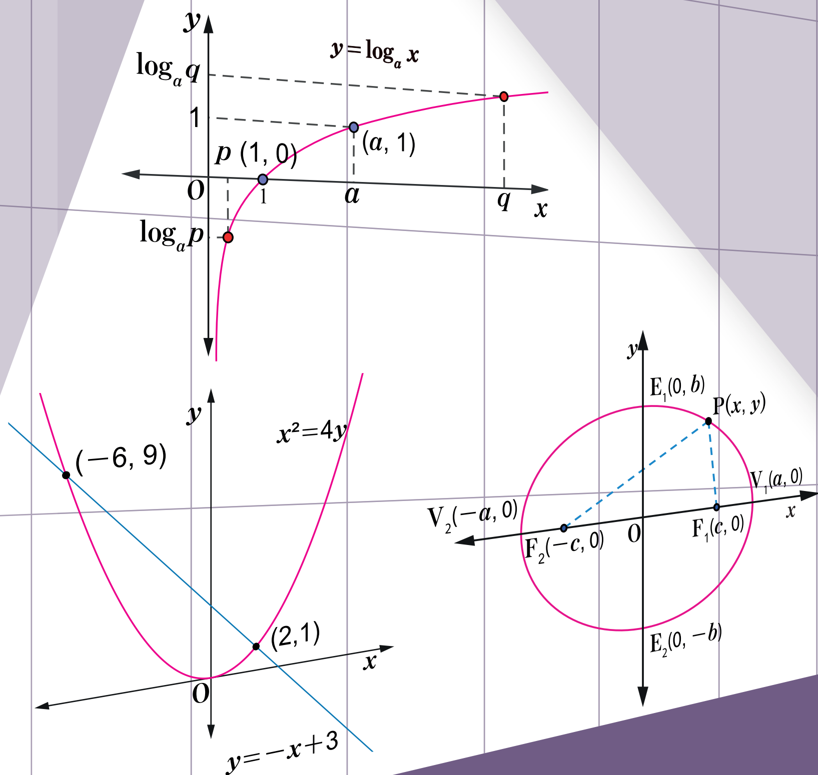
MATEMÁTICA 10

Décimo grado



Guía para Docentes

Educación Secundaria

Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional
El Pueblo, Presidente!
UNIDA, NICARAGUA TRIUNFA!

MINED
Un Ministerio en la Comunidad

JICA

10mo

COORDINACIÓN GENERAL

Profesora Melba López Montenegro
Profesor Julio César Canelo Castillo

AUTORES

Marlon José Espinoza Espinoza
Primitivo Herrera Herrera
Orlando Antonio Ruiz Álvarez
Domingo Felipe Aráuz Chévez
Anastacio Benito González Funes

COLECTIVO DE AUTORES

MINED	UNAN - MANAGUA	UNAN - LEÓN
Francisco Emilio Díaz Vega	Nubia Aracelly Barreda Rodríguez	Anastacio Benito González Funes
Humberto Antonio Jarquín López	Melissa Lizbeth Velásquez Castillo	Domingo Felipe Aráuz Chévez
Gregorio Isabel Ortiz Hernández	Armando José Huete Fuentes	Célfida del Rosario López Sánchez
Juan Carlos Caballero López	Primitivo Herrera Herrera	Orlando Antonio Ruiz Álvarez
Alberto Leonardo García Acevedo	Marlon José Espinoza Espinoza	Hilario Ernesto Gallo Cajina

INSTITUTOS QUE PARTICIPARON EN LA VALIDACIÓN

Colegio Clementina Cabezas, Managua, Managua
Colegio Fernando Gordillo, Managua, Managua
Colegio Tomas Borge, Mateare, Managua
Colegio San Cayetano, San Rafael del Sur, Managua
Instituto Nacional La Salle, Diriamba, Carazo
Instituto Juan José Rodriguez, Jinotepe, Carazo
San Benito #1, Chinandega, Chinandega
Instituto Nacional Rubén Darío, Posoltega, Chinandega
Jhon F. Kenedy, León, León
Salomón de la Selva, León, León

EQUIPO DE DIAGRAMACIÓN

María José López Samqui

Primera Edición, 2019.

La presente publicación ha sido reproducida con el apoyo de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA) a través del Proyecto para el Aprendizaje Amigable de matemática en Educación Secundaria (NICAMATE).

Índice

ANEXOS

Introducción

Este documento es un material educativo llamado "Guía para Docentes", que está dirigido a los docentes de matemática de Nicaragua, y tiene como objetivos:

- Brindar una propuesta de programación anual estándar de enseñanza.
- Brindar sugerencias sobre el uso de los Libros de Texto y el tiempo de trabajo independiente del estudiante.
- Mostrar la secuencialidad que existe entre los contenidos del currículo de matemática en Educación Secundaria.
- Indicar los aspectos esenciales de cada clase (pre saberes, posibles errores, aspectos del nuevo contenido en que se debe hacer énfasis, etc.).
- Promover el uso adecuado de la pizarra.
- Ofrecer los solucionarios de los ejercicios con sus procedimientos.
- Fomentar la evaluación formativa a través de las pruebas de unidad.

La Guía para Docentes se elaboró atendiendo al análisis de las observaciones de clase que se realizó en los centros educativos de validación, concluyendo que es importante:

- Tener claro el aprendizaje esperado en cada clase y la secuencialidad entre los contenidos del currículo.
- Hacer uso adecuado de la pizarra, escribiendo lo necesario para que el estudiante comprenda.
- Dar tiempo para que los estudiantes trabajen de forma independiente.

El Ministerio de Educación (MINED) pone a disposición de los docentes este recurso, considerando que la implementación del mismo y el uso del Libro de Texto, cambiará la experiencia de los estudiantes al aprender matemática en la escuela, y promoverá la creatividad en la búsqueda de soluciones y la argumentación cuando se enfrenten a un problema. Para dicha implementación es necesario considerar algunos aspectos esenciales:

Enseñanza basada en el aprendizaje de los estudiantes. Para enseñar matemática se deben utilizar situaciones problemáticas que despierten el interés de los estudiantes y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver problemas y a argumentar sus respuestas. En estas situaciones se deben considerar los conocimientos y habilidades que se pretenden desarrollar.

Rol del estudiante en el aprendizaje. Los estudiantes deben utilizar los conocimientos previos que le permitan reorganizar lo que ya sabe, y aplicarlos en una nueva situación. Este proceso de estudio se apoya más en la reflexión del estudiante, que en la simple memorización tradicional.

Rol del docente en el aula. La acción del docente es un factor clave, porque es el encargado de generar ambientes propicios para el aprendizaje e involucrarlos en actividades que permitan el logro de los aprendizajes esperados. Ante esto, el verdadero desafío para los docentes consiste en ayudar a sus estudiantes a analizar y socializar sus resultados.

Retos de los estudiantes y docentes en las clases de matemática. Cambio de actitud frente a ideas diferentes sobre lo que significa enseñar y aprender matemática. No se trata de que el docente busque las explicaciones más sencillas y amenas, sino que ayude a formarles la capacidad de pensar y aprender por sí mismos, para que ellos sientan la satisfacción de poder resolver problemas.

Estructura del Libro de Texto para estudiantes

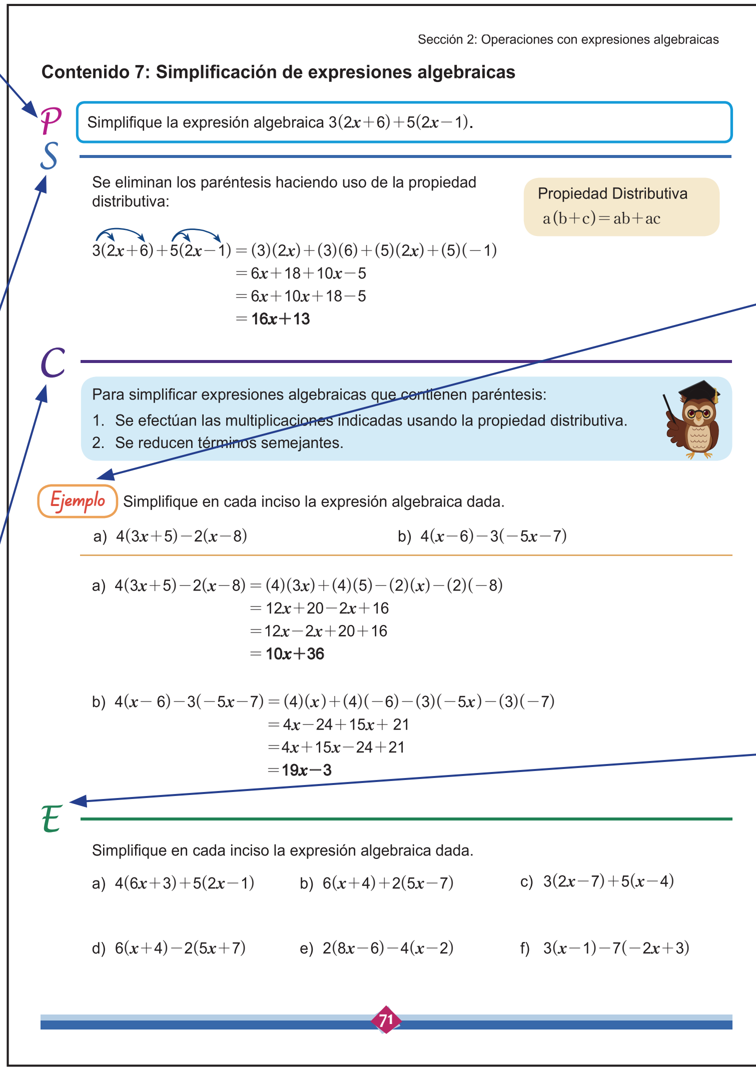
El Libro de Texto consta de introducción y unidades. En la introducción se detallan los momentos del desarrollo de un contenido, los cuales son: problema de la clase, solución del problema, conclusión y ejercicios. En algunos contenidos, por sus características, se han agregado ejemplos después de la conclusión.

Cada unidad del Libro de Texto se ha estructurado por sección, estas contienen una secuencia de contenidos contemplados en la malla curricular de matemática para Educación Secundaria.

P Representa el problema inicial, el cual se debe leer y analizar identificando las condiciones que plantea y lo que se pregunta.

S Representa la solución del problema inicial explicada paso a paso.

C Representa la conclusión de la clase, donde se propone el esquema de solución del problema inicial, en algunos casos también se presentan conceptos importantes usados en el problema.



Sección 2: Operaciones con expresiones algebraicas

Contenido 7: Simplificación de expresiones algebraicas

P

Simplifique la expresión algebraica $3(2x+6)+5(2x-1)$.

S

Se eliminan los paréntesis haciendo uso de la propiedad distributiva:

Propiedad Distributiva
$a(b+c)=ab+ac$

$$\begin{aligned}3(2x+6)+5(2x-1)&=(3)(2x)+(3)(6)+(5)(2x)+(5)(-1)\\&=6x+18+10x-5\\&=6x+10x+18-5\\&=\mathbf{16x+13}\end{aligned}$$

C

Para simplificar expresiones algebraicas que contienen paréntesis:
1. Se efectúan las multiplicaciones indicadas usando la propiedad distributiva.
2. Se reducen términos semejantes.

Ejemplo Simplifique en cada inciso la expresión algebraica dada.

a) $4(3x+5)-2(x-8)$ b) $4(x-6)-3(-5x-7)$

a) $$\begin{aligned}4(3x+5)-2(x-8)&=(4)(3x)+(4)(5)-(2)(x)-(2)(-8)\\&=12x+20-2x+16\\&=12x-2x+20+16\\&=\mathbf{10x+36}\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}4(x-6)-3(-5x-7)&=(4)(x)+(4)(-6)-(3)(-5x)-(3)(-7)\\&=4x-24+15x+21\\&=4x+15x-24+21\\&=\mathbf{19x-3}\end{aligned}$$

E

Simplifique en cada inciso la expresión algebraica dada.

a) $4(6x+3)+5(2x-1)$ b) $6(x+4)+2(5x-7)$ c) $3(2x-7)+5(x-4)$

d) $6(x+4)-2(5x+7)$ e) $2(8x-6)-4(x-2)$ f) $3(x-1)-7(-2x+3)$

71

Ejemplo
Los ejemplos que se presentan son variantes del problema inicial.

E Representa los ejercicios propuestos, es importante que los estudiantes los intenten resolver por sí mismos.

En **Comprobemos lo aprendido** se presentan una serie de ejercicios representativos de contenidos anteriores, el objetivo de estas clases es asegurar un tiempo de ejercitación que permita afianzar los conocimientos adquiridos y aclarar cualquier duda que puedan tener de los contenidos estudiados.

En algunos grados hay un contenido denominado **Desafío** en el que se presentan casos especiales o contenidos más complejos. El desafío se puede tratar en su clase si tiene suficiente horas de clase y sus estudiantes tienen una buena capacidad para entenderlo. De lo contrario, es mejor omitir este contenido para dedicar más tiempo a los contenidos básicos.

Estructura de la Guía para Docentes

1. Propuesta de programación anual de 10mo grado

Semestre	Mes	Unidad (Horas)	Pág. del LT	Sección
I	Febrero	1. Conjuntos e Intervalos Numéricos (11 H/C)	2 ~ 12	1. Conjuntos 2. Intervalos numéricos
I	Marzo Abril	2. Inecuaciones de Primer y Segundo grado (26 H/C)	13 ~ 38	1. Inecuaciones de primer grado 2. Inecuaciones de primer grado con valor absoluto 3. Inecuaciones de segundo grado
I	Abril Mayo	3. Fracciones Algebraicas (19 H/C)	39 ~ 58	1. Simplificación, multiplicación y división de fracciones algebraicas 2. Adición y sustracción de fracciones algebraicas
I / II	Mayo Junio Julio	4. Ecuaciones de Tercer Grado (18 H/C)	59 ~ 76	1. División sintética 2. Teorema del residuo y teorema del factor 3. Factorización de polinomios de tercer grado y resolución de ecuación de tercer grado
II	Julio Agosto	5. Introducción a la Trigonometría (17 H/C)	77 ~ 94	1. Funciones trigonométricas de ángulos agudos en triángulos rectángulos 2. Valores de las funciones trigonométricas de ángulos agudos 3. Resolución de triángulos rectángulos 4. Relaciones entre seno y coseno
II	Agosto Septiembre Octubre	6. Funciones Trigonométricas (25 H/C)	95 ~ 125	1. Funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera 2. Relación entre seno, coseno y tangente 3. Relación entre las funciones trigonométricas. 4. Gráfica de las funciones trigonométricas
II	Octubre Noviembre	7. Trigonometría Analítica (13 H/C)	126 ~ 136	1. Ley del seno 2. Ley del coseno
II	Noviembre	8. Estadística (11 H/C)	137 ~ 153	1. Medidas de tendencia central y representación gráfica de datos 2. Medidas de posición y dispersión

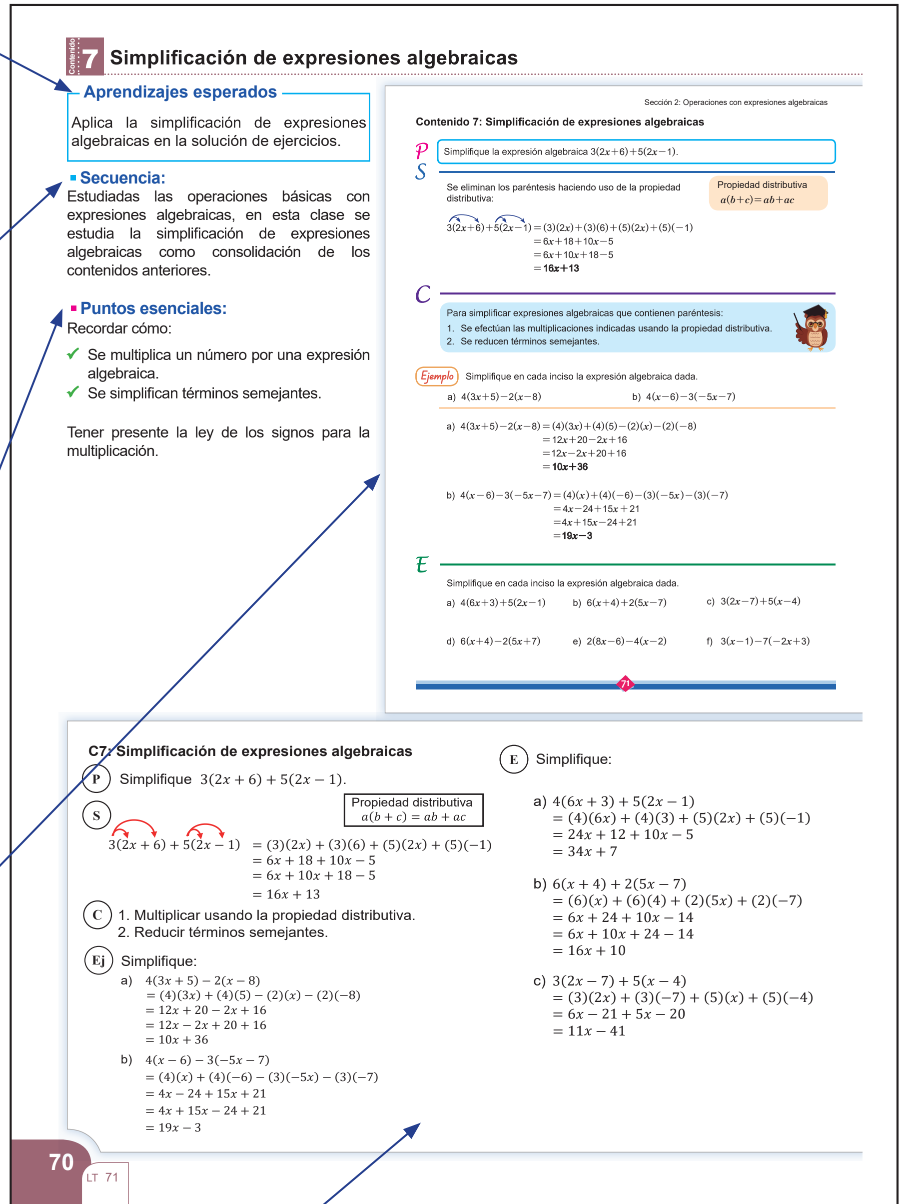
2. Elementos de una página de la Guía para Docentes

Aprendizajes esperados:
Es el elemento que define lo que se espera que logren los estudiantes en cada clase, expresado en forma concreta, precisa y visualizable.

Secuencia:
Se indican los conocimientos previos que el estudiante posee para la comprensión del nuevo contenido y la relación con contenidos posteriores.

Puntos esenciales:
Se orienta sobre procedimientos o conceptos en los que se debe enfatizar, así como las posibles dificultades y errores que podrían presentarse.

Página del Libro de Texto:
Tiene como propósito ubicar y relacionar el contenido de aprendizaje con el proceso de la clase.



Contenido 7 **Simplificación de expresiones algebraicas**

Aprendizajes esperados

Aplica la simplificación de expresiones algebraicas en la solución de ejercicios.

Secuencia:
Estudiadas las operaciones básicas con expresiones algebraicas, en esta clase se estudia la simplificación de expresiones algebraicas como consolidación de los contenidos anteriores.

Puntos esenciales:
Recordar cómo:

- ✓ Se multiplica un número por una expresión algebraica.
- ✓ Se simplifican términos semejantes.

Tener presente la ley de los signos para la multiplicación.

Sección 2: Operaciones con expresiones algebraicas

Contenido 7: Simplificación de expresiones algebraicas

P Simplifique la expresión algebraica $3(2x+6)+5(2x-1)$.

S Se eliminan los paréntesis haciendo uso de la propiedad distributiva:

Propiedad distributiva $a(b+c)=ab+ac$

$$\begin{aligned}3(2x+6)+5(2x-1) &= (3)(2x)+(3)(6)+(5)(2x)+(5)(-1)\\ &= 6x+18+10x-5\\ &= 6x+10x+18-5\\ &= \mathbf{16x+13}\end{aligned}$$

C Para simplificar expresiones algebraicas que contienen paréntesis:

1. Se efectúan las multiplicaciones indicadas usando la propiedad distributiva.
2. Se reducen términos semejantes.

Ejemplo Simplifique en cada inciso la expresión algebraica dada.

a) $4(3x+5)-2(x-8)$ b) $4(x-6)-3(-5x-7)$

a) $$\begin{aligned}4(3x+5)-2(x-8) &= (4)(3x)+(4)(5)-(2)(x)-(2)(-8)\\ &= 12x+20-2x+16\\ &= 12x-2x+20+16\\ &= \mathbf{10x+36}\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}4(x-6)-3(-5x-7) &= (4)(x)+(4)(-6)-(3)(-5x)-(3)(-7)\\ &= 4x-24+15x+21\\ &= 4x+15x-24+21\\ &= \mathbf{19x-3}\end{aligned}$$

E Simplifique en cada inciso la expresión algebraica dada.

a) $4(6x+3)+5(2x-1)$ b) $6(x+4)+2(5x-7)$ c) $3(2x-7)+5(x-4)$

d) $6(x+4)-2(5x+7)$ e) $2(8x-6)-4(x-2)$ f) $3(x-1)-7(-2x+3)$

71

C7: Simplificación de expresiones algebraicas

P Simplifique $3(2x+6)+5(2x-1)$.

S Propiedad distributiva $a(b+c)=ab+ac$

$$\begin{aligned}3(2x+6)+5(2x-1) &= (3)(2x)+(3)(6)+(5)(2x)+(5)(-1)\\ &= 6x+18+10x-5\\ &= 6x+10x+18-5\\ &= 16x+13\end{aligned}$$

C 1. Multiplicar usando la propiedad distributiva.
2. Reducir términos semejantes.

Ej Simplifique:

a) $$\begin{aligned}4(3x+5)-2(x-8) &= (4)(3x)+(4)(5)-(2)(x)-(2)(-8)\\ &= 12x+20-2x+16\\ &= 12x-2x+20+16\\ &= 10x+36\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}4(x-6)-3(-5x-7) &= (4)(x)+(4)(-6)-(3)(-5x)-(3)(-7)\\ &= 4x-24+15x+21\\ &= 4x+15x-24+21\\ &= 19x-3\end{aligned}$$

E Simplifique:

a) $$\begin{aligned}4(6x+3)+5(2x-1) &= (4)(6x)+(4)(3)+(5)(2x)+(5)(-1)\\ &= 24x+12+10x-5\\ &= 34x+7\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}6(x+4)+2(5x-7) &= (6)(x)+(6)(4)+(2)(5x)+(2)(-7)\\ &= 6x+24+10x-14\\ &= 6x+10x+24-14\\ &= 16x+10\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}3(2x-7)+5(x-4) &= (3)(2x)+(3)(-7)+(5)(x)+(5)(-4)\\ &= 6x-21+5x-20\\ &= 11x-41\end{aligned}$$

70 LT 71

Plan de Pizarra
En la pizarra se presenta de forma ordenada el problema de la clase, el proceso de solución, la conclusión central de la clase derivada del problema central y la indicación del ítem de evaluación, con su correspondiente solución. En algunas clases se presenta un ejemplo después de la conclusión y previo al ítem de evaluación. Este tiene como propósito consolidar el aprendizaje o ampliar el contenido en desarrollo. Lo que se plasma en la pizarra permitirá a los estudiantes llevar un registro ordenado de sus apuntes para estudiarlos posteriormente.

3. Prueba de cada Unidad

Se presenta una propuesta de la prueba por unidad para evaluar el nivel de comprensión de los estudiantes. Los docentes deben orientar con anticipación la fecha de aplicación de la prueba de la unidad a los estudiantes para que ellos repasen y consoliden lo que aprendieron en la unidad. Si el rendimiento es bajo en algunos problemas, los docentes deben tomar medidas para mejorarlo y a la vez asegurar que este bajo rendimiento no obstaculice el siguiente aprendizaje.

De esta manera, los docentes pueden utilizar esta prueba para discusión sobre los resultados obtenidos y posibles estrategias didácticas a implementar con sus colegas de la misma institución o en los Encuentros Pedagógicos de Interaprendizaje (EPI).

* Vea “1. Uso de las pruebas de unidad” en la página X, para una descripción más detallada sobre la evaluación.

4. Solucionarios

Se presentan las soluciones de los ejercicios del Libro de Texto de acuerdo a la unidad, sección y contenido. En este se muestran más detalles en el proceso de solución que los brindados en el solucionario del Libro de Texto.

Orientaciones metodológicas para el mejoramiento de los aprendizajes del área de Matemática

Enseñar matemática en base a actividades de aprendizaje que desarrollen en los estudiantes formas de pensar y que permitan formular conjeturas y procedimientos para resolver problemas, argumentando sus resultados, significa que ellos deben:

(1) Leer y analizar los enunciados del problema.

(2) Pensar por sí mismos la solución al problema.

(3) Expresar sus soluciones.

(4) Comparar sus ideas unos con otros.

(5) Comprender las ideas de los demás.

(6) Aprender unos de otros.

Recomendaciones para el desarrollo de una clase según los momentos P, S, C, EJ, E

Para lograr los aprendizajes esperados de una clase, se debe tener en cuenta que el centro del proceso de aprendizaje es el estudiante, por lo que deben participar de forma activa en cada momento de la clase. En este proceso, el rol principal del docente es asistir en su aprendizaje a los estudiantes. A continuación, se presentan algunas recomendaciones a considerar en los diferentes momentos de la clase:

Momentos de la clase	Actividades del Docente	Actividades del Estudiante
P	Indicar que lean el problema.	Leer el problema.
	Escribir el problema en la pizarra, mientras los estudiantes leen.	
	Indicar a los estudiantes que copien el problema en su cuaderno.	Escribir el problema en su cuaderno.
	Explicar el problema de forma clara, si es necesario.	Comprender el problema.
S	Orientar que resuelvan el problema en su cuaderno. No dar mucho tiempo si los estudiantes no muestran posibles respuestas al problema planteado.	Intentar dar solución al problema, escribiendo sus apuntes en el cuaderno.
	Monitorear el avance de los estudiantes identificando soluciones interesantes, errores, etc., mientras se recorre el salón de clase.	
	Indicar a los estudiantes que atiendan a las explicaciones que hará.	
	Explicar la solución del texto en la pizarra, cuando todos los estudiantes estén poniendo atención.	Hacer silencio y poner atención al docente.
	Indicar a los estudiantes que copien la solución en su cuaderno y revisar que lo hagan.	Observar la explicación del docente y hacer preguntas si es necesario.
		Escribir la solución en su cuaderno.

Momentos de la clase	Actividades del Docente	Actividades del Estudiante
C	Orientar lectura de la conclusión. Explicar la conclusión a partir del proceso de solución del problema.	Leer la conclusión planteada en el Libro de Texto. Relacionar la conclusión con el proceso de solución del problema. Anotar la conclusión en su cuaderno.
Ej (En el caso de presentarse un ejemplo)	Indicar que lean el ejemplo. Indicar que copien el ejemplo en su cuaderno. Explicar el ejemplo, haciendo hincapié en la aplicación de la conclusión.	Analizar la solución del ejemplo, de forma conjunta con el docente. Aplicar la conclusión en la solución del ejemplo.
E	Orientar el o los ejercicios a ser resueltos. Asignar tiempo prudencial para que los estudiantes resuelvan los ejercicios. Recorrer el salón mientras los estudiantes resuelven el ítem. Monitorear cuántos estudiantes resuelven al menos el primer ejercicio propuesto. Si hay muchos estudiantes que no han resuelto el ítem de evaluación, explicar este en la pizarra sin esperar mucho tiempo y dar la oportunidad de resolver el siguiente ítem. Brindar oportunidad de que algunos estudiantes expliquen la solución de al menos el primer ejercicio. Revisar y explicar el procedimiento y respuesta en la pizarra.	Resolver de forma individual cada ejercicio. Aplicar la conclusión aprendida. Si termina todos los ejercicios propuestos, brindar apoyo a aquellos que no han concluido. Socializar la solución de ejercicios.

Puntos importantes a considerar en la facilitación del aprendizaje

a) Usar adecuadamente el tiempo

Alcanzar el aprendizaje esperado no es una tarea sencilla, por lo que, a continuación, se sugieren algunas técnicas para asegurar el aprendizaje en el tiempo establecido:

- Ubicación de los pupitres de los estudiantes en filas, todos los estudiantes dirigidos hacia la pizarra.
- Disposición del LT antes de iniciar la clase: orientar a los estudiantes tener preparados los recursos o materiales antes del inicio de la clase.
- Tiempo a dedicar para el recordatorio o repaso: Si se destina más de 3 minutos en la parte inicial donde se recuerdan los presaberes, en la mayoría de los casos se produce un desfase que afectará las clases posteriores.

b) Evaluar y brindar orientación necesaria desplazándose en el aula

Mientras los estudiantes resuelven el problema o el ítem de evaluación, el docente debe desplazarse en el aula para evaluar el nivel de comprensión del contenido, revisando el trabajo de los estudiantes y observando si han comprendido el enunciado.

c) Dar explicaciones claras a los estudiantes

Las instrucciones y explicaciones a los estudiantes deben ser claras y concretas, en este sentido es importante hablar cuando se capte la atención de los estudiantes. Para captar la atención el docente debe llamar a los estudiantes con frases como “Miren a la pizarra”, “Atención por favor”, entre otras. En caso de que en el aula persista la indisciplina, el docente puede dejar de explicar o bajar el volumen de la voz.

Es importante durante la explicación observar a los estudiantes para suponer su nivel de comprensión, esto significa que en ocasiones es necesario repetir la explicación cambiando expresiones, hablar más despacio, invitar a estudiantes para que expliquen con sus palabras, etc.

d) Aprovechar el rendimiento de los estudiantes que resuelven rápido los ejercicios

Para aprovechar el rendimiento de los estudiantes que resuelven los ejercicios más rápido, el docente puede establecer el siguiente compromiso: cuando terminen todos los problemas y los hayan revisado, entonces ellos pueden orientar a los demás compañeros. Así mismo, el docente puede preparar otra serie de problemas para la fijación del contenido u otro tipo de problemas que tienen carácter de desafío.

e) Revisar los cuadernos de apunte

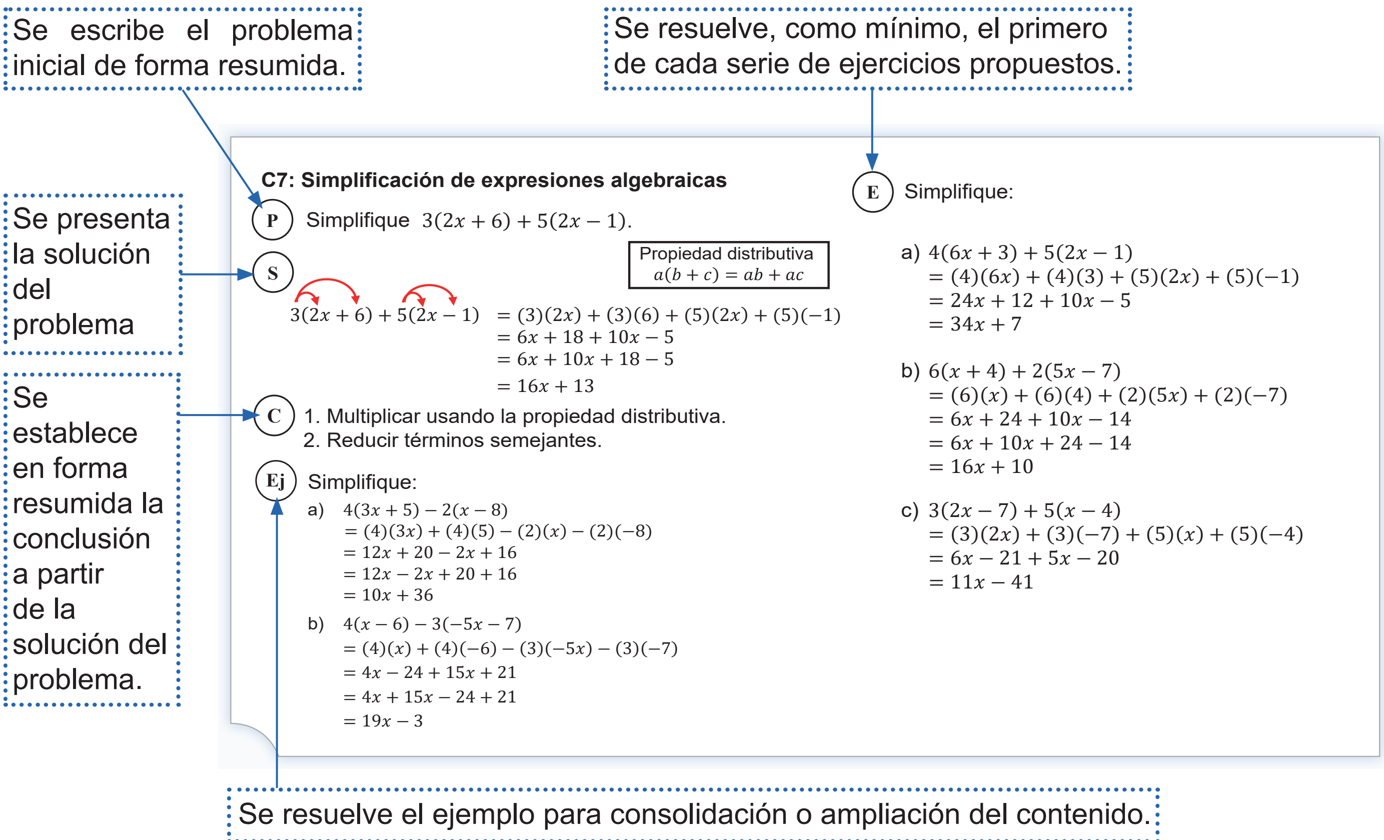
Si no se brinda un monitoreo continuo sobre el uso del cuaderno, eventualmente se puede utilizar de manera desordenada, por lo que es necesario que se revise periódicamente, de modo que los estudiantes sientan que están siendo monitoreados. Y también es recomendable chequear cuadernos de los estudiantes durante la etapa de ejercicio para animar a los estudiantes (marcar ✓ , firmar o sellar)

f) Formar el hábito de estudio en el hogar

Formar el hábito de estudio de los estudiantes en el hogar es tarea no solamente del docente, sino también de los padres de familia y no es nada fácil. Por lo que, al inicio, se podría formar el hábito de estudio a través de la asignación de tareas y orientar que estas se revisarán periódicamente.

g) Usar adecuadamente la pizarra

La pizarra tiene la función de un cuaderno común entre el docente y los estudiantes, por lo cual debe ordenarse el desarrollo del aprendizaje del contenido en ella. En esta Guía se propone utilizar la siguiente estructura en la pizarra, de acuerdo con el proceso de aprendizaje de matemática establecido en este mismo documento:



En este documento se propone el uso de la pizarra de forma ordenada:

- En caso de que el problema sea de enunciado extenso, se debe escribir un resumen comprensible de dicho enunciado.
- En el proceso de solución no debe repetirse cada palabra de la solución planteada en el Libro de Texto, pero sí debe escribirse cada paso imprescindible del proceso.
- La conclusión también puede mostrarse de forma resumida (cuando esta es extensa).
- Debe brindarse espacio suficiente para resolver al menos el primero de cada serie de ejercicios propuestos.
- Si no puede seguir escribiendo en la pizarra debido a su pequeño tamaño, puede borrar los contenidos que los estudiantes ya han terminado de copiar y escribir la continuación. Debe procurarse dividir la pizarra en dos columnas con el mismo espacio en cada una.

Uso de las Pruebas de Unidad

1. Propuesta sobre el uso de las Pruebas de Unidad

El propósito de esta propuesta es sugerir el uso efectivo de las pruebas de unidad que están incluidas en los Libros de Texto y Guías para Docentes desarrolladas por NICAMATE, y cómo estas podrían usarse para evaluar a los estudiantes en la asignatura de Matemática.

Se espera que las pruebas se realicen después de terminar cada unidad del Libro de Texto para que los docentes puedan conocer el alcance de los aprendizajes esperados en los contenidos de la unidad y, lo que es más importante, darles retroalimentación. En este sentido, el enfoque principal de las pruebas de unidad es brindar a los docentes una herramienta para administrar y mejorar efectivamente el aprendizaje de sus estudiantes. Dado que las pruebas se insertan en la parte de anexo al final de los Libros de Texto, los docentes podrían preguntarse si los estudiantes pueden ver las pruebas con anticipación y esto arruinaría el propósito de las pruebas. Sin embargo, las pruebas se incorporan en los Libros de Texto basándose en la idea de que estas contribuirán a mejorar el aprendizaje de los estudiantes siempre que las pruebas los alienten a estudiar y prepararse.

Las pruebas, además de eso, también podrían usarse para evaluar el desempeño de los estudiantes. Se espera que un sistema de evaluación eficaz, junto con los nuevos Libros de Texto y Guías para Docentes, contribuyan a mejorar aún más el aprendizaje de los estudiantes en matemática. Es en este contexto que, siguiendo la solicitud del MINED, el Proyecto NICAMATE sugiere 2 opciones sobre el uso de las pruebas individuales para la evaluación. Al hacer esta sugerencia, el Proyecto consideró el "Manual de Planeamiento Didáctico y Evaluación de los Aprendizajes en Educación Secundaria" escrito por el MINED.

2. Opciones sobre el uso de las Pruebas de Unidad para evaluación

(1) Opción 1

Total: 100 Puntos

Pruebas de Unidades (PU): 50 Puntos

Prueba Escrita o Trabajo Escrito Durante el Corte de Evaluación: 50 Puntos

Tabla de Ejemplo para la Opción 1 en Caso de 7mo Grado

No.	Nombre	Prueba de Unidad (20 Puntos para Cada Unidad)							Total de PU Acumulado (140 Puntos)	[A] Puntos de PU Ajustados (50 Puntos)*	[B] Prueba Escrita o Trabajo Escrito (50 Puntos)	Valoración Cuantitativa (100 Puntos) A+B	Valoración Cualitativa
		U1	U2	U3	U4	U5	U6	U7					
1	María	10	5	10	8	14	13	10	70	25	40	65	AE
2	Juan	18	16	20	15	12	16	20	117	42	40	82	AS

* [A] Puntos de PU Ajustados (50 Puntos) = Total de PU Acumulado × 50/140

La primera opción es tener dos criterios principales para la evaluación, las pruebas de unidad (50 puntos) y Prueba o Trabajo Escrito Durante el Corte de Evaluación (50 puntos). Los puntos asignados a cada criterio podrían ajustarse teniendo en cuenta la situación de cada centro educativo. La tabla anterior toma el caso del 7mo grado como ejemplo y, por lo tanto, tiene 7 pruebas de unidad, cada una de las cuales toma hasta 20 puntos. El total de puntos de las pruebas acumuladas, en este caso máximo 140 puntos, debe ajustarse a unos 50 puntos. La fórmula para este ajuste será Puntos de PU Ajustados = Total de PU Acumulado × 50/140.

La suma de la Evaluación de Puntos de PU Ajustados y Prueba o Trabajo Escrito Durante el Corte será la marca cuantitativa final para los estudiantes. La calificación cualitativa se otorga en base a la marca cuantitativa. Los criterios para el grado cualitativo en el ejemplo son los mismos que en el manual:

Aprendizaje Avanzado (AA): 90-100 puntos

Aprendizaje Satisfactorio (AS): 76-89 puntos

Aprendizaje Elemental (AE): 60-75 puntos

Aprendizaje Inicial (AI): Menos de 60.

También es posible asignar menos puntos a las pruebas de unidad para la evaluación. Es importante que al revisar las pruebas se dé retroalimentación en la solución de los ejercicios en lo que los estudiantes cometieron errores. Después de recibir los comentarios, los estudiantes pueden volver a realizar los ejercicios en los que fallaron. Es en este proceso donde los estudiantes aprenden matemáticas cada vez mejor.

(2) Opción 2

Total: 100 Puntos

Pruebas de Unidades: 30 Puntos

Evaluación de Actitud: 30 Puntos

Prueba o Trabajo Escrito Durante Corte Evaluación: 40 Puntos

Tabla de Ejemplo para Opción 2 en Caso de 7mo Grado

No.	Nombre	Pruebas de Unidad (20 Puntos para Cada Unidad)									Evaluación de Actitud (10 Puntos para Cada Indicador)						
		U1	U2	U3	U4	U5	U6	U7	Total de PU Acumulado (140 Puntos)	**[A]** Puntos de PU Ajustados (30 Puntos)*	EA 1	EA 2	EA 3	**[B]** Total de EA Acumulado (30 Puntos)	**[C]** Prueba Escrita o Trabajo Escrito (50 Puntos)	Valoración Cuantitativa (100 Puntos) **A+B+C**	Valoración Cualitativa
1	María	10	5	10	8	14	13	10	70	15	10	9	8	27	30	72	AE
2	Juan	18	16	10	8	12	16	10	90	19	2	1	2	5	40	64	AE

* [A] Puntos de PU Ajustados (30 Puntos) = Total de PU Acumulado × 30/140

En esta opción, además de la evaluación mediante pruebas o trabajos escritos durante el corte, los docentes también deben considerar los resultados de las pruebas de unidad y las actitudes de los estudiantes hacia el aprendizaje de la matemática. Si bien los docentes podrían seleccionar los indicadores para evaluar las actitudes de los estudiantes, el Proyecto sugiere que se incluyan los siguientes indicadores:

- Entrega de tareas
- Puntualidad
- Asistencia
- Trabaja en el aula de clases
- Atiende las explicaciones del docente

La ventaja de la Opción 2 es que, como lo muestra el ejemplo en la tabla, incluso si un estudiante no pudo obtener una buena calificación en las pruebas de unidad y en las pruebas o trabajos escritos durante el corte, puede obtener una buena calificación, siempre y cuando demuestre una buena actitud hacia el estudio de la matemática. Esto requiere que los docentes observen cuidadosamente a cada estudiante.

** Si el MINED emite una nueva instrucción sobre la evaluación, deben seguirla.*

Unidad 1

Conjuntos e Intervalos Numéricos

Sección 1 Conjuntos

Sección 2 Intervalos numéricos

Contenido 1 Conjunto, elemento, notación por extensión, pertenencia, cardinalidad de conjunto

Aprendizajes esperados

Aplica los conceptos de pertenencia y cardinalidad de un conjunto en la resolución de ejercicios.

Secuencia:

Esta unidad aborda temas básicos de la teoría de conjuntos necesarios para la comprensión de ciertos contenidos que se estudian más adelante, en especial en el estudio de probabilidades en 11mo grado.

Se comienza con el estudio de los conceptos de: conjunto, elemento y cardinalidad. A su vez, se establece la relación de pertenencia entre un elemento y un conjunto, así como la notación que se utiliza.

Puntos esenciales:

Presentar ideas intuitivas sobre los conceptos de conjunto, elemento y cardinalidad.

Indicar la notación que se utiliza para denotar conjuntos, la relación de pertenencia y la cardinalidad de un conjunto.

Determinar cuándo un elemento pertenece o no a un conjunto.

Destacar que la cardinalidad de un conjunto finito siempre es un número entero no negativo.

Encontrar la cardinalidad de los conjuntos dados.

Sección 1: Conjuntos

Contenido 1: Conjunto, elemento, notación por extensión, pertenencia, cardinalidad de conjunto

Conceptos y notación

Conjunto es la colección de objetos con un determinado criterio de pertenencia.

Ejemplo: el conjunto de números naturales, el conjunto de libros de una biblioteca, el conjunto de lagos de Nicaragua, etc.

Los conjuntos se denotan por las letras mayúsculas A, B, C, etc.

Elemento de un conjunto es un objeto que se encuentra en el conjunto.

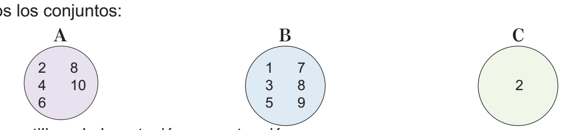
Notación por extensión. Para denotar el conjunto A, luego de la letra se escriben llaves que contienen cada elemento del conjunto, separados por coma. Ejemplo: si se quiere describir el conjunto de vocales, se escribe $B=\{a,e,i,o,u\}$.

La pertenencia de un elemento respecto a un conjunto se expresa con el símbolo $\in$. Si un elemento no pertenece a un conjunto, se usa el símbolo $\notin$. Por ejemplo, si $A=\{1,2,3,4\}$, entonces $1\in A$ y $6\notin A$.

La cardinalidad del conjunto A, denotada por $n(A)$, es la cantidad de elementos que posee.

Ejemplo: El conjunto $B=\{a,e,i,o,u\}$ tiene 5 elementos; así que $n(B)=5$.

Ejemplo Dados los conjuntos:



1. Escríbalos utilizando la notación por extensión.
2. Escriba el símbolo de pertenencia $\in$ o no pertenencia $\notin$ en el espacio en blanco.
   a) 4___A b) 5___B c) 2___C d) 3___C
3. Encuentre la cardinalidad de cada uno.

1. $A=\{2,4,6,8,10\}$ $B=\{1,3,5,7,8,9\}$ $C=\{2\}$
2. a) $4 \in A$ b) $5 \in B$ c) $2 \in C$ d) $3 \notin C$
3. $n(A)=5$ El conjunto A posee 5 elementos.
   $n(B)=6$ El conjunto B posee 6 elementos.
   $n(C)=1$ El conjunto C posee 1 elemento.

E

Dado los conjuntos $A=\{-2,-1,0,2,3\}$ $B=\{-1,2,3\}$ y $C=\{-2,0,3,4\}$

1. Escriba el símbolo $\in$ o $\notin$ en cada espacio en blanco según convenga.
   a) 3 _____ A b) 5 _____ B c) −2 _____ B d) 4 _____ C
   e) 0 _____ A f) −1_____ B g) 2 _____ B h) 2 _____ C
2. Encuentre la cardinalidad de cada conjunto dado.
   a) $n(A)$ b) $n(B)$ c) $n(C)$

2

U1: Conjuntos e Intervalos Numéricos

S1: Conjuntos

C1: Conjunto, elemento, notación por extensión, pertenencia, cardinalidad de conjunto

Conjunto: La colección de objetos con un determinado criterio de pertenencia.

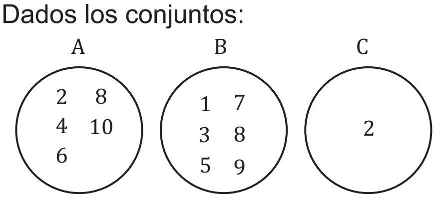
Elemento de un conjunto: Un objeto que se encuentra en el conjunto.

Notación por extensión → Ej. B = {a,e,i,o,u}

$\in$ ← Pertenencia
$\notin$ ← No pertenencia

La cardinalidad de conjunto A, denota por $n(A)$, es la cantidad de elementos que posee.

Ej Dados los conjuntos:



1. Escríbalos utilizando la notación por extensión.
   A= {2, 4, 6, 8, 10} B= {1, 3, 5, 7, 8, 9} C= {2}
2. Escriba el símbolo pertenencia $\in$ o no pertenencia $\notin$
   a) $4 \in A$ b) $5 \in B$ c) $2 \in C$ d) $3 \notin C$
3. Encuentre la cardinalidad de cada uno.
   a) $n(A) = 5$ El conjunto A posee 5 elementos.
   b) $n(B) = 6$ El conjunto B posee 6 elementos.
   c) $n(C) = 1$ El conjunto C posee 1 elemento.

E Dados los conjuntos:

A={ -2, -1, 0, 2, 3} B={ -1, 2, 3} C={ -2, 0, 3, 4}

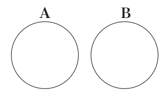
1. Escriba el símbolo $\in$ o $\notin$ según convenga.
   a) $3 \in A$ b) $5 \notin B$ c) $-2 \notin B$ d) $4 \in C$
   e) $0 \in A$ f) $-1 \in B$ g) $2 \in B$ h) $2 \notin C$
2. Encuentre la cardinalidad de cada conjunto dado.
   a) $n(A) = 5$ b) $n(B) = 3$ c) $n(C) = 4$

Contenido 2 Diagrama de Venn, operaciones con conjuntos (unión e intersección), conjunto vacío

Contenido 2: Diagrama de Venn, operaciones con conjuntos (unión e intersección), conjunto vacío

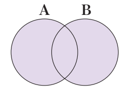
Conceptos

Diagrama de Venn: Es una representación gráfica de conjuntos y sus operaciones mediante círculos, en cuyos interiores se escriben los elementos.

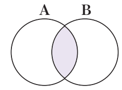


Operaciones con conjuntos:

- **Unión de conjuntos:** La unión de los conjuntos A y B, denotada por $A \cup B$, es el conjunto formado con los elementos de A y B, escribiendo una única vez los comunes.



- **Intersección de conjuntos:** La intersección de los conjuntos A y B, denotada por $A \cap B$, es el conjunto formado por los elementos comunes de A y B.

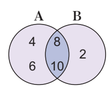


Conjunto vacío: Es aquel que no posee elementos y se denota por ϕ o $\{\ \}$.
Por ejemplo, el conjunto A formado por las letras del alfabeto que son vocales y consonantes a la vez es vacío porque ninguna letra cumple esta condición, luego $n(A) = 0$.

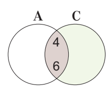
Ejemplo Sean los conjuntos $A = \{4, 6, 8, 10\}$, $B = \{2, 8, 10\}$, $C = \{4, 6, 12\}$,

1. Encuentre: a) $A \cup B$ b) $A \cap C$ c) $B \cup C$ d) $B \cap C$
2. Represente en diagrama de Venn los conjuntos que resultan en 1., y encuentre sus cardinalidades.

