Unidad 6

Funciones Trigonométricas

Contenido 1 Ángulo en sentido amplio

Aprendizajes esperados

Define el concepto de ángulo en sentido amplio.

Secuencia:

En la unidad anterior se encontraron valores para funciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo. Pero, ¿podemos calcular los valores de estas para otros ángulos, o inclusive, para cualquier número real, sin tener que derivarse de un triángulo rectángulo?

En esta unidad se responde afirmativamente a esta interrogante. Se comienza estableciendo la noción de ángulo en Trigonometría.

Puntos esenciales:

Recordar el concepto de rayo y su representación gráfica mediante una flecha, cuyo punto de partida u origen es el vértice del ángulo a formar.

Establecer la noción de rotación de forma intuitiva y mostrarla en la pizarra mediante el uso del transportador, haciendo notar cuál es lado inicial y cuál el lado terminal del ángulo.

Realizar representaciones de ángulos coterminales notando que al dar una vuelta completa se han recorrido 360°, lo que permite la coincidencia entre los lados terminales de los ángulos en cuestión.

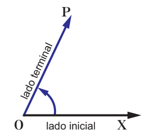
Sección 1: Funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera

Contenido 1: Ángulo en sentido amplio

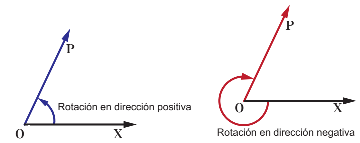
En trigonometría, un ángulo está determinado por la rotación de un rayo alrededor de su origen.

Se fija un rayo $\overrightarrow{OX}$ en el plano y sobre él se traza el rayo $\overrightarrow{OP}$. Cuando se rota el rayo $\overrightarrow{OP}$ hacia arriba alrededor de su **origen**, **O**, se forma el $\angle XOP$.

En este caso, al rayo $\overrightarrow{OX}$ se le llamará **lado inicial** y al rayo $\overrightarrow{OP}$, **lado terminal**.



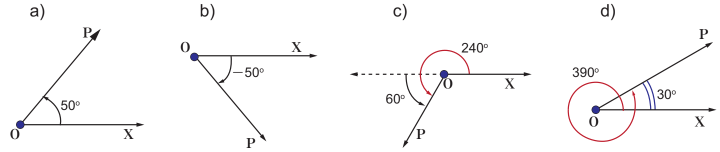
Se pueden considerar dos direcciones para la rotación del lado terminal $\overrightarrow{OP}$ de dicho ángulo. Se dirá que rota en **dirección positiva**, si gira en dirección opuesta a las manecillas del reloj, y rota en **dirección negativa**, si gira hacia la misma dirección de las manecillas del reloj.



El rayo que se encontrará en una posición girada en un ángulo θ, se denominará **lado terminal de θ**.

Ejemplo Trace el lado terminal $\overrightarrow{OP}$ de un ángulo con medida:

a) 50° b) −50° c) 240° d) 390°



Nótese que en la figura del inciso d) se han mostrado los lados iniciales y terminales de los ángulos 30° y 390°. Para ambos, estos lados coinciden, ya que $390° = 30° + (360°)(1)$. Es decir, para obtener un ángulo de 390° se ha dado una vuelta completa de 360° al lado terminal de 30°. A estos ángulos se les llama **coterminales**.

En general, si un ángulo α tiene lado terminal $\overrightarrow{OP}$, los ángulos descritos por la expresión **$\alpha + 360°n$**, siendo n un número entero, tienen como lado terminal también a $\overrightarrow{OP}$.

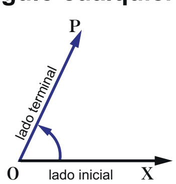
E

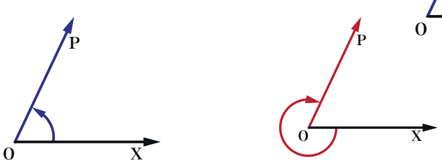
Trace el lado terminal $\overrightarrow{OP}$ de un ángulo con medida:

a) 30° b) −60° c) 210° d) 420°

U6: Funciones trigonométricas
S1: Funciones Trigonométricas de un ángulo cualquiera
C1: Ángulo en sentido amplio

En trigonometría, un ángulo está determinado por la rotación de un rayo alrededor de su origen.



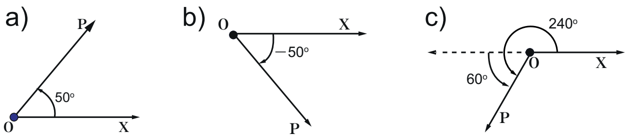


"Dirección positiva" "Dirección negativa"

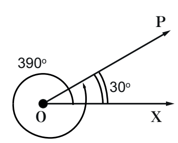
(Ej) Trace el lado terminal $\overrightarrow{OP}$ de:

a) $50°$ b) $-50°$ c) $240°$ d) $390°$

Solución:



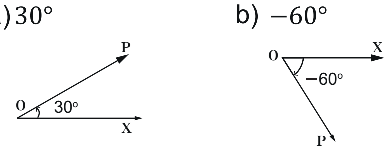
d)



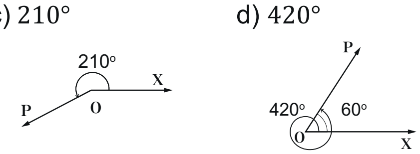
El ángulo de 30° y el de 390° se llaman coterminales pues sus lados coinciden.

(E) Trace el lado terminal $\overrightarrow{OP}$ de:

a) $30°$ b) $-60°$



c) $210°$ d) $420°$

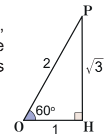


Contenido 2 Funciones trigonométricas para un ángulo cualquiera

Contenido 2: Funciones trigonométricas para un ángulo cualquiera

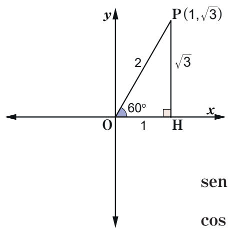
P

Dibuje, en el plano cartesiano, el triángulo rectángulo POH de la derecha, considerando al vértice O como el origen y establezca una relación entre las coordenadas de P y los valores que toman las funciones trigonométricas para el ángulo de 60°.



S

Al dibujar el triángulo rectángulo POH en el primer cuadrante del plano cartesiano, considerando el vértice O como el origen, se tiene la siguiente figura:



De donde, $OH = 1$ y $PH = \sqrt{3}$.

Por tanto, las coordenadas de P son $(1, \sqrt{3})$.

Como $\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$ y $\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1}$, se establecen las siguientes relaciones:

$$\text{sen } 60° = \frac{\text{ordenada de P}}{\text{OP}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{\text{abscisa de P}}{\text{OP}} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60° = \frac{\text{ordenada de P}}{\text{abscisa de P}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$P(1, \sqrt{3})$

abscisa de P

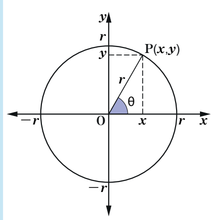
ordenada de P

C

En general, dado un ángulo cualquiera θ y su lado terminal $\overrightarrow{OP}$, con $OP = r$, el punto P con coordenadas (x, y) o simplemente $P(x, y)$ será el punto de intersección de la circunferencia de radio r y el lado terminal de θ. En este caso, los valores de seno, coseno y tangente del ángulo θ, se definen como:

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r} \quad \text{y} \quad \tan \theta = \frac{y}{x}.$$

Nótese que estos valores están definidos por las coordenadas del punto P y el radio r. Además, no importando el valor que tome r, estos valores se determinan en función de θ, es por eso que se denominan **funciones trigonométricas del ángulo θ**.



E

Trace el lado terminal $\overrightarrow{OP}$ para el ángulo θ y exprese los valores de sen θ, cos θ y tan θ considerando:

a) $P(\sqrt{3}, 1)$ y $r = 2$ b) $P(-1, 1)$ y $r = \sqrt{2}$ c) $P(-1, \sqrt{3})$ y $r = 2$

Aprendizajes esperados

Define las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente para un ángulo cualquiera.

Secuencia:

En esta clase se establece una relación entre las coordenadas de un punto cualquiera y los valores que toman las funciones trigonométricas de un ángulo θ, iniciando con ángulos agudos, trazados en el primer cuadrante del plano cartesiano. Posteriormente, esta relación permitirá ubicar valores de las funciones trigonométricas para ángulos con lado terminal en los restantes cuadrantes. Esta ubicación en los distintos cuadrantes permitirá determinar los signos de los valores de las funciones trigonométricas.

Puntos esenciales:

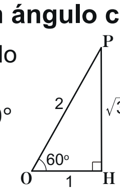
Recordar que las coordenadas de un punto $P(x, y)$ se denominan abscisa x y ordenada y.

Explicar que la ubicación de puntos en el plano cartesiano permite la identificación de OH como la abscisa de P, y PH como la ordenada del mismo punto.

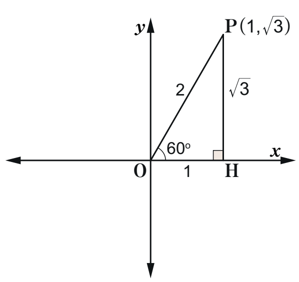
Procurar que la conclusión se derive a partir de la solución del problema planteado, identificando que el radio de la circunferencia mencionada corresponde a la hipotenusa del triángulo rectángulo del problema.

C2: Funciones trigonométricas para un ángulo cualquiera

(P) Dibuje en el plano cartesiano, el triángulo considerando a O como el origen. Relacione los valores de sen 60°, cos 60° y tan 60° con las coordenadas de P.



(S)



$P(1, \sqrt{3})$

abscisa de P

ordenada de P

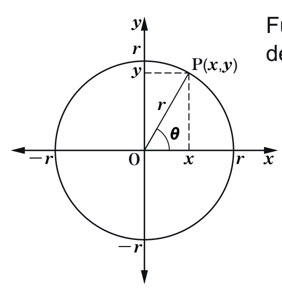
$OH = 1$ y $PH = \sqrt{3}$. Las coordenadas de P son $(1, \sqrt{3})$

$$\text{sen } 60° = \frac{\text{ordenada de } P}{OP} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{\text{abscisa de } P}{OP} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60° = \frac{\text{ordenada de } P}{\text{abscisa de } P} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

(C)



Funciones Trigonométricas del ángulo θ

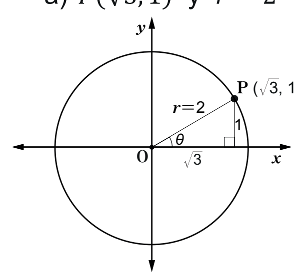
$$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

(E) Trace el lado terminal $\overrightarrow{OP}$ para el ángulo θ y expresa los valores de sen θ, cos θ y tan θ considerando:

a) $P(\sqrt{3}, 1)$ y $r = 2$



$$\text{sen } \theta = \frac{1}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Contenido 3 Determinación de los valores de las funciones trigonométricas para un ángulo cualquiera

Aprendizajes esperados

Determina el valor de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente para un ángulo cualquiera.

▪ Secuencia:

En analogía con la clase anterior, esta vez se determinan valores de las funciones trigonométricas para ángulos cuyo lado terminal está en cualquiera de los cuadrantes del plano cartesiano.

▪ Puntos esenciales:

Recordar la definición de las funciones:

$$\operatorname{sen} = \frac{y}{r},\quad \cos = \frac{x}{r},\quad \tan = \frac{y}{x}.$$

Tener presente los signos de las coordenadas del punto P (en el lado terminal del ángulo).

Recordar el concepto de par lineal y el de ángulos suplementarios.

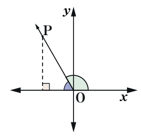
Hacer notar que el triángulo trazado en la solución del problema es el que permite determinar las coordenadas del punto de intersección de P.

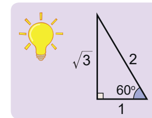
Identificar en la ejercitación que los triángulos rectángulos dados, brindan información respecto a las coordenadas de P, en cada ángulo trazado.

Contenido 3: Determinación de los valores de las funciones trigonométricas para un ángulo cualquiera

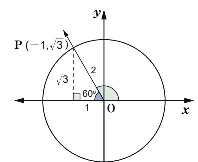
P Determine el valor de sen 120°, cos 120° y tan 120°.

S Trace el lado terminal $\overline{OP}$ de 120° en el plano cartesiano, como sigue





Se observa que $\overline{OP}$ está en el II cuadrante, por lo cual P debe tener abscisa negativa y ordenada positiva. Se traza un triángulo rectángulo cuya hipotenusa esté sobre $\overline{OP}$ y una circunferencia de radio $r=2$ como se muestra en la figura, así se deduce que el punto P tiene coordenadas $(-1, \sqrt{3})$. Se sustituye estos valores en



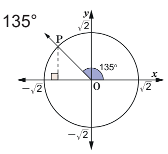
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r},\quad \cos\theta = \frac{x}{r} \text{ y } \tan\theta = \frac{y}{x}$$

resulta que $\operatorname{sen} 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 120° = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$ y $\tan 120° = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$.

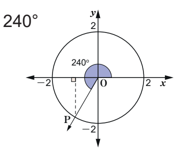
C Para determinar los valores que toman las funciones trigonométricas para un ángulo θ, se debe tener en cuenta el cuadrante en el que se ubique el lado terminal $\overline{OP}$ de θ, las coordenadas (x, y) del punto de intersección P de la circunferencia de radio $r = \mathrm{OP}$ con el lado terminal $\overline{OP}$ y las definiciones de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente para un ángulo cualquiera θ.

E Determine los valores sen θ, cos θ y tan θ para los siguientes valores de θ:

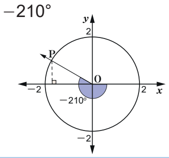
a) $\theta = 135°$



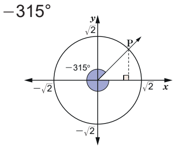
b) $\theta = 240°$

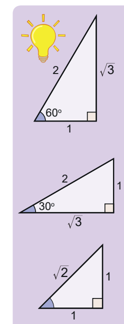


c) $\theta = -210°$



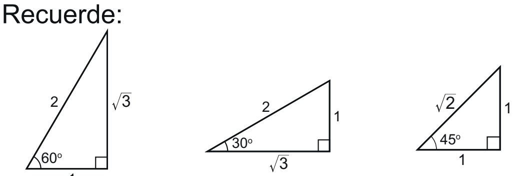
d) $\theta = -315°$





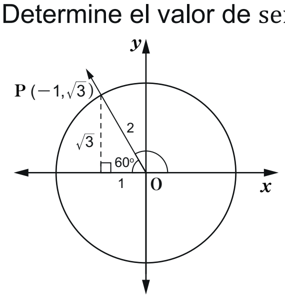
C3: Determinación de los valores de las funciones trigonométricas para un ángulo cualquiera

Recuerde:



P Determine el valor de sen 120°, cos 120° y tan 120°.

S



Sustituyendo los valores en

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

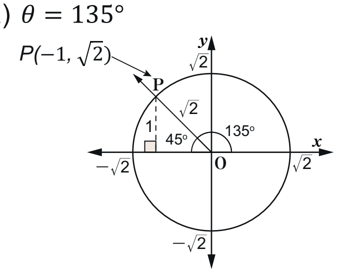
$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{sen} 120° = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos 120° = -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \tan 120° = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}.$$

C *Leer en el libro de texto.*

E Determine los valores sen θ, cos θ y tan θ para los siguientes valores de θ

a) $\theta = 135°$

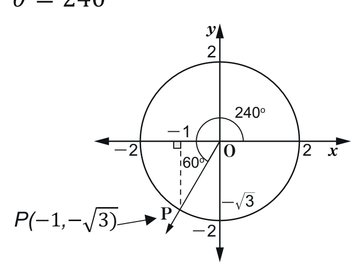


$$\operatorname{sen} 135° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 135° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 135° = -1$$

b) $\theta = 240°$



$$\operatorname{sen} 240° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240° = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 240° = \sqrt{3}$$

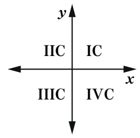
Contenido **4**

Signos de las funciones trigonométricas

Contenido 4: Signos de las funciones trigonométricas

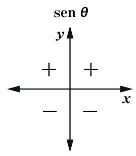
Signo de seno, coseno y tangente

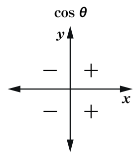
El cuadrante en el que se ubique el lado terminal $\overline{OP}$ del ángulo θ depende del signo que tome cada una de las funciones trigonométricas en dicho ángulo, en consecuencia se tiene que:

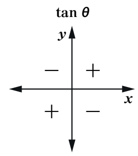


Nota: C significa cuadrante

	I C	II C	III C	IV C
sen θ	+	+	−	−
cos θ	+	−	−	+
tan θ	+	−	+	−

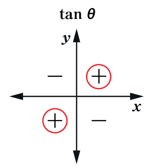




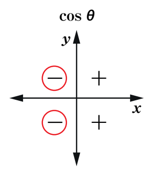


Ejemplo Determine el cuadrante en el que se ubica el lado terminal de θ, si $\tan\theta>0$ y $\cos\theta<0$.

De acuerdo con lo anterior, $\tan\theta>0$ en el I y III cuadrante, y $\cos\theta<0$ en el II y III cuadrante. Por lo cual, es en el III cuadrante que se cumple simultáneamente que $\tan\theta>0$ y $\cos\theta<0$.



En consecuencia, el lado terminal de θ se ubica en el **III cuadrante**.



E

Determine el cuadrante en el que se ubica el lado terminal de θ, si:

a) $\tan\theta>0$ y $\cos\theta>0$

b) $\tan\theta<0$ y $\operatorname{sen}\theta<0$

c) $\operatorname{sen}\theta>0$ y $\cos\theta<0$

d) $\tan\theta<0$, $\cos\theta>0$ y $\operatorname{sen}\theta<0$

99

Aprendizajes esperados

Determina el cuadrante en el que se ubica el lado terminal de un ángulo cualquiera θ, conocido el signo que toma cada una de las funciones trigonométricas

Secuencia:

Al ubicar puntos en el plano cartesiano se tiene en consideración los signos correspondientes de sus coordenadas, esto, junto con lo estudiado en clases anteriores, permite tener en cuenta el signo de los valores de las funciones trigonométricas en dichos cuadrantes.

Puntos esenciales:

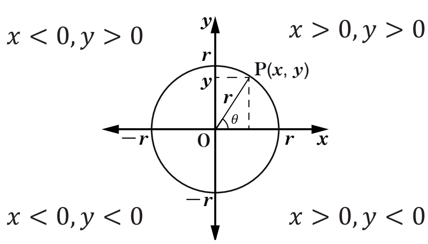
Explicar que la tabla de signos brindada al inicio de esta clase permite decidir el cuadrante en el que se ubica el lado terminal de un ángulo siempre que se conozca el signo de al menos dos de las funciones trigonométricas; y hacer notar que conociendo el signo de solamente una función trigonométrica, sin información adicional, no es posible determinar el cuadrante en cuestión.

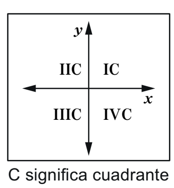
Insistir en que la determinación de signo para valores de las funciones trigonométricas será de esencial utilidad en la representación gráfica de las mismas.

Indicar que el uso de la tabla con los signos de las funciones trigonométricas o el dibujo de planos cartesianos señalando los signos de cada una de estas facilita la ejercitación.

C4: Signos de las funciones trigonométricas

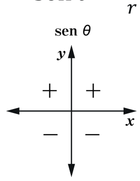
<u>Signo de seno, coseno y tangente</u>

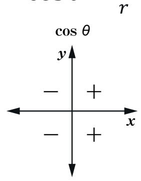


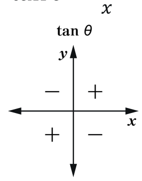


C significa cuadrante

$\operatorname{sen}\theta=\frac{y}{r}$ $\cos\theta=\frac{x}{r}$ $\tan\theta=\frac{y}{x}$







Ej Determine el cuadrante en el que se ubica el lado terminal de θ, si $\tan\theta>0$ y $\cos\theta<0$.

$\tan\theta>0$ en IC y III C
$\cos\theta<0$ en IIC y III C

Es en el III cuadrante que se cumple $\tan\theta>0$ y $\cos\theta<0$.
El lado terminal de θ se ubica en el III cuadrante.

E Determine el cuadrante en el que se ubica el lado terminal de θ, si:

a) $\tan\theta>0$ y $\cos\theta>0$
$\tan\theta>0$ en IC y IIIC
$\cos\theta>0$ en IC y IVC
El lado terminal se ubica en IC.

b) $\tan\theta<0$ y $\operatorname{sen}\theta<0$
$\tan\theta<0$ en IIC y IVC
$\operatorname{sen}\theta<0$ en IIIC y IVC
El lado terminal se ubica en IVC.

Contenido 5 Valores de las funciones trigonométricas para los ángulos especiales 0°, 90°, 180°, 270° y 360°

Aprendizajes esperados

Determina el valor de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente para los ángulos especiales: 0°, 90°, 180°, 270° y 360°.

Secuencia:

En esta clase se continúa con la determinación de valores de las funciones trigonométricas, en secuencia con lo tratado en clases anteriores, esta vez para los denominados ángulos cuadrantales: 0°, 90°, 180°, 270° y 360°. Los valores encontrados son singularmente importantes para esbozar posteriormente las gráficas de las funciones trigonométricas.

Puntos esenciales:

Explicar que la solución del problema planteado y la ejercitación requieren:

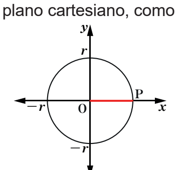
1. Ubicar los ángulos en cuestión sobre los ejes coordenados: Para 0° los lados inicial y terminal coinciden, en el caso de 90°, el lado inicial está sobre el eje x, el lado terminal sobre el eje y, y para 180°, el lado inicial está sobre el eje x, a la derecha de O, y el lado terminal también sobre este eje pero a la izquierda de O.
2. Recordar que los puntos sobre el eje x son de la forma $(p, 0)$ y sobre el eje y, $(0, p)$.
3. Utilizar las expresiones de las funciones trigonométricas dadas en clases anteriores.

Contenido 5: Valores de las funciones trigonométricas para los ángulos especiales 0°, 90°, 180°, 270° y 360°

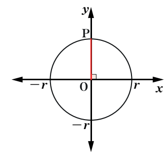
P Complete la siguiente tabla:

θ	0°	90°	180°
$\operatorname{sen}\theta$			
$\cos\theta$			
$\tan\theta$			

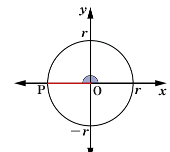
S Se traza el lado terminal $\overline{OP}$, con $OP = r$, para cada uno de los ángulos 0°, 90° y 180° en el plano cartesiano, como sigue:



Cuando $\theta = 0°$, P tiene coordenadas $P(r,0)$



Cuando $\theta = 90°$, P tiene coordenadas $P(0,r)$



Cuando $\theta = 180°$, P tiene coordenadas $P(-r,0)$

En todos los casos, los lados terminales quedan sobre los ejes de coordenadas, a estos ángulos se les llama **cuadrantales**. Se sustituyen los valores correspondientes para θ, x, y y r en $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$, $\cos\theta = \frac{x}{r}$ y $\tan\theta = \frac{y}{x}$, se puede completar la tabla así:

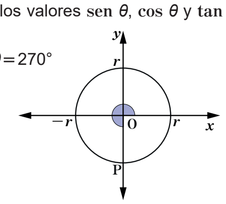
$\operatorname{sen} 0° = \frac{0}{r} = 0$	$\operatorname{sen} 90° = \frac{r}{r} = 1$	$\operatorname{sen} 180° = \frac{0}{r} = 0$
$\cos 0° = \frac{r}{r} = 1$	$\cos 90° = \frac{0}{r} = 0$	$\cos 180° = \frac{-r}{r} = -1$
$\tan 0° = \frac{0}{r} = 0$	$\tan 90° = \frac{r}{0}$ NE	$\tan 180° = \frac{0}{-r} = 0$

Nota: NE significa no existe

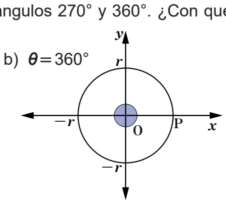
C Para encontrar los valores de las funciones trigonométricas para los ángulos especiales, se traza una circunferencia de radio r y el lado terminal del ángulo especial, se determinan las coordenadas del punto de intersección P y se sustituyen dichos valores en la definición de cada una de las funciones trigonométricas.

E Determine los valores $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$ y $\tan\theta$ para los ángulos 270° y 360°. ¿Con qué valores coinciden?

a) $\theta = 270°$



b) $\theta = 360°$



100

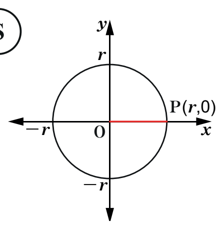
C5: Valores de las funciones trigonométricas para los ángulos especiales ($0°, 90°, 180°, 270°$ y $360°$)

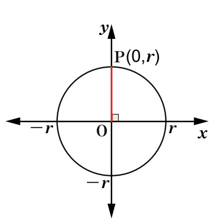
Recuerde:

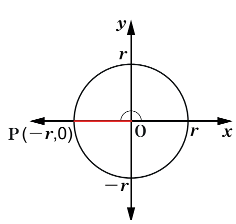
$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$ $\cos\theta = \frac{x}{r}$ $\tan\theta = \frac{y}{x}$

P Complete la siguiente tabla.

S





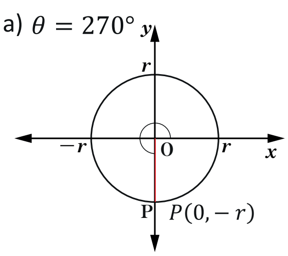


θ	0°	90°	180°
$\operatorname{sen}\theta$	$\frac{0}{r} = 0$	$\frac{r}{r} = 1$	$\frac{0}{r} = 0$
$\cos\theta$	$\frac{r}{r} = 1$	$\frac{0}{r} = 0$	$\frac{-r}{r} = -1$
$\tan\theta$	$\frac{0}{r} = 0$	$\frac{r}{0}$ NE	$\frac{0}{-r} = 0$

C Leer en el libro de texto.

E Determine los valores $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$ y $\tan\theta$ para 270° y 360°. ¿Con qué angulos coinciden?

a) $\theta = 270°$

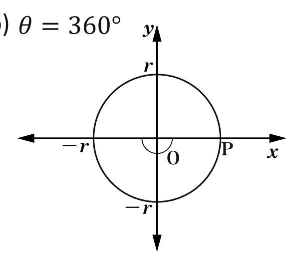


$\operatorname{sen} 270° = \frac{-r}{r} = -1$

$\cos 270° = \frac{0}{r} = 0$

$\tan 270° = \frac{-r}{0}$ NE

b) $\theta = 360°$



$\operatorname{sen} 360° = \operatorname{sen} 0° = \frac{0}{r} = 0$

$\cos 360° = \frac{r}{r} = 1$

$\tan 360° = \frac{0}{r} = 0$

Contenido 6 Valores de θ conocido sen θ

Contenido 6: Valores de θ conocido sen θ

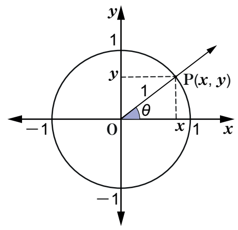
P Si $0° \leq \theta \leq 360°$ y $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$. Determine los valores de θ que satisfacen dicha igualdad.

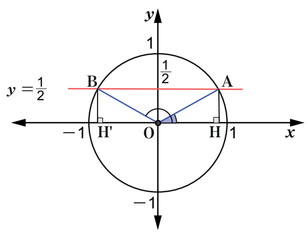
S

Se considera una circunferencia de radio $r = 1$ y $\overrightarrow{OP}$ el lado terminal de θ a como se ve en la figura de la derecha, de donde

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y.$$

Como $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$, entonces $y = \frac{1}{2}$. Así que, se traza la recta $y = \frac{1}{2}$ como se muestra a continuación.

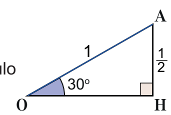




Observe que se cortan en dos puntos A y B, así que existen dos valores de $0° \leq \theta \leq 360°$ para los cuales $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$.

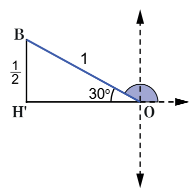
De acuerdo a las medidas de sus lados, el $\triangle AOH$ es un triángulo rectángulo de $30° - 60° - 90°$, así que un valor para θ, es

$$\theta = 30°.$$



De igual forma, $\triangle BOH'$ cumple con las mismas condiciones, así que en este caso

$$\theta = 180° - \measuredangle BOH' = 180° - 30° = 150°.$$



Por lo tanto, los valores de θ son **30°** y **150°**.

E

Si $0° \leq \theta \leq 360°$, determine los valores de θ para los cuales:

a) $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Aprendizajes esperados

Determina los valores del ángulo θ, conocido el valor que toma la función trigonométrica seno.

Secuencia:

En contenidos anteriores se ha procurado determinar el valor o valores de las funciones trigonométricas conociendo alguna información referida a un ángulo dado. En esta clase se presenta una situación recíproca a esta: teniendo el valor de una función trigonométrica, se determinan los valores del ángulo para el cual se tiene dicho valor.

Puntos esenciales:

Explicar que se utiliza la expresión $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$ mediante sustitución que conduce a la igualdad $y = \frac{1}{2}$. Esta expresión corresponde a una recta paralela al eje x, en la que todos sus puntos tienen ordenada y igual a $\frac{1}{2}$.

Explicar que con la representación gráfica de la circunferencia y la recta se muestran dos puntos de intersección, de modo que se deben trazar dos triángulos rectángulos para determinar los ángulos asociados a dichos interceptos.

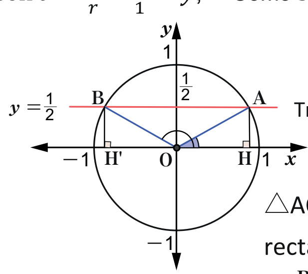
Indicar que si la longitud de uno de los catetos de un triángulo rectángulo es la mitad de la longitud de la hipotenusa, entonces el ángulo opuesto a dicho cateto mide 30°.

C6: Valores de θ conocido sen θ

(P) Si $0° \leq \theta \leq 360°$ y $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$. Determine los valores de θ que satisfacen dicha igualdad.

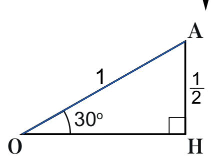
(S) Se considera una circunferencia de radio r = 1.

$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$, Como $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$, entonces $y = \frac{1}{2}$.

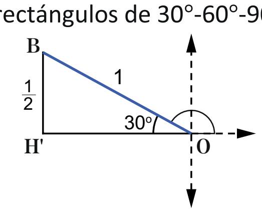


Trazar la recta $y = \frac{1}{2}$

$\triangle AOH$ y $\triangle BOH'$ son triángulos rectángulos de 30°-60°-90°



$\theta = 30°$



$\theta = 180° - 30° = 150°$

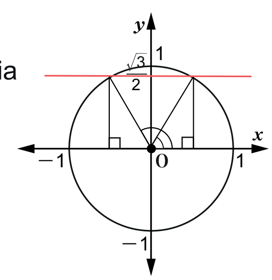
(E) Si $0° \leq \theta \leq 360°$, determine los valores de θ para los cuales

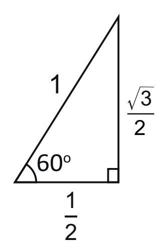
a) $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Se considera una circunferencia de radio r=1.

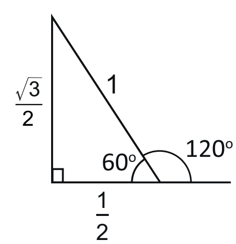
$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, se traza la recta $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$





$\theta = 60°$



$\theta = 180° - 60° = 120°$

Contenido 7 Valores de θ conocido $\cos\theta$

Aprendizajes esperados

Determina los valores del ángulo θ, conocido el valor que toma la función trigonométrica coseno.

Secuencia:

En esta clase se continúa con la situación recíproca señalada en el contenido anterior: teniendo el valor de una función trigonométrica, se determinan los valores del ángulo para el cual se tiene dicho valor, en este caso se aborda un valor de la función coseno, posteriormente se analizará un caso para la tangente.

Puntos esenciales:

Explicar que se utiliza la expresión $\cos\theta = \frac{x}{r}$ mediante sustitución que conduce a la igualdad $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Esta expresión corresponde a una recta paralela al eje y, en la que todos sus puntos tienen como abscisa x igual a $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

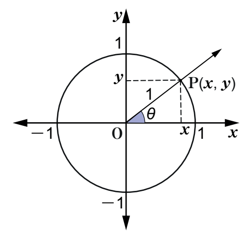
Explicar que la representación gráfica de la circunferencia y la recta muestran dos puntos de intersección, de modo que se deben trazar dos triángulos rectángulos para determinar los ángulos asociados a dichos interceptos. Estos triángulos rectángulos son isósceles, de modo que sus ángulos tienen medidas 45°—45°—90°.

Contenido 7: Valores de θ conocido $\cos\theta$

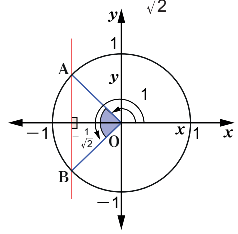
P Si $0° \leq \theta \leq 360°$ y $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Determine los valores de θ que satisfacen dicha igualdad.

S Se considera una circunferencia de radio $r = 1$ y $\overline{OP}$ el lado terminal de θ a como se ve en la figura a la derecha, de donde

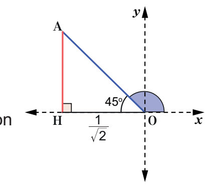
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x.$$



Como $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, entonces $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Así que, se traza la recta $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ como se muestra a continuación.



Observe que se cortan en dos puntos A y B, así que existen dos valores de $0° \leq \theta \leq 360°$ para los cuales $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

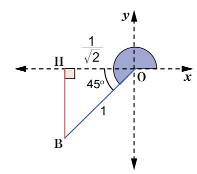


De acuerdo a los medidas de sus lados, $\triangle AOH$ y $\triangle BOH$ son triángulos rectángulos isósceles, así que

$$\theta = 180° - \measuredangle AOH = 180° - 45° = 135°$$

o

$$\theta = 180° + \measuredangle BOH = 180° + 45° = 225°$$



Por lo tanto, los valores de θ son **135°** y **225°**.

E Si $0° \leq \theta \leq 360°$, determine los valores de θ para los cuales:

a) $\cos\theta = \frac{1}{2}$ b) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

102

C7: Valores de θ conocido $\cos\theta$

P Si $0° \leq \theta \leq 360°$ y $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Determine los valores de θ que satisfacen dicha igualdad.

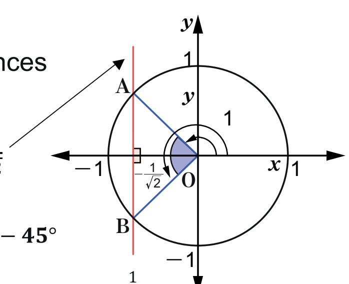
S Se considera una circunferencia de radio $r = 1$.

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$

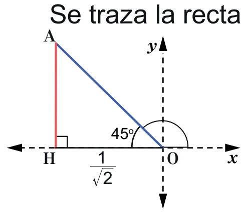
Como $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, Entonces

$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Se traza la recta $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

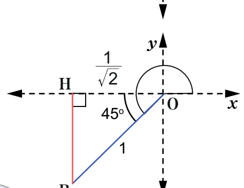


$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$



$\theta = 180° - 45°$
$= 135°$

$\triangle AOH$ y $\triangle BOH$ son triángulos isósceles



$\theta = 180° + 45°$
$= 225°$

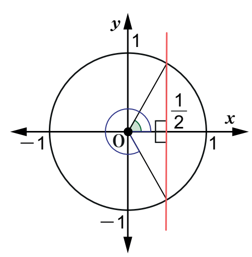
E Si $0° \leq \theta \leq 360°$, determine los valores de θ para los cuales

a) $\cos\theta = \frac{1}{2}$

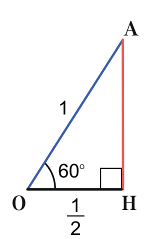
Se considera una circunferencia de radio $r = 1$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = \frac{1}{2}$

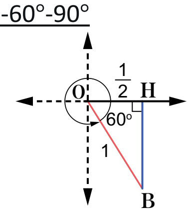
$x = \frac{1}{2}$



Triángulos rectángulos de 30°-60°-90°



$\theta = 60°$



$\theta = 300° - 60° = 300°$

Contenido 8

Valores de θ conocido $\tan\theta$

Contenido 8: Valores de θ conocido $\tan\theta$

Dada una circunferencia de radio $r=1$, $\overrightarrow{OP}$ el lado terminal del ángulo $\theta \neq 90°$ y $Q(1, t)$ un punto sobre $\overrightarrow{OP}$. Se traza el triángulo rectángulo OHQ, de donde

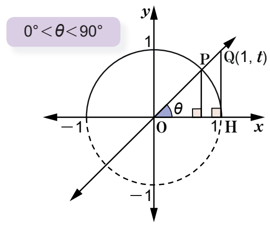
$$\tan\theta = \frac{t}{1}\text{, es decir, } t = \tan\theta.$$

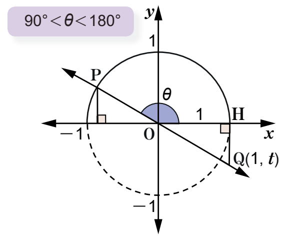
Por tanto, las coordenadas de Q son $(1, \tan\theta)$.

Además, como esta recta tiene por ecuación $y = mx$, las coordenadas de Q satisfacen esta igualdad, es decir,

$$\tan\theta = (m)(1) = m.$$

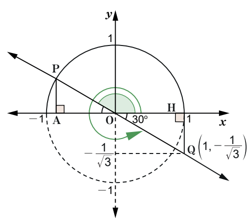
De aquí se sigue que, **la pendiente m de la recta $\overrightarrow{OP}$ es igual a la tangente del ángulo θ.**





P Si $0°<\theta<360°$ y $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Determine los valores de θ que satisfacen dicha igualdad.

S Como $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, el punto Q tiene coordenadas $\left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y por tanto, se encuentra en el IV cuadrante. Se traza la circunferencia de radio $r=1$ y la recta $\overrightarrow{OP}$ de pendiente $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ a como se muestra en la figura.



Observe que se cortan en dos puntos P y Q, así que existen dos valores de $0°<\theta<360°$, para los cuales $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$\triangle OHQ$ y $\triangle OAP$ son triángulos rectángulos de $30° - 60° - 90°$, así que

$\theta = 180° - 30° = 150°$ o $\theta = 360° - 30° = 330°$

Por lo tanto, los valores de θ son **150°** y **330°**.

E Si $0°<\theta<360°$, determine los valores de θ para los cuales:

a) $\tan\theta = -1$

b) $\tan\theta = -\sqrt{3}$

103

Aprendizajes esperados

Determina los valores del ángulo θ, conocido el valor que toma la función trigonométrica tangente.

Secuencia:

En clases anteriores se determinaron los ángulos asociados a un valor de las funciones trigonométricas seno y coseno; en esta clase se aborda el caso de la función tangente.

Puntos esenciales:

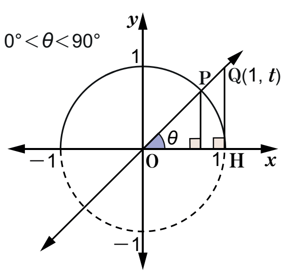
Explicar con claridad la construcción planteada al inicio de la clase, ya que a partir de esta se obtiene la conclusión de que la pendiente de la recta $y = mx$, que forma un ángulo θ con el eje x es $\tan\theta$.

Recordar que las rectas que pasan por O tienen ecuación de la forma $y = mx$, excepto el eje y, el cual forma un ángulo de 90° con el eje x. Esto es avalado por el resultado ya establecido que $\tan 90°$ no existe.

Explicar que la representación gráfica de la circunferencia y la recta muestran dos puntos de intersección, de modo que se deben trazar dos triángulos rectángulos para determinar los ángulos asociados a dichos interceptos, en los cuadrantes I y III.

Explicar que los triángulos formados son de $30° - 60° - 90°$.

