Matemática

7

Cuaderno de Ejercicios

ESMATE

7 Cuaderno de Ejercicios Matemática

Equipo técnico autoral y de diagramación del Ministerio de Educación

Ana Ester Argueta Aranda
Erick Amílcar Muñoz Deras
Diana Marcela Herrera Polanco
Reina Maritza Pleitez Vásquez
Francisco Antonio Mejía Ramos
Norma Elizabeth Lemus Martínez
Salvador Enrique Rodríguez Hernández
César Omar Gómez Juárez

Equipo de diagramación
Francisco René Burgos Álvarez

Corrección de estilo
Marlene Elizabeth Rodas Rosales
Ana Esmeralda Quijada Cárdenas

Cooperación Técnica de Japón a través de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA).

Primera edición, 2019.

Imagen de portada con fines educativos, en ella se puede apreciar, transformaciones de figuras, proporciones, potencias de números. La imagen se construye a partir de secuencia de cuadrados.

372.704 5
M425 Matemática 7° : cuaderno de ejercicios / equipo autoral Ana Ester Argueta, Erick Amílcar Muñoz, Diana Marcela Herrera, Reina Maritza Pleitez, Francisco Antonio Mejía, Norma Elizabeth Lemus, Salvador Enrique Rodríguez, César Omar Gómez ; diagramación Francisco René Burgos Álvarez ; corrección de estilo Marlene Elizabeth Rodas. -- 1ª ed. -- San Salvador, El Salv. : MINED, 2018.
185 p. : il. ; 28 cm. -- (Esmate)
ISBN 978-99961-70-66-9 (impreso)
1. Matemáticas-Problemas, ejercicios, etc. 2. Matemáticas-Libros de texto. 3. Matemáticas-enseñanza. I. Argueta Aranda, Ana Ester, 1991- coaut. II. Título.
BINA/jmh

Matemática 7

Cuaderno de Ejercicios

ESMATE

Estimados jóvenes:

Es grato dirigirnos a ustedes con el propósito de felicitarlos por iniciar un nuevo año escolar con mucho entusiasmo, voluntad y entrega.

Desde “El proyecto de Mejoramiento de los Aprendizajes de Matemática en Educación Básica y Educación Media”(ESMATE), hemos trabajado este cuaderno de ejercicios, el cual presenta una nueva propuesta para el abordaje de la matemática.

Estamos convencidos que saber matemática significa tener una excelente herramienta para el desarrollo de sus capacidades productivas y ciudadanas; ya que les ayuda a ser más eficientes, a resolver problemas complejos con mayor facilidad, a contar con un razonamiento matemático capaz de ser crítico, analítico y práctico. En definitiva, a vivir con éxito, en un mundo cada vez más desafiante ante los cambios sociales y los avances tecnológicos.

Tenemos la seguridad de que su encuentro con estos saberes será muy satisfactorio, ya que este libro ha sido elaborado por un equipo altamente calificado que nos plantea una metodología constructiva, retadora y exigente, con el único fin de que los conocimientos matemáticos les enriquezcan, sean mejor entendidos y puedan integrarse en sus quehaceres cotidianos con mayor facilidad.

Recuerden que en nuestro país todos los jóvenes son capaces de aprender y desarrollarse. Mantengan la confianza en sus capacidades, porque todos pueden alcanzar el éxito con esfuerzo, disciplina y dedicación.

Mucho ánimo ya que contamos con lo mejor de ustedes para desarrollar un mejor El Salvador.

Atentamente,

Carlos Mauricio Canjura Linares
Ministro de Educación

Francisco Humberto Castaneda
Viceministro de Educación

Erlinda Hándal Vega
Viceministra de Ciencia y Tecnología

Presentación del Cuaderno de Ejercicios

El Cuaderno de Ejercicios (CE) es un documento complementario al Libro de Texto (LT), con la diferencia que el CE es para que el estudiante practique todos los días en su casa lo que aprendió en la escuela con el LT, con el objetivo de que el estudiante consolide los conocimientos matemáticos y desarrolle las competencias establecidas oficialmente por el Ministerio de Educación.

Por la relación que existe entre el LT y el CE, se tiene que para cada clase del LT, corresponde una clase del CE.

Íconos

La letra R representa el **Recuerda**. En esta sección se proponen problemas y ejercicios de las dos clases anteriores para que el estudiante repase antes de trabajar el contenido de la clase que le corresponde.

Con la C de **Conclusión** se presenta la explicación del contenido. En la mayoría de casos, la conclusión será la misma que la del Libro de texto, en otras ocasiones se agregarán ejemplos con sus respectivas soluciones para brindar mayor orientación al estudiante.

El lápiz representa la sección de problemas y ejercicios.

Información complementaria

En el libro se utiliza un recurso que facilita el aprendizaje de los contenidos como presaberes, pistas e información adicional, esto se representa de la siguiente manera:

Información complementaria

Distribución de las clases

El libro está compuesto por 8 unidades didácticas, cada una está formada por diferentes lecciones y cada lección está compuesta por diferentes clases. En la numeración del título de cada clase, el primer número indica la lección y el segundo número indica la clase. Por ejemplo, el título de la clase 1 de la lección 2 de la unidad 2 de este libro se representa de la siguiente manera:

Indica el número de la lección

2.1 Resta de un número positivo o negativo

Indica el número de la clase

El número de la unidad aparece en una etiqueta en la parte lateral de las páginas impares.

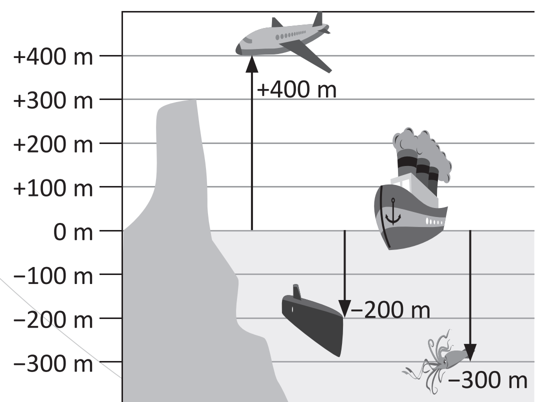
Unidad 2

Índice

Unidad 1

Números positivos, negativos y el cero

En la antigüedad una de las principales actividades económicas fue el comercio, el cual conllevó la necesidad de la creación y sustentación de un sistema numérico que ayudara a contar. Fue en este contexto histórico que surgió la necesidad de saber cómo interpretar en dicho sistema numérico, la situación de tener un “crédito” o una “deuda”, por ello en el siglo VII el matemático hindú Brahmagupta introduce las propiedades y reglas de los números negativos, este concepto fue aceptado por los matemáticos hasta finales del siglo XVIII, cuando Leonhard Euler brindó algunas fundamentaciones teóricas sobre este sistema numérico.



Aplicación de los números negativos para la representación de alturas.

A partir de su común aceptación y fundamentación matemática como números menores que la nada y superiores a algo infinito negativo, se han utilizado estos números en áreas científicas para medición de temperaturas, movimientos en sentidos contrarios, alturas de montañas o profundidades de océanos, valores de carga eléctrica, resolución de ecuaciones que modelan situaciones de la vida cotidiana, deudas (como se originó el concepto), entre otras.

En esta unidad aprenderás sobre el concepto y la definición de los números negativos, positivos y el cero, además de su representación geométrica en la recta numérica y el concepto de valor absoluto.

1.1 Números positivos, negativos y el cero para la temperatura

Para medir la temperatura se toma 0° C como el punto de referencia. Temperaturas por arriba de 0° C se representan con un signo (+) antes del número, por ejemplo +12° y se lee "más doce grados centígrados". Temperaturas debajo de 0° C se representan con un signo (–) antes del número, por ejemplo –5° C y se lee "menos 5 grados centígrados".

A los números que les antecede un signo (+) como +12 se les llama **números positivos** y a los números que les antecede un signo (–) como –12 se les llama **números negativos**. El número 0 no es positivo ni es negativo.

Ahora que ya se conocen números negativos como –5, al decir **números** se incluye **números positivos**, **0** y **números negativos.** Los números positivos se pueden expresar con o sin el signo (+), por ejemplo +5 es equivalente a escribir 5, e igualmente escribir 6 es equivalente a escribir +6. Vale aclarar que para escribir un número negativo nunca se debe omitir la escritura del signo (–). Por tanto, los números +1, +2, +3, +4, +5, ... son los mismos **números naturales** que se conocen. Algunos autores consideran al número 0 como el primer número natural, pero en este texto se considerará al 1 como el primero. También los números decimales y las fracciones pueden ser negativas.

Números

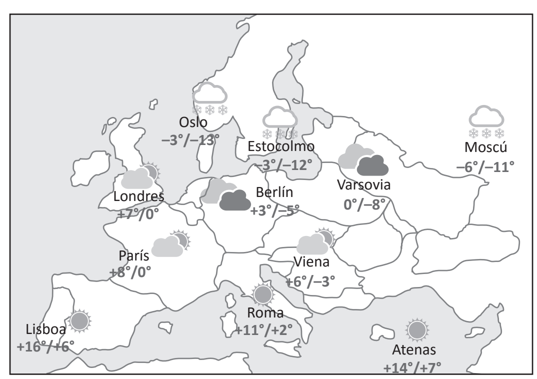
Números negativos		*Números positivos*
$-\frac{4}{9}$ −3.6	0	$+\frac{4}{9}$ +3.6
..., −3, −2, −1		*Números Naturales* +1, +2, +3, ...
		$+\frac{3}{5}$ +1.5

1. Coloca en el grupo correspondiente los siguientes números positivos y negativos, +6, −7, $+\frac{1}{10}$, −1.3, $-\frac{4}{7}$, +12, −6, −5, −1.5, +3.75, +2.

Números

Números negativos		*Números positivos*
	0	
		Números Naturales

2. La gráfica muestra el pronóstico del clima de algunas ciudades de Europa en un día de marzo. Responde las siguientes preguntas:



a) ¿Cuál es la temperatura máxima y mínima en Roma?
b) ¿Cuál es la temperatura máxima y mínima en Viena?
c) ¿En qué ciudad se registró la temperatura más baja?
d) ¿En qué ciudad se registró la temperatura más alta?

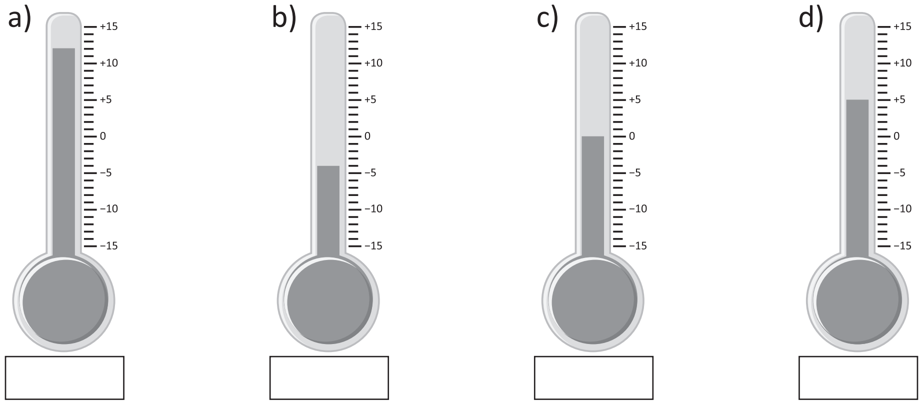
3. Expresa las siguientes temperaturas con el signo positivo o negativo según corresponda.

a) 1° C por encima de los 0° C
b) 6° C por debajo de los 0° C
c) 35.7° C por encima de los 0° C
d) 7.3° C por debajo de los 0° C
e) 9° C por debajo de los 0° C
f) 12.3° C por encima de los 0° C

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

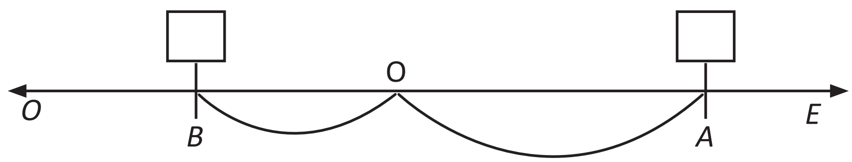
1.2 Ubicación respecto a un punto de referencia

Escribe en el recuadro correspondiente la temperatura que marca cada termómetro, usando los signos + y –.



Cuando se define un punto de referencia y hay objetos cuya posición varía respecto a ese punto; se puede asignar un número positivo (+) o un número negativo (–) a sus posiciones.

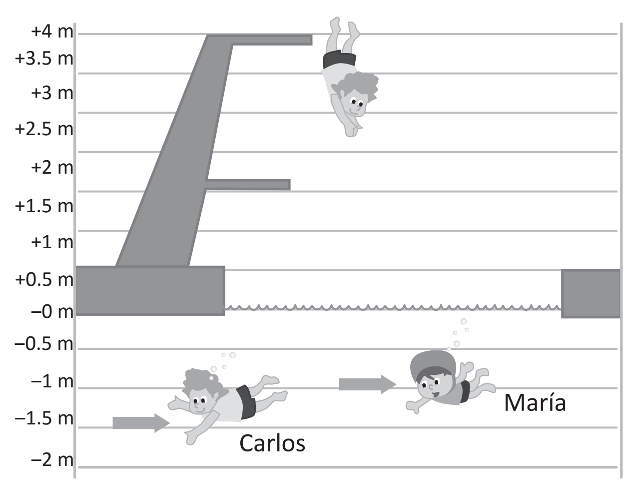
1. Si en una carretera se establece que el punto de referencia es O, y la dirección hacia el este (E) es positiva (+), la dirección hacia el oeste (O) es negativa (–).



   a) ¿Cómo se expresa la posición del punto **A** que está a **3 km** al este del punto O?
   b) ¿Y el punto **B** que se ubica **2 km** al oeste?
   c) Si otro punto **C** está ubicado a **–7.5 km**, ¿en qué dirección está ubicado C respecto de O y a qué distancia?

2. Si se toma como positivo el tiempo después del nacimiento de Cristo (d. C.) y como negativo el tiempo antes de Cristo (a. C.), ¿cómo se expresan los siguientes tiempos?
   a) 50 años d. C.
   b) 25 años a. C.
   c) 123 años a. C.

3. Observa la imagen. Tomando como referencia el nivel de agua en la piscina:
   a) ¿Cuál es la altura de la rampa más alta respecto del nivel de agua?
   b) Escribe la altura respecto del nivel del agua de los siguientes niños:
      Carlos _____________
      María _____________
   c) Si una persona está nadando a 2.5 m bajo el nivel del agua, ¿cómo se expresa esa altura?

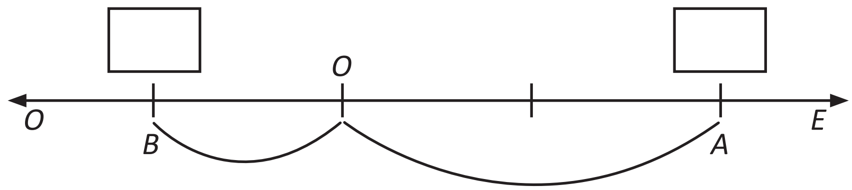


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.3 Diferencia de una cantidad respecto a otra cantidad de referencia

1. Expresa las siguientes temperaturas con el signo positivo o negativo según corresponda.
   a) 15° C por encima de los 0° C b) 3° C por debajo de 0°C c) 15.6° C por encima de los 0° C
   d) 9.4° C por debajo de 0° C e) 1° C por debajo de los 0° C f) 12.25° C por encima de los 0° C

2. Si la carretera se prolonga hacia el este, la dirección es positiva (+) y si se prolonga hacia el oeste, la dirección es negativa (–). Si el punto de referencia es O:



   a) ¿Cómo se expresa la posición del punto **A** que está **12 km** al este del punto O?
   b) ¿Y el punto **B** que se ubica **6 km** al oeste?
   c) Si otro punto **C** se encuentra a **–3.6 km**, ¿en qué dirección está ubicado C respecto de O y a qué distancia?

Para representar la diferencia de cantidades mayores o menores respecto a una cantidad de referencia, se utilizan números positivos o negativos.

Por ejemplo: 10 más que la cantidad de referencia, se expresa **+10.**
3 menos que la cantidad de referencia, se expresa **–3.**

1. Expresa con un número positivo o negativo cada diferencia respecto a la cantidad de referencia:

   a) 8 lb más del "peso ideal" b) 3 kg menos del "peso permitido"

   c) 10 cm más de la "altura permitida" d) 5 km/h más de la "velocidad establecida"

2. Una empresa ensambladora que fabrica televisores, se ha establecido como meta ensamblar 200 televisores cada día. Tomando como positivos los datos que sobrepasan la meta, completa la siguiente tabla:

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
Número de televisores	199	201	197	200	205
Diferencia con la meta			–3		

3. Carlos se ha establecido como meta anotar 3 goles en cada partido del torneo relámpago que habrá en su escuela, y anota las diferencias con la meta establecida. Completa la tabla.

	Juego 1	Juego 2	Juego 3	Juego 4	Juego 5
Número de goles	2	5	1	0	3
Diferencia con la meta					

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.4 Recta numérica

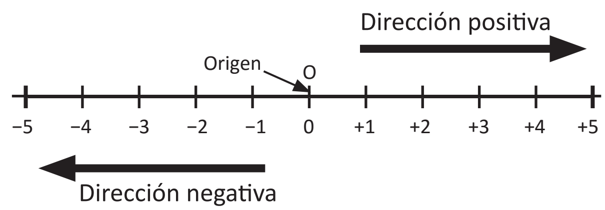
1. Se definen como positivos los pasos hacia la derecha a partir de mi posición actual y negativos los pasos a la izquierda. ¿Cómo se expresan los siguientes movimientos?

a) 5 pasos a la derecha b) 3 pasos a la izquierda c) 6 pasos a la izquierda d) No dar pasos

2. Marcos se ha establecido como meta ahorrar 10 centavos (ctvs) de dólar cada día que vaya a la escuela y ha anotado la diferencia con la meta en una tabla. Ayuda a Marcos a completar la tabla.

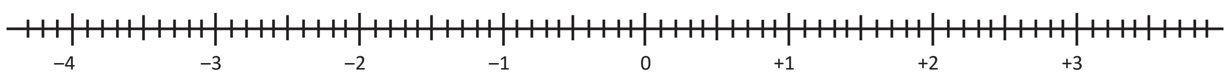
	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
Centavos ahorrados	15 ctvs	5 ctvs	10 ctvs	20 ctvs	8 ctvs
Diferencia con la meta	+5 ctvs				

- En la recta numérica, los números negativos se ubican a la izquierda de cero y los positivos a la derecha de cero.
- El punto que corresponde al cero se llama punto de origen y se representa con la letra O.
- La dirección hacia la derecha se llama dirección positiva.
- La dirección hacia la izquierda se llama dirección negativa.

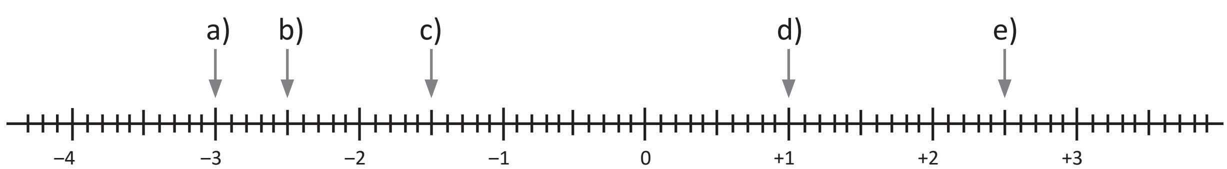


1. Ubica los siguientes números en la recta numérica y señala el lugar que le corresponde.

a) −1.2 b) −2.5 c) +3 d) +2.5

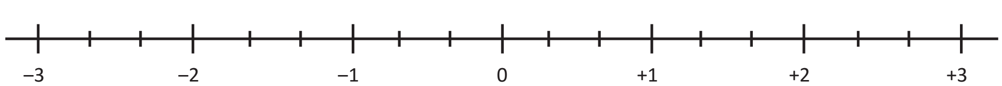


2. Identifica y escribe los números señalados por cada flecha.



3. En la siguiente recta numérica, cada unidad está dividida en tres partes iguales. Ubica en la recta los siguientes números:

a) $-\frac{2}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $+\frac{3}{3}$ d) $+\frac{4}{3}$



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.1 Comparación de números positivos y negativos

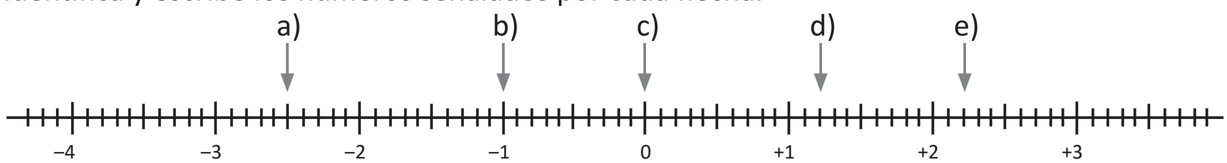
R

1. En la tabla se muestra el consumo en kilovatios de una familia salvadoreña en los últimos 6 meses del año pasado. Como condición, una familia debe consumir 200 kwh o menos para mantener el subsidio del gas propano; completa la tabla con el número de kwh que sobrepasan la condición o faltan para alcanzarla.

Mes	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
kwh por mes	125	150	210	200	185	225
Diferencia						

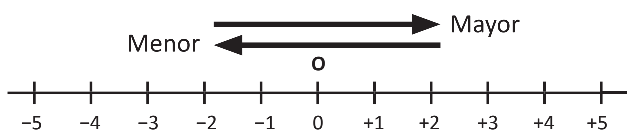
2. Ubica los siguientes números en la recta numérica y señala el lugar que les corresponde.
   a) −4 b) −2.5 c) −0.5 d) +1.5

3. Identifica y escribe los números señalados por cada flecha.



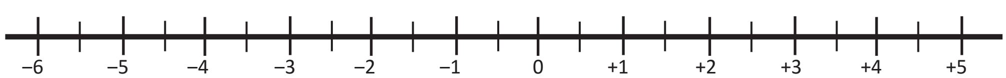
C

Conforme se avanza a la derecha en la recta, los números son mayores y conforme se avanza hacia la izquierda los números son menores.



Según lo anterior, −3 se encuentra más a la derecha que −5 en la recta, por tanto, la relación de orden entre −3 y −5 se expresa: −5 < −3 o −3 > −5.

1. Coloca en la recta numérica los siguientes números: +2.5, +3, 0, −2.5, −3, −1, −1.5, −0.5, +1.5 y +2.



2. Ordena los números de mayor a menor.
   a) +12 b) −6 c) −10 d) +3 e) 0 f) +2

3. Compara los siguientes números con los signos > y <. Apóyate en la recta numérica.
   a) −5, −8 b) +5, +8 c) 0, +5, −4 d) $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$

4. En cada literal, ¿qué número es el mayor?
   a) −1, −1.2 b) $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{3}$ c) $-\frac{3}{5}$, −0.6

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.2 Valor absoluto

1. Ubica los siguientes números en la recta numérica y señala el lugar que les corresponde.
   a) +1.6 b) −1.6 c) +3.2 d) −2.8

2. Compara los siguientes números con los signos > y <.
   a) −7, −3 b) +6, −2 c) −3, +2, 0 d) $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}$

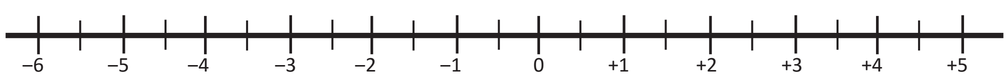
Tomando como punto de referencia a "0", a la distancia que hay entre 0 y otro número se le llama valor absoluto. Y se expresa mediante el símbolo | |. Por ejemplo:

|−5| = 5 significa que el valor absoluto de –5 es 5 (la distancia entre 0 y –5 es 5).
|+2| = 2 significa que el valor absoluto de +2 es 2 (la distancia entre 0 y +2 es 2).
|−2| = 2 significa que el valor absoluto de –2 es 2 (la distancia entre 0 y –2 es 2).

Se observa que |−2| = |+2| = 2. La distancia entre +2 y 0 es la misma que la distancia entre −2 y 0.
Expresiones como|−2| = 2 se leen "el valor absoluto de menos dos es igual a dos".

A los pares de números que tienen signos distintos e igual valor absoluto se les conoce como **números opuestos**.

1. Utilizando la recta numérica, encuentra el valor absoluto de los siguientes números y responde cuáles de ellos son números opuestos.
   a) |−4| b) |+3| c) |−3| d) |−4.5|



2. Escribe el valor absoluto de los siguientes números:
   a) −12 b) +3 c) $+\frac{3}{5}$ d) $-\frac{1}{5}$

3. Para los siguientes literales, encierra las parejas de números opuestos. Apóyate en la recta numérica.
   a) −1, +1 b) −4.5, +4.5 c) −3, +3 d) −3, +2

4. Une con una flecha las parejas de números opuestos.
   +2, $-\frac{1}{3}$, 0, $+\frac{3}{4}$, +3, −2, +0.3, $-\frac{1}{4}$, +5, $-\frac{3}{4}$, −0.3, −0.2

5. Escribe falso (F) o verdadero (V) en los siguientes literales.
   a) |−6| = |+6| _____ b) |−5| > 0 _____

   c) 0 es mayor que todo número positivo _____ d) −10 y +10 tienen la misma distancia respecto de 0 _____

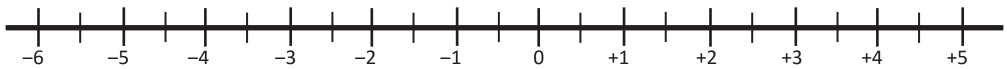
   e) $+\frac{1}{2}$ y −0.5 tienen la misma distancia respecto de 0 _____ f) |+4| > |−4| _____

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.3 Orden de los números negativos y su valor absoluto

1. Compara los siguientes números con los signos > y <. Apóyate en la recta numérica.

a) $+2, -3$ b) $-2, -3$ c) $0, -1, -4$ d) $-1.5, -2.5$



2. Escribe, utilizando la recta numérica, el valor absoluto de los siguientes números:

a) -4 b) $+3$ c) -3 d) -4.5

3. En cada situación escribe falso (F) o verdadero (V) según corresponda.

a) $|+2| > |-2|$ _____ b) $|+2.5| > |+3|$ _____ c) $|+4| < |-5|$ _____

d) $|+1| < |+3|$ _____ e) $|+\frac{1}{2}| < |+\frac{1}{3}|$ _____ f) $|-0.8| < |-0.5|$ _____

Al comparar números negativos: el número que tiene mayor valor absoluto es el menor de los dos números.

1. Utilizando el valor absoluto y los signos < o >, expresa el mayor y el menor de los siguientes números:

a) $-6, -4$ b) $-1, -3$ c) $-0.5, -1.5$ d) $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$

2. Utiliza el valor absoluto y los signos < o > para comparar las siguientes listas de números:

a) $-4, -2, -5$ b) $-6, -\frac{1}{3}, -2$ c) $-0.2, -0.02, -0.002$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.4 Desplazamientos en la recta

R

1. Escribe el valor absoluto de los siguientes números.

a) -9 b) -18 c) $+\frac{1}{4}$ d) -0.75

2. Utilizando valor absoluto, encuentra el mayor y menor de los siguientes números, expresando con <
o > según corresponda.

a) -6_____-4 b) -1_____ -6

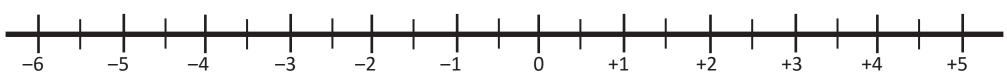
c) -0.2 _____ -0.4 d) $-\frac{1}{2}$_____ $-\frac{1}{3}$

C

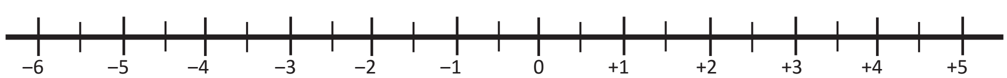
Utilizando las posiciones de los números y desplazamientos a la derecha o a la izquierda en la recta numérica, se pueden encontrar números mayores o menores que un número dado.

1. Encuentra el número que es 7 unidades menor que +3, utilizando la recta numérica.

2. Encuentra el número que es 8 unidades mayor que –5, utilizando la recta numérica.



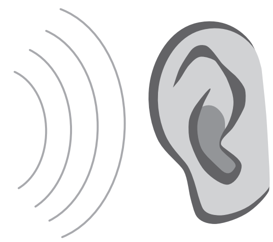
3. Responde utilizando la recta numérica.
   a) ¿Cuántas unidades es mayor +4 con respecto a –3?
   b) ¿Cuántas unidades es menor –5 con respecto a –3?
   c) ¿Cuántas unidades es mayor –1 con respecto a –3?



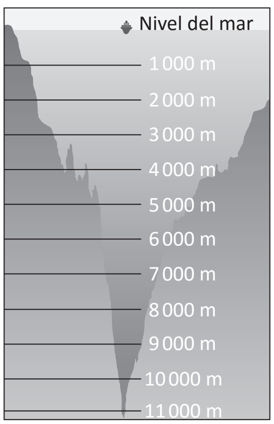
4. Responde sin utilizar la recta numérica.
   a) ¿Cuántas unidades es mayor +16 con respecto a +3?
   b) ¿Cuántas unidades es menor –16 con respecto a –3?

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Problemas de aplicación



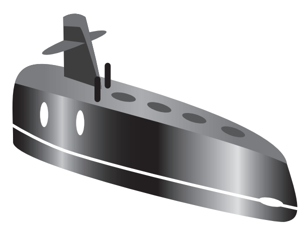
1. El límite de percepción del sonido por el oído humano se ubica alrededor de los 0 decibeles. Por debajo de ello, no significa que el ruido no exista, solo que una persona no está en condiciones de captarlo.
   Microsoft se encargó de crear una cámara anecoica capaz de absorber la totalidad del sonido, absorbiendo las inflexiones de las ondas acústicas o electromagnéticas. La cámara está ubicada en el Edificio 87, en la sede de la empresa en Redmond, EE.UU., es utilizada para probar los nuevos equipos en desarrollo. Además, en 2015, se estableció allí el nuevo récord mundial de silencio, con 20.6 decibeles bajo los 0 decibeles. Representa con un número positivo o negativo según sea el caso la capacidad de absorción del sonido de la cámara.



2. La fosa de las Marianas es la más profunda fosa oceánica conocida y el lugar más profundo de la corteza terrestre. Se localiza en el fondo del océano Pacífico noroccidental, al sureste de las islas Marianas, cerca de Guam. La fosa tiene una profundidad de 11 km bajo el suelo oceánico.

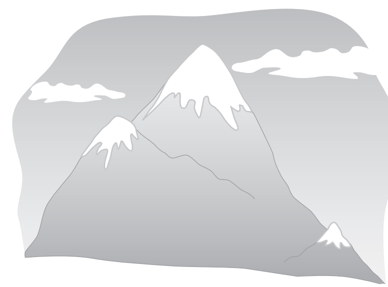
   Tomando como punto de referencia el suelo oceánico, representa con un número positivo o negativo según sea el caso, la profundidad de la fosa.

3. El submarino K-278 Komsomolets en 1985 alcanzó el récord mundial de inmersión, hasta 1 027 metros, se hundió tras un incendio que causó el apagado de emergencia del reactor. Representa con un número positivo o negativo su capacidad de inmersión.



4. El Monte Everest es una montaña que forma parte de la cordillera del Himalaya, situada en el sureste asiático, entre el subcontinente indio y el resto de Asia. Asentada sobre Nepal y el Tíbet (China), se eleva aproximadamente a 8 848 metros sobre el nivel del mar y exhibe una forma semejante a la de una pirámide de tres caras. Su cumbre o cima consiste en una capa de nieve que puede reducirse o aumentar, su temperatura varía con las temporadas; en enero puede llegar a los 36 grados centígrados bajo cero, mientras que en julio, en pleno verano, alcanza alrededor de 19 grados centígrados bajo cero. A partir de la información anterior representa con números positivos o negativos según sea el caso, las siguientes mediciones:

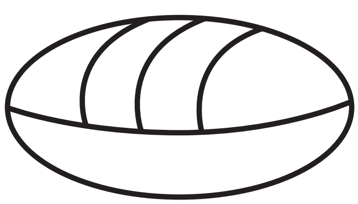
   a) La altura del Monte Everest con respecto al nivel del mar.
   b) La temperatura de la cima del Monte Everest en enero.
   c) La temperatura de la cima del Monte Everest en julio.



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2 Unidad

Suma y resta de números positivos, negativos y el cero



La figura es una concha que para los mayas simbolizaba el número cero.

El primer matemático que estableció las propiedades y las reglas para sumar y restar números negativos fue el matemático hindú Brahmagupta; otro de sus aportes fue la inclusión del cero como número y la fundamentación de su existencia y uso; sin embargo, otras culturas como la maya habían descubierto y usado con anterioridad el cero en su sistema numérico, esto aproximadamente en el año 36 a.C.

Las reglas para sumar y restar números negativos estaban fundamentadas en las actividades de comercio referidas a deudas y créditos, y eran bastante acertadas respecto a las que conocemos hoy en día, dos deudas que se suman dan una deuda más grande, una deuda que tiene un aporte se vuelve más pequeña. Este tipo de operaciones son una parte básica para el trabajo con ecuaciones, expresiones algebraicas, entre otros, este conocimiento se puede aplicar para sumar cargas eléctricas, determinar el sentido de un giro, calcular temperaturas, etc.

Se estudiará cómo realizar operaciones de suma de números con igual signo, números con diferente signo, propiedades de la suma, se introducirá la resta como una suma y se resolverán operaciones combinadas.

1.1 Suma de números con igual signo

Para sumar dos números que tienen el mismo signo, se escribe ese signo y se suman los valores absolutos.

Por ejemplo, las sumas (+5) + (+3) y (–5) + (–3) se calculan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}&(+5) + (+3)\\&(+5) + (+3) = +(5 + 3)\\&\qquad\qquad\quad = +8\end{aligned}\qquad\qquad\begin{aligned}&(-5) + (-3)\\&(-5) + (-3) = -(5 + 3)\\&\qquad\qquad\quad = -8\end{aligned}$$

Calcula las siguientes sumas:

a) (+2) + (+3) b) (–2) + (–4) c) (–6) + (–3) d) (–3) + (–4)

e) (+3) + (+8) f) (–4) + (–9) g) (–8) + (–5) h) (–6) + (–7)

i) (+21) + (+7) j) (–6) + (–24) k) (+32) + (+8) l) (–12) + (–24)

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.2 Suma de números con diferente signo

R Calcula las siguientes sumas:

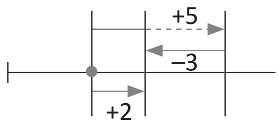
a) (+2) + (+3)   b) (–4) + (–3)   c) (–3) + (–6)   d) (–8) + (–7)

C Para sumar dos números que tienen diferente signo y valor absoluto:

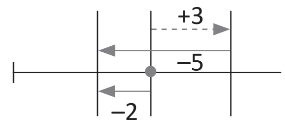
1. Se escribe el signo del número con mayor valor absoluto.
2. Se restan los valores absolutos, restando el menor del mayor.

Por ejemplo:

a) (+5) + (–3) = +(5 – 3)
= +2

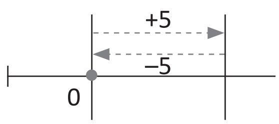


b) (+3) + (–5) = –(5 – 3)
= –2



La suma de dos números opuestos es 0. Por ejemplo:

(+5) + (–5) = 0



Calcula las siguientes sumas:

a) (+6) + (–2)   b) (–6) + (+2)   c) (+3) + (–5)   d) (–3) + (+5)

e) (–5) + (+7)   f) (+5) + (–7)   g) (–8) + (+4)   h) (+8) + (–4)

i) (+12) + (–9)   j) (+7) + (–13)   k) (+9) + (–9)   l) (–13) + (+13)

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.3 Sumas que incluyen cero

R Calcula las siguientes sumas:

a) (–5) + (–4)   b) (–2) + (–4)   c) (+3) + (+5)   d) (–9) + (–2)

e) (+3) + (–6)   f) (–4) + (+7)   g) (+7) + (–4)   h) (–8) + (+4)

i) (+16) + (–8)   j) (+11) + (–13)   k) (–15) + (+7)   l) (–30) + (+30)

C En las sumas, en las que interviene el cero, se presentan 2 casos:

1. Si se suma cero a un número, el resultado es el mismo número.
   Por ejemplo: (–3) + 0 = –3

2. Si se suma un número al cero el resultado es el número.
   Por ejemplo: 0 + (–4) = –4

Calcula las siguientes sumas:

a) (+4) + 0   b) (–5) + 0   c) 0 + (+6)   d) 0 + (–3)

e) 0 + (+18)   f) 0 + (–20)   g) (+25) + 0   h) 0 + (–27)

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.4 Suma con números decimales o fracciones positivas y negativas

R Calcula las siguientes sumas:

a) $(+4) + (-2)$ b) $(+6) + (-8)$ c) $(-3) + (+9)$ d) $(-7) + (+4)$

e) $(+10) + (-1)$ f) $(-12) + (+3)$ g) $0 + (-3)$ h) $(-10) + 0$

C Las reglas para realizar la suma de dos números positivos o negativos que son decimales o fracciones son las mismas que se establecieron en las tres clases anteriores.

1. Para sumar dos números que tienen el mismo signo, se escribe ese signo y se suman los valores absolutos.

2. Para sumar dos números que tienen diferente signo y valor absoluto, se escribe el signo del número con mayor valor absoluto y se restan los valores absolutos, restando el menor del mayor. En caso de que los números sean opuestos la suma es cero.

3. Si se suma cero a un número el resultado es el número o si se suma un número al cero el resultado es el número.

   Por ejemplo:

a) $(-2.5) + (-3.4) = -(2.5 + 3.4)$
$= -5.9$

b) $\left(+\frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right) = +\left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\right)$
$= +\frac{1}{5}$

Calcula las siguientes sumas:

a) $(+0.1) + (-0.2)$ b) $(+0.4) + (-0.3)$ c) $(-0.5) + (-0.3)$ d) $(-0.5) + (-0.2)$

e) $\left(+\frac{2}{5}\right) + \left(+\frac{1}{5}\right)$ f) $\left(+\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)$ g) $\left(-\frac{3}{7}\right) + \left(-\frac{2}{7}\right)$ h) $\left(-\frac{2}{5}\right) + \left(+\frac{1}{5}\right)$

i) $0 + (+3.2)$ j) $(-2.3) + 0$ k) $0 + \left(+\frac{5}{7}\right)$ l) $\left(-\frac{2}{3}\right) + 0$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.5 Propiedad conmutativa y asociativa de la suma

R Realiza las siguientes sumas:

a) (–3) + 0

b) 0 + (–8)

c) (–0.4) + (–0.3)

d) (+0.2) + (–0.1)

e) (–0.9) + (+0.3)

f) $\left(+\frac{1}{7}\right) + \left(-\frac{6}{7}\right)$

g) $\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)$

h) $\left(-\frac{3}{7}\right) + 0$

C La suma de dos números positivos o negativos no depende del orden de los sumandos. A esto se le llama **Propiedad conmutativa**.

$$a + b = b + a$$

La suma de varios números positivos o negativos no depende de la forma en que se asocian. A esto se le llama **Propiedad asociativa**.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Cuando en una operación ya se ha utilizado paréntesis, y se requiere utilizar otro signo de agrupación se utilizan los corchetes.

Para las siguientes sumas cambia el orden de los sumandos aplicando la propiedad conmutativa y asociativa y luego realiza el cálculo.

a) (+7) + (–4) + (+1) + (–3)

b) (+4) + (–6) + (+5) + (–2)

c) (–2) + (+3) + (+1) + (–4)

d) (+7) + (–4) + (–3) + (+5)

e) (–0.4) + (+0.3) + (–0.2) + (+0.1)

f) $\left(-\frac{2}{9}\right) + \left(-\frac{5}{9}\right) + \left(+\frac{4}{9}\right) + \left(-\frac{1}{9}\right)$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.6 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Realizo sumas como a) (+4) + (+3) b) (–2) + (–3) c) (+0.4) + (+0.3) d) (–0.5) + (–0.2) e) $\left(+\frac{1}{5}\right)+\left(+\frac{3}{5}\right)$ f) $\left(-\frac{2}{7}\right)+\left(-\frac{3}{7}\right)$				
2. Realizo sumas como a) (–5) + (+2) b) (+4) + (–7) c) (+0.4) + (–0.5) d) $\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(+\frac{3}{5}\right)$				
3. Cambio el orden de los términos en una suma aplicando la propiedad conmutativa y asociativa para facilitar la realización del cálculo. a) (+4) + (–2) + (+4) + (–5) b) (–0.3) + (+0.2) + (–0.5) + (+0.4) c) $\left(+\frac{1}{7}\right)+\left(-\frac{2}{7}\right)+\left(+\frac{3}{7}\right)+\left(-\frac{4}{7}\right)$				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.1 Resta de un número positivo o negativo

R

1. Calcula las siguientes sumas:

a) $(-0.8) + (-0.1)$ b) $\left(+\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{2}{5}\right)$ c) $(+0.2) + (-0.6)$ d) $\left(-\frac{3}{8}\right) + 0$

2. Para las siguientes sumas cambia el orden de los sumandos aplicando la propiedad conmutativa y asociativa y luego realiza el cálculo.

a) $(+2) + (-5) + (-4) + (+3)$ b) $(-0.2) + (+0.3) + (+0.6) + (-0.5)$ c) $\left(-\frac{1}{7}\right) + \left(+\frac{4}{7}\right) + \left(-\frac{3}{7}\right) + \left(-\frac{2}{7}\right)$

C

Restar un número es igual a sumar el opuesto del mismo número.

Realiza las siguientes restas:

a) $(+3) - (+2)$ b) $(+5) - (-3)$ c) $(-2) - (+4)$ d) $(+6) - (+8)$

e) $(+2) - (-1)$ f) $(+4) - (-5)$ g) $(-3) - (-5)$ h) $(-8) - (-4)$

i) $(-0.3) - (-0.2)$ j) $(+0.3) - (-0.4)$ k) $\left(-\frac{1}{5}\right) - \left(-\frac{2}{5}\right)$ l) $\left(+\frac{1}{7}\right) - \left(+\frac{4}{7}\right)$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.2 Restas que incluyen el cero

R

1. Para las siguientes sumas cambia el orden de los sumandos aplicando la propiedad conmutativa y asociativa y luego realiza el cálculo.

a) $(+1) + (-3) + (-4) + (+7)$ b) $(-5) + (+3) + (+4) + (-2)$ c) $(+7) + (-4) + (+2) + (-3)$

d) $(-3) + (+2) + (-6) + (+5)$ e) $(-0.1) + (+0.4) + (+0.3) + (-0.6)$ f) $\left(-\frac{2}{5}\right) + \left(+\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right)$

2. Realiza las siguientes restas:

a) $(+3) - (-2)$ b) $(+3) - (+7)$ c) $(-4) - (+2)$ d) $(+8) - (-16)$

e) $(-9) - (-4)$ f) $(-0.7) - (-0.4)$ g) $\left(-\frac{3}{5}\right) - \left(+\frac{1}{5}\right)$ h) $\left(-\frac{3}{7}\right) - \left(-\frac{1}{7}\right)$

C

En las restas que interviene el cero, se presentan 2 casos:

1. Si se resta un número del cero, la diferencia es el opuesto del sustraendo.
   Por ejemplo: $0 - (+4) = -4$

2. Si se resta cero de un número, la diferencia es el minuendo.
   Por ejemplo: $(-4) - 0 = -4$

Realiza las siguientes restas:

a) $(+5) - 0$ b) $(-10) - 0$ c) $0 - (+5)$ d) $0 - (-2)$

e) $0 - (-0.5)$ f) $0 - (+0.8)$ g) $0 - \left(+\frac{1}{3}\right)$ h) $0 - \left(-\frac{2}{3}\right)$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.1 Suma y restas combinadas de números positivos y negativos, parte 1

R Realiza las siguientes restas:

a) (–3) – (+4) b) (–3) – (–8) c) (+5) – (–3) d) (–8) – (–2)

e) (+0.4) – (–0.2) f) $\left(-\frac{3}{5}\right)-\left(-\frac{4}{5}\right)$ g) (–80) – 0 h) $0-\left(-\frac{17}{25}\right)$

C En general, las operaciones que combinan suma y resta de números positivos y negativos, omitiendo los paréntesis de los números que intervienen en la operación, se pueden expresar como una suma de números positivos y negativos.

Así la expresión 5 – 6 + 8 – 4 ... ① se puede expresar como (+5) + (–6) + (+8) + (–4) ... ②

En la operación 5 – 6 + 8 – 4 los números +5, –6, +8 y – 4 se les llama **términos**.

Se debe observar que en ① se omiten los paréntesis y los signos + que denotan la adición en ②, y también que en el primer término cuando es positivo no se escribe el signo. A la acción de omitir la escritura de los paréntesis comúnmente se le llama **suprimir los paréntesis,** y se puede hacer siempre y cuando sea un signo + el que antecede a los paréntesis, en caso contrario debe cambiarse la resta a suma, según la regla trabajada en las 2 clases anteriores.

1. Representa las siguientes operaciones en la forma ① e identifica los términos.

a) (–3) + (+2) – (+7) b) (–8) – (–6) – (–5) – (+1)

2. Representa las siguientes operaciones en la forma ② e identifica los términos.

a) 5 – 2 – 3 b) –4 – 5 + 3

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.2 Sumas y restas combinadas de números positivos y negativos, parte 2

R

1. Realiza las siguientes restas:

a) $(+56) - 0$ b) $(-1.8) - 0$ c) $0 - \left(+\frac{3}{4}\right)$ d) $0 - \left(-\frac{2}{3}\right)$

2. Representa las siguientes operaciones en la forma ① de la página anterior e identifica los términos.

a) $(-3) - (-8) - (+4) + (+6)$ b) $(-10) - (+32) - (-8) - (+15)$

3. Representa las siguientes operaciones en la forma ② de la página anterior e identifica los términos.

a) $2 - 1 - 4 - 5$ b) $-3 + 4 - 2 + 6$

C

Para realizar una operación que combina suma y resta de números positivos y negativos sin paréntesis en los términos, se aplican las propiedades conmutativa y asociativa de la suma; se asocian los números que se están sumando ◯ y los que se están restando ⬭, luego se realizan los cálculos.

$$\begin{aligned} 9 - 6 + 7 - 8 &= 9 + 7 - 6 - 8 \\ &= 16 - 14 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Realiza las siguientes operaciones:

a) $-3 + 2 - 4$ b) $-1 + 5 - 2$ c) $5 + 2 - 3 + 1$ d) $5 + 1 - 3 - 2$

e) $-4 - 1 - 2 + 3$ f) $-2 - 3 + 4 - 1$ g) $0.7 - 0.3 - 0.5$ h) $-\frac{2}{7} - \frac{1}{7} - \frac{3}{7} + \frac{4}{7}$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.3 Sumas y restas combinadas de números positivos y negativos, parte 3

R 1. Representa las siguientes operaciones en la forma ① e identifica los términos.

a) $(+5) - (-2) - (+8) + (-4)$

b) $(-3\ ) + (+2) - (-1) + (-5) - (+7)$

2. Representa las siguientes operaciones en la forma ② e identifica los términos.

a) $7 + 1 - 4 + 2$

b) $-2 - 3 + 5 + 4$

3. Realiza las siguientes operaciones:

a) $3 - 2 + 4 - 6$

b) $2 - 3 + 5 - 4$

c) $0.2 - 0.1 + 0.3 - 0.4$

d) $\frac{1}{9} - \frac{3}{9} + \frac{2}{9} - \frac{4}{9}$

C Cuando hay paréntesis en la operación, primero se deben suprimir los paréntesis y luego realizar los cálculos. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 5 - 8 + (-4) - (-3) &= 5 - 8 + (-4) + (+3) && \text{convirtiendo la resta en la suma del número opuesto de } -3, \\ &= 5 - 8 - 4 + 3 && \text{suprimiendo los paréntesis,} \\ &= 5 - 8 + 3 - 4 && \text{propiedad conmutativa y luego asociativa.} \\ &= 5 + 3 - 8 - 4 \\ &= 8 - 12 \\ &= -4 \end{aligned}$$

Efectúa las siguientes sumas y restas combinadas suprimiendo los paréntesis.

a) $3 + (-5) - (-2)$

b) $5 + (-6) - (-1)$

c) $-3 - (-6) + (-4) + 2$

d) $3 - 2 - (-5) - 1$

e) $-2 + 0 - (-6) + 1$

f) $-3 - 4 - (-2) - 0$

g) $0.5 + (-0.2) - (-0.3)$

h) $\frac{1}{5} - \left(-\frac{2}{5}\right) - \frac{3}{5}$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.4 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Realizo restas como: a) (+5) – (+3) b) (+3) – (–6) c) (–0.1) – (+0.5) d) $\left(-\frac{1}{5}\right)-\left(+\frac{2}{5}\right)$				
2. Realizo restas como a) (+4) – 0 b) 0 – (+8) c) (–0.9) – 0 d) 0 – (–0.7) e) $\left(+\frac{1}{2}\right)-0$ f) $0-\left(-\frac{5}{8}\right)$				
3. • Represento las operaciones como las siguientes en la forma 1 e identifico los términos. a) (–3) + (+5) + (–2) b) (+0.2) – (+0.3) – (–0.4) • Represento las operaciones como las siguientes en la forma 2 e identifico los términos. a) 4 + 3 – 1 b) – 1 + 5 – 7				
4. Realizo operaciones como las siguientes: a) –5 + 2 – 4 + 6 b) 0.6 – 0.2 + 0.1 – 0.4 c) $\frac{1}{11}-\frac{4}{11}+\frac{6}{11}+\frac{2}{11}$				
5. Realizo operaciones como las siguientes: a) –4 + 6 – 5 b) 3 + (–2) – (–4)				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Problemas de aplicación

1. La clase de submarinos Akula (tiburón en ruso), desarrollada por la Unión Soviética en los años 70, sigue siendo hasta hoy la de mayor tamaño en el mundo y así consta en el libro Guiness de los récords. Actualmente existen dos submarinos de clase Akula en servicio activo en la Flota del Norte de la Armada rusa para los que su capacidad de inmersión es 550 metros. Para una práctica se tiene planificado que el Akula haga dos descensos en el mar, en el primero bajaría 330 metros y en el segundo 370 metros. Realiza lo que se te pide en cada uno de los siguientes literales:

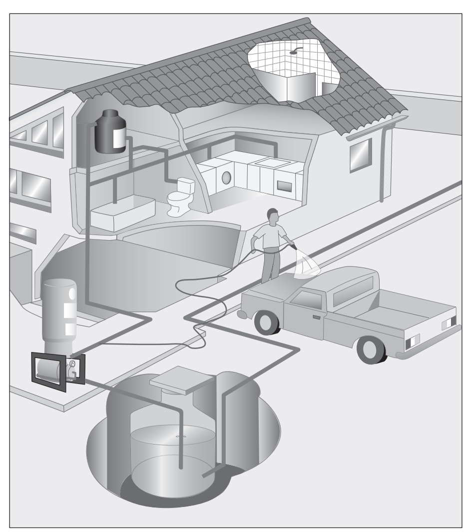
   a) Representa con un número negativo el primer descenso.
   b) Representa con un número negativo el segundo descenso.
   c) Expresa una operación con los números obtenidos en a) y b) y realízala para determinar si el Akula podría realizar esta práctica.

2. En aeronáutica, el techo de vuelo es la mayor altitud en la que el sistema de presurización de la cabina ya no puede mantener un nivel suficiente de oxígeno para los pasajeros y tripulantes, y donde la diferencia de presión es tan grande como para poner a gran presión la cabina presurizada de la aeronave. La mayoría de los aviones comerciales y de negocios (aviones de línea y jets privados) tienen un techo de vuelo de 12 800 metros. Supone que un avión comercial vuela 10 800 metros de altura, responde:

   a) ¿A qué altura se encuentra el avión con respecto al techo de vuelo? Plantea una operación y realízala para determinar la diferencia.
   b) Si se está formando una tormenta y el piloto desea variar su altura en +3 200 metros para evadirla, ¿podría efectivamente el piloto ejecutar esta maniobra? Si la respuesta es no, especifica la mayor variación en la altura que el piloto podría intentar realizar para evadir la tormenta.

3. Para obtener el agua de un tinaco que se encuentra bajo tierra se utiliza un sistema hidroneumático que sirve para elevar la presión de agua en una instalación hidráulica. El sistema básico consta de un tanque presurizado (acero o fibra de vidrio), una bomba, manómetro y un interruptor de presión. Si durante la mañana se utiliza el sistema 2 veces para sacar agua del tinaco, expresa con un número positivo o negativo con respecto a la cantidad de agua que tiene el tinaco la cantidad indicada en cada uno de los siguientes literales. Nota, considera que el tinaco está lleno.

   a) Los 25 litros de agua bombeados con la ayuda del sistema hidroneumático la primera vez.
   b) Los 33 litros de agua bombeados la segunda vez.
   c) La cantidad total de litros bombeados entre las dos veces que se usó el sistema.
   d) Con el dato obtenido en c) plantea una operación y realízala para calcular la capacidad máxima que tiene el tinaco, sabiendo que después del primer y segundo uso del sistema quedaban 142 litros.



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3 Unidad

Multiplicación y división de números positivos, negativos y el cero

El planteamiento formal de las reglas de multiplicación y división fue establecido por primera vez por el matemático Suizo Leonhard Euler, y la justificación de las reglas para la multiplicación fueron replanteadas por diferentes matemáticos como MacLaurin, Laplace, D'Alembert, Lacroix, Klein, y en el año 1985 la justificación se hizo a partir de patrones numéricos por Crowley y Dunn.

