ユニット 7 場合の数

このユニットのねらい

数え上げ、順列、組み合わせの基本原則を使って問題解決の手法を考察し、身の回りの様々な状況における場合の数を求めます。

関連と展開

高校2年次

ユニット7：場合の数

- 集合論
- 順列
- 組み合わせ

↓

ユニット 8：確率

- コルモゴロフの公理
- 条件付き確率

このユニットでの学習計画

レッスン	時間	授業
1. 集合論	1	1. 集合論
	1	2. 集合の演算
	1	3. 集合の濃度
	1	4. 集合の濃度の適用
2. 順列	1	1. 樹形図
	1	2. 和の法則
	1	3. 積の法則
	1	4. 数の階乗
	1	5. 順列
	1	6. 順列と場合の数
	1	7. 重複順列
	1	8. 円順列
	1	9. 円順列の応用
	1	10. 同じものを含む順列
	1	11. 補集合による数え上げ
	1	12. 復習問題
	1	ユニット1およびユニット2のテスト
3. 組み合わせ	1	1. 組み合わせ
	1	2. 組み合わせと数え上げの公式
	1	3. 道順の求め方

レッスン	時間	授業
	1	4. 道順の求め方を使った証明
	1	5. 組み合わせの等式の2通りの解き方
	1	6. パスカルの三角形
	1	7. ニュートンの二項定理
	1	8. 仕切りを使う方法
	1	9. 復習問題
	2	10. ユニットの問題
	1	レッスン3テスト

全27コマ + レッスン1とレッスン2のテスト + レッスン3のテスト

各レッスンの要点

レッスン1：集合論

集合論の基礎理論を公理を使わずに明らかにします。集合とその特性についていくつかの定義を学んだり、直感的に演算を行います。特に集合の濃度に注目します（対象の数え上げに有用です）。確率のユニットでも扱いますが、事象と呼ばれる集合を学習します。

レッスン2：順列

対象の数え上げについて基礎知識を得たら、もう少し便利な数え上げの方法を学習します。和の法則と積の法則の基本原則から導入しますが、主に次の授業で扱います。特に様々な条件での順列の使い方を掘り下げます。一列に並ぶ順列、円順列、重複のある順列、同じものを含む順列などです。この課は次の課と多くの点で対応しています。課全体の授業を通して、問題を分析する、解き方を考える、問題を解くことに重点を置きます。順列の考え方を使った解答（正確な計算はしていなくても）が、一貫して分析や論証を正しく行っているのであれば、正解とします。

レッスン3：組み合わせ

本課では組み合わせを定義し、順列との違いを明らかにします。本課ではもう少し複雑な内容を扱います。組み合わせの等式の証明、パスカルの三角形の証明、ニュートンの二項定理の演繹などです。そのため授業によっては教師からのより多くの支援が必要です。第2課と同様、組み合わせの考え方を使った解答を正解とします。このユニットで大切なのは問題を考察し正しい解答を導くことです。

1.1 集合論

定義

集合とは、ものの集まりのことで、それは数字でも文字でも、人でも、実質的にどんなものでも構いません。集合を構成している個々のものを**要素**と言います。a がAの要素であるとき、 $a \in A$ または $A \ni a$と表し、「a はAに属す」または「aはAの要素である」と読みます。集合が持つ要素の数を**集合の濃度**といい、集合Aがある場合、Aの濃度は$n(A)$で表します(時には|A|)。集合は、集合の要素全体を"中括弧 {} "で囲って表します。要素が列挙されている場合、その集合は**外延的定義**で表されていると言います。例えば、A = {1, 2, 3, a, b, c}となります。

ある規則または全ての要素が持つ特徴によって要素が表されている場合、集合は**内包的定義**で表されていると言います。例えば、

{x| x は 6未満の正の数}となります。

この集合は、x が 6未満の正の数になるような要素xの全体と読みます。

この集合は、6未満の正の数という条件を満たす変数x の集まりであるということになります。

集合を図として表すには、集合の全ての要素を含む楕円形が使われます。こうした表記方は**ベン図**と言い、例えば集合B = {1, 3, 6, 8} は次のようなベン図に表すことができます。

例 1

集合A = {2, 4, 6, 8, 10} の濃度を求めましょう。また、できれば、内包的定義で集合を表しましょう。
Aの濃度： $n(A) = 5$
次のような内包的定義も可能：A = {x| x は10以下の正の偶数}また、A = {10以下の正の偶数}とも表すことができます。

例 2

次の集合を（できれば）外延的定義で表し、集合の濃度を求めましょう。

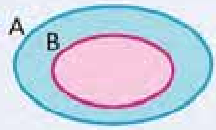
a) A = {8未満の正の奇数}
b) B = {x| $x = 2n$, n は自然数}

a) A = {1, 3, 5, 7} かつ $n(A) = 4$
b) A = {2, 4, 6, 8, 10, 12, ...}か つ$n(A) = \infty$.

あるパターンを持っているが、終わりがない要素の集合を表すには、bのように省略符号を使うことができ、その場合、集合の濃度は無限記号∞で表します。

定義

集合Bの要素の全てが集合Aの要素になっている時 ($a \in B$ である場合、 $a \in A$)、集合Bは集合Aの**部分集合**であり、 $B \subset A$または $A \supset B$と表し、「B はAに含まれている」または「AはBを含んでいる」と読みます。



例えば、A = {2, 3, 5, 8, 9} かつ B = {2, 5}であれば、$B \subset A$と言えます。

要素のない集合を**空集合**と言い、∅と表し、$n(\emptyset) = 0$という条件が満たされます。集合A 全体に$\emptyset \subset A$と言う条件が満たされます。

集合Aの部分集合全てからなる集合は**集合Aの冪集合**と言います。A = {a, b, c} のとき、集合Aの冪集合は {∅, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}}です。

達成の目安：

1.1 集合論とベン図の概念を定義できる。

学習の流れ：

この時点で、学生はすでに数、代数、幾何学、関数、記述統計学について必要な数学的概念を身につけています。あとは推論統計学の一部を詳しく学べばよく、そのためには計数法、そしてその後確率を学ぶために必要なツールとなる集合論に取り組む必要があります。

ねらい：

この授業では、集合と部分集合に関するすべての定義が出てくるので、二つの部分に分けられます。定義ではまず、集合とその特性の概念を掘り下げます。その後、部分集合とその特性の概念に関する定義を例示していきます。

この授業では、非常に概念的（定義を理解して覚えることが目的）なので、定義を優先し、問題を解くことはしませんが、生徒がすべての概念を素早く呑み込めた場合は、次の問題を解かせてもいいでしょう。

1. 次の集合を（できれば）外延的定義で表し、集合の濃度を求めましょう。
   a) A = {10未満の正の偶数}
   b) B = $\{x \mid 0 < x < 13$, xは自然数$\}$
   c) C = $\{y \mid y$ は 3で割り切れる$\}$
   d) D = $\{n \mid -5 < n < 7$, n は奇数で $n \in \mathbb{Z}\}$
2. 以下の集合を内包的定義で表しましょう。
   a) A = {5, 7, 9, 11, 13}
   b) B = {−8, −4, 0, 4, 8}
   c) C = {..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ...}
   d) D = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...}
3. 包含関係に合った符号を⊂ , ⊃ の中から選んで書きましょう。
   a) {3, 7} ___ {1, 3, 5, 7}　b) {0, −4, 7, −1} ___ {−4}　c) $\mathbb{R}$ ___ $\mathbb{Q}$　d) {} ___ ∅　e) {∅} ___ ∅
4. 集合A = {2, 4, −3, 0}の冪集合を示し、その濃度を求めましょう。

教師がベン図を例示する際、問題で扱われている集合を再び取り上げ、それらをベン図で表現して見せてもかまいません。

問題の解答：

1a) A = {2, 4, 6, 8}, n(A) = 4
1b) B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}, n(B) = 12
1c) C = {... −9, −6, −3, 0, 3, 6, 9, ...}, n(C) = ∞
1d) D = {−3, −1, 1, 3, 5}, n(D) = 5

2a) A = $\{n \mid 4 < n < 14$, nは奇数, $n \in \mathbb{Z}\}$
2b) B = $\{y \mid -9 < y < 9$, yは4で割り切れる$\}$
2c) C = $\{x \mid x \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$
2d) D = $\{p \mid p$は素数$\}$

ある集合を内包的定義で表す際、いろいろな表記の仕方があるかもしれません。その場合、教師は生徒の解答がここに提示している解答と同じでなくても、それが正しいかどうか確認しなければなりません。

{∅} は
空集合からなる集合です。

3a) {3, 7} ⊂ {1, 3, 5, 7}　**3b)** {0, −4, 7, −1} ⊃ {−4}　**3c)** $\mathbb{R}$ ⊃ $\mathbb{Q}$　**3d)** {} = ∅　**3e)** {∅} ⊃ ∅

4. 集合Aの冪集合は、A = {∅, {2}, {4}, {−3}, {0}, {2, 4}, {2, −3}, {2, 0}, {4, −3}, {4, 0}, {−3, 0}, {2, 4, −3}, {2, 4, 0}, {2, −3, 0}, {4, −3, 0}, A}であり、その濃度は16

レッスン 1

1.2 集合の演算

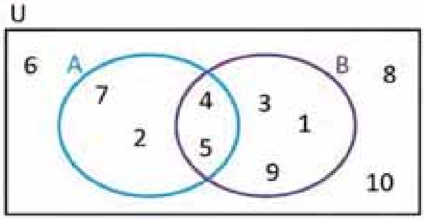
導入問題

集合A, BがA = {2, 4, 5, 7} かつ B = {1, 3, 4, 5, 9}であるとき、

a) AかBのいずれかに属する要素の集合を定義しましょう。
b) AとBのいずれにも属する要素の集合を定義しましょう。
c) Aに属するがBには属さない要素の集合を定義しましょう。
d) U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}のとき、Uには属するがAには属さない要素の集合を示しましょう。

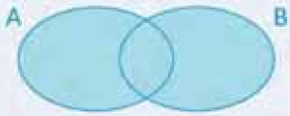
解法

a) 集合は： {1, 2, 3, 4, 5, 7, 9}.
b) 集合は： {4, 5}.
c) 集合は： {2, 7}.
d) 集合は： {1, 3, 6, 8 ,9, 10}.

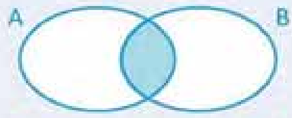


定義

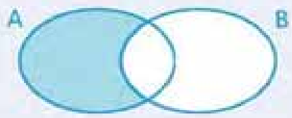
二つの集合A,Bの演算で、AかBのいずれかに属する要素全体からなる集合を**和集合**と言い、A∪Bと表し、「Aカップ B」と読みます。



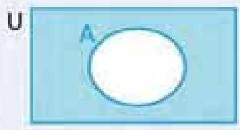
二つの集合A,Bの演算で、AとBのいずれにも属する要素全体からなる集合を**共通部分**と言い、 A∩Bと表し、「Aキャップ B」と読みます。



二つの集合A,Bの演算で、Aに属する要素のうちBに属さないものの全体からなる集合を**差集合**と言い、A − Bと表します。



二つの集合A,Uの演算で、A ⊂ Uであり、Aに属さないUの要素を集合Aの**補集合**と言い、A^c と表します。集合Uのことを、しばしば **全体集合**、または単に**ユニバース**とも言います。

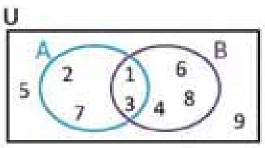


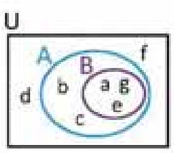
問題

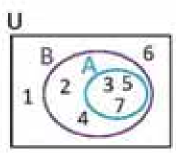
1.aからdそれぞれに, 集合A∪B, A∩B, A – B, B – Aを定義しましょう。

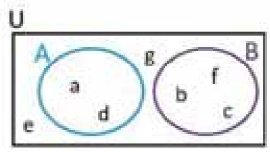
a) A = {a, c, d, e, f, g}, B = {b, d, f, h}
b) A = {−2, 0, 1, 4, 7}, B = {−2, 1, 4}
c) A = {a, b}, B = {a, b, c, d}
d) A = {2, 3, 4}, B = {5, 6, 7}

2.それぞれのベン図について、集合A, B, A∪B, A∩B, A – B, B – A, A^c , B^c を定義しましょう。

a)


b)


c)


d)


ユニット 7

達成の目安：

1.2 和集合、共通部分、差集合、補集合を定義できる。

学習の流れ：

集合の定義や表記法、集合に関するその他の定義が理解できたら、この授業では集合の最も重要な演算について学習します。

ねらい：

導入問題では、この授業で定義される集合の演算に関係する「かつ」や「または」などの直感的論理結合子を使用することで演算を行えるようになることを目指します。

問題の解答：

1a) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$; $A \cap B = \{d, f\}$; $A - B = \{a, c, e, g\}$; $B - A = \{b, h\}$.

1b) $A \cup B = \{-2, 0, 1, 4, 7\} = A$; $A \cap B = \{-2, 1, 4\} = B$; $A - B = \{0, 7\}$; $B - A = \{\} = \emptyset$.

1c) $A \cup B = \{a, b, c, d\} = B$; $A \cap B = \{a, b\} = A$; $A - B = \{\} = \emptyset$; $B - A = \{c, d\}$.

1d) $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} = A$; $A \cap B = \{\} = \emptyset$; $A - B = \{2, 3, 4\} = A$; $B - A = \{5, 6, 7\} = B$.

2a) $A = \{1, 2, 3, 7\}$, $B = \{1, 3, 4, 6, 8\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$, $A \cap B = \{1, 3\}$, $A - B = \{2, 7\}$, $B - A = \{4, 6, 8\}$, $A^c = \{4, 5, 6, 8, 9\}$ y $B^c = \{2, 5, 7, 9\}$.

2b) $A = \{a, b, c, e, g\}$, $B = \{a, e, g\}$, $A \cup B = \{a, b, c, e, g\} = A$, $A \cap B = \{a, e, g\} = B$, $A - B = \{b, c\}$, $B - A = \{\} = \emptyset$, $A^c = \{d, f\}$ y $B^c = \{b, c, d, f\}$.

2c) $A = \{3, 5, 7\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 7\}$, $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 7\} = B$, $A \cap B = \{3, 5, 7\} = A$, $A - B = \{\} = \emptyset$, $B - A = \{2, 4\}$, $A^c = \{1, 2, 4, 6\}$ y $B^c = \{1, 6\}$.

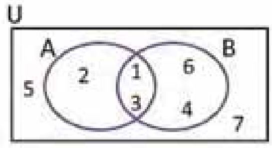
2d) $A = \{a, d\}$, $B = \{b, c, f\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, f\}$, $A \cap B = \{\} = \emptyset$, $A - B = \{a, d\}$, $B - A = \{b, c, f\}$, $A^c = \{b, c, e, f, g\}$ y $B^c = \{a, d, e, g\}$.

1.3 集合の濃度

導入問題

右のベン図に表される集合A、Bについて、以下の問題を解いてみましょう。

a) Aにはいくつ要素がありますか。
b) Bにはいくつ要素がありますか。
c) A⋂Bにはいくつ要素がありますか。
d) A⋃Bにはいくつ要素がありますか。
e) A^cにはいくつ要素がありますか。



解法

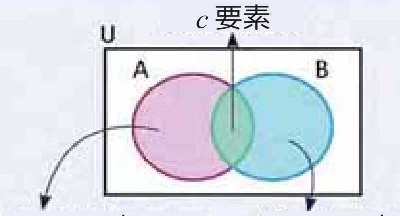
全体集合：U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

a) 集合Aが A = {1, 2, 3}であることがわかれば、Aの要素数は： n(A) = 3.
b) 集合BがB = {1, 3, 4, 6}であることがわかれば、Bの要素数は： n(B) = 4.
c) 集合A, Bの共通部分が A⋂B = {1, 3}であることがわかれば、A⋂Bの要素数は： n(A⋂B) = 2.
d) A, Bの和集合がA⋃B = {1, 2, 3, 4, 6}であることがわかれば、A⋃Bの要素数は： n(A⋃B) = 5.
e) Aの補集合がA^c= {4, 5, 6, 7}であることがわかれば、A^cの要素数は： $n(A^c)$ = 4.

一般的に

集合A, Bについて、n(A) = a,
n(B) = b また n(A⋂B) = cであるとき、次の式が成り立ちます。

$$n(A \cup B) = (a-c)+(b-c)+c$$
$$= a+b-c$$

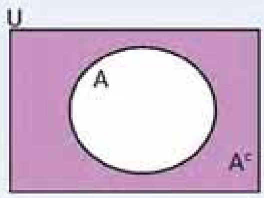


そして、これは以下と同様のことです。:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

似たような形でA^cをAに含まれないUの要素として分析すると、以下のように結論付けられます。

$$n(A^c) = n(U) - n(A)$$



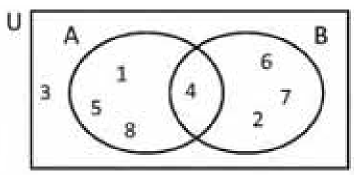
一般的に、集合U, A, Bについては、以下が成り立ちます。

$$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B),}$$
$$\boldsymbol{n(A^c) = n(U) - n(A)}$$

問題

1.右のベン図について、aからhまで、解いてみましょう。

a) n(A⋃B)　b) n(U)　c) $n(A^c)$　d) $n(B^c)$
e) $n[(A \cup B)^c]$　f) $n(A^c \cap B^c)$　g) $n[(A \cap B)^c]$　h) $n(A^c \cup B^c)$



ベン図を使うと、$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ かつ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$であることが証明できます。こうした特性を**ドモルガンの性質**といいます。

2. 集合U, A, B について、n(U) = 60, n(A) = 35, n(B) = 21 かつn(A⋂B) = 14が成り立つとき、以下を定義してみましょう。

a) n(A⋃B)　b) $n(A^c)$　c) $n(B^c)$　d) $n[(A \cup B)^c]$　e) $n[(A \cap B)^c]$　f) n(A – B)　g) $n(A \cap B^c)$

180

達成の目安：

1.3 集合とその演算の濃度を計算できる。

学習の流れ：

集合の演算ができれば、集合の演算により定まる集合の濃度の結果を分析することができます。ここでは、特に和集合に力を入れます。

ねらい：

$n(A)$ という表記を使うのは、絶対値の表記と混乱させないようにするためです。この授業の内容は確率のユニットと関連性があるので、この表記は確率のユニットでも取り上げられることになります。

問題の解答：

この問題については、まず $n(A) = 4$, $n(B) = 4$ および $n(A \cap B) = 1$を計算させ、それから「一般的に」の部分の結果を適用させたほうがよいでしょう。

1a) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 4 + 4 - 1 = 7$

1b) $n(U) = 8$

1c) $n(A^c) = n(U) - n(A) = 8 - 4 = 4$

1d) $n(B^c) = n(U) - n(B) = 8 - 4 = 4$

1e) $n[(A \cup B)^c] = n(U) - n(A \cup B) = 8 - 7 = 1$

1f) $n(A^c \cap B^c) = 1$

1g) $n[(A \cap B)^c] = n(U) - n(A \cap B) = 8 - 1 = 7$

1h) $n(A^c \cup B^c) = n(A^c) + n(B^c) - n(A^c \cap B^c) = 4 + 4 - 1 = 7$

この問題では、教師は生徒に対し、ベン図を見て集合の要素を全て数えるのではなく、結論の結果を使って解くように仕向けなくてはなりません。fだけは、数えて解く必要があります。

2a) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 35 + 21 - 14 = 42$

2b) $n(A^c) = n(U) - n(A) = 60 - 35 = 25$

2c) $n(B^c) = n(U) - n(B) = 60 - 21 = 39$

2d) $n[(A \cup B)^c] = n(U) - n(A \cup B) = 60 - 42 = 18$

2e) $n[(A \cap B)^c] = n(U) - n(A \cap B) = 60 - 14 = 46$

2f) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 35 - 14 = 21$

2g) $n(A \cup B^c) = n(B^c) + n(A \cap B) = 39 + 14 = 53$を計算してから、
$n(A \cap B^c) = n(A) + n(B^c) - n(A \cup B^c) = 35 + 39 - 53 = 21$を計算します。

2f) と 2g)の解答について、教師は、ベン図を作成して提示した計算法で行うのがなぜ必要なのか確認するよう推奨してもよいでしょう。また、2g)では以下のように結論付けることができます。
$n(A \cap B^c) = n(A) + n(B^c) - n(A \cup B^c) = n(A) + n(B^c) - [n(B^c) + n(A \cap B)] = n(A) - n(A \cap B) = 35 - 14 = 21$

教師の判断で、ベン図を用いてデモルガンの法則を示してもよいでしょう。

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$　　　　$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

それにより、1e) の解答が1f)の解答と同じであり、1g)の解答が1h)の解答と同じであることが証明できます。

1.4 集合の濃度の応用

導入問題

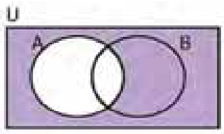
1から100までの自然数について、以下の問題を解いてみましょう。
a) 3の倍数はいくつありますか。
b) 3の倍数でない数はいくつありますか。
c) 3と5いずれもの倍数はいくつありますか。
d) 3か5のいずれかの倍数はいくつありますか。

解法

Uは1から100 までの自然数の集合です。Uに含まれる数の内、3の倍数の集合をA、5の倍数の集合をBと表記してみます。

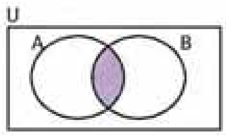
A = {3(1), 3(2), 3(3), ... , 3(31), 3(32), 3(33)}
B = {5(1), 5(2), 5(3), ... , 5(18), 5(19), 5(20)}

a) 1から100までの3の倍数の個数は集合Aの濃度に等しく、以下の式になります。n(A) = 33



b) 1から100までの3の倍数でない数の個数は
Aの補集合の濃度に等しく、以下の式になります。

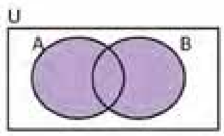
$n(A^c) = n(U) - n(A) = 100 - 33 = 67$



c) 3および5の倍数からなる集合は 1から100までの15の倍数の集合と同じです。

A∩B = {15(1), 15(2), 15(3), 15(4), 15(5), 15(6)}
すなわち、n(A∩B) = 6となります。

また、3と5の共通倍数は、その最小公倍数の倍数、すなわち15の倍数ということです。



d) 3か5のいずれかの倍数からなる集合は集合A∪Bで表せます。

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 33 + 20 - 6 = 47$

まとめ

集合論は、集合によってモデル化された状況の計数に非常に役立ちます。

問題

1. 1から100までの自然数で、3または5のいずれの倍数でもない数の個数を求めてみましょう。その後、その状況を表すベン図を作成してみましょう。

2. 1から100までの自然数について、以下の問題を解いてみましょう。
   a) 2の倍数はいくつありますか。
   b) 3の倍数でない数はいくつありますか。
   c) 2の倍数と3の倍数はいくつありますか。
   d) 2か3のいずれかの倍数はいくつありますか。
   e) 2の倍数でも3の倍数でもない数はいくつありますか。

3.表は行と列の集合の共通部分の濃度を表しています。集合A, Bについて、足りない情報を表に記入してみましょう。

	A	A^c	合計
B	42		56
B^c		10	
合計	76		100

達成の目安：

1.4 集合の演算の濃度の性質を応用して問題を解ける。

学習の流れ：

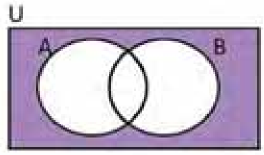
集合論の授業の締めくくりとして、集合の濃度の性質をもとに解いていく計数の問題を導入し始めてもよいでしょう。

ねらい：

導入問題では、集合の概念を使って問題を解かせます。問題でも、引き続き導入問題と同じ状況で進め、mcmの計数をしやすくするため、必ず素数2個にします。

問題の解答：

1. 導入問題の結果を用い、1から100の数の内、3の倍数でも5の倍数でもない数を求めるのは、以下を求めることに等しいと分析します。$n[(A \cup B)^c] = n(U) - n(A \cup B) = 100 - 47 = 53$



2a) Uは1から100 までの自然数の集合です。Uに含まれる数の内、2の倍数の集合をA、3の倍数の集合をBと表記してみます。

$A = \{2(1), 2(2), 2(3), \ldots, 2(48), 2(49), 2(50)\}$

$B = \{3(1), 3(2), 3(3), \ldots, 3(31), 3(32), 3(33)\}$

1から100までの2の倍数の個数は集合Aの濃度に等しく、$n(A) = 50$となります。

2b) 1から100までの3の倍数でない数の個数はBの補集合の濃度に等しく、以下の式になります。

$$n(B^c) = n(U) - n(B) = 100 - 33 = 67$$

2c) 2および3の倍数からなる集合は 1から100までの6の倍数の集合と同じです。

$A \cap B = \{6(1), 6(2), 6(3), \ldots, 6(14), 6(15), 6(16)\}$

すなわち、$n(A \cap B) = 16$となります。

1から100までの内、ある数の倍数の個数を求めるには、100をその数（倍数の数を知りたい数）で割ることで求められ、倍数の数はその割り算の商になります。

2d) 2か3のいずれかの倍数からなる集合は集合 A∪Bで表せます。

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 50 + 33 - 16 = 67$

2e) $n[(A \cup B)^c] = n(U) - n(A \cup B) = 100 - 67 = 33$

問題3は、次のユニットで役立つ二次元表を生徒に知ってもらい使ってみせることを目的としています。生徒がこの問題にまで進まなかった場合、この概念は次のユニットの条件付き確率の授業で取り組めばよいでしょう。

3. 一行目の第二列目のマスに入る値を求めるには、以下の計算を行います。

$n(A^c \cap B) = n(B) - n(A \cap B) = 56 - 42 = 14$

二行目の第一列のマスに入る値を求めるには、以下の計算を行います。

$n(A \cap B^c) = n(A) - n(A \cap B) = 76 - 42 = 34$

二行目の第三列のマスに入る値を求めるには、以下の計算を行います。

$n(B) = n(A \cap B^c) + n(A^c \cap B^c) = 34 + 10 = 44$

三行目の第二列のマスに入る値を求めるには、以下の計算を行います。

$n(A^c) = n(A^c \cap B) + n(A^c \cap B^c) = 14 + 10 = 24$, あるいは, $n(A^c) = n(U) - n(A) = 100 - 76$

	A	A^c	合計
B	42	14	56
B^c	34	10	44
合計	76	24	100

レッスン2 順列

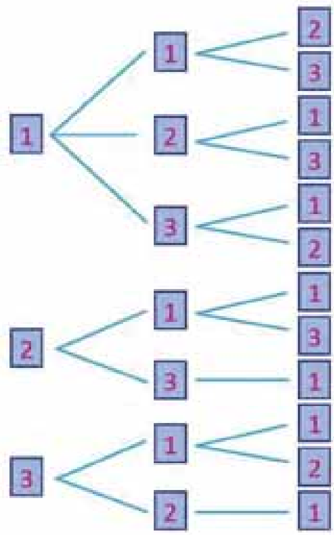
2.1 樹形図

導入問題

次のように 1, 1, 2, 3 と数字が書かれた4枚のカードがあります。4枚のうち3枚を並べる方法は何通りか求めなさい。

解法

右の図に示すようにカードの位置を分析します。



そこから、選択できる各経路が3枚のカードを並べることができる方法であることが分かります。したがって、数字の書かれたカードの最後にある列から数えることができます。

よって、12通りあります。

定義

各事例ごとに事象の考えられる場合をすべて列挙し、直線で表した図は**樹形図**として知られ、解の図は樹形図の一例です。

物を取り出す事象において、物を取り出す際に、その取り出したものを取り出すグループに戻すときは、**戻しあり**と言い、その物を戻さないときは、**戻しなし**と言います。

問題

1. 赤、黄、緑の3つの玉(各色1つ）を、一つの袋から戻しなしで取り出すとき、その取り出し方は何通りかを求めるために樹形図を使いなさい。ただし一度に1つ取り出すこととします。

2. 味の異なるお菓子4つを4人で分けるとき、お菓子の分け方は何通りか計算するために、樹形図を使いなさい。ただし、お菓子のない人はいないものとします。

3. マリアは、すべて異なるパンタロン2本、スカート1枚、ブラウス2枚、靴3足を持っています。マリアがそれを着用するとき、何通りの異なる着用方法があるか求めるために、樹形図を使いなさい。

4. 5枚の異なるトランプから、戻しありで、2枚を取り出すとき、取り出し方の合計を計算するために、樹形図を使いなさい。

5. 異なるさいころを3つ投げます。さいころの目の和が5になる場合の数を求めなさい。

一つ目のさいころの目は1、2、3だけ出ることとします、そうでなければ和が5になりません。

182

達成の目安：

2.1 場合の数を数える文章問題を解くために樹形図を使います。

学習の流れ：

集合論について、基本的な概念を学習し、それをツールとして活用し場合の数の問題を解いてきました。この課では、場合の数の基本ツールである、順列の概念を導入します。

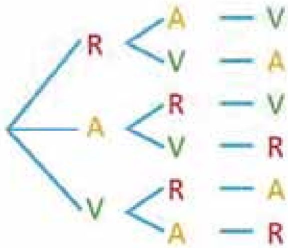
ねらい：

この授業では、場合の数の問題を解くために樹形図のような直感的なツールを使うことから始める予定です。次に、もっと大きな数字を伴う問題を解くために より有効なツールが必要となります。問題においては、難易度の基準は各問題の樹形図の形です。

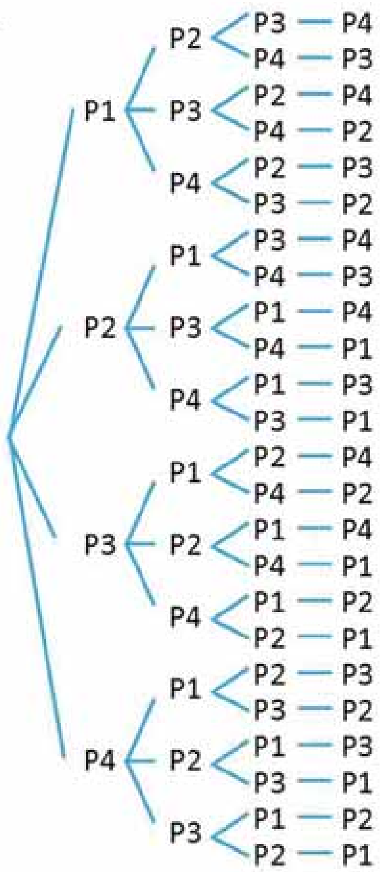
問題の解き方：

1. 最初に3つの玉のうちどれでも取り出すことができ、次に、残った玉2つのうちのどれでも取り出すことができ、最後は残った玉を取り出します。それで、異なる6通りの方法で取り出すことができます。

RAV, RVA, ARV, AVR, VRA, VAR.

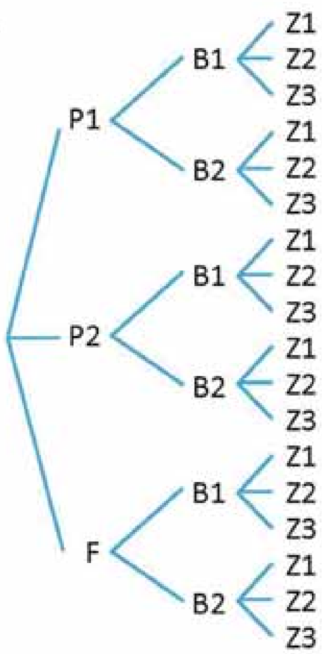


2.



