Unidad 6

Congruencia

Contenido 1 Triángulos congruentes

Aprendizajes esperados

Comprende el concepto de triángulos congruentes.

Secuencia:

En séptimo grado se estudió la rotación y traslación de triángulos. Estos tópicos son herramientas necesarias para la comprensión de esta unidad.

En esta clase se estudia el concepto de triángulos congruentes.

Puntos esenciales:

Indicar qué significa superponerse exactamente.

Explicar cómo utilizar la cuadricula cuando se rota o traslada un triángulo.

Aclarar que se pretende establecer una correspondencia entre los vértices, y que esta se hace de acuerdo a la coincidencia de estos al superponer un triángulo en el otro.

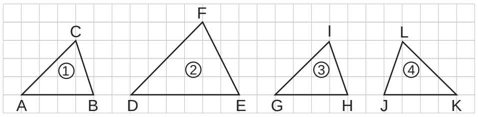
Especificar que al escribir la congruencia utilizando el símbolo ≅, el orden de los vértices debe ser respetando la correspondencia de ellos.

Unidad 6: Congruencia

Sección 1: Criterios de congruencia de triángulos

Contenido 1: Triángulos congruentes

P Identifique cuáles de los triángulos del ② al ④ se superponen exactamente al triángulo ①.



S Cada lado del ΔDEF es más grande que los lados del ΔABC, por lo cual no se pueden hacer coincidir dos vértices. Este triángulo no se superpone al ①.

Al superponer el triángulo ③ al ① se observa que:

G coincide con A, H coincide con B, I coincide con C.

Esto indica que ③ se superpone exactamente al ①.

Al rotar y superponer el triángulo ④ al ① se tiene:

K coincide con A, J coincide con B, L coincide con C.

Entonces ④ se superpone exactamente al ①.

Superponer es poner una cosa encima de otra.

C Si dos triángulos se superponen exactamente, entonces coinciden sus lados y ángulos respectivos, estableciéndose una correspondencia entre ellos. En este caso los triángulos se llaman congruentes y se relacionan con el símbolo ≅.

Ejemplo Escriba la congruencia entre los triángulos del problema, utilizando el símbolo ≅.

Dado que en los triángulos ① y ③

G coincide con A, H coincide con B, I coincide con C,

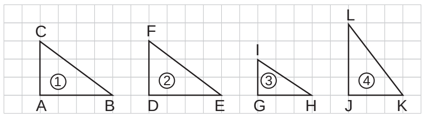
se escribe **ΔABC≅ΔGHI**.

En el caso de los triángulos ① y ④, al concluirse que

K coincide con A, J coincide con B, L coincide con C,

entonces **ΔABC≅ΔKJL.**

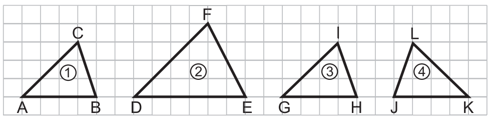
E
1. Identifique cuáles de los triángulos del ② al ④ son congruentes al triángulo ①.
2. Escriba la congruencia utilizando el símbolo ≅.



106

U6: Congruencia
S1: Criterios de congruencia de triángulos
C1: Triángulos congruentes

P ¿Qué triángulos se superponen al ①?



S El ② no se superpone al ①.

El ③ se superpone al ①. Se tiene:
G coincide con A
H coincide con B
I coincide con C

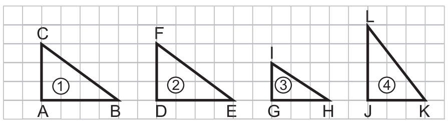
El ④ se superpone al ①. Se tiene:
K coincide con A
J coincide con B
L coincide con C

C Dos triángulos que se superponen exactamente se llaman triángulos congruentes.
≅ representa congruencia.

Ej Escriba la congruencia entre los triángulos del problema, utilizando ≅.

$\Delta ABC \cong \Delta GHI$ $\Delta ABC \cong \Delta KJL$

E
1. ¿Qué triángulos son congruentes al ①?
2. Escriba la congruencia utilizando ≅.



1. ② es congruente a ①
D coincide con A
E coincide con B
F coincide con C
2. $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

④ es congruente a ①
J coincide con A
L coincide con B
K coincide con C
$\Delta ABC \cong \Delta JLK$

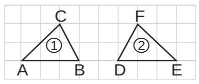
Contenido 2 Lados y ángulos correspondientes en triángulos congruentes

Contenido 2: Lados y ángulos correspondientes en triángulos congruentes

P

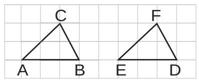
Los triángulos de la figura son congruentes. Rote y superponga el triángulo ② en el triángulo ①, y luego escriba:

a) Los lados y ángulos que coinciden.
b) La congruencia de los triángulos utilizando el símbolo ≅.



S

a) En la figura de la derecha se muestra el triángulo ② ya rotado. Se observa que al superponerlo en ①, se tiene:



$\overline{AB}$ coincide con $\overline{ED}$
$\overline{BC}$ coincide con $\overline{DF}$
$\overline{AC}$ coincide con $\overline{EF}$
$\angle A$ coincide con $\angle E$
$\angle B$ coincide con $\angle D$
$\angle C$ coincide con $\angle F$

b) La congruencia de estos triángulos se escribe **$\Delta ABC \cong \Delta EDF$**.

C

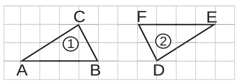
En dos triángulos congruentes, al superponer uno en el otro:

- Dos lados coincidentes se llaman **lados correspondientes.**
- Dos ángulos coincidentes se llaman **ángulos correspondientes.**

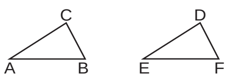
Ejemplo

Los triángulos de la figura son congruentes. Rote y superponga el triángulo ② en el ①. Luego escriba:

a) Los lados y ángulos correspondientes.
b) La congruencia de los triángulos utilizando el símbolo ≅.



a) Los lados correspondientes son:
$\overline{AB}$ y $\overline{EF}$; $\overline{BC}$ y $\overline{FD}$; $\overline{AC}$ y $\overline{ED}$
Los ángulos correspondientes son:
$\angle A$ y $\angle E$; $\angle B$ y $\angle F$; $\angle C$ y $\angle D$



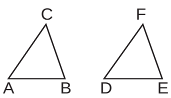
b) La congruencia de estos triángulos se escribe como **$\Delta ABC \cong \Delta EFD$**.

E

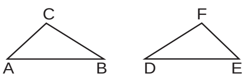
Los triángulos de cada inciso son congruentes. Escriba:

1. Los lados y ángulos correspondientes.
2. La congruencia entre los triángulos utilizando ≅.

a)



b)



Aprendizajes esperados

Identifica lados y ángulos correspondientes en triángulos congruentes.

Secuencia:

En la clase anterior se estudió que dos triángulos congruentes son aquellos que se superponen exactamente.

En esta clase se estudia cómo establecer una correspondencia entre los lados y los ángulos de dos triángulos congruentes.

Puntos esenciales:

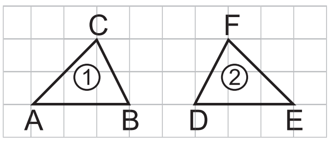
Señalar que se debe trasladar o rotar los triángulos, para identificar los lados y ángulos que coinciden respectivamente.

Explicar que la coincidencia de lados y ángulos, lleva a una correspondencia entre estos.

Recordar el cuido que se debe tener al escribir la congruencia utilizando el símbolo ≅.

C2: Lados y ángulos correspondientes en triángulos congruentes

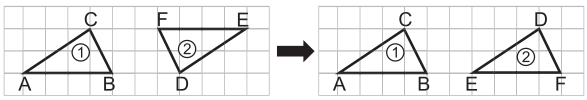
(P) Superponga el triángulo ② en el ①. Escriba:
a) Lados y ángulos que coinciden.
b) La congruencia utilizando ≅.



(S) a) Lados coincidentes
$\overline{AB}$ y $\overline{ED}$, $\overline{BC}$ y $\overline{DF}$, $\overline{AC}$ y $\overline{EF}$
Ángulos coincidentes
$\angle A$ y $\angle E$, $\angle B$ y $\angle D$, $\angle C$ y $\angle F$
b) $\Delta ABC \cong \Delta EDF$

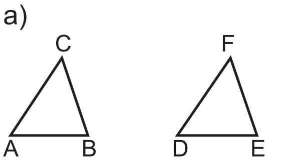
(C) Si se superponen triángulos congruentes:
Lados coincidentes son correspondientes.
Ángulos coincidentes son correspondientes.

(Ej) Dada la figura, escriba:
a) Lados y ángulos correspondientes.
b) La congruencia utilizando ≅.

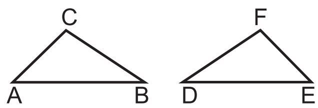


a) $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$; $\overline{BC}$ y $\overline{FD}$; $\overline{AC}$ y $\overline{ED}$
$\angle A$ y $\angle E$; $\angle B$ y $\angle F$; $\angle C$ y $\angle D$
b) $\Delta ABC \cong \Delta EFD$

(E) a)



b)



a)
$\overline{AB}$ y $\overline{DE}$; $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$; $\overline{AC}$ y $\overline{DF}$
$\angle A$ y $\angle D$; $\angle B$ y $\angle E$; $\angle C$ y $\angle F$
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

b)
$\overline{AB}$ y $\overline{ED}$; $\overline{BC}$ y $\overline{DF}$; $\overline{AC}$ y $\overline{EF}$
$\angle A$ y $\angle E$; $\angle B$ y $\angle D$; $\angle C$ y $\angle F$
$\Delta ABC \cong \Delta EDF$

Contenido 3 Definición de congruencia de triángulos

Aprendizajes esperados

Comprende la definición de congruencia de triángulos.

Secuencia:

En esta sección se estudió que, entre dos triángulos congruentes, se establece una correspondencia entre sus vértices, lados y ángulos.

En esta clase se estudia la definición de congruencia, basados en la correspondencia entre los lados y ángulos.

Puntos esenciales:

Indicar que, al coincidir lados y ángulos, esto significa que ellos tienen la misma medida.

Destacar que dos triángulos son congruentes, si los lados y ángulos correspondientes son de igual medida.

Señalar la importancia del orden en que se escriben los vértices de los triángulos al escribir la congruencia, pues esta debe indicar la igualdad entre las medidas respectivas de los ángulos y lados.

Contenido 3: Definición de congruencia de triángulos

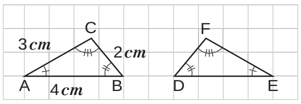
P

a) Si los triángulos de la derecha son congruentes, entonces:

DE = ☐

DF = ☐

EF = ☐

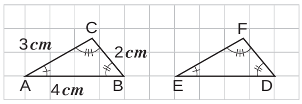


Los ángulos que tienen la misma marca, tienen igual medida.

b) Escriba la congruencia de los triángulos utilizando el símbolo ≅.

S

a) Al ser los dos triángulos congruentes, se pueden superponer haciendo coincidir los vértices A, B,C con E, D, F respectivamente. De esto podemos darnos cuenta que las medidas de los lados correspondientes son:



DE = BA = 4 cm

DF = BC = 2 cm

EF = AC = 3 cm

b) La congruencia entre los triángulos se escribe **ΔABC ≅ ΔEDF**.

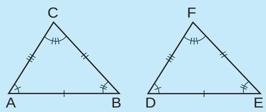
C

Los ΔABC y ΔDEF son congruentes, si y solo si los lados y ángulos correspondientes tienen la misma medida.

"Si y solo si" significa equivalencia

De acuerdo a la figura:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF \text{ si y solo si } \begin{cases} AB = DE & \measuredangle A = \measuredangle D \\ BC = EF & \measuredangle B = \measuredangle E \\ AC = DF & \measuredangle C = \measuredangle F \end{cases}$$



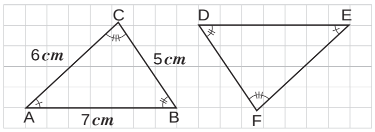
E

a) Si los triángulos de la figura son congruentes, entonces:

DE = ☐

EF = ☐

DF = ☐



b) Escriba la congruencia de los triángulos utilizando el símbolo ≅.

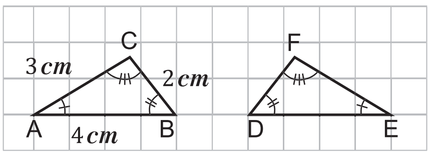
108

C3: Definición de congruencia de triángulos

P Si los triángulos son congruentes:

a) $DE =$ ☐ $DF =$ ☐ $EF =$ ☐

b) Escriba la congruencia utilizando ≅.



S Son lados correspondientes:

$\overline{BA}$ y $\overline{DE}$; $\overline{BC}$ y $\overline{DF}$; $\overline{AC}$ y $\overline{EF}$

a) $DE = BA = 4\ cm$

$DF = BC = 2\ cm$

$EF = AC = 3\ cm$

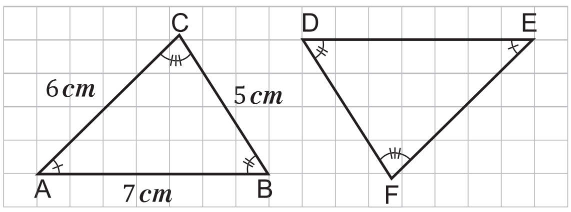
b) $\Delta ABC \cong \Delta EDF$

C Dos triángulos son congruentes si y solo si los lados y ángulos correspondientes tienen la misma medida.

E Si los triángulos son congruentes:

a) $DE =$ ☐ $EF =$ ☐ $DF =$ ☐

b) Escriba la congruencia utilizando ≅.



A con E a) $DE = BA = 7\ cm$

B con D $EF = AC = 6\ cm$

C con F $DF = BC = 5\ cm$

b) $\Delta ABC \cong \Delta EDF$

Contenido 4 Criterio de congruencia Ángulo-Lado-Ángulo (ALA)

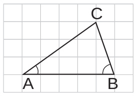
Contenido 4: Criterio de congruencia Ángulo-Lado-Ángulo (ALA)

P

Dado el triángulo de la figura, construya un ΔDEF, tal que:

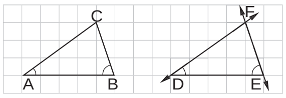
a) DE = AB
b) ∡D = ∡A
c) ∡E = ∡B

¿Son congruentes ΔABC y ΔDEF?



S

1. Se traza $\overline{DE}$ de longitud DE = AB sobre la recta en la que está $\overline{AB}$.
2. Se traza una recta paralela a $\overline{AC}$ que pase por el punto D. Así ∡D = ∡A.
3. Se traza una recta paralela a $\overline{BC}$ que pase por el punto E. Así ∡E = ∡B.



4. Se etiqueta con la letra F el punto de intersección de estas rectas.

De la figura, EF = BC, DF = AC y ∡F = ∡C

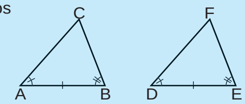
El ΔDEF se superpone exactamente al ΔABC, esto significa que **ΔABC ≅ ΔDEF**.

C

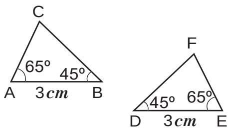
Criterio de congruencia Ángulo-Lado-Ángulo (ALA)

Dos triángulos son congruentes si tienen dos pares de ángulos correspondientes de igual medida y los lados incluidos entre ellos con la misma medida. De acuerdo a la figura:

Si $\left\{\begin{array}{l}∡A = ∡D \\ AB = DE, \\ ∡B = ∡E\end{array}\right.$ entonces ΔABC ≅ ΔDEF.



Ejemplo Investigue si los triángulos dados son congruentes.

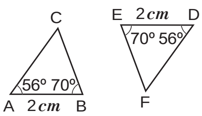


Como ∡A = ∡E = 65°, AB = ED = 3 cm, y ∡B = ∡D = 45°, entonces por el criterio ALA, **ΔABC ≅ ΔEDF**.

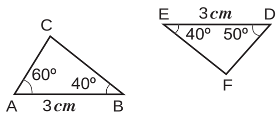
E

1. Investigue si las parejas de triángulos de los incisos a) y b) son congruentes.
2. Utilice el símbolo ≅ en el caso que los triángulos sean congruentes.

a)



b)



Aprendizajes esperados

Aplica el criterio de congruencia de triángulos ALA en la identificación de triángulos congruentes.

Secuencia:

En esta sección se a estudiado cuándo dos triángulos son congruentes.

En esta clase se estudia una manera más sencilla para saber si dos triángulos son congruentes. Este es el criterio de congruencia Ángulo-Lado-Ángulo (ALA).

Puntos esenciales:

Recordar que los ángulos correspondientes entre paralelas tienen la misma medida.

Resaltar que se quiere construir un triángulo que tenga un par de ángulos y el lado entre ellos, de igual medida a sus correspondientes en el triángulo dado.

Señalar que el objetivo de trazar rectas paralelas a los lados del triángulo dado, es formar ángulos correspondientes entre paralelas de igual medida.

Indicar que las partes correspondientes entre los triángulos del problema tienen la misma medida, por lo cual ellos son congruentes.

Explicar en qué consiste ALA, y tener presente el orden en que se escriben los vértices al nombrar la congruencia.

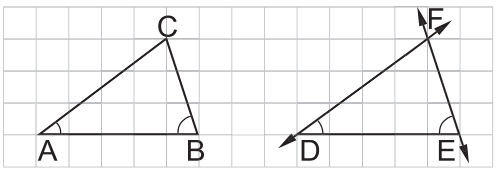
C4: Criterio de congruencia Ángulo-Lado-Ángulo (ALA)

(P) Construya un ΔDEF, tal que:

a) $DE = AB$ b) $∡D = ∡A$ c) $∡E = ∡B$

¿Son congruentes ΔABC y ΔDEF?

(S)



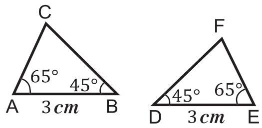
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

(C) Criterio ALA

Dos triángulos son congruentes, si tienen dos pares de ángulos correspondientes de igual medida y los lados incluidos entre ellos con la misma medida.

$$\left.\begin{array}{l}∡A = ∡D \\ AB = DE \\ ∡B = ∡E\end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta ABC \cong \Delta DEF$$

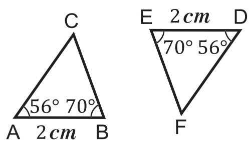
(Ej) Investigue si los triángulos son congruentes.



$∡A = ∡E = 65°$
$AB = ED = 3\ cm$ Por ALA $\Delta ABC \cong \Delta EDF$
$∡B = ∡D = 45°$

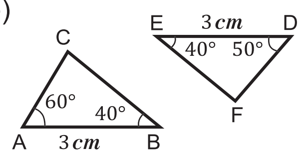
(E) Investigue si los triángulos son congruentes.

a)



$∡A = ∡D = 56°$
$AB = DE = 2\ cm$
$∡B = ∡E = 70°$
Por ALA:
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

b)



$∡B = ∡E = 40°$
$BA = DE = 2\ cm$
$∡A \neq ∡D, ∡F$
Los triángulos no son congruentes.

Contenido 5 Criterio de congruencia Lado-Lado-Lado (LLL)

Aprendizajes esperados

Aplica el criterio de congruencia de triángulos LLL en la identificación de triángulos congruentes.

Secuencia:

En la clase anterior se presentó el criterio de congruencia Ángulo-Lado-Ángulo (ALA).

En esta clase se estudia el criterio de congruencia Lado-Lado-Lado (LLL).

Puntos esenciales:

Recordar cómo construir un arco, dado un radio y el centro, utilizando compás.

Resaltar que se quiere construir un triángulo que tenga los lados de igual medida a sus partes correspondientes en un triángulo dado.

Señalar que el objetivo de trazar arcos con radios de medida los lados del triángulo dado, es formar lados correspondientes de igual medida.

Indicar que las partes correspondientes entre los triángulos del problema tienen la misma medida, por lo cual ellos son congruentes.

Explicar en qué consiste LLL, y tener presente el orden en que se escriben los vértices al escribir la congruencia.

Unidad 6: Congruencia

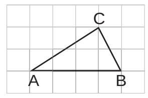
Contenido 5: Criterio de congruencia Lado-Lado-Lado (LLL)

P

Dado el triángulo de la figura, construya un ΔDEF, tal que:

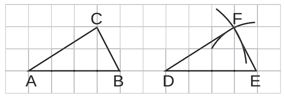
a) DE = AB
b) EF = BC
c) DF = AC

¿Son congruentes ΔABC y ΔDEF?



S

1. Se traza $\overline{DE}$ de longitud DE = AB sobre la recta en la que está $\overline{AB}$.
2. Se traza un arco de radio BC y centro E.
3. Se traza un arco de radio AC y centro D.
4. Se etiqueta con la letra F el punto de intersección de los arcos.
5. Se une el punto F con los extremos de $\overline{DE}$ y se forma el ΔDEF.



De la figura, ∡D = ∡A, ∡E = ∡B y ∡F = ∡C.

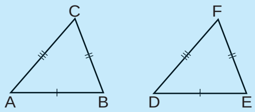
El ΔDEF se superpone exactamente al ΔABC, esto significa que **ΔABC ≅ ΔDEF**.

C

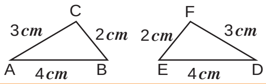
Criterio de congruencia Lado-Lado-Lado (LLL)

Dos triángulos son congruentes si tienen los lados correspondientes de igual medida. De acuerdo a la figura:

Si $\left\{\begin{array}{l} AB = DE \\ BC = EF, \\ AC = DF \end{array}\right.$ entonces ΔABC ≅ ΔDEF.



Ejemplo Investigue si los triángulos de la derecha son congruentes.

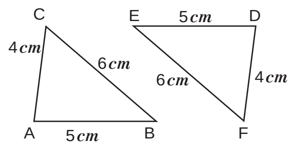


AB = DE = 4 cm, BC = EF = 2 cm, AC = DF = 3 cm, luego por el criterio LLL resulta **ΔABC ≅ ΔDEF**.

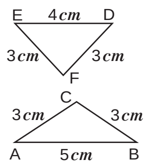
E

1. Investigue si las parejas de triángulos de los incisos a) y b) son congruentes.
2. Utilice el símbolo ≅ en el caso que los triángulos sean congruentes.

a)



b)



110

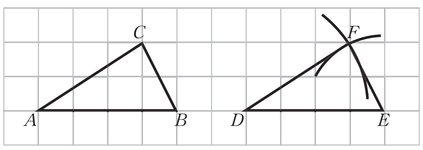
C5: Criterio de congruencia Lado-Lado-Lado (LLL)

P Construya un ΔDEF, tal que:

a) $DE = AB$ b) $EF = BC$ c) $DF = AC$

¿Son congruentes ΔABC y ΔDEF?

S



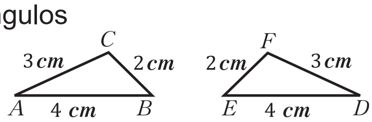
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

C **Criterio LLL**

Dos triángulos son congruentes si tienen los lados correspondientes de igual medida.

$$\left.\begin{array}{l} AB = DE \\ BC = EF \\ AC = DF \end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta ABC \cong \Delta DEF$$

Ej Investigue si los triángulos son congruentes.

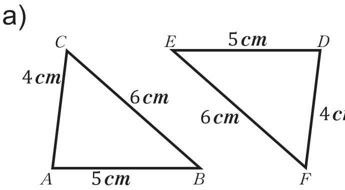


$AB = DE = 4\ cm$
$BC = EF = 2\ cm$
$AC = DF = 3\ cm$

Por LLL $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

E Investigue si los triángulos son congruentes.

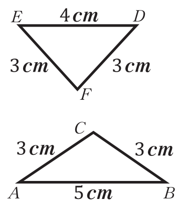
a)



$AB = DE = 5\ cm$
$BC = EF = 6\ cm$
$AC = DF = 4\ cm$

Por LLL:
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

b)



$AC = DF = 3\ cm$
$CB = FE = 3\ cm$
$AB \neq DE$

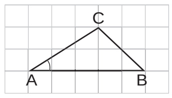
Los triángulos no son congruentes.

Contenido 6 Criterio de congruencia Lado-Ángulo-Lado (LAL)

Contenido 6: Criterio de congruencia Lado-Ángulo-Lado (LAL)

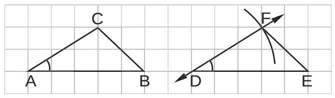
P

Dado el triángulo de la figura, construya un ΔDEF, tal que:
a) DE = AB
b) ∡A = ∡D
c) DF = AC
¿Son congruentes ΔABC y ΔDEF?



S

1. Se traza $\overline{DE}$ de longitud DE = AB sobre la recta en la que está $\overline{AB}$.
2. Se traza una recta paralela a $\overline{AC}$ que pase por el punto D.
3. Se traza un arco de radio AC y centro D.
4. Se etiqueta con la letra F el punto de intersección del arco y la recta.
5. Se une el punto F con el punto E y se forma el ΔDEF.

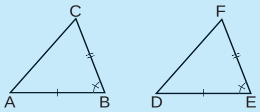


De la figura, EF = BC, ∡E = ∡B y ∡F = ∡C.
Como el ΔDEF se superpone exactamente al ΔABC, entonces **ΔABC ≅ ΔDEF**.

C

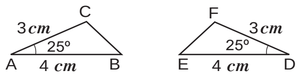
Criterio de congruencia Lado-Ángulo-Lado (LAL)
Dos triángulos son congruentes si tienen dos pares de lados correspondientes de igual medida y los ángulos incluidos entre ellos también de igual medida.
De acuerdo a la figura:

$$\text{Si } \left\{\begin{array}{l} AB = DE \\ ∡B = ∡E, \\ BC = EF \end{array}\right. \text{ entonces } \Delta ABC \cong \Delta DEF.$$



Ejemplo

Investigue si los triángulos de la derecha son congruentes.

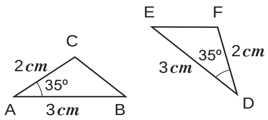


Según la figura, BA = ED = 4 cm, ∡A = ∡D = 25°, AC = DF = 3 cm, luego por el criterio LAL resulta **ΔBAC ≅ ΔEDF**.

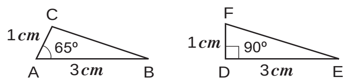
E

1. Investigue si las parejas de triángulos de los incisos a) y b) son congruentes.
2. Utilice el símbolo ≅ en el caso que los triángulos sean congruentes.

a)



b)



Aprendizajes esperados

Aplica el criterio de congruencia de triángulos LAL en la identificación de triángulos congruentes.

Secuencia:

En clases anteriores se estudiaron los criterios de congruencia ALA y LLL.

En esta clase se estudia un tercer criterio de congruencia: el criterio de congruencia Lado-Ángulo -Lado (LAL).

Puntos esenciales:

Resaltar que se quiere construir un triángulo que tenga un par de lados y el ángulo entre ellos, de igual medida a sus partes correspondientes en el triángulo dado.

Señalar que el objetivo de trazar la paralela, es formar ángulos correspondientes entre paralelas de igual medida. Asimismo el objetivo de trazar el arco es formar un lado de igual medida a un lado del otro triángulo.

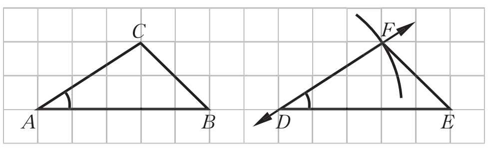
Indicar que las partes correspondientes entre los triángulos del problema tienen la misma medida, por lo cual ellos son congruentes.

Explicar en qué consiste LAL, y tener presente el orden en que se escriben los vértices al escribir la congruencia.

C6: Criterio de congruencia Lado-Ángulo-Lado (LAL)

P Construya un ΔDEF, tal que:
a) $DE = AB$ b) $∡A = ∡D$ c) $DF = AC$
¿Son congruentes ΔABC y ΔDEF?

S

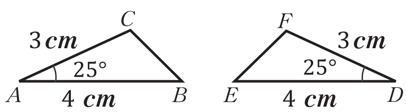


$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

C **Criterio LAL**
Dos triángulos son congruentes, si tienen dos pares de lados correspondientes de igual medida y los ángulos incluidos entre ellos de igual medida.

$$\left.\begin{array}{l} AB = DE \\ ∡B = ∡E \\ BC = EF \end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta ABC \cong \Delta DEF$$

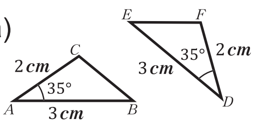
Ej Investigue si los triángulos son congruentes.



$BA = ED = 4\ cm$
$∡A = ∡D = 25°$
$AC = DF = 3\ cm$ Por LAL $\Delta BAC \cong \Delta EDF$

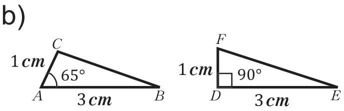
E Investigue si los triángulos son congruentes.

a)



$BA = ED = 3\ cm$
$∡A = ∡D = 35°$
$AC = DF = 2\ cm$
Por LAL:
$\Delta BAC \cong \Delta EDF$

b)



$BA = ED = 3\ cm$
$∡A \neq ∡D$
$AC = DF = 1\ cm$
Los triángulos no son congruentes.

Contenido 1 Demostración de congruencia de triángulos utilizando ALA

Aprendizajes esperados

Comprende las nociones básicas para hacer una demostración.

Secuencia:

En la sección anterior se aprendió qué son triángulos congruentes, y se presentaron tres criterios para saber si dos triángulos son congruentes.

En esta clase se aplica el criterio de congruencia ALA, para demostrar que dos triángulos son congruentes.

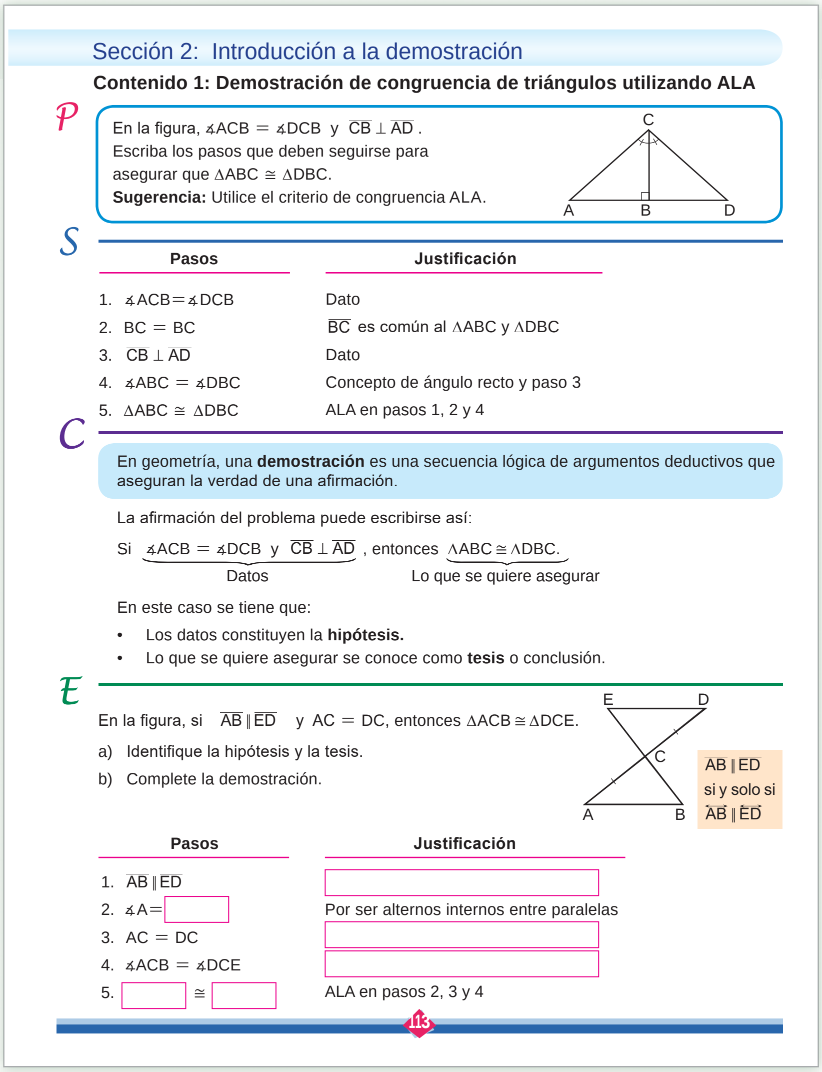
Puntos esenciales:

Explicar cómo organizar las ideas, ya que es primera vez que se formalizará una demostración.

Utilizar la figura para identificar cada afirmación. Aclarar qué es la hipótesis y qué es la tesis. Señalar que es importante identificar cuál es la hipótesis y cuál la tesis.

Indicar que en los pasos de demostración se hará uso de la hipótesis identificada.

Recordar las propiedades de ángulos opuestos por el vértice y ángulos alternos internos entre paralelas. También debe recordarse cuándo dos segmentos son perpendiculares.



Sección 2: Introducción a la demostración

Contenido 1: Demostración de congruencia de triángulos utilizando ALA

P

En la figura, $\measuredangle ACB = \measuredangle DCB$ y $\overline{CB} \perp \overline{AD}$.
Escriba los pasos que deben seguirse para asegurar que $\Delta ABC \cong \Delta DBC$.
Sugerencia: Utilice el criterio de congruencia ALA.

S

Pasos	Justificación
1. $\measuredangle ACB = \measuredangle DCB$	Dato
2. $BC = BC$	$\overline{BC}$ es común al ΔABC y ΔDBC
3. $\overline{CB} \perp \overline{AD}$	Dato
4. $\measuredangle ABC = \measuredangle DBC$	Concepto de ángulo recto y paso 3
5. $\Delta ABC \cong \Delta DBC$	ALA en pasos 1, 2 y 4

C

En geometría, una **demostración** es una secuencia lógica de argumentos deductivos que aseguran la verdad de una afirmación.

La afirmación del problema puede escribirse así:

Si $\underbrace{\measuredangle ACB = \measuredangle DCB \text{ y } \overline{CB} \perp \overline{AD}}_{\text{Datos}}$, entonces $\underbrace{\Delta ABC \cong \Delta DBC}_{\text{Lo que se quiere asegurar}}$.

En este caso se tiene que:

- Los datos constituyen la **hipótesis.**
- Lo que se quiere asegurar se conoce como **tesis** o conclusión.

E

En la figura, si $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$ y $AC = DC$, entonces $\Delta ACB \cong \Delta DCE$.

a) Identifique la hipótesis y la tesis.
b) Complete la demostración.

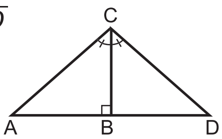
$AB \parallel ED$ si y solo si $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$

Pasos	Justificación
1. $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$	
2. $\measuredangle A =$ ☐	Por ser alternos internos entre paralelas
3. $AC = DC$	
4. $\measuredangle ACB = \measuredangle DCE$	
5. ☐ $\cong$ ☐	ALA en pasos 2, 3 y 4

113

S2: Introducción a la demostración
C1: Demostración de congruencia de triángulos utilizando ALA

P $\measuredangle ACB = \measuredangle DCB$ y $\overline{CB} \perp \overline{AD}$
Escriba los pasos que garantizan $\Delta ABC \cong \Delta DBC$.



