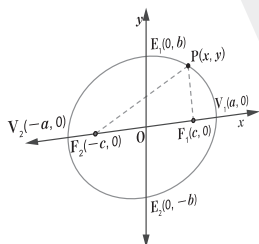
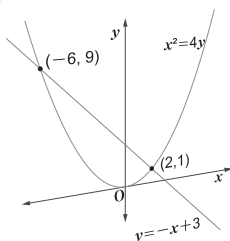
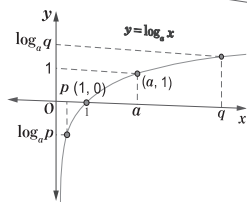


MATEMÁTICA 10

Décimo grado



Cuaderno de Actividades

Educación Secundaria

COORDINACIÓN GENERAL

Profesora Melba López Montenegro

Profesor Julio César Canelo Castillo

AUTORES

Primitivo Herrera Herrera

Domingo Felipe Aráuz Chévez

COLECTIVO DE AUTORES

MINED

Francisco Emilio Díaz Vega

Juan Carlos Caballero López

Humberto Antonio Jarquín López

Alberto Leonardo García Acevedo

Gregorio Isabel Ortiz Hernández

UNAN - MANAGUA

Nubia Aracelly Barreda Rodríguez

Anastacio Benito González Funes

Melissa Lizbeth Velásquez Castillo

Domingo Felipe Aráuz Chévez

Armando José Huete Fuentes

Célfida del Rosario López Sánchez

Primitivo Herrera Herrera

Orlando Antonio Ruiz Álvarez

Marlon José Espinoza Espinoza

Hilario Ernesto Gallo Cajina

EQUIPO DE DIAGRAMACIÓN

María José López Samqui

Primera Edición, 2019.

Derechos reservados. Prohibida su venta y/o reproducción con fines comerciales por cualquier medio, sin previa autorización del Ministerio de Educación (MINED), de la República de Nicaragua.

La presente publicación ha sido reproducida con el apoyo de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA) a través del Proyecto para el Aprendizaje Amigable de matemática en Educación Secundaria (NICAMATE).

Introducción

El Cuaderno de Actividades es un material complementario al Libro de Texto (LT). Fue diseñado con la intención de consolidar sus aprendizajes adquiridos en el aula, a través del estudio independiente en casa. Los ejercicios que se proponen están pensados para que usted trabaje al menos 20 minutos en su casa cada día.

Estructura

Al iniciar una nueva sección, generalmente se presenta un resumen de los aspectos claves que se estudian en la sección, y que le serán de utilidad al momento de resolver los ejercicios que se proponen. Dichos aspectos dependen de cada sección.

Ejercicios

Los ejercicios que aquí se proponen son básicos, es decir, son ejercicios similares al problema, ejemplos y ejercicios brindados en el Libro de Texto y que han sido resueltos en el aula.

El objetivo de estos ejercicios es afianzar los aprendizajes adquiridos en el aula y deben ser resueltos por todos los y las estudiantes. La numeración de estos ejercicios es continua para hacer más fácil la identificación de su solución en los solucionarios. Antes del enunciado de cada ejercicio se escribe el número de página del contenido correspondiente en el Libro de Texto.

Ejercicios Avanzados

Los ejercicios aquí propuestos tienen un mayor grado de complejidad y son diferentes a los modelos mostrados en el problema, ejemplos y ejercicios del libro de texto, sin embargo, los aspectos teóricos necesarios para poder resolverlos han sido estudiados en clase. El objetivo de estos ejercicios es aplicar los aprendizajes que se han consolidado en situaciones que generen un mayor análisis y reflexión.

Solucionarios

Aquí se muestran las soluciones de cada uno de los ejercicios que se han propuesto y se brindan los puntos más esenciales del proceso de solución de los ejercicios.

Los solucionarios deben ser consultados únicamente para comparar las respuestas obtenidas. Se brinda primero la solución de todos los ejercicios de las unidades y después se encuentran las soluciones de los ejercicios avanzados.

ÍNDICE

Unidad 1: Conjuntos e Intervalos Numéricos

Sección 1: Conjuntos	1
Sección 2: Intervalos numéricos	2

Unidad 2: Inecuaciones de Primer y Segundo Grado

Sección 1: Inecuaciones de primer grado	4
Sección 2: Inecuaciones de primer grado con valor absoluto	5
Sección 3: Inecuaciones de segundo grado	6

Unidad 3: Fracciones Algebraicas

Sección 1: Simplificación, multiplicación y división de fracciones algebraicas	8
Sección 2: Adición y sustracción de fracciones algebraicas	9

Unidad 4: Ecuaciones de Tercer Grado

Sección 1: División sintética	12
Sección 2: Teorema del residuo y teorema del factor	13
Sección 3: Factorización de polinomios de tercer grado y resolución de ecuaciones de tercer grado	13

Unidad 5: Introducción a la Trigonometría

Sección 1: Funciones trigonométricas de ángulos agudos en triángulos rectángulos	15
Sección 2: Valores de las funciones trigonométricas de ángulos agudos	17
Sección 3: Resolución de triángulos rectángulos	17
Sección 4: Relaciones entre seno y coseno	18

Unidad 6: Funciones Trigonómicas

Sección 1: Funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera	20
Sección 2: Relación entre seno, coseno y tangente	21
Sección 3: Relación entre las funciones trigonométricas	22
Sección 4: Gráficas de las funciones trigonométricas	23

Unidad 7: Trigonometría Analítica

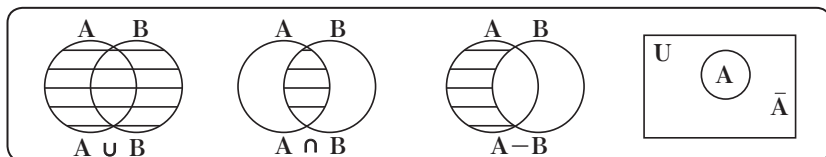
Sección 1: Ley del seno	25
Sección 2: Ley del coseno	26

Unidad 8: Estadística

Sección 1: Medidas de tendencia central y representación gráfica de datos	28
Sección 2: Medidas de posición y dispersión	30

Solucionarios

Solucionarios	32
Solucionarios de Ejercicios Avanzados	77

Unidad 1: Conjuntos e Intervalos Numéricos
Sección 1: Conjuntos

Ejercicios

- (P. 2) Dado los conjuntos $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 8, 9\}$ y $C = \{2\}$. Escriba el símbolo \in o \notin en cada espacio en blanco según convenga.
 - $4 \underline{\quad} A$
 - $10 \underline{\quad} A$
 - $1 \underline{\quad} C$
 - $8 \underline{\quad} B$
 - $8 \underline{\quad} A$
 - $2 \underline{\quad} B$
 - $5 \underline{\quad} A$
 - $6 \underline{\quad} B$
- (P. 2) Encuentre la cardinalidad de cada conjunto dado en el ejercicio 1.
- (P. 3) Sean los conjuntos $A = \{4, 6, 8, 10\}$, $B = \{2, 8, 10\}$, $C = \{4, 6, 12\}$, $D = \{2, 4\}$. Encuentre:
 - $A \cup B$
 - $B \cup C$
 - $C \cap B$
 - $A \cap C$
 - $C \cup D$
 - $A \cup D$
 - $C \cap D$
 - $A \cap D$
- (P. 3) Represente en diagrama de Venn los conjuntos que resultan en el ejercicio 3, y encuentre su cardinalidad.
- (P. 4) Dados los conjuntos: $U = \{1, 4, 9, 16, 25\}$, $A = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2\}$, $B = \{1, 4, 9, 16\}$, $C = \{4, 16\}$, $D = \{9, 16\}$, escriba uno de los símbolos \subset , $\not\subset$ o $=$ en el espacio en blanco.
 - $C \underline{\quad} B$
 - $B \underline{\quad} C$
 - $A \underline{\quad} B$
 - $B \underline{\quad} A$
 - $C \underline{\quad} D$
 - $D \underline{\quad} C$
 - $U \underline{\quad} B$
 - $B \underline{\quad} U$
- (P. 5) Sean los conjuntos $U = \{1, 3, 5, 7, 11, 13\}$, $A = \{3, 5, 11\}$, $B = \{1, 7, 13\}$, $C = \{5, 13\}$, encuentre:
 - $A - B$
 - $B - C$
 - $C - B$
 - $A - C$
 - \bar{A}
 - \bar{C}
 - \bar{B}
- (P. 5) Representa en diagrama de Venn los conjuntos que resultan en ejercicio 6, y encuentre su cardinalidad.
- (P. 6) Describa los siguientes conjuntos por comprensión a extensión:
 - $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x \leq 5\}$
 - $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 < x < 2\}$
 - $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid 6 \leq x < 10\}$
 - $D = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x \leq 12\}$
 - $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ primo}, 1 < x < 10\}$
 - $F = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ primo}, 20 < x \leq 40\}$

Sección 2: Intervalos numéricos

Ejercicios

9. (P. 8) Ubique los intervalos siguientes en la recta numérica.
- a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$
 - b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4\}$
 - c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -6\}$
 - d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 5\}$
 - e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 1\}$
 - f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq -2\}$
10. (P. 9) Grafique en una recta numérica los pares de intervalos dados en cada inciso y encuentre su unión.
- a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$
 - b) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
 - c) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$, $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$
 - d) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\}$, $H = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
 - e) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$
 - f) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$
11. (P. 10) Grafique en una recta los pares de intervalos dados en cada inciso y encuentre su intersección.
- a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$
 - b) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$
 - c) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$, $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$
 - d) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$, $H = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$
 - e) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4\}$
 - f) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$

Ejercicios Avanzados

EA1. Sea $U = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 8\}$ y $C = \{2, 4, 6, 8\}$

Calcule la cardinalidad de $(A \cup C) \cap \bar{B}$.

EA2. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y A, B son subconjuntos de U

Si $A \cap B = \{1, 2\}$; $A \cup \bar{B} = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$; $\bar{A} \cup \bar{B} = \{9\}$

Encuentre: a) $A \cup B$ b) A c) $A \cap \bar{B}$

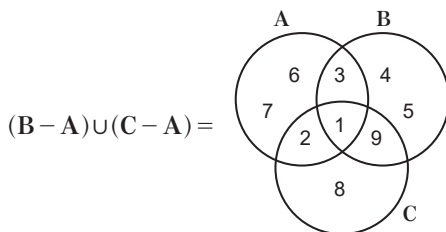
EA3. Sea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x < 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x < 8\}$

Hallar $(A \cap B) - C$

EA4. Si $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

Hallar $(A \cap B) \cup C$

EA5. Dado el siguiente diagrama de Venn, encuentre la operación con conjuntos.



Unidad 2: Inecuaciones de Primer y Segundo Grado

Sección 1: Inecuaciones de primer grado

✓ Propiedades de las desigualdades:

Si $A > B$, entonces

1. $A + C > B + C$

2. $A - C > B - C$

3. Con $C > 0$, entonces $AC > BC$, $\frac{A}{C} > \frac{B}{C}$

4. Con $C < 0$, entonces $AC < BC$, $\frac{A}{C} < \frac{B}{C}$

Ejercicios

12. (P. 14) Escriba el signo $>$ o $<$ el recuadro, sabiendo que $a > b$.

a) $a + 5$ $b + 5$

b) $3a$ $3b$

c) $\frac{a}{2}$ $\frac{b}{2}$

d) $a - 5$ $b - 5$

e) $5a$ $5b$

f) $-3b$ $-3a$

g) $\frac{b}{4}$ $\frac{a}{4}$

h) $a + 1$ $b + 1$

i) $\frac{b}{-4}$ $\frac{a}{-4}$

13. (P. 15) Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado.

a) $x - 3 > 5$

b) $x + 2 > 2$

c) $x - 1 \geq 2$

d) $x + 2 > 5$

e) $x - 4 > -1$

f) $x - 3 \geq -1$

g) $x - 5 > -7$

h) $x - 3 \geq -2$

i) $x - 3 \geq -5$

14. (P. 16) Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado.

a) $x - 3 < 2$

b) $x - 1 < -2$

c) $x - 2 \leq -2$

d) $x + 1 < 2$

e) $x + 5 < 8$

f) $x - 3 \leq -6$

g) $x + 3 \leq 8$

h) $x - 4 < -3$

i) $x - 7 \leq -6$

15. (P. 17) Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado.

a) $2x > 4$

b) $4x < 4$

c) $2x \geq -4$

d) $5x \leq 15$

e) $6x \leq 12$

f) $3x < 6$

g) $4x > 8$

h) $12x < -24$

i) $3x \geq -18$

16. (P. 18) Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado.

- a) $-2x > 4$ b) $-2x > -6$ c) $-3x \geq 12$
 d) $-4x > -4$ e) $-5x < 10$ f) $-x \leq 4$
 g) $-3x > 12$ h) $-4x \leq 8$ i) $-2x \geq 8$

17. (P. 19) Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado.

- a) $2x + 2 > 4$ b) $2x + 3 < 5$ c) $3x - 1 \geq 5$
 d) $4x - 2 \leq 6$ e) $5x - 3 < 7$ f) $6x - 2 > 10$

18. (P. 20) Resuelva las siguientes inecuaciones de primer grado.

- a) $-2x + 2 > 4$ b) $-2x + 1 < 3$ c) $-3x - 2 \geq -5$
 d) $-4x + 2 \leq 6$ e) $-6x - 3 > -9$ f) $-4x - 6 \leq 2$

19. (P. 21) Resuelva las siguientes inecuaciones simultáneas de primer grado.

- a) $4 < x + 2 \leq 5$ b) $-1 < x + 2 < 1$
 c) $-6 \leq x - 3 \leq -2$ d) $-6 \leq x - 5 < -4$
 e) $-1 < x - 1 \leq 1$ f) $-6 \leq x - 8 < -4$

20. (P. 22) Resuelva las siguientes inecuaciones simultáneas de primer grado.

- a) $4 < -x + 2 \leq 5$ b) $-1 < -x + 2 < 1$
 c) $-6 \leq -2x + 2 \leq -2$ d) $20 \geq -3x + 5 > -4$
 e) $2 \geq -3x - 1 \geq -1$ f) $-8 \leq -4x + 8 < 4$

Sección 2: Inecuaciones de primer grado con valor absoluto

✓ Definición del valor absoluto

Para cualquier número x :

$$|x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

✓ Propiedades del valor absoluto

• $|x| \geq 0$

• Con $a > 0$:

Si $|x| = a$, entonces $x = a$ o $x = -a$

Si $|x| < a$, entonces $-a < x < a$

Si $|x| > a$, entonces $x < -a$ o $x > a$

Ejercicios

21. (P. 24) Resuelva las siguientes ecuaciones o inecuaciones aplicando las propiedades de valor absoluto y represente gráficamente sus soluciones:

- a) $|x|=2$ b) $|x|=8$ c) $|x|=6$
 d) $|x|<2$ e) $|x|<6$ f) $|x|\leq 1$
 g) $|x|>7$ h) $|x|\geq 9$ i) $|x|>10$

22. (P. 25) Resuelva las siguientes ecuaciones con valor absoluto:

- a) $|x+1|=2$ b) $|x-5|=2$ c) $|x-3|=2$
 d) $|x-4|=2$ e) $|x+1|=4$ f) $|x-5|=1$
 g) $|x-2|=4$ h) $|x-3|=4$ i) $|x+2|=5$

23. (P. 26) Resuelva las siguientes inecuaciones con valor absoluto:

- a) $|x+1|<2$ b) $|x-3|\leq 2$ c) $|x+4|\leq 4$
 d) $|x-5|\leq 1$ e) $|x+3|\leq 1$ f) $|x-5|<3$
 g) $|x-3|<3$ h) $|x-4|<2$ i) $|x+5|\leq 1$

24. (P. 27) Resuelva las siguientes inecuaciones con valor absoluto:

- a) $|x+1|>2$ b) $|x+1|\geq 3$ c) $|x-4|>3$
 d) $|x+2|\geq 6$ e) $|x-3|>5$ f) $|x+5|\geq 2$
 g) $|x+6|\geq 1$ h) $|x-4|>6$ i) $|x+3|>7$

Sección 3: Inecuaciones de segundo grado

✓ Si la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ con $a > 0$ tiene dos soluciones m y n con $m < n$, entonces el conjunto de soluciones de cada una de las siguientes inecuaciones están dados por:

- $ax^2+bx+c > 0 \rightarrow x < m \text{ o } x > n$
- $ax^2+bx+c \geq 0 \rightarrow x \leq m \text{ o } x \geq n$
- $ax^2+bx+c < 0 \rightarrow m < x < n$
- $ax^2+bx+c \leq 0 \rightarrow m \leq x \leq n$

Ejercicios

25. (P. 29) Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando factorización:

- a) $x^2-4=0$ b) $x^2-5x=0$ c) $x^2+5x+6=0$
 d) $x^2-16=0$ e) $x^2-x=0$ f) $x^2-x-6=0$
 g) $x^2-25=0$ h) $x^2+6x=0$ i) $x^2+2x-8=0$

26. (P. 30) Encuentre los interceptos con el eje x de las gráficas de las siguientes funciones de segundo grado:

- a) $y=x^2-4$ b) $y=x^2-9$ c) $y=x^2-2x$
 d) $y=x^2-16$ e) $y=x^2-6x$ f) $y=x^2+x-12$
 g) $y=x^2-25$ h) $y=x^2-3x-4$ i) $y=x^2-x-6$

27. (P. 31) Trace la gráfica de la función de segundo grado usando interceptos con el eje x .
- a) $y = x^2 + 4x + 3$ b) $y = x^2 + 3x - 4$ c) $y = x^2 + 4x$
 d) $y = x^2 - 6x - 7$ e) $y = x^2 - 4x - 5$ f) $y = x^2 - 4$
 g) $y = x^2 - 25$ h) $y = x^2 - 3x - 4$ i) $y = x^2 - x - 6$
28. (P. 32) Resuelva las siguientes inecuaciones de segundo grado:
- a) $x^2 - 4 > 0$ b) $x^2 - 36 > 0$ c) $x^2 - 49 > 0$
 d) $x^2 - 64 \geq 0$ e) $x^2 - 81 \geq 0$ f) $x^2 - 100 \geq 0$
 g) $x^2 - 169 \geq 0$ h) $x^2 - 121 > 0$ i) $x^2 - 144 > 0$
29. (P. 33) Resuelva las siguientes inecuaciones de segundo grado:
- a) $x^2 - 1 \leq 0$ b) $x^2 - 9 < 0$ c) $x^2 - 49 \leq 0$
 d) $x^2 - 81 \leq 0$ e) $x^2 - 36 < 0$ f) $x^2 - 100 \leq 0$
 g) $x^2 - 169 < 0$ h) $x^2 - 121 \leq 0$ i) $x^2 - 144 \leq 0$
30. (P. 34) Resuelva las siguientes inecuaciones de segundo grado:
- a) $x^2 + 3x + 2 > 0$ b) $x^2 - 4x + 3 > 0$ c) $x^2 + 6x + 5 < 0$
 d) $x^2 + 2x - 8 > 0$ e) $x^2 - x + 12 < 0$ f) $x^2 + 7x + 12 > 0$
 g) $x^2 + 2x - 15 > 0$ h) $x^2 - x - 30 < 0$ i) $x^2 - 3x - 18 < 0$
31. (P. 35) Resuelva las siguientes inecuaciones de segundo grado:
- a) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ b) $x^2 + 6x + 5 \leq 0$ c) $x^2 - 2x - 8 \geq 0$
 d) $x^2 - 2x - 15 \geq 0$ e) $x^2 + 6x + 8 \leq 0$ f) $x^2 + 9x + 14 \leq 0$
 g) $x^2 + 11x + 30 \leq 0$ h) $x^2 - x - 2 \geq 0$ i) $x^2 - 3x - 18 \leq 0$
32. (P. 36) Resuelva las siguientes inecuaciones de segundo grado:
- a) $-x^2 - 6x - 5 > 0$ b) $-x^2 - 2x + 8 \geq 0$ c) $-x^2 + 6x - 8 < 0$
 d) $-x^2 - x + 6 \leq 0$ e) $-x^2 - 7x - 10 \geq 0$ f) $-x^2 - x + 12 \leq 0$
 g) $-x^2 - 2x + 15 > 0$ h) $-x^2 - x + 30 \leq 0$ i) $-x^2 - x + 42 < 0$

Ejercicios Avanzados

EA6. Resuelva la inecuación de primer grado $3x - 7 \leq 2x - 6 \leq 4x + 4$

Nota: $A < B < C \implies A < B$ y $B < C$

EA7. Resuelva el siguiente sistema de inecuaciones de primer grado:

$$\begin{cases} x + 2 < 3x - 8 \\ 2(x + 6) \leq 7x - 3 \end{cases}$$

EA8. Resuelva la inecuación con valor absoluto $|2x - 3| < x$

EA9. Resuelva el sistema de inecuaciones de segundo grado.

$$\begin{cases} x^2 + 6x + 8 > 0 \\ x^2 + 2x - 3 \leq 0 \end{cases}$$

Unidad 3: Fracciones Algebraicas

Sección 1: Simplificación, multiplicación y división de fracciones algebraicas

$$\checkmark \quad \frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$$

$$\checkmark \quad \frac{A}{B} \div \frac{C}{D} \cdot \frac{E}{F} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} \cdot \frac{E}{F} = \frac{ADE}{BCF}$$

Ejercicios

33. (P. 40) Simplifique las siguientes fracciones:

a) $\frac{15}{10}$

b) $\frac{6}{18}$

c) $\frac{16}{12}$

d) $\frac{48}{32}$

e) $\frac{x^4}{x^5}$

f) $\frac{x^2}{x^4}$

g) $\frac{x^2 y^3}{x^3 y^2}$

h) $\frac{m^5}{m^3}$

i) $\frac{p^3 q^3}{p^3 q^2}$

j) $\frac{m^2 n^2}{m^3 n^4}$

k) $\frac{p^2 q^3 r^2}{p^3 q^2 r^3}$

l) $\frac{x^2 y^3 z^3}{x^3 y^3 z^2}$

34. (P. 41) Simplifique las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{2x^4 y^3}{6x^2 y^2}$

b) $\frac{8x^2 y^3}{4x^3 y^2}$

c) $\frac{15x^3 y^3}{30x^2 y^2}$

d) $\frac{12m^3 n}{6m^2 n^2}$

e) $\frac{5a^5 b^3}{20a^2 b^3}$

f) $\frac{18x^3 y^2}{6x^2 y^2}$

g) $\frac{10m^5 n^3}{6m^2 n^4}$

h) $\frac{15a^4 b^3}{10a^4 b^2}$

i) $\frac{12x^3 y^3 z^3}{48x^2 y^2 z^2}$

j) $\frac{100a^4 b^4}{25a^2 b^2}$

k) $\frac{81x^2 y^3 z^2}{27x^2 y^2 z^3}$

l) $\frac{36a^2 b^3 c^3}{6a^2 b^2 c^4}$

35. (P. 42) Factorice los siguientes polinomios:

a) $10x + 5$

b) $12x + 3$

c) $8x + 4$

d) $x^2 + 5x$

e) $x^2 - 3x$

f) $3x^2 - 6x$

g) $x^2 - 4$

h) $x^2 - 16$

i) $x^2 - 3x + 2$

j) $x^2 - x - 12$

k) $x^2 - x - 30$

l) $x^2 + 12x + 36$

36. (P. 43) Simplifique las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{x+1}{x^2-1}$

b) $\frac{x-4}{x^2-16}$

c) $\frac{x-5}{x^2-25}$

d) $\frac{x-1}{x^2+x-2}$

e) $\frac{x+3}{x^2+4x+3}$

f) $\frac{x-2}{x^2-x-2}$

g) $\frac{2x+4}{x^2-4}$

h) $\frac{3x+6}{x^2+x-2}$

i) $\frac{4x-8}{x-2}$

j) $\frac{x^2+2x}{x^2+3x+2}$

k) $\frac{x^2-25}{x^2+x-30}$

l) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}$

m) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-x-2}$

n) $\frac{a^2-a-42}{a^2-49}$

37. (P. 44) Efectúe los siguientes productos:

- a) $\frac{x^2}{8y^3} \cdot \frac{4y^2}{x}$ b) $\frac{x^3}{4y^3} \cdot \frac{2y^2}{x}$ c) $\frac{3x^4}{10} \cdot \frac{5y^2}{9x}$
 d) $\frac{x^2+3x}{x-2} \cdot \frac{x-2}{x+3}$ e) $\frac{x^2+2x}{x-3} \cdot \frac{x-3}{x+2}$ f) $\frac{x^2+4x}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x+4}$
 g) $\frac{x^2+3x+2}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x+2}$ h) $\frac{x^2+5x+4}{x^2-4} \cdot \frac{x-2}{x+1}$
 i) $\frac{x^2-x-2}{x-2} \cdot \frac{x^2-2x}{x+1}$

38. (P. 45) Efectúe las siguientes divisiones:

- a) $\frac{2x^2}{3y} \div \frac{4x}{3y^2}$ b) $\frac{12x^3}{5y^2} \div \frac{3x}{10y^2}$ c) $\frac{2x^2}{3y} \div \frac{x^3}{6y}$
 d) $\frac{x^2-1}{x-3} \div \frac{x+1}{x-3}$ e) $\frac{x^2-4}{x-2} \div \frac{x+2}{x-3}$ f) $\frac{x^2-9}{x+3} \div \frac{x-3}{x+3}$
 g) $\frac{x^2-y^2}{x-y} \div \frac{x+y}{x-y}$ h) $\frac{m^2-n^2}{mn-n} \div \frac{m+n}{m-1}$

39. (P. 46) Efectúe las siguientes operaciones:

- a) $\frac{x^2}{3y} \cdot \frac{2x^2}{y} \div \frac{2x^3}{9y}$ b) $\frac{x^3}{3y} \cdot \frac{5x}{y^3} \div \frac{10x^4}{9y^4}$
 c) $\frac{4x^2}{5y} \div \frac{2x^4}{10y^3} \cdot \frac{x^3}{2y}$ d) $\frac{2x^2}{3y} \cdot \frac{4x^2}{y} \div \frac{8x^3}{9y^2}$
 e) $\frac{x+2}{x-2} \div \frac{x^2+3x+2}{x-2} \cdot \frac{x+1}{x+3}$ f) $\frac{x-2}{x+1} \div \frac{x^2-3x+2}{x-2} \cdot \frac{x+1}{x-2}$
 g) $\frac{x^2-4}{x+3} \div \frac{x-2}{x^2+x-2} \cdot \frac{x+3}{x+2}$ h) $\frac{x+1}{x^2+4x+3} \cdot \frac{x^2+3x+2}{x-2} \div \frac{x+1}{x+3}$

Sección 2: Adición y sustracción de fracciones algebraicas

$$\checkmark \quad \frac{A}{B} + \frac{C}{B} = \frac{A+C}{B}, \quad \frac{A}{B} - \frac{C}{B} = \frac{A-C}{B}$$

Ejercicios

40. (P. 48) Efectúe las siguientes sumas:

- a) $\frac{3}{x} + \frac{2}{x}$ b) $\frac{4}{x} + \frac{3}{x}$ c) $\frac{5}{a} + \frac{2}{a}$
 d) $\frac{2x}{x+1} + \frac{2}{x+1}$ e) $\frac{2x}{x+2} + \frac{4}{x+2}$ f) $\frac{2a-5}{a-1} + \frac{a+2}{a-1}$
 g) $\frac{x+1}{x+3} + \frac{x+2}{x+3}$ h) $\frac{x-2}{x-1} + \frac{3}{x-1}$ i) $\frac{2}{x+4} + \frac{x+2}{x+4}$

41. (P. 49) Efectúe las siguientes sustracciones:

- a) $\frac{3}{b} - \frac{2}{b}$ b) $\frac{5}{a} - \frac{2}{a}$ c) $\frac{3}{2b} - \frac{1}{2b}$
 d) $\frac{2x}{x-1} - \frac{2}{x-1}$ e) $\frac{2x+6}{x+2} - \frac{2}{x+2}$ f) $\frac{2x+4}{x+1} - \frac{2}{x+1}$
 g) $\frac{2x+1}{x-2} - \frac{x+3}{x-2}$ h) $\frac{2x-1}{3x-2} - \frac{1-x}{3x-2}$ i) $\frac{2x-1}{3-x} - \frac{3x-4}{3-x}$

42. (P. 50) Encuentre el *m.c.m.* de las siguientes parejas de números:

- a) 12 y 18 b) 10 y 12 c) 8 y 16
 d) 9 y 12 e) 20 y 25 f) 12 y 36
 g) 12, 8 y 24 h) 6, 15 y 18 i) 5, 10 y 25

43. (P. 51) Efectúe las siguientes operaciones:

- a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{5}$ b) $\frac{3}{2} + \frac{1}{5}$ c) $\frac{7}{4} + \frac{1}{5}$
 d) $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{3}{6}$ e) $\frac{3}{2} + \frac{1}{5} + \frac{5}{3}$ f) $\frac{2}{5} + \frac{1}{4} + \frac{5}{2}$
 g) $\frac{5}{6} - \frac{1}{2}$ h) $\frac{7}{4} - \frac{3}{2}$ i) $\frac{3}{10} - \frac{2}{15}$
 j) $\frac{5}{4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{6}$ k) $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9}$ l) $\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{5}$

44. (P. 52) Determine el *m.c.m.* de las siguientes expresiones algebraicas:

- a) $2ab^2$, $3a^2$ b) $10a^2b^2$, $5a^2$ c) $6x^3y$, $9xy^2$
 d) $18x^2y^2$, $9xy^3$ e) $10x^3yz$, $25x^2y^2z$ f) $2x^3y^3$, $6xy$, $9x^2y$
 g) $a^2 - 9$, $a^2 - 6a + 9$ h) $a^2 - 1$, $a^2 - a - 2$ i) $a^2 - a$, $a^2 - 3a + 2$
 j) $x^2 - 25$, $x^2 - x - 30$ k) $2a - 4$, $a^2 - 4a + 4$ l) $6x - 3$, $12x - 6$

45. (P. 53) Efectúe las siguientes operaciones:

- a) $\frac{2}{3x^2} + \frac{3}{2x}$ b) $\frac{3}{4x} + \frac{3}{2x^2}$ c) $\frac{4y}{3x^2} + \frac{x}{2y}$
 d) $\frac{2}{3ab} + \frac{b}{6a^2}$ e) $\frac{4}{3a^2b} + \frac{3}{2ab}$ f) $\frac{5}{3mn} + \frac{2n}{6m^2} + \frac{5}{n}$
 g) $\frac{4}{x} - \frac{5}{2x}$ h) $\frac{4}{3x} - \frac{2}{9x}$ i) $\frac{5}{6x^2} - \frac{5}{2x}$
 j) $\frac{5}{2x} - \frac{4}{5x^2}$ k) $\frac{5}{2x} - \frac{4}{5x^2} - \frac{x}{15}$ l) $\frac{5}{3x^2} - \frac{4}{5x} - \frac{1}{3}$