C8: Valores de θ conocido $\tan\theta$



Circunferencia de radio $r = 1$

θ ángulo con lado terminal $\overrightarrow{OP}$

$Q(1, t)$ sobre $\overrightarrow{OP}$

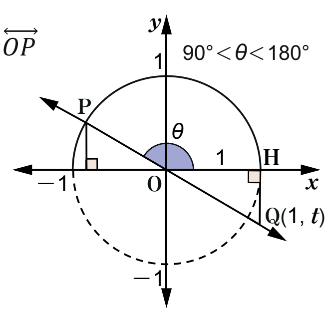
$\tan\theta = \frac{t}{1}$

$t = \tan\theta$

Ecuación de $\overleftrightarrow{OP}$: $y = mx$

$\tan\theta = m \cdot 1 = m$

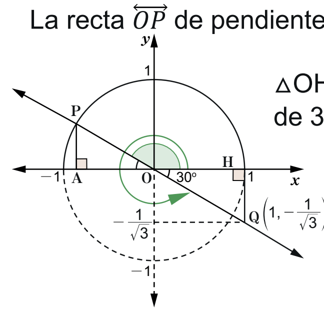
La pendiente m de la recta $\overleftrightarrow{OP}$ es igual a la tangente del ángulo θ



P $0° < \theta < 360°$ y $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Determine los valores de θ que satisfacen dicha igualdad.

S $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $Q\left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Se encuentra en el IV cuadrante.

La recta $\overleftrightarrow{OP}$ de pendiente $-\frac{1}{\sqrt{3}}$



$\triangle OHQ$ y $\triangle OAP$ son triángulos de 30°- 60°- 90°

$\theta = 180° - 30° = 150°$

$\theta = 360° - 30° = 330°$

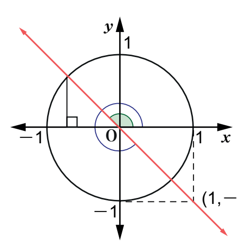
E Si $0° < \theta < 360°$ y $\tan\theta = -1$.

Determine los valores de θ.

Los triángulos formados son 45°- 45°- 90°

$\theta = 180° - 45° = 135°$

$\theta = 360° - 45° = 315°$



Contenido 1 Relación entre $\operatorname{sen}^2\theta$ y $\cos^2\theta$

Aprendizajes esperados

Establece las relaciones $\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$ y $\tan\theta=\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$.

Secuencia:

En la unidad anterior se establecieron las identidades $\tan\theta=\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ y $\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$, siendo θ un ángulo agudo. ¿Podemos generalizar estas igualdades para medidas de otros ángulos? Efectivamente, y estas serán utilizadas en la determinación de valores de funciones trigonométricas, conociendo un valor para una de estas en un cuadrante dado.

Puntos esenciales:

Recordar cada expresión que define a las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente mediante el radio y las coordenadas del punto de intercepto de una circunferencia de centro O y el lado terminal de un ángulo cualquiera.

Explicar que relaciones como $\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ se denominan identidades trigonométricas, y para la demostración de estas se debe tener en cuenta que una vía de prueba de una igualdad es el desarrollo de uno de los lados de esta hasta obtener el otro lado de la misma.

Sección 2: Relación entre seno, coseno y tangente

Contenido 1: Relación entre $\operatorname{sen}^2\theta$ y $\cos^2\theta$

P

Demuestre que $\tan\theta=\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ y $\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$.

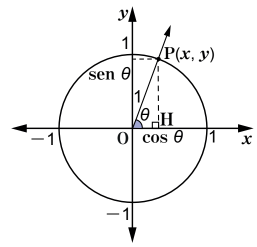
S

Sea $P(x,y)$ el punto de intersección de la circunferencia con centro en el origen y radio $r=1$ y $\overline{OP}$ el lado terminal del ángulo θ. Se aplica la definición de las funciones trigonométricas y se sigue que

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{y}{1}=y,\ \cos\theta=\frac{x}{1}=x\ \text{ y }\ \tan\theta=\frac{y}{x}.$$

Se sustituye $x=\cos\theta$ y $y=\operatorname{sen}\theta$ en la última igualdad resulta

$$\tan\theta=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}.$$



Además, se aplica el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo HOP cuyos catetos tienen longitudes $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ e hipotenusa 1 para obtener

$$\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1.$$

C

Se pueden establecer las siguientes relaciones

$$\tan\theta=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\quad\text{y}\quad\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1.$$

E

Complete la demostración de la relación $\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$.

Demostración

$$\tan^2\theta+1=\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\square}+\frac{\cos^2\theta}{\square}$$
$$=\frac{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta}{\square}$$
$$=\frac{\square}{\cos^2\theta}$$

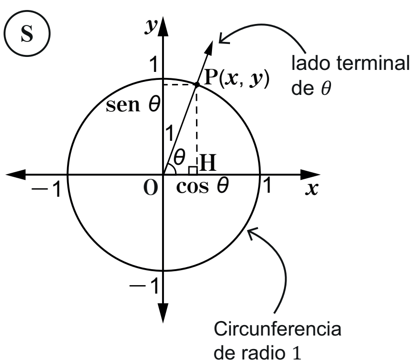
S2: Relación entre seno, coseno y tangente

C1: Relación entre $\operatorname{sen}^2\theta$ y $\cos^2\theta$

(P) Demuestre que

$$\tan\theta=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\quad\text{y}\quad\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$$

(S)



$\operatorname{sen}\theta=\dfrac{y}{1}=y$ ①

$\cos\theta=\dfrac{x}{1}=x$ ②

$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ ③

Sustituir ① y ② en ③

$$\tan\theta=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$\triangle HOP$ es rectángulo, por el Teorema de Pitágoras:

$$\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1^2=1$$

(C)

$\tan\theta=\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$, $\cos\theta\neq0$

$\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$, para cualquier θ.

(E) Complete la demostración de la relación $\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$.

$$\tan^2\theta+1=\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\boxed{\cos^2\theta}}+\frac{\cos^2\theta}{\boxed{\cos^2\theta}}$$
$$=\frac{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta}{\boxed{\cos^2\theta}}$$
$$=\frac{\boxed{1}}{\cos^2\theta}$$

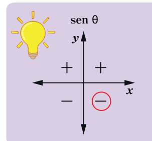
Contenido 2 Aplicación de la relación $\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$ y $\tan\theta=\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

Contenido 2: Aplicación de la relación $\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$ y $\tan\theta=\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

Ejemplo Si el lado terminal del ángulo θ se encuentra en el IV cuadrante y $\cos\theta=\frac{4}{5}$, determine $\operatorname{sen}\theta$ y $\tan\theta$.

Se sustituye $\cos\theta=\frac{4}{5}$ en $\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$, se sigue que

$$\operatorname{sen}^2\theta+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$$
$$\operatorname{sen}^2\theta=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$$



Como el lado terminal del ángulo θ se encuentra en el IV cuadrante, $\operatorname{sen}\theta<0$. Así,

$$\operatorname{sen}\theta=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}.$$

Ahora, se sustituyen estos valores en $\tan\theta=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ y se obtiene

$$\tan\theta=\frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=-\frac{3}{5}\div\frac{4}{5}=\left(-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{4}\right)$$
$$=-\frac{3}{4}$$

Por tanto, $\operatorname{sen}\theta=-\frac{3}{5}$ y $\tan\theta=-\frac{3}{4}$.

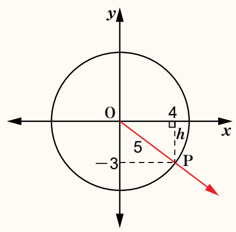
Otra manera de resolver el problema es ocupando el Teorema de Pitágoras a como sigue:

$$5^2=4^2+h^2$$
$$h=\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{9}=3$$

Así que, P $(4,-3)$

Luego,

$$\operatorname{sen}\theta=-\frac{3}{5}\ \text{y}\ \tan\theta=-\frac{3}{4}$$



E

a) Si el lado terminal del ángulo θ se encuentra en el IV cuadrante y $\cos\theta=\frac{3}{4}$, determine $\operatorname{sen}\theta$ y $\tan\theta$.

b) Si el lado terminal del ángulo θ se encuentra en el III cuadrante y $\operatorname{sen}\theta=-\frac{3}{5}$, determine $\cos\theta$ y $\tan\theta$.

Aprendizajes esperados

Aplica las relaciones $\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$ y $\tan\theta=\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ en el cálculo de los valores de las funciones trigonométricas.

Secuencia:

Las identidades de la clase anterior se pueden utilizar para determinar los valores de las funciones trigonométricas, conociendo una de estas y el cuadrante en el que se ubica el lado terminal del ángulo θ. Para ello se procede utilizando las identidades, los signos para los valores de las funciones trigonométricas en los distintos cuadrantes y realizando los cálculos algebraicos necesarios.

Puntos esenciales:

Aclarar el orden en el uso de las identidades:

Al conocerse en el problema el valor de $\cos\theta$, se debe utilizar la identidad $\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$ para determinar el valor de $\operatorname{sen}\theta$.

El signo de la raíz cuadrada extraída se determina teniendo en cuenta los signos correspondientes a las funciones trigonométricas en los cuadrantes del plano cartesiano. Teniendo estos dos valores se calcula el de $\tan\theta$, pues no es más que el cociente de estos números.

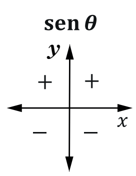
Procurar la simplificación de todas las raíces cuadradas y fracciones en los casos que sean posibles.

C2: Aplicación de la relación $\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$ y $\tan\theta=\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

Ej El lado terminal de θ está en el IVC y $\cos\theta=\frac{4}{5}$. Determine $\operatorname{sen}\theta$ y $\tan\theta$.

Sustituyendo $\cos\theta=\frac{4}{5}$ en $\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$

$$\operatorname{sen}^2\theta+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$$
$$\operatorname{sen}^2\theta=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$$



El lado terminal de θ se encuentra en el IVC, $\operatorname{sen}\theta<0$. Así

$$\operatorname{sen}\theta=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$$

Luego

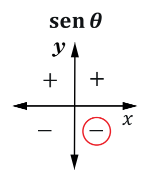
$$\tan\theta=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=-\frac{3}{5}\div\frac{4}{5}=\left(-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{4}\right)=-\frac{3}{4}$$

E a) El lado terminal del ángulo θ está en el IVC y $\cos\theta=\frac{3}{4}$. Determine $\operatorname{sen}\theta$ y $\tan\theta$.

$$\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$$
$\operatorname{sen}^2\theta+\left(\frac{3}{4}\right)^2=1$, es decir,
$$\operatorname{sen}^2\theta=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$$

θ se encuentra en el IVC,

Por lo tanto, $\operatorname{sen}\theta<0$.



$$\operatorname{sen}\theta=-\sqrt{\frac{7}{16}}=-\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\tan\theta=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4}}=-\frac{\sqrt{7}}{4}\div\frac{3}{4}=\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{\sqrt{7}}{3}$$

Contenido 3 Aplicación de la relación $\tan^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

Aprendizajes esperados

Aplicación de la relación $\tan^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ en el cálculo de los valores de las funciones trigonométricas

Secuencia:

La identidad demostrada en clases anteriores: $\tan^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$, puede ser utilizada en el cálculo de valores de funciones trigonométricas, bajo las condiciones: un valor de una función trigonométrica y el cuadrante en el que se ubica el lado terminal de θ.

Puntos esenciales:

Recordar que sustituir significa reemplazar un valor o una expresión por otra equivalente, con el fin de aplicar procedimientos algebraicos que simplifiquen las expresiones dadas. Se ha de aplicar todo procedimiento necesario para despejar las expresiones $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$ o $\tan\theta$.

Recordar el signo que toma cada función trigonométrica en los distintos cuadrantes.

Explicar que la igualdad $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ puede ser utilizada para determinar el valor de una de las funciones trigonométricas siempre que se conozcan los valores respectivos de las restantes funciones.

Contenido 3: Aplicación de la relación $\tan^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

P Si el lado terminal del ángulo θ se encuentra en el IV cuadrante y $\tan\theta = -2$, determine $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

S

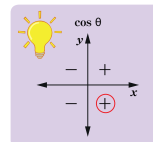
Se sustituye $\tan\theta = -2$ en $\tan^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$, se sigue que

$$(-2)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$5 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{5}$$

Como el lado terminal del ángulo θ se encuentra en el IV cuadrante, $\cos\theta > 0$, así que



$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Se sustituyen estos valores en $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$, y se tiene

$$-2 = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\frac{1}{\sqrt{5}}},$$

es decir,

$$\operatorname{sen}\theta = (-2)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

En consecuencia,

$$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}} \text{ y } \boldsymbol{\operatorname{sen}\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}}.$$

E

a) Si el lado terminal del ángulo θ se encuentra en el III cuadrante y $\tan\theta = 3$, determine $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

b) Si el lado terminal del ángulo θ se encuentra en el II cuadrante y $\tan\theta = -\sqrt{5}$, determine $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

107

C3: Aplicación de la relación $\tan^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

P El lado terminal de θ está en el IV C $\tan\theta = -2$, determine $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

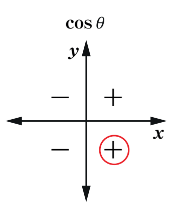
S $\tan^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ $\qquad \tan\theta = -2$

$$(-2)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$5 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{5}$$

Como el lado terminal está en el IV cuadrante, $\cos\theta > 0$, así que



$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$-2 = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

$$\operatorname{sen}\theta = (-2)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

E El lado terminal del ángulo θ está en el IIIC y $\tan\theta = 3$, determine $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

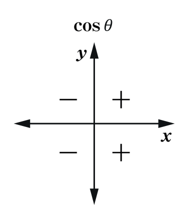
$$\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$3^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \qquad \tan\theta = 3$$

$$10 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{10}$$

Como el lado terminal está en el IIIC, $\cos\theta < 0$. Así



$$\cos\theta = -\sqrt{\frac{1}{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$3 = \frac{\operatorname{sen}\theta}{-\frac{1}{\sqrt{10}}}, \text{ es decir, } \operatorname{sen}\theta = (3)\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

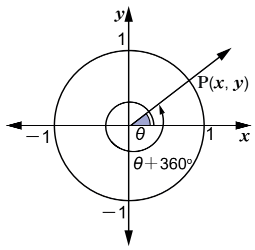
Contenido 1 Relación entre los valores que toman las funciones trigonométricas para un ángulo cualquiera θ y los ángulos $\theta+360°(n)$ y $-\theta$, respectivamente

Sección 3: Relación entre las funciones trigonométricas

Contenido 1: Relación entre los valores que toman las funciones trigonométricas para un ángulo cualquiera θ y los ángulos $\theta+360°(n)$ y $-\theta$, respectivamente

Relaciones trigonométricas (1)

Sea $\mathrm{P}(x, y)$ el punto de intersección de la circunferencia con centro en el origen y radio $r=1$ y $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ el lado terminal del ángulo θ. Los ángulos descritos por la expresión $\theta+360°(n)$, siendo n un número entero, tienen el mismo lado inicial y terminal del ángulo θ. Así que



$$\textbf{sen}\,[\theta+360°(n)] = \textbf{sen}\,\theta$$
$$\textbf{cos}\,[\theta+360°(n)] = \textbf{cos}\,\theta$$
$$\textbf{tan}\,[\theta+360°(n)] = \textbf{tan}\,\theta$$

Ejemplo 1 Determine el valor de sen 405°.

Como $405° = 45°+360°$, entonces $\text{sen } 405° = \text{sen } (45°+360°)$. Luego,

$$\text{sen } 405° = \text{sen } (45°+360°) = \text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por tanto,

$$\textbf{sen } 405° = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

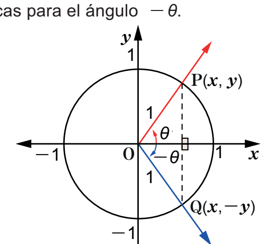
E_1

Determine los siguientes valores haciendo uso de las relaciones anteriores:

a) sen 390° b) cos 420° c) tan 750°

Relaciones trigonométricas (2)

De acuerdo con la figura que se muestra abajo, determine los valores que toman las funciones trigonométricas para el ángulo $-\theta$.



Este contenido tiene 2 páginas (ver en el LT)

Aprendizajes esperados

Establece una relación entre los valores que toman las funciones trigonométricas para un ángulo cualquiera θ y los ángulos $\theta+360°(n)$ y $-\theta$, respectivamente.

Secuencia:

Al iniciar esta unidad se enunció que los ángulos θ y $\theta+360°(n)$, con n entero, se denominan coterminales, y que, si θ es un ángulo positivo, $-\theta$ representa un ángulo negativo. En esta clase se establecen relaciones entre los valores de las funciones trigonométricas para estos tipos de ángulos que facilitarán los cálculos de dichos valores.

Puntos esenciales:

Recordar el concepto de ángulos coterminales y su representación gráfica.

Hacer notar que la expresión de la medida de un ángulo como suma de otros dos, siendo uno un múltiplo de 360°, facilita el cálculo de valores de funciones trigonométricas para ángulos coterminales.

Explicar que el cálculo de valores para ángulos negativos se simplifica teniendo en cuenta que la función coseno toma los mismos valores para ángulos positivos y negativos, no así en el caso de seno y tangente.

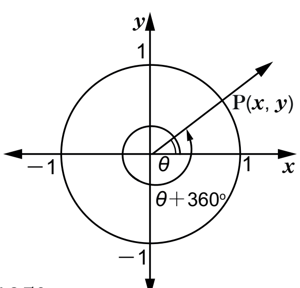
Recordar la definición de seno, coseno y tangente en función de x, y y r.

S3: Relación entre las funciones trigonométricas

C1: Valores que toman las funciones trigonométricas para $\theta + 360°(n)$ y $-\theta$

$$\textbf{sen}[\theta + 360°(n)] = \textbf{sen}\,\theta$$
$$\textbf{cos}[\theta + 360°(n)] = \textbf{cos}\,\theta$$
$$\textbf{tan}[\theta + 360°(n)] = \textbf{tan}\,\theta$$

(n : un número entero)



Ej1 Determine el valor de sen 405°.

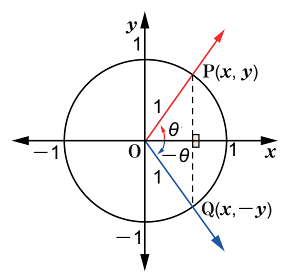
$$\text{sen } 405° = \text{sen}(45° + 360°) = \text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

E1 Determine los siguientes valores

a) $\text{sen } 390° = \text{sen}(30° + 360°) = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$

b) $\cos 420° = \cos(60° + 360°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$

c) $\tan 750° = \tan[30° + 360°(2)] = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$



$$\textbf{sen}(-\boldsymbol{\theta}) = \frac{-y}{1} = -\,\textbf{sen}\,\boldsymbol{\theta}$$
$$\textbf{cos}(-\boldsymbol{\theta}) = \frac{x}{1} = \textbf{cos}\,\boldsymbol{\theta}$$
$$\textbf{tan}(-\boldsymbol{\theta}) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\,\textbf{tan}\,\boldsymbol{\theta}$$

Ej2 Determine el valor de $\cos(-60°)$.

$$\cos(-60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

E2 Determine los siguientes valores haciendo uso de las relaciones anteriores.

a) $\cos(-30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\text{sen}(-45°) = -\text{sen } 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

c) $\tan(-60°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}$

Contenido 2 Relación entre los valores que toman las funciones trigonométricas para un ángulo cualquiera θ y los ángulos $180° + \theta$ y $180° - \theta$, respectivamente

Aprendizajes esperados

Establece una relación entre los valores que toman las funciones trigonométricas para un ángulo cualquiera θ y los ángulos $180° + \theta$ y $180° - \theta$, respectivamente.

Secuencia:

Se cuenta ya con varias relaciones que permiten determinar valores de funciones trigonométricas. En esta ocasión se incorporan a la lista relaciones que vinculan los valores de estas funciones para los ángulos θ y $180° \pm \theta$. En el libro de texto se obtendrán también relaciones para los ángulos θ y $90° \pm \theta$.

Puntos esenciales:

Procurar una representación adecuada de los ángulos $180° + \theta$ y $180° - \theta$ para identificar las coordenadas de los puntos de intersección de sus lados terminales con la circunferencia de radio 1.

Aplicar correctamente las expresiones de las funciones trigonométricas estudiadas en esta unidad para los ángulos $180° \pm \theta$.

Explicar que la expresión de la medida de un ángulo como suma o resta de otros dos, siendo uno 180°, facilita el cálculo de valores de funciones trigonométricas para los ángulos pedidos, que pueden tener medidas mayores o menores a 180°: si es menor a 180°, debe expresarse mediante una resta, si es mayor a este, mediante una suma.

Contenido 2: Relación entre los valores que toman las funciones trigonométricas para un ángulo cualquiera θ y los ángulos $180°+\theta$ y $180°-\theta$, respectivamente

Relaciones trigonométricas (3)

A partir de las figuras que se muestran a la derecha, se sabe que:

- El lado terminal de θ es $\overrightarrow{OP}$, el lado terminal de $180°+\theta$ es $\overrightarrow{OQ}$ (figura 1) y el lado terminal de $180°-\theta$ es $\overrightarrow{OR}$ (figura 2).
- Las coordenadas de P son (x, y), las de Q son $(-x, -y)$ y las de R son $(-x, y)$.

figura 1

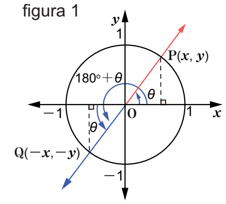
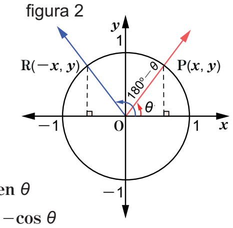


figura 2



Por otra parte, anteriormente se estableció que para un ángulo cualquiera θ se tiene que

$$\operatorname{sen}\theta = y, \quad \cos\theta = x \ \text{ y } \ \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

Así que, para los ángulos $180°+\theta$ y $180°-\theta$ se obtiene

$\operatorname{sen}(180°+\theta) = -y = -\operatorname{sen}\theta$

$\cos(180°+\theta) = -x = -\cos\theta$

$\tan(180°+\theta) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \tan\theta$

$\operatorname{sen}(180°-\theta) = y = \operatorname{sen}\theta$

$\cos(180°-\theta) = -x = -\cos\theta$

$\tan(180°-\theta) = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x} = -\tan\theta$

Por tanto,

$\operatorname{sen}(180°+\theta) = -\operatorname{sen}\theta$	$\operatorname{sen}(180°-\theta) = \operatorname{sen}\theta$
$\cos(180°+\theta) = -\cos\theta$	$\cos(180°-\theta) = -\cos\theta$
$\tan(180°+\theta) = \tan\theta$	$\tan(180°-\theta) = -\tan\theta$

Ejemplo 1 Determine el valor de sen 210°.

Como $210° = 180° + 30°$, entonces $\operatorname{sen} 210° = \operatorname{sen}(180° + 30°)$. Luego,

$$\operatorname{sen} 210° = \operatorname{sen}(180° + 30°) = -\operatorname{sen} 30° = -\frac{1}{2}.$$

En conclusión,

$$\mathbf{sen\ 210° = -\frac{1}{2}}.$$

E1

Determine los siguientes valores utilizando las relaciones anteriores:

a) sen 240° b) cos 210° c) tan 225°

111

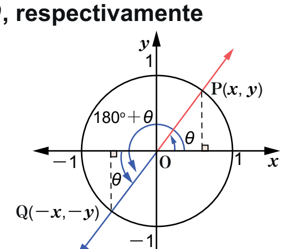
Este contenido tiene 2 páginas (ver en el LT)

C2: Relación entre los valores que toman las funciones trigonométricas para un ángulo cualquiera θ y los ángulos $180° + \theta$ y $180° - \theta$, respectivamente

$\operatorname{sen}(180° + \theta) = -y = -\operatorname{sen}\theta$

$\cos(180° + \theta) = -x = -\cos\theta$

$\tan(180° + \theta) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \tan\theta$

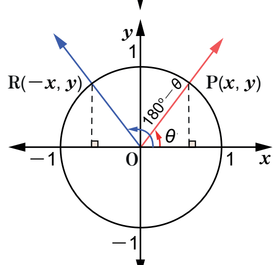


$\operatorname{sen}(180° - \theta) = y = \operatorname{sen}\theta$

$\cos(180° - \theta) = -x = -\cos\theta$

$\tan(180° - \theta) = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x}$

$= -\tan\theta$



Ej1 Determine el valor de sen 210°.

$$\operatorname{sen} 210° = \operatorname{sen}(180° + 30°) = -\operatorname{sen} 30° = -\frac{1}{2}$$

E1 a) $\operatorname{sen} 240° = \operatorname{sen}(180° + 60°) = -\operatorname{sen} 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos 210° = \cos(180° + 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ej2 Determine el valor de cos 135°

$$\cos 135° = \cos(180° - 45°) = -\cos 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

E2 Determine los siguientes valores utilizando las relaciones anteriores.

a) $\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\operatorname{sen} 120° = \operatorname{sen}(180° - 60°) = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\tan 135° = \operatorname{sen}(180° - 45°) = -\tan 45° = -1$

Contenido 3 Relación entre los valores que toman las funciones trigonométricas para un ángulo cualquiera θ y los ángulos $90°+\theta$ y $90°-\theta$, respectivamente

Contenido 3: Relación entre los valores que toman las funciones trigonométricas para un ángulo cualquiera θ y los ángulos $90°+\theta$ y $90°-\theta$, respectivamente

Relaciones trigonométricas (4)

A partir de las figuras que se muestran a la derecha, se sabe que:

- El lado terminal de θ es $\overrightarrow{OP}$, el lado terminal de $90°+\theta$ es $\overrightarrow{OQ}$ (figura 1) y el lado terminal de $90°-\theta$ es $\overrightarrow{OR}$ (figura 2).
- Las coordenadas de P son (x, y), las de Q son $(-y, x)$ y las de R son (y, x).

figura 1

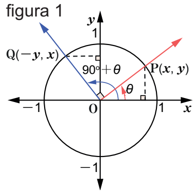
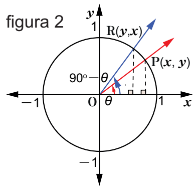


figura 2



Por otra parte, anteriormente se estableció que para un ángulo cualquiera θ se tiene que

$$\operatorname{sen}\theta = y,\quad \cos\theta = x \ \text{ y } \ \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

Así que, para los ángulos $90°+\theta$ y $90°-\theta$ se sigue que

$$\operatorname{sen}(90°+\theta) = x = \cos\theta \qquad \operatorname{sen}(90°-\theta) = x = \cos\theta$$

$$\cos(90°+\theta) = -y = -\operatorname{sen}\theta \qquad \cos(90°-\theta) = y = \operatorname{sen}\theta$$

$$\tan(90°+\theta) = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y} = -\frac{1}{\frac{y}{x}} = -\frac{1}{\tan\theta} \qquad \tan(90°-\theta) = \frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{y}{x}} = \frac{1}{\tan\theta}$$

Por tanto,

$\operatorname{sen}(90°+\theta) = \cos\theta$	$\operatorname{sen}(90°-\theta) = \cos\theta$
$\cos(90°+\theta) = -\operatorname{sen}\theta$	$\cos(90°-\theta) = \operatorname{sen}\theta$
$\tan(90°+\theta) = -\frac{1}{\tan\theta}$	$\tan(90°-\theta) = \frac{1}{\tan\theta}$

Ejemplo Determine el valor de $\operatorname{sen} 135°$, utilizando las relaciones anteriores.

Como $135° = 90°+45°$, entonces $\operatorname{sen} 135° = \operatorname{sen}(90°+45°)$. Luego,

$$\operatorname{sen} 135° = \operatorname{sen}(90°+45°) = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

En conclusión,

$$\mathbf{sen\ 135° = \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

E

Determine los siguientes valores utilizando las relaciones anteriores:

a) $\operatorname{sen} 150°$ b) $\cos 120°$ c) $\tan 120°$

Aprendizajes esperados

Establece una relación entre los valores que toman las funciones trigonométricas para un ángulo θ y los ángulos $90°+\theta$ y $90°-\theta$, respectivamente.

Secuencia:

En esta clase se abordan las relaciones que vinculan los valores de estas funciones para los ángulos θ y $90°\pm\theta$. Así, se agregan expresiones de gran utilidad a la lista de identidades trigonométricas.

Puntos esenciales:

Procurar una representación adecuada de los ángulos $90°+\theta$ y $90°-\theta$ para identificar las coordenadas de los puntos de intersección de sus lados terminales con la circunferencia de radio 1.

Aplicar correctamente las expresiones de las funciones trigonométricas estudiadas en esta unidad para los ángulos $90°\pm\theta$.

Explicar que la expresión de la medida de un ángulo como suma o resta de otros dos, siendo uno 90°, facilita el cálculo de valores de funciones trigonométricas para los ángulos solicitados, que pueden tener medidas mayores o menores a 90°: si es menor a 90°, debe expresarse mediante una resta, si es mayor a este, mediante una suma, y tener presente los signos de las funciones trigonométricas en los distintos cuadrantes.

C3: Relación entre los valores que toman las funciones trigonométricas para un ángulo cualquiera θ y los ángulos $90°+\theta$ y $90°-\theta$, respectivamente

$\operatorname{sen}\theta = y,\ \cos\theta = x,\ \tan\theta = \frac{y}{x}$

Así, para $90°+\theta$ y $90°-\theta$:

$$\boldsymbol{\operatorname{sen}(90°+\theta) = x = \cos\theta}$$

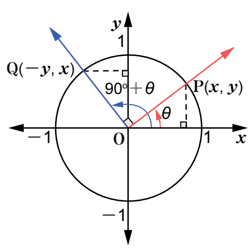
$$\boldsymbol{\cos(90°+\theta) = -y = -\operatorname{sen}\theta}$$

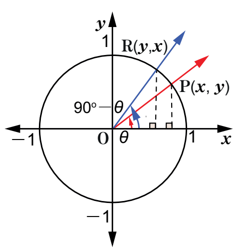
$$\boldsymbol{\tan(90°+\theta) = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y} = -\frac{1}{\frac{y}{x}} = -\frac{1}{\tan\theta}}$$

$$\boldsymbol{\operatorname{sen}(90°-\theta) = x = \cos\theta}$$

$$\boldsymbol{\cos(90°-\theta) = y = \operatorname{sen}\theta}$$

$$\boldsymbol{\tan(90°-\theta) = \frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{y}{x}} = \frac{1}{\tan\theta}}$$





Ej Determine el valor de $\operatorname{sen} 135°$

$$\operatorname{sen} 135° = \operatorname{sen}(90°+45°) = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

E Determine los siguientes valores

a) $\operatorname{sen} 150° = \operatorname{sen}(90°+60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$

b) $\cos 120° = \cos(90°+30°) = -\operatorname{sen} 30° = -\frac{1}{2}$

c) $\tan 120° = \frac{1}{\tan(90°+30°)} = -\frac{1}{\tan 30°} = -\sqrt{3}$

Contenido 1 Radianes

Aprendizajes esperados

Convierte medidas de ángulos de grados a radianes y viceversa.

Secuencia:

Hasta este punto, la medida de ángulos ha sido en grados, sin embargo, en Trigonometría existe otra medida de ángulos, equivalente a la mencionada: radianes, en la cual se utiliza constantemente el número π. La medida de ángulos expresada en radianes, permitirá el trazado de gráficas de las funciones trigonométricas.

Puntos esenciales:

Brindar una representación gráfica correcta de un radián, puesto que este concepto demanda de otras nociones: ángulo central, radio, y arco de circunferencia (y longitud de este).

Establecer las relaciones entre grados y radianes que permite la conversión de una a otra unidad de medida:

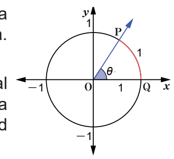
1. Si se desea convertir grados a radianes, multiplíquese la medida dada por $\dfrac{\pi}{180}$ y simplifique la fracción resultante, si es posible.
2. Si se desea convertir radianes a grados, multiplíquese la medida dada por $\dfrac{180°}{\pi}$ y simplifique.

Sección 4: Gráficas de las funciones trigonométricas

Contenido 1: Radianes

Definición

Un **radián** es la medida de un ángulo central de una circunferencia que interseca un arco de longitud igual al radio de la circunferencia. Se escribe abreviadamente rad.



Considere un ángulo θ con vértice O, lado inicial $\overline{OQ}$ y lado terminal $\overline{OP}$ y una circunferencia con centro en O y radio $r=1$. Sea r la longitud del arco PQ que subtiende el angulo θ. Entonces, la longitud del arco $\widehat{PQ}$ es la medida en radianes del ángulo central θ.

Como la longitud de una circunferencia de radio $r=1$ es igual a 2π, se tiene que $360°=2\pi\ \mathrm{rad}$.

De donde

$$\boxed{180° = \pi\ \mathrm{rad}}$$

Además, de la igualdad anterior se deduce que

$$1° = \frac{\pi}{180}\ \mathrm{rad} \qquad 1\ \mathrm{rad} = \frac{180°}{\pi}$$

Estas dos últimas igualdades serán de gran utilidad al momento de convertir medidas de ángulos.

Cuando en la medida del ángulo no se especifique la unidad que se utiliza se considerará que está expresada en radianes.

Ejemplo 1 Convierta 45° a radianes.

Como $1°=\frac{\pi}{180}$, entonces $45°=(45)\left(\frac{\pi}{180}\right)=(\cancel{45})\left[\frac{\pi}{(\cancel{45})(4)}\right]=\frac{\pi}{4}$

Por tanto, $45° = \frac{\pi}{4}$

E1 Convierta las siguientes medidas en radianes:

a) 60° b) 120° c) 210° d) 300°

Ejemplo 2 Convierta $\frac{\pi}{6}$ a grados.

Como $1\ \mathrm{rad}=\frac{180°}{\pi}$, se sigue que

$$\frac{\pi}{6}=\left(\frac{\cancel{\pi}}{6}\right)\left(\frac{180°}{\cancel{\pi}}\right)=30°.$$

En consecuencia, $\frac{\pi}{6}=30°$.

E2 Convierta las siguientes medidas en grados.

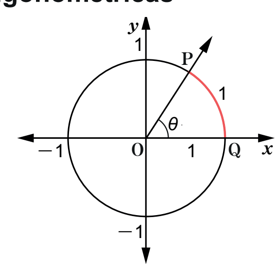
a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{3\pi}{4}$ c) $\frac{5\pi}{6}$ d) $\frac{4\pi}{3}$

115

S4: Gráficas de las funciones trigonométricas

C1: Radianes

Un **radián** es la medida de un ángulo central de una circunferencia que interseca un arco de longitud igual al radio de la circunferencia. Se escribe abreviadamente rad.



La longitud del arco $\widehat{PQ}$ es la medida en radianes del ángulo central θ. Si $r=1$, la longitud de la circunferencia es 2π, es decir, $360° = 2\pi\, rad$. Así,

$$\mathbf{180° = \pi\, rad} \qquad \mathbf{1° = \frac{\pi}{180}\, rad} \qquad \mathbf{1\, rad = \frac{180°}{\pi}}$$

Ej1 Convierta 45° a radianes.

$$45° = 45\left(\frac{\pi}{180}\right) = \cancel{45}\left[\frac{\pi}{(\cancel{45})(4)}\right] = \frac{\pi}{4}$$

E1 Convierta las siguientes medidas en radianes:

a) $60° = 60\left(\frac{\pi}{180}\right) = \cancel{60}\left[\frac{\pi}{(\cancel{60})(3)}\right] = \frac{\pi}{3}$

b) $120° = 120\left(\frac{\pi}{180}\right) = 2(\cancel{60})\left[\frac{\pi}{(\cancel{60})(3)}\right] = \frac{2\pi}{3}$

c) $210° = 210\left(\frac{\pi}{180}\right) = 7(\cancel{30})\left[\frac{\pi}{(\cancel{30})(6)}\right] = \frac{7\pi}{6}$

Ej2 Convierta $\frac{\pi}{6}$ a grados.

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\cancel{\pi}}{6}\left(\frac{180°}{\cancel{\pi}}\right) = 30°$$

E2 Convierta las siguientes medidas en grados.

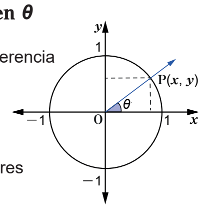
a) $\frac{\pi}{2} = \frac{\cancel{\pi}}{2}\left(\frac{180°}{\cancel{\pi}}\right) = 90°$

b) $\frac{3\pi}{4} = \frac{3\cancel{\pi}}{4}\left(\frac{180°}{\cancel{\pi}}\right) = 135°$

c) $\frac{5\pi}{6} = \frac{5\cancel{\pi}}{6}\left(\frac{180°}{\cancel{\pi}}\right) = 150°$

Contenido 2 Gráfica y propiedades de la función $y = \operatorname{sen}\theta$

Contenido 2: Gráfica y propiedades de la función $y = \operatorname{sen}\theta$



Recuerde que si $P(x, y)$ es el punto de intersección de la circunferencia unitaria y el lado terminal $\overrightarrow{OP}$ del ángulo θ, entonces

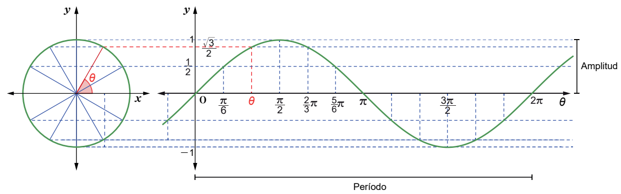
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{1} = y.$$

Es decir, la ordenada del punto P se identifica con $\operatorname{sen}\theta$.

Para trazar la gráfica de $y = \operatorname{sen}\theta$ se puede hacer una tabla de valores ocupando los ángulos especiales, así

θ	$-90°$	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$	$450°$
en radianes	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$
$y = \operatorname{sen}\theta$	-1	0	1	0	-1	0	1

Al ubicar los puntos en el plano y unirlos, la gráfica de $y = \operatorname{sen}\theta$ será como sigue:

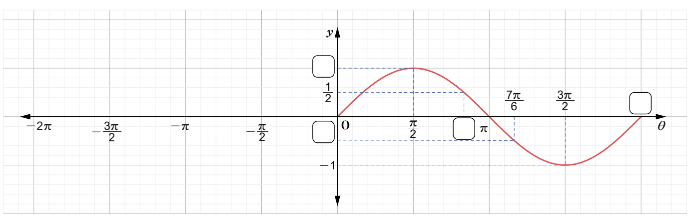


A esta curva se le llama **curva senoidal**. Las propiedades más esenciales son:

- Como $2\pi = 360°$ y $\operatorname{sen}(\theta + 360°) = \operatorname{sen}\theta$, entonces $\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta$. De aquí se deduce que la función $y = \operatorname{sen}\theta$ tiene **período 2π**.
- Para $y = \operatorname{sen}\theta$, el **rango** es $-1 \leq y \leq 1$.
- **La amplitud** es **1**.

E

a) Indique los valores correspondientes a los espacios en blanco en el trozo de la gráfica de $y = \operatorname{sen}\theta$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ que se muestra a continuación.



b) Complete la gráfica de $y = \operatorname{sen}\theta$ para $-2\pi \leq \theta \leq 0$.

116

Aprendizajes esperados

Traza la gráfica de la función $y = \operatorname{sen}\theta$ y determina sus propiedades.

Secuencia:

Las expresiones de conversión aprendidas en la clase anterior, más los valores de las funciones trigonométricas calculados en esta y en la unidad anterior permitan el trazado de las gráficas correspondientes. En esta clase se da tratamiento a la gráfica de la función seno.

Puntos esenciales:

Insistir en el hecho que la ordenada de un punto $P(x,y)$ en una circunferencia unitaria corresponde a un valor de la función seno.

Recordar que para el trazado de la gráfica de una función en el plano cartesiano, se puede construir una tabla con valores para las coordenadas de puntos $P(x,y)$ en la gráfica.

Seleccionar algunos ángulos estudiados tales como los cuadrantales y estos se convierten de grados a radianes, puesto que tales números se ubicarán sobre el eje θ.

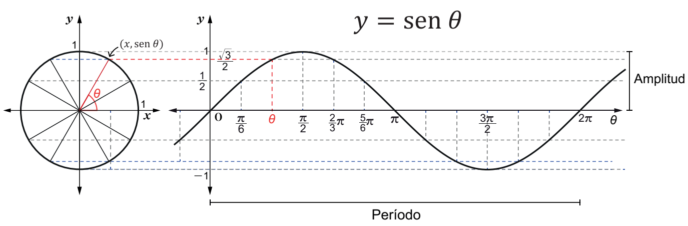
Explicar que los valores de la función seno asociados a estos ángulos serán valores para y. Así se forman puntos a ubicarse y unirse en el plano cartesiano mediante una curva suave y continua (no unidos mediante regla).

Insistir en la asimilación de las propiedades de la función seno.

