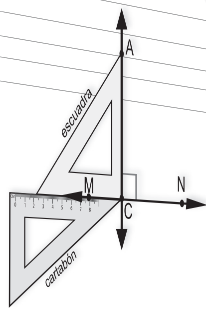
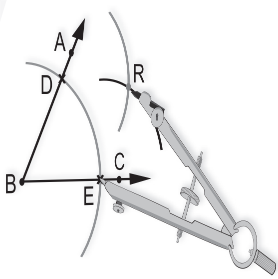
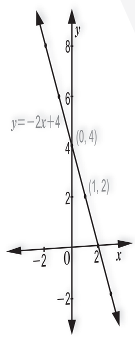
MATEMÁTICA 9

Noveno grado







Cuaderno de Actividades

Educación Secundaria

Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional
El Pueblo, Presidente!

MINED
Un Ministerio en la Comunidad

JICA

9no

COORDINACIÓN GENERAL

Profesora Melba López Montenegro
Profesor Julio César Canelo Castillo

AUTORES

Orlando Antonio Ruiz Álvarez
Armando José Huete Fuentes
Primitivo Herrera Herrera

COLECTIVO DE AUTORES

MINED

Francisco Emilio Díaz Vega
Humberto Antonio Jarquín López
Gregorio Isabel Ortiz Hernández
Juan Carlos Caballero López
Alberto Leonardo García Acevedo

UNAN - MANAGUA

Nubia Aracelly Barreda Rodríguez
Melissa Lizbeth Velásquez Castillo
Armando José Huete Fuentes
Primitivo Herrera Herrera
Marlon José Espinoza Espinoza

UNAN - LEÓN

Anastacio Benito González Funes
Domingo Felipe Aráuz Chévez
Célfida del Rosario López Sánchez
Orlando Antonio Ruiz Álvarez
Hilario Ernesto Gallo Cajina

EQUIPO DE DIAGRAMACIÓN

Maribel del Socorro Cuarezma López

Primera Edición, 2019.

La presente publicación ha sido reproducida con el apoyo de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA) a través del Proyecto para el Aprendizaje Amigable de matemática en Educación Secundaria (NICAMATE).

Introducción

El Cuaderno de Actividades es un material complementario al Libro de Texto (LT). Fue diseñado con la intención de consolidar sus aprendizajes adquiridos en el aula, a través del estudio independiente en casa. Los ejercicios que se proponen están pensados para que usted trabaje al menos 20 minutos en su casa cada día.

Estructura

Al iniciar una nueva sección, generalmente se presenta un resumen de los aspectos claves que se estudian en la sección, y que le serán de utilidad al momento de resolver los ejercicios que se proponen. Dichos aspectos dependen de cada sección.

Ejercicios

Los ejercicios que aquí se proponen son básicos, es decir, son ejercicios similares al problema, ejemplos y ejercicios brindados en el Libro de Texto y que han sido resueltos en el aula.

El objetivo de estos ejercicios es afianzar los aprendizajes adquiridos en el aula y deben ser resueltos por todos los y las estudiantes. La numeración de estos ejercicios es continua para hacer más fácil la identificación de su solución en los solucionarios. Antes del enunciado de cada ejercicio se escribe el número de página del contenido correspondiente en el Libro de Texto.

Ejercicios Avanzados

Los ejercicios aquí propuestos tienen un mayor grado de complejidad y son diferentes a los modelos mostrados en el problema, ejemplos y ejercicios del libro de texto, sin embargo, los aspectos teóricos necesarios para poder resolverlos han sido estudiados en clase. El objetivo de estos ejercicios es aplicar los aprendizajes que se han consolidado en situaciones que generen un mayor análisis y reflexión.

Solucionarios

Aquí se muestran las soluciones de cada uno de los ejercicios que se han propuesto y se brindan los puntos más esenciales del proceso de solución de los ejercicios.

Los solucionarios deben ser consultados únicamente para comparar las respuestas obtenidas. Se brinda primero la solución de todos los ejercicios de las unidades y después se encuentran las soluciones de los ejercicios avanzados.

Índice

Unidad 1: Producto notables y Factorización

Sección 1: Multiplicación de polinomios

- ✓ $a(b+c) = ab+ac,\ \ (a+b)c = ac+bc$
- ✓ $(a+b)\,(c+d) = ac+ad+bc+bd$
- ✓ $(a+b)\,(c+d+e) = ac+ad+ae+bc+bd+be$

Ejercicios

1. (P. 2) Efectúe los siguientes productos:

a) $x(x-2)$ b) $x(2x+5)$ c) $-x(x+7)$

d) $3x(x+1)$ e) $(4x+8)x$ f) $(2x+1)(9x)$

g) $(7x+1)(-x)$ h) $(8x+6)(-2x)$ i) $(-2x)(5x-3)$

2. (P. 3) Efectúe los siguientes productos:

a) $(x+2)(y+3)$ b) $(x-1)(y+5)$ c) $(x+3y)(7x+4y)$

d) $(x+7)(3y+7)$ e) $(x+7)(2y-3)$ f) $(7x+y)(x+y)$

g) $(3x+7)(y+1)$ h) $(8x+2)(9y-7)$ i) $(5x+4y)(7x+3y)$

3. (P. 4) Efectúe los siguientes productos de forma horizontal:

a) $(x+2)(x+y+3)$ b) $(x+2)(x+y-7)$

c) $(2x+5)(3x+y+4)$ d) $(7x+8)(3x-y+5)$

e) $(3x-1)(2x-2y+9)$ f) $(6x-8)(7x-5y-4)$

4. (P. 5) Efectúe los siguientes productos de forma vertical:

a) $(x+2)(x+y+7)$ b) $(x+3)(x-2y+5)$

c) $(x+7)(x+y-7)$ d) $(x-9)(3x+y-3)$

e) $(x-8)(3x+2y+5)$ f) $(x-5)(3x-5y-6)$

Sección 2: Productos notables

✓ Fórmula 1: $(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$

Fórmula 2: $(ax+b)(cx+d) = acx^2+(ad+bc)x+bd$

Fórmula 3: $(x+a)^2 = x^2+2ax+a^2$

Fórmula 4: $(x-a)^2 = x^2-2ax+a^2$

Fórmula 5: $(x+a)(x-a) = x^2-a^2$

✓ $(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2 = a\pm 2\sqrt{ab}+b$ $\qquad (\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$

Ejercicios

5. (P. 7) Efectúe los siguientes productos aplicando la fórmula 1:

a) $(x+1)(x+2)$ b) $(x+7)(x+8)$ c) $(y+7)(y+1)$

d) $(x+1)(x+5)$ e) $(x+8)(x+4)$ f) $(y+9)(y+5)$

g) $(x+3)(x+7)$ h) $(x+9)(x+10)$ i) $(y+1)(y+15)$

6. (P. 8) Efectúe los siguientes productos aplicando la fórmula 1:

a) $(x+3)(x-4)$ b) $(x-3)(x-8)$ c) $(x-7)(x+8)$

d) $(y+8)(y-3)$ e) $(x-9)(x-7)$ f) $(y-6)(y-4)$

g) $(y+3)(y-7)$ h) $(x-5)(x+8)$ i) $(y-9)(y-1)$

7. (P. 9) Efectúe los siguientes productos aplicando la fórmula 2:

a) $(2x+1)(x+3)$ b) $(2x+1)(3x+2)$ c) $(2x-1)(x+7)$

d) $(3x+7)(x-5)$ e) $(5x-1)(x-7)$ f) $(8x-6)(4x-6)$

g) $(2x-1)(x-9)$ h) $(7x-5)(x-3)$ i) $(4y+3)(3y-4)$

8. (P. 10) Efectúe los siguientes productos aplicando la fórmula 3:

a) $(x+3)^2$ b) $(x+7)^2$ c) $\left(x+\frac{1}{7}\right)^2$

d) $(x+8)^2$ e) $(x+3m)^2$ f) $\left(4x+\frac{1}{2}\right)^2$

g) $\left(x+\frac{1}{6}\right)^2$ h) $\left(x+\frac{7}{3}\right)^2$ i) $\left(2x+\frac{m}{2}\right)^2$

9. (P. 11) Efectúe los siguientes productos aplicando la fórmula 4:

a) $(x-3)^2$ b) $(x-7)^2$ c) $(x-8)^2$

d) $(x-9)^2$ e) $\left(3x-\frac{1}{3}\right)^2$ f) $\left(5x-\frac{1}{5}\right)^2$

g) $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$ h) $\left(3x-\frac{7}{3}\right)^2$ i) $\left(5x-\frac{23}{5}\right)^2$

10. (P. 12) Efectúe los siguientes productos aplicando la fórmula 5:

a) $(x+7)(x-7)$ b) $(x+8)(x-8)$ c) $(5x+3)(5x-3)$

d) $(x+11)(x-11)$ e) $(xy+1)(xy-1)$ f) $\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)$

g) $(xy+3)(xy-3)$ h) $\left(xy+\frac{2}{5}\right)\left(xy-\frac{2}{5}\right)$ i) $\left(\frac{x}{y}+8\right)\left(\frac{x}{y}-8\right)$

11. (P. 17) Efectúe los siguientes productos:

a) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$ b) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ c) $(\sqrt{7}+1)^2$

d) $(\sqrt{7}-1)^2$ e) $(3\sqrt{7}+2\sqrt{2})^2$ f) $(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})$

g) $(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}-\sqrt{5})$ h) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$ i) $(2\sqrt{3}+9)(2\sqrt{3}-9)$

12. (P. 18) Racionalice el denominador de las siguientes fracciones:

a) $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ b) $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

d) $\frac{7}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ e) $\frac{1}{\sqrt{6}-2}$ f) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

g) $\frac{8}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}$ h) $\frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}-2}$ i) $\frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}-2}$

Sección 3: Factorización

- ✓ $Ma+Mb=M(a+b)$ Factor Común momonio
- ✓ $a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b)$ Factor Común Polinomio
- ✓ $x^2-a^2=(x+a)(x-a)$ Diferencia de cuadrados
- ✓ $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$, $x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$ Trinomio Cuadrado Perfecto

Ejercicios

13. (P. 20) Factorice los siguientes binomios:

a) $3x+6$ b) $5x+15$ c) $9x+15$

d) $9x-18$ e) $15x-5$ f) $8x-64$

g) $14x-28$ h) $6x-36$ i) $7x-21$

j) $4x-18$ k) $7x-56$ l) $18x-9$

14. (P. 21) Factorice los siguientes binomios:

a) x^2+3x b) x^2+7x c) x^2-9x

d) m^2-mx e) m^2-7m f) $3a^2+27a$

g) x^2+ax h) a^2+2a i) x^2-5x

j) x^2+x k) $2m^2-24m$ l) $27x^2+9x$

15. (P. 22) Factorice los siguientes polinomios:

a) $a(x+1)+b(x+1)$ b) $x(y-5)+b(y-5)$ c) $n(m-8)+7(m-8)$

d) $x(m+n+1)+y(m+n+1)$ e) $x\left(m+\frac{1}{5}\right)+7\left(m+\frac{1}{5}\right)$ f) $\frac{m}{5}(x+1)+\frac{n}{3}(x+1)$

16. (P. 23) Factorice las siguientes diferencias de cuadrados:

a) x^2-4 b) x^2-64 c) x^2-49

d) x^2-121 e) $4x^2-121$ f) $16x^2-49$

g) $m^2-\frac{1}{81}$ h) $9x^2-\frac{1}{49}$

17. (P. 25) Factorice los siguientes trinomios cuadrados perfectos:

a) x^2+2x+1	b) $x^2+8x+16$	c) $x^2-18x+81$
d) x^2-6x+9	e) x^2-2x+1	f) $x^2-10x+25$
g) $x^2+22x+121$	h) $x^2-26x+169$	i) $x^2-x+\frac{1}{4}$

18. (P. 26) Factorice los siguientes trinomios:

a) x^2+3x+2	b) x^2+4x+3	c) $x^2+11x+30$
d) $y^2+17y+72$	e) m^2+6m+8	f) $x^2+15x+56$
g) x^2+8x+7	h) $x^2+14x+13$	i) $m^2+13m+30$
j) $m^2+9m+18$	k) $x^2+12x+20$	l) $x^2+13x+40$

19. (P. 27) Factorice los siguientes trinomios:

a) $x^2-7x+12$	b) $x^2+4x-45$	c) $x^2+3x-28$
d) x^2-x-90	e) $m^2-6m-27$	f) x^2-2x-3
g) $x^2+7x-18$	h) $x^2-10x+21$	i) $y^2+2y-35$
j) $x^2+4x-32$	k) $m^2-3m-10$	l) $m^2+12m-45$

20. (P. 28) Factorice los siguientes trinomios:

a) $2x^2+7x+3$	b) $7x^2+10x+3$	c) $2x^2+7x+3$
d) $6x^2+5x+1$	e) $6x^2+7x+2$	f) $3x^2+13x+14$
g) $2x^2+5x+3$	h) $10x^2+12x+2$	i) $6m^2+8m+2$
j) $10m^2+19m+7$	k) $6x^2+13x+2$	l) $4x^2+22x+10$

21. (P. 29) Factorice los siguientes trinomios:

a) $2x^2-5x+3$	b) $2x^2-x-1$	c) $3x^2-8x-3$
d) $7x^2-9x+2$	e) $25x^2-5x-2$	f) $3x^2+x-2$
g) $6x^2-17x+7$	h) $14x^2-19x-3$	i) $4m^2-2m-12$
j) $7x^2-13x-2$	k) $3m^2+8m-3$	l) $15x^2-11x+2$

Ejercicios Avanzados

EA1. Efectúe las siguientes expresiones:

a) $(x+y)^2+(x-y)^2$	b) $(x+y)^2-(x-y)^2$
c) $\dfrac{(x+y)^2-(x-y)^2}{xy}$	d) $(2x+y)^3$
e) $(3x-2y)^3$	f) $(x^2+x-4)^2$
g) $(x-2)(x-1)(x+2)(x+3)$	h) $(x^2+x-4)^2-(x-2)(x-1)(x+2)(x+3)$

EA2. Factorice las siguientes expresiones:

a) $8a^2-18$	b) $(x+y)^2+18(x+y)+81$
c) $(x-2)^2+17(x-2)+72$	d) $8x^3+1$
e) $27x^3-125$	

EA3. Calcule las siguientes expresiones aplicando productos notables y factorización:

a) 99^2 b) 104×96

c) 97×103 d) $29^2 - 21^2$

EA4. Encuentre el valor numérico de las siguientes expresiones:

a) Si $x = 20$, $(x+27)(x-3)-(x-9)(x+9)$

b) Si $x = 99$, $x^2 + 2x + 1$

Unidad 2: Ecuaciones de Segundo Grado

Sección 1: Introducción a las ecuaciones de segundo grado

Ejercicios

22. (P. 34) Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $2x+3=-5$ b) $-3x-5=10$ c) $\frac{x}{3}-5=2$

d) $\frac{x}{4}+3=5$ e) $-10x-5=-15$ f) $\frac{4x}{3}+5=9$

23. (P. 35) Identifique las ecuaciones que representan una ecuación de segundo grado:

a) $x^2=25$ b) $x+5=8$ c) $x^2=100$

d) $x^2+6x-16=0$ e) $x^2=81$ f) $x^2+14x+49=0$

g) $2x+5=7$ h) $m^2+2m-15=0$ i) $9x-5=13$

j) $7x+1=7$ k) $x=0$ l) $x^2=0$

m) $8x=3x-1$ n) $14x^2-2x=0$ o) $m^2-7m+1=0$

24. (P. 36) Determine mediante sustitución cuáles de los números, $-2, -1$ y 2 satisfacen cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2+2x+1=0$ b) $x^2-x-2=0$ c) $x^2-4=0$

25. (P. 36) Determine mediante sustitución cuáles de los números, $-3, -1, 1$ y 3 satisfacen cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2-4=0$ b) $3x^2-27=0$

c) $x^2-2x-3=0$ d) $x^2+2x=-1$

26. (P. 37) Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $3x^2-48=0$ b) $x^2-3=0$ c) $5x^2-125=0$

d) $6x^2-36=0$ e) $4x^2=48$ f) $x^2-64=0$

g) $5x^2=25$ h) $2x^2-8=0$ i) $7x^2-63=0$

27. (P. 38) Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $(x+2)^2=9$ b) $(x-2)^2-25=0$ c) $(x+7)^2=64$

d) $(x-7)^2-36=0$ e) $(x-9)^2-3=0$ f) $(x+12)^2-5=0$

g) $(x-8)^2-2=0$ h) $(x-10)^2=6$ i) $(x+1)^2-7=0$

Sección 2: Solución de ecuaciones de segundo grado

- ✓ La forma general, una ecuación de segundo grado es $ax^2+bx+c=0$ con $a \neq 0$
- ✓ **Fórmula general**
  Para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c=0$ con $a \neq 0$, se puede utilizar la fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ejercicios

28. (P. 40) Transforme los siguientes polinomios a la forma $(x+p)^2+q$ utilizando completación de cuadrados:

a) $x^2+6x+10$ b) x^2-6x+1 c) x^2+2x-6
d) x^2-6x-4 e) x^2+14x f) x^2+6x

29. (P. 41) Transforme los siguientes polinomios a la forma $a(x+p)^2+q$ utilizando completación de cuadrados:

a) $2x^2+8x+5$ b) $2x^2+4x-2$ c) $3x^2-6x-2$
d) $4x^2-16x+15$ e) $2x^2+12x+1$ f) $3x^2+12x+13$

30. (P. 42) Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado por completación de cuadrados:

a) $x^2+4x-5=0$ b) $x^2-x-6=0$ c) $x^2-2x-15=0$
d) $x^2-8x+15=0$ e) $x^2-9x+8=0$ f) $x^2-5x-14=0$

31. (P. 43) Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado por completación de cuadrados:

a) $2x^2+4x-6=0$ b) $2x^2-4x-12=0$ c) $4x^2-8x-12=0$
d) $3x^2-18x-21=0$ e) $5x^2-10x-60=0$ f) $7x^2-7x-14=0$

32. (P. 45) Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando fórmula general:

a) $x^2+5x+5=0$ b) $x^2+6x-2=0$ c) $x^2+3x-6=0$
d) $x^2-5x+3=0$ e) $3x^2+4x-7=0$ f) $2x^2-5x+2=0$
g) $x^2-2=0$ h) $6x^2+7x+2=0$ i) $4x^2-2x-12=0$

33. (P. 47) Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando factorización:

a) $(x+2)(x-3)=0$ b) $x^2+3x+2=0$ c) $x^2+2x-3=0$
d) $x^2+2x-15=0$ e) $(x-1)(2x+1)=0$ f) $x^2-x-20=0$
g) $x^2+7x-18=0$ h) $x^2+12x-45=0$ i) $x^2+10x-11=0$

34. (P. 48) Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando factorización:

a) $x^2+2x=0$ b) $x^2+2x+1=0$ c) $5x^2+30x=0$
d) $x^2-10x+25=0$ e) $x^2-16x+64=0$ f) $14x^2-7x=0$
g) $x^2+18x+81=0$ h) $x^2+12x+36=0$ i) $x^2-20x+100=0$

Sección 3: Aplicaciones de las ecuaciones de segundo grado

✓ El "Discriminante" de la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ con $a\neq 0$ que se representa con la letra D es $D=b^2-4ac$.

Si $D>0$, la ecuación de segundo grado tiene **dos soluciones** distintas en los números reales.

Si $D=0$, la ecuación de segundo grado tiene **una solución** en los números reales.

Si $D<0$, la ecuación de segundo grado **no tiene solución** en los números reales.

✓ Dados los números p y q se puede obtener la ecuación de segundo grado $x^2+bx+c=0$ y las siguientes relaciones entre los coeficientes de estas y los números dados: $p+q=-b$, $pq=c$

Ejercicios

35. (P. 50) Utilice el valor del discriminante para saber el número de soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo grado en los números reales.

a) $2x^2+5x+3=0$ b) $x^2-6x+9=0$ c) $3x^2+2x+1=0$

d) $3x^2-5x-2=0$ e) $3x^2+2x+4=0$ f) $x^2+2=0$

g) $3x^2+x+1=0$ h) $x^2+14x+49=0$ i) $4x^2+5x-3=0$

36. (P. 52) Determine la ecuación de segundo grado $x^2+bx+c=0$ cuyas soluciones son:

a) $x=2, x=3$ b) $x=2+\sqrt{3}, x=2-\sqrt{3}$

c) $x=5, x=6$ d) $x=2+\sqrt{2}, x=2-\sqrt{2}$

e) $x=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}, x=\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$ h) $x=-3, x=-8$

37. (P. 54) Resuelva los siguientes problemas aplicando ecuaciones de segundo grado:

a) La casa de Doña María tiene una sala rectangular cuya área es $32m^2$ y su largo excede al ancho en $4m$. ¿Cuáles son sus dimensiones?

b) El papá de Erick tiene un terreno rectangular. Si se sabe que el largo es el triple que el ancho y tiene un área de $60m^2$, ¿cuáles son las dimensiones del terreno?

c) Una ventana tiene un área de $306cm^2$. Si la longitud excede al ancho en $1cm$, ¿cuáles son las dimensiones de la ventana?

38. (P. 55) Resuelva los siguientes problemas aplicando ecuaciones de segundo grado:

a) Un número entero positivo es el triple de otro y la diferencia de sus cuadrados es 72. ¿Cuáles son los números?

b) El producto de dos números positivos consecutivos es 110. ¿Cuáles son esos números?

c) La base de un triángulo es $5cm$ menos que la altura. Si el área es de $18cm^2$, encuentre las medidas de la base y la altura.