46. (P. 54) Efectúe las siguientes sumas:

- a) $\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+1}$ b) $\frac{4}{x+2} + \frac{2}{x-2}$
 c) $\frac{3}{x-1} + \frac{3}{x+2}$ d) $\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x+3}$
 e) $\frac{5x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1}$ f) $\frac{4x}{x^2-3x+2} + \frac{2}{x-1}$
 g) $\frac{2x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1}$ h) $\frac{2}{x+1} + \frac{2x}{x^2+4x+3}$
 i) $\frac{4}{x-1} + \frac{3x}{x^2-5x+4}$ j) $\frac{a}{a^2-a-12} + \frac{2}{a+3}$
 k) $\frac{3a}{a^2-a-6} + \frac{2}{a-3}$ l) $\frac{2}{a+2} + \frac{2a}{a^2+3a+2}$

47. (P. 55) Efectúe los siguientes sustracciones:

- a) $\frac{4}{x-1} - \frac{1}{x+1}$ b) $\frac{3}{x+2} - \frac{1}{x+1}$

c) $\frac{2}{x+2} - \frac{3}{x-3}$

d) $\frac{5}{x-3} - \frac{3}{x+1}$

e) $\frac{7}{x-1} - \frac{6}{x-3}$

f) $\frac{1}{x^2-4} - \frac{1}{x+2}$

g) $\frac{3}{x^2+7x+12} - \frac{2}{x+3}$

h) $\frac{4}{x+5} - \frac{4}{x^2-25}$

i) $\frac{4}{x^2-36} - \frac{1}{x+6}$

j) $\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x^2-4x+4}$

k) $\frac{6}{x-2} - \frac{2}{x^2-2x}$

l) $\frac{3}{x^2-5x+6} - \frac{1}{x-2}$

48. (P. 56) Efectúe las siguientes operaciones:

a) $\frac{1}{3x} + \frac{3}{2x} - \frac{1}{x}$

b) $\frac{1}{6a} + \frac{3}{12a} - \frac{1}{a}$

c) $\frac{5}{2x^2} + \frac{3}{8x} - \frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{3xy} - \frac{3}{2x^2} + \frac{1}{xy^2}$

e) $\frac{2x+3}{x^2-1} - \frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1}$

f) $\frac{2x+3}{x^2-4} - \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2}$

g) $\frac{a+3}{a^2+4a+3} + \frac{3}{a+1} - \frac{2a}{a+3}$

h) $\frac{m+1}{m+2} - \frac{m-2}{m^2-m-6} + \frac{2}{m-3}$

i) $\frac{3}{a+b} + \frac{3}{a-b} - \frac{3}{a^2-b^2}$

j) $\frac{2}{n^2-n-2} + \frac{3}{n+1} - \frac{2n}{n-2}$

k) $\frac{1}{x-y} - \frac{3}{x^2-y^2} + \frac{2}{x+y}$

l) $\frac{p+3}{p-2} + \frac{3}{p-1} - \frac{p}{p^2-3p+2}$

Ejercicios Avanzados

EA10. Efectúe las siguientes operaciones:

a) $\frac{x+1}{x} - \frac{x+2}{x+1} - \frac{x+3}{x+2} + 1$

b) $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)}$

EA11. Al resolverla ecuación $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} = \frac{-2}{a^2-2a}$ el valor de a es:

Unidad 4: Ecuaciones de Tercer Grado

Sección 1: División sintética

- ✓ En la división de polinomios, el dividendo $P(x)$ es igual a la multiplicación del divisor $D(x)$ por el cociente $Q(x)$, más el residuo R , es decir $P(x)=D(x)Q(x)+R$

Ejercicios

49. (P. 60) Efectúe las siguientes divisiones. En cada caso escriba el dividendo D en la forma $D=dc+r$, siendo d , c y r divisor, cociente y residuo, respectivamente.
- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| a) $D=87$ entre $d=7$ | b) $D=80$ entre $d=3$ |
| c) $D=67$ entre $d=9$ | d) $D=70$ entre $d=11$ |
| e) $D=90$ entre $d=13$ | f) $D=143$ entre $d=17$ |
| g) $D=204$ entre $d=21$ | h) $D=153$ entre $d=5$ |
| i) $D=248$ entre $d=23$ | |
50. (P. 61) Efectúe las siguientes divisiones:
- | | |
|-----------------------------|----------------------------|
| a) x^2+3x+2 entre $x+3$ | b) x^2+6x+8 entre $x+2$ |
| c) x^2-x-6 entre $x+2$ | d) $3x^2-4x-5$ entre $x-4$ |
| e) $2x^2-12x-1$ entre $x-2$ | f) x^2-x-39 entre $x+5$ |
51. (P. 62) Encuentre en cada inciso el cociente y el residuo aplicando división sintética:
- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| a) $x^2+7x+12$ entre $x-4$ | b) x^2+4x+5 entre $x+3$ |
| c) $x^2-3x-12$ entre $x-4$ | d) $2x^2+6x-10$ entre $x+1$ |
| e) $2x^2+9x+20$ entre $x-6$ | f) $4x^2+9x+26$ entre $x-2$ |
52. (P. 63) Encuentre en cada inciso el cociente y el residuo aplicando división sintética:
- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| a) $2x^3+9x^2+7x+6$ entre $x+1$ | b) $2x^3-6x^2-x+8$ entre $x+3$ |
| c) $3x^3-6x^2+3x+8$ entre $x-2$ | d) $3x^3+12x^2-x+9$ entre $x+4$ |
| e) $4x^3-9x^2-9x$ entre $x-3$ | f) $2x^3+11x^2+6$ entre $x-2$ |
53. (P. 64) Use división sintética para expresar cada dividendo en la forma $P(x)=D(x)Q(x)+R$, siendo $Q(x)$ y R cocientes y residuos respectivos:
- | | |
|----------------------------|------------|
| a) $P(x)=x^3+2x^2-x+1$, | $D(x)=x-2$ |
| b) $P(x)=2x^3+4x^2-x+10$, | $D(x)=x+2$ |
| c) $P(x)=3x^3-8x^2-5x$, | $D(x)=x-3$ |
| d) $P(x)=x^3+5x^2+x+20$, | $D(x)=x+5$ |

Sección 2: Teorema del residuo y teorema del factor

- ✓ Teorema del residuo

El residuo de la división de un polinomio $P(x)$ entre un binomio de primer grado $x-c$ es el valor numérico $P(c)$

- ✓ Teorema del factor

Un polinomio $P(x)$ tiene un factor de primer grado $x-c \iff P(c)=0$

Ejercicios

54. (P. 66) Calcule los valores numéricos pedidos para cada polinomio:
- $P(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1$, $P(2)$, $P(-1)$
 - $P(x) = x^3 + 2x^2 + 5$, $P(1)$, $P(-2)$
 - $P(x) = 2x^3 - 2x^2 + x - 4$, $P(1)$, $P(3)$
 - $P(x) = 3x^3 + x^2 - 3x + 10$, $P(-1)$, $P(-2)$
 - $P(x) = (x+3)(x+4) + 3$, $P(1)$, $P(-1)$
 - $P(x) = (x-3)(x-7) - 2$, $P(2)$, $P(4)$
55. (P. 67) Encuentre el residuo de cada división, empleando el teorema del residuo:
- $P(x) = x^3 + 3x^2 + x + 5$ entre $x-2$
 - $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 20$ entre $x+2$
 - $P(x) = x^3 - x^2 - 8x$ entre $x+2$
 - $P(x) = 2x^3 + 4x^2 - x$ entre $x+3$
 - $P(x) = 3x^3 - 12x^2 - x + 9$ entre $x-4$
 - $P(x) = 4x^3 + 2x^2 + x + 10$ entre $x+4$
56. (P. 68) Determine si $x-2$ y $x+3$ son factores $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$ utilizando el teorema del factor.
57. (P. 68) Determine si $x-3$ y $x+1$ son factores $P(x) = x^3 - 7x - 6$ utilizando el teorema del factor.

Sección 3: Factorización de polinomios de tercer grado y resolución de ecuaciones de tercer grado

- ✓ Si A y B son expresiones algebraicas con $AB=0$, entonces $A=0$ o $B=0$.

Si A, B y C son expresiones algebraicas con $ABC=0$, entonces $A=0$, $B=0$ o $C=0$.

- ✓ La fórmula general para resolver la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$ es

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

58. (P. 70) Factorice los siguientes polinomios:

- a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$ b) $x^3 - 3x^2 - x + 3$
 c) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ d) $x^3 - 2x^2 - 13x - 10$
 e) $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$

59. (P. 71) Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando factorización:

- a) $x^2 - x - 2 = 0$ b) $x^2 + 4x + 3 = 0$ c) $x^2 + 7x + 6 = 0$
 d) $x^2 + 6x + 8 = 0$ e) $x^2 - x - 12 = 0$ f) $x^2 - x - 30 = 0$

60. (P. 71) Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando la fórmula general:

- a) $x^2 + 3x - 1 = 0$ b) $x^2 + 4x + 2 = 0$ c) $x^2 - 5x - 5 = 0$
 d) $2x^2 + x - 2 = 0$ e) $3x^2 + 4x - 4 = 0$ f) $4x^2 + 18x - 10 = 0$

61. (P. 72) Resuelva las siguientes ecuaciones de tercer grado:

- a) $x(x - 2)(x + 1) = 0$ b) $x(x - 4)(x + 1) = 0$
 c) $x(3x - 2)(x - 1) = 0$ d) $x(4x - 1)(x + 4) = 0$
 e) $x^3 + x^2 - 2x = 0$ f) $x^3 - 3x^2 - 18x = 0$

62. (P. 73) Resuelva las siguientes ecuaciones de tercer grado:

- a) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ b) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
 c) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$ d) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$

63. (P. 74) Resuelva las siguientes ecuaciones de tercer grado:

- a) $x(x^2 + x - 1) = 0$ b) $x(x^2 - 6x + 2) = 0$
 c) $x^3 + 6x^2 + 2x - 3 = 0$ d) $x^3 - x^2 - 7x - 2 = 0$

Ejercicios Avanzados

EA12. Si $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 5$ y $P(c) = 5$, calcule el valor de c .

EA13. Resuelva la ecuación de tercer grado $3x^3 - 1 + (x + 1)^3 = 2x^3 + 8$

EA14. Resuelva el sistema de ecuaciones para $x, y \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 7 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

EA15. Al dividir $x^3 + (4 + k)x^2 - 4kx + 8$ por $x + 1$ el residuo es 1.

Hallar el valor de k .

Unidad 5: Introducción a la Trigonometría

Sección 1: Funciones trigonométricas de ángulos agudos en triángulos rectángulos

Teorema de Pitágoras

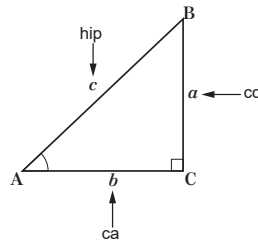
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Funciones trigonométricas

$$\text{sen } A = \frac{\text{co}}{\text{hip}}$$

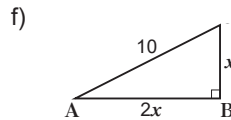
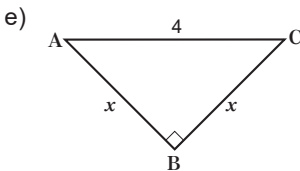
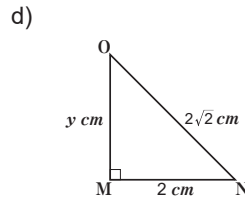
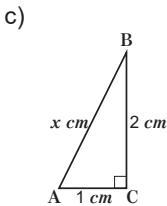
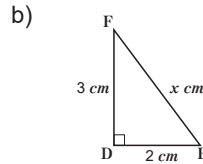
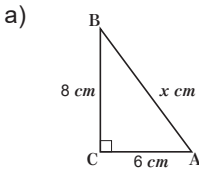
$$\text{cos } A = \frac{\text{ca}}{\text{hip}}$$

$$\text{tan } A = \frac{\text{co}}{\text{ca}}$$



Ejercicios

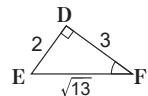
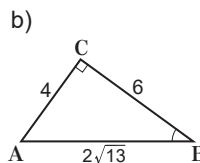
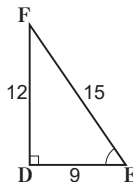
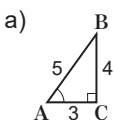
64. (P.78) Encuentre la longitud del lado desconocido en los siguientes triángulos rectángulos:



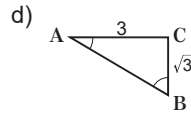
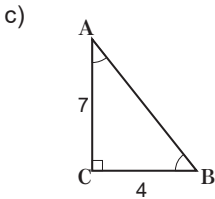
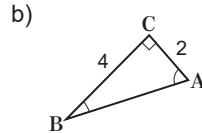
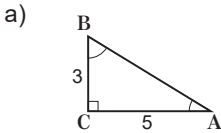
65. (P.79) Dados las siguientes parejas de triángulos, encuentre las razones

$$\frac{\text{co}}{\text{hip}}, \quad \frac{\text{ca}}{\text{hip}}, \quad \frac{\text{co}}{\text{ca}}$$

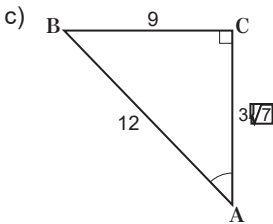
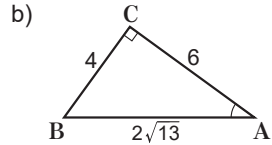
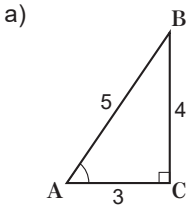
respecto al ángulo marcado y compare los valores obtenidos.



66. (P.80) Dados los siguientes triángulos, encuentre $\tan A$ y $\tan B$.



67. (P.81) Dados los triángulos rectángulos siguientes, encuentre $\sin A$, $\cos A$ y $\tan A$.



68. (P.82) Resuelva los siguientes ejercicios:

a) Si A es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo y $\sin A = \frac{3}{5}$, calcule los valores de $\cos A$ y $\tan A$.

b) Si A es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo y $\cos A = \frac{2}{3}$, calcule los valores de $\sin A$ y $\tan A$.

c) Si A es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo y $\tan A = \frac{1}{2}$, calcule los valores de $\sin A$ y $\cos A$.

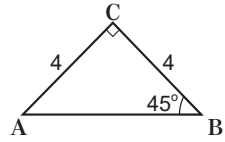
d) Si A es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo y $\tan A = \sqrt{2}$, calcule los valores de $\sin A$ y $\cos A$.

Sección 2: Valores de las funciones trigonométricas de ángulos agudos

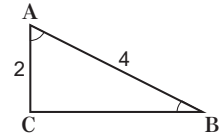
	$\sphericalangle A = 30^\circ$	$\sphericalangle A = 45^\circ$	$\sphericalangle A = 60^\circ$
sen A	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos A	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan A	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

Ejercicios

69. (P.84) Dado el triángulo de la derecha, calcule sen 45° , cos 45° y tan 45° .



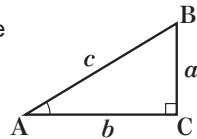
70. (P.85) Dado el triángulo de la derecha, calcule:
- sen A
 - $\sphericalangle A$ a partir de la tabla dada arriba
 - $\sphericalangle B$
 - sen B , cos B y tan B



Sección 3: Resolución de triángulos rectángulos

✓ Dado el triángulo rectángulo de la derecha, se cumple que:

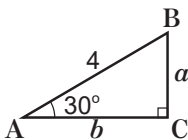
$$a = c \operatorname{sen} A, \quad b = c \operatorname{cos} A, \quad a = b \operatorname{tan} A$$



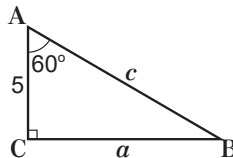
Ejercicios

71. (P.86) Calcule la longitud de los lados desconocidos de los siguientes triángulos rectángulos:

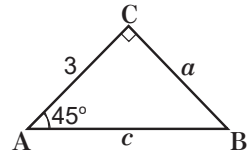
a)



b)

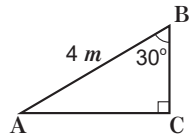


c)



72. (P.87) Resuelva el siguiente problema:
 Uno de los extremos de una escalera se apoya sobre el borde superior de una pared formando ambas un ángulo de 30° . Si la longitud de la escalera es 4 m ,

- ¿Cuál es la altura de la pared?
- ¿Cuál es la distancia entre el pie de la escalera y la pared?

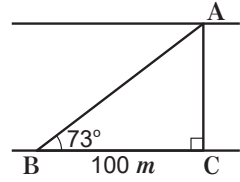


73. (P.88) Encuentre en la tabla trigonométrica (P. 94 del LT) el valor de A en cada uno de los siguientes casos:

- a) $\text{sen } A = 0,2924$ b) $\text{cos } A = 0,9397$ c) $\text{tan } A = 0,3443$

74. (P.89) Resuelva la siguiente situación:

Al hacer mediciones para la construcción de una nueva carretera, un ingeniero colocó dos postes, A y C , en lados opuestos de un río para marcar las posiciones de los lindes de un puente. Entonces, desde un punto B , a 100m de C y tal que $\overline{BC} \perp \overline{AC}$, midió el $\angle ABC$. Si $\angle ABC = 73^\circ$, ¿cuál es la distancia a través del río desde A hasta C ?



Sección 4: Relaciones entre seno y coseno

Dado cualquier triángulo rectángulo ABC con un ángulo agudo A , se cumple que:

$$\text{sen } A = \text{cos}(90^\circ - A), \quad \text{cos } A = \text{sen}(90^\circ - A)$$

Ejercicios

75. (P.90) Complete los espacios en blanco.

- a) $\text{sen } 36^\circ = \text{cos } \underline{\hspace{2cm}}$ b) $\text{cos } 51^\circ = \text{sen } \underline{\hspace{2cm}}$
 c) $\text{sen } \underline{\hspace{2cm}} = \text{cos } 63^\circ$ d) $\text{cos } \underline{\hspace{2cm}} = \text{sen } 22^\circ$

76. (P.91) Complete los espacios en blanco.

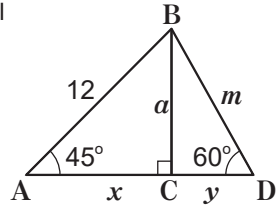
- a) $\text{tan } 15^\circ = \frac{\text{sen } \underline{\hspace{1cm}}}{\text{cos } \underline{\hspace{1cm}}}$ b) $\text{tan } \underline{\hspace{1cm}} \text{cos } 30^\circ = \text{sen } 30^\circ$
 c) $\text{sen}^2 60^\circ + \text{cos}^2 60^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$ d) $\text{sen}^2 \underline{\hspace{1cm}} + \text{cos}^2 75^\circ = 1$
 e) $\text{sen}^2 50^\circ = 1 - \text{cos}^2 \underline{\hspace{2cm}}$

77. (P.92) Resuelva los siguientes ejercicios:

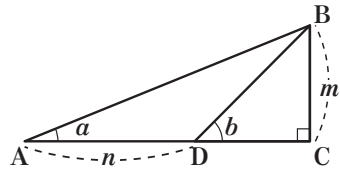
- a) Si $0^\circ < A < 90^\circ$ y $\text{sen } A = \frac{3}{5}$. Calcule $\text{cos } A$ y $\text{tan } A$.
 b) Si $0^\circ < A < 90^\circ$ y $\text{cos } A = \frac{1}{4}$. Calcule $\text{sen } A$ y $\text{tan } A$.
 c) Si $0^\circ < A < 90^\circ$ y $\text{sen } A = \frac{12}{13}$. Calcule $\text{sen } A$ y $\text{tan } A$.
 d) Si $0^\circ < A < 90^\circ$ y $\text{cos } A = \frac{1}{3}$. Calcule $\text{sen } A$ y $\text{tan } A$.

Ejercicios Avanzados

EA16. Calcule el valor de a , x , m y y a partir del triángulo de la derecha.



EA17. A partir del triángulo de la derecha, exprese la longitud m en función de $\tan a$, $\tan b$ y n .



EA18. Simplifique las siguientes expresiones:

a) $\sin(90^\circ - A)\cos A + \cos(90^\circ - A)\sin A$

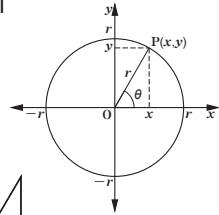
b) $(\sin A + \cos A)^2 + (\sin A - \cos A)^2$

Unidad 6: Funciones Trigonómicas

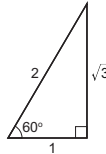
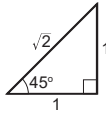
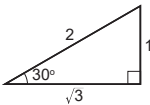
Sección 1: Funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera

- ✓ Para un ángulo cualquiera θ con lado terminal \vec{OP} , con $P(x,y)$ y $OP = r$, se tiene que

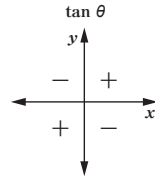
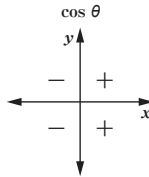
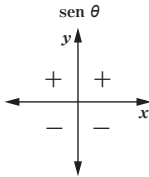
$$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}, \quad \text{cos } \theta = \frac{x}{r} \quad \text{y} \quad \text{tan } \theta = \frac{y}{x}.$$



- ✓ Triángulos especiales



- ✓ Signos de las funciones trigonométricas



Ejercicios

78. (P.96) Tace el lado terminal \vec{OP} de un ángulo con medida:
- a) 60° b) 225° c) -150°
 d) -330° e) 450° f) -765°
79. (P.97) Trace el lado terminal \vec{OP} para el ángulo θ y exprese los valores de $\text{sen } \theta$, $\text{cos } \theta$ y $\text{tan } \theta$ considerando:
- a) $P(1, 1)$ y $r = \sqrt{2}$ b) $P(-\sqrt{3}, 1)$ y $r = 2$
 c) $P(-1, -1)$ y $r = \sqrt{2}$ d) $P(1, -\sqrt{3})$ y $r = 2$
 e) $P(1, -1)$ y $r = \sqrt{2}$ f) $P(-1, -\sqrt{3})$ y $r = 2$
80. (P.98) Determine los valores $\text{sen } \theta$, $\text{cos } \theta$ y $\text{tan } \theta$ para los siguientes valores de:
- a) $\theta = 150^\circ$ b) $\theta = 225^\circ$
 c) $\theta = 330^\circ$ d) $\theta = -150^\circ$
 e) $\theta = -675^\circ$ f) $\theta = -1020^\circ$
81. (P.99) Determine el cuadrante en el que se ubica el lado terminal de θ , si:
- a) $\text{sen } \theta > 0$ y $\text{tan } \theta > 0$ b) $\text{cos } \theta > 0$ y $\text{tan } \theta < 0$
 c) $\text{sen } \theta < 0$ y $\text{cos } \theta < 0$ d) $\text{tan } \theta > 0$ y $\text{sen } \theta < 0$
 e) $\text{sen } \theta > 0$, $\text{cos } \theta < 0$ y $\text{tan } \theta < 0$

82. (P.100) Determine los valores $\text{sen } \theta$, $\text{cos } \theta$ y $\text{tan } \theta$ para los ángulos 180° , 450° y -270° .
83. (P.101) Si $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$, determine el valor o los valores de θ para los cuales:
- a) $\text{sen } \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\text{sen } \theta = 1$
 c) $\text{sen } \theta = 0$ d) $2 \text{sen } \theta - 1 = 0$
84. (P.102) Si $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$, determine el valor o los valores de θ para los cuales:
- a) $\text{cos } \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\text{cos } \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 c) $\sqrt{2} \text{cos } \theta = -1$ d) $2 \text{cos } \theta - 1 = 0$
85. (P.103) Si $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$, determine el valor o los valores de θ para los cuales:
- a) $\text{tan } \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\text{tan } \theta - 1 = 0$
 c) $\text{tan } \theta = 0$ d) $\sqrt{3} \text{tan } \theta + 1 = 0$

Sección 2: Relación entre seno, coseno y tangente

$$\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1, \quad \text{tan } \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta}, \quad \text{tan}^2 \theta + 1 = \frac{1}{\text{cos}^2 \theta}$$

Ejercicios

86. (P.105) Complete la siguiente demostración de la relación $\text{tan}^2 \theta + 1 = \frac{1}{\text{cos}^2 \theta}$.

Demostración

Como $\text{tan } \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta}$, entonces $\text{sen } \theta =$ _____.

Sustituyendo esta expresión en $\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$, se sigue que

$$(\text{tan } \theta \cdot \text{cos } \theta)^2 + \text{cos}^2 \theta = 1.$$

Desarrollando $(\text{tan } \theta \cdot \text{cos } \theta)^2$ se obtiene

$$(\text{tan } \theta)^2 (\text{cos } \theta)^2 + \text{cos}^2 \theta = 1.$$

Extrayendo factor común en el lado izquierdo resulta

$$\text{cos}^2 \theta (\text{tan}^2 \theta + 1) = 1$$

O lo que es lo mismo

$$\text{tan}^2 \theta + 1 = \frac{1}{\text{cos}^2 \theta}$$

87. (P. 106) Resuelva los siguientes ejercicios:
- a) Si el lado terminal del ángulo θ se encuentra en el II cuadrante y $\text{sen } \theta = \frac{1}{4}$. Determine $\text{cos } \theta$ y $\text{tan } \theta$.
- b) Si el lado terminal del ángulo θ se encuentra en el III cuadrante y $\text{cos } \theta = -\frac{1}{3}$. Determine $\text{sen } \theta$ y $\text{tan } \theta$.

Sección 4: Gráficas de las funciones trigonométricas

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} , \quad 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

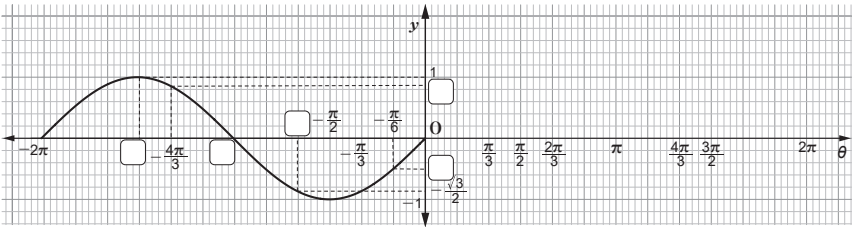
Ejercicios

92. (P. 115) Convierta las siguientes medidas de grados a radianes o viceversa:

- a) 75° b) 140° c) 250° d) -330°
 e) $\frac{\pi}{9}$ f) $\frac{2\pi}{3}$ g) $\frac{7\pi}{5}$ h) $-\frac{5\pi}{3}$

93. (P. 116)

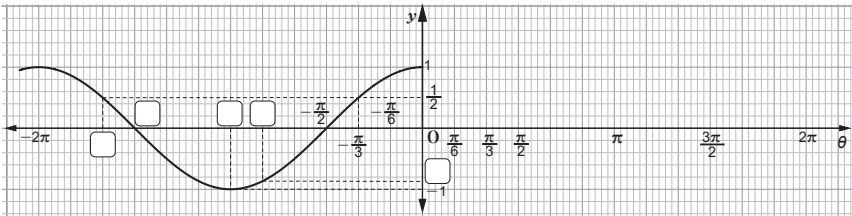
a) Indique los valores correspondientes a los espacios en blanco en el trozo de la gráfica $y = \text{sen } \theta$ para $-2\pi \leq \theta \leq 0$ que se muestra a continuación.



b) Complete la gráfica de $y = \text{sen } \theta$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

94. (P. 117)

a) Indique los valores correspondientes a los espacios en blanco en el trozo de la gráfica $y = \text{cos } \theta$ para $-2\pi \leq \theta \leq 0$ que se muestra a continuación.



b) Complete la gráfica de $y = \text{cos } \theta$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

95. (P. 118) Trace la gráfica de:

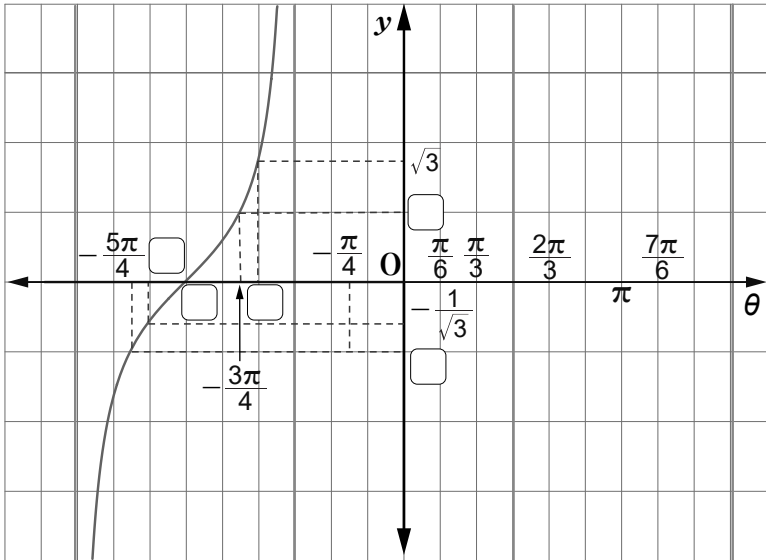
- a) $y = 4 \text{ sen } \theta$ b) $y = \frac{3}{2} \text{ sen } \theta$
 c) $y = 3 \text{ cos } \theta$ d) $y = \frac{1}{4} \text{ cos } \theta$

96. (P. 120) Trace la gráfica de:

- a) $y = \text{sen}(5\theta)$ b) $y = \text{sen}\left(\frac{1}{4}\theta\right)$
 c) $y = \text{cos}(4\theta)$ d) $y = \text{cos}\left(\frac{1}{5}\theta\right)$

97. (P. 122)

- a) Indique los valores correspondientes a los espacios en blanco en el trozo de la gráfica $y = \tan \theta$ para $-\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq -\frac{\pi}{2}$ que se muestra a continuación.



- b) Trace en la gráfica anterior los trozos de la función $y = \tan \theta$ para $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$.

Ejercicios Avanzados

EA19. Determine el cuadrante en el que se ubica el lado terminal de θ , si $\text{sen } \theta \cdot \text{cos } \theta < 0$.