C2: Gráfica y propiedades de la función $y = \operatorname{sen}\theta$

$y = \operatorname{sen}\theta$

θ	$-90°$	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$	$450°$
en radianes	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$
$y = \operatorname{sen}\theta$	-1	0	1	0	-1	0	1



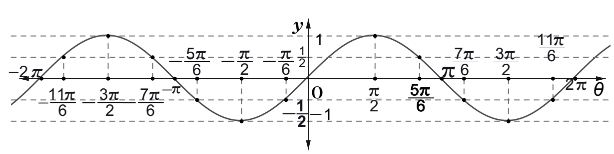
Curva senoidal

Propiedades

- Período: 2π
- Rango: $-1 \leq y \leq 1$
- La amplitud es 1

E a) Indique los valores correspondientes a los espacios en blanco en el trozo del gráfico de $y = \operatorname{sen}\theta$ que se muestra a continuación.

b) Complete la gráfica de $y = \operatorname{sen}\theta$ para $-2\pi \leq \theta \leq 0$.



Contenido 3 Gráfica y propiedades de la función $y = \cos\theta$

Aprendizajes esperados

Traza la gráfica de la función $y = \cos\theta$ y determina sus propiedades.

Secuencia:

En esta clase se traza la gráfica de la función coseno, en similitud al procedimiento empleado en la clase anterior para la función seno.

Puntos esenciales:

Procurar la comprensión del hecho que la abscisa del punto $P(x,y)$ en una circunferencia unitaria corresponde a un valor de la función coseno.

Seleccionar algunos ángulos estudiados tales como los cuadrantales y estos se convierten de grados a radianes, puesto que tales números se ubicarán sobre el eje θ.

Explicar que los valores de la función coseno asociados a estos ángulos serán valores para y. Así se forman puntos a ubicarse y unirse en el plano cartesiano mediante una curva suave y continua (no unidos mediante regla).

Insistir en la asimilación de las propiedades de la función coseno. En particular la noción de período, que fue establecido para la función seno en la clase anterior, y el rango, constituido por los valores de la variable y.

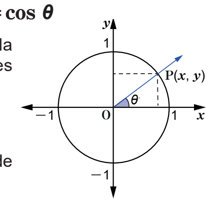
Explicar que en la ejercitación es requerido el uso de ángulos negativos y el uso de la relación $\cos(-\theta) = \cos\theta$.

Contenido 3: Gráfica y propiedades de la función $y = \cos\theta$

Recuerde que si $P(x,y)$ es el punto de intersección de la circunferencia unitaria y el lado terminal $\overline{OP}$ del ángulo θ, entonces

$$\cos\theta = \frac{x}{1} = x.$$

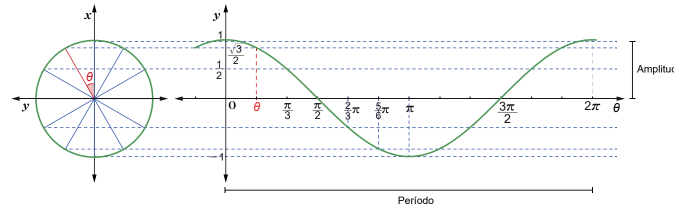
Es decir, la abscisa del punto P se identifica con $\cos\theta$.



Para trazar la gráfica de $y = \cos\theta$ se puede hacer una tabla de valores ocupando los ángulos especiales, así

θ	−90°	0°	90°	180°	270°	360°	450°
en radianes	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$
$y = \cos\theta$	0	1	0	−1	0	1	0

Al ubicar los puntos en el plano y unirlos, la gráfica de $y = \cos\theta$ será como sigue:

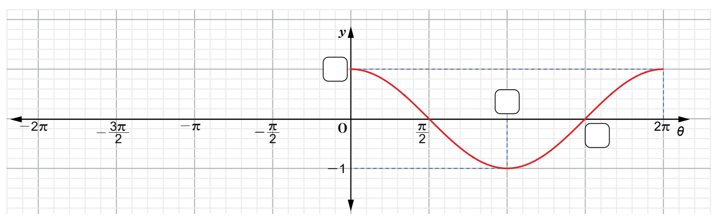


A esta curva se le llama **curva cosenoidal**. Las propiedades más esenciales son:

- Como $2\pi = 360°$ y $\cos(\theta + 360°) = \cos\theta$, entonces $\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$. De aquí se deduce que la función $y = \cos\theta$ tiene **período 2π**.
- Para $y = \cos\theta$, el **rango** es $-1 \le y \le 1$.
- **La amplitud** es **1**.

E

a) Indique los valores correspondientes a los espacios en blanco en el trozo de la gráfica de $y = \cos\theta$ para $0 \le \theta \le 2\pi$ que se muestra a continuación.

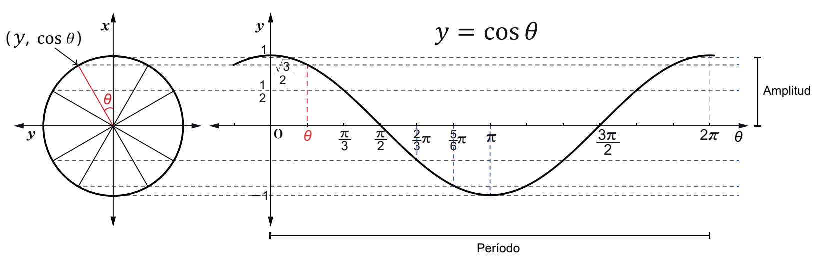


b) Complete la gráfica de $y = \cos\theta$ para $-2\pi \le \theta \le 0$.

C3: Gráfica y propiedades de la función $y = \cos\theta$

$y = \cos\theta$

θ	−90°	0°	90°	180°	270°	360°	360°
en radianes	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$
$y = \cos\theta$	0	1	0	−1	0	1	0



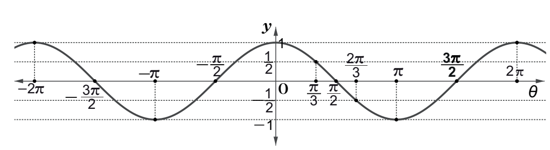
Curva cosenoidal

Propiedades

- Período: 2π
- Rango: $-1 \le y \le 1$
- La amplitud es 1

E a) Indique los valores correspondientes a los espacios en blanco en el trozo de la gráfica de $y = \cos\theta$ que se muestra a continuación.

b) Complete la gráfica de $y = \cos\theta$ para $-2\pi \le \theta \le 0$.



Contenido 4 Gráficas de las funciones $y = a\,\text{sen}\,\theta$ y $y = a\cos\theta$

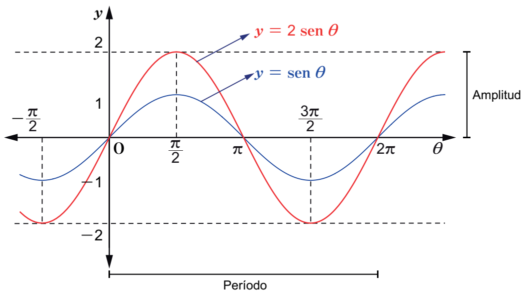
Contenido 4: Gráficas de las funciones $y = a\,\text{sen}\,\theta$ y $y = a\cos\theta$

Ejemplo 1 Trace la gráfica de $y = 2\,\text{sen}\,\theta$.

Para trazar la gráfica de $y = 2\,\text{sen}\,\theta$ se puede hacer una tabla de valores ocupando los ángulos especiales, así

θ	0°	90°	180°	270°	360°
en radianes	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \text{sen}\,\theta$	0	1	0	−1	0
$y = 2\,\text{sen}\,\theta$	0	2	0	−2	0

Nótese que para obtener los valores de $y = 2\,\text{sen}\,\theta$ se multiplican por 2 los valores correspondientes a $\text{sen}\,\theta$, por eso se dice que esta nueva función tiene **amplitud** 2 y por tanto, está alargada verticalmente en factor 2 respecto a la gráfica de $y = \text{sen}\,\theta$. Así que, al ubicar los puntos en el plano y unirlos, la gráfica de $y = 2\,\text{sen}\,\theta$ será como sigue:



Sus propiedades son:

- Tiene **período 2π**.
- Para $y = 2\,\text{sen}\,\theta$, el **rango** es $-2 \leq y \leq 2$.
- La **amplitud** es **2**.

Aprendizajes esperados

Traza las gráficas de las funciones $y = a\,\text{sen}\,\theta$ y $y = a\cos\theta$ a partir de las gráficas de las funciones $y = \text{sen}\,\theta$ y $y = \cos\theta$, respectivamente.

Secuencia:

En clases anteriores se trazaron las gráficas correspondientes de las funciones $y = \text{sen}\,\theta$ y $y = \cos\theta$. Podemos derivar a partir de estas, funciones tales como $y = a\,\text{sen}\,\theta$ y $y = a\cos\theta$, cuyas gráficas se alargan o contraen verticalmente respecto a las gráficas de las clases anteriores. El alargamiento o compresión también puede darse horizontalmente, lo cual se verá en el contenido siguiente.

Puntos esenciales:

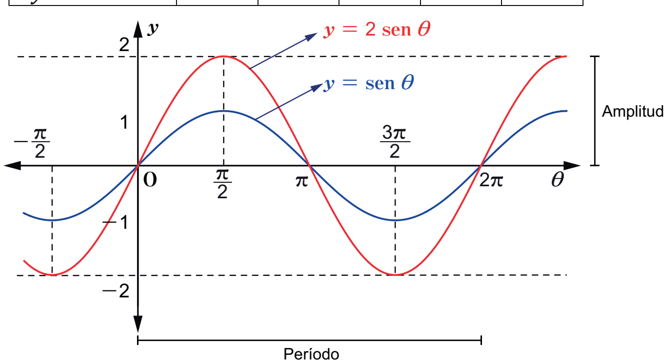
Explicar que para trazar gráficas de funciones trigonométricas se utiliza tabla de valores, notando que el factor a multiplica los valores de $\text{sen}\,\theta$ o $\cos\theta$, según sea el caso.

Indicar que el hecho que el valor 2 para a sea mayor que 1, justifica que la gráfica se alargue verticalmente respecto a la gráfica de $y = \text{sen}\,\theta$, en el primer ejemplo, mientras que en el segundo ejemplo, dado que $a = \frac{1}{2}$ es positivo y menor que 1, esto indica que la gráfica se comprime verticalmente respecto a la gráfica de $y = \cos\theta$.

C4: Gráficas de las funciones $y = a\,\text{sen}\,\theta$ y $y = a\cos\theta$

Ej1 Trace la gráfica de $y = 2\,\text{sen}\,\theta$.

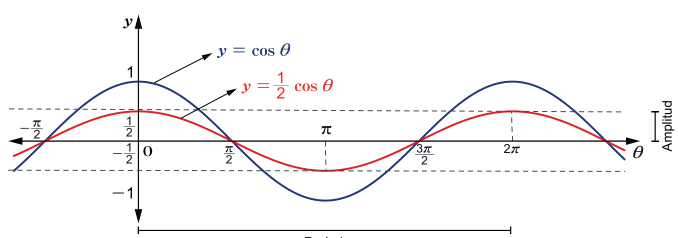
θ	0°	90°	180°	270°	360°
en radianes	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \text{sen}\,\theta$	0	1	0	−1	0
$y = 2\,\text{sen}\,\theta$	0	2	0	−2	0



Propiedades:
Período: 2π Rango: $-2 \leq y \leq 2$ Amplitud: 2

Ej2 Trace la gráfica de $y = \frac{1}{2}\cos\theta$.

θ	0°	90°	180°	270°	360°
en radianes	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos\theta$	1	0	−1	0	1
$y = \frac{1}{2}\cos\theta$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$



Propiedades: Período: 2π
Rango: $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$
Amplitud: $\frac{1}{2}$

Contenido 4 Gráficas de las funciones $y = a\,\text{sen}\,\theta$ y $y = a\cos\theta$

Aprendizajes esperados

Traza las gráficas de las funciones $y = a\,\text{sen}\,\theta$ y $y = a\cos\theta$ a partir de las gráficas de las funciones $y = \text{sen}\,\theta$ y $y = \cos\theta$, respectivamente.

Secuencia:

En clases anteriores se trazaron las gráficas correspondientes de las funciones $y = \text{sen}\,\theta$ y $y = \cos\theta$. Podemos derivar a partir de estas, funciones tales como $y = a\,\text{sen}\,\theta$ y $y = a\cos\theta$, cuyas gráficas se alargan o contraen verticalmente respecto a las gráficas de las clases anteriores. El alargamiento o compresión también puede darse horizontalmente, lo cual se verá en el contenido siguiente.

Puntos esenciales:

Explicar que para trazar gráficas de funciones trigonométricas se utiliza una tabla de valores, notando que el factor a multiplica los valores de $\text{sen}\,\theta$ o $\cos\theta$, según sea el caso.

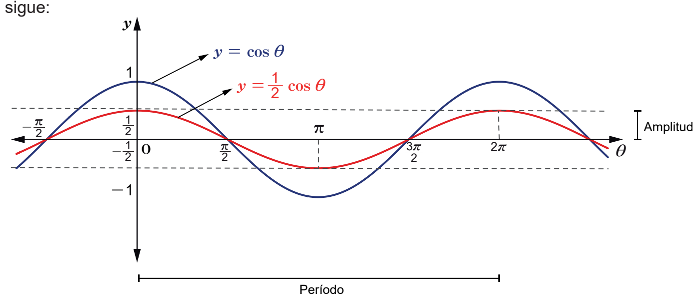
Indicar que el hecho que el valor 2 para a sea mayor que 1, justifica que la gráfica se alargue verticalmente respecto a la gráfica de $y = \text{sen}\,\theta$, en el primer ejemplo, mientras que en el segundo ejemplo, dado que $a = \frac{1}{2}$ es positivo y menor que 1, esto indica que la gráfica se comprime verticalmente respecto a la gráfica de $y = \cos\theta$.

Ejemplo 2 Trace la gráfica de $y = \frac{1}{2}\cos\theta$.

Similarmente, se elabora una tabla de valores ocupando los valores de la función trigonométrica coseno para los ángulos especiales, así

θ	0°	90°	180°	270°	360°
en radianes	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \cos\theta$	1	0	-1	0	1
$y = \frac{1}{2}\cos\theta$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

Nótese que para obtener los valores de $y = \frac{1}{2}\cos\theta$ se multiplican por $\frac{1}{2}$ los valores correspondientes a $\cos\theta$, por eso se dice que esta nueva función tiene **amplitud** $\frac{1}{2}$ y por tanto, está comprimida verticalmente en un factor $\frac{1}{2}$ respecto a la gráfica de $y = \cos\theta$. En consecuencia, al ubicar los puntos en el plano y unirlos, la gráfica de $y = \frac{1}{2}\cos\theta$ será como sigue:



Sus principales propiedades son:

- Tiene **período 2π**.
- Para $y = \frac{1}{2}\cos\theta$, el **rango** es $-\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}$.
- La **amplitud** es $\frac{1}{2}$.

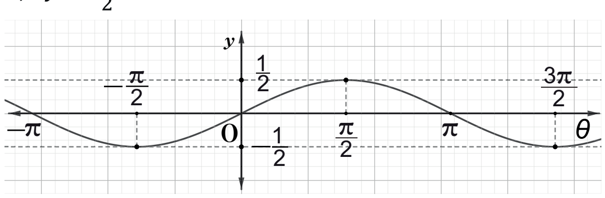
E

Trace las gráficas de las siguientes funciones y determine sus principales propiedades:

a) $y = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,\theta$ b) $y = 2\cos\theta$

E Trace las gráficas de las siguientes funciones y determine sus principales propiedades.

a) $y = \frac{1}{2}\text{sen}\,\theta$

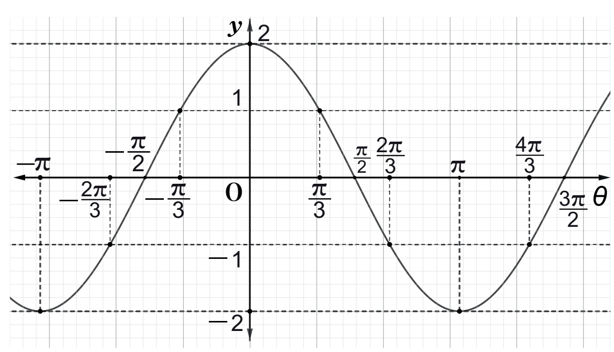


Período: 2π

Rango: $-\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}$

Amplitud: $\frac{1}{2}$

b) $y = 2\cos\theta$



Período: 2π

Rango: $-2 \le y \le 2$

Amplitud: 2

Contenido 5 Gráficas de las funciones $y = \text{sen}\,(b\cdot\theta)$ y $y = \cos\,(b\cdot\theta)$

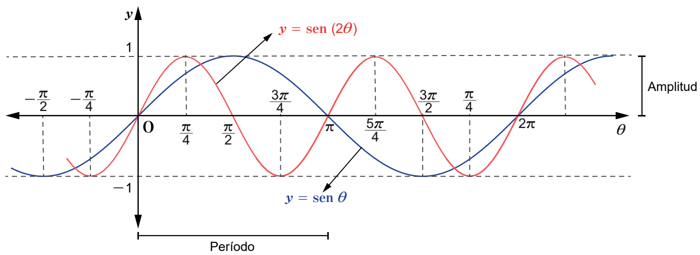
Contenido 5: Gráficas de las funciones $y = \text{sen}\,(b\cdot\theta)$ y $y = \cos\,(b\cdot\theta)$

Ejemplo 1 Trace la gráfica de $y = \text{sen}\,(2\theta)$.

Nótese que para $y = \text{sen}\,(2\theta)$ la **amplitud** es **1**. Además, el argumento de esta función (expresión a la que se le calcula el seno) es 2θ por lo cual no tendrá **período** 2π, sino $\frac{2\pi}{2} = \pi$, este hecho se comprende mejor analizando la tabla de valores para $y = \text{sen}\,(2\theta)$ ocupando los valores de la función trigonométrica seno para los ángulos especiales, así

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
2θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \text{sen}\,(2\theta)$	0	1	0	-1	0

Se observa que para obtener los valores de $y = \text{sen}\,(2\theta)$ se multiplican por 2 los valores correspondientes a $\theta = 0$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, π, quedando invariantes los valores de los ángulos especiales conocidos y por tanto, se dice que esta nueva función está comprimida horizontalmente por un factor 2 respecto a la gráfica de $y = \text{sen}\,\theta$. Así que, al ubicar los puntos en el plano y unirlos, la gráfica de $y = \text{sen}\,(2\theta)$ será como sigue:



Aprendizajes esperados

Traza las gráficas de las funciones $y = \text{sen}\,(b\cdot\theta)$ y $y = \cos\,(b\cdot\theta)$ a partir de las gráficas de las funciones $y = \text{sen}\,\theta$ y $y = \cos\,\theta$, respectivamente.

Secuencia:

Los alargamientos o compresiones de las gráficas de las funciones seno o coseno también pueden ser horizontales, esto ocurre cuando el ángulo θ es multiplicado por un factor a.

Puntos esenciales:

Explicar que características tales como amplitud, período o rango también se determinan para las funciones en estudio. Estas se obtienen a partir de la expresión que define a tales funciones y no se debe pensar que son exactamente las mismas que las determinadas para $y = \text{sen}\,\theta$ o $y = \cos\theta$.

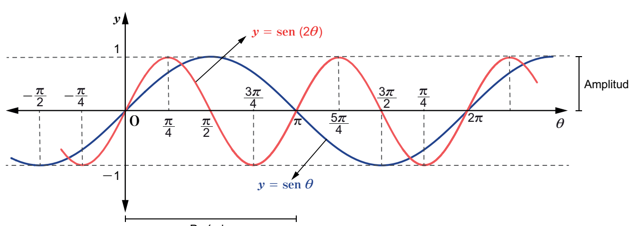
Hacer ver que el valor 2 para a es mayor que 1, esto justifica el hecho que la gráfica se comprima horizontalmente respecto a la gráfica de $y = \text{sen}\,\theta$, en el primer ejemplo, mientras que en el segundo ejemplo, dado que $a = \frac{1}{2}$ es positivo y menor que 1, esto indica que la gráfica se alarga horizontalmente respecto a la de $y = \cos\theta$.

Insistir en que las curvas que se tracen deben ser suaves y continuas, ubicando en el eje horizontal los valores correspondientes a θ, medido en radianes.

C5: Gráficas de las funciones $y = \text{sen}(b\cdot\theta)$ y $y = \cos(b\cdot\theta)$

Ej1 Trace la gráfica de $y = \text{sen}(2\theta)$.

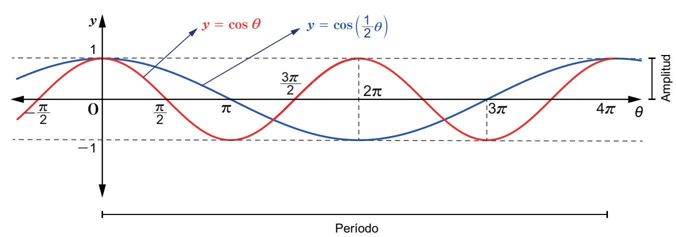
θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
2θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \text{sen}(2\theta)$	0	1	0	-1	0



Período: π Rango: $-1 \leq y \leq 1$
Amplitud: 1

Ej2 Trace la gráfica de $y = \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)$.

θ	0	π	2π	3π	4π
$\frac{1}{2}\theta$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)$	1	0	-1	0	1



Período: 4π Rango: $-1 \leq y \leq 1$
Amplitud: 1

Contenido 5 Gráficas de las funciones $y = \text{sen}\,(b\cdot\theta)$ y $y = \cos\,(b\cdot\theta)$

Aprendizajes esperados

Traza las gráficas de las funciones $y = \text{sen}\,(b \cdot \theta)$ y $y = \cos\,(b \cdot \theta)$ a partir de las gráficas de las funciones $y = \text{sen}\,\theta$ y $y = \cos\theta$, respectivamente.

Secuencia:

Los alargamientos o compresiones de las gráficas de las funciones seno o coseno también pueden ser horizontales, esto ocurre cuando el ángulo θ es multiplicado por un factor a.

Puntos esenciales:

Explicar que características tales como amplitud, período o rango también se determinan para las funciones en estudio. Estas se obtienen a partir de la expresión que define a tales funciones y no se debe pensar que son exactamente las mismas que las determinadas para $y = \text{sen}\,\theta$ o $y = \cos\theta$.

Hacer ver que el valor 2 para a es mayor que 1, esto justifica el hecho que la gráfica se comprime horizontalmente respecto a la gráfica de $y = \text{sen}\,\theta$, en el primer ejemplo, mientras que en el segundo ejemplo, dado que $a = \frac{1}{2}$ es positivo y menor que 1, esto indica que la gráfica se alarga horizontalmente respecto a la de $y = \cos\theta$.

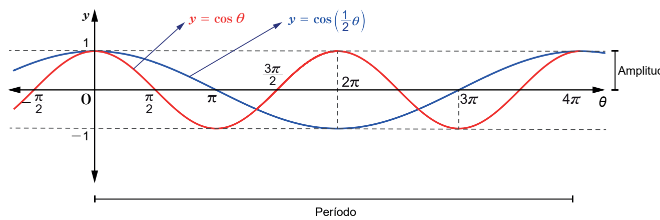
Insistir en que las curvas que se tracen deben ser suaves y continuas, ubicando en el eje horizontal los valores correspondientes a θ, medido en radianes.

Ejemplo 2 Trace la gráfica de $y = \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)$

Similarmente, para $y = \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)$ la **amplitud** es **1**. Además, el argumento de esta función (expresión a la que se le calcula el coseno) es $\frac{1}{2}\theta$ por lo cual no tendrá **período** 2π, sino $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$, este hecho se comprende mejor analizando la tabla de valores para $y = \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)$ ocupando los valores de la función trigonométrica coseno para los ángulos especiales, así:

θ	0	π	2π	3π	4π
$\frac{1}{2}\theta$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)$	1	0	-1	0	1

Se observa que para obtener los valores de $y = \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)$ se multiplican por $\frac{1}{2}$ los valores correspondientes a $\theta = 0$, π, 2π, 3π, 4π, quedando invariantes los valores de los ángulos especiales conocidos y por tanto, se dice que esta nueva función está alargada horizontalmente por un factor $\frac{1}{2}$ respecto a la gráfica de $y = \cos\theta$. Así que, al ubicar los puntos en el plano y unirlos, la gráfica de $y = \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)$ será como sigue:



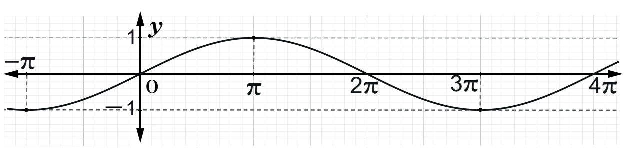
E

Trace las gráficas de las siguientes funciones y determine sus principales propiedades.

a) $y = \text{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right)$ b) $y = \cos\,(2\theta)$

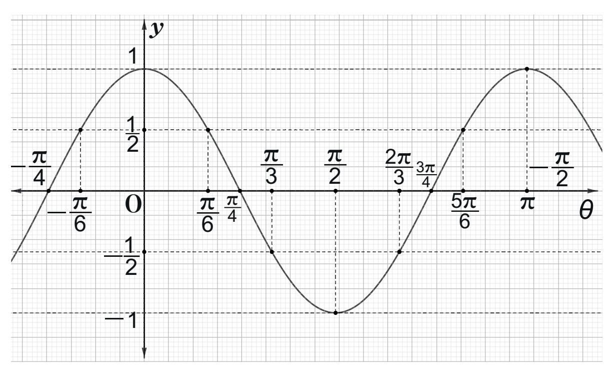
E Trace las gráficas de las siguientes funciones y determine sus principales propiedades.

a) $y = \text{sen}\,\left(\frac{1}{2}\theta\right)$



Período: 4π
Amplitud: 1
Rango: $-1 \leq y \leq 1$

b) $y = \cos\,(2\theta)$



Período: π
Amplitud: 1
Rango: $-1 \leq y \leq 1$

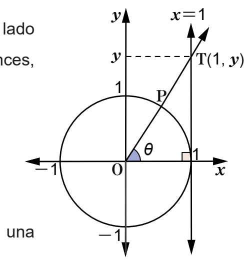
Contenido 6 Gráficas y propiedades de la función $y = \tan\theta$

Contenido 6: Gráfica y propiedades de la función $y = \tan\theta$

Recuerde que dada una circunferencia de radio $r = 1$, $\overrightarrow{OP}$ el lado terminal del ángulo $\theta \neq 90°$ y $T(1, y)$ un punto sobre $\overrightarrow{OP}$. Entonces,

$\tan\theta = \dfrac{\text{ordenada de T}}{\text{abscisa de T}} = \dfrac{y}{1} = y$, es decir, $y = \tan\theta$.

Por tanto, la $\tan\theta$ coincide con la ordenada del punto T.

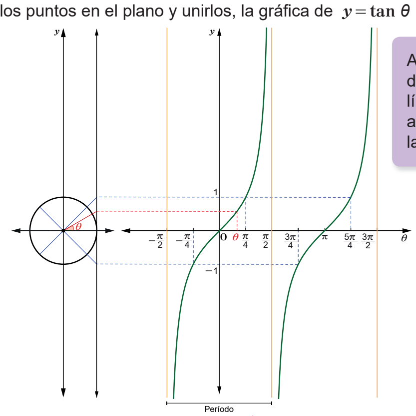


Así que, para trazar la gráfica de $y = \tan\theta$ se puede hacer una tabla de valores, así:

θ	$-90°$	$-45°$	$0°$	$45°$	$90°$	$180°$	$270°$
en radianes	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$y = \tan\theta$	NE	-1	0	1	NE	0	NE

Para cuando θ es igual a cualquier múltiplo impar de $\frac{\pi}{2}$ la tangente no existe. Además, cuando θ toma valores muy cercanos por la izquierda o por la derecha de dichos valores, $\tan\theta$ tiende a tomar valores extremadamente grande o pequeños. Se establece entonces que las rectas verticales descritas por tales valores son **asíntotas** de la función tangente.

Al ubicar los puntos en el plano y unirlos, la gráfica de $y = \tan\theta$ será como sigue:



Asíntota de la gráfica de una función es una línea recta a la que se aproxima continuamente la gráfica de tal función.

Este contenido tiene 2 páginas (ver en el LT)

Aprendizajes esperados

Traza la gráfica de la función $y = \tan\theta$ y determina sus propiedades.

Secuencia:

La función trigonométrica que restaba por graficar es $y = \tan\theta$. El tratamiento gráfico de las funciones trigonométricas concluye con esta función.

Puntos esenciales:

Seleccionar algunos ángulos estudiados tales como los cuadrantales y convertirlos de grados a radianes, puesto que tales números se ubicarán sobre el eje θ.

Explicar que los valores de la función tangente asociados a estos ángulos serán valores para y. Así se forman puntos a ubicarse y unirse en el plano cartesiano mediante una curva suave y continua (no unidos mediante regla).

Explicar que, a partir de la tabla de valores, en los que se encuentra en algunos casos la no existencia de la tangente, se establece un concepto que diferencia a esta de las restantes funciones trigonométricas, el de asíntota.

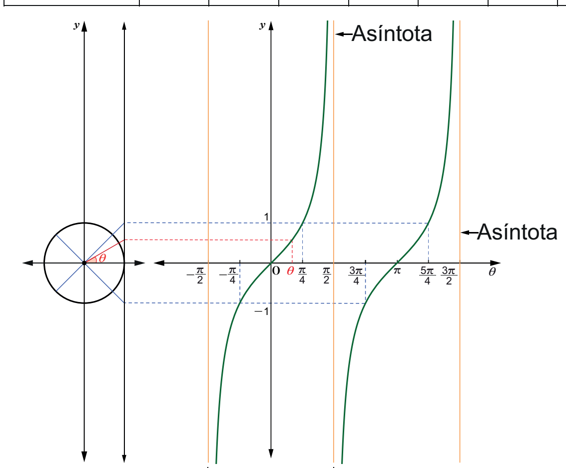
Insistir en la asimilación de las propiedades de la función tangente, que tienen analogía a las de las funciones seno y coseno.

Explicar que en la ejercitación será requerido el uso de ángulos negativos y el uso de la relación $\tan(-\theta) = -\tan\theta$.

C6: Gráfica y propiedades de la función $y = \tan\theta$

Trace la gráfica de $y = \tan\theta$

θ	$-90°$	$-45°$	$0°$	$45°$	$90°$	$180°$	$270°$
en radianes	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$y = \tan\theta$	NE	-1	0	1	NE	0	NE

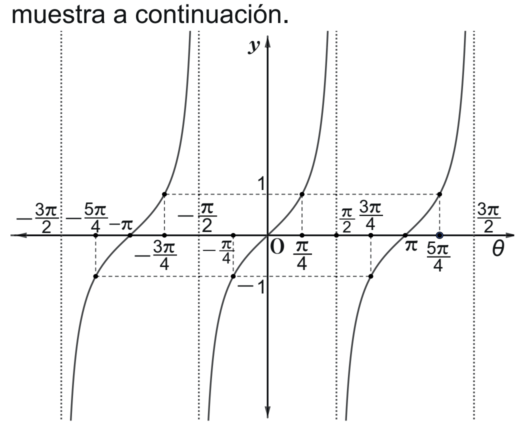


Cualquier múltiplo impar de $\frac{\pi}{2}$ define una asíntota a la gráfica de $y = \tan\theta$.

Propiedades:

Período: π Rango: el conjunto de los números reales

E a) Indique los valores correspondientes a los espacios en blanco en el trozo del gráfico de $y = \tan\theta$ que se muestra a continuación.



b) Trace en la gráfica anterior los trozos de la función $y = \tan\theta$ para $-\frac{3\pi}{2} < \theta < -\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$.

Prueba de Matemática 10mo (30 min.) Fecha: ____________

Unidad 6: Funciones Trigonométricas

Nombre: ______________________________ Sección: __________

Sexo: M / F

/ 20

1. Determine los valores $\operatorname{sen}\theta, \cos\theta$ y $\tan\theta$ para los valores de θ:

(1 punto × 6 = 6)

a) 135°

$\operatorname{sen}\theta =$

$\cos\theta =$

$\tan\theta =$

b) 90°

$\operatorname{sen}\theta =$

$\cos\theta =$

$\tan\theta =$

2. Si $0° \leq \theta \leq 360°$, determine los valores de θ para los cuales: (2 puntos × 3 = 6)

a) $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos\theta = \frac{1}{2}$

c) $\tan\theta = -1$

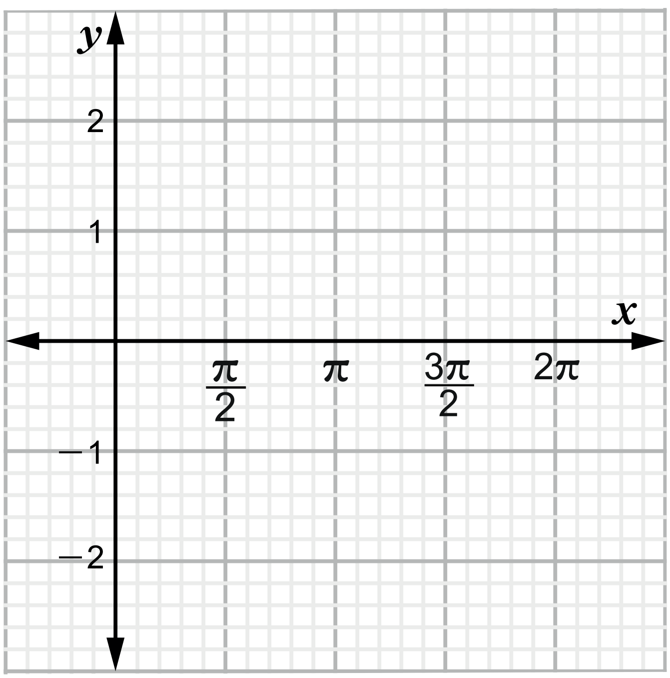
3. Si el lado terminal del ángulo θ se encuentra en el IV cuadrante y $\cos\theta = \frac{3}{4}$.

Determine: (2 puntos × 2 = 4)

$\operatorname{sen}\theta =$

$\tan\theta =$

4. Grafique la función trigonométrica $y = 2\cos\theta$ con $0° \leq \theta \leq 360°$ y determine período, rango y amplitud. (1 punto × 4 = 4)



Período:

Rango:

Amplitud:

Nombre: ______________________________

Unidad 7

Trigonometría Analítica

Contenido 1 Ley del seno (1)

Aprendizajes esperados

Aplica la ley del seno en el cálculo de la medida de uno de los lados de un triángulo dado.

Secuencia:

En la unidad 5 se encontraron las medidas de lados y ángulos de triángulos rectángulos, aplicando funciones trigonométricas. ¿Es posible calcular estas medidas para cualquier triángulo? Con el estudio de las funciones trigonométricas en la unidad anterior y el uso de las Leyes de seno y coseno podemos dar respuesta afirmativa a esta pregunta.

Puntos esenciales:

Identificar en un triángulo, un lado determinado y el ángulo opuesto a dicho lado (y viceversa), para así formar las razones adecuadas, para la aplicación de la Ley del seno.

Enfatizar que la Ley del seno se aplica conociendo dos ángulos y un lado cualquiera.

Recordar que para determinar el valor de una variable en las razones de la Ley del seno:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\begin{cases} a=\dfrac{b\cdot c}{d}, & b=\dfrac{a\cdot d}{c} \\ c=\dfrac{a\cdot d}{b}, & d=\dfrac{b\cdot c}{a}\end{cases}$$

Recordar los valores de las funciones trigonométricas.

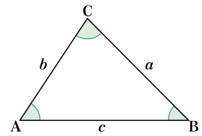
Sección 1: Ley del seno

Contenido 1: Ley del seno (1)

Ley del seno

Dado el ΔABC, con ángulos interiores A, B y C y lados opuestos a cada ángulo a, b y c, respectivamente. Entonces

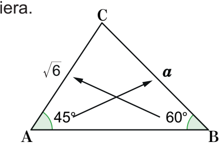
$$\frac{a}{\text{sen } A}=\frac{b}{\text{sen } B}=\frac{c}{\text{sen } C}.$$



Es decir, en un triángulo cualquiera, la longitud de cada lado es directamente proporcional al seno del ángulo opuesto a dicho lado.

Aquí se aplica esta ley conociendo dos ángulos y un lado cualquiera.

Ejemplo Dado el ΔABC, con $b=\sqrt{6}$, $\measuredangle A=45°$ y $\measuredangle B=60°$. Determine la longitud a del lado $\overline{BC}$.



Por la ley del seno, $\frac{a}{\text{sen } A}=\frac{b}{\text{sen } B}$. Se sustituye $b=\sqrt{6}$, $\measuredangle A=45°$ y $\measuredangle B=60°$ en la expresión anterior, para obtener

$\frac{a}{\text{sen } 45°}=\frac{\sqrt{6}}{\text{sen } 60°}$, de donde

$$a=\left(\frac{\sqrt{6}}{\text{sen } 60°}\right)(\text{sen } 45°),$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left[\sqrt{6}\div\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=(\sqrt{6})\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=(\sqrt{6})\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)=2$$

$a=2$.

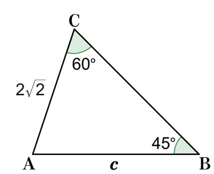
$\text{sen } 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{sen } 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$

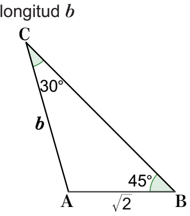
E

Dados los siguientes triángulos, determine:

a) La longitud c



b) La longitud b

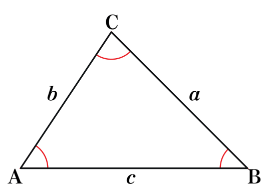


U7: Trigonometría Analítica
S1: Ley del seno
C1: Ley del seno (1)

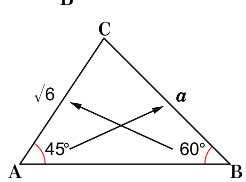
Ley del seno

Dado el ΔABC:

$$\frac{a}{\text{sen } A}=\frac{b}{\text{sen } B}=\frac{c}{\text{sen } C}$$



Ej Dado el ΔABC, determine la longitud a del lado $\overline{BC}$.



$$\frac{a}{\text{sen } A}=\frac{b}{\text{sen } B}\to\frac{a}{\text{sen } 45°}=\frac{\sqrt{6}}{\text{sen } 60°}$$

$$a=\left(\frac{\sqrt{6}}{\text{sen } 60°}\right)(\text{sen } 45°)=\left(\frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

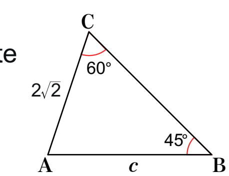
$$=(\sqrt{6})\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=(\sqrt{6})\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)=2$$

$$\text{sen } 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{sen } 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

E Dado el siguiente triángulo, determine:



a) La longitud c

$$\frac{c}{\text{sen } C}=\frac{b}{\text{sen } B}\to\frac{c}{\text{sen } 60°}=\frac{2\sqrt{2}}{\text{sen } 45°}$$

$$c=\left(\frac{2\sqrt{2}}{\text{sen } 45°}\right)(\text{sen } 60°)=\left(\frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$c=\left[2\sqrt{2}\div\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=(\cancel{2}\sqrt{2})(\sqrt{2})\left(\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right)$$

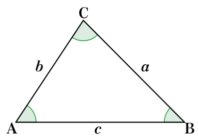
$$c=(\sqrt{4})(\sqrt{3})=2\sqrt{3}$$

Contenido 2 Ley del seno (2)

Contenido 2: Ley del seno (2)

En un $\triangle ABC$, con ángulos interiores A, B y C y lados opuestos a cada ángulo a, b y c, respectivamente, se cumple que

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A}=\frac{b}{\operatorname{sen}B}=\frac{c}{\operatorname{sen}C}.$$



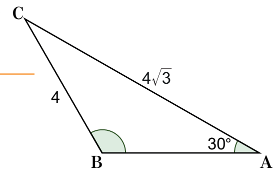
De donde se obtienen las siguientes relaciones:

$$\operatorname{sen}A=\frac{a\operatorname{sen}B}{b}\quad\text{o bien}\quad \operatorname{sen}A=\frac{a\operatorname{sen}C}{c}$$

$$\operatorname{sen}B=\frac{b\operatorname{sen}A}{a}\quad\text{o bien}\quad \operatorname{sen}B=\frac{b\operatorname{sen}C}{c}$$

$$\operatorname{sen}C=\frac{c\operatorname{sen}B}{b}\quad\text{o bien}\quad \operatorname{sen}C=\frac{c\operatorname{sen}A}{a}$$

Ejemplo Dado el $\triangle ABC$ de la figura, con $b=4\sqrt{3}$, $\measuredangle A=30°$ y $a=4$. Determine la medida del ángulo B opuesto al lado $\overline{AC}$.