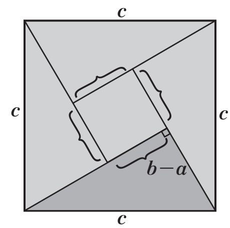
Ejercicios Avanzados

EA5. En t segundos la altura h, en metros sobre el nivel del suelo, de un proyectil está dada por la ecuación $h(t) = 80t - 5t^2$, ¿cuánto tardará el proyectil en llegar a $320m$ sobre el nivel del suelo?

EA6. La base de un triángulo es 3 veces su altura. Si su área es de $150m^2$, ¿cuáles son las dimensiones de su base y su altura?

EA7. Un grupo de estudiantes que participaron en un concurso de Matemáticas se estrecharon la mano. Uno de ellos advirtió que los apretones de mano fueron 66. ¿Cuántos estudiantes asistieron al concurso?

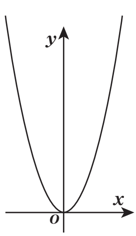
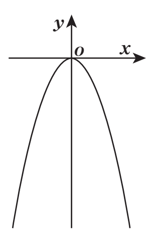
EA8. Suponga que un cuadrado de lado c puede dividirse en cuatro triángulos rectángulos congruentes y un cuadrado de lado $b-a$. Demuestre que $a^2+b^2=c^2$.



Nota: Esta idea fue la que utilizó el erudito indio Bhaskara, alrededor de 1150 AC, para dar una demostración del famoso Teorema de Pitágoras que se estudiará más adelante.

Unidad 3: Funciones de segundo grado

Sección 1: Introducción a las funciones de segundo grado

Propiedades de la función $y = ax^2$			
Vértice:(0,0)		Eje de simetría: Eje y	
	Si $a > 0$ Cóncava hacia arriba		Si $a < 0$ Cóncava hacia abajo

Ejercicios

39. (P. 58) Determine el cuadrante en el que se ubica cada uno de los siguientes puntos:

a) $\mathrm{A}(1,5)$ b) $\mathrm{B}(5,3)$ c) $\mathrm{C}(-1,-3)$

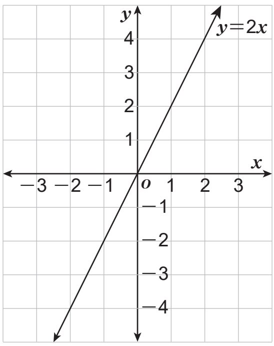
d) $\mathrm{D}(-1,8)$ e) $\mathrm{E}(2,-4)$ f) $\mathrm{F}\left(1,\frac{3}{2}\right)$

g) $\mathrm{G}\left(-4,\frac{1}{4}\right)$ h) $\mathrm{H}\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\right)$ i) $\mathrm{I}\left(-\frac{8}{5},-\frac{1}{2}\right)$

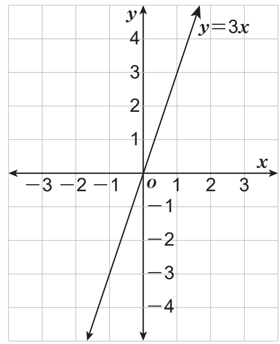
Ejercicios

40. (P. 59) Trace la gráfica de cada función que se propone a partir de la gráfica dada:

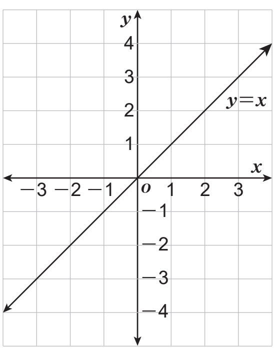
a) $y = 2x + 3$



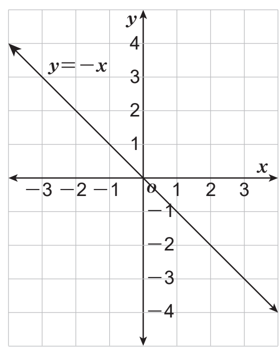
b) $y = 3x + 1$



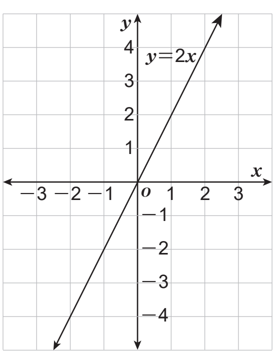
c) $y = x + 2$



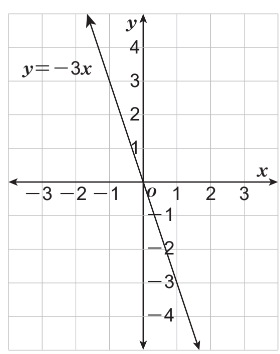
d) $y = - x - 2$



e) $y = 2x - 1$



f) $y = - 3x + 2$



41. (P. 61) Calcule los valores de y en las siguientes funciones para $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$:

a) $y = x^2$ b) $y = - x^2$ c) $y = - 3x^2$

42. (P. 62) Complete la siguiente tabla para las funciones dadas y trace la gráfica, con ayuda de los puntos obtenidos:

a) $y = x^2$

x	-2	-1	0	1	2
x^2					

b) $y = -2x^2$

x	-2	-1	0	1	2
$-2x^2$					

43. (P. 64) Trace las gráficas de las funciones, encuentre el vértice e identifique la dirección de las parábolas cóncavas.

a) $y = -x^2$ b) $y = -4x^2$

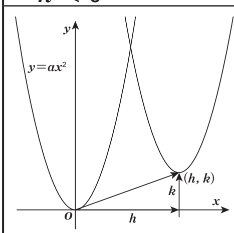
Sección 2: Función de segundo grado

Propiedades de la función $y = a(x-h)^2+k$

Vértice: (h, k) Eje de simetría: $x = h$

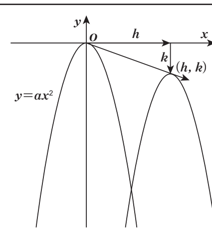
La gráfica de $y = a(x-h)^2+k$ se obtiene al trasladar la de $y = ax^2$

- h unidades a la derecha si $h > 0$
- $|h|$ unidades hacia la izquierda si $h < 0$
- k unidades hacia arriba si $k > 0$
- $|k|$ unidades hacia abajo si $k < 0$



Si $a > 0$

Cóncava hacia arriba



Si $a < 0$

Cóncava hacia abajo

Ejercicios

44. (P. 67) Trace las gráficas de las funciones, encuentre el vértice e identifique la dirección de las parábolas cóncavas.

a) $y = x^2 + 3$ b) $y = x^2 - 2$ c) $y = 2x^2 + 1$

d) $y = -x^2 - 1$ e) $y = -2x^2 + 2$ f) $y = -2x^2 - 1$

45. (P. 69) Trace la gráfica de las siguientes funciones, y escriba en cada caso su vértice:

a) $y = (x-1)^2$ b) $y = (x+1)^2$ c) $y = 2(x+1)^2$

d) $y = -2(x+1)^2$ e) $y = -(x+3)^2$ f) $y = -2(x-3)^2$

46. (P. 71) Trace la gráfica de las siguientes funciones, y localice en cada caso su vértice:

a) $y=(x-1)^2+2$ b) $y=(x+1)^2+2$ c) $y=(x+2)^2+2$
d) $y=3(x+1)^2+2$ e) $y=2(x+4)^2+1$ f) $y=2(x-3)^2+3$

47. (P. 72) Trace la gráfica de las siguientes funciones, y localice en cada caso su vértice:

a) $y=-2(x-1)^2+1$ b) $y=-3(x+2)^2+1$ c) $y=-2(x-2)^2+2$

48. (P. 73) Determine el vértice, eje de simetría, intercepto con el eje y y trace la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y=x^2+2x-3$ b) $y=x^2+6x+8$ c) $y=x^2-6x+11$
d) $y=2x^2-8x+2$ e) $y=2x^2-4x-2$ f) $y=3x^2-6x-1$

49. (P. 75) Determine el vértice, eje de simetría, intercepto con el eje y y trace la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y=-x^2+4x-3$ b) $y=-x^2+2x+2$
c) $y=-2x^2+4x+2$ d) $y=-2x^2-12x-17$

Sección 3: Valor máximo o mínimo de una función de segundo grado y su aplicación

Ejercicios

50. (P. 77) Encuentre el valor máximo o mínimo de las siguientes funciones:

a) $y=(x-2)^2+3$ b) $y=-(x+2)^2-5$
c) $y=-2(x-5)^2+3$ d) $y=(x+4)^2-4$

51. (P. 79) Encuentre el máximo y el mínimo de la función $y=(x-1)^2+1$ en los intervalos siguientes:

a) $-1\leq x\leq 2$ b) $2\leq x\leq 4$

52. (P. 79) Encuentre el máximo y el mínimo de la función $y=(x+4)^2-2$ en los intervalos siguientes:

a) $-3\leq x\leq -2$ b) $-6\leq x\leq -5$

53. (P. 80) Encuentre el máximo y el mínimo de la función $y=2(x-1)^2+7$ en los intervalos siguientes:

a) $-1\leq x\leq 0$ b) $1\leq x\leq 3$

54. (P. 81) Encuentre el máximo y el mínimo de la función $y=-(x-1)^2+3$ en los intervalos siguientes:

a) $-1\leq x\leq 2$ b) $2\leq x\leq 4$

55. (P. 81) Encuentre el máximo y el mínimo de la función $y=-3(x+1)^2+6$ en los intervalos siguientes:

a) $1\leq x\leq 2$ b) $-4\leq x\leq 2$

56. (P. 84) Don Carlos quiere cercar el patio de su casa el cual tiene forma rectangular y para ello tiene disponible $26m$ de malla.

a) Exprese el área que cercará don Carlos en función de su ancho.
b) Determine las dimensiones del patio que maximizan su área.

57. (P. 84) Un rectángulo tiene un perímetro de $6cm$.

a) Exprese el área del rectángulo en función de su ancho.
b) ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo para alcanzar su mayor área posible?

Ejercicios Avanzados

EA9. Deduzca las funciones de segundo grado en la forma $y=a(x-h)^2+k$ que cumplen las siguientes condiciones:

a) Su vértice es el punto (1, 2) y la gráfica pasa por (2, 6).

b) Su valor máximo es 10, eje de simetría $x=-1$ y la intersección con el eje y es (0, 8).

EA10. Trace en un mismo plano las gráficas de las siguientes funciones y determine los puntos de intersección.

a) $y=x+2$ y $y=x^2$

b) $y=x^2+2$ y $y=-x^2$

EA11. Deduzca la función de segundo grado en la forma $f(x)=ax^2+bx+c$ que satisfaga siguientes condiciones:

a) $f(0)=5$, $f(1)=10$ y $f(-1)=4$

b) Su gráfica pasa por (2, −1) y los puntos de intersección con el eje x son: (1, 0) y (3, 0).

Nota: Si y está en función de x, se puede expresar $y=f(x)$.
En una función expresada por $y=f(x)$, si $x=a$ entonces el valor de y es $f(a)$.
Por ejemplo en la función $f(x)=2x+1$, si $x=1$, entonces $f(1)=(2)(1)+1=3$.
Por lo tanto $y=3$.

Unidad 4: Proporcionalidad entre segmentos

Sección 1: Razón entre segmentos

- ✓ Dada una recta con un sistema de coordenadas, la distancia entre los dos puntos A y B con coordenadas a y b respectivamente, se define de la siguiente manera:

  $$d=AB=\text{(Coordenada mayor)-(Coordenada menor)}=b-a$$

  Si A y B son iguales, entonces $d=0$.

- ✓ La razón r entre dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se define como el cociente entre sus longitudes, expresadas con la misma unidad de medida, y se representa por el numero

  $$r=\frac{AB}{CD}$$

  que también puede escribirse como AB:CD, este se lee "AB es a CD".

- ✓ Si $\frac{AB}{CD}=\frac{EF}{GH}$, entonces $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son proporcionales a $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$.

Ejercicios

58. (P. 86) Calcule la distancia d entre los puntos dados.

a) $A(-3)$ y $B(4)$	b) $A(0)$ y $B(2)$	c) $A(-7)$ y $B(0)$
d) $A(8)$ y $B(-4)$	e) $A(-9)$ y $B(3)$	f) $A(-10)$ y $B(11)$
g) $A(-8)$ y $B(8)$	h) $A(-5)$ y $B(-1)$	i) $A(-7)$ y $B(10)$

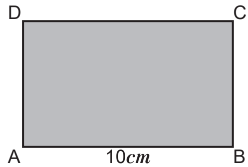
59. (P. 87) Calcule la razón $r = \frac{CD}{AB}$ entre las parejas de segmentos cuyas longitudes son dadas en cada inciso.

a) $AB = 5cm$ y $CD = 15cm$ b) $AB = 7cm$ y $CD = 14cm$

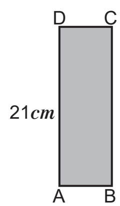
c) $AB = 3cm$ y $CD = 9cm$ d) $AB = 6cm$ y $CD = 18cm$

e) $AB = 4cm$ y $CD = 28cm$ f) $AB = 9cm$ y $CD = 90cm$

60. (P. 87) La base y la altura de un rectángulo están en la razón 5:3. Si la base mide $10cm$, ¿cuánto mide la altura del rectángulo?



61. (P. 87) La base y la altura de un rectángulo están en la razón 2:7. Si la altura mide $21cm$, ¿cuánto mide la base del rectángulo?

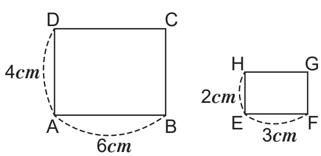


62. (P. 88) Calcule las razones entre los segmentos $AB = 6cm$ y $CD = 8cm$, $EF = 18cm$ y $GH = 24cm$ y diga si estos son proporcionales.

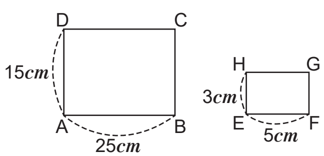
63. (P. 88) Calcule las razones entre los segmentos $AB = 25cm$ y $CD = 15cm$, $EF = 10cm$ y $GH = 6cm$ y diga si estos son proporcionales.

64. (P. 88) Determine en cada pareja de rectángulos si la base y la altura de uno son proporcionales a las del otro.

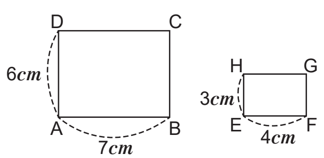
a)



b)



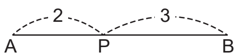
c)

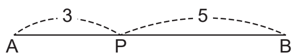


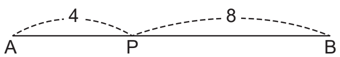
Sección 2: División de un segmento

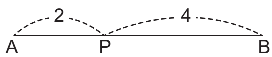
Ejercicios

65. (P. 90) En cada figura, calcule la razón $\frac{AP}{PB}$ entre los segmentos en que el punto P divide a $\overline{AB}$.

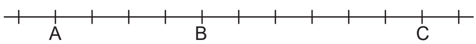
a) 

b) 

c) 

d) 

66. (P. 90) Dada la figura



a) Ubique el punto interior M que divide al $\overline{AB}$ en dos segmentos iguales.

b) Ubique el punto interior N que divide al $\overline{BC}$ en dos segmentos iguales.

c) Ubique el punto interior P que divide al $\overline{AB}$ en la razón 1:3.

d) Ubique el punto interior Q que divide al $\overline{BC}$ en la razón 4:2.

67. (P. 91) Calcule la coordenada p del punto interior P de un segmento, tal que:

a) $A(2)$ y $B(8)$ y P divide al $\overline{AB}$ en la razón 2:1

b) $A(-3)$ y $B(6)$ y P divide al $\overline{AB}$ en la razón 4:5

c) $A(2)$ y $B(8)$ y P divide al $\overline{AB}$ en la razón 2:4

d) $D(-4)$ y $F(6)$ y P es punto medio de $\overline{DF}$

68. (P. 92) Calcule la coordenada p del punto exterior P de un segmento, tal que:

a) $A(2)$ y $B(6)$ y p divide al $\overline{AB}$ en la razón 3:1

b) $D(3)$ y $F(7)$ y p divide al $\overline{DF}$ en la razón 2:4

c) $A(4)$ y $B(9)$ y p divide al $\overline{AB}$ en la razón 2:1

69. (P. 93) Sea $\overline{AB}$ y P un punto en su interior. Encentre las longitudes AP y PB.

a) Si la longitud del $\overline{AB}$ es 16cm y las longitudes de $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ están en la razón 3:5.

b) Si la longitud del $\overline{AB}$ es 16cm y las longitudes de $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ están en la razón 2:5.

c) Si la diferencia entre las longitudes de $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ es 6 y la razón $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ es 6:5.

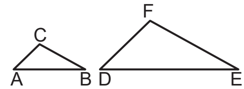
d) Si la diferencia entre las longitudes de $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ es 6 y la razón $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ es 5:3.

Unidad 5: Semejanza

Sección 1: Criterios de semejanza de triángulos

Definición de semejanza de triángulos

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF} \\ \measuredangle A = \measuredangle D, \measuredangle B = \measuredangle E, \measuredangle C = \measuredangle F \end{cases}$$



Criterio AA

$$\measuredangle A = \measuredangle D, \measuredangle B = \measuredangle E \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

Criterio LLL

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

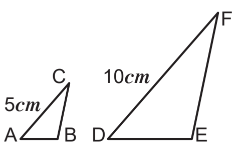
Criterio LLL

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} \\ \measuredangle A = \measuredangle D \end{matrix}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

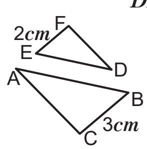
Ejercicios

70. (P. 96) En cada inciso, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Calcule $\frac{AB}{DE}$, $\frac{BC}{EF}$ y $\frac{AC}{DF}$.

a)

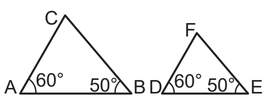


b)

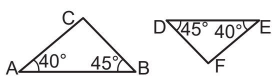


71. (P. 97) Investigue si las parejas de triángulos dados en cada inciso son semejantes. En caso de que lo sean, escriba la semejanza utilizando el símbolo ~.

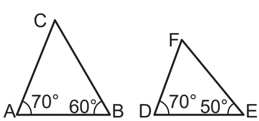
a)



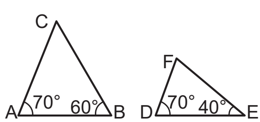
b)



c)

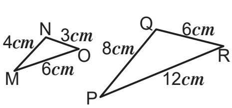


d)

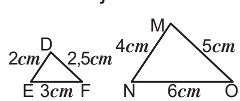


72. (P. 98) Investigue si las parejas de triángulos dados en cada inciso son semejantes. En caso de que lo sean, escriba la semejanza utilizando el símbolo ~.

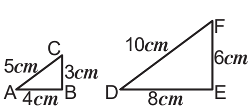
a)



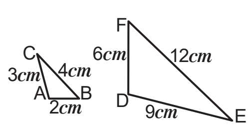
b)



c)



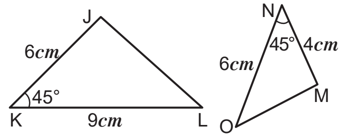
d)



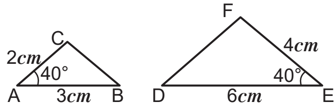
73. (P. 99) Investigue si las parejas de triángulos dados en cada inciso son semejantes. En caso de que lo sean, escriba la semejanza utilizando el símbolo ~.

a)

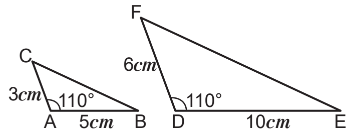
b)



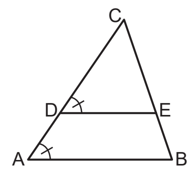
c)



d)

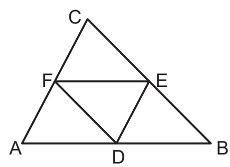


74. (P. 101) Dada la figura de cada inciso, demuestre que $\triangle ACB \sim \triangle DCE$.



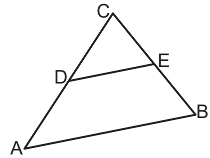
Pasos	Justificación
1. $\measuredangle A = \measuredangle D$	$\boxed{}$
2. $\measuredangle C = \measuredangle C$	$\boxed{}$
3. $\boxed{} \sim \boxed{}$	AA en pasos 1 y 2

75. (P. 102) En la figura de la derecha, $FD = \frac{1}{2}BC$, $DE = \frac{1}{2}AC$, $FE = \frac{1}{2}AB$. Demuestre que $\triangle ABC \sim \triangle EFD$.



Pasos	Justificación
1. $FD = \frac{1}{2}BC$, $DE = \frac{1}{2}AC$, $FE = \frac{1}{2}AB$	$\boxed{}$
2. $\frac{FD}{BC} = \frac{DE}{AC} = \frac{FE}{AB}$	$\boxed{}$
3. $\boxed{} \sim \boxed{}$	LLL en pasos 1 y 2

76. (P. 103) En la figura de la derecha D y E son los puntos medios respectivos de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$. Demuestre que $\triangle ABC \sim \triangle DEC$.



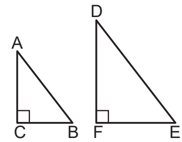
Pasos	Justificación
1. $CD = \frac{1}{2}AC$, $CE = \frac{1}{2}BC$	$\boxed{}$
2. $\measuredangle C = \measuredangle C$	$\boxed{}$
3. $\boxed{} \sim \boxed{}$	LAL en pasos 1 y 2

Sección 2: Semejanza de triángulos rectángulos y paralelismo

Semejanza de triángulos rectángulos

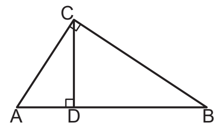
Dos triángulos rectángulos son semejantes si:

- Un par de ángulos agudos tienen la misma medida.
- Sus catetos son proporcionales.
- Las hipotenusas y un par de catetos son proporcionales.



