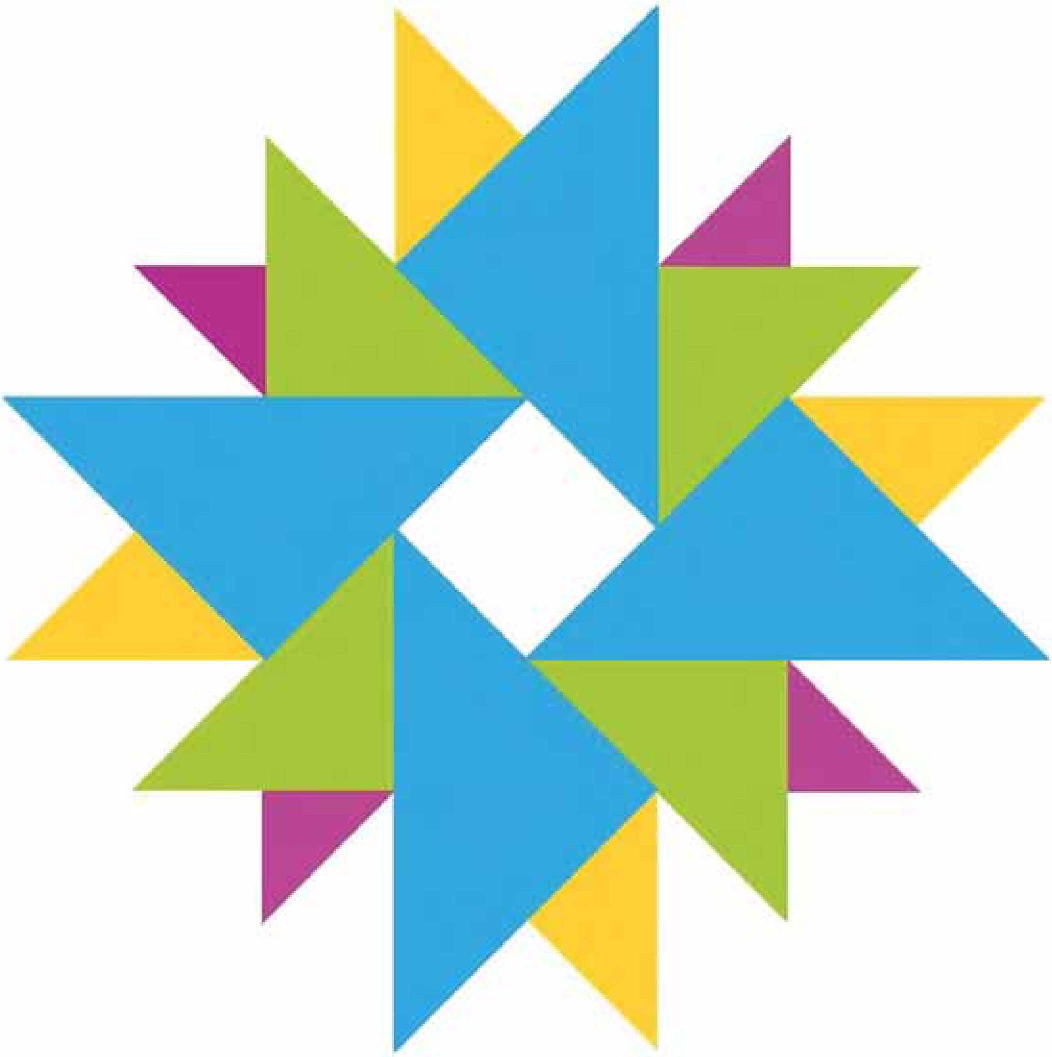
エルサルバドル政府

教育省

算数

高校2年



第2巻

指導案
第二版

ESMATE

JICA

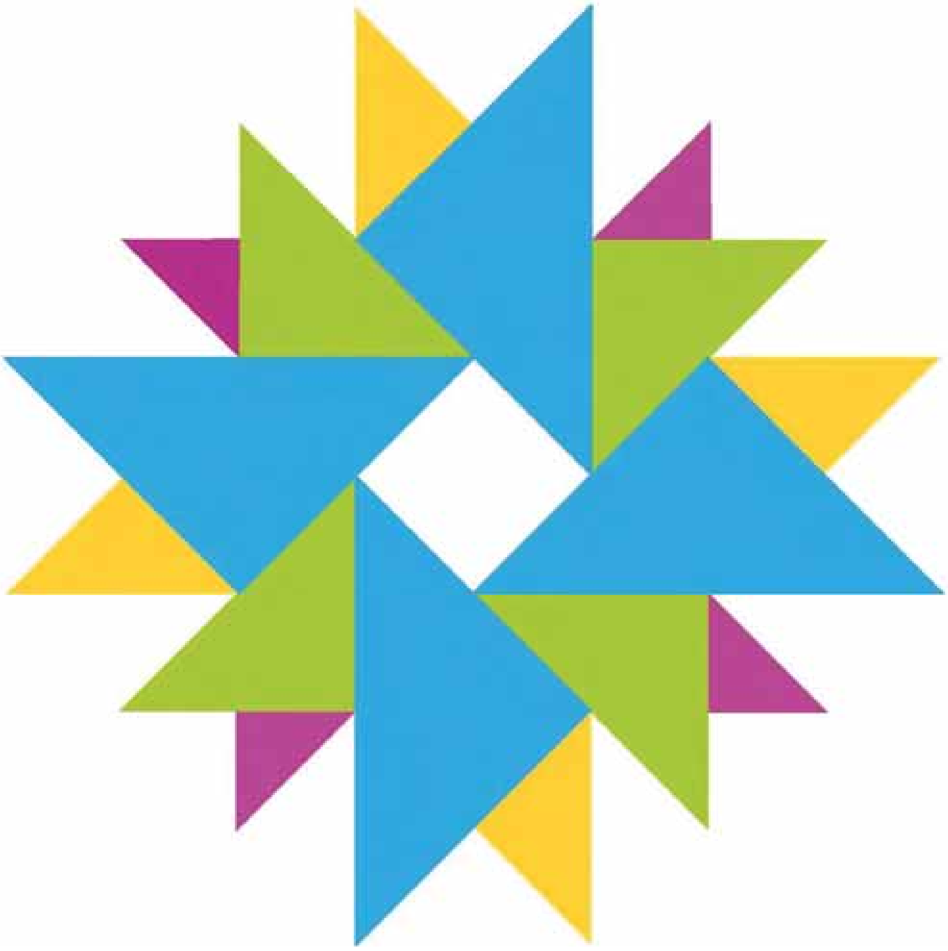
高校 2 第2版 算数 第2巻 指導案

エルサルバドル政府

教育省

算数

高校2年



第2巻

指導案

第二版

Carla Evelyn Hananía de Varela
教育科学技術大臣

Ricardo Cardona Alvarenga
教育副大臣
善意協力

Wilfredo Alexander Granados Paz
中等（第3サイクルおよび中等）教育局長
名誉代理

Janet Lorena Serrano de López
基礎教育局長
名誉代理

Santiago Alfredo Flores Amaya
予防社会プログラム局長
名誉代理

Roberto Alejandro Rivera Campos
科学技術イノベーション教育課長

Félix Abraham Guevara Menjívar
科学技術イノベーション教育部長（数学）

Gustavo Antonio Cerros Urrutia
中等教育カリキュラム専門家部長

調整および技術的校正
César Omar Gómez Juárez

教育省の執筆及びレイアウトチーム
Ana Ester Argueta Aranda
Diana Marcela Herrera Polanco
César Omar Gómez Juárez
Francisco Antonio Mejía Ramos

デザイン及びレイアウトの校正
Francisco René Burgos Álvarez
Judith Samanta Romero de Ciudad Real

文体修正
Marlene Elizabeth Rodas Rosales
Ana Esmeralda Quijada Cárdenas

国際協力機構（JICA）を通じた日本の技術協力

表紙の画像は教育的見地から、面積が1/2の割合で減少する直角三角形で形成された図形になっており、その面積を計算で求めることができます。
答えは裏表紙の裏にあります。

510
M425 算数：高校2年［電子資料］：、
指導案 第2巻／Ana Ester Argueta Aranda、Diana Marcela Herrera Polanco、César Omar Gómez Juárez、Francisco Antonio Mejía Ramos；
監修 レイアウト Judith Samanta Romero de Ciudad Real, Francisco René Burgos Álvarez. -- 第2版 --
サンサルバドル、エルサルバドル：教育省（MINED）、2020年。
電子資料 1ファイル（256ページ； 図解入り；28 cm -（Esmate）
電子データ（1 ファイル：pdf、11 MB）-- www.mined.gob
ISBN 978-99961-356-6-8（電子書籍）
1. 算数－教科書。2. 算数－ 教授 -- 方法論
I. Argueta Aranda、Ana Ester、共著。II. タイトル。
BINA

教師のみなさん

心からご挨拶を申し上げ、エルサルバドルの全国民のために重要な仕事をされていることに感謝します。

教育科学技術省（MINEDUCYT）は初中等教育算数・数学指導力向上プロジェクト（ESMATE）を通じて、みなさんのために算数・数学科目の指導案を作成しました。この指導書は日常の指導活動で重要なツールとなるでしょう。

この資料は、当科目の授業を展開する方法を具体的に指導し、その結果エルサルバドルの生徒たちの学びを大きく向上させることを主な目的としています。

この指導案は生徒用の教科書に対応する授業内容の提案となっていることから、算数学習プログラムの規程を具体的に実現するものであると言えます。

みなさんがこの資料を最大限に活用し、私たちの愛する国の発展に貢献し続けるべく、全力で努力し献身されると確信しています。

敬具

Carla Evelyn Hananía de Varela
教育科学技術大臣

Ricardo Cardona Alvarenga
教育科学技術副大臣

目次

ユニット5. 超越関数II

このユニットのねらい

関数によってモデル化された状況を解釈するために、対数関数と三角関数の正弦・余弦・正接の要素と特性を定義またはグラフで説明します。

関係と進歩

サイクル3	高校1年	高校2年
ユニット2：平方根（9°） • 平方根と実数 実数 • 平方根の演算	**ユニット1：実数** • 実数	**ユニット4：超越関数 I** • 累乗とｎ 乗根 • 指数関数と指数方程式
	ユニット4：実関数 • 関数の定義 • 二次関数 • 二次関数の応用 • その他の関数 • GeoGebraを使った練習	**ユニット5：超越関数 II** • 全単射関数と逆関数 • 対数関数 • 三角関数 • GeoGebraを使った練習
	ユニット5：三角形の解 • 鋭角の三角比 • 非鋭角の三角比 • 斜めの三角形の解	
	ユニット6：三角方程式と恒等式 • 三角関数公式 • 三角方程式	

このユニットでの学習計画

レッスン	時間	授業
1. 全単射関数と逆関数	1	1. 単射関数
	1	2. 全射関数
	1	3. 全単射関数
	1	4. 関数の合成
	1	5. 合成関数の定義域
	1	6. 逆関数
	1	7. 逆関数の存在・定義域・値域
	1	8. 復習問題
2. 対数関数	1	1. 対数の定義
	1	2. 数の対数
	1	3. 対数の性質
	1	4. 対数の底辺の変換
	1	5. 対数関係とグラフの定義
	1	6. 指数関数と対数関数の関係
	1	7. 対数方程式、パート1
	1	8. 対数方程式、パート2
	1	9. 基数10の対数と常用対数
	1	10. 復習問題
	1	レッスン1とレッスン2のテスト

レッスン	時間	授業
3. 三角関数	1	1. 角度の三角数の比率（復習）
	1	2. 三角関数の円
	1	3. 三角関数の正弦関数と余弦関数の周期性
	1	4. 三角関数の円の正接の周期性
	1	5. 正弦関数
	1	6. 余弦関数
	1	7. 三角関数の正接
	1	8. 正接関数のグラフ
	1	9. 三角関数の周期と振幅
	1	10. 三角関数の垂直シフト
	1	11. 三角関数の水平シフト
	1	12. 三角関数の一般的な形式
	1	13. 角度の円形システム
	1	14. 復習問題
	1	15. このユニットの問題
4. GeoGebraを使った練習	1	1. 三角関数
	1	2. 正弦関数と余弦関数の構築
	1	3. 正接関数の構築
	1	4. 取り尽くし法
	1	レッスン3のテスト

全37コマ+レッスン1とレッスン2+レッスン3のテスト

各レッスンの要点

レッスン1：全単射関数と逆関数

高校1年生の学生の基礎は、機能・領域・グラフの概念です。さらに、一次・二次・三次・有理・平方根および指数関数を学習します。従って、この課では、これらの関数を使用して、単射、全射および全単射関数の定義を学習します。授業では、次のようなグラフィック方法が優先されます。単射を決定するための水平曲線の描画と関数の範囲のグラフィックを決定します。ただし、実行しているプロセスを形式化する代数的方法も導入しています。これらの概念により、2つの授業で関数の合成の操作を導入できます。最初の授業では合成関数の方程式を決定し、後で対応する定義域を学習します。次に、逆関数の定義が2つの授業で確立されます。最初の授業は逆関数の方程式がどのように決定されているのかを扱い、2番目の授業では、特定のタイプの関数の逆関数、そのグラフの描画方法、および定義域と関連するランクを決定する可能性を高めます。

レッスン2 ：対数関数

対数の定義から始まります。ここでは、数値の累乗の定義と逆の関係が確立され、次に因数分解を使用して数値の対数の値が決定されます。対数の特性は、特定および一般的な方法で確立された後に、底辺の変化の特性が計算され、次に対数関数を学習し、指数関数との関係が組成に対する逆関数として確立します。対数方程式は2つの授業で解かれます。最初の授業は、対数の定義を直接適用して解を決定する場合を扱い、対数を使用した指数方程式の解法も紹介します。次の授業では、方程式は対数のいくつかの特性を適用する追加のステップを必要とします。どちらの授業も、方程式の対数の各引数で解を評価することによって解をチックすることを強調しており、これが正であることを確認する必要があります。最後に、数値の桁数が10を底辺とする対数の応用として学習します。

レッスン3 ：三角関数

この課では、三角関数の正弦・余弦および正接を強調します。最初に、三角関数の比率は、その終端側の点またはその延長から定義された平面内の角度の三角関数の比率を基準として、角度の関数として確立されます。この意味で、三角関数の円（TC）も導入され、半径1の円による三角関数の比率の表現が容易になります。これにより、正弦関数・余弦関数および正接関数の周期性を代表的な方法で調べることもできます。次に、各関数がデカルト平面上にグラフ化され、周期・振幅および変位を学習します。これまで、角度をラジアンに変換する際に関数のグラフを学生の描画を複雑にしないために、六十進法で角度を使用してきました。このために、ラジアンの概念を最後に学習します。角度の円形システムでは、三角法の円の角度によって定められた円弧の長さが基準として使用されます。

レッスン4：GeoGebraを使った練習

第一に、三角関数の変位・振幅・周期を調べ、GeoGebraが動作する円形システムについて学んだことを実践し、スライダーやアニメーションを使用します。次に、ポイントのトレースなどのGeoGebraの他のツールを使用して、三角関数の円から関数を作成します。このツールのアニメーションによって目的のグラフが作成します。使用される別のツールは、コンピュータサイエンス科目のユニット4の制御構造に関連するIF関数です。しかし、教科書の練習問題のおかげで、学生は簡単に行うことができます。最後に、定数πの値を概算するために、取り尽くし法を学習します。この練習の目的は、円の面積を計算するための歴史的な方法を調べることですが、この場合はソフトウェアを使用します。

レッスン 1 全単射と逆関数

1. 単射

導入問題

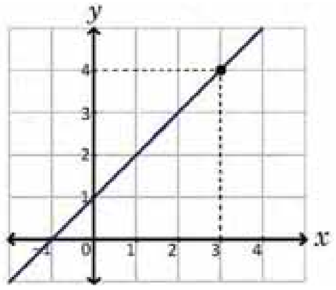
次の質問に答えましょう：

a) $f(x) = x + 1$ であり、$f(3) = 4$ が成り立つとき、$\mathbb{R}$ に属する他の x の値で、$f(x) = 4$ が成り立つものはあるでしょうか?

b) 関数 $f(x) = x^2$ の場合に、$f(2) = 4$ が成り立つとき、前事例と同じことが成立するでしょうか?

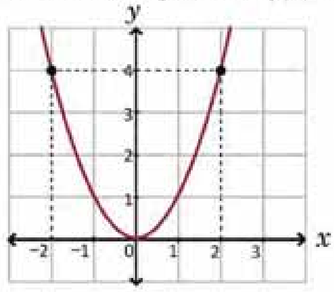
解法

a) $f(x) = x + 1$ のグラフを描きます。



$f(x) = 4$ となる唯一の x の値は $x = 3$.

b) $f(x) = x^2$ のグラフを描きます。



$f(x) = 4$ を満たす x の値が2つ存在するので、同じことは成立しません：
$x = 2$ と $x = -2$.

定義

関数 f ：A → B は、集合 A の異なる値の元に対して、集合 B の異なる値の元が対応するとき、**単射**である。より象徴的に表現して：もし a と b が A の元であって、$a \neq b$ であるときに、$f(a) \neq f(b)$ が成り立つこと。

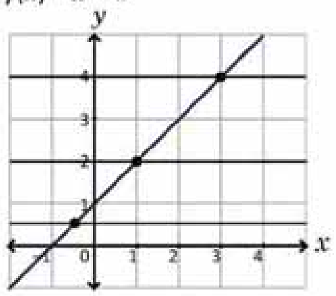
また次のように定義することもできます： f ：A → B は、B における像のそれぞれに対して、A における原像がただ1つ対応するとき、A において**単射**である。

ある関数が単射であるかどうかをグラフで判定するためには、グラフ上に水平に直線を描き、もしその直線が2点以上で交われば、その関数は単射ではありません。

例

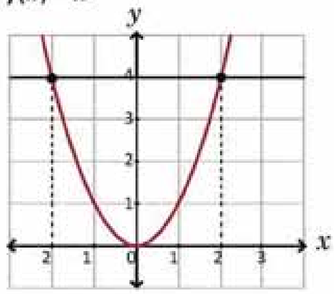
以下の関数が単射であるかどうか判定しましょう：

a) $f(x) = x + 1$



全ての水平直線は、関数上のただ1つの点で交わっています。よって, $f(x) = x + 1$ は単射です.

b) $f(x) = x^2$



点 (2, 4) 上を通る水平直線は、点 (−2, 4) 上も通っています。よって, $f(x) = x^2$ は単射ではありません.この事例では $2 \neq -2$ ですが、$f(2) = 4$ かつ $f(-2) = 4$ であることから、$f(2) = f(-2)$ となっています。

問題

以下の関数が、その定義域において単射であるかどうか判定しましょう：

a) $f(x) = 2x - 6$　b) $f(x) = -x^2 - 2x - 6$　c) $f(x) = 2x^3$　d) $f(x) = \frac{1}{x}$　e) $f(x) = \sqrt{x}$

120

達成の目安：

1.1 単射である関数を、グラフを用いてあるいは代数的に判別することができること。

学習の流れ：

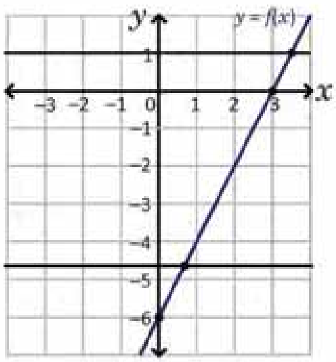
この時点で、学生にはさまざまな実数値関数について知識がありますが、ここでは、グラフや代数的な方法を用いて、関数の性質について学びます。

つまずきやすい点：

導入問題は、方程式を立てることによっても解くことができます；グラフを描くことは、学生が困難を感じている際にお奨めします。

問題の解き方：

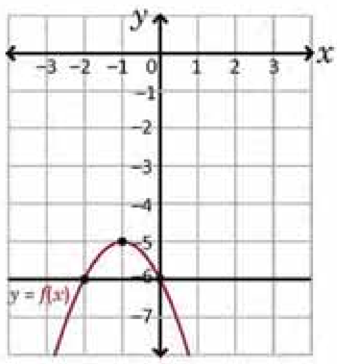
a) $f(x) = 2x - 6$



全ての水平直線は、$f(x) = 2x - 6$ のグラフ上の1点のみで交わっていることから、単射です。

ある数 b の唯一の原像は $\frac{1}{2}b + 3$ です。

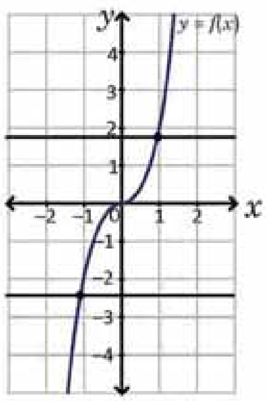
b) $f(x) = -x^2 - 2x - 6 = -(x + 1)^2 - 5$



描かれた水平直線は、$f(x)$ のグラフ上の2点で交わっています。よって、$f(x)$ は単射ではありません。

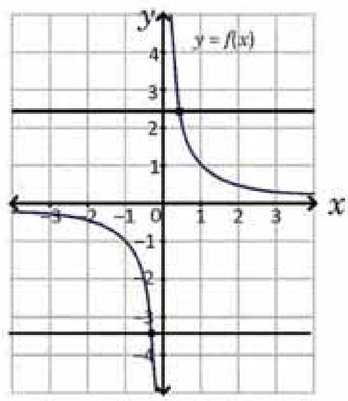
別の形で：
$f(-2) = f(0) = -6$.
よって、
単射ではありません。

c) $f(x) = 2x^3$



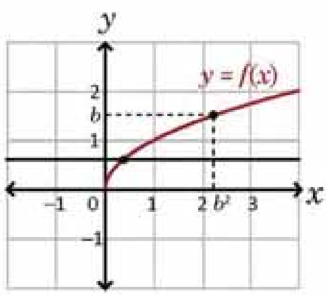
単射です。

d) $f(x) = \frac{1}{x}$



単射です。

e) $f(x) = \sqrt{x}$



b の唯一の原像は b^2 です。

単射です。

レッスン 1

1.2 全射

導入問題

A から B への関数で、$y = f(x)$ を等式としてもつものは、次の形で書き表すことができます：

1. f: A → B
   $x \to f(x)$

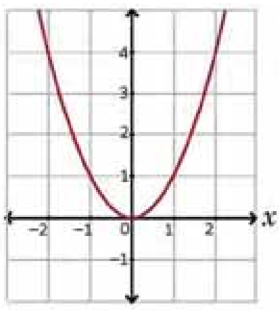
2. f: A → B; $x \to f(x)$

この表現は、「A から B への関数で、x が A に、$f(x)$ が B に値をとるもの」を意味しています。

a) 関数 f : ℝ → ℝ; $x \to x^2$ が与えられているとして、始集合の x の値で、$f(x) = -1$ を満たすものは存在しますか?
b) 関数 f : ℝ → ℝ; $x \to x^3$ について考えましょう。y が実数であり、$f(x) = y$ として $y = 1$ と $y = 8$ のときに、x が満たす値を求めましょう。

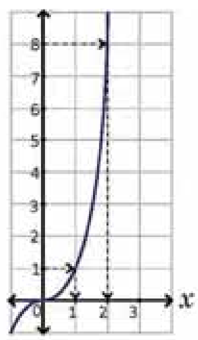
解法

a) $f(x) = x^2$ のグラフを描きます。



$f(x) = -1$ を満たす x の値は存在しません。

b) $f(x) = x^3$ のグラフを描きます。



$f(x) = 1$ を満たす x の値は、$x = 1$.
$f(1) = 1^3 = 1$.

$f(x) = 8$ を満たす x の値は、$x = 2$.
$f(2) = 2^3 = 8$.

まとめ

関数 f ：A → B は、もし B にある数のそれぞれが、A にある数の少なくとも1つの像であるときに、**全射**です。

1. ある関数が全射でないといえるためには、B にある y の値で A に原像をもたないものをみつけなければなりません。
2. 関数 f : A → B は、集合 B が関数の値域 R_f と相等であるときには、全射な関数です。

値域とは、関数 $R_f = \{f(x) \mid x \in A\}$ がとりうる値の集合のことです。

例

a) 関数 f : ℝ → ℝ ; $x \to x^2$ は、$x^2 = -1$ をみたす実数 x をもたないことから、全射ではありません。

$f(x) = x^2$ は ℝ ではなく、$R_f = [0, \infty[$.

b) 関数 f : ℝ → ℝ ; $x \to x^3$ は、ℝ にある数 y が数 $\sqrt[3]{y}$ の像であることから、全射です。計算して、次が得られます：$f(\sqrt[3]{y}) = (\sqrt[3]{y})^3 = y$.

$f(x) = x^3$ の値域は $R_f = ℝ$.

問題

以下の関数について、全射かどうか判別しましょう。

a) f: ℝ → ℝ, $x \to x$
b) f: ℝ → ℝ, $x \to 3x - 2$
c) f: ℝ → ℝ, $x \to x^2 - 1$
d) f: ℝ →]−∞, 0], $x \to -x^2$
e) f: ℝ → ℝ, $x \to -x^2 + x$
f) f: [0, ∞[→ [0, ∞[, $x \to \sqrt{x}$
g) f: ℝ − {0} → ℝ, $x \to \frac{1}{x}$
h) f: ℝ − {1} → ℝ − {0}, $x \to \frac{1}{1-x}$
i) f: ℝ → ℝ, $x \to |x|$

集合]− ∞, a[∪]a, ∞[は、ℝ − {a} という形で書き表すことができ、数 a を除いた実数を表しています。

$f(x) = |x|$ は絶対値関数です。

達成の目安：

1.2 全射である関数を、グラフを用いてあるいは代数的に判別することができること。

学習の流れ：

ここまで学習してきた関数のほとんどは、その定義域と値域が決められていました。この授業では、関数の新たな記述法が導入され、全射な関数を判別する方法について学習します。

ねらい：

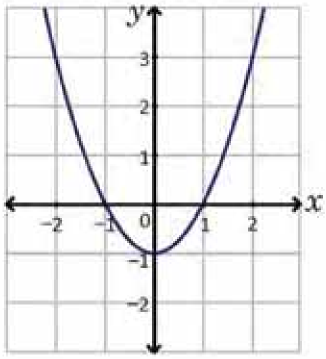
「結論」では、全射な関数の2通りの特徴づけ方が説明されており、1つでは全射性を否定することができ、もう1つでは肯定できます。「例」b) では、どのようにして、全射性を代数的に規定することができるか示してあります。

問題の解き方：

a)
- 定義域を $\mathbb{R}$ にもつ線形関数の全ては値域が $\mathbb{R}$ であり、よって f は全射です。
- ある実数 b は b の像です。$f(b) = b$, よって関数は全射です。

b)
- 定義域を $\mathbb{R}$ にもつ線形関数の全ては値域が $\mathbb{R}$ であり、よって f は全射です。
- ある数 b は $\frac{b+2}{3}$ の像です。$f\left(\frac{b+2}{3}\right) = b$, よって関数は全射です。

c) 実数 -2 は、いかなる実数の像でもありませんので、よって f は全射ではありません。



d)
- 関数 $f(x) = -x^2$ の値域は $]-\infty, 0]$, よって前記のように定義された関数は全射です。
- ある実数 $b \le 0$ は数$\sqrt{-b}$の像です。よって $f(x) = -x^2$ は $]-\infty, 0]$ で全射です。

e) $-x^2 + x = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ 。これにより、1 はいかなる実数の像でもありません。これを確かめるために、グラフを描くことができます。よって、$f(x) = -x^2 + x$ は全射ではありません。

f) ある実数 $b \ge 0$ は、実数 $b^2 \ge 0$ の像です。よって $f(x) = \sqrt{x}$は全射です。

g) 実数 0 はいかなる実数の像でもありません；よって、f は全射ではありません。

h)
- 関数 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ の値域は $\mathbb{R} - \{0\}$, よってこのように定義された関数は全射ではありません.
- ある実数 $b \ne 0$ は、実数 $1 - \frac{1}{b}$ の像です。よって、関数は全射です。

i) 実数 -1 はいかなる実数の像でもありません。よって、f は全射ではありません。

いくつかの項では、なぜ関数が全射であるのかについて、論証が2通りなされていますが、この肯定をするにあたっては、この一方の論証で十分です。

1.3 全単射*

定義

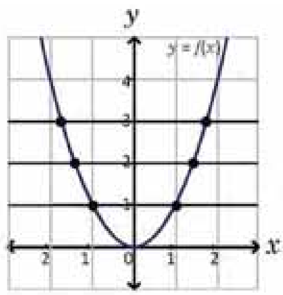
関数 f : A → B は、同時に単射かつ全射であるときに**全単射**です。

- もしある関数が単射でないときには、単射にするために定義域を制限することができます。いくつかの場合では、それを複数の方法で行うことができます。
- 関数 f が全射であるためには、値域 R_f を求めて B = R_f とすればたります。

前述の手順の結果として得られるものを、**関数 *f* の制限** と呼びます。

例

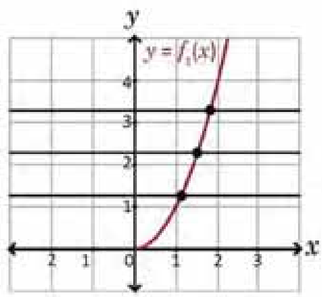
1. 関数 f : $\mathbb{R} \to [0, \infty[\ ; x \to x^2$ が全単射でないことを確かめましょう。
2. 関数 f が全単射になるように、定義域に制限をしましょう。

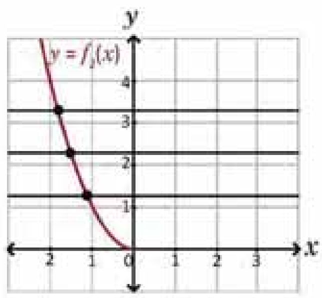


1. 水平直線がグラフを2点で交わっているので、関数は単射なく、よって全単射でもありません。

2. 第1座標が負の点を除くことにより、単射な関数のグラフが得られて、これを f_1 と称します。その定義域は [0, ∞[で、その値域は [0, ∞[です。

これにより、関数 f_1 ： $[0, \infty[\ \to [0, \infty[; x \to x^2$ は単射かつ全射となり、全単射になります。





もう1つの f の制限は、第1座標が正の点を除くことにより得られます。

これにより、関数 f_2 ： $[-\infty, 0[\ \to [0, \infty[; x \to x^2$ は、単射かつ全射となり、全単射になります。

問題

それぞれの関数が全単射であるかどうか求め、もしそうでなければ、f に対する制限を行い、全単射にしましょう。

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x - 1$

c) $f: [0, 10] \to [0, \infty[$, $x \to x^2$

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2 - 2x + 3$

e) $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$, $x \to \frac{1}{x}$

f) $f: \mathbb{R} \to [0, \infty[$, $x \to |x|$

g) $f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$, $x \to 1 + \frac{1}{1-x}$

h) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to 2^x$

i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to 2^{-x-1} + 1$

達成の目安：

1.3 ある関数が全単射であるかを判別するか、定義域と値域を制限して全単射になるようにできること。

学習の流れ：

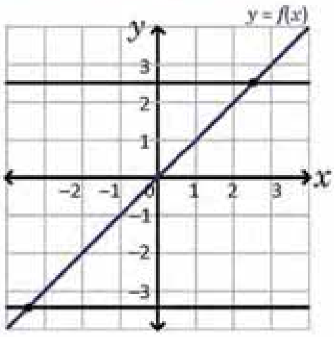
ここでは、全単射な関数の定義と、任意の関数がこれになるための条件をみたすために定義域と値域に対して課すことができる制限について説明します。「例」を、問題として学生に与えることができますが、もし項2が非常に難しいようでしたら、誘導案内しつつ行うことができます。

ねらい：

関数への制限がただ1つではないことを示すために、「例」で、元の関数を全単射にするための2通りの制限を実行します。所与の関数 (f) と、それに対してなされた制限を区別するために添え字 (f_1) を付加します。

問題の解き方：

a)



- $f(x)$ のグラフと交わる全ての水平直線は、これとただ1つの点で交わっているため、f は単射です。
- 関数 $f(x) = x$ は線形であり、$D_f = \mathbb{R}$ であることから、$R_f = \mathbb{R}$ であり、よって f は全射です。

よって, $f(x) = x$ は全単射です.

b) 全単射です。

c) 11^2 は $[0, 10]$ に原像をもたないことから、全射ではありません。
制限
$f_1: [0, 10] \rightarrow [0, 100]$
$x \rightarrow x^2$

d) $x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$, これは, 0 が原像をもたないことから、全射ではありません。
制限
$f_1: [1, \infty[\rightarrow [2, \infty[$ または $f_1:]-\infty, 1] \rightarrow [2, \infty[$
$x \rightarrow x^2 - 2x + 3$ 　　　　$x \rightarrow x^2 - 2x + 3$

e) 全単射です。

f) 単射ではありません：$f(-1) = f(1) = 1$.
制限
$f_1: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ または $f_2:]-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty[$
$x \rightarrow |x|$ 　　　　$x \rightarrow |x|$

g) 全射ではありません：1 は原像をもちません。
制限
$f_1: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$
$x \rightarrow 1 + \frac{1}{1-x}$

h) 全射ではありません：0 は原像をもちません。
制限
$f_1: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$
$x \rightarrow 2^x$

i) 全射ではありません：0 は原像をもちません。
制限
$f_1: \mathbb{R} \rightarrow]1, \infty[$
$x \rightarrow 2^{-x-1} + 1$

これらの問題を解くにあたっては、学生に対して、関数の定義域に制限を加えるために、グラフを描くよう奨めることができます。

1.4 関数の合成

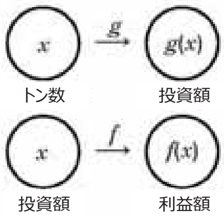
導入問題

モラサン県では、サトウキビ糖蜜の生産者が得る利益の平均値は、ドル表示で、式 $f(x) = 0.53x$ によって与えられています。ここで x は、生産者によってなされる投資額を示します。ある生産者によってなされた投資額が関数 $g(x) = 69.19x$ によって示されることが分かっています。ここで x は、使用されるサトウキビのトン数を示します。以上から、次に答えましょう：

1. もし 2 トンを使用する場合、生産者が実施する投資額はいくらになりますか?
2. もし 2 トンを使用する場合、生産者が得る利益額はいくらになりますか?
3. x トンのサトウキビを使用することにより得られる利益額を決定する関数を求めましょう。

解法

1. 投資の関数 g を用いて、$g(2) = 69.19(2) = 138.38$ が得られます。
   これにより、実施された投資額は \$138.38 になります。
2. 2 トン使用することにより実施される投資額は $g(2) = \$138.38$ です。
   利益の関数 f を用いて、
   $$f(g(2)) = f(138.38) = 0.53(138.38) = 73.3414.$$
   よって、利益額は \$ 73.3414 になります。



3. x トンを使用することにより、額 $g(x) = 69.19x$ の投資がなされます。
   $g(x)$ の投資がなされることにより、$f(g(x)) = 0.53(g(x))$ の利益が得られます。
   これにより、x トンの量から得られる利益は $f(g(x)) = 0.53(69.19x) = 36.6707x$ です。

定義

2つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ が与えられる場合、f と g の**合成**は $(f \circ g)(x)$ のように記述し、次のように定義します：

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

f と g の合成は、関数 $g(x)$ を関数 $f(x)$ で評価した結果の関数です。
記述 $f \circ g$ は、g と合成した f、と読みます。記述 $f(g(x))$ は、x の g の f、と読みます。

例

関数 $f(x) = 2x + 1$ と $g(x) = x - 3$ で、$f \circ g$ と $g \circ f$ の合成を行いましょう。

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= 2(g(x)) + 1 \quad \text{関数 } g(x) \text{ を } f(x) \text{ で評価します,} \\ &= 2(x - 3) + 1 \\ &= 2x - 6 + 1\end{aligned}$$

これにより, $(f \circ g)(x) = 2x - 5$.

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= f(x) - 3 \quad \text{関数 } f(x) \text{ を } g(x) \text{ で評価します,} \\ &= (2x + 1) - 3 \\ &= 2x - 2\end{aligned}$$

これにより, $(g \circ f)(x) = 2x - 2$.

> 一般に, $(f \circ g)(x)$ は $(g \circ f)(x)$ と等しくないことに注目しましょう：
>
> もし $f(x) = 2x + 1$ で $g(x) = x - 3$ の場合には、$(f \circ g)(x) = 2x - 5$ で $(g \circ f)(x) = 2x - 2$.
>
> この場合には $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

問題

以下の関数から $f \circ g$ の合成を行いましょう：

a) $f(x) = 4x,\ g(x) = 3x$　　b) $f(x) = -x + 2,\ g(x) = x + 5$　　c) $f(x) = \sqrt{x + 1},\ g(x) = x - 4$

d) $f(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = x + 1$　　e) $f(x) = x + 1,\ g(x) = \frac{1}{x}$　　f) $f(x) = 3^x,\ g(x) = x + 2$

g) $f(x) = x + 1,\ g(x) = 2^x$　　h) $f(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = 5^x$　　i) $f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = 4^x$

達成の目安：

1.4 2つの関数の合成関数の等式を求めることができること。

学習の流れ：

関数の合成は2回の授業で学習します。最初の授業では、合成関数の等式を求め、次回には合成関数の定義域を求めます。合成関数の等式は、一方の関数をもう一方により評価した結果です。このようにして、実数値関数どうしの演算により、合成関数が定まります。

つまずきやすい点：

ある合成関数の等式を求める際には、一方の関数をもう一方により、正しい順序で評価しなければなりません。「例」で示されるように、異なる順序で評価すると、異なる関数が得られることがあります。
「導入問題」は、掛け算を使用して解くこともできます。学生がこの考えによる解答を提出した場合には、合成関数の全てがこの方法により求められるのではないことを、明確にする必要があります。

問題の解き方：

a) $f(x) = 4x,\ g(x) = 3x$
$(f \circ g)(x) = 12x$

b) $f(x) = -x + 2,\ \ g(x) = x + 5$
$(f \circ g)(x) = -x - 3$

c) $f(x) = \sqrt{x+1}\,,\ g(x) = x - 4$
$(f \circ g)(x) = \sqrt{x-3}$

d) $f(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = x + 1$
$(f \circ g)(x) = \frac{1}{x+1}$

e) $f(x) = x + 1,\ g(x) = \frac{1}{x}$
$(f \circ g)(x) = \frac{1}{x} + 1$

f) $f(x) = 3^x,\ g(x) = x + 2$
$(f \circ g)(x) = 3^{x+2}$

g) $f(x) = x + 1,\ g(x) = 2^x$
$(f \circ g)(x) = 2^x + 1$

h) $f(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = 5^x$
$(f \circ g)(x) = \frac{1}{5^x}$

i) $f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = 4^x$
$(f \circ g)(x) = \sqrt{4^x} = \sqrt{2^{2x}} = 2^{\frac{2x}{2}} = 2^x$

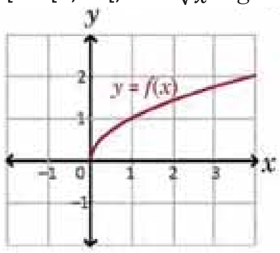
この授業では、ある関数をもう一方の関数で評価するという事のみを取り扱い、これにより「達成の目安」では合成関数の等式を求めるということについて触れられていますが、合成関数は、次回の授業でのように定義域を計算することによりきちんと求まります。

1.5 合成関数の定義域*

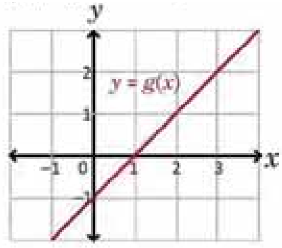
導入問題

関数 f： $[0, \infty[\to [0, \infty[; x \to \sqrt{x}$ と g : $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}; x \to x - 1$ のグラフがあります。

$D_f = [0, \infty[$
$R_f = [0, \infty[$



$D_g = \mathbb{R}$
$R_g = \mathbb{R}$

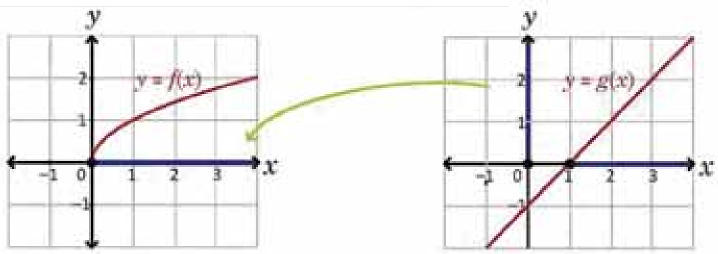


関数の合成は $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ のように定義されています、つまり $g(x)$ は $f(x)$ で評価されます。上記を踏まえて、次の問題を解いてみましょう。
a) $f(g(x))$ が定義されるように $g(x)$ がとりうる値の区間を求めましょう。
b) $g(x)$ が前項の区間にあるように x がとるべき値の区間はどれになるでしょうか?

