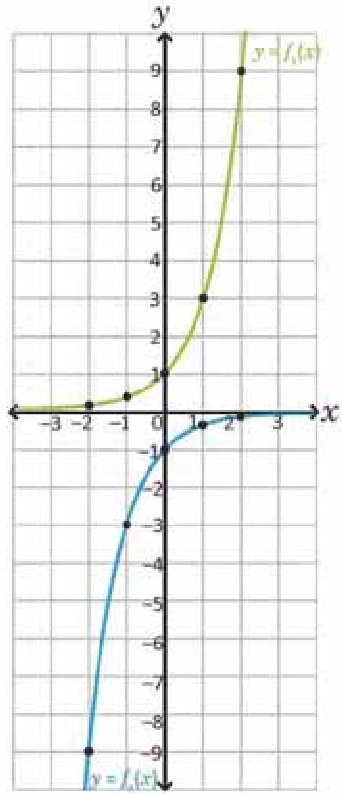
$f_1(x) = 2^x$	$f_2(x) = 2^{-x}$	$f_3(x) = -2^x$	$f_4(x) = -2^{-x}$
(2, 4)	(−2, 4)	(2, −4)	(−2, −4)
(1, 2)	(−1, 2)	(1, −2)	(−1, −2)
(0, 1)	(0, 1)	(0, −1)	(0, −1)
$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$	$\left(1, \frac{1}{2}\right)$	$\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(1, -\frac{1}{2}\right)$
$\left(-2, \frac{1}{4}\right)$	$\left(2, \frac{1}{4}\right)$	$\left(-2, -\frac{1}{4}\right)$	$\left(2, -\frac{1}{4}\right)$

第 2 象限に関して記号を入れ替えます。



2. $f_1(a) = 3^b$のグラフ上の点を (a, b) とすると、よって$(a, b) = (a, 3^a)$ となります。
$(-a, -b)$ が $f_4(x) = -3^{-x}$のグラフ上にあるかを確認します。
値を求めると、$f_4(-a) = -3^{-(-a)} = -3^a = -b$
すなわち $(-a, -b)$ は $f_4(x) = -3^{-x}$のグラフ上の点となります。

$f_2(x) = 3^x$	$f_4(x) = -3^{-x}$
(2, 9)	(−2, −9)
(1, 3)	(−1, −3)
(0, 1)	(0, −1)
$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$	$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$
$\left(-2, \frac{1}{9}\right)$	$\left(-2, \frac{1}{9}\right)$

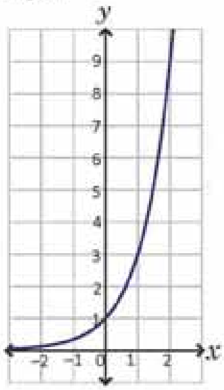


2.3 指数関数の特徴

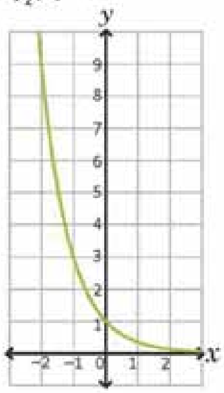
導入問題

以下の関数とそのグラフを示します。

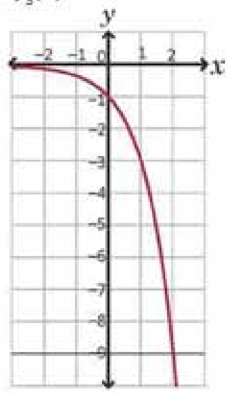
1. $f_1(x) = 3^x$



2. $f_2(x) = 3^{-x}$



3. $f_3(x) = -3^x$



各グラフに対し以下を決定しなさい。

a) 座標軸との切片
b)定義域と域値
c) 増加関数か減少関数か
d) 漸近線と関数

$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$ ならば、f は増加関数です。
$a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$ ならば、f は減少関数です。

解法

1. $f_1(x) = 3^x$

a) 座標軸との切片
y 軸：$f_1(0) = 3^0 = 1$、切片は(0, 1)
x 軸：$3^x = 0$ であるような実数値 x は存在しません。

b) 定義域と域値
$D_{f_1} = \mathbb{R}$
$R_{f_1} =]0,\infty[$

c) この関数は増加関数です。
$b < c$ ならば、よって $3^b < 3^c$

d) 漸近線と関数
$y = 0$ は、関数の水平の漸近線で 、よってf_1 のグラフは、x がその値を減少するにつれて、直線 $y = 0$ a に近似します。

2. $f_2(x) = 3^{-x}$

a) 座標軸との切片
y 軸： $f_2(0) = 3^{-0} = 3^0 = 1$、切片は(0, 1)
x 軸：$3^{-x} = 0$ であるような実数値 x は存在しません。

b) 定義域と域値
$D_{f_2} = \mathbb{R}$
$R_{f_2} =]0,\infty[$

c) この関数は減少関数です。
$b < c$ ならば、よって $3^{-b} > 3^{-c}$

d) 漸近線と関数
$y = 0$ は関数の水平な漸近線です。

3. 関数 $f_3(x) = -3^x$ と $f_1(x) = 3^x$ のグラフは x 軸に対し対称です。

	y 軸における切片(y 切片)	定義域	域値	増加もしく減少	漸近線
$f_1(x) = 3^x$	(0, 1)	$\mathbb{R}$	$]0, \infty[$	増加 $b < c$ ならば、よって $3^b < 3^c$	$y = 0$
$f_3(x) = -3^x$	(0, –1)	$\mathbb{R}$	$]-\infty, 0[$	減少 $b < c$ ならば、よって $-3^b > -3^c$	$y = 0$

レッスン 2

まとめ

次の表は $a > 1$である場合の関数 $f_1(x) = a^x$, $f_2(x) = a^{-x}$ y $f_3(x) = -a^x$ のグラフの特徴をまとめたものです。

	$f_1(x) = a^x$	$f_2(x) = a^{-x}$	$f_3(x) = -a^x$
座標軸 y における切片	$(0, 1)$	$(0, 1)$	$(0, -1)$
定義域	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
域値	$R_{f_1} =]0, +\infty[= \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$	$R_{f_2} =]0, +\infty[$	$R_{f_2} =]-\infty, 0[= \{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\}$
増加もしくは減少	増加 $b < c$ ならば、よって $a^b < a^c$	減少 $b < c$ ならば、よって $a^{-b} > a^{-c}$	減少 $b < c$ ならば、よって $-a^b > -a^c$
漸近線	$y = 0$	$y = 0$	$y = 0$

また、関数 f_1、f_2 、f_3 は x 軸との切片がないことに注目してください。

a が $a > 1$ であるような実数ならば、よって、
- 関数 $f(x) = a^x$ は、**増加の指数関数**といいます。
- 関数$f(x) = a^{-x}$ は、**減少の指数関数**といいます。

問題

1. 関数 $f(x) = a^{-x}$ の特徴をもとに、関数 $f(x) = -a^{-x}$ の特徴を表にまとめるために、x 軸に関する対称性を用いなさい。

	y 軸における切片 (y 切片)	定義域	域値	増加もしくは減少	漸近線
$f(x) = a^{-x}$	$(0, 1)$	$\mathbb{R}$	$]0, \infty[$	減少 $b < c$ ならば、よって $a^{-b} > a^{-c}$	$y = 0$
$f(x) = -a^{-x}$		$\mathbb{R}$			$y = 0$

2. 次の関数の、y 軸における切片、定義域、域値、単調性、漸近線を決定しなさい。

a) $f_1(x) = 2^x$　　b) $f_2(x) = 2^{-x}$　　c) $f_3(x) = -2^x$　　d) $f_4(x) = -2^{-x}$

3. 次の不等式を関数$y = 2^x$ のグラフを用いて解きなさい 。

a) $2^x \geq 1$　　b) $2^x < 1$

4. 関数 $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ が $[0, \infty[$ において増加であることを、以下のステップを踏んで明らかにしなさい。

a) $c \neq 0$ と $d \neq 0$ならば、よって $\left(c + \frac{1}{c}\right) - \left(d + \frac{1}{d}\right) = (c - d)\left(1 - \frac{1}{cd}\right)$ であることを明らかにしなさい。

b) a) から、$(2^b + 2^{-b}) - (2^a + 2^{-a}) = (2^b - 2^a)\left(1 - \frac{1}{2^{a+b}}\right)$ を証明しなさい。

c) b) から、$0 \leq a < b$ ならば、よって $< f(b)$ であるという結論を導きなさい。

5. 関数 $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ は $]-\infty, 0]$ において減少関数であることを明らかにしなさい。

達成の目安

2.3 定められた指数関数の特徴を決定しなさい（定義域、域値、単調性、漸近線）。

学習の流れ

関数の特徴の一部は、第1学年で学習し、グラフ化もすでに行っています。ここでは同様に、単調性、定義域、域値、漸近線といった指数関数の特徴を把握することになります。その他の特徴は定義を使って学習することになります。

ねらい

特徴の中には、直観的にその正否を判断できるものもあり、そのため、「解法」では左右対称の説明をせずに、水平の漸近線を決めていますが、実際には、計算機をつかって値を求めることができます。単調性はグラフ上で証明できます。

解答：

1. 関数 $f(x) = a^{-x}$ は、関数 $f(x) = a^{-x}$ の各点の記号を第2象限に関して入れ替えられることを使って、

y 軸における切片 $f_1(x) = a^{-x}$ において $(0, 1)$ ⇒ $f_2(x) = -a^{-x}$ において $(0, -1)$

定義域：変数 x の値なので変化しません。

域値： $R_{f_1} =]0, \infty[= \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\} \Rightarrow R_{f_2} = \{y \in \mathbb{R} \mid -y > 0\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\} =]-\infty, 0[$.