EA20. Si $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$, determine el valor o los valores de θ para los cuales:

- a) $4 \text{sen}^2 \theta = 1$ b) $4 \text{sen}^2 \theta - 3 = 0$
 c) $\tan^2 \theta = 1$ d) $2 \text{cos}^2 \theta + 3 \text{cos } \theta - 2 = 0$

EA21. Verifique que:

- a) $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\text{sen } \theta \text{cos } \theta}$
 b) $(\text{sen } \theta + \text{cos } \theta)^2 + (\text{sen } \theta - \text{cos } \theta)^2 = 2$

EA22. Trace la gráfica de las siguientes funciones y determine sus principales propiedades:

- a) $y = \text{sen } \theta + 1$ b) $y = 2 \text{cos } \theta - 1$
 c) $y = 2 \text{sen} \left(\frac{1}{2} \theta \right)$ d) $y = -\text{sen } \theta$
 e) $y = \text{sen} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)$ f) $y = \tan \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)$

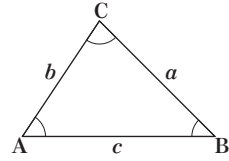
Unidad 7: Trigonometría Analítica

Sección 1: Ley del seno

Ley del seno

Dado el $\triangle ABC$, con ángulos interiores A , B y C y lados opuestos a cada ángulo a , b y c , respectivamente. Entonces

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}.$$

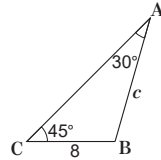
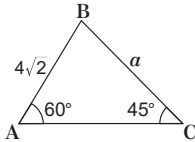


Ejercicios

98. (P.126) Dados los siguientes triángulos:

a) Determine la longitud a

b) Determine la longitud c



c) $\triangle ABC$ con $B = 60^\circ$, $C = 45^\circ$ y $c = 4$. Determine el valor de b .

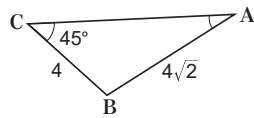
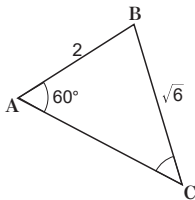
d) $\triangle ABC$ con $A = 30^\circ$, $C = 120^\circ$ y $a = 3$. Determine el valor de c .

e) $\triangle ABC$ con $A = 120^\circ$, $B = 15^\circ$ y $c = 4$. Determine el valor de a .

99. (P.127) Dados los siguientes triángulos:

a) Determine la medida del ángulo C

b) Determine la medida del ángulo A

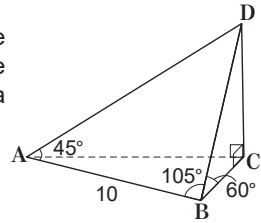


c) $\triangle ABC$ con $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$ y $\sphericalangle B = 120^\circ$. Determine la medida del ángulo A .

d) $\triangle ABC$ con $a = 8$, $c = 8\sqrt{3}$ y $\sphericalangle A = 30^\circ$. Determine la medida del ángulo C .

e) $\triangle ABC$ con $a = 6\sqrt{2}$, $b = 6$ y $\sphericalangle A = 135^\circ$. Determine la medida del ángulo B .

100. (P.128) Resuelva el siguiente problema
Julia dibuja en su cuaderno la siguiente pirámide con las medidas que se muestran en la figura. Determine la altura CD de la pirámide.



101. (P.129) Determine el área del $\triangle ABC$ con:

- a) $a = 3$, $c = 6$ y $\sphericalangle B = 60^\circ$ b) $b = 8$, $c = 2\sqrt{2}$ y $\sphericalangle A = 135^\circ$
 c) $a = 5$, $b = 8$ y $\sphericalangle C = 30^\circ$ d) $a = 6$, $c = 5$ y $\sphericalangle B = 150^\circ$

Sección 2: Ley del coseno

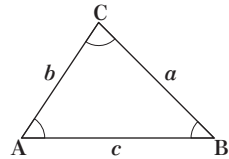
Ley del coseno

En un $\triangle ABC$, con ángulos interiores A , B y C y lados opuestos a cada ángulo a , b y c , respectivamente, se cumple que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

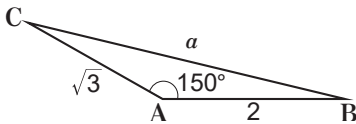
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



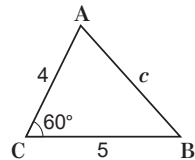
Ejercicios

102. (P.132) Dados los siguientes triángulos:

- a) Determine la longitud a



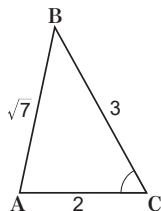
- b) Determine la longitud c



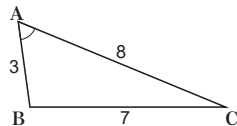
- c) $\triangle ABC$ con $a = 5$, $c = 3\sqrt{3}$ y $B = 30^\circ$. Determine el valor de b .
 d) $\triangle ABC$ con $a = 3$, $b = 2\sqrt{2}$ y $C = 45^\circ$. Determine el valor de c .
 e) $\triangle ABC$ con $a = 3$, $b = 5$ y $C = 120^\circ$. Determine el valor de c .

103. (P.133) Dados los siguientes triángulos:

- a) Determine la medida del ángulo C



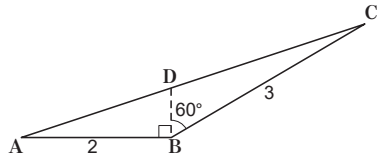
- b) Determine la medida del ángulo A



- c) $\triangle ABC$ con $a = \sqrt{7}$, $b = 1$ y $c = 2\sqrt{3}$. Determine la medida del ángulo A.
- d) $\triangle ABC$ con $a = 1$, $b = \sqrt{5}$ y $c = \sqrt{2}$. Determine la medida del ángulo B.
- e) $\triangle ABC$ con $a = 5$, $b = 12$ y $c = 13$. Determine la medida del ángulo C.

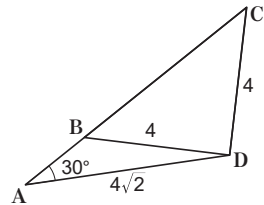
104. (P.134) Resuelva el siguiente problema

Un estudiante de décimo grado dibuja en su cuaderno un triángulo ABC con las medidas que muestra la figura de la derecha. Determine la longitud AC.

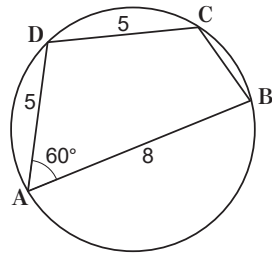


Ejercicios Avanzados

EA23. Dada la figura de la derecha con $A = 30^\circ$, $a = 4$ y $b = 4\sqrt{2}$. Determine $\sphericalangle ABD$ y $\sphericalangle CBD$.



EA24. Dado un cuadrilátero ABCD inscrito en una circunferencia con $AB = 8$, $CD = 5$, $DA = 5$ y $\sphericalangle BAD = 60^\circ$. Determine

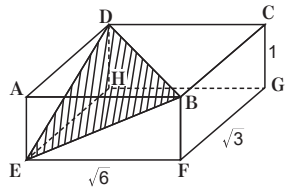


- a) La longitud de la diagonal \overline{BD} .
- b) La longitud BC.

Sugerencia: Recuerde que la suma de los ángulos opuestos de un cuadrilátero cíclico es 180° .

- c) El área del cuadrilátero.

EA25. A partir del prisma rectangular que se muestra en la figura de la derecha. Determine



- a) La medida del $\sphericalangle EDB$.
- b) El área del $\triangle EDB$.

EA26. Dado un $\triangle ABC$ inscrito en una circunferencia con $\sphericalangle A = 60^\circ$, $b = 5$ y $c = 8$. Determine

- a) La longitud a .
- b) El área del $\triangle ABC$.
- c) La medida del radio R de la circunferencia circunscrita.

Unidad 8: Estadística

Sección 1: Medidas de tendencia central y representación gráfica de datos

Ejercicios

105. (P.138) Dados los siguientes conjuntos de datos, encuentre la media aritmética, moda y mediana:

- a) 4, 7, 10, 8, 9, 9, 9 b) 9, 5, 10, 7, 5, 8, 5
 c) 9, 12, 12, 8, 12, 8, 10, 9 d) 13, 12, 16, 12, 16, 12, 10

106. (P.140)

- a) Dados los siguientes grupos de datos A: 2, 2, 2, 5, 3, 5, 2 y B: 3, 4, 4, 2, 2, 3, 3 encuentre la media, moda y mediana de cada grupo y compare los valores respectivos encontrados.
 b) En una clase se preguntó a dos grupos de 8 estudiantes cada uno, el total de horas semanales que dedican a ver videos educativos, obteniéndose los siguientes resultados:
 Grupo A: 4, 2, 3, 1, 3, 5, 2, 2 Grupo B: 1, 3, 5, 2, 4, 2, 5, 2
 Encuentre la media, moda y mediana de cada grupo y compare los resultados.

107. (P.141) A continuación, se muestra el registro de calificaciones en matemática de 25 estudiantes de décimo grado:

79	71	75	92	64
73	71	74	95	69
74	80	72	96	72
76	62	82	99	73
62	68	77	74	93

- a) Clasifique los datos en 4 grupos de diez en diez, inicie en 60 y termine en 100 y defina los intervalos.
 b) Organice los datos en una tabla.

108. (P.142) En el siguiente diagrama aparecen las edades de 30 mujeres atendidas en el centro de salud Pedro Altamirano, ubicadas en intervalos:

Diagrama de edades

				38
			32	37
			35	39
		31	34	36
23		29	33	36
21		30	34	38
20		28	32	37
22	27	31	35	39
20	25	29	33	37
20 - 24	24 - 28	28 - 32	32 - 36	36 - 40

- a) Calcule el ancho de cada clase.
 b) Complete la tabla de frecuencia.

Edades de 30 mujeres		
Edades	Número de mujeres (f_i)	Marca de clase (M_i)
20 - 24		
24 - 28		
28 - 32		
32 - 36		
36 - 40		
Total		

109. (P.144) En un salón de clases de décimo grado se preguntó a un grupo de 20 estudiantes, el total de horas semanales que dedican en casa al estudio de matemática, los resultados obtenidos se presentan en la siguiente tabla:

Horas semanales dedicadas al estudio de matemática	
Horas	Número de estudiantes (f_i)
0 - 2	6
2 - 4	4
4 - 6	5
6 - 8	3
8 - 10	2
Total	20

- a) Construya un histograma.
 b) Construya un polígono de frecuencias.
110. (P.146) Las edades de 20 niños atendidos en un día por un pediatra se presentan en la siguiente tabla:

Edades de 20 niños	
Edad	Número de niños (f_i)
0 - 3	10
3 - 6	6
6 - 9	3
9 - 12	1
Total	20

Encuentre la media aritmética, moda y mediana.

111. (P.148) El total de horas semanales que dedican en casa al estudio de matemática de 20 estudiantes de décimo grado A y B se presentan en la siguiente tabla:

Horas semanales dedicadas al estudio de matemática		
Horas	Número de estudiantes de la sección A (f_i)	Número de estudiantes de la sección B (f_j)
0 - 2	4	6
2 - 4	3	4
4 - 6	6	5
6 - 8	3	3
8 - 10	4	2
Total	20	20

- Encuentre la media aritmética, moda y mediana de la sección de clase A.
- Encuentre la media aritmética, moda y mediana de la sección de clase B.
- Construya un polígono de frecuencia y compare los resultados de a) y b).

Sección 2: Medidas de posición y dispersión

Ejercicios

112. (P.150)

- Dadas las estaturas de los jugadores de un equipo de baloncesto: 75, 71, 73, 76, 72, 70 y 74 pulgadas, encuentre Q_1 , Q_2 y Q_3 .
- El número de hijos pertenecientes a cada una de 11 familias que se registraron para natación es el siguiente: 1, 2, 1, 3, 2, 1, 5, 3, 2, 4 y 4. Encuentre Q_1 , Q_2 y Q_3 .

113. (P.151)

- A 13 estudiantes se les preguntó el número de horas que durmieron la noche anterior. Los datos resultantes fueron: 5, 6, 6, 8, 7, 7, 9, 4, 8, 6, 7, 8, 7. Encuentre Q_1 , Q_2 y Q_3 .
- El número de puntos anotados durante cada juego por un equipo de baloncesto la temporada pasada fue como sigue: 61, 71, 61, 68, 60, 66, 61 y 64. Encuentre Q_1 , Q_2 y Q_3 .

114. (P.152) Con los datos 6, 3, 8, 5, 3 y su media aritmética, $\bar{x} = 5$.

- Encuentre la varianza.
- Encuentre la desviación estándar.
- Encuentre la variabilidad con respecto a la media aritmética.

115. (P.152) Con los datos 1, 2, 3, 5, 5, 8 y su media aritmética, $\bar{x} = 4$.
- Encuentre la varianza.
 - Encuentre la desviación estándar.
 - Encuentre la variabilidad con respecto a la media aritmética.
116. (P.153) Se seleccionaron 5 estudiantes de cada una de las secciones A y B de décimo grado y se les preguntó por el número de horas que durmieron la noche anterior obteniendo como promedio general $\bar{x} = 7$. Los resultados individuales fueron:
- Sección A: 5, 8, 7, 9, 6 Sección B: 6, 10, 4, 7, 8
- Calcule el CV de cada sección.
 - ¿Cuál de los dos grupos tiene menor variación en el número de horas que duermen?
117. (P.153) De dos equipos de baloncesto se tienen las estaturas (en pulgadas) de sus jugadores y además, se conocen los siguientes datos:
- Equipo A: $\bar{x} = 72$ y $S = 3$ Equipo B: $\bar{x} = 64$ y $S = 4$
- Determine el equipo que presenta la menor variación entre las estaturas de sus jugadores.

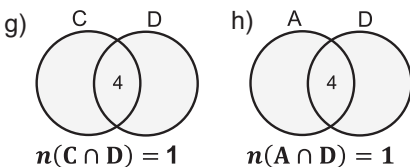
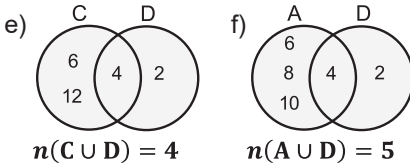
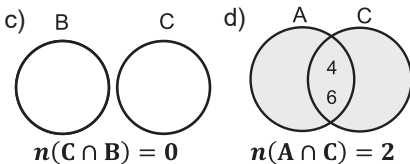
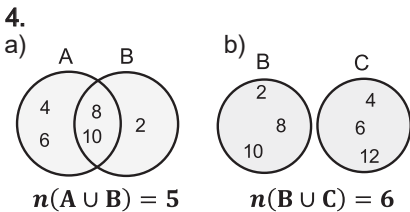
Unidad 1: Conjuntos e Intervalos Numéricos

Sección 1: Conjuntos

1.
 a) $4 \in A$ b) $10 \in A$ c) $1 \notin C$
 d) $8 \in B$ e) $8 \in A$ f) $2 \notin B$
 g) $5 \notin A$ h) $6 \notin B$

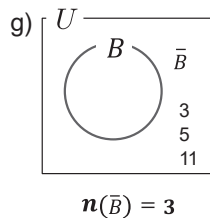
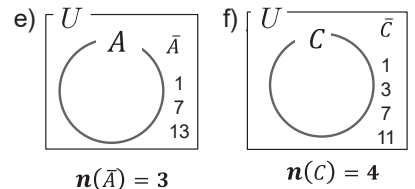
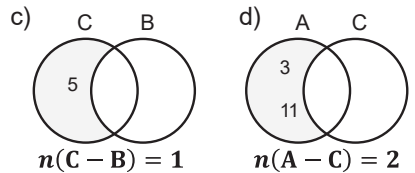
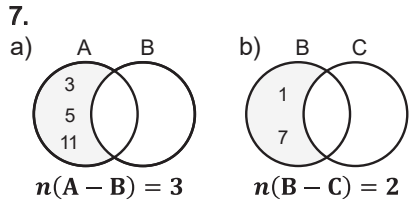
2.
 $n(A) = 5, \quad n(B) = 6, \quad n(C) = 1$

3.
 a) $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
 b) $B \cup C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
 c) $C \cap B = \emptyset$
 d) $A \cap C = \{4, 6\}$
 e) $C \cup D = \{2, 4, 6, 12\}$
 f) $A \cup D = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
 g) $C \cap D = \{4\}$
 h) $A \cap D = \{4\}$



5.
 a) $C \subset B$ b) $B \not\subset C$ c) $A = B$
 d) $B = A$ e) $C \not\subset D$ f) $D \not\subset C$
 g) $U \not\subset B$ h) $B \subset U$

6.
 a) $A - B = \{3, 5, 11\}$
 b) $B - C = \{1, 7\}$
 c) $C - B = \{5\}$
 d) $A - C = \{3, 11\}$
 e) $\bar{A} = \{1, 7, 13\}$
 f) $\bar{C} = \{1, 3, 7, 11\}$
 g) $\bar{B} = \{3, 5, 11\}$

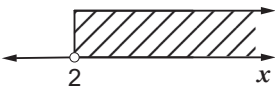
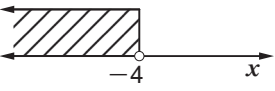
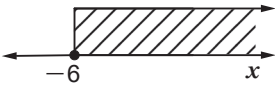
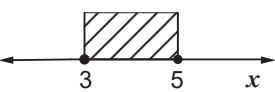
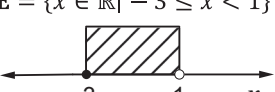
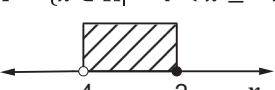


8.

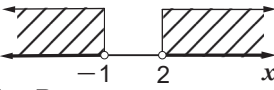
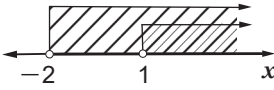
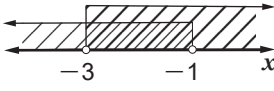
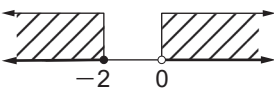
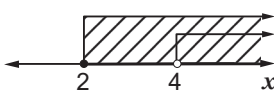
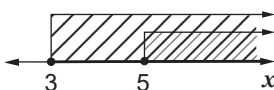
- a) $A = \{x \in \mathbb{N} | 1 < x \leq 5\}$
 Extensión: $A = \{2, 3, 4, 5\}$
- b) $B = \{x \in \mathbb{Z} | -5 < x < 2\}$
 Extensión: $B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1\}$
- c) $C = \{x \in \mathbb{Z} | 6 \leq x < 10\}$
 Extensión: $C = \{6, 7, 8, 9\}$
- d) $D = \{x \in \mathbb{N} | 7 \leq x \leq 12\}$
 Extensión: $D = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
- e) $E = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ primo}, 1 < x < 10\}$
 Extensión: $D = \{2, 3, 5, 7\}$
- f) $F = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ primo}, 20 < x \leq 40\}$
 Extensión: $E = \{23, 29, 31, 37\}$

Sección 2: Intervalos numéricos

9.

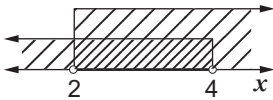
- a) $A = \{x \in \mathbb{R} | x > 2\}$

- b) $B = \{x \in \mathbb{R} | x < -4\}$

- c) $C = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -6\}$

- d) $D = \{x \in \mathbb{R} | 3 \leq x \leq 5\}$

- e) $E = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x < 1\}$

- f) $F = \{x \in \mathbb{R} | -4 < x \leq -2\}$


10.

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} | x > 2\}$,
 $B = \{x \in \mathbb{R} | x < -1\}$

 $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} | x < -1 \text{ o } x > 2\}$
- b) $C = \{x \in \mathbb{R} | x > -2\}$,
 $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$

 $C \cup D = \{x \in \mathbb{R} | x > -2\}$
- c) $E = \{x \in \mathbb{R} | x > -3\}$,
 $F = \{x \in \mathbb{R} | x < -1\}$

 $E \cup F = \mathbb{R}$
- d) $G = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -2\}$,
 $H = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$

 $G \cup H = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -2 \text{ o } x > 0\}$
- e) $A = \{x \in \mathbb{R} | x > 4\}$,
 $B = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 2\}$

 $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} | x > 4\}$
- f) $C = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 5\}$,
 $D = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 3\}$

 $C \cup D = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 5\}$

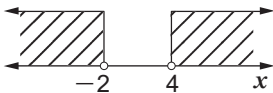
11.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} | x > 2\}$,
 $B = \{x \in \mathbb{R} | x < 4\}$



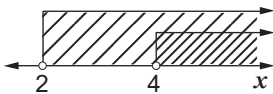
$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} | 2 < x < 4\}$

b) $C = \{x \in \mathbb{R} | x < -2\}$,
 $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 4\}$



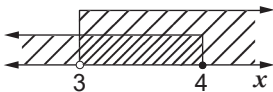
$C \cap D = \emptyset$

c) $E = \{x \in \mathbb{R} | x > 2\}$,
 $F = \{x \in \mathbb{R} | x > 4\}$



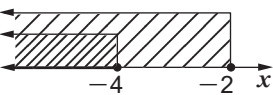
$E \cap F = \{x \in \mathbb{R} | x > 4\}$

d) $G = \{x \in \mathbb{R} | x > 3\}$,
 $H = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 4\}$



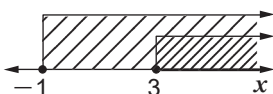
$G \cap H = \{x \in \mathbb{R} | 3 < x \leq 4\}$

e) $A = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -2\}$,
 $B = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -4\}$



$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -4\}$

f) $C = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -1\}$,
 $D = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 3\}$



$C \cap D = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 3\}$

Unidad 2: Inecuaciones de Primer y Segundo Grado

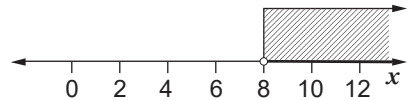
Sección 1: Inecuaciones de primer grado

12.

- a) $a + 5 > b + 5$ b) $3a > 3b$
 c) $\frac{a}{2} > \frac{b}{2}$ d) $a - 5 > b - 5$
 e) $5a > 5b$ f) $-3b > -3a$
 g) $\frac{b}{4} < \frac{a}{4}$ h) $a + 1 > b + 1$
 i) $\frac{b}{-4} > \frac{a}{-4}$

13.

a) $x - 3 > 5$
 $x > 5 + 3$
 $x > 8$



b) $x + 2 > 2$ c) $x - 1 \geq 2$
 $x > 2 - 2$ $x \geq 2 + 1$
 $x > 0$ $x \geq 3$

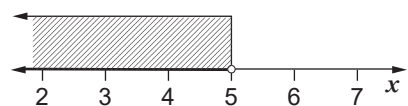
d) $x + 2 > 5$ e) $x - 4 > -1$
 $x > 5 - 2$ $x > -1 + 4$
 $x > 3$ $x > 3$

f) $x - 3 \geq -1$ g) $x - 5 > -7$
 $x \geq -1 + 3$ $x > -7 + 5$
 $x \geq 2$ $x > -2$

h) $x - 3 \geq -2$ i) $x - 3 \geq -5$
 $x \geq -2 + 3$ $x \geq -5 + 3$
 $x \geq 1$ $x \geq -2$

14.

a) $x - 3 < 2$
 $x < 2 + 3$
 $x < 5$



b) $x - 1 < -2$
 $x < -2 + 1$
 $x < -1$

d) $x + 1 < 2$
 $x < 2 - 1$
 $x < 1$

f) $x - 3 \leq -6$
 $x \leq -6 + 3$
 $x \leq -3$

h) $x - 4 < -3$
 $x < -3 + 4$
 $x < 1$

c) $x - 2 \leq -2$
 $x \leq -2 + 2$
 $x \leq 0$

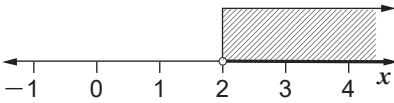
e) $x + 5 < 8$
 $x < 8 - 5$
 $x < 3$

g) $x + 3 \leq 8$
 $x \leq 8 - 3$
 $x \leq 5$

i) $x - 7 \leq -6$
 $x \leq -6 + 7$
 $x \leq 1$

15.

a) $2x > 4$
 $\frac{2}{2}x > \frac{4}{2}$
 $x > 2$



b) $4x < 4$
 $\frac{4}{4}x < \frac{4}{4}$
 $x < 1$

c) $2x \geq -4$
 $\frac{2}{2}x \geq \frac{-4}{2}$
 $x \geq -2$

d) $5x \leq 15$
 $\frac{5}{5}x \leq \frac{15}{5}$
 $x \leq 3$

e) $6x \leq 12$
 $\frac{6}{6}x \leq \frac{12}{6}$
 $x \leq 2$

f) $3x < 6$
 $\frac{3}{3}x < \frac{6}{3}$
 $x < 2$

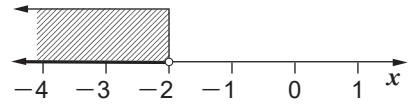
g) $4x > 8$
 $\frac{4}{4}x > \frac{8}{4}$
 $x > 2$

h) $12x < -24$
 $\frac{12}{12}x < \frac{-24}{12}$
 $x < -2$

i) $3x \geq -18$
 $\frac{3}{3}x \geq \frac{-18}{3}$
 $x \geq -6$

16.

a) $-2x > 4$
 $\frac{-2}{-2}x < \frac{4}{-2}$
 $x < -2$



b) $-2x > -6$
 $\frac{-2}{-2}x < \frac{-6}{-2}$
 $x < 3$

c) $-3x \geq 12$
 $\frac{-3}{-3}x \leq \frac{12}{-3}$
 $x \leq -4$

d) $-4x > -4$
 $\frac{-4}{-4}x < \frac{-4}{-4}$
 $x < 1$

e) $-5x < 10$
 $\frac{-5}{-5}x > \frac{10}{-5}$
 $x > -2$

f) $-x \leq 4$
 $\frac{-1}{-1}x \geq \frac{4}{-1}$
 $x \geq -4$

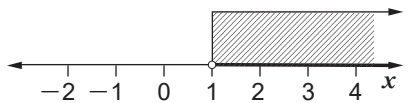
g) $-3x > 12$
 $\frac{-3}{-3}x < \frac{12}{-3}$
 $x < -4$

h) $-4x \leq 8$
 $\frac{-4}{-4}x \geq \frac{8}{-4}$
 $x \geq -2$

i) $-2x \geq 8$
 $\frac{-2}{-2}x \leq \frac{8}{-2}$
 $x \leq -4$

17.

a) $2x + 2 > 4$
 $2x > 4 - 2$
 $2x > 2$
 $x > 1$



b) $2x + 3 < 5$
 $2x < 5 - 3$
 $2x < 2$
 $x < 1$

c) $3x - 1 \geq 5$
 $3x \geq 5 + 1$
 $2x \geq 6$
 $x \geq 3$

Solucionarios

d) $4x - 2 \leq 6$

$$4x \leq 6 + 2$$

$$4x \leq 8$$

$$x \leq 2$$

f) $6x - 2 > 10$

$$6x > 10 + 2$$

$$6x > 12$$

$$x > 2$$

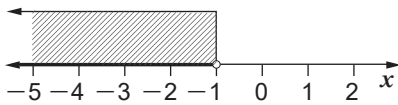
18.

a) $-2x + 2 > 4$

$$-2x > 4 - 2$$

$$-2x > 2$$

$$x < -1$$



b) $-2x + 1 < 3$

$$-2x < 3 + 1$$

$$-2x < 4$$

$$x > -2$$

d) $-4x + 2 \leq 6$

$$-4x \leq 6 - 2$$

$$-4x \leq 4$$

$$x \geq -1$$

f) $-4x - 6 \leq 2$

$$-4x \leq 2 + 6$$

$$-4x \leq 8$$

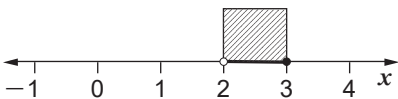
$$x \geq -2$$

19.

a) $4 < x + 2 \leq 5$

$$4 - 2 < x + 2 - 2 \leq 5 - 2$$

$$2 < x \leq 3$$



b) $-1 < x + 2 < 1$

$$-1 - 2 < x < 1 - 2$$

$$-3 < x < -1$$

c) $-6 \leq x - 3 \leq -2$

$$-6 + 3 \leq x \leq -2 + 3$$

$$-3 \leq x \leq 1$$

e) $5x - 3 < 7$

$$5x < 7 + 3$$

$$5x < 10$$

$$x < 2$$

d) $-6 \leq x - 5 < -4$

$$-6 + 5 \leq x < -4 + 5$$

$$-1 \leq x < 1$$

e) $-1 < x - 1 \leq 1$

$$-1 + 1 < x \leq 1 + 1$$

$$0 < x \leq 2$$

f) $-6 \leq x - 8 < -4$

$$-6 + 8 \leq x < -4 + 8$$

$$2 \leq x < 4$$

20.

a) $4 < -x + 2 \leq 5$

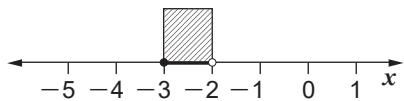
$$4 - 2 < -x \leq 5 - 2$$

$$2 < -x \leq 3$$

$$\frac{2}{-1} > \frac{-1x}{-1} \geq \frac{3}{-1}$$

$$-2 > x \geq -3, \text{ es decir}$$

$$-3 \leq x < -2$$



b) $-1 < -x + 2 < 1$

$$-1 - 2 < -x < 1 - 2$$

$$-3 < -x < -1$$

$$\frac{-3}{-1} > \frac{-1x}{-1} > \frac{-1}{-1}$$

$$3 > x > 1, \text{ es decir}$$

$$1 < x < 3$$

c) $-6 < -2x + 2 \leq -2$

$$-6 - 2 \leq -2x \leq -2 - 2$$

$$-8 \leq -2x \leq -4$$

$$\frac{-8}{-2} \geq \frac{-2x}{-2} \geq \frac{-4}{-2}$$

$$4 \geq x \geq 2$$

$$2 \leq x \leq 4, \text{ es decir}$$

d) $20 \geq -3x + 5 > -4$

$$20 - 5 \geq -3x > -4 - 5$$

$$15 \geq -3x > -9$$

$$\frac{15}{-3} \leq \frac{-3x}{-3} < \frac{-9}{-3}$$

$$-5 \leq x < 3$$

e) $2 \geq -3x - 1 \geq -1$

$$2 + 1 \geq -3x \geq -1 + 1$$

$$3 \geq -3x \geq 0$$

$$\frac{3}{-3} \leq \frac{-3x}{-3} \leq \frac{0}{-3}$$

$$-1 \leq x \leq 0$$

f) $-8 \leq -4x + 8 < 4$

$$-8 - 8 \leq -4x < 4 - 8$$

$$-16 \leq -4x < -4$$

$$\frac{-16}{-4} \geq \frac{-4x}{-4} > \frac{-4}{-4}$$

$$4 \geq x > 1, \text{ es decir}$$

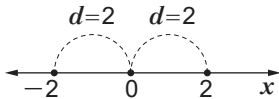
$$1 < x \leq 4$$

Sección 2: Inecuaciones de primer grado con valor absoluto

21.