解法

a) $g(x)$ がとれる値は、$f(x)$ の定義域になければなりません。
これにより、求めるべき区間は$[0, \infty[$ です。

b) グラフから、区間を決定します。



関数 $g(x)$ では、区間$[0, \infty[$ の値は、区間 $[1, \infty[$ の値を評価することにより得られます。

よって、$g(x)$ が区間 $[0, \infty[$ にあるためには、x は値を区間 $[1, \infty[$ でとる必要があります。

定義

f と g の**合成関数の定義域**は、集合：$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ により与えられます。

合成関数 $(f \circ g)(x)$ の定義域は、$g(x)$ が D_f ($f(x)$ の定義域) に属している上で、D_g ($g(x)$ の定義域) に属する値です。

例

関数：$f(x) = \sqrt{x-9}$, 定義域が $D_f = [9, \infty[$, と関数 $g(x) = 3x$, 定義域が $D_g = \mathbb{R}$, を用いて、合成関数 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{3x-9}$ の定義域を求めましょう。

それぞれの定義域は $D_f = [9, \infty[$ と $D_g = \mathbb{R}$ となっています。$D = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ を求めるにあたっては、$g(x) \geq 9$ が満たされるのであれば、$g(x)$ は $Df = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 9\}$ の値$_{f \circ g}$ であることになり、これを代入して $3x \geq 9$ が得られ、これにより $x \geq 3$ よって $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid x \geq 3\}$。よって, $D_{f \circ g} = [3, \infty[$。

問題

合成関数 $(f \circ g)(x)$ の定義域を求めましょう：

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to 3x + 1$
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to 2x + 4$

b) $f: [3, \infty[\to [-1, \infty[$
$x \to x^2 - 12x + 35$
$g: [0, \infty[\to [0, \infty[$
$x \to \sqrt{x}$

c) $f: [-1, \infty[\to [-1, \infty[$
$x \to x^2 - 1$
$g: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$
$x \to \frac{1}{x}$

d) $f: [0, \infty[\to [0, \infty[$
$x \to \sqrt{x}$
$g: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$
$x \to \frac{1}{x}$

達成の目安：

1.5 定義を利用して、合成関数の定義域を求めることができること。

学習の流れ：

今回は、学生は合成関数の定義域について学習しますが、これにより学生は、まだそのものの形で学習していない関数でも、既知の関数の合成関数として得られるもので定義域を確定することが可能になります。もし「初期問題」が学生にとって非常に難しいのであれば、最初の項について説明することができます。

ねらい：

「導入問題」は、ある合成関数の定義域を2段階で求めることを提起しています。「解答」は、合成関数の定義域の確定をグラフを用いて行う方法を説明しています。一方「例」では、区間と不等式を用いる代数的方法を説明しています。

問題の解き方：

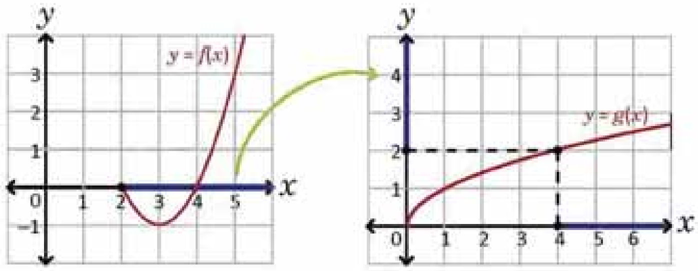
a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to 3x + 1$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to 2x + 4$

$D_f = \mathbb{R},\ D_g = \mathbb{R}$
$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

b) $f: [2, \infty[\to [-1, \infty[$
$x \to x^2 - 6x + 8$

$g: [0, \infty[\to [0, \infty[$
$x \to \sqrt{x}$



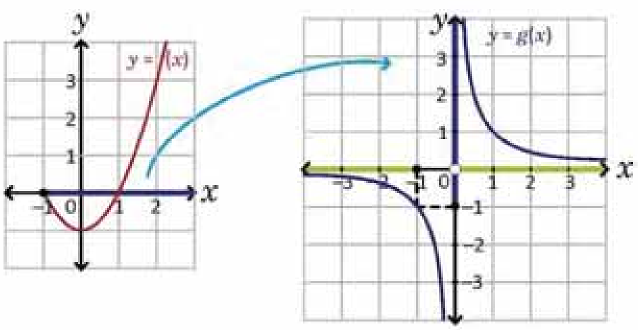
$D_{f \circ g} = [4, \infty[$

正誤表： 教科書の問題では、関数 f のデータを以下の通り修正する必要があります。

$f: [2, \infty[\to [-1, \infty[$
$x \Rightarrow x^2 - 6x + 8.$

c) $f: [-1, \infty[\to [-1, \infty[$
$x \to x^2 - 1$

$g: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$
$x \to \frac{1}{x}$



$D_{f \circ g} =]-\infty, -1] \cup]0, \infty[$

d) $f: [0, \infty[\to [0, \infty[$
$x \to \sqrt{x}$

$g: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$
$x \to \frac{1}{x}$

$D_f = [0, \infty[,\ D_g = \mathbb{R} - \{0\}$

$D_{f \circ g} = \left\{x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid \frac{1}{x} \geq 0\right\}$

$\frac{1}{x} \geq 0 \Rightarrow x > 0$

$\Rightarrow D_{f \circ g} =]0, \infty[$

1.6 逆関数

導入問題

関数 $f(x) = 2x + 2$ y $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$ が与えられている場合に、次の関数の合成を行いましょう：

a) $(f \circ g)(x)$　　　b) $(g \circ f)(x)$

解法

a) $(f \circ g)(x)$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= 2(g(x)) + 2\\ &= 2\left(\frac{1}{2}x - 1\right) + 2\\ &= x - 2 + 2\\ &= x\end{aligned}$$

よって, $(f \circ g)(x) = x$.

b) $(g \circ f)(x)$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x))\\ &= \frac{1}{2}(2x + 2) - 1\\ &= x + 1 - 1\\ &= x\end{aligned}$$

よって, $(g \circ f)(x) = x$.

定義

f：A → B がある関数で, ここでもし関数 g：B → A が以下を満たす場合に：
1. 全ての B にある x の値で $(f \circ g)(x) = x$.
2. 全ての A にある x の値で $(g \circ f)(x) = x$.

g を f の **逆関数** と呼び、f^{-1} で表します。

逆関数 f^{-1} は $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$ を満たし、逆関数の等式を求めるには $y = f^{-1}(x)$ を満たす等式 $f(y) = x$ を移項します。

例

$f(x) = 2x + 2$ の逆関数を求めましょう。

等式を書きましょう　⇒　$f(y) = x$,

y を $f(x) = 2x + 2$ で評価しましょう　⇒ $2y + 2 = x$,

移項して次が得られます：　⇒　$y = \frac{1}{2}x - 1$.

したがって、$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 1$ となります。

関数 $h(x) = x$ のことを **恒等関数** と呼びます。

ある関数 l：A → B に対して、恒等関数は次の条件を満たします：

1. もし h：B → B; $x \to x$ ならば、$(h \circ l)(x) = l(x)$.

2. もし h：A → A; $x \to x$ ならば、$(l \circ h)(x) = l(x)$.

問題

1. 以下の関数の逆関数の等式を求めましょう。

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to 5x - 1$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^3$

c) $f: \mathbb{R} \to [1, \infty[$, $x \to (x-2)^2 + 1$

d) $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$, $x \to \frac{1}{x}$

e) $f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{1\}$, $x \to \frac{x+1}{x-1}$

f) $f: [0, \infty[\to [0, \infty[$, $x \to \sqrt{x}$

g) $f: [0, \infty[\to [1, \infty[$, $x \to x^2 + 1$

h) $f: [1, \infty[\to [0, \infty[$, $x \to (x-1)^2$

2. 関数の合成を行うことにより、前問題のそれぞれの項で見つけた関数が、逆関数であることを確かめましょう。

$(f \circ f^{-1})(x) = x$ で $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ であることを確かめましょう。

ユニット5

125

達成の目安：

1.6 与えられた関数の逆関数の等式を求めることができること。

学習の流れ：

最初に、逆関数の等式について学習しますが、これは合成関数の等式を基にして定義されます。さらに、この演算においては、一つの不変の要素である恒等関数が存在することが示されます。これは足し算における 0 、掛け算における 1 のようなものです。

ねらい：

「導入問題」では、互いに逆関数である2つの関数の等式については、それらの合成関数は恒等関数になることを確認します。追加情報では、恒等関数と、それの合成演算における不変要素としての働きについて説明されます。

問題の解き方：

1a) $f(y) = 5y - 1 = x$

$$y = \frac{x+1}{5}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$$

1b) $f(y) = y^3 = x$

$$y = \sqrt[3]{x}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

1c) $f(y) = (y-2)^2 + 1 = x$

$$y - 2 = \sqrt{x-1}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 2$$

1d) $f(y) = \frac{1}{y} = x$

$$y = \frac{1}{x}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$$

1e) $f(y) = \frac{y+1}{y-1} = x$

$$y + 1 = x(y-1)$$

$$y - xy = -x - 1$$

$$y(1-x) = -x - 1$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

1f) $f(y) = \sqrt{y} = x$

$y \geq 0$ について定義される。

$$(\sqrt{y})^2 = x^2$$

$$y = x^2$$

$$f^{-1}(x) = x^2$$

1g) $f(y) = y^2 + 1 = x$

$y \geq 0$ について定義される。

$$y = \sqrt{x-1}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$$

1h) $f(y) = (y-1)^2 = x$

$y \geq 1$ について定義される。

$$\Rightarrow \quad y - 1 = \sqrt{x}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 1$$

2a) $f(f^{-1}(x)) = 5\left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}\right) - 1$

$$= x + 1 - 1 = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{5}(5x - 1) + \frac{1}{5}$$

$$= x - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = x$$

2b) $f(f^{-1}(x)) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$

$$f^{-1}(f(x)) = \sqrt[3]{x^3} = x$$

2c) $f^{-1}(f(x)) = \sqrt{(x-2)^2 + 1 - 1} + 2$

$$= \sqrt{(x-2)^2} + 2$$

$$= x - 2 + 2$$

$$= x$$

$$f(f^{-1}(x)) = (\sqrt{x-1} + 2 - 2)^2 + 1$$

$$= (\sqrt{x-1})^2 + 1$$

$$= x - 1 + 1 = x$$

2d) $f(f^{-1}(x)) = f(f^{-1}(x))$

$$= \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1 \div \frac{1}{x}$$

$$= 1(x) = x$$

2e) $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x))$

$$= \frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{2}{x-1}}$$

$$= \frac{2x}{x-1} \div \frac{2}{x-1}$$

$$= \frac{2x}{x-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

$$= x$$

2f) $f(f^{-1}(x)) = \sqrt{x^2} = x$

$$f^{-1}(f(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$$

2g) $f(f^{-1}(x)) = (\sqrt{x-1})^2 + 1$

$$= x - 1 + 1 = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2 + 1 - 1}$$

$$= \sqrt{x^2} = x$$

2h) $f(f^{-1}(x)) = (\sqrt{x} + 1 - 1)^2$

$$= (\sqrt{x})^2$$

$$= x$$

$$f^{-1}(f(x)) = \sqrt{(x-1)^2} + 1$$

$$= x - 1 + 1$$

$$= x$$

逆関数の値域については次回の授業で学習しますが、特に項 f)、g)、h) では、変数 y がとる値が f の定義域にあることに注目する必要があります。

次回の授業では、全単射性が逆関数の存在と関連づけられます。

1.7 逆関数の存在とその定義域と値域

導入問題

a) 関数 $f(x) = 2x + 2$ と $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 1$ を同じ座標平面に描き、もし点 (a, b) が f のグラフ上にあれば、点 (b, a) は f^{-1} のグラフ上にあることに注目しましょう。

点 (a, b) と $(a, -b)$ は、直線 $y = x$ に関して対称です。

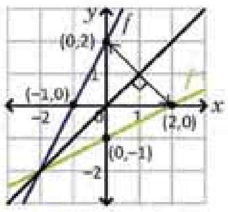
b) (a, b) を f のグラフ上の点として、もし f が逆関数 f^{-1} をもつのであれば、点 (b, a) は f^{-1} のグラフ上にあることを証明しましょう。

c) 関数 $f(x) = x^2$ をグラフ上に表し、次に $f(x)$ 上のそれぞれの点 (a, b) に対して (b, a) のグラフを描き、これらの点を結ぶグラフを描きましょう。

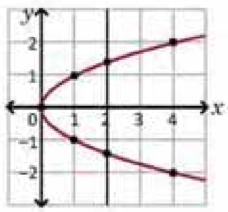
d) c) で得られた曲線は、ある関数のグラフに該当しますか?

解法

a) f と f^{-1} のグラフは直線 $y = x$ に関して対称であることが観察されます。よって、もし (a,b) が f のグラフ上の点であれば、(b, a) は f^{-1} 上の点です。



b) (a, b) は、ただ $f(a) = b$ であるときに限って f のグラフ上の点です。
前の等式の逆関数を求めることにより、$f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b)$ がえられます。
こうして、逆関数の定義から次が得られます： $a = f^{-1}(b)$.
よって、もし (a, b) が f のグラフ上の点であれば、(b, a) は f^{-1} のグラフ上の点になります。



c) いくつかの点 (b,a) をグラフで表します：$(0, 0), (1, 1), (1, -1), (4, 2), (4, -2)$.
これらの点を結ぶ曲線を描きます。

d) これにより得られた曲線は、特定の関数のグラフには該当しません。なぜなら、曲線を2点で縦に交わる縦方向の直線が存在するからです。

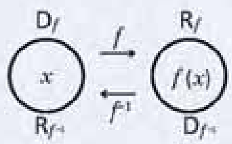
定義

関数 f：A B は、ただそれが全単射であるときに限って、逆関数をもちます。授業 1.3 の内容から、ある関数は、全単射にするために制限を加えることができ、これにより逆関数を得ることができます。

もし (a, b) が $f(x)$ のグラフ上の点であれば、(b, a) は $f^{-1}(x)$のグラフ上の点になります。

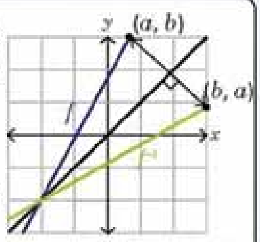
逆関数の定義域は、元の関数の値域であり、額関数の値域は、元の関数の定義域である：

$D_{f^{-1}} = R_f$ y $R_{f^{-1}} = D_f$.



f^{-1}のグラフは f のそれに対して対称であり、対称軸を $y = x$ にもちます。

点 (a, b) は点 (b, a) に対称です。



問題

次の各項で、逆関数と、その定義域と値域を求めましょう。また、同じ座標平面に関数と逆関数それぞれのグラフを描きましょう。項 d) では、関数に対して一定の制限を加えましょう。

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to 3x - 2$

b) $f: \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R} - \{0\}$
$x \to \frac{1}{x+1}$

c) $f:]-\infty, 0] \to [0, \infty[$
$x \to x^2$

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to (x + 1)^2 - 4$

達成の目安：

1.7　定義域と値域を分析して、関数から逆関数を求めることができること。

学習の流れ：

この授業では、関数は、それが全単射であるときのみに限って、逆関数をもつということを明確にします。さらに、ある関数とその逆関数のグラフの間の、恒等直線に関しての対称性の関係に注目します。これは、次の課で、指数関数と対数関数を関係づけるときに使用します。

ねらい：

「導入問題」では、項 a) で、学生は関数のグラフどうしの対称性を視覚化し、後に項 b) で、観察したことを確かなものにしなければなりません。最後の方の項では、単射でない関数は、逆関数を求めることが不可能であることを確認します。

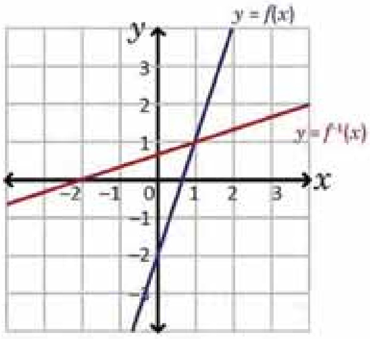
問題の解き方：

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to 3x - 2$

$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

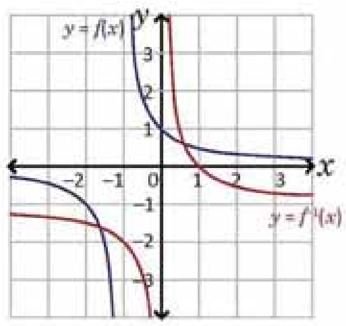


b) $f: \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R} - \{0\}$

$x \to \frac{1}{x+1}$

$f^{-1}: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{-1\}$

$x \to \frac{1}{x} - 1$

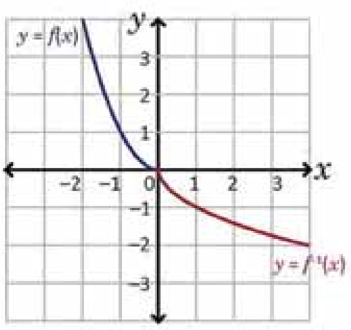


c) $f:]-\infty, 0] \to [0, \infty[$

$x \to x^2$

$f^{-1}: [0, \infty[\to]-\infty, 0]$

$x \to -\sqrt{x}$



d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

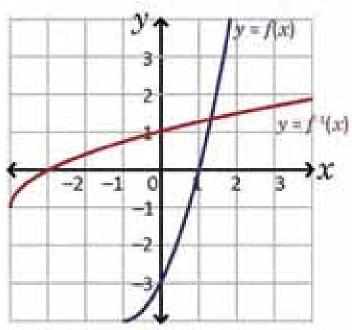
$x \to (x+1)^2 - 4$

$f_1: [-1, \infty[\to]-4, \infty[$

$x \to (x+1)^2 - 4$

$f_1^{-1}:]-4, \infty[\to [-1, \infty[$

$x \to \sqrt{x+4} - 1$



1.8 学んだことで練習しましょう

1.以下の各項で、合成関数 $(f\circ g)(x)$ と $(g\circ f)(x)$ の等式を求めましょう：

a) $f(x) = -x + 5,\ g(x) = -x - 2$

b) $f(x) = x^2 + 4,\ g(x) = -x + 1$

c) $f(x) = \sqrt{-x+1}\,,\ g(x) = 4 - x^2$

d) $f(x) = 2^x,\ g(x) = x^2 - x$

2.以下の関数の定義域を求めましょう：

a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3}$

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x^2+1}}$

e) $f(x) = \sqrt{3^x - 9}$

f) $f(x) = 3^{\sqrt{x}}$

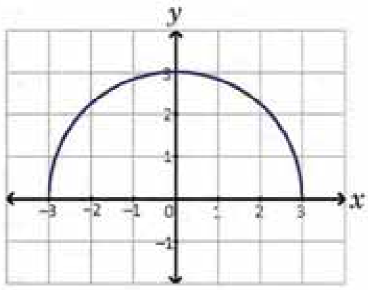
それぞれの関数を、一種の合成関数として書きましょう。

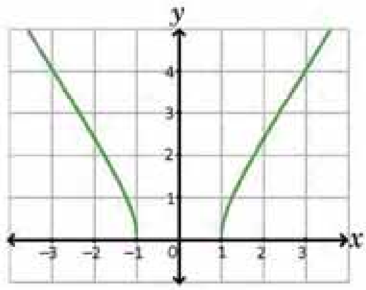
3.以下の関数のグラフが描かれています：

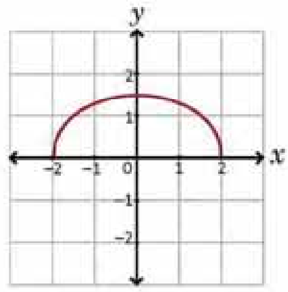
$f_1(x) = \sqrt{9 - x^2}$

$f_2(x) = \sqrt{2x^2 - 2}$

$f_3(x) = \sqrt{2 - \dfrac{x^2}{2}}$







それぞれについて：

a) 定義域を、関数が定義されているところでの値の集合として、求めましょう。

b) 単射になるように、関数の定義域を制限しましょう。

c) 項 b) で求まった定義域をもとに、関数が全射になるように値域を求めましょう。

d) 関数のグラフを、b) と c) で制限した定義域と値域で描きましょう。

4. 問題3で再定義した関数をもとに、以下を行いましょう：

a) それぞれの関数について、逆関数の等式を求めましょう。

b) 逆関数の定義域と値域を求めましょう。

c) 同一の座標平面に f と f^{-1} のグラフを描きましょう。

5. 点 P(a, b)、Q(b, a) と直線 l： $y = x$ を想定して、$d(\mathrm{P}, l) = d(\mathrm{Q}, l)$ が成立することを証明しましょう。

6. 以下の関数とその逆関数が与えられたとして：

$f_1: [0, \infty[\to [0, \infty[;\ x \to x^2$

$f_1^{-1}: [0, \infty[\to [0, \infty[;\ x \to \sqrt{x}$

$f_2: [-1, \infty[\to [0, \infty[;\ x \to x + 1$

$f_2^{-1}: [0, \infty[\to [-1, \infty[;\ x \to x - 1$

以下を行いましょう：

a) 関数 $g_1(x) = (f_1 \circ f_2)(x)$ の等式を求めましょう。

b) 関数 $g_2(x) = (f_2^{-1} \circ f_1^{-1})(x)$ の等式を求めましょう。

c) $(g_1 \circ g_2)(x)$ と $(g_2 \circ g_1)(x)$ で関数の合成を行いましょう。

d) この場合には、$g_1(x) = (f_1 \circ f_2)(x)$ の逆関数はどれになりますか?

e) f_1 と f_2 を2つの任意の関数として、関数 $f_1^{-1}, f_2^{-1}, f_1\circ f_2$ y $f_2^{-1}\circ f_1^{-1}$ が定められているとします。$f_2^{-1}\circ f_1^{-1}$ は $f_1 \circ f_2$ の逆関数であることを証明しましょう。

ユニット5

達成の目安：

1.8　全単射な関数と逆関数に関する問題を解答できること。

問題の解き方：

1a) $(f\circ g)(x) = x + 7,\ (g\circ f)(x) = x - 7$

1b) $(f\circ g)(x) = x^2 - 2x + 5,\ (g\circ f)(x) = -x^2 - 3$

1c) $(f\circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 3}\ ,\ (g\circ f)(x) = x + 3$

1d) $(f\circ g)(x) = 2^{x^2 - x},\ (g\circ f)(x) = 4^x - 2^x$

問題 2 の各項は、$f(x) = (f_1\circ f_2)(x)$ で表せます。

2a) $f_1(x) = \sqrt{x},\ f_2(x) = 1 - x^2$

$D_{f_1} = [0, \infty[$

$0 \le 1 - x^2 \Rightarrow x^2 \le 1$

$\Rightarrow -1 \le x \le 1$

$\Rightarrow D_f = [-1, 1]$

2b) $f_1(x) = \frac{1}{x},\ f_2(x) = x^2 - 2x - 3$

$D_{f_1} = \mathbb{R} - \{0\}$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$

$\Rightarrow x = 3,\ x = -1$

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$

2c) $f_1(x) = \sqrt{x},\ f_2(x) = \frac{1}{x}$

$D_{f_1} = [0, \infty[$

$\Rightarrow 0 \le \frac{1}{x} \Rightarrow 0 < x$

$\Rightarrow D_f =]0, \infty[$

2d) $f_1(x) = \sqrt{\frac{1}{x}},\ f_2(x) = x^2 + 1$

$D_{f_1} =]0, \infty[$

$0 < x^2 + 1$

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

2e) $f_1(x) = \sqrt{x},\ f_2(x) = 3^x - 9$

$D_{f_1} = [0, \infty[$

$0 \le 3^x - 9 \Rightarrow 2 \le x$

$D_f = [2, \infty[$

2f) $f(x) = 3^{\sqrt{x}}$

$D_f = [0, \infty[$

学生は、前学年で触れた不等式の解法を利用するべきです。項　2b)　では、区間の結合としても解答を書くことができます。

3a) $D_{f_1} = [-3, 3]$

$D_{f_2} =]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$

$D_{f_3} = [-2, 2]$

3b) $D_{f_1} = [0, 3]$

$D_{f_2} = [1, \infty[$

$D_{f_3} = [0, 2]$

3c) $R_{f_1} = [0, 3]$

$R_{f_2} = [0, \infty[$

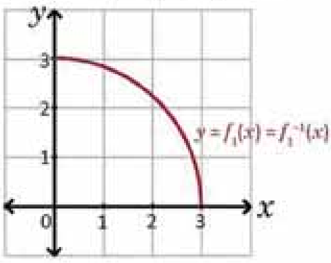
$R_{f_3} = [0, \sqrt{2}]$

3d) 問題4 の解答を参照します。

4a) $f_1^{-1}(x) = \sqrt{9 - x^2}$,

4b) $D_{f_1^{-1}} = [0, 3],\ R_{f_1^{-1}} = [0, 3]$

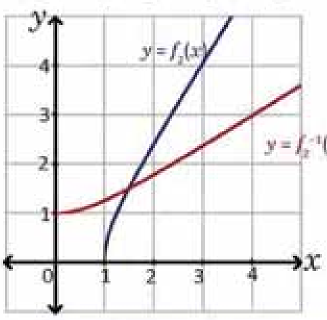
4c)



4a) $f_2^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x^2}{2} + 1}$

4b) $D_{f_2^{-1}} = [0, \infty[,\ R_{f_2^{-1}} = [1, \infty[$

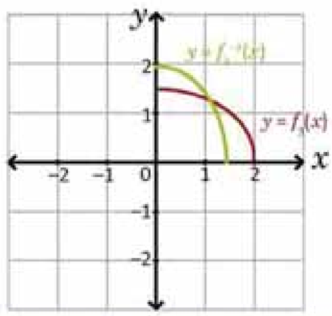
4c)



4a) $f_3^{-1}(x) = \sqrt{4 - 2x^2}$,

4b) $D_{f_3^{-1}} = [0, \sqrt{2}],\ R_{f_3^{-1}} = [0, 2]$

4c)



5. $d(P, l) = \frac{|a - b|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|b - a|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = d(Q, l)$

問題 4 の解答は、問題 3 の制限に影響を受けます。

6a) $g_1(x) = (f_1\circ f_2)(x) = (x + 1)^2$.

6b) $g_2(x) = (f_2^{-1}\circ f_1^{-1})(x) = \sqrt{x} - 1$.

6c) $x \ge 0$ で $(g_1\circ g_2)(x) = x$, また $x \ge -1$ で $(g_2\circ g_1)(x) = x$.

6d) $g_2(x) = (f_2^{-1}\circ f_1^{-1})(x) = \sqrt{x} - 1$.

6e) $((f_1\circ f_2)\circ(f_2^{-1}\circ f_1^{-1}))(x) = (f_1\circ f_2)((f_2^{-1}\circ f_1^{-1})(x)) = (f_1\circ f_2)(f_2^{-1}(f_1^{-1}(x))) = f_1(f_2(f_2^{-1}(f_1^{-1}(x))))$

$= f_1(f_1^{-1}(x))$, これは f_2 と f_2^{-1} が互いに逆関数であることによります。

$= x$, これは f_1 と f_1^{-1} が互いに逆関数であることによります。

同様に、$((f_2^{-1}\circ f_1^{-1})\circ(f_1\circ f_2))(x) = x$ も満たされます。

よって、$f_2^{-1}\circ f_1^{-1}$ は $f_1\circ f_2$ の逆関数です。

問題 3b) では、定義域の制限が唯一の制限ではありません。

レッスン 2 対数関数

2.1 対数の定義

導入問題

次の等式を満たすには指数 x はどのような値をとるでしょうか。

a) $2^x = 8$　　b) $3^x = \frac{1}{27}$

解法

a) $2^x = 8$

$2^x = 2^3$　8 を 2 の累乗で書きます

$x = 3.$

したがって、$x = 3$。

b) $3^x = \frac{1}{27}$

$3^x = 27^{-1}$

$3^x = (3^3)^{-1}$　底が同じ累乗で書きます

$3^x = 3^{-3}$

$x = -3.$

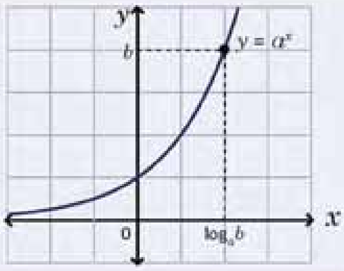
したがって、$x = -3$。

定義

a、b および x を $b > 0$、$a > 0$ および $a \neq 1$ となるような実数とすれば、底を a とする数 b の**対数**は次のように定義されます：

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

これは、対数とは数 b を得るために**底**と呼ばれる数 a を累乗しなければならない指数であることを意味します。

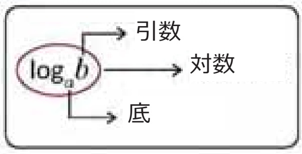


例

導入問題では次のようになります。

a) $2^3 = 8 \Leftrightarrow \log 8 = 3$ であり、2 を底とする 8 の対数イコール3 と読みます。

b) $3^{-3} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow \log_3 \frac{1}{27} = -3$ であり、3 を底とする $\frac{1}{27}$ の対数イコール -3 と読みます。



問題

1.次の各々の累乗を対数で書きなさい。

a) $2^2 = 4$　b) $3^4 = 81$　c) $10^{-1} = \frac{1}{10}$　d) $4^{-2} = \frac{1}{16}$

e) $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$　f) $25^{\frac{3}{2}} = 125$　g) $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$　h) $2^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{32}}$

2.それぞれの対数を累乗で書きなさい。

a) $\log_2 64 = 6$　b) $\log_5 25 = 2$　c) $\log_5 \frac{1}{5} = -1$　d) $\log_3 \frac{1}{27} = -3$

e) $\log_4 32 = \frac{5}{2}$　f) $\log_3 \sqrt[4]{3} = \frac{1}{4}$　g) $\log_4 \sqrt{8} = \frac{3}{4}$　h) $\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$

128

達成の目安：

2.1　累乗の等式を対数の等式で、および対数の等式を累乗の等式で表しなさい。

流れ：

前のユニットでは、指数が任意の実数である累乗について学習しました。ここでは、1以外の正の実数の累乗から、ある数の対数を定義することについて学びます。

ねらい：

導入問題では、生徒は等式を満たす指数の値を求めなければなりません。このプロセスは、ある数の対数を求めるのに後で役立ちます。問題では、生徒は累乗の定義と対数の定義を関係づけなければなりません。

問題の解き方：

1a) $\log_2 4 = 2$

1b) $\log_3 81 = 4$

1c) $\log_{10} \frac{1}{10} = -1$

1d) $\log_4 \frac{1}{16} = -2$

1e) $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$

1f) $\log_{25} 125 = \frac{3}{2}$

1g) $\log_2 \sqrt[3]{4} = \frac{2}{3}$

1h) $\log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{32}} = -\frac{5}{3}$

2a) $2^6 = 64$

2b) $5^2 = 25$

2c) $5^{-1} = \frac{1}{5}$

2d) $3^{-3} = \frac{1}{27}$

2e) $4^{\frac{5}{2}} = 32$

2f) $3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$

2g) $4^{\frac{3}{4}} = \sqrt{8}$

2h) $2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

2.2 ある数の対数

導入問題

1.以下の対数の値を計算しなさい：

a) $\log_2 16$　　b) $\log_3 \frac{1}{9}$

2.$a > 0$ かつ $a \neq 1$であれば $\log_a a^c = c$ となることを証明しなさい。

解法

a) $\log_2 16$

$x = \log_2 16$ とします。

$x = \log_2 16 \Leftrightarrow 2^x = 16$　対数の定義を応用します。対数。

$\Leftrightarrow 2^x = 2^4$　方程式を解きます。

$\Leftrightarrow x = 4.$

b) $\log_3 \frac{1}{9}$

$x = \log_3 \frac{1}{9}$ とします。

$x = \log_3 \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{9}$　対数の定義を適用します。

$\Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{3^2}$　9を3の累乗で書きます。

$\Leftrightarrow 3^x = 3^{-2}$　負の指数を使って書き直します。

$\Leftrightarrow x = -2.$

2. $x = \log_a a^c \Leftrightarrow a^x = a^c$となります。したがって、$x = c$。

まとめ

対数 logaritmo $x = \log_a b$ の値を計算することは、$a^x = b$を満たす指数の値を求めることです。

一般的に、対数の値を求めるには、次のステップを実行します：

1. 累乗で書きます $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$。
2. 方程式 $a^x = b$ を解きます。

$b = a^c$ であれば $\log_a b = c$となり、したがって $a > 0$ かつ $a \neq 1$であれば $\log_a a^c = c$ となります。

$a^1 = a \Leftrightarrow \log_a a = 1$
$a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0$

例

対数 $\log_4 64$ の値を求めなさい。

解答1
$x = \log_4 64$ とし、よって $x = \log_4 64 \Leftrightarrow 4^x = 64 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^6 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$ となります。

解答2
性質を利用して $\log_a a^c = c$： $\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$ となります。

問題

以下の対数の値を求めなさい：

a) $\log_{10} 10$　b) $\log_3 1$　c) $\log_2 2^{100}$　d) $\log_2 32$

e) $\log_9 81$　f) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$　g) $\log_8 4$　h) $\log_{25} 125$

i) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}$　j) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$　k) $\log_4 \frac{1}{2}$　l) $\log_{\frac{1}{3}} 9$

ユニット5

達成の目安：

2.2　ある数を累乗で表すことでその対数を計算する。

流れ：

指数方程式を解くことが関係する定義を通じて対数の値を求めるプロセスを提示し、また底が対数の底であるような累乗で引数を書く別の方法を示します。

ねらい：

導入問題の2は、因数分解のみを利用するので、ある数の対数を求めるためのプロセスの簡略化が可能になりますが、底が分数であるか対数の引数よりも大きい場合には、この性質の欠点が現れます。したがって、そのような場合には定義を用いて処理するのがよいです。

問題の解き方：

a) $\log_{10}10 = \log_{10}10^1 = 1$

b) $\log_3 1 = \log_3 3^0 = 0$

c) $\log_2 2^{100} = 100$

d) $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$

e) $\log_9 81 = \log_9 9^2 = 2$

f) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4} = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2$

g) $x = \log_8 4 \Leftrightarrow 8^x = 4$
$\Leftrightarrow (2^3)^x = 2^2$
$\Leftrightarrow 2^{3x} = 2^2$
$\Leftrightarrow 3x = 2$
$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

h) $x = \log_{25}125 \Leftrightarrow 25^x = 125$
$\Leftrightarrow (5^2)^x = 5^3$
$\Leftrightarrow 5^{2x} = 5^3$
$\Leftrightarrow 2x = 3$
$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

i) $x = \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\Leftrightarrow (2^{-1})^x = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}$
$\Leftrightarrow 2^{-x} = 2^{-\frac{1}{2}}$
$\Leftrightarrow -x = -\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

j) $x = \log_3\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}$
$\Leftrightarrow 3^x = 3^{-\frac{1}{2}}$
$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

k) $x = \log_4\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4^x = \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow (2^2)^x = 2^{-1}$
$\Leftrightarrow 2^{2x} = 2^{-1}$
$\Leftrightarrow 2x = -1$
$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

l) $x = \log_{\frac{1}{3}}9 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$
$\Leftrightarrow (3^{-1})^x = 3^2$
$\Leftrightarrow 3^{-x} = 3^2$
$\Leftrightarrow -x = 2$
$\Leftrightarrow x = -2$

2.3 対数の性質*

導入問題

1.次の各項の演算と対数の答えを比較しなさい。

a) $\log_2 4 + \log_2 8$ と $\log_2 32$ b) $\log_2 8 - \log_2 4$ と $\log_2 2$ c) $3\log_2 4$ と $\log_2 4^3$ d) $\log_2 8^2$ と $\log_2 4^3$

2.次の性質を証明しなさい。

a) $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$
b) $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$
c) $b\log_a M = \log_a M^b$
d) $\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$

解法

1. a) $\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 2^2 + \log_2 2^3$ と $\log_2 32 = \log_2 2^5$
$= 2 + 3$ $= 5$
$= 5$

したがって、答えは同じです。
$\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 (4 \times 8) = \log_2 32$ であることに注目します。

b) $\log_2 8 - \log_2 4 = \log_2 2^3 - \log_2 2^2$ と $\log_2 2 = 1$
$= 3 - 2$
$= 1$

したがって、答えは同じです。
$\log_2 8 - \log_2 4 = \log_2 \frac{8}{4} = \log_2 2$ であることに注目します。

c) $3\log_2 4 = 3\log_2 2^2$ と $\log_2 4^3 = \log_2 (2^2)^3$
$= 3(2)$ $= \log_2 2^6$
$= 6$ $= 6$

したがって、答えは同じです。
$3\log_2 4 = \log_2 4^3 = 6$ であることに注目します。

d) $\log_2 8^2 = \log_2 2^6$ と $\log_2 4^3 = \log_2 2^6$
$= 6$ $= 6$

したがって、答えは同じです。$8^2 = 4^3$ であることに注目します。

2. $x = \log_a M$ かつ $y = \log_a N$ とすると、定義により $M = a^x$ かつ $N = a^y$ となります。

a) 積は $MN = a^x a^y = a^{x+y}$ となります。
対数で書くと： $\log_a MN = x + y$
したがって、$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$。

b) 商は $\frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ となります。
対数の定義により $\log_a \frac{M}{N} = x - y$
したがって、$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$。

c) 累乗は $M^b = (a^x)^b = a^{bx}$ となります。
対数で $bx = \log_a M^b$ に書き直します。
したがって、$b\log_a M = \log_a M^b$。

この場合、$x = \log_a M$ かつ $x = \log_a N$ となります。
よって $M = a^x$ かつ $N = a^x$
したがって、$M = N$。

まとめ

a、M および N を正の数とし、$a \neq 1$ とすると、対数は次の性質を満たします：

1. $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$
2. $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$
3. $b\log_a M = \log_a M^b$
4. $\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$

注目：
$(\log_2 4)^3 = 2^3 = 8$ であり、また $\log_2 4^3 = 3\log_2 4 = 3(2) = 6$ です。
$(\log_2 4)^3 \neq \log_2 4^3$ です。
したがって、一般的には $(\log_a M)^b \neq \log_a M^b$ となります。

問題

以下の演算をしなさい。

a) $\log_4 2 + \log_4 8$ b) $\log_6 12 + \log_6 18$ c) $\log_2 96 - \log_2 3$ d) $\log_2 6 - \log_2 24$

e) $\log_2 \frac{12}{5} + \log_2 \frac{5}{3}$ f) $\log_3 \frac{11}{54} + \log_3 \frac{2}{33}$ g) $\log_3 \frac{6}{7} - \log_3 \frac{2}{21}$ h) $\log_4 \frac{3}{10} - \log_4 \frac{12}{5}$

i) $3\log_9 3 + \log_9 243$ j) $5\log_4 8 + 3\log_4 32$ k) $2\log_2 54 - 3\log_2 18$ l) $2\log_{[illegible]} 12 - 2\log_{[illegible]} 18$

130

達成の目安：

2.3 対数の演算を、その性質を利用してしなさい。

流れ：

ここでは、対数方程式を解くのに役立つ対数間の演算を行います。d)における性質は、関数としての対数の単射性に言及しています。

ねらい：

導入問題は、特殊なケースおよび一般的なケースでの対数の性質を取りあげています。結論では、問題ですぐ適用できるようにそれらの性質が書かれています。

問題の解き方：

a) $\log_4 2 + \log_4 8 = \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2$

b) $\log_6 12 + \log_6 18 = \log_6(2^2 \times 3 \times 2 \times 3^2)$
$= \log_6(2^3 \times 3^3)$
$= \log_6 6^3$
$= 3$

c) $\log_2 96 - \log_2 3 = \log_2 \frac{96}{3}$
$= \log_2 32$
$= \log_2 2^5$
$= 5$

d) $\log_2 6 - \log_2 24 = \log_2 \frac{6}{24}$
$= \log_2 \frac{1}{4}$
$= \log_2 2^{-2}$
$= -2$

e) $\log_2 \frac{12}{5} + \log_2 \frac{5}{3} = \log_2 4 = 2$

f) $\log_3 \frac{11}{54} + \log_3 \frac{2}{33} = \log_3 \frac{1}{81} = \log_3 3^{-4} = -4$

g) $\log_3 \frac{6}{7} - \log_3 \frac{2}{21} = \log_3 9$
$= \log_3 3^2$
$= 2$

h) $\log_4 \frac{3}{10} - \log_4 \frac{12}{5} = \log_4 \frac{1}{8}$
$= \log_4 [(2^2)^{\frac{1}{2}}]^{-3}$
$= \log_4 4^{-\frac{3}{2}}$
$= -\frac{3}{2}$

i) $3\log_9 3 + \log_9 243 = \log_9 3^3 + \log_9 3^5$
$= \log_9 3^8$
$= \log_9 9^4$
$= 4$

j) $5\log_4 8 + 3\log_4 32 = \log_4 (2^3)^5 + \log_4 (2^5)^3$
$= \log_4 2^{15} + \log_4 2^{15}$
$= \log_4 4^{15}$
$= 15$

k) $2\log_2 54 - 3\log_2 18 = \log_2 54^2 - \log_2 18^3$
$= \log_2 \frac{54^2}{18^3}$
$= \log_2 \frac{2^2 \times 3^6}{2^3 \times 3^6}$
$= \log_2 \frac{1}{2}$
$= -1$

h)では、答えとなる対数を演算から求めるため定義を利用することも有効です。

l) $2\log_{\frac{2}{3}} 12 - 2\log_{\frac{2}{3}} 18 = \log_{\frac{2}{3}} 12^2 - \log_{\frac{2}{3}} 18^2$
$= \log_{\frac{2}{3}} \frac{12^2}{18^2}$
$= \log_{\frac{2}{3}} \frac{2^4 \times 3^2}{2^2 \times 3^4}$
$= \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^2$
$= 2$

2.4 対数の底の変更*

導入問題

底が10の対数を利用して$\log_2 5$ の値をどのように計算するでしょうか。

関数電卓の大部分では、10およびeを底とする対数の値のみを求めることができます。ネイピア数： e = 2.718281828459045...