Teoremas de los catetos y de la altura

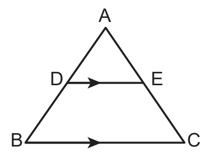
- $AC^2=(AD)(AB)$
- $BC^2=(BD)(AB)$
- $CD^2=(AD)(BD)$



Rectas paralelas y segmentos proporcionales

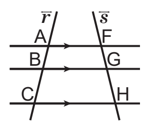
Sea $\triangle ABC$ el de la derecha:

- $\overline{DE} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{DE}{BC}$
- $\overline{DE} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$
- $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC} \Rightarrow \overline{DE} \parallel \overline{BC}$
- D y E puntos medios respectivos de $\overline{AB}$ y $\overline{AC} \Rightarrow \overline{DE} \parallel \overline{BC}$ y $DE=\frac{1}{2}BC$



Teorema de Tales

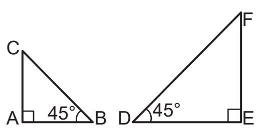
$\overleftrightarrow{AF}$, $\overleftrightarrow{BG}$ y $\overleftrightarrow{CH}$ paralelas $\Rightarrow \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{FG}{GH}$



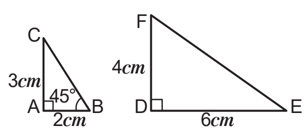
Ejercicios

77. (P. 104) Investigue si las parejas de triángulos dados en cada inciso son semejantes. En caso de que lo sean, escriba la semejanza utilizando el símbolo ~.

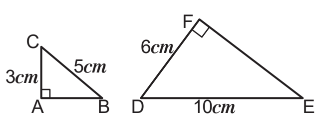
a)



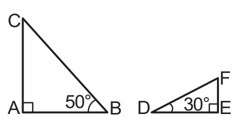
b)



c)

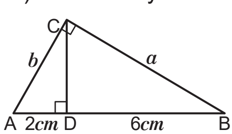


d)

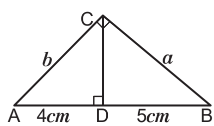


78. (P. 106) Calcule a y b.

a)

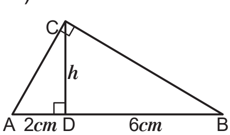


b)

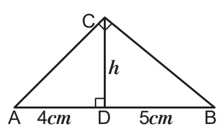


79. (P. 108) Calcule h.

a)

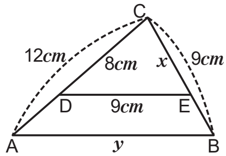


b)

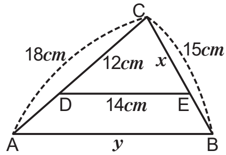


80. (P. 110) Calcule x y y sabiendo que $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$.

a)

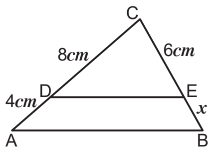


b)

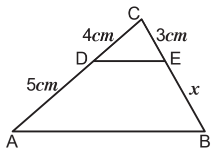


81. (P. 112) Calcule x sabiendo que $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$.

a)

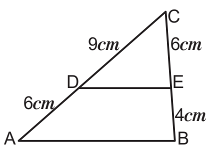


b)

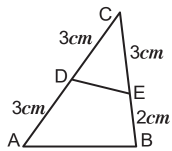


82. (P. 114) Determine en cada inciso si $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$.

a)

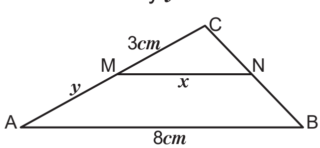


b)

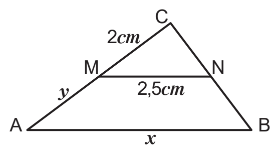


83. (P. 116) En cada inciso M y N son los puntos medios respectivos de $\overline{AC} \parallel \overline{BC}$. Calcule x y y.

a)

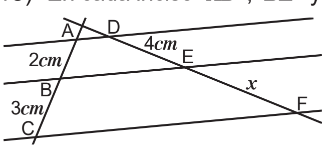


b)

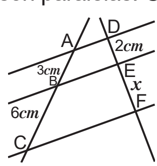


84. (P. 118) En cada inciso $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BE}$ y $\overleftrightarrow{CF}$ son paralelas. Calcule x.

a)



b)



85. (P. 120) a) Un niño de 1,2m de estatura camina en línea recta delante de su papá, y proyecta una sombra de 2m. Si la sombra proyectada por el papá mide 3m, ¿cuál es su altura?

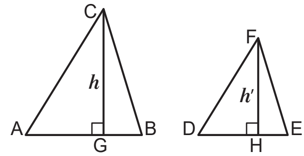
b) Calcule la altura de un árbol que proyecta una sombra de 10m en el momento en que otro árbol que está en línea recta con el anterior y mide 3m proyecta una sombra de 5m.

Ejercicios Avanzados

EA12. En la figura de la derecha, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

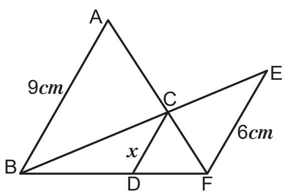
Demuestre que si $k = \frac{AB}{DE}$ es la razón de proporcionalidad entre los lados de los triángulos, entonces la razón entre el área del ΔABC y la del ΔDEF es k^2

Sugerencia: Pruebe que $\frac{h}{h'} = k$.



EA13. Calcule x, sabiendo que:

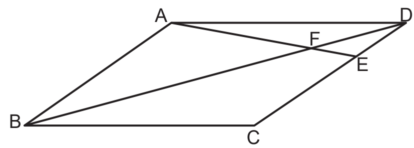
a) $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$



b) $ABCD$ es un paralelogramo

$AB = 15cm, ED = 5cm, BD = 21cm$

$x = FD$



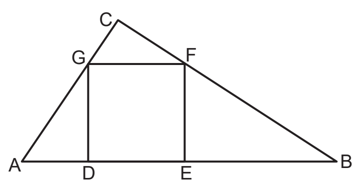
EA14. En la figura el cuadrilátero $DEFG$ es un cuadrado y el $\angle C$ es recto. Demuestre que:

a) $\Delta ADG \sim \Delta GCF$.

b) $\Delta ADG \sim \Delta FEB$.

c) $AD \cdot EB = DG \cdot FE$.

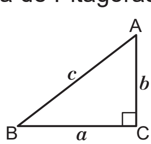
d) $DE = \sqrt{AD \cdot EB}$.



Unidad 6: Teorema de Pitágoras

Sección 1: Teorema de Pitágoras

Teorema de Pitágoras: En todo triángulo rectángulo se cumple que:



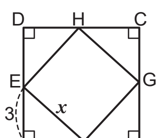
$$a^2 + b^2 = c^2$$

a y b: catetos
c: hipotenusa

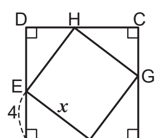
Ejercicios

86. (P. 124) En las siguientes figuras, calcule el valor de x.

a)

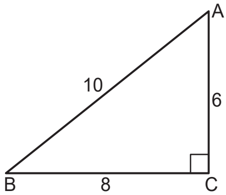


b)

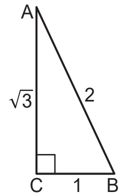


87. (P. 125) Verifique el Teorema de Pitágoras para los siguientes rectángulos:

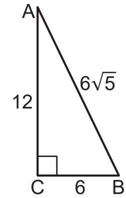
a)



b)

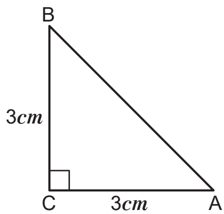


c)

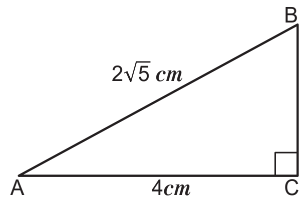


88. (P. 126) Calcule la longitud del tercer lado en cada uno de los siguientes triángulos rectángulos:

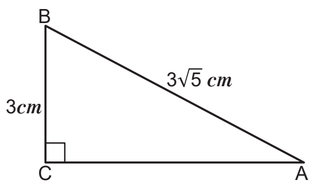
a)



b)

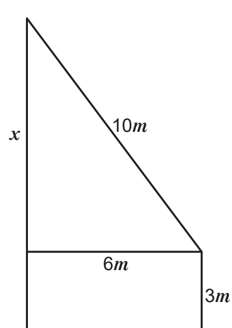


c)



89. (P. 127) Una escalera de 4m de longitud está apoyada sobre la pared. El pie de la escalera dista 2m de la pared. ¿A qué altura se apoya la parte superior de la escalera en la pared?

90. (P. 127) En cierta ciudad está un monumento en honor al célebre poeta nicaragüense Rubén Darío. El monumento tiene forma triangular y está sobre un pedestal rectangular de $3m$ de altura y $6m$ de largo. Si el lado más largo del monumento triangular tiene $10m$, ¿a qué distancia del piso está la punta del monumento?

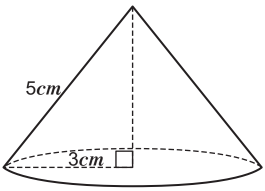


Sección 2: Aplicación del Teorema de Pitágoras en geometría

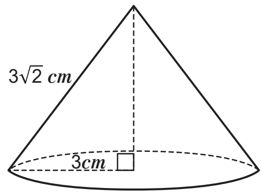
Ejercicios

91. (P. 129) Calcule la altura y el volumen de los conos mostrados en las siguientes figuras:

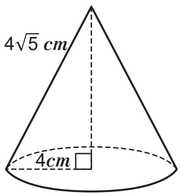
a)



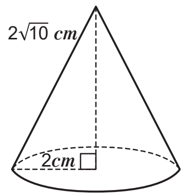
b)



c)

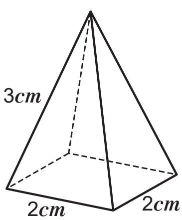


d)

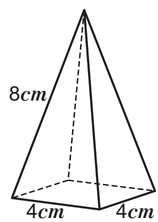


92. (P. 130) Calcule la altura y el volumen de cada una de las siguientes pirámides de bases cuadradas:

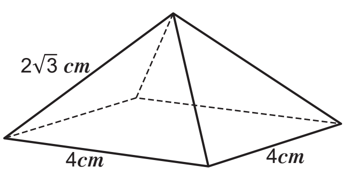
a)

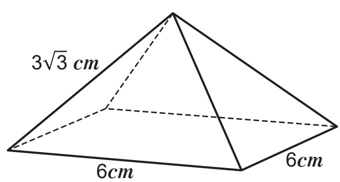


b)



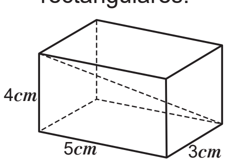
c)



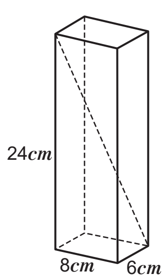


93. (P. 131) Calcule la longitud de la diagonal de cada uno de los siguientes prismas rectangulares:

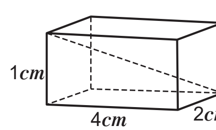
a)



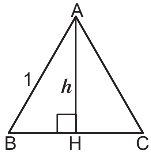
b)

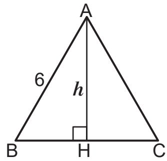


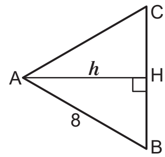
c)



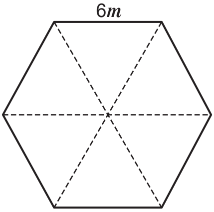
94. (P. 132) Calcule el área de cada triángulo equilátero:

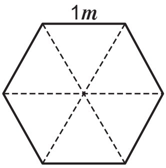
a) 

b) 

c) 

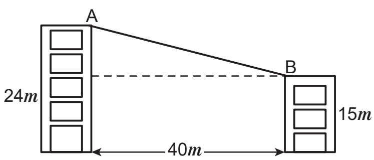
95. (P. 133) Encuentre el área del hexágono regular de la figura:

a) 

b) 

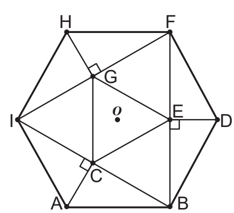
Ejercicios Avanzados

EA15. Un ciclista acrobático atravesará de un edificio a otro con una bicicleta especial, recorriendo la distancia sobre un cable de acero, como demuestra el siguiente esquema:

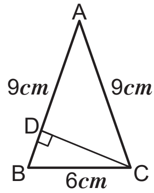


¿Cuál es la longitud del cable de acero?

EA16. Encuentre el área del triángulo EGC sabiendo que la medida de un lado del hexágono regular es de 4cm, $AC = \frac{AB}{2}$ y $BC = \frac{BI}{2}$.



EA17. Dado el triángulo isósceles ABC que tiene $AB = AC = 9cm$ y $BC = 6cm$. Encuentre la longitud de $\overline{CD}$.



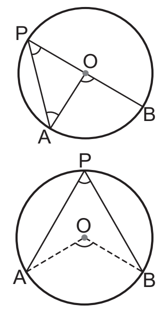
Unidad 7: Circunferencia

Sección 1: Ángulos inscritos

✓ Medida de un ángulo inscrito

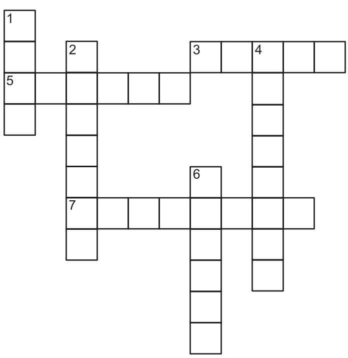
Al ∠APB se le llama ángulo inscrito correspondiente al $\overset{\frown}{AB}$ y su medida está dada por

$$\measuredangle APB = \frac{1}{2}\measuredangle AOB$$



Ejercicios

96. (P. 136) Complete el siguiente crucigrama de acuerdo con las definiciones de los elementos de una circunferencia que aparecen a la derecha.

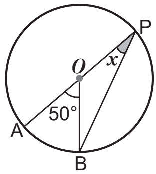


Horizontal
- 3. Segmento que une el centro con un punto de la circunferencia.
- 5. Segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.
- 7. Recta que corta a la circunferencia en un único punto.

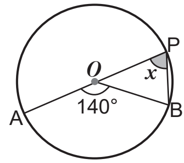
Vertical
- 1. Porción de la circunferencia comprendida entre dos puntos.
- 2. Recta que corta a la circunferencia en dos puntos distintos.
- 4. Cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.
- 6. Punto equidistante de todos los puntos de la circunferencia.

97. (P. 137) Calcule el valor de x de acuerdo a cada figura.

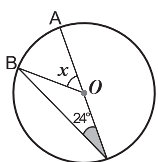
a)



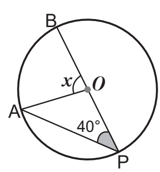
b)



c)

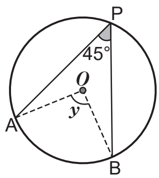


d)

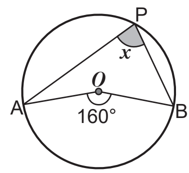


98. (P. 137) Calcule los valores de x o y de acuerdo a cada figura.

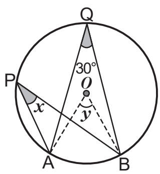
a)



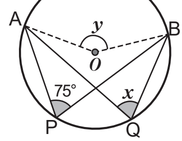
b)



c)



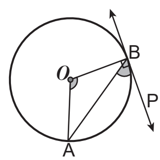
d)



Sección 2: Aplicación de ángulos inscritos

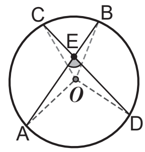
✓ Medida de un ángulo semiinscrito

$$\measuredangle ABP = \frac{1}{2} \measuredangle AOB$$



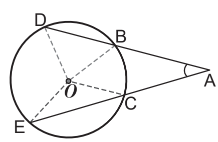
✓ Medida de un ángulo interior

$$\measuredangle AED = \frac{1}{2} (\measuredangle AOD + \measuredangle BOC)$$



✓ Medida de un ángulo exterior

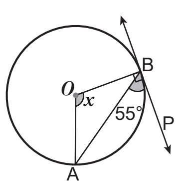
$$\measuredangle DAE = \frac{1}{2} (\measuredangle DOE - \measuredangle BOC)$$



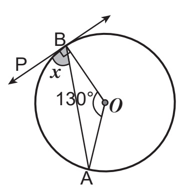
Ejercicios

99. (P. 142) Calcule el valor de x de acuerdo a cada figura.

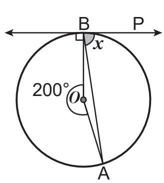
a)



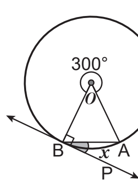
b)



c)

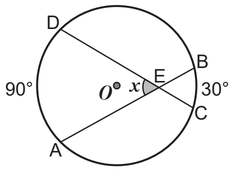


d)

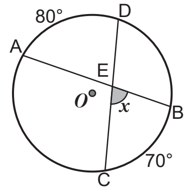


100. (P. 144) Calcule el valor de x de acuerdo a cada figura.

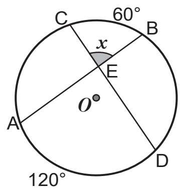
a) $\measuredangle AOD = 90°$, $\measuredangle BOC = 90°$



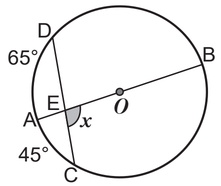
b) $\measuredangle AOD = 80°$, $\measuredangle BOC = 70°$



c) $\measuredangle AOD = 120°$, $\measuredangle BOC = 60°$

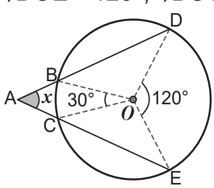


d) $\measuredangle AOD = 65°$, $\measuredangle AOC = 45°$

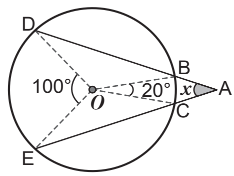


101. (P. 146) Calcule el valor de x de acuerdo a cada figura.

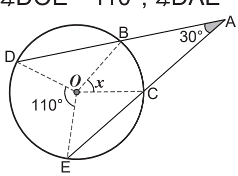
a) $\measuredangle DOE = 120°$, $\measuredangle BOC = 30°$



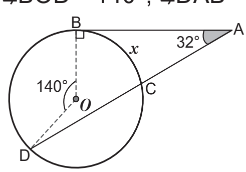
b) $\measuredangle DOE = 100°$, $\measuredangle BOC = 20°$



c) $\measuredangle DOE = 110°$, $\measuredangle DAE = 30°$



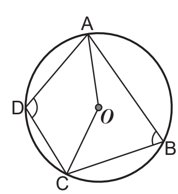
d) $\measuredangle BOD = 140°$, $\measuredangle DAB = 32°$



Ejercicios Avanzados

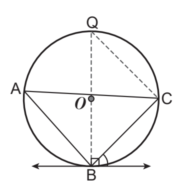
EA18. Un **cuadrilátero** es **cíclico** si sus vértices son puntos de una misma circunferencia.

Demuestre que la suma de los ángulos opuestos de un cuadrilátero cíclico es 180°.



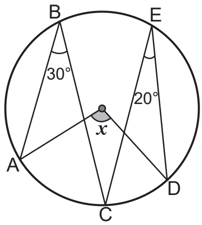
EA19. A partir de la circunferencia de la derecha con centro en O, demuestre que si

$\overleftrightarrow{BP} \perp \overline{OB}$ entonces $\measuredangle A = \measuredangle PBC$.

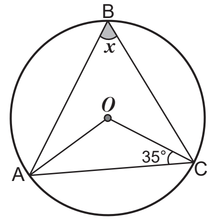


EA20. Calcule el valor de x de acuerdo con cada figura.

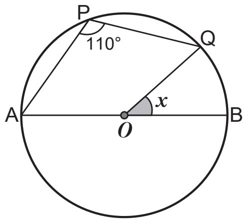
a)



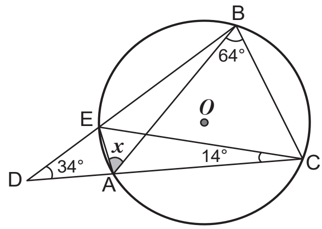
b)



c)



d)



Unidad 8: Estadística

Sección 1: Presentación de tablas y gráficas

- ✓ Estadística: Es la ciencia que se encarga de recopilar, organizar, procesar, analizar e interpretar datos numéricos para deducir características de una población.
- ✓ Población: Grupo de personas u objetos que se quiere para extraer conclusiones.
- ✓ Muestra: Parte representativa que se toma de una población.
- ✓ Individuo: Cada uno de los elementos de una población.
- ✓ Variable estadística: Característica observable de interés en un estudio.
  - a) Variable cuantitativa: Toma valores numéricos.
  - b) Variable cualitativa: Toma valores no numéricos.
- ✓ Categoría: característica definida a propósito para agrupar la información.
- ✓ Frecuencia absoluta: número de veces que aparece un valor para determinada categoría.
- ✓ Frecuencia relativa: Decimal obtenido al dividir cada frecuencia acumulada entre el total de individuos.
- ✓ Frecuencia porcentual: Frecuencia relativa por 100.
- ✓ Frecuencia acumulada: Suma de frecuencias absolutas de categorías precedentes y la actual.
- ✓ Gráficos estadísticos:
  - Gráfica de barras: Se construye con columnas determinadas por las categorías y sus frecuencias absolutas.
  - Gráfica de fajas: Muestra la relación entre la frecuencia porcentual de cada categoría y el total de individuos.
  - Gráfica de sectores circulares: pueden representar frecuencias absolutas o relativas y se usan para variables cualitativas.
  - Ojivas: Representa los valores de la frecuencia acumulada.