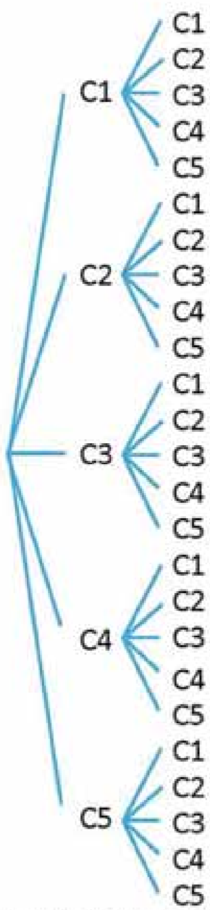
お菓子を分けるのに、24通りの異なる方法があります。

3.



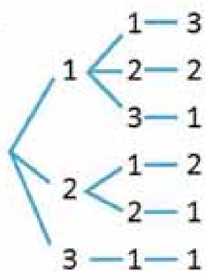
マリアが着用できるのは、異なる18通りです。

4.



トランプを取り出すのに異なる25通りがあります。

5.

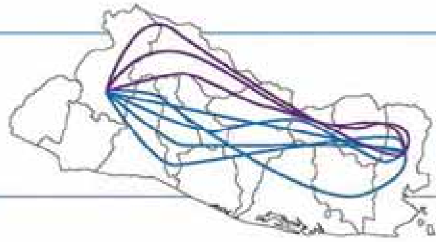


さいころを3個投げるとき、5になるのは異なる6通りです。

2.2 和の法則

導入問題

サンタ・アナからラ・ウニオンへ移動できる方法は何通りありますか、ただし、サン・サルバドルを通る5つの別々の道路があり、チャランテナンゴを通る3つの異なる方法があります。2か所を通る道路はないことを考慮に入れなさい。



解法

サンタ・アナからラ・ウニオンへ移動するためには、サン・サルバドルを通る、またはチャランテナンゴを通るという選択肢が2通りありますが、どのルートも、同時に2か所を通りません。それで、サンタ・アナからラ・ウニオンへ行くための方法の合計を求めるには $5 + 3 = 8$です。

まとめ

ある事象または条件Aが、a通り、ある事象または条件Bが、b通り起こり、かつ、2つの事象が同時には起こらないとすると、AまたはBの事象(つまり2つの事象のうちの1つ）が起こる場合の合計は $a + b$です。この計算結果は、**和の法則**として知られています。

例

ある靴屋に、サンダルが4種類、スニーカーが2種類、ブーツが3種類あります、この靴屋では異なる種類の靴を何種類提供していますか。

この靴屋では3つのタイプの靴を提供し、サンダルには異なる4種類、スニーカーには異なる2種類、ブーツには異なる3種類があります。

そうすると、その靴屋では $4 + 2 + 3 = 9$ 種類の異なる靴を提供していることになります。

問題

1. 食堂ゾーンには食事を購入できる店舗が3つあり、一つ目の店舗には、食事の 選択肢が4通りあり、二つ目は5通り、三つ目には7通りあります。これらのうちのどこかの店舗で、食事を購入する方法は何通りありますか。

2. マリアには社会活動を行う学校が4校あります。一つ目の学校には、社会活動の選択肢が2通り、二つ目には3通り、三つ目には4通り、四つ目は、1通りしかありません。マリアが社会活動を行うための選択肢の合計は何通りあるか求めなさい。

3. さいころを同時に2個投げるとき、目の和が7または4になる場合は、何通りありますか。

4. 問題3と同じ状況で、さいころの目の差が2または3になる場合は、いくつあるか求めなさい。

達成の目安：

2.2　場合の数を数える問題を解くために和の法則を適用します。

学習の流れ：

場合の数を数える問題を解くための別のツールとして樹形図を導入してから、和の法則として知られる、場合の数を数える基本法則の一つを学習します。

ねらい：

例及び問題では、生徒は和の法則を適用するために条件を容易に特定することが期待されます。また、問題3及び4においては、生徒が、樹形図について学んだことを適用することが必要となります。

問題の解き方：

1. 2か所の店舗で、食事を購入することができないため、事象としては、店舗1(選択肢4通り）で購入、店舗2(選択肢5通り）で購入、店舗3(選択肢7通り）で購入となり、よって、和の法則を適用し、これらのうちのいずれかの店舗で、食事を購入する方法の合計は、4 + 5 + 7 = 16です。

2. 前問と同様に、マリアは同時に2つの学校で、社会活動をすることはできません、よって、和の法則を適用して、マリアが社会活動をする方法の合計は、2 + 3 + 4 + 1 = 10です。

3. さいころを同時に2個投げるとき、同時に、7と4が出ることはないので、7が出る、または、4が出るというように、事象を特定することができ、各ケースを分析します。

7が出る場合、

さいころ 1	さいころ 2
1	6
2	5
3	4
4	3
5	2
6	1

4が出る場合

さいころ 1	さいころ 2
1	3
2	2
3	1

したがって、7が出る場合は6通り、4が出る場合は3通りあり、よって、和の法則を使い、さいころを2個投げるとき、7または4が出る場合の合計は、6 + 3 = 9です。

4. さいころを2個投げるとき、目の数の差は、同時に、2と3にはならないので、差が2または3というように、事象を特定することができ、各ケースを分析します。

差が 2

さいころ 1	さいころ 2
1	3
2	4
3	1
	5
4	2
	6
5	3
6	4

差が 3

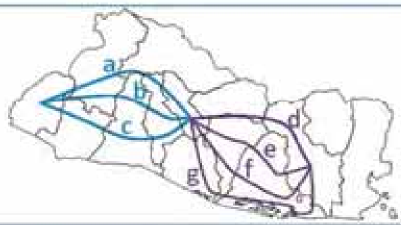
さいころ 1	さいころ 2
1	4
2	5
3	6
4	1
5	2
6	3

したがって、差が2になる場合は8通り、差が3になる場合は6通りあり、よって、和の法則を使い、さいころを2個投げるとき、差が2または3になる場合の合計は、8 + 6 = 14です。

2.3 積の法則

導入問題

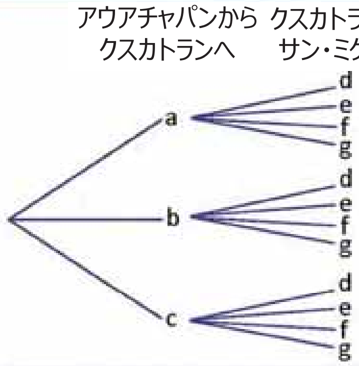
クスカトランを通って、アウアチャパンからサン・ミゲルへ移動できる方法はいくつありますか、ただし、アウアチャパンからクスカトランへ行くには3つの異なる方法a、b、cがあり、クスカトランからサン・ミゲルへ行くには4つの異なる方法d、e、f、gがあるとします。



解法

アウアチャパンから出てクスカトランへは、3つの異なる方法があり、クスカトランに着くと、それぞれの方法に対しサン・ミゲルに着くための4つの異なる方法があります、したがって、アウアチャパンを出てクスカトランを通ってサン・ミゲルに着く方法の合計は異なる 3 × 4 = 12通りです。

ad、ae、af、ag、bd、be、bf、bg、cd、ce、cf、cgの12通りです。



まとめ

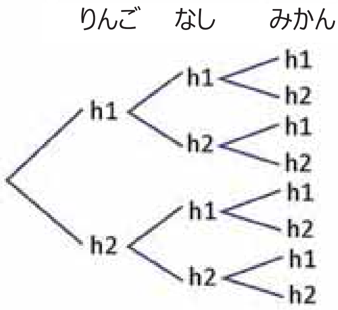
ある事象または条件Aが、a通り起こり、このそれぞれの場合に対しある事象または条件Bが、b通り起こるとすると、したがって、事象Aと事象B(つまり2つの事象）が起こる場合の合計は　a　bです。この計算結果は**積の法則**として知られています。

いくつかの問題を解くためには和の法則も積の法則も適用することが必要となるかもしれません。

例

ホセはりんご1個、なし1個、みかん1個を2人の兄弟に分けたいと思っています。果物を分ける方法は何通りあるか求めなさい。ただし一人の兄弟に全部あげて、もう一人は何もあげないということもできます。

一つの果物を基準にし、この果物の一つ一つに対し、リンゴであれば、兄弟1にあげるか、または兄弟2にあげるか、2通りがあります。次に、なしも同じ2通りがあり、また、みかんも同様に2通りあります。したがってホセは果物を 異なる 2 × 2 × 2 = 8 通りの出分けることができます。



問題

1. 男の子が4人、女の子が3人の中で、男の子1人と女の子1人のペアをつくる方法は何通りあるか求めなさい。

2. ある食堂には、主菜が3種類、米が2種類、サラダが3種類あります。昼食に主菜を1皿、米を1種類、サラダ1つを取る場合、何通りあるか求めなさい。

3. なし1個、マンゴー1個を異なる3人に分けるとき、何通りあるか求めなさい。果物を両方とも一人の人にあげることはできないことを考慮に入れなさい。

4. マリアはバスケットの用のハーフパンツ4枚とシャツ3枚、また、サッカー用のハーフパンツ5枚とシャツ4枚を持っています。マリアが、バスケットまたはサッカーをするとき、何通りの着方ができますか。

184

達成の目安：

2.3　場合の数を数える問題を解くために積の法則を使います。

学習の流れ：

場合の数を数える問題を解くためのもう一つの基本的な内容は、積の法則です。これは、樹形図から直接取り組むことができます。

ねらい：

例では、生徒が理解しやすいように、樹形図を示していますが、問題の解答では、生徒がこの図をつくる必要はなく、条件を特定し、直接、積の法則を適用すれば充分です。

問題の解き方：

1. 「男の子」という場合には4通りあり、このそれぞれの男の子に対しペアになれる女の子が3人います。よって、積の法則を使って、この条件でペアをつくる場合の合計は、$4 \times 3 = 12$です。

2. 主菜は3種類あり、それぞれの主菜に対し米を2種類から選ぶことができます。それで、積の法則を使って、主菜1皿と米を1種類選ぶための考えられる場合は$3 \times 2 = 6$ 通りあります。次に、主菜1皿と米1種類の考えられる組み合わせそれぞれに対し、サラダが3種類あり、よって、積の法則を使って、昼食に主菜1皿、米1種類、サラダ1つを選ぶ場合の合計は $6 \times 3 = 18$です。

この問題には、解として一度で、3つの数を掛けることもできるとしています。$3 \times 2 \times 3 = 18$

授業では、正式には、積の法則は唯一2つの事象に対してだけ定義しましたが、この計算結果は有限である nを使って、事象n個でも成立することを、生徒は帰納的に分析できるので、もう一つ別の方法も示します。

3. まず最初になしを分けると考えると、3つの場合(3人のうちのだれでも）があり、次に、その一人一人に対してマンゴーには2つの場合（なしをあげない2人）があります。よって、積の法則を使って、3人に、なし1個とマンゴー1個を分ける場合の合計は、$3 \times 2 = 6$です。

4. まず、マリアは服を着てバスケットとサッカーに同時に行くことはできないことに注目してください。したがって、次のケース、「バスケットをするための服を着る」と「サッカーをするための服を着る」があり、次に、それぞれのケースを分析します。

バスケットをするための服を着用

バスケット用のハーフパンツが4枚あり、それぞれに対し、持っているバスケット用のシャツ3枚のどれでも使うことができます。したがって、積の法則を適用して、バスケットをするために 4×3 通りの服を着用できます。

サッカーをするための服を着用

サッカー用のハーフパンツが5枚あり、それぞれに対し、持っているサッカー用のシャツ4枚のどれでも使うことができます。したがって、積の法則を適用して、サッカーをするために 5×4 通りの服を着用できます。

よって、この場合には、和の法則を適用し、マリアがバスケットまたは、サッカーをするために着用できる方法の合計は、$(4 \times 3) + (5 \times 4) = 12 + 20 = 32$です。

レッスン 2

2.4　ある数の階乗

導入問題

4人を一列に並べるとき、何通りの並べ方が可能か求めなさい。

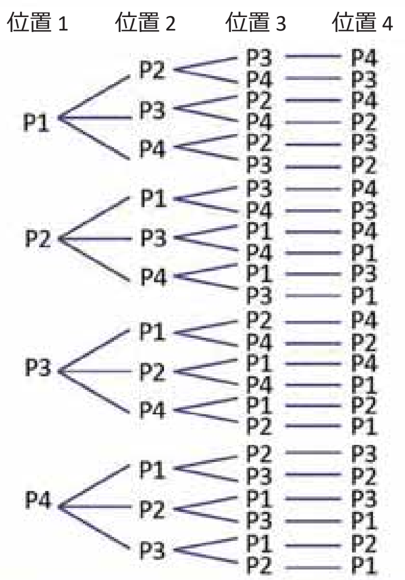
Solución

列の先頭には4人のうち誰でも配置でき、したがって、4通りあります。

次に、列の二番目の位置につけるのは3人だけです。(なぜなら、先頭にはすでに一人いる）、したがって3通りあります。

同様に、三番目の位置には2通りあります。そして最後の位置は1通りだけです。

よって、積の法則を使って4人の人を一列に並べる場合の合計は、
$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$です。



解法

4人を一列に並べるとき、異なる24通りの方法があります。

定義

自然数nに対し、
1からn の階乗を$n!$と表し、「**n の階乗**」と読みます。したがって、

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

$n! = n \times (n-1)!$に注目してください。

例

階乗のある計算式の答えを計算、または簡略化しなさい。

a) $3!$

$3! = 3 \times 2 \times 1$
$= 6$

b) $6! \div 4!$

$\frac{6!}{4!} = \frac{6 \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{4!}}$
$= 30$

c) $4! - 3!$

$4! - 3! = (4 \times 3!) - 3!$
$= 3!(4-1)$
$= 6(3)$
$= 18$

最初に括弧の中を計算しなさい。

d) $\frac{2018!}{2018}$

$\frac{2018!}{2018} = \frac{\cancel{2018} \times 2017!}{\cancel{2018}}$
$= 2017!$

問題

1. 階乗のある式の答えを計算をしなさい。

a) $4!$　b) $5!$　c) $(5-3)!$　d) $6! - 4!$
e) $(2+3)!$　f) $4! + 3!$　g) $4! \times 3!$　h) $(2 \times 3)!$

2. 次の階乗のある式を計算または簡略化しなさい。

a) $\frac{5!}{3!}$　b) $\left(\frac{6}{3}\right)!$　c) $\frac{4!}{6}$　d) $\frac{2019!}{2019}$　e) $\frac{7!}{(7-2)!}$　f) $\frac{7!}{2!(7-2)!}$　g) $\frac{9!}{2!(3!)(4!)}$

3. xの値を求めなさい。

a) $x! = 110(x-2)!$　b) $12x! + 5(x+1)! = (x+2)!$

4. ÁRBOLという単語の文字の並べ方は何通りあるか求めなさい。

ユニット 7

達成の目安：

2.4 階乗のある式の答えを計算します。

学習の流れ：

場合の数を数える問題を解くための基本的なツールを獲得した後は、ある数の階乗の表記法と定義を導入する時間を少し取ります。これについては、順列と組合せを式に表すため、後で、再度取り上げます。

ねらい：

この授業では、生徒が階乗の実践的な問題を練習し（極力電卓を使わないように）、また、ある数の階乗の定義を利用して、いくつかの簡略化ができるようになることが期待されます。該当する授業で、最終的な結果の計算よりも問題の分析と解法についてより深く学習するために、問題2の式は、様々な型の順列及び組合せに関連しています。

問題の解き方：

1a) $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

1b) $5! = 5 \times 4! = 5 \times 24 = 120$

1c) $(5-3)! = 2! = 2 \times 1 = 2$

1d) $6! - 4! = 720 - 24 = 696$

1e) $(2+3)! = 5! = 120$

1f) $4! + 3! = 24 + 6 = 30$

1g) $4! \times 3! = 24 \times 6 = 144$

1h) $(2 \times 3)! = 6! = 720$

生徒はこの問題には電卓を使わないことが推奨されます。意図することは、一般的には、階乗の加法、減法、乗法は、解答として和、差、積の階乗とはならないことを分析することです。

2a) $\frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$

2b) $\left(\frac{6}{3}\right)! = 2! = 2$

2c) $\frac{4!}{6} = \frac{4 \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1}{\cancel{6}} = 4$

2d) $\frac{2019!}{2019} = \frac{\cancel{2019} \times 2018!}{\cancel{2019}} = 2018!$

2e) $\frac{7!}{(7-2)!} = \frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 42$

2f) $\frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{\cancel{7!}^{42}}{2\cancel{5!}_{1}} = \frac{42}{2} = 21$

2g) $\frac{9!}{2!(3!)(4!)} = \frac{9 \times \cancel{8}^{4} \times 7 \times \cancel{6} \times 5 \times \cancel{4!}}{\underset{1}{\cancel{2}}(\underset{1}{\cancel{6}})(\underset{1}{\cancel{4!}})} = 1260$

教師は、生徒に対し、各問題にある計算を簡略化し、容易に解けるようにするために階乗の定義を使うよう導いていかなければなりません。g)の問題には、電卓は必要ありません。適切な順序で、掛け算をしなければならないだけです。最初は $4 \times 5 = 20$、次は$9 \times 7 = 63$、最後は$63 \times 20 = 1260$です。

3a) $x! = 110(x-2)! \Rightarrow x(x-1)\cancel{(x-2)!} = 110\cancel{(x-2)!} \Rightarrow x^2 - x - 110 = 0 \Rightarrow (x-11)(x+10) = 0 \Rightarrow x = 11$ または $x = -10$、しかし、この授業で学ぶ定義が意味を持つよう、x は正でなければならず、よって方程式の唯一の解は$x = 11$です。

3b) $12x! + 5(x+1)! = (x+2)! \Rightarrow 12\cancel{x!} + 5(x+1)\cancel{x!} = (x+2)(x+1)\cancel{x!} \Rightarrow 12 + 5x + 5 = x^2 + 3x + 2 \Rightarrow$ $x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+3) = 0 \Rightarrow x = 5$ または $x = -3$、しかし、この授業で学ぶ定義が意味を持つよう、x は正でなければならず、よって方程式の唯一の解は$x = 5$です。

4. ÁRBOLという単語の文字はそれぞれすべて異なっているため、導入問題と同様に一つ目の文字には5つの選択肢があり、二つ目は4つ（一つ目に置いた文字を除いて）、以下同様にして、ÁRBOLという単語の文字の並べ方は、$5! = 120$通りとなります。

2.5 順列

導入問題

一列に、異なる母音を3つ並べるとき、何通りあるか求めなさい。

解法

3つの位置は次のように考えることができます。

$$\underset{一つ目}{\underline{\quad}} \qquad \underset{二つ目}{\underline{\quad}} \qquad \underset{三つ目}{\underline{\quad}}$$

一つ目に配置する母音を選ぶためには、5通りあります。（a、e、i、o、uの5つの母音のどれでも）

$$\underset{一つ目}{\underline{5}} \qquad \underset{二つ目}{\underline{\quad}} \qquad \underset{三つ目}{\underline{\quad}}$$

次に、二つ目と三つ目の位置にはそれぞれ4通り、3通りあります。

$$\underset{一つ目}{\underline{5}} \times \underset{二つ目}{\underline{4}} \times \underset{三つ目}{\underline{3}}$$

よって、積の法則を使って5つの母音の中の3つを一列に並べる方法の合計は4 × 3 = 60です。

まとめ

並び順を考慮して,ものを並べた列は**順列**として知られています。

n個($0 \leq r \leq n$) からr個を取り出して並べる順列の合計は次で求められます。

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

${}_nP_0 = \frac{n!}{(n-0)!} = 1$ に注目してください。

この合計は${}_nP_r$と表し、「nペルムートr」と読み、つまり

$${}_nP_r = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-(r-1))}_{r\text{ 個の因数}} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

異なるn個のものを並べる方法の合計は$n!$で、その一方で、順列の公式を使うと、${}_nP_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!}$となり、またこれは、$n!$でなくてはならない、よって、$0! = 1$は成立します。

例

1から9までの数字を使って3桁の数が何通りできますか。ただし数字の重複はないものとします。

3桁の数字をつくるとき、数字の順序（異なる数になる）が重要です。したがって、9個のものから3個を取り出す順列と考えると、9P3 = 9 × 8 × 7 = 504です。よって、504個の数がつくれます。

$${}_9P_3 = \underbrace{9 \times 8 \times 7}_{3つの因数}$$

問題

1. 1から5までの数字を使って、同じ数字を繰り返さずに、できる2桁の数字は何個ですか。
2. 6人の生徒に異なる味の飴を3つ分けることのできる方法は何通りありますか、2個以上飴を貰う生徒はいないとします。
3. 6人のグループから会長、副会長、会計係を選ぶことのできる方法は何通りあるか計算しなさい。
4. 5人が3つの椅子に座るための方法が何通りあるか求めなさい。
5. 5人を一列に並べることのできる方法は何通りありますか、ただし5人のうちの特定の一人が先頭にいなければならないとします。

達成の目安：

2.5 場合の数を数える問題を解くために順列を使います。

学習の流れ：

場合の数を数える問題を解くための基本的なツールと戦略を学んでから、順列の正式な概念を導入します。この授業で最も強調する点は、計算ではなく、順列を使った、問題の理解とモデル化 および解法です。

ねらい：

普通は順列とバリエーションを区別している数学の本があり、順列はあるものを全てを並べることで、バリエーションはこれらのものの、一部を並べることです。しかし、この教科書では、生徒を混乱させないよう、あまり多くの概念を導入せず、更に、この教科書で行っている順列の定義付けに問題が起こらないことを目的に、区別せずに、問題を解くことを重視し、表記または、計算がそのためにより難しくならないようにしています。

問題の解き方：

1. 導入問題の解き方の中でしたように、二つの位置は5個から2個を取る順列だと考えられます。一桁目は5通りあり(5つの数字のどれでも)、また二桁目には4通り(同じ数字は繰り返さないから）あります。よって、1から5までの数字を使って同じ数字を繰り返さずにできる2桁の数は、$_5P_2 = 20$ 個です。

$\underset{一桁目}{\underline{5}} \times \underset{二桁目}{\underline{4}}$

2. この問題では、どれが空きスペースで、どれが置くものとするか注意しなければなりません。生徒をスペースとして考え、飴をものとして置きたいとする場合は、飴をスペースとして、生徒をものとして考える場合より、複雑な問題となりますが、6個のものから3個を取る順列です。この場合、一つ目の飴には選択肢が6通り（6人の生徒のうちの誰かにあげる飴）、二つ目の飴には、選択肢が5通り（2つ以上の飴を受け取る生徒はいないことから、最初に飴を受け取った生徒を除く）、最後に三つ目の飴には選択肢が4通りあり、よって、3個の飴を6人の生徒で分ける方法の合計は、$_6P_3 = 120$です。

3. 3つの職は、異なるため、6個から3個をとる順列です。会長には選択肢が6通り、副会長には5通り、会計係には4通りあります、よって、6人のグループから職を選ぶことのできる方法の合計は $_6P_3 = 120$です。

4. 椅子を空きスペースとして考えると、5個のものから3個を取る順列です。一つ目の椅子には5人の誰でもが座ることができ、次に別のスペースには選択肢が4通りあり、最後に残ったスペースには選択肢が3通りあります、よって、5人を椅子3脚に座らせるための方法は、$_5P_3 = 60$通りです。

$\underset{椅子 1}{\underline{5}} \times \underset{椅子 2}{\underline{4}} \times \underset{椅子 3}{\underline{3}}$

5. 先頭にいなければならない特定の一人がいるので、その人を並べ、次に他の人を並べます、これは、 4!となり、よって、この条件下で、5人は 4! = 24通りの方法で並ぶことができます。

特定の人 $\rightarrow \underset{場所 1}{\underline{1}} \times \underset{場所 2}{\underline{4}} \times \underset{場所 3}{\underline{3}} \times \underset{場所 4}{\underline{2}} \times \underset{場所 5}{\underline{1}}$

レッスン 2

2.6 順列と計算方法

導入問題

男の子3人と女の子4人を列に並べる方法は何通りあるか求めなさい。ただし、男の子は全員が隣り合っていることとします。

解法

男の子はまとめて一組として考え、次に、5個のものを列（女の子4人と一組の男の子）にします。

_____ 女の子　_____ 女の子　_____ 女の子　_ _ _ 男の子たち　_____ 女の子

5個の要素（女の子4人と一組の男の子）を5!通り に並べることができ、次に、一組の男の子を3!通りの方法で並べることができます。

5 女の子　4 女の子　3 女の子　2（3 2 1 男の子たち）　1 女の子

そして、積の法則を適用して、男の子3人が隣り合うようにして、男の子3人と女の子4人の並べ方の合計は $5! \times 3! = 720$となります。

まとめ

順列においては、まとめた要素の集まりを一つのものとみなし、一組の集まりの中にある要素とその他を全て並べ、積の法則を使う戦略をとることはよくあります。

例

男性3人と女性4人を、男性が隣り合う（一人の男性がもう一人の隣にいる）ことなく、一列に並べることのできる方法は何通りあるか求めなさい。

女性4人を一列に配置する方法は 4! 通りと求められます。したがって、男性は下の図に示すスペースのいずれかに入ることができます。

_____ 女性 _____ 女性 _____ 女性 _____ 女性 _____

したがって、男性は5P3通りに分かれて並ぶことができます。積の法則を適用して、男性3人と女性4人を、一人の男性がもう一人の男性と隣り合うことなく並べる方法の合計は $4! \times {}_5P_3 = 24 \times 60 = 1440$です。

問題

1. 男性4人と女性3人を並べる方法は何通りあるか求めなさい。ただし男性4人は常に、隣り合っていなければならないものとします。
2. 歴史の本が9冊と数学の本が6冊（すべて異なる）があるとき、棚に本を5冊並べる方法は何通りありますか。ただし、この5冊の本は同じ科目でなければならないとします。
3. 「a」から「j」の文字を使って6文字の文字列を作るとき、最初の2文字は母音で、後の4文字は子音の場合、文字列は何通りできますか。
4. 男性4人と女性4人を一列に並べるとき、並び方は何通りですか。ただし、男女が交互に並ばなければならないとします。
5. 4人の生徒が一列に並んだ椅子6脚に座るとき、生徒のうちの特定の2人が常に隣に座る（その生徒の間に空いた椅子がないこと）場合、座り方は何通りですか。

ユニット7

187

達成の目安：

2.6 場合の数を数える
　問題を解くために和の法則と積の法則をつかって、順列を統合します。

学習の流れ：

場合の数を数える問題を解くために順列の概念を使った後、この授業では、もっと複雑な文章問題をモデル化するための戦略を考え出さなければならない問題を解き、さらに、和と積の法則を適用しなければならない問題もあります。

ねらい：

問題では、ものの集合を、他の集合の一つの要素とみなす戦略を使い、小さな集合にある順列も大きな集合にある順列も計算します。そのため、積の法則を適用することが必要となり、他の問題では、和の法則も適用することになります。

問題の解き方：

1. 導入問題を解いた方法と同じように分析し、隣り合う男性4人は4! 通りに並べられることを考慮に入れ、次に、男性4人の集合を一つの要素とみなし、女性3人を加え、これで、 $(1 + 3)! = 4!$ 通りに並べることができます。よって、積の法則を適用し、男性4人と女性3人を並べる方法の合計は、男性が常に隣り合うとして、$4! \times 4! = 24 \times 24 = 576$です。

$$\frac{4}{\text{女性}} \times \frac{3}{\text{女性}} \times \frac{2}{\underset{\text{男性たち}}{4\times3\times2\times1}} \times \frac{1}{\text{女性}}$$

厳密に計算するには電卓が必要となる問題もありますが、生徒が階乗と順列を示したなら、正しい解答であるとみなすことができます。

2. この問題では、本が歴史の本である、あるいは、数学の本であるという同時に起こらない2つのケースが生じます。歴史の本9冊のうち5冊を棚に置く場合、${}_9P_5 = 15120$通りの異なる方法があり、一方、数学の本6冊のうちの5冊を棚に置く場合は${}_6P_5 = 720$通りの異なる方法があります。よって、和の法則を適用して、問題の条件の下で、棚に5冊の本を並べるための方法の合計は ${}_9P_5 + {}_6P_5 = 15120 + 720 = 15840$です。
3. 最初の2つの位置に対しては、「a」から「j」までの文字の中に母音が3文字あり、つまり要求されるように母音2文字を並べる方法は ${}_3P_2 = 6$ 通りあります。また、「a」から「j」までの文字の中に子音が7文字あり、したがって、後ろの4つの位置に並べる方法は ${}_7P_4 = 840$通りあります。よって、積の法則を適用すると、それによってできる全順序集合は、s${}_3P_2 \times {}_7P_4 = 6 \times 840 = 5\,040$となります。
4. 問題の条件を満たすためには、列の先頭が男性であるか又は女性であるかの2つの考えられるケースが生じ、男性の場合、男性を 4!通りに並べることができ、女性も4!通りです。次に、積の法則を使って、男性が先頭である場合は、 $4! \times 4!$ 通りになり、女性が先頭の場合も、同様に分析し、 $4! \times 4!$通りになります。よって、和の法則を使って、男性4人と女性4人を交互に並べる方法の合計は$(4! \times 4!) + (4! \times 4!) = 2(4! \times 4!) = 2(24 \times 24) = 1152$通りです。
5. この問題は、導入問題と似ており、隣り合わせを希望する生徒2人は1人としてみなし、その2人を 2!通りに並べることができます。次に、$(2 + 1)$人の生徒を座らせなければなりませんが、生徒2人を1人とみなしているので、椅子を1脚取り除かなければなりません。その後、生徒3人を椅子5脚に座らせるというように、問題を縮小し、これで、 ${}_5P_3$通りになります。最後に、積の法則を使って、問題の条件下で、生徒4人を椅子6脚に座らせる方法の合計は$2! \times {}_5P_3 = 2 \times 60 = 120$です。

2.7 重複のある順列

導入問題

2、4、5の数字をつかって出来る5桁の数字は何個ありますか、ただし、数の中の数字の重複は許されます。

解法

数字の桁をスペース5つとみなし、

$$\underset{DM}{\underline{\quad}}\quad\underset{UM}{\underline{\quad}}\quad\underset{C}{\underline{\quad}}\quad\underset{D}{\underline{\quad}}\quad\underset{U}{\underline{\quad}}$$

したがって、一の位の数から始め、3通り（数字2、4、5のどれでも）あります。

$$\underset{DM}{\underline{\quad}}\quad\underset{UM}{\underline{\quad}}\quad\underset{C}{\underline{\quad}}\quad\underset{D}{\underline{\quad}}\quad\underset{U}{\underline{\;3\;}}$$

次に、十の位 にも、3通りあります。（数の中の数字の重複は許されているので）

$$\underset{DM}{\underline{\quad}}\quad\underset{UM}{\underline{\quad}}\quad\underset{C}{\underline{\quad}}\quad\underset{D}{\underline{\;3\;}}\times\underset{U}{\underline{\;3\;}}$$

そして、同様には百、千、一万の位にも、それぞれ3通りあります。

$$\underset{DM}{\underline{\;3\;}}\times\underset{UM}{\underline{\;3\;}}\times\underset{C}{\underline{\;3\;}}\times\underset{D}{\underline{\;3\;}}\times\underset{U}{\underline{\;3\;}}$$