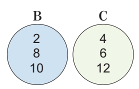
a) $A \cup B = \{2,4,6,8,10\}$ b) $A \cap C = \{4,6\}$ c) $B \cup C = \{2,4,6,8,10,12\}$ d) $B \cap C = \phi$



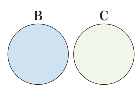
$n(A \cup B) = 5$



$n(A \cap C) = 2$



$n(B \cup C) = 6$



$n(B \cap C) = 0$

E

Sean los conjuntos $A = \{-1, 0, 2, 3\}$, $B = \{-2, 0, 3\}$, $C = \{-1, 1, 2\}$, $D = \{-2, 1, 2\}$

1. Encuentre: a) $A \cup B$ b) $A \cap D$ c) $A \cup C$ d) $B \cap C$
2. Represente en diagramas de Venn los conjuntos que resultan en 1., además encuentre sus cardinalidades.

Aprendizajes esperados

Aplica la definición de conjunto vacío y efectúa las operaciones unión e intersección de conjuntos, representándolas en diagramas de Venn.

Secuencia:

En la clase anterior se estudiaron los conceptos de conjunto, elemento y cardinalidad. Ahora se estudian los diagramas de Venn como representaciones gráficas de conjuntos y sus operaciones. Estos diagramas se utilizarán en clases posteriores.

Puntos esenciales:

Mostrar que los diagramas de Venn son representaciones gráficas de conjuntos y sus operaciones.

Aplicar correctamente la definición de unión e intersección de conjuntos.

Dar ejemplos de conjunto vacío e indicar la notación que se usa para este conjunto.

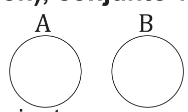
Destacar que:

- ✓ El conjunto vacío se denota por $\{\ \}$ o ϕ, no por $\{\phi\}$.
- ✓ La cardinalidad del conjunto vacío es 0.
- ✓ La unión de dos conjuntos puede ser disjunta y la intersección de dos conjuntos puede ser el conjunto vacío.

Representar en diagramas de Venn la unión e intersección de conjuntos.

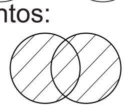
C2: Diagrama de Venn, operaciones con conjuntos (unión e intersección), conjunto vacío

Diagrama de Venn:



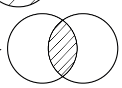
Operaciones con conjuntos:

Unión de conjuntos→



$A \cup B$

Intersección de conjuntos→



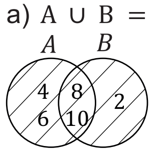
$A \cap B$

Conjunto vacío: Es aquel que no posee elementos y se denota por ϕ o $\{\ \}$.

Ej Sean los conjuntos $A = \{4,6,8,10\}$, $B = \{2,8,10\}$, $C = \{4,6,12\}$,

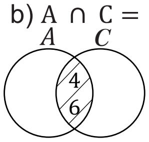
1. Encuentre: a) $A \cup B$ b) $A \cap C$ c) $B \cup C$ d) $B \cap C$
2. Represente en diagrama de Venn y encuentre sus cardinalidades.

S a) $A \cup B = \{2,4,6,8,10\}$



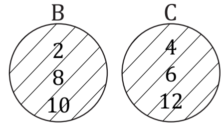
$n(A \cup B) = 5$

b) $A \cap C = \{4,6\}$



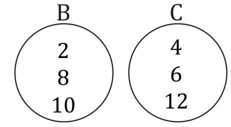
$n(A \cap C) = 2$

c) $B \cup C = \{2,4,6,8,10,12\}$



$n(B \cup C) = 6$

d) $B \cap C = \phi$



$n(B \cap C) = 0$

E Sean los conjuntos $A = \{-1,0,2,3\}$, $B = \{-2,0,3\}$, $C = \{-1,1,2\}$, $D = \{-2,1,2\}$

1. Encuentre y diga la cardinalidad de:

a) $A \cup B = \{-2, -1, 0, 2, 3\}$ $n(A \cup B) = 5$

b) $A \cap D = \{2\}$ $n(A \cap B) = 1$

c) $A \cup C = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ $n(A \cup B) = 5$

d) $B \cap C = \phi$ $n(B \cap C) = 0$

Contenido 3 Conjunto Universal. Relaciones entre conjuntos (inclusión e igualdad)

Aprendizajes esperados

Aplica la definición de conjunto universal y establece relaciones de igualdad o inclusión entre conjuntos.

Secuencia:

En la clase anterior se estudió el concepto de conjunto vacío y se definieron las operaciones: unión e intersección de conjuntos; así como su representación a través de diagramas de Venn. Aquí se estudia el concepto de conjunto universal (requerido en la definición de complemento de un conjunto) y las relaciones entre conjuntos.

Puntos esenciales:

Definir conjunto universal y mostrar la notación que se utiliza para este.

Definir las relaciones de inclusión e igualdad de conjuntos.

Resaltar que todo conjunto es subconjunto de sí mismo.

Establecer la igualdad o la inclusión entre conjuntos dados, comparando los elementos pertenecientes a estos.

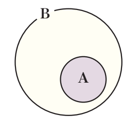
Notar que con al menos un elemento de un conjunto que no pertenezca a otro, se concluye que el primero no es subconjunto del segundo.

Contenido 3: Conjunto Universal. Relaciones entre conjuntos (inclusión e igualdad)

Conceptos

Conjunto Universal: es el conjunto de todos los elementos que están siendo considerados en una situación en particular y se representa por U.

Subconjunto: El conjunto A es subconjunto del conjunto B si todo elemento de A es también elemento de B. Esta relación entre A y B se escribe $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ y se lee "A es subconjunto de B".



En el caso de que algún elemento de A no esté en B, se dice que A no es subconjunto de B, se escribe $\mathrm{A} \not\subset \mathrm{B}$.

Igualdad de conjuntos: Dos conjuntos A y B son iguales si tienen los mismos elementos, se denota por $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ y se lee "El conjunto A es igual al conjunto B".

Ejemplo Dados los conjuntos:

$\mathrm{U} = \{1, 4, 9, 16, 25\}$, $\mathrm{A} = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2\}$, $\mathrm{B} = \{1, 4, 9, 16\}$, $\mathrm{C} = \{4, 16\}$,

escriba uno de los símbolos $\subset$, $\not\subset$ o $=$, en el espacio en blanco, dé el significado de la expresión resultante y justifique su veracidad con un ejemplo.

a) C ___ B b) A ___ C c) B ___ A d) C ___ U

a) $\mathrm{C} \subset \mathrm{B}$ Todos los elementos de C están en B, 4 y 16 pertenecen a B.

b) $\mathrm{A} \not\subset \mathrm{C}$ Algunos elementos de A no están en C, por ejemplo $3^2 \notin \mathrm{C}$.

c) $\mathrm{B} = \mathrm{A}$ Los elementos de B son los mismos de A.

d) $\mathrm{C} \subset \mathrm{U}$ Todos los elementos de C están en U, por ser U el conjunto universal.

E

Dados los conjuntos: $\mathrm{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $\mathrm{A} = \{1, 3, 7\}$, $\mathrm{B} = \{1, 4\}$, $\mathrm{C} = \{1^2, 2^2\}$, escriba uno de los símbolos $\subset$, $\not\subset$ o $=$ en el espacio en blanco.

a) C _____ A b) A _____ B c) B _____ A

d) C _____ U e) C _____ C f) U _____ A

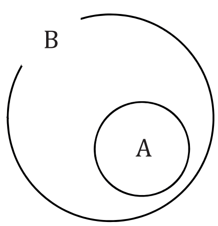
g) B _____ U h) C _____ B

4

C3: Conjunto Universal. Relaciones entre conjuntos (inclusión e igualdad)

<u>Conjunto Universal</u>: El conjunto de todos los elementos que están siendo considerados en una situación en particular y se representa por U.

Subconjunto: El conjunto A es subconjunto del conjunto B si todo elemento de A es también elemento de B. $(\mathrm{A} \subset \mathrm{B})$



Si algún elemento de A no está en B, se dice que A no es subconjunto de B. $(\mathrm{A} \not\subset \mathrm{B})$

Igualdad de conjuntos: Dos conjuntos *A* y *B* son iguales si tienen los mismos elementos. $(\mathrm{A} = \mathrm{B})$

Ej Dados los conjuntos:

$\mathrm{U} = \{1, 4, 9, 16, 25 \dots\}$ $\mathrm{A} = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2\}$

$\mathrm{B} = \{1, 4, 9, 16\}$ $\mathrm{C} = \{4, 16\}$

Escriba uno de los símbolos $\subset$, $\not\subset$ o $=$ en el espacio en blanco y justifique su veracidad con un ejemplo.

a) $\mathrm{C} \subset \mathrm{B}$ Todos los elementos de C están en B.

b) $\mathrm{A} \not\subset \mathrm{C}$ Algunos elementos de A no están en C.

c) $\mathrm{B} = \mathrm{A}$ Los elementos de B son los mismos de A.

d) $\mathrm{C} \subset \mathrm{U}$ Todos los elementos de C están en U.

E Dados los conjuntos:

$\mathrm{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $\mathrm{A} = \{1, 3, 7\}$,

$\mathrm{B} = \{1, 4\}$, $\mathrm{C} = \{1^2, 2^2\}$

Escriba uno de los símbolos $\subset$, $\not\subset$ o $=$ en el espacio en blanco.

a) $\mathrm{C} \not\subset \mathrm{A}$ b) $\mathrm{A} \not\subset \mathrm{B}$ c) $\mathrm{B} \not\subset \mathrm{A}$

d) $\mathrm{C} \subset \mathrm{U}$ e) $\mathrm{C} = \mathrm{C}$ f) $\mathrm{U} \not\subset \mathrm{A}$

g) $\mathrm{B} \subset \mathrm{U}$ h) $\mathrm{C} = \mathrm{B}$

Contenido 4 Operaciones con conjuntos (diferencia y complemento)

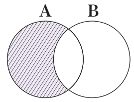
Sección 1: Conjuntos

Contenido 4: Operaciones con conjuntos (diferencia y complemento)

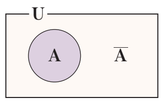
Conceptos

Operaciones con conjuntos:

- **Diferencia de conjuntos:** La diferencia $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ entre dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que están en A y no están en B. La expresión $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ se lee "A menos B".



- **Complemento de un conjunto:** El complemento de un conjunto $\mathbf{A}$ es otro conjunto formado por todos los elementos del conjunto universal que no pertenecen a $\mathbf{A}$; se denota por $\bar{\mathbf{A}}$ y se lee "complemento de $\mathbf{A}$".

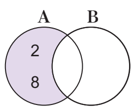


En el diagrama de Venn se considera el rectángulo como el conjunto universal (U).

Ejemplo Sean los conjuntos $\mathrm{U} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $\mathrm{A} = \{2, 8, 10\}$, $\mathrm{B} = \{6, 10\}$,

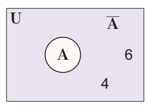
1. Encuentre: a) $\mathrm{A}-\mathrm{B}$ b) $\bar{\mathrm{A}}$
2. Represente en diagrama de Venn los conjuntos que resultan en 1. y encuentre su cardinalidad.

1. a) $\mathrm{A}-\mathrm{B} = \{2, 8\}$ b) $\bar{\mathrm{A}} = \{4, 6\}$
2.



2 y 8 están en A, pero no en B

$n(\mathrm{A} - \mathrm{B}) = 2$



4 y 6 son elementos de U que no están en A

$n(\bar{\mathrm{A}}) = 2$

E

Sean los conjuntos $\mathrm{U} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $\mathrm{A} = \{-2, 0\}$, $\mathrm{B} = \{-1, 0, 1, 2\}$, $\mathrm{C} = \{-2, 1, 2\}$

1. Encuentre:
   a) $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ b) $\bar{\mathrm{A}}$ c) $\mathrm{A} - \mathrm{C}$ d) $\mathrm{B} - \mathrm{C}$ e) $\bar{\mathrm{C}}$
2. Represente en diagrama de Venn los conjuntos que resultan en 1. y encuentre su cardinalidad.

5

Aprendizajes esperados

Aplica las operaciones de complemento y diferencia de conjuntos y las representa en diagramas de Venn.

Secuencia:

En la clase anterior se estudió el concepto de conjunto universal y las relaciones de inclusión e igualdad de conjuntos. Ahora, siguiendo con el estudio de las operaciones entre conjuntos se estudia la diferencia y el complemento.

Puntos esenciales:

Recordar la definición de conjunto universal.

Definir la diferencia entre conjuntos y el complemento de un conjunto.

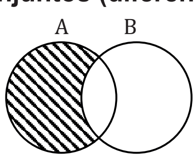
Representar en diagramas de Venn la diferencia entre conjuntos y el complemento de un conjunto.

Destacar que:

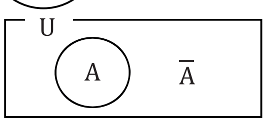
- ✓ $\mathrm{A}-\mathrm{B} \neq \mathrm{B}-\mathrm{A}$
- ✓ El complemento del conjunto vacío es el universal y viceversa.
- ✓ $\mathrm{A}-\mathrm{B}$ es subconjunto de A.
- ✓ $\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{A}} = \phi$
- ✓ $n(\bar{\mathrm{A}}) = 1 - n(\mathrm{A})$

C4: Operaciones con conjuntos (diferencia y complemento)

Diferencia de conjuntos→



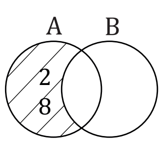
Complemento de un conjunto→



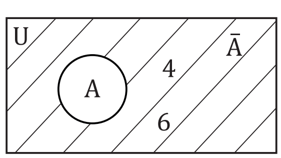
Ej Sean los conjuntos
$\mathrm{U} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $\mathrm{A} = \{2, 8, 10\}$, $\mathrm{B} = \{6, 10\}$

1. Encuentre: a) $\mathrm{A}-\mathrm{B}$ b) $\bar{\mathrm{A}}$.
2. Represéntelas con diagrama de Venn y encuentre sus cardinalidades.

S 1. a) $\mathrm{A} - \mathrm{B} = \{2, 8\}$ b) $\bar{\mathrm{A}} = \{4, 6\}$



$n(\mathrm{A}-\mathrm{B}) = 2$



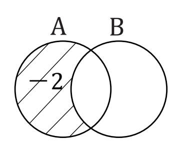
$n(\bar{\mathrm{A}}) = 2$

E Sean los conjuntos
$\mathrm{U} = \{-2, -1, 0, 1, 2, \}$, $\mathrm{A} = \{-2, 0\}$,
$\mathrm{B} = \{-1, 0, 1, 2\}$, $\mathrm{C} = \{-2, 1, 2\}$

1. Encuentre: a) $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ b) $\bar{\mathrm{A}}$ c) $\mathrm{A} - \mathrm{C}$
2. Represéntelas con diagrama de Venn y encuentre sus cardinalidades.

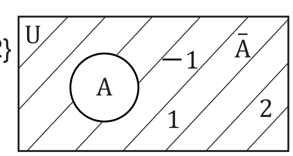
a) $\mathrm{A} - \mathrm{B} = \{-2\}$

$n(\mathrm{A}-\mathrm{B}) = 1$



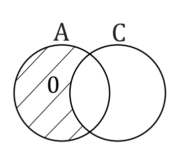
b) $\bar{\mathrm{A}} = \{-1, 1, 2\}$

$n(\bar{\mathrm{A}}) = 3$



c) $\mathrm{A} - \mathrm{C} = \{0\}$

$n(\mathrm{A} - \mathrm{C}) = 1$



Contenido 5 Conjunto (notación por comprensión)

Aprendizajes esperados

Describe conjuntos de notación por comprensión a extensión o viceversa.

Secuencia:

En todos los conjuntos que se han presentado hasta este momento se han enumerado cada uno de sus elementos. En esta clase se describen conjuntos caracterizando sus elementos mediante alguna propiedad.

Puntos esenciales:

Recordar que un conjunto está expresado por extensión cuando se enumeran cada uno de sus elementos.

Definir cuándo un conjunto está expresado por comprensión.

Describir conjuntos dados por comprensión a extensión o viceversa.

Explicar la notación a utilizar para los conjuntos numéricos ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$)

Contenido 5: Conjunto (notación por comprensión)

Conceptos

Notación de conjuntos:

- **Notación por comprensión:** Para expresar un conjunto por comprensión se escribe una letra mayúscula del alfabeto, el signo igual y las llaves { }, y dentro de estas una expresión que condiciona la pertenencia de los elementos.

  Ejemplo: $\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 5\}$

  Se lee: "El conjunto A lo conforman las x que son números naturales mayores o iguales a 1, pero menores o iguales a 5".

Conjuntos numéricos:
Naturales: $\mathbb{N}$ Enteros: $\mathbb{Z}$
Racionales: $\mathbb{Q}$ Reales: $\mathbb{R}$

Ejemplo Describa los siguientes conjuntos por comprensión a extensión:

a) $\mathrm{B} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ impar}, 1 < x \leq 9\}$

b) $\mathrm{C} = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < 2\}$

a) Contiene los números naturales impares mayores que 1 y menores o iguales que 9.

Extensión: $\mathrm{B} = \{3, 5, 7, 9\}$

b) Contiene números enteros mayores o iguales que -3 y menores que 2.

Extensión: $\mathrm{C} = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$

E

Describa los siguientes conjuntos de notación por comprensión a extensión:

a) $\mathrm{C} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ par}, 2 \leq x < 6\}$

b) $\mathrm{D} = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < 0\}$

c) $\mathrm{F} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ impar}, 2 < x < 6\}$

6

C5: Conjunto (notación por comprensión)

Notación por comprensión:

Ej

$$A = \{x \in \mathbb{N} | \underbrace{1 \leq x \leq 5}_{\text{Expresión que condiciona la pertenencia de los elementos}}\}.$$

Notación de un conjunto de números

Naturales: $\mathbb{N}$ Enteros: $\mathbb{Z}$

Racionales: $\mathbb{Q}$ Reales: $\mathbb{R}$

Ej Describa los siguientes conjuntos de notación por comprensión a extensión

a) $\mathrm{B} = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ impar}, 1 < x \leq 9\}$

$\mathrm{B} = \{3, 5, 7, 9\}$

b) $\mathrm{C} = \{x \in \mathbb{Z} | -3 \leq x < 2\}$

$\mathrm{C} = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$

E Describa los siguientes conjuntos de notación por comprensión a extensión.

a) $\mathrm{C} = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ par}, 2 \leq x < 6\}$

$\mathrm{C} = \{2, 4\}$

b) $\mathrm{D} = \{x \in \mathbb{Z} | -3 \leq x < 0\}$

$\mathrm{D} = \{-3, -2, -1\}$

c) $\mathrm{F} = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ impar}, 2 < x < 6\}$

$\mathrm{F} = \{3, 5\}$

Contenido 1 Intervalos numéricos en la recta numérica

Sección 2: Intervalos numéricos

Contenido 1: Intervalos numéricos en la recta numérica

Conceptos

Un intervalo puede describirse como un conjunto cuyos elementos satisfacen una desigualdad. Por ejemplo, el conjunto

○ Vacío: $<$ o $>$
● Sombreado: $\leq$ o $\geq$

$$\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$$

es el intervalo formado por todos los números reales que son mayores que 1, el cual es el extremo del intervalo, mientras que

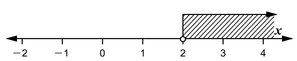
$$\mathrm{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

indica que los elementos de B están comprendidos entre 0 y 1, incluyendo a estos, que son los extremos del intervalo.

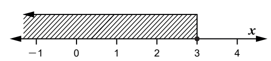
Ejemplo

1. Ubique los intervalos siguientes en la recta numérica.

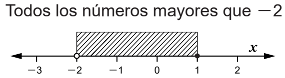
a) $\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$
$x > 2$ significa que se sitúan todos los números mayores que 2



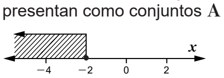
b) $\mathrm{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$
$x \leq 3$ indica ubicar todos los números menores o iguales que 3

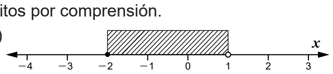


c) $\mathrm{C} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 1\}$
Todos los números mayores que -2 y menores o iguales a 1.



2. De acuerdo con las siguientes gráficas, exprese los intervalos numéricos que se presentan como conjuntos A y B descritos por comprensión.

a)

$\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\}$

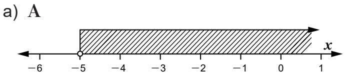
b)

$\mathrm{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 1\}$

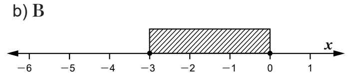
E

1. Ubique los intervalos siguientes en la recta numérica:

a) $\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$ b) $\mathrm{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3\}$ c) $\mathrm{C} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 4\}$
d) $\mathrm{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x < 3\}$ e) $\mathrm{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$

2. De acuerdo con las siguientes gráficas, exprese los intervalos que se presentan como conjuntos A y B descritos por comprensión:

a) A


b) B


8

Aprendizajes esperados

Determina intervalos numéricos de su descripción por comprensión a su representación gráfica en la recta numérica y viceversa.

Secuencia:

En séptimo grado se dio el concepto de intervalo numérico.

En las clases anteriores se han estudiado algunos conceptos básicos de la teoría de conjuntos. Ahora se estudian los intervalos numéricos como conjuntos.

Se comienza con la representación de intervalos en la recta numérica. En las siguientes clases se efectuará unión e intersección de intervalos numéricos.

Puntos esenciales:

Recordar cuándo un conjunto está expresado por comprensión.

Describir un intervalo como un conjunto cuyos elementos satisfacen una desigualdad.

Representar geométricamente intervalos en la recta numérica.

Expresar intervalos por comprensión.

Recordar que en la recta numérica a la derecha de un número se ubican números mayores a este, y a su izquierda menores.

S2: Intervalos numéricos
C1: Intervalos numéricos en la recta numérica

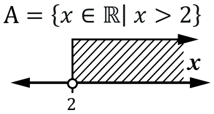
Un intervalo puede describirse como un conjunto cuyos elementos satisfacen una desigualdad.

○ Vacío: $<$ o $>$
● Sombreado: $\leq$ o $\geq$

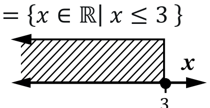
Ej $\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ es el intervalo formado por todos los números reales que son mayores que 1, el cual es el extremo del intervalo.

Ej 1. Ubique los intervalos siguientes en la recta numérica.

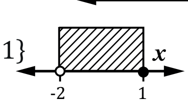
S a) $\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$



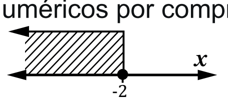
b) $\mathrm{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$



c) $\mathrm{C} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 1\}$

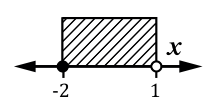


2. De acuerdo a las gráficas, exprese los intervalos numéricos por comprensión.



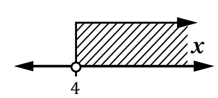
a) $\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\}$

b) $\mathrm{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 1\}$

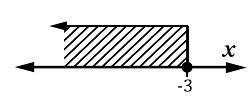


E 1. Ubique los intervalos siguientes en la recta numérica.

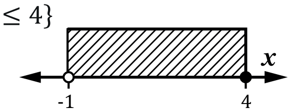
a) $\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$



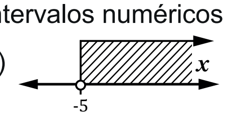
b) $\mathrm{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3\}$



c) $\mathrm{C} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 4\}$



2. De acuerdo a las gráficas, exprese los intervalos numéricos por comprensión.

a)

$\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -5\}$

Contenido 2 Unión de intervalos numéricos

Aprendizajes esperados

Efectúa la unión de intervalos numéricos y su correspondiente representación en la recta numérica.

Secuencia:

En la clase anterior se estudiaron los intervalos como conjuntos descritos por extensión o comprensión. Ahora a partir de la unión de conjuntos se estudia la unión de intervalos.

Puntos esenciales:

Recordar cómo se definió la unión de conjuntos.

Representar geométricamente la unión de intervalos en la recta numérica.

Destacar en qué casos la unión de intervalos numéricos es disjunta, todos los números reales o uno de los intervalos involucrados.

Insistir que en la representación gráfica de la unión de intervalos, esta se constituye coloreando ambos intervalos.

Contenido 2: Unión de intervalos numéricos

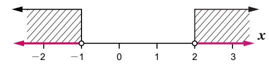
P

Grafique en una recta los pares de intervalos dados en cada inciso y encuentre su unión.

a) $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>2\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<-1\}$
b) $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\geq-2\}$, $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<4\}$
c) $E=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>2\}$, $F=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\geq4\}$

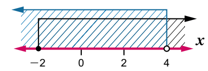
S

a) Habiendo ubicado los dos intervalos, se observa que no tienen elementos en común, así que $A\cup B$ es la reunión de todos los elementos menores que -1 con todos los mayores que 2:



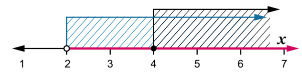
$$A\cup B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>2 \text{ o } x<-1\}.$$

b) Se observa que los dos intervalos se extienden indefinidamente, uno hacia la izquierda y el otro hacia la derecha, compartiendo elementos. Entonces queda cubierta toda la recta, es decir



$$C\cup D=\mathbb{R}.$$

c) En la gráfica puede verse que E contiene completamente a F, lo cual lleva a concluir que $E\cup F=E=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>2\}$.



C

La unión de dos intervalos A y B es un conjunto que se obtiene de acuerdo con las siguientes condiciones:

- Si los intervalos no tienen elementos comunes, $A\cup B$ es la reunión de los elementos de ambos conjuntos A y B.
- Si los dos intervalos se extienden indefinidamente en ambos sentidos y tienen elementos comunes, entonces $A\cup B$ es toda la recta numérica.
- Si uno de los intervalos contiene al otro, entonces la unión de ambos es el primer intervalo.

E

Grafique en una recta los pares de intervalos dados en cada inciso y encuentre su unión.

a) $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<-4\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>-1\}$
b) $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>1\}$, $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>3\}$
c) $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<3\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<5\}$
d) $E=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\geq-2\}$, $F=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>1\}$

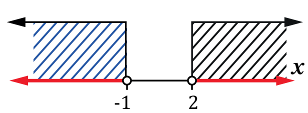
9

C2: Unión de intervalos numéricos

P Grafique en una recta los pares de intervalos dados en cada inciso y encuentre su unión.

S a) $A=\{x\in\mathbb{R}|\ x>2\}$,

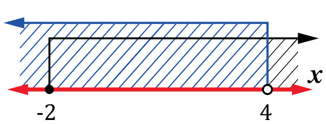
$B=\{x\in\mathbb{R}|\ x<-1\}$



$A\cup B=\{x\in\mathbb{R}|x>2 \text{ o } x<-1\}$

b) $C=\{x\in\mathbb{R}|\ x\geq-2\}$,

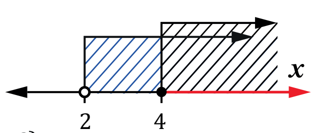
$D=\{x\in\mathbb{R}|\ x<4\}$



$C\cup D=\mathbb{R}$

c) $E=\{x\in\mathbb{R}|\ x>2\}$,

$F=\{x\in\mathbb{R}|\ x\geq4\}$



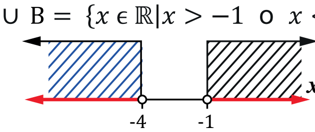
$E\cup F=E=\{x\in\mathbb{R}|\ x>2\}$

C *(Explicar verbalmente)*

E Grafique en una recta los pares de intervalos dados en cada inciso y encuentre su unión.

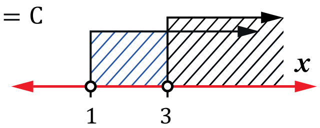
a) $A=\{x\in\mathbb{R}|\ x<-4\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}|x>-1\}$

$A\cup B=\{x\in\mathbb{R}|x>-1 \text{ o } x<-4\}$



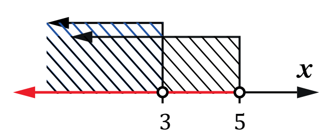
b) $C=\{x\in\mathbb{R}|\ x>1\}$, $D=\{x\in\mathbb{R}|\ x>3\}$

$C\cup D=C$



c) $A=\{x\in\mathbb{R}|\ x<3\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}|\ x<5\}$

$A\cup B=B$



Contenido 3 Intersección de intervalos numéricos

Contenido 3: Intersección de intervalos numéricos

P

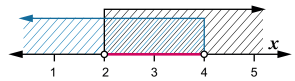
Grafique en una recta los pares de intervalos dados en cada inciso y encuentre su intersección.

a) $A=\{x \in \mathbb{R} \mid x>2\}$, $B=\{x \in \mathbb{R} \mid x<4\}$
b) $C=\{x \in \mathbb{R} \mid x<-2\}$, $D=\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$
c) $E=\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$, $F=\{x \in \mathbb{R} \mid x>4\}$

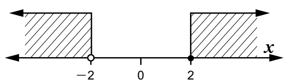
S

a) $A=\{x \in \mathbb{R}, x>2\}$, $B=\{x \in \mathbb{R} \mid x<4\}$
$A \cap B=\{x \in \mathbb{R} \mid 2<x<4\}$

La intersección de ambos intervalos está formada por los números repetidos en ambos.

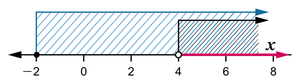


b) $C=\{x \in \mathbb{R} \mid x<-2\}$, $D=\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$
$C \cap D=\phi$



Los intervalos C y D no tienen elementos comunes.

c) $E=\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$, $F=\{x \in \mathbb{R} \mid x>4\}$
$E \cap F=\{x \in \mathbb{R} \mid x>4\}$



Se observa que los elementos comunes inician a la derecha de 4, luego $E \cap F=F=\{x \in \mathbb{R} \mid x>4\}$.

C

La intersección de intervalos numéricos A y B, es un conjunto que se obtiene de acuerdo con las siguientes condiciones:

- Si los dos intervalos tienen elementos comunes, entonces $A \cap B$ está formado por esos elementos que se repiten en A y B.
- Si los dos intervalos no tienen elementos comunes, $A \cap B$ es el conjunto vacío.
- Si uno de los intervalos contiene al otro, entonces $A \cap B$ coincide con el segundo.

E

Grafique en una recta los pares de intervalos dados en cada inciso y encuentre su intersección:

a) $A=\{x \in \mathbb{R} \mid x>3\}$, $B=\{x \in \mathbb{R} \mid x<5\}$
b) $C=\{x \in \mathbb{R} \mid x<-1\}$, $D=\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$
c) $E=\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}$, $F=\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$
d) $A=\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}$, $B=\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$
e) $C=\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\}$, $D=\{x \in \mathbb{R} \mid x>3\}$
f) $E=\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}$, $F=\{x \in \mathbb{R} \mid x>2\}$

10

Aprendizajes esperados

Efectúa la intersección de intervalos numéricos y su correspondiente representación en la recta numérica.

Secuencia:

En la clase anterior se estudió la unión de intervalos. Ahora a partir de la intersección de conjuntos se estudia la intersección de intervalos.

Puntos esenciales:

Recordar cómo se definió la intersección de conjuntos.

Representar geométricamente la intersección de intervalos en la recta numérica.

Destacar en qué casos la intersección de intervalos numéricos es vacía, uno de los intervalos involucrados u otro intervalo.

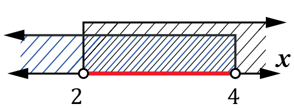
Notar que la intersección, cuando no es disjunta, esta es representada por la porción doblemente coloreada en los intervalos.

Hacer notar que, en general para conjuntos A y B, si $A \subset B$, entonces $A \cap B = A$.

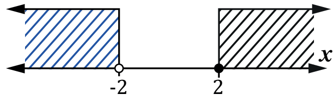
C3: Intersección de intervalos numéricos

(P) Grafique en una recta los pares de intervalos dados en cada inciso y encuentre su intersección.

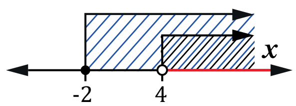
(S) a) $A=\{x \in \mathbb{R} \mid x>2\}, B=\{x \in \mathbb{R} \mid x<4\}$
$A \cap B=\{x \in \mathbb{R} \mid 2<x<4\}$



b) $C=\{x \in \mathbb{R} \mid x<-2\}, D=\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$
$C \cap D=\phi$



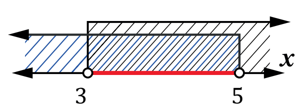
c) $E=\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}, F=\{x \in \mathbb{R} \mid x>4\}$
$E \cap F=F=\{x \in \mathbb{R} \mid x>4\}$



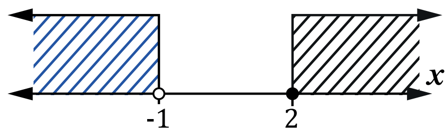
(C) *(Explicar verbalmente)*

(E) Grafique en una recta los pares de intervalos dados en cada inciso y encuentre su intersección.

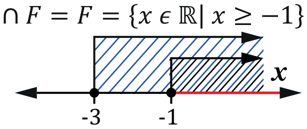
a) $A=\{x \in \mathbb{R} \mid x>3\}, B=\{x \in \mathbb{R} \mid x<5\}$
$A \cap B=\{x \in \mathbb{R} \mid 3<x<5\}$



b) $C=\{x \in \mathbb{R} \mid x<-1\}, D=\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$
$C \cap D=\phi$



c) $E=\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}, F=\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$
$E \cap F=F=\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$



Prueba de Matemática 10mo (30 min.) Fecha: ____________

Unidad 1: Conjuntos e Intervalos Numéricos

Nombre: ______________________________ Sección: __________

Sexo: M / F

/ 20

1. Dado el conjunto $A=\{1,2,3\}$, escriba el símbolo de pertenencia $\in$ o no pertenencia $\notin$ en cada espacio en blanco según corresponda. (1 punto × 2 = 2)

a) 2 ___ $\mathbf{A}$

b) 4 ___ $\mathbf{A}$

2. Dados los conjuntos $\mathbf{A}=\{1,4,7\}$, $\mathbf{B}=\{1,4\}$, escriba uno de los símbolos $\subset$ o $\not\subset$ en el espacio en blanco según corresponda. (1 punto × 2 = 2)

a) $\mathbf{A}$ ___ $\mathbf{B}$

b) $\mathbf{B}$ ___ $\mathbf{A}$

3. Sean los conjuntos $\mathbf{U}=\{2,4,6,8,10\}$ (el conjunto universo) $\mathbf{A}=\{2,8,10\}$, $\mathbf{B}=\{6,10\}$, $\mathbf{C}=\{2,8\}$, encuentre: (1 punto × 4 = 4)

a) $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}=$

b) $\mathbf{B}\cap\mathbf{C}=$

c) $\overline{\mathbf{A}}=$

d) $\mathbf{A}-\mathbf{B}=$

4. Calcule la cardinalidad de los conjuntos resultante en 3. (1 punto × 4 = 4)

a) $n(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=$

b) $n(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})=$

c) $n(\overline{\mathrm{A}})=$

c) $n(\mathrm{A}-\mathrm{B})=$

5. Exprese el conjunto $\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < 6\}$ por extensión. (2 puntos)

6. Grafique en una recta el par de intervalos numéricos dado y encuentre su unión.

   $\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}, \mathbf{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$ (3 puntos × 2 = 6)

   $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} =$

7. Grafique en una recta el par de intervalos numéricos dado y encuentre su intersección.

   $\mathbf{C} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\},\ \mathbf{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$ (3 puntos × 2 = 6)

   $\mathbf{C} \cap \mathbf{D} =$

Nombre: ____________________________________

Unidad 2

Inecuaciones de Primer y Segundo Grado

Sección 1 Inecuaciones de primer grado

Sección 2 Inecuaciones de primer grado con valor absoluto

Sección 3 Inecuaciones de segundo grado

Contenido 1

Propiedades de las inecuaciones

Aprendizajes esperados

Aplica las propiedades de las inecuaciones en ejercicios prácticos.

Secuencia:

En la unidad anterior se estudiaron los intervalos numéricos como conjuntos. Ahora estos representan conjuntos de soluciones para una inecuación, entendiendo a esta como una desigualdad donde se ve involucrada al menos una variable.

Puntos esenciales:

Definir el concepto de inecuación.

Presentar las propiedades de las inecuaciones.

Destacar que al multiplicar o dividir una inecuación por un número negativo, el sentido de la desigualdad cambia.

Notar que toda inecuación es una desigualdad, pero no toda desigualdad es una inecuación.

Mencionar que las propiedades dadas también son válidas cuando se utilizan los símbolos $\geq, \leq$.

Sección 1: Inecuaciones de primer grado

Contenido 1: Propiedades de las inecuaciones

Definición

Inecuación: Una inecuación es una desigualdad en la que se presenta al menos una variable.

Ejemplo de inecuaciones: $x > 2$, $3x + 1 > 0$.

Propiedades de las inecuaciones:

Si $\mathrm{A} > \mathrm{B}$, entonces

1. $\mathrm{A+C>B+C}$
2. $\mathrm{A-C>B-C}$
3. Con $\mathrm{C>0}$; entonces $\mathrm{AC>BC}$, $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}} > \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}$
4. Con $\mathrm{C<0}$; entonces $\mathrm{AC<BC}$, $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}} < \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}$

Ejemplo 1 Escriba el signo $>$ o $<$ en el recuadro, sabiendo que $6>4$.

a) $6+2$ ☐ $4+2$ b) $6-2$ ☐ $4-2$ c) $(6)(2)$ ☐ $(4)(2)$

d) $(6)(-2)$ ☐ $(4)(-2)$ e) $\frac{6}{2}$ ☐ $\frac{4}{2}$ f) $\frac{6}{-2}$ ☐ $\frac{4}{-2}$

a) $6+2>4+2$ Se aplica la propiedad 1. b) $6-2>4-2$ Se aplica la propiedad 2.

c) $(6)(2)>(4)(2)$ Se aplica la propiedad 3. d) $(6)(-2)<(4)(-2)$ Se aplica la propiedad 4.

e) $\frac{6}{2} > \frac{4}{2}$ Se aplica la propiedad 3. f) $\frac{6}{-2} < \frac{4}{-2}$ Se aplica la propiedad 4.

Ejemplo 2 Escriba el signo $>$ o $<$ en el recuadro, sabiendo que $a>b$.

a) $a+5$ ☐ $b+5$ b) $a-3$ ☐ $b-3$ c) $3a$ ☐ $3b$ d) $\frac{a}{-5}$ ☐ $\frac{b}{-5}$

a) $a+5>b+5$ Se aplica la propiedad 1. b) $a-3>b-3$ Se aplica la propiedad 2.

c) $3a>3b$ Se aplica la propiedad 3. d) $\frac{a}{-5} < \frac{b}{-5}$ Se aplica la propiedad 4.

E

Escriba el signo $>$ o $<$ en el recuadro, sabiendo que $a>b$.

a) $a+3$ ☐ $b+3$ b) $a-1$ ☐ $b-1$ c) $2a$ ☐ $2b$

d) $-2b$ ☐ $-2a$ e) $\frac{a}{-2}$ ☐ $\frac{b}{-2}$ f) $b-4$ ☐ $a-4$

g) $-2a$ ☐ $-2b$ h) $\frac{b}{3}$ ☐ $\frac{a}{3}$

14

U2: Inecuaciones de primer y segundo grado
S1: Inecuaciones de primer grado
C1: Propiedades de las inecuaciones

(D) Inecuación: Una desigualdad en la que se presenta al menos una variable. (Ej $x > 2$)

Propiedades de las inecuaciones:

Si $\mathrm{A} > \mathrm{B}$,

1. $A + C > B + C$
2. $A - C > B - C$
3. Con $C > 0$; entonces $AC > BC$, $\frac{A}{C} > \frac{B}{C}$
4. Con $C < 0$; entonces $AC < BC$, $\frac{A}{C} < \frac{B}{C}$

(Ej1) Escriba el signo $>$ o $<$, sabiendo que $6 > 4$.

a) $6 + 2 > 4 + 2$ Aplicar propiedad 1.
b) $6 - 2 > 4 - 2$ Aplicar propiedad 2.
c) $(6)(2) > (4)(2)$ Aplicar propiedad 3.
d) $(6)(-2) < (4)(-2)$ Aplicar propiedad 4.
e) $\frac{6}{2} > \frac{4}{2}$ Aplicar propiedad 3.
f) $\frac{6}{-2} < \frac{4}{-2}$ Aplicar propiedad 4.

(Ej2) Escriba el símbolo $>$ o $<$ sabiendo que $a > b$.

a) $a + 5 > b + 5$ b) $a - 3 > b - 3$

c) $3a > 3b$ d) $\frac{a}{-5} < \frac{b}{-5}$

(E) Escriba el símbolo $>$ o $<$, sabiendo que $a > b$.

a) $a + 3 > b + 3$

b) $a - 1 > b - 1$

c) $2a > 2b$

d) $-2b > -2a$

e) $\frac{a}{-2} < \frac{b}{-2}$

f) $b - 4 < a - 4$

g) $-2a < -2b$

h) $\frac{b}{3} < \frac{a}{3}$

Contenido 2 Inecuaciones de primer grado de la forma $x+b>c$, $x+b\geq c$

Contenido 2: Inecuaciones de primer grado de la forma $x+b>c$, $x+b\geq c$

P

Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado:

a) $x-3>5$

b) $x+3\geq5$

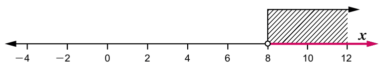
Solución de una inecuación es un número real que la hace verdadera al sustituir la variable por dicho número.

S

a) $x-3>5$

$x-3+3>5+3$ Se aplica la propiedad 1

$x>8$

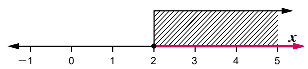


El conjunto de soluciones está representado gráficamente a la derecha.

b) $x+3\geq5$

$x+3-3\geq5-3$ Se aplica la propiedad 2

$x\geq2$



El conjunto de soluciones está representado gráficamente a la derecha.

C

Para resolver inecuaciones de primer grado de la forma $x+b>c$, $x+b\geq c$, se procede de la manera siguiente:

1. Se aplica la propiedad 1 o la propiedad 2 de las inecuaciones para aislar la variable x o se transpone el número b al lado derecho. El conjunto de soluciones está formado por todos los números reales que al sustituirlos por la variable cumplen la inecuación.
2. Se ubica el conjunto de soluciones en la recta numérica.

Ejemplo Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado: a) $x-3>5$ b) $x+3\geq5$

a) $x-3>5$

$x>5+3$ Se transpone el -3 al lado derecho

$x>8$

b) $x+3\geq5$

$x\geq5-3$ Se transpone el 3 al lado derecho

$x\geq2$

E

Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado:

a) $x+5>6$ b) $x+1\geq3$

c) $x-2>-3$ d) $x+4\geq1$

15

Aprendizajes esperados

Determina el conjunto de soluciones de inecuaciones de primer grado de la forma $x+b>c$ y $x+b\geq c$.

Secuencia:

En la clase anterior se estudió el concepto de inecuación y las propiedades que se cumplen. Ahora se resuelven inecuaciones de primer grado de la forma: $x+b>c$, $x+b\geq c$.

Puntos esenciales:

Recordar las propiedades de las inecuaciones.

Definir cuándo una inecuación es de primer grado.

Definir el conjunto de soluciones de una inecuación como el intervalo numérico cuyos elementos satisfacen la inecuación dada.

Representar gráficamente en la recta numérica el conjunto de soluciones de una inecuación.

Destacar en qué condiciones el valor o los valores extremos de un intervalo son considerados solución o soluciones de la inecuación dada.

Indicar que la transposición de términos, en similitud con el tratamiento de ecuaciones, es válida también para cuando se trabaja con inecuaciones.

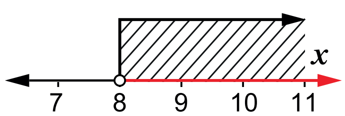
C2: Inecuaciones de primer grado de la forma $x+b>c, x+b\geq c$

P Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado.

S a) $x-3>5$

$x-3+3>5+3$

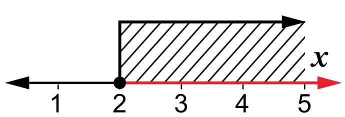
$x>8$



b) $x+3\geq5$

$x+3-3\geq5-3$

$x\geq2$



C *(Explicar verbalmente y los estudiantes la copian)*

Ej a) $x-3>5$

$x>5+3$ Transponer -3

$x>8$

b) $x+3\geq5$

$x\geq5-3$

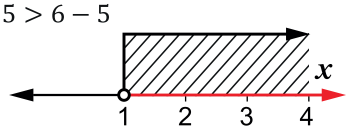
$x\geq2$

E Resuelva

a) $x+5>6$

$x+5-5>6-5$

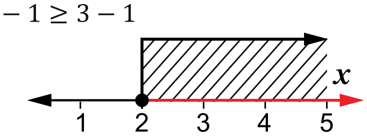
$x>1$



b) $x+1\geq3$

$x+1-1\geq3-1$

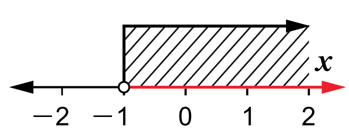
$x\geq2$



c) $x-2>-3$

$x-2+2>-3+2$

$x>-1$



Contenido 3 Inecuaciones de primer grado de la forma $x+b<c,\ x+b\leq c$

Aprendizajes esperados

Determina el conjunto de soluciones de inecuaciones de primer grado de la forma $x+b<c$ y $x+b\leq c$.

Secuencia:

En la clase anterior se resolvieron inecuaciones de primer grado de la forma: $x+b>c$, $x+b\geq c$. Ahora se resuelven inecuaciones de la forma $x+b<c$, $x+b\leq c$.

Puntos esenciales:

Recordar que la transposición de términos es válida para cuando se trabaja con inecuaciones.

Representar gráficamente en la recta numérica el conjunto de soluciones de una inecuación.

Insistir en la correcta aplicación de suma o resta de números enteros.

Recordar constantemente que números menores a otro, se ubican a la izquierda de este.

Contenido 3: Inecuaciones de primer grado de la forma $x+b<c,\ x+b\leq c$

P

Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado:

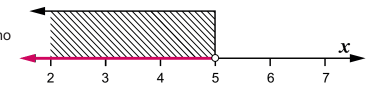
a) $x-3<2$ b) $x+1\leq 2$

S

a) $x-3<2$

$x<2+3$ Se transpone el -3 al lado derecho de la inecuación

$x<5$

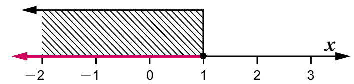


El conjunto de soluciones está representado gráficamente a la derecha.

b) $x+1\leq 2$

$x\leq 2-1$ Se transpone 1 al lado derecho

$x\leq 1$



El conjunto de soluciones está representado gráficamente a la derecha.

C

Para resolver inecuaciones de primer grado de la forma $x+b<c,\ x+b\leq c$, se procede de la forma siguiente:

1. Se transpone el número b a la derecha y se efectúa la operación indicada.
2. Se ubica en la recta el intervalo que contiene las soluciones de la inecuación.

E

Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado:

a) $x+4<8$

b) $x-2\leq -3$

c) $x-3<3$

d) $x-3\leq -3$

16

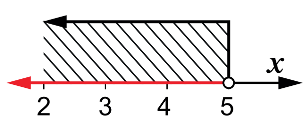
C3: Inecuaciones de primer grado de la forma $x+b<c;\ x+b\leq c$

(P) Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado.

(S) a) $x-3<2$

$x<2+3$ Transponer -3

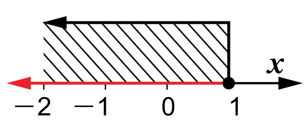
$x<5$



b) $x+1\leq 2$

$x\leq 2-1$ Transponer 1

$x\leq 1$



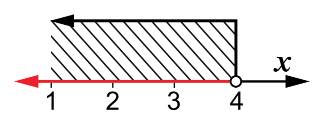
(C) *(Explicar verbalmente y los estudiantes copian)*

(E) Resuelva

a) $x+4<8$

$x<8-4$

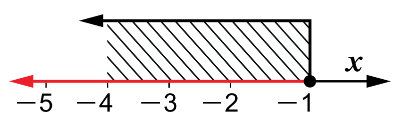
$x<4$



b) $x-2\leq -3$

$x\leq -3+2$

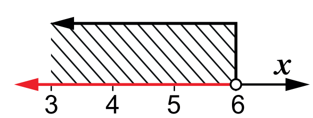
$x\leq -1$



c) $x-3<3$

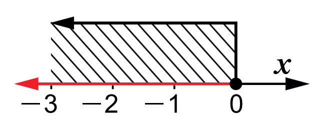
$x<3+3$

$x<6$



d) $x-3\leq -3$

$x\leq -3+3$



Contenido 4 Inecuaciones de primer grado de la forma $ax>c$, $ax<c$, $ax\geq c$, $ax\leq c$ con $a>0$

Contenido 4: Inecuaciones de primer grado de la forma $ax>c$, $ax<c$, $ax\geq c$, $ax\leq c$ con $a>0$

P

Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado:

a) $2x>4$

b) $3x\leq -6$

Recuerde la propiedad 3:
Si $A>B$ con $C>0$, entonces

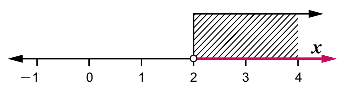
$AC>BC$, $\frac{A}{C}>\frac{B}{C}$

S

a) $2x>4$

$\frac{2}{2}x>\frac{4}{2}$ Se aplica la propiedad 3

$x>2$

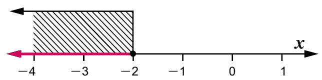


El conjunto de soluciones está representado gráficamente a la derecha.

b) $3x\leq -6$

$\frac{3}{3}x\leq\frac{-6}{3}$ Se aplica la propiedad 3

$x\leq -2$



El conjunto de soluciones está representado gráficamente a la derecha.