Ejercicios

102. (P. 150) Para determinar cuál es la clase favorita de los 50 estudiantes de 9no grado de un Centro Educativo de Managua, se entrevistó a 12 estudiantes. En esta situación, ¿cuál es la población, la muestra y cuáles los individuos?

103. (P. 150) Indique en las siguientes situaciones propuestas la población, muestra e individuo:

a) Una prueba de selección aplicada a 80 personas de las 120 que asistieron a una fábrica para efectuar solicitud de empleo.

b) Se seleccionan 140 estudiantes con edades entre 5 y 11 años en un Centro Educativo que posee una población estudiantil de 543 alumnos, para un estudio epidemiológico en niños escolarizados.

c) Encuesta aplicada a 150 personas de las 230 que asistieron a una fiesta infantil, para determinar el grado de comodidad en la actividad.

104. (P. 150) Indique en cada situación el tipo de variable:

a) El estado civil de una persona en un barrio capitalino.
b) Los tipos de medallas conseguidas en un campeonato.
c) Peso en gramos de una bolsa de café.
d) El número de hijos en las familias del barrio Pablo Úbeda de Managua.

105. (P. 151) Complete la siguiente tabla en la que se registra información acerca del pasatiempo favorito de 30 estudiantes. Construya una gráfica de barras.

Pasatiempos	Conteo	N° de estudiantes
Escuchar música	~~////~~	5
Ver TV	~~////~~ ~~////~~ //	
Practicar un deporte	////	4
Bailar	~~////~~ /	
Dormir	///	
Total		30

106. (P. 151) Complete la siguiente tabla en la que se registra información acerca del color favorito de 20 personas. Construya una gráfica de barras.

Color	Conteo	f_i
Negro	////	4
Azul	~~////~~	
Amarillo	~~////~~	
Rojo	~~////~~ /	6
Total		20

Complete la tabla y construya una gráfica de barras.

107. (P. 151) La siguiente tabla muestra las temperaturas máximas registradas en el mes de octubre en Jinotega. Complete la tabla y construya una gráfica de barras.

Temperaturas	Conteo	f_i
15°C	/	
16°C	////	4
17°C	~~////~~	
18°C	~~////~~ /	6
19°C	~~////~~ //	
20°C	~~////~~ ///	
Total		31

108. (P. 153) Complete la siguiente tabla en la que se registra información acerca de la estatura de 200 estudiantes. Construya una gráfica de barras.

Estatura (m)	f_i	$\frac{f_i}{200}$	$\left(\frac{f_i}{200}\right)100$
1,41 — 1,50	20		
1,51 — 1,60	60		
1,61 — 1,70	90		
1,71 — 1,80	30		
Total	200		

109. (P. 153) La siguiente tabla muestra la cantidad de autos vendidos en una tienda de autos durante los primeros 40 días del año.
Complete la tabla

Autos vendidos	f_i	f_r	$f_r\%$
0	10		
1	6		
2	8		
3	14		
4	2		
Total	40		

110. (P. 153) La siguiente tabla muestra la duración (en minutos) de las llamadas que recibe una compañía telefónica en su centro de llamadas.
Complete la tabla.

Duración	f_i	f_r	$f_r\%$
0,1	2		
0,4	2		
1,6	3		
2,6	3		
3,4	2		
4,5	4		
5,9	3		
8,1	1		
Total	20		

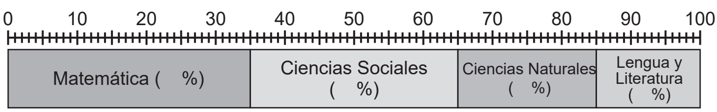
111. (P. 154) La siguiente tabla muestra la cantidad de sorgo exportado por Nicaragua, hacia algunos países. Construya una gráfica de faja.

País	f_i (qq)	f_r	$f_r\%$
El Salvador	260	0,1	10
Costa Rica	1 040	0,4	40
Honduras	780	0,3	30
Otros	520	0,2	20
Total	2 600	1	100

112. (P. 154) Complete la siguiente tabla en la que se registra información acerca del color favorito de 30 personas. Construya una gráfica de barras.

Color	f_i	f_r	$f_r\%$
Blanco	9		
Rojo	12		
Amarillo	6		
Verde	3		
Total	30		

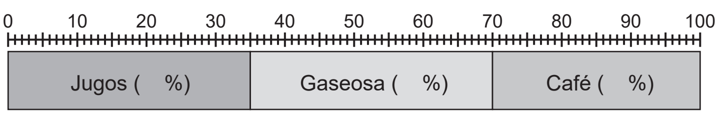
113. (P. 155) La siguiente gráfica de faja muestra los porcentajes de las preferencias de 40 estudiantes por las asignaturas de 9no grado.



a) Encuentre la frecuencia relativa correspondiente a la preferencia de cada asignatura preferida.

b) Calcule el número de estudiantes correspondientes a cada categoría.

114. (P. 155) La siguiente gráfica de faja muestra los porcentajes de las preferencias de 80 personas por tres bebidas.



a) Encuentre la frecuencia relativa correspondiente a cada bebida.

b) Calcule el número de personas correspondientes a cada categoría.

115. (P. 155) A un grupo de 100 personas se les aplica una terapia para mejora conductual: Farmacológica, Conductual, Psicoanalítica. A continuación se muestra el número de pacientes por categoría.

Terapia	f_i	f_r	$f_r\%$
Farmacológica	50		
Conductual	30		
Psicoanalítica	20		
Total	100		

a) Complete la tabla.

b) Construya una gráfica de faja.

116. (P. 156) La siguiente tabla muestra los pasatiempos favoritos de un grupo de jóvenes. Complete la tabla y construya un gráfico de sectores circulares.

Pasatiempo Favorito	f_i	f_r%	Ángulo
Escuchar música	90	45	
Ver Tv	30	15	
Redes sociales	60	30	
Leer	20	10	
Total	200	100	

117. (P. 156) La siguiente tabla muestra los colores de cabello de los estudiantes de un Centro Educativo de Managua.

Color del cabello	f_i	f_r%	Ángulo
Negro	285		
Castaño	120		
Rubio	75		
Pelirrojo	20		
Total	500		

a) Complete la tabla con los valores correspondientes.
b) Construya la gráfica de sectores circulares.

118. (P. 157) La tabla contiene el registro de libras de sal vendidas durante la semana. Realice lo siguiente:
a) Complete el dato de frecuencia acumulada (Fi).
b) Grafique una ojiva con esos datos.
c) ¿Cuál fue el día que se vendió más sal?

Días	f_i	F_i
Lunes	8	8
Martes	4	12
Miércoles	6	
Jueves	2	20
Viernes	3	
Total	23	

119. (P. 157) La siguiente gráfica de faja muestra los porcentajes de las preferencias de 80 personas por tres bebidas.
a) Encuentre la frecuencia relativa correspondiente a cada bebida.
b) Calcule el número de personas correspondientes a cada categoría.

Hora de llegada	f_i	F_i
10 minutos antes	23	
5 minutos antes	15	
A la hora exacta	22	
5 minutos tarde	17	
10 minutos tarde	23	
Total	100	

Ejercicios Avanzados

EA21. La siguiente tabla muestra el registro de las alturas (en cm) de 40 estudiantes de noveno grado del Colegio Miguel de Cervantes Saavedra. Complete la tabla.

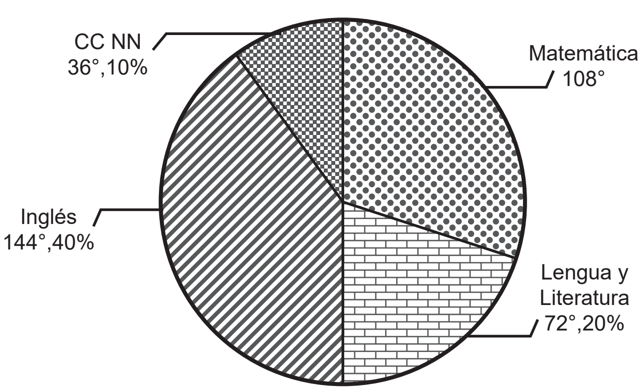
Altura (cm)	f_i	f_r	f_r%	F_i
146 — 150	3			
151 — 155				9
156 — 160				
161 — 165	8			
166 — 170			15	
171 — 175	2			
Total	40			

EA22. A continuación, se muestra el registro de pesos (en kg) de 40 estudiantes seleccionados de secundaria en un Centro Educativo de Chinandega. Determine el valor correspondiente de x, y, z y w.

Peso (kg)	f_i	f_r
30-39	2	0,05
40-49	w	z
50-59	18	0,45
60-69	x	0,15
70-79	2	y
Total	40	1
Total	40	

EA23. La siguiente gráfica de sectores circulares muestra la preferencia de 60 estudiantes de octavo grado a cuatro de sus asignaturas. Determine el número de estudiantes que prefieren cada asignatura.

Asignaturas Favoritas



Solucionarios

Unidad 1: Producto notables y Factorización

Sección 1: Multiplicación de polinomios

1.

a) $x(x-2)=x\cdot x-x(2)=x^2-2x$
b) $x(2x+5)=2x^2+5x$
c) $-x(x+7)=-x^2-7x$
d) $3x(x+1)=3x^2+3x$
e) $(4x+8)x=4x^2+8x$
f) $(2x+1)(9x)=18x^2+9x$
g) $(7x+1)(-x)=-7x^2-x$
h) $(8x+6)(-2x)=-16x^2-12x$
i) $(-2x)(5x-3)=-10x^2+6x$

2.

a) $(x+2)(y+3)=x(y+3)+2(y+3)$
$=xy+x(3)+2(y)+(2)(3)$
$=xy+3x+2y+6$
b) $(x-1)(y+5)=xy+5x-y-5$
c) $(x+3y)(7x+4y)=7x^2+25xy+12y^2$
d) $(x+7)(3y+7)=3xy+7x+21y+49$
e) $(x+7)(2y-3)=2xy-3x+14y-21$
f) $(7x+y)(x+y)=7x^2+8xy+y^2$
g) $(3x+7)(y+1)=3xy+3x+7y+7$
h) $(8x+2)(9y-7)=72xy-56x+18y-14$
i) $(5x+4y)(7x+3y)=35x^2+43xy+12y^2$

3.

a) $(x+2)(x+y+3)$
$=x(x+y+3)+2(x+y+3)$
$=x\cdot x+xy+x(3)+(2)x+(2)y+(2)(3)$
$=x^2+xy+5x+2y+6$
b $(x+2)(x+y-7)$
$=x^2+xy-5x+2y-14$
c) $(2x+5)(3x+y+4)$
$=6x^2+2xy+23x+5y+20$
d) $(7x+8)(3x-y+5)$
$=21x^2-7xy+59x-8y+40$
e) $(3x-1)(2x-2y+9)$
$=6x^2-6xy+25x+2y-9$
f) $(6x-8)(7x-5y-4)$
$=42x^2-30xy-80x+40y+32$

4.

a) $(x+2)(x+y+7)$
$$\begin{array}{lr} & x+y+7 \\ \times & x+2 \\ \hline & x^2+xy+7x \quad\quad\quad \\ + & 2x+2y+14 \\ \hline & x^2+xy+9x+2y+14 \end{array}$$

b) $(x+3)(x-2y+5)$
$$\begin{array}{lr} & x-2y+5 \\ \times & x+3 \\ \hline & x^2-2xy+5x \quad\quad\quad \\ + & 3x-6y+15 \\ \hline & x^2-2xy+8x-6y+15 \end{array}$$

c) $(x+7)(x+y-7)$
$$\begin{array}{lr} & x+y-7 \\ \times & x+7 \\ \hline & x^2+xy-7x \quad\quad\quad \\ + & 7x+7y-49 \\ \hline & x^2+xy \quad + \quad 7y-49 \end{array}$$

d) $(x-9)(3x+y-3)$
$$\begin{array}{lr} & 3x+y-3 \\ \times & x-9 \\ \hline & 3x^2+xy-3x \quad\quad\quad \\ + & -27x-9y+27 \\ \hline & 3x^2+xy-30x-9y+27 \end{array}$$

e) $(x-8)(3x+2y+5)$
$$\begin{array}{lr} & 3x+2y+5 \\ \times & x-8 \\ \hline & 3x^2+2xy+5x \quad\quad\quad \\ + & -24x-16y-40 \\ \hline & 3x^2+2xy-19x-16y-40 \end{array}$$

f) $(x-5)(3x-5y-6)$
$$\begin{array}{lr} & 3x-5y-6 \\ \times & x-5 \\ \hline & 3x^2-5xy-6x \quad\quad\quad \\ + & -15x+25y+30 \\ \hline & 3x^2-5xy-21x+25y+30 \end{array}$$

Sección2: Productos notables

5.

a) $(x+1)(x+2)=x^2+(1+2)x+(1)(2)$
$=x^2+3x+2$
b) $(x+7)(x+8)=x^2+15x+56$
c) $(y+7)(y+1)=y^2+8y+7$
d) $(x+1)(x+5)=x^2+6x+5$

e) $(x+8)(x+4)=x^2+12x+32$
f) $(y+9)(y+5)=y^2+14y+45$
g) $(x+3)(x+7)=x^2+10x+21$
h) $(x+9)(x+10)=x^2+19x+90$
i) $(y+1)(y+15)=y^2+16y+15$

6.

a) $(x+3)(x-4)=(x+3)[x+(-4)]$
$=x^2+[3+(-4)]x+(3)(-4)$
$=x^2-x-12$
b) $(x-3)(x-8)=x^2-11x+24$
c) $(x-7)(x+8)=x^2+x-56$
d) $(y+8)(y-3)=y^2+5y-24$
e) $(x-9)(x-7)=x^2-16x+63$
f) $(y-6)(y-4)=y^2-10y+24$
g) $(y+3)(y-7)=y^2-4y-21$
h) $(x-5)(x+8)=x^2+3x-40$
i) $(y-9)(y-1)=y^2-10y+9$

7.

a) $(2x+1)(x+3)$
$=(2)(1)x^2+[(2)(3)+(1)(1)]x+(1)(3)$
$=2x^2+7x+3$
b) $(2x+1)(3x+2)=6x^2+7x+2$
c) $(2x-1)(x+7)=2x^2+13x-7$
d) $(3x+7)(x-5)=3x^2-8x-35$
e) $(5x-1)(x-7)=5x^2-36x+7$
f) $(8x-6)(4x-6)=32x^2-72x+36$
g) $(2x-1)(x-9)=2x^2-19x+9$
h) $(7x-5)(x-3)=7x^2-26x+15$
i) $(4y+3)(3y-4)=12y^2-7y-12$

8.

a) $(x+3)^2=x^2+(2)(3)x+(3)(3)$
$=x^2+6x+9$
b) $(x+7)^2=x^2+14x+49$
c) $\left(x+\frac{1}{7}\right)^2=x^2+\frac{2}{7}x+\frac{1}{49}$
d) $(x+8)^2=x^2+16x+64$
e) $(x+3m)^2=x^2+6mx+9m^2$
f) $\left(4x+\frac{1}{2}\right)^2=16x^2+4x+\frac{1}{4}$
g) $\left(x+\frac{1}{6}\right)^2=x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{36}$
h) $\left(x+\frac{7}{3}\right)^2=x^2+\frac{14}{3}x+\frac{49}{9}$
i) $\left(2x+\frac{m}{2}\right)^2=4x^2+2mx+\frac{m^2}{4}$

9.

a) $(x-3)^2=[x+(-3)]^2$
$=x^2-(2)(3)x+(3)(3)$
$=x^2-6x+9$
b) $(x-7)^2=x^2-14x+49$
c) $(x-8)^2=x^2-16x+64$
d) $(x-9)^2=x^2-18x+81$
e) $\left(3x-\frac{1}{3}\right)^2=9x^2-2x+\frac{1}{9}$
f) $\left(5x-\frac{1}{5}\right)^2=25x^2-2x+\frac{1}{25}$
g) $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=x^2-3x+\frac{9}{4}$
h) $\left(3x-\frac{7}{3}\right)^2=9x^2-14x+\frac{49}{9}$
i) $\left(5x-\frac{23}{5}\right)^2=25x^2-46x+\frac{529}{25}$

10.

a) $(x+7)(x-7)=x^2-49$
b) $(x+8)(x-8)=x^2-64$
c) $(5x+3)(5x-3)=25x^2-9$
d) $(x+11)(x-11)=x^2-121$
e) $(xy+1)(xy-1)=x^2y^2-1$
f) $\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)=x^2-\frac{1}{25}$
g) $(xy+3)(xy-3)=x^2y^2-9$
h) $\left(xy+\frac{2}{5}\right)\left(xy-\frac{2}{5}\right)=x^2y^2-\frac{4}{25}$
i) $\left(\frac{x}{y}+8\right)\left(\frac{x}{y}-8\right)=\frac{x^2}{y^2}-64$

11.

a) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$
$=(\sqrt{2})^2+(2)(\sqrt{2})(\sqrt{3})+(\sqrt{3})^2$
$=2+2\sqrt{6}+3=5+2\sqrt{6}$
b) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=5-2\sqrt{6}$
c) $(\sqrt{7}+1)^2=8+2\sqrt{7}$
d) $(\sqrt{7}-1)^2=8-2\sqrt{7}$
e) $(3\sqrt{7}+2\sqrt{2})^2=71+12\sqrt{14}$
f) $(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})=2$
g) $(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}-\sqrt{5})=1$
h) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})=2$
i) $(2\sqrt{3}+9)(2\sqrt{3}-9)=-69$

12.

a) $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\left(\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)$
$=2\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}(\sqrt{3}-\sqrt{2})=\frac{(2)(\sqrt{3})-(2)(\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}$
$=\frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3-2}=2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

b) $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{3}$

c) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}$

d) $\frac{7}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=7\sqrt{3}+7\sqrt{2}$

e) $\frac{1}{\sqrt{6}-2}=1+\frac{\sqrt{6}}{2}$

f) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=3+2\sqrt{2}$

g) $\frac{8}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}=-4\sqrt{5}-4\sqrt{7}$

h) $\frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}-2}=4+\frac{3\sqrt{6}}{2}$

i) $\frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}-2}=-\sqrt{5}-1$

Sección 3: Factorización

13.

a) $3x+6=3(x+2)$

b) $5x+15=5(x+3)$

c) $9x+15=3(3x+5)$

d) $9x-18=9(x-2)$

e) $15x-5=5(3x-1)$

f) $8x-64=8(x-8)$

g) $14x-28=14(x-2)$

h) $6x-36=6(x-6)$

i) $7x-21=7(x-3)$

j) $4x-18=2(2x-9)$

k) $7x-56=7(x-8)$

l) $18x-9=9(2x-1)$

14.

a) $x^2+3x=x(x+3)$

b) $x^2+7x=x(x+7)$

c) $x^2-9x=x(x-9)$

d) $m^2-mx=m(m-x)$

e) $m^2-7m=m(m-7)$

f) $3a^2+27a=3a(a+9)$

g) $x^2+ax=x(x+a)$

h) $a^2+2a=a(a+2)$

i) $x^2-5x=x(x-5)$

j) $x^2+x=x(x+1)$

k) $2m^2-24m=2m(m-12)$

l) $27x^2+9x=9x(3x+1)$

15.

a) $a(x+1)+b(x+1)=(x+1)(a+b)$

b) $x(y-5)+b(y-5)=(y-5)(x+b)$

c) $n(m-8)+7(m-8)=(m-8)(n+7)$

d) $x(m+n+1)+y(m+n+1)$
$=(x+y)(m+n+1)$

e) $x\left(m+\frac{1}{5}\right)+7\left(m+\frac{1}{5}\right)=\left(m+\frac{1}{5}\right)(x+7)$

f) $\frac{m}{5}(x+1)+\frac{n}{3}(x+1)=(x+1)\left(\frac{m}{5}+\frac{n}{3}\right)$

16.

a) $x^2-4=(x+2)(x-2)$

b) $x^2-64=(x+8)(x-8)$

c) $x^2-49=(x+7)(x-7)$

d) $x^2-121=(x+11)(x-11)$

e) $4x^2-121=(2x+11)(2x-11)$

f) $16x^2-49=(4x+7)(4x-7)$

g) $m^2-\frac{1}{81}=\left(m+\frac{1}{9}\right)\left(m-\frac{1}{9}\right)$

h) $9x^2-\frac{1}{49}=\left(3x+\frac{1}{7}\right)\left(3x-\frac{1}{7}\right)$

17.

a) $x^2+2x+1=x^2+(2)(1)x+1^2=(x+1)^2$

b) $x^2+8x+16=(x+4)^2$

c) $x^2-18x+81=(x-9)^2$

d) $x^2-6x+9=(x-3)^2$

e) $x^2-2x+1=(x-1)^2$

f) $x^2-10x+25=(x-5)^2$

g) $x^2+22x+121=(x+11)^2$

h) $x^2-26x+169=(x-13)^2$

i) $x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

18.

a) $x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$

b) $x^2+4x+3=(x+3)(x+1)$

c) $x^2+11x+30=(x+6)(x+5)$

d) $y^2+17y+72=(y+9)(y+8)$

e) $m^2+6m+8=(m+4)(m+2)$

f) $x^2+15x+56=(x+8)(x+7)$

g) $x^2+8x+7=(x+7)(x+1)$

h) $x^2+14x+13=(x+13)(x+1)$

i) $m^2+13m+30=(m+10)(m+3)$

j) $m^2+9m+18=(m+6)(m+3)$

k) $x^2+12x+20=(x+10)(x+2)$

l) $x^2+13x+40=(x+8)(x+5)$

19.