よって、重複を許して、2、4、5の数字を使って5桁の数字を、$3^5 = 241$個作ることができます。

まとめ

列中で重複を許す要素nを使って、長さrの列をつくる方法の合計はn^r通りです。

例

要素がn個ある集合から、いくつの部分集合ができるか求めなさい。

その集合の各要素を取りあげ、一つの部分集合を作るためには、前記の要素が、部分集合に属するか、属さないかの2通りがあるとみなします。そうすると、その集合にあるn個の各要素に対し、次が成り立ちます。

$$\underset{要素\ 1}{\underline{\;2\;}}\times\underset{要素\ 2}{\underline{\;2\;}}\times\cdots\times\underset{要素\ n-1}{\underline{\;2\;}}\times\underset{要素\ n}{\underline{\;2\;}}$$

この結果は、濃度が nである集合の冪集合の濃度は 2^nであることを意味します。

よって、n個の要素をもつ集合からつくることのできる部分集合の数は 2^nです。

問題

1. a、b、c、dを使って、一列に3つの文字を並べる方法は何通りありますか。文字は重複できるものとします。

2. バイナリーコードは十進法に替わって数を表す方法で、ビットとして知られる0 と1 である、数字または文字を2つだけ使い、さらに、コンピューターに保存しやすいため、コンピューター環境で、非常によく使われます。バイナリーコードで、いくつの7桁の数を表すことができるか求めなさい。

3. 集合 A = {a, b, c, d, e, f} の部分集合がいくつできるか求めなさい。

4. 車のナンバープレートの数字は、最初の二つは文字2つで、次は数字4個で構成されています。ナンバープレートでは、数字も文字も重複が許され、かつ、A、B、C、D、Eの文字と 1 から9までの数字を使える場合に、この条件で、いくつナンバープレートが作成できるか求めなさい。

達成の目安：

2.7 重複のある順列を適用して場合の数を数える問題を解きます。

学習の流れ：

和や積の法則、および順列のようないくつかのツールを組み合わせた後、ここでは、別の種類の順列を導入できます。その順列では、あるものを置いた後で、それを再度置くことが可能です。

ねらい：

問題の解答では、生徒は順列の概念から文章問題をモデル化しなければならず、数学的に問題を解くためには、その後、得られた答えを解釈して、元の問題の解答を出さなければなりません。

問題の解き方：

1. 文字は重複できるので、これは重複ありの順列です。4つのものから3つを並べますが、最初の位置に対しては4通り、二つ目の位置には同様に4通り、また三つ目の位置にも同様に4通りあり、よって、文字4つから3つを一列に並べる方法の合計は $4^3 = 64$です。

$$\underset{\text{位置 1}}{\underline{\;4\;}} \times \underset{\text{位置 2}}{\underline{\;4\;}} \times \underset{\text{位置 3}}{\underline{\;4\;}}$$

2. 一桁目に入る数字には2通りだけあり、（二進法なので0 と 1）、二桁目にも同様に、2通りあります。以下七桁目まで同様に行い、七桁目も2通りあります。よって、重複ありの順列で、2個のものから7個を配置して、バイナリーコードで表すことのできる7桁の数字の合計は$2^7 = 128$です。

$$\underset{\text{桁1}}{\underline{\;2\;}} \times \underset{\text{桁2}}{\underline{\;2\;}} \times \underset{\text{桁3}}{\underline{\;2\;}} \times \underset{\text{桁4}}{\underline{\;2\;}} \times \underset{\text{桁5}}{\underline{\;2\;}} \times \underset{\text{桁6}}{\underline{\;2\;}} \times \underset{\text{桁7}}{\underline{\;2\;}}$$

3. この問題に対しては、例で学んだ計算結果を使う、あるいは、同じ方法で分析することができます、この集合の各要素は一つの部分集合をつくるために、2通り（属するか、属さないか）があり、要素が6個なので集合 Aの部分集合の合計は$2^6 = 64$です。

4. この問題では文字と数字は重複できるとしているので、文字2つのスペースには5通りあり、これは 5^2通りとなり、また、数字4つのスペースには9通り(1から9までの数字）あり、これは9^4通りとなります。よって、積の法則を使って、問題の条件で作成できるナンバープレートの合計は $5^2 \times 9^4 = 25 \times 6561 = 164025$となります。

$$\underset{\text{文字}}{\underline{\;5\;}} \times \underset{\text{文字}}{\underline{\;5\;}} \times \underset{\text{数字}}{\underline{\;9\;}} \times \underset{\text{数字}}{\underline{\;9\;}} \times \underset{\text{数字}}{\underline{\;9\;}} \times \underset{\text{数字}}{\underline{\;9\;}}$$

最後の問題では、厳密な計算をするには電卓の使用が必要ですが、生徒が累乗で示した場合、正しい答えだとみなすことができます。

レッスン2

2.8 円順列

導入問題

丸テーブルに4人が座ることのできる方法は、何通りあるか求めなさい。テーブルを回したとき、配置が別の配置と一致する場合は同じ配置とみなされます。

解法

この場合は、特別な配置とされるのは、たとえば、

テーブルが丸いので、上記の4つの配置は同じです、つまり、配置方法は1つだけと数えます。

したがって、同じ配置方法で4回（椅子1脚に対し1回）回転することができ、したがって、全員を一列に並べたとした場合、これは、4! 通りとなりますが、各配置方法ごとに4回数えているので、したがって 4人が一つの丸テーブルに座ることのできる方法の合計は $\frac{4!}{4}3! = 6$ です。

一般的に、

n個のものから r 個取って円形に並べると、行える順列の合計は 次を使って求めます。

$$\frac{{}_nP_r}{r}.$$

特に、円形に並んだn個の順列の合計は次を使って求めます。

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

例

一つの丸テーブルに6人の中から4人を並べることのできる方法は何通りか求めなさい。

6人の中から4人を一列に並べる方法の合計は ${}_6P_4$です。

丸テーブルでの配置でため、前記の合計には、各配置に対し4回数えているので、 よって、一つの丸テーブルに6人の中から4人を並べる方法の合計は $\frac{{}_6P_4}{4} = 90$です。

問題

1. 全て同じ型の回転木馬7席があるメリーゴーランドに子供7人を乗せることのできる方法は何通りですか。
2. 丸テーブルに椅子が5脚あり、7人いるとき（2人は立っている）、何通りの座り方がありますか。
3. 丸テーブルで友人5人がゲームをしています。何通りの配置方法がありますか。ただし、そのうちの2人は、常に隣り合う席を希望しているとします。

2.6の授業で学んだ方法を使うことができます。

4. 男性ダンサー4人と女性ダンサー4人が全員で手をつなぎ、輪になってダンスをします。ダンスで男性と女性が交互に踊る場合、ダンサーの配置方法は何通りですか。
5. 恋人4組が椅子にすわるとき、それぞれのパートナーが自分のいる位置の真向かいに座る場合、何通りの座り方がありますか。

ユニット7

189

達成の目安：

2.8 場合の数を数える問題を解くために円順列を使います。

学習の流れ：

直線状にものを並べた場合の数を数える問題に取り組んだ後は、前回までの授業を出発点と考え、円順列に取り組むことができます。

ねらい：

円順列の問題を分析するためにより有効な手順は、直線状に並べ、次に、円形に並べる際に重複した並べ方を引くことです。

問題の解き方：

1. 円順列です。列に子供を並べるとき、並べ方は7通りあり、次に円形の並べ方を考えると、各円形の並べ方ごとに、列に並べるより、7回多く数えて います。よって、 子供7人を7席あるメリーゴーランドに乗せることのできる方法の合計は $\frac{7!}{7} = 6! = 720$ です。

導入問題で行ったように、解答では、公式を適用するだけでなく問題を分析することを推奨し、公式を覚えていない場合は、特にそうすることを推奨します。

2. 一列に並んだ椅子に人を座らせる場合を考えて、一つ目の椅子は7通り、二つ目は6通りあり、以下同様に行い、 $_7P_5$通りの座り方になり、次に、円形に配置するとき、各配置方法ごとに5回余分に数えています。よって7人を椅子が5脚ある丸テーブルに座らせ、2人は立っている方法の合計は $\frac{_7P_5}{5}$で、計算すると、

$\frac{7 \times 6 \times \cancel{5}^{1} \times 4 \times 3}{\cancel{5}_{1}} = 504$ です。

3. 列で並んだとすると、4! × 2!通りで（ヒントは、隣り合わせを希望する2人は1人とみなして解いた問題を参照）で並べられます。 解答を出すには、4人だとして計算したので、円形に並べることに注意しなければなりません。したがって、各並べ方に対し4回数えているので、友人を 丸テーブルに配置できる方法は

$\frac{4! \times 2!}{4} = 3! \times 2 = 6 \times 2 = 12$ 通りです。

この問題では、1人の人として数えるとき、その回転を除いたため、5（最初は5人だったから）で割るのは間違いです。円形のケースに対し、2.6 の授業で作った図を分析するよう提示することができます。

4. 列に並べると考えた場合、男性4人女性4人を交互に配置するのと同じ問題で、それは2.6の授業の問題4 で解き、答えは2(4! × 4!)通りです。次に、円形にその男女を並べる際には、各並べ方ごとに8回数えているので、よって 、ダンサーを配置する方法の合計は $\frac{2(4! \times 4!)}{8} = 3! \times 4! = 6 \times 24 = 144$ です。

5. 一列に並べるとすると、4人(恋人一組ごとに1人)を並べれば十分で、残った位置は決まることを意味しています。次にこの4人が4!通りで並ぶことができ、この4人のそれぞれが自分のパートナーと位置を変えて並ぶことができると考えると、この人たちを配置する方法の合計は 4! × 2! × 2! × 2! × 2!となります。また、円形に並べるには、各並べ方ごとに8回数えているので、よって、恋人4組が丸テーブルに座ることのできる方法の合計は、

$$\frac{4! \times 2! \times \cancel{2}! \times \cancel{2}! \times \cancel{2}!}{\cancel{8}} = 4! \times 2! = 48.$$

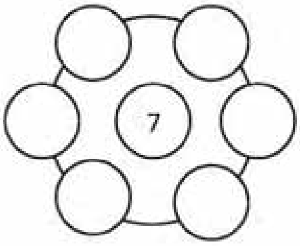
2.9 円形の形状*

導入問題

7人が丸テーブルに座る方法は何通りあるか求めなさい。ただし、1人が 中央に、別の6人はその周りに 座ることとします。

解法

文章問題を次の図にすると、



このケースは、中央に座る人によって、並び方(あるいはケース）が異なると考えられ、中央に座る人ごとに、円形に配置します。つまり、この条件で、7人が座る方法の合計は$7 \times (6-1)! = 7 \times 5! = 7 \times 120 = 840$です。

まとめ

円形にものを並べることのできる方法を数えるには戦略が2つあります。

1) 列にものを並べ、余分に数えた回転数を求めます。
2) 基準となる要素を配置し、その他を基準となる要素の周りに並べます。

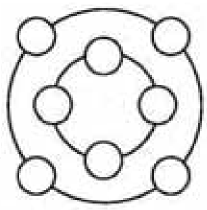
問題

1. 「エルサルバドルにおける算数・数学の学習の改善」について、議論するために、円卓に12人が集まります。日本人3人、エルサルバドル教育大臣、中等教育局長及び、その他数学教育の専門家たちです。何通りの方法で座ることができるか求めなさい。ただし
   a) 順序は問いません。
   b) 日本人3人は、常に隣り合うように、局長は常に大臣の左側にいます。

2. 丸テーブルの9脚の椅子に6人が座ることのできる方法は何通りですか。

3. 6人家族が丸テーブルに座り、父親と母親が向かい合って座る場合、座り方は何通りあるか求めなさい。

4. 「青少年の性感染症の予防と教育」に関する会議に8人が参加し、図に示すように、それぞれの輪に、4席ある2つの輪になって座ります。8人が8席に座ることのできる方法は何通りあるか求めなさい。



5. 立方体に、異なる6色を使って色を塗る方法は何通りあるか求めなさい。ただし、立方体を回転させる際、他の塗り方と色が一致する場合は、色は同じとします。

達成の目安：

2.9 円の形状の問題を解くために、戦略を確立します。

学習の流れ：

円形に並べる場合の数を計算するための戦略を導入した後、ここでは、円形の並べ方を数えるために、もっと複雑な戦略を立てることが必要となる授業を行います。この授業には*マークをつけ、よって、教師側がより多くのヒントを出す必要があります。

ねらい：

この授業では、円の形状と題名をつけましたが、それは、前回の授業に比べ、もう少し創造的な戦略を使うことを要求される問題(バリエーションについて）だからです。

問題の解き方：

1a) 全部で12人なので、その人たちは(12 – 1)! = 11! = 39916800通りに配置できます。

1b) 列に並べる際、日本人全員を1人とみなして、 3!通りに並べることができ、また、エルサルバドルの教育大臣と中等教育局長を1人とみなしますが、局長は常に、大臣の左側にいるのでこの2人は場所を変えることができません。次に、もし全員が一列に並んだとしたら、座り方の合計は9! × 3!です。ここでは、円形の並び方とすると、各並び方ごとに9回（2.8の授業の問題を復習すること)数えています。よって、12人が座ることのできる方法の合計は $\frac{9! \times 3!}{9} = 8! \times 3! = 40320 \times 6 = 241920$です。

2. もし、列になった椅子が9脚あったとすれば、6人は $_9P_6$通りの座り方ができます。次に円形では、各並び方ごとに9回数えているので、よって、6人の座り方の合計は $\frac{_9P_6}{9} = {}_8P_5 = 6720$です。

3. この問題は、2人が隣合わせを希望する場合という点で似ており、つまり、その場合、最初の人の位置によってもう一人の人の位置が決まるという点が似ている点ですが、最初の人の位置が決まった後、決まる位置が2か所あることが異なっています。そこで同様に考えて、もし、一列に並べたらと考え、 5! × 2! 通りの並べ方があり、円形の並べ方では、各並べ方ごとに5回余分に数えており、よって、家族が座ることのできる方法の合計は $\frac{5! \times 2!}{5} = 4! \times 2! = 48$です。

4. 8人が一列に座ると考えて、これは、 8! 通りの座り方ができます。次に、内側(または外側、基準をどちらにするかによる）の円に並べる場合、各並び方ごとに4回数えることになるので、残りの人を配置できる方法の合計は、円順列ではなく、それは内側に座っている人に対して基準があるので、よって、一列に座るのと同じです。したがって、8人が座ることのできる方法は $\frac{8!}{4} = 2 \times 7! = 10080$ 通りです。

5. この問題は、立方体の側面に色を塗ることのできる方法を数えることから始め、側面は4つで、6色あるから、これは $\frac{_6P_4}{4}$ 通りあります。ここでは、残りの面と色はどうなるかの分析が欠けており、回転させて上面と下面を側面にする際、その塗った数を数えているので、残りの面にどの色を塗るかは重要ではないことに注意しなければなりません。よって、立方体の色の塗り方の合計は $\frac{_6P_4}{4}$ です

2.10 同じものを含む順列*

導入問題

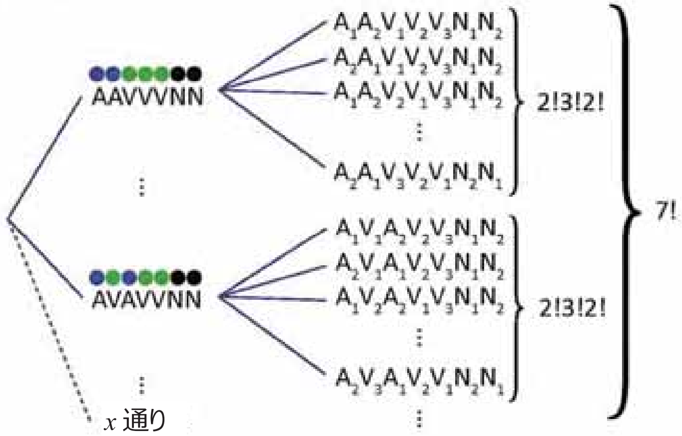
ボーリングで、ボールが列になって出て、そのボールはすべて同じ大きさと重さのとき、ボーリングのボールが7個出る順番のすべての場合を求めなさい。ただしボールは2個が青、3個が緑、残りが黒とします。

解法

ボールの並べ方の合計は xとします。

もしボールが異なっていたとしたら、ボール7個を並べる方法の合計は 7!です。

また、右の図で示すように、ボールが出てくる各場合に対し 2!3!2!通りの異なる並べ方(もしボールが異なっていたとしたら）があります。



したがって、7! = x(2!3!2!)が成り立ちます。

よって、青2個、緑3個、黒2個のボールを並べる方法 (x)の合計は

$$x = \frac{7!}{2!\,3!\,2!} = 210.$$

一般的に、

n 個あり、r_1 がある種類で(全部同じ）、r_2 が別の種類 （これも全部同じ）、また別の種類の r_kまで 行い、$r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$が成立する順列の合計は次のように求められます。

$$\frac{n!}{r_1!\,r_2!\ldots r_k!}$$

この結果は、組み合わせを使って示されるので、**複数の組み合わせ**として知られます。

例

チェスでは、黒の駒が16個、白の駒が16個あります。各色には、ルークが2個、ナイトが2個、ビショップが2個、キングが1個、クイーン1が個、ポーンが8個があります。白のルークを2個、ナイトを2個、ビショップを2個、キングを1個、クイーンを1個を一列に並べることのできる方法は何通りあるか求めなさい。

同じ種類の駒は同じ形をしているとみなします。

合計8個の駒があり、同じルークが2個、同じナイトが2個、同じビショップが2個あるとき、これらの駒を列に並べる方法の合計は、

$$\frac{8!}{2!\,2!\,2!} = 7! = 5\,040.$$

問題

1. PATRIAという単語の文字の並べ方は何通りありますか。
2. 船から色のついた旗を使って信号を送ります。その船には黄色の旗が3枚、白が2枚あります。信号を送るために全部の旗を並べる場合、異なる信号がいくつできますか。
3. 民主主義の促進と研修センター（CECADE）が企画するイベントに参加する青年委員会を設立するために、代表委員長1人、委員長代理2人、随行する参加者4人を選ばなければなりません。10人の若者のグループから委員会メンバーを選ぶことのできる方法は、何通りあるか求めなさい。
4. チェスの黒い駒の並べ方は何通りあるか求めなさい。ただし円形に並べることとします。

ユニット 7

191

達成の目安：

2.10 重複するものを伴う場合の数を数える問題の解を求めます。

学習の流れ：

まだ分析されていない最後の順列の型は重複するもののある順列です。複雑なこと、また、この種の問題を解くために行う分析は次の課の組み合わせの考え方とよく似ているという理由で、最後に残した順列です。

ねらい：

順列で重点を置くところは、重複するものを並べることで、反対に、組み合わせでは、重複するものが入るスペースを選ぶことに重点を置きます。導入問題を解くために、最も理解しやすい方法は方程式を使うことなので、この授業には*マークがついており、教師側がより多くのヒントを出す必要があるでしょう。

問題の解き方：

1. 要素が合計で6つ、文字Aが2度繰り返されているため、PATRIA という単語を並べることができる方法の合計は $\frac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ です。

2. 船には旗が5枚あり、黄色い旗が3枚と、白い旗が2枚重複しています。よって、つくることのできる異なる信号の合計は $\frac{5!}{3!\,2!} = 10$ です。

3. 7つの異なる職位であったとするなら、委員会メンバーは$_{10}P_7$ 通りの選び方があることになりますが、委員長代理2人が重複し、4人の参加者も重複しており、よって委員会メンバーを構成できる方法は $\frac{_{10}P_7}{2!\,4!} = 12\,600$通りです。

4. 駒を一列に並べるとするなら、キングが1個、クイーンが1個、重複するルークが2個、重複するナイト2個、重複するビショップ2個、重複するポーン8個で、駒の合計は16個となり、したがって、$\frac{16!}{2!\,2!\,2!\,8!}$ 通りに並べることができます。また、円形に並ぶと考えると 、16（回転により、各並べ方ごとに余分に数えた回数）で割らなければならず、よって、チェスの黒い駒16個を円形に並べる方法の合計は $\frac{16!}{16 \times 2! \times 2! \times 2! \times 8!}$ です。

問題 4 では、少なくとも1つしかない駒(キングとクイーン）があることから16で割ります。

最後の2つの問題では、厳密な計算をするには、電卓が必要ですが、生徒が、そのまま示したなら、正しい解答だとみなすことができます。各文章問題に対し、特定の数字で表される計算結果よりも問題の分析に力を入れるほうが良いでしょう。

2.11 補集合による場合の数を数える方法

導入問題

ある工場には、扇風機が6台あり、職場を常に涼しくしておく必要があるため、少なくとも1台は常についています。この条件を満たす方法は何通りありますか。

解法

起こると考えられる全てのケースは、扇風機1台だけついている、6台のうちの2台がついている、以下同様に、扇風機6台がついているケースまで考えます。

少なくとも扇風機が1台ついているとき、考えられるすべてを数えるためには、扇風機があると考えられる全ての場合を数えることができます。つまり、扇風機1台ごとに2通りあり（ついている、または、消えている）、扇風機があると考えられる場合の数の合計は 2^6です。

この条件を満たさない唯一の場合は、扇風機が全部消えているときです、つまり、1通りです。したがって、少なくとも1台の扇風機がついている場合の合計は、$2^6 - 1 = 63$です。

まとめ

ある事象、または、条件 Aが発生すると考えられる場合の数があまりにも多く、数えるのが難しくなることもあります。しかし、要求されていないものを数える方が簡単なこともあり、つまり、要求されるものの補集合のことで、条件なしに全てのものを並べる並べ方の合計からそれを引くことです。考えられる全てのケースをUを使って表すと、次のようになります。

$$A \subset U \text{ と } n(U) \text{ は有限で、したがって、} n(A) = n(U) - n(A^c)$$

例

女の子3人と男の子3人を並べる方法は何通りあるか求めなさい。ただし、3人の女の子は隣り合わせではないこととします。

3人の女の子が常に、隣り合わせでいるケースを数え、これは$4! \times 3!$ 通りあります。

次に、男の子3人と女の子3人(合計6人)を並べることのできる方法は6!通りです。

したがって、6人の子供の並べ方の合計から女の子3人が常に隣り合わせでいる場合を引いて、結果は、$6! - 3! \times 4! = 4!(30 - 3!) = (4 \times 3 \times 2 \times 1)(30 - 6) = 576$となります。よって、異なる576 通りに並べることができます。

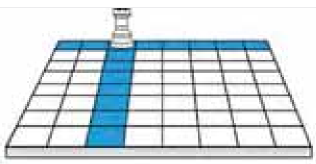
問題

1. 数の全部の桁の積が0となるように、バイナリーコード（数字の0と1を使う）を使って、できる7桁の数はいくつあるか求めなさい。

2. 1 から 4までの4つの数字を、数字の重複を許して、一列に並べます。少なくとも2つの数字が同じになる数列はいくつあるか求めなさい。

3. 女の子が4人、男の子が2人いるとき、男の子が隣り合わないようにして、6人を一列に並べる方法は何通りあるか求めなさい。

4. チェスで、図に示すように、ルークは8 × 8のマス目のチェスボードの直線上にある相手の駒を取ることができます。ルーク2つを取られないように並べる方法は次の場合は、何通りあるか求めなさい。



   a) ルークの一つは黒で、もう一つは白の場合
   b) 両方のルークが同じ色の場合

bの場合、同じ色のルークはとることができます。

達成の目安：

2.11 場合の数の問題を解くために補集合による計算を適用します。

学習の流れ：

考えられる様々な型の順列を確立したら、場合の数を数えるために非常に役立つ戦略を分析します。補集合による計算も便利で、確率のユニットにおいても、役立ちます。

ねらい：

これまでの授業を通じて、生徒は、問題が要求することに対し、直接的に数を数えることには慣れましたが、この授業で、意図することは、生徒が要求されてないことを数え、次に、全体からそれを引くことです。

問題の解き方：

1. 全部の桁の数字の積が0になるには、0が1個、2個、3個、4個、5個、6個、7個のように多くのケースがありますが、積が0にならないのは、1通り（全部1の場合）だけです。したがって、７桁の2進数の数列の合計から数字の積が0にならない1列を引くとすると、バイナリーコードで7桁の数字の積が0になる数列の合計は $2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$です。

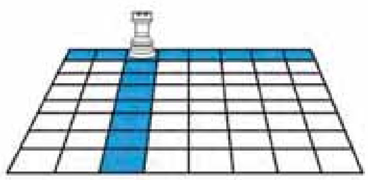
バイナリーコードでできる7桁の数列の数は2.7の授業の問題 2で計算しました。

2. 問題の条件において、4桁の数列の合計は4^4なので、この合計から、同じ数字を持たない数列の数、この場合は 4! 通りを引き、よって、少なくとも2つの数字が同じになり、1から 4 までの数字を使ってできる4桁の数列の合計は $4^4 - 4! = 256 - 24 = 232$となります。

3. 女の子4人、男の子2人を並べる方法の合計は 6!通りですが、この合計から、男の子が隣り合わせになる並べ方の数を引くとすると、この計算結果が、男の子が隣り合わせにならないように、6人を一列に並べる並べ方の合計となります。男の子が隣り合って列に並ぶ（男の子の集合を一人と考える戦略を使う）並び方の総数は、$5! \times 2!$通りあるので、この問題の条件で、子供たちを並べる方法の合計は$6! - 5! \times 2! = 720 - 240 = 480$となります。

4a) チェスボードのマス目は8×8だから、最初のルークを64か所、2番目のルークは63か所に置くことができ、チェス盤に異なるルークを置くことのできる方法の合計は、 ${}_{64}P_2$です。ここで、この合計から、ルークがとられる方法には何通りあるかを引き、とられない方法の数を出しますが、両方がとられる場合は、最初のルークには64通りありますが、2番目のルークは、最初のルークがどこにあるかにかかわらず、常に14通り（絵を使う）あります。したがって、異なるルーク2つを取られないように置くには、${}_{64}P_2 - 64 \times 14 = 3\,136$通り、または、最初のルークを置く場所を64か所、2番目は $(64 - 15)$か所と考えて $64(64 - 15) = 3\,136$通りです。

4b) a)では、異なるルークで、ルークがマス目を2つ使う（位置を交換して）ときの、2つのケースを数えることになりますが、 この問いでは、ルークは同じとみなすため、各ケースで2度数えており、よって、 ルークが同じ場合、合計は $\frac{{}_{64}P_2 - 64 \times 14}{2} = \frac{3136}{2} = 1\,568$です。

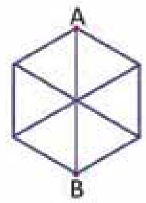


2.12 復習問題

順列の数え方を使って次の問題を解きなさい。

1. 「障害のある青少年のための機会」についての会議に、スペイン語を話す人が10人、英語を話す人が15人、フランス語を話す人が14人参加し、そのうちの、5人がスペイン語と英語を、7人が英語とフランス語を、4人が、スペイン語とフランス語、また、2人が3つの言語を話します。会議に何人参加しているか求めなさい。

2. 図に一辺が1 cmの正六角形が示してあります。長さ1 cmの線分3つを使って、A点とB点を結ぶ方法は何通りあるか求めなさい。



3. ある陸上競技に3人が参加します。陸上選手が到着することができる異なる結果は何通りになりますか、ただし3人が引き分けになることもあるとします。

4. 方程式$x! = 72(x-2)!$のxの値を求めなさい。

5. 男の子が4人、女の子が5人いるとき、そのうちの4人を列の両端に男の子、中央に女の子となるように、一列に並べます。4人で一列をつくることのできる方法は何通りあるか求めなさい。

6. 0 から 6までの番号の付いた6枚のカードがあり、その中から4枚とって列にするとき、カードを数字の桁と考えると、5の倍数は何個あるか求めなさい。 左から右に数えるとき、一つ目の数字は0にはならないとします。

5の倍数となるには一の位の数字は、0または5でなければなりません。

7. 味の異なるお菓子10個を子供3人で分けるとき、何通りあるか求めなさい。ただし、お菓子全部を一人の子供にあげることもあるとします。

8. ある授業に、男の子3人女の子2人のグループが4つあるとき、各グループを列になった異なる席に並べる方法は何通りあるか求めなさい。ただし、各グループの男の子も女の子も常に隣り合っていることとします。

9. 7学年の本3冊(同じもの)、8学年の本6冊（同じもの）、9学年の本4冊（同じもの）を棚に置くことのできる方法は何通りありますか、ただし、8学年の本は全部隣り合わせにあることとします。

10. 7人を円形に並べることのできる方法は何通りありますか、ただし

  a) そのうちの2人が隣り合っている場合
  b) そのうちの2人が隣り合っていない場合

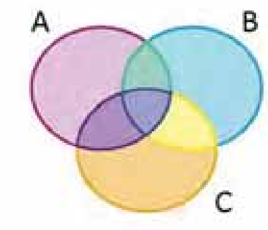
達成の目安：

2.12　順列に相当する問題を解きます。

問題の解き方：

1. 集合 A = {p | p はスペイン語を話す人}、B = {p | p は英語を話す人}、C = {p | p はフランス語を話す人}とすると、この問題を解くためには、集合 A、B 、Cの共通部分の濃度を計算することが必要で、そのために、図に示すようなベン図を使います。

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$



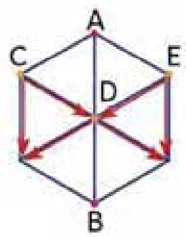
問題から次の情報を取り出すことができます。

$n(A) = 10$, $n(B) = 15$, $n(C) = 14$, $n(A \cap B) = 5$, $n(B \cap C) = 7$, $n(C \cap A) = 4$ および、$n(A \cap B \cap C) = 2$, よって、

$n(A \cup B \cup C) = 10 + 15 + 14 - 5 - 7 - 4 + 2 = 25$.