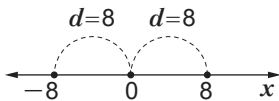
a) $|x| = 2$

$$x = 2 \text{ o } x = -2$$



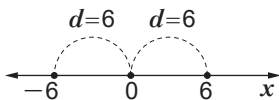
b) $|x| = 8$

$$x = 8 \text{ o } x = -8$$



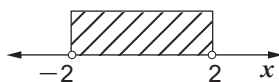
c) $|x| = 6$

$$x = 6 \text{ o } x = -6$$



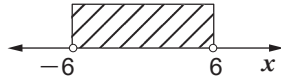
d) $|x| < 2$

$$-2 < x < 2$$



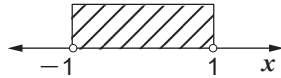
e) $|x| < 6$

$$-6 < x < 6$$



f) $|x| \leq 1$

$$-1 \leq x \leq 1$$



g) $|x| > 7$

$$x < -7 \text{ o } x > 7$$



h) $|x| \geq 9$

$$x \leq -9 \text{ o } x \geq 9$$



i) $|x| > 10$

$$x < -10 \text{ o } x > 10$$



22.

a) $|x + 1| = 2$

$$x + 1 = 2, \quad x + 1 = -2$$

$$x = 2 - 1, \quad x = -2 - 1$$

$$x = 1, \quad x = -3$$

Por lo tanto, 1 y -3 son las soluciones de la ecuación.

b) $|x - 5| = 2$

$$x - 5 = 2, \quad x - 5 = -2$$

$$x = 2 + 5, \quad x = -2 + 5$$

$$x = 7, \quad x = 3$$

Por lo tanto, 3 y 7 son las soluciones de la ecuación.

c) $|x - 3| = 2$

$$x - 3 = 2, \quad x - 3 = -2$$

$$x = 2 + 3, \quad x = -2 + 3$$

$$x = 5, \quad x = 1$$

Por lo tanto, 1 y 5 son las soluciones de la ecuación.

d) $|x - 4| = 2$

$$x - 4 = 2, \quad x - 4 = -2$$

$$x = 2 + 4, \quad x = -2 + 4$$

$$x = 6, \quad x = 2$$

Por lo tanto, 2 y 6 son las soluciones de la ecuación.

e) $|x + 1| = 4$

$$x + 1 = 4, \quad x + 1 = -4$$

$$x = 4 - 1, \quad x = -4 - 1$$

$$x = 3, \quad x = -5$$

Por lo tanto, -5 y 3 son las soluciones de la ecuación.

f) $|x - 5| = 1$

$$x - 5 = 1, \quad x - 5 = -1$$

$$x = 1 + 5, \quad x = -1 + 5$$

$$x = 6, \quad x = 4$$

Por lo tanto, 4 y 6 son las soluciones de la ecuación.

g) $|x - 2| = 4$

$$x - 2 = 4, \quad x - 2 = -4$$

$$x = 4 + 2, \quad x = -4 + 2$$

$$x = 6, \quad x = -2$$

Por lo tanto, -2 y 6 son las soluciones de la ecuación.

h) $|x - 3| = 4$

$$x - 3 = 4, \quad x - 3 = -4$$

$$x = 4 + 3, \quad x = -4 + 3$$

$$x = 7, \quad x = -1$$

Por lo tanto, -1 y 7 son las soluciones de la ecuación.

i) $|x + 2| = 5$

$$x + 2 = 5, \quad x + 2 = -5$$

$$x = 5 - 2, \quad x = -5 - 2$$

$$x = 3, \quad x = -7$$

Por lo tanto, -7 y 3 son las soluciones de la ecuación.

23.

a) $|x + 1| < 2$

$$-2 < x + 1 < 2$$

$$-2 - 1 < x < 2 - 1$$

$$-3 < x < 1$$

b) $|x - 3| \leq 2$

$$-2 \leq x - 3 \leq 2$$

$$-2 + 3 \leq x \leq 2 + 3$$

$$1 \leq x \leq 5$$

c) $|x + 4| \leq 4$

$$-4 \leq x + 4 \leq 4$$

$$-4 - 4 \leq x \leq 4 - 4$$

$$-8 \leq x \leq 0$$

d) $|x - 5| \leq 1$

$$-1 \leq x - 5 \leq 1$$

$$-1 + 5 \leq x \leq 1 + 5$$

$$4 \leq x \leq 6$$

e) $|x + 3| \leq 1$

$$-1 \leq x + 3 \leq 1$$

$$-1 - 3 \leq x \leq 1 - 3$$

$$-4 \leq x \leq -2$$

f) $|x - 5| < 3$

$$-3 < x - 5 < 3$$

$$-3 + 5 < x < 3 + 5$$

$$2 < x < 8$$

g) $|x - 3| < 3$

$$-3 < x - 3 < 3$$

$$-3 + 3 < x < 3 + 3$$

$$0 < x < 6$$

h) $|x - 4| < 2$

$$-2 < x - 4 < 2$$

$$-2 + 4 < x < 2 + 4$$

$$2 < x < 6$$

i) $|x + 5| \leq 1$

$$-1 \leq x + 5 \leq 1$$

$$-1 - 5 \leq x \leq 1 - 5$$

$$-6 \leq x \leq -4$$

24.

a) $|x + 1| > 2$

$$x + 1 < -2 \text{ o } x + 1 > 2$$

$$x < -3 \text{ o } x > 1$$

b) $|x + 1| \geq 3$

$$x + 1 \leq -3 \text{ o } x + 1 \geq 3$$

$$x \leq -4 \text{ o } x \geq 2$$

c) $|x - 4| > 3$

$$x - 4 < -3 \text{ o } x - 4 > 3$$

$$x < 1 \text{ o } x > 7$$

d) $|x + 2| \geq 6$

$$x + 2 \leq -6 \text{ o } x + 2 \geq 6$$

$$x \leq -8 \text{ o } x \geq 4$$

e) $|x - 3| > 5$

$$x - 3 < -5 \text{ o } x - 3 > 5$$

$$x < -2 \text{ o } x > 8$$

$$\begin{aligned} \text{f) } |x+5| &\geq 2 \\ x+5 &\leq -2 \text{ o } x+5 \geq 2 \\ x &\leq -7 \text{ o } x \geq -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } |x+6| &\geq 1 \\ x+6 &\leq -1 \text{ o } x+6 \geq 1 \\ x &\leq -7 \text{ o } x \geq -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } |x-4| &> 6 \\ x-4 &< -6 \text{ o } x-4 > 6 \\ x &< -2 \text{ o } x > 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } |x+3| &\geq 7 \\ x+3 &\leq -7 \text{ o } x+3 \geq 7 \\ x &\leq -10 \text{ o } x \geq 5 \end{aligned}$$

Sección 3: Inecuaciones de segundo grado

25.

$$\begin{aligned} \text{a) } x^2 - 4 &= 0 \\ (x+2)(x-2) &= 0 \\ x+2 &= 0, \quad x-2 = 0 \\ x &= -2, \quad x = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x^2 - 5x &= 0 \\ x(x-5) &= 0 \\ x &= 0, \quad x-5 = 0 \\ x &= 0, \quad x = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } x^2 + 5x + 6 &= 0 \\ (x+3)(x+2) &= 0 \\ x+3 &= 0, \quad x+2 = 0 \\ x &= -3, \quad x = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } x^2 - 16 &= 0 \\ (x+4)(x-4) &= 0 \\ x+4 &= 0, \quad x-4 = 0 \\ x &= -4, \quad x = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } x^2 - x &= 0 \\ x(x-1) &= 0 \\ x &= 0, \quad x-1 = 0 \\ x &= 0, \quad x = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } x^2 - x - 6 &= 0 \\ (x-3)(x+2) &= 0 \\ x-3 &= 0, \quad x+2 = 0 \\ x &= 3, \quad x = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } x^2 - 25 &= 0 \\ (x+5)(x-5) &= 0 \\ x+5 &= 0, \quad x-5 = 0 \\ x &= -5, \quad x = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } x^2 + 6x &= 0 \\ x(x+6) &= 0 \\ x &= 0, \quad x+6 = 0 \\ x &= 0, \quad x = -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } x^2 + 2x - 8 &= 0 \\ (x+4)(x-2) &= 0 \\ x+4 &= 0, \quad x-2 = 0 \\ x &= -4, \quad x = 2 \end{aligned}$$

26.

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= x^2 - 4 \\ x^2 - 4 &= 0 \\ (x+2)(x-2) &= 0 \\ x+2 &= 0, \quad x-2 = 0 \\ x &= -2, \quad x = 2 \end{aligned}$$

Los interceptos: $(-2, 0)$ y $(2, 0)$

$$\begin{aligned} \text{b) } y &= x^2 - 9 \\ x^2 - 9 &= 0 \\ (x+3)(x-3) &= 0 \\ x+3 &= 0, \quad x-3 = 0 \\ x &= -3, \quad x = 3 \end{aligned}$$

Los interceptos: $(-3, 0)$ y $(3, 0)$

$$\begin{aligned} \text{c) } y &= x^2 - 2x \\ x^2 - 2x &= 0 \\ x(x-2) &= 0 \\ x &= 0, \quad x-2 = 0 \\ x &= 0, \quad x = 2 \end{aligned}$$

Los interceptos: $(0, 0)$ y $(2, 0)$

$$\begin{aligned} \text{d) } y &= x^2 - 16 \\ x^2 - 16 &= 0 \\ (x+4)(x-4) &= 0 \\ x+4 &= 0, \quad x-4 = 0 \\ x &= -4, \quad x = 4 \end{aligned}$$

Los interceptos: $(-4, 0)$ y $(4, 0)$

$$\begin{aligned} \text{e) } y &= x^2 - 6x \\ x^2 - 6x &= 0 \\ x(x-6) &= 0 \\ x &= 0, \quad x-6 = 0 \\ x &= 0, \quad x = 6 \end{aligned}$$

Los interceptos: $(0, 0)$ y $(6, 0)$

$$\begin{aligned} \text{f) } y &= x^2 + x - 12 \\ x^2 + x - 12 &= 0 \\ (x+4)(x-3) &= 0 \\ x+4 &= 0, \quad x-3 = 0 \\ x &= -4, \quad x = 3 \end{aligned}$$

Los interceptos: $(-4, 0)$ y $(3, 0)$

g) $y = x^2 - 25$

$$x^2 - 25 = 0$$

$$(x + 5)(x - 5) = 0$$

$$x + 5 = 0, \quad x - 5 = 0$$

$$x = -5, \quad x = 5$$

Los interceptos: $(-5, 0)$ y $(5, 0)$

h) $y = x^2 - 3x - 4$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x + 1)(x - 4) = 0$$

$$x + 1 = 0, \quad x - 4 = 0$$

$$x = -1, \quad x = 4$$

Los interceptos: $(-1, 0)$ y $(4, 0)$

i) $y = x^2 - x - 6$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x + 2)(x - 3) = 0$$

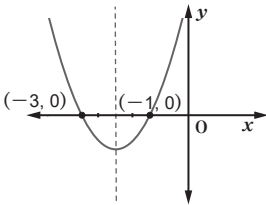
$$x + 2 = 0, \quad x - 3 = 0$$

$$x = -2, \quad x = 3$$

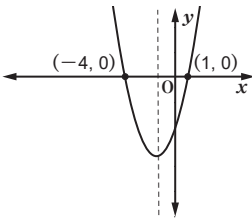
Los interceptos: $(-2, 0)$ y $(3, 0)$

27.

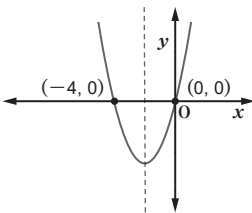
a) $y = x^2 + 4x + 3$



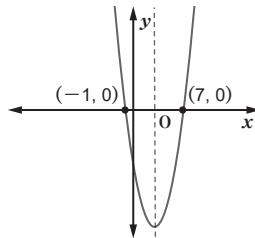
b) $y = x^2 + 3x - 4$



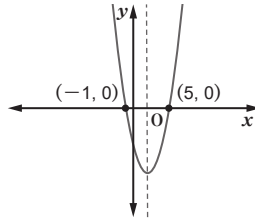
c) $y = x^2 + 4x$



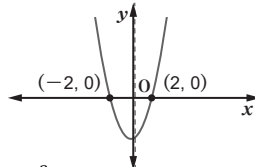
d) $y = x^2 - 6x - 7$



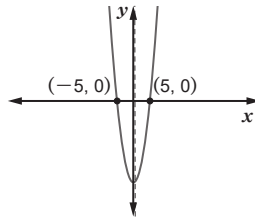
e) $y = x^2 - 4x - 5$



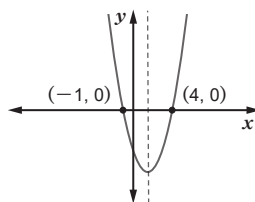
f) $y = x^2 - 4$



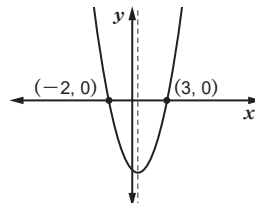
g) $y = x^2 - 25$



h) $y = x^2 - 3x - 4$



i) $y = x^2 - x - 6$



28.

a) $x^2 - 4 > 0$

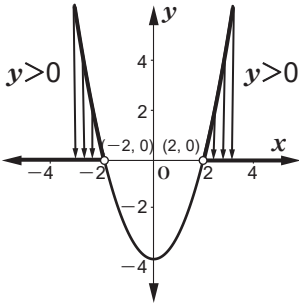
$x^2 - 4 = 0$

$(x + 2)(x - 2) = 0$

$x + 2 = 0, \quad x - 2 = 0$

$x = -2, \quad x = 2$

$x < -2 \text{ o } x > 2$



b) $x^2 - 36 > 0$

$x^2 - 36 = 0$

$(x + 6)(x - 6) = 0$

$x + 6 = 0, \quad x - 6 = 0$

$x = -6, \quad x = 6$

$x < -6 \text{ o } x > 6$

c) $x^2 - 49 > 0$

$x^2 - 49 = 0$

$(x + 7)(x - 7) = 0$

$x + 7 = 0, \quad x - 7 = 0$

$x = -7, \quad x = 7$

$x < -7 \text{ o } x > 7$

d) $x^2 - 64 \geq 0$

$x^2 - 64 = 0$

$(x + 8)(x - 8) = 0$

$x + 8 = 0, \quad x - 8 = 0$

$x = -8, \quad x = 8$

$x \leq -8 \text{ o } x \geq 8$

e) $x^2 - 81 \geq 0$

$x^2 - 81 = 0$

$(x + 9)(x - 9) = 0$

$x + 9 = 0, \quad x - 9 = 0$

$x = -9, \quad x = 9$

$x \leq -9 \text{ o } x \geq 9$

f) $x^2 - 100 \geq 0$

$x^2 - 100 = 0$

$(x + 10)(x - 10) = 0$

$x + 10 = 0, \quad x - 10 = 0$

$x = -10, \quad x = 10$

$x \leq -10 \text{ o } x \geq 10$

g) $x^2 - 169 \geq 0$

$x^2 - 169 = 0$

$(x + 13)(x - 13) = 0$

$x + 13 = 0, \quad x - 13 = 0$

$x = -13, \quad x = 13$

$x \leq -13 \text{ o } x \geq 13$

h) $x^2 - 121 > 0$

$x^2 - 121 = 0$

$(x + 11)(x - 11) = 0$

$x + 11 = 0, \quad x - 11 = 0$

$x = -11, \quad x = 11$

$x < -11 \text{ o } x > 11$

i) $x^2 - 144 > 0$

$x^2 - 144 = 0$

$(x + 12)(x - 12) = 0$

$x + 12 = 0, \quad x - 12 = 0$

$x = -12, \quad x = 12$

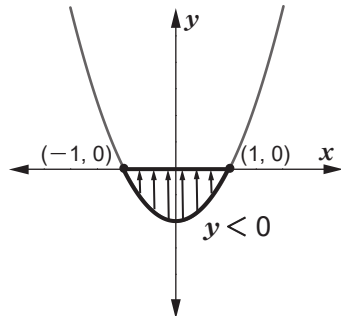
$x < -12 \text{ o } x > 12$

29.

a) $x^2 - 1 \leq 0$

$(x + 1)(x - 1) = 0$

$x = -1, \quad x = 1$



$-1 \leq x \leq 1$

b) $x^2 - 9 < 0$

$(x + 3)(x - 3) = 0$

$x = -3, \quad x = 3$

$-3 < x < 3$

c) $x^2 - 49 \leq 0$

$(x + 7)(x - 7) = 0$

$x = -7, \quad x = 7$

$-7 \leq x \leq 7$

d) $x^2 - 81 \leq 0$

$(x + 9)(x - 9) = 0$

$x = -9, \quad x = 9$

$-9 \leq x \leq 9$

e) $x^2 - 36 < 0$

$(x + 6)(x - 6) = 0$

$x = -6, \quad x = 6$

$-6 < x < 6$

f) $x^2 - 100 \leq 0$

$(x + 10)(x - 10) = 0$

$x = -10, \quad x = 10$

$-10 \leq x \leq 10$

g) $x^2 - 169 < 0$

$(x + 13)(x - 13) = 0$

$x = -13, \quad x = 13$

$-13 < x < 13$

h) $x^2 - 121 \leq 0$

$(x + 11)(x - 11) = 0$

$x = -11, \quad x = 11$

$-11 \leq x \leq 11$

i) $x^2 - 144 \leq 0$

$(x + 12)(x - 12) = 0$

$x = -12, \quad x = 12$

$-12 \leq x \leq 12$

30.

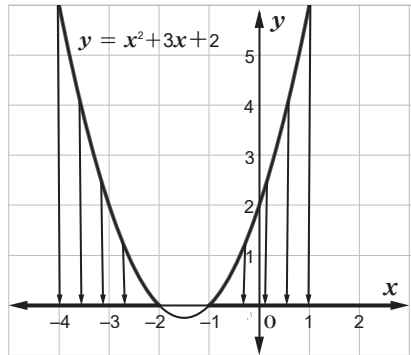
a) $x^2 + 3x + 2 > 0$

$x^2 + 3x + 2 = 0$

$(x + 2)(x + 1) = 0$

$x = -2, x = -1$

$x < -2 \text{ o } x > -1$



b) $x^2 - 4x + 3 > 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x - 1)(x - 3) = 0$

$x = 1, x = 3$

$x < 1 \text{ o } x > 3$

c) $x^2 + 6x + 5 < 0$

$(x + 5)(x + 1) = 0$

$x = -5, \quad x = -1$

$-5 < x < -1$

d) $x^2 + 2x - 8 > 0$

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$(x + 4)(x - 2) = 0$

$x = -4, x = 2$

$x < -4 \text{ o } x > 2$

e) $x^2 - x - 12 < 0$

$(x + 3)(x - 4) = 0$

$x = -3, \quad x = 4$

$-3 < x < 4$

f) $x^2 + 7x + 12 > 0$

$x^2 + 7x + 12 = 0$

$(x + 4)(x + 3) = 0$

$x = -4, x = -3$

$x < -4 \text{ o } x > -3$

g) $x^2 + 2x - 15 > 0$

$x^2 + 2x - 15 = 0$

$(x + 5)(x - 3) = 0$

$x = -5, x = 3$

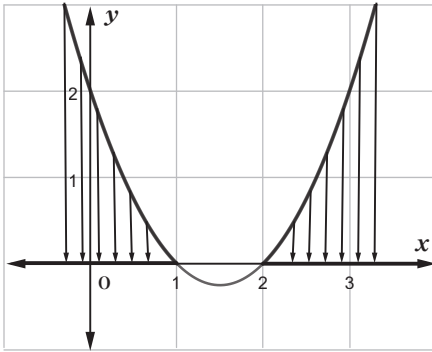
$x < -5 \text{ o } x > 3$

h) $x^2 - x - 30 < 0$
 $(x + 5)(x - 6) = 0$
 $x = -5, \quad x = 6$
 $-5 < x < 6$

i) $x^2 - 3x - 18 < 0$
 $(x + 6)(x - 3) = 0$
 $x = -6, \quad x = 3$
 $-6 < x < 3$

31.

a) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$
 $x^2 - 3x + 2 = 0$
 $(x - 2)(x - 1) = 0$
 $x = 2, \quad x = 1$



$x \leq 1 \text{ or } x \geq 2$

b) $x^2 + 6x + 5 \leq 0$
 $(x + 5)(x + 1) = 0$
 $x = -5, \quad x = -1$
 $-5 \leq x \leq -1$

c) $x^2 - 2x - 8 \geq 0$
 $(x + 2)(x - 4) = 0$
 $x = -2, \quad x = 4$
 $x \leq -2 \text{ or } x \geq 4$

d) $x^2 - 2x - 15 \geq 0$
 $(x + 3)(x - 5) = 0$
 $x = -3, \quad x = 5$
 $x \leq -3 \text{ or } x \geq 5$

e) $x^2 + 6x + 8 \leq 0$
 $(x + 4)(x + 2) = 0$
 $x = -4, \quad x = -2$
 $-4 \leq x \leq -2$

f) $x^2 + 9x + 14 \leq 0$
 $(x + 7)(x + 2) = 0$
 $x = -7, \quad x = -2$
 $-7 \leq x \leq -2$

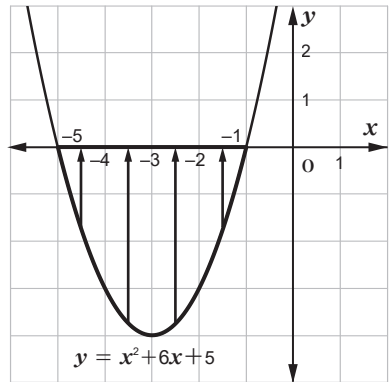
g) $x^2 + 11x + 30 \leq 0$
 $(x + 6)(x + 5) = 0$
 $x = -6, \quad x = -5$
 $-6 \leq x \leq -5$

h) $x^2 - x - 2 \geq 0$
 $(x + 1)(x - 2) = 0$
 $x = -1, \quad x = 2$
 $x \leq -1 \text{ or } x \geq 2$

i) $x^2 - 3x - 18 \leq 0$
 $(x + 3)(x - 6) = 0$
 $x = -3, \quad x = 6$
 $-3 \leq x \leq 6$

32.

a) $-x^2 - 6x - 5 > 0$
 $x^2 + 6x + 5 < 0$
 $x^2 + 6x + 5 = 0$
 $(x + 1)(x + 5) = 0$
 $x = -5, \quad x = -1$



$-5 < x < -1$

$$\begin{aligned} \text{b) } & -x^2 - 2x + 8 \geq 0 \\ & x^2 + 2x - 8 \leq 0 \\ & x^2 + 2x - 8 = 0 \\ & (x + 4)(x - 2) = 0 \\ & x = -4, \quad x = 2 \\ & -4 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & -x^2 + 6x - 8 < 0 \\ & x^2 - 6x + 8 > 0 \\ & x^2 - 6x + 8 = 0 \\ & (x - 2)(x - 4) = 0 \\ & x = 2, \quad x = 4 \\ & x < 2 \text{ o } x > 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } & -x^2 - x + 6 \leq 0 \\ & x^2 + x - 6 \geq 0 \\ & x^2 + x - 6 = 0 \\ & (x + 3)(x - 2) = 0 \\ & x = -3, \quad x = 2 \\ & x \leq -3 \text{ o } x \geq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } & -x^2 - 7x - 10 \geq 0 \\ & x^2 + 7x + 10 \leq 0 \\ & x^2 + 7x + 10 = 0 \\ & (x + 5)(x + 2) = 0 \\ & x = -5, \quad x = -2 \\ & -5 \leq x \leq -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } & -x^2 - x + 12 \leq 0 \\ & x^2 + x - 12 \geq 0 \\ & x^2 + x - 12 = 0 \\ & (x + 4)(x - 3) = 0 \\ & x = -4, \quad x = 3 \\ & x \leq -4 \text{ o } x \geq 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } & -x^2 - 2x + 15 > 0 \\ & x^2 + 2x - 15 < 0 \\ & x^2 + 2x - 15 = 0 \\ & (x + 5)(x - 3) = 0 \\ & x = -5, \quad x = 3 \\ & -5 < x < 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } & -x^2 - x + 30 \leq 0 \\ & x^2 + x - 30 \geq 0 \\ & x^2 + x - 30 = 0 \\ & (x + 6)(x - 5) = 0 \\ & x = -6, \quad x = 5 \\ & x \leq -6 \text{ o } x \geq 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } & -x^2 - x + 42 < 0 \\ & x^2 + x - 42 > 0 \\ & x^2 + x - 42 = 0 \\ & (x + 7)(x - 6) = 0 \\ & x = -7, \quad x = 6 \\ & x < -7 \text{ o } x > 6 \end{aligned}$$

Unidad 3: Fracciones Algebraicas

Sección 1: Simplificación, multiplicación y división de fracciones algebraicas

33.

$$\text{a) } \frac{15}{10} = \frac{3}{2} \qquad \text{b) } \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

$$\text{c) } \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \qquad \text{d) } \frac{48}{32} = \frac{3}{2}$$

$$\text{e) } \frac{x^4}{x^5} = \frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x} = \frac{1}{x}$$

$$\text{f) } \frac{x^2}{x^4} = \frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{g) } \frac{x^2 y^3}{x^3 y^2} = \frac{x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y}{x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y} = \frac{y}{x}$$

$$\text{h) } \frac{m^5}{m^3} = \frac{m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m}{m \cdot m \cdot m} = m^2$$

$$\text{i) } \frac{p^3 q^3}{p^3 q^2} = \frac{p \cdot p \cdot p \cdot q \cdot q \cdot q}{p \cdot p \cdot p \cdot q \cdot q} = q$$

$$\begin{aligned} \text{j)} \quad \frac{m^2 n^2}{m^3 n^4} &= \frac{m \cdot m \cdot n \cdot n}{m \cdot m \cdot m \cdot n \cdot n \cdot n \cdot n} \\ &= \frac{1}{mn^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k)} \quad \frac{p^2 q^3 r^2}{p^3 q^2 r^3} &= \frac{p \cdot p \cdot q \cdot q \cdot q \cdot r \cdot r}{p \cdot p \cdot p \cdot q \cdot q \cdot r \cdot r \cdot r} \\ &= \frac{q}{pr} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{l)} \quad \frac{x^2 y^3 z^3}{x^3 y^3 z^2} &= \frac{x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot z \cdot z \cdot z}{x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot z \cdot z} \\ &= \frac{z}{x} \end{aligned}$$

34.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{2x^4 y^3}{6x^2 y^2} &= \frac{2 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y}{6 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y} \\ &= \frac{x \cdot x \cdot y}{3} = \frac{x^2 y}{3} = \frac{1}{3} x^2 y \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad \frac{8x^2 y^3}{4x^3 y^2} = \frac{8 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y}{4 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y} = \frac{2y}{x}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \frac{15x^3 y^3}{30x^2 y^2} &= \frac{15 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y}{30 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y} \\ &= \frac{1}{2} xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad \frac{12m^3 n}{6m^2 n^2} &= \frac{12 \cdot m \cdot m \cdot m \cdot n}{6 \cdot m \cdot m \cdot n \cdot n} \\ &= \frac{2m}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad \frac{5a^5 b^3}{20a^2 b^3} &= \frac{5 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b}{20 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b} \\ &= \frac{1}{4} a^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad \frac{18x^3 y^2}{6x^2 y^2} &= \frac{18 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y}{6 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y} \\ &= 3x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad \frac{10m^5 n^3}{6m^2 n^4} &= \frac{10 \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot n \cdot n \cdot n}{6 \cdot m \cdot m \cdot n \cdot n \cdot n \cdot n} \\ &= \frac{5m^3}{3n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad \frac{15a^4 b^3}{10a^4 b^2} &= \frac{15 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b}{10 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b} = \frac{3}{2} b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \frac{12x^3 y^3 z^3}{48x^2 y^2 z^2} &= \frac{12 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot z \cdot z \cdot z}{48 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot z \cdot z} \\ &= \frac{1}{4} xyz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{j)} \quad \frac{100a^4 b^4}{25a^2 b^2} &= \frac{100 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b}{25 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b} \\ &= 4a^2 b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k)} \quad \frac{81x^2 y^3 z^2}{27x^2 y^2 z^3} &= \frac{81 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot z \cdot z}{27 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot z \cdot z \cdot z} \\ &= \frac{3y}{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{l)} \quad \frac{36a^2 b^3 c^3}{6a^2 b^2 c^4} &= \frac{6 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c \cdot c}{1 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c} \\ &= \frac{6b}{c} \end{aligned}$$

35.

$$\begin{aligned} \text{a) } 10x + 5 &= (5)(2x) + (5)(1) \\ &= \mathbf{5(2x + 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 12x + 3 &= (3)(4x) + (3)(1) \\ &= \mathbf{3(4x + 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 8x + 4 &= (4)(2x) + (4)(1) \\ &= \mathbf{4(2x + 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } x^2 + 5x &= x \cdot x + x(5) \\ &= \mathbf{x(x + 5)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } x^2 - 3x &= x \cdot x - x(3) \\ &= \mathbf{x(x - 3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } 3x^2 - 6x &= (3x)(x) - (3x)(2) \\ &= \mathbf{3x(x - 2)} \end{aligned}$$

$$\text{g) } x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$$

$$\text{h) } x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$$

$$\text{i) } x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$$

$$\text{j) } x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$$

$$\text{k) } x^2 - x - 30 = (x - 6)(x + 5)$$

$$\begin{aligned} \text{l) } x^2 + 12x + 36 &= (x + 6)(x + 6) \\ &= \mathbf{(x + 6)^2} \end{aligned}$$

36.