a) $x^2-7x+12=[x+(-3)][x+(-4)]$
$=(x-3)(x-4)$

b) $x^2+4x-45=(x+9)(x-5)$

c) $x^2+3x-28=(x+7)(x-4)$

d) $x^2-x-90=(x+9)(x-10)$

e) $m^2-6m-27=(m+3)(m-9)$

f) $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

g) $x^2+7x-18=(x+9)(x-2)$

h) $x^2-10x+21=(x-3)(x-7)$

i) $y^2+2y-35=(y+7)(y-5)$

j) $x^2+4x-32=(x+8)(x-4)$

k) $m^2-3m-10=(m+2)(m-5)$

l) $m^2+12m-45=(m+15)(m-3)$

20.

a) $2x^2+7x+3=(2x+1)(x+3)$

b) $7x^2+10x+3=(7x+3)(x+1)$

c) $2x^2+7x+3=(2x+1)(x+3)$

d) $6x^2+5x+1=(3x+1)(2x+1)$

e) $6x^2+7x+2=(2x+1)(3x+2)$

f) $3x^2+13x+14=(x+2)(3x+7)$

g) $2x^2+5x+3=(x+1)(2x+3)$

h) $10x^2+12x+2=2(5x^2+6x+1)$
$=2(5x+1)(x+1)$

i) $6m^2+8m+2=2(3m+1)(m+1)$

j) $10m^2+19m+7=(2m+1)(5m+7)$

k) $6x^2+13x+2=(6x+1)(x+2)$

l) $4x^2+22x+10=2(2x+1)(x+5)$

21.

a) $2x^2-5x+3=(2x-3)(x-1)$

b) $2x^2-x-1=(2x+1)(x-1)$

c) $3x^2-8x-3=(3x+1)(x-3)$

d) $7x^2-9x+2=(7x-2)(x-1)$

e) $25x^2-5x-2=(5x+1)(5x-2)$

f) $3x^2+x-2=(3x-2)(x+1)$

g) $6x^2-17x+7=(2x-1)(3x-7)$

h) $14x^2-19x-3=(7x+1)(2x-3)$

i) $4m^2-2m-12=2(2m+3)(m-2)$

j) $7x^2-13x-2=(7x+1)(x-2)$

k) $3m^2+8m-3=(3m-1)(m+3)$

l) $15x^2-11x+2=(3x-1)(5x-2)$

Unidad 2: Ecuaciones de segundo grado

Sección 1: Introducción a las ecuaciones de segundo grado

22.

a) $2x+3=-5$
$2x=-5-3$
$2x=-8$
$\frac{2x}{2}=-\frac{8}{2}$
$x=-4$

b) $-3x-5=10$
$-3x=10+5$
$-3x=15$
$\frac{-\cancel{3}x}{-\cancel{3}}=\frac{15}{-3}$
$x=-5$

c) $\frac{x}{3}-5=2$
$\frac{x}{3}=2+5$
$\frac{x}{3}=7$
$\frac{x}{\cancel{3}}(\cancel{3})=(7)(3)$
$x=21$

d) $\frac{x}{4}+3=5$
$x=8$

e) $-10x-5=-15$
$x=1$

f) $\frac{4x}{3}+5=9$
$x=3$

23.

a),c),d),e),f),h),l),n),y o)

24.

a) Al sustituir $-2, -1$ y 2 en el lado izquierdo de la ecuación se obtiene:
Para $x=-2$
$x^2+2x+1=1\neq 0$
-2 no satisface a)
Para $x=-1$
$x^2+2x+1=0$
-1 satisface a)
Para $x=2$
$x^2+2x+1=9\neq 0$
2 no satisface a)
El único número que satisface la ecuación
$x^2+2x+1=0$ es -1

b) -1 y 2 satisfacen la ecuación
$x^2-x-2=0$

c) -2 y 2 satisfacen la ecuación
$x^2-4=0$

25.

a) Ninguno de los números

b) -3 y 3

c) -1 y 3

d) -1

26.

a) $3x^2-48=0$
$3x^2=48$
$x^2=16$
$x=\pm\sqrt{16}$
$x=\pm 4$

b) $x^2-3=0$
$x=\pm\sqrt{3}$

c) $5x^2-125=0$
$x=\pm 5$

d) $6x^2-36=0$
$x=\pm\sqrt{6}$

e) $4x^2=48$
$x=\pm 2\sqrt{3}$

f) $x^2-64=0$
$x=\pm 8$

g) $5x^2=25$
$x=\pm\sqrt{5}$

h) $2x^2-8=0$
$x=\pm 2$

i) $7x^2-63=0$
$x=\pm 3$

27.

a) $(x+2)^2=9$
$x+2=\pm 3$
$x+2=3,\quad x+2=-3$
$x=3-2\quad x=-3-2$
$x=1\quad x=-5$

b) $(x-2)^2-25=0$
$x=-3,\quad x=7$

c) $(x+7)^2=64$
$x=-15,\quad x=1$

d) $(x-7)^2-36=0$
$x=1,\quad x=13$

e) $(x-9)^2-3=0$
$(x-9)^2=3$
$(x-9)=\pm\sqrt{3}$
$x-9=\sqrt{3},\quad x-9=-\sqrt{3}$
$x=9+\sqrt{3},\quad x=9-\sqrt{3}$

f) $(x+12)^2-5=0$
$x=-12+\sqrt{5},\quad x=-12-\sqrt{5}$

g) $(x-8)^2-2=0$
$x=8+\sqrt{2},\quad x=8-\sqrt{2}$

h) $(x-10)^2=6$
$x=10+\sqrt{6},\quad x=10-\sqrt{6}$

i) $(x+1)^2-7=0$
$x=-1+\sqrt{7},\quad x=-1-\sqrt{7}$

Sección 2: Solución de ecuaciones de segundo grado

28.

a) $x^2+6x+10=(x^2+6x)+10$
$=\left[x^2+6x+\left(\frac{6}{2}\right)^2\right]-\left(\frac{6}{2}\right)^2+10$
$=(x^2+6x+9)-9+10$
$=(x+3)^2+1$

b) $x^2-6x+1=(x-3)^2-8$

c) $x^2+2x-6=(x+1)^2-7$

d) $x^2-6x-4=(x-3)^2-13$

e) $x^2+14x=(x+7)^2-49$

f) $x^2+6x=(x+3)^2-9$

29.

a) $2x^2+8x+5=2(x^2+4x)+5$
$=2\left[x^2+4x+\left(\frac{4}{2}\right)^2-\left(\frac{4}{2}\right)^2\right]+5$
$=2[x^2+4x+2^2-2^2]+5$
$=2[(x^2+4x+4)-4]+5$
$=2[(x+2)^2-4]+5$
$=2(x+2)^2-8+5$
$=2(x+2)^2-3$

b) $2x^2+4x-2=2(x+1)^2-4$

c) $3x^2-6x-2=3(x-1)^2-5$

d) $4x^2-16x+15=4(x-2)^2-1$

e) $2x^2+12x+1=2(x+3)^2-17$

f) $3x^2+12x+13=3(x+2)^2+1$

30.

a) $x^2+4x-5=0$
$x^2+4x=5$
$x^2+4x+\left(\frac{4}{2}\right)^2-\left(\frac{4}{2}\right)^2=5$
$x^2+4x+4-4=5$
$x^2+4x+4=5+4$
$(x+2)^2=9$
$x+2=\pm 3$
$x+2=3,\quad x+2=-3$
$x=3-2,\quad x=-3-2$
$x=1,\quad x=-5$

b) $x^2-x-6=0$
$x=-2,\quad x=3$

c) $x^2-2x-15=0$
$x=-3,\quad x=5$

d) $x^2-8x+15=0$
$x=3,\quad x=5$

e) $x^2-9x+8=0$
$x=1,\quad x=8$

f) $x^2-5x-14=0$
$x=-2,\quad x=7$

31.

a) $2x^2+4x-6=0$
$x^2+2x-3=0$
$x^2+2x=3$
$\left[x^2+2x+\left(\frac{2}{2}\right)^2\right]-\left(\frac{2}{2}\right)^2=3$
$x^2+2x+1=3+1$
$(x+1)^2=4$
$x+1=\pm 2$
$x+1=2,\quad x+1=-2$
$x=2-1,\quad x=-2-1$
$x=1,\quad x=-3$

b) $2x^2-4x-12=0$
$x=1+\sqrt{7},$
$x=1-\sqrt{7}$

c) $4x^2-8x-12=0$
$x=-1, \quad x=3$

d) $3x^2-18x-21=0$
$x=-1, \quad x=7$

e) $5x^2-10x-60=0$
$x=1+\sqrt{13},$
$x=1-\sqrt{13}$

f) $7x^2-7x-14=0$
$x=-1, \quad x=2$

32.

a) $x^2+5x+5=0$
$$x=\frac{-5\pm\sqrt{(5)^2-(4)(1)(5)}}{(2)(1)}$$
$$=\frac{(-5\pm\sqrt{25-20})}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$$
$$x=\frac{-5+\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{-5-\sqrt{5}}{2},$$

b) $x^2+6x-2=0$
$x=-3+\sqrt{11}, \quad x=-3-\sqrt{11}$

c) $x^2+3x-6=0$
$x=\frac{-3+\sqrt{33}}{2}, \quad x=\frac{-3-\sqrt{33}}{2}$

d) $x^2-5x+3=0$
$x=\frac{5+\sqrt{13}}{2}, \quad x=\frac{5-\sqrt{13}}{2}$

e) $x^2+4x-7=0$
$x=-\frac{7}{3}, \quad x=1$

f) $2x^2-5x+2=0$
$x=\frac{1}{2}, \quad x=2$

g) $x^2-2=0$
$x=\sqrt{2}, \quad x=-\sqrt{2}$

h) $6x^2+7x+2=0$
$x=-\frac{1}{2}, \quad x=-\frac{2}{3}$

i) $4x^2-2x-12=0$
$x=-\frac{3}{2}, \quad x=2$

33.

a) $(x+2)(x-3)=0$
$x+2=0, \quad x-3=0$
$x=-2, \quad x=3$

b) $x^2+3x+2=0$
$x=-2, \quad x=-1$

c) $x^2+2x-3=0$
$x=-3, \quad x=1$

d) $x^2+2x-15=0$
$x=-5, \quad x=3$

e) $(x-1)(2x+1)=0$
$x=-\frac{1}{2}, \quad x=1$

f) $x^2-x-20=0$
$x=-4, \quad x=5$

g) $x^2+7x-18=0$
$x=2, \quad x=-9$

h) $x^2+12x-45=0$
$x=3, \quad x=-15$

i) $x^2+10x-11=0$
$x=1, \quad x=-11$

34.

a) $x^2+2x=0$
$x(x+2)=0$
$x=0, \quad x+2=0$
$x=0, \quad x=-2$

b) $x^2+2x+1=0$
$(x+1)^2=0$
$x+1=0$
$x=-1$

c) $5x^2+30x=0$
$x=0, \quad x=-6$

d) $x^2-10x+25=0$
$x=5$

e) $x^2-16x+64=0$
$x=8$

f) $14x^2-7x=0$
$x=0, \quad x=\frac{1}{2}$

g) $x^2+18x+81=0$
$x=-9$

h) $x^2+12x+36=0$
$x=-6$

i) $x^2-20x+100=0$
$x=10$

Sección 3: Aplicaciones de las ecuaciones de segundo grado

35.

a) $2x^2+5x+3=0$
$a=2, \quad b=5, \quad c=3$
$D=5^2-(4)(2)(3)$
$=25-24$
$=1$

Como $D=1>0$, la ecuación tiene dos soluciones distintas en los números reales.

b) $x^2-6x+9=0$
$D=0$

Como $D=0$, la ecuación tiene una solución en los números reales.

c) $3x^2+2x+1=0$

Como $D=-8<0$, la ecuación no tiene solución en los números reales.

d) $3x^2-5x-2=0$

Como $D=49>0$, la ecuación tiene dos soluciones en los números reales.

e) $3x^2+2x+4=0$

Como $D=-44<0$, la ecuación no tiene solución en los números reales.

f) $x^2+2=0$

Como $D=-8<0$, la ecuación no tiene solución en los números reales.

g) $3x^2+x+1=0$

Como $D=-11<0$, la ecuación no tiene solución en los números reales.

h) $x^2+14x+49=0$

Como $D=0$, la ecuación tiene una solución en los números reales.

i) $4x^2+5x-3=0$

Como $D=73>0$, la ecuación tiene dos soluciones en los números reales.

36.

a) $x=2,\quad x=3$
$(x-2)(x-3)=0$
$x^2+(-2-3)x+(-2)(-3)=0$
$x^2-5x+6=0$

b) $x=2+\sqrt{3},\quad x=2-\sqrt{3}$
$x^2-4x+1=0$

c) $x=5,\quad x=6$
$x^2-11x+30=0$

d) $x=2+\sqrt{2},\quad x=2-\sqrt{2}$
$x^2-4x+2=0$

e) $x=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2},\quad x=\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$
$x^2-5x+3=0$

f) $x=-3,\quad x=-8$
$x^2+11x+24=0$

37.

a) Sea x el largo de la sala, que es un número positivo. El ancho: $x-4$.
$x(x-4)=32$
$x^2-4x=32$
$x^2-4x-32=0$
$(x-8)(x+4)=0$
$x-8=0, x+4=0$
$x=8,\quad x=-4$

Como $x>0$, $x=8$. Por lo tanto, el ancho de la sala es
$x-4=8-4=4$.
8m de largo y 4m de ancho

b) Sea x el ancho del terreno,que es un número positivo.El largo:$3x$
$(x)(3x)=60$
$3x^2-60=0$
$x^2-20=0$
$x=\pm2\sqrt{5}$
Como $x>0,\quad x=2\sqrt{5}$.
El largo: $(3)(2\sqrt{5})=6\sqrt{5}$
$6\sqrt{5}\,m$ de largo y $2\sqrt{5}\,m$ de ancho

c) Sea x el ancho de la ventana, que es un número positivo.
Largo: $x+1$
$(x)(x+1)=306$
$x^2+x-306=0$
$x=17,\quad x=-18$
Como $x>0$, $x=17$
El largo: $17+1=18$
18cm de largo y 17cm de ancho

38.

a) Sea x uno de los números,entonces su cuadrado es x^2; el otro número es $3x$ y como es un entero positivo, x debe ser positivo.
$(3x)^2-x^2=72$
$8x^2=72$
$x^2=9$
$x=\pm3$
Como $x>0$, el número menor es 3, y el otro es $(3)(3)=9$
3 y 9

b) Sea x el número menor y x debe ser positivo.
El otro número: $x+1$
$x(x+1)=110$
$x^2+x-110=0$
$x=-11$, $x=10$. Como $x>0$, $x=10$.
El otro número:$10+1=11$
11 y 10

c) Sea x la base del triángulo y x debe ser positivo.
La altura: $x+5$
Utilizando la fórmula

Área del rectángulo $=$ (base) $\times$ (altura) $\times$ $\frac{1}{2}$

$x(x+5)\left(\frac{1}{2}\right)=18$

$x=-9$, $x=4$. Como $x>0$, $x=4$.

La altura: $4+5=9$
4cm de base y 9cm de altura.

Unidad 3: Funciones de segundo grado

Sección 1: Introducción a las funciones de segundo grado

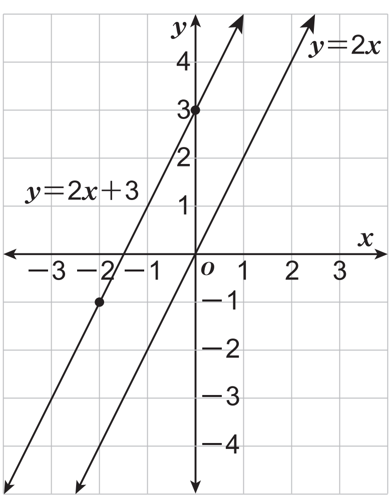
39.

a) El punto $(1, 5)$ está en el I cuadrante, porque la abscisa y la ordenada son positivas.

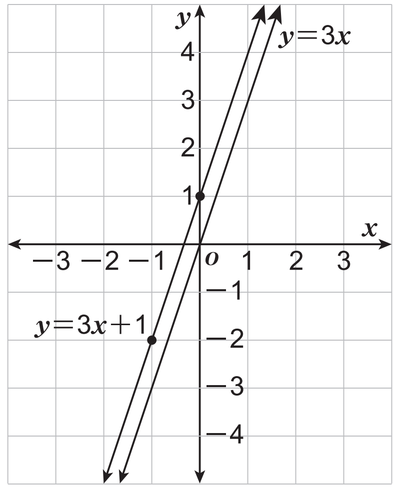
b) I C	c) III C	d) II C
e) IV C	f) I C	g) II C
h) IV C	i) III C	

40.

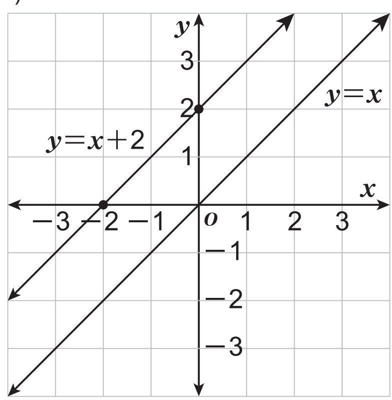
a)



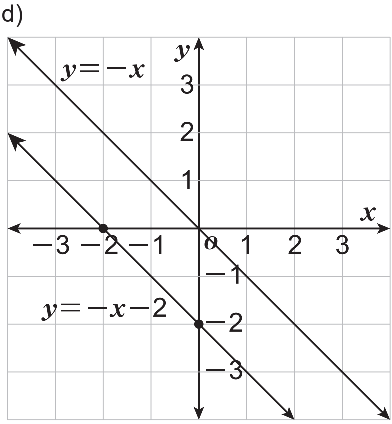
b)



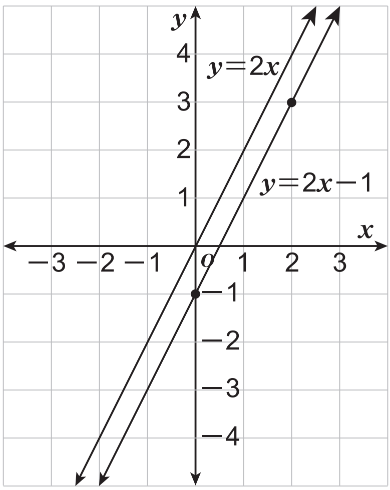
c)



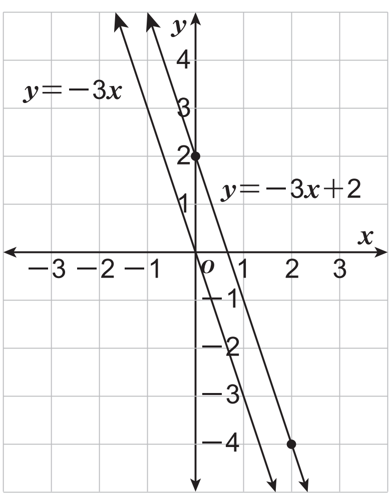
d)



e)



f)



41.

a) $y=x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9

b) $y=-x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$-x^2$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9

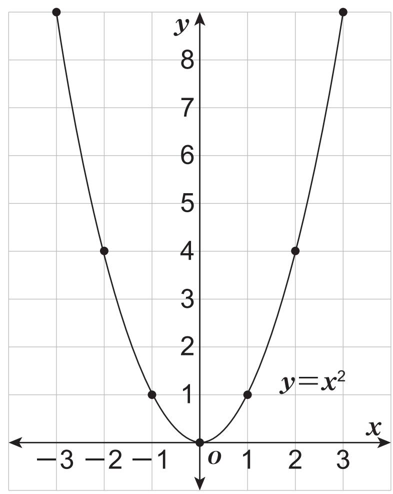
c) $y=-3x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$-3x^2$	-27	-12	-3	0	-3	-12	-27

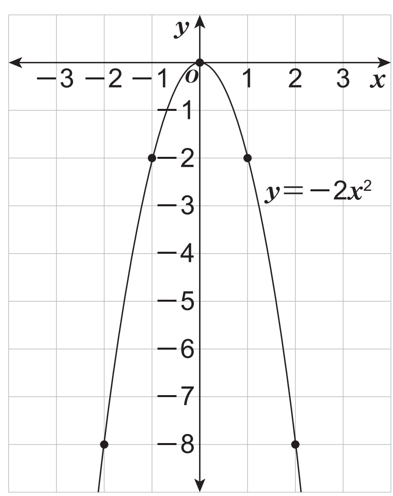
42.

	x	-2	-1	0	1	2
a)	x^2	4	1	0	1	4
b)	$-2x^2$	-8	-2	0	-2	-8

a)



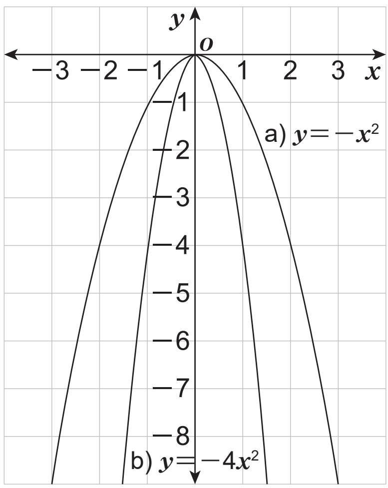
b)



43.