C

Para resolver inecuaciones de primer grado de la forma $ax>c$, $ax<c$, $ax\geq c$, $ax\leq c$, con $a>0$ se procede de la forma siguiente:

1. Se aplica la propiedad 3 para dejar aislada la variable x en el lado izquierdo.
2. Se grafica en la recta numérica el intervalo de las soluciones de la inecuación dada.

E

Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado:

a) $2x>10$

b) $3x<3$

c) $2x\geq 12$

d) $5x\leq -10$

Aprendizajes esperados

Determina el conjunto de soluciones de inecuaciones de primer grado de la forma $ax>c$, $ax<c$, $ax\geq c$, $ax\leq c$, con $a>0$.

▪ Secuencia:

En la clase anterior se resolvieron inecuaciones de primer grado de la forma: $x+b<c$, $x+b\leq c$. Ahora se resuelven inecuaciones de la forma $ax\geq c$, $ax>c$, $ax\leq c$, $ax<c$, con $a>0$.

▪ Puntos esenciales:

Recordar las propiedades de las inecuaciones que se utilizan para resolver inecuaciones de la forma $ax\geq c$, $ax>c$, $ax\leq c$ y $ax<c$.

Indicar que para dejar aislada la variable en el lado izquierdo de la inecuación, el número a usarse para este fin debe multiplicarse en ambos lados.

Representar gráficamente en la recta numérica el conjunto de soluciones de una inecuación.

Insistir en la correcta aplicación de la multiplicación y división de números enteros.

Recordar que números mayores a otro se ubican a la derecha de este, y menores a la izquierda.

C4: Inecuaciones de primer grado de la forma: $ax>c$, $ax<c$, $ax\geq c$, $ax\leq c$ con $a>0$

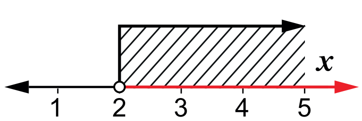
(P) Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado.

Propiedad 3:
Si $A>B$ y $C>0$, entonces
$AC>BC$, $\frac{A}{C}>\frac{B}{C}$

(S) a) $2x>4$

$\frac{2}{2}x>\frac{4}{2}$

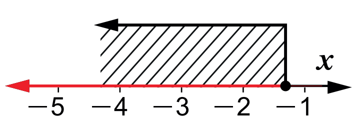
$x>2$



b) $3x\leq -6$

$\frac{3}{3}x\leq\frac{-6}{3}$

$x\leq -2$



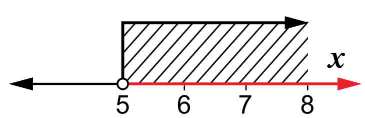
(C) *(Explicar verbalmente)*

(E) Resuelva

a) $2x>10$

$\frac{2}{2}x>\frac{10}{2}$

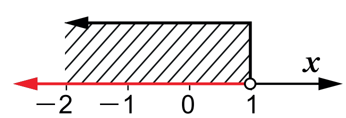
$x>5$



b) $3x<3$

$\frac{3}{3}x<\frac{3}{3}$

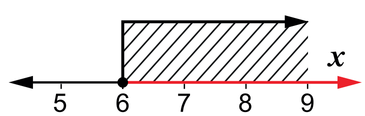
$x<1$



c) $2x\geq 12$

$\frac{2}{2}x\geq\frac{12}{2}$

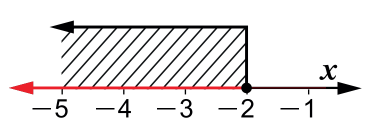
$x\geq 6$



d) $5x\leq -10$

$\frac{5}{5}x\leq\frac{-10}{5}$

$x\leq -2$



Contenido 5 Inecuaciones de primer grado de la forma $ax>c$, $ax<c$, $ax\geq c$, $ax\leq c$ con $a<0$

Aprendizajes esperados

Determina el conjunto de soluciones de inecuaciones de primer grado de la forma $ax>c$, $ax<c$, $ax\geq c$, $ax\leq c$, con $a<0$.

Secuencia:

En la clase anterior se resolvieron inecuaciones de la forma $ax\geq c, ax>c, ax\leq c$ y $ax<c$, con $a>0$. Ahora se resuelven inecuaciones de la misma forma, pero con $a<0$.

Puntos esenciales:

Indicar que para dejar aislada la variable en el lado izquierdo de la inecuación, se aplica la propiedad 4; el número debe multiplicarse en ambos lados.

Destacar que al multiplicar o dividir una inecuación por un número negativo, el sentido de la desigualdad cambia.

Recordar las propiedades de las inecuaciones.

Representar gráficamente en la recta numérica el conjunto de soluciones de una inecuación.

Contenido 5: Inecuaciones de primer grado de la forma $ax>c$, $ax<c$, $ax\geq c$, $ax\leq c$ con $a<0$

P

Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado:

a) $-2x>4$

b) $-x\leq -3$

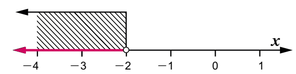
Recuerde la propiedad 4:
Si $A>B$ con $C<0$, entonces $AC<BC$, $\frac{A}{C}<\frac{B}{C}$

S

a) $-2x>4$

$\frac{-2}{-2}x<\frac{4}{-2}$ Se aplica la propiedad 4 de las inecuaciones

$x<-2$

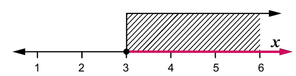


El conjunto de soluciones está representado gráficamente a la derecha.

b) $-x\leq -3$

$\frac{-1}{-1}x\geq\frac{-3}{-1}$ Se aplica la propiedad 4 de las inecuaciones

$x\geq 3$



El conjunto de soluciones está representado gráficamente a la derecha.

C

Para resolver inecuaciones de primer grado de la forma $ax>c$, $ax<c$, $ax\geq c$, $ax\leq c$, con $a<0$:

1. Se aplica la propiedad 4 para dejar aislada la variable x en el lado izquierdo.
2. Se grafica en la recta numérica el intervalo de las soluciones de la inecuación.

E

Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado:

a) $-2x>2$

b) $-x<3$

c) $-4x\geq 4$

d) $-2x\leq 10$

18

C5: Inecuaciones de primer grado de la forma:
$ax>c$; $ax<c$; $ax\geq c$; $ax\leq c$, con $a<0$

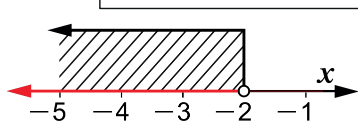
P Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado.

Propiedad 4:
Si $A>B$ con $C<0$, entonces
$AC<BC$, $\frac{A}{C}<\frac{B}{C}$

S a) $-2x>4$

$\frac{-2}{-2}x<\frac{4}{-2}$

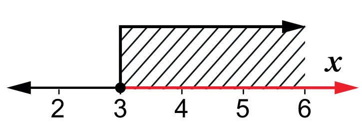
$x<-2$



b) $-x\leq -3$

$\frac{-1}{-1}x\geq\frac{-3}{-1}$

$x\geq 3$



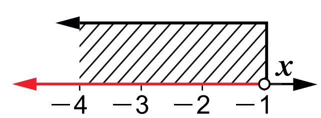
C *(Explicar verbalmente y los estudiantes copian)*

E Resuelva:

a) $-2x>2$

$\frac{-2}{-2}x<\frac{2}{-2}$

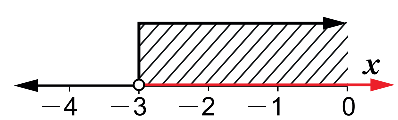
$x<-1$



b) $-x<3$

$\frac{-1}{-1}x>\frac{3}{-1}$

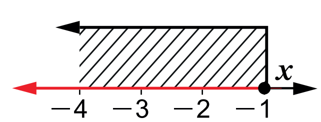
$x>-3$



c) $-4x\geq 4$

$\frac{-4}{-4}x\leq\frac{4}{-4}$

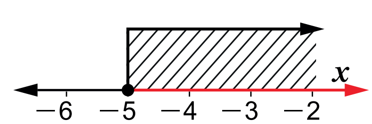
$x\leq -1$



d) $-2x\leq 10$

$\frac{-2}{-2}x\geq\frac{10}{-2}$

$x\geq -5$



Contenido 6 Inecuaciones de primer grado de la forma $ax+b>c$, $ax+b<c$, $ax+b\geq c$, $ax+b\leq c$ con $a>0$

Contenido 6: Inecuaciones de primer grado de la forma $ax+b>c$, $ax+b<c$, $ax+b\geq c$, $ax+b\leq c$ con $a>0$

P

Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado:

a) $2x+2>4$ b) $2x-4\leq -8$

S

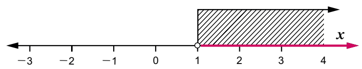
a) $2x+2>4$

$2x>4-2$ Se transpone 2

$2x>2$

$\frac{2}{2}x>\frac{2}{2}$ Se aplica la propiedad 3

$x>1$



El conjunto de soluciones está representado gráficamente a la derecha.

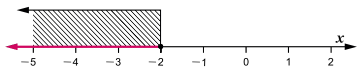
b) $2x-4\leq -8$

$2x\leq -8+4$ Se transpone -4

$2x\leq -4$

$\frac{2}{2}x\leq\frac{-4}{2}$ Se aplica la propiedad 3

$x\leq -2$



El conjunto de soluciones está representado gráficamente a la derecha.

C

Para resolver inecuaciones de primer grado de la forma $ax+b>c$, $ax+b<c$, $ax+b\geq c$, $ax+b\leq c$, con $a>0$:

1. Se transpone b al lado derecho de la inecuación, luego se aplica la propiedad 3 para aislar la variable x.
2. Se grafica el intervalo de soluciones en la recta numérica, recordando el signo usado.

E

Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado:

a) $2x-4>10$ b) $3x-3<-3$

c) $2x+2>2$ d) $2x-6<-2$

e) $2x-6\geq 2$ f) $4x+8\geq 4$

g) $5x-5\leq -10$ h) $5x+5\leq -10$

Aprendizajes esperados

Determina el conjunto de soluciones de inecuaciones de primer grado de la forma $ax+b>c$, $ax+b<c$, $ax+b\geq c$ y $ax+b\leq c$ con $a>0$.

Secuencia:

En la clase anterior se resolvieron inecuaciones de la forma $ax\geq c$, $ax>c$, $ax\leq c$, $ax<c$, con $a<0$. Ahora se resuelven inecuaciones de primer grado de la forma $ax+b>c$, $ax+b<c$, $ax+b\geq c$ y $ax+b\leq c$, con $a>0$.

Puntos esenciales:

Recordar las propiedades de las inecuaciones.

Indicar que para resolver inecuaciones de este tipo, se conjugan los procesos aprendidos en clases anteriores.

Representar gráficamente en la recta numérica el conjunto de soluciones de una inecuación.

C6: Inecuaciones de primer grado de la forma $ax+b>c$, $ax+b<c$, $ax+b\geq c$, $ax+b\leq c$ con $a>0$

P Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado:

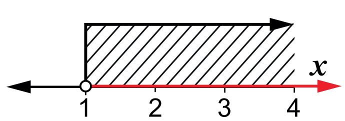
S a) $2x+2>4$

$2x>4-2$

$2x>2$

$\frac{2}{2}x>\frac{2}{2}$

$x>1$



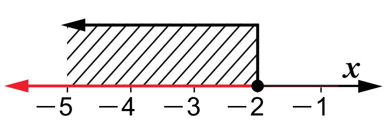
b) $2x-4\leq -8$

$2x\leq -8+4$

$2x\leq -4$

$\frac{2}{2}x\leq\frac{-4}{2}$

$x\leq -2$



C *(Explicar verbalmente)*

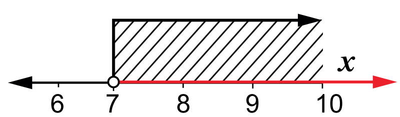
E a) $2x-4>10$

$2x>10+4$

$2x>14$

$\frac{2}{2}x>\frac{14}{2}$

$x>7$



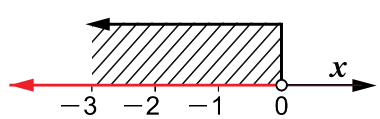
b) $3x-3<-3$

$3x<-3+3$

$3x<0$

$\frac{3}{3}x<\frac{0}{3}$

$x<0$



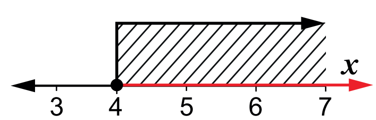
e) $2x-6\geq 2$

$2x\geq 2+6$

$2x\geq 8$

$\frac{2}{2}x\geq\frac{8}{2}$

$x\geq 4$



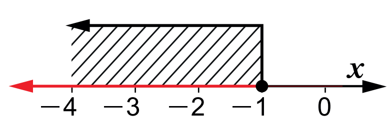
g) $5x-5\leq -10$

$5x\leq -10+5$

$5x\leq -5$

$\frac{5}{5}x\leq\frac{-5}{5}$

$x\leq -1$



Contenido 7 Inecuaciones de primer grado de la forma $ax+b>c$, $ax+b<c$, $ax+b\geq c$, $ax+b\leq c$ con $a<0$

Aprendizajes esperados

Determina el conjunto de soluciones de inecuaciones de primer grado de la forma $ax+b>c$, $ax+b<c$ $ax+b\geq c$, y $ax+b\leq c$, con $a<0$.

Secuencia:

En la clase anterior se resolvieron inecuaciones de la forma $ax+b\geq c$, $ax+b>c$ $ax+b\leq c$ y $ax+b<c$, con $a>0$. Ahora se resuelven inecuaciones de la misma forma, pero con $a<0$.

Puntos esenciales:

Destacar que al multiplicar o dividir una inecuación por un número negativo, el sentido de la desigualdad cambia.

Hacer hincapié en que la variable debe quedar aislada en uno de los lados de la inecuación, preferiblemente en el izquierdo.

Recordar las propiedades de las inecuaciones.

Representar gráficamente en la recta numérica el conjunto de soluciones de una inecuación.

Contenido 7: Inecuaciones de primer grado de la forma $ax+b>c$, $ax+b<c$, $ax+b\geq c$, $ax+b\leq c$ con $a<0$

P

Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado:

a) $-2x+2>4$ b) $-2x-4\leq 0$

S

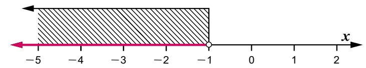
a) $-2x+2>4$

$-2x>4-2$ Se transpone 2

$-2x>2$

$\frac{-2}{-2}x<\frac{2}{-2}$ Se aplica la propiedad 4

$x<-1$



El conjunto de soluciones está representado gráficamente a la derecha.

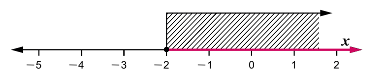
b) $-2x-4\leq 0$

$-2x\leq 0+4$ Se transpone -4

$-2x\leq 4$

$\frac{-2}{-2}x\geq\frac{4}{-2}$ Se aplica la propiedad 4

$x\geq -2$



El conjunto de soluciones está representado gráficamente a la derecha.

C

Para resolver inecuaciones de primer grado de la forma $ax+b>c$, $ax+b<c$, $ax+b\geq c$, $ax+b\leq c$, con $a<0$:

1. Se transpone b, al lado derecho, luego se aplica la propiedad 4 para aislar la variable x.
2. Se grafica en la recta numérica el intervalo de soluciones.

E

Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado:

a) $-2x-4>10$ b) $-3x-3<-3$

c) $-2x+2>-4$ d) $-3x-6<3$

e) $-2x-6\geq 2$ f) $-4x+8\geq 4$

g) $-5x-5\leq -10$ h) $-5x+5\leq 10$

20

C7: Inecuaciones de primer grado de la forma $ax+b>c$, $ax+b<c$, $ax+b\geq c$, $ax+b\leq c$ con $a<0$

P Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado.

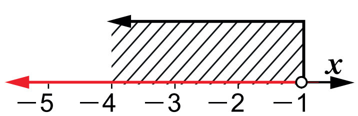
S a) $-2x+2>4$

$-2x>4-2$

$-2x>2$

$\frac{-2}{-2}x<\frac{2}{-2}$

$x<-1$



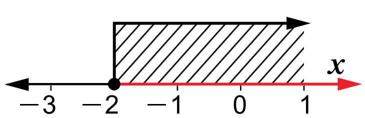
b) $-2x-4\leq 0$

$-2x\leq 0+4$

$-2x\leq 4$

$\frac{-2}{-2}x\geq\frac{4}{-2}$

$x\geq -2$



C *(Explicar verbalmente y los estudiantes copian)*

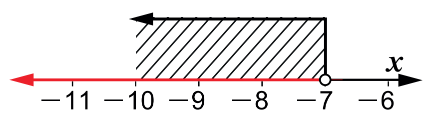
E Resuelva

a) $-2x-4>10$

$-2x>10+4$

$\frac{-2}{-2}x<\frac{14}{-2}$

$x<-7$

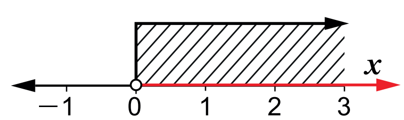


b) $-3x-3<-3$

$-3x<-3+3$

$\frac{-3}{-3}x>\frac{0}{-3}$

$x>0$

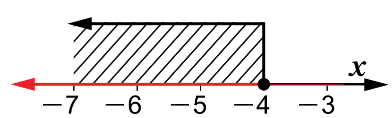


e) $-2x-6\geq 2$

$-2x\geq 2+6$

$\frac{-2}{-2}x\leq\frac{8}{-2}$

$x\leq -4$

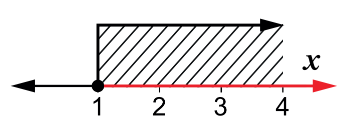


g) $-5x-5\leq -10$

$-5x\leq -10+5$

$\frac{-5}{-5}x\geq\frac{-5}{-5}$

$x\geq 1$



Contenido 8 Inecuaciones simultáneas de primer grado (1)

Contenido 8: Inecuaciones simultáneas de primer grado (1)

P

Resuelva las siguientes inecuaciones simultáneas de primer grado:

a) $4<x+2\leq 5$ b) $-8\leq 3x-2<1$

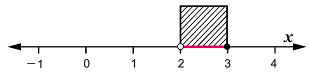
Se aplica la propiedad 1 y 2 de la siguiente manera:
Si $A<B<C$, entonces
$A+D<B+D<C+D$
$A-D<B-D<C-D$

S

a) $4<x+2\leq 5$

$4-2<x+2-2\leq 5-2$ Se aplica la propiedad 2

$2<x\leq 3$



El conjunto de soluciones está representado gráficamente a la derecha.

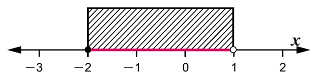
b) $-8\leq 3x-2<1$

$-8+2\leq 3x-2+2<1+2$ Se aplica la propiedad 1

$-6\leq 3x<3$

$\frac{-6}{3}\leq\frac{3}{3}x<\frac{3}{3}$ Se aplica la propiedad 3

$-2\leq x<1$



El conjunto de soluciones está representado gráficamente a la derecha.

C

Para resolver inecuaciones simultáneas de primer grado se procede de la siguiente manera:

- Si es de la forma $a<x+c<b$, se aplica la propiedad 1 o 2 de las inecuaciones para aislar la x entre los dos signos de desigualdad, luego se grafica el intervalo de soluciones.
- Si es de la forma $a<dx+c<b$ con $d>0$, se aplica propiedad 1 o 2 para aislar dx, luego se aplica la propiedad 3 de las inecuaciones para aislar la variable x, por último se grafica el intervalo de soluciones.

E

Resuelva las siguientes inecuaciones simultáneas de primer grado:

a) $1<x+2\leq 2$ b) $-2\leq x-2<4$ c) $-3\leq 2x+1\leq 3$

d) $-6<5x-1\leq 4$ e) $-5<2x+1\leq 5$

Aprendizajes esperados

Determina el conjunto de soluciones de inecuaciones simultáneas en las que el coeficiente de la variable es positivo.

Secuencia:

Hasta este momento se han resuelto inecuaciones de primer grado. Ahora se resuelven inecuaciones simultáneas de primer grado, es decir, inecuaciones donde intervienen al menos dos desigualdades.

Puntos esenciales:

Definir cuándo una inecuación es simultánea.

Recordar las propiedades de las inecuaciones.

Destacar que para las inecuaciones simultáneas también son válidas las propiedades, establecidas en el contenido 1.

Representar gráficamente en la recta numérica el conjunto de soluciones de una inecuación simultánea de primer grado, el cual será un intervalo que posee dos extremos, es decir acotado.

Indicar que en el caso de inecuaciones simultáneas, la variable queda aislada como término central.

Insistir en la aplicación correcta de operaciones con números enteros.

C8: Inecuaciones simultáneas de primer grado (1)

Si $A<B<C$, entonces

$A+D<B+D<C+D$

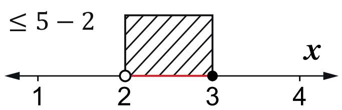
$A-D<B-D<C-D$

(P) Resuelva las siguientes inecuaciones simultáneas de primer grado:

(S) a) $4<x+2\leq 5$

$4-2<x+2-2\leq 5-2$

$2<x\leq 3$



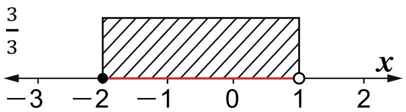
b) $-8\leq 3x-2<1$

$-8+2\leq 3x-2+2<1+2$

$-6\leq 3x<3$

$\frac{-6}{3}\leq\frac{3}{3}x<\frac{3}{3}$

$-2\leq x<1$



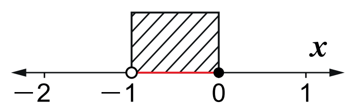
(C) *(Explicar verbalmente y los estudiantes copian)*

(E) *Leer en el libro de texto.*

a) $1<x+2\leq 2$

$1-2<x+2-2\leq 2-2$

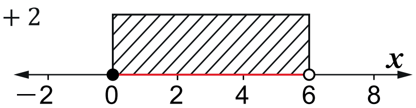
$-1<x\leq 0$



b) $-2\leq x-2<4$

$-2+2\leq x-2+2<4+2$

$0\leq x<6$



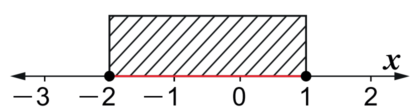
c) $-3\leq 2x+1\leq 3$

$-3-1\leq 2x+1-1\leq 3-1$

$-4\leq 2x\leq 2$

$\frac{-4}{2}\leq\frac{2}{2}x\leq\frac{2}{2}$

$-2\leq x\leq 1$



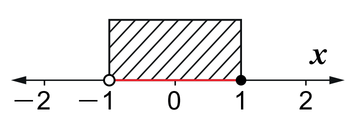
d) $-6<5x-1\leq 4$

$-6+1<5x-1+1\leq 4+1$

$-5<5x\leq 5$

$\frac{-5}{5}<\frac{5}{5}x\leq\frac{5}{5}$

$-1<x\leq 1$



Contenido 9 Inecuaciones simultáneas de primer grado (2)

Aprendizajes esperados

Determina el conjunto solución de inecuaciones simultáneas en las que el coeficiente de la variable es negativo.

Secuencia:

En la clase anterior se resolvieron inecuaciones simultáneas de primer grado cuando el coeficiente de la variable es positivo. Ahora se resuelven inecuaciones de este tipo cuando el coeficiente de la variable es negativo.

Puntos esenciales:

Recordar las propiedades de las inecuaciones.

Destacar que al multiplicar o dividir una inecuación simultánea por un número negativo, el sentido de las desigualdades involucradas cambia.

Representar gráficamente en la recta numérica el conjunto de soluciones de una inecuación simultánea de primer grado, el cual será un intervalo acotado.

Contenido 9: Inecuaciones simultáneas de primer grado (2)

P

Resuelva la siguiente inecuación simultánea de primer grado:

$4<-x+2\leq 5$

Se aplica la propiedad 4 de la siguiente manera:
Si $A<B<C$, con $D<0$ entonces $\frac{A}{D}>\frac{B}{D}>\frac{C}{D}$

S

$4<-x+2\leq 5$

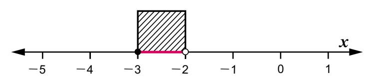
$4-2<-x+2-2\leq 5-2$ Se aplica la propiedad 1

$2<-x\leq 3$

$\frac{2}{-1}>\frac{-1x}{-1}\geq\frac{3}{-1}$ Se aplica la propiedad 4

$-2>x\geq -3$, es decir $-3\leq x<-2$

El conjunto de soluciones está representado en la siguiente gráfica:



C

Para resolver inecuaciones simultáneas de primer grado de la forma $a<dx+c<b$ con $d<0$.

1. Se aplica la propiedad 1 o 2 para aislar dx.
2. Se aplica la propiedad 4 para aislar x y se cambia el sentido de los signos.
3. Se grafica el intervalo de soluciones en la recta numérica.

E

Resuelva las siguientes inecuaciones simultáneas de primer grado:

a) $-1\leq -x+1<2$

b) $6\geq -2x-2>2$

c) $6>-x+3\geq -1$

d) $5\geq -x+3\geq -2$

e) $9\geq -3x+3\geq -6$

22

C9: Inecuaciones simultáneas de primer grado (2)

(P) Resuelva la siguiente inecuación simultánea de primer grado:

Si $A<B<C$, con $D<0$ entonces $\frac{A}{D}>\frac{B}{D}>\frac{C}{D}$

(S) $4<-x+2\leq 5$

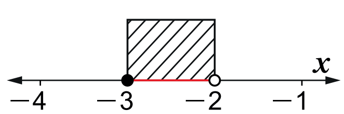
$4-2<-x+2-2\leq 5-2$ Aplicar propiedad 1.

$2<-x\leq 3$

$\frac{2}{-1}>\frac{-1x}{-1}\geq\frac{3}{-1}$ Aplicar propiedad 4.

$-2>x\geq -3$

Se puede expresar esta misma por $-3\leq x<-2$



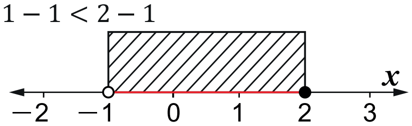
(C) *(Explicar verbalmente y los estudiantes copian)*

(E) a) $-1\leq -x+1<2$

$-1-1\leq -x+1-1<2-1$

$\frac{-2}{-1}\geq\frac{-1}{-1}x>\frac{1}{-1}$

$-1<x\leq 2$

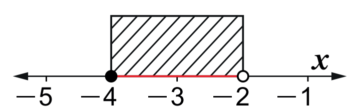


b) $6\geq -2x-2>2$

$6+2\geq -2x-2+2>2+2$

$\frac{8}{-2}\leq\frac{-2}{-2}x<\frac{4}{-2}$

$-4\leq x<-2$

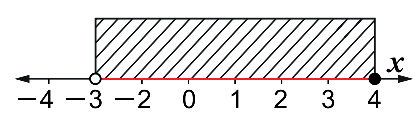


c) $6>-x+3\geq -1$

$6-3>-x+3-3\geq -1-3$

$\frac{3}{-1}<\frac{-1}{-1}x\leq\frac{-4}{-1}$

$-3<x\leq 4$

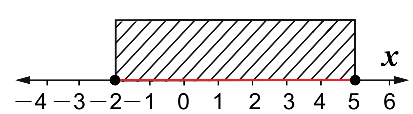


d) $5\geq -x+3\geq -2$

$5-3\geq -x+3-3\geq -2-3$

$\frac{2}{-1}\leq\frac{-1}{-1}x\leq\frac{-5}{-1}$

$-2\leq x\leq 5$

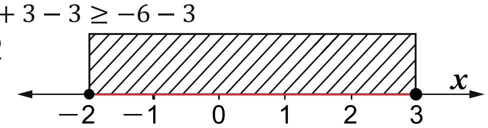


e) $9\geq -3x+3\geq -6$

$9-3\geq -3x+3-3\geq -6-3$

$\frac{6}{-3}\leq\frac{-3}{-3}x\leq\frac{-9}{-3}$

$-2\leq x\leq 3$



Contenido 1 Propiedades de valor absoluto

Sección 2: Inecuaciones de primer grado con valor absoluto

Contenido 1: Propiedades del valor absoluto

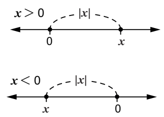
Definición y Propiedades

Definición de valor absoluto

El valor absoluto de un número es la distancia desde el origen al número en la recta numérica.

Formalmente, para cualquier número x:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Por ejemplo: $|3| = 3$, $|-2| = -(-2) = 2$

Propiedades del valor absoluto

a) $|x| \geq 0$

b) Con $a > 0$:

Si $|x| = a$, entonces $x = a$ o $x = -a$

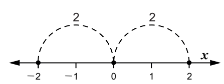
Si $|x| < a$, entonces $-a < x < a$

Si $|x| > a$, entonces $x < -a$ o $x > a$

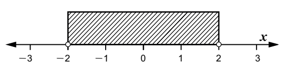
Ejemplo Aplique las propiedades del valor absoluto para resolver:

a) $|x| = 2$ b) $|x| < 2$ c) $|x| > 2$

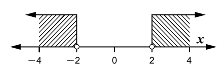
a) Si $|x| = 2$, entonces $x = 2$ o $x = -2$



b) Si $|x| < 2$, entonces $-2 < x < 2$



c) Si $|x| > 2$, entonces $x < -2$ o $x > 2$



E

Resuelva las siguientes ecuaciones o inecuaciones y represente gráficamente sus soluciones:

a) $|x| = 3$ b) $|x| < 4$ c) $|x| > 3$ d) $|x| = 5$

e) $|x| \leq 6$ f) $|x| \leq 2$ g) $|x| \geq 5$ h) $|x| < 1$

i) $|x| \leq 4$ j) $|x| \geq 4$

24

Aprendizajes esperados

Aplica las propiedades de valor absoluto para resolver ecuaciones o inecuaciones de la forma: $|x| = a, |x| < a, |x| > a$.

Secuencia:

En las clases anteriores se han resuelto inecuaciones de primer grado. Ahora se resuelven inecuaciones con valor absoluto.

Puntos esenciales:

Recordar la definición de valor absoluto estudiada en grados anteriores.

Definir formalmente el valor absoluto de un número cualquiera x como

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ si } x \geq 0 \\ -x, \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Presentar las propiedades:

✓ $|x| \geq 0$

✓ Si $a > 0$, entonces

- $|x| = a$ si y solo si $x = a, x = -a$.
- $|x| < a$ si y solo si $-a < x < a$.
- $|x| > a$ si y solo si $x < a$ o $x > a$.

Definir el concepto de ecuación o inecuación con valor absoluto.

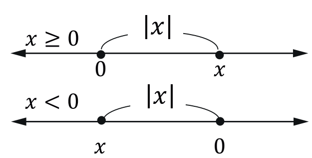
Aplicar dichas propiedades en la resolución de ecuaciones o inecuaciones con valor absoluto.

S2: Inecuaciones de primer grado con valor absoluto

C1: Propiedades de valor absoluto

Definición de valor absoluto: Es la distancia desde el origen a un número real en la recta numérica.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Propiedades del valor absoluto:

a) $|x| \geq 0$

b) Con $a > 0$

Si $|x| = a$ entonces $x = a$, $x = -a$

Si $|x| < a$ entonces $-a < x < a$

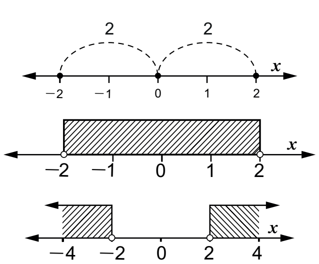
Si $|x| > a$ entonces $x < -a$ o $x > a$

Ej Aplique las propiedades de valor absoluto para resolver:

a) $|x| = 2 \Leftrightarrow x = 2$ o $x = -2$

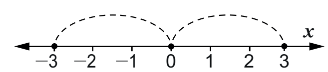
b) $|x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$

c) $|x| > 2 \Leftrightarrow x < -2$ o $x > 2$



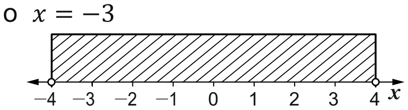
E Resuelva las siguientes ecuaciones o inecuaciones y represente gráficamente sus soluciones:

a) $|x| = 3$



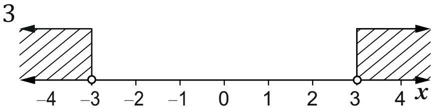
$x = 3$ o $x = -3$

b) $|x| < 4$



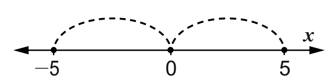
$-4 < x < 4$

c) $|x| > 3$



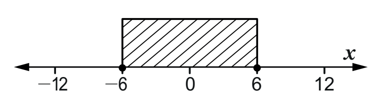
$x < -3$ o $x > 3$

d) $|x| = 5$



$x = 5$ o $x = -5$

e) $|x| \leq 6$



$-6 \leq x \leq 6$

Contenido 2 Ecuación con valor absoluto de la forma $|x+b|=a$

Aprendizajes esperados

Resuelve ecuaciones con valor absoluto de la forma $|x+b|=a$.

Secuencia:

En la clase anterior se definió formalmente el valor absoluto para un número cualquiera y se aplicaron sus propiedades en la resolución de ecuaciones e inecuaciones sencillas. Ahora se resuelven ecuaciones con valor absoluto de la forma $|x+b|=a$.

Puntos esenciales:

Recordar:

✓ Si $a>0$, entonces

$|x|=a$ si y solo si $x=a, x=-a$.

✓ Cómo se resuelven ecuaciones lineales.

Aplicar dicha propiedad en la resolución de ecuaciones con valor absoluto de la forma $|x+b|=a$.

Notar que al aplicar la propiedad anterior el problema de resolver la ecuación con valor absoluto se traduce a resolver dos ecuaciones de primer grado, de modo que se encontrarán dos soluciones para la ecuación dada.

Contenido 2: Ecuación con valor absoluto de la forma $|x+b|=a$

P Resuelva las siguientes ecuaciones con valor absoluto:

a) $|x+1|=2$ b) $|x-2|=3$

Recuerde que:
Con $a>0$,
si $|x|=a$, entonces $x=a$ o $x=-a$

S

a) $|x+1|=2$

$x+1=2,\quad x+1=-2$

$x=2-1,\quad x=-2-1$

$x=1,\quad x=-3$

Por lo tanto, **1** y **−3** son las soluciones de la ecuación $|x+1|=2$.

b) $|x-2|=3$

$x-2=3,\quad x-2=-3$

$x=3+2,\quad x=-3+2$

$x=5,\quad x=-1$

Por lo tanto, **5** y **−1** son las soluciones de la ecuación $|x-2|=3$.

C

Una ecuación con valor absoluto es una ecuación cuya variable aparece dentro del | |.
Una ecuación con valor absoluto se resuelve de la siguiente forma:

1. Se aplica la propiedad con $a>0$, si $|x|=a$ entonces $x=a$, $x=-a$.
2. Se resuelven las dos ecuaciones de primer grado.

E

Resuelva las siguientes ecuaciones con valor absoluto:

a) $|x+2|=3$
b) $|x-1|=4$
c) $|x-3|=3$
d) $|x+4|=2$
e) $|x-2|=5$

25

C2: Ecuación valor absoluto de la forma $|x+b|=a$

P Resuelva las siguientes ecuaciones:

$|x|=a$ si y solo si $x=a, x=-a$

S a) $|x+1|=2$

$x+1=2,\quad x+1=-2$

$x=2-1,\quad x=-2-1$

$x=1,\quad x=-3$

b) $|x-2|=3$

$x-2=3,\quad x-2=-3$

$x=3+2,\quad x=-3+2$

$x=5,\quad x=-1$

C Una ecuación con valor absoluto se resuelve de la siguiente forma:

1. Se aplica la propiedad con $a>0$, si $|x|=a$, entonces $x=a, x=-a$.
2. Se resuelven las dos ecuaciones de primer grado.

E Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $|x+2|=3$

$x+2=3,\quad x+2=-3$

$x=3-2,\quad x=-3-2$

$x=1,\quad x=-5$

b) $|x-1|=4$

$x-1=4,\quad x-1=-4$

$x=4+1,\quad x=-4+1$

$x=5,\quad x=-3$

c) $|x-3|=3$

$x-3=3,\quad x-3=-3$

$x=3+3,\quad x=-3+3$

$x=6\quad x=0$

Contenido 3 Inecuaciones con valor absoluto de la forma $|x+b|<a$ y $|x+b|\leq a$

Contenido 3: Inecuaciones con valor absoluto de la forma $|x+b|<a$ y $|x+b|\leq a$

P

Resuelva las siguientes inecuaciones:

a) $|x+1|<2$ b) $|x-3|\leq 1$

Recuerde que:
Con $a>0$, si $|x|<a$, entonces $-a<x<a$

S

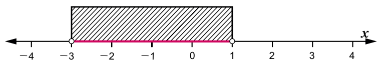
a) $|x+1|<2$

$-2<x+1<2$

$-2-1<x+1-1<2-1$

$\mathbf{-3<x<1}$

El conjunto de soluciones está representado en la siguiente gráfica:



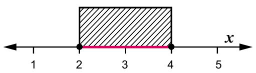
b) $|x-3|\leq 1$

$-1\leq x-3\leq 1$

$-1+3\leq x\leq 1+3$

$\mathbf{2\leq x\leq 4}$

El conjunto de soluciones está representado en la siguiente gráfica:



C

Una inecuación con valor absoluto es una desigualdad en la que se involucra el valor absoluto.

Las inecuaciones con valor absoluto de la forma $|x+b|<a$ se resuelven de la siguiente manera:

1. Se aplica la propiedad con $a>0$, si $|x|<a$ entonces $-a<x<a$.
2. Se resuelve la inecuación simultánea de primer grado obtenida en el paso 1.
3. Se grafica el intervalo de soluciones en la recta numérica poniendo atención al sentido del signo de la inecuación.

E

Resuelva las siguientes inecuaciones:

a) $|x+2|<3$ b) $|x-1|\leq 4$ c) $|x-3|<3$

d) $|x+4|\leq 2$ e) $|x-2|\leq 5$

26

Aprendizajes esperados

Resuelve inecuaciones con valor absoluto de la forma $|x+b|<a$ y $|x+b|\leq a$.

Secuencia:

En la clase anterior se resolvieron ecuaciones con valor absoluto de la forma $|x+b|=a$. Ahora se resuelven inecuaciones con valor absoluto de la forma $|x+b|<a$ y $|x+b|\leq a$.

Puntos esenciales:

Recordar:

✓ Si $a>0$, entonces

$|x|<a$ si y solo si $-a<x<a$.

✓ Cómo se resuelven inecuaciones simultáneas de primer grado.

Aplicar dicha propiedad en la resolución de inecuaciones con valor absoluto de la forma $|x+b|<a$ y $|x+b|\leq a$.

Notar que al aplicar la propiedad anterior el problema de resolver la inecuación con valor absoluto se traduce a resolver una inecuación simultánea de primer grado.

Representar gráficamente en la recta numérica el conjunto de soluciones de una inecuación con valor absoluto de la forma $|x+b|<a$ y $|x+b|\leq a$, el cual es un intervalo acotado.

C3: Inecuación con valor absoluto de la forma $|x+b|<a$ y $|x+b|\leq a$

(P) Resuelva las siguientes inecuaciones:

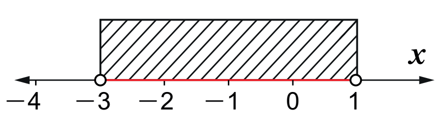
$|x|<a$ si y solo si $-a<x<a$

(S) a) $|x+1|<2$

$-2<x+1<2$

$-2-1<x+1-1<2-1$

$-3<x<1$

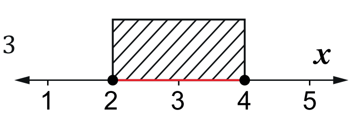


b) $|x-3|\leq 1$

$-1\leq x-3\leq 1$

$-1+3\leq x\leq 1+3$

$2\leq x\leq 4$



(C) *(Explicar verbalmente y los estudiantes copian)*

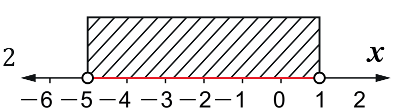
(E) Resuelva

a) $|x+2|<3$

$-3<x+2<3$

$-3-2<x<3-2$

$-5<x<1$

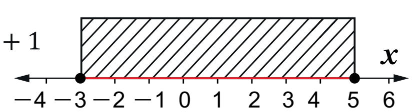


b) $|x-1|\leq 4$

$-4\leq x-1\leq 4$

$-4+1\leq x\leq 4+1$

$-3\leq x\leq 5$

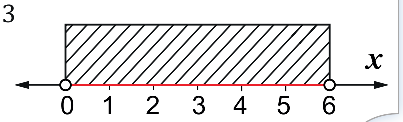


c) $|x-3|<3$

$-3<x-3<3$

$-3+3<x<3+3$

$0<x<6$



Contenido 4 Inecuaciones con valor absoluto de la forma $|x+b|>a$ y $|x+b|\geq a$

Aprendizajes esperados

Resuelve inecuaciones con valor absoluto de la forma $|x+b|>a$ y $|x+b|\geq a$.

Secuencia:

En la clase anterior se resolvieron inecuaciones con valor absoluto de la forma $|x+b|<a$. Ahora se resuelven inecuaciones con valor absoluto de la forma $|x+b|>a$ y $|x+b|\geq a$.

Puntos esenciales:

Recordar:

✓ Si $a>0$, entonces

$|x|>a$ si y solo si $x<-a$ o $x>a$.

✓ Cómo se resuelven inecuaciones de primer grado.

Aplicar dicha propiedad en la resolución de inecuaciones con valor absoluto de la forma $|x+b|>a$ y $|x+b|\geq a$.

Notar que al aplicar la propiedad anterior el problema de resolver la inecuación con valor absoluto se traduce a resolver dos inecuaciones de primer grado.

Representar gráficamente en la recta numérica el conjunto de soluciones de una inecuación con valor absoluto de la forma $|x+b|>a$ y $|x+b|\geq a$, el cual será la unión de los intervalos correspondientes a las inecuaciones de primer grado resueltas.

Contenido 4: Inecuaciones con valor absoluto de la forma $|x+b|>a$ y $|x+b|\geq a$

P

Resuelva las siguientes inecuaciones con valor absoluto:

a) $|x+1|>2$ b) $|x-1|\geq 2$

Recuerde que:
Con $a>0$, si $|x|>a$, entonces $x<-a$ o $x>a$

S

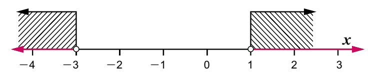
a) $|x+1|>2$

$x+1<-2$ o $x+1>2$

$x+1-1<-2-1$ o $x+1-1>2-1$

$x<-3$ o $x>1$

El conjunto de soluciones está representado en la siguiente gráfica:



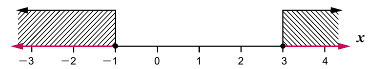
b) $|x-1|\geq 2$

$x-1\leq -2$ o $x-1\geq 2$

$x-1+1\leq -2+1$ o $x-1+1\geq 2+1$

$x\leq -1$ o $x\geq 3$

El conjunto de soluciones está representado en la siguiente gráfica:



C

Las inecuaciones con valor absoluto de la forma $|x+b|>a$ se resuelven de la siguiente manera:

1. Se aplica la propiedad con $a>0$, si $|x|>a$ entonces $x<-a$ o $x>a$.
2. Se resuelven las dos inecuaciones de primer grado obtenidas en el paso 1.
3. Se grafica el resultado en la recta numérica, de acuerdo a los símbolos de desigualdad.

E

Resuelva las siguientes inecuaciones con valor absoluto:

a) $|x+2|>3$ b) $|x-3|>3$ c) $|x-1|\geq 4$

d) $|x+4|\geq 2$ e) $|x-2|\geq 5$

27

C4: Inecuación con valor absoluto de la forma $|x+b|>a$ y $|x+b|\geq a$

$|x|>a$ si y solo si $x<-a$ o $x>a$

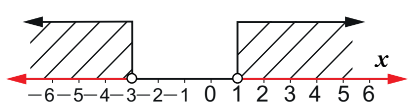
(P) Resuelva las siguientes inecuaciones:

(S) a) $|x+1|>2$

$x+1<-2$ o $x+1>2$

$x<-2-1$ o $x>2-1$

$x<-3$ o $x>1$



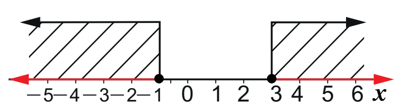
b) $|x-1|\geq 2$

$x-1\leq -2$ o $x-1\geq 2$

$x-1+1\leq -2+1$ o $x-1+1\geq 2+1$

$x\leq -1$ o $x\geq 3$

(C) *(Explicar verbalmente)*

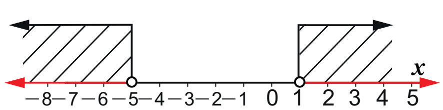


(E) a) $|x+2|>3$

$x+2<-3$ o $x+2>3$

$x<-3-2$ o $x>3-2$

$x<-5$ o $x>1$

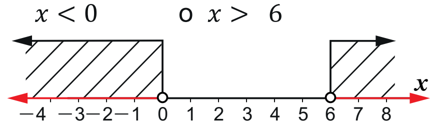


b) $|x-3|>3$

$x-3<-3$ o $x-3>3$

$x<-3+3$ o $x>3+3$

$x<0$ o $x>6$

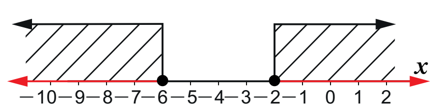


d) $|x+4|\geq 2$

$x+4\leq -2$ o $x+4\geq 2$

$x\leq -2-4$ o $x\geq 2-4$

$x\leq -6$ o $x\geq -2$

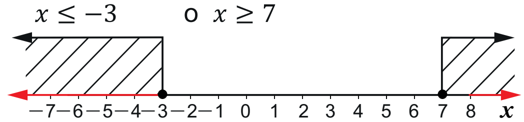


e) $|x-2|\geq 5$

$x-2\leq -5$ o $x-2\geq 5$

$x\leq -5+2$ o $x\geq 5+2$

$x\leq -3$ o $x\geq 7$



Contenido 1 Ecuación de segundo grado

Sección 3: Inecuaciones de segundo grado

Contenido 1: Ecuación de segundo grado

P Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando factorización:
a) $x^2-4=0$ b) $x^2+2x=0$ c) $x^2+3x+2=0$

S

a) Se usa $a^2-b^2=(a+b)(a+b)$

$x^2-4=0$
$(x+2)(x-2)=0$
$x+2=0,\quad x-2=0$
$x=-2,\quad x=2$

b) Se extrae factor común x

$x^2+2x=0$
$x(x+2)=0$
$x=0,\quad x+2=0$
$x=0,\quad x=-2$

c) Se usa $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

$x^2+3x+2=0$
$(x+2)(x+1)=0$
$x+2=0,\quad x+1=0$
$x=-2,\quad x=-1$

C

Las ecuaciones de segundo grado se resuelven por factorización de la siguiente manera:

1. Se identifica el caso de factorización que se puede utilizar y se descompone en factores el binomio o trinomio que aparece en la ecuación.
2. Se igualan los dos factores a cero.
3. Se resuelven las dos ecuaciones de primer grado de donde se obtienen las soluciones.

E

Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando factorización:

a) $x^2-1=0$ b) $x^2+4x=0$
c) $x^2+6x+5=0$ d) $x^2+4x+3=0$
e) $x^2-9=0$ f) $x^2-5x=0$
g) $x^2-x-2=0$ h) $x^2+4x-5=0$

29

Aprendizajes esperados

Resuelve ecuaciones de segundo grado aplicando factorización.

Secuencia:

Hasta este momento se han resuelto inecuaciones de primer grado e inecuaciones con valor absoluto. En esta sección se estudian las inecuaciones de segundo grado. Se comienza con un repaso sobre ecuaciones de segundo grado.

Puntos esenciales:

Recordar:

- ✓ Cuándo una ecuación es de segundo grado.
- ✓ Los casos de factorización: factor común monomio, diferencia de cuadrado y $x^2+(a+b)x+ab$.
- ✓ Los métodos estudiados para resolver ecuaciones de segundo grado.
- ✓ Los pasos que se siguen para resolver una ecuación de segundo grado por factorización.
- ✓ La aplicación de la propiedad si $AB=0$, entonces $A=0$ o $B=0$.

S3: Inecuaciones de segundo grado
C1: Ecuación de segundo grado

(P) Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando factorización:

(S) a) Se usa $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$x^2-4=0$
$(x+2)(x-2)=0$
$x+2=0,\quad x-2=0$
$x=-2,\quad x=2$

b) Se extrae factor común x

$x^2+2x=0$
$x(x+2)=0$
$x=0\ ,\ x+2=0$
$x=0\ ,\ x=-2$

c) Se usa $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

$x^2+3x+2=0$
$(x+2)(x+1)=0$
$x+2=0\ ,\ x+1=0$
$x=-2\ ,\ x=-1$

(C) *(Explicar verbalmente)*

(E) a) $x^2-1=0$

$(x+1)(x-1)=0$
$x+1=0\ ,\ x-1=0$
$x=-1\ ,\ x=1$

b) $x^2+4x=0$

$x(x+4)=0$
$x=0\ ,\ x+4=0$
$x=0\ ,\ x=-4$

c) $x^2+6x+5=0$

$(x+5)(x+1)=0$
$x+5=0, x+1=0$
$x=-5\ ,\ x=-1$

d) $x^2+4x+3=0$

$(x+3)(x+1)=0$
$x+3=0\ ,\ x+1=0$
$x=-3\ ,\ x=-1$

e) $x^2-9=0$

$(x+3)(x-3)=0$
$x+3=0\ , x-3=0$
$x=-3\ ,\ x=3$

f) $x^2-5x=0$

$x(x-5)=0$
$x=0\ ,\ x-5=0$
$x=0\ ,\ x=5$

g) $x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$
$x-2=0\ , x+1=0$
$x=2\ ,\ x=-1$

h) $x^2+4x-5=0$

$(x+5)(x-1)=0$
$x+5=0\ , x-1=0$
$x=-5\ ,\ x=1$

Contenido 2 Gráfica de la función de segundo grado por medio de interceptos con el eje x (1)

Aprendizajes esperados

Determina los interceptos de las gráficas de funciones de segundo grado con el eje x.