解法

$x = \log_{25}$ とします。よって：

$2^x = 5$　対数の定義により、

$\log 2^x = \log 5$　対数の性質を利用して等式の両辺に対数を適用します。

$x\log 2 = \log 5$

$x = \frac{\log 5}{\log 2}.$

10 を底とする対数は、通常は$\log_{10} a$ = $\log a$ のように底なしで表します。

次の商を求めるには電卓を利用します：

log 5 ÷ log 2 = ⇒ 電卓の画面

したがって、$\log_2 5 = 2.321928095...$となります。

log 5 ÷ log 2
2.321928095

定義

a, b および c を $a \neq 1$ かつ $c \neq 1$であるような正の数とします。下記を等式に対する**底の変更**と呼びます：

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

例

1.c = 10への底の変更の性質を証明しなさい。

$x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b$ となります。

10 を底とする対数を適用して $\log a^x = \log b$ とします。

累乗の対数の性質を適用して $x \log a = \log b$ とします。

x: $x = \frac{\log b}{\log a}$ の解を求めます。$a \neq 1$なので $\log a \neq 0$ です。

したがって、$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$ となります。

2.$\log_4 8$ の値を計算しなさい。

この場合、電卓を利用する必要はありません。

$c = 2$ であることを用います。

$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2} = \frac{3}{2}.$

したがって、$\log_4 8 = \frac{3}{2}$ となります。

任意の底を用いることができます。

$\log_4 8 = \frac{\log_3 8}{\log_3 4} = \frac{\log_3 2^3}{\log_3 2^2} = \frac{3\log_3 2}{2\log_3 2} = \frac{3}{2}.$

問題

1.底の変更の性質を用いて次の対数を簡略化しなさい。

a) $\log_4 32$　b) $\log_4 \frac{1}{8}$　c) $\log_9 \sqrt{3}$　d) $\log_4 \frac{1}{\sqrt{2}}$

e) $\log_{\frac{1}{9}} 27$　f) $\log_{\frac{1}{27}} 3$　g) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{8}$　h) $\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{\sqrt{4}}$

対数の引数と底が同じ底の累乗であることに注目します。

2.次の対数の値を計算しなさい。

a) $\log_5 24$　b) $\log_2 \frac{1}{3}$　c) $\log_{\frac{1}{2}} 5$　d) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2}$

c = 10 であることを用います。

ユニット5

131

達成の目安：

2.4 対数の底の変更の性質を利用して、ある数の対数を計算する。

流れ：

対数の定義を明白に利用せずに別の対数の計算に役立つ底の変更の性質を紹介します。生徒が導入問題を解けないのであれば、どのようにプロセスを開始するのかを指示してください。

ねらい：

導入問題では電卓を使用する必要がありますが、例では、対数の底と引数が同じ底の累乗であるため電卓を使用しない別のケースを示します。

問題の解き方：

1a) $\log_4 32 = \dfrac{\log_2 32}{\log_2 4} = \dfrac{\log_2 2^5}{\log_2 2^2} = \dfrac{5}{2}$

1b) $\log_4 \dfrac{1}{8} = \dfrac{\log_2 \frac{1}{8}}{\log_2 4} = \dfrac{\log_2 2^{-3}}{\log_2 2^2} = -\dfrac{3}{2}$

1c) $\log_9 \sqrt{3} = \dfrac{\log_3 \sqrt{3}}{\log_3 9} = \dfrac{\log_3 3^{\frac{1}{2}}}{\log_3 3^2} = \dfrac{\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{2} \div 2 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

1d) $\log_4 \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \log_4 2^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{\log_2 2^{-\frac{1}{2}}}{\log_2 2^2} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{2} = -\dfrac{1}{4}$

1e) $\log_{\frac{1}{9}} 27 = \dfrac{\log_3 27}{\log_3 \frac{1}{9}} = \dfrac{\log_3 3^3}{\log_3 3^{-2}} = -\dfrac{3}{2}$

1f) $\log_{\frac{1}{27}} 3 = \dfrac{\log_3 3}{\log_3 \frac{1}{27}} = \dfrac{\log_3 3}{\log_3 3^{-3}} = -\dfrac{1}{3}$

1g) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{8} = \dfrac{\log_2 \sqrt{8}}{\log_2 \frac{1}{4}} = \dfrac{\log_2 2^{\frac{3}{2}}}{\log_2 2^{-2}} = \dfrac{\frac{3}{2}}{-2} = -\dfrac{3}{4}$

1h) $\log_{\frac{1}{8}} \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} = \log_{\frac{1}{8}} 2^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{\log_2 2^{-\frac{2}{3}}}{\log_2 2^{-3}} = \dfrac{-\frac{2}{3}}{-3} = \dfrac{2}{9}$

2a) $\log_5 24 = \dfrac{\log 24}{\log 5} = 1.97463...$

2b) $\log_2 \dfrac{1}{3} = \dfrac{\log \frac{1}{3}}{\log 2} = -1.58496...$

2c) $\log_{\frac{1}{2}} 5 = \dfrac{\log 5}{\log \frac{1}{2}} = -2.32192...$

2d) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2} = \dfrac{\log \sqrt{2}}{\log \frac{1}{3}} = -0.31546...$

生徒は100分の1の位までの概算を利用することもできます。

レッスン2

2.5 対数関数とそのグラフの定義

導入問題

1. a) 次の表を用いて関数 $f(x) = \log_2 x$ をグラフにしなさい。

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y					

b) 関数 $f(x) = \log_2 x$ が増加関数なのか または減少関数なのかを判断しなさい。

2. a) 次の表を用いて関数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ をグラフにしなさい。

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y					

b) 関数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ は増加関数ですか、それとも減少関数ですか。

解法

1. a) $x = \frac{1}{4}$ の場合、$f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$となります

$x = \frac{1}{2}$ の場合、$f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$ となります

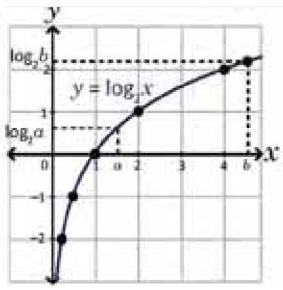
$x = 1$ の場合、$f(1) = \log_2 1 = \log_2 2^0 = 0$ となります。

$x = 2$ の場合、$f(2) = \log_2 2 = 1$ となります。

$x = 4$ の場合、$f(4) = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$ となります。

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	−2	−1	0	1	2

得られた複数の点上に曲線を描きます。



b) $0 < a < b$の場合、$\log_2 a < \log_2 b$ となります。
したがって、$f(x) = \log_2 x$ は増加関数になります。

2. a) $x = \frac{1}{4}$の場合、$f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2$ となります

$x = \frac{1}{2}$ の場合、$f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$となります

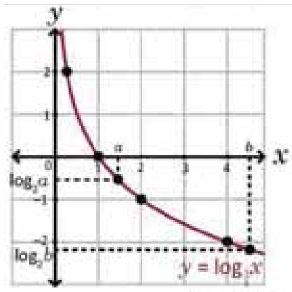
$x = 1$ の場合、$f(1) = \log_{\frac{1}{2}} 1 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0$となります。

$x = 2$ の場合、$f(2) = \log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -1$となります。

$x = 4$ の場合、$f(4) = \log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -2$となります。

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	2	1	0	−1	−2

得られた複数の点上に曲線を描きます。



b) $0 < a < b$の場合、$\log_{\frac{1}{2}} a > \log_{\frac{1}{2}} b$ となります。
したがって、$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ は減少関数になります。

定義

対数関数は次のように定義されます。f: $]0, \infty[\to \mathbb{R}$

$x \to \log_a x$

ここで a は正の数であり、かつ$a \neq 1$です。

関数 $f(x) = \log_a x$ の単調性を次に説明します：

1.$a > 1$ であれば増加関数です。

2. $f(x) =$ は、$0 < a < 1$であれば増加関数です。

> 引数が正であれば、対数は十分に定義されています。
>
> $f(x) = \log_a x$ のグラフは点 (1, 0) と (a, 1) を通ります。

問題

次の対数関数をグラフにしなさい。

a) $f(x) = \log_3 x$　b) $f(x) = \log_4 x$　c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$　d) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

達成の目安：

2.5 数値表を利用し、かつデカルト座標面に点を配置することで対数関数をグラフにする。

学習の流れ：

対数関数のグラフを学習します。正の引数のみを利用する理由は、底が正である累乗から対数を書く定義に由来します。

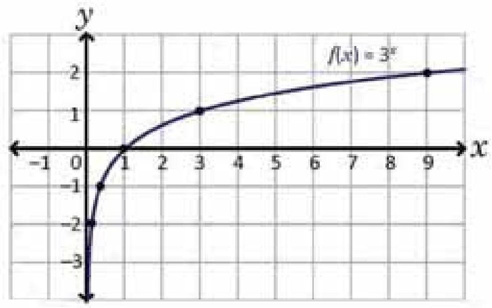
ねらい：

導入問題では、座標面上での点の配置を利用して対数関数をグラフにします。対数の定義から関数の領域を求め、単調性をグラフから求めます。また定義の追加情報において関数の特徴的な点を定めます。

問題の解き方：

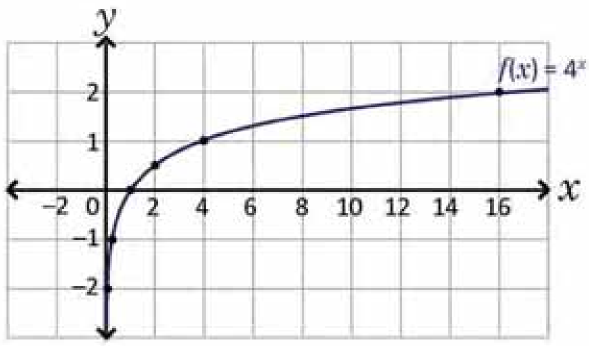
a)

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
y	−2	−1	0	1	2



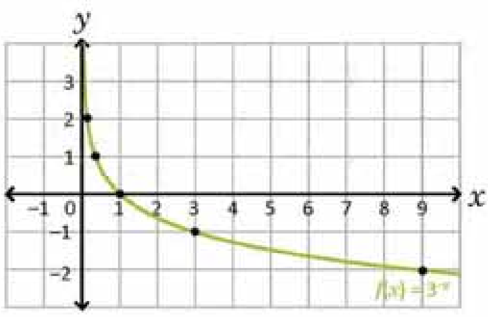
b)

x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16
y	−2	−1	0	1	2



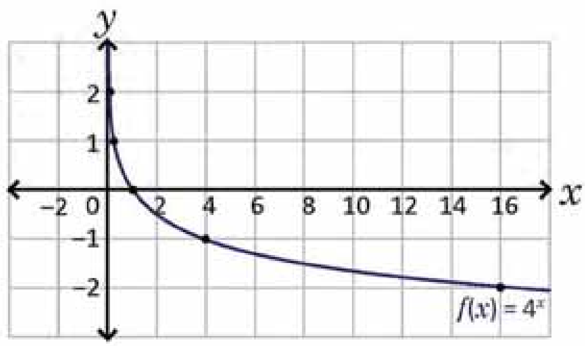
c)

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
y	2	1	0	−1	−2



d)

x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16
y	2	1	0	−1	−2



レッスン 2

2.6 指数関数と対数との関係

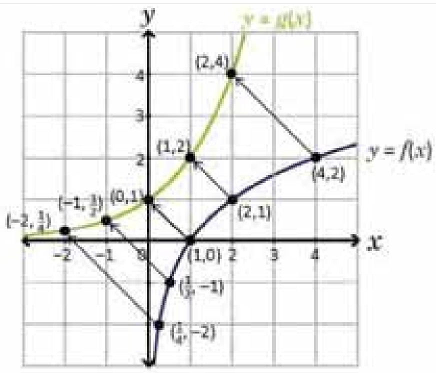
導入問題

1. 関数 $f(x) = \log_2 x$ と $g(x) = 2^x$ を同じデカルト座標面でグラフにし、(a, b) が f点の場合、(b, a) がg点であることに注目しなさい。
2. 次の合成を行いなさい：

   a) $f(g(x))$　　　　b) $g(f(x))$

解法

1. 関数 $f(x) = \log_2 x$ は前回の授業でグラフにしました。また関数 $g(x) = 2^x$ はユニット 4の授業2.1でグラフにしました。



$f(x) = \log_2 x$	$g(x) = 2^x$
$(4, 2)$	$(2, 4)$
$(2, 1)$	$(1, 2)$
$(1, 0)$	$(0, 1)$
$\left(\frac{1}{2}, -1\right)$	$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{1}{4}, -2\right)$	$\left(-2, \frac{1}{4}\right)$

2. 次の合成を行いなさい：

   a) $f(g(x)) = f(2^x)$
   $= \log_2 2^x$
   $= x$

   b) $g(f(x)) = g(\log_2 x)$
   $= 2^{\log_2 x}$
   $= x$

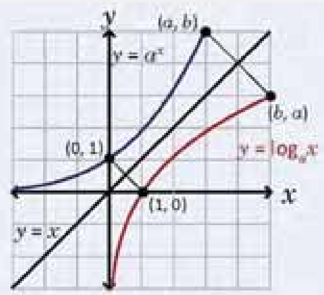
対数の定義により
$a^{\log_a x} = x$ です。

まとめ

1. 関数 $y = \log_a x$ と $y = a^x$ は、直線 $y = x$ に対して対称で、$a > 0$ かつ $a \neq 1$ です。
2. 2つの数 a と b について、$a > 0$ かつ $a \neq 1$ とすれば、$\log_a a^b = b$ かつ $a^{\log_a b} = b$ となります （ただし$b > 0$） 。
3. 対数関数は、指数関数の逆関数です。

   f: $\mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$
   $x \rightarrow a^x$

   f^{-1}: $]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$
   $x \rightarrow \log_a x$



4. $y = a^x$ は直線 $y = 0$ を水平漸近線とし、対称性を利用することで$y = \log_a x$ は直線 $x = 0$ を垂直漸近線 とします。
5. 対数関数の領域は指数関数の範囲：$]0, \infty[$になります。
   対数関数の範囲は指数関数の領域：$\mathbb{R}$ になります。
6. 対数関数は、指数関数の逆関数なので、全単射関数になります。

問題

各々の関数について、その逆関数を書き、同じデカルト座標面上にそれらの関数をグラフにしなさい。

a) $f(x) = \log_3 x$　　b) $f(x) = \log_4 x$　　c) $f(x) = f\left(\frac{1}{4}\right)^x$

$\left(\frac{1}{4}\right)^x = 4^{-x}$ であることを復習しよう。

ユニット5

133

達成の目安：

2.6 対数関数または指数関数の逆関数を求める。

学習の流れ：

累乗の逆演算となるように対数を定義しました。この授業では、指数関数と対数関数の間の逆関数の関係（対称性、関数の合成、領域と範囲）に注目します。

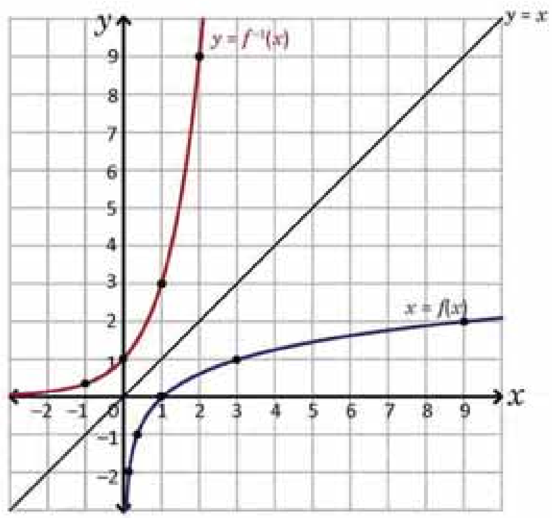
ねらい：

導入問題では指数関数と対数関数の間の同一性に対する対称性に注目し、定義を通じて逆関係を確認します。その逆関係では対数の概念を明確にしておく必要があります。問題では、対数関数のグラフを再度使用するように勧め、直線 $y = x$ に対する対称性を応用してその逆関数をグラフにします。

問題の解き方：

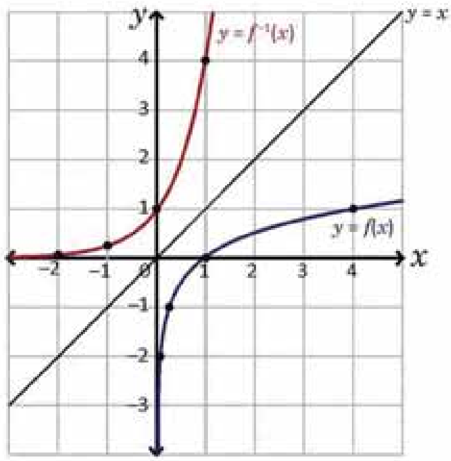
a) $f(x) = \log_3 x$

$f^{-1}(x) = 3^x$



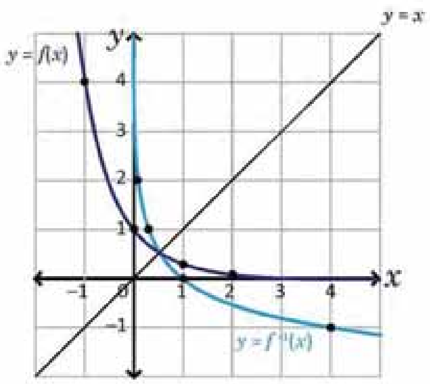
b) $f(x) = \log_4 x$

$f^{-1}(x) = 4^x$



c) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

$f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$



2.7 対数方程式、パート1

導入問題

次の各々の等式を解き、求めた解を証明しなさい。

a) $\log_2 x = 3$　b) $\log_3(x-1) = 2$
c) $\log_5 x^2 = 4$　d) $\log_6(3x(x+1)) = 2$

求めた値を代入することで対数の引数が正であることを確認しましょう。

対数で処理するときは、実解のみを考慮しましょう。

解法

a) 次のように対数の定義を使います：
$\log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 2^3 \Leftrightarrow x = 8$。

$8 > 0$ なので、よって $x = 8$ がこの方程式の解です。

b) 次のように対数の定義を使います：
$\log_3(x-1) = 2 \Leftrightarrow x-1 = 3^2 \Leftrightarrow x-1 = 9 \Leftrightarrow x = 10$。

$10 - 1 = 9 > 0$であることを確認します：
したがって、$x = 10$ がこの方程式の解です。

c) 次のように対数の定義を使います：
$\log_5 x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 5^4$
$\Leftrightarrow x = \pm 5^2$
$\Leftrightarrow x = \pm 25$

$(\pm 25)^2 > 0$ であることを確認します。
したがって、$x = 25$ と $x = -25$ がこの方程式の解になります。

d) 次のように対数の定義を使います：$3x(x+1) = 6^2$ この方程式を次のように解きます：
$3x^2 + 3x - 6^2 = 0 \Leftrightarrow 3(x+4)(x-3) = 0$
$\Leftrightarrow x = -4$ o $x = 3$

$x = -4$ の場合、$3(-4)(-4+1) = 36 > 0$ となることを確認します。
$x = 3$ の場合、$3(3)(3+1) = 36 > 0$ となります。
したがって、$x = -4$ と $x = 3$ がこの方程式の解になります。

まとめ

対数方程式は、対数の引数に変数 x が現れる方程式です。

M が変数 x の代数式である $\log_a M = b$ の形の方程式を解くには、対数の定義 $\log_a M = b \Leftrightarrow a^b = M$ を応用して得られる方程式 $a^b = M$ を解きます。次に、求めた解が引数の条件 $M > 0$ を満たしているか確認します。

さらに、指数方程式は次のように対数を応用して解くことができます：

$$a^x = b \Leftrightarrow \log a^x = \log b \Leftrightarrow x\log a = \log b \Leftrightarrow x = \frac{\log b}{\log a}$$

例

次の解に注目しましょう：

$7^x = 2 \Leftrightarrow \log 7^x = \log 2 \Leftrightarrow x\log 7 = \log 2 \Leftrightarrow x = \frac{\log 7}{\log 2} \Leftrightarrow x = 2.80735...$

問題

1.以下の対数方程式を解きなさい。

a) $\log_3 x = 4$　b) $\log_2(x+1) = 5$　c) $\log_2 x^2 = 6$　d) $\log_3 x^3 = 6$
e) $\log_4 x = -2$　f) $\log_3(2x+1) = -1$　g) $\log_2 x^2 = -2$　h) $\log_2(x^2+4) = 3$
i) $\log(x(20-x)) = 2$　j) $\log_6(x(13-x)) = 2$　k) $\log(x(x+3)) = 1$　l) $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{4}$

2.以下の方程式を解きなさい。

a) $9^x = 15$　b) $2^{x+1} = 13$　c) $5^{2x-1} = 1953125$

134

達成の目安：

2.7 累乗の性質を応用して対数方程式を解く。

学習の流れ：

対数の定義および一次方程式と二次方程式の解を利用する対数方程式を提示します。この授業では、対数の定義の応用が前記方程式を解くための最初のステップになります。さらに、対数を利用する指数方程式の解も提示します。

つまずきやすい点：

導入問題の c) 項では、生徒たちは授業2.3の性質3を利用しますが、定義を使って再度解くことで、実際には方程式が2つの解を持つことに注目するように示唆します。

問題の解き方：

1a) $\log_3 x = 4 \Leftrightarrow x = 3^4 \Leftrightarrow x = 81$

1b) $\log_2 (x+1) = 5 \Leftrightarrow x + 1 = 2^5 \Leftrightarrow x = 31$

1c) $\log_2 x^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 = 2^6 \Leftrightarrow x = \pm 8$

1d) $\log_3 x^3 = 6 \Leftrightarrow x^3 = 3^6 \Leftrightarrow x = 9$

1e) $\log_4 x = -2 \Leftrightarrow x = 4^{-2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{16}$

1f) $\log_3 (2x+1) = -1 \Leftrightarrow 2x + 1 = 3^{-1} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$

1g) $\log_2 x^2 = -2 \Leftrightarrow x^2 = 2^{-2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}$

1h) $\log_2 (x^2+4) = 3 \Leftrightarrow x^2 + 4 = 2^3$

$\Leftrightarrow \quad x^2 = 4$

$\Leftrightarrow \quad x = \pm 2$

1i) $\log (x(20-x)) = 2 \Leftrightarrow x(20-x) = 10^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 20x + 100 = 0$

$\Leftrightarrow x = 10$

1j) $\log_6 (x(13-x)) = 2 \Leftrightarrow x(13-x) = 6^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 13x + 36 = 0$

$\Leftrightarrow x = 9, x = 4$

1k) $\log (x(x+3)) = 1 \Leftrightarrow x(x+3) = 10$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$

$\Leftrightarrow x = -5, x = 2$

1l) $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

2a) $9^x = 15 \Leftrightarrow \log 9^x = \log 15$

$\Leftrightarrow x\log 9 = \log 15$

$\Leftrightarrow x = \frac{\log 15}{\log 9}$

$\Leftrightarrow x = 1.23248...$

2b) $2^{x+1} = 13 \Leftrightarrow \log 2^{x+1} = \log 13$

$\Leftrightarrow (x+1)\log 2 = \log 13$

$\Leftrightarrow x = \frac{\log 13}{\log 2} - 1$

$\Leftrightarrow x = 2.70043...$

2c) $5^{2x-1} = 1\,953\,125 \Leftrightarrow \log 5^{2x-1} = \log 1\,953\,125$

$\Leftrightarrow (2x-1)\log 5 = \log 1\,953\,125$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\left(\frac{\log 1\,953\,125}{\log 5} + 1\right)$

$\Leftrightarrow x = 5$

2.8 対数方程式、パート2

導入問題

以下の各方程式を解きなさい。

a) $\log_2 x + \log_2(x-1) = 1$

b) $\log_5(2x) = \log_5(x+1)$

解法

a) 次のように対数の和の性質を用います：

$\log_2 x + \log_2(x-1) = \log_2(x(x-1))$

方程式 に代入し：

$\log_2(x(x-1)) = 1$

次のように定義を応用して解きます：

$$\begin{aligned} \log_2(x(x-1)) = 1 &\Leftrightarrow (x(x-1)) = 2^1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \text{ o } x = -1 \end{aligned}$$

各対数において引数が正であることを確認します：

$x = 2$ の場合、$2 > 0$、$2 - 1 = 1 > 0$ となります。

$x = -1$ の場合、$-1 < 0$ となります。これは方程式の解になりません。

したがって、解は$x = 2$。

b) $\log_5(2x) = \log_5(x+1)$

$2x = x + 1$　次のように性質を利用します：$\log_a M = \log_a N \Rightarrow M = N$。

$x = 1$　方程式を解きます。

各対数において $x = 1$の評価 を行います

$2(1) = 2 > 0$ かつ $2 + 1 = 3 > 0$。

したがって、解は$x = 1$。

まとめ

対数方程式を解くには、対数の性質を利用して方程式を $\log_a M = b$ の形に持っていきます。

1.正の数であるすべての M と N に関して、以下が満たされます。

a) $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$

b) $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$

c) $\log_a M^b = b\log_a M$

d) $\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$

2.等式の解であることを確認するため、求めた値を代入して各対数の引数が正であることを証明しなければなりません。

性質 $\log_a M^b = b\log_a M$ では、M は正の数でないといけません。b が偶数である場合、注意しなければなりません。
例：
$\log_3 x^2 = 4 \Leftrightarrow 2\log_3 x = 4 \Leftrightarrow \log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2 = 9$
この場合、解 $x = -9$ が抜けています。
このように、方程式の解ではこの性質を利用しないほうがよいです。

問題

以下の対数方程式を解きなさい。

a) $\log_2 x + \log_2(x-2) = 3$

b) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+1)^2 = -2$

c) $\log_4(3x) + \log_4(x-2)^{-1} = 1$

d) $\log(x+1) = \log(1-x)$

e) $\log_8(x-3)^9 = 6$

f) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^6 = -18$

g) $\log_3(x+1) + \log_3(x^2-x+1) = 2$

h) $\log_2(x^4 - 6x^2 + 16)^4 = 12$

達成の目安：

2.8 対数の性質と累乗の性質を利用して対数方程式を解く。

学習の流れ：

この授業で提示される対数方程式では、最初のステップとして対数を用いる演算を利用する必要があります。このことは、前回の授業で解いたような方程式を使う理由となります。実行する必要がある別のステップとして、求めた解が始めの方程式の各対数の引数を消去せず、負にもしないことを証明するステップがあります。

ねらい：

導入問題では、対数の性質を利用しなければならない2つの問題が提示されています。展開問題の一部は、二次方程式を解くことと関係し、変数の変更が必要になる場合もあります。

問題の解き方：

a) $\log_2 x + \log_2(x-2) = 3 \Rightarrow \log_2 x(x-2) = 3$

$\Rightarrow \quad x(x-2) = 8$

$\Rightarrow x = 4$ または $x = -2$

$x = 4$ の場合、$4 > 0,\ 4 - 2 = 2 > 0$ になります。

$x = -2$の場合、$-2 < 0$ になります。これは方程式の解になりません。したがって、解は$x = 4$。

b) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2 + 1)^2 = -2 \Rightarrow (x^2 + 1)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

$\Rightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 25$

$\Rightarrow x^2 = -6$ または $x^2 = 4$

$\Rightarrow x = 2$ または $x = -2$

すべての実数xに対して$(x^2 + 1)^2 > 0$ になります。

したがって、解は $x = 2$ と $x = -2$。

c) $\log_4(3x) + \log_4(x-2)^{-1} = 1$

$\Rightarrow \quad \log_4 [3x(x-2)^{-1}] = 1$

$\Rightarrow \quad \log_4 \dfrac{3x}{x-2} = 1$

$\Rightarrow \quad \dfrac{3x}{x-2} = 4$

$\Rightarrow \quad 3x = 4(x-2)$

$\Rightarrow \quad x = 8$

$x = 8$ の場合、$3(8) = 24 > 0,\ 8 - 2 = 6 > 0$ になります。

したがって、解は$x = 8$。

d) $\log(x + 1) = \log(1 - x)$

$\Rightarrow \quad x + 1 = 1 - x$

$\Rightarrow \quad x = 0,$

$x = 0$ の場合、$0 + 1 = 1 > 0,\ 1 - 0 = 1 > 0$ になります。

したがって、解は$x = 0$.

e) $\log_8(x-3)^9 = 6 \Rightarrow 9\log_8(x-3) = 6$

$\Rightarrow \log_8(x-3) = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow x = 7$

$x = 7$ の場合、$(7 - 3)^9 = 4^9 > 0$ になります。

したがって、解は$x = 7$。

f) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^6 = -18 \Rightarrow (x-2)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-18}$

$\Rightarrow x - 2 = \pm\sqrt[6]{2^{18}}$

$\Rightarrow x - 2 = \pm 2^3$

$\Rightarrow x = 10$ または $x = -6$

$x = 10$ の場合、$(10 - 2)^6 = 8^6 > 0$ になります。

$x = -6$ の場合、$(-6 - 2)^6 = 8^6 > 0$ になります。

したがって、解は$x = 10$、$x = -6$。

g) $\log_3(x + 1) + \log_3(x^2 - x + 1) = 2$

$\Rightarrow \quad \log_3 [(x + 1)(x^2 - x + 1)] = 2$

$\Rightarrow \quad \log_3(x^3 + 1) = 2$

$\Rightarrow \quad x^3 + 1 = 3^2$

$\Rightarrow \quad x = 2$

$x = 2$ の場合、$2 + 1 = 3 > 0,\ 2^2 - 2 + 1 = 3 > 0$ になります。

したがって、解は$x = 2$。

h) $\log_2(x^4 - 6x^2 + 16)^4 = 12$

$\Rightarrow \quad (x^4 - 6x^2 + 16)^4 = 2^{12}$

$\Rightarrow \quad x^4 - 6x^2 + 16 = \pm 8$

$\Rightarrow x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ o $x^4 - 6x^2 + 24 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 4$ または $x^2 = 2$

$\Rightarrow x = \pm 2$ または $x = \pm\sqrt{2}$

すべての実数 x に対して$(x^4 - 6x^2 + 16)^4 > 0$ となります。

したがって、解は$x = \pm 2$、$x = \pm\sqrt{2}$。

2.9 10 を底とする対数と自然対数*

導入問題

1. $\log 2^{2019}$ の値を求めなさい。
2. 数 2^{2019} は何桁ですか。

注目：
n は$10^0 \leq n < 10^1$ である場合のみ1桁で書きます。
n は $10^1 \leq n < 10^2$ である場合のみ2桁で書きます。
n は $10^2 \leq n < 10^3$ である場合のみ3桁で書きます。

解法

1.$\log 2^{2019} = 2019\log 2 = 607.77956...$と計算します。

2.数の桁数に注目します

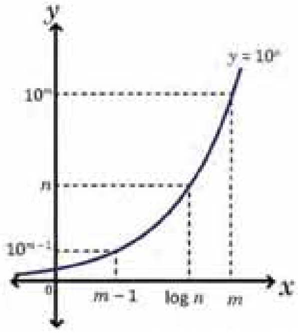
$$\underbrace{1, 2, \dots, 9}_{1\text{桁}}, \underbrace{10, 11, 12, \dots, 99}_{2\text{桁}}, \underbrace{100, 101, \dots, 999}_{3\text{桁}}, \underbrace{1\,000, 1\,001, \dots, 9\,999}_{4\text{桁}}, \underbrace{10\,000, 10\,001 \dots}_{5\text{桁}}$$

よって、n が正の数であれば、n は$10^{m-1} \leq n < 10^m$ である場合のみ
m 桁 で書くと推定できます。

2^{2019} の桁数は、のように指数 m によって特定されて
います。

$$10^{m-1} \leq 2^{2019} < 10^m \Leftrightarrow \log 10^{m-1} \leq \log 2^{2019} < \log 10^m$$
$$\Leftrightarrow m-1 \leq \log 2^{2019} < m$$

問題 1 から $607 \leq \log 2^{2019} < 608$ となります。したがって、
2^{2019} は 608 桁で書きます。



$10^{m-1} \leq n < 10^m$ である場合、底が10 > 1 なので、よって $m-1 \leq \log n < m$ となることに注目しましょう。

まとめ

1. 数 a の10 を底とする対数は$\log a$ で表します。

2. 正の整数 a の桁数は、$\log a$ に隣接する大きい方の整数 m になります。

3. 数 a の自然対数は対数 $\log_e a$ であり、底はネイピア数 $e = 2.71828...$であり、表記 $\log_e a = \ln a$ を利用します。

   自然対数は、極小計算で非常に役立ちます。

問題

1.次の累乗の桁数はいくつですか。

a) 3^{2019}　　b) 5^{1000}　　c) $2\,019^{2019}$

2. 2を何乗すれば2019桁になりますか。

3. 以下の対数の値を求めなさい：

a) $\ln 2$　　b) $\ln 3$
c) $\ln 10$　　d) $\ln \frac{1}{4}$
e) $\ln \frac{8}{3}$　　f) $\ln \frac{11}{3}$

電卓では、ある数の自然対数を計算するにはキー ln を使用します。

達成の目安：

2.9 10を底とする対数を利用して正の整数の桁数を求め、ある数の自然対数を電卓を使用して計算する。

学習の流れ：

対数の応用として正の整数の桁数を紹介します。その意味において生徒には、このユニットの授業2.5で見た対数関数の単調性が役立ちます。ヒントが質問2を答えるのに十分でなければ、質問の有用性を指摘して解答を容易にしてあげてもよいです。

ねらい：

導入問題では、生徒は、正の整数の対数と、その整数に隣接する大きい方の10の累乗の指数との関係に注目しなければなりません。

問題の解き方：

1a) $\log 3^{2019} = 2\,019\log 3 = 963.3078...$
したがって 3^{2019} は964桁 です。

1b) $\log 5^{1000} = 1\,000\log 5 = 698.970004...$
したがって 5^{1000} は699桁 です。

1c) $\log 2\,019^{2019} = 2\,019\log 2\,019 = 6\,673.07022...$
したがって 2019^{2019} は6674桁 です。

2. r を 2^r の桁数が2019になるような整数とすると、以下が満たされます。

$\Rightarrow 2018 \leq \log 2^r < 2019$

$\Rightarrow 2018 \leq r\log 2 < 2019$

$\Rightarrow \dfrac{2018}{\log 2} \leq r < \dfrac{2019}{\log 2}$

$\Rightarrow 6\,703.6508... \leq r < 6\,706.9728...$

$\Rightarrow r = 6\,704,\ r = 6\,705$ y $r = 6\,706.$

したがって、桁数が2019の2の累乗は。$2^{6\,704}$、$2^{6\,705}$ および $2^{6\,706}$ です。

3a) $\ln 2 = 0.69314...$

3b) $\ln 3 = 1.09861...$

3c) $\ln 10 = 2.30258...$

3d) $\ln \frac{1}{4} = -1.38629...$

3e) $\ln \frac{8}{3} = 0.98082...$

3f) $\ln \frac{11}{3} = 1.29928...$

レッスン 2

2.10 学んだことで練習しましょう

1.以下の対数の値を計算しなさい：

a) $\log_7 49$ b) $\log_{16} 2$ c) $\log_9 \frac{1}{3}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 1$ e) $\log_5 \sqrt{5}$ f) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{\sqrt{6}}$

g) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{2}$ h) $\log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ i) $\log_{\sqrt{2}} 2$

j) $\log_{\sqrt{2}} 4$ k) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3}$ l) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27}$

2. 以下の式の値を求めなさい：

a) $\log_6 2 + \log_6 3$ b) $\log 4 + \log 25$ c) $\log_3 99 - \log_3 11$

d) $\log_5 4 - \log_5 500$ e) $\log_7 \frac{28}{9} + \log_7 \frac{63}{4}$ f) $\log_8 \frac{48}{5} + \log_8 \frac{10}{3}$

g) $\log_2 \frac{15}{16} - \log_2 30$ h) $\log_9 \frac{36}{5} - \log_9 \frac{4}{45}$ i) $\log_{\sqrt{5}} \frac{15}{4} + \log_{\sqrt{5}} \frac{20}{3}$

3.電卓を使用しないで以下の式の値を計算しなさい。

a) $\frac{\log_3 125}{\log_3 5}$ b) $\frac{\log_3 49}{\log_3 7}$ c) $\frac{\log_6 64}{\log_6 32}$

4.底の変更の性質を用いて以下の対数の値を求めなさい。

a) $\log_3 15$ b) $\log_8 6$ c) $\log_2 \frac{1}{5}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ e) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{2}{3}$ f) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$

5.以下の関数のグラフを描きなさい：

a) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

6.以下の対数方程式を解きなさい。

a) $\log_8 x = \frac{7}{3}$ b) $\log_3 x(x+2) = 1$ c) $\log_2 x(2-3x) = -2$

d) $\log_6(2x-3) = \log_6 5 + \log_6 7$ e) $\log(x-3) + \log(5-x) = 0$ f) $\log(x-8) - \log(x-9) = \log 4$

g) $\log_7(-x) - \log_7(6-x) = 1$ h) $\log_6(x-2) + \log_6(x+3) = 1$ i) $\log_2(x^2+9) = 1 + \log_2(2x^2-33)$

7.以下の数の桁数を求めなさい：

a) 2^{350} b) 3^{1234} c) 4^{98765}

8.11を底とし、100桁で書く累乗を求めなさい。別の累乗は存在しますか。

ユニット5

達成の目安：

2.10 対数を使って問題を解きなさい。

問題の解き方：

1a) $\log_7 49 = 2$　**1b)** $\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$　**1c)** $\log_9 \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$　**1d)** $\log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$

1e) $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$　**1f)** $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$　**1g)** $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{2} = -\frac{1}{4}$　**1h)** $\log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \frac{1}{9}$

1i) $\log_{\sqrt{2}} 2 = 2$　**1j)** $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$　**1k)** $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3} = -2$　**1l)** $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27} = -6$

2a) $\log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 6 = 1$　**2b)** $\log 4 + \log 25 = \log 100 = 2$　**2c)** $\log_3 99 - \log_3 11 = \log_3 9 = 2$

2d) $\log_5 4 - \log_5 500 = \log_5 \frac{1}{125} = -3$　**2e)** $\log_7 \frac{28}{9} + \log_7 \frac{63}{4} = \log_7 49 = 2$　**2f)** $\log_8 \frac{48}{5} + \log_8 \frac{10}{3} = \log_8 32 = \frac{5}{3}$

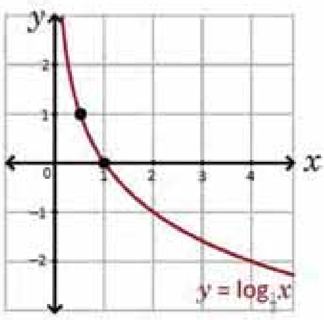
2g) $\log_2 \frac{15}{16} - \log_2 30 = \log_2 \frac{1}{32} = -5$　**2h)** $\log_9 \frac{36}{5} - \log_9 \frac{4}{45} = \log_9 81 = 2$　**2i)** $\log_{\sqrt{5}} \frac{15}{4} + \log_{\sqrt{5}} \frac{20}{3} = \log_{\sqrt{5}} 25 = 4$

3a) $\frac{\log_9 125}{\log_9 5} = \log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$　**3b)** $\frac{\log_3 49}{\log_3 7} = \log_7 49 = 2$　**3c)** $\frac{\log_6 64}{\log_6 32} = \frac{\log_6 2^6}{\log_6 2^5} = \frac{6\log_6 2}{5\log_6 2} = \frac{6}{5}$

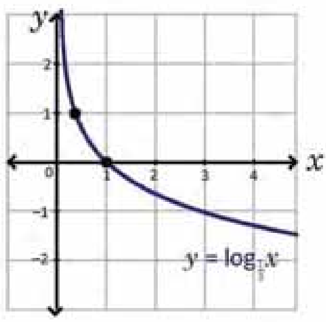
4a) $\log_3 15 = 2.46497...$　**4b)** $\log_8 6 = 0.86165...$　**4c)** $\log_2 \frac{1}{5} = -2.32192...$

4d) $\log_{\frac{1}{2}} 3 = -1.58496...$　**4e)** $\log_{\frac{1}{3}} \frac{2}{3} = 0.36907...$　**4f)** $\log_{\frac{5}{3}} \frac{1}{2} = -1.35691...$

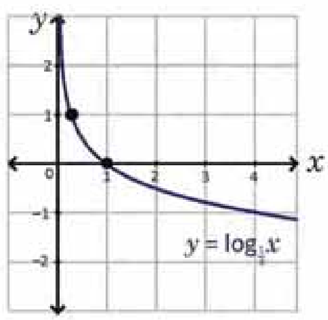
5a)



5b)



5c)



6a) $x = 2^7$　**6b)** $x = 1, x = -3$　**6c)** $x = \frac{1}{6}, x = \frac{1}{2}$

6d) $x = 19$　**6e)** $x = 4$　**6f)** $x = \frac{28}{3}$

6g) 解を持ちません　**6h)** $x = 3$　**6i)** $x = 5, x = -5$

7a) 2^{350} は106桁です。　**7b)** 3^{1234} は589桁です。　**7c)** 4^{98765} は59463桁です。

8. n を 11^n が100桁で書く整数とすると、

$$\Rightarrow 99 \leq \log 11^n < 100 \Rightarrow 99 \leq n\log 11 < 100 \Rightarrow \frac{99}{\log 11} \leq n < \frac{100}{\log 11} \Rightarrow 95.065... \leq n < 96.02525...$$

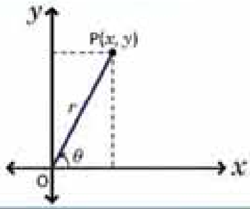
よって、桁数が100の11の唯一の累乗は 11^{96} です。

3.1 任意の角度の三角関数の比率（復習）

導入問題

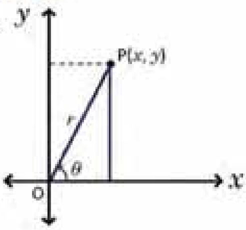
1.角度θのグラフで、Oは原点、$\overline{OP}$は標準位置に描かれた角度θの末端側、rは辺$\overline{OP}$セグメントの長さ。角度θの三角関数の比率を書きましょう。

2.三角比はrの値に依存しますか?

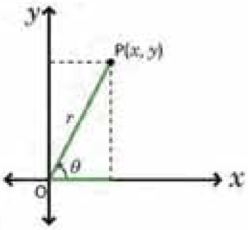


解法

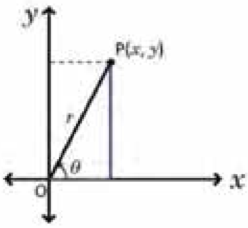
1.



$\text{sen}\ \theta = \frac{y}{r}$



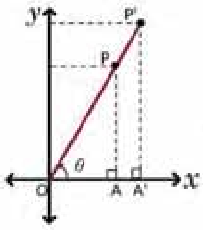
$\cos\theta = \frac{x}{r}$



$\tan\theta = \frac{y}{x}$

x≠0である場合は常に

2. 図に示すように、$\overline{OP'}$がθの末端側でもあるように別の点P'(x', y')を選択する：



Pが辺$\overline{OP'}$上の1点となっている。

AをPのx軸への投影、A'をP'のx軸への投影とすると。

三角形の類似度のAA基準でΔPOA ～ΔP'OA'を満たしています。

$r' = \overline{OP'}$とすると、類似度から

$\text{sen}\ \theta = \frac{y}{r} = \frac{y'}{r'}$,　$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x'}{r'}$　y　$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$

にならなければなりません。

三角比はrの値に依存しません。

まとめ

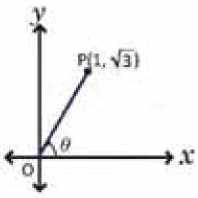
1. 三角比はセグメント$\overline{OP}$の長さに依存しません。
2. 三角比は角度θだけに依存します。
3. 角度θは、senθの 1 値、cosθの 1 値、およびtanθの 1 値に該当します。
4. 三角比のsen θ、cos θ、tan θは角度θの関数です。

今後、sen、cos、tanを**三角関数**と呼びます。

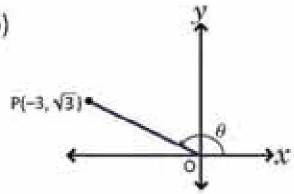
問題

1. 点P(x,y)から角度θの三角関数を計算しましょう。

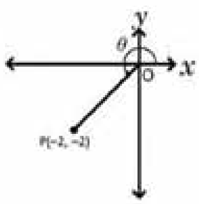
a)



b)



c)



2. 問題 1 の各項において、点 P'（cosθ, senθ）が辺$\overline{OP}$に属することを確認しましょう。

達成の目安：

3.1 直行座標系の点Pで決定される角度の三角比を計算しましょう。

学習の流れ：

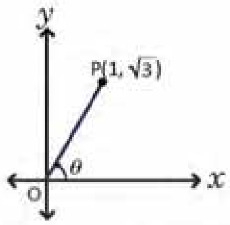
角度の三角比はすでに勉強しましたが、この授業では対応関係の概念の下で三角関数として定めます。

ねらい：

導入問題を解決するにあたり、三角比は角度にのみ依存し、最終辺に対応する辺の長さには依存しないことが証明されます。

問題の解答：

1a)



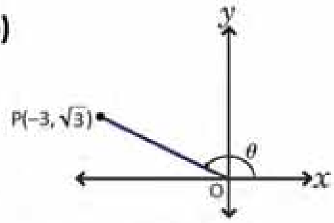
$r = OP = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$\text{sen}\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$

$\tan\theta = \sqrt{3}$

1b)



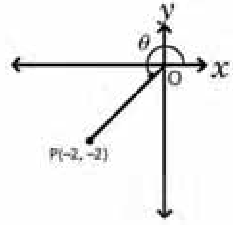
$r = OP = 2\sqrt{3}$

$\text{sen}\ \theta = \frac{1}{2}$

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

1c)



$r = OP = 2\sqrt{2}$

$\text{sen}\ \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan\theta = 1$

2a) 直線：$y = \sqrt{3}x$

$P'(\cos\theta, \text{sen}\ \theta) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$y = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2b) 直線： $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$

$P'(\cos\theta, \text{sen}\ \theta) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}$

2c) 直線：$y = x$

$P'(\cos\theta, \text{sen}\ \theta) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

レッスン3

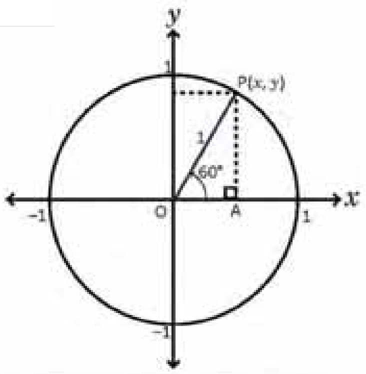
3.2 三角円

導入問題

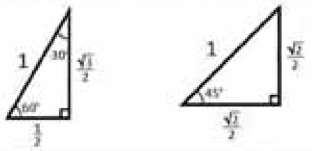
1. 原点を中心とした直行座標系の中心に半径1の円を描きましょう。末端側を円周の半径とした60°の角度を表しましょう。
2. 角度の末端側との円周の交点である点P(x, y)の座標を決定します。

解法

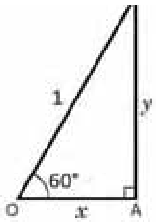
1.