a) Vértice en el origen de coordenadas (0, 0)
Cóncava hacia abajo

b) Vértice en el origen de coordenadas (0, 0)
Cóncava hacia abajo

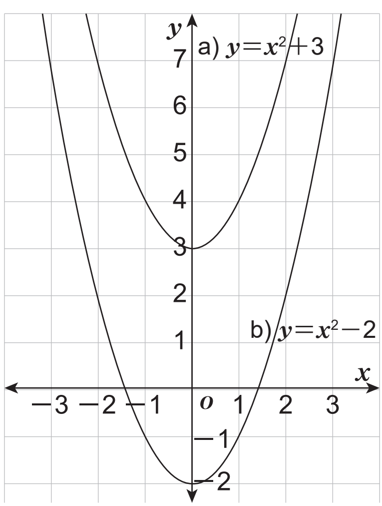


Sección 2: Función de segundo grado

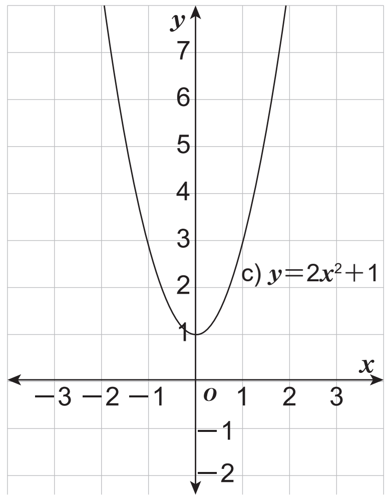
44.

a) Vértice: (0, 3) Cóncava hacia arriba

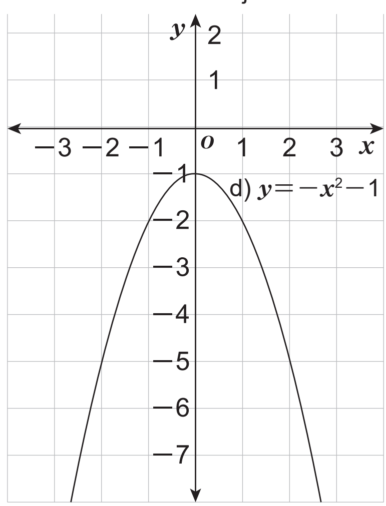
b) Vértice: (0, −2) Cóncava hacia arriba



c) Vértice: (0, 1)
Cóncava hacia arriba

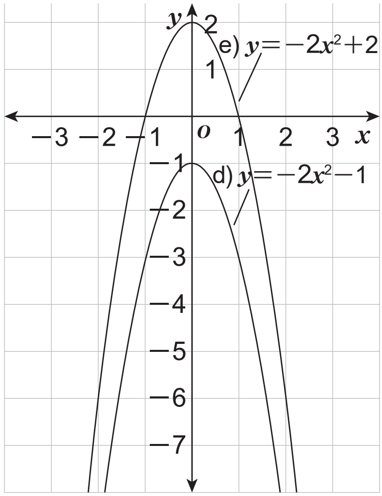


d) Vértice: (0, −1)
Cóncava hacia abajo



e) Vértice: (0, 2) Cóncava hacia abajo

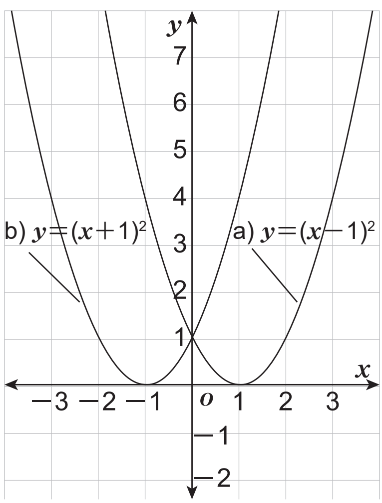
f) Vértice: (0, −2) Cóncava hacia abajo



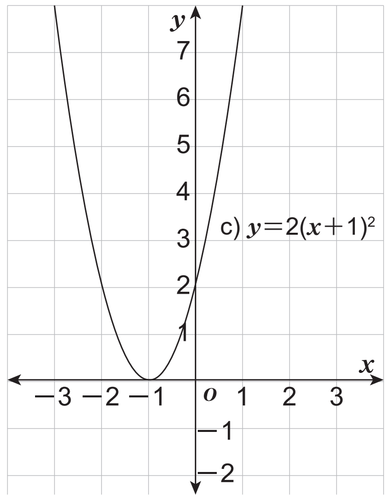
45.

a) Vértice: (1, 0) Cóncava hacia arriba

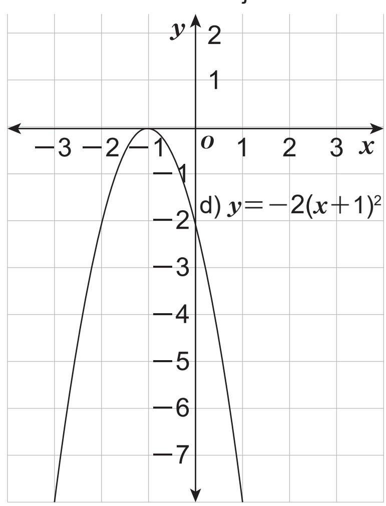
b) Vértice: (−1, 0) Cóncava hacia arriba



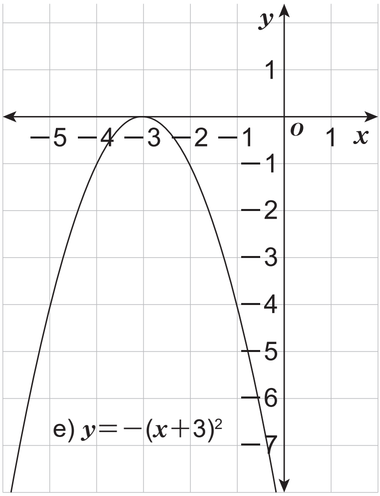
c) Vértice: (−1, 0) Cóncava hacia arriba



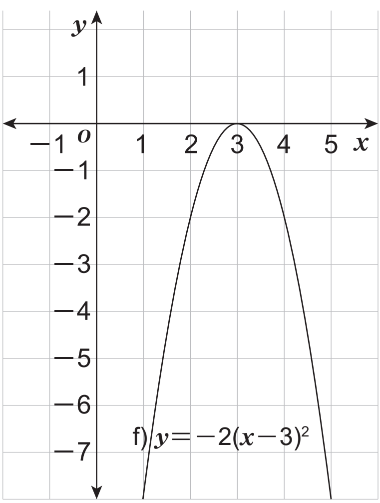
d) Vértice: (0, −1) Cóncava hacia abajo



e) Vértice: $(-3, 0)$
Cóncava hacia abajo

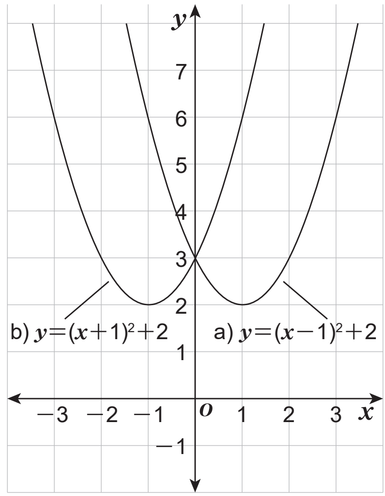


f) Vértice: $(3, 0)$
Cóncava hacia abajo

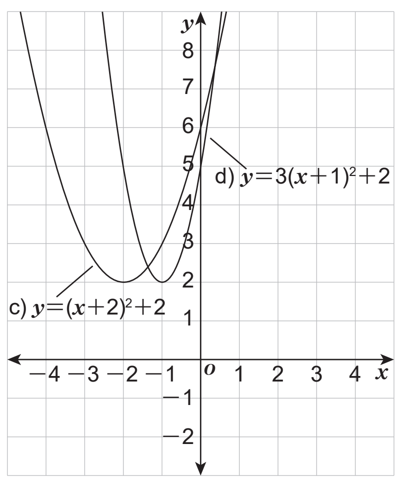


46.

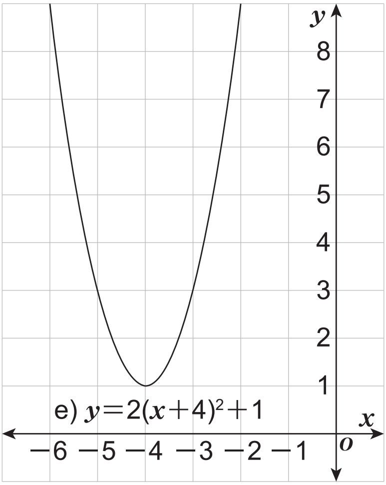
a) Vértice: $(1, 2)$
b) Vértice: $(-1, 2)$



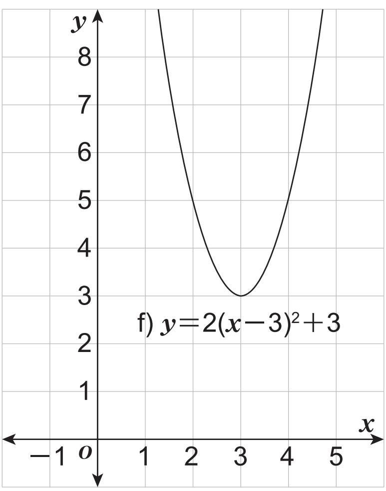
c) Vértice: $(-2, 2)$
d) Vértice: $(-1, 2)$



e) Vértice: $(-4, 1)$

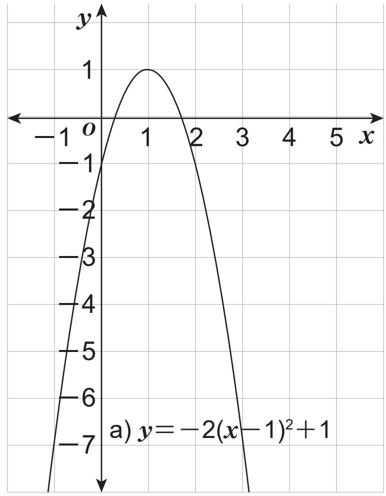


f) Vértice: $(3, 3)$

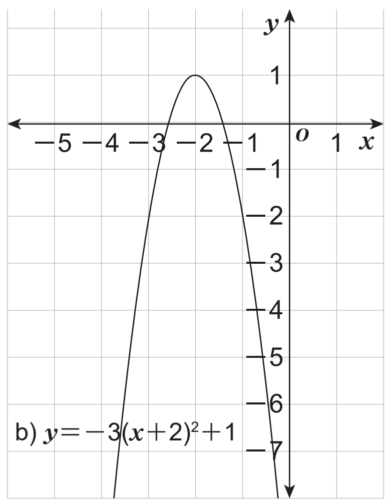


47.

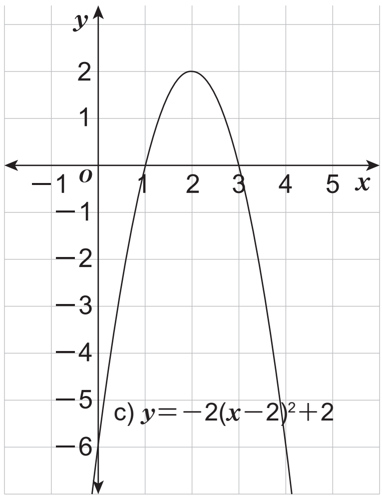
a) Vértice: $(1, 1)$



b) Vértice: $(-2, 1)$

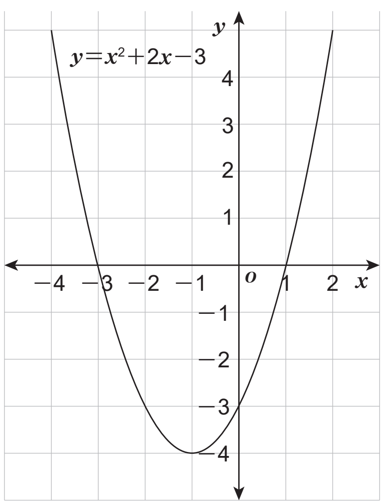


c) Vértice: $(2, 2)$

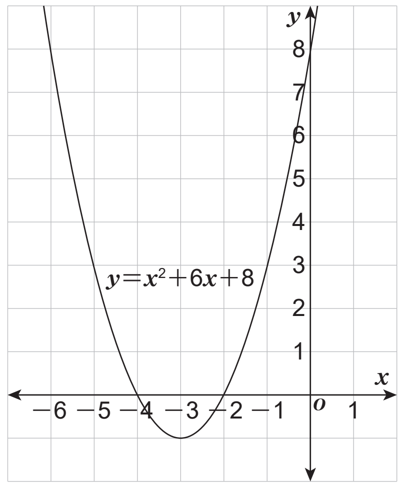


48.

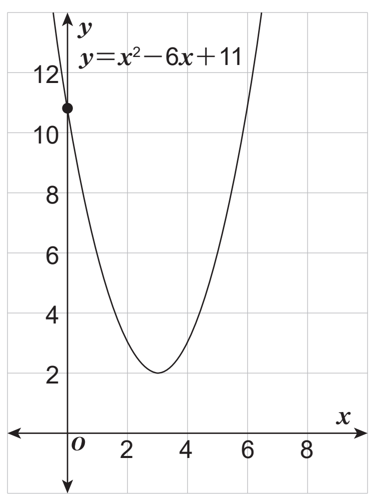
a) Vértice: $(-1, -4)$
Eje de simetría: $x=-1$
Intercepto con el eje y: $(0, -3)$



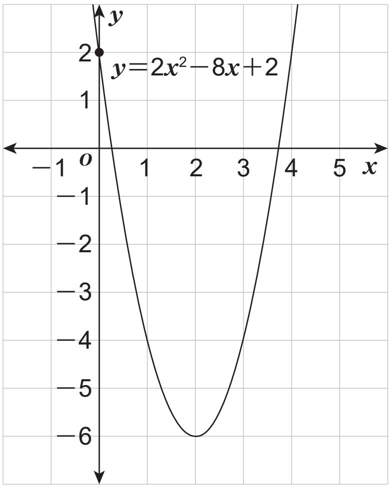
b) Vértice: $(-3, -1)$
Eje de simetría: $x=-3$
Intercepto con el eje y: $(0, 8)$



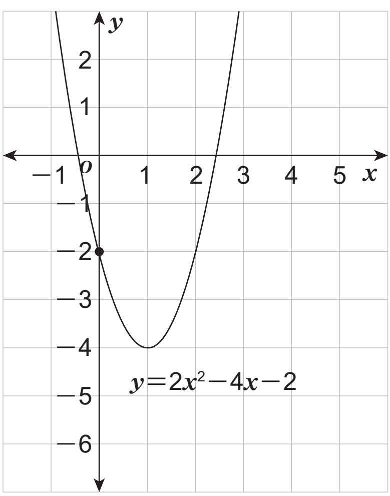
c) Vértice: $(3, 2)$
Eje de simetría: $x=3$
Intercepto con el eje y: $(0, 11)$



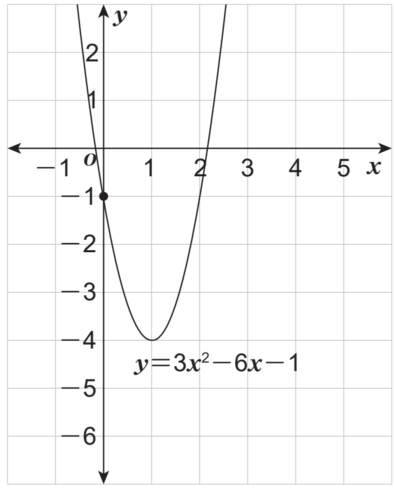
d) Vértice: $(2, -6)$
Eje de simetría: $x=2$
Intercepto con el eje y: $(0, 2)$



e) Vértice: $(1, -4)$
Eje de simetría: $x=1$
Intercepto con el eje y: $(0, -2)$

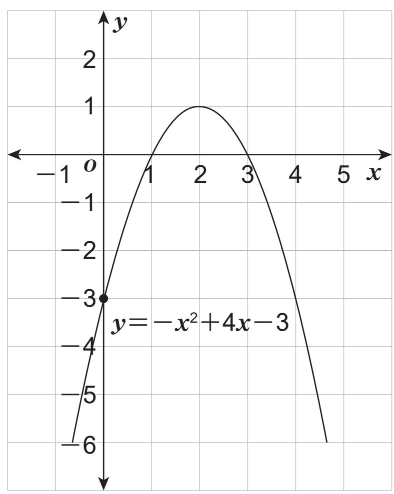


f) Vértice: $(1, -4)$
Eje de simetría: $x=1$
Intercepto con el eje y: $(0, -1)$

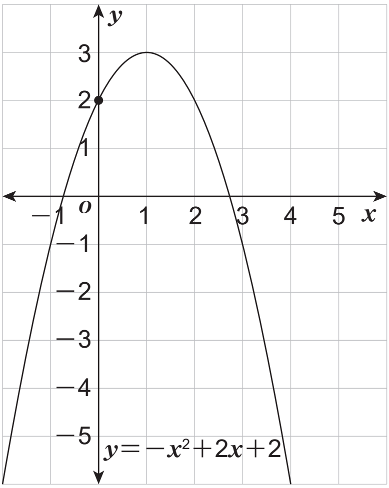


49.

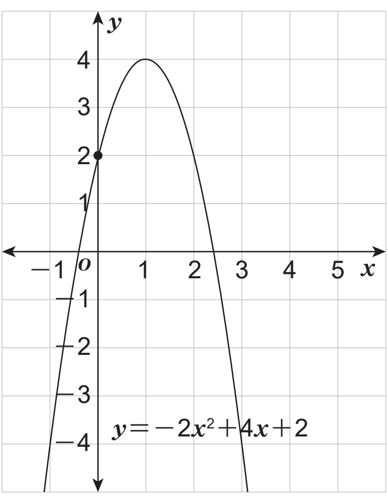
a) Vértice: $(2, 1)$
Eje de simetría: $x=2$
Intercepto con el eje y: $(0, -3)$



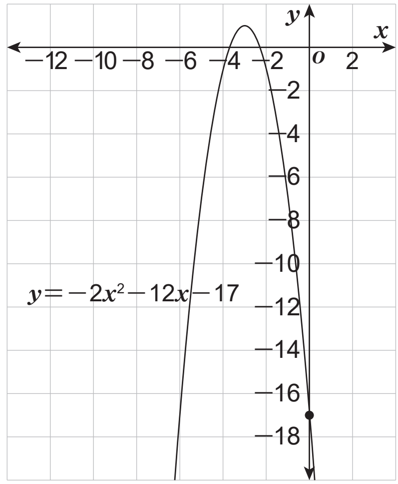
b) Vértice: $(1, 3)$
Eje de simetría: $x=1$
Intercepto con el eje y: $(0, 2)$



c) Vértice: $(1, 4)$
Eje de simetría: $x=1$
Intercepto con el eje y: $(0, 2)$



d) Vértice: $(-3, 1)$
Eje de simetría: $x=-3$
Intercepto con el eje y: $(0, -17)$



Sección 3: Valor máximo o mínimo de una función de segundo grado y su aplicación

50.

a) El mínimo es $y=3$
b) El máximo es $y=-5$
c) El máximo es $y=3$
d) El mínimo es $y=-4$

51.

a) Máximo: $y=5$ Mínimo: $y=2$
b) Máximo: $y=10$ Mínimo: $y=2$

52.

a) Máximo: $y=2$ Mínimo: $y=-1$
b) Máximo: $y=2$ Mínimo: $y=-1$

53.

a) Máximo: $y=15$ Mínimo: $y=9$
b) Máximo: $y=15$ Mínimo: $y=7$

54.

a) Máximo: $y=3$ Mínimo: $y=-1$
b) Máximo: $y=2$ Mínimo: $y=-6$

55.

a) Máximo: $y=-6$ Mínimo: $y=-21$
b) Máximo: $y=6$ Mínimo: $y=-21$

56.

Llamamos l al largo y x al ancho del patio.
Su perímetro está dado por:

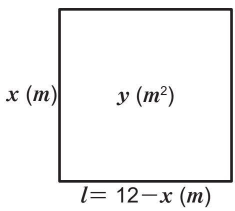
$$P = 2l + 2x = 24$$

De modo que;

$$l = 12 - x$$

a) Si el área está se representa por y, entonces:

$$y = x(12-x) = -x^2 + 12x$$



Completando cuadrados, obtenemos:

$$y = -(x-6)^2 + 36$$

b) La función anterior se trata de una parábola que abre hacia abajo, de modo que (6, 36) es su punto máximo (vértice).
De aquí que $x=6$ y $l=12-6=6$.
Por tanto las dimensiones que maximizan el área son $6m$ de ancho y $6m$ de largo.

57.

a) El área (y) del rectángulo en función de su ancho (x) está dada por:

$$y = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

b) Las dimensiones del rectángulo que maximizan su área son:

$$x = \frac{3}{2} \text{ y } l = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Por tanto el ancho es $\frac{3}{2}m$ y el largo es $\frac{3}{2}m$

Unidad 4: Proporcionalidad entre segmentos

Sección 1: Razón entre segmentos

58.

a) 7	b) 2	c) 7
d) 12	e) 12	f) 21
g) 16	h) 4	i) 17

59.

a) 3	b) 2	c) 3
d) 3	e) 7	f) 10

60.

La razón entre la base $\overline{AB}$ y la altura $\overline{BC}$ es:

$$r = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{3}$$

Si $AB=10cm$ y $BC=x$, tenemos:

$$\frac{10}{x} = \frac{5}{3}$$

$$x = \frac{(10)(3)}{5} = 6$$

Por lo tanto, la altura del rectángulo es de $6cm$.