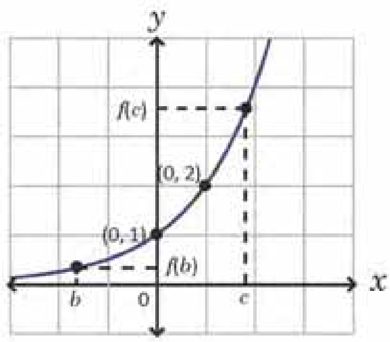
増加もしくは減少

$b < c$ ならば、よって $a^{-b} > a^{-c}$ であることが分かっており、この不等式に -1 を掛けることで、$b < c$ ならば、よって $-a^{-b} < -a^{-c}$ が、つまり $b < c$ ならば、$f_2(b) < f_2(c)$ が得られます。

	y 軸における切片	定義域	域値	増加もしくは減少	漸近線
$f_1(x) = a^{-x}$	$(0, 1)$	$\mathbb{R}$	$]0, \infty[$	減少 $b < c$ ならば、よって $a^{-b} > a^{-c}$	$y = 0$
$f_2(x) = -a^{-x}$	$(0, -1)$	$\mathbb{R}$	$]-\infty, 0[$	増加 $b < c$ ならば、よって$-a^{-b} < -a^{-c}$	$y = 0$

2a) $f_1(x) = 2^x$ の特徴はそのグラフから得られます。

y 軸における切片	定義域	域値	増加もしくは減少	漸近線
$(0, 1)$	$\mathbb{R}$	$]0, \infty[$	増加 $b < c$ ならば、よって $2^b < 2^c$	$y = 0$



2b) $f_2(x) = 2^{-x}$ の特徴は $f(x) = 2^x$ との対称性から得られます。

切片 $(0, 1)$ は x における座標はゼロなので変化しません。

定義域は $\mathbb{R}$ 、域値は： $R_{f_2} =]0, \infty[$

増加もしくは減少

$b < c$ ならば、よって$2^b < 2^c$ であることが分かっています。

$$\frac{1}{2^b 2^c}(2^b) < \frac{1}{2^b 2^c}(2^c) \text{ に、} \frac{1}{2^b 2^c} \text{ を掛けます。}$$

$$\frac{1}{2^c} < \frac{1}{2^b}$$

$$2^{-c} < 2^{-b}$$

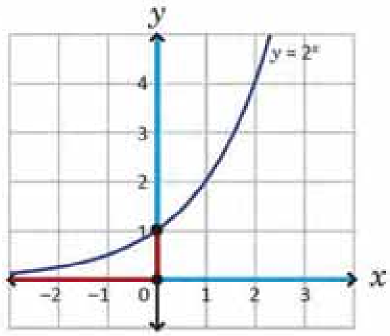
したがって、$b < c$ ならば、これは増加関数なので、よって $2^{-b} > 2^{-c}$

単調性もまた、グラフを使って分析することが可能です。

漸近線は$y = 0$を変化させません。
まとめると、b)、c) 、d) の場合、

	y 軸における切片	定義域	域値	増加もしくは減少	漸近線
$f_2(x) = 2^{-x}$	(0, 1)	$\mathbb{R}$	$]0, \infty[$	減少 $b < c$ ならば、よって $2^{-b} > 2^{-c}$	$y = 0$
$f_3(x) = -2^x$	(0, −1)	$\mathbb{R}$	$]-\infty, 0[$	減少 $b < c$ならば、よって$-2^b > -2^c$	$y = 0$
$f_4(x) = -2^{-x}$	(0, −1)	$\mathbb{R}$	$]-\infty, 0[$	増加 $b < c$ならば、よって $-2^{-b} < -2^{-c}$	$y = 0$

3.



グラフを使うと、以下になる筈です

3a) $2^x \geq 1$ よって$x \geq 0$、つまり $x \in [0, \infty[$ となります。

3b) $2^x < 1$ よって $x < 0$、つまり $x \in\ ]-\infty, 0[$ となります。

単調性を用いることもできます。
$\geq 0 \Rightarrow 2^x \geq 2^0 = 1$ で $x < 0 \Rightarrow 2^x < 2^0 = 1$ ならば、よって
$x \geq 0$ の場合に限り $2^x \geq 2^0$、また、$x < 0$ の場合に限り
$2^x < 2^0$

4a) $\left(c + \frac{1}{c}\right) - \left(d + \frac{1}{d}\right) = (c - d) + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d}\right) = (c - d) + \left(\frac{d - c}{cd}\right) = (c - d) - \left(\frac{c - d}{cd}\right) = (c - d)\left(1 - \frac{1}{cd}\right)$

4b) $c = 2^b$ と $d = 2^a$ をとると、以下になり、

$$\left(c + \frac{1}{c}\right) - \left(d + \frac{1}{d}\right) = (2^b + 2^{-b}) - (2^a + 2^{-a}) = (2^b - 2^a)\left(1 - \frac{1}{2^{a+b}}\right).$$

4c) $f(b) - f(a) = (2^b - 2^a)\left(1 - \frac{1}{2^{a+b}}\right)$

$0 \leq a < b$ であるから、よって、$2^a < 2^b$、つまり、$0 < 2^b - 2^a$　一方、$0 < a + b$ であるから、よって、

$$1 < 2^{a+b} \Rightarrow \frac{1}{2^{a+b}} < 1 \Rightarrow 0 < 1 - \frac{1}{2^{a+b}}.$$

$\Rightarrow f(b) - f(a) = (2^b - 2^a)\left(1 - \frac{1}{2^{a+b}}\right) > 0 \Rightarrow f(a) < f(b).$

5 $f(b) - f(a) = (2^b - 2^a)\left(1 - \frac{1}{2^{a+b}}\right)$

$a < b \leq 0$であるから、よって $2^a < 2^b$、つまり、$0 < 2^b - 2^a$　一方、$a + b < 0$であるから、よって、

$$2^{a+b} < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{2^{a+b}} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^{a+b}} < 0,$$

$\Rightarrow f(b) - f(a) = (2^b - 2^a)\left(1 - \frac{1}{2^{a+b}}\right) < 0 \Rightarrow f(a) > f(b)$

2.4 指数関数の水平移動と垂直移動

導入問題

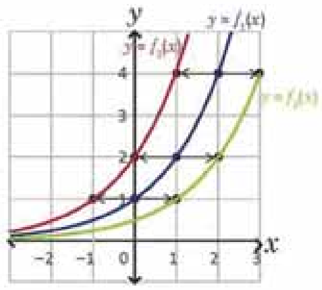
1. 以下の a) と b) それぞれの関数のグラフを同一のデカルト平面上に描きなさい。
   a) $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^{x-1}$, $f_3(x) = 2^{x+1}$　　　b) $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^x - 1$, $f_3(x) = 2^x + 1$

2. 関数 $f_1(x)$ の水平移動と平行移動で、関数 $f_2(x)$ と $f_3(x)$ のグラフを描きなさい。

解法

a) $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^{x-1}$, $f_3(x) = 2^{x+1}$

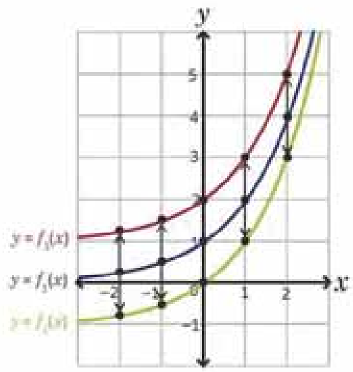
x	-2	-1	0	1	2
$f_1(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f_2(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$f_3(x)$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



関数のグラフを描く時は以下に注目しましょう。
- $f_2(x)$ のグラフは、関数 $f_1(x)$ を右へ 1 単位水平移動したものです。
- $f_3(x)$ のグラフは、関数 $f_1(x)$ を左へ 1 単位水平移動したものです。

b) $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^x - 1$, $f_3(x) = 2^x + 1$

x	-2	-1	0	1	2
$f_1(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f_2(x)$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	3
$f_3(x)$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	2	3	5



- $f_2(x)$ のグラフは、関数 $f_1(x)$ を下方に 1 単位垂直移動したものです。
- $f_3(x)$ のグラフは、関数 $f_1(x)$ を上方に 1 単位垂直移動したものです。

$f(x) = a^x + k$ は、$y = k$ の水平漸近線

まとめ

$f(x) = a^{x-h}$ のグラフは、関数 $f(x) = a^x$ を h 単位水平移動したものです。
- $h > 0$ ならば、移動は右方向へとなります。
- $h < 0$ ならば、移動は左方向へとなります。

関数 $f(x) = a^x + k$ のグラフは、関数 $f(x) = a^x$ が k 単位垂直移動したものです。
- $k > 0$ ならば、移動は上方へとなります。
- $k < 0$ ならば、移動は下方へとなります。