三角円の中にある基準角において使用するべき三角形比は：



2. 図中、直角三角形POAが形成されます。Pは点P(x, y)、Oは原点、Aはx軸上のPの延長です。



三角比を使うと：

sen 60° $= \frac{y}{1} = y$ と cos 60° $= \frac{x}{1} = x$

なので：

$y =$ sen 60° $= \frac{\sqrt{3}}{2}$と$x =$ cos 60° $= \frac{1}{2}$.

したがって、中点P の座標は、P$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

ユニット5

まとめ

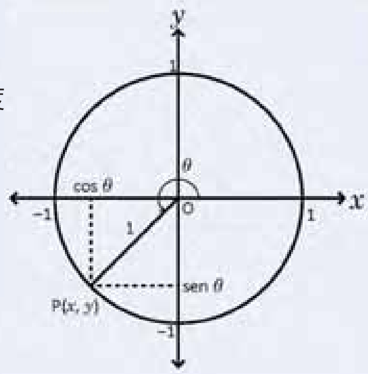
1. 原点Oを中心とした半径1の円を**三角円（TC）**と呼ぶ。

2. 三角円上の点 P(x, y) の座標は、端子辺 $\overline{OP}$ を基準位置に描かれた角度θで決まる。任意の角度の三角関数の比率の定義に従い、

   sen $\theta = \frac{y}{1} = y$ y cos $\theta = \frac{x}{1} = x$ となります。

   よって、P(x, y) = P(cos θ, sen θ)

3. 全ての角度θに、TC内の点の座標としてcos θ、sen θの値を求めることができます。



問題

1. θの各値について、TCの点P(cos θ, sen θ)をグラフ化しましょう。それぞれの問題の円を描きましょう。

   a) $\theta = 120°$, $\theta = 210°$　　b) $\theta = 30°$, $\theta = 300°$　　c) $\theta = 45°$, $\theta = 135°$

   d) $\theta = -45°$, $\theta = -135°$　　e) $\theta = 360°$, $\theta = 405°$　　f) $\theta = 495°$, $\theta = 540°$

2. 三角円を用いて、次の角度のsenとcosを求めましょう。

   a) $\theta = 0°$　　b) $\theta = 90°$　　c) $\theta = 180°$　　d) $\theta = 270°$

P(cos θ, sen θ) = P(x, y)
であることを利用します。

139

達成の目安：

3.2 任意の角度θの点P(cos θ, sen θ) を三角円上に書きましょう。

学習の流れ：

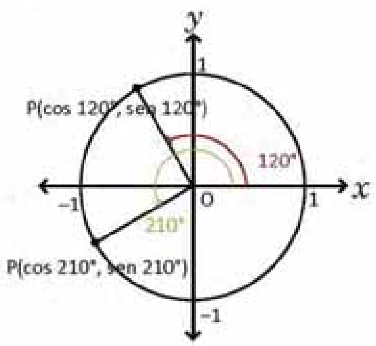
前回の授業では、三角比が任意の角度の末端の長さにより左右されない為に、三角関数円（原点を中心とした半径1の円）を導入し、三角関数の特徴を説明することを学びました。計算を容易にするために、生徒に30度、45度、60度の三角比を復習させます。

ねらい：

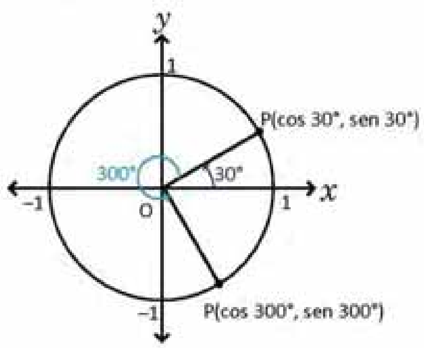
導入問題で、生徒は任意の角度のsenとcosの平面における位置を見ることができます。問題の1で、生徒は分度器を使って角度を見つけ、求められた点を指し示します。2で生徒は与えられた角度に対応する点の座標を解答しなければなりません。

問題の解答：

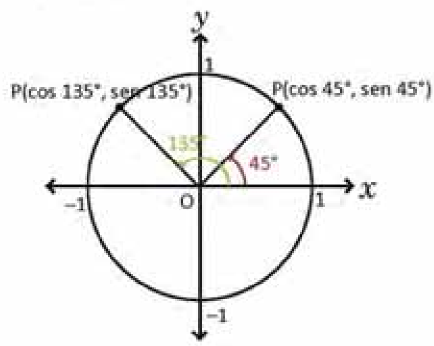
1a) $\theta = 120°$, $\theta = 210°$



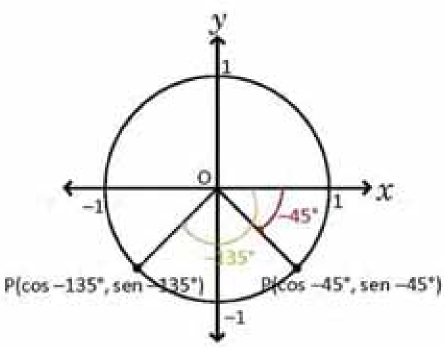
1b) $\theta = 30°$, $\theta = 300°$



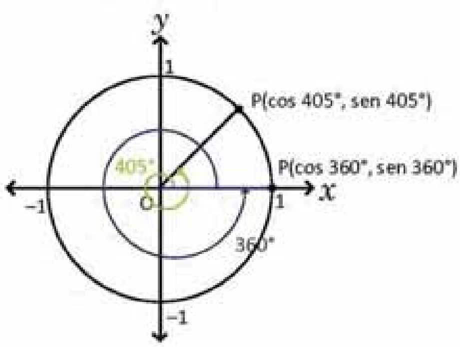
1c) $\theta = 45°$, $\theta = 135°$



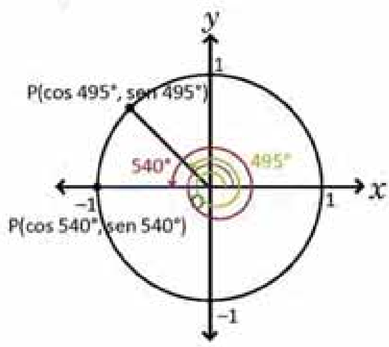
1d) $\theta = -45°$, $\theta = -135°$

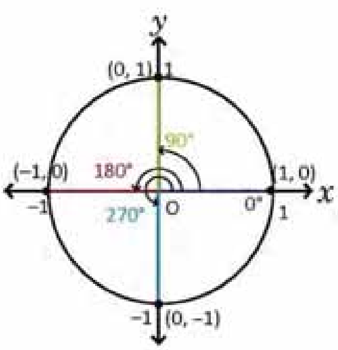


1e) $\theta = 360°$, $\theta = 405°$



1f) $\theta = 495°$, $\theta = 540°$





2a) P(cos 0°, sen 0°) = P(1, 0)
⇒ cos 0° = 1 y sen 0° = 0

2b) P(cos 90°, sen 90°) = P(0, 1)
⇒ cos 90° = 0 y sen 90° = 1

2c) P(cos 180°, sen 180°) = P(−1, 0)
⇒ cos 180° = −1 y sen 180° = 0

2d) P(cos 270°, sen 270°) = P(0, −1)
⇒ cos 270° = 0 y sen 270° = −1

3.3 三角円上のsen関数とcos関数の周期性

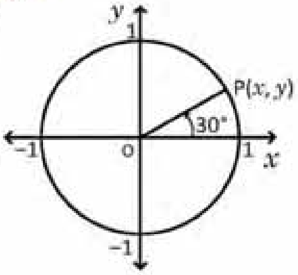
導入問題

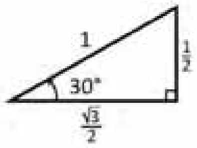
TC上に以下の点をグラフ化し、その座標を決定してください：

a) P(cos 30°, sen 30°)　　　b) P(cos 390°, sen 390°)

解法

a)

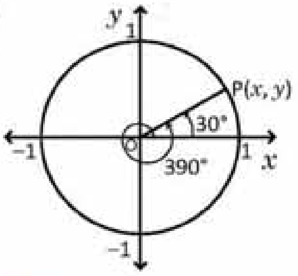




$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$　　　$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

したがって、P(cos 30°, sen 30°) = $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

b)



390° = 30° + 360°に分解します。

基準角度は30°なので、

$\text{sen } 390° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$　と　$\cos 390° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

したがって、P(cos 390°, sen 390°) = $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

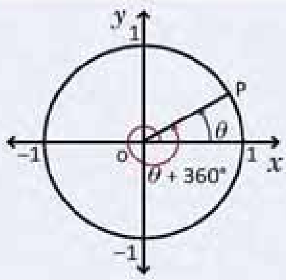
まとめ

θを任意の角度とし、α = θ + 360°とする。角度 θ とαを標準位置に描くと、ＴＣでは同じ末端側になる。

したがって、P(cos θ, sen θ) = P(cos(θ + 360°), sen(θ + 360°))を満たす。

すべての x が $f(x) = f(x + t)$を満たすような値tがあれば、関数 f は**周期的**です。したがって、senとcosは、次のような性質を持っているので、周期性があります：

$\cos(\theta \pm 360°) = \cos \theta$　　　$\text{sen}(\theta \pm 360°) = \text{sen } \theta$



例

sen(−330°)の値を求めましょう。

周期性を適用して、$\text{sen}(-330°) = \text{sen}(-330° + 360°) = \text{sen}(30°) = \frac{1}{2}$

したがって、$\text{sen}(-330°) = \frac{1}{2}$.

問題

1. 三角関数の周期性を利用して、以下の値を計算します：

a) sen 405°　　b) cos 420°　　c) sen(−300°)

d) cos(−675°)　　e) sen 1080°　　f) cos 630°

g) sen(−900°)　　h) cos(−630°)　　i) sen 540°

2. 和のsenとcosの公式を使って、次の性質を示してください：

a) $\cos(\theta + 360°) = \cos \theta$　　b) $\text{sen}(\theta + 360°) = \text{sen } \theta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta$
$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{ sen } \beta$

達成の目安：

3.3 周期性を利用して、360°以上0°未満の角度のsenとcosを見積もりましょう。

学習の流れ：

senとcosの三角関数の周期性を観測するために三角円を用いるので、30°、45°、60°の角度の原理を覚えておく必要があります;前回の授業を参考にできます。

ねらい：

導入問題では、三角円を用いて、特定の角度の周期性を観測します。練習問題では、角度の和の式を用いて力試しをします。

問題の解答：

1a) $\text{sen } 405° = \text{sen}(45° + 360°) = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

1b) $\cos 420° = \cos(60° + 360°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$

1c) $\text{sen}(-300°) = \text{sen}(-300° + 360°) = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

1d) $\cos(-675°) = \text{sen}(-675° + 360° \times 2) = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

1e) $\text{sen } 1\,080° = \text{sen}(3(360°)) = 0$

1f) $\cos 630° = \cos 270° = 0$

1g) $\text{sen}(-900°) = \text{sen } 180° = 0$

1h) $\cos(-630°) = \cos(-630° + 360° \times 2) = \cos 90° = 0$

1i) $\text{sen } 540° = \text{sen } 180° = 0$

2a) $\cos(\theta + 360°) = \cos\theta \cos 360° - \text{sen }\theta \text{ sen } 360° = \cos\theta$

2b) $\text{sen}(\theta + 360°) = \text{sen }\theta \cos 360° + \cos\theta \text{ sen } 360° = \text{sen }\theta$

レッスン 3

3.4 三角円上のtanの周期性

導入問題

それぞれの角度について：

1. $\theta = 30°$　　　　2. $\theta = -30°$

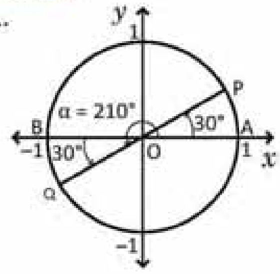
P'$(-x, -y)$ は、原点を基準としたP(x, y)の対称点です。

以下を解答しましょう：

a) 減点に対して点 P(cos θ, sen θ) に対称な点Qをグラフ化し、その座標を書きましょう。
b) 点Qに対応する基準位置の角度α を決定しましょう。
c) tan αの値を計算しましょう。

解法

1.



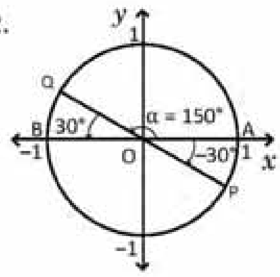
a) 線分 $\overline{OP}$ をTCを再び切断するまで延長します。この切断点がQなので、$\overline{OQ} = \overline{OP} = 1$.　この点は点 P と対称を成すことから、座標はQ (−cos 30°, −sen 30°) となります。

b) 点A(1, 0)と点B(-1, 0)とする。頂点に対向する角度によって、∢BOQ = ∢AOP = 30°となる。したがって、 α = 180° + 30° = 210°

c) 点Q(-cos 30°, -sen 30°)とすると：

$$\tan 210° = \frac{-\text{sen } 30°}{-\cos 30°} = \frac{\text{sen } 30°}{\cos 30°} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2.



a) 点Qをグラフ化すると、原点を基準にして点Pに対して対称なので、その座標はQ(-cos 30°, -sen 30°)

b) 点A(1, 0) と B(−1, 0)とする。頂点に対向する角度によって、{0>∢<0}BOQ = {0>∢<0}AOP = 30°となる。したがって、 α = 180° − 30° = 150°

c) 点Q(cos(−30°), −sen(−30°)とすると：

$$\tan 150° = \frac{-\text{sen}(-30°)}{-\cos(-30°)} = \frac{\text{sen}(-30°)}{\cos(-30°)} = \tan(-30°) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

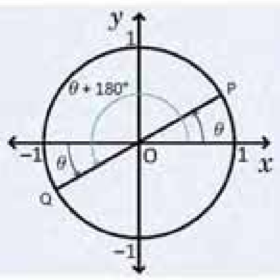
まとめ

θを任意の角度とすると：

Q(cos(θ + 180°), sen(θ + 180°)) = Q(−cos θ, −sen θ)

なので $\tan(\theta + 180°) = \dfrac{-\text{sen } \theta}{-\cos \theta} = \dfrac{\text{sen } \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$

したがって、tanの**周期性**は次のように示すことができます：tan(θ ± 180°) = tan θ



問題

1. tan関数の周期性を利用して、以下の値を計算します：

a) tan 225°　　b) tan 210°　　c) tan 240°　　d) tan 180°

e) tan(−150°)　　f) tan(−135°)　　g) tan(−120°)　　h) tan(−300°)

2. 和のtanの式を用いてtan(θ + 180°) = tan θの性質を証明しましょう。

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

141

ユニット5

達成の目安：

3.4 180°以上0°未満の角度のtanを計算するために周期性を用います。

学習の流れ：

三角円を使って、任意の角度に対するtanの周期性を確認します。 このとき、sen関数、cos関数とtan関数の違いの一つに印をつけます。

ねらい：

tan関数の周期性を確立するための導入問題では、三角円上の2点に対する原点に対する対称性と、これらの点に対応する角度との関係を構築します。

問題の解答：

1a) $\tan 225° = \tan(180° + 45°) = \tan 45° = 1$

1b) $\tan 210° = \tan(180° + 30°) = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

1c) $\tan 240° = \tan 60° = \sqrt{3}$

1d) $\tan 180° = \tan 0° = 0$

1e) $\tan(-150°) = \tan(-150° + 180°) = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

1f) $\tan(-135°) = \tan(-135° + 180°) = \tan 45° = 1$

1g) $\tan(-120°) = \tan(-120° + 180°) = \tan 60° = \sqrt{3}$

1h) $\tan(-300°) = \tan(-300° + 2(180°)) = \tan 60° = \sqrt{3}$

2. $\tan(\theta + 180°) = \frac{\tan\theta + \tan 180°}{1 - \tan\theta \tan 180°} = \frac{\tan\theta + 0}{1 - (\tan\theta)(0)} = \frac{\tan\theta}{1} = \tan\theta$

問題1 a)では、角度を2つの角度の和として分解します。そのうちの1つは180°でなければばなりませんが、別の方法では180°を引いて角度のtanを計算します。(e)から(h)の項では、tanが既知の角度が得られるまで、180°またはその倍数を追加します。

生徒はこのユニットの授業3.2の三角形を参考にすることができます。

3.5 sen関数

導入問題

1. 次の表を完成させ、関数 $y = \text{sen}\ \theta$ をグラフ化しましょう。

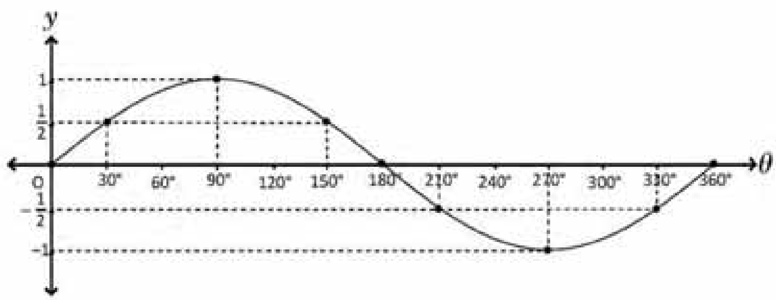
θ	0°	30°	90°	150°	180°	210°	270°	300°	360°
sen θ									

2. 領域と範囲を決定します。

解法

1.

θ	0°	30°	90°	150°	180°	210°	270°	330°	360°
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	−1	$-\frac{1}{2}$	0

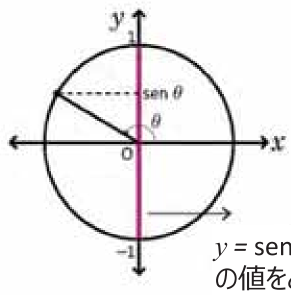


2. 領域変数θ は任意の角度の値を取ることができます。

したがって、関数 $y = \text{sen}\ \theta$ の領域は $\mathbb{R}$ となります。

範囲 ：TCから、任意の角度のsen値として[-1, 1]の範囲の値を取ることができます。

したがって、関数 $y = \text{sen}\ \theta$ の範囲は[−1, 1]となります。



$y = \text{sen}\ \theta$ は [−1, 1] の値をとります。

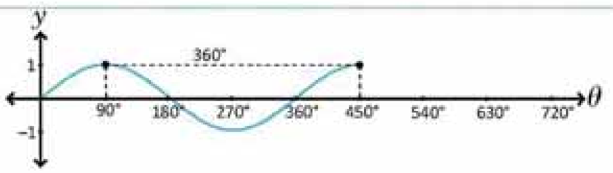
まとめ

関数$f(\theta) = \text{sen}\ \theta$ は、領域$D_f = \mathbb{R}$、範囲$R_f = [-1, 1]$です。

関数 $f(\theta) = \text{sen}\ \theta$ は、周期的な関数、すなわち θのすべての値に対して $f(\theta + \alpha) = f(\theta)$ となるような値αがあります。$f(\theta + \alpha) = f(\theta)$となるような最小値$\alpha > 0$ を関数fの**周期**と呼ぶ。sen関数の周期は360°です。一般に、すべての角度θに対して、また、すべての n 個の整数に対して、$(\theta + 360°n) = \text{sen}\ \theta$となります。

問題

1. 次の図は、[0°,450°]の範囲でsen関数をグラフ化したものです。関数の周期性を利用して、720°の角度までのグラフを完成させましょう。



2. 関数 $f(\theta) = \text{sen}\ \theta$を [-360°, 0°] の範囲でグラフ化しましょう。

達成の目安：

3.5 周期性を利用してsen関数をグラフ化しましょう。

学習の流れ：

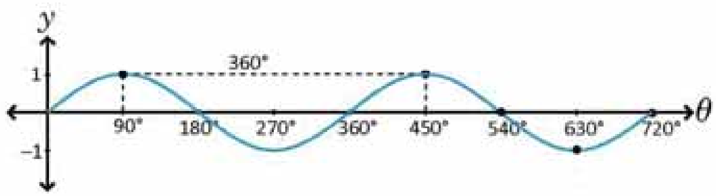
平面上の点の位置からsen関数のグラフを描き、また領域や範囲についても勉強します。

ねらい：

表で使用されている角度の値により、平面上の点の位置を簡単に見つけることができます。練習問題では、周期性を利用してグラフを完成させたり、描いたりします。生徒がグラフが360度ごとに繰り返されることを認識できるようにします。

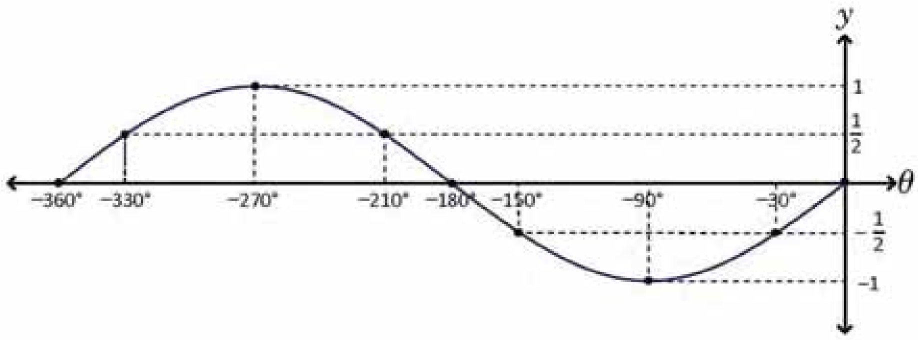
問題の解答：

1.



三角関数をグラフ化するには、30°、45°、60°ごとにx軸をマークするとよい。

2.



3.6 cos関数

導入問題

1. 次の表を完成させ、関数 $y = \cos\theta$ をグラフ化しましょう。

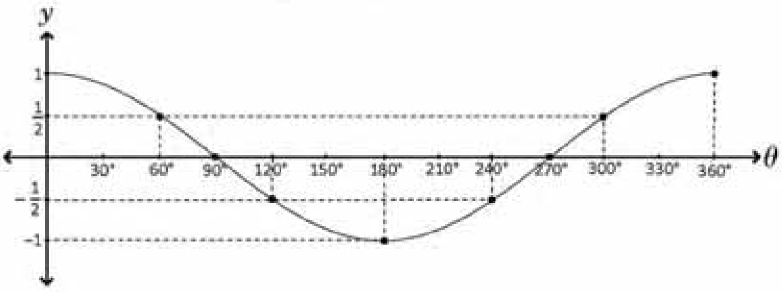
θ	0°	60°	90°	120°	180°	240°	270°	300°	360°
$\cos\theta$									

2. 領域と範囲を決定します。

解法

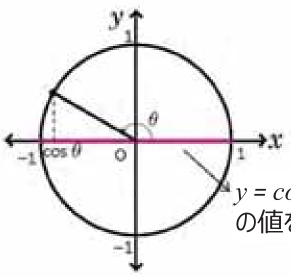
1.

θ	0°	60°	90°	120°	180°	240°	270°	300°	360°
$\cos\theta$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	−1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1



2. 領域変数θ は任意の角度の値を取ることができます。
したがって、関数 $y = \cos\theta$ の領域は $\mathbb{R}$ となります。

範囲：TCから、任意の角度のcos値は [−1, 1]の範囲の値を取ることができます。したがって、関数 $y = \cos\theta$ の範囲は[−1, 1]となります。



$y = \cos\theta$は [−1, 1]の値をとります。

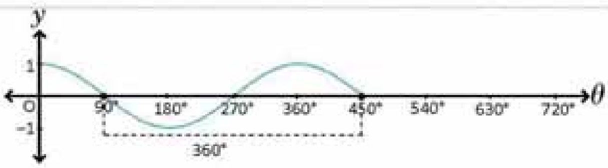
まとめ

関数$f(\theta)$ = sen θ は、領域$D_f = \mathbb{R}$、範囲R_f = [−1, 1]です。

関数$f(\theta) = \cos\theta$は周期関数です。cos関数の周期は360°です。一般に、すべての角度θに対して、また、すべてのn個の整数に対して、$\cos(\theta + 360°n) = \cos\theta$となる。

問題

1. 次の図は、cos関数を[0°, 450°]の範囲で描き、関数の周期性を利用して720°の角度までのグラフを完成させたものです。



2. 関数$f(\theta) = \cos\theta$を [−360°, 0°]の範囲でグラフ化しましょう。

ユニット5

143

達成の目安：

3.5 周期性を利用してcos関数をグラフ化しましょう。

学習の流れ：

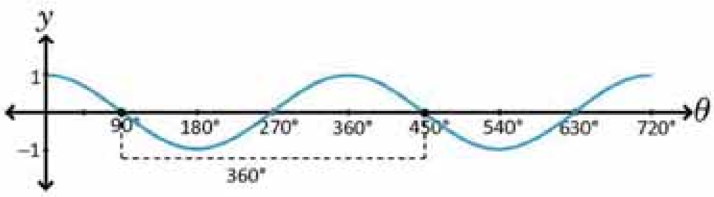
sen関数と同様に、平面上の点の位置からcos関数のグラフを描き、領域や範囲についても勉強します。

ねらい：

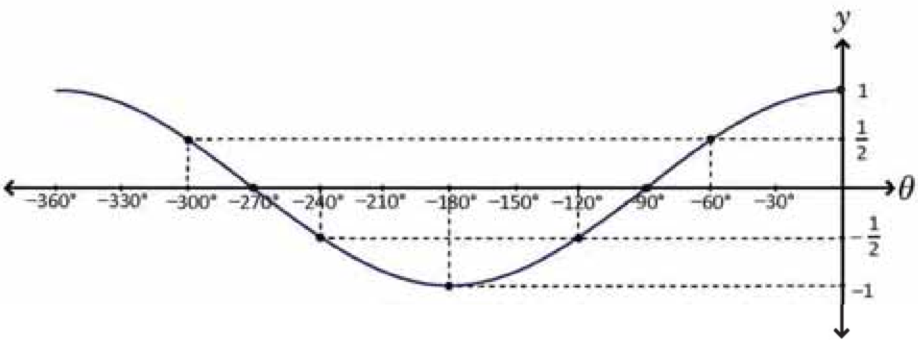
sen関数が描かれているので、同様の手順でcos関数を描きます。グラフを観察し、2つの関数の類似点と相違点をみつけます。

問題の解答：

1.



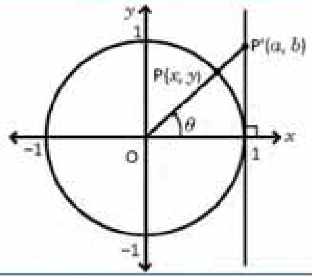
2.



3.4 三角円上のtan

導入問題

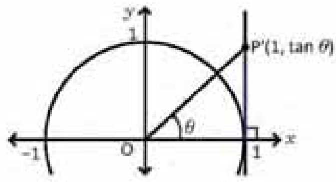
直線x=1を描き、P(x, y)をTC上の点とする終点側$\overline{OP}$との角度 θを描く。そして、辺OPは、線x = 1 上にある点 P'まで延長される。



1. θに応じて点P'(a, b)の座標を決定しましょう。

2. θのどの値について、関数 y = tan θが定義されていないでしょうか？

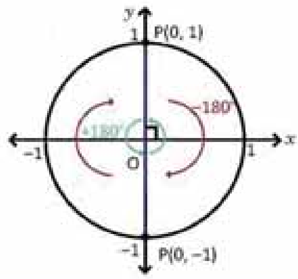
解法



1. P'は直線x=1上の点なので、a=1でなければなりません。

   tanの定義を使うと、tan $\theta = \frac{b}{a} = \frac{b}{1} = b$ となります。

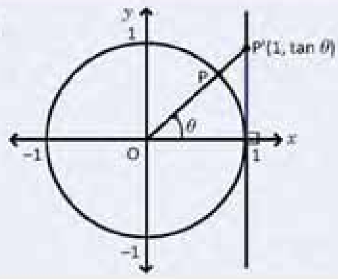
   よってP'(a, b) = P'(1, tan θ)



2. tan $\theta = \frac{y}{x}$ のように、x=0では定義されません。この値は、角度θ = 90° と θ = 270°に対応しており、ＴＣ上の点がそれぞれ (0, 1) と (0, −1)です。

   また、これらの角度から180°を足したり引いたりすると、x = 0になります。したがって、これらの値はすべて次のように書くことができます：90° ＋ 180°n、ここでnは整数です。

まとめ



角度 θのtanは三角円上で次のように表すことができます：

1. 角度θに対応する点ＰをＴＣ上に描きます。
2. 辺 $\overline{OP}$ (Oが原点)を、線x=1を切断するまで延長します。
3. 切断点をP'とします。P'のy座標はtan θに等しい。

次の角については、tan θは定義されていません：
θ = 90° + 180°n 、ここでnは整数です。

問題

結論の図を用いて、次の角度のtanの値を表しましょう：

a) θ = 30°　　b) θ = 60°　　c) θ = 135°

d) θ = −45°　　e) θ = −120°　　f) θ = −150°

達成の目安：

3.7 三角関係の円を使って角度のtanの値を表しましょう。

学習の流れ：

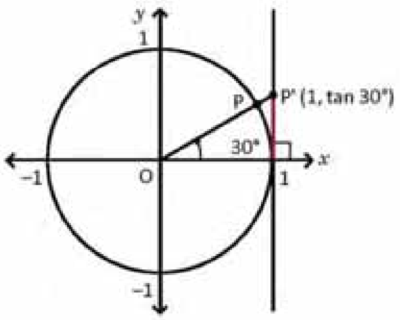
三角円上の角度のsenとcosの座標の表し方を勉強してきましたが、今度は与えられた角度のtanを直線 $x = 1$上の点の座標で表します。

ねらい：

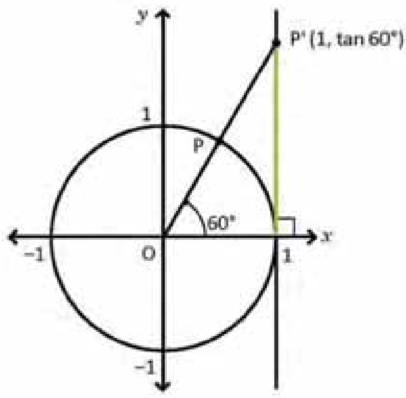
導入問題で、生徒は角度のtanの値を示された図中の点P'のy座標として　として認識でき、関数の領域が暗黙的に定義されます。

問題の解答：

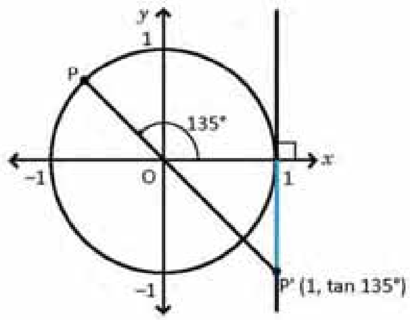
a) $\theta = 30°$



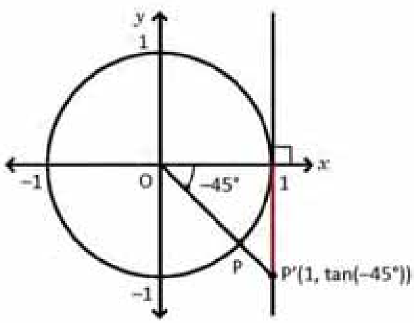
b) $\theta = 60°$



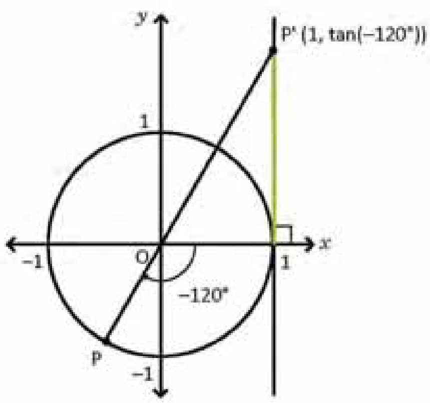
c) $\theta = 135°$



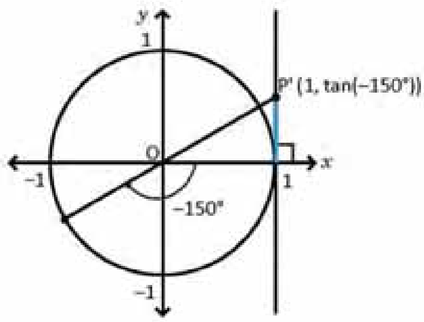
d) $\theta = -45°$



e) $\theta = -120°$



f) $\theta = -150°$



3.8 tan関数をグラフ化しましょう

導入問題

1. θが90°と-90°に近い値をとると、tan θの値はどうなるのでしょうか？次の表を用いましょう。

θ	88°	89°	89.5°	89.9°	89.99°
tan θ					

θ	–88°	–89°	–89.5°	–89.9°	–89.99°
tan θ					

2. 次の表を完成させ、]–90°, 90°[の範囲で関数y = tan θをグラフ化しましょう。

θ	–60°	–45°	–30°	0°	30°	45°	60°
tan θ							

3. 関数 y = tan θの領域を求めましょう。
4. 関数y = tan θの範囲はどこでしょうか？

解法

1. 90°に近い角度の場合。

θ	88°	89°	89.5°	89.9°	89.99°
tan θ	28.6...	57.2...	114.5...	572.9...	5729.5...

θが90°に非常に近い値をとると、tan θの値はどんどん高くなります。

–90°に近い角度の場合。

θ	–88°	–89°	–89.5°	–89.9°	–89.99°
tan θ	–28.6...	–57.2...	–114.5...	–572.9...	–5729.5...

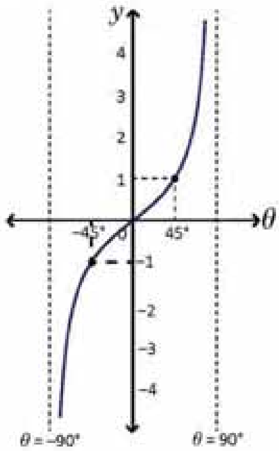
θが–90°に非常に近い値をとると、tan θの値はどんどん高くなります。

θ = 90° と θ = –90°が垂直方向の漸近線であることがわかります。

2. 表は次のようになります：

θ	–60°	–45°	–30°	0°	30°	45°	60°
tan θ	–1.7...	–1	–0.5...	0	0.5...	–1	1.7...

グラフ化すると右図のようになります。



3. 前回の授業では、整数nを持つθ = 90° + 180°nの値に対して、関数y = tan θが定義されていないことがわかりました。よって、領域は：
$\mathbb{R}$ – {90° + 180° n | n は整数}.

4. グラフから、y = tan θの範囲は$\mathbb{R}$であることがわかります。

まとめ

関数 $f(\theta)$ = tan θ の領域は$\mathbb{R}$ - {90° + 180°n | nは整数} で、その範囲は$\mathbb{R}$です。さらに、nが整数である直線θ = 90° + 180°nは、tan関数のグラフの垂直方向の漸近線です。

関数 $f(\theta)$ = tan θは周期関数です。tan関数の周期は180°なので、一般的にはすべてのnの整数に対してtan (θ + 180°n) = tan θとなります。

問題

tanの周期性を用いて、関数$f(\theta)$ = tan θ を]–270°, 270°[の範囲に描きます。

145

ユニット5

達成の目安：

3.8 周期性を利用してtan関数をグラフ化しましょう。

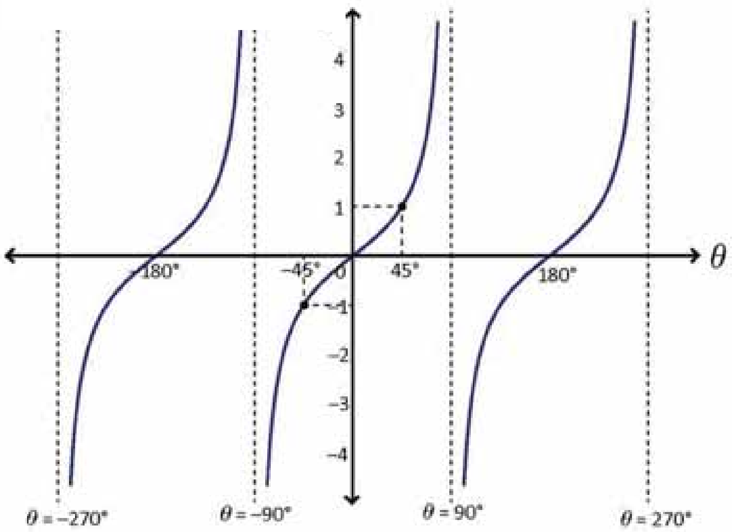
学習の流れ：

この授業ではtan関数がグラフ化し、その特性を記述します; 前回の授業では、sen関数とcos関数の周期性の違いを確立しました。

ねらい：

導入問題では、tan関数の非対称性や前回の授業で勉強した領域、グラフを観察して得られる範囲などの特徴について記述しています。

問題の解答：



3.9 三角関数の周期と振幅

導入問題

1. 同じ直交座標系内で、関数 $f_1(\theta)$ = sen θ および $f_2(\theta)$ = 2sen θ を間隔 [0°, 360°]でグラフ化します。

θ	0°	90°	180°	270°	360°
sen θ					
2sen θ					

2. a) 関数 $g_1(\theta)$ = cos θ を区間 [0°, 360°] でグラフ化し、$g_2(\theta)$ = cos 2θを区間 [0°, 180°] でグラフ化すると、次の表のようになります。

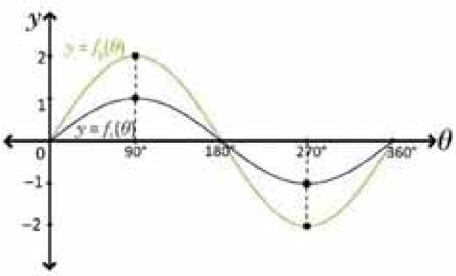
θ	0°	45°	90°	135°	180°
2θ					
cos 2θ					

b) $g_2(\theta + 180°) = g_2(\theta)$ であることを確認して、360°までのグラフを完成させましょう。

解法

1. 表を完成させましょう。

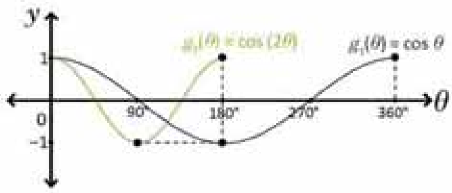
θ	0°	90°	180°	270°	360°
sen θ	0	1	0	–1	0
2sen θ	0	2	0	–2	0



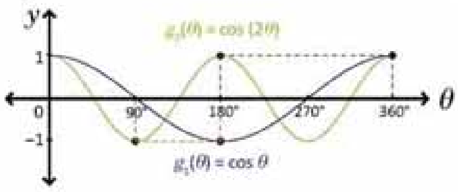
$f_2(\theta)$ = 2sen θのグラフ上の各点は、$f_1(\theta)$ = sen θのグラフ上の点のy座標を2倍することで得られます。

2. a) 表を完成させましょう。

θ	0°	45°	90°	135°	180°
2θ	0°	90°	180°	270°	360°
cos 2θ	1	0	–1	0	1



b) $g_2(\theta + 180°) = \cos(2\theta + 360°) = \cos 2\theta = g_2(\theta)$



$g_2(\theta) = \cos 2\theta$のグラフ上の各点は、$g_1(\theta)$ = cos θ のグラフ上の点のθ内の座標を $\frac{1}{2}$倍することで得られます。

定義

三角関数$f(\theta)$ = A sen θの振幅を値 |A|と呼び、関数がとることができる最大値です。
この場合、関数の範囲は[-|A|, |A|]となります。この関数は、関数sen θのすべてのy座標にAを乗じて得られます。

Bが0以外の実数である関数 $f(\theta)$ = sen Bθ は次を満たします。

$$\text{sen}\,(B\theta + 360°) = \text{sen}\,B\theta \Leftrightarrow \text{sen}\,B\left(\theta + \frac{360°}{B}\right) = \text{sen}\,B\theta \Leftrightarrow f\left(\theta + \frac{360°}{B}\right) = f(\theta).$$

このことから、関数の周期 $f(\theta)$ = sen Bθ es $\frac{360°}{|B|}$ (周期が正であるために|B|)が使用されます)。

これらの定義は、関数 $f(\theta)$ = Acos θおよび$f(\theta)$ = cos Bθにも適用されます。

問題

区間[0, 360°], において、振幅と周期性を用いて次の関数をグラフ化しましょう。

a) $f(\theta)$ = 3sen θ　　b) $f(\theta)$ = –2cos θ　　c) $f(\theta)$ = sen 3θ　　d) $f(\theta) = \cos\frac{\theta}{2}$

達成の目安：

3.9　y = Asen θとy = sen Bθの型の三角関数をグラフ化しましょう。

学習の流れ：

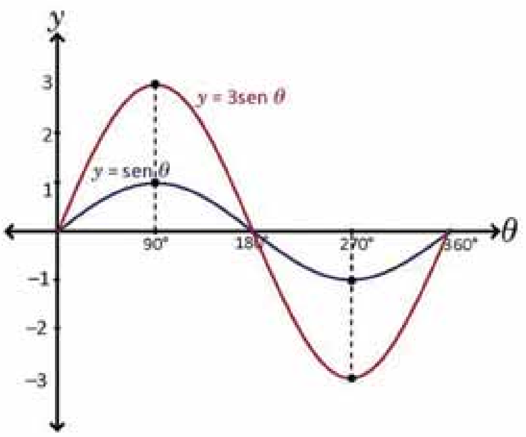
1年目は、異なる関数について、変数や関数自体に実数を掛けた際にどう変化するのかを勉強しました。今回は、周期と範囲との関係でそれが三角関数に与える影響を調べます。