Al sustituir $b=4\sqrt{3}$, $\measuredangle A=30°$ y $a=4$ en la igualdad

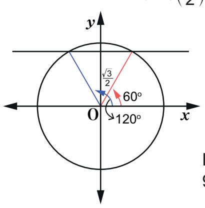
$$\operatorname{sen}B=\frac{b\operatorname{sen}A}{a},$$

se sigue que

$$\operatorname{sen}B=\frac{(\cancel{4}\sqrt{3})(\operatorname{sen}30°)}{\cancel{4}}$$

$$\operatorname{sen}30°=\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen}B=(\sqrt{3})\left(\frac{1}{2}\right)$$



$$\operatorname{sen}B=\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad \operatorname{sen}60°=\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad \operatorname{sen}120°=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

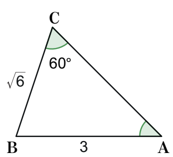
De donde $\measuredangle B=60°$ o $\measuredangle B=120°$. Pero, de acuerdo con la figura $90°<\measuredangle B<180°$, así que

$\measuredangle B=120°$.

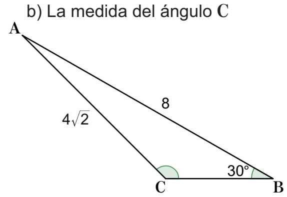
E

Dados los siguientes triángulos, determine:

a) La medida del ángulo A



b) La medida del ángulo C



Aprendizajes esperados

Aplica la ley del seno en el cálculo de la medida de uno de los ángulos interiores de un triángulo dado.

Secuencia:

En la clase anterior se estableció que la Ley del seno se aplica en el caso de conocer dos ángulos y un lado de un triángulo. En esta clase se aplica cuando se conocen dos lados y un ángulo opuesto a cualquiera de dichos lados.

Puntos esenciales:

Explicar que nuevamente la aplicación de

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\begin{cases} a=\dfrac{b\cdot c}{d}, & b=\dfrac{a\cdot d}{c}\\ c=\dfrac{a\cdot d}{b}, & d=\dfrac{b\cdot c}{a}\end{cases}$$

permite el despeje del seno de un ángulo en función de dos lados y el seno de otro de los ángulos.

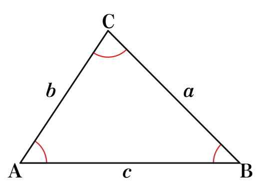
Explicar que cancelaciones en expresiones como $\dfrac{ab}{a}$ son posibles ante la presencia de la multiplicación. Se debe insistir en que en expresiones como $\dfrac{a+b}{a}$ no hay cancelación.

Hacer notar que la figura brindada en la solución del ejemplo, y en las ejercitaciones, ayuda a decidir el ángulo a tomar, ya que igualdades como $\operatorname{sen}B=c$ pueden conducir a dos valores para B.

C2: Ley del seno (2)

En un ΔABC se cumple que

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A}=\frac{b}{\operatorname{sen}B}=\frac{c}{\operatorname{sen}C}$$



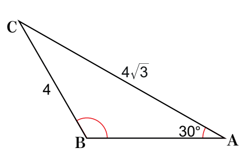
Se obtienen las siguientes relaciones:

$$\operatorname{sen}A=\frac{a\operatorname{sen}B}{b}\ \text{ o bien }\ \operatorname{sen}A=\frac{a\operatorname{sen}C}{c}$$

$$\operatorname{sen}B=\frac{b\operatorname{sen}A}{a}\ \text{ o bien }\ \operatorname{sen}B=\frac{b\operatorname{sen}C}{c}$$

$$\operatorname{sen}C=\frac{c\operatorname{sen}B}{b}\ \text{ o bien }\ \operatorname{sen}C=\frac{c\operatorname{sen}A}{a}$$

Ej Dado el triángulo ΔABC de la derecha, determine la medida del ángulo B.



$$\operatorname{sen}B=\frac{b\operatorname{sen}A}{a}$$

$$=\frac{(\cancel{4}\sqrt{3})(\operatorname{sen}30°)}{\cancel{4}}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}30°=\frac{1}{2}}$$

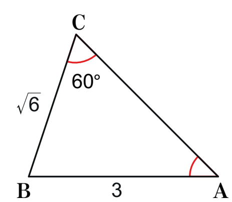
$$=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}B=\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad \boxed{\operatorname{sen}60°=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad \operatorname{sen}120°=\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

De acuerdo a la figura $90°<\measuredangle B<180°$, así que $\measuredangle B=120°$

E Dados el siguiente triángulo determine:

a) La medida del ángulo A



$$\operatorname{sen}A=\frac{(\sqrt{6})(\operatorname{sen}60°)}{3}\qquad \boxed{\operatorname{sen}60°=\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{(\sqrt{6})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{3}=\frac{\frac{\sqrt{18}}{2}}{3}=\frac{\frac{\sqrt{9\times2}}{2}}{3}$$

$$=\left(\frac{\cancel{3}\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{\cancel{3}}\right)$$

$$\operatorname{sen}A=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad \boxed{\operatorname{sen}45°=\frac{1}{\sqrt{2}}}\quad \boxed{\operatorname{sen}135°=\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

De acuerdo con la figura $0°<\measuredangle A<90°$, así que $\measuredangle A=45°$.

Contenido 3 Aplicación de la ley del seno

Aprendizajes esperados

Aplica la ley del seno en situaciones concretas.

Secuencia:

Las aplicaciones de las funciones trigonométricas se han evidenciado en unidades anteriores. Esta vez, la Ley del seno representa un recurso muy útil para resolver situaciones del entorno, en las cuales se forman triángulos y se conocen las condiciones para aplicar dicha ley.

Puntos esenciales:

Recordar que en todo triángulo, la suma de las medidas de sus ángulos internos es 180°.

Analizar si la situación a resolver cumple con las condiciones para aplicarse la Ley del seno.

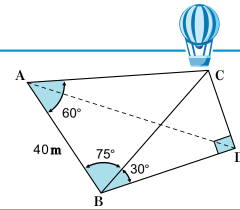
Aplicar la definición de las funciones trigonométricas en aquellas situaciones en las que se forman triángulos rectángulos.

Hacer ver que la aplicación de los valores de la función seno es indispensable para resolver un problema determinado mediante la Ley del seno.

Contenido 3: Aplicación de la ley del seno

P

Dos observadores A y B, se encuentran a 40 m entre sí, ven un globo, pero con los ángulos que se muestran en la figura. Determine la altura CD a la que se encuentra el globo.

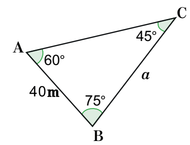


S

En el ΔABC, $\measuredangle A+\measuredangle ABC+\measuredangle ACB=180°$, se sustituye $\measuredangle A=60°$ y $\measuredangle ABC=75°$ para obtener

$60°+75°+\measuredangle ACB=180°$

$\measuredangle ACB=180°-(60°+75°)=45°$.



Sea a la distancia desde el observador B hasta el globo.

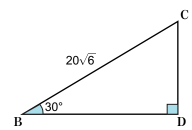
Aplicando la ley del seno en el ΔABC, se obtiene

$$\frac{a}{\text{sen } 60°}=\frac{40}{\text{sen } 45°}$$

de donde $$a=\left(\frac{40}{\text{sen } 45°}\right)(\text{sen } 60°)$$

$$=\left(\frac{40}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(40\div\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=(40)(\sqrt{2})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=20\sqrt{6}$$



Es decir,

$$a=20\sqrt{6}.$$

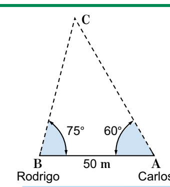
Como el ΔBDC es triángulo rectángulo, entonces la altura CD del globo es

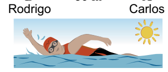
$$CD=a\,(\text{sen } 30°)=(20\sqrt{6})\left(\frac{1}{2}\right)=10\sqrt{6}.$$

Por tanto, **la altura CD a la que se encuentra el globo es $10\sqrt{6}$ m.**

E

Carlos, un salvavidas de San Juan del Sur, ubicado en el punto A, observa a un nadador ubicado en el punto C que pide auxilio con un ángulo de 60°, y Rodrigo, un salvavidas ubicado en el punto B, lo observa con un ángulo de 75°. Si ambos están separados a una distancia de 50 m, ¿qué distancia tiene que recorrer Rodrigo para rescatarlo?

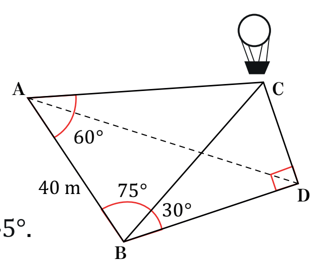




128

C3: Aplicación de la ley del seno

(P) Determine la altura CD.



(S) $\measuredangle \text{CAB}=60°$ y $\measuredangle \text{ABC}=75°$

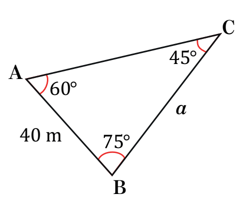
$\measuredangle \text{CAB}+\measuredangle \text{ABC}+\measuredangle \text{ACB}=180°$

$60°+75°+\measuredangle \text{ACB}=180°$

$\measuredangle \text{ACB}=180°-(60°+75°)=45°$.

a: distancia de B a C

Aplicando la ley del seno en el ΔABC:



$$\frac{a}{\text{sen } 60°}=\frac{40}{\text{sen } 45°}$$

$$a=\left(\frac{40}{\text{sen } 45°}\right)(\text{sen } 60°)=\left(\frac{40}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\left(40\div\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=(40)(\sqrt{2})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=20\sqrt{6}$$

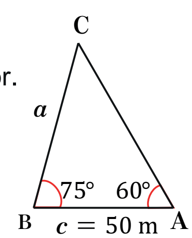
Como el ΔBDC es triángulo rectángulo

$CD=a(\text{sen } 30°)=(20\sqrt{6})\left(\frac{1}{2}\right)=10\sqrt{6}$.

Así el globo se encuentra a una altura de $10\sqrt{6}$ m.

(E) *Leer en el libro de texto.*

Sea a la distancia entre Rodrigo y un nadador.



$60°+75°+\measuredangle \text{ACB}=180°$

$\measuredangle \text{ACB}=180°-(60°+75°)$

$\measuredangle \text{ACB}=45°$

Aplicando la ley del seno:

$$\frac{a}{\text{sen } 60°}=\frac{50}{\text{sen } 45°}$$

$$a=\left(\frac{50}{\text{sen } 45°}\right)(\text{sen } 60°)$$

$$=\left(\frac{50}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\left(50\div\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=(50)(\sqrt{2})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

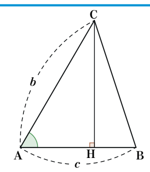
$$=25\sqrt{6}$$

Contenido 4 El área de un triángulo utilizando trigonometría

Contenido 4: El área de un triángulo utilizando trigonometría

P

Dado el triángulo de la figura de la derecha. Exprese su área utilizando trigonometría.



S

De acuerdo con la figura, el $\triangle ABC$ tiene base AB y altura CH. Así que su área está dada por

$$\text{Área} = \frac{1}{2}(AB)(CH).$$

Utilizando la razón trigonométrica seno se sabe que $\operatorname{sen} A = \frac{CH}{AC} = \frac{CH}{b}$, de donde $CH = b \operatorname{sen} A$.

Se sustituye $AB = c$ y $CH = b \operatorname{sen} A$ en la expresión anterior, para obtener que el área de dicho triángulo puede ser expresada como

$$\text{Área} = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A.$$

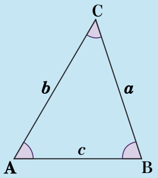
C

El área del $\triangle ABC$, utilizando trigonometría puede ser expresada como $\text{Área} = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A$.

También es válido expresar el área como

$$\text{Área} = \frac{1}{2} ca \operatorname{sen} B.$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C.$$



Ejemplo Dado el $\triangle ABC$ con $b = 3$, $c = 4$ y $\measuredangle A = 60°$. Determine su área.

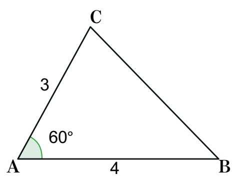
Se sustituye $b = 3$, $c = 4$ y $\measuredangle A = 60°$ en

$\text{Área} = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A$, resulta

$$\text{Área} = \left(\frac{1}{2}\right)(3)(4) \operatorname{sen} 60°$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)(3)(4)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\sqrt{3}.$$

Es decir, **el área del $\triangle ABC$ es $3\sqrt{3}$**.



E

Determine el área del $\triangle ABC$ con:

a) $b = 4$, $c = 8$ y $\measuredangle A = 30°$

b) $b = 6$, $c = 10$ y $\measuredangle A = 45°$

c) $a = 3$, $c = 8$ y $\measuredangle B = 60°$

d) $a = 6$, $b = 2$ y $\measuredangle C = 120°$

129

Aprendizajes esperados

Determina el área de un triángulo utilizando trigonometría.

Secuencia:

En esta clase se presenta una aplicación de gran utilidad de la función seno: el cálculo del área de un triángulo, conociendo dos lados y el ángulo comprendido entre estos.

Puntos esenciales:

Recordar, de forma intuitiva, que el área de un triángulo corresponde a la medida de la región triangular determinada (o limitada) por dicho triángulo, y que se mide en unidades cuadradas de longitud (cm^2, m^2, km^2, etc.)

Recordar que el área de un triángulo está dada por

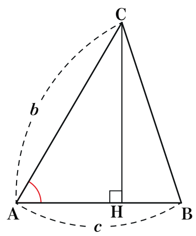
$$\text{Área} = \frac{(\text{base})(\text{altura})}{2}.$$

Explicar que la condición de perpendicularidad de la altura de un triángulo permite la formación de triángulos rectángulos en los que se aplica la definición de las funciones trigonométricas.

Indicar que puede memorizarse la conclusión, redactándola en palabras sencillas: el área de un triángulo es el semiproducto de dos de sus lados por el seno del ángulo comprendido por estos.

C4: El área de un triángulo utilizando trigonometría

(P) Dado el triángulo de la figura de la derecha. Expresa su área utilizando trigonometría.



(S) Base: AB Altura: CH

$\text{Área} = \frac{1}{2}(AB)(CH)$

$\operatorname{sen} A = \frac{CH}{AC} = \frac{CH}{b}$, $CH = b \operatorname{sen} A$

$\text{Área} = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A$, $AB = c$

(C) $\text{Área} = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A$ $\text{Área} = \frac{1}{2} ca \operatorname{sen} B$

$\text{Área} = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C$

(Ej) Dado ΔABC con $b = 3$, $c = 4$ y $\measuredangle A = 60°$. Determine su área.

$$\text{Área} = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A = \frac{1}{2}(4)(3) \operatorname{sen} 60°$$

$$= \frac{1}{2}(4)(3)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\sqrt{3}$$

El área del ΔABC es $\text{Área} = 3\sqrt{3}$

(E) Determine el área del ΔABC con:

a) $b = 4, c = 8$ y $\measuredangle A = 30°$

$\text{Área} = \frac{1}{2}(8)(4) \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}(8)(4)\left(\frac{1}{2}\right) = 8$

b) $b = 6$, $c = 10$ y $\measuredangle A = 45°$

$\text{Área} = \frac{1}{2}(10)(6) \operatorname{sen} 45° = \frac{1}{2}(10)(6)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{30}{\sqrt{2}}$

c) $a = 3, c = 8$ y $\measuredangle B = 60°$

$\text{Área} = \frac{1}{2}(8)(3) \operatorname{sen} 60° = \frac{1}{2}(8)(3)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\sqrt{3}$

Contenido 1 Ley del coseno (1)

Aprendizajes esperados

Aplica la ley del coseno en el cálculo de la medida de uno de los lados de un triángulo.

Secuencia:

La ley del seno es un recurso teórico de gran aplicación para determinar medidas de lados o ángulos de un triángulo, pero sujeta a condiciones para su uso. Nos preguntamos entonces, ¿cómo encontrar alguna de estas medidas, conociendo solo los tres lados del triángulo, o teniendo solamente dos lados y el ángulo comprendido entre dichos lados? La Ley del coseno permite dar respuesta a esta pregunta.

Puntos esenciales:

Recalcar la diferencia en las condiciones para aplicar la Ley del seno o del coseno, para comprender por qué en la solución del ejemplo propuesto no se aplica la Ley del seno.

Hacer notar que las situaciones planteadas en esta clase inducen a que una de las condiciones para aplicar la Ley del coseno es conocer dos de los lados del triángulo y el ángulo determinado por dichos lados.

Justificar en la solución de los ejercicios por qué la toma de la raíz cuadrada positiva solamente (las medidas de lados de un triángulo son números positivos).

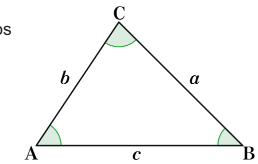
Sección 2: Ley del coseno

Contenido 1: Ley del coseno (1)

Ley del coseno

En un ΔABC, con ángulos interiores A, B y C y lados opuestos a cada ángulo a, b y c, respectivamente, se cumple que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$



Es decir, en un triángulo cualquiera, el cuadrado de la longitud de cada lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de estos por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.

Ejemplo Dado el ΔABC, con $b = 5$, $c = 3\sqrt{3}$ y $\measuredangle A = 30°$, determine la longitud a del lado $\overline{BC}$.

Por la ley del coseno, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$. Se sustituye $b = 5$, $c = 3\sqrt{3}$ y $\measuredangle A = 30°$ en la expresión anterior, para obtener

$$\begin{aligned} a^2 &= 5^2 + (3\sqrt{3})^2 - (2)(5)(3\sqrt{3})\cos 30° \\ &= 25 + 27 - (2)(5)(3\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 25 + 27 - 45 \\ &= 7 \end{aligned}$$

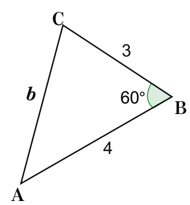
$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Por tanto, $a^2 = 7$. Como $a > 0$, entonces $\boldsymbol{a = \sqrt{7}}$.

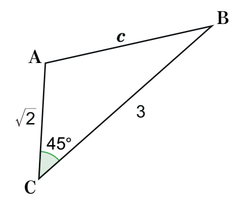
E

Dados los siguientes triángulos, determine:

a) La longitud b



b) La longitud c

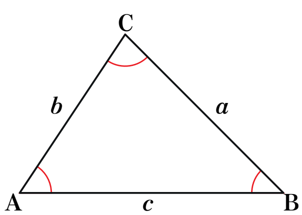


S2: Ley del coseno
C1: Ley del coseno (1)

Ley del coseno

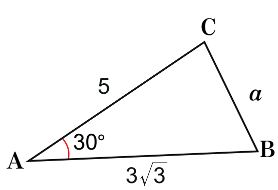
Dado el ΔABC:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$



Ej Dado el ΔABC, determine la longitud a del lado BC.

$b = 5,\ c = 3\sqrt{3},\ \measuredangle A = 30°$



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$\begin{aligned} a^2 &= 5^2 + (3\sqrt{3})^2 - 2(5)(3\sqrt{3})\cos 30° \\ &= 25 + 27 - 2(5)(3\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 25 + 27 - 45 \\ &= 7 \end{aligned}$$

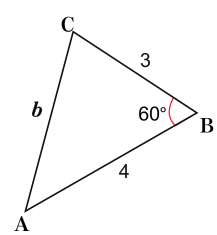
$\boxed{\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

Como $a > 0$, $a = \sqrt{7}$

E Dados los siguientes triángulos, determine:

a) La longitud b

$a = 3,\ c = 4,\ \measuredangle B = 60°$



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$\begin{aligned} b^2 &= 3^2 + 4^2 - 2(3)(4)\cos 60° \\ &= 9 + 16 - \cancel{2}(3)(4)\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) \\ &= 9 + 16 - 12 \\ &= 13 \end{aligned}$$

$\boxed{\cos 60° = \frac{1}{2}}$

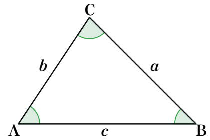
Como $b > 0$, $b = \sqrt{13}$

Contenido 2 Ley del coseno (2)

Contenido 2: Ley del coseno (2)

En un $\triangle ABC$, con ángulos interiores A, B y C y lados opuestos a cada ángulo a, b y c, respectivamente, se cumple

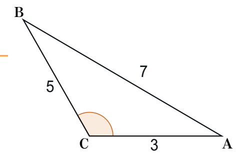
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$



De donde se obtienen las siguientes relaciones:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},\quad \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Ejemplo Dado el $\triangle ABC$, con $a=5$, $b=3$ y $c=7$. Determine la medida del ángulo C opuesto al lado $\overline{AB}$.



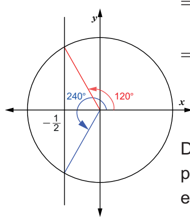
Al sustituir $a=5$, $b=3$ y $c=7$ en la igualdad

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

se sigue que $\cos C=\frac{5^2+3^2-7^2}{(2)(5)(3)}$

$$=\frac{25+9-49}{30}$$
$$=\frac{-15}{30}$$
$$=-\frac{1}{2}$$

$\cos C=-\frac{1}{2}$ → $\cos 120°=-\frac{1}{2}$, $\cos 240°=-\frac{1}{2}$

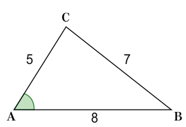


De donde $\measuredangle C=120°$ o $\measuredangle C=240°$. Pero $\measuredangle C=240°$ es imposible, porque la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°. Así que **$\measuredangle C=120°$**.

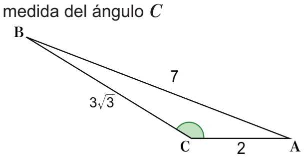
E

Dados los siguientes triángulos, determine:

a) La medida del ángulo A



b) La medida del ángulo C



Aprendizajes esperados

Aplica la ley del coseno en el cálculo de la medida de uno de los ángulos interiores de un triángulo dado.

Secuencia:

La Ley del coseno, establecida en la clase anterior, puede aplicarse cuando se conocen los tres lados de un triángulo. De modo que, al igual que para la Ley del seno, esta otra ley se utiliza a partir de dos condiciones en un triángulo: conocer los tres lados o teniendo dos lados y el ángulo determinado por estos.

Puntos esenciales:

Para obtener la expresión

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

a partir de $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ debe tenerse en cuenta:

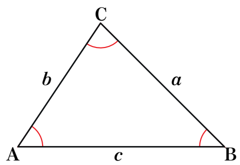
1. Transposición de términos.
2. Despeje de una expresión.

Explicar que $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ se utiliza cuando se conocen las longitudes de los tres lados del triángulo, dando lugar a calcular el valor de una expresión numérica, cuya reducción es el valor de $\cos A$.

Recordar el procedimiento aprendido en las secciones de la unidad anterior para resolver igualdades de la forma $\cos B=p$.

C2: Ley del coseno (2)

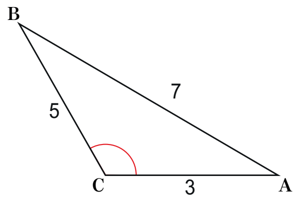
$$a^2=b^2+c^2-2bc\ \cos A$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$
$c^2=a^2+b^2-2bc\cos C$, se cumple:



$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

Ej Dado el ΔABC, determine la medida del ángulo C.

Sustituyendo en



$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$
$$=\frac{5^2+3^2-7^2}{(2)(5)(3)}$$
$$=\frac{25+9-49}{30}$$
$$\cos C=\frac{-15}{30}=-\frac{1}{2}$$

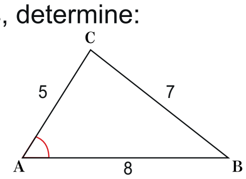
$\cos 120°=-\frac{1}{2}$

$\cos 240°=-\frac{1}{2}$

De acuerdo a la figura $\measuredangle C=120°$

E Dados los siguientes triángulos, determine:

a) La medida del ángulo A



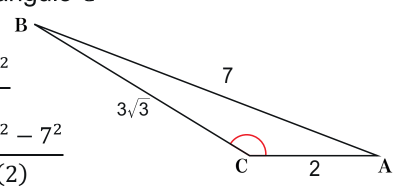
$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$=\frac{5^2+8^2-7^2}{2(5)(8)}$$
$$\cos A=\frac{25+64-49}{80}=\frac{40}{80}=\frac{1}{2}$$

$\cos 60°=\frac{1}{2}$

$\cos 300°=\frac{1}{2}$

De acuerdo con la figura, $\measuredangle A=60°$

b) La medida del ángulo C



$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$
$$=\frac{(3\sqrt{3})^2+2^2-7^2}{2(3\sqrt{3})(2)}$$
$$\cos C=\frac{27+4-49}{12\sqrt{3}}=\frac{-18}{12\sqrt{3}}=\frac{-3}{2\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

De acuerdo con la figura, $\measuredangle C=150°$

Contenido 3 Aplicación de la ley del coseno

Aprendizajes esperados

Aplica la ley del coseno en la resolución de situaciones concretas.

▪ Secuencia:

Al igual que la Ley del seno se aplicó para resolver situaciones del entorno, la Ley del coseno puede usarse para determinar valores desconocidos en aquellas situaciones en las que se formen triángulos y se conozcan datos para poder aplicar dicha ley.

▪ Puntos esenciales:

Representar gráficamente la situación planteada.

Analizar en el triángulo formado que se cuente con datos que permitan aplicar la Ley del coseno, y percibir el por qué no puede emplearse la Ley del seno.

Justificar en la ejercitación por qué la toma de la raíz cuadrada positiva solamente: las medidas de lados de un triángulo son números positivos.

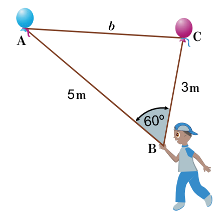
Recordar el orden de las operaciones a aplicarse en la simplificación de expresiones numéricas: primero potencias, luego multiplicaciones o divisiones y finalmente sumas o restas (de izquierda a derecha).

Contenido 3: Aplicación de la ley del coseno

P

Rodrigo sostiene dos globos con dos cuerdas, una de longitud 5 metros y la otra de 3 metros. Si el ángulo que se forma entre ambas cuerdas es de 60°.

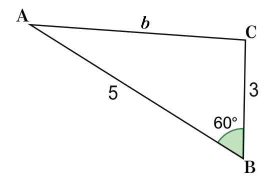
¿A qué distancia se encuentra un globo respecto al otro?



S

Se aplica la ley del coseno al triángulo ΔABC para el lado b, se tiene que

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$
$$b^2=3^2+5^2-(2)(3)(5)\cos 60°$$
$$b^2=9+25-(30)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$b^2=19$$



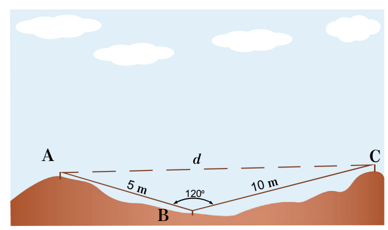
Como $b>0$,

$$\boldsymbol{b}=\sqrt{19}\,.$$

Por tanto, **los globos se encuentran, entre sí, a una distancia de $\sqrt{19}$ metros**.

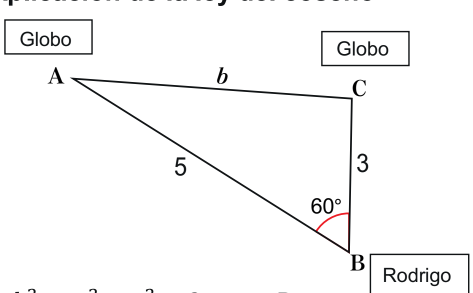
E

Desde el suelo de un cañón se necesitan 5 m de soga para alcanzar la cima de la pared del cañón y 10 m para alcanzar la cima de la pared opuesta (ver figura). Si las dos sogas forman un ángulo de 120°, ¿cuál es la distancia d desde la cima de una pared del cañón a la otra?



C3: Aplicación de la ley del coseno

(P)



(S) $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$=3^2+5^2-(2)(3)(5)\ \cos 60°$

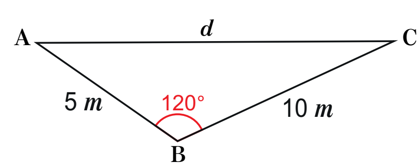
$=9+25-(30)\ \left(\frac{1}{2}\right)$

$=9+25-15=19$

Como $b>0,\quad b=\sqrt{19}$

Por tanto, los globos se encuentran entre sí, a una distancia de $\sqrt{19}$ metros.

(E) *Leer en el libro de texto.*



$d^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$=10^2+5^2-2(10)(5)\ \cos 120°$

$=100+25-2(10)(5)\ \left(-\frac{1}{2}\right)$

$=100+25+50=175$

Como $d>0,\quad d=5\sqrt{7}$

La distancia entre las dos cimas es de $5\sqrt{7}$ metros.

Prueba de Matemática 10mo (30 min.) **Fecha:** ____________

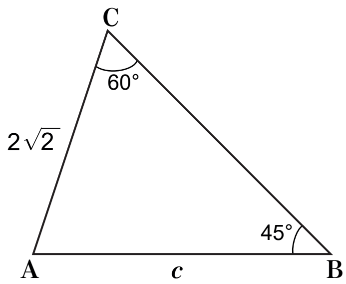
Unidad 7: Trigonometría Analítica

/ 20

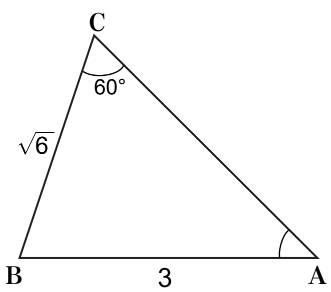
Nombre: ______________________________ **Sección:** __________
Sexo: M / F

1. Dados los siguientes triángulos, determine: (4 puntos × 2 = 8)

   a) La longitud c



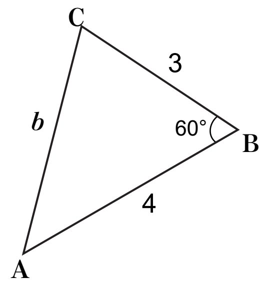
   b) La medida del ángulo A



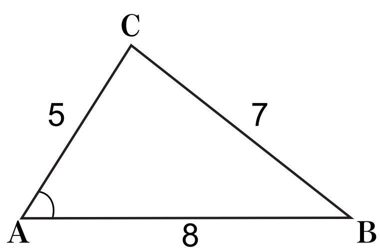
Determine el área del $\triangle ABC$ con $b = 4$, $c = 8$ y $A = 30°$. (4 puntos)

3. Dados los siguientes triángulos, determine: (4 puntos × 2 = 8)

a) La longitud b



b) La medida del ángulo A



Nombre: ______________________________

Unidad 8

Estadística

Sección 1 Medidas de tendencia central y representación gráfica de datos

Sección 2 Medidas de posición y dispersión

Contenido 1 Definición de la media aritmética, moda, mediana

Aprendizajes esperados

Calcula el valor de la media aritmética, mediana y moda de un conjunto de datos.

Secuencia:

En el grado anterior se estudiaron algunos conceptos básicos de Estadística, realizando varios gráficos estadísticos que facilitan la interpretación de información. En este libro de texto se analizan valores que se caracterizan por ocupar una posición central en un conjunto de datos, conocidos como medidas de tendencia central y otros valores que indican posición y dispersión.

Puntos esenciales:

Inducir a la noción de media aritmética mediante el cálculo de promedios de calificaciones, lo cual no es desconocido para los estudiantes.

Caracterizar el concepto de mediana como el valor para el cual el 50% de los datos es inferior (o igual) a este y el restante 50% es superior (o igual) al mismo. Debe insistirse en la diferenciación entre el valor de la mediana y su posición.

La palabra moda se utiliza con mucha frecuencia en situaciones del entorno. Recúrrase a esta noción de moda para inducir a la definición formal.

Sección 1: Medidas de tendencia central y representación gráfica de datos

Contenido 1: Definición de la media aritmética, moda, mediana

P

A 7 estudiantes se les preguntó el total de horas semanales que dedican a ver televisión obteniéndose los siguientes resultados:

4, 7, 10, 8, 9, 9, 9

a) Calcule el promedio de los datos dados.
b) Encuentre el valor más frecuente en este conjunto de datos.
c) Ordene los datos de menor a mayor y ubique el número que se encuentra en el centro de los datos.

S

a) El promedio está dado por:

$$\frac{4+7+10+8+9+9+9}{7}=\frac{56}{7}=\mathbf{8}$$

Esto significa que los estudiantes ven la televisión en promedio, 8 horas a la semana.

b) El dato más frecuente es 9.

c) Se ordenan los datos de menor a mayor:

4, 7, 8, 9, 9, 9,10.

Se observa que en la sucesión de datos hay un número impar de elementos y que el primer 9 de izquierda a derecha se encuentra en el centro de los datos.

5 , 7, 8, 9, 9, 9, 10

Otra forma de determinar la ubicación de este dato es calculando

$$\frac{7+1}{2}=\frac{8}{2}=4$$

donde $n=7$ es el número de datos.

El número calculado en a) se llama media aritmética o promedio, el valor encontrado en b) se conoce como moda y el dato de c) es la mediana.

C

Media aritmética $\bar{x}$ o promedio, es la suma de todos los datos dividida entre el número de estos.

Moda M_o es el dato que más se repite.

Mediana M_e es el número que se encuentra en la posición central de un conjunto de datos.

Para determinar la mediana se lleva a cabo lo siguiente:
1. Se ordenan los datos.
2. • Si la cantidad de datos es impar, M_e es el valor central.
   • Si la cantidad de datos es par, M_e es el promedio de los datos del centro.

La media aritmética, la moda y la mediana son conocidos como **medidas de tendencia central**.

Este contenido tiene 2 páginas (ver en el LT)

U8: Estadística
S1: Medidas de tendencia central y representación gráfica de datos
C1: Definición de la media aritmética, moda y mediana

P Horas semanales que dedican a ver TV:
4, 7, 10, 8, 9, 9, 9

S a) Promedio de los datos

$$\frac{4+7+10+8+9+9+9}{7}=\frac{56}{7}=8$$

b) El dato más frecuente: 9. ← Moda

c) Primero se ordenan los datos 4, 7, 8, 9, 9, 9, 10 (Mediana)

Para determinar la ubicación del centro de los datos:

$$\frac{n+1}{2}=\frac{7+1}{2}=\frac{8}{2}=4$$

C *Leer en el libro de texto.*

Ej Calcule la mediana del siguiente conjunto de datos:

$11, 13, 15, 9, 13, 10, 11, 13$

1. Se ordenan los datos:

$9, 10, 11, 11, 13, 13, 13, 15$

2. Como n es par:

$$M_e=\frac{11+13}{2}=\frac{24}{2}=12$$

E Encuentre la media aritmética, moda y mediana.

a) $2, 2, 1, 5, 1, 1$

Se ordenan los datos: $1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 5$

$$\bar{x}=\frac{1+1+1+2+2+5}{6}=\frac{12}{6}=2 \qquad M_o=1$$

Como n es par, entonces

$$M_e=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}=1{,}5$$

d) $14, 12, 15, 14, 14, 12, 10$

Se ordenan los datos: $10, 12, 12, 14, 14, 14, 15$

$$\bar{x}=\frac{10+12+12+14+14+14+15}{7}$$

$$=\frac{91}{7}=13$$

$M_o=14 \qquad M_e=14$

Contenido 2 Aplicación de la media aritmética, moda y mediana

Contenido 2: Aplicación de la media aritmética, moda y mediana

P

Dados los grupos de datos A: 2, 4, 3, 4, 1, 4 y B: 2, 1, 3, 3, 4, 5;

a) Encuentre la media aritmética de cada grupo.
b) Encuentre la moda de cada grupo.
c) Encuentre la mediana de cada grupo.
d) Compare los valores encontrados en los incisos anteriores para A y B.

S

a) Se calcula la media aritmética de cada grupo:

$\bar{x}_A = \frac{2+4+3+4+1+4}{6} = \frac{18}{6} = \mathbf{3}$ $\quad\quad$ $\bar{x}_B = \frac{2+1+3+3+4+5}{6} = \frac{18}{6} = \mathbf{3}$

b) Se encuentra que la moda en A es 4 y en B es 3.

c) Para encontrar la mediana de cada grupo se ordenan los datos de A y B de menor a mayor.

A: 1, 2, 3, 4, 4, 4 $\quad\quad$ B: 1, 2, 3, 3, 4, 5

Como el total de datos en cada grupo es 6, entonces la mediana se encuentra entre el tercer y el cuarto elemento de cada sucesión de datos

A: 1, 2, 3, 4, 4, 4 $\quad\quad$ B: 1, 2, 3, 3, 4, 5

Luego, la mediana de A es $\frac{3+4}{2} = \frac{7}{2} = \mathbf{3{,}5}$ y la de B es $\frac{3+3}{2} = \frac{6}{2} = \mathbf{3}$.

d) Comparando los valores anteriores se observa que la media de los dos grupos es la misma; sin embargo en la moda difieren (4 en A y 3 en B) lo mismo ocurre con la mediana.

C

Las características de las medidas de tendencia central de 2 conjuntos de datos se analizan comparando los respectivos valores de la media, la moda y la mediana de ellos.

E

a) Dados los grupos de datos A: 4, 2, 2, 1, 3, 1, 1 y B: 2, 2, 1, 1, 3, 3, 2, encuentre la media, moda y mediana de cada grupo y compare los valores respectivos encontrados.

b) En un salón de clases se preguntó a dos grupos de 6 estudiantes cada uno, el total de horas semanales que dedican al estudio de matemática, obteniéndose los siguientes resultados:
Grupo A: 2, 2, 1, 5, 1, 1 $\quad$ Grupo B: 1, 4, 1, 1, 1, 4
Encuentre la media, moda y mediana de cada grupo y compare los resultados.

Aprendizajes esperados

Compara los valores respectivos de las medidas de tendencia central de dos conjuntos de datos.

Secuencia:

En la clase anterior se definieron los conceptos de media, mediana y moda, y la manera de calcularlas, para datos no agrupados. Cuando se cuenta con dos o más conjuntos de datos, se puede calcular, para cada uno, las correspondientes medidas de tendencia central y compararlas, con el propósito de caracterizar el "centro" de cada conjunto de datos.

Puntos esenciales:

Recordar el procedimiento para calcular la media aritmética, mediana y moda.

Hacer notar que el cálculo de la moda está asociado a uno ya conocido en el grado anterior: frecuencia absoluta.

Insistir que, si los datos corresponden a una situación, debe interpretarse cada valor calculado.

C2: Aplicación de la media aritmética, moda y mediana

(P) Dados los grupos de datos:

A: 2, 4, 3, 4, 1, 4 y B: 2, 1, 3, 3, 4, 5

(S) a) Encuentre la media aritmética de cada grupo.

$$\bar{x}_A = \frac{2+4+3+4+1+4}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

$$\bar{x}_B = \frac{2+1+3+3+4+5}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

b) Encuentre la moda de cada grupo:

Moda en A: 4 $\quad\quad$ Moda en B: 3

c) Encuentre la mediana de cada grupo:
Se ordenan los datos:

A: 1, 2, 3, 4, 4, 4 $\quad\quad$ B: 1, 2, 3, 3, 4, 5

La posición de la mediana en ambos grupos es:

$$\frac{n+1}{2} = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

Mediana de A: $\frac{3+4}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5$

Mediana de B: $\frac{3+3}{2} = \frac{6}{2} = 3$

d) La media de los dos grupos es la misma.
La moda y la mediana son diferentes.

(C) *Leer en el libro de texto.*

(E) a) Dados los grupos de datos:

A: 4, 2, 2, 1, 3, 1, 1 $\quad\quad$ B: 2, 2, 1, 1, 3, 3, 2

Encuentre la media, moda y mediana de cada grupo.

$$\bar{x}_A = \frac{4+2+2+1+3+1+1}{7} = \frac{14}{7} = 2$$

$$\bar{x}_B = \frac{2+2+1+1+3+3+2}{7} = \frac{14}{7} = 2$$

Moda en A: 1 $\quad\quad$ Moda en B: 2

Se ordenan los datos:

A: 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4 $\quad\quad$ B: 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3

En ambos grupos $n = 7$, la posición de la mediana es:

$$\frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Mediana de A: 2
Mediana de B: 2

Los valores de la media aritmética, La mediana coinciden. Los de la moda difieren

Contenido 3 Organización de datos mediante agrupación

Aprendizajes esperados

Organiza datos mediante la agrupación en clases o intervalos.

Secuencia:

En clases anteriores, los conjuntos de datos abordados no estaban agrupados. El estudio de estos puede efectuarse con más simplicidad si se disponen de manera agrupada en intervalos también denominados clases.

Puntos esenciales:

Explicar que la agrupación de un conjunto de datos mediante intervalo o clases requiere de la concepción de intervalos como un conjunto de números en los cuales estarán contenidos los datos en cuestión.

Destacar que cada intervalo debe tener el mismo ancho y no debe haber separación entre un intervalo y el siguiente; esto es, el límite superior de un intervalo es el límite inferior del siguiente, y así sucesivamente, hasta el último intervalo, que ha de contener al mayor de los datos.