S

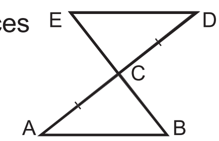
Pasos	Justificación
1. $\measuredangle ACB = \measuredangle DCB$	Dato
2. $BC = BC$	$\overline{BC}$ es común en ΔABC y ΔDBC
3. $\overline{CB} \perp \overline{AD}$	Dato
4. $\measuredangle ABC = \measuredangle DBC$	Concepto de ángulo recto y paso 2
5. $\Delta ABC \cong \Delta DBC$	ALA en pasos 1, 2 y 4

En la afirmación si $\underbrace{\measuredangle ACB = \measuredangle DCB \text{ y } \overline{CB} \perp \overline{AD}}_{(A)}$, entonces $\underbrace{\Delta ABC \cong \Delta DBC}_{(B)}$.

(A) se llama **hipótesis**, (B) se llama **tesis**.

C *Leer en el libro de texto.*

E Si $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$ y $AC = DC$, entonces $\Delta ACB \cong \Delta DCE$.



a) Hipótesis: $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$, $AC = DC$
Tesis: $\Delta ACB \cong \Delta DCE$

b) Complete la demostración.

Pasos	Justificación
1. $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$	$\boxed{\text{Hipótesis}}$
2. $\measuredangle A = \boxed{\measuredangle D}$	Por ser alt. int. entre paralelas
3. $AC = DC$	$\boxed{\text{Hipótesis}}$
4. $\measuredangle ACB = \measuredangle DCE$	$\boxed{\text{Son opuestos por el vértice}}$
5. $\boxed{\Delta ACB} \cong \boxed{\Delta DCE}$	ALA en pasos 2, 3 y 4

Contenido 2 Demostración de congruencia de triángulos utilizando LLL

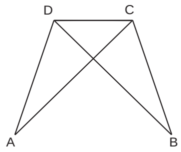
Unidad 6: Congruencia

Contenido 2: Demostración de congruencia de triángulos utilizando LLL

P

En la figura, si AD = BC y AC = BD, entonces ΔADC ≅ ΔBCD.

a) Escriba la hipótesis y la tesis.
b) Complete la demostración.



Pasos	Justificación
1. AD = BC	
2. AC = BD	
3. ☐ = ☐	$\overline{DC}$ es común al ΔADC y ΔBCD
4. ΔADC ≅ ΔBCD	

S

a) **Hipótesis:** AD = BC, AC = BD **Tesis:** ΔADC ≅ ΔBCD

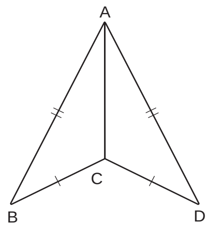
b)

Pasos	Justificación
1. AD = BC	Hipótesis
2. AC = BD	Hipótesis
3. DC = CD	$\overline{DC}$ es común al ΔADC y ΔBCD
4. ΔADC ≅ ΔBCD	LLL en pasos 1, 2 y 3

E

En la figura, si AB = AD y BC = DC, entonces ΔABC ≅ ΔADC.

a) Escriba la hipótesis y la tesis.
b) Complete la demostración.



Pasos	Justificación
1. AB = AD	
2. BC = DC	
3. ☐ = ☐	$\overline{AC}$ es común al ΔABC y ΔADC
4. ΔABC ≅ ΔADC	

114

Aprendizajes esperados

Aplica el criterio LLL en la demostración de triángulos congruentes.

Secuencia:

En la clase anterior se demostraron congruencias entre triángulos, utilizando el criterio ALA.

En esta clase se aplica el criterio de congruencia LLL, para seguir demostrando congruencia entre triángulos.

Puntos esenciales:

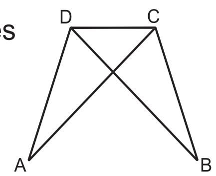
Indicar que para todo segmento $\overline{AB}$, se tiene que $AB = BA$.

Señalar que es importante identificar cuál es la hipótesis y cuál la tesis.

Utilizar la figura para identificar cada afirmación. Indicar que se debe tener presente en qué consiste el criterio de congruencia LLL, para saber la información que necesitan.

C2: Demostración de congruencia de triángulos utilizando LLL

P Si $AD = BC$ y $AC = BD$, entonces $\Delta ADC \cong \Delta BCD$.



S a) Escriba la hipótesis y la tesis.

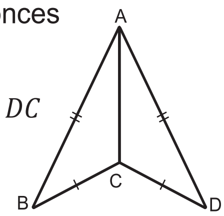
Hipótesis: $AD = BC$, $AC = BD$

Tesis: $\Delta ADC \cong \Delta BCD$

b) Complete la demostración.

Pasos	Justificación
1. $AD = BC$	Hipótesis
2. $AC = BD$	Hipótesis
3. DC = CD	$\overline{DC}$ es común en ΔADC y ΔBCD
4. $\Delta ADC \cong \Delta BCD$	LLL en pasos 1,2 y 3

E Si $AB = AD$ y $BC = DC$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta ADC$.



a) Hipótesis: $AB = AD$, $BC = DC$

Tesis: $\Delta ABC \cong \Delta ADC$

b) Complete la demostración.

Pasos	Justificación
1. $AB = AD$	Hipótesis
2. $BC = DC$	Hipótesis
3. AC = AC	$\overline{AC}$ es común en ΔABC y ΔADC
4. $\Delta ABC \cong \Delta ADC$	LLL en 1, 2 y 3

Contenido 3 Demostración de congruencia de triángulos utilizando LAL

Aprendizajes esperados

Aplica el criterio LAL en la demostración de triángulos congruentes.

Secuencia:

En la clase anterior se demostraron congruencias entre triángulos, utilizando el criterio LLL.

En esta clase se aplica el criterio de congruencia LAL, para seguir demostrando congruencia entre triángulos.

Puntos esenciales:

Señalar que es importante identificar cuál es la hipótesis y cuál la tesis.

Utilizar la figura para identificar cada afirmación.

Recordar en qué consiste el criterio de congruencia LAL, para saber la información que necesitan. También se debe recordar qué ocurre con los ángulos opuestos por el vértice en cuanto a sus medidas.

Señalar la importancia del orden en que se escriben los vértices de los triángulos al escribir la congruencia.

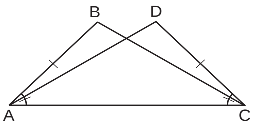
Contenido 3: Demostración de congruencia de triángulos utilizando LAL

P

En la figura, si BA = DC y ∡BAC = ∡DCA, entonces ΔBAC ≅ ΔDCA.

a) Escriba la hipótesis y la tesis.

b) Complete la demostración.



Pasos	Justificación
1. BA = DC	
2. ∡BAC = ∡DCA	
3. AC = CA	
4. ☐ ≅ ☐	LAL en pasos 1, 2 y 3

S

a) **Hipótesis:** BA = DC, ∡BAC = ∡DCA **Tesis:** ΔBAC ≅ ΔDCA

b)

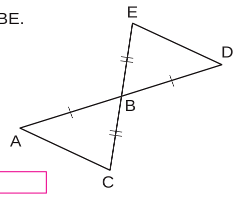
Pasos	Justificación
1. BA = DC	Hipótesis
2. ∡BAC = ∡DCA	Hipótesis
3. AC = CA	$\overline{AC}$ es común al ΔBAC y ΔDCA
4. ΔBAC ≅ ΔDCA	LAL en pasos 1, 2 y 3

E

En la figura, si AB = DB y BC = BE, entonces ΔABC ≅ ΔDBE.

a) Escriba la hipótesis y la tesis.

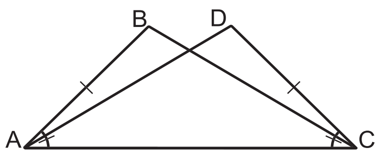
b) Complete la demostración.



Pasos	Justificación
1. AB = DB	
2. ☐ = ☐	Son opuestos por el vértice
3. BC = BE	
4. ☐ ≅ ΔDBE	

C3: Demostración de congruencia de triángulos utilizando LAL

P



Si $BA = DC$ y $\measuredangle BAC = \measuredangle DCA$, entonces $\Delta BAC \cong \Delta DCA$.

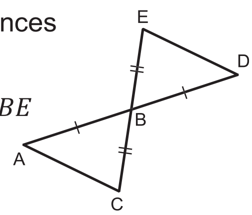
S a) Hipótesis: $BA = DC$, $\measuredangle BAC = \measuredangle DCA$

Tesis: $\Delta BAC \cong \Delta DCA$

b) Complete la demostración.

Pasos	Justificación
1. $BA = DC$	Hipótesis
2. $\measuredangle BAC = \measuredangle DCA$	Hipótesis
3. $AC = CA$	$\overline{AC}$ es común en ΔBAC y ΔDCA
4. $\boxed{\Delta BAC} \cong \boxed{\Delta DCA}$	LAL en pasos 1, 2 y 3

E Si $AB = DB$ y $BC = BE$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta DBE$.



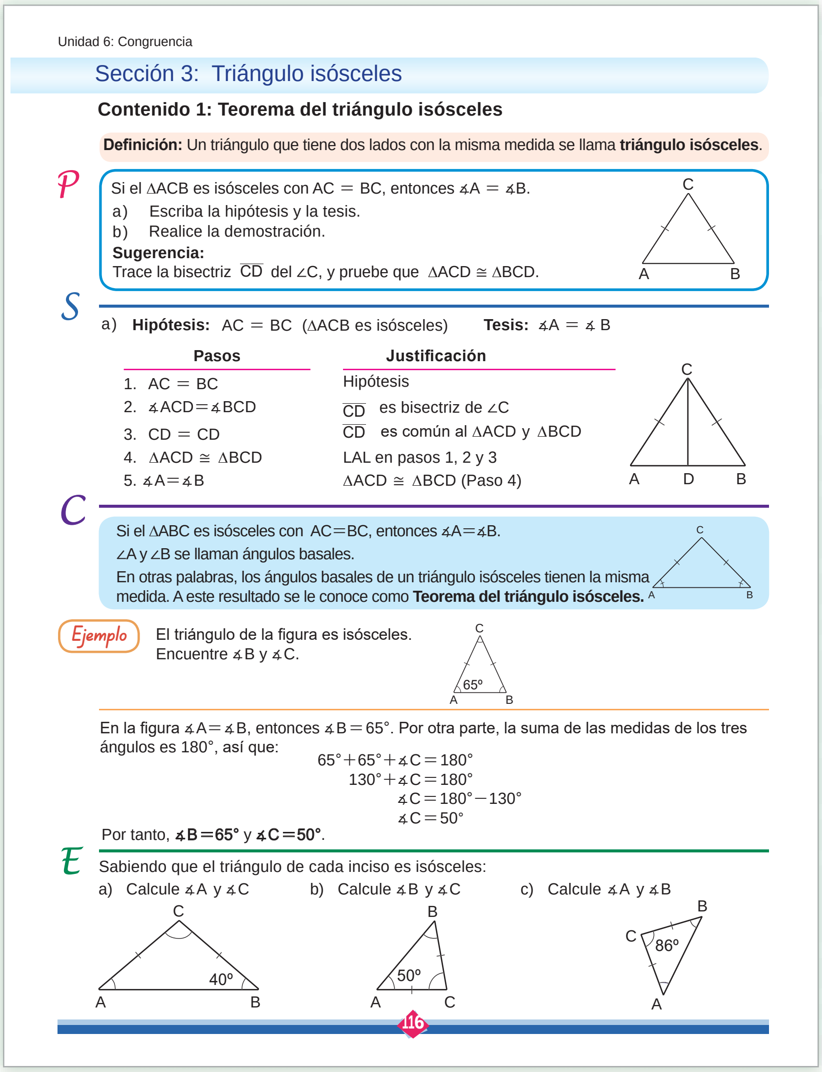
a) Hipótesis: $AB = DB$, $BC = BE$

Tesis: $\Delta ABC \cong \Delta DBE$

b) Complete la demostración.

Pasos	Justificación
1. $AB = DB$	Hipótesis
2. $\boxed{\measuredangle ABC} = \boxed{\measuredangle DBE}$	Son opuestos por el vértice
3. $BC = BE$	Hipótesis
4. $\boxed{\Delta ABC} \cong \Delta DBE$	LAL en pasos 1, 2 y 3

Contenido 1 Teorema del triángulo isósceles


Unidad 6: Congruencia

Sección 3: Triángulo isósceles

Contenido 1: Teorema del triángulo isósceles

Definición: Un triángulo que tiene dos lados con la misma medida se llama **triángulo isósceles**.

P

Si el ΔACB es isósceles con $AC = BC$, entonces $\measuredangle A = \measuredangle B$.

a) Escriba la hipótesis y la tesis.

b) Realice la demostración.

Sugerencia:

Trace la bisectriz $\overline{CD}$ del $\angle C$, y pruebe que $\Delta ACD \cong \Delta BCD$.

S

a) **Hipótesis:** $AC = BC$ (ΔACB es isósceles) **Tesis:** $\measuredangle A = \measuredangle B$

Pasos	Justificación
1. $AC = BC$	Hipótesis
2. $\measuredangle ACD = \measuredangle BCD$	$\overline{CD}$ es bisectriz de $\angle C$
3. $CD = CD$	$\overline{CD}$ es común al ΔACD y ΔBCD
4. $\Delta ACD \cong \Delta BCD$	LAL en pasos 1, 2 y 3
5. $\measuredangle A = \measuredangle B$	$\Delta ACD \cong \Delta BCD$ (Paso 4)

C

Si el ΔABC es isósceles con $AC = BC$, entonces $\measuredangle A = \measuredangle B$.

$\angle A$ y $\angle B$ se llaman ángulos basales.

En otras palabras, los ángulos basales de un triángulo isósceles tienen la misma medida. A este resultado se le conoce como **Teorema del triángulo isósceles.**

Ejemplo

El triángulo de la figura es isósceles.
Encuentre $\measuredangle B$ y $\measuredangle C$.

En la figura $\measuredangle A = \measuredangle B$, entonces $\measuredangle B = 65°$. Por otra parte, la suma de las medidas de los tres ángulos es 180°, así que:

$$65° + 65° + \measuredangle C = 180°$$
$$130° + \measuredangle C = 180°$$
$$\measuredangle C = 180° - 130°$$
$$\measuredangle C = 50°$$

Por tanto, **$\measuredangle B = 65°$ y $\measuredangle C = 50°$.**

E

Sabiendo que el triángulo de cada inciso es isósceles:

a) Calcule $\measuredangle A$ y $\measuredangle C$ b) Calcule $\measuredangle B$ y $\measuredangle C$ c) Calcule $\measuredangle A$ y $\measuredangle B$

116

Aprendizajes esperados

Conoce que los ángulos basales de un triángulo isósceles tienen la misma medida.

Secuencia:

En la sección anterior se aplicaron los criterios de congruencia ALA, LLL y LAL, para demostrar la congruencia entre triángulos.

En esta clase se utiliza el criterio LAL, para demostrar que en un triángulo isósceles los ángulos basales tienen la misma medida.

Puntos esenciales:

Recordar qué es un triángulo isósceles, y qué es la bisectriz de un ángulo.

Observar que los ángulos basales de un triángulo isósceles son aquellos opuestos a los lados congruentes.

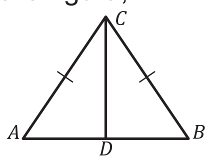
Aclarar que el objetivo de trazar la bisectriz, es formar dos triángulos congruentes.

Señalar la importancia del orden en que se escriben los vértices de los triángulos al escribir la congruencia.

Indicar cómo se aplica la definición de congruencia, para garantizar que los ángulos basales del triángulo isósceles tienen la misma medida.

S3: Triángulo isósceles
C1: Teorema del triángulo isósceles

P Dado el triángulo isósceles de la figura, demuestre que $\measuredangle A = \measuredangle B$.



Hipótesis: $AC = BC$

Tesis: $\measuredangle A = \measuredangle B$

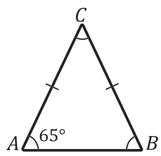
S

Pasos	Justificación
1. $AC = BC$	Hipótesis
2. $\measuredangle ACD = \measuredangle BCD$	$\overline{CD}$ es bisectriz de $\angle C$
3. $CD = CD$	$\overline{CD}$ es común en ΔACD y ΔBCD
4. $\Delta ACD \cong \Delta BCD$	LAL en pasos 1, 2 y 3
5. $\measuredangle A = \measuredangle B$	$\Delta ACD \cong \Delta BCD$ (paso 4)

C Si el ΔABC es isósceles con $AC = BC$, entonces $\measuredangle A = \measuredangle B$.

$\angle A$ y $\angle B$ se llaman ángulos basales.

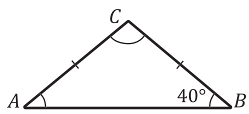
Ej Encuentre $\measuredangle B$ y $\measuredangle C$.



$\measuredangle B = \measuredangle A = 65°$

$$65° + 65° + \measuredangle C = 180°$$
$$130° + \measuredangle C = 180°$$
$$\measuredangle C = 180° - 130°$$
$$\measuredangle C = 50°$$

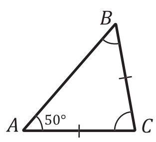
E a) Calcule $\measuredangle A$ y $\measuredangle C$.



$\measuredangle A = \measuredangle B = 40°$

$$40° + 40° + \measuredangle C = 180°$$
$$80° + \measuredangle C = 180°$$
$$\measuredangle C = 180° - 80°$$
$$\measuredangle C = 100°$$

b) Calcule $\measuredangle B$ y $\measuredangle C$.



$\measuredangle B = \measuredangle A = 50°$

$$50° + 50° + \measuredangle C = 180°$$
$$\measuredangle C = 180° - 100°$$
$$\measuredangle C = 80°$$

Contenido 2 Propiedades de la bisectriz del ángulo formado por los dos lados de igual medida en un triángulo isósceles

Aprendizajes esperados

Conoce las propiedades de la bisectriz del ángulo comprendido por los dos lados de igual medida en un triángulo isósceles.

Secuencia:

En la clase anterior se supo que los ángulos basales de un triángulo isósceles tienen la misma medida.

En esta clase, se utiliza la congruencia entre los triángulos de la clase anterior, y se demuestra que la bisectriz del ángulo formado por los lados de igual medida, es perpendicular al lado opuesto y lo corta en su punto medio.

Puntos esenciales:

Indicar cada afirmación de la demostración valiéndose de la figura.

Recordar los triángulos congruentes de la clase anterior, la definición de congruencia de triángulos, y que ángulos que forman un par lineal son suplementarios.

Especificar las propiedades que han sido demostradas.

Explicar cómo aplicar estas propiedades en la solución de ejercicios.

Sección 3: Triángulos isósceles

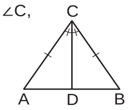
Contenido 2: Propiedades de la bisectriz del ángulo formado por los dos lados de igual medida en un triángulo isósceles

P

En la figura el $\triangle ABC$ es isósceles con $AC=BC$. Si $\overline{CD}$ es la bisectriz del $\angle C$, entonces $\overline{CD} \perp \overline{AB}$.

a) Escriba la hipótesis y la tesis.

b) Realice la demostración.



S

a) **Hipótesis:** $AC = BC$ **Tesis:** $\overline{CD} \perp \overline{AB}$

$\overline{CD}$ es la bisectriz del $\angle C$

b)

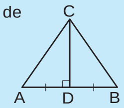
Pasos	Justificación
1. $\triangle ACD \cong \triangle BCD$	Paso 4 en la demostración del contenido anterior (LAL)
2. $\measuredangle CDA = \measuredangle CDB$	Definición de congruencia en 1
3. $\measuredangle CDA + \measuredangle CDB = 180°$	Son ángulos suplementarios
4. $2(\measuredangle CDA) = 180°$	Pasos 2 y 3
5. $\measuredangle CDA = 90°$	Dividiendo por 2 ambos lados de la igualdad en 4
6. $\overline{CD} \perp \overline{AB}$	Definición de perpendicularidad

Se observa que al ser $\triangle ACD \cong \triangle BCD$, también $AD=BD$.

C

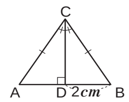
En un triángulo isósceles la bisectriz del ángulo formado por los dos lados de igual medida:

- Es perpendicular al lado opuesto.
- Intercepta al lado opuesto en su punto medio.



Ejemplo

El triángulo de la derecha es isósceles, con $AC=BC$ y $\overline{CD}$ la bisectriz del $\angle C$. Calcule AB.



Al ser $\overline{CD}$ la bisectriz del $\angle C$, entonces D es punto medio de $\overline{AB}$, de donde $AD=BD=2\ cm$. Por tanto, $AB=2AD=(2)(2)=\mathbf{4(cm)}$.

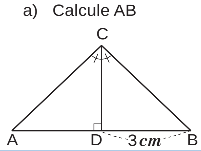
E

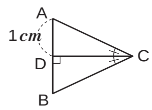
Sabiendo que el triángulo de cada inciso es isósceles, con $AC = BC$ y $\overline{CD}$ la bisectriz del $\angle C$:

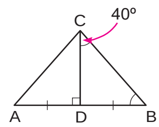
a) Calcule AB

b) Calcule AB

c) Calcule $\measuredangle B$







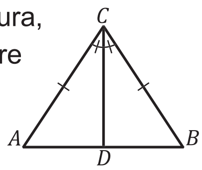
C2: Propiedades de la bisectriz del ángulo formado por los dos lados de igual medida en un triángulo isósceles

(P) En el triángulo isósceles de la figura, $\overline{CD}$ es bisectriz del $\angle C$. Demuestre que $\overline{CD} \perp \overline{AB}$.

Hipótesis: $AC = BC$

$\overline{CD}$ bisectriz del $\angle C$.

Tesis: $\overline{CD} \perp \overline{AB}$



(S)

Pasos	Justificación
1. $\Delta ACD \cong \Delta BCD$	Paso 4 en la demostración de la clase anterior
2. $\measuredangle CDA = \measuredangle CDB$	Def. de congruencia en 1
3. $\measuredangle CDA + \measuredangle CDB = 180°$	Son ángulos suplementarios
4. $2(\measuredangle CDA) = 180°$	Pasos 2 y 3
5. $\measuredangle CDA = 90°$	Paso 4 (Dividiendo por 2)
6. $\overline{CD} \perp \overline{AB}$	Def. de perpendicularidad

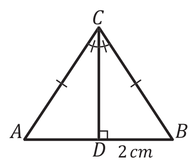
Al ser $\Delta ACD \cong \Delta BCD$, entonces $AD = BD$.

(C) La bisectriz del ángulo formado por los dos lados de igual medida:

- Es perpendicular al lado opuesto.
- Intercepta al lado opuesto en su punto medio.

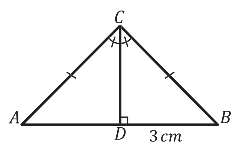
(Ej) Calcule AB.

$$AB = 2BD = (2)(2)$$
$$= 4\ (cm)$$



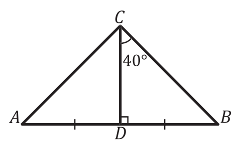
(E) a) Calcule AB.

$$AB = 2BD = (2)(3)$$
$$= 6\ (cm)$$



b) Calcule $\measuredangle B$.

$$\measuredangle B = 180° - 90° - 40°$$
$$= 50°$$



Contenido 3 Recíproco del teorema del triángulo isósceles

Contenido 3: Recíproco del teorema del triángulo isósceles

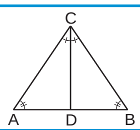
P

En el ΔABC, si ∡A = ∡B, entonces el ΔABC es isósceles.

a) Escriba la hipótesis y la tesis.

b) Realice la demostración.

Sugerencia: Trace la bisectriz $\overline{CD}$ del ∠C.



S

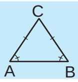
a) **Hipótesis:** ∡A = ∡B **Tesis:** AC = BC (ΔABC es isósceles)

b)

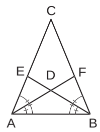
Pasos	Justificación
1. ∡A = ∡B	Hipótesis
2. ∡ACD = ∡BCD	Definición de bisectriz
3. CD = CD	$\overline{CD}$ es común al ΔCDA y ΔCDB
4. ∡CDA = ∡CDB	Los ángulos internos de un triángulo suman 180°, y pasos 1 y 2
5. ΔCDA ≅ ΔCDB	ALA en pasos 2, 3 y 4
6. AC = BC	Definición de congruencia (paso 5)
7. ΔABC es isósceles	Definición de triángulo isósceles en 6

C

Recíproco del teorema del triángulo isósceles
Un triángulo con dos ángulos de igual medida es isósceles.



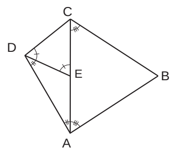
Ejemplo En la figura de la derecha identifique los triángulos que son isósceles.



En la figura ∡DAB = ∡DBA, por lo cual el ΔABD es isósceles.
De la misma manera se tiene que ∡CAB = ∡CBA, y en consecuencia el ΔABC es isósceles.
Los triángulos isósceles de la figura son ΔABD y ΔABC.

E

Identifique en la figura los triángulos que son isósceles.



Aprendizajes esperados

Conoce que todo triángulo con dos ángulos de igual medida es isósceles.

Secuencia:

En la primera clase de esta sección se estudió que los ángulos basales de un triángulo isósceles tienen la misma medida.

En esta clase se utiliza el criterio ALA, para demostrar que un triángulo que tiene dos ángulos con la misma medida es isósceles.

Puntos esenciales:

Indicar la hipótesis y la tesis.

Aclarar que el objetivo de trazar la bisectriz, es formar dos triángulos congruentes.

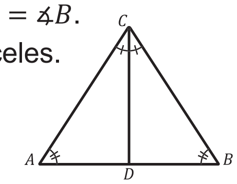
Explicar cómo se utiliza la propiedad de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo, en el paso 4 de la demostración.

Señalar cómo se aplica la definición de congruencia, para garantizar que los lados opuestos a los ángulos de igual medida, tienen la misma medida.

Explicar que aquellos triángulos que tienen dos ángulos de igual medida, son isósceles.

C3: Recíproco del teorema del triángulo isósceles

(P) En el triángulo de la figura $\measuredangle A = \measuredangle B$. Demuestre que ΔABC es isósceles.



(S) Hipótesis: $\measuredangle A = \measuredangle B$
Tesis: $AC = BC$ (ΔABC es isósc.)

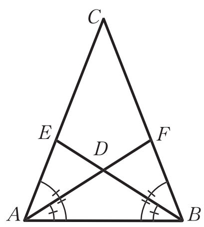
Pasos	Justificación
1. $\measuredangle A = \measuredangle B$	Hipótesis
2. $\measuredangle ACD = \measuredangle BCD$	Definición de bisectriz
3. $CD = CD$	$\overline{CD}$ es común en ΔCDA y ΔCDB
4. $\measuredangle CDA = \measuredangle CDB$	Ángulos internos de un triángulo suman $180°$, y pasos 1 y 2
5. $\Delta CDA \cong \Delta CDB$	ALA en pasos 2, 3 y 4
6. $AC = BC$	Def. de congruencia en 5
7. ΔABC es isósceles	Def. de triángulo isósceles en 6

(C) Un triángulo con dos ángulos de igual medida es isósceles.

(Ej) Identifique los triángulos que son isósceles.

$\measuredangle DAB = \measuredangle DBA$ así que: ΔABD es isósceles

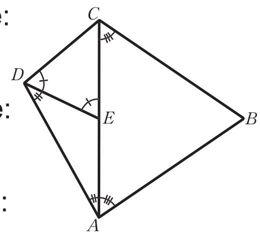
$\measuredangle CAB = \measuredangle CBA$ así que: ΔABC es isósceles



(E) $\measuredangle CDE = \measuredangle CED$ así que: ΔDEC es isósceles

$\measuredangle EDA = \measuredangle EAD$ así que: ΔDAE es isósceles

$\measuredangle BCA = \measuredangle BAC$ así que: ΔCAB es isósceles



Contenido 4 Triángulo equilátero

Aprendizajes esperados

Conoce que los ángulos de un triángulo equilátero tienen la misma medida, y que un triángulo con sus tres ángulos de igual medida es equilátero.

▪ Secuencia:

En esta sección se estudió que un triángulo es isósceles si y solo si sus ángulos basales tienen la misma medida.

En esta clase se demuestra que un triángulo es equilátero si y solo si sus ángulos tienen la misma medida.

▪ Puntos esenciales:

Indicar que todo triángulo equilátero es isósceles, así que este cumple las propiedades de un triángulo isósceles.

Explicar cuándo aplicar el teorema del triángulo isósceles, y cuándo el recíproco.

Aclarar por qué todos los ángulos de un triángulo equilátero miden 60°.

Contenido 4: Triángulo equilátero

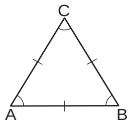
P

Si el ΔABC es equilátero, entonces $\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C$.

Sugerencia: AB = BC = AC, ya que el ΔABC es equilátero.

a) Escriba la hipótesis y la tesis.

b) Realice la demostración.



S

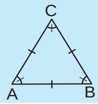
a) **Hipótesis:** AB = BC = AC (ΔABC es equilátero) **Tesis:** $\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C$

b) Un triángulo equilátero, al tener al menos dos lados de igual medida, es isósceles y cumple las propiedades de estos.

Pasos	Justificación
1. AC = BC	Hipótesis
2. $\measuredangle A = \measuredangle B$	Teorema del triángulo isósceles
3. AB = AC	Hipótesis
4. $\measuredangle B = \measuredangle C$	Teorema del triángulo isósceles
5. $\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C$	Por 2 y 4

C

Los ángulos de un triángulo equilátero tienen la misma medida y como la suma de las medidas de los tres ángulos es 180°, entonces cada uno de ellos mide 60°.

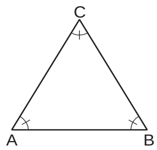


E

En el ΔABC, si $\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C$, entonces el ΔABC es equilátero.

a) Escriba la hipótesis y la tesis.

b) Complete la demostración.



Pasos	Justificación
1. $\measuredangle A = \measuredangle B$	
2. BC = AC	
3. $\measuredangle B = \measuredangle C$	
4. AC =	
5. BC = AC = AB	Por 2 y 4
6. ΔABC es equilátero	

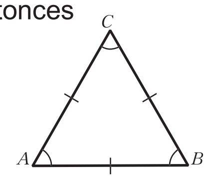
C4: Triángulo equilátero

P Si el ΔABC es equilátero, entonces $\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C$.

Hipótesis: $AB = BC = AC$

Tesis: $\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C$

Complete la demostración.



S

Pasos	Justificación
1. $AC = BC$	Hipótesis
2. $\measuredangle A = \measuredangle B$	Teorema del triángulo isósceles
3. $AB = AC$	Hipótesis
4. $\measuredangle B = \measuredangle C$	Teorema del triángulo isósceles
5. $\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C$	Por 2 y 4

C Los ángulos de un triángulo equilátero tienen la misma medida.

$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$$
$$3\measuredangle A = 180°$$
$$\measuredangle A = 60°$$

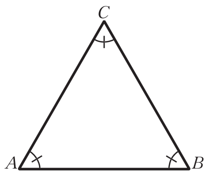
Cada ángulo mide 60°.

E Si $\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C$, entonces el ΔABC es equilátero.

Hipótesis: $\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C$

Tesis: ΔABC es equilátero

Complete la demostración.



Pasos	Justificación
1. $\measuredangle A = \measuredangle B$	Hipótesis
2. $BC = AC$	Rec. del teorema del triángulo isósceles
3. $\measuredangle B = \measuredangle C$	Hipótesis
4. $AC = \boxed{AB}$	Rec. del teorema del triángulo isósceles
5. $BC = AC = AB$	Por 2 y 4
6. ΔABC es equilátero	Definición de triángulo equilátero

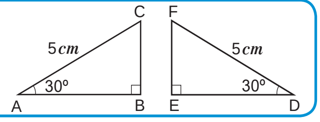
Contenido 1 Criterio de congruencia Hipotenusa-Ángulo (HA)

Sección 4: Congruencia de triángulos rectángulos

Contenido 1: Criterio de congruencia Hipotenusa – Ángulo (HA)

P

Los triángulos rectángulos de la figura son congruentes, ¿por qué?



S

En la figura ∡A = 30° y ∡D = 30°. Como los triángulos son rectángulos, se tiene ∡B = 90° y ∡E = 90°.

Luego,

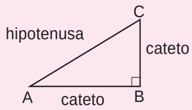
$30° + 90° + ∡C = 180°$
$120° + ∡C = 180°$
$∡C = 180° - 120°$
$∡C = 60°$

De la misma manera ∡F = 60°, por tanto ∡C = ∡F, que agregado a

∡A = ∡D
AC = DF,

se aplica ALA, y resulta que efectivamente **ΔACB ≅ ΔDFE**.

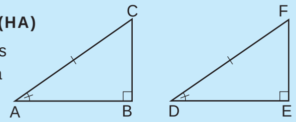
El lado opuesto al ángulo recto de un triángulo rectángulo se llama **hipotenusa.** Los otros lados se llaman **catetos**.



C

Criterio de congruencia Hipotenusa – Ángulo (HA)

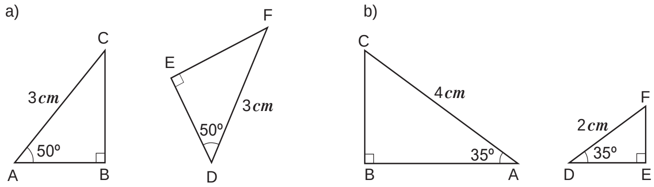
Dos triángulos rectángulos son congruentes si sus hipotenusas y un par de ángulos agudos tienen la misma medida.



E

Identifique cuáles de las siguientes parejas de triángulos son congruentes, justificando su respuesta:

a) b)



Aprendizajes esperados

Identifica triángulos rectángulos congruentes utilizando el criterio HA.

Secuencia:

En la primera sección se estudiaron tres criterios para saber si dos triángulos son congruentes. Pero, ¿existirá una manera más sencilla, para saber si dos triángulos rectángulos son congruentes?

En esta clase se estudia el criterio de congruencia de triángulos rectángulos Hipotenusa-Ángulo agudo (HA).

Puntos esenciales:

Indicar a qué se le llama hipotenusa y a qué cateto.

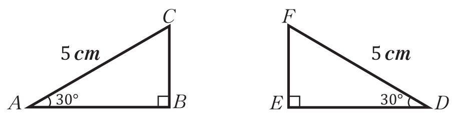
Recordar que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

Señalar que para garantizar la congruencia de los triángulos rectángulos del problema, solamente se necesitó conocer la igualdad entre las hipotenusas y un par de ángulos agudos.

Explicar en qué consiste HA, y tener presente el orden en que se escriben los vértices al escribir la congruencia.

S4: Congruencia de triángulos rectángulos
C1: Criterio de congruencia Hipotenusa-Ángulo Agudo (HA)

P ¿Por qué son congruentes los triángulos?