$$\text{a) } \frac{x + 1}{x^2 - 1} = \frac{x + 1}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{\mathbf{1}}{x - 1}$$

$$\text{b) } \frac{x - 4}{x^2 - 16} = \frac{x - 4}{(x + 4)(x - 4)} = \frac{\mathbf{1}}{x + 4}$$

$$\text{c) } \frac{x - 5}{x^2 - 25} = \frac{x - 5}{(x + 5)(x - 5)} = \frac{\mathbf{1}}{x + 5}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{x - 1}{x^2 + x - 2} &= \frac{x - 1}{(x + 2)(x - 1)} \\ &= \frac{\mathbf{1}}{x + 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \frac{x + 3}{x^2 + 4x + 3} &= \frac{x + 3}{(x + 3)(x + 1)} \\ &= \frac{\mathbf{1}}{x + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \frac{x - 2}{x^2 - x - 2} &= \frac{x - 2}{(x + 1)(x - 2)} \\ &= \frac{\mathbf{1}}{x + 1} \end{aligned}$$

$$\text{g) } \frac{2x + 4}{x^2 - 4} = \frac{2(x + 2)}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{\mathbf{2}}{x - 2}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } \frac{3x + 6}{x^2 + x - 2} &= \frac{3(x + 2)}{(x + 2)(x - 1)} \\ &= \frac{\mathbf{3}}{x - 1} \end{aligned}$$

$$\text{i) } \frac{4x - 8}{x - 2} = \frac{4(x - 2)}{x - 2} = \mathbf{4}$$

$$\begin{aligned} \text{j) } \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 3x + 2} &= \frac{x(x + 2)}{(x + 2)(x + 1)} \\ &= \frac{\mathbf{x}}{x + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k) } \frac{x^2 - 25}{x^2 + x - 30} &= \frac{(x + 5)(x - 5)}{(x + 6)(x - 5)} \\ &= \frac{\mathbf{x + 5}}{x + 6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{l) } \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9} &= \frac{(x + 3)(x + 3)}{(x + 3)(x - 3)} \\ &= \frac{\mathbf{x + 3}}{x - 3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{m) } \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - x - 2} &= \frac{(x + 1)(x + 1)}{(x - 2)(x + 1)} \\ &= \frac{\mathbf{x + 1}}{x - 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{n) } \frac{a^2 - a - 42}{a^2 - 49} &= \frac{(a - 7)(a + 6)}{(a + 7)(a - 7)} \\ &= \frac{\mathbf{a + 6}}{a + 7} \end{aligned}$$

37.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x^2}{8y^3} \cdot \frac{4y^2}{x} &= \frac{x \cdot x \cdot 4 \cdot y \cdot y}{8 \cdot y \cdot y \cdot y \cdot x} \\ &= \frac{4 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y}{8 \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y} = \frac{\mathbf{x}}{2y} \end{aligned}$$

$$b) \frac{x^3}{4y^3} \cdot \frac{2y^2}{x} = \frac{2 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y}{4 \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y} = \frac{x^2}{2y}$$

$$c) \frac{3x^4}{10} \cdot \frac{5y^2}{9x} \\ = \frac{(3)(5) \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y}{(10)(9) \cdot x} \\ = \frac{x^3 y^2}{6}$$

$$d) \frac{x^2 + 3x}{x - 2} \cdot \frac{x - 2}{x + 3} = \frac{x(x + 3)}{x - 2} \cdot \frac{x - 2}{x + 3} \\ = x$$

$$e) \frac{x^2 + 2x}{x - 3} \cdot \frac{x - 3}{x + 2} = \frac{x(x + 2)}{x - 3} \cdot \frac{x - 3}{x + 2} \\ = x$$

$$f) \frac{x^2 + 4x}{x - 1} \cdot \frac{x - 1}{x + 4} = \frac{x(x + 4)}{x - 1} \cdot \frac{x - 1}{x + 4} \\ = x$$

$$g) \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} \cdot \frac{x + 1}{x + 2} \\ = \frac{(x + 2)(x + 1)}{x + 1} \cdot \frac{x + 1}{x + 2} = x + 1$$

$$h) \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 4} \cdot \frac{x - 2}{x + 1} \\ = \frac{(x + 4)(x + 1)}{(x + 2)(x - 2)} \cdot \frac{x - 2}{x + 1} \\ = \frac{x + 4}{x + 2}$$

$$i) \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} \cdot \frac{x^2 - 2x}{x + 1} \\ = \frac{(x - 2)(x + 1)}{(x - 2)} \cdot \frac{x(x - 2)}{x + 1} \\ = x(x - 2)$$

38.

$$a) \frac{2x^2}{3y} \div \frac{4x}{3y^2} = \frac{2x^2}{3y} \cdot \frac{3y^2}{4x} \\ = \frac{2 \cdot x \cdot x}{3 \cdot y} \cdot \frac{3 \cdot y \cdot y}{4 \cdot x} = \frac{xy}{2}$$

$$b) \frac{12x^3}{5y^2} \div \frac{3x}{10y^2} = \frac{12x^3}{5y^2} \cdot \frac{10y^2}{3x} \\ = \frac{12 \cdot x \cdot x \cdot x}{5 \cdot y \cdot y} \cdot \frac{10 \cdot y \cdot y}{3 \cdot x} = 8x^2$$

$$c) \frac{2x^2}{3y} \div \frac{x^3}{6y} = \frac{2 \cdot x \cdot x}{3 \cdot y} \cdot \frac{6 \cdot y}{x \cdot x \cdot x} = \frac{4}{x}$$

$$d) \frac{x^2 - 1}{x - 3} \div \frac{x + 1}{x - 3} \\ = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 3} \cdot \frac{x - 3}{x + 1} = x - 1$$

$$e) \frac{x^2 - 4}{x - 2} \div \frac{x + 2}{x - 3} \\ = \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} \cdot \frac{x - 3}{x + 2} = x - 3$$

$$f) \frac{x^2 - 9}{x + 3} \div \frac{x - 3}{x + 3} \\ = \frac{(x + 3)(x - 3)}{x + 3} \cdot \frac{x + 3}{x - 3} = x + 3$$

$$g) \frac{x^2 - y^2}{x - y} \div \frac{x + y}{x - y} \\ = \frac{(x + y)(x - y)}{x - y} \cdot \frac{x - y}{x + y} = x - y$$

$$h) \frac{m^2 - n^2}{mn - n} \div \frac{m + n}{m - 1} \\ = \frac{(m + n)(m - n)}{n(m - 1)} \cdot \frac{m - 1}{m + n} \\ = \frac{m - n}{n}$$

39.

$$a) \frac{x^2}{3y} \cdot \frac{2x^2}{y} \div \frac{2x^3}{9y} = \frac{x^2}{3y} \cdot \frac{2x^2}{y} \cdot \frac{9y}{2x^3}$$

$$= \frac{x \cdot x}{3 \cdot y} \cdot \frac{2 \cdot x \cdot x}{y} \cdot \frac{9 \cdot y}{2 \cdot x \cdot x \cdot x} = \frac{3x}{y}$$

$$b) \frac{x^3}{3y} \cdot \frac{5x}{y^3} \div \frac{10x^4}{9y^4} = \frac{x^3}{3y} \cdot \frac{5x}{y^3} \cdot \frac{9y^4}{10x^4}$$

$$= \frac{x \cdot x \cdot x}{3 \cdot y} \cdot \frac{5 \cdot x}{y \cdot y \cdot y} \cdot \frac{9 \cdot y \cdot y \cdot y}{10 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$c) \frac{4x^2}{5y} \div \frac{2x^4}{10y^3} \cdot \frac{x^3}{2y} = \frac{4x^2}{5y} \cdot \frac{10y^3}{2x^4} \cdot \frac{x^3}{2y}$$

$$= \frac{4 \cdot x \cdot x}{5 \cdot y} \cdot \frac{10 \cdot y \cdot y \cdot y}{2 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x} \cdot \frac{x \cdot x \cdot x}{2 \cdot y}$$

$$= 2xy$$

$$d) \frac{2x^2}{3y} \cdot \frac{4x^2}{y} \div \frac{8x^3}{9y^2} = \frac{2x^2}{3y} \cdot \frac{4x^2}{y} \cdot \frac{9y^2}{8x^3}$$

$$= \frac{2 \cdot x \cdot x}{3 \cdot y} \cdot \frac{4 \cdot x \cdot x}{y} \cdot \frac{9 \cdot y \cdot y}{8 \cdot x \cdot x \cdot x} = 3x$$

$$e) \frac{x+2}{x-2} \div \frac{x^2+3x+2}{x-2} \cdot \frac{x+1}{x+3}$$

$$= \frac{x+2}{x-2} \cdot \frac{x-2}{(x+2)(x+1)} \cdot \frac{x+1}{x+3}$$

$$= \frac{1}{x+3}$$

$$f) \frac{x-2}{x+1} \div \frac{x^2-3x+2}{x-2} \cdot \frac{x+1}{x-2}$$

$$= \frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{x-2}{(x-2)(x-1)} \cdot \frac{x+1}{x-2}$$

$$= \frac{1}{x-1}$$

$$g) \frac{x^2-4}{x+3} \div \frac{x-2}{x^2+x-2} \cdot \frac{x+3}{x+2}$$

$$= \frac{(x+2)(x-2)}{x+3} \cdot \frac{(x+2)(x-1)}{x-2} \cdot \frac{x+3}{x+2}$$

$$= (x+2)(x-1)$$

$$h) \frac{x+1}{x^2+4x+3} \cdot \frac{x^2+3x+2}{x-2} \div \frac{x+1}{x+3}$$

$$= \frac{x+1}{(x+3)(x+1)} \cdot \frac{(x+2)(x+1)}{x-2} \cdot \frac{x+3}{x+1}$$

$$= \frac{x+2}{x-2}$$

Sección 2: Adición y sustracción de fracciones algebraicas

40.

$$a) \frac{3}{x} + \frac{2}{x} = \frac{3+2}{x} = \frac{5}{x}$$

$$b) \frac{4}{x} + \frac{3}{x} = \frac{4+3}{x} = \frac{7}{x}$$

$$c) \frac{5}{a} + \frac{2}{a} = \frac{5+2}{a} = \frac{7}{a}$$

$$d) \frac{2x}{x+1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2x+2}{x+1} = \frac{2(x+1)}{x+1}$$

$$= 2$$

$$e) \frac{2x}{x+2} + \frac{4}{x+2} = \frac{2x+4}{x+2} = \frac{2(x+2)}{x+2}$$

$$= 2$$

$$f) \frac{2a-5}{a-1} + \frac{a+2}{a-1} = \frac{2a-5+a+2}{a-1}$$

$$= \frac{3a-3}{a-1} = \frac{3(a-1)}{a-1} = 3$$

$$g) \frac{x+1}{x+3} + \frac{x+2}{x+3} = \frac{x+1+x+2}{x+3}$$

$$= \frac{2x+3}{x+3}$$

$$h) \frac{x-2}{x-1} + \frac{3}{x-1} = \frac{x-2+3}{x-1} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$i) \frac{2}{x+4} + \frac{x+2}{x+4} = \frac{2+x+2}{x+4} = \frac{x+4}{x+4}$$

$$= 1$$

41.

$$a) \frac{3}{b} - \frac{2}{b} = \frac{3-2}{b} = \frac{1}{b}$$

$$b) \frac{5}{a} - \frac{2}{a} = \frac{5-2}{a} = \frac{3}{a}$$

$$c) \frac{3}{2b} - \frac{1}{2b} = \frac{3-1}{2b} = \frac{2}{2b} = \frac{1}{b}$$

$$d) \frac{2x}{x-1} - \frac{2}{x-1} = \frac{2x-2}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} = 2$$

$$e) \frac{2x+6}{x+2} - \frac{2}{x+2} = \frac{2x+6-2}{x+2} = \frac{2x+4}{x+2} = \frac{2(x+2)}{x+2} = 2$$

$$f) \frac{2x+4}{x+1} - \frac{2}{x+1} = \frac{2x+4-2}{x+1} = \frac{2x+2}{x+1} = \frac{2(x+1)}{x+1} = 2$$

$$g) \frac{2x+1}{x-2} - \frac{x+3}{x-2} = \frac{2x+1-x-3}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} = 1$$

$$h) \frac{2x-1}{3x-2} - \frac{1-x}{3x-2} = \frac{2x-1-1+x}{3x-2} = \frac{3x-2}{3x-2} = 1$$

$$i) \frac{2x-1}{3-x} - \frac{3x-4}{3-x} = \frac{2x-1-3x+4}{3-x} = \frac{3-x}{3-x} = 1$$

42.

$$a) 12 = (2)(2)(3) \\ 18 = \frac{(2)(3)(3)}{(2)(2)(3)(3)} \\ \mathbf{m.c.m(12,18) = (2)(2)(3)(3) = 36}$$

$$b) 10 = (2) (5) \\ 12 = \frac{(2)(2)(3)}{(2)(2)(3)(5)} \\ \mathbf{m.c.m(10,12) = (2)(2)(3)(5) = 60}$$

$$c) 8 = (2)(2)(2) \\ 16 = \frac{(2)(2)(2)(2)}{(2)(2)(2)(2)} \\ \mathbf{m.c.m(8,16) = (2)(2)(2)(2) = 16}$$

$$d) 9 = (3)(3) \\ 12 = \frac{(2)(2)(3)}{(2)(2)(3)(3)} \\ \mathbf{m.c.m(9,12) = (2)(2)(3)(3) = 36}$$

$$e) 20 = (2)(2)(5) \\ 25 = \frac{(5)(5)}{(2)(2)(5)(5)} \\ \mathbf{m.c.m(20,25) = (2)(2)(5)(5) = 100}$$

$$f) 12 = (2)(2)(3) \\ 36 = \frac{(2)(2)(3)(3)}{(2)(2)(3)(3)} \\ \mathbf{m.c.m(12,36) = (2)(2)(3)(3) = 36}$$

$$g) 12 = (2)(2) (3) \\ 8 = (2)(2)(2) \\ 24 = \frac{(2)(2)(2)(3)}{(2)(2)(2)(3)} \\ \mathbf{m.c.m(12,8,24) = (2)(2)(2)(3) = 24}$$

$$h) 6 = (2)(3) \\ 15 = (3) (5) \\ 18 = \frac{(2)(3)(3)}{(2)(3)(3)(5)} \\ \mathbf{m.c.m(6,15,18) = (2)(3)(3)(5) = 90}$$

$$i) 5 = 5 \\ 10 = (2)(5) \\ 25 = \frac{(5)(5)}{(2)(5)(5)} \\ \mathbf{m.c.m(5,10,25) = (2)(5)(5) = 50}$$

43.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{2}{3} + \frac{1}{5} &= \frac{(2)(5)}{(3)(5)} + \frac{(1)(3)}{(5)(3)} = \frac{10}{15} + \frac{3}{15} \\ &= \frac{10+3}{15} = \frac{13}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{3}{2} + \frac{1}{5} &= \frac{(3)(5)}{(2)(5)} + \frac{(1)(2)}{(5)(2)} = \frac{15}{10} + \frac{2}{10} \\ &= \frac{15+2}{10} = \frac{17}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{7}{4} + \frac{1}{5} &= \frac{(7)(5)}{(4)(5)} + \frac{(1)(4)}{(5)(4)} = \frac{35}{20} + \frac{4}{20} \\ &= \frac{35+4}{20} = \frac{39}{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{3}{6} \\ &= \frac{(2)(10)}{(3)(10)} + \frac{(1)(6)}{(5)(6)} + \frac{(3)(5)}{(6)(5)} \\ &= \frac{20}{30} + \frac{6}{30} + \frac{15}{30} = \frac{20+6+15}{30} = \frac{41}{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \frac{3}{2} + \frac{1}{5} + \frac{5}{3} \\ &= \frac{(3)(15)}{(2)(15)} + \frac{(1)(6)}{(5)(6)} + \frac{(5)(10)}{(3)(10)} \\ &= \frac{45}{30} + \frac{6}{30} + \frac{50}{30} = \frac{45+6+50}{30} = \frac{101}{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \frac{2}{5} + \frac{1}{4} + \frac{5}{2} \\ &= \frac{(2)(4)}{(5)(4)} + \frac{(1)(5)}{(4)(5)} + \frac{(5)(10)}{(2)(10)} \\ &= \frac{8}{20} + \frac{5}{20} + \frac{50}{20} = \frac{8+5+50}{20} = \frac{63}{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \frac{5}{6} - \frac{1}{2} &= \frac{(5)(1)}{(6)(1)} - \frac{(1)(3)}{(2)(3)} = \frac{5}{6} - \frac{3}{6} \\ &= \frac{5-3}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } \frac{7}{4} - \frac{3}{2} &= \frac{(7)(1)}{(4)(1)} - \frac{(3)(2)}{(2)(2)} = \frac{7}{4} - \frac{6}{4} \\ &= \frac{7-6}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } \frac{3}{10} - \frac{2}{15} &= \frac{(3)(3)}{(10)(3)} - \frac{(2)(2)}{(15)(2)} \\ &= \frac{9}{30} - \frac{4}{30} = \frac{9-4}{30} = \frac{5}{30} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{j) } \frac{5}{4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{6} &= \frac{(5)(3)}{(4)(3)} + \frac{(3)(6)}{(2)(6)} - \frac{(1)(2)}{(6)(2)} \\ &= \frac{15}{12} + \frac{18}{12} - \frac{2}{12} = \frac{15+18-2}{12} = \frac{31}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k) } \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} \\ &= \frac{(2)(9)}{(5)(9)} + \frac{(1)(15)}{(3)(15)} - \frac{(1)(5)}{(9)(5)} \\ &= \frac{18}{45} + \frac{15}{45} - \frac{5}{45} = \frac{18+15-5}{45} = \frac{28}{45} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{l) } \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{5} \\ &= \frac{(1)(20)}{(2)(20)} - \frac{(1)(5)}{(8)(5)} - \frac{(1)(8)}{(5)(8)} \\ &= \frac{20}{40} - \frac{5}{40} - \frac{8}{40} = \frac{20-5-8}{40} = \frac{7}{40} \end{aligned}$$

44.

$$\begin{aligned} \text{a) } 2ab^2, \quad 3a^2 \\ 2ab^2 &= (2) \cdot a \cdot b \cdot b \\ 3a^2 &= (3) \cdot a \cdot a \\ \hline \text{m. c. m} &= (2)(3) \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \end{aligned}$$

$$\text{m. c. m} = 6a^2b^2$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 10a^2b^2, \quad 5a^2 \\ 10a^2b^2 &= (2)(5) \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \\ 5a^2 &= (5) \cdot a \cdot a \\ \hline \text{m. c. m} &= (2)(5) \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \\ \text{m. c. m} &= 10a^2b^2 \end{aligned}$$

c) $6x^3y, 9xy^2$

$$6x^3y = (2)(3) \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y$$

$$9xy^2 = (3)(3) \cdot x \cdot y \cdot y$$

$$\underline{m. c. m = (2)(3)(3) \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y}$$

$$m. c. m = 18x^3y^2$$

d) $18x^2y^2, 9xy^3$

$$18x^2y^2 = (2)(3)(3) \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y$$

$$9xy^3 = (3)(3) \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y$$

$$\underline{m. c. m = (2)(3)(3) \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y}$$

$$m. c. m = 18x^2y^3$$

e) $10x^3yz, 25x^2y^2z$

$$10x^3y z = (2)(5) \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot z$$

$$25x^2y^2z = (5)(5) \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot z$$

$$\underline{m. c. m = (2)(5)(5) \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot z}$$

$$m. c. m = 50x^3y^2z$$

f) $2x^3y^3, 6xy, 9x^2y$

$$2x^3y^3 = (2) \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y$$

$$6xy = (2)(3) \cdot x \cdot y$$

$$9x^2y = (3)(3) \cdot x \cdot x \cdot y$$

$$\underline{m. c. m = (2)(3)(3) \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y}$$

$$m. c. m = 18x^3y^3$$

g) $a^2 - 9, a^2 - 6a + 9$

$$a^2 - 9 = (a + 3)(a - 3)$$

$$a^2 - 6a + 9 = (a - 3)(a - 3)$$

$$\underline{m. c. m = (a + 3)(a - 3)(a - 3)}$$

$$m. c. m = (a + 3)(a - 3)^2$$

h) $a^2 - 1, a^2 - a - 2$

$$a^2 - 1 = (a + 1)(a - 1)$$

$$a^2 - a - 2 = (a + 1)(a - 2)$$

$$\underline{m. c. m = (a + 1)(a - 1)(a - 2)}$$

i) $a^2 - a, a^2 - 3a + 2$

$$a^2 - a = a(a - 1)$$

$$a^2 - 3a + 2 = (a - 1)(a - 2)$$

$$\underline{m. c. m = a(a - 1)(a - 2)}$$

j) $x^2 - 25, x^2 - x - 30$

$$x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$$

$$x^2 - x - 30 = (x + 5)(x - 6)$$

$$\underline{m. c. m = (x + 5)(x - 5)(x - 6)}$$

k) $2a - 4, a^2 - 4a + 4$

$$2a - 4 = 2(a - 2)$$

$$a^2 - 4a + 4 = (a - 2)(a - 2)$$

$$\underline{m. c. m = 2(a - 2)(a - 2)}$$

$$m. c. m = 2(a - 2)^2$$

l) $6x - 3, 12x - 6$

$$6x - 3 = (3)(2x - 1)$$

$$12x - 6 = (2)(3)(2x - 1)$$

$$\underline{m. c. m = 6(2x - 1)}$$

45.

a)
$$\frac{2}{3x^2} + \frac{3}{2x} = \frac{(2)(2)}{(3x^2)(2)} + \frac{(3)(3x)}{(2x)(3x)}$$
$$= \frac{4}{6x^2} + \frac{9x}{6x^2} = \frac{9x + 4}{6x^2}$$

b)
$$\frac{3}{4x} + \frac{3}{2x^2} = \frac{(3)(x)}{(4x)(x)} + \frac{(3)(2)}{(2x^2)(2)}$$
$$= \frac{3x}{4x^2} + \frac{6}{4x^2} = \frac{3x + 6}{4x^2}$$

c)
$$\frac{4y}{3x^2} + \frac{x}{2y} = \frac{(4y)(2y)}{(3x^2)(2y)} + \frac{(x)(3x^2)}{(2y)(3x^2)}$$
$$= \frac{8y^2}{6x^2y} + \frac{3x^3}{6x^2y}$$
$$= \frac{3x^3 + 8y^2}{6x^2y}$$

d)
$$\frac{2}{3ab} + \frac{b}{6a^2} = \frac{(2)(2a)}{(3ab)(2a)} + \frac{(b)(b)}{(6a^2)(b)}$$
$$= \frac{4a}{6a^2b} + \frac{b^2}{6a^2b}$$
$$= \frac{4a + b^2}{6a^2b}$$

e)
$$\frac{4}{3a^2b} + \frac{3}{2ab}$$
$$= \frac{(4)(2)}{(3a^2b)(2)} + \frac{(3)(3a)}{(2ab)(3a)}$$
$$= \frac{8}{6a^2b} + \frac{9a}{6a^2b} = \frac{9a + 8}{6a^2b}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } & \frac{5}{3mn} + \frac{2n}{6m^2} + \frac{5}{n} \\
 &= \frac{(5)(2m)}{(3mn)(2m)} + \frac{(2n)(n)}{(6m^2)(n)} + \frac{(5)(6m^2)}{(n)(6m^2)} \\
 &= \frac{10m}{6m^2n} + \frac{2n^2}{6m^2n} + \frac{30m^2}{6m^2n} \\
 &= \frac{30m^2 + 10m + 2n^2}{6m^2n}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{g) } & \frac{4}{x} - \frac{5}{2x} = \frac{(4)(2)}{2x} - \frac{(5)(1)}{2x} \\
 &= \frac{8}{2x} - \frac{5}{2x} = \frac{8-5}{2x} = \frac{3}{2x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{h) } & \frac{4}{3x} - \frac{2}{9x} = \frac{(4)(3)}{(3x)(3)} - \frac{(2)(1)}{(9x)(1)} \\
 &= \frac{12}{9x} - \frac{2}{9x} = \frac{12-2}{9x} = \frac{10}{9x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{i) } & \frac{5}{6x^2} - \frac{5}{2x} = \frac{(5)(1)}{(6x^2)(1)} - \frac{(5)(2x)}{(3x)(2x)} \\
 &= \frac{5}{6x^2} - \frac{10x}{6x^2} = \frac{-10x + 5}{6x^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{j) } & \frac{5}{2x} - \frac{4}{5x^2} = \frac{(5)(5x)}{(2x)(5x)} - \frac{(4)(2)}{(5x^2)(2)} \\
 &= \frac{25x}{10x^2} - \frac{8}{10x^2} = \frac{25x - 8}{10x^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{k) } & \frac{5}{2x} - \frac{4}{5x^2} - \frac{x}{15} \\
 &= \frac{(5)(15x)}{(2x)(15x)} - \frac{(4)(6)}{(5x^2)(6)} - \frac{(x)(2x^2)}{(15)(2x^2)} \\
 &= \frac{75x}{30x^2} - \frac{24}{30x^2} - \frac{2x^3}{30x^2} \\
 &= \frac{-2x^3 + 75x - 24}{30x^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{l) } & \frac{5}{3x^2} - \frac{4}{5x} - \frac{1}{3} \\
 &= \frac{(5)(5)}{(3x^2)(5)} - \frac{(4)(3x)}{(5x)(3x)} - \frac{5x^2}{(3)(5x^2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{25}{15x^2} - \frac{12x}{15x^2} - \frac{5x^2}{15x^2} \\
 &= \frac{-5x^2 - 12x + 25}{15x^2}
 \end{aligned}$$

46.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+1} \\
 &= \frac{(3)(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{(2)(x-1)}{(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{3x+3+2x-2}{(x-1)(x+1)} \\
 &= \frac{5x+1}{(x-1)(x+1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } & \frac{4}{x+2} + \frac{2}{x-2} \\
 &= \frac{(4)(x-2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{(2)(x+2)}{(x-2)(x+2)} \\
 &= \frac{4x-8+2x+4}{(x+2)(x-2)} = \frac{6x-4}{(x+2)(x-2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } & \frac{3}{x-1} + \frac{3}{x+2} \\
 &= \frac{(3)(x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{(3)(x-1)}{(x+2)(x-1)} \\
 &= \frac{3x+6+3x-3}{(x-1)(x+2)} \\
 &= \frac{6x+3}{(x-1)(x+2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } & \frac{3}{x+2} + \frac{2}{x+3} \\
 &= \frac{(3)(x+3)}{(x+2)(x+3)} + \frac{(2)(x+2)}{(x+3)(x+2)} \\
 &= \frac{3x+9+2x+4}{(x+2)(x+3)} \\
 &= \frac{5x+13}{(x+2)(x+3)}
 \end{aligned}$$

$$e) \frac{5x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1}$$

$$= \frac{5x}{(x+1)(x-1)} + \frac{2}{x+1}$$

$$= \frac{5x}{(x+1)(x-1)(1)} + \frac{(2)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{5x+2x-2}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{7x-2}{(x+1)(x-1)}$$

$$f) \frac{4x}{x^2-3x+2} + \frac{2}{x-1}$$

$$= \frac{4x}{(x-2)(x-1)} + \frac{2}{x-1}$$

$$= \frac{4x}{(x-2)(x-1)} + \frac{2(x-2)}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{4x}{(x-2)(x-1)} + \frac{2x-4}{(x-2)(x-1)}$$

$$= \frac{4x+2x-4}{(x-2)(x-1)} = \frac{6x-4}{(x-2)(x-1)}$$

$$g) \frac{2x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1}$$

$$= \frac{2x}{(x+1)(x-1)} + \frac{2}{x+1}$$

$$= \frac{2x}{(x+1)(x-1)} + \frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{2x+2x-2}{(x+1)(x-1)} = \frac{4x-2}{(x+1)(x-1)}$$

$$h) \frac{2}{x+1} + \frac{2x}{x^2+4x+3}$$

$$= \frac{2}{x+1} + \frac{2x}{(x+3)(x+1)}$$

$$= \frac{2(x+3)}{(x+1)(x+3)} + \frac{2x}{(x+3)(x+1)}$$

$$= \frac{2x+6+2x}{(x+1)(x+3)} = \frac{4x+6}{(x+1)(x+3)}$$

$$i) \frac{4}{x-1} + \frac{3x}{x^2-5x+4}$$

$$= \frac{4}{x-1} + \frac{3x}{(x-1)(x-4)}$$

$$= \frac{4(x-4)}{(x-1)(x-4)} + \frac{3x}{(x-1)(x-4)}$$

$$= \frac{4x-16+3x}{(x-1)(x-4)} = \frac{7x-16}{(x-1)(x-4)}$$

$$j) \frac{a}{a^2-a-12} + \frac{2}{a+3}$$

$$= \frac{a}{(a-4)(a+3)} + \frac{2}{a+3}$$

$$= \frac{a}{(a-4)(a+3)} + \frac{2(a-4)}{(a+3)(a-4)}$$

$$= \frac{a+2a-8}{(a-4)(a+3)} = \frac{3a-8}{(a-4)(a+3)}$$

$$k) \frac{3a}{a^2-a-6} + \frac{2}{a-3}$$

$$= \frac{3a}{(a-3)(a+2)} + \frac{2}{a-3}$$

$$= \frac{3a}{(a-3)(a+2)} + \frac{2(a+2)}{(a-3)(a+2)}$$

$$= \frac{3a+2a+4}{(a-3)(a+2)} = \frac{5a+4}{(a-3)(a+2)}$$

$$l) \frac{2}{a+2} + \frac{2a}{a^2+3a+2}$$

$$= \frac{2}{a+2} + \frac{2a}{(a+2)(a+1)}$$

$$= \frac{2(a+1)}{(a+2)(a+1)} + \frac{2a}{(a+2)(a+1)}$$

$$= \frac{2a+2+2a}{(a+2)(a+1)} = \frac{4a+2}{(a+2)(a+1)}$$

47.

$$a) \frac{4}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{4(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{4x + 4 - (x - 1)}{(x + 1)(x - 1)}$$

$$= \frac{4x + 4 - x + 1}{(x + 1)(x - 1)}$$

$$= \frac{3x + 5}{(x + 1)(x - 1)}$$

$$\text{b) } \frac{3}{x + 2} - \frac{1}{x + 1}$$

$$= \frac{3(x + 1)}{(x + 2)(x + 1)} - \frac{1(x + 2)}{(x + 1)(x + 2)}$$

$$= \frac{3(x + 1) - (x + 2)}{(x + 2)(x + 1)}$$

$$= \frac{3x + 3 - x - 2}{(x + 2)(x + 1)}$$

$$= \frac{2x + 1}{(x + 2)(x + 1)}$$

$$\text{c) } \frac{2}{x + 2} - \frac{3}{x - 3}$$

$$= \frac{2(x - 3)}{(x + 2)(x - 3)} - \frac{3(x + 2)}{(x - 3)(x + 2)}$$

$$= \frac{2(x - 3) - 3(x + 2)}{(x + 2)(x - 3)}$$

$$= \frac{2x - 6 - 3x - 6}{(x + 2)(x - 3)}$$

$$= \frac{-x - 12}{(x + 2)(x - 3)}$$

$$= -\frac{x + 12}{(x + 2)(x - 3)}$$

$$\text{d) } \frac{5}{x - 3} - \frac{3}{x + 1}$$

$$= \frac{5(x + 1)}{(x - 3)(x + 1)} - \frac{3(x - 3)}{(x + 1)(x - 3)}$$

$$= \frac{5(x + 1) - 3(x - 3)}{(x - 3)(x + 1)}$$

$$= \frac{5x + 5 - 3x + 9}{(x - 3)(x + 1)}$$

$$= \frac{2x + 14}{(x - 3)(x + 1)}$$

$$\text{e) } \frac{7}{x - 1} - \frac{6}{x - 3}$$

$$= \frac{7(x - 3)}{(x - 1)(x - 3)} - \frac{6(x - 1)}{(x - 3)(x - 1)}$$

$$= \frac{7(x - 3) - 6(x - 1)}{(x - 3)(x - 1)}$$

$$= \frac{7x - 21 - 6x + 6}{(x - 3)(x - 1)}$$

$$= \frac{x - 15}{(x - 3)(x - 1)}$$

$$\text{f) } \frac{1}{x^2 - 4} - \frac{1}{x + 2}$$

$$= \frac{1}{(x + 2)(x - 2)} - \frac{1}{x + 2}$$

$$= \frac{1}{(x + 2)(x - 2)} - \frac{1(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)}$$

$$= \frac{1 - 1(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{1 - x + 2}{(x + 2)(x - 2)}$$

$$= \frac{-x + 3}{(x + 2)(x - 2)}$$

$$\text{g) } \frac{3}{x^2 + 7x + 12} - \frac{2}{x + 3}$$

$$= \frac{3}{(x + 4)(x + 3)} - \frac{2}{x + 3}$$

$$= \frac{3}{(x + 4)(x + 3)} - \frac{2(x + 4)}{(x + 3)(x + 4)}$$

$$= \frac{3 - 2x - 8}{(x + 4)(x + 3)} = \frac{-2x - 5}{(x + 4)(x + 3)}$$

$$= -\frac{2x + 5}{(x + 4)(x + 3)}$$

$$\text{h) } \frac{4}{x + 5} - \frac{4}{x^2 - 25}$$

$$= \frac{4}{x + 5} - \frac{4}{(x + 5)(x - 5)}$$

$$= \frac{4(x-5)}{(x+5)(x-5)} - \frac{4}{(x+5)(x-5)}$$

$$= \frac{4x-20-4}{(x+5)(x-5)} = \frac{4x-24}{(x+5)(x-5)}$$

i) $\frac{4}{x^2-36} - \frac{1}{x+6}$

$$= \frac{4}{(x+6)(x-6)} - \frac{1}{x+6}$$

$$= \frac{4}{(x+6)(x-6)} - \frac{1(x-6)}{(x+6)(x-6)}$$

$$= \frac{4-x+6}{(x+6)(x-6)} = \frac{-x+10}{(x+6)(x-6)}$$

$$= -\frac{x-10}{(x+6)(x-6)}$$

j) $\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x^2-4x+4}$

$$= \frac{1}{x-2} - \frac{2}{(x-2)(x-2)}$$

$$= \frac{1(x-2)}{(x-2)(x-2)} - \frac{2}{(x-2)(x-2)}$$

$$= \frac{x-2-2}{(x-2)(x-2)} = \frac{x-4}{(x-2)(x-2)}$$

$$= \frac{x-4}{(x-2)^2}$$

k) $\frac{6}{x-2} - \frac{2}{x^2-2x} = \frac{6}{x-2} - \frac{2}{x(x-2)}$

$$= \frac{6(x)}{(x-2)(x)} - \frac{2}{x(x-2)} = \frac{6x-2}{x(x-2)}$$

l) $\frac{3}{x^2-5x+6} - \frac{1}{x-2}$

$$= \frac{3}{(x-2)(x-3)} - \frac{1}{x-2}$$

$$= \frac{3}{(x-2)(x-3)} - \frac{1(x-3)}{(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{3-x+3}{(x-2)(x-3)} = \frac{-x+6}{(x-2)(x-3)}$$

48.

a) $\frac{1}{3x} + \frac{3}{2x} - \frac{1}{x}$

$$= \frac{(1)(2)}{(3x)(2)} + \frac{(3)(3)}{(2x)(3)} - \frac{(1)(6)}{(x)(6)}$$

$$= \frac{2}{6x} + \frac{9}{6x} - \frac{6}{6x} = \frac{5}{6x}$$

b) $\frac{1}{6a} + \frac{3}{12a} - \frac{1}{a}$

$$= \frac{(1)(2)}{(6a)(2)} + \frac{(3)(1)}{(12a)(1)} - \frac{(1)(12)}{(a)(12)}$$

$$= \frac{2}{12a} + \frac{3}{12a} - \frac{12}{12a} = -\frac{7}{12a} \quad !$$

c) $\frac{5}{2x^2} + \frac{3}{8x} - \frac{1}{4}$

$$= \frac{(5)(4)}{(2x^2)(4)} + \frac{(3)(x)}{(8x)(x)} - \frac{(1)(2x^2)}{(4)(2x^2)}$$

$$= \frac{20}{8x^2} + \frac{3x}{8x^2} - \frac{2x^2}{8x^2}$$

$$= \frac{-2x^2 + 3x + 20}{8x^2}$$

d) $\frac{1}{3xy} - \frac{3}{2x^2} + \frac{1}{xy^2}$

$$= \frac{(1)(2xy)}{(3xy)(2xy)} - \frac{(3)(3y^2)}{(2x^2)(3y^2)} + \frac{(1)(6x)}{(xy^2)(6x)}$$

$$= \frac{2xy}{6x^2y^2} - \frac{9y^2}{6x^2y^2} + \frac{6x}{6x^2y^2}$$

$$= \frac{2xy - 9y^2 + 6x}{6x^2y^2}$$

e) $\frac{2x+3}{x^2-1} - \frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1}$

$$= \frac{2x+3}{(x+1)(x-1)} - \frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1}$$

$$= \frac{2x+3}{(x+1)(x-1)} - \frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$+ \frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{2x + 3 - 2x - 2 + 2x - 2}{(x + 1)(x - 1)}$$

$$= \frac{2x - 1}{(x + 1)(x - 1)}$$

f) $\frac{2x + 3}{x^2 - 4} - \frac{2}{x - 2} + \frac{2}{x + 2}$

$$= \frac{2x + 3}{(x + 2)(x - 2)} - \frac{2}{x - 2} + \frac{2}{x + 2}$$

$$= \frac{2x + 3}{(x + 2)(x - 2)} - \frac{2(x + 2)}{(x - 2)(x + 2)}$$

$$+ \frac{2(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)}$$

$$= \frac{2x + 3 - 2x - 4 + 2x - 4}{(x + 2)(x - 2)}$$

$$= \frac{2x - 5}{(x + 2)(x - 2)}$$

g) $\frac{a + 3}{a^2 + 4a + 3} + \frac{3}{a + 1} - \frac{2a}{a + 3}$

$$= \frac{a + 3}{(a + 3)(a + 1)} + \frac{3}{a + 1} - \frac{2a}{a + 3}$$

$$= \frac{a + 3}{(a + 3)(a + 1)} + \frac{3(a + 3)}{(a + 1)(a + 3)}$$

$$- \frac{2a(a + 1)}{(a + 3)(a + 1)}$$

$$= \frac{a + 3 + 3a + 9 - 2a^2 - 2a}{(a + 3)(a + 1)}$$

$$= \frac{-2a^2 + 2a + 12}{(a + 3)(a + 1)}$$

h) $\frac{m + 1}{m + 2} - \frac{m - 2}{m^2 - m - 6} + \frac{2}{m - 3}$

$$= \frac{m + 1}{m + 2} - \frac{m - 2}{(m - 3)(m + 2)} + \frac{2}{m - 3}$$

$$= \frac{(m + 1)(m - 3)}{(m + 2)(m - 3)} - \frac{(m - 2)}{(m - 3)(m + 2)}$$

$$+ \frac{2(m + 2)}{(m - 3)(m + 2)}$$

$$= \frac{m^2 - 2m - 3 - m + 2 + 2m + 4}{(m + 2)(m - 3)}$$

$$= \frac{m^2 - m + 3}{(m + 2)(m - 3)}$$

i) $\frac{3}{a + b} + \frac{3}{a - b} - \frac{3}{a^2 - b^2}$

$$= \frac{3}{a + b} + \frac{3}{a - b} - \frac{3}{(a + b)(a - b)}$$

$$= \frac{3(a - b)}{(a + b)(a - b)} + \frac{3(a + b)}{(a - b)(a + b)}$$

$$- \frac{3}{(a + b)(a - b)}$$

$$= \frac{3a - 3b + 3a + 3b - 3}{(a + b)(a - b)}$$

$$= \frac{6a - 3}{(a + b)(a - b)}$$

j) $\frac{2}{n^2 - n - 2} + \frac{3}{n + 1} - \frac{2n}{n - 2}$

$$= \frac{2}{(n - 2)(n + 1)} + \frac{3(n - 2)}{(n + 1)(n - 2)}$$

$$- \frac{2n(n + 1)}{(n - 2)(n + 1)}$$

$$= \frac{2 + 3n - 6 - 2n^2 - 2n}{(n - 2)(n + 1)}$$

$$= \frac{-2n^2 + n - 4}{(n - 2)(n + 1)}$$

k) $\frac{1}{x - y} - \frac{3}{x^2 - y^2} + \frac{2}{x + y}$

$$= \frac{1}{x - y} - \frac{3}{(x + y)(x - y)} + \frac{2}{x + y}$$

$$= \frac{1(x + y)}{(x - y)(x + y)} - \frac{3}{(x + y)(x - y)}$$

$$+ \frac{2(x - y)}{(x + y)(x - y)}$$

$$= \frac{x + y - 3 + 2x - 2y}{(x + y)(x - y)}$$

$$= \frac{3x - y - 3}{(x + y)(x - y)}$$

$$\begin{aligned}
 \text{l)} \quad & \frac{p+3}{p-2} + \frac{3}{p-1} - \frac{p}{p^2-3p+2} \\
 &= \frac{p+3}{p-2} + \frac{3}{p-1} - \frac{p}{(p-2)(p-1)} \\
 &= \frac{(p+3)(p-1)}{(p-2)(p-1)} + \frac{3(p-2)}{(p-1)(p-2)} \\
 &\quad - \frac{p}{(p-2)(p-1)} \\
 &= \frac{p^2+2p-3+3p-6-p}{(p-2)(p-1)} \\
 &= \frac{p^2+4p-9}{(p-2)(p-1)}
 \end{aligned}$$

Unidad 4: Ecuaciones de Tercer Grado

Sección 1: División sintética

49.

$$\begin{array}{r}
 \text{a)} \quad \boxed{D} \rightarrow \quad 87 \overline{) 7} \leftarrow \boxed{d} \\
 \quad \quad \quad - 7 \quad 12 \leftarrow \boxed{\text{Cociente}} \\
 \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad 17 \\
 \quad \quad \quad - 14 \\
 \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad 3 \leftarrow \boxed{\text{Residuo}} \\
 \end{array}$$

$D = 87, d = 7, c = 12, r = 3$

$$87 = (7)(12) + 3$$

b) $D = 80, d = 3, c = 26, r = 2$
 $80 = (3)(26) + 2$

c) $D = 67, d = 9, c = 7, r = 4$
 $67 = (9)(7) + 4$

d) $D = 70, d = 11, c = 6, r = 4$
 $70 = (11)(6) + 4$

e) $D = 90, d = 13, c = 6, r = 12$
 $90 = (13)(6) + 12$

f) $D = 143, d = 17, c = 8, r = 7$
 $143 = (17)(8) + 7$

g) $D = 204, d = 21, c = 9, r = 15$
 $204 = (21)(9) + 15$

h) $D = 153, d = 5, c = 30, r = 3$
 $153 = (5)(30) + 3$

i) $D = 248, d = 23, c = 10, r = 18$
 $248 = (23)(10) + 18$

50.

$$\text{a)} \quad \frac{x^2+3x+2}{-x^2-3x} \quad \left| \frac{x+3}{x} \right.$$

Cociente: x , Residuo: 2

$$\text{b)} \quad \frac{x^2+6x+8}{-x^2-2x} \quad \left| \frac{x+2}{x+4} \right.$$

$$\begin{array}{r}
 4x+8 \\
 \hline
 -4x-8 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Cociente: $x+4$, Residuo: 0

$$\text{c)} \quad \frac{x^2-x-6}{-x^2-2x} \quad \left| \frac{x+2}{x-3} \right.$$

$$\begin{array}{r}
 -3x-6 \\
 \hline
 3x+6 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Cociente: $x-3$, Residuo: 0

$$\text{d)} \quad \frac{3x^2-4x-5}{-3x^2+12x} \quad \left| \frac{x-4}{3x+8} \right.$$

$$\begin{array}{r}
 8x-5 \\
 \hline
 -8x+32 \\
 \hline
 27
 \end{array}$$

Cociente: $3x+8$, Residuo: 27

$$\text{e)} \quad \frac{2x^2-12x-1}{-2x^2+4x} \quad \left| \frac{x-2}{2x-8} \right.$$

$$\begin{array}{r}
 -8x-1 \\
 \hline
 8x-16 \\
 \hline
 -17
 \end{array}$$

Cociente: $2x-8$, Residuo: -17

$$\text{f)} \quad \frac{x^2-x-39}{-x^2-5x} \quad \left| \frac{x+5}{x-6} \right.$$

$$\begin{array}{r}
 -6x-39 \\
 \hline
 6x+30 \\
 \hline
 -9
 \end{array}$$

Cociente: $x-6$, Residuo: -9

51.

$$\begin{array}{r|l} 1 & 7 & 12 & 4 \\ & 4 & 44 & \\ \hline 1 & 11 & 56 & \\ \hline \end{array}$$

Coficientes del cociente Residuo

Cociente: $x + 11$, Residuo: 56

$$\begin{array}{r|l} 1 & 4 & 5 & -3 \\ & -3 & -3 & \\ \hline 1 & 1 & 2 & \\ \hline \end{array}$$

Cociente: $x + 1$, Residuo: 2

$$\begin{array}{r|l} 1 & -3 & -12 & 4 \\ & 4 & 4 & \\ \hline 1 & 1 & -8 & \\ \hline \end{array}$$

Cociente: $x + 1$, Residuo: -8

$$\begin{array}{r|l} 2 & 6 & -10 & -1 \\ & -2 & -4 & \\ \hline 2 & 4 & -14 & \\ \hline \end{array}$$

Cociente: $2x + 4$, Residuo: -14

$$\begin{array}{r|l} 2 & 9 & 20 & 6 \\ & 12 & 126 & \\ \hline 2 & 21 & 146 & \\ \hline \end{array}$$

Cociente: $2x + 21$, Residuo: 146

$$\begin{array}{r|l} 4 & 9 & 26 & 2 \\ & 8 & 34 & \\ \hline 4 & 17 & 60 & \\ \hline \end{array}$$

Cociente: $4x + 17$, Residuo: 60

52.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 9 & 7 & 6 & -1 \\ & -2 & -7 & 0 & \\ \hline 2 & 7 & 0 & 6 & \\ \hline \end{array}$$

Coficientes del cociente Residuo

Cociente: $2x^2 + 7x$, Residuo: 6

$$\begin{array}{r|l} 2 & 6 & -1 & 8 & -3 \\ & -6 & 0 & 3 & \\ \hline 2 & 0 & -1 & 11 & \\ \hline \end{array}$$

Cociente: $2x^2 - 1$, Residuo: 11

$$\begin{array}{r|l} 3 & -6 & 3 & 8 & 2 \\ & 6 & 0 & 6 & \\ \hline 3 & 0 & 3 & 14 & \\ \hline \end{array}$$

Cociente: $3x^2 + 3$, Residuo: 14

$$\begin{array}{r|l} 3 & 12 & -1 & 9 & -4 \\ & -12 & 0 & 4 & \\ \hline 3 & 0 & -1 & 13 & \\ \hline \end{array}$$

Cociente: $3x^2 - 1$, Residuo: 13

$$\begin{array}{r|l} 4 & -9 & -9 & 3 \\ & 12 & 9 & \\ \hline 4 & 3 & 0 & \\ \hline \end{array}$$

Cociente: $4x^2 + 3x$, Residuo: 0

$$\begin{array}{r|l} 2 & 11 & 0 & 6 & 2 \\ & 4 & 30 & 60 & \\ \hline 2 & 15 & 30 & 66 & \\ \hline \end{array}$$

Cociente: $2x^2 + 15x + 30$, Residuo: 66

53.

$$\begin{array}{r|l} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ & 2 & 8 & 14 & \\ \hline 1 & 4 & 7 & 15 & \\ \hline \end{array}$$

Coficientes del cociente Residuo

$$Q(x) = x^2 + 4x + 7 \text{ y } R = 15$$

$$P(x) = D(x)Q(x) + R$$

$$D(x)Q(x) + R$$

$$= (x - 2)(x^2 + 4x + 7) + 15$$

$$= x^3 + 2x^2 - x + 1 = P(x)$$

$$x^3 + 2x^2 - x + 1$$

$$= (x - 2)(x^2 + 4x + 7) + 15$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 4 & -1 & 10 & -2 \\ & -4 & 0 & 2 & \\ \hline 2 & 0 & -1 & 12 & \\ \hline \end{array}$$

$$2x^3 + 4x^2 - x + 10$$

$$= (x + 2)(2x^2 - 1) + 12$$

$$\begin{array}{cccc|c} \text{c)} & 3 & -8 & -5 & 0 & 3 \\ & & 9 & 3 & -6 & \\ \hline & 3 & 1 & -2 & -6 & \end{array}$$

$$3x^3 - 8x^2 - 5x \\ = (x-3)(3x^2 + x - 2) - 6$$

$$\begin{array}{cccc|c} \text{d)} & 1 & 5 & 1 & 20 & -5 \\ & & -5 & 0 & -5 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 15 & \end{array}$$

$$x^3 + 5x^2 + x + 20 \\ = (x+5)(x^2 + 1) + 15$$

Sección 2: Teorema del residuo y teorema del factor

54.

a) Se sustituye $x = 2$ en

$$P(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1 \\ P(2) = 2^3 - 2^2 + (3)(2) - 1 = 9 \\ P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 \\ + (3)(-1) - 1 = -6$$

$$\text{b)} P(1) = 1^3 + (2)(1)^2 + 5 = 8 \\ P(-2) = (-2)^3 + (2)(-2)^2 + 5 \\ = 5$$

$$\text{c)} P(1) = (2)(1)^3 - (2)(1)^2 + 1 - 4 \\ = -3 \\ P(3) = (2)(3)^3 - (2)(3)^2 + 3 - 4 \\ = 35$$

$$\text{d)} P(-1) \\ = (3)(-1)^3 + (-1)^2 - (3)(-1) + 10 \\ = 11 \\ P(-2) \\ = (3)(-2)^3 + (-2)^2 - (3)(-2) + 10 \\ = -4$$

$$\text{e)} P(1) = (1+3)(1+4) + 3 = 23 \\ P(-1) = (-1+3)(-1+4) + 3 \\ = 9$$

$$\text{f)} P(2) = (2-3)(2-7) - 2 = 3 \\ P(4) = (4-3)(4-7) - 2 = -5$$

55.

$$\text{a)} P(x) = x^3 + 3x^2 + x + 5 \\ P(2) = 2^3 + (3)(2)^2 + 2 + 5 = 27 \\ R = 27$$

$$\text{b)} P(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 20 \\ P(-2) \\ = (-2)^3 - (4)(-2)^2 + (3)(-2) - 20 \\ R = -50$$

$$\text{c)} P(x) = x^3 - x^2 - 8x \\ P(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 - (8)(-2) \\ = 4 \\ R = 4$$

$$\text{d)} P(x) = 2x^3 + 4x^2 - x \\ P(-3) \\ = (2)(-3)^3 + (4)(-3)^2 - (-3) \\ = -15 \\ R = -15$$

$$\text{e)} P(x) = 3x^3 - 12x^2 - x + 9 \\ P(4) = (3)(4)^3 - (12)(4)^2 - 4 + 9 \\ = 5 \\ R = 5$$

$$\text{f)} P(x) = 4x^3 + 2x^2 + x + 10 \\ P(-4) \\ = (4)(-4)^3 + (2)(-4)^2 + (-4) + 10 \\ R = -218$$

56.

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2 \\ P(2) = 2^3 - (4)(2)^2 + (3)(2) + 2 = 0 \\ x - 2 \text{ es factor de } P(x).$$

$$P(-3) \\ = (-3)^3 - (4)(-3)^2 + (3)(-3) + 2 \\ = -70$$

Como $P(-3) = 70 \neq 0$,
 $x + 3$ no es factor de $P(x)$.

57.

$$P(x) = x^3 - 7x - 6 \\ P(3) = 3^3 - (7)(3) - 6 = 0$$

$x - 3$ es factor de $P(x)$.

$$P(-1) = (-1)^3 - (7)(-1) - 6 = 0 \\ x + 1 \text{ es factor de } P(x).$$

Sección 3: Factorización de polinomios de tercer grado y resolución de ecuaciones de tercer grado

58.

a)

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

Los divisores del término independiente -2 son ± 1 y ± 2 .

$D(x) = x - 1$ es un factor de $P(x)$.

porque $P(1) = 0$.

Se divide $P(x)$ por $D(x)$

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^2 + 3x + 2 \text{ y } R = 0, \text{ luego} \\ x^3 + 2x^2 - x - 2 &= (x - 1)(x^2 + 3x + 2) \\ &= (x - 1)(x + 1)(x + 2) \end{aligned}$$

b)

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$$

$D(x) = x + 1$ es un factor de $P(x)$.

porque $P(-1) = 0$.

Se divide $P(x)$ por $D(x)$

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^2 - 4x + 3 \text{ y } R = 0, \text{ luego} \\ x^3 - 3x^2 - x + 3 &= (x + 1)(x^2 - 4x + 3) \\ &= (x + 1)(x - 1)(x - 3) \end{aligned}$$

c)

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

$D(x) = x - 3$ es un factor de $P(x)$.

porque $P(3) = 0$.

Se divide $P(x)$ por $D(x)$,

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^2 + x - 2 \text{ y } R = 0, \text{ luego} \\ x^3 - 2x^2 - 5x + 6 &= (x - 3)(x^2 + x - 2) \\ &= (x - 3)(x - 1)(x + 2) \end{aligned}$$

d)

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$$

$D(x) = x - 5$ es un factor de $P(x)$.

porque $P(5) = 0$.

Se divide $P(x)$ por $D(x)$

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^2 + 3x + 2 \text{ y } R = 0, \text{ luego} \\ x^3 - 2x^2 - 13x - 10 &= (x - 5)(x^2 + 3x + 2) \\ &= (x - 5)(x + 1)(x + 2) \end{aligned}$$

$$e) P(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15$$

$D(x) = x - 5$ es un factor de $P(x)$.

porque $P(5) = 0$.

Se divide $P(x)$ por $D(x)$

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^2 - 2x - 3 \text{ y } R = 0, \text{ luego} \\ x^3 - 7x^2 + 7x + 15 &= (x - 5)(x^2 - 2x - 3) \\ &= (x - 5)(x + 1)(x - 3) \end{aligned}$$

59.

a)

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x - 2)(x + 1) &= 0 \\ x - 2 = 0, x + 1 &= 0 \\ x = 2, x = -1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 3 &= 0 \\ (x + 1)(x + 3) &= 0 \\ x + 1 = 0, x + 3 &= 0 \\ x = -1, x = -3 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x^2 + 7x + 6 &= 0 \\ (x + 6)(x + 1) &= 0 \\ x + 6 = 0, x + 1 &= 0 \\ x = -6, x = -1 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 8 &= 0 \\ (x + 4)(x + 2) &= 0 \\ x + 4 = 0, x + 2 &= 0 \\ x = -4, x = -2 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} x^2 - x - 12 &= 0 \\ (x + 3)(x - 4) &= 0 \\ x + 3 = 0, x - 4 &= 0 \\ x = -3, x = 4 \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} x^2 - x - 30 &= 0 \\ (x + 5)(x - 6) &= 0 \\ x + 5 = 0, x - 6 &= 0 \\ x = -5, x = 6 \end{aligned}$$

60.

$$a) x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-1)}}{(2)(1)}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}, x = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(2)}}{(2)(1)} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -2 \pm \sqrt{2} \\ x &= -2 + \sqrt{2}, \quad x = -2 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } x &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(-5)}}{(2)(1)} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{25 + 20}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{45}}{2} \\ &= \frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2} \\ x &= \frac{5 + 3\sqrt{5}}{2}, \quad x = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(-2)}}{(2)(2)} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 16}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4} \\ x &= \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}, \quad x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } x &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(3)(-4)}}{(2)(3)} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{6} \\ &= \frac{-4 \pm 8}{6} \\ x &= \frac{2}{3}, \quad x = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } x &= \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4(4)(-10)}}{(2)(4)} \\ &= \frac{-18 \pm \sqrt{324 + 160}}{8} = \frac{-18 \pm \sqrt{484}}{8} \\ &= \frac{-18 \pm 22}{8} \\ x &= \frac{1}{2}, \quad x = -5 \end{aligned}$$

61.

$$\begin{aligned} \text{a) } x(x-2)(x+1) &= 0 \\ x &= 0, \quad x-2=0, \quad x+1=0 \\ x &= 0, \quad x=2, \quad x=-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x(x-4)(x+1) &= 0 \\ x &= 0, \quad x-4=0, \quad x+1=0 \\ x &= 0, \quad x=4, \quad x=-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } x(3x-2)(x-1) &= 0 \\ x &= 0, \quad 3x-2=0, \quad x-1=0 \\ x &= 0, \quad x = \frac{2}{3}, \quad x=1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } x(4x-1)(x+4) &= 0 \\ x &= 0, \quad 4x-1=0, \quad x+4=0 \\ x &= 0, \quad x = \frac{1}{4}, \quad x=-4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } x^3 + x^2 - 2x &= 0 \\ x(x^2 + x - 2) &= 0 \\ x(x-1)(x+2) &= 0 \\ x &= 0, \quad x=1, \quad x=-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } x^3 - 3x^2 - 18x &= 0 \\ x(x^2 - 3x - 18) &= 0 \\ x(x-6)(x+3) &= 0 \\ x &= 0, \quad x-6=0, \quad x+3=0 \\ x &= 0, \quad x=6, \quad x=-3 \end{aligned}$$

62.

a)

Se factoriza $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.
Los divisores del término independiente 3 son ± 1 y ± 3 .

Como $P(1) = 0$, $x-1$ es un factor de $P(x)$.

Se divide $P(x)$ por $x-1$. Luego,
 $x^3 - 3x^2 - x + 3$

$$\begin{aligned} &= (x-1)(x^2 - 2x - 3) \\ &= (x-1)(x-3)(x+1) \end{aligned}$$

Luego, $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$, es decir
 $(x-1)(x-3)(x+1) = 0$.

$$x-1=0, \quad x-3=0, \quad x+1=0$$

Las soluciones son $x=1, x=3, x=-1$.

b)

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

Como $P(1) = 0$, $x - 1$ es un factor de $P(x)$.

Se divide $P(x)$ por $x - 1$. Luego

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - x - 2 &= (x - 1)(x^2 + 3x + 2) \\ &= (x - 1)(x + 1)(x + 2) \end{aligned}$$

Luego, $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$, es decir $(x - 1)(x + 1)(x + 2) = 0$.

$$x - 1 = 0, \quad x + 1 = 0, \quad x + 2 = 0$$

$$x = 1, x = -1, x = -2.$$

c)

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$$

Como $P(2) = 0$, $x - 2$ es un factor de $P(x)$.

Se divide $P(x)$ por $x - 2$. Luego

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - 5x - 6 &= (x - 2)(x^2 + 4x + 3) \\ &= (x - 2)(x + 1)(x + 3) \end{aligned}$$

Luego, $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$, es decir $(x - 2)(x + 1)(x + 3) = 0$.

$$x - 2 = 0, \quad x + 1 = 0, \quad x + 3 = 0$$

$$x = 2, x = -1, x = -3.$$

d)

$$P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$$

Como $P(-2) = 0$, $x + 2$ es un factor de $P(x)$.