Explicar con detalle la formación de los intervalos del problema central de la clase.

Contenido 3: Organización de datos mediante agrupación

P

Las edades de 30 pacientes con problemas respiratorios que visitaron el centro de salud aparecen en la tabla contigua.

a) Clasifique los datos en 4 grupos (de 4 en 4, inicie el conteo en 2 y termine en 18).

b) Organice los datos por intervalos en una tabla.

11	5	8	6	14	15
5	3	13	9	9	6
7	10	14	17	11	9
7	4	7	15	2	10
14	8	13	6	13	14

S

a) Se agrupan los datos en intervalos: como se tomarán de 4 en 4, el primero lo forman los datos mayores o iguales que 2 y menores que 6, se escribe 2 - 6 (2 es el límite inferior y 6 el límite superior), el segundo intervalo 6 - 10 lo forman los datos mayores o iguales que 6 y menores que 10, se continúa de esta manera hasta llegar a 18:

2 - 6	6 - 10	10 - 14	14 - 18

b) Datos ordenados:

2	3	4	5	5	6
6	6	7	7	7	8
8	9	9	9	10	10
11	11	13	13	13	14
14	14	14	15	15	17

Tabla con datos organizados por intervalos:

Grupo (intervalo)	
2 - 6	2, 3, 4, 5, 5
6 - 10	6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 9
10 - 14	10, 10, 11, 11, 13, 13, 13
14 - 18	14, 14, 14, 14, 15, 15, 17

C

Para organizar datos mediante clases o intervalos:

1. Se definen los intervalos considerando el número de ellos a crear y los límites a considerar.
2. Se colocan los datos uno a uno en el grupo al que pertenecen. En cada grupo deben quedar los datos, cuyo valor es mayor o igual que el límite inferior, pero menor que el límite superior.

E

A continuación, se muestra el registro de edades de 30 pacientes atendidos en el centro de Salud "Sinforoso Bravo".

a) Clasifique los datos en 5 grupos de 4 en 4, inicie en 20 y termine en 40 y defina los intervalos.

b) Organice los datos en una tabla.

20	22	24	22	30
27	34	35	29	28
24	21	20	23	26
23	26	20	29	36
28	29	24	23	34
24	21	20	36	24

141

C3: Organización de datos mediante agrupación

P Los datos representan las edades de 30 pacientes.

11	5	8	6	14	15	5	3	13	9
9	6	7	10	14	17	11	9	7	4
7	15	2	10	14	8	13	6	13	14

S a) Clasifique los datos en 4 grupos (de 4 en 4, inicie el conteo en 2 y termine en 18).

$2-6,\quad 6-10,\quad 10-14,\quad 14-18$

b) Organice los datos por intervalos en una tabla.

Intervalo	
$2-6$	$2, 3, 4, 5, 5$
$6-10$	$6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 9$
$10-14$	$10, 10, 11, 11, 13, 13, 13$
$14-18$	$14, 14, 14, 14, 15, 15, 17$

C *Leer en libro de texto.*

E *Resolver el ejercicio del libro de texto.*

a) Clasifique los datos en 5 grupos de 4, inicie en 20 y termine en 40 y defina los intervalos.

$20-24,\ 24-28,\ 28-32,\ 32-36,\ 36-40$

b) Organice los datos en una tabla.

Intervalo	
$20-24$	$20, 20, 20, 20, 21, 21, 22, 22, 23, 23, 23$
$24-28$	$24, 24, 24, 24, 24, 26, 26, 27$
$28-32$	$28, 28, 29, 29, 29, 30$
$32-36$	$34, 34, 35$
$36-40$	$36, 36$

Contenido 4 Tabla de distribución de frecuencias

Contenido 4: Tabla de distribución de frecuencias

Conceptos básicos

La tabla en que se organizan los grupos de datos se llama **tabla de distribución de frecuencia**.

Se agrupan los datos con intervalos que tengan el mismo ancho o amplitud, entendiendo a estas como la diferencia entre el límite superior e inferior de cada clase.

Frecuencia absoluta f_i es el número de datos que corresponde a cada clase.

Marca de clase M_i es el promedio del límite inferior y el límite superior de la clase i.

$$M_i = \frac{\text{Límite inferior} + \text{Límite superior}}{2}$$

P

Utilizando la tabla del contenido anterior (las edad de 30 pacientes con problemas respiratorios que visitaron el centro de salud):

a) Complete la tabla de distribución de frecuencia.

b) Encuentre el ancho de cada clase.

Tabla de edades de 30 Pacientes

Edades	Número de pacientes (f_i)	Marca de clase (M_i)
2 - 6	5	
6 - 10		
10 - 14		
14 - 18	7	
Total	30	

Diagrama de edades de 30 pacientes

	9		
	9		
	9		
	8		
	8	13	17
	7	13	15
5	7	13	15
5	7	11	14
4	6	11	14
3	6	10	14
2	6	10	14
2 - 6	**6 - 10**	**10 - 14**	**14 - 18**

S

a) La columna del número de pacientes por clase se puede completar rápidamente a partir del diagrama dado.

Se calcula ahora la marca de cada clase:

$M_1 = \frac{2+6}{2} = 4$, $M_2 = \frac{6+10}{2} = 8$

$M_3 = \frac{10+14}{2} = 12$, $M_4 = \frac{14+18}{2} = 16$

b) El ancho de cada clase se determina así:

$6 - 2 = 4$, $10 - 6 = 4$,

$14 - 10 = 4$, $18 - 14 = 4$

Es decir, el ancho de cada clase es **4**.

Tabla de edades de 30 Pacientes

Edades	Número de pacientes (f_i)	Marca de clase (M_i)
2 - 6	5	4
6 - 10	11	8
10 - 14	7	12
14 - 18	7	16
Total	30	

142

Este contenido tiene 2 páginas (ver en el LT)

Aprendizajes esperados

Diseña tablas de distribución de frecuencias y calcula la marca de clase para cada intervalo.

Secuencia:

En la clase anterior se presentó una nueva organización para un conjunto de datos en una tabla mediante agrupación de los mismos en intervalos o clases. Aquí se nombra a dicha tabla como tabla de distribución de frecuencia. El estudio que se presenta se hace de manera similar al hecho para las tablas de categorías estudiadas en 9no grado.

Puntos esenciales:

Recordar que al agrupar los datos en intervalos, estos tienen el mismo ancho o amplitud y no existe separación entre un intervalo y el siguiente.

Resaltar que como los datos están agrupados en intervalos o clases, el número de datos que corresponde a cada clase es llamado frecuencia absoluta.

Explicar que la marca de clase corresponde al punto medio de cada intervalo, el cual se calcula como un promedio entre los correspondientes límites inferiores y límites superiores.

C4: Tabla de distribución de frecuencias

Tabla de frecuencias: en ella se organizan los grupos de datos

Frecuencia absoluta: f_i: número de datos de cada clase

Marca de clase: $M_i = \frac{Límite\ inferior + Límite\ superior}{2}$

P Las edades de 30 pacientes que visitaron el centro de salud aparecen en la siguiente tabla:

Haciendo uso del diagrama que aparece en el LT

S a)

Edades	No. de pacientes (f_i)	Marca de clase (M_i)
$2 - 6$	5	$\frac{2+6}{2} = 4$
$6 - 10$	11	$\frac{6+10}{2} = 8$
$10 - 14$	7	$\frac{10+14}{2} = 12$
$14 - 18$	7	$\frac{14+18}{2} = 16$
Total	30	

b) Encuentre el ancho de la clase.

El ancho de la clase es 4. $(6 - 2 = 4,\ 10 - 6 = 4, \text{etc.})$

E En la tabla siguiente aparecen las calificaciones de 30 estudiantes.

7			
5			17
4	11		16
7	8	13	17
7	11	14	18
4	9	14	17
5	9	13	19
7	8	12	16
5	11	15	19
4 − 8	**8 − 12**	**12 − 16**	**16 − 20**

a) El ancho de la clase es $8 - 4 = 4$.

b) Complete la tabla:

Calificaciones	f_i	M_i
$4 - 8$	**9**	$\frac{4+8}{2} = 6$
$8 - 12$	**7**	$\frac{8+12}{2} = 10$
$12 - 16$	**6**	$\frac{12+16}{2} = 14$
$16 - 20$	**8**	$\frac{16+20}{2} = 18$
Total	**30**	

Contenido 5 Histograma y polígonos de frecuencias

Aprendizajes esperados

Construye histograma y polígono de frecuencia asociados a un conjunto de datos agrupados en intervalos.

Secuencia:

En noveno grado se estudiaron las denominadas gráficas de barra, constituidas por rectángulos. En esta clase se aborda un gráfico similar denominado histograma obtenido a partir de la agrupación de datos en intervalos. Las marcas de clases definidas permitirán trazar el polígono de frecuencia asociado.

Puntos esenciales:

Recordar que un rectángulo consta de cuatro lados y está determinado por la longitud de su base y la de su altura.

Explicar que las bases de los rectángulos deben trazarse en el denominado “eje horizontal” que corresponde a la agrupación de los datos. El “eje vertical” siempre corresponde a las frecuencias absolutas.

Hacer notar que el polígono de frecuencia debe partir y culminar sobre el eje horizontal y unir los valores de las marcas de clase, en la parte superior de cada rectángulo.

Insistir en el orden: primero histograma, luego el polígono de frecuencia.

Contenido 5: Histograma y polígonos de frecuencias

P

Con la información de la tabla de la derecha:

a) Construya en un eje horizontal 4 rectángulos contiguos cuya base esté formada por los intervalos de edades y la altura por las frecuencias.

b) Marque los puntos medios de los lados superiores de los rectángulos y únalos con segmentos iniciando y terminando en el eje horizontal.

Tabla de edades de 30 pacientes

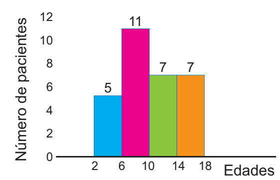
Edades	Número de pacientes (f_i)	Marca de clase (M_i)
2 - 6	5	4
6 - 10	11	8
10 - 14	7	12
14 - 18	7	16
Total	30	

S

a) Para construir los rectángulos pedidos se colocan en el eje horizontal los límites de las clases y en el eje vertical la frecuencia de cada una de estas.

A la reunión de los cuatro rectángulos o barras que aparecen a la derecha se le llama histograma.

Edades de 30 pacientes

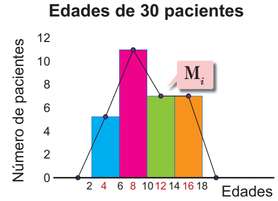


b) En el lado superior de cada rectángulo del histograma se ubica su punto medio.

Mediante segmentos se unen los puntos anteriores. La línea poligonal formada debe iniciar y finalizar sobre el eje horizontal, tal como se puede reconocer en el diagrama anexo.

Al gráfico obtenido se le denomina **polígono de frecuencia**.

Edades de 30 pacientes



Este contenido tiene 2 páginas (ver en el LT)

C5: Histograma y polígonos de frecuencias

(P) Con la información de la tabla:

Edades	No. de pacientes (f_i)	Marca de clase (M_i)
$2-6$	5	$\frac{2+6}{2}=4$
$6-10$	11	$\frac{6+10}{2}=8$
$10-14$	7	$\frac{10+14}{2}=12$
$14-18$	7	$\frac{14+18}{2}=16$
Total	30	

a) y b) Construya un histograma

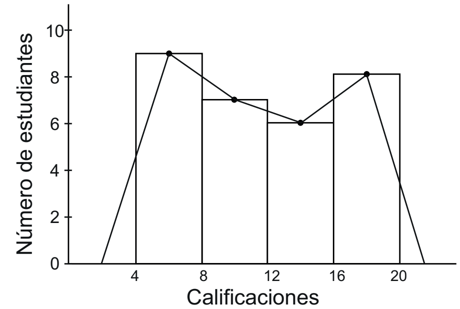
(S) **Edades de 30 pacientes**

(C) Un histograma es un conjunto de barras verticales consecutivas y contiguas cuyas alturas corresponden a la frecuencia absoluta de cada clase.

Un polígono de frecuencias es un polígono que se forma uniendo los puntos medios de las barras del histograma.

(E) *Resuelva el ejercicio del libro de texto.*

Calificación de 30 estudiantes



Contenido 6

Media aritmética, moda y mediana para datos organizados en tablas de distribución de frecuencias

Contenido 6: Media aritmética, moda y mediana para datos organizados en tablas de distribución de frecuencias

P

Dada la tabla de las edades de 30 pacientes con problemas respiratorios, que visitaron un centro de salud, mostradas en la tabla siguiente. Determine:

a) El valor de la media aritmética.

b) El valor de la moda.

c) El valor de la mediana.

Edades de 30 pacientes

Edades	Número de pacientes (f_i)	Marca de clase (M_i)	$f_i \cdot M_i$	Frecuencia acumulada (F_i)
2 - 6	5	4		
6 - 10	11	8		
10 - 14	7	12		
14 - 18	7	16		
Total	30			

S

Retomando los datos del contenido 4 donde se conocía el número de pacientes y las marcas de clase, se añade dos columnas más para encontrar la media aritmética, la moda y la mediana.

Edades de 30 pacientes

Edades	Número de pacientes (f_i)	Marca de clase (M_i)	$f_i \cdot M_i$	Frecuencia acumulada (F_i)
2 - 6	5	4	20	5
6 - 10	11	8	88	16
10 - 14	7	12	84	23
14 - 18	7	16	112	30
Total	30		304	

a) Para obtener la media aritmética se completa la cuarta columna multiplicando el número de pacientes f_i por la marca de clase M_i, obteniendo

$f_1M_1 = (5)(4) = 20$

$f_2M_2 = (11)(8) = 88$

$f_3M_3 = (7)(12) = 84$

$f_4M_4 = (7)(16) = 112$

Se suman los resultados y se divide entre el número total de datos.

$\bar{x} = \frac{20+88+84+112}{30} = \frac{304}{30} \approx 10,13$, donde $\approx$ significa aproximado.

Por lo tanto, la media aritmética es $\bar{x} \approx \mathbf{10,13}$.

b) Se observa en la tabla que la clase con mayor frecuencia (11) es 6 - 10, y su marca de clase es $\frac{6+10}{2} = \mathbf{8}$. Así, la moda es $\mathbf{M_o = 8}$.

Aprendizajes esperados

Calcula el valor de la media, mediana y moda de un conjunto de datos organizados en tablas de distribución de frecuencia.

Secuencia:

Se dio inicio a esta sección con el concepto y cálculo de medidas de tendencia central para datos no agrupados. En vista de que podemos agruparlos mediante intervalos de clase, el cálculo de las medidas de tendencia central requiere ahora de las marcas de clase.

Puntos esenciales:

Identificar en la tabla de frecuencias, la frecuencia absoluta y la marca de clase correspondiente a cada intervalo.

Hacer notar que en comparación con lo aprendido al inicio de esta sección, el cálculo de la media aritmética requiere de una operación más: multiplicación, suma y división.

Recurrir nuevamente a la identificación para poder determinar la clase modal que tenga la mayor frecuencia absoluta. De haber, por ejemplo, dos clases con iguales frecuencias absolutas, siendo estas a su vez las mayores, en comparación con las restantes, el conjunto de datos será bimodal.

Recordar la forma de calcular la frecuencia acumulada en la tabla de frecuencia aprendida en noveno grado.

C6: Media aritmética, moda y mediana para datos organizados en tablas de distribución de frecuencias

P La tabla contiene las edades de 30 pacientes con problemas respiratorios. Determine:

Edades	No. de pacientes (f_i)	Marca de clase (M_i)	$f_i \cdot M_i$	F_i
$2-6$	5	$\frac{2+6}{2} = 4$	$(5)(4) = 20$	5
$6-10$	11	$\frac{6+10}{2} = 8$	$(11)(8) = 88$	16
$10-14$	7	$\frac{10+14}{2} = 12$	$(7)(12) = 84$	23
$14-18$	7	$\frac{14+18}{2} = 16$	$(7)(16) = 112$	30
Total	30		304	

a) El valor de la media aritmética.

$$\bar{x} = \frac{20+88+84+112}{30} = \frac{304}{30} \approx 10{,}13$$

b) El valor de la moda.

La clase con mayor frecuencia es $6-10$ y $M_i = 8$.

Por lo tanto, la moda es: $M_o = 8$

c) El valor de la mediana.

La posición central es: $\frac{30+1}{2} = 15{,}5$

Este valor se encuentra en la segunda clase.

Entonces $M_e = 8$

C Media aritmética:

$$\bar{x} = \frac{suma\ de\ f_i \cdot M_i}{n}$$

Moda:

-Se identifica la clase modal.

-El valor aproximado es la marca de clase M_i

Mediana:

1. Se identifica la posición central: $\frac{n+1}{2}$
2. Se busca el resultado en F_i
3. El valor aproximado será el punto medio de la clase donde se encuentre la posición central.

Contenido 6 Media aritmética, moda y mediana para datos organizados en tablas de distribución de frecuencias

Aprendizajes esperados

Calcula el valor de la media, mediana y moda de un conjunto de datos organizados en tablas de distribución de frecuencia.

Secuencia:

Se dio inicio a esta sección con el concepto y cálculo de medidas de tendencia central para datos no agrupados. En vista de que podemos agruparlos mediante intervalos de clase, el cálculo de las medidas de tendencia central requiere ahora de las marcas de clase.

Puntos esenciales:

Identificar en la tabla de frecuencias, la frecuencia absoluta y la marca de clase correspondiente a cada intervalo.

Hacer notar que en comparación con lo aprendido al inicio de esta sección, el cálculo de la media aritmética requiere de una operación más: multiplicación, suma y división.

Recurrir nuevamente a la identificación para poder determinar la clase modal que tenga la mayor frecuencia absoluta. De haber, por ejemplo, dos clases con iguales frecuencias absolutas, siendo estas a su vez las mayores, en comparación con las restantes, el conjunto de datos será bimodal.

Recordar la forma de calcular la frecuencia acumulada en la tabla de frecuencia aprendida en noveno grado.

c) Se completa la columna de las frecuencias acumuladas. Luego se determina la posición central calculando el número $\frac{30+1}{2} = 15{,}5$. Este valor central se ubica en la tabla; se ve que se encuentra en la segunda clase. Entonces $\mathbf{M_e = 8}$.

C

La **media aritmética** de un conjunto de datos agrupados es:

$$\bar{x} = \frac{\text{suma de todos los productos } f_i \cdot M_i}{\text{número total de datos}}$$

Para calcular la **moda**:
- Se identifica la clase cuya frecuencia sea mayor (clase modal).
- El valor aproximado de la moda es la marca de clase M_i de la clase modal.

Para calcular la **mediana**:
- Se identifica donde se encuentra la posición central $\frac{n+1}{2}$. Esto se da con la frecuencia acumulada. **Frecuencia acumulada F_i** es la suma (o total acumulado) de todas las frecuencias hasta llegar al dato de interés.
- El valor aproximado de la mediana será el punto medio de la clase donde se encuentre la posición central.

E

Las calificaciones de 30 estudiantes que realizaron una prueba de matemática valorada en 20 puntos se representa en la siguiente tabla:

Calificaciones de 30 estudiantes

Calificaciones	Número de estudiantes (f_i)
4 - 8	9
8 - 12	7
12 - 16	6
16 - 20	8
Total	30

Encuentre la media aritmética, moda y mediana.

E

Calificaciones de 30 estudiantes

Calificaciones	f_i	Marca de clase (M_i)	$f_i \cdot M_i$	F_i
$4-8$	9	$\frac{4+8}{2}=6$	$(9)(6)=54$	9
$8-12$	7	$\frac{8+12}{2}=10$	$(7)(10)=70$	16
$12-16$	6	$\frac{12+16}{2}=14$	$(6)(14)=84$	22
$16-20$	8	$\frac{16+20}{2}=18$	$(8)(18)=144$	30
Total	30		352	

a) El valor de la media aritmética.

$$\bar{x} = \frac{54+70+84+144}{30} = \frac{352}{30} \approx 11{,}73$$

b) El valor de la moda.
La clase con mayor frecuencia es $4-8$ y $M_i = 6$
Por lo tanto, la moda es: $M_o = 6$

c) El valor de la mediana.
La posición central es: $\frac{30+1}{2} = 15{,}5$
Este valor se encuentra en la segunda clase.
Entonces $M_e = 10$

Contenido 7 Comparación de media y mediana para datos organizados en tablas de distribución de frecuencia, y de sus modas a partir del polígono de frecuencia

Contenido 7: Comparación de media aritmética y mediana para datos organizados en tablas de distribución de frecuencias, y de sus modas a partir del polígono de frecuencias

P

Dada la tabla de las edades de 30 pacientes con problemas respiratorios que visitaron dos centros de salud A y B, compare los resultados de la media aritmética, moda y mediana a partir de sus polígonos de frecuencias.

Edades de 30 pacientes

Edades	Número de pacientes del centro A (f_i)	Número de pacientes del centro B (f_i)
2 - 6	5	6
6 - 10	11	8
10 - 14	7	9
14 - 18	7	7
Total	30	30

S

En el contenido anterior se encontró la media aritmética, moda y mediana de los datos de pacientes de un centro de salud que se rotula con A. En este caso

$$\overline{x} = 10{,}13 \;,\; M_o = 8 \;,\; M_e = 8.$$

Se calcula ahora $\overline{x}$, M_o y M_e del centro de salud B. Para ello se determinan los productos $f_i \cdot M_i$ y los valores de F_i:

Edades	Número de pacientes del centro B (f_i)	Marca de clase (M_i)	$f_i \cdot M_i$	Frecuencia acumulada (F_i)
2 - 6	6	4	$f_1M_1 = (6)(4) = 24$	6
6 - 10	8	8	$f_2M_2 = (8)(8) = 64$	14
10 - 14	9	12	$f_3M_3 = (9)(12) = 108$	23
14 - 18	7	16	$f_4M_4 = (7)(16) = 112$	30
Total	30		308	

Luego, $\overline{x} = \frac{308}{30} \approx$ **10,26**.

La moda se encuentra en el punto medio de la clase de mayor frecuencia que es 10 - 14, entonces esta es $M_o = \frac{10+14}{2} =$ **12**.

Aprendizajes esperados

Compara los valores respectivos de media y mediana de dos conjuntos de datos organizados en tablas de distribución de frecuencia, y sus modas a partir de los polígonos de frecuencia.

Secuencia:

En clases anteriores se compararon los valores de las medidas de tendencia central para dos conjuntos de datos no agrupados. Podemos comparar dichos valores para datos agrupados mediante intervalos de clases, utilizando los polígonos de frecuencias correspondientes.

Puntos esenciales:

Aplicar los cálculos aprendidos en la clase anterior, recordando que en la tabla de frecuencias deben incluirse la frecuencia acumulada para determinar la mediana, la marca de clase y los productos necesarios para el cálculo de la media aritmética.

Trazar los polígonos de frecuencia en un mismo plano, de modo que los intervalos de clase para cada conjunto de datos serán los mismos.

Señalar que el análisis de los polígonos de frecuencia se aplica en muchas situaciones del entorno: economía, crecimiento empresarial, preferencias por determinadas compañías, etc.

C7: Comparación de media aritmética y mediana para datos organizados

P Edades de 30 pacientes con que visitaron los centros de salud A y B. Compare $\bar{x}$, M_o y M_e a partir de sus polígonos de frecuencias.

S Edades de 30 pacientes que visitaron B.

Edades	f_i	M_i	$f_i \cdot M_i$	F_i
$2-6$	6	$\frac{2+6}{2} = 4$	$(6)(4) = 24$	6
$6-10$	8	$\frac{6+10}{2} = 8$	$(8)(8) = 64$	$6+8=14$
$10-14$	9	$\frac{10+14}{2} = 12$	$(9)(12) = 108$	$14+9=23$
$14-18$	7	$\frac{14+18}{2} = 16$	$(7)(16) = 112$	$23+7=30$
Total	30		308	

En los centros de salud A y B, se tiene que:

En A: $\bar{x} = 10{,}13 \quad M_o = 8 \qquad M_e = 8$

En B: $\bar{x} = \frac{308}{30} \approx 10{,}26 \qquad M_o = \frac{10+14}{2} = 12 \qquad M_e = \frac{10+14}{2} = 12$

Se puede afirmar que la media aritmética, la moda y la mediana de A son menores que las de B.

C *Leer en el libro de texto.*

E En cada una de las calificaciones de 30 estudiantes en dos secciones A y B: Resuelva los problemas de LT.

a) Calificaciones de 30 estudiantes de la sección A.

Califi.	f_i	M_i	$f_i \cdot M_i$	F_i
$4-8$	9	$\frac{4+8}{2} = 6$	$(9)(6) = 54$	9
$8-12$	7	$\frac{8+12}{2} = 10$	$(7)(10) = 70$	$9+7=16$
$12-16$	6	$\frac{12+16}{2} = 14$	$(6)(14) = 84$	$16+6=22$
$16-20$	8	$\frac{16+20}{2} = 18$	$(8)(18) = 144$	$22+8=30$
Total	30		352	

Contenido 7 Comparación de media y mediana para datos organizados en tablas de distribución de frecuencia, y de sus modas a partir del polígono de frecuencia

Aprendizajes esperados

Compara los valores respectivos de media y mediana de dos conjuntos de datos organizados en tablas de distribución de frecuencia, y sus modas a partir de los polígonos de frecuencia.

Secuencia:

En clases anteriores se compararon los valores de las medidas de tendencia central para dos conjuntos de datos no agrupados. Podemos comparar dichos valores para datos agrupados mediante intervalos de clases, utilizando los polígonos de frecuencias correspondientes.

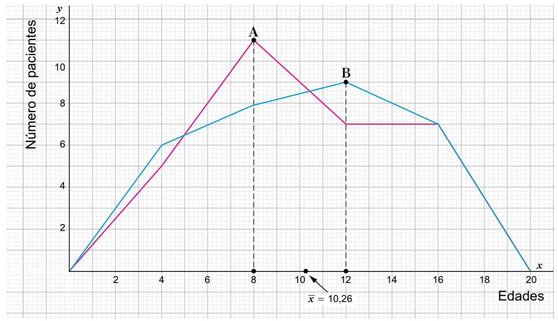
Puntos esenciales:

Aplicar los cálculos aprendidos en la clase anterior, recordando que en la tabla de frecuencias deben incluirse la frecuencia acumulada para determinar la mediana, la marca de clase y los productos necesarios para el cálculo de la media aritmética.

Trazar los polígonos de frecuencia en un mismo plano, de modo que los intervalos de clase para cada conjunto de datos serán los mismos.

Señalar que el análisis de los polígonos de frecuencia se aplica en muchas situaciones del entorno: economía, crecimiento empresarial, preferencias por determinadas compañías, etc.

En la gráfica aparece la línea vertical desde el punto más alto de cada polígono de frecuencia hacia la recta horizontal de las edades, el punto donde se corta el eje horizontal es el valor aproximado de la moda para los dos centros de salud.



La posición central es $\frac{n+1}{2}=\frac{31}{2}=15{,}5$. Con la frecuencia acumulada se percibe que la mediana se encuentra en la tercera clase (10 - 14), luego $\frac{10+14}{2}=\frac{24}{2}=12$, por lo tanto $M_e=12$.

Comparando los datos de los 2 centros de salud se puede afirmar que la media aritmética, la moda y mediana de A son menores que las de B.

C

Los polígonos de frecuencias provenientes de dos tablas de distribución de frecuencias permiten comparar los valores de las modas respectivas.

E

Las calificaciones de 30 estudiantes que realizaron una prueba de matemática en dos secciones de clase A y B de un determinado grado se representan en la tabla siguiente:

a) Encuentre la media aritmética, moda y mediana de la sección de clase A.

b) Encuentre la media aritmética, moda y mediana de la sección de clase B.

c) Construya el polígono de frecuencias y compare los resultados de a) y b).

Calificaciones de 30 estudiantes

Calificaciones	Número de estudiantes de la sección A (f_i)	Número de estudiantes de la sección B (f_i)
4 - 8	9	6
8 - 12	7	7
12 - 16	6	9
16 - 20	8	8
Total	30	30

En la sección A:

$$\bar{x}=\frac{352}{30}=11{,}73 \qquad \mathrm{M_o}=\frac{4+8}{2}=6 \qquad \mathrm{M}_e=\frac{4+8}{2}=10$$

En la sección B:

$$\bar{x}=\frac{376}{30}=12{,}53 \qquad \mathrm{M_o}=\frac{12+16}{2}=14 \qquad \mathrm{M}_e=\frac{12+16}{2}=14$$

b) c) Dirigir a los estudiantes para que trabajen independientemente, refiriéndose a las respuestas anteriores.

Contenido 1

Definición de cuartiles

Sección 2: Medidas de posición y dispersión

Contenido 1: Definición de cuartiles

P

Las calificaciones de 15 estudiantes en una prueba de Estadística con un valor de 10 puntos son:

10, 3, 8, 4, 4, 7, 5, 6, 7, 5, 8, 4, 9, 9, 3

Encuentre la mediana de todos los datos, la mediana de la primera mitad y la mediana de la segunda mitad.

S

1. Se ordenan los datos de menor a mayor: 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 10.
2. Se averigua la posición de la mediana para los datos anteriores.

   $$\frac{15+1}{2}=8$$

   La mediana se encuentra en la posición 8

   3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, **6**, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 10

   y es igual a 6.
3. Se encuentran las medianas de la primera y la segunda mitad de los datos:

   3, 3, 4, **4**, 4, 5, 5, **6**, 7, 7, 8, **8**, 9, 9, 10

   M_e

Se observa que 4, 6 y 8 dividen la lista ordenada de datos en 4 partes, estos valores se llaman primer, segundo y tercer cuartil respectivamente.

C

Para determinar los cuartiles de un conjunto de datos:
1. Se ordenan los datos de menor a mayor.
2. Se encuentra la mediana de los datos, denominada de aquí en adelante el **segundo cuartil**, se denota por Q_2.
3. Se encuentra la mediana de la primera mitad de los datos, denominada **primer cuartil** y denotada por Q_1, y la mediana de la segunda mitad de los datos que recibe el nombre de **tercer cuartil** y se denota por Q_3.

E

1. Dadas las edades de 7 niños que recibieron consulta con el pediatra: 5, 7, 3, 2, 7, 4 y 5, encuentre Q_1, Q_2 y Q_3.
2. Se le preguntó a 11 estudiantes sobre las horas de estudio que dedican en la semana para matemática, obteniéndose los datos 1, 2, 4, 3, 3, 5, 3, 1, 5, 3, 4. Encuentre Q_1, Q_2 y Q_3.

150

Aprendizajes esperados

Define y calcula cuartiles para un conjunto de datos, cuando el número total de datos es impar.

Secuencia:

Además de las medidas de tendencia central, existen otros valores estadísticos de singular importancia. Entre estos figuran los cuartiles. Uno de ellos ya fue conocido: la mediana, que es el segundo cuartil. Existen otros dos que permiten dividir la primera y segunda mitad de los datos en dos partes porcentualmente iguales. Se abordará el cálculo de los cuartiles en el caso de datos no agrupados, diferenciando dos casos para su respectivo cálculo: el total de datos es par o impar.

Puntos esenciales:

Recordar el procedimiento para calcular la mediana de un conjunto de datos, cuando el total de estos es un número impar. Debe quedar claro que este hecho también permite la división del conjunto de datos en un conjunto de datos a la izquierda de la mediana y otro a la derecha de esta, ambos con un número impar de datos.

Hacer notar que el cálculo de Q_1 y Q_3 es idéntico al de la mediana para un conjunto con un número impar de datos.

Procurar la interpretación de los cuartiles, puesto que hay una división de los datos en cuatro partes porcentualmente iguales.

S2: Medidas de posición y dispersión
C1: Definición de cuartiles

(P) Calificaciones de 15 estudiantes son:

$$10, 3, 8, 4, 4, 7, 5, 6, 7, 5, 8, 4, 9, 9, 3$$

Encuentre la mediana de todos los datos, la mediana de la primera mitad y la mediana de la segunda mitad.

(S) Se ordenan los datos de menor a mayor:

$$3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 10$$

$\Uparrow$ Q_1 $\quad$ $\Uparrow$ $M_e = Q_2$ $\quad$ $\Uparrow$ Q_3

La posición de la Mediana de todos los datos: $\frac{15+1}{2}=\frac{16}{2}=8$

La mediana es: 6

Las medianas de la primera y segunda mitad son: 4 y 8 respectivamente.

(C) Para determinar los cuartiles de un conjunto de datos:
1. Se ordenan los datos de mayor a menor.
2. Se calcula el segundo cuartil: $M_e = Q_2$
3. Se calcula el primer cuartil: Q_1
4. Se calcula el tercer cuartil: Q_3

(E) 1. Edades de 7 niños que recibieron consulta con el pediatra: 5, 7, 3, 2, 7, 4, y 5

Encuentre Q_1, Q_2 y Q_3

$$2, 3, 4, 5, 5, 7, 7$$

$\Uparrow$ Q_1 $\quad$ $\Uparrow$ Q_2 $\quad$ $\Uparrow$ Q_3

Posición de la mediana: $\frac{7+1}{2}=4$

$M_e = Q_2 = 5 \qquad Q_1 = 3$ y $Q_3 = 7$

2. Horas que dedican 11 estudiantes para estudiar Matemática: 1, 2, 4, 3, 3, 5, 3, 1, 5, 3, 4

Encuentre Q_1, Q_2 y Q_3

$$1, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5$$

$\Uparrow$ Q_1 $\quad$ $\Uparrow$ Q_2 $\quad$ $\Uparrow$ Q_3

Posición de la mediana: $\frac{11+1}{2}=\frac{12}{2}=6$

$M_e = Q_2 = 3 \qquad Q_1 = 2$ y $Q_3 = 4$

Contenido 2 Cálculo de cuartiles

Aprendizajes esperados

Calcula cuartiles para un conjunto de datos, cuando el número total de datos es par.

Secuencia:

El cálculo de los cuartiles abordado en el contenido anterior estaba referido a la condición que el total de datos es impar. ¿Qué ocurre si el total de datos es par? El cálculo también se corresponde al de la mediana para un número de datos par.

Puntos esenciales:

Recordar que cuando el total de datos es par, la mediana se calcula mediante el promedio de los dos datos que ocupan la posición central. Este valor es el segundo cuartil. Estos dos datos forman parte de las dos mitades que conforman el total de datos, de modo respectivo.

Explicar que cada una de estas mitades tiene un número par de datos. El cálculo del primer cuartil se hace promediando los dos datos que se ubican en la posición central de la primera mitad. El segundo cuartil se determina promediando los dos datos que se ubican en la posición central de la segunda mitad.

Contenido 2: Cálculo de cuartiles

Ejemplo Los siguientes datos son calificaciones de 16 estudiantes obtenidas en una prueba de matemática valorada en 10 puntos:

8, 7, 4, 4, 2, 4, 3, 5, 7, 3, 6, 1, 2, 3, 1, 4.

Encuentre Q_1, Q_2 y Q_3.

1. Se ordenan los datos:

   1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 8

2. Se determina la mediana de los datos. Como $n=16$, el cociente

   $$\frac{16+1}{2}=8{,}5$$

   indica que se deben tomar los datos de las posiciones 8 y 9 y luego promediarlos.

   1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, **4, 4**, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 8

   De modo que,

   $$M_e=\frac{4+4}{2}=4.$$

3. Se encuentran las medianas de la primera (Q_1) y segunda mitad de los datos (Q_3). La primera mitad consta de 8 elementos , luego el cociente $\frac{8+1}{2}=4{,}5$ indica que se deben promediar los datos de la cuarta y quinta posición.

   $$\overbrace{1, 1, 2, \underbrace{2, 3}_{Q_1}, 3, 3, 4}\ \overbrace{\underbrace{4,}_{}\ 4, 4, \underbrace{5, 6}_{Q_3}, 7, 7, 8}$$

   1, 1, 2, **2, 3**, 3, 3, **4, 4**, 4, 4, **5, 6**, 7, 7, 8

   Q_1 $\quad M_e=Q_2$ $\quad Q_3$

   De manera que,

   $$Q_1=\frac{2+3}{2}=2{,}5$$

   Se procede similarmente para encontrar Q_3, como los datos de esta parte son 8, el cociente $\frac{8+1}{2}=4{,}5$ dice que se promedien los elementos 5 y 6 de la segunda lista.

   $$Q_3=\frac{5+6}{2}=5{,}5.$$

   $Q_2=4$ se había calculado anteriormente.

Entonces, $\mathbf{Q_1=2{,}5}$, $\mathbf{Q_2=4}$, $\mathbf{Q_3=5{,}5}$.

E

1. Los siguientes datos son calificaciones de 14 estudiantes obtenidas en una prueba de matemática valorada en 10 puntos: 9, 8, 8, 1, 9, 5, 2, 6, 3, 3, 4, 4, 4, 5. Encuentre Q_1, Q_2 y Q_3.
2. Las calificaciones obtenidas en una prueba valorada en 20 puntos por un grupo de 16 estudiantes son: 20, 16, 16, 19, 17, 14, 14, 18, 20, 17, 10, 11, 12, 13, 19, 20. Encuentre Q_1, Q_2 y Q_3.

C2: Cálculo de cuartiles

(Ej) Calificaciones de 16 estudiantes obtenidas en una prueba de matemática:

$$8, 7, 4, 4, 2, 4, 3, 5, 7, 3, 6, 1, 2, 3, 1, 4$$

Encuentre Q_1, Q_2 y Q_3.

1. Se ordenan los datos:

   $$1, 1, 2, \underbrace{2, 3}_{Q_1}, 3, 3, \underbrace{4, 4}_{M_e=Q_2}, 4, 4, \underbrace{5, 6}_{Q_3}, 7, 7, 8$$

2. Posición de la $M_e=\dfrac{n+1}{2}=\dfrac{16+1}{2}=8{,}5$

   Los datos de las posiciones 8 y 9 y luego promediarlos.

   Así, $$M_e=Q_2=\frac{4+4}{2}=4$$

3. Posición de Q_1: $\dfrac{8+1}{2}=\dfrac{9}{2}=4{,}5 \quad \Rightarrow Q_1=\dfrac{2+3}{2}=2{,}5$

   Posición de Q_3: $\dfrac{8+1}{2}=\dfrac{9}{2}=4{,}5 \quad \Rightarrow Q_3=\dfrac{5+6}{2}=5{,}5$

Entonces, $Q_1=2{,}5, \quad Q_2=4, \quad Q_3=5{,}5$

(E) 2. Calificaciones obtenidas en una prueba por un grupo de 16 estudiantes:

$$20, 16, 16, 19, 17, 14, 14, 18, 20, 17, 10, 11, 12, 13, 19, 20$$

Encuentre $Q_1, Q_2\ y\ Q_3$

$$10, 11, 12, \underbrace{13, 14}_{Q_1}, 14, 16, \underbrace{16, 17}_{M_e=Q_2}, 17, 18, \underbrace{19, 19}_{Q_3}, 20, 20, 20$$

Posición de la $M_e=Q_2$: $\dfrac{n+1}{2}=\dfrac{16+1}{2}=8{,}5$

$$M_e=Q_2=\frac{16+17}{2}=\frac{33}{2}=16{,}5$$

Se encuentran Q_1 y Q_3.

Posición de Q_1: $\dfrac{8+1}{2}=4{,}5 \quad \Rightarrow Q_1=\dfrac{13+14}{2}=13{,}5$

Posición de Q_3: $\dfrac{8+1}{2}=4{,}5 \quad \Rightarrow Q_3=\dfrac{19+19}{2}=19$

Entonces, $Q_1=13{,}5, \quad Q_2=16{,}5, \quad Q_3=19$

Contenido 3 Definición de la varianza y la desviación estándar

Contenido 3: Definición de la varianza y la desviación estándar

Definición

La **varianza** S^2 de un conjunto de datos $x_1, x_2, \ldots x_n$, cuya media aritmética es $\bar{x}$, se calcula mediante la fórmula

$$S^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n-1}$$

La **desviación estándar o típica** S es la raíz cuadrada de la varianza. Representa la variabilidad de datos con respecto a la media aritmética. Así:

$$S=\sqrt{\text{varianza}}=\sqrt{S^2}$$

P

Con los datos 3, 3, 5, 5, 9 y su media aritmética $\bar{x}=5$.
a) Calcule la varianza de estos.
b) Calcule la desviación estándar.
c) Determine la variabilidad con respecto a la media.

S

a) La varianza de estos datos es:

$$S^2=\frac{(3-5)^2+(3-5)^2+(5-5)^2+(5-5)^2+(9-5)^2}{5-1}=\frac{4+4+0+0+16}{4}=\frac{24}{4}=6$$

b) La desviación estándar es la raíz cuadrada de 6: $S=\sqrt{6}\approx$ **2,4**.

c) La varianza y la desviación estándar indican que 2,4 es el grado de variabilidad de los datos alrededor de $\bar{x}=5$: $5+2,4=7,4$ por encima y $5-2,4=2,6$ por debajo.

E

1. Con los datos 2, 2, 4, 5, 2 y su media aritmética, $\bar{x}=3$.
   a) Encuentre la varianza.
   b) Encuentre la desviación estándar.
   c) Encuentre la variabilidad con respecto a la media aritmética.
2. Con los datos 5, 4, 4, 7 y su media aritmética, $\bar{x}=5$.
   a) Encuentre la varianza.
   b) Encuentre la desviación estándar.
   c) Encuentre la variabilidad con respecto a la media aritmética.

Aprendizajes esperados

Define y determina el valor de la varianza y la desviación estándar de un conjunto de datos.

Secuencia:

En clases anteriores se estudiaron las medidas de tendencia central y las de posición (cuartiles). Se concluye el estudio de las medidas estadísticas de interés con las de dispersión: varianza, desviación estándar y coeficiente de variación.

Las medidas de dispersión, al igual que las estudiadas anteriormente, son de gran utilidad para el análisis de datos estadísticos en situaciones del entorno.

Puntos esenciales:

Mostrar que las medidas de dispersión corresponden a la lejanía o cercanía (distancia) de los datos respecto a la media aritmética, así que, para calcular el valor de cada una de estas, primero se debe conocer el valor de la media aritmética, en este caso, siendo un conjunto de datos no agrupados.

Explicar que la desviación estándar se define como la raíz cuadrada de la varianza, sin embargo, solo se toma la raíz cuadrada positiva, dado que esta representa la distancia promedio de los datos respecto a la media aritmética.

Utilizar calculadora para aproximar las raíces cuadradas inexactas.

C3: Definición de la varianza y la desviación estándar

(D) Varianza: s^2 de un conjunto de datos cuya media aritmética es $\bar{x}$, se calcula mediante la fórmula:

$$S^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n-1}$$

Desviación estándar o típica S:

$$S=\sqrt{varianza}=\sqrt{S^2}$$

(P) Con los datos $3,3,5,5,9$ y $\bar{x}=5$

(S) a) Calcule la varianza:

$$S^2=\frac{(3-5)^2+(3-5)^2+(5-5)^2+(5-5)^2+(9-5)^2}{5-1}$$
$$=\frac{4+4+0+0+16}{5-1}=\frac{24}{4}=6$$

b) Calcule la desviación estándar: $S=\sqrt{6}\approx 2{,}4$

c) Determine la variabilidad con respecto a la media:
La varianza y la desviación estándar indican que $2{,}4$ es el grado de variabilidad de los datos alrededor de $\bar{x}=5$.
$5+2{,}45=7{,}45$ por encima y $5-2{,}45=2{,}55$ por debajo

(E) 1. Con los datos $2,2,4,5,2$ y $\bar{x}=3$.

a) Encuentre la varianza.

$$S^2=\frac{(2-3)^2+(2-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2+(2-3)^2}{5-1}$$
$$S^2=\frac{1+1+1+4+1}{5-1}=\frac{8}{4}=2$$

b) Encuentre la desviación estándar: $S=\sqrt{2}=1{,}41$

c) Encuentre la variabilidad con respecto a $\bar{x}$.
El grado de variabilidad es $1{,}41$.
$3+1{,}41=4{,}41$ por encima y $3-1{,}41=1{,}59$ por debajo.

2. Con los datos $5,4,4,7$ y $\bar{x}=5$

a) La varianza.

$$S^2=\frac{(5-5)^2+(4-5)^2+(4-5)^2+(7-5)^2}{4-1}=\frac{6}{3}=2$$

b) La desviación estándar. $S=\sqrt{2}\approx 1{,}41$

c) La variabilidad con respecto a $\bar{x}$.
$5+1{,}41=6{,}41$ por encima y $5-1{,}41=3{,}59$ por debajo.

Contenido 4 Coeficiente de variación

Aprendizajes esperados

Define y calcula el valor del coeficiente de variación de un conjunto de datos.

Secuencia:

El coeficiente de variación es una medida de dispersión que, por su definición, requiere del cálculo de la media aritmética y la desviación estándar. Con esta medida de dispersión se concluye la unidad de Estadística.

Puntos esenciales:

Obtener el coeficiente de variación teniendo en cuenta el siguiente orden:

1. Cálculo de la media aritmética.
2. Cálculo de la varianza.
3. Determinación de la desviación estándar (raíz cuadrada positiva de la varianza).
4. División de la desviación estándar entre la media aritmética.

Procurar que se brinde la interpretación oportuna de los resultados obtenidos en la ejercitación, diciendo cuál conjunto de datos presenta mayor variación.

Explicar que, al igual que en la clase anterior, puede utilizarse calculadora para las raíces cuadradas y divisiones inexactas.

Contenido 4: Coeficiente de variación

P

Dos grupos de niños que realizaron una prueba en estadística obtuvieron el siguiente promedio en sus calificaciones: $\bar{x}=9$

Grupo A: 10, 10, 7, 12, 6 Grupo B: 11, 12, 10, 6, 6

a) Encuentre el cociente $\frac{S}{\bar{x}}$ para cada grupo.

b) Determine el grupo que tiene menor variación en sus calificaciones.

S

a) En el caso del Grupo A

$$S^2=\frac{(10-9)^2+(10-9)^2+(7-9)^2+(12-9)^2+(6-9)^2}{5-1}=6$$

Entonces la desviación estándar es $S=\sqrt{6}\approx$ **2,45**

Luego, $\frac{S}{\bar{x}}=\frac{2,45}{9}\approx 0,27$

Para el Grupo B, su varianza es

$$S^2=\frac{(11-9)^2+(12-9)^2+(10-9)^2+(6-9)^2+(6-9)^2}{5-1}=8$$

En este caso la desviación estándar es $S=\sqrt{8}\approx$ **2,83**

Por lo tanto, $\frac{S}{\bar{x}}=\frac{2,83}{9}\approx 0,31$

Los valores encontrados 0,27 y 0,31 se llaman coeficientes de variación.

b) El grupo A tiene menor variación en sus calificaciones, porque su coeficiente de variación es menor que el de B.

C

El cociente $\frac{S}{\bar{x}}$ entre la desviación estándar y la media aritmética se denomina **coeficiente de variación** del conjunto de datos y se denota por CV, es decir,

$$CV=\frac{S}{\bar{x}}.$$

El coeficiente de variación CV determina el grado de dispersión o variación de un conjunto de datos respecto a su media aritmética.

E

1. Dos grupos A y B de niños que realizaron una prueba de matemática obtuvieron en sus calificaciones el promedio general $\bar{x}=8$. Las notas individuales son: grupo A: 7, 8, 7, 11, 7 ; grupo B: 9, 7, 11, 7, 6.
   a) Encuentre el CV de cada grupo.
   b) ¿Cuál de los dos grupos tiene menor variación en sus calificaciones?
2. En dos pulperías se venden bolsas de caramelos, de las cuales se conoce los siguientes datos:
   Pulpería A: $\bar{x}=100$ y $S=2$, Pulpería B: $\bar{x}=500$ y $S=4$
   Determine la pulpería que presenta la menor variación en sus ventas.

153

C4: Coeficiente de variación

(P) Promedio de puntos obtenidos por dos grupos de niños en una prueba $\bar{x}=9$:
Grupo A: $10, 10, 7, 12, 6$ Grupo B: $11, 12, 10, 6, 6$

(S) a) Encuentre el cociente $\frac{S}{\bar{x}}$ para cada grupo.

Para el grupo A:

$$S^2=\frac{(10-9)^2+(10-9)^2+(7-9)^2+(12-9)^2+(6-9)^2}{5-1}$$

$S^2=6$ entonces la desviación estándar es:

$$S=\sqrt{6}\approx 2{,}45 \quad\Rightarrow\quad \frac{S}{\bar{x}}=\frac{2{,}45}{9}\approx 0{,}27$$

Para el grupo B:

$$S^2=\frac{(11-9)^2+(12-9)^2+(10-9)^2+(6-9)^2+(6-9)^2}{5-1}$$

$S^2=8$ entonces la desviación estándar es:

$$S=\sqrt{8}\approx 2{,}83 \quad\Rightarrow\quad \frac{S}{\bar{x}}=\frac{2{,}83}{9}\approx 0{,}31$$

Los valores encontrados 0,27 y 0,31 se llaman <u>coeficientes de variación</u> (CV)

b) El grupo A tiene menor variación, porque su coeficiente de variación es menor que el de B.

(C) Para determinar el grado de dispersión de un conjunto de datos se utiliza:

Coeficiente de variación $CV=\frac{S}{\bar{x}}$

(E) 1. Calificaciones en una prueba de matemática de dos grupos A y B de niños con promedio general $\bar{x}=8$.

a) Encuentre el CV de cada grupo.

Grupo A: $7, 8, 7, 11, 7$

$$S^2=\frac{(7-8)^2+(8-8)^2+(7-8)^2+(11-8)^2+(7-8)^2}{5-1}=3$$

$$S=\sqrt{3}\approx 1{,}73 \quad\Rightarrow\quad CV=\frac{S}{\bar{x}}=\frac{1{,}73}{8}=0{,}22$$

Grupo B: $9, 7, 11, 7, 6$

$$S^2=\frac{(9-8)^2+(7-8)^2+(11-8)^2+(7-8)^2+(6-8)^2}{5-1}=16$$

$$S=\sqrt{4}=2 \quad\Rightarrow\quad CV=\frac{S}{\bar{x}}=\frac{2}{8}=0{,}25$$

b) El grupo A tiene menor variación en sus calificaciones, a pesar de tener la misma media aritmética que B.

Prueba de Matemática 10mo (30 min.) Fecha: ____________

Unidad 8: Estadística

/ 20

Nombre: ________________________________ Sección: ___________

Sexo: M / F

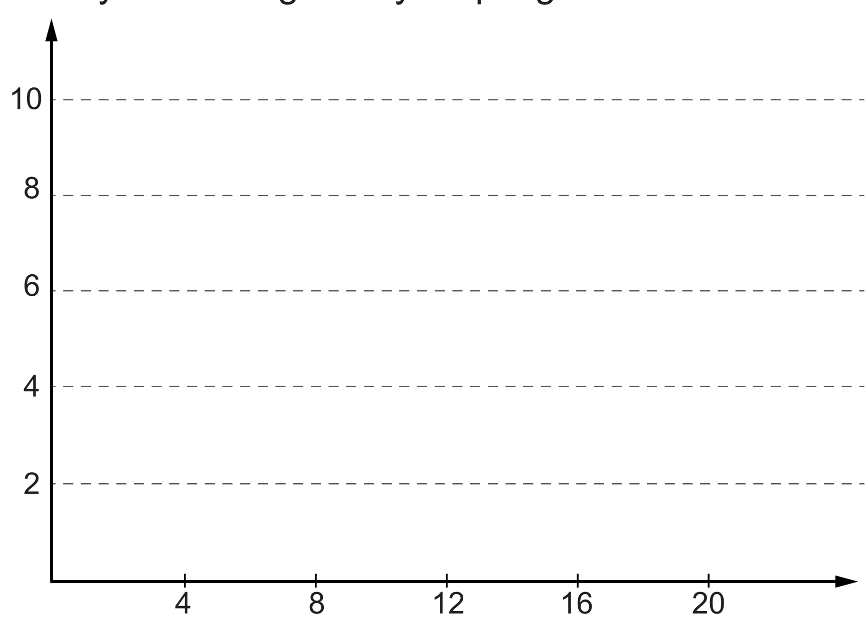
1. Dadas las calificaciones de 30 estudiantes de una prueba de matemática representadas en la tabla.

   a) Complete la tabla (2 puntos × 3 = 6)

Calificación de 30 estudiantes

Edades	Número de estudiantes (f_i)	Marca de clase (M_i)	$f_i \cdot M_i$	Frecuencia acumulada (F_i)
4 - 8	9			
8 - 12	7			
12 - 16	6			
16 - 20	8			
Total	30			

2. Construya un histograma y un polígono de frecuencia. (2 puntos × 2 = 4)



c) Encuentre la media aritmética, moda y mediana. (1 punto × 3 = 3)

$\bar{x} =$

$M_o =$

$M_e =$

2. Dadas las edades de 7 niños que recibieron consulta con el pediatra: 5, 7, 3, 2, 7, 4 y 5, encuentre Q_1, Q_2 y Q_3. (1 punto × 3 = 3)

$Q_1 =$ $Q_2 =$ $Q_3 =$

3. Con los datos 3, 3, 5, 9 y su media aritmética $\bar{x} = 5$. (2 puntos × 2 = 4)

a) Calcule la varianza de estos.

$S^2 =$

b) Calcule la desviación estándar.

$S =$

Nombre: ______________________________

Anexos

Solucionarios de las pruebas de cada unidad

Unidad 1: Conjuntos e Intervalos Numéricos

1. (1 punto × 2 = 2)

a) 2 $\in$ A b) 4 $\notin$ A

2. (1 punto × 2 = 2)

a) A $\not\subset$ B b) B $\subset$ A

3. (1 punto × 4 = 4)

a) A∪B = $\{\mathbf{2}, \mathbf{6}, \mathbf{8}, \mathbf{10}\}$ b) B∩C = ∅

c) $\bar{A} = \{\mathbf{4}, \mathbf{6}\}$ d) A − B = $\{\mathbf{2}, \mathbf{8}\}$

4. (1 punto × 4 = 4)

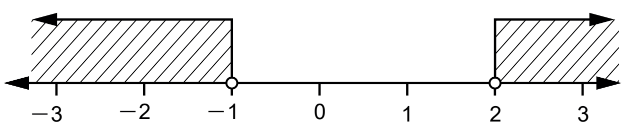
a) n(A∪B) = $\mathbf{4}$ b) n(B∩C) = $\mathbf{0}$

c) $n(\bar{A})$ = $\mathbf{2}$ d) n(A − B) = $\mathbf{2}$

5. (2 puntos)

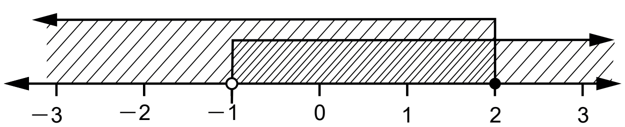
A = $\{\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}\}$

6. (3 puntos × 2 = 6)



A∪B = $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} | \boldsymbol{x} > \mathbf{2} \text{ o } \boldsymbol{x} < -\mathbf{1}\}$

7. (3 puntos × 2 = 6)



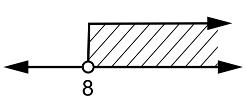
C∩D = $\{x \in \mathbb{R} | -1 < x \leq 2\}$

Unidad 2: Inecuaciones de Primer y Segundo Grado

1. (2 puntos × 4 = 8)

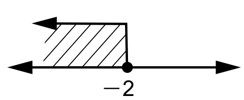
a) $x - 3 > 5$

$\boldsymbol{x} > \mathbf{8}$



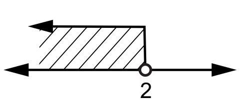
b) $3x \leq -6$

$\boldsymbol{x} \leq -\mathbf{2}$



c) $-2x > 4$

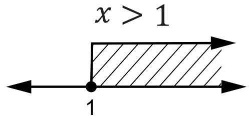
$x < 2$



d) $2x + 2 > 4$

$2x > 2$

$x > 1$



2. (2 puntos)

$-2 \leq x - 2 < 4$

$-2 + 2 \leq x - 2 + 2 < 4 + 2$

$\mathbf{0} \leq \boldsymbol{x} < \mathbf{6}$

3. (2 puntos)

$|x - 2| = 3.$

$x - 2 = 3,\qquad x - 2 = -3$

$\boldsymbol{x} = \mathbf{5},\qquad \boldsymbol{x} = -\mathbf{1}$

4. (2 puntos)

$|x - 1| \geq 2$

$x - 1 \leq -2$ o $x - 1 \geq 2$

$\boldsymbol{x} \leq -\mathbf{1}$ o $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{3}$

5. (2 puntos × 3 = 6)

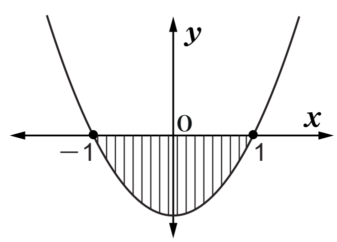
a) $x^2 - 1 \leq 0$

$x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

$-\mathbf{1} \leq \boldsymbol{x} \leq \mathbf{1}$



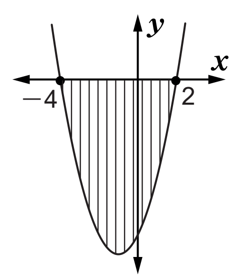
b) $x^2 + 2x - 8 < 0$

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$(x + 4)(x - 2) = 0$

$x = -4,\ x = 2$

$-\mathbf{4} < \boldsymbol{x} < \mathbf{2}$



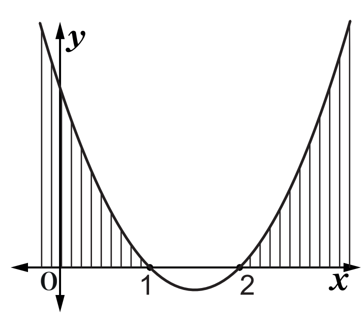
c) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x - 1)(x - 2) = 0$

$x = 1, x = 2$

$\boldsymbol{x} \leq \mathbf{1}$ o $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{2}$



Unidad 3: Fracciones Algebraicas

1. (2 puntos × 2 = 4)

a) $\dfrac{x^2}{x^3} = \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$

b) $\dfrac{x+1}{x^2-1} = \dfrac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}$

2. (2 puntos × 8 = 16)

a) $\dfrac{x^2}{8y^3} \cdot \dfrac{4y^2}{x} = \dfrac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}\boldsymbol{y}}$

b) $\dfrac{x^2-1}{x-3} \div \dfrac{x+1}{x-3} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-3} \cdot \dfrac{x-3}{x+1}$

$= \boldsymbol{x} - \mathbf{1}$

c) $\dfrac{x+2}{x-2} \div \dfrac{x^2+3x+2}{x-2} \cdot \dfrac{x+1}{x+3}$

$= \dfrac{x+2}{x-2} \cdot \dfrac{x-2}{(x+1)(x+2)} \cdot \dfrac{x+1}{x+3}$

$= \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}+\mathbf{3}}$

d) $\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x} = \dfrac{\mathbf{5}}{\boldsymbol{x}}$

e) $\dfrac{2x}{x-1} - \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{2(x-1)}{x-1} = \mathbf{2}$

f) $\dfrac{4}{x} - \dfrac{5}{2x} = \dfrac{(4)(2)}{2x} - \dfrac{5}{2x} = \dfrac{8-5}{2x} = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}\boldsymbol{x}}$

g) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x-2}$

$= \dfrac{x-2}{(x+1)(x-2)} + \dfrac{2(x+1)}{(x+1)(x-2)}$

$= \dfrac{x-2+2x+2}{(x+1)(x-2)}$

$= \dfrac{\mathbf{3}\boldsymbol{x}}{(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})}$

h) $\dfrac{4}{x-2} - \dfrac{1}{x+2}$

$= \dfrac{4(x+2)}{(x-2)(x+2)} - \dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)}$

$= \dfrac{4(x+2)-(x-2)}{(x-2)(x+2)}$

$= \dfrac{\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{10}}{(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})}$

Unidad 4: Ecuaciones de Tercer Grado

1. (2 puntos × 2 = 4)

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -1 & -10 & 2 \\ & 2 & 12 & 22 & \\ \hline 1 & 6 & 11 & 12 & \end{array}$$

Cociente: $\boldsymbol{x^2+6x+11}$, Residuo: **12**

2. (2 puntos)

$P(1) = 1^3 + 1^2 - (3)(1) + 5$

$= 1 + 1 - 3 + 5 = 4$

El residuo es **4**

3. (3 puntos)

Sea $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

$P(1) = 1 + 2 - 1 - 2 = 0$

$x - 1$ es un factor de $P(x)$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ & 1 & 3 & 2 & \\ \hline 1 & 3 & 2 & 0 & \end{array}$$

$P(x) = (x-1)(x^2+3x+2)$

$= (\boldsymbol{x}-\mathbf{1})(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})$

4. a) (3 puntos)

$x(x-2)(x+1) = 0$

$x = 0,\ x-2 = 0,\ x+1 = 0$

$\boldsymbol{x} = \mathbf{0},\ \boldsymbol{x} = \mathbf{2},\ \boldsymbol{x} = -\mathbf{1}$

b) (4 puntos)

$x^3 - x^2 - 6x = 0$

$x(x^2 - x - 6) = 0$

$x(x-3)(x+2) = 0$

$x = 0,\ x-3 = 0,\ x+2 = 0$

$\boldsymbol{x} = \mathbf{0},\ \boldsymbol{x} = \mathbf{3},\ \boldsymbol{x} = -\mathbf{2}$

c) (4 puntos)

$x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$

$P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

$P(1) = 1 + 4 + 1 - 6 = 0$

$x - 1$ es un factor de $P(x)$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & -6 & 1 \\ & 1 & 5 & 6 & \\ \hline 1 & 5 & 6 & 0 & \end{array}$$

$$P(x) = (x-1)(x^2+5x+6)$$
$$= (x-1)(x+2)(x+3)$$
$$(x-1)(x+2)(x+3) = 0$$
$$x-1 = 0,\ x+2 = 0,\ x+3 = 0$$
$$\boldsymbol{x = 1,\ x = -2,\ x = -3}$$

Unidad 5: Introducción a la Trigonometría

1. (1 punto × 3 = 3)

$\operatorname{sen} A = \frac{\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{13}}}$, $\cos A = \frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{13}}}$,

$\tan A = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$

2. (2 puntos × 2 = 4)

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$
$$4^2 = AC^2 + 1^2$$
$$AC^2 = 4^2 - 1^2 = 16 - 1 = 15$$

$AC > 0$, entonces $AC = \sqrt{15}$

$\cos A = \frac{\sqrt{\mathbf{15}}}{\mathbf{4}}$, $\tan A = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{15}}}$

3. (1 punto × 9 = 9)

A	30°	45°	60°
$\operatorname{sen} A$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$	$\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$	$\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$	$\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$
$\tan A$	$\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}$	$\mathbf{1}$	$\sqrt{\mathbf{3}}$

4. (2 puntos × 2 = 4)

$$\tan 60° = \frac{b}{2} \qquad \cos 60° = \frac{2}{c}$$
$$\sqrt{3} = \frac{b}{2} \qquad \frac{1}{2} = \frac{2}{c}$$
$$\boldsymbol{b = 2\sqrt{3}} \qquad \boldsymbol{c = 4}$$

Unidad 6: Funciones Trigonométricas

1. (1 punto × 6 = 6)

a) 135°

$\operatorname{sen}\theta = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$

$\cos\theta = -\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$

$\tan\theta = \mathbf{-1}$

b) 90°

$\operatorname{sen}\theta = \mathbf{1}$

$\cos\theta = \mathbf{0}$

$\tan\theta$ $\boldsymbol{NE}$

2. (2 puntos × 3 = 6)

a) $\theta = \mathbf{60°}$ y $\mathbf{120°}$

b) $\theta = \mathbf{60°}$ y $\mathbf{300°}$

c) $\theta = \mathbf{135°}$ y $\mathbf{315°}$

3. (2 puntos × 2 = 4)

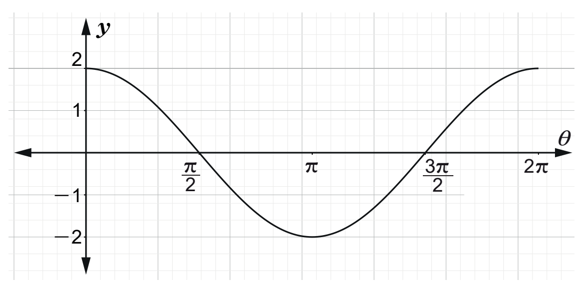
$\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{\mathbf{7}}}{\mathbf{4}}$ $\qquad$ $\tan\theta = -\frac{\sqrt{\mathbf{7}}}{\mathbf{3}}$

4. (1 punto × 4 = 4)

Período: $\boldsymbol{2\pi}$

Rango: $\boldsymbol{-2 < y < 2}$

Amplitud: 2



Unidad 7: Trigonometría Analítica

1. (4 puntos × 2 = 8)

a) $\dfrac{c}{\operatorname{sen} 60°} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\operatorname{sen} 45°}$

$$c = \frac{2\sqrt{2}}{\operatorname{sen} 45°} \cdot \operatorname{sen} 60°$$
$$= \left(\frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \mathbf{2\sqrt{3}}$$

b) $\operatorname{sen} A = \dfrac{a \operatorname{sen} C}{c}$

$$= \frac{\sqrt{6}\operatorname{sen}60°}{3}$$

$$= \frac{(\sqrt{6})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\measuredangle A = 45°$ o $\measuredangle A = 135°$

La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es $180°$. Entonces, $\measuredangle A = \mathbf{45°}$

2. (4 puntos)

$$\text{Área} = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} 30° = \left(\frac{1}{2}\right)(4)(8)\left(\frac{1}{2}\right) = \mathbf{8}$$

3. (4 puntos × 2 = 8)

a) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$= 3^2 + 4^2 - (2)(3)(4)\cos 60°$

$= 13$

$b > 0$, entonces $b = \sqrt{\mathbf{13}}$

b) $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$= \frac{5^2+8^2-7^2}{(2)(5)(8)}$

$= \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$

$\measuredangle A = 60°$ o $\measuredangle A = 300°$

$0° < \measuredangle A < 180°$, entonces $A = 60°$

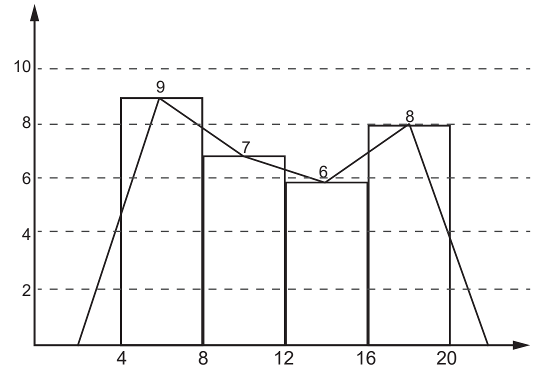
Unidad 8: Estadística

a) (2 puntos × 3 = 6)

Calificación de 30 estudiantes

Edades	Número de estudiantes (f_i)	Marca de clase (M_i)	$f_i \cdot M_i$	Frecuencia acumulada (F_i)
4 - 8	9	6	54	9
8 - 12	7	10	70	16
12 - 16	6	14	84	22
16 - 20	8	18	144	30
Total	30		352	

b) (2 puntos × 2 = 4)



c) (1 punto × 3 = 3)

Media aritmética:

$$\bar{x} = \frac{352}{30} \approx \mathbf{11{,}73}$$

Moda: $M_o = \mathbf{6}$

Mediana: $M_e = \mathbf{10}$

2. (1 punto × 3 = 3)

2, $\boxed{3}$, 4, $\boxed{5}$, 5, $\boxed{7}$, 7

$Q_1 = \mathbf{3}$, $Q_2 = \mathbf{5}$, $Q_3 = \mathbf{7}$

3. (2 puntos × 2 = 4)

a) Calcule la varianza de estos.

$$S^2 = \frac{(3-5)^2+(3-5)^2+(5-5)^2+(9-5)^2}{4-1}$$

$$= \frac{24}{3}$$

$$= \mathbf{8}$$

b) Calcule la desviación estándar.

$$S = \sqrt{8} = \mathbf{2\sqrt{2}} \approx \mathbf{2{,}83}$$

Solucionarios del libro de texto

UNIDAD 1

Sección 1 Contenido 1 (S1C1)

E1

a) $3 \in A$ b) $5 \notin B$ c) $-2 \notin B$

d) $4 \in C$ e) $0 \in A$ f) $-1 \in B$

g) $2 \in B$ h) $2 \notin C$

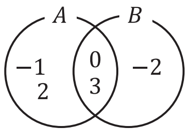
E2

a) $n(A) = 5$ b) $n(B) = 3$

c) $n(C) = 4$

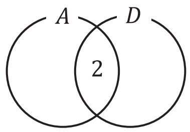
S1C2

a) $A \cup B = \{-2, -1, 0, 2, 3\}$



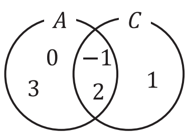
$n(A \cup B) = 5$

b) $A \cap D = \{2\}$



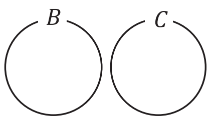
$n(A \cap D) = 1$

c) $A \cup C = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$



$n(A \cup C) = 5$

d) $B \cap C = \phi$



$n(B \cap C) = 0$

S1C3

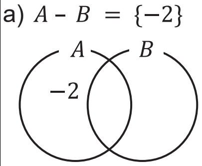
a) $C \not\subset A$ b) $A \not\subset B$ c) $B \not\subset A$

d) $C \subset U$ e) $C = C$ f) $U \not\subset A$

g) $B \subset U$ h) $C = B$

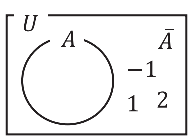
S1C4

a) $A - B = \{-2\}$



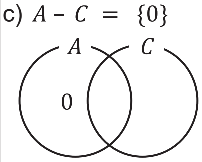
$n(A - B) = 1$

b) $\bar{A} = \{-1, 1, 2\}$



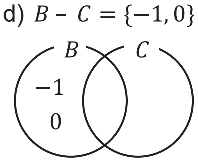
$n(\bar{A}) = 3$

c) $A - C = \{0\}$



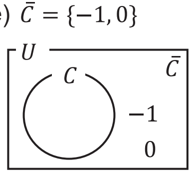
$n(A - C) = 1$

d) $B - C = \{-1, 0\}$



$n(B - C) = 2$

e) $\bar{C} = \{-1, 0\}$



$n(\bar{C}) = 2$

S1C5

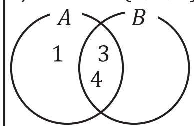
a) $C = \{2, 4\}$ b) $D = \{-3, -2, -1\}$

c) $F = \{3, 5\}$

S1C6

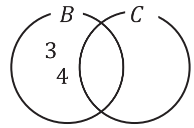
E1, E2, E3

a) $A \cup B = \{1, 3, 4\}$



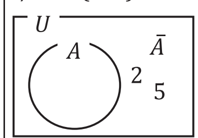
$n(A \cup B) = 3$

b) $B - C = \{3, 4\}$



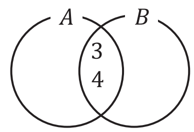
$n(B - C) = 2$

c) $\bar{A} = \{2, 5\}$



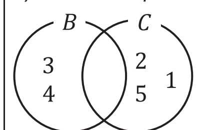
$n(\bar{A}) = 2$

d) $A \cap B = \{3, 4\}$



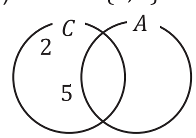
$n(A \cap B) = 2$

e) $B \cap C = \phi$



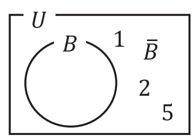
$n(B \cap C) = 0$

f) $C - A = \{2, 5\}$



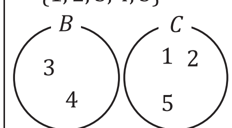
$n(C - A) = 2$

g) $\bar{B} = \{1, 2, 5\}$



$n(\bar{B}) = 3$

h) $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



$n(B \cup C) = 5$

E4

a) $6 \notin A$ b) $A \not\subset C$ c) $4 \in B$ d) $B \subset A$

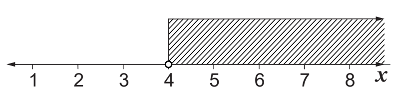
E5

$A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$

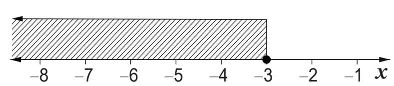
S2C1

E1

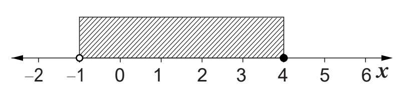
a)



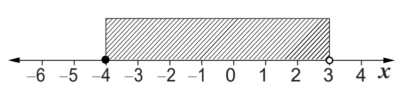
b)



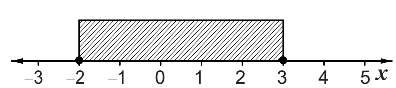
c)



d)



e)



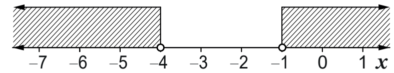
E2

a) $A = \{x \in \mathbb{R} | x > -5\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x \leq 0\}$

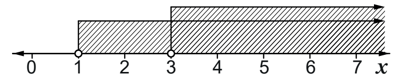
S2C2

a)



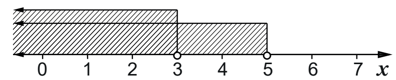
$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} | x < -4 \text{ o } x > -1\}$

b)



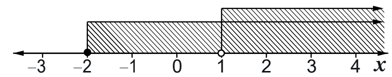
$C \cup D = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$

c)



$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} | x < 5\}$

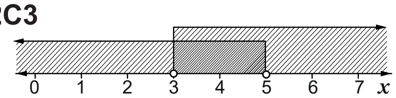
d)



$E \cup F = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -2\}$

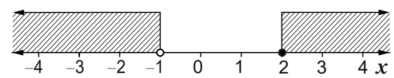
S2C3

a)



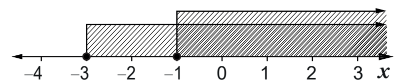
$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} | 3 < x < 5\}$

b)



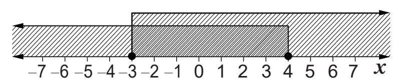
$C \cap D = \phi$

c)



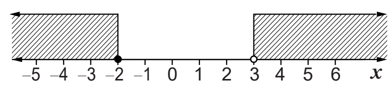
$E \cap F = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -1\}$

d)



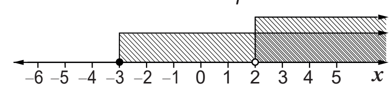
$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x \leq 4\}$

e)



$C \cap D = \phi$

f)

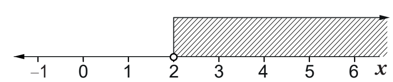


$E \cap F = \{x \in \mathbb{R} | x > 2\}$

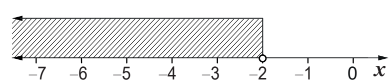
S2C4

E1

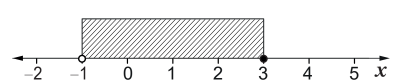
a)



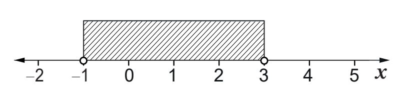
b)

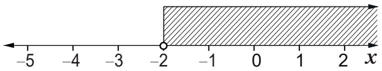


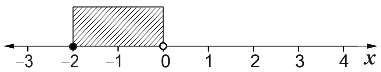
c)



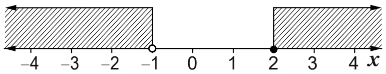
d)



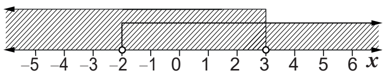
e)


f)


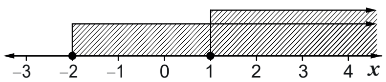
E2

a)


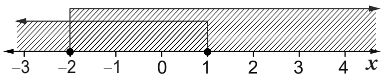
$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ o } x \geq 2\}$

b)


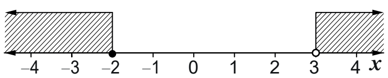
$C \cup D = \{x \in \mathbb{R}\}$

c)


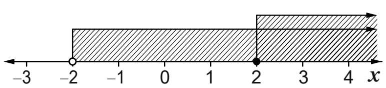
$E \cup F = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$

d)


$G \cup H = \{x \in \mathbb{R}\}$

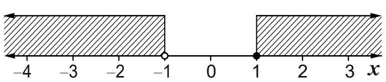
e)


$I \cup J = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ o } x > 3\}$

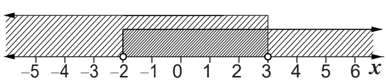
f)


$K \cup L = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

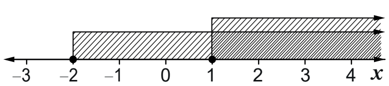
E3

a)


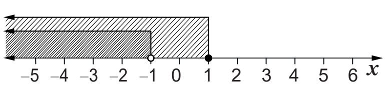
$A \cap B = \phi$

b)


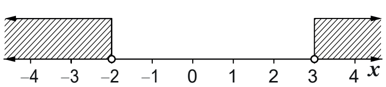
$C \cap D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\}$

c)


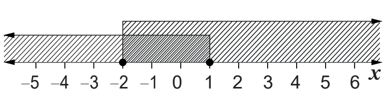
$E \cap F = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

d)


$G \cap H = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$

e)


$I \cap J = \phi$

f)


$K \cap F = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$

UNIDAD 2

Sección 1 Contenido 1 (S1C1)

a) $a + 3 > b + 3$ b) $a - 1 > b - 1$

c) $2a > 2b$ d) $-2b > -2a$

e) $\frac{a}{-2} < \frac{b}{-2}$ f) $b - 4 < a - 4$

g) $-2a < -2b$ h) $\frac{b}{3} < \frac{a}{3}$

S1C2

a) $x + 5 > 6$
$x > 6 - 5$
$x > 1$

b) $x \geq 2$

c) $x > -1$ d) $x \geq -3$

S1C3

a) $x + 4 < 8$
$x < 8 - 4$
$x < 4$

b) $x \leq -1$

c) $x < 6$ d) $x \leq 0$

S1C4

a) $2x > 10$
$\frac{2x}{2} > \frac{10}{5}$
$x > 2$

b) $x < 1$

c) $x \geq 6$ d) $x \leq -2$

S1C5

a) $-2x > 2$
$\frac{-2x}{-2} < \frac{2}{-2}$
$x < -1$

b) $x > -3$

c) $x \leq -1$ d) $x \geq -5$

S1C6

a) $2x - 4 > 10$
$2x > 10 + 4$
$2x > 14$
$x > 7$

b) $x < 0$

c) $x > 0$ d) $x < 2$

e) $x \geq 4$ f) $x \geq -1$

g) $x \leq -1$ h) $x \leq -3$

S1C7

a) $-2x - 4 > 10$
$-2x > 10 + 4$
$-2x > 14$
$x < -7$

b) $x > 0$

c) $x < 3$ d) $x > -3$

e) $x \leq -4$ f) $x \leq 1$

g) $x \geq 1$ h) $x \geq -1$

S1C8

a) $1 < x + 2 \leq 2$
$1 - 2 < x + 2 - 2 \leq 2 - 2$
$-1 < x \leq 0$

b) $0 \leq x < 6$ c) $-2 \leq x \leq 1$

d) $-1 < x \leq 1$ e) $-3 < x \leq 2$

S1C9

a) $-1 \leq -x + 1 < 2$
$-1 - 1 \leq -x + 1 - 1 < 2 - 1$
$-2 \leq -x < 1$
$2 \geq x > -1 \leftrightarrow -1 < x \leq 2$

b) $-4 \leq x < -2$ c) $-3 < x \leq 4$

d) $-2 \leq x \leq 5$ e) $-2 \leq x \leq 3$

S1C10

E1

a) $x > 4$ b) $x \geq -2$

c) $x \leq 5$ d) $x > 3$

E2

a) $x > -2$ b) $x \leq -2$

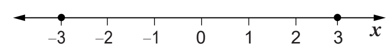
c) $x \leq 1$ d) $x < 2$

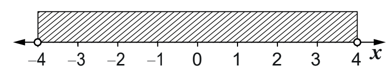
E3

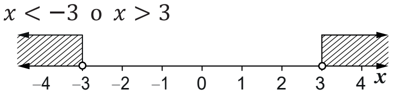
a) $-1 < x \leq 1$ b) $1 \leq x < 2$

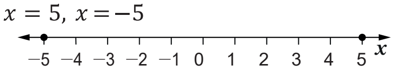
c) $-2 < x \leq -1$

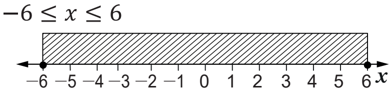
S2C1

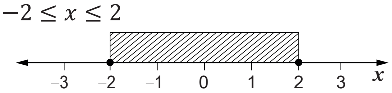
a) $x = 3,\ x = -3$


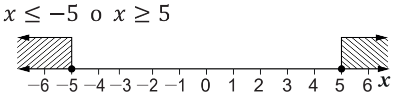
b) $-4 < x < 4$


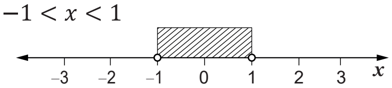
c) $x < -3$ o $x > 3$


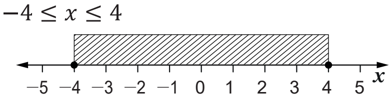
d) $x = 5,\ x = -5$


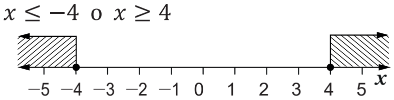
e) $-6 \leq x \leq 6$


f) $-2 \leq x \leq 2$


g) $x \leq -5$ o $x \geq 5$


h) $-1 < x < 1$


i) $-4 \leq x \leq 4$


j) $x \leq -4$ o $x \geq 4$


S2C2

a) $|x+2|=3$

$x+2=3$ o $x+2=-3$

$x=1,$ $x=-5$

b) $x=5,\ x=-3$ c) $x=0, x=6$

d) $x=-2,\ x=-6$ e) $x=7, x=-3$

S2C3

a) $|x+2|<3$

$-3<x+2<3$

$-5<x<1$

b) $-3\ \leq x\leq 5$ c) $0<x<6$

d) $-6\leq x\leq -2$ e) $-3\leq x\leq 7$

S2C4

a) $|x+2|>3$

$x+2<-3$ o $x+2>3$

$x<-5$ o $x>1$

b) $x<0$ o $x>6$

c) $x\leq -3$ o $x\ \geq\ 5$

d) $x\leq -6$ o $x\ \geq -2$

e) $x\leq -3$ o $x\ \geq\ 7$

S2C5

E1

a) $x=8,\ x=-8$

b) $-8<x<8$

c) $x<-5$ o $x>5$

d) $x\leq -6$ o $x\geq 6$

E2

a) $|x-2|=3$

$x-2=3$ o $x-2=-3$

$x=5$, $x=-1$

b) $x=1,\ x=-3$ c) $x=6, x=-4$

d) $x=4,\ x=0$ e) $x=3, x=1$

E3

a) $|x-2|>3$

$x-2<-3$ o $x-2>3$

$x<-1$ o $x>5$

b) $|x+1|<4$

$-4<x+1<4$

$-5<x<3$

c) $-3\leq x\leq 1$

d) $x\leq 1$ o $x\geq 3$

e) $x<-4$ o $x>0$

S3C1

a) $x=1,\ x=-1$ b) $x=0,\ x=-4$

c) $x=-1,\ x=-5$ d) $x=-1, x=-3$

e) $x=-3, x=3$ f) $x=0, x=5$

g) $x=2,\ x=-1$ h) $x=1, x=-5$

S3C2

a) $(-1{,}0)$ y $(1{,}0)$

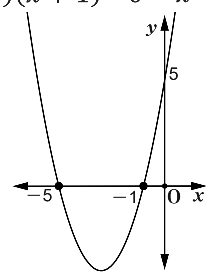
b) $(-5{,}0)$ y $(-1{,}0)$

c) $(-4{,}0)$ y $(0{,}0)$

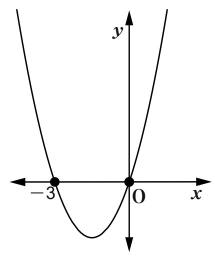
d) $(-2{,}0)$ y $(1{,}0)$

S3C3

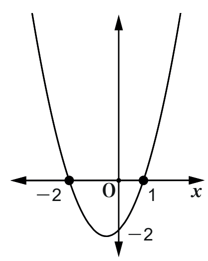
a) $(x+5)(x+1)=0 \leftrightarrow x=-5,\ x=-1$