S $30° + 90° + ∡C = 180°$

$120° + ∡C = 180°$

$∡C = 180° - 120°$

$∡C = 60°$

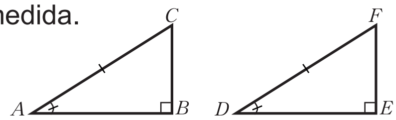
Similarmente, $∡F = 60°$.

$∡A = ∡D = 30°$
$AC = DF = 5\ cm$
$∡C = ∡F = 60°$

Por ALA $\Delta ACB \cong \Delta DFE$.

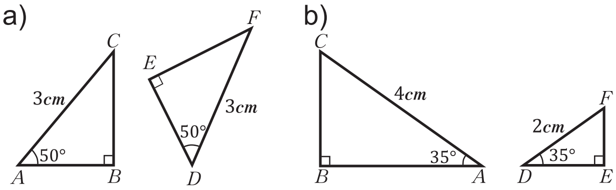
C **Criterio HA**

Dos triángulos rectángulos son congruentes si sus hipotenusas y un par de ángulos agudos tienen la misma medida.



E Investigue si los triángulos son congruentes.

a) b)



$∡A = ∡D = 50°$
$AC = DF = 3\ cm$
Por HA:
$\Delta ACB \cong \Delta DFE$

Las hipotenusas no tienen la misma medida, así que los triángulos no son congruentes.

Contenido 2 Criterio de congruencia Hipotenusa-Cateto (HC)

Aprendizajes esperados

Identifica triángulos rectángulos congruentes utilizando el criterio HC.

Secuencia:

En la clase anterior se presentó una manera sencilla para saber si dos triángulos rectángulos son congruentes. Este es el criterio de congruencia Hipotenusa- Ángulo agudo (HA).

En esta clase se estudia el criterio de congruencia de triángulos rectángulos Hipotenusa-Cateto (HC).

Puntos esenciales:

Recordar que la bisectriz del ángulo entre los lados de igual medida de un triángulo isósceles, es perpendicular al lado opuesto y lo corta en su punto medio.

Aclarar por qué B está entre A y D.

Identificar por qué $\overline{CB}$ es la bisectriz $\angle C$

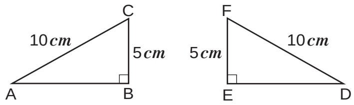
Explicar en qué consiste HC, y tener presente el orden en que se escriben los vértices al escribir la congruencia.

Unidad 6: Congruencia

Contenido 2: Criterio de congruencia Hipotenusa − Cateto (HC)

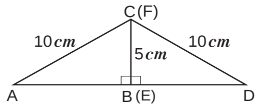
P

Los triángulos rectángulos de la figura son congruentes, ¿por qué?



S

Como BC = EF = 5 cm, se pueden hacer coincidir los catetos con medida de 5 cm.
Así se tiene la siguiente figura:



Se observa que el ΔACD es isósceles, con B entre A y D, y $\overline{CB} \perp \overline{AD}$, por lo cual $\overline{CB}$ es la bisectriz del ∠C.

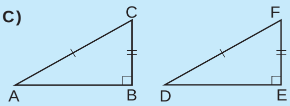
En consecuencia, B es el punto medio de $\overline{AD}$, es decir AB = DB (AB = DE), que ligado con,

AC = DF
CB = FE,

por LLL se deduce que **ΔACB ≅ ΔDFE**.

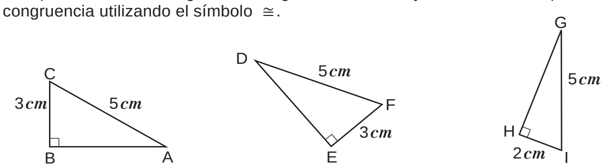
C

Criterio de congruencia Hipotenusa − Cateto (HC)
Dos triángulos rectángulos son congruentes si sus hipotenusas y un par de catetos tienen la misma medida.



E

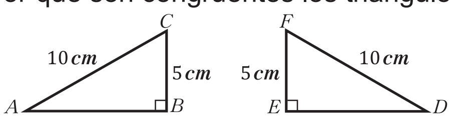
Identifique cuál de los triángulos es congruente al ΔACB, justificando su respuesta, y escriba la congruencia utilizando el símbolo ≅.



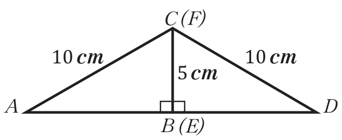
122

C2: Criterio de congruencia Hipotenusa-Cateto (HC)

P ¿Por qué son congruentes los triángulos?



S Como $BC = EF = 5\ cm$, se pueden hacer coincidir estos catetos.

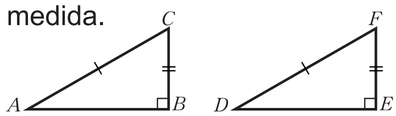


ΔACD es isósceles y $\overline{CB}$ es la bisectriz del $\angle C$
B es punto medio de $\overline{AD}$. $AB = DB\ (AB = DE)$.

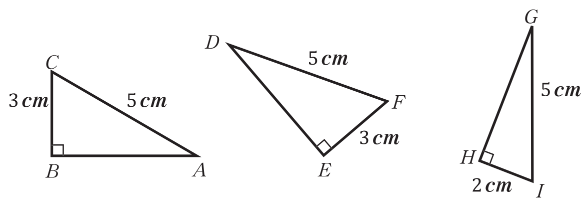
$AC = DF$
$CB = FE$
$AB = DE$

Por LLL $\Delta ACB \cong \Delta DFE$.

C **Criterio HC**
Dos triángulos rectángulos son congruentes si sus hipotenusas y un par de catetos tienen la misma medida.



E Investigue qué triángulo es congruente al ΔACB.



$AC = DF = 5\ cm$
$CB = FE = 3\ cm$
Por HC:
$\Delta ACB \cong \Delta DFE$

Ningún cateto de ΔGHI mide 3 cm, así que este triángulo no es congruente al ΔACB.

Prueba de Matemática 8vo (30 min.) Fecha: ____________

Unidad 6: Congruencia

Nombre: ______________________________ Sección: __________

Sexo: M / F

/ 20

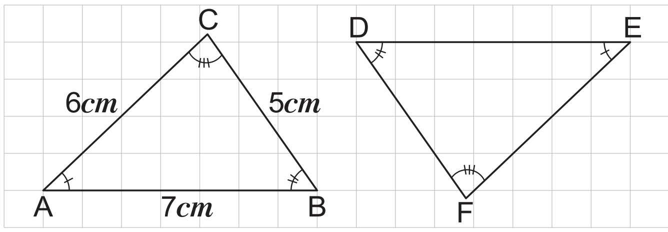
1. Si los triángulos de la figura son congruentes, entonces: (2 puntos $\times$ 4 $=$ 8)

   a) Encuentre las longitudes siguientes

$\mathrm{DE} \;=\; \boxed{}\;(cm)$

$\mathrm{EF} \;=\; \boxed{}\;(cm)$

$\mathrm{DF} \;=\; \boxed{}\;(cm)$



b) Escriba la congruencia de los triángulos utilizando el símbolo $\cong$.

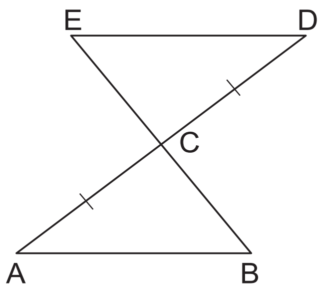
2. En la figura, si $\overline{\mathrm{AB}} \parallel \overline{\mathrm{DE}}$ y $\mathrm{AC}=\mathrm{DC}$, entonces $\Delta\mathrm{ACB} \cong \Delta\mathrm{DCE}$. (1 punto $\times$ 8 $=$ 8)

   a) Identifique:

   Hipótesis:

   Tesis:

   b) Complete la demostración

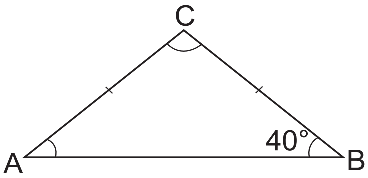


Pasos	Justificación
1. $\overline{\mathrm{AB}} \parallel \overline{\mathrm{ED}}$	Hipótesis
2. $\measuredangle\mathrm{A} = \boxed{}$	Por ser alternos internos entre paralelas
3. $\mathrm{AC}=\mathrm{DC}$	$\boxed{}$
4. $\measuredangle\mathrm{ACB}=\measuredangle\mathrm{DCE}$	$\boxed{}$
5. $\boxed{} \cong \boxed{}$	$\boxed{}$

3. El siguiente triángulo es isósceles. Encuentre $\measuredangle A$ y $\measuredangle C$. (2 puntos $\times$ 2 $=$ 4)

$\measuredangle \mathrm{A} =$ $\boxed{}$

$\measuredangle \mathrm{C} =$ $\boxed{}$



Nombre: ____________________________________

Unidad 7

Paralelogramos

Contenido 1 Introducción a las propiedades de los paralelogramos

Aprendizajes esperados

Deduce las propiedades de los paralelogramos.

Secuencia:

En séptimo grado se estudió qué es un paralelogramo y el cálculo de su área.

En esta clase se introducen tres propiedades de los paralelogramos, referentes a sus lados opuestos, sus ángulos opuestos y sus diagonales.

Puntos esenciales:

Recordar qué es un paralelogramo, y cómo se denota.

Explicar cómo usar regla y cartabón para garantizar el paralelismo de los lados opuestos del cuadrilátero.

Indicar que se use regla para medir los lados opuestos y garantizar que tienen la misma medida. De igual forma verificar que las diagonales se cortan en su punto medio.

Usar transportador para medir los ángulos opuestos.

Identificar qué propiedad utilizar en los ejercicios.

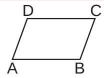
Unidad 7: Paralelogramos

Sección 1: Propiedades de los paralelogramos

Contenido 1: Introducción a las propiedades de los paralelogramos

Definición: Un cuadrilátero que tiene ambos pares de lados opuestos paralelos, se llama **paralelogramo.**

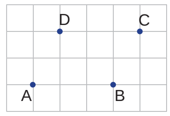
En la figura, el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, es decir, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.
Para denotar el paralelogramo ABCD, se escribe ▱ABCD.



P

Forme un cuadrilátero uniendo los puntos dados y responda las siguientes preguntas.

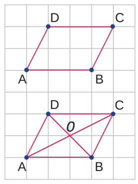
a) ¿Es un paralelogramo el cuadrilátero formado ABCD?
b) ¿Son iguales las medidas de sus lados opuestos?
c) ¿Son iguales las medidas de sus ángulos opuestos?
d) ¿Las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se interceptan en su punto medio?



S

El cuadrilátero que se forma al unir los puntos se muestra a la derecha.

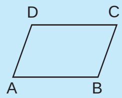
a) En la figura puede comprobarse con regla y cartabón que $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, por lo cual el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.
b) Midiendo se encuentra que AD = BC y AB = DC.
c) En efecto, usando un transportador se tiene que ∡A = ∡C y ∡B = ∡D.
d) Se trazan las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, y midiendo con una regla se comprueba que O es el punto medio de las diagonales.



C

En todo paralelogramo se verifican las siguientes propiedades:

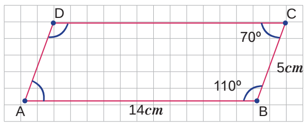
1. Ambos pares de lados opuestos son paralelos.
2. Los lados opuestos tienen la misma medida.
3. Los ángulos opuestos tienen la misma medida.
4. Las diagonales se interceptan en su punto medio.

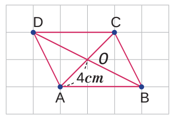


E

a) Dado el ▱ABCD, calcule ∡A, ∡D, AD y DC.

b) Dado el ▱ABCD, calcule AC.

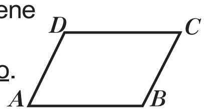




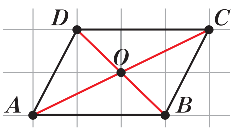
126

U7: Paralelogramos
S1: Propiedades de los paralelogramos
C1: Introducción a las propiedades de los paralelogramos

Definición: Un cuadrilátero que tiene ambos pares de lados opuestos paralelos, se llama paralelogramo.
En la fig. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.



P a) Forme un cuadrilátero uniendo los puntos dados.



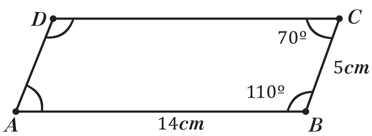
S a) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $ABCD$ es un paralelogramo.
b) $AD = BC$ y $AB = DC$. (Lados opuestos con igual medida).
c) $\measuredangle A = \measuredangle C$ y $\measuredangle B = \measuredangle D$. (Ángulos opuestos con igual medida).
d) $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se interceptan en su punto medio O.

C Propiedades de los paralelogramos

1. Ambos pares de lados opuestos son paralelos.
2. Los lados opuestos tienen la misma medida.
3. Los ángulos opuestos tienen la misma medida.
4. Las diagonales se interceptan en su punto medio.

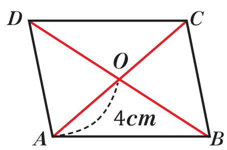
E a) Dado el ▱$ABCD$, encuentre $\measuredangle A$, $\measuredangle D$, AD y DC.

$\measuredangle A = 70°$
$\measuredangle D = 110°$
$AD = 5\ cm$
$DC = 14\ cm$



b) Dado el ▱$ABCD$, encuentre AC.

$AC = 2AO = (2)(4) = 8$
$AC = 8cm$



Contenido 2 Igualdad de medidas de los lados y ángulos opuestos de un paralelogramo

Sección 1: Propiedades de los paralelogramos

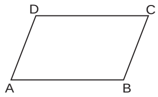
Contenido 2: Igualdad de medidas de los lados y ángulos opuestos de un paralelogramo

P

Si un cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, entonces sus lados opuestos tienen la misma medida.

a) Escriba la hipótesis y la tesis.
b) Realice la demostración utilizando las siguientes sugerencias:

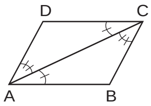
- Trace la diagonal $\overline{AC}$.
- Demuestre que $\triangle CAB \cong \triangle ACD$.
- Demuestre que AD = BC y AB = DC.



S

a) **Hipótesis:**
El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, lo cual por definición significa que $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.
Tesis:
Los lados opuestos tienen la misma medida, es decir AD = BC y AB = DC.

b) Se traza la diagonal $\overline{AC}$ y se forman los $\triangle CAB$ y $\triangle ACD$ como puede verse en la figura de la derecha.



Pasos	Justificación
1. $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	Hipótesis
2. $\measuredangle BAC = \measuredangle DCA$	$\angle BAC$ y $\angle DCA$ son alternos internos, $\overleftrightarrow{AC}$ una transversal y $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$
3. CA = AC	$\overline{CA}$ es común al $\triangle CAB$ y $\triangle ACD$
4. $\measuredangle BCA = \measuredangle DAC$	$\angle BCA$ y $\angle DAC$ son alternos internos por ser $\overleftrightarrow{AC}$ una transversal y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
5. $\triangle CAB \cong \triangle ACD$	ALA en 2, 3 y 4
6. CB = AD y AB = CD	$\triangle CAB \cong \triangle ACD$ (en 5)
7. AD = BC y AB = DC	CB = BC, CD = DC

C

Los lados opuestos de un paralelogramo tienen la misma medida.

E

Si un cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, entonces los ángulos opuestos tienen la misma medida. Para demostrar esta propiedad, utilice:

a) Los pasos 2. y 4. de la solución del problema y justifique por qué $\measuredangle DAB = \measuredangle DCB$.
b) El paso 5. de la solución del problema y justifique por qué $\measuredangle CBA = \measuredangle CDA$.

127

Aprendizajes esperados

Aplica la congruencia de triángulos para probar que en un paralelogramo los pares de lados y ángulos opuestos tienen la misma medida.

Secuencia:

En la clase anterior se estudiaron tres propiedades de los paralelogramos.

En esta clase se demuestra que los lados opuestos tienen la misma medida, y que los ángulos opuestos también tienen igual medida.

Puntos esenciales:

Indicar la hipótesis y la tesis.

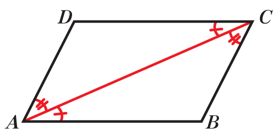
Mencionar que el objetivo de trazar la diagonal es formar dos triángulos congruentes.

Recordar que ángulos alternos internos entre paralelas tienen la misma medida.

Especificar que en la clase se ha demostrado que lados y ángulos opuestos de un paralelogramo, tienen la misma medida.

C2: Igualdad de medida de los lados y ángulos opuestos de un paralelogramo

P $ABCD$ es un paralelogramo. Demuestre que los lados opuestos tienen la misma medida.



S a) Hipótesis: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
Tesis: $AD = BC$ y $AB = DC$

b)

Pasos	Justificación
1. $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	Hipótesis
2. $\measuredangle BAC = \measuredangle DCA$	$\angle BAC$ y $\angle DCA$ son alt. int. entre paralelas.
3. $CA = AC$	$\overline{CA}$ es común en ΔCAB y ΔACD
4. $\measuredangle BCA = \measuredangle DAC$	$\angle BCA$ y $\angle DAC$ son alt. int. entre paralelas.
5. $\Delta CAB \cong \Delta ACD$	ALA en 2, 3 y 4
6. $CB = AD$ y $AB = CD$	$\Delta CAB \cong \Delta ACD$ (en 5)
7. $AD = BC$ y $AB = DC$	$CB = BC, CD = DC$

C Los lados opuestos de un paralelogramo tienen la misma medida.

E Si $ABCD$ es un paralelogramo, entonces los ángulos opuestos tienen la misma medida.

a) $\measuredangle DAB = \measuredangle BAC + \measuredangle DAC$ Suma de ángulos
$= \measuredangle DCA + \measuredangle BCA$ Por 2 y 4
$= \measuredangle DCB$

b) $\Delta CAB \cong \Delta ACD$, así por definción de congruencia de triángulos $\measuredangle CBA = \measuredangle CDA$

Contenido 3 Propiedad de las diagonales de un paralelogramo

Aprendizajes esperados

Aplica la congruencia de triángulos para probar que en un paralelogramo las diagonales se cortan en su punto medio.

Secuencia:

En la clase anterior se demostró que lados y ángulos opuestos de un paralelogramo, tienen la misma medida.

En esta clase se demuestra que las diagonales de un paralelogramo, se cortan en su punto medio.

Puntos esenciales:

Indicar que las propiedades demostradas en la clase anterior, ya pueden ser utilizadas.

Especificar qué triángulos deben ser congruentes.

Aplicar la definición de congruencia de triángulos.

Señalar que en el ejercicio ya se puede utilizar la propiedad demostrada en esta clase.

Unidad 7: Paralelogramos

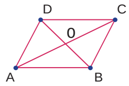
Contenido 3: Propiedad de las diagonales de un paralelogramo

P

Si un cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, entonces las diagonales se cortan en su punto medio.

a) Escriba la hipótesis y la tesis.
b) Realice la demostración utilizando las siguientes sugerencias:

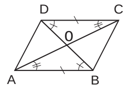
- Demuestre que $\triangle ABO \cong \triangle CDO$.
- Demuestre que $AO = CO$ y $BO = DO$.



S

a) **Hipótesis:**
El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, es decir, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

Tesis:
Las diagonales se cortan en su punto medio, es decir, $AO = CO$ y $BO = DO$.



b)

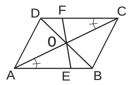
Pasos	Justificación
1. $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	Hipótesis
2. $\measuredangle ABO = \measuredangle CDO$	$\angle ABO$ y $\angle CDO$ son alternos internos entre $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y la transversal $\overleftrightarrow{BD}$
3. $BA = DC$	Lados opuestos de un paralelogramo, tienen la misma medida
4. $\measuredangle BAO = \measuredangle DCO$	$\angle BAO$ y $\angle DCO$ son alternos internos entre $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y la transversal $\overleftrightarrow{AC}$
5. $\triangle ABO \cong \triangle CDO$	ALA en 2, 3 y 4
6. $AO = CO$ y $BO = DO$	$\triangle ABO \cong \triangle CDO$ (en 5)

C

En un paralelogramo las diagonales se cortan en su punto medio.

E

Dada la figura de la derecha, si el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, entonces $\triangle AOE \cong \triangle COF$.
Complete la demostración.

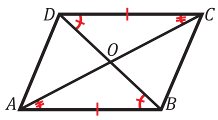


Pasos	Justificación
1. $\measuredangle AOE =$ ☐	$\angle AOE$ y $\angle COF$ son opuestos por el vértice
2. $AO = CO$	☐
3. $\measuredangle EAO =$ ☐	$\angle EAO$ y $\angle FCO$ son alternos internos entre $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y la transversal $\overleftrightarrow{AC}$
4. $\triangle AOE \cong \triangle COF$	☐

128

C3: Propiedad de las diagonales de un Paralelogramo

P Si $ABCD$ es un paralelogramo, entonces las diagonales se cortan en su punto medio.



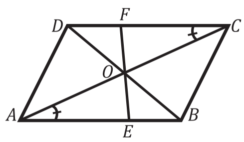
S a) Hipótesis: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
Tesis: $AO = CO$ y $BO = DO$

b) Demuestre que $\Delta ABO \cong \Delta CDO$, $AO = CO$ y $BO = DO$

Pasos	Justificación
1. $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	Hipótesis
2. $\measuredangle ABO = \measuredangle CDO$	$\angle ABO$ y $\angle CDO$ son alt. int. entre paralelas
3. $BA = DC$	Lados opuestos de un paralelogramo, tienen la misma medida
4. $\measuredangle BAO = \measuredangle DCO$	$\angle BAO$ y $\angle DCO$ son alt. int. entre paralelas
5. $\Delta ABO \cong \Delta CDO$	ALA en 2, 3 y 4
6. $AO = CO$ y $BO = DO$	$\Delta ABO \cong \Delta CDO$(en 5)

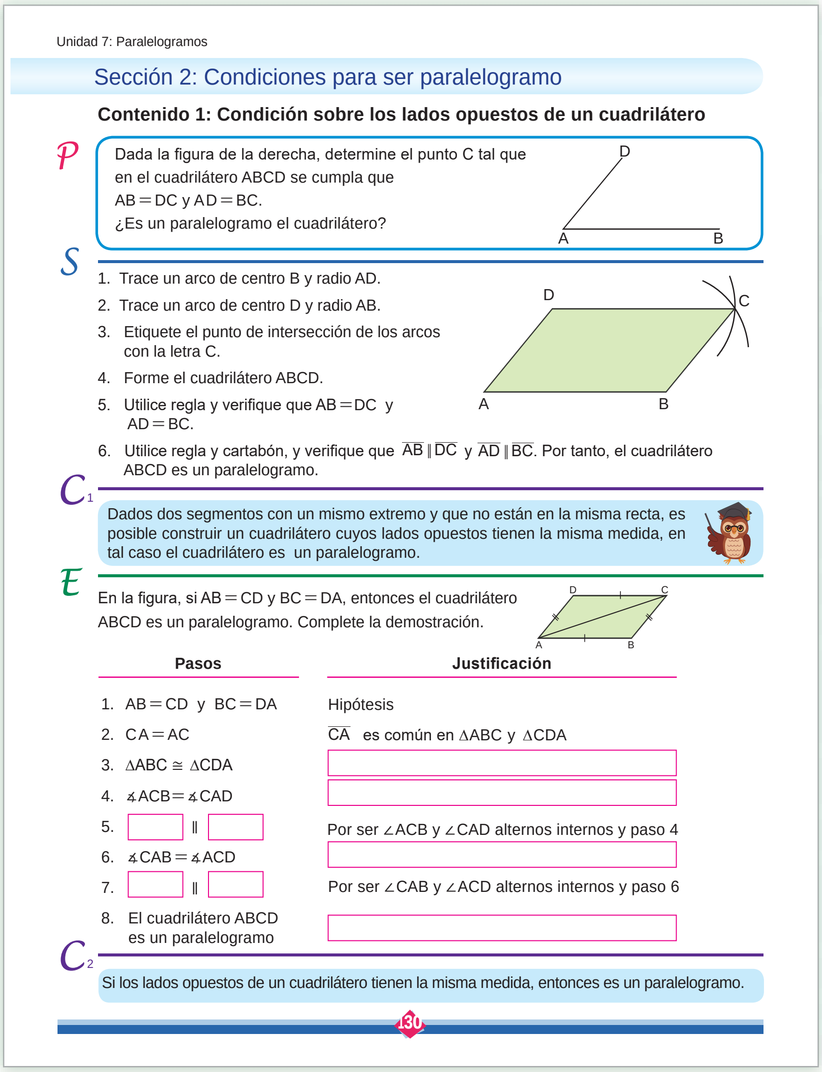
C En un paralelogramo las diagonales se cortan en su punto medio.

E Si $ABCD$ es un paralelogramo, entonces $\Delta AOE \cong \Delta COF$.
Complete la demostración



Pasos	Justificación
1. $\measuredangle AOE = \boxed{\measuredangle COF}$	$\angle AOE$ y $\angle COF$ son opuestos por el vértice
2. $AO = CO$	$\boxed{O \text{ es un punto medio de } \overline{AC}}$
3. $\measuredangle EAO = \boxed{\measuredangle FCO}$	$\angle EAO$ y $\angle FCO$ son alt. int. entre paralelas
4. $\Delta AOE \cong \Delta COF$	$\boxed{\text{ALA en 1, 2 y 3}}$

Contenido 1 Condición sobre los lados opuestos de un cuadrilátero



Unidad 7: Paralelogramos

Sección 2: Condiciones para ser paralelogramo

Contenido 1: Condición sobre los lados opuestos de un cuadrilátero

P Dada la figura de la derecha, determine el punto C tal que en el cuadrilátero ABCD se cumpla que AB = DC y AD = BC.
¿Es un paralelogramo el cuadrilátero?

S
1. Trace un arco de centro B y radio AD.
2. Trace un arco de centro D y radio AB.
3. Etiquete el punto de intersección de los arcos con la letra C.
4. Forme el cuadrilátero ABCD.
5. Utilice regla y verifique que AB = DC y AD = BC.
6. Utilice regla y cartabón, y verifique que $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. Por tanto, el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

C1 Dados dos segmentos con un mismo extremo y que no están en la misma recta, es posible construir un cuadrilátero cuyos lados opuestos tienen la misma medida, en tal caso el cuadrilátero es un paralelogramo.

E En la figura, si AB = CD y BC = DA, entonces el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo. Complete la demostración.

Pasos	Justificación
1. AB = CD y BC = DA	Hipótesis
2. CA = AC	$\overline{CA}$ es común en ΔABC y ΔCDA
3. ΔABC ≅ ΔCDA	
4. ∡ACB = ∡CAD	
5. ☐ ∥ ☐	Por ser ∠ACB y ∠CAD alternos internos y paso 4
6. ∡CAB = ∡ACD	
7. ☐ ∥ ☐	Por ser ∠CAB y ∠ACD alternos internos y paso 6
8. El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo	

C2 Si los lados opuestos de un cuadrilátero tienen la misma medida, entonces es un paralelogramo.

130

Aprendizajes esperados

Conoce que un cuadrilátero con sus lados opuestos de igual medida es un paralelogramo.

Secuencia:

En la sección anterior se estudió que en un paralelogramo los lados opuestos tienen la misma medida.

En esta clase se estudia que un cuadrilátero que tiene sus lados opuestos con la misma medida, es un paralelogramo.

Puntos esenciales:

Indicar cómo utilizar el compás en el trazo de arcos, y la regla y cartabón para verificar el paralelismo entre los segmentos.

Señalar que el objetivo de trazar la diagonal en el cuadrilátero, es formar dos triángulos congruentes.

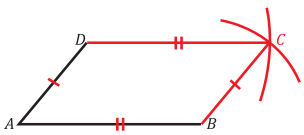
Mencionar que la diagonal funciona como transversal a cada par de lados del cuadrilátero.

Recordar que si ángulos alternos internos tienen la misma medida, entonces las rectas cortadas por la transversal son paralelas.

S2: Condiciones para ser paralelogramo
C1: Condición sobre los lados opuestos de un cuadrilátero

(P) Dada la figura, determine el punto C tal que en el cuadrilátero $AB = DC$ y $AD = BC$.
¿Es un paralelogramo el cuadrilátero?

(S)

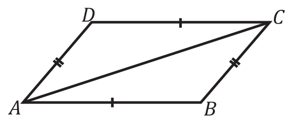


$AB = DC$
$AD = BC$
$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$
$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

$ABCD$ es un paralelogramo.

(C1) Dados dos segmentos con un mismo extremo y que no están en la misma recta, es posible construir un cuadrilátero cuyos lados opuestos tienen la misma medida, en tal caso el cuadrilátero es un paralelogramo.

(E) Si $AB = CD$ y $BC = DA$, entonces $ABCD$ es un paralelogramo. Complete la demostración.



Pasos	Justificación
1. $AB = CD$ y $BC = DA$	Hipótesis
2. $CA = AC$	$\overline{CA}$ es común a ΔABC y ΔCDA
3. $\Delta ABC \cong \Delta CDA$	LLL en pasos 1 y 2
4. $\measuredangle ACB = \measuredangle CAD$	Def. de congruencia
5. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	$\angle ACB$ y $\angle CAD$ alt. int. y paso 4
6. $\measuredangle CAB = \measuredangle ACD$	Def. de congruencia
7. $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$	$\angle CAB$ y $\angle ACD$ alt. int. y paso 6
8. El cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo	Por pasos 5 y 7

(C2) Si los lados opuestos de un cuadrilátero tienen la misma medida, entonces es un paralelogramo.

Contenido 2 Condición sobre los ángulos opuestos de un cuadrilátero para que este sea un paralelogramo

Aprendizajes esperados

Conoce que un cuadrilátero con sus ángulos opuestos de igual medida es un paralelogramo.

Secuencia:

En la clase anterior se estudió que todo cuadrilátero que tenga sus lados opuestos con la misma medida, es un paralelogramo.

En esta clase se estudia que un cuadrilátero que tiene sus ángulos opuestos con la misma medida, es un paralelogramo.

Puntos esenciales:

Hay que recordar:

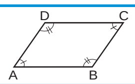
- Cuánto suman las medidas de los ángulos internos de un cuadrilátero.
- Si los ángulos alternos internos o correspondientes, tienen la misma medida, entonces las rectas cortadas por la transversal son paralelas.

Aclarar que el objetivo de prolongar el segmento, es formar un par lineal, para probar que entre las rectas se forman ángulos correspondientes con la misma medida.

Especificar que el cuadrilátero es paralelogramo, si ambos pares de ángulos opuestos tienen la misma medida.

Contenido 2: Condición sobre los ángulos opuestos de un cuadrilátero para que este sea un paralelogramo

P En la figura, si $\measuredangle A=\measuredangle C$ y $\measuredangle B=\measuredangle D$, demuestre que el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.



S En un cuadrilátero la suma de las medidas de sus ángulos internos es 360°, así que

$$\measuredangle A+\measuredangle B+\measuredangle C+\measuredangle D=360°$$

y por hipótesis $\measuredangle A=\measuredangle C$ y $\measuredangle B=\measuredangle D$, entonces, sustituyendo en la igualdad anterior se tiene

$$\measuredangle A+\measuredangle D+\measuredangle A+\measuredangle D=360°$$
$$2\measuredangle A+2\measuredangle D=360°$$
$$2(\measuredangle A+\measuredangle D)=360°$$
$$\measuredangle A+\measuredangle D=180° \quad ①$$

Al prolongar $\overline{AD}$ en la figura original se tiene que:

$$\measuredangle CDA+\measuredangle CDE=180° \quad ②$$

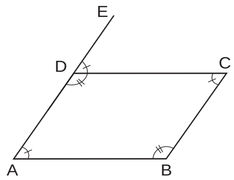
Por ① y ②, $\measuredangle A=\measuredangle CDE$ ③

De ③ y por ser $\angle A$ y $\angle CDE$ correspondientes, se obtiene que

$$AB \parallel DC \quad ④$$

Como $\measuredangle A=\measuredangle C$ y $\measuredangle A=\measuredangle CDE$, entonces $\measuredangle C=\measuredangle CDE$.
Además, $\angle C$ y $\angle CDE$ son alternos internos, luego

$$AD \parallel BC \quad ⑤$$

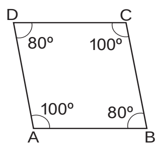


De ④ y ⑤ resulta que el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

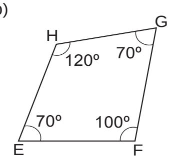
C Si un cuadrilátero tiene los ángulos opuestos con la misma medida, entonces es un paralelogramo.

E Identifique cual de los cuadriláteros es paralelogramo y justifique por qué.

a)

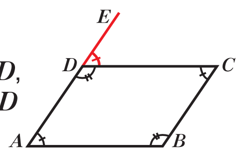


b)



C2: Condición sobre los ángulos opuestos de un cuadrilátero para que este sea un paralelogramo

P En la figura, $\measuredangle A=\measuredangle C$ y $\measuredangle B=\measuredangle D$, entonces el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo.



S $\measuredangle A+\measuredangle B+\measuredangle C+\measuredangle D=360°$.
Como $\measuredangle A=\measuredangle C$ y $\measuredangle B=\measuredangle D$, entonces:

$$\measuredangle A+\measuredangle D+\measuredangle A+\measuredangle D=360°$$
$$2\measuredangle A+2\measuredangle D=360°$$
$$2(\measuredangle A+\measuredangle D)=360°$$
$$\measuredangle A+\measuredangle D=180° \quad ①$$
$$\measuredangle CDA+\measuredangle CDE=180° \quad ②$$

Por ① y ②, $\measuredangle A=\measuredangle CDE$ ③

Por ③ y ser correspondientes $\angle A$ y $\angle CDE$, se obtiene $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ④

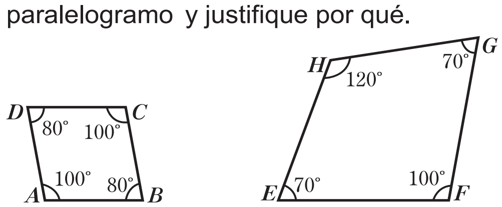
Como $\measuredangle A=\measuredangle C$ y $\measuredangle A=\measuredangle CDE$, entonces $\measuredangle C=\measuredangle CDE$.

Al ser $\angle C$ y $\angle CDE$ alternos internos, se obtiene $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ⑤

De ④ y ⑤ resulta que $ABCD$ es un paralelogramo.

C Si un cuadrilátero tiene los ángulos opuestos con la misma medida, entonces es un paralelogramo.

E Identifique el cuadrilátero que es paralelogramo y justifique por qué.



$ABCD$ es paralelogramo, ya que los ángulos opuestos tienen la misma medida.

$EFGH$ no es paralelogramo, ya que hay un par de ángulos opuestos que no tienen la misma medida.

Contenido 3 Condición sobre las diagonales y condición sobre una pareja de lados paralelos de igual medida en un cuadrilátero

Unidad 7: Paralelogramos

Contenido 3: Condición sobre las diagonales y condición sobre una pareja de lados paralelos de igual medida en un cuadrilátero

P

Dado el punto O en el plano.

a) Dibuje dos circunferencias con centro O, y radios respectivos 4 cm y 3 cm.