A partir de las reglas de la multiplicación de números negativos, se ha podido facilitar el trabajo algebraico y la modelación de situaciones del entorno, para solucionar problemas de la vida cotidiana.

Los contenidos que conocerás son la multiplicación de números con diferente signo, la multiplicación de un número negativo por otro negativo, las propiedades de la multiplicación, el concepto de potencia, y las operaciones con potencias; además de abordar las operaciones combinadas de las cuatro operaciones básicas con números positivos, negativos y el cero.

$(-4) \times (+3) = -12$

$(-4) \times (+2) = -8$

$(-4) \times (+1) = -4$

$(-4) \times 0 = 0$

$(-4) \times (-1) = \boxed{}$

$(-4) \times (-2) = \boxed{}$

$(-4) \times (-3) = \boxed{}$

Modelo de patrones numéricos de Crowley y Dunn.

$$1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$

El menor número que se puede expresar como suma de dos cubos de maneras diferentes es el 1 729. (Ramanujan, matemático hindú del siglo XX).

1.1 Multiplicación de números con diferente signo

Para multiplicar dos números con diferentes signos se realizan los pasos siguientes:

1. Se escribe el signo (–).
2. Se coloca el producto de los valores absolutos de los números.

Por ejemplo:

a) $(+2) \times (-3) = -(2 \times 3)$
$= -6$

b) $(-2) \times (+3) = -(2 \times 3)$
$= -6$

Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $(+2) \times (-3)$ b) $(-2) \times (+3)$ c) $(+4) \times (-3)$ d) $(-5) \times (+3)$

e) $(+6) \times (-2)$ f) $(-3) \times (+5)$ g) $(+6) \times (-7)$ h) $(-8) \times (+6)$

i) $(-6) \times (+1)$ j) $(-17) \times (+3)$ k) $(+5) \times (-5)$ l) $(-8) \times (+8)$

m) $(+0.2) \times (-3)$ n) $(-0.3) \times (+3)$ ñ) $(+0.4) \times (-0.3)$ o) $(-0.8) \times (+2)$

p) $\left(+\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{4}{5}\right)$ q) $\left(-\frac{3}{7}\right) \times \left(+\frac{5}{2}\right)$ r) $\left(-\frac{3}{4}\right) \times (+6)$ s) $\left(+\frac{2}{9}\right) \times \left(-\frac{9}{8}\right)$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.2 Multiplicación de números con igual signo

R Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $(+3) \times (-5)$　　b) $(-4) \times (+6)$　　c) $(+6) \times (-2)$　　d) $(-5) \times (+3)$

e) $(+2) \times (-0.4)$　　f) $(-0.3) \times (+0.7)$　　g) $\left(+\frac{3}{7}\right) \times \left(-\frac{3}{5}\right)$　　h) $(-6) \times \left(+\frac{2}{5}\right)$

C Para multiplicar dos números con igual signo se realizan los pasos siguientes:

1. Se escribe el signo (+).
2. Se coloca el producto de los valores absolutos de los números.

Al multiplicar un número negativo por cero el producto es cero.

Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $(+5) \times (+2)$　　b) $(-4) \times (-2)$　　c) $(+3) \times (+4)$　　d) $(-3) \times (-4)$

e) $(+8) \times (+5)$　　f) $(-7) \times (-6)$　　g) $(+0.6) \times (+0.3)$　　h) $\left(-\frac{5}{9}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right)$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.3 Multiplicaciones que incluyen –1, 0 y 1

R Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $(+7) \times (-9)$ b) $(-6) \times (+5)$ c) $(-3) \times (-8)$ d) $(-6) \times (-4)$

e) $(+0.5) \times (-0.3)$ f) $(-0.2) \times (+0.3)$ g) $(+0.6) \times (-0.4)$ h) $(-0.2) \times (+0.7)$

i) $\left(+\frac{1}{2}\right) \times (-9)$ j) $\left(+\frac{1}{3}\right) \times (-6)$ k) $(-5) \times \left(-\frac{4}{3}\right)$ l) $(-7) \times \left(-\frac{4}{7}\right)$

C Al multiplicar un número por –1, 0 y 1, se tendrá que

- $0 \times a = 0$
- $a \times 0 = 0$
- $1 \times a = a$
- $a \times 1 = a$
- $(-1) \times a = -a$
- $a \times (-1) = -a$

Donde a es cualquier número.

En la multiplicación, como en la suma y la resta, se puede omitir el signo + de los números positivos. También se puede omitir el paréntesis del primer número de la operación, aún cuando sea negativo.

Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) -1×9 b) $3 \times (-1)$ c) $-1 \times (-4)$ d) $-2 \times (-1)$

e) $0 \times (-5)$ f) 10×0 g) $1 \times (-12)$ h) -3×1

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.4 Propiedad conmutativa y asociativa de la multiplicación

R Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $-2 \times (-6)$ b) $-4 \times (-5)$ c) $-7 \times (-2)$ d) $-3 \times (-3)$

e) $-0.3 \times (-4)$ f) -0.4×0.2 g) $-\frac{3}{5} \times \left(-\frac{2}{7}\right)$ h) $-\frac{7}{5} \times \left(-\frac{3}{4}\right)$

i) -1×10 j) $4 \times (-1)$ k) -6×0 l) -4×1

C Al igual que la suma, la multiplicación también cumple con la "propiedad conmutativa" y la "propiedad asociativa".

De forma general:

- $a \times b = b \times a$
- $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

Las propiedades permiten calcular el producto de varios números en cualquier orden, aunque hayan números negativos incluidos en la multiplicación.

Utiliza la propiedad conmutativa y asociativa para facilitar el cálculo en las siguientes multiplicaciones:

a) $5 \times 3 \times (-2)$ b) $-7 \times 10 \times 5$ c) $25 \times 3 \times (-4)$

d) $-15 \times 3 \times 4$ e) $0.5 \times (-3) \times (-2)$ f) $-21 \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times \frac{2}{7}$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.5 Signo del producto según el número de factores de la multiplicación

R 1. Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $13 \times (-1)$ b) $-1 \times \left(-\frac{11}{15}\right)$ c) $-\frac{13}{2} \times 0$ d) $0 \times (-31.2)$ e) -0.3×1 f) $1 \times \left(-\frac{2}{5}\right)$

2. Utiliza la propiedad conmutativa y asociativa para facilitar el cálculo en las siguientes multiplicaciones:

a) $20 \times (-15) \times 5$ b) $2.5 \times 13 \times (-4)$ c) $-32 \times 10 \times \left(-\frac{3}{8}\right)$ d) $-55 \times \left(-\frac{4}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right)$

C Es importante destacar que

- Cuando hay una cantidad par de números negativos en la multiplicación, el signo del producto es (+).
- Cuando hay una cantidad impar de números negativos en la multiplicación, el signo del producto es (–).

Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $2 \times (-4) \times 3$ b) $-2 \times 3 \times (-2) \times (-1)$ c) $-5 \times 4 \times 10 \times (-3)$

d) $-10 \times (-3) \times (-2) \times (-5)$ e) $-3 \times 2 \times (-1) \times 3 \times (-10)$ f) $\frac{7}{3} \times (-6) \times \left(-\frac{5}{7}\right)$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.6 Potencia de un número

1. Utiliza la propiedad conmutativa y asociativa para facilitar el cálculo en las siguientes multiplicaciones:

a) $-5 \times 9 \times 2$ b) $4 \times (-7) \times 5$ c) $-54 \times (-5) \times \frac{1}{6}$ d) $-35 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{5}\right)$

2. Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $-5 \times (-3) \times (-2) \times (-4)$ b) $-7 \times 3 \times (-5) \times 2 \times (-4)$ c) $\frac{11}{15} \times (-5) \times \left(-\frac{3}{11}\right)$

Unidad 3

Cuando un número se multiplica por sí mismo 2 veces, se obtiene la potencia 2 del número, y cuando se multiplica 3 veces se obtiene la potencia 3 del número.

En las expresiones $(-4)^2$ y $(-4)^3$, el 2 y 3 se llaman exponentes y representan la cantidad de veces que aparece como factor el –4 en la multiplicación.

Por ejemplo:

$$(-4)^{3} = \overbrace{(-4) \times (-4) \times (-4)}^{\text{3 veces el factor } (-4)}$$

A la potencia 2 de un número se le llama potencia **cuadrada**, y a la potencia 3 se le llama potencia **cúbica**. Así, por ejemplo: $(-4)^2$ se lee "el cuadrado de menos cuatro" y $(-4)^3$ se lee "el cubo de menos cuatro".

1. Representa las siguientes multiplicaciones con potencias:

a) 6×6 b) $6 \times 6 \times 6$ c) $(-2) \times (-2) \times (-2)$ d) $-(2 \times 2)$

e) $\left(-\frac{1}{7}\right) \times \left(-\frac{1}{7}\right)$ f) $\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5}$ g) $(-0.9) \times (-0.9)$ h) $-(0.6 \times 0.6)$

2. Calcula las siguientes potencias:

a) $(-7)^2$ b) -7^2 c) $(-2)^3$ d) $(-3)^3$ e) $(-1)^3$

f) $(-0.4)^2$ g) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ h) $(3 \times 2)^2$ i) $(2 \times 5)^3$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.7 Multiplicaciones que incluyen potencias

R 1. Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $3 \times (-2) \times (-7)$

b) $-3 \times (-2) \times (-5) \times (-10)$

c) $-\frac{36}{17} \times \frac{17}{6} \times 8$

2. Representa las siguientes multiplicaciones con potencias:

a) $(-2) \times (-2)$

b) $(-2) \times (-2) \times (-2)$

c) $-\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)$

d) $-(30 \times 30)$

3. Calcula las siguientes potencias:

a) $(-10)^2$

b) -10^2

c) $(5 \times 4)^2$

d) $(3 \times 2)^3$

e) $\left(-\frac{7}{9}\right)^2$

f) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$

C

Para multiplicaciones que tienen al menos un número con potencia se tiene que hacer lo siguiente:

1. Calcular las potencias
2. Realizar la multiplicación

Por ejemplo: $(-3)^2 \times (-4) = 9 \times (-4)$
$= -36$

Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $2^3 \times 4$

b) $5 \times (-2)^2$

c) -3×2^3

d) $(-2)^3 \times 3$

e) $5^2 \times 2^2$

f) $2^3 \times (-3)^2$

g) $(-3)^2 \times 2^3$

h) $(-1)^3 \times (-2)^2$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.8 División de números enteros positivos, negativos y el cero

R 1. Representa las siguientes multiplicaciones con potencias:

a) $(-7) \times (-7)$ b) $-(5 \times 5)$ c) $\left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right)$ d) $\left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right)$

2. Calcula las siguientes potencias:

a) $(-6)^2$ b) -6^2 c) $(4 \times 2)^2$ d) $(5 \times 2)^3$ e) $\left(-\frac{9}{10}\right)^2$ f) $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$

3. Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $5 \times (-2)^2$ b) -3×2^3 c) $(-3)^2 \times 2^2$ d) $(-1)^2 \times (-2)^3$

C En la siguiente tabla se presenta el signo y el valor absoluto del cociente, dependiendo de los signos del dividendo y del divisor se tienen los siguientes casos:

Signo del dividendo y divisor	Signo del cociente	Valor absoluto del cociente
Igual	+	Cociente de los valores absolutos de los números
Diferente	–	

En la división se aplica la misma convención acerca del uso del signo + y los paréntesis como en la multiplicación.

Ejemplo:

a) $(+6) \div (+2) = +(6 \div 2)$
$= +3$
$= 3$

b) $(-6) \div (-2) = +(6 \div 2)$
$= +3$
$= 3$

c) $(-6) \div (+2) = -(6 \div 2)$
$= -3$

d) $(+6) \div (-2) = -(6 \div 2)$
$= -3$

Realiza las siguientes divisiones:

a) $27 \div (-3)$ b) $-15 \div 5$ c) $36 \div (-9)$

d) $-49 \div (-7)$ e) $0 \div (-10)$ f) $3 \div (-1)$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.9 Fracciones negativas

R 1. Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $2^3 \times (-6)$ b) $(-3)^2 \times 4$ c) $(-2)^3 \times (-5)^2$ d) $(-10)^3 \times (-3)^3$

2. Realiza las siguientes divisiones:

a) $9 \div (-3)$ b) $-42 \div 7$ c) $40 \div (-5)$ d) $-12 \div (-6)$ e) $-15 \div (-5)$

C

Para cualquier fracción que tenga el signo (–) en el numerador o denominador, se puede escribir el signo (–) antes de la fracción. Es decir:

$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$

Siempre que se tenga una fracción negativa se representa en la forma $-\frac{a}{b}$, donde a y b representan números positivos.

1. Expresa como una fracción negativa las siguientes divisiones:

a) $-7 \div 13$ b) $5 \div (-9)$ c) $-(12 \div 11)$

2. Representa las siguientes fracciones en la forma $-\frac{a}{b}$

a) $\frac{-2}{3}$ b) $\frac{1}{-4}$

3. Completa el recuadro en los siguientes literales:

a) $-\frac{4}{5} = \square \div 5 = 4 \div \square = -(4 \div 5)$ b) $-\frac{7}{8} = \square \div 8 = 7 \div \square = -(7 \div 8)$

c) $-\frac{9}{11} = \square \div 11 = 9 \div \square = -(9 \div 11)$ d) $-\frac{14}{13} = \square \div 13 = 14 \div \square = -(14 \div 13)$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.10 Recíproco de un número

R 1. Realiza las siguientes divisiones:

a) $-15 \div (-3)$ b) $-54 \div 6$ c) $12 \div (-3)$ d) $-100 \div (-10)$ e) $0 \div (-97)$

2. Expresa como una fracción negativa las siguientes divisiones:

a) $-4 \div 5$ b) $16 \div (-21)$ c) $-(19 \div 27)$

3. Representa las siguientes fracciones en la forma $-\frac{a}{b}$

a) $\frac{-5}{8}$ b) $\frac{16}{-7}$

4. Completa el recuadro en los siguientes literales:

a) $-\frac{8}{9} = \square \div 9 = 8 \div \square = -(8 \div 9)$ b) $-\frac{13}{19} = \square \div 19 = 13 \div \square = -(13 \div 19)$

c) $-\frac{22}{23} = \square \div 23 = 22 \div \square = -(22 \div 23)$ d) $-\frac{7}{29} = \square \div 29 = 7 \div \square = -(7 \div 29)$

C

Un número es el **recíproco** de otro número, cuando al multiplicarse ambos números el producto es 1.

Si a representa un número diferente de 0, el recíproco del número es $\frac{1}{a}$, porque $a \times \frac{1}{a} = 1$.

De igual manera, el recíproco de $\frac{1}{a}$ es a. En general el recíproco de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$.

Encuentra el recíproco de los siguientes números:

a) $\frac{3}{5}$ b) $-\frac{13}{8}$ c) $-\frac{1}{5}$ d) 3

e) -8 f) 0.2 g) -0.5 h) -0.25

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.11 Cálculo de una división como multiplicación

R 1. Expresa como una fracción negativa las siguientes divisiones:

a) $-5 \div 2$ b) $7 \div (-3)$ c) $-(8 \div 3)$

2. Representa las siguientes fracciones en la forma $-\frac{a}{b}$

a) $\frac{-11}{9}$ b) $\frac{23}{-30}$

3. Completa el recuadro en los siguientes literales:

a) $-\frac{5}{14} = \boxed{} \div 14 = 5 \div \boxed{} = -(5 \div 14)$ b) $-\frac{18}{13} = \boxed{} \div 13 = 18 \div \boxed{} = -(18 \div 13)$

4. Encuentra el recíproco de los siguientes números:

a) $\frac{3}{8}$ b) $-\frac{13}{15}$ c) $-\frac{1}{11}$ d) 10 e) -12 f) 0.3 g) -0.4

C Hacer la división de un número por otro, es equivalente a hacer la multiplicación del número por el recíproco del divisor en la división. Por tanto, para realizar una división se puede convertir en una multiplicación del dividendo por el recíproco del divisor.

Por ejemplo:

a) $12 \div (-3) = -(12 \div 3)$
$= -4$

b) $12 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -\left(\overset{4}{\cancel{12}} \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{3}}}\right)$
$= -4$

Realiza las siguientes divisiones convirtiéndolas en multiplicaciones:

a) $-20 \div 5$ b) $\frac{2}{3} \div \left(-\frac{7}{5}\right)$ c) $\frac{3}{7} \div \left(-\frac{9}{28}\right)$

d) $-\frac{4}{5} \div (-12)$ e) $-\frac{55}{3} \div \left(-\frac{11}{9}\right)$ f) $-15 \div \frac{3}{4}$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.12 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Realizo multiplicaciones como a) $5 \times (-6)$ b) -4×2 c) $-\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}$				
2. Realizo multiplicaciones como a) $-3 \times (-2)$ b) $-0.1 \times (-0.2)$ c) $-\frac{3}{5} \times \left(-\frac{4}{7}\right)$				
3. Realizo multiplicaciones como a) 4×1 b) 0×1.3 c) $\frac{2}{5} \times (-1)$				
4. Aplico la propiedad conmutativa y asociativa para facilitar el cálculo en multiplicaciones como a) $5 \times (-6) \times 4$ b) $-24 \times 10 \times \left(-\frac{1}{8}\right)$ c) $-4 \times \left(-\frac{7}{11}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right)$				
5. Determino el signo del producto según el número de factores en multiplicaciones como a) $-2 \times 2 \times 3 \times (-1)$ b) $\frac{5}{4} \times (-8) \times \left(-\frac{3}{5}\right)$				
6. Calculo potencias como a) $(-6)^2$ b) -6^2 c) $\left(-\frac{3}{3}\right)^3$ d) 0.1^2 e) $(2 \times 3)^2$				
7. Efectúo multiplicaciones como a) $2^2 \times 3^2$ b) $2^3 \times (-3)^2$ c) $(-1)^3 \times 2$ d) $(-3)^3 \times (-1)^2$				
8. Efectúo divisiones como a) $14 \div 2$ b) $-24 \div 3$ c) $18 \div (-2)$ d) $-30 \div (-5)$ e) $0 \div (-7)$				
9. Expreso como una fracción negativa las siguientes divisiones: a) $-2 \div 3$ b) $3 \div (-7)$ c) $-(2 \div 5)$				
10. Encuentro el recíproco de números como a) $\frac{4}{7}$ b) $-\frac{7}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) 2 e) -5 f) 0.25 g) -0.6				
11. Convierto divisiones en multiplicaciones como a) $-16 \div 4$ b) $\frac{2}{5} \div \left(-\frac{4}{15}\right)$ c) $-\frac{2}{3} \div (-8)$ d) $-10 \div \frac{2}{5}$				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.1 Operaciones con multiplicación y división

1. Encuentra el recíproco de los siguientes números:

a) $\frac{5}{7}$ b) $-\frac{2}{3}$ c) $-\frac{1}{5}$ d) 7 e) –8 f) 0.3 g) –0.2

2. Realiza las siguientes divisiones convirtiéndolas en multiplicaciones:

a) $-27 \div 9$ b) $\frac{8}{15} \div \left(-\frac{3}{2}\right)$ c) $-12 \div \frac{6}{5}$

Para realizar el cálculo de una operación que combina multiplicación y división, se debe plantear la operación solo con multiplicaciones, convirtiendo el divisor en su recíproco, luego se recomienda simplificar las fracciones que sean posibles antes de hacer la multiplicación, para facilitar el cálculo. Básicamente la operación se calcula de izquierda a derecha.

Por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
6 \div \left(-\frac{15}{7}\right) \times (-5) &= 6 \times \left(-\frac{7}{15}\right) \times (-5) \\
&= \left(\overset{2}{\cancel{6}} \times \frac{7}{\underset{\underset{1}{\cancel{5}}}{\cancel{15}}} \times \overset{1}{\cancel{5}}\right) \\
&= 2 \times 7 \times 1 \\
&= 14
\end{aligned}
$$

Realiza las siguientes operaciones que combinan multiplicación y división:

a) $-15 \div 5 \times 6$ b) $-\frac{25}{7} \div \frac{10}{7} \times \frac{2}{3}$ c) $\frac{12}{5} \times (-3) \div \frac{3}{2}$

d) $(-2)^2 \times (-1) \div 2$ e) $(-3)^3 \div 18 \times \left(-\frac{4}{5}\right)$ f) $(-6^2) \times \left(-\frac{2}{7}\right) \div 8$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.2 Operaciones combinadas

R

1. Realiza las siguientes divisiones convirtiéndolas en multiplicaciones:

a) $\frac{2}{3} \div \left(-\frac{4}{15}\right)$ b) $-\frac{27}{32} \div \left(-\frac{9}{8}\right)$ c) $-15 \div \frac{3}{4}$

2. Realiza las siguientes operaciones que combinan multiplicación y división:

a) $\frac{18}{7} \times \frac{9}{8} \div \left(-\frac{3}{4}\right)$ b) $\frac{15}{7} \div \left(-\frac{6}{11}\right) \times \frac{14}{5}$ c) $(-4)^2 \times (-2) \div 8$ d) $(-5^2) \times (-4) \div 10$

C

Para realizar operaciones con números positivos y negativos que combinan suma, resta, multiplicación, división o que incluye otra operación al interior de paréntesis (operaciones anidadas), se trabaja de igual forma como se hace con los números positivos. El orden del cálculo es:

1. Operaciones al interior de los paréntesis (si los hay)
2. Multiplicaciones y divisiones
3. Sumas y restas

Ejemplos:

a) $10 + 5 \times (-3) = 10 + (-15)$
$= 10 - 15$
$= -5$

b) $40 \div (-10 + 5) = 40 \div (-5)$
$= -8$

Realiza las siguientes operaciones:

a) $4 + 3 \times 2$ b) $-2 - 15 \div 3$ c) $2 \times (-3) - 1$ d) $-18 \div (-2) - 5$

e) $-3 \times 5 - 2 \times (-7)$ f) $15 \div 5 + (-24) \div 6$ g) $-35 \div 5 + 4 \times 3$ h) $3 \times (-2) - 48 \div 6$

i) $(9 - 6) \times (-4)$ j) $-7 \times (7 - 4)$ k) $(-5 - 3) \div 2$ l) $-35 \div (-3 - 2)$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.3 Operaciones combinadas que incluyen potencias

R 1. Realiza las siguientes operaciones que combinan multiplicación y división:

a) $\frac{7}{2} \div \left(-\frac{35}{26}\right) \times \left(-\frac{10}{9}\right)$ b) $-\frac{9}{14} \times \left(-\frac{7}{15}\right) \div \left(-\frac{4}{3}\right)$ c) $(-2^3) \div 4 \times (-2)^3$ d) $(-5)^2 \times (-2)^3 \div 20$

2. Realiza las siguientes operaciones:

a) $-8 - (-6) \times (-2)$ b) $3 + (-18) \div (-2)$ c) $(-6 - 3) \times (-8)$ d) $(-10 - 6) \div (-8)$

C

Cuando en la operación se incluyan potencias, operaciones anidadas, multiplicaciones o divisiones y sumas o restas, el orden para hacer los cálculos es:

1. Operaciones al interior de paréntesis (si los hay)
2. Potencias
3. Multiplicaciones y divisiones
4. Sumas y restas

Realiza las siguientes operaciones:

a) $8 + (-5) \times (-2)^2$ b) $25 - 5 \times (-3^2)$ c) $8^2 \div (-4) + 6$

d) $-2 \times (2 - 5)^3 + 4^2$ e) $10^2 + (-3)^3 \div (13 - 4)$ f) $(4 + 5)^2 - (-2)^2 \times (13 + 7)$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.4 Propiedad distributiva de la multiplicación

R Realiza las siguientes operaciones:

a) $-80 \div (-8) + (-10) \times (-2)$ b) $-6 \times (-5 - 15)$ c) $(-73 + 8) \div 13$

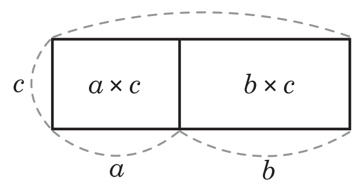
d) $-17 + 9^2 \div 3$ e) $-3 \times 10^3 + 100^2$ f) $-4 \times (40 - 45)^3 - 20^2$

C Para cualquier número a, b y c, se cumple que

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$$
$$c \times (a + b) = c \times a + c \times b$$

Al hecho anterior se le conoce como **propiedad distributiva**.

La propiedad distributiva se puede representar de manera gráfica a través de áreas:



Cuando se aplica la propiedad distributiva en la multiplicación $(a + b) \times c$ los paréntesis desaparecen obteniéndose $a \times c + b \times c$. A la acción de quitar los paréntesis a través de la aplicación de la propiedad distributiva también se le llama **suprimir paréntesis**.

Realiza las siguientes multiplicaciones aplicando la propiedad distributiva:

a) $(4 + 25) \times 2$ b) $-4 \times (40 + 2)$ c) $\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right) \times 15$ d) $-21 \times \left(\frac{5}{7} + \frac{1}{3}\right)$

e) $18 \times 2 + 12 \times 2$ f) $-3 \times 25 - 3 \times 15$ g) $61 \times (-4)$ h) 6×78

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.5 Conjuntos numéricos

R

1. Realiza las siguientes operaciones:

a) $-75 + 4 \times (-5)^2$

b) $7 + 4^2 \div 2$

c) $-10 \times (-2)^3 - 9^2$

2. Realiza las siguientes multiplicaciones aplicando la propiedad distributiva:

a) $(30 - 1) \times 7$

b) $-22 \times \left(-\frac{1}{2} + \frac{4}{11}\right)$

c) $-3 \times 25 + (-3) \times 15$

d) $5 \times (-68)$

e) $[(-20) + (-2)] \times 8$

f) $(-26) \times \left(-\frac{11}{13} - \frac{1}{2}\right)$

C

A un grupo de elementos, números u objetos se le llama **conjunto**, por ejemplo, al grupo de los números naturales se le llama **conjunto de los números naturales**. En general, a un conjunto de números se le llama conjunto numérico. En el conjunto de los números naturales no siempre se pueden hacer las operaciones resta y división, porque el resultado de ellas no necesariamente es un número natural. Por tanto, se hace necesario ampliar el conjunto de los números naturales.

De los conjuntos de números: **1) Naturales**, **2) Enteros** y **3) Números que se pueden expresar como fracción**, selecciona y escribe los conjuntos que permiten realizar la operación planteada en cada literal.

a) $15 + 4$

b) $9 - 19$

c) 0.9×2

d) $11 \div (-13)$

e) $16 \div 4$

f) $-13 + 13$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.6 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Realizo operaciones que combinan multiplicación y división como a) $-12 \div 6 \times (-4)$ b) $(-2)^3 \times (-3) \div (-6)$				
2. Realizo operaciones como a) $7 - 4 \times (-5)$ b) $5 \times (-2) - 16 \div 8$ c) $(-7 - 8) \div (-5)$				
3. Realizo operaciones como a) $5 - 4 \times (-3^2)$ b) $4^2 + (-2)^3 \div (-9 + 5)$				
4. Realizo multiplicaciones aplicando la propiedad distributiva: a) $-21 \times 2 + (-4) \times 2$ b) $60 \times \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{2}\right)$ c) $96 \times (-15)$				
5. Escribo el conjunto de números que permiten realizar la operación planteada en cada literal. a) $8 + 2$ b) $10 - 12$ c) $-5 \div 6$				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.1 Mínimo común múltiplo y máximo común divisor

R

1. Realiza las siguientes multiplicaciones aplicando la propiedad distributiva:

a) $-4 \times 13 - 6 \times 13$ b) $-7 \times (-68)$ c) $-37 \div 4^2 - 43 \div 4^2 - (-48 + 46)^3$

2. De los conjuntos de números: 1) Naturales, 2) Enteros y 3) Que se pueden expresar como fracción, selecciona y escribe los conjuntos que permiten realizar la operación planteada en cada literal.

a) $12 + (-4)$ b) -0.36×0.1 c) 7×3 d) $0.5 + 2.0$ e) $-42 \div (-6)$ f) $12 - 4$

C

El menor de los múltiplos comunes de dos o más números se llama **mínimo común múltiplo** y su abreviatura es **mcm.**

Los pasos para calcularlo son:
1. Escribir los múltiplos de cada número.
2. Encontrar los múltiplos comunes.
3. Encontrar el menor de los múltiplos comunes.

El mayor de los divisores comunes de dos o más números se llama **máximo común divisor** y su abreviatura es **MCD.**

Los pasos para calcularlo son:
1. Escribir todos los divisores de cada número.
2. Encontrar los divisores comunes.
3. Encontrar el mayor de los divisores comunes.

1. Encuentra el mcm de los números en cada literal:

a) 4 y 6   b) 6 y 18   c) 2 y 10   d) 4 y 5

e) 2, 3 y 4   f) 2, 6 y 8   g) 4, 8 y 12   h) 3, 5 y 10

2. Encuentra el MCD de los números en cada literal:

a) 4 y 8   b) 6 y 9   c) 21 y 28   d) 32 y 48

e) 3, 9 y 12   f) 15, 20 y 25   g) 30, 42 y 60   h) 30, 42 y 70

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.2 Relación entre los múltiplos y divisores de un número

R

1. De los conjuntos de números: 1) Naturales, 2) Enteros y 3) Que se pueden expresar como fracción, selecciona y escribe los conjuntos que permiten realizar la operación planteada en cada literal.

a) –25 – 5 b) 24 ÷ 8 c) 2 ÷ 3 d) 22 – 2 e) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ f) –25 ÷ 5

2. Encuentra el mcm de los números en cada literal:

a) 2 y 7 b) 6 y 10 c) 2, 4 y 10

3. Encuentra el MCD de los números en cada literal:

a) 12 y 24 b) 35 y 49 c) 18, 42 y 60

C

Con respecto a los múltiplos y divisores de un número, y el mcm y MCD de dos o más números, se cumple que

- Si un número es múltiplo de otro número, ese es divisor del primero.
- Cualquier número es múltiplo de 1 y 1 es divisor de cualquier número.
- Un número es tanto divisor como múltiplo de sí mismo.
- El mcm es múltiplo del MCD.

Completa y responde:

1. 5 es divisor de 15. Entonces, 15 es ___________ de 5.

2. 12 es múltiplo de 3. Entonces, 3 es ___________ de 12.

3. Cualquier número es múltiplo de ______.

4. ____ es divisor de cualquier número.

5. ¿13 es múltiplo de 13? Explica por qué.

6. ¿6 es divisor de 6? Explica por qué.

7. Para los literales del ejercicio 1 de la clase anterior del cuaderno de ejercicios, expresa el mcm como un múltiplo del MCD.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.3 Números primos y compuestos

1. Encuentra el mcm de los números en cada literal:

a) 6 y 7 b) 4, 13 y 26 c) 5, 7 y 10

2. Encuentra el MCD de los números en cada literal:

a) 21 y 56 b) 12, 20 y 28 c) 24, 56 y 80

3. Para los números en cada uno de los siguientes literales calcula el mcm y el MCD. Luego expresa el mcm como un múltiplo del MCD.

a) 30 y 45 b) 20 y 25

c) 12, 18 y 24 d) 10, 30 y 40

A los números que tienen solo dos divisores (el 1 y el mismo número) se llaman **números primos**.

Los números que tienen más de dos divisores se llaman **números compuestos**.

El 1 solo tiene 1 como divisor. El 1 no es número primo ni compuesto.

Clasifica los siguientes números en primos y compuestos:

7, 10, 25, 29, 32, 35, 40, 43, 48, 52, 58, 61, 67, 73 y 89.

Primos:

Compuestos:

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.4 Descomposición en factores primos

R

1. Para los números en cada uno de los siguientes literales calcula el mcm y el MCD. Luego expresa el mcm como un múltiplo del MCD.

   a) 42 y 63

   b) 28 y 49

   c) 15, 45 y 60

   d) 10, 16 y 40

2. Clasifica los siguientes números en primos y compuestos:

   3, 5, 9, 13, 34, 38, 44, 56, 64, 75, 87, 90, 93 y 99.

   Primos:

   Compuestos:

C

Cualquier número compuesto puede ser expresado como producto de números primos. A este procedimiento se le llama **descomposición en factores primos**.

Descompone en factores primos los siguientes números:

a) 45

b) 27

c) 63

d) 105

e) 77

f) 102

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.5 Máximo común divisor por descomposición en factores primos

R

1. Clasifica los siguientes números en primos y compuestos:

   11, 12, 17, 19, 22, 28, 37, 42, 50, 51, 53, 63, 70 y 100.

   Primos:

   Compuestos:

2. Descompone en factores primos los siguientes números.

   a) 52 b) 63 c) 75 d) 90

C

El MCD de dos números se determina realizando los siguientes pasos:

1. Descomponer los dos números en sus factores primos.
2. Expresar si es posible, los números como producto de potencias de los números primos en cada descomposición.
3. Multiplicar las potencias de primos comunes en ambas descomposiciones que tengan el menor exponente.

Encuentra el MCD de cada pareja de números a través de la descomposición en factores primos.

a) 20 y 15 b) 4 y 8 c) 3 y 6 d) 25 y 35 e) 27 y 45

f) 10 y 14 g) 12 y 30 h) 14 y 8 i) 15 y 105 j) 25 y 45

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.6 Mínimo común múltiplo por descomposición en factores primos

R

1. Descompone en factores primos los siguientes números:

a) 48 b) 66 c) 72 d) 98

2. Encuentra el MCD de cada pareja de números a través de la descomposición en factores primos.

a) 13 y 26 b) 42 y 54 c) 7 y 77 d) 56 y 98

C

El mcm de dos números se determina por

1. Descomponer los dos números en sus factores primos.
2. Expresar si es posible, los números como producto de potencias de los números primos en cada descomposición.
3. Multiplicar las potencias de primos no comunes en la descomposición, en caso de haber primos comunes, solo se toman las potencias de primos con mayor exponente (si los comunes tienen el mismo exponente se toman solo una vez).

Encuentra el mcm de cada pareja de números a través de la descomposición en factores primos.

a) 20 y 50 b) 4 y 8 c) 27 y 45 d) 16 y 20 e) 21 y 28

f) 10 y 35 g) 7 y 21 h) 8 y 10 i) 5 y 35 j) 20 y 25

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.7 Aplicación del mcm y MCD

R

1. Encuentra el MCD de cada pareja de números a través de la descomposición en factores primos.

a) 6 y 21 b) 8 y 22 c) 5 y 65 d) 44 y 110

2. Encuentra el mcm de cada pareja de números a través de la descomposición en factores primos.

a) 30 y 50 b) 4 y 5 c) 8 y 20 d) 12 y 18 e) 7 y 11

C

Se puede utilizar el MCD y el mcm para resolver problemas del entorno.

Responde las preguntas en cada uno de los siguientes numerales:

1. Para una campaña de reforestación en El Salvador se compran árboles de Bálsamo y Maquilishuat, de manera que se tienen 49 y 294 unidades de cada uno respectivamente. Se quiere hacer el mayor número de grupos de árboles en los que se tenga el mismo número de cada tipo. ¿Cuántos grupos se harán? ¿Cuántos árboles de cada tipo tendrán los grupos hechos?

2. La dueña de una tienda quiere abastecerse de galletas y jugos para la semana, de manera que tenga el mismo número de unidades de cada producto. Las galletas vienen en paquetes de 8 unidades mientras que los jugos en paquetes de 10 unidades. ¿Cuál es el número total de unidades que tendrá por cada producto? ¿Cuántos paquetes de cada producto se debe comprar?

3. Para un torneo de ajedrez, la escuela A envía 45 estudiantes, la escuela B envía 105 y la escuela C envía 75. Si se quiere formar el máximo número posible de grupos idénticos en cuanto al número de estudiantes por escuela, ¿cuántos grupos se pueden formar?, ¿cuántos estudiantes de cada escuela hay en un grupo?

4. Para una biblioteca se comprarán paquetes de libros de álgebra, geometría y estadística, que solamente se venden en paquetes de 12, 10 y 14 unidades respectivamente. Se comprará el mínimo número de libros con el que se tenga la misma cantidad de cada asignatura. ¿Cuál es el número total de libros que se tendrán por asignatura? ¿Cuántos paquetes de cada asignatura se deben comprar?

5. El papá de Ana trabaja 5 días y descansa el sexto; el papá de Antonio trabaja 8 días y descansa el noveno. Si empiezan su trabajo el martes, ¿cuántos días tienen que transcurrir para que les toque descansar lunes a los dos?

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.8 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Encuentro el mcm de los números en los siguientes literales: a) 6 y 9 b) 5 y 10 c) 2,3 y 9 Encuentro el MCD de los números en los siguientes literales: a) 6 y 9 b) 12 y 18 c) 10, 15 y 30				
2. Completo y respondo: a) 4 es divisor de 20. Entonces, 20 es ___________ de 4. b) ¿6 es múltiplo de 6? Explica por qué.				
3. Clasifico los siguientes números en primos y compuestos: 5, 9, 21, 23, 26, 27, 30, 31, 33, 35, 36, 41, 47, 49 y 53				
4. Descompongo en factores primos los siguientes números: a) 12 b) 30 c) 50 d) 64				
5. Encuentro el MCD de cada pareja de números a través de la descomposición en factores primos. a) 12 y 15 b) 12 y 16 c) 6 y 8				
6. Encuentro el mcm de cada pareja de números a través de la descomposición en factores primos. a) 12 y 18 b) 12 y 16 c) 6 y 8				
7. Resuelvo ejercicios como Se repartirán 90 cuadernos y 72 lápices entre la mayor cantidad de niños que se pueda, de tal manera que todos reciban la misma cantidad de cuadernos como de lápices. ¿Entre cuántos niños se pueden repartir? ¿Cuántos cuadernos y cuántos lápices recibirá cada niño?				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Problemas de aplicación

1. El submarino Akula tiene una velocidad de inmersión de –13.9 metros por segundo y la mayor profundidad que este alcanza es de –400 metros con respecto al nivel del mar.

   a) Si el Akula se encuentra en la superficie y comienza a sumergirse, de cuánto es la variación de su posición con respecto al nivel del mar pasados 10 segundos.

   b) ¿Puede el Akula hacer el proceso de inmersión durante 50 segundos?

   c) Si en el proceso de inmersión que hacía el Akula en cierto momento se detuvo, y se considera ese momento como 0, a cuántos metros de su posición actual se encontraba hace 20 minutos.

2. Tres de los helicópteros más veloces del mundo son:

   Eurocopter X3, helicóptero experimental híbrido franco-alemán, cuya velocidad de 472 km/h estableció un récord de velocidad para helicópteros el 7 de junio de 2013 gracias a los 2.270 CV de potencia de cada uno de los dos motores turboeje — de turbina de gas.

   AH-64D Apache, Estados Unidos: Tiene una velocidad de 365 km/h, la modificación AH-64D Apache de este helicóptero de ataque fue utilizada en combate por primera vez en 1989, durante la invasión estadounidense a Panamá. Más tarde, esas aeronaves participaron en varias operaciones en Oriente Medio, Irak.

   Kámov Ka-52 Alligator, Rusia: Su velocidad es de 350 km/h, el helicóptero biplaza Kámov Ka-52, ha sido concebido para misiones de inteligencia y ataque, está fuertemente blindado y dispone de asientos eyectables para ambos pilotos.

Eurocopter X3
Velocidad máxima:
472 km/h.

AH - 64D Apache
Velocidad máxima:
365 km/h.

Kámov Ka - 52 Alligator
Velocidad máxima:
350 km/h.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

a) ¿Cuántos km habrá recorrido el Eurocopter X3 después de 3 horas de vuelo?

b) Si el AH-64D Apache realiza un vuelo en el que en un momento de su trayectoria se detiene para mantenerse verticalmente, y se considera este como el minuto 0, ¿a cuántos km se encontraba hace 3 horas respecto de la posición actual?

c) Considerando que el Kámov Ka-52 Alligator ha recorrido 34.8 km en 4 minutos, y se detiene para mantenerse verticalmente, si el momento en que se detiene se considera como el minuto 0, ¿a cuántos km se encontraba hace un minuto respecto de donde se encuentra actualmente?

3. Las cigarras viven bajo tierra durante la mayor parte de sus vidas, y solo emergen en la primavera de su último año para aparearse y reproducirse. El género norteamericano de Cigarra, conocido como Magicicada, tiene un ciclo de vida extremadamente largo de 13 o 17 años.

Cada nidada de cigarras tiene sus propios años emergentes y ciclos de vida. El estado de Kansas solo recibe 2 nidadas de Magicicada. La primera nidada apareció por última vez en 1998, y tiene un ciclo de vida de 17 años. La segunda nidada apareció por última vez en 2011, y tiene un ciclo de vida de 13 años.

A partir del año actual, ¿cuántos años tienen que pasar para que ambas nidadas salgan juntas?

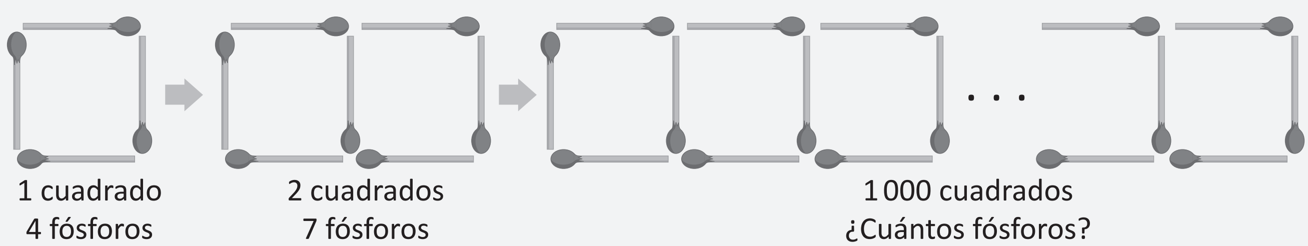
Unidad 4

Comunicación con símbolos

Los primeros aportes al álgebra surgieron por parte de matemáticos hindúes como Aryabhata, sin embargo, el matemático árabe que logró rescatar estos aportes de las matemáticas hindú y griega hacia el mundo arábigo fue Abu Abdallah Muḥammad ibn Musa (Al-juarismi), y logró sistematizar de manera didáctica lo que conocemos en la actualidad como álgebra en su libro *Álgebra, guarismo y algoritmo*.

El álgebra surge y se mantiene como una herramienta muy útil para la modelación de situaciones de la realidad, con el fin de determinar situaciones relacionadas con el comercio, repartición de objetos, herencias, créditos, obras de ingeniería, etc.

El desarrollo de las temáticas de la unidad comienzan con reconocer patrones, y expresarlos a partir de un lenguaje matemático, modelando diferentes situaciones de la vida cotidiana, de donde surge la necesidad de la introducción de un lenguaje formal (algebraico); luego se introducirán las operaciones de expresiones en este lenguaje y la traducción de lenguaje algebraico al lenguaje coloquial (o común). La profundidad estará enfocada al trabajo con una variable, de modo que en esta unidad se garantice el manejo algebraico básico para la resolución de ecuaciones de primer grado.

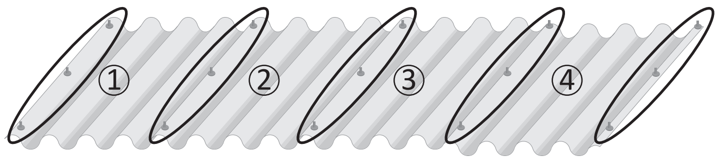


La figura representa las condiciones para determinar un patrón, para ello hay que calcular el número de fósforos que se requieren para formar 1 000 cuadrados.

1.1 Patrones numéricos

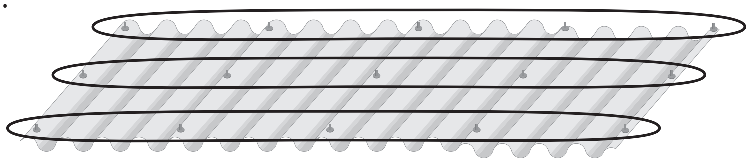
Se pueden establecer expresiones numéricas que describen patrones en determinadas situaciones.

Por ejemplo:
Se puede escribir una expresión numérica para determinar el número de pines que se necesitan para poner cuatro láminas (considerando que una lámina tiene 3 pines en cada extremo) de la siguiente manera:



Contando los pines que están en el lado izquierdo de cada lámina por el número de láminas, y sumando los tres últimos que aparecen en el lado derecho de la última lámina. Por tanto, puedes escribir la expresión: $3 \times 4 + 3 = 15$ R. 15 pines

O también puede ser:

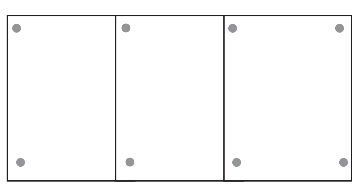


Observando los pines por fila, en cada fila hay igual número de pines que número de láminas más uno, y si hay tres filas, entonces se puede escribir la expresión: $3 \times (4 + 1) = 15$ R. 15 pines

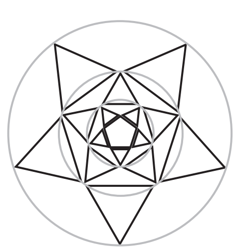
Por lo que puedes obtener el número de pines con la expresión:

3 × (*número de láminas*) + 3 o **3 × (*número de láminas* + 1)**

1. Utilizando tachuelas para unir hojas de papel como lo muestra la figura, determina cuántas tachuelas son necesarias para unir 5 páginas de papel.



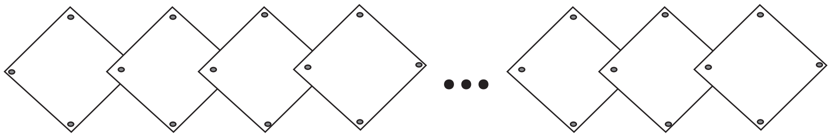
2. Observa la siguiente figura, por cada circunferencia se agrega una cantidad de triángulos, determina cuántos triángulos tendrá la figura después de 7 circunferencias.



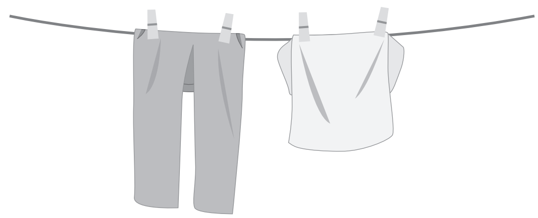
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.2 Generalización de un patrón numérico

1. Utilizando tachuelas para unir hojas de papel como lo muestra la figura, determina cuántas tachuelas son necesarias para unir 10 páginas de papel.



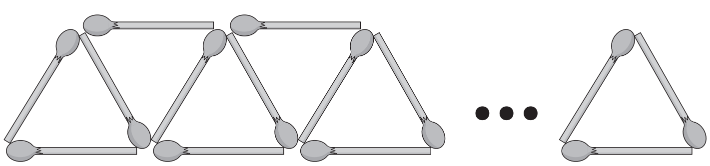
2. Para tender la ropa se utilizan ganchitos de ropa o pinzas, tal como lo muestra la figura. Escribe una expresión numérica para determinar el número de ganchitos de ropa necesarios para tender 10 piezas de ropa.



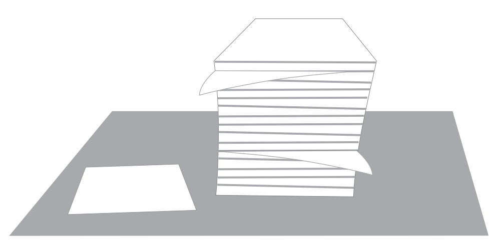
Unidad 4

Cuando se hacen operaciones con cantidades variantes se puede utilizar $\square$ para representar a estas cantidades en las operaciones.

1. Se forman varios triángulos con fósforos, uno después de otro. Si el número de triángulos que se forman se representa con $\square$, ¿cuántos fósforos se necesitan?



2. El costo de una resma de papel reciclado es de $4.00. José compró $\square$ resmas para el negocio de fotocopiadora de su papá. Responde lo siguiente:
   a) ¿Cuánto dinero se gastó en las resmas de papel?
   b) Si pagó con un billete de $50, ¿de cuánto es el vuelto?



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.3 Expresiones algebraicas de una variable

R

1. En el problema de colocación de láminas, cuántos pines se necesitan, si se quieren poner:
   a) 2 láminas b) 9 láminas c) 11 láminas

2. Para hacer chocolate de tablilla se colocan 3 libras de azúcar por cada libra de cacao. Si se utilizan $\square$ libras de cacao, ¿cuántas libras de azúcar serán necesarias?

C

Se ha utilizado el recuadro $\square$ para representar cantidades variantes, pero regularmente para referirse a este tipo de cantidades se utilizan letras, por ejemplo la expresión $10 \times \square$ se puede escribir como $10 \times a$. Se utilizó la letra a pero puede usarse cualquier otra letra.

A las expresiones como $10 \times a$ se les llama **expresiones algebraicas**. A las letras que representan cantidades variantes se les llaman **variables**. En la expresión algebraica $10 \times a$ la letra a es la variable. Una expresión algebraica combina números, variables y operaciones.

1. Escribe una expresión algebraica que responda a cada una de las siguientes preguntas:

   a) Antonio ahorra n dólares por mes desde enero. ¿Cuánto dinero tendrá Antonio ahorrado al finalizar el año?

   b) Julia tiene 7 corrales con t pollitos en cada corral. ¿Cuántos pollitos tiene Julia en total?

   c) Entre San Salvador y Chalatenango hay 72 km. Si Ana conduce su vehículo por la carretera Troncal del Norte y ha recorrido b kilómetros, ¿cuánto le falta para llegar a Chalatenango?

2. El radio de un círculo se representa por r. Expresa el área de un círculo con este radio.

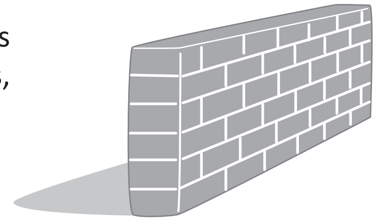
3. Carlos toma 5 minutos para sembrar un árbol. ¿Cuántos árboles puede sembrar Carlos en x minutos?

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

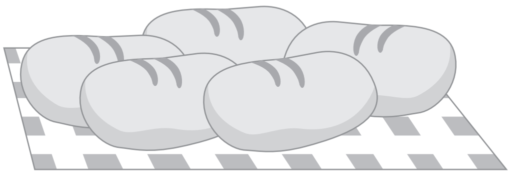
1.4 Expresiones algebraicas con más de una variable

R

1. Carmen trabaja como albañil en una construcción, y coloca 10 ladrillos en cada fila de la pared que está construyendo, si la pared tiene $\square$ filas, determina cuántos ladrillos utiliza Carmen para hacer la pared.



2. Miguel tiene n panes y desea compartirlos con sus 5 amigos en el desayuno, si los reparte equitativamente, expresa cuántos panes le corresponden a cada uno.



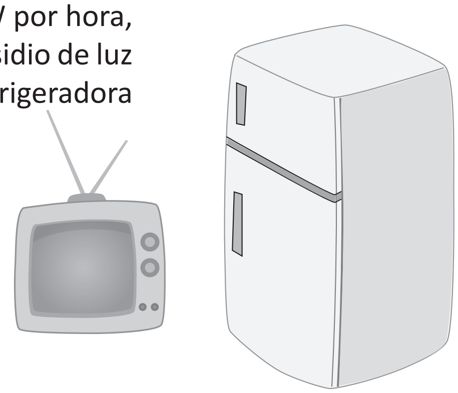
C

Las expresiones algebraicas pueden combinar más de una variable y más de una operación.

1. En una fábrica de refrescos se repartirán x latas de refresco de naranja a \$0.35 cada una y y latas de refresco de cereza a \$0.45 cada una. ¿Cuánto es el costo total de la venta?

2. Beatriz conduce desde el Teatro Nacional de San Salvador hasta el Monumento a la paz y la reconciliación del Mozote, y durante a horas conduce a 60 km/h y b horas a 80 km/h. Determina cuántos kilómetros de distancia hay entre estos dos monumentos.

3. Mario y su familia tienen en su casa un televisor que gasta 0.12 kW por hora, y una refrigeradora que gasta 0.2 kW por hora, para obtener el subsidio de luz eléctrica mantuvieron el televisor conectado por m horas y la refrigeradora por n horas. ¿Cuántos kWh gastaron ambos en total?



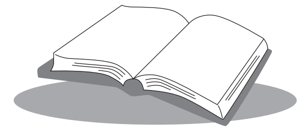
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Unidad 4

1.5 Representación de expresiones algebraicas sin el signo “×”

R

1. Un libro tiene x páginas, y Ana ha leído la tercera parte del libro. ¿Cuántas páginas le falta leer a Ana para terminarlo?



2. La computadora de Juan tiene 260 gigabytes (GB) libres de disco duro, y se necesita guardar 3 archivos de aproximadamente a GB cada uno y 7 archivos de aproximadamente b GB cada uno. Expresa cuántos gigabytes libres le quedan a la computadora de Juan después de la instalación.

C

Al representar una multiplicación que incluya una o más variables o una expresión algebraica se tiene que

1. Omitir el signo de multiplicación "×".
2. Escribir primero el número cuando se multiplique por una variable o expresión algebraica entre paréntesis.
3. Ordenar las variables según el alfabeto, cuando el producto es de dos o más variables.

Cuando la multiplicación es de dos números el signo "×" no se puede omitir, salvo que se utilice otra forma de representar la multiplicación.