Secuencia:

En la clase anterior se recordó cómo se resuelve una ecuación de segundo grado por factorización. Ahora se recuerda cómo se gráfica una función de segundo grado por medio de interceptos con el eje x.

Puntos esenciales:

Recalcar que hay gráficas de funciones de segundo grado que no cortan al eje x, pero las que a partir de aquí se consideran si lo cortan.

Destacar que para encontrar los interceptos de la gráfica de una función de segundo grado con el eje x se hace $y=0$, lo que conduce a resolver una ecuación de segundo grado.

Recordar cómo se resuelve una ecuación de segundo grado por factorización.

Notar que los interceptos con el eje x, se forman a partir de las soluciones de la ecuación de segundo grado; en ambos puntos se tiene la ordenada 0.

Contenido 2: Gráfica de la función de segundo grado por medio de interceptos con el eje x (1)

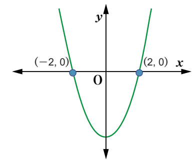
P Encuentre los interceptos con el eje x de las gráficas de las siguientes funciones de segundo grado:

a) $y=x^2-4$ b) $y=x^2+2x-3$

S

a) $y=x^2-4$

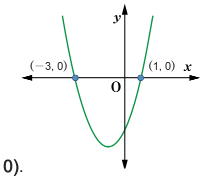
$x^2-4=0$	Se sustituye $y=0$
$(x+2)(x-2)=0$	Se factoriza x^2-4
$x+2=0,\ \ x-2=0$	Se iguala a cero cada factor
$x=-2,\ \ x=2$	Se transpone 2 y -2



Los interceptos de $y=x^2-4$ con el eje x son $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

b) $y=x^2+2x-3$

$x^2+2x-3=0$	Se sustituye $y=0$
$(x+3)(x-1)=0$	Se factoriza x^2+2x-3
$x+3=0,\ \ x-1=0$	Se iguala a cero cada factor
$x=-3,\ \ x=1$	Se transpone 3 y -1



Los interceptos de $y=x^2+2x-3$ con el eje x son $(-3, 0)$ y $(1, 0)$.

C

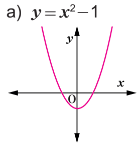
Para encontrar los interceptos con el eje x de una función de segundo grado $y=ax^2+bx+c$ se procede de la forma siguiente:

1. Se sustituye $y=0$ en $y=ax^2+bx+c$.
2. Se resuelve la ecuación $ax^2+bx+c=0$.
3. Con las soluciones x_1 y x_2 de la ecuación anterior se determinan los interceptos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$ de la gráfica de la función con el eje x.

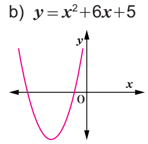
E

Encuentre los interceptos con el eje x de las gráficas de las siguientes funciones de segundo grado:

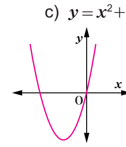
a) $y=x^2-1$



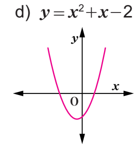
b) $y=x^2+6x+5$



c) $y=x^2+4x$



d) $y=x^2+x-2$



C2: Gráfica de la función de segundo grado por medio de interceptos con el eje x (1)

(P) Encuentre los interceptos con el eje x de las gráficas de las siguientes funciones de segundo grado:

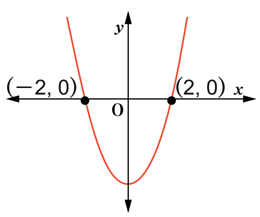
(S) a) $y = x^2 - 4$

$x^2 - 4 = 0$

$(x+2)(x-2) = 0$

$x + 2 = 0\ ,\ x - 2 = 0$

$x = -2\ \ ,\ x = 2$



Los interceptos de $y = x^2 - 4$ con el eje x son $(-2, 0)$ y $(2,0)$.

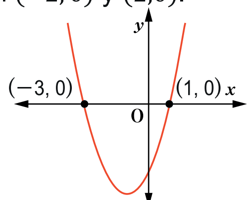
b) $y = x^2 + 2x - 3$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$(x+3)(x-1) = 0$

$x + 3 = 0\ \ ,\ x - 1 = 0$

$x = -3\ \ \ ,\ x = 1$



Los interceptos de $y = x^2 + 2x - 3$ con el eje x son $(-3, 0)$ y $(1, 0)$.

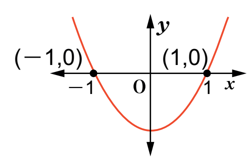
(C) *(Explicar verbalmente)*

(E) a) $y = x^2 - 1$

$(x+1)(x-1) = 0$

$x = -1\ \ ,\ x = 1$

Los interceptos son $(-1,0)$ y $(1,0)$.

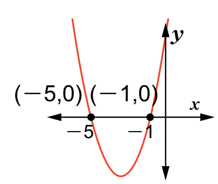


b) $y = x^2 + 6x + 5$

$(x+5)(x+1) = 0$

$x = -5\ \ ,\ x = -1$

Los interceptos son $(-5,0)$ y $(-1,0)$.

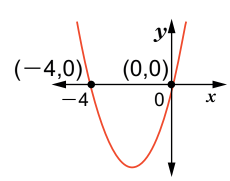


c) $y = x^2 + 4x$

$x(x+4) = 0$

$x = 0\ \ ,\ x = -4$

Los interceptos son $(0,0)$ y $(-4,0)$.



Contenido 3 Gráfica de la función de segundo grado por medio de interceptos con el eje x (2)

Contenido 3: Gráfica de la función de segundo grado por medio de interceptos con el eje x (2)

P Trace la gráfica de la función de segundo grado $y=x^2+4x+3$ usando interceptos con el eje x.

S

Se resuelve la ecuación $x^2+4x+3=0$ que se origina de haber hecho $y=0$.

$x^2+4x+3=0$

$(x+3)(x+1)=0$ Se factoriza x^2+4x+3

$x+3=0, \quad x+1=0$ Se iguala a cero cada factor

$x=-3, \quad x=-1$ Se transpone 3 y 1

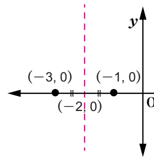


Figura 1

Se ubican los interceptos $(-3, 0)$ y $(-1, 0)$ de la gráfica de la función en el eje x, como se muestra en la Figura 1, y se dibuja la mediatriz al segmento definido por ellos.

Se dibuja la parábola, como se muestra en la figura 2, aprovechando la simetría que tiene respecto a la mediatriz trazada en forma punteada.

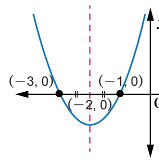


Figura 2

C

Para graficar la función de segundo grado $y=ax^2+bx+c$ por medio de los interceptos con el eje x, se procede así:

1. Se hace $y=0$ y se resuelve la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ cuyas soluciones son las abscisas de los interceptos con el eje x.
2. Se ubican en el eje x los puntos del paso 1 y se puntea la mediatriz del segmento definido por ellos.
3. Se dibuja la gráfica aprovechando su simetría respecto de la mediatriz punteada.

E

Trace la gráfica de la función de segundo grado usando interceptos con el eje x.

a) $y=x^2+6x+5$

b) $y=x^2+3x$

c) $y= x^2+x-2$

d) $y=x^2-1$

31

Aprendizajes esperados

Grafica funciones de segundo grado mediante interceptos con el eje x y la mediatriz del segmento definido por ellos.

Secuencia:

En la clase anterior se encontraron los interceptos de las gráficas de funciones de segundo grado con el eje x. Ahora a partir de tales interceptos se traza la gráfica correspondiente.

Puntos esenciales:

Recordar:

- ✓ El concepto de mediatriz de un segmento.
- ✓ Los pasos que se siguen para encontrar los interceptos de la gráfica de una función de segundo grado con el eje x.
- ✓ Las características de la gráfica de una función de segundo grado.

Aclarar la noción de simetría de una parábola respecto a la mediatriz trazada.

C3: Gráfica de la función de segundo grado por medio de interceptos con el eje x (2)

(P) Trace la gráfica de la función $y = x^2+4x+3$, usando interceptos con el eje x.

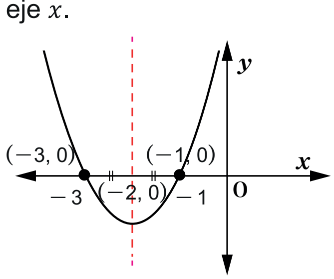
(S) $y = x^2+4x+3$

$x^2+4x+3=0$

$(x+3)(x+1)=0$

$x+3=0 \quad , \quad x+1=0$

$x=-3 \quad , \quad x=-1$



Se ubica los interceptos de la función con el eje x: $(-3,0)$ y $(-1,0)$

Se dibuja la gráfica con la propiedad de simetría.

(C) *(Explicar verbalmente)*

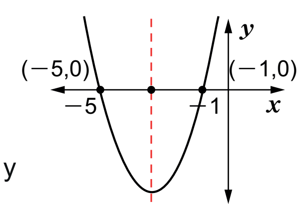
(E) a) $y=x^2+6x+5$

$(x+5)(x+1)=0$

$x+5=0 \quad , \quad x+1=0$

$x=-5 \quad , \quad x=-1$

Los interceptos: $(-5,0)$ y $(-1,0)$



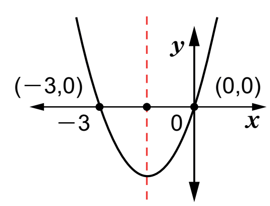
b) $y=x^2+3x$

$x(x+3)=0$

$x=0 \quad , \quad x+3=0$

$x=0 \quad , \quad x=-3$

Los interceptos: $(-3,0)$ y $(0,0)$



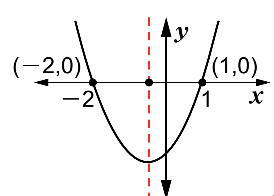
c) $y=x^2+x-2$

$(x+2)(x-1)=0$

$x+2=0 \quad , \quad x-1=0$

$x=-2 \quad , \quad x=1$

Los interceptos: $(-2,0)$ y $(1,0)$



Contenido 4 Inecuaciones de segundo grado de la forma $x^2 - c^2 > 0$, $x^2 - c^2 \geq 0$

Aprendizajes esperados

Resuelve inecuaciones de segundo grado de la forma $x^2 - c^2 > 0$ y $x^2 - c^2 \geq 0$.

Secuencia:

En clases anteriores se ha trazado la gráfica de una función de segundo grado a partir de sus interceptos con el eje x.

Ahora se resuelven inecuaciones de segundo grado de la forma $x^2 - c^2 > 0$, $x^2 - c^2 \geq 0$, para las cuales se requerirá la solución de ecuaciones de segundo grado y el trazado de funciones de segundo grado.

Puntos esenciales:

Recordar los pasos que se siguen para trazar la gráfica de una función de segundo grado a partir de sus interceptos con el eje x.

Definir lo que es una inecuación de segundo grado.

Explicar los pasos que se siguen para resolver inecuaciones de segundo grado de la forma $x^2 - c^2 > 0$, $x^2 - c^2 \geq 0$.

Representar gráficamente en la recta numérica el conjunto de soluciones de una inecuación de este tipo.

Explicar la conclusión a partir de la solución del problema.

Contenido 4: Inecuaciones de segundo grado de la forma $x^2 - c^2 > 0$, $x^2 - c^2 \geq 0$

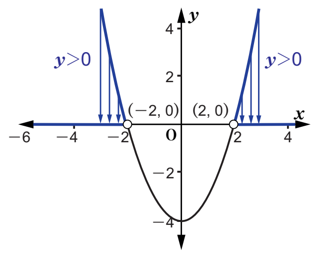
P Resuelva la inecuación de segundo grado $x^2 - 4 > 0$.

S

Se toma el lado izquierdo $x^2 - 4$ y se resuelve la ecuación $x^2 - 4 = 0$ mediante factorización

$$x^2 - 4 = 0$$
$$(x+2)(x-2) = 0$$
$$x = -2, \quad x = 2$$

Se traza la gráfica de la función $y = x^2 - 4$, ubicando los interceptos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$ en el eje x.



Dado que $x^2 - 4 > 0$, se identifican los intervalos en el eje x para los cuales $y > 0$, puede verse en la gráfica que esto ocurre cuando $x < -2$ o $x > 2$.

Por tanto, el conjunto de soluciones de $x^2 - 4 > 0$ es la unión de los intervalos que cumplen

$$x < -2 \text{ o } x > 2.$$

C

Una **inecuación de segundo grado** en una variable es una expresión que tiene una de las formas $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, etc.

Para resolver inecuaciones de la forma $x^2 - c^2 > 0$; $x^2 - c^2 \geq 0$:

1. Se plantea la ecuación $x^2 - c^2 = 0$ y se resuelve por factorización.
2. Se grafica la función $y = x^2 - c^2$ ubicando los interceptos $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ en el eje x.
3. Se identifican los intervalos en el eje x para los cuales $y > 0$ o $y \geq 0$.
4. El conjunto de soluciones es la unión de los intervalos anteriores.

E

Resuelva las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 1 > 0$ b) $x^2 - 9 \geq 0$ c) $x^2 - 1 \geq 0$

d) $x^2 - 25 \geq 0$ e) $x^2 - 16 > 0$ f) $x^2 - 4 \geq 0$

C4: Inecuaciones de segundo grado de la forma $x^2 - c^2 > 0$, $x^2 - c^2 \geq 0$

P Resuelva la inecuación de segundo grado $x^2 - 4 > 0$.

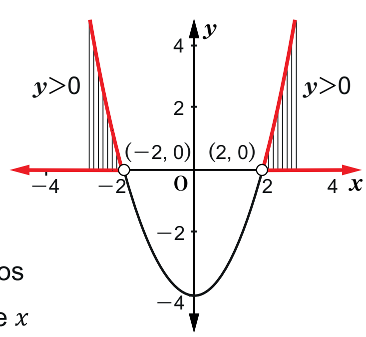
S $x^2 - 4 > 0$

$x^2 - 4 = 0$

$(x+2)(x-2) = 0$

$x = -2 \quad , \quad x = 2$

Graficar $y = x^2 - 4$ ubicando los interceptos $(-2,0)$ y $(2,0)$ en el eje x



La solución de $x^2 - 4 > 0$ es la unión de los intervalos que cumplen $x < -2$ o $x > 2$.

C *(Explicar verbalmente)*

E a) $x^2 - 1 > 0$

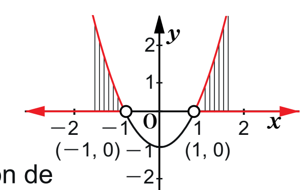
$x^2 - 1 = 0$

$(x+1)(x-1) = 0$

$x = -1 \quad , \quad x = 1$

Como $y > 0$, la solución de la inecuación es:

$x < -1$ o $x > 1$



b) $x^2 - 9 \geq 0$

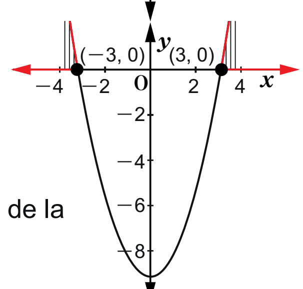
$x^2 - 9 = 0$

$(x+3)(x-3) = 0$

$x = -3 \quad , \quad x = 3$

Como $y \geq 0$, la solución de la inecuación es:

$x \leq -3$ o $x \geq 3$



d) $x^2 - 25 \geq 0$

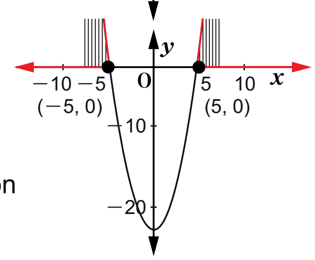
$x^2 - 25 = 0$

$(x+5)(x-5) = 0$

$x = -5 \quad , x = 5$

Como $y \geq 0$, la solución de la inecuación es:

$x \leq -5$ o $x \geq 5$



Contenido 5 Inecuaciones de segundo grado de la forma $x^2-c^2<0$, $x^2-c^2\leq 0$

Contenido 5: Inecuaciones de segundo grado de la forma $x^2-c^2<0$, $x^2-c^2\leq 0$

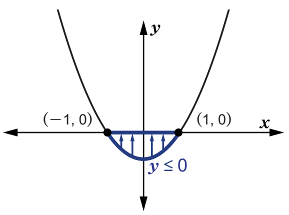
P Resuelva la inecuación de segundo grado $x^2-1\leq 0$.

S

Se toma el lado izquierdo x^2-1 y se resuelve la ecuación $x^2-1=0$ mediante factorización

$$(x+1)(x-1)=0$$
$$x=-1,\quad x=1$$

Se traza la gráfica de la función $y=x^2-1$, ubicando los interceptos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ en el eje x.



Dado que $x^2-1\leq 0$, se identifica el intervalo en el eje x para el cual $y\leq 0$, puede verse en la gráfica que esto ocurre cuando $-1\leq x\leq 1$.

Por tanto, el conjunto de soluciones de $x^2-1\leq 0$ es el intervalo que cumple la condición **$-1\leq x\leq 1$.**

C

Para resolver inecuaciones de segundo grado de la forma $x^2-c^2<0$, $x^2-c^2\leq 0$:

1. Se plantea la ecuación $x^2-c^2=0$ y se resuelve por factorización.
2. Se grafica la función $y=x^2-c^2$ ubicando los interceptos $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ en el eje x.
3. Se identifica el intervalo en el eje x para el cual $y<0$ o $y\leq 0$.
4. El conjunto de soluciones es el intervalo anterior.

E

Resuelva las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2-4<0$ b) $x^2-9<0$

c) $x^2-1<0$ d) $x^2-16\leq 0$

e) $x^2-25<0$ f) $x^2-9\leq 0$

Aprendizajes esperados

Resuelve inecuaciones de segundo grado de la forma $x^2-c^2>0$ y $x^2-c^2\geq 0$.

Secuencia:

En la clase anterior se resolvieron inecuaciones de segundo grado de la forma $x^2-c^2>0$, $x^2-c^2\geq 0$. Ahora se resuelven inecuaciones de la forma $x^2-c^2<0$, $x^2-c^2\leq 0$, cuyo proceso de resolución es similar.

Puntos esenciales:

Recordar los pasos que se siguen para trazar la gráfica de una función de segundo grado a partir de sus interceptos con el eje x.

Explicar los pasos que se siguen para resolver inecuaciones de segundo grado de la forma $x^2-c^2<0$, $x^2-c^2\leq 0$.

Aplicar correctamente la factorización de diferencias de cuadrados.

Representar gráficamente en la recta numérica el conjunto de soluciones de una inecuación de este tipo.

C5: Inecuaciones de segundo grado de la forma: $x^2-c^2<0$, $x^2-c^2\leq 0$

P Resuelva la inecuación de segundo grado $x^2-1\leq 0$

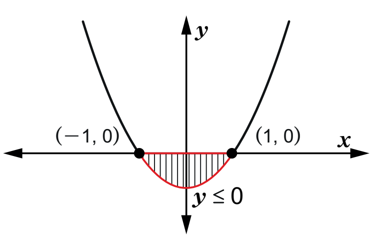
S

$x^2-1\leq 0$

$x^2-1=0$

$(x+1)(x-1)=0$

$x=-1 \quad , \quad x=1$



Se grafica la función $y=x^2-1$ ubicando los interceptos $(-1,0)$ y $(1,0)$ en el eje x.

La solución de $x^2-1\leq 0$ es el intervalo $-1\leq x\leq 1$.

C *(Explicar verbalmente)*

E *Leer en el libro de texto.*

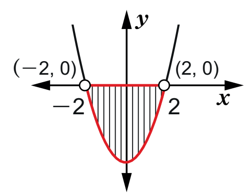
a) $x^2-4<0$

$x^2-4=0$

$(x+2)(x-2)=0$

$x=-2 \quad , \quad x=2$

Como $y<0$, la solución de la inecuación es: $-2<x<2$



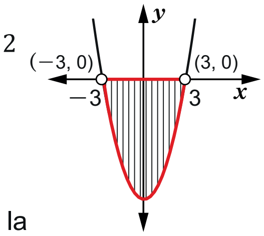
b) $x^2-9<0$

$x^2-9=0$

$(x+3)(x-3)=0$

$x=-3 \quad , \quad x=3$

Como $y<0$, la solución de la inecuación es: $-3<x<3$



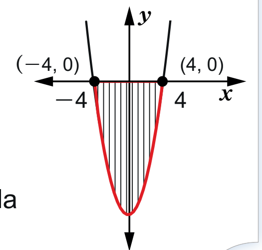
d) $x^2-16\leq 0$

$x^2-16=0$

$(x+4)(x-4)=0$

$x=-4 \quad , \quad x=4$

Como $y\leq 0$, la solución de la inecuación es: $-4\leq x\leq 4$



Contenido 6 Inecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, con $a>0$

Aprendizajes esperados

Resuelve inecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c>0$ y $ax^2+bx+c<0$, con $a>0$.

Secuencia:

Siguiendo con el estudio de la resolución de inecuaciones de segundo grado, ahora se resuelven inecuaciones de la forma $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, con $a>0$.

Puntos esenciales:

Recordar los pasos que se siguen para trazar la gráfica de una función de segundo grado a partir de sus interceptos con el eje x.

Explicar los pasos que se siguen para resolver inecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, con $a>0$. Es por ello que debe aplicarse correctamente la factorización de ax^2+bx+c

Representar gráficamente en la recta numérica el conjunto de soluciones de una inecuación de este tipo, el cual puede ser la unión disjunta de dos intervalos numéricos o un intervalo acotado.

Contenido 6: Inecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$ con $a>0$

P

Resuelva las siguientes inecuaciones de segundo grado:

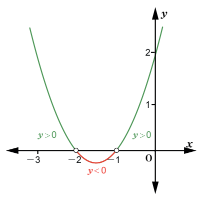
$x^2+3x+2>0$ y $x^2+3x+2<0$

S

Se iguala a cero el lado izquierdo x^2+3x+2 de cualquiera de las inecuaciones y se resuelve la ecuación:

$$x^2+3x+2=0$$
$$(x+2)(x+1)=0$$
$$x=-2,\ x=-1$$

Se traza la gráfica de la función $y=x^2+3x+2$ ubicando los interceptos $(-2, 0)$ y $(-1, 0)$ en el eje x.



Se forman tres intervalos definidos por: $x<-2$, $-2<x<-1$, $x>-1$.

El conjunto de soluciones de $x^2+3x+2>0$ es la unión de los intervalos que cumplen $x<-2$ o $x>-1$ ya que para estos $y>0$.

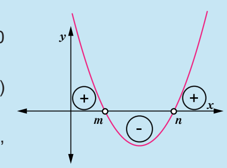
El conjunto de soluciones de $x^2+3x+2<0$ es el intervalo que cumple $-2<x<-1$, ya que para este $y<0$.

C

Para resolver inecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, con $a>0$ se procede así:

1. Se encuentran las soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ las cuales son m y n con $m<n$.
2. Se grafica la función $y=ax^2+bx+c$ con interceptos $(m, 0)$ y $(n, 0)$.
3. Se forman los intervalos que cumplen $x<m$, $m<x<n$, $x>n$.
4. El conjunto de soluciones de $ax^2+bx+c>0$ se forma a partir de la unión de los intervalos que corresponden a $y>0$, los cuales cumplen $x<m$ o $x>n$.

   El conjunto de soluciones de $ax^2+bx+c<0$ es el intervalo que cumple la condición $m<x<n$.



E

Resuelva las siguientes inecuaciones de segundo grado:

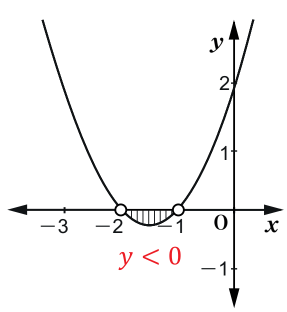
a) $x^2+5x+6>0$ b) $x^2+2x-8<0$

c) $x^2-x-2>0$ d) $x^2+x-6<0$

C6: Inecuaciones de segundo grado de la forma: $ax^2+bx+c>0, ax^2+bx+c<0$ con $a>0$

P Resuelva las siguientes inecuaciones de segundo grado:
$x^2+3x+2>0$ y $x^2+3x+2<0$

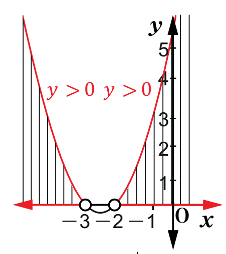
S Se resuelve la ecuación
$x^2+3x+2=0$
$(x+2)(x+1)=0$
$x=-2$, $x=-1$
Se traza la gráfica ubicando los interceptos $(-2,0)$ y $(-1,0)$ en el eje x.



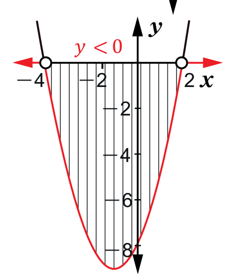
La solución de la inecuación $x^2+3x+2>0$, es:
$x<-2$ o $x>-1$
La solución de la inecuación $x^2+3x+2<0$, es:
$-2<x<-1$

C *(Explicar verbalmente)*

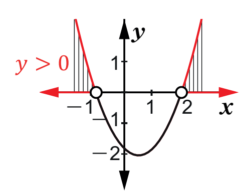
E a) $x^2+5x+6>0$
$x^2+5x+6=0$
$(x+3)(x+2)=0$
$x=-3$, $x=-2$
La solución de la inecuación $x^2+5x+6>0$ es:
$x<-3$ o $x>-2$



b) $x^2+2x-8<0$
$x^2+2x-8=0$
$(x+4)(x-2)=0$
$x=-4$, $x=2$
La solución de la inecuación $x^2+2x-8<0$ es:
$-4<x<2$



c) $x^2-x-2>0$
$x^2-x-2=0$
$(x-2)(x+1)=0$
$x=2$, $x=-1$
La solución de la inecuación $x^2-x-2>0$, es:
$x<-1$ o $x>2$



Contenido 7 Inecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c\geq 0$, $ax^2+bx+c\leq 0$, con $a>0$

Contenido 7: Inecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c\geq 0$, $ax^2+bx+c\leq 0$ con $a>0$

P

Resuelva las siguientes inecuaciones de segundo grado:

$x^2-3x+2\geq 0$ y $x^2-3x+2\leq 0$

S

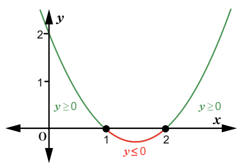
Se iguala a cero el lado izquierdo x^2-3x+2 de cualquiera de las inecuaciones y se resuelve la ecuación:

$$x^2-3x+2=0$$
$$(x-2)(x-1)=0$$
$$x=2, \quad x=1$$

Se traza la gráfica de la función $y=x^2-3x+2$ ubicando los interceptos (1, 0) y (2, 0) en el eje x.

Se forman tres intervalos definidos por: $x\leq 1$, $1\leq x\leq 2$ y $x\geq 2$.

El conjunto de soluciones de $x^2-3x+2\geq 0$ es la unión de los intervalos que cumplen $x\leq 1$ o $x\geq 2$ ya que para estos $y\geq 0$.



El intervalo de soluciones de $x^2-3x+2\leq 0$ es el que cumple la condición $1\leq x\leq 2$.

C

Para resolver inecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c\geq 0$, $ax^2+bx+c\leq 0$, con $a>0$ se procede así:

1. Se encuentran las soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ las cuales son m y n con $m<n$.
2. Se grafica la función $y=ax^2+bx+c$ con interceptos $(m, 0)$ y $(n, 0)$.
3. Se forman los intervalos que cumplen $x\leq m$, $m\leq x\leq n$, $x\geq n$.
4. El conjunto de soluciones de $ax^2+bx+c\geq 0$ se forma a partir de la unión de los intervalos que corresponden a $y\geq 0$, los cuales cumplen $x\leq m$ o $x\geq n$.

   El intervalo de soluciones de $ax^2+bx+c\leq 0$ es el que cumple $m\leq x\leq n$.

E

Resuelva las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2-4x+3\geq 0$ b) $x^2+5x+4\leq 0$

c) $x^2-x-6\geq 0$ d) $x^2+2x-8\leq 0$

Aprendizajes esperados

Resuelve inecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c\geq 0$ y $ax^2+bx+c\leq 0$, con $a>0$.

Secuencia:

En la clase anterior se resolvieron inecuaciones de la forma $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, con $a>0$. Ahora se resuelven inecuaciones de segundo grado de estas formas con $\leq$ o $\geq$.

Puntos esenciales:

Recordar los pasos que se siguen para trazar la gráfica de una función de segundo grado a partir de sus interceptos con el eje x.

Explicar los pasos que se siguen para resolver inecuaciones de segundo grado de esta forma.

Representar gráficamente en la recta numérica el conjunto de soluciones de una inecuación de este tipo, el cual resulta ser un intervalo numérico acotado, o la unión disjunta de dos intervalos.

C7: Inecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c\geq 0, ax^2+bx+c\leq 0$ con $a>0$

(P) Resuelva las siguientes inecuaciones de segundo grado:

$x^2-3x+2\geq 0$ y $x^2-3x+2\leq 0$

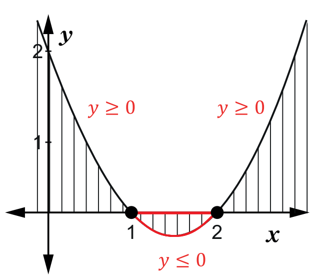
(S) Se resuelve la ecuación

$x^2-3x+2=0$

$(x-2)(x-1)=0$

$x=2 \quad , \quad x=1$

Se traza la gráfica ubicando los interceptos $(1,0)$ y $(2,0)$ en el eje x.



La solución de la inecuación $x^2-3x+2\geq 0$ con $y\geq 0$ es: $x\leq 1$ o $x\geq 2$

La solución de la inecuación $x^2-3x+2\leq 0$ con $y\leq 0$ es: $1\leq x\leq 2$

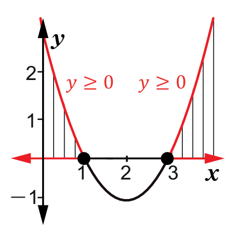
(C) *(Explicar verbalmente)*

(E) a) $x^2-4x+3\geq 0$

$(x-3)(x-1)=0$

$x=3 \quad , \quad x=1$

La solución de la inecuación $x^2-4x+3\geq 0$ con $y\geq 0$ es: $x\leq 1$ o $x\geq 3$



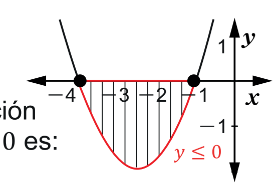
b) $x^2+5x+4\leq 0$

$(x+4)(x+1)=0$

$x=-4 \quad , \quad x=-1$

La solución de la inecuación $x^2+5x+4\leq 0$ con $y\leq 0$ es:

$-4\leq x\leq -1$



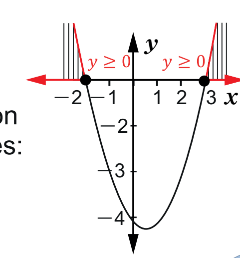
c) $x^2-x-6\geq 0$

$(x-3)(x+2)=0$

$x=3 \quad , \quad x=-2$

La solución de la inecuación $x^2-x-6\geq 0$ con $y\geq 0$ es:

$x\leq -2$ o $x\geq 3$



Contenido 8 Inecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\geq 0$, $ax^2+bx+c\leq 0$, con $a<0$

Aprendizajes esperados

Resuelve inecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\geq 0$ y $ax^2+bx+c\leq 0$, con $a<0$.

Secuencia:

En la clase anterior se resolvieron inecuaciones de la forma $ax^2+bx+c\geq 0$, $ax^2+bx+c\leq 0$, con $a>0$. Ahora se resuelven inecuaciones de segundo grado de estas formas con $a<0$.

Puntos esenciales:

Recordar los pasos que se siguen para trazar la gráfica de una función de segundo grado a partir de sus interceptos con el eje x.

Explicar los pasos que se siguen para resolver inecuaciones de segundo grado de esta forma.

Destacar que para resolver una inecuación de segundo grado con $a<0$ es conveniente convertirla en una inecuación con $a>0$. Pero que esto no quiere decir que no se pueda resolver en su forma dada.

Representar gráficamente en la recta numérica el conjunto de soluciones de una inecuación de este tipo.

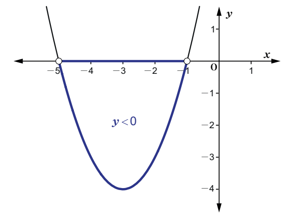
Contenido 8: Inecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\geq 0$, $ax^2+bx+c\leq 0$ con $a<0$

P

Resuelva la inecuación de segundo grado $-x^2-6x-5>0$.

S

$-x^2-6x-5>0$	
$x^2+6x+5<0$	Se multiplica por -1 y se cambia el signo $>$ por $<$
$x^2+6x+5=0$	Se plantea la ecuación
$(x+5)(x+1)=0$	Se factoriza
$x=-5,-1$	Se resuelven las ecuaciones de primer grado



El conjunto de soluciones de $x^2+6x+5<0$ es el intervalo que cumple la condición $-5<x<-1$ porque sus elementos corresponden a puntos de la parábola con $y<0$. Este es también el conjunto de soluciones de $-x^2-6x-5>0$.

C

Para resolver inecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\geq 0$, $ax^2+bx+c\leq 0$, con $a<0$, se procede así:

1. Se multiplica por -1 ambos lados de la inecuación, cambiando el sentido del signo de inecuación.
2. Se resuelve la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ y se traza la gráfica de la función de segundo grado $y=ax^2+bx+c$.
3. Se encuentra el conjunto de soluciones para la inecuación resultante del paso 1. Este será el conjunto de soluciones de la inecuación dada.

E

Resuelva las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $-x^2+x+2>0$

b) $-x^2-2x+3<0$

c) $-x^2-x+2\geq 0$

d) $-x^2-x+6\leq 0$

36

C8: Inecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c>0, ax^2+bx+c<0,$ $ax^2+bx+c\geq 0, ax^2+bx+c\leq 0$ con $a<0$

(P) Resuelva la inecuación de segundo grado

(S) $-x^2-6x-5>0.$

$-x^2-6x-5>0$ Multiplicar por -1

$x^2+6x+5<0$ Cambiar símbolo

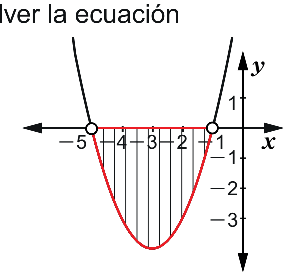
$x^2+6x+5=0$ Resolver la ecuación

$(x+5)(x+1)=0$

$x=-5$, $x=-1$

La solución de $x^2+6x+5<0$ es:

$-5<x<-1$



(C) *(Explicar verbalmente)*

(E) a) $-x^2+x+2>0$

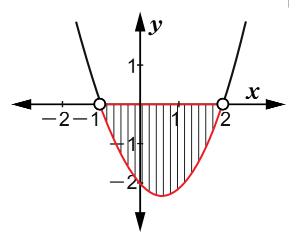
$x^2-x-2<0$

$x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$

$x=-1$, $x=2$

La solución de $x^2-x-2<0$ es: $-1<x<2$



b) $-x^2-2x+3<0$

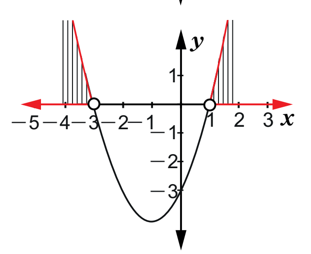
$x^2+2x-3>0$

$x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$

$x=-3$, $x=1$

La solución de $x^2+2x-3>0$ es: $x<-3$ o $x>1$



c) $-x^2-x+2\geq 0$

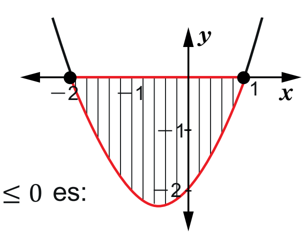
$x^2+x-2\leq 0$

$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$x=-2$, $x=1$

La solución de $x^2+x-2\leq 0$ es: $-2\leq x\leq 1$



Prueba de Matemática 10mo (30 min.)   Fecha: ____________

Unidad 2: Inecuaciones de Primer y Segundo Grado

/ 20

Nombre: _____________________________ Sección: __________
Sexo: M / F

1. Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado: (2 puntos × 4 = 8)

   a) $x-3>5$

   b) $3x\leq-6$

   c) $-2x>4$

   d) $2x+2>4$

2. Resuelva la inecuación simultánea de primer grado $-2\leq x-2<4$.

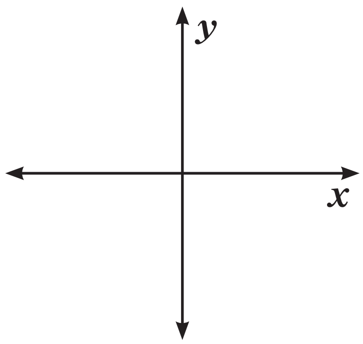
   (2 puntos)

3. Resuelva la ecuación: $|x-2|=3$. (2 puntos)

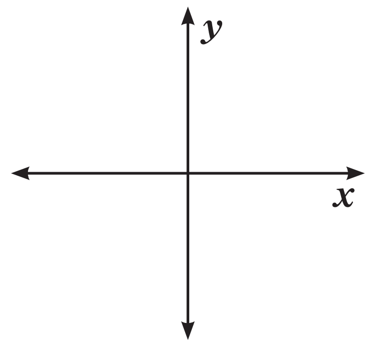
4. Resuelva la inecuación $|x-1| \geq 2$ (2 puntos)

5. Resuelva las siguientes inecuaciones de segundo grado: (2 puntos × 3 = 6)

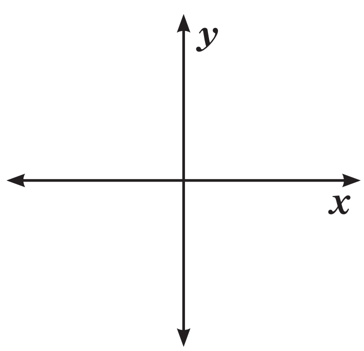
a) $x^2 - 1 \leq 0$



b) $x^2 + 2x - 8 < 0$



c) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$



Nombre: ______________________________

Unidad 3

Fracciones Algebraicas

Sección 1 Simplificación, multiplicación y división de fracciones algebraicas

Sección 2 Adición y sustracción de fracciones algebraicas

Contenido 1 Simplificación de fracciones con numerador y denominador numéricos y de variables

Aprendizajes esperados

Simplifica fracciones con numerador y denominador numéricos y con variables.

Secuencia:

En esta unidad se abordan los contenidos referentes a las fracciones algebraicas considerando como referencia la simplificación, la factorización y las operaciones con expresiones algebraicas. Se comienza con la simplificación de fracciones cuyos numeradores y denominadores son números o variables.

Puntos esenciales:

Recordar la simplificación de fracciones estudiada en los grados anteriores.

Explicar los pasos que se siguen para simplificar fracciones cuyos numeradores y denominadores son números o variables.

Simplificar fracciones cuyos numeradores y denominadores son números o potencias de variables.

Hacer notar que en expresiones como $\frac{a}{a \cdot a}$, al simplificar, en el numerador queda 1.

Sección 1: Simplificación, multiplicación y división de fracciones algebraicas

Contenido 1: Simplificación de fracciones con numerador y denominador numéricos y de variables

P

Simplifique las siguientes fracciones:

a) $\frac{15}{10}$ b) $\frac{x^2}{x^3}$

Recuerde:
$x^2 = x \cdot x$
$x^3 = x \cdot x \cdot x$
$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$
x^2, x^3 y x^4 se llaman potencias de x

S

a) Se calcula el máximo común divisor de 15 y 10 que es 5 y se divide por este el numerador y el denominador.

$$\frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{2}{\cancel{10}}} = \frac{3}{2}$$

b) Se descompone x^2 y x^3 en factores y se simplifica

$$\frac{x^2}{x^3} = \frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x} = \frac{1}{x}$$

Se ha tachado en el numerador y denominador el mismo número de variables.

C

La simplificación de fracciones consta de dos pasos:
1. Se calcula el máximo común divisor del numerador y el denominador.
2. Se divide el numerador y el denominador de la fracción por su máximo común divisor, obteniéndose una fracción irreducible.

Para simplificar fracciones en las que el numerador y denominador son variables se procede así:
1. Se descomponen las variables del numerador y el denominador como producto de factores.
2. Se simplifican las variables que son comunes en el numerador y el denominador, obteniendo una fracción irreducible.

E

Simplifique las siguientes fracciones:

a) $\frac{14}{12}$ b) $\frac{4}{12}$

c) $\frac{8}{20}$ d) $\frac{15}{25}$

e) $\frac{35}{40}$ f) $\frac{a^3}{a^4}$

g) $\frac{n^2}{n^3}$ h) $\frac{p^2q^4}{p^2q^3}$

40

U3: Fracciones Algebraicas

S1: Simplificación, multiplicación y división de fracciones algebraicas

C1: Simplificación de fracciones con numerador y denominador numéricos y de variables

P Simplifique:

a) $\frac{15}{10}$ b) $\frac{x^2}{x^3}$

Recuerde:
$x^2 = x \cdot x$
$x^3 = x \cdot x \cdot x$
$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$

S a) $\frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{2}{\cancel{10}}} = \frac{3}{2}$ b) $\frac{x^2}{x^3} = \frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x} = \frac{1}{x}$

C *Leer en el libro de texto los pasos para simplificar fracciones algebraicas.*

E

a) $\frac{\overset{7}{\cancel{14}}}{\underset{6}{\cancel{12}}} = \frac{7}{6}$ b) $\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{3}{\cancel{12}}} = \frac{1}{3}$

c) $\frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{5}{\cancel{20}}} = \frac{2}{5}$ d) $\frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{5}{\cancel{25}}} = \frac{3}{5}$

e) $\frac{\overset{7}{\cancel{35}}}{\underset{8}{\cancel{40}}} = \frac{7}{8}$ f) $\frac{a^3}{a^4} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a} = \frac{1}{a}$

g) $\frac{n^2}{n^3} = \frac{\cancel{n} \cdot \cancel{n}}{\cancel{n} \cdot \cancel{n} \cdot n} = \frac{1}{n}$ h) $\frac{p^2q^4}{p^2q^3} = \frac{\cancel{p} \cdot \cancel{p} \cdot \cancel{q} \cdot \cancel{q} \cdot \cancel{q} \cdot q}{\cancel{p} \cdot \cancel{p} \cdot \cancel{q} \cdot \cancel{q} \cdot \cancel{q}} = q$

Contenido 2 Simplificación de fracciones algebraicas cuyo numerador y denominador son monomios

Contenido 2: Simplificación de fracciones algebraicas cuyo numerador y denominador son monomios

P

Simplifique las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{2x^4y^3}{6x^2y^2}$ b) $\frac{5x^2y}{10x^2y^3}$

Una fracción algebraica es el cociente de dos monomios o polinomios.

S

a) Se simplifican los números 2 y 6, se descomponen las potencias x^4, y^3, x^2 y y^2 en sus variables y se simplifica.

$$\frac{2x^4y^3}{6x^2y^2} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot x\cdot x\cdot\cancel{y}\cdot\cancel{y}\cdot y}{\underset{3}{\cancel{6}}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{y}\cdot\cancel{y}} = \frac{x\cdot x\cdot y}{3} = \frac{x^2y}{3}$$
$$= \frac{1}{3}x^2y$$

En la multiplicación de variables y números se usa punto: $2x^4y^3 = 2\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y\cdot y$

b) Se simplifican los números 5 y 10, se descomponen las potencias x^2 y y^3 en sus variables y se simplifica.

$$\frac{5x^2y}{10x^2y^3} = \frac{\overset{1}{\cancel{5}}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{y}}{\underset{2}{\cancel{10}}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{y}\cdot y\cdot y} = \frac{1}{2\cdot y\cdot y} = \frac{1}{2y^2}$$

C

Una fracción algebraica es aquella que posee variables en el denominador.

Para simplificar fracciones algebraicas cuyo numerador y denominador son monomios se procede así:

1. Se simplifican los coeficientes del numerador y denominador dividiéndolos por su máximo común divisor.
2. Se simplifican las variables que son comunes en el numerador y el denominador, la fracción algebraica resultante es el producto de los coeficientes y variables que quedaron en el numerador y denominador.

E

Simplifique las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{6x^3y^2}{12x^2y^3}$ b) $\frac{14a^2b^2}{7a^3b^3}$

c) $\frac{8xy}{4x^2y^3}$ d) $\frac{20a^3b^2}{4a^2b^3}$

e) $\frac{18m^2n^3}{12m^3n^2}$ f) $\frac{30p^2q^3}{20p^3q^3}$

41

Aprendizajes esperados

Simplifica fracciones algebraicas cuyo numerador y denominador son monomios.

Secuencia:

En la clase anterior se simplificaron fracciones cuyos numeradores y denominadores eran números o variables. A este tipo de fracciones se les llama fracciones algebraicas. Ahora se estudia la simplificación de fracciones algebraicas cuyos numeradores y denominares son monomios.

Puntos esenciales:

Recordar la simplificación de fracciones cuyos numeradores y denominadores son números o variables.

Explicar los pasos que se siguen para simplificar fracciones algebraicas cuyos numeradores y denominadores son monomios.

Simplificar fracciones algebraicas cuyos numeradores y denominadores son monomios.

Notar que, si se simplifican todas las constantes y variables en el numerador o el denominador, quedará 1 en lugar de la expresión que se tenía.

C2: Simplificación de fracciones algebraicas cuyo numerador y denominador son monomios

P Simplifique:

a) $\frac{2x^4y^3}{6x^2y^2}$ b) $\frac{5x^2y}{10x^2y^3}$

S a) $\frac{2x^4y^3}{6x^2y^2} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot x\cdot x\cdot\cancel{y}\cdot\cancel{y}\cdot y}{\underset{3}{\cancel{6}}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{y}\cdot\cancel{y}} = \frac{x\cdot x\cdot y}{3} = \frac{x^2y}{3} = \frac{1}{3}x^2y$

b) $\frac{5x^2y}{10x^2y^3} = \frac{\overset{1}{\cancel{5}}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{y}}{\underset{2}{\cancel{10}}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{y}\cdot y\cdot y} = \frac{1}{2\cdot y\cdot y} = \frac{1}{2y^2}$

C *Leer en el libro de texto los pasos para simplificar fracciones algebraicas cuyo numerador y denominador son monomios.*

E Simplifique:

a) $\frac{6x^3y^2}{12x^2y^3} = \frac{\overset{1}{\cancel{6}}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot x\cdot\cancel{y}\cdot\cancel{y}}{\underset{2}{\cancel{12}}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{y}\cdot\cancel{y}\cdot y} = \frac{x}{2y}$

b) $\frac{14a^2b^2}{7a^3b^3} = \frac{\overset{2}{\cancel{14}}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{b}\cdot\cancel{b}}{\underset{1}{\cancel{7}}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot a\cdot\cancel{b}\cdot\cancel{b}\cdot b} = \frac{2}{ab}$

c) $\frac{8xy}{4x^2y^3} = \frac{\overset{2}{\cancel{8}}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{y}}{\underset{1}{\cancel{4}}\cdot\cancel{x}\cdot x\cdot\cancel{y}\cdot y\cdot y} = \frac{2}{xy^2}$

d) $\frac{20a^3b^2}{4a^2b^3} = \frac{\overset{5}{\cancel{20}}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot a\cdot\cancel{b}\cdot\cancel{b}}{\underset{1}{\cancel{4}}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{b}\cdot\cancel{b}\cdot b} = \frac{5a}{b}$

e) $\frac{18m^2n^3}{12m^3n^2} = \frac{\overset{3}{\cancel{18}}\cdot\cancel{m}\cdot\cancel{m}\cdot\cancel{n}\cdot\cancel{n}\cdot n}{\underset{2}{\cancel{12}}\cdot\cancel{m}\cdot\cancel{m}\cdot m\cdot\cancel{n}\cdot\cancel{n}} = \frac{3n}{2m}$

f) $\frac{30p^2q^3}{20p^3q^3} = \frac{\overset{3}{\cancel{30}}\cdot\cancel{p}\cdot\cancel{p}\cdot\cancel{q}\cdot\cancel{q}\cdot\cancel{q}}{\underset{2}{\cancel{20}}\cdot\cancel{p}\cdot\cancel{p}\cdot p\cdot\cancel{q}\cdot\cancel{q}\cdot\cancel{q}} = \frac{3}{2p}$

Contenido 3 Factorización

Aprendizajes esperados

Recuerda los casos de factorización de polinomios más usados.

Secuencia:

En noveno grado se estudiaron los casos de factorización. Aquí se hace un repaso de estos.

Puntos esenciales:

Recordar los casos de factorización ya estudiados.

Aplicar dichos casos en la factorización de polinomios.

Contenido 3: Factorización

Repaso

La factorización de un número mayor que 1 en números primos ocurre en los números enteros, mientras que con expresiones polinómicas, factorizar significa descomponerlas en polinomios que ya no se pueden reducir más.