したがって、会議に合計25人が参加しました。

2. 正六角形なので、できる三角形は正三角形です。ここでは、A点には3通りあります。次にオレンジ色の点（C、D、E）のいずれかにつくと、各点には2通り（1の長さの線分3つでなければならないため、六角形の中心からは直接B点に行けないから）あり、最後は1通りだけです。よって、線分3つで、A点とB点を結ぶ方法は3 × 2 × 1 = 6通りです。



3. ケース1では全員が同時に到着し、これは1通りです。

ケース2では2人が一番、1人が二番で到着し、これは$\frac{3!}{2!}$通りです。

ケース3では、1人が一番、2人が二番で到着し、これは$\frac{3!}{2!}$通りです。

ケース4では、3人が異なる順位で到着し、これは3! 通りです。

したがって、和の法則を適用し、3人の選手が到着する異なる場合の数は $1 + \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + 3! = 1 + 3 + 3 + 6 = 13$ 通りです。

4. $x! = 72(x-2)! \Rightarrow x(x-1)\cancel{(x-2)!} = 72\cancel{(x-2)!} \Rightarrow x^2 - x - 72 = 0 \Rightarrow (x-9)(x+8) = 0 \Rightarrow x = 9$

5. 両端に男の子を並べる方法は ${}_4P_2$ 通りで、女の子を 中央に並べる方法は${}_5P_2$ 通りです、したがって、積の法則を使って、並べ方の合計は ${}_4P_2 \times {}_5P_2 = 240$です。

6. 最後の桁には2通り（0 または5）あります。0の場合は、残りの数字3個を${}_6P_3$通りに並べることができ、5の場合は、残りの数字3個を、$5 \times {}_5P_2$通りに並べることができます、よって合計は、${}_6P_3 + 5 \times {}_5P_2 = 220$です。

7. お菓子ごとに3通り（3人の子供のいずれか）の分け方があり、したがって、分け方の合計は $3^{10} = 59049$です。

8. 各列の生徒は3! × 2! × 2!通りに並べることができ、グループは4! 通りに並べることができます、したがって、並べ方の合計は、4! × (3! × 2! × 2!) = 24 × 24 = 576です。

9. 全部異なっているとするなら、8学年の本を一つのものとみなして、8! 通りに並べることができますが、重複するものがあるので、並べ方の合計は$\frac{8!}{3!\,4!} = 280$ です。

10a) 列に並べるとするなら、2! × 6!通りの並べ方がありますが、各列で6回数えているので、したがって、並び方の合計は $\frac{2!\,6!}{6} = 2 \times 120 = 240$です。

10b) 補集合を使って、7人の座り方は (7 – 1)! 通りあるとわかり、これから前問で, 計算した数を引くと、合計は 6! – 2 × 5! = 4 × 5! = 480となります。

レッスン 3 組み合わせ

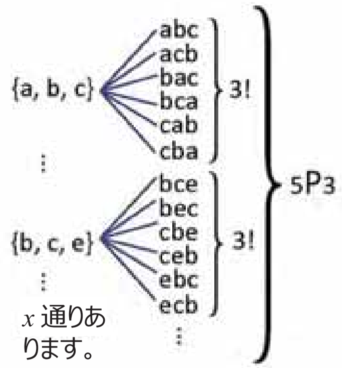
3.1 組み合わせ

導入問題

次の集合 {a, b, c, d, e} の中から、3文字を選ぶ方法は何通りあるか求めましょう。

解法

集合 {a, b, c, d, e} の中から、3文字を選ぶ方法の総数を x とします。



3文字を選択するに当たり、その順番は関係ないので、それぞれ選択したものに3！を掛けることで、5文字の中から選んだ3文字の並べ方の総数がわかります。つまり、$x(3!) = {}_5P_3$ となります。

つまり、集合 {a, b, c, d, e} の中から、3文字を選ぶ方法の総数は、

$$x = \frac{{}_5P_3}{3!} = 10.$$

まとめ

順番は関係ないものを選ぶことを、**組み合わせ**といいます。

組み合わせは通常、ものの集まりの選び方に関係しています。なぜなら、この意味において順番は関係なく、選ぶものの最終的な集合が重要だからです。

n 個の集合から r 個のものを選んでできる組み合わせの総数は、$0 \leq r \leq n$ として、次のように表されます。

$$\frac{{}_nP_r}{r!}.$$

この組み合わせの総数は、${}_nC_r$ と表され、“n と rの組み合わせ”、つまり、

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots 2\times 1} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$ と読みます。

${}_nC_0 = \frac{n!}{(n-0)!0!} = 1$ に注目してください。

${}_nC_{(n-r)} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = {}_nC_r$ であり、これは、異なるn 個のものの中から、r を選んで引くか、$n-r$ を選んで残すのと同じであることに、注目しましょう。

例

ある袋の中に、赤い球が3個（すべて同じもの）と緑の球が4個（すべて同じもの）があります。7つの球を一列に並べるのに何通りあるか求めましょう。

1列に7つのスペースがあると考えることができれば、赤い球が入るスペースがいくつあるか選べばいいので（青い球は残りのスペースに入る）、この計算は ${}_7C_3$ となります。

$${}_7C_3 = \frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1} = 35$$

つまり、7個の球は35通りの方法で並べることができます。

この問題は、もの、もしくはもののスペースを基準にして、順列もしくは組み合わせを使って解くことができます。

問題

1. いちご、メロン、サポーテ、グアバ、パパイヤ、マンゴーの内、2つのフルーツを組み合わせて作ることができるミックスジュースは何種類ありますか？3つのフルーツを使った場合は？

2. 座標に5つの点がありますが、一直線上に3つの点が存在するような配置にはなっていません。それらの点の内、2つの点を結ぶ線分が何通り描けるかを求めましょう。

3. {1, 2, 3, 4, 5} という集合があります。数字がひとつしかない部分集合は何通りありますか？数字が2つある部分集合は？数字が3つある部分集合は？数字が4つある部分集合は？数字が5つの場合は？数字が0の場合は？

達成の目安

3.1 数を数える問題を解くために、組み合わせを使う。

学習の流れ：

この授業では、組み合わせの定義について説明します。与えられた集合の中から要素を選ぶという概念に始まり、分かりやすい理解の方法として、方程式を使います。この授業には、アスタリスクがついています。問題の解き方が複雑なため、教師によるさらなる支援が必要です。

つまずきやすい点：

生徒が組み合わせと順列の違いを認識するのには、常に困難が伴います。そのため、順列の主な概念は並べることで、組み合わせの場合は選ぶことであることを、常に明確にすることが推奨されます。つまり、順列では並び方が重要ですが、組み合わせではそうではありません。

問題の解き方：

生徒は、組み合わせの計算よりも、問題の分析を優先させることが推奨されます。ある問題の解答は、組み合わせが示されていれば、正解と考えられます。十分に時間があれば、数字の値を計算するための公式を応用するように求めることができます。

1. 異なる6つのフルーツがあり、その中から2つを選ばなければならないので、その方法は ${}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$ 通りあります。そして、3つのフルーツを組み合わせる方法は、${}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$ 通りあります。

2. 一本の線を引くには、少なくとも2点必要で、一直線上に並んだ3つの点はないので、座標の5点の内、2点を組み合わせるだけでよいのです。つまり、描くことができる線分の総数は、${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$です。

3. この集合には5つの要素があるので、1つの数字しかない小集合を作るのと、集合の5つの要素から1つを選ぶ方法の総数は等しいことになります。つまり、1つの数字しかない小集合は、 ${}_5C_1 = 5$ 通りあります。

同様に、2つの数字の小集合を作るには、5つの要素から2つを選ぶ方法の総数と等しくなります。つまり、2つの数字を含む小集合は、${}_5C_2 = 10$ 通りあります。

3つ、4つ、5つの数字を含む小集合を作る場合も同様に、それぞれ ${}_5C_3 = 10$、${}_5C_4 = 5$、${}_5C_5 = 1$ 通りあります。また、全く数字のない小集合（中身のない小集合）を作ることは、5つの要素から0を選ぶことと等しいため、${}_5C_0 = 1$ となります。

問題3および授業2.8の例は、次の組み合わせの恒等式を証明をするのに役に立ちます。
${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{(n-2)} + {}_nC_{(n-1)} + {}_nC_n = 2^n$。

3.2 組み合わせと数の数え方の原理

導入問題

あるグループに女性が5人、男性が3人います。以下の問題に答えましょう。

a) 2人選ぶのに、同性同士でなければならい場合、選び方は何通りありますか？
b) 4人選ぶのに、男性2人、女性2人になるような選び方は、何通りありますか？

解法

a) この状況では、2つの場合があります。

その1 女性2人の場合があります。この時、${}_5C_2$ 通りの選び方があります。

その2 男性2人の場合があります。この時、${}_3C_2$ 通りの選び方があります。

つまり、足し算の原理により、同性の2人の選び方は、次のとおりです。${}_5C_2 + {}_3C_2 = 10 + 3 = 13$。

b) まず、女性の選び方は ${}_5C_2$ 通りあります。そして、女性の選び方それぞれに対し、男性を選ぶ ${}_3C_2$ 通りの方法があります。

つまり、足し算の原理により、4人（男女それぞれ2人ずつ）の選び方は、次のとおりです。${}_5C_2 \times {}_3C_2 = 10 \times 3 = 30$。

まとめ

場合によっては、すべての場合を数えるために、和の法則と積の法則を組み合わせて計算する必要があります。その上、順列においては、ものをあとから並べるために、その選び方も検討できます。

例

数学の本が7冊（すべて異なります）、児童青年の権利の本が5冊（すべて異なります）あります。数学の本3冊と児童青年の権利の本2冊を本棚に並べる時の並べ方は何通りあるか求めましょう。

まず最初に、数学の本を3冊選びますが、その選び方は、${}_7C_3$ 通りあります。次に、児童青年の権利の本を2冊選びますが、その選び方は、${}_5C_2$ 通りあります。

最終的に、本の並べ方は、5! 通りあります。つまり、積の法則を応用し、すべての本の並べ方の総数は、次のとおりになります。${}_7C_3 \times {}_5C_2 \times 5! = 35 \times 10 \times 120 = 42{,}000$。

問題

1. 男の子3人と女の子4人のグループの中から、男の子2人、女の子3人を選んで一列に並ばせる方法は、何通りあるか求めましょう。

2. 6人の男性と4人の女性のグループの中から、3人で構成する委員会を結成する時、次の条件下で、何通りの委員会ができるか求めましょう。

a) 何の制限もない時。
c) 男性2人、女性1人の時。
c) 男性のみ、または女性のみの時。
d) 女性が少なくとも1人いなければならない時。

達成の目安

3.2 数を数える問題を解くために、和の法則と積の法則を使って順列を統合する。

学習の流れ：

数を数える問題を解くために、組み合わせの概念を使った後、この授業では、もっと複雑な文章問題をモデル化するための方法を考える問題を解き、さらに、和と積の法則を応用する必要性のある問題もあります。

ねらい：

この授業には、様々な問題が起こり得ますが、そのため、ある例を提起し、組み合わせた形で論理的に考える別の方法を示します。練習問題は、授業中に解決した内容にかなり関係します。

問題の解き方：

1. 本の例と似た方法で、3人の男の子から2人を選ぶ方法は、$_3C_2$ 通りあります。また、4人の女の子の中から3人を選ぶ方法は、$_4C_3$ 通りあります。一旦選んだら、5人の子どもを並べなければなりませんが、それには5! 通りあります。つまり積の法則を応用すると、2人の男の子と3人の女の子の並べ方の総数は、この問題の条件では、次のとおりです。$_3C_2 \times {}_4C_3 \times 5! = 3 \times 4 \times 120 = 1{,}440$。

2a) 合計人数は10人で、何も制限がなければ、10人の中から3人を選べばよいので、委員会を結成する方法は、$_{10}C_3 = 120$ 通りあります。

2b) 2つの場合がありますが、男性のみであれば、6人の男性の中から構成員となる3人を選べばよいので、$_6C_3$ となります。女性のみであれば、4人の女性の中から構成員となる3人を選べばよいので、$_4C_3$ となります。この2つの場合は同時には起こらないので、和の法則に従い、委員会を結成する方法の総数は、$_6C_3 + {}_4C_3 = 20 + 4 = 24$ 通りになります。

2c) 男性の選び方は、$_6C_2$ 通りあり、女性の選び方は、$_4C_1$ 通りあります。そのため、積の法則に従い、委員会を結成する方法の総数は、$_6C_2 \times {}_4C_1 = 15 \times 4 = 60$ 通りになります。

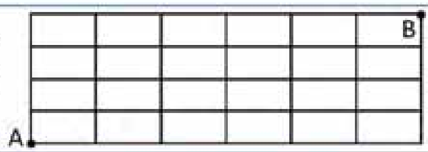
2d) この設問では、補集合による計算を使うことができます。なぜなら、女性が少なくとも1人いるのは、3つの場合（女性が1人、もしくは2人、もしくは3人）がありますが、委員会を結成する方法の総数（この問題の設問aで計算済み）から、男性のみで結成する場合（この問題の設問cで計算済み）を引くと、求める答えが分かります。つまり、委員会の結成方法の総数は、次のとおりです。$_{10}C_3 - {}_6C_3 = 120 - 20 = 100$。

また、3つの場合を数え、和の法則を応用することも有効と考えられ、その答えは全く同じになります（$_4C_1 \times {}_6C_2 + {}_4C_2 \times {}_6C_1 + {}_4C_3 = 60 + 36 + 4 = 100$）。

3.3 道順を数える

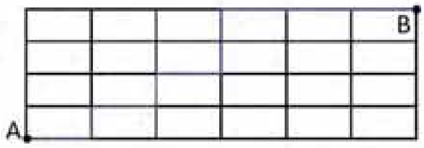
導入問題

右のマス目が書かれた表は、ソンソナーテ県の通行可能な道路を表しています。ある人が最も短い道順を通って、地点Aから地点Bに行くのには、何通りあるかを求めましょう。



解法

通る道の距離を最短にするには、右か上にのみ進まなければなりません（そうでなければ、後戻りします）。そこで、この問題は、6 + 4 = 10 マスの鎖をつなぐことと要約でき、その中の4マスを縦に進め、6マスを横に進めます。



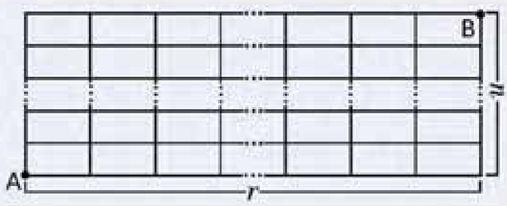
このためには、右に向かって6マス進む方法を選ぶだけでよく、その方法は、${}_{10}C_6$ 通りあります。

つまり、地点Aを出発し、地点Bに到着するのに最短の道順の総数は、次のとおりです。${}_{10}C_6 = 210$。

まとめ

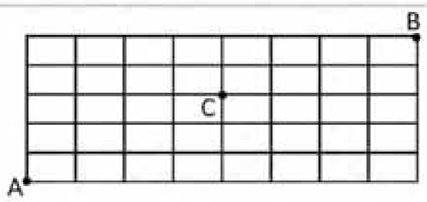
マス目の数が $n \times r$ の表において、地点Aから地点Bに行く最短の道順の総数を求めるには、組み合わせを使うことができます。その総数は、a： ${}_{(n+r)}C_r$ と同じです。

この場合の道順の決め方は、組み合わせの恒等式の証明のいくつかにとても役に立ちます。



例

地点Aから地点Bに行くのに、地点Cを通らなければならない場合、最も短い道順は何通りあるかを求めましょう。



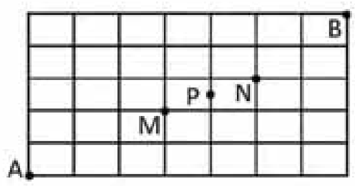
AからCに行くためには、4マス横に進み、3マス縦に進む必要があります。そこで、最短距離となる道順は、 ${}_7C_4$ 通りあります。その後、CからBに最短距離で行く方法は、${}_6C_4$ 通りのあります。

つまり、積の法則を応用すると、AからBに行くのにCを通る場合の最短距離の道順の総数は、${}_7C_4 \times {}_6C_4 = 35 \times 15 = 525$ 通りになります。

問題

次のマス目が書かれた表で、以下の時、最短距離となる道順の数を求めましょう。

a) AからBに行く。
b) Mを通って、AからBに行く。
c) Nを通って、AからBに行く。
d) MとNを通って、AからBに行く。
e) MかNを通って、AからBに行く。
f) MもNも通らないで、AからBに行く。
g) P を通って、AからBに行く。



196

達成の目安

3.3 メモリの書かれた表の中で、地点Aから地点Bに行くための最短距離となる道順の数を求めましょう。

学習の流れ：

すでに組み合わせの概念を理解したので、異なる状況で組み合わせを応用することを始めてみましょう。そのひとつが、メモリの書かれた表における最短距離を通る道順の数を数えることです。

ねらい：

この授業では、簡単なグラフを使った状況で、組み合わせの概念および和と積の法則を使うことを確実に習得することを目指します。グラフとは、ある国の道路の模したもので、メモリの書かれた表に作成するのが理想的です。

問題の解き方：

a) 横に7マス、縦に5マス、合計で12マス進まなければならないので、12マスの内、どのマスを通って横に進むかを選ぶのに、AからBに行くための道順は、$_{12}C_7 = 792$ 通りあります。

b) AからMに行く道順は、$_{(3+2)}C_3$ 通りあり、それぞれの道順に対し、MからBに行く方法が、$_{(4+3)}C_4$ 通りあります。そのため、積の法則により、Mを通ってAからBに行く道順の総数は、$_5C_3 \times {_7C_4} = 10 \times 35 = 350$ 通りになります。

c) AからNに行く道順は、$_{(5+3)}C_5$ 通りあり、それぞれの道順に対し、NからBに行く方法が、$_{(2+2)}C_2$ 通りあります。そのため、積の法則により、Nを通ってAからBに行く道順の総数は、$_8C_5 \times {_4C_2} = 56 \times 6 = 336$ 通りになります。

d) AからMに行く道順は、$_{(3+2)}C_3$ 通りあり、それぞれの道順に対し、MからNに行く方法が $_{(2+1)}C_2$ 通りあります。また、それぞれの道順に対し、NからBに行く道順が、$_{(2+2)}C_2$ 通りあります。そのため、積の法則により、MとNの両方を通ってAからBに行く道順の総数は、$_5C_3 \times {_3C_2} \times {_4C_2} = 10 \times 3 \times 6 = 180$ 通りになります。

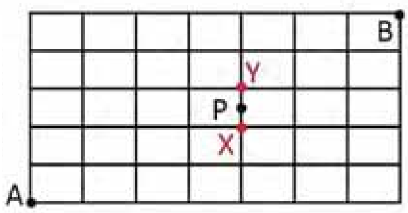
e) 設問bでは、Mを通ってAからBに行く道順の数が分かり、設問cでは、Nを通った際の道順の数が分かりました。しかし、MとNの両方を同時に通る時、重複して数えているかもしれません（ひとつは設問bでMからBに行く道順を数えた時、もうひとつは設問cでAからNに行く道順を数えた時）。そのため、AからBに行き、MもしくはNを通る道順の総数は、次のとおりです。

$(_5C_3 \times {_7C_4}) + (_8C_5 \times {_4C_2}) - (_5C_3 \times {_3C_2} \times {_4C_2}) = 350 + 336 - 180 = 506$。

この設問の分析は、集合 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ の解と類似しており、また、集合を使って解くこともできる。

f) 設問aのAからBに行く道順の総数はすでに分かっており、MとNを通ってAからBに行く道順の総数も分かっていることから、補集合により数を数えることができます。つまり、MもNも通らずに、AからBに行く道順の総数は、$_{12}C_7 - 506 = 792 - 506 = 286$ 通りです。

g) Pを確実に通るために、地点Xに到着し、その後Yから出発することが必要です。Aを出てからXに到着する道順は、$_{(4+2)}C_4$ 通りあり、Yを出てからBに到着する道順は、$_{(3+2)}C_3$ 通りあるので、積の法則により、AからBに行くのにPを通っていく道順は、$_6C_4 \times {_5C_3} = 15 \times 10 = 150$ 通りあります。



3.4 道順の数を数える方法で行う証明*

導入問題

道順を求める論法を使って、パスカルの再帰性を証明します。

$$n \geq r \text{ で、} {}_{(n+1)}C_{(r+1)} = {}_nC_r + {}_nC_{(r+1)}$$

解法

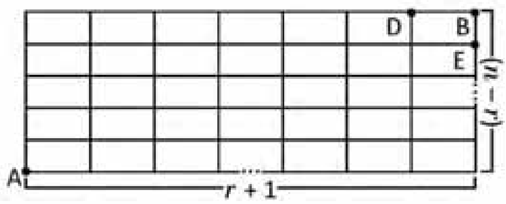
大きさが $(n-r) \times (r+1)$ のマス目が書かれた表と、地点Aから地点Bに行くためには、地点Dまたは地点Eを通る2通りしかないことを考慮します。

Aを出て、Bに到着する方法の総数は、$(n-r)+(r+1)=n+1$ なので、${}_{(n+1)}C_{(r+1)}$ 通りです。

その上、Dに到着するためには、$(n-r)+r=n$ なので、${}_nC_r$ 通りあります。

また、Eに到着するためには、$(n-r-1)+(r+1)=n$ なので、${}_nC_{(r+1)}$ 通りあります。

つまり、${}_{(n+1)}C_{(r+1)} = {}_nC_r + {}_nC_{(r+1)}$ となります。



まとめ

組み合わせの恒等式を証明するためには、道順の数え方を使うことができます。そのためには、状況に合わせたマス目を作り、異なる2つの道順を数えます。

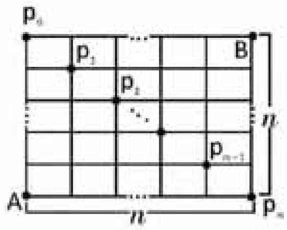
例

道順を求める論法を使って、恒等式を証明しましょう。

$$({}_nC_0)^2 + ({}_nC_1)^2 + \cdots + [{}_nC_{(n-1)}]^2 + ({}_nC_n)^2 = {}_{2n}C_n$$

$n \times n$ のマス目が書かれた表があります。Aを出てBに到着するための最短距離の総数は、${}_{2n}C_n$ です。

また、場合ごとに数を数えることもできます。ある場合（地点p_0を通る）では、最初の n マスの移動で横移動せず、次の n マスの移動では縦移動しません。この場合、$({}_nC_0)({}_nC_0)$ 通りの方法があります。



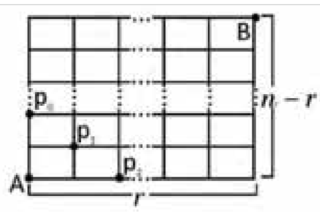
別の場合（地点p_1を通る）では、最初の n マスの移動で横移動し、それ以降の移動では、縦に n マス移動します。これには、$({}_nC_1)({}_nC_1)$ 通りの方法があります。以降も同様に、最初の n マスの移動がすべて横移動になる、および最後の n マスの移動がすべて縦移動になる場合まで（地点p_nを通る）数えます。これには、$({}_nC_n)({}_nC_n)$ 通りの方法があります。

つまり、$({}_nC_0)^2 + ({}_nC_1)^2 + \cdots + [{}_nC_{(n-1)}]^2 + ({}_nC_n)^2 = {}_{(2n)}C_n$ となります。

問題

下図において、道順を求める論法を使って、次の恒等式を証明しましょう。

${}_nC_r = {}_2C_0[{}_{(n-2)}C_r] + {}_2C_1[{}_{(n-2)}C_{(r-1)}] + {}_2C_2[{}_{(n-2)}C_{(r-2)}]$。



197

ユニット7

達成の目安

3.4 道順の数え方を使って、組み合わせの恒等式を証明しましょう。

学習の流れ：

マス目の書かれた表で、最短距離の道順を数えるために組み合わせを使った後、組み合わせの恒等式のいくつかを証明するためにこの方法を用います。

つまずきやすい点：

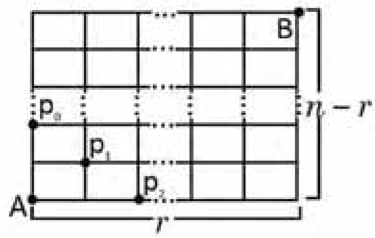
それぞれの恒等式に適切なマス目の書かれた表の大きさを把握することは、結果的に困難であることが判明します。そのため、この授業にはアスタリスクがついています。理由は、その意味において、教師が生徒に対しさらなる支援を与える必要がある可能性があるためです。

問題の解き方：

マス目の書かれた表には、縦の列が r 列と横の行が $(n-r)$ 行あります。この検討方法を使ったAからBへの道順の総数は、$_{(r+n-r)}C_r = {_n}C_r$ です。

一方で、Aを出てBに到着するには、p_0、または p_1、または p_2 を通る3つの選択肢がありますが、これら3つ場合の内、2つの場合は同時に起こりません。つまり、1つ目の場合では、p_0を通ってAからBに行く道順が、$_2C_0 \times {_{(n-2)}C_r}$ 通りあり、2つ目の場合では、p_1を通ってAからBに行く道順が、$_2C_1 \times {_{(n-2)}C_{(r-1)}}$ 通りあり、最後に3つ目の場合では、p_2を通ってAからBに行く道順が、$_2C_2 \times {_{(n-2)}C_{(r-2)}}$ 通りあります。つまり、和の法則を応用すると、AからBに行く道順の総数は、次のとおりです。

$_nC_r = {_2C_0}\,{_{(n-2)}C_r} + {_2C_1}[{_{(n-2)}C_{(r-1)}}] + {_2C_2}[{_{(n-2)}C_{(r-2)}}]$。



つまり、同じことを異なる2つの方法で数えましたが、問題の恒等式が次のとおり証明されました。

$_nC_r = {_2C_0}\,{_{(n-2)}C_r} + {_2C_1}[{_{(n-2)}C_{(r-1)}}] + {_2C_2}[{_{(n-2)}C_{(r-2)}}]$。

この問題では、主に、生徒自身がこれらの論法を解く方法について評価する必要があります。

3.5 組み合わせの恒等式の2通りの解き方*

導入問題

次の組み合わせの恒等式を証明するために、集合を求める論法を使いましょう。

$$_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{(n-2)} + {}_nC_{(n-1)} + {}_nC_n = 2^n$$

解法

n 個の要素を持った小集合を使って作る、小集合の数を数えます。2つの異なる方法で数えます。

方法 1：各要素が持つ可能性の数を数える。

各要素には、小集合に含まれるか含まれないの、2つの可能性があります。そのため、集合の濃度 n により作られる小集合の総数は、2^n となります。

$$\underset{\text{要素 }1}{\underline{2}} \times \underset{\text{要素 }2}{\underline{2}} \times \cdots \times \underset{\text{要素 }n-1}{\underline{2}} \times \underset{\text{要素 }n}{\underline{2}}$$

方法 2：それぞれの小集合が持つ可能性を数えます。

要素が0個の小集合の数 $_nC_0$。

要素が1 個の小集合の数 $_nC_1$。

要素が2個の小集合の数 $_nC_2$。

同様に、n 個の要素を持つ小集合の数に到達するまで数えます。

よって、n個の要素をもつ集合から作ることのできる部分集合の数は、次のとおりです。

$$_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{(n-2)} + {}_nC_{(n-1)} + {}_nC_n$$

この同じことはすでに数えてあるので、次のことが成り立つはずです。$_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{(n-2)} + {}_nC_{(n-1)} + {}_nC_n = 2^n$。

まとめ

組み合わせの恒等式を証明するために、2つの異なる方法である状況の数を数えることができます。
この方法を、**比較**といいます。

問題

集合を求める論法を使って、次の恒等式を証明しましょう。

a) $_nC_r = {}_nC_{(n-r)}$。

b) 要素が $n \geq r+1$ の時、$_{(n+1)}C_{(r+1)} = {}_nC_r + {}_nC_{(r+1)}$。

c) 要素が$n \geq r+2$ の時、$r \geq 2$。$_nC_r = 2C_0{}_{(n-2)}C_r + 2C_1[{}_{(n-2)}C_{(r-1)}] + 2C_2[{}_{(n-2)}C_{(r-2)}]$。

d) 要素が$(m \geq r)$ および $(n \geq r)$ の時、$_{(n+m)}C_r = {}_nC_0({}_mC_r) + {}_nC_1[{}_mC_{(r-1)}] + \cdots + {}_nC_{(r-1)}({}_mC_1) + {}_nC_r({}_mC_0)$。

b)では、集合 A と、要素 $n+1$ 個から 要素 $r+1$ を引いたものを考慮し、A の中の特定の要素には、抽出される要素に含まれるか含まれないかの、2つの選択肢があります。

c)では、集合Aと、2つの集合において割り算できるn 個の要素を考慮します。2つの集合の内、ひとつには2つの要素があり、もうひとつには $n-2$ 個の要素があります。そして A から、r を引きます。

d)では、前の設問と同様の理論を当てはめます。

198

達成の目安

3.5 ある特定の状況において数を数えるのに2つの方法を提起しながら、組み合わせの恒等式について証明しましょう。

学習の流れ：

このユニットの第1課における集合理論の内容は、組み合わせの恒等式を証明するために使うことができるもう一つの方法です。

つまずきやすい点：

この授業において難解なことは、小集合を作ったり、補集合を見つけたりするなど、集合を考慮しなければならない状況を特定することです。このため、この授業にはアスタリスクがついており、教師によるさらなる支援が必要となる場合があります。

問題の解き方：

a) n 個の要素がある集合があり、r 個の要素がある小集合を作るには、小集合にある要素を選ぶ $n\mathrm{C}r$ 通りの方法があります。一方、小集合にない要素を選ぶのにもまた、$n\mathrm{C}(n-r)$ 通りの方法があります。どちらも場合も、同じ状況を表しており、結論として、$n\mathrm{C}r = n\mathrm{C}(n-r)$ となります。

b) $n+1$ 個の要素がある集合があり、$r+1$ 個の要素がある小集合を作るには、小集合にある要素を選ぶ $(n+1)\ \mathrm{C}(r+1)$ 通りの方法があります。一方、小集合を作る際に、ある特定の要素を考慮すると、同時には起こらない2つのケースがあります。それは、その要素が小集合に存在する場合、やるべきことは、合計で n 個の要素の中からr 個の要素を選ぶことのみです。これには、$n\mathrm{C}r$ 通りの方法があります。もう一つの場合は、もしその要素が小集合に存在しない場合、合計で n 個の要素の中から$r+1$ 個の要素を選ばなければならず、これには、$n\mathrm{C}(r+1)$ 通りの方法があります。つまり、和の法則により、小集合を作る方法の総数は、$n\mathrm{C}r + n\mathrm{C}(r+1)$ となります。つまり、同じことに関する数を数えていたので、要素が $n \geq r+1$の時、$(n+1)\ \mathrm{C}(r+1) = n\mathrm{C}r + n\mathrm{C}(r+1)$ が成り立ちます。

c) 前の設問と類似した方法で考えると、2つの要素（ひとつだけではない）を考慮したので、n 個の要素を持つ集合の中から、r 個の要素を持つ小集合を作るには、$n\mathrm{C}r$ 通りの方法があります。一方で、2つの要素を考慮すると、同時には起こらない3つのケースがあります。それは、2つの要素が小集合の一部ではない時、そして小集合の要素の総数が、集合から引いたものの残り $(n-2)$ となる時ですが、これには、$2\mathrm{C}0 \times (n-2)\ \mathrm{C}r$ で計算できます。また、2つの要素の内のひとつの要素が集合の一部で、小集合のその他の要素が、集合から引いたものの残り $(n-2)$ となる時は、$2\mathrm{C}1 \times [(n-2)\mathrm{C}(r-1)]$で計算できます。最終的には、最後のケースでは、どちらの要素も小集合の一部となり、その他の要素は集合の要素から引いた要素 $(n-2)$ になります。これは、$2\mathrm{C}2 \times [(n-2)\mathrm{C}(r-2)]$ で計算できます。そして、和の法則から、小集合の総数は、$2\mathrm{C}0[(n-2)\mathrm{C}r] + 2\mathrm{C}1[(n-2)\mathrm{C}(r-1)] + 2\mathrm{C}2[(n-2)\ \mathrm{C}(r-2)]$となります。つまり、同じものを数えていたので、$n\mathrm{C}r = 2\mathrm{C}0[(n-2)\mathrm{C}r] + 2\mathrm{C}1[(n-2)\mathrm{C}(r-1)] + 2\mathrm{C}2[(n-2)\mathrm{C}(r-2)]$ となります。

d) これは最も一般的なケースで、集合を2で割り、一方には n 個の要素が、もう一方には m 個の要素があります。そして、r 個の要素がある小集合を作るためには、n 個の要素の中から0個の要素を抽出し、m 個の要素の中から r 個の要素を抽出し、n 個の要素の中から 1個の要素を抽出し、m 個の要素の中から r-1 個の要素を抽出し、以下、n 個の要素の中から r 個の要素を抽出し、m 個の要素の中から0個の要素を抽出するまで同様に行うと、同じく以下のように結論付けることができます。

$(n+m)\mathrm{C}r = n\mathrm{C}0(m\mathrm{C}r) + n\mathrm{C}1[m\mathrm{C}(r-1)] + \cdots + n\mathrm{C}(r-1)(m\mathrm{C}1) + n\mathrm{C}r(m\mathrm{C}0)$。

3.6 パスカルの三角形

導入問題

次の課題をやってみましょう。

a) 表を作成し、横の列にn 値の0から5の数字を記入し、縦の列にも r 値の0から5の数字を記入しましょう。それぞれのマスに（可能な場合）、その組み合わせの数 ${}_nC_r$ を計算しましょう。

b) $n = 0$ から $n = 5$まで、組み合わせの値を三角形の形に並べましょう。

c) ひとつ上の横列に続く横列のパターンを求め、また、三角形の6番目の横列の値が減るパターンを、直接組み合わせを計算しないで求めましょう。

解法

a) 1番目の横列では、組み合わせはひとつだけであることが計算できます、${}_0C_0 = 1$。2番目の横列では、組み合わせは、${}_1C_0$ と ${}_1C_1$ の2つであることが計算できます。3番目の横列では、組み合わせは、${}_2C_0$ と、${}_2C_1$ と、${}_2C_2$ の3つであることが計算できます。同様に続けると、表の中の値を計算することができます。

n \ r	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

b) 表中の組み合わせを三角形の形に並べます。

$n = 0$	1
$n = 1$	1 1
$n = 2$	1 2 1
$n = 3$	1 3 3 1
$n = 4$	1 4 6 4 1
$n = 5$	1 5 10 10 5 1

c) 作られた三角形を見ると、両端には常に1があります。これは、${}_nC_0$ (= 1) 、および ${}_nC_n$ (= 1) の値が来ます。そして、見たところ、2つの数字の下側の中間にある数字は、その数字の上にある数字の和になっています。例えば、1と1の下側には2があり、1 + 1 = 2 を満たしています。同様に、10は6と4の下側にあり、6 + 4 = 10 を満たしています。このパターンに従い、6番目の横列の値は、次のようになります。1、1 + 5、5 + 10、10 + 10、 10 + 5、5 + 1、1。

$n = 0$	1
$n = 1$	1+1
$n = 2$	1 2 1
$n = 3$	1 3 3 1
$n = 4$	1 4 6+4 1
$n = 5$	1 5 10 10 5 1
$n = 6$	1 6 15 20 15 6 1

まとめ

組み合わせを元に作ったこの三角形は、**パスカルの三角形**と呼ばれます。導入問題における推論のパターンは、前の授業で証明したパスカルの再帰性を使って、次のとおり、数学的に証明することができます。

${}_{(n+1)}C_{(r+1)} = {}_nC_r + {}_nC_{(r+1)}$。

$${}_0C_0$$
$${}_1C_0 \quad {}_1C_1$$
$${}_2C_0 \quad {}_2C_1 \quad {}_2C_2$$
$${}_3C_0 \quad {}_3C_1 \quad {}_3C_2 \quad {}_3C_3$$
$${}_4C_0 \quad {}_4C_1 \quad {}_4C_2 \quad {}_4C_3 \quad {}_4C_4$$
$${}_5C_0 \quad {}_5C_1 \quad {}_5C_2 \quad {}_5C_3 \quad {}_5C_4 \quad {}_5C_5$$
$${}_6C_0 \quad {}_6C_1 \quad {}_6C_2 \quad {}_6C_3 \quad {}_6C_4 \quad {}_6C_5 \quad {}_6C_6$$

ユニット7

問題

1. 組み合わせを計算せずに、パルカルの三角形の7番目と8番目の横列の値を求めましょう。

2. 右側に、パスカルの三角形の中の2列が示されています。${}_{(n+1)}C_{(r+1)} = {}_nC_r + {}_nC_{(r+1)}$ を応用し、2列目の値の計算が正しいことを証明しましょう。

1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

199

達成の目安

3.6 パスカルの三角形における組み合わせに存在する、関係性を立証します。

学習の流れ：

恒等式を証明する組み合わせの応用を学んできましたが、ここでは、パスカルの三角形における組み合わせを求めるパターンを分析します。

ねらい：

授業では、導入問題を基にパスカルの三角形のパターンを見つけ出し、立証することを目指します。問題では、3.5の授業で学んだパスカルの恒等式を使うことで、そのパターンを正しく証明できることが期待されます。

問題の解き方：

1. 三角形のパターンに従い、6列目まである導入問題、そしてその列から7列目と8列目を計算することができます。

$n = 0$	1
$n = 1$	1 + 1
$n = 2$	1　2　1
$n = 3$	1　3　3　1
$n = 4$	1　4　6 + 4　1
$n = 5$	1　5　10　10　5　1
$n = 6$	1　6　15　20　15　6　1
$n = 7$	1　7　21　35　35　21　7　1
$n = 8$	1　8　28　56　70　56　28　8　1

2. 組み合わせ ${}_nC_r$ におけるn の値は、パスカルの三角形における該当する列を表すことを明らかにした上で、恒等式 ${}_{(n+1)}C_{(r+1)} = {}_nC_r + {}_nC_{(r+1)}$ は、左から数えて r 番目にある次の列（つまり $n + 1$ ）の要素が、前列の r と $r + 1$ の要素の和と同じになり、それらの要素は、要素 ${}_{(n+1)}C_{(r+1)}$ の上側にあると理解できます。これにより、パスカルの三角形を作る上で、次の列がどのようになるかを知るために、再帰的に前の列の隣接する要素を足すだけでよいことになります。

3.7 ニュートンの二項定理*

導入問題

積の展開 $(x+y)^5$ において、項 x^2y^3 の係数を求めましょう。

解法

式 $(x+y)^5$ を展開すると、$(x+y)^5 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$ と表すことができます。

$(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$ を展開するためには、それぞれの括弧の中の x と y を掛け算し、同類項でまとめます。x^2y^3 の係数は、5つの括弧の中から、y を3つ取る場合の回数と同じ、つまり、${}_5C_3 = 10$ となります。

そのため、積の展開 $(x+y)^5$ における、項 x^2y^3 の係数は、

$${}_5C_3 = 10 \text{となります。}$$

問題

一般的に、積の展開 $(x+y)^5$ において、項 $x^{n-r}y^r$ の係数は、$0 \le r \le n$ の場合、${}_nC_r$ になります。

つまり、$(x+y)^n$ を展開するためには、次の結果が成り立ちます。
$(x+y)^n = ({}_nC_0)x^n + ({}_nC_1)x^{n-1}y + ({}_nC_2)x^{n-2}y^2 + \cdots + [{}_nC_{(n-2)}]x^2y^{n-2} + [{}_nC_{(n-1)}]xy^{n-1} + ({}_nC_n)y^n$。

また、次のように足し算を使って、表すことができます。

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} ({}_nC_r)x^{n-r}y^r。$$

この結果は、**ニュートンの二項定理**と呼ばれ、数を数えるだけのような分かりやすい場合でない時の、組み合わせの性質や恒等式を証明するために使うこともできます。

例

次の組み合わせの恒等式を証明しましょう、${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{(n-2)} + {}_nC_{(n-1)} + {}_nC_n = 2^n$。

ニュートンの二項定理を使い、$x = 1$ と $y = 1$ を当てはめると、次のようになります。

$$(1+1)^n = ({}_nC_0)1^n + ({}_nC_1)1^{n-1}1 + ({}_nC_2)1^{n-2}1^2 + \cdots + [{}_nC_{(n-2)}]1^21^{n-2} + [{}_nC_{(n-1)}]1^11^{n-1} + ({}_nC_n)1^n$$

$$2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{(n-2)} + {}_nC_{(n-1)} + {}_nC_n。$$

問題

1. $(1-x)^{10}$ の二項展開における、x^7 の係数を求めましょう。

2. $(x+3y^3)^4$ の二項展開における、x^2y^6 の係数を求めましょう。

3. $\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^9$ の二項展開における、x を含まない項の係数を求めましょう。

4. $\sum_{r=0}^{n} 3^r({}_nC_r) = 4^n$ を証明してください。

例と同様の方法を応用することができます。

200

達成の目安

3.7 二項展開における項の係数を求めるために、ニュートンの二項定理を応用しましょう。

学習の流れ：

二項展開の累乗の展開は、代数の中身の展開において展開されてきました。しかし3乗になると、組み合わせは二項定理の累乗根を展開するために大変役に立つ道具になります。この結果は、ニュートンの二項定理として知られています。

ねらい：

ニュートンの二項定理の公式の推論は、複雑な分析を伴うことがあります。そのため、この授業にはアスタリスクがついており、教師によるさらなる支援が必要になる可能性があることを意味します。この公用は、単純な二項展開からさらに複雑なものまで応用可能です。

問題の解き方：

1. 問題から、$n = 10$ であることが分かり、r の値を計算すると、

$x^7 = 1^{10-r}x^r = x^r$ になります。つまり、$r = 7$ になるので、係数は、$_{10}C_7 \times 1^{10-7} \times (-1)^7 = -120$ になります。

2. 問題から、$n = 4$ であることが分かり、r の値を計算すると、

$x^2y^6 = x^{4-r}(y^3)^r = x^{4-r}y^{3r}$ になります。つまり、$r = 2$ になるので、係数は、$_4C_2 \times 1^{4-2} \times (3)^2 = 6 \times 9 = 54$ になります。

3. 問題から、$n = 9$ であることが分かり、r の値を計算すると、

$x^0 = (x^2)^{9-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r = x^{18-2r}x^{-r} = x^{18-3r}$ になります。つまり、$r = 6$ になるので、係数は、$_9C_6 \times 1^{9-6} \times 1^6 = 84$ になります。

もし、生徒がこの問題をどう解き始めるか分からない場合は、ヒントとして、指数が0の時の、x を含まない項を教えることもできます。

4. ニュートンの二項定理の式を考えながら、$x = 1$ と $y = 3$ に置き換えます。

$$(1+3)^n = ({}_nC_0)1^n + ({}_nC_1)1^{n-1}3 + ({}_nC_2)1^{n-2}3^2 + \cdots + [{}_nC_{(n-2)}]1^2 3^{n-2} + [{}_nC_{(n-1)}]1^1 3^{n-1} + ({}_nC_n)3^n$$

$$4^n = {}_nC_0 + ({}_nC_1 \times 3) + ({}_nC_2 \times 3^2) + \cdots + ({}_nC_{(n-2)} \times 3^{n-2}) + ({}_nC_{(n-1)} \times 3^{n-1}) + ({}_nC_n \times 3^n)$$

よって、$\sum_{r=0}^{n} 3^r({}_nC_r) = 4^n$ になります。

3.8 仕切りを使う方法*

導入問題

ホセは、お店にあるお菓子を5つ買いたいと思っており、いちご、マンゴー、ぶどうの3つの味から選ぶことになりました。すべて同じ味を選ぶ場合も含め、ホセが5つのお菓子を選ぶのには、何通りの選び方がありますか？

解法

いちご、マンゴー、ぶどう味を順番に選ぶことができ、味の違うグループの間に |（仕切り）を置きます。例、

次に、お菓子の味の重複しない組み合わせに合った、5つのまる（o）と2つの仕切り（|）がありますが、問題は5つの同じまると2つの同じ仕切りを並べる方法の総数を数えればいいのです。仕切りを置くことができる7つの位置の内、2つを選んで計算することができます。

つまり、$_7C_2$ 通りの選び方があります（または、まるの位置の選び方 $_7C_5$ 通りを計算します）。

○○|○○|○

3つの味の中から5つのお菓子を選ぶ方法の総数は、$_7C_2 = 21$です。

一般的に、

それぞれ異なる n 種類のものの中から、r 個のものを選ぶ方法の総数は、各種類のものがそれぞれ同じであれば、$n-1$ 個の仕切りを加えることで計算でき、その総数は、次の式で求められます。

$$_{(n+r-1)}C_r。$$

問題

1. チーズ、チーズ入りビーンズ、レブエルタス、ロロコ入りリーズの中から、次の条件で、6つのププサを注文する方法はいくつあるか求めましょう。
   a) 何の制限もない時。
   b) 少なくとも、各種類から1つは注文しなければならない時。
   c) 少なくとも、レブエルタを3つ注文しなければならない時。
   d) チーズを2つ注文し、レブエルタは多くても2つまでしか注文できない時。

各種類をひとつずつ確保した後、さらに2つをどの種類からでも注文できます。

2.次の条件で、方程式 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$ のすべての解を求めましょう。
   a) 負でない整数の時。
   b) 正の整数の時。

問題1の設問b と似た方法で、考えることができます。

ユニット7

201

達成の目安

3.8 同じもののグループから選ばなければならない時の、数の数え方の問題を解くために仕切りを使ってみましょう。

学習の流れ：

この課の最後の授業では、仕切りと呼ばれるテクニックのモデル化において組み合わせを応用します。これは、全体の中で可能な分割の方法を求めるのに役立ちます。分割されたそれぞれの中には、同じものが入ります。

ねらい：

導入問題は、分析的な方法で解くことができます。しかし、かなりの困難さが伴いますので、仕切りを使って解を提起することで、容易に理解できるようになります。しかしながら、この考えに到達するまでに、教師が関与することが必要になることがあります。そのため、この授業にはアスタリスクが付けられています。

問題の解き方：

1a) ものは6つ、また種類は4つ異なるので、(4 – 1) 個の仕切りを置くことができます。つまり、6つのププサを注文する方法の総数は、${}_{(6+3)}C_6 = {}_9C_6 = 84$ 通りになります。

1b) 注文できる6つのププサの内、4つのププサ（各種1つずつ）を減らすと、4つの異なる種類のものから2つのププサを選べばよいので、3つの仕切りを置くと、ププサを注文する方法の総数は ${}_{(2+3)}C_2 = {}_5C_2 = 10$ になります。

1b) 注文できる6つのププサの内、3つのププサ（3つのレブエルタスは必ず含む）を減らすと、4つの異なる種類のものから3つのププサを選べばよいので、3つの仕切りを置くと、ププサを注文する方法の総数は${}_{(3+3)}C_2 = {}_6C_2 = 15$ になります。

1d) まず、チーズ2つを入れてププサを注文する方法の総数を計算しなければなりません。そうすると、総数からププサを2つ減らさなければならなくなる上、 仕切りをひとつ減らさなければなりません。 これ以上チーズのププサを注文できないので、チーズのププサを2つ、それ以外の種類のものを4つ注文する方法の総数は、${}_{(4+2)}C_4 = {}_6C_4$ 通りになります。一方、子の総数から、少なくとも3つのレブエルタスを買う場合、総数から5つのププサを減らす（チーズ2つとレブエルタス3つ）ことで計算でき、その方法は、${}_{(1+2)}C_1 = {}_3C_1$ 通りになります。最後に、補集合での数え方を使うと、チーズのププサを2つ注文する方法の総数から、チーズのププサ2つとレブエルタスを少なくとも3つ注文する方法の総数を引くと、答えはチーズのププサ2つと多くても2つのレブエルタスを注文する方法の総数になり、${}_6C_4 - {}_3C_1 = 15 - 3 = 12$ 通りとなります。

2a) ものをそれぞれ1と考えると、仕切りは、それぞれの変数 (x_1, x_2, x_3, x_4) にどれくらいの1が対応するかを決定します。そこで、8つのもの（8つの1）と (4 – 1) この仕切り（4つの変数、またはものの異なる種類）を考えることができるため、負ではない整数を使った方程式の解の総数は（変数の値は0でもよく、それは、仕切りが重なる時に起きます）、${}_{(8+3)}C_8 = {}_{11}C_8 = 165$ 通りとなります。

2b) この場合、各種類（各変数で）のあるもの（ひとつの1）を確実にすることだけが必要で、4つのものを減らすと、4つものが残り、3つの仕切りを加えると、方程式の解の総数は、${}_{(4+3)}C_4 = {}_7C_4 = 35$通りとなる。

3.9 復習問題

組み合わせの数え方を使って、次の問題を解きましょう。

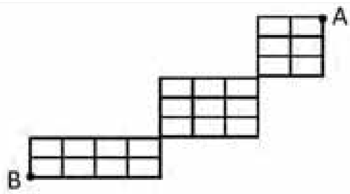
1. 同じカードが3枚があり、色の違う5枚の封筒を使うことができます。カードを封筒に入れるのに何通りの入れ方があるか求めましょう。

2. ひとつの六角形の3つの頂点を合わせる方法は何通りあるか求めましょう。

3. 長さが8の2進チェーン（0と1）に、1が最高で3個ある方法は何通りありますか？

4. 女の子が6人、男の子が3人います。男の子3人が他の男の子とペアになってはならない場合（常に少なくとも女の子ひとりが間に入り、男の子同士が離れていなければならない）、何通りの並び方があるか求めましょう。

5. 次のマス目が書かれた表で、Aを出てBに到着するのに、最短距離となる道順の数を求めましょう。



6.問題を解きましょう。

a) ニュートンの二項定理 $(x+y)^n=\sum_{r=0}^{n}({}_nC_r)x^{n-r}y^r$ において、$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r{}_nC_r=0$ の関係を証明するために、$x=1$ および $y=-1$に置き換えましょう。

b) 設問a の関係を用いて、$\sum_{r=2}^{2020}(-1)^r({}_{2020}C_r)$ の値を求めましょう。

7. 7人の友達グループが、アイスクリーム屋でアイスを買わなければなりません。アイスクリーム屋に異なる7つの味のアイスクリームがある場合、友達グループの各メンバーがアイスを1個買う方法は何通りあるか求めましょう。

達成の目安

3.9 組み合わせに相当する問題を解きます。

問題の解き方：

1. カードを入れる3つの封筒の選び方の総数を求めればいいのです。そのためには、5つの封筒の中から3つの求めた方を数えます。つまり、その総数は、$_5C_3 = 10$ 通りになります。

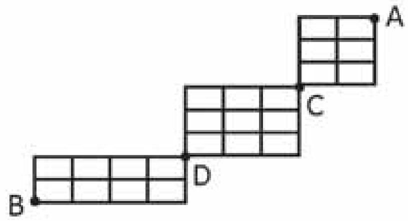
2. 六角形には、一直線上にある3つの頂点はないので（あれば六角形ではない）、6つの頂点から3つを選べばいいのです。つまり、これを計算すると、$_6C_3 = 20$ 通りになります。

3. この問題には、1が0個、1個、2個、もしくは3個の4つの場合があり、1が8つの位置のどこに入るかを見つけ出すだけでいいのです。1が0この場合、その方法は、$_8C_0$ 通りになります。1が1個の場合は、$_8C_1$ 通り、1が2個の場合、$_8C_2$ 通り、そして最後に1が3つの場合、$_8C_3$ 通りあります。つまり和の法則から、この問題の状況において、2進チェーンの総数は、$_8C_0 + {_8C_1} + {_8C_2} + {_8C_3} = 1 + 8 + 28 + 56 = 93$ 通りになります。

4. まず初めに女の子を並べます。女の子には何の制限もないので、6!で計算できます。次に、6人の女の子を並べた後、先頭、最後、そして両隣が女の子となるスペースに男の子を配置する選択肢が7つあります。 そして、男の子が隣同士にならないようになるには、それらの7つの位置に3人の男の子を配置すればいいのです。これは、$_7P_3$ 通りの方法があるので、積の法則から、この問題の条件下で男の子を並べる方法の総数は、$6! \times {_7P_3} = 720 \times 210 = 151,200$ 通りになります。

場所 1	女の子	場所 2	女の子	場所 3	女の子	場所 4	女の子	場所 5	女の子	場所 6	女の子	場所 7

5. AからC、次にCからD、最後にDからBに行く道順の数を計算するだけでいいのです。すると、AからCに行く道順の総数は、$_{(2+3)}C_2$ とおり、CからDに行く道順の総数は、$_{(3+3)}C_3$ 通り、DからBに行く道順の総数は、$_{(4+2)}C_4$ 通りであるので、積の法則から、A からBに行く道順の総数は、$_5C_2 \times {_6C_3} \times {_6C_4} = 10 \times 20 \times 15 = 3,000$ 通りになります。



6a) ニュートンの二項定理の式を考えながら、$x = 1$ と $y = -1$ に置き換えます。

$$(1 + -1)^n = (_nC_0)1^n + (_nC_1)1^{n-1}(-1) + (_nC_2)1^{n-2}(-1)^2 + \cdots + [_nC_{(n-1)}]1^1(-1)^{n-1} + (_nC_n)(-1)^n$$

$$0 = {_nC_0} + [_nC_1 \times (-1)] + (_nC_2 \times 1) + \cdots + [_nC_{(n-1)} \times (-1)^{n-1}] + [_nC_n \times (-1)^n]$$

したがって、$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r {_nC_r} = 0$ となります。

6b) 6a) の公式において、$n = 2020$ と考えると、つぎのようになり、

$$\sum_{r=0}^{2020}(-1)^r {_{2020}C_r} = (-1)^0 {_{2020}C_0} + (-1)^1 {_{2020}C_1} + \sum_{r=2}^{2020}(-1)^r (_{2020}C_r) = 0$$

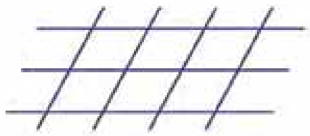
従って、$\sum_{r=2}^{2020}(-1)^r (_{2020}C_r) = 2020 - 1 = 2019$ となります。

7. 7つものを買うのに、種類が7つとも違っていいので、(7 – 1) 個の仕切りを加えると、アイスを買う方法の総数は、$_{(7+6)}C_7 = {_{13}C_7} = 1,716$ 通りになります。

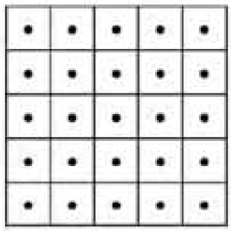
3.10 ユニット末問題

最も適切と思う数え方を使って次の問題を解きましょう。

1. 右の図に、いくつの平行四辺形があるか求めましょう。横の線と斜めの線は、それぞれ平行です。



2. 次の絵が描かれたボードの点の配置を考えながら、



マス目の辺に平行となる隣辺を持つ、直角三角形の頂点を3点を選ぶ方法の数を求めましょう。

3. 8人の生徒のグループの中から、2人組のグループを4つ作ります。次の条件で、何通りのグループを作ることができるかを求めましょう。
   a) それぞれのグループは、異なるテーマで話をします。その内容は、男女平等、民主主義、環境、性に関する統合教育です。
   b) すべてのグループは、包括性について議論しなければなりません。

4. 各グループの人数が次の場合、9人の人を3つのグループに分ける方法は何通りあるか求めましょう。

a) 2, 3 および 4.　　b) 3, 3 および 3.　　c) 2, 2 および 5.

5.組み合わせを応用しながら、授業2.10で学習した公式 $\frac{n!}{r_1!\,r_2!\,\ldots\,r_k!}$ を証明しましょう。

6.公式 $_pC_q = \frac{p!}{(p-q)!q!}$ を応用しながら、等式 $_nC_r = \frac{n(n-1)}{r(r-1)}[{}_{(n-2)}C_{(r-2)}]$ を証明しましょう。

ユニット7

達成の目安

3.10 数を数える方法に対応する問題を解きましょう。

問題の解き方：

1. 平行四辺形を作るには、斜めに平行な2本の線と、水平に平行な2本の線が必要です。つまり、4本の斜線から2本の線、3本の水平線から2本の線を選ぶことと同じで、これを計算するには、それぞれ $_4C_2$ および $_3C_2$ 通りあります。積の法則から、作ることができる平行四辺形の総数は、$_4C_2 \times {}_3C_2 = 6 \times 3 = 18$ 通りになります。

2. ひとつの長方形からは4つの直角三角形を作ることができるので、まず、点を使って作ることができる長方形の総数は、$_5C_2 \times {}_5C_2$ （縦の5つの点の内2つ、横の5点の内2つが必要）通りになります。つまり、マス目の書かれた表を使って作ることができる直角三角形の総数は、$_5C_2 \times {}_5C_2 \times 4 = 400$ 通りになります。

3a) 最初のテーマに対しては、生徒をグループ分けする方法の数は、$_8C_2$ 通りあり、次に2つ目のテーマに対しては、$_6C_2$ 通り、3つ目のテーマに対しては、$_4C_2$ 通り、4つ目のテーマに対しては、$_2C_2$ 通りあります。そして、テーマを与える方法の総数は、$_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 = 28 \times 15 \times 6 \times 1 = 2{,}520$ 通りになります。

3b) この状況は、並べることなく、グループを分けるだけに等しいので、テーマを振り分けることには違いがないため、前の設問のそれぞれの分け方を4!回数えます。つまり、テーマが包括性についての時、包括性について話すグループを作る方法の総数は、$_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \div 4! = 28 \times 15 \times 6 \times 1 \div 24 = 105$ 通りになります。

4a) 9人の人の中から、$_9C_2$ 通りある2人のグループに入る人を選ぶと、7人残り、その中から、$_7C_3$ 通りある3人のグループに入る人を選ぶと、最後のグループに入る4人が余ります。つまり、積の法則により、グループを作る方法の総数は、$_9C_2 \times {}_7C_3 \times {}_4C_4 = 36 \times 35 \times 1 = 1{,}260$ 通りになります。

4b) 4a)と同様に、$_9C_3 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 = 84 \times 20 \times 1 = 1{,}680$ 通りのグループがありますが、この場合、3つのグループが似ています（各グループに3人のメンバーがいるため）。つまり、各まとまりを3!回数えると、$1{,}680 \div 3! = 280$ 通りのグループの分け方があります。

4c) 前の設問と似た理由付けを使うと、この場合、グループ分けする方法の総数は、$_9C_2 \times {}_7C_2 \times {}_5C_5 \div 2! = 36 \times 21 \times 1 \div 2 = 378$ 通りあります。

5. n つのスペースが空いていることを考慮すると、はじめの r_1 個の同じものの位置を選び方は、$_nC_{r_1}$ 通りあり、次に、r_2 個の同じものには、$_{(n-r_1)}C_{r_2}$ 通りの位置の選び方があり、同様に、同じものの最後のグループに到達するまで同じである、次に、積の法則を応用すると、ものの並べ方の総数は、

$_nC_{r_1} \times {}_{(n-r_1)}C_{r_2} \times \ldots \times {}_{(n-r_1-r_2-\ldots-r_{k-1})}C_{r_k} = \dfrac{n!}{r_1!\, r_2! \ldots r_k!}$ となります。

6. $_nC_r = \dfrac{n!}{(n-r)!r!} = \dfrac{n(n-1)!}{(n-r)!r(r-1)!} = \dfrac{n}{r} \times \dfrac{(n-1)!}{[(n-1)-(r-1)]!(r-1)!} = \dfrac{n}{r}[{}_{(n-1)}C_{(r-1)}]$。

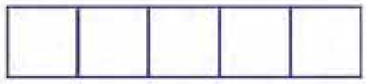
そして、前の結果を $[{}_{(n-1)}C_{(r-1)}] = \dfrac{n-1}{r-1}[{}_{(n-1)}C_{(r-1)}]$ に応用すると、次のとおりになる

$_nC_r = \dfrac{n}{r}[{}_{(n-1)}C_{(r-1)}] = \dfrac{n(n-1)}{r(r-1)}[{}_{(n-2)}C_{(r-2)}]$。

3.11 ユニット末問題

最も適切と思う数え方を使って次の問題を解きましょう。

1. 図の5つの四角を、赤、緑、青で塗ります。その際、2つの隣り合う四角（ひとつの四角が別の四角の横にある状態）が、違う色になるようにします。また、すべての色を使用する必要はありません。それぞれの場合に、何通りの塗り方があるか求めましょう。



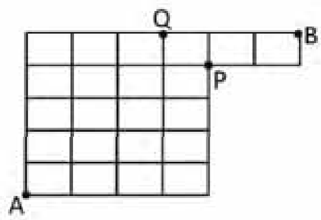
   a) 制限なし　　b) 左右対称にする　　c) 緑と青のみで塗る

2. 1、2、3、4、5の重複しない数字で成り立ち、両端の2つの数字が偶数にならないような列の数を求めましょう。

3. 複数の空港があるある国において、ある航空会社は、その国のどの空港でも2か所を結ぶ便を運航しています。その航空会社は、42の異なる便（それぞれの便は異なる2つの空港を結んでいます）を運航していることが分かっている場合、空港Aから空港Bを結ぶ飛行は、空港Bから空港Aを結ぶ飛行とは別と考えることを考慮した上で、その国にはいくつ空港があるかを求めましょう。

4. 一匹のかえるが階段の10段目にいます。そのカエルは、一段ずつ跳んで移動します（上または下に）。カエルが10回目に跳ぶ時、14段目のいるには、何通りの方法がありますか？

5. 次の条件において、最短ルートで行く方法は何通りありますか？



   a) Pを通って、AからBに行く。

   b) Qを通って、AからBに行く。

   c) AからBに行く。

6. ${}_{15}C_0 + {}_{16}C_1 + {}_{17}C_2 + {}_{18}C_3 = {}_{19}C_3$ を証明しましょう。

最初の項 ${}_{15}C_0$ (= 1) を、${}_{16}C_0$ (= 1) に置き換え、次に、公式 ${}_pC_q + {}_pC_{(q+1)} = {}_{(p+1)}C_{(q+1)}$ を何度も当てはめます。

204

達成の目安

3.11 数を数える方法に対応する問題を解きましょう。

問題の解き方：

1a) 最初の四角には、3つの色の内、何色を塗っても構いません。次に、2つ目には、最初の色と違う色でなければならないので、残りの色の内、どちらかを塗ります。3つ目には、2番目の四角に塗った色を塗ることはできませんが、最初に使った色をもう一度使うことができます。そのため、選択肢は2つあります。このように、これに続く四角にも、常に2つ色の選択肢があります。つまり、積の法則により、塗り方の総数は、$3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$ 通りになります。

1b) 設問1aと同様に、最初の四角には3つの選択肢がありますが、最後の四角は，最後の四角には同じ色画になります。2つ目の四角には、2つの選択肢があり、4つ目の四角も同じ色になります。3つ目の四角には2つの選択肢があるので、左右対称に色を塗る方法の総数は、$3 \times 2 \times 2 = 12$ 通りあります。

1c) 2色のみを考えると、最初の四角には、選択肢が2つあります。2つ目の四角は、もう一つの選択肢しかありません。3番目の四角には、2番目で選んでいない方の色を塗り、以降同様に考えると、選択肢は、$2 \times 1 \times 1 = 2$ となり、2つしか選択肢はありません。

1a)

3	2	2	2	2

1b)

3	2	2	1	1

1c)

2	1	1	1	1

2. 偶数の数字が3つあるので、最初の端には3つの選択肢があり、反対の端には、2つの選択肢があります。次に、真ん中の選択肢は、それぞれ3、2、1個の選択肢があります。つまり、積の法則により、列の総数は、$_3P_2 \times 3! = 36$ 通りになります。

3 3 2 1 2

3. 空港の数を n とすると、n か所の空港間を運航する便の総数は、$_nP_2$ （出発地としては n 個の選択肢があり、終着地としては $n-1$ 0 個の選択肢があります） 。この数が42にならなければならないので、次に、公式 $_nP_2 = \frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1) = 42 \Rightarrow n^2 - n - 42 = 0$ を解くと、$\Rightarrow (n-7)(n+6) = 0 \Rightarrow n = 7$、つまり、この街には、7つの空港があることになります。

4. カエルは4段登らなければならないので、x 回上に跳び、y 回下に跳ぶ場合、連立方程式を満たさなければなりません。

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

そこでは、$x = 7$、$y = 3$ とできるので、上に7回跳び、下に3回跳びます。つまり、カエルが14段目に到達する方法の総数は、$_{10}C_3 = 120$ 通りあります。

5a) AからPに行く道順の総数は、$_{(4+4)}C_4$ 通りで、PからBに行く道順は、$_{(2+1)}C_2$ 通りあります。つまり、積の法則より、道順の総数は、$_8C_4 \times {_3C_2} = 70 \times 3 = 210$ 通りになります。

5b) 設問5aと同様に、道順の総数は、$_8C_3 \times {_3C_3} = 56 \times 1 = 56$ 通りになります。

5c) AからBに到着するためには、Pを通るか、Qを通るかの2つの方法しかありません。どちらの場合も、和の法則により、道順の総数は、設問5a と 5bの結果の和で計算します。つまり、$210 + 56 = 266$ 通りになります。

6. $_{15}C_0 + {_{16}C_1} + {_{17}C_2} + {_{18}C_3} = {_{16}C_0} + {_{16}C_1} + {_{17}C_2} + {_{18}C_3} = {_{17}C_1} + {_{17}C_2} + {_{18}C_3} = {_{18}C_2} + {_{18}C_3} = {_{19}C_3}$

ユニット8. 確率

このユニットのねらい

確率に関する基本的な概念を適用して、日常生活の特定の状況下における周辺の問題を解決し、正しく適切な決断を下すために確率を計算します。

関連と展開

高校2年

ユニット7：場合の数

- 集合論
- 順列
- 組み合わせ

↓

ユニット 8：確率

- コルモゴロフの公理
- 条件付き確率

このユニットでの学習計画

レッスン	時間	授業
コルモゴロフの公理	1	1. 導入
	1	2. 確率
	1	3. 確率の加法定理と共通部分
	1	4. 確率の加法定理の応用
	1	5. 確率の公理 （理論上）
	1	6. 補集合の確率
	1	7. 復習問題
条件付き確率	1	1. 条件付き確率
	1	2. 様々な条件付き確率
	1	3. 条件付き確率の応用
	1	4. 条件付き確率に関する問題
	1	5. 独立試行
	1	6. 独立試行の確率　パート1
	1	7. 独立試行の確率　パート2
	1	8. 復習問題
	2	9. このユニットの問題
	1	ユニット8の テスト
	2	第4期のテスト

全17コマ + ユニット8のテスト + 第4期のテスト

各レッスンの要点

レッスン1：コルモゴロフの公理
確率の使用の必要性を導入します。その歴史的な動機から、頻度論的および古典的確率論の焦点を通って、確率論の最も顕著な成果を構築して正式に論じることを可能にする、これまでの全ての焦点を基礎とした公理を確立するまでに至ったのです。

レッスン2：条件付き確率
確率論を確立した後は、条件付き確率の概念についての取り組みを続けるのも良いでしょう。 そこから、全確率の定理とベイズの定理に関する成果を、直感的に使用できるまで、様々な問題に取り組みましょう。この課は、特定の事象の様々な状況によって適切な意思決定を確実にするための、ある程度の確実性のある推測を可能にする推計統計学あるいは統計的推論の部分を含みます。

レッスン 1 コルモゴロフの公理

1.1 導入方法

道具

- コイン、ペン、トランプ



課題

- ノートに 3 行 11 列の表を描き、1 列目にはタイトル、予測、結果と書き、1 行目には 1 から 10 までの数字を書きます。
- 2 行目には、コインを投げるときに予測できる結果を書きます。最初の投げで表が出ると思われる場合は、1 番の下に「表」と書きます。それ例外の場合は「裏」と書きます。記載された例を参考に、ノートの予測欄を全て書きましょう。

投げ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
予測	表									
結果										

- そしてコインを 10 回投げて結果欄を書きます。以下に答えてください。

a) コインを10回投げると10回表が出る方か、それとも10回投げると6回表と4回裏が出るのかが可能なのかを分析します。
b) コインを投げることで起こりうる全ての結果は何ですか。
c) コインを10回投げたとき、表が出る回数は何回でしたか。何回裏が出ましたか。
d) 結果で出た表の数を10で割ります。（相対度数）

定義

コインを投げる時、得られる結果を確実に知ることはできませんが、しかしより正確な結果とそうでない結果にパラメータを取得する方法があるかもしれません。予測を行うために結果の発生の大小の確実性を数字で表す方法を勉強する数学の分野は、**確率**として知られています。

データの集合を生み出す過程（コインを投げるなどの結果）は、**実験**として知られています。実験を行うときに得られる可能性のある結果の集合は、**標本空間**として知られています。標本空間の要素は**根元事象**として知られ、標本空間のあらゆる部分集合は**事象**と呼ばれます。

特定の結果が得られた回数を実験が行われた合計回数（相対度数）で割って得られた値は、**実験的確率**として知られています。

$$P_e(A) = \frac{\text{事象Aにおいて起こる回数}}{\text{実験で行う合計回数}}.$$

問題

トランプ（束）を使用して、10 枚のカードを引いたときに各カードで出る色を予測します（カードを引いた後は戻せません）。次に、実験を行い、結果を上記の課題で行ったものと同じように表に書き込みます。

a) 束から引かれたカードの色の実験の標本空間は何ですか。
b) 10 枚のカードを引きその色を確認する実験で発生し得る、少なくとも 5 つの根元事象を例示してください。
c) 得られた結果に基づいて、カードを引くときに黒になる実験的確率を計算します。

達成の目安：

1.1 確率の概念、試行、標本空間、事象、実験的確率また、根本事象を定義し適用してください。

学習の流れ：

このユニットの最初の授業では、確率論を設定するための動機となる文脈が与えられ、特定の事象の発生の有無をある程度確実に予測できるということが考えられます。

ねらい：

課題では、生徒は試行と向かい合い、ある程度運の定義を関連付けて、何らかの事象の発生の予測を試みることが期待されます。このことから、実験的確率の定義は相対度数として定めることができます。

問題の解き方：

a) カードが赤の場合はRで、カードが黒の場合はNで表すと、実験は 1 枚のカードを引くことであるため、標本空間には赤または黒の 2 つの選択しかありません。つまり、S = {R, N}

b) この項目は標本空間の集合の要素（この場合 $2^{10} = 1024$ の要素があります）として見られる事象の概念の理解を確認するものであり、この中でRRRRRNNNNN（最初に赤 5 と次に黒 5）、RNRNRNRNRN (赤 5 と黒 5 の散在)、NNNNNRRRRR、NRRNRRNRRN、NNNNNNNNNN、などの発生する可能性のある 5 つの根元事象のみを考慮します。教師は、生徒が選択する事象が、10枚のカードを引いてその色を見る実験の標本空間と一致していることを確認する必要があります。

c) これは、実験の実行時に与えられた結果に依存しますが、理論的には、実験的確率（相対度数）が $\frac{1}{2}$ または 0.5 に近づくと期待できます。しかしながら、この値からかけ離れている場合もありますが、ごくわずかです（発生する場合）。

1.2 確率

導入問題

コインを一度投げる実験を考えてみましょう。
a) 表が出る可能性は裏が出る可能性よりも高いと思いますか。
b) 表が出る可能性の数はいくつで表せますか。

解法

a) コインを投げるとき、考えられる結果は、表が出るか裏が出るかの 2 つだけです。表裏どちらも出る可能性は同等です。

b) 考えられる結果は 2 つだけであり、表が出るには 1 つの方法しかありません。さらに、どちらの結果になる可能性も等しくあり、このことは分数で表すことができます。

$$\frac{1}{2}$$

1 ← 表が出る方法
表か裏かの 2 つの考えられる結果 → 2

定義

実験において、各根本事象（それぞれ考えられる結果）が発生する可能性が同じであることが成り立つ場合、事象A（有利なケース）つまりn(A) の要素全体は、標本空間S（可能性のあるケース）つまりn(S) の要素全体の中から割って得られる値で、**確率論**として知られています。さらに：

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}.$$

例

サイコロを振るときに偶数が出る確率を計算しましょう（目の数が偶数です）。標本空間S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} を考えます。

事象A = "偶数が出る" と示す場合、この事象はA = {2、4、6} として表すことができます。

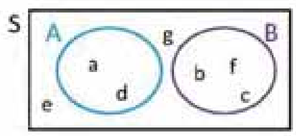
したがって、$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ となります。

問題

1. 1 つのサイコロを 2 回振り、両方とも 3 が出る確率を定めてください（目の数が3です）。

2. 2 つのサイコロを振るときに、（両方のサイコロからの）目の数の合計が 7 になる確率を定めてください。

3. 標本空間（S）を集合として考慮し、次のベン図を分析します。各根本事象の発生する確率が同じである場合は、次のように解きます。
   a) Aの確率論を定めてください。
   b) Bの確率論を定めてください。



4. 束から引くとき赤いカードを引く事象の確率論を計算し、それを実験的確率と比較します。実験的確率については前の授業を使用すること。

207

達成の目安：

1.2 特定の状況の確率論を計算してください。

学習の流れ：

実験的確率を勉強した後は、確率論を定義することができます。この取り組みは集合の濃度の考え方を使用し、そのためこの焦点は形式的で集合の理論から確率論の結果を証明するのに役立ちます。

ねらい：

結論として生徒は、有利なケースを集合の濃度A（事象A）に関連付け、可能性のあるケースを標本空間の濃度（集合S）に関連付けることができると期待されます。この関係は、例で具体化されます。

問題の解き方：

1. 標本空間S：1つのサイコロを2回振る結果、と考えます。そして、表記A： 3は1回目と2回目に1つのサイコロを振り出る目です。

$n(S) = 6 \times 6 = 36$（積の法則により、サイコロを2回振る場合、毎回6つの選択肢があります）。

$n(A) = 1 \times 1 = 1$（どちらの場合も3が出る方法は1つだけです）

したがって、$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{36}$となります。

2. 標本空間S：2つのサイコロを振る結果、と考慮します。

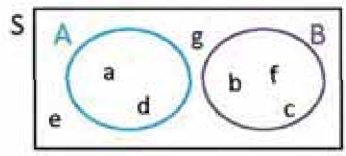
A = {(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)}、として表記され、最初の番号は1つのサイコロに対応し、2つ目の番号はもう1つのサイコロに対応します。

$n(S) = 6 \times 6 = 36$（前の問題と同じ標本空間です）そして $n(A) = 6$ となります。

したがって、$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ となります。

3a) $n(S) = 7$ y $n(A) = 2$、したがって $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{7}$となります。

3b) $n(S) = 7$ y $n(B) = 3$、したがって $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{7}$となります。



4. 標本空間S：束から1枚のカードをひくこと、と考慮します。

そして、表記A：赤いカードを引くこと、とします。

$n(S) = 52$（トランプは合計52枚です）そして $n(A) = 26$（束には26枚の赤いカードがあります）。

したがって、$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$ となります。

実験的確率は前の授業のデータより計算でき、黒のカードは前の授業でしたため、この授業では赤いカードが求められました。したがって、実験的確率と確率論を区別することが可能です。結果を比較すると、非常に近いことが期待できます（独立したケースを除く）。

1.3 共通部分と確率の加法定理

導入問題

1 つのサイコロを 1 回振るとし、次の事象が定義されます：

A：1、2 または 3 が出る。　　B：1、3 または 5 が出る。

a) 事象「AまたはBが発生する」は何を表しますか。その確率を求めましょう。
b) 事象「AとBが発生する」は何を表しますか。その確率を求めましょう。

解法

a) AまたはBが発生する事象は、サイコロを振り出る目が 1、2、3、または 5 を意味します、つまり、A∪B = {1, 2, 3, 5} となります。よって、有利なケースは 4 で、可能性のあるケース（1 つのサイコロを振る）は 6 です。したがって、$P(A \text{ o } B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ となります。

b) AとBが発生する事象は、サイコロを振り出る目が 1 または 3 を意味し（AとBの両方を満たすよう）、つまり、A∩B = {1, 3} となります。よって有利なケースは 2 で可能性のあるケースは 6 となります。したがって、$P(A \text{ y } B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ となります。

まとめ

標本空間(S)のあらゆるAとBの 2 つの事象は、「AとBの両方で発生する」事象で定義され、A∩B と表し、「事象A キャップB」と読みます。

2 つの事象の共通部分が空の場合、A∩B = ∅ と表し、**事象AとBは排反である**、と言います。

また、「事象Aまたは事象Bで発生する」と定義される事象はA∪Bで表され、「事象Aカップ B」と読みます。
したがって $n(A∪B) = n(A) + n(B) - n(A∩B)$ を満たすのは：

$$P(A∪B) = \frac{n(A∪B)}{n(S)} = \frac{n(A)+n(B)-n(A∩B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A∩B)}{n(S)} = P(A) + P(B) - P(A∩B).$$

事象AとBが排反であるとき、次のようになります：$P(A∪B) = P(A) + P(B)$

例

52枚のトランプの束からカードを引き「エース」または 7 になる確率はどれくらいですか。

事象は次のように表すことができます。　A：カードは「エース」　　B：カードは 7

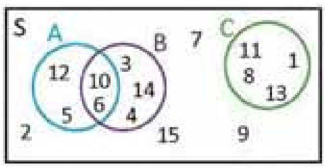
$n(A) = 4$（束には4枚の「エース」があります）、$n(B) = 4$ (束には4枚)
「エース」または 7 は A∪B であり A∩B = ∅ であるため、したがって：

$$P(A∪B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13}.$$

問題

1. 2 つのサイコロを振るときに、目の数を加算し結果が 5 または 7 になる確率を解きましょう。

2. 標本空間(S)の事象A、BとCを考慮し、ベン図を分析して解いてください：
a) $P(A∩B)$　　b) $P(A∪B)$　　c) $P(A∩C)$　　d) $P(A∪C)$
e) どの事象が排反で、どれがそうではありませんか。



3. 3 人の女の子と 3 人の男の子が整列するとき、2 人の特定の女の子が常に一緒になり、2 人の特定の男の子が常に一緒になる確率を解きましょう。

達成の目安：

1.3 2 つの排反または排反でない和事象に加法定理を適用して確率の問題を解決しましょう。

学習の流れ：

確率論の定義を確立した後で、これから集合の濃度の特徴を勉強し、確率の加法定理を確かめていきます。

ねらい：

結論として、確率論の定義を利使用し加法定理を導きます。例では、この結果を使用する具体的な方法が示されています。

問題の解き方：

1. A：加算の結果は 5 、B：加算の結果は 7、ということを考慮します。

次に、A = {(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)}、よって、$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

また、$P(B) = \frac{1}{6}$, 5 と 7 は同時には出ないため、したがって、AとBは排反、したがって、

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{5}{18}$ となります。

2a) $P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{2}{15}$.

2b) $P(A) = \frac{4}{15}$, $P(B) = \frac{5}{15}$ 、よって、$P(A \cup B) = \frac{4}{15} + \frac{5}{15} - \frac{2}{15} = \frac{7}{15}$.

2c) $P(A \cap C) = \frac{n(A \cap C)}{n(S)} = \frac{0}{15} = 0$.

2d) $P(C) = \frac{4}{15}$ よって、$P(A \cup C) = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$.

2e) AとC、BとCは排反であり、AとBは排反ではありません。

3. 標本空間S：1 列に 6 人の子どもを整列する方法と考えます。そして、A：特定の 2 人の女の子と 2 人の男の子がいつも一緒と表します。

$n(A) = 4! \times 2! \times 2!$ y $n(S) = 6!$ 、したがって $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4! \times 2! \times 2!}{6!} = \frac{2}{15}$ となります。

1.4 確率の加法定理の応用*

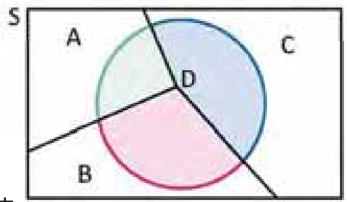
導入問題

ある企業は携帯電話、タブレット、パソコンを含む 500 台のデバイスを製造しています。この 500 台のデバイスの中で欠陥のある携帯電話の確率は $\frac{1}{20}$、欠陥のあるタブレットである確率は $\frac{3}{125}$、欠陥のあるパソコンである確率は $\frac{1}{50}$となります。500 台の製品の 1 つを選択するとき、それが欠陥である確率を解いてください。

解法

事象を考慮します。　A：携帯電話　B：タブレット　C：パソコン

事象D：欠陥製品；選択肢は 3 つのみです。つまり欠陥のある携帯電話、欠陥のあるタブレットまたは欠陥のあるパソコンかです。



右のベン図を見ると、次のようになります。
$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C)$

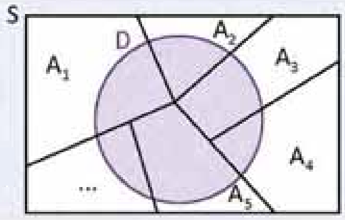
さらに、$P(D \cap A) = \frac{1}{20}$, $P(D \cap B) = \frac{3}{125}$, $P(D \cap C) = \frac{1}{50}$ であるとこが分かります。

したがって、500 台の製品の中に 1 台欠陥が出る確率は次のとおりです。

$P(D) = P[(D \cap A) \cup (D \cap B) \cup (D \cap C)] = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) = \frac{1}{20} + \frac{3}{125} + \frac{1}{50} = \frac{25+12+10}{500} = \frac{47}{500}$ です。

まとめ

排反であるいくつかの特定の事象 $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ で分割された事象Dの確率を計算するには、全てのA_iの和事象が事象Dを構成するので、次のように計算します：



$P(D) = P[(D \cap A_1) \cup (D \cap A_2) \cup \ldots \cup (D \cap A_n)] = P(D \cap A_1) + P(D \cap A_2) + \ldots + P(D \cap A_n)$

例

抽選のために 4 つの異なる色の紙を使い、全体の $\frac{1}{6}$ の紙が当たりになるようにします。全ての紙の $\frac{1}{18}$ の当たりが緑で、$\frac{1}{36}$ の当たりが赤く、そして $\frac{1}{18}$ の当たりが紫です。黄色の紙で、当たり引く確率を解きましょう。

事象を考慮します。　D：紙は当たりが出ます。　A_1：紙は緑です。
A_2：紙は赤です。　A_3：紙は紫です。　A_4：紙は黄色です。

よって、$P(D) = P(D \cap A_1) + P(D \cap A_2) + P(D \cap A_3) + P(D \cap A_4)$

次に、$P(D \cap A_4) = P(D) - P(D \cap A_1) - P(D \cap A_2) - P(D \cap A_3) = \frac{1}{6} - \frac{1}{18} - \frac{1}{36} - \frac{1}{18} = \frac{1}{36}$

問題

1. 性別や職業についてアンケートされた人々から、全人数の、$\frac{1}{3}$ が女性医師で、$\frac{1}{6}$ が女性数学者で、$\frac{1}{16}$ が他の活動で働く女性であると分かります。調査対象の人物が選ばれるときに、その人物が女性である確率を解きましょう。

2. ある小児科クリニックでは同じ数の女の子と男の子が診療され、全体の $\frac{1}{6}$ の診療される子どもが生後 12 か月以上の女の子です。生後 12 か月以下の女の子が診療される確率を求めましょう。

達成の目安：

1.4 分割できる事象の確率を求めましょう。

学習の流れ：

この授業では、確率のための加法定理の応用を分析し、別の事象を分割する事象の共通部分に適用します。

ねらい：

この応用は、結果に条件付き確率を関わらせる必要がある場合、全確率の法則とベイズの定理を後で取り組みするのに役立ちます。

問題の解き方：

1. 事象について考え、D：アンケートされる人が女性。　A_1：アンケートされる人が医者、

A_2：アンケートさせる人が数学者、A_3：アンケートされる人が他の活動で働く女性。

次に、$P(D) = P(D \cap A_1) + P(D \cap A_2) + P(D \cap A_3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{16} = \frac{16+8+3}{48} = \frac{27}{48} = \frac{9}{16}$.

2. 事象を考慮します。　D：女の子が診療される。　A_1：診療される女の子は生後 12 か月以上。

A_2：診療される女の子が生後12か月以下です。

よって、$P(D) = P(D \cap A_1) + P(D \cap A_2)$

次に、$P(D) = \frac{1}{2}$、診療される男の子と女の子の数は同じになります。

したがって、$P(D \cap A_2) = P(D) - P(D \cap A_1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$です。

この問題は、補集合の確率の応用として見ることができ（後の授業で見ることができます）、しかし、全事象の確率の解釈は複雑になり（この場合は女の子）1 つではなく、つまりこの事象は標本空間ではないため、このテーマで取り組まれます。

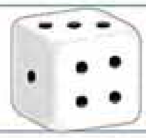
1.5 確率の公理（理論）

導入問題

1 つのサイコロを振る実験を考慮して、以下を解きます：

a) サイコロを振り 3 が出る確率を求めましょう。

b) サイコロを振り 1、2、3、4、5、または 6 が出る確率を求めましょう。



解法

標本空間を $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ と表します。

AとBを各問に対応する事象とします。

a) $A = \{3\}$ のようになりますので、したがって $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}$ です。

b) $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ のようになりますので、したがって $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{6} = 1$ です。

コルモゴロフの公理

標本空間Sの 2 つの事象AとBの場合、次のようになります：

1) $0 \leq P(A) \leq 1$。よって $A \subseteq S$ なので、$0 \leq n(A) \leq n(S)$ が成り立ちます。

2) $P(S) = 1$。この状況では、有利なケースは全ての可能性のあるケース、または $A = S$ です。

3) もし $A \cap B = \varnothing$ とすると $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ となります。

第 2 と第 3 の公理から、$P(S) = P(S \cup \varnothing) = P(S) + P(\varnothing)$、したがって $P(\varnothing) = 0$ となります。

例

コルモゴロフの公理第 3 から、A、B、およびCが標本空間Sの事象である場合を示し、$A \cap B = B \cap C = C \cap A = \varnothing$、なので $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ となります。

3 つの集合A、BおよびCは、次のことが成り立ちます：$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

なので $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$、よって第 3 の公理から：

$$P[(A \cup B) \cup C] = P(A \cup B) + P(C) \text{ --------- } (1)$$

そして $A \cap B = \varnothing$、よって第 3 の公理から：

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ --------- } (2)$$

したがって、(2)を(1)に代入すると、次のようになります

$$P(A \cup B \cup C) = P[(A \cup B) \cup C] = P(A) + P(B) + P(C)$$

同じように、事象$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$の各ペアがお互いに排反である場合、以下のようになります：

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

問題

1. 4 人の女性と 4 人の男性の間で5人のグループを作る場合の確率を求めましょう。
   a) 男性 2 人と女性 3 人で構成されます。
   b) 少なくとも 1 人の男性または少なくとも 1 人の女性で構成されます。
   c) 3 人または 4 人の女性で構成されます。

計算を単純化するために組合せの性質を使いましょう。

2. A、B、C、およびDを標本空間Sの事象とし、また $A \cap B = A \cap C = B \cap C = B \cap D = C \cap D = D \cap A = \varnothing$、$P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D)$ であることを証明します。

達成の目安：

1.5 コルモゴロフの公理を確認、適用しましょう。

学習の流れ：

これまでの授業では、頻度主義的確率と古典的確率に関する概念を扱い、そこから確率のいくつかの特性を推定しました。この授業では、確率論の展開の出発点としてコルモゴロフの公理を確立します。

ねらい：

確率の概念は直観的なアイデアから構築されており、コルモゴロフの公理は、以前の授業で提示された直感的な結果を形式的に確立します（これらの公理は歴史的に表されたものと同じ機能になります）。なので各公理の隣に「証明」が書かれ、それが証明でないとしても（公理は示されません）コルモゴロフの公理を形式化する直感的なアイデアになります。

問題の解き方：

1a) 事象A：グループは 2 人の男性と 3 人の女性で構成されます。

$n(S) = {}_8C_5$ と $n(A) = {}_4C_2 \times {}_4C_3$、よって $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{{}_4C_2 \times {}_4C_3}{{}_8C_5} = \frac{3}{7}$.

1b) この場合の事象A：グループは少なくとも 1 人の男性または少なくとも 1 人の女性で構成され、標本空間S を考慮すると、$P(A) = P(S) = 1$ (第 2 の公理より)

1c) 事象A：グループは 3 人の女性で構成され、B：グループは 4 人の女性で構成されます。

したがって、$A \cap B = \varnothing$、なので $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{{}_4C_3 \times {}_4C_2}{{}_8C_5} + \frac{{}_4C_4 \times {}_4C_1}{{}_8C_5} = \frac{3}{7} + \frac{1}{14} = \frac{1}{2}$

2. なので $(A \cup B) \cap (C \cup D) = [(A \cup B) \cap C] \cup [(A \cup B) \cap D] = (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap D) = \varnothing \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$、なので、第 3 の公理より：

$$P[(A \cup B) \cup (C \cup D)] = P(A \cup B) + P(C \cup D) \quad \text{-------} \ (1)$$

そして $A \cap B = \varnothing$ y $C \cap D = \varnothing$ となるので、よって第 3 の公理より：

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ y } P(C \cup D) = P(C) + P(D) \quad \text{-------} \ (2)$$

したがって、(2)を(1)に代入すると、次のようになります

$$P(A \cup B \cup C \cup D) = P[(A \cup B) \cup (C \cup D)] = P(A) + P(B) + P(C) + P(D)$$

この問題は 1 つの事象と他の 3 つを分けても解くことができるので、次に、授業の例で示した内容を適用します。

1.6 補集合の確率*

導入問題

サイコロを 3 回振るときに 1 の目が少なくとも 1 回出る確率を計算しましょう。

解法

事象を考慮します。A：3 回振るときに少なくとも 1 回 1 の目が出る、とすると事象は以下のように定義できます。

A^c = 3 回振り、1の目が出ない。

さらに、標本空間Sにおいて、$S = A \cup A^c$ y $A \cap A^c = \varnothing$ になるので、よって：

$P(S) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$、しかし$P(S) = 1$ (コルモゴロフの公理より)、なので $P(A) + P(A^c) = 1$

したがって $P(A) = 1 - P(A^c)$

次に、$n(S) = 6^3$ (サイコロを振る度に 6 通り選択肢があることを考慮します) そして $n(A^c) = 5^3$ (2、3、4、5 あるいは 6 の 5 通りの選択肢があります) よって、$P(A^c) = \frac{n(A^c)}{n(S)} = \frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216}$ です。

最終的に $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$

まとめ

Aを標本空間Sの中の事象とします。事象A^cは**余事象A**として知られ、また $P(A^c)$ は**余事象Aの確率**として知られています。次のようになります。

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

例

3 人の女の子が全員まとまらないよう、3 人の女の子と 3 人の男の子が一列に整列する確率を求めてください。

事象を考慮します。A：3 人の女の子はまとまりません。

よって A^c：3 人の女の子が全員まとまります。

次に $n(A^c) = 4!3!$ y $n(S) = 6!$

よって、$P(A^c) = \frac{n(A^c)}{n(S)} = \frac{4!3!}{6!} = \frac{1}{5}$したがって、$P(A) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

また、補集合を数えて有利なケースを見つけ、求められているものを直接計算することもできます。

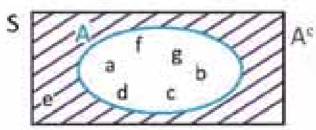
問題

1.ある機械で製造されたナットに欠陥がある確率は $\frac{1}{40}$ です。ではナットに欠陥がない確率を求めましょう。

2. コインを 10 回投げ、少なくとも 1 回表が出る確率を求めてください。

3. あるサイコロ遊びで 6 つのサイコロを振るとき、プレイヤーはどれかのサイコロで少なくとも「1の目」が出ると勝ちます。このサイコロ遊びで勝つ確率を求めてください。

4. 標本空間(S)で事象Aを考慮するとき、ベン図を分析して解いてください。



a) $P(A^c)$ b) $1 - P(A^c)$ c) $P(A \cap A^c)$ d) $P(A \cup A^c)$

達成の目安：

1.6 余事象の確率を計算し事象の確率を求めましょう。

学習の流れ：

コルモゴロフの公理を確立した後、補集合の確率での応用を勉強します。これは確率で非常に役立ち、その基礎は場合の数のユニットでも扱われました。

ねらい：

場合の数のユニットで解決された問題をおき、確率での応用のみを強調できるようにすることを目的としています。

問題の解き方：

1. 事象A：ナットに欠陥はない、そしてB：ナットに欠陥がある、とします。

よって $P(A) = P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{40} = \frac{39}{40}$ となります。

2. 事象A：10 回投げて少なくとも 1 回表が出る、とします。

なので、余事象A^c：10回投げても表が出ない（10回裏が出るのと同じです）とします。

したがって、$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{1}{2^{10}} = \frac{1023}{1024}$となります。

3. 事象A：6 つのサイコロで少なくとも 1 つ「1の目」が出る、とします。なので、余事象A^c：6 つのサイコロで 1 つも「1の目」が出ない、となります。

したがって、$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{5^6}{6^6} = \frac{31031}{46656} \approx 0.67$

この問題では、答えをよりよく解釈するために 10 進数に変換されます。そこから、0.67 というゲームに勝つ可能性がかなり高いことが確認できます。

4a) ベン図から直接数えることにより $P(A^c) = \frac{1}{7}$

4b) $1 - P(A^c) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$

4c) $P(A \cap A^c) = P(\varnothing) = 0$

4d) $P(A \cup A^c) = P(S) = 1$

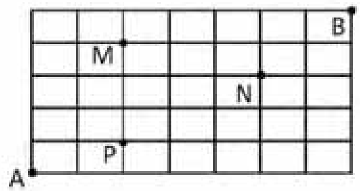
問いの a) のみベン図から直接数える必要があります。

1.7 復習問題

確率について次の問題を解きましょう。

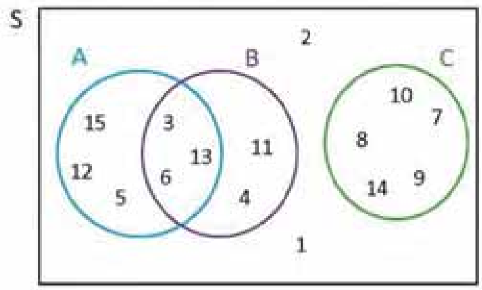
1. 2 つのサイコロを同時に振る実験の標本空間を求めましょう。次に事象「目の数の合計は 7」と、事象「目の数の合計は 5」を部分集合として表します。

2. カルメンはサンタ・アナの街を移動します。彼女はA点にいて、図に示すようにB点に到達したいと考えています。最短経路を通る確率を求めると、次のようになります：



   a) カルメンはM点またはN点を通ります。
   b) カルメンはP点とN点を通ります。

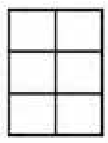
3.標本空間(S)の事象A、BおよびCを考慮して、ベン図を分析し、以下を求めましょう：



   a) 標本空間S、事象A、事象Bと事象C
   b) P(A), P(B) y P(C)
   c) P(A∩B), P(B∩C) y P(A∩C)
   d) P(A∪B), P(B∪C) y P(A∪C)
   e) $P(A^c)$, $P(B^c)$ y $P(C^c)$
   f) $1 - P(A^c)$, $1 - P(B^c)$ y $1 - P(C^c)$

4. 男性 5 人と女性 5 人の中から委員会の会長と副会長が選出されます。会長が女性で副会長が男性になる確率を求めましょう。

5. 四角形の点字ブロックに 6 つのマス目がついていて、マス目のそれぞれには、何もないか、点が一つ浮き彫りになっているとします。ある点字ブロック 1 つを選び、解きましょう：



   a) ブロックがちょうど 3 つの点と、3 つの何もないマス目になる確率。
   b) ブロックが 1 つの点または 1 つの何もないマス目になる確率。
   c) ブロックが 8 つの点になる確率。

6. ある家電店では、顧客が着くと　テレビ購入する確率は $\frac{4}{15}$、冷蔵庫を購入する確率は $\frac{7}{30}$、洗濯機を購入する確率は $\frac{2}{15}$ であると判断されます。顧客が着くときにこれら3つの製品のどれかが販売される確率を求めましょう。各顧客は最大 1 つの製品を購入すると考えてください。

7. 運頼みのゲームで 1 つの調整されたサイコロが見つかり、20 回振ると、17 回で 6 の目が出ました。サイコロ 1 つを 1 回振り 6 が出ないゲームを構成する場合、ゲームに勝つ確率を求めてください。

8. ディナーには12個のププサが注文され、カボチャ、スクランブル、チーズのププサから選択できます。各種のププサが選択される確率が同じであることを考慮して、それらを注文するときに、少なくとも 1 つのププサがスクランブルになる確率を求めましょう。

達成の目安：

1.7 確率の公理に関する問題を解きましょう。

問題の解き方：

1. S = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}.

A = {(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)} y B = {(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)}

2a) Mの場合：A点からMを経由してBに移動する、そしてN：A点からNを経由してBに移動する、とします。よって、M点とN点を両方通ることはできないため、次のようになります。$M \cap N = \varnothing$、したがって、

$$P(M \cup N) = P(M) + P(N) = \frac{{}_6C_2 \times {}_6C_5}{{}_{12}C_7} + \frac{{}_8C_5 \times {}_4C_2}{{}_{12}C_7} = \frac{5}{44} + \frac{14}{33} = \frac{71}{132}.$$

2b) Aの場合：A点からPとNを経由してBに移動する、とします。

$$P(A) = \frac{{}_3C_2 \times {}_5C_3 \times {}_4C_2}{{}_{12}C_7} = \frac{5}{22}.$$

3a) S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}; A = {3, 5, 6, 12, 13, 15}; B = {3, 4, 6, 11, 13}; C = {7, 8, 9, 10, 14}

3b) $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$; $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$; $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

3c) $P(A \cap B) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$; $P(B \cap C) = P(\varnothing) = 0$; $P(A \cap C) = P(\varnothing) = 0$.

3d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} - \frac{3}{15} = \frac{8}{15}$; $P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{5}{15} + \frac{5}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$;

$P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}$.

3e) $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$; $P(B^c) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$; $P(C^c) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

3f) $1 - P(A^c) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$; $1 - P(B^c) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$; $1 - P(C^c) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

4. 事象A：会長は女性で副会長は男性、とします。

したがって $P(A) = \frac{5 \times 5}{{}_{10}P_2} = \frac{5}{18}$.

5a) 事象A：ブロックがちょうど３つの点と、３つの何もないマス目になる、とします。なので $n(A) = {}_6C_3$（３つの点がどこに行くかを選択する方法の数）と $n(S) = 2^6$、したがって、$P(A) = \frac{{}_6C_3}{2^6} = \frac{5}{16}$.

5b) 事象B：ブロックがちょうど１つの点になる、として、事象C：ブロックがちょうど１つの何もないマス目になる、とします。よって $n(B) = {}_6C_1$ および $n(C) = {}_6C_5$、そして $B \cap C = \varnothing$ なので、次のようになります。

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{{}_6C_1}{2^6} + \frac{{}_6C_5}{2^6} = \frac{3}{16}.$$

5c) 事象D：ブロックは８つの点になり、よって $D = \varnothing$、したがって、$P(D) = 0$

6. 事象を考慮します。D：どれかの製品を売ることとします。A_1：テレビを売ることとします。

A_2：冷蔵庫を売ることとします。A_3：洗濯機を売ることとします。

よって、$P(D) = P(D \cap A_1) + P(D \cap A_2) + P(D \cap A_3) = \frac{4}{15} + \frac{7}{30} + \frac{2}{15} = \frac{8+7+4}{30} = \frac{19}{30}$.

7. 事象A：ゲームに勝つこと（6の目が出ない）とし、よって余事象A^c：ゲームに負けること（6の目が出る）とします。

したがって、$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{17}{20} = \frac{3}{20}$.

8. 事象A：少なくとも１つのブブサはスクランブルとし、よって $n(A) = {}_{(11+2)}C_2$（クッキングシートを使用し分けます）

したがって、$P(A) = \frac{{}_{13}C_2}{{}_{14}C_2} = \frac{6}{7}$.

レッスン2 条件付き確率

2.1 条件付き確率

導入問題

右の表は職業に関するアンケートの結果です。女性がすでに選ばれている後に女性の数学者が選ばれる確率を計算しましょう。

職業	女性	男性	合計
医師	40	31	71
数学者	22	24	46
家事担当	15	15	30
合計	77	70	147

解法

事象A： 数学者である。事象B： 女性である。

設問から、人を選んだらそれが女性であったことが分かっています(男性が選ばれることはすでにないものとします)。すると、あり得る場合は77通りです。

職業	女性	男性	合計
医師	40	31	71
数学者	22	24	46
家事担当	15	15	30
合計	77	70	147

女性であることと数学者であることが一致する欄が求める場合を示しているということになります。つまり求める場合は22通りです。

従って、P(すでにBが起こっている時にAになる場合) $= \frac{22}{77} = \frac{2}{7}$.

定義

事象AとBがある場合、事象Bがすでに起こっている場合に事象Aが起こる確率を見出すと、二つの事象は関係を持ち得ることになります。これを**条件付き確率**といい、P(A/B)で表し、「Bが起こったときのAの確率」と言います。これを計算するには、次のように考えることができます。Bが起こる得る何通りかを、あり得る場合とします。これをn(B)とします。A∩Bが起こり得る何通りかを、求める場合とします。これをn(A∩B)とします。 すると、次の式が成り立ちます。

$$P(A/B) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)}.$$

標本空間の場合の総数をn(S)とすると、上記の等式は、次の式に等しくなります。

$$P(A/B) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)} = \frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

例

さいころを投げた結果、奇数が出て、それが4より大きい数である確率を求めましょう。事象Aを4より大きいこととし、事象Bを奇数であることとします。この二つを考えると次のようになります。

$P(A\cap B) = \frac{1}{6}$(5だけが満たします)、$P(B) = \frac{3}{6}$(1、3、5が満たします)、したがって、$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1}{\cancel{6}} \div \frac{3}{\cancel{6}} = \frac{1}{3}$.

問題

1. 導入問題の表について、次の問題に答えましょう。
   a) 家事担当の人で男性を選ぶ確率を求めましょう。
   b) 男性で数学者を選ぶ確率を求めましょう。
   c) 数学者で女性を選ぶ確率を求めましょう。

2. さいころを投げた結果、奇数が出て、それが3より大きい数である確率を求めましょう。

3. ある車の会社に同じ数の車を組み立てる機械が3台あります。ある車を偶然選ぶ時、それが不良品で機械1号機で組み立てられたものである確率は$\frac{1}{120}$です。機械1号機で組み立てられた車が不良品である確率を求めましょう。

達成の目安：

2.1 特定の状況を解決するため条件付き確率を求めます。

学習の流れ：

確率についてコルモゴロフの公理を学習した後で、二次元表を使って条件付き確率を導入します。この時、集合論と結び付けます。

ねらい：

二次元表は、事象同士の関わりを示すグラフ的な資料で、この表により、列か欄次第で集合としての全体が変わるという考えを示すことができます。この授業では、集合の濃度として確率を学習させると非常に有益です。

問題の解き方：

1a) 男性であることを事象A、家事担当であることを事象Bとします。すると、

$P(A\cap B) = \frac{15}{147}$, $P(B) = \frac{30}{147}$、したがって $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{15}{147} \div \frac{30}{147} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$.

1b) 数学者であることを事象A、男性であることを事象Bとします。すると、

$P(A\cap B) = \frac{24}{147}$, $P(B) = \frac{70}{147}$、したがって $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{24}{147} \div \frac{70}{147} = \frac{24}{70} = \frac{12}{35}$.

1c) 女性であることを事象A、数学者であることを事象Bとします。すると、

$P(A\cap B) = \frac{22}{147}$, $P(B) = \frac{46}{147}$、したがって $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{22}{147} \div \frac{46}{147} = \frac{22}{46} = \frac{11}{23}$.

2. 結果が奇数であることを事象A、結果が3より大きいことを事象Bとします。すると、$n(A\cap B) = 1$ (5だけが3より大きくて奇数です)で、$n(B) = 3$ (4、5、6を可能性とします)です。すると、次のようになります。

$P(A\cap B) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{3}{6}$、したがって $\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1}{6} \div \frac{3}{6} = \frac{1}{3}$.

3. 車が不良品であることを事象A、車が機械1号機によるものであることを事象Bとします。すると、

$P(A\cap B) = \frac{1}{120}$, $P(B) = \frac{1}{3}$、したがって$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1}{120} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{40}$.

2.2 様々な条件付き確率

導入問題

袋に青い球が3個と白い球が5個入っています。取り出した球を取り出す球として再び使うことなく、球を1個取り出し、その後でもう1個取り出すという形で球を2個取り出す時(袋から取り出した1個目の球はもう使いません)、 球が2個とも青い球である確率を求めましょう。

解法

事象A： 第一の球は青い球。事象B： 第二の球は青い球。

第一の球も第二の球も青い球であることで、二つの事象は関係を持つことになります。すなわち、P(A⋂B)です。

$P(A) = \frac{3}{8}$とします。そうしますと、球は7個残っています。そのうち2個が青です。したがって、$P(B/A) = \frac{2}{7}$.

条件付き確率の定義から、$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ですが、これを演繹すると次のようにできます。

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28}.$$

したがって、青い球を2個取り出す確率は、$\frac{3}{28}$。

まとめ

授業2.1で学習した条件付き確率の結果から事象が交わる確率を計算することができます。そのための式は次のようになります。$P(A \cap B) = P(B)P(A/B)$.

この結果は、**確率の積の法則**として知られています。

問題

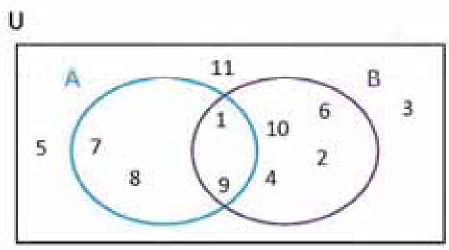
1. 袋に青い球が2個と白い球が4個入っています。取り出した球を取り出す球として再び使うことなく、球を1個取り出し、その後でもう1個取り出すという形で球を2個取り出す時、第一の球が青で、第二の球が白である確率を求めましょう。

2. カードが異なる4色のトランプがあります(4色のうちの1色は緑です)。それぞれの色のカードの5枚は、1から5の番号がついています。カードを2枚引き抜くとします。抜いたカードをまた引き抜くためのカードに使うことなく、1枚を引いた後でもう1枚を引きます。次の事象が起こる確率を求めましょう。

   a) 両方とも1です。
   b) 第一のカードが2で、第二のカードが3です。
   c) 第一のカードが3で、第二のカードが緑色で4です。
   d) 両方とも同じ色です。
   e) 第一のカードが2で、第二のカードが同じ色の1です。

3. 右のベン図を使って計算しましょう。

   a) P(B)とP(A)。
   b) P(B/A)とP(A/B)。
   c) 前の二つの設問から、P(A⋂B) の異なる2通りを計算しましょう。



214

達成の目安：

2.2 確率の積の法則を使って、二つの事象が交わる確率を求めます。

学習の流れ：

条件付き確率の定義から、確率の積の法則を直接導き出すことができます。

つまずきやすい点：

二つの事象が交わる確率と、一つの事象が起こるとしたらもう一つの事象が起こる条件付き確率との違いを分からせる際に生徒達が混乱する恐れがあります。

問題の解き方：

1. 事象Aを第一の球が青いということとし、事象Bを第二の球が白いということとすると、
$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(B/A) = \frac{4}{5}$、したがって、$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$.

2a) 事象Aを第一のカードが1であることとし、事象Bを第二のカードが1であることとすると、
$P(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$, $P(B/A) = \frac{3}{19}$、したがって、$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{1}{5} \times \frac{3}{19} = \frac{3}{95}$.

2b) 事象Aを第一のカードが2であることとし、事象Bを第二のカードが3であることとすると、
$P(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$, $P(B/A) = \frac{4}{19}$、したがって、$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{1}{5} \times \frac{4}{19} = \frac{4}{95}$.

2c) 事象Aを第一のカードが3であることとし、事象Bを第二のカードが4であることとすると、
$P(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$, $P(B/A) = \frac{1}{19}$、したがって、$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{19} = \frac{1}{95}$.

2d) まず色を考えて、事象Aを第一のカードの色が緑であることとし、事象Bを第二のカードの色が緑であることとすると、
$P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$, $P(B/A) = \frac{4}{19}$、したがって、$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{19} = \frac{1}{19}$.
他の3色について同様に計算します。したがって、両方の球が同じ色である確率は、$\frac{1}{19} \times 4 = \frac{4}{19}$.

2e) 事象Aを第一のカードが2であることとし、事象Bを第二のカードが同じ色の1であることとすると、
$P(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$, $P(B/A) = \frac{1}{19}$、したがって、$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{19} = \frac{1}{95}$.

3a) $P(B) = \frac{6}{11}$; $P(A) = \frac{4}{11}$.

3b) Aには4つの要素があります。集合Aに属していて、Bも起こり得るとできるのは2通りしかありません。したがって、
$P(B/A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
同様に、$P(A/B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

3c) $P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{4}{11} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{11}$, $P(A \cap B) = P(B)P(A/B) = \frac{6}{11} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{11}$.

2.3 条件付き確率の応用

導入問題

トランプから次々にカードを2枚引き抜きます。第一のカードがダイヤの時、第二のカードがダイヤになる確率を求めましょう。その際、次の条件を考えることにします。

a) 第一のカードを、トランプに戻さず、第二のカードを引き抜く時に使いません。

b) 第一のカードを、第二のカードを引き抜く時に使うためにトランプに戻します。

解法

事象Aを第二のカードはダイヤであるということとし、事象Bを第一のカードはダイヤであるということとすると

a) 第一のカードがダイヤであるためには、13枚のカードが考えられます。次に、トランプに戻さないので、第二のカードがダイヤであるためには、考えられるカードは12枚だけです。あり得る場合は、52通りで、第二のカードについては、51通りです。したがって、$P(A \cap B) = \frac{13 \times 12}{52 \times 51} = \frac{1}{17}$.

さらに、第一のカードがダイヤであるためには、13通りの可能性があります。また、第二のカードについては51通りです。したがって、$P(B) = \frac{13 \times 51}{52 \times 51} = \frac{1}{4}$.

したがって、$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{17} \div \frac{1}{4} = \frac{4}{17}$.

b) 前のケースとの違いは、第二のカードがダイヤであるためには、新たに13枚のカードが考えられ、可能性は52通りと52通りです、したがって、$P(A \cap B) = \frac{13 \times 13}{52 \times 52} = \frac{1}{16}$.

同様に、$P(B) = \frac{13 \times 52}{52 \times 52} = \frac{1}{4}$.したがって、$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{16} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

まとめ

条件付き確率は、便宜上、または、決められた状況を考慮して、条件を加えるためにしばしば使われます。例えば、導入問題ではゲームの戦略を検討するのに便利でしょうし、他の状況では、気候や伝染病の状況や影響力のある人の性格を読むこと等に使用できるでしょう。

問題

1. トランプのゲームで、第一のカードがクラブでした。ゲームに勝つためには第二のカードもクラブでなければなりません。第二のカードが第一のカードと同じトランプから引き抜かれる(第一のカードを第二のカードを引き抜くためにトランプに戻すことはしません)場合、または、第二のカードが完全にカードが揃っているトランプから引き抜かれる(このトランプからはまだカードは一切引き抜かれていません)場合、どのような状況であれば勝つ確率が最も高くなるか分析しましょう。

2. ある研究で、糖尿病が体重過多の結果であるかどうかを判断したいと考えています。調査したところ、ある人が体重過多である確率は $\frac{1}{2}$ で、さらに、ある人が体重過多である時に糖尿病でもある確率は $\frac{2}{3}$ でした。ある人が体重過多でもあり糖尿病でもある確率を求めましょう。

3. ある大工作業場で、25基の机を加工しました。そのうち4基が不良品で、5基に小さな問題があり、その他は良好な状態でした。机を次々に選ぶ時、第一の机は不良品で、第二の机には小さな問題がある確率を求めましょう。

4. あるゲームで、3枚のドアがあります。そのうちの1枚の後ろには、賞として車が置いてあります。ゲームは次のようなものです。参加者が3枚のうちの1枚を選びます。次に司会者が、この司会者はそれぞれのドアの後ろに何があるのか知っているのですが、1枚のドアを開けます。司会者は、このドアの後ろに賞の車がないことを知っています。そして、参加者にドアを変えることを選択できると告げます。条件付き確率を使って、どちらを選べば(ドアを変えるか、ドアを変えないままでいるか)、勝つ可能性が最も高くなるかを求めましょう。

ユニット8

215

達成の目安：

2.3 問題を解決するために、計数の基本原則と条件付き確率の概念とを組み合わせます。

学習の流れ：

この授業では、条件付き確率に関するいくつかの問題を解きます。これらの問題では、計数の基本原則と、条件付き確率について学習したことを合わせるので、解き方が前の授業の問題よりも少し複雑になります。

ねらい：

ここで解く問題は、現実により即していて、決断がより求められます。このため、他の変数を考慮します。この変数を分析する時は、ユニット7で学習した他の内容を応用することが必要になります。

問題の解き方：

1. 各場合を分析すると、同じトランプから引き抜く場合、事象Aを、

カードはクラブであることとすると、$P(A) = \frac{12}{51} = \frac{4}{17}$.

また、他のトランプから引き抜く場合、

事象Bを、カードはクラブであることとすると、$P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

次に二つの確率を比較します。$P(A) = \frac{4}{17} = \frac{16}{68}$ と、$P(B) = \frac{1}{4} = \frac{17}{68}$です。つまり、第二の場合に勝つ確率がより高いということです。

2. 事象Aをある人は糖尿病であることとし、事象Bをある人は体重過多であることとします。すると、

$P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A/B) = \frac{2}{3}$、したがって、$P(A \cap B) = P(B)P(A/B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

3. 事象Aを第二の机に小さな問題があることとし、事象Bを第一の机は不良品であることとすると、

$P(B) = \frac{4}{25}$, $P(A/B) = \frac{5}{24}$、したがって、$P(A \cap B) = P(B)P(A/B) = \frac{4}{25} \times \frac{5}{24} = \frac{1}{30}$.

4. ゲームを始める時、車が後ろにある確率は各ドアとも同じです。つまり、ドアを選ぶ時、勝つ確率は$\frac{1}{3}$で、負ける確率は$\frac{2}{3}$です。

次に、司会者が賞がないドアを開けます。そして参加者にドアを変えるよう呼びかけます。負ける確率は、他の2つのドアのいずれかの後ろに車がある確率と同じなので、また、二つのドアのどちらにないのかすでに分かっているので、ドアを変えると、勝つ確率は、車のあるドアを選んでいない確率と同じです、それは、$\frac{2}{3}$に等しくなります。反対に、変えないで同じドアのままでいたら、参加者は、始めの$\frac{1}{3}$という確率を維持することになります。

始めの選択	変える	変えない
ヤギ1	車	ヤギ1
ヤギ2	車	ヤギ2
車	ヤギ1またはヤギ2	車

選択肢	車	ヤギ	合計
変える	2	1	3
変えない	1	2	3
合計	3	3	6

条件付き確率を応用して、事象Aを車を得ること、事象Bをドアを変えること、事象Cをドアを変えないこととすると、

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{6} \div \frac{3}{6} = \frac{2}{3}, \quad P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{1}{6} \div \frac{3}{6} = \frac{1}{3}.$$

レッスン 2

2.4 条件付き確率に関する問題

導入問題

ある大工作業場で左利きの人用の机をデザインしました。マルタ、マリア、カルロスがこのデザインをしました。マルタ、マリア、カルロスがデザインした机が不良がある確率は、それぞれ、0.1、0.12 、0.11です。全員が同じ数の机を作ったとします。次の設問に答えましょう。

a) 不良のある机を選ぶ確率を求めましょう。

b) 不良のある机を選ぶと、その机がマルタが作ったものである確率を求めましょう。

解法

a) 事象Aをマルタが作ったものであること、事象Bをマリアが作ったものであること、事象Cをカルロスが作ったものであること、事象Dを不良品であることとします。そうしますと、$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$.

さらに、次のことが分かっています。$P(D/A) = 0.1$ (マルタが作ったものであり、不良品である確率)
$P(D/B) = 0.12$ (マリアが作ったものであり、不良品である確率)
$P(D/A) = 0.1$ (カルロスが作ったものであり、不良品である確率)

全員が同じ数の机を作るので、$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$.

さらに、$P(D/A) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)}$ であることが分かっているので、$P(A \cap D) = P(A) \times P(D/A) = \frac{1}{3}(0.1)$.

同様に、$P(B \cap D) = \frac{1}{3}(0.12)$ および $P(C \cap D) = \frac{1}{3}(0.11)$.

したがって、$P(A \cap D) = \frac{1}{3}(0.1)$ および $P(D) = 0.11$.

b) P(A/D) (机に不良があるとすると、その机がマルタが作ったものである確率)を計算すれば充分です。$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)}$ なので、また、設問a)から、$P(D) = \frac{1}{3}(0.1) + \frac{1}{3}(0.12) + \frac{1}{3}(0.11) = \frac{1}{3}(0.33) = 0.11$.

したがって、$P(A/B) = \frac{\frac{1}{3}(0.1)}{(0.11)} = \frac{10}{33}$.

確率を分数または小数として表すことができること、そして、導入問題も少数を分数に変換して解くことができることに注意しましょう。

まとめ

ある机が不良品である確率を計算するには、加法規則を排除される事象(ある机がマルタが作ったものであるとしたら、その机はカルロスやマリアによって作られたものであるはずがありません)の交わりに応用することが必要になりました。この結果を、**全確率の法則**と言います。

次に、ある机が不良品であることがすでに分かっている時、その机が特定の人が作ったものである確率を計算するのにこの結果を適用しました。これを、**ベイズの定理**と言います。

問題

1. ある工場に車を組み立てる機械が2台あります。それぞれの機械は同じ数の車を組み立てます。
   機械1号機によって組み立てられる車に問題がある確率は0.05です。
   機械2号機によって組み立てられる車に問題がある確率は0.07です。次の設問に答えましょう。
   a) ある車に問題がある確率を求めましょう。
   b) ある車に問題があり、その車が機械1号機によって組み立てられたものである確率を求めましょう。

2. ある印刷所に印刷機が3台あります。印刷機1号機は20%を印刷し、2号機は40%を印刷します。3号機は残りを印刷します。1号機があるページで不備を起こす確率は $\frac{1}{100}$ です。2号機では $\frac{1}{50}$ で、3号機では $\frac{1}{40}$ です。あるページに不備があると、その不備は3号機によるものである確率を求めましょう。

達成の目安：

2.4 全確率の法則とベイズの定理を適用する問題を解きます。

学習の流れ：

最終的に、条件付き確率を適用した最も重要な結果のうちの一つがベイズの定理です。ベイズの定理の結果は、全確率の法則から導き出したものです。

ねらい：

この授業では、全確率の法則とベイズの定理に基づく結果を適用することをめざします。その際、それらの結果について正式に説明したり提示したりせず、ただ前の授業で学習したことと条件付き確率を使用してみせるだけです。

問題の解き方：

1a) 事象Aを車が1号機によって組み立てられていることとし、事象Bを2号機によって組み立てられていることとし、事象Cを車に問題があることとします。

そうしますと、$P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C)$.

さらに、次のことが分かっています。$P(C/A) = 0.05$ (車が1号機によって組み立てられていて、車に問題がある確率)

$P(C/B) = 0.07$ (車が2号機によって組み立てられていて、車に問題がある確率)

全機が同じ数の車を組み立てるので、$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$.

さらに、$P(C/A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)}$ であることが分かっているので, $P(A \cap C) = P(A) \times P(C/A) = \frac{1}{2}(0.05)$.

同様に、$P(B \cap C) = \frac{1}{2}(0.07)$.

したがって、$P(C) = \frac{1}{2}(0.05) + \frac{1}{2}(0.07) = 0.06$.

1b) 次を求めることになります。$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A)P(C/A)}{P(C)} = \frac{0.05}{2(0.06)} = \frac{5}{12}$.

2. 事象Aを1号機によって印刷されたものであることとし、事象Bを2号機によって印刷されたものであることとし、事象Cを3号機によって印刷されたものであることとし、事象Dをページに不備があることとします。

そうしますと、$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$.

さらに、次の事が分かっています。$P(D/A) = \frac{1}{100}$,

$P(D/B) = \frac{1}{50}$,

$P(D/C) = \frac{1}{40}$.

さらに、$P(A) = \frac{20}{100}$, $P(B) = \frac{40}{100}$, $P(C) = \frac{40}{100}$.

そうしますと、$P(A \cap D) = \frac{20}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{500}$, $P(B \cap D) = \frac{40}{100} \times \frac{1}{50} = \frac{1}{125}$、そして、$P(C \cap D) = \frac{40}{100} \times \frac{1}{40} = \frac{1}{100}$.

そして、$P(D) = \frac{1}{500} + \frac{1}{125} + \frac{1}{100} = \frac{10}{500} = \frac{1}{50}$.

したがって、$P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(C)P(D/C)}{P(D)} = \frac{1}{100} \div \frac{1}{50} = \frac{1}{2}$.

2.5 独立した実験*

導入問題

二つの実験と二つの事象を次のように定めます。

T_1：硬貨を投げること　　A_1：表が出ること
T_2：さいころを投げること　　A_2：1か2が出ること

a) T_1 においてA_1が起こる時に、T_2 においてA_2が起こる確率を求めましょう。
b) T_2 においてA_2が起こる時に、T_1 においてA_1が起こる確率を求めましょう。
c) T_1 においてA_1が起こり、かつ、T_2 においてA_2が起こる確率を求めましょう。

解法

T_1とT_2 の標本空間をそれぞれS_1 と S_2とします。

a) 実験T_1 は実験T_2に影響を及ぼさないので、A_2 の確率は、$\frac{n(A_2)}{n(S_2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

b) 実験T_2は実験T_1 に影響を及ぼさないので、A_1の確率は、$\frac{n(A_1)}{n(S_1)} = \frac{1}{2}$.

c) T_1と T_2 を標本空間がSである単独の実験Tとし、T_1においてA_1が起こり、かつ、T_2においてA_2が起こる事象をCとすると、$n(S) = n(S_1) \times n(S_2)$ y $n(C) = n(A_1) \times n(A_2)$となります。したがって、

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{n(A_1) \times n(A_2)}{n(S_1) \times n(S_2)} = \frac{n(A_1)}{n(S_1)} \times \frac{n(A_2)}{n(S_2)} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

設問c)の結果は、$P(C) = P(A_1) \times P(A_2)$と表すことができます。

定義

A_1 がT_1 の事象でA_2がT_2の事象であるとして実験T_1 とT_2 を考慮した場合、実験T_1 が起こることが実験T_2に影響を及ぼさない時(その逆の時も)、T_1と T_2 は**独立した実験**であると言います。

T_1 において事象A_1が起こり、かつ、T_2 においてA_2が起こる確率は、次のようになります。

$$P(A_1) \times P(A_2).$$

例

さいころを2回投げて、第一回目には「1」が出て、第二回目には「2」が出る確率を求めましょう。事象A：第一回目に「1」が出ること。事象B：第二回目に「2」が出ること。

AとBは独立した二つの実験の事象なので(第一回目としてさいころを投げることと、第二回目として投げることは、別のことです)、確率は、

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

問題

1. トランプから2枚のカードを引く時、第一のカードがハートで、第二のカードがクラブである確率を求めましょう。第一のカードは、抜いた後、元のトランプに戻すことにします。

2. 硬貨を3回投げた時、1回だけ表が出て、それが3回目である確率を求めましょう。

3. トランプから次々にカードを2枚引き抜く(抜いたカードは元に戻します)時、第一のカードが赤いカードで、第二のカードが「J」またはダイヤである確率を求めましょう。

4. 正しいことを聞くか正しくないことを聞く5つの質問に答える時、偶然に4つ正しい答えを得る確率を求めましょう。

達成の目安：

2.5 少なくとも二つの独立した実験を行う時の確率を求めます。

学習の流れ：

この授業では、独立した実験の定義を分析します。これは、二項分布、多項分布、負の二項分布の確率に関するいくつかの概念を学習するのに役立ちます。

つまずきやすい点：

独立した事象と独立した実験との間にある違いを見せるのは難しいことですが、一つのさいころを二回投げることや二つのさいころを同じ回数投げるなどの例を提示すると明らかにすることができます。

問題の解き方：

1. 一回目に抜くことは、二回目に抜くことからは独立していることであるとすることができます。何故なら一回目に抜いた後、カードを戻すからです。そうしますと、

事象Aをカードはハートであることとし、事象Bを カードはクラブであることとすると、$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ で $P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

したがって、求める確率は、$P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

2. ある回で硬貨を投げることは、他の回とは独立していることです。したがって、事象Aを表が出ることとし、事象Bを裏が出ることとすると、$P(A) = \frac{1}{2}$ で $P(B) = \frac{1}{2}$.

したがって、求める確率は、$P(A) = \frac{1}{2}$ y $P(B) = \frac{1}{2}$.

3. カードを二回抜きますが、各回は互いに独立していることです。何故なら一度抜いたカードは元に戻すからです。そうしますと、

事象Aをカードは赤いカードであることとし、事象Bを カードは「J」またはダイヤであることとしますと、

$P(A) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$ で $P(B) = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$.

したがって、求める確率は、$P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{13} = \frac{2}{13}$.

4. 一つの質問は他から独立しています。事象Aを正しく答えることとし、事象Bを 正しく答えないこととしますと、

$P(A) = \frac{1}{2}$ で $P(B) = \frac{1}{2}$.

さらに、4つ正しい答えを得るということは、一つだけ正しくない答えを得ることに等しく、それには5つの場合($_5C_1$)が考えられることを考慮しなければなりません。つまり、第1回目か、第2回目か、第3回目か、第4回目か、第5回目が正しくないことを聞く質問であるということです。

したがって、求める確率は、$_5C_1 \times P(A) \times P(A) \times P(A) \times P(A) \times P(B) = 5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{32}$.