1. Representa sin el signo "×" y ordena las variables en las siguientes expresiones algebraicas.

a) $6 \times x =$ b) $y \times 8 =$ c) $s \times t =$ d) $z \times y =$ e) $-4 \times a =$

f) $n \times (-a) =$ g) $\frac{3}{4} \times x =$ h) $m \times (-\frac{2}{5}) =$ i) $9 \times y \times z =$ j) $b \times 5 \times a =$

k) $-6 \times n \times m =$ l) $p \times q \times (-7) =$ m) $4 \times (7 + a) =$ n) $(x + 5) \times (-4) =$ ñ) $-7 \times (4 - t) =$

2. Representa las siguientes expresiones algebraicas utilizando el signo "×".

a) $5n = 5 \times$ ______ b) $-8b =$ ______ × ______ c) $\frac{4}{7}st =$

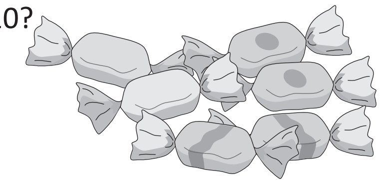
d) $-9xy =$ e) $-\frac{5}{6}(m + n) =$ f) $-10(t - 5) =$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.6 Expresiones algebraicas multiplicadas por 1 o –1

R

1. María compra dulces para todos sus amigos; ella compra m dulces de coco de \$1 y n dulces de café de \$2. ¿Cuánto es el vuelto que recibirá María si paga con un billete de \$10?



2. Representa sin el signo "×" y ordena las variables en las siguientes expresiones algebraicas:

a) $4 \times n$ = b) $t \times (-y)$ = c) $a \times (-\frac{3}{7})$ = d) $s \times 9 \times t$ = e) $-4 \times (x - y)$ =

C

En la multiplicación de una variable o expresión algebraica por 1, se omite el signo de multiplicación y el 1. Por ejemplo

$$1 \times a = 1a = a \qquad 1 \times (a + 3) = 1(a + 3) = a + 3$$

Se escribe a en lugar de $1a$ porque el producto de 1 multiplicado por un número es ese mismo número.

En el producto de una variable o expresión algebraica por (–1), se escribe el signo (–), se omite el signo de multiplicación y el 1. Por ejemplo:

$$-1 \times a = -1a = -a \qquad -1 \times (a + 3) = -1\ (a + 3) = -(a + 3)$$

1. Representa sin el signo "×" las siguientes expresiones algebraicas con multiplicación por 1 o –1.

a) $1 \times t$ = b) $n \times 1$ = c) $(-1) \times x$ = d) $a \times (-1)$ = e) $1 \times n \times m$ =

f) $y \times 1 \times z$ = g) $a \times b \times 1$ = h) $-1 \times t \times s$ = i) $x \times (-1) \times z$ = j) $b \times a \times (-1)$ =

k) $n \times t \times (-1)$ = l) $a \times (-1) \times x$ = m) $1 \times (q + 1)$ = n) $(a + b) \times (1)$ = ñ) $-1 \times (z - 7)$ =

2. Representa las siguientes expresiones algebraicas utilizando el signo "×". Utiliza multiplicaciones por 1 o –1.

a) a = b) $-x$ = c) $n + m$ = d) $-(4 - b)$ =

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Unidad 4

1.7 Potencia de una expresión algebraica

R 1. Representa sin el signo "×" y ordena las variables en las siguientes expresiones algebraicas:

a) $-2 \times (-a) =$ b) $y \times x =$ c) $b \times (-\frac{5}{6}) =$ d) $r \times (-2) \times z =$ e) $-5 \times (2 - t) =$

2. Representa sin el signo "×" y sin el número 1 las siguientes expresiones algebraicas con multiplicación por 1 o –1.

a) $1 \times s =$ b) $n \times (-1) =$ c) $1 \times t \times u =$ d) $a \times (-1) \times b =$ e) $(y + x) \times 1 =$

C El producto de la misma variable o la misma expresión algebraica se representa con el uso de exponentes. Por ejemplo: $a \times a$ cm² es a^2 cm².

1. Representa sin el signo "×" las siguientes expresiones algebraicas:

a) $b \times b =$ b) $a \times a \times a =$ c) $t \times t \times s =$

d) $m \times n \times n =$ e) $y \times x \times y \times x =$ f) $z \times t \times t \times z \times t \times z =$

g) $1 \times t \times t =$ h) $x \times 3 \times x =$ i) $n \times n \times 8 =$

j) $-4 \times y \times y =$ k) $z \times (-1) \times z =$ l) $q \times q \times (-1) =$

m) $b \times b \times a \times (-4) =$ n) $q \times (-3) \times p \times p =$ ñ) $y \times (-4) \times x \times x =$

o) $-4 \times z \times x \times x \times z =$ p) $s \times t \times (-1) \times t \times s =$

2. Representa las siguientes expresiones algebraicas utilizando el signo "×".

a) $7c^2 =$ b) $-5x^3 =$ c) $7s^2t^2 =$ d) $-9a^2b =$

e) $3m^3n =$ f) $-2p^3q^2 =$ g) $a^3b^3 =$ h) $-s^3t^2 =$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.8 Expresión algebraica con división

R 1. Representa sin el signo "×" y sin el número 1 las siguientes expresiones algebraicas con multiplicación por 1 o –1.

a) $t \times 1 =$ b) $-1 \times n =$ c) $a \times 1 \times b =$ d) $t \times (-1) \times s =$ e) $(x + y) \times (1) =$

2. Representa sin el signo "×" las siguientes expresiones algebraicas.

a) $t \times t =$ b) $x \times y \times y =$ c) $a \times (-1) \times a =$

d) $n \times n \times m \times (-4) =$ e) $p \times q \times (-1) \times q \times p =$

C La división de una variable o expresión algebraica se escribe en forma de fracción omitiendo el signo (÷). El dividendo se convierte en el numerador de la fracción y el divisor en el denominador.

A diferencia con (×) y (÷), los signos (+) y (–) no se pueden omitir dentro de las expresiones algebraicas.

1. Representa las siguientes expresiones algebraicas omitiendo el signo (÷).

a) $n \div 5 =$ b) $a \div (-6) =$ c) $(y - x) \div 6 =$ d) $(t + s) \div (-7) =$

e) $a \div b =$ f) $9 \div z =$ g) $-2 \div m =$ h) $-5 \div (n - m) =$

2. Representa las siguientes expresiones algebraicas utilizando el signo (÷).

a) $\frac{1}{7}y = \frac{y}{7} = y \div 7$ b) $-\frac{1}{3}x = \frac{x}{-3} = x \div$ ______ c) $-\frac{t}{9} =$ ______ $\div (-9)$

d) $\frac{z}{12} =$ ______ $\div$ ______ e) $-\frac{w}{4} =$ f) $\frac{n - m}{6} =$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.9 Expresiones algebraicas con multiplicación y división

R 1. Representa sin el signo (×) las siguientes expresiones algebraicas:

a) $x \times x =$ b) $a \times a \times b =$ c) $n \times n \times (-1) =$ d) $t \times (-8) \times s \times t =$ e) $z \times (-1) \times z \times y \times y =$

2. Representa las siguientes expresiones algebraicas omitiendo el signo (÷).

a) $b \div 2 =$ b) $(a - b) \div (-5) =$ c) $n \div m =$ d) $-9 \div t =$ e) $-2 \div (n + t) =$

C En las operaciones de multiplicación y división se puede omitir los signos (×) y (÷), cuando ambas operaciones aparecen combinadas en una expresión algebraica.

1. Escribe la siguiente expresión algebraica omitiendo los signos (×) y (÷).

a) $3 \times a - 5 \times b =$ b) $-3 \times n + m \div t =$

c) $(x - y) \div 7 - (a + b) \div 4$ d) $\frac{3}{4} \times t - (m + n) \div 7 =$

e) $-2 \div (n + m) - b \times b \times b =$ f) $z \times z \times 6 - x \times x \times (-1) \times (-1) =$

g) $5 \times y \times y \times 2 - (a + b) \div (-1) =$ h) $t \times (-6) \times n - (p - q) \div (-1) =$

2. Escribe las siguientes expresiones algebraicas utilizando el signo (×) y (÷).

a) $80 - 10x =$ b) $\frac{3}{5}(a - y) - 7n =$ c) $n^2 - m^3 =$

d) $\frac{a + b}{5} + \frac{c}{4} =$ e) $-6(4 - z) + t^2 s^3 =$ f) $-\frac{(y - 9)}{6} + (a - z) =$

g) $\frac{ab}{c}$ h) $\frac{mn}{p}$ i) $\frac{z}{xy}$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.10 Traducción del lenguaje coloquial al algebraico, parte 1

R

1. Representa las siguientes expresiones algebraicas omitiendo el signo (÷).

a) $z \div 7 =$ b) $(x + y) \div (-6) =$ c) $a \div b =$ d) $-5 \div s =$ e) $-4 \div (m + n) =$

2. Escribe las siguientes expresiones algebraicas omitiendo los signos (×) y (÷).

a) $6 \times p + (-1) \times q =$

b) $-8 \times y + x \div z =$

c) $(n - m) \div 7 - (t - s) \div 6 =$

d) $-\frac{3}{4} \div (a + b) - t \times t \times t =$

3. Escribe las siguientes expresiones algebraicas con los signos (×) y (÷).

a) $\frac{a(b-3)}{c}$

b) $\frac{p}{m(3+n)}$

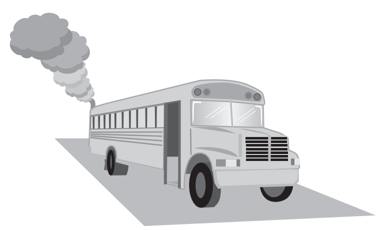
C

El lenguaje algebraico es la traducción del lenguaje coloquial a variables y números relacionados, mediante operaciones.

Traduce al lenguaje algebraico las siguientes expresiones en lenguaje coloquial:

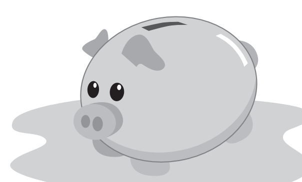
a) A una charla de sexualidad asisten n jóvenes, y al finalizar la charla 15 de ellos se realizaron un examen preventivo de VIH. Expresa cuántos jóvenes que asistieron a la charla no se hicieron el examen preventivo.

b) El costo de cambiar 3 buses que contaminan demasiado el medio ambiente, si cambiar uno cuesta x dólares.



c) Mario compra 5 pasteles iguales para festejar el día del adulto mayor para y personas de un asilo. Expresa qué parte de cada pastel le corresponde a cada uno si estos se reparten equitativamente entre los ancianos.

d) Expresa de cuánto sería el ahorro que tendría un niño si durante 6 semanas ahorra m dólares por cada una y si durante otras 3 semanas ahorra n dólares por cada una.



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.11 Traducción del lenguaje coloquial al algebraico, parte 2

R 1. Escribe la siguiente expresión algebraica omitiendo los signos (×) y (÷).

a) $-2 \times t + (-5) \times s =$

b) $-1 \times a - b \div t =$

c) $(n + a) \div 3 - (b + m) \div 7 =$

d) $-\frac{3}{8} \div (n + m) - x \times x \div t =$

2. Traduce al lenguaje algebraico la siguiente expresión en lenguaje coloquial:

El grupo de amigos de Ana reune 5 dólares y compran 10 jugos de a dólares cada uno y 10 galletas de b dólares cada una. Expresa el vuelto que recibirán de haber pagado con un billete de \$5.00.

C Las situaciones de distancia, velocidad y tiempo expresadas en lenguaje coloquial también se pueden traducir al lenguaje algebraico.

Traduce al lenguaje algebraico las siguientes expresiones en lenguaje coloquial:

a) Si se camina x metros en 10 minutos, ¿cuál es la velocidad por minuto?

b) Ana, caminando, recorre a metros con una velocidad de 60 m/min, ¿cuánto tiempo caminó Ana?

c) Si Antonio toma un autobús de Santa Ana a San Salvador, y el viaje dura t horas a una velocidad de 55 km/h, ¿cuántos km se han recorrido en el viaje?

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.12 Traducción del lenguaje coloquial al algebraico, parte 3

R Traduce al lenguaje algebraico la siguiente expresión en lenguaje coloquial:

a) En el parque Nacional Montecristo la entrada para adultos es de $3.00 y para extranjeros $6.00. Si la semana pasada ingresaron m personas nacionales y n personas extranjeras, expresa el ingreso total de la semana pasada.

b) Beatriz se inscribió en una carrera donde compiten niños y niñas, y ganó el primer lugar, para ello corrió durante 6 minutos a una velocidad de x m/min y durante 4 minutos a una velocidad de y m/min. Expresa la distancia que recorrió en la carrera.

C El x% de una **Cantidad** se representa como: $\frac{x}{100}$ × **Cantidad** así:

a) El x% de un **Territorio** es $\frac{x}{100}$ × **Territorio**.

b) El y% de descuento del **Precio original** de un objeto es $\frac{y}{100}$ × **Precio original**.

c) El precio de un objeto después de hacer un z% de descuento es $\frac{(100-z)}{100}$ × **Precio original**.

1. Si se tiene un terreno de b km^2 destinados a la siembra de frijol y maíz, y el 70% de ellos es para el maíz, expresa en lenguaje algebraico:
   a) ¿Cuántos km^2 de superficie le corresponde al maíz?
   b) ¿Cuántos km^2 le corresponden al frijol?

2. ¿Cuánto se paga al comprar un televisor cuyo valor original era de x dólares pero tenía un descuento del 10%?

3. Ana compró una laptop que vale x dólares en precio original, la cual tenía 25% de descuento y una mochila con el precio original de y dólares y que tenía 15% de descuento, ¿cuánto gastó en total Ana?

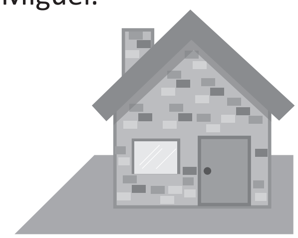
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.13 Traducción del lenguaje algebraico al coloquial

R Traduce al lenguaje algebraico la siguiente expresión en lenguaje coloquial:

a) En una emergencia de salud es necesario llevar a una persona en un tiempo estimado de t minutos. Si la unidad de salud más cercana está a 3 000 metros, expresa la velocidad a la que se debe conducir para llegar en el tiempo estimado.

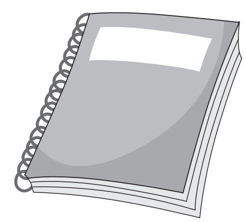
b) La familia de Miguel compra una casa a un precio de z dólares. Si después de un año la casa se revalora en un 5% más, expresa el precio actual de la casa de la familia de Miguel.



C Traducir una expresión del lenguaje algebraico al coloquial es darle una interpretación a una expresión algebraica, según un contexto.

En una librería un cuaderno cuesta m dólares y un lapicero cuesta n dólares. Responde:

a) ¿Qué representa la expresión algebraica $m + n$?



b) ¿Qué representa la expresión algebraica $3m + 5n$?

c) ¿Qué representa la expresión algebraica $10 - 3m$?

d) ¿Qué representa la expresión algebraica $10 - 6m - 2n$?

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.14 Valor numérico de una expresión algebraica, parte 1

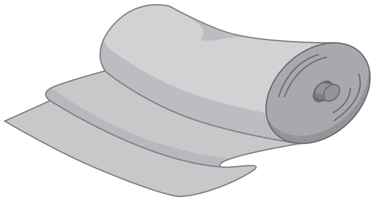
R

1. Traduce al lenguaje algebraico la siguiente expresión en lenguaje coloquial:

   Mario quiere comprarle un regalo a su mamá que es mecánica automotriz, y el precio de una caja de herramientas es x dólares y el de un juego de tornillos es de y dólares. Mario decide comprarlas cuando la caja de herramientas tiene un descuento del 40% y el juego de tornillos un descuento del 50%. Expresa cuánto tuvo que ahorrar Mario para darle el regalo a su mamá si le compro ambas cosas.

2. En una maquila se utilizan a yardas de tela para hacer camisas talla S y b yardas de tela para hacer camisas talla L. Responde:

   a) ¿Qué representa la expresión algebraica $18a + 35b$?



   b) ¿Qué representa la expresión algebraica $b - a$?

C

Al sustituir un número en una variable, el resultado obtenido después de realizar las operaciones indicadas en la expresión se conoce como **valor numérico de la expresión**. Por ejemplo, para calcular el valor numérico de la expresión $3x + 3$ cuando $x = 6$ se hace de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 3x + 3 &= 3 \times x + 3 \\ &= 3 \times 6 + 3 \\ &= 18 + 3 \\ &= 21 \end{aligned}$$

1. Si se tiene la expresión algebraica $p + 3$, encuentra el valor numérico de la expresión en los siguientes casos:

   a) $p = 4$ b) $p = 9$ c) $p = 15$ d) $p = 21$

2. Si se tiene la expresión algebraica $6z - 2$, encuentra el valor numérico de la expresión en los siguientes casos:

   a) $z = 3$ b) $z = 5$ c) $z = 2$ d) $z = 0$

3. Si se tiene la expresión algebraica $7 - 2t$, encuentra el valor numérico de la expresión en los siguientes casos:

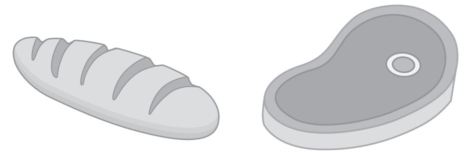
   a) $t = 2$ b) $t = 3$ c) $t = 4$ d) $t = 7$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.15 Valor numérico de una expresión algebraica, parte 2

R

1. Si un pan provee de m calorías al cuerpo humano y 100 g de carne n calorías, ¿qué representa la expresión algebraica $3m + 4n$?



2. Si se tiene la expresión algebraica $-2y - 5$, encuentra el valor numérico de la expresión en los siguientes casos:

a) $y = 1$ b) $y = 4$ c) $y = 7$ d) $y = 0$

C

En las expresiones algebraicas también se pueden sustituir valores negativos y fracciones.

Al sustituir un número en una expresión algebraica, se debe escribir entre paréntesis cuando por ejemplo:

- El número sea negativo.
- El número sea una fracción y la expresión algebraica que está en forma de fracción.

Para evitar errores de cálculo se debe poner atención en los signos que anteceden a las variables y simplificar las fracciones antes de realizar las operaciones indicadas.

1. Se tiene la expresión algebraica $2 - 4q$, encuentra el valor numérico en los siguientes casos:

a) $q = -2$ b) $q = \frac{1}{4}$ c) $q = -\frac{1}{2}$ d) $q = \frac{1}{3}$

2. Si se tiene la expresión algebraica $-t$, encuentra el valor numérico de la expresión en los siguientes casos:

a) $t = -3$ b) $t = -1$ c) $t = 0$ d) $t = \frac{2}{3}$ e) $t = -\frac{3}{5}$

3. Si se tiene la expresión algebraica $\frac{x}{6}$, encuentra el valor numérico de la expresión en los siguientes casos:

a) $x = 2$ b) $x = -\frac{1}{2}$ c) $x = \frac{3}{5}$

1.16 Valor numérico de una expresión algebraica, parte 3

R

1. Si se tiene la expresión algebraica $-1 - 3n$, encuentra el valor numérico de la expresión en los siguientes casos:

   a) $n = 3$ b) $n = 5$ c) $n = 8$

2. Se tiene la expresión algebraica $-\frac{x}{12}$, encuentra el valor numérico en los siguientes casos:

   a) $x = 24$ b) $x = -3$ c) $x = \frac{1}{2}$ d) $x = 0$

C

Se puede calcular el valor numérico de una expresión algebraica que tiene a la variable en el denominador de una fracción, sabiendo que una fracción es un cociente indicado.
Por ejemplo:

$$\frac{2}{x} = 2 \div x$$

Se puede calcular el valor numérico de una expresión algebraica con potencia, sabiendo que el exponente determina el número de veces que aparece como factor la base en la multiplicación.
Por ejemplo:

$$x^3 = x \times x \times x$$

Encuentra el valor numérico de las siguientes expresiones:

a) $-\frac{3}{y}$ cuando $y = 6$ y $y = -5$ b) $\frac{6}{x}$ cuando $x = \frac{1}{3}$ y $x = -2$ c) m^2, cuando $m = 2$ y $m = -2$

d) $-z^2$, cuando $z = -4$ e) $(-w)^2$, cuando $w = -7$ f) p^2, cuando $p = \frac{1}{3}$ y $p = -\frac{2}{5}$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.17 Valor numérico de una expresión algebraica, parte 4

R

1. Se tiene la expresión algebraica $-\frac{m}{15}$, encuentra el valor numérico en los siguientes casos:

a) $m = 30$　　b) $m = -5$　　c) $m = \frac{1}{3}$　　d) $m = 0$

2. Encuentra el valor numérico de las siguientes expresiones:

a) $-\frac{7}{r}$ cuando $r = \frac{1}{2}$ y $r = -\frac{1}{2}$　　b) $-s^2$, cuando $s = -6$　　c) $(-i\,)^2$, cuando $i = -8$

C

Para calcular el valor de una expresión, en ocasiones es necesario sustituir más de un valor. El número de valores que se sustituyen depende del número de variables en la expresión algebraica.

1. Se tiene la expresión algebraica $3a + 2b$, encuentra el valor numérico de la expresión, cuando:

a) $a = 5$ y $b = 2$　　b) $a = -4$ y $b = 5$　　c) $a = -\frac{2}{3}$ y $b = -\frac{5}{2}$

2. Se tiene la expresión algebraica $-m - 2n$, encuentra el valor numérico de la expresión, cuando:

a) $m = -7$ y $n = 3$　　b) $m = \frac{3}{5}$ y $n = \frac{7}{10}$　　c) $m = -\frac{1}{3}$ y $n = -\frac{5}{6}$

3. Se tiene la expresión algebraica $6x - 4y$, encuentra el valor numérico de la expresión, cuando:

a) $x = 5$ y $y = 6$　　b) $x = -4$ y $y = -6$　　c) $x = -\frac{5}{18}$ y $y = \frac{1}{6}$　　d) $x = -\frac{5}{14}$ y $y = -\frac{9}{28}$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.18 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Puedo escribir expresiones algebraicas omitiendo los signos (×) y (÷), como en los siguientes casos: $-3 \div (c + d) - a \times a \times a$; $a \times a \times 3 - b \times (-1) \times b$.				
2. Puedo traducir problemas en lenguaje coloquial a lenguaje algebraico identificando variables.				
3. Puedo traducir problemas sobre velocidades a lenguaje algebraico, identificando las variables del problema y la interpretación de velocidad.				
4. Puedo traducir problemas sobre porcentajes, descuentos, intereses, etc., al lenguaje algebraico, identificando las variables y utilizando el sentido del porcentaje.				
5. Puedo traducir expresiones algebraicas que representan problemas de la realidad a lenguaje coloquial.				
6. Puedo determinar el valor numérico de expresiones algebraicas utilizando valores enteros no negativos como $t = 2$, para expresiones como $7 - 2t$.				
7. Puedo determinar el valor numérico de expresiones algebraicas como $x = 5$ para expresiones como $3x + 5$.				
8. Puedo determinar el valor numérico de expresiones algebraicas, como $\frac{y}{6}$, para expresiones como $y = -4$, $y = 0$ o $y = \frac{2}{3}$.				
9. Puedo determinar el valor numérico de expresiones algebraicas como $\frac{12}{x}$ y x^2 para valores como $x = -3$ o $x = -\frac{1}{2}$.				
10. Puedo determinar el valor numérico de expresiones algebraicas con dos variables como $2n + 5p$ para los valores $n = -3$, $p = 2$.				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.1 Términos y coeficientes de una expresión algebraica

La expresión algebraica $3a + (-7)$, representa la suma de $3a$ y -7. A cada parte de esta expresión algebraica que se conecta con el signo (+), se le llama **término** de la expresión algebraica, $3a$ se representa en forma de producto como $3 \times a$. En este caso, al 3 se le llama **coeficiente** de a.

Para $a + (-5)$ y $a + (-5b) + (-2)$ se tiene que

a) $\underbrace{\overset{\text{Coeficiente}}{1}\,a}_{\text{Término}} + \underbrace{(-5)}_{\text{Término}}$

b) $a - 5b - 2 = \underbrace{\overset{\text{Coeficiente}}{1}\,a}_{\text{Término}} + \underbrace{(\overset{\text{Coeficiente}}{-5}\,b)}_{\text{Término}} + \underbrace{(-2)}_{\text{Término}}$

1. Escribe todos los términos de cada expresión algebraica.

a) $4z + 8$

b) $5a + 7b$

c) $-2x - 2$

d) $n + 8m - 3$

e) $-9t - 2s - 1$

f) $\frac{2}{3}x - \frac{3}{5}y + 6$

g) $\frac{4}{7}y - \frac{1}{8}z - 4$

h) $\frac{a}{3} - \frac{b}{5}$

2. Escribe los coeficientes de los siguientes términos.

a) $7h$

b) $-5a$

c) $-xv$

d) y

e) $\frac{1}{2}b$

f) $-\frac{5}{6}n$

g) $\frac{z}{5}$

h) $-\frac{3a}{7}$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.2 Multiplicación de una expresión algebraica de un término por un número

R Escribe todos los términos de cada expresión algebraica y coeficientes de los términos que incluyen variables.

a) $6x + 2y$ b) $-3t - 5s - 9$ c) $\frac{6}{7}n - \frac{5}{8}m + 3$ d) $\frac{a}{4} - \frac{2b}{3}$

C Para multiplicar una expresión algebraica por un número se aplica la propiedad conmutativa, y se multiplica el número por el coeficiente de la expresión algebraica.
Por ejemplo:

a) $2\,x \times 3 = 6\,x$ b) $3\,y \times (-4) = -12\,y$ c) $\frac{3}{5}m \times (-2) = -\frac{6}{5}\,m$

Efectúa las siguientes multiplicaciones de una expresión algebraica por un número.

a) $5a \times 4$ b) $2x \times (-6)$ c) $-4y \times 7$ d) $-3t \times (-8)$

e) $z \times 5$ f) $-b \times 9$ g) $4h \times \left(-\frac{1}{4}\right)$ h) $-\frac{3}{4}x \times \frac{2}{9}$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Unidad 4

2.3 División de una expresión algebraica de un término por un número

R

1. Escribe todos los términos de cada expresión algebraica y los coeficientes de los términos que incluyen variables.

a) $a - 3b$ b) $2x + 7y - 5$ c) $\frac{2}{3}h - \frac{5}{6}p + \frac{2}{7}$ d) $\frac{2n}{7} - \frac{4m}{9}$

2. Efectúa las siguientes multiplicaciones de una expresión algebraica por un número.

a) $2n \times 7$ b) $-5y \times 5$ c) $6z \times \left(-\frac{5}{3}\right)$ d) $-\frac{4}{7}a \times \left(-\frac{3}{8}\right)$

C

Para dividir una expresión algebraica entre un número se convierte la división en multiplicación, tal como se aprendió anteriormente; luego se aplica la propiedad conmutativa para multiplicar el coeficiente de la expresión algebraica por el multiplicador. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 27x \div 3 &= 27x \times \frac{1}{3} \\ &= \overset{9}{\cancel{27}} \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{3}}} \times x \\ &= 9 \times 1 \times x \\ &= 9x \end{aligned}$$

Opcionalmente se puede hacer el siguiente proceso:

$$\begin{aligned} 27x \div 3 &= \frac{27x}{3} \\ &= \frac{\overset{9}{\cancel{27}}x}{\underset{1}{\cancel{3}}} \\ &= 9x \end{aligned}$$

Efectúa las siguientes divisiones de una expresión algebraica por un número:

a) $32x \div 4$ b) $-30t \div 6$ c) $-15n \div (-5)$ d) $36a \div (-9)$

e) $7m \div \frac{7}{8}$ f) $-3b \div \frac{3}{5}$ g) $-5s \div \left(-\frac{10}{7}\right)$ h) $-3x \div \left(-\frac{6}{11}\right)$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.4 Multiplicación de una expresión algebraica con dos términos por un número

R

1. Efectúa las siguientes multiplicaciones de una expresión algebraica por un número:

a) $3t \times 9$ b) $-y \times 7$ c) $4a \times \left(-\frac{3}{2}\right)$ d) $-\frac{2}{5}n \times \left(-\frac{5}{6}\right)$

2. Efectúa las siguientes divisiones de una expresión algebraica por un número:

a) $28y \div 2$ b) $-35t \div (-7)$ c) $-12n \div \frac{4}{7}$ d) $-5x \div \left(-\frac{5}{7}\right)$

C

Para multiplicar una expresión algebraica de más de dos términos por un número, se aplica la propiedad distributiva:

$$a(x + y) = ax + ay \quad \text{o} \quad (x + y) \times a = ax + ay$$

Efectúa las siguientes multiplicaciones:

a) $4(5x + 6)$ b) $-5(-3n - 7)$ c) $(2h - 1) \times 4$

d) $(-3n - 7) \times (-5)$ e) $-(5t + 1)$ f) $-(-5a - 8)$

g) $\frac{5}{2}(4m + 2)$ h) $15(-\frac{4}{5}b - 5)$ i) $\frac{1}{6}(\frac{12}{5}z - 24)$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.5 División de una expresión algebraica con dos términos entre un número

R 1. Efectúa las siguientes divisiones de una expresión algebraica por un número:

a) $42x \div 6$ b) $-20x \div (-10)$ c) $-32x \div \frac{8}{3}$ d) $-6x \div \left(-\frac{3}{5}\right)$

2. Efectúa las siguientes multiplicaciones:

a) $(-4x + 1) \times 2$ b) $(-3m + 2) \times (-3)$ c) $-(7t - 6)$ d) $6(\frac{1}{3}r - 5)$ e) $\frac{2}{3}(-6r - 9)$

C Para dividir una expresión algebraica de dos o más términos por un número, se convierte en la multiplicación de la expresión algebraica por el recíproco del divisor, como en el ejemplo 1 u opcionalmente se puede realizar de la forma que se presenta en 2.

1. $(8x + 12) \div 4 = (8x + 12) \times \frac{1}{4}$
$= 8x \times \frac{1}{4} + 12 \times \frac{1}{4}$
$= \overset{2}{\cancel{8}} \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{4}}} \times x + \overset{3}{\cancel{12}} \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{4}}}$
$= 2 \times 1 \times x + 3 \times 1$
$= 2x + 3$

2. $(8x + 12) \div 4 = \frac{8x + 12}{4}$
$= \frac{\overset{2}{\cancel{8}}x}{\underset{1}{\cancel{4}}} + \frac{\overset{3}{\cancel{12}}}{\underset{1}{\cancel{4}}}$
$= \frac{2x}{1} + \frac{3}{1}$
$= 2x + 3$

Efectúa las siguientes divisiones:

a) $(5x + 15) \div 5$ b) $(-24t + 6) \div 3$ c) $(-16n - 8) \div 4$ d) $(12z - 8) \div (-2)$

e) $(-18x + 42) \div (-6)$ f) $(-27x - 45) \div (-3)$ g) $(-9x + 21) \div \left(-\frac{3}{2}\right)$ h) $(2y + 14) \div \left(-\frac{2}{5}\right)$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.6 Multiplicación de una expresión de dos términos por un número

R

1. Efectúa las siguientes multiplicaciones:

a) $(-5t - 4) \times (-4)$ b) $-(-2n - 9)$ c) $10(-\frac{3}{5}x + 1)$ d) $\frac{2}{7}(14z - 21)$

2. Efectúa las siguientes divisiones:

a) $(45x + 9) \div 9$ b) $(-25n - 15) \div 5$ c) $(-18x - 30) \div (-6)$ d) $(4y + 20) \div \left(-\frac{4}{3}\right)$

C

Cuando se opera con expresiones algebraicas en fracciones, se simplifica el denominador siempre que sea posible y luego se realiza la multiplicación.

Por ejemplo:

$$\frac{4x+2}{3} \times 6 = \frac{4x+2}{\underset{1}{\cancel{3}}} \times \overset{2}{\cancel{6}}$$
$$= \frac{4x+2}{1} \times 2$$
$$= (4x + 2) \times 2$$
$$= 8x + 4$$

Efectúa las siguientes multiplicaciones:

a) $\frac{4n+3}{2} \times 4$ b) $\frac{-2a+4}{4} \times 12$ c) $24 \times \frac{7t-5}{6}$ d) $18 \times \frac{-5z-8}{9}$

e) $\frac{t+5}{3} \times (-15)$ f) $\frac{-4h-7}{4} \times (-36)$ g) $-18 \times \frac{4y-5}{3}$ h) $-25 \times \frac{-6x-4}{5}$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.7 Reducción de expresiones algebraicas

R 1. Efectúa las siguientes divisiones:

a) $(42y + 7) \div 7$　　b) $(-56t - 16) \div 8$　　c) $(-20n - 18) \div (-2)$　　d) $(24y + 6) \div \left(-\frac{3}{5}\right)$

2. Efectúa las siguientes multiplicaciones:

a) $\frac{5t + 9}{4} \times 12$　　b) $\frac{-3y - 5}{6} \times (-24)$　　c) $15 \times \frac{-z - 3}{5}$　　d) $-21 \times \frac{2a + 5}{7}$

C

Para determinar la expresión algebraica reducida de una expresión algebraica dada, se aplica la propiedad distributiva.

a) $5x + 3x = (5 + 3)\,x$
$= 8x$

b) $5x - 3x = (5 - 3)\,x$
$= 2x$

Reduce las siguientes expresiones algebraicas que tienen términos con variables iguales.

a) $7t + 5t$　　b) $7n + n$　　c) $9a - 5a$　　d) $-6z + 2z$　　e) $-3x - x$

f) $-y - y$　　g) $b - b$　　h) $-2.3h - 1.5h$　　i) $-\frac{4}{7}z + \frac{6}{7}z$　　j) $\frac{2}{5}y - \frac{6}{5}y$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.8 Reducción de términos semejantes

R 1. Efectúa las siguientes multiplicaciones:

a) $\frac{3x+4}{6} \times 30$ b) $\frac{-t-4}{4} \times (-32)$ c) $21 \times \frac{-3a-5}{7}$ d) $-27 \times \frac{5a+4}{9}$

2. Reduce las siguientes expresiones algebraicas que tienen términos con variables iguales.

a) $4a + 2a$ b) $3t - 5t$ c) $-4x + 3x$ d) $-5y - 3y$ e) $-1.5b + 1.9b$ f) $-\frac{5}{6}z + \frac{1}{6}z$

C

Las expresiones algebraicas se pueden reducir, según el tipo de términos:

- Entre los términos que tienen la misma variable.
- Entre los términos numéricos (que no tienen variable).

Por ejemplo:

a) $6x - 5 - 4x + 1 = 6x - 4x - 5 + 1$
$= (6 - 4)x - 5 + 1$
$= 2x - 4$

b) $-x + 7 - x - 6 = -x - x + 7 - 6$
$= (-1 - 1)x + 7 - 6$
$= -2x + 1$

A los términos que tienen la parte de las variables igual se les llama **términos semejantes**. Por ejemplo, en la expresión $6x + 5 - 4x + 1$, los términos $6x$ y $-4x$ son semejantes.

Reduce términos semejantes en las siguientes expresiones algebraicas:

a) $5t + 6 + 6t + 9$ b) $n - 6 - 3n + 8$ c) $7y + 3 - 4y - 6$ d) $-a + 4 - a - 2$

e) $-6x - 8 + 9x - 3$ f) $2z - 4 - 6z + 4$ g) $-5h + 5 - h - 3$ h) $-2m + 9 - m - 6$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.9 Suma de expresiones algebraicas

R 1. Reduce las siguientes expresiones algebraicas que tienen términos con variables iguales.

a) $2x + 6x$ b) $5a - 8a$ c) $-3y + 6y$ d) $-h - 7h$ e) $-1.1b + 2.3b$ f) $-\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}x$

2. Reduce términos semejantes en las siguientes expresiones algebraicas.

a) $4n + 5 - 7n + 4$ b) $x - 6 + 3x + 3$ c) $3a + 5 - 2a - 7$ d) $-3y + 5 - y - 7$

C Para sumar dos expresiones algebraicas por ejemplo $2a + 10$ y $3a + 15$ se tiene que

1. Escribir la primera expresión. $2a + 10$
2. Escribir el signo (+) de la suma. $2a + 10 +$
3. Escribir la segunda expresión, si esta tiene signo negativo o más de un término, escribirla entre paréntesis. $2a + 10 + (3a + 15)$
4. Suprimir los paréntesis. $2a + 10 + 3a + 15$
5. Reducir términos semejantes. $5a + 25$

Suma las siguientes expresiones algebraicas:

a) $4y$ con $6y + 7$ b) $6n$ con $-2n + 5$ c) $-2a$ con $-a + 5$ d) $-7t$ con $6t - 8$

e) $-4x - 7$ con $-2x - 5$ f) $5z - 3$ con $-7z + 8$ g) $5b + 4$ con $5b - 4$ h) $3h + 6$ con $-3h + 6$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.10 Resta de dos expresiones algebraicas

R 1. Reduce términos semejantes en las siguientes expresiones algebraicas:

a) $7x + 6 - 9x + 9$ b) $t - 2 + 8t + 6$ c) $4n + 3 - 4n - 2$ d) $-7h + 2 - 7h - 6$

2. Suma las siguientes expresiones algebraicas:

a) $9a$ con $2a - 5$ b) $7t$ con $-t + 10$ c) $7x - 8$ con $-5x - 6$ d) $2y + 2$ con $-5y + 4$

C Los pasos para realizar una resta de dos expresiones algebraicas son:

1. Escribir el minuendo. $3x + 1$
2. Escribir el signo (–) de la resta. $3x + 1 -$
3. Escribir el sustraendo, si este tiene signo negativo o más de un término, escribirlo entre paréntesis. $3x + 1 - (2x - 3)$
4. Convertir la resta en suma cambiando los signos de los términos del minuendo.
5. Suprimir los paréntesis. $3x + 1 + (-2x + 3)$
6. Reducir términos semejantes. $3x + 1 - 2x + 3$

$3x - 2x + 1 + 3 = x + 4$

Resta las siguientes expresiones algebraicas.

a) De $5a + 9$ restar $2a + 7$ b) De $2z + 9$ restar $7z + 7$ c) De $2h + 4$ restar $h - 6$

d) De $-4y - 8$ restar $-4y - 5$ e) De $-b + 3$ restar $-5b - 3$ f) De $-2m + 3$ restar $-7m + 3$

Unidad 4

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.11 Operaciones combinadas

R

1. Suma las siguientes expresiones algebraicas:

a) $6x$ con $9x - 7$ b) $6n$ con $-3n + 5$ c) $3y - 4$ con $-7y - 9$ d) $4a + 5$ con $-5a + 6$

2. Resta las siguientes expresiones algebraicas:

a) De $4b - 16$ restar $9b + 8$ b) De $3t + 2$ restar $5t - 1$ c) De $6x + 5$ restar $-4x + 6$

C

Pasos para realizar el cálculo de operaciones combinadas:

1. Suprimir los paréntesis aplicando la propiedad distributiva.
2. Ordenar los términos según la variable (aplicando la propiedad conmutativa).
3. Reducir términos semejantes.

En la realización de operaciones combinadas como la anterior, se debe tener un especial cuidado con los signos, cuando se aplique la propiedad distributiva.

Realiza las siguientes operaciones combinadas.

a) $12(x + 1) + 3(2x + 3)$ b) $5(-3y - 4) + 6(3y - 3)$ c) $3(2x - 5) - (x + 3)$

d) $3(n - 5) - 4(3n + 2)$ e) $-4(-a + 4) - 7(a - 2)$ f) $7(-2t - 5) - (-3t - 9)$

g) $\frac{3}{4}(8h - 4) - 3(h + 3)$ h) $-\frac{1}{2}(6z - 18) + \frac{3}{5}(-5z + 15)$ i) $-\frac{5}{6}(10h - 18) + \frac{5}{9}(3h - 6)$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.12 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Puedo realizar multiplicaciones de números por expresión algebraica como las siguientes: $5a \times 4$, $4a \times \left(-\frac{3}{2}\right)$, $-5(-3n - 7)$, $\frac{5}{2}(4m + 2)$.				
2. Puedo realizar divisiones de un número por una expresión algebraica como las siguientes: $(-27x - 6) \div (-3)$, $-12n \div \frac{4}{7}$, $-15n \div (-5)$.				
3. Efectúo correctamente operaciones combinadas de multiplicación y división de números con una expresión algebraica como $\frac{4n + 3}{2} \times 4$, $\frac{-3a - 5}{7} \times 21$.				
4. Puedo reducir expresiones algebraicas cuyos términos tienen la misma variable como las siguientes: $4a + 2a$, $9a - 5a$.				
5. Reduzco correctamente términos semejantes en una expresión algebraica como $5t + 6 + 6t + 9$, $4n + 3 - 4n - 2$.				
6. Realizo correctamente la suma de dos expresiones algebraicas, como $-2a$ con $-a + 5$, $4a + 5$ con $-5a + 6$.				
7. Realizo correctamente la resta de dos expresiones algebraicas, como a $3t + 2$ restar $5t + 1$, de $5a + 9$ restar $-8a + 7$.				
8. Efectúo correctamente operaciones combinadas de suma y resta de expresiones algebraicas como $3(2x - 5) - (x + 3)$ y $-\frac{1}{4}(4a - 12) + \frac{5}{2}(4a - 6)$.				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.1 Representación de la relación de igualdad

Dos expresiones algebraicas que representan al mismo valor se conectan con el símbolo (=). A la relación de dos expresiones matemáticas que representan el mismo valor se le llama **igualdad**.

En la igualdad $4x = y$:

$$\underbrace{4x}_{\text{miembro izquierdo}} = \underbrace{y}_{\text{miembro derecho}}$$

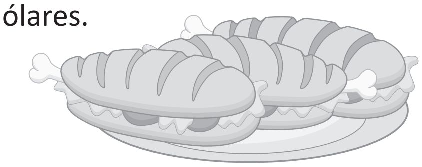
Ejemplos de igualdades:

Igualdad	Lectura
a) 10 = 10	10 **es igual a** 10
b) 5 + 2 = 7	5 + 2 **es igual a** 7
c) 3 + 4 = 6 + 1	3 + 4 **es igual a** 6 + 1

1. Escribe por cada literal una igualdad en la situación presentada.

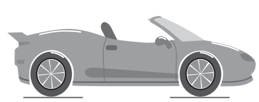
   a) Juan tiene x años y Mario y años, Juan es 4 años mayor que Mario.

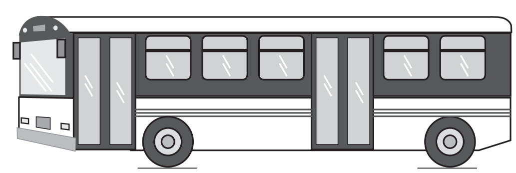
   b) El costo de comprar x panes con pollo a $2.00 cada uno es de y dólares.



   c) El vuelto de comprar un pastel de a dólares para conmemorar el día de la mujer es de $4.00 al pagar con un billete de b dólares.

   d) La diferencia de tiempo que tarda en recorrer 27 km un carro que viaja a una velocidad de n km/h y un bus que viaja a m km/h es de 1 hora.





2. En las siguientes igualdades escribe en tu cuaderno cuál es el miembro izquierdo y el miembro derecho.

   a) $3 \times 6 = 18$ b) $7 + 5 = 3 + 9$ c) $7a = 4b$ d) $7 - 5n = m + 5$

3.2 Representación de la relación de desigualdad

R La velocidad de Marta es y m/min y la de Antonio x m/min. Representa una igualdad si Marta corre dos veces más veloz que Antonio.

C

Los símbolos < o > se utilizan para representar la relación de cantidades distintas. El símbolo < se lee **menor que** y > se lee **mayor que**.

Los símbolos ≤ o ≥ se utilizan para representar la relación de dos cantidades iguales o distintas. El símbolo ≤ se lee **menor o igual que** y ≥ se lee **mayor o igual que**. A las relaciones de dos expresiones matemáticas que utilizan los símbolos anteriores se les llama **desigualdades**.

En la desigualdad $5x \leq 65$:

$$\underbrace{5x}_{\text{miembro izquierdo}} \leq \underbrace{65}_{\text{miembro derecho}}$$

Ejemplos de desigualdades:

Desigualdad	**Lectura**
a) $x < 8$	x **es menor que** 8
b) $10 \leq x$	10 **es menor o igual que** x
c) $x > 4$	x **es mayor que** 4
d) $x \geq 7$	x **es mayor o igual que** 7

En ocasiones no se utilizan expresiones como "menor que", "mayor que", para referirse a una desigualdad, pueden utilizarse expresiones alternativas como "menos de", "más de" entre otras.

1. Expresa con una desigualdad las siguientes situaciones:
   a) La nota mínima de aprobación de una asignatura es 6. Carlos aprobó con nota de t puntos.

   b) Para ir al volcán Chinchontepec de San Vicente se debe tener **al menos** \$8.00. Ana fue al volcán con x dólares el fin de semana pasado.

   c) Carlos pesa n libras y está en su peso ideal. A su edad el peso ideal debe ser **mayor que** 106 libras pero **menor que** 122 libras.

2. El costo que se debe pagar por kWh de luz consumido es de \$0.16 y por metro cúbico de agua consumido es \$0.30. La familia de José gasta a kWh de luz y b metros cúbicos de agua. Determina qué representan las siguientes desigualdades para el mes 1 y el mes 2.

   a) $0.16a + 0.3b \leq 25$ b) $0.16a + 0.3b \geq 10$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Problemas de aplicación

1. Se está construyendo una casa de dos niveles, y será embaldosada, realiza lo que se te pide en cada literal:

   a) Escribe una expresión algebraica que represente el área cubierta con 20 baldosas rectangulares, en la que el ancho de una baldosa es x cm y el largo y cm.

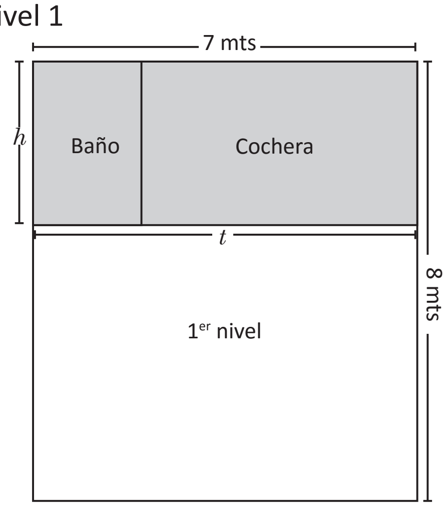
   b) Al siguiente día el albañil continuó pegando más baldosas. Escribe una expresión algebraica que represente la área total cubierta con las baldosas en los dos días, en los siguientes casos:

   i) Pega 30 baldosas, de x cm de ancho y y cm de largo.

   ii) Pega 40 baldosas, de a cm de ancho y b cm de largo.

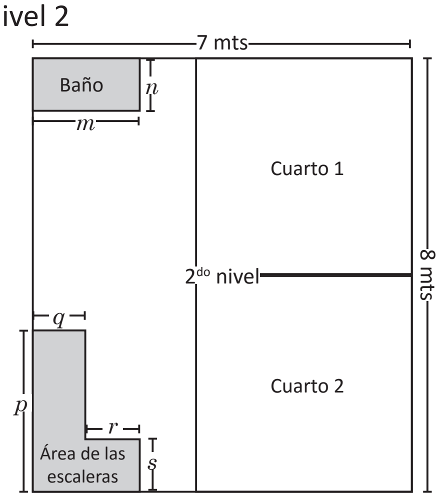
2. Se realizará el presupuesto del trabajo, por lo que se calcula el gasto por cada nivel. Con la información de cada literal escribe una expresión algebraica que represente el gasto en

   a) Nivel 1



En las partes sombredas no se pondrán baldosas.

   b) Nivel 2



   c) El costo por pegar 1 m^2 de baldodas es de \$2.5, ¿ cuánto costará embaldosar el total de la casa?

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Unidad 5

Ecuaciones de primer grado

Las ecuaciones de primer grado han sido históricamente una herramienta muy útil para la resolución de problemas del entorno en que el ser humano se desenvuelve, por ejemplo, los egipcios utilizaban un método llamado "falsa posición" y consistía en que para resolver una ecuación como $3x + 5x = 16$, sustituían por un valor $x = 4$ (como ejemplo) y esto da como resultado $3 \times 4 + 5 \times 4 = 32$ y luego se utilizaba la regla de 3 para calcular el valor verdadero de $x = \frac{4 \times 16}{32} = 2$.

Las aplicaciones de ecuaciones en el área de matemática financiera son muy importantes.

La solución general de una ecuación de primer grado fue planteada en la antigüedad en regiones como la India, y su utilización y aplicación en áreas científicas ha sido muy importante hasta la fecha en contextos como cálculo de velocidades y distancias para la ingeniería automotriz, porcentajes y descuentos, cálculo de herencias, cálculo de honorarios o salarios, ingeniería de sistemas, entre otros, por eso se vuelve un tema fundamental, ya que se utiliza en muchos ámbitos profesionales.

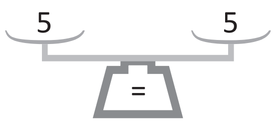
Durante la unidad se desarrollará el contenido sobre las propiedades y conceptos de las igualdades, métodos para la solución de una ecuación de primer grado con una incógnita, y sus respectivas aplicaciones en la solución de problemas del entorno, y que involucran proporciones y otros presaberes.

1.1 Igualdad de dos expresiones numéricas

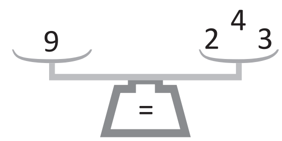
Recuerda que el signo (=) es un símbolo matemático utilizado para representar la igualdad de dos expresiones numéricas.

1. Observa las siguientes balanzas y escribe las igualdades representadas en cada una de ellas:

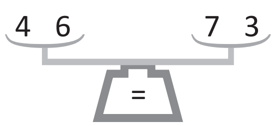
a)



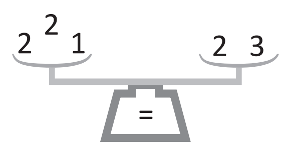
b)



c)



d)



2. Llena los espacios en blanco para que se cumpla la igualdad matemática.

a) 8 + ___ = 16
b) 5 + ___ = 13
c) 3 + ___ = 4 + 6
d) 7 – ___ = 3
e) 6 – ___ = –4
f) ___ – 5 = 5
g) 17 – ___ = 20 – 10
h) 19 – 4 = 5 + ___

3. Llena los espacios en blanco $\square$ para que se cumpla la igualdad matemática.

a) $\square = 25$
b) $\square = -5$
c) $\square - 12 = 10$
d) $25 - \square = 20$
e) $8 - \square = -10$
f) $\square - 15 = -5$
g) $10 - \square = 4 - 9$
h) $18 - 6 = \square - 12$

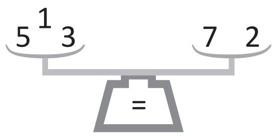
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.2 Igualdad de dos expresiones algebraicas

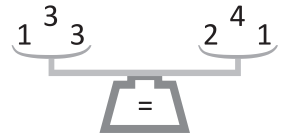
R

1. Representa la igualdad de las expresiones que están en los platillos de las siguientes balanzas:

a)



b)



2. Llena los espacios en blanco para que se cumpla la igualdad matemática.

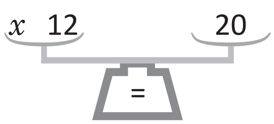
a) ____ – 1 = 26 b) 30 – ____ = 20 – 8 c) 40 – 35 = ____ – 45

C

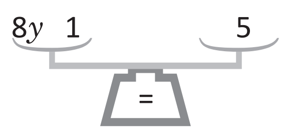
Para escribir simbólicamente que dos expresiones algebraicas representan el mismo valor, también se usa el signo (=).

Representa la igualdad matemática de las expresiones que están en las siguientes balanzas.

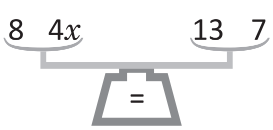
a)



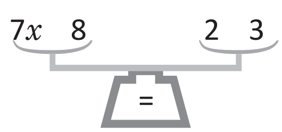
b)



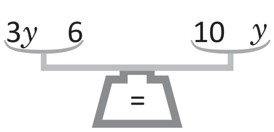
c)



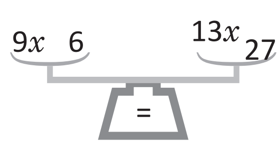
d)



e)



f)



2.1 Solución de una ecuación

1. Llena los espacios colocando un número que mantiene la igualdad.

a) 9 + _____ = 17   b) _____ + 2 = 7   c) 4 + 2 = 3 + _____

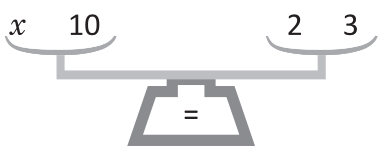
d) 8 – _____ = 5   e) 3 – _____ = –2   f) 6 – _____ = 4 – 3

2. Llena los espacios en blanco $\square$ con un número en cada literal para que se cumpla la igualdad matemática.

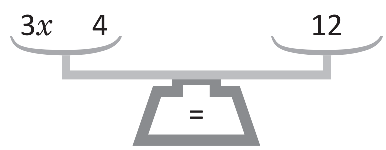
a) $\square$ + 3 = 5   b) –4 – $\square$ = –7   c) 33 + 33 = 3 + $\square$ d) 14 – 4 = $\square$ + 12

3. Representa la igualdad matemática de las expresiones que están en los platillos de las siguientes balanzas.

a)



b)



La igualdad de dos expresiones matemáticas que incluye una variable se llama **ecuación**.
En una ecuación al valor desconocido que se representa por una variable se llama **incógnita**.
El valor numérico de la incógnita que cumple con la igualdad se llama **solución de la ecuación**, y al proceso para encontrarla se le llama **resolver la ecuación**.

Ejemplo:
De: 31, 32, 33, 34, 35 y 36, encuentra la solución de la ecuación **$5x + 300 = 470$**

Valor de x	Miembro izquierdo $5x + 300$	Resultado del miembro derecho
Si $x = 31$	$5 \times 31 + 300$	455
Si $x = 32$	$5 \times 32 + 300$	460
Si $x = 33$	$5 \times 33 + 300$	465
Si $x = 34$	$5 \times 34 + 300$	470
Si $x = 35$	$5 \times 35 + 300$	475
Si $x = 36$	$5 \times 36 + 300$	480

Cuando el valor de x es 34, el valor que se tiene en el miembro izquierdo es igual al valor del miembro derecho, por tanto, se cumple la igualdad matemática establecida en la ecuación.