Los casos de factorización más frecuentes son:

- $ab+ac=a(b+c)$, Factor común monomio.
- $x^2-a^2=(x+a)(x-a)$, Diferencia de cuadrados.
- $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$, Trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab$.
- $x^2\pm 2ax+a^2=(x\pm a)^2$ Trinomio cuadrado perfecto.

P

Factorice los siguientes polinomios:

a) $10x+5$ b) x^2-5x c) x^2-9

d) x^2+5x+4 e) x^2+2x+1

S

a) $10x+5=(5)(2x)+(5)(1)=\mathbf{5(2x+1)}$

b) $x^2-5x=x\cdot x-5\cdot x=\mathbf{x(x-5)}$

c) $x^2-9=x^2-3^2=\mathbf{(x+3)(x-3)}$

d) $x^2+5x+4=x^2+(1+4)x+(1)(4)=\mathbf{(x+1)(x+4)}$

e) $x^2+2x+1=x^2+(2)x(1)+1^2=(x+1)(x+1)=\mathbf{(x+1)^2}$

E

Factorice los siguientes polinomios:

a) $2x+4$ b) x^2-4x

c) x^2-1 d) x^2+3x+2

e) x^2+4x+4 f) $4x^2+12x$

g) x^2-2x+1 h) x^2+6x+9

i) $x^2-8x+16$ j) x^2+5x-6

42

C3: Factorización

Repaso:

- $ab+ac=a(b+c)$ Factor común monomio
- $x^2-a^2=(x+a)(x-a)$ Diferencia de cuadrados
- $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ Trinomio de la forma
- $x^2\pm 2ax+a^2=(x\pm a)^2$ Trinomio cuadrado perfecto

(P) Factorice los siguientes polinomios:

(S) a) $10x+5=(5)(2x)+(5)(1)=5(2x+1)$

b) $x^2-5x=(x)(x)-(5)(x)=x(x-5)$

c) $x^2-9=x^2-3^2=(x+3)(x-3)$

d) $x^2+5x+4=x^2+(1+4)x+(1)(4)$
$=(x+1)(x+4)$

e) $x^2+2x+1=x^2+(2)(x)(1)+1^2$
$=(x+1)(x+1)=(x+1)^2$

(E) Factorice los siguientes polinomios

a) $2x+4=(2)(x)+(2)(2)=2(x+2)$

b) $x^2-4x=(x)(x)-(4)(x)=x(x-4)$

c) $x^2-1=x^2-1^2=(x-1)(x+1)$

d) $x^2+3x+2=x^2+(2+1)x+(2)(1)$
$=(x+2)(x+1)$

e) $x^2+4x+4=x^2+(2)(2)(x)+(2)^2=(x+2)^2$

f) $4x^2+12x=(4x)(x)+(4x)(3)=4x(x+3)$

g) $x^2-2x+1=x^2-(2)(x)(1)+(-1)^2=(x-1)^2$

Contenido 4 Simplificación de fracciones algebraicas cuyo numerador y denominador son polinomios

Contenido 4: Simplificación de fracciones algebraicas cuyo numerador y denominador son polinomios

P

Simplifique las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{x+1}{x^2-1}$ b) $\frac{x^2-1}{x^2+x-2}$

S

a) Se examina el numerador y denominador para saber si son factorizables. En este caso $x+1$ no es factorizable, pero x^2-1, se factoriza como $x^2-1=(x+1)(x-1)$.

$$\frac{x+1}{x^2-1}=\frac{\cancel{x+1}}{(\cancel{x+1})(x-1)}=\frac{1}{x-1}$$

b) El numerador y denominador son factorizables:

$$x^2-1=(x+1)(x-1) \text{ y } x^2+x-2=(x+2)(x-1)$$

Entonces,

$$\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\frac{(x+1)(\cancel{x-1})}{(x+2)(\cancel{x-1})}=\frac{x+1}{x+2}$$

C

Para la simplificación de fracciones algebraicas cuyo numerador y denominador son polinomios se realiza lo siguiente:

1. Se factoriza el numerador y el denominador de la fracción algebraica, si es posible.
2. Se simplifican todos los factores comunes del numerador y denominador, los términos restantes forman la nueva fracción algebraica, que es reducida.

E

Simplifique las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{x+2}{x^2-4}$ b) $\frac{x^2+3x+2}{x+2}$

c) $\frac{x-3}{x^2-9}$ d) $\frac{x^2-4}{x^2+x-6}$

e) $\frac{x^2-x-2}{x^2-1}$ f) $\frac{x^2-3x}{x^2-4x+3}$

g) $\frac{x^2+4x}{x^2+8x+16}$ h) $\frac{3x-3}{x^2-1}$

43

Aprendizajes esperados

Simplifica fracciones algebraicas cuyo numerador y denominador son polinomios.

Secuencia:

En la clase anterior se recordaron los casos de factorización. Ahora, estos se aplican en la simplificación de fracciones algebraicas cuyos numeradores y denominadores son polinomios.

Puntos esenciales:

Identificar el caso de factorización que se puede aplicar al numerador o denominador de la fracción algebraica.

Simplificar todos los factores comunes del numerador y denominador, conduce a obtener una fracción reducida.

Insistir en que si el numerador y denominador son polinomios, en los que un término se presenta en ambos, este no se simplifica, por ejemplo, es incorrecto el procedimiento siguiente:

$$\frac{\cancel{x^2}-1}{\cancel{x^2}+x-2}$$

C4: Simplificación de fracciones algebraicas cuyo numerador y denominador son polinomios

(P) Simplifique las siguientes fracciones algebraicas:

(S) a) $\frac{x+1}{x^2-1}=\frac{\cancel{x+1}}{(\cancel{x+1})(x-1)}=\frac{1}{x-1}$

b) $\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\frac{(x+1)(\cancel{x-1})}{(x+2)(\cancel{x-1})}=\frac{x+1}{x+2}$

(C) *Para simplificar una fracción algebraica se factorizan (si es posible) el numerador y denominador, y luego se simplifican los factores comunes.*

(E) Simplifique:

a) $\frac{x+2}{x^2-4}=\frac{\cancel{x+2}}{(\cancel{x+2})(x-2)}=\frac{1}{x-2}$

b) $\frac{x^2+3x+2}{x+2}=\frac{(x+1)(\cancel{x+2})}{\cancel{x+2}}=x+1$

c) $\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{\cancel{x-3}}{(x+3)(\cancel{x-3})}=\frac{1}{x+3}$

d) $\frac{x^2-4}{x^2+x-6}=\frac{(x+2)(\cancel{x-2})}{(x+3)(\cancel{x-2})}=\frac{x+2}{x+3}$

e) $\frac{x^2-x-2}{x^2-1}=\frac{(x-2)(\cancel{x+1})}{(\cancel{x+1})(x-1)}=\frac{x-2}{x-1}$

f) $\frac{x^2-3x}{x^2-4x+3}=\frac{x(\cancel{x-3})}{(\cancel{x-3})(x-1)}=\frac{x}{x-1}$

Contenido 5 Multiplicación de fracciones algebraicas

Aprendizajes esperados

Multiplica fracciones algebraicas cuyos numeradores y denominadores son monomios o polinomios.

Secuencia:

En la clase anterior se estudió la simplificación de fracciones algebraicas cuyos numeradores y denominadores son polinomios. Ahora se estudia la multiplicación de fracciones algebraicas, la cual generaliza la ya aprendida multiplicación de fracciones numéricas.

Puntos esenciales:

Recordar cómo se simplifican fracciones algebraicas cuyos numeradores y denominadores son monomios o en general polinomios.

Indicar que para efectuar la multiplicación de fracciones algebraicas se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador.

Explicar cada uno de los pasos que se siguen para efectuar la multiplicación de fracciones algebraicas.

Notar que la fracción algebraica resultante debe estar reducida.

Contenido 5: Multiplicación de fracciones algebraicas

P

Efectúe los productos indicados:

a) $\frac{x^2}{8y^3}\cdot\frac{4y^2}{x}$ b) $\frac{x^2+3x}{x-2}\cdot\frac{x-2}{x+3}$

S

a) $\frac{x^2}{8y^3}\cdot\frac{4y^2}{x}=\frac{x\cdot x\cdot 4\cdot y\cdot y}{8\cdot y\cdot y\cdot y\cdot x}$ Se multiplican los numeradores y denominadores y se descomponen x^2, $4y^2$ y $8y^3$ en productos de números y variables

$=\frac{\overset{1}{\cancel{4}}\cdot\cancel{x}\cdot x\cdot\cancel{y}\cdot\cancel{y}}{\underset{2}{\cancel{8}}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{y}\cdot\cancel{y}\cdot y}$

$=\frac{x}{2y}$ Se simplifica

b) $\frac{x^2+3x}{x-2}\cdot\frac{x-2}{x+3}=\frac{x(x+3)(x-2)}{(x-2)(x+3)}$ Se multiplican los numeradores y denominadores y se factoriza x^2+3x

$=\frac{x\cancel{(x+3)}\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\cancel{(x+3)}}$

$=x$ Se simplifica

C

La multiplicación de fracciones algebraicas se efectúa de la forma siguiente:

1. Si los numeradores y denominadores de cada fracción son monomios, entonces se multiplican los numeradores y denominadores, se descomponen las potencias en variables, se simplifican estas y los coeficientes hasta obtener una expresión reducida.
2. Si los numeradores y denominadores de cada fracción son polinomios, entonces se factorizan, se multiplican y se eliminan los factores comunes, dando lugar a una nueva fracción.

E

Efectúe los siguientes productos indicados:

a) $\frac{x^3}{6y^3}\cdot\frac{9y^2}{x}$ b) $\frac{4x^3}{5y}\cdot\frac{3y^3}{2x^2}$

c) $\frac{x^2+2x}{x+1}\cdot\frac{x+1}{x+2}$ d) $\frac{x^2+3x+2}{x-3}\cdot\frac{x-3}{x+2}$

e) $\frac{x^2-1}{x^2+2x}\cdot\frac{x+2}{x-1}$

44

C5: Multiplicación de fracciones algebraicas

P Efectúe los productos indicados:

S a) $\frac{x^2}{8y^3}\cdot\frac{4y^2}{x}=\frac{x\cdot x\cdot 4\cdot y\cdot y}{8\cdot y\cdot y\cdot y\cdot x}=\frac{\overset{1}{\cancel{4}}\cdot\cancel{x}\cdot x\cdot\cancel{y}\cdot\cancel{y}}{\underset{2}{\cancel{8}}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{y}\cdot\cancel{y}\cdot y}$

$=\frac{x}{2y}$

b) $\frac{x^2+3x}{x-2}\cdot\frac{x-2}{x+3}=\frac{x(x+3)(x-2)}{(x-2)(x+3)}$

$=\frac{x\cancel{(x+3)}\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\cancel{(x+3)}}=x$

C *Explicar el procedimiento para simplificar fracciones algebraicas*

E Efectúe los productos indicados:

a) $\frac{x^3}{6y^3}\cdot\frac{9y^2}{x}=\frac{x\cdot x\cdot x\cdot 9\cdot y\cdot y}{6\cdot y\cdot y\cdot y\cdot x}$

$=\frac{\overset{3}{\cancel{9}}\cdot\cancel{x}\cdot x\cdot x\cdot\cancel{y}\cdot\cancel{y}}{\underset{2}{\cancel{6}}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{y}\cdot\cancel{y}\cdot y}=\frac{3x^2}{2y}$

b) $\frac{4x^3}{5y}\cdot\frac{3y^3}{2x^2}=\frac{4\cdot x\cdot x\cdot x\cdot 3\cdot y\cdot y\cdot y}{5\cdot y\cdot 2\cdot x\cdot x}$

$=\frac{\overset{2}{\cancel{4}}\cdot 3\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot x\cdot\cancel{y}\cdot y\cdot y}{5\cdot\underset{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{y}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}}=\frac{6xy^2}{5}$

c) $\frac{x^2+2x}{x+1}\cdot\frac{x+1}{x+2}=\frac{x\cancel{(x+2)}\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x+2)}}=x$

d) $\frac{x^2+3x+2}{x-3}\cdot\frac{x-3}{x+2}=\frac{(x+1)\cancel{(x+2)}\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}\cancel{(x+2)}}$

$=x+1$

e) $\frac{x^2-1}{x^2+2x}\cdot\frac{x+2}{x-1}=\frac{(x+1)\cancel{(x-1)}\cancel{(x+2)}}{x\cancel{(x+2)}\cancel{(x-1)}}$

$=\frac{x+1}{x}$

Contenido 6 División de fracciones algebraicas

Contenido 6: División de fracciones algebraicas

P Efectúe las siguientes divisiones indicadas:

a) $\frac{2x^2}{3y} \div \frac{4x}{3y^2}$ b) $\frac{x^2-1}{x-3} \div \frac{x+1}{x-3}$

S

a) $\frac{2x^2}{3y} \div \frac{4x}{3y^2} = \frac{2x^2}{3y} \cdot \frac{3y^2}{4x}$

$= \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{x} \cdot x}{\cancel{3} \cdot \cancel{y}} \cdot \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{y} \cdot y}{\underset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{x}}$

$= \frac{xy}{2}$

b) $\frac{x^2-1}{x-3} \div \frac{x+1}{x-3} = \frac{x^2-1}{x-3} \cdot \frac{x-3}{x+1}$

$= \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x-3}} \cdot \frac{\cancel{x-3}}{\cancel{x+1}}$

$= x-1$

Si $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$ son fracciones algebraicas, entonces

$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$

C

La división de fracciones algebraicas se efectúa de la forma siguiente:

1. Si el numerador y el denominador de cada fracción son monomios, entonces se escribe la primera fracción, se cambia el signo de división por el de multiplicación, se intercambian el numerador y el denominador de la segunda fracción y se procede a realizar la multiplicación, simplificando coeficientes y variables.
2. Si el numerador y denominador de cada fracción son polinomios, se realiza el mismo procedimiento anterior, con la diferencia que se deben factorizar los polinomios para luego simplificar factores comunes.

E

Efectúe las siguientes divisiones indicadas:

a) $\frac{9m^2}{4n^3} \div \frac{3m}{2n^2}$ b) $\frac{x^2-4}{x+1} \div \frac{x-2}{x+1}$

c) $\frac{3a^2}{4mn} \div \frac{15a}{2m}$ d) $\frac{x+1}{x+2} \div \frac{x^2+3x+2}{x+2}$

e) $\frac{x-y}{x+y} \div \frac{x-y}{x^2-y^2}$ f) $\frac{x+2}{x^2+4x+3} \div \frac{x+2}{x+3}$

45

Aprendizajes esperados

Divide fracciones algebraicas cuyos numeradores y denominadores son monomios o polinomios.

Secuencia:

En la clase anterior se multiplicaron fracciones algebraicas. Ahora se estudia la división de fracciones algebraicas, cuyo procedimiento requiere de la ya estudiada multiplicación.

Puntos esenciales:

Notar que al igual que la división de fracciones numéricas, la división de fracciones algebraicas, se convierte en una multiplicación.

Recordar cómo se multiplican fracciones algebraicas.

Explicar cada uno de los pasos que se siguen para efectuar la división de fracciones algebraicas.

Insistir en la correcta aplicación de la factorización de polinomios.

Destacar que la fracción algebraica resultante debe estar reducida.

C6: División de fracciones algebraicas

P Efectúe las siguientes divisiones indicadas:

S a) $\frac{2x^2}{3y} \div \frac{4x}{3y^2} = \frac{2x^2}{3y} \cdot \frac{3y^2}{4x} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{x} \cdot x}{\cancel{3} \cdot \cancel{y}} \cdot \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{y} \cdot y}{\underset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{x}}$

$= \frac{xy}{2}$

b) $\frac{x^2-1}{x-3} \div \frac{x+1}{x-3} = \frac{x^2-1}{x-3} \cdot \frac{x-3}{x+1}$

$= \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x-3}} \cdot \frac{\cancel{x-3}}{\cancel{x+1}}$

$= x-1$

C *(Explicar verbalmente)*

E Efectúe las siguientes divisiones indicadas:

a) $\frac{9m^2}{4n^3} \div \frac{3m}{2n^2} = \frac{9m^2}{4n^3} \cdot \frac{2n^2}{3m} = \frac{\overset{3}{\cancel{9}} \cdot \cancel{m} \cdot m}{\underset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{n} \cdot \cancel{n} \cdot n} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{n} \cdot \cancel{n}}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{m}} = \frac{3m}{2n}$

b) $\frac{x^2-4}{x+1} \div \frac{x-2}{x+1} = \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x+1}} \cdot \frac{\cancel{x+1}}{\cancel{x-2}} = x+2$

c) $\frac{3a^2}{4mn} \div \frac{15a}{2m} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{a} \cdot a}{\underset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{m} \cdot n} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{m}}{\underset{5}{\cancel{15}} \cdot \cancel{a}} = \frac{a}{10n}$

d) $\frac{x+1}{x+2} \div \frac{x^2+3x+2}{x+2} = \frac{\cancel{x+1}}{\cancel{x+2}} \cdot \frac{\cancel{x+2}}{\cancel{(x+1)}(x+2)} = \frac{1}{x+2}$

e) $\frac{x-y}{x+y} \div \frac{x-y}{x^2-y^2} = \frac{\cancel{x-y}}{\cancel{x+y}} \cdot \frac{\cancel{(x+y)}(x-y)}{\cancel{x-y}} = x-y$

Contenido 7 Operaciones combinadas con fracciones algebraicas

Aprendizajes esperados

Efectúa operaciones combinadas (multiplicación y división) de fracciones algebraicas.

Secuencia:

Estudiadas la multiplicación y división de fracciones algebraicas, ahora se efectúan operaciones combinadas de multiplicaciones y divisiones de fracciones algebraicas.

Puntos esenciales:

Recordar cómo se multiplican y dividen fracciones algebraicas.

Explicar los pasos que se siguen para efectuar operaciones combinadas de multiplicación y división de fracciones algebraicas.

Aplicar dichos pasos al efectuar operaciones combinadas de multiplicaciones y divisiones de fracciones algebraicas.

Insistir en la aplicación correcta del orden para efectuar las operaciones (de izquierda a derecha).

Contenido 7: Operaciones combinadas con fracciones algebraicas

P

Efectúe las siguientes operaciones indicadas:

a) $\frac{x^2}{3y}\cdot\frac{2x^2}{y}\div\frac{2x^3}{9y}$ b) $\frac{x+2}{x-2}\div\frac{x^2+3x+2}{x-2}\cdot\frac{x+1}{x+3}$

Operaciones combinadas de fracciones algebraicas

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}\cdot\frac{E}{F}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}\cdot\frac{E}{F}=\frac{ADE}{BCF}$$

S

a) $\frac{x^2}{3y}\cdot\frac{2x^2}{y}\div\frac{2x^3}{9y}$

Se cambia el signo $\div$ por $\cdot$ y se intercambia el numerador y denominador de $\frac{2x^3}{9y}$

$$=\frac{x^2}{3y}\cdot\frac{2x^2}{y}\cdot\frac{9y}{2x^3}$$

$$=\frac{\cancel{x}\cdot\cancel{x}}{\cancel{3}\cdot\cancel{y}}\cdot\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{x}\cdot x}{y}\cdot\frac{\overset{3}{\cancel{9}}\cdot\cancel{y}}{\cancel{2}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}}$$

$$=\frac{3x}{y}$$

b) $\frac{x+2}{x-2}\div\frac{x^2+3x+2}{x-2}\cdot\frac{x+1}{x+3}=\frac{x+2}{x-2}\cdot\frac{x-2}{x^2+3x+2}\cdot\frac{x+1}{x+3}$

Se cambia el signo $\div$ por $\cdot$ y se intercambia el numerador y denominador de $\frac{x^2+3x+2}{x-2}$.

$$=\frac{\cancel{x+2}}{\cancel{x-2}}\cdot\frac{\cancel{x-2}}{(\cancel{x+1})(\cancel{x+2})}\cdot\frac{\cancel{x+1}}{x+3}$$

$$=\frac{1}{(x+3)}$$

C

Las operaciones combinadas (multiplicación y división) con fracciones algebraicas se efectúan de la forma siguiente:

1. Si los numeradores y denominadores de cada fracción son monomios, entonces se cambia el signo de división por multiplicación y se invierten los términos de la fracción que divide, luego se simplifican los coeficientes y se descomponen las variables en producto y se simplifican una a una.
2. Si los numeradores y denominadores de cada fracción son polinomios, entonces se realiza el mismo procedimiento anterior, con la diferencia que se deben factorizar los polinomios para luego simplificar factores comunes.

E

Efectúe las siguientes operaciones indicadas:

a) $\frac{3x^3}{2y^2}\cdot\frac{2y}{x^2}\div\frac{3x^2}{4y}$

b) $\frac{x+1}{x+2}\div\frac{x+1}{x^2+5x+6}\cdot\frac{x-5}{x+3}$

c) $\frac{3x}{2y^2}\div\frac{3x^2}{4y}\cdot\frac{3y}{2x}$

d) $\frac{a+b}{a^2-b^2}\div\frac{a+b}{a^2+2a+1}\cdot\frac{a-b}{a+1}$

e) $\frac{m-3}{m-1}\cdot\frac{m+1}{m^2-m-6}\div\frac{m+1}{m+2}$

f) $\frac{5x}{3y}\div\frac{10x}{9y}\cdot\frac{4y}{3x^2}$

46

C7: Operaciones combinadas con fracciones algebraicas

P Efectúe las siguientes operaciones indicadas:

S a) $\frac{x^2}{3y}\cdot\frac{2x^2}{y}\div\frac{2x^3}{9y}=\frac{x^2}{3y}\cdot\frac{2x^2}{y}\cdot\frac{9y}{2x^3}$

$$=\frac{\cancel{x}\cdot\cancel{x}}{\underset{1}{\cancel{3}}\cdot\cancel{y}}\cdot\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{x}\cdot x}{y}\cdot\frac{\overset{3}{\cancel{9}}\cdot\cancel{y}}{\cancel{2}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}}=\frac{x\cdot 3}{y}=\frac{3}{y}$$

b) $\frac{x+2}{x-2}\div\frac{x^2+3x+2}{x-2}\cdot\frac{x+1}{x+3}$

$$=\frac{\cancel{x+2}}{\cancel{x-2}}\cdot\frac{\cancel{x-2}}{(\cancel{x+1})(\cancel{x+2})}\cdot\frac{(\cancel{x+1})}{x+3}$$

$$=\frac{1}{x+3}$$

$$\boxed{\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}\cdot\frac{E}{F}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}\cdot\frac{E}{F}=\frac{ADE}{BCF}}$$

C *Leer en el libro de texto el procedimiento para resolver operaciones combinadas.*

E Efectúe las siguientes operaciones indicadas:

a) $\frac{3x^3}{2y^2}\cdot\frac{2y}{x^2}\div\frac{3x^2}{4y}=\frac{3x^3}{2y^2}\cdot\frac{2y}{x^2}\cdot\frac{4y}{3x^2}=\frac{\cancel{3}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}}{\cancel{2}\cdot\cancel{y}\cdot\cancel{y}}\cdot\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{y}}{\cancel{x}\cdot\cancel{x}}\cdot\frac{4\cdot\cancel{y}}{\cancel{3}\cdot\cancel{x}\cdot x}=\frac{4}{x}$

b) $\frac{x+1}{x+2}\div\frac{x+1}{x^2+5x+6}\cdot\frac{x-5}{x+3}=\frac{\cancel{x+1}}{\cancel{x+2}}\cdot\frac{(\cancel{x+2})(\cancel{x+3})}{\cancel{x+1}}\cdot\frac{x-5}{\cancel{x+3}}=x-5$

c) $\frac{3x}{2y^2}\div\frac{3x^2}{4y}\cdot\frac{3y}{2x}=\frac{3x}{2y^2}\cdot\frac{4y}{3x^2}\cdot\frac{3y}{2x}=\frac{\cancel{3}\cdot\cancel{x}}{\cancel{2}\cdot\cancel{y}\cdot\cancel{y}}\cdot\frac{\cancel{4}\cdot\cancel{y}}{\cancel{3}\cdot\cancel{x}\cdot x}\cdot\frac{3\cdot\cancel{y}}{\cancel{2}\cdot x}=\frac{3}{x^2}$

d) $\frac{a+b}{a^2-b^2}\div\frac{a+b}{a^2+2a+1}\cdot\frac{a-b}{a+1}=\frac{a+b}{a^2-b^2}\cdot\frac{a^2+2a+1}{a+b}\cdot\frac{a-b}{a+1}$

$$=\frac{\cancel{a+b}}{(\cancel{a-b})(a+b)}\cdot\frac{(\cancel{a+1})(a+1)}{\cancel{a+b}}\cdot\frac{\cancel{a-b}}{\cancel{a+1}}=\frac{a+1}{a+b}$$

Contenido 1 Adición de fracciones algebraicas con igual denominador

Sección 2: Adición y sustracción de fracciones algebraicas

Contenido 1: Adición de fracciones algebraicas con igual denominador

P Efectúe las siguientes sumas:

a) $\frac{3}{x}+\frac{2}{x}$ b) $\frac{2x}{x+1}+\frac{2}{x+1}$

c) $\frac{x+1}{x+3}+\frac{x+2}{x+3}$

Adición de fracciones algebraicas con mismo denominador.

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{B}=\frac{A+C}{B}$$

S

a) $\frac{3}{x}+\frac{2}{x}=\frac{3+2}{x}$ Se escribe el mismo denominador x y se suman los numeradores

$=\frac{5}{x}$

b) $\frac{2x}{x+1}+\frac{2}{x+1}=\frac{2x+2}{x+1}$ Se escribe el mismo denominador $x+1$ y se suman los numeradores

$=\frac{2\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}=2$ Se factoriza $2x+2$ y se simplifica

c) $\frac{x+1}{x+3}+\frac{x+2}{x+3}=\frac{x+1+x+2}{x+3}$ Se escribe el mismo denominador $x+3$ y se suman los numeradores

$=\frac{2x+3}{x+3}$ Se suman términos semejantes

C

La suma de fracciones algebraicas con el mismo denominador es otra fracción algebraica con la siguiente regla de formación:

1. Su numerador es la suma de los numeradores de las dos fracciones dadas y su denominador es el mismo de las fracciones que se suman.
2. En la fracción algebraica resultante se factoriza el numerador y el denominador, si ese es el caso y se simplifica.

E

Efectúe las siguientes sumas:

a) $\frac{2}{a}+\frac{7}{a}$ b) $\frac{2y}{y+2}+\frac{4}{y+2}$

c) $\frac{x+2}{4x-5}+\frac{5-x}{4x-5}$ d) $\frac{4}{3b}+\frac{5}{3b}$

e) $\frac{3x}{x+3}+\frac{9}{x+3}$ f) $\frac{x+1}{2x+3}+\frac{3x+5}{2x+3}$

g) $\frac{x+4}{x-3}+\frac{x+1}{x-3}$

48

Aprendizajes esperados

Efectúa la suma de fracciones algebraicas con igual denominador

Secuencia:

En la clase anterior se efectuaron operaciones combinadas de multiplicaciones y divisiones de fracciones algebraicas. Ahora se estudia la adición de fracciones algebraicas con iguales denominadores, posteriormente cuando tienen distintos denominadores.

Puntos esenciales:

Recordar la simplificación de fracciones algebraicas.

Destacar que la suma de fracciones algebraicas con iguales denominadores se efectúa de la misma manera que la suma de números fraccionarios de igual denominador estudiada en séptimo grado.

Explicar los pasos que se siguen para efectuar sumas de fracciones algebraicas con iguales denominadores.

Destacar que la fracción algebraica resultante debe estar reducida.

S2: Adición y sustracción de fracciones algebraicas

C1: Adición de fracciones algebraicas con igual denominador

P Efectúe las siguientes sumas: $\boxed{\frac{A}{B}+\frac{C}{B}=\frac{A+C}{B}}$

S a) $\frac{3}{x}+\frac{2}{x}=\frac{3+2}{x}=\frac{5}{x}$

b) $\frac{2x}{x+1}+\frac{2}{x+1}=\frac{2x+2}{x+1}=\frac{2\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}=2$

c) $\frac{x+1}{x+3}+\frac{x+2}{x+3}=\frac{x+1+x+2}{x+3}=\frac{2x+3}{x+3}$

C *Leer en el libro de texto.*

E Efectúe las siguientes sumas:

a) $\frac{2}{a}+\frac{7}{a}=\frac{2+7}{a}=\frac{9}{a}$

b) $\frac{2y}{y+2}+\frac{4}{y+2}=\frac{2y+4}{y+2}=\frac{2\cancel{(y+2)}}{\cancel{y+2}}=2$

c) $\frac{x+2}{4x-5}+\frac{5-x}{4x-5}=\frac{x+2+5-x}{4x-5}=\frac{7}{4x-5}$

d) $\frac{4}{3b}+\frac{5}{3b}=\frac{4+5}{3b}=\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{1}{\cancel{3}b}}=\frac{3}{b}$

e) $\frac{3x}{x+3}+\frac{9}{x+3}=\frac{3x+9}{x+3}=\frac{3\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}}=3$

f) $\frac{x+1}{2x+3}+\frac{3x+5}{2x+3}=\frac{x+1+3x+5}{2x+3}=\frac{4x+6}{2x+3}=\frac{2\cancel{(2x+3)}}{\cancel{2x+3}}=2$

g) $\frac{x+4}{x-3}+\frac{x+1}{x-3}=\frac{x+4+x+1}{x-3}=\frac{2x+5}{x-3}$

Contenido 2 Sustracción de fracciones algebraicas con igual denominador

Aprendizajes esperados

Efectúa la resta de fracciones algebraicas con igual denominador.

Secuencia:

En la clase anterior se efectuaron sumas de fracciones algebraicas de igual denominador. Ahora se estudia la sustracción de fracciones algebraicas con iguales denominadores.

Puntos esenciales:

Recordar la simplificación de fracciones algebraicas.

Destacar que la resta de fracciones algebraicas con iguales denominadores se efectúa de la misma manera que la resta de fracciones de iguales denominadores estudiada en séptimo grado.

Explicar los pasos que se siguen para efectuar restas de fracciones algebraicas con iguales denominadores.

Destacar que la fracción algebraica resultante debe estar reducida.

Insistir en que el numerador se forma con la resta de los numeradores de la fracción, por lo cual, siempre que el minuendo tenga más de un término, debe escribirse entre paréntesis.

Contenido 2: Sustracción de fracciones algebraicas con igual denominador

P

Efectúe las siguientes sustracciones:

a) $\frac{3}{b}-\frac{2}{b}$ b) $\frac{2x}{x-1}-\frac{2}{x-1}$

c) $\frac{2x+1}{x-2}-\frac{x+3}{x-2}$

Sustracción de fracciones con igual denominador.
$\frac{A}{B}-\frac{C}{B}=\frac{A-C}{B}$

S

a) $\frac{3}{b}-\frac{2}{b}=\frac{3-2}{b}$ Se escribe el mismo denominador b y se restan los numeradores

$=\frac{1}{b}$

b) $\frac{2x}{x-1}-\frac{2}{x-1}=\frac{2x-2}{x-1}$ Se escribe el mismo denominador $x-1$ y se restan los numeradores

$=\frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$ Se factoriza $2x-2$

$=2$

c) $\frac{2x+1}{x-2}-\frac{x+3}{x-2}=\frac{2x+1-(x+3)}{x-2}$ Se restan los numeradores y se escribe el mismo denominador

$=\frac{2x+1-x-3}{x-2}=\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{x-2}}$ Se reducen términos semejantes

$=1$

C

La sustracción de fracciones algebraicas con igual denominador es otra fracción algebraica con la siguiente regla de formación:

1. Su numerador es la resta de los numeradores de las fracciones dadas y su denominador es el mismo de las fracciones que se restan.
2. En la fracción algebraica resultante se factoriza el numerador y denominador, si es el caso, y se simplifica.

E

Efectúe las siguientes sustracciones:

a) $\frac{4}{3x}-\frac{2}{3x}$ b) $\frac{2}{3b}-\frac{5}{3b}$

c) $\frac{3x}{x-3}-\frac{9}{x-3}$ d) $\frac{2y}{y-2}-\frac{4}{y-2}$

e) $\frac{x+1}{x-3}-\frac{3x-5}{x-3}$ f) $\frac{2x+3}{x+2}-\frac{x+1}{x+2}$

g) $\frac{2b+1}{b+3}-\frac{b-2}{b+3}$

49

C2: Sustracción de fracciones algebraicas con igual denominador

(P) Efectúe las siguientes sustracciones:

$\frac{A}{B}-\frac{C}{B}=\frac{A-C}{B}$

(S) a) $\frac{3}{b}-\frac{2}{b}=\frac{3-2}{b}=\frac{1}{b}$

b) $\frac{2x}{x-1}-\frac{2}{x-1}=\frac{2x-2}{x-1}=\frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=2$

c) $\frac{2x+1}{x-2}-\frac{x+3}{x-2}=\frac{2x+1-(x+3)}{x-2}$

$=\frac{2x+1-x-3}{x-2}=\frac{x-2}{x-2}=1$

(C) *Leer en el libro de texto.*

(E) Efectúe las siguientes sustracciones:

a) $\frac{4}{3x}-\frac{2}{3x}=\frac{4-2}{3x}=\frac{2}{3x}$

b) $\frac{2}{3b}-\frac{5}{3b}=\frac{2-5}{3b}=\frac{\cancel{-3}}{\cancel{3}b}=\frac{-1}{b}=-\frac{1}{b}$

c) $\frac{3x}{x-3}-\frac{9}{x-3}=\frac{3x-9}{x-3}=\frac{3\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}=3$

d) $\frac{2y}{y-2}-\frac{4}{y-2}=\frac{2y-4}{y-2}=\frac{2\cancel{(y-2)}}{\cancel{y-2}}=2$

e) $\frac{x+1}{x-3}-\frac{3x-5}{x-3}=\frac{x+1-(3x-5)}{x-3}$

$=\frac{x+1-3x+5}{x-3}=\frac{-2x+6}{x-3}=\frac{-2\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}=-2$

f) $\frac{2x+3}{x+2}-\frac{x+1}{x+2}=\frac{2x+3-(x+1)}{x+2}=\frac{2x+3-x-1}{x+2}$

$=\frac{\cancel{x+2}}{\cancel{x+2}}=1$

Contenido 3 Mínimo común múltiplo de números naturales

Contenido 3: Mínimo común múltiplo de números naturales

P

Determine el $m.c.m.$ de 12 y 18.

$m.c.m.$ $(a,\ b)$: mínimo común múltiplo de a y b.

S

Para encontrar el $m.c.m.$ de 12 y 18 se procede así:

Paso 1: Se descomponen en factores primos 12 y 18.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Recuerde $m.c.m$ por definición.
Múltiplos de:

12: 12, 24, 36, 48, …

18: 18, 36, 54, …

El $m.c.m.$ (12, 18) = 36

Paso 2: Se escribe 12 y 18 como el producto de sus factores primos, y se multiplican los comunes y no comunes.

$$\begin{array}{rl} 12 = & (2)(2)(3) \\ 18 = & \quad\ (2)(3)(3) \\ \hline & (2)(2)(3)(3) \end{array}$$

Paso 3: El $m.c.m.$ de 12 y 18 es el producto anterior:

$$m.c.m.\ (12,\ 18) = (2)(2)(3)(3) = 36$$

C

Para encontrar el mínimo común múltiplo ($m.c.m.$) de dos o más números naturales se procede de la forma siguiente:

1. Se descomponen los números en sus factores primos.
2. Se multiplican los factores comunes y no comunes de los números dados, los comunes se toman de la descomposición en la que tengan mayor repetición, tantas veces como aparezcan en esta.

E

Encuentre el $m.c.m.$ de las siguientes parejas de números:

a) 4 y 12 b) 5 y 15

c) 10 y 12 d) 6 y 15

e) 8 y 12 f) 20 y 12

50

Aprendizajes esperados

Calcula el mínimo común múltiplo de números naturales.

Secuencia:

En las clases anteriores se efectuaron sumas y restas de fracciones algebraicas de iguales denominadores. Ahora para sumar o restar fracciones algebraicas con diferentes denominadores se requiere del cálculo del mínimo común múltiplo ($m.c.m.$), razón por la cual en esta clase se recuerda cómo se calcula el $m.c.m.$ de dos o más números naturales.

Puntos esenciales:

Recordar:

✓ Cuándo un número es primo.

✓ Qué es el $m.c.m.$

✓ Cómo se calcula el $m.c.m.$ de dos o más números naturales.

Explicar los pasos que se siguen para calcular el $m.c.m.$ de dos o más números naturales.

C3: Mínimo común múltiplo de números naturales

P Determine el $m.c.m$ de 12 y 18

$m.c.m\ (a, b)$: Mínimo común múltiplo de a y b.

S 1. $\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$

Se descomponen en factores primos 12 y 18.

2. $\begin{array}{rl} 12 = & (2)\ (2)\ (3) \\ 18 = & \quad\ \ (2)\ (3)\ \ (3) \\ \hline & (2)\ (2)\ (3)\ \ (3) \end{array}$ Producto de comunes y no comunes

3. $m.c.m. (12, 18) = (2)(2)(3)(3) = 36$

C *Leer en el libro de texto.*

E Determine el $m.c.m$:

a) 4 y 12

$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$

$$\begin{array}{rl} 4 = & (2)(2) \\ 12 = & (2)(2)(3) \\ \hline m.c.m. (4, 12) = & (2)(2)(3) = 12 \end{array}$$

b) 5 y 15

$\begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$

$$\begin{array}{rl} 5 = & \quad\ \ 5 \\ 15 = & (5)\ \ (3) \\ \hline m.c.m. (5, 15) = & (5)\ \ (3) = 15 \end{array}$$

c) 10 y 12

$\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$

$$\begin{array}{rl} 10 = & (2) \qquad\qquad\qquad (5) \\ 12 = & (2)\ \ (2)\ \ (3) \\ \hline m.c.m. (10, 12) = & (2)\ \ (2)\ \ (3)\ \ (5) = 60 \end{array}$$

d) 6 y 15

$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$

$$\begin{array}{rl} 6 = & (2)\ \ (3) \\ 15 = & \quad\ \ (3)\ \ (5) \\ \hline m.c.m. (6, 15) = & (2)\ \ (3)\ \ (5) = 30 \end{array}$$

Contenido 4 Adición y sustracción de números fraccionarios con denominadores distintos

Aprendizajes esperados

Efectúa la suma y resta de números fraccionarios con distintos denominadores.

Secuencia:

En la clase anterior se recordó cómo se calcula el $m.c.m.$ de dos o más números naturales. Ahora se aplica dicho cálculo para efectuar sumas y restas de números fraccionarios con distintos denominadores.

Puntos esenciales:

Recordar los pasos que se siguen para calcular el $m.c.m.$ de dos o más números naturales.

Explicar los pasos que se siguen para efectuar sumas y restas de números fraccionarios con distintos denominadores.

Destacar que el hecho de trabajar con el $m.c.m.$ de los denominadores conduce a obtener números fraccionarios con iguales denominadores.

Efectuar sumas y restas de números fraccionarios con distintos denominadores.

Destacar que la fracción resultante debe estar reducida.

Contenido 4: Adición y sustracción de números fraccionarios con denominadores distintos

P Efectúe las siguientes operaciones indicadas:

a) $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}$ b) $\frac{5}{6}-\frac{1}{2}$

Recuerde que:
Para la adición y sustracción de fracciones, se busca primero el $m.c.m.$ de los denominadores.

S a) El $m.c.m.$ de 3 y 5 es (3)(5)=15

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=\frac{(2)(5)}{(3)(5)}+\frac{(1)(3)}{(5)(3)}$$

Se divide 15 por los denominadores 3 y 5 y cada resultado se multiplica por el numerador y denominador de la fracción correspondiente

$$=\frac{10}{15}+\frac{3}{15}$$

$$=\frac{10+3}{15}$$

Se suman los numeradores y se escribe el denominador 15

$$=\frac{13}{15}$$

b) El $m.c.m.$ de 6 y 2 es 6

$$\frac{5}{6}-\frac{1}{2}=\frac{5}{6}-\frac{(1)(3)}{(2)(3)}$$

Se divide 6 por los denominadores 6 y 2 y cada resultado se multiplica por el numerador y denominador de la fracción correspondiente.

$$=\frac{5}{6}-\frac{3}{6}$$

$$=\frac{5-3}{6}$$

Se restan fracciones con igual denominador

$$=\frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{6}_{\,3}}$$

$$=\frac{1}{3}$$

C Para sumar o restar números fraccionarios con denominadores distintos se procede así:

1. Se encuentra el $m.c.m.$ de los denominadores.
2. Se divide el $m.c.m.$ por el denominador de cada fracción y cada resultado se multiplica por el numerador y denominador de la fracción correspondiente.
3. Se efectúan las operaciones indicadas obtenidas en el paso 2 y se simplifica el resultado, si es posible.

E Efectúe las siguientes operaciones indicadas:

a) $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}$ b) $\frac{8}{5}-\frac{1}{10}$ c) $\frac{5}{2}+\frac{1}{3}$

d) $\frac{4}{9}+\frac{2}{3}$ e) $\frac{6}{5}-\frac{1}{2}$ f) $\frac{3}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$

51

C4: Adición y sustracción de números fraccionarios con denomicadores distintos

P Efectúe las siguientes operaciones indicadas:

S a) $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=\frac{(2)(5)}{(3)(5)}+\frac{(1)(3)}{(5)(3)}$

$$=\frac{10}{15}+\frac{3}{15}=\frac{13}{15} \qquad m.c.m: 15$$

b) $\frac{5}{6}-\frac{1}{2}=\frac{5}{6}-\frac{(1)(3)}{(2)(3)}=\frac{5}{6}-\frac{3}{6}=\frac{5-3}{6}$

$$=\frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{6}_{\,3}}=\frac{1}{3} \qquad m.c.m: 6$$

C *Leer en el libro de texto.*

E Efectúe las siguientes operaciones indicadas:

a) $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}=\frac{(3)(3)}{(4)(3)}+\frac{(1)(4)}{(3)(4)}=\frac{9}{12}+\frac{4}{12}$

$$=\frac{9+4}{12}=\frac{13}{12} \qquad m.c.m: 12$$

b) $\frac{8}{5}-\frac{1}{10}=\frac{(8)(2)}{(5)(2)}-\frac{1}{10}=\frac{16}{10}-\frac{1}{10} \qquad m.c.m: 10$

$$=\frac{16-1}{10}=\frac{\cancel{15}}{\cancel{10}}=\frac{3}{2}$$

c) $\frac{5}{2}+\frac{1}{3}=\frac{(5)(3)}{(2)(3)}+\frac{(1)(2)}{(3)(2)}=\frac{15}{6}+\frac{2}{6} \qquad m.c.m: 6$

$$=\frac{15+2}{6}=\frac{17}{6}$$

d) $\frac{4}{9}+\frac{2}{3}=\frac{4}{9}+\frac{(2)(3)}{(3)(3)}=\frac{4}{9}+\frac{6}{9} \qquad m.c.m: 9$

$$=\frac{4+6}{9}=\frac{10}{9}$$

e) $\frac{6}{5}-\frac{1}{2}=\frac{(6)(2)}{(5)(2)}-\frac{(1)(5)}{(2)(5)}=\frac{12}{10}-\frac{5}{10} \qquad m.c.m: 10$

$$=\frac{12-5}{10}=\frac{7}{10}$$

Contenido 5 Mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas

Contenido 5: Mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas

P

Determine el $m.c.m.$ de las expresiones algebraicas:

a) $2ab^2$, $3a^2$ b) a^2-9, a^2-6a+9

S

a) $2ab^2 = 2 \cdot a \cdot b \cdot b$ Se descomponen $2ab^2$ y $3a^2$

$3a^2 = 3 \cdot a \cdot a$

$m.c.m. = (2)(3)\cdot a \cdot a \cdot b \cdot b$ Se eligen y multiplican los factores comunes y no comunes

$m.c.m. = 6a^2b^2$

b) $a^2-9 = (a+3)(a-3)$

$a^2-6a+9 = (a-3)(a-3)$

$m.c.m. = (a+3)(a-3)(a-3)$

$m.c.m. = (a+3)(a-3)^2$

C

Para encontrar el mínimo común múltiplo de dos o más expresiones algebraicas:

1. Se descomponen las expresiones en sus factores, si los tiene.
2. Se multiplican los factores comunes y no comunes; los comunes se toman de la descomposición en la que tengan mayor repetición, tantas veces como aparezcan en esta.

E

Determine el $m.c.m.$ de las siguientes expresiones algebraicas:

a) $10x^2y$, $6x^2y^2$

b) x^2-4, x^2+3x+2

c) $6x^2y$, $18xy^3$

d) x^2+4x+3, x^2-x-2

e) x^2+3x, x^2+5x+6, x^2-9

52

Aprendizajes esperados

Determina el mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas.

Secuencia:

En la tercera clase de esta sección se calculó el $m.c.m.$ de números naturales. Ahora se calcula el $m.c.m.$ de expresiones algebraicas.

Puntos esenciales:

Recordar cómo se calcula el $m.c.m.$ de dos o más números naturales.

Resaltar que los pasos que se siguen para calcular el $m.c.m.$ de expresiones algebraicas son los mismos que se siguen para calcular el $m.c.m.$ de dos o más números naturales, teniendo en cuenta que las potencias de variables deben descomponerse.

Explicar cada uno de estos pasos.

Indicar que el $m.c.m.$ de expresiones algebraicas se dejará indicado como un producto.

C5: Mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas

P Determine el $m.c.m$ de:

a) $2ab^2, 3a^2$ b) $a^2-9,\ a^2-6a+9$

S a) $2ab^2 = 2 \cdot a \cdot b \cdot b$

$3a^2 = 3 \cdot a \cdot a$

$m.c.m : (2)(3)\cdot a \cdot a \cdot b \cdot b = 6a^2b^2$

b) $a^2-9 = (a+3)(a-3)$

$a^2-6a+9 = (a-3)(a-3)$

$m.c.m : (a+3)(a-3)(a-3) = (a+3)(a-3)^2$

C *Leer en el libro de texto.*

E Determinar el $m.c.m$ de:

a) $10x^2y,\ 6x^2y^2$

$10x^2 = (2)(5)\cdot x \cdot x \cdot y$

$6x^2y^2 = (2)(3)\cdot x \cdot x \cdot y \cdot y$

$m.c.m : (2)(3)(5)\cdot x \cdot x \cdot y \cdot y = 30x^2y^2$

b) $x^2-4,\ x^2+3x+2$

$x^2-4 = (x+2)(x-2)$

$x^2+3x+2 = (x+2)(x+1)$

$m.c.m : (x+2)(x+1)(x-2)$

c) $6x^2y,\ 18xy^3$

$6x^2y = (2)(3)\cdot x \cdot x \cdot y$

$18xy^3 = (2)(3)(3)\cdot x \cdot y \cdot y \cdot y$

$m.c.m : (2)(3)(3)\cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y = 18x^2y^3$

d) $x^2+4x+3,\ x^2-x-2$

$x^2+4x+3 = (x+1)(x+3)$

$x^2-x-2 = (x-2)(x+1)$

$m.c.m : (x-2)(x+1)(x+3)$

e) $x^2+3x,\ x^2+5x+6,\ x^2-9$

$x^2+3x = x\cdot(x+3)$

$x^2+5x+6 = (x+3)(x+2)$

$x^2-9 = (x+3)(x-3)$

$m.c.m : x\ (x+3)(x+2)(x-3)$

Contenido 6 Adición y sustracción de fracciones algebraicas cuyos denominadores son monomios diferentes

Aprendizajes esperados

Efectúa suma y resta de fracciones algebraicas con diferentes denominadores monómicos.

Secuencia:

En clases anteriores se calculó el $m.c.m.$ de fracciones algebraicas y se sumaron y restaron fraccionarios. Ahora estos contenidos se utilizan para efectuar sumas y restas de fracciones algebraicas cuyos denominadores son diferentes monomios.

Puntos esenciales:

Recordar:

- ✓ Cómo se calcula el $m.c.m.$ de expresiones algebraicas.
- ✓ La simplificación de fracciones algebraicas cuyo numerador y denominador son monomios.
- ✓ La suma y resta de fracciones algebraicas con el mismo denominador.

Notar que los pasos que se siguen para efectuar sumas y restas de fracciones algebraicas cuyos denominadores son diferentes monomios son los mismos que se siguen para efectuar sumas y restas de números fraccionarios con distintos denominadores.

Explicar cada uno de estos pasos.

Explicar la conversión de las fracciones dadas a fracciones con el mismo denominador.