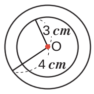
b) Trace un diámetro de cada circunferencia y etiquete sus extremos con A, C y B, D respectivamente. Los extremos deben ser no colineales. ¿Es AO = CO y BO = DO?

c) Forme el cuadrilátero ABCD. ¿Es un paralelogramo?

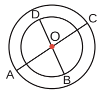
O

S

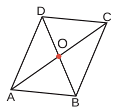
a) Las circunferencias de centro O y radios respectivos 4 cm y 3 cm, se muestran a la derecha.



b) Se trazan los diámetros de las dos circunferencias anteriores y se etiquetan sus extremos, obteniendo $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. En la figura, AO = CO y BO = DO por ser radios de sus respectivas circunferencias.



c) Se trazan $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, y $\overline{AD}$ formando el cuadrilátero ABCD.



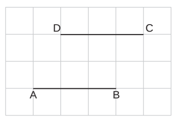
Se verifica utilizando regla y cartabón que $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, por tanto, el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

C1

Si las diagonales de un cuadrilátero tienen el mismo punto medio, entonces es un paralelogramo.

E

En la figura $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y AB = DC = 3 cm. Forme el cuadrilátero ABCD y utilice el compás para verificar que AD = BC. Concluya que es un paralelogramo.



De este ejercicio se deduce que:

C2

Si un cuadrilátero tiene un par de lados opuestos paralelos y con igual medida, entonces es un paralelogramo.

132

Aprendizajes esperados

Conoce que un cuadrilátero cuyas diagonales tienen el mismo punto medio es un paralelogramo, y que si tiene dos lados paralelos de igual medida también lo es.

Secuencia:

En la clase anterior se estudió que todo cuadrilátero que tenga sus ángulos opuestos con la misma medida, es un paralelogramo.

En esta clase se estudian otras condiciones para que un cuadrilátero sea un paralelogramo.

Puntos esenciales:

Señalar que el objetivo del problema es formar un cuadrilátero cuyas diagonales tengan el mismo punto medio.

Recordar que todos los radios de una circunferencia, tienen la misma medida.

Guiar el proceso de construcción del problema, e indicar cómo usar la regla y cartabón para verificar que el cuadrilátero formado es un paralelogramo.

Indicar cómo utilizar el compás para comparar las medidas de los segmentos.

Especificar que un cuadrilátero es un paralelogramo, si un par de lados opuestos tienen la misma medida y son paralelos o si sus diagonales se cortan en su punto medio.

C3: Condición sobre las diagonales y condición sobre una pareja de lados paralelos de igual medida en un cuadrilátero

P a) Dibuje dos circunferencias con centro O, y radios respectivos $4\ cm$ y $3\ cm$.

b) Tome un diámetro de cada circunferencia, AC y BD respectivamente ¿Es $AO = CO$ y $BO = DO$?

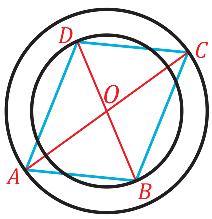
c) Forme el cuadrilátero $ABCD$. ¿Es un paralelogramo?

S $AO = CO$ (son radios)

Similarmente $BO = DO$.

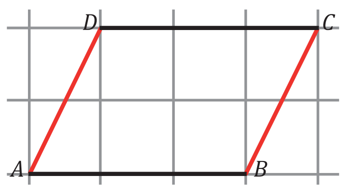
$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

$ABCD$ es un paralelogramo.



C1 Si las diagonales de un cuadrilátero tienen el mismo punto medio, entonces es un paralelogramo.

E En la figura $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $AB = DC = 3\ cm$. Forme el cuadrilátero $ABCD$ y utilice el compás para verificar que $AD = BC$.



(Al utilizar el compás se verifica que $AD = BC$.)

C2 Si un cuadrilátero tiene dos lados paralelos y con igual medida, entonces es un paralelogramo

Contenido 1 Relación entre rombos, rectángulos, cuadrados y paralelogramos

Aprendizajes esperados

Establece relación entre rombos, rectángulos, cuadrados y paralelogramos.

▪ Secuencia:

En séptimo grado se estudiaron rombos, rectángulos y cuadrados. En la sección anterior, se estudiaron condiciones que debe cumplir un cuadrilátero para ser paralelogramos.

En esta clase se estudia la relación existente entre rombos, rectángulos y cuadrados, con los paralelogramos.

▪ Puntos esenciales:

Recordar los conceptos de rombo, rectángulo y cuadrado.

Señalar que los conceptos de rombo, rectángulo y cuadrado establecen condiciones que garantizan ser un paralelogramo.

Aclarar cómo deben llenarse los espacios en blanco en el ejercicio.

Explicar en qué consisten los esquemas mostrados en la solución del problema.

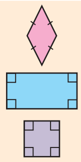
Unidad 7: Paralelogramos

Sección 3: Paralelogramos especiales

Contenido 1: Relación entre rombos, rectángulos, cuadrados y paralelogramos

Repaso

- Un rombo es un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados de igual medida.
- Un rectángulo es un cuadrilátero cuyos cuatro ángulos tienen igual medida, es decir, 90°.
- Un cuadrado es un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados de igual medida, y sus cuatro ángulos miden 90°.



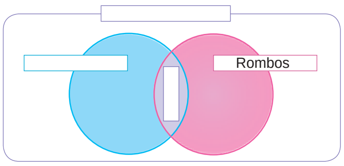
P ¿Qué relación se puede establecer entre rombos, rectángulos y cuadrados con los paralelogramos?

S Observe que:

- en el rombo los lados opuestos tienen la misma medida, lo cual indica que es un paralelogramo.
- en el rectángulo los ángulos opuestos tienen la misma medida, es decir que es un paralelogramo.
- en el cuadrado los lados opuestos tienen la misma medida, lo cual indica que es un paralelogramo.

C Los rombos, rectángulos y cuadrados son paralelogramos.

E Escriba en los rectángulos de la figura las palabras: paralelogramos, rectángulos, rombos o cuadrados según corresponda.

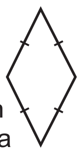


134

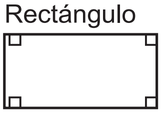
S3: Paralelogramos especiales
C1: Relación entre rombos, rectángulos, cuadrados y paralelogramos

Rombo

Sus cuatro lados tienen igual medida

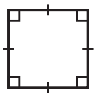


Rectángulo



Sus cuatro ángulos miden 90°

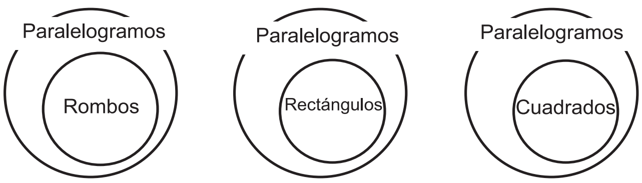
Cuadrado



Sus cuatro lados tienen igual medida y los cuatro ángulos miden 90°

P ¿Qué relación se puede establecer entre rombos, rectángulos y cuadrados con los paralelogramos?

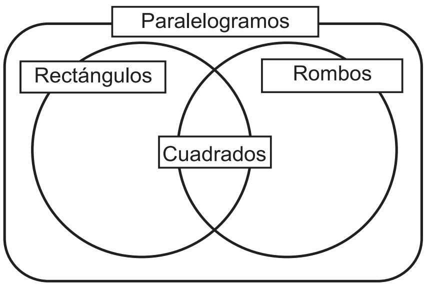
S



Rombos: lados opuestos con igual medida (paralelogramos).
Rectángulos: ángulos opuestos con igual medida (paralelogramos).
Cuadrados: lados opuestos con igual medida (paralelogramos)

C Los rombos, rectángulos y cuadrados son paralelogramos.

E Escriba en los rectángulos de la figura las palabras: paralelogramos, rectángulos o cuadrados según corresponda



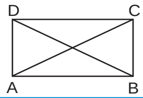
Contenido 2 Propiedades de las diagonales de un rectángulo y de un rombo

Sección 3: Paralelogramos especiales

Contenido 2: Propiedades de las diagonales de un rectángulo y de un rombo

P

El cuadrilátero de la figura es un rectángulo.
Demuestre que BD = AC.
Sugerencia: Pruebe que ΔDAB ≅ ΔCBA.

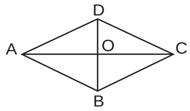


S

Pasos	Justificación
1. El cuadrilátero ABCD es un rectángulo	Hipótesis
2. El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo	Un rectángulo es un paralelogramo
3. AD = BC	Propiedades de paralelogramos
4. ∡A = ∡B	Definición de rectángulo
5. AB = BA	$\overline{AB}$ es común al ΔDAB y ΔCBA
6. ΔDAB ≅ ΔCBA	LAL en pasos 3, 4 y 5
7. BD = AC	Definición de congruencia de triángulos

Ejemplo

El cuadrilátero ABCD de la figura es un rombo.
Demuestre que $\overline{BD} \perp \overline{AC}$
Sugerencia: Pruebe que ΔDAO ≅ ΔDCO.



Pasos	Justificación
1. El cuadrilátero ABCD es un rombo	Hipótesis
2. El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo	Un rombo es un paralelogramo
3. DA = DC	Definición de rombo en 1
4. AO = CO	Propiedad de las diagonales de un paralelogramo
5. DO = DO	$\overline{DO}$ es común al ΔDAO y ΔDCO
6. ΔDAO ≅ ΔDCO	LLL en pasos 3, 4 y 5
7. ∡AOD = ∡COD	Definición de congruencia de triángulos
8. ∡AOD + ∡COD = 180°	∠AOD y ∠COD forman par lineal
9. ∡AOD = 90°	Pasos 7 y 8
10. $\overline{BD} \perp \overline{AC}$	Definición de perpendicularidad en paso 9

C

- En un rectángulo las diagonales tienen la misma medida.
- En un rombo las diagonales son perpendiculares.

Aprendizajes esperados

Conoce que en un rectángulo las diagonales tienen la misma medida y en un rombo son perpendiculares.

Secuencia:

En la clase anterior, se estudió que los rombos y rectángulos son paralelogramos.

En esta clase se aplica este hecho para demostrar propiedades referentes a estos cuadriláteros.

Puntos esenciales:

Sugerir probar qué triángulos son congruentes.

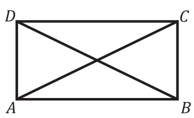
Señalar que se debe tener presente el orden en que escriben los vértices cuando están indicando la congruencia.

Aclarar a los estudiantes que deben recordar las propiedades de los paralelogramos, par lineal y los criterios de congruencia.

Especificar las propiedades que se han demostrado.

C2: Propiedades de las diagonales de un rectángulo y de un rombo

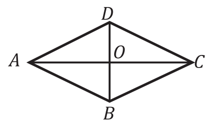
P El cuadrilátero de la figura es un rectángulo. Demuestre que $BD = AC$.



S

Pasos	Justificación
1. $ABCD$ es un rectángulo	Hipótesis
2. $ABCD$ es un paralelogramo	Un rectángulo es un paralelogramo
3. $AD = BC$	Prop. de los paralelogramos
4. $\measuredangle A = \measuredangle B$	Definición de rectángulo
5. $AB = BA$	$\overline{AB}$ es común en ΔDAB y ΔCBA
6. $\Delta DAB \cong \Delta CBA$	LAL en pasos 3, 4 y 5
7. $BD = AC$	Def. de congruencia

Ej $ABCD$ es un rombo. Demuestre que $\overline{BD} \perp \overline{AC}$.



Pasos	Justificación
1. $ABCD$ es un rombo	Hipótesis
2. $ABCD$ es un paralelogramo	Un rombo es un paralelogramo
3. $DA = DC$	Definición de rombo en 1
4. $AO = CO$	Prop. de las diagonales de un paralelogramo
5. $DO = OD$	$\overline{DO}$ es común en ΔDAO y ΔDCO
6. $\Delta DAO \cong \Delta DCO$	LLL en pasos 3, 4 y 5
7. $\measuredangle AOD = \measuredangle COD$	Def. de congruencia
8. $\measuredangle AOD + \measuredangle COD = 180°$	$\angle AOD$ y $\angle COD$ forman par lineal
9. $\measuredangle AOD = 90°$	Pasos 7 y 8
10. $\overline{BD} \perp \overline{AC}$	Def. de perpendicularidad en paso 9

C En un rectángulo las diagonales tienen la misma medida.
En un rombo las diagonales son perpendiculares.

Contenido 3 Condiciones para que un paralelogramo sea rectángulo, rombo o cuadrado

Aprendizajes esperados

Identifica las condiciones para que un paralelogramo sea rectángulo, rombo o cuadrado.

Secuencia:

En la primera clase de esta sección, se supo que los rombos, cuadrados y rectángulos son paralelogramos.

En esta clase se estudia que debe cumplir un paralelogramo para ser un rectángulo o rombo, y qué deben cumplir los rombos y rectángulos para ser cuadrados.

Puntos esenciales:

Señalar que:

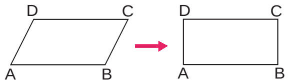
- Un paralelogramo es rectángulo si tiene un ángulo recto. (Ángulos consecutivos con la misma medida).
- Un paralelogramo es rombo si tiene dos lados consecutivos con la misma medida.
- Un rectángulo es cuadrado si tiene dos lados consecutivos con la misma medida.
- Un rombo es cuadrado si tiene un ángulo recto. (Ángulos consecutivos con la misma medida).

Unidad 7: Paralelogramos

Contenido 3: Condiciones para que un paralelogramo sea rectángulo, rombo o cuadrado

P

Deduzca la condición que debe cumplir un ▱ ABCD para ser un rectángulo, como se muestra en la figura.



S

Un rectángulo tiene sus cuatro ángulos rectos. Para que lo anterior se cumpla únicamente se necesita que $\measuredangle A = 90°$.

Por ser el cuadrilátero dado un paralelogramo, $\measuredangle C = 90°$ y $\measuredangle B = \measuredangle D$, ya que ángulos opuestos tienen la misma medida.

Como la suma de las medidas de los ángulos internos de un cuadrilátero es 360°, entonces

$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C + \measuredangle D = 360°$$
$$90° + \measuredangle B + 90° + \measuredangle D = 360°$$
$$180° + \measuredangle B + \measuredangle D = 360°$$
$$\measuredangle B + \measuredangle D = 180°$$
$$2\measuredangle B = 180°$$
$$\measuredangle B = 90°$$

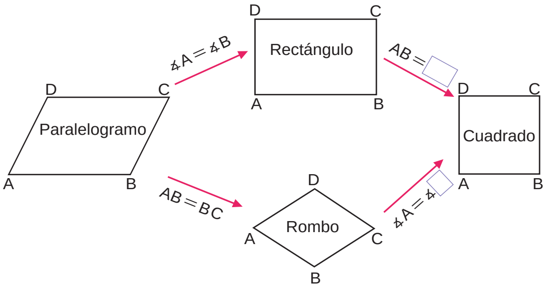
En consecuencia, $\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C = \measuredangle D = 90°$.

C

Un paralelogramo es un rectángulo si tiene un ángulo recto, es decir, un ángulo que mide 90°.

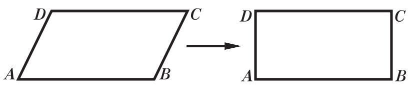
E

Complete en el recuadro la característica que debe cumplir el cuadrilátero de la izquierda para convertirse en el de la derecha.



C3: Condiciones para que un paralelogramo sea rectángulo, rombo o cuadrado

P Deduzca la condición que debe cumplir un ▱ $ABCD$ para ser un rectángulo.



S Un rectángulo tiene sus cuatro ángulos rectos. Así que únicamente se necesita que $\measuredangle A = 90°$.

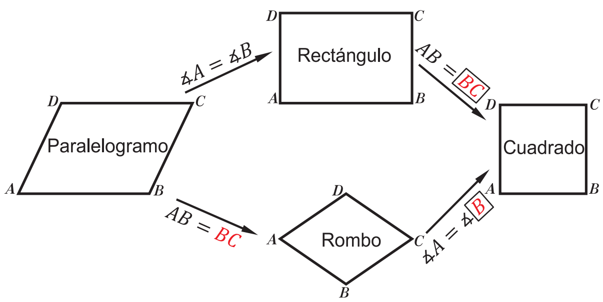
Ya que, $\measuredangle C = 90°$ y $\measuredangle B = \measuredangle D$.
(Ángulos opuestos tienen la misma medida)

$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C + \measuredangle D = 360°$$
$$90° + \measuredangle B + 90° + \measuredangle D = 360°$$
$$180° + \measuredangle B + \measuredangle D = 360°$$
$$\measuredangle B + \measuredangle D = 180°$$
$$2\measuredangle B = 180°$$
$$\measuredangle B = 90°$$

En consecuencia, $\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C = \measuredangle D = 90°$.

C Un paralelogramo es un rectángulo si tiene un ángulo recto, es decir, de medida 90°.

E Complete en el recuadro la característica que debe cumplir el cuadrilátero de la izquierda para ser el de la derecha.



Prueba de Matemática 8vo (30 min.)   Fecha: ____________

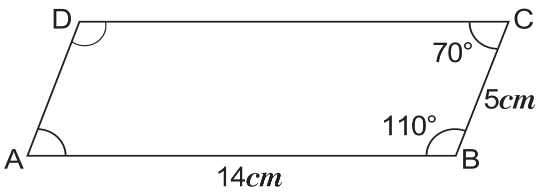
Unidad 7: Paralelogramos

/ 20

Nombre: ______________________________ Sección: __________

Sexo: M / F

1. Dado el $\square ABCD$, encuentre $\measuredangle A$, $\measuredangle D$, AD y DC. (2 puntos $\times$ 4 $=$ 8)



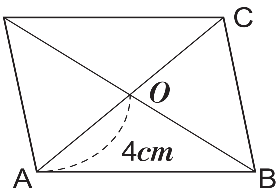
$\measuredangle A=$

$\measuredangle D=$

$AD=$

$DC=$

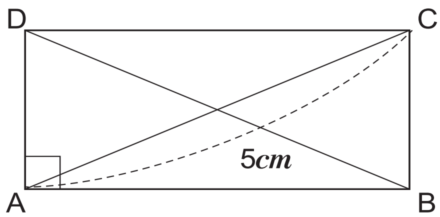
2. Dado el $\square ABCD$, encuentre AC. (2 puntos)



$AC=$

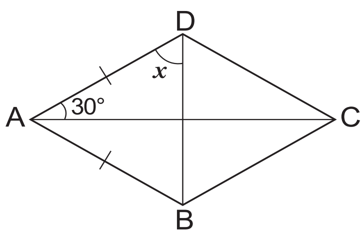
3. Dados los paralelogramos siguientes: (2 puntos $\times$ 2 $=$ 4)

a) Calcule BD.



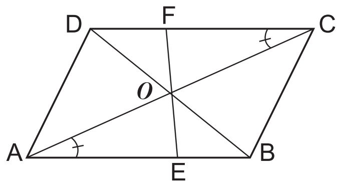
$BD=$

b) Calcule $\measuredangle ADB$.



$\measuredangle ADB=$

4. Dada la figura de la derecha, si el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, entonces $\Delta\mathrm{AOE} \cong \Delta\mathrm{COF}$. Complete la demostración.
(2 puntos $\times$ 3 $=$ 6)



Pasos	Justificación
1) $\measuredangle\mathrm{AOE} =$	$\angle\mathrm{AOE}$ y $\angle\mathrm{COF}$ son opuestos por el vértice
2) $\mathrm{AO} = \mathrm{CO}$	
3) $\measuredangle\mathrm{EAO} =$	$\angle\mathrm{EAO}$ y $\angle\mathrm{FCO}$ son alternos internos entre $\overline{\mathrm{AB}} \parallel \overline{\mathrm{CD}}$ y la transversal $\overleftrightarrow{\mathrm{AC}}$
4) $\Delta\mathrm{AOE} \cong \Delta\mathrm{COF}$	ALA en pasos 1), 2) y 3)

Nombre: ______________________________

Unidad 8

Sólidos

Contenido 1

Prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas

Aprendizajes esperados

Reconoce prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas.

Secuencia:

En esta clase se estudia qué son los sólidos o cuerpos geométricos y sus elementos.

Puntos esenciales:

Aclarar por qué se habla de superficie curva o superficie plana.

Explicar qué es la altura de un prisma rectangular, de una pirámide cuadrada, de un cilindro y un cono.

Señalar las características gráficas de los sólidos en estudio.

Explicar a qué se le llamará superficie de un sólido.

Escribir los elementos de los sólidos del problema, después de escribir la conclusión.

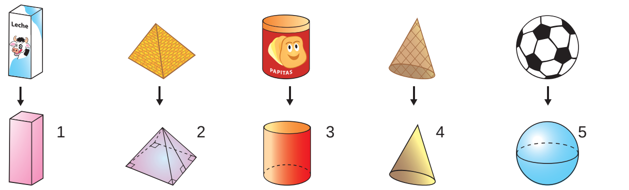
Unidad 8: Sólidos

Sección 1: Poliedros

Contenido 1: Prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas

P

Dados los siguientes objetos de uso común, junto con sus abstracciones geométricas, identifique en estos las superficies curvas y planas. Luego reúna las figuras de acuerdo a si tienen todas sus superficies planas o al menos una superficie curva.



S

Las figuras 1 y 2 tienen todas sus superficies planas.

Las figuras 3, 4 y 5 tienen al menos una superficie curva.

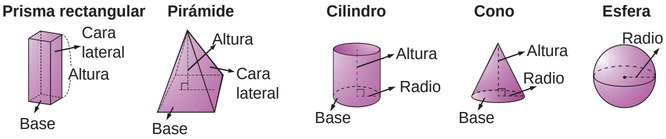
Cada una de estas figuras recibe el nombre de **sólido o cuerpo geométrico**.

C

Un **sólido o cuerpo geométrico** es una región del espacio limitada por superficies curvas y/o planas.

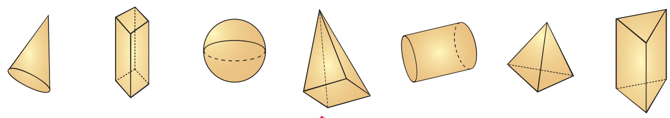
- Los sólidos que tienen todas sus superficies planas se llaman **poliedros.**
- Los sólidos que tienen al menos una superficie curva se llaman **cuerpos redondos.**

Nombres y elementos de los sólidos



E

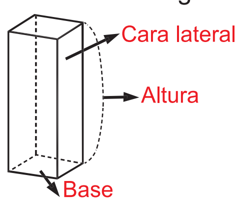
Nombre cada uno de los siguientes sólidos:



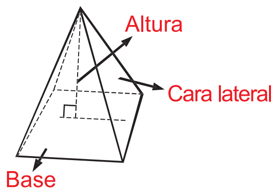
U8: Sólidos
S1: Poliedros
C1: Prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas

P Reúna las siguientes figuras de acuerdo a si tienen todas sus superficies planas o al menos una superficie curva.

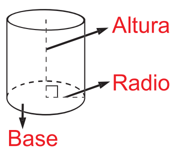
1. Prisma Rectángular



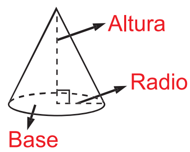
2. Pirámide Triangular



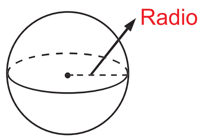
3. Cilindro



4.Cono



5. Esfera



S Las figuras 1 y 2 tienen todas sus superficies planas.
Las figuras 3, 4, y 5 tienen al menos una superfice curva.

C Los sólidos que tienen todas sus superficies planas se llaman poliedros, y los que tienen al menos una superficie curva se llaman cuerpos redondos.

E Nombre cada uno de los siguientes sólidos:

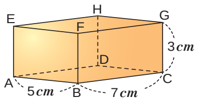
a) Cono
b) Prisma rectángular
c) Esfera
d) Pirámide
e) Cilindro
f) Pirámide
g) Prisma triangular

Contenido 2 Área total de la superficie de un prisma

Contenido 2: Área total de la superficie de un prisma

P

Calcule el área total de la superficie del siguiente prisma:



Un prisma rectangular es un sólido cuyas bases son rectángulos paralelos y congruentes, y sus caras laterales son rectángulos.

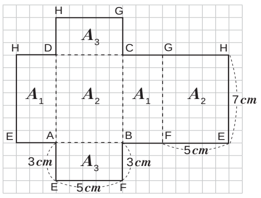
El **cubo** es un prisma rectangular con todas sus caras cuadradas y congruentes.

S

Se observa que el prisma tiene 6 caras: 2 bases y 4 caras laterales.

Al desarrollar el prisma en el plano se obtiene la figura de la derecha. Se observa que se forman 3 pares de rectángulos congruentes; con áreas A_1, A_2 y A_3, respectivamente.

A continuación se presenta el cálculo de estas áreas:



Área A_1	Área A_2	Área A_3
$A_1 = bh$ $= (3)(7)$ $= 21$ El área es 21 cm^2.	$A_2 = bh$ $= (5)(7)$ $= 35$ El área es 35 cm^2.	$A_3 = bh$ $= (5)(3)$ $= 15$ El área es 15 cm^2.

En esta unidad se identificará un segmento con su medida.

Se calcula el área total A_t del prisma sumando las áreas de los 6 rectángulos.

$$A_t = (2)(21) + (2)(35) + (2)(15)$$
$$= (2)(21 + 35 + 15)$$
$$= (2)(71)$$
$$= 142$$

Por tanto, el área total de la superficie del prisma rectangular es 142 cm^2.

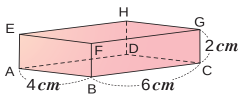
C

El área total de la **superficie** de un prisma es igual a la suma de las áreas de las dos bases y las áreas de las cuatro caras laterales.

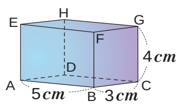
E

Calcule el área total de la superficie de cada uno de los siguientes prismas:

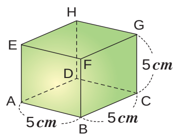
a)



b)



c)



Aprendizajes esperados

Determina el área total de la superficie de un prisma.

Secuencia:

En la clase anterior se conocieron algunos cuerpos geométricos o lo que es lo mismo “sólidos”.

En esta clase se estudia el área de la superficie de un prisma rectangular.

Puntos esenciales:

Recordar cómo calcular el área de un rectángulo.

Explicar cómo se obtiene el desarrollo del prisma.

Señalar que un prisma rectangular con bases no cuadradas, está formado por seis rectángulos. Los rectángulos opuestos son congruentes.

Especificar que los rectángulos congruentes tienen la misma área.

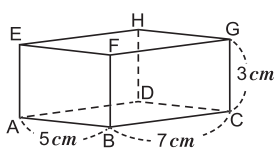
Indicar cómo se calcula la superficie de un prisma rectangular.

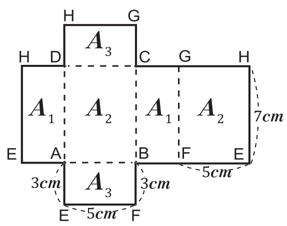
Destacar que un cubo está compuesto por seis cuadrados congruentes.

C2: Área total de la superficie de un prisma

P Calcule el área total del siguiente prisma.

S





Área A_1

$A_1 = bh$
$= (3)(7)$
$= 21$

Área A_2

$A_2 = bh$
$= (5)(7)$
$= 35$

Área A_3

$A_3 = bh$
$= (5)(3)$
$= 15$

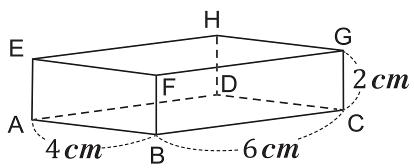
$$A_t = (2)(21) + (2)(35) + (2)(15)$$
$$= (2)(21 + 35 + 15)$$
$$= (2)(71) = 142$$

El área total de la superficie del prisma rectángular es $142\ cm^2$

C El área total de la superficie de un prisma es igual a la suma de las áreas de las dos bases y las áreas de las cuatro caras laterales.

E Calcule el área total del siguiente prisma.

a)



Área de $\mathrm{BCGF} = bh$
$= (2)(6)$
$= 12$

Área de $\mathrm{ABCD} = bh$
$= (4)(6)$
$= 24$

Área de $\mathrm{ABFE} = bh$
$= (4)(2)$
$= 8$

$A_t = 2(12 + 24 + 8)$
$= 2(44) = 88$

El área total de la superficie del prisma es $88\ cm^2$.

Contenido 3 Volumen de un prisma rectangular

Aprendizajes esperados

Determina el volumen de un prisma.

Secuencia:

En la clase anterior se calculó la superficie de un prisma rectangular.

En esta clase se estudia cómo calcular el volumen de un prisma rectangular.

Puntos esenciales:

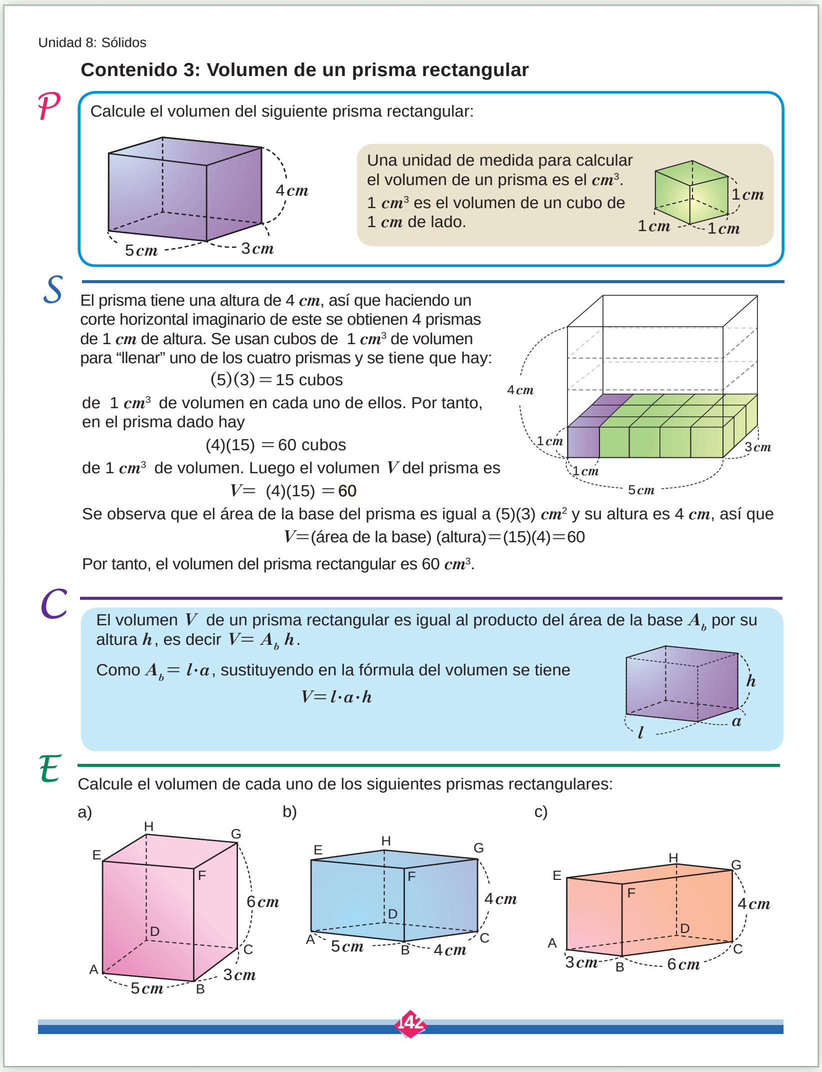
Explicar en qué consiste el volumen de un sólido.

Indicar en la figura cómo llenar el prisma con prismas de 1 cm^3 de volumen.

Señalar que el volumen de un prisma rectangular se calcula multiplicando: el largo por el ancho por la altura.

Indicar que el volumen de un cubo, es el cubo de la altura.

Insistir en el buen uso de las unidades de medida correspondiente a volumen, (unidades cúbicas).


Unidad 8: Sólidos

Contenido 3: Volumen de un prisma rectangular

P Calcule el volumen del siguiente prisma rectangular:

4 cm, 5 cm, 3 cm

Una unidad de medida para calcular el volumen de un prisma es el cm^3.
1 cm^3 es el volumen de un cubo de 1 cm de lado.

S El prisma tiene una altura de 4 cm, así que haciendo un corte horizontal imaginario de este se obtienen 4 prismas de 1 cm de altura. Se usan cubos de 1 cm^3 de volumen para "llenar" uno de los cuatro prismas y se tiene que hay:

$$(5)(3) = 15 \text{ cubos}$$

de 1 cm^3 de volumen en cada uno de ellos. Por tanto, en el prisma dado hay

$$(4)(15) = 60 \text{ cubos}$$

de 1 cm^3 de volumen. Luego el volumen V del prisma es

$$V = (4)(15) = 60$$

Se observa que el área de la base del prisma es igual a (5)(3) cm^2 y su altura es 4 cm, así que

$$V = (\text{área de la base})\ (\text{altura}) = (15)(4) = 60$$

Por tanto, el volumen del prisma rectangular es 60 cm^3.

C El volumen V de un prisma rectangular es igual al producto del área de la base A_b por su altura h, es decir $V = A_b\, h$.

Como $A_b = l \cdot a$, sustituyendo en la fórmula del volumen se tiene

$$V = l \cdot a \cdot h$$

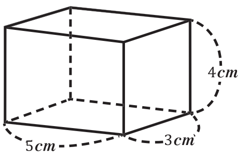
E Calcule el volumen de cada uno de los siguientes prismas rectangulares:

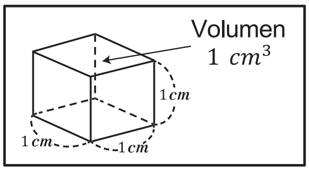
a) 6 cm, 5 cm, 3 cm b) 4 cm, 5 cm, 4 cm c) 4 cm, 3 cm, 6 cm

142

C3: Volumen de un prisma rectangular

P Calcule el volumen del siguiente prisma rectangular.





S Altura del prisma es $4cm$, así que de este se pueden obtener 4 prismas de $1cm$ de altura. *(Ver fig. en LT).*

Usando cubos de $1cm^3$ de volumen, se tiene:
(5)(3)=15 cubos de $1cm^3$ de volumen. Luego,

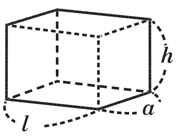
$$V = (4)(15) = 60$$

El volumen del prisma rectangular es 60 cm^3.

C $V = \underbrace{A_b}_{\text{Área de la base}} h.$

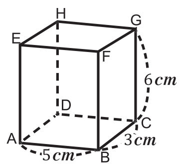
Como $A_b = l \cdot a$

$$V = l \cdot a \cdot h$$



E Calcule el volumen de los siguientes prismas:

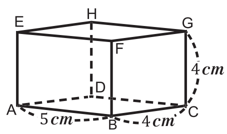
a)



$$V = l \cdot a \cdot h$$
$$= (5)(3)(6) = 90$$

El volumen es 90 cm^3.

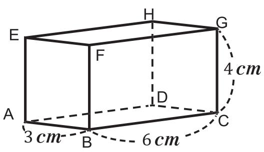
b)



$$V = l \cdot a \cdot h$$
$$= (5)(4)(4) = 80$$

El volumen es 80 cm^3.

c)



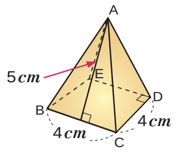
$$V = l \cdot a \cdot h$$
$$= (3)(6)(4) = 72$$

El volumen es 72 cm^3.