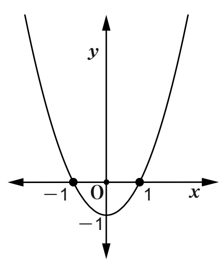
b) $x(x+3)=0\ \leftrightarrow x=0,\ x=-3$



c) $(x+2)(x-1)=0 \leftrightarrow x=-2, x=1$



d) $(x+1)(x-1)=0 \leftrightarrow x=-1, x=1$



S3C4

a) $(x+1)(x-1)=0 \leftrightarrow x=-1,\ x=1$

Por lo tanto,

$(x+1)(x-1)>0$

$\leftrightarrow x<-1$ o $x>1$

b) $x\leq -3$ o $x\geq 3$

c) $x\leq -1$ o $x\geq 1$

d) $x\leq -5$ o $x\geq 5$

e) $x<-4$ o $x>4$

f) $x\leq -2$ o $x\geq 2$

S3C5

a) $(x+2)(x-2)=0 \leftrightarrow x=-2,\ x=2$

Por lo tanto,

$(x+2)(x-2)<0 \leftrightarrow -2<x<2$

b) $-3<x<3$ c) $-1<x<1$

d) $-4\leq x\leq 4$ e) $-5<x<5$

f) $-3\leq x\leq 3$

S3C6

a) $(x+3)(x+2)=0 \leftrightarrow x=-3,\ x=-2$

Por lo tanto,

$(x+3)(x+2)>0$

$\leftrightarrow x<-3$ o $x>-2$

b) $-4<x<2$

c) $x<-1$ o $x>2$

d) $-3<x<2$

S3C7

a) $x\leq 1$ o $x\geq 3$

b) $-4\leq x\leq -1$

c) $x\leq -2$ o $x\geq 3$

d) $-4\leq x\leq 2$

S3C8

a) $-x^2+x+2>0 \leftrightarrow x^2-x-2<0$

$(x-2)(x+1)=0 \leftrightarrow x=2, x=-1$

Por lo tanto,

$(x-2)(x+1)<0 \leftrightarrow -1<x<2$

b) $x<-3$ o $x>1$

c) $-2\leq x\leq 1$

d) $x\leq -3$ o $x\geq 2$

S3C9

a) $x<-3$ o $x>1$

b) $x<1$ o $x>3$

c) $x\leq -2$ o $x\geq -1$

d) $-1<x<4$

e) $-4<x<-1$

f) $-4\leq x\ \leq 1$

g) $2\leq x\leq 3$

h) $x\leq -1$ o $x\geq 4$

i) $-1\leq x\leq 7$

j) $-4<x<1$

k) $x<-3$ o $x>-1$

l) $-4\leq x\leq 2$

m) $x\leq -2$ o $x\geq 3$

n) $x<2$ o $x>3$

UNIDAD 3

Sección 1 Contenido 1 (S1C1)

a) $\frac{7}{6}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{3}{5}$

e) $\frac{7}{8}$ f) $\frac{1}{a}$ g) $\frac{1}{n}$ h) q

S1C2

a) $\frac{6x^3y^2}{12x^2y^3}=\frac{{}^1\cancel{6}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot x\cdot\cancel{y}\cdot\cancel{y}}{{}_2\cancel{12}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{y}\cdot\cancel{y}\cdot y}=\frac{x}{2y}$

b) $\frac{2}{ab}$ c) $\frac{2}{xy^2}$ d) $\frac{5a}{b}$

e) $\frac{3n}{2m}$ f) $\frac{3}{2p}$

S1C3

a) $2(x+2)$ b) $x(x-4)$

c) $(x+1)(x-1)$ d) $(x+2)(x+1)$

e) $(x+2)^2$ f) $4x(x+3)$

g) $(x-1)^2$ h) $(x+3)^2$

i) $(x-4)^2$ j) $(x+6)(x-1)$

S1C4

a) $\frac{\cancel{x+2}}{(\cancel{x+2})(x-2)}=\frac{1}{x-2}$

b) $x+1$ c) $\frac{1}{x+3}$

d) $\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{(x+3)\cancel{(x-2)}}=\frac{x+2}{x+3}$

e) $\frac{x-2}{x-1}$ f) $\frac{x}{x-1}$

g) $\frac{x}{x+4}$ h) $\frac{3}{x+1}$

S1C5

a) $\frac{x^3}{6y^3}\cdot\frac{9y^2}{x}=\frac{{}^3\cancel{9}\cdot\cancel{x}\cdot x\cdot x\cdot\cancel{y}\cdot\cancel{y}}{{}_2\cancel{6}\cdot\cancel{y}\cdot\cancel{y}\cdot y\cdot\cancel{x}}=\frac{3x^2}{2y}$

b) $\frac{6xy^2}{5}$

c) $\frac{x^2+2x}{x+1}\cdot\frac{x+1}{x+2}=\frac{x\cancel{(x+2)}\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x+2)}}$
$=x$

d) $x+1$ e) $\frac{x+1}{x}$

S1C6

a) $\frac{9m^2}{4n^3}\cdot\frac{2n^2}{3m}=\frac{{}^3\cancel{9}\cdot{}^1\cancel{2}\cdot\cancel{m}\cdot m\cdot\cancel{n}\cdot\cancel{n}}{{}_2\cancel{4}\cdot{}_1\cancel{3}\cdot\cancel{n}\cdot\cancel{n}\cdot n\cdot\cancel{m}}=\frac{3m}{2n}$

b) $\frac{x^2-4}{x+1}\cdot\frac{x+1}{x-2}$
$=\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-2)}}=x+2$

c) $\frac{a}{10n}$ d) $\frac{1}{x+2}$

e) $x-y$ f) $\frac{1}{x+1}$

S1C7

a) $\frac{3x^3}{2y^2}\cdot\frac{2y}{x^2}\cdot\frac{4y}{3x^2}=\frac{4}{x}$

b) $\frac{x+1}{x+2}\cdot\frac{(x+2)(x+3)}{x+1}\cdot\frac{x-5}{x+3}$
$=x-5$

c) $\frac{3x}{2y^2}\cdot\frac{4y}{3x^2}\cdot\frac{3y}{2x}=\frac{3}{x^2}$

d) $\frac{a+b}{(a+b)(a-b)}\cdot\frac{(a+1)^2}{a+b}\cdot\frac{a-b}{a+1}$
$=\frac{a+1}{a+b}$

e) $\frac{m-3}{m-1}\cdot\frac{m+1}{(m-3)(m+2)}\cdot\frac{m+2}{m+1}$
$=\frac{1}{m-1}$

f) $\frac{5x}{3y}\cdot\frac{9y}{10x}\cdot\frac{4y}{3x^2}=\frac{2y}{x^2}$

S1C8

E1

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{x}$ d) $\frac{1}{xy}$ e) $\frac{pr}{q}$

E2

a) $\frac{15y}{7x}$ b) $\frac{6x}{7z}$ c) $\frac{2q^2}{3p}$

d) $\frac{4(x+3)}{x+3}=4$

e) $\frac{x+1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{x+3}$

E3

a) $\frac{5x^3}{6y}\cdot\frac{y^3}{10x^3}=\frac{y^2}{12}$

b) $\frac{x+2}{x+1}\cdot\frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)}=\frac{x+1}{x-2}$

c) $\frac{15m^4}{4n^3}\cdot\frac{4n^2}{3m^4}=\frac{5}{n}$

d) $\frac{x-2}{x-3}\cdot\frac{x-3}{2(x-2)}=\frac{1}{2}$

E4

$\frac{a+1}{a-1}\cdot\frac{(a-1)^2}{a(a+1)}\cdot\frac{a}{a-1}=1$

S2C1

a) $\frac{9}{a}$ b) $\frac{2y+4}{y+2}=\frac{2(y+2)}{y+2}=2$

c) $\frac{7}{4x-5}$ d) $\frac{9}{3b}=\frac{3}{b}$

e) $\frac{3x+9}{x+3}=\frac{3(x+3)}{x+3}=3$

f) $\frac{4x+6}{2x+3}=\frac{2(2x+3)}{2x+3}=2$ g) $\frac{2x+5}{x-3}$

S2C2

a) $\frac{2}{3x}$ b) $\frac{-3}{3b}=-\frac{1}{b}$

c) $\frac{3x-9}{x-3}=\frac{3(x-3)}{x-3}=3$

d) $\frac{2y-4}{y-2}=\frac{2(y-2)}{y-2}=2$

e) $\frac{x+1-3x+5}{x-3}=\frac{-2x+6}{x-3}$
$=\frac{-2(x-3)}{x-3}=-2$

f) $\frac{x+2}{x+2}=1$ g) $\frac{b+3}{b+3}=1$

S2C3

a) 12 b) 15 c) 60

d) 30 e) 24 f) 60

S2C4

a) $\frac{9}{12}+\frac{4}{12}=\frac{13}{12}$

b) $\frac{16}{10}-\frac{1}{10}=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$

c) $\frac{17}{6}$ d) $\frac{10}{9}$ e) $\frac{7}{10}$ f) $\frac{1}{8}$

S2C5

a) $10x^2y=2\cdot5\cdot x\cdot x\cdot y$
$6x^2y^2=2\cdot3\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y$
$\to m.c.m.: 2\cdot3\cdot5\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y$
$=30x^2y^2$

b) $x^2-4=(x+2)(x-2)$
$x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$
$\to m.c.m.: (x+2)(x-2)(x+1)$

c) $18x^2y^3$

d) $(x+1)(x-2)(x+3)$

e) $x^2+3x=x(x+3)$
$x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$
$x^2-9=(x+3)(x-3)$
$\to m.c.m.: x(x+3)(x+2)(x-3)$

S2C6

a) $\frac{(1)(4)}{12x^2}+\frac{(3x)(3)}{12x^2}=\frac{4+9x}{12x^2}$

b) $\frac{11}{3y}$ c) $\frac{15a+8b}{20ab}$

d) $\frac{2-9x}{12x^2}$ e) $\frac{15b+1}{12b^2}$

f) $\frac{3a-5}{10a^2}$

S2C7

a) $\dfrac{4(x+1)}{(x+2)(x+1)}+\dfrac{1(x+2)}{(x+1)(x+2)}$

$=\dfrac{5x+6}{(x+1)(x+2)}$

b) $\dfrac{x-2}{(x+1)(x-2)}+\dfrac{2(x+1)}{(x-2)(x+1)}$

$=\dfrac{3x}{(x+1)(x-2)}$

c) $\dfrac{4}{(x+1)(x-1)}+\dfrac{3(x+1)}{(x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{3x+7}{(x+1)(x-1)}$

d) $\dfrac{3}{(x+2)(x+1)}+\dfrac{3(x+2)}{(x+1)(x+2)}$

$=\dfrac{3x+9}{(x+1)(x+2)}$

S2C8

a) $\dfrac{4(x+2)}{(x-2)(x+2)}-\dfrac{x-2}{(x+2)(x-2)}$

$=\dfrac{4x+8-x+2}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{3x+10}{(x-2)(x+2)}$

b) $\dfrac{x-2-2(x+1)}{(x+1)(x-2)}=\dfrac{-x-4}{(x+1)(x-2)}$

c) $\dfrac{4-3(x+3)}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{-3x-5}{(x+3)(x-3)}$

d) $\dfrac{3-3(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{-3x}{(x+1)(x+2)}$

S2C9

a) $\dfrac{(2)(2)+(2)(6)-5}{6y}=\dfrac{11}{6y}$

b) $\dfrac{(2)(2x)-6+(3)(3)}{6x^2}=\dfrac{4x+3}{6x^2}$

c) $\dfrac{3-2(x+2)+4(x-2)}{(x-2)(x+2)}$

$=\dfrac{2x-9}{(x-2)(x+2)}$

d) $\dfrac{2(x-1)-2(x+1)+2}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{-2}{(x+1)(x-1)}$

e) $\dfrac{2+2(a-6)-3(a+5)}{(a-6)(a+5)}$

$=\dfrac{-a-25}{(a-6)(a+5)}$

S2C10

a) $\dfrac{3}{x}$

b) $\dfrac{1}{2x}$

c) $\dfrac{2x+1}{5x}$

d) $\dfrac{x+2-3x+2}{3x}=\dfrac{-2x+4}{3x}$

e) $\dfrac{2x+1-2x+x}{x-1}=\dfrac{x+1}{x-1}$

f) $\dfrac{2x+3-x-2}{x+1}=\dfrac{x+1}{x+1}=1$

g) $\dfrac{x-2}{x(x-2)}=\dfrac{1}{x}$

h) $\dfrac{bc+ac+ab}{abc}$

i) $\dfrac{8+3y+6-18}{12y}=\dfrac{3y-4}{12y}$

j) $\dfrac{x+1+4x-4}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{5x-3}{(x-1)(x+1)}$

k) $\dfrac{x-(x-1)}{x(x-1)}=\dfrac{1}{x(x-1)}$

l) $\dfrac{(x+1)-x}{x(x-1)(x+1)}=\dfrac{1}{x(x-1)(x+1)}$

m) $\dfrac{1+(x+1)}{(x+2)(x+1)}=\dfrac{x+2}{(x+2)(x+1)}$

$=\dfrac{1}{x+1}$

n) $\dfrac{(x+2)-(x-1)}{(x+1)(x-1)(x+2)}$

$=\dfrac{3}{(x+1)(x-1)(x+2)}$

o) $\dfrac{3-(2m+4)+(5m+5)}{(m+2)(m+1)}$

$=\dfrac{3m+4}{(m+2)(m+1)}$

p) $\dfrac{a+5+5(a-2)-3(a+2)}{(a+2)(a-2)}$

$=\dfrac{3a-11}{(a+2)(a-2)}$

q) $\dfrac{a+3-4(a-1)+2(a+4)}{(a+4)(a-1)}$

$=\dfrac{-a+15}{(a+4)(a-1)}$

UNIDAD 4

Sección 1 Contenido 1 (S1C1)

E1

a) $(-35)\div 7=-5\rightarrow -35=(7)(-5)$

b) $-25=(-5)(5)$

c) $84=(21)(4)$

d) $78=(-3)(-26)$

E2

a) $97=(8)(12)+1$

b) $57=(9)(6)+3$

c) $334=(30)(11)+4$

d) $225=(70)(3)+15$

S1C2

a)
$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & -\ x & -\ 6 & x+3 \\ \cline{4-4} -x^2 & -\ 3x & & x-4 \\ \cline{1-3} & -\ 4x & -\ 6 & \\ & +\ 4x & +\ 12 & \\ \cline{1-3} & & 6 & \end{array}$$

b) Cociente: $2x+3$

Residuo: 19

S1C3

a)
$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -6 & 2 \\ & 2 & 2 & \\ \hline 1 & 1 & -4 & \end{array}$$

Cociente: $x+1$, Residuo: -4

b) Cociente: $x-2$, Residuo: 3

c)
$$\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 2 & 3 \\ & 6 & 15 & \\ \hline 2 & 5 & 17 & \end{array}$$

Cociente: $2x+5$, Residuo: 17

d) Cociente: $2x-9$, Residuo: 37

e) Cociente: $x-1$, Residuo: 0

f) Cociente: $12x-29$, Residuo: 58

S1C4

a)
$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 4 & -1 & -10 & 2 \\ & 2 & 12 & 22 & \\ \hline 1 & 6 & 11 & 12 & \end{array}$$

Cociente: $x^2+6x+11$

Residuo: 12

b) Cociente: $4x^2-7x+18$

Residuo: -23

c) Cociente: x^2-x-2

Residuo: -10

S1C5

a)
$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 5 \\ & 5 & 50 & \\ \hline 1 & 10 & 52 & \end{array}$$

Cociente: $x+10$, Residuo: -4

$x^2+5x+2=(x-5)(x+10)+52$

b) x^3+6x^2+3x-1
$=(x-2)(x^2+8x+19)+37$

c) $3x^3-x^2+2x-1$
$=(x-1)(3x^2+2x+4)+3$

d) x^3-6x^2-2x+5
$=(x+3)(x^2-9x+25)-70$

S1C6

E1

a)
$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 1 \\ & 1 & 6 & \\ \hline 1 & 6 & 9 & \end{array}$$

Cociente: $x+6$, Residuo: 9

b) Cociente: $x-5$, Residuo: 16

c) Cociente: $x+10$, Residuo: 65

d) Cociente: $3a-15$, Residuo: 46

e) Cociente: $x-3$, Residuo: 7

f)
$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & \frac{1}{2} \\ & 1 & -1 & \\ \hline 2 & -2 & -2 & \end{array}$$

Cociente: $2a-2$, Residuo: -2

E2

a)
$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 7 & -6 & 2 \\ & 2 & -4 & 6 & \\ \hline 1 & -2 & 3 & 0 & \end{array}$$

Cociente: x^2-2x+3, Residuo: 0

b) Cociente: $2x^2-x+6$, Residuo: 1

c) Cociente: $3x^2-x+1$, Residuo: -2

d) Cociente: $3x^2+5x+5$, Residuo: 1

e) Cociente: b^2-3b-5, Residuo: 10

f)
$$\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & -2 & \frac{2}{3} \\ & 4 & 4 & 2 & \\ \hline 6 & 6 & 3 & 0 & \end{array}$$

Cociente: $6a^2+6a+3$
Residuo: 0

E3

a)
$$\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 1 & -1 \\ & -3 & 8 & \\ \hline 3 & -8 & 9 & \end{array}$$

Cociente: $3x-8$, Residuo: 9

$3x^2-5x+1=(x+1)(3x-8)+9$

b) $3x^3-5x^2-2x-1$
$=(x-2)(3x^2+x)-1$

c) $-2x^3+4x^2+7x+1$
$=(x-3)(-2x^2-2x+1)+4$

S2C1

E1

a) $P(3)=5$ $P(-1)=9$ $P(0)=5$

b) $P(1)=1$ $P(0)=-1$ $P(3)=17$

c) $P(-1)=2$ $P(2)=11$ $P(3)=34$

d) $P(3)=163$ $P(1)=3$ $P(5)=803$

E2

a) $P(3)=1$ $P(-4)=22$

b) $P(3)=8$ $P(-4)=1$

S2C2

a) $P(2)=2^3+2^2-(2)(2)+12=20$, $R=20$

b) $P(-2)=-49$, $R=-49$

c) $P(1)=0$, $R=0$

d) $P(-1)=22$, $R=22$

S2C3

a) $P(2)=0$, $P(3)=6$, $P(-1)=-18$, $P(-3)=-90$
Por lo tanto, el factor de $P(x)$ es $x-2$.

b) $P(2)=-24$, $P(-3)=-54$, $P(-1)=-12$, $P(-2)=-24$
Por lo tanto, los binomios no son factores de $P(x)$.

S2C4

E1

a) $P(2)=11$ $P(0)=1$ $P(-1)=2$

b) $P(3)=58$ $P(-1)=6$ $P(5)=276$

c) $P(0)=-1$ $P(-2)=37$ $P(1)=-8$

d) $P(2)=1$ $P(-4)=-41$ $P(-1)=7$

e) $P(-1)=-2$ $P(0)=-1$ $P(1)=0$

E2

a) $P(2)=2^3+2^2-(2)(2)+12=20$, $R=20$

b) $P(-3)=-43$, $R=-43$

c) $P(1)=5$, $R=5$

d) $P(-4)=431$, $R=431$

e) $P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{8}$, $R=\frac{15}{8}$

E3

$P(2)=-10$, $P(3)=0$, $P(1)=-6$, $P(-3)=30$

Por lo tanto, el factor de $P(x)$ es $x-3$.

E4

$P(-2)=-16$, $P(-3)=-50$, $P(-1)=0$, $P(2)=0$

Por lo tanto, $x+1$ y $x-2$ son factores de $P(x)$

S3C1

a) $P(1)=0 \rightarrow P(x)=(x-1)Q(x)$
$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ & 1 & -1 & -2 & \\ \hline 1 & -1 & -2 & 0 & \end{array}$$

Cociente: x^2-x-2, Residuo: 0

$P(x)=(x-1)(x\ -x-2)$
$=(x-1)(x-2)(x+1)$

x^3-2x^2-x+2
$=(x-1)(x-2)(x+1)$

b) x^3+5x^2-x-5
$=(x-1)(x^2+6x+5)$
$=(x-1)(x+5)(x+1)$

c) x^3+4x^2+x-6
$=(x-1)(x^2+5x+6)$
$=(x-1)(x+2)(x+3)$

S3C2

E1

a) $x2+x-2=(x-1)(x+2)$
Por lo tanto, $x=-2$, $x=1$

b) $x^2+7x+10=(x+5)(x+2)$
Por lo tanto, $x=-2$, $x=-5$

c) $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$
Por lo tanto, $x=2$, $x=3$

E2

a) $x=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2-(4)(1)(-2)}}{(2)(1)}$
$=\dfrac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\dfrac{1\pm 3}{2}$

Por lo tanto, $x=2$, $x=-1$

b) $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-(4)(1)(2)}}{(2)(1)}$
$=\dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$

Por lo tanto, $x=\dfrac{-5+\sqrt{17}}{2}$,

$x=\dfrac{-5-\sqrt{17}}{2}$

c) $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-(4)(3)(-1)}}{(2)(3)}$
$=\dfrac{-3\pm\sqrt{21}}{6}$

Por lo tanto, $x=\dfrac{-3+\sqrt{21}}{6}$,

$x=\dfrac{-3-\sqrt{21}}{6}$

d) $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - (4)(5)(-3)}}{(2)(5)}$

$= \dfrac{-1 \pm \sqrt{61}}{10}$

Por lo tanto, $x = \dfrac{-1 + \sqrt{61}}{10}$,

$x = \dfrac{-1 - \sqrt{61}}{10}$

S3C3

E1

a) $x = 0, \quad x = 2, \quad x = -5$

b) $x = 0, \quad x = 1, \quad x = -1$

c) $x = 0, \quad x = -\dfrac{1}{2}, \quad x = -1$

E2

a) $x^3 + x^2 - 6x = 0$

$\leftrightarrow x(x^2 + x - 6) = 0$

$\leftrightarrow x(x+3)(x-2) = 0$

Por lo tanto, $x = 0, x = -3, x = 2$

b) $x(x-4)(x+1) = 0$

Por lo tanto, $x = 0,\ x = 4, x = -1$

c) $x(x+2)(x-2) = 0$

Por lo tanto, $x = 0,\ x = -2,\ x = 2$

S3C4

a) $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$

$\leftrightarrow \quad (x-1)(x^2 - 4) = 0$

$\leftrightarrow \quad (x-1)(x+2)(x-2) = 0$

Por lo tanto, $x = 1, x = -2,\ x = 2$

b) $(x-1)(x+1)(x+2) = 0$

Por lo tanto, $x = 1,\ x = -1, x = -2$

c) $(x-1)(x-5)(x+1) = 0$

Por lo tanto, $x = 1,\ x = 5, x = -1$

S3C5

E1

a) $x = 0, \quad x^2 - 2x - 2 = 0$

$\leftrightarrow x = 0, \quad x = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$

$\leftrightarrow x = 0, \quad x = 1 \pm \sqrt{3}$

$\leftrightarrow x = 0, \quad x = 1 + \sqrt{3},$

$x = 1 - \sqrt{3}$

b) $x = 0, \quad x^2 - 4x + 1 = 0$

$\leftrightarrow x = 0, \quad x = 2 + \sqrt{3},$

$x = 2 - \sqrt{3}$

E2

a) $x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$

$\leftrightarrow (x-1)(x^2 - 3x + 1) = 0$

$\leftrightarrow x - 1 = 0, x^2 - 3x + 1 = 0$

Por lo tanto, $x = 1, x = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$,

$x = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$

b) $(x-1)(x_2 + 2x - 1) = 0$

$\leftrightarrow x - 1 = 0, \quad x^2 + 2x - 1 = 0$

Por lo tanto, $x = 1, x = -1 + \sqrt{2},$

$x = -1 - \sqrt{2}$

S3C6

E1

a) $P(1) = 0$

$\rightarrow x^3 - 3x^2 - x + 3$

$= (x-1)(x^2 - 2x - 3)$

$= (x-1)(x-3)(x+1)$

b) $x^3 + x^2 - 4x - 4$

$= (x+1)(x^2 - 4)$

$= (x+1)(x+2)(x-2)$

c) $x^3 - 5x^2 + 4$

$= (x-1)(x^2 - 4x - 4)$

E2

a) $x = 0, \quad x = 1, \quad x = 2$

b) $x = 0, \quad x = -3, \quad x = 5$

c) $x = 0, \quad x = -2, \quad x = -7$

d) $x^3 + 3x^2 + 2x = 0$

$\leftrightarrow x(x^2 + 3x + 2) = 0$

$\leftrightarrow x(x+1)(x+2) = 0$

$\leftrightarrow \quad x = 0, x = -1, x = -2$

e) $\leftrightarrow x(x+2)(x-1) = 0$

$\leftrightarrow \quad x = 0, x = -2, x = 1$

f) $\leftrightarrow x(x-3)(x-2) = 0$

$\leftrightarrow x = 0, x = 2, x = 3$

E3

a) $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$

$\leftrightarrow (x-1)(x^2 + 4x + 3) = 0$

$\leftrightarrow (x-1)(x+1)(x+3) = 0$

Por lo tanto, $x = 1,\ x = -1,\ x = -3$

b) $(x+1)(x+2)(x-3) = 0$

Por lo tanto, $x = -1,\ x = -2, x = 3$

c) $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$

Por lo tanto, $x = 1,\ x = 2,\ x = 3$

E4

a) $x = 0, \quad x^2 + 2x - 2 = 0$

$\leftrightarrow x = 0, \quad x = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$

$\leftrightarrow x = 0, \quad x = -1 \pm \sqrt{3}$

$\leftrightarrow x = 0, \quad x = -1 + \sqrt{3},$

$x = -1 - \sqrt{3}$

b) $(x-1)(x^2 - 3x - 1) = 0$

$\leftrightarrow x = 1, \quad x^2 - 3x - 1 = 0$

$\leftrightarrow x = 1, \quad x = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2},$

$x = \dfrac{3 - \sqrt{13}}{2}$

c) $(x-1)(x^2 + 3x + 1) = 0$

$\leftrightarrow x = 1, \quad x^2 + 3x + 1 = 0$

$\leftrightarrow x = 1, \quad x = \dfrac{-3 - \sqrt{5}}{2},$

$x = \dfrac{-3 + \sqrt{5}}{2}$

UNIDAD 5

Seccion 1 Contenido 1 (S1C1)

a) $x^2 = 1^2 + 2^2 \ (x > 0) \leftrightarrow x = \sqrt{5}$

b) $13^2 = y^2 + 12^2 \ (y > 0) \leftrightarrow \mathrm{y} = 5$

S1C2

	$\dfrac{\text{co}}{\text{hip}}$	$\dfrac{\text{ca}}{\text{hip}}$	$\dfrac{\text{co}}{\text{ca}}$
a)	$\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{3}{5}$	$\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{4}{5}$	$\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{3}{4}$
b)	$\dfrac{DE}{EF} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$	$\dfrac{DF}{EF} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$	$\dfrac{DE}{DF} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$

Los resultados son idénticos ya que

$\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{ED}{FE}, \quad \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{DF}{EF}, \quad \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{DE}{DF}$

S1C3

$\tan A = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{2}{3} \qquad \tan B = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{3}{2}$

S1C4

	sen A	cos A	tan A
a)	$\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$	$\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$	$\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{3}{2}$
b)	$\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{4}{2\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$	$\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{2}{2\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$	$\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{4}{2} = 2$
c)	$\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$	$\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{1}{3}$	$\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{2\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{2}$

S1C5

a) $\text{sen A} = \dfrac{1}{4} = \dfrac{\text{co}}{\text{hip}}$

$(\text{hip})^2 = (\text{co})^2 + (\text{ca})^2$

$4^2 = 1^2 + (\text{ca})^2$

Como $\text{ca} > 0,\ \text{ca} = \sqrt{15}$

$\cos A = \dfrac{\text{ca}}{\text{hip}} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

$\tan A = \dfrac{\text{co}}{\text{ca}} = \dfrac{1}{\sqrt{15}}$

b) $\cos A = \frac{3}{4} = \frac{\text{ca}}{\text{hip}}$

$(\text{hip})^2 = (\text{co})^2 + (\text{ca})^2$

$4^2 = (\text{co})^2 + 3^2$

Como $\text{co} > 0,\ \text{co} = \sqrt{7}$

$\text{sen A} = \frac{\text{co}}{\text{hip}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\tan A = \frac{\text{co}}{\text{ca}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$

c) $\tan A = \frac{5}{2} = \frac{\text{co}}{\text{ca}}$

$(\text{hip})^2 = (\text{co})^2 + (\text{ca})^2$

$(\text{hip})^2 = 5^2 + 2^2$

Como $\text{hip} > 0, \text{hip} = \sqrt{29}$

$\text{sen A} = \frac{\text{co}}{\text{hip}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$

$\cos A = \frac{\text{ca}}{\text{hip}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$

S1C6

E1

	sen A	cos A	tan A
a)	$\frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{13}}{7}$	$\frac{AC}{AB} = \frac{6}{7}$	$\frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{13}}{6}$
b)	$\frac{BC}{AB} = \frac{5}{\sqrt{29}}$	$\frac{AC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{29}}$	$\frac{BC}{AC} = \frac{5}{2}$

E2

a) $\cos A = \frac{1}{2} = \frac{\text{ca}}{\text{hip}}$

$(\text{hip})^2 = (\text{co})^2 + (\text{ca})^2$

$2^2 = (\text{co})^2 + 1^2$

Como $\text{co} > 0,\ \text{co} = \sqrt{3}$

$\text{sen A} = \frac{\text{co}}{\text{hip}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan A = \frac{\text{co}}{\text{ca}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\text{sen A} = \frac{1}{2} = \frac{\text{co}}{\text{hip}}$

$(\text{hip})^2 = (\text{co})^2 + (\text{ca})^2$

$2^2 = 1^2 + (\text{ca})^2$

Como $\text{ca} > 0,\ \text{ca} = \sqrt{3}$

$\cos A = \frac{\text{ca}}{\text{hip}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan A = \frac{\text{co}}{\text{ca}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

E3

	a)	b)	c)
$\text{sen } A$	$\frac{2}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{7}{\sqrt{53}}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{\sqrt{53}}$
$\tan A$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{7}{2}$

S2C1

a) $AB^2 = 3^2 + 3^2$

Como $AB > 0,\ AB = 3\sqrt{2}$

$\text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 45° = 1$

b) Estos valores son iguales respecto a los calculados en la solución del problema. Por que los lados de los triángulos involucrados son proporcionales.

S2C2

	$A = 30°$	$A = 45°$	$A = 60°$
$\text{sen } A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan A$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

S3C1

a) $a = 2 \text{ sen } 60° = (2)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$

$b = 2 \cos 60° = (2)\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

b) $a = 3 \tan 30° = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$c = \frac{3}{\cos 30°} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

S3C2

a) $h = 8 \text{ sen } 30° = (8)\left(\frac{1}{2}\right) = 4\ (m)$

b) $AB = 8 \cos 30° = (8)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\sqrt{3}\,(m)$

S3C3

E1

a) $\text{sen } 7° = 0{,}1219$

b) $\cos 12° = 0{,}9781$

c) $\tan 25° = 0{,}4663$

E2

a) $A = 23°$ b) $A = 14°$ c) $A = 20°$

S3C4

a) $\tan 32° = \frac{(altura)}{10} = 0{,}6249$

$(altura) = (10)(0{,}6249) = 6{,}249$

La altura del árbol es $6{,}2\ m$ aproximadamente

b) $(altura)$

$= 1{,}65 + 5 \tan 39°$

$= 1{,}65 + (5)(0{,}8098)$

$= 5{,}699$

La altura aproximada del asta es $5{,}7\ m$.

S4C1

Columna 1	Columna 2
$\text{sen } 24°$	$\cos 8°$
$\cos 75°$	$\text{sen } 15°$
$\text{sen } 82°$	$\cos 66°$

S4C3

a) $\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$

$\text{sen}^2 A = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

Como $0° < A < 90°, \text{sen } A > 0.$

$\text{sen } A = \frac{3}{5}$

$\tan A = \frac{\text{sen } A}{\cos A} = \frac{3}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{4}$

b) $\cos^2 A = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$

Como $0° < A < 90°, \cos A > 0.$

$\cos A = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\tan A = \frac{\text{sen } A}{\cos A} = \frac{2}{3} \div \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

S4C4

E1

a) $c = 5 \tan 45° = 5$

$b^2 = 5^2 + 5^2$

Como $b > 0, b = 5\sqrt{2}$

b) $f = 9 \text{ sen } 30° = (9)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}$

$d = 9 \cos 30° = (9)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

c) $h = \frac{6}{\text{sen } 60°} = \frac{12}{\sqrt{3}}$

$i = \frac{6}{\tan 30°} = \frac{6}{\sqrt{3}}$

E2

a) $BC = 5 \text{ sen } 34° = 2{,}796$

$AC = 5 \cos 34° = 4{,}145$

b) $BC = 6 \text{ sen } 50° = 4{,}596$

$AC = 6 \cos 50° = 3{,}8568$

E3

a) $BC = 3\tan 22° = 1{,}212$

b) $BC = 2\tan 42° = 1{,}8008$

E4

$(altura) = 12\cos 50° = 7{,}7136$

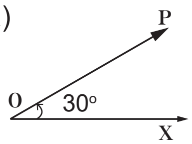
7,7136 pies

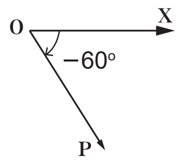
E5

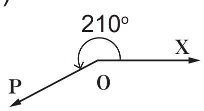
a) $x = 23°$ b) $x = 20°$

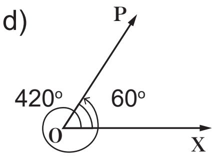
UNIDAD 6

Sección 1 Contenido 1 (S1C1)

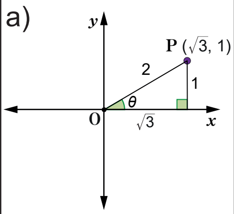
a) 

b) 

c) 

d) 

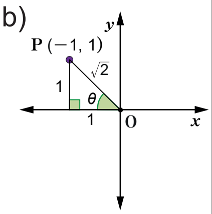
S1C2

a) 

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{2}$

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

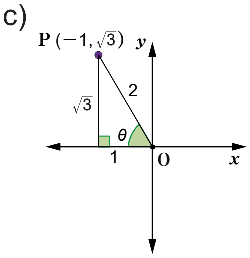
$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

b) 

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan\theta = -1$

c) 

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$

$\tan\theta = -\sqrt{3}$

S1C3

a) $\operatorname{sen} 135° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 135° = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 135° = -1$

b) $\operatorname{sen} 240° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 240° = -\dfrac{1}{2}$

$\tan 240° = \sqrt{3}$

c) $\operatorname{sen}(-210°) = \dfrac{1}{2}$

$\cos(-210°) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan(-210°) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

d) $\operatorname{sen}(-315°) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos(-315°) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan(-315°) = 1$

S1C4

a) I C b) IV C

c) II C d) IV C

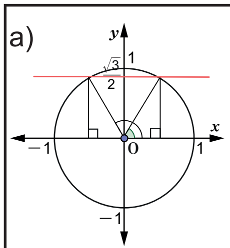
S1C5

a) $\operatorname{sen} 270° = -1$ b) $\operatorname{sen} 360° = 0$

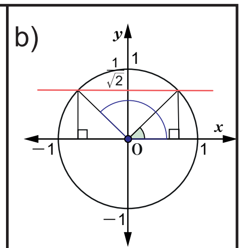
$\cos 270° = 0$ $\cos 360° = 1$

$\tan 270° = NE$ $\tan 360° = 0$

S1C6

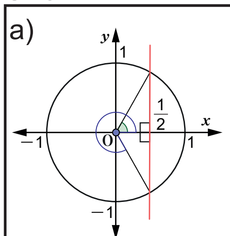
a) 

$\theta = 60°,\ \theta = 120°$

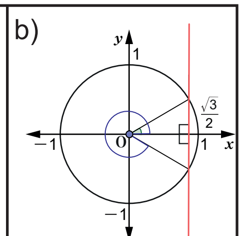
b) 

$\theta = 45°, \theta = 135°$

S1C7

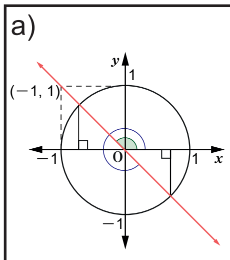
a) 

$\theta = 60°,\ \theta = 300°$

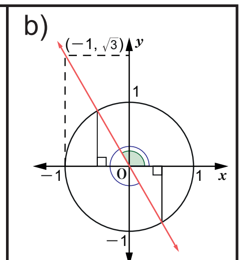
b) 

$\theta = 30°, \theta = 330°$

S1C8

a) 

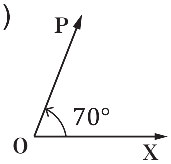
$\theta = 135°, \theta = 315°$

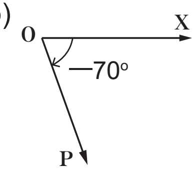
b) 

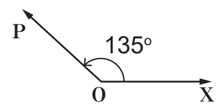
$\theta = 120°,\ \theta = 300°$

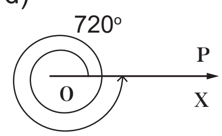
S1C9

E1

a) 

b) 

c) 

d) 

E2

a) $\operatorname{sen} 150° = \dfrac{1}{2}$ $\cos 150° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 150° = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

b) $\operatorname{sen} 210° = -\dfrac{1}{2}$ $\cos 210° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 210° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

c) $\operatorname{sen} 315° = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\cos 315° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 315° = -1$

d) $\operatorname{sen}(-120°) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos(-120°) = -\dfrac{1}{2}$

$\tan(-120°) = \sqrt{3}$

e) $\operatorname{sen}(-240°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos(-240°) = -\dfrac{1}{2}$

$\tan(-240°) = -\sqrt{3}$

f) $\operatorname{sen}(-300°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos(-300°) = \dfrac{1}{2}$

$\tan(-300°) = \sqrt{3}$

g) $\operatorname{sen}(-330°) = \dfrac{1}{2}$ $\cos(-330°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan(-330°) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

h) $\operatorname{sen}(-720°) = 0$ $\cos(-720°) = 1$

$\tan(-720°) = 0$

E3

a) IV cuadrante b) I cuadrante

c) III cuadrante d) I cuadrante

E4

a) $\theta = 210°$, $\theta = 330°$ b) $\theta = 240°$, $\theta = 300°$

E5

a) $\theta = 120°$, $\theta = 240°$ b) $\theta = 180°$

E6

a) $\theta = 45°, 225°$ $\theta = 225°$ b) $\theta = 60°$, $\theta = 240°$

S2C1

$$\tan^2\theta + 1 = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\boldsymbol{\cos^2\theta}} + \frac{\cos^2\theta}{\boldsymbol{\cos^2\theta}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\boldsymbol{\cos^2\theta}}$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\cos^2\theta}$$

S2C2

a) $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$

Como θ se encuentra en el IV cuadrante, $\operatorname{sen}\theta < 0$.