Contenido 6: Adición y sustracción de fracciones algebraicas cuyos denominadores son monomios diferentes

P

Efectúe las siguientes operaciones indicadas:

a) $\frac{2}{3x^2}+\frac{3}{2x}$ b) $\frac{4}{x}-\frac{5}{2x}$

$m.c.m$ de $3x^2$ y $2x$

$$\begin{array}{rl} 3x^2 = & (3)\cdot x\cdot x \\ 2x = & (2)\quad\ \cdot x \\ \hline m.c.m. & (2)(3)\cdot x\cdot x \\ & =6x^2 \end{array}$$

S

a) El $m.c.m.$ de $3x^2$ y $2x$ es $3x^2(2)=6x^2$

$$\frac{2}{3x^2}+\frac{3}{2x}=\frac{(2)(2)}{(3x^2)(2)}+\frac{(3)(3x)}{(2x)(3x)}$$

Se divide el $m.c.m.$ $6x^2$ por los denominadores $3x^2$ y $2x$ y cada resultado se multiplica por el numerador y denominador de la fracción correspondiente

$$=\frac{4}{6x^2}+\frac{9x}{6x^2}$$

$$=\mathbf{\frac{4+9x}{6x^2}}$$

b) El $m.c.m.$ de x y $2x$ es $2x$

$$\frac{4}{x}-\frac{5}{2x}=\frac{(4)(2)}{(x)(2)}-\frac{5}{2x}$$

Se divide el $m.c.m.$ $2x$ por los denominadores x y $2x$ y cada resultado se multiplica por el numerador y denominador de la fracción correspondiente.

$$=\frac{8}{2x}-\frac{5}{2x}=\frac{8-5}{2x}$$

$$=\mathbf{\frac{3}{2x}}$$

C

Para sumar o restar fracciones algebraicas con diferentes denominadores que son monomios se procede de la forma siguiente:

1. Se obtiene el $m.c.m.$ de los denominadores.
2. Se divide el $m.c.m.$ por el denominador de cada fracción y cada resultado se multiplica por el numerador y denominador de la fracción correspondiente.
3. Se efectúa la suma o sustracción indicada de fracciones algebraicas obtenidas en el paso 2 utilizando la suma o resta con igual denominador y se simplifica la fracción resultante, si es posible.

E

Efectúe las operaciones indicadas:

a) $\frac{1}{3x^2}+\frac{3}{4x}$ b) $\frac{5}{y}-\frac{4}{3y}$ c) $\frac{3}{4b}+\frac{2}{5a}$

d) $\frac{1}{6x^2}-\frac{3}{4x}$ e) $\frac{5}{4b}+\frac{1}{12b^2}$ f) $\frac{3}{10a}-\frac{1}{2a^2}$

53

C6: Adición y sustracción de fracciones algebraicas cuyos denominadores son monomios diferentes

P Efectúe las siguientes operaciones indicadas:

$$\begin{array}{rl} 3x^2 = & (3)\cdot x\cdot x \\ 2x = & (2)\quad\ \cdot x \\ \hline m.c.m = & (2)(3)\cdot x\cdot x=6x^2 \end{array}$$

S a) $\frac{2}{3x^2}+\frac{3}{2x}=\frac{(2)(2)}{(3x^2)(2)}+\frac{(3)(3x)}{(2x)(3x)}$

$$=\frac{4}{6x^2}+\frac{9x}{6x^2}=\frac{4+9x}{6x^2}$$

b) $\frac{4}{x}-\frac{5}{2x}=\frac{(4)(2)}{(x)(2)}-\frac{5}{2x}=\frac{8}{2x}-\frac{5}{2x}$

$$=\frac{8-5}{2x}=\frac{3}{2x}$$

C *Leer en el libro de texto.*

E Efectúe:

a) $\frac{1}{3x^2}+\frac{3}{4x}=\frac{(1)(4)}{(3x^2)(4)}+\frac{(3)(3x)}{(4x)(3x)}=\frac{4}{12x^2}+\frac{9x}{12x^2}$

$$=\frac{4+9x}{12x^2}$$

b) $\frac{5}{y}-\frac{4}{3y}=\frac{(5)(3)}{(y)(3)}-\frac{4}{3y}=\frac{15}{3y}-\frac{4}{3y}=\frac{15-4}{3y}=\frac{11}{3y}$

c) $\frac{3}{4b}+\frac{2}{5a}=\frac{(3)(5a)}{(4b)(5a)}+\frac{(2)(4b)}{(5a)(4b)}=\frac{15a}{20ab}+\frac{8b}{20ab}$

$$=\frac{15a+8b}{20ab}$$

d) $\frac{1}{6x^2}-\frac{3}{4x}=\frac{(1)(2)}{(6x^2)(2)}-\frac{(3)(3x)}{(4x)(3x)}=\frac{2}{12x^2}-\frac{9x}{12x^2}$

$$=\frac{2-9x}{12x^2}$$

e) $\frac{5}{4b}+\frac{1}{12b^2}=\frac{(5)(3b)}{(4b)(3b)}+\frac{1}{12b^2}=\frac{15b}{12b^2}+\frac{1}{12b^2}$

$$=\frac{15b+1}{12b^2}$$

f) $\frac{3}{10a}-\frac{1}{2a^2}=\frac{(3)(a)}{(10a)(a)}-\frac{(1)(5)}{(2a^2)(5)}=\frac{3a}{10a^2}-\frac{5}{10a^2}$

$$=\frac{3a-5}{10a^2}$$

Contenido 7 Adición de fracciones algebraicas cuyos denominadores son polinomios diferentes

Contenido 7: Adición de fracciones algebraicas cuyos denominadores son polinomios diferentes

P

Efectúe las sumas indicadas:

a) $\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x+1}$ b) $\frac{5}{x^2-4}+\frac{2}{x+2}$

S

a) $\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x+1}$

$=\frac{(3)(x+1)}{(x-1)(x+1)}+\frac{(2)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{3x+3}{(x-1)(x+1)}+\frac{2x-2}{(x-1)(x+1)}$

$=\frac{3x+3+2x-2}{(x-1)(x+1)}$

$=\frac{5x+1}{(x-1)(x+1)}$

b) $\frac{5}{x^2-4}+\frac{2}{x+2}$

$=\frac{5}{(x+2)(x-2)}+\frac{2}{(x+2)}$

$=\frac{5}{(x+2)(x-2)}+\frac{(2)(x-2)}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{5}{(x-2)(x+2)}+\frac{2x-4}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{5+2x-4}{(x-2)(x+2)}$

$=\frac{2x+1}{(x-2)(x+2)}$

C

Para sumar fracciones algebraicas con diferentes denominadores que son polinomios se procede de la forma siguiente:

1. Se encuentra el $m.c.m.$ de los denominadores.
2. Se divide el $m.c.m.$ por el denominador de cada fracción, y cada resultado se multiplica por el numerador y el denominador de la fracción correspondiente, resultando fracciones con el mismo denominador.
3. Se efectúa la operación obtenida en el paso 2 aplicando la regla de la adición de fracciones algebraicas con denominadores iguales y se simplifica la fracción resultante, si es posible.

E

Efectúe las siguientes sumas indicadas:

a) $\frac{4}{x+2}+\frac{1}{x+1}$ b) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}$

c) $\frac{4}{x^2-1}+\frac{3}{x-1}$ d) $\frac{3}{x^2+3x+2}+\frac{3}{x+1}$

54

Aprendizajes esperados

Efectúa sumas de fracciones algebraicas con diferentes denominadores polinómicos.

Secuencia:

En la clase anterior se efectuaron sumas y restas de fracciones algebraicas cuyos denominadores eran diferentes monomios. Ahora se estudia la adición de fracciones algebraicas cuyos denominadores son diferentes polinomios.

Puntos esenciales:

Recordar cómo se calcula el $m.c.m.$ de expresiones algebraicas.

Explicar cada uno de los pasos que se siguen para efectuar sumas de fracciones algebraicas cuyos denominadores son diferentes polinomios

Efectuar sumas de fracciones algebraicas cuyos denominadores son diferentes polinomios.

Aplicar correctamente la reducción de términos semejantes en el numerador de la fracción resultante.

C7: Adición de fracciones algebraicas cuyos denominadores son polinomios diferentes

(P) Efectúe las sumas indicadas:

(S) a) $\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x+1}=\frac{(3)(x+1)}{(x-1)(x+1)}+\frac{(2)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{3x+3}{(x-1)(x+1)}+\frac{2x-2}{(x-1)(x+1)}$

$=\frac{3x+3+2x-2}{(x-1)(x+1)}=\frac{5x+1}{(x-1)(x+1)}$

b) $\frac{5}{x^2-4}+\frac{2}{x+2}=\frac{5}{(x+2)(x-2)}+\frac{2}{(x+2)}$

$=\frac{5}{(x+2)(x-2)}+\frac{(2)(x-2)}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{5}{(x-2)(x+2)}+\frac{2x-4}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{5+2x-4}{(x-2)(x+2)}=\frac{2x+1}{(x-2)(x+2)}$

(C) *Leer en el libro de texto.*

(E) Calcule:

a) $\frac{4}{x+2}+\frac{1}{x+1}=\frac{(4)(x+1)}{(x+2)(x+1)}+\frac{(1)(x+2)}{(x+1)(x+2)}$

$=\frac{4x+4}{(x+2)(x+1)}+\frac{x+2}{(x+2)(x+1)}=\frac{4x+4+x+2}{(x+2)(x+1)}$

$=\frac{5x+6}{(x+2)(x+1)}$

b) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}=\frac{(1)(x-2)}{(x+1)(x-2)}+\frac{(2)(x+1)}{(x-2)(x+1)}$

$=\frac{x-2}{(x+1)(x-2)}+\frac{2x+2}{(x+1)(x-2)}=\frac{x-2+2x+2}{(x+1)(x-2)}$

$=\frac{3x}{(x+1)(x-2)}$

c) $\frac{4}{x^2-1}+\frac{3}{x-1}=\frac{4}{(x+1)(x-1)}+\frac{(3)(x+1)}{(x-1)(x+1)}$

$=\frac{4}{(x+1)(x-1)}+\frac{3x+3}{(x+1)(x-1)}=\frac{4+3x+3}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{3x+7}{(x+1)(x-1)}$

Contenido 8 Sustracción de fracciones algebraicas cuyos denominadores son polinomios diferentes

Aprendizajes esperados

Efectúa sustracciones de fracciones algebraicas con diferentes denominadores polinómicos.

Secuencia:

En la clase anterior se efectuaron sumas de fracciones algebraicas cuyos denominadores eran diferentes polinomios. Ahora se estudia la sustracción de fracciones algebraicas cuyos denominadores son diferentes polinomios.

Puntos esenciales:

Recordar cómo se calcula el $m.c.m.$ de expresiones algebraicas.

Explicar cada uno de los pasos que se siguen para efectuar restas de fracciones algebraicas cuyos denominadores son diferentes monomios

Efectuar restas de fracciones algebraicas cuyos denominadores son diferentes polinomios.

Aplicar correctamente la simplificación de expresiones algebraicas en las que se tiene paréntesis (en este caso en el numerador resultante).

Contenido 8: Sustracción de fracciones algebraicas cuyos denominadores son polinomios diferentes

P Efectúe las siguientes sustracciones indicadas:

a) $\frac{4}{x-1}-\frac{1}{x+1}$ b) $\frac{1}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}$

S

a) $\frac{4}{x-1}-\frac{1}{x+1}$

$=\frac{4(x+1)}{(x-1)(x+1)}-\frac{(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{4x+4}{(x+1)(x-1)}-\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{4x+4-(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{4x+4-x+1}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{3x+5}{(x+1)(x-1)}$

b) $\frac{1}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}$

$=\frac{1}{(x+1)(x-1)}-\frac{2}{(x-1)}$

$=\frac{1}{(x+1)(x-1)}-\frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)}$

$=\frac{1}{(x+1)(x-1)}-\frac{2x+2}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{1-(2x+2)}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{1-2x-2}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{-2x-1}{(x+1)(x-1)}$

C

La sustracción de fracciones algebraicas con diferentes denominadores que son polinomios se efectúa así:

1. Se encuentra el $m.c.m.$ de los denominadores.
2. Se divide el $m.c.m.$ por el denominador de cada fracción y cada resultado se multiplica por el numerador y denominador de la fracción correspondiente, obteniéndose fracciones con igual denominador.
3. Se efectúa la sustracción obtenida en el paso 2 utilizando la sustracción de fracciones con igual denominador y se simplifica, si es posible.

E

Efectúe las siguientes sustracciones indicadas:

a) $\frac{4}{x-2}-\frac{1}{x+2}$ b) $\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x-2}$

c) $\frac{4}{x^2-9}-\frac{3}{x-3}$ d) $\frac{3}{x^2+3x+2}-\frac{3}{x+2}$

55

C8: Sustracción de fracciones algebraicas cuyos denominadores son polinomios diferentes

P Efectúe las siguientes sustracciones indicadas:

S a) $\frac{4}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{4(x+1)}{(x-1)(x+1)}-\frac{(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{4x+4}{(x+1)(x-1)}-\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}=\frac{4x+4-(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{4x+4-x+1}{(x+1)(x-1)}=\frac{3x+5}{(x+1)(x-1)}$

b) $\frac{1}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}=\frac{1}{(x+1)(x-1)}-\frac{2}{(x-1)}$

$=\frac{1}{(x+1)(x-1)}-\frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)}$

$=\frac{1}{(x+1)(x-1)}-\frac{2x+2}{(x+1)(x-1)}=\frac{1-(2x+2)}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{1-2x-2}{(x+1)(x-1)}=\frac{-2x-1}{(x+1)(x-1)}$

C *Leer en el libro de texto.*

E

a) $\frac{4}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{4(x+2)}{(x-2)(x+2)}-\frac{(x-2)}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{4x+8}{(x-2)(x+2)}-\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\frac{4x+8-(x-2)}{(x-2)(x+2)}$

$=\frac{4x+8-x+2}{(x-2)(x+2)}=\frac{3x+10}{(x-2)(x+2)}$

c) $\frac{4}{x^2-9}-\frac{3}{x-3}=\frac{4}{(x+3)(x-3)}-\frac{3}{(x-3)}$

$=\frac{4}{(x+3)(x-3)}-\frac{3(x+3)}{(x-3)(x+3)}$

$=\frac{4}{(x+3)(x-3)}-\frac{3x+9}{(x+3)(x-3)}=\frac{4-(3x+9)}{(x+3)(x-3)}$

$=\frac{4-3x-9}{(x+3)(x-3)}=\frac{-3x-5}{(x+3)(x-3)}$

Contenido 9 Adición y sustracción de fracciones algebraicas combinadas cuyos denominadores son diferentes

Contenido 9: Adición y sustracción de fracciones algebraicas combinadas cuyos denominadores son diferentes

P

Efectúe las siguientes operaciones indicadas:

a) $\frac{1}{3x}+\frac{3}{2x}-\frac{1}{x}$ b) $\frac{2x+3}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}+\frac{2}{x+1}$

S

a) $\frac{1}{3x}+\frac{3}{2x}-\frac{1}{x}=\frac{(1)(2)}{(3x)(2)}+\frac{(3)(3)}{(2x)(3)}-\frac{(1)(6)}{(x)(6)}=\frac{2}{6x}+\frac{9}{6x}-\frac{6}{6x}$

$=\frac{2+9-6}{6x}=\frac{5}{6x}$

b) $\frac{2x+3}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}+\frac{2}{x+1}=\frac{2x+3}{(x+1)(x-1)}-\frac{2}{(x-1)}+\frac{2}{(x+1)}$

$=\frac{2x+3}{(x+1)(x-1)}-\frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)}+\frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{2x+3}{(x+1)(x-1)}-\frac{2x+2}{(x+1)(x-1)}+\frac{2x-2}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{2x+3-(2x+2)+2x-2}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{2x+3-2x-2+2x-2}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{2x-1}{(x+1)(x-1)}$

C

La adición y sustracción de fracciones algebraicas combinadas con distinto denominador se efectúa así:

1. Se encuentra el $m.c.m.$ de los denominadores.
2. Se divide el $m.c.m.$ por el denominador de cada fracción, y cada resultado se multiplica por el numerador y denominador de la fracción correspondiente, resultando fracciones con el mismo denominador.
3. Se efectúan las adiciones y sustracciones obtenidas en el paso 2 con la regla de la adición y sustracción de fracciones con denominadores iguales y se simplifica la fracción resultante, si es posible.

E

Efectúe las siguientes operaciones indicadas:

a) $\frac{2}{3y}+\frac{2}{y}-\frac{5}{6y}$ b) $\frac{2}{3x}-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{2x^2}$ c) $\frac{3}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}+\frac{4}{x+2}$

d) $\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x-1}+\frac{2}{x^2-1}$ e) $\frac{2}{a^2-a-30}+\frac{2}{a+5}-\frac{3}{a-6}$

56

Aprendizajes esperados

Efectúa operaciones combinadas (adición y sustracción) de fracciones algebraicas con distintos denominadores.

Secuencia:

Estudiadas la adición y sustracción de fracciones algebraicas con diferentes denominadores. Ahora se efectúan operaciones combinadas de estas.

Puntos esenciales:

Recordar cómo:

✓ Se calcula el $m.c.m.$ de expresiones algebraicas.

✓ Se suman y restan fracciones algebraicas de diferentes denominadores.

Explicar cada uno de los pasos que se siguen para efectuar operaciones combinadas de sumas y restas de fracciones algebraicas.

Efectuar operaciones combinadas de sumas y restas de fracciones algebraicas.

C9: Adición y sustracción de fracciones algebraicas combinadas con diferentes denominadores

P Efectúe las siguientes operaciones indicadas:

S a) $\frac{1}{3x}+\frac{3}{2x}-\frac{1}{x}=\frac{(1)(2)}{(3x)(2)}+\frac{(3)(3)}{(2x)(3)}-\frac{(1)(6)}{(x)(6)}$

$=\frac{2}{6x}+\frac{9}{6x}-\frac{6}{6x}=\frac{2+9-6}{6x}=\frac{5}{6x}$

b) $\frac{2x+3}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}+\frac{2}{x+1}$

$=\frac{2x+3}{(x+1)(x-1)}-\frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)}+\frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{2x+3}{(x+1)(x-1)}-\frac{2x+2}{(x-1)(x+1)}+\frac{2x-2}{(x-1)(x+1)}$

$=\frac{2x+3-(2x+2)+2x-2}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{\cancel{2x}+3-\cancel{2x}-2+2x-2}{(x+1)(x-1)}=\frac{2x-1}{(x+1)(x-1)}$

C *Leer en el libro de texto.*

E a) $\frac{2}{3y}+\frac{2}{y}-\frac{5}{6y}=\frac{(2)(2)}{(3y)(2)}+\frac{(2)(6)}{(y)(6)}-\frac{5}{6y}$

$=\frac{4}{6y}+\frac{12}{6y}-\frac{5}{6y}=\frac{4+12-5}{6y}=\frac{11}{6y}$

c) $\frac{3}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}+\frac{4}{x+2}$

$=\frac{3}{(x+2)(x-2)}-\frac{(2)(x+2)}{(x-2)(x+2)}+\frac{(4)(x-2)}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{3}{(x+2)(x-2)}-\frac{2x+4}{(x-2)(x+2)}+\frac{4x-8}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{3-(2x+4)+4x-8}{(x+2)(x-2)}=\frac{3-2x-4+4x-8}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{2x-9}{(x+2)(x-2)}$

Prueba de Matemática 10mo (30 min.) **Fecha: ____________**

Unidad 3: Fracciones Algebraica

/ 20

Nombre: ______________________________ **Sección: __________**

Sexo: M / F

1. Simplifique las siguientes fracciones algebraicas: (2 puntos × 2 = 4)

a) $\dfrac{x^2}{x^3}$

b) $\dfrac{x+1}{x^2-1}$

2. Efectúe las siguientes operaciones: (2 puntos × 8 = 16)

a) $\dfrac{x^2}{8y^3} \cdot \dfrac{4y^2}{x}$

b) $\dfrac{x^2-1}{x-3} \div \dfrac{x+1}{x-3}$

c) $\dfrac{x+1}{x-2} \div \dfrac{x^2+3x+2}{x-2} \cdot \dfrac{x+1}{x+3}$

d) $\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x}$

e) $\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{2}{x-1}$

f) $\dfrac{4}{x}-\dfrac{5}{2x}$

g) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x-2}$

h) $\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}$

Nombre: ______________________________

Unidad 4

Ecuaciones de Tercer Grado

Sección 1 División sintética

Sección 2 Teorema del residuo y teorema del factor

Sección 3 Factorización de polinomios de tercer grado y resolución de ecuaciones de tercer grado

Contenido 1 División con números enteros

Aprendizajes esperados

Aplica el algoritmo de la división entera.

Secuencia:

En esta clase se recuerda la división entera, tanto exacta, como la expresión brindada por el algoritmo de la división. Esto está ligado, en primer lugar, a la identificación de los elementos de una división: dividendo, divisor, cociente y residuo, que serán también determinados en la división sintética, y, en segundo lugar, al uso de la expresión análoga a la que se planteará en el algoritmo de la división de polinomios.

Puntos esenciales:

Tener en cuenta los signos del dividendo y divisor al efectuar la división exacta.

Identificar y nombrar correctamente cada uno de los elementos involucrados en la expresión $D=dc+r$, ya que se empleará constantemente en clases futuras.

Aclarar en los procesos de división que el residuo será aquel que sea menor que el divisor, o cero. No se debe agregar coma decimal en el cociente, ya que no se busca aplicar división real.

Sección 1: División sintética

Contenido 1: División con números enteros

P1 Efectúe la división $(-25)\div 5$ y escriba el dividendo $D=-25$ en la forma $D=dc$, siendo $d=5$ y c el cociente de la división.

S1 El resultado de la división $(-25)\div 5$ es un número con el que se completa la siguiente igualdad

$$(5)(\boxed{})=-25.$$

Como $(5)(-5)=-25$, se tiene $(-25)\div 5=-5$.

Nótese que siendo $D=-25$, $d=5$ y $c=-5$, se puede escribir el dividendo en la forma $D=dc$ la cual es $-25=(5)(-5)$.

Sean
D: Dividendo
d: Divisor
c: Cociente
$D\div d=c$
siempre que
$D=dc$.

C Dividir un número (dividendo) entre otro (divisor), de manera exacta, es hallar un número (cociente) que multiplicado por el divisor dé el dividendo.

E1 Efectúe las siguientes divisiones. En cada caso escriba el dividendo en la forma $D=dc$, siendo d y c divisor y cociente, respectivamente.

a) $(-35)\div 7$ b) $(-25)\div(-5)$ c) $84\div 21$ d) $(78)\div(-3)$

P2 Determine cociente y residuo en la división de 87 entre 7 y escriba el dividendo en la forma $D=dc+r$, siendo d, c y r divisor, cociente y residuo, respectivamente.

S2 La división de 87 entre 7 no es exacta porque no existe entero que multiplicado por 7 dé 87. En cuyo caso se busca el mayor entero positivo c para el cual $7c<87$.

Para ello se efectúa → D → 87 | 7 ← d

$$\begin{array}{r|l} 87 & 7 \\ \hline -7 & 12 \\ 17 & \\ -14 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

Cociente: 12; Residuo: 3

En la división efectuada se tiene

Dividendo: $D=87$, Divisor: $d=7$, Cociente: $c=12$, Residuo: $r=3$.

Se observa que $(7)(12)+3=84+3=87$, es decir, se puede escribir D en la forma $D=dc+r$, la cual está dada por $87=(7)(12)+3$.

C En la división, el dividendo es igual a la multiplicación del divisor por el cociente, más el residuo.

E2 Efectúe las siguientes divisiones. En cada caso escriba el dividendo D en la forma $D=dc+r$, siendo d, c y r divisor, cociente y residuo, respectivamente.

a) $D=97$ entre $d=8$ b) $D=57$ entre $d=9$
c) $D=334$ entre $d=30$ d) $D=225$ entre $d=70$

60

U4: Ecuaciones de tercer grado
S1: División sintética
C1: División con números enteros

P1 Efectúe la división $(-25)\div 5$ y escriba el dividendo en la forma $D=dc$, con $d=5$.

El resultado de la división es un número que cumple

$$(5)(\boxed{})=-25$$

Como $(5)(-5)=-25$,

$$(-25)\div 5=-5$$

Y,

$$-25=(5)(-5)$$

En una división exacta, $D\div d=c$ y $D=dc$.

E1 Efectúe las siguientes divisiones y escriba el dividendo en la forma $D=dc$:

a) $(-35)\div 7$

$(7)(-5)=-35$
Así, $(-35)\div 7=-5$
y $-35=(7)(-5)$

b) $(-25)\div(-5)$

$(-5)(5)=-25$
Así, $(-25)\div(-5)=5$
y $-25=(-5)(5)$

P2 Determine cociente y residuo en la división de 87 entre 7 y escriba el dividendo en la forma forma $D=dc+r$.

S

D → 87 | 7 ← d

$$\begin{array}{r|l} 87 & 7 \\ \hline -7 & 12 \\ 17 & \\ -14 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

Cociente: 12; Residuo: 3

Y $87=(7)(12)+3$

C En la división entera, $D=dc+r,\ 0\leq r<d$

E2 Efectúe las siguientes divisiones y escriba el dividendo en la forma forma $D=dc+r$.

a) $D=97$ entre $d=8$

$$\begin{array}{r|l} 97 & 8 \\ \hline -8 & 12 \\ 17 & \\ -16 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$97=(8)(12)+1$

b) $D=57$ entre $d=9$

$$\begin{array}{r|l} 57 & 9 \\ \hline -54 & 6 \\ \hline 3 & \end{array}$$

$57=(9)(6)+3$

Contenido 2 División de polinomio entre binomio de la forma $x \pm a$

Contenido 2: División de polinomio entre binomio de la forma $x \pm a$

P Divida el polinomio $3x^2+2x-8$ entre el binomio $x+3$.

S

1
$$\begin{array}{l|l} 3x^2+2x-8 & x+3 \\ \hline & 3x \end{array}$$
Se divide $3x^2$ por x: $\frac{3x^2}{x} = 3x$ y se ubica el resultado bajo el divisor.

2
$$\begin{array}{r|l} 3x^2+2x-8 & x+3 \\ -3x^2-9x & 3x \\ \hline -7x-8 & \end{array}$$
Se multiplica $3x$ por $x+3$:
$3x(x+3)=3x^2+9x$
El resultado se resta al dividendo.

3
$$\begin{array}{r|l} 3x^2+2x-8 & x+3 \\ -3x^2-9x & 3x-7 \\ \hline -7x-8 & \\ 7x+21 & \\ \hline 13 & \end{array}$$
Se divide $-7x$ entre x: $\frac{-7x}{x}=-7$.
El resultado se ubica después de $3x$.
Se repite el paso anterior con -7.

Se observa que al dividir $3x^2+2x-8$ entre $x+3$ se encontró el cociente $3x-7$ con el grado disminuido en 1 respecto al grado del dividendo y la constante 13 como residuo.

C

La división de un polinomio ordenado de forma descendente entre un binomio de la forma $x \pm a$ se efectúa con los siguientes pasos:

1. El primer término del cociente se obtiene dividiendo el primer término del dividendo por x.
2. El resultado del paso anterior se multiplica por el divisor, este producto se resta al polinomio dividendo.
3. Se continúan ejecutando los pasos 1. y 2., esta vez tomando el primer término del resultado en el paso 2. para encontrar el siguiente término del cociente, hasta que el residuo sea una constante (un número).

E

Efectúe las siguientes divisiones:

a) x^2-x-6 entre $x+3$

b) $2x^2-5x+7$ entre $x-4$

61

Aprendizajes esperados

Aplica la división de polinomio entre binomio de la forma $x \pm a$.

Secuencia:

En la clase anterior se abordó división de números enteros, y en analogía a esta, en la presente clase se aborda la división de polinomio entre binomio de la forma $x \pm a$, en la que se identifica dividendo, divisor, cociente y residuo. La forma $x \pm a$ para los divisores, es la requerida en la división sintética, que se abordará en clases posteriores.

Puntos esenciales:

Tener en cuenta lo siguiente al efectuar la división de polinomios:

1. Suma o resta de números enteros y reducción de términos semejantes.
2. Ley distributiva.
3. Multiplicaciones y divisiones de la forma: $x \cdot x$ y $\frac{x^2}{x}$, y sus coeficientes.

Comprender y aplicar correctamente los pasos de la división, establecidos en la conclusión.

Insistir en la identificación de cociente y residuo de la división, caracterizando este último como una constante (por el tipo de divisor tratado).

C2: División de polinomio entre binomio de la forma $x \pm a$

(P) Divida $3x^2+2x-8$ entre $x+3$.

(S)
$$\begin{array}{r|l} 3x^2+2x-8 & x+3 \\ -3x^2-9x & 3x-7 \\ \hline -7x-8 & \\ 7x+21 & \\ \hline 13 & \end{array}$$

Cociente: $3x-7$

Residuo: 13

(C) *Leer en el libro de texto y confirmar en la solución al problema los pasos establecidos.*

(E) Efectúe las siguientes divisiones:

a) x^2-x-6 entre $x+3$.

$$\begin{array}{r|l} x^2-x-6 & x+3 \\ -x^2-3x & x-4 \\ \hline -4x-6 & \\ 4x+12 & \\ \hline 6 & \end{array}$$

Cociente: $x-4$
Residuo: 6

b) $2x^2-5x+7$ entre $x-4$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-5x+7 & x-4 \\ -2x^2+8x & 2x+3 \\ \hline 3x+7 & \\ -3x+12 & \\ \hline 19 & \end{array}$$

Cociente: $2x+3$
Residuo: 19

Contenido 3 División de polinomios de segundo grado entre binomios de la forma $x \pm a$, utilizando división sintética

Aprendizajes esperados

Divide polinomios de segundo grado entre binomios de la forma $x \pm a$ utilizando división sintética.

Secuencia:

En esta clase se continúa con la división de polinomios de segundo grado entre binomios de la forma $x \pm a$, pero esta vez, con un método más simple conocido como división sintética.

Puntos esenciales:

Aclarar que con la división sintética se pretende obtener cociente y residuo en la división de polinomios, de modo que, debe quedar clara la forma de obtener el cociente, y que el último número (de izquierda a derecha) es el residuo.

Insistir en la aplicación correcta de las operaciones entre números enteros, particularmente en el cuidado de los resultados al sumar o multiplicar números, con iguales o diferentes signos.

Aclarar que si, al analizar todos los términos del dividendo, faltase uno, el coeficiente a tomar en este caso es cero.

Aclarar que este método de división es aplicable solo para aquellas divisiones en las que el divisor es de la forma $x \pm a$.

Contenido 3: División de polinomios de segundo grado entre binomios de la forma $x \pm a$, utilizando división sintética

P Encuentre el cociente $Q(x)$ y el residuo R en la división de $P(x)=x^2+7x+12$ entre $D(x)=x-4$.

S Se escriben los coeficientes del dividendo y se ubica 4 (opuesto de -4) a la derecha de estos. Se baja el primer coeficiente: 1.

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 12 & 4 \\ & & & \\ \hline 1 & & & \end{array}$$

Ahora se multiplica 1 por 4. Se coloca el 4 resultante debajo del siguiente coeficiente 7 y se suman: $7+4=11$.

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 12 & 4 \\ & 4 & & \\ \hline 1 & 11 & & \end{array}$$

Se repite el procedimiento multiplicando 11 por 4 y se suma el resultado a 12.

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 12 & 4 \\ & 4 & 44 & \\ \hline \underbrace{1 \quad 11}_{\text{Coeficientes del cociente}} & & \underbrace{56}_{\text{Residuo}} & \end{array}$$

El grado del cociente disminuye en 1 respecto al del dividendo.

Luego, cociente: $Q(x)=x+11$, residuo: $R=56$.

C Para dividir un polinomio de segundo grado entre un binomio de primer grado de la forma $x \pm a$, mediante división sintética, se siguen los pasos que se dan a continuación:

1. Se escriben los coeficientes del dividendo y a la derecha de estos el opuesto del término independiente del divisor.
2. Se baja el primer coeficiente del dividendo y se multiplica por el número ubicado en la casilla derecha. Este producto se suma con el segundo coeficiente. Se repite el procedimiento con la suma obtenida.
3. El último de los números obtenidos es el residuo, mientras que los demás son los coeficientes del cociente, a los cuales se les acompañará de la parte literal para formar el cociente, teniendo en cuenta que el grado de este disminuirá en 1 respecto al grado del dividendo.

E Encuentre en cada inciso el cociente y el residuo aplicando división sintética:

a) x^2-x-6 entre $x-2$ b) x^2-3x+5 entre $x-1$ c) $2x^2-x+2$ entre $x-3$

d) $2x^2-x+1$ entre $x+4$ e) x^2-1 entre $x+1$ f) $12x^2-5x$ entre $x+2$

62

C3: División de polinomios de segundo grado entre binomios de la forma $x \pm a$, utilizando división sintética

P Encuentre el cociente $Q(x)$ y residuo R en la división de $P(x) = x^2 + 7x + 12$ entre $D(x) = x - 4$.

S

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 12 & 4 \\ & 4 & 44 & \\ \hline \underbrace{1 \quad 11}_{\text{Coeficientes del cociente}} & & \underbrace{56}_{\text{Residuo}} & \end{array}$$

Cociente $Q(x) = x + 11$ y residuo $R = 56$

C *Leer en el libro de texto y confirmar en la solución al problema los pasos establecidos.*

E Encuentre en cada caso el cociente y el residuo aplicando división sintética.

a) $x^2 - x - 6$ entre $x - 2$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -6 & 2 \\ & 2 & 2 & \\ \hline 1 & 1 & -4 & \end{array}$$

Cociente: $x + 1$
Residuo: -4

b) $x^2 - 3x + 5$ entre $x - 1$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 1 \\ & 1 & -2 & \\ \hline 1 & -2 & 3 & \end{array}$$

Cociente: $x - 2$
Residuo: 3

c) $2x^2 - x + 2$ entre $x-3$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 3 \\ & 6 & 15 & \\ \hline 2 & 5 & 17 & \end{array}$$

Cociente: $2x - 5$
Residuo: 17

d) $2x^2 - x + 1$ entre $x + 4$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -4 \\ & -8 & 36 & \\ \hline 2 & -9 & 37 & \end{array}$$

Cociente: $2x - 9$
Residuo: 37

e) $x^2 - 1$ entre $x + 1$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ & -1 & 1 & \\ \hline 1 & -1 & 0 & \end{array}$$

Cociente: $x - 1$
Residuo: 0

f) $12x^2 - 5x$ entre $x + 2$

$$\begin{array}{ccc|c} 12 & -5 & 0 & -2 \\ & -24 & 58 & \\ \hline 12 & -29 & 58 & \end{array}$$

Cociente: $12x - 29$
Residuo: 58

Contenido 4 División de polinomios de tercer grado entre binomios de la forma $x \pm a$, utilizando división sintética

Contenido 4: División de polinomios de tercer grado entre binomios de la forma $x \pm a$, utilizando división sintética

P Encuentre el cociente $Q(x)$ y el residuo R al dividir $P(x)=2x^3+9x^2+7x+6$ entre $D(x)=x+1$.

S

Se escriben los coeficientes del dividendo y -1 a la derecha de estos. Se baja el primer coeficiente 2.

2	9	7	6	-1
2				

Ahora se multiplica 2 por -1. Se coloca el resultado debajo del siguiente coeficiente 9 y se suman: $9+(-2)=7$.

2	9	7	6	-1
	-2			
2	7			

Se repite el procedimiento anterior dos veces más con las sumas resultantes.

El grado del cociente disminuye en 1 respecto al del dividendo.

2	9	7	6	-1
	-2	-7	0	
2	7	0	6	

Coeficientes del cociente — Residuo

Luego, cociente: $Q(x)=2x^2+7x$, residuo: $R=6$.

C

Para dividir un polinomio de tercer grado entre un binomio de primer grado de la forma $x \pm a$, mediante división sintética, se siguen los mismos pasos aprendidos en el contenido anterior, con la diferencia que se aplica un paso más porque el dividendo es de tercer grado.

Ejemplo Encuentre el cociente y el residuo al dividir $P(x)=2x^3-x^2+1$ entre $D(x)=x-1$.

Nótese que en $P(x)=2x^3-x^2+1$ no aparece el término de primer grado, siendo su coeficiente igual a 0. Así, los coeficientes de $P(x)$ son 2, -1, 0 y 1. Se aplica división sintética:

2	-1	0	1	1
	2	1	1	
2	1	1	2	

Coeficientes del cociente — Residuo

Luego, cociente: $Q(x)=2x^2+x+1$, residuo: $R=2$.

E

Encuentre en cada inciso el cociente y el residuo aplicando división sintética:

a) x^3+4x^2-x-10 entre $x-2$

b) $4x^3-3x^2+11x-5$ entre $x+1$

c) x^3-3x^2-6 entre $x-2$

63

Aprendizajes esperados

Divide polinomios de tercer grado entre binomios de la forma $x \pm a$ utilizando división sintética.

Secuencia:

En esta clase se da continuidad a la división sintética: en la clase anterior los dividendos eran polinomios de segundo grado, esta vez son de tercer grado. En el libro de texto, la división sintética es un paso fundamental que se aplica en la factorización de polinomios de tercer grado y resolución de ecuaciones de tercer grado. En la clase siguiente será utilizada para la expresión que establece el algoritmo de la división de polinomios.

Puntos esenciales:

Insistir en la aplicación correcta de las operaciones entre números enteros.

Explicar que los pasos a seguir en este caso son los mismos que los establecidos en la clase anterior, con la salvedad que las operaciones se deben aplicar una vez más.

Insistir en que si, al analizar todos los términos del dividendo, faltase uno, el coeficiente a tomar en este caso es cero.

C4: División de polinomios de tercer grado entre binomios de la forma $x \pm a$, usando división sintética

P Encuentre cociente $Q(x)$ y residuo R en la división de $P(x)=2x^3+9x^2+7x+6$ entre $D(x)=x+1$.

S

2	9	7	6	-1
	-2	-7	0	
2	7	0	6	

Coeficientes del cociente — Residuo

Cociente $Q(x)=2x^2+7x$ y residuo $R=6$

C *Leer en el libro de texto.*

Ej Encuentre el cociente y el residuo al dividir $P(x)=2x^3-x^2+1$ entre $D(x)=x-1$.

2	-1	0	1	1
	2	1	1	
2	1	1	2	

Cociente: $2x^2+x+1$
Residuo: 2

E Encuentre en cada inciso el cociente y el residuo aplicando división sintética:

a) x^3+4x^2-x-10 entre $x-2$

1	4	-1	-10	2
	2	12	22	
1	6	11	12	

Cociente: $x^2+6x+11$
Residuo: 12

b) $4x^3-3x^2+11x-5$ entre $x+1$

4	-3	11	-5	-1
	-4	7	-18	
4	-7	18	-23	

Cociente: $4x^2-7x+18$
Residuo: -23

Contenido 5 Algoritmo de la división de polinomios

Aprendizajes esperados

Aplica el algoritmo de división de polinomios para escribir el dividendo $P(x)$ en la forma $P(x) = D(x)Q(x) + R$.

Secuencia:

Anteriormente se ha estudiado la división sintética, de manera que se puede identificar dividendo, divisor, cociente y residuo. Sin embargo, a como se estableció en la primera clase de la unidad, existe una relación entre todos los elementos de la división, esta es $P(x) = D(x)Q(x) + R$. Esta será de utilidad en la verificación del Teorema del Factor y la factorización de polinomios de tercer grado, tratados en secciones posteriores.

Puntos esenciales:

Explicar que la división sintética proporciona el cociente y residuo de dicha división, los cuales son utilizados para establecer el algoritmo de la división de polinomios.

Recordar la consistencia de la multiplicación de polinomios, ya que será requerida en $D(x)Q(x) + R$.

Hacer notar que el propósito de enunciar la simetría de la igualdad es para justificar el hecho que $D(x)Q(x) + R = P(x)$ equivale a $P(x) = D(x)Q(x) + R$.

Contenido 5: Algoritmo de la división de polinomios

P Divida $P(x)=x^3+2x^2-x+1$ entre $D(x)=x-2$ y exprese el dividendo en la forma $P(x)=D(x)Q(x)+R$, donde $Q(x)$ y R son el cociente y residuo respectivamente.

S

Se aplica división sintética.

1	2	−1	1	2
	2	8	14	
1	4	7	15	

Coeficientes del cociente | Residuo

Resulta que, el cociente es $Q(x)=x^2+4x+7$ y el residuo $R=15$.

Se prueba ahora que se cumple la igualdad

$$P(x)=D(x)Q(x)+R$$

En efecto,

$$\begin{aligned} D(x)Q(x)+R &= (x-2)(x^2+4x+7)+15 \\ &= x^3+2x^2-x-14+15 \\ &= x^3+2x^2-x+1=P(x) \end{aligned}$$

$D(x)Q(x)$:

$$\begin{array}{rrrr} & x^2 & +4x & +7 \\ \times) & & x & -2 \\ \hline x^3 & +4x^2 & +7x & \\ & -2x^2 & -8x & -14 \\ \hline x^3 & +2x^2 & -x & -14 \end{array}$$

Por la simetría de la igualdad que es enunciada a la derecha, se tiene

$$P(x)=D(x)Q(x)+R$$

Es decir,

$$x^3+2x^2-x+1=(x-2)(x^2+4x+7)+15$$

Simetría de la igualdad: Si $a=b$, entonces $b=a$

C En la división de polinomios, el dividendo $P(x)$ es igual a la multiplicación del divisor $D(x)$ por el cociente $Q(x)$, más el residuo R, es decir $P(x)=D(x)Q(x)+R$.

E Use división sintética para expresar cada dividendo en la forma $P(x)=D(x)Q(x)+R$, siendo $Q(x)$ y R cocientes y residuos respectivos.

a) $P(x)=x^2+5x+2$, $D(x)=x-5$

b) $P(x)=x^3+6x^2+3x-1$, $D(x)=x-2$

c) $P(x)=3x^3-x^2+2x-1$, $D(x)=x-1$

d) $P(x)=x^3-6x^2-2x+5$, $D(x)=x+3$

64

C5: Algoritmo de la división de polinomios

P Divida $P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$ entre $D(x) = x - 2$ y exprese el dividendo en la forma $P(x) = D(x)Q(x) + R$.

S

1	2	−1	1	2
	2	8	14	
1	4	7	15	

Cociente: $Q(x) = x^2 + 4x + 7$, residuo $R = 15$

$$\begin{aligned} D(x)Q(x) + R &= (x-2)(x^2+4x+7)+15 \\ &= x^3 + 2x^2 - x - 14 + 15 \\ &= x^3 + 2x^2 - x + 1 = P(x) \end{aligned}$$

Luego,

$$x^3 + 2x^2 - x + 1 = (x-2)(x^2+4x+7)+15$$

C En la división de polinomios, el dividendo se expresa como $P(x) = D(x)Q(x) + R$.

E Use división sintética para expresar cada dividendo en la forma $P(x) = D(x)Q(x) + R$.

a) $P(x) = x^2 + 5x + 2$, $D(x) = x - 5$

1	5	2	5
	5	50	
1	10	52	

$Q(x) = x + 10$

$R = 52$

$P(x) = (x-5)(x+10) + 52$

b) $P(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 1$, $D(x) = x - 2$

1	6	3	−1	2
	2	16	38	
1	8	19	37	

$Q(x) = x^2 + 8x + 19$

$R = 37$

$P(x) = (x-2)(x^2+8x+19) + 37$

c) $P(x) = 3x^3 - x^2 + 2x - 1$, $D(x) = x - 1$

3	−1	2	−1	1
	3	2	4	
3	2	4	3	

$Q(x) = 3x^2 + 2x + 4$

$R = 3$

$P(x) = (x-1)(3x^2+2x+4) + 3$

Contenido 1 Valor numérico de un polinomio

Sección 2: Teorema del residuo y teorema del factor

Contenido 1: Valor numérico de un polinomio

P

Calcule los valores numéricos $P(2)$ y $P(-1)$ para el polinomio $P(x)=x^3-x^2+3x-1$.

S

Se sustituye $x=2$ en $P(x)=x^3-x^2+3x-1$:

$$P(2)=2^3-2^2+(3)(2)-1$$
$$=8-4+6-1=9.$$

Luego, $\mathbf{P(2)=9}$.

2

$P(x)=x^3-x^2+3x-1$

$P(2)=2^3-2^2+(3)(2)-1$

De igual forma, si se sustituye $x=-1$ en el mismo polinomio, se obtiene:

$$P(-1)=(-1)^3-(-1)^2+(3)(-1)-1$$
$$=-1-1-3-1=-6.$$

Así, $\mathbf{P(-1)=-6}$.

C

El valor numérico de un polinomio en una variable se calcula al sustituir dicha variable por un número dado y efectuar las operaciones indicadas.

E1

Calcule los valores numéricos pedidos para cada polinomio:

a) $P(x)=x^2-3x+5$, $P(3)$, $P(-1)$, $P(0)$

b) $P(x)=x^3-2x^2+3x-1$ $P(1)$, $P(0)$, $P(3)$

c) $P(x)=x^3+x^2-x+1$, $P(-1)$, $P(2)$, $P(3)$

d) $P(x)=7x^3-3x^2+x-2$, $P(3)$, $P(1)$, $P(5)$

Ejemplo Calcule los valores numéricos $P(1)$ y $P(-2)$ para el polinomio $P(x)=(x+1)(x+2)+3$.

Para calcular $P(1)$ se debe sustituir $x=1$ en $P(x)=(x+1)(x+2)+3$:

$$P(1)=(1+1)(1+2)+3=(2)(3)+3=6+3=9.$$

Luego, $\mathbf{P(1)=9}$.

Para $P(-2)$ se tiene

$$P(-2)=(-2+1)(-2+2)+3=(-1)(0)+3=0+3=3.$$

En conclusión $\mathbf{P(-2)=3}$.

E2

Calcule los valores numéricos $P(3)$ y $P(-4)$ para cada polinomio:

a) $P(x)=(x+1)(x-3)+1$

b) $P(x)=(x-2)(x+4)+1$

66

Aprendizajes esperados

Calcula valores numéricos de polinomios.

Secuencia:

En la sección anterior se trabajó constantemente con polinomios. En esta clase se continúa en dicho trabajo, esta vez calculando valores numéricos de polinomios, que serán el elemento fundamental del Teorema del residuo.

También, los valores numéricos permitirán decidir si un polinomio determinado es factor de un polinomio dado.

Puntos esenciales:

Explicar que el cálculo de valores numéricos radica en la sustitución de la variable del polinomio por un número determinado. Es crucial entonces que se comprenda que sustituir es reemplazar la variable por dicho número, en todo término donde esta aparezca.

Tener en cuenta el orden de las operaciones aritméticas: calcular primero potencias, luego productos y, finalmente, sumas o restas (de izquierda a derecha).

Polinomios como $P(x)=(x+1)(x+2)+3$, están bajo la forma $P(x)=D(x)Q(x)+R$. Se debe asociar esta escritura al algoritmo de la división de la sección anterior.

S2: Teorema del residuo y teorema del factor
C1: Valor numérico de un polinomio

P Calcule los valores numéricos $P(2)$ y $P(-1)$ para $P(x)=x^3-x^2+3x-1$.

S Se sustituye $x=2$ en $P(x)=x^3-x^2+3x-1$

$P(2)=2^3-2^2+(3)(2)-1=8-4+6-1=9$

Para $x=-1$:

$P(-1)=(-1)^3-(-1)^2+(3)(-1)-1=-6$

C *Leer en el libro de texto.*

E1 Calcule los valores numéricos pedidos:

a) $P(x)=x^2-3x+5$, $P(3)$, $P(-1)$, $P(0)$

$P(3)=3^2-(3)(3)+5=5$
$P(-1)=(-1)^2-(3)(-1)+5=9$
$P(0)=0^2-(3)(0)+5=5$

b) $P(x)=x^3-2x^2+3x-1$, $P(1)$, $P(0)$, $P(3)$

$P(1)=1^3-(2)(1)^2+(3)(1)-1=1$
$P(0)=0^3-(2)(0)^2+(3)(0)-1=-1$
$P(3)=3^3-(2)(3)^2+(3)(3)-1=17$

c) $P(x)=x^3+x^2-x+1$, $P(-1)$, $P(2)$, $P(3)$

$P(-1)=(-1)^3+(-1)^2-(-1)+1=2$
$P(2)=2^3+(2)^2-2+1=11$
$P(3)=3^3+(3)^2-(3)+1=34$

Ej Calcule los valores numéricos $P(1)$ y $P(-2)$ para $P(x)=(x+1)(x+2)+3$

$P(1)=(1+1)(1+2)+3=(2)(3)+3=9$
$P(-2)=(-2+1)(-2+2)+3=(-1)(0)+3=3$

E Calcule $P(3)$ y $P(-4)$ para cada polinomio:

a) $P(x)=(x+1)(x-3)+1$

$P(3)=(3+1)(3-3)+1=1$

$P(-4)=(-4+1)(-4-3)+1=22$

b) $P(x)=(x-2)(x+4)+1$

$P(3)=(3-2)(3+4)+1=8$

$P(-4)=(-4-2)(-4+4)+1=1$

Contenido 2 Teorema del residuo

Aprendizajes esperados

Aplica el Teorema del Residuo para determinar el valor del residuo en la división de un polinomio entre un binomio de la forma $x \pm a$.

Secuencia:

En la sección anterior, mediante división sintética, se determinó cociente y residuo en divisiones de polinomios. Existe una relación entre estos residuos y los valores numéricos de la clase anterior, establecida en el Teorema del Residuo.

Es el Teorema del Residuo la proposición utilizada en el ejemplo inductivo del Teorema del Factor.

Puntos esenciales:

Hacer notar que la comparación entre el residuo de la división planteada en el problema central de la clase y el valor numérico indicado es la que induce al enunciado del Teorema del Residuo.

Indicar que el Teorema del Residuo es válido para divisores de la forma $x \pm a$.

Insistir en que la facilidad práctica del Teorema del Residuo radica en que no se requiere realizar la división de polinomios para poder determinar el residuo, siempre que el divisor sea un polinomio lineal.

Procurar la ejercitación en la aplicación del Teorema del residuo.

Contenido 2: Teorema del residuo

P Compare el residuo de la división de $P(x)=x^3+3x^2+x+5$ entre $D(x)=x-2$ y el valor $P(2)$.

S Se aplica división sintética, obteniendo el cociente $Q(x)=x^2+5x+11$ y el residuo $R=27$.

1	3	1	5	2
	2	10	22	
1	5	11	27	

Al sustituirse $x=2$ en $P(x)$ resulta

$$P(2)=2^3+(3)(2^2)+2+5=8+12+7=27.$$

Se observa que $R=27=P(2)$.