1. ¿Cuál o cuáles de las siguientes ecuaciones tienen como solución el valor de 3? (Sustituye el valor en cada ecuación para dar una respuesta).

a) $2x + 4 = 10$ b) $3x - 7 = 2$ c) $8x + 5 = 21$ d) $4x - 8 = 4$

2. ¿Cuál o cuáles de las siguientes ecuaciones tienen como solución el valor de –4? (Sustituye el valor en cada ecuación para dar una respuesta).

a) $x - 5 = -9$ b) $2x + 3 = 5$ c) $3x + 6 = -6$ d) $5x + 20 = 2$

3. ¿Cuál o cuáles de las siguientes ecuaciones tienen como solución el valor de 0.5? (Sustituye el valor en cada ecuación para dar una respuesta).

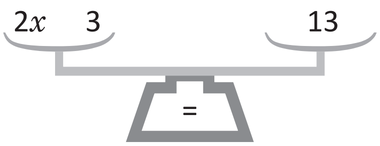
a) $2x - 3 = -1$ b) $x + 2.5 = 3$ c) $3x - 3.5 = -2.6$ d) $-3x + 4.5 = 3$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

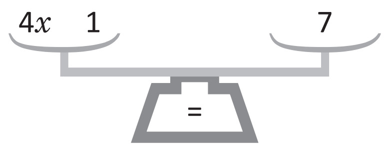
2.2 Propiedades de la igualdad

1. Representa la igualdad matemática de las expresiones que están en los platillos de las siguientes balanzas:

a)



b)



2. ¿Cuál o cuáles de las siguientes ecuaciones tienen como solución el valor de 7? (Sustituye el valor en cada ecuación para dar una respuesta).

a) $3x + 3 = 27$ b) $3x - 8 = 10$ c) $5x + 9 = 44$

Para despejar la incógnita se aplican las siguientes propiedades de las igualdades:

Una igualdad matemática se mantiene cuando:
1. En ambos miembros se suma el mismo número o expresión. Si A = B, entonces A + C = B + C.
2. En ambos miembros se resta el mismo número o expresión. Si A = B, entonces A − C = B − C.
3. En ambos miembros se multiplica el mismo número o expresión. Si A = B, entonces A × C = B × C.
4. En ambos miembros se divide por el mismo número (diferente de cero) o expresión. Si A = B, y C diferente de cero, entonces A ÷ C = B ÷ C.
5. Se intercambia el miembro izquierdo y derecho. Si A = B entonces B = A.

A las afirmaciones anteriores se les llama **propiedades de una igualdad**.

Ejemplo:
A continuación se muestran las propiedades utilizadas en la resolución de la ecuación $3x + 2 = 41$

$3x + 2 = 41$

$3x + 2 - 2 = 41 - 2$ ... **Propiedad 2**

$3x = 39$

$3x \div 3 = 39 \div 3$ ... **Propiedad 4**

$x = 13$

Identifica y escribe el número de la propiedad utilizada, en el paso de color gris del desarrollo de las siguientes ecuaciones.

a)

$8x + 2 = 42$

$8x + 2 - 2 = 42 - 2$ ...

$8x = 40$

$8x \div 8 = 40 \div 8$ ...

$x = 5$

b)

$\frac{1}{3}x - 2 = 8$

$\frac{1}{3}x - 2 + 2 = 8 + 2$ ...

$\frac{1}{3}x = 10$

$\frac{1}{3}x \times 3 = 10 \times 3$ ...

$x = 30$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.3 Solución de ecuaciones aplicando la propiedad 1 de las igualdades

R

1. ¿Cuál o cuáles de las siguientes ecuaciones tienen como solución el valor de −4? (Sustituye el valor en cada ecuación para dar una respuesta).

   a) $2x + 3 = -5$ b) $3x - 8 = 1$ c) $8x - 3 = -35$ d) $4x - 8 = 0$

2. Identifica y escribe el número de la propiedad utilizada en el paso de color gris del desarrollo de cada una de las siguientes ecuaciones.

   a)
   $$-x - 6 = 24$$
   $$-x - 6 + 6 = 24 + 6 \ldots \quad \boxed{}$$
   $$-x = 30$$
   $$-x \times (-1) = 30 \times (-1) \ldots \quad \boxed{}$$
   $$x = -30$$

   b)
   $$5x + 2 = 7$$
   $$5x + 2 - 2 = 7 - 2 \ldots \quad \boxed{}$$
   $$5x = 5$$
   $$5x \div 5 = 5 \div 5 \ldots \quad \boxed{}$$
   $$x = 1$$

C

Para resolver una ecuación aplicando la **Propiedad 1** de una igualdad, se suma en ambos miembros un mismo número, de manera que solo quede la incógnita en el miembro.

Ejemplos de solución de algunas ecuaciones:

a) $x - 3 = 2$
$$x - 3 + 3 = 2 + 3$$
$$x = 5$$
Se le suma 3 en ambos miembros.

b) $-6 + x = 1$
$$-6 + x + 6 = 1 + 6$$
$$x = 7$$
Se le suma 6 en ambos miembros.

c) $x - 7 = -4$
$$x - 7 + 7 = -4 + 7$$
$$x = 3$$
Se le suma 7 en ambos miembros.

d) $x - 4 = -8$
$$x - 4 + 4 = -8 + 4$$
$$x = -4$$
Se le suma 4 en ambos miembros.

Para resolver la ecuación sobre x, despejamos x.

1. Completa el espacio en las soluciones de las ecuaciones.

   a)
   $$x - 5 = 12$$
   $$x - 5 + \boxed{} = 12 + \boxed{}$$
   $$x = 17$$

   b)
   $$-3 + x = 10$$
   $$-3 + x \boxed{}\ 3 = 10 \boxed{}\ 3$$
   $$x = 13$$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

   a) $x - 4 = 6$ b) $x - 2 = 14$ c) $-7 + x = -3$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.4 Solución de ecuaciones aplicando la propiedad 2 de las igualdades

1. Identifica y escribe el número de la propiedad utilizada en el paso de color gris del desarrollo de cada una de las siguientes ecuaciones.

a)
$$3x - 7 = -28$$
$$3x - 7 + 7 = -28 + 7 \ldots \boxed{}$$
$$3x = -21$$
$$3x \div 3 = (-21) \div 3 \ldots \boxed{}$$
$$x = -7$$

b)
$$\frac{4}{3}x - 1 = 7$$
$$\frac{4}{3}x - 1 + 1 = 7 + 1 \ldots \boxed{}$$
$$\frac{4}{3}x = 8$$
$$\frac{4}{3}x \times \frac{3}{4} = 8 \times \frac{3}{4} \ldots \boxed{}$$
$$x = 6$$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x - 10 = 4$ b) $-8 + x = 8$ c) $x - 15 = -10$ d) $x - 10 = -20$

Para resolver ecuaciones como las anteriores aplicando la **Propiedad 2** de una igualdad, se resta en ambos miembros un mismo número, de manera que solo quede la incógnita en el miembro.

Ejemplos de solución de algunas ecuaciones:

a)
$$x + 2 = 3$$
$$x + 2 - 2 = 3 - 2$$
$$x = 1$$
Se le resta 2 en ambos miembros.

b)
$$4 + x = 9$$
$$4 + x - 4 = 9 - 4$$
$$x = 5$$
Se le resta 4 en ambos miembros.

c)
$$x + 7 = 4$$
$$x + 7 - 7 = 4 - 7$$
$$x = -3$$
Se le resta 7 en ambos miembros.

d)
$$x + 4 = -8$$
$$x + 4 - 4 = -8 - 4$$
$$x = -12$$
Se le resta 4 en ambos miembros.

1. Completa el espacio en las soluciones de las ecuaciones.

a)
$$x + 2 = 3$$
$$x + 2 - 2 = 3 - 2$$
$$x = 1$$

b)
$$3 + x = 7$$
$$3 + x \boxed{} 3 = 7 \boxed{} 3$$
$$x = 4$$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x + 4 = 12$ b) $x + 6 = 13$ c) $5 + x = 8$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.5 Método de transposición de términos

R

1. Completa el espacio en las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $x - 15 = 30$

$x - 15 + \square = 30 + \square$

$x = 45$

b) $-10 + x = 20$

$-10 + x \square 10 = 20 \square 10$

$x = 30$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x - 3 = -2$

b) $x - 2 = -4$

3. Completa el espacio en las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $x + 3 = 7$

$x + 3 - \square = 7 - \square$

$x = 4$

b) $5 + x = 8$

$5 + x \square 5 = 8 \square 5$

$x = 3$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x + 3 = 1$

b) $x + 5 = -4$

C

Cuando un término pasa de un miembro al otro con el signo cambiado se le llama **transposición de término**.

Por ejemplo, la ecuación $x - 3 = 4$ se resuelve por transposición de la siguiente manera:

$$x \boxed{-\,3} = 4$$

$$x = 4 \boxed{+\,3}$$

$$x = 7$$

El número 3 se restaba en el miembro izquierdo y pasa al miembro derecho a sumar:

Resuelve por transposición las siguientes ecuaciones:

a) $x - 7 = 3$

$x = 3 + \square$

$x = \square$

b) $x + 4 = 8$

c) $-3 + x = 3$

$x = 3 + \square$

$x = \square$

d) $7 + x = 14$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.6 Solución de ecuaciones aplicando la propiedad 3 de las igualdades

R

1. Completa el espacio en las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a)
$$x + 20 = 75$$
$$x + 20 - \square = 75 - \square$$
$$x = 55$$

b)
$$11 + x = 22$$
$$11 + x \,\square\, 11 = 22 \,\square\, 11$$
$$x = 11$$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x + 3 = 1$ b) $x + 2 = -4$

3. Resuelve por transposición las siguientes ecuaciones:

a) $x - 10 = 5$
$$x = 5 + \square$$
$$x = \square$$

b) $x - 5 = 7$

c) $-9 + x = 4$
$$x = 4 + \square$$
$$x = \square$$

d) $-4 + x = 7$

C

Para resolver ecuaciones aplicando la **Propiedad 3** de las igualdades, multiplica ambos miembros por el recíproco del coeficiente de la incógnita. En el caso de que el coeficiente que acompaña a la incógnita sea una fracción, primero se representa como la multiplicación de un número fraccionario por la incógnita y luego, se realiza la multiplicación del recíproco del número fraccionario en ambos miembros. Por ejemplo:

$$\frac{1}{5}x = 10$$
$$\frac{1}{5}x \times 5 = 10 \times 5$$
$$x = 50$$

Una regla práctica para despejar la incógnita en casos como los anteriores es escribir a la incógnita con coeficiente 1 y multiplicar el otro miembro por el recíproco del coeficiente que tenía la incógnita originalmente. Por ejemplo:

$$\frac{1}{5}x = 10$$
$$x = 10 \times 5$$
$$x = 50$$

$$\frac{x}{6} = 2$$
$$\frac{1}{6}x = 2$$
$$x = 2 \times 6$$
$$x = 12$$

1. Completa el espacio en las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a)
$$\frac{1}{4}x = 3$$
$$\frac{1}{4}x \times \square = 3 \times \square$$
$$x = 12$$

b)
$$\frac{x}{7} = 3$$
$$\frac{1}{7}x = 3$$
$$\frac{1}{7}x \,\square\, 7 = 3 \,\square\, 7$$
$$x = 21$$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x}{8} = 3$ b) $\frac{1}{10}x = -4$ c) $-\frac{x}{8} = 3$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.7 Solución de ecuaciones aplicando la propiedad 4 de las igualdades

R

1. Resuelve por transposición las siguientes ecuaciones:

a) $x + 5 = 8$

$x = 8 - \square$

$x = \square$

b) $x - 1 = 5$

c) $3 + x = -7$

$x = -7 - \square$

$x = \square$

d) $-8 + x = -4$

2. Completa el espacio en las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{1}{8}x = 5$

$\frac{1}{8}x \times \square = 5 \times \square$

$x = 40$

b) $-\frac{x}{2} = 3$

$-\frac{1}{2}x = 3$

$-\frac{1}{2}x \square (-2) = 3 \square (-2)$

$x = -6$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x}{3} = -4$

b) $-\frac{1}{9}x = -2$

C

Para resolver ecuaciones aplicando la **Propiedad 4** de las igualdades, se divide ambos miembros por el coeficiente de la incógnita. En forma opcional se pueden resolver ecuaciones como la clase anterior, aplicando la **Propiedad 3** multiplicando ambos miembros de la ecuación por el recíproco del coeficiente de la incógnita. Por ejemplo:

$$7x = -21$$
$$7x \div 7 = (-21) \div 7$$
$$x = -3$$

$$7x = -21$$
$$7x \times \frac{1}{7} = -\cancel{21}^{3} \times \frac{1}{\cancel{7}_{1}}$$
$$x = -\frac{3}{1}$$
$$x = -3$$

Una regla práctica para despejar la incógnita en ecuaciones como la anterior, es escribir la incógnita con coeficiente 1 y dividir directamente el otro miembro por el coeficiente de la incógnita.

Por ejemplo:

$$7x = -21$$
$$x = -21 \div 7$$
$$x = -3$$

1. Completa el espacio en las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $3x = 9$

$3x \div \square = 9 \div \square$

$x = 3$

b) $2x = 10$

$2x \div \square = 10 \div \square$

$x = 5$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $8x = -32$

b) $-7x = 42$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.8 Solución de ecuaciones aplicando más de una propiedad

R 1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x}{5} = -9$ b) $-\frac{1}{9}x = -2$ c) $-\frac{1}{10}x = -6$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $8x = -16$ b) $-10x = 30$

C Para resolver ecuaciones como las vistas en clases tienes que

1. Transponer las cantidades conocidas al miembro derecho.
2. Realizar las operaciones indicadas.
3. Aplicar la propiedad 3 o 4 para despejar x.

Por ejemplo:

a) $5x + 7 = -8$
$5x = -8 - 7$
$5x = -15$
$x = -15 \div 5$
$x = -3$

b) $-2x - 6 = 10$
$-2x = 10 + 6$
$-2x = 16$
$x = 16 \div (-2)$
$x = -8$

c) $\frac{x}{5} - 7 = 3$
$\frac{x}{5} = 3 + 7$
$\frac{x}{5} = 10$
$x = 10 \times 5$
$x = 50$

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x + 5 = 9$ b) $\frac{1}{7}x + 2 = 5$ c) $\frac{x}{5} - 4 = -8$ d) $-6x - 7 = 5$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.9 Solución de ecuaciones con incógnitas en ambos miembros

R 1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x = 9$ b) $5x = -20$ c) $-2x = 10$ d) $-7x = -14$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 3 = 5$ b) $3x + 6 = -9$ c) $\frac{x}{3} - 1 = 1$ d) $\frac{1}{2}x + 3 = -4$

C Para resolver una ecuación con la incógnita en ambos miembros se tiene que

1. Transponer todos los términos que tienen x al miembro izquierdo.
2. Transponer todas las cantidades conocidas al miembro derecho.
3. Realizar las operaciones indicadas.
4. Aplicar la propiedad 3 o 4 para despejar x.

Por ejemplo:

$3x = 4 + 2x$ ... Transponiendo $2x$ al miembro izquierdo

$3x - 2x = 4$

$x = 4$

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x = -16 - 5x$ b) $7x = 20 + 3x$

c) $-9x = -3x + 24$ d) $5x - 6 = -4x + 3$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.10 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Resuelvo ecuaciones como a) $x - 4 = 5$ b) $x - 6 = -10$				
2. Resuelvo ecuaciones como a) $x + 8 = 13$ b) $x + 6 = -10$				
3. Resuelvo ecuaciones como a) $\frac{1}{4}x = 3$ b) $\frac{1}{9}x = -2$				
4. Resuelvo ecuaciones como a) $7x = 14$ b) $-x = 9$				
5. Resuelvo ecuaciones como a) $2x + 1 = 5$ b) $\frac{x}{2} - 3 = 4$				
6. Resuelvo ecuaciones como: a) $2x = -3 + x$ b) $8x + 2 = 3x + 7$				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.11 Solución de ecuaciones con signos de agrupación

R

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5 - 2x = 9$ b) $-3x - 2 = -8$ c) $-\frac{x}{4} + 10 = 13$ d) $-\frac{1}{6}x - 8 = -11$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x + 6 = -4 - 2x$ b) $-4x - 5 = 9 + 3x$ c) $7x - 2 = -22 + 2x$

C

Para resolver una ecuación que incluye signos de agrupación, debes hacer lo siguiente:

1. Aplicar la propiedad distributiva para suprimir los paréntesis.
2. Transponer todos los términos que tienen x al miembro izquierdo y todas las cantidades conocidas al miembro derecho.
3. Realizar las operaciones indicadas.
4. Aplicar la propiedad 3 o 4 para despejar x.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 2(x+3)+4 &= 20 \\ 2x + 2\times 3 + 4 &= 20 \\ 2x + 6 + 4 &= 20 \\ 2x + 10 &= 20 \\ 2x &= 20 - 10 \\ 2x &= 10 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $4(x + 3) + 5 = 25$ b) $-5(x + 2) + 16 = 26$

c) $14 + 3(x + 4) = 2$ d) $28 - (x + 5) = 20$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.12 Ecuaciones con solución fraccionaria o decimal

R 1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $-12x + 10 = -7x - 20$ b) $-4 + 8x = 5x + 2$ c) $-7 + 6x = 10x + 5$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2(x - 3) + 4 = 6$ b) $-(x - 5) + 15 = 40$ c) $-5(x - 5) + 15 = 30$

C La solución de una ecuación de primer grado puede ser fraccionaria positiva o negativa, decimal positiva o negativa. Por ejemplo:

a) $4x = 2$
$x = 2 \div 4$
$x = \frac{1}{2}$ o $x = 0.5$

b) $5x + 1 = -6$
$5x = -6 - 1$
$5x = -7$
$x = (-7) \div 5$
$x = -\frac{7}{5}$ o $x = -1.4$

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x = 2$ b) $4x + 3 = 5$ c) $7x + 2 = 7 - 3x$

d) $5(3x + 1) - 1 = 10$ e) $-5 = 2(5x - 2) - 10$ f) $x + 3 = 3(2 - x)$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.13 Ecuaciones con términos y coeficientes decimales

R 1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $-(2x + 4) + 6 = -2$

b) $-3(2x - 3) + 1 = 16$

c) $4(2x - 1) - 6 = 14$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $10x + 2 = -13$

b) $-7x - 8 = 3x - 2$

c) $-1 + 2(3x - 1) = 1$

C Para resolver ecuaciones que tienen coeficientes y términos decimales, se transforman a ecuaciones enteras multiplicando cada uno de los términos por 10 100, 1 000 o según el número máximo de decimales que presenten los términos y luego se despeja la x.

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $0.3x = 1.2$

b) $0.09x = -0.27$

c) $-0.25x = 0.75$

d) $-0.4x = 1.2$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.14 Ecuaciones con términos y coeficientes fraccionarios

R

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x + 2 = 7 - 2x$

b) $7x + 3 = 2(2x - 3)$

c) $3(x + 1) + 2 = 4(2x + 1) + 1$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $0.6x - 0.8 = 1.6$

b) $0.52x + 1.58 = 0.02$

c) $-1.5x - 0.2 = 4.3$

d) $1.5x - 0.5 = 2.5$

Unidad 5

C

Para resolver ecuaciones con coeficientes y términos fraccionarios se convierte tanto los términos como los coeficientes en enteros, multiplicándolos por el mcm de los denominadores y luego se despeja x.

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{1}{2}x - 4 = \frac{3}{2}$

b) $\frac{4}{3}x + 3 = \frac{5}{6}x$

c) $\frac{x}{8} - 5 = \frac{3}{4}x$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.15 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Resuelvo ecuaciones como a) $2(x + 4) + 2 = 14$ b) $5 - (x - 4) = 12$				
2. Resuelvo ecuaciones como a) $6x = 2$ b) $-9 = 3 + 5(x - 2)$ c) $3(2x - 1) - 4 = 3(1 - x)$				
3. Resuelvo ecuaciones como a) $0.3x - 0.2 = 1.6$ b) $0.02x + 0.04 = 0.18 - 0.05x$ c) $1.1x + 1.7 = 0.6x + 0.2$				
4. Resuelvo ecuaciones como a) $\frac{1}{2}x - 3 = \frac{1}{4}x$ b) $\frac{3}{5}x - 1 = -\frac{3}{10}x$ c) $-\frac{x + 5}{2} = \frac{3}{4}$				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.1 Aplicación de ecuaciones utilizando una propiedad de las igualdades

R 1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $1.2x + 1 = 0.4x + 4.2$

b) $3.75x - 2.25 = 1.25x - 4.75$

c) $-1.5x - 1.4 = 2.2 - 0.3x$

d) $-2.75x + 1.5 = -1.75x - 2.5$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x}{4} + 3 = \frac{5}{2}x$

b) $\frac{x-3}{2} = \frac{x}{4}$

c) $\frac{x+4}{3} = -\frac{1}{6}x$

d) $\frac{2x-3}{4} - \frac{x}{8} = \frac{3}{8}$

C

Para resolver problemas mediante la aplicación de ecuaciones de primer grado se tiene que

1. Definir qué cantidad se representa con la incógnita.
2. Escribir la ecuación.
3. Resolver la ecuación.
4. Dar la respuesta.

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. Antonio participa en una competencia de triatlón en la que tiene que recorrer 22 000 m; si la mitad del recorrido lo hizo corriendo y 7 500 m los hizo en bicicleta, ¿cuántos metros hizo nadando?

2. Al sumarle 16 al número x, resultó –8. Determina el valor de x.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

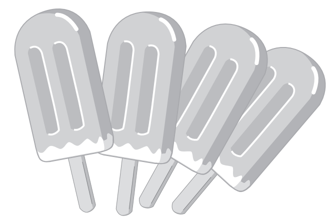
3.2 Aplicación de ecuaciones utilizando más de una propiedad de las igualdades

R

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $-\frac{x-3}{2} = \frac{5}{4}$ b) $-\frac{2x+5}{3} = \frac{1}{6}$ c) $\frac{x+4}{8} + 2 = \frac{1}{4}$ d) $-\frac{x-5}{6} + 2 = \frac{x}{12}$

2. Antonio hace paletas para venderlas el lunes, martes y miércoles. El día lunes le quedó una ganancia de tres dólares, el día miércoles tuvo que dar más baratas las paletas para poder venderlas, por lo que tuvo una pérdida de dos dólares. El día jueves hace cuentas para ver lo rentable que es vender sus paletas, y observa que luego de los tres días tuvo una pérdida total de cinco dólares. ¿De cuánto fue la pérdida o ganancia el día martes?



C

Recuerda el problema desarrollado en clase.
Miguel tiene una plantación de papaya, él ha cortado 3 árboles debido a que estaban produciendo frutos de mala calidad. Cada uno de los árboles restantes tiene 5 papayas cada uno, produciendo una cosecha total de 355. ¿Cuántos árboles tenía Miguel al principio?

En la situación lo primero que se debe determinar es la variable, para luego establecer las cantidades que guardan una relación de igualdad. En este caso, la cantidad de árboles por la cantidad de papayas que produce un solo árbol es igual a la cantidad total de papayas producidas, de manera que el proceso de solución de la situación es:

Sea x: El número de árboles que tenía Miguel inicialmente.

Cantidad de árboles de papaya	x
Cantidad de árboles restantes	$x - 3$
Cantidad de papayas	$5(x - 3)$

$$5(x - 3) = 355$$
$$5x - 15 = 355$$
$$5x = 355 + 15$$
$$5x = 370$$
$$x = 74$$

R. 74 árboles

1. ¿Cuáles son las medidas de la base y la altura de un rectángulo cuyo perímetro es 150 cm, si su base es el doble de su altura?

2. Al multiplicar un número por 4 y luego sumarle 4, resulta 24. ¿Cuál es el número?

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.3 Aplicación de ecuaciones que incluye una incógnita en términos de otra

R

1. La suma de –2, 13, –7, 14 y cierto número es –27. ¿Cuál es el quinto número que se sumó?

2. El perímetro del jardín rectangular de María es 40 m. Si el largo del jardín es 3 veces el ancho. ¿Cuáles son las medidas del jardín?

C

Recuerda el problema desarrollado en clase.
José trabaja a medio tiempo en una ferretería en donde le pagan 4 dólares por día, si trabaja día de semana (de lunes a viernes); 6 dólares por día, si es fin de semana (sábado y domingo). Si en el mes trabajó 20 días y le pagaron 84 dólares, ¿cuántos días de semana y fines de semana trabajó?

En la situación lo primero que se debe determinar es la variable, para luego establecer las cantidades que guardan una relación de igualdad; en este caso, la cantidad de dinero que gana José. Los días de trabajo en la semana, más lo que gana trabajando los días de fin de semana, es su pago mensual. De manera que el proceso de solución de la situación es:

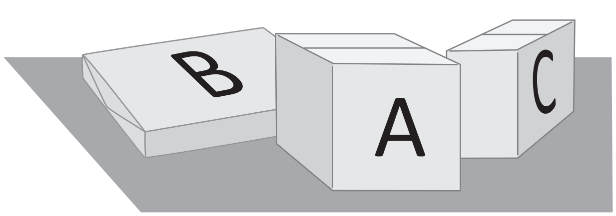
Sea x : El número de días de semana que José trabajó.

	Días de semana	Día de fin de semana
Número de días	x	$20 - x$
Pago	$4x$	$6(20 - x)$
Pago Total	$4x + 6(20 - x)$	

$$4x + 6(20 - x) = 84$$
$$4x + 120 - 6x = 84$$
$$120 - 2x = 84$$
$$-2x = 84 - 120$$
$$-2x = -36$$
$$x = 18$$

R. 18 días de semana y 2 días de fines de semana.

Julia enviará por correo tres paquetes A, B y C. La oficina de correo cobra por peso, y se sabe que el paquete A pesa cinco gramos menos que el B, y el C pesa diez gramos más que el A. Si los tres paquetes juntos pesan 32 gramos, ¿cuánto pesa cada paquete?

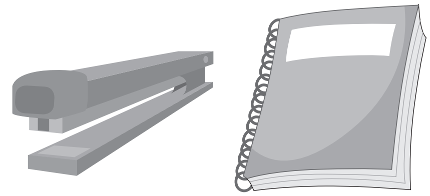


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.4 Aplicación de ecuaciones con variables en ambos miembros

R

1. Responde la pregunta en la siguiente situación:
   Se compraron 9 artículos entre engrapadoras y cuadernos. El precio de una engrapadora es cuatro dólares y el de un cuaderno es de dos dólares. Si se gastaron 26 dólares, ¿cuántas engrapadoras y cuadernos se compraron?



2. Responde la pregunta en la siguiente situación:
   Antonio está jugando con Marta a adivinar números. Si Antonio le da una pista a Marta, y le dice que está pensando cuatro números consecutivos que suman 138, ¿en qué números pensó Antonio?

C

Recuerda el problema desarrollado en clase.
Carlos irá al gimnasio por 5 meses; le cobrarán 20 dólares por mes sin membresía, pero si la adquiere, pagará una cuota única de 30 dólares y 10 dólares por mes, ¿después de cuántos meses habrá gastado la misma cantidad de dinero con o sin membresía?, ¿le conviene pagar la membresía según el tiempo que ha planificado entrenar?

Como se busca el número de meses que pasan hasta haber gastado la misma cantidad de dinero indiferentemente de la modalidad, se establece que la incógnita representa el número de meses que han pasado. Luego, el gasto mensual que se tendría, según la modalidad sería de \$20 o \$10 por la cantidad de meses, según sea sin o con membresía respectivamente. La igualdad se establece entre el gasto total sin haber adquirido la membresía y si se adquiriera la membresía.

Sea x : Cantidad de meses que han pasado hasta haber pagado la misma cantidad de dinero.

	Sin membresía	Con membresía
Cuota única	0	30
Cuota mensual	20	10
Gasto Total	$20x$	$30 + 10x$

$$20x = 30 + 10x$$
$$20x - 10x = 30$$
$$10x = 30$$
$$x = 3$$

R. En el mes 3 el gasto es el mismo con o sin membresía. Para que le salga más barato le conviene adquirir la membresía dado que irá por 5 meses.

La edad de Marta es 10 años y la de su padre es 35 años. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre de Marta será el doble de la edad de ella?

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.5 Aplicaciones en situaciones de distancia, velocidad y tiempo

R

1. La base de un rectángulo mide 4 cm más que su altura. Si su perímetro es 60 cm, ¿cuál es la longitud de la base?

2. Antonio tiene cierta cantidad de dinero. Si comprara 50 camisas del mismo precio le faltarían 150 dólares, y si comprara 19 de las mismas camisas le sobrarían 5 dólares. ¿Cuánto dinero tiene Antonio?

C

Recuerda el problema desarrollado en clase.
Marta salió de su casa para la escuela. Julia, su hermana, salió 4 minutos más tarde. La velocidad de Marta fue de 30 m/min y la de Julia fue de 50 m/min. ¿En cuántos minutos alcanzó Julia a Marta?, si la distancia entre la casa y la escuela fueran 280 m, ¿Julia puede alcanzar a Marta en el camino?

Se define x como el número de minutos que camina Julia, luego se hace una tabla que resume los datos y por último se plantea y resuelve la ecuación.

Sea x : El número de minutos transcurridos mientras camina Julia.

	Marta	Julia
Velocidad	30 m/min	50 m/min
Tiempo	$x + 4$	x
Distancia	$30(x + 4)$	$50x$

$$30\ (x + 4) = 50x$$
$$30x + 120 = 50x$$
$$30x - 50x = -120$$
$$-20x = -120$$
$$x = 6$$

R. 6 minutos

Sabiendo que Julia alcanza a Marta en 6 minutos se debe comprobar si en efecto Julia alcanzaría a Marta ajustándose a las condiciones de la situación. De manera que, si la distancia entre la casa y la escuela fueran 280 m, Julia no podría alcanzar a Marta porque, 6 × 50 = 300 m que es mayor que 280 m.

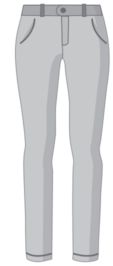
Antonio y Carlos hicieron una competencia. Antonio salió corriendo a 25 m/min; cierta cantidad de minutos después, sale Carlos en su bicicleta a 100 m/min. Si Carlos alcanzó a Antonio en 10 minutos, ¿cuántos minutos antes había salido Antonio?

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.6 Aplicaciones en situaciones de proporcionalidad directa, parte 1

R

1. Julia tiene 55 dólares y Ana 43 dólares. Las dos compraron del mismo tipo de pantalón que estaba en oferta y ahora Julia tiene el doble de dinero que tiene Ana. ¿Cuánto valía el pantalón?



2. Julia se levantó tarde y corrió hasta la escuela. Tardó 5 minutos menos de lo que generalmente se tarda caminando. Si ella camina a 50 m por minuto y corre a 90 metros por minuto, ¿cuál es la distancia hasta la escuela?

C

Si se tiene la proporción: $3{:}b = 6{:}d$

$$\frac{3}{b} = \frac{6}{d}$$

$$\frac{3}{b} \times bd = \frac{6}{d} \times bd$$

$$3d = 6b$$

En la proporción $3{:}b = 6{:}d$ tienes que

$$\overbrace{3{:}\underbrace{b = 6}_{\text{Medios}}{:}d}^{\text{Extremos}}$$

$$3d = 6b$$

De tal forma, que la proporción $3{:}b = 6{:}d$ representa la igualdad $3d = 6b$, es decir, el producto de los extremos es igual al producto de los medios. A esta propiedad se le llama **Propiedad Fundamental de las proporciones**.

Aplicando lo anterior, responde a la pregunta de la siguiente situación:

Al comer 3 pupusas de frijol con queso se consumen 990 calorías, ¿cuántas calorías se consumen si se comen 5?, escribe la proporción.

Sea x : El número de calorías.

$$3{:}5 = 990{:}x$$
$$3x = 5 \times 990$$
$$3x = 4\,950$$
$$x = 1\,650$$

R. 1 650 calorías

Si Julia ahorró 60 dólares y Marta ahorró más que Julia, y la razón de lo que ahorró cada una es de 2 a 7, ¿cuánto ahorró Marta?

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.7 Aplicaciones en situaciones de proporcionalidad directa, parte 2

R

1. Miguel participó en una carrera de bicicletas de ida y vuelta entre dos puntos, de A a B. En la ida tuvo una velocidad de 12 km por hora y de regreso de 24 km por hora, y el tiempo total que hizo fue de 3 horas. ¿Cuál es la distancia entre los 2 puntos?

2. Si se sabe que con 2 lb de quesillo se hacen 24 pupusas, ¿cuántas libras de quesillo se necesitan para hacer 288 pupusas para una actividad de la escuela?

C

Recuerda el problema desarrollado en clase.
Una máquina empaquetadora prepara 42 cajas de camisas en 7 días, ¿cuántas cajas se han empaquetado en 10 días?

Sea x: el número de cajas empaquetadas.

$$42:7 = x:10$$
$$42 \times 10 = 7x$$
$$420 = 7x$$
$$7x = 420$$
$$x = 60$$

R. 60 cajas

Un televisor tiene razón de 9:16 entre ancho y largo, si el largo mide 96 cm, ¿cuánto mide el ancho?

Unidad 5

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.8 Aplicaciones en situaciones de proporcionalidad directa, parte 3

R

1. Julia quiere ampliar una de sus fotografías que mide 6 cm de largo por 4 de ancho, de manera que el largo de la foto ampliada sea 9 cm. ¿Cuál será la medida de ancho de la foto ampliada?

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

   a) $6:2x = 24:32$ b) $3x:5 = 45:25$ c) $13:17 = 78:51x$ d) $7:23 = 2x:184$

C

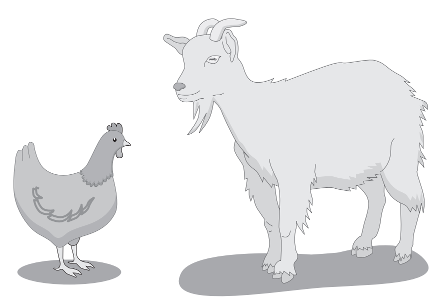
Recuerda el problema desarrollado en clase.
Si se mezcla café y leche a una razón de 5:2 y se preparan 840 ml de una bebida, ¿cuántos mililitros de leche deben utilizarse?

Se puede responder la pregunta a través de dos formas.

Forma 1	Forma 2
Sea x : cantidad de leche en mililitros	Sea x : cantidad de leche en mililitros
$5:2 = (840 - x):x$	$2:7 = x:840$
$5x = 2 \times (840 - x)$	$2 \times 840 = 7x$
$5x = 1\,680 - 2x$	$7x = 1\,680$
$7x = 1\,680$	$x = 240$
$x = 240$	
R. 240 ml	

La diferencia en la interpretación de las proporciones planteadas en cada una de las dos formas, es que en la forma 1; la razón es de la cantidad de la leche respecto a la de café, y en la forma 2 la razón es de la cantidad de la leche respecto al total de la bebida.

En una granja hay cabras y gallinas, 120 en total, el número de cabras es al de gallinas como 2 es a 6. Determina el número de gallinas.



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Problemas de aplicación

1. Factura. La factura contiene la información de una compra que se realizó. Realiza lo que se plantea en cada literal.

EMPRESAS S.A. de C.V.
Calle Real. N°107- San Salvador

A.B.C.: 2324212071
FACTURA
N° 001 - 0000765

San Salvador, 15 de septiembre de 2018.
Señor (es):_________________________________ RUC: _________________
Dirección:________________________________ G. Remisión:______________

	Cantidad	Descripción	Precio total
	y	Cartones de huevo	\$27
	7	Jugos de cajita	\$$x$
	1	Caja de goma de mascar	\$2.5
	1	Paquete de soda de 1 lt	\$5
Catidad total	15	**Total acumulado**	\$45

a) Plantea una ecuación de primer grado para determinar el gasto total en los 7 jugos de cajita.

b) Resuelve la ecuación planteada en el literal anterior.

c) Plantea una ecuación de primer grado para determinar el costo de un jugo de cajita.

d) Resuelve la ecuación planteada en el literal anterior.

e) Plantea una ecuación de primer grado para determinar el número de cartones de huevo que se compraron.

f) Resuelve la ecuación planteada en el literal anterior.

2. Ecuaciones importantes. Algunas de las ecuaciones más importantes de la historia son las siguientes:

a) **Teorema de Pitágoras** $a^2 + b^2 = c^2$. Pitágoras, 530 a. C.
b) **Ley de gravedad** $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$. Newton, 1687.
c) **Relatividad** $E = mc^2$. Einstein, 1905.
d) **Teoría de la información** $H = -\sum p(x)\log p(x)$. C. Shannon, 1949.
e) **Teoría del caos** $x_{t+1} = kx_t(1 - x_t)$. Robert May, 1975.

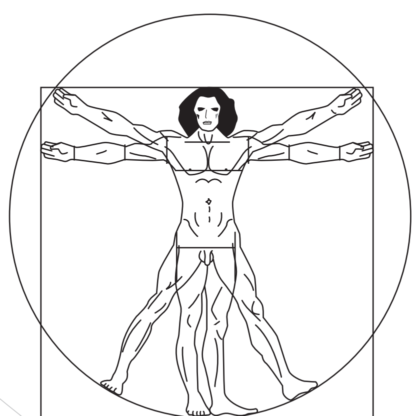
Unidad 5

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

6 Unidad

Proporcionalidad directa e inversa

Los primeros aportes sobre matemática tienen en común que surgieron por la necesidad de resolver problemas; fue desde la época de los egipcios que se comenzaron a resolver algunos como “determinar la grasa que se necesita para un día, si para un año es necesaria cierta cantidad” esto con el fin de calcular las necesidades de un día en particular. Durante los primeros siglos, es en el escrito de *Los elementos* del matemático griego Euclides donde se formaliza en cierta medida el cálculo de proporciones; dicho concepto se ha ido estudiando y formalizando cada vez más a lo largo de la historia gracias a los aportes de diferentes matemáticos como los franceses Legendre o Lacroix.



Hombre de Vitruvio, pintura de Leonardo Da Vinci que representa proporciones en el cuerpo del ser humano.

El concepto de proporciones ha estado históricamente relacionado con la arquitectura, el arte, la belleza y la música, es así que surgen proporciones específicas como parámetro de belleza y arte, como es el caso del número de oro (proporción aurea o ϕ), además del trabajo del matemático griego Pitágoras con las proporciones 1:1, 1:2, 1:3 y 1:4 como regidoras del Universo, y que se han utilizado para la obtención de la escala musical y la marcación de los intervalos (diferencia entre agudos y graves) a partir del monocordio en el ámbito de la música.

Ampliar los conocimientos en los conceptos de proporcionalidad directa e inversa, partiendo de la motivación histórica de la resolución de un problema es uno de los objetivos, se profundizará en la representación gráfica en el plano cartesiano de la proporcionalidad directa e inversa, como una introducción al concepto de función. Además se estudiarán las aplicaciones de la proporcionalidad en diferentes contextos, hasta llegar a justificar la forma de aplicación en la regla de tres.

1.1 Conceptos de función

R En las siguientes situaciones completa las tablas.

a) Cuando una libra de frijol cuesta \$2, el precio de 2, 3, 4 y 5 libras.

Peso (libras)	1	2	3	4	5	...
Precio						...

b) Cuando la medida de la base de un rectángulo es 3 cm, la medida de la altura y el área.

Altura (cm)	1	2	3	4	5	...
Área (cm^2)						...

c) Cuando el área de un rectángulo es de 24 cm^2, la medida de la base y la de altura.

Altura (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Base (cm)	24	12			4.8		...

C Cuando en dos variables x y y, el valor que toma x determina un único valor de y, se dice que y es **función** de x.

Por ejemplo, en cada situación donde hay dos variables x y y, identificando en las que se puede determinar el valor de y cuando x toma un valor determinado, se tiene que

a) Cuando la edad de una persona es x años, su estatura es y cm. $\longrightarrow$ No

b) Cuando un vehículo recorre una velocidad a 40 km/h durante x horas, la distancia recorrida es y km.

x (h)	1	2	3	4	5	6	7	8
y (km)	40	80	120	160	200	240	280	320

$\longrightarrow$ Sí

c) Cuando un rectángulo tiene 24 cm^2 de área, la base mide x cm y la altura mide y cm.

x (base, cm)	1	2	3	4	5	6	7	8
y (altura, cm)	24	12	8	6	4.8	4	3.428...	3

$\longrightarrow$ Sí

1. Identifica y señala con un círculo el literal de la situación en la que la variable y es función de x.

a) x horas de práctica de tiro y el número de goles, y goles en el fútbol.
b) Cuando camina 40 m por minuto, el tiempo x minutos y la distancia que se recorre y m.
c) En una empresa, inversión x dólares y ganancia que genera y dólares.
d) El peso de una persona que tiene x años de edad es y libras.
e) Cuando compra x cuaderno que cuesta \$1.25 cada uno y un compás que cuesta \$2.50, el costo total y dólares.
f) En un cuadrado cuyo lado mide x cm, la medida del perímetro y cm.

2. Escribe en el recuadro $\boxed{}$ qué cantidad hace falta para determinar las siguientes cantidades.

a) El área de un rectángulo cuando la base mide 5 cm. $\boxed{}$
b) Número de páginas que hace falta leer de un libro de 250 páginas. $\boxed{}$
c) La distancia que recorre cuando viaja 40 km/h en el vehículo. $\boxed{}$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.2 Concepto de proporcionalidad directa

R

1. En las siguientes situaciones completa las tablas.
   a) Cuando una fotocopiadora saca 50 copias en dos minutos, el tiempo x minutos y el número de copias que se sacan y copias.

x (minutos)	1	2	3	4	5	...
y (copias)		50				...

   b) Cuando el volumen de un prisma rectangular es de 48 cm^3, la medida de la altura x cm y el área de la base y cm^2.

Altura (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Área base (cm^2)	48				9.6		...

2. Encierra en un círculo el literal de las situaciones en las que la variable y es función de x.
   a) El peso de una persona cuya estatura es x cm es y kg.
   b) Cuando una porción de pastel cuesta \$0.50, la cantidad que se compra x porciones y el precio y dólares.
   c) Cuando entre x personas se compra un quintal de frijoles que cuesta \$50, el precio por persona es y dólares.

C

Recuerda el Problema inicial de la clase.
Una resma de papel bond pesa 2 libras. Representa el peso y libras de x resmas de papel bond.
   a) Cuando el valor de x es multiplicado por 2, 3, 4..., ¿cómo cambia el valor de y?
   b) ¿Cuál es el valor de $\frac{y}{x}$? ¿Es constante?
   c) Representa y en términos de x.

×2 ×3 ×4

x (resmas)	1	2	3	4	5	6	...
y (libras)	2	4	6	8	10	12	...

2 2 2 2 2 2

×2 ×3 ×4

Constante

$$y = ax$$

Variables

En el Problema inicial, x y y se llaman **variables**, mientras la cantidad que no varía se llama **constante**, tal como es 2 en y=2x. Cuando y es función de x y se expresa de la forma de y=ax, (a es constante) se dice que y es **directamente proporcional** a x. Al número a se le llama **constante de proporcionalidad**.

Determina si y es directamente proporcional a x, expresando $y = ax$ e indica la constante de proporcionalidad.
   a) Cuando una persona camina 50 metros por minuto, el tiempo es x minutos y la distancia recorrida es y metros.

x (minutos)	1	2	3	4	5	6	...
y (metros)	50	100					...

   b) Cuando en una pila se vierte agua a un ritmo de 3 litros por minuto, el tiempo es x minutos y la cantidad de agua es y litros.

x (minutos)	1	2	3	4	5	6	...
y (litros)							...

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.3 Valores que toman las variables

R

1. Encierra en un círculo el literal de las situaciones en las que la variable y es función de x.
   a) Cuando una libra de frijoles cuesta $1.25, el peso de los frijoles x libras y su precio y dólares.
   b) En un triángulo cuya altura es de 6 cm, la base x cm, y el área y cm^2.
   c) En una alcancía hay $50. Si todos los días se deposita $1 a la alcancía, número de días x y la cantidad de dólares en la alcancía y dólares.

2. En las siguientes tablas, y es directamente proporcional a x. Encuentra la constante de la proporcionalidad y expresa en $y=ax$.

a)

x	1	2	3	4	5	6	...
y	3	6	9	12	15	18	...

b)

x	0	1	...	5	...	12	...
y	0			12.5	...	30	...

C

Recuerda lo visto en clases.
Para llenar una piscina rectangular a una altura (profundidad) de 120 cm, se vierte agua a un ritmo de 6 cm de altura (profundidad) por hora.
   a) ¿Cuántas horas se necesitan para llenar 120 cm de altura? ⟶ 120 ÷ 6 = 20, entonces, 20 horas.
   b) Si el tiempo transcurrido del llenado de agua se expresa con x, ¿desde qué y hasta qué valor puede tomar la variable x? ⟶ $0 \leq x \leq 20$ y se lee "x es mayor o igual que 0 y menor o igual que 20".
   c) Dado que la variable y representa la altura (profundidad) de agua, ¿desde qué y hasta qué valor tomaría la variable y? ⟶ $0 \leq y \leq 120$ y se lee "y es mayor o igual que 0 y menor o igual que 120".

x (horas)	0	1	2	3	4	...	20
y (cm)	0	6	12	18	24	...	120

En la proporcionalidad directa hay casos en que se limita el valor que pueden tomar las variables x y y, para representar ese límite se usa los signos de desigualdades (<, >, ≤, ≥, =).

1. En las siguientes situaciones, representa desde qué y hasta qué valor se pueden tomar las variables x y y usando los signos de desigualdad.
   a) Una carnicería que tiene 15 libras de carne molida y el precio $3 por libra, el peso vendido es x libras y la venta es y dólares.

x (libras)	0	1	2	3	4	...	15
y (dólares)	0	3	6	9	12	...	20

   b) En una pila cuya capacidad máxima es de 30 galones se vierte agua a un ritmo de 3 galones por minuto, el tiempo x minutos y cantidad de agua en la pila y galones.

x (minutos)	0	1	2	3	4	...	
y (galones)	0	3	6	9	12	...	

2. Representa las siguientes expresiones usando un signo de desigualdad.
   a) x es mayor que 5.
   b) x es mayor o igual que 5.
   c) x es menor o igual que 3.
   d) x es mayor que 2 y menor que 8.
   e) x es mayor que –8 y menor que –2.
   f) x es menor o igual que –5.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.4 La proporcionalidad directa con valores negativos en las variables

R

1. En la siguiente tabla, y es directamente proporcional a x. Encuentra la constante de la proporcionalidad y expresa en $y = ax$.

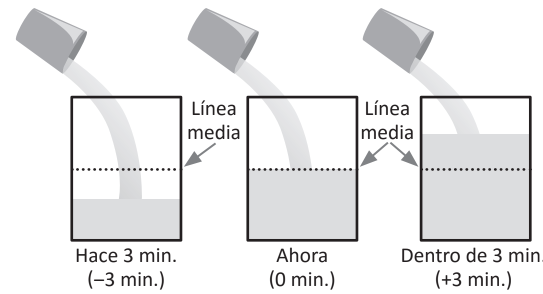
x	1	2	3	4	5	6	...
y	3	6	9	12	15	18	...

2. En la siguiente situación, representa desde qué y hasta qué valor se pueden tomar las variables x y y usando los signos de desigualdad.
En una pila cuya capacidad máxima es de 40 galones se vierte agua a un ritmo de 2 galones por minuto, el tiempo x minutos y la cantidad de agua en la pila y galones.

x (minutos)	0	1	2	3	4	...	
y (galones)	0	2	4	6	8	...	

C

Recuerda lo visto en clase.
Tal como se muestra en el dibujo, se vierte agua a ritmo de 2 cm de altura (profundidad) por minuto. Dado que el tiempo de este momento es 0 minutos, y la línea media del recipiente es 0 cm de altura, encuentra la relación entre x minutos después y la altura y cm arriba de la línea media, realiza lo siguiente:



a) Completa la tabla.

×4 ×3 ×2 ×2 ×3 ×4

x (minutos)	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y (cm)	–8	–6	–4	–2	0	2	4	6	8

×4 ×3 ×2 ×2 ×3 ×4

b) ¿Puede representar la altura y cm de la forma $y = ax$? Como la constante es 2, entonces, $y = 2x$.
c) ¿Se puede decir que y es directamente proporcional a x? Sí, porque se pudo representar de la forma de $y = ax$, además, cumple que cuando el valor de x cambia multiplicado por 2, 3, 4... el valor de y correspondiente también cambia multiplicado por 2, 3, 4... Por ejemplo, el valor de x cambia de –1 a –3 (–1 multiplicado por 3), el valor de y también cambia de –2 a –6 (–2 multiplicado por 3).

Aunque las variables tomen valores negativos, las características de proporcionalidad siempre se cumplen, es decir, en la proporcionalidad directa, las variables pueden tomar valores negativos.

Completa las tablas que muestran relación de proporcionalidad directa y escribe en forma de $y = ax$.

a)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y					0	4			

b)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y					0	3			

c)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y			–5		0				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.5 La proporcionalidad directa con constante negativa

R

1. En la siguiente situación, y es directamente proporcional a x. Encuentra la constante de la proporcionalidad y expresa en $y = ax$. Representa desde qué y hasta qué valor se pueden tomar las variables x y y usando los signos de desigualdad.

x (minutos)	0	1	2	3	4	...	12
y (galones)	0	1.5	3	4.5	6	...	

2. Completa las tablas que muestran relación de proporcionalidad directa y escribe en forma de $y = ax$.

a)

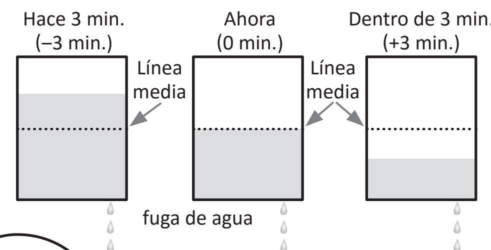
x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y					0	5			

b)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y					0	3.5			

C

Tal como se muestra en el dibujo, hay una fuga de agua a un ritmo de 2 cm de altura por minuto. Dado que el tiempo de este momento es 0 minutos, y la línea media del recipiente es 0 cm de altura, determina la relación entre x minutos después y la altura y cm con respecto a la línea media. Además:



a) Completa la tabla.

x (minutos)	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y (cm)	8	6	4	2	0	–2	–4	–6	–8

b) Escribe la relación entre las variables en la forma de $y = ax$. Como la constante es –2, entonces, $y = -2x$.

c) Determina si y es directamente proporcional a x. Como se pudo representar la relación en la forma $y = ax$, se concluye que y es directamente proporcional a x además, cumple que si el valor de x cambia al ser multiplicado por 2, 3, 4... el valor de y correspondiente también cambia siendo multiplicado por 2, 3, 4... Por ejemplo, el valor de x cambia de 1 a 3 (1 multiplicado por 3), el valor de y también cambia de –2 a –6 (–2 multiplicado por 3).

En la proporcionalidad directa, hay casos en que su constante es negativa. Es decir, en el valor de $y = ax$, a puede tomar valor negativo ($a < 0$).

Completa las tablas que muestran relación de proporcionalidad directa y escribe en forma de $y = ax$.

a)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y					0	–3			

b)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y					0	–5			

c)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y				$\frac{2}{3}$	0				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.6 Representación en la forma $y = ax$ a partir de un par de valores para x y y

R Completa las tablas que muestran relación de proporcionalidad directa y escribe en forma de $y = ax$.

a)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y						7			

b)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y					0	–4			

c)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y			$\frac{2}{7}$		0				

C Recuerda lo visto en clase.

Si y es directamente proporcional a x y además $x = 4$, $y = 12$, representa en forma de $y = ax$, la relación entre las variables.

Se sustituyen los valores de x y y, luego se encuentra el valor de a. Se tiene que $x = 4$, $y = 12$, se sustituyen en $y = ax$:

$$12 = 4a$$
$$4a = 12$$
$$a = 3 \qquad \text{entonces,} \qquad y = 3x$$

Para representar la relación de la proporcionalidad directa en forma de $y = ax$, a partir de un par de valores de variables, se realizan los siguientes pasos:

1. Se sustituye los valores en las variables y se forma una ecuación.
2. Se encuentra el valor de la constante en la ecuación.
3. Se sustituye el valor de la constante en $y = ax$.