問題

1. $f(x) = 3^x$ のグラフをもとに、以下の関数のグラフを描きなさい。
   a) $f(x) = 3^{x-2}$　　b) $f(x) = 3^{x+1}$　　c) $f(x) = 3^x - 3$

2. $f(x) = 4^x$ のグラフをもとに、以下の関数のグラフを描きなさい。
   a) $f(x) = 4^{x-1}$　　b) $f(x) = 4^{x+2}$　　c) $f(x) = 4^x + 2$

ユニット 4

達成の目安

2.4 指数関数のグラフを水平移動と垂直移動を使って描きなさい。

学習の流れ

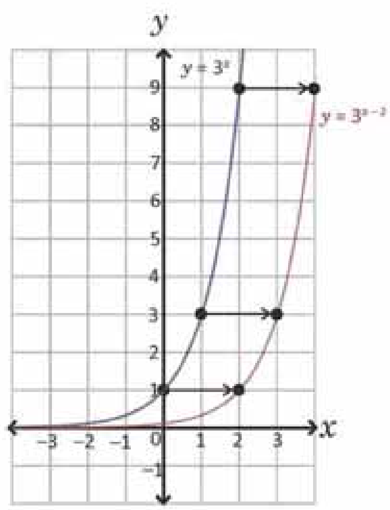
第1学年で、関数の移動をグラフで表しました。この授業では、同じ動特性を指数関数における移動を把握するにため使いますが、これはつまり、それぞれの関数を比較させ、後に移動についてしっかり理解させるためです。

ねらい

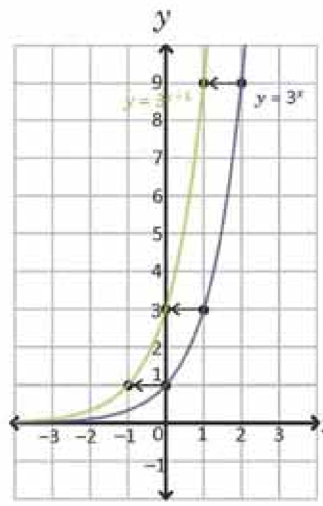
移動の概念を明確に覚えているのは一部の生徒に限られていると思われるので、「解法」を参照することで、より簡約化された関数をもとに、グラフの移動に注目することが可能となるでしょう。

解答：

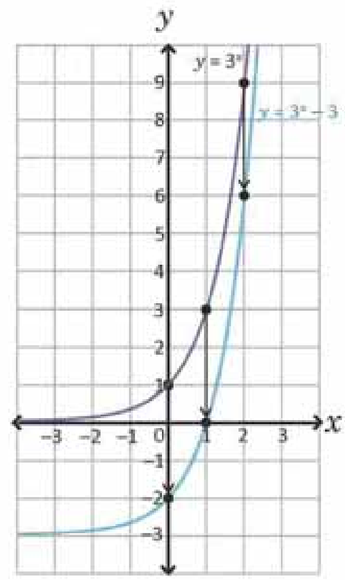
1a) $f(x) = 3^{x-2}$



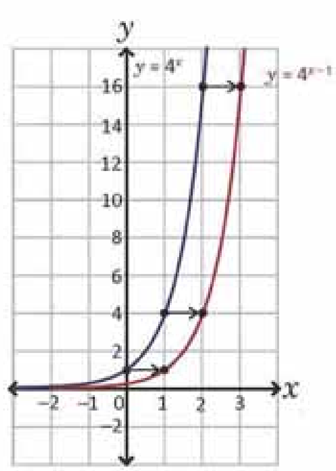
1b) $f(x) = 3^{x+1}$



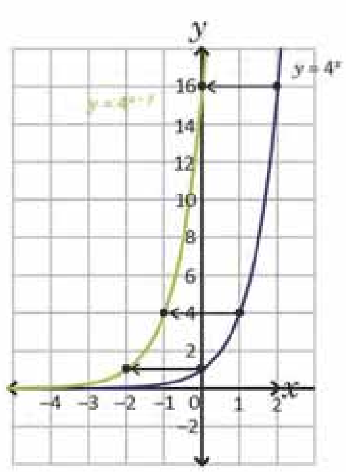
1c) $f(x) = 3^x - 3$



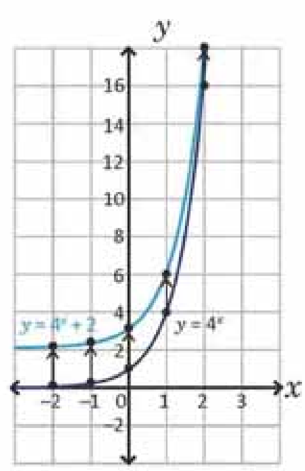
2a) $f(x) = 4^{x-1}$



2b) $f(x) = 4^{x+2}$



2c) $f(x) = 4^x + 2$



レッスン 2

対称性と移動性*を持つ指数関数のグラフ

導入問題

以下のa)、b) のそれぞれにおいて、対称性と移動性を用いて $f_1(x) = 2^x$ のグラフをもとに、$f(x)$ のグラフを描きなさい。

a) $f(x) = 2^{x-1} + 1$　　　　b) $f(x) = 2^{-(x-1)} - 1$

対称性は、累乗が負の数もしくは変数が負の記号を持っている時に適用できます。

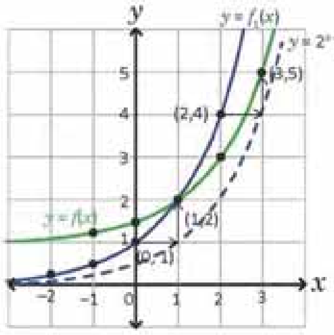
解法

a) f_1 のグラフは、2.1の授業ですでに描かれています。

f_1の右への1単位の移動で、$y = 2^{x-1}$のグラフを描きます。

y の1単位上方への移動で、$f(x) = 2^{x-1} + 1$ のグラフを描きます。

(x, y) が $f_1(x)$ の点ならば、よって点 $(x + 1, y + 1)$ は、$f(x)$ のグラフの点になります。

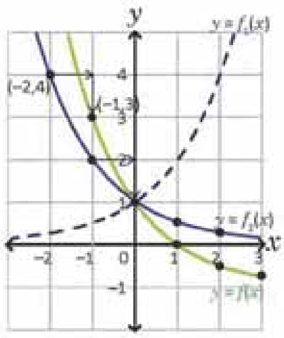


b) y 軸に対し f_1 のグラフと対称であることをもとに、$f_2(x) = 2^{-x}$ のグラフを描きます。

$f(x) = f_2(x - 1) - 1$と書くことができます。

したがって、$f(x)$ は $f_2(x)$ を右へ 1 単位、下方へ 1 単位移動したものです。

$f_2(x)$ の点を (x, y) とすると、よって、点 $(x + 1, y - 1)$ は $f(x)$ のグラフ上の点となります。

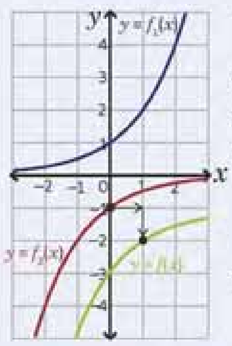


まとめ

指数関数 $f(x)$ のグラフを作成するには、次のステップを実行します。

1. $f_1(x) = a^x$ のグラフを描きます。
2. $f(x)$ の累乗と指数の記号に従って関数 $f_2(x)$ を描きます。
   - a^{-x} は、y 軸に関しての対称性が用いられ
   - $-a^x$ は、x 軸に関しての対称性が用いられ
   - $-a^{-x}$ は、x 軸に関して対称性が用いられます。
3. 移動させた $f(x) = f_2(x - h) + k$ を書くには、f_2 のグラフの点 (x, y) は、f のグラフのの点 $(x + h, y + k)$ まで移動させます。

例：$f(x) = -2^{-(x-1)} - 1$



1. $f_1(x) = 2^x$

原点について対称。

2. $f_2(x) = -2^{-x}$

移動

3. $f(x) = -2^{-(x-1)} - 1$

問題

次の関数のグラフを　対称性と移動を用いて描きなさい。

a) $f(x) = 3^{x-2} + 1$　　b) $f(x) = 4^{-x-1} - 3$　　c) $f(x) = -2^{x-1} + 2$　　d) $f(x) = -3^{-x+1} - 3$

e) $f(x) = 3^{-x+1} + 2$　　f) $f(x) = 2^{-x-2} + 1$　　g) $f(x) = -3^{x-1} - 1$　　h) $f(x) = -3^{-x-2} + 2$

達成の目安

2.5 指数関数のグラフを対称性と移動を用いて作成しなさい。

学習の流れ

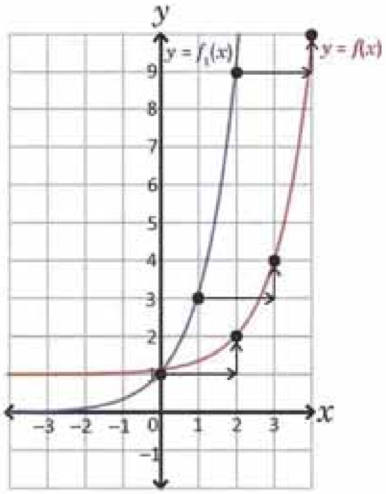
ここでは、指数関数のグラフを、対称性と移動を同時に用いて描きます。「導入問題」が難しすぎるようならば、教師が解いてみせる必要があるでしょう。