Se divide $P(x)$ por $x + 2$. Luego

$$\begin{aligned} x^3 + 6x^2 + 11x + 6 &= 0 \\ &= (x + 2)(x^2 + 4x + 3) \\ &= (x + 2)(x + 1)(x + 3) \end{aligned}$$

Luego, $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$, es decir $(x + 2)(x + 1)(x + 3) = 0$.

$$x + 2 = 0, \quad x + 1 = 0, \quad x + 3 = 0$$

$$x = -2, x = -1, x = -3$$

63.

$$a) x = 0, \quad x = x^2 + x - 1 = 0,$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - (4)(1)(-1)}}{(2)(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x = 0, \quad x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$b) x = 0, \quad x^2 - 6x + 2 = 0,$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - (4)(1)(2)}}{(2)(1)}$$

$$= \frac{6 \pm 2\sqrt{7}}{2}$$

$$x = 0, \quad x = 3 + \sqrt{7}, \quad x = 3 - \sqrt{7}$$

$$c) x^3 + 6x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x + 1)(x^2 + 5x - 3) = 0$$

$$x + 1 = 0, \quad x^2 + 5x - 3 = 0,$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - (4)(1)(-3)}}{(2)(1)}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{37}}{2}$$

$$x = -1, \quad x = \frac{-5 + \sqrt{37}}{2},$$

$$x = \frac{-5 - \sqrt{37}}{2}$$

$$d) x^3 - x^2 - 7x - 2 = 0$$

$$(x + 2)(x^2 - 3x - 1) = 0$$

$$x + 2 = 0, \quad x^2 - 3x - 1 = 0,$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - (4)(1)(-1)}}{(2)(1)}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x = -2, \quad x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}, \quad x = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

Unidad 5: Introducción a la Trigonometría

Sección 1: Funciones trigonométricas de ángulos agudos en triángulos rectángulos

64.

$$a) x^2 = 36 + 64 = 100, \quad x = 10 \text{ (cm)}$$

$$b) x^2 = 4 + 9 = 13, \quad x = \sqrt{13} \text{ (cm)}$$

$$c) x^2 = 1 + 4 = 5, \quad x = \sqrt{5} \text{ (cm)}$$

$$d) 8 = 4 + y^2, \quad y^2 = 4, \quad y = 2 \text{ (cm)}$$

$$e) 16 = x^2 + x^2, \quad x^2 = 8, \quad x = 2\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$f) 100 = 4x^2 + x^2, \quad x^2 = 20, \quad x = 2\sqrt{5} \text{ (cm)}, \quad 2x = 4\sqrt{5} \text{ (cm)}$$

65.

a)

$\frac{\text{co}}{\text{hip}}$	$\frac{\text{ca}}{\text{hip}}$	$\frac{\text{co}}{\text{ca}}$
$\frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$	$\frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$	$\frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}$
$\frac{DF}{FE} = \frac{12}{15}$ $= \frac{4}{5}$	$\frac{DE}{FE} = \frac{9}{15}$ $= \frac{3}{5}$	$\frac{DF}{DE} = \frac{12}{9}$ $= \frac{4}{3}$

Los resultados son idénticos ya que

$$\frac{BC}{AB} = \frac{DF}{FE}, \quad \frac{AC}{AB} = \frac{DE}{FE}, \quad \frac{BC}{AC} = \frac{DF}{DE}$$

b)

$\frac{\text{co}}{\text{hip}}$	$\frac{\text{ca}}{\text{hip}}$	$\frac{\text{co}}{\text{ca}}$
$\frac{AC}{AB} = \frac{4}{2\sqrt{13}}$ $= \frac{2}{\sqrt{13}}$	$\frac{BC}{AB} = \frac{6}{2\sqrt{13}}$ $= \frac{3}{\sqrt{13}}$	$\frac{AC}{BC} = \frac{4}{6}$ $= \frac{2}{3}$
$\frac{DE}{EF} = \frac{2}{\sqrt{13}}$	$\frac{DF}{EF} = \frac{3}{\sqrt{13}}$	$\frac{DE}{DF} = \frac{2}{3}$

Los resultados son idénticos ya que

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DE}{EF}, \quad \frac{BC}{AB} = \frac{DF}{EF}, \quad \frac{AC}{BC} = \frac{DE}{DF}$$

66.

	$\tan A$	$\tan B$
a)	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{3}$
b)	$\frac{4}{2} = 2$	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
c)	$\frac{4}{7}$	$\frac{7}{4}$
d)	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

67.

	$\text{sen } A$	$\text{cos } A$	$\tan A$
a)	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{3}$
b)	$\frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$	$\frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$	$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
c)	$\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$	$\frac{3\sqrt{7}}{12} = \frac{\sqrt{7}}{4}$	$\frac{9}{3\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$

68.

$$\text{a) } \text{sen } A = \frac{3}{5} = \frac{\text{co}}{\text{hip}}$$

$$(\text{hip})^2 = (\text{co})^2 + (\text{ca})^2$$

$$5^2 = 3^2 + (\text{ca})^2$$

$$\text{Como } \text{ca} > 0, \text{ ca} = \sqrt{16} = 4$$

$$\text{cos } A = \frac{\text{ca}}{\text{hip}} = \frac{4}{5}$$

$$\tan A = \frac{\text{co}}{\text{ca}} = \frac{3}{4}$$

$$\text{b) } \text{cos } A = \frac{2}{3} = \frac{\text{ca}}{\text{hip}}$$

$$(\text{hip})^2 = (\text{co})^2 + (\text{ca})^2$$

$$3^2 = (\text{co})^2 + 2^2$$

$$\text{Como } \text{co} > 0, \text{ co} = \sqrt{5}$$

$$\text{sen } A = \frac{\text{co}}{\text{hip}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan A = \frac{\text{co}}{\text{ca}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{c) } \tan A = \frac{1}{2} = \frac{\text{co}}{\text{ca}}$$

$$(\text{hip})^2 = (\text{co})^2 + (\text{ca})^2$$

$$(\text{hip})^2 = 1^2 + 2^2$$

$$\text{hip} > 0, \text{ hip} = \sqrt{5}$$

$$\text{sen } A = \frac{\text{co}}{\text{hip}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{cos } A = \frac{\text{ca}}{\text{hip}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$d) \tan A = \sqrt{2} = \frac{co}{ca}$$

$$(\text{hip})^2 = (\text{co})^2 + (\text{ca})^2$$

$$(\text{hip})^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$$

$$\text{Como hip} > 0, \text{ hip} = \sqrt{3}$$

$$\text{sen } A = \frac{co}{\text{hip}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{cos } A = \frac{ca}{\text{hip}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Sección 2: Valores de las funciones trigonométricas de ángulos agudos

69.

$$AB^2 = 4^2 + 4^2$$

$$\text{Como } AB > 0, AB = 4\sqrt{2}$$

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{cos } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\tan 45^\circ = 1$$

70.

$$a) 4^2 = BC^2 + 2^2$$

$$\text{Como } BC > 0, BC = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{sen } A = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) De acuerdo con la tabla

$$\text{sen } A = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ si } \angle A = 60^\circ$$

c) Como $60^\circ + \angle B = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$

$$d) \text{sen } B = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{cos } B = \text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan B = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Sección 3: Resolución de triángulos rectángulos

71.

$$a) a = 4 \text{sen } 30^\circ = (4) \left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$b = 4 \text{cos } 30^\circ = (4) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}$$

$$b) a = 5 \tan 60^\circ = (5)(\sqrt{3}) = 5\sqrt{3}$$

$$c = 5 \div \text{cos } 60^\circ = 5 \div \frac{1}{2} = (5)(2) = 10$$

$$c) a = 3 \tan 45^\circ = (3)(1) = 3$$

$$c = 3 \div \text{cos } 45^\circ = 3 \div \frac{1}{\sqrt{2}} = (3)(\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}$$

72.

$$a) (\text{altura}) = 4 \text{cos } 30^\circ = (4) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3} \text{ m}$$

$$b) AC = 4 \text{sen } 30^\circ = (4) \left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

Entre el pie de la escalera y la pared hay 2 m

73.

$$a) A = 17^\circ \quad b) A = 70^\circ \quad c) A = 19^\circ$$

74.

$$AC = 100 \tan 73^\circ = (100)(3,2709) = 327,09$$

La distancia a través del río desde A hasta C es aproximadamente 327,09 m

Sección 4: Relaciones entre seno y coseno

75.

$$a) \text{sen } 36^\circ = \text{cos } 54^\circ$$

$$b) \text{cos } 51^\circ = \text{sen } 39^\circ$$

$$c) \text{sen } 27^\circ = \text{cos } 63^\circ$$

$$d) \text{cos } 68^\circ = \text{sen } 22^\circ$$

76.

$$a) \tan 15^\circ = \frac{\text{sen } 15^\circ}{\text{cos } 15^\circ}$$

$$b) \tan 30^\circ \cdot \text{cos } 30^\circ = \text{sen } 30^\circ$$

$$c) \text{sen}^2 60^\circ + \text{cos}^2 60^\circ = 1$$

$$d) \text{sen}^2 75^\circ + \text{cos}^2 75^\circ = 1$$

$$e) \text{sen}^2 50^\circ = 1 - \text{cos}^2 50^\circ$$

77.

a) $\text{sen}^2 A + \text{cos}^2 A = 1$

$$\text{cos}^2 A = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

Como $0^\circ < A < 90^\circ$, $\text{cos} A > 0$

$$\text{cos} A = \frac{4}{5}$$

$$\text{tan} A = \frac{\text{sen} A}{\text{cos} A} = \frac{3}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{4}$$

b) $\text{sen}^2 A = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$

Como $0^\circ < A < 90^\circ$, $\text{sen} A > 0$

$$\text{sen} A = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{tan} A = \frac{\text{sen} A}{\text{cos} A} = \frac{\sqrt{15}}{4} \div \frac{1}{4} = \sqrt{15}$$

c) $\text{cos}^2 A = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169}$

Como $0^\circ < A < 90^\circ$, $\text{cos} A > 0$

$$\text{cos} A = \frac{5}{13}$$

$$\text{tan} A = \frac{\text{sen} A}{\text{cos} A} = \frac{12}{13} \div \frac{5}{13} = \frac{12}{5}$$

d) $\text{sen}^2 A = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$

Como $0^\circ < A < 90^\circ$, $\text{sen} A > 0$

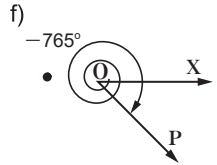
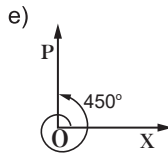
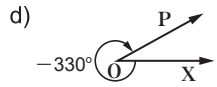
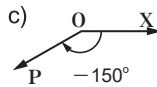
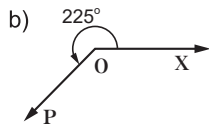
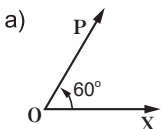
$$\text{sen} A = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{tan} A = \frac{\text{sen} A}{\text{cos} A} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \div \frac{1}{3} = 2\sqrt{2}$$

Unidad 6: Funciones Trigonómicas

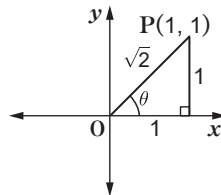
Sección 1: Funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera

78.



79.

a)

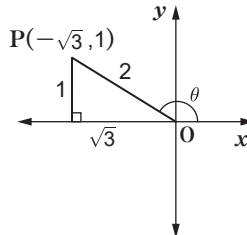


$$\text{sen} \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{cos} \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{tan} \theta = 1$$

b)

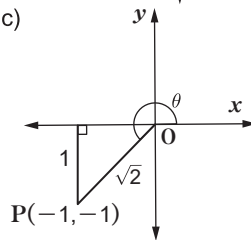


$$\text{sen} \theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{cos} \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tan} \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

c)

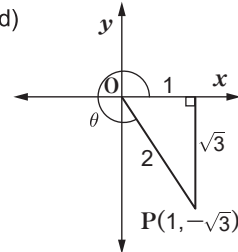


$$\text{sen} \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{cos} \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{tan} \theta = 1$$

d)

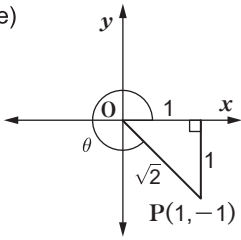


$$\text{sen} \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{cos} \theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{tan} \theta = -\sqrt{3}$$

e)

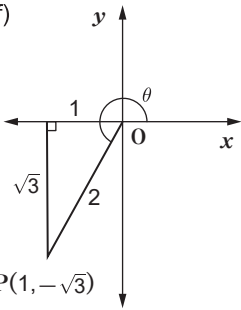


$$\text{sen } \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{tan } \theta = -1$$

f)



$$\text{sen } \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{tan } \theta = \sqrt{3}$$

80.

a) $\text{sen } 150^\circ = \frac{1}{2}$

$\text{cos } 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{tan } 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

b) $\text{sen } 225^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\text{cos } 225^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\text{tan } 225^\circ = 1$

c) $\text{sen } 330^\circ = -\frac{1}{2}$

$\text{cos } 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{tan } 330^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

d) $\text{sen}(-150^\circ) = -\frac{1}{2}$

$\text{cos}(-150^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{tan}(-150^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

e) $\text{sen}(-675^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\text{cos}(-675^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\text{tan}(-675^\circ) = 1$

f) $\text{sen}(-1020^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{cos}(-1020^\circ) = \frac{1}{2}$

$\text{tan}(-1020^\circ) = \sqrt{3}$

81.

a) I cuadrante

b) IV cuadrante

c) III cuadrante

d) II cuadrante

e) II cuadrante

82.

a) $\text{sen } 180^\circ = 0$

b) $\text{sen } 450^\circ = 1$

$\text{cos } 180^\circ = -1$

$\text{cos } 450^\circ = 0$

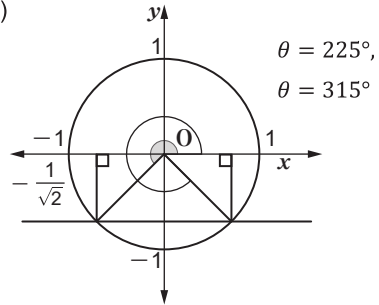
$\text{tan } 180^\circ = 0$

$\text{tan } 450^\circ \text{ NE}$

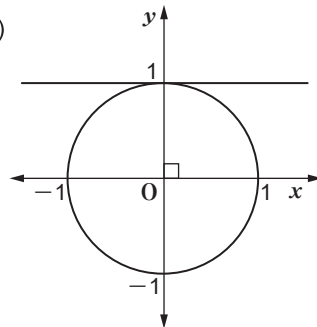
c) $\text{sen}(-270^\circ) = 1, \text{cos}(-270^\circ) = 0,$
 $\text{tan}(-270^\circ) \text{ NE}$

83.

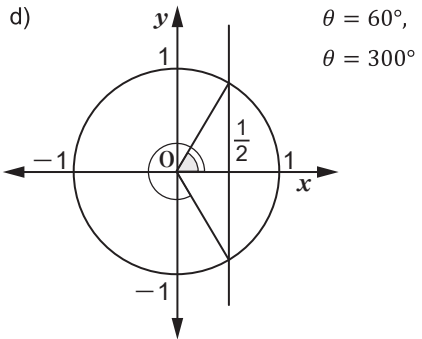
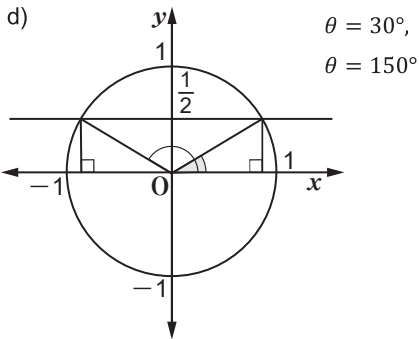
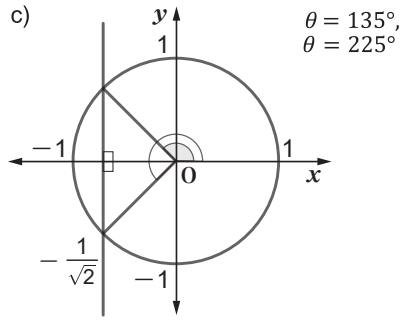
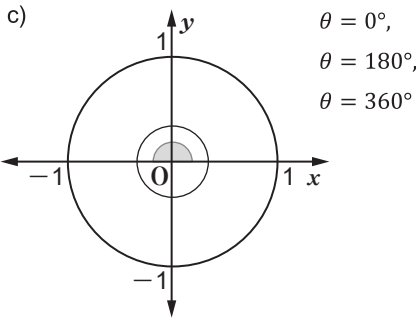
a)



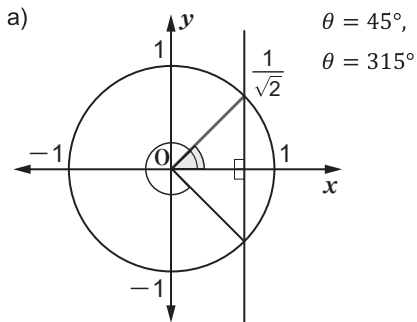
b)



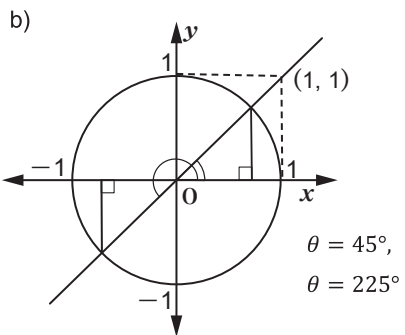
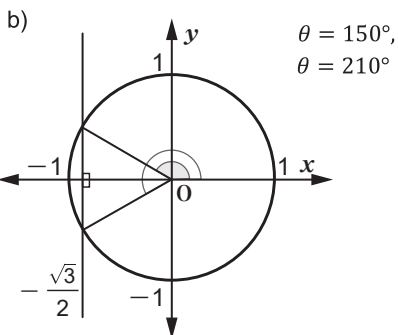
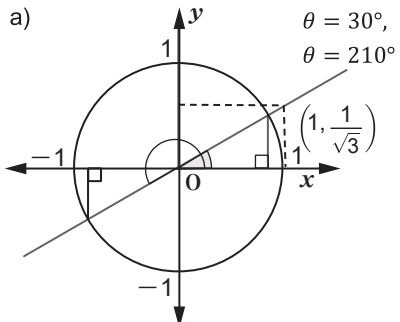
$\theta = 90^\circ$

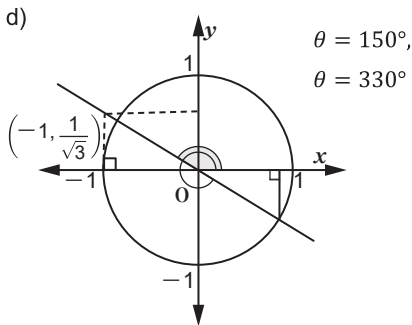
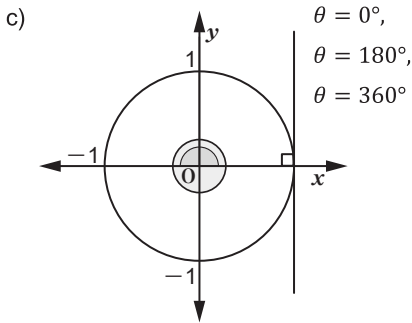


84.



85.





Sección 2: Relación entre seno, coseno y tangente

86.

$$\text{sen } \theta = \tan \theta \cos \theta$$

$$(\tan \theta \cos \theta)^2 + \cos^2 \theta = 1$$

$$(\tan^2 \theta)(\cos^2 \theta) + \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta (\tan^2 \theta + 1) = 1$$

$$\tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

87.

a) $\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

$$\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$$

Como θ se encuentra en el II cuadrante $\cos \theta < 0$

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{4} \div \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{15}}$$

b)

$$\text{sen}^2 \theta = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

Como θ se encuentra en el III cuadrante $\text{sen } \theta < 0$

$$\text{sen } \theta = -\frac{\sqrt{8}}{3} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta} = \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \div \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= 2\sqrt{2}$$

c)

$$\text{sen}^2 \theta = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$$

Como θ se encuentra en el IV cuadrante $\text{sen } \theta < 0$

$$\text{sen } \theta = -\frac{12}{13}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta} = \left(-\frac{12}{13}\right) \div \frac{5}{13} = -\frac{12}{5}$$

d)

$$\cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

Como θ se encuentra en el IV cuadrante $\cos \theta > 0$

$$\cos \theta = \frac{2}{3}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \div \frac{2}{3} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

88.

a) $\tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$

$$(-2)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

Como θ se encuentra en el II cuadrante $\cos \theta < 0$

$$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta = \tan \theta \cos \theta &= (-2) \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (\sqrt{2})^2 + 1 &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ \cos^2 \theta &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Como θ se encuentra en el I cuadrante $\cos \theta > 0$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta = \tan \theta \cos \theta &= (\sqrt{2}) \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{9}{10}$$

Como θ se encuentra en el III cuadrante $\cos \theta < 0$

$$\cos \theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta = \tan \theta \cos \theta &= \left(\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (-2\sqrt{2})^2 + 1 &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ \cos^2 \theta &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Como θ se encuentra en el IV cuadrante $\cos \theta > 0$

$$\cos \theta = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta = \tan \theta \cos \theta &= (-2\sqrt{2}) \left(\frac{1}{3}\right) \\ &= -\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

Sección 3: Relación entre las funciones trigonométricas

89.

$$\begin{aligned} \text{a) } \operatorname{sen} 45^\circ &= \operatorname{sen}(360^\circ + 90^\circ) \\ &= \operatorname{sen} 90^\circ = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos 75^\circ &= \cos[360^\circ(2) + 30^\circ] \\ &= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \tan 39^\circ &= \tan(360^\circ + 30^\circ) \\ &= \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\text{d) } \operatorname{sen}(-120^\circ) = -\operatorname{sen} 120^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{e) } \cos(-150^\circ) = \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \tan(-405^\circ) &= -\tan 405^\circ \\ &= -\tan(360^\circ + 45^\circ) \\ &= -\tan 45^\circ = -1 \end{aligned}$$

90.

$$\begin{aligned} \text{a) } \operatorname{sen} 225^\circ &= \operatorname{sen}(180^\circ + 45^\circ) \\ &= -\operatorname{sen} 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos 225^\circ &= \cos(180^\circ + 45^\circ) \\ &= -\cos 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \tan 240^\circ &= \tan(180^\circ + 60^\circ) \\ &= \tan 60^\circ = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \operatorname{sen} 135^\circ &= \operatorname{sen}(180^\circ - 45^\circ) \\ &= \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \cos 120^\circ &= \cos(180^\circ - 60^\circ) \\ &= -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \tan 120^\circ &= \tan(180^\circ - 60^\circ) \\ &= -\tan 60^\circ = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

91.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin 120^\circ &= \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos 135^\circ &= \cos(90^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \tan 150^\circ &= \tan(90^\circ + 60^\circ) \\ &= -\frac{1}{\tan 60^\circ} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Sección 4: Gráficas de las funciones trigonométricas

92.

$$\text{a) } 75^\circ = 75 \left(\frac{\pi}{180} \right) = \frac{5}{12} \pi \text{ (rad)}$$

$$\text{b) } 140^\circ = 140 \left(\frac{\pi}{180} \right) = \frac{7}{9} \pi \text{ (rad)}$$

$$\text{c) } 250^\circ = 250 \left(\frac{\pi}{180} \right) = \frac{25}{18} \pi \text{ (rad)}$$

$$\text{d) } -330^\circ = -330 \left(\frac{\pi}{180} \right) = -\frac{11}{6} \pi \text{ (rad)}$$

$$\text{e) } \frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{9} \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right) = 20^\circ$$

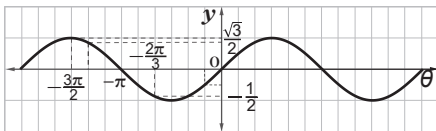
$$\text{f) } \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right) = 120^\circ$$

$$\text{g) } \frac{7\pi}{5} = \frac{7\pi}{5} \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right) = 252^\circ$$

$$\text{h) } -\frac{5\pi}{3} = -\frac{5\pi}{3} \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right) = -300^\circ$$

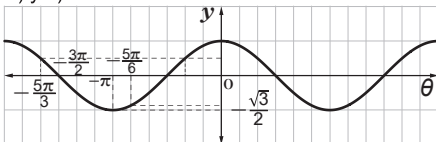
93.

a) y b)



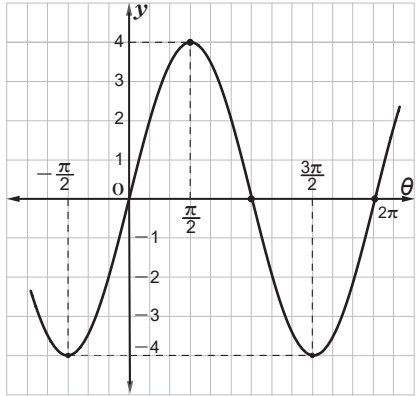
94.

a) y b)



95.

a)



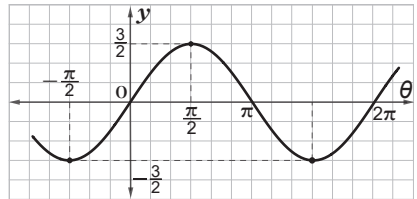
Propiedades

Período: 2π

Amplitud: 4

Rango: $-4 \leq y \leq 4$

b)



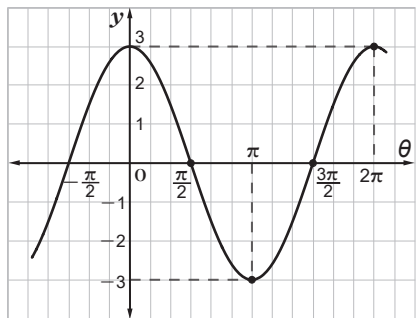
Propiedades

Período: 2π

Amplitud: $\frac{3}{2}$

Rango: $-\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$

c)



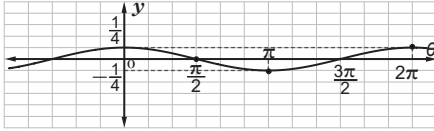
Propiedades

Período: 2π

Amplitud: 3

Rango: $-3 \leq y \leq 3$

d)



Propiedades

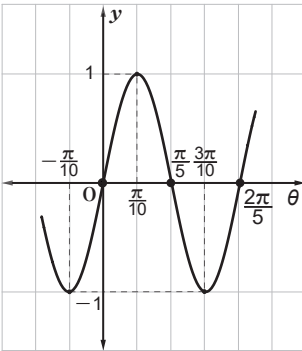
Período: 2π

Amplitud: $\frac{1}{4}$

Rango: $-\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{1}{4}$

96.

a)



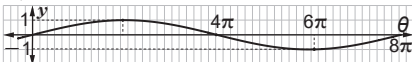
Propiedades

Período: $\frac{2\pi}{5}$

Amplitud: 1

Rango: $-1 \leq y \leq 1$

b)



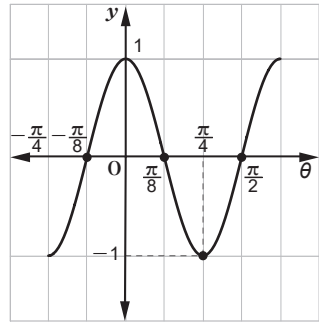
Propiedades

Período: 8π

Amplitud: 1

Rango: $-1 \leq y \leq 1$

c)



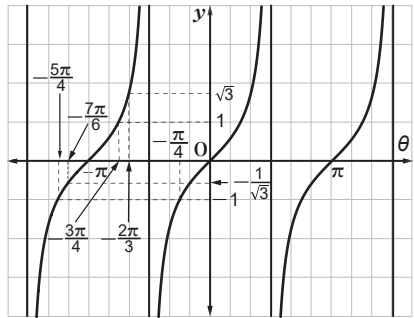
Propiedades

Período: $\frac{\pi}{2}$ Amplitud: 1

Rango: $-1 \leq y \leq 1$

97.

a) y b)



Unidad 7: Trigonometría Analítica

Sección 1: Ley del seno

98.

$$a) \frac{a}{\text{sen } 60^\circ} = \frac{4\sqrt{2}}{\text{sen } 45^\circ}$$

$$a = \left(\frac{4\sqrt{2}}{\text{sen } 45^\circ} \right) (\text{sen } 60^\circ)$$

$$= \left(\frac{4\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= (8) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 4\sqrt{3}$$

$$b) \frac{c}{\operatorname{sen} 45^\circ} = \frac{8}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \left(\frac{4}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$c = \left(\frac{8}{\operatorname{sen} 30^\circ}\right) (\operatorname{sen} 45^\circ) = (4\sqrt{2}) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{8}{\frac{1}{2}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{6}$$

$$= (16) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 8\sqrt{2}$$

$$c) \frac{b}{\operatorname{sen} 60^\circ} = \frac{4}{\operatorname{sen} 45^\circ}$$

$$b = \left(\frac{4}{\operatorname{sen} 45^\circ}\right) (\operatorname{sen} 60^\circ)$$

$$= \left(\frac{4}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= (4\sqrt{2}) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 2\sqrt{6}$$

$$d) \frac{c}{\operatorname{sen} 120^\circ} = \frac{3}{\operatorname{sen} 30^\circ}$$

$$c = \left(\frac{3}{\operatorname{sen} 30^\circ}\right) (\operatorname{sen} 120^\circ)$$

$$= \left(\frac{3}{\frac{1}{2}}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= (6) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 3\sqrt{3}$$

$$e) \sphericalangle C = 180^\circ - (120^\circ + 15^\circ) = 45^\circ$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 120^\circ} = \frac{4}{\operatorname{sen} 45^\circ}$$

$$a = \left(\frac{4}{\operatorname{sen} 45^\circ}\right) (\operatorname{sen} 120^\circ)$$

99.

$$a) \frac{2}{\operatorname{sen} C} = \frac{\sqrt{6}}{\operatorname{sen} 60^\circ}$$

$$\operatorname{sen} C = \frac{2 \operatorname{sen} 60^\circ}{\sqrt{6}} = \frac{2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Como $\sphericalangle C < 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$,
así que $\sphericalangle C = 45^\circ$

$$b) \frac{4}{\operatorname{sen} A} = \frac{4\sqrt{2}}{\operatorname{sen} 45^\circ}$$

$$\operatorname{sen} A = \frac{4 \operatorname{sen} 45^\circ}{4\sqrt{2}} = \frac{4 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{4\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

Como $\sphericalangle A < 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$,
así que $\sphericalangle A = 30^\circ$

$$c) \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen} A} = \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{sen} 120^\circ}$$

$$\operatorname{sen} A = \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen} 120^\circ}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(\sqrt{2})(\sqrt{3})}{2(\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Como $\sphericalangle A < 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$,
así que $\sphericalangle A = 45^\circ$

$$d) \frac{8\sqrt{3}}{\operatorname{sen} C} = \frac{8}{\operatorname{sen} 30^\circ}$$

$$\operatorname{sen} C = \frac{8\sqrt{3} \operatorname{sen} 30^\circ}{8} = \sqrt{3} \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

De donde $\sphericalangle C = 60^\circ$ o $\sphericalangle C = 120^\circ$

$$e) \frac{6}{\operatorname{sen} B} = \frac{6\sqrt{2}}{\operatorname{sen} 135^\circ}$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{6 \operatorname{sen} 135^\circ}{6\sqrt{2}} = \frac{6\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Como $\angle B < 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$,
Así que $\angle B = 30^\circ$

100.