この問題は、二項分布で解くことができますが、この授業では、足し算の原則によって分析することができ、次の授業への導入にすることができます。

レッスン 2

2.6 反復実験の確率　パート1

導入問題

さいころを5回投げると「6または3」が2回出る確率を求めましょう。

解法

さいころ投げることについて、事象Aを、6または3が出ること、そして、事象Bを、6も3も出ないこととします。

さいころを5回投げることは独立した実験が5つあるということです。事象には、次の場合が考えられます。

$$
\text{場合の総数 } {}_5C_2 \left\{ \begin{array}{l} \text{A A B B B の時、確率は、} P(A) \times P(A) \times P(B) \times P(B) \times P(B) = \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3. \\ \text{A B A B B の時、確率は、} P(A) \times P(B) \times P(A) \times P(B) \times P(B) = \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3. \\ \vdots \end{array} \right.
$$

場合の総数は、5つの場所から2つを選ぶ時の方法の数と等しくなります。これは事象Aが起こる時です。従って、${}_5C_2$の場合があります。これらの場合全てが互いに独立しており、同じ確率となります。したがって、確率は、

$$ {}_5C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}. $$

まとめ

ある実験で事象Aが起こる確率をpとします。実験をn回繰り返す時、事象Aがr回($0 \le r \le n$)起こる確率は、次のようになります。

$$ ({}_nC_r)p^r(1-p)^{n-r}. $$

例

あるサッカー選手のプレイを分析したところ、ファールする時に、ゴールに入れる確率が$\frac{3}{10}$で、蹴ったボールがポストに当たる確率が$\frac{1}{2}$で、蹴ったボールが場外に行く確率が$\frac{1}{5}$との情報を得ました。ファールを6回すると、ゴールを3回し、ポストに2回当て、場外にボールを1回蹴りだしている確率を求めましょう。

ファールをすることについて、事象Aをゴールに入れることとし、事象Bをポストに当てることとし、事象Cを場外にボールを蹴りだすこととします。

1回のファールは、他の回のファールから独立していることです。始めの3回のファールの時に3回ゴールし、つぎに2回ポストに当て、1回場外にボールを蹴りだすこともあり得ます。その時の確率は、P(A) × P(A) × P(A) × P(B) × P(B) × P(C)になります。

次に、場合の総数は、実験(ファールすること)でゴールする
(${}_6C_3$)ことになり、さらに残りの実験(ファールすること)でポストに当てる(${}_3C_2$)ことになる各通りの総数に等しくなります。

これらの場合のそれぞれが起こる確率は、$\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{3}{5000}$.

したがって、求める確率は、${}_6C_3 \times {}_3C_2 \times \frac{3}{5000} = \frac{9}{250}$.

問題

1. 袋に赤い球が3個と黒い球が4個入っています。4個の球を次々に取り出します。この時、元の袋は補充します(取り出した球を袋に戻します)。次の設問を解きましょう。
   a) 赤い球を2個取り出し、黒い球を2個取り出す確率を求めましょう。
   b) 赤い球が多くても1個しか出ない確率を求めましょう。
   c) 黒い球が少なくとも1個出る確率を求めましょう。

2. 伝統的な形式のトランプ(カードが全部で52枚)から(次々に)カードを7枚引き抜き、抜いたカードは元のトランプに戻す時、抜いたカードの3枚がダイヤで、2枚が黒い色で、2枚がハートである確率を求めましょう。

218

達成の目安：

2.6 実験の独立の概念と組合せの概念を使って、二項分布または多項分布で特定の値の確率を求めます。

学習の流れ：

実験の独立の概念を導入した後、二項分布と多項分布での確率に関する問題をいくつか解くことができます。

ねらい：

組合せを用いて、反復する事象の確率に関する問題を解かせます。

問題の解き方：

1a) 事象Aを球が赤いこととすると、$P(A) = \frac{3}{7}$ です。したがって、球を4個取り出して、2個が赤で2個が黒になる場合、その確率は、次のようになります。

$$4C2\left(\frac{3}{7}\right)^2\left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{864}{2401}.$$

1b) この問題を解くには、2通りの場合を考えねばなりません。赤い球が出ない場合と赤い球が一つだけ出る場合です。この二つの事象の交わりは空事象になるので、確率の第3公理から、求める確率は、次のようになります。

$$4C0\left(\frac{3}{7}\right)^0\left(\frac{4}{7}\right)^4 + 4C1\left(\frac{3}{7}\right)^1\left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{256}{2401} + \frac{768}{2401} = \frac{1024}{2401}.$$

1c) 補集合で考えると、この問題は、黒い球が出ない確率を求めた後で1との差を求めることを問うことに等しくなります。つまり、求める確率は、次のようになります。

$$1 - 4C4\left(\frac{3}{7}\right)^4\left(\frac{4}{7}\right)^0 = 1 - \frac{81}{2401} = \frac{2320}{2401}.$$

2. 事象Aをカードはダイヤであることとし、事象Bをカードは黒い色であることとし、事象Cをカードはハートであることとすると、$P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, y $P(C) = \frac{1}{4}$ となり、カードを抜くことはそれぞれ独立していますので(抜いたカードを元に戻すからです)、求める確率は、次のようになります。

$$7C3 \times 4C2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{105}{2048}.$$

2.7 反復実験の確率　パート2

導入問題

あるゲームで、数字の5が2回出るまでさいころを投げます。さいころを4回投げた時にこのことを達成する確率を求めましょう。

解法

この場合、4回目に投げた時に5が出なければなりません。最初の3回でも、5が1回出なければなりません。投げることはそれぞれ独立していますので、求める確率は次のようになります。

$$_3C_1 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{25}{432}.$$

まとめ

ある実験の標本空間の事象Aを考える場合、事象Aがr回起こるまで実験をn回繰り返すのなら、事象Aは、始め$(n - 1)$の反復において起こっていなければならず$(r - 1)$、また、実験を最後に反復する時にも起こらなければなりません。

問題

1. 伝統的な形式のトランプからカードを次々に抜き、元のトランプは補充し(抜いたカードを元のトランプに戻します)、ダイヤのカードを3枚抜いた時に実験を終了します。始めに6回抜いた時点で、3枚のダイヤのカードが出ている確率を求めましょう。

2. ボードゲームで、さいころを投げて6が出るまでに、駒を動かし始めるということになっています。

   次の設問を解きましょう。
   a) 第一回目を投げてから駒を動かし始める確率を求めましょう。
   b) 第三回目を投げてから駒を動かし始める確率を求めましょう。
   c) 投げるのが多くても3回で駒を動かし始める確率を求めましょう。
   d) 少なくとも3回投げて駒を動かし始める確率を求めましょう。

3. ある繊維会社の個人の生産目標は、4枚のシャツを不備なく作ることです。不備のあるシャツを作る確率は、$\frac{1}{3}$です。

   次の設問を解きましょう。
   a) ちょうど5枚のシャツを作って目標を達成する確率を求めましょう。
   b) 作るのが多くても6枚のシャツで目標を達成する確率を求めましょう。
   c) 少なくとも7枚のシャツを作って目標を達成する確率を求めましょう。

4. 伝統的な形式のトランプからカードを抜く場合、第二のカードがクラブであるのが5回目に抜いた時である確率を求めましょう。抜いたカードは元のトランプに戻します。

5. ダーツの専門家がダーツを的に投げます。10回投げると7回当たることが分かっています。次のゲームをします。3人の参加者が、4つのダーツを的に当てるために何回投げなければならないかを言います。第一の参加者は、5回投げるうちに達成すると言い、第二の参加者は、7回と言い、第三の参加者は、10回と言います。勝つ確率が最も高い参加者が誰か求めましょう。

達成の目安：

2.7 負の二項分布の特定の値に関する確率を計算する問題を解くのに、独立した実験の概念と組合せの概念を応用します。

学習の流れ：

この課の終わりに当たって、負の二項分布の確率に関係する問題をいくつか解きます。ここで望まれることは、生徒達が組合せや確率について学習したことを使って、確率の分布を分析することなく問題を解くことのみです。

ねらい：

この授業と前の授業では、確率の分布を掘り下げて学習させることに焦点を置いていませんでした。何故なら、この概念がこれまで以上に複雑で、その普遍性から、その知識がより有益であるとされるのは大学レベルからということになりかねないからです。

問題の解き方：

1. 事象Aをカードはダイヤであることとすると、$P(A)=\frac{1}{4}$ となります。第六回目に抜いた時に確実に第三のダイヤのカードが出るとすると、他の2枚のダイヤのカードについては5通りのオプションがあります。したがって、求める確率は次のようになります。 $5C2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{135}{2048}$.

2a) 事象Aを6が出ることとすると、$P(A)=\frac{1}{6}$ となります。したがって、第一回目に投げて駒を動かし始める確率は、第一回目に投げて6が出る確率に等しくなります。つまり、確率は、$\frac{1}{6}$ です。

2b) この設問は、第三回目に投げるまでに6が出る確率を求めることと等しくなります。つまり、確率は次のようになります。 $2C0\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{25}{216}$.

2c) 3通りの場合が考えられます。第一回目の後に動かし始める場合、第二回目に動かし始める場合、または、第三回目に動かし始める場合です。この3つの場合は独立しています。確率の第3公理を適用することができます。したがって、確率は、次のようになります。

$$\frac{1}{6}+1C0\left(\frac{5}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)+2C0\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}+\frac{5}{36}+\frac{25}{216}=\frac{36+30+25}{216}=\frac{91}{216}.$$

2d) 補集合を適用すると、確率は、$1-\frac{1}{6}-1C0\left(\frac{5}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)=1-\frac{1}{6}-\frac{5}{36}=\frac{36-6-5}{36}=\frac{25}{36}$.

あるいは、始めの二回で6が出ないとすると、$P(A^c)\times P(A^c)=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$.

3a) 求める確率は、$4C3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{64}{243}$.

3b) 3通りの場合が考えられます(お互い独立しています)。4枚目で達成する場合、5枚目で達成する場合または6枚目で達成する場合です。したがって、確率は次のようになります。

$$3C3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)+4C3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)+5C3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{16}{81}+\frac{64}{243}+\frac{160}{729}=\frac{144+192+160}{729}=\frac{496}{729}.$$

3c) 設問3b)の補集合を応用すると、確率は、$1-\frac{496}{729}=\frac{233}{729}$.

4. 事象Aをカードはクラブであることとすると、$p(A)=\frac{1}{4}$ となります。実験は独立していますので(抜いたカードは元のトランプに戻しますので)、確率は、次のようになります。 $4C1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{27}{256}$

5. 事象Aを的に当てることとすると、$p(A)=\frac{7}{10}$ となります。一人一人について勝つ確率を計算すると、

第一の参加者は、$4C3\left(\frac{7}{10}\right)^3\left(\frac{3}{10}\right)^1\left(\frac{7}{10}\right)=\frac{28812}{100000}$、第二の参加者は、$6C3\left(\frac{7}{10}\right)^3\left(\frac{3}{10}\right)^3\left(\frac{7}{10}\right)=\frac{1296540}{10000000}$、

第三の参加者は、$9C3\left(\frac{7}{10}\right)^3\left(\frac{3}{10}\right)^6\left(\frac{7}{10}\right)=\frac{147027636}{10000000000}$.したがって、最も勝つ確率が高いのは、第一の参加者です。

2.8 復習

最も適切と思う計算方法を使って次の問題を解きましょう。

1. 伝統的な形式のトランプからカードを抜く場合で、抜いたカードが赤色であることが分かっているとき、そのカードがハートである確率を求めましょう。

2. あるテレビ番組を既婚男性が見る確率が0.3で、既婚女性が見る確率が0.4で、妻がこの番組を見る時に夫がこの番組を見る確率が0.7です。

   次の設問を解きましょう。
   a) 夫婦がこの番組を見る確率を求めましょう。
   b) 夫がこの番組を見て、妻がこの番組を見る確率を求めましょう。
   c) 少なくとも夫の一人がこの番組を見る確率を求めましょう。

3. 3つの賞をくじ引きで決めるのに15人が参加します。15人のうち、10人が女性で5人が男性です。同じ者が2つの賞を当てることができないとする時、3人の男性が賞を当てる確率を求めましょう。

4. 10月のある日に雨が降る確率が $\frac{1}{3}$ です。

   次の設問を解きましょう。
   a) 5日間続けて雨が降らない確率を求めましょう。
   b) 一週間(5日間とします)のうち3日雨が降る確率を求めましょう。
   c) 10月の6日までに雨が降る確率を求めましょう。

5. さいころを5回投げて、いずれかの回に、ちょうど4、6、1と出る確率を求めましょう。

6. 運転者の30%が交通事故に遭いました。この交通事故のうち、30%が運転者がアルコールの影響下にあったことが原因で、20%が携帯電話に答えていた事が原因で、5%がラジオの放送局を変えていたことが原因でした。一方、運転中に、40%の運転者がアルコールの影響下で運転をするつもりで、50%が携帯電話に答えるつもりで、70%がラジオの放送局を変えるつもりです。

   次の設問を解きましょう。
   a) ある人が、酔って運転する時、衝突する確率を求めましょう。
   b) ある人が、携帯電話に答えた時、衝突する確率を求めましょう。
   c) ある人が、ラジオの放送局を変えた時、衝突する確率を求めましょう。

7. 食糧用じょうごの品質管理で、95%の製品の品質が良い時、不良品が4個揃うまで製品を抜き取ります。

   次の設問を解きましょう。
   a) 品質管理で10個の製品を抜き取る確率を求めましょう。
   b) 始めの4個が不良品である確率を求めましょう。

達成の目安：

2.8 条件付き確率に関する問題を解きます。

問題の解き方：

1. 事象Aをカードはハートであることとし、事象Bをカードは赤色であることとすると、$P(A \cap B) = \frac{13}{52}$, $P(B) = \frac{26}{52}$、したがって、$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

2a) 事象Aを既婚女性が番組を見ることとし、事象Bを既婚男性が番組を見ることとします。すると、P(A) = 0.4, P(B/A) = 0.7、したがって、$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = 0.4 \times 0.7 = 0.28$.

2b) $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0.28 \div 0.3 = 0.93$.

2c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.3 - 0.28 = 0.42$.

3. 事象Aを3人の男性は当てることとすると、$n(A) = {}_5C_3$, por lo tanto, $P(A) = \frac{{}_5C_3}{{}_{15}C_3} = \frac{2}{91}$.

4a) 事象Aを雨が降ることとしますと、$P(A) = \frac{1}{3}$ となり、雨が降ることは日にちとは関係のないことですので、5日続けて雨が降らない確率は、$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{32}{243}$.

4b) 確率は、${}_5C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{243}$.

4c) 確率は、${}_5C_0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{729}$.

5. 事象Aを投げて4が出ることとし、事象Bを投げて6が出ることとし、事象Cを投げて1が出ることとし、事象Dを投げて2、3、5が出ることとすると、確率は、次のようになります。

$${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 \times {}_2C_2 \times P(A) \times P(B) \times P(C) \times P(D)^2 = 60 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{72}.$$

6a) 事象Aを運転手が酔って運転することとし、事象Bを運転手が携帯に答えたこととし、事象Cを運転手が放送局を変えたこととし、事象Dを運転手が交通事故を起こすこととすると、

$P(A \cap D) = P(D)P(A/D) = \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$、したがって、$P(D/A) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)} = \frac{9}{100} \div \frac{2}{5} = \frac{9}{40}$.

6b) $P(B \cap D) = P(D)P(B/D) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{50}$、したがって、$P(D/B) = \frac{P(B \cap D)}{P(B)} = \frac{3}{50} \div \frac{1}{2} = \frac{3}{25}$.

6c) $P(C \cap D) = P(D)P(C/D) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{20} = \frac{3}{200}$、したがって、$P(D/C) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{3}{200} \div \frac{7}{10} = \frac{3}{140}$.

この問題については、確率を計算するために、パーセンテージが分数で表されることを示さなければなりません。

7a) この設問は、4番目の不良品は10回目に抜き出した時に現れると言うに等しくなります。したがって、確率は、次のようになります。

$${}_9C_3 \left(\frac{1}{20}\right)^3 \left(\frac{19}{20}\right)^6 \left(\frac{1}{20}\right) = \frac{3\,951\,854\,004}{10\,240\,000\,000\,000}.$$

7b) 一回抜き出すことが他の回から独立しているため、確率は、次のようになります。

$$\frac{1}{20} \times \frac{1}{20} \times \frac{1}{20} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{160\,000}.$$

2.9 このユニットの問題

最も適切と思う計算方法を使って次の問題を解きましょう。

1. 伝統的な形式のトランプからカードを抜き取る時、抜き取ったカードがダイヤか、スペードかジャックである確率を求めましょう。

♠スペード	♣クラブ
♥ハート	♦ダイヤ

2. さいころを3個投げると合計が10になる確率を求めましょう。

3. 3個の青い球(全て同じ)、4個の紫色の球(全て同じ)、2個の黒い球(全て同じ)を並べると、黒い球が全て隣同士になる確率を求めましょう。

4. あるゲームをします。袋が2つあります。第一の袋には3個の白い球、2個の赤い球、そして1個の黒い球が入っています。第二の袋には2個の白い球、3個の赤い球、そして3個の黒い球が入っています。いずれかの袋から球を抜き取ります。

   次の設問を解きましょう。
   a) 第二の袋から黒い球を抜き取る確率を求めましょう。
   b) 赤い球を抜き取る確率を求めましょう。

5. クローゼットに3組の黒い靴と4組のコーヒー色の靴が入っています。靴を一つ取り出すとします。次の設問を解きましょう。

   a) 右のコーヒー色の靴または左の黒い靴を取り出す確率を求めましょう。
   b) 左の靴または黒い靴を取り出す確率を求めましょう。

6. 長さ6の2進列(0と1で構成されています)で、列の最後に少なくとも3つの0が揃って現れる確率を求めましょう。

7. チェス盤(8 x 8)に2つのルークを配置する時、この2つのルークが縦または横に並ぶ確率を求めましょう。

8. 円卓に3人の少女と3人の少年を座らせる時、どの少年も他の少年の横に並ばない確率を求めましょう。

9. 四角形の点字ブロックに6つのマス目がついていて、マス目のそれぞれには、何もないか、点が一つ浮き彫りになっているとします。点字ブロックを選ぶと少なくとも一つのマス目に何もない(浮き彫りになった点がない)確率を求めましょう。

達成の目安：

2.9 確率に関する問題を解きます。

問題の解き方：

1. 事象Aを抜き取ったカードがダイヤであることとし、事象Bを抜き取ったカードがスペードであることとし、事象Cを抜き取ったカードがジャックであることとすると、$n(A) = 13$、$n(B) = 13$、$n(C) = 4$、$n(A \cap B) = 0$ $(A \cap B = \varnothing)$、$n(A \cap C) = 1$ (ダイヤのジャック)、$n(B \cap C) = 1$ (スペードのジャック)、$n(A \cap B \cap C) = 0$、$(A \cap B \cap C = \varnothing)$となります。したがって、

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{13} - 0 - \frac{1}{52} - \frac{1}{52} + 0$$
$$= \frac{28}{52} = \frac{7}{13}.$$

2. 事象Aを投げた合計が10になることとすると、A = {(1, 3, 6), (1, 4, 5), (1, 5, 4), (1, 6, 3), (2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4), (2, 5, 3), (2, 6, 2), (3, 1, 6), (3, 2, 5), (3, 3, 4), (3, 4, 3), (3, 5, 2), (3, 6, 1), (4, 1, 5), (4, 2, 4), (4, 3, 3), (4, 4, 2), (4, 5, 1), (5, 1, 4), (5, 2, 3), (5, 3, 2), (5, 4, 1), (6, 1, 3), (6, 2, 2), (6, 3, 1)}で、$P(A) = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$.

3. 事象Aを黒い球が隣同士であることすると、$n(A) = \frac{8!}{1!\,3!\,4!} = 280$、そして $n(S) = \frac{9!}{3!\,4!\,2!} = 1\,260$ ですので、
$P(A) = \frac{280}{1\,260} = \frac{2}{9}$.

4a) 事象Aを取り出した球が黒い球であることとし、事象Bを第一の袋から取り出した球であることとし、事象Cを第二の袋から取り出した球であることとすると, $P(A/C) = \frac{3}{8}$で $P(C) = \frac{1}{2}$ なので、
$P(A \cap C) = P(C)P(A/C) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{16}$.

4b) 事象Dを取り出した球が赤い球であることとすると、
$$P(D) = P(D \cap B) + P(D \cap C) = P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{8}$$
$$= \frac{17}{48}.$$

5a) 事象Aを取り出した靴はコーヒー色で右の靴であることとし、事象Bを取り出した靴は黒い色で左の靴であることとすると、 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{{}_4C_1}{{}_{14}C_1} + \frac{{}_3C_1}{{}_{14}C_1} = \frac{7}{14}$.

5b) 事象Cを取り出した靴は左の靴であることとし、事象Dを取り出した靴は黒い色であることとすると、
$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) = \frac{{}_7C_1}{{}_{14}C_1} + \frac{{}_6C_1}{{}_{14}C_1} - \frac{{}_3C_1}{{}_{14}C_1} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}.$$

6. 最後に3つの0が確実に揃う時の確率は、$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ です。あるいは、補集合の確率を応用するなら、必要なのは、列の最後に0が0個、1個または揃って2個現れる場合を計算することだけです。したがって、確率は、
$1 - \frac{2^5}{2^6} - \frac{2^4}{2^6} - \frac{2^3}{2^6} = \frac{1}{8}$.

7. 事象Aをルークが縦か横に揃うこととすると、$P(A) = \frac{64 \times 14}{64 \times 63} = \frac{2}{9}$.

8. 事象Aをどの少年も他の少年の横に並ばないこととすると、$n(A) = \frac{3! \times {}_4P_3 - 3! \times 3! \times 2}{6} = 12$ となり、したがって、
$P(A) = \frac{12}{5!} = \frac{1}{10}$.

$n(A)$を計算するには、3! × 3! × 2を引く必要があります。この3! × 3! × 2は次の場合を表しています。直線に並ばせたとして、列の両端に2人の生徒(少年)を立たせて、次に少女の間にある2つのスペースを残りの少年のためのものとし、少女を並ばせる方法の各通りにこの少年を数える場合です。

9. 補集合の確率を応用するなら、事象Aの確率を求めれば充分です。 事象Aを点字ブロックに何もないマス目がないこととすると、$P(A) = \frac{1}{2^6}$ となり、したがって、求める確率は次のようになります。
$$1 - \frac{1}{2^6} = \frac{63}{64}.$$

2.10 このユニットの問題

最も適切と思う計算方法を使って次の問題を解きましょう。

1. あるゲームをします。伝統的な形式のトランプからハートのカード3枚、ダイヤのカード1枚、クラブのカード2枚が抜いてあります。このゲームでは、この残りのトランプからカードを抜いたら、そのカードがどの組のカードかを当てます(スペード、ハート、クラブまたはダイヤ)。勝つ確率が最も高いのはどのカードでしょうか。

2. あるゲームをします。硬貨を7回投げると何回表が出るかを当てます。カルメンは4回と言い、カルロスは3回と言います。勝つ確率はどちらのほうが高いでしょうか。8回投げるとしたら、最もあり得るのは何回でしょうか。

3. さいころのゲームで、何回投げたら5が3回出るかを当てます。ある人は6回投げたらそうなると言い、別の人は7回投げたらと言い、また別の人は8回投げたらと言います。勝つ確率が最も高い人は誰かを求めましょう。あなたは、勝つ確率を最も高くするには何回投げればいいと思いますか?

4. 通りにある信号機が故障している確率は0.2です。この通りで事故が起こる確率は0.5です。信号機が故障しているので事故が起こる確率は0.75です。

   次の設問を解きましょう。
   a) 事故が起こり、信号機が故障している確率を求めましょう。
   b) 事故が起こった時に信号機が故障している確率を求めましょう。

5. くじ引きの箱に、5個の白い球と4個の赤い球が入っています。白同士と赤同士では全て互いに区別がつきません。この箱から3個の球を次々に取り出します。その際、赤い球なら箱に戻し、白い球なら箱に戻しません。3個の球を取り出す時、そのうちの1個がまさしく白である確率を求めましょう。

6. ある診療所では、診断で癌があるとされる確率が0.9で、診断で癌でないとされていても癌を発症する確率が0.15で、20%の患者が癌と診断されることが分かっています。

   次の設問を解きましょう。
   a) ある患者が癌を発症する確率を求めましょう。
   b) ある患者が癌を発症する時に癌と診断される確率を求めましょう。

7. テレビ番組のゲームで、カラールーレットを回し、3人が参加します。何回回したらルーレットで赤い色の場所に落ちるかを当てます。ある人は3回目だと言い、別の人は6回目だと言い、最後の一人は4回目だと言います。ルーレットで赤い色の場所に落ちる確率が0.3の時、勝つ確率が最も高いのはどの人でしょうか。あなたは、勝つ確率を最も高くするには何回回せばいいと思いますか?

達成の目安：

2.10 確率に関する問題を解きます。

問題の解き方：

1. 事象Aをカードはハートのカードであることとし、事象 Bをカードはダイヤのカードであることとし、事象Cをカードはクラブのカードであることとし、事象Dをカードはスペードのカードであることとします。すると、$P(A) = \frac{10}{52}$、$P(B) = \frac{12}{52}$、$P(C) = \frac{11}{52}$、 $P(D) = \frac{13}{52}$となり、したがって、勝つ確率が最も高いのはスペードのカードを選択した場合となります。

2. 事象Aを4回表が出ることとし、事象Bを3回表が出ることとし、それぞれの場合を計算すると、

$P(A) = {}_7C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{35}{128}$ および $P(B) = {}_7C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{35}{128}$ $({}_7C_4 = {}_7C_3)$ となり、したがって、二人とも勝つ確率は同じになります。

一方、もし8回投げるとすると、次のようになります。

$P(A) = {}_8C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{70}{256}$ および $P(B) = {}_8C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{56}{256}$ で、したがって、この場合はカルメンが勝つ確率が高くなります。

3. 事象Aを6回投げたら5が3回出ることとし、事象Bを7回投げたら5が3回出ることとし、事象Cを8回投げたら5が3回出ることとすると、確率は次のようになります。

$P(A) = {}_5C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{625}{23328}$, $P(B) = {}_6C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{3125}{93312}$、で $P(C) = {}_7C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^5\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{21875}{559872}$

次に、小数の概算を行うと、$P(A) \approx 0.027$、$P(B) \approx 0.033$、$P(C) \approx 0.039$となり、したがって、3人目の人が勝つ確率が最も高くなります。

どれが最も最適な答えになるかを決めるのは、試行錯誤を適用することができます。およそ最もあり得る確率は15回投げた時と17回投げた時との間で得られると結論づけられることが理想的です。これは、この場合の負の二項分布における期待値と一致するものです。

4a) 事象Aを信号機が故障していることとし、事象Bを事故が起こることとすると、$P(A) = 0.2$、$P(B) = 0.5$、$P(B/A) = 0.75$となり、したがって、$P(A \cap B) = P(A)\ P(B/A) = 0.2 \times 0.75 = 0.15$.

4b) $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0.15 \div 0.5 = 0.3$

5. 事象Aを球が白であることとし、事象Bを球が赤であることとすると、白い球は第一回目、第二回目または第三回目に取り出した時に出る可能性があるので、また、これらの場合は同時に起こり得ないので、3通りの場合があります。

A、B、BとB、A、BとB、B、Aで、確率は次のようになります。 $\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{8} + \frac{4}{9}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8} + \frac{4}{9}\times\frac{4}{9}\times\frac{5}{9}$

$= \frac{5}{36} + \frac{10}{81} + \frac{80}{729} = \frac{405 + 360 + 320}{2916} = \frac{1085}{2916}$

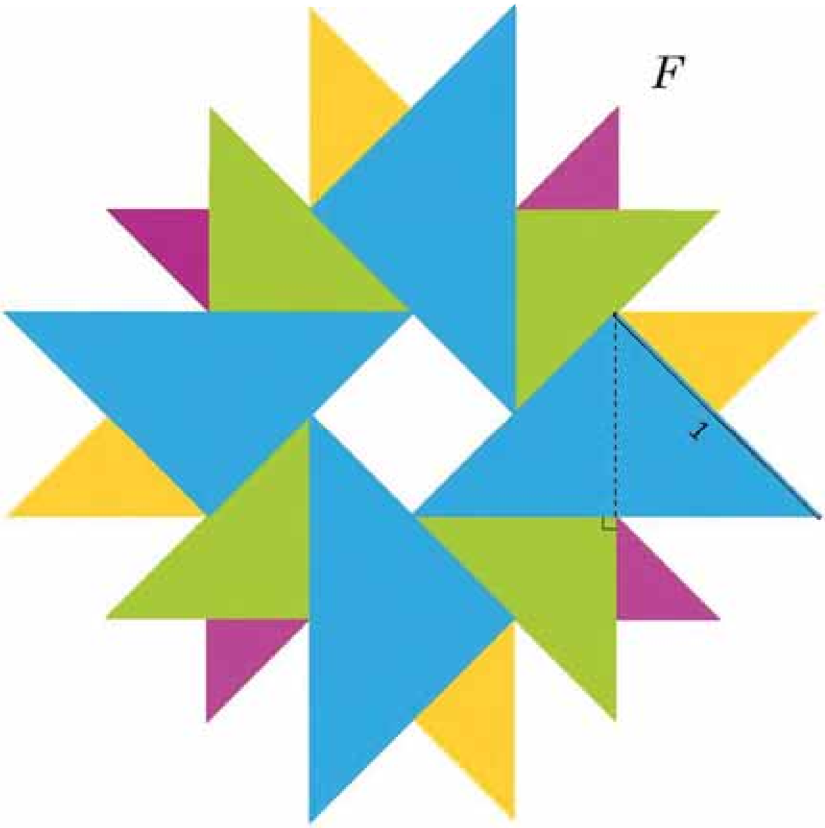
6a) 事象Aを患者は癌であることとし、事象Bを患者は癌であると診断されることとすると、$P(B) = 0.2$、$P(B^c) = 0.8$、$P(A/B) = 0.9$、$P(A/B^c) = 0.15$で、さらに、$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$なので、確率は、次のようになります。

$P(A) = P(A/B)\ P(B) + P(A/B^c)\ P(B^c) = 0.9 \times 0.2 + 0.15 \times 0.8 = 0.18 + 0.12 = 0.3$

6b) $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0.18 \div 0.3 = 0.6$

7. 事象Aを3回目に赤い色の場所に落ちることとし、事象Bを6回目に赤い色の場所に落ちることとし、事象Cを4回目に赤い色の場所に落ちることとすると、確率は次のようになります。$P(A) = (0.7)^2(0.3) = 0.147$、$P(B) = (0.7)^5(0.3) = 0.05$、 $P(C) = (0.7)^3(0.3) = 0.103$.

したがって、第一番目の人が勝つ確率が最も高くなります。どれが最も最適な答えになるかを決めるのは、試行錯誤を適用することができます。およそ最もあり得る確率は2回投げた時に得られると結論づけられることが理想的です。これは、この場合の幾何分布における期待値と一致するものです。



面積 F = ¿?

この図形は異なる色の三角形を4枚ずつ使って作られています。よって、次のように計算します。

面積 $F = 4T_1 + 4T_2 + 4T_3 + 4T_4 = 4(T_1 + T_2 + T_3 + T_4) = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}\right)$

よって、この等比級数の合計の大きさから、面積 $F = 4\left(\frac{2^4 - 1}{2^4}\right) = \frac{15}{4}\,U^2$.

スライド 259

SU1 このスライド訳抜け

SunFlare User, 2021/01/25

REPÚBLICA DE EL SALVADOR EN LA AMÉRICA CENTRAL

高校 2 第2版 数学 第2巻 指導案