Contenido 4 Área total de la superficie de una pirámide cuadrada

Contenido 4: Área total de la superficie de una pirámide cuadrada

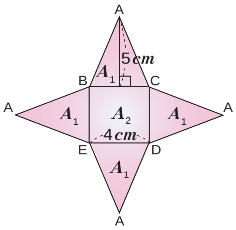
P Calcule el área total de la superficie de la siguiente pirámide cuadrada:



Una **pirámide cuadrada** es un sólido cuya base es un cuadrado y las caras laterales son triángulos con un vértice común llamado vértice de la pirámide.

S Se observa que la pirámide cuadrada tiene cuatro caras laterales, que al desarrollarla se obtiene un cuadrado y cuatro triángulos congruentes (con la misma área).

El área total de la superficie de la pirámide es la suma del área del cuadrado con cuatro veces el área de uno de los triángulos.



Área de un triángulo	Área de la base
$A_1 = \frac{bh}{2}$ $= \frac{(4)(5)}{2}$ $= \frac{20}{2}$ $= 10$ El área es 10 cm^2.	$A_2 = l^2$ $= (4)^2$ $= 16$ El área es 16 cm^2.

Como A_t es la suma de las áreas de los cuatro triángulos y la del cuadrado, entonces:

$$A_t = 4A_1 + A_2 = (4)(10) + 16 = 40 + 16 = 56$$

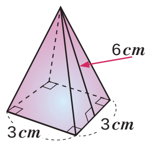
Luego, el área total de la superficie de la pirámide es **56 cm^2**.

C El área total A_t de la superficie de una pirámide cuadrada es igual a cuatro veces el área A_1 de una de las caras laterales más el área de la base A_2. Es decir,

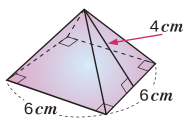
$$A_t = 4A_1 + A_2.$$

E Calcule el área total de la superficie de las siguientes pirámides:

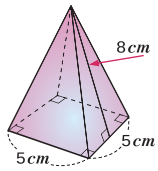
a)



b)



c)



Aprendizajes esperados

Determina el área total de la superficie de una pirámide cuadrada.

Secuencia:

En la segunda clase de esta sección, se calculó la superficie de algunos prismas rectangulares.

En esta clase se calcula el área de la superficie de una pirámide cuadrada.

Puntos esenciales:

Explicar:

- ✓ Qué es una pirámide cuadrada.
- ✓ Cómo se obtiene el desarrollo de la pirámide.

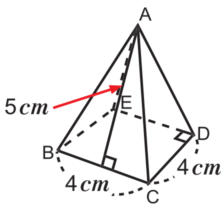
Indicar que una pirámide cuadrada, está formada por un cuadrado y cuatro triángulos congruentes.

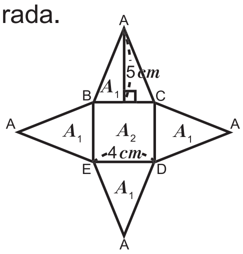
Señalar cómo se calcula el área de la superficie de una pirámide cuadrada.

Destacar que hay diferentes tipos de pirámides en dependencia del número de lados de la base, pero en este LT solo se trabajan las cuadradas.

C4: Área total de la superficie de una pirámide cuadrada

P Calcule el área total de la superficie de la siguiente pirámide cuadrada.





S Área de un triángulo

$A_1 = \frac{bh}{2}$

$A_1 = \frac{(4)(5)}{2} = \frac{20}{2} = 10$

Área de la base

$A_2 = l^2$
$= (4)^2$
$= 16$

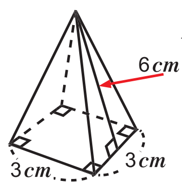
$A_t = 4A_1 + A_2 = (4)(10) + 16 = 40 + 16 = 56$

El área total de la superficie de la pirámide es 56 cm^2.

C El área total A_t de la superficie de una pirámide cuadrada es: $A_t = 4A_1 + A_2$ A_1: Área de una cara; A_2: Área de la base

E Calcule el área total de las siguientes pirámides.

a) Área de un triángulo



$A_1 = \frac{bh}{2}$
$= \frac{(3)(6)}{2}$
$= \frac{18}{2}$
$= 9$

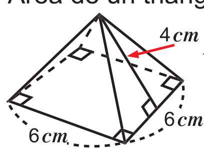
Área de la base

$A_2 = l^2$
$= (3)^2$
$= 9$

$A_t = (4)(9) + 9$
$= 36 + 9 = 45.$

El área total es 45 cm^2

b) Área de un triángulo



$A_1 = \frac{bh}{2}$
$= \frac{(6)(4)}{2}$
$= \frac{24}{2}$
$= 12$

Área de la base

$A_2 = l^2$
$= (6)^2$
$= 36$

$A_t = (4)(12) + 36$
$= 48 + 36 = 84$

El área total es 84 cm^2

Contenido 5 Volumen de una pirámide

Aprendizajes esperados

Determina el volumen de una pirámide.

▪ Secuencia:

En esta sección se ha calculado el volumen de un prisma rectangular, y la superficie de una pirámide cuadrada.

En esta clase se estudia cómo calcular el volumen de una pirámide cuadrada.

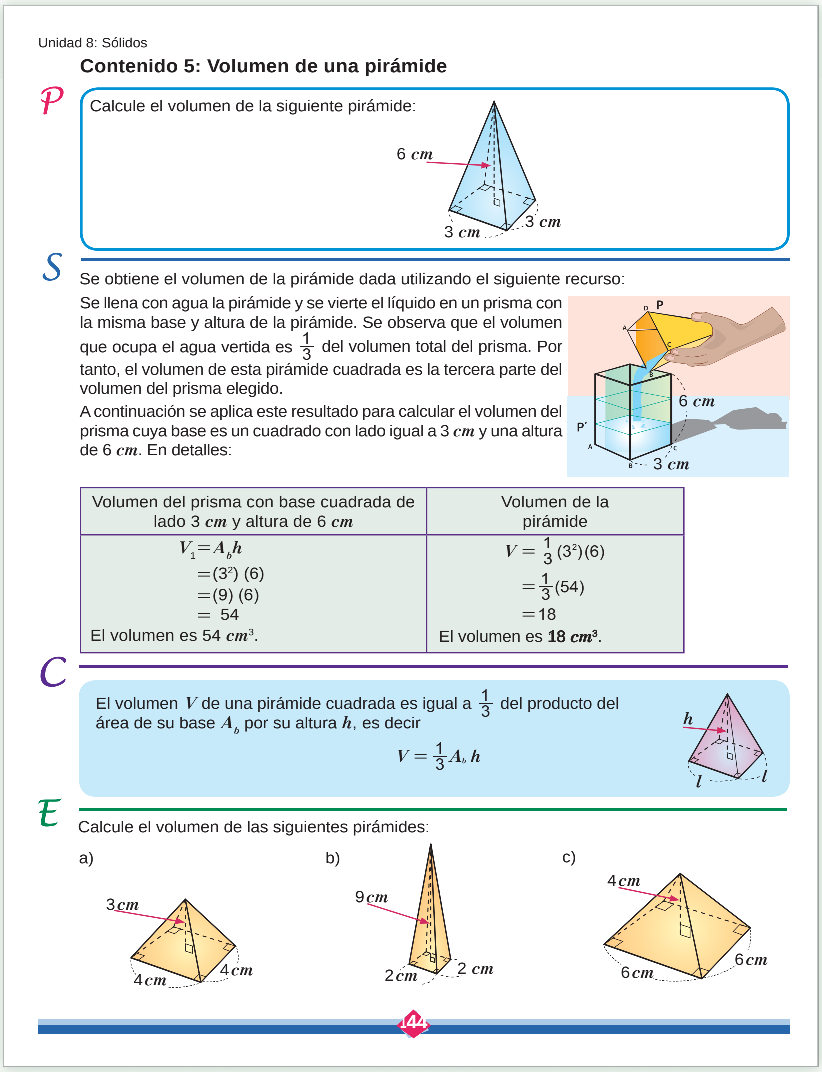
▪ Puntos esenciales:

Indicar que el volumen de una pirámide cuadrada es la tercera parte del volumen de un prisma con la misma base y altura de la pirámide. Para esto observar la ilustración de la solución del problema.

Explicar la fórmula para calcular el volumen de una pirámide.

Aclarar que la altura de la pirámide es diferente a la altura de cualquiera de sus caras laterales.

Insistir en el cuidado que se debe tener cuando se realicen las operaciones al hacer las debidas sustituciones.


Unidad 8: Sólidos

Contenido 5: Volumen de una pirámide

P Calcule el volumen de la siguiente pirámide:

6 cm, 3 cm, 3 cm

S Se obtiene el volumen de la pirámide dada utilizando el siguiente recurso:

Se llena con agua la pirámide y se vierte el líquido en un prisma con la misma base y altura de la pirámide. Se observa que el volumen que ocupa el agua vertida es $\frac{1}{3}$ del volumen total del prisma. Por tanto, el volumen de esta pirámide cuadrada es la tercera parte del volumen del prisma elegido.

A continuación se aplica este resultado para calcular el volumen del prisma cuya base es un cuadrado con lado igual a 3 cm y una altura de 6 cm. En detalles:

Volumen del prisma con base cuadrada de lado 3 cm y altura de 6 cm	Volumen de la pirámide
$V_1 = A_b h$ $= (3^2)(6)$ $= (9)(6)$ $= 54$ El volumen es 54 cm^3.	$V = \frac{1}{3}(3^2)(6)$ $= \frac{1}{3}(54)$ $= 18$ El volumen es **18 cm^3**.

C El volumen V de una pirámide cuadrada es igual a $\frac{1}{3}$ del producto del área de su base A_b por su altura h, es decir

$$V = \frac{1}{3} A_b h$$

E Calcule el volumen de las siguientes pirámides:

a) 3 cm, 4 cm, 4 cm

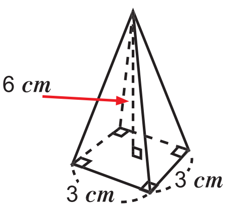
b) 9 cm, 2 cm, 2 cm

c) 4 cm, 6 cm, 6 cm

144

C5: Volumen de una pirámide.

P Calcule el volumen de la siguiente pirámide.



Utilizar la ilustración en solución del problema, para garantizar que:

$$V = \frac{1}{3} A_b h$$

S Volumen de la pirámide

$$V = \frac{1}{3}(3^2)(6)$$

$$= \frac{1}{3}(54)$$

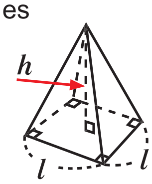
$$= 18$$

El volumen es $18 cm^3$.

C El volumen V de una pirámide cuadrada es

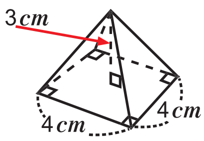
$$V = \frac{1}{3} A_b h$$

A_b: Área de la base
h: Altura



E Calcule el volumen de las siguientes pirámides.

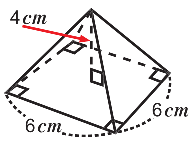
a)



$V = \frac{1}{3}(4^2)(3) = 16$

El volumen es $16\ cm^3$.

c)



$V = \frac{1}{3}(6^2)(4) = 48$

El volumen es $48\ cm^3$.

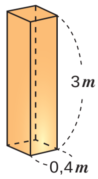
Contenido 6 Aplicaciones del área total de la superficie y el volumen de un poliedro

Sección 1: Poliedros

Contenido 6: Aplicaciones del área total de la superficie y el volumen de un poliedro

P

Juan necesita pintar un pilar de madera cuya base es un cuadrado de lado 0,4 m, y su altura de 3 m. ¿Cuál es el área total de las caras de este pilar que Juan debe pintar?



S

Como la base es un cuadrado de lado 0,4 m, entonces

$$A_1 = (0{,}4)^2 = 0{,}16$$

Luego, cada base tiene un área de 0,16 m^2.

Las cuatro caras laterales son rectángulos congruentes, por lo que basta encontrar el área de uno de ellos. Esto es,

$$A_2 = (3)(0{,}4) = 1{,}2$$

Por lo tanto, cada cara lateral tiene un área de 1,2 m^2.

El área total A_t de la superficie del pilar es la suma de las áreas de las caras laterales y el área de las dos bases, es decir

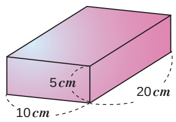
$$A_t = (2)(0{,}16) + (4)(1{,}2)$$
$$= 0{,}32 + 4{,}8$$
$$= 5{,}12$$

Por tanto, el área total de la superficie del prisma que Juan necesita pintar es **5,12 m^2**.

E

Hay un ladrillo como el de la figura:

a) Calcule el área total de la superficie del ladrillo.



b) Calcule su volumen.

Aprendizajes esperados

Aplica las fórmulas del cálculo del área total de la superficie y el volumen de prismas y pirámides en la solución de problemas del entorno.

Secuencia:

En esta sección se ha calculado el área total de la superficie y el volumen de un prisma rectangular y de una pirámide cuadrada.

En esta clase se resuelven situaciones del entorno, utilizando la superficie o el volumen de los poliedros estudiados.

Puntos esenciales:

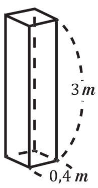
Indicar:

- El tipo de poliedro con el que se trabajará.
- Si se necesita calcular el área total o el volumen.
- La fórmula a utilizar.

Tener cuidado cuando se realicen las operaciones al hacer las debidas sustituciones.

C6: Aplicaciones del área total de la superficie y el volumen de un poliedro

P Juan necesita pintar un pilar cuya base es un cuadrado de lado $0{,}4\,m$, y su altura de $3m$. ¿Cuál es el área total de las caras de este pilar que Juan debe pintar?



S Área de la base: $A_1 = (0{,}4)^2 = 0{,}16$

Área de las caras: $A_2 = (3)(0{,}4) = 1{,}2$

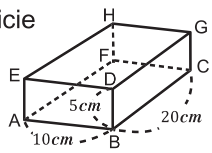
$A_t = (2)(0{,}16) + (4)(1{,}2)$

$= 0{,}32 + 4{,}8 = 5{,}12$

El área total es $5{,}12\,m^2$.

E Hay un ladrillo como el de la figura

a) Calcule el área total de la superficie del ladrillo.



Área de $ABDE$	Área de $BCGD$	Área de $ABCF$
$= (10)(5)$	$= (20)(5)$	$= (20)(10)$
$= 50$	$= 100$	$= 200$

$A_t = 2(50 + 200 + 100) = 2(350) = 700.$

El área total es $700\ cm^2$ de cartón.

b) Calcule el volumen.

Área de la base $= bh$
$= (10)(20)$
$= 200$

$V = A_b h$
$V = (200)(5) = 1000.$

El volumen es $1000\ cm^3$.

Contenido 1 Área total de la superficie de un cilindro

Aprendizajes esperados

Determina el área total de la superficie de un cilindro.

Secuencia:

En la sección anterior se ha calculado el área total de la superficie de un prisma rectangular y de una pirámide cuadrada.

En esta clase se estudia cómo calcular el área total de la superficie de un cilindro.

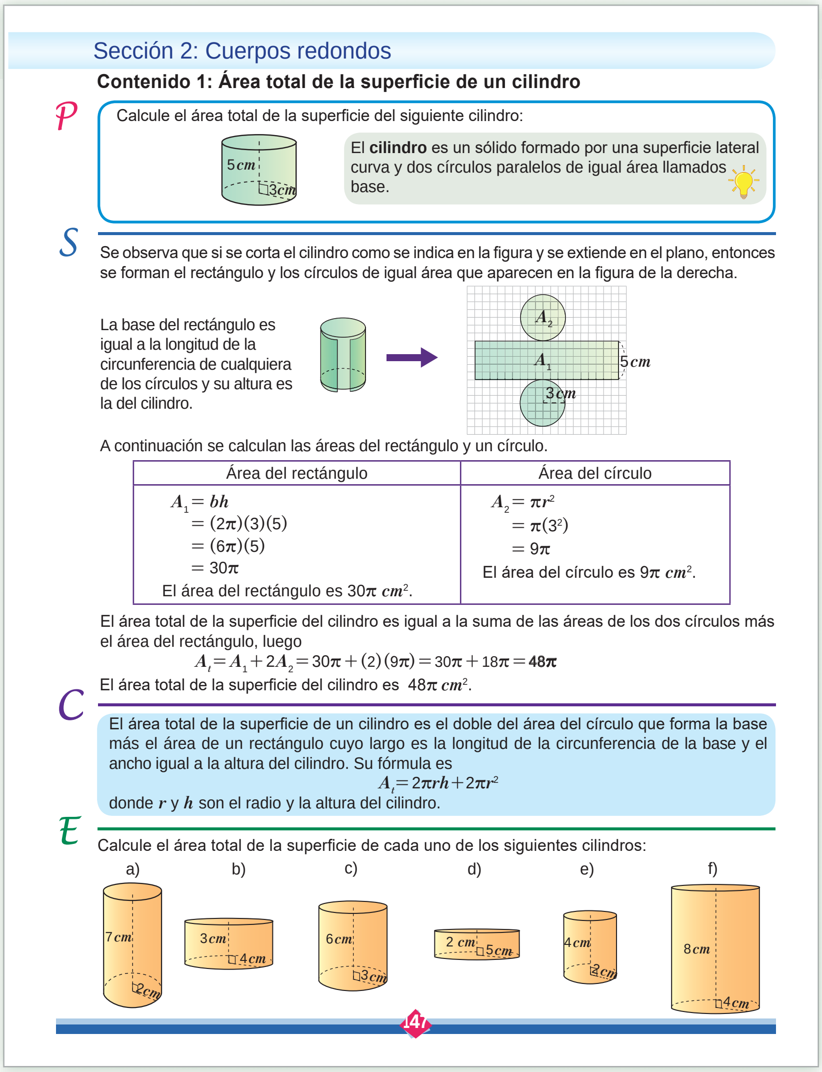
Puntos esenciales:

Recordar las fórmulas del cálculo de la longitud de una circunferencia, y el área de un círculo.

Explicar que al cortar el cilindro a como se muestra en la figura, se obtienen dos circunferencias congruentes y un rectángulo cuya altura es la del cilindro y la base es la longitud de la circunferencia.

Destacar que el área total de la superficie del cilindro es la suma de las áreas de los círculos y el rectángulo.

Señalar cómo se calcula el área total de la superficie de un cilindro.



Sección 2: Cuerpos redondos

Contenido 1: Área total de la superficie de un cilindro

P Calcule el área total de la superficie del siguiente cilindro:

El **cilindro** es un sólido formado por una superficie lateral curva y dos círculos paralelos de igual área llamados base.

S Se observa que si se corta el cilindro como se indica en la figura y se extiende en el plano, entonces se forman el rectángulo y los círculos de igual área que aparecen en la figura de la derecha.

La base del rectángulo es igual a la longitud de la circunferencia de cualquiera de los círculos y su altura es la del cilindro.

A continuación se calculan las áreas del rectángulo y un círculo.

Área del rectángulo	Área del círculo
$A_1 = bh$ $= (2\pi)(3)(5)$ $= (6\pi)(5)$ $= 30\pi$ El área del rectángulo es $30\pi\ cm^2$.	$A_2 = \pi r^2$ $= \pi(3^2)$ $= 9\pi$ El área del círculo es $9\pi\ cm^2$.

El área total de la superficie del cilindro es igual a la suma de las áreas de los dos círculos más el área del rectángulo, luego

$$A_t = A_1 + 2A_2 = 30\pi + (2)(9\pi) = 30\pi + 18\pi = 48\pi$$

El área total de la superficie del cilindro es $48\pi\ cm^2$.

C El área total de la superficie de un cilindro es el doble del área del círculo que forma la base más el área de un rectángulo cuyo largo es la longitud de la circunferencia de la base y el ancho igual a la altura del cilindro. Su fórmula es

$$A_t = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

donde r y h son el radio y la altura del cilindro.

E Calcule el área total de la superficie de cada uno de los siguientes cilindros:

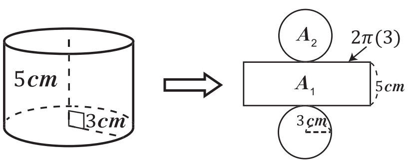
a) 7 cm, 2 cm b) 3 cm, 4 cm c) 6 cm, 3 cm d) 2 cm, 5 cm e) 4 cm, 2 cm f) 8 cm, 4 cm

147

S2: Cuerpos redondos
C1: Área total de la superficie de un cilindro

P Calcule el área total de la superficie del siguente cilindro.

S



$A_1 = bh$
$= (2\pi)(3)(5)$
$= (6\pi)(5)$
$= 30\pi$

$A_2 = \pi r^2$
$= \pi(3)^2$
$= 9\pi$

Área total de la superficie del cilindro es:

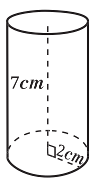
$A_t = A_1 + 2A_2$
$= 30\pi + 2(9\pi)$
$= 30\pi + 18\pi$
$= 48\pi$

El área de la superficie del cilindro es $48\pi\ cm^2$.

C El área total de la superficie de un cilindro es: $A_t = 2\pi rh + 2\pi r^2$ donde r es el radio y h la altura del cilindro.

E Calcule el área total de:

a)



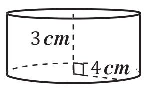
Área del rectángulo
$A_1 = (2\pi)(2)(7)$
$= 28\pi$

Área del círculo
$A_2 = \pi(2^2)$
$= 4\pi$

$A_t = 28\pi + 2(4\pi)$
$= 36\pi$

El área total es $36\pi\, cm^2$

b)



Área del rectángulo
$A_1 = (2\pi)(4)(3)$
$= 24\pi$

Área del círculo
$A_2 = \pi(4^2)$
$= 16\pi$

$A_t = 24\pi + 2(16\pi)$
$= 56\pi$

El área total es $56\pi\, cm^2$

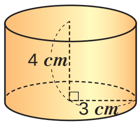
Contenido 2 Volumen de un cilindro

Unidad 8: Sólidos

Contenido 2: Volumen de un cilindro

P

Calcule el volumen del siguiente cilindro:



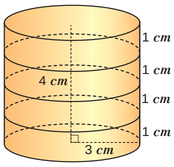
πr^2 cm^3 es el volumen de un cilindro de 1 cm de altura y radio r.

S

El cilindro tiene 4 cm de altura y se puede imaginar como la superposición de 4 cilindros con 1 cm de altura y 3 cm de radio como se muestra en la figura de la derecha.

Luego, el volumen del cilindro original es cuatro veces el volumen de los cilindros de altura 1 cm, entonces

$$\begin{aligned} V &= (4)(\pi)(3^2)\ (1) \\ &= (4)\ (\pi)\ \ (9) \\ &= (4)\ (9\pi) \\ &= 36\pi \end{aligned}$$

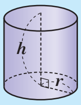


Por lo tanto, el volumen del cilindro es **36π cm^3**.

Se observa que el volumen del cilindro dado es el resultado de multiplicar 4 cm que es su altura con 9π cm^2 que es el área de su base.

C

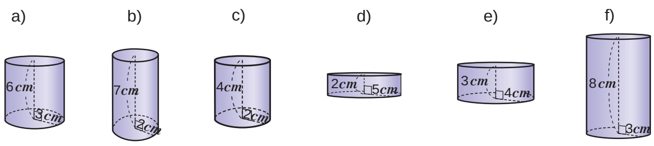
El volumen V de un cilindro de radio r es igual al producto del área de la base A_b por su altura h. Siendo $A_b = \pi r^2$, se tiene



$$V = A_b h = \pi r^2 h$$

E

Calcule el volumen de cada uno de los siguientes cilindros:



Aprendizajes esperados

Determina el volumen de un cilindro.

Secuencia:

En la clase anterior se calculó el área total de la superficie de un cilindro rectangular.

En esta clase se estudia cómo calcular el volumen de un cilindro.

Puntos esenciales:

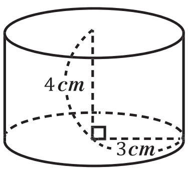
Indicar en la figura cómo llenar el prisma con cilindros de 1 cm de altura.

Señalar cómo calcular el volumen de un cilindro.

Explicar que se debe tener cuidado con el cálculo de las operaciones cuando se sustituyan los valores del radio y la altura.

C2: Volumen de un cilindro

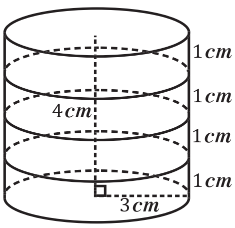
(P) Calcule el volumen del siguiente cilindro.



(S) La altura del cilindro es de $4cm$ así se pueden superponer cilindros de $1cm$ de altura y $3cm$ de radio.

El volumen total del cilindro es:

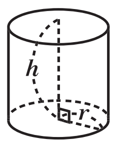
$$\begin{aligned} V &= (4)(\pi)(3)^2(1) \\ &= (4)(\pi)(9) \\ &= (4)(9\pi) \\ &= 36\pi \end{aligned}$$



El volumen del cilindro dado es $36\pi\ cm^3$.

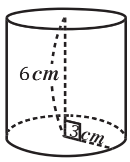
(C) El volumen de un cilindro es:

$$V = A_b h = \pi r^2 h.$$



(E) Calcule el volumen de los siguientes cilindros.

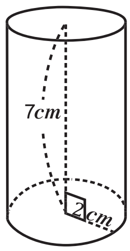
a)



$$\begin{aligned} V &= (\pi)(3^2)(6) \\ &= (9)(\pi)(6) \\ &= (9)(6\pi) \\ &= 54\pi \end{aligned}$$

El volumen es $54\ \pi\ cm^3$.

b)



$$\begin{aligned} V &= \pi(2^2)(7) \\ &= (4)(\pi)(7) \\ &= (4)(7\pi) \\ &= 28\pi \end{aligned}$$

El volumen es $28\pi\ cm^3$.

Contenido 3 Área total de la superficie de un cono

Aprendizajes esperados

Determina el área total de la superficie de un cono.

Secuencia:

En la primera clase de esta sección, se calculó la superficie de un cilindro.

En esta clase se calcula la superficie de un cono.

Puntos esenciales:

Recordar cómo se calcula la longitud de arco y el área de un sector circular.

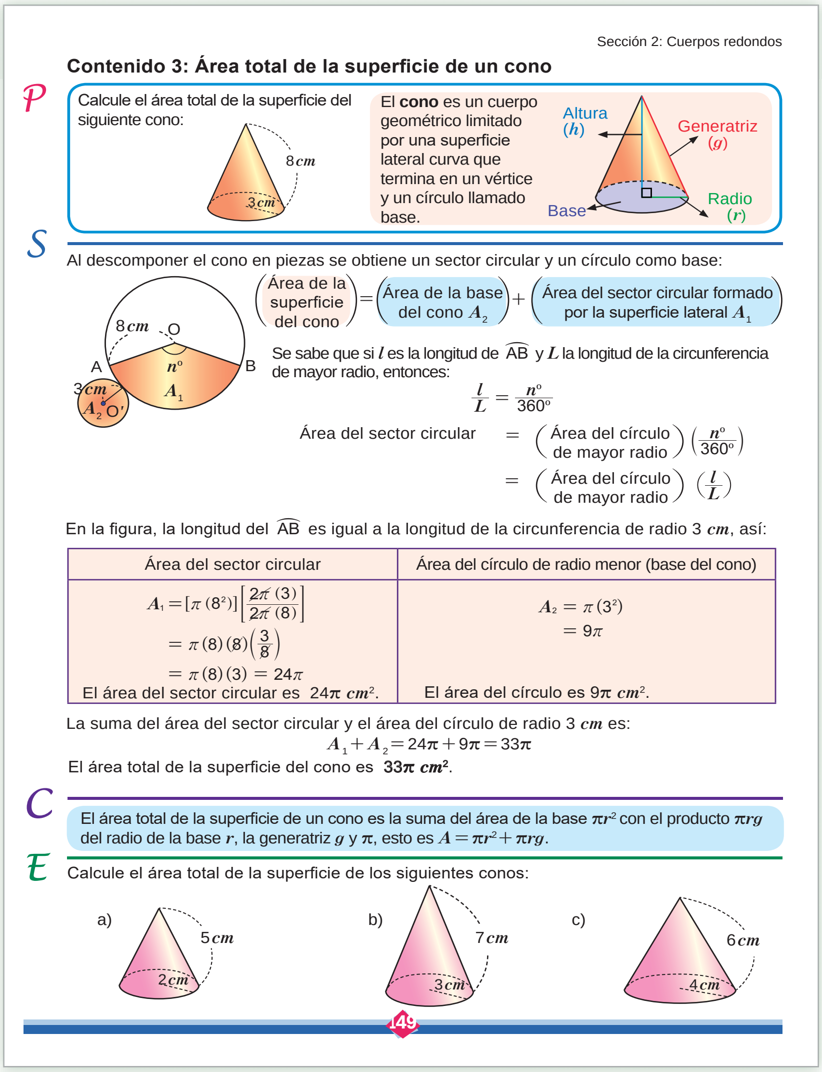
Explicar:

- ✓ Qué es un cono, y sus elementos.
- ✓ Cómo se obtiene el desarrollo del cono.

Indicar que un cono está formado por un círculo cuyo radio es el radio de la base del cono, y un sector circular cuyo radio es la generatriz del cono.

Señalar cómo se calcula el área total de la superficie de un cono.

Explicar el significado de $n°$ en la figura y la igualdad $\frac{l}{L} = \frac{n°}{360°}$



Sección 2: Cuerpos redondos

Contenido 3: Área total de la superficie de un cono

P Calcule el área total de la superficie del siguiente cono:

8 cm, 3 cm

El **cono** es un cuerpo geométrico limitado por una superficie lateral curva que termina en un vértice y un círculo llamado base.

Altura (h), Generatriz (g), Radio (r), Base

S Al descomponer el cono en piezas se obtiene un sector circular y un círculo como base:

(Área de la superficie del cono) = (Área de la base del cono A_2) + (Área del sector circular formado por la superficie lateral A_1)

Se sabe que si l es la longitud de $\overset{\frown}{AB}$ y L la longitud de la circunferencia de mayor radio, entonces:

$$\frac{l}{L} = \frac{n°}{360°}$$

Área del sector circular $= \left(\text{Área del círculo de mayor radio}\right)\left(\frac{n°}{360°}\right)$

$= \left(\text{Área del círculo de mayor radio}\right)\left(\frac{l}{L}\right)$

En la figura, la longitud del $\overset{\frown}{AB}$ es igual a la longitud de la circunferencia de radio 3 cm, así:

Área del sector circular	Área del círculo de radio menor (base del cono)
$A_1 = [\pi(8^2)]\left[\frac{2\pi(3)}{2\pi(8)}\right]$ $= \pi(8)(8)\left(\frac{3}{8}\right)$ $= \pi(8)(3) = 24\pi$ El área del sector circular es $24\pi\ cm^2$.	$A_2 = \pi(3^2)$ $= 9\pi$ El área del círculo es $9\pi\ cm^2$.

La suma del área del sector circular y el área del círculo de radio 3 cm es:

$$A_1 + A_2 = 24\pi + 9\pi = 33\pi$$

El área total de la superficie del cono es **$33\pi\ cm^2$**.

C El área total de la superficie de un cono es la suma del área de la base πr^2 con el producto πrg del radio de la base r, la generatriz g y π, esto es $A = \pi r^2 + \pi rg$.

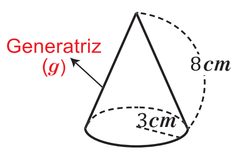
E Calcule el área total de la superficie de los siguientes conos:

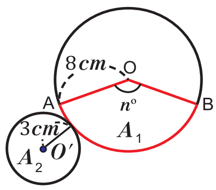
a) 5 cm, 2 cm b) 7 cm, 3 cm c) 6 cm, 4 cm

149

C3: Área total de la superficie de un cono

P Calcule el área total de la superficie del siguiente cono





S Área de la superfice del cono = $A_1 + A_2$

l: longitud de $\overset{\frown}{AB}$, L es la longitud de la circunferencia de mayor radio. $\frac{l}{L} = \frac{n°}{360°}$

l es igual a la longitud de la circunferencia de radio $3cm$

$$A_1 = \left(\pi(8^2)\right)\left(\frac{\cancel{2\pi}(3)}{\cancel{2\pi}(8)}\right)$$
$$= \pi(8)\cancel{(8)}\left(\frac{3}{\cancel{8}}\right)$$
$$= 24\pi$$

$$A_2 = \pi(3)^2$$
$$= 9\pi$$

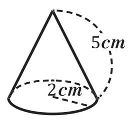
$$A_t = A_1 + A_2 = 24\pi + 9\pi = 33\pi$$

El área total del cono es $33\pi\ cm^2$

C $A = \pi r^2 + \pi rg$; r: radio; g: generatriz.

E Calcule el área total de:

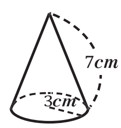
a) $r = 2cm$, $g = 5cm$



$$A = \pi(2^2) + \pi(2)(5) = 4\pi + 10\pi = 14\pi$$

El área total del cono es $14\pi\ cm^2$.

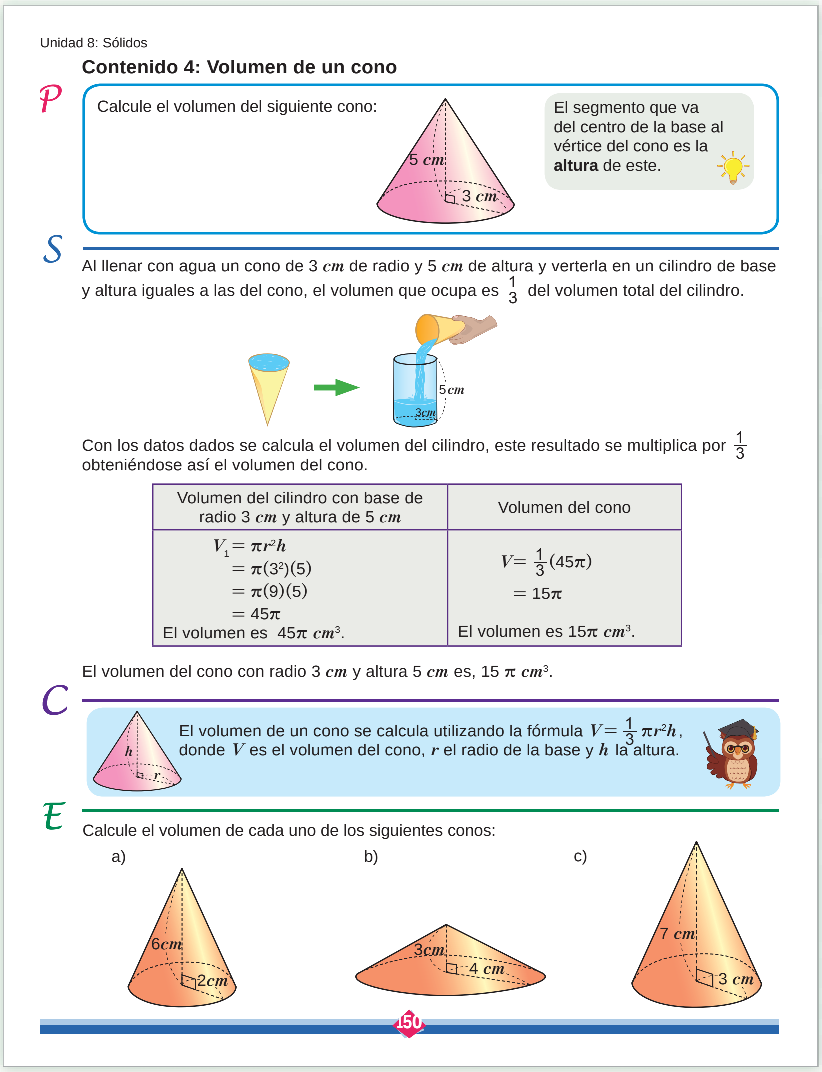
b) $r = 3cm$, $g = 7cm$



$$A = \pi(3^2) + \pi(3)(7) = 9\pi + 21\pi = 30\pi$$

El área total del cono es $30\pi\ cm^2$.