C **Teorema del residuo**
El residuo de la división de un polinomio $P(x)$ entre un binomio de primer grado $x-c$ es el valor numérico $P(c)$.

En efecto, si en la división de $P(x)$ entre el binomio de primer grado $x-c$, $Q(x)$ es el cociente y R el residuo, por el algoritmo de la división se cumple

$$P(x)=(x-c)Q(x)+R$$

En el problema anterior: $P(x)=(x-2)(x^2+5x+11)+27$

así que $P(c)=(c-c)Q(c)+R=(0)Q(c)+R=R$. Por tanto, $P(c)=R$.

Ejemplo Encuentre los residuos de dividir $P(x)=x^3+x^2-3x+1$ entre los binomios $x-1$ y $x+2$ utilizando el teorema del residuo.

El residuo de dividir $P(x)=x^3+x^2-3x+1$ entre $x-1$ se determina calculando $P(1)$:

$$\begin{aligned} P(1)&=1^3+1^2-(3)(1)+1\\ &=1+1-3+1\\ &=0.\end{aligned}$$

Luego, el residuo es $R=0$.
Para el binomio $x+2$, se reescribe este como $x+2=x-(-2)$ y se calcula $P(-2)$:

$$\begin{aligned} P(-2)&=(-2)^3+(-2)^2-(3)(-2)+1\\ &=-8+4+6+1\\ &=3.\end{aligned}$$

De modo que el residuo es $R=3$.

E Encuentre el residuo de cada división, empleando el teorema del residuo:

a) $P(x)=x^3+x^2-2x+12$ entre $x-2$
b) $P(x)=3x^3-7x^2-x+1$ entre $x+2$
c) $P(x)=2x^3+3x^2-5$ entre $x-1$
d) $P(x)=-10x^3-x^2+2x+15$ entre $x+1$

67

C2: Teorema del residuo

P Compare el residuo al dividir $P(x)=x^3+3x^2+x+5$ entre $x-2$ y el valor $P(2)$.

S Aplicando división sintética:

1	3	1	5	2
	2	10	22	
1	5	11	27	

$Q(x)=x^2+5x+11$
$R=27$
$P(2)=(2)^3+(3)(2)^2+2+5 = 8+12+7=27$
Luego, $R=27=P(2)$.

C Teorema del Residuo
El residuo de la división de un polinomio $P(x)$ entre un binomio de la forma $x-c$ es $P(c)$.

Como $P(x)=(x-c)Q(x)+R$,
$P(c)=(c-c)Q(x)+R=(0)Q(x)+R=R$

Luego, $P(c)=R$.

Ej Encuentre los residuos respectivos de dividir el polinomio $P(x)=x^3+x^2-3x+1$ entre $x-1$ y $x+2$.

Para $x-1$: $R=P(1)=1^3+1^2-(3)(1)+1$
$=1+1-3+1=0$

Para $x+2$: $R=P(-2)=(-2)^3+(-2)^2-(3)(-2)+1$
$=-8+4+6+1=3$

E Determine el residuo de cada división:

a) $P(x)=x^3+x^2-2x+12$ entre $x-2$.
$R=P(2)=2^3+2^2-(2)(2)+12$
$=8+4-4+12=20$

b) $P(x)=3x^3-7x^2-x+1$ entre $x+2$.
$R=P(-2)=(3)(-2)^3-(7)(-2)^2-(-2)+1$
$=-24-28+2+1=-49$

c) $P(x)=2x^3+3x^2-5$ entre $x-1$
$R=P(1)=(2)(1)^3+(3)(1)^2-5$
$=2+3-5=0$

Contenido 3 Teorema del factor

Contenido 3: Teorema del factor

P

Verifique que $x-1$ es un factor de $P(x)=x^3+4x^2+x-6$ utilizando el teorema del residuo.

S

Se calcula $P(1)$:

$$\begin{aligned}P(1)&=1^3+(4)(1^2)+1-6\\&=1+4+1-6\\&=0,\end{aligned}$$

encontrando que el residuo es $R=0$. Por el algoritmo de la división, $P(x)$ se puede expresar en la forma

$$P(x)=(x-1)\,Q(x)+R=(x-1)\,Q(x)+0=(x-1)\,Q(x),$$

donde $Q(x)$ es el cociente. Así, $x-1$ es factor de $P(x)=x^3+4x^2+x-6$.

C

Teorema del factor
Un polinomio $P(x)$ tiene un factor de primer grado $x-c$ si y solo si $P(c)=0$.

Ejemplo Determine si $x-2$ y $x+3$ son factores de $P(x)=x^3-4x^2+3x+2$ utilizando el teorema del factor.

Como

$$P(2)=2^3-(4)(2^2)+(3)(2)+2=8-16+8=0,$$

se tiene que $x-2$ es factor de $P(x)$.

Ahora, se reescribe $x+3=x-(-3)$ de modo que

$$P(-3)=(-3)^3-(4)(-3)^2+(3)(-3)+2=-27-36-9+2=-70.$$

Como $P(-3)=-70\neq 0$, $x+3$ no es factor de $P(x)$.

E

a) De los binomios propuestos seleccione el que es factor de $P(x)=x^3-4x^2+7x-6$ utilizando el teorema del factor.

$x-2$ $\quad x-3$ $\quad x+1$ $\quad x+3$

b) De los binomios propuestos seleccione el que es factor de $P(x)=x^3-3x^2-4x-12$ utilizando el teorema del factor.

$x-2$ $\quad x+3$ $\quad x+1$ $\quad x+2$

68

Aprendizajes esperados

Deduce y aplica el Teorema del Factor en la identificación de factores de un polinomio dado.

Secuencia:

En la clase anterior se calcularon residuos sin tener que efectuar divisiones. Estos cálculos se utilizan en esta clase para establecer el denominado Teorema del Factor.

En la sección siguiente, este teorema será utilizado para la factorización de polinomios de tercer grado.

Puntos esenciales:

Considerar que el problema a plantearse al inicio de la clase debe desarrollarse de la forma inductiva para deducir el enunciado del teorema del factor. En la solución de dicho problema se debe recordar el enunciado del Algoritmo de la división y el Teorema del residuo.

Identificar el número c a utilizar para el valor numérico $P(c)$ y así decidir si un binomio es o no factor de un polinomio.

Realizar suficientes ejercitaciones, ya que este teorema será un paso a aplicar en la resolución de ecuaciones de tercer grado.

C3: Teorema del Factor

(P) Verifique que $x-1$ es un factor de $P(x)=x^3+4x^2+x-6$ utilizando el teorema del residuo.

(S) $$\begin{aligned}P(1)&=(1)^3+(4)(1)^2+1-6\\&=1+4+1-6=0=R\end{aligned}$$

Si $Q(x)$ es el cociente

$$\begin{aligned}P(x)&=(x-1)Q(x)+R=(x-1)Q(x)+0\\&=(x-1)Q(x)\end{aligned}$$

Luego,
$x-1$ es factor de $P(x)=x^3+4x^2+x-6$.

(C) Un polinomio $P(x)$ tiene un factor de primer grado $x-c$ si y solo si $P(c)=0$.

(Ej) Determine si $x-2$ y $x+3$ son factores de $P(x)=x^3-4x^2+3x+2$

Para $x-2$:
$P(2)=2^3-(4)(2)^2+(3)(2)+2=8-16+6+2=0$
Sí es factor de $P(x)$.

Para $x+3$, reescribimos $x+3=x-(-3)$

$$\begin{aligned}P(-3)&=(-3)^3-(4)(-3)^2+(3)(-3)+2\\&=-27-36-9+2=-70\neq 0\end{aligned}$$

No es factor de $P(x)$.

(E) a) Cuál es factor de $P(x)=x^3-4x^2+7x-6$:

$x-2$ $\quad x-3$ $\quad x+1$ $\quad x+3$

$P(2)=8-16+14-6=0$
$P(3)=27-36+21-6=6$
$P(-1)=-1-4-7-6=-18$
$P(-3)=-27-36-21-6=-90$

$x-2$ es factor de $P(x)$.

b) Cuál es factor de $P(x)=x^3-3x^2-4x-12$:

$x-2$ $\quad x+3$ $\quad x+1$ $\quad x+2$

$P(2)=8-12-8-12=-24$
$P(-3)=-27-27+12-12=-54$
$P(-1)=-1-3+4-12=-12$
$P(-2)=-8-12+8-12=-24$

No son factores de $P(x)$.

Contenido 1 Factorización de polinomios de tercer grado aplicando el teorema del factor y división sintética

Aprendizajes esperados

Factoriza polinomios de tercer grado aplicando el teorema del factor y la división sintética.

Secuencia:

El teorema del factor permitió decidir si un binomio de la forma $x \pm a$ es factor de un polinomio de tercer grado. Esto abona a la tarea de factorizar polinomios de este tipo. Sin embargo, la división sintética arroja otro factor (el cociente) que posiblemente sea factorizable, ya que es un polinomio de segundo grado. En esta clase, se muestra el procedimiento de factorización completa de un polinomio de tercer grado, lo cual será utilizado posteriormente para resolver ecuaciones de tercer grado.

Puntos esenciales:

Recordar el concepto de divisor de un número entero.

Aplicar correctamente el teorema del factor para decidir cuál de los divisores del término independiente del polinomio será utilizado para formar el binomio que sea factor.

Recordar la factorización de binomios de la forma ax^2+bx+c.

Recordar la expresión del algoritmo de la división de polinomios.

Sección 3: Factorización de polinomios de tercer grado y resolución de ecuaciones de tercer grado

Contenido 1: Factorización de polinomios de tercer grado aplicando el teorema del factor y división sintética

P

Factorice el polinomio x^3+2x^2-x-2.

S

1 Se determinan los divisores del término independiente -2 del polinomio, los cuales son ±1, ±2.

2 De estos divisores se busca un valor c, para el cual $P(c)=0$, siendo $P(x)=x^3+2x^2-x-2$, por ejemplo si se ensaya con 1 se tiene
$$P(1)=1^3+(2)(1^2)-1-2=1+2-3=0,$$
de modo que $D(x)=x-1$ es un factor de x^3+2x^2-x-2.

3 Se divide $P(x)=x^3+2x^2-x-2$ por $D(x)=x-1$ usando la división sintética, obteniendo el cociente $Q(x)=x^2+3x+2$ y el residuo $R=0$, luego

1	2	−1	−2	1
	1	3	2	
1	3	2	0	

$x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x^2+3x+2)$ ①

$P(x)=D(x)Q(x)+R$

4 Se factoriza $Q(x)$: $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$. ②

5 Al sustituir ② en ① se obtiene
$$\begin{aligned}x^3+2x^2-x-2&=(x-1)(x^2+3x+2)\\&=\mathbf{(x-1)(x+1)(x+2)}\end{aligned}$$

C

Para factorizar un polinomio $P(x)$ de tercer grado se procede así:
1. Se encuentran los divisores del término independiente del polinomio.
2. Se busca dentro de los divisores obtenidos en el paso 1., un c tal que $P(c)=0$ para obtener un $x-c$ que es un factor del polinomio según el teorema del factor.
3. Se efectúa la división sintética entre el polinomio dado y el factor $x-c$ del paso anterior. El dividendo queda expresado en la forma $P(x)=(x-c)Q(x)$.
4. Se factoriza el cociente $Q(x)$.
5. Se sustituye la factorización de $Q(x)$ en $P(x)=(x-c)\,Q(x)$.

E

Factorice los siguientes polinomios:

a) x^3-2x^2-x+2

b) x^3+5x^2-x-5

c) x^3+4x^2+x-6

70

S3: Factorización de polinomios de tercer grado y resolución de ecuación de tercer grado

C1: Factorización de polinomios de tercer grado aplicando el teorema del factor y división sintética

P Factorice el polinomio x^3+2x^2-x-2.

S Buscamos el valor c para el cual $P(c)=0$:
Divisores de -2: ±1, ±2.

Se aplica teorema del factor para el polinomio $P(x)=x^3+2x^2-x-2$

$$P(1)=1^3+(2)(1)^2-1-2=1+2-3=0,$$

$x-1$ es factor de x^3+2x^2-x-2.

División sintética:

1	2	−1	−2	1
	1	3	2	
1	3	2	0	

$Q(x)=x^2+3x+2,\quad R=0.$

$x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x^2+3x+2)$ ①

Factorización de $Q(x)$:

$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ ②

Sustitución de ② en ①:
$$\begin{aligned}x^3+2x^2-x-2&=(x-1)(x^2+3x+2)\\&=(x-1)(x+1)(x+2).\end{aligned}$$

C *Leer en el libro de texto.*

E Factorice x^3-2x^2-x+2

Divisores de 2: ±1, ±2.

Teorema del factor:

$P(1)=1^3-(2)(1)^2-1+2=1-2-1+2=0,$

Así, $x-1$ es factor de $P(x)$

División sintética:

1	−2	−1	2	1
	1	−1	−2	
1	−1	−2	0	

$Q(x)=x^2-x-2.$

$x^3-2x^2-x+2=(x-1)(x^2-x-2)$

Factorización de $Q(x)$: $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$

Así,
$$x^3-2x^2-x+2=(x-1)(x-2)(x+1)$$

Contenido 2 Ecuaciones de segundo grado

Contenido 2: Ecuaciones de segundo grado

P1 Resuelva la ecuación de segundo grado $x^2-x-2=0$ utilizando factorización.

S1

Se factoriza el lado izquierdo de $x^2-x-2=0$, obteniéndose

$$(x-2)(x+1)=0$$

Se iguala a cero cada factor y se resuelven las ecuaciones de primer grado

$$x-2=0,\quad x+1=0.$$

Luego, las soluciones son $x=2$, $x=-1$.

Si A y B son expresiones algebraicas con $AB=0$, entonces $A=0$ o $B=0$.

C

Para resolver mediante factorización una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c=0$, con $a\neq0$, se factoriza el lado izquierdo de la ecuación, luego se iguala a cero cada factor y se resuelven las ecuaciones de primer grado resultantes.

E1

Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando factorización:

a) $x^2+x-2=0$ b) $x^2+7x+10=0$ c) $x^2-5x+6=0$

P2 Resuelva la ecuación de segundo grado $x^2+3x-1=0$ utilizando la fórmula general.

S2

En la ecuación dada, $a=1$, $b=3$ y $c=-1$.
Se sustituyen estos valores en la fórmula de la derecha:

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(1)(-1)}}{(2)(1)}=\frac{-3\pm\sqrt{9+4}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$$

Luego, las soluciones son:

$$x=\frac{-3+\sqrt{13}}{2},\ x=\frac{-3-\sqrt{13}}{2}.$$

La fórmula general para resolver la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$, $a\neq0$ es

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

E2

Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando la fórmula general:

a) $x^2-x-2=0$

b) $x^2+5x+2=0$

c) $3x^2+3x-1=0$

d) $5x^2+x-3=0$

71

Aprendizajes esperados

Resuelve ecuaciones de segundo grado mediante factorización o uso de la fórmula general.

Secuencia:

En esta clase se pretende brindar un repaso de la resolución de la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$, por factorización y mediante fórmula general, dado que, al resolver ecuaciones de tercer grado, la factorización del polinomio asociado conducirá a resolver ecuaciones de primer y segundo grado.

Puntos esenciales:

Recordar que para la factorización de binomios de la forma x^2+bx+c se deben buscar números e y d tales que $e+d=b$ y $ed=c$, es decir, $x^2+(e+d)x+ed=(x+e)(x+d)$.

Comprender la importancia de la propiedad $AB=0\Rightarrow A=0$ o $B=0$, para encontrar las soluciones de la ecuación de segundo grado.

Insistir en que el uso de la fórmula general se reduce a la identificación de los coeficientes a, b, c en la ecuación dada, la sustitución de estos en la fórmula general, y el cálculo numérico de la expresión resultante.

C2: Ecuaciones de segundo grado

P Resuelva $x^2-x-2=0$ mediante factorización.

S

$$x^2-x-2=0$$
$$(x-2)(x+1)=0$$
$$x-2=0,\quad x+1=0$$
$$x=2,\quad x=-1$$

C *Leer en libro de texto.*

E1 Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $x^2+x-2=0$
$(x+2)(x-1)=0$
$x+2=0,\ x-1=0$
$x=-2,\ x=1$

b) $x^2+7x+10=0$
$(x+2)(x+5)=0$
$x+2=0,\ x+5=0$
$x=-2,\ x=-5$

Ej Resuelva $x^2+3x-1=0$ mediante la fórmula general.

Fórmula general de la ecuación: $ax^2+bx+c=0,\quad a\neq0.$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-(4)(1)(-1)}}{(2)(1)}=\frac{-3\pm\sqrt{9+4}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$$

$$x=\frac{-3+\sqrt{13}}{2},\qquad x=\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$$

E2 Resuelva las ecuaciones utilizando la fórmula general:

a) $x^2-x-2=0$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-(4)(1)(-2)}}{(2)(1)}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm3}{2}$$

$$x=-1,\quad x=2$$

b) $x^2+5x+2=0$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-(4)(1)(2)}}{(2)(1)}=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$$

$$x=\frac{-5+\sqrt{17}}{2},\quad x=\frac{-5-\sqrt{17}}{2}$$

Contenido 3 Resolución de ecuaciones de tercer grado

Aprendizajes esperados

Resuelve ecuaciones de tercer grado de la forma:
$x(x+a)(x+b)=0$ y $x^3+bx^2+cx=0$.

Secuencia:

El primer ejemplo de la clase muestra un tipo de ecuación de tercer grado en la que el lado izquierdo está completamente factorizado, esto como base para los últimos pasos del proceso de resolución de ecuaciones de tercer grado. Este ejemplo es un caso similar al resuelto en el primer ejemplo de la clase anterior.

La conclusión de este primer ejemplo será también aplicada para factorizar polinomios en los que no aparece el término independiente.

Puntos esenciales:

Aplicar correctamente la propiedad $\mathrm{ABC}=0 \Rightarrow \mathrm{A}=0$ o $\mathrm{B}=0$ o $\mathrm{C}=0$.

Recordar la consistencia de extracción de factor común.

Recordar la transposición de términos para resolver ecuaciones de primer grado.

Contenido 3: Resolución de ecuaciones de tercer grado

P_1 Resuelva la ecuación $x(x-2)(x+1)=0$.

S_1

Cada factor del lado izquierdo de la ecuación se iguala a cero:

$$x=0,\ x-2=0,\ x+1=0$$

De lo anterior se obtiene

$$\boldsymbol{x=0,\quad x=2,\quad x=-1.}$$

Si A, B y C son expresiones algebraicas con $\mathrm{ABC}=0$, entonces $\mathrm{A}=0$ o $\mathrm{B}=0$ o $\mathrm{C}=0$

C_1

Para resolver una ecuación de tercer grado de la forma $x(x+a)(x+b)=0$ se iguala a cero cada factor del lado izquierdo y se resuelven las ecuaciones de primer grado $x+a=0$ y $x+b=0$.

E_1

Resuelva las siguientes ecuaciones de tercer grado:

a) $x(x-2)(x+5)=0$ b) $x(x-1)(x+1)=0$ c) $x(2x+1)(x+1)=0$

P_2 Resuelva la ecuación $x^3+3x^2+2x=0$.

S_2

Se extrae x como factor común de x^3+3x^2+2x:

$$x(x^2+3x+2)=0$$

Se factoriza $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ y se sustituye en la igualdad anterior:

$$x(x+1)(x+2)=0$$

Entonces,

$$x=0,\quad x+1=0,\quad x+2=0$$

Luego, las soluciones son $\boldsymbol{x=0}$, $\boldsymbol{x=-1}$, $\boldsymbol{x=-2}$.

C_2

Para resolver la ecuación de tercer grado $x^3+bx^2+cx=0$ se extrae el factor común x, para obtener $x(x^2+bx+c)=0$, luego se factoriza x^2+bx+c y finalmente se aplica lo establecido en la conclusión anterior.

E_2

Resuelva las siguientes ecuaciones de tercer grado:

a) $x^3+x^2-6x=0$ b) $x^3-3x^2-4x=0$ c) $x^3-4x=0$

C3: Resolución de ecuaciones de tercer grado

(P) Resuelva la ecuación $x(x-2)(x+1)=0$.

(S)
$$x(x-2)(x+1)=0$$
$$x=0,\quad x-2=0,\quad x+1=0$$
$$x=0,\quad x=2,\quad x=-1$$

(C) *Leer en el libro de texto.*

(E1) Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $x(x-2)(x+5)=0$
$$x=0,\ x-2=0,\ x+5=0$$
$$x=0,\ x=2,\ x=-5.$$

b) $x(x-1)(x+1)=0$
$$x=0,\ x-1=0,\ x+1=0$$
$$x=0,\ x=1,\ x=-1.$$

c) $x(2x+1)(x+1)=0$
$$x=0,\ 2x+1=0,\ x+1=0$$
$$x=0,\quad x=-\frac{1}{2},\quad x=-1$$

(Ej) Resuelva $x^3+3x^2+2x=0$.
$$x(x^2+3x+2)=0$$
$$x(x+1)(x+2)=0$$
$$x=0,\ x+1=0,\ x+2=0$$
$$x=0,\ x=-1,\ x=-2$$

(C) *Leer en el libro de texto.*

(E2) a) $x^3+x^2-6x=0$
$$x(x^2+x-6)=0$$
$$x(x+3)(x-2)=0$$
$$x=0,\quad x+3=0,\quad x-2=0$$
$$x=0,\quad x=-3,\quad x=2$$

b) $x^3-3x^2-4x=0$
$$x(x^2-3x-4)=0$$
$$x(x-4)(x+1)=0$$
$$x=0,\quad x-4=0,\quad x+1=0$$
$$x=0,\quad x=4,\quad x=-1$$

Contenido 4 Resolución de ecuaciones de tercer grado aplicando el teorema del factor y división sintética (1)

Contenido 4: Resolución de ecuaciones de tercer grado aplicando el teorema del factor y división sintética (1)

P Resuelva la ecuación $x^3-3x^2-x+3=0$.

S

Se debe factorizar el polinomio $P(x)=x^3-3x^2-x+3$. En primer lugar, los divisores del término independiente 3 son ±1 y ±3.

Como $P(1)=1^3-(3)(1^2)-1+3=1-3-1+3=0$,

el binomio $x-1$ es un factor de x^3-3x^2-x+3.

Ahora se divide x^3-3x^2-x+3 por $x-1$ aplicando división sintética.

1	−3	−1	3	1
	1	−2	−3	
1	−2	−3	0	

Luego,

$$x^3-3x^2-x+3=(x-1)(x^2-2x-3)$$

siendo el cociente x^2-2x-3.

Ahora se factoriza este polinomio:

$$x^2-2x-3=(x-3)(x+1),$$

resultando que

$$x^3-3x^2-x+3=(x-1)(x^2-2x-3)$$
$$=(x-1)(x-3)(x+1)$$

Sustituir $(x-3)(x+1)$ en lugar de x^2-2x-3

La ecuación $x^3-3x^2-x+3=0$ es equivalente a

$$(x-1)(x-3)(x+1)=0,$$

de lo cual se desprende que

$$x-1=0,\qquad x-3=0,\qquad x+1=0$$

Las soluciones son $x=1$, $x=3$, $x=-1$.

C

Para resolver una ecuación de tercer grado se factoriza el polinomio de tercer grado en polinomios de primer grado, luego se iguala a cero cada factor y se resuelven las ecuaciones de primer grado resultantes.

E

Resuelva las siguientes ecuaciones de tercer grado:

a) $x^3-x^2-4x+4=0$

b) $x^3+2x^2-x-2=0$

c) $x^3-5x^2-x+5=0$

73

Aprendizajes esperados

Resuelve ecuaciones de tercer grado aplicando teorema del factor y la división sintética.

Secuencia:

En esta clase se aplica la factorización de polinomios aprendida en la primera clase de esta sección, la resolución de ecuaciones de segundo grado mediante factorización y la solución de ecuaciones de la forma $x(x+a)(x+b)=0$, todo esto, en el proceso de resolución de ecuaciones de tercer grado.

Puntos esenciales:

Hacer notar que la ecuación de tercer grado se caracteriza por estar definida mediante un polinomio de tercer grado, el cual se iguala a cero para formar la ecuación.

Recordar la factorización de polinomios de tercer grado.

Hacer notar que cuando el polinomio se ha factorizado, dicha factorización se iguala a cero (recuérdese que se está resolviendo una ecuación).

C4: Resolución de ecuaciones de tercer grado aplicando el teorema del factor y división sintética (1)

P Resuelva la ecuación $x^3-3x^2-x+3=0$.

S Sea $P(x)=x^3-3x^2-x+3$, el cual se factorizará:

Divisores de 3: ±1, ±3

$P(1)=1^3-(3)(1^2)-1+3=0$,

$x-1$ es factor de $P(x)$.

División sintética:

1	−3	−1	3	1
	1	−2	−3	
1	−2	−3	0	

Cociente: $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$

$$x^3-3x^2-x+3=(x-1)(x-3)(x+1)$$

Así,

$$(x-1)(x-3)(x+1)=0$$
$$x-1=0,\qquad x-3=0,\qquad x+1=0$$
$$x=1,\qquad x=3,\qquad x=-1$$

C *Leer en el libro de texto.*

E Resuelva $x^3-x^2-4x+4=0$.

Factorización de $P(x)=x^3-x^2-4x+4$.

Divisores de 4: ±1, ±2, ±4

$$P(1)=1^3-1^2-4(1)+4=0$$

$x-1$ es factor de $P(x)$.

División sintética:

1	−1	−4	4	1
	1	0	−4	
1	0	−4	0	

Cociente: $x^2-4=(x+2)(x-2)$

$$x^3-x^2-4x+4=(x-1)(x+2)(x-2)$$

Así,

$$(x-1)(x+2)(x-2)=0$$
$$x=1,\qquad x=-2,\qquad x=2$$

Contenido 5 Resolución de ecuaciones de tercer grado aplicando el teorema del factor y división sintética (2)

Aprendizajes esperados

Resuelve ecuaciones de tercer grado aplicando teorema del factor y la división sintética, en las que se requiere el uso de la fórmula general para ecuaciones de segundo grado.

Secuencia:

Las ecuaciones de tercer grado a ser resueltas en esta clase conducen a ecuaciones de segundo grado que deben resolverse mediante fórmula general, ya que no es posible factorizar el trinomio de segundo grado asociado.

Puntos esenciales:

Inducir a la comprensión clara de porqué los trinomios de segundo grado de la forma ax^2+bx+c tratados en los ejemplos y ejercicios no son factorizables como habitualmente se hace.

Recordar la expresión de la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado.

Para simplificar expresiones tales como $\frac{-2\pm\sqrt{12}}{2}$ se procura la descomposición del radicando (siempre que sea posible), esto con el propósito de obtener las expresiones mínimas para las soluciones.

Procurar de que las soluciones de la ecuación de segundo grado sean reunidas con la solución obtenida en la factorización del polinomio de tercer grado, para enlistar las tres soluciones de la ecuación de tercer grado.

Contenido 5: Resolución de ecuaciones de tercer grado aplicando el teorema del factor y división sintética (2)

P1 Resuelva la ecuación $x(x^2+x-1)=0$.

S1 Se iguala a cero cada factor del lado izquierdo de la ecuación $x(x^2+x-1)=0$:

$$x=0,\ x^2+x-1=0,$$

Nótese que en la ecuación de segundo grado $x^2+x-1=0$, el polinomio x^2+x-1 no se puede factorizar con los casos estudiados, de modo que se utiliza la fórmula general, con $a=1$, $b=1$, $c=-1$.

La fórmula general para resolver la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ es $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-(4)(1)(-1)}}{(2)(1)}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

De modo que las soluciones de la ecuación dada son $x=0$, $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

E1 Resuelva las siguientes ecuaciones de tercer grado:

a) $x(x^2-2x-2)=0$ b) $x(x^2-4x+1)=0$

P2 Resuelva la ecuación $x^3+x^2-4x+2=0$

S2 Se factoriza el polinomio $P(x)=x^3+x^2-4x+2$ tomando en cuenta que los divisores de 2 son ±1 y ±2.

Como $P(1)=1^3+1^2-(4)(1)+2=1+1-4+2=0$, el binomio $x-1$ es un factor de x^3+x^2-4x+2.

Se aplica la división sintética para dividir x^3+x^2-4x+2 entre $x-1$.

1	1	−4	2	1
	1	2	−2	
1	2	−2	0	

El cociente es x^2+2x-2, así que $x^3+x^2-4x+2=(x-1)(x^2+2x-2)$.

Luego,

$$(x-1)(x^2+2x-2)=0$$
$$x=1,\ x^2+2x-2=0$$

y para resolver $x^2+2x-2=0$ se usa la fórmula general con $a=1$, $b=2$, $c=-2$.

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-(4)(1)(-2)}}{(2)(1)}=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{3}}{2}=-1\pm\sqrt{3}$$

obteniendo $x=-1+\sqrt{3}$, $x=-1-\sqrt{3}$

de modo que las soluciones de la ecuación dada son $\mathbf{x=1}$, $\mathbf{x=-1+\sqrt{3}}$, $\mathbf{x=-1-\sqrt{3}}$.

E2 Resuelva las ecuaciones de tercer grado:

a) $x^3-4x^2+4x-1=0$ b) $x^3+x^2-3x+1=0$

74

C5: Aplicación del teorema del factor y división sintética (2)

P1 Resuelva $x(x^2+x-1)=0$.

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

S $x(x^2+x-1)=0$

$x=0,\quad x^2+x-1=0$

Se resuelve $x^2+x-1=0$ con Fórmula General:

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-(4)(1)(-1)}}{(2)(1)}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Soluciones: $x=0,\ x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

E Resuelva $x(x^2-2x-2)=0$.

$x(x^2-2x-2)=0$

$x=0,\quad x^2-2x-2=0$

Para $x^2-2x-2=0$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-(4)(1)(-2)}}{(2)(1)}$$
$$=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{2}=1\pm\sqrt{3}$$

Soluciones: $x=0,\ x=1+\sqrt{3},\ x=1-\sqrt{3}$

P2 Resuelva $x^3+x^2-4x+2=0$.

Factorización de $P(x)=x^3+x^2-4x+2$:

$P(1)=1^3+1^2-(4)(1)+2$ Divisores de 2: $\pm1,\pm2$.

$=1+1-4+2=0,$

$x-1$ es un factor de x^3+x^2-4x+2.

División sintética:

1	1	−4	2	1
	1	2	−2	
1	2	−2	0	

Cociente: x^2+2x-2.

$$x^3+x^2-4x+2=(x-1)(x^2+2x-2)$$

Luego,

$$(x-1)(x^2+2x-2)=0$$
$$x=1,\ x^2+2x-2=0$$

Se resuelve $x^2+2x-2=0$:

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-(4)(1)(-2)}}{(2)(1)}=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{2}$$
$$=\frac{-2\pm2\sqrt{3}}{2}=-1\pm\sqrt{3}$$

Soluciones $x=1,\ x=-1+\sqrt{3},\ x=-1-\sqrt{3}$.

Prueba de Matemática 10mo (30 min.) Fecha: ____________

Unidad 4: Ecuaciones de Tercer Grado

/ 20

Nombre: ______________________________ Sección: __________
Sexo: M / F

1. Encuentre el cociente y el residuo al dividir x^3+4x^2-x-10 entre $x-2$.
(2 puntos × 2 = 4)

Cociente: Residuo:

2. Encuentre el residuo de dividir $P(x)=x^3+x^2-3x+5$ entre $x-1$ utilizando el teorema del residuo.
(2 puntos)

3. Factorice el siguiente polinomio: (3 puntos)
x^3+2x^2-x-2

4. Resuelva las siguientes ecuaciones de tercer grado:

a) $x(x-2)(x+1)=0$ (4 puntos)

b) $x^3-x^2-6x=0$ (4 puntos)

c) $x^3+4x^2+x-6=0$ (4 puntos)

Nombre: ________________________________

Unidad 5

Introducción a la Trigonometría

Contenido 1 El Teorema de Pitágoras

Aprendizajes esperados

Aplica el Teorema de Pitágoras para encontrar la longitud desconocida de un lado de un triángulo.

Secuencia:

Esta clase constituye un repaso del importante Teorema de Pitágoras, estudiado en el grado anterior. Este teorema será utilizado en esta sección para el cálculo de valores de funciones trigonométricas a partir del valor de otra, puesto que se podrá conformar un triángulo rectángulo en el que las longitudes de dos de sus lados sean conocidas, y determinar la longitud del tercer lado.

Puntos esenciales:

Recordar el concepto de triángulo rectángulo y que dos de sus lados se denominan catetos y el tercero, hipotenusa.

Recordar el enunciado del Teorema de Pitágoras para poder aplicarlo.

Explicar que en esta situación al extraer raíz cuadrada se reconoce que solo se toma la positiva, ya que las variables representan longitudes de lados de un triángulo, de modo que son números positivos.

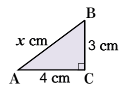
Hacer notar en la resolución de ejercicios de este contenido que cuando la variable representa la longitud de un cateto, es necesario aplicar transposición de términos.

Sección 1: Funciones trigonométricas de ángulos agudos en triángulos rectángulos

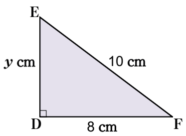
Contenido 1: El Teorema de Pitágoras

P Encuentre la longitud del lado desconocido en los siguientes triángulos rectángulos:

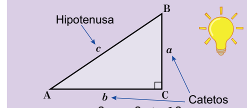
a)



b)



Teorema de Pitágoras
$\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo



$c^2 = a^2 + b^2$

S

a) Los catetos tienen longitudes de 3 cm y 4 cm y como el $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo, así por el Teorema de Pitágoras se tiene:

$$x^2 = 3^2 + 4^2$$
$$= 9 + 16$$
$$= 25$$

Se extrae raíz cuadrada y se sabe que $x > 0$, resulta:

$$x = 5$$

Por tanto, la longitud de la hipotenusa es **5 cm**.

La longitud del lado del triángulo es un número positivo.

b) La hipotenusa mide 10 cm y uno de los catetos 8 cm, el $\triangle DEF$ es un triángulo rectángulo, así por el Teorema de Pitágoras se tiene:

$$10^2 = y^2 + 8^2$$
$$100 = y^2 + 64$$

Por transposición de términos:

$$y^2 = 100 - 64$$
$$y^2 = 36$$

Se extrae raíz cuadrada y se sabe que $y > 0$, resulta:

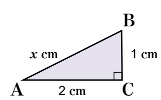
$$y = 6$$

Por tanto, la longitud del otro cateto es **6 cm**.

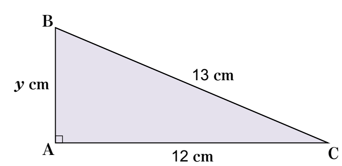
E

Encuentre la longitud del lado desconocido en los siguientes triángulos rectángulos:

a)



b)

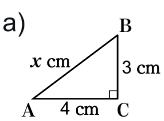


78

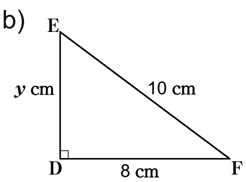
U5: Introducción a la Trigonometría
S1: Funciones trigonométricas de ángulos agudos en triángulos rectángulos
C1: El Teorema de Pitágoras

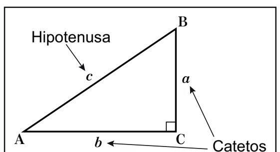
P Encuentre la longitud del lado desconocido en los siguientes triángulos rectángulos.

a)



b)





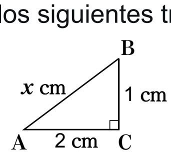
$c^2 = a^2 + b^2$

S a) Por el Teorema de Pitágoras se tiene,
$x^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$
Como $x > 0 \quad x = 5$
Por lo tanto, la longitud de la hipotenusa es $5\ cm$

b) Utilizando el Teorema de Pitágoras se tiene,
$10^2 = y^2 + 8^2$
$100 = y^2 + 64 \qquad y^2 = 100 - 64 = 36$
Como $y > 0, \quad y = 6$
Así, la longitud del cateto DE es $6\ cm$

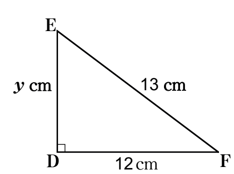
E Encuentre la longitud del lado desconocido en los siguientes triángulos rectángulos:

a)



$x^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5,$
Como $x > 0, \quad x = \sqrt{5}$
Así, la longitud de la hipotenusa es $\sqrt{5}\ cm$

b)



$y^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25,$
Como $y > 0, \ y = 5$
Por lo tanto, la longitud de la hipotenusa es $5\ cm$

Contenido 2 Razones entre los lados de un triángulo rectángulo

Contenido 2: Razones entre los lados de un triángulo rectángulo

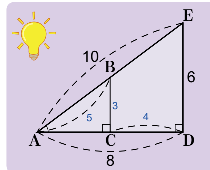
P Dados los triángulos de la figura, encuentre las siguientes razones:

$\frac{CB}{BA}=\frac{\square}{\square}$ $\frac{DE}{EA}=\frac{\square}{\square}$

$\frac{CA}{BA}=\frac{\square}{\square}$ $\frac{DA}{EA}=\frac{\square}{\square}$

$\frac{CB}{CA}=\frac{\square}{\square}$ $\frac{DE}{DA}=\frac{\square}{\square}$

Compare los resultados de las razones obtenidas.



S Las razones son:

$\frac{CB}{BA}=\frac{3}{5}$ $\frac{DE}{EA}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

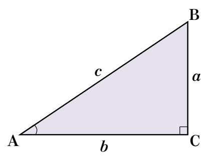
$\frac{CA}{BA}=\frac{4}{5}$ $\frac{DA}{EA}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

$\frac{CB}{CA}=\frac{3}{4}$ $\frac{DE}{DA}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

Se observa que cada razón de la columna izquierda es igual a la correspondiente razón de la columna de la derecha.

C Las razones entre los lados de un triángulo rectángulo no dependen del tamaño del triángulo, sino solamente del ángulo agudo que se considere, **esto significa que son funciones de un ángulo**.

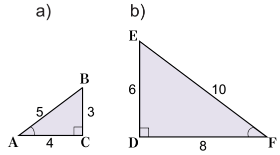
Sean el triángulo de la figura y el ángulo A del mismo. Entonces, el lado a se llama **cateto opuesto (co)** a A, mientras que b se le denomina **cateto adyacente (ca)** a A. Al lado c opuesto al ángulo recto se le llama **hipotenusa (hip)**.



E Dados los triángulos de la figura de la derecha, encuentre las razones:

$\frac{co}{hip}$, $\frac{ca}{hip}$, $\frac{co}{ca}$

respecto al ángulo agudo marcado, y compare los valores obtenidos.



Aprendizajes esperados

Identifica que las razones entre los lados de un triángulo rectángulo dependen de los ángulos agudos.

Secuencia:

En esta clase se calculan razones entre los lados de triángulos rectángulos que tienen un ángulo agudo con la misma medida, a las cuales se les dará un nombre particular en la clase siguiente. Estas razones, que son funciones de un ángulo, tomarán valores notables para los ángulos 30°, 45° y 60°, entre otros, que serán estudiados en clases posteriores.

Puntos esenciales:

Recordar el concepto de razón como el cociente de dos cantidades.

Conducir mediante la comparación entre las razones obtenidas en los triángulos presentados a la conclusión de que estas son funciones del ángulo agudo en cuestión, ya que estas no dependen de las longitudes de los lados.

Identificar para un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, el cateto opuesto y el cateto adyacente correspondiente. Estos pueden variar si se elige el otro ángulo agudo.

C2: Razones entre los lados de un triángulo rectángulo

P Encuentre las siguientes razones y compare los resultados de las razones obtenidas.

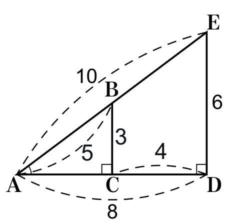
S

$\frac{CB}{BA}=\frac{3}{5}$ $\frac{DE}{EA}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

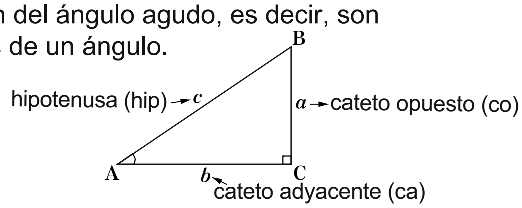
$\frac{CA}{BA}=\frac{4}{5}$ $\frac{DA}{EA}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

$\frac{CB}{CA}=\frac{3}{4}$ $\frac{DE}{DA}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

La razón es igual



C Las razones entre los lados de un triángulo no dependen del ángulo agudo, es decir, son funciones de un ángulo.

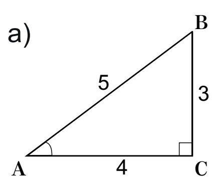


E Dados los triángulos, encuentre las razones

$\frac{co}{hip}$ $\frac{ca}{hip}$ $\frac{co}{ca}$

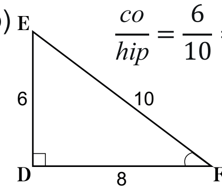
respecto al ángulo agudo marcado, y compare los valores obtenidos.

a)



$\frac{co}{hip}=\frac{3}{5}$, $\frac{ca}{hip}=\frac{4}{5}$, $\frac{co}{ca}=\frac{3}{4}$

b)



$\frac{co}{hip}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$, $\frac{ca}{hip}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$, $\frac{co}{ca}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

Las razones obtenidas entre los lados de cada uno de los triángulos son iguales (respectivamente)

Contenido 3 Tangente de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo

Aprendizajes esperados

Determina el valor de la tangente de un ángulo agudo.

Secuencia:

En esta clase se define la tangente de un ángulo, la cual solo depende de dicho ángulo; en la siguiente clase, esta será presentada junto con otras dos funciones que también dependen solamente del ángulo en cuestión. Estas tres funciones serán abordadas de forma constante en toda esta unidad.

Puntos esenciales:

Aclarar en el problema planteado por qué los triángulos rectángulos formados comparten el ángulo A. Esto se debe a que los triángulos se han formado a partir de un rayo de luz solar y la horizontal, es decir, los lados del ángulo A tanto para el triángulo determinado por el niño, como por el padre, son los mismos.

Explicar el hecho de que la razón $\frac{\text{co}}{\text{ca}}$ depende de solamente del ángulo A permite establecer una proporción mediante la cual se calcula el extremo desconocido.

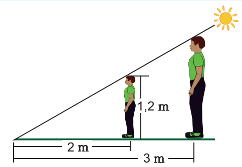
Diferenciar mediante la ejercitación los respectivos cateto opuesto y cateto adyacente para los ángulos A y B.

Insistir en la memorización de la definición de la tangente: $\tan A = \frac{\text{co}}{\text{ca}}$.

Contenido 3: Tangente de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo

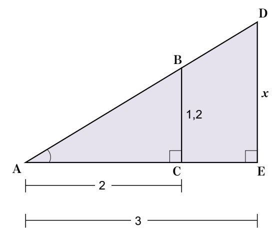
P

Un niño de 1,2 m de estatura camina en línea recta delante de su papá, y proyecta una sombra de 2 m. Si la sombra proyectada por el papá mide 3 m, ¿cuál es su estatura?



S

Con la información proporcionada se forma la figura de la derecha. Se observa que los triángulos rectángulos ABC y ADE comparten el $\angle A$, por lo cual la razón $\frac{\text{co}}{\text{ca}}$ no depende del tamaño de ellos, sino únicamente del $\angle A$. Esto significa que:

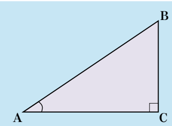


$$\frac{x}{3} = \frac{1{,}2}{2}$$
$$\frac{x}{3} = 0{,}6$$
$$x = (3)(0{,}6)$$
$$x = 1{,}8$$

Por tanto, el padre tiene una estatura de **1,8** m.

C

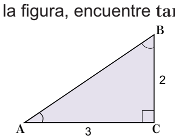
En el triángulo rectángulo ABC el valor de la razón $\frac{\text{co}}{\text{ca}}$ respecto a $\angle A$, no depende del tamaño del triángulo sino solamente del $\angle A$. Este valor recibe el nombre de **tangente del** $\angle A$ y se denota por **tan** A.



En el problema anterior se tiene que $\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{1{,}2}{2} = 0{,}6$

E

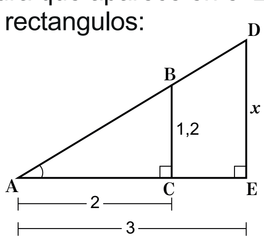
Dado el triángulo rectángulo de la figura, encuentre $\tan A$ y $\tan B$.



C3: Tangente de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo

(P) Un niño de $1{,}2\ m$ de estatura proyecta una sombra de $2\,m$. Si la sombra proyectada por el papá mide $3\ m$, ¿Cuál es la estatura?

(S) Con la figura que aparece en el LT, formamos los triangulos rectangulos:

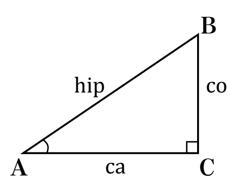


Los triángulos ABC y ADE comparten el mismo ángulo A.
Entonces:

$$\frac{x}{3} = \frac{1{,}2}{2} = 0{,}6$$
$$x = (3)(0{,}6) = 1{,}8$$

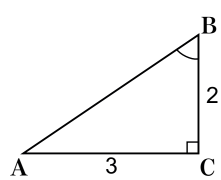
Por lo tanto, la estatura del papá es de $1{,}8\ m$.

(C) En el triángulo ABC el valor de $\frac{co}{ca}$ solamente depende del angulo A.



A este valor se le conoce como tangente del $\angle A$ $(\tan A)$
En el problema, el valor de $\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{1{,}2}{2} = 0{,}6$

(E) Dado el triángulo rectángulo de la figura, determine $\tan A$ y $\tan B$.



Según la conclusión, los valores se calculan dependiendo del ángulo. Por lo tanto,

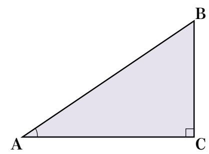
$$\tan A = \frac{co}{ca} = \frac{2}{3} \qquad \tan B = \frac{co}{ca} = \frac{3}{2}$$

Contenido 4 Funciones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo agudo

Contenido 4: Funciones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo agudo

Definición

De la misma forma en que la razón $\frac{BC}{CA}$ depende únicamente del ángulo A, así las razones $\frac{BC}{AB}$ y $\frac{AC}{AB}$ también dependen solamente del $\angle A$.



Estas razones reciben los siguientes nombres:

$\frac{BC}{AB}$: se llama **seno del $\angle A$** y se denota por **sen A**

$\frac{AC}{AB}$: se llama **coseno del $\angle A$** y se denota por **cos A**

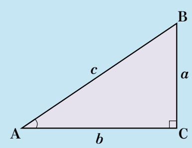
C

Dado el triángulo rectángulo de la derecha, se definen las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente para el $\angle A$ así:

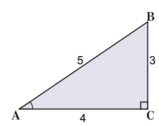
$\operatorname{sen} A = \frac{a}{c}$ $\quad \cos A = \frac{b}{c}$ $\quad \tan A = \frac{a}{b}$

En términos de cateto opuesto (co), cateto adyacente (ca) e hipotenusa (hip) se tiene:

$\operatorname{sen} A = \frac{\text{co}}{\text{hip}}$ $\quad \cos A = \frac{\text{ca}}{\text{hip}}$ $\quad \tan A = \frac{\text{co}}{\text{ca}}$



Ejemplo Encuentre las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente para el ángulo A del triángulo rectángulo de la derecha.



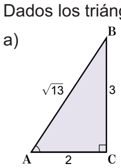
El cateto opuesto es 3, el adyacente 4 y la hipotenusa 5 respecto a $\angle A$ respectivamente. Por tanto,

$\operatorname{sen} A = \frac{3}{5}$ $\quad \cos A = \frac{4}{5}$ $\quad \tan A = \frac{3}{4}$

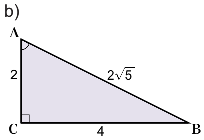
E

Dados los triángulos rectángulos siguientes, encuentre sen A, cos A y tan A.

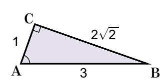
a)



b)



c)



81

Aprendizajes esperados

Determina los valores de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo agudo.

Secuencia:

En analogía con el concepto de tangente de un ángulo, brindado en la clase anterior, se definen seno y coseno de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo. Definirlas mediante razones entre los lados de un triángulo rectángulo, permitirá calcular sus valores, aunque solo se conozca una de estas.

Puntos esenciales:

Explicar que en la definición de seno, coseno y tangente de un ángulo, se requiere la identificación del cateto opuesto, cateto adyacente respecto a dicho ángulo, e hipotenusa. No es recomendable memorizarlas utilizando las letras a, b y c (esta es solamente una notación empleada para el triángulo mostrado), sino, a partir de su propia definición:

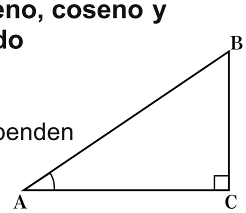
$\operatorname{sen} A = \frac{\text{co}}{\text{hip}}$, $\cos A = \frac{\text{ca}}{\text{hip}}$, $\tan A = \frac{\text{co}}{\text{ca}}$.

Simplificar las razones obtenidas, y, de ser posible, racionalizar los denominadores que posean radicales.

C4: Funciones trigonométricas seno, coseno y tangente de un triángulo agudo

D Definición

Las razones $\frac{BC}{AB}$ y $\frac{AC}{AB}$ también dependen solamente del $\angle A$.