61.

La base del rectángulo es de $6cm$.

62.

Las razones entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \text{ y } \frac{EF}{GH} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

Como $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$, en este caso $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son proporcionales a $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$.

63.

Como $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH} = \frac{5}{3}$, podemos concluir que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son proporcionales a $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$.

64.

a) $$\frac{AB}{AD} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \quad \frac{EF}{EH} = \frac{3}{2},$$

Como $\frac{AB}{AD} = \frac{EF}{EH}$, la base y altura de uno son proporcionales a las del otro.

b) Como $\frac{AB}{AD} = \frac{EF}{EH} = \frac{5}{8}$ la base y altura de uno son proporcionales a las del otro.

c) Como $\frac{AB}{AD}=\frac{7}{6}$ y $\frac{EF}{EH}=\frac{4}{3}=\frac{8}{6}$, se concluye que la base y altura de uno no son proporcionales a las del otro.

Sección 2: División de un segmento

65.

a) La razón entre los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ en el que P divide al $\overline{AB}$ está dada por:

$$\frac{AP}{PB}=\frac{2}{3}$$

b) La razón entre los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ en el que P divide al $\overline{AB}$ está dada por:

$$\frac{AP}{PB}=\frac{3}{5}$$

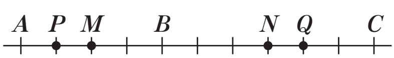
c) La razón entre los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ en el que P divide al $\overline{AB}$ está dada por:

$$\frac{AP}{PB}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

d) La razón entre los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ en el que P divide al $\overline{AB}$ esta dada por:

$$\frac{AP}{PB}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

66.



67.

a) Hacemos uso de la fórmula

$$p=\frac{na+mb}{m+n}$$

Donde, $a=2,\ b=8,\ m=2,\ n=1$

$$p=\frac{(1)(2)+(2)(8)}{1+2}=\frac{18}{3}=6$$

b) $p=1$ c) $p=4$ d) $p=1$

68.

a) Hacemos uso de la fórmula

$$p=\frac{-na+mb}{m-n}$$

Donde, $a=2,\ b=6,\ m=3,\ n=1$

$$p=\frac{-(1)(2)+(3)(6)}{3-1}=\frac{16}{2}=8$$

b) $p=1$ c) $p=14$

69.

a) La razón entre los segmentos es:

$$\frac{AP}{PB}=\frac{3}{5}$$

Si en la expresión anterior se hace:

$$AP=x,\quad PB=16-x$$

Se obtiene:

$$\frac{x}{16-x}=\frac{3}{5}$$
$$5x=3(16-x)$$
$$5x=48-3x$$
$$8x=48$$
$$AP=x=6$$

Luego:

$$PB=16-6=10$$

b) $AP=4$ y $PB=10$

c) $AP=36$ y $PB=30$

d) $AP=25$ y $PB=15$

Unidad 5: Semejanza

Sección 1: Criterios de semejanza de triángulos

70.

a) $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

$\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

b) $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{3}{2}$

$\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}=\frac{3}{2}$

71.

a) $\measuredangle A=60°=\measuredangle D \quad \measuredangle B=50°=\measuredangle E$

Por AA, $\Delta ABC\sim\Delta DEF$

b) $\measuredangle A=40°=\measuredangle E \quad \measuredangle B=45°=\measuredangle D$

Por AA, $\Delta ABC\sim\Delta EDF$

c) $\measuredangle A=70°=\measuredangle D$

$\measuredangle B=60°=180°-70°-50°=\measuredangle F$

Por AA, $\Delta ABC\sim\Delta DFE$

d) No son semejantes porque

$$\measuredangle B\neq\measuredangle E \quad \measuredangle B\neq\measuredangle F$$

72.

a) $\frac{MO}{PR}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$ $\quad \frac{ON}{RQ}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
$\frac{MN}{PQ}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$
Por LLL $\Delta MON \sim \Delta PRQ$

b) $\frac{EF}{NO}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ $\quad \frac{FD}{OM}=\frac{2,5}{5}=\frac{1}{2}$
$\frac{ED}{NM}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$
Por LLL $\Delta EFD \sim \Delta NOM$

c) $\frac{AB}{DE}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ $\quad \frac{BF}{EF}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
$\frac{AC}{DF}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$
Por LLL $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

d) $\frac{AB}{DF}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ $\quad \frac{BC}{FE}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$
$\frac{AC}{DE}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$
Por LLL $\Delta ABC \sim \Delta DFE$

73.

a) $\frac{AB}{ED}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ $\quad \frac{BC}{DF}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$
$\measuredangle B=50^\circ=\measuredangle D$
Por LAL $\Delta MON \sim \Delta PRQ$

b) $\frac{LK}{ON}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$ $\quad \frac{KJ}{NM}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$
$\measuredangle K=45^\circ=\measuredangle N$
Por LAL $\Delta LKJ \sim \Delta ONM$

c) $\frac{BA}{DE}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ $\quad \frac{AC}{EF}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$
$\measuredangle A=40^\circ=\measuredangle E$
Por LAL $\Delta BAC \sim \Delta DEF$

d) $\frac{BA}{ED}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ $\quad \frac{AC}{DF}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
$\measuredangle A=110^\circ=\measuredangle D$
Por LAL $\Delta BAC \sim \Delta EDF$

74.

Pasos	Justificación
3. $\Delta ACB \sim \Delta DCE$	1. Hipótesis 2. Ángulo común

75.

Pasos	Justificación
3. $\Delta ACB \sim \Delta DCE$	1. Hipótesis 2. Paso 1

76.

Pasos	Justificación
3. $\Delta ACB \sim \Delta DCE$	1. Def. de punto medio 2. Ángulo común

Sección 2: Semejanza de triángulos rectángulos y paralelismo

77.

a) $\measuredangle B=45^\circ=\measuredangle D$
Los triángulos rectángulos tienen un ángulo agudo con la misma medida, así $\Delta BCA \sim \Delta DFE$

b) $\frac{BA}{FD}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ $\quad \frac{AC}{DE}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
Los catetos son proporcionales, así que $\Delta BAC \sim \Delta FDE$

c) $\frac{AC}{FD}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ $\quad \frac{CB}{DE}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$
Un par de catetos y las hipotenusas son proporcionales, así que $\Delta ACB \sim \Delta FDE$

d) No son semejantes porque no hay un par de ángulos agudos con la misma medida.

78.

a) $a^2=(6)(8)=48 \rightarrow a=\sqrt{48}=4\sqrt{3}(cm)$
$b^2=(2)(8)=16 \rightarrow b=\sqrt{16}=4(cm)$

b) $a^2=(5)(9)=45 \rightarrow a=\sqrt{45}=3\sqrt{5}(cm)$
$b^2=(4)(9)=36 \rightarrow b=\sqrt{36}=6(cm)$

79.

a) $h^2=(2)(6)=12 \rightarrow h=\sqrt{12}=2\sqrt{3}(cm)$

b) $h^2=(4)(5)=20 \rightarrow h=\sqrt{20}=2\sqrt{5}(cm)$

80.

a) $\frac{x}{9}=\frac{8}{12} \rightarrow x=\frac{(8)(9)}{12}=6(cm)$
$\frac{y}{9}=\frac{12}{8} \rightarrow y=\frac{(9)(12)}{8}=\frac{27}{2}(cm)$

b) $\frac{x}{15}=\frac{12}{18} \rightarrow x=\frac{(12)(15)}{18}=10(cm)$
$\frac{y}{14}=\frac{18}{12} \rightarrow y=\frac{(14)(18)}{12}=21(cm)$

81.

a) $\frac{8}{4}=\frac{6}{x} \rightarrow x=\frac{(4)(6)}{8}=3(cm)$

b) $\frac{4}{5}=\frac{3}{x} \rightarrow x=\frac{(5)(3)}{4}=\frac{15}{4}(cm)$

82.

a) $\dfrac{CD}{DA}=\dfrac{9}{6}=\dfrac{3}{2}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{CE}{EB}$, esto significa que $\overline{DE}\parallel\overline{AB}$.

b) $\dfrac{CD}{DA}=\dfrac{3}{3}=1\neq\dfrac{3}{2}=\dfrac{CE}{EB}$, esto significa que los segmentos no son paralelos y $\overline{DE}$ y $\overline{AB}$ no son paralelos.

83.

a) $x=\left(\dfrac{1}{2}\right)(8)=4(cm)$
$y=3(cm)$

b) $x=(2)(2,5)=5(cm)$
$y=2(cm)$

84.

a) $\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{x}\rightarrow x=\dfrac{(3)(4)}{2}=6(cm)$

b) $\dfrac{3}{6}=\dfrac{2}{x}\rightarrow x=\dfrac{(6)(2)}{3}=4(cm)$

85.

a) Si x es la altura del papá,
$\dfrac{x}{1,2}=\dfrac{3}{2}\rightarrow x=\dfrac{(3)(1,2)}{2}=1,8(m)$

b) Si x es la altura del árbol cuya sombra mide $10m$, entonces
$\dfrac{x}{3}=\dfrac{10}{5}\rightarrow x=\dfrac{(3)(10)}{5}=6(m)$

Unidad 6: Teorema de Pitágoras

Sección 1: Teorema de Pitágoras

86.

a) Como $AB=3+4=7$, el área del cuadrado $ABCD$ es $AB^2=7^2=49$
Luego, el área del cuadrilátero $EFGH$ = (área del cuadrilátero $ABCD$)$-$(4 veces el área de ΔAFE)
$=49-(4)\left[\dfrac{(3)(4)}{2}\right]$
$=49-24$
$=25$
Además,
$\measuredangle EFG=\measuredangle FGH=\measuredangle GHE=\measuredangle HEF$
$=90°$
Y se concluye por esto que el cuadrilátero $EFGH$ es un cuadrado.
Como el área del cuadrado es:
$x^2=EF^2=25$, entonces
$x=EF=5$

b) $x=2\sqrt{13}$

87.

a) Hacemos uso de la fórmula del teorema de Pitágoras $a^2+b^2=c^2$.
$a=8,\ \ b=6\ \ \text{y}\ \ c=10$

$$8^2+6^2=64+36=100$$
$$10^2=100$$
$$8^2+6^2=10^2$$

Por lo anterior vemos que se cumple la igualdad y por lo tanto se verifica que las medidas del triángulo cumplen con el Teorema de Pitágoras.

b) Hacemos uso de la fórmula del teorema de Pitágoras $a^2+b^2=c^2$.
$a=1,\ \ b=\sqrt{3}\ \ \text{y}\ \ c=2$

$$1^2+(\sqrt{3})^2=1+3=4$$
$$2^2=4$$
$$1^2+(\sqrt{3})^2=2^2$$

Por lo anterior vemos que se cumple la igualdad y por lo tanto se verifica que las medidas del triángulo cumplen con el Teorema de Pitágoras.

c) Hacemos uso de la fórmula del teorema de Pitágoras $a^2+b^2=c^2$
$a=6,\ \ b=12\ \ \text{y}\ \ c=6\sqrt{5}$

$$6^2+12^2=36+144=180$$
$$(6\sqrt{5})^2=180$$
$$6^2+12^2=(6\sqrt{5})^2$$

Por lo anterior vemos que se cumple la igualdad y por lo tanto se verifica que las medidas del triángulo cumplen con el Teorema de Pitágoras.

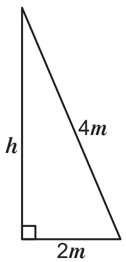
88.

a) $AC^2+CB^2=AB^2$
$3^2+3^2=AB^2$
$18=AB^2$
Como $AB>0$,
$AB=\sqrt{18}=\sqrt{(2\cdot3^2)}=3\sqrt{2}(cm)$

b) $BC=2(cm)$

c) $AC=6(cm)$

89.



La siguiente figura representa un bosquejo de la situación planteada. Aplicando el Teorema de Pitágoras, obtenemos:

$$2^2 + h^2 = 4^2$$
$$h^2 = 16 - 4 = 12$$

Como $h > 0$,

$$h = 2\sqrt{3}$$

por lo tanto, la parte superior de la escalera se apoya a una altura de $2\sqrt{3}\,m$ en la pared.

90.

La punta del monumento está a $11m$ del piso.

Sección 2: Aplicaciones del Teorema de Pitágoras en geometría

91.

a) Altura$=4(cm)$, Volumen$=12\pi(cm^3)$

b) Altura$=3(cm)$, Volumen$=9\pi(cm^3)$

c) Altura$=8(cm)$, Volumen$=\frac{128}{3}\pi(cm^3)$

d) Altura$=6(cm)$, Volumen$=12\pi(cm^3)$

92.

a) Altura$=\sqrt{7}(cm)$, Volumen$=\frac{4\sqrt{7}}{3}(cm^2)$

b) Altura$=2\sqrt{14}(cm)$, Volumen$=\frac{32\sqrt{14}}{3}(cm^3)$

c) Altura$=2(cm)$, Volumen$=\frac{32}{3}(cm^3)$

d) Altura$=3(cm)$, Volumen$=36(cm^3)$

93.

a) Haciendo uso del Teorema de Pitágoras, calculamos la diagonal de la base:

$$\sqrt{(5^2+3^2)} = \sqrt{(25+9)} = \sqrt{34}$$

Luego, se calcula la diagonal del prisma rectangular:

$$\sqrt{(\sqrt{34})^2 + 4^2} = \sqrt{34+16} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}(cm)$$

b) $26(cm)$ c) $\sqrt{21}(cm)$

94.

a) Calculamos la altura h del triángulo:

$$h^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$$

Luego, se calcula la diagonal del prisma rectangular:

Como $h > 0$,

$$h = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

luego, calculamos el área del triángulo:

$$A = \frac{(1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(cm^2)$$

b) $A = 9\sqrt{3}(cm^2)$ c) $A = 16\sqrt{3}(cm^2)$

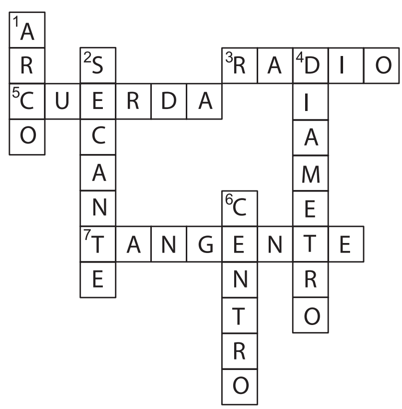
95.

a) $54\sqrt{3}(m^2)$ b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}(m^2)$

Unidad 7: Circunferencia

Sección 1: Ángulos inscritos

96.



97.

a) $\measuredangle APB \ \frac{1}{2} \ \measuredangle AOB$

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)(50°) = 25°$$

b) $x = \left(\frac{1}{2}\right)(140°) = 70°$

c) $x = (2)(24°) = 48°$

d) $x = (2)(40°) = 80°$

98.

a) $y=(2)(45^\circ)=90^\circ$

b) $x=\left(\frac{1}{2}\right)(160^\circ)=80^\circ$

c) $x=30^\circ$
$y=(2)(30^\circ)=60^\circ$

d) $x=75^\circ$
$y=(2)(75^\circ)=150^\circ$

Sección 2: Aplicaciones de ángulos inscritos

99.

a) $\measuredangle ABP=\frac{1}{2}\measuredangle AOB$

$x=(2)(55^\circ)=110^\circ$

b) $x=\left(\frac{1}{2}\right)(130^\circ)=65^\circ$

c) $x=\left(\frac{1}{2}\right)(160^\circ)=80^\circ$

d) $x=\left(\frac{1}{2}\right)(60^\circ)=30^\circ$

100.

a) $\measuredangle AED=\frac{1}{2}(\measuredangle AOD+\measuredangle BOC)$

$x=\left(\frac{1}{2}\right)(90^\circ+30^\circ)=60^\circ$

b) $x=\left(\frac{1}{2}\right)(70^\circ+80^\circ)=75^\circ$

c) $x=\left(\frac{1}{2}\right)(60^\circ+120^\circ)=90^\circ$

d) $x=\left(\frac{1}{2}\right)(65^\circ+135^\circ)=100^\circ$

101.

a) $\measuredangle EAD=\frac{1}{2}(\measuredangle DOE-\measuredangle BOC)$

$x=\left(\frac{1}{2}\right)(120^\circ-30^\circ)=45^\circ$

b) $x=\left(\frac{1}{2}\right)(100^\circ-20^\circ)=40^\circ$

c) $30^\circ=\left(\frac{1}{2}\right)(110^\circ-x)$
$x=110^\circ-2(30^\circ)=50^\circ$

d) $32^\circ=\left(\frac{1}{2}\right)(140^\circ-x)$
$x=140^\circ-2(32^\circ)=76^\circ$

Unidad 8: Estadística

Sección 1: Presentación de tablas y gráficas

102.

Población: 50 estudiantes de 9no grado del centro
Muestra: 12 estudiantes
Individuo: Cada uno de los estudiantes

103.

a) Población: 120 personas que asistieron a la fábrica
Muestra: 80 personas
Individuo: Cada una de las personas

b) Población: 543 estudiantes del centro
Muestra: 140 estudiantes
Individuo: Cada uno de los estudiantes

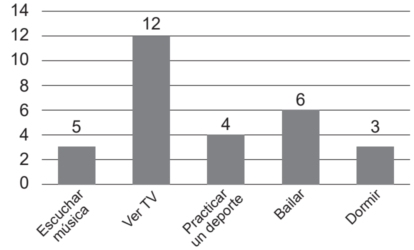
c) Población: 230 personas que asistieron a la fiesta
Muestra: 150 personas
Individuo: Cada una de las personas

104.

a) Variable cualitativa
b) Variable cualitativa
c) Variable cuantitativa
d) Variable cuantitativa

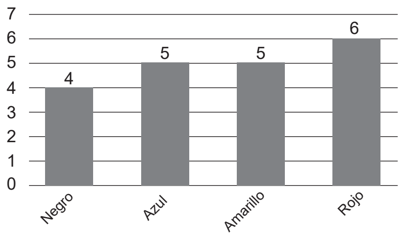
105.

Pasatiempos	Conteo	N° de estudiantes
Escuchar música	𝍸	5
Ver TV	𝍸 𝍸 //	12
Practicar un deporte	////	4
Bailar	𝍸 /	6
Dormir	///	3
Total		30



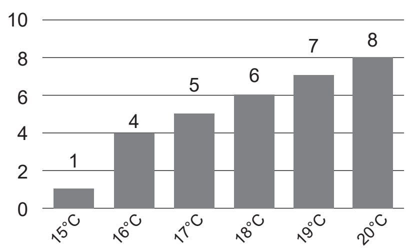
106.

Color	Conteo	f_i
Negro	////	4
Azul	~~////~~	5
Amarillo	~~////~~	5
Rojo	~~////~~ /	6
Total		20



107.

Temperaturas	Conteo	f_i
15°C	/	1
16°C	////	4
17°C	~~////~~	5
18°C	~~////~~ /	6
19°C	~~////~~ //	7
20°C	~~////~~ ///	8
Total		31



108.

Estatura (m)	f_i	$\frac{f_i}{200}$	$\left(\frac{f_i}{200}\right)100$
1,41 — 1,50	20	0,1	10
1,51 — 1,60	60	0,3	30
1,61 — 1,70	90	0,45	45
1,71 — 1,80	30	0,15	15
Total	200	1	100

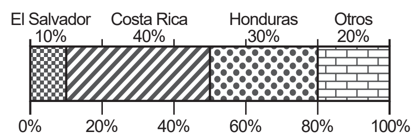
109.

Autos vendidos	f_i	f_r	f_r%
0	10	0,25	25
1	6	0,15	15
2	8	0,2	20
3	14	0,35	35
4	2	0,05	5
Total	40	1	100

110.

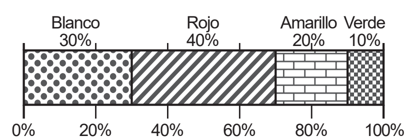
Duración	f_i	f_r	f_r%
0,1	2	0,1	10
0,4	2	0,1	10
1,6	3	0,15	15
2,6	3	0,15	15
3,4	2	0,1	10
4,5	4	0,2	20
5,9	3	0,15	15
8,1	1	0,05	5
Total	20	1	100

111.



112.

Color	f_i	f_r	f_r%
Blanco	9	0,3	30
Rojo	12	0,4	40
Amarillo	6	0,2	20
Verde	3	0,1	10
Total	30	1	100



113.

a) Matemática: 0,35
Ciencias Sociales: 0,3
Ciencias Naturales: 0,2
Lengua y Literatura: 0,15

b) Matemática: $40 \times 0{,}35 = 14$
Ciencias Sociales: $40 \times 0{,}3 = 12$
Ciencias Naturales: $40 \times 0{,}2 = 8$
Lengua y Literatura: $40 \times 0{,}15 = 6$

114.

a) Jugos: 0,35
Gaseosa: 0,35
Café: 0,3

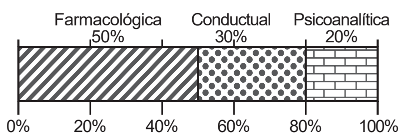
b) Jugos: $80 \times 0{,}35 = 28$
Gaseosa: $80 \times 0{,}35 = 28$
Café: $80 \times 0{,}3 = 24$

115.

a)

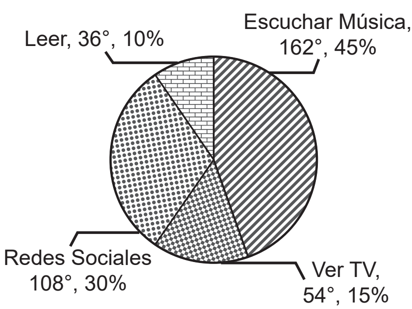
Terapia	f_i	f_r	$f_r\%$
Farmacológica	50	0,5	50
Conductual	30	0,3	30
Psicoanalítica	20	0,2	20
Total	100	1	100

b)



116.

Pasatiempo Favorito	f_i	$f_r\%$	Ángulo
Escuchar música	90	45	162°
Ver Tv	30	15	54°
Redes sociales	60	30	108°
Leer	20	10	36°
Total	200	100	360°

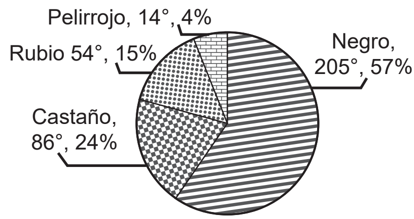


117.

a)

Color del cabello	f_i	$f_r\%$	Ángulo
Negro	285	57	205
Castaño	120	24	86
Rubio	75	15	54
Pelirrojo	20	4	14
Total	500	100	360

b)

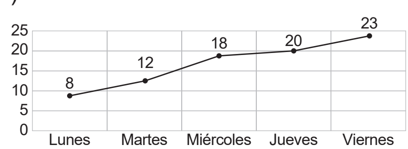


118.

a)

Días	f_i	F_i
Lunes	8	8
Martes	4	12
Miércoles	6	18
Jueves	2	20
Viernes	3	23
Total	23	

b)



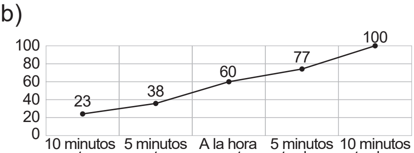
c) Lunes

119.

a)

Hora de llegada	f_i	F_i
10 minutos antes	23	23
5 minutos antes	15	38
A la hora exacta	22	60
5 minutos tarde	17	77
10 minutos tarde	23	100
Total	100	

b)



Solucionarios de Ejercicios Avanzados

Unidad 1: Producto notables y Factorización

EA1.

a) $(x+y)^2+(x-y)^2$
$=x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2$
$=2x^2+2y^2$
$=2(x^2+y^2)$

b) $(x+y)^2-(x-y)^2$
$=x^2+2xy+y^2-(x^2-2xy+y^2)$
$=x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2$
$=4xy$

c) $\dfrac{(x+y)^2-(x-y)^2}{xy}=\dfrac{4xy}{xy}=4$

d) $(2x+y)^3$
$=(2x)^3+3(2x)^2(y)+3(2x)(y)^2+y^3$
$=8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$

e) $(3x-2y)^3$
$=(3x)^3+3(3x)^2(-2y)$
$+3(3x)(-2y)^2+(-2y)^3$
$=27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$

f) $(x^2+x-4)^2$
$=(x^2)^2+x^2+(-4)^2+2(x^2)(x)$
$+2(x^2)(-4)+2(x)(-4)$
$=x^4+x^2+16+2x^3-8x^2-8x$
$=x^4+2x^3-7x^2-8x+16$

g) $(x-2)(x-1)(x+2)(x+3)$
$=(x-2)(x+3)(x-1)(x+2)$
$=(x^2+x-6)(x^2+x-2)$
$=x^2(x^2+x-2)+x(x^2+x-2)$
$-6(x^2+x-2)$
$=x^4+x^3-2x^2+x^3+x^2-2x-6x^2$
$-6x+12$
$=x^4+2x^3-7x^2-8x+12$

h) De f) y g), obtenemos:
$(x^2+x-4)^2$
$-(x-2)(x-1)(x+2)(x+3)$
$=(x^4+2x^3-7x^2-8x+16)$
$-(x^4+2x^3-7x^2-8x+12)$
$=x^4+2x^3-7x^2-8x+16-x^4-2x^3$
$+7x^2+8x-12$
$=4$

EA2.

a) $8a^2-18=2(a^2-9)$
$=2(a+3)(a-3)$

b) $(x+y)^2+18(x+y)+81$
Haciendo $a=x+y$, la expresión anterior se transforma en:
$a^2+18a+81=(a+9)(a+9)=(a+9)^2$
Sustituyendo el valor de $a=x+y$,
$(x+y)^2+18(x+y)+81=(x+y+9)^2$

c) $(x-2)^2+17(x-2)+72$
Haciendo $a=x-2$, la expresión anterior se transforma en:
$a^2+17a+72=(a+9)(a+8)$
Sustituyendo el valor de $a=x-2$,
$(x-2)^2+17(x-2)+72$
$=(x-2+9)(x-2+8)$
$=(x+7)(x+6)$

d) $8x^3+1=(2x)^3+1$
$=(2x+1)(4x^2-2x+1)$

e) $27x^3-125=(3x)^3-(5)^3$
$=(3x-5)(9x^2+15x+25)$

EA3.

a) 99^2
$=(100-1)^2=100^2-2(100)(1)+(1)^2$
$=10000-200+1$
$=9801$

b) $104\times96=(100+4)(100-4)$
$=100^2-4^2=10000-16$
$=9984$

c) 97×103
$=(100-3)(100+3)$
$=100^2-3^2=10000-9$
$=9991$

d) $29^2-21^2=(29-21)(29+21)$
$=8\times50$
$=400$

EA4.

a) Si $x=20$
Primero se reduce la expresión:
$(x+27)(x-3)-(x-9)(x+9)$
$=x^2+24x-81-(x^2-9^2)$
$=x^2+24x-81-x^2+81$
$=24x$
Sustituyendo $x=20$
$24x=(24)(20)$
$=480$

b) Factorizando x^2+2x+1
$x^2+2x+1=(x+1)^2$
y sustituyendo $x=99$
$(99+1)^2=100^2$
$=10000$

Unidad 2: Ecuaciones de segundo grado

EA5.

$$\begin{aligned} 80t-5t^2 &= 320 \\ t^2-16t+64 &= 0 \\ (t-8)^2 &= 0 \\ t-8 &= 0 \\ t &= 8 \end{aligned}$$

El proyectil tardará 8 segundos en alcanzar una altura de 320 metros.

EA6.

Sea x: la medida de la altura del triángulo
$3x$: la medida de la base del triángulo

El área del triángulo está dada por

Área$=\frac{1}{2}$ (base)(altura)$=\frac{1}{2}$ $(3x)(x)$

$=\frac{3}{2}x^2$

De acuerdo con el problema el área es $150m^2$, así que

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x^2 &= 150 \\ x^2 &= 100 \\ x &= \pm 10 \end{aligned}$$

Como $x > 0$, $x=10$.

Por tanto, su altura mide $10m$ y su base $30m$.

EA7.

Sea n: el número de estudiantes

Como cada estudiante le dio la mano a cada uno de sus compañeros, excepto a él mismo, entonces cada uno saludo a $n-1$ compañeros y el número de apretones de manos está dado por

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} &= 66 \\ n^2-n &= 132 \\ n^2-n-132 &= 0 \\ (n-12)(n+11) &= 0 \\ n = 12,\ n &= -11 \end{aligned}$$

Pero $n > 0$, $n=12$. Es decir, al concurso asistieron 12 estudiantes.

EA8.

Cada uno de los triángulos congruentes tiene

$$\text{Área} = \frac{1}{2}ab.$$

El área del cuadrado de lado c puede ser expresada por

4(Área de los triángulos)

$+$(Área del cuadrado de lado b-a)

$= 4\left(\frac{1}{2}ab\right)+(b-a)^2$

$= 2ab+(b-a)^2$

$= a^2+b^2$

(Areá del cuadrado de lado c)$=c^2$

Por lo tanto,

$$c^2 = a^2+b^2$$

Unidad 3: Funciones de segundo grado

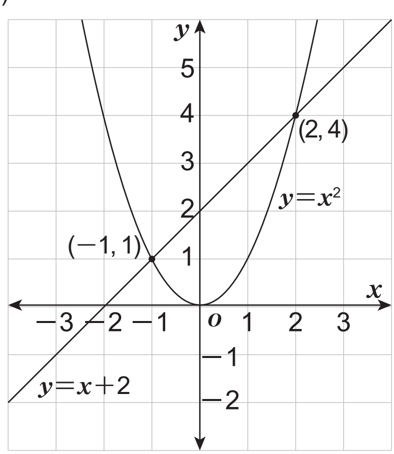
EA9.

a) Dado que el vértice es el punto (1, 2), entonces $y = a(x-1)^2+2$
y pasa por (2, 6), así que
$6 = a(2-1)^2+2 = a+2,\quad a = 4$
Por tanto, $y = 4(x-1)^2+2$.

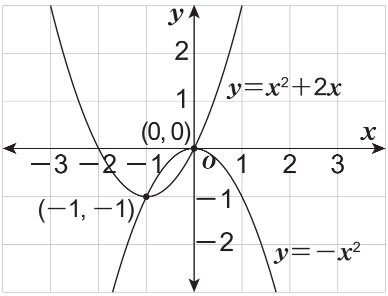
b) El eje de simetría es $x=-1$,
así que $h=-1$
El valor máximo es 10, así que $k=10$
Por tanto, el vértice es $(-1, 10)$ y en consecuencia $y = a(x+1)^2+10$
Corta al eje y en (0, 8), así que
$8 = a(0+1)^2+10 = a+10,\quad a = -2$,
Por tanto, $y = -2(x+1)^2+10$.

EA10.

a)



b)



EA11.

a) $f(x) = ax^2 + bx + c$

Como $f(0) = 5$,

$a(0)^2 + b(0) + c = 5 \rightarrow c = 5$

Así que, $f(x) = ax^2 + bx + 5$

Como

$f(1) = 10, \quad a(1)^2 + b(1) + 5 = 10$

$f(-1) = 4, \quad a(-1)^2 + b(-1) + 5 = 4$

Es decir,

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = -1 \end{cases}$$

de donde, $a = 2$ y $b = 3$.

Por tanto, $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$.

b) La gráfica pasa por $(2, -1)$, así que $f(2) = -1$ y corta al eje x en $(1, 0)$ y $(3, 0)$, es decir,

$f(1) = 0$ y $f(3) = 0$

En consecuencia,

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = -1 \\ a + b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases}$$

de donde, $a = 1$, $b = -4$ y $c = 3$.

Por tanto, $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Unidad 5: Semejanza

EA12.

Como $k = \dfrac{AB}{DE}$, entonces $\dfrac{AC}{DF} = k$.

Por otra parte, en ΔAGC y ΔDHF se tiene $\measuredangle A = \measuredangle D$ porque $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

$\measuredangle AGC = \measuredangle DHF$ porque son rectos

Luego, por AA

$$\Delta AGC \sim \Delta DHF,$$

así que

$$\frac{h}{h'} = \frac{AC}{DF} = k,$$

La altura respectiva a $\overline{AB}$ del ΔABC es h y la altura respectiva a $\overline{DE}$ del ΔDEF es h', así que la razón entre las áreas es

$$\frac{\frac{(AB)(h)}{2}}{\frac{(DE)(h')}{2}} = \frac{(AB)(h)}{(DE)(h')}$$

$$= \left(\frac{AB}{DE}\right)\left(\frac{h}{h'}\right)$$

$$= (k)(k)$$

$$= k^2$$

EA13.

a) En ΔACB y ΔFCE se tiene que:

$\measuredangle CAB = \measuredangle CFE$ por ser alt. int. entre paralelas

$\measuredangle ACB = \measuredangle FCE$ porque son opuestos por el vértice

Por AA, resulta que

$$\Delta ACB \sim \Delta FCE,$$

de lo cual

$$\frac{EC}{BC} = \frac{FE}{AB} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3},$$

Como $\overline{CD} \parallel \overline{EF}$, resulta que

$$\frac{6}{x} = \frac{BE}{BC} = \frac{BC + EC}{BC} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3},$$

$$\frac{6}{x} = \frac{5}{3} \rightarrow x = \frac{(6)(3)}{5} = \frac{18}{5}(cm)$$

b) Como $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, entonces

$$\measuredangle FAB = \measuredangle FED$$

Por ser opuestos por el vértice

$$\measuredangle AFB = \measuredangle EFD$$

Luego, por AA

$$\Delta AFB \sim \Delta EFD$$

De acuerdo a la semejanza anterior,

$$\frac{AB}{ED} = \frac{FB}{FD}$$

$$\frac{15}{5} = \frac{21 - x}{x}$$

$$3 = \frac{21 - x}{x}$$

$$3x = 21 - x$$

$$4x = 21$$

$$x = \frac{21}{4}(cm)$$

EA14.

Como $DEFG$ es un cuadrado, sus ángulos son rectos, así que ΔADG y ΔFEB son rectángulos en D y E respectivamente.

Por hipótesis ΔGCF es rectángulo en C.

a) En ΔADG y ΔGCF se tiene que: $\measuredangle DAG = \measuredangle CGF$ por ser correspondientes entre paralelas (lados de un cuadrado son paralelos)

Por lo anterior, en estos triángulos un par de ángulos agudos tienen la misma medida, así que $\Delta ADG \sim \Delta GCF$

b) $\measuredangle AGD = \measuredangle GFC$ por la semejanza demostrada en a)

$\measuredangle GFC = \measuredangle FBE$ por ser correspondientes entre paralelas (lados de un cuadrado son paralelos)

De las dos igualdades de este inciso se llega a $\measuredangle AGD = \measuredangle FBE$, por lo cual $\Delta ADG \sim \Delta FEB$.

c) De la semejanza en b) se obtiene

$$\frac{AD}{FE} = \frac{DG}{EB}$$

$$AD \cdot EB = DG \cdot FE$$

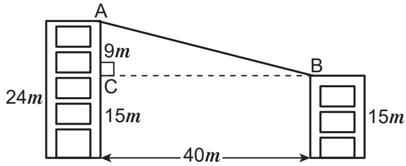
d) De la igualdad anterior y la definición de cuadrado $(DG = FE = DE)$ se tiene

$$DE^2 = AD \cdot EB \rightarrow DE = \sqrt{AD \cdot EB}$$

Unidad 6: Teorema de Pitágoras

EA15.

Trazando el segmento $\overline{BC}$ paralelo a la base de los edificios, notamos que se forma el triángulo rectángulo ABC.



$$AC = 9, \quad BC = 40$$

Se necesita encontrar la longitud del cable de acero AB. Aplicando el Teorema de Pitágoras, se obtiene:

$$\begin{aligned} AB^2 &= 9^2 + 40^2 \\ &= 81 + 1600 \\ &= 1681 \end{aligned}$$

Como $AB > 0$

$$AB = 41$$

Por lo tanto, la longitud del cable de acero es de 41m.

EA16.

Se calcula el área del hexágono regular cuya medida de sus lados es de $4cm$.

$$(\text{apotema})^2 = AB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 4^2 - 2^2 = 12$$

Por lo tanto, la medida de la altura de cada triángulo equilátero es de $2\sqrt{3}\,cm$.

$$\begin{pmatrix}\text{Área}\\ \text{del}\\ \text{hexágono}\end{pmatrix} = 6\left[\frac{4\times 2\sqrt{3}}{2}\right] = 24\sqrt{3}$$

Se nota que el área de los triángulos HFI, ABI y BFD es la misma.
Además, el área de los triángulos IGC, CEB, EFG y EGC también es la misma por ser ΔBFI .un triángulo equilátero y G, C y E puntos medios de sus lados.
Por lo tanto,

$$\begin{pmatrix}\text{Área}\\ \text{del}\\ \text{hexágono}\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}\text{Área}\\ \text{de}\\ \Delta ABI\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}\text{Área}\\ \text{de}\\ \Delta EGC\end{pmatrix}$$

Se calcula la longitud del segmento $\overline{BC}$ haciendo uso del Teorema de Pitágoras.

$$BC^2 = AB^2 - AC^2 = 4^2 - 2^2 = 12$$

Como $BC > 0$

$$BC = 2\sqrt{3}$$
$$BI = 2BC = 4\sqrt{3}$$

Por lo tanto,

$$\begin{pmatrix}\text{Área}\\ \text{de}\\ \Delta ABI\end{pmatrix} = \frac{BI \times AC}{2} = \frac{4\sqrt{3}\times 2}{2} = 4\sqrt{3}$$

Haciendo uso de:

$$\begin{pmatrix}\text{Área}\\ \text{del}\\ \text{hexágono}\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}\text{Área}\\ \text{de}\\ \Delta ABI\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}\text{Área}\\ \text{de}\\ \Delta EGC\end{pmatrix}$$

$$24\sqrt{3}=(3)(4\sqrt{3})+4\begin{pmatrix}\text{Área}\\ \text{de}\\ \Delta EGC\end{pmatrix}$$

$$4\begin{pmatrix}\text{Área}\\ \text{de}\\ \Delta EGC\end{pmatrix}=24\sqrt{3}-12\sqrt{3}=12\sqrt{3}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Área}\\ \text{de}\\ \Delta EGC\end{pmatrix}=\frac{12\sqrt{3}}{4}=3\sqrt{3}$$

Por lo tanto, el área del triángulo EGC es de $3\sqrt{3}\,cm^2$.

EA17.

Si trazamos la altura $\overline{AE}$ del triángulo isósceles.
Por lo tanto, por ser un triángulo isósceles, se cumple lo siguiente: $BE=EC=3cm$
Aplicando el Teorema de Pitágoras, se obtiene:

$$(AE)^2+(EB)^2=(AB)^2$$
$$(AE)^2+3^2=9^2$$
$$(AE)^2=81-9=72$$

Como $AE>0$

$$AE=\sqrt{72}=6\sqrt{2}\,cm$$

Se calcula el área del triángulo isósceles ABC.

$$\text{Área de } ABC=\frac{BC\cdot AE}{2}$$
$$\text{Área de } ABC=\frac{(6)(6\sqrt{2})}{2}$$
$$\text{Área de } ABC=18\sqrt{2}$$

El área del triángulo isósceles también se puede calcular de la siguiente manera:
Siendo $\overline{AB}$ la base y $\overline{CD}$ la altura,

$$\text{Área de } ABC=\frac{AB\cdot CD}{2}$$
$$\text{Área de } ABC=\frac{(9)CD}{2}$$

Como:

$$\text{Área de } ABC=\frac{(9)CD}{2}=18\sqrt{2}$$
$$9CD=(2)(18)\sqrt{2}$$
$$9CD=(2)(18)\sqrt{2}$$
$$CD=\frac{(2)(18)\sqrt{2}}{9}$$
$$CD=4\sqrt{2}\,cm$$

Unidad 7: Circunferencia

EA18.

Consideremos la pareja de ángulos opuestos $\angle ABC$ y $\angle ADC$ en el cuadrilátero $ABCD$. Estos ángulos son inscritos y en consecuencia, sus medidas están dadas por

$$\measuredangle ABC=\frac{1}{2}\measuredangle AOC$$
$$\measuredangle ADC=\frac{1}{2}(360°-\measuredangle AOC)$$
$$=180°-\frac{1}{2}\measuredangle AOC$$

Así que

$$\measuredangle ABC+\measuredangle ADC$$
$$=\frac{1}{2}\measuredangle AOC+180°-\frac{1}{2}\measuredangle AOC=180°$$

Es decir, $\measuredangle ABC+\measuredangle ADC=180°$ (1)

Similarmente se prueba que

$\measuredangle DAB+\measuredangle BCD=180°$ (2)

Por (1) y (2), la suma de los ángulos opuestos de un cuadrilátero cíclico es 180°.

EA19.

El $\angle BAC$ es inscrito, y en consecuencia, su medida está dada por

$$\measuredangle BAC=\frac{1}{2}\measuredangle BOC \quad (1)$$

El $\angle PBC$ es semiinscrito, y en consecuencia, su medida está dada por

$$\measuredangle PBC=\frac{1}{2}\measuredangle BOC \quad (2)$$

De (1) y (2) se tiene que $\measuredangle BAC=\measuredangle PBC$

EA20.

a) $x=2(\measuredangle ABC+\measuredangle DEC)$
$x=(2)(30°+20°)=100°$

b) $\measuredangle AOC=180°-(2)(35°)=110°$
$x=\left(\frac{1}{2}\right)(110°)=55°$

c) $110° = \frac{1}{2}(180° + x)$

$x = (2)(110°) - 180° = 40°$

d) $\measuredangle AOC = (2)(64°) = 128°$

$\measuredangle AOE = (2)(14°) = 28°$

$34° = \frac{1}{2}\ (\measuredangle BOC - 28°)$

$\measuredangle BOC = (2)(34°) + 28° = 96°$

$\measuredangle EOB = 360° - (128° + 28° + 96°)$
$= 108°$

$x = \frac{1}{2}\ (\measuredangle EOB) = \frac{1}{2}(180°) = 54°$

Unidad 8: Estadística

EA21.

Altura (cm)	f_i	f_r	$f_r\%$	F_i
146 — 150	3	0,075	7,5	3
151 — 155	6	0,15	15	9
156 — 160	15	0,375	37,5	24
161 — 165	8	0,2	20	32
166 — 170	6	0,15	15	38
171 — 175	2	0,05	5	40
Total	40	1	100	

EA22.

Peso (kg)	f_i	f_r
30-39	2	0,05
40-49	w	z
50-59	18	0,45
60-69	x	0,15
70-79	2	y
Total	40	1

$x = 40 \times 0,15 = 6$

$y = 2 \div 40 = 0,05$

$w = 40 - (2 + 18 + 6 + 2) = 12$

$z = 12 \div 40 = 0,3$

EA23.

$360° \rightarrow 100\%$

CC NN: $60 \times 0,1 = 6(36° \rightarrow 10\%)$

Inglés: $60 \times 0,4 = 24(144° \rightarrow 40\%)$

Lengua Literatura:

$60 \times 0,2 = 12(72° \rightarrow 20\%)$

Matemática: $60 \times 0,3 = 18(108° \rightarrow 30\%)$