Contenido 4 Volumen de un cono


Unidad 8: Sólidos

Contenido 4: Volumen de un cono

P

Calcule el volumen del siguiente cono:

El segmento que va del centro de la base al vértice del cono es la **altura** de este.

S

Al llenar con agua un cono de 3 cm de radio y 5 cm de altura y verterla en un cilindro de base y altura iguales a las del cono, el volumen que ocupa es $\frac{1}{3}$ del volumen total del cilindro.

Con los datos dados se calcula el volumen del cilindro, este resultado se multiplica por $\frac{1}{3}$ obteniéndose así el volumen del cono.

Volumen del cilindro con base de radio 3 cm y altura de 5 cm	Volumen del cono
$V_1 = \pi r^2 h$ $= \pi(3^2)(5)$ $= \pi(9)(5)$ $= 45\pi$ El volumen es 45π cm^3.	$V = \frac{1}{3}(45\pi)$ $= 15\pi$ El volumen es 15π cm^3.

El volumen del cono con radio 3 cm y altura 5 cm es, 15 π cm^3.

C

El volumen de un cono se calcula utilizando la fórmula $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, donde V es el volumen del cono, r el radio de la base y h la altura.

E

Calcule el volumen de cada uno de los siguientes conos:

a) b) c)

Aprendizajes esperados

Determina el volumen de un cono.

Secuencia:

En esta sección se han calculado el volumen de un cilindro, y la superficie de un cono.

En esta clase se estudia cómo calcular el volumen de un cono.

Puntos esenciales:

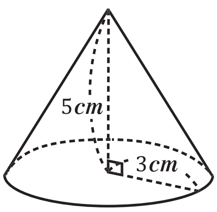
Indicar que el volumen de un cono, es la tercera parte del volumen de un cilindro con la misma base y altura del cono. Para esto observar la ilustración de la solución del problema.

Explicar la fórmula para calcular el volumen de un cono.

Insistir que se debe tener cuidado con el cálculo de las operaciones cuando se sustituyan los valores del radio y la altura.

C4: Volumen de un cono

(P) Calcule el volumen del siguiente cono:



Utilizar la ilustración en solución del problema, para garantizar que:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

(S) Volumen del cono

$$V = \frac{1}{3}\pi(3)^2(5)$$

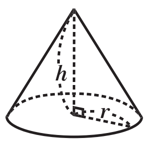
$$V = \frac{1}{3}(45\pi)$$

$$= 15\pi$$

El volumen es $15\pi\ cm^3$

(C) El volumen de un cono es

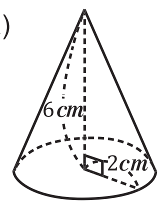
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



donde, V es el volumen del cono, r es el radio de la base, h es la altura.

(E) Calcule el volumen de los siguientes conos:

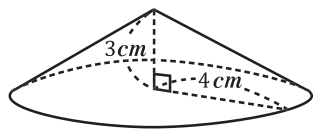
a)



$$V = \frac{1}{3}\pi(2^2)(6) = 8\pi$$

El volumen es $8\pi\, cm^3$.

b)



$$V = \frac{1}{3}\pi(4^2)(3) = 16\pi$$

El volumen es $16\pi\ cm^3$.

Contenido 5 Área total de la superficie de una esfera

Aprendizajes esperados

Determina el área total de la superficie de una esfera.

▪ Secuencia:

En esta sección los estudiantes han aprendido a calcular superficie y volumen de cilindros y conos.

En esta clase se estudia cómo calcular el área de la superficie de una esfera.

▪ Puntos esenciales:

Indicar que el radio del círculo que se forma con una cuerda que recubre a la esfera es el doble del radio de la esfera. Para esto observar la ilustración de la solución del problema.

Explicar que el área de la superficie de la esfera es el área del círculo que forma la cuerda que lo recubre.

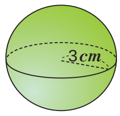
Mencionar cuál es la fórmula del área de la superficie de una esfera.

Tener cuidado con el cálculo de las operaciones cuando se sustituya el radio de una esfera.

Contenido 5: Área total de la superficie de una esfera

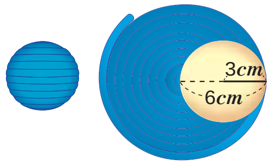
P

Calcule la superficie de la siguiente esfera:



S

Si se enrolla una cuerda alrededor de la esfera de radio 3 cm hasta que la cubra completamente y luego se desenrolla para formar un círculo, según aparece en las figuras se ve que el radio de este tiene el doble de la longitud del radio de la esfera. Entonces el área de esta es igual al área del círculo recién formado, luego

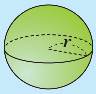


$$\begin{aligned} A_t &= \pi[(2)(3)]^2 \\ &= \pi(2^2)(3^2) \\ &= 36\pi \end{aligned}$$

El área total de la superficie de la esfera de radio 3 cm es **36π cm^2**.

El área de la superficie de la esfera de radio 3 cm es igual a 4π multiplicada por el cuadrado de 3 cm.

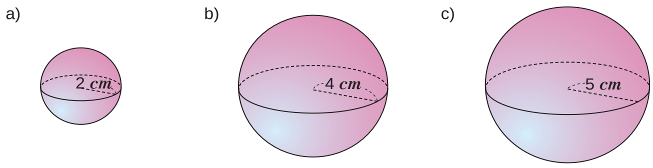
C



El área de la superficie de una esfera se calcula utilizando la fórmula $A_t = 4\pi r^2$, donde A_t es el área total de la superficie de la esfera y r es su radio.

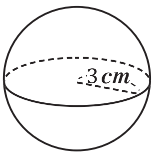
E

Calcule en cada inciso el área total de la superficie de las siguientes esferas:



C5: Área total de la superficie de una esfera

(P) Calcule el área total de la superficie de la siguiente esfera:



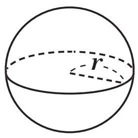
Utilizar la ilustración en solución del problema, para garantizar que:
$A_t = \pi(2r)^2$

(S) El radio de la esfera es $3cm$.

$$\begin{aligned} A_t &= \pi[(2)(3)]^2 \\ &= \pi(2)^2(3)^2 \\ &= 36\pi \end{aligned}$$

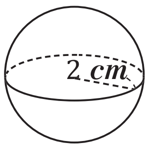
EL área total de la superficie de la esfera es $36\pi\ cm^2$.

(C) El área de la superficie de una esfera se calcula utilizando la fórmula $A_t = 4\pi r^2$.



(E) Calcule el área de la superficie de las siguientes esferas:

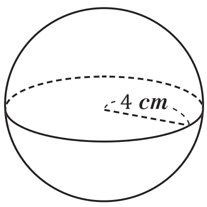
a)



$$\begin{aligned} A_t &= 4\pi(2)^2 \\ &= 4\pi(4) \\ &= 16\pi \end{aligned}$$

El área es $16\pi\ cm^2$

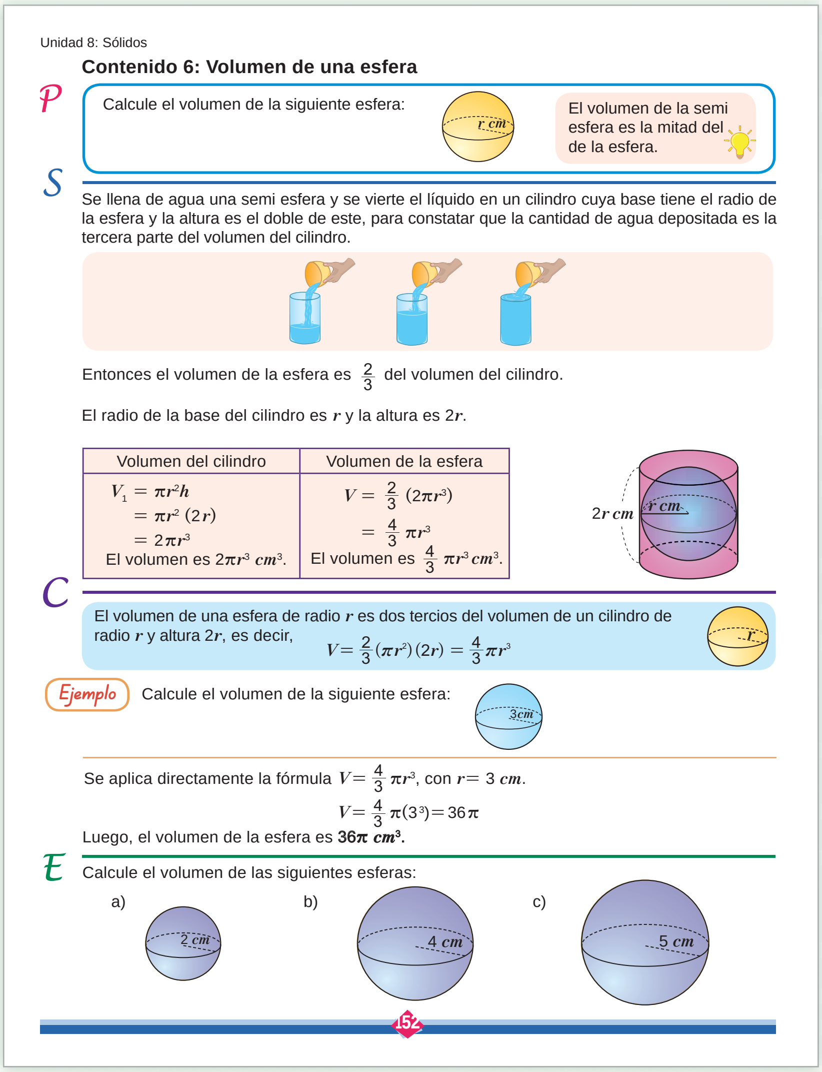
b)



$$\begin{aligned} A_t &= 4\pi(4)^2 \\ &= 4\pi(16) \\ &= 64\pi \end{aligned}$$

El área es $64\pi\ cm^2$

Contenido 6 Volumen de una esfera


Unidad 8: Sólidos

Contenido 6: Volumen de una esfera

P Calcule el volumen de la siguiente esfera:

El volumen de la semi esfera es la mitad del de la esfera.

S Se llena de agua una semi esfera y se vierte el líquido en un cilindro cuya base tiene el radio de la esfera y la altura es el doble de este, para constatar que la cantidad de agua depositada es la tercera parte del volumen del cilindro.

Entonces el volumen de la esfera es $\frac{2}{3}$ del volumen del cilindro.

El radio de la base del cilindro es r y la altura es $2r$.

Volumen del cilindro	Volumen de la esfera
$V_1 = \pi r^2 h$ $= \pi r^2 (2r)$ $= 2\pi r^3$ El volumen es $2\pi r^3\ cm^3$.	$V = \frac{2}{3}(2\pi r^3)$ $= \frac{4}{3}\pi r^3$ El volumen es $\frac{4}{3}\pi r^3\ cm^3$.

C El volumen de una esfera de radio r es dos tercios del volumen de un cilindro de radio r y altura $2r$, es decir, $V = \frac{2}{3}(\pi r^2)(2r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

Ejemplo Calcule el volumen de la siguiente esfera:

Se aplica directamente la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, con $r = 3\ cm$.

$V = \frac{4}{3}\pi(3^3) = 36\pi$

Luego, el volumen de la esfera es **$36\pi\ cm^3$**.

E Calcule el volumen de las siguientes esferas:

a) 2 cm b) 4 cm c) 5 cm

152

Aprendizajes esperados

Determina el volumen de una esfera.

Secuencia:

En esta sección se han calculado el volumen de un cilindro, y el área de la superficie de una esfera.

En esta clase se estudia cómo calcular el volumen de una esfera.

Puntos esenciales:

Indicar que el volumen de una esfera, es la tercera parte del volumen de un cilindro cuya base tiene el radio de la esfera, y altura es el doble del radio de esta. Para esto observar la ilustración de la solución del problema.

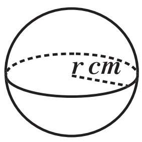
Mencionar la fórmula para calcular el volumen de una esfera.

Tener cuidado cuando se realicen las operaciones al hacer las debidas sustituciones.

Insistir en que las unidades de volumen son unidades cúbicas.

C6: Volumen de una esfera

P Calcule el volumen de la siguiente esfera.



S El volumen de la esfera es $\frac{2}{3}$ del volumen del cilindro de:

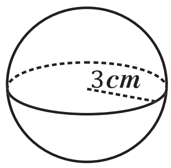
Radio de la base $r\ cm$
Altura $2r\ cm$
Volumen del cilindro:

$V_1 = \pi r^2 h$
$= \pi r^2(2r)$
$= 2\pi r^3$

Volumen de la esfera: $V = \frac{2}{3}(2\pi r^3) = \frac{4}{3}\pi r^3$

C El volumen de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Ej Calcule el volumen de la siguiente esfera:



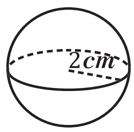
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ con $r = 3cm$

$V = \frac{4}{3}\pi(3)^3 = 36\,\pi$

El volumen es $36\pi\ cm^3$

E Calcule el volumen da las siguientes esferas:

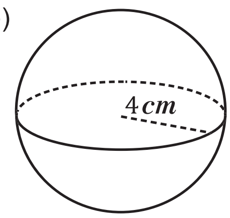
a)



$V = \frac{4}{3}\pi(2^3) = \frac{32}{3}\pi$

El volumen es $\frac{32}{3}\pi\ cm^3$

b)



$V = \frac{4}{3}\pi(4^3) = \frac{256}{3}\pi$

El volumen es $\frac{256}{3}\pi\ cm^3$

Contenido 7 Aplicaciones del área total de la superficie y el volumen de un cuerpo redondo

Aprendizajes esperados

Aplica las fórmulas del cálculo del área total de la superficie y el volumen de cilindros, conos y esferas en la solución de problemas del entorno.

Secuencia:

En esta sección se ha aprendido a calcular la superficie y volumen de un cilindro, un cono y una esfera.

En esta clase se resuelven situaciones del entorno, utilizando el área de la superficie o el volumen de los cuerpos redondos estudiados.

Puntos esenciales:

Identificar:

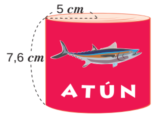
- El tipo de cuerpo redondo con el que se trabajará.
- Si se necesita calcular el área total de la superficie o el volumen.

Tener cuidado cuando se realicen las operaciones al hacer las debidas sustituciones.

Sección 2: Cuerpos redondos

Contenido 7: Aplicaciones del área total de la superficie y el volumen de un cuerpo redondo

P_1 Una lata de atún tiene forma cilíndrica, con 7,6 cm de altura y radio de la base igual a 5 cm. ¿Cuántos cm^2 de metal se necesita para hacer una de estas latas?



S_1 Se tiene que el radio de la base es $r=5\ cm$ y la altura $h=7{,}6\ cm$.

Se calcula la longitud de la base de la lata sustituyendo el radio en la fórmula de la longitud de la circunferencia, se tiene:

$$2\pi r = 2\pi(5) = 10\pi.$$

En consecuencia, la base tiene longitud $10\pi\ cm$.

Área de una de las bases del cilindro	Área del rectángulo de base $10\pi\ cm$ y altura 7,6 cm	Área total de la superficie del cilindro
$A_1 = \pi r^2 = (\pi)(5^2) = 25\pi$ El área de la base es $25\pi\ cm^2$.	$A_2 = bh = (10\pi)(7{,}6) = 76\pi$ El área de la superficie lateral es $76\pi\ cm^2$.	$A_3 = 2A_1 + A_2 = 2(25\pi)+(76\pi) = 126\pi$ El área total de la superficie es $126\pi\ cm^2$.

Se necesitan $126\pi\ cm^2$ de metal para fabricar una de esas latas.

P_2 Calcule el volumen del cono formado por el sombrero de un disfraz para carnaval, con altura de 18 cm y radio de la base 10 cm.

S_2 Los datos son los siguientes:

Radio de la base $r=10$

Altura $h=18$

Se sustituyen los datos anteriores en la fórmula del volumen $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

$$\begin{aligned} V &= \tfrac{1}{3}\pi(10^2)(18)\\ &= \tfrac{1}{3}\pi(100)(18)\\ &= \tfrac{1}{3}\pi(1800)\\ &= 600\pi \end{aligned}$$

Por tanto, el volumen del cono del sombrero es **$600\pi\ cm^3$**.

E Resuelva las siguientes situaciones:

a) Calcule el área total de la superficie de un tarro de café que tiene forma de cilindro con 8 cm de diámetro y 9 cm de altura.

b) Calcule el volumen de la porción que tiene forma de cono en un helado, si su altura es 7 cm y el radio de la base 4 cm.

153

C7: Aplicaciones del área total de la superficie y el volumen de un cuerpo redondo

(P) Cilindro → Altura: 7,6 cm Radio: 5 cm

¿Cuántos cm^2 de metal se necesita para hacer una de estas latas?

Longitud de base $= 2\pi r = 2\pi(5) = 10\pi$

(S)

Área de una de las bases del cilindro	Área del rectángulo $b=10\pi\ cm$ $h=7{,}6\ cm$	Área total de la superficie del cilindro
$A_1 = \pi r^2 = (\pi)(5^2) = 25\pi$	$A_2 = bh = (10\pi)(7{,}6) = 76\pi$	$A_3 = 2A_1 + A_2 = 2(25\pi)+(76\pi) = 126\pi$

Se necesitan $126\pi\ cm^2$ de metal.

(P) Cono → Radio: 10 cm Altura: 18 cm

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(10)^2(18)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi(100)(18) = \frac{1}{3}\pi(1800) = 600\pi$$

El volumen del cono del sombrero es $600\pi\ cm^3$.

(E) a) Cilindro → Radio: 4 cm Altura: 9 cm

Área de la base	Área del rectángulo	Área total
$A_1 = \pi r^2 = (\pi)(4^2) = 16\pi$	$A_2 = 2\pi rh = 2\pi(4)(9) = 72\pi$	$A_3 = 2(16\pi)+(72\pi) = 32\pi+72\pi = 104\pi$

El área total de la superficie es $104\pi\ cm^2$

b) Cono → Radio: 4 cm Altura: 7 cm

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(4)^2(7) = \frac{112}{3}\pi$$

El volumen del cono del sombrero es $\frac{112}{3}\pi\ cm^3$.

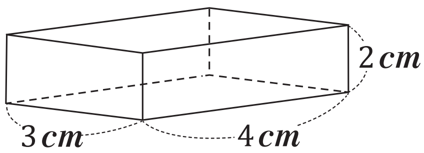
Prueba de Matemática 8vo (30 min.) Fecha: ____________
Unidad 8: Sólidos

$/ 20$

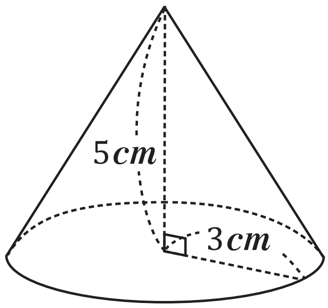
Nombre: ______________________________ Sección: __________
Sexo: M / F

1. Calcule el volumen de los siguientes sólidos : (4 puntos $\times$ 3 $=$ 12)

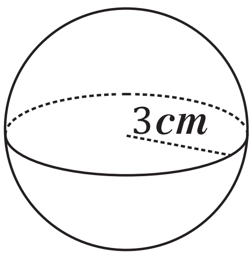
a)



b)

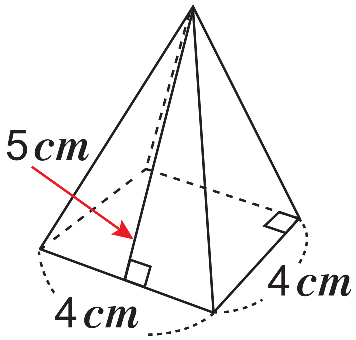


c)

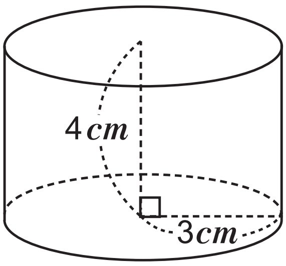


2. Calcule el área total de la superficie de los siguientes sólidos: (4 puntos $\times$ 2 $=$ 8)

a)



b)



Nombre: ___________________________________

Anexos

Anexo 1 Solucionarios de las pruebas de cada unidad

Anexo 2 Solucionario del libro de texto

Anexo 3 Fe de errata del libro de texto

Solucionarios de las pruebas de cada unidad

Unidad 1: Operaciones con Polinomios

1. (1 punto × 4 = 4)

	Expresión algebraica	Número de términos	Grado
a)	$3x$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
b)	x^4+3x^2	$\mathbf{2}$	$\mathbf{4}$

2. (1 punto × 2 = 2)

a) $3a+8b+10a-6b=\mathbf{13a+2b}$

b) $9x-8y+10x-9y=\mathbf{19x-17y}$

3. (1 punto × 16 = 16)

a) Forma horizontal:

$(3x\ +\ 2y)+(5x\ +\ 3y)$

$=3x+2y+5x+3y=\mathbf{8x+5y}$

b) Forma vertical:

$$\begin{array}{r} 4x^2+\ 2x \\ +)\ 10x^2-11x \\ \hline \mathbf{14x^2-\ 9x} \end{array}$$

c) Forma horizontal:

$(6x-5y)–(-8x+7y)$

$=6x-5y+8x-7y=\mathbf{14x-12y}$

d) Forma vertical:

$$\begin{array}{r} 8x+5y \\ +)\ -6x-3y \\ \hline \mathbf{2x+2y} \end{array}$$

e) $(2x)(3y)=\mathbf{6xy}$

f) $(-3x)^2=(-3x)(-3x)=\mathbf{9x^2}$

g) $6(x+4)=\mathbf{6x+24}$

h) $-2x(4x-3y)=\mathbf{-8x^2+6xy}$

i) $(x+2)(y+5)=\mathbf{xy+5x+2y+10}$

j) $(x+3)(x+2)=\mathbf{x^2+5x+6}$

k) $(x-3)(x+2)=\mathbf{x^2-x-6}$

l) $20xy\div 5y=\dfrac{20xy}{5y}=\mathbf{4x}$

m) $(4x-12y)\div 4=\dfrac{4x-12y}{4}=\mathbf{x-3y}$

n)
$$\begin{array}{rl} x^2-9x+20 & \big|\ x-4 \\ -x^2+4x & \ \ x-5 \\ \hline -5x+20 & \\ 5x-20 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Cociente: $x-5$ **Residuo:** 0

Unidad 2: Sistema de Ecuaciones Primer Grado

1. (3 puntos × 5 = 15)

a) $2x+(x+2)=11$

$3x+2\ =11$ $\quad x=3$

$y=3+2=5$

$\mathbf{(x,y)=(3,5)}$

b)
$$\begin{array}{r} 2x+y=7 \\ +)\ \ x-y=2 \\ \hline 3x\quad\ =9 \end{array}\qquad x=3$$

$3-y=2$ $\quad y=1$

$\mathbf{(x,y)=(3,1)}$

c)
$$\begin{array}{r} 2x+5y=\ 12 \\ +)\ -2x-\ y=-4 \\ \hline 4y=8 \end{array}\qquad y=2$$

$2x+2=4$ $\quad x=1$

$\mathbf{(x,y)=(1,2)}$

d)
$$\begin{array}{r} 15x+\ 9y=\ \ 3 \\ +)\ -15x-20y=-25 \\ \hline -11y=-22 \end{array}\qquad y=2$$

$5x+(3)(2)=1$

$5x=-5$ $\quad x=-1$

$\mathbf{(x,y)=(-1,2)}$

e) $(0{,}2x+0{,}5y)(10)=(0{,}9)(10)$

$$\begin{array}{r} 2x+5y=\ 9 \\ +)\ -2x-4y=-8 \\ \hline y=1 \end{array}$$

$x+(2)(1)=4$ $\quad x=2$

$\mathbf{(x,y)=(2,1)}$

2. a) (2 puntos)

Costo del pantalón: x

Costo de una camisa: y

$$\begin{cases} \mathbf{2x+3y=1200} \\ \mathbf{x=y+100} \end{cases}$$

b) (2 puntos)

$$\begin{array}{r} 2x+3y=1200 \\ +)\ 3x-3y=\ \ 300 \\ \hline 5x\qquad=1500 \end{array}$$

$\mathbf{x=300}$

$y=x-100=300-100=\mathbf{200}$

c) (1 punto)

El costo del pantalón: $C\$\ \mathbf{300}$

El costo de la camisa: $C\$\ \mathbf{200}$

Unidad 3: Funciones de Primer Grado

1. (2 puntos × 2 = 4)

a)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	**9**	**12**	**15**	**18**	**21**	**24**	**27**	**30**	**33**

b) $\boldsymbol{y = 3x + 9}$

2. (1 punto × 4 = 4)

a) $y = 2x + 1$

Pendiente: $\mathbf{2}$

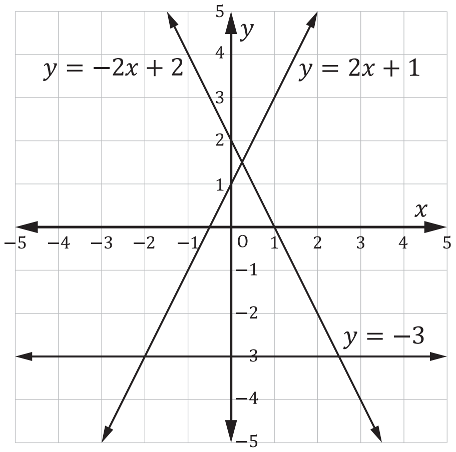
Intercepto con el eje y: $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$

b) $y = -x + 2$

Pendiente: $\mathbf{-1}$

Intercepto con el eje y: $(\mathbf{0}, \mathbf{2})$

3. (2 puntos × 3 = 6)



4. (2 puntos)

Si $x = 1$, entonces $y = (2)(1) + 1 = 3$

Si $x = 3$, entonces $y = (2)(3) + 1 = 7$

El rango es $\mathbf{3 \le \boldsymbol{y} \le 7}$

5. (2 puntos × 2 = 4)

a) $\boldsymbol{y = 2x - 1}$

b) $y = 4x + b$

$4 = (4)(2) + b$

$b = -4$

$\boldsymbol{y = 4x - 4}$

Unidad 4: Radicales

1. (1 punto) $\pm\mathbf{5}$

2. (1 punto) $\pm\sqrt{\mathbf{3}}$

3. (1 punto × 3 = 3)

a) $\sqrt{3} < \sqrt{7}$ b) $-\sqrt{3} > -\sqrt{7}$

c) $2 < \sqrt{5}$

4. (1 punto × 3 = 3)

a) **Racional** b) **Irraricional** c) **Irracional**

5. (1 punto × 2 = 2)

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right) = \dfrac{\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{5}}$

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{2}}$

6. (1 punto × 10 = 10)

a) $(\sqrt{18})(\sqrt{2}) = \sqrt{(18)(2)} = \sqrt{36} = \mathbf{6}$

b) $(-\sqrt{3})(\sqrt{7}) = -\sqrt{(3)(7)} = -\sqrt{\mathbf{21}}$

c) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = \mathbf{8\sqrt{2}}$

d) $3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = \mathbf{-2\sqrt{3}}$

e) $2 - 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = \mathbf{2 - \sqrt{3}}$

f) $\sqrt{18} + \sqrt{50} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = \mathbf{8\sqrt{2}}$

g) $\sqrt{125} - \sqrt{45} = 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = \mathbf{2\sqrt{5}}$

h) $\sqrt{48} - \sqrt{27} + \sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + \sqrt{3} = \mathbf{2\sqrt{3}}$

i) $\sqrt{2}(\sqrt{2} + 3) = \mathbf{2 + 3\sqrt{2}}$

j) $\sqrt{3}(\sqrt{28} - 5) = \sqrt{3}(2\sqrt{7} - 5) = \mathbf{2\sqrt{21} - 5\sqrt{3}}$

Unidad 5: Paralelismo

1. (2 puntos × 3 = 6)

a) $a = \mathbf{140°}$ b) $b = \mathbf{50°}$ c) $c = \mathbf{150°}$

2. (2 puntos × 2 = 4)

a) $a = \mathbf{30°}$ b) $c = \mathbf{150°}$

3. (2 puntos) $x = \mathbf{130°}$

4. (2 puntos × 2 = 4) $x = \mathbf{36°}$ $y = \mathbf{56°}$

5. (2 puntos × 2 = 4)

a) $180 \times 3 = 540$ b) $540 \div 5 = 108$

$\mathbf{540°}$ $\mathbf{108°}$

Unidad 6: Congruencia

1. (2 puntos × 4 = 8)

a) $\mathbf{DE = 7}$ b) $\mathbf{EF = 6}$

c) $\mathbf{DF = 5}$ d) $\mathbf{\Delta ABC \cong \Delta EDF}$

2. (1 punto × 8 = 8)

a) Hipótesis: $\mathbf{\overline{AB} \parallel \overline{DE}}$ **y** $\mathbf{AC = DC}$

Tesis: $\mathbf{\Delta ACB \cong \Delta DCE}$

b)

Pasos
2. $\measuredangle A = \measuredangle \mathbf{D}$
5. $\triangle ACB \cong \triangle \mathbf{DCE}$

Justificación
3. **Hipótesis**
4. **Por ser opuestos por el vértice**
5. $\boldsymbol{ALA}$ **en pasos 2, 3 y 4**

3. (2 puntos × 2 = 4)

$\measuredangle A = \mathbf{40°}$ $\measuredangle C = \mathbf{100°}$

Unidad 7: Paralelogramos

1. (2 puntos $\times$ 2 = 4)
   $\measuredangle A = \mathbf{70°}$ $\measuredangle D = \mathbf{110°}$
   $AD = \mathbf{5}\ (cm)$ $DC = \mathbf{14}\ (cm)$

2. (2 puntos) $AC = \mathbf{8}\ (cm)$

3. (2 puntos $\times$ 2 = 4)
   a) $BD = \mathbf{5}\ (cm)$ b) $\measuredangle ADB = \mathbf{60°}$

4. (2 puntos $\times$ 3 = 6)

Pasos
1) $\measuredangle AOE = \measuredangle \mathbf{COF}$
3) $\measuredangle EAO = \measuredangle \mathbf{FCO}$

Justificación
2) **Las diagonales de un paralelogramos se cortan en su punto medio**

Unidad 8: Sólidos

1. (4 puntos $\times$ 3 = 12)
   a) $\mathbf{24}\ cm^3$ b) $\mathbf{15\pi}\ cm^3$ c) $\mathbf{36\pi}\ cm^3$

2. (4 puntos$\times$2=8)
   a) $\mathbf{56}\ cm^2$ b) $\mathbf{42\pi}\ cm^2$

UNIDAD 1

Sección 1 Contenido 1 (S1C1)

	Clasificación	Grado
a)	Monomio	2
b)	Binomio	2
c)	Trinomio	3
d)	Trinomio	2

S1C2

a) $4x + 6y + 10x + 3y = (4 + 10)x + (6 + 3)y$
$= 14x + 9y$

b) $9x + 6y + 7x + 5y = 16x + 11y$

c) $3a - 5b + 10a + 3b = 13a - 2b$

d) $2a - 4b + 8a - b = 10a - 5b$

e) $-4x^2 - 10x - 4x - 8x^2$
$= (-4 - 8)x^2 + (-10 - 4)x = -12x^2 - 14x$

f) $7x^2 - 9x - 2x + 6x^2 = 13x^2 - 11x$

S1C3

a) $(3x + 2y) + (5x + 4y)$

Forma horizontal:

$= 3x + 2y + 5x + 4y$

$= 8x + 6y$

Forma vertical:

$$\begin{array}{rr} & 3x + 2y \\ +) & 5x + 4y \\ \hline & 8x + 6y \end{array}$$

b) $(4x + 5y) + (6x - 2y)$

Forma horizontal:

$= 4x + 5y + 6x - 2y$

$= 10x + 3y$

Forma vertical:

$$\begin{array}{rr} & 4x + 5y \\ +) & 6x - 2y \\ \hline & 10x + 3y \end{array}$$

c) $(8x - 10y) + (7x + 9y)$

Forma horizontal:

$= 8x - 10y + 7x + 9y$

$= 15x - y$

Forma vertical:

$$\begin{array}{rr} & 8x - 10y \\ +) & 7x + 9y \\ \hline & 15x - y \end{array}$$

d) $(-x - 7y) + (x - 8y)$

Forma horizontal:

$= -x - 7y + x - 8y$

$= -15y$

Forma vertical:

$$\begin{array}{rr} & -x - 7y \\ +) & x - 8y \\ \hline & -15y \end{array}$$

e) $(5y^2 + 2y) + (4y^2 - 8y)$

Forma horizontal:

$= 5y^2 + 2y + 4y^2 - 8y$

$= 9y^2 - 6y$

Forma vertical:

$$\begin{array}{rr} & 5y^2 + 2y \\ +) & 4y^2 - 8y \\ \hline & 9y^2 - 6y \end{array}$$

f) $(2x^2 - 6x) + (x^2 - 8x)$

Forma horizontal:

$= 2x^2 - 6x + x^2 - 8x$

$= 3x^2 - 14x$

Forma vertical:

$$\begin{array}{rr} & 2x^2 - 6x \\ +) & x^2 - 8x \\ \hline & 3x^2 - 14x \end{array}$$

S1C4

a) $(7x + 8y) - (2x + 7y)$

Forma horizontal:

$= 7x + 8y - 2x - 7y$

$= 5x + y$

Forma Vertical:

$$\begin{array}{rr} & 7x + 8y \\ +) & -2x - 7y \\ \hline & 5x + y \end{array}$$

b) $(9x - 4y) - (5x - 10y)$

Forma horizontal:

$= 9x - 4y - 5x + 10y$

$= 4x + 6y$

Forma Vertical:

$$\begin{array}{rr} & 9x - 4y \\ +) & -5x + 10y \\ \hline & 4x + 6y \end{array}$$

c) $(3x + 8y) - (-9x + 5y)$

Forma horizontal:

$= 3x + 8y + 9x - 5y$

$= 12x + 3y$

Forma Vertical:

$$\begin{array}{rr} & 3x + 8y \\ +) & 9x - 5y \\ \hline & 12x + 3y \end{array}$$

d) $(9x^2 - y^2) - (-6x^2 + 3y^2)$

Forma horizontal:

$= 9x^2 - y^2 + 6x^2 - 3y^2$

$= 15x^2 - 4y^2$

Forma Vertical:

$$\begin{array}{rr} & 9x^2 - y^2 \\ +) & 6x^2 - 3y^2 \\ \hline & 15x^2 - 4y^2 \end{array}$$

e) $(-12x - 5y^2) - (5x + 10y^2)$

Forma horizontal:

$= -12x - 5y^2 - 5x - 10y^2$

$= -17x - 15y^2$

Forma Vertical:

$$\begin{array}{rr} & -12x - 5y^2 \\ +) & -5x - 10y^2 \\ \hline & -17x - 15y^2 \end{array}$$

f) $(6x^2 - 11y) - (-2x^2 - 6y)$

Forma horizontal:

$= 6x^2 - 11y + 2x^2 + 6y$

$= 8x^2 - 5y$

Forma Vertical:

$$\begin{array}{rr} & 6x^2 - 11y \\ +) & 2x^2 + 6y \\ \hline & 8x^2 - 5y \end{array}$$

S1C5 E1

	Clasificación	Grado
a)	Binomio	1
b)	Trinomio	2
c)	Binomio	3
d)	Trinomio	2

E2

a) $3x + 2x^2 + 4x + 6 = 2x^2 + 7x + 6$

b) $4x^2 + 3y - 2x^2 + 5y = 2x^2 + 8y$

c) $-7xy - 3x - 5xy + 4x = -12xy + x$

d) $6xy - 4x - 3xy + 10 = 3xy - 4x + 10$

E3

a) $(4x^2 - 6x) + (3x^2 - 12x) = 7x^2 - 18x$

b) $(4x^3 + 6x) + (5x^3 + x) = 9x^3 + 7x$

c) $(8x - 6y + 2z) + (5x - 4y - 3z)$
$= 13x - 10y - z$

d) $(-3x^3 + 5x + 13) + (9x^3 + 3x - 17)$
$= 6x^3 + 8x - 4$

E4

a) $(5x^2 - 9x) - (3x^2 - 8x) = 2x^2 - x$

b) $(2x^3 - 6x) - (5x^3 + 2x) = -3x^3 - 8x$

c) $(3x^2 - 7x + 1) - (5x^2 - 7x - 3) = -2x^2 + 4$

d) $(-2x^3 - 9x^2 + 3x) - (3x^3 + 2x + 7)$
$= -5x^3 - 9x^2 + x - 7$

S2C1

a) $(7x)(6x) = (7)(x)(6)(x) = 42x^2$

b) $(-8x)(9x) = (-8)(x)(9)(x) = -72x^2$

c) $(-3a)(-2b) = 6ab$

d) $(-6x)^2 = (-6x)(-6x) = (-6)(-6)x \cdot x = 36x^2$

e) $(2x)(3x^2) = (2)(3)x \cdot x \cdot x = 6x^3$

S2C2

a) $6(x + 4) = 6x + 24$

b) $3(y - 5) = 3y - 15$

c) $3x(x - 2y) = 3x^2 - 6xy$

d) $(4a - 2)(-6b) = -24ab + 12b$

e) $5(x + y - 7) = 5x + 5y - 35$

S2C3

a) $(x + 5)(y + 4) = xy + 4x + 5y + 20$

b) $(x + 2)(y + 4) = xy + 4x + 2y + 8$

c) $(x + 6)(y + 1) = xy + x + 6y + 6$

d) $(x + 7)(y - 6) = xy - 6x + 7y - 42$

e) $(x - 3)(y + 2) = xy + 2x - 3y - 6$

f) $(x - 4)(y - 3) = xy - 3x - 4y + 12$

S2C4

a) $(x + 2)(x + 7) = x^2 + 7x + 2x + 14$
$= x^2 + 9x + 14$

b) $(x - 3)(x + 7) = x^2 + 7x - 3x - 21$
$= x^2 + 4x - 21$

c) $(x + 3)(x - 8) = x^2 + 3x - 8x - 24$
$= x^2 - 5x - 24$

d) $(x - 4)(x - 9) = x^2 - 9x - 4x + 36$
$= x^2 - 13x + 36$

S2C5 **(a)**

$$\begin{array}{ccccc} x & + & 3 & & \\ x & + & 4 & & \\ \hline x^2 & + & 3x & & \\ & + & 4x & + & 12 \\ \hline x^2 & + & 7x & + & 12 \\ \hline \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{ccccc} x & - & 3 & & \\ x & + & 2 & & \\ \hline x^2 & - & 3x & & \\ & + & 2x & - & 6 \\ \hline x^2 & - & x & - & 6 \\ \hline \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{ccccc} x & + & 5 & & \\ x & - & 2 & & \\ \hline x^2 & + & 5x & & \\ & - & 2x & - & 10 \\ \hline x^2 & + & 3x & - & 10 \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{ccccc} x & - & 6 & & \\ x & - & 7 & & \\ \hline x^2 & - & 6x & & \\ & - & 7x & + & 42 \\ \hline x^2 & - & 13x & + & 42 \end{array}$$

S2C6 E1

a) $(3x)(7x) = 21x^2$ b) $(-8y)(4y) = -32y^2$

c) $(-5z)(-6z) = 30z^2$ d) $(3x)(-5x) = -15x^2$

e) $(3x^2)(6x) = 18x^3$ f) $(-x)(6x^3) = -6x^4$

g) $(-7y^2)(-8y) = 56y^3$ h) $(9x^2)(6y^3) = 54x^2y^3$

E2

a) $4(x + 5) = 4x + 20$ b) $x(x - 2) = x^2 - 2x$

c) $3a(4a - 7) = 12a^2 - 21a$ d) $4a(2a + 3b) = 8a^2 + 12ab$

e) $x(3x - y) = 3x^2 - xy$ f) $-2x(4x - 3y) = -8x^2 + 6xy$

E3

a) $(x + 4)(y + 5) = xy + 5x + 4y + 20$

b) $(x - 1)(y + 5) = xy + 5x - y - 5$

c) $(x + 6)(y - 2) = xy - 2x + 6y - 12$

d) $(x - 3)(y - 10) = xy - 10x - 3y + 30$

e) $(x + 3)(x + 5) = x^2 + 8x + 15$

f) $(x + 2)(x - 6) = x^2 - 4x - 12$

g) $(x + 8)(x - 2) = x^2 + 6x - 16$

h) $(x - 6)(x - 1) = x^2 - 7x + 6$

E4 **(a)**

$$\begin{array}{ccccc} x & + & 2 & & \\ x & + & 5 & & \\ \hline x^2 & + & 2x & & \\ & + & 5x & + & 10 \\ \hline x^2 & + & 7x & + & 10 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{ccccc} x & - & 3 & & \\ x & + & 7 & & \\ \hline x^2 & - & 3x & & \\ & + & 7x & - & 21 \\ \hline x^2 & + & 4x & - & 21 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{ccccc} x & - & 6 & & \\ x & - & 7 & & \\ \hline x^2 & - & 6x & & \\ & - & 7x & + & 42 \\ \hline x^2 & - & 13x & + & 42 \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{ccccc} x & - & 1 & & \\ 2x & + & 1 & & \\ \hline 2x^2 & - & 2x & & \\ & + & x & - & 1 \\ \hline 2x^2 & - & x & - & 1 \end{array}$$

S3C1

a) $10ab \div 2a = \dfrac{\cancel{10a}b}{\cancel{2a}} = 5b$

b) $12x^2 \div 6x = 2x$

c) $50m^2 \div (-10m) = \dfrac{\cancel{10} \cdot 5 \cdot \cancel{m} \cdot m}{-\cancel{10m}} = -5m$

d) $-15p^2 \div 3p^2 = -5$

S3C2

a) $(16x - 8y) \div 8 = \dfrac{\cancel{8} \cdot 2 \cdot x}{\cancel{8}} - \dfrac{\cancel{8} \cdot y}{\cancel{8}} = 2x - y$

b) $(20y^2 + 15y) \div (-10y) = \dfrac{\cancel{5} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{y} \cdot y}{-\cancel{5} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{y}} + \dfrac{\cancel{5} \cdot 3 \cdot \cancel{y}}{-\cancel{5} \cdot 2 \cdot \cancel{y}} = -2y - \dfrac{3}{2}$

S3C3

a) $x + 10$ b) $3x + 4$ c) $4x - 3$

S3C4 E1

a) $25xy \div 5x = 5y$
b) $-24y^2 \div 6y = -4y$
c) $6x^2 \div (-3x) = -2x$
d) $-15y^2 \div (-3y^2) = 5$
e) $30xy \div 10y = 3x$
f) $-32x^2 \div 8x = -4x$
g) $14y^2 \div (-7y) = -2y$
h) $-20x^2 \div 5x^2 = -4$

E2

a) $(18x^2 - 10x) \div 2 = \frac{\cancel{2} \cdot 9 \cdot x \cdot x}{\cancel{2}} - \frac{\cancel{2} \cdot 5 \cdot x}{\cancel{2}} = 9x^2 - 5x$

b) $(21x^2 + 15x) \div (-3x) = -7x - 5$
c) $(-12x^2 - 8x) \div (-2x) = 6x + 4$

E3

a) $x + 5$ b) $7x - 3$

UNIDAD 2

S1C1

a) $x + 6 = 10$
$x = 10 - 6$
$x = 4$

b) $x - 3 = 2$
$x = 2 + 3$
$x = 5$

c) $4x = 24$
$\frac{4x}{4} = \frac{24}{4}$
$x = 6$

d) $x - 2 = 8$
$x = 8 + 2$
$x = 10$

e) $10x = 50$
$x = 5$

f) $x + 9 = 4$
$x = -5$

g) $x - 8 = -1$
$x = 7$

h) $-2x = 6$
$\frac{-2x}{-2} = \frac{6}{-2}$
$x = -3$

S1C2

a) $2x + 5 = 11$
$2x = 6$
$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$
$x = 3$

b) $5x - 3 = 12$
$x = 3$

c) $-4x + 1 = 9$
$x = -2$

d) $-3x - 2 = -8$
$x = 2$

e) $6x + 1 = 7$
$x = 1$

f) $3x - 5 = 10$
$x = 5$

g) $-7x + 8 = 22$
$x = -2$

h) $-5x - 6 = 9$
$x = -3$

S1C3

a) Cantidad de melones: x
Cantidad de sandías: y
La ecuación que representa la expresión es: $x + y = 13$

b) Edad de Luis: x
Edad de Francis: y
La ecuación que representa la expresión es: $x + y = 18$

c) Triple de lapiceros: $3x$
Cantidad de cuadernos: y
La ecuación que representa la expresión es: $3x + y = 20$

d) Costo de dos camisas: $2x$
Costo de un pantalón: y
La ecuación que representa la expresión es: $2x + y = 700$

e) Costo de tres lapiceros: $3x$
Costo de dos cuadernos: $2y$
La ecuación que representa la expresión es: $3x + 2y = 70$

S1C4

a)

x	0	1	2	3	4	5	6
y	10	9	8	7	6	5	4

b) Si $(x, y) = (1,9)$, entonces, $1 + 9 = 10$

S1C5

Se sustituye $x = 2$ e $y = 1$ en los lados izquierdos de las ecuaciones y se obtiene,

$$x - y = 2 - 1 = 1$$
$$x + 2y = 2 + 2 = 4$$

Por tanto, $(2,1)$ es la solución del sistema

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

S1C6

E1

a) $x + 3 = 10$
$x = 7$

b) $2x - 3 = 5$
$x = 4$

c) $3x + 2 = 8$
$x = 2$

E2

x	0	1	2	3	4
y	12	9	6	3	0

E3

a) Se sustituye $x = 12$ e $y = -6$, en los lados izquierdos de las ecuaciones y se obtiene:

$$2x + 3y = 24 - 18 = 6$$
$$x + 2y = 12 - 12 = 0$$

Por tanto, $(12, -6)$ es la solución del sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

b) Se sustituye $x = 2$ e $y = \frac{10}{7}$, en los lados izquierdos de las ecuaciones y se obtiene:

$$3x + 7y = 6 + 10 = 16$$
$$11x - 7y = 22 - 10 = 12$$

Por tanto, $\left(2, \frac{10}{7}\right)$ es la solución del sistema

$$\begin{cases} 3x + 7y = 16 \\ 11x - 7y = 12 \end{cases}$$

S2C1

a) $\begin{cases} 4x + y = 13 & ① \\ y = x + 3 & ② \end{cases}$

Se sustituye y en ① por $x + 3$, y encontrando la solución de la ecuación obtenida:

$4x + (x + 3) = 13$
$5x = 10 \longrightarrow x = 2$
Se sustituye $x = 2$ en ②:
$y = 2 + 3 = 5$

Respuesta: $(2, 5)$

b) $(5, 3)$ c) $(1, 3)$
d) $(7, 4)$

S2C2 E

a) $\begin{cases} 2x + y = 7 & ① \\ x - y = 2 & ② \end{cases}$

Se transpone $2x$ en la ecuación ①
$y = 7 - 2x$ ③
Se sustituye y por $7 - 2x$ en ②,
$x - (7 - 2x) = 2$
$3x = 9 \longrightarrow x = 3$
Se sustituye $x = 3$ en ②:
$3 - y = 2 \longrightarrow y = 1$

Respuesta: $(3, 1)$

b) $(16, 4)$ c) $(1, 4)$
d) $(2, 3)$

S3C1

a) $\begin{cases} 2x + y = 7 & ① \\ x - y = 2 & ② \end{cases}$

Se suman las ecuaciones ① y ②, y resuelve la ecuación obtenida:

$3x = 9 \longrightarrow x = 3$
Se sustituye $x = 3$ en ①
$6 + y = 7 \longrightarrow y = 7 - 6 = 1$

Respuesta: $(3, 1)$

b) $(3, 4)$ c) $(-2, 1)$
d) $(3, 5)$

S3C2

a) $\begin{cases} 3x + 4y = 19 & ① \\ 3x + 2y = 11 & ② \end{cases}$

Se multiplica por -1 ambos lados de la ecuación ②:
$-3x - 2y = -11$ ③
Se suman las ecuaciones ① y ③, y resuelve la ecuación obtenida:
$2y = 8 \longrightarrow y = 4$
Se sustituye $y = 4$ en ①,
$3x + 16 = 19 \longrightarrow x = 1$

Respuesta: $(1, 4)$

b) $(2, 3)$ c) $(-3, 12)$

d) $(-1, -2)$

S3C3

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 17 & ① \\ 2x - y = 2 & ② \end{cases}$

Se multiplica por 2 ambos lados de la ecuación ②:
$(2)(2x - y) = (2)(2)$
$4x - 2y = 4$ ③
Se suman las ecuaciones ① y ③, y resuelve la ecuación obtenida:
$7x = 21$
$x = 3$
Se sustituye $x = 3$ en ①
$9 + 2y = 17$
$y = 4$

Respuesta: $(3, 4)$

b) $(2, 5)$ c) $(-1, 3)$
d) $(4, 3)$

S3C4

a) $\begin{cases} x + 2y = 7 & ① \\ 3x + 8y = 27 & ② \end{cases}$

Se multiplica por -3 ambos lados de la ecuación ①:
$(-3)(x + 2y) = (-3)(7)$
$-3x - 6y = -21$ ③
Se suman las ecuaciones ② y ③, y resuelve la ecuación obtenida:
$2y = 6 \longrightarrow y = 3$
Se sustituye $y = 3$ en ①
$x + (2)(3) = 7 \longrightarrow x = 1$

Respuesta: $(1, 3)$

b) $(2, 4)$ c) $(7, 2)$
d) $(3, 4)$

S3C5

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 7 & ① \\ 4x - 3y = -2 & ② \end{cases}$

Se multiplica por 3 ambos lados de la ecuación ①:
$(3)(3x + 2y) = (3)(7)$
$9x + 6y = 21$ ③
Se multiplica por 2 ambos lados de la ecuación ②:
$(2)(4x - 3y) = (2)(-2)$
$8x - 6y = -4$ ④
Se suman las ecuaciones ③ y ④, y resuelve la ecuación obtenida:
$17x = 17 \longrightarrow x = 1$
Se sustituye $x = 1$ en ①
$3 + 2y = 7 \longrightarrow y = 2$

Respuesta: $(1, 2)$

b) $(-1, 2)$ c) $(5, 3)$
d) $(3, 2)$

S3C6 E1

a) $(3, 10)$ b) $(5, 3)$

E2

a) $(2, 1)$ b) $(5, 3)$
c) $(4, 3)$ d) $(5, 1)$
e) $(3, 5)$ f) $(3, 4)$
g) $(1, 2)$ h) $(4, 1)$
i) $(-1, 2)$ j) $(4, 5)$

S4C1

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 10 & ① \\ 5x + 2(y + 4) = 30 & ② \end{cases}$

Se aplica la propiedad distributiva en ② y transpone términos:

$5x + 2y = 22$ ③

Se suman las ecuaciones ① y ③, y resuelve la ecuación obtenida:

$8x = 32 \longrightarrow x = 4$

Se sustituye $x = 4$ en ①

$12 - 2y = 10 \longrightarrow y = 1$

Respuesta: $(4, 1)$

b) $(3, 7)$ c) $(1, 6)$

S4C2

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{10} + \dfrac{y}{5} = 1 & ① \\ 3x - 2y = 22 & ② \end{cases}$

Se multiplica 10 (el mínimo común múltiplo de 10 y 5) por ①

$\left(\dfrac{x}{10} + \dfrac{y}{5}\right)(10) = (1)(10)$

$x + 2y = 10$ ③

Se suman las ecuaciones ② y ③, y resuelve la ecuación obtenida:

$4x = 32$

$x = 8$

Se sustituye $x = 8$ en ②

$24 - 2y = 22 \longrightarrow y = 1$

Respuesta: $(8, 1)$

b) $(6, 4)$ c) $(4, 6)$

S4C3

a) $\begin{cases} x + 3y = 9 & ① \\ 0{,}4x + 0{,}3y = 1{,}8 & ② \end{cases}$

Se multiplica 10 por ②

$4x + 3y = 18$ ③

Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones ① y ③.

Multiplicando por -1 la ecuación ①:

$-x - 3y = -9$ ④

Se suman las ecuaciones ③ y ④, y resuelve la ecuación obtenida:

$3x = 9 \longrightarrow x = 3$

Se sustituye $x = 3$ en ①

$3 + 3y = 9 \longrightarrow y = 2$

Respuesta: $(3, 2)$

b) $(3, 4)$ c) $(-3, 9)$

S4C4

a) $(7, 4)$ b) $(-1, 2)$
c) $(4, 3)$ d) $(4, 6)$
e) $(13, 10)$ f) $(3, 2)$
g) $(5, 2)$ h) $(13, 6)$

S5C1

a) Costo de un marcador: C\$ x
Costo de un borrador: C\$ y

Se forma el sistema : $\begin{cases} 3x + y = 78 & ① \\ 2x + y = 58 & ② \end{cases}$

Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones ① y ② y se obtiene como solución $(20, 18)$.

Costo de un marcador: C\$ 20
Costo de un borrador: C\$ 18

b) Costo de cada uno: C\$ 80 y C\$ 20

S5C2

a) Base: x cm
Altura: y cm

El sistema es: $\begin{cases} 2x + 2y = 14 & ① \\ x = y + 1 & ② \end{cases}$

Solución: $(4, 3)$
Base: 4 cm
Altura: 3 cm

b) Base: 12 m, Altura: 18 m

Desafío (P.40)

a) $(4, 2, -1)$ b) $(3, 0, 1)$

UNIDAD 3

S1C1

El valor de y es el doble del valor de x, entonces la expresión de la función que muestra la correspondencia entre los valores de x y y es $\boldsymbol{y = 2x}$.

S1C2

Observe que cada valor de y se obtiene multiplicando por 2 el correspondiente valor de x y sumándole 6. La expresión que representa esta relación es $\boldsymbol{y = 2x + 6}$

S1C3

a) $y = 3x$ es una función de primer grado
Parte proporcional a x: $3x$, Constante: 0

b) $y = \dfrac{2}{x}$ no es una función de primer grado

c) $y = 4x + 1$ es una función de primer grado
Parte proporcional a x: $4x$, Constante: 1

d) $y = 3 - 2x$ es una función de primer grado
Parte proporcional a x: $-2x$, Constante: 3

S1C4 E1

Son funciones de primer grado:

a) $y = -2x + 3$ b) $y = 1 + 3x$ d) $y = \frac{3}{2}(x - 4)$

E2

a)

E3

a)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	9	12	15	18	21	24	27	30	33

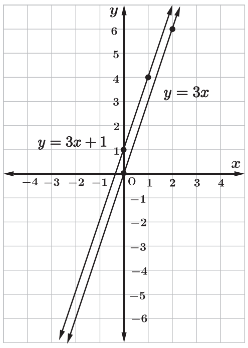
b) $y = 3x + 9$

S2C1

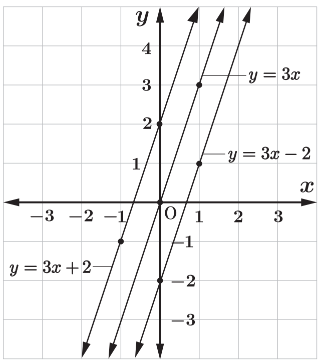
a)

x	-2	-1	0	1	2
$3x$	-6	-3	0	3	6
$3x + 1$	-5	-2	1	4	7

b)



S2C2



S2C3

a) $\dfrac{\text{Variación de } y}{\text{Variación de } x} = \dfrac{33 - 21}{8 - 4} = 3$

b) 3

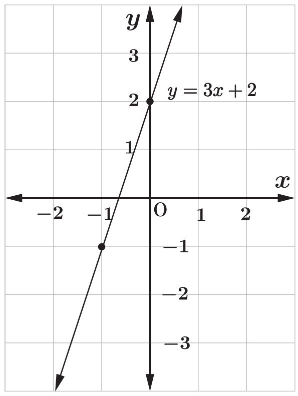
S2C4

a) $a = 3$ b) $a = -5$ c) $a = \frac{1}{2}$ d) $a = -\frac{4}{3}$

S2C5 E1

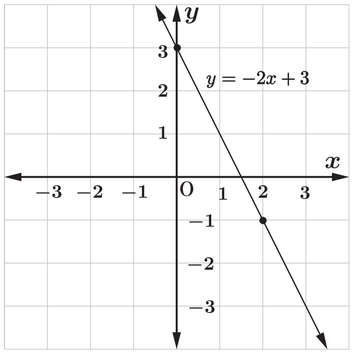
a) $y = 3x + 2$

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-1	2	5	8



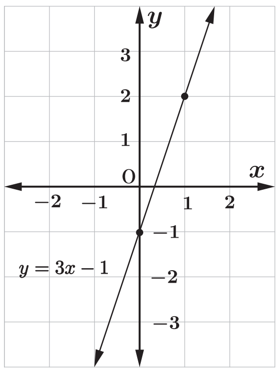
b) $y = -2x + 3$

x	-2	-1	0	1	2
y	7	5	3	1	-1



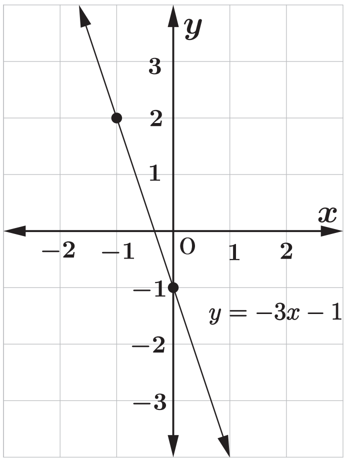
c) $y = 3x - 1$

x	-2	-1	0	1	2
y	-7	-4	-1	2	5



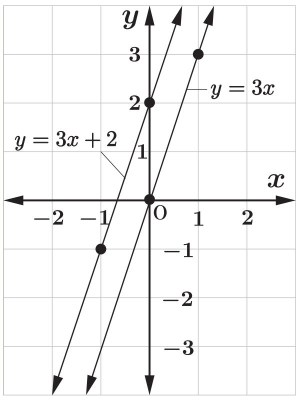
d) $y = -3x - 1$

x	-2	-1	0	1	2
y	5	2	-1	-4	-7

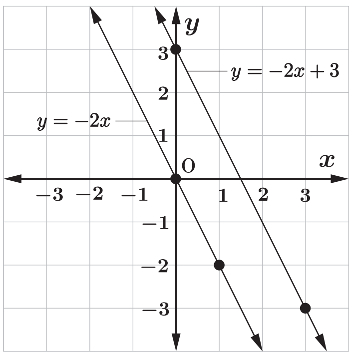


E2

a)



b)



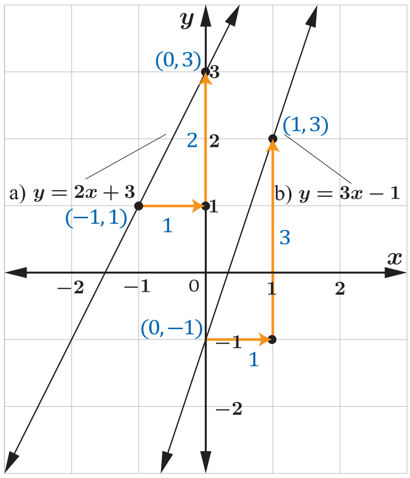
E3

Depende de opinión del estudiante

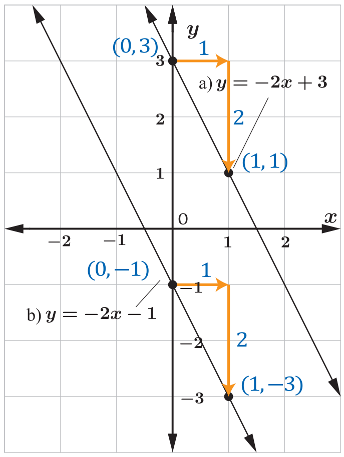
E4

a) $a = 3$ b) $a = -5$ c) $a = 3$ d) $a = \frac{3}{2}$

S2C6



S2C7



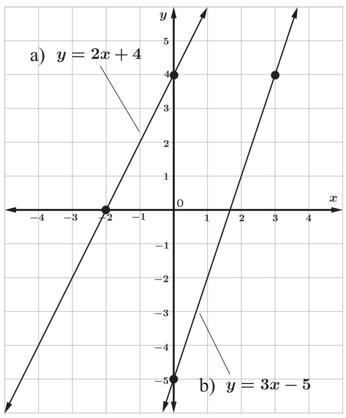
S2C8

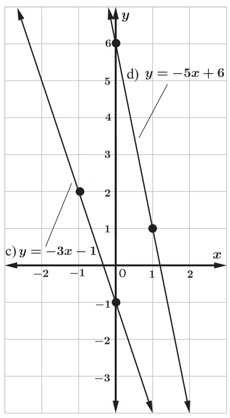
a) $1 \leq y \leq 11$ b) $-8 < y < 1$

S2C9 E1

a) Pendiente: -1, Intercepto: $(0, 2)$
b) Pendiente: 7, Intercepto: $(0, 1)$
c) Pendiente: -3, Intercepto: $(0, 1)$
d) Pendiente: $\frac{2}{3}$, Intercepto: $(0, -4)$

E2





E3

a) $5 \leq y \leq 9$ b) $-5 \leq y \leq 9$ c) $0 < y < 4$

S3C1

a) $y = 3x + 2$ b) $y = 5x + 1$
c) $y = -2x + 4$ d) $y = -4x - 5$

S3C2

a) $y = 4x - 3$ b) $y = -2x + 5$ c) $y = 3x + 9$

S3C3

a) $y = 2x$ b) $y = -4x + 7$

S3C4 E1

a) $y = -x + 3$ b) $y = 2x - 4$
c) $y = 3x + 1$ d) $y = -4x + 1$

E2

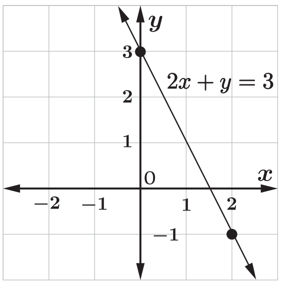
a) $y = 4x - 1$ b) $y = 3x - 5$
c) $y = x + 7$ d) $y = 5x + 3$

E3

a) $y = 5x - 3$ b) $y = 7x - 2$
c) $y = -x + 3$ d) $y = -2x + 4$

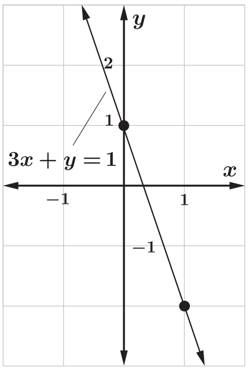
S4C1

x	-1	$-\frac{1}{2}$	1
y	5	4	1



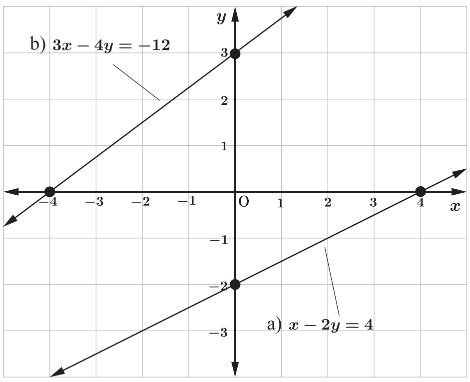
S4C2

$3x + y = 1$
$y = -3x + 1$

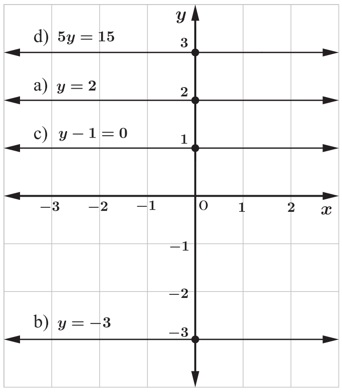


S4C3

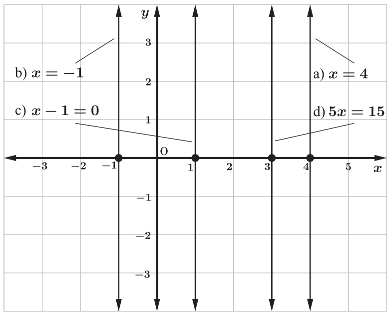
a) Intercepto con el eje x: $(4, 0)$
Intercepto con el eje y: $(0, -2)$
b) Intercepto con el eje x: $(-4, 0)$
Intercepto con el eje y: $(0, 3)$



S4C4

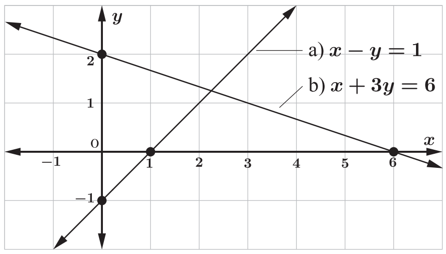


S4C5

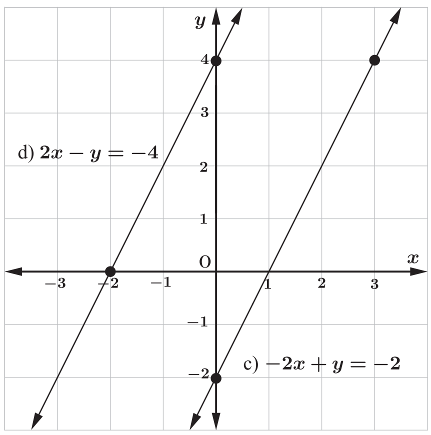


S4C6 E1

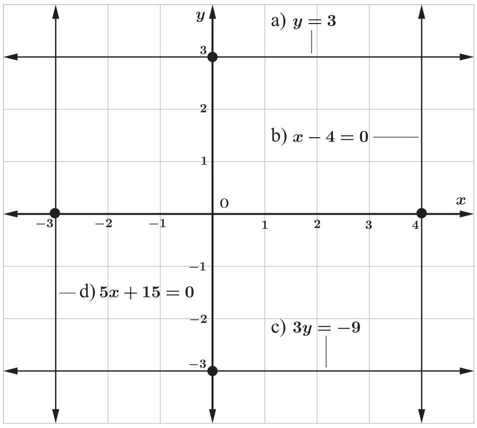
a) Intercepto con el eje x: $(1, 0)$
Intercepto con el eje y: $(0, -1)$
b) Intercepto con el eje x: $(6, 0)$
Intercepto con el eje y: $(0, 2)$



c) Intercepto con el eje x: $(1, 0)$
Intercepto con el eje y: $(0, -2)$
d) Intercepto con el eje x: $(-2, 0)$
Intercepto con el eje y: $(0, 4)$



E2



S5C1

$y = 4x + 20$

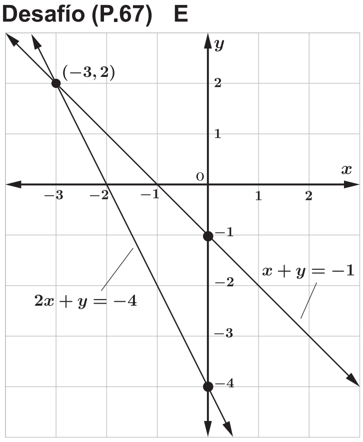
S5C2 E1

a) $y = 100x + 1000$
b) $y = (100)(5) + 1000$
$y = 1500$
Respuesta: C$ 1500

E2

a) $y = 2000 - 100x,$ $\quad y = -100x + 2000$
b) $y = (-100)(10) + 2000.$ $\quad y = 1000$
Respuesta: C$ 1000
c) Sustituye $y = 0$, así: $0 = -100x + 2000$
$x = 20$
Respuesta: 20 meses

Desafío (P.67) E



$(-3, 2)$ es la solución del sistema
$\begin{cases} x + y = -1 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$

Desafío (P.68)

a) $\left(-\frac{2}{5}, \frac{11}{5}\right)$

Desafío (P.70)

a) Incompatible
b) Compatible indeterminado
c) Compatible determinado

UNIDAD 4

S1C1

a) $2, -2$ b) $5, -5$ c) $6, -6$
d) $7, -7$ e) $\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}$ f) $\frac{5}{6}, -\frac{5}{6}$

S1C2 E1

a) $\sqrt{5}, -\sqrt{5}$ b) $\sqrt{11}, -\sqrt{11}$ c) $\sqrt{31}, -\sqrt{31}$

E2

a) 2,2361 b) 3,3166 c) 5,5678

S1C3

a) 5 b) 6 c) -7

S1C4

a) $\sqrt{5} > \sqrt{2}$ b) $\sqrt{11} < \sqrt{13}$
c) $3 < \sqrt{10}$ d) $-\sqrt{3} < \sqrt{7}$

S1C5

a) Es no periódico.
b) Es periódico, cuyo período es 13.
c) Es periódico, cuyo período es 1234.