$\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) \div \frac{3}{4} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$

b) $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2$

Como θ se encuentra en el III cuadrante, $\cos\theta < 0$.

$\cos\theta = -\frac{4}{5}$

$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \left(-\frac{3}{5}\right) \div \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{4}$

S2C3

a) $\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$3^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \leftrightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{10}$

Como θ se encuentra en el III cuadrante, $\cos\theta < 0$.

$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

$\operatorname{sen}\theta = (\tan\theta)(\cos\theta)$

$\operatorname{sen}\theta = (3)\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{10}}$

b) $\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$\cos^2\theta = \frac{1}{6}$

Como θ se encuentra en el II cuadrante, $\cos\theta < 0$.

$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{6}}$

$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

$\operatorname{sen}\theta = (\tan\theta)(\cos\theta)$

$\operatorname{sen}\theta = (-\sqrt{5})\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$

S2C4

a) $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$

Como θ se encuentra en el IV cuadrante, $\operatorname{sen}\theta < 0$.

$\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$

$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) \div \frac{1}{4}$

$= -\sqrt{15}$

b) $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$

Como θ se encuentra en el I cuadrante, $\cos\theta > 0$.

$\cos\theta = \frac{3}{5}$

$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{4}{5} \div \frac{3}{5} = \frac{4}{3}$

c) $\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \leftrightarrow \cos^2\theta = \frac{9}{10}$

Como θ se encuentra en el II cuadrante, $\cos\theta < 0$.

$\cos\theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$

$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

$\operatorname{sen}\theta = (\tan\theta)(\cos\theta)$

$\operatorname{sen}\theta = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

d) $\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$2^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \leftrightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{5}$

Como θ se encuentra en el III cuadrante, $\cos\theta < 0$.

$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

$\operatorname{sen}\theta = (\tan\theta)(\cos\theta)$

$\operatorname{sen}\theta = (2)\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

S3C1

E1

a) $\operatorname{sen}390° = \operatorname{sen}(30° + 360°)$

$= \operatorname{sen}30° = \frac{1}{2}$

b) $\cos 420° = \cos(60° + 360°)$

$= \cos 60° = \frac{1}{2}$

c) $\tan 750° = \tan(30° + 360° \times 2)$

$= \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

E2

a) $\cos(-30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\operatorname{sen}(-45°) = -\operatorname{sen}45° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

c) $\tan(-60°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}$

S3C2

E1

a) $\operatorname{sen}(60° + 180°) = -\operatorname{sen}60°$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos(30° + 180°) = -\cos 30°$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\tan(45° + 180°) = \tan 45° = 1$

E2

a) $\cos(180° - 30°) = -\cos 30°$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\operatorname{sen}(180° - 60°) = \operatorname{sen}60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\tan(180° - 45°) = -\tan 45° = -1$

S3C3

a) $\operatorname{sen}(90° + 60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$

b) $\cos(90° + 30°) = -\operatorname{sen}30° = -\frac{1}{2}$

c) $\tan(90° + 30°) = -\frac{1}{\tan 30°} = -\sqrt{3}$

S3C4

E1

a) $\operatorname{sen}(60° + 360°) = \operatorname{sen}60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos(30° + 360°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\tan(45° + 360°) = \tan 45° = 1$

E2

a) $\cos(-135°) = \cos 135° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $\operatorname{sen}(-240°) = -\operatorname{sen}240° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\tan(-210°) = -\tan 210° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

E3

a) $\operatorname{sen}(30°+180°)=-\operatorname{sen}30°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos(45°+180°)=-\cos45°=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

c) $\tan(60°+180°)=\tan60°=\sqrt{3}$

E4

a) $\cos(180°-60°)=-\cos60°=-\frac{1}{2}$

b) $\operatorname{sen}(180°-45°)=\operatorname{sen}45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$

c) $\tan(180°-30°)=-\tan30°=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

E5

a) $\operatorname{sen}(90°+30°)=\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos(90°+60°)=-\operatorname{sen}60°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\tan(90°+45°)=-\frac{1}{\tan45°}=-1$

S4C1

E1

a) $60°=(60)\left(\frac{\pi}{180}\right)=\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{2\pi}{3}$

c) $\frac{7\pi}{6}$ d) $\frac{5\pi}{3}$

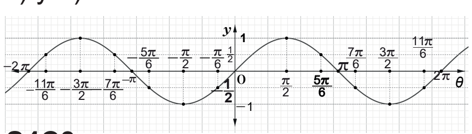
E2

a) $\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{180°}{\pi}\right)=90°$ b) $135°$

c) $150°$ d) $240°$

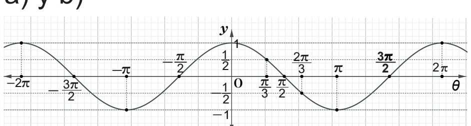
S4C2

a) y b)



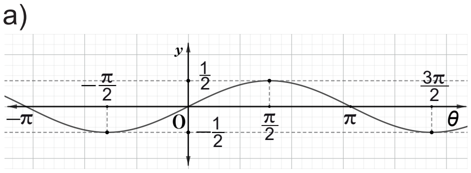
S4C3

a) y b)



S4C4

a)

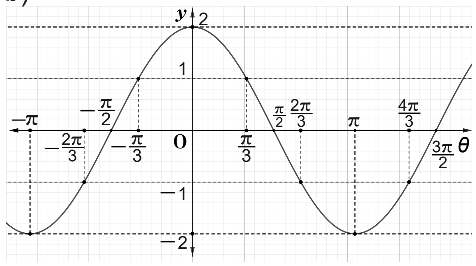


Período: 2π

Amplitud: $\frac{1}{2}$

Rango: $-\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}$

b)

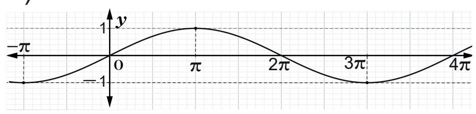


Período: 2π Amplitud: 2

Rango: $-2\leq y\leq 2$

S4C5

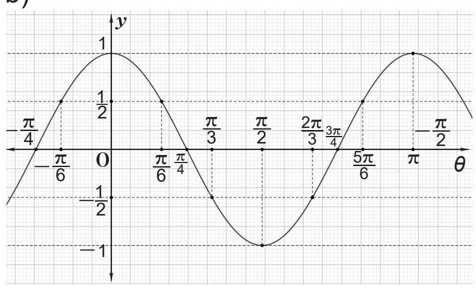
a)



Período: 4π Amplitud: 1

Rango: $-1\leq y\leq 1$

b)

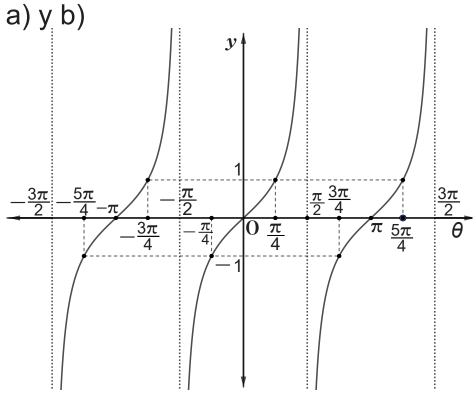


Período: π Amplitud: 1

Rango: $-1\leq y\leq 1$

S4C6

a) y b)



S4C7

E1

a) $80°=(80)\left(\frac{\pi}{180}\right)=\frac{4\pi}{9}$

b) $\frac{5\pi}{6}$ c) $\frac{25\pi}{18}$ d) $-\frac{11\pi}{6}$

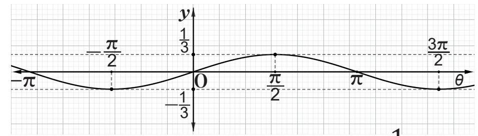
E2

a) $\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{5}\left(\frac{180°}{\pi}\right)=36°$

b) $630°$ c) $100°$ d) $-480°$

E3

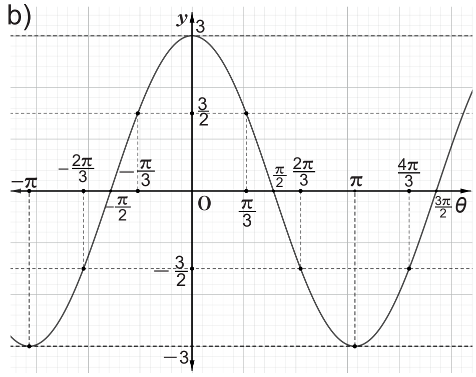
a)



Período: 2π Amplitud: $\frac{1}{3}$

Rango: $-\frac{1}{3}\leq y\leq\frac{1}{3}$

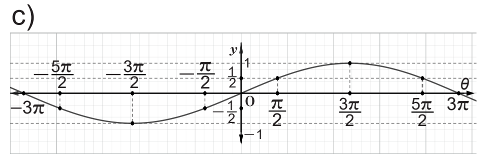
b)



Período: 2π Amplitud: 3

Rango: $-3\leq y\leq 3$

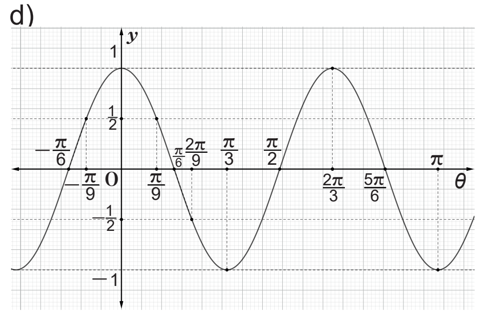
c)



Período: 6π Amplitud: 1

Rango: $-1\leq y\leq 1$

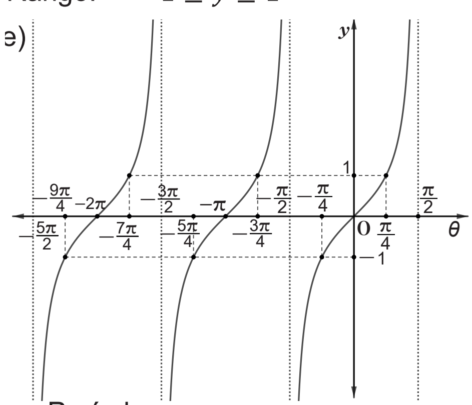
d)



Período: $\frac{2}{3}\pi$ Amplitud: 1

Rango: $-1\leq y\leq 1$

e)



Período: π

Rango: el conjunto de los números reales

UNIDAD 7

Sección 1 Contenido 1 (S1C1)

a) $\dfrac{2\sqrt{2}}{\text{sen } 45°} = \dfrac{c}{\text{sen } 60°}$

$c = \left(\dfrac{2\sqrt{2}}{\text{sen } 45°}\right)(\text{sen } 60°)$

$\leftrightarrow c = 2\sqrt{2} \div \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\text{sen } 30°} = \dfrac{b}{\text{sen } 45°} \quad \leftrightarrow b = 2$

S1C2

a) $\dfrac{\sqrt{6}}{\text{sen } A} = \dfrac{3}{\text{sen } 60°}$

$\text{sen } A = \dfrac{\sqrt{6}\text{sen } 60°}{3} = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$= \dfrac{3\sqrt{2}}{6} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Como $0° < \measuredangle A < 90°$

de la figura, $\measuredangle A = 45°$

b) $\dfrac{8}{\text{sen } C} = \dfrac{4\sqrt{2}}{\text{sen } 30°} \leftrightarrow \text{sen } C = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Como $90° < \measuredangle C < 180°$

de la figura, $\measuredangle C = 135°$

S1C3

$C = 180° - (75° + 60°) = 45°$

$\dfrac{50}{\text{sen } 45°} = \dfrac{BC}{\text{sen } 60°} \leftrightarrow BC = 25\sqrt{6}$

Rodrigo tiene que recorrer $25\sqrt{6}\, m$.

S1C4

a) Área $= \dfrac{1}{2} bc \text{ sen } A = \left(\dfrac{1}{2}\right)(4)(8)\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$\leftrightarrow$ Área $= 8$

b) Área $= \dfrac{30}{\sqrt{2}}$ c) Área $= 6\sqrt{3}$

d) Área $= 3\sqrt{3}$

S1C5

E1

a) $\dfrac{3}{\text{sen } 30°} = \dfrac{b}{\text{sen } 45°}$

$b = \left(\dfrac{3}{\text{sen } 30°}\right)(\text{sen } 45°) = \dfrac{6}{\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{4}{\text{sen } 45°} = \dfrac{c}{\text{sen } 120°} \quad \leftrightarrow c = 2\sqrt{6}$

E2

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{\text{sen } A} = \dfrac{\sqrt{2}}{\text{sen } 45°}$

$\text{sen } A = \dfrac{\sqrt{3}\text{sen } 45°}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Como $0° < \measuredangle A < 90°$

de la figura, $\measuredangle A = 60°$

b) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\text{sen } C} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\text{sen } 120°} \leftrightarrow \text{sen } C = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Como $0° < \measuredangle C < 90°$

de la figura $\measuredangle C = 45°$

E3

$A = 180° - (75° + 45°) = 60°$

$\dfrac{4}{\text{sen } 45°} = \dfrac{a}{\text{sen } 60°} \leftrightarrow a = 2\sqrt{6}$

La longitud del cable que va desde el punto B al punto C es $2\sqrt{6}\ m$.

E4

a) Área $= \dfrac{1}{2} bc \text{ sen } A$

$= \left(\dfrac{1}{2}\right)(8)(3)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\leftrightarrow$ Área $= \dfrac{12}{\sqrt{2}}$

b) Área $= 3$ c) Área $= 2\sqrt{3}$

d) Área $= 5\sqrt{3}$

S2C1

a) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

$= 3^2 + 4^2 - (2)(3)(4)\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$= 13$ Como $b > 0,\ b = \sqrt{13}$

b) $c^2 = 3^2 + \sqrt{2}^2 - (2)(3)(\sqrt{2})\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= 5$ Como $c > 0,\ c = \sqrt{5}$

S2C2

a) $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$= \dfrac{5^2 + 8^2 - 7^2}{(2)(5)(8)} = \dfrac{1}{2}$

Como $0° < \measuredangle A < 180°, \measuredangle A = 60°$

b) $\cos C = \dfrac{2^2 + (3\sqrt{3})^2 - 7^2}{(2)(2)(3\sqrt{3})} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Como $0° < \measuredangle C < 180°, \measuredangle C = 150°$

S2C3

$d^2 = 5^2 + 10^2 - (2)(5)(10)\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$= 175$

Como $d > 0,\ d = 5\sqrt{7}\ m$

S2C4

E1

a) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

$= 2^2 + 3^2 - (2)(2)(3)\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$= 7$

Como $b > 0,\ b = \sqrt{7}$

b) $c^2 = 6^2 + (3\sqrt{2})^2 - (2)(6)(3\sqrt{2})\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=18$ Como $c > 0,\ c = 3\sqrt{2}$

E2

a) $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$= \dfrac{(3\sqrt{2})^2 + 7^2 - 5^2}{(2)(3\sqrt{2})(7)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Como $0° < \measuredangle A < 180°, \measuredangle A = 45°$

b) $\cos B = \dfrac{4^2 + (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{26})^2}{(2)(4)(\sqrt{2})}$

$= -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Como $0° < \measuredangle B < 180°, \measuredangle B = 135°$

E3

$AH^2 = 4^2 + \sqrt{2}^2 - (2)(4)(\sqrt{2})\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= \sqrt{26}$

Como $AH > 0,\ AH = \sqrt{26}$

En el $\Delta AHP, \tan 60° = \dfrac{PH}{AH}$

$PH = (\tan 60°)(\text{AH}) = \sqrt{78}$

UNIDAD 8

Sección 1 Contenido 1 (S1C1)

	a)	b)	c)	d)
Media (x):	2	8	2	13
Moda (M_0):	1	9	1	14
Mediana (M_e):	1,5	8,5	2	13

a) Media:

$\bar{x} = \dfrac{2 + 2 + 1 + 5 + 1 + 1}{6} = 2$

Moda: $M_0 = 1$

Mediana:

1,1,1,2,2,5

Como el número de datos es par, entonces

$M_e = \dfrac{1 + 2}{2} = 1{,}5$

S1C2

a)	Grupo A	Grupo B
Media ($\bar{x}$):	2	2
Moda (M_0):	1	2
Mediana (M_e):	2	2

La media y la mediana de los dos grupos tienen el mismo valor, sin embargo, la moda de los grupos no es igual.

b)	Grupo A	Grupo B
Media ($\bar{x}$):	2	2
Moda (M_0):	1	1
Mediana (M_e):	$1{,}5$	1

La media y la mediana de los dos grupos tienen el mismo valor, sin embargo, la mediana del grupo A es menor que la de B.

S1C3

$20-24$	$24-28$	$28-32$	$32-36$	$36-40$

b)

Grupo (intervalo)	
$20-24$	$20,20,20,20,21,21,22,22,$ $23,23,23$
$24-28$	$24,24,24,24,24,26,26,27$
$28-32$	$28,28,29,29,29,30$
$32-36$	$34,34,35$
$36-40$	$36,36$

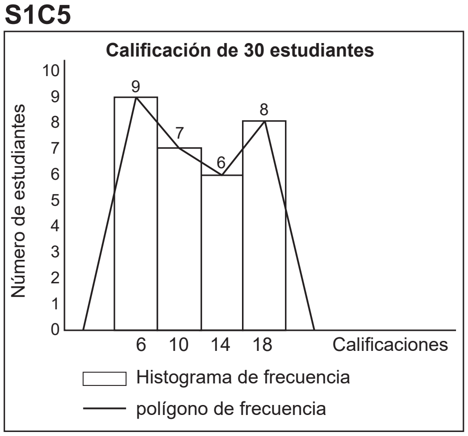
S1C4

a) El ancho de cada clase es 4.

b)

Calificaciones	Número de estudiantes (f_i)	Marca de clase (M_i)
$4-8$	9	6
$8-12$	7	10
$12-16$	6	14
$16-20$	8	18
Total	30	

S1C5



S1C6

Edades	No. de estudiantes (f_i)	Marca de clase (M_i)	$f_i \cdot M_i$	Frecuencia acumulada
$4-8$	9	6	54	9
$8-12$	7	10	70	16
$12-16$	6	14	84	22
$16-20$	8	18	144	30
Total	30			352

Media:

$$\bar{x} = \frac{54 + 70 + 84 + 144}{30} \approx 11{,}73$$

Moda:

La clase con mayor frecuencia es $4-8$, entonces, la moda es

$$M_o = \frac{4+8}{2} = 6$$

Mediana:

La posición de M_e es $\dfrac{30+1}{2} = 15{,}5,$

entonces, la mediana está en la clase de $8-12$

La mediana es $M_e = \dfrac{8+12}{2} = 10$

S1C7

a) Media ($\bar{x}$): $11{,}73$ Moda (M_0): 6

Mediana (M_e): 10

b)

Edades	No. de estudiantes (f_i)	Marca de clase (M_i)	$f_i \cdot M_i$	Frecuencia acumulada
$4-8$	6	6	36	6
$8-12$	7	10	70	13
$12-16$	9	14	126	22
$16-20$	8	18	144	30
Total	30		376	

Media:

$$\bar{x} = \frac{36 + 70 + 126 + 144}{30} \approx 12{,}53$$

Moda:

La clase de mayor frecuencia es $12-16$, entonces, la moda es

$$M_o = \frac{12+16}{2} = 14$$

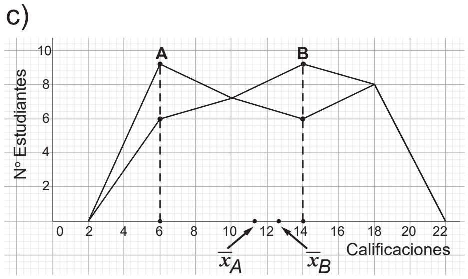
Mediana:

La posición de M_e es $\dfrac{30+1}{2} = 15{,}5,$

entonces, la mediana está en la clase de $12-16$.

La mediana es $M_e = \dfrac{12+16}{2} = 14$

c)



S2C1

E1 $2,3,4,5,5,7,7$

La posición de Q_2 es $\dfrac{7+1}{2} = 4$

$Q_1 = 3$ $\quad Q_2 = 5$ $\quad Q_3 = 7$

E2 $1,1,2,3,3,3,3,4,4,5,5$

La posición de Q_2 es $\dfrac{11+1}{2} = 6$

$Q_1 = 2$ $\quad Q_2 = 3$ $\quad Q_3 = 4$

S2C2

a) $1,2,3,3,4,4,4,5,5,6,8,8,9,9$

La posición de Q_2 es $\dfrac{14+1}{2} = 7{,}5$

$Q_1 = 3$ $\quad Q_2 = 4{,}5$ $\quad Q_3 = 8$

b) $10,11,12,13,14,14,16,16,17,17,18,$ $19,19,20,20,20$

La posición de Q_2 es $\dfrac{16+1}{2} = 8{,}5$

$Q_1 = 13{,}5$ $\quad Q_2 = 16{,}5$ $\quad Q_3 = 19$

S2C3

E1

a)

$$S^2 = \frac{(2-3)^2+(2-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2+(2-3)^2}{5-1}$$

$$= \frac{8}{4} = 2$$

b) $S = \sqrt{2} \approx 1{,}41$

c) La variabilidad:

Por encima: $3 + 1{,}41 = 4{,}41$

Por debajo: $3 - 1{,}41 = 1{,}59$

E2

a)

$$S^2 = \frac{(5-5)^2+(4-5)^2+(4-5)^2+(7-5)^2}{4-1}$$

$$= \frac{6}{3} = 2$$

b) $S = \sqrt{2} \approx 1{,}41$

c) La variabilidad:

Por encima: $5 + 1{,}41 = 6{,}41$

Por debajo: $5 - 1{,}41 = 3{,}59$

S2C4

E1

a)	Grupo A	Grupo B
S^2	3	4
S	$\sqrt{3} \approx 1{,}73$	$\sqrt{4} = 2$
$CV\left(=\dfrac{S}{\bar{x}}\right)$	$\dfrac{1{,}73}{8} \approx 0{,}22$	$\dfrac{2}{8} = 0{,}25$

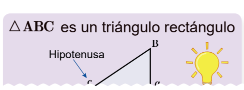
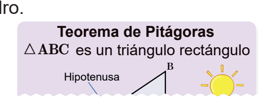
b) El grupo A tiene menos variabilidad en sus calificaciones a pesar de tener el mismo promedio que el grupo B.

E2

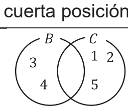
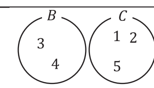
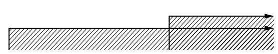
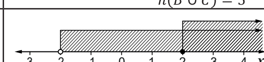
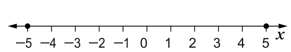
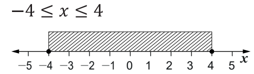
	Pulpería A	Pulpería B
$CV\left(=\dfrac{S}{\bar{x}}\right)$	$\dfrac{2}{100} = 0{,}02$	$\dfrac{4}{500} = 0{,}08$

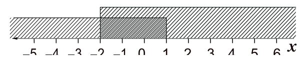
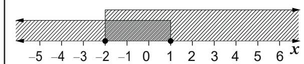
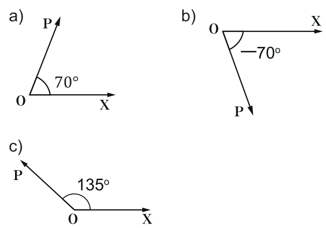
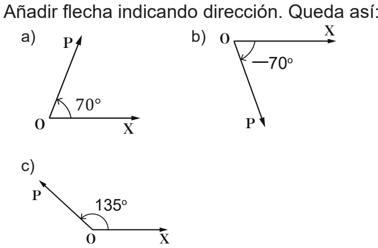
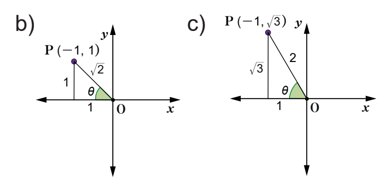
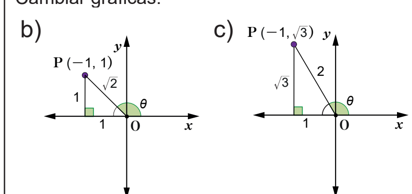
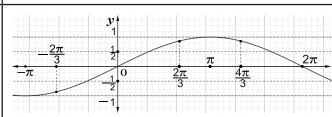
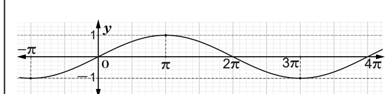
La pulpería B tiene menor variabilidad.

Diferencias del LT entre la versión para docentes y para estudiantes

No.	Página	Unidad	Sección	Contenido		Versión para docentes	Versión para estudiantes
1	15	2	1	2	Conclusión	"... que al sustituirlos por la variable cumplen la desigualdad."	Cambiar "desigualdad" por "inecuación".
2	16	2	1	3	Conclusión	"... seguimos de la forma siguiente:"	Cambiar "seguimos" por " se prosigue".
3	21	2	1	8	Conclusión	"Una inecuación simultánea es aquella formada por dos inecuaciones que tienen igual un lado."	Eliminar esta oración.
4	24	2	2	1	Definición y propiedades	Definición del valor absoluto	Cambiar "del" por "de". Queda así: "Definición de valor absoluto"
5	26	2	2	3	Problema y Ejercicio	"Resuelva las siguientes inecuaciones con valor absoluto:"	Quitar: "valor absoluto". Queda: "Resuelva las siguientes inecuaciones:"
6	30	2	3	2	Problema inciso b)	b) $y=x^2+2x$	Agregar "-3" al final de la ecuación de la función. Queda así: b) $y=x^2+2x-3$
7	36	2	3	8	Solución	"... corresponden a puntos de la parábola con $y<0$: Es... "	Quitar ":" (dos puntos) y colocar "." (punto y seguido)
8	46	3	2	7	Solución	$\frac{x^2}{3y}\cdot\frac{2x^2}{y}\div\frac{2x^3}{9y}=\frac{x^2}{3y}\cdot\frac{2x^2}{y}\cdot\frac{9y}{2x^3}$ $=\frac{\cancel{x}\cdot\cancel{x}}{\cancel{3}\cdot\cancel{y}}\cdot\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{x}\cdot x}{y\cdot y}\cdot\frac{\overset{3}{\cancel{9}}\cdot\cancel{y}}{\cancel{2}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}}$ $=\frac{3x}{y\cdot y}$ $=\boldsymbol{\frac{3x}{y^2}}$	$\frac{x^2}{3y}\cdot\frac{2x^2}{y}\div\frac{2x^3}{9y}$ $=\frac{x^2}{3y}\cdot\frac{2x^2}{y}\cdot\frac{9y}{2x^3}$ $=\frac{\cancel{x}\cdot\cancel{x}}{\cancel{3}\cdot\cancel{y}}\cdot\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{x}\cdot x}{y}\cdot\frac{\overset{3}{\cancel{9}}\cdot\cancel{y}}{\cancel{2}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}}$ $=\boldsymbol{\frac{3x}{y}}$
9	46	3	2	7	Conclusión	"... los términos de la fracción en división, luego..."	Quitar "en división", en su lugar escribir: "que divide".
10	52	3	2	5	Solución	$2ab^2=(2)\quad\cdot a\quad\cdot b\cdot b$ $3a^2=\quad(3)\cdot a\cdot a$ $m.c.m.=(2)(3)\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b$ $m.c.m.=\boldsymbol{6a^2b^2}$	Quitar paréntesis de los primeros (2) y (3) $2ab^2=\ 2\quad\cdot a\quad\cdot b\cdot b$ $3a^2=\quad 3\ \cdot a\cdot a$ $m.c.m.=(2)(3)\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b$ $m.c.m.=6a^2b^2$
11	54	3	2	7	Conclusión	"3. Se efectúa la operación indicada obtenida en el paso 2..."	Quitar: "indicada". Queda así: "3. Se efectúa la operación obtenida..."
12	55	3	2	8	Solución inciso b)	$=\frac{\boldsymbol{-2x-1}}{\boldsymbol{(x+1)(x-}}$	$=\frac{\boldsymbol{-2x-1}}{\boldsymbol{(x+1)(x-1)}}$
13	55	3	2	8	Conclusión	"3. Se efectúa la sustracción indicada obtenida en el paso 2..."	Quitar: "indicada". Queda así: "3. Se efectúa la sustracción obtenida..."
14	56	3	2	9	Conclusión	"3. Se efectúan las adiciones y sustracciones indicadas obtenidas en el paso 2..."	Quitar: "indicadas". Queda así: "3. Se efectúa las adiciones y sustracciones obtenidas..."
15	61	4	1	2	Conclusión	"La división de un polinomio ordenado entre un binomio de la forma... "	Añadir: "de forma descendente". Queda así: "La división de un polinomio ordenado de forma descendente entre un binomio de la forma..."
16	66	4	2	1	Conclusión	"... dicha variable por un número dado y se efectúan las operaciones..."	Añadir: "efectuar", en vez de "se efectúan". Queda así: "... dicha variable por un número dado y efectuar las operaciones..."
17	72	4	3	3	Solución 1	$A=0,\quad B=0\ o\ C=0$	$A=0\ o\ B=0\ o\ C=0$
18	74	4	3	3	Solución 2	"Como el cociente es x^2+2x-2 y x^3+x^2-4x+2 ..."	Quitar: "Como el" y añadir "así que". Queda así: "El cociente es x^2+2x-2 , así que..."
19	78	5	1	1	Problema (recuadro)		Añadir: "Teorema de Pitágoras" en el título del recuadro. 
20	78	5	1	1	Solución inciso a)	"Los catetos tienen longitudes de 3 cm y 4 cm, así como el $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo, así por el Teorema de Pitágoras..."	Quitar la palabra "así". Queda de la siguiente forma: "Los catetos tienen longitudes de 3 cm y 4 cm y como el $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo, por el Teorema de Pitágoras"

Anexo 3: Diferencias del LT entre la versión para docentes y para estudiantes

No.	Página	Unidad	Sección	Contenido		Versión para docentes	Versión para estudiantes
21	89	5	4	4	Ejemplo	"Dado $\mathrm{AC} = 5$ así se tiene"	Quitar la palabra "así". Queda de la siguiente forma: "Dado $\mathrm{AC} = 5$, se tiene"
22	90	5	4	1	Título de la Sección 4	Relaciones entre seno y coseno	Relaciones entre seno, coseno y tangente
23	91	5	4	2	Solución	a) $\dfrac{\text{sen } A}{\cos A}$	Cambiar de lugar la letra del inciso a) a la oración inicial. Queda así: "a) Sea un triángulo rectángulo como..."
24	91	5	4	2	Solución inciso b)	$\text{sen}^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2$ $= \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}$	Alinear verticalmente los iguales del ejercicio b). $\text{sen}^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2$ $= \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}$
25	102	6	1	7	Solución	$\theta = 180° - \measuredangle \mathrm{BOH} = 180° + 45° = 225°$	Cambiar el signo $-$ por $+$. Queda así: $\theta = 180° + \measuredangle \mathrm{BOH} = 180° + 45° = 225°$
26	105	6	2	1	Solución	"Se aplica la definición de la funciones trigonométricas se sigue que"	Añadir: "y" después de la palabra "trigonométricas". Queda así: "Se aplica la definición de las funciones trigonométricas y se sigue que"
27	116	6	4	2	Propiedades	**período 2π**	Cambiar a: **período 2π**
28	117	6	4	3	Propiedades	**período 2π**	Cambiar a: **período 2π**
29	118	6	4	4	Propiedades	**período 2π**	Cambiar a: **período 2π**
30	119	6	4	4	Propiedades	**período 2π**	Cambiar a: **período 2π**
31	121	6	4	5	Ejemplo 2	**período 4π**	Cambiar a: **período 4π**
32	126	7	1	1	Ejemplo	$b = \sqrt{6}$, $\measuredangle A = 45°$ y $\measuredangle A = 60°$	Cambiar letra del ándulo de 60 grados a B. Queda así: $b = \sqrt{6}$, $\measuredangle A = 45°$ y $\measuredangle B = 60°$
33	127	7	1	2	Ejemplo	"Dado el $\triangle \mathrm{ABC}$, con..."	Añadir: "de la figura". Queda así: "Dado el $\triangle \mathrm{ABC}$ de la figura, con..."
34	133	7	2	2	Ejemplo	"... medida del ángulo C opuesto al del lado $\overline{\mathrm{AB}}$."	Quitar: "del". Queda así: "... opuesto al del lado $\overline{\mathrm{AB}}$."
35	139	8	1	1	Ejemplo	La mediana se encuentra entre el cuarto y el quinto elemento en la sucesión de datos: 9, 10, 11, 11, 13, 13, 13, 15 que se confirma con el cálculo $\frac{8+1}{2} = \frac{9}{2} = 4,5$	Como el total de datos es 8, entonces la mediana se encuentra entre el cuarto y el quinto elemento en la sucesión de datos: 9, 10, 11, 11, 13, 13, 13, 15
36	139	8	1	2	Solución inciso c)	Como el total de datos en cada grupo es 6, entonces la posición de le mediana es $\frac{n+1}{2} = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2} = 3,5$ lo que indica que el valor buscado está entre la tercera y la cuerta posición:	Como el total de datos en cada grupo es 6, entonces la mediana se encuentra entre el tercer y el cuarto elemento de cada sucesión de datos
37	154	Solucionario, Unidad 1, sección 1, contenido 6, inciso h)				 $n(B \cup C) = 5$	 $n(B \cup C) = 5$
38	155	Solucionario, Unidad 1, sección 2, contenido 4, ejercicio 2, inciso f)					 $K \cup L = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$
39	155	Solucionario, Unidad 2, sección 1, contenido 7, inciso a)				$x > -7$	Cambiar el signo de mayor que: $>$ al de menor que: $<$.Queda así: $x < -7$
40	155	Solucionario, Unidad 2, sección 2, contenido 1, inciso l)				$-4 \leq x \leq 4$ 	$-4 \leq x \leq 4$ 
41	155	Solucionario, Unidad 2, sección 3, contenido 5, inciso f)				f) $-3 \leq x \leq 3$	f) $x \leq -3$ o $x \geq 3$
42	155	Solucionario, Unidad 2, sección 1, contenido 2				No aparece	**S1C2** a) $x > 1$ b) $x \geq 2$ c) $x > -1$ d) $x \geq -3$

<table>
<tr><th>No.</th><th>Página</th><th>Unidad</th><th>Sección</th><th>Contenido</th><th>Versión para docentes</th><th>Versión para estudiantes</th></tr>
<tr><td>43</td><td>155</td><td colspan="3">Solucionario, Unidad 1, sección 2, contenido 4, ejercicio 3, inciso f)</td><td></td><td>
$K \cap F = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$</td></tr>
<tr><td>44</td><td>156</td><td colspan="3">Solucionario, Unidad 2, sección 3, contenido 9, inciso f)</td><td>f) $x \leq -1$ o $x \geq 4$</td><td>f) $-4 \leq x \leq 1$</td></tr>
<tr><td>45</td><td>156</td><td colspan="3">Solucionario, Unidad 3, sección 2, contenido 10, inciso i)</td><td>i) $\frac{1}{4} - \frac{1}{3y}$</td><td>i) $\frac{3y-4}{12y}$</td></tr>
<tr><td>46</td><td>156</td><td colspan="3">Solucionario, Unidad 3, sección 2, contenido 10, inciso l)</td><td>l) $\frac{1}{x(x-1)}$</td><td>l) $\frac{1}{x(x-1)(x+1)}$</td></tr>
<tr><td>47</td><td>156</td><td colspan="3">Solucionario, Unidad 4, sección 2, contenido 3, inciso b)</td><td>b) Los binomios no son el factor de $\mathrm{P}(x)$.</td><td>b) Los binomios no son factores de $\mathrm{P}(x)$.</td></tr>
<tr><td>48</td><td>157</td><td colspan="3">Solucionario, Unidad 4, sección 2, contenido 4, ejercicio 2, inciso e)</td><td>e) $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$</td><td>e) $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{8}$</td></tr>
<tr><td>49</td><td>157</td><td colspan="3">Solucionario, Unidad 4, sección 2, contenido 4, ejercicio 4</td><td>El factor de $\mathrm{P}(x)$ es $x+1$ y $x-2$</td><td>$x+1$ y $x-2$ son factores de $\mathrm{P}(x)$</td></tr>
<tr><td>50</td><td>157</td><td colspan="3">Solucionario, Unidad 4, sección 3, contenido 5, ejercicio 1, inciso b)</td><td>b) $x = 0, x = 2+\sqrt{3}, \quad x = 1-\sqrt{3}$</td><td>b) $x = 0, x = 2+\sqrt{3}, \quad x = 2-\sqrt{3}$</td></tr>
<tr><td>51</td><td>157</td><td colspan="3">Solucionario, Unidad 5, sección 3, contenido 2, incisos a) y b)</td><td>a) $4m$ b) $4\sqrt{3}m$</td><td>a) $h = 4m$ b) $AB = 4\sqrt{3}\,m$</td></tr>
<tr><td>52</td><td>157</td><td colspan="3">Solucionario, Unidad 5, sección 4, contenido 4, ejercicio 4</td><td>E4 7,7136</td><td>Añadir "pies" a la respuesta. Queda así:
E4 7,7136 pies</td></tr>
<tr><td>53</td><td>157</td><td colspan="3">Solucionario, Unidad 6, sección 1, contenido 1, incisos a), b) y c)</td><td></td><td>Añadir flecha indicando dirección. Queda así:
</td></tr>
<tr><td>54</td><td>158</td><td colspan="3">Solucionario, Unidad 6, sección 1, contenido 2, incisos b) y c)</td><td></td><td>Cambiar gráficas.
</td></tr>
<tr><td>55</td><td>158</td><td colspan="3">Solucionario, Unidad 6, sección 1, contenido 9, ejercicio 2</td><td>c)
$\operatorname{sen} 315° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan 210° = \frac{1}{\sqrt{3}}$</td><td>c)
$\operatorname{sen} 315° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\cos 315° = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\tan 315° = -1$</td></tr>
<tr><td>56</td><td>159</td><td colspan="3">Solucionario, Unidad 6, sección 4, contenido 9, inciso a)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>57</td><td>159</td><td colspan="3">Solucionario, Unidad 7, sección 1, contenido 4, inciso b)</td><td>
<table>
<tr><th>Calificaciones</th><th>Número de estudiantes (f_i)</th><th>Marca de clase (M_k)</th></tr>
<tr><td>$4-8$</td><td>9</td><td>6</td></tr>
<tr><td>$8-12$</td><td>7</td><td>10</td></tr>
<tr><td>$12-16$</td><td>6</td><td>14</td></tr>
<tr><td>$16-20$</td><td>8</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>30</td><td></td></tr>
</table>
</td><td>En la columna "Marca de Clase", cambiar M_k por M_i. Queda así:
<table>
<tr><th>Calificaciones</th><th>Número de estudiantes (f_i)</th><th>Marca de clase (M_i)</th></tr>
<tr><td>$4-8$</td><td>9</td><td>6</td></tr>
<tr><td>$8-12$</td><td>7</td><td>10</td></tr>
<tr><td>$12-16$</td><td>6</td><td>14</td></tr>
<tr><td>$16-20$</td><td>8</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>30</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>