ねらい：

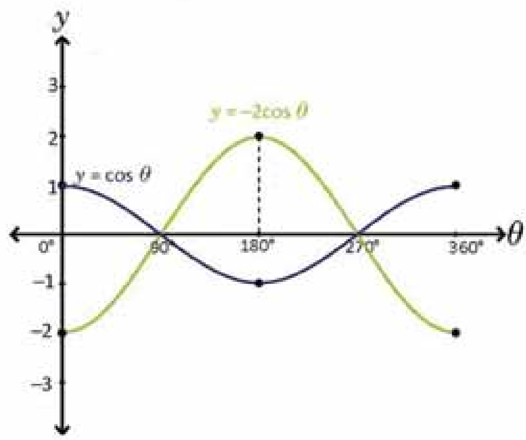
変位を調べたのと同様に、平面上に点を配置して関数を描き、その間で周期や振幅がどのように変化するかを比較します。練習問題では結論の仕方を確認しましょう。

問題の解答：

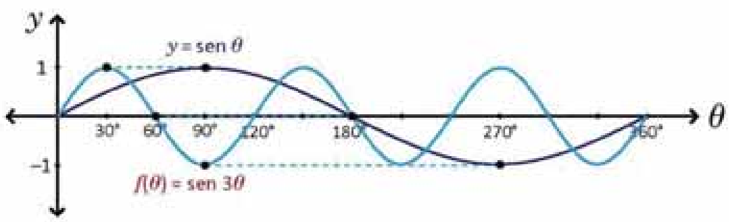
a) $f(\theta)$ = 3sen θ



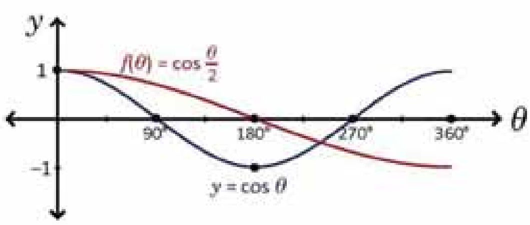
b) $f(\theta) = -2\cos\theta$



c) $f(\theta)$ = sen 3θ



d) $f(\theta) = \cos\frac{\theta}{2}$



また生徒は、基底関数を作成すること無くグラフを提示することも可能です。

3.10 三角関数の垂直変位

導入問題

以下のa) と b) それぞれの関数のグラフを同一の直交座標系内に書きましょう。

a) $f_1(\theta)$ = sen θ y $f_2(\theta)$ = sen θ + 1; [0°, 450°]

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen θ + 1						

b) $g_1(\theta)$ = sen θ y $g_2(\theta)$ = sen θ – 1; [0°, 450°]

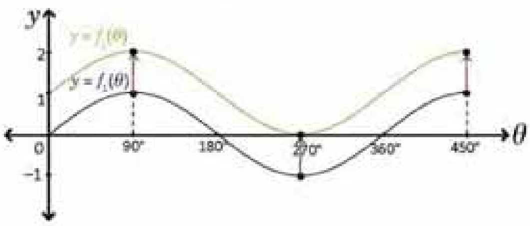
θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen θ – 1						

解法

関数sen(θ + 1°)とsen θ + 1 が異なることに注目してください。

a) 表を埋めます。

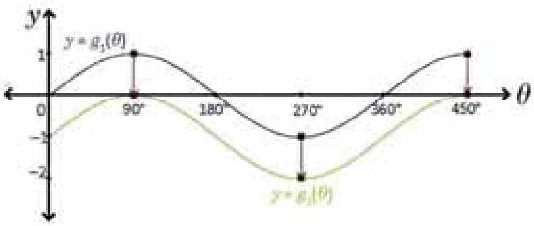
θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen (θ) + 1	1	2	1	0	1	2



$f_2(\theta)$ = sen θ + 1 の各点は、$f_1(\theta)$=sen θのグラフ上の点の上方への1単位の変位を示しています。

b) 表を埋めます。

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen θ – 1	–1	0	–1	–2	–1	0



$g_2(\theta)$ = sen θ – 1 の各点は、$g_1(\theta)$ = sen θ のグラフ上の点の下方への1単位の変位を示しています。

まとめ

関数$f(\theta)$ = sen θ + kのグラフは、関数sen θがk 単位分垂直方向に変位したものです。

- $k > 0$ならば、変位は上方へとなります。
- $k < 0$ ならば、変位は下方へとなります。

領域ℝを持つ関数$f(\theta)$= sen θ + kが与えられた場合、その範囲は区間[–1 + k, 1 + k]となります。

これらの規則は、関数cos θの垂直方向の変位としての関数$f(\theta)$ = cos θ + kにも適用されます。

一般に、$f(x)$ + k のグラフは$f(x)$ のグラフの垂直方向の変位です： $k > 0$ の場合は上向き、$k < 0$ の場合は下向きとなります。

問題

区間[0, 360°] で次の関数を垂直方向の変位を用いてグラフ化しましょう：

a) $f(\theta)$ = cos θ + 1
b) $f(\theta)$ = sen θ + 2
c) $f(\theta)$ = cos θ – 2
d) $f(\theta)$ = sen θ – 3

147

ユニット5

達成の目安：

3.10　y = sen θ + k 型の三角関数をグラフ化しましょう。

学習の流れ：

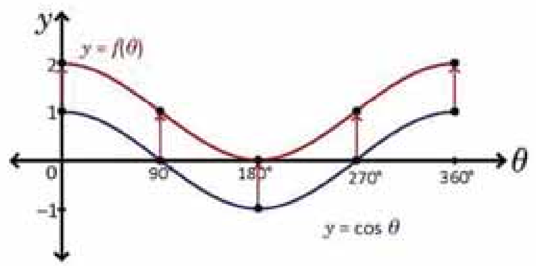
この授業では、sen関数とcos関数の垂直方向の変位である関数をグラフ化し、変位した関数の範囲も書きます。

つまずきやすい点：

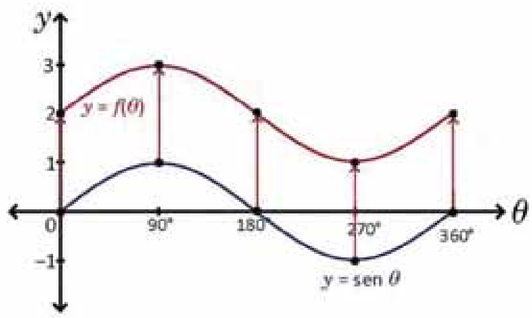
関数 y = sen θ + kは、垂直方向の変位としてグラフ化できるので、sen θ の値を計算した後に k の値を追加しないといけないことを覚えておきましょう。

問題の解答：

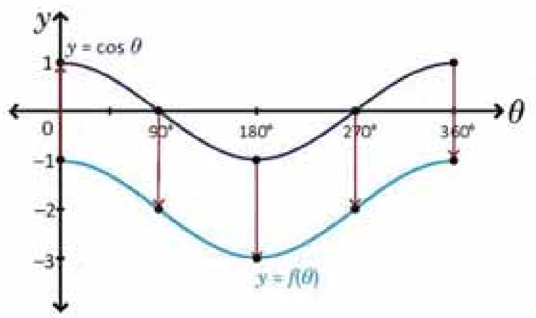
a) $f(\theta)$ = cos θ + 1



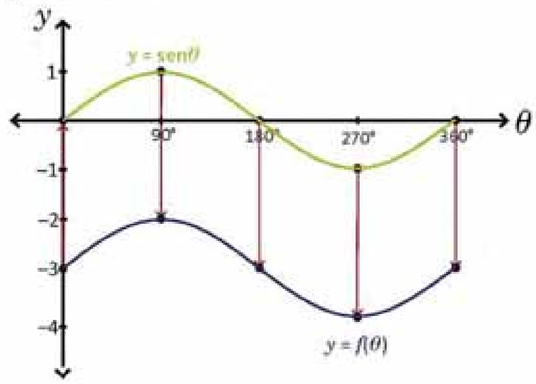
b) $f(\theta)$ = sen θ + 2



c) $f(\theta)$ = cos θ – 2



d) $f(\theta)$ = sen θ – 3



3.11 三角関数の水平変位

導入問題

次の設問では、指定された間隔において、同じ直交座標系内に関数をグラフ化します。

a) $f_1(\theta)$ = sen θ y $f_2(\theta)$ = sen$(\theta - 90°)$; [0°,450°]

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen θ						
sen$(\theta-90°)$						

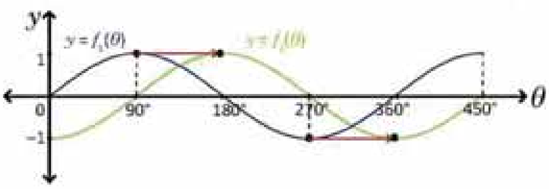
b) $g_1(\theta)$ = cos θ y $g_2(\theta)$ = cos$(\theta + 90°)$; [0°, 450°]

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°	540°
cos θ							
cos$(\theta+90°)$							

解法

a) 表を埋めます。

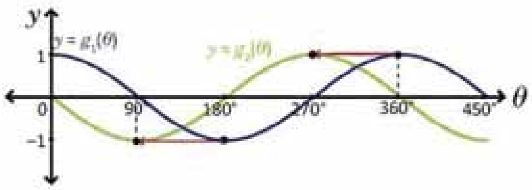
θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen θ	0	1	0	−1	0	1
sen$(\theta-90°)$	−1	0	1	0	−1	0



$f_2(\theta)$ = sen$(\theta - 90°)$ の各点は、$f_1(\theta)$ = sen θのグラフ上の点を右に90°ずらしたものです。

b) 表を埋めます。

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
cos θ	1	0	−1	0	1	0
cos$(\theta+90°)$	0	−1	0	1	0	−1



$g_2(\theta)$ = cos$(\theta + 90°)$ の各点は、$g_1(\theta)$ = cos θのグラフ上の点を左に90°ずらしたものです。

まとめ

$f(\theta)$ = sen$(\theta - \alpha)$のグラフは、sen θのグラフのα単位の水平変位です。

- $h > 0$ならば、変位は右方向へとなります。
- $\alpha < 0$ならば、変位は左方向へとなります。

これらの規則は、関数cos θの変位としての関数 $f(\theta)$ = cos$(\theta - \alpha)$ にも適用されます。

一般に、$f(x - h)$ のグラフは、$f(x)$のグラフからh単位の水平方向の変位である：

- h > 0なら右方向へ。
- $h < 0$なら左方向へ。

問題

区間[0, 360°] で次の関数を垂直方向の変位を用いてグラフ化しましょう：

a) $f(\theta)$ = cos$(\theta - 45°)$

b) $f(\theta)$ = cos$(\theta - 90°)$

c) $f(\theta)$ = sen$(\theta - (-30°))$

d) $f(\theta)$ = sen$(\theta + 90°)$

達成の目安：

3.11　$y = \text{sen}(\theta - \alpha)$の型の三角関数をグラフ化しましょう。

学習の流れ：

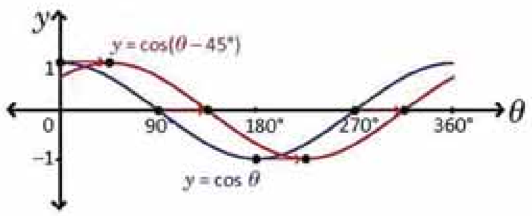
今度は、sen関数またはcos関数のいずれかの水平方向の変位である関数をグラフ化します。ここまでは、変位、周期、振幅を別々に扱ってきました。

ねらい：

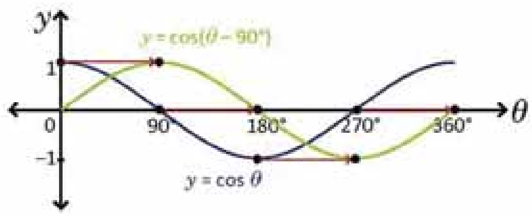
生徒はsen関数とcos関数を補助的にグラフ化し、変位のグラフを描くことができなければなりません。生徒の到達度にもよりますが、補助グラフを使わずに変位のグラフを描くことができるようになりましょう。

問題の解答：

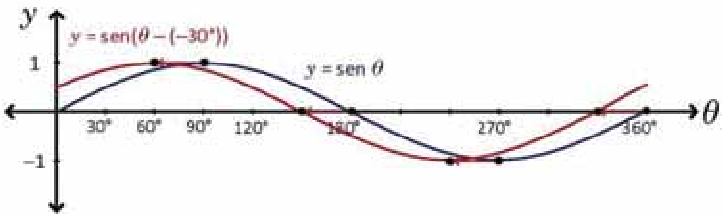
a) $f(\theta) = \cos(\theta - 45°)$



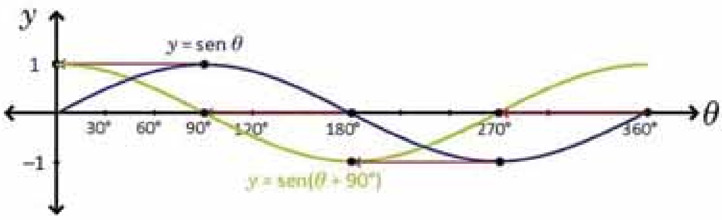
b) $f(\theta) = \cos(\theta - 90°)$



c) $f(\theta) = \text{sen}(\theta - (-30°))$



d) $f(\theta) = \text{sen}(\theta + 90°)$



3.12 三角関数の一般的な形式

導入問題

次の手順で区間[0°, 360°]上の関数 $f(\theta)$ = 2sen $(3\theta + 90°)$ をグラフ化しましょう。

1. 関数 $f_1(\theta)$ = sen 3θ, $f_2(\theta)$ = 2sen 3θ y $f(\theta)$ = 2sen$(3\theta + 90°)$を考慮し、表 1 を完成させましょう。
2. 表を埋めましょう。
3. 区間[0, 120°]で関数 $f_1(\theta)$ と $f_2(\theta)$を同じ直交座標系にグラフ化しましょう。
4. 周期性を利用して、区間[0°, 360°]まで関数$f_2(\theta)$のグラフを完成させましょう。
5. 関数$f_2(\theta)$ と $f(\theta)$を別の直交座標系にグラフ化してください。表2を使います。

表1

θ	0°	30°	60°	90°	120°
$f_1(\theta)$					
$f_2(\theta)$					

表2

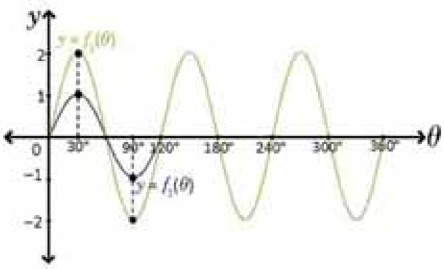
θ	0°	30°	60°	90°	120°
$f_2(\theta)$					
$f(\theta)$					

解法

1. 表1を埋めます。

θ	0°	30°	60°	90°	120°
$f_1(\theta)$	0	1	0	−1	0
$f_2(\theta)$	0	2	0	−2	0

3 と 4. 関数f_1とf_2がグラフ化されています。



f_1 は $\frac{360°}{3}$ = 120° の周期。

以下の関数に注目しましょう：

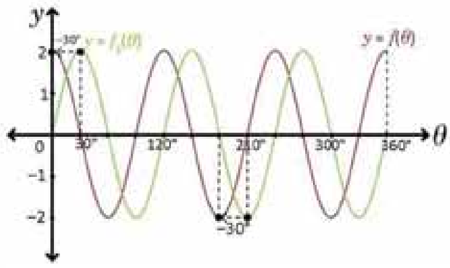
$f(\theta)$ = 2sen$(3\theta + 90°)$ = 2sen $3(\theta - (-30°))$

2. 表2を埋めます。

θ	0°	30°	60°	90°	120°
$f_2(\theta)$	0	2	0	−2	0
$f(\theta)$	2	0	−2	0	2

5. 次の関数がグラフ化されます

$f_2(\theta)$ = 2sen 3θ y $f(\theta)$ = 2sen $3(\theta - (-30°))$



$f(\theta)$ のグラフは、$f_2(\theta)$ = 2sen 3θのグラフが左に30°変位したものです。

まとめ

A ≠ 0 と B ≠ 0の$f(\theta)$ = Asen B$(\theta - \alpha)$の形式の関は、次のような特徴を有します：

1. 振幅 |A|なので、範囲は [−|A|, |A|]です。
2. 周期 $\frac{360°}{|B|}$を持ち、Asen Bθ関数に対してα単位水平変位する。

以下の手順で $f(\theta)$ = Asen B$(\theta - \alpha)$の形式の関数をグラフ化できます：

1. 関数 $f(\theta)$ = sen θを $\left[0, \frac{360°}{|B|}\right]$の範囲でグラフ化しましょう。
2. 関数Asen Bθをグラフ化し、周期性を利用してグラフ化する区間を完成させます。
3. $f(\theta)$ = Asen B$(\theta - \alpha)$を得るために、α 単位の水平変位を行います。

問題

区間[0, 360°] 内で、各関数を変位、振幅、周期を用いてグラフ化しましょう：

a) $f(\theta) = 2\text{sen}(\theta - 30°)$ b) $f(\theta) = 3\cos 2(\theta + 45°)$ c) $f(\theta) = -\text{sen}(4\theta + 240°)$

達成の目安：

3.12 y = Asen B($\theta - \alpha$)の型の三角関数をグラフ化しましょう。

学習の流れ：

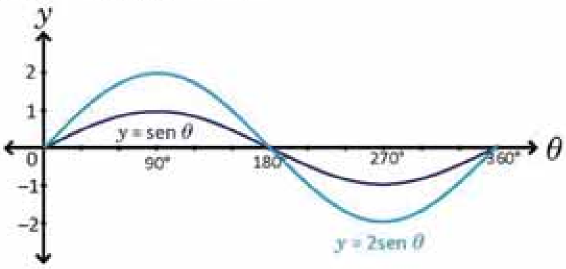
この授業では、振幅、周期、垂直または水平方向の変位を識別する必要がある三角関数のグラフを作成します。

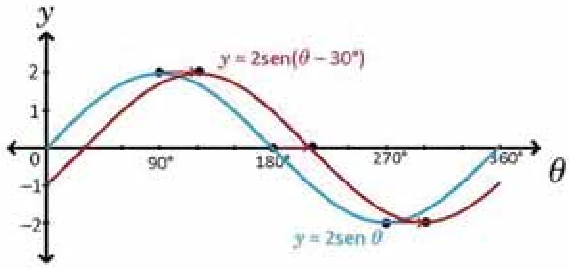
ねらい：

”問題の解答”では、グラフがいっぱいにならないように２つの図を使用しており、各生徒がこの手順でできるかどうかを判断します。すべてのグラフを同一平面上に描く場合には、それぞれの関数グラフを色分けして識別しなければなりません。

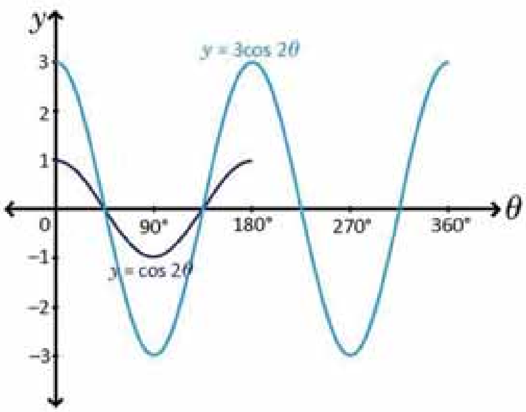
問題の解答：

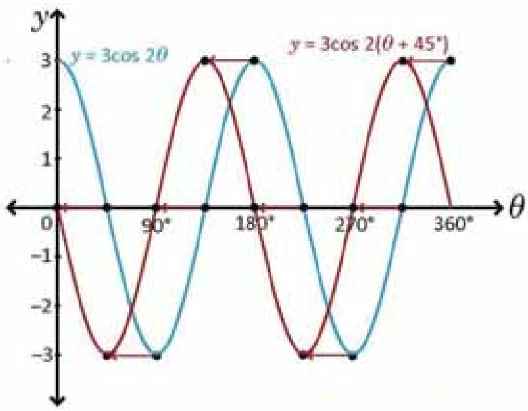
a) $f(\theta) = 2\text{sen}(\theta - 30°)$





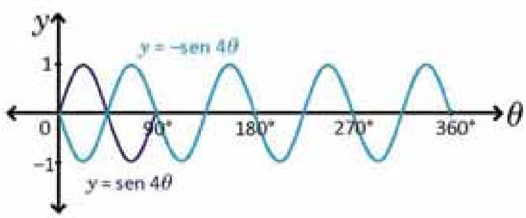
b) $f(\theta) = 3\cos 2(\theta + 45°)$

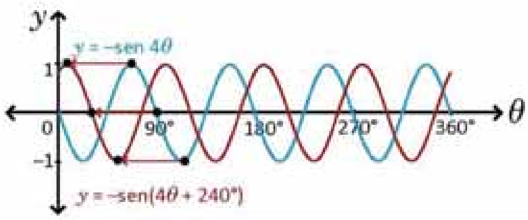




b)では、三角関数の記号を適用して得られた関数をグラフ化します。
$f(\theta) = 3\cos 2(\theta + 45°) = 3\text{sen}(2\theta + 90°) = -3\text{sen } 2\theta$

c) $f(\theta) = -\text{sen}(4\theta + 240°) = -\text{sen } 4(\theta + 60°) = -\text{sen } 4(\theta - (-60°))$





c)では180°までグラフを作成でき、ノートの2つの面を使用し、30°ごとにX軸上のマークをつけることで、左に60°変位していることを視覚化することができます。

3.13 角度における六十分法

導入問題

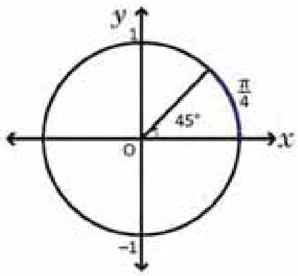
1. 中心角が45°のTCの円弧の長さを求めましょう。

2. 長さが $\frac{\pi}{6}$ であるTCの中心角を求めましょう。

半径rの円上で、中心角θで囲まれた円弧の長さは、$2\pi r\frac{\theta}{360^\circ}$ で表されます。

解法

1. TCの半径はr = 1です。45°の角度で支えられた円弧の長さは次式で表すことができます：
$2\pi(1)\frac{45^\circ}{360^\circ} = \cancel{2}\pi\frac{1}{\cancel{8}_4}$
したがって、円弧の長さは $\frac{\pi}{4}$ となります。



2. $2\pi\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{\pi}{6}$ となるような中心角をαとします。
$\alpha = \frac{\pi}{6}\left(\frac{360^\circ}{2\pi}\right) = 30^\circ$ を解きます。
したがって、長さ $\frac{\pi}{6}$ の円弧を挟む角度は30°です。

定義

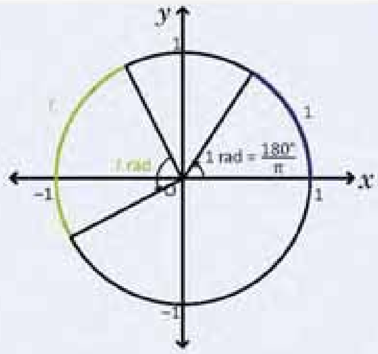
三角関数は次のように定義されます：長さ1の円弧を支える角度としての**1ラジアン。**

したがって、***t*ラジアン**は長さtの円弧を支える角度であり、t rad（または単にt）として表されます。

$0 \leqq \theta \leqq 360^\circ$の角度θは、長さ $\frac{\theta}{180^\circ}\pi$，の円弧を支えるので、角度$0 \leqq \theta \leqq 360^\circ$の角度は $\frac{\theta}{180^\circ}\pi$ radの値を持ちます。

この定義は次のように任意の角度に適用できます：任意の角度θのラジアンでの値は $\frac{\theta}{180^\circ}\pi$ radとなります。

角度tをラジアンで表す場合、その値θを度数で表すと $\theta = \frac{180^\circ}{\pi}t$ となります。



角度を度数で書くシステムを**角度の六十進法**といいます。

例

a) 角度120°をラジアンで表します。

$120^\circ = \frac{120^\circ}{180^\circ}\pi \text{ rad} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$

b) $\frac{\pi}{5}$ の値を度で表しましょう。

$\frac{\pi}{5} = \frac{180^\circ}{\cancel{\pi}}\left(\frac{\cancel{\pi}}{5}\right) = 36^\circ$

問題

1. 次の角度を度数で表し、その値をラジアンで求めましょう：

a) 60°	b) 15°	c) 10°	d) 270°
e) 135°	f) 150°	g) 210°	h) 315°

2. 次の角度をラジアンで表し、その値を度数で求めましょう：

a) 2π rad	b) π rad	c) $\frac{\pi}{2}$ rad	d) $\frac{5\pi}{12}$ rad
e) 1 rad	f) $\frac{2\pi}{9}$ rad	g) $\frac{5\pi}{4}$ rad	h) $\frac{9\pi}{5}$ rad

達成の目安：

3.13　六十進法から六十分法に角度を変換し、またその逆を行います。

学習の流れ：

三角関数の学習においては六十進法の角度の値を用いて勉強をしてきましたが、生徒が基礎教育の頃から取り組んできたこのシステムに慣れ親しんでいるからです。分数の使用を避けることができるので、グラフの作成も容易になります。この授業では、六十分法や放射方の説明を行います。

ねらい：

この授業では、円の円弧の長さを度数で書かれた角度に関連付けることで、ラジアンを適用し、六十進法と放射方の値の変換について説明します。

問題の解答：

1a) $60° = \frac{60°}{180°}\pi = \frac{\pi}{3}$ rad

1b) $15° = \frac{15°}{180°}\pi = \frac{\pi}{12}$ rad

1c) $10° = \frac{\pi}{18}$ rad

1d) $270° = \frac{3\pi}{2}$ rad

1e) $135° = \frac{3\pi}{4}$ rad

1f) $150° = \frac{5\pi}{6}$ rad

1g) $210° = \frac{7\pi}{6}$ rad

1h) $315° = \frac{7\pi}{4}$ rad

2a) 2π rad $= 2\pi\left(\frac{180°}{\pi}\right) = 360°$

2b) π rad $= 180°$

2c) $\frac{\pi}{2}$ rad $= 90°$

2d) $\frac{5\pi}{12}$ rad $= 75°$

2e) 1 rad $= \frac{180°}{\pi} \approx 57.3°$

2f) $\frac{2\pi}{9}$ rad $= 40°$

2g) $\frac{5\pi}{4}$ rad $= 225°$

2h) $\frac{9\pi}{5}$ rad $= 324°$

1.7 学んだことを練習しましょう

1. 3.2 三角円を描き、各θ値の点P(cos θ, sen θ)をグラフ化します。
   a) $\theta = 60°$　　b) $\theta = 150°$　　c) $\theta = 240°$　　d) $\theta = 330°$

2. TCでsenとcosを用いて$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$を証明しましょう。

3. 三角関数の周期性を利用して、次の値を計算しましょう。
   a) sen 750°　　b) cos 765°　　c) tan 600°
   d) sen(−660°)　　e) cos(−690°)　　f) tan(−495)

4. 指示に従って解きましょう：
   a) 関数f： [-90°, 90°] → [-1, 1] ; θ → sen θ が全単射であることを証明しましょう。
   b) 余弦関数が全単射になるように制限します。授業3.6のグラフを使いましょう。

5. TCでtan関数を用いて $1 + \tan^2\theta = \theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ を証明しましょう。

6. 次の問題を解きましょう：
   a) 点(0,1)でTCに接する直線 $y = 1$ を書きましょう。
   b) θを第 1 象限の角度とする。直線$y = 1$と辺OPの延長線との交点であるR(0,1)、P(cos θ, sen θ))、Qを書きましょう。
   c) $OQ = \frac{1}{\text{sen}\,\theta}$ であることを証明しましょう。
   d) 点 Q(a, b)の座標を決定しましょう。
   e) $1 + \frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\text{sen}^2\theta}$ であることを証明しましょう。

7. 次の関数の周期を求め、与えられた区間上にグラフ化しましょう。
   a) tan (θ − 90°); [0, 360°]　　b) tan 2θ; [0, 270°]

8. 次の関数の周期と振幅を求め、与えられた間隔でグラフ化しましょう。
   a) $f(\theta) = \text{sen}\,5\theta$; [0°, 360°]　　b) $f(\theta) = \cos\frac{\theta}{3}$; [0°, 1080°]
   c) $f(\theta) = 4\cos\theta$; [0°, 360°]　　d) $f(\theta) = \frac{1}{2}\text{sen}\,\theta$; [0°, 360°]

9. 以下の関数を変位、振幅、周期を用いてグラフ化しましょう。また、領域と範囲を決定しましょう。
   a) $f(\theta) = 2\cos(6\theta - 120°)$　　b) $f(\theta) = 4\text{sen}(2\theta + 120°)$
   c) $f(\theta) = -2\cos(4\theta + 180°)$　　d) $f(\theta) = \frac{1}{2}\text{sen}(3\theta - 225°)$

10. 六十進法の角度を六十分法に書き換えたり、またその逆を行います。
   a) 20°　　b) 50°　　c) 140°　　d) 345°
   e) 500°　　f) −150°　　g) $\frac{\pi}{8}$ rad　　h) $\frac{4\pi}{9}$ rad
   i) $\frac{5\pi}{3}$ rad　　j) $\frac{\pi}{180}$ rad　　k) 3π rad　　l) $-\frac{\pi}{2}$ rad

11. 円の中心角45°を9cmの円弧が支えているとすると、円の半径の長さはどのようになりますか？

12. 円の半径は5cmです。12cmの円弧を表す中心角をラジアン単位で求めましょう。

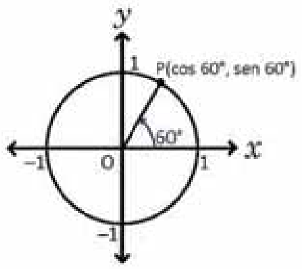
エニット5

達成の目安：

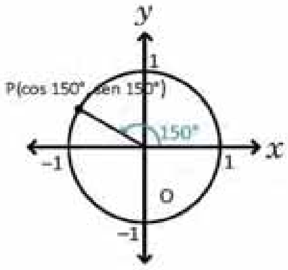
3.14 三角関数を使った問題を解きましょう。

問題の解答：

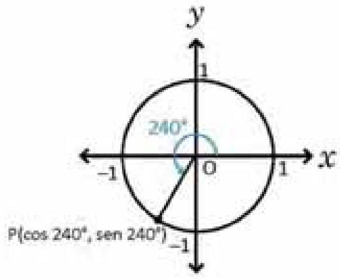
1a) $\theta = 60°$



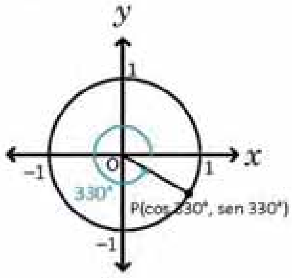
1b) $\theta = 150°$



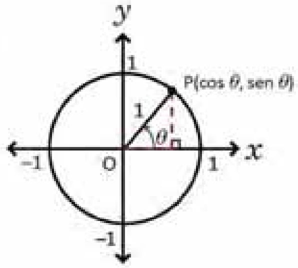
1c) $\theta = 240°$



1d) $\theta = 330°$



2.



θの各値に対して、$d(\mathrm{P, O}) = 1$

$\Rightarrow \sqrt{(\text{sen}\,\theta - 0)^2 + (\cos\theta - 0)^2} = 1$

$\Rightarrow (\text{sen}\,\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1^2$

$\Rightarrow \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1.$

3a) $\text{sen } 750° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$

3b) $\cos 765° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

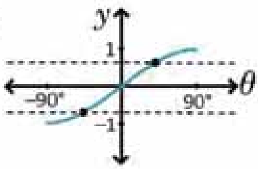
3c) $\tan 600° = \tan 60° = \sqrt{3}$

3d) $\text{sen}(-660°) = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3e) $\cos(-690°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3f) $\tan(-495°) = \tan 45° = 1$

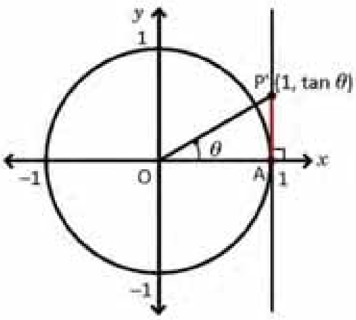
4a)



f のグラフに水平線を引くと、交点が一点になるので、f は単射です。また、 $R_f = [-1,\ 1]$ なので、fは全射です。よってfは全単射です。

4b) g: $[0, 180°] \rightarrow [-1, 1]$; $x \rightarrow \cos x$

5.



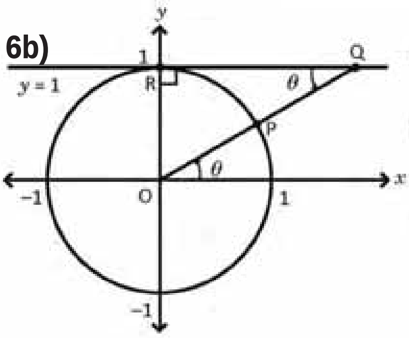
$-90° < \theta < 90° \Rightarrow \cos\theta = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OP'}} = \frac{1}{\mathrm{OP'}} \Rightarrow \mathrm{OP'} = \frac{1}{\cos\theta}$ とすると

$\Rightarrow d(\mathrm{P', O}) = \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow \sqrt{(1-0)^2 + (\tan\theta - 0)^2} = \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

tanの周期性と$\cos(\theta + 180°) = -\cos\theta$により、$-\cos\theta$となります。

nが整数のすべての$\theta \neq 90° + 180°n$ は $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ を満たします。

6a) および **6b)**



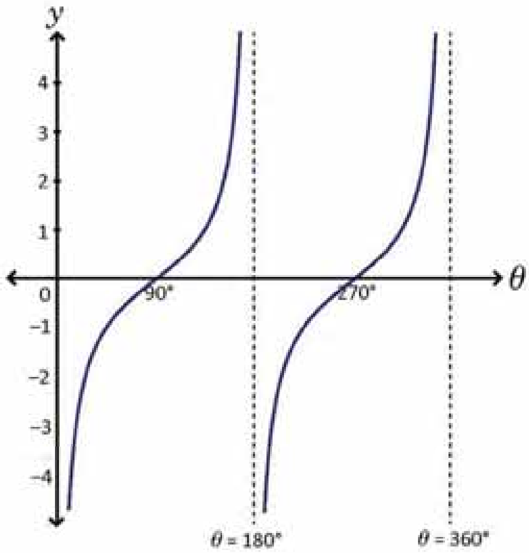
6c) $\text{sen}\,\theta = \frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{\mathrm{OQ}} \Rightarrow \mathrm{OQ} = \frac{1}{\text{sen}\,\theta}$

6d) Sea $\mathrm{Q}(a, b) \Rightarrow \tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{a} \Rightarrow a = \frac{1}{\tan\theta} \Rightarrow \mathrm{Q}(a, b) = \mathrm{Q}\left(\frac{1}{\tan\theta}, 1\right)$

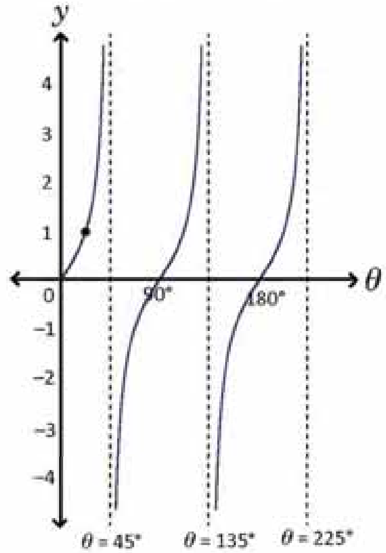
6e) $d(\mathrm{Q, O}) = \frac{1}{\text{sen}\,\theta} \Rightarrow \sqrt{(1-0)^2 + \left(\frac{1}{\tan\theta} - 0\right)^2} = \frac{1}{\text{sen}\,\theta}$

$\Rightarrow 1 + \left(\frac{1}{\tan\theta}\right)^2 = \frac{1}{\text{sen}^2\theta} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\text{sen}^2\theta}.$

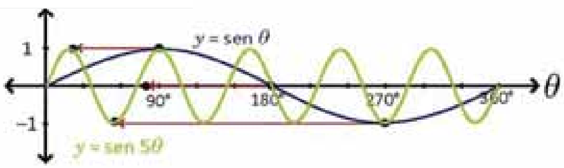
7a) $\tan(\theta - 90°)$; $[0, 360°]$; 周期：180°



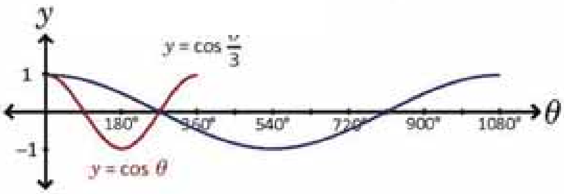
7b) $\tan 2\theta$; $[0, 270°]$;周期：90°



8a) 振幅：1 周期：72°



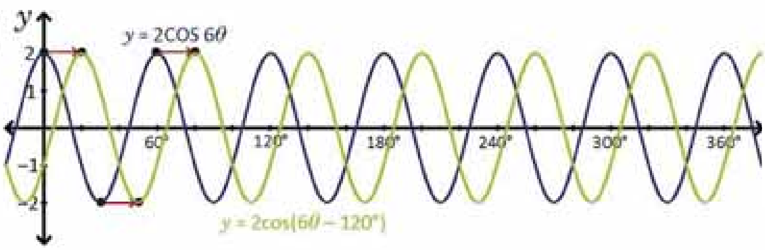
8b) 振幅：1 周期：1080°



8c) 振幅：4 周期：360°

8d) 振幅：$\frac{1}{2}$ 周期：360°

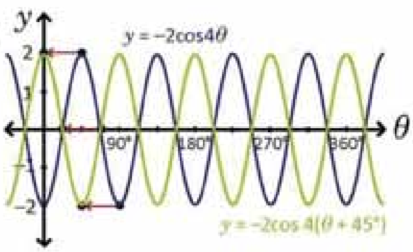
9a)



振幅：2
周期：60°
領域：$\mathbb{R}$
範囲： $[-2, 2]$

9b) $f(\theta) = 4\text{sen}(2\theta + 120°)$
振幅：4
周期：180°
領域：$\mathbb{R}$
範囲： $[-4, 4]$

9c)



振幅：2
周期：90°
領域：$\mathbb{R}$ 範囲： $[-2, 2]$

9d) $f(\theta) = \frac{1}{2}\text{sen}(3\theta - 225°)$
振幅：$\frac{1}{2}$ 周期：120°
領域：$\mathbb{R}$ 範囲：$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

10a) $20° = 20°\left(\frac{\pi}{180°}\right) = \frac{\pi}{9}$ **10b)** $50° = \frac{5\pi}{18}$ **10c)** $140° = \frac{7\pi}{9}$ **10d)** $345° = \frac{23\pi}{12}$

10e) $500° = \frac{25\pi}{9}$ **10f)** $-150° = -\frac{5\pi}{6}$ **10g)** $\frac{\pi}{8}\text{ rad} = \frac{\pi}{8}\left(\frac{180°}{\pi}\right) = 22.5°$ **10h)** $\frac{4\pi}{9} = 80°$

10i) $\frac{5\pi}{3}\text{ rad} = 300°$ **10j)** $\frac{\pi}{180}\text{ rad} = 1°$ **10k)** $3\pi\text{ rad} = 540°$ **10l)** $-\frac{\pi}{2}\text{ rad} = -90°$

11. $2\pi r\frac{45°}{360°} = 9 \Rightarrow r = \frac{36}{\pi}\text{cm.}$

12. $5\theta = 12\text{ cm} \Rightarrow \theta = \frac{12}{5}\text{rad}$

3.15 ユニット問題

1. 以下の方程式を解きましょう。
   a) $\log_2(x^2 - 8) = 3$　　b) $\log_{\frac{1}{2}} x = 4$　　c) $\log_3 x = -\frac{1}{2}$
   d) $2^{3x+2} = 256$　　e) $2^x = 3^{x-2}$　　f) $2^{x+5} = 3^{x-2}$
2. 水平方向と垂直方向の変位を使用して、以下の関数をグラフ化しましょう：
   a) $f(x) = \log_3(x - 1)$　　b) $f(x) = \log_2 x + 2$　　c) $f(x) = \log_3(x - 1) - 1$　　d) $f(x) = \log_4(x + 2) - 3$
3. 前の問題の各関数について次を決定しましょう：領域、範囲、漸近値、およびその逆関数
4. **複利計算**　ある一定の金額Cを年利率r%でt年間投資し、1年にn回再資本化（再投資）したとします。t年後に得られた金額は、式 $D(t) = C\left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{nt}$ で表すことができます。

   マリアは信用組合に500ドルの定期預金をします。預金の年利は4%です。年に4回（3ヶ月に1回）資本修正がなされます。
   a) 既知の値を式 $D(t) = C\left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{nt}$ に代入することで、t年後にマリアが積み立てた金額を求める式を作ります。
   b) 2年後のマリアの貯金額はどれくらいになるのでしょうか？
   c) マリアが最低でも750ドルを貯めるには何年かかるのでしょうか？
5. **人口増加**　時間経過に伴う人口の成長は、次の指数関数で示されます：$P(t) = C(1 + r)^t$。ここで、Cは初期人口、rは成長率、tは経過年数です。2017年のエルサルバドルの人口は6,172,011人で、人口増加率は0.3%と推計されています。前述の情報を用いて次の問題に回答しましょう：
   a) このまま成長率が変わらない場合、2030年のエルサルバドルの人口は、おおよそどのくらいになるのでしょうか？
   b) 人口が700万人を超えるのは何年後でしょうか？
6. 次の定理を正当化してください： すべての自然数nについて、2^nがk桁の場合、2^{n+1}がk桁、または2^{n-1}がk桁である。
7. tan関数を全単射に限定してグラフ化しましょう。
8. 復習問題3.14の4と前回の問題で学んだ制限関数を用いて、三角関数の逆関数をグラフ化しましょう。

   六十分法の角度を用います。
9. すべての角度θに対して、次が成り立つことを証明しましょう。

   三角不等式を用います。

   a) $\text{sen}^2\theta \leq 1$　　b) $|\text{sen}\,\theta + \cos\theta| \leq 2$
   c) $(\text{sen}\,\theta + \cos\theta)^2 = 1 + \text{sen}\,2\theta$
   d) $|\text{sen}\,\theta + \cos\theta| \leq \sqrt{2}$　　前回と同様におこないます。
   e) $\frac{2\tan\theta}{1 + \tan^2\theta} \leq 1$, $\theta \neq 90° + 180°n$、ここでnは整数です。
10. πの近似値。半径1の円に次の多角形が内接している状態で、多角形の外周と円の直径の商を計算しましょう：
    a) 正八角形　　b) 正十二角形

アルキメデス (紀元前287-212）は図形の面積や体積を求める手法である”取り尽くし法”を用いて実験に成功しました。この手法では、円の中に正多角形を描き込み、その面積を近似させることで成り立ちます。この方法で、アルキメデスはまた、その直径による円周の商、すなわち定数πの近似を行いました。
W. ダンハム(2004) *Viaje a través del genio*

達成の目安：

3.15 対数関数と三角関数を使った問題を解きましょう。

問題の解答：

1a) $\log_2(x^2-8)=3 \Leftrightarrow x^2-8=2^3 \Leftrightarrow x=\pm 4$

1b) $\log_{\frac{1}{2}} x = 4 \Leftrightarrow x=\left(\frac{1}{2}\right)^4 \Leftrightarrow x=\frac{1}{16}$

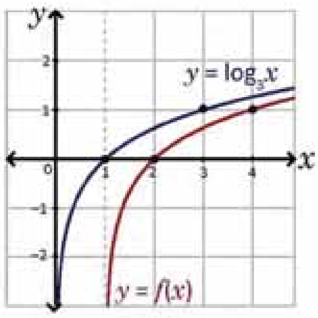
1c) $\log_3 x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 3^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{3}}$

1d) $2^{3x+2}=256 \Leftrightarrow 2^{3x+2}=2^8 \Leftrightarrow 3x+2=8 \Leftrightarrow x=2$

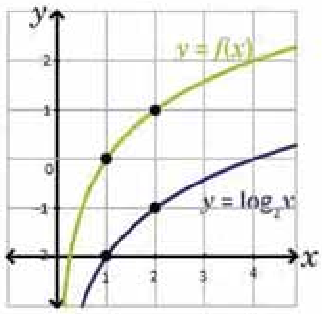
1e) $2^x=3^{x-1},\ x=\frac{\log 3}{\log 3-\log 2}=2.70951\ldots$

1f) $2^{x+5}=3^{x-2},\ x=\frac{2\log 3+5\log 2}{\log 3-\log 2}=13.96657\ldots$

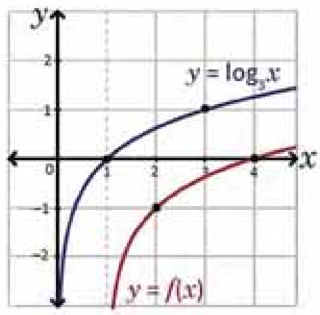
2a) $f(x)=\log_3(x-1)$



2b) $f(x)=\log_2 x+2$



2c) $f(x)=\log_3(x-1)-1$



3a) $D_f=]1,\infty[,\ R_f=\mathbb{R}$, 漸近線： $x=1$

逆関数： si $y=f^{-1}(x) \Rightarrow f(y)=x \Rightarrow \log_3(y-1)=x \Rightarrow y-1=3^x \Rightarrow y=3^x+1 \Rightarrow f^{-1}(x)=3^x+1$.

3b) $D_f=]0,\infty[,\ R_f=\mathbb{R}$
漸近線： $x=0$
$f^{-1}(x)=2^{x-2}$

3c) $D_f=]1,\infty[,\ R_f=\mathbb{R}$
漸近線： $x=1$
$f^{-1}(x)=3^{x+1}+1$

3d) $D_f=]-2,\infty[,\ R_f=\mathbb{R}$
漸近線： $x=-2$
$f^{-1}(x)=4^{x+3}-2$

4a) $D(t)=500\left(1+\frac{1}{100}\right)^{4t}$

4b) 541.43ドル

4c) $500\left(1+\frac{1}{100}\right)^{4t}\ge 750 \Rightarrow \left(\frac{101}{100}\right)^{4t}\ge\frac{750}{500}\Rightarrow \log\left(\frac{101}{100}\right)^{4t}\ge\log\frac{3}{2}\Rightarrow 4t\log\frac{101}{100}\ge\log\frac{3}{2}\Rightarrow t\ge\frac{\log\frac{3}{2}}{4\log\frac{101}{100}}=10.18\ldots$

11年が経過しなければなりません。

5a) $t=2030-2017=13.$
$P(13)=6\,172\,011(1+0.003)^{13}=6\,417\,100.$

人口と人口増加率は"The World Factbook 2017"を参照。

5b) $6\,172\,011(1+0.003)^t\ge 7\,000\,000\Rightarrow 1.003^t\ge\frac{7\,000\,000}{6\,172\,011}\Rightarrow\log 1.003^t\ge\log\frac{7\,000\,000}{6\,172\,011}\Rightarrow t\ge\frac{\log\frac{7\,000\,000}{6\,172\,011}}{\log 1.003}\ge 42.02\ldots$

2060年には人口が700万人を超えます。

6. 2^n が k 桁の場合、k - 1 ≦ $\log 2^n < k$。$\log 2^n$ の小数点以下の部分が 1 - log 2 より小さい場合、$k-1\le\log 2^n+\log 2<k$、すなわち
$k-1\le\log 2^{n+1}<k$ とすると、2^{n+1}は k桁です。

$\log\ 2^n$ の小数点以下の部分が log 2 以上とすると、
$k-1\le\log 2^n-\log 2<k$
すなわち $k-1\le\log 2^{n-1}<k$
そうすると、2^{n-1}は k桁です。

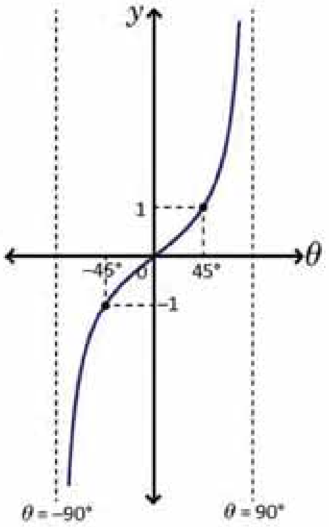
また、$\log 2<1-\log 2$なので、$\log 2^n$の小数の可能な値を全て含みます。

別の解決法：
2^nがk桁の場合、⇔ $2^n=a\times 10^{k-1}$と$1\le a<10$

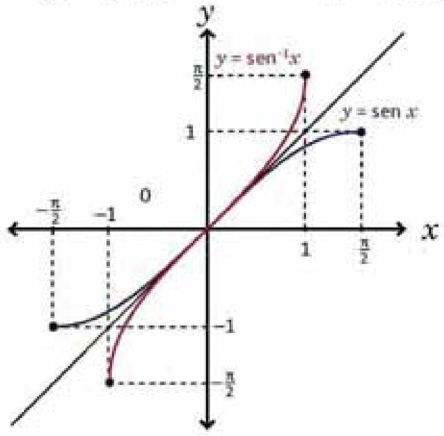
$\le a<5 \Rightarrow 2^{n+1}=(2a)\times 10^{k-1}$で、$2\le 2a<10$とすると ⇔ 2^{n+1}はk 桁です。

$5\le a<10 \Rightarrow 2^{n-1}=\left(\frac{a}{2}\right)\times 10^{k-1}$ とすると $\frac{5}{2}\le\frac{a}{2}<5$ ⇔ 2^{n-1} はk 桁です。

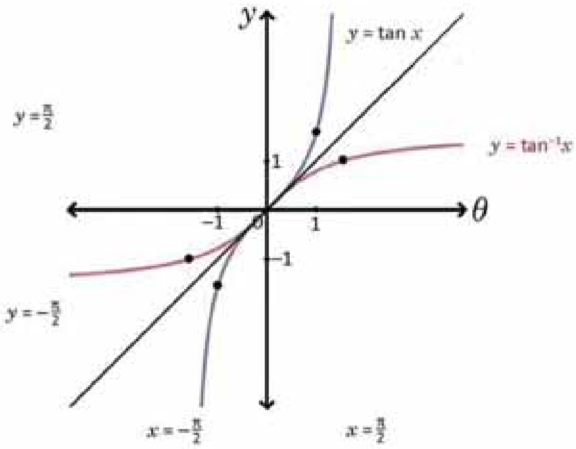
7. f: $]-90°, 90°[\rightarrow \mathbb{R}$
$\theta \rightarrow \tan\theta$



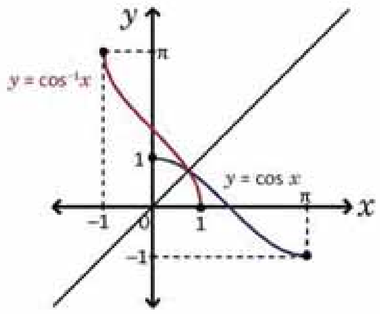
8. f: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ $\quad f^{-1}$: $[-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$x \rightarrow \text{sen}\, x \qquad x \rightarrow \text{sen}^{-1}x$



8. f: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ $\quad f^{-1}$: $\mathbb{R} \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$x \rightarrow \tan x \qquad x \rightarrow \tan^{-1}x$



8. f: $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ $\quad f^{-1}$: $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$
$x \rightarrow \cos x \qquad x \rightarrow \cos^{-1}x$



逆三角関数の表記法を生徒に教えることができます。

9a) $0 \leq \text{sen}\,\theta \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \text{sen}^2\theta \leq \text{sen}\,\theta$とすると
$\Rightarrow 0 \leq \text{sen}^2\theta \leq \text{sen}\,\theta \leq 1$
$\Rightarrow \text{sen}^2\theta \leq 1$

$-1 \leq \text{sen}\,\theta < 0 \Rightarrow 0 < -\text{sen}\,\theta \leq 1$とすると

別の解決法：すべてのθについて、$0 \leq |\text{sen}\,\theta| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |\text{sen}^2\theta| \leq |\text{sen}\,\theta| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \text{sen}^2\theta \leq 1$が成り立つ。

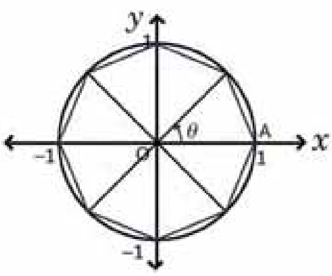
9b) $|\text{sen}\,\theta + \cos\theta| \leq |\text{sen}\,\theta| + |\cos\theta| \leq 1 + 1$
$\Rightarrow |\text{sen}\,\theta + \cos\theta| \leq 2$

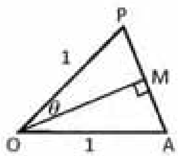
9c) $(\text{sen}\,\theta + \cos\theta)^2 = \text{sen}^2\theta + 2\text{sen}\,\theta\cos\theta + \cos^2\theta$
$= (\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta) + 2\text{sen}\,\theta\cos\theta$
$= 1 + \text{sen}\,2\theta$

9d) $(\text{sen}\,\theta + \cos\theta)^2 = 1 + \text{sen}\,2\theta \leq 1 + 1$
$\Rightarrow 0 \leq (\text{sen}\,\theta + \cos\theta)^2 \leq 2$
$\Rightarrow \sqrt{(\text{sen}\,\theta + \cos\theta)^2} \leq \sqrt{2}$
$\Rightarrow |\text{sen}\,\theta + \cos\theta| \leq \sqrt{2}$

9e) $\frac{2\tan\theta}{1 + \tan^2\theta} \leq 1 \Leftrightarrow 2\tan\theta \leq 1 + \tan^2\theta$
$\Leftrightarrow 0 \leq 1 - 2\tan\theta + \tan^2\theta$
$\Leftrightarrow 0 \leq (1 - \tan\theta)^2$

10a)





$\theta = \frac{360°}{8} = 45°$ OMを ΔOAMの二等分線とすると ⇒ ∢MOA = 22.5°
ΔOAPは二等辺三角形⇒ AP = 2AMとなり、∢AMO = 90°
ΔOAMでは：$\frac{\text{AM}}{\text{OA}} = \text{sen}\,22.5° \Rightarrow \text{AM} = \text{sen}\,22.5°$

したがって、AP = 2sen 22.5° ⇒ pを円の外周とすると
$\frac{p}{2} = \frac{8\text{AP}}{2} = 4\text{AP} = 8\text{sen}\,22.5° = 3.06146...$

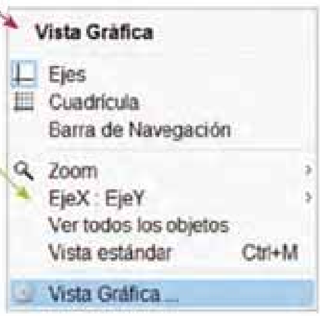
レッスン4 GeoGebraを使った演習

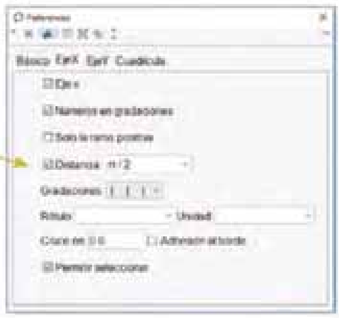
4.1 GeoGebraを使った演習： 三角関数

演習が進むにつれ、GeoGebraでの三角関数のグラフと、その特徴(振幅、周期、位相)を学習できます。

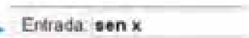
演習

1. 軸の単位を変えます。
   a)「グラフ表示(Vista Gráfica)」で右クリックします。
   b)「グラフ表示(Vista Gráfica)」を選びます。
   c)「X軸(EjeX)」を選びます。
   d)「間隔(Distancia)」の前の四角に印をつけます。
   e)プルダウンメニューから「π / 2」を選びます。





2. 三角関数のグラフ
   a) 正弦(サイン)関数。入力バー(Entrada)にsen xと入力します。

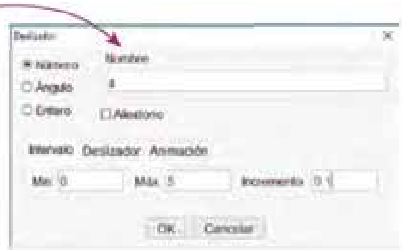


   b) 正弦(サイン)関数の値を評価します。三角関数の角を角度で評価する場合、相当する角度記号を入力しなければなりません。入力バー(Entrada)にa = f(90°)、b = f(90)、c = f(π / 2)を入力します。b = f(90)の時、プログラムでは90ラジアンとすることに注意してください。

3. 三角関数のグラフの振幅
   関数$g(x)$ = 2sen xのグラフを描きましょう。入力バー(Entrada)にg(x) = 2*f(x)を入力します。

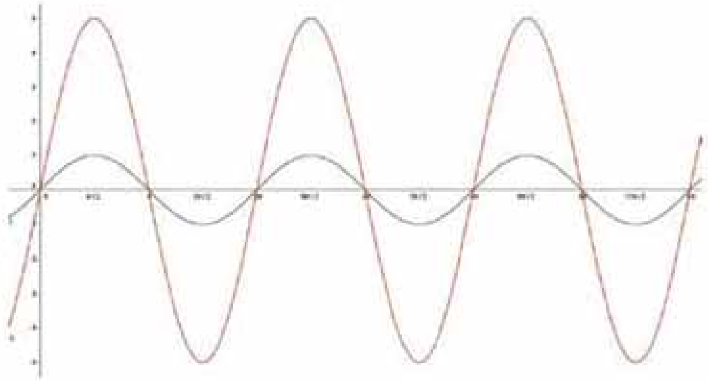
4. a>0の時の関数$f(x)$ = $a$sen(x)の動き。
   スライダー(Deslizador)の設定。
   a) ツールバー(barra de herramientas)で「スライダー(Deslizador)」を選びます。

   b)「グラフ表示(Vista Gráfica)」をクリックします。
   c) スライダーの「名前(Nombre)」を入力する表示が現れます。この場合「**a**」と入力します。「最小(Mín)」に0、「最大(Máx)」に5を、「増加(Incremento)」に 0.1を入力し、「OK(OK)」をクリックします。



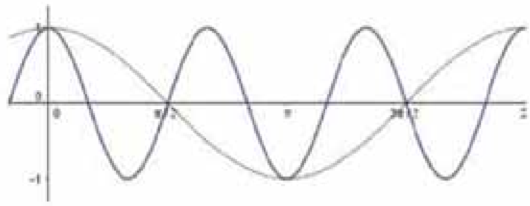
   d) 関数$f(x)$ = sen xのグラフを描きます。
   e) 関数$g(x)$ = asen xのグラフを描きます。
   f) スライダーの点を選び、右に行くほど関数が拡大し、左に行くほど縮小することに注意します。
   g) スライダーの上で右クリックし、アニメーションを始めます。

ユニット5



5. 周期

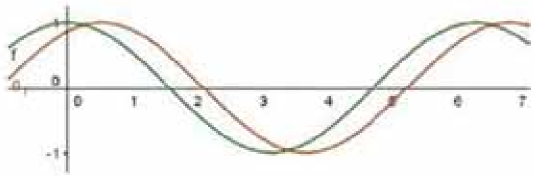
a) 関数$f(x)=\cos x$のグラフを描きましょう。
b) 関数$\cos 3x$のグラフを描きましょう。入力バー(Entrada)にg(x)=f(3x)を入力します。
c) 関数$\cos \frac{x}{3}$のグラフを描きましょう。入力バー(Entrada)にh(x)=f(x/3)を入力します。



6. 縦方向または水平方向の移動

a) 関数$f(x)=\cos x$のグラフを描きましょう。
b) 関数$g_1(x) = \cos(x - 30°)$のグラフを描きましょう。
c) 関数$h_1(x) = \cos(x + 60°)$のグラフを描きましょう。
d) 関数$g_2(x) = \cos(x) + 3$のグラフを描きましょう。
e) 関数$h_2(x) = \cos(x) - 2$のグラフを描きましょう。

GeoGebraで添え字を書く時は、次に示すように下につけます。



課題

1. 授業3.14の設問8の関数のグラフを描きましょう。
2. 授業3.14の設問9の関数のグラフを描きましょう。
3. スライダーを**B**に設定し、「最小(Mín)」に0、「最大(Máx)」に5を、「増加(Incremento)」に 0.1を入力しましょう。次に関数$f(x) = \text{sen}\ x$ と$g(x) = \text{sen}\ Bx$のグラフを描きましょう。**B**の値が増えたり減ったりする時の関数gの動きに注意しましょう。
4. スライダーを使って、縦方向と水平方向の移動のアニメーションを作ってみましょう。

達成の目安：

4.1 周期や振幅を変えたり位相が加わったりした時の三角関数の変位を認識します。

学習の流れ：

三角関数の移動についてはすでに学習し、ラジアンの概念も導入しています。この授業では、GeoGebraを使って、関数のグラフを描き、また、位相が加わったり振幅や周期が変わった時に関数がどのように変位するかをアニメーションで目で見て理解します。

ねらい：

ラジアンでの角度を見るためにx軸の単位を変えましたが、プログラムが自動的に変換するので、入力バー(Entrada)では角度の値(°)を入力します。生徒は、アニメーションを解釈して、学習したことの裏付けとしなければなりません。

問題の解き方：

1a) 入力バー(Entrada)にsen (5x)を入力します。

1b) 入力バー(Entrada)にcos (x/3)を入力します。

1c) 入力バー(Entrada)に 4cos xを入力します。

1d) 入力バー(Entrada)に (1/2)sen xを入力します。

生徒が設問に与えられている区間で関数のグラフを描く必要はありません。

2a) 入力バー(Entrada)に 2cos (6x – 120°)を入力します。

2b) 入力バー(Entrada)に4sen (2x + 120°)を入力します。

2c) 入力バー(Entrada)に–2cos (4x + 180°)を入力します。

2d) 入力バー(Entrada)に (1/2)sen(3x – 225°)を入力します。

誤字の訂正教科書の「課題」の設問2で「問題10」とありましたが、これは誤りで、正しくは「問題9」です。

3. ツールバー(barra de herramientas)で「スライダー(Deslizador)」を選びます。「グラフ表示(Vista Gráfica)」をクリックします。スライダーの名前をBにします。「最小(Mín)」に0、「最大(Máx)」に5を、「増加(Incremento)」に 0.1を入力し、「OK(OK)」をクリックします。入力バー(Entrada)にf(x) = sen xを入力します。入力バー(Entrada)にg(x) = sen Bxを入力します。スライダーの点を選び、右に行くにつれて、また、左に行くにつれて、関数がどのように変位するか見ます。スライダーの上で右クリックし、アニメーションを始めます。

4. 水平方向の移動：ツールバー(barra de herramientas)で「スライダー(Deslizador)」を選びます。「グラフ表示(Vista Gráfica)」をクリックします。スライダーの名前をk にします。「最小(Mín)」に–90°、「最大(Máx)」に90°を、「増加(Incremento)」に0.1° を入力し、「OK(OK)」をクリックします。入力バー(Entrada)にf(x) = sen xを入力します。入力バー(Entrada)にg(x) = sen (x – k)を入力します。スライダーの上で右クリックし、アニメーションを始めます。

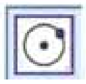
縦方向の移動：ツールバー(barra de herramientas)で「スライダー(Deslizador)」を選びます。「グラフ表示(Vista Gráfica)」をクリックします。スライダーの名前を c にします。「最小(Mín)」に–5、「最大(Máx)」に5を、「増加(Incremento)」に 0.1を入力し、「OK(OK)」をクリックします。入力バー(Entrada)にf(x) = cos xを入力します。入力バー(Entrada)にg(x) = cos x + cを入力します。スライダーの上で右クリックし、アニメーションを始めます。

4.2 GeoGebraを使った演習：正弦(サイン)関数と余弦(コサイン)関数のグラフの作成

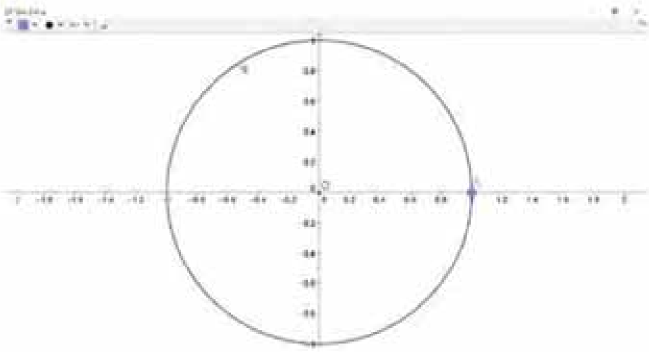
単位円での動きを追うことで三角関数を導きだすことができます。次に正弦(サイン)関数のグラフを描いてみましょう。

演習

1. 単位円を描きます。

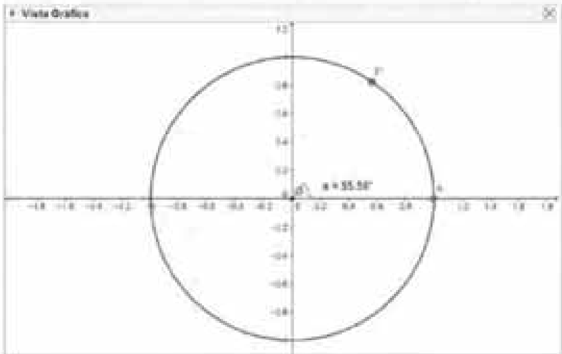


   a) ツールバー(Barra de Herramientas)から「円周(中心、点) (Circunferencia [centro, punto])」を選びます。
   b) 中心として点O(0, 0) を、点としてA(1, 0)を選びます。



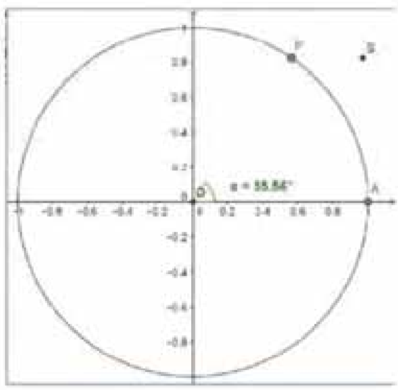
2. 角度を描きます。

   a) 三角円上で点Pを選びます。
   b) ツールバー(barra de herramientas)で、「角度(3点または2直線)（Ángulo[tres puntos o dos rectas]）」を選びます。
   c) A、O、Pの各点をこの順番に選びます。角度は自動的にαとなります。



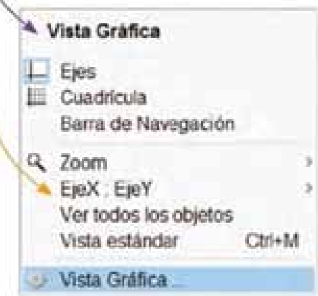
3. 作成点この点は、角度α のラジアン値をx座標とし（プログラムが自動で変換します）、P点のy座標をy座標とします（すなわち、senαです）。

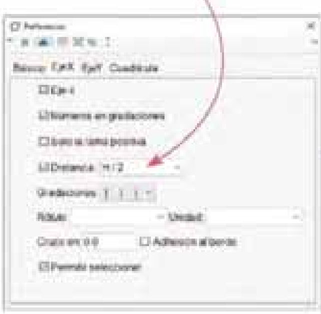
   a) 入力バー（Entrada）にS = (α, y(P)) と入力し、「入力(Enter)」を押します。

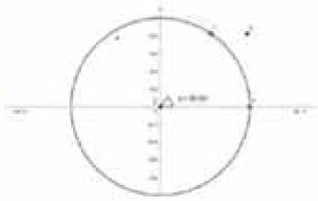


ユニット5

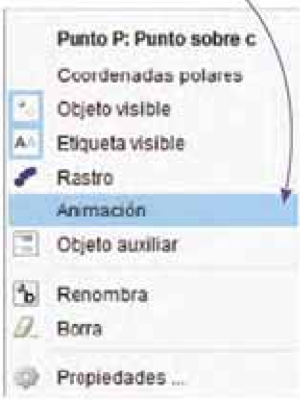
4. x軸の単位を変えます。
a)「グラフ表示(Vista Gráfica)」で右クリックします(オプションは何も選びません)。
b)「グラフ表示(Vista Gráfica)」をクリックします。
c)「X軸(EjeX)」をクリックします。
d)「間隔(Distancia)」の前の四角をクリックし、オプションからπ / 2を選びます。退出します。

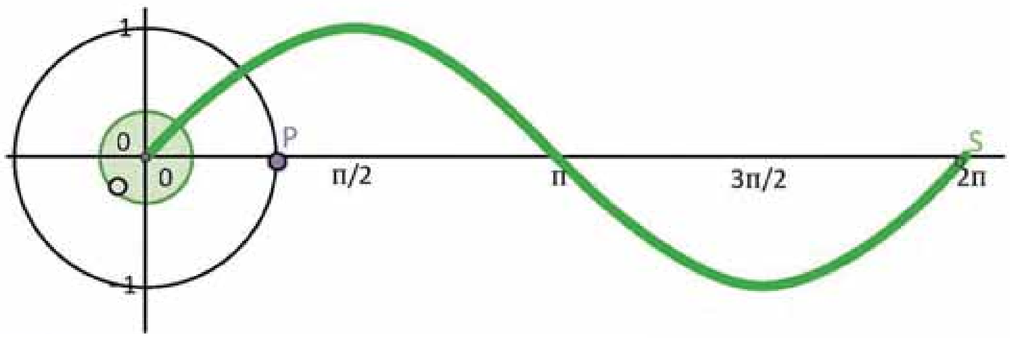






5. 正弦(サイン)関数のグラフを描きます。
a) 点Sを選び、右クリックします。
b)「残像表示(Rastro)」をクリックします。
c) 点Pを選び、右クリックし、アニメーションを始めます。





課題

三角関数の単位円から余弦(コサイン)関数のグラフを描きましょう。

達成の目安：

4.2 ソフトウェアのツールを使って、三角関数の単位円から正弦(サイン)関数と余弦(コサイン)関数のグラフを描きます。

学習の流れ：

デカルト平面で点の位置を決めて正弦(サイン)関数のグラフを描きました。この授業では、各点の座標を使って、単位円から、正弦(サイン)関数と余弦(コサイン)関数のグラフを描く方法を生徒に見せます。

ねらい：

正弦(サイン)関数と余弦(コサイン)関数のグラフを動的に求める際の単位円の有用性に注意させます。

問題の解き方：

問題を解くための手順は次の通りです。

1. 単位円を描きます(演習を参照しましょう)。

2. 角度を描きます(演習を参照しましょう)。

3. 作成点この点は、角度α のラジアン値をx座標とし(プログラムが自動で変換します)、P点のy座標をy座標とします(すなわち、cosαです)。入力バー(Entrada)に R = (α, x(P)) と入力し、「入力(Enter)」を押します。

4. x軸の単位を変えます(演習を参照しましょう)。

5. 余弦(コサイン)関数のグラフを描きます。
   a) 点R を選び、右クリックをします。
   b) 「残像表示(Rastro)」をクリックします。
   c) 点Pを選び、右クリックし、アニメーションを始めます。

4.3 GeoGebraを使った演習：正接(タンジェント)関数のグラフの作成

正弦(サイン)関数と余弦(コサイン)関数のグラフの場合と同様に、正接(タンジェント)関数のグラフも単位円から描くことができます。しかし、三角円上で$\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$の値を走査する際の角度については、区画$\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$で関数で評価しなければならないという困難さがあります。これを実行する時、「ロジック(Lógica)」の選択肢の**IF**関数が有用であることを説明することになるでしょう。

演習

1. 入力バー(Entrada)の右にある「コマンドのヘルプ(Ayuda de Comandos)」ボタンをクリックします。コマンドパネルが開きます。

2. 「ロジック(Lógica)」の選択肢の中にある「IF関数(Si)」を選びます。このコマンドには、コンマで区切りながらデータを2つか3つ入力しなければなりません。

Si[<Condición>, <Entonces>, <Si no>]

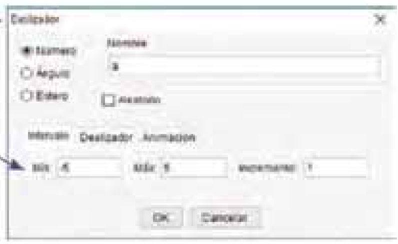
「条件(Condición)」：変数が含まれている条件を入力します。等式、不等式などが考えられます。

「それならば(Entonces)」：条件を満たす時に、コマンドが返答してくる値です。

「そうでないなら(Si no)」：条件が満たされない時に、コマンドが返答してくる値です。

3. スライダー(deslizador)**a**から、数**b**が設定されます。すなわち、**a**の値が負の場合、**b**の値は0になり、**a**の値が正の場合、**b**は**a**の値になります。

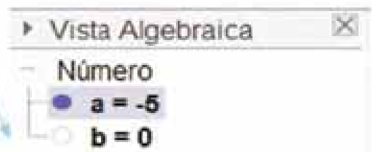
   a) スライダー(deslizador)の「名前(Nombre)」を**a**にし、「最小(Mín)」に−5、「最大(Máx)」に5を、「増加(Incremento)」に1を入力します。



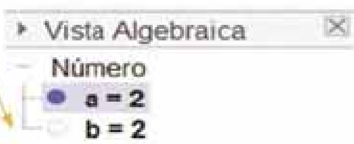
   b) 入力バー(Entrada)に「**b** =」と入力し、次に「Si」と入力します。「Si」は、「Si(IF関数)」のことで、これはロジック(Lógica)の選択肢の中にあります。

   c) **a**が負であるか否か評価しなければなりません。もし負ならば、入力する条件(Condición)は、「**a**<0」になります。もし、「**a**<0」を満たすのなら、コマンドが回答してくる値は、「0」です。もし、「**a**<0」を満たさないのなら、コマンドが回答してくる値は、「**a**」です。

a 値が負の場合、
bの値は0になります。



aの値が正の場合、
bの値は**a**になります。



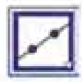
157

ユニット5

4. 単位円を描きます。
   a) ツールバー(Barra de Herramientas)から「円周(中心、点) (Circunferencia [centro, punto])」を選びます。
   b) 中心として点O(0, 0) を、点としてA(1, 0)を選びます。
   c) 直線x = 1のグラフを描きます。

5. 角度を描きます。
   a) 点A(1, 0)を定めます。
   b) 三角円上で点Pを選びます。
   c) ツールバー(barra de herramientas)で、「角度(3点または2直線)（Ángulo[tres puntos o dos rectas]）」を選びます。
   d) A、O、Pの各点をこの順番に選びます。角度は自動的にαとなります。

6. 正接(タンジェント)関数のグラフの作成
   a) 点Oと点Pを通る直線を描きます。
   b) 描いた直線と直線x = 1の交差する点をQとします。
   c) 描いた直線を見えないようにします。

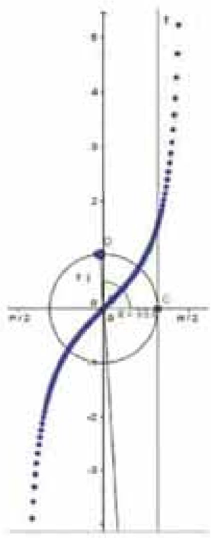


7. 作成点この点は、角度α のラジアン値をx座標とし(プログラムが自動で変換します)、P点のy座標をy座標とします(すなわち、tanαです)。

   a) 角度θを設定します。　Entrada: θ = Si[α > 3* π /2 , α - 2 π , α]

   b) 作成点を点Tとします。
   入力バー(Entrada)にT = (θ, y(Q)) と入力し、「入力を(Enter)」を押します。 → Entrada: T = (θ, y(Q))

8. 関数のグラフを描きます。
   a) x軸の単位を変更してπで表します。
   b) 点Tを選んで、右クリックし、「残像表示(Rastro)」をクリックします。
   c) 点Pを選び、右クリックし、アニメーションを始めます。



課題

三角関数の単位円から余接(コタンジェント)関数のグラフを描きましょう。

達成の目安：

4.3 ソフトウェアのツールを使って、三角関数の単位円から正接(タンジェント)関数のグラフを描きます。

学習の流れ：

正接(タンジェント)関数のグラフは、単位円で形状を表現することでGeoGebraでも描けます。この時、GeoGebraのツール「IF関数」を導入します。

ねらい：

IF関数を導入して、授業で描いたように正接(タンジェント)関数のグラフを描かせます。このグラフでは、区間は負の値になります。

問題の解き方：

余接(コタンジェント)関数のグラフを描くには、授業3.14の設問6のグラフを描きます。この時、RQ = cot θとします。

1. 単位円を描きます。
   a) 点O(0, 0) が中心で、点A(1, 0)を円周上の点とします。
   b) 直線y = 1のグラフを描きます。

2. 角度を描きます。
   a) 三角円上の点Pを第一象限内に設定します。
   b) 点A、O、Pをこの順番で選んで角度を設定します。角度は自動的にαとなります。

3. 余接(コタンジェント)関数のグラフの作成
   a) 点Oと点Pを通る直線を描きます。
   b) 描いた直線と直線y = 1の交差する点をQとします。
   c) 描いた直線を見えないようにします。

4. 作成点この点は、角度α のラジアン値をx座標とし(プログラムが自動で変換します)、Q点のx座標をy座標とします(すなわち、cotαです)。

   入力バー(Entrada)にU = (α, x(Q)) と入力し、「入力(Enter)」を押します。

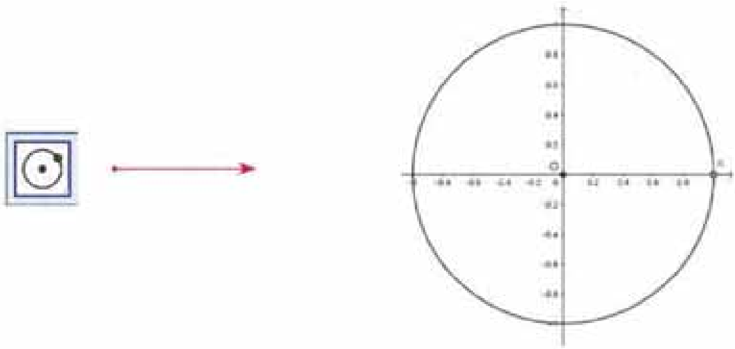
5. 関数のグラフを描きます。
   a) x軸の単位を変更してπで表します。
   b) 点Uに「残像表示(Rastro)」を行い、次に点Pに対しアニメーションを始めます。

4.4 GeoGebraを使った演習： 取り尽くし法

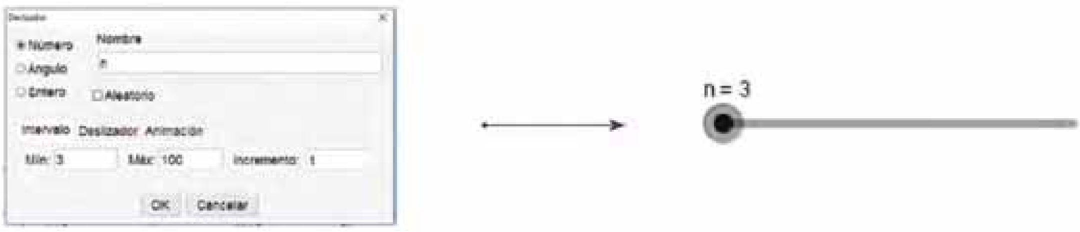
三角関数の単位円内に多角形をはめ込み、多角形の辺が増大するにつれて、多角形の面積が単位円の面積に近づいていくのを観察します。

演習

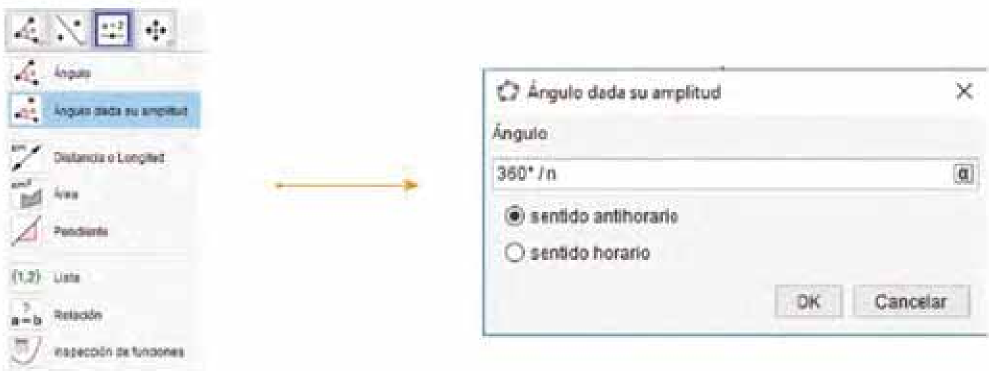
1. 単位円を描きます。
   点O(0, 0)を中心とし、点A(1, 0)を円周上の点とします。



2. 正多角形の辺の数に対して、スライダー(Deslizador)を設定し、そのスライダーをnとします。
   「最小(Mín)」に3、「最大(Máx)」に100を、「増加(Incremento)」に1を入力します。



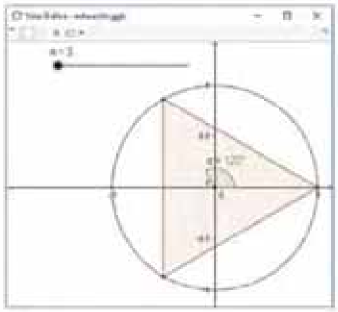
3. 振幅から中心角αを設定します。
   a) 点Aと点Oを選び、振幅を360° /nにして、「OK(OK)」をクリックします。
   b) 三角円上に別の点が現れます。この点の名前(Nombre)をBとします。



4. 正多角形の作成
   a) オプションから「正多角形(Polígono regular)」を選び、点AとBを選びます。

レッスン 4

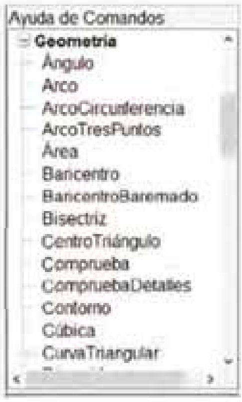
次に現れた表示に「頂点(Vertices)」の数nを入力します。



自動的に設定した多角形の面積の値が表示されます。

● 多角形1 = 1.29904

5. 「幾何学的要素(Geometría)」のオプションの中のコマンド「面積(Área)」で円の面積を計算します。辺の数が増えるにつれて、正多角形の面積がどのように円の面積に近づいていくか観察します。

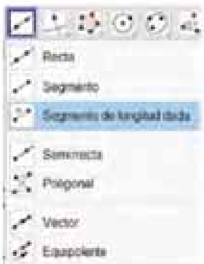


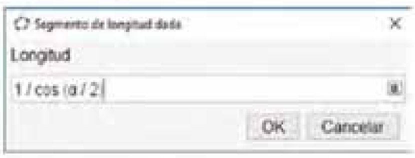
6. 多角形の外周の長さと円周の長さを決めます。
   多角形の外周　Entrada: perpoligono=Perimetro[poligono1]
   円周の長さ　Entrada: percircunferencia=Perimetro[c]

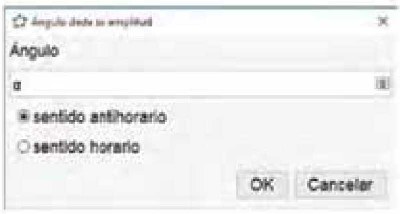
7. 多角形の辺の数が増える時の多角形の外周の長さと円周の長さを比較します。

8. 定数π を、円周を円の半径で割った商と定義します。π値を概算するのに作成した図を使います。

9. 単位円に外接していく正多角形を作成します。
   「与えられた長さの線分(Segmento de longitud dada)」であるOO_1を、「長さ(Longitud)」を $\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ として、設定します。点O_1はx軸上にとります。







10. 振幅から中心角βを設定します。
    a) 点O_1、Oを選び、振幅をαとします。「OK(OK)」をクリックします。
    b) 結果として設定される点の名前をO_2に変えます。

11. 点O_1とO_2を使用して正多角形を作成します。辺の数はnとします。

課題

設問10で作成した多角形で、前の設問で行った3種類の接近(面積、周囲の長さ、πの値)を行ってみましょう。

達成の目安：

4.4 πの値を概算するソフトウェアを使って、三角円での取り尽くし法について説明します。

学習の流れ：

六年次では、定数πの値を学習しました。これは円の面積と円周を求めるのに有用でした。この授業では、GeoGebraをサポートに使用して取り尽くし法を使い、πの値が反映される三角関数の単位円の面積を求めます。

ねらい：

演習を進めて、生徒に、正多角形の接近によって円の面積を求めさせ、同時に無理数の値を概算させます。

問題の解き方：

円周に外接する多角形は、すでに行った同じ演習に追加して作成することができます。こうすれば、はめ込んだ多角形の面積、外周およびπの値を比較することができます。概算するには、新しい多角形の値を使って手順5、6、8を実施すれば充分です。

ユニット6：等差数列、等比数列

本ユニットのねらい

数列の法則をつかって、等差数列と等比数列の一般項を求めることで、項または部分和を計算できるようになる。

関連と展開

中学3年

ユニット4：方程式
- 二次方程式
- 二次方程式の応用

高校1年

ユニット2：多項式の計算と複素数の計算
- 乗法公式と因数分解
- 多項式の除法
- 二次方程式と複素数

高校2年

ユニット4：超越関数 I
- 累乗と n 乗根
- 指数関数と指数方程式

ユニット6：等差数列、等比数列
- 等差数列
- 等比数列

本ユニットの学習計画

レッスン	時間	授業
1. 等差数列	1	1. 規則性
	1	2. 一般的規則性
	1	3. 等差数列： 定義
	1	4. 等差数列： 一般項
	1	5. 等差数列： 部分和 (1)
	1	6. 等差数列： 部分和 (2)
	1	7. 等差数列： 問題
2. 等比数列	1	1. 等比数列： 定義
	1	2. 等比数列： 一般項
	1	3. 等比数列： 部分和 (1)
	1	4. 等比数列： 部分和 (2)
	1	5. 等比数列： 問題
	1	6. 復習問題
	1	7. ユニット末問題
	1	ユニット末テスト
	2	3 学期の期末テスト

全4コマ + ユニット末テスト + 三学期末テスト

各レッスンの要点

レッスン1：等差数列

本ユニットでは、まず図形や数字の規則性を見極めることで、数列の一般項の定義を学びます。続いて、等差数列とその一般項の定義、いわゆる等差級数の部分和の求め方、等差数列の公式を必要とする様々な問題の解き方を学びます。

レッスン2：等比数列

等比数列とその一般項の定義、いわゆる等比級数の部分和の求め方、さらに、等比数列の公式を必要とする様々な問題の解き方を学びます。

レッスン 1 等差数列

1.1 規則性

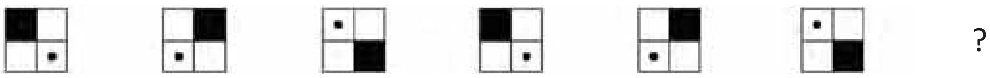
導入問題

以下の数値や図形が並んでいる列を良く見てください。それぞれの問題に答えなさい。

a) この列が同じように展開していくならば、図形4と図形6がどのようになるか、明らかにしなさい。

図形1　図形2　図形3　図形4　図形5　図形6

b) この列が同じように展開していくならば、図形7はどんな図形になるでしょうか。



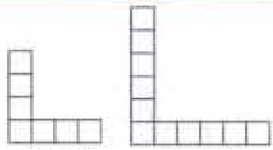
図形1　図形2　図形3　図形4　図形5　図形6　図形7

c) 欠けている数と、この列を作るうえでの法則を明らかにしなさい。

2	3	5	8	12	17	23	?
位置1	位置2	位置3	位置4	位置5	位置6	位置7	位置8

解法

a) 各図形は、その前の図形に二つの正方形を、L字型になるように加えるとできることが分かります。よって、図形4と図形6は右に示した図形のようになります。



図形4　図形6

b) 大きい方の正方形が時計方向に真ん中を軸にして90° 回転するならば、図形2は図形1が一度回転することで、図形3は図形2が一度回転することで、図形4は図形3が二度回転することで、図形5は図形4が一度回転することで、そして図形6は図形5が一度回転するここと で得られます。よって、図形7は二度図形6が回転することで得られ、よって、図形7は 。

c) 次のことが分かります

+1	+2	+3	+4	+5	+6	
2	3	5	8	12	17	23
位置1	位置2	位置3	位置4	位置5	位置6	位置7

よって、次の数は23 + 7 = 30 となるはずです。

数を求めるには、前の数に、この数の位置の数字を足します。

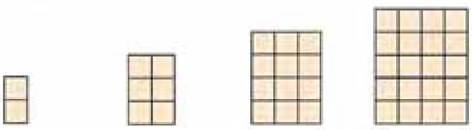
まとめ

数学的規則性の一つが、一定の法則を満たす数値または図形の列で、こうした列の要素はどんなものであれ、この一定の法則によって生まれます。

問題

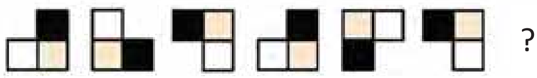
以下の数値や図形が並んでいる列を良く見てください。それぞれの問題に答えなさい。

a) この列に沿った図表5、6、7を決定し、またこの列を作るために用いられる法則を明らかにしなさい。



図形1　図形2　図形3　図形4

b) どの図形が図形7に相当しますか？



図形1　図形2　図形3　図形4　図形5　図形6　図形7

c) 欠けている数と、この列をつくるために用いた法則を明らかにしなさい。

2	6	12	20	30	42	?

達成の目安

1.1 数または図形の規則性を発見し、そうした規則性を生む法則を明らかにしなさい。

学習の流れ：

このユニットでは、数値に関するものであれ図形に関するものであれ、規則性の特定から始め、そうした規則性を生む法則を探ります。数値的規則性の定義を確立させます。

ねらい：

7学年のユニット4で、数の規則性に取り組んでいます。この授業では、そうした規則性と、とくに、この要素を決定する方法を復習することを目的としています。

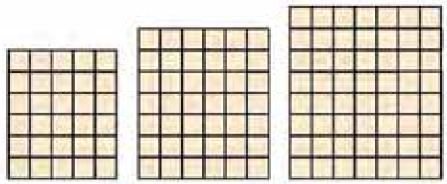
問題の解き方：

a) はじめに、各図形の要素の数に注目します。

図形1： 2 = 1 × 2　　図形2： 6 = 2 × 3　　図形3： 12 = 3 × 4　　図形4： 20 = 4 × 5

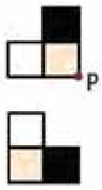
各図形が持つ要素の数は、縦の列の数に横の列の数を掛けることで得られます。また、図形に振られている数は、その図形が持つ縦列の数に対応します。一方、横列の数は常に、縦列の数より一単位多い数になります。

上述から、図形5、図形6、図形7は右に示したようになります。



図形5　図形6　図形7

b) 図形1について、図が示すように点Pを取ります。この点を中心に回転（つまり回すこと）をします。



図形7

図形1を90°の角度回転させれば、図形2になります。図形2を180° の角度回転させると、図形3になります。図形3を90°の角度回転させれば、図形4になります。図形4を180° の角度回転させれば、図形5になります。同じように続けると、図形7 は図形6を180° 回すことで得られます。よって、右に示した図形が得られます。

c) はじめに、位置でそれぞれの要素を特定します。

2	6	12	20	30	42
位置1	位置2	位置3	位置4	位置5	位置6

それぞれの要素と位置の間の関係を見つけるにあたって、規則性を生む二つの方法を明らかにすることができます。

方法 *1.*要素は、手前の数に位置の数字の二倍を足し合わせることで得られます。

位置1：2
位置2：2 + 2 × **2** = **6**
位置3：6 + 2 × **3** = **12**
位置4：12 + 2 × **4** = **20**
位置5：20 + 2 × **5** = **30**

よって、位置7 は次のようになります。

42 + 2 × 7 = 56.

方法 *2.*要素は、この位置の数字にその後ろに続く位置の数字を掛けることで得ることができます。

位置1：1 × 2 = 2
位置2：2 × 3 = 6
位置3：3 × 4 = 12
位置4：4 × 5 = 20
位置5：5 × 6 = 30

よって、位置7 は次のようになります。

7 × 8 = 56.

1.2 一般的規則性

導入問題

次の列に注目しましょう。

3	6	9	12	15	18	21	?	?	…
1	2	3	4	5	6	7	8	9	

a) この列を作るために使ったのはどんな法則ですか？
b) 位置8 と 9 に入る数はそれぞれいくつでしょう？
c) 位置20 に入る数はいくつでしょうか？また、位置100 に入る数はいくつでしょう？
d) 任意のn の位置に入る数はいくつになるでしょう？

解法

a) この列を良く見ると、すべての数は3の倍数であることが確認ができ、その結果、用いた法則は、その位置を示す数字に3を掛けること、になります。

b) 上記のa) の結果から、位置8 と9 は、3(8) = 24 と 3(9) = 27 になります。

c) 問題の数は、位置の数字に3を掛けることで得られるので、よって、3(20) = 60 は位置20に入る数に、また3(100) = 300 は位置100 に入る数になります。

d) 位置n に入る数は3n です。

この数列はまた、一つ手前の数に3 を足すことでも作れます。

定義

ある一定の法則に従う数値の列のことをまた、**数列**と呼びます。数列では、その要素はある順序を持っており通常a_nで表され、その場合、当の要素が占める位置はnで示します。例えば、「導入問題」の列では、$a_1 = 3,\ a_2 = 6,\ a_7 = 21,\ a_n = 3n$ のようになります。

数列の各要素を**項**と呼び、n番目の位置（nは自然数）を占める要素のことを**一般項**と呼びます。例えば、$a_n = 3n$ が「導入問題」の一般項です。

数列が有限な個数の要素を持つならば、その列は**有限**です。その逆の場合、数列は**無限**であると言います。

数列を表す際に、順番に$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ と並べますが、その場合のテンテンテン（三点リーダー）は、数列が続くことを表します。

場合よっては、ある数列を表す、単純な形の一般項を見つけることが不可能なことがあります。

例

次の列の一般項を明らかにし、項20、41、101 を計算しなさい。

$$-1, 2, -3, 4, -5, \ldots$$

それぞれの項で記号が変化しながら数列が続くこと、また、奇数の各位置は負の数、偶数の各位置は正の数であることに注目してください。このことは次のように書くことができることに留意してください。

$$(-1)^n = \begin{cases} n \text{ が偶数ならば、} 1 \\ n \text{ が奇数ならば、} -1 \end{cases}$$

ユニット6

163

レッスン1

それに加え、この数列を作る数の絶対値はすべて連続し、数列の中のそれぞれの位置に対応しているので、一般項は$a_n = (-1)^n n$となります。

したがって, 項 20、41 および101 は $a_{20} = (-1)^{20}20 = 20$、$a_{41} = -41$および $a_{101} = -101$ となります。

問題

1.それぞれの数列について、一般項と質問されている項の答えを見つけなさい。

a) 2, 4, 6, 8, ... 項42はいくつですか？

b) 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... 項21はいくつですか？

c) 1, 4, 9, 16, 25, ... 項11はいくつですか？

d) 1, 8, 27, 64, 125, ... 項8はいくつですか？

e) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \ldots$ 項 954はいくつですか？

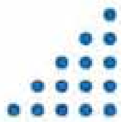
f) 2, 0, 2, 0, 2, ... 項 10はいくつですか？また、項 55は？

2. 次の場合のそれぞれにおいて、一般項a_n を持つ数列の最初の五つの項をリストアップしなさい：

a) $a_n = 3n + 1$　　b) $a_n = 4n - 2$　　c) $a_n = -n + 2$　　d) $a_n = n^2 - 3$

3. 次のプロセスを注意して見てください：次の数列において、図形5の要素の数がT_5 であるなら：

- 図形5の要素を再配置します。
- 図形を二つ合わせます
- 二つの同じ図形を合わせ、5 × 6 の要素の長方形を作ります。



したがって、
$2T_5 = 5(6)$.

上述のプロセスを、数列の一般項 T_n を求めるために一般化しなさい。

最も有名な数列の一つが、良く知られている「フィボナッチ数列」です。

フィボナッチは、1175年頃ピサで生まれたイタリアの数学者です。彼の本名はレオナルド・ダ・ピサですが、彼は一般にはフィボナッチとして知られていますが、この名前はボナッチの息子を意味するフィリウス・ボナッチオを縮めた呼び方です。

フィボナッチ数列は次の形になります：

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

フィボナッチ数列の最初のいくつかの項は：1, 1, 2, 3, 5, 8, ... となります；つまり、フィボナッチ数列の項は、手前の二つの項を足すことで求めることができるのです。

この数列が考案されたのは、一つがいの兎に関する問題が、兎は死ぬことはなく、また、産まれてひと月経つと成兎となり、それぞれのつがいの兎は毎月一つがい（オスとメス）の兎を生む、という仮定のもとに立てられた時でした。

達成の目安

1.2 数列の一般項を求めなさい。

学習の流れ：

数列と、その表し方を式を使って定義します。また、数列の項の定義をします。

ねらい：

「導入問題」は、後に一般項と数列の表記法を定義するため、数列の一般的な法則を特定することを目的としたものです。
「例」は、「結論」で定められた表記法を用い、また、一般項を用いて数列の特定の項を計算することを目的としたものです。

問題の解き方：

それぞれの解において、n は自然数を表しています。

1a) 2 = 2(1)、4 = 2(2)、6 = 2(3)、 8 = 2(4) ということが分るので、したがって $a_n = 2n$。ゆえに、 $a_{42} = 2(42) = 84$.

1b) 数列はすべての正の奇数で構成されていることが分かります。すべての正の奇数は、$2n - 1$と表すことができ、$n = 1$ の時に値1を有します。よって、 $a_n = 2n - 1$。ゆえに、$a_{21} = 2(21) - 1 = 41$.

1c) 数列は、自然数の二乗で構成されています：$1 = 1^2, 4 = 2^2, 9 = 3^2, \ldots$したがって、$a_n = n^2$。
ゆえに、$a_{11} = 11^2 = 121$.

1d) 数列は自然数の三乗で構成されています：$1 = 1^3, 8 = 2^3, 27 = 3^3, 64 = 4^3, \ldots$したがって、$a_n = n^3$。
ゆえに、 $a_8 = 8^3 = 512$.

1e) 数列は、分子が常に1で、分母が自然数の分数から成っていることが分かります。

したがって、$a_n = \frac{1}{n}$ 。ゆえに$a_{954} = \frac{1}{954}$.

1f) 数列の項は、その位置が奇数ならば常に2、その位置が偶数ならば、常に0 ということが分かります。数列を決定する方法は二つがあります。よって、

方法1.
$$a_n = \begin{cases} n \text{ が偶数ならば、} 2 \\ n \text{ が奇数ならば、} 0 \end{cases}$$

方法2. $a_n = 1 - (-1)^n$

ゆえに、$a_{10} = 0$ と $a_{55} = 2$.

2a) $a_1 = 4, a_2 = 7, a_3 = 10, a_4 = 13, a_5 = 16$.

2b) $a_1 = 2, a_2 = 6, a_3 = 10, a_4 = 14, a_5 = 18$.

2c) $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = -1, a_4 = -2, a_5 = -3$.

2d) $a_1 = -2, a_2 = 1, a_3 = 6, a_4 = 13, a_5 = 22$.

3. T_n 個の要素を持つ図形n が持つ点を使って、それらの点を再配置することで、直角を挟む二辺のそれぞれが n 個の点を持つ直角三角形が一つ作れます。

この三角形を二つに増やすと、$2T_n$ 個の要素を持つことになります。両方の直角三角形を配置すると、各辺がn 個と $n + 1$ 個の点からなる長方形が得られます。ところが、長方形の要素の数は$n(n + 1)$ なので、よって、$2T_n = n(n + 1)$ となります。

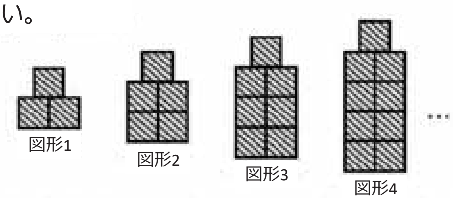
したがって、$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

レッスン 1

1.3 等差数列： 定義

導入問題

次の列を良く見て質問に答えなさい。



a) 数列の初めの10項の要素の数を書き出しなさい。
b) この数列を作るのに、どんな法則を使いましたか？
c) ある項からその手前の項を引くとして、もしこれを何度も繰り返したならば、どんなことが分かりますか？
d) 項1と10、2 と 9、3 と 8 というように、続けて足していくと、どんなことが起こりますか？

解法

a) 各図形の持つ要素をリストにするため、表を作ることができます。

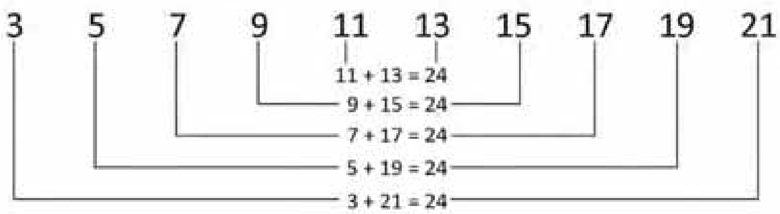
項	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
要素の数	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21

b) 図形を良く見れば、手前の図形に二つの正方形が加わって行っていることが分かります。

c) 一つの項を取り上げ、そこから一つ手前の項を引くと、結果は何回も繰り返しても、常に同じであることが分かります。この場合結果は2になります。

$$a_2 - a_1 = 5 - 3 = 2$$
$$a_5 - a_4 = 11 - 9 = 2$$
$$a_9 - a_8 = 19 - 17 = 2$$

d) 項 1 と 10、2 と 9、3 と 8、4 と 7、5 と 6は 二つ一組で常に両端との距離が等しいことに注目してください。両端から等しい距離の項を足し合わせると、その結果は常に同一であることが分かります：24



定義

各項がその手前の項に、ある同じ数を足して得られる数列を**等差数列**と呼びます。

等差数列は、ある項からその手前の項を引くと同じ結果となる性質を持っています。この結果を**公差**と呼びます。

有限である等差数列（有限算術数列）のもう一つの性質は、両端から等しい距離にある項を足し合わせると、計算結果が同じになるということです。

細かいことですが、等差数列について強調しておきたい点は、公差はどんな数でもとり得る、つまり、整数、有理数、小数、または無理数の場合もあり得るということです。

問題

それぞれの数列が等差数列であるかどうかを特定しなさい。もしそうである場合は、その公差を求めなさい。

a) 5, 11, 17, 23, 29, 35, …
b) −3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, …
c) 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, …
d) 2, $\frac{5}{2}$, 3, $\frac{7}{2}$, 4, $\frac{9}{2}$, 5, $\frac{11}{2}$, …
e) −4, −4, −4, −4, −4, −4, …
f) 11, 7, 3, −1, −5, −9, …

ユニット6

165

達成の目安

1.3 数列が等差数列かどうかを定義を用いて明らかにしなさい。

学習の流れ：

各数列の要素である図表および数値からなる列の分析から、授業を始めます。等差数列とこの種の数列の公差の定義を明らかにします。

問題の解き方：

a) 11 – 5 = 17 – 11 = 23 – 17 = 29 – 23 = 35 – 29 = 6 ということが分かります。得られる差は常に同一なので、数列は等差数列で、その公差は6です。

b) 0 – (–3) = 3 – 0 = 6 – 3 = 9 – 6 = 12 – 9 = 15 – 12 = 3 ということが分かります。得られる差は常に同一なので、数列は等差数列で、その公差は3です。

c) 7 – 5 = 2である一方、2 – 1 = 1であることが分かります。両方の差が異なるので、数列は等差数列ではありません。

d) $\frac{5}{2} - 2 = 3 - \frac{5}{2} = \frac{7}{2} - 3 = 4 - \frac{7}{2} = \frac{9}{2} - 4 = 5 - \frac{9}{2} = \frac{11}{2} - 5 = \frac{1}{2}$ であることが分かります。得られた差が常に同一なので、数列は等差数列で、その公差は $\frac{1}{2}$ です。

e) 2つの連続したどんな項の間であっても差を求めると、e –4 – (–4) = 0 となるはずです。したがって、この数列は公差が0 の等差数列です。

f) 引き算をすると、7 – 11 = 3 – 7 = –1 – 3 = –5 – (–1) = –9 – (–5) = –4 が得られます。したがって、この数列は公差が –4 の等差数列です。

1.4 等差数列：一般項*

導入問題

授業 1.3の「導入問題」の等差数列の一般項を求めなさい。

解法

まず、a_{n-1} が任意の項とすれば、a_n はそれに連続する項だということに注目してください。各図形は、手前の図形に二つの正方形を加えることで得られることから、以下のようになります。

$$\underbrace{5=3+2}_{a_2=a_1+2},\quad \underbrace{7=5+2}_{a_3=a_2+2},\quad \underbrace{9=7+2}_{a_4=a_3+2},\quad \ldots\quad a_{n+1}=a_n+2$$

よって、以下のようになります。

$$a_2=a_1+2,\ a_3=a_2+2,\ a_4=a_3+2,\ a_5=a_4+2,\ldots,\ a_{n-2}=a_{n-3}+2,\ a_{n-1}=a_{n-2}+2,\ a_n=a_{n-1}+2$$

数列に占める位置の項の中から、公式を見つける必要があります。よって、次のことに留意してください。

$$\begin{aligned}a_n&=a_{n-1}+2\\&=a_{n-2}+(2+2)\\&=a_{n-3}+(2+2+2)\\&=a_{n-4}+(2+2+2+2)\end{aligned}$$

$a_n=a_4+(\underbrace{2+2+\cdots+2}_{n-4})=(a_3+2)+(\underbrace{2+2+\cdots+2}_{n-4})$ のように連続するならば

$$\begin{aligned}&=a_3+(\underbrace{2+2+\cdots+2}_{n-3})=(a_2+2)+(\underbrace{2+2+\cdots+2}_{n-3})\\&=a_2+(\underbrace{2+2+\cdots+2}_{n-2})=(a_1+2)+(\underbrace{2+2+\cdots+2}_{n-2})\\&=a_1+(\underbrace{2+2+\cdots+2}_{n-1})\end{aligned}$$

$4=n-(n-4)$ となることに注目しましょう。

よって、a_n は初項足す $n-1$ 掛ける2、つまり、この数列の一般項は、$a_n=a_1+2(n-1)$ となります。

まとめ

等差数列では、d がその公差ならば、一般項は $a_n=a_1+d(n-1)$ によって得られます。

例

等差数列$a_n=-2+6(n-1)$ の項4、12、17、99 を計算し、項 a_1 はいくつか、また、その公差を求めなさい。

質問の項を計算するために、n をその項の位置で置き換えます。したがって、

$a_4=-2+6(4-1)=-2+6(3)=-2+18=16$

$a_{17}=-2+6(17-1)=-2+6(16)=94$

$a_{12}=-2+6(12-1)=-2+6(11)=64$

$a_{99}=-2+6(99-1)=-2+6(98)=586$

また、$a_1=-2$で、公差は $d=6$です。

多くの場合、等差数列の一般項は、$a_n=a_1-d+dn$ の形で表されます。例えば、$a_n=-2+6(n-1)$ は$a_n=-8+6n$ と書くことができます。

問題

1. 授業 1.3の各問題の等差数列の一般項を求めなさい。
2. 以下の等差数列のそれぞれについて、項1、7、11、20、100 を求めなさい。

a) $a_n=5+4(n-1)$　b) $a_n=-1+7(n-1)$　c) $a_n=2-3(n-1)$

d) $a_n=-4-(n-1)$　e) $a_n=\frac{1}{2}-(n-1)$　f) $a_n=5-\frac{1}{3}(n-1)$

g) $a_n=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}(n-1)$　h) $a_n=-0.6+2(n-1)$　i) $a_n=-0.4-0.7(n-1)$

166

達成の目安

1.4 等差数列の一般項を明らかにし、その数列の一部の項を計算するために、その一般項を使いなさい。

学習の流れ：

この授業では、ある特定の場合を例に、等差数列の一般項を引き出すことにします。その後に、あらゆる公差d にあてはまるように、一般化を行います。また、等差数列の項の一部を、一般項を用いて計算します。

ねらい：

「例」は等差数列の一般項を、その数列の項の一部を計算するために用いることを目的としています。
「問題」の節については、問題1は、等差数列の一般項についてしっかり把握させるためである一方、問題2は特定の項を一般項を用いて計算させることが目的です。

問題の解き方：

1a) $a_n = 5 + 6(n-1) = -1 + 6n$ **1b)** $a_n = -3 + 3(n-1) = -6 + 3n$ **1c)** 等差数列ではありません。

1d) $a_n = 2 + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}n$ **1e)** $a_n = -4$ **1f)** $a_n = 11 - 4(n-1) = 15 - 4n$

2a) $a_n = 5 + 4(n-1)$: $a_1 = 5, a_7 = 29, a_{11} = 45, a_{20} = 81, a_{100} = 401$

2b) $a_n = -1 + 7(n-1)$: $a_1 = -1, a_7 = 41, a_{11} = 69, a_{20} = 132, a_{100} = 692$

2c) $a_n = 2 - 3(n-1)$: $a_1 = 2, a_7 = -16, a_{11} = -28, a_{20} = -55, a_{100} = -295$

2d) $a_n = -4 - (n-1)$: $a_1 = -4, a_7 = -10, a_{11} = -14, a_{20} = -23, a_{100} = -103$

2e) $a_n = \frac{1}{2} - (n-1)$: $a_1 = \frac{1}{2}, a_7 = -\frac{11}{2}, a_{11} = -\frac{19}{2}, a_{20} = -\frac{37}{2}, a_{100} = -\frac{197}{2}$

2f) $a_n = 5 - \frac{1}{3}(n-1)$: $a_1 = 5, a_7 = 3, a_{11} = \frac{5}{3}, a_{20} = -\frac{4}{3}, a_{100} = -28$

2g) $a_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(n-1)$: $a_1 = \frac{1}{4}, a_7 = \frac{19}{4}, a_{11} = \frac{31}{4}, a_{20} = \frac{29}{2}, a_{100} = \frac{149}{2}$

2h) $a_n = -0.6 + 2(n-1)$: $a_1 = -0.6, a_7 = 11.4, a_{11} = 19.4, a_{20} = 37.4, a_{100} = 197.4$

2i) $a_n = -0.4 - 0.7(n-1)$: $a_1 = -0.4, a_7 = -4.6, a_{11} = -7.4, a_{20} = -13.7, a_{100} = -69.7$

レッスン 1

1.5 等差数列：部分和、パート1*

導入問題

以下のa) からd) までを解きなさい。

a) 足し算 $1 + 2 + 3 + \cdots + 28 + 29 + 30$ の値はいくつですか？各項を一つ一つ足し合わせずに計算する方法を見つけなさい。

b) 以下の数、$1, 2, 3, \ldots, n-3$、$n-2$、$n-1$がある場合、数のすべての和はいくつですか？

c) 数列 $a_n = a_1 + d(n-1)$ の最初の n個の項の和 S_n はいくつですか？

d) 等差級数 $a_n = 1 + 2n$において、最初の 10項の和はいくつですか？

問題a) に関しては、$30+29+28+\cdots+3+2+1$ の和も考慮しなさい。

解法

a) 足し算をすれば、

$$\begin{array}{r} \boxed{1}+\boxed{2}+\boxed{3}+\cdots+\boxed{28}+\boxed{29}+\boxed{30} \\ +\ \boxed{30}+\boxed{29}+\boxed{28}+\cdots+\boxed{3}+\boxed{2}+\boxed{1} \\ \hline 31+31+31+\cdots+31+31+31 \end{array} \quad \text{------------------- (1)}$$

答えは同じになります。$1 + 2 + 3 + \ldots + 28 + 29 + 30$の足し算には30の項があり、よって、この和を求めるということは、数31を30回足し合わせることになり、その結果、31(30) となります。

一方、(1) における和は、$1 + 2 + 3 + \cdots + 28 + 29 + 30$ を二回足し合わせることで得ることができ、その結果、求める和は $\frac{31(30)}{2}$ になります。約分すると、次が得られます。

$$\frac{31(30)}{2} = \frac{31(\cancel{30}^{15})}{\cancel{2}_1} = 31(15) = 465.$$

したがって、$1 + 2 + 3 + \ldots + 28 + 29 + 30 = 465$.

b) 上記 a) と同じやり方を使うならば、次のようになるでしょう。

$$\begin{array}{r} \boxed{1}+\boxed{2}+\boxed{3}+\cdots+\boxed{n-3}+\boxed{n-2}+\boxed{n-1} \\ +\ \boxed{n-1}+\boxed{n-2}+\boxed{n-3}+\cdots+\boxed{3}+\boxed{2}+\boxed{1} \\ \hline n+n+n+\cdots+n+n+n \end{array} \quad \text{------------------- (2)}$$

(2) における和は $n-1$ 個の項を持ち、その結果、値は$n(n-1)$ となります。ところがここでは新たに、$1 + 2 + 3 + \cdots + n-3 + n-2 + n-1$ を二回足し合わせてしまっているので、その結果、

$$1+2+3+\cdots+n-3+n-2+n-1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

c) n 個 の項を新しい順序に置き換えます。

$$\begin{array}{rl} S_n = & a_1 \overset{+d}{+} a_2 \overset{+d}{+} a_3 + \cdots + a_{n-2} \overset{+d}{+} a_{n-1} \overset{+d}{+} a_n \\ S_n = & a_n \overset{-d}{+} a_{n-1} \overset{-d}{+} a_{n-2} + \cdots + a_3 \overset{-d}{+} a_2 \overset{-d}{+} a_1 \\ \hline 2S_n = & (a_n + a_1) + (a_{n-1} + a_2) + (a_{n-2} + a_3) + \cdots + (a_3 + a_{n-2}) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_1 + a_n) \end{array}$$

最後の行では、すべての組が同じ値$a_1 + a_n$を有していますが、これは、それぞれの和において、最初の行では和は d ずつ 増加して行き、次の行では $-d$ ずつ 増加して行くからです。

n 個の組があるので、$2S_n = n(a_1 + a_n)$になります。したがって、$S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ で置き換えるならば、次のようになります。 $S_n = \frac{1}{2}n[2a_1 + (n-1)d]$.

ユニット6

167

d) 数列 $a_n = 1 + 2n$ の10 個の項の合計を出したいので、よって、初項と10番目の項の計算します。

$$a_1 = 1 + 2(1) = 3,$$
$$a_{10} = 1 + 2(10) = 21.$$

したがって、最初の10項の和は：

$$S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n) = \frac{1}{2}(10)(3 + 21) = 5(24) = 120.$$

定義

表記法 $\sum_{i=1}^{n} a_i$ は、$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ の和を省略した形で、読み方は「i が1 から i がn までのa_iの総和」となります。

この表記法に従うと、等差数列の最初の n 個の項の和は、次のようになります。

数列の公差が d の場合 $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n) = \frac{1}{2}n[2a_1 + d(n-1)]$ 、

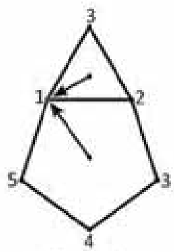
この和は数列または級数の部分和として知られていますが、ここでは、等差数列に関してのものとなります。

記号 Σ はギリシャ文字で、大文字のシグマに相当します。合計を表すために使う場合、この記号は「総和の記号」と呼ばれています。

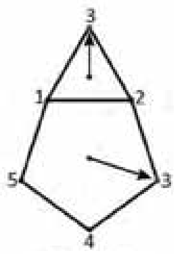
問題

1. それぞれの場合について、求める答えを計算しなさい。
   a) 数列$a_n = -6 + 6n$ の最初の 21 個の項。
   b) 数列 $a_n = 11 - (n - 1)$ の最初の 28 個の項。
   c) 数列 $a_n = -4 + 5(n - 1)$ の最初の 77 個の項。
   d) 数列 $a_n = 0.5 + 2(n - 1)$ の最初の 33 個の項。

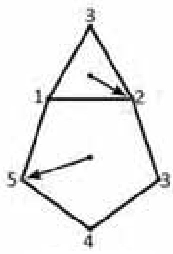
2. 三角形と五角形の中に、二つの矢印のそれぞれが二辺が交わる交点を指すような形であるのが見えます。次に、一列に並ぶ四つの図形があり、そこでは、矢印が回っているのが分かります。



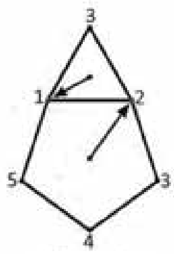
図形1



図形2



図形3



図形4

矢印が常に同じ動きをし続けるならば、30番目にこれらの矢印が同じ交点を指すことになる図形番号を明らかにしなさい。

達成の目安

1.5 等差数列の部分和を計算しなさい。

学習の流れ：

等差数列の一般項について把握した後、部分和を計算するための公式を引き出します。

ねらい：

まず、 a) の最初の30 の正の整数のガウスの和を計算し、次に、b) の最初のn – 1個の負の整数のガウスの和を計算しますが、後者は、ガウスの和の公式を確立するために行います。
その後、 c) において、任意の等差数列の最初の n 個の項を計算しますが、この部分は部分和の公式を確立するためで、最後に、ある特定の数列について、c) で確立した公式を使って部分和を計算します。

問題の解き方：

生徒に、掛け算の前に簡略化のための約分させることが大切になります。一方、これらの問題では計算機を使う必要はありません。

1a) $a_n = -6 + 6n$ に対して、$a_1 = 0$ および $a_{21} = 120$ となります。よって、

$$S_{21} = \sum_{i=1}^{21} a_i = \frac{1}{2}(21)(a_1 + a_{21}) = \frac{1}{2}(21)(0 + 120) = 21(60) = 1\,260.$$

1b) $a_n = 11 - (n - 1)$ に対して、$a_1 = 11$ および $a_{28} = -16$ となります。よって、

$$S_{28} = \sum_{i=1}^{28} a_i = \frac{1}{2}(28)(a_1 + a_{28}) = \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{28})(11 - 16) = 14(-5) = -70.$$

1c) $a_n = -4 + 5(n - 1)$ に対して、$a_1 = -4$ および $a_{77} = 376$ となります。よって、

$$S_{77} = \sum_{i=1}^{77} a_i = \frac{1}{2}(77)(a_1 + a_{77}) = \frac{1}{2}(77)(-4 + 376) = \frac{1}{2}(77)(372) = 77(186) = 14\,322.$$

1d) $a_n = 0.5 + 2(n - 1)$ に対して、$a_1 = 0.5$および $a_{33} = 64.5$ となります。よって、

$$S_{33} = \sum_{i=1}^{33} a_i = \frac{1}{2}(33)(a_1 + a_{33}) = \frac{1}{2}(33)(0.5 + 64.5) = \frac{1}{2}(33)(65) = 1\,072.5.$$

2. 両方の矢印 (a, b) が指す数が二つの数の対（順序対）で示されますが、ここでは a は三角形の矢印が指す数を示し、bは五角形の矢印が指す数を示しています。規則性を見つけるために、この列の項の一部をリストにします。

Fig. 1:	$\boxed{(1, 1)}$	Fig. 11:	(3, 1)
Fig. 2:	(3, 3)	Fig. 12:	(2, 3)
Fig. 3:	(2, 5)	Fig. 13:	(1, 5)
Fig. 4:	(1, 2)	Fig. 14:	(3, 2)
Fig. 5:	(3, 4)	Fig. 15:	(2, 4)
Fig. 6:	(2, 1)	Fig. 16:	$\boxed{(1, 1)}$
Fig. 7:	(1, 3)	Fig. 17:	(3, 3)
Fig. 8:	(3, 5)	Fig. 18:	(2, 5)
Fig. 9:	$\boxed{(2, 2)}$	Fig. 19:	(1, 2)
Fig. 10:	(1, 4)	Fig. 20:	(3, 4)

囲みの中の項は、両方の矢印が同じ交点を指しているものです。図形9では、両方の矢印が同じ交点を二回指します；また、図形10から図形24までには、15の図形があり、その上、矢印は同じ交点を二回指しています。ゆえに、図形 $a_n = 9 + 15(n - 1)$ では矢印は同じ交点を $2n$ 回指すことになります。

したがって、図形 a_{15} では矢印は30番目（30回目）に同じ交点を指すことになるでしょう。つまり、この「図形」においては

$$9 + 15(14) = 219.$$

1.6 等差数列：部分和、パート2

導入問題

1845を得るには、数列 $a_n = 5 + 2(n-1)$ の項をいくつ足し合わせる必要があるでしょうか？

解法

等差数列の最初の n 個の項の和は $\frac{1}{2}n[2a_1 + d(n-1)]$ なので、次のようになります。

$$a_1 = 5 \text{ と } \frac{1}{2}n[2a_1 + d(n-1)] = \frac{1}{2}n\left[2(5) + 2(n-1)\right] = \frac{1}{2}n\left[10 + 2(n-1)\right] = 5n + n(n-1) = n^2 + 4n = 1845.$$

未知数が n の場合は、二次方程式が得られます。1845を得るには、いくつの項を足し合わせなくてはならないかが知りたいので、左記の方程式の解を求める必要があります。

方程式を解くと、

$$n(n+4) = 1845 \Rightarrow n^2 + 4n - 1845 = 0 \Rightarrow (n+45)(n-41) = 0.$$

ここから、$n = -45$ または $n = 41$ が得られます。ところが、n は数列における位置であることから、負の数ではあり得ないので、したがって、1845を得るには、数列 $a_n = 5 + 2(n-1)$ の41個の項を足し合わせなくてはなりません。

まとめ

ある特定の計算結果を得るうえで合計しなくてはならない等差数列の項の数を求めるには、等差数列の項の部分和の公式と得たい総計とを等しくすることで得られる、二乗方程式を解かなくてはなりません。

問題

1. 指示された答えを得るために、各等差数列において合計しなくてはならない項の数を求めなさい。

a) $a_n = -1 + (n-1)$; 部分和 434

b) $a_n = 3 + 4(n-1)$; 部分和 1081

c) $a_n = -3 + 3(n-1)$; 部分和 270

d) $a_n = 5 - 2(n-1)$; 部分和 -391

e) $a_n = -4 - 7(n-1)$; 部分和 -129

217 は7 の倍数です。

f) $\sum_{i=1}^{n}\left[-100 + 4(i-1)\right] = 0$

1081 と 391 は 23 の倍数です。

2. 1064 を得るには、等差数列2, 8, 14, ... の項をいくつ足さなくてはならないでしょう？

カール・フリードリヒ・ガウスはドイツの数学者、物理学者、天文学者、測地学者で、1777年4月30日に生まれ1855年2月23日に亡くなっています。彼は数学の第一人者と考えられており、若いころから並外れた知能を持っていたことが証明されています。子供時代には、家族にアルファベットの各文字の発音を聞いて、独学で読むことを学びました。

ガウスは7歳になると学校に入学し、算術課程を取りましたが、大部分の生徒は義務教育が終わる15歳までこの課程で学習していました。この課程で、ガウスの将来に大きな影響を与えるある特筆すべきことが起こります：ある時、彼の算術課程の担任でもあり学校長でもあったビュトナーが、全員に1から100までの数字すべてを足し合わせよ、という練習問題を出しました。この問題を生徒に出し終えるや否や、ガウスは机の上で書いていた書板を置いて言いました。「はい、出来ました！」、一方他の生徒はまだ掛け算しやたし算をして計算している最中でした；この時、ビュトナーがガウスの書板を見るとそこには正解の数が一つだけ書いてありました。

ガウスは教師にどのようにしてこの計算結果になったかを説明することになり、そして次のように言いました：「100+1=101, 99+2=101, 98+3=101, 等々となりますから、100の中で作れるペアの数と同じだけのペアがあります。ですから、答えは50 × 101、つまり5050です。」

出典：Dunnington, G. W., Gray, J., Fritz-Egbert Dohse著『*Carl Friedrich Gauss*：*Titan of Science*（カール・フリードリヒ・ガウス：科学の巨人）』*MAA*米国数学協会

ユニット6

169

達成の目安

1.6 部分和が分かっているならば、等差数列の足し合わすべき項の数を計算しなさい。

学習の流れ：

等差数列の部分和を計算した後、そのプロセスを逆にして行います：つまり、等差数列の部分和が分かっていて、この数を得るために足さなくてはならない項の数を見つけようというものです。

問題の解き方：

この場合、公式 $S_n = \frac{1}{2}n[2a_1 + d(n-1)]$.を使うのが望ましいです。

1a) $a_n = -1 + (n-1)$ に対して、$a_1 = -1$ および $d = 1$ となります。よって、

$$\frac{1}{2}n[2a_1 + d(n-1)] = \frac{1}{2}n[2(-1) + (n-1)] = \frac{1}{2}n(n-3) = 434 \Rightarrow n^2 - 3n - 868 = 0 \Rightarrow (n-31)(n+28) = 0.$$

よって、$n = 31$ または $n = -28$。したがって、和434 を得るには、31項を足し合わさなくてはなりません。

1b) $a_n = 3 + 4(n-1)$ に対して、$a_1 = 3$ および $d = 4$ となります。よって、

$$\frac{1}{2}n[2(3) + 4(n-1)] = \frac{1}{2}n(4n+2) = 1081 \Rightarrow 2n^2 + n - 1081 = 0 \Rightarrow (2n+47)(n-23) = 0.$$

よって、$n = -\frac{47}{2}$ または $n = 23$。したがって、和1081 を得るには、23項を足し合わさなくてはなりません。

1c) $a_n = -3 + 3(n-1)$ に対して、$a_1 = -3$ および $d = 3$ となります。よって、

$$\frac{1}{2}n[2(-3) + 3(n-1)] = \frac{1}{2}n(3n-9) = 270 \Rightarrow n^2 - 3n - 180 = 0 \Rightarrow (n+12)(n-15) = 0.$$

よって、$n = -12$ または $n = 15$。したがって、和270 を得るには、15 項を足し合わさなくてはなりません。

1d) $a_n = 5 - 2(n-1)$ に対して、$a_1 = 5$ および $d = -2$ となります。よって、

$$\frac{1}{2}n[2(5) - 2(n-1)] = n(-n+6) = -391 \Rightarrow n^2 - 6n - 391 = 0 \Rightarrow (n+17)(n-23) = 0.$$

よって、$n = -17$ または $n = 23$。したがって、和 −391 を得るには、23 項を足し合わさなくてはなりません。

1e) $a_n = -4 - 7(n-1)$ に対して、$a_1 = -4$ および $d = -7$ となります。よって、

$$\frac{1}{2}n[2(-4) - 7(n-1)] = \frac{1}{2}n(-7n-1) = -129 \Rightarrow 7n^2 + n - 258 = 0 \Rightarrow (7n+43)(n-6) = 0.$$

よって、$n = -\frac{43}{7}$ $n = 6$。したがって、和 −129 を得るには、6 項を足し合わさなくてはなりません。

1f) この場合、数列は $a_n = -100 + 4(n-1)$で表され、$a_1 = -100$ および $d = 4$ となります。よって、

$$\frac{1}{2}n[2(-100) + 4(n-1)] = \frac{1}{2}n(-204 + 4n) = 0 \Rightarrow 2n(n-51) = 0.$$

よって、$n = 0$ または $n = 51$。したがって、和が0 となるには、51 項を足し合わさなくてはなりません。

2. この数列は等差数列で、その初項は $a_1 = 2$、その公差は $d = 6$ ということが分かります。よって、

$$\frac{1}{2}n[2(2) + 6(n-1)] = n(3n-1) = 1064 \Rightarrow 3n^2 - n - 1064 = 0 \Rightarrow (3n+56)(n-19) = 0.$$

よって、$n = -\frac{56}{3}$ または $n = 19$。したがって、和が1064 となるには、19個の項を足し合わさなくてはなりません。

1.7 等差数列：問題

導入問題

3番目の項が27で5番目の項が35の等差数列の公差を求めなさい。数列の最初の項と一般項を計算しなさい。

解法

a_nが d を持つ公差等差数列ならば、よって$a_n = a_1 + d(n-1)$.

与件から、$a_3 = 27$ と $a_5 = 35$ になります。しかし、

$$a_3 = a_1 + d(3-1) = a_1 + 2d = 27,$$
$$a_5 = a_1 + d(5-1) = a_1 + 4d = 35.$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} a_5 - a_3 = 35 - 27 = a_1 + 4d - a_1 - 2d &= 2d \\ \Rightarrow 8 &= 2d \\ \Rightarrow d &= 4 \end{aligned}$$

最初の方程式において $d = 4$ と置き換えると次のようになり、$a_1 + 2(4) = 27 \Rightarrow a_1 = 27 - 8 = 19$.
よって、数列の最初の項と一般項は

$$a_1 = 19 \text{ と } a_n = 19 + 4(n-1) = 15 + 4n.$$

まとめ

場合によっては、等差数列の与件の一部が分かっていることがあり、その数列の一般項を求めるために、等差数列の定義と、すでに分かっている与件を用いることがあります。

等差数列の二つの項が分かっているならば、一般項を明らかにするため、すでに分かっている各項に一般項の定義を適用することで得られる連立一次方程式を解きます。

問題

1. 等差数列の第2項は12で、第4項は22です。この数列の一般項を明らかにしなさい。

2. 等差数列の第5項は –11、第10項は–26です。第7項を計算しなさい。

3. ある等差数列について、$a_9 = -5$、また、$a_{15} = 31$であることが分かっています。a_{20}を計算しなさい。

4. 等差数列の第8項が8で第20項が44です。この等差数列の一般項を明らかにしなさい。

5. 第7項目が–25 で、第9項目が –35 の等差数列の最初の10項の和を計算しなさい。

6. $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 219$ に、また $a_7 = 34$ になります。等差数列の一般項 a_nを明らかにしなさい。

7. 等差数列が $a_1 = 43, a_2 = 37, \ldots$,とすると、$\sum_{i=1}^{n} a_i < 0$ になるような最初の整数n はいくつでしょう？

達成の目安

1.7 等差数列の何らかの与件が分かっているならば、それらの数列についての問題を解きなさい。

学習の流れ：

この授業では、等差数列を使うと解ける、さまざまな問題を扱います。最も一般的な問題のタイプは、数列において隣り合わせでない二つの項が分かっている場合に、一般項を計算する、というものです。

問題の解き方：

1. 与件から、$a_2 = 12$ と $a_4 = 22$ となります。下記の連立方程式を得ます。

$$\begin{cases} a_1 + d = 12 \\ a_1 + 3d = 22 \end{cases}$$

これを解くと、$a_1 = 7$ および$d = 5$ となります。したがって、

$a_n = 7 + 5(n - 1) = 5n + 2.$

2. 与件から、$a_5 = -11$ と $a_{10} = -26$ となります。下記の連立方程式を得ます。

$$\begin{cases} a_1 + 4d = -11 \\ a_1 + 9d = -26 \end{cases}$$

これを解くと、$a_1 = 1$ および $d = -3$ となります。

ゆえに、第7番目の項は$a_7 = 1 - 3(6) = -17$.

3. 与件から、下記の連立方程式が得られます；これを解くと、$a_1 = -53$ および $d = 6$ となります。

$$\begin{cases} a_1 + 8d = -5 \\ a_1 + 14d = 31 \end{cases}$$

ゆえに、$a_{20} = -53 + 6(19) = 61.$

4. 与件から、$a_8 = 8$ と $a_{20} = 44$ になります。下記の連立方程式を得ます。

$$\begin{cases} a_1 + 7d = 8 \\ a_1 + 19d = 44 \end{cases}$$

これを解くと、$a_1 = -13$ および $d = 3$ となるはずです。したがって、

$a_n = -13 + 3(n - 1) = 3n - 16.$

5. 単に初項と差を計算するだけで十分です。この問題の与件を使って下記の連立方程式を立て、それを解くと、$a_1 = 5$ および $d = -5$ が得られます。

$$\begin{cases} a_1 + 6d = -25 \\ a_1 + 8d = -35 \end{cases}$$

ゆえに、

$$S_{10} = \frac{1}{2}n[2a_1 + d(n-1)] = \frac{1}{2}(10)[2(5) - 5(10-1)] = -175.$$

また、より簡単な方法で公差を計算することができます。第7番目の項から第9番目の項までは $2d$ の距離があります。ゆえに、 $2d = a_9 - a_7 = -35 + 25 = -10$.
よって、$d = -5$.

6. 等差数列の性質から、$a_5 + a_{10} = a_6 + a_9 = a_7 + a_8$となります。よって、

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 3(a_7 + a_8) = 219 \Rightarrow a_7 + a_8 = 73.$$

しかし $a_7 = 34$、その結果、$a_8 = 73 - a_7 = 73 - 34 = 39$。ゆえに、$d = a_8 - a_7 = 39 - 34 = 5$; それに加え,

$$a_7 = a_1 + 5(6) \Rightarrow a_1 = 34 - 30 = 4.$$

したがって、$a_n = 4 + 5(n - 1) = 5n - 1.$

7. まず、$d = a_2 - a_1 = 37 - 43 = -6$ となるはずです。ゆえに $\sum_{i=1}^{n} a_i = n[2a_1 + (n-1)d] = \frac{1}{2}n(92 - 6n) < 0$.

すなわち、$n(92 - 6n) < 0$.ここから、$n < 0$ か $92 - 6n < 0$ となるはずです。しかし、n は正の整数で、その 結果 $n < 0$ は不可能です。したがって、$92 - 6n < 0$、つまり、$n > \frac{92}{6} = \frac{46}{3} \approx 15.3$.

したがって、$\sum_{i}^{n} a_i$ がゼロより小さくなるような最初の整数は$n = 16$ となります。

等比数列

1. 等比数列：定義*

導入問題

a) 図1の正方形の面積が1の場合、各正方形が4つの等しい正方形に分割された場合は、影付きの面積を求めてください。

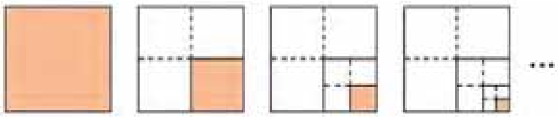


図1　図2　図3　図4

b) 各図の影付きの面積の値をみつけるためにどのようなルールを確立できますか。
c) リテラルb）に従って、列の最初の7つの項をリストしてください。
d) 項を前の項で割ると、何が観察できますか。これを少なくとも3回行ってください。

解法

a）図1の影付き面積が1で、4つの等しい部分に分割されている場合、図2の影付き面積は、図1の正方形の影付きの面積の4分の1を表します。つまり、の影付き面積は $\frac{1}{4}$ に等しい

同様に、図3の影付き面積は、図2の影付きの正方形の4分の1であるため、影付きの面積は $\frac{1}{4} \div 4 = \frac{1}{16}$ です。

同じ分析を続けると、図4の影付きの面積は、図3で影付きの正方形の4番目の部分です。つまり、影付きの面積は $\frac{1}{16} \div 4 = \frac{1}{64}$ です。

b) 図の影付きの面積を見つけるには、前の図の影付き面積の値を4で割ることができます。

c) 各図がもつ要素を一覧表示する表を作成できます。

項	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
面積値	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{4096}$

d) 項を前の項で割ると

$$a_2 \div a_1 = \frac{1}{4} \div 1 = \frac{1}{4} \qquad a_7 \div a_6 = \frac{1}{4\,096} \div \frac{1}{1024} = \frac{1}{4} \qquad a_5 \div a_4 = \frac{1}{256} \div \frac{1}{64} = \frac{1}{4}$$

常に同じ結果が得られることが分かります：$\frac{1}{4}$

まとめ

前の項に同じ数を掛けて項を求めることができる列を等比数列とよびます。

等比数列には、項の前の項で除算すると、結果が常に同じになるという特性があります。この結果は比率とよびます。

問題

次の列が等比数列であるかどうかを求めてください。等比数列である場合は、その比率を書いてください。

a) 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...　　b) 1, 3, 9, 27, 81, ...
c) 3, –6, 12, –24, 48, –96, ...　　d) –1, –2, –4, –6, –8, –10, ...

171

ユニット6

達成の目安

2.1 定義を使用して、等比数列であるかどうかを求めてください。

学習の流れ：

授業は、前の図の面積に関連付けて、各図の影付きの面積が分析される一連の図の分析から始まります。面積の列は、等比数列であることが分かります。等比数列の定義とその比率が確立されます。

問題解決

a) 4÷2 = 2であるが、$6 \div 4 = \frac{3}{2} \neq 2$ であることが観察されます。比率は両方で同じではないため、列は等比数列ではありません。

b) 3÷1 = 9÷3 = 27÷9 = 81÷27 = 3であることが観察されます。比率は常に同じであるため、列は等比数列であり、比率は3に等しくなります。

c) –6÷3 = 12÷（–6）= –24÷12 = 48÷（–24）= –96÷48 = -2であることが観察されます。比率は常に同じであるため、列は等比数列であり、比率は–2に等しくなります。

d) $-10 \div (-8) = \frac{5}{4}$, $-8 \div (-6) = \frac{4}{3}$ であることが観察されます。比率が同じではないため、列は等比数列ではありません。

レッスン 2

2.2 等比数列：一般項*

導入問題

授業2.1の等比数列の一般項を見つけてください。

解法

a_{n-1} が項 $n-1$ である場合、a_n は次の項であることが分かります。この等比数列の各項は、その前の項を掛けることで得られることから、以下のようになります。

$$\underbrace{\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\times 1}_{a_2=\frac{1}{4}\times a_1},\quad \underbrace{\frac{1}{16}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}}_{a_3=\frac{1}{4}\times a_2},\quad \underbrace{\frac{1}{64}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{16}}_{a_4=\frac{1}{4}\times a_3},\ \ldots,\ a_n=\frac{1}{4}\times a_{n-1}$$

つまり、

$$a_2=\frac{1}{4}\times a_1,\quad a_3=\frac{1}{4}\times a_2,\quad a_4=\frac{1}{4}\times a_3,\ \ldots,\quad a_{n-2}=\frac{1}{4}\times a_{n-3},\quad a_{n-1}=\frac{1}{4}\times a_{n-2},\quad a_n=\frac{1}{4}\times a_{n-1}$$

要素の位置の観点から列を説明する式を見つけたいと考えます。
注意して下さい

$$a_n=\frac{1}{4}\times a_{n-1}=\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)\times a_{n-2}=\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)\times a_{n-3}=\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)\times a_{n-4}$$

そのまま続く場合

$$a_n=\underbrace{\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\cdots\times\frac{1}{4}\right)}_{n-4}\times a_4=\underbrace{\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\cdots\times\frac{1}{4}\right)}_{n-3}\times a_3=\underbrace{\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\cdots\times\frac{1}{4}\right)}_{n-2}\times a_2=\underbrace{\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\cdots\times\frac{1}{4}\right)}_{n-1}\times a_1$$

次に、a_nは最初の項に$n-1$の比率 $\frac{1}{4}$の積を掛けたものに等しくなります。つまり、等比数列の一般項は $a_n=a_1\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$。ここで、$a_1=1$です。

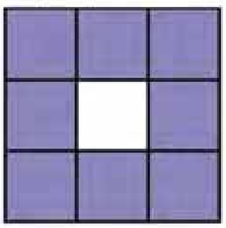
まとめ

等比数列では、rがその比率である場合、一般項は$a=a_1r^{n-1}$で与えられます。

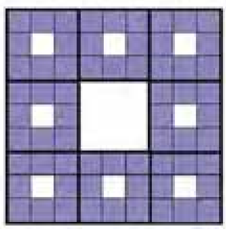
問題

1. 2.1の授業の問題の等比数列の一般項を求めてください。
2. 次のプロセスを順守してください。

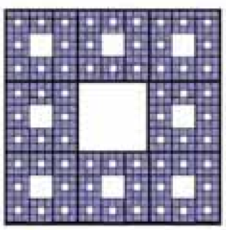
ステップ1　辺1の正方形を9つの等しい部分に分割し、中央の正方形を削除します。



ステップ2　残りの各正方形から、9つの等しい部分に分割し、それぞれの中心から正方形を削除します。



ステップ3　同じプロセスを残りの正方形で実行され、9つの等しい部分に分割し、中央の正方形を削除します。



これに従えば、プロセスをn回実行した後、最初の正方形が分割される最小の正方形の面積値が決まります。この図は、**シェルピンスキーのカーペット**として知られています。

達成の目安

2.2 等比数列の一般項を見つけてください。

学習の流れ：

この授業では、特定のケースから等比数列の一般項を推測します。次に、任意の比率rに対して一般項を確立します。

ねらい

等比数列の定義を使用して（解決の最初の段落をみてください）、次にn番目の項からa_1項との関係に達するまで（解決3と4の段落をみてください）連続して置換を開始するという考え方です。

問題解決

1a） 等比数列ではありません

1b) $a_n = 3^{n-1}$

1c) $3(-2)^{n-1}$

1d） 等比数列ではありません

2. 各正方形の面積は、各ステップで分析されます。

ステップ1　正方形の辺は1なので、面積は1です。次に、9つの等しい部分に分割すると、9の等しい面積が得られます。つまり、各正方形の面積$\frac{1}{9}$ です。

ステップ2　ステップ1から、各正方形の面積は$\frac{1}{9}$ です。従って、正方形の1つを9つの等しい部分に分割すると、各面積値は$\frac{1}{9} \div 9 = \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{9^2}$ になります。

ステップ3　ステップ2から、各正方形の面積は$\frac{1}{9^2}$ です。従って、正方形の1つを9つの等しい部分に分割すると、各面積値は $\frac{1}{9^2} \div 9 = \frac{1}{9^2} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{9^3}$ になります。

ステップ4　前のステップと同じ考えに従って、ステップ3の正方形の1つを9 の等しい部分に分割すると、各面積値は$\frac{1}{9^3} \div 9 = \frac{1}{9^3} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{9^4}$ になります。

この時点で、列を観察できます。各ステップの各正方形の面積は $\frac{1}{9^n} = \left(\frac{1}{9}\right)^n$ です。ここで、n はステップです。

2.3 等比数列：部分加算、パート1

導入問題

1. $S = 1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1}$とします。$S - rS$の値を見つけて、Sの別の式を計算してください。
2. 等比数列$a_n = a_1r^{n-1}$の最初のn項の合計を計算してください。
3. 等比数列 $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.の最初の5つの項の合計を計算してください。

解法

1. $S = 1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1}$式全体に$r$を掛けて、次のようにします。

$rS = r(1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1}) = r + r^2 + r^3 + ... + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1} + r^n.$

SからrSを引くと、次のようになります。

$$\begin{array}{rl} S = & 1 + \cancel{r} + \cancel{r^2} + \cancel{r^3} + ... + \cancel{r^{n-3}} + \cancel{r^{n-2}} + \cancel{r^{n-1}} \\ rS = & \quad\ \cancel{r} + \cancel{r^2} + \cancel{r^3} + ... + \cancel{r^{n-3}} + \cancel{r^{n-2}} + \cancel{r^{n-1}} + r^n \\ \hline S - rS = & 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - r^n \end{array}$$

従って、S（1-r）= 1-r^n。$r≠1$の場合、Sを解くと、$S = \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{r^n-1}{r-1}$になります。

つまり、$r≠1$の場合、$1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1} = \frac{r^n-1}{r-1}$。$r = 1$の場合、合計は、$S = n$ となるように1 をn回加算することを意味します。

2. 列の最初のn項をリストしてください。

$$a_1,\ a_2 = ra_1,\ a_3 = r^2a_1,\ a_4 = r^3a_1,\ \ldots,\ a_{n-2} = r^{n-3}a_1,\ a_{n-1} = r^{n-2}a_1,\ a_n = r^{n-1}a_1.$$

合計を計算してください

$$\begin{aligned} a_1 + ra_1 + r^2a_1 + r^3a_1 + ... + r^{n-3}a_1 + r^{n-2}a_1 + r^{n-1}a_1 &= a_1(1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1}) \\ &= a_1\left(\frac{r^n-1}{r-1}\right) \quad \text{si } r \neq 1. \end{aligned}$$

$r = 1$の場合、合計はna_1です。

3. 2の結果を使用して、$a_1 = 1$と $r = \frac{1}{4}$に加えて、最初の5つの項の合計$n = 5$を計算するため、求められる合計はです。

$$1\left(\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^5 - 1}{\frac{1}{4} - 1}\right) = \frac{\frac{1023}{1024}}{\frac{3}{4}} = \frac{1023}{1024} \div \frac{3}{4} = \frac{341}{256}.$$

複素数の割合は次のように計算されます

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

まとめ

等比数列$a_n = a1r^{n-1}$の部分和は、総和記号で記述され、次の式で与えられます。

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_1 r^n = \begin{cases} a_1\left(\frac{r^n-1}{r-1}\right) & r \neq 1\text{の場合。} \\ na_1 & r = 1\text{の場合。} \end{cases}$$

問題

1. 列$a_n = 15（2）^{n-1}$の最初の6つの項の合計を計算してください。
2. 列$a_n = 3（-2）^{n-1}$の最初の6つの項の合計を計算してください。
3. 列 $4, -\frac{4}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{27},$ の最初の5つの項の合計を計算してください。
4. 項5までの合計 $2 + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{18}\right) + \cdots$を計算してください。指数で表しましょう。

大きな数の累乗を計算するときに電卓を使用できます。また、回答は概算ではなく分数で表すことをお勧めします。

ユニット6

173

達成の目安

2.3 等比数列の部分和を計算してください。

学習の流れ：

等比数列の一般項を確立した後、その部分和を計算するための式が導出されます。

ねらい

等比数列の部分和の式を導出するには、最初に数値rの最初のn乗の合計を計算します。合計を計算する方法は、合計から減算する従来の手法であり、合計自体にrを掛けます。 この減算を行うと、最初と最後を除くすべての項がキャンセルされます。次に、前の結果を使用して、任意の項a_1をもつ等比数列の部分和を計算します。最後に、導入問題の最後の数字に、2番で導出された式の使用方法が表示されます。

問題解決

1. $r \neq 1$なので

$$S_n = \sum_{i=1}^{6} a_i = a_1\left(\frac{r^6-1}{r-1}\right) = 15\left(\frac{2^6-1}{2-1}\right) = 15(63) = 945.$$

2. $r \neq 1$なので

$$S_n = \sum_{i=1}^{6} a_i = a_1\left(\frac{r^6-1}{r-1}\right) = 3\left(\frac{(-2)^6-1}{-2-1}\right) = 3\left(-\frac{63}{3}\right) = -63.$$

3. 比率 $r = -\frac{1}{3}$ で列は等比数列である、よって

$$S_n = \sum_{i=1}^{5} a_i = a_1\left(\frac{r^5-1}{r-1}\right) = 4\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^5 - 1\right) \div \left(-\frac{1}{3} - 1\right) = 4\left(-\frac{244}{243}\right) \div \left(-\frac{4}{3}\right) = 4\left(-\frac{244}{243}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{244}{81}.$$

4. 比率 $r = -\frac{1}{6}$ で列は等比数列である、よって

$$S_n = \sum_{i=1}^{5} a_i = a_1\left(\frac{r^5-1}{r-1}\right) = 2\left(\left(-\frac{1}{6}\right)^5 - 1\right) \div \left(-\frac{1}{6} - 1\right) = 2\left(-\frac{7777}{6^5}\right) \div \left(-\frac{7}{6}\right) = 2\left(-\frac{7777}{6^5}\right) \times \left(-\frac{6}{7}\right) = 2\left(\frac{1111}{6^4}\right) = \frac{1111}{648}.$$

正誤表：結論として、合計は次のように表示する必要があります。

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_1 r^{i-1}$$

2.4 等比数列：部分和、パート2

導入問題

最初の項が$\frac{1}{2}$で、公比が–4の等比数列が102.5になるには、項をいくつ足し合わせる必要があるでしょうか。

解法

$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{2}\left(\frac{(-4)^n-1}{-4-1}\right) = 102.5$だと分かっています。

よって

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1-(-4)^n}{5}\right) = \frac{1}{10}[1-(-4)^n] = 102.5$$
$$\Rightarrow 1-(-4)^n = 102.5(10) = 1025$$
$$\Rightarrow \quad (-4)^n = -1024 \qquad \text{-------------------- (1)}$$

実行できる最初の分析は、負の数の累乗があり、これが負であることが判明するため、nは奇数でなければならないということです。nは奇数なので、（-4）^{n} = -4^{n}です。よって、（1）を解くことは、4^n = 1024を解くことと同じです。

4の累乗として1024を書きます。1 024 = 4^5。代入すると4^n = 4^{5}になります。よって、n = 5です。

従って、102.5を取得するためには、列 $a_n = \frac{1}{2}(-4)^{n-1}$ の最初の5項を追加する必要があります。

まとめ

特定の結果を得るために等比数列に追加する必要のある項の数を決定するには、部分和の式を目的の合計と等しくした結果の指数方程式を解く必要があります。

問題

1. 表示された結果を得るために各列からいくつの項を追加する必要があるかを求めてください。

a）1、2、4、8、16、...、部分和511

b）2、6、18、54、...、部分和2186

c）4、–20、100、-500、...、部分和–10416

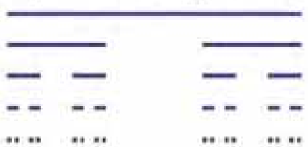
d）$a_n = \frac{1}{3}(2^{n-1})$、部分和 $\frac{127}{3}$

e）$a_n = \frac{2}{3}(-3)^{n-1}$、部分和 $-\frac{364}{3}$

f）$a_n = 3\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1}$、部分和 $\frac{6\,303}{2\,401}$

2. 列1、–1、1、–1、1、..の部分和を計算するときに取得できる可能な値を求めてください。

3. 長さ1のセグメントから、次の列が作成できます。



ステップ1　セグメントは3つの等しい部分に分割され、中央のセグメントが削除されます長さ $\frac{1}{3}$ の2つのセグメントがあります。

ステップ2　次に、他の2つのセグメントが3つの等しい部分に分割され、中央のセグメントが削除されます。長さ$\frac{1}{9}$の4つのセグメントがあります。

このプロセスを続行すると、次の質問に答えてください。
a) ステップnで、いくつのセグメントが削除されましたか
b) ステップ10で見つかったセグメントの長さの合計はどれくらいですか
c) 0.1未満のセグメントの長さの合計はどのステップにありますか

達成の目安

2.4 特定の合計を取得するために、等比数列から追加する必要のある項の数を求めてください。

学習の流れ：

等比数列の部分和を計算した後、逆のプロセスが実行されます。等比数列の部分和が分かっているので、その合計を取得するために追加する必要のある項の数を見つけます。

問題解決

1a） 列は、比率$r = 2$および$a_1 = 1$で等比数列です。よって、

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1\left(\frac{2^n - 1}{2-1}\right) = 511 \Rightarrow 2^n - 1 = 511 \Rightarrow 2^n = 512 \Rightarrow 2^n = 2^9 \Rightarrow n = 9.$$

従って、511を取得するには9項を追加する必要があります。

1b) $2\left(\frac{3^n - 1}{3-1}\right) = 2\,186 \Rightarrow 3^n = 2\,187 \Rightarrow 3^n = 3^7 \Rightarrow n = 7$

7項を追加して2186を取得します。

1c) $4\left(\frac{(-5)^n - 1}{-5-1}\right) = -10\,416 \Rightarrow (-5)^n = 5^6 \Rightarrow n = 6$

6項を追加する必要があります。

1d) $\frac{1}{3}\left(\frac{2^n - 1}{2-1}\right) = \frac{127}{3} \Rightarrow 2^n = 128 \Rightarrow 2^n = 2^7 \Rightarrow n = 7$

7項を追加する必要があります。

1e) $\frac{2}{3}\left(\frac{(-3)^n - 1}{-3-1}\right) = -\frac{364}{3} \Rightarrow (-3)^n = 3^6 \Rightarrow n = 6$

6項を追加する必要があります。

1f) $3\left(\left(-\frac{1}{7}\right)^n - 1\right) \div \left(-\frac{1}{7} - 1\right) = 3\left(\left(-\frac{1}{7}\right)^n - 1\right) \div \left(-\frac{8}{7}\right) = \frac{6\,303}{2\,401} \Rightarrow \left(-\frac{1}{7}\right)^n - 1 = -\frac{2\,101}{2\,401} \times \frac{8}{7} \Rightarrow \left(-\frac{1}{7}\right)^n = -\frac{1}{16\,807} = -\frac{1}{7^5}$

$\Rightarrow n = 5$

2. いくつかの項を追加することによって：1 − 1 + 1 − 1 + 1 − 1 + ….連続する項はキャンセルされるため、偶数の項が追加された場合は合計が0になり、奇数の項が追加された場合は1になります。

3a） 目的は、ステップ数を削除されたセグメントの数および取得されたセグメントの数と関連付けることです。

ステップ1でセグメントが削除され、削除後も2つのセグメントが残っています。

ステップ2では、2つのセグメントが削除されます。 これらの2つのセグメントに加えて、前のステップで削除されたセグメントには、3つの削除されたセグメントがあります。次に、前のステップのセグメントごとに、2つの新しいセグメントが取得されます。よって、ステップ2には2×2 = 4のセグメントがあります。

ステップ3では、削除されるセグメントの数は、存在するセグメントの数と等しい、つまり4です。この場合、このステップまでに削除されたセグメントの数は3 ＋ 4です（前のステップで削除されたセグメントと現在のステップで削除されたセグメント）。

これらのデータを使用して表を作成すると、次のことが観察されます。

ステップ	削除されたセグメント	取得したセグメント
1	$1 = 2^0$	$2 = 2^1$
2	$3 = 1 + 2^1 = 1 + 2^1$	$2 \times 2 = 4 = 2^2$
3	$7 = 3 + 4 = 1 + 2^1 + 2^2$	$2 \times 4 = 8 = 2^3$
4	$15 = 7 + 8 = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3$	$2 \times 8 = 16 = 2^4$
5	$31 = 15 + 16 = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4$	$2 \times 16 = 32 = 2^5$

従って、ステップnで削除されたセグメントは、a $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{n-1}$に等しくなります。この合計は $\frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$ に等しいです。

3b）ステップ1のセグメントの長さは $\frac{1}{3}$ であると分かっています。次に、ステップ2のセグメントの長さは $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$ になります。ステップ3では、セグメントの長さは $\frac{1}{3^2} \div 3 = \frac{1}{3^3}$です。よって、ステップ10では、セグメントの長さは $\frac{1}{3^{10}}$ になります。

各ステップでは、すべてのセグメントの長さが同じであるために、ステップ10の長さの合計は、そのステップのセグメントの数に各セグメントの長さを掛けたものに等しくなります。
つまり、

$$2^{10} \times \frac{1}{3^{10}} = \frac{2^{10}}{3^{10}}.$$

学生はこの値を計算することができますが、それを表示しておくことが望ましいです。

3c）3b）によると、ステップnのセグメントの長さの合計は $\frac{2^n}{3^n}$ に等しくなります。よって、

$$\frac{2^n}{3^n} < 0.1 = \frac{1}{10} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{1}{10} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^n > 10.$$

nの値を計算するために、10. $f(x)$ = logを底とする対数関数が使用し、xが増加しているため、

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n > 10 \Rightarrow \log\left(\frac{3}{2}\right)^n > \log 10$$
$$\Rightarrow n\log\left(\frac{3}{2}\right) > 1$$
$$\Rightarrow n > 1 \div \log\left(\frac{3}{2}\right) = 5.6788\ldots$$

つまり、nは5.6788より大きくなければなりません…よって、ステップ6ではセグメントの長さの合計は0.1未満になります。

2.5 等比数列：問題

導入問題

等比数列の3項は20で、8項は–640です。列の一般項を求めてください。

解法

a_nが等比数列の一般項であり、rがその比率である場合、$a = a_1 r^{n-1}$です。

$a_3 = 20$および$a_8 = -640$であることが分かります。だが、$a_3 = a_1 r^2 = 20$および$a_8 = a_1 r^7 = -640$です。a_8をa_3で割ると、

$$\frac{a_8}{a_3} = \frac{a_1 r^7}{a_1 r^2} = r^5 = \frac{-640}{20} = -32.$$

$r^5 = -32$から、$(-2)^5 = -32$であるため、$r = -2$と推測できます。

列の最初の項を計算することは残っています。このために、a_3またはa_8を取り、$r = -2$を使用します。

$$a_3 = a_1(-2)^2 = 4a_1 = 20 \Rightarrow a_1 = 5.$$

よって、$a_n = 5(-2)^{n-1}$。

まとめ

等比数列のいくつかのデータが既に知っている場合があり、これの一般項を決定するために、等比数列の定義と既知のデータが使用します。

等比数列の2つの項が分かっている場合、一般項を決定するために、両方の項が分割され、結果の方程式を解きます。この場合、方程式は$r^n = c$の形式であるために、nの累乗で数値cになるように数値rを計算する必要があります。

問題

1. 等比数列の4項は1で、7項は $\frac{1}{8}$ です。一般項と5項を求めてください。

2. 等比数列の最初の項は3で、3項は $\frac{4}{3}$です。一般項と4項を求めてください。

   2つの可能な解決があります。

3. 等比数列では、5項は48で、8項は384です。12項を回答してください。

4. 等比数列2、6、18、...のどの項が13122ですか。

5. 等比数列の2項と5項は、それぞれ10と1250です。31250はこの列の項ですか。もしそうならば、何の項ですか。

6. 3項が28で6項が224である等比数列の最初の6つの項の部分和を計算します。

達成の目安

2.5 等比数列に関するデータが分かっている場合は、等比数列に関する問題を解決します。

問題解決

1. $\frac{a_7}{a_4} = \frac{a_1r^6}{a_1r^3} = r^3 = \frac{1}{8} \div 1 = \frac{1}{8} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$.次に $a_4 = a_1r^3 \Rightarrow 1 = a_1\left(\frac{1}{8}\right) \Rightarrow a_1 = 8$.よって、$a_5 = a_1r^4 = 8\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{2}$.

さらに、一般項は $a_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$ です。

2. $a_1 = 3$ と $a_3 = \frac{4}{3}$ なので、$\frac{a_3}{a_1} = r^2 = \frac{4}{3} \div 3 = \frac{4}{9}$。よって、$r = \pm\frac{2}{3}$。

- $r = \frac{2}{3}$の場合、$3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ および $a_4 = 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{9}$。
- $r = -\frac{2}{3}$ の場合、$a_n = 3\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ および $a_4 = 3\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{9}$。

3. $a_5 = 48$および$a_8 = 384$であるために、$\frac{a_8}{a_5} = r^3 = 384 \div 48 = 8$ となります。よって、$r = 2$です。

次に、$\frac{a_{12}}{a_8} = r^4 = 16$ なので、$a_{12} = 16$（384） = 6144です。

問題3では、最初に一般項を計算してからa_{12}を計算することで解決できます。

4. 列は等比数列で、最初の項は2で、比率は3です。よって、

$$a_n = 2(3)^{n-1} = 13122 \Rightarrow 3^{n-1} = 6561 = 3^8 \Rightarrow n-1 = 8 \Rightarrow n = 9。$$

よって、13122は9項です。

5. $a_2 = 10$および$a_5 = 1250$であるため、$\frac{a_5}{a_2} = r^3 = 1250 \div 10 = 125$となります。よって、$r = 5$です。

一方で、$a_2 = a_1$（5）、つまり$10 = 5a_1$であるために、$a_1 = 2$です。よって、

$$a_n = 2(5)^{n-1} = 31250 \Rightarrow (5)^{n-1} = 15625 = 5^6 \Rightarrow n-1 = 6 \Rightarrow n = 7。$$

よって、31250は列の7項です。

6. $a_3 = 28$および$a_6 = 224$であるために、$\frac{a_6}{a_3} = r^3 = 224 \div 28 = 8$となります。よって、$r = 2$です。また、$a_3 = 28 = a_1(2^2)$なので、$a_1 = 7$です。よって、

$$S_6 = a_1\left(\frac{r^6-1}{r-1}\right) = 7\left(\frac{2^6-1}{2-1}\right) = 7(63) = 441.$$

レッスン2

2.6 復習問題

1. 列1、4、7、10、..の一般項を回答してください。
2. 最初の項2と差3を持つ等差数列の30項を計算してください。
3. a_{50} = 29およびd = –3のような等差数列の最初の項は何ですか。
4. $a_n = 2 + \frac{1}{2}(n - 1)$。の最初の17項の合計を計算してください。
5. $a_n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}n$ の最初の12項の合計を計算してください。
6. 5 + 9 + 13 + ⋯ +401の合計を計算してください。
7. 66を取得するには、列–9、–6、–3、...からいくつの項を追加する必要がありますか。
8. 74を取得するには、列26、21、16、...からいくつの項を追加する必要がありますか。
9. 列3、6、12、24、..の6項を計算してください。
10. 等比数列の7項は192で、その比率は2です。列の最初の4つの項を計算してください。
11. 等比数列では、a_8 = 16、r = -4。a_{12}の値を求めてください。
12. 123 + 6 + 12 + ⋯ + 6144の合計を計算してください。
13. 2049を取得するには、列$a_n = 3(-2)^{n-1}$からいくつの項を追加する必要がありますか。
14. $-\frac{3277}{1024}$を取得するには、問題11の列からいくつの項を追加する必要がありますか。

2.7 ユニットの問題

1. 三角形の内角は10°の差で等差数列になっています。各角度はどのくらいですか。
2. 等差数列の4項は10で、6項は16です。列のn番目の項の式を求めてください。
3. 等差数列の5項は17で、その差は2です。列の最初の11項の合計を求めてください。
4. 等差数列の6項が8で、11項が-2の場合、最初の項はどれですか。違いはなんですか。
5. 290を取得するには、列2、8、14、...の項をいくつ追加する必要がありますか。
6. 債務は、最初の週に5ドル、2週目に8ドル、3週目に11ドルというように、32週間で支払うことができます。借りている金額を計算してください。
7. aとbを方程式x^2-3x + A = 0の解とし、cとdを方程式x^2-12x + B = 0の解とします。a、b、c、dがこの順序で等比数列を形成することが分かります。AとBの値を求めてください。

176

達成の目安

2.6 算術および等比数列に対応する問題を解決します。

問題解決

1. 各項は、前の項に3を加えることで取得できます。従って、列は、差3と1項1の算術です。よって、$a_n = 1 + 3$（n -- 1）= 3n-2。

2. 一般項は、$a_n = 2 + 3$（n-1）です。よって、$a_{30} = 2 + 3$（29）= 89です。

3. $a_{50} = a_1 - 3(49) = 29 \Rightarrow a_1 = 176.$

4. $a_1 = 2$ y $d = \frac{1}{2}$.よって、

$$S_{17} = \frac{1}{2}n[2a_1 + (n-1)d] = \frac{1}{2}(17)\left(4 + \frac{1}{2}(16)\right) = 17(6) = 102.$$

5. $a_1 = \frac{1}{4}$ y $d = \frac{3}{4}$.よって、

$$S_{12} = \frac{1}{2}(12)\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}(11)\right) = (6)\left(\frac{35}{4}\right) = \frac{105}{2}.$$

6. その項は1項5と差4の等差数列に属するため、列は算術です。合計を計算するためには、追加されている要素の数を知る必要があります。よって、

$$5 + 4(n-1) = 401 \Rightarrow n - 1 = 99 \Rightarrow n = 100.$$

よって、$5 + 9 + 13 + \cdots + 401 = \frac{1}{2}(100)(5 + 401) = 50(406) = 20\,300$。

7. 列は算術であり、差は$d = 3$で、最初の項は$a_1 = -9$です。よって、

$$\frac{1}{2}n[2a_1 + (n-1)d] = \frac{1}{2}n[-18 + 3(n-1)] = 66 \Rightarrow n(n-7) = 44 \Rightarrow n^2 - 7n - 44 = 0 \Rightarrow (n-11)(n+4) = 0.$$

よって、$n = 11$または$n = -4$です。従って、66を取得するには、11つの項を追加する必要があります。

8. $a_n = 26 - 5(n-1)$.よって、

$$\frac{1}{2}n[52 - 5(n-1)] = 74 \Rightarrow n(57 - 5n) = 148 \Rightarrow 5n^2 - 57n + 148 = 0 \Rightarrow (5n - 37)(n - 4) = 0.$$

よって、$n = \frac{37}{5}$または $n = 4$.ただし、$\frac{37}{5}$は整数ではないため、74を取得するためには4つの項を追加する必要があります。

9. 列は、最初の3項と比率2で等比数列です。よって、$a_n = 3(2^{n-1})$.次に、$a_6 = 3(2^5) = 96$.

10. データから、$a_7 = 192 = a_1$（2^6）。つまり、$a_1 = 3$です。よって、

$a_1 = 3, a_2 = 3 \times 2 = 6, a_3 = 6 \times 2 = 12$ y $a_4 = 12 \times 2 = 24.$

11. $\frac{a_{12}}{a_8} = \frac{a_1 r^{11}}{a_1 r^7} = r^4 = (-4)^4 \Rightarrow a_{12} = (-4)^4 a_8 = (-4)^4(16) = 4\,096.$

問題10では、等比数列の特性が使用されています。項は、前の項に比率を掛けることによって取得できます。

12. 合計は問題9の等比数列です。6144項の計算：

$$a_n = 3(2^{n-1}) = 6\,144 = 3 \times 2^{11} \Rightarrow n - 1 = 11 \Rightarrow n = 12.$$

次に、$S_{12} = a_1\left(\frac{r^{12}-1}{r-1}\right) = 3\left(\frac{2^{12}-1}{2-1}\right) = 3(2^{12}-1)$.

この結果は指数で表すことができますが、正方形の差の特性を使用して計算することもできます。

$$3(2^{12} - 1) = 3(2^6 - 1)(2^6 + 1) = 3(2^3 - 1)(2^3 + 1)(2^6 + 1) = 3(8 - 1)(8 + 1)(64 + 1) = 3(7)(9)(65) = 12285.$$

よって、$S_{12} = 3(2^{12} - 1) = 12285.$

電卓を使用せず、2^{12}をせずに、$2^{12} - 1$ を計算するように学生に促します。

13. $S_n = 3\left(\frac{(-2)^n-1}{-2-1}\right) = 2\,049 \Rightarrow (-2)^n - 1 = -2\,049 \Rightarrow (-2)^n = -2\,048 \Rightarrow (-2)^n = -2^{11} \Rightarrow n = 11.$

14. a_1を計算してください。

$$a_8 = a_1(-4)^7 \Rightarrow 16 = a_1(-4)^7 \Rightarrow a_1 = -\frac{16}{16\,384} = -\frac{1}{1024}.$$

次に、

$$\begin{aligned} \frac{1}{1024}\left(\frac{(-4)^n-1}{-4-1}\right) = -\frac{3\,277}{1024} &\Rightarrow \frac{(-4)^n-1}{5} = -3\,277 \\ &\Rightarrow (-4)^n - 1 = -16\,385 \\ &\Rightarrow (-4)^n = -16\,384 \\ &\Rightarrow (-4)^n = -4^7 \\ &\Rightarrow n = 7 \end{aligned}$$

よって、7つの項を追加する必要があります。

達成の目安

2.7 算術および等比数列に対応する問題を求めてください。

問題解決

1. a_1、a_2、a_3を三角形の3つの角度とします。よって、$a_1 + a_2 + a_3 = 180°$。一方、a_1、a_2、a_3 は、$a_2 = a_1 + 10°$ および $a_3 = a_1 + 20°$となります。よって、

$a_1 + a_2 + a_3 = 180° \Rightarrow a_1 + (a_1 + 10°) + (a_1 + 20°) = 180° \Rightarrow 3a_1 + 30° = 180° \Rightarrow 3a_1 + 30° = 180° \Rightarrow 3a_1 = 150°$.

よって、$a_1 = 50°$, $a_2 = 60°$ y $a_3 = 70°$.

2. $a_4 = 10$ および $a_6 = 16.a_6\text{-}a_4 = 16\text{-}10 = 6 = 2d$なので、$d = 3$です。一方、$a_4 = a_1 + 3d$なので、$a_1 = a_4 - 3d = 10 - 9 = 1$.

よって、$a_n = 1 + 3$（n -1）= 3n-2。

3. $a_5 = 17$および$d = 2$であるために、$a_1 = a_5$-2（4）= 17-8 = 9となります。よって、

$$S_{11} = \frac{1}{2}n[2a_1 + (n-1)d] = \frac{1}{2}(11)\Big(18 + 2(10)\Big) = 11(19) = 209.$$

4. $a_6 = 8$および$a_{11} = -2$であるために、a_{11} --a6 = --2 -8 = -10 = $a_1 + 10d$-（$a_1 + 5d$）= 5dであるため、$d = -2$となります。次に、$a_6 = a_1 + 5d \Rightarrow a_1 = a_6\text{-}5d = 8 + 10 = 18$。

よって、最初の項は18であり、差は-2です。

5. 列は算術であり、最初の項は2、差は6です。よって、

$$S_n = \frac{1}{2}n[2a_1 + d(n-1)] = \frac{1}{2}n\Big(4 + 6(n-1)\Big) = n(3n-1) = 290.$$

つまり、$3n^2\text{-}n\text{-}290$ =（3n + 29）（n-10）= 0です。よって、$n = -\frac{29}{3}$または$n = 10$です。従って、290を取得するには、10項を追加する必要があります。

6. 列5、8、11、...は、差3の等差数列です。総債務を決定するには、$a = 5 + 3$（n-1）のS_{32}を計算します。

$$S_{32} = \frac{1}{2}(32)(10 + 3(31)) = 16(103) = 1\,648.$$

よって、負債は1,648ドルです。

7. aとbは$x^2 - 3x + A = 0$の解であるために、$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab = x^2 - 3x + A$となります。つまり、$a + b = 3$および$ab = A$です。同様に、$c$と$d$についても同様です。これらは、$c + d = 12$および$cd = B$を満たします。一方で、$a$、$b$、$c$と$d$は等比数列を形成します。列の比率を$r$とすると、$b = ar$、$c = ar^2$、$d = ar^3$となります。

後者を$a + b = 3$および$c + d = 12$に代替すると、次のようになります。

$$a + b = 3 \Rightarrow a + ar = 3 \Rightarrow a(1 + r) = 3,$$
$$c + d = 12 \Rightarrow ar^2 + ar^3 = 12 \Rightarrow ar^2(1 + r) = 12.$$

方程式から、$a \neq 0$および$r \neq -1$であることが分かります。2番目の方程式は、最初の方程式で乗算できます。

$$\frac{ar^2(1+r)}{a(1+r)} = \frac{12}{3} = 4 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = \pm 2.$$

- $r = 2$の場合、a（1 + r）= 3から$a = 1$になります。従って、$b = ar = 2$, $c = ar^2 = 4$ および $d = ar^3 = 8$.
  よって、$A = ab = 2$および$B = cd = 32$です。
- $r = -2$の場合、a（1 + r）= 3から$a = -3$になります。従って、$b = ar = 6$, $c = ar^2 = -12$ および $d = ar^3 = 24$.
  よって、$A = ab = -18$ および $B = cd = -288$.