S1C6

a) Racional
b) Irracional $(\sqrt{5} = 2{,}2360 \ldots)$
c) Racional $(\sqrt{36} = 6)$
d) Racional

S1C7

E1
a) $1, -1$ b) $8, -8$
c) $10, -10$ d) $\frac{6}{7}, -\frac{6}{7}$

E2
a) 6 b) 5
c) -5 d) $-\frac{6}{7}$

E3

a) 8 b) 5 c) 11 d) 12

E4

$-\sqrt{6}, -\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}, \sqrt{5}$

E5

a) Irracional $(\sqrt{7} = 2{,}645751 \ldots)$
b) Racional $(\sqrt{81} = 9)$
c) Racional
d) Racional $\left(0{,}3 = \frac{3}{10}\right)$

Desafío (P. 78)

1. Haga $x = 0,\overline{12}$, es decir $x = 0.121212 \ldots$
2. $100x = 12{,}121212 \ldots$
3. $-x = -0{,}121212 \ldots$
4. Sumando las ecuaciones de 2 y 3, y resolviendo la ecuación resultante:
5. $99x = 12 \longrightarrow x = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$

S2C1

a) $(\sqrt{32})(\sqrt{2}) = \sqrt{(32)(2)} = \sqrt{64} = 8$ b) $\sqrt{35}$
c) -9 d) $\sqrt{42}$

S2C2

a) $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{32}{2}} = \sqrt{16} = 4$ b) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

c) -3 d) $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$

S2C3 E1

a) $\sqrt{45}$ b) $\sqrt{72}$

E2

a) $-\sqrt{28}$ b) $-\sqrt{32}$

S2C4

a) $3\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{5}$ c) $4\sqrt{5}$
d) $-5\sqrt{3}$ e) $-5\sqrt{6}$

S2C5

a) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ b) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ c) $\dfrac{5\sqrt{3}}{12}$ d) $\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$

S2C6 E1

a) $\sqrt{30}$ b) $-2\sqrt{10}$ c) $\sqrt{30}$
d) 5 e) -2 f) -2

E2

a) $\sqrt{175}$ b) $\sqrt{288}$ c) $-\sqrt{147}$ d) $-\sqrt{486}$

E3

a) $2\sqrt{2}$ b) $-3\sqrt{3}$ c) $5\sqrt{5}$
d) $-7\sqrt{5}$ e) $7\sqrt{7}$

E4

a) $\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$ b) $\sqrt{7}$ c) $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$ d) $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$ e) $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

S2C7

a) $3\sqrt{5} + 7\sqrt{5} = (3+7)\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$
b) $6\sqrt{7} + 8\sqrt{7} = 14\ \sqrt{7}$
c) $7\sqrt{6} - \sqrt{6} = 6\sqrt{6}$
d) $11\sqrt{8} - 5\sqrt{8} = 6\sqrt{8}$
e) $3\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - 6 = 5\sqrt{7} - 6$
f) $17\sqrt{13} + 5\sqrt{11} - 11\sqrt{13} = 6\sqrt{13} - 5\sqrt{11}$

S2C8

a) $\sqrt{20} + \sqrt{45} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$
b) $\sqrt{125} - \sqrt{45} = 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
c) $7\sqrt{44} + \sqrt{99} = (7)(2)\sqrt{11} + 3\sqrt{11} = 17\sqrt{11}$
d) $\sqrt{98} + \sqrt{50} + \sqrt{18} = 7\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$

S2C9

a) $\sqrt{3}(\sqrt{3} + 7) = (\sqrt{3})(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})(7) = 3 + 7\sqrt{3}$
b) $\sqrt{7}(\sqrt{6} - \sqrt{7}) = \sqrt{42} - 7$
c) $\sqrt{3}(2\sqrt{5} + \sqrt{2}) = 2\sqrt{15} + \sqrt{6}$
d) $\sqrt{5}(7\sqrt{5} - \sqrt{6}) = 35 - \sqrt{30}$

S2C10

a) $9\sqrt{5} + 15\sqrt{5} = 24\sqrt{5}$
b) $3\sqrt{11} - 10\sqrt{11} = -7\sqrt{11}$
c) $9\sqrt{7} - \sqrt{7} + 8\sqrt{7} = 16\sqrt{7}$
d) $\sqrt{75} + \sqrt{48} = 9\sqrt{3}$
e) $3\sqrt{32} + 5\sqrt{50} = 37\sqrt{2}$
f) $7\sqrt{32} - 4\sqrt{72} = 4\sqrt{2}$
g) $2\sqrt{48} - 11\sqrt{75} + 8\sqrt{27} = -23\sqrt{3}$
h) $\sqrt{5}(\sqrt{11} + \sqrt{7}) = \sqrt{55} + \sqrt{35}$
i) $\sqrt{15}(6 - \sqrt{6}) = 6\sqrt{15} - 3\sqrt{10}$
j) $\sqrt{12}(\sqrt{2} + \sqrt{5}) = 2\sqrt{6} + 2\sqrt{15}$
k) $\sqrt{3}(\sqrt{8} - \sqrt{12}) = 2\sqrt{6} - 6$
l) $\sqrt{7}(\sqrt{45} + 2\sqrt{75}) = 3\sqrt{35} + 10\sqrt{21}$
m) $\sqrt{8}(\sqrt{20} + 3\sqrt{45}) = 22\sqrt{10}$

UNIDAD 5

S1C1

a) $a = 20°$ b) $b = 45°$ c) $c = 53°$

S1C2

a) $a = 140°$ b) $b = 50°$ c) $c = 150°$

S1C3

a) $a = 48°$ $b = 132°$ $c = 48°$
b) $a = 39°$ $b = 51°$ $c = 129°$

S2C1

a) $\angle b$ y $\angle g, \angle d$ y $\angle e$
b) $\angle a$ y $\angle h, \angle c$ y $\angle f$
c) $\angle a$ y $\angle e, \angle b$ y $\angle f, \angle c$ y $\angle g, \angle d$ y $\angle h$

S2C2

a) $a = 30°$ b) $c = 150°$

S2C3

a) $a = 150°$ b) $c = 30°$

S2C4

a) $c = 150°$
b) $a = 30°$

S2C5

a) $c = 50°$ b) $c = 30°$
$d = 70°$ $d = 50°$

S2C6

E1

$\vec{l} \parallel \vec{n}$

E2

a) $a = 52°$ b) $a = 118°$

S2C7

E1

a) $x = 120°$, $y = 60°$
b) $x = 75°$, $y = 105°$

E2

a) $c = 52°$, $d = 75°$
b) $c = 67°$, $d = 65°$

E3

a) Como ángulos correspondientes entre $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{n}$ tienen la misma medida $(52°)$, entonces $\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{n}$.

b) Como $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{n}$, entonces $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{n}$.

c) $x = 72°$
$y = 56°$

d) $52° + 72° + 56° = 180°$

S3C1

a) $50°$ b) $30°$

S3C2

a) $x = 130°$ b) $x = 40°$

S3C3

a) $1080°$ b) $1440°$

S3C4

a) $128{,}57°$ b) $135°$

S3C5 E1

a) $x = 150°$, $y = 63°$
b) $x = 36°$, $y = 56°$
c) $x = 65°$, $y = 135°$
d) $x = 37°$, $y = 143°$
e) $x = 110°$, $y = 125°$
f) $x = 122°$, $y = 134°$

E2

La suma de ángulos internos del pentágono:
$(3)(180°) = 540°$
$x = 540° - (140° + 120° + 80° + 90°) = 110°$

E3

a) $90°$ b) $144°$

UNIDAD 6

S1C1

a) ② y ④ son congruentes al triángulo ①.
b) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

S1C2

a) Los lados correspondientes son:
$\overline{AB}$ y $\overline{DE}$; $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$; $\overline{CA}$ y $\overline{FD}$
Los ángulos correspondientes son:
$\angle A$ y $\angle D$; $\angle B$ y $\angle E$; $\angle C$ y $\angle F$
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

b) Los lados correspondientes son:
$\overline{AB}$ y $\overline{ED}$; $\overline{BC}$ y $\overline{DF}$; $\overline{CA}$ y $\overline{FE}$
Los ángulos correspondientes son:
$\angle A$ y $\angle E$; $\angle B$ y $\angle D$; $\angle C$ y $\angle F$
$\Delta ABC \cong \Delta EDF$

S1C3

a) $DE = BA = 7\ cm$
$EF = AC = 6\ cm$
$DF = BC = 5\ cm$
b) $\Delta ABC \cong \Delta EDF$

S1C4

a) Como $\measuredangle A = \measuredangle D = 56$, $AB = DE = 2\ cm$, $\measuredangle B = \measuredangle E = 70°$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta DEF$
b) Como las medidas de $\angle A$ y $\angle D$ son diferentes, entonces ΔABC y ΔDEF no son congruentes.

S1C5

a) Como $AB = DE = 5\ cm$, $BC = EF = 6\ cm$, $CA = FD = 4\ cm$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta DEF$
b) Como las medidas de $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ son diferentes, ΔABC y ΔDEF no son congruentes.

S1C6

a) Como $AB = DE = 3\ cm$, $\measuredangle A = \measuredangle D = 35°$, $AC = DF = 2\ cm$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.
b) Como las medidas de $\angle A$ y $\angle D$ son diferentes, entonces ΔABC y ΔDEF no son congruentes.

S1C7 E1

$\Delta ABC \cong \Delta MON$ (LLL)
$\Delta DEF \cong \Delta PQR$ (LAL)
$\Delta GHI \cong \Delta JKL$ (ALA)

E2

a) Como $AB = DB$, $\measuredangle ABC = \measuredangle DBE$, $CB = EB$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta DBE$ (LAL)
b) Como $AB = AD$, $BC = DC$, $AC = AC$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta ADC$ (LLL)
c) Como $\measuredangle A = \measuredangle D$, $AB = DB$, $\measuredangle ABC = \measuredangle DBC$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta DBC$ (ALA)

S2C1

a) Hipótesis: $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$ $AC = DC$
Tesis: $\Delta ACB \cong \Delta DCE$

b) Pasos
2. $\measuredangle A = \measuredangle D$
5. $\Delta ACB \cong \Delta DCE$

Justificación
1. Hipótesis
3. Hipótesis
4. Por ser opuestos por el vértice

S2C2

a) Hipótesis: $AB = AD$ $BC = DC$
Tesis: $\Delta ABC \cong \Delta ADC$

b) Pasos
3. $AC = AC$

Justificación
1. Hipótesis
2. Hipótesis
4. LLL en pasos 1, 2 y 3

S2C3

a) Hipótesis: $AB = DB$ $BC = BE$
Tesis: $\Delta ABC \cong \Delta DBE$

b) Pasos
2. $\measuredangle ABC = \measuredangle DBE$
4. $\Delta ABC \cong \Delta DBE$

Justificación
1. Hipótesis
3. Hipótesis
4. LAL en pasos 1, 2 y 3

S3C1

a) $\measuredangle A = 40°$, $\measuredangle C = 100°$
b) $\measuredangle B = 50°$, $\measuredangle C = 80°$
c) $\measuredangle A = 47°$, $\measuredangle B = 47°$

UNIDAD 1

Sección 1 Contenido 1 (S1C1)

	Clasificación	Grado
a)	Monomio	2
b)	Binomio	2
c)	Trinomio	3
d)	Trinomio	2

S1C2

a) $4x + 6y + 10x + 3y = (4 + 10)x + (6 + 3)y$
$= 14x + 9y$

b) $9x + 6y + 7x + 5y = 16x + 11y$

c) $3a - 5b + 10a + 3b = 13a - 2b$

d) $2a - 4b + 8a - b = 10a - 5b$

e) $-4x^2 - 10x - 4x - 8x^2$
$= (-4 - 8)x^2 + (-10 - 4)x = -12x^2 - 14x$

f) $7x^2 - 9x - 2x + 6x^2 = 13x^2 - 11x$

S1C3

a) $(3x + 2y) + (5x + 4y)$

Forma horizontal:
$= 3x + 2y + 5x + 4y$
$= 8x + 6y$

Forma vertical:
$$\begin{array}{rr} & 3x + 2y \\ +) & 5x + 4y \\ \hline & 8x + 6y \end{array}$$

b) $(4x + 5y) + (6x - 2y)$

Forma horizontal:
$= 4x + 5y + 6x - 2y$
$= 10x + 3y$

Forma vertical:
$$\begin{array}{rr} & 4x + 5y \\ +) & 6x - 2y \\ \hline & 10x + 3y \end{array}$$

c) $(8x - 10y) + (7x + 9y)$

Forma horizontal:
$= 8x - 10y + 7x + 9y$
$= 15x - y$

Forma vertical:
$$\begin{array}{rr} & 8x - 10y \\ +) & 7x + 9y \\ \hline & 15x - y \end{array}$$

d) $(-x - 7y) + (x - 8y)$

Forma horizontal:
$= -x - 7y + x - 8y$
$= -15y$

Forma vertical:
$$\begin{array}{rr} & -x - 7y \\ +) & x - 8y \\ \hline & -15y \end{array}$$

e) $(5y^2 + 2y) + (4y^2 - 8y)$

Forma horizontal:
$= 5y^2 + 2y + 4y^2 - 8y$
$= 9y^2 - 6y$

Forma vertical:
$$\begin{array}{rr} & 5y^2 + 2y \\ +) & 4y^2 - 8y \\ \hline & 9y^2 - 6y \end{array}$$

f) $(2x^2 - 6x) + (x^2 - 8x)$

Forma horizontal:
$= 2x^2 - 6x + x^2 - 8x$
$= 3x^2 - 14x$

Forma vertical:
$$\begin{array}{rr} & 2x^2 - 6x \\ +) & x^2 - 8x \\ \hline & 3x^2 - 14x \end{array}$$

S1C4

a) $(7x + 8y) - (2x + 7y)$

Forma horizontal:
$= 7x + 8y - 2x - 7y$
$= 5x + y$

Forma Vertical:
$$\begin{array}{rr} & 7x + 8y \\ +) & -2x - 7y \\ \hline & 5x + y \end{array}$$

b) $(9x - 4y) - (5x - 10y)$

Forma horizontal:
$= 9x - 4y - 5x + 10y$
$= 4x + 6y$

Forma Vertical:
$$\begin{array}{rr} & 9x - 4y \\ +) & -5x + 10y \\ \hline & 4x + 6y \end{array}$$

c) $(3x + 8y) - (-9x + 5y)$

Forma horizontal:
$= 3x + 8y + 9x - 5y$
$= 12x + 3y$

Forma Vertical:
$$\begin{array}{rr} & 3x + 8y \\ +) & 9x - 5y \\ \hline & 12x + 3y \end{array}$$

d) $(9x^2 - y^2) - (-6x^2 + 3y^2)$

Forma horizontal:
$= 9x^2 - y^2 + 6x^2 - 3y^2$
$= 15x^2 - 4y^2$

Forma Vertical:
$$\begin{array}{rr} & 9x^2 - y^2 \\ +) & 6x^2 - 3y^2 \\ \hline & 15x^2 - 4y^2 \end{array}$$

e) $(-12x - 5y^2) - (5x + 10y^2)$

Forma horizontal:
$= -12x - 5y^2 - 5x - 10y^2$
$= -17x - 15y^2$

Forma Vertical:
$$\begin{array}{rr} & -12x - 5y^2 \\ +) & -5x - 10y^2 \\ \hline & -17x - 15y^2 \end{array}$$

f) $(6x^2 - 11y) - (-2x^2 - 6y)$

Forma horizontal:
$= 6x^2 - 11y + 2x^2 + 6y$
$= 8x^2 - 5y$

Forma Vertical:
$$\begin{array}{rr} & 6x^2 - 11y \\ +) & 2x^2 + 6y \\ \hline & 8x^2 - 5y \end{array}$$

S1C5 E1

	Clasificación	Grado
a)	Binomio	1
b)	Trinomio	2
c)	Binomio	3
d)	Trinomio	2

E2

a) $3x + 2x^2 + 4x + 6 = 2x^2 + 7x + 6$

b) $4x^2 + 3y - 2x^2 + 5y = 2x^2 + 8y$

c) $-7xy - 3x - 5xy + 4x = -12xy + x$

d) $6xy - 4x - 3xy + 10 = 3xy - 4x + 10$

E3

a) $(4x^2 - 6x) + (3x^2 - 12x) = 7x^2 - 18x$

b) $(4x^3 + 6x) + (5x^3 + x) = 9x^3 + 7x$

c) $(8x - 6y + 2z) + (5x - 4y - 3z)$
$= 13x - 10y - z$

d) $(-3x^3 + 5x + 13) + (9x^3 + 3x - 17)$
$= 6x^3 + 8x - 4$

S3C2

a) $AB = 6\ cm$ b) $AB = 2\ cm$ c) $\measuredangle B = 50°$

S3C3

$\Delta ABC\ (\measuredangle BAC = \measuredangle BCA)$
$\Delta CDE\ (\measuredangle CDE = \measuredangle CED)$
$\Delta EDA\ (\measuredangle EDA = \measuredangle EAD)$

S3C4

a) Hipótesis: $\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C$
Tesis: $BC = AC = AB$ (ΔABC es equilátero)

b) Pasos
4. $AC = AB$

Justificación
1. Hipótesis
2. Recíproco del teorema del triángulo isósceles
3. Hipótesis
4. Recíproco del teorema del triángulo isósceles
6. Definición de triángulo equilátero en paso 5

S3C5 E1

a) $\measuredangle A = 36°$, $\measuredangle C = 108°$ b) $\measuredangle A = 40°$, $\measuredangle C = 100°$ c) $\measuredangle A = 30°$, $\measuredangle B = 30°$

E2

a) Hipótesis: $AC = BC$ (ΔABC es isósceles), Tesis: $x = y$

b) Pasos
3. $x + \measuredangle A = 180° = y + \measuredangle B$

Justificación
1. Hipótesis
2. Teorema del triángulo isósceles
3. Ángulos suplementarios
4. Por pasos 2 y 3

E3

a) Hipótesis: $AC = BC$ y $AD = BE$, Tesis: $BD = AE$

b) Pasos
2. $AD = BE$
4. $AB = BA$
6. $BD = AE$

Justificación
1. Hipótesis
2. Hipótesis
3. Teorema del triángulo isósceles
5. LAL en pasos 2, 3 y 4

S4C1

a) Como en los triángulos se tiene $\measuredangle B = 90°$ y $\measuredangle E = 90°$, ellos son rectángulos.
Las hipotenusas tienen la misma medida: $AC = DF = 3cm$
Un par de ángulos agudos tiene la misma medida: $\measuredangle A = \measuredangle D = 50°$
Por HA resulta que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

b) Como las hipotenusas de los triángulos rectángulos tienen diferentes medidas $(AC = 4\ cm, DF = 2\ cm)$, ΔABC y ΔDEF no son congruentes.

S4C2

Como en los triángulos se tiene $\measuredangle B = 90°$ y $\measuredangle E = 90°$, ellos son rectángulos.
Las hipotenusas tienen la misma medida: $AC = DF = 5\ cm$
Un par de catetos tiene la misma medida: $BC = EF = 3\ cm$
Por HC resulta que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

S4C3 E1

a) Hipótesis: $AC = BC$ (ΔABC es isósceles), $\measuredangle AHC = 90°$
Tesis: $\Delta ACH \cong \Delta BCH$

b) Pasos
4. $CH = CH$

Justificación
1. Hipótesis
3. $\measuredangle BHC = 180° - \measuredangle AHC = 90°$
5. HC en pasos 1,2,3 y 4

E2

a) Hipótesis: $\overline{AC}$ es bisecriz de $\angle BAD$
ΔCAD y ΔCAB son triángulos rectángulos.
Tesis: $\Delta CAD \cong \Delta CAB$

b) Pasos
3. $\measuredangle CAD = \measuredangle CAB$
4. $AC = AC$
5. $\Delta CAD \cong \Delta CAB$

Justificación
1. Hipótesis
2. Hipótesis
3. Por paso 2 y def. de bisectriz.

E3

a) Hipótesis: $DB = CA$
ΔDBA y ΔCAB son triángulos rectángulos.
Tesis: $AD = BC$

b) Pasos
3. $AB = BA$
4. $\Delta DBA \cong \Delta CAB$

Justificación
1. Hipótesis
2. Hipótesis
4. HC en pasos 1, 2 y 3
5. Def. de congruencia en paso 4

UNIDAD 7

S1C1

a) $\measuredangle A = 70°$ $\measuredangle D = 110°$
$AD = 5\,cm$ $DC = 14\,cm$

b) $AC = 8\,cm$

S1C2

a) $\measuredangle DAB = \measuredangle DAC + \measuredangle BAC$
$= \measuredangle BCA + \measuredangle DCA$ pasos 2 y 4
$= \measuredangle DCB$

b) $\measuredangle CBA = \measuredangle CDA$ def. de congruencia en paso 5

S1C3

Pasos
1. $\measuredangle AOE = \measuredangle COF$
3. $\measuredangle EAO = \measuredangle FCO$

Justificación
2. Las diagonales de un paralelogramo se interceptan en su punto medio.
4. ALA en pasos 1, 2 y 3

S1C4 E1

$AB = 8\,cm$ $BC = 6\,cm$

$\measuredangle A = 105°$ $\measuredangle B = 75°$

E2

$EI = 3\,cm$ $IH = 2\,cm$

$\measuredangle A = 60°$ $\measuredangle AEF = 120°$

E3

a)

Pasos
3. $\measuredangle ABE = \measuredangle CDF$
5. $\Delta ABE \cong \Delta CDF$

Justificación
2. Hipótesis
4. Propiedades de los paralelogramos
6. Def. de congruencia (paso 5)

S2C1

Pasos	Justificación
5. $\overline{AD} \parallel \overline{CB}$	3. LLL en pasos 1 y 2
7. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	4. Def. de congruencia (paso 3)
	6. Def. de congruencia (paso 3)
	8. Por pasos 5 y 7

S2C2

a) El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, porque tiene los ángulos opuestos con la misma medida.

$\measuredangle A = \measuredangle C = 100°$

$\measuredangle B = \measuredangle D = 80°$

b) El cuadrilátero EFGH no es un paralelogramo, porque los ángulos opuestos no tienen la misma medida.

S2C3

La respuesta se ha omitido.

S2C4 E1

Cuadrilátero ABCD

Condición sobre los lados opuestos

($AB = CD = 4\ cm, AD = BC = 2\ cm$)

Cuadrilátero EFGH

Condición sobre los ángulos opuestos

($\measuredangle E = \measuredangle G = 125°, \measuredangle F = \measuredangle H = 55°$)

Cuadrilátero IJKL

Condición sobre las diagonales

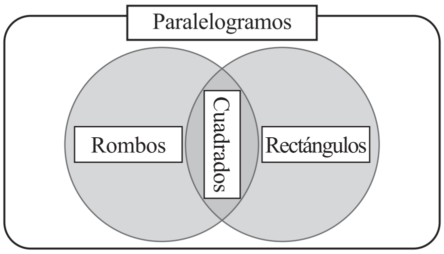
($IM = KM = 2\ cm, JM = LM = 3\ cm$)

E2

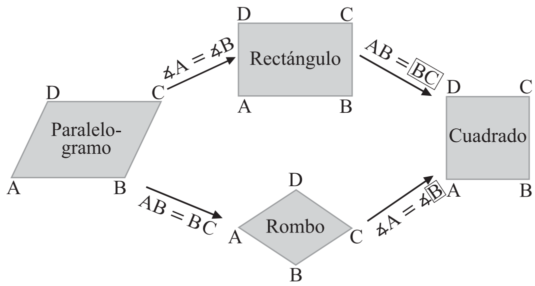
Pasos
5. $EO = FO$

Justificación
1. Punto O es el punto medio de la diagonal AC del paralelogramo ABCD
2. Punto O es el punto medio de la diagonal BD del paralelogramo ABCD
3. Hipótesis
6. Condición sobre las diagonales en 2 y 5

S3C1



S3C3



S3C4 E1

a) Cuadrado b) Rectángulo

c) Rombo

E2

a) $5\,cm$ b) $60°$

E3

Pasos
4. $AO + OC = BO + OD$
6. $AO = BO$

Justificación
1. Hipótesis
2. Las diagonales de un rectángulo tienen la misma medida.
5. Por pasos 3 y 4

UNIDAD 8

S1C1

a) Cono b) Prisma rectangular

c) Esfera d) Pirámide

e) Cilindro f) Pirámide

g) Prisma triangular

S1C2

a) $88\,cm^2$ b) $94\,cm^2$ c) $150\,cm^2$

S1C3
a) $90\ cm^3$ b) $80\ cm^3$ c) $72\ cm^3$

S1C4
a) $45\ cm^2$ b) $84\ cm^2$ c) $105\ cm^2$

S1C5
a) $16\ cm^3$ b) $12\ cm^3$ c) $48\ cm^3$

S1C6
a) $700\ cm^2$ b) $1000\ cm^3$

S1C7 E1
a) $52\ cm^2$ b) $24\ cm^2$

E2
a) $112\ cm^3$ b) $36\ cm^3$

E3
a) $20\ cm^3$ b) $12\ cm^3$

E4
Área total: $678\ cm^2$ Volumen: $1026\ cm^3$

S2C1
a) $36\pi\ cm^2$ b) $56\pi\ cm^2$
c) $54\pi\ cm^2$ d) $70\pi\ cm^2$
e) $24\pi\ cm^2$ f) $96\pi\ cm^2$

S2C2
a) $54\pi\ cm^3$ b) $28\pi\ cm^3$
c) $16\pi\ cm^3$ d) $50\pi\ cm^3$
e) $48\pi\ cm^3$ f) $72\pi\ cm^3$

S2C3
a) $14\pi\ cm^2$ b) $30\pi\ cm^2$ c) $40\pi\ cm^2$

S2C4
a) $8\pi\ cm^3$ b) $16\pi\ cm^3$ c) $21\pi\ cm^3$

S2C5
a) $16\pi\ cm^2$ b) $64\pi\ cm^2$ c) $100\pi\ cm^2$

S2C6
a) $\frac{32}{3}\pi\ cm^3$ b) $\frac{256}{3}\pi\ cm^3$ c) $\frac{500}{3}\pi\ cm^3$

S2C7
a) $104\pi\ cm^2$ b) $\frac{112}{3}\pi\ cm^3$

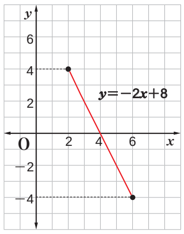
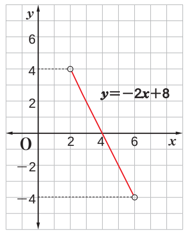
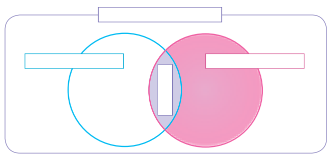
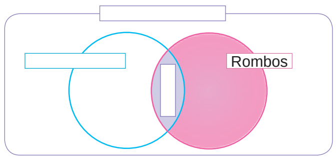
S2C8 E1
a) $54\pi\ cm^2$ b) $40\pi\ cm^2$ c) $100\pi\ cm^2$

E2
a) $250\pi\ cm^3$ b) $192\pi\ cm^3$

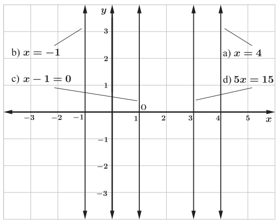
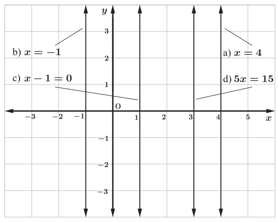
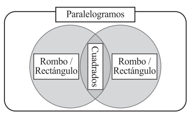
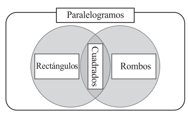
E3
a) $\frac{16}{3}\pi\ cm^3$ b) $2\pi\ cm^3$

E4
a) $\frac{4}{3}\pi\ cm^3$ b) $\frac{1}{6}\pi\ cm^3$

Diferencias del LT entre la versión para docentes y para estudiantes

No.	Página	Unidad	Sección	Contenido		Versión para docentes	Versión para estudiantes
1	2	1	1	2	Problema y Solución	En la tabla "Grado"	"MET" MET significa Mayor Exponente entre los Términos
2	19	2	1	2	Solución inciso d)	$-5x-8=-13$ $-5x=-13+8$	$-5x-8=-13$ $-5x=-13+8$
3	34	2	4	3	Solución	"3. Se suman las ... " "4. Se sustituye ... "	"Se suman las ..." "Se sustituye ..."
4	53	3	2	8	Problema	Trace la gráfica de $y=2x+1$.	Trace la gráfica de $y=2x+1$, para $1\leq x\leq 3$.
5	53	3	2	8	Ejemplo		Cambiar los dos puntos a puntos vacíos. 
6	59	3	4	1	Ejercicio	$\begin{array}{cccc} x & -1 & & 1 \\ y & & 4 & \end{array}$	$\begin{array}{cccc} x & -1 & & 1 \\ y & & 3 & \end{array}$
7	86	4	2	8	Ejercicio	c) (*está en blanco*)	c) $7\sqrt{44}+\sqrt{99}$
8	113	6	1	1	Ejercicio	b) 5. $\cong \boxed{}$	b) 5. $\boxed{} \cong \boxed{}$
9	118	6	3	3	Problema	**Sugerencia:** Trace la bisectriz CD del ∠C.	**Sugerencia:** Trace la bisectriz $\overrightarrow{CD}$ del ∠C.
10	134	7	3	1	Ejercicio		
11	135	7	3	2	Problema y Ejemplo	BD ⊥ AC 8. ∡AOD + ∡DOC = 180º ∠AOD y ∠DOC forman par lineal	BD = AC 8. ∡AOD + ∡COD = 180º ∠AOD y ∠COD forman par lineal
12	140	8	1	2	Problema	Línea 2: "... Luego reúna las figuras que tengan todas sus ..."	Línea 2: "... Luego reúna las figuras de acuerdo a si tiene todas sus ..."
13	156	Solucionario, unidad 3, sección 1, contenido 4, ejercicio 2				a) $y=5x$ y c) $y=\frac{x}{20}$	a) $y=5x$
14	157	Solucionario, unidad 3, sección 2, contenido 9, ejercicio 1				a) Pendiente: -1, Intercepto: 2 b) Pendiente: 7, Intercepto: 1 c) Pendiente: -3, Intercepto: 1 d) Pendiente: $2/3$, Intercepto: -4	En la parte de Intercepto cambiar respuestas. a) Pendiente: -1, Intercepto: $(0, 2)$ b) Pendiente: 7, Intercepto: $(0, 1)$ c) Pendiente: -3, Intercepto: $(0, 1)$ d) Pendiente: $2/3$, Intercepto: $(0, -4)$
15	157	Solucionario, unidad 3, sección 2, contenido 9, ejercicio 3				a) $5\leq y\leq 11$	a) $5\leq y\leq 9$
16	157	Solucionario, unidad 3, sección 3, contenido 4, ejercicio 3				b) $y=-3x-5$	b) $y=3x-5$

Anexo 3 - Diferencias del LT entre la versión para docentes y para estudiantes

No.	Página	Unidad	Sección	Contenido		Versión para docentes	Versión para estudiantes
17	157	Solucionario, unidad 3, sección 4, contenido 1				$\begin{array}{c\|c\|c\|c} x & -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ \hline y & 5 & 4 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{c\|c\|c\|c} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline y & 5 & 3 & 1 \end{array}$
18	157	Solucionario, unidad 3, sección 4, contenido 5					
19	158	Solucionario, unidad 4, sección 2, contenido 6, ejercicio 2				c) $\sqrt{147}$	c) $-\sqrt{147}$
20	159	Solucionario, unidad 5, sección 2, contenido 7, ejercicio 3				a) $\overleftrightarrow{m} \parallel n$	a) $\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{n}$
21	159	Solucionario, unidad 5, sección 3, contenido 4				a) 128,571º	a) 128,57º
22	159	Solucionario, unidad 6, sección 1, contenido 1				a) ② es congruente al triángulo ①	a) ② y ④ son congruentes al triángulo ①
23	159	Solucionario, unidad 6, sección 1, contenido 1				b) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$	b) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ $\Delta ABC \cong \Delta JLK$
24	159	Solucionario, unidad 6, sección 2, contenido 1				b) Justificación 1. Hipótesis 4. Por ser opuestos por el vértice 3. Hipótesis	b) Justificación 1. Hipótesis 3. Hipótesis 4. Por ser opuestos por el vértice
25	159	Solucionario, unidad 6, sección 2, contenido 4				a) Tesis: $AB = BC = AC$	a) Tesis: $BC = AC = AB$
26	159	Solucionario, unidad 6, sección 3, contenido 4				b) Justificación 1. Hipótesis 2. Teorema del triángulo isósceles 3. Hipótesis 4. Teorema del triángulo isósceles 6. Definición del triángulo equilátero en paso 5	Corregir respuestas de los puntos 2 y 4: b) Justificación 1. Hipótesis 2. Reciproco del teorema del triángulo isósceles 3. Hipótesis 4. Reciproco del teorema del triángulo isósceles 6. Definición del triángulo equilátero en paso 5
27	160	Solucionario, unidad 6, sección 4, contenido 3, ejercicio 2				a) Tesis: $\Delta CAD \cong \Delta CAB$	a) Tesis: $\Delta CAD \cong \Delta CAB$ ΔCAD y ΔCAB son rectángulos
28	160	Solucionario, unidad 6, sección 4, contenido 3, ejercicio 2				b) Justificación 1. Hipótesis 2. Hipótesis 3. Por paso 2	Corregir respuesta del punto 3: b) Justificación 1. Hipótesis 2. Hipótesis 3. Por paso 2 y def. de bisectriz
29	160	Solucionario, unidad 6, sección 4, contenido 3, ejercicio 3				a) Tesis: $AD = BC$	a) Tesis: $AD = BC$ ΔDBA y ΔCAB son rectángulos
30	160	Solucionario, unidad 6, sección 4, contenido 3, ejercicio 3				b) Justificación 1. Hipótesis 2. Hipótesis 4. HC en pasos 1,2 y 3 5. Por paso 4	Corregir respuesta del punto 5: b) Justificación 1. Hipótesis 2. Hipótesis 4. HC en pasos 1,2 y 3 5. Def. de congruencia en paso 4
31	160	Solucionario, unidad 7, sección 1, contenido 3				Justificación 2. Las diagonales de cuadrilatero se interceptan en su punto medio	Justificación 2. Las diagonales de un paralelogramo se interceptan en su punto medio.
32	160	Solucionario, unidad 7, sección 1, contenido 4, ejercicio 3				Justificación 2. Hipótesis 4. El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo 6. Por paso 5	Corregir respuestas de los puntos 4 y 6: Justificación 2. Hipótesis 4. Propiedades de los paralelogramos 6. Def. de congruencia en paso 5
33	160	Solucionario, unidad 7, sección 2, contenido 1				Justificación 3. *LLL* en pasos 1 y 2 4. Por paso 3 6. Por paso 3 8. Por pasos 5 y 7	Corregir respuestas de los puntos 4 y 6: Justificación 3. LLL en pasos 1 y 2 4. Def. de congruencia en paso 3 6. Def. de congruencia en paso 3 8. Por pasos 5 y 7
34	160	Solucionario, unidad 7, sección 3, contenido 1					
35	161	Solucionario, unidad 8, sección 2, contenido 7				b) $\frac{112}{3}\ cm^3$	b) $\frac{112}{3}\ \pi\ cm^3$