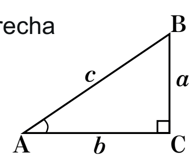
Estas razones reciben los siguientes nombres:

$\frac{BC}{AB}$: seno del $\angle A$ y se denota por sen A;

$\frac{AC}{AB}$: coseno del $\angle A$ y se denota por cos A;

C Dado el triángulo rectángulo de la derecha

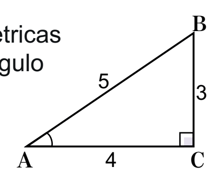
$\operatorname{sen} A = \frac{a}{c}$; $\quad \cos A = \frac{b}{c}$; $\quad \tan A = \frac{a}{b}$



En términos de co, ca e hip se tiene:

$\operatorname{sen} A = \frac{co}{hip}$; $\quad \cos A = \frac{ca}{hip}$; $\quad \tan A = \frac{co}{ca}$

Ej Encuentre las funciones trigonométricas para el ángulo A del triángulo rectángulo siguiente:



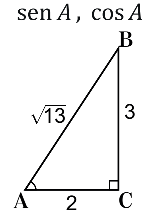
$co = 3$; $\quad ca = 4$; $\quad hip = 5$,

por lo tanto;

$\operatorname{sen} A = \frac{3}{5}$; $\quad \cos A = \frac{4}{5}$; $\quad \tan A = \frac{3}{4}$

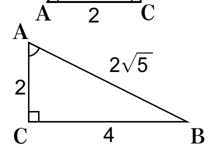
E Dados los triángulos de las figuras, determine sen A, cos A y tan A.

a)



$\operatorname{sen} A = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\quad \cos A = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\quad \tan A = \frac{3}{2}$

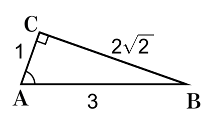
b)



$\operatorname{sen} A = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$;

$\cos A = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\quad \tan A = \frac{4}{2} = 2$

c)



$\operatorname{sen} A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\quad \cos A = \frac{1}{3}$;

$\tan A = 2\sqrt{2}$

Contenido 5 Cálculo de los valores de dos funciones trigonométricas a partir del valor de otra

Aprendizajes esperados

Determina los valores de dos de las funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente) conociendo el valor de la restante.

Secuencia:

En clases anteriores se definieron las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo agudo. Es momento de aplicar el Teorema de Pitágoras y la definición de estas funciones para calcular los valores que estas toman.

Puntos esenciales:

Hacer notar que, si se brinda información de una función trigonométrica de un ángulo agudo, podemos formar un triángulo rectángulo asociado, en el que se conocerán dos longitudes de las tres correspondientes a sus lados.

Insistir en que el uso del Teorema de Pitágoras permite determinar el valor de la variable.

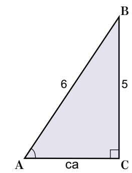
Recordar la definición de cada función trigonométrica.

Simplificar las razones obtenidas, y, de ser posible, racionalizar los denominadores que posean radicales.

Contenido 5: Cálculo de los valores de dos funciones trigonométricas a partir del valor de otra

Ejemplo 1 Si A es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo y $\operatorname{sen} A = \frac{5}{6}$, calcule los valores de $\cos A$ y $\tan A$.

Dado que los valores de las funciones trigonométricas dependen únicamente del ángulo, y en un triángulo rectángulo $\operatorname{sen} A = \frac{\text{co}}{\text{hip}}$, sea el triángulo con cateto opuesto a A igual a 5 e hipotenusa igual a 6.



Al aplicar el Teorema de Pitágoras se tiene

$$6^2 = 5^2 + (\text{ca})^2$$
$$(\text{ca})^2 = 36 - 25 = 11$$

ca > 0, entonces $\quad \text{ca} = \sqrt{11}$

Por tanto,

$$\cos A = \frac{\text{ca}}{\text{hip}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

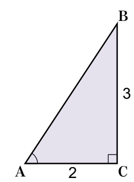
$$\tan A = \frac{\text{co}}{\text{ca}} = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

Racionalizando:

$$\frac{5}{\sqrt{11}} = \left(\frac{5}{\sqrt{11}}\right)\left(\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}}\right) = \frac{5\sqrt{11}}{11}$$

Ejemplo 2 Si A es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo y $\tan A = \frac{3}{2}$, calcule los valores de $\operatorname{sen} A$ y $\cos A$.

Dado que $\tan A = \frac{\text{co}}{\text{ca}}$, sea el triángulo con cateto opuesto al $\angle A$ igual a 3 y cateto adyacente igual a 2.



Al aplicar el teorema de Pitágoras se tiene

$$(\text{hip})^2 = 3^2 + 2^2 = 13$$

y como hip > 0, entonces $\quad \text{hip} = \sqrt{13}$

Por tanto, $\quad \operatorname{sen} A = \frac{\text{co}}{\text{hip}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$$\cos A = \frac{\text{ca}}{\text{hip}} = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

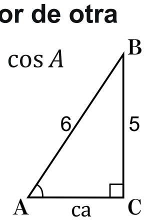
E

1. Si A es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo y $\operatorname{sen} A = \frac{1}{4}$, calcule los valores de $\cos A$ y $\tan A$.
2. Si A es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo y $\cos A = \frac{3}{4}$, calcule los valores de $\operatorname{sen} A$ y $\tan A$.
3. Si A es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo y $\tan A = \frac{5}{2}$, calcule los valores de $\operatorname{sen} A$ y $\cos A$.

82

C5: Cálculo de los valores de dos funciones trigonométricas a partir del valor de otra

(Ej1) Si $\operatorname{sen} A = \frac{5}{6}$, calcule los valores de $\cos A$ y $\tan A$.



Como $\operatorname{sen} A = \frac{co}{hip}$, entonces

$co = 5$ y $hip = 6$

Aplicando el Teorema de Pitagoras se tiene:

$$6^2 = 5^2 + (ca)^2$$
$$(ca)^2 = 36 - 25 = 11$$

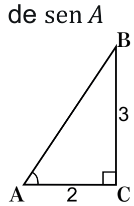
$ca > 0$, entonces

$$ca = \sqrt{11}$$

$$\cos A = \frac{ca}{hip} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$\tan A = \frac{co}{ca} = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

(Ej2) Si $\tan A = \frac{3}{2}$, determine los valores de $\operatorname{sen} A$ y $\cos A$.



Como $\tan A = \frac{co}{ca}$, entonces

$co = 3$ y $ca = 2$

Aplicando el Teorema de Pitágoras se tiene:

$$(hip)^2 = 3^2 + 2^2 = 13$$

$hip > 0$,

$$\Rightarrow hip = \sqrt{13}$$

$$\operatorname{sen} A = \frac{co}{hip} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\cos A = \frac{ca}{hip} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

(E) 1. Si $\operatorname{sen} A = \frac{1}{4}$, determine los valores de $\cos A$ y $\tan A$.

$co = 1$ y $hip = 4$.

$$4^2 = 1^2 + (ca)^2$$
$$4^2 - 1^2 = (ca)^2$$
$$15 = (ca)^2$$
$$\Rightarrow ca = \sqrt{15}$$

$$\cos A = \frac{ca}{hip} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\tan A = \frac{co}{ca} = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

2. Si A es un ángulo agudo de un triangulo rectángulo y $\cos A = \frac{3}{4}$, determine los valores de $\operatorname{sen} A$ y $\tan A$.

Por los datos se tiene: $ca = 3$ y $hip = 4$. Así que:

$$4^2 = (co)^2 + 3^2$$
$$16 - 9 = (co)^2$$
$$7 = (co)^2$$
$$\Rightarrow co = \sqrt{7}$$

$$\operatorname{sen} A = \frac{co}{hip} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

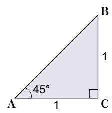
$$\tan A = \frac{co}{ca} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

Contenido 1 Valores de las funciones trigonométricas del ángulo de 45°

Sección 2: Valores de las funciones trigonométricas de ángulos agudos

Contenido 1: Valores de las funciones trigonométricas del ángulo de 45°

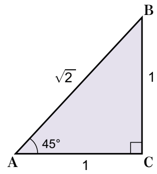
P Dado el triángulo rectángulo isósceles de abajo, calcule los valores de sen 45°, cos 45° y tan 45°.



S Por el teorema de Pitágoras:

$$AB^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$
$$AB = \sqrt{2}$$

Luego,

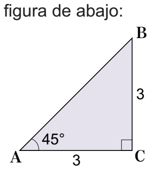


$$\text{sen } 45° = \frac{co}{hip} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45° = \frac{ca}{hip} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45° = \frac{co}{ca} = \frac{1}{1} = 1$$

E Sea el triángulo rectángulo de la figura de abajo:



a) Calcule sen 45°, cos 45° y tan 45°.

b) ¿Cómo son estos valores respecto a los obtenidos en el problema?

84

Aprendizajes esperados

Determina los valores de las funciones trigonométricas del ángulo de 45°.

Secuencia:

Damos inicio a esta sección calculando las funciones trigonométricas definidas en la sección anterior, para un ángulo de 45°. Esto, para concretar los valores de las funciones trigonométricas para los ángulos 30°, 45° y 60°. En la próxima clase se calcularán los valores correspondientes de las funciones trigonométricas para 30° y 60°.

Puntos esenciales:

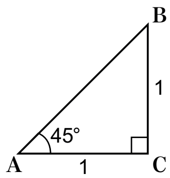
Hacer notar que el triángulo del problema planteado es isósceles.

Explicar que el Teorema de Pitágoras es la herramienta a usar para determinar la longitud de la hipotenusa. Sin esta medida no es posible calcular los valores de las funciones trigonométricas.

Observar que, independientemente del tamaño del triángulo rectángulo isósceles, las funciones trigonométricas para 45° son siempre los mismos: $\text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan 45° = 1$.

S2: Valores de las funciones trigonométricas de ángulo agudo
C1: Valores de las funciones trigonométricas del ángulo de 45°

P Dado el triángulo rectángulo isósceles, calcule los valores de sen 45°, cos 45° y tan 45°



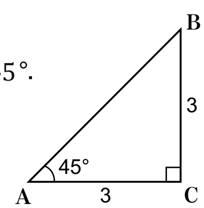
S $AB^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, entonces $AB = \sqrt{2}$
Luego,

$$\text{sen } 45° = \frac{co}{hip} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45° = \frac{ca}{hip} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45° = \frac{co}{ca} = \frac{1}{1} = 1$$

E Dado el triángulo:



a) Calcule sen 45°, cos 45° y tan 45°.

Se calcula la hipotenusa AB:
$AB^2 = 3^2 + 3^2 = 18$

$AB > 0 \longrightarrow AB = \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3^2} = 3\sqrt{2}$

$$\text{sen } 45° = \frac{co}{hip} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45° = \frac{ca}{hip} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45° = \frac{co}{ca} = \frac{3}{3} = 1$$

b) ¿Cómo son estos valores respecto a los obtenidos en el problema?

Son iguales.

Contenido 2 Valores de las funciones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°

Aprendizajes esperados

Determina los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°.

Secuencia:

En esta clase se calculan los valores de las funciones trigonométricas para 30° y 60°. Así se completan los valores para los ángulos de 30°, 45° y 60°.

Puntos esenciales:

Explicar que el concepto de triángulo equilátero, y sus características permiten calcular los valores de las funciones trigonométricas:

1. Lados de igual medida.
2. Ángulos internos de 60°.
3. Bisectriz (segmento que divide a cada ángulo interno en dos ángulos de igual medida) perpendicular al lado opuesto del vértice por el cual pasa, cortándolo en su punto medio.

Indicar que se forman dos triángulos rectángulos congruentes, en los que se conocen las longitudes de las hipotenusas y uno de los catetos correspondientes.

Analizar que en estos triángulos es posible determinar los valores de las funciones trigonométricas.

Observar que los valores de las funciones trigonométricas para 30°, 45° y 60° son los mismos, independientes de las longitudes de los lados de los triángulos.

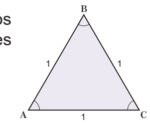
Contenido 2: Valores de las funciones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°

P Calcule los valores de:

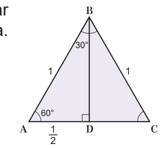
sen 30°, cos 30° y tan 30°
sen 60°, cos 60° y tan 60°

S

Considere el triángulo equilátero de la figura. Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° y un triángulo equilátero tiene sus tres ángulos con la misma medida, resulta que cada ángulo mide 60°.



Al trazar la bisectriz correspondiente al ángulo B, esta es perpendicular a $\overline{AC}$ y lo corta en su punto medio, obteniéndose la figura de la derecha. Aplicando el Teorema de Pitágoras en el $\triangle ABD$ se tiene:



$$BD^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$$

$$BD^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

Como se sabe que $BD>0$, entonces $BD=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Se aplica la definición de las funciones trigonométricas para obtener:

$$\text{sen }30°=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2} \qquad \text{sen }60°=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30°=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60°=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$$

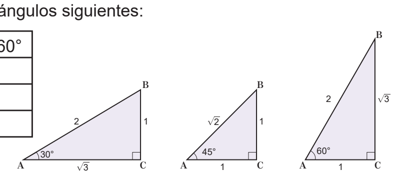
$$\tan 30°=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \tan 60°=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

E

Complete la tabla haciendo uso de los triángulos siguientes:

	$\measuredangle A=30°$	$\measuredangle A=45°$	$\measuredangle A=60°$
sen A			
cos A			
tan A			

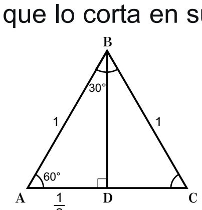


C2: Valores de las funciones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°

P Calcule los valores de: $\text{sen }30°$, $\cos 30°$, $\tan 30°$
$\text{sen }60°$, $\cos 60°$, $\tan 60°$

S Cada ángulo mide $60°$. Se traza la bisectriz del ángulo B.
Bisectriz BD es la perpendicular a AC que lo corta en su punto medio.
La suma de los ángulos interiores de un triángulo es $180°$. Aplicando el Teorema de Pitágoras,

$BD^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1 \Rightarrow BD^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \Rightarrow BD>0$, así $BD=\frac{\sqrt{3}}{2}$

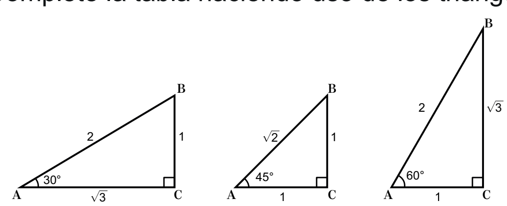


Aplicando la definición de las funciones trigonometricas,

$$\text{sen }30°=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2},\quad \cos 30°=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \tan 30°=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{sen }60°=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos 60°=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2},\quad \tan 60°=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

E Complete la tabla haciendo uso de los triángulos



A	30°	45°	60°
sen A	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos A	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan A	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

$$\text{sen }30°=\frac{co}{hip}=\frac{1}{2},\quad \text{sen }45°=\frac{co}{hip}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \text{sen }60°=\frac{co}{hip}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30°=\frac{ca}{hip}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos 45°=\frac{ca}{hip}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos 60°=\frac{ca}{hip}=\frac{1}{2}$$

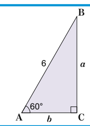
$$\tan 30°=\frac{co}{ca}=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \tan 45°=\frac{co}{ca}=1,\quad \tan 60°=\frac{co}{ca}=\sqrt{3}$$

Contenido 1 Cálculo de la longitud de dos de los lados de un triángulo rectángulo conociendo un lado y un ángulo agudo

Sección 3: Resolución de triángulos rectángulos

Contenido 1: Cálculo de la longitud de dos de los lados de un triángulo rectángulo conociendo un lado y un ángulo agudo

P1 Dado el triángulo de la derecha, calcule las longitudes de los catetos a y b.



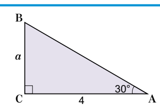
S1 Por definición se tiene: $\operatorname{sen} 60° = \frac{a}{6}$ y $\cos 60° = \frac{b}{6}$

Como $\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\cos 60° = \frac{1}{2}$, entonces:

$\frac{a}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{b}{6} = \frac{1}{2}$
$a = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(6)$	$b = \left(\frac{1}{2}\right)(6)$
$a = 3\sqrt{3}$	$b = 3$

Por tanto, $\boldsymbol{a = 3\sqrt{3}}$ y $\boldsymbol{b = 3}$.

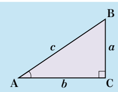
P2 Dado el triángulo de la derecha, calcule el valor de a.



S2 Por definición $\tan 30° = \frac{a}{4}$ y $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$, así que: $\frac{a}{4} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, entonces $\boldsymbol{a = \frac{4}{\sqrt{3}}}$.

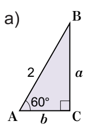
C Dado el triángulo rectángulo de la derecha, se cumple que:

$a = c \operatorname{sen} A$ $b = c \cos A$ $a = b \tan A$

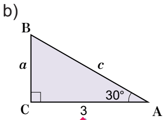


E Calcule la longitud de los lados desconocidos de los siguientes triángulos rectángulos:

a)



b)



86

Aprendizajes esperados

Calcula la longitud de dos de los lados de un triángulo rectángulo conociendo un lado y un ángulo agudo.

Secuencia:

Teniendo los valores de las funciones trigonométricas calculados en la sección anterior, es posible completar información referida a las partes de un triángulo: las longitudes de sus tres lados, conociendo solo uno y un ángulo agudo de este triángulo (este ángulo agudo será uno de los estudiados en la sección anterior). Pero, ¿podemos restringirnos a estos ángulos solamente? En esta unidad se establecerán los valores de las funciones trigonométricas para otros ángulos agudos.

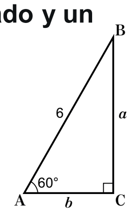
Puntos esenciales:

Aplicar la definición de las razones trigonométricas de acuerdo a las variables que se tengan. En el ejemplo, no se recomienda utilizar la tangente, en vista de que esta reuniría las dos variables en su definición. Esto difiere en el segundo ejemplo. En este no es prudente utilizar seno o coseno, pues se desconoce la hipotenusa y un cateto.

Recordar las propiedades de proporciones para determinar el valor de una variable.

S3: Resolución de triángulos rectángulos
C1: Cálculo de la longitud de dos de los lados de un triángulo rectángulo conociendo un lado y un ángulo agudo

(P1) Calcule las longitudes de los catetos a y b.



(S1) $\operatorname{sen} 60° = \frac{a}{6}$ y $\cos 60° = \frac{b}{6}$

Como $\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\cos 60° = \frac{1}{2}$, entonces:

$\frac{a}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$a = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(6) = 3\sqrt{3}$

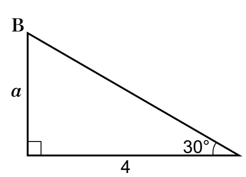
$\frac{b}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \left(\frac{1}{2}\right)(6) \Rightarrow b = 3$

Por tanto, $a = 3\sqrt{3}$ y $b = 3$

(P2) Calcule el valor de a.

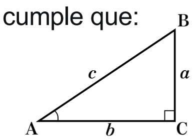
(S2) $\tan 30° = \frac{a}{4}$ y $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

así que $\frac{a}{4} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{3}}$



(C) Dado el triángulo rectángulo, se cumple que:

$a = c \operatorname{sen} A$
$b = c \cos A$
$a = b \tan A$

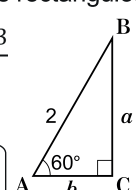


(E) Encuentre la longitud de los lados desconocidos de los siguientes triángulos rectángulos.

a) $\operatorname{sen} 60° = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow a = (2)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$

En otra manera,
$a = AB \operatorname{sen} 60°$
$= (2)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$

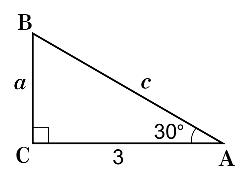


También,

$\cos 60° = \frac{b}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \left(\frac{1}{2}\right)(2) = 1$

En otra manera,
$b = AB \cos 60°$
$= (2)\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

b)



Como:

$\tan 30° = \frac{a}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow a = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(3) = \frac{3}{\sqrt{3}}$

También,

$\cos 30° = \frac{3}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow c = 3 \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}}$

Contenido 2 Aplicación de los valores de seno y coseno

Aprendizajes esperados

Aplica las funciones trigonométricas seno y coseno en la solución de problemas del entorno.

Secuencia:

Esta clase refleja los cálculos matemáticos aprendidos en la sesión anterior, pero en una situación del entorno: la altura de la pared y la distancia del pie de la escalera a la pared son medidas desconocidas de un triángulo rectángulo.

Puntos esenciales:

Visualizar claramente el triángulo rectángulo formado en esta situación.

Determinar los datos del problema para relacionarlo con los cálculos de la clase anterior: se conoce la longitud de la hipotenusa y un ángulo agudo.

Hacer notar que no se puede utilizar tangente, sino, seno y coseno para determinar los valores solicitados en la situación ya que corresponden a las longitudes de los catetos del triángulo formado.

Explicar que situaciones como las expuestas en esta clase requieren de los valores de las funciones trigonométricas seno y coseno para los ángulos 30° y 60°.

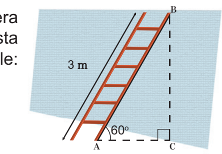
Contenido 2: Aplicación de los valores de seno y coseno

P

En la figura de la derecha, uno de los extremos de la escalera se encuentra apoyado sobre el borde superior de la pared, esta mide 3 m y forma un ángulo de 60° con respecto al suelo. Calcule:

a) La altura de la pared.

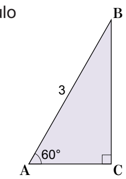
b) La distancia entre el pie de la escalera y la pared.



S

a) La longitud de la escalera AB coincide con la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC que se forma. Por lo cual,

$$\text{sen } 60° = \frac{BC}{AB}$$



de lo cual se tiene que

$$BC = AB \text{ sen } 60°$$
$$= (3)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Recuerde: $\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Entonces la altura de la pared es $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ **m**.

b) La distancia entre el pie de la escalera y la pared es AC, la que coincide con el cateto adyacente correspondiente al ángulo A del triángulo. Luego,

$$\cos 60° = \frac{AC}{AB},$$

de donde

$$AC = AB \cos 60°$$
$$= (3)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{3}{2}$$

Recuerde: $\cos 60° = \frac{1}{2}$

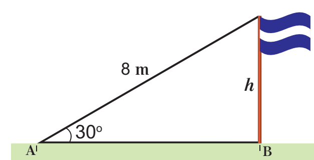
La distancia entre el pie de la escalera y la pared es $\frac{3}{2}$ **m**.

E

Una cuerda de 8 m está estirada desde la punta de un asta de bandera hasta el suelo, y forma con este un ángulo de 30°. Calcule:

a) La altura del asta.

b) La distancia entre el extremo de la cuerda que está sobre el suelo y el pie del asta.

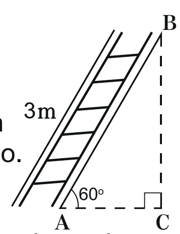


C2: Aplicación de los valores de seno y coseno

(P) La escalera de $3\,m$ se encuentra apoyada sobre la pared y forma un ángulo de $60°$ con respecto al suelo. Calcule:

a) La altura de la pared.

b) La distancia entre el pie de la escalera y la pared.



(S) a) $\text{sen } 60° = \frac{BC}{AB}$, entonces $BC = AB \text{ sen } 60°$

$$BC = (3)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

La altura de la pared es $\frac{3\sqrt{3}}{2}\ m$

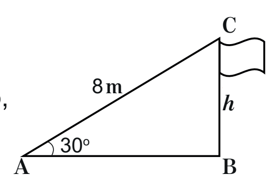
b) Distancia entre el pie de la escalera: AC

$\cos 60° = \frac{AC}{AB}$ donde,

$$AC = AB\cos 60° = (3)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

La distancia entre el pie de la escalera y la pared es $\frac{3}{2}\ m.$

(E) Una cuerda de $8\,m$ está estirada desde la punta de un asta de bandera hasta el suelo, y forma con este un ángulo de $30°$.



Encuentre:

a) La altura del asta

Como $h = AC \text{ sen } 30°$ y $\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$, $AC = 8$

Entonces, $h = 8\left(\frac{1}{2}\right) = 4$

La altura del poste es de $4\ m$

b) La distancia entre el extremo de la cuerda que está sobre el suelo y el pie del poste

Como $AB = AC\cos 30°$, $AC = 8$ y $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, entonces

$$AB = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\sqrt{3}$$

La distancia es de $4\sqrt{3}\ m.$

Contenido 3 Tabla de valores de las funciones trigonométricas de ángulos entre 0° y 90°

Contenido 3: Tabla de valores de las funciones trigonométricas de ángulos entre 0° y 90°

En la tabla de la derecha se presentan los valores de las funciones trigonométricas para ángulos entre 1° y 25°.

Tabla de funciones trigonométricas

Ángulo A	sen A	cos A	tan A
1°	0,0175	0,9998	0,0175
2°	0,0349	0,9994	0,0349
3°	0,0523	0,9986	0,0524
4°	0,0698	0,9976	0,0699
5°	0,0872	0,9962	0,0875
6°	0,1045	0,9945	0,1051
7°	0,1219	0,9925	0,1228
8°	0,1392	0,9903	0,1405
9°	0,1564	0,9877	0,1584
10°	0,1736	0,9848	0,1763
11°	0,1908	0,9816	0,1944
12°	0,2079	0,9781	0,2126
13°	0,2250	0,9744	0,2309
14°	0,2419	0,9703	0,2493
15°	0,2588	0,9659	0,2679
16°	0,2756	0,9613	0,2867
17°	0,2924	0,9563	0,3057
18°	0,3090	0,9511	0,3249
19°	0,3256	0,9455	0,3443
20°	0,3420	0,9397	0,3640
21°	0,3584	0,9336	0,3839
22°	0,3746	0,9272	0,4040
23°	0,3907	0,9205	0,4245
24°	0,4067	0,9135	0,4452
25°	0,4226	0,9063	0,4663
⋮	⋮	⋮	⋮

Ejemplo 1 Se observa en la tabla de razones trigonométricas que para $A = 10°$:

$\text{sen } 10° = 0{,}1736$

$\cos 10° = 0{,}9848$

$\tan 10° = 0{,}1763$

E_1

Encuentre los siguientes valores utilizando la tabla de la derecha:

a) $\text{sen } 7° =$ ☐

b) $\cos 12° =$ ☐

c) $\tan 25° =$ ☐

La tabla de los valores de las funciones trigonométricas para $0° \leq A \leq 90°$ se presenta al final de la unidad (Página 94).

Ejemplo 2 Sabiendo que A es un ángulo agudo, ¿cuál es el valor de A, si $\cos A = 0{,}9135$?

Para encontrar A se ubica el valor 0,9135 en la columna de los valores que toma $\cos A$. Luego, se selecciona el valor de A que corresponde a la fila en la que se encuentra 0,9135.

Observe que en este caso, $A =$ **24°**.

E_2

Encuentre en la tabla trigonométrica el valor de A en cada uno de los siguientes casos:

a) $\text{sen } A = 0{,}3907$

b) $\cos A = 0{,}9703$

c) $\tan A = 0{,}3640$

88

Aprendizajes esperados

Calcula los valores de las funciones trigonométricas de ángulos entre 0° y 90°.

Secuencia:

En esta clase se presentan más valores de las funciones trigonométricas para ángulos agudos. Al final de esta unidad se muestra una tabla trigonométrica para las funciones seno, coseno y tangente, para un ángulo A para el cual $0° \leq A \leq 90°$.

Puntos esenciales:

Tener presente que la tabla puede usarse en dos sentidos:

1. Dado el ángulo agudo, se puede determinar el valor de las funciones trigonométricas recorriendo la línea correspondiente al ángulo en cuestión, y de izquierda a derecha, el primer valor corresponde a seno, el segundo a coseno y el tercero a tangente.
2. Si se tiene el valor de una de las funciones trigonométricas, puede determinarse el ángulo asociado, localizando este decimal en la tabla; la fila en la que se ubique este decimal, tendrá como primer valor el del ángulo asociado.

C3: Tabla de valores de las funciones trigonométricas de ángulos entre $0°$ y $90°$

Ej1 Haciendo uso de la tabla de razones trigonométricas que aparece al LT, se observa que:

Para $A = 10°$, se tiene:

$$\text{sen } 10° = 0{,}1736$$

$$\cos 10° = 0{,}9848$$

$$\tan 10° = 0{,}1763$$

E1 Encuentre los siguientes valores.

a) $\text{sen } 7° = 0{,}1219$

b) $\cos 12° = 0{,}9781$

c) $\tan 25° = 0{,}4663$

Ej2 Sabiendo que A es un ángulo agudo, ¿cuál es el valor de A, si $\cos A = 0{,}9135$?

$$A = 24°$$

E2 Encuentre el valor de A en cada uno de los siguientes casos:

a) $\text{sen } A = 0{,}3907$ $A = 23°$

b) $\cos A = 0{,}9703$ $A = 14°$

c) $\tan A = 0{,}3640$ $A = 20°$

Contenido 4 Aplicación del valor de la tangente

Aprendizajes esperados

Aplica la función trigonométrica tangente en la solución de problemas del entorno.

Secuencia:

Las aplicaciones de las funciones trigonométricas en el entorno son muchas, y de singular importancia. En clases anteriores se resolvieron situaciones aplicando dichas funciones, pero sujetas a los valores correspondientes a 30°, 45° y 60°. Contando con una cantidad mayor de valores, no se hace restricción a dichos ángulos.

Puntos esenciales:

Visualizar claramente el triángulo rectángulo formado en cada situación.

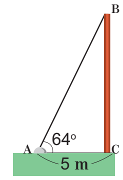
Determinar los datos del problema para relacionarlo con los cálculos de las clases anteriores.

Hacer notar que la variable de la situación del problema corresponde a la longitud de un cateto del triángulo formado y se conoce la medida del otro, de modo que se ha de utilizar la tangente.

Indicar que situaciones como las expuestas en esta clase requieren de los valores de las funciones trigonométricas dadas en la tabla al final de unidad.

Contenido 4: Aplicación del valor de la tangente

Ejemplo En la figura de la derecha el cable que tira desde la punta de un poste forma con el piso un ángulo de 64°. Se sabe que la distancia entre el pie del poste y el extremo del cable que está sobre el piso es 5 m, encuentre la altura del poste (hasta las décimas).



Por definición de tangente:

$$\tan 64° = \frac{BC}{AC}$$

Dado $AC = 5$, se tiene

$BC = AC \tan 64°$

$= (5)(2{,}0503)$

$= 10{,}2515$

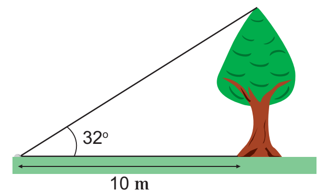
La altura del poste es **10,3** m aproximadamente.

En la tabla al final de la unidad se encuentra que $\tan 64° = 2{,}0503$

E

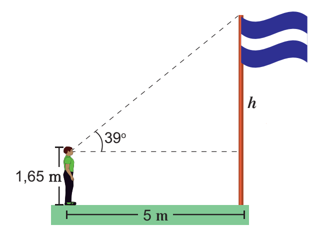
Resuelva las siguientes situaciones.

a) En la figura de la derecha, la cuerda que tira desde la cima del árbol forma con el suelo un ángulo de 32°. Sabiendo que la distancia entre el pie del árbol y el extremo de la cuerda sobre el piso es 10 m, encuentre la altura del árbol (hasta las décimas).



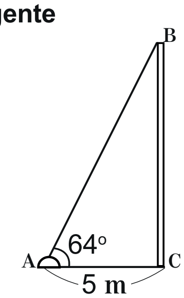
b) Un estudiante de 1,65 m de altura se encuentra a 5 m del asta de una bandera observando el extremo superior de esta.

Si el ángulo formado por la línea de visibilidad del estudiante con el extremo superior de la bandera y la línea horizontal es aproximadamente 39°, ¿cuál es la altura aproximada del asta? (hasta las décimas)



C4: Aplicación del valor de la tangente

(Ej) El cable forma con el piso un ángulo de 64°. Sabiendo que la distancia entre el pie del poste y el extremo del cable que está sobre el piso es de $5\,m$, encuentre la altura del poste.



(S) Por definición de tangente:

$\tan 64° = \frac{BC}{AC}$ por lo tanto;

$BC = AC \tan 64°$

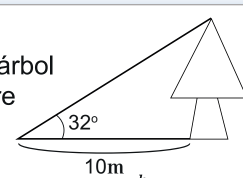
$= (5)(2{,}0503)$ $\boxed{\tan 64° = 2{,}0503}$

$= 10{,}2515$

La altura del poste es $10{,}3$ m aproximadamente.

(E) Resuelva las siguientes situaciones:

a) En la figura, la cuerda que tira desde la cima del árbol forma con el suelo un ángulo de $32°$. Si la distancia entre el pie del árbol y el extremo de la cuerda sobre el piso es $10\,m$, encuentre la altura del árbol.



Sea h la altura del árbol. Como $\tan 32° = \frac{h}{10}$ entonces,

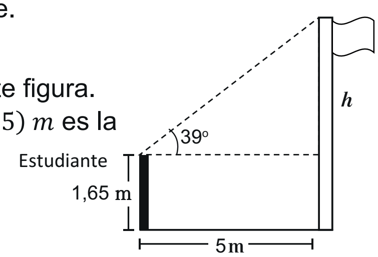
$h = 10\tan 32° = (10)(0{,}6249) \;\; = 6{,}24$

La altura del árbol es de $6{,}24\,m$ aproximadamente.

b) *Leer en LT.*

Formamos la siguiente figura.

En este caso $(h + 1{,}65)\,m$ es la altura del asta.



Como $\tan 39° = \frac{h}{5}$ entonces,

$h = 5\tan 39° = (5)(0{,}8098) = 4{,}05$

La altura del asta es de aproximadamente $h + 1{,}65 = 4{,}05 + 1{,}65 = 5{,}7\,m$

Contenido 1 Relación entre sen A y cos $(90°-A)$, cos A y sen $(90°-A)$

Sección 4: Relaciones entre seno, coseno y tangente

Contenido 1: Relación entre sen A y cos $(90°-A)$, cos A y sen $(90°-A)$

P Dado un ángulo agudo A en el $\triangle ABC$ rectángulo, responda las siguientes interrogantes:

a) ¿Qué relación guardan $\operatorname{sen} A$ y $\cos(90°-A)$?

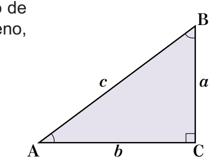
b) ¿Qué relación guardan $\cos A$ y $\operatorname{sen}(90°-A)$?

Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo suman 90°.

S Sea un triángulo rectángulo como el de la figura, en el que uno de sus ángulos es A. Por definición de las funciones seno y coseno, se tiene:

$$\operatorname{sen} A=\frac{a}{c} \qquad \cos A=\frac{b}{c}$$

$$\operatorname{sen} B=\frac{b}{c} \qquad \cos B=\frac{a}{c}$$



Se observa que $\operatorname{sen} A=\cos B$ y $\cos A=\operatorname{sen} B$.

Como $B=90°-A$, resulta que $\operatorname{sen} A=\cos(90°-A)$ y $\cos A=\operatorname{sen}(90°-A)$.

C Dado cualquier triángulo rectángulo ABC con un ángulo agudo A, se cumple que:

$$\operatorname{sen} A=\cos(90°-A) \qquad \cos A=\operatorname{sen}(90°-A)$$

Ejemplo a) Exprese sen 36° como el coseno de un ángulo agudo mayor de 45°.

b) Exprese cos 36° como el seno de un ángulo agudo mayor de 45°.

Para sen 36° se tiene:

$$\operatorname{sen} 36°=\cos(90°-36°)$$
$$=\cos 54°$$

En el caso de cos 36° resulta:

$$\cos 36°=\operatorname{sen}(90°-36°)$$
$$=\operatorname{sen} 54°$$

E Una con una raya los valores de la columna 1 que coinciden con los valores de la columna 2.

Columna 1	Columna 2
sen 24°	cos 8°
cos 75°	sen 15°
sen 82°	cos 66°

90

Aprendizajes esperados

Establece y aplica las relaciones
$\operatorname{sen} A=\cos(90°-A)$ y
$\cos A=\operatorname{sen}(90°-A)$

Secuencia:

Los valores de las funciones trigonométricas seno y coseno pueden relacionarse considerando los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, los cuales son complementarios.

Esta relación se establece mediante las identidades de esta clase, las cuales son las primeras de varias que se presentarán en clases posteriores.

Puntos esenciales:

Recordar el concepto de ángulos complementarios.

Plantear claramente en la solución del problema que la relación $B=90°-A$ se debe a que los ángulos agudos A y B son complementarios.

Aplicar correctamente la definición de las funciones trigonométricas para poder comparar los valores pedidos.

Utilizar la Tabla Trigonométrica para calcular los valores solicitados y verificar las identidades establecidas:

$$\operatorname{sen} A=\cos(90°-A), \cos A=\operatorname{sen}(90°-A)$$

S4: Relaciones entre seno, coseno y tangente
C1: Relación entre $\operatorname{sen} A$ y $\cos(90°-A)$, $\cos A$ y $\operatorname{sen}(90°-A)$

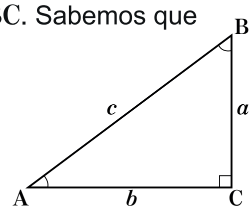
P Dado un ángulo agudo A, responda las siguientes interrogantes:

a) ¿Qué relación guardan $\operatorname{sen} A$ y $\cos(90°-A)$?
b) ¿Qué relación guardan $\cos A$ y $\operatorname{sen}(90°-A)$?

S Sea un triángulo rectángulo ABC. Sabemos que

$$\operatorname{sen} A=\frac{a}{c} \qquad \cos A=\frac{b}{c}$$

$$\operatorname{sen} B=\frac{b}{c} \qquad \cos B=\frac{a}{c}$$



Notamos que $\operatorname{sen} A=\cos B$ y $\cos A=\operatorname{sen} B$.

Como $B=90°-A$, resulta que $\operatorname{sen} A=\cos(90°-A)$ y $\cos A=\operatorname{sen}(90°-A)$

C Dado cualquier triángulo ABC con un ángulo agudo A, se cumple que:

$$\operatorname{sen} A=\cos(90°-A) \qquad \cos A=\operatorname{sen}(90°-A)$$

Ej a) Exprese $\operatorname{sen} 36°$ como el coseno de un ángulo agudo mayor de 45°.

$$\operatorname{sen} 36°=\cos(90°-36°)=\cos 54°$$

b) Exprese $\cos 36°$ como el seno de un ángulo agudo mayor de 45°.

$$\cos 36°=\operatorname{sen}(90°-36°)=\operatorname{sen} 54°$$

E Una con una raya los valores de la columna 1 que coinciden con los valores de la columna 2.

Columna 1	Columna2
sen 24°	cos 8°
cos 75°	sen 15°
sen 82°	cos 66°

Contenido 2 Relaciones trigonométricas $\tan A = \frac{\text{sen } A}{\cos A}$ y $\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$

Aprendizajes esperados

Establece y aplica las relaciones $\tan A = \frac{\text{sen } A}{\cos A}$ y $\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$.

Secuencia:

En la clase anterior se obtuvieron identidades que relacionan las funciones seno y coseno. En esta se clase se obtienen dos más, una de ellas nuevamente vinculando estas funciones y otra que relaciona las tres funciones trigonométricas: seno, coseno y tangente.

Esta clase está destinada a la demostración de dichas identidades. Posteriormente se utilizarán para determinar valores de funciones trigonométricas.

Puntos esenciales:

Aplicar las definiciones de las funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo. Estas son usadas para la prueba de ambas identidades.

Recordar claramente la división de fracciones. Además, la suma de fracciones es requerida en la segunda identidad tratada: recuérdese que si los denominadores son iguales, se procede a sumar los numeradores, y se deja el mismo denominador.

Recordar el enunciado del Teorema de Pitágoras.

Contenido 2: Relaciones trigonométricas $\tan A = \frac{\text{sen } A}{\cos A}$ y $\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$

P

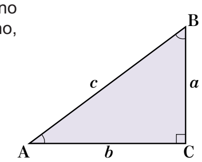
Dado un ángulo agudo A, responda los siguientes incisos:

a) ¿Qué relación guardan $\tan A$ y $\frac{\text{sen } A}{\cos A}$?

b) ¿A qué cantidad es igual la suma $\text{sen}^2 A + \cos^2 A$?

S

a) Sea un triángulo rectángulo como el de la figura, en el que uno de sus ángulos es A. Por definición de las funciones seno, coseno y tangente, se tiene:



$\text{sen } A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$,

$\tan A = \frac{a}{b}$ ①

y

$\frac{\text{sen } A}{\cos A} = \text{sen } A \div \cos A$

$= \frac{a}{c} \div \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \times \frac{c}{b} = \frac{a}{b}$ ②

$(\text{sen } A)^2 = \text{sen}^2 A$

$(\cos A)^2 = \cos^2 A$

De ① y ②, $\tan A = \frac{\text{sen } A}{\cos A}$.

b) Se tiene que:

$\text{sen}^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2$

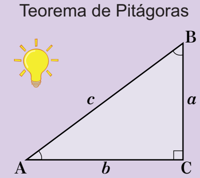
$= \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}$

$= \frac{a^2+b^2}{c^2}$

$= \frac{c^2}{c^2}$

$= 1$

Teorema de Pitágoras



$c^2 = a^2 + b^2$

Por tanto, $\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$.

C

Dado cualquier ángulo agudo A, se cumple que:

$\tan A = \frac{\text{sen } A}{\cos A}$ $\quad$ $\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$

91

C2: Relaciones trigonométricas $\tan A = \frac{\text{sen } A}{\cos A}$ y $\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$

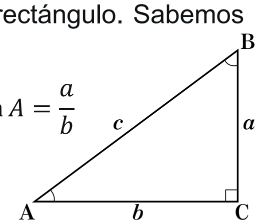
(E) Dado un ángulo agudo A, responda las siguientes interrogantes:

a) ¿Qué relación guardan $\tan A$ y $\frac{\text{sen } A}{\cos A}$?

b) ¿A qué cantidad es igual la suma $\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$?

(S) a) Sea el siguiente triangulo rectángulo. Sabemos que:

$\text{sen } A = \frac{a}{c}$; $\cos A = \frac{b}{c}$; $\tan A = \frac{a}{b}$



Entonces,

$\frac{\text{sen } A}{\cos A} = \text{sen } A \div \cos A$

$= \frac{a}{c} \div \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \times \frac{c}{b} = \frac{a}{b}$

Por lo tanto, $\tan A = \frac{\text{sen } A}{\cos A}$

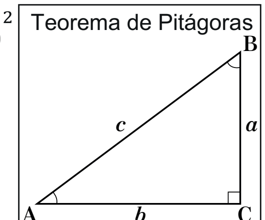
$(\text{sen } A)^2 = \text{sen}^2 A$

$(\cos A)^2 = \cos^2 A$

b) $\text{sen}^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2$

$= \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$

Teorema de Pitágoras



$c^2 = a^2 + b^2$

Por lo tanto, $\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$.

(C) Dado cualquier ángulo agudo A, se cumple que:

$\tan A = \frac{\text{sen } A}{\cos A}$

$\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$

Contenido 3 Valores de las funciones trigonométricas utilizando $\tan A = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A}$ y $\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$

Contenido 3: Valores de las funciones trigonométricas utilizando $\tan A = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A}$ y $\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$

Ejemplo Calcule $\cos A$ y $\tan A$ si $0° < A < 90°$ y $\operatorname{sen} A = \frac{4}{5}$. Utilice la conclusión del contenido anterior.

Al sustituir $\operatorname{sen} A = \frac{4}{5}$ en $\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$ se tiene:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 A = 1$$
$$\cos^2 A = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$$
$$\cos^2 A = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

Como $0° < A < 90°$, entonces $\cos A > 0$. En consecuencia,

$$\cos A = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

Luego,

$$\tan A = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} = \operatorname{sen} A \div \cos A = \frac{4}{5} \div \frac{3}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$$

Por tanto, $\cos A = \frac{3}{5}$ y $\tan A = \frac{4}{3}$.

E

a) Utilice la conclusión del contenido anterior para calcular $\operatorname{sen} A$ y $\tan A$, sabiendo que: $0° < A < 90°$ y $\cos A = \frac{4}{5}$.

b) Calcule $\cos A$ y $\tan A$ utilizando la conclusión del contenido anterior y sabiendo que: $0° < A < 90°$ y $\operatorname{sen} A = \frac{2}{3}$, y calcule $\cos A$ y $\tan A$.

92

Aprendizajes esperados

Aplica las relaciones $\tan A = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A}$ y $\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$.

Secuencia:

Las identidades de la clase anterior se pueden utilizar para determinar los valores de las funciones trigonométricas, conociendo una de estas. En secciones anteriores se abordó este caso, pero recurriendo a la definición misma de las funciones trigonométricas y el Teorema de Pitágoras; esta vez se procede utilizando solamente las identidades y realizando los cálculos algebraicos necesarios.

Puntos esenciales:

Aclarar el orden en el uso de las identidades:

Al conocerse en el problema el valor de $\operatorname{sen} A$, se debe utilizar la identidad $\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$ para determinar el valor de $\cos A$.

Teniendo estos dos valores se calcula el de $\tan A$, pues no es más que el cociente de estos números.

Explicar que la toma de la raíz cuadrada solamente, la justifica la propiedad si $0° < A < 90°$, entonces $\operatorname{sen} A$, $\cos A$ y $\tan A$ son números positivos.

Procurar simplificar todas las raíces cuadradas y fracciones en caso de que sea posible.

C3: Valores de las funciones trigonométricas utilizando $\tan A = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A}$ y $\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$

Ej Si $0° < A < 90°$ y $\operatorname{sen} A = \frac{4}{5}$, calcule $\cos A$ y $\tan A$ utilizando la conclusión del contenido anterior.

C Si $\operatorname{sen} A = \frac{4}{5}$, entonces $\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 A = 1$

$$\cos^2 A = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{25-16}{25} = \frac{9}{25}$$

Como $0° < A < 90°$, así $\cos A > 0$, $\cos A = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

Además, $\tan A = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} = \operatorname{sen} A \div \cos A = \frac{4}{5} \div \frac{3}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$

Por tanto, $\cos A = \frac{3}{5}$ y $\tan A = \frac{4}{3}$.

E a) Si $0° < A < 90°$ y $\cos A = \frac{4}{5}$, y calcule $\operatorname{sen} A$ y $\tan A$.

Como $\cos A = \frac{4}{5}$ y $\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$, entonces:

$\operatorname{sen}^2 A + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$, $\operatorname{sen}^2 A = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{25-16}{25} = \frac{9}{25}$

Como $\cos A > 0$, $\operatorname{sen} A = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

Además, $\tan A = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} = \operatorname{sen} A \div \cos A$

$$= \frac{3}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

Por tanto, $\operatorname{sen} A = \frac{3}{5}$ y $\tan A = \frac{3}{4}$.

b) $0° < A < 90°$ y $\operatorname{sen} A = \frac{2}{3}$ y calcule $\cos A$ y $\tan A$.

Como $\operatorname{sen} A = \frac{2}{3}$ y $\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$,

$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2 A = 1$,

$\cos^2 A = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ $\quad \cos A = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Además, $\tan A = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} = \operatorname{sen} A \div \cos A = \frac{2}{3} \div \frac{\sqrt{5}}{3}$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Por tanto, $\cos A = \frac{\sqrt{5}}{3}$ y $\tan A = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Prueba de Matemática 10mo (30 min.) Fecha: ____________

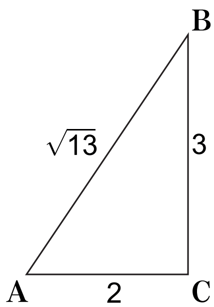
Unidad 5: Introducción a la Trigonometría

/ 20

Nombre: ______________________________ Sección: __________

Sexo: M / F

1. Dado el triángulo rectángulo, encuentre $\operatorname{sen} A$, $\cos A$ y $\tan A$. (1 punto × 3 = 3)



$\operatorname{sen} A =$

$\cos A =$

$\tan A =$

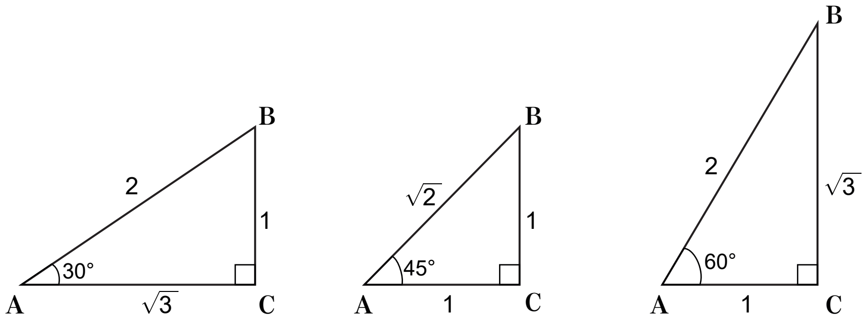
2. Si A es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo y $\operatorname{sen} A = \frac{1}{4}$, calcule los valores de $\cos A$ y $\tan A$. (2 puntos × 2 = 4)

$\cos A =$

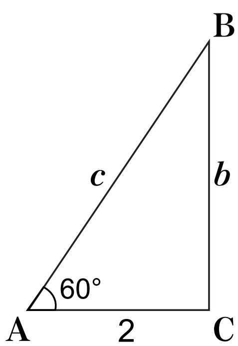
$\tan A =$

3. Compare la tabla haciendo uso de los triángulos de la figura. (1 punto × 9 = 9)

A	30°	45°	60°
sen A			
cos A			
tan A			



4. Calcule la longitud de los lados desconocidos del siguiente triángulo rectángulo.
(2 puntos × 2 = 4)



$b =$

$c =$

Nombre: ______________________________