En el $\triangle ADB$,

$$\angle ADB = 180^\circ - (45^\circ + 105^\circ) = 30^\circ.$$

Así que

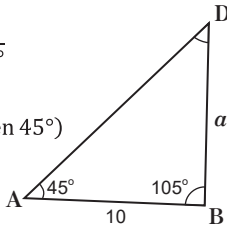
$$\frac{a}{\operatorname{sen} 45^\circ} = \frac{10}{\operatorname{sen} 30^\circ}$$

$$a = \left(\frac{10}{\operatorname{sen} 30^\circ}\right) (\operatorname{sen} 45^\circ)$$

$$= \left(\frac{10}{\frac{1}{2}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= (20) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 10\sqrt{2}$$

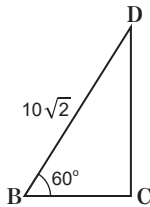


Luego

$$CD = 10\sqrt{2} \operatorname{sen} 60^\circ$$

$$= (10\sqrt{2}) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 5\sqrt{6}$$



101.

$$a) \text{Área} = \frac{1}{2} ac \operatorname{sen} B$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) (3)(6) \operatorname{sen} 60^\circ = (9) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$b) \text{Área} = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) (8)(2\sqrt{2}) \operatorname{sen} 135^\circ = (8\sqrt{2}) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 8$$

$$c) \text{Área} = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) (5)(8) \operatorname{sen} 30^\circ = (20) \left(\frac{1}{2}\right) = 10$$

$$d) \text{Área} = \frac{1}{2} ac \operatorname{sen} B$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) (6)(5) \operatorname{sen} 150^\circ = (15) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{2}$$

Sección 2: Ley del coseno

102.

$$a) a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{cos} A$$

$$a^2 = (\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2(\sqrt{3})(2) \operatorname{cos} 150^\circ$$

$$= 3 + 4 - 2(\sqrt{3})(2) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 13, \text{ como } a > 0, a = \sqrt{13}$$

$$b) c^2 = 5^2 + 4^2 - 2(5)(4) \operatorname{cos} 60^\circ$$

$$= 25 + 16 - 2(5)(4) \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 21, \text{ como } c > 0, c = \sqrt{21}$$

$$c) b^2 = 5^2 + (3\sqrt{3})^2 - 2(5)(3\sqrt{3}) \operatorname{cos} 30^\circ$$

$$= 25 + 27 - 2(5)(3\sqrt{3}) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 7, \text{ como } b > 0, b = \sqrt{7}$$

$$d) c^2 = 3^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2(3)(2\sqrt{2}) \operatorname{cos} 45^\circ$$

$$= 9 + 8 - 2(3)(2\sqrt{2}) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 5, \text{ como } c > 0, c = \sqrt{5}$$

$$e) c^2 = 3^2 + 5^2 - 2(3)(5) \operatorname{cos} 120^\circ$$

$$= 9 + 25 - 2(3)(5) \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 49, \text{ como } c > 0, c = 7$$

103.

$$a) \operatorname{cos} C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$= \frac{3^2 + 2^2 - (\sqrt{7})^2}{2(3)(2)} = \frac{9 + 4 - 7}{12} = \frac{1}{2}$$

Como $0^\circ < \angle C < 90^\circ$, $\angle C = 60^\circ$

$$b) \cos A = \frac{3^2 + 8^2 - 7^2}{2(3)(8)}$$

$$= \frac{9 + 64 - 49}{48} = \frac{1}{2}$$

Como $0^\circ < \sphericalangle A < 90^\circ$, $\sphericalangle A = 60^\circ$

$$c) \cos A = \frac{1^2 + (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{7})^2}{2(1)(2\sqrt{3})}$$

$$= \frac{1 + 12 - 7}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como $0^\circ < \sphericalangle A < 90^\circ$, $\sphericalangle A = 30^\circ$

$$d) \cos B = \frac{1^2 + (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2}{2(1)(\sqrt{2})}$$

$$= \frac{1 + 2 - 5}{2\sqrt{2}} = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Como $0^\circ < \sphericalangle B < 180^\circ$, $\sphericalangle A = 135^\circ$

$$e) \cos C = \frac{5^2 + 12^2 - 13^2}{2(5)(13)}$$

$$= \frac{25 + 144 - 169}{130} = 0$$

Como $0^\circ < \sphericalangle C < 180^\circ$, $\sphericalangle C = 90^\circ$

104.

$$AC^2 = 3^2 + 2^2 - 2(3)(2) \cos 150^\circ$$

$$= 9 + 4 - 2(3)(2) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 13 + 6\sqrt{3}$$

Como $AC > 0$, $AC = \sqrt{13 + 6\sqrt{3}}$

Unidad 8: Estadística

Sección 1: Medidas de tendencia central y representación gráfica de datos

105.

a) Media aritmética:

$$\frac{4 + 7 + 10 + 8 + 9 + 9 + 9}{7} = \frac{56}{7} = 8$$

Moda: 9

Mediana: 9

Se ordenan los datos de menor a mayor: 4, 7, 8, 9, 9, 9, 10.

b) Media aritmética: 7 Moda: 5

Mediana: 7

c) Media aritmética: 10 Moda: 12

$$\text{Mediana: } \frac{9 + 10}{2} = 9,5$$

d) Media aritmética: 13 Moda: 12

Mediana: 12

106.

a)

	A	B
Media	3	3
Moda	2	3
Mediana	2	3

b)

	A	B
Media	2,75	3
Moda	2	2
Mediana	2,5	2,5

107.

a)

60 - 70	70 - 80	80 - 90	90 - 100
---------	---------	---------	----------

b)

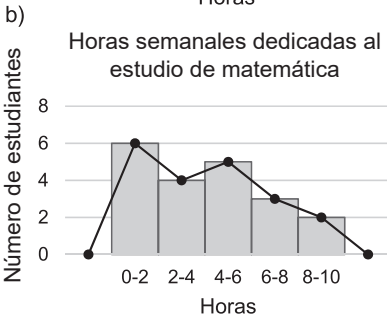
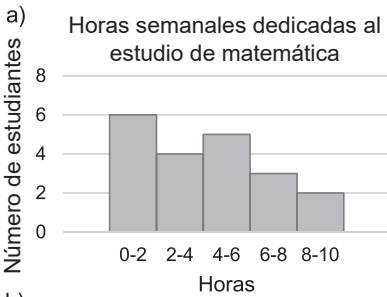
Grupo (intervalo)	
60 - 70	62, 62, 64, 68, 69
70 - 80	71, 71, 72, 72, 73, 73, 74, 74, 74, 75, 76, 77, 79
80 - 90	80, 82
90 - 100	92, 93, 95, 96, 99

108.

- a) El ancho de cada clase es 4.
b)

Edades	Número de mujeres (f_i)	Marca de clase (M_i)
20 - 24	5	22
24 - 28	2	26
28 - 32	6	30
32 - 36	8	34
36 - 40	9	38
Total	30	

109.



110.

Edades de 20 niños

Edad	Número de niños (f_i)	Marca de clase (M_i)	$f_i \cdot M_i$	Frecuencia acumulada (F_i)
0 - 3	10	1,5	15	10
3 - 6	6	4,5	27	16
6 - 9	3	7,5	22,5	19
9 - 12	1	10,5	10,5	20
Total	20		75	

Media: $\frac{75}{20} = 3,75$,

Moda: 1,5

Mediana: $\frac{20 + 1}{2} = 10,5$.

Este valor central se ubica en la segunda clase en la tabla. Entonces $M_e = 4,5$.

111.

a)

Horas	No. de estudiantes de la sección A (f_i)	Marca de clase (M_i)	$f_i \cdot M_i$	Frecuencia acumulada (F_i)
0 - 2	4	1	4	4
2 - 4	3	3	9	7
4 - 6	6	5	30	13
6 - 8	3	7	21	16
8 - 10	4	9	36	20
Total	20		100	

Media: $\frac{100}{20} = 5$, Moda: 5, Mediana: 5

b)

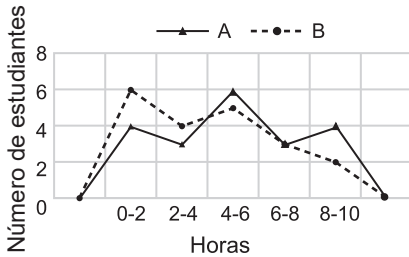
Horas	Nú. de estudiantes de la sección B (f_i)	Marca de clase (M_i)	$f_i \cdot M_i$	Frecuencia acumulada (F_i)
0 - 2	6	1	6	6
2 - 4	4	3	12	10
4 - 6	5	5	25	15
6 - 8	3	7	21	18
8 - 10	2	9	18	20
Total	20		82	

Media: $\frac{82}{20} = 4,1$,

Moda: 1,

Mediana: 5

c)



La media y moda del grupo A son más altas que los del grupo B. Aunque las medianas son iguales.

Sección 2: Medidas de posición y dispersión

112.

a) Se ordenan los datos de menor a mayor: 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76.

$$Q_1 = 71, Q_2 = 73, Q_3 = 75.$$

b)

Se ordenan los datos de menor a mayor: 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5.

$$Q_1 = 1, Q_2 = 2, Q_3 = 4$$

113.

a)

Se ordenan los datos de menor a mayor: 4, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9.

$$Q_1 = \frac{6+6}{2} = 6, Q_2 = 7, Q_3 = \frac{8+8}{2} = 8.$$

b) $Q_1 = \frac{52+54}{2} = 53,$

$$Q_2 = \frac{56+60}{2} = 58,$$

$$Q_3 = \frac{61+64}{2} = 62,5$$

114.

a) $S^2 = \frac{1+4+9+0+4}{5-1} = 4,5$

b) $S = \sqrt{4,5} \approx 2,1.$

c) 5 + 2,1 = 7,1 por encima y
5 - 2,1 = 2,9 por debajo.

115.

a) $S^2 = 6,25$ b) $S = 2,5$

c) 6,5 por encima y 1,5 por debajo.

116.

a) Para la sección A,

$$S^2 = \frac{4+1+0+4+1}{7-1} \approx 1,67$$

$$S \approx 1,29$$

Luego, $CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{1,29}{7} = 0,18$

Para la sección B,

$$S^2 \approx 7,83$$

$$S \approx 2,8$$

$$CV = \frac{2,8}{7} = 0,4$$

b) El grupo A tiene menor variación en el número de horas que durmieron la noche anterior, porque su coeficiente de variación es menor que el de B.

117.

	Equipo A	Equipo B
CV	$\frac{3}{72} \approx 0,04$	$\frac{4}{64} \approx 0,06$

El grupo A tiene menor variación.

Solucionarios de Ejercicios Avanzados

Unidad 1: Conjuntos e Intervalos Numéricos

EA1.

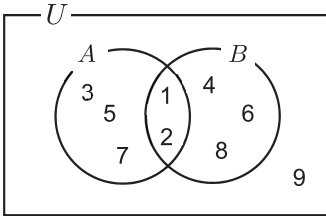
$$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$

$$\bar{B} = \{1, 4, 6, 9\}$$

$$(A \cup C) \cap \bar{B} = \{1, 4, 6\}$$

$$n[(A \cup C) \cap \bar{B}] = 3$$

EA2.



a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

b) $B = \{1, 2, 4, 6, 8\}$

c) $A \cap \bar{B} = \{3, 5, 7\}$

EA3.

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$$

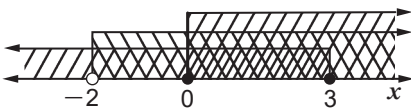
$$C = \{4, 5, 6, 7\}$$

$$(A \cap B) - C = \{1, 2, 3\}$$

EA4.

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 3\}$$

$$(A \cap B) \cup C = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$$



EA5.

$$B - A = \{4, 5, 9\}$$

$$C - A = \{8, 9\}$$

$$(B - A) \cup (C - A) = \{4, 5, 8, 9\}$$

Unidad 2: Inecuaciones de Primer y Segundo Grado

EA6.

$$3x - 7 \leq 2x - 6, \quad 2x - 6 \leq 4x + 4$$

$$3x - 2x \leq -6 + 7, \quad 2x - 4x \leq 4 + 6$$

$$x \leq 1, \quad -2x \leq 10$$

$$x \leq 1, \quad x \geq -5$$

Solución: $-5 \leq x \leq 1$

EA7.

$$\begin{cases} x + 2 < 3x - 8 \\ 2(x + 6) \leq 7x - 3 \end{cases}$$

Solución de la primera inecuación:

$$x + 2 < 3x - 8$$

$$x - 3x < -8 - 2$$

$$-2x < -10$$

$$x > 5$$

Solución de la segunda inecuación:

$$2(x + 6) \leq 7x - 3$$

$$2x + 12 \leq 7x - 3$$

$$2x - 7x \leq -3 - 12$$

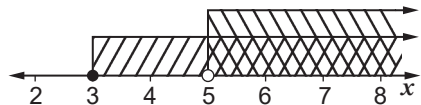
$$-5x \leq -15$$

$$x \geq 3$$

Solución del sistema de inecuación:

$$x > 5$$

EA8.



$$|2x - 3| < x$$

Se obtienen dos condiciones

$$2x - 3 \geq 0, \quad 2x - 3 < 0$$

Aplicando la propiedad del valor absoluto se obtiene que:

$$|2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3, & (2x - 3 \geq 0) \\ -(2x - 3), & (2x - 3 < 0) \end{cases}$$

Para $2x - 3 \geq 0$, $x \geq \frac{3}{2}$

$|2x - 3| = 2x - 3$ primera condición

$2x - 3 < x$, $x < 3$

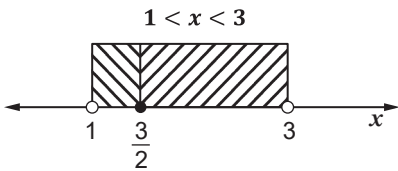
Por tanto, $\frac{3}{2} \leq x < 3$

Para $2x - 3 < 0$, $x < \frac{3}{2}$

$|2x - 3| = -(2x - 3)$ segunda condición

$-(2x - 3) < x$, $x > 1$

Por tanto, $1 < x < \frac{3}{2}$



EA9. $\begin{cases} x^2 + 6x + 8 > 0 \\ x^2 + 2x - 3 \leq 0 \end{cases}$

Para $x^2 + 6x + 8 > 0$

$x^2 + 6x + 8 = 0$

$(x + 4)(x + 2) = 0$

$x = -4$, $x = -2$

$x < -4$, $x > -2$

Para $x^2 + 2x - 3 \leq 0$

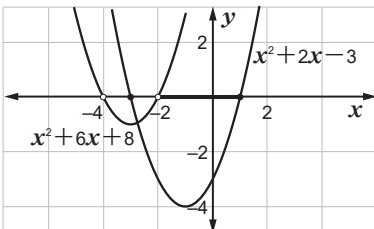
$x^2 + 2x - 3 = 0$

$(x + 3)(x - 1) = 0$

$x = -3$, $x = 1$

$-3 \leq x \leq 1$

Del bosquejo de la gráfica se puede observar los valores de x que dan solución a ambas inecuaciones del sistema.



Solución del sistema: $-2 < x \leq 1$

Unidad 3: Fracciones Algebraicas

EA10.

a) $\frac{x+1}{x} - \frac{x+2}{x+1} - \frac{x+4}{x+2} + 1$

$$= \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{x+2}\right) + 1$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

$$= \frac{(x+1)(x+2) - x(x+2) - x(x+1)}{x(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{-x^2 + 2}{x(x+1)(x+2)}$$

b) $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)}$

$$+ \frac{1}{(x+2)(x+3)}$$

$$= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right)$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} = \frac{x+3-x}{x(x+3)} = \frac{3}{x(x+3)}$$

EA11.

$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} = \frac{-2}{a^2 - 2a}$

$\frac{1+a}{a^2} = \frac{-2}{a(a-2)}$

$\frac{1+a}{a} = \frac{-2}{a-2}$

$(a+1)(a-2) = -2a$

$a^2 - a - 2 = -2a$

$a^2 + a - 2 = 0$

Resolviendo la ecuación de segundo grado

$a^2 + a - 2 = 0$

$(a+2)(a-1) = 0$

$a = -2$, $a = 1$

Unidad 4: Ecuaciones de Tercer**Grado****EA12.**

$$5 = c^3 + 2c^2 - 3c - 5$$

$$c^3 + 2c^2 - 3c - 10 = 0$$

10 es divisible por: $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$

Pero el que anula al polinomio es: $+2$

Por tanto $c-2$ es un factor del polinomio

Así que

$$(c-2)(c^2 + 4c + 5) = 0$$

$$c-2 = 0, \quad c^2 + 4c + 5 = 0$$

La ecuación de segundo grado

$c^2 + 4c + 5 = 0$ no tiene solución en los números reales.

Entonces, $c = 2$

EA13.

$$3x^3 - 1 + (x+1)^3 = 2x^3 + 8$$

$$3x^3 - 1 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 2x^3 + 8$$

$$2x^3 + 3x^2 + 3x - 8 = 0$$

-8 es divisible por: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

Pero, el que anula al polinomio es: $+1$

Por tanto, $x-1$ es un factor del polinomio

Así que

$$(x-1)(2x^2 + 5x + 8) = 0$$

$$x = 1, \quad 2x^2 + 5x + 8 = 0$$

La única solución en los números reales es $x = 1$

EA14.

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 7 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Se despeja x en la segunda ecuación

$x = 3 - y$ para sustituirla en la ecuación

$x^3 - y^3 = 7$. Es decir,

$$(3-y)^3 - y^3 = 7$$

$$27 - 27y + 9y^2 - y^3 - y^3 = 7$$

$$2y^3 - 9y^2 + 27y - 20 = 0$$

-20 es divisible por:

$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20$

Pero el que anula al polinomio es: $+1$

Por tanto $y-1$ es un factor del polinomio

Así que

$$(y-1)(2y^2 - 7y + 20) = 0$$

$$y = 1, (2y^2 - 7y + 20) = 0$$

$y = 1$ es la única solución en los números reales

Como $x = 3 - y$

$x = 3 - 1 = 2$ es la única solución en los números reales

Solución:

$$x = 2, \quad y = 1$$

EA15.

$$x^3 + (4+k)x^2 - 4kx + 8$$

1	4+k	-4k	8	-1
	-1	-k-3	3+5k	
1	k+3	-5k-3	11+5k	

Como el residuo es $11 + 5k = 1$, resolviendo

$$5k = 1 - 11$$

$$5k = -10$$

$$k = -2$$

Unidad 5: Introducción a la Trigonometría**EA16.**

$$a = 12 \operatorname{sen} 45^\circ = (12) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 6\sqrt{2}$$

$$x = 12 \operatorname{cos} 45^\circ = (12) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 6\sqrt{2}$$

$$m = 6\sqrt{2} \div \operatorname{sen} 60^\circ = 6\sqrt{2} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{6}$$

$$y = 4\sqrt{6} \operatorname{cos} 60^\circ = (4\sqrt{6}) \left(\frac{1}{2} \right) = 2\sqrt{6}$$

EA17.

$$\tan a = \frac{m}{AC} = \frac{m}{n+DC}, \quad \tan b = \frac{m}{DC}$$

$$n+DC = \frac{m}{\tan a}$$

$$DC = \frac{m}{\tan a} - n, \quad DC = \frac{m}{\tan b}$$

$$\frac{m}{\tan a} - n = \frac{m}{\tan b}$$

Se multiplica ambos lados por $\tan a \tan b$ para obtener

$$m \tan b - n \tan a \tan b = m \tan a$$

$$m(\tan a - \tan b) = -n \tan a \tan b$$

$$m = \frac{-n \tan a \tan b}{\tan a - \tan b}$$

EA18.

a)

$$\text{sen}(90^\circ - A) \cos A + \cos(90^\circ - A) \text{sen } A$$

$$= \cos A \cdot \cos A + \text{sen } A \cdot \text{sen } A$$

$$= \cos^2 A + \text{sen}^2 A$$

$$= 1$$

b)

$$(\text{sen } A + \cos A)^2$$

$$= \text{sen}^2 A + 2 \text{sen } A \cos A + \cos^2 A$$

$$(\text{sen } A - \cos A)^2$$

$$= \text{sen}^2 A - 2 \text{sen } A \cos A + \cos^2 A$$

Por tanto

$$(\text{sen } A + \cos A)^2 + (\text{sen } A - \cos A)^2$$

$$= 2(\text{sen}^2 A + \cos^2 A)$$

$$= (2)(1)$$

$$= 2$$

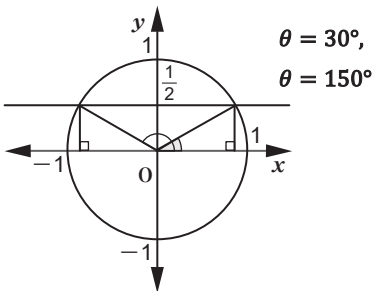
Unidad 6: Funciones Trigonómicas

EA19.

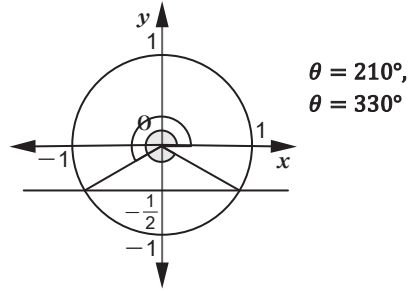
II cuadrante o IV cuadrante

EA20.

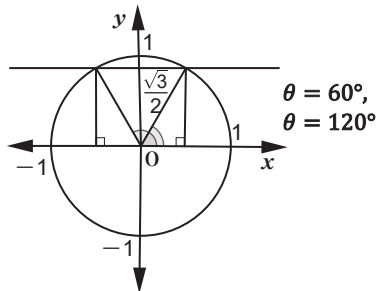
a) $\text{sen } \theta = \frac{1}{2}$



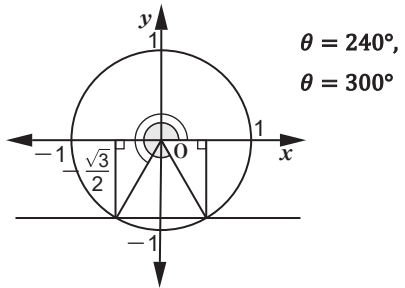
$$\text{sen } \theta = -\frac{1}{2}$$



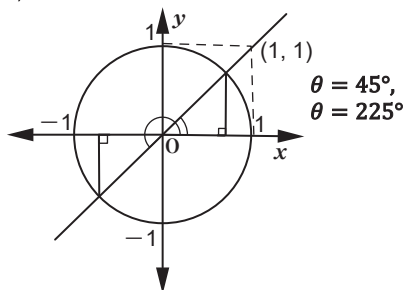
b) $\text{sen } \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

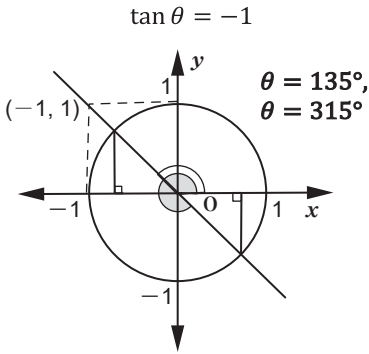


$$\text{sen } \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



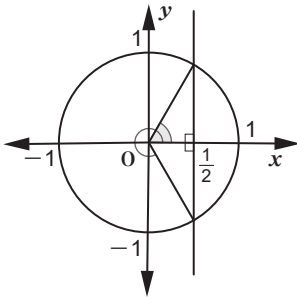
c) $\tan \theta = 1$





d) $2\cos^2 \theta + 3\cos \theta - 2 = 0$
 $(2\cos \theta - 1)(\cos \theta + 2) = 0$
 $2\cos \theta - 1 = 0, \quad \cos \theta + 2 = 0$
 $\cos \theta = \frac{1}{2}, \quad \cos \theta = -2$

Como $-1 \leq \cos \theta \leq 1$, entonces $\cos \theta = \frac{1}{2}$.



$\theta = 60^\circ, \quad \theta = 300^\circ$

EA21.

a) $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}$
 $= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$
 $= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta}$
 $= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$

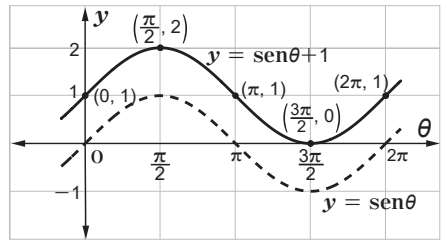
b) $(\sin \theta + \cos \theta)^2$
 $= \sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$
 $(\sin \theta - \cos \theta)^2$
 $= \sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$

En consecuencia,

$(\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2$
 $= 2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$
 $= (2)(1)$
 $= 2$

EA22.

a)



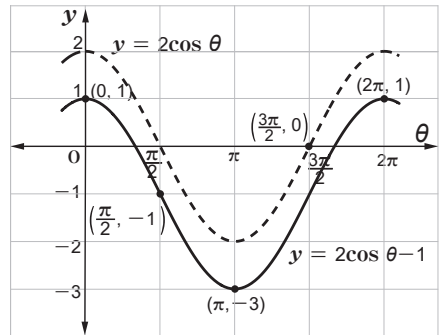
Propiedades

Periodo: 2π

Amplitud: 1

Rango: $0 \leq y \leq 2$

b)



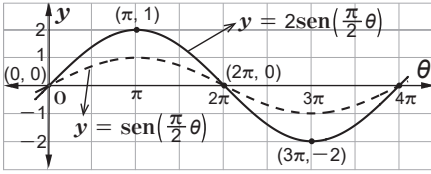
Propiedades

Periodo: 2π

Amplitud: 2

Rango: $-3 \leq y \leq 1$

c)



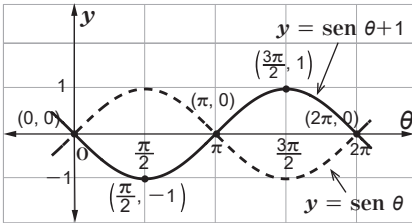
Propiedades

Período: 4π

Amplitud: 2

Rango: $-2 \leq y \leq 2$

d)



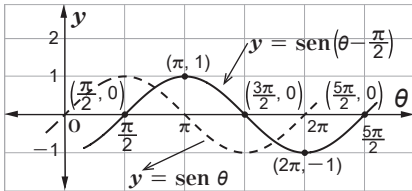
Propiedades

Período: 2π

Amplitud: 1

Rango: $-1 \leq y \leq 1$

e)



Propiedades

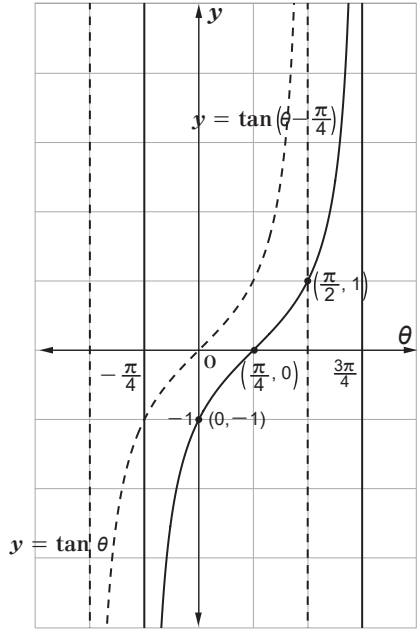
Período: 2π

Amplitud: 1

Rango: $-1 \leq y \leq 1$

Desplazamiento de Fase: $\frac{\pi}{2}$

f)



Propiedades

Período: π

Rango: Los números reales

Desplazamiento de Fase: $\frac{\pi}{4}$

Unidad 7: Trigonometría Analítica

EA23.

En ΔABD

$$\frac{4}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{4\sqrt{2}}{\text{sen } \angle ABD}$$

$$\text{sen } \angle ABD = \frac{4\sqrt{2} \text{sen } 30^\circ}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

De donde $\angle ABD = 135^\circ$ y

$\angle CBD = 45^\circ$

EA24.

a)

$$BD^2 = 5^2 + 8^2 - (2)(5)(8) \cos 60^\circ$$

$$= 25 + 64 - (2)(5)(8) \left(\frac{1}{2}\right) = 49$$

Como $BD > 0$, **BD = 7**

b) Como la suma de los ángulos opuestos de un cuadrilátero cíclico es 180° , entonces

$$\sphericalangle DCB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Sea $d = BC$. Por la ley del coseno se tiene

$$7^2 = 5^2 + d^2 - (2)(5)(d) \cos 120^\circ$$

$$49 = 25 + d^2 - (2)(5)(d) \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$d^2 + 5d - 24 = 0$$

$$(d + 8)(d - 3) = 0$$

$$d = -8, \quad d = 3$$

Dado que $d = BC > 0$, así que

$$\mathbf{BC = 3}$$

c)

Al trazar la diagonal \overline{BD} del cuadrilátero $ABCD$ se forman los triángulos $\triangle DAB$ y $\triangle DBC$ cuyas áreas son:

$$\begin{aligned} \text{Área del } \triangle DAB &= \left(\frac{1}{2}\right) (5)(8) \sin 60^\circ \\ &= (20) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Área del } \triangle DBC &= \left(\frac{1}{2}\right) (5)(3) \sin 120^\circ \\ &= \left(\frac{15}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{15\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned} \text{Área del cuadrilátero } ABCD \\ &= \text{Área del } \triangle DAB + \text{Área del } \triangle DBC. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \text{Área del cuadrilátero } ABCD. \\ 10\sqrt{3} + \frac{15\sqrt{3}}{4} = \frac{\mathbf{55\sqrt{3}}}{4} \end{aligned}$$

EA25.

a) Por el Teorema de Pitágoras se tiene

$$\begin{aligned} EB^2 &= (\sqrt{6})^2 + 1^2 = 7, \text{ es decir,} \\ EB &= \sqrt{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ED^2 &= (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4, \text{ es decir,} \\ ED &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DB^2 &= (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{3})^2 = 9, \text{ es decir,} \\ EB &= 3 \end{aligned}$$

Por la ley del coseno se sigue que

$$\begin{aligned} \cos \sphericalangle EDB &= \frac{2^2 + 3^2 - (\sqrt{7})^2}{(2)(2)(3)} \\ &= \frac{4 + 9 - 7}{12} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

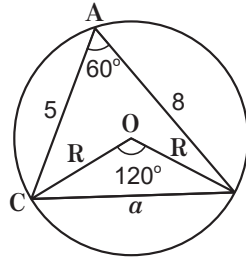
Como $0^\circ < \sphericalangle EDB < 180^\circ$,
 $\sphericalangle EDB = 60^\circ$.

b)

$$\begin{aligned} \text{Área del } \triangle EDB &= \left(\frac{1}{2}\right) (2)(3) \sin 60^\circ \\ &= (3) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\mathbf{3\sqrt{3}}}{2} \end{aligned}$$

EA26.

a)



$$\begin{aligned} a^2 &= 5^2 + 8^2 - (2)(5)(8) \cos 60^\circ \\ &= 25 + 64 - (2)(5)(8) \left(\frac{1}{2}\right) = 49 \end{aligned}$$

Como $a > 0$, $a = 7$

b) Área del

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \left(\frac{1}{2}\right) (5)(8) \sin 60^\circ \\ &= (20) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10\sqrt{3} \end{aligned}$$

c) Por la ley del coseno se tiene que

$$7^2 = R^2 + R^2 - (2)(R)(R) \cos 120^\circ$$

$$49 = 2R^2 - 2R^2 \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$3R^2 = 49$$

$$R^2 = \frac{49}{3}$$

Como $R > 0$, $R = \frac{7}{\sqrt{3}}$