ねらい

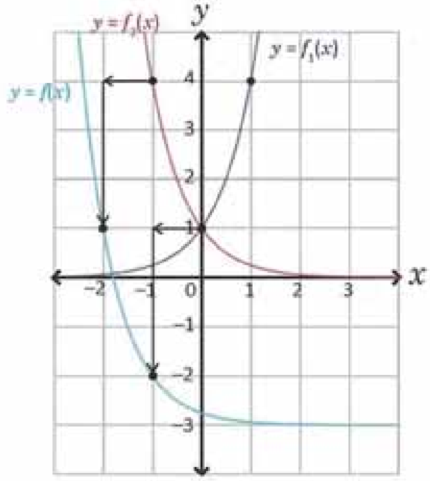
「まとめ」では、指数関数のグラフを描くうえの一般的なプロセスを確立させ、ステップ2に関しては、指数の累乗と変数に正数の記号がある場合は、使わないということを明らかにする必要があります。

解答：

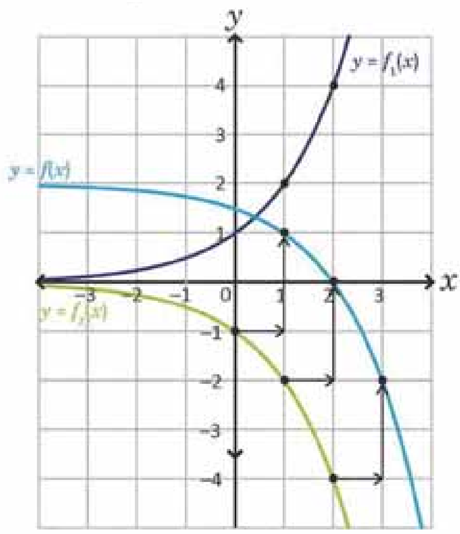
a) $f_1(x) = 3^x$
$f(x) = f_1(x-2) + 1 = 3^{x-2} + 1$



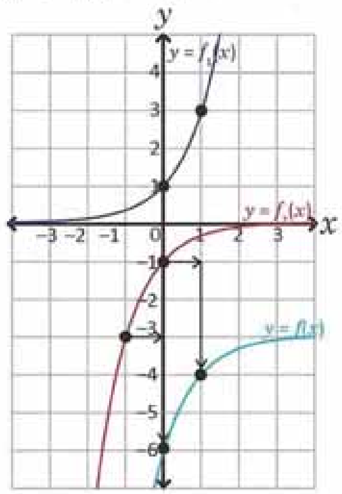
b) $f_1(x) = 4^x$; $f_2(x) = 4^{-x}$
$f(x) = f_2(x-(-1)) - 3 = 4^{-x-1} - 3$



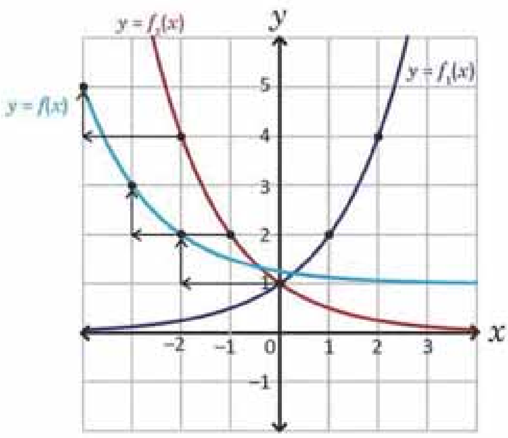
c) $f_1(x) = 2^x$; $f_2(x) = -2^x$
$f(x) = f_2(x-1) + 2 = -2^{x-1} + 2$



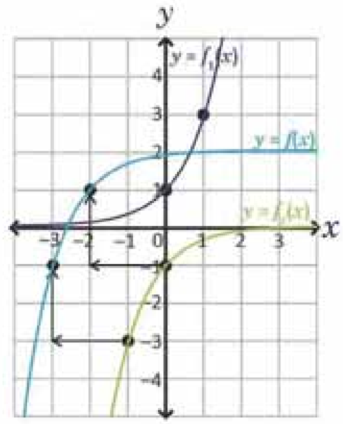
d) $f_1(x) = 3^x$; $f_2(x) = -3^{-x}$
$f(x) = f_2(x-1) - 3 = -3^{-x+1} - 3$



f) $f_1(x) = 2^x$; $f_2(x) = 2^{-x}$
$f(x) = f_2(x-(-2)) + 1 = 2^{-x-2} + 1$



h) $f_1(x) = 3^x$; $f_2(x) = -3^{-x}$
$f(x) = f_2(x-(-2)) + 2 = -3^{-x-2} + 2$



問題 e) は、スペースの都合で解法が示されていません。

レッスン 2

2.6 指数方程式

導入問題

次の各方程式の解を見つけなさい。

a) $5^x = 25$　　b) $2^x = \frac{1}{8}$　　c) $4^x = 8$　　d) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 81$

解法

a) $5^x = 25$

$25 = 5^2$と分解し、

$5^x = 5^2$と置換し、

したがって、$x = 2$

b) $2^x = \frac{1}{8}$

$8 = 2^3$と分解し、

$2^x = \frac{1}{2^3}$ と置換し、

負の指数 $2^x = 2^{-3}$を用いて、

したがって、$x = -3$

c) $4^x = 8$

$4 = 2^2$ および $8 = 2^3$と分解し、

$(2^2)^x = 2^3$と置換し、

累乗 $2^{2x} = 2^3$の特徴を適用し、

entonces $2x = 3$.

したがって、$x = \frac{3}{2}$

d) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 81$

$9 = 3^2$および $81 = 3^4$と分解し、

$\left(\frac{1}{3^2}\right)^x = 3^4$と置換し、

負の累乗を用いて書き：$(3^{-2})^x = 3^4$

累乗 の特徴を適用し：$3^{-2x} = 3^4$、

よって、$-2x = 4$

したがって、$x = -2$

定義

指数方程式とは $a > 0$ で $a \neq 1$であるa^xの形の項を持つ方程式です。
a^x con $a > 0$と$a \neq 1$.

指数方程式を解くには、以下のように計算します。

1. すべての項を、累乗の等式を得るために、同じ底で書きます。$a^r = a^s$ ⟶
2. 指数が $r = s$と等しくなるようにし、この方程式を解きます。 ⟶

例：　$27^x = \frac{1}{9}$

$27^x = (3^3)^x = 3^3$ と $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$

$3^{3x} = 3^{-2}$

$3x = -2$

したがって　$x = -\frac{2}{3}$.

問題

次の指数方程式を解きなさい。

a) $2^x = 16$　　b) $3^{-x+1} = 9^{x+2}$　　c) $5^{3x-4} = \frac{1}{25}$　　d) $2^{2x-3} = \frac{1}{4}$

e) $2^{5x+7} = \frac{1}{8}$　　f) $9^{3x+1} = 27^{-2x-2}$　　g) $8^{-x+3} = 4^{x+2}$　　h) $4^{2x-1} = \frac{1}{2}$

ユニット 4

達成の目安

2.6 指数方程式を、同じ底を持つ累乗の等式を用いて解きなさい。

学習の流れ

指数方程式を導入しますが、方程式を解くためにはその基礎として素因数分解が必要です。これらの方程式はユニット 6 の一部の問題でも取り上げられています。

ねらい

「定義」の第 2 項で示した、指数の等化は、$y = a^x$ は単調であるから、 $a \neq 1$、 $a > 0$ ならば、よって $a^b = a^c \Leftrightarrow b = c$ である、ということから来ています。

解答：

a) $2^x = 16$

$2^x = 2^4$

$x = 4$

b) $3^{-x+1} = 9^{x+2}$

$3^{-x+1} = (3^2)^{x+2}$

$3^{-x+1} = 3^{2x+4}$

$-x + 1 = 2x + 4$

$-3 = 3x$

$x = -1$

c) $5^{3x-4} = \frac{1}{25}$

$5^{3x-4} = \frac{1}{5^2}$

$5^{3x-4} = 5^{-2}$

$3x - 4 = -2$

$3x = -2 + 4$

$3x = 2$

$x = \frac{2}{3}$

d) $2^{2x-3} = \frac{1}{4}$

$2^{2x-3} = \frac{1}{2^2}$

$2^{2x-3} = 2^{-2}$

$2x - 3 = -2$

$2x = -2 + 3$

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$

e) $2^{5x+7} = \frac{1}{8}$

$2^{5x+7} = \frac{1}{2^3}$

$2^{5x+7} = 2^{-3}$

$5x + 7 = -3$

$5x = -3 - 7$

$5x = -10$

$x = -2$

f) $9^{3x+1} = 27^{-2x-2}$

$(3^2)^{3x+1} = (3^3)^{-2x-2}$

$3^{6x+2} = 3^{-6x-6}$

$6x + 2 = -6x - 6$

$12x = -8$

$x = \frac{-8}{12}$

$x = -\frac{2}{3}$

g) $8^{-x+3} = 4^{x+2}$

$(2^3)^{-x+3} = (2^2)^{x+2}$

$2^{-3x+9} = 2^{2x+4}$

$-3x + 9 = 2x + 4$

$-5x = -5$

$x = 1$

h) $4^{2x-1} = \frac{1}{2}$

$(2^2)^{2x-1} = 2^{-1}$

$2^{4x-2} = 2^{-1}$

$4x - 2 = -1$

$4x = 1$

$x = \frac{1}{4}$

2.7 2次方程式へと簡約化できる指数方程式

導入問題

指数方程式 $4^x - 2^x = 2$ をもとに以下を行いなさい。

a) 4^xを 2 の累乗で書きなさい。

b) 等式の2^xを y に置き換えなさい。

c) その結果得られた方程式を解きなさい。

d) 得られた解において等式の y を 2^x に置き換えなさい。

e) その結果得られた各方程式を解きなさい。

解法

a) 2 の累乗で 4^xを表します。

$4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$　　$4 = 2^2$ を分解すると、

したがって、等式 $(2^2)^x - 2^x = 2$ が得られます。

b) $(2^2)^x = (2^x)^2$ であることを用い、次が得られます。

$$\begin{array}{ccccc} (2^x)^2 & - & 2^x & = & 2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ y^2 & - & y & = & 2 \end{array}$$