1. Si y es directamente proporcional a x, encuentra el valor de la constante a en $y=ax$, para cada uno de los siguientes casos:

a) $x = 3$, $y = 15$ b) $x = 2$, $y = 8$ c) $x = 4$, $y = 12$

d) $x = 2$, $y = –6$ e) $x = –2$, $y = –6$ f) $x = –3$, $y = –9$

g) $x = –3$, $y = 9$ h) $x = 6$, $y = 15$ i) $x = 8$, $y = –20$

2. La temperatura del aire hasta 10 km del nivel de tierra, se baja a un ritmo de 6° C por cada 1 km que sube. Cuando sube x km arriba de la tierra, se expresa que se baja y° C. Realiza lo siguiente:

a) Representa desde qué y hasta qué valor pueden tomar las variables x y y.

b) Escribe en la forma $y = ax$.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.7 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

<table>
<tr><th>Ítem</th><th>Sí</th><th>Podría mejorar</th><th>No</th><th>Comentario</th></tr>
<tr><td>1. Resuelvo problemas como
Identifica las situaciones en las que la variable y es función de x.
a) x horas de estudio y el puntaje en el examen y puntos.
b) Cuando un diccionario pesa 2 libras; si hay x cantidad del mismo diccionario, el peso total es y libras.
c) El recorrido entre dos municipios A y B cuya distancia es 50 km, la distancia recorrida x km y la distancia faltante es y km.
d) x años de experiencia en el trabajo y el sueldo es y dólares.
e) Cuando viaja 240 km con una velocidd de x km/h, y el tiempo y horas.</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2. Resuelvo problemas como
Determina si y es directamente proporcional a x, expresando $y = ax$ e indica la constante de proporcionalidad, cuando un atleta camina por la playa 80 metros por minuto, el tiempo x minutos y la distancia recorrida es y metros.
<table><tr><td>x (minutos)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>y (metros)</td><td>80</td><td></td><td></td></tr></table></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3. Resuelvo problemas como
Represento los valores que pueden tomar las variables x y y usando los signos de desigualdad, en la siguiente situación: Una carnicería que tiene 20 libras de carne molida y el precio es de 2 dólares por libra, el peso vendido es x libras y la venta es y dólares.
<table><tr><td>x (libras)</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>...</td><td>20</td></tr><tr><td>y(dólares)</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td></td><td></td></tr></table></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4. Resuelvo problemas como
Si y es directamente proporcional a x, encuentra el valor de la constante a en $y = ax$, para cada uno de los siguietes casos:
a) $x = 2$, $y = 14$ b) $x = -3$, $y = 5$
c) $x = 2$, $y = -20$ d) $x = 6$, $y = -9$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.8 El plano cartesiano

1. Completa las tablas que muestran relación de proporcionalidad directa y escribe en forma de $y = ax$.

a)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y			6		0				

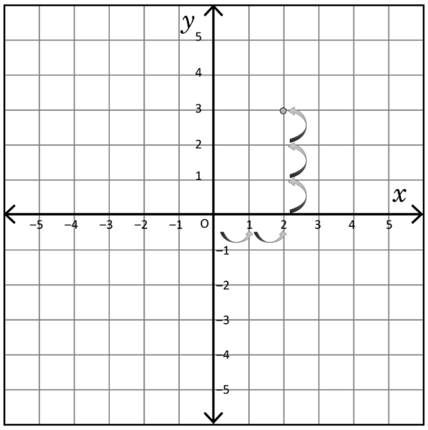
b)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y					0		–1		

2. Si y es directamente proporcional a x, encuentra el valor de la constante a en $y = ax$, para cada uno de los siguientes casos:

a) $x = –2$, $y = –10$ b) $x = –4$, $y = 8$ c) $x = 3$, $y = –12$ d) $x = 2$, $y = –15$

En un plano cartesiano a la recta horizontal se le llama **eje de las** $\boldsymbol{x}$ (o abscisas) y a la recta vertical se le llama **eje de las** $\boldsymbol{y}$ (o de las ordenadas).



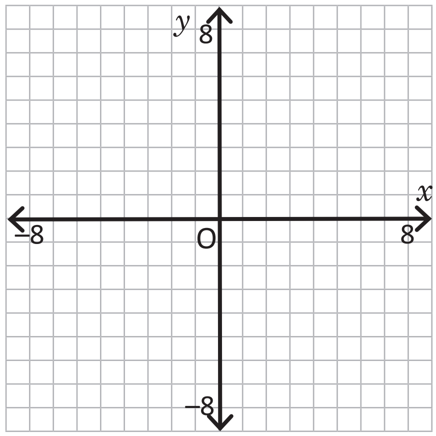
El punto de intersección de ambas rectas se denomina **origen,** representado por la letra O y corresponde al valor 0 en x y en y. Por ejemplo:
Puedes ver la ubicación del punto A, cuya posición está representada por $x = 2$ y $y = 3$ en el plano cartesiano de la derecha:
El par de números del punto A, se escribe como A (2, 3) y se llama **par ordenado** del punto A. El punto de origen O siempre representa como O (0, 0).

En general, los valores que representan a un punto P en el plano cartesiano, se llaman **coordenadas** del punto P. En el ejemplo anterior las coordenadas del punto A son $x = 2$ y $y = 3$.

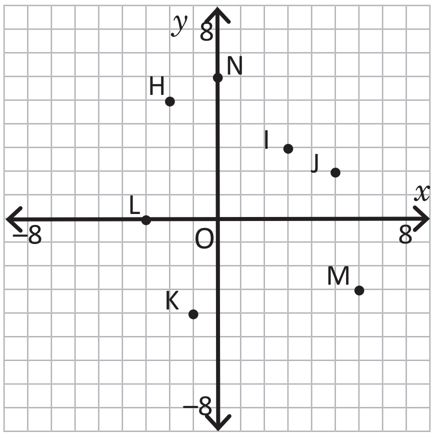
Realiza lo que se te pide en cada uno de los siguientes literales:

a) Ubica los siguientes puntos:

A(5, 3)
B(4, –3)
C(–5, –4)
D(–2, 2)
E(0, 2)
F(4, 0)



b) Escribe las coordenadas de los puntos:



H(,)
I(,)
J(,)
K(,)
L(,)
M(,)
N(,)

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.9 Gráfica de la proporcionalidad directa, parte 1

R

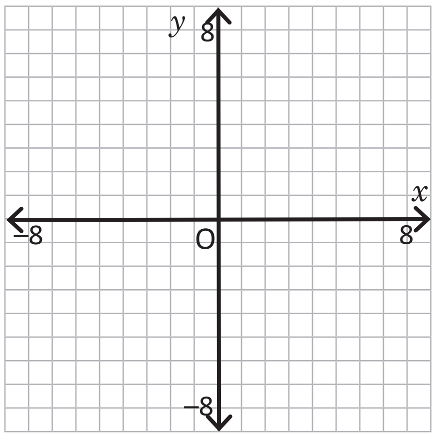
1. Si y es directamente proporcional a x, encuentra el valor de la constante a en $y = ax$, para cada uno de los siguientes casos:

   a) $x = -4$, $y = 20$ b) $x = 4$, $y = -12$ c) $x = 5$, $y = -3$

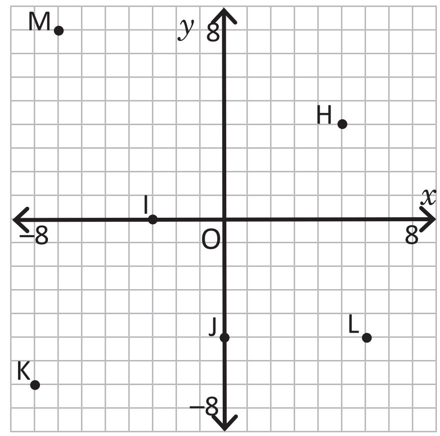
2. Realiza lo que se te pide en cada uno de los siguientes literales:

   a) Ubica los siguientes puntos:

   A(1, 1)
   B(2, –1)
   C(–3, –7)
   D(–5, 3)
   E(8, 0)
   F(0, –7)



   b) Escribe las coordenadas de los puntos:



   H(,)
   I(,)
   J(,)
   K(,)
   L(,)
   M(,)

C

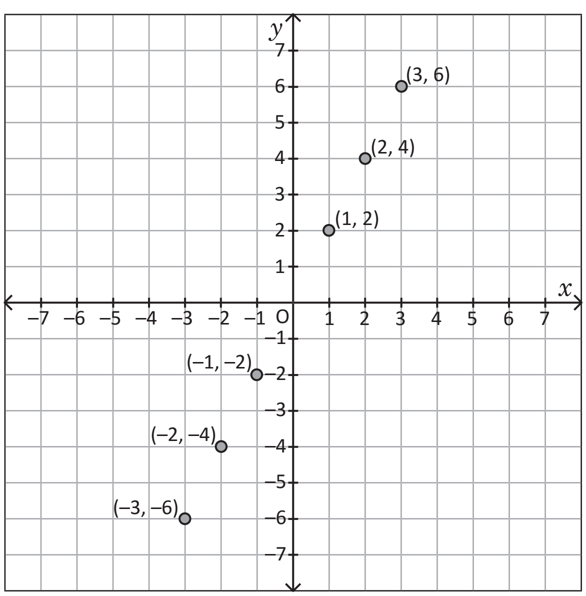
En la siguiente tabla se muestran pares ordenados de x y y, que están en proporcionalidad directa $y = 2x$.

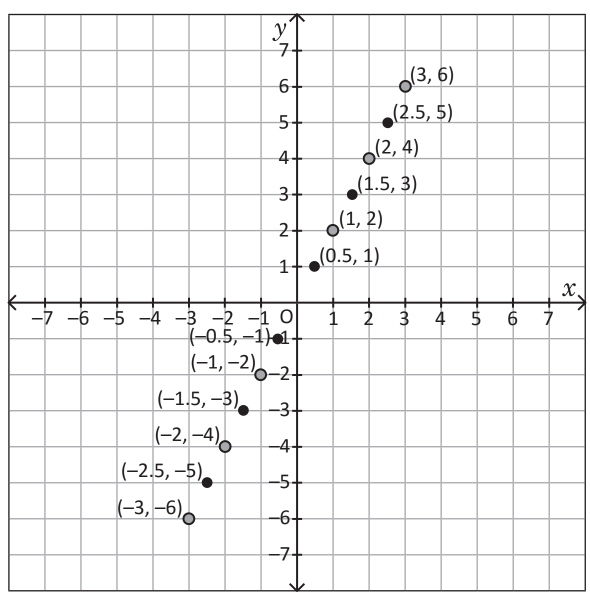
x	...	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	...
y	...	–8	–6	–4	–2	0	2	4	6	8	...

Al agregar más puntos tienes:

x	...	–4	–3.5	–3	–2.5	–2	–1.5	–1	–0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	...
y	...	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...

Las gráfica de la tabla original y agregando más puntos son:





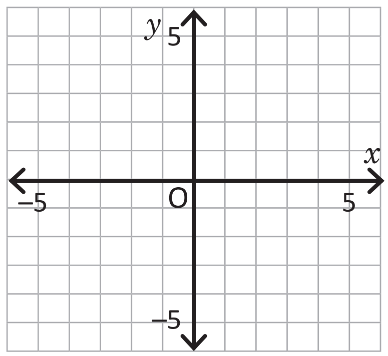
Tal como se muestra en las gráficas anteriores, al colocar los pares ordenados que corresponden a $y = 2x$, estos puntos se ubican en una línea recta y al colocar más puntos, se forma una línea recta. A esta recta se le llama gráfica de $y = 2x$.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Para cada literal, elabora la gráfica que se indica a partir de la tabla presentada.

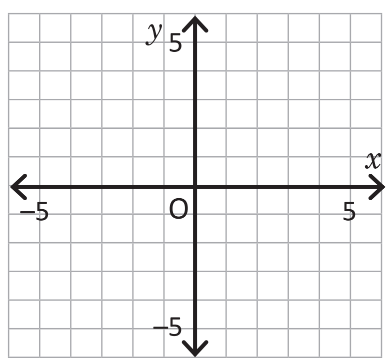
a) $y = -x$

x	...	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	...
y	...	5	4	3	2	1	0	–1	–2	–3	–4	–5	...



b) $y = \frac{1}{2}x$

x	...	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	...
y	...	–2	$-\frac{3}{2}$	–1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	...



Unidad 6

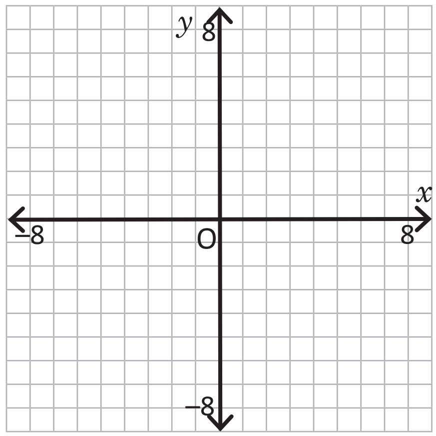
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.10 Gráfica de la proporcionalidad directa, parte 2

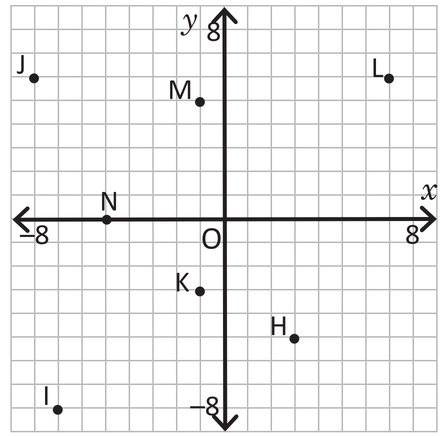
1. Realiza lo que se te pide en cada uno de los siguientes literales:

a) Ubica los siguientes puntos:

A(5, 1)
B(7, –2)
C(–1, –3)
D(–3, 8)
E(–1, 0)
F(5, 0)



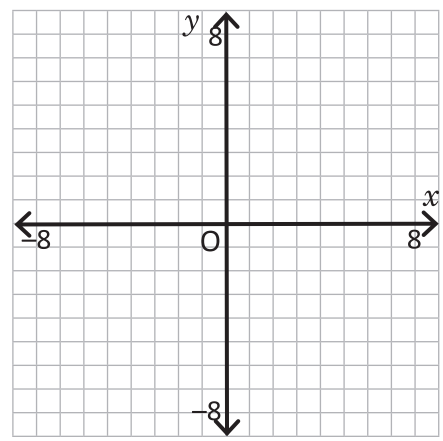
b) Escribe las coordenadas de los puntos:



H(☐ , ☐)
I(☐ , ☐)
J(☐ , ☐)
K(☐ , ☐)
L(☐ , ☐)
M(☐ , ☐)
N(☐ , ☐)

2. Elabora la gráfica de $y = –2x$, a partir de la siguiente tabla:

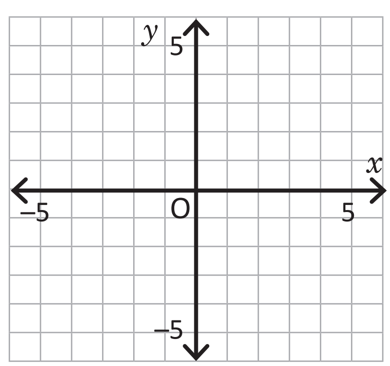
x	...	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	...
y	...	8	6	4	2	0	–2	–4	–6	–8	...



Para elaborar la gráfica de proporcionalidad directa $y = ax$, se toma el punto de origen en O (0, 0) y otro punto; luego se traza la línea recta que pasa por estos puntos.

Elabora la gráfica de las siguientes proporcionalidades directas en el mismo plano cartesiano.

a) $y = 3x$ b) $y = –3x$ c) $y = 0.5x$ d) $y = -\frac{4}{5}x$

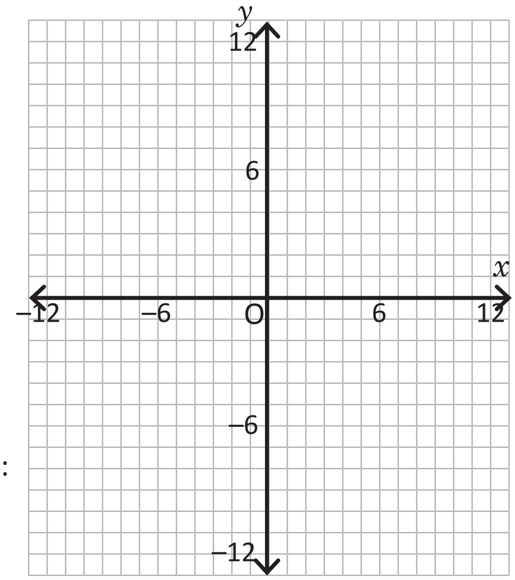


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.11 Representación $y = ax$ de la proporcionalidad directa a partir de la gráfica

1. Elabora la gráfica de $y = -3x$, a partir de la siguiente tabla:

x	...	–3	–2	–1	0	1	2	3	...
y	...	9	6	3	0	–3	–6	–9	...



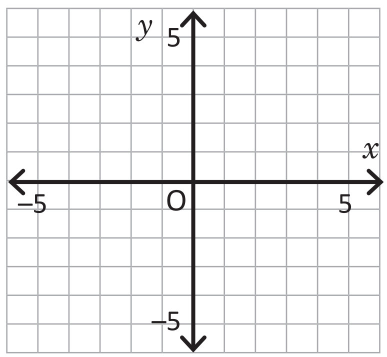
2. Elabora la gráfica de las siguientes proporcionalidades directas:

a) $y = 5x$

b) $y = -4x$

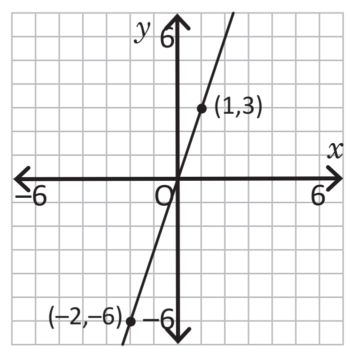
c) $y = \frac{2}{5}x$

d) $y = -\frac{5}{4}x$



Para escribir $y = ax$ a partir de la gráfica:
1. Elige un punto (par ordenado) diferente del origen por el que pasa la gráfica, cuyos valores sean números enteros.
2. Sustituir el valor de x y y del par ordenado en $y = ax$ y encontrar el valor de la constante a.
3. Escribe $y = ax$, sustituyendo a por el valor encontrado en 2.

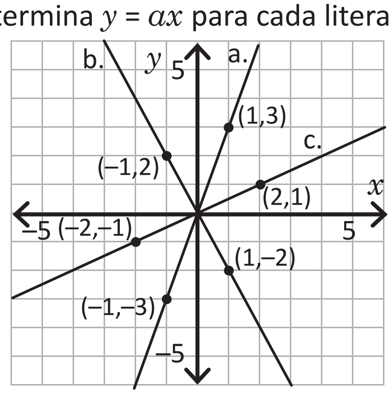
Por ejemplo, para determinar $y = ax$ para la gráfica de la derecha, se hace:



Solución 1:
Como la gráfica pasa por el punto (1, 3), sustituye en x y y.
$y = ax$
$3 = 1a$
$3 = a$
Entonces, $y = 3x$.

Solución 2:
Como la gráfica pasa por el punto (–2, –6), sustituye por x y y.
$y = ax$
$-6 = -2a$
$3 = a$
Entonces, $y = 3x$.

Determina $y = ax$ para cada literal, a partir de las 3 gráficas de proporcionalidad directa.



a) ____

b) ____

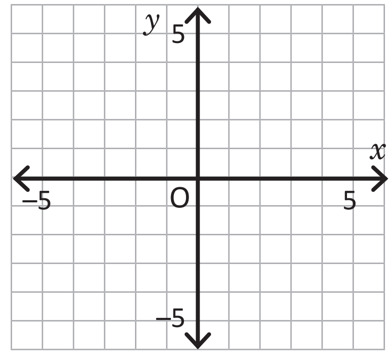
c) ____

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

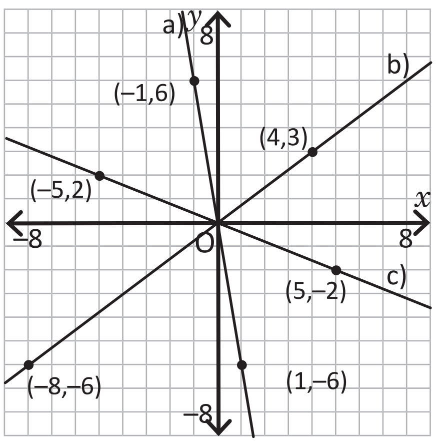
1.12 Gráfica de proporcionalidad directa cuando las variables toman ciertos valores

1. Elabora la gráfica de las siguientes proporcionalidades directas:

a) $y = 4x$ b) $y = -\frac{4}{5}x$ c) $y = 2.5x$ d) $y = -\frac{3}{2}x$



2. Determina $y = ax$ para cada literal, a partir de las 3 gráficas de proporcionalidad directa.



a)

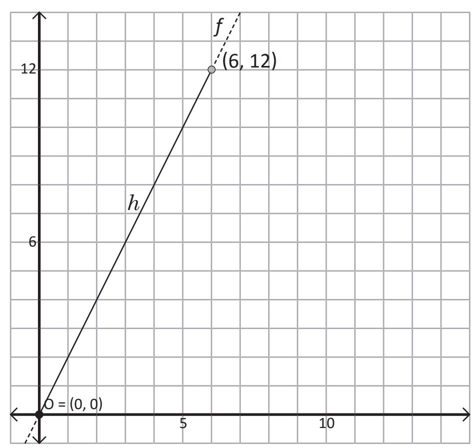
b)

c)

Para los valores de las variables que están limitados, se puede tomar la línea continua de la gráfica, mientras que para los valores que están fuera del límite se pueden representar con una línea punteada. Por ejemplo, en una pila cuya capacidad máxima es de 12 galones, se vierte agua a un ritmo de 2 galones por minuto. Si se expresa el tiempo en que se vierte el agua como x minutos y la cantidad de agua de la pila como y galones, tienes que

- La constante es 2, entonces, $y = 2x$.
- Para verter los 12 galones, se tarda 6 minutos, por lo que el tiempo x toma los valores $0 \leq x \leq 6$; mientras que la cantidad de agua y, tiene los valores $0 \leq y \leq 12$.

Observa que los valores que están fuera del limite se representan a través de una línea punteada.



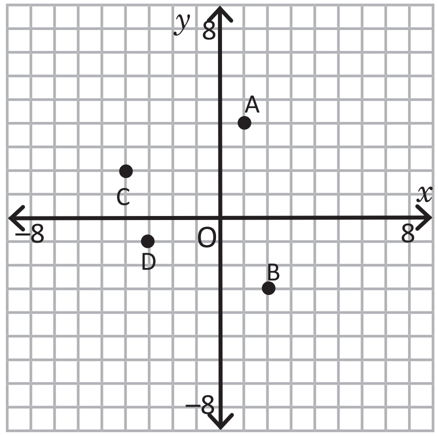
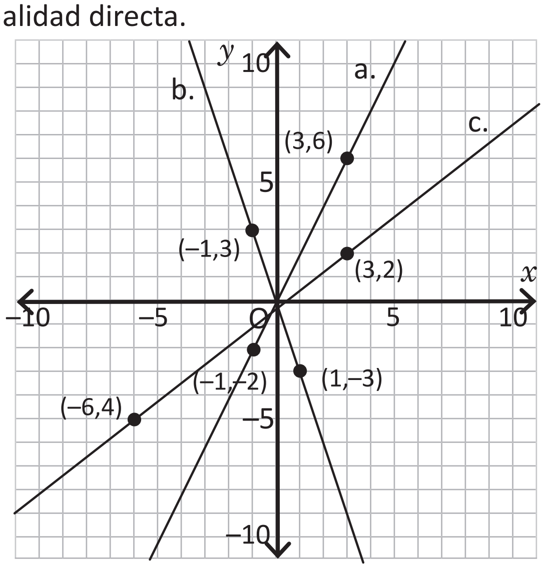
1. En una pila cuya capacidad máxima es de 10 galones, se vierte agua a un ritmo de 2 galones por minuto. Si se expresa el tiempo en que se vierte el agua como x minutos y la cantidad de agua de la pila con y galones. En tu cuaderno realiza lo siguiente:
   a) Escribe $y = ax$
   b) Determina qué valores toman x y y, usando los signos de desigualdad
   c) Grafica $y = ax$

2. Para viajar 12 km, se camina 2 km por hora. Dado que el tiempo se expresa como x horas y la distancia recorrida con y km. En tu cuaderno realiza lo siguiente:
   a) Escribe $y = ax$
   b) Determina qué valores toman x y y, usando los signos de desigualdad
   c) Grafica $y = ax$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.13 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

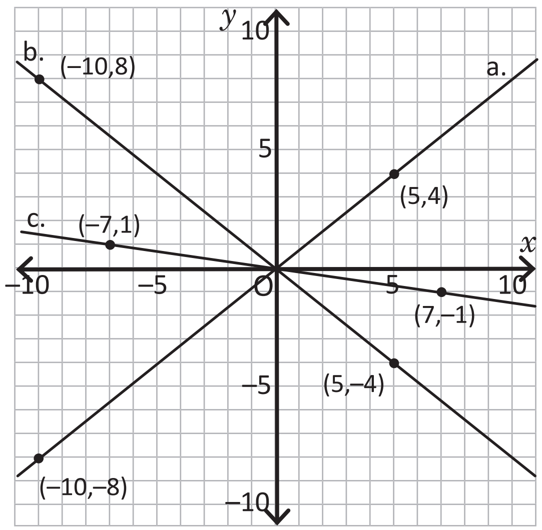
<table>
<tr><th>Ítem</th><th>Sí</th><th>Podría mejorar</th><th>No</th><th>Comentario</th></tr>
<tr><td>1. Resuelvo problemas como:
En el plano cartesiano, lee y escribe los puntos B, C y D, y ubica los puntos E(3, 6), F(–4, 5) y G(–3, 5). Ejemplo: A(1, 4)

</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2. Resuelvo problemas como
Elabora la gráfica de $y = 2x$, a partir de la siguiente tabla.
<table>
<tr><td>x</td><td>...</td><td>–4</td><td>–3</td><td>–2</td><td>–1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>...</td></tr>
<tr><td>y</td><td>...</td><td>8</td><td>6</td><td>4</td><td>2</td><td>0</td><td>–2</td><td>–4</td><td>–6</td><td>–8</td><td>...</td></tr>
</table></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3. Resuelvo problemas como
Elabora la gráfica de las siguientes proporcionalidades directas.
a) $y = -4x$ b) $y = -1.5x$ c) $y = -\frac{2}{3}$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4. Resuelvo problemas como
Determina $y = ax$, para cada literal, a partir de las 3 gráficas de proporcionalidad directa.

</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.1 Concepto de la proporcionalidad inversa

R

1. Determina $y = ax$ para cada literal, a partir de las 3 gráficas de proporcionalidad directa.



a)

b)

c)

2. Un recipiente con capacidad para 14 litros, está lleno de agua, pero hay una fuga en la que se pierden 2 litros por minuto. Dado que el tiempo se expresa como x minutos y la cantidad de agua que se ha fugado del recipiente por y litros. En tu cuaderno realiza lo siguiente:
   a) Escribe $y = ax$
   b) Determina qué valores toman x y y, usando los signos de desigualdad
   c) Grafica $y = ax$

C

Cuando y es función de x y se expresa en forma de $y = \frac{a}{x}$ o ($xy = a$) (a es constante y x no se considera 0), se dice que y es inversamente proporcional a x. Al número a se le llama constante de la proporcionalidad.

En la proporcionalidad inversa, cuando una variable x se multiplica por 2, 3, 4..., la otra variable y se multiplica por $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$... Y para encontrar la constante a, se multiplica xy.
Un ejemplo de proporcionalidad inversa se presenta en la siguiente tabla:

$\times 2$ $\times 3$ $\times 4$

x (base, cm)	1	2	3	4	5	6	...
y (altura, cm)	6	3	2	1.5	1.2	1	...

$\times\frac{1}{2}$ $\times\frac{1}{3}$ $\times\frac{1}{4}$

Puedes notar que $xy = 6$,

Al despejar y, obtienes $y = \frac{6}{x}$.

Para cada una de las siguientes situaciones, si la relación entre las variables es de proporcionalidad inversa; en tu cuaderno, elabora una tabla, escribe la constante y la expresión $y = \frac{a}{x}$.

a) Cuando una biblioteca gasta 40 dólares en comprar varios ejemplares del mismo libro, expresando el número de ejemplares con x y el precio de cada uno con y dólares.
b) En el cálculo del área de un cuadrilatero de 12 cm^2, considerando que la medida de la base es x cm y la altura es y cm.
c) Cuando un viaje dura 3 horas, con una velocidad de y km/h y una distancia recorrida de x km.
d) Si se han consumido 1 650 kilocalorías, al comer x barras de chocolate donde cada una tiene y kilocalorías.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.2 Proporcionalidad inversa con valores negativos en las variables

1. Una vela de 10 cm de altura se derrite $\frac{1}{2}$ cm de altura por minuto. Dado que el tiempo se expresa como x minutos y la cantidad de vela derretida por y cm. Realiza lo siguiente:
   a) Escribe $y = ax$

   b) Determina qué valores toman x y y, usando los signos de desigualdad

   c) En tu cuaderno traza la gráfica $y = ax$

2. Para cada una de las siguientes situaciones, si la relación entre las variables es de proporcionalidad inversa; en tu cuaderno, elabora una tabla, escribe la constante y la expresión $y = \frac{a}{x}$.
   a) Cuando se tiene una canasta con 26 frutas entre peras y manzanas, en donde hay x manzanas y y peras.

   b) Una pila que se llena a 2 galones por minuto, expresando la cantidad total del agua en y galones y el tiempo empleado para agregarla en la pila en x minutos.

   c) Cuando se compra una caja de helado que cuesta 40 dólares para la celebración del día del niño, para un grupo de x estudiantes que pagan y dólares cada uno.

Cuando y es inversamente proporcional a x, aunque x tome valores negativos, las características se mantienen. Por ejemplo, observa la siguiente tabla:

$\times 4$ $\times 3$ $\times 2$ $\times 2$ $\times 3$ $\times 4$

x	...	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	...
y	...	−2	−2.4	−3	−4	−6	−12		12	6	4	3	2.4	2	...

$\times\frac{1}{4}$ $\times\frac{1}{3}$ $\times\frac{1}{2}$ $\times\frac{1}{2}$ $\times\frac{1}{3}$ $\times\frac{1}{4}$

Aunque la variable x tome valores negativos, si el valor de la variable x se multiplica por 2, 3, 4, ... el valor de la variable y correspondiente se va multiplicando por $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$...

Completa la tabla e identifica la constante y escribe $y = \frac{a}{x}$

a)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y				−24		24			

$y = \frac{\square}{x}$

b)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y		$-\frac{4}{3}$		−4		4		$\frac{4}{3}$	

$y = \frac{\square}{x}$

c)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y			18						

$y = \frac{\square}{x}$

d)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	2								−2

$y = \frac{\square}{x}$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Unidad 6

2.3 Representación en la forma $y = \frac{a}{x}$ a partir de un par ordenado

R

1. Para cada una de las siguientes situaciones, si la relación entre las variables es de proporcionalidad inversa; en tu cuaderno, elabora una tabla, escribe la constante y la expresión $y = \frac{a}{x}$.
   a) La distancia de la casa de Ana a la escuela es 650 m, y se transporta en su bicicleta con la velocidad de x m por minuto y un tiempo de viaje de y minutos.
   b) Si se compra una camisa de 15 dólares, y el dinero que se tenía disponible era x dólares y el vuelto después de la compra es y dólares.
   c) En el cálculo de área de un rectángulo de 8 cm^2, cuya medida de la base es x cm y la medida de la altura es y cm.

2. Completa la tabla e identifica la constante y escribe $y = \frac{a}{x}$.

a)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y				–18		18			

$y = \frac{\square}{x}$

b)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y			–10				10		

$y = \frac{\square}{x}$

c)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y		2						–2	

$y = \frac{\square}{x}$

d)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	2								–2

$y = \frac{\square}{x}$

C

Para representar la relación de proporcionalidad inversa de la forma $y = \frac{a}{x}$, a partir de algunos valores determinados de las variables:
1. Se sustituye los valores en las variables y se forma una ecuación.
2. Se encuentra el valor de la constante en la ecuación.
3. Se sustituye el valor de la constante en $y = \frac{a}{x}$.

Por ejemplo, y es inversamente proporcional a x, y además $x = 4$ y $y = 6$, la forma $y = \frac{a}{x}$, se determina como sigue:

Utilizando $y = \frac{a}{x}$
Cuando $x = 4$, $y = 6$
Entonces, $6 = \frac{a}{4}$
$a = 6 \times 4$
$a = 24$
Entonces, $y = \frac{24}{x}$.

o

Utilizando $xy = a$
Cuando $x = 4$, $y = 6$
Entonces, $4 \times 6 = a$
$a = 24$
Entonces, $y = \frac{24}{x}$.

Si y es inversamente proporcional a x, representa en la forma de $y = \frac{a}{x}$, para cada uno de los siguientes literales:

a) Cuando $x = 2$, $y = 7$ b) Cuando $x = 3$, $y = 6$ c) Cuando $x = –3$, $y = 5$ d) Cuando $x = 2$, $y = –4$

e) Cuando $x = \frac{1}{3}$, $y = 6$ f) Cuando $x = –5$, $y = -\frac{3}{5}$ g) Cuando $x = –12$, $y = \frac{3}{4}$

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.4 Gráfica de proporcionalidad inversa cuya constante es positiva

R 1. Completa las tablas e identifica la constante y escribe $y = \frac{a}{x}$.

a)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y							5		

$y = \frac{\square}{x}$

b)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y		4							

$y = \frac{\square}{x}$

2. Si y es inversamente proporcional a x, representa en la forma de $y = \frac{a}{x}$, para cada uno de los siguientes literales:

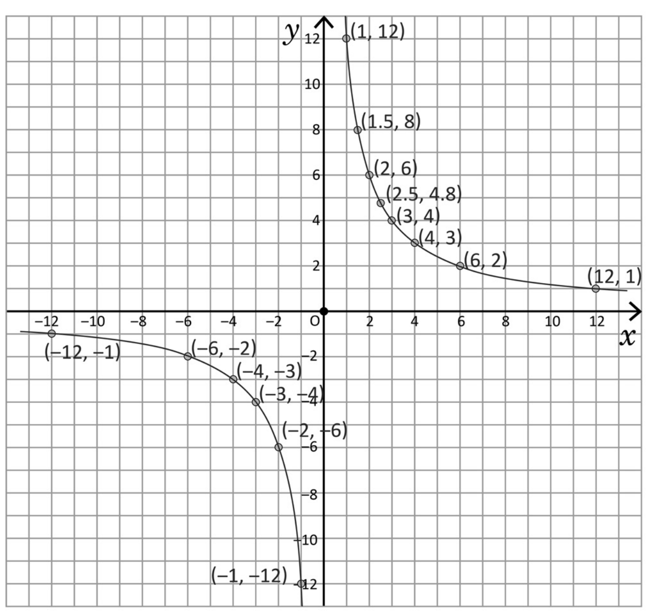
a) Cuando $x = 3$, $y = 2$ b) Cuando $x = 5$, $y = 10$ c) Cuando $x = -7$, $y = 3$ d) Cuando $x = 8$, $y = -2$

e) Cuando $x = 10$, $y = \frac{1}{5}$ f) Cuando $x = -\frac{6}{7}$, $y = -7$ g) Cuando $x = -10$, $y = \frac{4}{5}$

C La gráfica de proporcionalidad inversa consta de dos líneas curvas. Por ejemplo, para la siguiente relación de proporcionalidad inversa $y = \frac{12}{x}$($xy = 12$) tienes que

x	...	–12	...	–6	...	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	...	6	...	12	...
y	...	–1	...	–2	...	–3	–4	–6	–12		12	6	4	3	...	2	...	1	...

Al ubicar los puntos en el plano cartesiano, basados en los pares ordenados de la tabla y al colocar otros puntos tales como (1.5, 8), (2.5, 4.8), (–1.5, –8), (–1.25, –9.6), etc. La gráfica se representa de la siguiente manera:

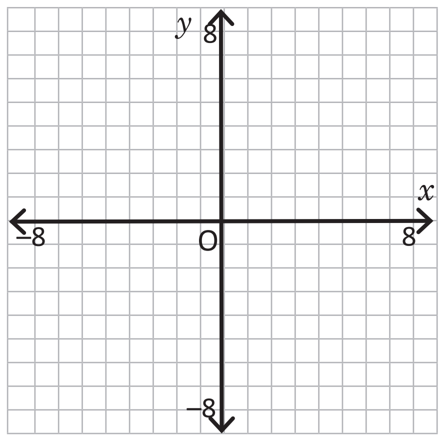


Unidad 6

En cada literal, completa la tabla que representa la proporcionalidad inversa y elabora la gráfica.

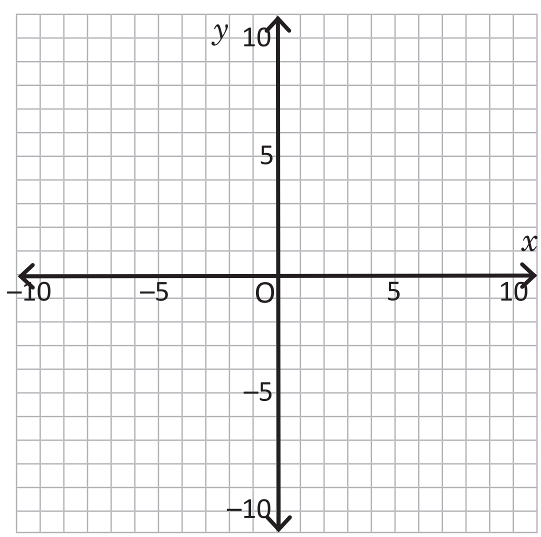
a) $y = \frac{8}{x}$

x	–8	...	–4	...	–2	–1	0	1	2	...	4	...	8
y		...		...		–8		8		...		...	



b) $y = \frac{10}{x}$

x	–10	...	–5	...	–2	–1	0	1	2	...	5	...	10
y		...		...				10		...		...	



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.5 Gráfica de proporcionalidad inversa cuya constante es negativa

R

1. Si y es inversamente proporcional a x, representa en la forma de $y = \frac{a}{x}$, para cada uno de los siguientes literales:

a) Cuando $x = 10$, $y = -5$

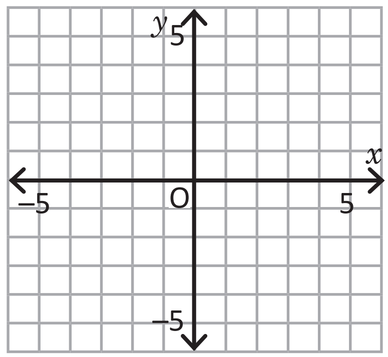
b) Cuando $x = \frac{1}{2}$, $y = 8$

c) Cuando $x = -11$, $y = -\frac{8}{11}$

d) Cuando $x = 20$, $y = -\frac{3}{4}$

2. Completa la tabla que representa la proporcionalidad inversa $y = \frac{5}{x}$ y elabora la gráfica.

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y		...							...		



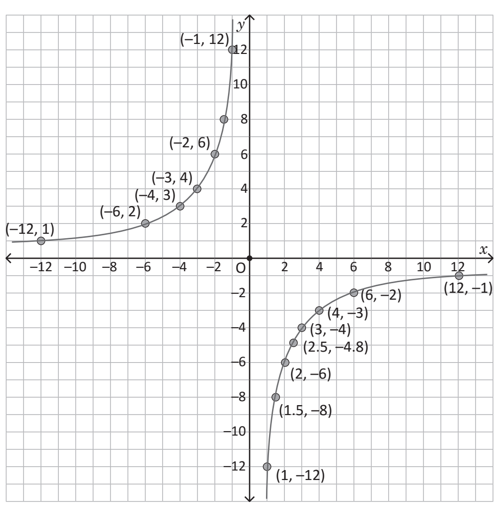
C

La gráfica de proporcionalidad inversa depende del valor de la constante a, tal como se muestra a continuación:

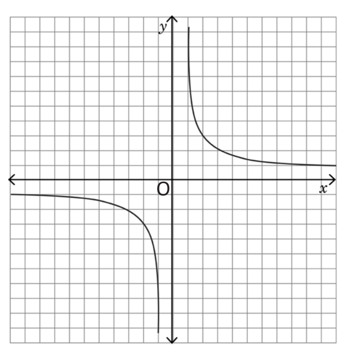
Para la siguiente relación de proporcionalidad inversa $y = -\frac{12}{x}$ ($xy = -12$) tienes que

x	...	–12	...	–6	...	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	...	6	...	12	...
y	...	1	...	2	...	3	4	6	12		–12	–6	–4	–3	...	–2	...	–1	...

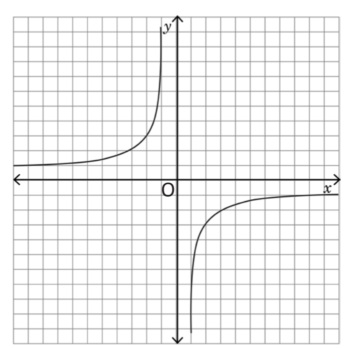
Al ubicar los puntos en el plano cartesiano, basados en los pares ordenados de la tabla y al colocar otros puntos tales como (1.5, –8), (2.5, –4.8), (–1.5, 8), (–1.25, 9.6), etc. La gráfica se representa de la siguiente manera:



La gráfica de una proporcionalidad inversa, puede presentar una de las siguientes formas, según la constante a.



($a > 0$)



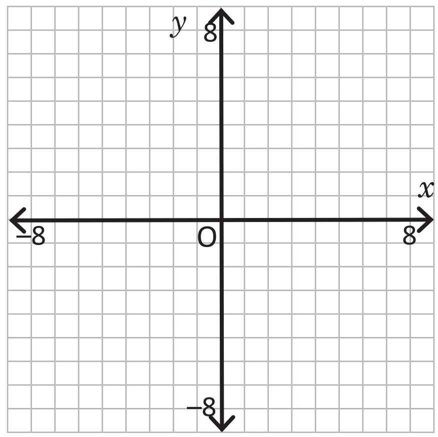
($a < 0$)

Unidad 6

En cada literal, completa la tabla que representa la proporcionalidad inversa y elabora la gráfica.

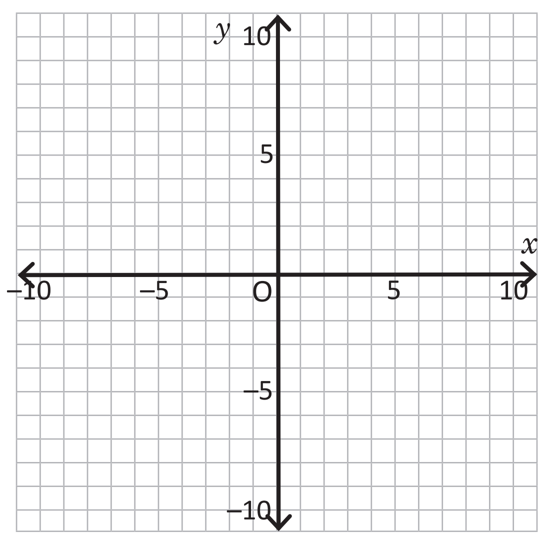
a) $y = -\frac{8}{x}$

x	−8	...	−4	...	−2	−1	0	1	2	...	4	...	8
y		...		...						...		...	



b) $y = -\frac{10}{x}$

x	−10	...	−5	...	−2	−1	0	1	2	...	5	...	10
y		...		...						...		...	

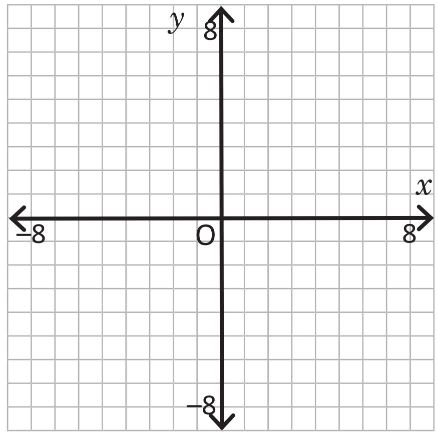


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.1 Regla de tres simple directa

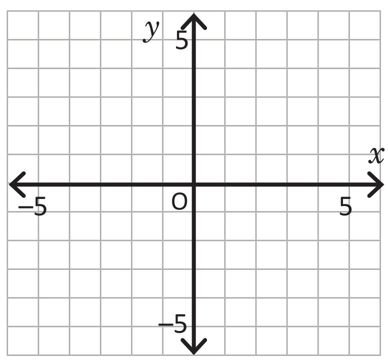
1. Completa la tabla que representa la proporcionalidad inversa $y = \frac{16}{x}$ y elabora la gráfica.

x	–8	...	–4	...	–2	–1	0	1	2	...	4	...	8
y		...		...						...		...	



2. Completa la tabla que representa la proporcionalidad inversa $y = -\frac{6}{x}$ y elabora la gráfica.

x	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6
y		...		...						...		...	



Cuando hay dos cantidades directamente proporcionales, y un dato desconocido, se puede encontrar el valor del dato desconocido usando las soluciones presentadas. A este proceso se le llama regla de tres simple directa. Por lo general, si se tienen los datos:

x	a	c
y	b	d

Para encontrar uno de ellos se puede hacer lo siguiente:
1. Formar una proporción $\boldsymbol{a : b = c : d}$.
2. Aplicar $\boldsymbol{ad = bc}$.
3. Despejar el dato desconocido.

Si y es directamente proporcional a x, encuentra los valores a, b, c y d aplicando la regla de tres simple directa.

x	...	a	...	7	8	...	c	...	25
y	...	20	...	35	b	...	110	....	d

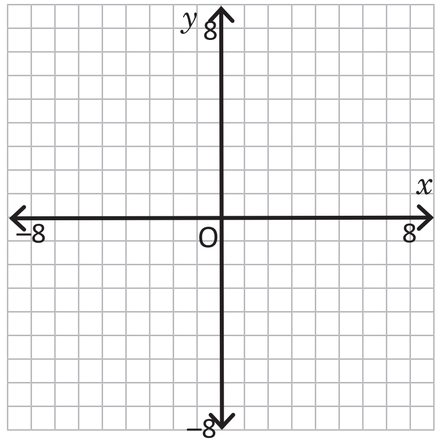
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Unidad 6

3.2 Regla de tres simple directa con porcentaje

1. Completa la tabla que representa la proporcionalidad inversa $y = -\frac{16}{x}$ y elabora la gráfica.

x	...	–8	...	–4	...	–2	–1	0	1	2	....	4	...	8	...
y	...		...		...						...		...		...



2. Si y es directamente proporcional a x, encuentra los valores m, n, o y p aplicando la regla de tres simple directa.

x	...	m	...	8	9	...	o	...	26
y	...	40	...	64	n	...	96	...	p

En situaciones que involucren porcentajes, se puede aplicar la regla de tres simple directa.
Por ejemplo:
La tabla muestra el número de estudiantes, y estudiantes que corresponde a x%. Como se observa y es directamente proporcional a x, aplicando la regla de tres simple directa puedes encontrar el número de estudiantes que corresponde al 90%.

× 5

Porcentaje (%)	10	...	50	...	90	100
No. estudiantes	5	...	25	...	d	50

× 5

$$10:5 = 90:d$$
$$10d = 5(90)$$
$$d = 45$$

o

$$\frac{5}{10} = \frac{d}{90}$$
$$d = \frac{5(90)}{10}$$
$$d = 45$$

1. En una escuela se está impulsando un proyecto de "cero papel" que consiste en dotar a los estudiantes y a la escuela con recursos tecnológicos para evitar el uso de papel para el desarrollo de las asignaturas. Algunos padres apoyan el proyecto mientras que otros no, por considerar que no es sostenible y decir que hay otros puntos negativos al hacer un proyecto como este. Al preguntar a 200 padres de familia su opinión sobre el proyecto, el 30% lo apoya. ¿Cuántos padres de familia son el 30%?

2. Ante la escasez del recurso hídrico que sufre el país, en el 2016 ANDA instaló 30 tanques de almacenamiento de agua potable en distintos sectores del Área Metropolitana de San Salvador. Si solo hay tanques con 2 diferentes capacidades de almacenamiento, determina su capacidad máxima, según la información en los siguientes literales:
   a) Para un tanque que se está llenando, al contener 180 litros tiene el 3% de su capacidad máxima.
   b) Para un tanque que se está llenando, al contener 4 000 litros tiene el 40% de su capacidad máxima.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.3 Regla de tres simple directa en conversión de unidades

R

1. Si y es directamente proporcional a x, encuentra los valores q, r, s y t aplicando la regla de tres simple directa.

x	...	q	...	5	6	...	9	...	s	...	23
y	...	45	...	75	r	...	135	...	270	....	t

2. El Impuesto al Valor Agregado (IVA) es un tributo o impuesto de naturaleza indirecta que recae sobre el consumo y grava: las entregas de bienes y prestaciones de servicios efectuadas por empresarios y profesionales. El IVA es del 13% del precio neto.
   a) Si Ana hace una compra en la cual el precio sin IVA es de 200 dólares, ¿cuánto es de IVA?
   b) Si el precio de la compra es de 300 dólares y el IVA no está incluido, ¿cuánto tendrá que pagar en total con el impuesto?

C

En situaciones de conversión de unidades se puede aplicar regla de tres simple directa, tanto en el mismo sistema métrico como entre diferentes sistemas de medidas.

Ejemplo:

En todos los casos siguientes existe una relación directamente proporcional entre las variables. Entonces, aplicando la regla de tres simple directa puedes encontrar el valor desconocido en cada caso. Por lo que se tiene:

a) Peso (aproximado)

Libras	1	...	4
Gramos	454	...	d

Forma 1

$1 : 454 = 4 : d$

$d = 4 \times 454$

$d = 1\,816$

Forma 2

$\frac{454}{1} = \frac{d}{4}$

$d = \frac{4 \times 454}{1}$

$c = 1\,816$

b) Capacidad (aproximada)

Galones	1	2	...
Litros	b	7.58	...

Forma 1

$1 : b = 2 : 7.58$

$2b = 7.58$

$b = 3.79$

Forma 2

$\frac{b}{1} = \frac{7.58}{2}$

$b = \frac{7.58}{2}$

$b = 3.79$

c) Volumen

Litros	a	...	5
cm^3	1000	...	5000

Forma 1

$a : 1\,000 = 2 : 2\,000$

$2\,000a = 2 \times 1\,000$

$a = 1$

Forma 2

$\frac{1\,000}{a} = \frac{2\,000}{2}$

$a = \frac{2 \times 1\,000}{2\,000}$

$a = 1$

1. Aplica la regla de tres simple para encontrar el valor desconocido en cada conversión.

a) Longitud

Km	1	...	d
m	1 000	...	12 000

b) Tiempo

Horas	1	...	c
Segundos	3 600	...	9 000

c) Peso

Libras	2	...	6
Onzas	32	...	d

2. Responde lo siguiente:
   a) ¿A cuántos kilómetros por hora corresponde la velocidad de una bicicleta que en cierto momento es de 150 m en 10 segundos?
   b) ¿A cuántos metros por minuto equivale la velocidad de 40 km por hora?

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.4 Autoevaluación de lo aprendido

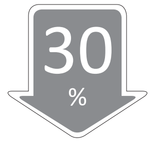
Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

<table>
<tr><th>Ítem</th><th>Sí</th><th>Podría mejorar</th><th>No</th><th>Comentario</th></tr>
<tr><td>1. Resuelvo problemas como
En la siguiente situación, si la relación entre las variables es de proporcionalidad inversa, elabora una tabla, escribe la constante y la expresión $y = \frac{a}{x}$.
En un recorrido de 12 km, la velocidad es x km/h y el tiempo es y horas.</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2. Resuelvo problemas como
Completa las tablas e identifica la constante y escribe $y = \frac{a}{x}$.
<table>
<tr><td>x</td><td>...</td><td>−4</td><td>−3</td><td>−2</td><td>−1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>y</td><td>...</td><td></td><td>$-\frac{8}{3}$</td><td></td><td>−8</td><td></td><td>8</td><td></td></tr>
</table></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3. Resuelvo problemas como
Si y es inversamente proporcional a x, representa en la forma de $y = \frac{a}{x}$, cuando $x = 3$, $y = 5$.</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4. Resuelvo problemas como
Completa la tabla que representa la proporcionalidad inversa y elabora la gráfica.
$y = \frac{6}{x}$
<table>
<tr><td>x</td><td>−6</td><td>−5</td><td>−4</td><td>−3</td><td>−2</td><td>−1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>y</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>−3</td><td></td><td></td><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5. Resuelvo problemas como
Completa la tabla que representa la proporcionalidad inversa y elabora la gráfica.
$y = -\frac{6}{x}$
<table>
<tr><td>x</td><td>−6</td><td>−5</td><td>−4</td><td>−3</td><td>−2</td><td>−1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>y</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>3</td><td></td><td></td><td>−6</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6. Resuelvo problemas como
Si y es directamente proporcional a x, encuentra los valores a, b, c y d aplicando la regla de tres simple directa.
<table>
<tr><td>x</td><td>...</td><td>a</td><td>...</td><td>8</td><td>9</td><td>...</td><td>c</td><td>...</td><td>25</td></tr>
<tr><td>y</td><td>...</td><td>28</td><td>...</td><td>56</td><td>b</td><td>...</td><td>147</td><td>...</td><td>d</td></tr>
</table></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7. Resuelvo problemas como
Encuentra la cantidad desconocida en el problema, aplicando la regla de tres simple directa.
En un estudio de preferencia entre mango verde y maduro, se encuestaron a 150 personas y el 60% prefieren mango verde. ¿Cuántas personas han respondido que prefieren mango verde?</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>8. Resuelvo problemas como
Aplica regla de tres simple directa para encontrar el valor desconocido en la conversión.
Área (aproximadamente)
<table>
<tr><td>m^2</td><td>1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>v^2</td><td>0.7</td><td>d</td></tr>
</table></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.5 Aplicación de la regla de tres simple inversa

1. En una tienda de ropa todas las prendas tienen el 30% de descuento al llevar solo una, pero si se compran dos prendas hay un descuento del 50% en el total. Si Antonio quiere comprar una camisa de 20 dólares y un pantalón de 40 dólares, ¿es más conveniente ir 2 veces a la tienda a comprar una prenda cada vez o es mejor hacer una sola compra?



2. Aplica la regla de tres simple para encontrar el valor desconocido en cada conversión.

yd^2	2	...	d
m^2	1.68	...	4.20

Donde:
yd^2 son "yardas cuadradas"

Cuando hay dos cantidades inversamente proporcionales, y hay dos pares de ellas (4 cantidades) con tres conocidas y una desconocida, se puede encontrar el valor de este dato usando la solución presentada en clase. Recuerda que a este proceso se le llama **regla de tres simple inversa**. Por lo general, si se tienen los datos:

x	a	c
y	b	d

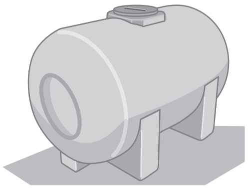
Para encontrar uno de ellos se debe hacer lo siguiente:
1. Establecer una igualdad basándose en la idea de constante: $\boldsymbol{ab = cd}$.
2. Despejar el dato desconocido.

Por ejemplo:
Una cooperativa de café piensa comprar una maquinaria pequeña para lavar el café, asumiendo cada productor la misma cantidad de dinero. Si solo son 2 productores, a cada uno le toca pagar $600. Para que el costo por productor sea $75, ¿cuántos productores deben aportar?
Considerando que la constante de proporcionalidad inversa se calcula por xy, entonces:

Productor (x)	2	...	c
Costo por productor (y)	600	...	75

$$2 \times 600 = 75c$$
$$75c = 1\,200$$
$$c = 16$$

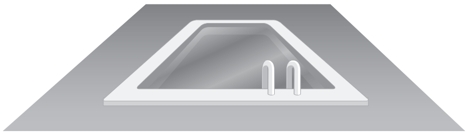
1. Debido a la escasez de agua, las familias de una comunidad han decidido comprar un tanque y así contar con agua para los días de escasez, asumiendo cada familia la misma cantidad de dinero. Si solo aportan dinero 3 familias, a cada una le toca pagar 500 dólares.



Familias (x)		3	...	a	...	b	30
Costo por familia (y)		500	...	100	...	50	c

a) Para que el costo por familia sea de 100 dólares, ¿cuántas familias deben aportar?
b) Para que el costo por familia sea de 50 dólares, ¿cuántas familias deben aportar?
c) Cuando se reúnen 30 familias, ¿cuánto dinero le toca a cada una?

2. Una piscina tarda en llenarse 36 horas si solo se utilizan dos grifos. Si se utilizan dos grifos más, ¿cuánto tardará en llenarse la piscina?



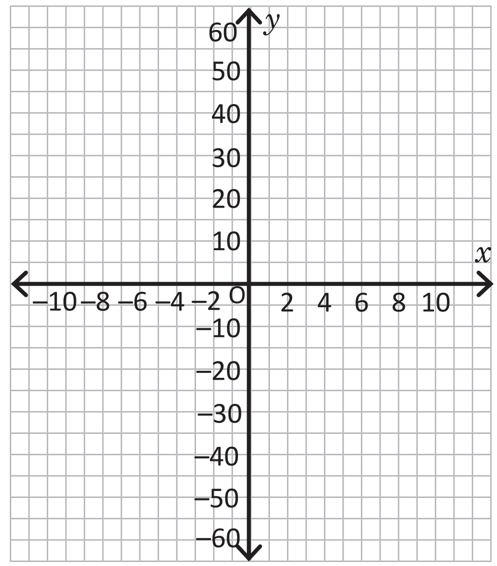
Problemas de aplicación

1. **Calentamiento global.** El caluroso verano que se ha instalado en Suecia ha acelerado considerablemente el derretimiento del hielo, hasta tal grado que a partir del 1 de agosto el pico sur de la montaña Kebnekaise ya no es el más alto del país, informa un comunicado de la Universidad de Estocolmo.

   Debido a las altas temperaturas, a lo largo de julio el pico sur perdió hasta 14 centímetros de altura al día y desde el 2 de julio hasta el 31 de julio llegó a medir 2.097 metros sobre el nivel del mar en vez de los 2 101.2 metros que mostraban las mediciones a principios del mes.
   La medición final se realizará a finales del verano, cuando el derretimiento del hielo se detenga. El pico sur de la montaña Kebnekaise se mide desde 1880 y a lo largo de los últimos 20 años ha ido perdiendo un metro por año por el derretimiento.

   a) Completa la siguiente tabla que muestra una relación de proporcionalidad directa entre el tiempo en días y el derretimiento del hielo en cm.
   b) Según los datos de la tabla, plantea la ecuación y elabora la gráfica de la proporcionalidad directa.

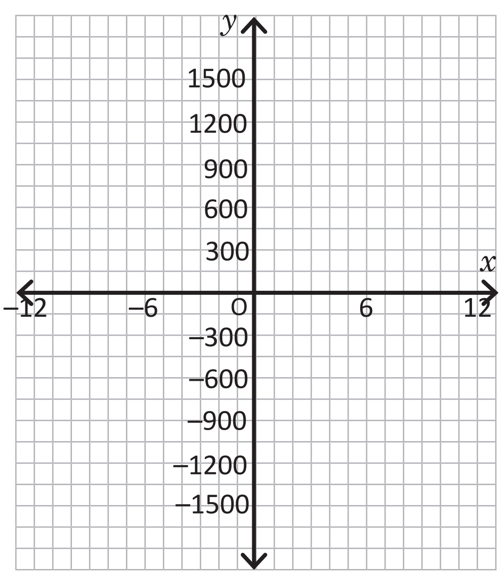
x (días)	1	2	3	4	5	6
y (cm)	14	28				



2. **Contaminación.** El presidente de Chile, Sebastián Piñera, ha promulgado la ley que prohíbe la entrega de bolsas de plástico en el comercio. El país andino es pionero en América Latina en adoptar esta drástica medida encaminada a proteger el medioambiente. "Se excluyen de esta prohibición las bolsas que constituyan el envase primario de alimentos, que sea necesario por razones higiénicas o porque su uso ayude a prevenir el desperdicio de alimentos", reza la normativa.

   La legislación da un plazo de adecuación de seis meses a las grandes empresas, mientras que "las micro, pequeñas y medianas empresas" gozarán de un plazo de dos años. Según la ley, durante el período de adaptación las tiendas solo podrán entregar un máximo de dos bolsas plásticas "a los consumidores por cada compra que realicen". La sanción por incumplimiento será del equivalente a 370 dólares por cada bolsa de plástico entregada.

   Estableciendo como un número negativo la multa que debe pagar un negocio por cada bolsa plástica.
   a) Completa la tabla.
   b) Según los datos de la tabla, plantea la ecuación y elabora la gráfica de la proporcionalidad directa.



x (bolsas)	1	2	3	4	5	6
y (multa)	–370	–740				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

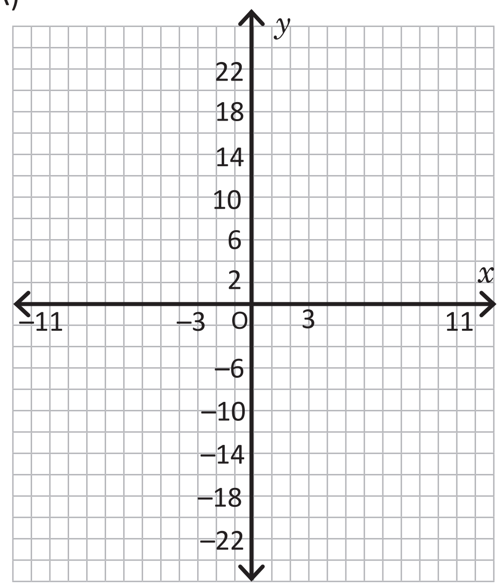
Problemas de aplicación

3. Ley de Ohm. Georg Ohm descubrió que, a una temperatura constante, la corriente eléctrica que fluye a través de una resistencia lineal fija es directamente proporcional a la tensión aplicada a través de ella, y también inversamente proporcional a la resistencia. Esta relación entre el voltaje, la corriente y la resistencia forma la base de la ley de Ohms que se muestra a continuación:

$$\text{Corriente (C)} = \frac{\text{Voltage (V)}}{\text{Resistencia (R)}}$$

a) Completa la siguiente tabla que muestra una relación de proporcionalidad inversa entre la corriente (C) y la resistencia (R), para un voltaje de 24V.

b) Según los datos de la tabla, plantea la ecuación y elabora la gráfica de la proporcionalidad inversa.



Resistencia	1	2	3	4	5	6
Corriente	24	12		6		

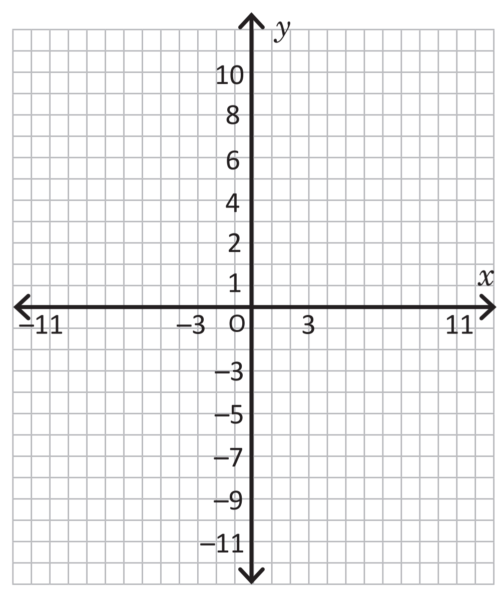
4. Solución química. La proporcionalidad inversa es de fundamental importancia en el laboratorio cuando se diluyen soluciones concentradas. La concentración c de una solución viene dada por $c = \frac{n}{v}$. Donde n es la cantidad de soluto y v es el volumen de la solución.

Suponiendo que se tienen 12 cm^3 de soluto.

a) Completa la siguiente tabla que muestra una relación de proporcionalidad inversa entre el volumen de la solución (v) y la concentración (c).

b) Según los datos de la tabla, plantea la ecuación y elabora la gráfica de la proporcionalidad inversa.

Solución (v)	1	2	3	4	5	6
Concentración (c)	12	6			2.4	

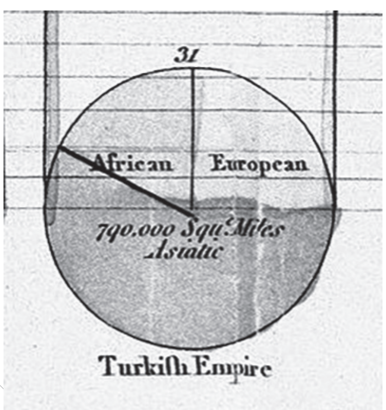


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Unidad 7

Gráfica de faja y circular

Las representaciones gráficas de los datos varían dependiendo del objetivo que se persiga en dichas representaciones, en este sentido, si se requiere ver frecuencias, es muy común utilizar la gráfica de barras, sin embargo, si lo que se desea es comparar la proporción de los datos respecto del total se puede utilizar la gráfica de faja o la gráfica circular, cuya interpretación y análisis es muy importante.



Esquema de la gráfica circular elaborada por William Playfair.

Se tiene conocimiento de que la primera gráfica circular fue elaborada y utilizada por el ingeniero y economista escocés William Playfair que mostraba las proporciones del imperio turco localizado en Asia, Europa y África hacia el año 1786.

Los contenidos que estudiarás serán: el gráfico de faja a partir del uso de la proporcionalidad, la construcción de la gráfica de faja, interpretación y análisis para comparar dos gráficas de faja diferentes; luego se utilizará la forma de construcción de la gráfica de faja para la construcción de la gráfica circular, y por último, la lectura de este tipo de gráficas.

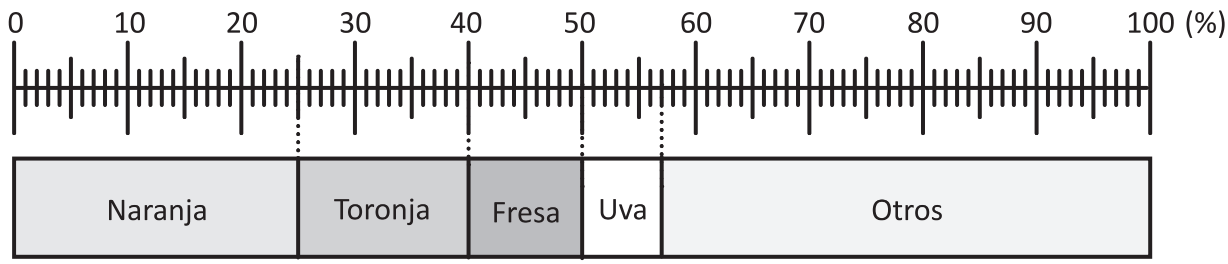
1.1 Lectura de una gráfica de faja

En la **Gráfica de faja** se observa fácilmente la razón de cada categoría en relación al total, y generalmente cada parte que compone la gráfica se llama categoría. La gráfica de faja presenta las siguientes características:

- Tiene un título.
- Las categorías se ubican de mayor a menor según su por ciento (de izquierda a derecha).
- En caso de que aparezca la categoría **Otros**, se ubica por último sin importar su porcentaje.

1. Se pregunta a varias personas sobre su sabor de soda favorito, obteniéndose los siguientes resultados:

Porcentaje de la preferencia del sabor de la soda



a) ¿Cuál es el porcentaje correspondiente a cada sabor de soda?

Naranja: ______ Fresa: ______ Otros: ______

Toronja: ______ Uva: ______

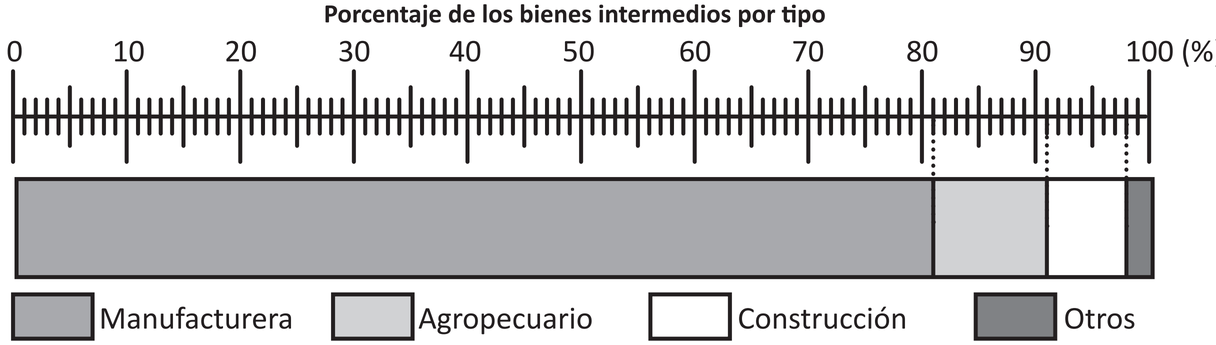
b) Si la cantidad de personas encuestadas es de 300, ¿cuántas personas han preferido cada sabor de soda?

Naranja: ______ Fresa: ______ Otros: ______

Toronja: ______ Uva: ______

2. La siguiente gráfica muestra el porcentaje de las importaciones por tipo de los bienes intermedios importados en el 2012.

Porcentaje de los bienes intermedios por tipo



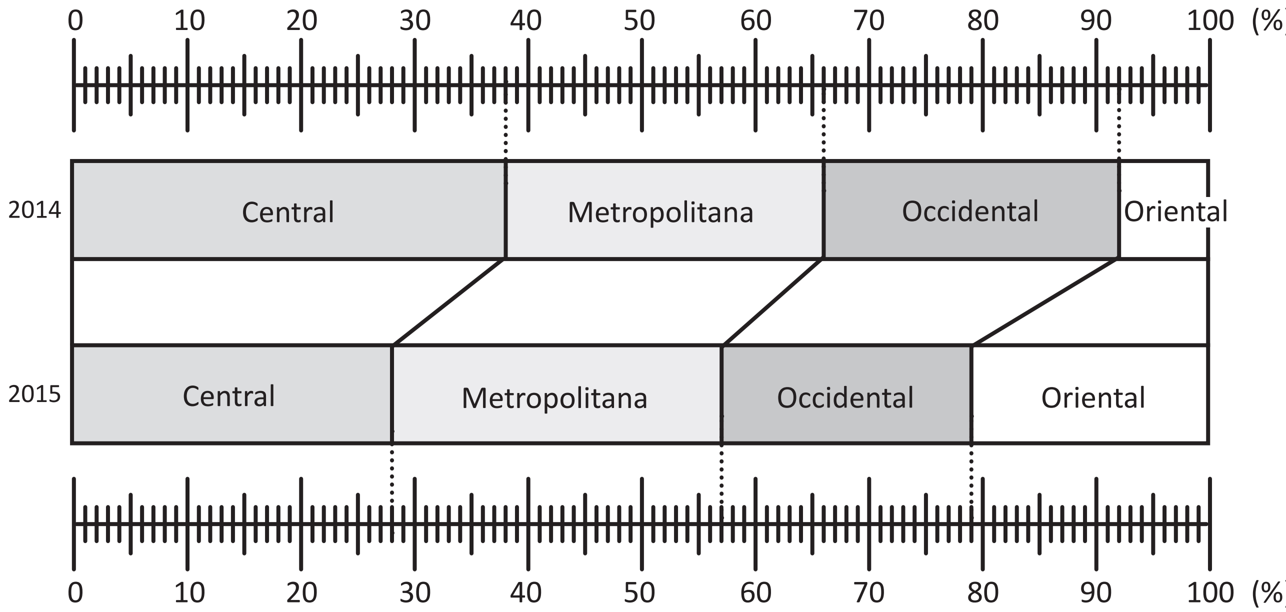
a) ¿Cuál es el área que tiene mayor porcentaje de importaciones? ¿De cuánto es su porcentaje?

b) Si la importación total de los bienes intermedios es 4,600 millones de dólares, ¿qué cantidad de dinero se ha gastado en importaciones por cada área?

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3. ANDA cada año hace esfuerzos para hacer llegar el agua a más población, de tal forma que debes hacer un buen uso de ella para que siempre haya agua disponible que se pueda distribuir a otras personas. La siguiente gráfica muestra la incorporación de nuevos servicios de acueducto por región en los años 2014 y 2015.

Porcentaje de nuevos servicios de acuaducto por región



a) ¿Qué región tuvo mayor porcentaje de incorporación de servicios de acueducto en 2014? ¿Y en 2015?

2014: ______ 2015: ______

b) ¿Qué región tuvo menor porcentaje de incorporación de servicios de acueducto en 2014? ¿Y en 2015?

2014: ______ 2015: ______

c) ¿Se puede asegurar que en el 2014 hubo un mayor número de nuevos servicios de acueducto en la región central? ¿Por qué?

d) Si para el año 2014 se tuvo un total de 12 475 incorporaciones de nuevos servicios de acueducto, ¿cuántas de ellas eran de la zona metropolitana?

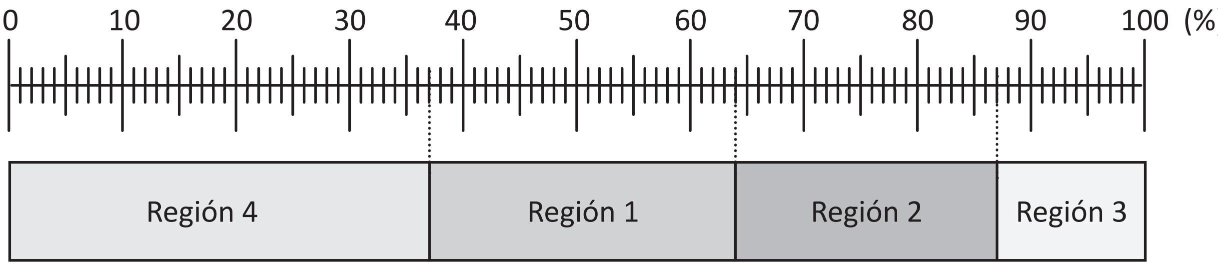
e) Ahora supone que la cantidad de familias para el año 2014 fue de 15 000 y que para el año 2015 fue de 16 600, ¿en qué año hubo un mayor número de familias beneficiadas con el servicio de acueducto en la zona occidental?

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.2 Construcción de una gráfica de faja

R 1. La siguiente gráfica muestra el porcentaje de terreno asignado a cada región del país al cultivo de maíz (Región 1: Ahuachapán, Santa Ana y Sonsonate, Región 2: Chalatenango, San Salvador, La Libertad y Cuscatlán, Región 3: La Paz, Cabañas y San Vicente, y Región 4: Usulután, San Miguel, Morazán y La Unión).

Porcentaje de manzanas asignadas al cultivo de maíz por región

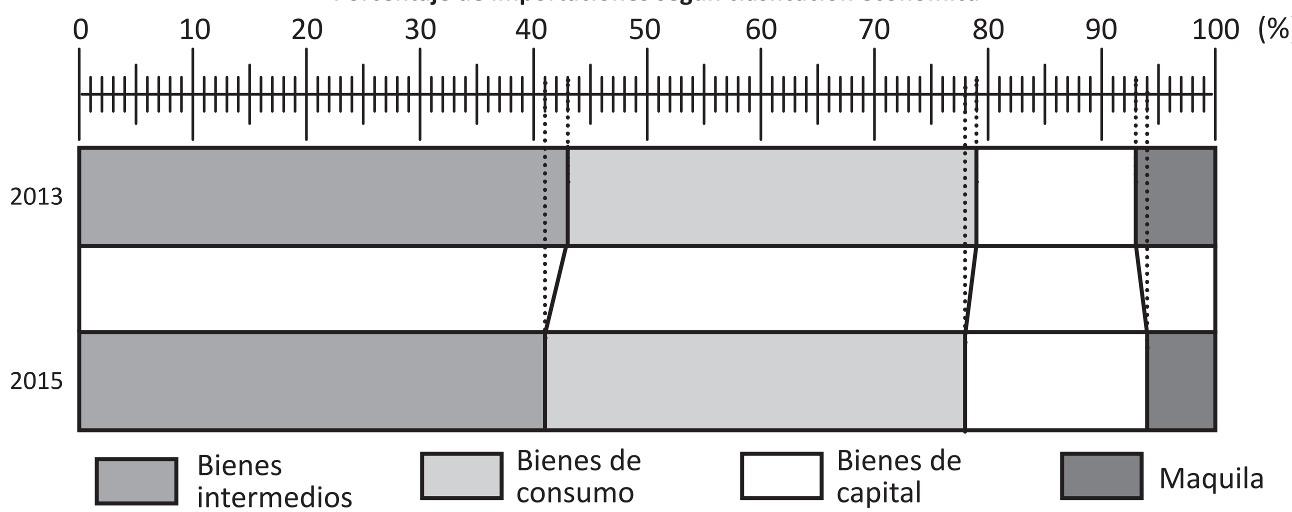


¿Cuál es el porcentaje correspondiente a cada región?

Región 1: ☐ Región 2: ☐ Región 3: ☐ Región 4: ☐

2. Las siguientes gráficas de faja muestran las importaciones realizadas por El Salvador según clasificación económica, en los años 2013 y 2015.

Porcentaje de importaciones según clasficación económica



a) ¿Cuál es el porcentaje de cada tipo de importación en cada año?

2013 Bienes intermedios: ☐ Bienes de consumo: ☐ Bienes de capital: ☐ Maquila: ☐

2015 Bienes intermedios: ☐ Bienes de consumo: ☐ Bienes de capital: ☐ Maquila: ☐

b) Supone que las importaciones en el 2013 fueron de 11,772 millones de dólares y en el 2015 fueron de 10,416 millones. ¿En qué año hubo una mayor cantidad de dólares en la importación de Bienes de capital ?

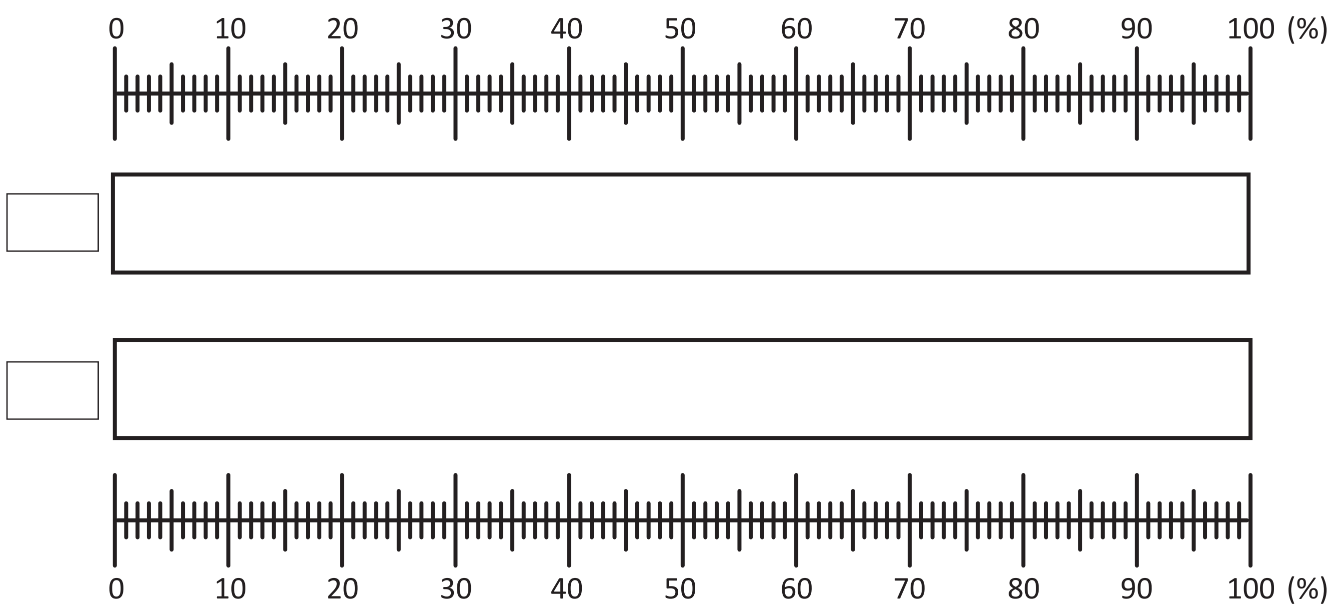
C El procedimiento para la elaboración de una gráfica de faja es:
1. Encontrar el porcentaje de cada categoría.
2. Separar según el porcentaje obtenido en 1 partiendo de la categoría con mayor porcentaje desde la izquierda.
3. Colocar la categoría **Otros** en último lugar (en caso de que aparezca).

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

La siguiente tabla presenta el número de personas según su rango de edad, en el departamento de La Paz en los años 2005 y 2015. Completa con los porcentajes correspondientes al número de personas en cada rango de edad (redondea el porcentaje de cada categoría a la unidad) y luego construye una gráfica de faja para representar la información.

Año	2005		2015	
Edad	N° de personas	%	N° de personas	%
0 - 19	155 382		145 535	
20 - 39	99 610		113 850	
40 - 59	40 672		60 797	
60 - 79	20 036		27 819	
Total	315 700		348 001	

Porcentaje de personas del departamento de La Paz según grupo de edad



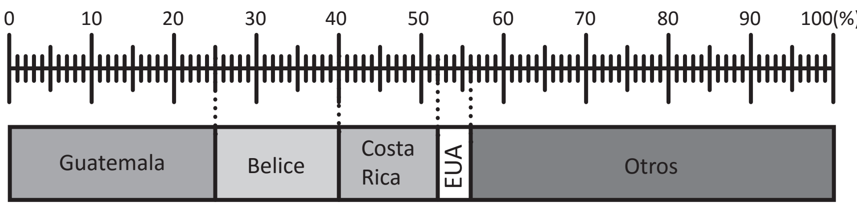
¿Qué interpretación obtienes de la gráfica respecto a la población en cada rango de edad, al pasar del 2005 al 2015? Explica.

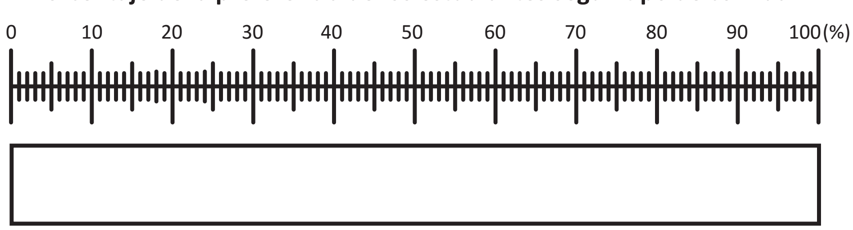
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.3 Autoevaluación de lo aprendido

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

<table>
<tr><th>Ítem</th><th>Sí</th><th>Podría mejorar</th><th>No</th><th>Comentario</th></tr>
<tr><td>
1. Puedo resolver problemas como
La gráfica de faja muestra la exportación de arroz precocido de El Salvador en enero del año 2014.

Porcentaje de arroz blanco exportado por El Salvador según país


a) ¿Cuál es el porcentaje de exportación a cada país?
b) Si la cantidad total es 2 356 191 kg, ¿cuántos kg se exportan a cada país?
</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>
2. Puedo resolver problemas como
Por motivos de la celebración del día del niño en un centro escolar, se les preguntó a los estudiantes qué comida preferían. En la tabla aparecen los resultados.
<table>
<tr><th>Categoría</th><th>Cantidad</th><th>Porcentaje</th></tr>
<tr><td>Pollo</td><td>83</td><td></td></tr>
<tr><td>Carne</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>Pescado</td><td>37</td><td></td></tr>
<tr><td>Pavo</td><td>257</td><td></td></tr>
<tr><td>Otros</td><td>8</td><td></td></tr>
<tr><td>Total</td><td>395</td><td></td></tr>
</table>
a) ¿Qué porcentaje representa el número de niños que prefieren cada uno de los tipos de comida (redondea el porcentaje de cada categoría a la unidad)?
b) Construye una gráfica de faja para representar la información.
Porcentaje de la preferencia de los estudiantes según tipo de comida


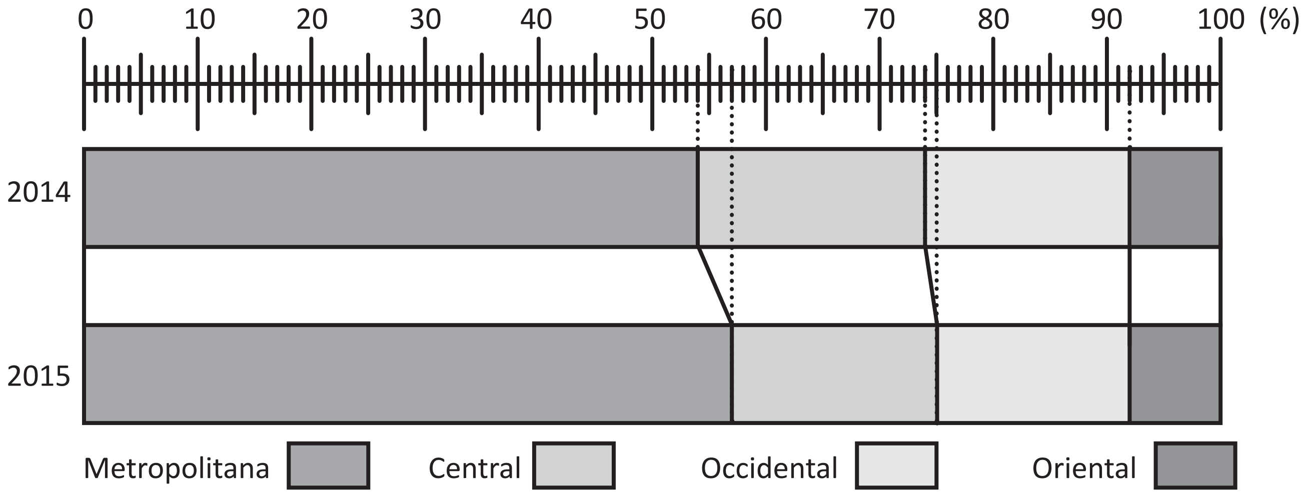
</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.1 Lectura de una gráfica circular

1. La siguiente gráfica muestra el porcentaje de incorporación de nuevos servicios de alcantarillado en los años 2014 y 2015 por región.

Porcentaje de incorporación de nuevos servicios de alcantarillado por región



¿Cuál es el porcentaje de la incorporación del servicio de alcantarillado en cada región y año?

2014 Metropolitana: ____ Central: ____ Occidental: ____ Oriental: ____

2015 Metropolitana: ____ Central: ____ Occidental: ____ Oriental: ____

2. La siguiente tabla muestra los quintales (QQ) de maíz producidos en cada región del país en la época de siembra 2014 - 2015. Construye una gráfica de faja para representar la información (redondea el porcentaje de cada región a la unidad).

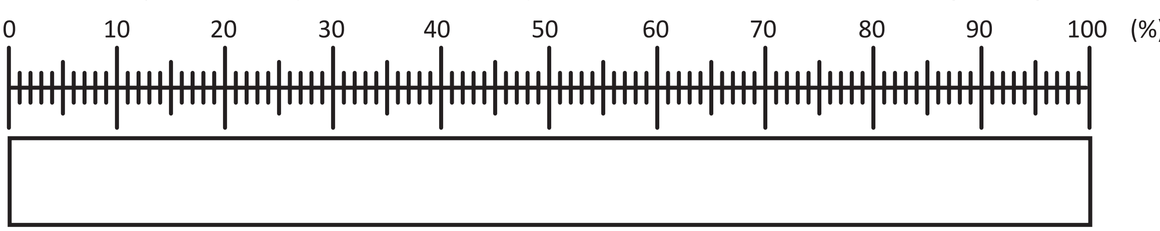
Región	Quintales (QQ)	%
1	5 636 292	
2	4 745 411	
3	2 571 737	
4	4 857 679	
Total	17 811 119	

Región

1. Ahuachapan, Santa Ana y Sonsonate
2. Chalatenango, San Salvador, La Libertad y Cuscatlán
3. La Paz, Cabañas y San Vicente
4. Usulutan, San Miguel, Morazán y La Unión

Unidad 7

Porcentaje del maíz producido en la época de siembra 2014 - 2015 según región

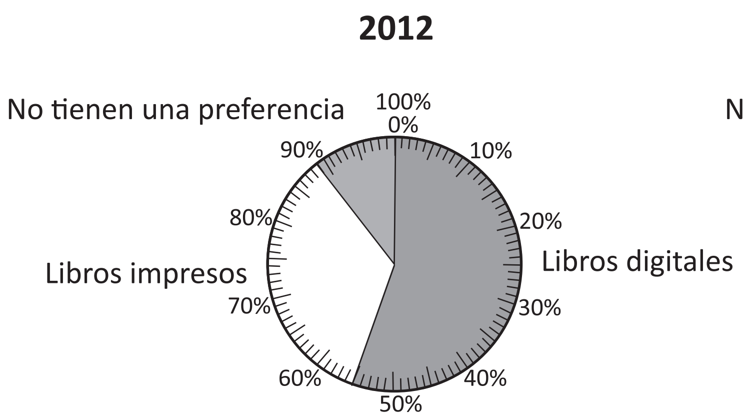


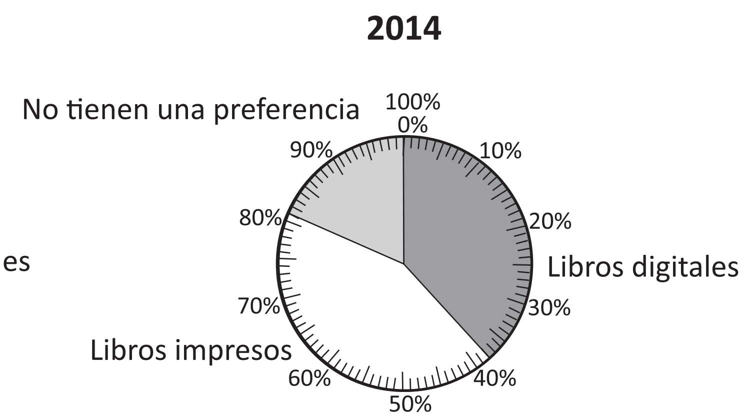
A la gráfica que representa el total con un círculo y que está dividida por radios según la razón de cada categoría al total (porcentaje) se le llama **gráfica circular**.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

En el 2012 y 2014 se preguntó a grupos diferentes de 2 500 niños con edades de 6 - 17 años que habían tenido la oportunidad de leer libros digitales e impresos, sobre su preferencia de lectura entre estos dos tipos de formato. En los estudios se obtuvieron los siguientes resultados:

Porcentaje de la preferencia de los niños entre libros impresos o digitales en los años 2012 y 2014





Cuando se hace una comparación de gráficas, es recomendable que la segunda gráfica mantenga el orden de las categorías presentadas en la primera, para facilitar la comparación.

1. Para cada año:

a) ¿Cuál es el porcentaje de niños que prefiere los libros digitales?

2012: ☐ 2014: ☐

b) ¿Cuál es el porcentaje de niños que prefiere los libros impresos?

2012: ☐ 2014: ☐

c) ¿Cuál es el porcentaje de niños que no tienen una preferencia en particular?

2012: ☐ 2014: ☐

2. ¿Cuál es la cantidad de niños que representa el porcentaje en cada uno de los literales del ejercicio anterior?

3. Reflexiona y escribe una posible causa de la disminución de la popularidad de los libros digitales en el año 2014.

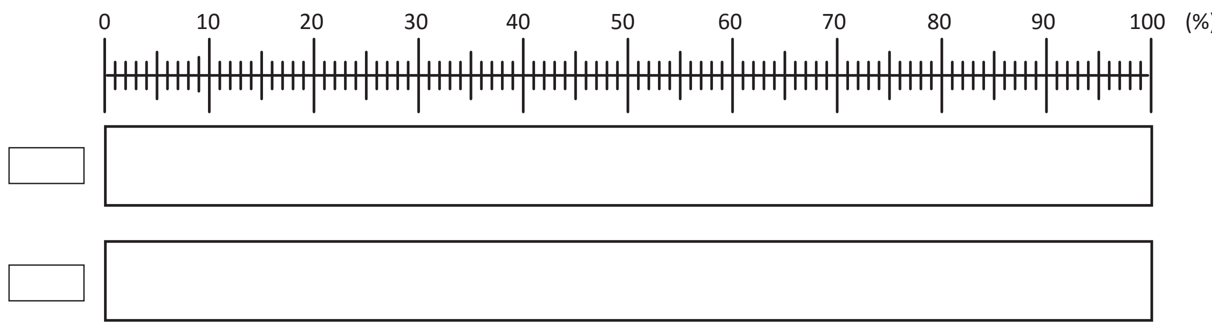
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.2 Construcción de una gráfica circular

1. La siguiente tabla presenta el número de personas según su rango de edad, en el departamento de Ahuachapán en los años 2005 y 2015. Completa con los porcentajes correspondientes al número de personas en cada rango de edad (redondea el porcentaje de cada categoría a la unidad) y luego construye una gráfica de faja para representar la información.

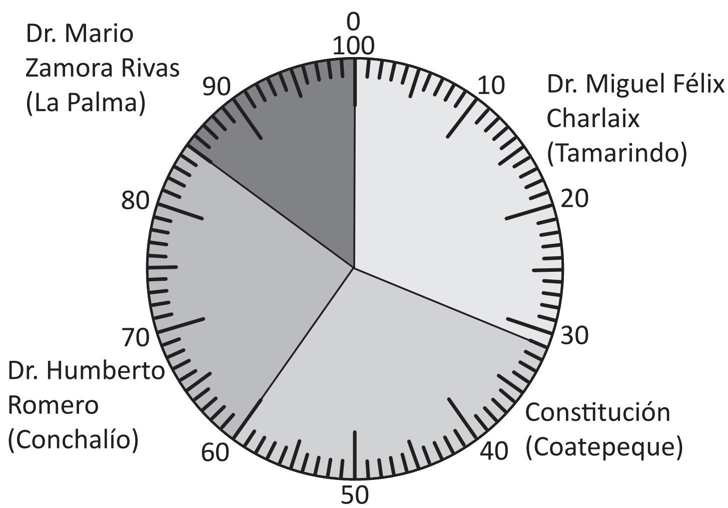
Año	2005		2015	
Edad	N° de personas	%	N° de personas	%
0 - 19	173 261		151 600	
20 - 39	110 706		112 474	
40 - 59	47 185		58 998	
60 - 79	20 840		27 696	
Total	351 992		350 768	

Porcentaje de personas del departamento de Ahuachapan según grupo de edad



2. En El Salvador hay cuatro **Centros de Recreación a Trabajadores y Trabajadoras**, que el Ministerio de Trabajo y Previsión Social pone a disposición de la población en general, como una prestación para un sano esparcimiento, integración y recreación. En abril de 2016 se registraron 13 390 visitantes a estos centros, la siguiente gráfica muestra la distribución de los porcentajes de personas según centro de recreación.

Porcentaje de visitantes según centro de recreación



a) ¿Cuál es el porcentaje de visitantes en cada uno de los Centros de recreación?

Dr. Miguel Félix Charlaix: ☐

Constitución 1950: ☐

Dr. Humberto Romero: ☐

Dr. Mario Zamora Rivas: ☐

b) ¿Cuál es el centro de recreación que tuvo un mayor número de visitantes? ¿Cuántos visitantes tuvo este centro?

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

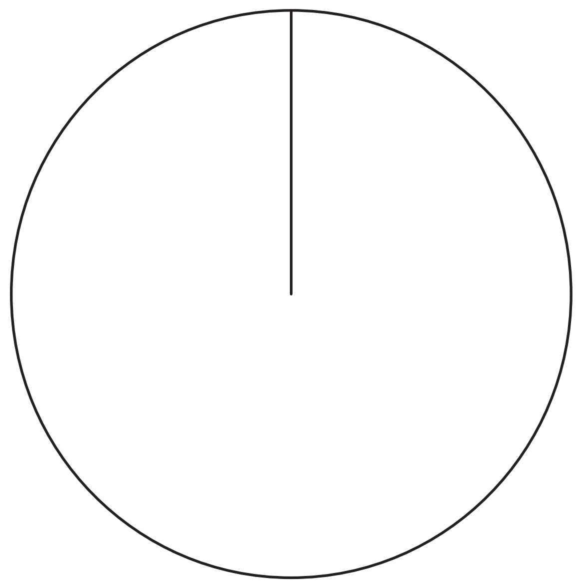
El procedimiento para representar la información en una gráfica circular es el siguiente:

1. Encontrar el **porcentaje** de cada categoría.
2. Encontrar el ángulo central de cada categoría (3.6° × **porcentaje**)
3. Colocar las categorías desde la mayor a la menor en sentido horario y teniendo en cuenta que cuando aparezca la categoría **Otros** siempre estará al final.

1. La siguiente tabla muestra los casos sospechosos de Zika por grupo de edad, durante las primeras 8 semanas del 2017. Completa la tabla con los porcentajes correspondientes a los grupos de edad y construye una gráfica circular para representar la información, redondeando el porcentaje de cada categoría a la unidad.

Grupos de edad (años)	N° de casos	%	Grados
Menor de 1	13		
1 a 19	16		
20 a 49	52		
Mayor de 50	8		
Total	89		

Porcentaje de los casos de Zika obtenidos en las primeras 8 semanas del 2017 según grupo de edad



a) ¿En qué grupo de edad se tiene un mayor número de casos sospechosos de Zika? ¿Qué porcentaje tiene?

b) ¿En qué grupo de edad se tiene un menor número de casos sospechosos de Zika? ¿Qué porcentaje tiene?

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2. En una fábrica se tienen 3 empleados encargados de la producción de un mismo producto. Los empleados A y C son nuevos mientras que el B es un empleado antiguo de la fábrica. El responsable del equipo hace una comparación del desempeño laboral mensual de las 3 personas en los aspectos: "producción", el "costo" que representa el empleado para la fábrica y "horas de trabajo". Considera que las horas totales de trabajo se distribuyen entre las 3 personas. La información de los tres empleados se resume en la siguiente tabla:

Aspectos / Empleados	Producción (unidades)	Costo (dólares)	Horas de trabajo
A	1000	300	90
B	625	900	120
C	875	300	90
Total	2500	1,500	300

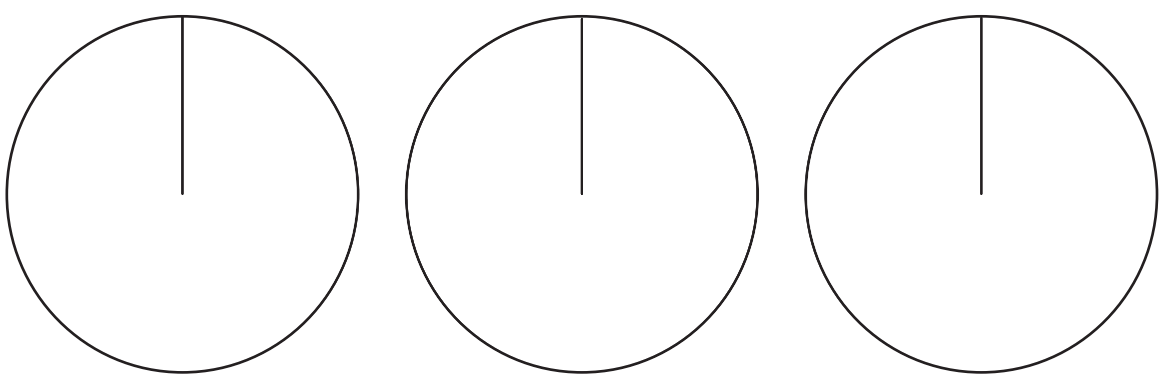
a) Completa la tabla con los porcentajes (%) y los grados del ángulo central (°).

Aspectos / Empleados	Producción (unidades)		Costo (dólares)		Horas de trabajo	
	%	Grados	%	Grados	%	Grados
A						
B						
C						
Total	100	360	100	360	100	360

b) Construye las gráficas circulares correspodientes a cada aspecto de evaluación.

Porcentaje correspondiente a cada trabajador en los aspectos de evaluación

Producción **Costo** **Horas de trabajo**



Con base en la información que proveen las gráficas anteriores, como responsable del equipo, ¿qué decisiones tomarías?

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.3 Autoevaluación de lo aprendido

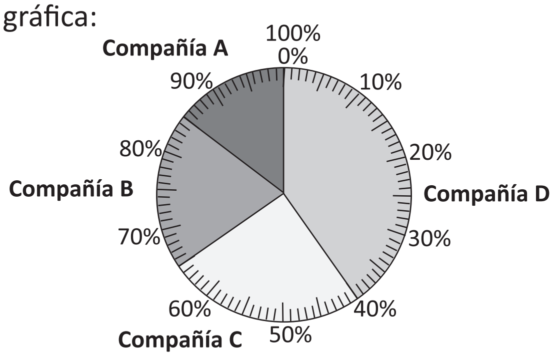
Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

<table>
<tr><th>Ítem</th><th>Sí</th><th>Podría mejorar</th><th>No</th><th>Comentario</th></tr>
<tr><td>

1. Puedo resolver problemas como

En un centro comercial se pregunta a los usuarios de telefonía celular qué compañía utilizan. La información se presenta en la siguiente gráfica:

Preferencia por las compañias telefónicas



a) ¿Cuál es el porcentaje de las personas que utilizan la compañía B?
b) ¿Qué compañía es la menos utilizada? ¿Qué porcentaje tiene?
c) ¿Cuál es la compañía que tiene mayor demanda? ¿Qué porcentaje tiene?
d) Si el total de personas encuestadas fue 200, ¿qué cantidad de personas prefieren cada una de las compañías?

</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>

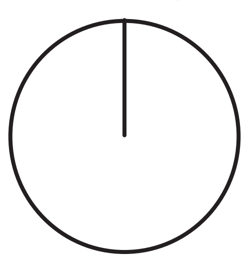
2. Puedo resolver problemas como

En una gasolinera se pregunta a los clientes el motivo de su preferencia y se obtuvo la información representada en la siguiente tabla:

Motivo de preferencia	Cantidad de personas	%	Grados
Servicio completo	83		
Atención al cliente	10		
Precio	37		
Ubicación	257		
Total	395		

Con la información de la tabla construye una gráfica circular.

Porcentaje de respuestas según motivo de preferencia



</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Problemas de aplicación

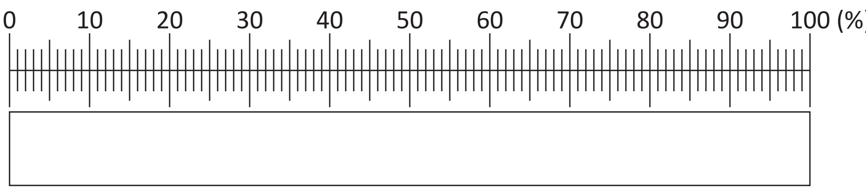
1. **Censo de Población y Vivienda.** Se le conoce como censo, al recuento de individuos que conforman una población estadística, este implica un conjunto de operaciones que consisten en recopilar, evaluar, analizar y publicar o divulgar de alguna forma características habitacionales de los hogares y datos demográficos, económicos y sociales relativos a todos los habitantes. En El Salvador, el último Censo de Población y Vivienda se realizó en 2007.

   En la siguiente tabla se muestra el porcentaje de viviendas según el tipo de piso con el que cuenta, los datos son aproximados y fueron tomados del VI Censo de Población y Vivienda realizado en el 2017.

   a) Construye una gráfica de faja que represente la información.
   b) Si el total de viviendas encuestadas fuera 1 600 000. ¿Cuántas viviendas corresponden a cada tipo de material?

Viviendas según material de piso	
Material	%
NA	18
Cerámica	7
Losa de Cemento	18
Ladrillo de cemento	37
Tierra	19
Otro	1
Total	100

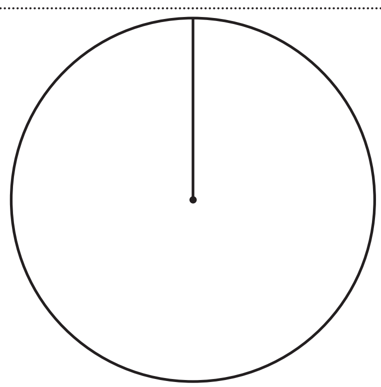
Título:



2. **Encuestas.** El uso de encuestas para conocer la opinión de ciertos sectores de la población es muy común en organismos, instituciones o por investigadores particulares. Es un procedimiento dentro de los diseños de una investigación descriptiva en el que el investigador recopila datos mediante un cuestionario previamente diseñado, en algunos casos la información es cuantitativa y puede ser representada haciendo uso de tablas o gráficos.

   En las siguientes elecciones para la presidencia de la república participarán 5 partidos. Una casa encuestadora muestra la intención de voto en la siguiente tabla y te contrata a tí para que realices lo siguiente:
   a) Con la información de la tabla, construye una gráfica circular.
   b) El número de encuestados fue de 1 500 personas, calcula el número de personas que piensa votar por cada partido.

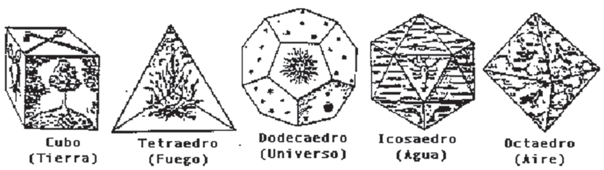
Intención de voto en %	
Partido político	%
Partido A	35
Partido B	45
Partido C	12
Partido D	8
Total	100



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Unidad 8

Figuras planas y construcción de cuerpos geométricos



Concepción platónica de los poliedros como regidores del Universo.

El conocimiento y uso de los cuerpos geométricos data desde los tiempos prehistóricos, algunos registros suponen el trabajo con los poliedros regulares desde el periodo neolítico (aproximadamente 1500 a. C.) en el cual se identificaron poliedros regulares labrados en piedra, estos cinco poliedros fueron considerados por los pitagóricos como perfectos y aunque no demostraron que eran los únicos, sí sabían que solo existían esos; con el aporte de Platón y la justificación de este resultado en el libro *Los elementos* de Euclides es que logra quedar establecido.

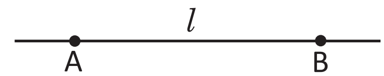
Los poliedros se han utilizado a lo largo de la historia en construcciones arquitectónicas como elementos representativos del arte, la belleza y la perfección; entre los cuerpos geométricos más utilizados se encuentran las pirámides, cilindros, cubos, prismas, entre otros.

Gran Pirámide de Giza, construida por los antiguos egipcios.

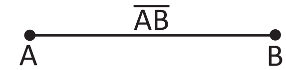
En esta unidad aprenderás sobre figuras planas, el estudio de los triángulos y la construcción de algunas rectas notables con regla y compás; el estudio de la circunferencia, además de lo correspondiente a los poliedros regulares, prismas, pirámides y cuerpos redondos. Se hará un análisis de las rectas y planos en el espacio para establecer los patrones y las proyecciones de los cuerpos geométricos.

1.1 Puntos y rectas

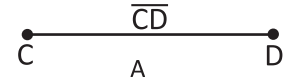
a) La línea que pasa por los puntos A, B y se extiende indefinidamente se llama **línea recta AB**, regularmente se denota con una letra por ejemplo l, m, etc.



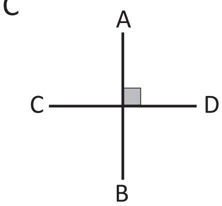
b) A la figura formada por la unión de A y B se le llama **segmento AB**, se simboliza como $\overline{AB}$ y se lee "segmento AB".



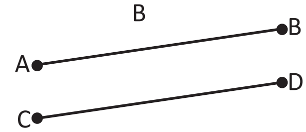
c) Si dos segmentos tienen igual longitud, tal como $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, entonces se simboliza como AB = CD. Al referirse a la longitud de un segmento se omite el símbolo (‾) en la escritura. La longitud de $\overline{AB}$ es AB.



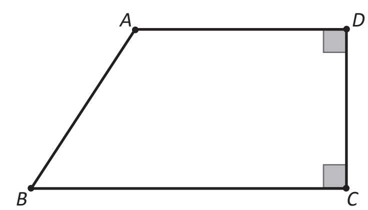
d) Cuando una recta corta a otra formando un ángulo de 90° se les llama **rectas perpendiculares**; se utiliza el símbolo (⊥) para representar este hecho. En la imagen $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ y se lee "el segmento AB es perpendicular al segmento CD".



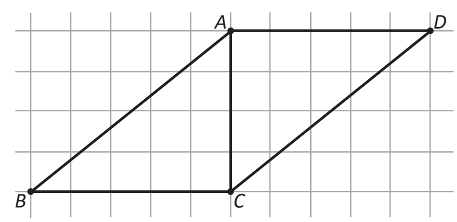
e) A dos rectas que jamás se corten una con la otra se les llama **rectas paralelas** y se utiliza el símbolo (∥). En la imagen $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ se lee "el segmento AB es paralelo al segmento CD".



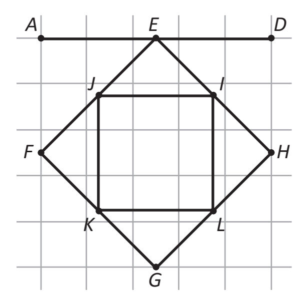
1. Observa el siguiente cuadrilátero, utiliza los símbolos "⊥" o "∥" para decir qué segmentos son perpendiculares y qué segmentos son paralelos.



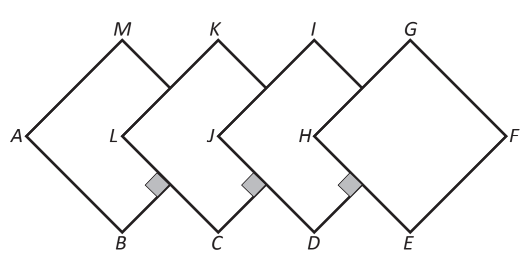
2. Observando la imagen de la derecha, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son falsas y cuáles son verdaderas?
   a) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ b) $\overline{AC} \perp \overline{CD}$
   c) $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ d) $\overline{AB} \perp \overline{AD}$
   e) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ f) $\overline{BC} \perp \overline{CD}$



3. En la siguiente figura indica cuáles de los segmentos son:
   a) Paralelos a $\overline{AD}$
   b) Paralelos a $\overline{FG}$
   c) Perpendiculares a $\overline{KL}$

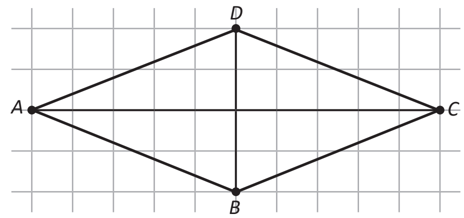


4. En la imagen de abajo hecha por cuadrados, indica cuáles de los segmentos que se muestran son:
   a) Paralelos a $\overline{AM}$
   b) Perpendiculares a $\overline{AB}$

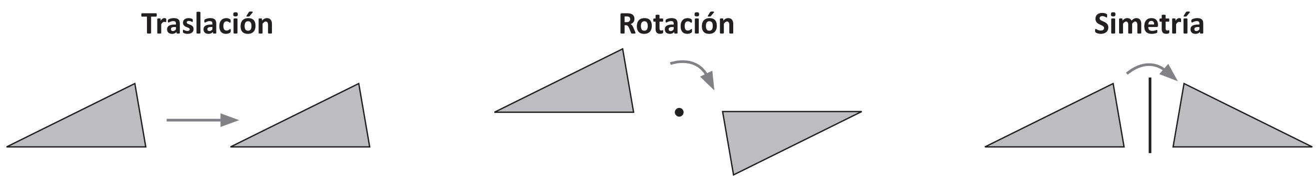


1.2 Patrones de figuras

R En la imagen de la derecha, indica cuáles de los segmentos que se muestran son paralelos y cuáles son perpendiculares, utiliza los símbolos "⊥" o "∥".

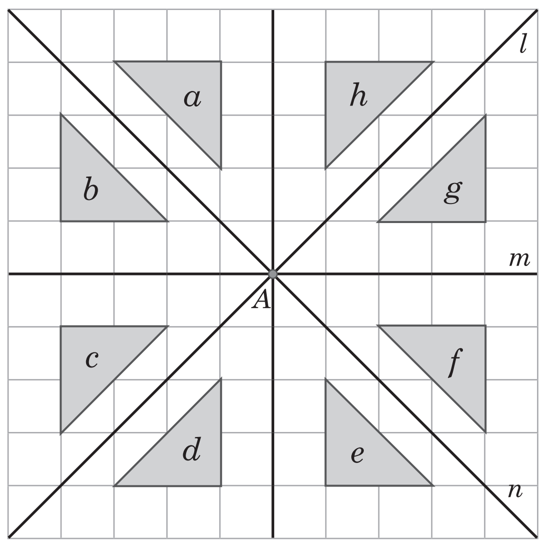


C El movimiento de una figura sin cambiar su tamaño o forma recibe un nombre según la manera en la que se hace.
Existen tres tipos de movimiento:



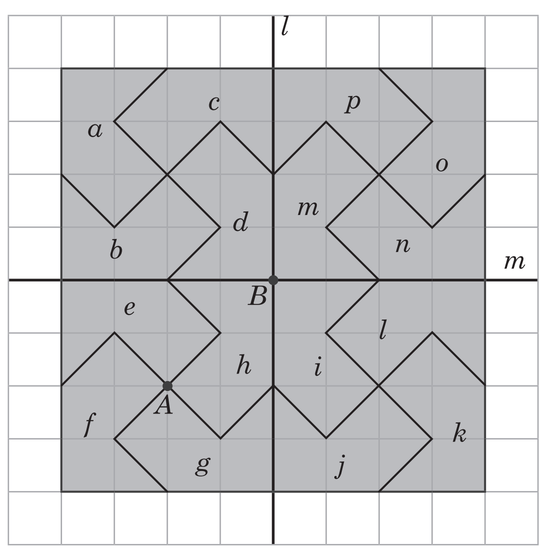
1. Según la imagen de la derecha, responde el tipo de movimiento que se debe utilizar en cada ítem para lograr que

   a) La figura a se sobreponga a la figura d.
   b) La figura a se sobreponga a la figura c.
   c) La figura a se sobreponga a la figura f.
   d) La figura e que se sobrepone a la figura f.
   e) La figura h que se sobrepone a la figura a.



2. Observando la imagen de la derecha, responde qué tipo de movimiento se debe realizar en cada caso para lograr que

   a) La figura f se sobreponga a la figura g.
   b) La figura a se sobreponga a la figura k.
   c) La figura d se sobreponga a la figura k.



3. Según la imagen del ítem 3:

   a) Si doblamos la imagen por la recta l, ¿a cuál figura se sobrepondrá la figura d?
   b) ¿Por cuál recta debe doblarse la imagen para que la figura f se sobreponga sobre la figura a?

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Unidad 8

1.3 Traslación

R En cada imagen, indica un tipo de movimiento (traslación, simetría o rotación) que esté presente.

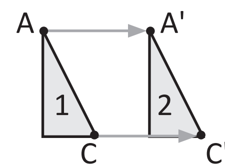
1.

2.

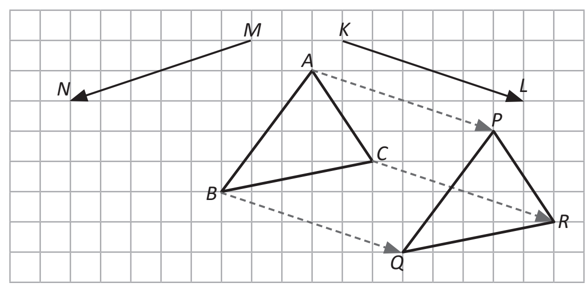
3.

C En la traslación, los segmentos que unen los puntos correspondientes son paralelos y tienen la misma longitud.

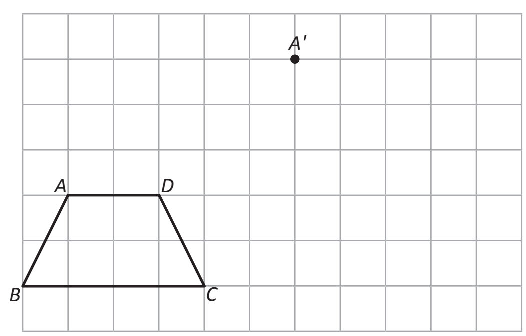
En la figura se tiene que $\overline{AA'} \parallel \overline{CC'}$ y AA'= CC'.



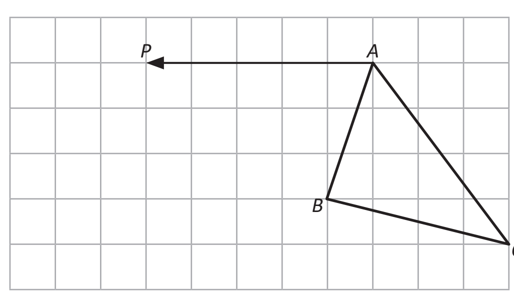
1. Observando la imagen de la derecha, el ΔABC ha sido trasladado según la distancia y dirección dada por la flecha KL, convirtiéndose en el triángulo ΔPQR. Traslada ΔABC utilizando la dirección y sentido dado por la flecha MN.



2. Dibuja el segmento $\overline{AA'}$ y elabora el cuadrilátero A'B'C'D' con base en la dirección y longitud de $\overline{AA'}$ de modo que sea el trasladado paralelamente de ABCD.



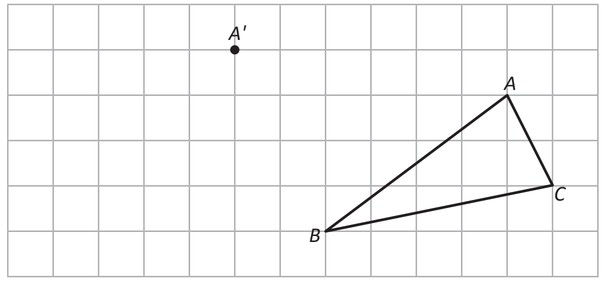
3. Traslada paralelamente el triángulo ΔABC según la dirección y sentidos de la flecha AP.



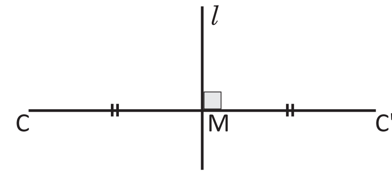
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1.4 Simetría

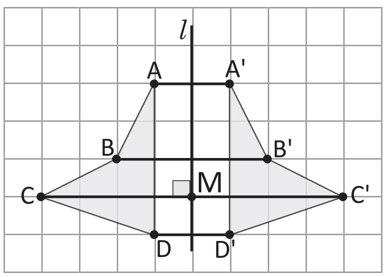
Traza $\overline{AA'}$, luego traslada el ΔABC según $\overline{AA'}$.



El movimiento que se realiza doblando el dibujo por medio de un eje se llama **simetría** y el eje se llama **eje de simetría**. En la simetría, el segmento que conecta 2 puntos correspondientes se intersecta con el eje perpendicularmente, formando dos segmentos iguales. Por ejemplo, en la ilustración de la derecha $\overline{CC'} \perp l$ y CM = C'M.



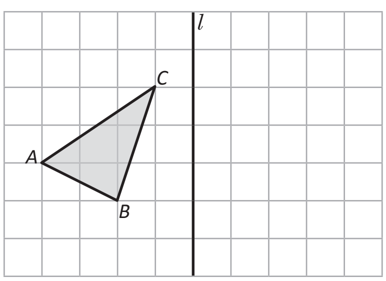
Por tanto en la siguiente figura, se tiene que

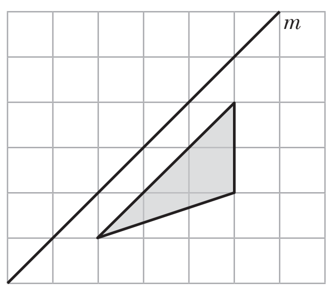


En geometría se utilizan símbolos como ıı para denotar que dos o más segmento son iguales, por ejemplo, para denotar que AB = BC se hace:

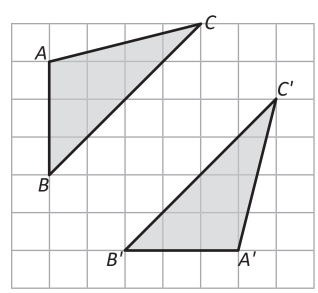
- La relación entre la recta l y cada segmento se expresa con el símbolo "⊥". Por ejemplo, $\overline{AA'} \perp l$.
- La relación entre $\overline{CM}$ y $\overline{C'M}$ se expresa como CM = C'M.
- La recta l pasa perpendicularmente por el punto medio del segmento $\overline{CC'}$. A esta recta se le llama **mediatriz** de $\overline{CC'}$.

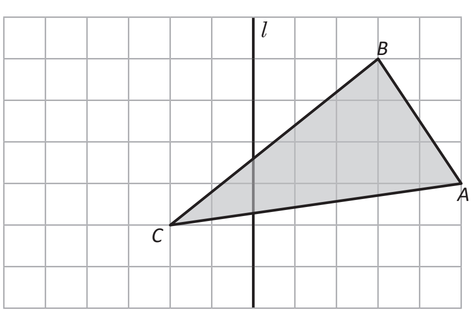
1. Dibuja la figura simétrica en cada imagen, respecto a la recta l y la recta m.

a) 

b) 

2. En la imagen de la derecha, el ΔABC se puede sobreponer perfectamente al $\Delta A'B'C'$ al doblar el dibujo por medio de un eje. Dibuja el eje de simetría.





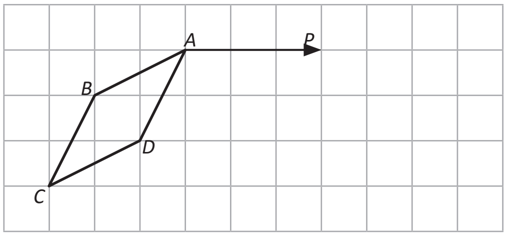
3. Dibuja la figura trasladada simétricamente respecto del eje l del ΔABC.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

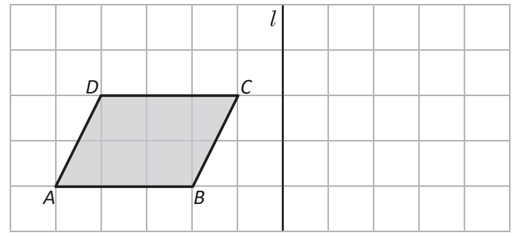
Unidad 8

1.5 Rotación

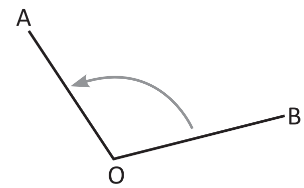
a) Traslada la figura según la flecha AP.



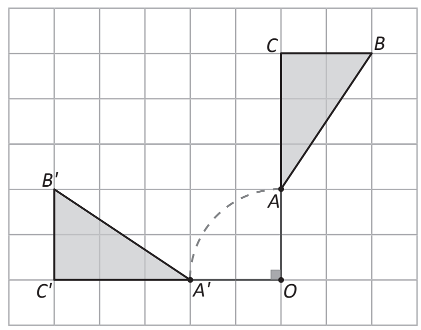
b) Dibujar la figura simétrica del cuadrilátero ABCD por la recta l.



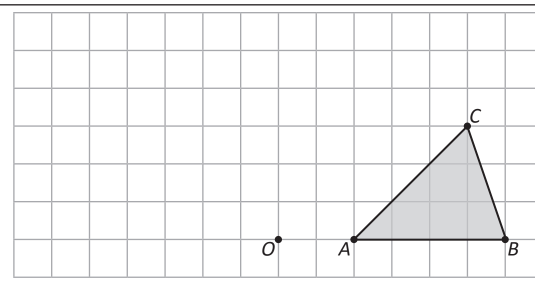
Al movimiento de una figura con un determinado ángulo respecto a un punto central se le llama **rotación**. Generalmente, el sentido del ángulo de rotación se considera en contra de las agujas del reloj. Por ejemplo, la imagen muestra la rotación de OB a OA con el ∢BOA.

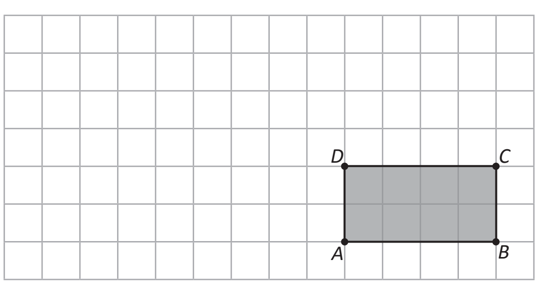


En la ilustración de la derecha, ΔA'B'C' representa una rotación de ΔABC respecto al punto O.



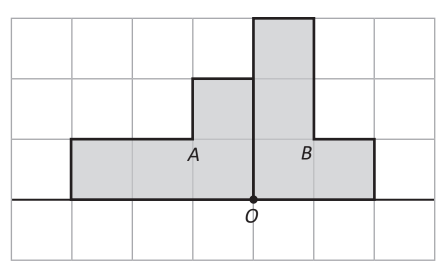
1. Dibuja el ΔA'B'C' que es el rotado del ΔABC, respecto al punto O y un ángulo de 90°.





2. Dibuja el rectángulo A'B'C'D' que es el rotado del ABCD, respecto al punto D y un ángulo de 180°.

3. En la imagen de la derecha, ¿cómo se debe hacer para lograr sobreponer la figura A a la figura B?



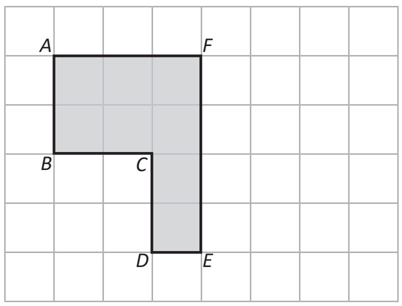
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

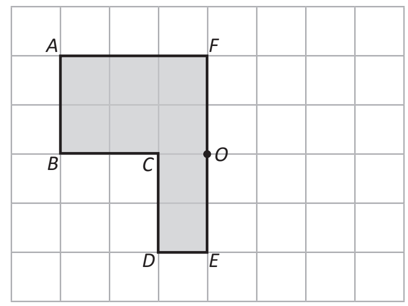
1.6 Resolución de problemas de movimiento de figuras

R En las imágenes de abajo:

a) Dibuja la figura simétrica tomando como eje el segmento $\overline{EF}$.

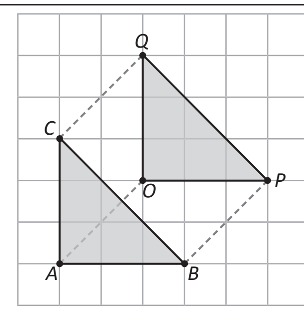
b) Rota la figura respecto del punto O con un ángulo de 180°.

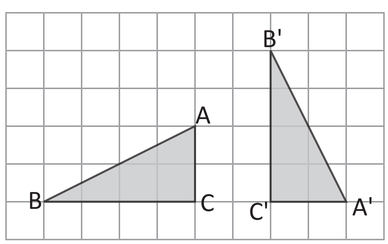
a)


b)


C Cuando se traslada una figura y se logra sobreponerla a otra perfectamente, se dice que las dos figuras son congruentes.

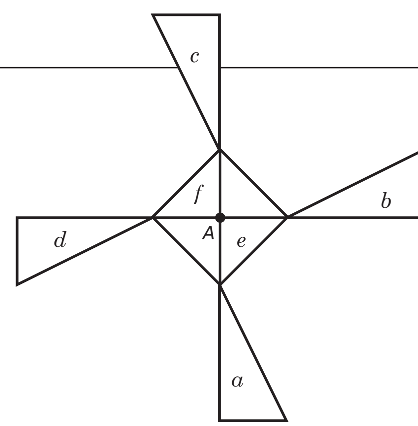
Como en la imagen de la derecha, el ΔOPQ es el trasladado del ΔABC, luego los triángulos son congruentes.



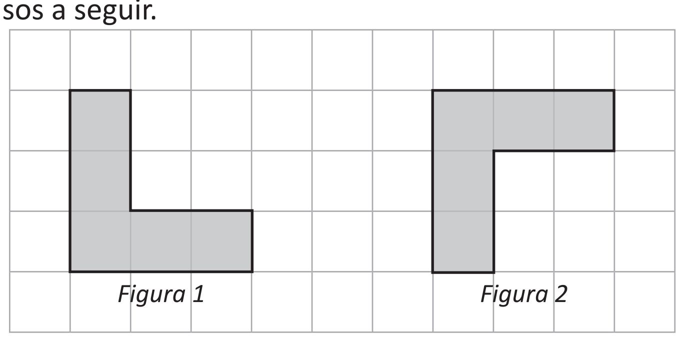


En la figura de la izquierda, para lograr sobreponerse el ΔABC al ΔA'B'C' primero se mueve el ΔABC con una rotación con respecto al punto C y con un ángulo de 90° en sentido horario, luego se traslada la figura en la dirección de C a C' de $\overline{CC'}$.

1. Responde las preguntas referidas a la imagen de la derecha.
   a) ¿Cómo debe moverse la figura a, para lograr sobreponerse al triángulo b?
   b) ¿Cómo debe moverse la figura e para lograr sobreponerse a la figura f?
   c) ¿Qué figuras son congruentes con la figura a?



2. ¿Cómo se debe trasladar la figura 1 para sobreponerse perfectamente a la figura 2? Menciona los pasos a seguir.

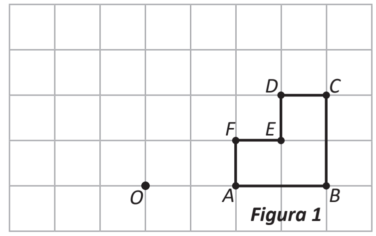


Debe realizarse más de un movimiento.

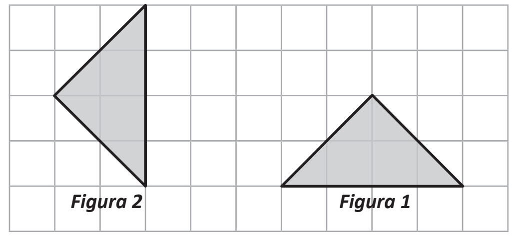
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.1 Características y elementos del círculo

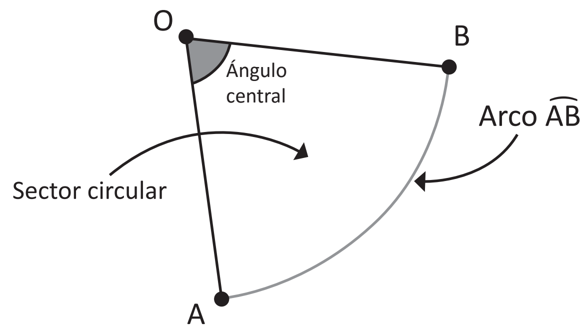
1. Rota la **figura 1**, tomando como centro de rotación el punto O mediante un ángulo de 90°.

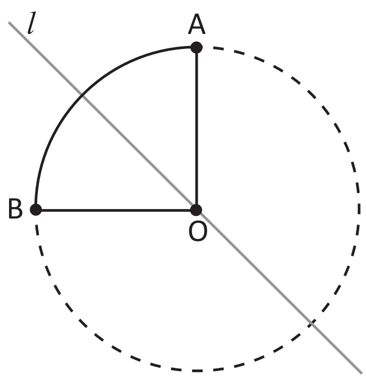


2. ¿Cómo se debe mover la figura 1 para sobreponerse perfectamente a la figura 2? Menciona los pasos a seguir.



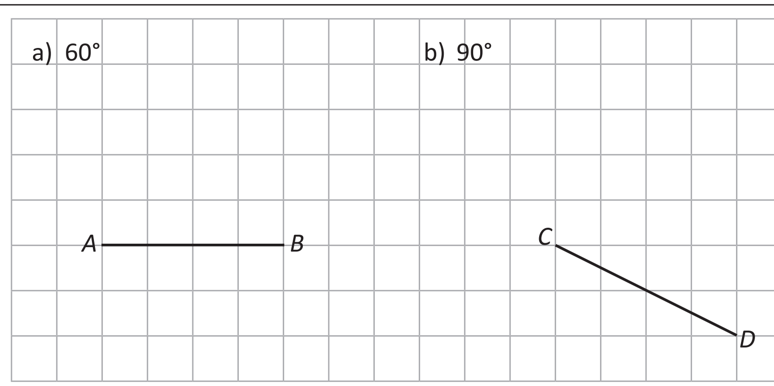
Cuando se tienen dos puntos A y B sobre la circunferencia, a la línea limitada por estos puntos se le llama **arco AB** y se expresa como $\widehat{AB}$.
La figura limitada por los radios que pasan por los extremo del arco se llama **sector circular.**
El ángulo formado por los radios es llamado **ángulo central.**





Todo sector circular es una figura simétrica respecto a un eje.
Por ejemplo en la imagen el sector circular OAB es simétrico respecto al eje l que pasa por el punto O y por el punto medio del arco $\widehat{AB}$.
En un círculo su diámetro es el eje de simetría.

1. Tomando como radio los segmentos AB y CD mostrados en las imágenes, construye sectores circulares según el ángulo solicitado.



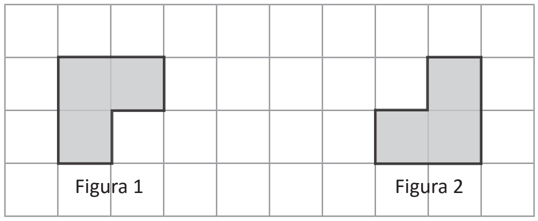
2. Dada la medida de un radio de 4 cm, dibuja sectores circulares cuyos ángulos sean de:
   a) 30° b) 60°

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

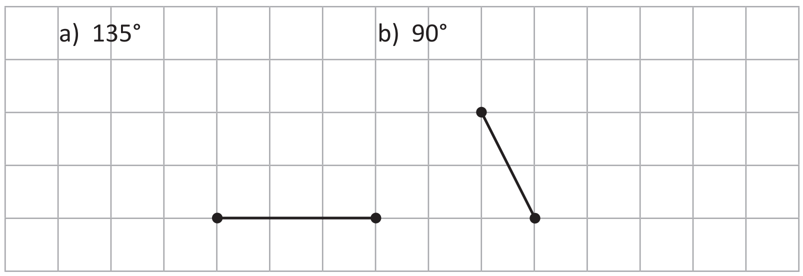
2.2 Características de círculos que se intersectan

R

1. ¿Cómo se puede sobreponer la figura 1 a la figura 2?

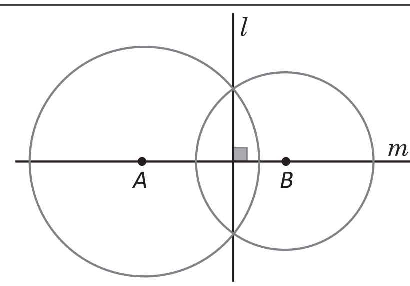


2. Tomando como radio los segmentos mostrados en los literales a) y b), construye sectores circulares según el ángulo solicitado.

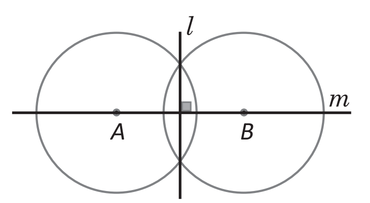


C

Dos círculos que se intersectan son simétricos respecto a la recta o eje que pasa por los centros de ambos círculos. Por ejemplo, en la imagen de la derecha, la recta m es eje de simetría de los círculos intersectados.

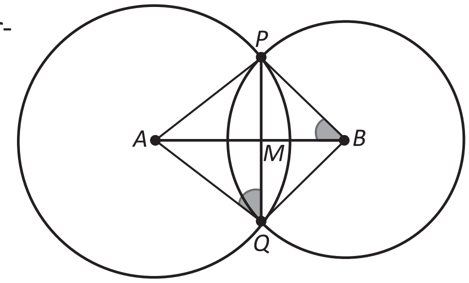


Además, la recta que pasa por la intersección de dos circunferencias, es perpendicular a la recta que une sus centros. Como puede observarse en la imagen, $l \perp m$.



En caso de que los círculos sean de igual radio, entonces también la recta que une las intersecciones de las circunferencias es un eje de simetría.

1. En la gráfica se observan dos círculos (de distintos radios) intersectados con centros A y B.
   a) ¿Qué segmentos son iguales a $\overline{AP}$?
   b) ¿Qué relación hay entre $\overline{AB}$ y $\overline{PQ}$?
   c) ¿Qué ángulos son iguales a $\measuredangle$ AQP?
   d) ¿Qué ángulos son iguales a $\measuredangle$ ABP?



2. En la imagen de abajo, traza una recta perpendicular a la recta l. ¡Utiliza lo aprendido en la conclusión!

Utiliza regla y compás.

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.3 Dibujo de figuras planas utilizando regla y compás

R 1. Dada la medida de un radio de 5 cm, dibuja los sectores circulares cuyos ángulos sean de

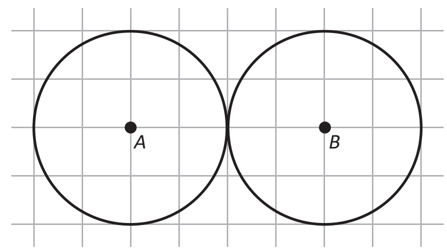
a) 45°

5 cm

b) 120°

5 cm

2. Dibuja por lo menos dos ejes de simetría de la siguiente gráfica:



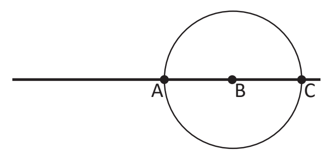
C Se utilizó compás para dibujar círculos y arcos de circunferencias, así también, se pueden copiar las longitudes de segmentos.

En la clase se dibujó un hexágono utilizando regla y compás siguiendo estos pasos:

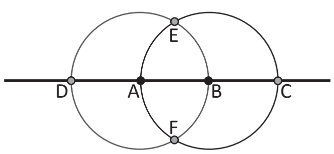
a)

b)

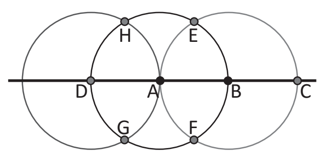
c)



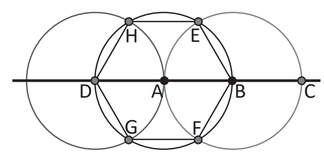
d)



e)



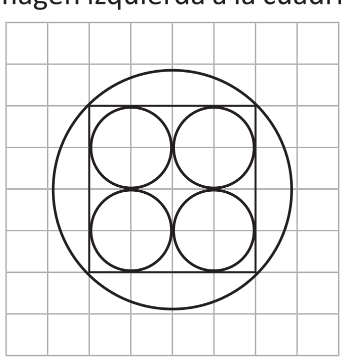
f)

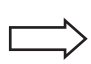


1. Dibuja un triángulo isósceles (dos lados iguales) utilizando regla y compás, y tomando $\overline{AB}$ como base.

A ——————————— B

2. Copia la imagen izquierda a la cuadrícula de la derecha. Utiliza regla y compás para realizar los trazos.



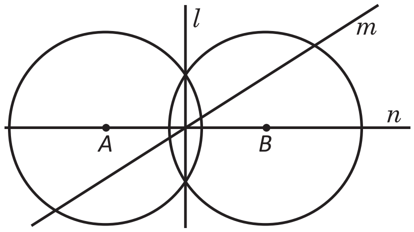


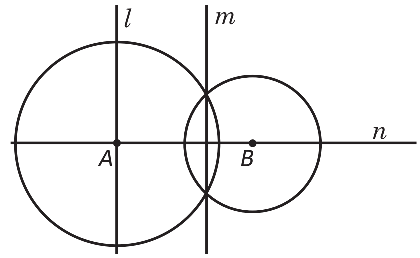
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.4 Rectas perpendiculares

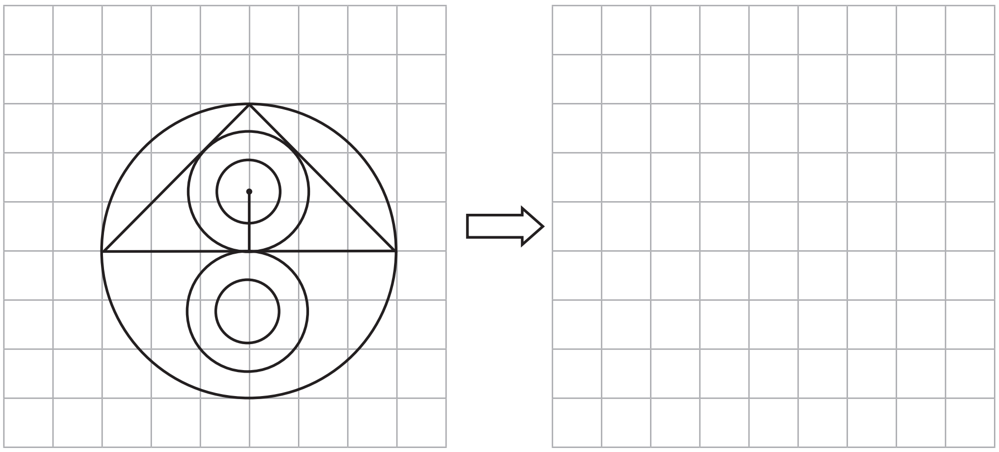
R

1. En las imágenes a) y b) de abajo, marca con una "x" las rectas que no son un eje de simetría para las circunferencias intersectadas.
   a) Circunferencias con radios iguales.
   b) Circunferencias con radios distintos.



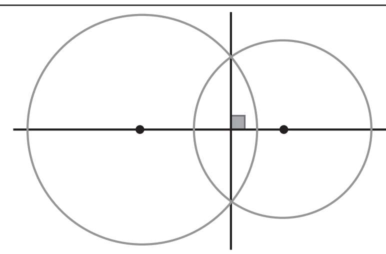


2. Copia la imagen izquierda a la cuadrícula de la derecha. Utiliza regla y compás para realizar los trazos.



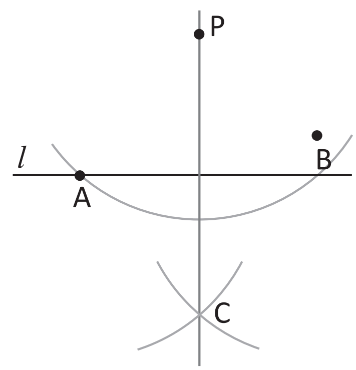
C

Para trazar una línea perpendicular desde un punto a una recta se utilizan características de círculos que se intersectan. Recuerda que, la recta que pasa por la intersección de dos circunferencias es perpendicular a la recta que une sus centros, así como se muestra en la imagen de la derecha.

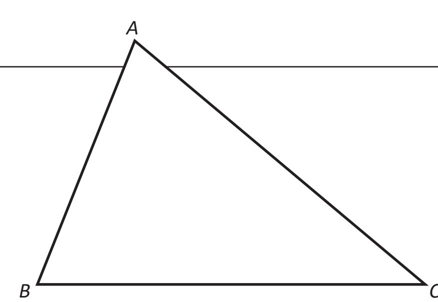


Otra forma de trazar rectas perpendiculares es:

1. Dibujar un punto P y una recta l como las del Problema inicial de la clase.
2. Dibujar una parte del círculo con centro en P y que cruce a la recta l. Se coloca A,B a los puntos donde se intersectan.
3. Dibujar dos círculos del mismo radio que tengan como centro A y B, respectivamente. Se coloca C en el punto donde se intersectan los dos círculos.
4. Trazar la recta PC.



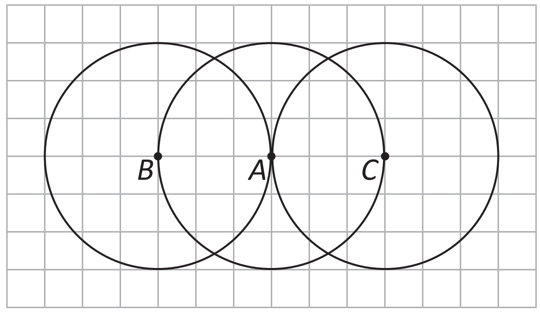
Utilizando regla y compás, en el ΔABC traza una recta perpendicular.
a) Desde el punto A hacia $\overline{BC}$.
b) Desde el punto C hacia $\overline{BA}$.



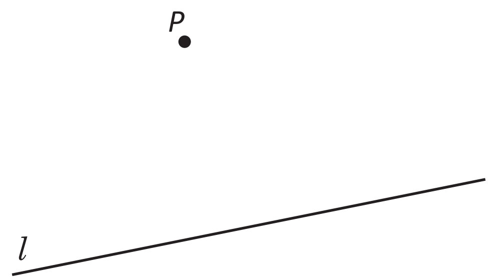
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.5 Distancia entre un punto y una línea recta

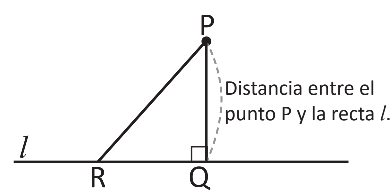
1. Dibuja un triángulo equilátero, tal y como se hizo en la clase 2.3, utilizando las circunferencias intersectadas abajo.



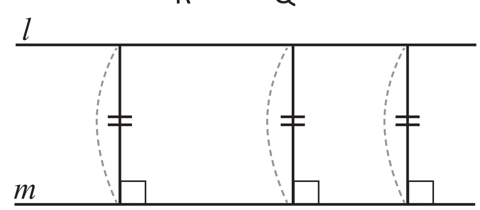
2. Traza la recta perpendicular desde el punto *P* hacia la recta l.



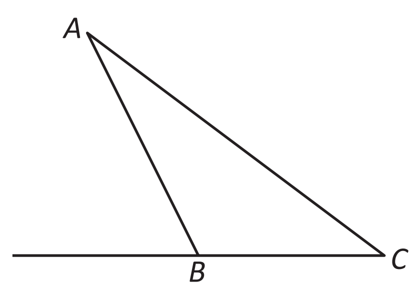
Si desde el punto P, que se ubica fuera de la recta l, se traza una perpendicular a la recta l y se establece como Q el punto de corte, a la longitud del segmento $\overline{PQ}$ se le llama: **distancia entre el punto P y la línea recta *l***. La distancia es la menor de las longitudes del segmento que une el punto P y la recta l. Por ejemplo, en la ilustración PQ < PR.



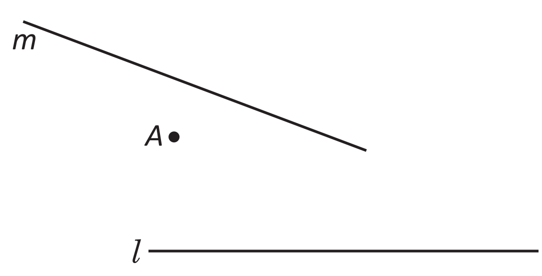
Si hay dos rectas paralelas l y m, para cualquier punto que se tome de la recta l la distancia con la recta m es constante.



1. Utilizando regla y compás, en el triángulo ΔABC encuentra la distancia que hay:
   a) Entre A y la prolongación de $\overline{BC}$.
   b) Entre B y $\overline{AC}$.



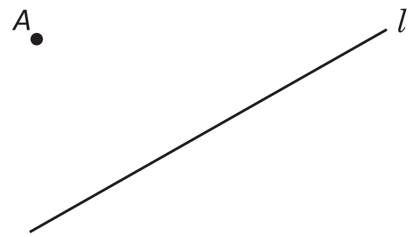
2. Utilizando regla y compás, en el dibujo de la derecha:
   a) Encuentra la distancia que hay entre el punto A y las rectas l y *m*.
   b) ¿Cuál recta está más cercana al punto A?



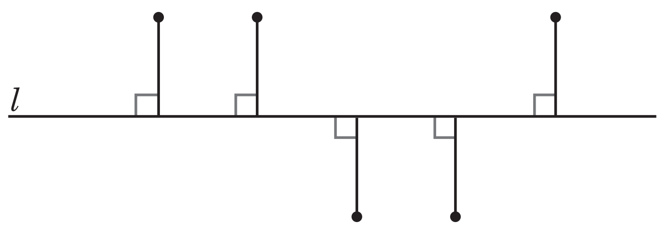
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.6 Mediatriz de un segmento

1. En la imagen de abajo, traza una recta perpendicular a la recta l que pase por el punto A.



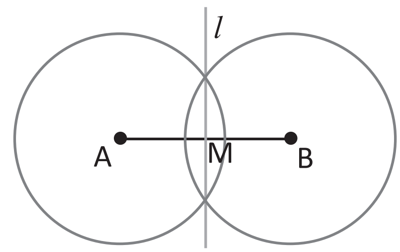
2. En la imagen de abajo se trazan segmentos perpendiculares a la recta l, todos de igual medida.
   a) Traza la recta m que pase por los puntos de arriba de l y traza una recta n que pase por los puntos abajo de l.
   b) ¿Qué relación hay entre las rectas m y n?

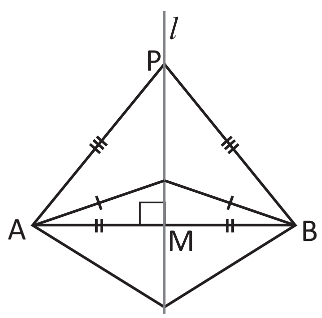


Considerando el procedimiento para trazar la mediatriz de un segmento, se pueden hacer las siguientes conclusiones:

a) Dado que los círculos poseen el mismo radio, la recta l es un eje de simetría. Además, $l \perp \overline{AB}$.

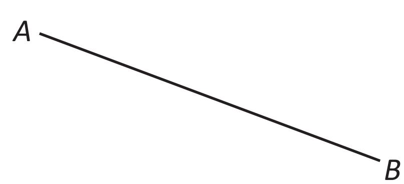
b) El punto B puede sobreponerse perfectamente sobre el punto A, luego AM = BM.





Si se establece un punto P sobre la mediatriz de $\overline{AB}$ y se dobla el dibujo por la recta l, entonces $\overline{PA}$ se sobrepone en $\overline{PB}$.
Por tanto, PA = PB.
Además, todo punto ubicado en la mediatriz de un segmento equidista de los puntos A y B.

1. Encuentra la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ utilizando regla y compás.



2. A partir del segmento $\overline{AB}$ y tomándolo como base, construye un triángulo isósceles. Utiliza la mediatriz del segmento y la conclusión escrita anteriormente.

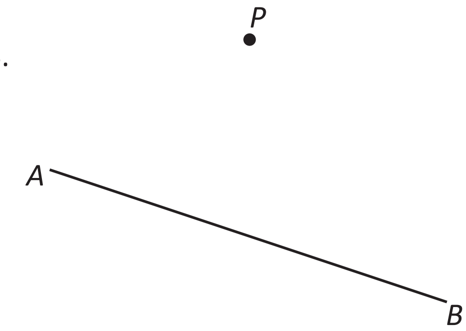
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.7 Bisectriz de un ángulo

R En la imagen:

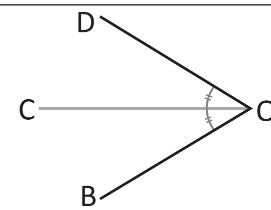
a) Encuentra la distancia que hay desde el punto *P* al segmento AB.

b) Encuentra la mediatriz del segmento AB.



C La semirecta que divide un ángulo en dos partes iguales se llama **bisectriz**. También se puede decir que la bisectriz es el eje de simetría de ese ángulo.

Por tanto: $\sphericalangle DOC = \sphericalangle COB = \frac{1}{2} \sphericalangle DOB$.

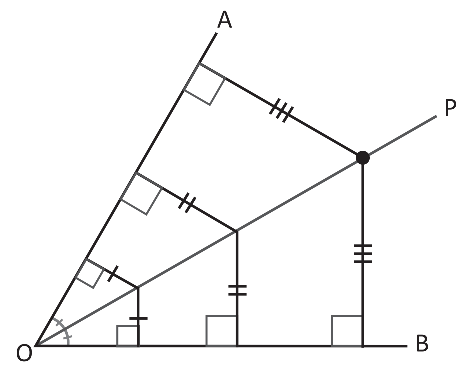


Los pasos para construir la bisectriz de un ángulo son:

1. Dibujar un círculo que tenga como centro el punto O. Establecer como A y B las intersecciones con los lados del ángulo y la circunferencia.
2. Dibujar dos arcos del mismo radio, tomando como sus centros A y B. Y a la intersección de las dos circunferencias nombrarlas con P.
3. Trazar la semirrecta OP.

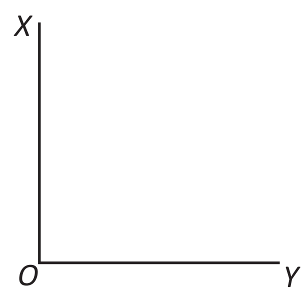
Dado que la bisectriz de $\sphericalangle AOB$ es su eje de simetría, las distancias trazadas desde el punto P sobre la bisectriz a los lados del ángulo son iguales.

En general, todo punto ubicado sobre la bisectriz de un ángulo tiene igual distancia hacia los lados del ángulo. Así como se muestra en la imagen:

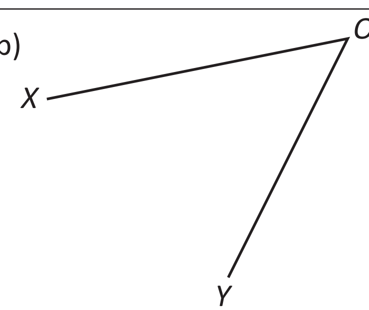


1. En cada literal encuentra la bisectriz de $\sphericalangle XOY$ utilizando regla y compás.

a)



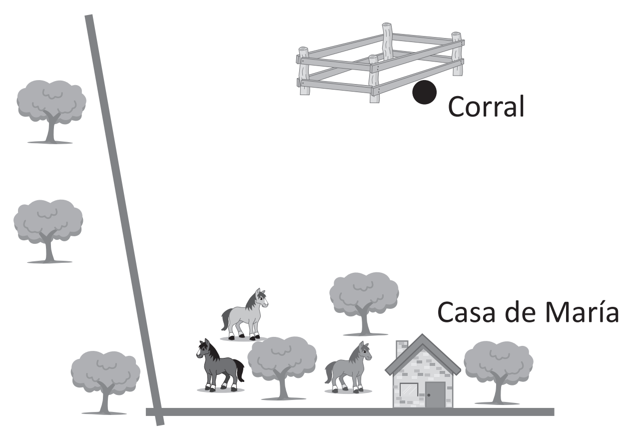
b)



2. En la imagen de la derecha realiza lo siguiente:

   a) Traza la bisectriz del ángulo que forman los caminos.

   b) María construyó un corral para sus caballos como se muestra en la figura. Sin trazar las distancias, ¿se puede decir que el corral está a igual distancia de ambas calles? Explica.



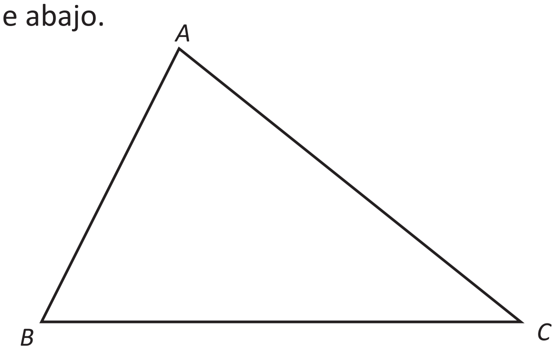
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.8 Tangente a una circunferencia

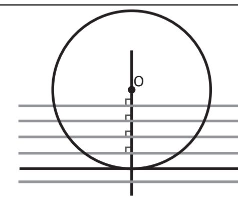
Utilizando regla y compás, realiza lo siguiente en el triángulo de abajo.

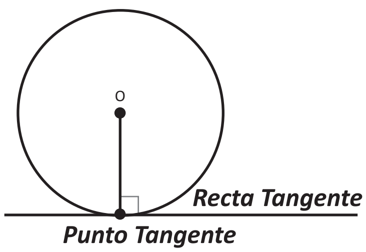
a) Traza la mediatriz del segmento $\overline{AC}$.

b) Traza la bisectriz del ángulo ∢ BAC.



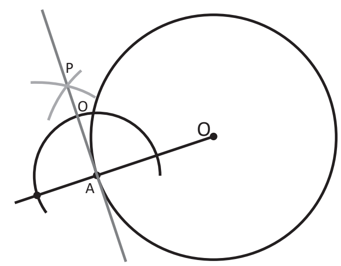
Al mover la línea perpendicular a la recta, que pasa por el centro del círculo O, hay un momento en el que la recta tiene solo un punto común con la circunferencia.





En ese momento, se dice que esa recta es tangencial al círculo, y a esta línea se le llama **recta tangente** al círculo y el único punto que la recta tiene en común con la circunferencia se le llama **punto de tangencia** y es perpendicular al radio.

Por ejemplo, en la imagen se ha trazado la recta tangente a la circunferencia cuyo punto de tangencia es A.
Para trazarla se ha hecho el siguiente procedimiento:



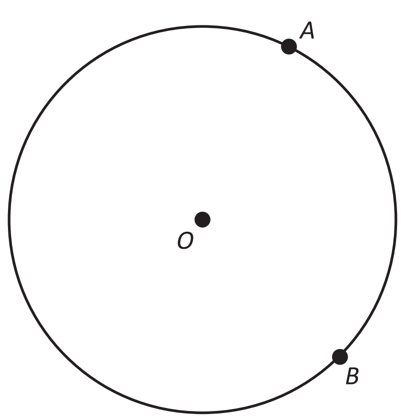
Se traza una circunferencia tomando como centro el punto A. Se dibujan dos arcos del mismo radio con sus centros en las intersecciones de la circunferencia, con la recta que pasa por OA. Se marca como P el punto de intersección entre los dos arcos. Se traza la recta AP, esta es la tangente al punto A.

En la imagen de abajo realiza lo siguiente:

a) Traza las rectas tangentes que pasan por los puntos A y B.

b) Nombra como P la intersección de las dos rectas elaboradas en el literal a).

c) Completa las afirmaciones siguientes: $\overline{PA}$ = _______ , $\overline{OA}$ = _______ .



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

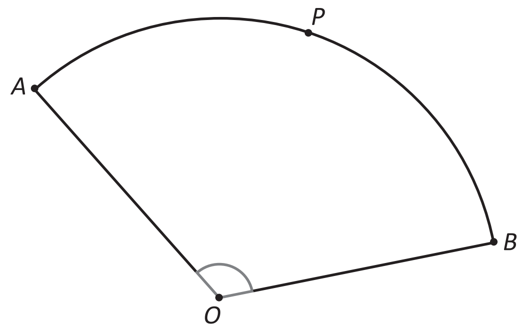
2.9 Longitud de arco de un sector circular

R En el siguiente sector circular:

a) Traza la bisectriz del ángulo que sostiene el arco $\widehat{AB}$.

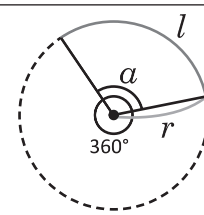
b) Traza la recta tangente al sector circular en el punto P.

c) ¿Qué ángulo forman al intersectarse la bisectriz y la tangente elaboradas en los literales anteriores?



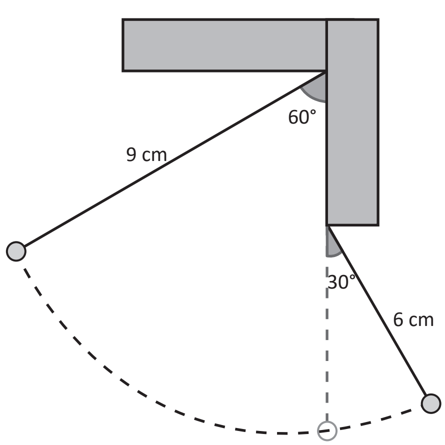
C Para encontrar la longitud de arco sostenido por un ángulo a, se debe multiplicar la razón entre los ángulos por la longitud de la circunferencia.

Longitud de arco de una circunferencia: $l = 2\pi r \times \frac{a}{360}$.



1. Calcula la longitud del arco correspondiente a un ángulo central de 120° y un radio de 3 cm. Deja constancia de tus procesos.

2. La imagen muestra el movimiento oscilatorio de un péndulo doble. Si el péndulo se mueve como se indica en la figura y con las medidas respectivas, calcula la longitud recorrida por el péndulo.



El **péndulo** es un sistema físico que oscila y se mantiene en movimiento constante bajo acción de la gravedad u otra característica física.

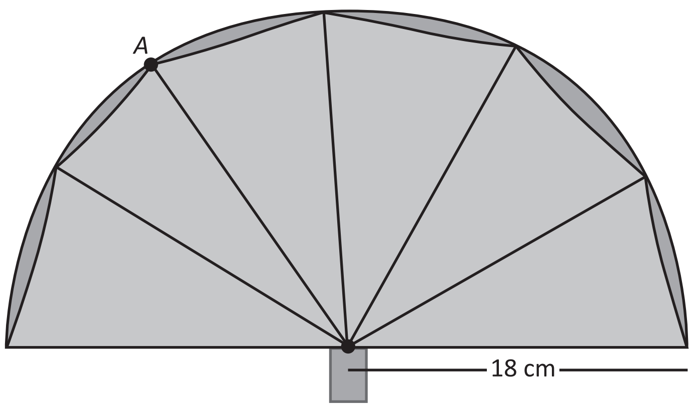
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.10 Área de un sector circular

R La imagen muestra un abanico extendido (considera que todos los sectores circulares que se forman son iguales).

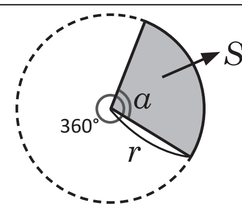
a) Calcula la longitud del arco que describe el abanico extendido.

b) Traza la recta tangente al sector circular en el punto A.

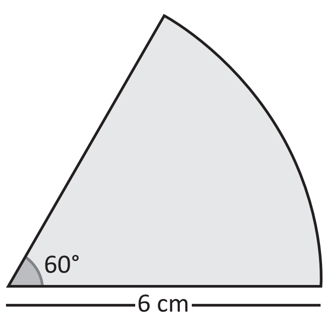


C Para encontrar el área de un sector circular, se debe multiplicar la razón entre los ángulos por el área del círculo.

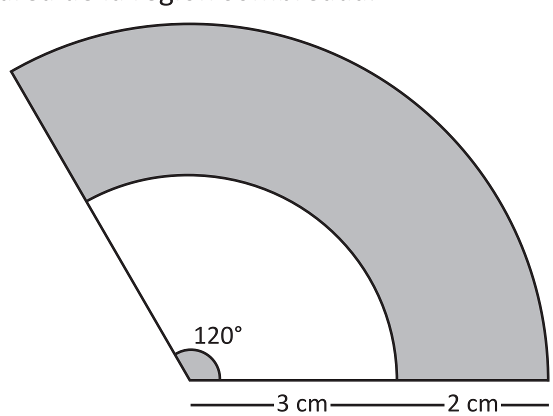
Área del sector circular: $S = \pi r^2 \times \frac{a}{360}$



1. Calcula el área del sector circular mostrado en la imagen, completando los datos que hacen falta.



2. En la figura, encuentra el área de la región sombreada.

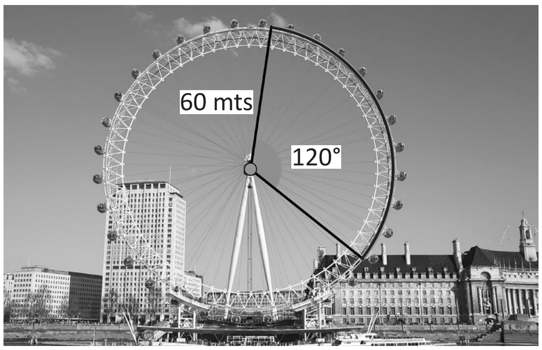


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

2.11 Incentro de un triángulo

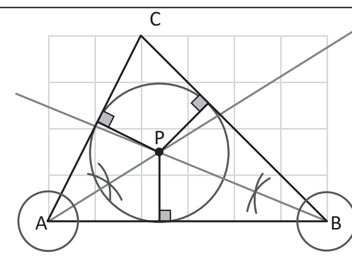
El London Eye es una de las ruedas de la fortuna o norias más grandes del mundo, ubicada en Londres, Inglaterra.

a) Encuentra la longitud del arco señalado en la imagen.
b) Encuentra el área del sector circular señalado en la imagen.

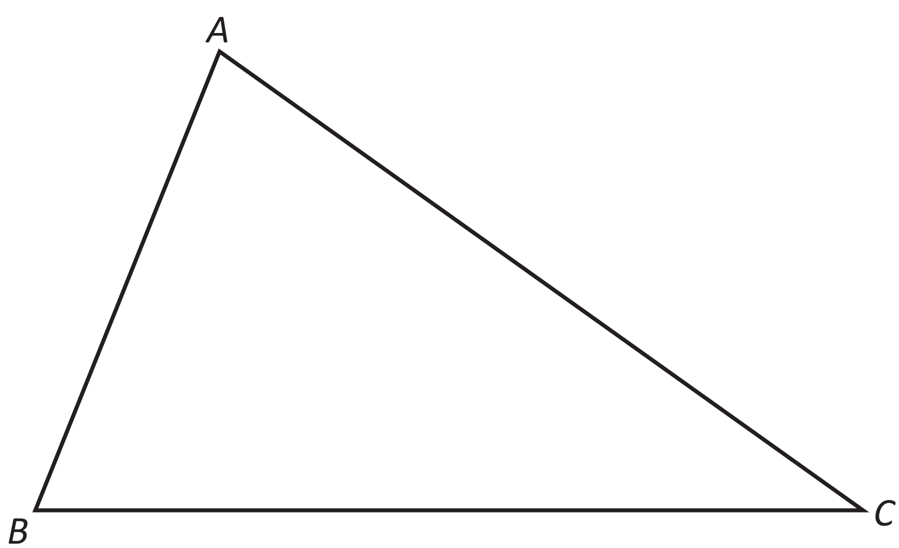


Longitud del arco del sector	Área del sector

En la figura, el punto P se llama **incentro del triángulo**, cumple con ser la intersección de las tres bisectrices de un triángulo y es el centro de una circunferencia que está al interior del triángulo y es tangente a sus tres lados.



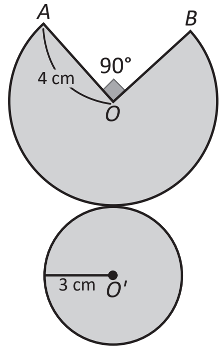
Encuentra el incentro del ΔABC y nombra el punto como P. ¡Utiliza regla y compás!



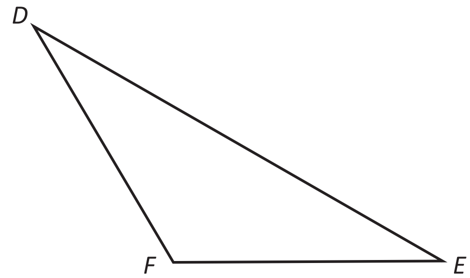
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.1 Clasificación de cuerpos geométricos

R 1. En la siguiente imagen, encuentra el área de la figura sombreada.



2. Encuentra el incentro del ΔDEF y nombra el punto como P. ¡Utiliza regla y compás!



C

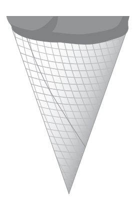
Los cuerpos geométricos cuyas caras laterales y sus bases son figuras planas son llamados **poliedros**.

- Si las caras laterales son rectángulos, son llamados **prismas rectos**.
- Si las caras laterales son triángulos, reciben el nombre de **pirámides**.

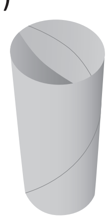
Los cuerpos geométricos cuyas caras laterales son curvas, se llaman **cuerpos redondos**. Son ejemplos de ellos los cilindros, conos y esferas.

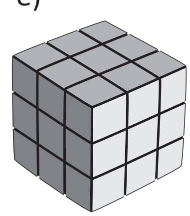
1. Observa las siguientes imágenes. Traslada el numeral de cada imagen en el grupo que le corresponda y al lado escribe el nombre del cuerpo geométrico que representan.

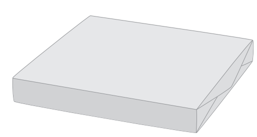
a)


b)


c)


d)


e)


f)


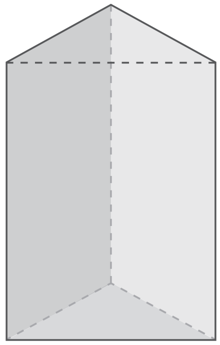
Poliedros	Cuerpos redondos

Unidad 8

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

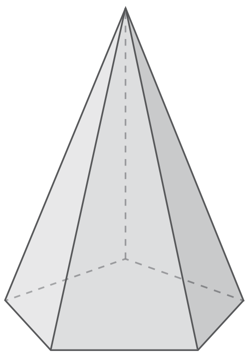
2. Dibuja en el lugar correspondiente las figuras planas que conforman la base y las caras laterales de cada cuerpo geométrico.

a)



Base	Cara lateral

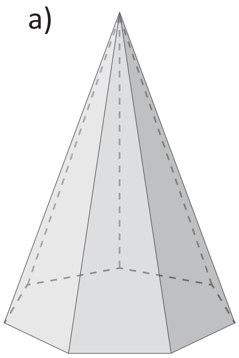
b)



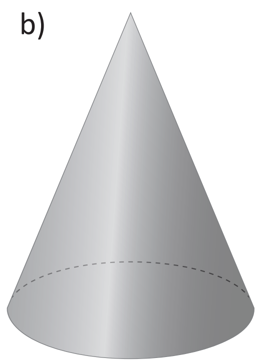
Base	Cara lateral

3. Escribe las diferencias y similitudes de los siguientes cuerpos geométricos, entre a) y b); c) y d).

a)

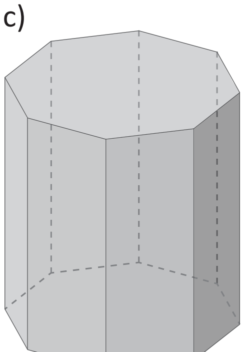


b)



Similitudes	Diferencias

c)



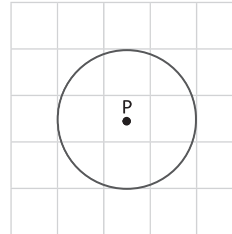
d)

Similitudes	Diferencias

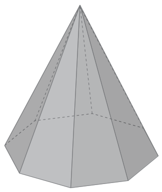
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.2 Características de poliedros regulares

R 1. Si el punto P se considera como incentro de algún triángulo. Dibuja un triángulo para el que se cumpla que P es su incentro.



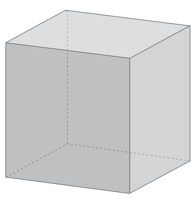
2. Dibuja en el lugar correspondiente las figuras planas que conforman la base y las caras laterales del siguiente cuerpo geométrico.

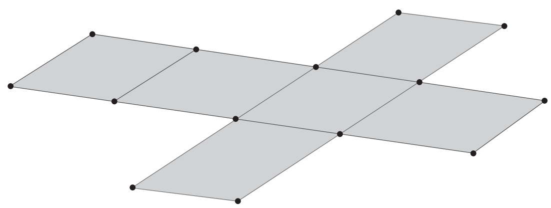


Base	Cara lateral

C

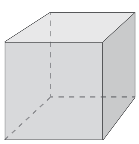
Se llaman **poliedros regulares** los cuerpos geométricos en los que se cumple que todas sus caras son congruentes y son polígonos regulares. Se le llama **plano desarrollado de un cuerpo geométrico**, a la figura plana con la que se construyó el cuerpo geométrico.
Por ejemplo: El cubo es un poliedro regular, porque todas sus caras son cuadrados congruentes.

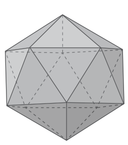


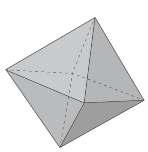


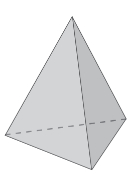
Desarrollo del cubo

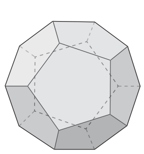
Traslada el literal del poliedro regular de la izquierda a la tabla de la derecha según la descripción que se presenta y luego completa la columna 3 con el nombre del poliedro regular.

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Literal	1 Número de caras	2 Forma de las caras	3 Nombre del poliedro regular
	12	Pentagono regular	
	4	Triángulo equilátero	
	20	Triángulo equilátero	
	6	Cuadrado	
	8	Triángulo equilátero	

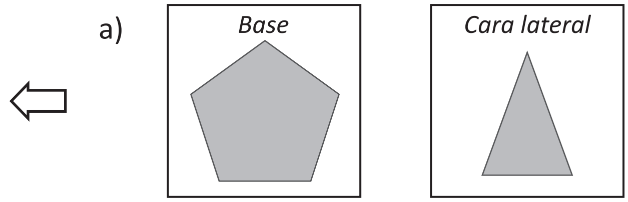
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.3 Relación de posición entre rectas y planos

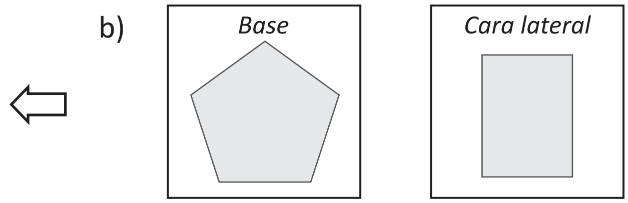
R

1. La imagen representa el polígono que forma la base y la cara lateral de un cuerpo geométrico. Dibuja el cuerpo correspondiente a esta descripción.

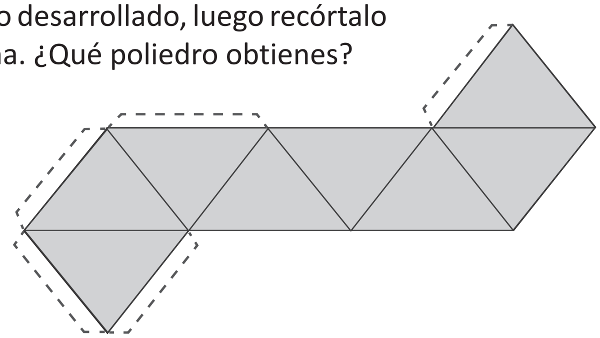
a)



b)



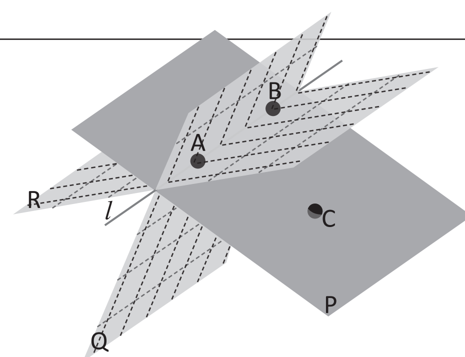
2. Copia en una página de papel bond el siguiente plano desarrollado, luego recórtalo y pega las pestañas y observa cuál poliedro se forma. ¿Qué poliedro obtienes?



C

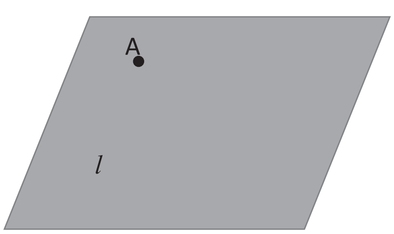
En geometría, un plano es un elemento de dos dimensiones (largo y ancho), pero carece de espesor o altura y se simbolizan con letras mayúsculas como: **P**, **Q**, **R**.

- Por dos puntos pasan muchos planos.
- Por tres puntos que no están en una línea pasa un único plano.

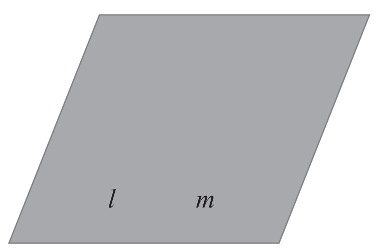


También, un plano queda determinado por

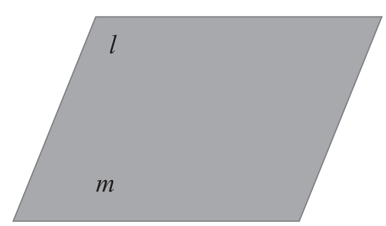
a) Una recta y un punto exterior a la recta.



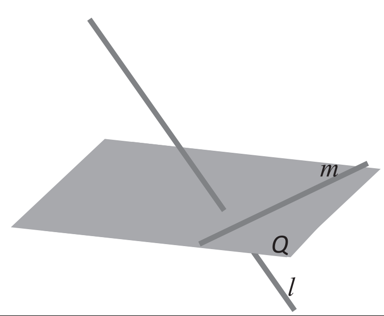
b) Dos rectas paralelas.



c) Dos rectas secantes que se cortan.



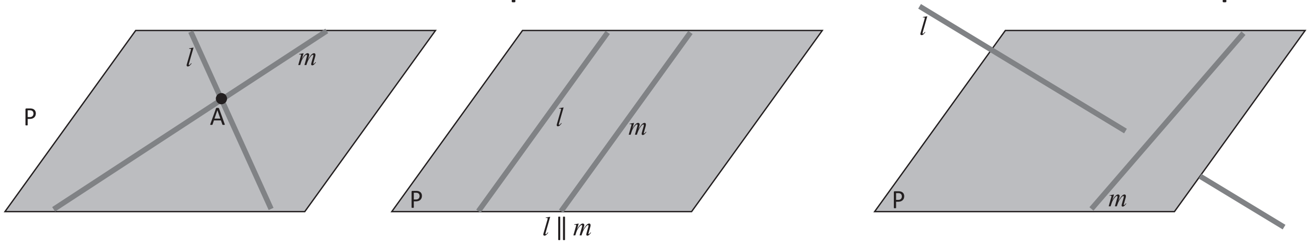
En geometría del espacio, dos rectas que no son paralelas y no se cortan, se dice que están en **posición cruzada** y se llaman **rectas cruzadas**. Así como *l* y *m* en la imagen.



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Es decir, la relación de posición de dos líneas rectas en el espacio se puede clasificar como el siguiente:

Sobre un mismo plano | **No están en el mismo plano**



Rectas secantes | **Rectas paralelas** | **Rectas cruzadas**

La relación entre rectas se mantiene para los segmentos.

1. En la siguiente imagen, asumiendo que las carreteras son líneas rectas, identifica las rectas que están en posición cruzada.

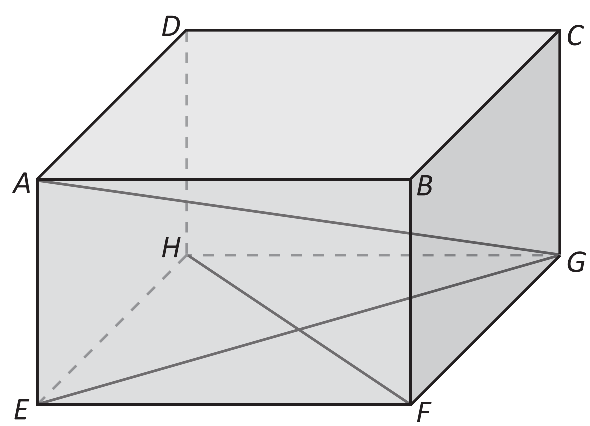
En la imagen se muestra el Monumento Bienvenido a casa. Este monumento fue construido en 1994 durante la administración del alcalde Armando Calderón Sol. El monumento conmemora a todos los salvadoreños que viven fuera del país y que son ahora un gran pilar para la economía salvadoreña. El monumento fue remodelado en el año ______ .

2. Observa el prisma rectangular de la imagen y responde:
   a) ¿Qué segmentos son secantes a $\overline{EG}$?

   b) ¿Qué lados son paralelos a $\overline{AB}$?

   c) ¿Qué segmentos del prisma rectangular están en posición cruzada con la recta $\overline{AG}$?

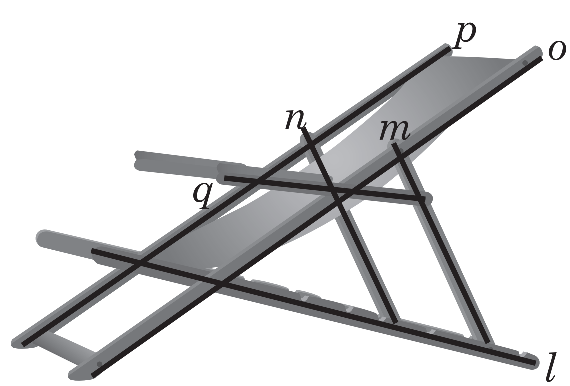
   d) ¿Qué segmentos del prisma rectangular están en posición cruzada con la recta $\overline{BC}$?



3. Observa la siguente silla.

   a) Identifica los pares de rectas que son paralelas.

   b) Identifica los pares de rectas que son secantes.

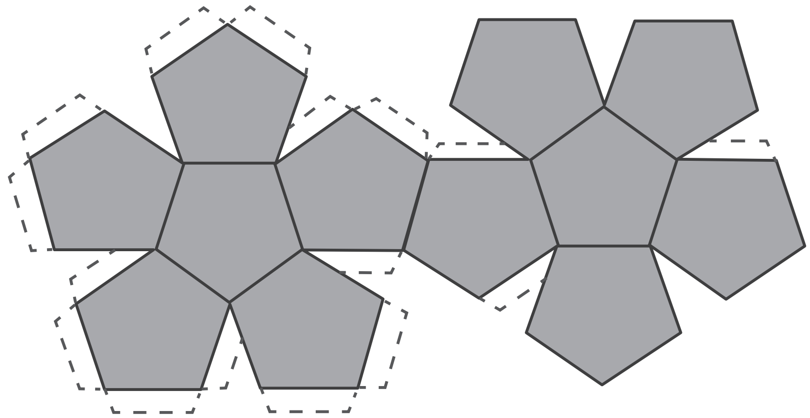


Unidad 8

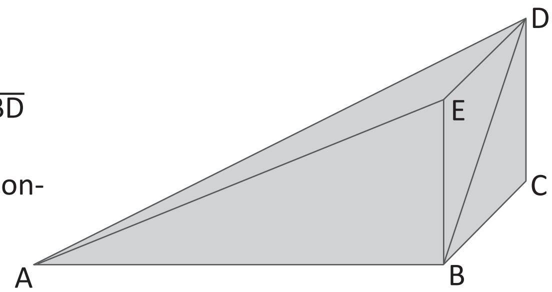
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.4 Perpendicularidad entre un plano y una recta

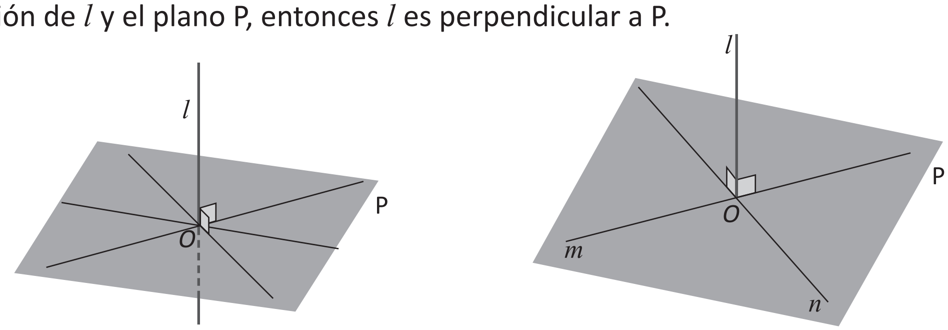
1. Copia en una página de papel bond el plano desarrollado de la derecha, luego recórtalo y pega las pestañas y observa cuál poliedro se forma. ¿Qué poliedro obtienes?



2. En el cuerpo geométrico, qué segmentos:
   a) están sobre rectas secantes a la recta sobre la cual está $\overline{BD}$
   b) son paralelos a $\overline{BC}$
   c) están sobre rectas en posición cruzada con la recta que contiene a $\overline{BC}$



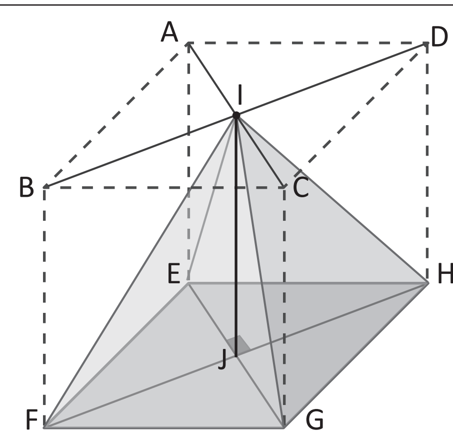
Como lo muestra la imagen, la recta l es perpendicular a cualquier línea que está sobre el plano P y que pasa por la intersección de l y el plano P, en la imagen el punto O. En este caso, se dice que la recta l es perpendicular al plano P. Si una recta es perpendicular a dos rectas en el plano P que pasan por el punto de intersección de l y el plano P, entonces l es perpendicular a P.



En prismas y cilindros las dos bases son paralelas y se llama altura al segmento que une las dos bases y es perpendicular a ellas. En pirámides y conos, la altura es el segmento que une el vértice y la base y es perpendicular a la base.

En la imagen hay una pirámide rectangular dentro de un prisma rectangular, las bases y alturas de ambos poliedros coinciden.

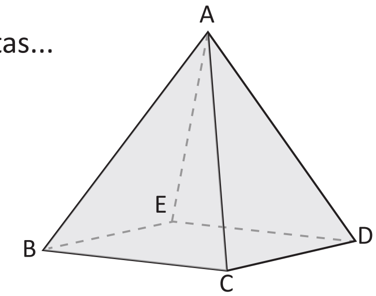
a) ¿Qué segmentos de la pirámide son paralelos a $\overline{BF}$?
b) ¿Qué segmentos de la pirámide son perpendiculares a $\overline{EG}$?
c) ¿Qué segmentos están en posición cruzada con $\overline{IH}$?
d) ¿Qué segmento representa la altura de los dos cuerpos geométricos?
e) Si el lado $\overline{BF}$ mide 5 cm, ¿cuánto mide la altura de la pirámide?

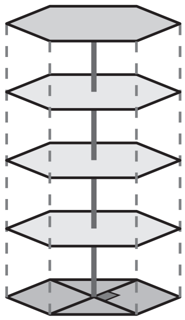


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

3.5 Cuerpos geométricos formados por el movimiento de figuras planas

1. Observa la pirámide rectangular y responde, ¿qué lados están sobre rectas...
   a) secantes a la recta que pasa por $\overline{AB}$.
   b) paralelas a la recta que pasa por $\overline{BC}$.
   c) que se encuentran en posición cruzada con la recta que pasa por $\overline{BC}$.



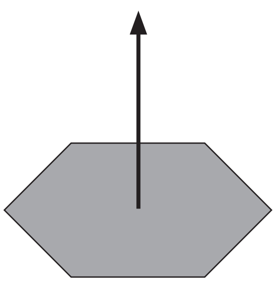


2. En la imagen se observa un estante formado por tablas dispuestas verticalmente, así como se muestra. ¿Qué representa el eje que atraviesa las tablas que forman el estante?

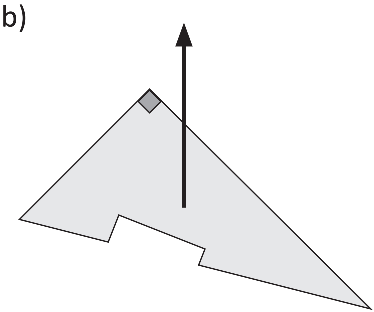
- La unión de infinitos puntos alineados forman una línea recta.
- La unión de infinitas rectas alineadas forman un plano.
- La unión de infinitos planos forman un cuerpo geométrico.

1. Si se toma como base las siguientes figuras, dibuja el cuerpo geométrico que se forma al desplazar verticalmente cada figura.

a)

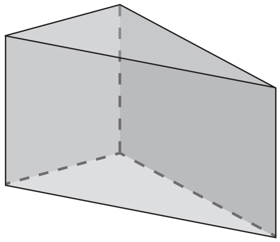


b)

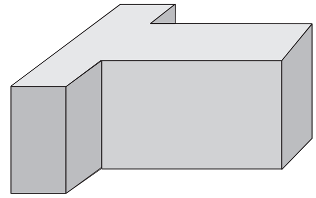


2. En la imagen se observan dos cuerpos geométricos. Dibuja la figura que se debe desplazar verticalmente para lograr obtener el cuerpo geométrico.

a)



b)

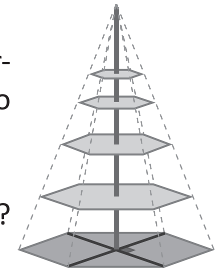


Unidad 8

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

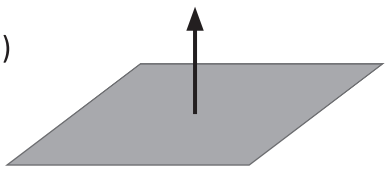
3.6 Proyección ortogonal

1. En la imagen de la derecha se observa un estante formado por tablas dispuestas verticalmente, así como se muestra. Responde las siguientes preguntas considerándolo como un cuerpo geométrico.
   a) ¿Qué forma tiene su base?
   b) ¿Qué representa el eje que atraviesa verticalmente las tablas que forman el estante?

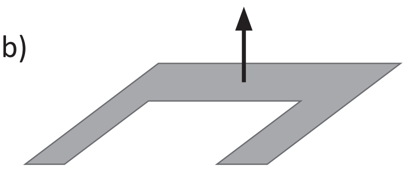


2. Si se toma como base las siguientes figuras sombreadas, dibuja el cuerpo geométrico que se forma al desplazar verticalmente cada figura.

a)



b)



Se le llama **proyección ortogonal** de un cuerpo a aquella donde las rectas proyectantes son perpendiculares al plano de proyección.
La imagen de abajo es un prisma encerrado en tres paredes, considerando las paredes como planos se puede dibujar la proyección ortogonal a cada uno de ellos como figuras planas, así como lo muestra la imagen 3.
Se consideran tres tipos de perspectivas, **vista frontal**, **vista lateral** y **vista sobre el piso**.

Imagen 1

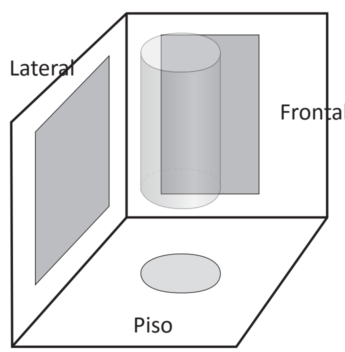


Imagen 2

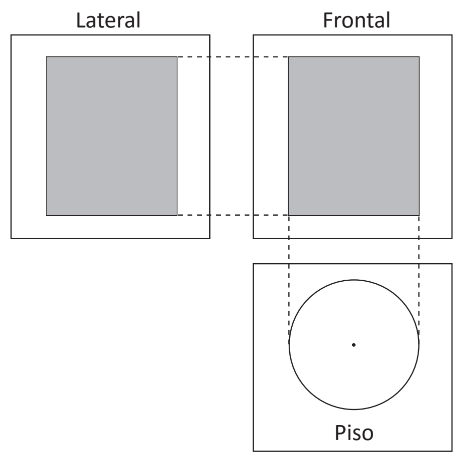
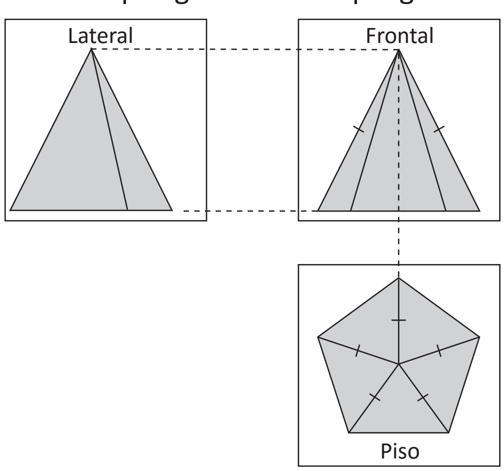


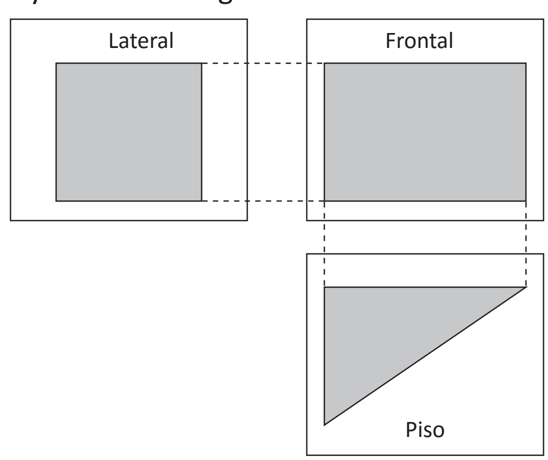
Imagen 3

Dibuja los cuerpos geométricos que generan las siguientes proyecciones ortogonales.

a)



b)

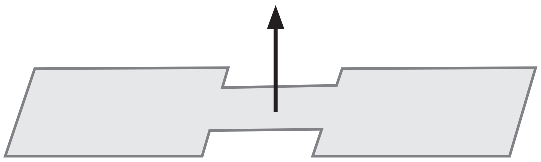


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

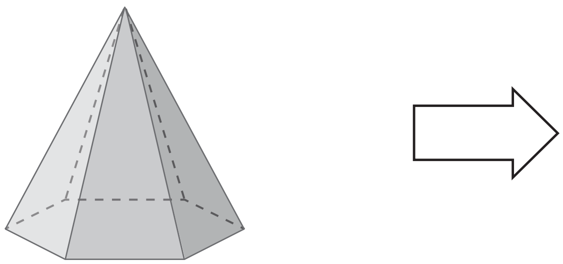
3.7 Desarrollo plano de un prisma y su área total

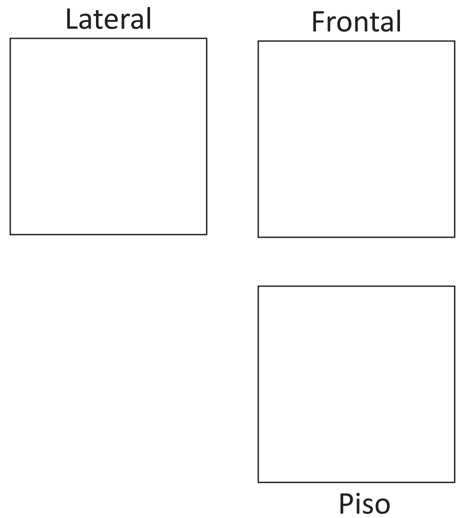
R

1. Si se toma como base la figura sombreada, dibuja el cuerpo geométrico que se forma al desplazar verticalmente cada figura.



2. Dibuja la proyección ortogonal de la siguiente figura.



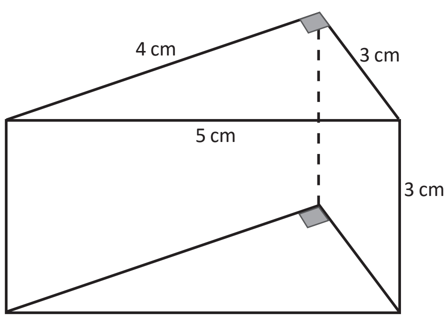


C

El área total de cualquier prisma puede obtenerse con la siguiente relación:

$$\mathbf{A}_T = \mathbf{A}_l + \mathbf{A}_b$$

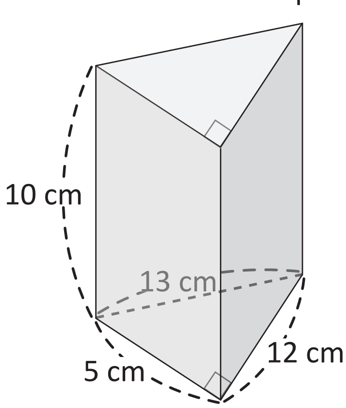
Donde $\mathbf{A}_l$: Área lateral y $\mathbf{A}_b$: Área de la base.
Para calcular el área total del siguiente prisma triangular, se hace:



El área total del prisma se puede calcular con: $\mathbf{A}_T = \mathbf{A}_l + \mathbf{A}_b$

$\mathbf{A}_l$ = 5 × 3 + 4 × 3 + 3 × 3 = 15 + 12 + 9 = 36
$\mathbf{A}_b$ = 4 × 3 ÷ 2 + 4 × 3 ÷ 2 = 6 + 6 = 12
$\mathbf{A}_T$ = 36 + 12 = 48 cm^2

1. Encuentra el área total del prisma triangular mostrado a continuación:

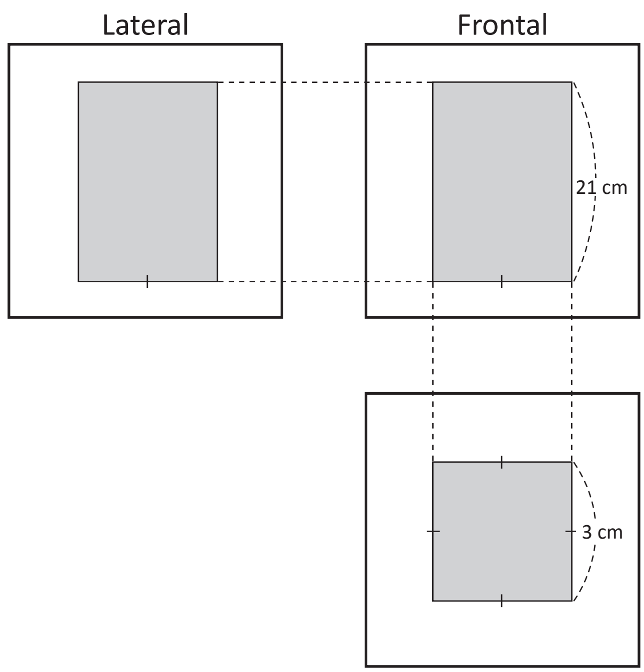


Respuesta: __________ cm^2

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Unidad 8

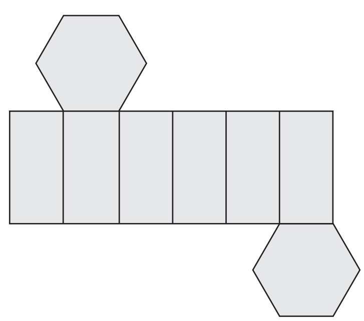
2. En la imagen se muestra la proyección ortogonal de un prisma con base cuadrada. Encuentra el área total del prisma que se forma.



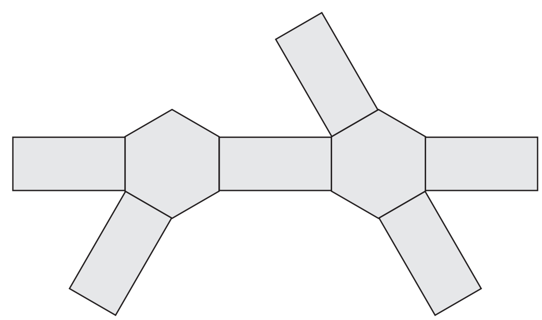
Respuesta: ________ cm²

3. En los siguientes literales, a), b), c) y d), se muestran distintos desarrollos planos de un prisma hexagonal. Encierra en un círculo el único de ellos que es incorrecto y no logra formar el prisma.

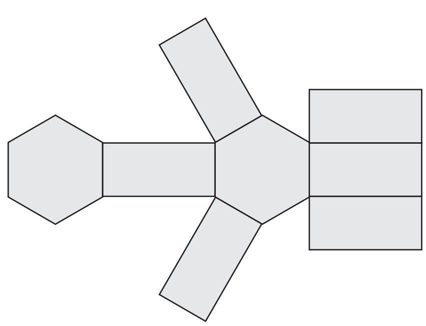
a)



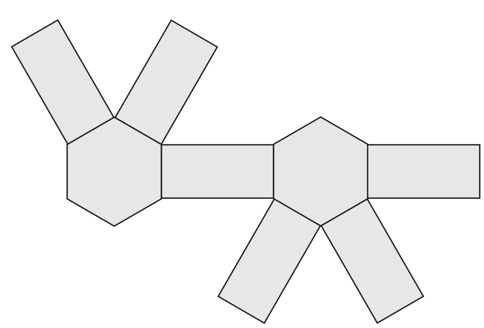
b)



c)



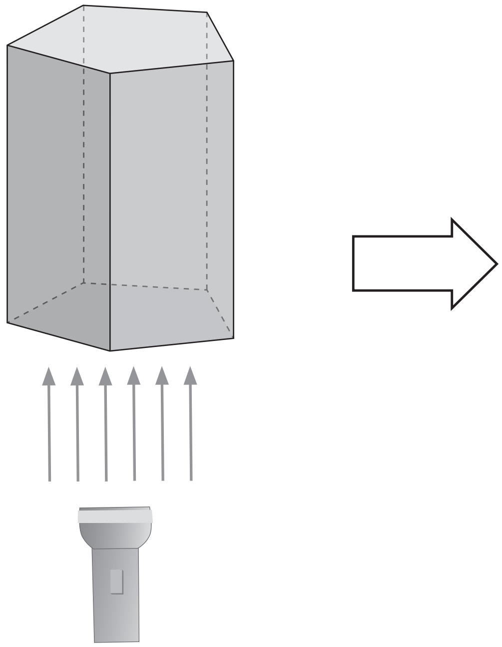
d)

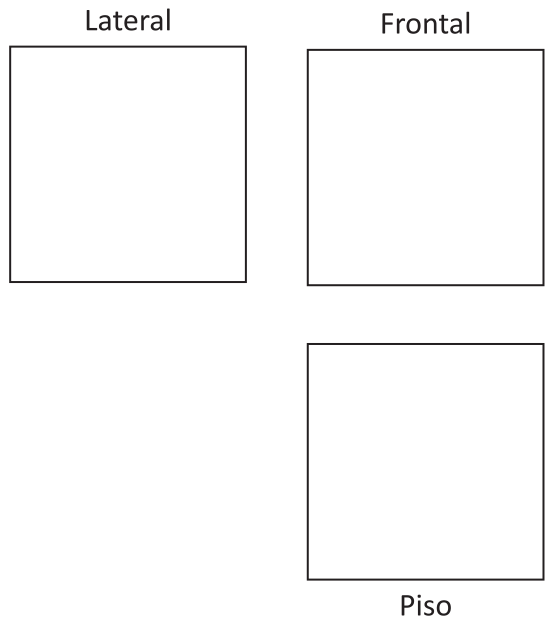


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

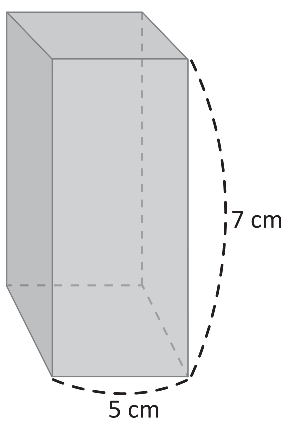
3.8 Desarrollo plano de una pirámide y su área total

R 1. Dibuja la proyección ortogonal de la siguiente figura.





2. Encuentra el área total del prisma con base cuadrada que se muestra a continuación.

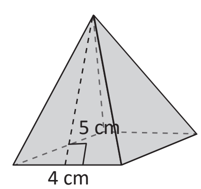


Respuesta: __________ cm^2

C El área total de cualquier pirámide puede obtenerse con la siguiente relación:

$$\mathbf{A_T = A_l + A_b}$$

Donde $\mathbf{A_l}$: Área lateral y $\mathbf{A_b}$: Área de la base.
Por ejemplo, para calcular el área total de la superficie de la pirámide:

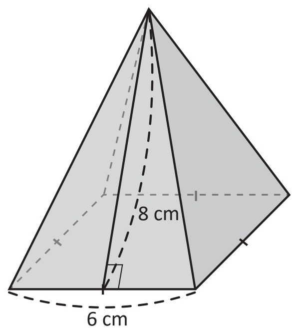


Debe considerarse que la pirámide está formada por 4 caras que son triángulos isósceles congruentes entre sí y por un cuadrado como base. Por tanto:

Área de un triángulo: $4 \times 5 \div 2 = 20 \div 2 = 10$ cm^2
Área lateral: $A_l = 10 \times 4 = 40$ cm^2
Área de la base: $A_b = 4 \times 4 = 16$ cm^2
Área total: $A_T = A_l + A_b = 40 + 16 = 56$ cm^2

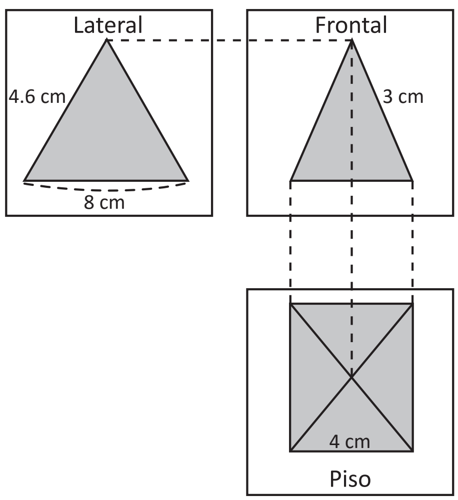
¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

1. La imagen muestra una pirámide con base cuadrada, donde la altura de cada cara lateral es 8 cm. Encuentra su área total.



Respuesta: __________ cm²

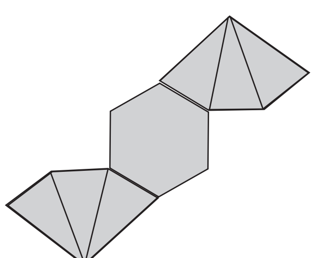
2. En la imagen siguiente se muestra la proyección ortogonal de una pirámide. Encuentra el área total del cuerpo geométrico que se forma.



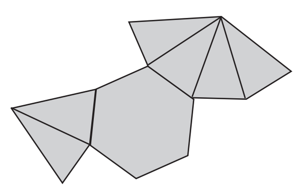
Respuesta: __________ cm²

3. En los siguientes literales, a), b), c) y d) se muestran distintos planos desarrollados de una pirámide hexagonal. Encierra en un círculo el único de ellos que es incorrecto y no logra formar la pirámide.

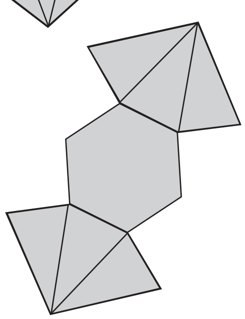
a)



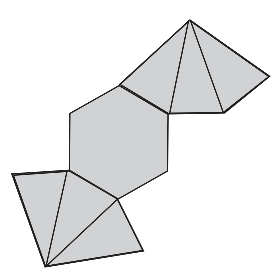
b)



c)



d)

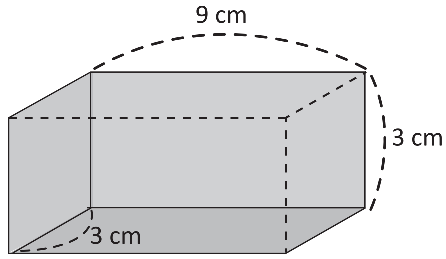


¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

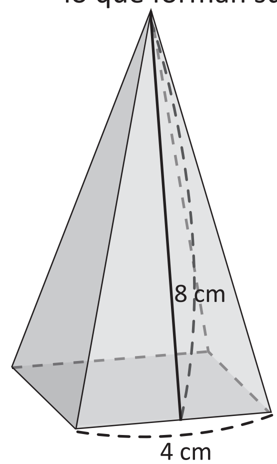
3.9 Desarrollo plano de un cilindro y su área total

R

1. Encuentra el área total del siguiente prisma rectangular.



2. Encuentra el área total de la siguiente pirámide con base cuadrada y la altura de cada triángulo que forman sus caras es de 8 cm.



Respuesta: ________ cm²

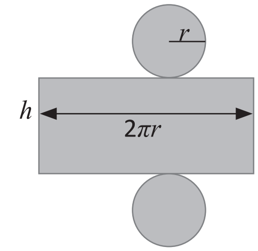
C

El área total de un cilindro se puede obtener mediante la relación:

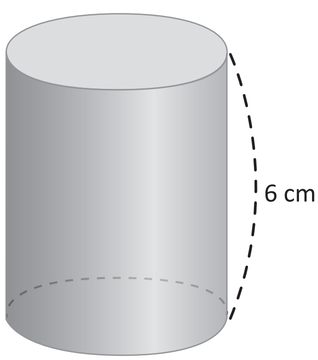
Área total de un cilindro = Área de las bases + Área lateral

$$A_T = A_b + A_l$$
$$\mathbf{A_T = 2\pi r^2 + 2\pi r \times h}$$

Donde r, es el radio del círculo y h, es la altura del cilindro.

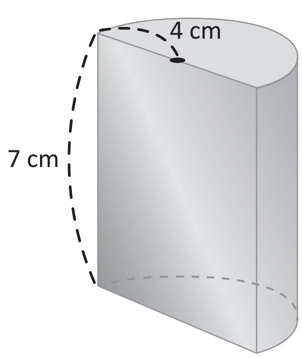


1. El siguiente cilindro tiene de altura 6 cm y el radio de la base es 3 cm. Encuentra el área total.



Respuesta: ________ cm²

2. En la siguiente imagen hay un cilindro cortado justo a la mitad, encuentra su área total.

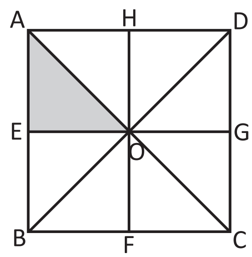
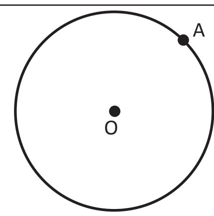
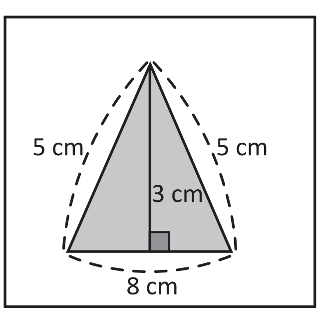
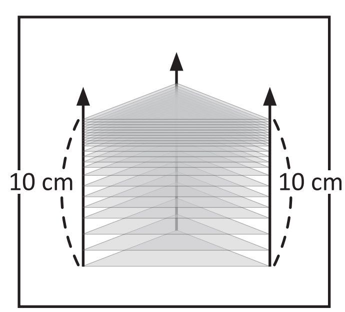


Respuesta: ________ cm²

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Unidad 8

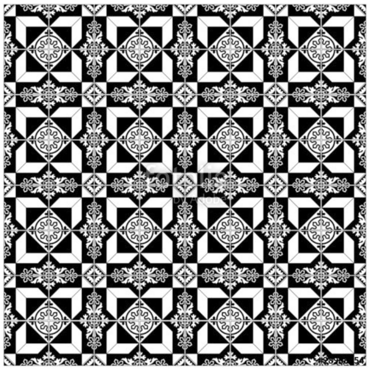
Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste.
Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Sí	Podría mejorar	No	Comentario
1. Resuelvo problemas como en la siguiente figura: a) ¿Qué movimiento se debe hacer al ΔOAE para sobreponerse al ΔODG? b) ¿Qué movimiento se debe hacer al ΔOAE para sobreponerse al ΔOBF? c) ¿Qué movimiento se debe hacer al ΔOAE para sobreponerse al ΔOCF? 				
2. Resuelvo problemas como a) Encuentra la recta tangente a la circunferencia en el punto A.  b) Calcula la longitud del arco correspondiente a un ángulo central de 45° y un radio de 4 cm. c) Encuentra el área del sector circular correspondiente a un ángulo central de 120° y un radio de 9 cm.				
3. Resuelvo problemas como La imagen muestra un prisma formado por el desplazamiento vertical de un triángulo. Encuentra el área total del prisma triangular.   Respuesta: _________ cm^2				

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Problemas de aplicación

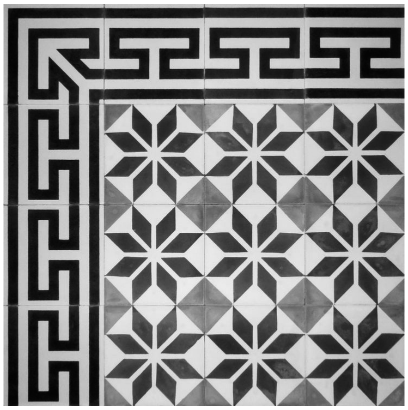
1. **Mosaico.** Un mosaico es una obra realizada con pequeñas piezas de piedra, cerámica o vidrio de diversas formas o colores, llamados teselas. Este tipo de obras se observan comúnmente en las paredes o pisos de algunas casas, en ocaciones se trata de un teselado hecho con simetrías, rotaciones y traslaciones.

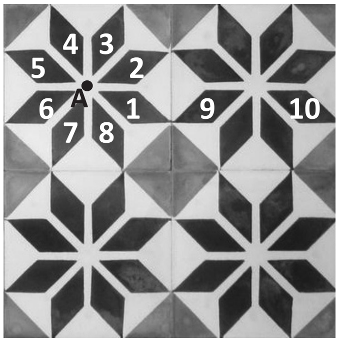


En la imagen debajo, una parte de las figuras simétricas ha sido ampliada, responde lo siguiente acerca de esa figura:

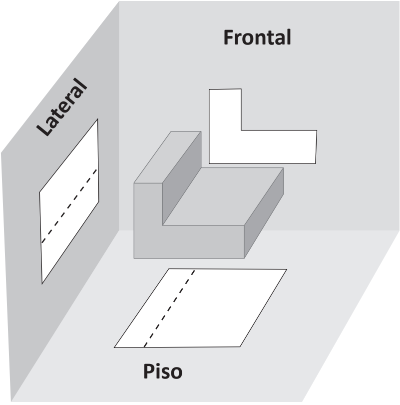
a) ¿Qué tipo de movimiento se debe realizar para sobreponer la figura 1 sobre la figura 9? ¿Y para sobreponerse a la figura 10?

b) Si la figura 1 realiza rotaciones con respecto al punto A, ¿qué figuras se obtienen?

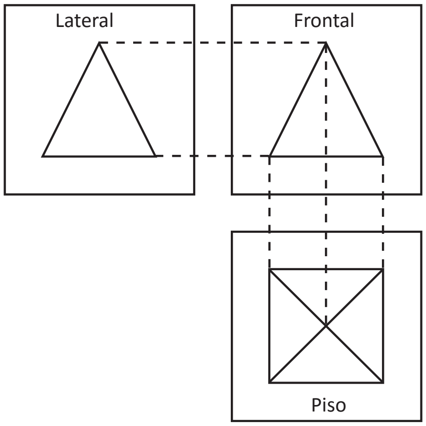




2. **Dibujo técnico.** La proyección ortogonal es un método muy utilizado por las personas que realizan dibujo técnico, este sirve para representar objetos tridimensionales en vistas bidimensionales manteniendo su verdadera magnitud y forma. Este método también es utilizado por algunos arquitectos en la elaboración de planos.



Dibuja el cuerpo geométrico que se forma, a partir de la proyección ortogonal que se muestra debajo.



¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Autoevaluación de los trimestres

En esta sección se presenta una autoevaluación que se debe realizar al finalizar cada trimestre, donde debes evaluar aspectos relacionados con tu estudio diario para esta asignatura, además, debes plantear tu compromiso para el próximo trimestre o para el próximo grado según corresponda. Existe también, un apartado donde tus padres y tu maestro de matemática pueden escribir un breve comentario sobre tu rendimiento en cada trimestre.

Autoevaluación del primer trimestre

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Siempre	Casi siempre	Casi nunca	Nunca
1. Tengo un horario diario para hacer mis tareas y estudiar.				
2. Expreso mis dudas a mi profesor, familiares, compañeros o conocidos.				
3. Me esfuerzo en cada tarea que me asignan en la escuela.				
4. La matemática, así como todas las materias, es importante para mi desarrollo integral como ciudadano.				
5. