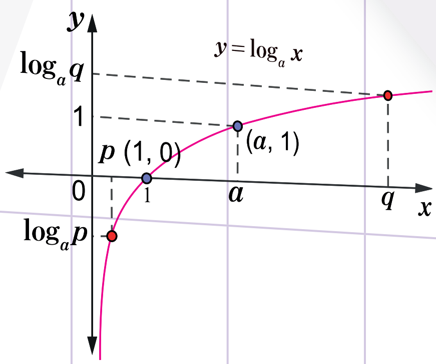
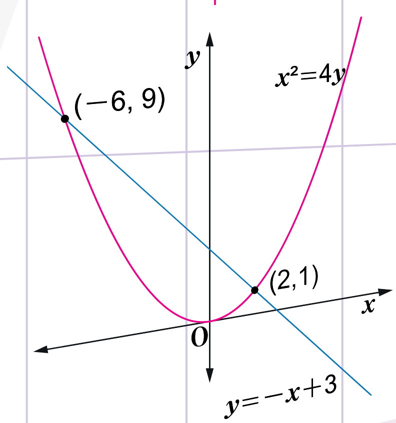
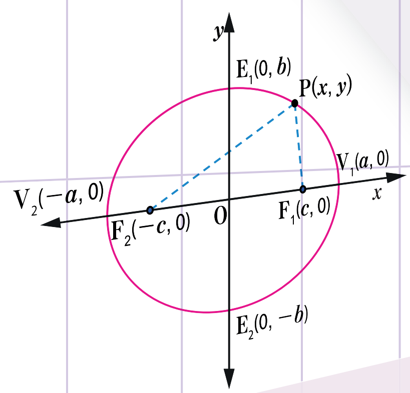
MATEMÁTICA 10

Décimo grado







Libro de Texto

Educación Secundaria

Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional
El Pueblo, Presidente!

MINED
Un Ministerio en la Comunidad

JICA

10mo

COORDINACIÓN GENERAL

Profesora María Elsa Guillén
Profesora Melba López Montenegro
Profesor Julio César Canelo Castillo

AUTORES

Domingo Felipe Aráuz Chévez
Primitivo Herrera Herrera
Marlon José Espinoza Espinoza
Anastacio Benito González Funes

REVISIÓN Y ASESORÍA TÉCNICA CIENTÍFICA

Sociedad Matemática de Nicaragua
Profesora Gloria Parrilla Rivera
Profesor Jorge Alberto Velásquez Benavidez

COLECTIVO DE AUTORES

MINED

Francisco Emilio Díaz Vega
Humberto Antonio Jarquín López
Gregorio Isabel Ortiz Hernández
Juan Carlos Caballero López
Alberto Leonardo García Acevedo

UNAN - MANAGUA

Nubia Aracelly Barreda Rodríguez
Melissa Lizbeth Velásquez Castillo
Armando José Huete Fuentes
Primitivo Herrera Herrera
Marlon José Espinoza Espinoza

UNAN - LEÓN

Anastacio Benito González Funes
Domingo Felipe Aráuz Chévez
Célfida del Rosario López Sánchez
Orlando Antonio Ruiz Álvarez
Hilario Ernesto Gallo Cajina

INSTITUTOS QUE PARTICIPARON EN LA VALIDACIÓN

Colegio Clementina Cabezas, Managua, Managua
Colegio Fernando Gordillo, Managua, Managua
Colegio Tomas Borge, Mateare, Managua
Colegio San Cayetano, San Rafael del Sur, Managua
Instituto Nacional La Salle, Diriamba, Carazo
Instituto Juan José Rodriguez, Jinotepe, Carazo
San Benito #1, Chinandega, Chinandega
Instituto Nacional Rubén Darío, Posoltega, Chinandega
Jhon F. Kenedy, León, León
Salomón de la Selva, León, León

EQUIPO DE DIAGRAMACIÓN

María José López Samqui

Primera Edición, 2019. Versión para estudiantes.

La presente publicación ha sido reproducida con el apoyo de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA) a través del Proyecto para el Aprendizaje Amigable de matemática en Educación Secundaria (NICAMATE).

PRESENTACIÓN

Estimado estudiante:

El texto que tienes en tus manos es un esfuerzo realizado en el marco del **“Proyecto para el Aprendizaje Amigable de Matemática en Educación Secundaria” (NICAMATE)**, implementado por el Ministerio de Educación en coordinación con la UNAN – MANAGUA, UNAN – LEÓN, y el apoyo técnico de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA).

La matemática es una herramienta potente en el desarrollo de cada una de nuestras vidas; nos ayuda a resolver problemas complejos con mayor facilidad, a contar con un razonamiento matemático capaz de ser crítico, analítico y práctico. En definitiva, a vivir con éxito, en un mundo cada vez más desafiante ante los cambios sociales y los avances tecnológicos.

Cada contenido de este libro, es abordado de manera que resulta fácil de comprender, y con el apoyo de tu docente lograrás adquirir conceptos y procedimientos matemáticos, necesarios para el desarrollo de conocimientos y habilidades que favorecen tu formación integral.

Tenemos la certeza que tu encuentro con estos saberes será muy satisfactorio, ya que este libro ha sido elaborado por un equipo altamente calificado que nos plantea una metodología amigable, retadora y exigente, con el propósito de que los conocimientos matemáticos te enriquezcan, sean mejor entendidos y puedan integrarse en tus quehaceres cotidianos con mayor facilidad.

Mucho ánimo ya que contamos contigo para desarrollar una mejor Nicaragua.

Atentamente,

Ministra de Educación
Miriam Soledad Raudez

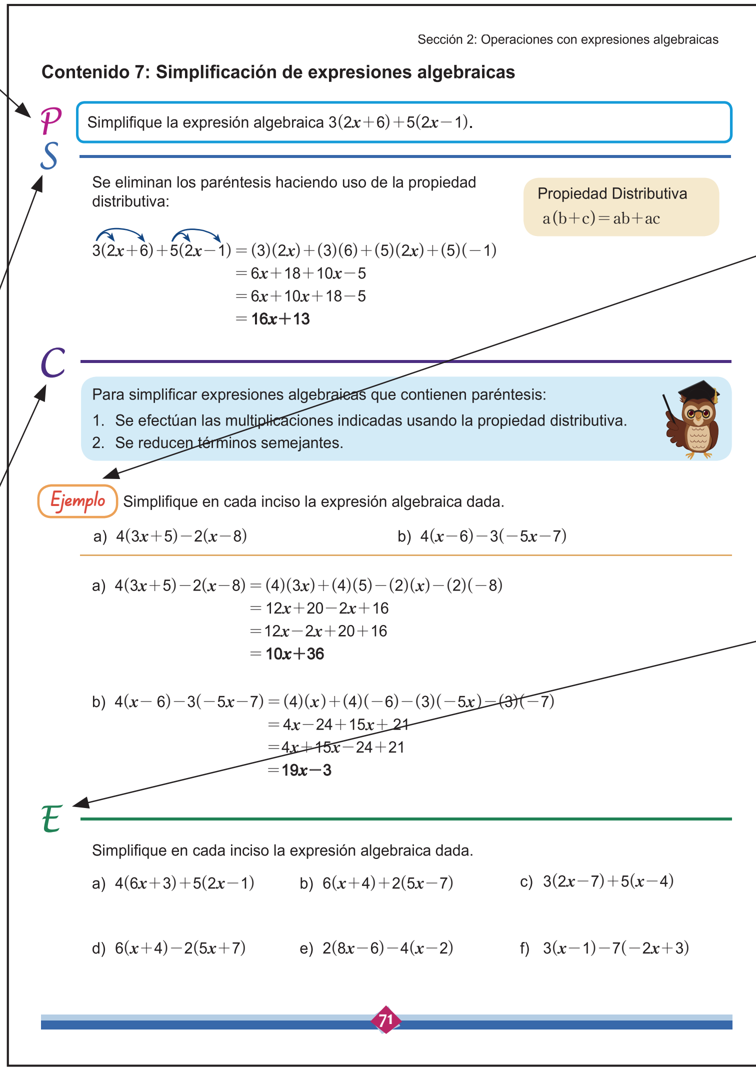
INTRODUCCIÓN

En cada página del libro de texto se presentan los momentos de una clase de 45 minutos:

P Representa el problema inicial, el cual se debe leer y analizar identificando las condiciones que plantea y lo que se pregunta.

S Representa la solución del problema inicial explicada paso a paso.

C Representa la conclusión de la clase, donde se propone el esquema de solución del problema inicial, en algunos casos también se presentan conceptos importantes usados en el problema.



Sección 2: Operaciones con expresiones algebraicas

Contenido 7: Simplificación de expresiones algebraicas

P Simplifique la expresión algebraica $3(2x+6)+5(2x-1)$.

S Se eliminan los paréntesis haciendo uso de la propiedad distributiva:

Propiedad Distributiva
$a(b+c)=ab+ac$

$$\begin{aligned}3(2x+6)+5(2x-1) &= (3)(2x)+(3)(6)+(5)(2x)+(5)(-1)\\ &= 6x+18+10x-5\\ &= 6x+10x+18-5\\ &= \mathbf{16x+13}\end{aligned}$$

C Para simplificar expresiones algebraicas que contienen paréntesis:

1. Se efectúan las multiplicaciones indicadas usando la propiedad distributiva.
2. Se reducen términos semejantes.

Ejemplo Simplifique en cada inciso la expresión algebraica dada.

a) $4(3x+5)-2(x-8)$ b) $4(x-6)-3(-5x-7)$

a) $$\begin{aligned}4(3x+5)-2(x-8) &= (4)(3x)+(4)(5)-(2)(x)-(2)(-8)\\ &= 12x+20-2x+16\\ &= 12x-2x+20+16\\ &= \mathbf{10x+36}\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}4(x-6)-3(-5x-7) &= (4)(x)+(4)(-6)-(3)(-5x)-(3)(-7)\\ &= 4x-24+15x+21\\ &= 4x+15x-24+21\\ &= \mathbf{19x-3}\end{aligned}$$

E Simplifique en cada inciso la expresión algebraica dada.

a) $4(6x+3)+5(2x-1)$ b) $6(x+4)+2(5x-7)$ c) $3(2x-7)+5(x-4)$

d) $6(x+4)-2(5x+7)$ e) $2(8x-6)-4(x-2)$ f) $3(x-1)-7(-2x+3)$

71

Ejemplo Los ejemplos que se presentan son variantes del problema inicial.

E Representa los ejercicios propuestos, es importante que intenten resolver los ejercicios por ustedes mismos.

En **Comprobemos lo aprendido** se presentan una serie de ejercicios representativos de contenidos anteriores, el objetivo de estas clases es asegurar un tiempo de ejercitación que permita afianzar los conocimientos adquiridos y aclarar cualquier duda que puedan tener de los contenidos estudiados.

En ***Desafío*** se presentan casos especiales o contenidos de mayor complejidad.

Al final de este libro se anexan las pruebas para la evaluación formativa de cada unidad. Al finalizar cada unidad busque la prueba correspondiente, lea cuidadosamente los ejercicios y resuélvalos ordenadamente en su cuaderno **sin rayar el libro de texto**. El docente ha de constatar la aplicación de esta evaluación formativa.

Índice

Unidad 1: Conjuntos e Intervalos Numéricos

Sección 1: Conjuntos **2**

Sección 2: Intervalos numéricos **8**

Unidad 2: Inecuaciones de Primer y Segundo Grado

Sección 1: Inecuaciones de primer grado **14**

Sección 2: Inecuaciones de primer grado con valor absoluto **24**

Sección 3: Inecuaciones de segundo grado **29**

Unidad 3: Fracciones Algebraicas

Sección 1: Simplificación, multiplicación y división de fracciones algebraicas **40**

Sección 2: Adición y sustracción de fracciones algebraicas **48**

Unidad 4: Ecuaciones de Tercer Grado

Sección 1: División sintética **60**

Sección 2: Teorema del residuo y teorema del factor **66**

Sección 3: Factorización de polinomios de tercer grado y resolución de ecuaciones de tercer grado **70**

Unidad 5: Introducción a la Trigonometría

Sección 1: Funciones trigonométricas de ángulos agudos en triángulos rectángulos **78**

Sección 2: Valores de las funciones trigonométricas de ángulos agudos **84**

Sección 3: Resolución de triángulos rectángulos **86**

Sección 4: Relaciones entre seno, coseno y tangente **90**

Unidad 6: Funciones Trigonométricas

Sección 1: Funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera **96**

Sección 2: Relación entre seno, coseno y tangente **105**

Sección 3: Relación entre las funciones trigonométricas **109**

Sección 4: Gráficas de las funciones trigonométricas **115**

Unidad 7: Trigonometría Analítica

Sección 1: Ley del seno **126**

Sección 2: Ley del coseno **132**

Unidad 8: Estadística

Sección 1: Medidas de tendencia central y representación gráfica de datos **138**

Sección 2: Medidas de posición y dispersión **150**

Solucionario **154**

Pruebas de cada unidad **161**

Unidad 1

Conjuntos e Intervalos Numéricos

Sección 1 Conjuntos

Sección 2 Intervalos numéricos

Sección 1: Conjuntos

Contenido 1: Conjunto, elemento, notación por extensión, pertenencia, cardinalidad de conjunto

Conceptos y notación

Conjunto es la colección de objetos con un determinado criterio de pertenencia.

Ejemplo: el conjunto de números naturales, el conjunto de libros de una biblioteca, el conjunto de lagos de Nicaragua, etc.

Los conjuntos se denotan por las letras mayúsculas A, B, C, etc.

Elemento de un conjunto es un objeto que se encuentra en el conjunto.

Notación por extensión. Para denotar el conjunto A, luego de la letra se escriben llaves que contienen cada elemento del conjunto, separados por coma. Ejemplo: si se quiere describir el conjunto de vocales, se escribe $\mathrm{B}=\{a, e, i, o, u\}$.

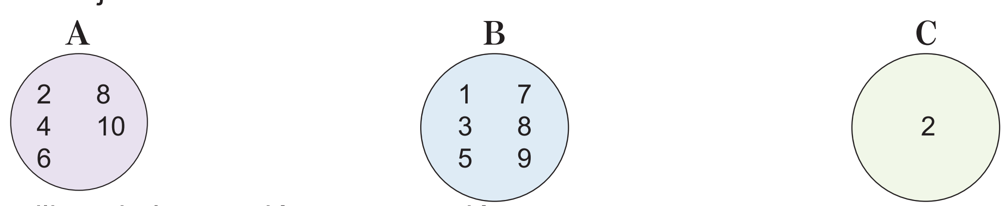
La pertenencia de un elemento respecto a un conjunto se expresa con el símbolo $\in$. Si un elemento no pertenece a un conjunto, se usa el símbolo $\notin$. Por ejemplo, si $\mathrm{A}=\{1,2,3,4\}$, entonces $1\in\mathrm{A}$ y $6\notin\mathrm{A}$.

La cardinalidad del conjunto A, denotada por $n(\mathrm{A})$, es la cantidad de elementos que posee.

Ejemplo: El conjunto $\mathrm{B}=\{a, e, i, o, u\}$ tiene 5 elementos; así que $n(\mathrm{B})=5$.

Ejemplo

Dados los conjuntos:



1. Escríbalos utilizando la notación por extensión.
2. Escriba el símbolo de pertenencia $\in$ o no pertenencia $\notin$ en el espacio en blanco.
   a) 4___A b) 5___B c) 2___C d) 3___C
3. Encuentre la cardinalidad de cada uno.

---

1. $\mathrm{A}=\{2,4,6,8,10\}$ $\mathrm{B}=\{1,3,5,7,8,9\}$ $\mathrm{C}=\{2\}$
2. a) $4 \in \mathrm{A}$ b) $5 \in \mathrm{B}$ c) $2 \in \mathrm{C}$ d) $3 \notin \mathrm{C}$
3. $n(\mathrm{A}) = 5$ El conjunto A posee 5 elementos.
   $n(\mathrm{B}) = 6$ El conjunto B posee 6 elementos.
   $n(\mathrm{C}) = 1$ El conjunto C posee 1 elemento.

E

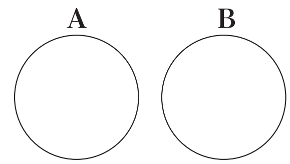
Dado los conjuntos $\mathrm{A}=\{-2, -1, 0, 2, 3\}$ $\mathrm{B}=\{-1, 2, 3\}$ y $\mathrm{C}=\{-2, 0, 3, 4\}$

1. Escriba el símbolo $\in$ o $\notin$ en cada espacio en blanco según convenga.
   a) 3 _____ A b) 5 _____ B c) -2 _____ B d) 4 _____ C
   e) 0 _____ A f) -1_____ B g) 2 _____ B h) 2 _____ C
2. Encuentre la cardinalidad de cada conjunto dado.
   a) $n(\mathrm{A})$ b) $n(\mathrm{B})$ c) $n(\mathrm{C})$

Contenido 2: Diagrama de Venn, operaciones con conjuntos (unión e intersección), conjunto vacío

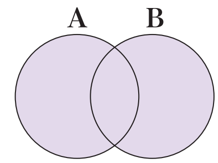
Conceptos

Diagrama de Venn: Es una representación gráfica de conjuntos y sus operaciones mediante círculos, en cuyos interiores se escriben los elementos.

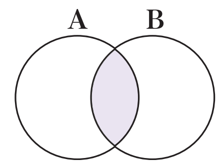


Operaciones con conjuntos:

- **Unión de conjuntos:** La unión de los conjuntos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, denotada por $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$, es el conjunto formado con los elementos de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, escribiendo una única vez los comunes.



- **Intersección de conjuntos:** La intersección de los conjuntos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, denotada por $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$, es el conjunto formado por los elementos comunes de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.



Conjunto vacío: Es aquel que no posee elementos y se denota por ϕ o $\{\ \}$.
Por ejemplo, el conjunto $\mathbf{A}$ formado por las letras del alfabeto que son vocales y consonantes a la vez es vacío porque ninguna letra cumple esta condición, luego $n(\mathbf{A}) = 0$.

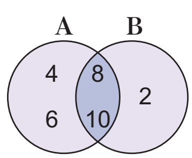
Ejemplo

Sean los conjuntos $\mathbf{A} = \{4, 6, 8, 10\}$, $\mathbf{B} = \{2, 8, 10\}$, $\mathbf{C} = \{4, 6, 12\}$,

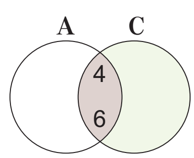
1. Encuentre: a) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ b) $\mathbf{A} \cap \mathbf{C}$ c) $\mathbf{B} \cup \mathbf{C}$ d) $\mathbf{B} \cap \mathbf{C}$
2. Represente en diagrama de Venn los conjuntos que resultan en 1., y encuentre sus cardinalidades.

---

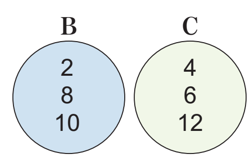
a) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ b) $\mathbf{A} \cap \mathbf{C} = \{4, 6\}$ c) $\mathbf{B} \cup \mathbf{C} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ d) $\mathbf{B} \cap \mathbf{C} = \phi$



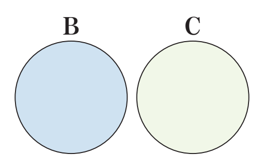
$n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = 5$



$n(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) = 2$



$n(\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = 6$



$n(\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = 0$

E

Sean los conjuntos $\mathbf{A} = \{-1, 0, 2, 3\}$, $\mathbf{B} = \{-2, 0, 3\}$, $\mathbf{C} = \{-1, 1, 2\}$, $\mathbf{D} = \{-2, 1, 2\}$

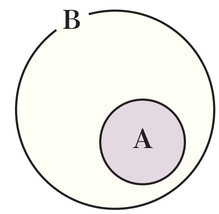
1. Encuentre: a) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ b) $\mathbf{A} \cap \mathbf{D}$ c) $\mathbf{A} \cup \mathbf{C}$ d) $\mathbf{B} \cap \mathbf{C}$
2. Represente en diagramas de Venn los conjuntos que resultan en 1., además encuentre sus cardinalidades.

Contenido 3: Conjunto Universal. Relaciones entre conjuntos (inclusión e igualdad)

Conceptos

Conjunto Universal: es el conjunto de todos los elementos que están siendo considerados en una situación en particular y se representa por $\mathbf{U}$.

Subconjunto: El conjunto $\mathbf{A}$ es subconjunto del conjunto $\mathbf{B}$ si todo elemento de $\mathbf{A}$ es también elemento de $\mathbf{B}$. Esta relación entre $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se escribe $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ y se lee "$\mathbf{A}$ es subconjunto de $\mathbf{B}$".



En el caso de que algún elemento de $\mathbf{A}$ no esté en $\mathbf{B}$, se dice que $\mathbf{A}$ no es subconjunto de $\mathbf{B}$, se escribe $\mathbf{A} \not\subset \mathbf{B}$.

Igualdad de conjuntos: Dos conjuntos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son iguales si tienen los mismos elementos, se denota por $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ y se lee "El conjunto $\mathbf{A}$ es igual al conjunto $\mathbf{B}$".

Ejemplo

Dados los conjuntos:

$\mathbf{U} = \{1, 4, 9, 16, 25\}$, $\mathbf{A} = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2\}$, $\mathbf{B} = \{1, 4, 9, 16\}$, $\mathbf{C} = \{4, 16\}$,

escriba uno de los símbolos $\subset$, $\not\subset$ o $=$, en el espacio en blanco, dé el significado de la expresión resultante y justifique su veracidad con un ejemplo.

a) $\mathbf{C}$ ___ $\mathbf{B}$ b) $\mathbf{A}$ ___ $\mathbf{C}$ c) $\mathbf{B}$ ___ $\mathbf{A}$ d) $\mathbf{C}$ ___ $\mathbf{U}$

---

a) $\mathbf{C} \subset \mathbf{B}$	Todos los elementos de $\mathbf{C}$ están en $\mathbf{B}$, 4 y 16 pertenecen a $\mathbf{B}$.
b) $\mathbf{A} \not\subset \mathbf{C}$	Algunos elementos de $\mathbf{A}$ no están en $\mathbf{C}$, por ejemplo $3^2 \notin \mathbf{C}$.
c) $\mathbf{B} = \mathbf{A}$	Los elementos de $\mathbf{B}$ son los mismos de $\mathbf{A}$.
d) $\mathbf{C} \subset \mathbf{U}$	Todos los elementos de $\mathbf{C}$ están en $\mathbf{U}$, por ser $\mathbf{U}$ el conjunto universal.

E

Dados los conjuntos: $\mathbf{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $\mathbf{A} = \{1, 3, 7\}$, $\mathbf{B} = \{1, 4\}$, $\mathbf{C} = \{1^2, 2^2\}$, escriba uno de los símbolos $\subset$, $\not\subset$ o $=$ en el espacio en blanco.

a) $\mathbf{C}$ _____ $\mathbf{A}$ b) $\mathbf{A}$ _____ $\mathbf{B}$ c) $\mathbf{B}$ _____ $\mathbf{A}$

d) $\mathbf{C}$ _____ $\mathbf{U}$ e) $\mathbf{C}$ _____ $\mathbf{C}$ f) $\mathbf{U}$ _____ $\mathbf{A}$

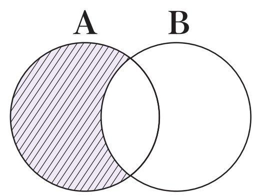
g) $\mathbf{B}$ _____ $\mathbf{U}$ h) $\mathbf{C}$ _____ $\mathbf{B}$

Contenido 4: Operaciones con conjuntos (diferencia y complemento)

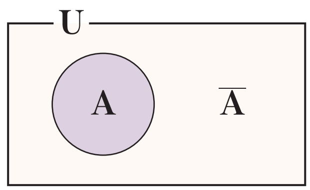
Conceptos

Operaciones con conjuntos:

- **Diferencia de conjuntos:** La diferencia $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ entre dos conjuntos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ es el conjunto formado por los elementos que están en $\mathbf{A}$ y no están en $\mathbf{B}$. La expresión $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ se lee "$\mathbf{A}$ menos $\mathbf{B}$".



- **Complemento de un conjunto:** El complemento de un conjunto $\mathbf{A}$ es otro conjunto formado por todos los elementos del conjunto universal que no pertenecen a $\mathbf{A}$; se denota por $\overline{\mathbf{A}}$ y se lee "complemento de $\mathbf{A}$".



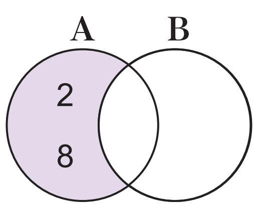
En el diagrama de Venn se considera el rectángulo como el conjunto universal ($\mathbf{U}$).

Ejemplo Sean los conjuntos $\mathbf{U} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $\mathbf{A} = \{2, 8, 10\}$, $\mathbf{B} = \{6, 10\}$,

1. Encuentre: a) $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ b) $\overline{\mathbf{A}}$
2. Represente en diagrama de Venn los conjuntos que resultan en 1. y encuentre su cardinalidad.

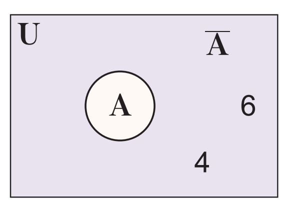
---

1. a) $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \{2, 8\}$ b) $\overline{\mathbf{A}} = \{4, 6\}$
2.



2 y 8 están en $\mathbf{A}$, pero no en $\mathbf{B}$

$n(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = 2$



4 y 6 son elementos de $\mathbf{U}$ que no están en $\mathbf{A}$

$n(\overline{\mathbf{A}}) = 2$

E

Sean los conjuntos $\mathbf{U} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $\mathbf{A} = \{-2, 0\}$, $\mathbf{B} = \{-1, 0, 1, 2\}$, $\mathbf{C} = \{-2, 1, 2\}$

1. Encuentre:
   a) $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ b) $\overline{\mathbf{A}}$ c) $\mathbf{A} - \mathbf{C}$ d) $\mathbf{B} - \mathbf{C}$ e) $\overline{\mathbf{C}}$
2. Represente en diagrama de Venn los conjuntos que resultan en 1. y encuentre su cardinalidad.

Contenido 5: Conjunto (notación por comprensión)

Conceptos

Notación de conjuntos:

- **Notación por comprensión:** Para expresar un conjunto por comprensión se escribe una letra mayúscula del alfabeto, el signo igual y las llaves $\{\ \}$, y dentro de estas una expresión que condiciona la pertenencia de los elementos.

  Ejemplo: $\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 5\}$

  Se lee: "El conjunto A lo conforman las x que son números naturales mayores o iguales a 1, pero menores o iguales a 5".

Conjuntos numéricos:

Naturales: $\mathbb{N}$ Enteros: $\mathbb{Z}$

Racionales: $\mathbb{Q}$ Reales: $\mathbb{R}$

Ejemplo Describa los siguientes conjuntos por comprensión a extensión:

a) $\mathrm{B} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ impar}, 1 < x \leq 9\}$

b) $\mathrm{C} = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < 2\}$

a) Contiene los números naturales impares mayores que 1 y menores o iguales que 9.

Extensión: $\mathrm{B} = \{3, 5, 7, 9\}$

b) Contiene números enteros mayores o iguales que -3 y menores que 2.

Extensión: $\mathrm{C} = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$

E

Describa los siguientes conjuntos de notación por comprensión a extensión:

a) $\mathrm{C} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ par}, 2 \leq x < 6\}$

b) $\mathrm{D} = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < 0\}$

c) $\mathrm{F} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ impar}, 2 < x < 6\}$

Contenido 6: Comprobemos lo aprendido 1

Dados $\mathbf{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathbf{A} = \{1, 3, 4\}$, $\mathbf{B} = \{3, 4\}$, $\mathbf{C} = \{1, 2, 5\}$

1. Encuentre:

   a) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ b) $\mathbf{B} - \mathbf{C}$ c) $\overline{\mathbf{A}}$ d) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$

   e) $\mathbf{B} \cap \mathbf{C}$ f) $\mathbf{C} - \mathbf{A}$ g) $\overline{\mathbf{B}}$ h) $\mathbf{B} \cup \mathbf{C}$

2. Utilice diagramas de Venn para ilustrar lo pedido en 1.

3. Calcule la cardinalidad de los conjuntos resultantes en 1.

4. Dados los conjuntos $\mathbf{A} = \{1, 3, 4\}$, $\mathbf{B} = \{3, 4\}$, $\mathbf{C} = \{1, 2, 5\}$, escriba en cada espacio en blanco el símbolo $\in$, $\notin$, $\subset$ o $\not\subset$ que dé una expresión verdadera.

   a) 6 ______ $\mathbf{A}$

   b) $\mathbf{A}$ ______ $\mathbf{C}$

   c) 4 ______ $\mathbf{B}$

   d) $\mathbf{B}$ ______ $\mathbf{A}$

5. Exprese el conjunto $\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < x \leq 10\}$ por extensión.

Sección 2: Intervalos numéricos

Contenido 1: Intervalos numéricos en la recta numérica

Conceptos

Un intervalo puede describirse como un conjunto cuyos elementos satisfacen una desigualdad. Por ejemplo, el conjunto

$$\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$$

es el intervalo formado por todos los números reales que son mayores que 1, el cual es el extremo del intervalo, mientras que

$$\mathrm{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

indica que los elementos de B están comprendidos entre 0 y 1, incluyendo a estos, que son los extremos del intervalo.

○ Vacío: $<$ o $>$

● Sombreado: $\leq$ o $\geq$

Ejemplo

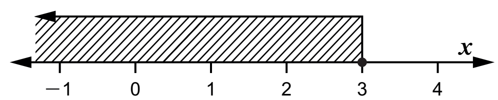
1. Ubique los intervalos siguientes en la recta numérica.

a) $\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

$x > 2$ significa que se sitúan todos los números mayores que 2

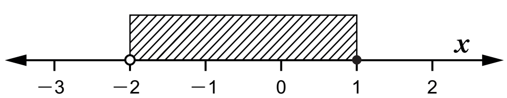
b) $\mathrm{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$

$x \leq 3$ indica ubicar todos los números menores o iguales que 3



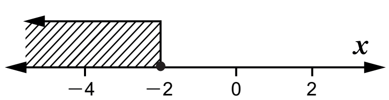
c) $\mathrm{C} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 1\}$

Todos los números mayores que -2 y menores o iguales a 1.



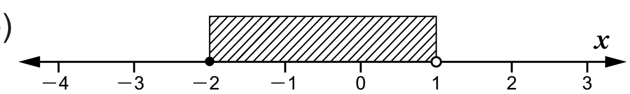
2. De acuerdo con las siguientes gráficas, exprese los intervalos numéricos que se presentan como conjuntos A y B descritos por comprensión.

a)



$\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\}$

b)



$\mathrm{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 1\}$

E

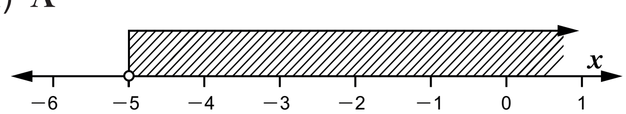
1. Ubique los intervalos siguientes en la recta numérica:

a) $\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$ b) $\mathrm{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3\}$ c) $\mathrm{C} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 4\}$

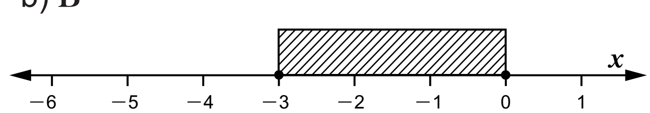
d) $\mathrm{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x < 3\}$ e) $\mathrm{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$

2. De acuerdo con las siguientes gráficas, exprese los intervalos que se presentan como conjuntos A y B descritos por comprensión:

a) A



b) B



Contenido 2: Unión de intervalos numéricos

P

Grafique en una recta los pares de intervalos dados en cada inciso y encuentre su unión.

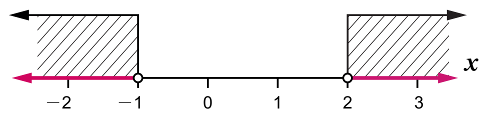
a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$

b) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$

c) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$, $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$

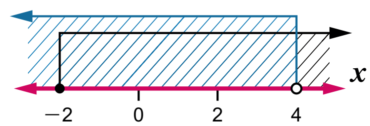
S

a) Habiendo ubicado los dos intervalos, se observa que no tienen elementos en común, así que $A \cup B$ es la reunión de todos los elementos menores que -1 con todos los mayores que 2:



$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \text{ o } x < -1\}.$$

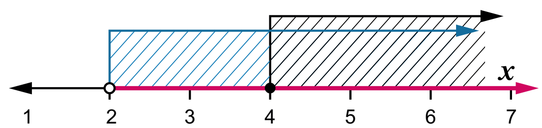
b) Se observa que los dos intervalos se extienden indefinidamente, uno hacia la izquierda y el otro hacia la derecha, compartiendo elementos. Entonces queda cubierta toda la recta, es decir



$$C \cup D = \mathbb{R}.$$

c) En la gráfica puede verse que E contiene completamente a F, lo cual lleva a concluir que

$$E \cup F = E = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}.$$



C

La unión de dos intervalos A y B es un conjunto que se obtiene de acuerdo con las siguientes condiciones:

- Si los intervalos no tienen elementos comunes, $A \cup B$ es la reunión de los elementos de ambos conjuntos A y B.
- Si los dos intervalos se extienden indefinidamente en ambos sentidos y tienen elementos comunes, entonces $A \cup B$ es toda la recta numérica.
- Si uno de los intervalos contiene al otro, entonces la unión de ambos es el primer intervalo.

E

Grafique en una recta los pares de intervalos dados en cada inciso y encuentre su unión.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

b) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$

d) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$, $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

Contenido 3: Intersección de intervalos numéricos

P

Grafique en una recta los pares de intervalos dados en cada inciso y encuentre su intersección.

a) $A=\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$, $B=\{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$

b) $C=\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$, $D=\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

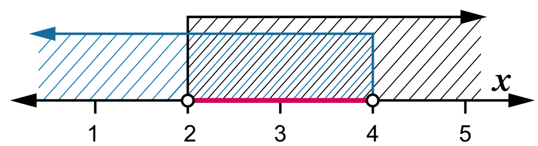
c) $E=\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$, $F=\{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

S

a) $A=\{x \in \mathbb{R}, x > 2\}$, $B=\{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$

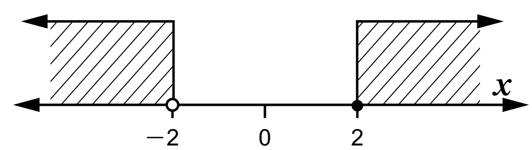
$A \cap B=\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$

La intersección de ambos intervalos está formada por los números repetidos en ambos.



b) $C=\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$, $D=\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

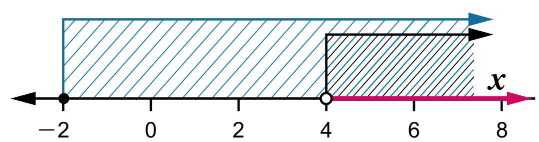
$C \cap D=\phi$



Los intervalos C y D no tienen elementos comunes.

c) $E=\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$, $F=\{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

$E \cap F=\{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$



Se observa que los elementos comunes inician a la derecha de 4, luego $E \cap F = F = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$.

C

La intersección de intervalos numéricos A y B, es un conjunto que se obtiene de acuerdo con las siguientes condiciones:

- Si los dos intervalos tienen elementos comunes, entonces $A \cap B$ está formado por esos elementos que se repiten en A y B.
- Si los dos intervalos no tienen elementos comunes, $A \cap B$ es el conjunto vacío.
- Si uno de los intervalos contiene al otro, entonces $A \cap B$ coincide con el segundo.

E

Grafique en una recta los pares de intervalos dados en cada inciso y encuentre su intersección:

a) $A=\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$, $B=\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$

b) $C=\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$, $D=\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

c) $E=\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}$, $F=\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$

d) $A=\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}$, $B=\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$

e) $C=\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\}$, $D=\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

f) $E=\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}$, $F=\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

Contenido 4: Comprobemos lo aprendido 2

1. Grafique los intervalos numéricos en la recta.

   a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

   b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$

   c) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 3\}$

   d) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$

   e) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$

   f) $H = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 0\}$

2. Grafique los pares de intervalos numéricos dados en cada inciso y encuentre su unión.

   a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

   b) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$

   c) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$, $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

   d) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$, $H = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$

   e) $I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\}$, $J = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

   f) $K = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$, $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

3. Grafique los pares de intervalos numéricos dados en cada inciso y encuentre su intersección.

a) $\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$, $\mathbf{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

b) $\mathbf{C} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$, $\mathbf{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$

c) $\mathbf{E} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$, $\mathbf{F} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

d) $\mathbf{G} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$, $\mathbf{H} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$

e) $\mathbf{I} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$, $\mathbf{J} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

f) $\mathbf{K} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$, $\mathbf{F} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$

Unidad 2

Inecuaciones de Primer y Segundo Grado

Sección 1 Inecuaciones de primer grado

Sección 2 Inecuaciones de primer grado con valor absoluto

Sección 3 Inecuaciones de segundo grado

Sección 1: Inecuaciones de primer grado

Contenido 1: Propiedades de las inecuaciones

Definición

Inecuación: Una inecuación es una desigualdad en la que se presenta al menos una variable.

Ejemplo de inecuaciones: $x > 2$, $3x + 1 > 0$.

Propiedades de las inecuaciones:

Si $A > B$, entonces

1. $A + C > B + C$
2. $A - C > B - C$
3. Con $C > 0$; entonces $AC > BC$, $\frac{A}{C} > \frac{B}{C}$
4. Con $C < 0$; entonces $AC < BC$, $\frac{A}{C} < \frac{B}{C}$

Ejemplo 1 Escriba el signo $>$ o $<$ en el recuadro, sabiendo que $6 > 4$.

a) $6+2 \;\square\; 4+2$ b) $6-2 \;\square\; 4-2$ c) $(6)(2) \;\square\; (4)(2)$

d) $(6)(-2) \;\square\; (4)(-2)$ e) $\frac{6}{2} \;\square\; \frac{4}{2}$ f) $\frac{6}{-2} \;\square\; \frac{4}{-2}$

---

a) $6+2 > 4+2$ Se aplica la propiedad 1. b) $6-2 > 4-2$ Se aplica la propiedad 2.

c) $(6)(2) > (4)(2)$ Se aplica la propiedad 3. d) $(6)(-2) < (4)(-2)$ Se aplica la propiedad 4.

e) $\frac{6}{2} > \frac{4}{2}$ Se aplica la propiedad 3. f) $\frac{6}{-2} < \frac{4}{-2}$ Se aplica la propiedad 4.

Ejemplo 2 Escriba el signo $>$ o $<$ en el recuadro, sabiendo que $a > b$.

a) $a+5 \;\square\; b+5$ b) $a-3 \;\square\; b-3$ c) $3a \;\square\; 3b$ d) $\frac{a}{-5} \;\square\; \frac{b}{-5}$

---

a) $a+5 > b+5$ Se aplica la propiedad 1. b) $a-3 > b-3$ Se aplica la propiedad 2.

c) $3a > 3b$ Se aplica la propiedad 3. d) $\frac{a}{-5} < \frac{b}{-5}$ Se aplica la propiedad 4.

E

Escriba el signo $>$ o $<$ en el recuadro, sabiendo que $a > b$.

a) $a+3 \;\square\; b+3$ b) $a-1 \;\square\; b-1$ c) $2a \;\square\; 2b$

d) $-2b \;\square\; -2a$ e) $\frac{a}{-2} \;\square\; \frac{b}{-2}$ f) $b-4 \;\square\; a-4$

g) $-2a \;\square\; -2b$ h) $\frac{b}{3} \;\square\; \frac{a}{3}$

Contenido 2: Inecuaciones de primer grado de la forma $x+b>c$, $x+b\geq c$

P

Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado:

a) $x-3>5$

b) $x+3\geq5$

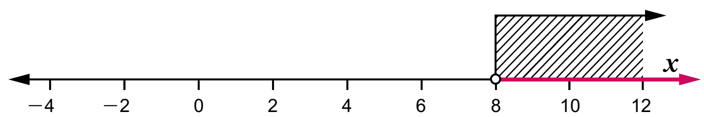
Solución de una inecuación es un número real que la hace verdadera al sustituir la variable por dicho número.

S

a) $x-3>5$

$x-3+3>5+3$ Se aplica la propiedad 1

$\boldsymbol{x>8}$

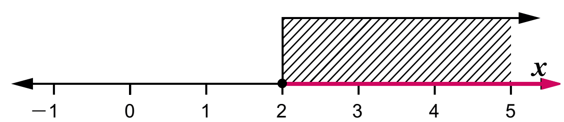


El conjunto de soluciones está representado gráficamente a la derecha.

b) $x+3\geq5$

$x+3-3\geq5-3$ Se aplica la propiedad 2

$\boldsymbol{x\geq2}$



El conjunto de soluciones está representado gráficamente a la derecha.

C

Para resolver inecuaciones de primer grado de la forma $x+b>c$, $x+b\geq c$, se procede de la manera siguiente:

1. Se aplica la propiedad 1 o la propiedad 2 de las inecuaciones para aislar la variable x o se transpone el número b al lado derecho. El conjunto de soluciones está formado por todos los números reales que al sustituirlos por la variable cumplen la inecuación.
2. Se ubica el conjunto de soluciones en la recta numérica.

Ejemplo Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado: a) $x-3>5$ b) $x+3\geq5$

a) $x-3>5$

$x>5+3$ Se transpone el -3 al lado derecho

$\boldsymbol{x>8}$

b) $x+3\geq5$

$x\geq5-3$ Se transpone el 3 al lado derecho

$\boldsymbol{x\geq2}$

E

Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado:

a) $x+5>6$

b) $x+1\geq3$

c) $x-2>-3$

d) $x+4\geq1$

Contenido 3: Inecuaciones de primer grado de la forma $x+b<c$, $x+b\leq c$

P

Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado:

a) $x-3<2$

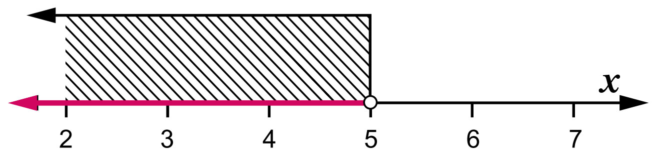
b) $x+1\leq 2$

S

a) $x-3<2$

$x<2+3$ Se transpone el -3 al lado derecho de la inecuación

$\boldsymbol{x<5}$

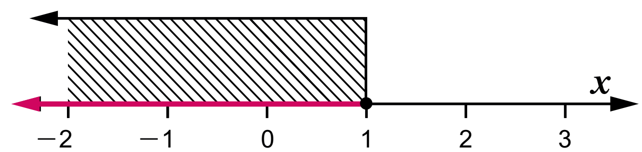


El conjunto de soluciones está representado gráficamente a la derecha.

b) $x+1\leq 2$

$x\leq 2-1$ Se transpone 1 al lado derecho

$\boldsymbol{x\leq 1}$



El conjunto de soluciones está representado gráficamente a la derecha.

C

Para resolver inecuaciones de primer grado de la forma $x+b<c$, $x+b\leq c$, se procede de la forma siguiente:

1. Se transpone el número b a la derecha y se efectúa la operación indicada.
2. Se ubica en la recta el intervalo que contiene las soluciones de la inecuación.

E

Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado:

a) $x+4<8$

b) $x-2\leq -3$

c) $x-3<3$

d) $x-3\leq -3$

Contenido 4: Inecuaciones de primer grado de la forma $ax > c$, $ax < c$, $ax \geq c$, $ax \leq c$ con $a > 0$

P

Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado:

a) $2x > 4$

b) $3x \leq -6$

Recuerde la propiedad 3:
Si $A > B$ con $C > 0$, entonces

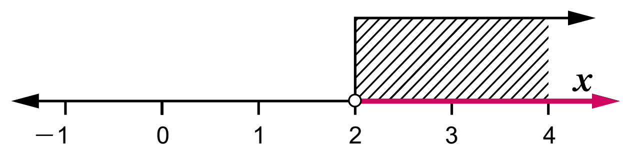
$$AC > BC, \ \frac{A}{C} > \frac{B}{C}$$

S

a) $2x > 4$

$\frac{2}{2}x > \frac{4}{2}$ Se aplica la propiedad 3

$x > 2$

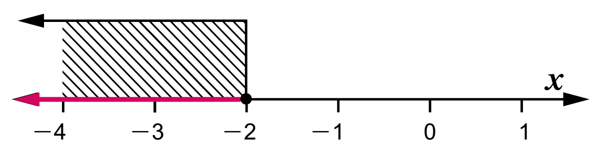


El conjunto de soluciones está representado gráficamente a la derecha.

b) $3x \leq -6$

$\frac{3}{3}x \leq \frac{-6}{3}$ Se aplica la propiedad 3

$x \leq -2$



El conjunto de soluciones está representado gráficamente a la derecha.

C

Para resolver inecuaciones de primer grado de la forma $ax > c$, $ax < c$, $ax \geq c$, $ax \leq c$, con $a > 0$ se procede de la forma siguiente:

1. Se aplica la propiedad 3 para dejar aislada la variable x en el lado izquierdo.
2. Se grafica en la recta numérica el intervalo de las soluciones de la inecuación dada.

E

Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado:

a) $2x > 10$

b) $3x < 3$

c) $2x \geq 12$

d) $5x \leq -10$

Contenido 5: Inecuaciones de primer grado de la forma $ax > c$, $ax < c$, $ax \geq c$, $ax \leq c$ con $a < 0$

P

Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado:

a) $-2x > 4$

b) $-x \leq -3$

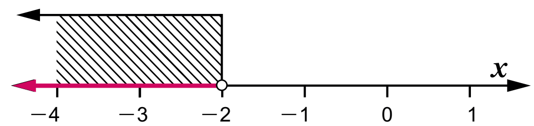
Recuerde la propiedad 4:
Si $A > B$ con $C < 0$, entonces $AC < BC$, $\frac{A}{C} < \frac{B}{C}$

S

a) $-2x > 4$

$\frac{-2}{-2}x < \frac{4}{-2}$ Se aplica la propiedad 4 de las inecuaciones

$x < -2$

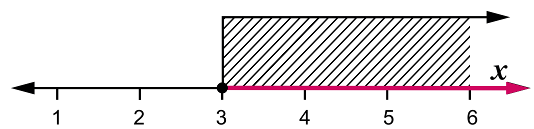


El conjunto de soluciones está representado gráficamente a la derecha.

b) $-x \leq -3$

$\frac{-1}{-1}x \geq \frac{-3}{-1}$ Se aplica la propiedad 4 de las inecuaciones

$x \geq 3$



El conjunto de soluciones está representado gráficamente a la derecha.

C

Para resolver inecuaciones de primer grado de la forma $ax > c$, $ax < c$, $ax \geq c$, $ax \leq c$, con $a < 0$:

1. Se aplica la propiedad 4 para dejar aislada la variable x en el lado izquierdo.
2. Se grafica en la recta numérica el intervalo de las soluciones de la inecuación.

E

Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado:

a) $-2x > 2$

b) $-x < 3$

c) $-4x \geq 4$

d) $-2x \leq 10$

Contenido 6: Inecuaciones de primer grado de la forma $ax+b>c$, $ax+b<c$, $ax+b\geq c$, $ax+b\leq c$ con $a>0$

P

Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado:

a) $2x+2>4$ b) $2x-4\leq -8$

S

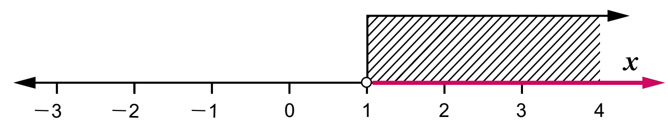
a) $2x+2>4$

$2x>4-2$ Se transpone 2

$2x>2$

$\frac{2}{2}x>\frac{2}{2}$ Se aplica la propiedad 3

$x>1$



El conjunto de soluciones está representado gráficamente a la derecha.

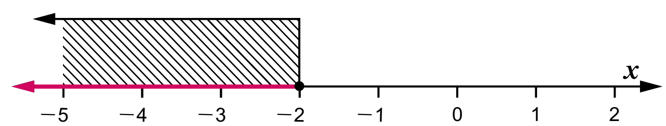
b) $2x-4\leq -8$

$2x\leq -8+4$ Se transpone -4

$2x\leq -4$

$\frac{2}{2}x\leq \frac{-4}{2}$ Se aplica la propiedad 3

$x\leq -2$



El conjunto de soluciones está representado gráficamente a la derecha.

C

Para resolver inecuaciones de primer grado de la forma $ax+b>c$, $ax+b<c$, $ax+b\geq c$, $ax+b\leq c$, con $a>0$:

1. Se transpone b al lado derecho de la inecuación, luego se aplica la propiedad 3 para aislar la variable x.
2. Se grafica el intervalo de soluciones en la recta numérica, recordando el signo usado.

E

Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado:

a) $2x-4>10$ b) $3x-3<-3$

c) $2x+2>2$ d) $2x-6<-2$

e) $2x-6\geq 2$ f) $4x+8\geq 4$

g) $5x-5\leq -10$ h) $5x+5\leq -10$

Contenido 7: Inecuaciones de primer grado de la forma $ax+b>c$, $ax+b<c$, $ax+b\geq c$, $ax+b\leq c$ con $a<0$

P

Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado:

a) $-2x+2>4$ b) $-2x-4\leq 0$

S

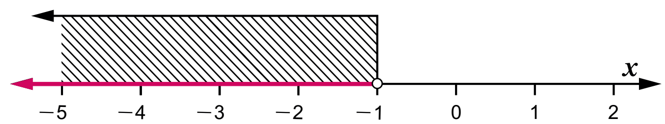
a) $-2x+2>4$

$-2x>4-2$ Se transpone 2

$-2x>2$

$\frac{-2}{-2}x<\frac{2}{-2}$ Se aplica la propiedad 4

$\boldsymbol{x<-1}$



El conjunto de soluciones está representado gráficamente a la derecha.

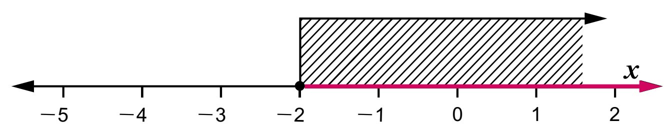
b) $-2x-4\leq 0$

$-2x\leq 0+4$ Se transpone -4

$-2x\leq 4$

$\frac{-2}{-2}x\geq\frac{4}{-2}$ Se aplica la propiedad 4

$\boldsymbol{x\geq -2}$



El conjunto de soluciones está representado gráficamente a la derecha.

C

Para resolver inecuaciones de primer grado de la forma $ax+b>c$, $ax+b<c$, $ax+b\geq c$, $ax+b\leq c$, con $a<0$:

1. Se transpone b, al lado derecho, luego se aplica la propiedad 4 para aislar la variable x.
2. Se grafica en la recta numérica el intervalo de soluciones.

E

Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado:

a) $-2x-4>10$ b) $-3x-3<-3$

c) $-2x+2>-4$ d) $-3x-6<3$

e) $-2x-6\geq 2$ f) $-4x+8\geq 4$

g) $-5x-5\leq -10$ h) $-5x+5\leq 10$

Contenido 8: Inecuaciones simultáneas de primer grado (1)

P

Resuelva las siguientes inecuaciones simultáneas de primer grado:

a) $4<x+2\leq 5$ b) $-8\leq 3x-2<1$

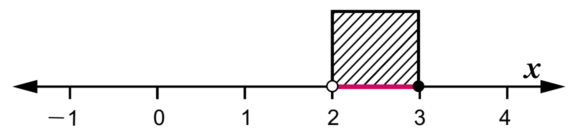
Se aplica la propiedad 1 y 2 de la siguiente manera:
Si $A<B<C$, entonces
$A+D<B+D<C+D$
$A-D<B-D<C-D$

S

a) $4<x+2\leq 5$

$4-2<x+2-2\leq 5-2$ Se aplica la propiedad 2

$\mathbf{2<x\leq 3}$



El conjunto de soluciones está representado gráficamente a la derecha.

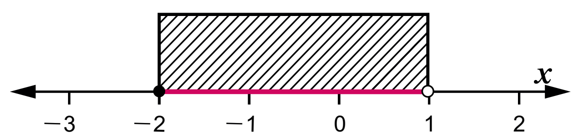
b) $-8\leq 3x-2<1$

$-8+2\leq 3x-2+2<1+2$ Se aplica la propiedad 1

$-6\leq 3x<3$

$\frac{-6}{3}\leq \frac{3}{3}x<\frac{3}{3}$ Se aplica la propiedad 3

$\mathbf{-2\leq x<1}$



El conjunto de soluciones está representado gráficamente a la derecha.

C

Para resolver inecuaciones simultáneas de primer grado se procede de la siguiente manera:

- Si es de la forma $a<x+c<b$, se aplica la propiedad 1 o 2 de las inecuaciones para aislar la x entre los dos signos de desigualdad, luego se grafica el intervalo de soluciones.
- Si es de la forma $a<dx+c<b$ con $d>0$, se aplica propiedad 1 o 2 para aislar dx, luego se aplica la propiedad 3 de las inecuaciones para aislar la variable x, por último se grafica el intervalo de soluciones.

E

Resuelva las siguientes inecuaciones simultáneas de primer grado:

a) $1<x+2\leq 2$ b) $-2\leq x-2<4$ c) $-3\leq 2x+1\leq 3$

d) $-6<5x-1\leq 4$ e) $-5<2x+1\leq 5$

Contenido 9: Inecuaciones simultáneas de primer grado (2)

P

Resuelva la siguiente inecuación simultánea de primer grado:

$4 < -x+2 \leq 5$

Se aplica la propiedad 4 de la siguiente manera:
Si $\mathrm{A}<\mathrm{B}<\mathrm{C}$, con $\mathrm{D}<0$ entonces

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{D}} > \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{D}} > \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}$$

S

$4 < -x+2 \leq 5$

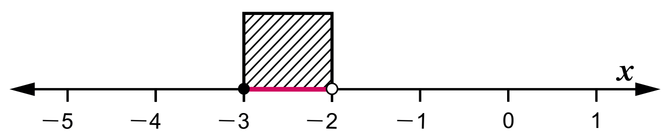
$4-2 < -x+2-2 \leq 5-2$ Se aplica la propiedad 1

$2 < -x \leq 3$

$\frac{2}{-1} > \frac{-1x}{-1} \geq \frac{3}{-1}$ Se aplica la propiedad 4

$-2 > x \geq -3$, es decir $\mathbf{-3 \leq x < -2}$

El conjunto de soluciones está representado en la siguiente gráfica:



C

Para resolver inecuaciones simultáneas de primer grado de la forma $a < dx+c < b$ con $d<0$.

1. Se aplica la propiedad 1 o 2 para aislar dx.
2. Se aplica la propiedad 4 para aislar x y se cambia el sentido de los signos.
3. Se grafica el intervalo de soluciones en la recta numérica.

E

Resuelva las siguientes inecuaciones simultáneas de primer grado:

a) $-1 \leq -x+1 < 2$

b) $6 \geq -2x-2 > 2$

c) $6 > -x+3 \geq -1$

d) $5 \geq -x+3 \geq -2$

e) $9 \geq -3x+3 \geq -6$

Contenido 10: Comprobemos lo aprendido 1

1. Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado:

   a) $x+2>6$

   b) $x-1\geq-3$

   c) $x-4\leq 1$

   d) $-x+5<2$

2. Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado:

   a) $2x>-4$

   b) $3x-1\leq-7$

   c) $-2x+1\geq-1$

   d) $4x-3<5$

3. Resuelva las siguientes inecuaciones simultáneas de primer grado:

   a) $1<x+2\leq 3$

   b) $4\leq 2x+2<6$

   c) $1\leq -2x-1<3$

Sección 2: Inecuaciones de primer grado con valor absoluto

Contenido 1: Propiedades del valor absoluto

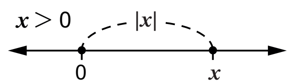
Definición y Propiedades

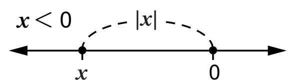
Definición de valor absoluto

El valor absoluto de un número es la distancia desde el origen al número en la recta numérica.

Formalmente, para cualquier número x:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$





Por ejemplo: $|3| = 3$, $\quad |-2| = -(-2) = 2$

Propiedades del valor absoluto

a) $|x| \geq 0$

b) Con $a > 0$:

Si $|x| = a$, entonces $x = a$ o $x = -a$

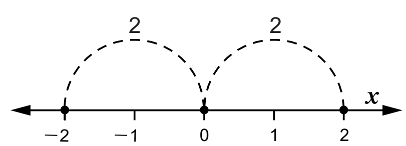
Si $|x| < a$, entonces $-a < x < a$

Si $|x| > a$, entonces $x < -a$ o $x > a$

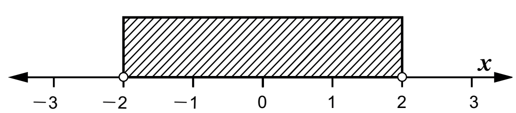
Ejemplo Aplique las propiedades del valor absoluto para resolver:

a) $|x| = 2$ b) $|x| < 2$ c) $|x| > 2$

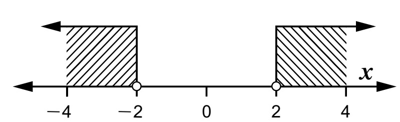
a) Si $|x| = 2$, entonces $x = 2$ o $x = -2$



b) Si $|x| < 2$, entonces $-2 < x < 2$



c) Si $|x| > 2$, entonces $x < -2$ o $x > 2$



E

Resuelva las siguientes ecuaciones o inecuaciones y represente gráficamente sus soluciones:

a) $|x| = 3$ b) $|x| < 4$ c) $|x| > 3$ d) $|x| = 5$

e) $|x| \leq 6$ f) $|x| \leq 2$ g) $|x| \geq 5$ h) $|x| < 1$

i) $|x| \leq 4$ j) $|x| \geq 4$

Contenido 2: Ecuación con valor absoluto de la forma $|x+b|=a$

P

Resuelva las siguientes ecuaciones con valor absoluto:

a) $|x+1|=2$ b) $|x-2|=3$

Recuerde que:
Con $a>0$,
si $|x|=a$, entonces $x=a$ o $x=-a$

S

a) $|x+1|=2$

$x+1=2, \quad x+1=-2$

$x=2-1, \quad x=-2-1$

$x=1, \quad x=-3$

Por lo tanto, **1** y **−3** son las soluciones de la ecuación $|x+1|=2$.

b) $|x-2|=3$

$x-2=3, \quad x-2=-3$

$x=3+2, \quad x=-3+2$

$x=5, \quad x=-1$

Por lo tanto, **5** y **−1** son las soluciones de la ecuación $|x-2|=3$.

C

Una ecuación con valor absoluto es una ecuación cuya variable aparece dentro del $|\quad|$.

Una ecuación con valor absoluto se resuelve de la siguiente forma:

1. Se aplica la propiedad con $a>0$, si $|x|=a$ entonces $x=a$, $x=-a$.
2. Se resuelven las dos ecuaciones de primer grado.

E

Resuelva las siguientes ecuaciones con valor absoluto:

a) $|x+2|=3$

b) $|x-1|=4$

c) $|x-3|=3$

d) $|x+4|=2$

e) $|x-2|=5$

Contenido 3: Inecuaciones con valor absoluto de la forma $|x+b|<a$ y $|x+b|\leq a$

P

Resuelva las siguientes inecuaciones:

a) $|x+1|<2$ b) $|x-3|\leq 1$

Recuerde que:
Con $a>0$, si $|x|<a$, entonces $-a<x<a$

S

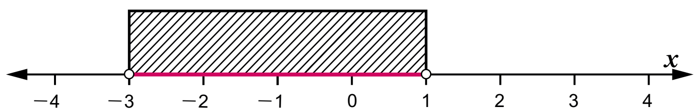
a) $|x+1|<2$

$-2<x+1<2$

$-2-1<x+1-1<2-1$

$\mathbf{-3<x<1}$

El conjunto de soluciones está representado en la siguiente gráfica:



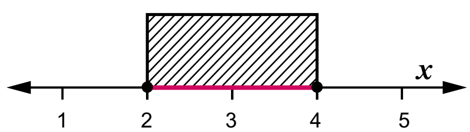
b) $|x-3|\leq 1$

$-1\leq x-3\leq 1$

$-1+3\leq x\leq 1+3$

$\mathbf{2\leq x\leq 4}$

El conjunto de soluciones está representado en la siguiente gráfica:



C

Una inecuación con valor absoluto es una desigualdad en la que se involucra el valor absoluto.

Las inecuaciones con valor absoluto de la forma $|x+b|<a$ se resuelven de la siguiente manera:

1. Se aplica la propiedad con $\mathbf{a>0}$, si $\mathbf{|x|<a}$ entonces $\mathbf{-a<x<a}$.
2. Se resuelve la inecuación simultánea de primer grado obtenida en el paso 1.
3. Se grafica el intervalo de soluciones en la recta numérica poniendo atención al sentido del signo de la inecuación.

E

Resuelva las siguientes inecuaciones:

a) $|x+2|<3$ b) $|x-1|\leq 4$ c) $|x-3|<3$

d) $|x+4|\leq 2$ e) $|x-2|\leq 5$

Contenido 4: Inecuaciones con valor absoluto de la forma $|x+b|>a$ y $|x+b|\geq a$

P

Resuelva las siguientes inecuaciones con valor absoluto:

a) $|x+1|>2$ b) $|x-1|\geq 2$

Recuerde que:
Con $a>0$, si $|x|>a$,
entonces $x<-a$ o $x>a$

S

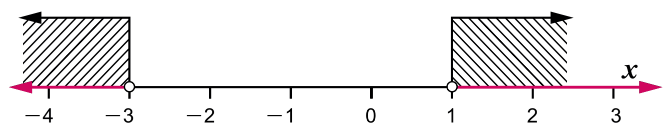
a) $|x+1|>2$

$x+1<-2$ o $x+1>2$

$x+1-1<-2-1$ o $x+1-1>2-1$

$x<-3$ o $x>1$

El conjunto de soluciones está representado en la siguiente gráfica:



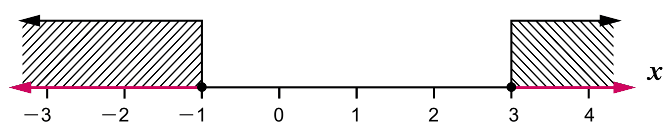
b) $|x-1|\geq 2$

$x-1\leq -2$ o $x-1\geq 2$

$x-1+1\leq -2+1$ o $x-1+1\geq 2+1$

$x\leq -1$ o $x\geq 3$

El conjunto de soluciones está representado en la siguiente gráfica:



C

Las inecuaciones con valor absoluto de la forma $|x+b|>a$ se resuelven de la siguiente manera:

1. Se aplica la propiedad con $a>0$, si $|x|>a$ entonces $x<-a$ o $x>a$.
2. Se resuelven las dos inecuaciones de primer grado obtenidas en el paso 1.
3. Se grafica el resultado en la recta numérica, de acuerdo a los símbolos de desigualdad.

E

Resuelva las siguientes inecuaciones con valor absoluto:

a) $|x+2|>3$ b) $|x-3|>3$ c) $|x-1|\geq 4$

d) $|x+4|\geq 2$ e) $|x-2|\geq 5$

Contenido 5: Comprobemos lo aprendido 2

E

1. Aplique las propiedades de valor absoluto para transformar las siguientes ecuaciones e inecuaciones:

   a) $|x| = 8$

   b) $|x|<8$

   c) $|x|>5$

   d) $|x|\geq 6$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones con valor absoluto:

   a) $|x-2| = 3$

   b) $|x+1| = 2$

   c) $|x-1| = 5$

   d) $|x-2| = 2$

   e) $|x-2| = 1$

3. Resuelva las siguientes inecuaciones con valor absoluto:

   a) $|x-2|>3$

   b) $|x+1|<4$

   c) $|x+1|\leq 2$

   d) $|x-2|\geq 1$

   e) $|x+2|>2$

Sección 3: Inecuaciones de segundo grado

Contenido 1: Ecuación de segundo grado

P

Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando factorización:

a) $x^2-4=0$ b) $x^2+2x=0$ c) $x^2+3x+2=0$

S

a) Se usa $a^2-b^2=(a+b)\ (a+b)$

$x^2-4=0$

$(x+2)(x-2)=0$

$x+2=0, \quad x-2=0$

$\mathbf{x=-2, \quad x=2}$

b) Se extrae factor común x

$x^2+2x=0$

$x\,(x+2)=0$

$x=0, \quad x+2=0$

$\mathbf{x=0, \quad x=-2}$

c) Se usa $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

$x^2+3x+2=0$

$(x+2)(x+1)=0$

$x+2=0, \quad x+1=0$

$\mathbf{x=-2, \quad x=-1}$

C

Las ecuaciones de segundo grado se resuelven por factorización de la siguiente manera:

1. Se identifica el caso de factorización que se puede utilizar y se descompone en factores el binomio o trinomio que aparece en la ecuación.
2. Se igualan los dos factores a cero.
3. Se resuelven las dos ecuaciones de primer grado de donde se obtienen las soluciones.

E

Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando factorización:

a) $x^2-1=0$ b) $x^2+4x=0$

c) $x^2+6x+5=0$ d) $x^2+4x+3=0$

e) $x^2-9=0$ f) $x^2-5x=0$

g) $x^2-x-2=0$ h) $x^2+4x-5=0$

Contenido 2: Gráfica de la función de segundo grado por medio de interceptos con el eje x (1)

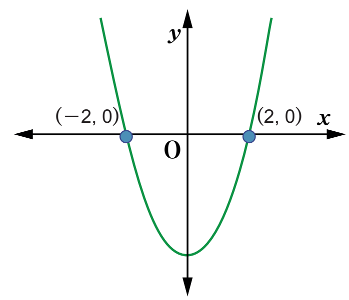
P

Encuentre los interceptos con el eje x de las gráficas de las siguientes funciones de segundo grado:

a) $y=x^2-4$ b) $y=x^2+2x-3$

S

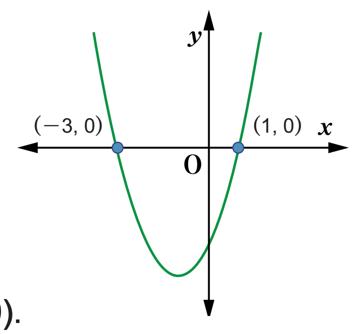
a) $y=x^2-4$



$x^2-4=0$	Se sustituye $y=0$
$(x+2)(x-2)=0$	Se factoriza x^2-4
$x+2=0,\quad x-2=0$	Se iguala a cero cada factor
$x=-2,\quad x=2$	Se transpone 2 y -2

Los interceptos de $y=x^2-4$ con el eje x son **$(-2, 0)$ y $(2, 0)$**.

b) $y=x^2+2x-3$



$x^2+2x-3=0$	Se sustituye $y=0$
$(x+3)(x-1)=0$	Se factoriza x^2+2x-3
$x+3=0,\quad x-1=0$	Se iguala a cero cada factor
$x=-3,\quad x=1$	Se transpone 3 y -1

Los interceptos de $y=x^2+2x-3$ con el eje x son **$(-3, 0)$ y $(1, 0)$**.

C

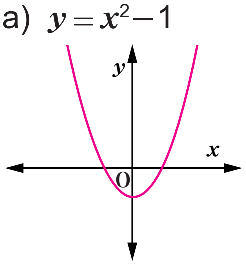
Para encontrar los interceptos con el eje x de una función de segundo grado $y=ax^2+bx+c$ se procede de la forma siguiente:

1. Se sustituye $y=0$ en $y=ax^2+bx+c$.
2. Se resuelve la ecuación $ax^2+bx+c=0$.
3. Con las soluciones x_1 y x_2 de la ecuación anterior se determinan los interceptos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$ de la gráfica de la función con el eje x.

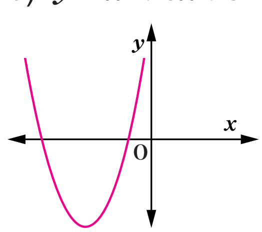
E

Encuentre los interceptos con el eje x de las gráficas de las siguientes funciones de segundo grado:

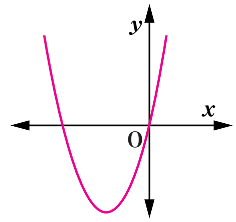
a) $y=x^2-1$



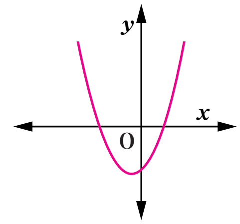
b) $y=x^2+6x+5$



c) $y=x^2+4x$



d) $y=x^2+x-2$



Contenido 3: Gráfica de la función de segundo grado por medio de interceptos con el eje x (2)

P

Trace la gráfica de la función de segundo grado $y=x^2+4x+3$ usando interceptos con el eje x.

S

Se resuelve la ecuación $x^2+4x+3=0$ que se origina de haber hecho $y=0$.

$x^2+4x+3=0$

$(x+3)(x+1)=0$ Se factoriza x^2+4x+3

$x+3=0, \quad x+1=0$ Se iguala a cero cada factor

$x=-3, \quad x=-1$ Se transpone 3 y 1

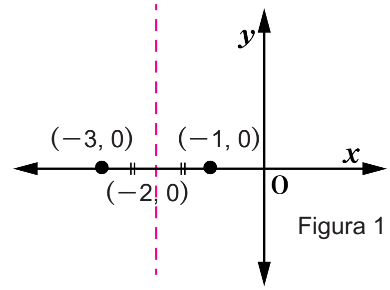


Figura 1

Se ubican los interceptos $(-3, 0)$ y $(-1, 0)$ de la gráfica de la función en el eje x, como se muestra en la Figura 1, y se dibuja la mediatriz al segmento definido por ellos.

Se dibuja la parábola, como se muestra en la figura 2, aprovechando la simetría que tiene respecto a la mediatriz trazada en forma punteada.

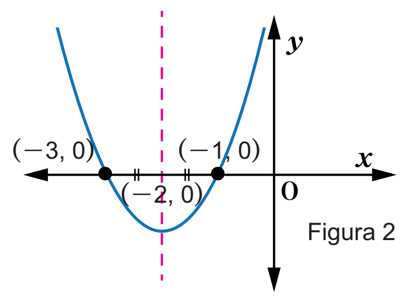


Figura 2

C

Para graficar la función de segundo grado $y=ax^2+bx+c$ por medio de los interceptos con el eje x, se procede así:

1. Se hace $y=0$ y se resuelve la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ cuyas soluciones son las abscisas de los interceptos con el eje x.
2. Se ubican en el eje x los puntos del paso 1 y se puntea la mediatriz del segmento definido por ellos.
3. Se dibuja la gráfica aprovechando su simetría respecto de la mediatriz punteada.

E

Trace la gráfica de la función de segundo grado usando interceptos con el eje x.

a) $y=x^2+6x+5$

b) $y=x^2+3x$

c) $y=x^2+x-2$

d) $y=x^2-1$

Contenido 4: Inecuaciones de segundo grado de la forma $x^2-c^2>0$, $x^2-c^2\geq 0$

P

Resuelva la inecuación de segundo grado $x^2-4>0$.

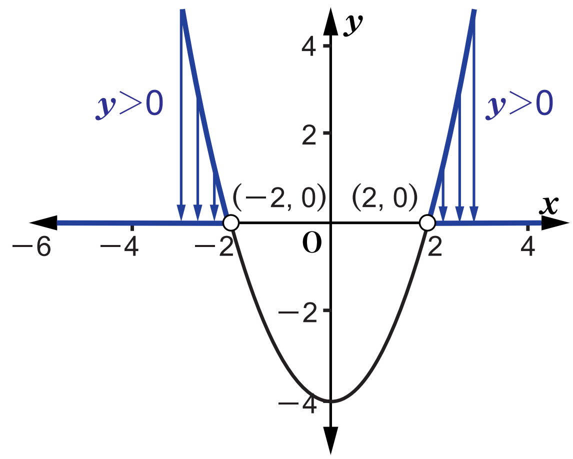
S

Se toma el lado izquierdo x^2-4 y se resuelve la ecuación $x^2-4=0$ mediante factorización

$$x^2-4=0$$
$$(x+2)(x-2)=0$$
$$x=-2, \qquad x=2$$

Se traza la gráfica de la función $y=x^2-4$, ubicando los interceptos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$ en el eje x.

Dado que $x^2-4>0$, se identifican los intervalos en el eje x para los cuales $y>0$, puede verse en la gráfica que esto ocurre cuando $x<-2$ o $x>2$.



Por tanto, el conjunto de soluciones de $x^2-4>0$ es la unión de los intervalos que cumplen

$$x<-2 \text{ o } x>2.$$

C

Una **inecuación de segundo grado** en una variable es una expresión que tiene una de las formas $ax^2+bx+c\geq 0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c>0$, etc.

Para resolver inecuaciones de la forma $x^2-c^2>0$; $x^2-c^2\geq 0$:

1. Se plantea la ecuación $x^2-c^2=0$ y se resuelve por factorización.
2. Se grafica la función $y=x^2-c^2$ ubicando los interceptos $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ en el eje x.
3. Se identifican los intervalos en el eje x para los cuales $y>0$ o $y\geq 0$.
4. El conjunto de soluciones es la unión de los intervalos anteriores.

E

Resuelva las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2-1>0$ b) $x^2-9\geq 0$ c) $x^2-1\geq 0$

d) $x^2-25\geq 0$ e) $x^2-16>0$ f) $x^2-4\geq 0$

Contenido 5: Inecuaciones de segundo grado de la forma $x^2-c^2<0$, $x^2-c^2\leq 0$

P

Resuelva la inecuación de segundo grado $x^2-1\leq 0$.

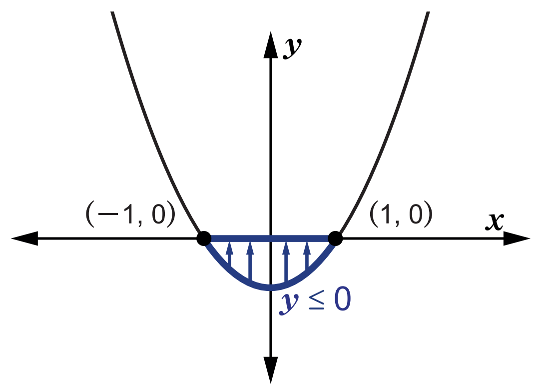
S

Se toma el lado izquierdo x^2-1 y se resuelve la ecuación $x^2-1=0$ mediante factorización

$$(x+1)(x-1)=0$$

$$x=-1,\quad x=1$$

Se traza la gráfica de la función $y=x^2-1$, ubicando los interceptos $(-1,\ 0)$ y $(1,\ 0)$ en el eje x.



Dado que $x^2-1\leq 0$, se identifica el intervalo en el eje x para el cual $y\leq 0$, puede verse en la gráfica que esto ocurre cuando $-1\leq x\leq 1$.

Por tanto, el conjunto de soluciones de $x^2-1\leq 0$ es el intervalo que cumple la condición $\mathbf{-1\leq x\leq 1}$.

C

Para resolver inecuaciones de segundo grado de la forma $x^2-c^2<0$, $x^2-c^2\leq 0$:

1. Se plantea la ecuación $x^2-c^2=0$ y se resuelve por factorización.
2. Se grafica la función $y=x^2-c^2$ ubicando los interceptos $(-c,\ 0)$ y $(c,\ 0)$ en el eje x.
3. Se identifica el intervalo en el eje x para el cual $y<0$ o $y\leq 0$.
4. El conjunto de soluciones es el intervalo anterior.

E

Resuelva las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2-4<0$

b) $x^2-9<0$

c) $x^2-1<0$

d) $x^2-16\leq 0$

e) $x^2-25<0$

f) $x^2-9\leq 0$

Contenido 6: Inecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$ con $a>0$

P

Resuelva las siguientes inecuaciones de segundo grado:

$x^2+3x+2>0$ y $x^2+3x+2<0$

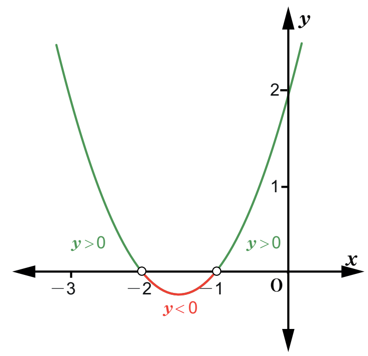
S

Se iguala a cero el lado izquierdo x^2+3x+2 de cualquiera de las inecuaciones y se resuelve la ecuación:

$$x^2+3x+2=0$$

$$(x+2)(x+1)=0$$

$$x=-2,\ x=-1$$



Se traza la gráfica de la función $y=x^2+3x+2$ ubicando los interceptos $(-2, 0)$ y $(-1, 0)$ en el eje x.

Se forman tres intervalos definidos por: $x<-2$, $-2<x<-1$, $x>-1$.

El conjunto de soluciones de $x^2+3x+2>0$ es la unión de los intervalos que cumplen $\boldsymbol{x<-2}$ **o** $\boldsymbol{x>-1}$ ya que para estos $y>0$.

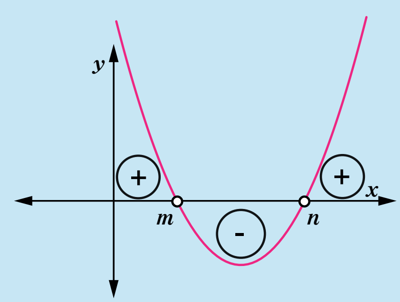
El conjunto de soluciones de $x^2+3x+2<0$ es el intervalo que cumple $\boldsymbol{-2<x<-1}$, ya que para este $y<0$.

C

Para resolver inecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, con $a>0$ se procede así:

1. Se encuentran las soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ las cuales son m y n con $m<n$.
2. Se grafica la función $y=ax^2+bx+c$ con interceptos $(m, 0)$ y $(n, 0)$.
3. Se forman los intervalos que cumplen $x<m$, $m<x<n$, $x>n$.
4. El conjunto de soluciones de $ax^2+bx+c>0$ se forma a partir de la unión de los intervalos que corresponden a $y>0$, los cuales cumplen $x<m$ o $x>n$.

   El conjunto de soluciones de $ax^2+bx+c<0$ es el intervalo que cumple la condición $m<x<n$.



E

Resuelva las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2+5x+6>0$

b) $x^2+2x-8<0$

c) $x^2-x-2>0$

d) $x^2+x-6<0$

Contenido 7: Inecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c\geq 0$, $ax^2+bx+c\leq 0$ con $a>0$

P

Resuelva las siguientes inecuaciones de segundo grado:

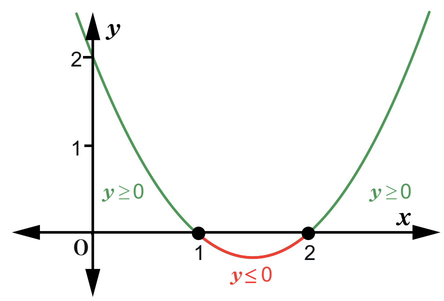
$x^2-3x+2\geq 0$ y $x^2-3x+2\leq 0$

S

Se iguala a cero el lado izquierdo x^2-3x+2 de cualquiera de las inecuaciones y se resuelve la ecuación:

$$x^2-3x+2=0$$
$$(x-2)(x-1)=0$$
$$x=2,\quad x=1$$

Se traza la gráfica de la función $y=x^2-3x+2$ ubicando los interceptos (1, 0) y (2, 0) en el eje x.



Se forman tres intervalos definidos por: $x\leq 1$, $1\leq x\leq 2$ y $x\geq 2$.

El conjunto de soluciones de $x^2-3x+2\geq 0$ es la unión de los intervalos que cumplen $\boldsymbol{x\leq 1}$ **o** $\boldsymbol{x\geq 2}$ ya que para estos $y\geq 0$.

El intervalo de soluciones de $x^2-3x+2\leq 0$ es el que cumple la condición $\boldsymbol{1\leq x\leq 2}$.

C

Para resolver inecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c\geq 0$, $ax^2+bx+c\leq 0$, con $a>0$ se procede así:

1. Se encuentran las soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ las cuales son m y n con $m<n$.
2. Se grafica la función $y=ax^2+bx+c$ con interceptos $(m, 0)$ y $(n, 0)$.
3. Se forman los intervalos que cumplen $x\leq m$, $m\leq x\leq n$, $x\geq n$.
4. El conjunto de soluciones de $ax^2+bx+c\geq 0$ se forma a partir de la unión de los intervalos que corresponden a $y\geq 0$, los cuales cumplen $x\leq m$ o $x\geq n$.

   El intervalo de soluciones de $ax^2+bx+c\leq 0$ es el que cumple $m\leq x\leq n$.

E

Resuelva las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2-4x+3\geq 0$

b) $x^2+5x+4\leq 0$

c) $x^2-x-6\geq 0$

d) $x^2+2x-8\leq 0$

Contenido 8: Inecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\geq 0$, $ax^2+bx+c\leq 0$ con $a<0$

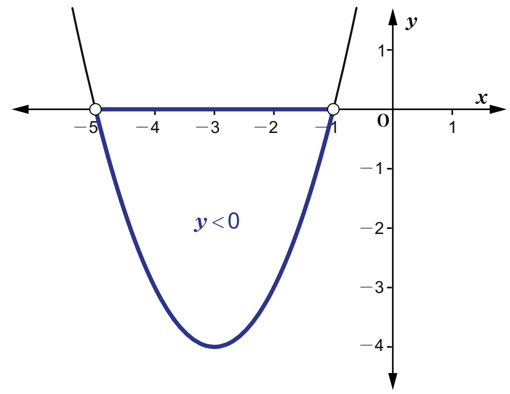
P

Resuelva la inecuación de segundo grado $-x^2-6x-5>0$.

S

$-x^2-6x-5>0$

$x^2+6x+5<0$	Se multiplica por -1 y se cambia el signo $>$ por $<$
$x^2+6x+5=0$	Se plantea la ecuación
$(x+5)(x+1)=0$	Se factoriza
$x=-5,-1$	Se resuelven las ecuaciones de primer grado



El conjunto de soluciones de $x^2+6x+5<0$ es el intervalo que cumple la condición $-5<x<-1$ porque sus elementos corresponden a puntos de la parábola con $y<0$. Este es también el conjunto de soluciones de $-x^2-6x-5>0$.

C

Para resolver inecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\geq 0$, $ax^2+bx+c\leq 0$, con $a<0$, se procede así:

1. Se multiplica por -1 ambos lados de la inecuación, cambiando el sentido del signo de inecuación.
2. Se resuelve la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ y se traza la gráfica de la función de segundo grado $y=ax^2+bx+c$.
3. Se encuentra el conjunto de soluciones para la inecuación resultante del paso 1. Este será el conjunto de soluciones de la inecuación dada.

E

Resuelva las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $-x^2+x+2>0$

b) $-x^2-2x+3<0$

c) $-x^2-x+2\geq 0$

d) $-x^2-x+6\leq 0$

Contenido 9: Comprobemos lo aprendido 3

Resuelva las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 + 2x - 3 > 0$

b) $x^2 - 4x + 3 > 0$

c) $x^2 + 3x + 2 \geq 0$

d) $x^2 - 3x - 4 < 0$

e) $x^2 + 5x + 4 < 0$

f) $x^2 + 3x - 4 \leq 0$

g) $x^2 - 5x + 6 \leq 0$

h) $x^2 - 3x - 4 \geq 0$

i) $-x^2 + 6x + 7 \geq 0$

j) $-x^2 - 3x + 4 > 0$

k) $-x^2 - 4x - 3 < 0$

l) $-x^2 - 2x + 8 \geq 0$

m) $-x^2 + x + 6 \leq 0$

n) $-x^2 + 5x - 6 < 0$

Unidad 3

Fracciones Algebraicas

Sección 1 Simplificación, multiplicación y división de fracciones algebraicas

Sección 2 Adición y sustracción de fracciones algebraicas

Sección 1: Simplificación, multiplicación y división de fracciones algebraicas

Contenido 1: Simplificación de fracciones con numerador y denominador numéricos y de variables

P

Simplifique las siguientes fracciones:

a) $\frac{15}{10}$

b) $\frac{x^2}{x^3}$

Recuerde:
$x^2 = x \cdot x$
$x^3 = x \cdot x \cdot x$
$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$
x^2, x^3 y x^4 se llaman potencias de x

S

a) Se calcula el máximo común divisor de 15 y 10 que es 5 y se divide por este el numerador y el denominador.

$$\frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{2}{\cancel{10}}} = \frac{3}{2}$$

b) Se descompone x^2 y x^3 en factores y se simplifica

$$\frac{x^2}{x^3} = \frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x} = \frac{1}{x}$$

Se ha tachado en el numerador y denominador el mismo número de variables.

C

La simplificación de fracciones consta de dos pasos:
1. Se calcula el máximo común divisor del numerador y el denominador.
2. Se divide el numerador y el denominador de la fracción por su máximo común divisor, obteniéndose una fracción irreducible.

Para simplificar fracciones en las que el numerador y denominador son variables se procede así:
1. Se descomponen las variables del numerador y el denominador como producto de factores.
2. Se simplifican las variables que son comunes en el numerador y el denominador, obteniendo una fracción irreducible.

E

Simplifique las siguientes fracciones:

a) $\frac{14}{12}$

b) $\frac{4}{12}$

c) $\frac{8}{20}$

d) $\frac{15}{25}$

e) $\frac{35}{40}$

f) $\frac{a^3}{a^4}$

g) $\frac{n^2}{n^3}$

h) $\frac{p^2q^4}{p^2q^3}$

Contenido 2: Simplificación de fracciones algebraicas cuyo numerador y denominador son monomios

P

Simplifique las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{2x^4y^3}{6x^2y^2}$ b) $\dfrac{5x^2y}{10x^2y^3}$

Una fracción algebraica es el cociente de dos monomios o polinomios.

S

a) Se simplifican los números 2 y 6, se descomponen las potencias x^4, y^3, x^2 y y^2 en sus variables y se simplifica.

$$\frac{2x^4y^3}{6x^2y^2}=\frac{\overset{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot x\cdot x\cdot\cancel{y}\cdot\cancel{y}\cdot y}{\underset{3}{\cancel{6}}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{y}\cdot\cancel{y}}=\frac{x\cdot x\cdot y}{3}=\frac{x^2y}{3}$$

$$=\frac{1}{3}x^2y$$

En la multiplicación de variables y números se usa punto:
$2x^4y^3=2\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y\cdot y$

b) Se simplifican los números 5 y 10, se descomponen las potencias x^2 y y^3 en sus variables y se simplifica.

$$\frac{5x^2y}{10x^2y^3}=\frac{\overset{1}{\cancel{5}}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{y}}{\underset{2}{\cancel{10}}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{y}\cdot y\cdot y}=\frac{1}{2\cdot y\cdot y}=\frac{1}{2y^2}$$

C

Una fracción algebraica es aquella que posee variables en el denominador.

Para simplificar fracciones algebraicas cuyo numerador y denominador son monomios se procede así:

1. Se simplifican los coeficientes del numerador y denominador dividiéndolos por su máximo común divisor.
2. Se simplifican las variables que son comunes en el numerador y el denominador, la fracción algebraica resultante es el producto de los coeficientes y variables que quedaron en el numerador y denominador.

E

Simplifique las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{6x^3y^2}{12x^2y^3}$ b) $\dfrac{14a^2b^2}{7a^3b^3}$

c) $\dfrac{8xy}{4x^2y^3}$ d) $\dfrac{20a^3b^2}{4a^2b^3}$

e) $\dfrac{18m^2n^3}{12m^3n^2}$ f) $\dfrac{30p^2q^3}{20p^3q^3}$

Contenido 3: Factorización

Repaso

La factorización de un número mayor que 1 en números primos ocurre en los números enteros, mientras que con expresiones polinómicas, factorizar significa descomponerlas en polinomios que ya no se pueden reducir más.

Los casos de factorización más frecuentes son:

- $ab+ac=a(b+c)$, Factor común monomio.
- $x^2-a^2=(x+a)(x-a)$, Diferencia de cuadrados.
- $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$, Trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab$.
- $x^2\pm 2ax+a^2=(x\pm a)^2$ Trinomio cuadrado perfecto.

P

Factorice los siguientes polinomios:

a) $10x+5$ b) x^2-5x c) x^2-9

d) x^2+5x+4 e) x^2+2x+1

S

a) $10x+5=(5)(2x)+(5)(1)=\mathbf{5(2x+1)}$

b) $x^2-5x=x\cdot x-5\cdot x=\mathbf{x(x-5)}$

c) $x^2-9=x^2-3^2=\mathbf{(x+3)(x-3)}$

d) $x^2+5x+4=x^2+(1+4)x+(1)(4)=\mathbf{(x+1)(x+4)}$

e) $x^2+2x+1=x^2+(2)x(1)+1^2=(x+1)(x+1)=\mathbf{(x+1)^2}$

E

Factorice los siguientes polinomios:

a) $2x+4$ b) x^2-4x

c) x^2-1 d) x^2+3x+2

e) x^2+4x+4 f) $4x^2+12x$

g) x^2-2x+1 h) x^2+6x+9

i) $x^2-8x+16$ j) x^2+5x-6

Contenido 4: Simplificación de fracciones algebraicas cuyo numerador y denominador son polinomios

P

Simplifique las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x+1}{x^2-1}$

b) $\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$

S

a) Se examina el numerador y denominador para saber si son factorizables. En este caso $x+1$ no es factorizable, pero x^2-1, se factoriza como $x^2-1=(x+1)(x-1)$.

$$\frac{x+1}{x^2-1}=\frac{\cancel{x+1}}{(\cancel{x+1})(x-1)}=\frac{1}{x-1}$$

b) El numerador y denominador son factorizables:

$$x^2-1=(x+1)(x-1) \text{ y } x^2+x-2=(x+2)(x-1)$$

Entonces,

$$\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{(x+2)\cancel{(x-1)}}=\frac{x+1}{x+2}$$

C

Para la simplificación de fracciones algebraicas cuyo numerador y denominador son polinomios se realiza lo siguiente:

1. Se factoriza el numerador y el denominador de la fracción algebraica, si es posible.
2. Se simplifican todos los factores comunes del numerador y denominador, los términos restantes forman la nueva fracción algebraica, que es reducida.

E

Simplifique las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x+2}{x^2-4}$

b) $\dfrac{x^2+3x+2}{x+2}$

c) $\dfrac{x-3}{x^2-9}$

d) $\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$

e) $\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$

f) $\dfrac{x^2-3x}{x^2-4x+3}$

g) $\dfrac{x^2+4x}{x^2+8x+16}$

h) $\dfrac{3x-3}{x^2-1}$

Contenido 5: Multiplicación de fracciones algebraicas

P

Efectúe los productos indicados:

a) $\dfrac{x^2}{8y^3}\cdot\dfrac{4y^2}{x}$ b) $\dfrac{x^2+3x}{x-2}\cdot\dfrac{x-2}{x+3}$

S

a) $\dfrac{x^2}{8y^3}\cdot\dfrac{4y^2}{x}=\dfrac{x\cdot x\cdot 4\cdot y\cdot y}{8\cdot y\cdot y\cdot y\cdot x}$ Se multiplican los numeradores y denominadores y se descomponen x^2, $4y^2$ y $8y^3$ en productos de números y variables

$=\dfrac{\overset{1}{\cancel{4}}\cdot\cancel{x}\cdot x\cdot\cancel{y}\cdot\cancel{y}}{\underset{2}{\cancel{8}}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{y}\cdot\cancel{y}\cdot y}$

$=\dfrac{x}{2y}$ Se simplifica

b) $\dfrac{x^2+3x}{x-2}\cdot\dfrac{x-2}{x+3}=\dfrac{x(x+3)(x-2)}{(x-2)(x+3)}$ Se multiplican los numeradores y denominadores y se factoriza x^2+3x

$=\dfrac{x\cancel{(x+3)}\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\cancel{(x+3)}}$

$=x$ Se simplifica

C

La multiplicación de fracciones algebraicas se efectúa de la forma siguiente:

1. Si los numeradores y denominadores de cada fracción son monomios, entonces se multiplican los numeradores y denominadores, se descomponen las potencias en variables, se simplifican estas y los coeficientes hasta obtener una expresión reducida.
2. Si los numeradores y denominadores de cada fracción son polinomios, entonces se factorizan, se multiplican y se eliminan los factores comunes, dando lugar a una nueva fracción.

E

Efectúe los siguientes productos indicados:

a) $\dfrac{x^3}{6y^3}\cdot\dfrac{9y^2}{x}$ b) $\dfrac{4x^3}{5y}\cdot\dfrac{3y^3}{2x^2}$

c) $\dfrac{x^2+2x}{x+1}\cdot\dfrac{x+1}{x+2}$ d) $\dfrac{x^2+3x+2}{x-3}\cdot\dfrac{x-3}{x+2}$

e) $\dfrac{x^2-1}{x^2+2x}\cdot\dfrac{x+2}{x-1}$

Contenido 6: División de fracciones algebraicas

P

Efectúe las siguientes divisiones indicadas:

a) $\dfrac{2x^2}{3y} \div \dfrac{4x}{3y^2}$

b) $\dfrac{x^2-1}{x-3} \div \dfrac{x+1}{x-3}$

S

a) $\dfrac{2x^2}{3y} \div \dfrac{4x}{3y^2} = \dfrac{2x^2}{3y} \cdot \dfrac{3y^2}{4x}$

$= \dfrac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{x} \cdot x}{\cancel{3} \cdot \cancel{y}} \cdot \dfrac{\cancel{3} \cdot \cancel{y} \cdot y}{\underset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{x}}$

$= \dfrac{xy}{2}$

b) $\dfrac{x^2-1}{x-3} \div \dfrac{x+1}{x-3} = \dfrac{x^2-1}{x-3} \cdot \dfrac{x-3}{x+1}$

$= \dfrac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x-3}} \cdot \dfrac{\cancel{x-3}}{\cancel{x+1}}$

$= x-1$

Si $\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ y $\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}$ son fracciones algebraicas, entonces

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \div \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \cdot \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{C}}$$

C

La división de fracciones algebraicas se efectúa de la forma siguiente:

1. Si el numerador y el denominador de cada fracción son monomios, entonces se escribe la primera fracción, se cambia el signo de división por el de multiplicación, se intercambian el numerador y el denominador de la segunda fracción y se procede a realizar la multiplicación, simplificando coeficientes y variables.
2. Si el numerador y denominador de cada fracción son polinomios, se realiza el mismo procedimiento anterior, con la diferencia que se deben factorizar los polinomios para luego simplificar factores comunes.

E

Efectúe las siguientes divisiones indicadas:

a) $\dfrac{9m^2}{4n^3} \div \dfrac{3m}{2n^2}$

b) $\dfrac{x^2-4}{x+1} \div \dfrac{x-2}{x+1}$

c) $\dfrac{3a^2}{4mn} \div \dfrac{15a}{2m}$

d) $\dfrac{x+1}{x+2} \div \dfrac{x^2+3x+2}{x+2}$

e) $\dfrac{x-y}{x+y} \div \dfrac{x-y}{x^2-y^2}$

f) $\dfrac{x+2}{x^2+4x+3} \div \dfrac{x+2}{x+3}$

Contenido 7: Operaciones combinadas con fracciones algebraicas

P

Efectúe las siguientes operaciones indicadas:

a) $\dfrac{x^2}{3y}\cdot\dfrac{2x^2}{y}\div\dfrac{2x^3}{9y}$ b) $\dfrac{x+2}{x-2}\div\dfrac{x^2+3x+2}{x-2}\cdot\dfrac{x+1}{x+3}$

Operaciones combinadas de fracciones algebraicas

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}\cdot\frac{E}{F}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}\cdot\frac{E}{F}=\frac{ADE}{BCF}$$

S

a) $\dfrac{x^2}{3y}\cdot\dfrac{2x^2}{y}\div\dfrac{2x^3}{9y}$

Se cambia el signo $\div$ por $\cdot$ y se intercambia el numerador y denominador de $\dfrac{2x^3}{9y}$

$$=\frac{x^2}{3y}\cdot\frac{2x^2}{y}\cdot\frac{9y}{2x^3}$$

$$=\frac{\cancel{x}\cdot\cancel{x}}{\cancel{3}\cdot\cancel{y}}\cdot\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{x}\cdot x}{y}\cdot\frac{\overset{3}{\cancel{9}}\cdot\cancel{y}}{\cancel{2}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}}$$

$$=\frac{\mathbf{3x}}{\mathbf{y}}$$

b) $\dfrac{x+2}{x-2}\div\dfrac{x^2+3x+2}{x-2}\cdot\dfrac{x+1}{x+3}=\dfrac{x+2}{x-2}\cdot\dfrac{x-2}{x^2+3x+2}\cdot\dfrac{x+1}{x+3}$

Se cambia el signo $\div$ por $\cdot$ y se intercambia el numerador y denominador de $\dfrac{x^2+3x+2}{x-2}$.

$$=\frac{\cancel{x+2}}{\cancel{x-2}}\cdot\frac{\cancel{x-2}}{(\cancel{x+1})(\cancel{x+2})}\cdot\frac{\cancel{x+1}}{x+3}$$

$$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(x+3)}}$$

C

Las operaciones combinadas (multiplicación y división) con fracciones algebraicas se efectúan de la forma siguiente:

1. Si los numeradores y denominadores de cada fracción son monomios, entonces se cambia el signo de división por multiplicación y se invierten los términos de la fracción que divide, luego se simplifican los coeficientes y se descomponen las variables en producto y se simplifican una a una.
2. Si los numeradores y denominadores de cada fracción son polinomios, entonces se realiza el mismo procedimiento anterior, con la diferencia que se deben factorizar los polinomios para luego simplificar factores comunes.

E

Efectúe las siguientes operaciones indicadas:

a) $\dfrac{3x^3}{2y^2}\cdot\dfrac{2y}{x^2}\div\dfrac{3x^2}{4y}$

b) $\dfrac{x+1}{x+2}\div\dfrac{x+1}{x^2+5x+6}\cdot\dfrac{x-5}{x+3}$

c) $\dfrac{3x}{2y^2}\div\dfrac{3x^2}{4y}\cdot\dfrac{3y}{2x}$

d) $\dfrac{a+b}{a^2-b^2}\div\dfrac{a+b}{a^2+2a+1}\cdot\dfrac{a-b}{a+1}$

e) $\dfrac{m-3}{m-1}\cdot\dfrac{m+1}{m^2-m-6}\div\dfrac{m+1}{m+2}$

f) $\dfrac{5x}{3y}\div\dfrac{10x}{9y}\cdot\dfrac{4y}{3x^2}$

Contenido 8: Comprobemos lo aprendido 1

E

1. Simplifique las siguientes fracciones:

a) $\frac{6}{8}$

b) $\frac{12}{16}$

c) $\frac{x}{x^2}$

d) $\frac{xy^2}{x^2y^3}$

e) $\frac{p^2qr^2}{pq^2r}$

2. Simplifique las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{30x^2y^3}{14x^3y^2}$

b) $\frac{12x^3y^3z}{14x^2y^3z^2}$

c) $\frac{16p^3q^3r^2}{24p^4qr^2}$

d) $\frac{4x+12}{x+3}$

e) $\frac{x+1}{x^2+4x+3}$

3. Efectúe las siguientes operaciones indicadas:

a) $\frac{5x^3}{6y} \cdot \frac{y^3}{10x^3}$

b) $\frac{x+2}{x+1} \cdot \frac{x^2+2x+1}{x^2-4}$

c) $\frac{15m^4}{4n^3} \div \frac{3m^4}{4n^2}$

d) $\frac{x-2}{x-3} \div \frac{2x-4}{x-3}$

4 Efectúe las siguientes operaciones indicadas:

$$\frac{a+1}{a-1} \div \frac{a^2+a}{a^2-2a+1} \cdot \frac{a}{a-1}$$

Sección 2: Adición y sustracción de fracciones algebraicas

Contenido 1: Adición de fracciones algebraicas con igual denominador

P

Efectúe las siguientes sumas:

a) $\frac{3}{x}+\frac{2}{x}$

b) $\frac{2x}{x+1}+\frac{2}{x+1}$

c) $\frac{x+1}{x+3}+\frac{x+2}{x+3}$

Adición de fracciones algebraicas con mismo denominador.

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{B}=\frac{A+C}{B}$$

S

a) $\frac{3}{x}+\frac{2}{x}=\frac{3+2}{x}$ Se escribe el mismo denominador x y se suman los numeradores

$=\frac{5}{x}$

b) $\frac{2x}{x+1}+\frac{2}{x+1}=\frac{2x+2}{x+1}$ Se escribe el mismo denominador $x+1$ y se suman los numeradores

$=\frac{2\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}=\mathbf{2}$ Se factoriza $2x+2$ y se simplifica

c) $\frac{x+1}{x+3}+\frac{x+2}{x+3}=\frac{x+1+x+2}{x+3}$ Se escribe el mismo denominador $x+3$ y se suman los numeradores

$=\frac{2x+3}{x+3}$ Se suman términos semejantes

C

La suma de fracciones algebraicas con el mismo denominador es otra fracción algebraica con la siguiente regla de formación:

1. Su numerador es la suma de los numeradores de las dos fracciones dadas y su denominador es el mismo de las fracciones que se suman.
2. En la fracción algebraica resultante se factoriza el numerador y el denominador, si ese es el caso y se simplifica.

E

Efectúe las siguientes sumas:

a) $\frac{2}{a}+\frac{7}{a}$

b) $\frac{2y}{y+2}+\frac{4}{y+2}$

c) $\frac{x+2}{4x-5}+\frac{5-x}{4x-5}$

d) $\frac{4}{3b}+\frac{5}{3b}$

e) $\frac{3x}{x+3}+\frac{9}{x+3}$

f) $\frac{x+1}{2x+3}+\frac{3x+5}{2x+3}$

g) $\frac{x+4}{x-3}+\frac{x+1}{x-3}$

Contenido 2: Sustracción de fracciones algebraicas con igual denominador

P

Efectúe las siguientes sustracciones:

a) $\frac{3}{b}-\frac{2}{b}$

b) $\frac{2x}{x-1}-\frac{2}{x-1}$

c) $\frac{2x+1}{x-2}-\frac{x+3}{x-2}$

Sustracción de fracciones con igual denominador.

$$\frac{A}{B}-\frac{C}{B}=\frac{A-C}{B}$$

S

a) $\frac{3}{b}-\frac{2}{b}=\frac{3-2}{b}$ Se escribe el mismo denominador b y se restan los numeradores

$=\frac{1}{b}$

b) $\frac{2x}{x-1}-\frac{2}{x-1}=\frac{2x-2}{x-1}$ Se escribe el mismo denominador $x-1$ y se restan los numeradores

$=\frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$ Se factoriza $2x-2$

$=2$

c) $\frac{2x+1}{x-2}-\frac{x+3}{x-2}=\frac{2x+1-(x+3)}{x-2}$ Se restan los numeradores y se escribe el mismo denominador

$=\frac{2x+1-x-3}{x-2}=\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{x-2}}$ Se reducen términos semejantes

$=1$

C

La sustracción de fracciones algebraicas con igual denominador es otra fracción algebraica con la siguiente regla de formación:

1. Su numerador es la resta de los numeradores de las fracciones dadas y su denominador es el mismo de las fracciones que se restan.
2. En la fracción algebraica resultante se factoriza el numerador y denominador, si es el caso, y se simplifica.

E

Efectúe las siguientes sustracciones:

a) $\frac{4}{3x}-\frac{2}{3x}$

b) $\frac{2}{3b}-\frac{5}{3b}$

c) $\frac{3x}{x-3}-\frac{9}{x-3}$

d) $\frac{2y}{y-2}-\frac{4}{y-2}$

e) $\frac{x+1}{x-3}-\frac{3x-5}{x-3}$

f) $\frac{2x+3}{x+2}-\frac{x+1}{x+2}$

g) $\frac{2b+1}{b+3}-\frac{b-2}{b+3}$

Contenido 3: Mínimo común múltiplo de números naturales

P

Determine el $m.c.m.$ de 12 y 18.

$m.c.m.\ (a,\ b)$: mínimo común múltiplo de a y b.

S

Para encontrar el $m.c.m.$ de 12 y 18 se procede así:

Paso 1: Se descomponen en factores primos 12 y 18.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Recuerde $m.c.m$ por definición.
Múltiplos de:

12: 12, 24, 36, 48, …

18: 18, 36, 54, …

El $m.c.m.\ (12,\ 18) = 36$

Paso 2: Se escribe 12 y 18 como el producto de sus factores primos, y se multiplican los comunes y no comunes.

$$\begin{array}{rl} 12 = & (2)(2)(3) \\ 18 = & \quad\ \ (2)(3)(3) \\ \hline & (2)(2)(3)(3) \end{array}$$

Paso 3: El $m.c.m.$ de 12 y 18 es el producto anterior:

$$m.c.m.\ (12,\ 18) = (2)(2)(3)(3) = 36$$

C

Para encontrar el mínimo común múltiplo ($m.c.m.$) de dos o más números naturales se procede de la forma siguiente:

1. Se descomponen los números en sus factores primos.
2. Se multiplican los factores comunes y no comunes de los números dados, los comunes se toman de la descomposición en la que tengan mayor repetición, tantas veces como aparezcan en esta.

E

Encuentre el $m.c.m.$ de las siguientes parejas de números:

a) 4 y 12

b) 5 y 15

c) 10 y 12

d) 6 y 15

e) 8 y 12

f) 20 y 12

Contenido 4: Adición y sustracción de números fraccionarios con denominadores distintos

P

Efectúe las siguientes operaciones indicadas:

a) $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}$ b) $\frac{5}{6}-\frac{1}{2}$

Recuerde que:
Para la adición y sustracción de fracciones, se busca primero el *m.c.m.* de los denominadores.

S

a) El *m.c.m.* de 3 y 5 es (3)(5)=15

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=\frac{(2)(5)}{(3)(5)}+\frac{(1)(3)}{(5)(3)}$$

Se divide 15 por los denominadores 3 y 5 y cada resultado se multiplica por el numerador y denominador de la fracción correspondiente

$$=\frac{10}{15}+\frac{3}{15}$$

$$=\frac{10+3}{15}$$

Se suman los numeradores y se escribe el denominador 15

$$=\frac{13}{15}$$

b) El *m.c.m.* de 6 y 2 es 6

$$\frac{5}{6}-\frac{1}{2}=\frac{5}{6}-\frac{(1)(3)}{(2)(3)}$$

Se divide 6 por los denominadores 6 y 2 y cada resultado se multiplica por el numerador y denominador de la fracción correspondiente.

$$=\frac{5}{6}-\frac{3}{6}$$

$$=\frac{5-3}{6}$$

Se restan fracciones con igual denominador

$$=\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{3}{\cancel{6}}}$$

$$=\frac{1}{3}$$

C

Para sumar o restar números fraccionarios con denominadores distintos se procede así:

1. Se encuentra el *m.c.m.* de los denominadores.
2. Se divide el *m.c.m.* por el denominador de cada fracción y cada resultado se multiplica por el numerador y denominador de la fracción correspondiente.
3. Se efectúan las operaciones indicadas obtenidas en el paso 2 y se simplifica el resultado, si es posible.

E

Efectúe las siguientes operaciones indicadas:

a) $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}$ b) $\frac{8}{5}-\frac{1}{10}$ c) $\frac{5}{2}+\frac{1}{3}$

d) $\frac{4}{9}+\frac{2}{3}$ e) $\frac{6}{5}-\frac{1}{2}$ f) $\frac{3}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$

Contenido 5: Mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas

P

Determine el $m.c.m.$ de las expresiones algebraicas:

a) $2ab^2$, $3a^2$ b) a^2-9, a^2-6a+9

S

a) $2ab^2 = 2 \cdot a \cdot b \cdot b$ Se descomponen $2ab^2$ y $3a^2$

$3a^2 = 3 \cdot a \cdot a$

$m.c.m. = (2)(3) \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b$ Se eligen y multiplican los factores comunes y no comunes

$m.c.m. = 6a^2b^2$

b) $a^2-9 = (a+3)(a-3)$

$a^2-6a+9 = (a-3)(a-3)$

$m.c.m. = (a+3)(a-3)(a-3)$

$m.c.m. = \mathbf{(a+3)(a-3)^2}$

C

Para encontrar el mínimo común múltiplo de dos o más expresiones algebraicas:

1. Se descomponen las expresiones en sus factores, si los tiene.
2. Se multiplican los factores comunes y no comunes; los comunes se toman de la descomposición en la que tengan mayor repetición, tantas veces como aparezcan en esta.

E

Determine el $m.c.m.$ de las siguientes expresiones algebraicas:

a) $10x^2y$, $6x^2y^2$

b) x^2-4, x^2+3x+2

c) $6x^2y$, $18xy^3$

d) x^2+4x+3, x^2-x-2

e) x^2+3x, x^2+5x+6, x^2-9

Contenido 6: Adición y sustracción de fracciones algebraicas cuyos denominadores son monomios diferentes

P

Efectúe las siguientes operaciones indicadas:

a) $\dfrac{2}{3x^2}+\dfrac{3}{2x}$ b) $\dfrac{4}{x}-\dfrac{5}{2x}$

$m.c.m$ de $3x^2$ y $2x$

$$\begin{array}{rl} 3x^2 = & (3)\cdot x\cdot x \\ 2x = & (2)\cdot x \\ \hline m.c.m. & (2)(3)\cdot x\cdot x \\ & = 6x^2 \end{array}$$

S

a) El $m.c.m.$ de $3x^2$ y $2x$ es $3x^2(2)=6x^2$

$$\frac{2}{3x^2}+\frac{3}{2x}=\frac{(2)(2)}{(3x^2)(2)}+\frac{(3)(3x)}{(2x)(3x)}$$

Se divide el $m.c.m.$ $6x^2$ por los denominadores $3x^2$ y $2x$ y cada resultado se multiplica por el numerador y denominador de la fracción correspondiente

$$=\frac{4}{6x^2}+\frac{9x}{6x^2}$$

$$=\mathbf{\frac{4+9x}{6x^2}}$$

b) El $m.c.m.$ de x y $2x$ es $2x$

$$\frac{4}{x}-\frac{5}{2x}=\frac{(4)(2)}{(x)(2)}-\frac{5}{2x}$$

Se divide el $m.c.m.$ $2x$ por los denominadores x y $2x$ y cada resultado se multiplica por el numerador y denominador de la fracción correspondiente.

$$=\frac{8}{2x}-\frac{5}{2x}=\frac{8-5}{2x}$$

$$=\mathbf{\frac{3}{2x}}$$

C

Para sumar o restar fracciones algebraicas con diferentes denominadores que son monomios se procede de la forma siguiente:

1. Se obtiene el $m.c.m.$ de los denominadores.
2. Se divide el $m.c.m.$ por el denominador de cada fracción y cada resultado se multiplica por el numerador y denominador de la fracción correspondiente.
3. Se efectúa la suma o sustracción indicada de fracciones algebraicas obtenidas en el paso 2 utilizando la suma o resta con igual denominador y se simplifica la fracción resultante, si es posible.

E

Efectúe las operaciones indicadas:

a) $\dfrac{1}{3x^2}+\dfrac{3}{4x}$ b) $\dfrac{5}{y}-\dfrac{4}{3y}$ c) $\dfrac{3}{4b}+\dfrac{2}{5a}$

d) $\dfrac{1}{6x^2}-\dfrac{3}{4x}$ e) $\dfrac{5}{4b}+\dfrac{1}{12b^2}$ f) $\dfrac{3}{10a}-\dfrac{1}{2a^2}$

Contenido 7: Adición de fracciones algebraicas cuyos denominadores son polinomios diferentes

P

Efectúe las sumas indicadas:

a) $\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}$

b) $\dfrac{5}{x^2-4}+\dfrac{2}{x+2}$

S

a) $\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}$

$$=\frac{(3)(x+1)}{(x-1)(x+1)}+\frac{(2)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{3x+3}{(x-1)(x+1)}+\frac{2x-2}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{3x+3+2x-2}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\mathbf{\frac{5x+1}{(x-1)(x+1)}}$$

b) $\dfrac{5}{x^2-4}+\dfrac{2}{x+2}$

$$=\frac{5}{(x+2)(x-2)}+\frac{2}{(x+2)}$$

$$=\frac{5}{(x+2)(x-2)}+\frac{(2)(x-2)}{(x+2)(x-2)}$$

$$=\frac{5}{(x-2)(x+2)}+\frac{2x-4}{(x+2)(x-2)}$$

$$=\frac{5+2x-4}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\mathbf{\frac{2x+1}{(x-2)(x+2)}}$$

C

Para sumar fracciones algebraicas con diferentes denominadores que son polinomios se procede de la forma siguiente:

1. Se encuentra el $m.c.m.$ de los denominadores.
2. Se divide el $m.c.m.$ por el denominador de cada fracción, y cada resultado se multiplica por el numerador y el denominador de la fracción correspondiente, resultando fracciones con el mismo denominador.
3. Se efectúa la operación obtenida en el paso 2 aplicando la regla de la adición de fracciones algebraicas con denominadores iguales y se simplifica la fracción resultante, si es posible.

E

Efectúe las siguientes sumas indicadas:

a) $\dfrac{4}{x+2}+\dfrac{1}{x+1}$

b) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x-2}$

c) $\dfrac{4}{x^2-1}+\dfrac{3}{x-1}$

d) $\dfrac{3}{x^2+3x+2}+\dfrac{3}{x+1}$

Contenido 8: Sustracción de fracciones algebraicas cuyos denominadores son polinomios diferentes

P

Efectúe las siguientes sustracciones indicadas:

a) $\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$

b) $\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{2}{x-1}$

S

a) $\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$

$=\dfrac{4(x+1)}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{4x+4}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{x-1}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{4x+4-(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{4x+4-x+1}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{\mathbf{3x+5}}{\mathbf{(x+1)(x-1)}}$

b) $\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{2}{x-1}$

$=\dfrac{1}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{2}{(x-1)}$

$=\dfrac{1}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{1}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{2x+2}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{1-(2x+2)}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{1-2x-2}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{\mathbf{-2x-1}}{\mathbf{(x+1)(x-1)}}$

C

La sustracción de fracciones algebraicas con diferentes denominadores que son polinomios se efectúa así:

1. Se encuentra el $m.c.m.$ de los denominadores.
2. Se divide el $m.c.m.$ por el denominador de cada fracción y cada resultado se multiplica por el numerador y denominador de la fracción correspondiente, obteniéndose fracciones con igual denominador.
3. Se efectúa la sustracción obtenida en el paso 2 utilizando la sustracción de fracciones con igual denominador y se simplifica, si es posible.

E

Efectúe las siguientes sustracciones indicadas:

a) $\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}$

b) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x-2}$

c) $\dfrac{4}{x^2-9}-\dfrac{3}{x-3}$

d) $\dfrac{3}{x^2+3x+2}-\dfrac{3}{x+2}$

Contenido 9: Adición y sustracción de fracciones algebraicas combinadas cuyos denominadores son diferentes

P

Efectúe las siguientes operaciones indicadas:

a) $\frac{1}{3x}+\frac{3}{2x}-\frac{1}{x}$

b) $\frac{2x+3}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}+\frac{2}{x+1}$

S

a) $\frac{1}{3x}+\frac{3}{2x}-\frac{1}{x}=\frac{(1)(2)}{(3x)(2)}+\frac{(3)(3)}{(2x)(3)}-\frac{(1)(6)}{(x)(6)}=\frac{2}{6x}+\frac{9}{6x}-\frac{6}{6x}$

$=\frac{2+9-6}{6x}=\frac{5}{6x}$

b) $\frac{2x+3}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}+\frac{2}{x+1}=\frac{2x+3}{(x+1)(x-1)}-\frac{2}{(x-1)}+\frac{2}{(x+1)}$

$=\frac{2x+3}{(x+1)(x-1)}-\frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)}+\frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{2x+3}{(x+1)(x-1)}-\frac{2x+2}{(x+1)(x-1)}+\frac{2x-2}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{2x+3-(2x+2)+2x-2}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{2x+3-2x-2+2x-2}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{\mathbf{2x-1}}{\mathbf{(x+1)(x-1)}}$

C

La adición y sustracción de fracciones algebraicas combinadas con distinto denominador se efectúa así:

1. Se encuentra el $m.c.m.$ de los denominadores.
2. Se divide el $m.c.m.$ por el denominador de cada fracción, y cada resultado se multiplica por el numerador y denominador de la fracción correspondiente, resultando fracciones con el mismo denominador.
3. Se efectúan las adiciones y sustracciones obtenidas en el paso 2 con la regla de la adición y sustracción de fracciones con denominadores iguales y se simplifica la fracción resultante, si es posible.

E

Efectúe las siguientes operaciones indicadas:

a) $\frac{2}{3y}+\frac{2}{y}-\frac{5}{6y}$

b) $\frac{2}{3x}-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{2x^2}$

c) $\frac{3}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}+\frac{4}{x+2}$

d) $\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x-1}+\frac{2}{x^2-1}$

e) $\frac{2}{a^2-a-30}+\frac{2}{a+5}-\frac{3}{a-6}$

Contenido 10: Comprobemos lo aprendido 2

E

Efectúe las siguientes operaciones indicadas:

a) $\frac{1}{x}+\frac{3}{x}-\frac{1}{x}$

b) $\frac{3}{2x}+\frac{5}{2x}-\frac{7}{2x}$

c) $\frac{x+2}{5x}+\frac{x-1}{5x}$

d) $\frac{x+2}{3x}-\frac{3x-2}{3x}$

e) $\frac{2x+1}{x-1}-\frac{2x}{x-1}+\frac{x}{x-1}$

f) $\frac{2x+3}{x+1}-\frac{x}{x+1}-\frac{2}{x+1}$

g) $\frac{x}{x(x-2)}-\frac{2}{x(x-2)}$

h) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

i) $\frac{2}{3y}+\frac{y+2}{4y}-\frac{3}{2y}$

j) $\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x+1}$

k) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}$

l) $\dfrac{1}{x(x-1)} - \dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$

m) $\dfrac{1}{x^2+3x+2} + \dfrac{1}{x+2}$

n) $\dfrac{1}{x^2-1} - \dfrac{1}{x^2+3x+2}$

o) $\dfrac{3}{m^2+3m+2} - \dfrac{2}{m+1} + \dfrac{5}{m+2}$

p) $\dfrac{a+5}{a^2-4} + \dfrac{5}{a+2} - \dfrac{3}{a-2}$

q) $\dfrac{a+3}{a^2+3a-4} - \dfrac{4}{a+4} + \dfrac{2}{a-1}$

Unidad 4

Ecuaciones de Tercer Grado

Sección 1 División sintética

Sección 2 Teorema del residuo y teorema del factor

Sección 3 Factorización de polinomios de tercer grado y resolución de ecuaciones de tercer grado

Sección 1: División sintética

Contenido 1: División con números enteros

P1

Efectúe la división $(-25)\div 5$ y escriba el dividendo $D=-25$ en la forma $D=dc$, siendo $d=5$ y c el cociente de la división.

S1

El resultado de la división $(-25)\div 5$ es un número con el que se completa la siguiente igualdad

$$(5)(\boxed{})=-25.$$

Como $(5)(-5)=-25$, se tiene $(-25)\div 5=-5$.

Nótese que siendo $D=-25$, $d=5$ y $c=-5$, se puede escribir el dividendo en la forma $D=dc$ la cual es $-25=(5)(-5)$.

Sean
D: Dividendo
d: Divisor
c: Cociente
$D\div d=c$
siempre que
$D=dc$.

C

Dividir un número (dividendo) entre otro (divisor), de manera exacta, es hallar un número (cociente) que multiplicado por el divisor dé el dividendo.

E1

Efectúe las siguientes divisiones. En cada caso escriba el dividendo en la forma $D = dc$, siendo d y c divisor y cociente, respectivamente.

a) $(-35)\div 7$ b) $(-25)\div(-5)$ c) $84\div 21$ d) $(78)\div(-3)$

P2

Determine cociente y residuo en la división de 87 entre 7 y escriba el dividendo en la forma $D = dc+r$, siendo d, c y r divisor, cociente y residuo, respectivamente.

S2

La división de 87 entre 7 no es exacta porque no existe entero que multiplicado por 7 dé 87. En cuyo caso se busca el mayor entero positivo c para el cual $7c < 87$.

Para ello se efectúa → D →

$$\begin{array}{r|l} 87 & 7 \leftarrow d \\ \cline{2-2} -7 & 12 \leftarrow \text{Cociente} \\ \hline 17 & \\ -14 & \\ \hline 3 \leftarrow \text{Residuo} & \end{array}$$

En la división efectuada se tiene

Dividendo: $D = 87$, Divisor: $d = 7$, Cociente: $c = 12$, Residuo: $r = 3$.

Se observa que $(7)(12)+3 = 84+3 = 87$, es decir, se puede escribir D en la forma $D = dc+r$, la cual está dada por $87 = (7)(12)+3$.

C

En la división, el dividendo es igual a la multiplicación del divisor por el cociente, más el residuo.

E2

Efectúe las siguientes divisiones. En cada caso escriba el dividendo D en la forma $D = dc+r$, siendo d, c y r divisor, cociente y residuo, respectivamente.

a) $D = 97$ entre $d = 8$ b) $D = 57$ entre $d = 9$

c) $D = 334$ entre $d = 30$ d) $D = 225$ entre $d = 70$

Contenido 2: División de polinomio entre binomio de la forma $x \pm a$

P

Divida el polinomio $3x^2+2x-8$ entre el binomio $x+3$.

S

1

$$\begin{array}{l|l} 3x^2+2x-8 & x+3 \\ \cline{2-2} & 3x \end{array}$$

Se divide $3x^2$ por x: $\dfrac{3x^2}{x} = 3x$ y se ubica el resultado bajo el divisor.

2

$$\begin{array}{rrr|l} 3x^2 & +\,2x & -8 & x+3 \\ \cline{4-4} -3x^2 & -\,9x & & 3x \\ \cline{1-3} & -7x & -8 & \end{array}$$

Se multiplica $3x$ por $x+3$:

$$3x(x+3)=3x^2+9x$$

El resultado se resta al dividendo.

3

$$\begin{array}{rrr|l} 3x^2 & +\,2x & -\,8 & x+3 \\ \cline{4-4} -3x^2 & -\,9x & & 3x-7 \\ \cline{1-3} & -7x & -\,8 & \\ & 7x & +21 & \\ \cline{1-3} & & 13 & \end{array}$$

Se divide $-7x$ entre x: $\dfrac{-7x}{x} = -7$.

El resultado se ubica después de $3x$.

Se repite el paso anterior con -7.

Se observa que al dividir $3x^2+2x-8$ entre $x+3$ se encontró el cociente $3x-7$ con el grado disminuido en 1 respecto al grado del dividendo y la constante 13 como residuo.

C

La división de un polinomio ordenado de forma descendente entre un binomio de la forma $x \pm a$ se efectúa con los siguientes pasos:

1. El primer término del cociente se obtiene dividiendo el primer término del dividendo por x.
2. El resultado del paso anterior se multiplica por el divisor, este producto se resta al polinomio dividendo.
3. Se continúan ejecutando los pasos 1. y 2., esta vez tomando el primer término del resultado en el paso 2. para encontrar el siguiente término del cociente, hasta que el residuo sea una constante (un número).

E

Efectúe las siguientes divisiones:

a) x^2-x-6 entre $x+3$

b) $2x^2-5x+7$ entre $x-4$

Contenido 3: División de polinomios de segundo grado entre binomios de la forma $x \pm a$, utilizando división sintética

P

Encuentre el cociente $Q(x)$ y el residuo R en la división de $P(x) = x^2 + 7x + 12$ entre $D(x) = x - 4$.

S

Se escriben los coeficientes del dividendo y se ubica 4 (opuesto de -4) a la derecha de estos. Se baja el primer coeficiente: 1.

1	7	12	4
1			

Ahora se multiplica 1 por 4. Se coloca el 4 resultante debajo del siguiente coeficiente 7 y se suman: $7 + 4 = 11$.

1	7	12	4
	4		
1	11		

Se repite el procedimiento multiplicando 11 por 4 y se suma el resultado a 12.

1	7	12	4
	4	44	
1	11	56	

Coeficientes del cociente: 1, 11 — Residuo: 56

El grado del cociente disminuye en 1 respecto al del dividendo.

Luego, cociente: $Q(x) = x + 11$, residuo: $R = 56$.

C

Para dividir un polinomio de segundo grado entre un binomio de primer grado de la forma $x \pm a$, mediante división sintética, se siguen los pasos que se dan a continuación:

1. Se escriben los coeficientes del dividendo y a la derecha de estos el opuesto del término independiente del divisor.
2. Se baja el primer coeficiente del dividendo y se multiplica por el número ubicado en la casilla derecha. Este producto se suma con el segundo coeficiente. Se repite el procedimiento con la suma obtenida.
3. El último de los números obtenidos es el residuo, mientras que los demás son los coeficientes del cociente, a los cuales se les acompañará de la parte literal para formar el cociente, teniendo en cuenta que el grado de este disminuirá en 1 respecto al grado del dividendo.

E

Encuentre en cada inciso el cociente y el residuo aplicando división sintética:

a) $x^2 - x - 6$ entre $x - 2$ b) $x^2 - 3x + 5$ entre $x - 1$ c) $2x^2 - x + 2$ entre $x - 3$

d) $2x^2 - x + 1$ entre $x + 4$ e) $x^2 - 1$ entre $x + 1$ f) $12x^2 - 5x$ entre $x + 2$

Contenido 4: División de polinomios de tercer grado entre binomios de la forma $x\pm a$, utilizando división sintética

P

Encuentre el cociente $Q(x)$ y el residuo R al dividir $P(x)=2x^3+9x^2+7x+6$ entre $D(x)=x+1$.

S

Se escriben los coeficientes del dividendo y -1 a la derecha de estos. Se baja el primer coeficiente 2.

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 9 & 7 & 6 & -1 \\ & & & & \\ \hline 2 & & & & \end{array}$$

Ahora se multiplica 2 por -1. Se coloca el resultado debajo del siguiente coeficiente 9 y se suman: $9+(-2)=7$.

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 9 & 7 & 6 & -1 \\ & -2 & & & \\ \hline 2 & 7 & & & \end{array}$$

Se repite el procedimiento anterior dos veces más con las sumas resultantes.

El grado del cociente disminuye en 1 respecto al del dividendo.

Luego, cociente: $Q(x)=2x^2+7x$, residuo: $R=6$.

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 9 & 7 & 6 & -1 \\ & -2 & -7 & 0 & \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\underbrace{2 \quad 7 \quad 0}_{\text{Coeficientes del cociente}}} & \underset{\text{Residuo}}{6} & \end{array}$$

C

Para dividir un polinomio de tercer grado entre un binomio de primer grado de la forma $x\pm a$, mediante división sintética, se siguen los mismos pasos aprendidos en el contenido anterior, con la diferencia que se aplica un paso más porque el dividendo es de tercer grado.

Ejemplo Encuentre el cociente y el residuo al dividir $P(x)=2x^3-x^2+1$ entre $D(x)=x-1$.

Nótese que en $P(x)=2x^3-x^2+1$ no aparece el término de primer grado, siendo su coeficiente igual a 0. Así, los coeficientes de $P(x)$ son $2, -1, 0$ y 1. Se aplica división sintética:

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ & 2 & 1 & 1 & \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\underbrace{2 \quad 1 \quad 1}_{\text{Coeficientes del cociente}}} & \underset{\text{Residuo}}{2} & \end{array}$$

Luego, cociente: $Q(x)=2x^2+x+1$, residuo: $R=2$.

E

Encuentre en cada inciso el cociente y el residuo aplicando división sintética:

a) x^3+4x^2-x-10 entre $x-2$

b) $4x^3-3x^2+11x-5$ entre $x+1$

c) x^3-3x^2-6 entre $x-2$

Contenido 5: Algoritmo de la división de polinomios

P

Divida $P(x)=x^3+2x^2-x+1$ entre $D(x)=x-2$ y exprese el dividendo en la forma $P(x)=D(x)\,Q(x)+R$, donde $Q(x)$ y R son el cociente y residuo respectivamente.

S

Se aplica división sintética.

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ & 2 & 8 & 14 & \\ \hline 1 & 4 & 7 & 15 & \end{array}$$

Coeficientes del cociente: $1 \quad 4 \quad 7$ Residuo: 15

Resulta que, el cociente es $Q(x)=x^2+4x+7$ y el residuo $R=15$.

Se prueba ahora que se cumple la igualdad

$$P(x)=D(x)\,Q(x)+R$$

En efecto,

$$\begin{aligned} D(x)\,Q(x)+R &= (x-2)(x^2+4x+7)+15 \\ &= x^3+2x^2-x-14+15 \\ &= x^3+2x^2-x+1 = P(x) \end{aligned}$$

$D(x)\,Q(x)$:

$$\begin{array}{rrrrr} & & x^2 & +\,4x & +\,7 \\ \times) & & & x & -\,2 \\ \hline & x^3 & +\,4x^2 & +\,7x & \\ & & -\,2x^2 & -\,8x & -\,14 \\ \hline & x^3 & +\,2x^2 & -\,x & -\,14 \end{array}$$

Por la simetría de la igualdad que es enunciada a la derecha, se tiene

$$P(x)=D(x)Q(x)+R$$

Es decir,

$$x^3+2x^2-x+1=(x-2)(x^2+4x+7)+15$$

Simetría de la igualdad:
Si $a=b$, entonces $b=a$

C

En la división de polinomios, el dividendo $P(x)$ es igual a la multiplicación del divisor $D(x)$ por el cociente $Q(x)$, más el residuo R, es decir $P(x)=D(x)Q(x)+R$.

E

Use división sintética para expresar cada dividendo en la forma $P(x)=D(x)\,Q(x)+R$, siendo $Q(x)$ y R cocientes y residuos respectivos.

a) $P(x)=x^2+5x+2,\quad D(x)=x-5$

b) $P(x)=x^3+6x^2+3x-1,\quad D(x)=x-2$

c) $P(x)=3x^3-x^2+2x-1,\quad D(x)=x-1$

d) $P(x)=x^3-6x^2-2x+5,\quad D(x)=x+3$

Contenido 6: Comprobemos lo aprendido 1

E

1. Use la división sintética para hallar el cociente y residuo en cada caso:

   a) x^2+5x+3 entre $x-1$

   b) x^2-2x+1 entre $x+3$

   c) x^2+3x-5 entre $x-7$

   d) $3a^2-6a+1$ entre $a+3$

   e) x^2-2 entre $x+3$

   f) $2a^2-3a-1$ entre $a-\frac{1}{2}$

2. Use la división sintética para hallar el cociente y residuo en cada inciso:

   a) x^3-4x^2+7x-6 entre $x-2$

   b) $2x^3-3x^2+7x-5$ entre $x-1$

   c) $3x^3+14x^2-4x+3$ entre $x+5$

   d) $3x^3+2x^2-4$ entre $x-1$

   e) $b^3-14b-5$ entre $b+3$

   f) $6a^3+2a^2-a-2$ entre $a-\frac{2}{3}$

3. Use la división sintética para expresar cada dividendo en la forma $P(x)=D(x)Q(x)+R$, donde $Q(x)$ y R son cocientes y residuos respectivos.

   a) $P(x)=3x^2-5x+1$, $D(x)=x+1$

   b) $P(x)=3x^3-5x^3-2x-1$, $D(x)=x-2$

   c) $P(x)=-2x^3+4x^3+7x+1$, $D(x)=x-3$

Sección 2: Teorema del residuo y teorema del factor

Contenido 1: Valor numérico de un polinomio

P

Calcule los valores numéricos $P(2)$ y $P(-1)$ para el polinomio $P(x)=x^3-x^2+3x-1$.

S

Se sustituye $x=2$ en $P(x)=x^3-x^2+3x-1$:

$$\begin{aligned} P(2)&=2^3-2^2+(3)(2)-1\\ &=8-4+6-1=9. \end{aligned}$$

Luego, $\boldsymbol{P(2)=9}$.

2

$P(x)=x^3-x^2+3x-1$

$P(2)=2^3-2^2+(3)(2)-1$

De igual forma, si se sustituye $x=-1$ en el mismo polinomio, se obtiene:

$$\begin{aligned} P(-1)&=(-1)^3-(-1)^2+(3)(-1)-1\\ &=-1-1-3-1=-6. \end{aligned}$$

Así, $\boldsymbol{P(-1)=-6}$.

C

El valor numérico de un polinomio en una variable se calcula al sustituir dicha variable por un número dado y efectuar las operaciones indicadas.

E1

Calcule los valores numéricos pedidos para cada polinomio:

a) $P(x)=x^2-3x+5$, $\quad P(3)$, $P(-1)$, $P(0)$

b) $P(x)=x^3-2x^2+3x-1$ $\quad P(1)$, $P(0)$, $P(3)$

c) $P(x)=x^3+x^2-x+1$, $\quad P(-1)$, $P(2)$, $P(3)$

d) $P(x)=7x^3-3x^2+x-2$, $\quad P(3)$, $P(1)$, $P(5)$

Ejemplo Calcule los valores numéricos $P(1)$ y $P(-2)$ para el polinomio $P(x)=(x+1)(x+2)+3$.

Para calcular $P(1)$ se debe sustituir $x=1$ en $P(x)=(x+1)(x+2)+3$:

$$P(1)=(1+1)(1+2)+3=(2)(3)+3=6+3=9.$$

Luego, $\boldsymbol{P(1)=9}$.

Para $P(-2)$ se tiene

$$P(-2)=(-2+1)(-2+2)+3=(-1)(0)+3=0+3=3.$$

En conclusión $\boldsymbol{P(-2)=3}$.

E2

Calcule los valores numéricos $P(3)$ y $P(-4)$ para cada polinomio:

a) $P(x)=(x+1)(x-3)+1$

b) $P(x)=(x-2)(x+4)+1$

Contenido 2: Teorema del residuo

P

Compare el residuo de la división de $P(x)=x^3+3x^2+x+5$ entre $D(x)=x-2$ y el valor $P(2)$.

S

Se aplica división sintética, obteniendo el cociente $Q(x)=x^2+5x+11$ y el residuo $R=27$.

1	3	1	5	2
	2	10	22	
1	5	11	27	

Al sustituirse $x=2$ en $P(x)$ resulta

$$P(2)=2^3+(3)(2^2)+2+5=8+12+7=27.$$

Se observa que $R=27=P(2)$.

C

Teorema del residuo
El residuo de la división de un polinomio $P(x)$ entre un binomio de primer grado $x-c$ es el valor numérico $P(c)$.

En efecto, si en la división de $P(x)$ entre el binomio de primer grado $x-c$, $Q(x)$ es el cociente y R el residuo, por el algoritmo de la división se cumple

$$P(x)=(x-c)Q(x)+R$$

En el problema anterior:
$P(x)=(x-2)(x^2+5x+11)+27$

así que $P(c)=(c-c)Q(c)+R=(0)Q(c)+R=R$. Por tanto, $P(c)=R$.

Ejemplo Encuentre los residuos de dividir $P(x)=x^3+x^2-3x+1$ entre los binomios $x-1$ y $x+2$ utilizando el teorema del residuo.

El residuo de dividir $P(x)=x^3+x^2-3x+1$ entre $x-1$ se determina calculando $P(1)$:

$$\begin{aligned} P(1)&=1^3+1^2-(3)(1)+1\\ &=1+1-3+1\\ &=0. \end{aligned}$$

Luego, el residuo es $R=0$.
Para el binomio $x+2$, se reescribe este como $x+2=x-(-2)$ y se calcula $P(-2)$:

$$\begin{aligned} P(-2)&=(-2)^3+(-2)^2-(3)(-2)+1\\ &=-8+4+6+1\\ &=3. \end{aligned}$$

De modo que el residuo es $R=3$.

E

Encuentre el residuo de cada división, empleando el teorema del residuo:

a) $P(x)=x^3+x^2-2x+12$ entre $x-2$

b) $P(x)=3x^3-7x^2-x+1$ entre $x+2$

c) $P(x)=2x^3+3x^2-5$ entre $x-1$

d) $P(x)=-10x^3-x^2+2x+15$ entre $x+1$

Contenido 3: Teorema del factor

P

Verifique que $x-1$ es un factor de $P(x)=x^3+4x^2+x-6$ utilizando el teorema del residuo.

S

Se calcula $P(1)$:

$$\begin{aligned} P(1) &= 1^3+(4)(1^2)+1-6 \\ &= 1+4+1-6 \\ &= 0, \end{aligned}$$

encontrando que el residuo es $R=0$. Por el algoritmo de la división, $P(x)$ se puede expresar en la forma

$$P(x)=(x-1)\,Q(x)+R=(x-1)\,Q(x)+0=(x-1)\,Q(x),$$

donde $Q(x)$ es el cociente. Así, $x-1$ es factor de $P(x)=x^3+4x^2+x-6$.

C

Teorema del factor
Un polinomio $P(x)$ tiene un factor de primer grado $x-c$ si y solo si $P(c)=0$.

Ejemplo

Determine si $x-2$ y $x+3$ son factores de $P(x)=x^3-4x^2+3x+2$ utilizando el teorema del factor.

Como

$$P(2)=2^3-(4)(2^2)+(3)(2)+2=8-16+8=0,$$

se tiene que $x-2$ es factor de $P(x)$.

Ahora, se reescribe $x+3=x-(-3)$ de modo que

$$P(-3)=(-3)^3-(4)(-3)^2+(3)(-3)+2=-27-36-9+2=-70.$$

Como $P(-3)=-70\neq 0$, $x+3$ no es factor de $P(x)$.

E

a) De los binomios propuestos seleccione el que es factor de $P(x)=x^3-4x^2+7x-6$ utilizando el teorema del factor.

$x-2$ $\qquad$ $x-3$ $\qquad$ $x+1$ $\qquad$ $x+3$

b) De los binomios propuestos seleccione el que es factor de $P(x)=x^3-3x^2-4x-12$ utilizando el teorema del factor.

$x-2$ $\qquad$ $x+3$ $\qquad$ $x+1$ $\qquad$ $x+2$

Contenido 4: Comprobemos lo aprendido 2

1. Calcule los valores numéricos pedidos para cada polinomio.

   a) $P(x)=x^3+x^2-x+1$ $\qquad P(2),\ P(0),\ P(-1)$

   b) $P(x)=2x^3+2x^2-5x+1$ $\qquad P(3),\ P(-1),\ P(5)$

   c) $P(x)=-3x^3+x^2-5x-1$ $\qquad P(0),\ P(-2),\ P(1)$

   d) $P(x)=x^3-5x+3$ $\qquad P(2),\ P(-4),\ P(-1)$

   e) $P(x)=x^3-1$ $\qquad P(-1),\ P(0),\ P(1)$

2. Encuentre el residuo de cada división, empleando solamente el teorema del residuo.

   a) $P(x)=x^3+x^2-2x+12$ entre $x-2$

   b) $P(x)=x^3-2x^2-x-1$ entre $x+3$

   c) $P(x)=3x^3+8x^2-5x-1$ entre $x-1$

   d) $P(x)=-7x^3-x^2-1$ entre $x+4$

   e) $P(x)=x^3+x^2+x+1$ entre $x-\frac{1}{2}$

3. Utilice el teorema del factor para determinar cual de los siguientes binomios es factor de $P(x)=x^3+x^2-14x+6$.

   $x-2$ $\qquad x-3$ $\qquad x-1$ $\qquad x+3$

4. Utilice el teorema del factor para determinar cual de los siguientes binomios es factor de $P(x)=x^3-3x^2+4$.

   $x+2$ $\qquad x+3$ $\qquad x+1$ $\qquad x-2$

Sección 3: Factorización de polinomios de tercer grado y resolución de ecuaciones de tercer grado

Contenido 1: Factorización de polinomios de tercer grado aplicando el teorema del factor y división sintética

P

Factorice el polinomio x^3+2x^2-x-2.

S

1 Se determinan los divisores del término independiente -2 del polinomio, los cuales son ± 1, ± 2.

2 De estos divisores se busca un valor c, para el cual $P(c)=0$, siendo $P(x)=x^3+2x^2-x-2$, por ejemplo si se ensaya con 1 se tiene

$$P(1)=1^3+(2)(1^2)-1-2=1+2-3=0,$$

de modo que $D(x)=x-1$ es un factor de x^3+2x^2-x-2.

3 Se divide $P(x)=x^3+2x^2-x-2$ por $D(x)=x-1$ usando la división sintética, obteniendo el cociente $Q(x)=x^2+3x+2$ y el residuo $R=0$, luego

1	2	-1	-2	1
	1	3	2	
1	3	2	0	

$$x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x^2+3x+2) \quad ①$$

$P(x)=D(x)Q(x)+R$

4 Se factoriza $Q(x)$: $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$. ②

5 Al sustituir ② en ① se obtiene

$$\begin{aligned} x^3+2x^2-x-2 &= (x-1)(x^2+3x+2) \\ &= (x-1)(x+1)(x+2) \end{aligned}$$

C

Para factorizar un polinomio $P(x)$ de tercer grado se procede así:

1. Se encuentran los divisores del término independiente del polinomio.
2. Se busca dentro de los divisores obtenidos en el paso 1., un c tal que $P(c)=0$ para obtener un $x-c$ que es un factor del polinomio según el teorema del factor.
3. Se efectúa la división sintética entre el polinomio dado y el factor $x-c$ del paso anterior. El dividendo queda expresado en la forma $P(x)=(x-c)Q(x)$.
4. Se factoriza el cociente $Q(x)$.
5. Se sustituye la factorización de $Q(x)$ en $P(x)=(x-c)\,Q(x)$.

E

Factorice los siguientes polinomios:

a) x^3-2x^2-x+2

b) x^3+5x^2-x-5

c) x^3+4x^2+x-6

Contenido 2: Ecuaciones de segundo grado

P_1

Resuelva la ecuación de segundo grado $x^2-x-2=0$ utilizando factorización.

S_1

Se factoriza el lado izquierdo de $x^2-x-2=0$, obteniéndose

$$(x-2)(x+1)=0$$

Se iguala a cero cada factor y se resuelven las ecuaciones de primer grado

$$x-2=0, \quad x+1=0.$$

Luego, las soluciones son $\boldsymbol{x=2}$, $\boldsymbol{x=-1}$.

Si A y B son expresiones algebraicas con $\mathrm{AB}=0$, entonces
$\mathrm{A}=0$ o $\mathrm{B}=0$.

C

Para resolver mediante factorización una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c=0$, con $a\neq 0$, se factoriza el lado izquierdo de la ecuación, luego se iguala a cero cada factor y se resuelven las ecuaciones de primer grado resultantes.

E_1

Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando factorización:

a) $x^2+x-2=0$ b) $x^2+7x+10=0$ c) $x^2-5x+6=0$

P_2

Resuelva la ecuación de segundo grado $x^2+3x-1=0$ utilizando la fórmula general.

S_2

En la ecuación dada, $a=1$, $b=3$ y $c=-1$.
Se sustituyen estos valores en la fórmula de la derecha:

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(1)(-1)}}{(2)(1)}=\frac{-3\pm\sqrt{9+4}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$$

Luego, las soluciones son:

$$x=\frac{-3+\sqrt{13}}{2},\ x=\frac{-3-\sqrt{13}}{2}.$$

La fórmula general para resolver la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ es

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

E_2

Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando la fórmula general:

a) $x^2-x-2=0$

b) $x^2+5x+2=0$

c) $3x^2+3x-1=0$

d) $5x^2+x-3=0$

Contenido 3: Resolución de ecuaciones de tercer grado

P1

Resuelva la ecuación $x(x-2)(x+1)=0$.

S1

Cada factor del lado izquierdo de la ecuación se iguala a cero:

$$x=0,\ x-2=0,\ x+1=0$$

De lo anterior se obtiene

$$\mathbf{x=0, \qquad x=2, \qquad x=-1.}$$

Si A, B y C son expresiones algebraicas con $\mathrm{ABC}=0$, entonces

$$\mathrm{A}=0 \text{ o } \mathrm{B}=0 \text{ o } \mathrm{C}=0$$

C1

Para resolver una ecuación de tercer grado de la forma $x(x+a)(x+b)=0$ se iguala a cero cada factor del lado izquierdo y se resuelven las ecuaciones de primer grado $x+a=0$ y $x+b=0$.

E1

Resuelva las siguientes ecuaciones de tercer grado:

a) $x(x-2)(x+5)=0$ b) $x(x-1)(x+1)=0$ c) $x(2x+1)(x+1)=0$

P2

Resuelva la ecuación $x^3+3x^2+2x=0$.

S2

Se extrae x como factor común de x^3+3x^2+2x:

$$x(x^2+3x+2)=0$$

Se factoriza $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ y se sustituye en la igualdad anterior:

$$x(x+1)(x+2)=0$$

Entonces,

$$x=0, \qquad x+1=0, \qquad x+2=0$$

Luego, las soluciones son $\mathbf{x=0,\ \ x=-1,\ \ x=-2}$.

C2

Para resolver la ecuación de tercer grado $x^3+bx^2+cx=0$ se extrae el factor común x, para obtener $x(x^2+bx+c)=0$, luego se factoriza x^2+bx+c y finalmente se aplica lo establecido en la conclusión anterior.

E2

Resuelva las siguientes ecuaciones de tercer grado:

a) $x^3+x^2-6x=0$ b) $x^3-3x^2-4x=0$ c) $x^3-4x=0$

Contenido 4: Resolución de ecuaciones de tercer grado aplicando el teorema del factor y división sintética (1)

P

Resuelva la ecuación $x^3-3x^2-x+3=0$.

S

Se debe factorizar el polinomio $P(x)=x^3-3x^2-x+3$. En primer lugar, los divisores del término independiente 3 son ±1 y ±3.

Como $P(1)=1^3-(3)(1^2)-1+3=1-3-1+3=0$,

el binomio $x-1$ es un factor de x^3-3x^2-x+3.

Ahora se divide x^3-3x^2-x+3 por $x-1$ aplicando división sintética. →

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & -1 & 3 & 1 \\ & 1 & -2 & -3 & \\ \hline 1 & -2 & -3 & 0 & \end{array}$$

Luego,

$$x^3-3x^2-x+3=(x-1)(x^2-2x-3)$$

siendo el cociente x^2-2x-3.

Ahora se factoriza este polinomio:

$$x^2-2x-3=(x-3)(x+1),$$

resultando que

$$\begin{aligned} x^3-3x^2-x+3&=(x-1)(x^2-2x-3) \\ &=(x-1)(x-3)(x+1) \end{aligned}$$

Sustituir $(x-3)(x+1)$ en lugar de x^2-2x-3

La ecuación $x^3-3x^2-x+3=0$ es equivalente a

$$(x-1)(x-3)(x+1)=0,$$

de lo cual se desprende que

$$x-1=0, \qquad x-3=0, \qquad x+1=0$$

Las soluciones son $\boldsymbol{x=1}$, $\boldsymbol{x=3}$, $\boldsymbol{x=-1}$.

C

Para resolver una ecuación de tercer grado se factoriza el polinomio de tercer grado en polinomios de primer grado, luego se iguala a cero cada factor y se resuelven las ecuaciones de primer grado resultantes.

E

Resuelva las siguientes ecuaciones de tercer grado:

a) $x^3-x^2-4x+4=0$

b) $x^3+2x^2-x-2=0$

c) $x^3-5x^2-x+5=0$

Contenido 5: Resolución de ecuaciones de tercer grado aplicando el teorema del factor y división sintética (2)

P1 Resuelva la ecuación $x(x^2+x-1)=0$.

S1

Se iguala a cero cada factor del lado izquierdo de la ecuación $x(x^2+x-1)=0$:

$$x=0,\ x^2+x-1=0,$$

Nótese que en la ecuación de segundo grado $x^2+x-1=0$, el polinomio x^2+x-1 no se puede factorizar con los casos estudiados, de modo que se utiliza la fórmula general, con $a=1$, $b=1$, $c=-1$.

> La fórmula general para resolver la ecuación de segundo grado
>
> $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ es
>
> $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-(4)(1)(-1)}}{(2)(1)}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

De modo que las soluciones de la ecuación dada son $x=0$, $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

E1

Resuelva las siguientes ecuaciones de tercer grado:

a) $x(x^2-2x-2)=0$

b) $x(x^2-4x+1)=0$

P2 Resuelva la ecuación $x^3+x^2-4x+2=0$

S2

Se factoriza el polinomio $P(x)=x^3+x^2-4x+2$ tomando en cuenta que los divisores de 2 son ± 1 y ± 2.

Como $P(1)=1^3+1^2-(4)(1)+2=1+1-4+2=0$, el binomio $x-1$ es un factor de x^3+x^2-4x+2.

Se aplica la división sintética para dividir x^3+x^2-4x+2 entre $x-1$.

1	1	−4	2	1
	1	2	−2	
1	2	−2	0	

El cociente es x^2+2x-2, así que $x^3+x^2-4x+2=(x-1)(x^2+2x-2)$.

Luego,

$$(x-1)(x^2+2x-2)=0$$
$$x=1,\ x^2+2x-2=0$$

y para resolver $x^2+2x-2=0$ se usa la fórmula general con $a=1$, $b=2$, $c=-2$.

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-(4)(1)(-2)}}{(2)(1)}=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{-2\pm 2\sqrt{3}}{2}=-1\pm\sqrt{3}$$

obteniendo $x=-1+\sqrt{3}$, $x=-1-\sqrt{3}$

de modo que las soluciones de la ecuación dada son $\boldsymbol{x=1,\ x=-1+\sqrt{3},\ x=-1-\sqrt{3}}$.

E2

Resuelva las ecuaciones de tercer grado:

a) $x^3-4x^2+4x-1=0$

b) $x^3+x^2-3x+1=0$

Contenido 6: Comprobemos lo aprendido 3

E

1. Factorice los siguientes polinomios utilizando teorema de factor y la división sintética.

   a) x^3-3x^2-x+3

   b) x^3+x^2-4x-4

   c) x^3-5x^2+4

2. Resuelva las siguientes ecuaciones:

   a) $x(x-1)(x-2)=0$

   b) $x(x+3)(x-5)=0$

   c) $x(x+2)(x+7)=0$

   d) $x^3+3x^2+2x=0$

   e) $x^3+x^2-2x=0$

   f) $x^3-5x^2+6x=0$

3. Determine las soluciones de las siguientes ecuaciones de tercer grado:

   a) $x^3+3x^2-x-3=0$

   b) $x^3-7x-6=0$

   c) $x^3-6x^2+11x-6=0$

4. Resuelva las siguientes ecuaciones de tercer grado:

a) $x(x^2+2x-2)=0$

b) $x^3-4x^2+2x+1=0$

c) $x^3+2x^2-2x-1=0$

Unidad 5

Introducción a la Trigonometría

Sección 1 Funciones trigonométricas de ángulos agudos en triángulos rectángulos

Sección 2 Valores de las funciones trigonométricas de ángulos agudos

Sección 3 Resolución de triángulos rectángulos

Sección 4 Relaciones entre seno y coseno

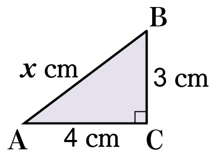
Sección 1: Funciones trigonométricas de ángulos agudos en triángulos rectángulos

Contenido 1: El Teorema de Pitágoras

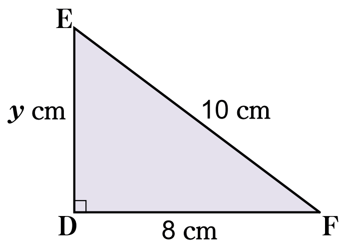
P

Encuentre la longitud del lado desconocido en los siguientes triángulos rectángulos:

a)

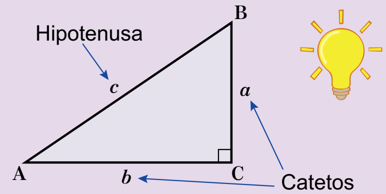


b)



Teorema de Pitágoras

$\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo



$$c^2 = a^2 + b^2$$

S

a) Los catetos tienen longitudes de 3 cm y 4 cm y como el $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo, así por el Teorema de Pitágoras se tiene:

$$\begin{aligned} x^2 &= 3^2+4^2 \\ &= 9+16 \\ &= 25 \end{aligned}$$

Se extrae raíz cuadrada y se sabe que $x > 0$, resulta:

$$x = 5$$

Por tanto, la longitud de la hipotenusa es **5 cm**.

La longitud del lado del triángulo es un número positivo.

b) La hipotenusa mide 10 cm y uno de los catetos 8 cm, el $\triangle DEF$ es un triángulo rectángulo, así por el Teorema de Pitágoras se tiene:

$$10^2 = y^2+8^2$$

$$100 = y^2+64$$

Por transposición de términos:

$$y^2 = 100-64$$

$$y^2 = 36$$

Se extrae raíz cuadrada y se sabe que $y > 0$, resulta:

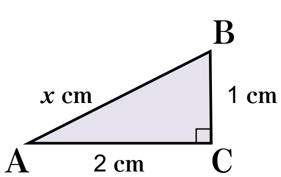
$$y = 6$$

Por tanto, la longitud del otro cateto es **6** cm.

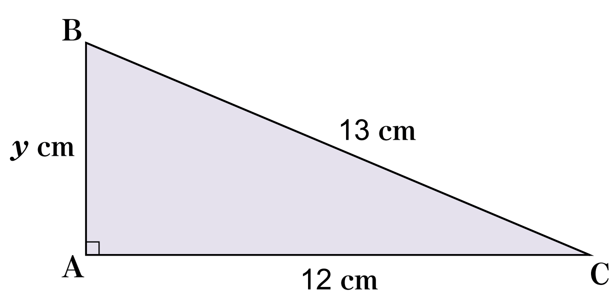
E

Encuentre la longitud del lado desconocido en los siguientes triángulos rectángulos:

a)



b)



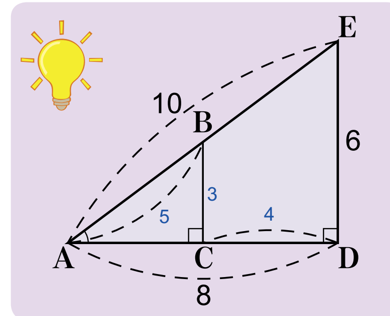
Contenido 2: Razones entre los lados de un triángulo rectángulo

P

Dados los triángulos de la figura, encuentre las siguientes razones:

$$\frac{CB}{BA} = \frac{\square}{\square} \qquad \frac{DE}{EA} = \frac{\square}{\square}$$
$$\frac{CA}{BA} = \frac{\square}{\square} \qquad \frac{DA}{EA} = \frac{\square}{\square}$$
$$\frac{CB}{CA} = \frac{\square}{\square} \qquad \frac{DE}{DA} = \frac{\square}{\square}$$

Compare los resultados de las razones obtenidas.



S

Las razones son:

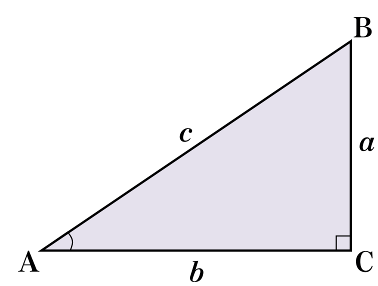
$$\frac{CB}{BA} = \frac{3}{5} \qquad \frac{DE}{EA} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$
$$\frac{CA}{BA} = \frac{4}{5} \qquad \frac{DA}{EA} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$
$$\frac{CB}{CA} = \frac{3}{4} \qquad \frac{DE}{DA} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Se observa que cada razón de la columna izquierda es igual a la correspondiente razón de la columna de la derecha.

C

Las razones entre los lados de un triángulo rectángulo no dependen del tamaño del triángulo, sino solamente del ángulo agudo que se considere, **esto significa que son funciones de un ángulo**.

Sean el triángulo de la figura y el ángulo A del mismo. Entonces, el lado a se llama **cateto opuesto (co)** a A, mientras que b se le denomina **cateto adyacente (ca)** a A. Al lado c opuesto al ángulo recto se le llama **hipotenusa (hip)**.

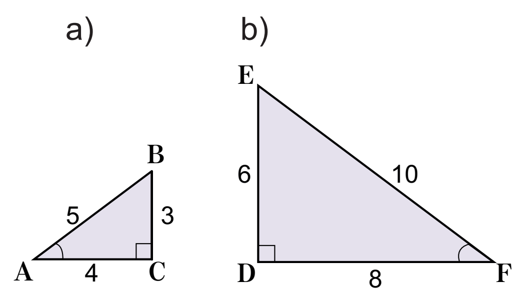


E

Dados los triángulos de la figura de la derecha, encuentre las razones:

$$\frac{\text{co}}{\text{hip}}, \frac{\text{ca}}{\text{hip}}, \frac{\text{co}}{\text{ca}}$$

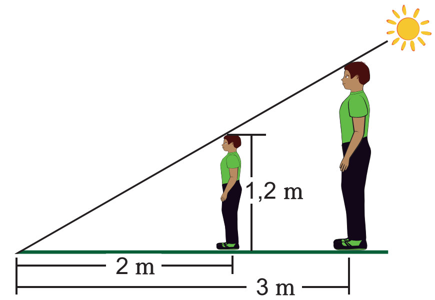
respecto al ángulo agudo marcado, y compare los valores obtenidos.



Contenido 3: Tangente de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo

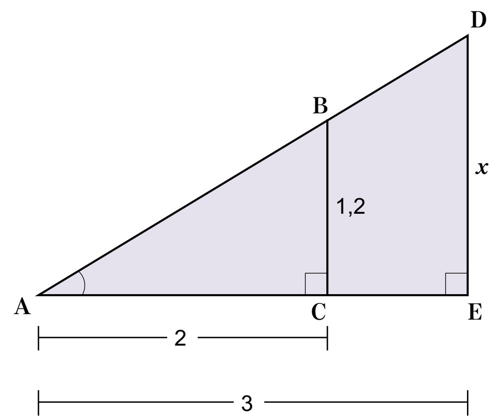
P

Un niño de 1,2 m de estatura camina en línea recta delante de su papá, y proyecta una sombra de 2 m. Si la sombra proyectada por el papá mide 3 m, ¿cuál es su estatura?



S

Con la información proporcionada se forma la figura de la derecha. Se observa que los triángulos rectángulos ABC y ADE comparten el $\angle A$, por lo cual la razón $\frac{\text{co}}{\text{ca}}$ no depende del tamaño de ellos, sino únicamente del $\angle A$. Esto significa que:

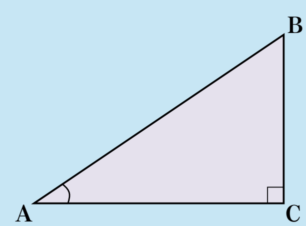


$$\frac{x}{3} = \frac{1,2}{2}$$
$$\frac{x}{3} = 0,6$$
$$x = (3)(0,6)$$
$$x = 1,8$$

Por tanto, el padre tiene una estatura de **1,8** m.

C

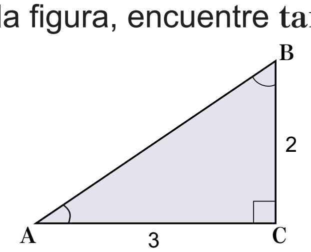
En el triángulo rectángulo ABC el valor de la razón $\frac{\text{co}}{\text{ca}}$ respecto a $\angle A$, no depende del tamaño del triángulo sino solamente del $\angle A$. Este valor recibe el nombre de **tangente del** $\angle A$ y se denota por $\tan A$.



En el problema anterior se tiene que $\tan A = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{1,2}{2} = 0,6$

E

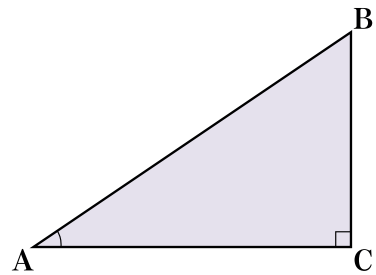
Dado el triángulo rectángulo de la figura, encuentre $\tan A$ y $\tan B$.



Contenido 4: Funciones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo agudo

Definición

De la misma forma en que la razón $\frac{BC}{CA}$ depende únicamente del ángulo A, así las razones $\frac{BC}{AB}$ y $\frac{AC}{AB}$ también dependen solamente del $\angle A$.



Estas razones reciben los siguientes nombres:

$\frac{BC}{AB}$: se llama **seno del $\angle A$** y se denota por $\textbf{sen}\ A$

$\frac{AC}{AB}$: se llama **coseno del $\angle A$** y se denota por $\textbf{cos}\ A$

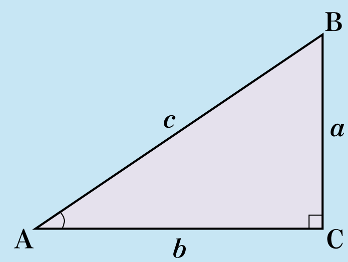
C

Dado el triángulo rectángulo de la derecha, se definen las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente para el $\angle A$ así:

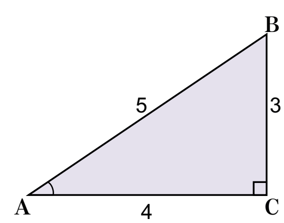
$\operatorname{sen} A = \frac{a}{c}$ $\qquad$ $\cos A = \frac{b}{c}$ $\qquad$ $\tan A = \frac{a}{b}$

En términos de cateto opuesto (co), cateto adyacente (ca) e hipotenusa (hip) se tiene:

$\operatorname{sen} A = \frac{\text{co}}{\text{hip}}$ $\qquad$ $\cos A = \frac{\text{ca}}{\text{hip}}$ $\qquad$ $\tan A = \frac{\text{co}}{\text{ca}}$



Ejemplo Encuentre las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente para el ángulo A del triángulo rectángulo de la derecha.



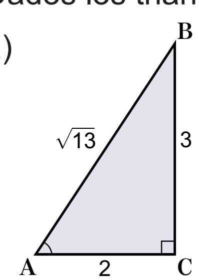
El cateto opuesto es 3, el adyacente 4 y la hipotenusa 5 respecto a $\angle A$ respectivamente. Por tanto,

$\operatorname{sen} A = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $\cos A = \frac{4}{5}$ $\qquad$ $\tan A = \frac{3}{4}$

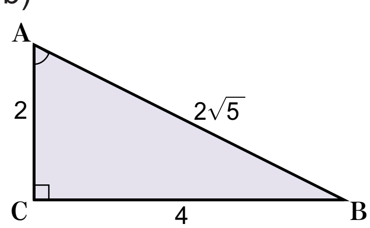
E

Dados los triángulos rectángulos siguientes, encuentre $\operatorname{sen} A$, $\cos A$ y $\tan A$.

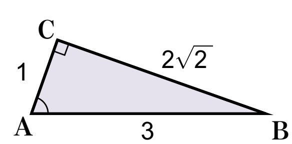
a)



b)



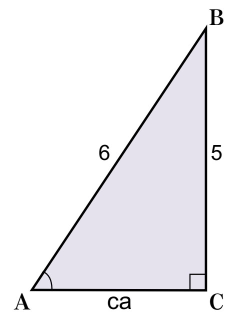
c)



Contenido 5: Cálculo de los valores de dos funciones trigonométricas a partir del valor de otra

Ejemplo 1 Si A es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo y $\operatorname{sen} A = \frac{5}{6}$, calcule los valores de $\cos A$ y $\tan A$.

Dado que los valores de las funciones trigonométricas dependen únicamente del ángulo, y en un triángulo rectángulo $\operatorname{sen} A = \frac{\text{co}}{\text{hip}}$, sea el triángulo con cateto opuesto a A igual a 5 e hipotenusa igual a 6.



Al aplicar el Teorema de Pitágoras se tiene

$$6^2 = 5^2 + (\text{ca})^2$$

$$(\text{ca})^2 = 36 - 25 = 11$$

ca > 0, entonces $\quad \text{ca} = \sqrt{11}$

Por tanto,

$$\cos A = \frac{\text{ca}}{\text{hip}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

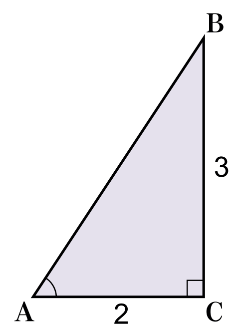
$$\tan A = \frac{\text{co}}{\text{ca}} = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

Racionalizando:

$$\frac{5}{\sqrt{11}} = \left(\frac{5}{\sqrt{11}}\right)\left(\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}}\right) = \frac{5\sqrt{11}}{11}$$

Ejemplo 2 Si A es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo y $\tan A = \frac{3}{2}$, calcule los valores de $\operatorname{sen} A$ y $\cos A$.

Dado que $\tan A = \frac{\text{co}}{\text{ca}}$, sea el triángulo con cateto opuesto al $\angle A$ igual a 3 y cateto adyacente igual a 2.



Al aplicar el teorema de Pitágoras se tiene

$$(\text{hip})^2 = 3^2 + 2^2 = 13$$

y como hip > 0, entonces $\quad \text{hip} = \sqrt{13}$

Por tanto, $\quad \operatorname{sen} A = \frac{\text{co}}{\text{hip}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$$\cos A = \frac{\text{ca}}{\text{hip}} = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

E

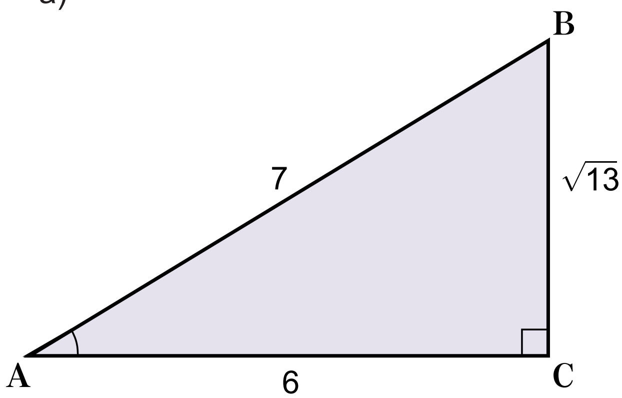
1. Si A es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo y $\operatorname{sen} A = \frac{1}{4}$, calcule los valores de $\cos A$ y $\tan A$.
2. Si A es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo y $\cos A = \frac{3}{4}$, calcule los valores de $\operatorname{sen} A$ y $\tan A$.
3. Si A es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo y $\tan A = \frac{5}{2}$, calcule los valores de $\operatorname{sen} A$ y $\cos A$.

Contenido 6: Comprobemos lo aprendido 1

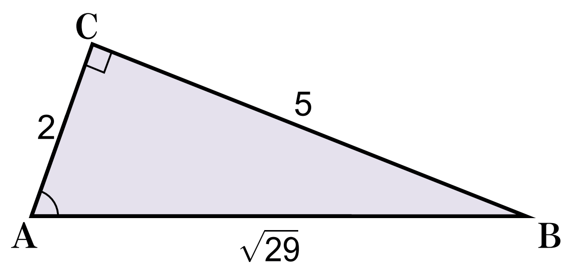
E

1. Encuentre los valores de $\operatorname{sen} A$, $\cos A$ y $\tan A$ para el ángulo indicado en los siguientes triángulos rectángulos.

a)



b)



2. Si A es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo y:

a) $\cos A = \frac{1}{2}$, calcule los valores de $\operatorname{sen} A$ y $\tan A$.

b) $\operatorname{sen} A = \frac{1}{2}$, calcule los valores de $\cos A$ y $\tan A$.

3. Complete las columnas de la tabla de abajo para A un ángulo agudo de un triángulo rectángulo.

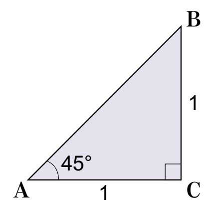
	a)	b)	c)
$\operatorname{sen} A$	$\frac{2}{3}$		
$\cos A$		$\frac{1}{2}$	
$\tan A$			$\frac{7}{2}$

Sección 2: Valores de las funciones trigonométricas de ángulos agudos

Contenido 1: Valores de las funciones trigonométricas del ángulo de 45°

P

Dado el triángulo rectángulo isósceles de abajo, calcule los valores de $\operatorname{sen} 45°$, $\cos 45°$ y $\tan 45°$.

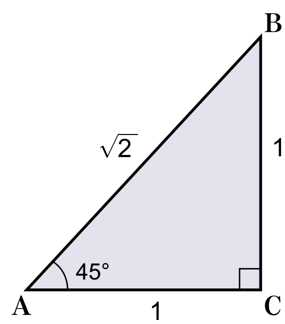


S

Por el teorema de Pitágoras:

$$AB^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$
$$AB = \sqrt{2}$$

Luego,



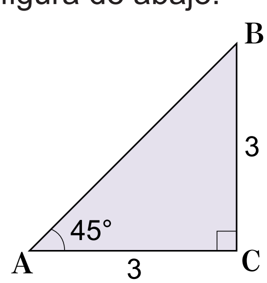
$$\operatorname{sen} 45° = \frac{\text{co}}{\text{hip}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45° = \frac{\text{ca}}{\text{hip}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45° = \frac{\text{co}}{\text{ca}} = \frac{1}{1} = 1$$

E

Sea el triángulo rectángulo de la figura de abajo:



a) Calcule $\operatorname{sen} 45°$, $\cos 45°$ y $\tan 45°$.

b) ¿Cómo son estos valores respecto a los obtenidos en el problema?

Contenido 2: Valores de las funciones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°

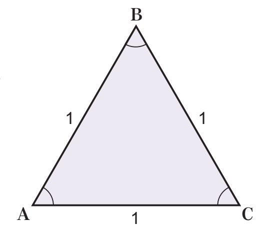
P

Calcule los valores de:

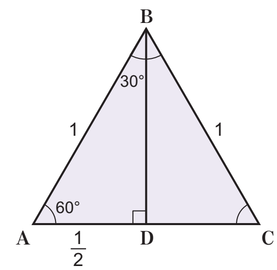
$$\text{sen } 30°, \cos 30° \text{ y } \tan 30°$$
$$\text{sen } 60°, \cos 60° \text{ y } \tan 60°$$

S

Considere el triángulo equilátero de la figura. Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° y un triángulo equilátero tiene sus tres ángulos con la misma medida, resulta que cada ángulo mide 60°.



Al trazar la bisectriz correspondiente al ángulo B, esta es perpendicular a $\overline{AC}$ y lo corta en su punto medio, obteniéndose la figura de la derecha. Aplicando el Teorema de Pitágoras en el $\triangle ABD$ se tiene:



$$BD^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$BD^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Como se sabe que $BD > 0$, entonces $\quad BD = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Se aplica la definición de las funciones trigonométricas para obtener:

$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \mathbf{\frac{1}{2}} \qquad \text{sen } 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\cos 30° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad \cos 60° = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

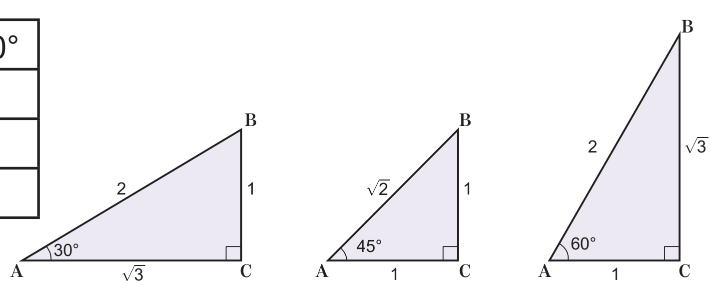
$$\tan 30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \mathbf{\frac{1}{\sqrt{3}}} \qquad \tan 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \mathbf{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

E

Complete la tabla haciendo uso de los triángulos siguientes:

	$\measuredangle A = 30°$	$\measuredangle A = 45°$	$\measuredangle A = 60°$
sen A			
cos A			
tan A			

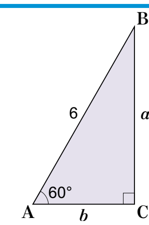


Sección 3: Resolución de triángulos rectángulos

Contenido 1: Cálculo de la longitud de dos de los lados de un triángulo rectángulo conociendo un lado y un ángulo agudo

P1

Dado el triángulo de la derecha, calcule las longitudes de los catetos a y b.



S1

Por definición se tiene: $\operatorname{sen} 60° = \frac{a}{6}$ y $\cos 60° = \frac{b}{6}$

Como $\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\cos 60° = \frac{1}{2}$, entonces:

$$\frac{a}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(6)$$

$$a = 3\sqrt{3}$$

$$\frac{b}{6} = \frac{1}{2}$$

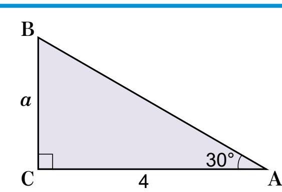
$$b = \left(\frac{1}{2}\right)(6)$$

$$b = 3$$

Por tanto, $\boldsymbol{a = 3\sqrt{3}}$ y $\boldsymbol{b = 3}$.

P2

Dado el triángulo de la derecha, calcule el valor de a.



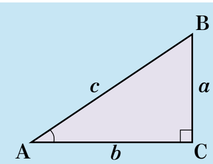
S2

Por definición $\tan 30° = \frac{a}{4}$ y $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$, así que: $\frac{a}{4} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, entonces $\boldsymbol{a = \frac{4}{\sqrt{3}}}$.

C

Dado el triángulo rectángulo de la derecha, se cumple que:

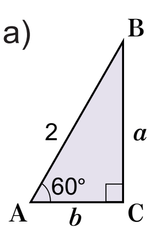
$$a = c \operatorname{sen} A \qquad b = c \cos A \qquad a = b \tan A$$



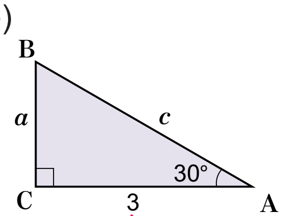
E

Calcule la longitud de los lados desconocidos de los siguientes triángulos rectángulos:

a)



b)



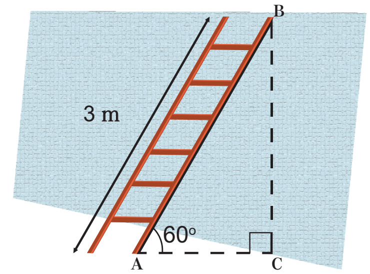
Contenido 2: Aplicación de los valores de seno y coseno

P

En la figura de la derecha, uno de los extremos de la escalera se encuentra apoyado sobre el borde superior de la pared, esta mide 3 m y forma un ángulo de 60° con respecto al suelo. Calcule:

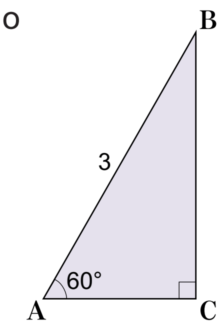
a) La altura de la pared.

b) La distancia entre el pie de la escalera y la pared.



S

a) La longitud de la escalera AB coincide con la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC que se forma. Por lo cual,



$$\operatorname{sen} 60° = \frac{BC}{AB}$$

de lo cual se tiene que

$$\begin{aligned} BC &= AB \operatorname{sen} 60° \\ &= (3)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Recuerde:

$\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Entonces la altura de la pared es $\mathbf{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$ **m**.

b) La distancia entre el pie de la escalera y la pared es AC, la que coincide con el cateto adyacente correspondiente al ángulo A del triángulo. Luego,

$$\cos 60° = \frac{AC}{AB},$$

de donde

$$\begin{aligned} AC &= AB \cos 60° \\ &= (3)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Recuerde:

$\cos 60° = \frac{1}{2}$

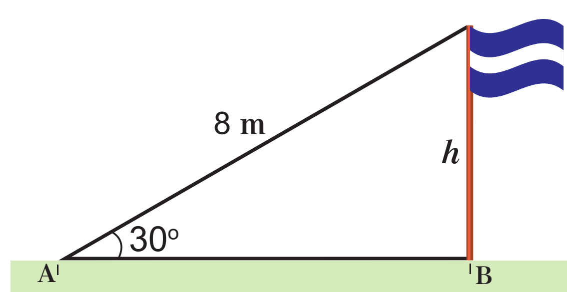
La distancia entre el pie de la escalera y la pared es $\mathbf{\frac{3}{2}}$ **m**.

E

Una cuerda de 8 m está estirada desde la punta de un asta de bandera hasta el suelo, y forma con este un ángulo de 30°. Calcule:

a) La altura del asta.

b) La distancia entre el extremo de la cuerda que está sobre el suelo y el pie del asta.



Contenido 3: Tabla de valores de las funciones trigonométricas de ángulos entre 0° y 90°

En la tabla de la derecha se presentan los valores de las funciones trigonométricas para ángulos entre 1° y 25°.

Tabla de funciones trigonométricas

Ángulo A	$\operatorname{sen} A$	$\cos A$	$\tan A$
1°	0,0175	0,9998	0,0175
2°	0,0349	0,9994	0,0349
3°	0,0523	0,9986	0,0524
4°	0,0698	0,9976	0,0699
5°	0,0872	0,9962	0,0875
6°	0,1045	0,9945	0,1051
7°	0,1219	0,9925	0,1228
8°	0,1392	0,9903	0,1405
9°	0,1564	0,9877	0,1584
10°	0,1736	0,9848	0,1763
11°	0,1908	0,9816	0,1944
12°	0,2079	0,9781	0,2126
13°	0,2250	0,9744	0,2309
14°	0,2419	0,9703	0,2493
15°	0,2588	0,9659	0,2679
16°	0,2756	0,9613	0,2867
17°	0,2924	0,9563	0,3057
18°	0,3090	0,9511	0,3249
19°	0,3256	0,9455	0,3443
20°	0,3420	0,9397	0,3640
21°	0,3584	0,9336	0,3839
22°	0,3746	0,9272	0,4040
23°	0,3907	0,9205	0,4245
24°	0,4067	0,9135	0,4452
25°	0,4226	0,9063	0,4663
⋮	⋮	⋮	⋮

Ejemplo 1 Se observa en la tabla de razones trigonométricas que para $A = 10°$:

$$\operatorname{sen} 10° = 0{,}1736$$

$$\cos 10° = 0{,}9848$$

$$\tan 10° = 0{,}1763$$

E_1

Encuentre los siguientes valores utilizando la tabla de la derecha:

a) $\operatorname{sen} 7° =$ ☐

b) $\cos 12° =$ ☐

c) $\tan 25° =$ ☐

La tabla de los valores de las funciones trigonométricas para $0° \leq A \leq 90°$ se presenta al final de la unidad (Página 94).

Ejemplo 2 Sabiendo que A es un ángulo agudo, ¿cuál es el valor de A, si $\cos A = 0{,}9135$?

Para encontrar A se ubica el valor 0,9135 en la columna de los valores que toma $\cos A$. Luego, se selecciona el valor de A que corresponde a la fila en la que se encuentra 0,9135.

Observe que en este caso, $A = \mathbf{24°}$.

E_2

Encuentre en la tabla trigonométrica el valor de A en cada uno de los siguientes casos:

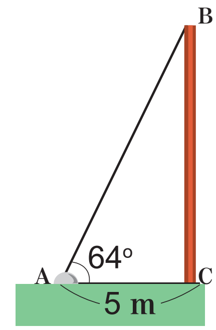
a) $\operatorname{sen} A = 0{,}3907$

b) $\cos A = 0{,}9703$

c) $\tan A = 0{,}3640$

Contenido 4: Aplicación del valor de la tangente

Ejemplo En la figura de la derecha el cable que tira desde la punta de un poste forma con el piso un ángulo de 64°. Se sabe que la distancia entre el pie del poste y el extremo del cable que está sobre el piso es 5 m, encuentre la altura del poste (hasta las décimas).



Por definición de tangente:

$$\tan 64° = \frac{BC}{AC}$$

Dado $AC = 5$, se tiene

$$\begin{aligned} BC &= AC \tan 64° \\ &= (5)(2{,}0503) \\ &= 10{,}2515 \end{aligned}$$

La altura del poste es **10,3 m** aproximadamente.

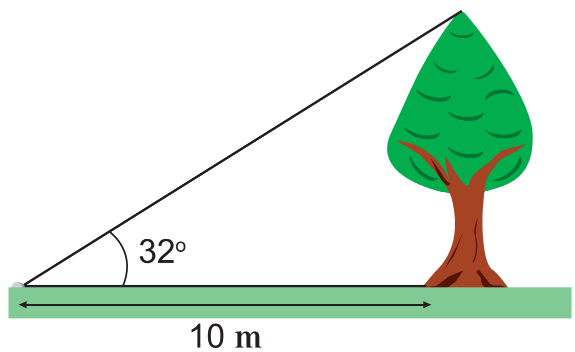
En la tabla al final de la unidad se encuentra que

$$\tan 64° = 2{,}0503$$

E

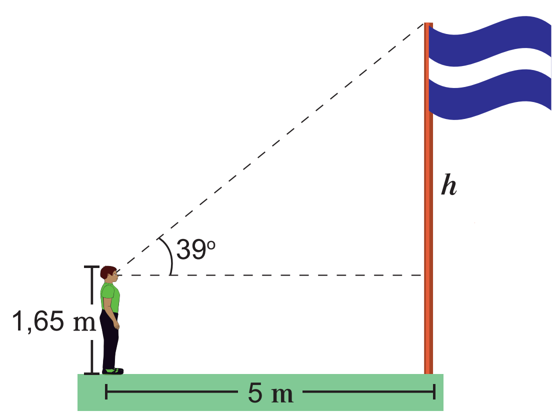
Resuelva las siguientes situaciones.

a) En la figura de la derecha, la cuerda que tira desde la cima del árbol forma con el suelo un ángulo de 32°. Sabiendo que la distancia entre el pie del árbol y el extremo de la cuerda sobre el piso es 10 m, encuentre la altura del árbol (hasta las décimas).



b) Un estudiante de 1,65 m de altura se encuentra a 5 m del asta de una bandera observando el extremo superior de esta.

Si el ángulo formado por la línea de visibilidad del estudiante con el extremo superior de la bandera y la línea horizontal es aproximadamente 39°, ¿cuál es la altura aproximada del asta? (hasta las décimas)



Sección 4: Relaciones entre seno, coseno y tangente

Contenido 1: Relación entre $\operatorname{sen} A$ y $\cos (90° - A)$, $\cos A$ y $\operatorname{sen} (90° - A)$

P

Dado un ángulo agudo A en el $\triangle \mathrm{ABC}$ rectángulo, responda las siguientes interrogantes:

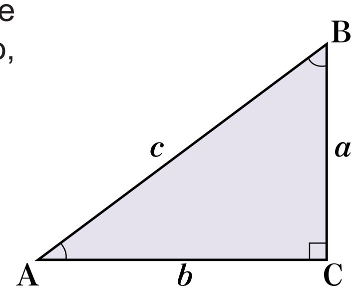
a) ¿Qué relación guardan $\operatorname{sen} A$ y $\cos (90° - A)$?

b) ¿Qué relación guardan $\cos A$ y $\operatorname{sen} (90° - A)$?

Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo suman 90°.

S

Sea un triángulo rectángulo como el de la figura, en el que uno de sus ángulos es A. Por definición de las funciones seno y coseno, se tiene:



$$\operatorname{sen} A = \frac{a}{c} \qquad \cos A = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{c} \qquad \cos B = \frac{a}{c}$$

Se observa que $\operatorname{sen} A = \cos B$ y $\cos A = \operatorname{sen} B$.

Como $B = 90° - A$, resulta que $\operatorname{sen} A = \cos (90° - A)$ y $\cos A = \operatorname{sen} (90° - A)$.

C

Dado cualquier triángulo rectángulo ABC con un ángulo agudo A, se cumple que:

$$\operatorname{sen} A = \cos (90° - A) \qquad \cos A = \operatorname{sen} (90° - A)$$

Ejemplo

a) Exprese $\operatorname{sen} 36°$ como el coseno de un ángulo agudo mayor de 45°.

b) Exprese $\cos 36°$ como el seno de un ángulo agudo mayor de 45°.

Para $\operatorname{sen} 36°$ se tiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 36° &= \cos (90° - 36°) \\ &= \mathbf{\cos 54°} \end{aligned}$$

En el caso de $\cos 36°$ resulta:

$$\begin{aligned} \cos 36° &= \operatorname{sen} (90° - 36°) \\ &= \mathbf{\operatorname{sen} 54°} \end{aligned}$$

E

Una con una raya los valores de la columna 1 que coinciden con los valores de la columna 2.

Columna 1	Columna 2
$\operatorname{sen} 24°$	$\cos 8°$
$\cos 75°$	$\operatorname{sen} 15°$
$\operatorname{sen} 82°$	$\cos 66°$

Contenido 2: Relaciones trigonométricas $\tan A = \dfrac{\text{sen } A}{\cos A}$ y $\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$

P

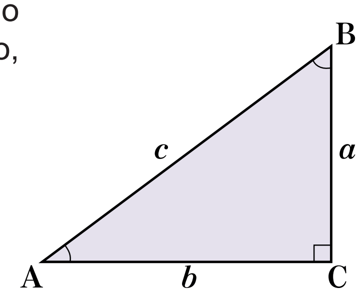
Dado un ángulo agudo A, responda los siguientes incisos:

a) ¿Qué relación guardan $\tan A$ y $\dfrac{\text{sen } A}{\cos A}$?

b) ¿A qué cantidad es igual la suma $\text{sen}^2 A + \cos^2 A$?

S

a) Sea un triángulo rectángulo como el de la figura, en el que uno de sus ángulos es A. Por definición de las funciones seno, coseno y tangente, se tiene:



$$\text{sen } A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c},$$
$$\tan A = \frac{a}{b} \qquad ①$$

y

$$\frac{\text{sen } A}{\cos A} = \text{sen } A \div \cos A$$
$$= \frac{a}{c} \div \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \times \frac{c}{b} = \frac{a}{b} \qquad ②$$

$(\text{sen } A)^2 = \text{sen}^2 A$

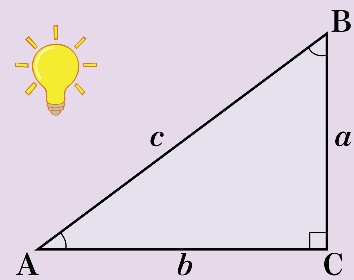
$(\cos A)^2 = \cos^2 A$

De ① y ②, $\quad \tan A = \dfrac{\text{sen } A}{\cos A}$.

b) Se tiene que:

$$\text{sen}^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2$$
$$= \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}$$
$$= \frac{a^2 + b^2}{c^2}$$
$$= \frac{c^2}{c^2}$$
$$= 1$$

Teorema de Pitágoras



$c^2 = a^2 + b^2$

Por tanto, $\quad \text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$.

C

Dado cualquier ángulo agudo A, se cumple que:

$$\tan A = \frac{\text{sen } A}{\cos A} \qquad \text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$$

Contenido 3: Valores de las funciones trigonométricas utilizando $\tan A = \dfrac{\operatorname{sen} A}{\cos A}$ y $\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$

Ejemplo Calcule $\cos A$ y $\tan A$ si $0° < A < 90°$ y $\operatorname{sen} A = \frac{4}{5}$. Utilice la conclusión del contenido anterior.

Al sustituir $\operatorname{sen} A = \frac{4}{5}$ en $\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$ se tiene:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 A = 1$$

$$\cos^2 A = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\cos^2 A = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

Como $0° < A < 90°$, entonces $\cos A > 0$. En consecuencia,

$$\cos A = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \tan A &= \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} = \operatorname{sen} A \div \cos A \\ &= \frac{4}{5} \div \frac{3}{5} \\ &= \frac{4}{5} \times \frac{5}{3} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Por tanto, $\cos A = \frac{3}{5}$ y $\tan A = \frac{4}{3}$.

E

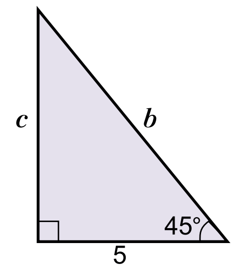
a) Utilice la conclusión del contenido anterior para calcular $\operatorname{sen} A$ y $\tan A$, sabiendo que: $0° < A < 90°$ y $\cos A = \frac{4}{5}$.

b) Calcule $\cos A$ y $\tan A$ utilizando la conclusión del contenido anterior y sabiendo que: $0° < A < 90°$ y $\operatorname{sen} A = \frac{2}{3}$, y calcule $\cos A$ y $\tan A$.

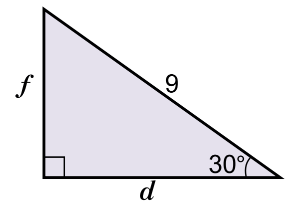
Contenido 4: Comprobemos lo aprendido 2

1. Dada la longitud de uno de los lados de cada triángulo rectángulo y un ángulo interior, calcule la longitud de los otros dos lados.

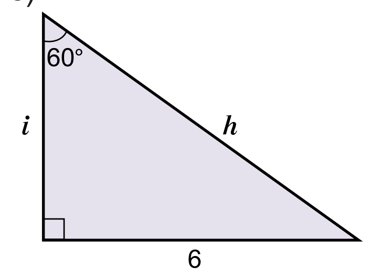
a)



b)

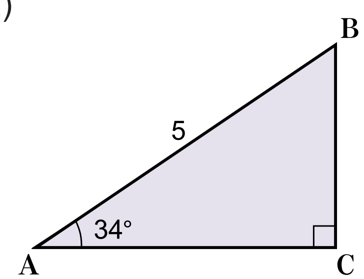


c)

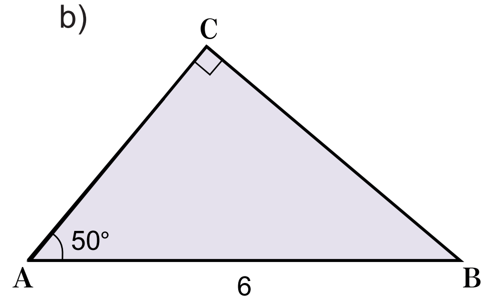


2. Calcule los valores de BC y AC haciendo uso de seno y coseno.

a)

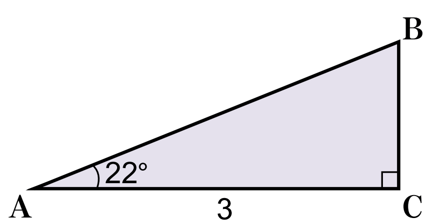


b)

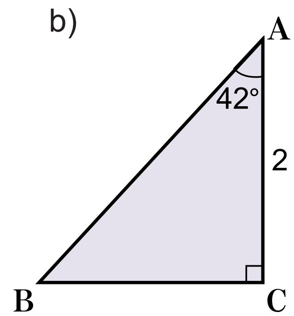


3. Calcule el valor de BC utilizando tangente.

a)



b)



4. Uno de los extremos de una escalera se apoya sobre el borde superior de una pared, formando ambas un ángulo de 50°. Si la longitud de la escalera es 12 pies, ¿cuál es altura de la pared?

5. Encuentre el ángulo agudo x, utilizando la tabla trigonométrica presentada en la página 90, tal que:

   a) $\text{sen } 67° = \cos x$

   b) $\cos 70° = \text{sen } x$

Tabla Trigonométrica

Ángulo A	sen A	cos A	tan A	Ángulo A	sen A	cos A	tan A
0°	0,0000	1,000	0,0000	45°	0,7071	0,7071	1,0000
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,3270
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,8040
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,2460
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,2900
45°	0,7071	0,7071	1,0000	90°	1,000	0,0000	No Existe

Unidad 6

Funciones Trigonométricas

Sección 1 Funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera

Sección 2 Relación entre seno, coseno y tangente

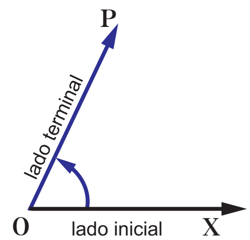
Sección 3 Relación entre funciones trigonométricas

Sección 4 Gráfica de las funciones trigonométricas

Sección 1: Funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera

Contenido 1: Ángulo en sentido amplio

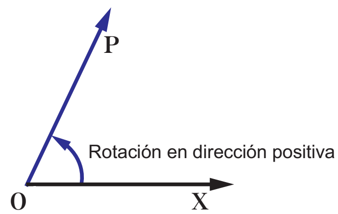
En trigonometría, un ángulo está determinado por la rotación de un rayo alrededor de su origen.

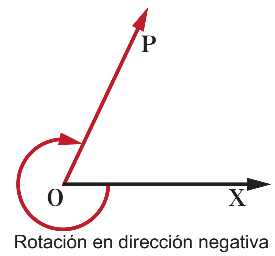


Se fija un rayo $\overrightarrow{OX}$ en el plano y sobre él se traza el rayo $\overrightarrow{OP}$. Cuando se rota el rayo $\overrightarrow{OP}$ hacia arriba alrededor de su **origen**, O, se forma el $\angle XOP$.

En este caso, al rayo $\overrightarrow{OX}$ se le llamará **lado inicial** y al rayo $\overrightarrow{OP}$, **lado terminal**.

Se pueden considerar dos direcciones para la rotación del lado terminal $\overrightarrow{OP}$ de dicho ángulo. Se dirá que rota en **dirección positiva**, si gira en dirección opuesta a las manecillas del reloj, y rota en **dirección negativa**, si gira hacia la misma dirección de las manecillas del reloj.



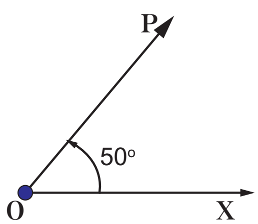


El rayo que se encontrará en una posición girada en un ángulo θ, se denominará **lado terminal de $\boldsymbol{\theta}$**.

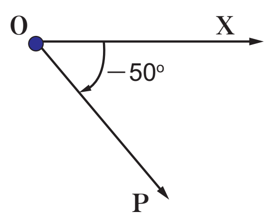
Ejemplo Trace el lado terminal $\overrightarrow{OP}$ de un ángulo con medida:

a) 50° b) −50° c) 240° d) 390°

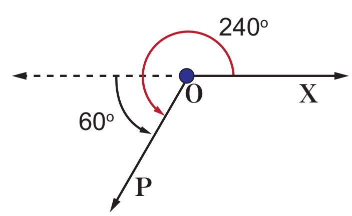
a)



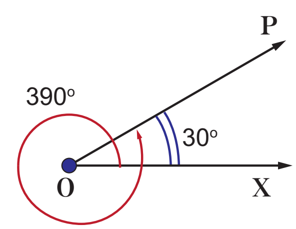
b)



c)



d)



Nótese que en la figura del inciso d) se han mostrado los lados iniciales y terminales de los ángulos 30° y 390°. Para ambos, estos lados coinciden, ya que $390° = 30° + (360°)(1)$. Es decir, para obtener un ángulo de 390° se ha dado una vuelta completa de 360° al lado terminal de 30°. A estos ángulos se les llama **coterminales**.

En general, si un ángulo α tiene lado terminal $\overrightarrow{OP}$, los ángulos descritos por la expresión $\boldsymbol{\alpha + 360° n}$, siendo n un número entero, tienen como lado terminal también a $\overrightarrow{OP}$.

E

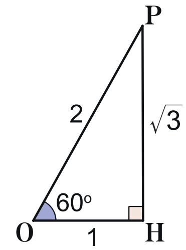
Trace el lado terminal $\overrightarrow{OP}$ de un ángulo con medida:

a) 30° b) −60° c) 210° d) 420°

Contenido 2: Funciones trigonométricas para un ángulo cualquiera

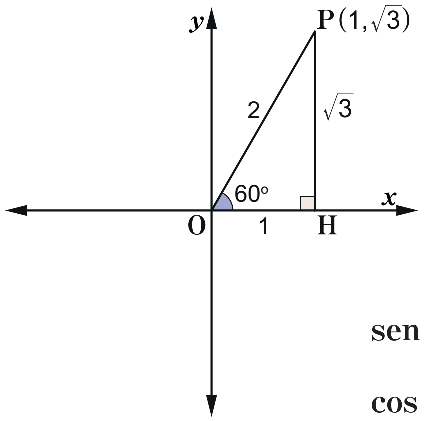
P

Dibuje, en el plano cartesiano, el triángulo rectángulo POH de la derecha, considerando al vértice O como el origen y establezca una relación entre las coordenadas de P y los valores que toman las funciones trigonométricas para el ángulo de 60°.



S

Al dibujar el triángulo rectángulo POH en el primer cuadrante del plano cartesiano, considerando el vértice O como el origen, se tiene la siguiente figura:



De donde, $OH = 1$ y $PH = \sqrt{3}$.

Por tanto, las coordenadas de P son $(1, \sqrt{3})$.

Como $\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$ y $\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1}$, se establecen las siguientes relaciones:

$$\text{sen } 60° = \frac{\text{ordenada de P}}{\text{OP}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{\text{abscisa de P}}{\text{OP}} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60° = \frac{\text{ordenada de P}}{\text{abscisa de P}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$P(1, \sqrt{3})$

abscisa de P

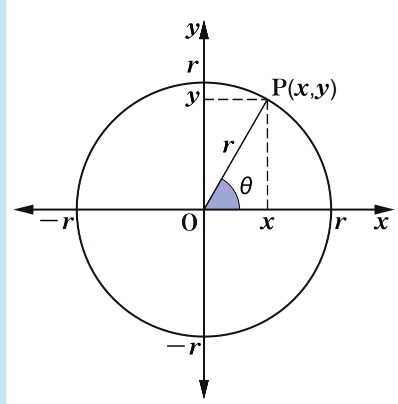
ordenada de P

C

En general, dado un ángulo cualquiera θ y su lado terminal $\overrightarrow{OP}$, con $OP = r$, el punto P con coordenadas (x, y) o simplemente $P(x, y)$ será el punto de intersección de la circunferencia de radio r y el lado terminal de θ. En este caso, los valores de seno, coseno y tangente del ángulo θ, se definen como:

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r} \quad \text{y} \quad \tan \theta = \frac{y}{x}.$$

Nótese que estos valores están definidos por las coordenadas del punto P y el radio r. Además, no importando el valor que tome r, estos valores se determinan en función de θ, es por eso que se denominan **funciones trigonométricas del ángulo θ**.



E

Trace el lado terminal $\overrightarrow{OP}$ para el ángulo θ y exprese los valores de $\text{sen } \theta$, $\cos \theta$ y $\tan \theta$ considerando:

a) $P(\sqrt{3}, 1)$ y $r = 2$　　b) $P(-1, 1)$ y $r = \sqrt{2}$　　c) $P(-1, \sqrt{3})$ y $r = 2$

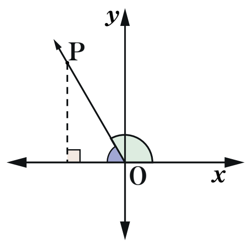
Contenido 3: Determinación de los valores de las funciones trigonométricas para un ángulo cualquiera

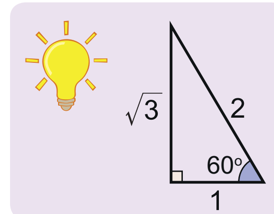
P

Determine el valor de $\operatorname{sen} 120°$, $\cos 120°$ y $\tan 120°$.

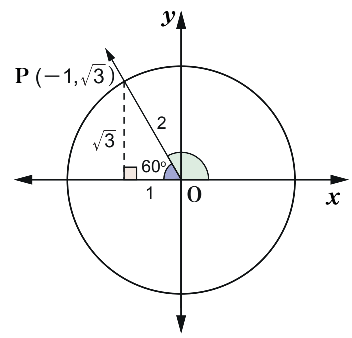
S

Trace el lado terminal $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ de 120° en el plano cartesiano, como sigue





Se observa que $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ está en el II cuadrante, por lo cual P debe tener abscisa negativa y ordenada positiva. Se traza un triángulo rectángulo cuya hipotenusa esté sobre $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ y una circunferencia de radio $r=2$ como se muestra en la figura, así se deduce que el punto P tiene coordenadas $(-1, \sqrt{3})$. Se sustituye estos valores en



$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r} \quad \text{y} \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

resulta que $\operatorname{sen} 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 120° = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$ y $\tan 120° = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$.

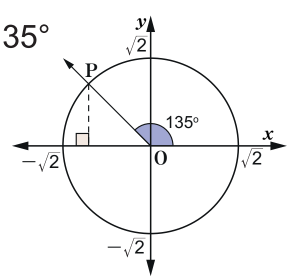
C

Para determinar los valores que toman las funciones trigonométricas para un ángulo θ, se debe tener en cuenta el cuadrante en el que se ubique el lado terminal $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ de θ, las coordenadas (x, y) del punto de intersección P de la circunferencia de radio $r=\mathrm{OP}$ con el lado terminal $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ y las definiciones de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente para un ángulo cualquiera θ.

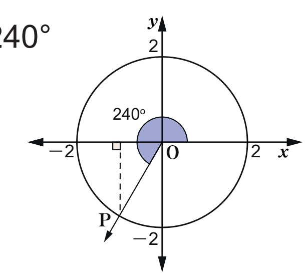
E

Determine los valores $\operatorname{sen} \theta$, $\cos \theta$ y $\tan \theta$ para los siguientes valores de θ:

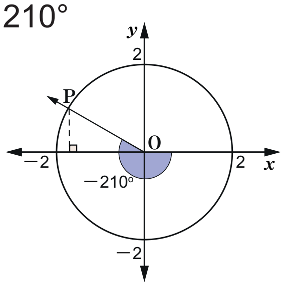
a) $\theta = 135°$



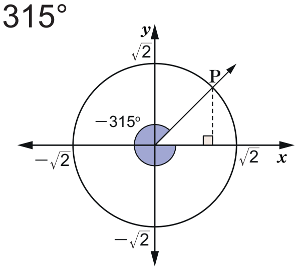
b) $\theta = 240°$

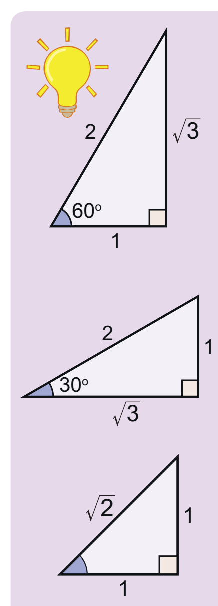


c) $\theta = -210°$



d) $\theta = -315°$

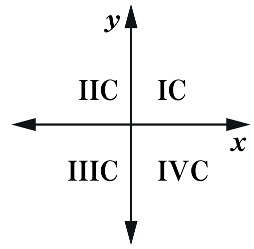




Contenido 4: Signos de las funciones trigonométricas

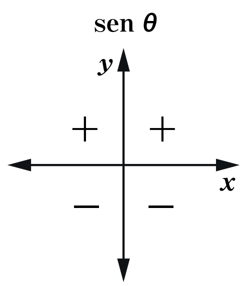
Signo de seno, coseno y tangente

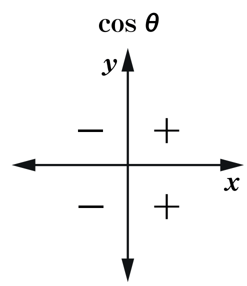
El cuadrante en el que se ubique el lado terminal $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ del ángulo θ depende del signo que tome cada una de las funciones trigonométricas en dicho ángulo, en consecuencia se tiene que:

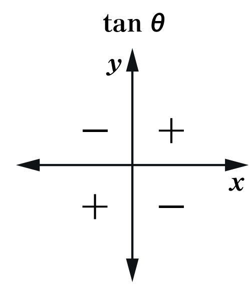


Nota: C significa cuadrante

	I C	II C	III C	IV C
sen θ	+	+	−	−
cos θ	+	−	−	+
tan θ	+	−	+	−

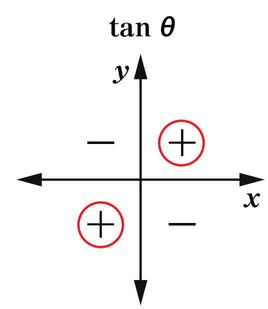




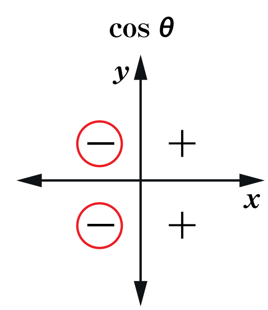


Ejemplo Determine el cuadrante en el que se ubica el lado terminal de θ, si $\tan\theta>0$ y $\cos\theta<0$.

De acuerdo con lo anterior, $\tan\theta>0$ en el I y III cuadrante, y $\cos\theta<0$ en el II y III cuadrante. Por lo cual, es en el III cuadrante que se cumple simultáneamente que $\tan\theta>0$ y $\cos\theta<0$.



En consecuencia, el lado terminal de θ se ubica en el **III cuadrante.**



E

Determine el cuadrante en el que se ubica el lado terminal de θ, si:

a) $\tan\theta>0$ y $\cos\theta>0$

b) $\tan\theta<0$ y $\operatorname{sen}\theta<0$

c) $\operatorname{sen}\theta>0$ y $\cos\theta<0$

d) $\tan\theta<0$, $\cos\theta>0$ y $\operatorname{sen}\theta<0$

Contenido 5: Valores de las funciones trigonométricas para los ángulos especiales 0°, 90°, 180°, 270° y 360°

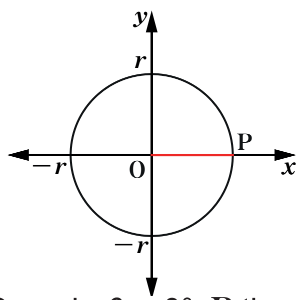
P

Complete la siguiente tabla:

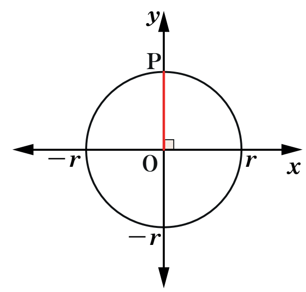
θ	0°	90°	180°
$\operatorname{sen}\theta$			
$\cos\theta$			
$\tan\theta$			

S

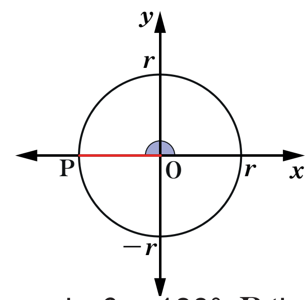
Se traza el lado terminal $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, con $\mathrm{OP}=r$, para cada uno de los ángulos 0°, 90° y 180° en el plano cartesiano, como sigue:



Cuando $\theta=0°$, P tiene coordenadas $\mathrm{P}(r,0)$



Cuando $\theta=90°$, P tiene coordenadas $\mathrm{P}(0,r)$



Cuando $\theta=180°$, P tiene coordenadas $\mathrm{P}(-r,0)$

En todos los casos, los lados terminales quedan sobre los ejes de coordenadas, a estos ángulos se les llama **cuadrantales**. Se sustituyen los valores correspondientes para θ, x, y y r en $\operatorname{sen}\theta=\frac{y}{r}$, $\cos\theta=\frac{x}{r}$ y $\tan\theta=\frac{y}{x}$, se puede completar la tabla así:

$\operatorname{sen}0°=\frac{0}{r}=0$	$\operatorname{sen}90°=\frac{r}{r}=1$	$\operatorname{sen}180°=\frac{0}{r}=0$
$\cos 0°=\frac{r}{r}=1$	$\cos 90°=\frac{0}{r}=0$	$\cos 180°=\frac{-r}{r}=-1$
$\tan 0°=\frac{0}{r}=0$	$\tan 90°=\frac{r}{0}$ NE	$\tan 180°=\frac{0}{-r}=0$

Nota: NE significa no existe

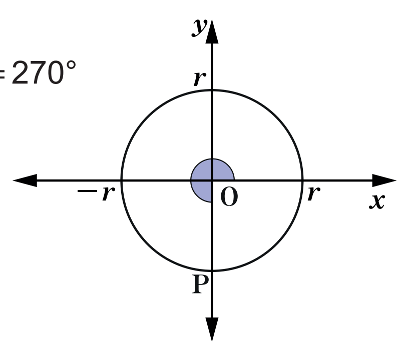
C

Para encontrar los valores de las funciones trigonométricas para los ángulos especiales, se traza una circunferencia de radio r y el lado terminal del ángulo especial, se determinan las coordenadas del punto de intersección P y se sustituyen dichos valores en la definición de cada una de las funciones trigonométricas.

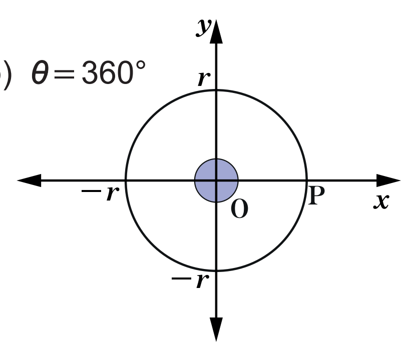
E

Determine los valores $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$ y $\tan\theta$ para los ángulos 270° y 360°. ¿Con qué valores coinciden?

a) $\theta=270°$



b) $\theta=360°$



Contenido 6: Valores de θ conocido sen θ

P

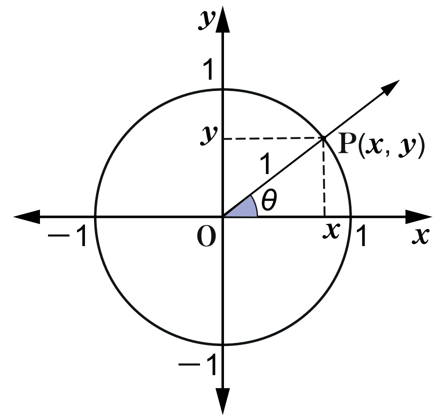
Si $0° \leq \theta \leq 360°$ y $\text{sen}\ \theta = \frac{1}{2}$. Determine los valores de θ que satisfacen dicha igualdad.

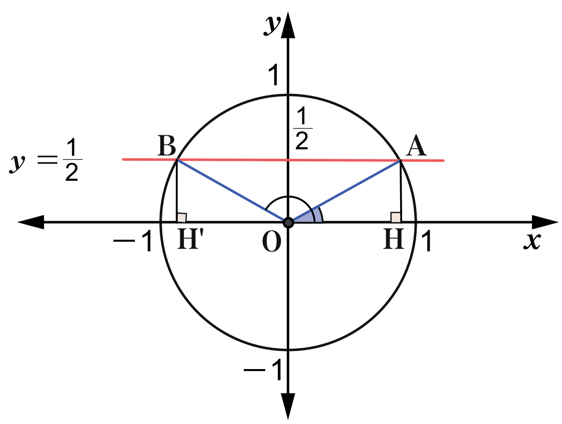
S

Se considera una circunferencia de radio $r = 1$ y $\overrightarrow{OP}$ el lado terminal de θ a como se ve en la figura de la derecha, de donde

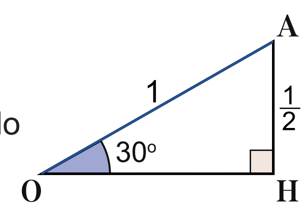
$$\text{sen}\ \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y.$$

Como $\text{sen}\ \theta = \frac{1}{2}$, entonces $y = \frac{1}{2}$. Así que, se traza la recta $y = \frac{1}{2}$ como se muestra a continuación.



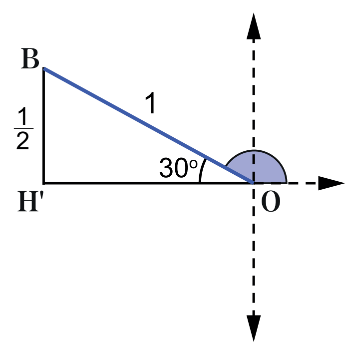


Observe que se cortan en dos puntos A y B, así que existen dos valores de $0° \leq \theta \leq 360°$ para los cuales $\text{sen}\ \theta = \frac{1}{2}$.



De acuerdo a las medidas de sus lados, el $\triangle AOH$ es un triángulo rectángulo de $30° - 60° - 90°$, así que un valor para θ, es

$$\theta = 30°.$$



De igual forma, $\triangle BOH'$ cumple con las mismas condiciones, así que en este caso

$$\theta = 180° - \measuredangle BOH' = 180° - 30° = 150°.$$

Por lo tanto, los valores de θ son **30°** y **150°**.

E

Si $0° \leq \theta \leq 360°$, determine los valores de θ para los cuales:

a) $\text{sen}\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

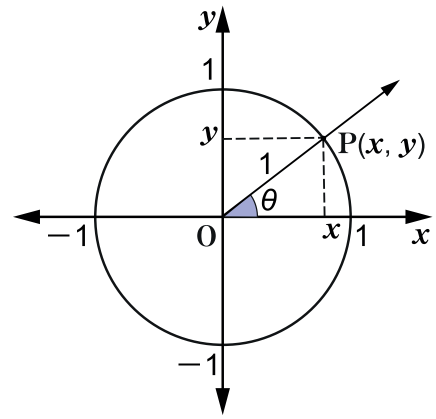
b) $\text{sen}\ \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Contenido 7: Valores de θ conocido $\cos\theta$

P

Si $0° \leq \theta \leq 360°$ y $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Determine los valores de θ que satisfacen dicha igualdad.

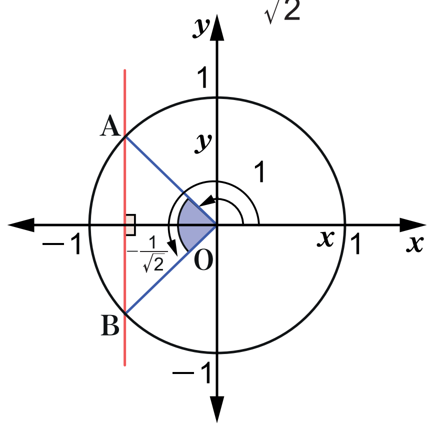
S



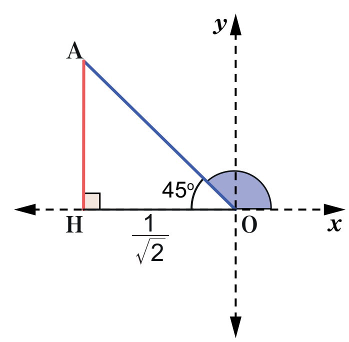
Se considera una circunferencia de radio $r = 1$ y $\overrightarrow{OP}$ el lado terminal de θ a como se ve en la figura a la derecha, de donde

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x.$$

Como $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, entonces $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Así que, se traza la recta $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ como se muestra a continuación.



Observe que se cortan en dos puntos A y B, así que existen dos valores de $0° \leq \theta \leq 360°$ para los cuales $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

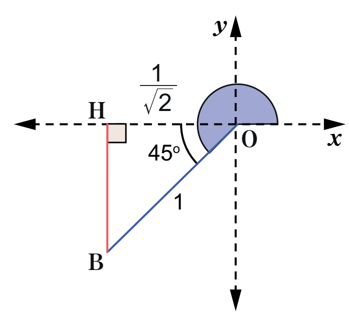


De acuerdo a los medidas de sus lados, $\triangle AOH$ y $\triangle BOH$ son triángulos rectángulos isósceles, así que

$$\theta = 180° - \measuredangle AOH = 180° - 45° = 135°$$

o

$$\theta = 180° + \measuredangle BOH = 180° + 45° = 225°$$



Por lo tanto, los valores de θ son **135°** y **225°**.

E

Si $0° \leq \theta \leq 360°$, determine los valores de θ para los cuales:

a) $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

b) $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Contenido 8: Valores de θ conocido $\tan\theta$

Dada una circunferencia de radio $r=1$, $\overrightarrow{OP}$ el lado terminal del ángulo $\theta \neq 90°$ y $Q(1,\ t)$ un punto sobre $\overrightarrow{OP}$. Se traza el triángulo rectángulo OHQ, de donde

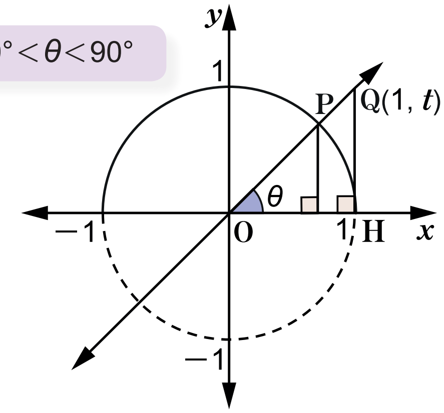
$$\tan\theta = \frac{t}{1}, \text{ es decir, } t=\tan\theta.$$

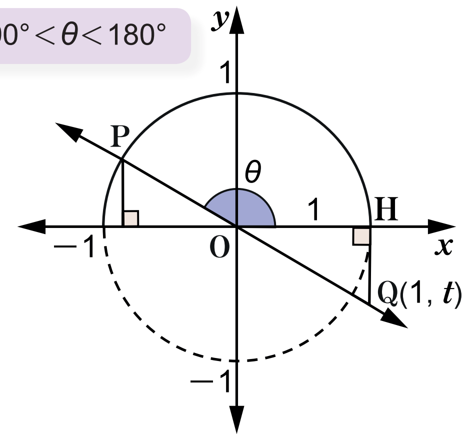
Por tanto, las coordenadas de Q son $(1,\ \tan\theta)$.

Además, como esta recta tiene por ecuación $y=mx$, las coordenadas de Q satisfacen esta igualdad, es decir,

$$\tan\theta = (m)(1) = m.$$

De aquí se sigue que, **la pendiente m de la recta $\overleftrightarrow{OP}$ es igual a la tangente del ángulo θ.**



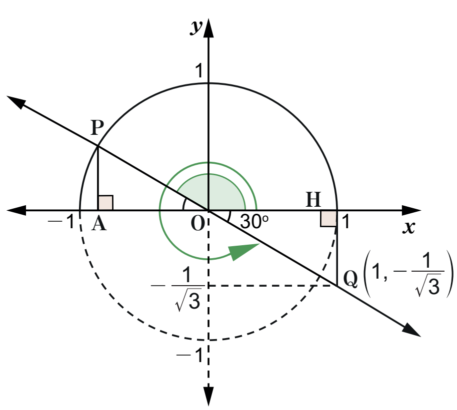


P

Si $0° < \theta < 360°$ y $\tan\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Determine los valores de θ que satisfacen dicha igualdad.

S

Como $\tan\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, el punto Q tiene coordenadas $\left(1, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y por tanto, se encuentra en el IV cuadrante. Se traza la circunferencia de radio $r=1$ y la recta $\overleftrightarrow{OP}$ de pendiente $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ a como se muestra en la figura.



Observe que se cortan en dos puntos P y Q, así que existen dos valores de $0° < \theta < 360°$, para los cuales $\tan\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

$\triangle OHQ$ y $\triangle OAP$ son triángulos rectángulos de $30° - 60° - 90°$, así que

$$\theta = 180° - 30° = 150° \qquad \text{o} \qquad \theta = 360° - 30° = 330°$$

Por lo tanto, los valores de θ son **150°** y **330°**.

E

Si $0° < \theta < 360°$, determine los valores de θ para los cuales:

a) $\tan\theta = -1$

b) $\tan\theta = -\sqrt{3}$

Contenido 9: Comprobemos lo aprendido 1

1. Trace el lado terminal $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ de un ángulo con medida:

   a) $70°$ b) $-70°$ c) $135°$ d) $720°$

2. Determine los valores $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$ y $\tan\theta$ para:

   a) $\theta = 150°$ b) $\theta = 210°$ c) $\theta = 315°$ d) $\theta = -120°$

   e) $\theta = -240°$ f) $\theta = -300°$ g) $\theta = -330°$ h) $\theta = -720°$

3. Determine el cuadrante en el que se ubica el lado terminal de θ, si:

   a) $\tan\theta < 0$ y $\cos\theta > 0$ b) $\tan\theta > 0$ y $\operatorname{sen}\theta > 0$

   c) $\operatorname{sen}\theta < 0$ y $\cos\theta < 0$ d) $\tan\theta > 0$, $\cos\theta > 0$ y $\operatorname{sen}\theta > 0$

4. Si $0° \leq \theta \leq 360°$, determine los valores de θ para los cuales:

   a) $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2}$ b) $\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. Si $0° \leq \theta \leq 360°$, determine los valores de θ para los cuales:

   a) $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ b) $\cos\theta = -1$

6. Si $0° < \theta < 360°$, determine los valores de θ para los cuales:

   a) $\tan\theta = 1$ b) $\tan\theta = \sqrt{3}$

Sección 2: Relación entre seno, coseno y tangente

Contenido 1: Relación entre $\operatorname{sen}^2\theta$ y $\cos^2\theta$

P

Demuestre que $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ y $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

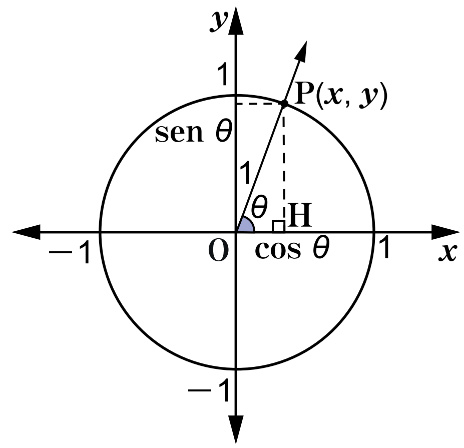
S

Sea $P(x,y)$ el punto de intersección de la circunferencia con centro en el origen y radio $r=1$ y $\overrightarrow{OP}$ el lado terminal del ángulo θ. Se aplica la definición de las funciones trigonométricas y se sigue que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{1} = y,\ \cos\theta = \frac{x}{1} = x \ \text{ y } \ \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

Se sustituye $x=\cos\theta$ y $y=\operatorname{sen}\theta$ en la última igualdad resulta

$$\tan\boldsymbol{\theta} = \frac{\operatorname{sen}\boldsymbol{\theta}}{\cos\boldsymbol{\theta}}.$$



Además, se aplica el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo HOP cuyos catetos tienen longitudes $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ e hipotenusa 1 para obtener

$$\operatorname{sen}^2\boldsymbol{\theta} + \cos^2\boldsymbol{\theta} = 1.$$

C

Se pueden establecer las siguientes relaciones

$$\tan\boldsymbol{\theta} = \frac{\operatorname{sen}\boldsymbol{\theta}}{\cos\boldsymbol{\theta}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}^2\boldsymbol{\theta} + \cos^2\boldsymbol{\theta} = 1.$$

E

Complete la demostración de la relación $\tan^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$.

Demostración

$$\begin{aligned}\tan^2\theta + 1 &= \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\boxed{}} + \frac{\cos^2\theta}{\boxed{}}\\ &= \frac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\boxed{}}\\ &= \frac{\boxed{}}{\cos^2\theta}\end{aligned}$$

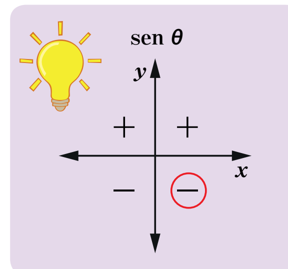
Contenido 2: Aplicación de la relación $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ y $\tan \theta = \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$

Ejemplo Si el lado terminal del ángulo θ se encuentra en el IV cuadrante y $\cos \theta = \frac{4}{5}$, determine $\operatorname{sen} \theta$ y $\tan \theta$.

Se sustituye $\cos \theta = \frac{4}{5}$ en $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, se sigue que

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$



Como el lado terminal del ángulo θ se encuentra en el IV cuadrante,

$\operatorname{sen} \theta < 0$. Así,

$$\operatorname{sen} \theta = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}.$$

Ahora, se sustituyen estos valores en $\tan \theta = \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$ y se obtiene

$$\tan \theta = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{5} \div \frac{4}{5} = \left(-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{4}\right)$$

$$= -\frac{3}{4}$$

Por tanto, $\boldsymbol{\operatorname{sen} \theta = -\frac{3}{5}}$ **y** $\boldsymbol{\tan \theta = -\frac{3}{4}}$.

Otra manera de resolver el problema es ocupando el Teorema de Pitágoras a como sigue:

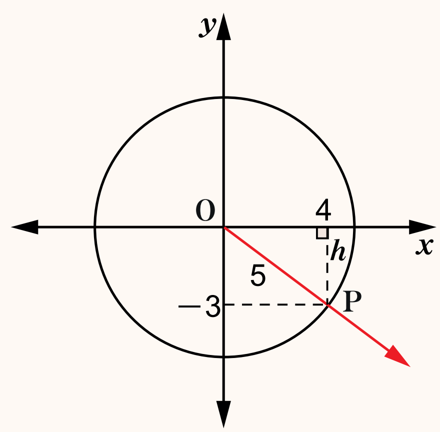
$$5^2 = 4^2 + h^2$$

$$h = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$$

Así que, P $(4, -3)$

Luego,

$$\operatorname{sen} \theta = -\frac{3}{5} \text{ y } \tan \theta = -\frac{3}{4}$$



E

a) Si el lado terminal del ángulo θ se encuentra en el IV cuadrante y $\cos \theta = \frac{3}{4}$, determine $\operatorname{sen} \theta$ y $\tan \theta$.

b) Si el lado terminal del ángulo θ se encuentra en el III cuadrante y $\operatorname{sen} \theta = -\frac{3}{5}$, determine $\cos \theta$ y $\tan \theta$.

Contenido 3: Aplicación de la relación $\tan^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

P

Si el lado terminal del ángulo θ se encuentra en el IV cuadrante y $\tan\theta = -2$, determine $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

S

Se sustituye $\tan\theta = -2$ en $\tan^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$, se sigue que

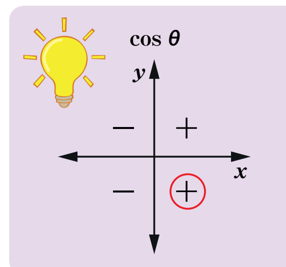
$$(-2)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$5 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{5}$$

Como el lado terminal del ángulo θ se encuentra en el IV cuadrante, $\cos\theta > 0$, así que

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$



Se sustituyen estos valores en $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$, y se tiene

$$-2 = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\frac{1}{\sqrt{5}}},$$

es decir,

$$\operatorname{sen}\theta = (-2)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

En consecuencia,

$$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}} \text{ y } \boldsymbol{\operatorname{sen}\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}}.$$

E

a) Si el lado terminal del ángulo θ se encuentra en el III cuadrante y $\tan\theta = 3$, determine $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

b) Si el lado terminal del ángulo θ se encuentra en el II cuadrante y $\tan\theta = -\sqrt{5}$, determine $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

Contenido 4: Comprobemos lo aprendido 2

E

a) Si el lado terminal del ángulo θ se encuentra en el IV cuadrante y $\cos\theta = \frac{1}{4}$, determine $\operatorname{sen}\theta$ y $\tan\theta$.

b) Si el lado terminal del ángulo θ se encuentra en el I cuadrante y $\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{5}$, determine $\cos\theta$ y $\tan\theta$.

c) Si el lado terminal del ángulo θ se encuentra en el II cuadrante y $\tan\theta = -\frac{1}{3}$, determine $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

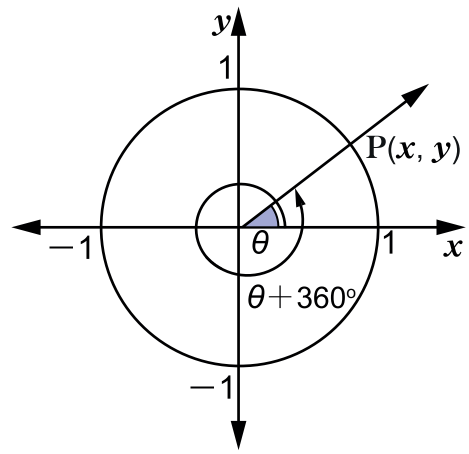
d) Si el lado terminal del ángulo θ se encuentra en el III cuadrante y $\tan\theta = 2$, determine $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

Sección 3: Relación entre las funciones trigonométricas

Contenido 1: Relación entre los valores que toman las funciones trigonométricas para un ángulo cualquiera θ y los ángulos $\theta+360°(n)$ y $-\theta$, respectivamente

Relaciones trigonométricas (1)

Sea $\mathrm{P}(x, y)$ el punto de intersección de la circunferencia con centro en el origen y radio $r=1$ y $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ el lado terminal del ángulo θ. Los ángulos descritos por la expresión $\theta+360°(n)$, siendo n un número entero, tienen el mismo lado inicial y terminal del ángulo θ. Así que



$$\textbf{sen}\,[\theta+360°(n)]=\textbf{sen}\,\theta$$

$$\textbf{cos}\,[\theta+360°(n)]=\textbf{cos}\,\theta$$

$$\textbf{tan}\,[\theta+360°(n)]=\textbf{tan}\,\theta$$

Ejemplo 1 Determine el valor de sen 405°.

Como $405° = 45°+360°$, entonces $\text{sen}\ 405° = \text{sen}\ (45°+360°)$. Luego,

$$\text{sen}\ 405° = \text{sen}\ (45°+360°) = \text{sen}\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por tanto,

$$\textbf{sen 405°} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}.$$

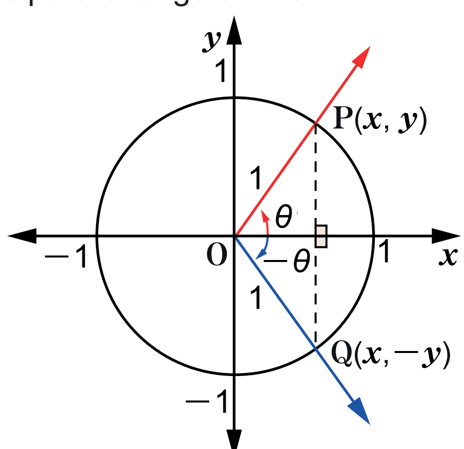
E_1

Determine los siguientes valores haciendo uso de las relaciones anteriores:

a) sen 390° b) cos 420° c) tan 750°

Relaciones trigonométricas (2)

De acuerdo con la figura que se muestra abajo, determine los valores que toman las funciones trigonométricas para el ángulo $-\theta$.



De acuerdo con la figura el lado terminal de θ es $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ y el lado terminal de $-\theta$ es $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$. Las coordenadas de P son (x, y) y las coordenadas de Q son $(x, -y)$.

Además, anteriormente se estableció que para un ángulo cualquiera θ se tiene que

$$\operatorname{sen}\theta = y, \quad \cos\theta = x \ \text{ y } \ \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

En particular, para el ángulo $-\theta$ resulta

$$\operatorname{sen}(-\theta) = \frac{-y}{1} = -y = -\operatorname{sen}\theta$$
$$\cos(-\theta) = \frac{x}{1} = x = \cos\theta$$
$$\tan(-\theta) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan\theta$$

En conclusión

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen}(-\theta) &= -\operatorname{sen}\theta \\ \cos(-\theta) &= \cos\theta \\ \tan(-\theta) &= -\tan\theta \end{aligned}}$$

Ejemplo 2 Determine el valor de $\cos(-60°)$

Usando la igualdad $\cos(-\theta) = \cos\theta$, se sigue que $\cos(-60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$.

Por tanto, $\mathbf{\cos(-60°) = \frac{1}{2}}$.

E2

Determine los siguientes valores haciendo uso de las relaciones anteriores:

a) $\cos(-30°)$

b) $\operatorname{sen}(-45°)$

c) $\tan(-60°)$

Contenido 2: Relación entre los valores que toman las funciones trigonométricas para un ángulo cualquiera θ y los ángulos $180°+\theta$ y $180°-\theta$, respectivamente

Relaciones trigonométricas (3)

A partir de las figuras que se muestran a la derecha, se sabe que:

- El lado terminal de θ es $\overrightarrow{OP}$, el lado terminal de $180°+\theta$ es $\overrightarrow{OQ}$ (figura 1) y el lado terminal de $180°-\theta$ es $\overrightarrow{OR}$ (figura 2).
- Las coordenadas de P son (x, y), las de Q son $(-x, -y)$ y las de R son $(-x, y)$.

figura 1

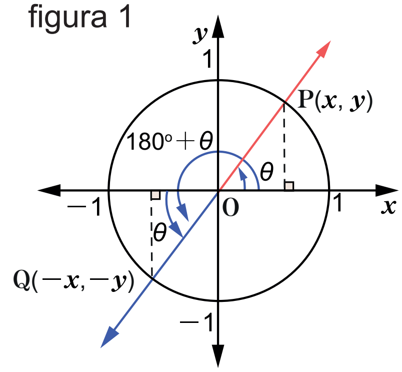
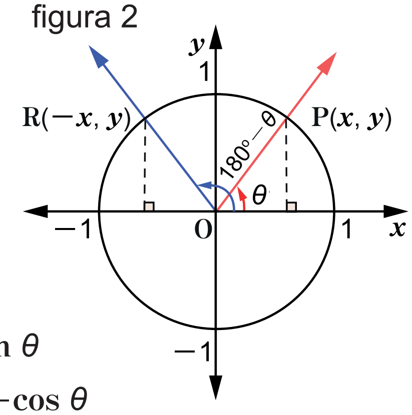


figura 2



Por otra parte, anteriormente se estableció que para un ángulo cualquiera θ se tiene que

$$\text{sen } \theta = y, \quad \cos \theta = x \ \text{ y } \ \tan \theta = \frac{y}{x}.$$

Así que, para los ángulos $180°+\theta$ y $180°-\theta$ se obtiene

$\text{sen }(180°+\theta) = -y = -\text{sen } \theta$

$\cos(180°+\theta) = -x = -\cos \theta$

$\tan(180°+\theta) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \tan \theta$

$\text{sen }(180°-\theta) = y = \text{sen } \theta$

$\cos(180°-\theta) = -x = -\cos \theta$

$\tan(180°-\theta) = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x} = -\tan \theta$

Por tanto,

$\text{sen }(180°+\theta) = -\text{sen } \theta$

$\cos(180°+\theta) = -\cos \theta$

$\tan(180°+\theta) = \tan \theta$

$\text{sen }(180°-\theta) = \text{sen } \theta$

$\cos(180°-\theta) = -\cos \theta$

$\tan(180°-\theta) = -\tan \theta$

Ejemplo 1 Determine el valor de sen 210°.

Como $210° = 180°+30°$, entonces $\text{sen } 210° = \text{sen }(180°+30°)$. Luego,

$$\text{sen } 210° = \text{sen }(180°+30°) = -\text{sen } 30° = -\frac{1}{2}.$$

En conclusión,

$$\textbf{sen } \mathbf{210°} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}.$$

E1

Determine los siguientes valores utilizando las relaciones anteriores:

a) sen 240°
b) cos 210°
c) tan 225°

Ejemplo 2 Determine el valor de $\cos 135°$.

Dado que $135° = 180° - 45°$, entonces $\cos 135° = \cos(180° - 45°)$. Luego,

$$\cos 135° = \cos(180° - 45°) = -\cos 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por tanto,

$$\mathbf{\cos 135° = -\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

$\mathcal{E}_2$

Determine los siguientes valores utilizando las relaciones anteriores:

a) $\cos 150°$

b) $\operatorname{sen} 120°$

c) $\tan 135°$

Contenido 3: Relación entre los valores que toman las funciones trigonométricas para un ángulo cualquiera θ y los ángulos $90°+\theta$ y $90°-\theta$, respectivamente

Relaciones trigonométricas (4)

A partir de las figuras que se muestran a la derecha, se sabe que:

- El lado terminal de θ es $\overrightarrow{OP}$, el lado terminal de $90°+\theta$ es $\overrightarrow{OQ}$ (figura 1) y el lado terminal de $90°-\theta$ es $\overrightarrow{OR}$ (figura 2).
- Las coordenadas de P son (x, y), las de Q son $(-y, x)$ y las de R son (y, x).

figura 1

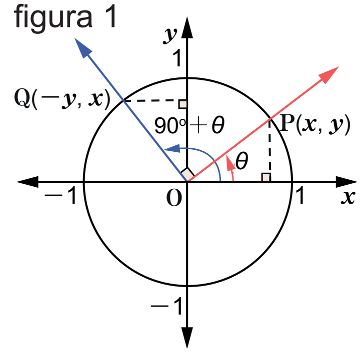
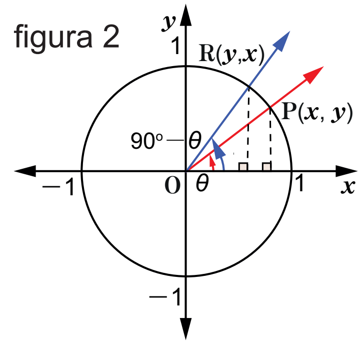


figura 2



Por otra parte, anteriormente se estableció que para un ángulo cualquiera θ se tiene que

$$\operatorname{sen}\theta = y,\quad \cos\theta = x \text{ y } \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

Así que, para los ángulos $90°+\theta$ y $90°-\theta$ se sigue que

$$\operatorname{sen}(90°+\theta) = x = \cos\theta$$
$$\cos(90°+\theta) = -y = -\operatorname{sen}\theta$$
$$\tan(90°+\theta) = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y} = -\frac{1}{\frac{y}{x}} = -\frac{1}{\tan\theta}$$

$$\operatorname{sen}(90°-\theta) = x = \cos\theta$$
$$\cos(90°-\theta) = y = \operatorname{sen}\theta$$
$$\tan(90°-\theta) = \frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{y}{x}} = \frac{1}{\tan\theta}$$

Por tanto,

$$\operatorname{sen}(90°+\theta) = \cos\theta$$
$$\cos(90°+\theta) = -\operatorname{sen}\theta$$
$$\tan(90°+\theta) = -\frac{1}{\tan\theta}$$

$$\operatorname{sen}(90°-\theta) = \cos\theta$$
$$\cos(90°-\theta) = \operatorname{sen}\theta$$
$$\tan(90°-\theta) = \frac{1}{\tan\theta}$$

Ejemplo Determine el valor de sen 135°, utilizando las relaciones anteriores.

Como $135° = 90°+45°$, entonces $\operatorname{sen} 135° = \operatorname{sen}(90°+45°)$. Luego,

$$\operatorname{sen} 135° = \operatorname{sen}(90°+45°) = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

En conclusión,

$$\mathbf{sen\ 135° = \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

E

Determine los siguientes valores utilizando las relaciones anteriores:

a) sen 150° b) cos 120° c) tan 120°

Contenido 4: Comprobemos lo aprendido 3

E

1. Encuentre los siguientes valores:

   a) $\operatorname{sen} 420°$

   b) $\cos 390°$

   c) $\tan 405°$

2. Encuentre los siguientes valores:

   a) $\cos(-135°)$

   b) $\operatorname{sen}(-240°)$

   c) $\tan(-210°)$

3. Encuentre los siguientes valores:

   a) $\operatorname{sen} 210°$

   b) $\cos 225°$

   c) $\tan 240°$

4. Encuentre los siguientes valores:

   a) $\cos 120°$

   b) $\operatorname{sen} 135°$

   c) $\tan 150°$

5. Encuentre los siguientes valores:

   a) $\operatorname{sen} 120°$

   b) $\cos 150°$

   c) $\tan 135°$

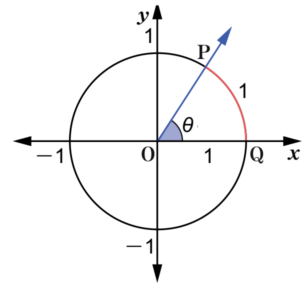
Sección 4: Gráficas de las funciones trigonométricas

Contenido 1: Radianes

Definición

Un **radián** es la medida de un ángulo central de una circunferencia que interseca un arco de longitud igual al radio de la circunferencia. Se escribe abreviadamente rad.

Considere un ángulo θ con vértice O, lado inicial $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ y lado terminal $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ y una circunferencia con centro en O y radio $r=1$. Sea r la longitud del arco PQ que subtiende el angulo θ. Entonces, la longitud del arco $\widehat{\mathrm{PQ}}$ es la medida en radianes del ángulo central θ.



Como la longitud de una circunferencia de radio $r=1$ es igual a 2π, se tiene que $360° = 2\pi\ \mathrm{rad}$.

De donde

$$\boxed{180° = \pi\ \mathrm{rad}}$$

Además, de la igualdad anterior se deduce que

$$1° = \frac{\pi}{180}\ \mathrm{rad} \qquad\qquad 1\ \mathrm{rad} = \frac{180°}{\pi}$$

Estas dos últimas igualdades serán de gran utilidad al momento de convertir medidas de ángulos.

Cuando en la medida del ángulo no se especifique la unidad que se utiliza se considerará que está expresada en radianes.

Ejemplo 1 Convierta 45° a radianes.

Como $1° = \frac{\pi}{180}$, entonces $45° = (45)\left(\frac{\pi}{180}\right) = \cancel{(45)}\left[\frac{\pi}{\cancel{(45)}(4)}\right] = \frac{\pi}{4}$

Por tanto, $\mathbf{45° = \frac{\pi}{4}}$

E1

Convierta las siguientes medidas en radianes:

a) 60° b) 120° c) 210° d) 300°

Ejemplo 2 Convierta $\frac{\pi}{6}$ a grados.

Como $1\ \mathrm{rad} = \frac{180°}{\pi}$, se sigue que

$$\frac{\pi}{6} = \left(\frac{\cancel{\pi}}{6}\right)\left(\frac{180°}{\cancel{\pi}}\right) = 30°.$$

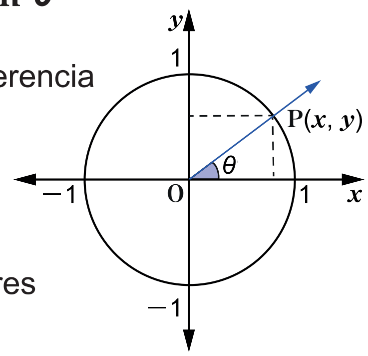
En consecuencia, $\frac{\pi}{6} = \mathbf{30°}$.

E2

Convierta las siguientes medidas en grados.

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{3\pi}{4}$ c) $\frac{5\pi}{6}$ d) $\frac{4\pi}{3}$

Contenido 2: Gráfica y propiedades de la función $y = \text{sen}\ \theta$



Recuerde que si $P(x, y)$ es el punto de intersección de la circunferencia unitaria y el lado terminal $\overrightarrow{OP}$ del ángulo θ, entonces

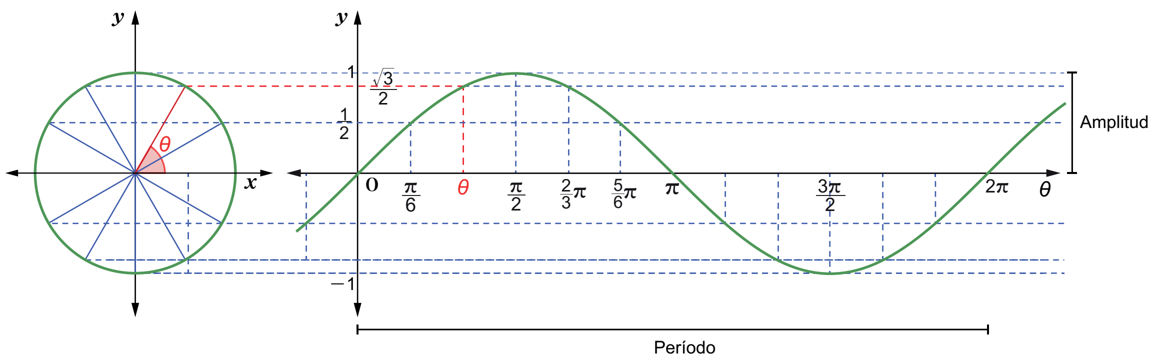
$$\text{sen}\ \theta = \frac{y}{1} = y.$$

Es decir, la ordenada del punto P se identifica con $\text{sen}\ \theta$.

Para trazar la gráfica de $y = \text{sen}\ \theta$ se puede hacer una tabla de valores ocupando los ángulos especiales, así

θ	$-90°$	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$	$450°$
en radianes	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$
$y = \text{sen}\ \theta$	-1	0	1	0	-1	0	1

Al ubicar los puntos en el plano y unirlos, la gráfica de $y = \text{sen}\ \theta$ será como sigue:

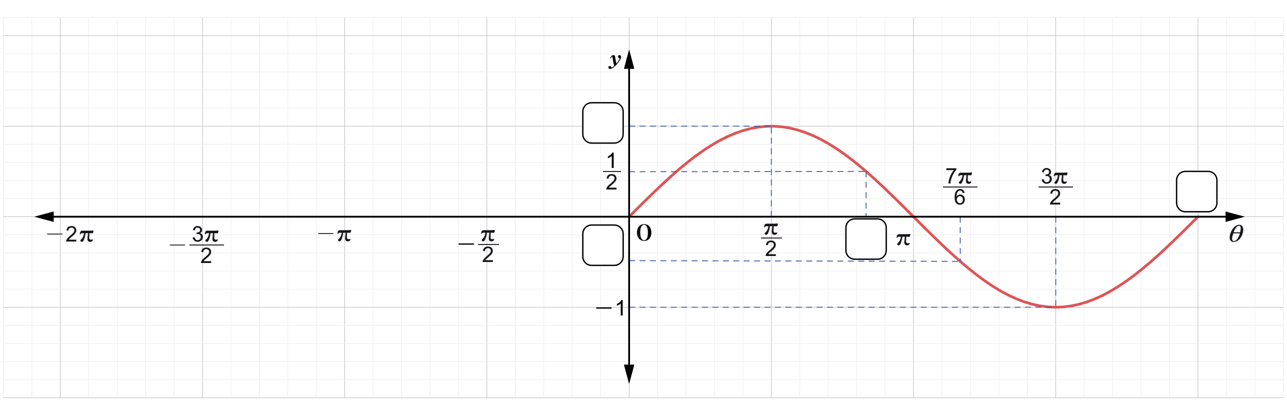


A esta curva se le llama **curva senoidal**. Las propiedades más esenciales son:

- Como $2\pi = 360°$ y $\text{sen}\ (\theta + 360°) = \text{sen}\ \theta$, entonces $\text{sen}\ (\theta + 2\pi) = \text{sen}\ \theta$. De aquí se deduce que la función $y = \text{sen}\ \theta$ tiene **período 2π**.
- Para $y = \text{sen}\ \theta$, el **rango** es $\mathbf{-1 \leq y \leq 1}$.
- **La amplitud** es **1**.

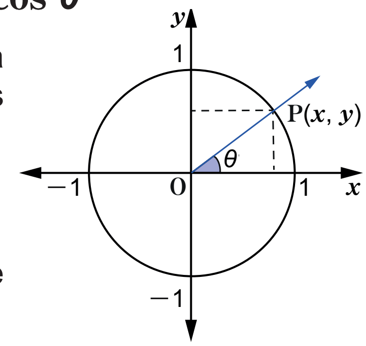
E

a) Indique los valores correspondientes a los espacios en blanco en el trozo de la gráfica de $y = \text{sen}\ \theta$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ que se muestra a continuación.



b) Complete la gráfica de $y = \text{sen}\ \theta$ para $-2\pi \leq \theta \leq 0$.

Contenido 3: Gráfica y propiedades de la función $y = \cos\theta$



Recuerde que si $P(x, y)$ es el punto de intersección de la circunferencia unitaria y el lado terminal $\overrightarrow{OP}$ del ángulo θ, entonces

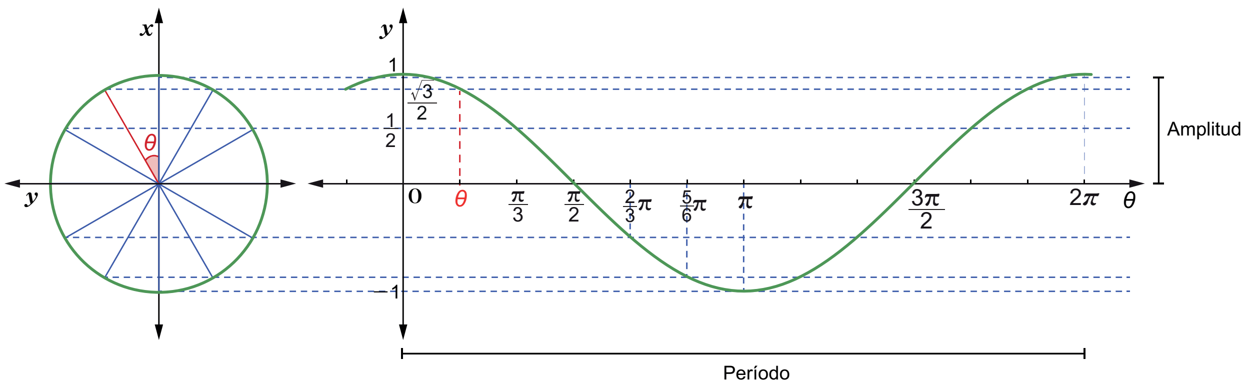
$$\cos\theta = \frac{x}{1} = x.$$

Es decir, la abscisa del punto P se identifica con $\cos\theta$.

Para trazar la gráfica de $y = \cos\theta$ se puede hacer una tabla de valores ocupando los ángulos especiales, así

θ	$-90°$	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$	$450°$
en radianes	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$
$y = \cos\theta$	0	1	0	−1	0	1	0

Al ubicar los puntos en el plano y unirlos, la gráfica de $y = \cos\theta$ será como sigue:

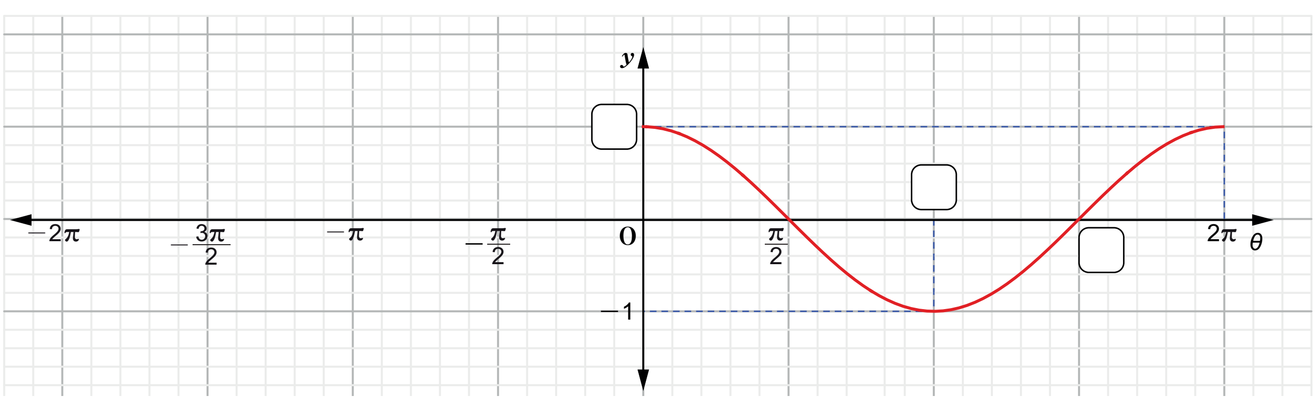


A esta curva se le llama **curva cosenoidal**. Las propiedades más esenciales son:

- Como $2\pi = 360°$ y $\cos(\theta + 360°) = \cos\theta$, entonces $\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$. De aquí se deduce que la función $y = \cos\theta$ tiene **período 2π**.
- Para $y = \cos\theta$, el **rango** es $\mathbf{-1 \le y \le 1}$.
- **La amplitud** es **1**.

E

a) Indique los valores correspondientes a los espacios en blanco en el trozo de la gráfica de $y = \cos\theta$ para $0 \le \theta \le 2\pi$ que se muestra a continuación.



b) Complete la gráfica de $y = \cos\theta$ para $-2\pi \le \theta \le 0$.

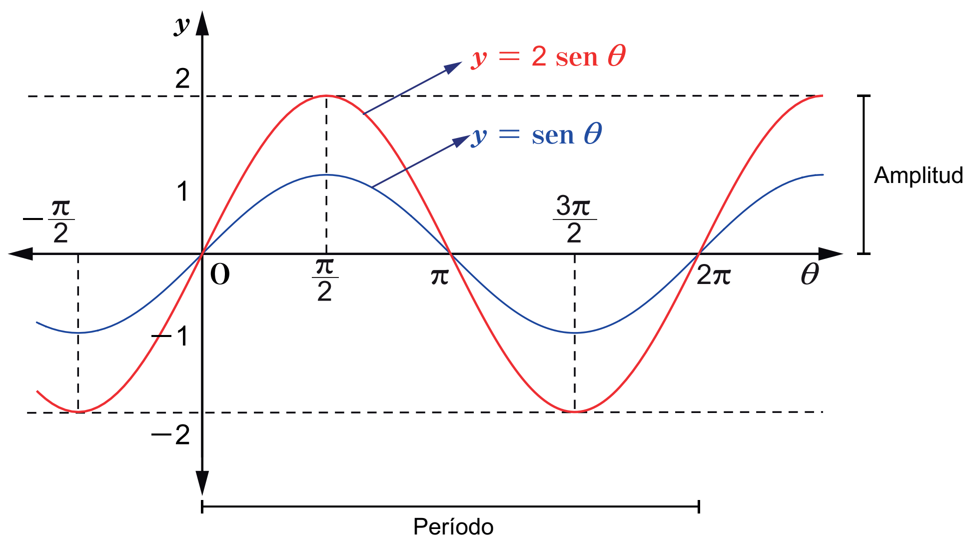
Contenido 4: Gráficas de las funciones $y = a\,\mathrm{sen}\,\theta$ y $y = a\cos\theta$

Ejemplo 1 Trace la gráfica de $y = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$.

Para trazar la gráfica de $y = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$ se puede hacer una tabla de valores ocupando los ángulos especiales, así

θ	0°	90°	180°	270°	360°
en radianes	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \mathrm{sen}\,\theta$	0	1	0	-1	0
$y = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$	0	2	0	-2	0

Nótese que para obtener los valores de $y = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$ se multiplican por 2 los valores correspondientes a $\mathrm{sen}\,\theta$, por eso se dice que esta nueva función tiene **amplitud** 2 y por tanto, está alargada verticalmente en factor 2 respecto a la gráfica de $y = \mathrm{sen}\,\theta$. Así que, al ubicar los puntos en el plano y unirlos, la gráfica de $y = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$ será como sigue:



Sus propiedades son:

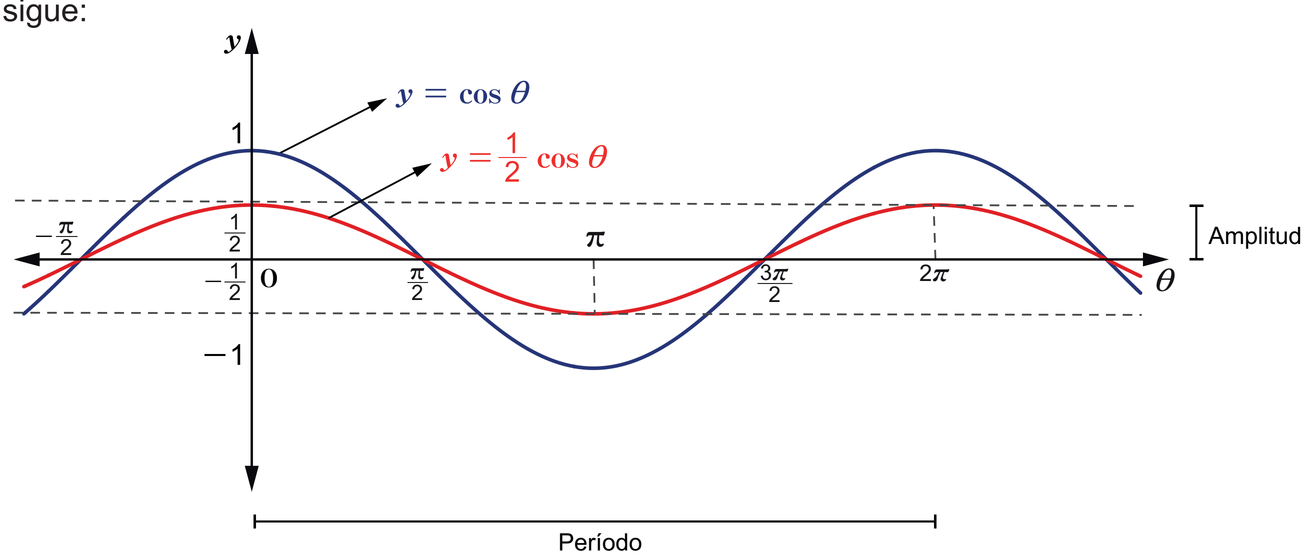
- Tiene **período 2π**.
- Para $y = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$, el **rango** es $-2 \le y \le 2$.
- La **amplitud** es **2**.

Ejemplo 2 Trace la gráfica de $y = \frac{1}{2}\cos\theta$.

Similarmente, se elabora una tabla de valores ocupando los valores de la función trigonométrica coseno para los ángulos especiales, así

θ	**0°**	**90°**	**180°**	**270°**	**360°**
en radianes	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\boldsymbol{y = \cos\theta}$	1	0	-1	0	1
$\boldsymbol{y = \frac{1}{2}\cos\theta}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

Nótese que para obtener los valores de $y = \frac{1}{2}\cos\theta$ se multiplican por $\frac{1}{2}$ los valores correspondientes a $\cos\theta$, por eso se dice que esta nueva función tiene **amplitud** $\frac{1}{2}$ y por tanto, está comprimida verticalmente en un factor $\frac{1}{2}$ respecto a la gráfica de $y = \cos\theta$. En consecuencia, al ubicar los puntos en el plano y unirlos, la gráfica de $y = \frac{1}{2}\cos\theta$ será como sigue:



Sus principales propiedades son:

- Tiene **período 2π**.
- Para $y = \frac{1}{2}\cos\theta$, el **rango** es $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$.
- La **amplitud** es $\frac{1}{2}$.

E

Trace las gráficas de las siguientes funciones y determine sus principales propiedades:

a) $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$ b) $y = 2\cos\theta$

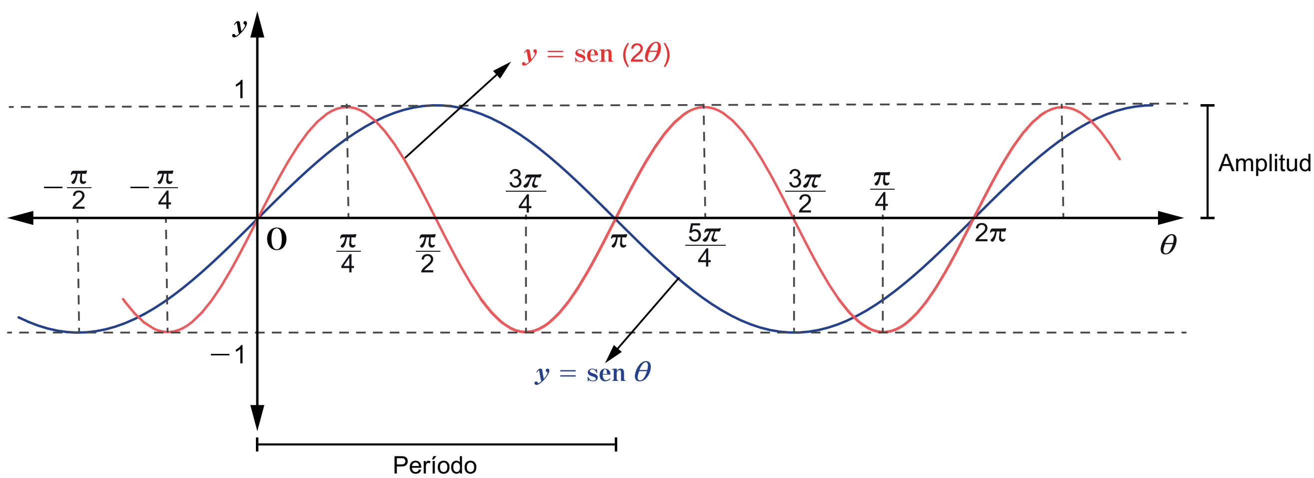
Contenido 5: Gráficas de las funciones $y = \text{sen}\,(b\cdot\theta)$ y $y = \cos\,(b\cdot\theta)$

Ejemplo 1 Trace la gráfica de $y = \text{sen}\,(2\theta)$.

Nótese que para $y = \text{sen}\,(2\theta)$ la **amplitud** es **1**. Además, el argumento de esta función (expresión a la que se le calcula el seno) es 2θ por lo cual no tendrá **período** 2π, sino $\frac{2\pi}{2} = \pi$, este hecho se comprende mejor analizando la tabla de valores para $y = \text{sen}\,(2\theta)$ ocupando los valores de la función trigonométrica seno para los ángulos especiales, así

$\boldsymbol{\theta}$	**0**	$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{3\pi}{4}}$	$\boldsymbol{\pi}$
$\boldsymbol{2\theta}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \text{sen}\,(2\theta)$	0	1	0	-1	0

Se observa que para obtener los valores de $y = \text{sen}\,(2\theta)$ se multiplican por 2 los valores correspondientes a $\theta = 0$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, π, quedando invariantes los valores de los ángulos especiales conocidos y por tanto, se dice que esta nueva función está comprimida horizontalmente por un factor 2 respecto a la gráfica de $y = \text{sen}\,\theta$. Así que, al ubicar los puntos en el plano y unirlos, la gráfica de $y = \text{sen}\,(2\theta)$ será como sigue:

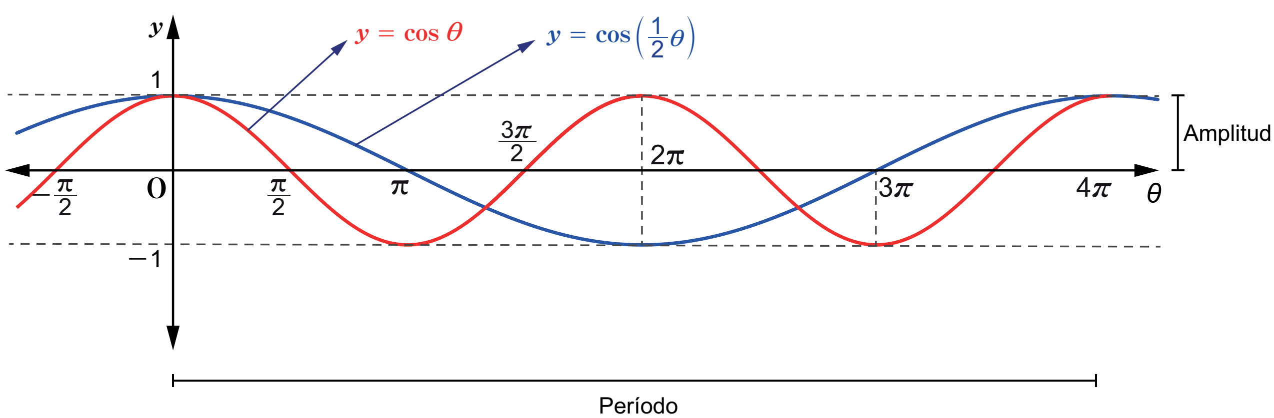


Ejemplo 2 Trace la gráfica de $y = \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)$

Similarmente, para $y=\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)$ la **amplitud** es **1**. Además, el argumento de esta función (expresión a la que se le calcula el coseno) es $\frac{1}{2}\theta$ por lo cual no tendrá **período** 2π, sino $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}} = \mathbf{4\pi}$, este hecho se comprende mejor analizando la tabla de valores para $y=\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)$ ocupando los valores de la función trigonométrica coseno para los ángulos especiales, así:

$\boldsymbol{\theta}$	**0**	π	$\mathbf{2\pi}$	$\mathbf{3\pi}$	$\mathbf{4\pi}$
$\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)$	1	0	-1	0	1

Se observa que para obtener los valores de $y=\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)$ se multiplican por $\frac{1}{2}$ los valores correspondientes a $\theta=0$, π, 2π, 3π, 4π, quedando invariantes los valores de los ángulos especiales conocidos y por tanto, se dice que esta nueva función está alargada horizontalmente por un factor $\frac{1}{2}$ respecto a la gráfica de $y=\cos\theta$. Así que, al ubicar los puntos en el plano y unirlos, la gráfica de $y=\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)$ será como sigue:



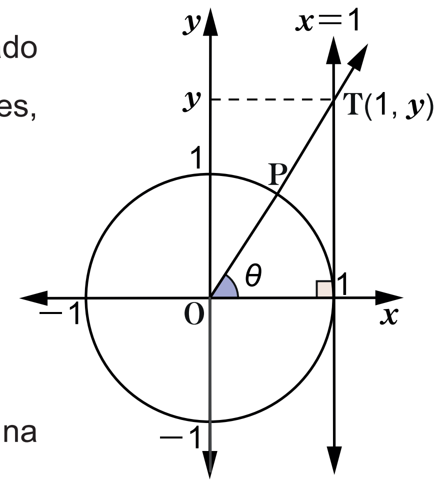
E

Trace las gráficas de las siguientes funciones y determine sus principales propiedades.

a) $y=\text{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right)$

b) $y=\cos(2\theta)$

Contenido 6: Gráfica y propiedades de la función $y = \tan\theta$



Recuerde que dada una circunferencia de radio $r = 1$, $\overrightarrow{OP}$ el lado terminal del ángulo $\theta \neq 90°$ y $T(1, y)$ un punto sobre $\overrightarrow{OP}$. Entonces,

$$\tan\theta = \frac{\text{ordenada de T}}{\text{abscisa de T}} = \frac{y}{1} = y, \text{ es decir, } \quad y = \tan\theta.$$

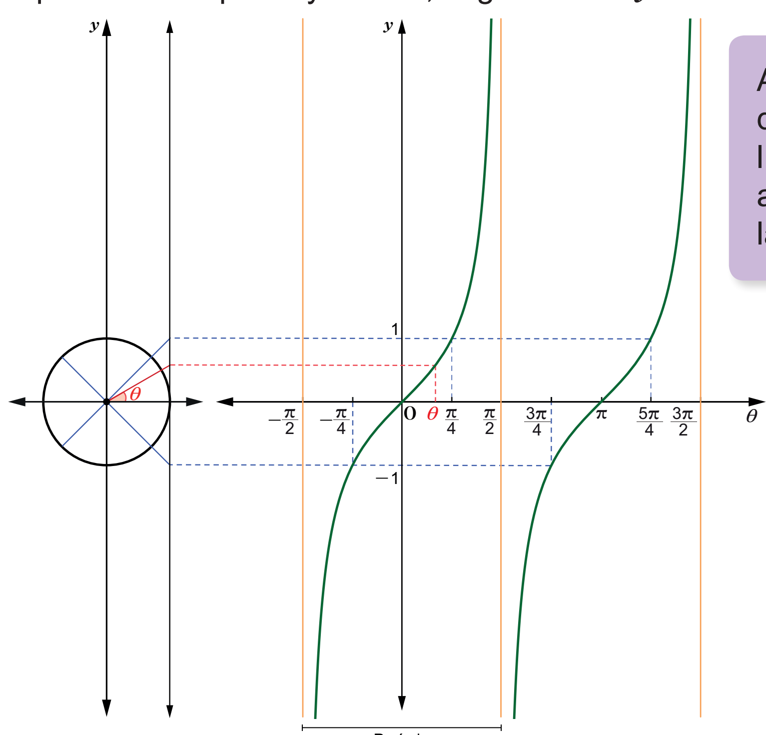
Por tanto, la $\tan\theta$ coincide con la ordenada del punto T.

Así que, para trazar la gráfica de $y = \tan\theta$ se puede hacer una tabla de valores, así:

θ	$-90°$	$-45°$	$0°$	$45°$	$90°$	$180°$	$270°$
en radianes	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$y = \tan\theta$	NE	-1	0	1	NE	0	NE

Para cuando θ es igual a cualquier múltiplo impar de $\frac{\pi}{2}$ la tangente no existe. Además, cuando θ toma valores muy cercanos por la izquierda o por la derecha de dichos valores, $\tan\theta$ tiende a tomar valores extremadamente grande o pequeños. Se establece entonces que las rectas verticales descritas por tales valores son **asíntotas** de la función tangente.

Al ubicar los puntos en el plano y unirlos, la gráfica de $y = \tan\theta$ será como sigue:



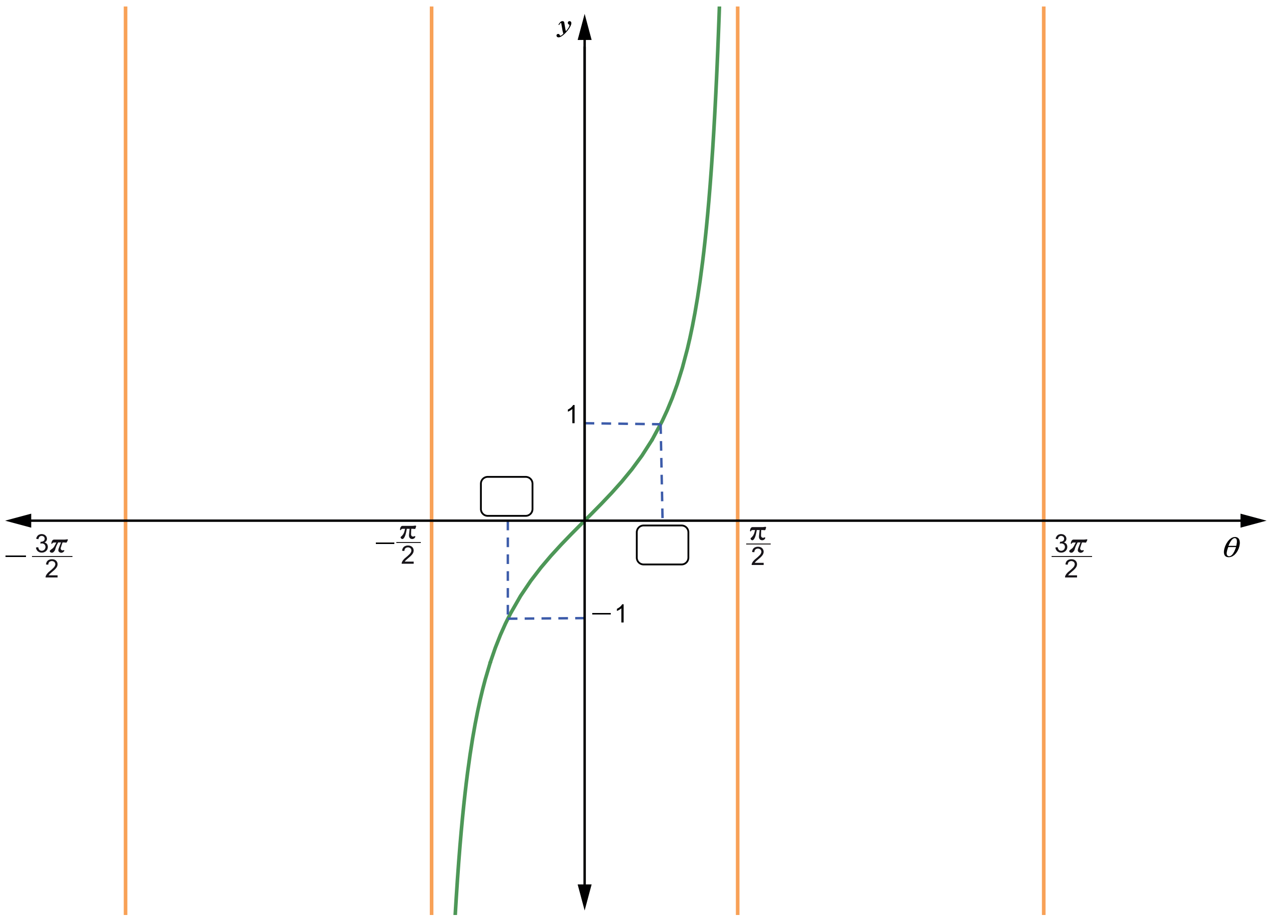
Asíntota de la gráfica de una función es una línea recta a la que se aproxima continuamente la gráfica de tal función.

Las propiedades más esenciales son:

- Como $\pi = 180°$ y $\tan(\theta + 180°) = \tan\theta$, entonces $\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$. De aquí se deduce que la función $y = \tan\theta$ tiene **período π**.
- Para $y = \tan\theta$, el **rango** es el conjunto de los **números reales**.

E

a) Indique los valores correspondientes a los espacios en blanco en el trozo de la gráfica de $y = \tan\theta$ para $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ que se muestra a continuación:



b) Trace en la gráfica anterior los trozos de la función $y = \tan\theta$ para $-\frac{3\pi}{2} < \theta < -\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$.

Contenido 7: Comprobemos lo aprendido 4

1. Convierte las siguientes medidas en radianes:

   a) $80°$

   b) $150°$

   c) $250°$

   d) $-330°$

2. Convierte las siguientes medidas en grados:

   a) $\dfrac{\pi}{5}$

   b) $\dfrac{7\pi}{2}$

   c) $\dfrac{5\pi}{9}$

   d) $-\dfrac{8\pi}{3}$

3. Trace las gráficas de las siguientes funciones y determine sus principales propiedades:

   a) $y = \dfrac{1}{3}\operatorname{sen}\theta$

   b) $y = 3\cos\theta$

   c) $y = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{3}\theta\right)$

   d) $y = \cos(3\theta)$

   e) $y = \tan\theta$, para $-\dfrac{5\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Unidad 7

Trigonometría Analítica

Sección 1	Ley del seno
Sección 2	Ley del coseno

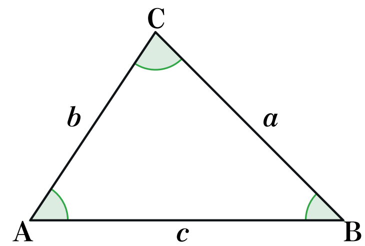
Sección 1: Ley del seno

Contenido 1: Ley del seno (1)

Ley del seno

Dado el ΔABC, con ángulos interiores A, B y C y lados opuestos a cada ángulo a, b y c, respectivamente. Entonces

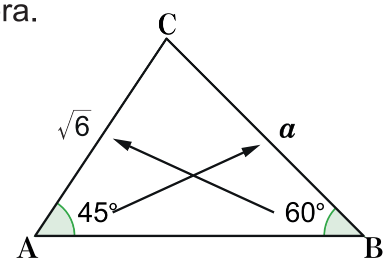
$$\frac{a}{\text{sen } A}=\frac{b}{\text{sen } B}=\frac{c}{\text{sen } C}.$$



Es decir, en un triángulo cualquiera, la longitud de cada lado es directamente proporcional al seno del ángulo opuesto a dicho lado.

Aquí se aplica esta ley conociendo dos ángulos y un lado cualquiera.

Ejemplo Dado el ΔABC, con $b=\sqrt{6}$, $\measuredangle A=45°$ y $\measuredangle B=60°$.
Determine la longitud a del lado $\overline{BC}$.



Por la ley del seno, $\dfrac{a}{\text{sen } A}=\dfrac{b}{\text{sen } B}$. Se sustituye $b=\sqrt{6}$, $\measuredangle A=45°$ y $\measuredangle B=60°$ en la expresión anterior, para obtener

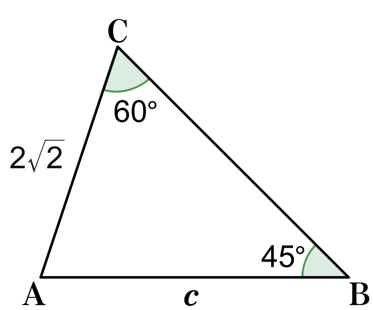
$\dfrac{a}{\text{sen } 45°}=\dfrac{\sqrt{6}}{\text{sen } 60°}$, de donde

$$\begin{aligned}
a &= \left(\frac{\sqrt{6}}{\text{sen } 60°}\right)(\text{sen } 45°),\\
&= \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left[\sqrt{6}\div\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\
&= (\sqrt{6})\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=(\sqrt{6})\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)=2\\
a &= 2.
\end{aligned}$$

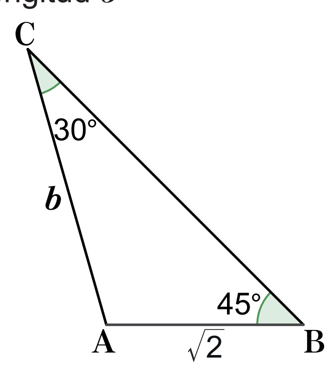
$$\text{sen } 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\text{sen } 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dados los siguientes triángulos, determine:

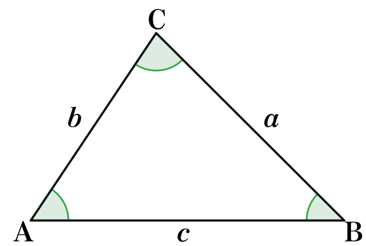
a) La longitud c



b) La longitud b



Contenido 2: Ley del seno (2)



En un $\triangle ABC$, con ángulos interiores A, B y C y lados opuestos a cada ángulo a, b y c, respectivamente, se cumple que

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$

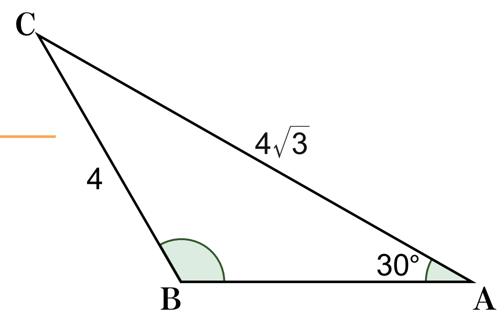
De donde se obtienen las siguientes relaciones:

$$\operatorname{sen} A = \frac{a \operatorname{sen} B}{b} \quad \text{o bien} \quad \operatorname{sen} A = \frac{a \operatorname{sen} C}{c}$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a} \quad \text{o bien} \quad \operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} C}{c}$$

$$\operatorname{sen} C = \frac{c \operatorname{sen} B}{b} \quad \text{o bien} \quad \operatorname{sen} C = \frac{c \operatorname{sen} A}{a}$$

Ejemplo Dado el $\triangle ABC$ de la figura, con $b = 4\sqrt{3}$, $\measuredangle A = 30°$ y $a = 4$. Determine la medida del ángulo B opuesto al lado $\overline{AC}$.



Al sustituir $b = 4\sqrt{3}$, $\measuredangle A = 30°$ y $a = 4$ en la igualdad

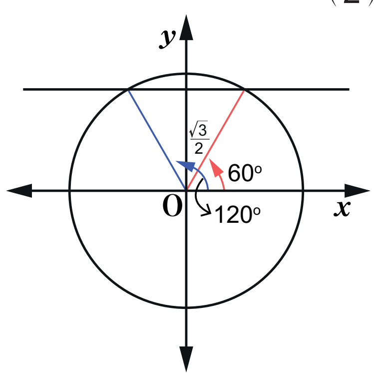
$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a},$$

se sigue que

$$\operatorname{sen} B = \frac{(\cancel{4}\sqrt{3})(\operatorname{sen} 30°)}{\cancel{4}}$$

$$\operatorname{sen} B = (\sqrt{3})\left(\frac{1}{2}\right)$$

$\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$



$$\operatorname{sen} B = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{sen} 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

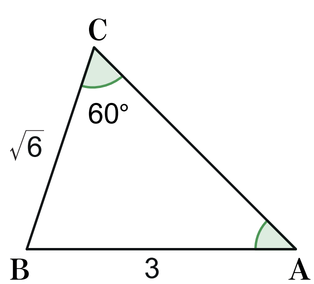
De donde $\measuredangle B = 60°$ o $\measuredangle B = 120°$. Pero, de acuerdo con la figura $90° < \measuredangle B < 180°$, así que

$$\measuredangle B = 120°.$$

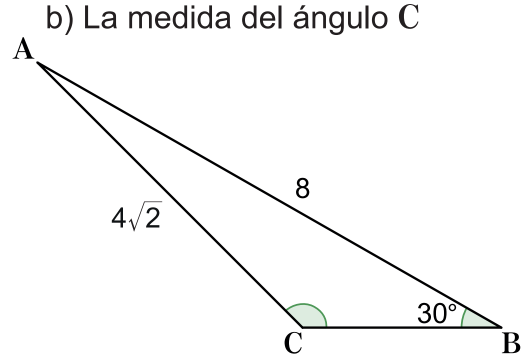
E

Dados los siguientes triángulos, determine:

a) La medida del ángulo A



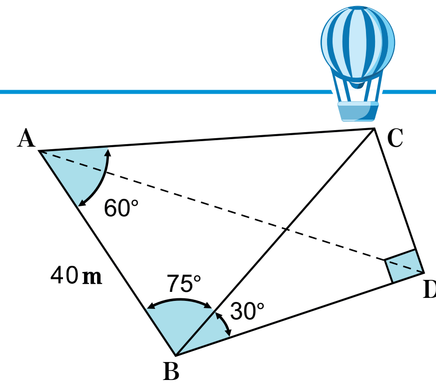
b) La medida del ángulo C



Contenido 3: Aplicación de la ley del seno

P

Dos observadores A y B, se encuentran a 40 m entre sí, ven un globo, pero con los ángulos que se muestran en la figura. Determine la altura CD a la que se encuentra el globo.

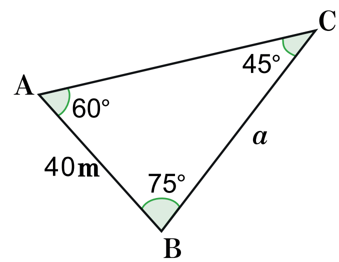


S

En el ΔABC, $\measuredangle A + \measuredangle ABC + \measuredangle ACB = 180°$, se sustituye $\measuredangle A = 60°$ y $\measuredangle ABC = 75°$ para obtener

$$60° + 75° + \measuredangle ACB = 180°$$

$$\measuredangle ACB = 180° - (60° + 75°) = 45°.$$



Sea a la distancia desde el observador B hasta el globo.

Aplicando la ley del seno en el ΔABC, se obtiene

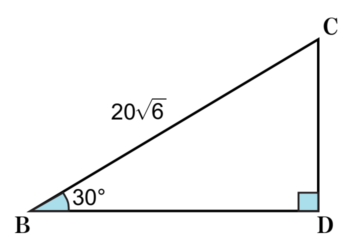
$$\frac{a}{\operatorname{sen} 60°} = \frac{40}{\operatorname{sen} 45°}$$

de donde

$$a = \left(\frac{40}{\operatorname{sen} 45°}\right)(\operatorname{sen} 60°)$$

$$= \left(\frac{40}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(40 \div \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= (40)(\sqrt{2})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 20\sqrt{6}$$



Es decir,

$$\boldsymbol{a = 20\sqrt{6}}.$$

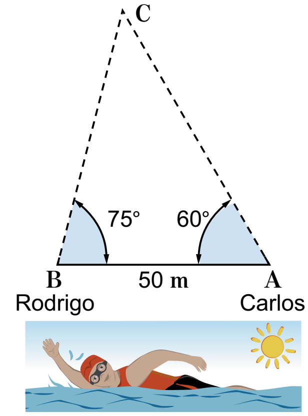
Como el ΔBDC es triángulo rectángulo, entonces la altura CD del globo es

$$CD = a\,(\operatorname{sen} 30°) = (20\sqrt{6})\left(\frac{1}{2}\right) = 10\sqrt{6}.$$

Por tanto, **la altura CD a la que se encuentra el globo es $10\sqrt{6}$ m**.

E

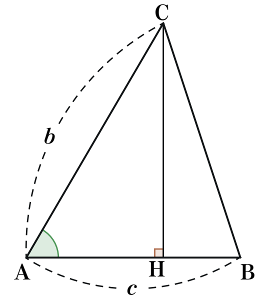
Carlos, un salvavidas de San Juan del Sur, ubicado en el punto A, observa a un nadador ubicado en el punto C que pide auxilio con un ángulo de 60°, y Rodrigo, un salvavidas ubicado en el punto B, lo observa con un ángulo de 75°. Si ambos están separados a una distancia de 50 m, ¿qué distancia tiene que recorrer Rodrigo para rescatarlo?



Contenido 4: El área de un triángulo utilizando trigonometría

P

Dado el triángulo de la figura de la derecha. Exprese su área utilizando trigonometría.



S

De acuerdo con la figura, el $\Delta\mathrm{ABC}$ tiene base AB y altura CH. Así que su área está dada por

$$\text{Área} = \frac{1}{2}(\mathrm{AB})(\mathrm{CH}).$$

Utilizando la razón trigonométrica seno se sabe que $\operatorname{sen} A = \dfrac{\mathrm{CH}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{\mathrm{CH}}{b}$, de donde $\mathrm{CH} = b \operatorname{sen} A$.

Se sustituye $\mathrm{AB} = c$ y $\mathrm{CH} = b \operatorname{sen} A$ en la expresión anterior, para obtener que el área de dicho triángulo puede ser expresada como

$$\textbf{Área} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \boldsymbol{bc} \operatorname{\mathbf{sen}} \boldsymbol{A}.$$

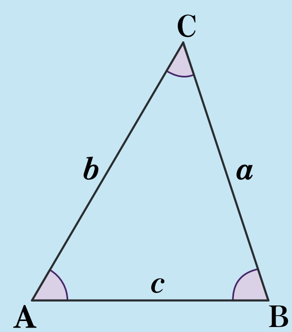
C

El área del $\Delta\mathrm{ABC}$, utilizando trigonometría puede ser expresada como $\textbf{Área} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \boldsymbol{bc} \operatorname{\mathbf{sen}} \boldsymbol{A}$.

También es válido expresar el área como

$$\textbf{Área} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \boldsymbol{ca} \operatorname{\mathbf{sen}} \boldsymbol{B}.$$

$$\textbf{Área} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \boldsymbol{ab} \operatorname{\mathbf{sen}} \boldsymbol{C}.$$



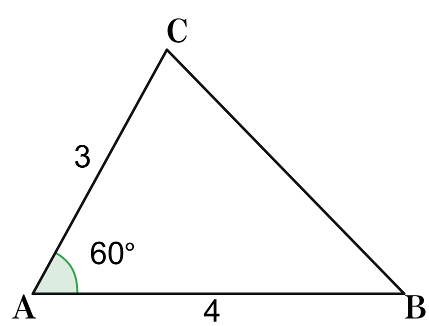
Ejemplo Dado el $\Delta\mathrm{ABC}$ con $b = 3$, $c = 4$ y $\measuredangle A = 60°$. Determine su área.

Se sustituye $b = 3$, $c = 4$ y $\measuredangle \mathrm{A} = 60°$ en

$\text{Área} = \dfrac{1}{2} bc \operatorname{sen} A$, resulta

$$\text{Área} = \left(\frac{1}{2}\right)(3)(4) \operatorname{sen} 60°$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)(3)(4)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\sqrt{3}.$$



Es decir, **el área del $\Delta\mathrm{ABC}$ es $3\sqrt{3}$**.

E

Determine el área del $\Delta\mathrm{ABC}$ con:

a) $b = 4$, $c = 8$ y $\measuredangle A = 30°$

b) $b = 6$, $c = 10$ y $\measuredangle A = 45°$

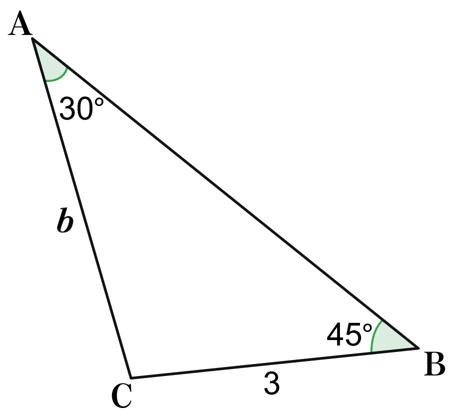
c) $a = 3$, $c = 8$ y $\measuredangle B = 60°$

d) $a = 6$, $b = 2$ y $\measuredangle C = 120°$

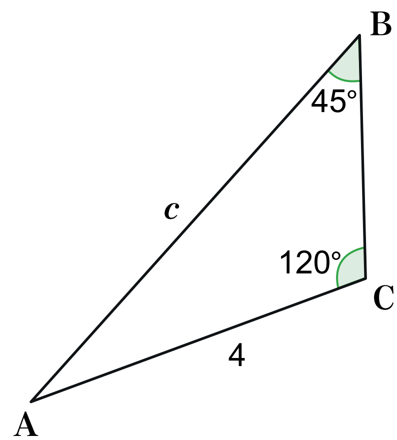
Contenido 5: Comprobemos lo aprendido 1

1. Dados los siguientes triángulos, determine:

   a) La longitud b

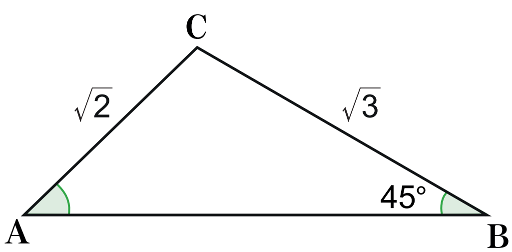


   b) La longitud c

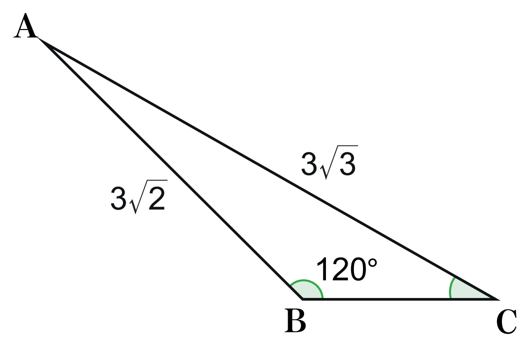


2. Dados los siguientes triángulos, determine:

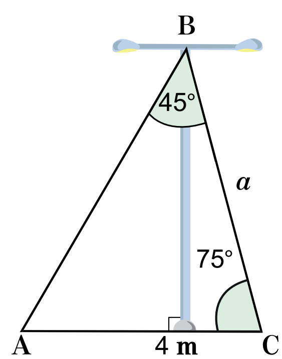
   a) La medida del ángulo A



   b) La medida del ángulo C



3. Dos cables fijan un poste de luz desde su punto más alto B al suelo, con ángulos como en la figura. Determine la longitud a del cable que va desde el punto B al punto C.



4. Determine el área del ΔABC con:

   a) $b = 8$, $c = 3$ y $\measuredangle A = 45°$

   b) $b = 4$, $a = 3$ y $\measuredangle C = 30°$

   c) $a = 4$, $c = 2$ y $\measuredangle B = 60°$

   d) $a = 10$, $b = 2$ y $\measuredangle C = 120°$

Desafío

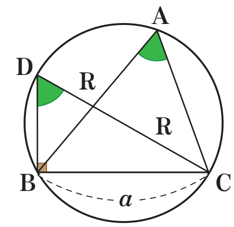
Demostración de la ley del seno

Teorema (ley del seno)
Sea R el radio de la circunferencia circunscrita al $\triangle \mathrm{ABC}$ de ángulos interiores A, B y C y lados opuestos a cada ángulo a, b y c, respectivamente. Entonces

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}=\frac{c}{\operatorname{sen} C}=2\mathrm{R}.$$

Demostración. Demostremos $\frac{a}{\operatorname{sen} A}=2\mathrm{R}$, es decir, $a=2\mathrm{R}\operatorname{sen} A$. ①

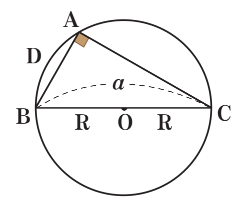
Consideraremos tres casos para el ángulo A:



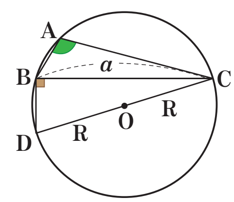
i) Si A es un ángulo agudo y $\overline{\mathrm{CD}}$ el diámetro de la circunferencia. Los ángulos A y D están inscritos en la circunferencia, así que tienen la misma medida, es decir, $\measuredangle A=\measuredangle D$. Y como $\overline{\mathrm{CD}}$ es un diámetro, entonces

$$\measuredangle CBD=90°.$$

En consecuencia, $$a=2\mathrm{R}\operatorname{sen} D=2\mathrm{R}\operatorname{sen} A.$$



ii) Si A es un ángulo recto, $\operatorname{sen} 90° = 1$, entonces
$$a=2\mathrm{R}=2\mathrm{R}\operatorname{sen} A.$$



iii) Si A es un ángulo obtuso y $\overline{\mathrm{CD}}$ el diámetro de la circunferencia. De la relación entre las medidas de un ángulo inscrito y su ángulo central correspondiente se sigue que $2(\measuredangle A+\measuredangle D)=360°$, de donde $\measuredangle A+\measuredangle D=180°$. Por tanto,

$$a=2\mathrm{R}\operatorname{sen} D=2\mathrm{R}\operatorname{sen}(180°-A)=2\mathrm{R}\operatorname{sen} A.$$

En cualquiera de los casos, la relación ① es verdadera.

Similarmente, se prueba que $\frac{b}{\operatorname{sen} B}=2\mathrm{R}$, $\frac{c}{\operatorname{sen} C}=2\mathrm{R}$.

Por tanto,

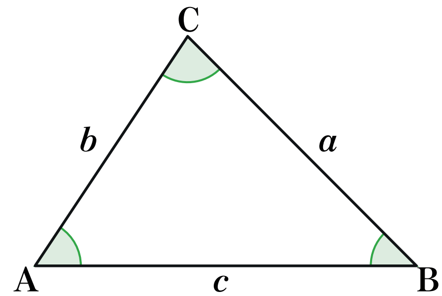
$$\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}=\frac{c}{\operatorname{sen} C}=2\mathrm{R}.$$

Sección 2: Ley del coseno

Contenido 1: Ley del coseno (1)

Ley del coseno

En un ΔABC, con ángulos interiores A, B y C y lados opuestos a cada ángulo a, b y c, respectivamente, se cumple que



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Es decir, en un triángulo cualquiera, el cuadrado de la longitud de cada lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de estos por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.

Ejemplo Dado el ΔABC, con $b = 5$, $c = 3\sqrt{3}$ y $\measuredangle A = 30°$, determine la longitud a del lado $\overline{BC}$.

Por la ley del coseno, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$. Se sustituye $b = 5$, $c = 3\sqrt{3}$ y $\measuredangle A = 30°$ en la expresión anterior, para obtener

$$\begin{aligned} a^2 &= 5^2 + (3\sqrt{3})^2 - (2)(5)(3\sqrt{3})\cos 30° \\ &= 25 + 27 - (2)(5)(3\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 25 + 27 - 45 \\ &= 7 \end{aligned}$$

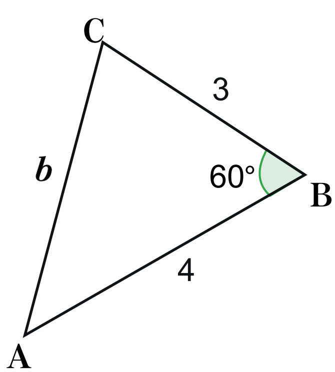
$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Por tanto, $a^2 = 7$. Como $a > 0$, entonces $\boldsymbol{a = \sqrt{7}}$.

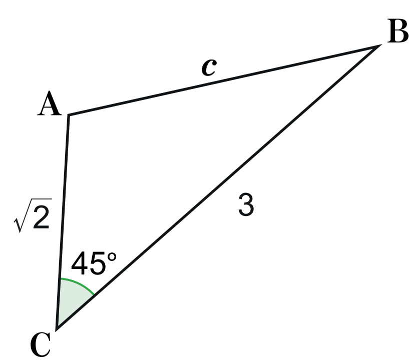
E

Dados los siguientes triángulos, determine:

a) La longitud b



b) La longitud c



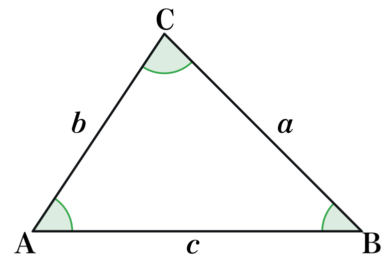
Contenido 2: Ley del coseno (2)

En un ΔABC, con ángulos interiores A, B y C y lados opuestos a cada ángulo a, b y c, respectivamente, se cumple

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

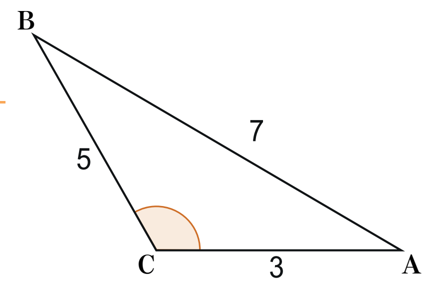
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$



De donde se obtienen las siguientes relaciones:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Ejemplo Dado el ΔABC, con $a = 5$, $b = 3$ y $c = 7$. Determine la medida del ángulo C opuesto al lado $\overline{AB}$.



Al sustituir $a = 5$, $b = 3$ y $c = 7$ en la igualdad

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

se sigue que

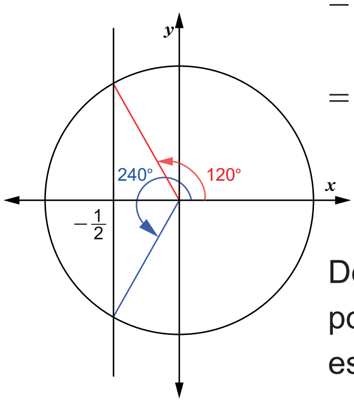
$$\cos C = \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{(2)(5)(3)}$$

$$= \frac{25 + 9 - 49}{30}$$

$$= \frac{-15}{30}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$\cos C = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} \cos 120° = -\frac{1}{2} \\ \cos 240° = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

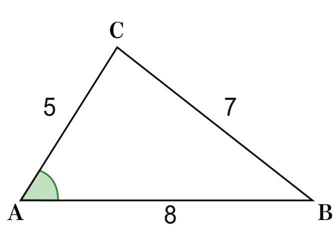


De donde $\measuredangle C = 120°$ o $\measuredangle C = 240°$. Pero $\measuredangle C = 240°$ es imposible, porque la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°. Así que $\measuredangle C = 120°$.

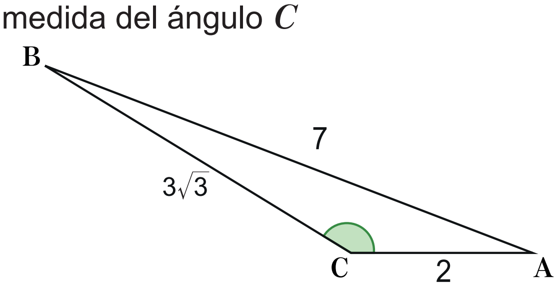
E

Dados los siguientes triángulos, determine:

a) La medida del ángulo A



b) La medida del ángulo C

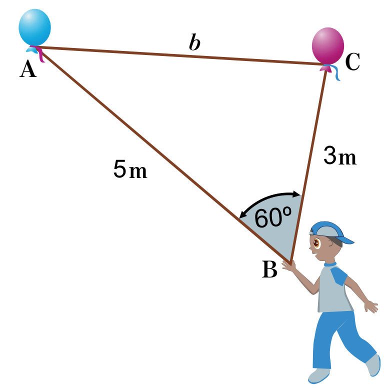


Contenido 3: Aplicación de la ley del coseno

P

Rodrigo sostiene dos globos con dos cuerdas, una de longitud 5 metros y la otra de 3 metros. Si el ángulo que se forma entre ambas cuerdas es de 60°.

¿A qué distancia se encuentra un globo respecto al otro?



S

Se aplica la ley del coseno al triángulo ΔABC para el lado b, se tiene que

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

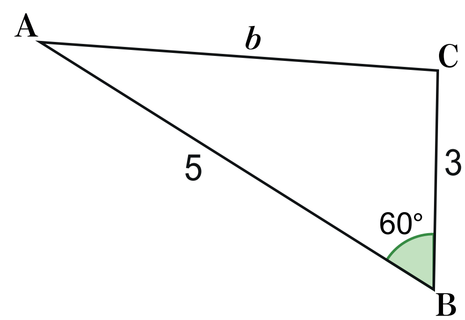
$$b^2 = 3^2 + 5^2 - (2)(3)(5) \cos 60°$$

$$b^2 = 9 + 25 - (30)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$b^2 = 19$$

Como $b > 0$,

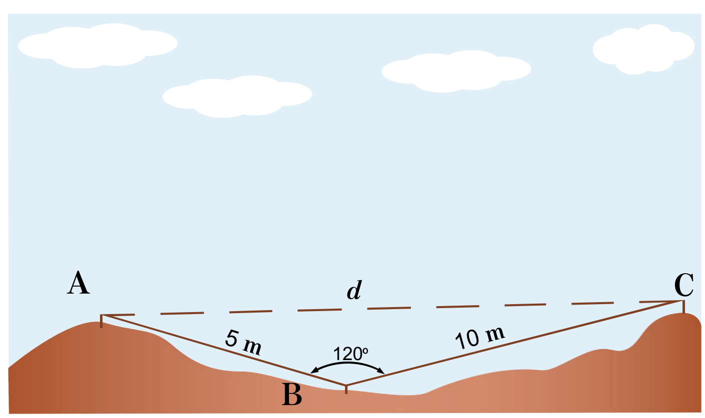
$$b = \sqrt{19}\,.$$



Por tanto, **los globos se encuentran, entre sí, a una distancia de $\sqrt{19}$ metros**.

E

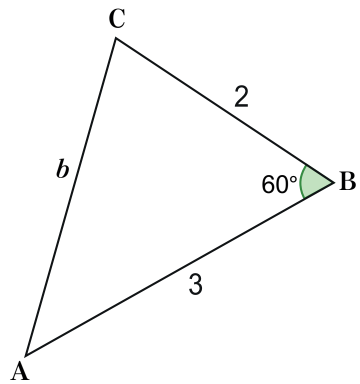
Desde el suelo de un cañón se necesitan 5 m de soga para alcanzar la cima de la pared del cañón y 10 m para alcanzar la cima de la pared opuesta (ver figura). Si las dos sogas forman un ángulo de 120°, ¿cuál es la distancia d desde la cima de una pared del cañón a la otra?



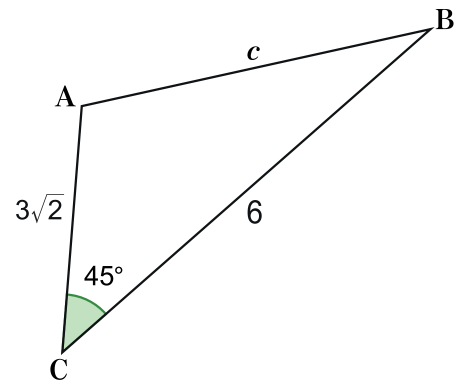
Contenido 4: Comprobemos lo aprendido 2

1. Dados los siguientes triángulos, determine:

a) La longitud b

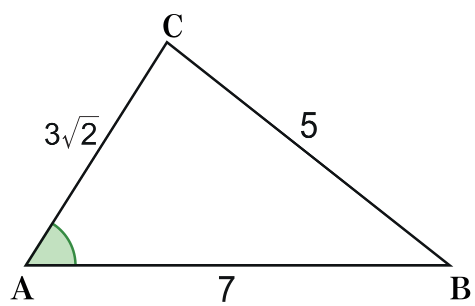


b) La longitud c

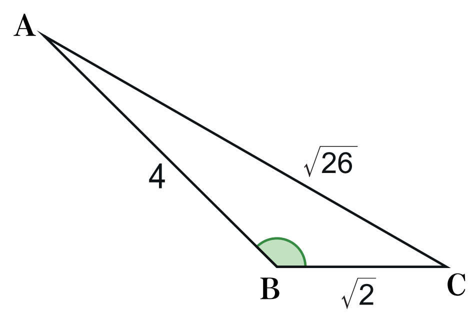


2. Dados los siguientes triángulos, determine:

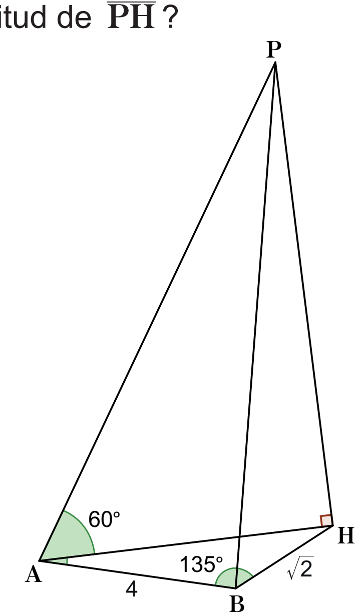
a) La medida del ángulo A



b) La medida del ángulo B



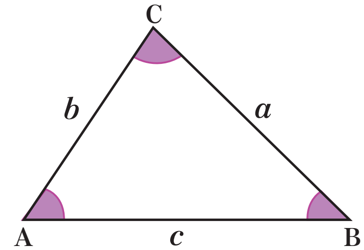
3. Alejandro dibuja en su cuaderno la siguiente pirámide. De acuerdo con la información que se brinda, ¿cuál es la longitud de $\overline{PH}$?



Desafío

Demostración de la ley del coseno

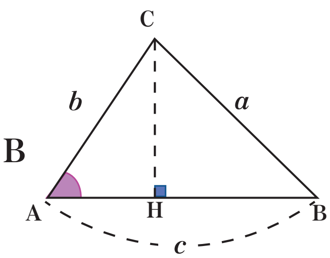
Teorema (ley del coseno)
Dado un $\triangle ABC$, con ángulos interiores A, B y C y lados opuestos a cada ángulo a, b y c, respectivamente. Entonces

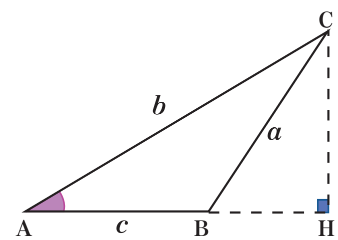


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Demostración. Demostraremos la primera igualdad. Sea CH la altura correspondiente al lado $\overline{AB}$ del triángulo ABC, así que

$$CH = b \text{ sen } A$$
$$AH = b \cos A.$$



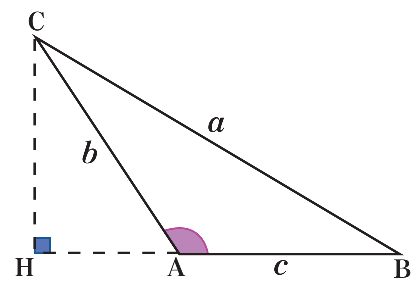


Si B es un ángulo agudo, H está entre A y B y en consecuencia

$$BH = AB - AH = c - b\cos A$$

Si B es obtuso, B está entre A y H y en consecuencia

$$BH = AH - AB = b\cos A - c$$



Considerando el ángulo A, se sigue que

$$CH = b \text{ sen}(180° - A) = b \text{ sen } A$$
$$AH = b \cos(180° - A) = -\, b \cos A$$
$$BH = AB + AH = c - b \cos A$$

En todos los casos, el $\triangle BCH$ es un triángulo rectángulo, así que por el Teorema de Pitágoras, se tiene $BC^2 = CH^2 + BH^2$. Luego,

$$\begin{aligned} a^2 &= (b \text{ sen } A)^2 + (c - b\cos A)^2 \\ &= b^2 \text{sen}^2 A + c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A \\ &= b^2(\text{sen}^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc\cos A \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \end{aligned}$$

Similarmente se prueban las igualdades para b^2 y c^2

Por tanto, en un $\triangle ABC$, con ángulos interiores A, B y C y lados opuestos a cada ángulo a, b y c, respectivamente, se cumple que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C\,.$$

Unidad 8

Estadística

Sección 1	Medidas de tendencia central y representación gráfica de datos
Sección 2	Medidas de posición y dispersión

Sección 1: Medidas de tendencia central y representación gráfica de datos

Contenido 1: Definición de la media aritmética, moda, mediana

P

A 7 estudiantes se les preguntó el total de horas semanales que dedican a ver televisión obteniéndose los siguientes resultados:

4, 7, 10, 8, 9, 9, 9

a) Calcule el promedio de los datos dados.
b) Encuentre el valor más frecuente en este conjunto de datos.
c) Ordene los datos de menor a mayor y ubique el número que se encuentra en el centro de los datos.

S

a) El promedio está dado por:

$$\frac{4+7+10+8+9+9+9}{7}=\frac{56}{7}=\mathbf{8}$$

Esto significa que los estudiantes ven la televisión en promedio, 8 horas a la semana.

b) El dato más frecuente es 9.

c) Se ordenan los datos de menor a mayor:

4, 7, 8, 9, 9, 9,10.

Se observa que en la sucesión de datos hay un número impar de elementos y que el primer 9 de izquierda a derecha se encuentra en el centro de los datos.

5 , 7, 8, 9, 9, 9, 10

Otra forma de determinar la ubicación de este dato es calculando

$$\frac{7+1}{2}=\frac{8}{2}=4$$

donde $n=7$ es el número de datos.

El número calculado en a) se llama media aritmética o promedio, el valor encontrado en b) se conoce como moda y el dato de c) es la mediana.

C

Media aritmética $\overline{x}$ o promedio, es la suma de todos los datos dividida entre el número de estos.

Moda $\mathrm{M_o}$ es el dato que más se repite.

Mediana $\mathrm{M_e}$ es el número que se encuentra en la posición central de un conjunto de datos.

Para determinar la mediana se lleva a cabo lo siguiente:

1. Se ordenan los datos.
2. • Si la cantidad de datos es impar, $\mathrm{M_e}$ es el valor central.
   • Si la cantidad de datos es par, $\mathrm{M_e}$ es el promedio de los datos del centro.

La media aritmética, la moda y la mediana son conocidos como **medidas de tendencia central**.

Ejemplo Calcule la mediana del siguiente conjunto de datos:

11, 13, 15, 9, 13, 10, 11, 13.

En primer lugar se ordenan los datos 9, 10, 11, 11, 13, 13, 13, 15. Como el total de datos es 8, entonces la mediana se encuentra entre el cuarto y el quinto elemento en la sucesión de datos:

9, 10, 11, 11, 13, 13, 13, 15

Aplicando la conclusión se tiene:

$$M_e = \frac{11 + 13}{2} = \frac{24}{2} = \mathbf{12}$$

E

Dados los siguientes conjuntos de datos, encuentre la media aritmética, moda y mediana:

a) 2, 2, 1, 5, 1, 1.

b) 9, 8, 9, 7, 10, 5.

c) 4, 2, 2, 1, 3, 1,1.

d) 14, 12, 15, 14, 14, 12, 10.

Contenido 2: Aplicación de la media aritmética, moda y mediana

P

Dados los grupos de datos A: 2, 4, 3, 4, 1, 4 y B: 2, 1, 3, 3, 4, 5;

a) Encuentre la media aritmética de cada grupo.

b) Encuentre la moda de cada grupo.

c) Encuentre la mediana de cada grupo.

d) Compare los valores encontrados en los incisos anteriores para A y B.

S

a) Se calcula la media aritmética de cada grupo:

$\overline{x}_A = \frac{2+4+3+4+1+4}{6} = \frac{18}{6} = \mathbf{3}$ $\quad\quad$ $\overline{x}_B = \frac{2+1+3+3+4+5}{6} = \frac{18}{6} = \mathbf{3}$

b) Se encuentra que la moda en A es 4 y en B es 3.

c) Para encontrar la mediana de cada grupo se ordenan los datos de A y B de menor a mayor.

A: 1, 2, 3, 4, 4, 4 $\quad\quad$ B: 1, 2, 3, 3, 4, 5

Como el total de datos en cada grupo es 6, entonces la mediana se encuentra entre el tercer y el cuarto elemento de cada sucesión de datos

A: 1, 2, 3, 4, 4, 4 $\quad\quad$ B: 1, 2, 3, 3, 4, 5

Luego, la mediana de A es $\frac{3+4}{2} = \frac{7}{2} = \mathbf{3{,}5}$ y la de B es $\frac{3+3}{2} = \frac{6}{2} = \mathbf{3}$.

d) Comparando los valores anteriores se observa que la media de los dos grupos es la misma; sin embargo en la moda difieren (4 en A y 3 en B) lo mismo ocurre con la mediana.

C

Las características de las medidas de tendencia central de 2 conjuntos de datos se analizan comparando los respectivos valores de la media, la moda y la mediana de ellos.

E

a) Dados los grupos de datos A: 4, 2, 2, 1, 3, 1, 1 y B: 2, 2, 1, 1, 3, 3, 2, encuentre la media, moda y mediana de cada grupo y compare los valores respectivos encontrados.

b) En un salón de clases se preguntó a dos grupos de 6 estudiantes cada uno, el total de horas semanales que dedican al estudio de matemática, obteniéndose los siguientes resultados:

Grupo A: 2, 2, 1, 5, 1, 1 $\quad\quad$ Grupo B: 1, 4, 1, 1, 1, 4

Encuentre la media, moda y mediana de cada grupo y compare los resultados.

Contenido 3: Organización de datos mediante agrupación

P

Las edades de 30 pacientes con problemas respiratorios que visitaron el centro de salud aparecen en la tabla contigua.

a) Clasifique los datos en 4 grupos (de 4 en 4, inicie el conteo en 2 y termine en 18).

b) Organice los datos por intervalos en una tabla.

11	5	8	6	14	15
5	3	13	9	9	6
7	10	14	17	11	9
7	4	7	15	2	10
14	8	13	6	13	14

S

a) Se agrupan los datos en intervalos: como se tomarán de 4 en 4, el primero lo forman los datos mayores o iguales que 2 y menores que 6, se escribe 2 - 6 (2 es el límite inferior y 6 el límite superior), el segundo intervalo 6 - 10 lo forman los datos mayores o iguales que 6 y menores que 10, se continúa de esta manera hasta llegar a 18:

2 - 6	6 - 10	10 - 14	14 - 18

b) Datos ordenados:

2	3	4	5	5	6
6	6	7	7	7	8
8	9	9	9	10	10
11	11	13	13	13	14
14	14	14	15	15	17

Tabla con datos organizados por intervalos:

Grupo (intervalo)	
2 - 6	2, 3, 4, 5, 5
6 - 10	6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 9
10 - 14	10, 10, 11, 11, 13, 13, 13
14 - 18	14, 14, 14, 14, 15, 15, 17

C

Para organizar datos mediante clases o intervalos:

1. Se definen los intervalos considerando el número de ellos a crear y los límites a considerar.
2. Se colocan los datos uno a uno en el grupo al que pertenecen. En cada grupo deben quedar los datos, cuyo valor es mayor o igual que el límite inferior, pero menor que el límite superior.

E

A continuación, se muestra el registro de edades de 30 pacientes atendidos en el centro de Salud "Sinforoso Bravo".

a) Clasifique los datos en 5 grupos de 4 en 4, inicie en 20 y termine en 40 y defina los intervalos.

b) Organice los datos en una tabla.

20	22	24	22	30
27	34	35	29	28
24	21	20	23	26
23	26	20	29	36
28	29	24	23	34
24	21	20	36	24

Contenido 4: Tabla de distribución de frecuencias

Conceptos básicos

La tabla en que se organizan los grupos de datos se llama **tabla de distribución de frecuencia**.

Se agrupan los datos con intervalos que tengan el mismo ancho o amplitud, entendiendo a estas como la diferencia entre el límite superior e inferior de cada clase.

Frecuencia absoluta f_i es el número de datos que corresponde a cada clase.

Marca de clase M_i es el promedio del límite inferior y el límite superior de la clase i.

$$\mathrm{M}_i = \frac{\text{Límite inferior} + \text{Límite superior}}{2}$$

P

Utilizando la tabla del contenido anterior (las edad de 30 pacientes con problemas respiratorios que visitaron el centro de salud):

a) Complete la tabla de distribución de frecuencia.

b) Encuentre el ancho de cada clase.

Tabla de edades de 30 Pacientes

Edades	Número de pacientes (f_i)	Marca de clase (M_i)
2 - 6	5	
6 - 10		
10 - 14		
14 - 18	7	
Total	30	

Diagrama de edades de 30 pacientes

	9		
	9		
	9		
	8		
	8	13	17
	7	13	15
5	7	13	15
5	7	11	14
4	6	11	14
3	6	10	14
2	6	10	14
2 - 6	**6 - 10**	**10 - 14**	**14 - 18**

S

a) La columna del número de pacientes por clase se puede completar rápidamente a partir del diagrama dado.

Se calcula ahora la marca de cada clase:

$$M_1 = \frac{2+6}{2} = 4, \qquad M_2 = \frac{6+10}{2} = 8$$

$$M_3 = \frac{10+14}{2} = 12, \qquad M_4 = \frac{14+18}{2} = 16$$

Tabla de edades de 30 Pacientes

Edades	Número de pacientes (f_i)	Marca de clase (M_i)
2 - 6	5	4
6 - 10	11	8
10 - 14	7	12
14 - 18	7	16
Total	30	

b) El ancho de cada clase se determina así:

$6 - 2 = 4, \quad 10 - 6 = 4,$

$14 - 10 = 4, \; 18 - 14 = 4$

Es decir, el ancho de cada clase es **4**.

E

En la tabla siguiente aparecen las calificaciones de 30 estudiantes que realizaron una prueba de matemática valorada en 20 puntos, ubicadas en intervalos:

Diagrama de calificaciones de 30 estudiantes

7			
5			17
4	11		16
7	8	13	17
7	11	14	18
4	9	14	17
5	9	13	19
7	8	12	16
5	11	15	19
4 - 8	**8 - 12**	**12 - 16**	**16 - 20**

a) Calcule el ancho de cada clase.

b) Complete la tabla de frecuencia.

Calificaciones de 30 estudiantes

Calificaciones	Número de estudiantes (f_i)	Marca de clase (M_i)
4 - 8		
8 - 12		
12 - 16		
16 - 20		
Total		

Contenido 5: Histograma y polígonos de frecuencias

P

Con la información de la tabla de la derecha:

a) Construya en un eje horizontal 4 rectángulos contiguos cuya base esté formada por los intervalos de edades y la altura por las frecuencias.

b) Marque los puntos medios de los lados superiores de los rectángulos y únalos con segmentos iniciando y terminando en el eje horizontal.

Tabla de edades de 30 pacientes

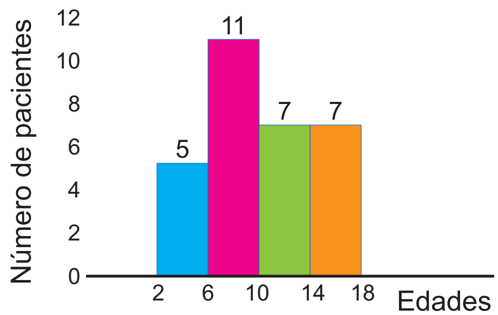
Edades	Número de pacientes (f_i)	Marca de clase (M_i)
2 - 6	5	4
6 - 10	11	8
10 - 14	7	12
14 - 18	7	16
Total	30	

S

a) Para construir los rectángulos pedidos se colocan en el eje horizontal los límites de las clases y en el eje vertical la frecuencia de cada una de estas.

A la reunión de los cuatro rectángulos o barras que aparecen a la derecha se le llama histograma.

Edades de 30 pacientes

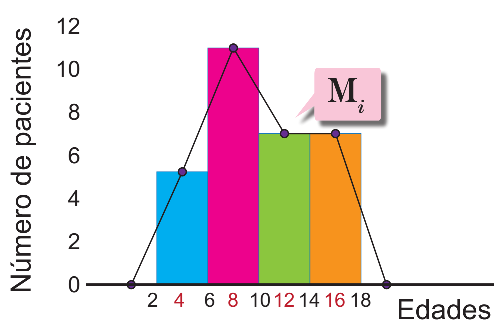


b) En el lado superior de cada rectángulo del histograma se ubica su punto medio.

Mediante segmentos se unen los puntos anteriores. La línea poligonal formada debe iniciar y finalizar sobre el eje horizontal, tal como se puede reconocer en el diagrama anexo.

Al gráfico obtenido se le denomina **polígono de frecuencia**.

Edades de 30 pacientes



C

Un **histograma** es un conjunto de barras verticales consecutivas y contiguas cuyas alturas corresponden a la frecuencia absoluta de cada clase y las bases son iguales al ancho de los intervalos de clase.

Un **polígono de frecuencias** es un polígono que se forma uniendo los puntos medios de los lados superiores de las barras del histograma.

E

Las calificaciones de 30 estudiantes que realizaron una prueba de matemática valorada en 20 puntos se presentan en la tabla:

Calificación de 30 estudiantes

Calificaciones	**Número de estudiantes (f_i)**
4 - 8	9
8 - 12	7
12 - 16	6
16 - 20	8
Total	30

a) Construya un histograma.

b) Construya un polígono de frecuencias.

Contenido 6: Media aritmética, moda y mediana para datos organizados en tablas de distribución de frecuencias

P

Dada la tabla de las edades de 30 pacientes con problemas respiratorios, que visitaron un centro de salud, mostradas en la tabla siguiente. Determine:

a) El valor de la media aritmética.

b) El valor de la moda.

c) El valor de la mediana.

Edades de 30 pacientes

Edades	Número de pacientes (f_i)	Marca de clase (M_i)	$f_i \cdot M_i$	Frecuencia acumulada (F_i)
2 - 6	5	4		
6 - 10	11	8		
10 - 14	7	12		
14 - 18	7	16		
Total	30			

S

Retomando los datos del contenido 4 donde se conocía el número de pacientes y las marcas de clase, se añade dos columnas más para encontrar la media aritmética, la moda y la mediana.

Edades de 30 pacientes

Edades	Número de pacientes (f_i)	Marca de clase (M_i)	$f_i \cdot M_i$	Frecuencia acumulada (F_i)
2 - 6	5	4	20	5
6 - 10	11	8	88	16
10 - 14	7	12	84	23
14 - 18	7	16	112	30
Total	30		304	

a) Para obtener la media aritmética se completa la cuarta columna multiplicando el número de pacientes f_i por la marca de clase M_i, obteniendo

$$f_1M_1 = (5)(4) = 20$$
$$f_2M_2 = (11)(8) = 88$$
$$f_3M_3 = (7)(12) = 84$$
$$f_4M_4 = (7)(16) = 112$$

Se suman los resultados y se divide entre el número total de datos.

$\overline{x} = \dfrac{20+88+84+112}{30} = \dfrac{304}{30} \approx 10{,}13$, donde $\approx$ significa aproximado.

Por lo tanto, la media aritmética es $\overline{x} \approx$ **10,13**.

b) Se observa en la tabla que la clase con mayor frecuencia (11) es 6 - 10, y su marca de clase es $\dfrac{6+10}{2} = \mathbf{8}$. Así, la moda es $\mathbf{M_o = 8}$.

c) Se completa la columna de las frecuencias acumuladas. Luego se determina la posición central calculando el número $\frac{30+1}{2} = 15,5$. Este valor central se ubica en la tabla; se ve que se encuentra en la segunda clase. Entonces $\mathbf{M_e = 8}$.

C

La **media aritmética** de un conjunto de datos agrupados es:

$$\bar{x} = \frac{\text{suma de todos los productos } f_i \cdot M_i}{\text{número total de datos}}$$

Para calcular la **moda**:

- Se identifica la clase cuya frecuencia sea mayor (clase modal).
- El valor aproximado de la moda es la marca de clase M_i de la clase modal.

Para calcular la **mediana**:

- Se identifica donde se encuentra la posición central $\frac{n+1}{2}$. Esto se da con la frecuencia acumulada. **Frecuencia acumulada** $\mathbf{F}_i$ es la suma (o total acumulado) de todas las frecuencias hasta llegar al dato de interés.
- El valor aproximado de la mediana será el punto medio de la clase donde se encuentre la posición central.

E

Las calificaciones de 30 estudiantes que realizaron una prueba de matemática valorada en 20 puntos se representa en la siguiente tabla:

Calificaciones de 30 estudiantes

Calificaciones	Número de estudiantes (f_i)
4 - 8	9
8 - 12	7
12 - 16	6
16 - 20	8
Total	30

Encuentre la media aritmética, moda y mediana.

Contenido 7: Comparación de media aritmética y mediana para datos organizados en tablas de distribución de frecuencias, y de sus modas a partir del polígono de frecuencias

P

Dada la tabla de las edades de 30 pacientes con problemas respiratorios que visitaron dos centros de salud A y B, compare los resultados de la media aritmética, moda y mediana a partir de sus polígonos de frecuencias.

Edades de 30 pacientes

Edades	Número de pacientes del centro A (f_i)	Número de pacientes del centro B (f_i)
2 - 6	5	6
6 - 10	11	8
10 - 14	7	9
14 - 18	7	7
Total	30	30

S

En el contenido anterior se encontró la media aritmética, moda y mediana de los datos de pacientes de un centro de salud que se rotula con A. En este caso

$$\overline{x} = 10{,}13 \ , \ \mathrm{M_o} = 8 \ , \ \mathrm{M_e} = 8.$$

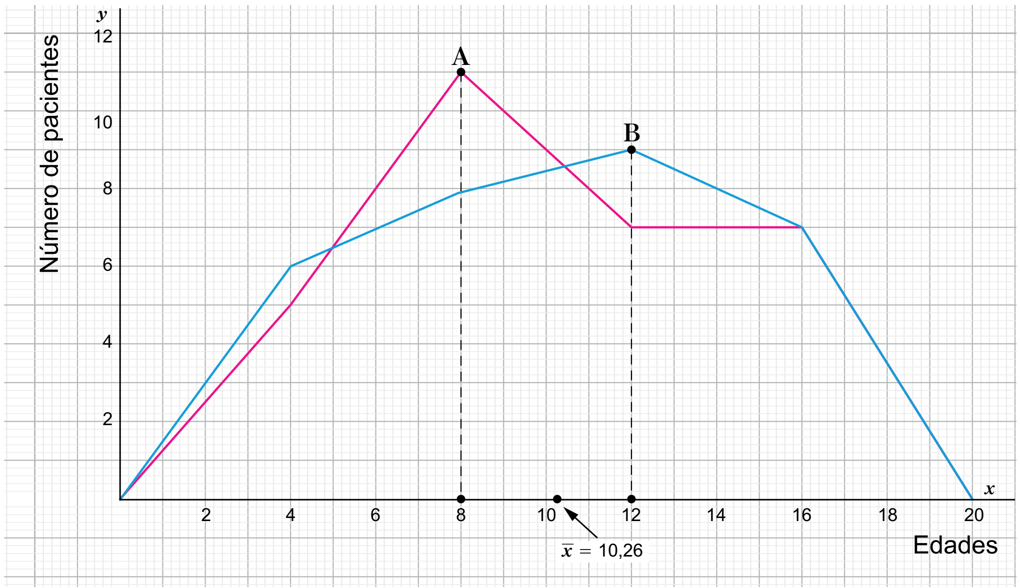
Se calcula ahora $\overline{x}$, $\mathrm{M_o}$ y $\mathrm{M_e}$ del centro de salud B. Para ello se determinan los productos $f_i \cdot \mathrm{M}_i$ y los valores de F_i:

Edades	Número de pacientes del centro B (f_i)	Marca de clase (M_i)	$f_i \cdot \mathrm{M}_i$	Frecuencia acumulada (F_i)
2 - 6	6	4	$f_1\mathrm{M}_1 = (6)(4) = 24$	6
6 - 10	8	8	$f_2\mathrm{M}_2 = (8)(8) = 64$	14
10 - 14	9	12	$f_3\mathrm{M}_3 = (9)(12) = 108$	23
14 - 18	7	16	$f_4\mathrm{M}_4 = (7)(16) = 112$	30
Total	30		308	

Luego, $\overline{x} = \dfrac{308}{30} \approx \mathbf{10,26}$.

La moda se encuentra en el punto medio de la clase de mayor frecuencia que es 10 - 14, entonces esta es $\mathrm{M_o} = \dfrac{10+14}{2} = \mathbf{12}$.

En la gráfica aparece la línea vertical desde el punto más alto de cada polígono de frecuencia hacia la recta horizontal de las edades, el punto donde se corta el eje horizontal es el valor aproximado de la moda para los dos centros de salud.



La posición central es $\frac{n+1}{2} = \frac{31}{2} = 15{,}5$. Con la frecuencia acumulada se percibe que la mediana se encuentra en la tercera clase (10 - 14), luego $\frac{10+14}{2} = \frac{24}{2} = 12$, por lo tanto $\mathrm{M_e} = 12$.

Comparando los datos de los 2 centros de salud se puede afirmar que la media aritmética, la moda y mediana de A son menores que las de B.

C

Los polígonos de frecuencias provenientes de dos tablas de distribución de frecuencias permiten comparar los valores de las modas respectivas.

E

Las calificaciones de 30 estudiantes que realizaron una prueba de matemática en dos secciones de clase A y B de un determinado grado se representan en la tabla siguiente:

a) Encuentre la media aritmética, moda y mediana de la sección de clase A.

b) Encuentre la media aritmética, moda y mediana de la sección de clase B.

c) Construya el polígono de frecuencias y compare los resultados de a) y b).

Calificaciones de 30 estudiantes

Calificaciones	Número de estudiantes de la sección A (f_i)	Número de estudiantes de la sección B (f_i)
4 - 8	9	6
8 - 12	7	7
12 - 16	6	9
16 - 20	8	8
Total	30	30

Sección 2: Medidas de posición y dispersión

Contenido 1: Definición de cuartiles

P

Las calificaciones de 15 estudiantes en una prueba de Estadística con un valor de 10 puntos son:

10, 3, 8, 4, 4, 7, 5, 6, 7, 5, 8, 4, 9, 9, 3

Encuentre la mediana de todos los datos, la mediana de la primera mitad y la mediana de la segunda mitad.

S

1. Se ordenan los datos de menor a mayor: 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 10.
2. Se averigua la posición de la mediana para los datos anteriores.

$$\frac{15+1}{2}=8$$

La mediana se encuentra en la posición 8

3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, **6**, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 10

y es igual a 6.

3. Se encuentran las medianas de la primera y la segunda mitad de los datos:

3, 3, 4, **4**, 4, 5, 5, **6**, 7, 7, 8, **8**, 9, 9, 10

$\mathbf{M}_e$

Se observa que 4, 6 y 8 dividen la lista ordenada de datos en 4 partes, estos valores se llaman primer, segundo y tercer cuartil respectivamente.

C

Para determinar los cuartiles de un conjunto de datos:

1. Se ordenan los datos de menor a mayor.
2. Se encuentra la mediana de los datos, denominada de aquí en adelante el **segundo cuartil**, se denota por Q_2.
3. Se encuentra la mediana de la primera mitad de los datos, denominada **primer cuartil** y denotada por Q_1, y la mediana de la segunda mitad de los datos que recibe el nombre de **tercer cuartil** y se denota por Q_3.

E

1. Dadas las edades de 7 niños que recibieron consulta con el pediatra: 5, 7, 3, 2, 7, 4 y 5, encuentre Q_1, Q_2 y Q_3.
2. Se le preguntó a 11 estudiantes sobre las horas de estudio que dedican en la semana para matemática, obteniéndose los datos 1, 2, 4, 3, 3, 5, 3, 1, 5, 3, 4.
   Encuentre Q_1, Q_2 y Q_3.

Contenido 2: Cálculo de cuartiles

Ejemplo Los siguientes datos son calificaciones de 16 estudiantes obtenidas en una prueba de matemática valorada en 10 puntos:

8, 7, 4, 4, 2, 4, 3, 5, 7, 3, 6, 1, 2, 3, 1, 4.

Encuentre Q_1, Q_2 y Q_3.

---

1. Se ordenan los datos:

   1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 8

2. Se determina la mediana de los datos. Como $n = 16$, el cociente

   $$\frac{16+1}{2} = 8{,}5$$

   indica que se deben tomar los datos de las posiciones 8 y 9 y luego promediarlos.

   1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, **4**, **4**, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 8

   De modo que,

   $$M_e = \frac{4+4}{2} = 4.$$

3. Se encuentran las medianas de la primera (Q_1) y segunda mitad de los datos (Q_3). La primera mitad consta de 8 elementos , luego el cociente $\frac{8+1}{2} = 4{,}5$ indica que se deben promediar los datos de la cuarta y quinta posición.

   $$\overbrace{\underbrace{1, 1, 2,}\ \underset{\downarrow}{\underset{Q_1}{2, 3,}}\ \underbrace{3, 3,}}\ \underset{\downarrow}{\underset{M_e = Q_2}{4, 4,}}\ \overbrace{\underbrace{4, 4,}\ \underset{\downarrow}{\underset{Q_3}{5, 6,}}\ \underbrace{7, 7, 8}}$$

   De manera que,

   $$Q_1 = \frac{2+3}{2} = 2{,}5$$

   Se procede similarmente para encontrar Q_3, como los datos de esta parte son 8, el cociente $\frac{8+1}{2} = 4{,}5$ dice que se promedien los elementos 5 y 6 de la segunda lista.

   $$Q_3 = \frac{5+6}{2} = 5{,}5.$$

   $Q_2 = 4$ se había calculado anteriormente.

Entonces, $\mathbf{Q_1 = 2{,}5}$, $\mathbf{Q_2 = 4}$, $\mathbf{Q_3 = 5{,}5}$.

E

---

1. Los siguientes datos son calificaciones de 14 estudiantes obtenidas en una prueba de matemática valorada en 10 puntos: 9, 8, 8, 1, 9, 5, 2, 6, 3, 3, 4, 4, 4, 5. Encuentre Q_1, Q_2 y Q_3.

2. Las calificaciones obtenidas en una prueba valorada en 20 puntos por un grupo de 16 estudiantes son: 20, 16, 16, 19, 17, 14, 14, 18, 20, 17, 10, 11, 12, 13, 19, 20. Encuentre Q_1, Q_2 y Q_3.

Contenido 3: Definición de la varianza y la desviación estándar

Definición

La **varianza** S^2 de un conjunto de datos $x_1, x_2, \dots x_n$, cuya media aritmética es $\overline{x}$, se calcula mediante la fórmula

$$S^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + (x_3 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_n - \overline{x})^2}{n-1}$$

La **desviación estándar o típica** S es la raíz cuadrada de la varianza. Representa la variabilidad de datos con respecto a la media aritmética. Así:

$$S = \sqrt{\text{varianza}} = \sqrt{S^2}$$

P

Con los datos 3, 3, 5, 5, 9 y su media aritmética $\overline{x} = 5$.

a) Calcule la varianza de estos.

b) Calcule la desviación estándar.

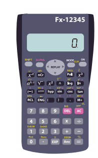
c) Determine la variabilidad con respecto a la media.

S

a) La varianza de estos datos es:

$$S^2 = \frac{(3-5)^2 + (3-5)^2 + (5-5)^2 + (5-5)^2 + (9-5)^2}{5-1} = \frac{4+4+0+0+16}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

b) La desviación estándar es la raíz cuadrada de 6: $S = \sqrt{6}$ **≈ 2,4.**



c) La varianza y la desviación estándar indican que 2,4 es el grado de variabilidad de los datos alrededor de $\overline{x} = 5$: $5 + 2{,}4 = 7{,}4$ por encima y $5 - 2{,}4 = 2{,}6$ por debajo.

E

1. Con los datos 2, 2, 4, 5, 2 y su media aritmética, $\overline{x} = 3$.
   a) Encuentre la varianza.
   b) Encuentre la desviación estándar.
   c) Encuentre la variabilidad con respecto a la media aritmética.

2. Con los datos 5, 4, 4, 7 y su media aritmética, $\overline{x} = 5$.
   a) Encuentre la varianza.
   b) Encuentre la desviación estándar.
   c) Encuentre la variabilidad con respecto a la media aritmética.

Contenido 4: Coeficiente de variación

P

Dos grupos de niños que realizaron una prueba en estadística obtuvieron el siguiente promedio en sus calificaciones: $\overline{x} = 9$

Grupo A: 10, 10, 7, 12, 6 Grupo B: 11, 12, 10, 6, 6

a) Encuentre el cociente $\frac{S}{\overline{x}}$ para cada grupo.

b) Determine el grupo que tiene menor variación en sus calificaciones.

S

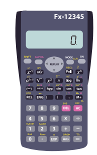
a) En el caso del Grupo A

$$\mathrm{S}^2 = \frac{(10-9)^2+(10-9)^2+(7-9)^2+(12-9)^2+(6-9)^2}{5-1} = 6$$

Entonces la desviación estándar es $S = \sqrt{6} \approx \mathbf{2,45}$

Luego, $\frac{S}{\overline{x}} = \frac{2,45}{9} \approx 0,27$

Para el Grupo B, su varianza es



$$\mathrm{S}^2 = \frac{(11-9)^2+(12-9)^2+(10-9)^2+(6-9)^2+(6-9)^2}{5-1} = 8$$

En este caso la desviación estándar es $S = \sqrt{8} \approx \mathbf{2,83}$

Por lo tanto, $\frac{S}{\overline{x}} = \frac{2,83}{9} \approx 0,31$

Los valores encontrados 0,27 y 0,31 se llaman coeficientes de variación.

b) El grupo A tiene menor variación en sus calificaciones, porque su coeficiente de variación es menor que el de B.

C

El cociente $\frac{S}{\overline{x}}$ entre la desviación estándar y la media aritmética se denomina **coeficiente de variación** del conjunto de datos y se denota por CV, es decir,

$$\mathrm{CV} = \frac{S}{\overline{x}}.$$

El coeficiente de variación CV determina el grado de dispersión o variación de un conjunto de datos respecto a su media aritmética.

E

1. Dos grupos A y B de niños que realizaron una prueba de matemática obtuvieron en sus calificaciones el promedio general $\overline{x} = 8$. Las notas individuales son: grupo A: 7, 8, 7, 11, 7 ; grupo B: 9, 7, 11, 7, 6.

   a) Encuentre el CV de cada grupo.

   b) ¿Cuál de los dos grupos tiene menor variación en sus calificaciones?

2. En dos pulperías se venden bolsas de caramelos, de las cuales se conoce los siguientes datos:

   Pulpería A: $\overline{x} = 100$ y $\mathrm{S} = 2$, Pulpería B: $\overline{x} = 500$ y $\mathrm{S} = 4$

   Determine la pulpería que presenta la menor variación en sus ventas.

Unidad 1

Sección 1 Contenido 1 (S1C1)

E1

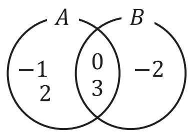
a) $3 \in A$ b) $5 \notin B$ c) $-2 \notin B$
d) $4 \in C$ e) $0 \in A$ f) $-1 \in B$
g) $2 \in B$ h) $2 \notin C$

E2

a) $n(A) = 5$ b) $n(B) = 3$ c) $n(C) = 4$

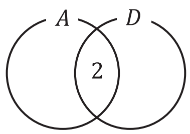
S1C2

a) $A \cup B = \{-2, -1, 0, 2, 3\}$



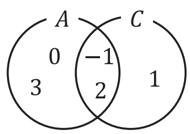
$n(A \cup B) = 5$

b) $A \cap D = \{2\}$



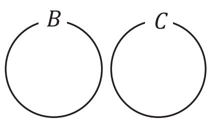
$n(A \cap D) = 1$

c) $A \cup C = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$



$n(A \cup C) = 5$

d) $B \cap C = \phi$



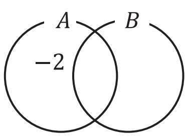
$n(B \cap C) = 0$

S1C3

a) $C \not\subset A$ b) $A \not\subset B$ c) $B \not\subset A$
d) $C \subset U$ e) $C = C$ f) $U \not\subset A$
g) $B \subset U$ h) $C = B$

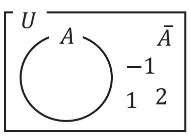
S1C4

a) $A - B = \{-2\}$



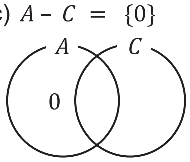
$n(A - B) = 1$

b) $\bar{A} = \{-1, 1, 2\}$



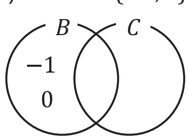
$n(\bar{A}) = 3$

c) $A - C = \{0\}$



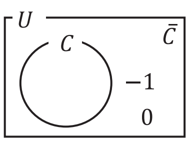
$n(A - C) = 1$

d) $B - C = \{-1, 0\}$



$n(B - C) = 2$

e) $\bar{C} = \{-1, 0\}$



$n(\bar{C}) = 2$

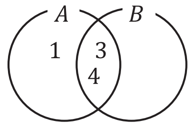
S1C5

a) $C = \{2, 4\}$ b) $D = \{-3, -2, -1\}$
c) $F = \{3, 5\}$

S1C6

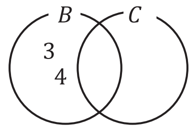
E1, E2, E3

a) $A \cup B = \{1, 3, 4\}$



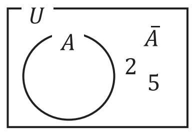
$n(A \cup B) = 3$

b) $B - C = \{3, 4\}$



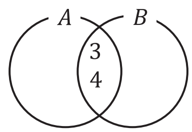
$n(B - C) = 2$

c) $\bar{A} = \{2, 5\}$



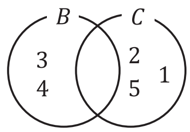
$n(\bar{A}) = 2$

d) $A \cap B = \{3, 4\}$



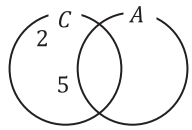
$n(A \cap B) = 2$

e) $B \cap C = \phi$



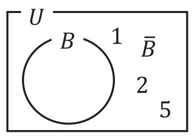
$n(B \cap C) = 0$

f) $C - A = \{2, 5\}$



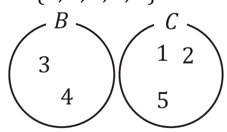
$n(C - A) = 2$

g) $\bar{B} = \{1, 2, 5\}$



$n(\bar{B}) = 3$

h) $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



$n(B \cup C) = 5$

E4

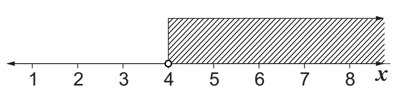
a) $6 \notin A$ b) $A \not\subset C$ c) $4 \in B$
d) $B \subset A$

E5 $A = \{6, 7\ 8, 9, 10\}$

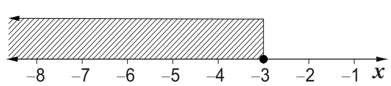
S2C1

E1

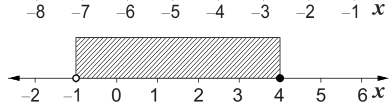
a)



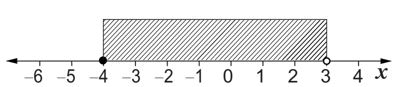
b)



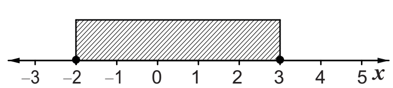
c)



d)



e)



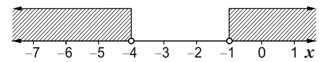
E2

a) $A = \{x \in \mathbb{R} | x > -5\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x \leq 0\}$

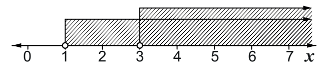
S1C2

a)



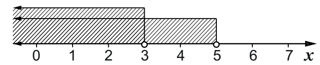
$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} | x < -4 \text{ o } x > -1\}$

b)



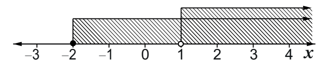
$C \cup D = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$

c)



$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} | x < 5\}$

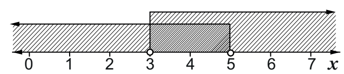
d)



$E \cup F = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -2\}$

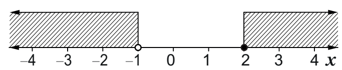
S2C3

a)



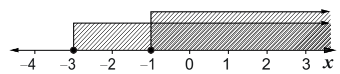
$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} | 3 < x < 5\}$

b)



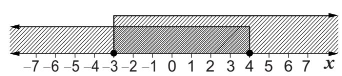
$C \cap D = \phi$

c)



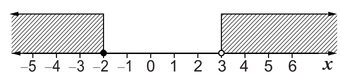
$E \cap F = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -1\}$

d)



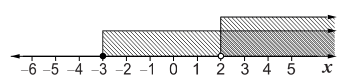
$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x \leq 4\}$

e)



$C \cap D = \phi$

f)

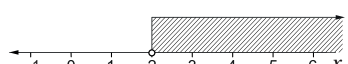


$E \cap F = \{x \in \mathbb{R} | x > 2\}$

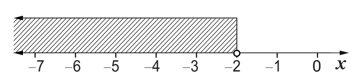
S2C4

E1

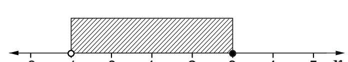
a)



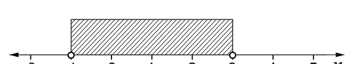
b)



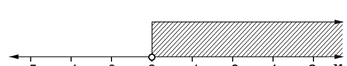
c)



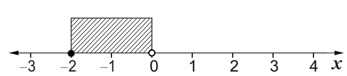
d)



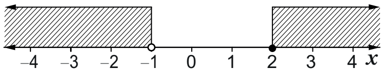
e)



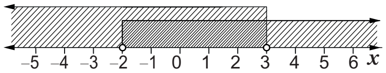
f)



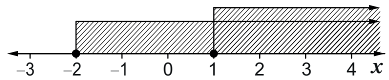
E2

a)


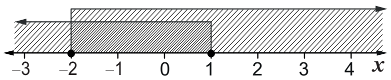
$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ o } x \geq 2\}$

b)


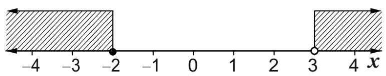
$C \cup D = \{x \in \mathbb{R}\}$

c)


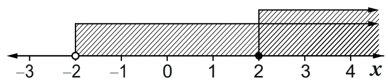
$E \cup F = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$

d)


$G \cup H = \{x \in \mathbb{R}\}$

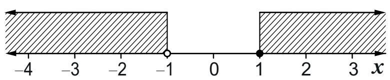
e)


$I \cup J = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ o } x > 3\}$

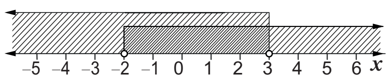
f)


$K \cup L = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

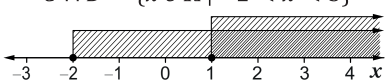
E3

a)


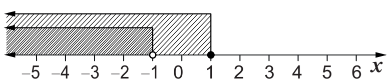
$A \cap B = \phi$

b)


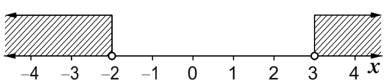
$C \cap D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\}$

c)


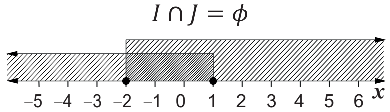
$E \cap F = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

d)


$G \cap H = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$

e)


$I \cap J = \phi$

f)


$K \cap F = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$

Unidad 2

Sección 1 Contenido 1 (S1C1)

a) $a+3 > b+3$ b) $a-1 > b-1$
c) $2a > 2b$ d) $-2b > -2a$
e) $\frac{a}{-2} < \frac{b}{-2}$ f) $b-4 < a-4$
g) $-2a < -2b$ h) $\frac{b}{3} < \frac{a}{3}$

S1C2

a) $x > 1$ b) $x \geq 2$ c) $x > -1$
d) $x \geq -3$

S1C3

a) $x < 4$ b) $x \leq -1$ c) $x < 6$
d) $x \leq 0$

S1C4

a) $x > 2$ b) $x < 1$ c) $x \geq 6$
d) $x \leq -2$

S1C5

a) $x < -1$ b) $x > -3$ c) $x \leq -1$
d) $x \geq -5$

S1C6

a) $x > 7$ b) $x < 0$ c) $x > 0$
d) $x < 2$ e) $x \geq 4$ f) $x \geq -1$
g) $x \leq -1$ h) $x \leq -3$

S1C7

a) $x < -7$ b) $x > 0$ c) $x < 3$
d) $x > -3$ e) $x \leq -4$ f) $x \leq 1$
g) $x \geq 1$ h) $x \geq -1$

S1C8

a) $-1 < x \leq 0$ b) $0 \leq x < 6$
c) $-2 \leq x \leq 1$ d) $-1 < x \leq 1$
e) $-3 < x \leq 2$

S1C9

a) $-1 < x \leq 2$ b) $-4 \leq x < -2$
c) $-3 < x \leq 4$ d) $-2 \leq x \leq 5$
e) $-2 \leq x \leq 3$

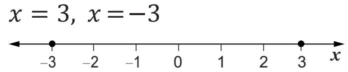
S1C10

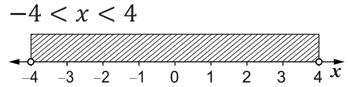
E1
a) $x > 4$ b) $x \geq -2$ c) $x \leq 5$
d) $x > 3$

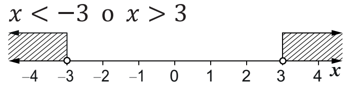
E2
a) $x > -2$ b) $x \leq -2$ c) $x \leq 1$
d) $x < 2$

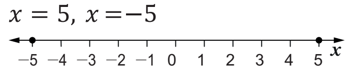
E3
a) $-1 < x \leq 1$ b) $1 \leq x < 2$

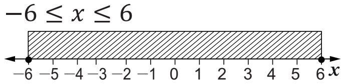
S2C1

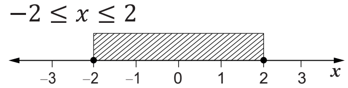
a) $x = 3,\ x = -3$


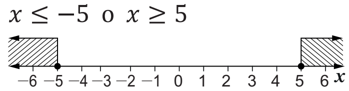
b) $-4 < x < 4$


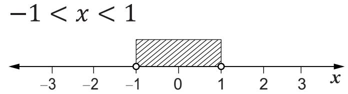
c) $x < -3$ o $x > 3$


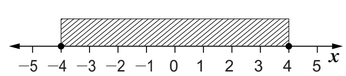
d) $x = 5,\ x = -5$


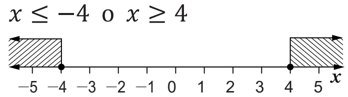
e) $-6 \leq x \leq 6$


f) $-2 \leq x \leq 2$


g) $x \leq -5$ o $x \geq 5$


h) $-1 < x < 1$


i) $-4 \leq x \leq 4$


j) $x \leq -4$ o $x \geq 4$


S2C2

a) $x = 1, x = -5$ b) $x = 5, x = -3$
c) $x = 0, x = -6$ d) $x = 2, x = -6$
e) $x = 7, x = -3$

S2C3

a) $-5 < x < 1$ b) $-3 \leq x \leq 5$
c) $0 < x < 6$ d) $-6 \leq x \leq -2$
e) $-3 \leq x \leq 7$

S2C4

a) $x < -5$ o $x > 1$
b) $x < 0$ o $x > 6$
c) $x \leq -3$ o $x \geq 5$
d) $x \leq -6$ o $x \geq -2$
e) $x \leq -3$ o $x \geq 7$

S2C5

E1 a) $x = 8, x = -8$
b) $-8 < x < 8$
c) $x < -5$ o $x > 5$
d) $x \leq -6$ o $x \geq 6$

E2 a) $x = -1, x = 5$ b) $x = 1, x = -3$
c) $x = 6, x = -4$ d) $x = 4, x = 0$
e) $x = 3, x = 1$

E3
a) $x < -1$ o $x > 5$
b) $-5 < x < 3$
c) $-3 \leq x \leq 1$
d) $x \leq 1$ o $x \geq 3$
e) $x < -4$ o $x > 0$

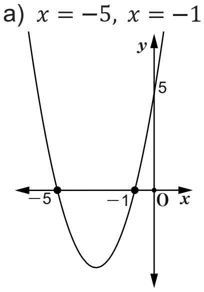
S3C1

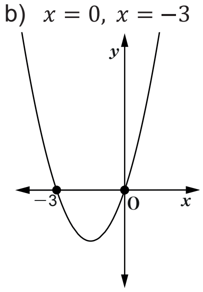
a) $x = 1, x = -1$ b) $x = 0, x = -4$
c) $x = -1, x = -5$ d) $x = -1, x = -3$
e) $x = -3, x = 3$ f) $x = 0, x = 5$
g) $x = 2, x = -1$ h) $x = 1, x = -5$

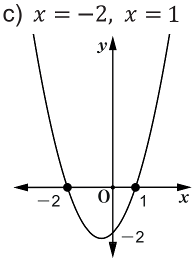
S3C2

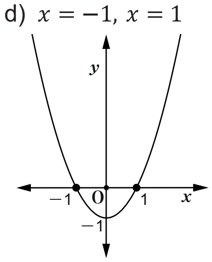
a) $(-1,0)$ y $(1,0)$ b) $(-5,0)$ y $(-1,0)$
c) $(-4,0)$ y $(0,0)$ d) $(-2,0)$ y $(1,0)$

S3C3

a) $x = -5,\ x = -1$


b) $x = 0,\ x = -3$


c) $x = -2,\ x = 1$


d) $x = -1,\ x = 1$


S3C4

a) $x < -1$ o $x > 1$ b) $x \leq -3$ o $x \geq 3$
c) $x \leq -1$ o $x \geq 1$ d) $x \leq -5$ o $x \geq 5$
e) $x < -4$ o $x > 4$ f) $x \leq -2$ o $x \geq 2$

S3C5

a) $-2 < x < 2$ b) $-3 < x < 3$
c) $-1 < x < 1$ d) $-4 \leq x \leq 4$
e) $-5 < x < 5$ f) $-3 \leq x \leq 3$

S3C6

a) $x < -3$ o $x > -2$ b) $-4 < x < 2$

c) $x < -1$ o $x > 2$ d) $-3 < x < 2$

S3C7

a) $x \leq 1$ o $x \geq 3$ b) $-4 \leq x \leq -1$

c) $x \leq -2$ o $x \geq 3$ d) $-4 \leq x \leq 2$

S3C8

a) $-1 < x < 2$ b) $x < -3$ o $x > 1$

c) $-2 \leq x \leq 1$ d) $x \leq -3$ o $x \geq 2$

S3C9

a) $x < -3$ o $x > 1$ b) $x < 1$ o $x > 3$

c) $x \leq -2$ o $x \geq -1$ d) $-1 < x < 4$

e) $-4 < x < -1$ f) $-4 \leq x \geq 1$

g) $2 \leq x \leq 3$ h) $x \leq -1$ o $x \geq 4$

i) $-1 \leq x \leq 7$ j) $-4 < x < 1$

k) $x < -3$ o $x > -1$ l) $-4 \leq x \leq 2$

m) $x \leq -2$ o $x \geq 3$ n) $x < 2$ o $x > 3$

UNIDAD 3

Sección 1 Contenido 1 (S1C1)

a) $\frac{7}{6}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{3}{5}$

e) $\frac{7}{8}$ f) $\frac{1}{a}$ g) $\frac{1}{n}$ h) q

S1C2

a) $\frac{x}{2y}$ b) $\frac{2}{ab}$ c) $\frac{2}{xy^2}$

d) $\frac{5a}{b}$ e) $\frac{3n}{2m}$ f) $\frac{3}{2p}$

S1C3

a) $2(x+2)$ b) $x(x-4)$

c) $(x+1)(x-1)$ d) $(x+2)(x+1)$

e) $(x+2)^2$ f) $4x(x+3)$

g) $(x-1)^2$ h) $(x+3)^2$

i) $(x-4)^2$ j) $(x+6)(x-1)$

S1C4

a) $\frac{1}{x-2}$ b) $x+1$ c) $\frac{1}{x+3}$

d) $\frac{x+2}{x+3}$ e) $\frac{x-2}{x-1}$ f) $\frac{x}{x-1}$

g) $\frac{x}{x+4}$ h) $\frac{3}{x+1}$

S1C5

a) $\frac{3x^2}{2y}$ b) $\frac{6xy^2}{5}$ c) x

d) $x+1$ e) $\frac{x+1}{x}$

S1C6

a) $\frac{3m}{2n}$ b) $x+2$ c) $\frac{a}{10n}$

d) $\frac{1}{x+2}$ e) $x-y$ f) $\frac{1}{x+1}$

S1C7

a) $\frac{4}{x}$ b) $x-5$ c) $\frac{3}{x^2}$

d) $\frac{a+1}{a+b}$ e) $\frac{1}{m-1}$ f) $\frac{2y}{x^2}$

S1C8

E1

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{x}$ d) $\frac{1}{xy}$ e) $\frac{pr}{q}$

E2

a) $\frac{15y}{7x}$ b) $\frac{6x}{7z}$ c) $\frac{2q^2}{3p}$ d) 4 e) $\frac{1}{x+3}$

E3

a) $\frac{y^2}{12}$ b) $\frac{x+1}{x-2}$ c) $\frac{5}{n}$ d) $\frac{1}{2}$

E4 1

S2C1

a) $\frac{9}{a}$ b) 2 c) $\frac{7}{4x-5}$ d) $\frac{3}{b}$

e) 3 f) 2 g) $\frac{2x+5}{x-3}$

S2C2

a) $\frac{2}{3x}$ b) $-\frac{1}{b}$ c) 3 d) 2

e) -2 f) 1 g) 1

S2C3

a) 12 b) 15 c) 60

d) 30 e) 24 f) 60

S2C4

a) $\frac{13}{12}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{17}{6}$ d) $\frac{10}{9}$ e) $\frac{7}{10}$ f) $\frac{1}{8}$

S2C5

a) $30x^2y^2$ b) $(x+2)(x-2)(x+1)$

c) $18x^2y^3$ d) $(x+1)(x-2)(x+3)$

e) $x(x+3)(x+2)(x-3)$

S2C6

a) $\frac{4+9x}{12x^2}$ b) $\frac{11}{3y}$ c) $\frac{15a+8b}{20ab}$

d) $\frac{2-9x}{12x^2}$ e) $\frac{15b+1}{12b^2}$ f) $\frac{3a-5}{10a^2}$

S2C7

a) $\frac{5x+6}{(x+1)(x+2)}$ b) $\frac{3x}{(x+1)(x-2)}$

c) $\frac{3x+7}{(x+1)(x-1)}$ d) $\frac{3x+9}{(x+1)(x+2)}$

S2C8

a) $\frac{3x+10}{(x-2)(x+2)}$ b) $\frac{-x-4}{(x+1)(x-2)}$

c) $\frac{-3x-5}{(x+3)(x-3)}$ d) $\frac{-3x}{(x+1)(x+2)}$

S2C9

a) $\frac{11}{6y}$ b) $\frac{4x+3}{6x^2}$ c) $\frac{2x-9}{(x-2)(x+2)}$

d) $\frac{-2}{(x+1)(x-1)}$ e) $\frac{-a-25}{(a-6)(a+5)}$

S2C10

a) $\frac{3}{x}$ b) $\frac{1}{2x}$ c) $\frac{2x+1}{5x}$

d) $\frac{-2x+4}{3x}$ e) $\frac{x+1}{x-1}$ f) 1

g) $\frac{1}{x}$ h) $\frac{bc+ac+ab}{abc}$ i) $\frac{3y-4}{12y}$

j) $\frac{5x-3}{(x-1)(x+1)}$ k) $\frac{1}{x(x-1)}$

l) $\frac{1}{x(x-1)(x+1)}$ m) $\frac{1}{x+1}$

n) $\frac{3}{(x+1)(x-1)(x+2)}$ o) $\frac{3m+4}{(m+2)(m+1)}$

p) $\frac{3a-11}{(a+2)(a-2)}$ q) $\frac{-a+15}{(a+4)(a-1)}$

UNIDAD 4

Sección 1 Contenido 1 (S1C1)

E1 a) $(7)(-5)$ b) $(-5)(5)$

c) $(21)(4)$ d) $(-3)(-26)$

E2 a) $(8)(12)+1$ b) $(9)(6)+3$

c) $(30)(11)+4$ d) $(70)(3)+15$

S1C2

a) Cociente: $x-4$, Residuo: 6

b) Cociente: $2x+3$, Residuo: 19

S1C3

a) Cociente: $x+1$, Residuo: -4

b) Cociente: $x-2$, Residuo: 3

c) Cociente: $2x+5$, Residuo: 17

d) Cociente: $2x-9$, Residuo: 37

e) Cociente: $x-1$, Residuo: 0

f) Cociente: $12x-29$, Residuo: 58

S1C4

a) Cociente: $x^2+6x+11$, Residuo: 12

b) Cociente: $4x^2-7x+18$
Residuo: -23

c) Cociente: x^2-x-2, Residuo: -10

S1C5

a) $(x-5)(x+10)+52$

b) $(x-2)(x^2+8x+19)+37$

c) $(x-1)(3x^2+2x+4)+3$

d) $(x+3)(x^2-9x+25)-70$

S1C6

E1

a) Cociente: $x+6$, Residuo: 9

b) Cociente: $x-5$, Residuo: 16

c) Cociente: $x+10$, Residuo: 65

d) Cociente: $3a-15$, Residuo: 46

e) Cociente: $x-3$, Residuo: 7

f) Cociente: $2a-2$, Residuo: -2

E2

a) Cociente: x^2-2x+3, Residuo: 0

b) Cociente: $2x^2-x+6$, Residuo: 1

c) Cociente: $3x^2-x+1$, Residuo: -2

d) Cociente: $3x^2+5x+5$, Residuo: 1

e) Cociente: b^2-3b-5, Residuo: 10

f) Cociente: $6a^2+6a+3$, Residuo: 0

E3

a) $(x+1)(3x-8)+9$

b) $(x-2)(3x^2+x)-1$

c) $(x-3)(-2x^2-2x+1)+4$

S2C1

E1

a) $P(3)=5$ $P(-1)=9$ $P(0)=5$

b) $P(1)=1$ $P(0)=-1$ $P(3)=17$

c) $P(-1)=2$ $P(2)=11$ $P(3)=34$

d) $P(3)=163$ $P(1)=3$ $P(5)=803$

E2

a) $P(3)=1$ $P(-4)=22$

b) $P(3)=8$ $P(-4)=1$

S2C2

a) $P(2)=20,$ $R=20$

b) $P(-2)=-49,$ $R=-49$

c) $P(1)=0,$ $R=0$

d) $P(-1)=22,$ $R=22$

S2C3

a) El factor de $P(x)$ es $x-2$.

b) Los binomios no son factores de $P(x)$.

S2C4

E1

a) $P(2)=11$ $P(0)=1$ $P(-1)=2$
b) $P(3)=58$ $P(-1)=6$ $P(5)=276$
c) $P(0)=-1$ $P(-2)=37$ $P(1)=-8$
d) $P(2)=1$ $P(-4)=-41$ $P(-1)=7$
e) $P(-1)=-2$ $P(0)=-1$ $P(1)=0$

E2

a) $P(2)=20,$ $R=20$
b) $P(-3)=-43,$ $R=-43$
c) $P(1)=5,$ $R=5$
d) $P(-4)=431,$ $R=431$
e) $P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{8}$ $R=\frac{15}{8}$

E3 El factor de $P(x)$ es $x-3$

E4 $x+1$ y $x-2$ son factores de $P(x)$

S3C1

a) $(x-1)(x-2)(x+1)$
b) $(x-1)(x+5)(x+1)$
c) $(x-1)(x+2)(x+3)$

S3C2

E1

a) $x=-2,\ x=1$ b) $x=-2,\ x=-5$
c) $x=2,\ x=3$

E2

a) $x=2,\ x=-1$
b) $x=\frac{-5+\sqrt{17}}{2},\ x=\frac{-5-\sqrt{17}}{2}$
c) $x=\frac{-3+\sqrt{21}}{6},\ x=\frac{-3-\sqrt{21}}{6}$
d) $x=\frac{-1+\sqrt{61}}{10},\ x=\frac{-1-\sqrt{61}}{10}$

S3C3

E1 a) $x=0,\ x=2,\ x=-5$
b) $x=0,\ x=1,\ x=-1$
c) $x=0,\ x=-\frac{1}{2},\ x=-1$

E2 a) $x=0,\ x=-3,\ x=2$
b) $x=0,\ x=4,\ x=-1$
c) $x=0,\ x=-2,\ x=2$

S3C4

a) $x=1,\ x=-2,\ x=2$
b) $x=1,\ x=-1,\ x=-2$
c) $x=1,\ x=5,\ x=-1$

S3C5

E1

a) $x=0, x=1+\sqrt{3},\ x=1-\sqrt{3}$
b) $x=0, x=2+\sqrt{3},\ x=2-\sqrt{3}$

E2

a) $x=1, x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}, x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$
b) $x=1, x=-1+\sqrt{2}, x=-1-\sqrt{2}$

S3C6

E1 a) $(x-1)(x-3)(x+1)$
b) $(x+1)(x+2)(x-2)$
c) $(x-1)(x^2-4x-4)$

E2 a) $x=0,\ x=1,\ x=2$
b) $x=0,\ x=-3,\ x=5$
c) $x=0,\ x=-2,\ x=-7$
d) $x=0, x=-1, x=-2$
e) $x=0, x=-2, x=1$
f) $x=0, x=2, x=3$

E3 a) $x=1, x=-1,\ x=-3$
b) $x=-1, x=-2,\ x=3$
c) $x=1,\ x=2,\ x=3$

E4

a) $x=0, x=-1+\sqrt{3},\ x=-1-\sqrt{3}$
b) $x=1, x=\frac{3+\sqrt{13}}{2},\ x=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$
c) $x=1, x=\frac{-3-\sqrt{5}}{2},\ x=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$

UNIDAD 5

Sección 1 Contenido 1 (S1C1)

a) $x=\sqrt{5}$ b) $y=5$

S1C2

	$\frac{\text{co}}{\text{hip}}$	$\frac{\text{ca}}{\text{hip}}$	$\frac{\text{co}}{\text{ca}}$
a)	$\frac{BC}{AB}=\frac{3}{5}$	$\frac{AC}{AB}=\frac{4}{5}$	$\frac{BC}{AC}=\frac{3}{4}$
b)	$\frac{DE}{EF}=\frac{3}{5}$	$\frac{DF}{EF}=\frac{4}{5}$	$\frac{DE}{DF}=\frac{3}{4}$

Los resultados son idénticos ya que

$\frac{BC}{AB}=\frac{ED}{FE}$, $\frac{AC}{AB}=\frac{DF}{EF}$, $\frac{BC}{AC}=\frac{DE}{DF}$

S1C3

tan A$=\frac{BC}{AC}=\frac{2}{3}$ tan B$=\frac{AC}{BC}=\frac{3}{2}$

S1C4

	sen A	cos A	tan A
a)	$\frac{BC}{AB}=\frac{3}{\sqrt{13}}$	$\frac{AC}{AB}=\frac{2}{\sqrt{13}}$	$\frac{BC}{AC}=\frac{3}{2}$
b)	$\frac{BC}{AB}=\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\frac{AC}{AB}=\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{BC}{AC}=2$
c)	$\frac{BC}{AB}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\frac{AC}{AB}=\frac{1}{3}$	$\frac{BC}{AC}=2\sqrt{2}$

S1C5

a) cos A $=\frac{\text{ca}}{\text{hip}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$ tan A $=\frac{\text{co}}{\text{ca}}=\frac{1}{\sqrt{15}}$

b) sen A $=\frac{\text{co}}{\text{hip}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$ tan A $=\frac{\text{co}}{\text{ca}}=\frac{3}{\sqrt{7}}$

c) sen A $=\frac{\text{co}}{\text{hip}}=\frac{5}{\sqrt{29}}$ cos A $=\frac{\text{ca}}{\text{hip}}=\frac{2}{\sqrt{29}}$

S1C6

E1

	sen A	cos A	tan A
a)	$\frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{13}}{7}$	$\frac{AC}{AB}=\frac{6}{7}$	$\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{13}}{6}$
b)	$\frac{BC}{AB}=\frac{5}{\sqrt{29}}$	$\frac{AC}{AB}=\frac{2}{\sqrt{29}}$	$\frac{BC}{AC}=\frac{5}{2}$

E2

a) sen A $=\frac{\text{co}}{\text{hip}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ tan A $=\frac{\text{co}}{\text{ca}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) cos A $=\frac{\text{ca}}{\text{hip}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ tan A $=\frac{\text{co}}{\text{ca}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

E3

	a)	b)	c)
sen A	$\frac{2}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{7}{\sqrt{53}}$
cos A	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{\sqrt{53}}$
tan A	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{7}{2}$

S2C1

a) sen 45°$=\frac{1}{\sqrt{2}}$ cos 45°$=\frac{1}{\sqrt{2}}$ tan 45°$=1$

b) Estos valores son iguales respecto a los calculados en la solución del problema. Por que los lados de los triángulos involucrados son proporcionales.

S2C2

	$A=30°$	$A=45°$	$A=60°$
sen A	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan A	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

S3C1

a) $a=\sqrt{3}$ $b=1$
b) $a=\sqrt{3}$ $c=2\sqrt{3}$

S3C2

a) $h=4m$ b) $AB=4\sqrt{3}\ m$

S3C3

E1

a) sen 7° $=0{,}1219$ b) cos 12° $=0{,}9781$
c) tan 25° $=0{,}4663$

E2

a) $A=23°$ b) $A=14°$ c) $A=20°$

S3C4

a) $6{,}2m$ b) $5{,}7m$

S4C1

Columna 1	Columna 2
sen 24°	cos 8°
cos 75°	sen 15°
sen 82°	cos 66°

S4C3

a) sen $A=\frac{3}{5}$, tan $A=\frac{3}{4}$

b) cos $A=\frac{\sqrt{5}}{3}$, tan $A=\frac{2}{\sqrt{5}}$

S4C4

E1

a) $c=5, b=5\sqrt{2}$ b) $f=\frac{9}{2}, d=\frac{9\sqrt{3}}{2}$

c) $h=\frac{12}{\sqrt{3}}, i=\frac{6}{\sqrt{3}}$

E2

a) $BC=2{,}796, AC=4{,}145$
b) $BC=4{,}596, AC=3{,}8568$

E3

a) $BC=1{,}212$ b) $BC=1{,}8008$

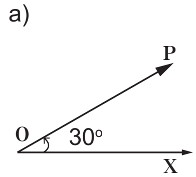
E4 7,7136 pies

E5 a) $x=23°$ b) $x=20°$

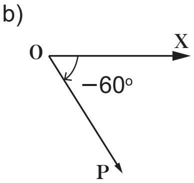
UNIDAD 6

Sección 1 Contenido 1 (S1C1)

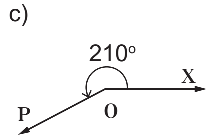
a)



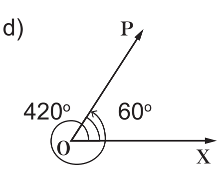
b)



c)

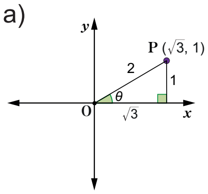


d)



S1C2

a)

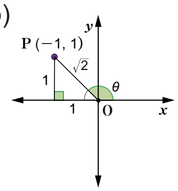


$\text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

b)

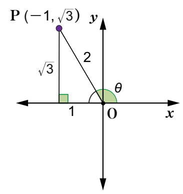


$\text{sen}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan\theta = -1$

c)



$\text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$

$\tan\theta = -\sqrt{3}$

S1C3

a)

$\text{sen}\,135° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 135° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 135° = -1$

b)

$\text{sen}\,240° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 240° = -\frac{1}{2}$

$\tan 240° = \sqrt{3}$

c)

$\text{sen}(-210°) = \frac{1}{2}$

$\cos(-210°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan(-210°) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

d)

$\text{sen}(-315°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos(-315°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan(-315°) = 1$

S1C4

a) I cuadrante b) IV cuadrante

c) II cuadrante d) IV cuadrante

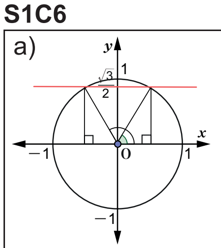
S1C5

a) $\text{sen}\,270° = -1$, $\cos 270° = 0$, $\tan 270° = NE$

b) $\text{sen}\,360° = 0$, $\cos 360° = 1$, $\tan 360° = 0$

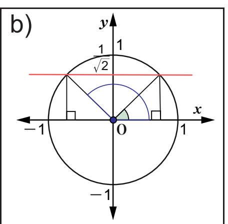
S1C6

a)



$\theta = 60°$, $\theta = 120°$

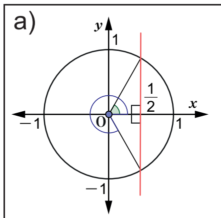
b)



$\theta = 45°$, $\theta = 135°$

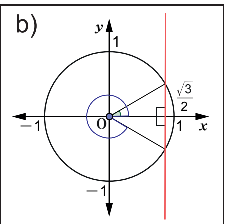
S1C7

a)



$\theta = 60°$, $\theta = 300°$

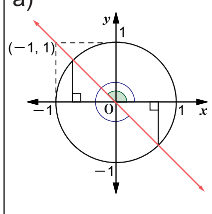
b)



$\theta = 30°$, $\theta = 330°$

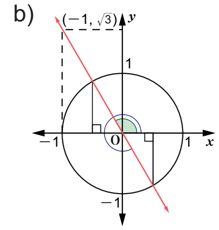
S1C8

a)



$\theta = 135°$, $\theta = 315°$

b)

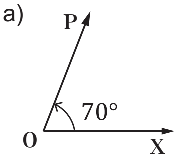


$\theta = 120°$, $\theta = 300°$

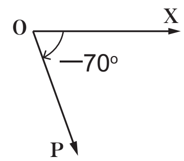
S1C9

E1

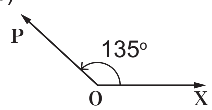
a)



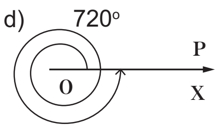
b)



c)



d)



E2

a)

$\text{sen}\,150° = \frac{1}{2}$

$\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 150° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

b)

$\text{sen}\,210° = -\frac{1}{2}$

$\cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 210° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

c)

$\text{sen}\,315° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 315° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 315° = -1$

d)

$\text{sen}(-120°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(-120°) = -\frac{1}{2}$

$\tan(-120°) = \sqrt{3}$

e)

$\text{sen}(-240°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(-240°) = -\frac{1}{2}$

$\tan(-240°) = -\sqrt{3}$

f)

$\text{sen}(-300°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(-300°) = \frac{1}{2}$

$\tan(-300°) = \sqrt{3}$

g)

$\text{sen}(-330°) = \frac{1}{2}$

$\cos(-330°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan(-330°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

h)

$\text{sen}(-720°) = 0$

$\cos(-720°) = 1$

$\tan(-720°) = 0$

E3

a) IV cuadrante b) I cuadrante

c) III cuadrante d) I cuadrante

E4

a) $\theta = 210°, \theta = 330°$ b) $\theta = 240°, \theta = 300°$

E5

a) $\theta = 120°, \theta = 240°$ b) $\theta = 180°$

E6

a) $\theta = 45°, \theta = 225°$ b) $\theta = 60°, \theta = 240°$

S2C1

$$\tan^2\theta + 1 = \frac{\text{sen}^2\,\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

S2C2

a) $\text{sen}\,\theta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\tan\theta = -\frac{\sqrt{7}}{3}$

b) $\cos\theta = -\frac{4}{5}$, $\tan\theta = \frac{3}{4}$

S2C3

a) $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\text{sen}\,\theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$

b) $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{30}}{6}$

S2C4

a) $\text{sen}\,\theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\tan\theta = -\sqrt{15}$

b) $\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\tan\theta = \frac{4}{3}$

c) $\text{sen}\,\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$

d) $\text{sen}\,\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

S3C1

E1 a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

E2 a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ c) $-\sqrt{3}$

S3C2

E1 a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) 1

E2 a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) -1

S3C3

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $-\sqrt{3}$

S3C4

E1 a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) 1

E2 a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

E3 a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ c) $\sqrt{3}$

E4 a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ c) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

E5 a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) -1

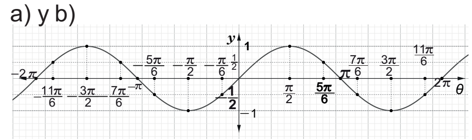
S4C1

E1 a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{7\pi}{6}$ d) $\frac{5\pi}{3}$

E2 a) 90° b) 135° c) 150° d) 240°

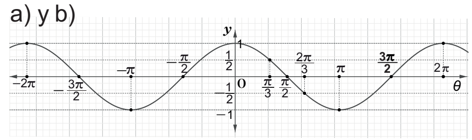
S4C2

a) y b)



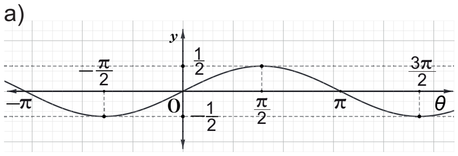
S4C3

a) y b)



S4C4

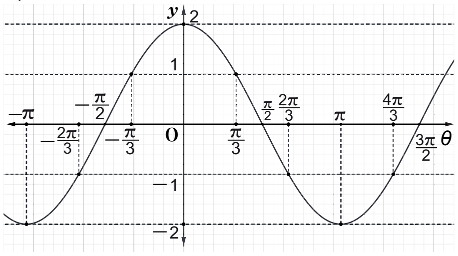
a)



Período: 2π Amplitud: $\frac{1}{2}$

Rango: $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$

b)

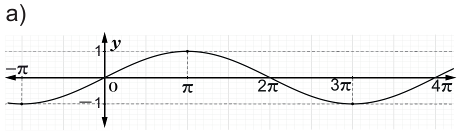


Período: 2π Amplitud: 2

Rango: $-2 \leq y \leq 2$

S4C5

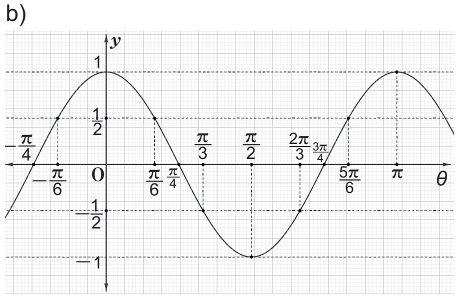
a)



Período: 4π Amplitud: 1

Rango: $-1 \leq y \leq 1$

b)

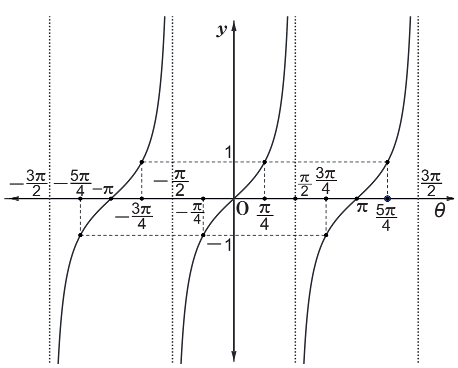


Período: π Amplitud: 1

Rango: $-1 \leq y \leq 1$

S4C6

a) y b)



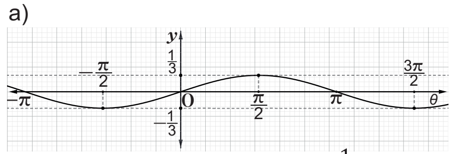
S4C7

E1 a) $\frac{4\pi}{9}$ b) $\frac{5\pi}{6}$ c) $\frac{25\pi}{18}$ d) $-\frac{11\pi}{6}$

E2 a) $36°$ b) $630°$ c) $100°$ d) $-480°$

E3

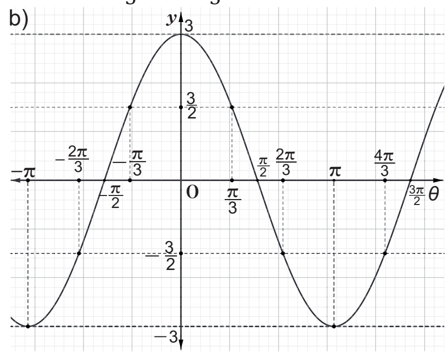
a)



Período: 2π Amplitud: $\frac{1}{3}$

Rango: $-\frac{1}{3} \leq y \leq \frac{1}{3}$

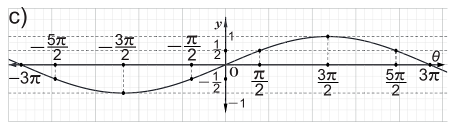
b)



Período: 2π Amplitud: 3

Rango: $-3 \leq y \leq 3$

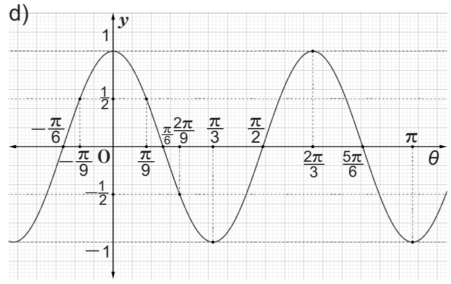
c)



Período: 6π Amplitud: 1

Rango: $-1 \leq y \leq 1$

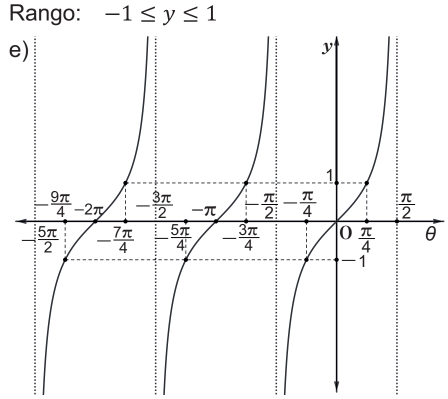
d)



Período: $\frac{2}{3}\pi$ Amplitud: 1

Rango: $-1 \leq y \leq 1$

e)



Período: π

Rango: el conjunto de los números reales

UNIDAD 7

Sección 1 Contenido 1 (S1C1)

a) $2\sqrt{3}$ b) 2

S1C2

a) $45°$ b) $135°$

S1C3 $25\sqrt{6}\,m.$

S1C4

a) 8 b) $\frac{30}{\sqrt{2}}$ c) $6\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{3}$

S1C5

E1 a) $\frac{6}{\sqrt{2}}$ b) $2\sqrt{6}$

E2

a) $60°$ b) $45°$

E3 $2\sqrt{6}\,m$

E4 a) $\frac{12}{\sqrt{2}}$ b) 3 c) $2\sqrt{3}$ d) $5\sqrt{3}$

S2C1 a) $\sqrt{13}$ b) $\sqrt{5}$

S2C2 a) $60°$ b) $150°$

S2C3 $5\sqrt{7}\,m$

S2C4 E1 a) $\sqrt{7}$ b) $3\sqrt{2}$

E2 a) $45°$ b) $135°$

E3 $\sqrt{78}$

UNIDAD 8

Sección 1 Contenido 1 (S1C1)

	a)	b)	c)	d)
Media (x):	2	8	2	13
Moda (M_0):	1	9	1	14
Mediana (M_e):	1,5	8,5	2	13

S1C2

a)	Grupo A	Grupo B
Media $(\bar{x})$:	2	2
Moda (M_0):	1	2
Mediana (M_e):	2	2

La media y la mediana de los dos grupos tienen el mismo valor, sin embargo, la moda de los grupos no es igual.

b)	Grupo A	Grupo B
Media $(\bar{x})$:	2	2
Moda (M_0):	1	1
Mediana (M_e):	1,5	1

La media y la mediana de los dos grupos tienen el mismo valor, sin embargo, la mediana del grupo A es menor que la de B.

S1C3

a)

20–24	24–28	28–32	32–36	36–40

b)

Grupo (intervalo)	
20 – 24	20,20,20,20,21,21,22,22,23,23,23
24 – 28	24,24,24,24,24,26,26,27
28 – 32	28,28,29,29,29,30
32 – 36	34,34,35
36 – 40	36,36

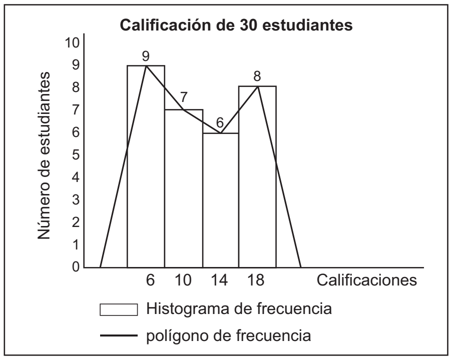
S1C4

a) El ancho de cada clase es 4

b)

Califica-ciones	Número de estudiantes (f_i)	Marca de clase (M_i)
4 – 8	9	6
8 – 12	7	10
12 – 16	6	14
16 – 20	8	18
Total	30	

S1C5



S1C6

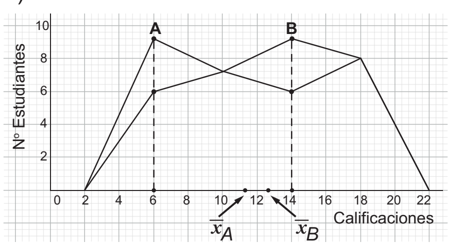
$\bar{x} \approx 11{,}73$ $M_0 = 6$ $M_e = 10$

S1C7

a) $\bar{x} \approx 11{,}73$ $M_0 = 6$ $M_e = 10$

b) $\bar{x} \approx 12{,}53$ $M_0 = 14$ $M_e = 14$

c)



S2C1

E1 $Q_1 = 3$ $Q_2 = 5$ $Q_3 = 7$
E2 $Q_1 = 2$ $Q_2 = 3$ $Q_3 = 4$

S2C2

E1 $Q_1 = 3$ $Q_2 = 4{,}5$ $Q_3 = 8$

E2 $Q_1 = 13{,}5$ $Q_2 = 16{,}5$ $Q_3 = 19$

S2C3

	S^2	S	Variabilidad
E1	$S^2 = 2$	$S \approx 1{,}41$	Por encima: $4{,}41$ Por debajo: $1{,}59$
E2	$S^2 = 2$	$S \approx 1{,}41$	Por encima: $6{,}41$ Por debajo: $3{,}59$

S2C4

E1 a)

Grupo A $\mathrm{CV} \approx 0{,}22$ Grupo B $\mathrm{CV} \approx 0{,}25$

b) El grupo A tiene menos variabilidad en sus calificaciones a pesar de tener el mismo promedio que el grupo B.

E2

	Pulpería A	Pulpería B
CV	$0{,}02$	$0{,}08$

La pulpería B tiene menor variabilidad.

Anexo

Pruebas de cada unidad

Prueba de Matemática 10mo (30 min.)

Unidad 1: Conjuntos e Intervalos Numéricos (Páginas 2~12)

Estimado estudiante, lea cuidadosamente los ejercicios de esta prueba, luego resuélvalos ordenadamente en su cuaderno sin rayar el libro de texto.

1. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, escriba el símbolo de pertenencia $\in$ o no pertenencia $\notin$ en cada espacio en blanco según corresponda.

   a) 2 ___ $\mathbf{A}$ b) 4 ___ $\mathbf{A}$

2. Dados los conjuntos $\mathbf{A} = \{1, 4, 7\}$, $\mathbf{B} = \{1, 4\}$, escriba uno de los símbolos $\subset$ o $\not\subset$ en el espacio en blanco según corresponda.

   a) $\mathbf{A}$ ___ $\mathbf{B}$ b) $\mathbf{B}$ ___ $\mathbf{A}$

3. Sean los conjuntos $\mathbf{U} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ (el conjunto universo) $\mathbf{A} = \{2, 8, 10\}$, $\mathbf{B} = \{6, 10\}$, $\mathbf{C} = \{2, 8\}$, encuentre:

   a) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} =$ b) $\mathbf{B} \cap \mathbf{C} =$

   c) $\bar{\mathbf{A}} =$ d) $\mathbf{A} - \mathbf{B} =$

4. Calcule la cardinalidad de los conjuntos resultante en 3.

a) $n(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) =$ b) $n(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) =$

c) $n(\bar{\mathrm{A}}) =$ c) $n(\mathrm{A} - \mathrm{B}) =$

5. Exprese el conjunto $\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < 6\}$ por extensión.

6. Grafique en una recta el par de intervalos numéricos dado y encuentre su unión.

$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}, \mathbf{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$

$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} =$

7. Grafique en una recta el par de intervalos numéricos dado y encuentre su intersección.

$\mathbf{C} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}, \ \mathbf{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$

$\mathbf{C} \cap \mathbf{D} =$

Prueba de Matemática 10mo (30 min.)

Unidad 2: Inecuaciones de Primer y Segundo Grado (Páginas 14~38)

Estimado estudiante, lea cuidadosamente los ejercicios de esta prueba, luego resuélvalos ordenadamente en su cuaderno sin rayar el libro de texto.

1. Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado:

a) $x-3>5$

b) $3x\leq-6$

c) $-2x>4$

d) $2x+2>4$

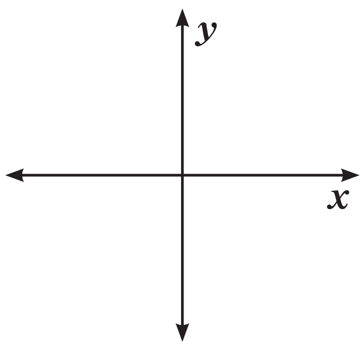
2. Resuelva la inecuación simultánea de primer grado $-2\leq x-2<4$.

3. Resuelva la ecuación: $|x-2|=3$.

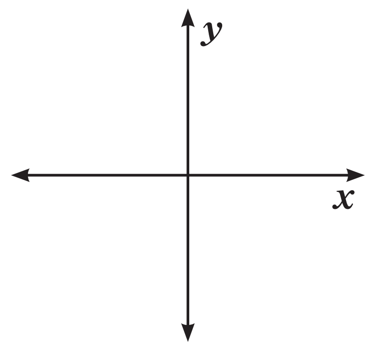
4. Resuelva la inecuación $|x-1| \geq 2$

5. Resuelva las siguientes inecuaciones de segundo grado:

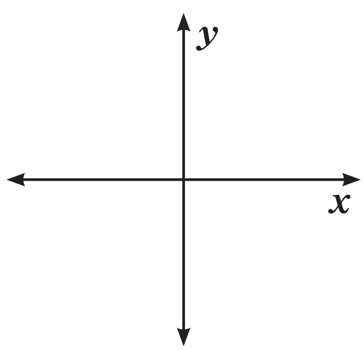
a) $x^2 - 1 \leq 0$



b) $x^2 + 2x - 8 < 0$



c) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$



Prueba de Matemática 10mo (30 min.)

Unidad 3: Fracciones Algebraica (Páginas 40 ~ 58)

Estimado estudiante, lea cuidadosamente los ejercicios de esta prueba, luego resuélvalos ordenadamente en su cuaderno sin rayar el libro de texto.

1. Simplifique las siguientes fracciones algebraicas:

   a) $\frac{x^2}{x^3}$

   b) $\frac{x+1}{x^2-1}$

2. Efectúe las siguientes operaciones:

   a) $\frac{x^2}{8y^3} \cdot \frac{4y^2}{x}$

   b) $\frac{x^2-1}{x-3} \div \frac{x+1}{x-3}$

   c) $\frac{x+1}{x-2} \div \frac{x^2+3x+2}{x-2} \cdot \frac{x+1}{x+3}$

   d) $\frac{3}{x} + \frac{2}{x}$

   e) $\frac{2x}{x-1} - \frac{2}{x-1}$

   f) $\frac{4}{x} - \frac{5}{2x}$

   g) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2}$

   h) $\frac{4}{x-2} - \frac{1}{x+2}$

Prueba de Matemática 10mo (30 min.)

Unidad 4: Ecuaciones de Tercer Grado (Páginas 60 ~ 76)

Estimado estudiante, lea cuidadosamente los ejercicios de esta prueba, luego resuélvalos ordenadamente en su cuaderno sin rayar el libro de texto.

1. Encuentre el cociente y el residuo al dividir x^3+4x^2-x-10 entre $x-2$.

   Cociente: Residuo:

2. Encuentre el residuo de dividir $P(x)=x^3+x^2-3x+5$ entre $x-1$ utilizando el teorema del residuo.

3. Factorice el siguiente polinomio:
   x^3+2x^2-x-2

4. Resuelva las siguientes ecuaciones de tercer grado:

   a) $x(x-2)(x+1)=0$

   b) $x^3-x^2-6x=0$

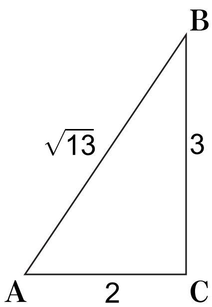
   c) $x^3+4x^2+x-6=0$

Prueba de Matemática 10mo (30 min.)

Unidad 5: Introducción a la Trigonometría (Páginas 78 ~ 94)

Estimado estudiante, lea cuidadosamente los ejercicios de esta prueba, luego resuélvalos ordenadamente en su cuaderno sin rayar el libro de texto.

1. Dado el triángulo rectángulo, encuentre $\operatorname{sen} A$, $\cos A$ y $\tan A$.



$\operatorname{sen} A =$

$\cos A =$

$\tan A =$

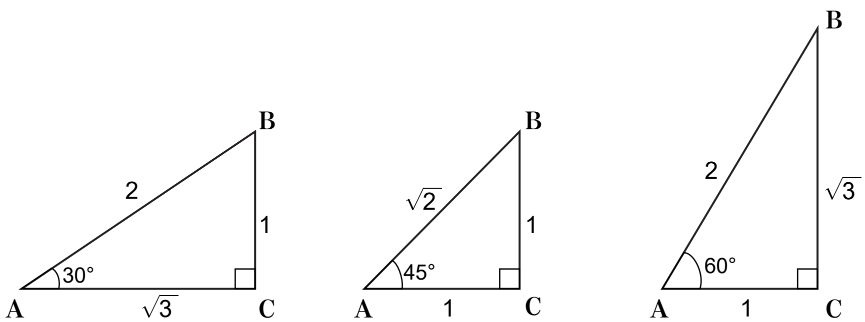
2. Si A es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo y $\operatorname{sen} A = \frac{1}{4}$, calcule los valores de $\cos A$ y $\tan A$.

$\cos A =$

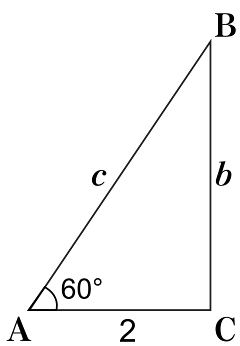
$\tan A =$

3. Compare la tabla haciendo uso de los triángulos de la figura.

A	30º	45º	60º
sen A			
cos A			
tan A			



4. Calcule la longitud de los lados desconocidos del siguiente triángulo rectángulo.



b =

c =

Prueba de Matemática 10mo (30 min.)

Unidad 6: Funciones Trigonométricas (Páginas 96 ~ 124)

Estimado estudiante, lea cuidadosamente los ejercicios de esta prueba, luego resuélvalos ordenadamente en su cuaderno sin rayar el libro de texto.

1. Determine los valores $\operatorname{sen}\theta, \cos\theta$ y $\tan\theta$ para los valores de θ:

a) 135°

$\operatorname{sen}\theta =$

$\cos\theta =$

$\tan\theta =$

b) 90°

$\operatorname{sen}\theta =$

$\cos\theta =$

$\tan\theta =$

2. Si $0° \leq \theta \leq 360°$, determine los valores de θ para los cuales:

a) $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos\theta = \frac{1}{2}$

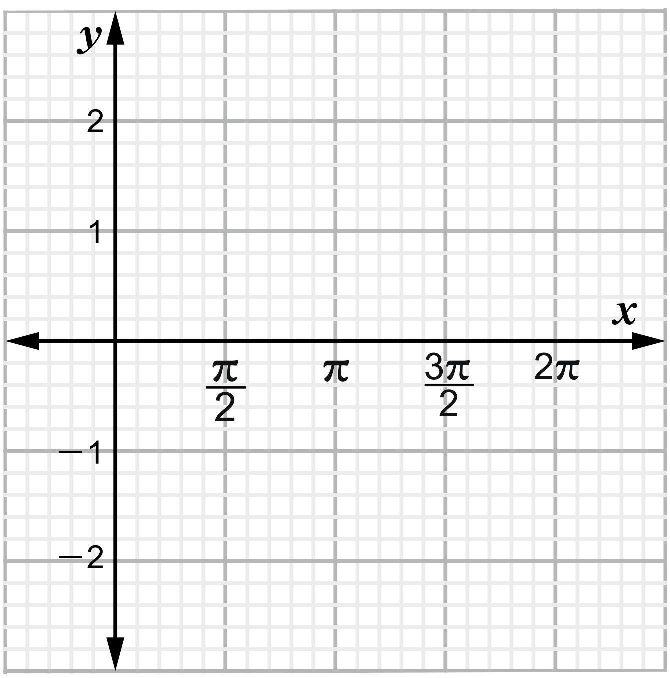
c) $\tan\theta = -1$

3. Si el lado terminal del ángulo θ se encuentra en el IV cuadrante y $\cos\theta = \frac{3}{4}$.
   Determine:

   $\operatorname{sen}\theta =$

   $\tan\theta =$

4. Grafique la función trigonométrica $y = 2\cos\theta$ con $0° \leq \theta \leq 360°$ y determine período, rango y amplitud.



Período:

Rango:

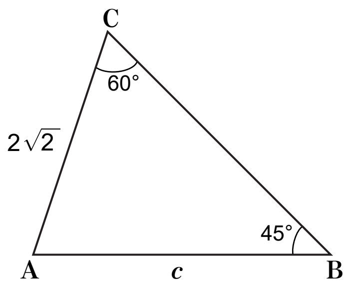
Amplitud:

Prueba de Matemática 10mo (30 min.)
Unidad 7: Trigonometría Analítica (Páginas 126~136)

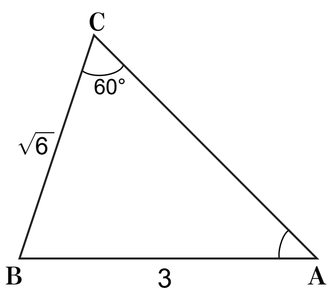
Estimado estudiante, lea cuidadosamente los ejercicios de esta prueba, luego resuélvalos ordenadamente en su cuaderno sin rayar el libro de texto.

1. Dados los siguientes triángulos, determine:

a) La longitud c



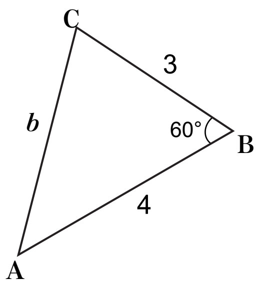
b) La medida del ángulo A



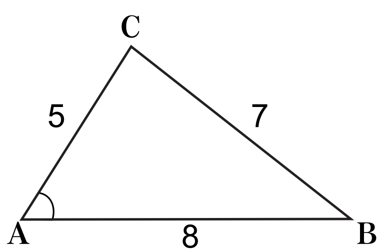
Determine el área del ΔABC con $b = 4$, $c = 8$ y $A = 30°$.

3. Dados los siguientes triángulos, determine:

a) La longitud b

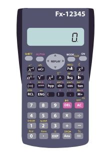


b) La medida del ángulo A



Prueba de Matemática 10mo (30 min.)
Unidad 8: Estadística (Páginas 138 ~ 153)

Estimado estudiante, lea cuidadosamente los ejercicios de esta prueba, luego resuélvalos ordenadamente en su cuaderno sin rayar el libro de texto.



1. Dadas las calificaciones de 30 estudiantes de una prueba de matemática representadas en la tabla.

   a) Complete la tabla

Calificación de 30 estudiantes

Edades	Número de estudiantes (f_i)	Marca de clase (M_i)	$f_i \cdot M_i$	Frecuencia acumulada (F_i)
4 - 8	9			
8 - 12	7			
12 - 16	6			
16 - 20	8			
Total	30			

2. Construye un histograma y un polígono de frecuencia.

c) Encuentre la media aritmética, moda y mediana.

$\bar{x} =$

$\mathrm{M_o} =$

$\mathrm{M_e} =$

2. Dadas las edades de 7 niños que recibieron consulta con el pediatra: 5, 7, 3, 2, 7, 4 y 5, encuentre Q_1, Q_2 y Q_3.

$Q_1 =$ $Q_2 =$ $Q_3 =$

3. Con los datos 3, 3, 5, 9 y su media aritmética $\bar{x} = 5$.

a) Calcule la varianza de estos.

$S^2 =$

b) Calcule la desviación estándar.

$S =$