c) その結果得られた方程式を解きなさい。

$y^2 - y = 2$ は2次方程式で、これを解くと、

$$y^2 - y - 2 = 0$$

$$(y-2)(y+1) = 0$$

$$y = 2 \text{ または } y = -1$$

d) 得られた解において等式の y を 2^x に置き換えなさい。

$$\begin{array}{ccc} y = 2 & \text{または} & y = -1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 2^x = 2 & \text{または} & 2^x = -1 \end{array}$$

e) その結果得られた各方程式を解きなさい。

$2^x = 2$　　または、$2^x = -1$ すべての実数 x にとって、$2^x > 0$ であることから、

$2^x = 2^1$　　$2^x = -1$、この方程式には解がありません。

$x = 1$

したがって、解は $x = 1$

まとめ

累乗の引き算もしくは足し算が含まれる指数方程式は、底の1つがもう 1 つの底の2乗ならば、2次方程式へと簡約化できます。

この種の方程式は次のように表されます。$p(a^x)^2 + qa^x + r = 0$

これを解くには、次のように計算をします。

1. 変数 $y = a^x$ と変えます。
2. 前にステップで得られた方程式 $py^2 + qy + r = 0$ を解きます。
3. 3.得られた解 $y = y_1$ 、$y = y_2$ の y を a^xで置き換えます。$a^x = y_1$ 、$a^x = y_2$
4. 最後に、可能ならば、両方の方程式を解きます。これらが、元の方程式の解です。

問題

以下の指数方程式を、2次方程式に簡約化して解きなさい。

a) $4^x - 2^x - 12 = 0$　　b) $9^x - 2(3^x) + 1 = 0$

c) $4^x - 6(2^x) + 8 = 0$　　d) $5(25^x) - 26(5^x) + 5 = 0$

e) $9^{x+1} + 8(3^x) - 1 = 0$　　f) $4^{x+2} - 5(2^{x+1}) + 1 = 0$

累乗がa^{x+r}の形を持ち、r が実数であるならば、$a^{x+r} = a^r(a^x)$ と書き直せます。
例えば、$2^{x+1} = 2(2^x)$

達成の目安

2.7 変数を変えることで2次方程式に簡約化できる指数方程式を解きなさい。

学習の流れ

ここでは、2次方程式に簡約化できる指数方程式を、変数の変更を用いて解きます。したがって、「方程式」と「円錐曲線」の各ユニットですでに学習したこの種の方程式を解く方法を、生徒が覚えていることが必要となるでしょう。

つまずきやすい点

「導入問題」は、生徒に定められた方程式を解くためのプロセスを示すものです。「解法」では、累乗の指数は、別の累乗で代替できることをしっかり理解していないと、累乗を補助変数で置き換える際に、混乱を招く可能性があります（下記の b）を参照のこと)。

解答：

a) $4^x - 2^x - 12 = 0,\ y = 2^x$

$\Rightarrow 4^x - 2^x - 12 = y^2 - y - 12 = (y-4)(y+3) = 0$

$\Rightarrow\ y - 4 = 0$ または $y + 3 = 0$

$\Rightarrow\ y = 4$ または $y = -3$

$\Rightarrow\ 2^x = 4$ ならば $\Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$

$\Rightarrow\ 2^x = -3$　ならば、解はありません。

したがって、解は $x = 2$

b) $9^x - 2(3^x) + 1 = 0,\ y = 3^x$

$\Rightarrow 9^x - 2(3^x) + 1 = y^2 - 2y + 1 = (y-1)^2 = 0$

$\Rightarrow y - 1 = 0$

$\Rightarrow y = 1$

$\Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x = 0$

したがって、解は $x = 0$

c) $4^x - 6(2^x) + 8 = 0,\ y = 2^x$

$\Rightarrow 4^x - 6(2^x) + 8 = y^2 - 6y + 8 = (y-4)(y-2) = 0$

$\Rightarrow\ y - 4 = 0$ または $y - 2 = 0$

$\Rightarrow\ y = 4$ または $y = 2$

$\Rightarrow\ 2^x = 4$ ならば $\Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$

$\Rightarrow\ 2^x = 2$ ならば、$\Rightarrow x = 1$

したがって、解は $x = 1$、$x = 2$

d) $5(25^x) - 26(5^x) + 5 = 0,\ y = 5^x$

$\Rightarrow 5(25^x) - 26(5^x) + 5 = 5y^2 - 26y + 5$

$= (y-5)(5y-1) = 0$

$\Rightarrow y - 5 = 0$　または $5y - 1 = 0$

$\Rightarrow y = 5$ または　$y = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow 5^x = 5$ または $5^x = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow 5^x = 5$ ならば、$\Rightarrow x =\ 1$

$\Rightarrow\ 5^x = \frac{1}{5}$ ならば、$\Rightarrow 5^x = 5^{-1} \Rightarrow x =\ -1$

したがって、解は $x = 1$、$x = -1$

e) $9^{x+1} + 8(3^x) - 1 = 0,\ y = 3^x$

$\Rightarrow 9^{x+1} + 8(3^x) - 1 = 9(9^x) + 8(3^x) - 1 = 9y^2 + 8y - 1$

$= (y+1)(9y-1) = 0$

$\Rightarrow y + 1 = 0$ または $9y - 1 = 0$

$\Rightarrow y = -1$ または $y = \frac{1}{9}$

$\Rightarrow\ 3^x = -1$ ならば、解はありません。

$\Rightarrow\ 3^x = \frac{1}{9}$ ならば、$\Rightarrow 3^x = 3^{-2} \Rightarrow x = -2$

したがって、解は $x = -2$

f) $4^{x+2} - 5(2^{x+1}) + 1 = 0,\ y = 2^x$

$\Rightarrow 4^{x+2} - 5(2^{x+1}) + 1 = 16(4^x) - 10(2^x) + 1$

$= 16y^2 - 10y + 1$

$= (2y-1)(8y-1) = 0$

$\Rightarrow 2y - 1 = 0$ または $8y - 1 = 0$

$\Rightarrow\ y = \frac{1}{2}$　または　$y = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow\ 2^x = \frac{1}{2}$ ならば、$\Rightarrow 2^x = 2^{-1} \Rightarrow x =\ -1$

$\Rightarrow\ 2^x = \frac{1}{8}$　ならば、$\Rightarrow 2^x = 2^{-3} \Rightarrow x =\ -3$

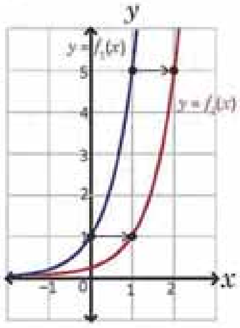
したがって、解は $x = -2$、$x = -3$

2.8 復習問題

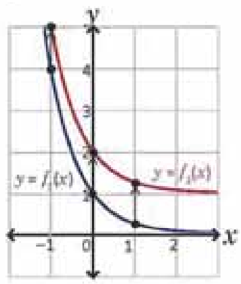
1. 次の命題を証明しなさい。
   a) 関数 $y = 2^x$ と $y = 2^{-x}$ のグラフは、y 軸に対し対称です。
   b) 関数 $y = 3x$ と $y = -3x$ のグラフは、x 軸に対し対称です。
   c) (a, b) が関数 $y = 3^x$ のグラフ上の点ならば、よって $(-a, -b)$ は　$y = -3^x$ の（グラフ上の）点です。

2. 関数 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ を用いて、$f_2(x)$ の方程式を、$f_1(x)$ をもとに決定しなさい。

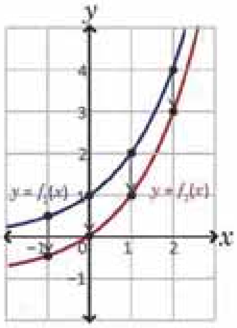
a) $f_1(x) = 5^x$



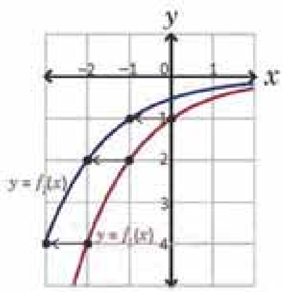
b) $f_1(x) = 4^{-x}$



c) $f_1(x) = 2^x$



d) $f_1(x) = -2^{-x}$



3. 以下の関数をグラフで表し、その特徴、つまり、関数の座標軸における切片、定義域、域値、漸近線、および増加関数か減少関数か、を説明しなさい。

a) $f(x) = 2^{x-3} - 2$　　b) $f(x) = 3^{-x-1} + 4$　　c) $f(x) = 5^{-x+2} + 2$　　d) $f(x) = -4^{x-1} - 1$

4. 次の指数方程式を解きなさい。

a) $2^{3x-1} = 32$　　b) $3^{-2x+3} = \frac{1}{27}$　　c) $4^{3x-3} = 1$

d) $25^{x+3} = \frac{1}{5}$　　e) $7^{-2x-4} = 49$　　f) $16^{x-3} = 8^{2x-1}$

5. 次の指数方程式を、2次方程式に簡約化して解きなさい。

a) $9^x - 4(3^x) + 3 = 0$　　b) $6^{2x} - 5(6^x) - 6 = 0$　　c) $3^{2x+3} - 4(3^{x+1}) + 1 = 0$

達成の目安

2.8 指数関数と指数方程式に関する問題を解きなさい。

解答：

1a) (a, b) が $y = 2^x$ のグラフ上にあるならば、$\Rightarrow b = 2^a$
$y = 2^{-x}$ の場合 $-a$ の値を求めると、$y = 2^{-(-a)} = 2^a = b$ で、$\Rightarrow (-a, b)$ となり、$y = 2^{-x}$ のグラフ上にあることになります。(a, b) と $(-a, b)$ の各点は、y 軸に関し対称です。
したがって、関数 $y = 2^x$ と $y = 2^{-x}$ のグラフは y 軸に関し対称です。

1b) (a, b) が$y = 3^x$のグラフ上にあるならば、$\Rightarrow b = 3^a$
$y = -3^x$ の場合の a を求めると、$y = -3^a = -3^a = -b$ で、$\Rightarrow (a, -b)$ は $y^{=-3x}$ のグラフ上あるはずです。
(a, b) と $(a, -b)$ の各点はx軸に関し対称です。
したがって、関数 $y = 3^x$ と $y = -3^x$ のグラフはx軸に関し対称です。

1c) (a, b) が $y = 3^x$ のグラフ上にあるならば、よって $b = 3^a$
$y = -3^{-x}$ の場合の$-a$ を計算すると、$y = -3^{-(-a)} = -3^a = -b$ となるはずで、$\Rightarrow (-a, -b)$ は$y = -3^{-x}$ のグラフ上にあることになります。

2a) $f_1(x) = 5^x, f_2(x) = 5^{x-1}$

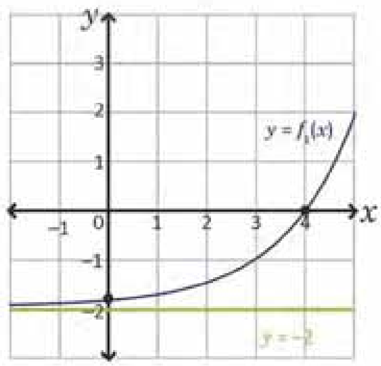
2b) $f_1(x) = 4^{-x}, f_2(x) = 4^{-x} + 1$

2c) $f_1(x) = 2^x, f_2(x) = 2^x - 1$

2d) $f_1(x) = -2^{-x}, f_2(x) = -2^{-(x-(-1))} = -2^{-(x+1)}$

3a) $f_1(x) = 2^{x-3} - 2$　グラフは $y = 2^x$ のグラフを 3 単位右に、2 単位下方に移動させて得られます。

座標軸との切片
y 軸：$f_1(0) = 2^{0-3} - 2 = 2^{-3} - 2 = \frac{1}{8} - 2 = -\frac{15}{8}$、切片は $\left(0, -\frac{15}{8}\right)$
x 軸：$2^{x-3} - 2 = 0 \Rightarrow 2^{x-3} = 2 \Rightarrow x - 3 = 1 \Rightarrow x = 4$、切片は $(4, 0)$

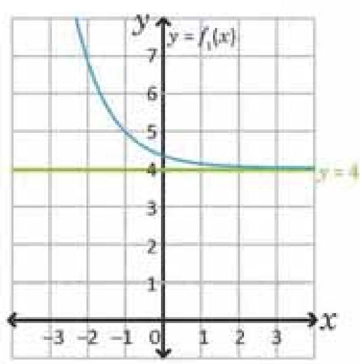


定義域と域値：$D_{f_1} = \mathbb{R}$ 、$R_{f_1} =]-2, \infty[$

この関数は増加関数です。
$b < c$ ならば、よって $b - 3 < c - 3 \Rightarrow 2^{b-3} < 2^{c-3} \Rightarrow 2^{b-3} - 2 < 2^{c-3} - 2$
$\Rightarrow f(b) < f(c)$
この関数の漸近線：$y = -2$

3b) $f(x) = 3^{-x-1} + 4$　グラフは、$y = 3^{-x}$ のグラフを1単位左に、4 単位下方に移動して得られます。

座標軸との切片
y軸：$\left(0, \frac{13}{3}\right)$
x 軸：$3^{-x-1} + 4 = 0 \Rightarrow 3^{-x-1} = -4$、したがって、切片はありません。



定義域と域値：$D_{f_1} = \mathbb{R}$ 、$R_{f_1} =]4, \infty[$

この関数は減少関数です。

関数の漸近線：$y = 4$

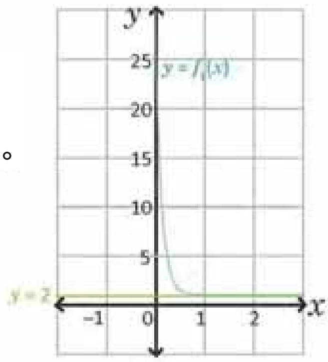
3c) $f(x) = 5^{-x+2} + 2$　グラフは、$y = 5^{-x}$ のグラフを 2 単位右に、2 単位上方に移動して得られます。

座標軸との切片
座標軸 y：(0, 27)
座標軸 x：ありません。

定義域と域値：
$D_{f_1} = \mathbb{R}$、$R_{f_1} =]2, \infty[$.

この関数は減少関数です。

関数の漸近線：
$y = 2$



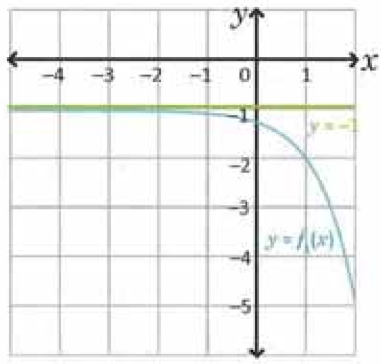
3d) $f(x) = -4^{x-1} - 1$　グラフは、$y = -4^{x}$ のグラフを 1 単位右に、1 単位下方に移動して得られます。

座標軸との切片
座標軸 y: $\left(0, -\frac{5}{4}\right)$
座標軸 x：ありません。

定義域と域値：
$D_{f_1} = \mathbb{R}$、
$R_{f_1} =]-\infty, -1[$

この関数は減少関数です。

関数の漸近線：
$y = -1$



4a) $2^{3x-1} = 32$
$2^{3x-1} = 2^5$
$3x - 1 = 5$
$3x = 6$
$x = 2$

4b) $3^{-2x+3} = \frac{1}{27}$
$3^{-2x+3} = 3^{-3}$
$-2x + 3 = -3$
$-2x = -6$
$x = 3$

4c) $4^{3x-3} = 1$
$4^{3x-3} = 4^0$
$3x - 3 = 0$
$3x = 3$
$x = 1$

4d) $25^{x+3} = \frac{1}{5}$
$(5^2)^{3x-1} = 5^{-1}$
$5^{6x-2} = 5^{-1}$
$6x - 2 = -1$
$6x = 1$
$x = \frac{1}{6}$

4e) $7^{-2x-4} = 49$
$7^{-2x-4} = 7^2$
$-2x - 4 = 2$
$-2x = 6$
$x = -3$

4f) $16^{x-3} = 8^{2x-1}$
$(2^4)^{x-3} = (2^3)^{2x-1}$
$2^{4x-12} = 2^{6x-3}$
$4x - 12 = 6x - 3$
$-2x = 9$
$x = -\frac{9}{2}$

5a) $9^x - 4(3^x) + 3 = 0, y = 3^x$
$\Rightarrow 9^x - 4(3^x) + 3 = y^2 - 4y + 3 = (y-3)(y-1) = 0$
$\Rightarrow y - 3 = 0$　または $y - 1 = 0$
$\Rightarrow y = 3$　または $y = 1$
$\Rightarrow 3^x = 3$　ならば、$\Rightarrow x = 1$
$\Rightarrow 3^x = 1$　ならば、$\Rightarrow x = 0$
したがって、解は $x = 1$、$x = 0$

5b) $6^{2x} - 5(6^x) - 6 = 0, y = 6^x$
$\Rightarrow 6^{2x} - 5(6^x) - 6 = y^2 - 5y - 6 = (y-6)(y+1) = 0$
$\Rightarrow y - 6 = 0$ または $y + 1 = 0$
$\Rightarrow y = 6$ または $y = -1$
$\Rightarrow 6^x = 6$　ならば $\Rightarrow x = 1$
$\Rightarrow 6^x = -1$ ならば解はありません。
したがって、解は $x = 1$

5c) $3^{2x+3} - 4(3^{x+1}) + 1 = 0, y = 3^x$
$\Rightarrow 3^{2x+3} - 4(3^{x+1}) + 1 = 27(3^{2x}) - 12(3^x) + 1 = 27y^2 - 12y + 1 = (3y-1)(9y-1)$
$\Rightarrow 3y - 1 = 0$ または $9y - 1 = 0$
$\Rightarrow y = \frac{1}{3}$ または $y = \frac{1}{9}$
$\Rightarrow 3^x = \frac{1}{3}$　ならば、$\Rightarrow 3^x = 3^{-1} \Rightarrow x = -1$
$\Rightarrow 3^x = \frac{1}{9}$　ならば、$\Rightarrow 3^x = 3^{-2} \Rightarrow x = -2$
したがって、解は $x = -1$、$x = -2$

2.9 このユニットの問題

1.以下の式を簡約化しなさい。

a) $\frac{(3^{-2})^3\times(3^4)^2}{3^{-5}}$　b) $\left[\frac{2^7\times(2^4)^{-2}}{2^7}\right]^{-1}$　c) $\frac{25^{-4}\times5^{-3}}{5^{-5}}$　d) $\frac{3^{-4}\times6^8}{2^4}$

2. 以下の a) からd) のそれぞれには2つの実数がありますが、
そのどちらが大きいかを明らかにしなさい。

a) $\sqrt{2}$ と $\sqrt[3]{2}$　b) $\sqrt{3}$ と $\sqrt[4]{5}$　c) $\sqrt[3]{12}$ と $\sqrt{6}$　d) 4 と $\sqrt[3]{68}$

$a<b\Rightarrow\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$ であることと有理数の指数であることを用いて、共通の根指数を持つ累乗根を書きなさい。$\sqrt[3]{2}$ と $\sqrt[4]{2}$ の場合は、
$\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{4}{12}}=\sqrt[12]{2^4}$ と $\sqrt[4]{2}=2^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{12}}=\sqrt[12]{2^3}$

3.以下の a) から d) において、2つの実数のうちどちらが大きいか判定しなさい。

a) $\sqrt{2}$ と $\sqrt[3]{4}$　b) $\sqrt[4]{8}$ と $\sqrt[3]{16}$　c) $\sqrt[4]{125}$ と $\sqrt{5}$　d) $\sqrt{\frac{1}{27}}$ と $\sqrt[3]{\frac{1}{81}}$

それぞれの被開平数を累乗で書きなさい

4. $(\sqrt{3}-\sqrt[4]{48}+2)(\sqrt{3}+\sqrt[4]{48}+2)$ の積を求めなさい。

5. 分数 $\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$ の分母を、次のステップを踏んで有理化しなさい。

a) $\sqrt[3]{3}$を累乗で書きなさい。

b) 方程式 $\sqrt[3]{3}x=3$ を解き、その解を累乗で書きなさい。

c) $\frac{2}{\sqrt[3]{3}}\times\frac{x}{x}$ を、x に上記の b) の解を用いて計算しなさい。

6. 以下の各分数の分母を有理数化しなさい。

a) $\frac{6}{\sqrt[3]{9}}$　b) $\frac{4}{\sqrt[4]{2}}$　c) $\frac{10}{\sqrt[4]{8}}$

7. 次の指数方程式を解きなさい。

a) $2^{4x-2}=8^{x+1}$　b) $3^{3x}=27^{2x+3}$　c) $2^{-x}=\sqrt{2}$

d) $2^{\frac{x}{2}}\times4^{\frac{x}{3}}=128$　e) $9^x-4(3^{x+1})+27=0$　f) $4^{-x}-2^{-x+2}+4=0$

g) $(4^{x-3})(6^{x+1})(3^{2x-6})=6$　h) $12^{x-2}=2^{2x-4}$　i) $-3^x-9(3^{-x})+10=0$

8. 次の命題を証明しなさい。

a) $\sqrt{5}$ と $\sqrt[4]{25}$ は同じ数字を表します。
b) $y=2^x$と $y=-2^x$ のグラフはいかなる点でも交わりません。
c) $y=2^x$と $y=4^x$ はただ1点で交わります。

9. 以下の分数のグラフを描きなさい。

a) $f(x)=2^x+2^{-x}$　b) $f(x)=2^x-2^{-x}$

10. 上の問題のそれぞれの関数に対し、以下で求めるものを決定しなさい。
a) 定義域と域値　b) 増加あるいは減少の区間

達成の目安

2.9 問題を指数関数と指数関数の性質を用いて解決しなさい。

解答：

1a) $\dfrac{(3^{-2})^3 \times (3^4)^2}{3^{-5}} = 3^7$ **1b)** $\left[\dfrac{2^2 \times (2^4)^{-2}}{2^7}\right]^{-1} = 2^{13}$ **1c)** $\dfrac{25^{-4} \times 5^{-3}}{5^{-5}} = 5^{-6}$ **1d)** $\dfrac{3^{-4} \times 6^8}{2^4} = 6^4$

2a) $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ と $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \sqrt{2} = 2^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{2^3}$ と $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{2^2}$

したがって、$2^2 < 2^3$ だから $\Rightarrow \sqrt[6]{2^2} < \sqrt[6]{2^3} \Rightarrow \sqrt[3]{2} < \sqrt{2}$

2b) $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$ と $\sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \sqrt{3} = 3^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt[4]{9}$ と $\sqrt[4]{5}$

したがって、$5 < 9$ だから $\Rightarrow \sqrt[4]{5} < \sqrt[4]{9} \Rightarrow \sqrt[4]{5} < \sqrt{3}$

2c) $\sqrt[3]{12} = 12^{\frac{1}{3}}$ と $\sqrt{6} = 6^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \sqrt[3]{12} = 12^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{12^2} = \sqrt[6]{144}$ と $\sqrt{6} = 6^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{6^3} = \sqrt[6]{216}$

したがって、$144 < 216$ だから

$\Rightarrow \sqrt[6]{144} < \sqrt[6]{216} \Rightarrow \sqrt[3]{12} < \sqrt{6}$

2d) $4 = 4^{\frac{1}{1}}$ と $\sqrt[3]{68} = 68^{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow 4 = 4^{\frac{3}{3}} = \sqrt[3]{4^3} = \sqrt[3]{64}$ y $\sqrt[3]{68}$

したがって、$64 < 68$ だから $\Rightarrow \sqrt[6]{64} < \sqrt[6]{69} \Rightarrow 4 < \sqrt[3]{68}$

3a) $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ と $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}$

したがって、$2 > 1$ と $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ だから

$\Rightarrow 2^{\frac{1}{2}} < 2^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt[3]{4}$

3b) $\sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}}$ と $\sqrt[5]{16} = \sqrt[5]{2^4} = 2^{\frac{4}{5}}$

したがって、$2 > 1$ と $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$ だから

$\Rightarrow 2^{\frac{3}{4}} < 2^{\frac{4}{5}} \Rightarrow \sqrt[4]{8} < \sqrt[5]{16}$

3c) $\sqrt[4]{125} = \sqrt[4]{5^3} = 5^{\frac{3}{4}}$ と $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$

したがって、$5 > 1$ と $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ だから

$\Rightarrow 5^{\frac{1}{2}} < 5^{\frac{3}{4}} \Rightarrow \sqrt{5} < \sqrt[4]{125}$

3d) $\sqrt{\frac{1}{27}} = \sqrt{\frac{1}{3^3}} = \sqrt{3^{-3}} = 3^{-\frac{3}{2}}$ と $\sqrt[3]{\frac{1}{81}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3^4}} = \sqrt[3]{3^{-4}} = 3^{-\frac{4}{3}}$

したがって、$3 > 1$ と $-\frac{3}{2} < -\frac{4}{3}$ だから

$\Rightarrow 3^{-\frac{3}{2}} < 3^{-\frac{4}{3}} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{27}} < \sqrt[3]{\frac{1}{81}}$

4. $y = \sqrt{3} + 2$ とすると、

$\Rightarrow (\sqrt{3} - \sqrt[4]{48} + 2)(\sqrt{3} + \sqrt[4]{48} + 2) = (y - \sqrt[4]{48})(y + \sqrt[4]{48}) = y^2 - \sqrt{48} = y^2 - \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 3} = y^2 - 4\sqrt{3}$

計算すると、$y^2 = (\sqrt{3} + 2)^2 = 7 + 4\sqrt{3} \Rightarrow (\sqrt{3} - \sqrt[4]{48} + 2)(\sqrt{3} + \sqrt[4]{48} + 2) = y^2 - 4\sqrt{3} = 7 + 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 7$

5a) $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}$

5b) $\sqrt[3]{3}x = 3 \Rightarrow x = \dfrac{3}{\sqrt[3]{3}} = \dfrac{3}{3^{\frac{1}{3}}} = 3^{1-\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}}$

5c) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}} \times \dfrac{x}{x} = \dfrac{2}{3^{\frac{1}{3}}} \times \dfrac{3^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{2 \times 3^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{2\sqrt[3]{3^2}}{3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}} = \dfrac{2\sqrt[3]{9}}{3}$

6a) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{9}} = \dfrac{6}{3^{\frac{2}{3}}}$

つぎに $\sqrt[3]{9}x = 3 \Rightarrow x = \dfrac{3}{\sqrt[3]{9}} = \dfrac{3}{3^{\frac{2}{3}}} = 3^{1-\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{3}}$,

$\Rightarrow \dfrac{6}{\sqrt[3]{9}} = \dfrac{6}{3^{\frac{2}{3}}} \times \dfrac{3^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{6 \times 3^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{6\sqrt[3]{3}}{3} = 2\sqrt[3]{3}.$

6b) $\dfrac{4}{\sqrt[4]{2}} = \dfrac{4}{2^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{4}{2^{\frac{1}{4}}} \times \dfrac{2^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{4 \times 2^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{4\sqrt[4]{2^3}}{2} = 2\sqrt[4]{8}$

6c) $\dfrac{10}{\sqrt[4]{8}} = \dfrac{10}{\sqrt[4]{2^3}} = \dfrac{10}{2^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{10}{2^{\frac{3}{4}}} \times \dfrac{2^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{10 \times 2^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{10\sqrt[4]{2}}{2} = 5\sqrt[4]{2}$

7a) $2^{4x-2} = 8^{x+1}$

$2^{4x-2} = (2^3)^{x+1}$

$2^{4x-2} = 2^{3x+3}$

$4x - 2 = 3x + 3$

$x = 5$

7b) $3^{3x} = 27^{2x+3}$

$x = -3$

7c) $2^{-x} = \sqrt{2}$

$x = -\dfrac{1}{2}$

7d) $2^{\frac{x}{2}} \times 4^{\frac{x}{3}} = 128$

$x = 6$

7e) $9^x - 4(3^{x+1}) + 27 = 0$、$y = 3^x$

置換すると、$y^2 - 12y + 27 = 0$ となります。

解は、$x = 1$、$x = 2$

7f) $4^{-x} - 2^{-x+2} + 4 = 0$、$y = 2^{-x}$

置換すると、$y^2 - 4y + 4 = 0$ となります。

解は、$x = -1$

7g)

$$(4^{x-3})(6^{x+1})(3^{2x-6}) = 6$$
$$[(2^2)^{x-3}](6^{x+1})(3^{2x-6}) = 6$$
$$(2^{2x-6})(6^{x+1})(3^{2x-6}) = 6$$
$$(6^{2x-6})(6^{x+1}) = 6$$
$$6^{3x-5} = 6$$
$$3x - 5 = 1$$
$$x = 2$$

したがって、解は $x = 2$

7h)

$$12^{x-2} = 2^{2x-4}$$
$$[(2^2)(3)]^{x-2} = 2^{2x-4}$$
$$[(2^2)^{x-2}](3^{x-2}) = 2^{2x-4}$$
$$(2^{2x-4})(3^{x-2}) = 2^{2x-4}$$
$$3^{x-2} = 1$$
$$x = 2$$

したがって、解は $x = 2$

7i) $-3^x - 9(3^{-x}) + 10,\ y = 3^x$

$-y - 9y^{-1} + 10 = 0$

$y \neq 0$ でなくてはならないので

$\Rightarrow -y(-y - 9y^{-1} + 10) = -y(0)$

$\Rightarrow y^2 + 9yy^{-1} - 10y = 0$

$\Rightarrow y^2 - 10y + 9 = 0$

$\Rightarrow (y-9)(y-1) = 0 \Rightarrow y = 9$ または $y = 1$

$\Rightarrow 3^x = 9$ または $3^x = 1 \Rightarrow x = 2$ または $x = 0$

したがって、解は $x = 2$、$x = 0$

8a) $\sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{5^2} = 5^{\frac{2}{4}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

8b) $y = 2^x$ と $y = -2^x$

共通の点 (a, b) を持つならば、

$\Rightarrow b = 2^a$ と $b = -2^a \Rightarrow 2b = 2^a - 2^a = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow 2^a = 0$、

しかしこれは、a が実数の場合はいかなる数であってもあり得ません。

8c) 共通の点(a, b)を持つならば、

$\Rightarrow b = 2^a$ と $b = 4^a \Rightarrow 2^a = 4^a \Rightarrow 2^a = (2^2)^a \Rightarrow 2^a = 2^{2a} \Rightarrow a = 2a \Rightarrow a = 0 \Rightarrow b = 1$

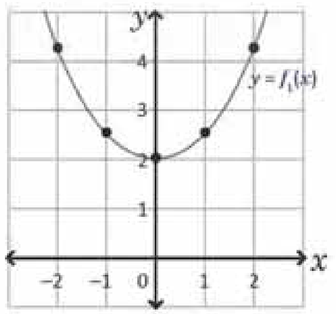
唯一共通な点は $(0, 1)$

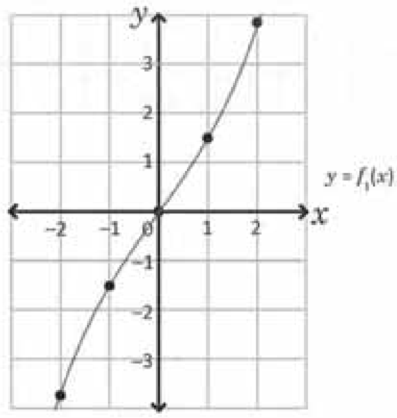
9a)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4.25	2.5	2	2.5	4.25

9b)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-3.75	-1.5	0	1.5	3.75





問題 4 と 5 の結果を用いると、この関数は $x = 0$ のとき最小値になる、と推論できます。

問題9 の関数のグラフが正確に描かれれば、グラフ上で単調性を証明することが可能となります。関数 $f(x) = 2^x - 2^{-x}$ に対してもまた、授業 2.3 の問題 4で行ったのと類似したプロセスを使って証明することができます。

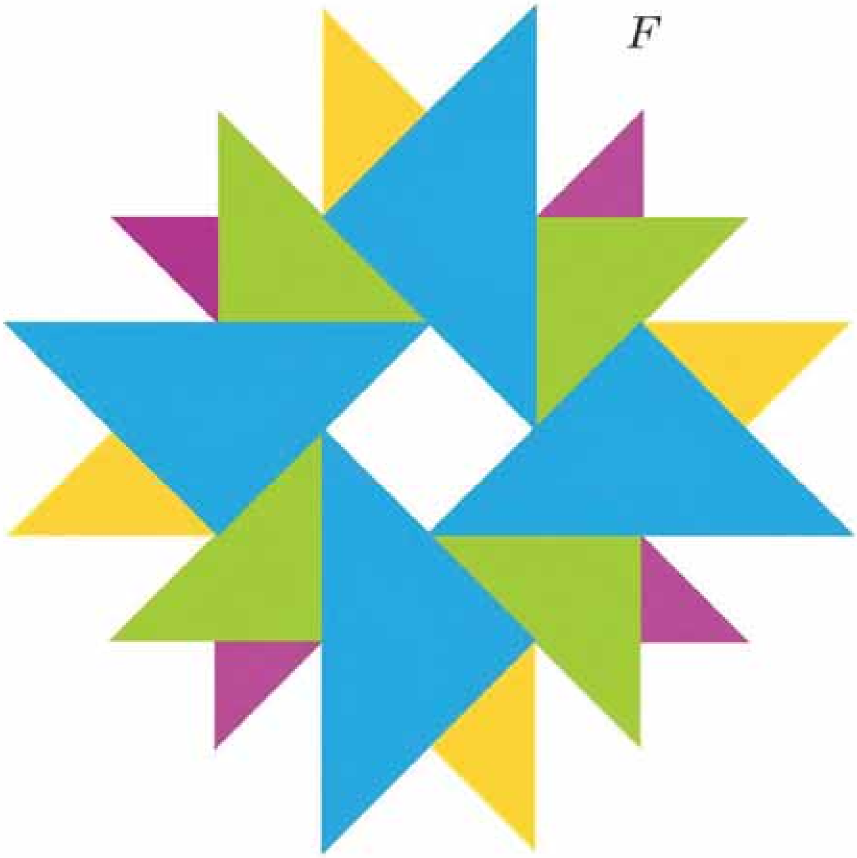
10a) グラフ上で

関数 $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ は 定義域 $\mathbb{R}$ と値域 $[2, +\infty[$ を有します。

関数 $f(x) = 2^x - 2^{-x}$ は定義域 $\mathbb{R}$ と値域 $\mathbb{R}$を有します。

10b) 関数 $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ は $[0, +\infty[$ の区間で増加し、$]-\infty, 0]$ の区間で減少します。

関数 $f(x) = 2^x - 2^{-x}$ は $\mathbb{R}$において増加します。



面積 F = ?

この図形は異なる色の三角形を4枚ずつ使って作られています。よって、次のように計算します。

面積 $F = 4T_1 + 4T_2 + 4T_3 + 4T_4 = 4(T_1 + T_2 + T_3 + T_4) = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}\right)$

よって、この等比級数の合計の大きさから、面積 $F = 4\left(\frac{2^4 - 1}{2^4}\right) = \frac{15}{4}$ となります。

REPÚBLICA DE EL SALVADOR EN LA AMÉRICA CENTRAL

高校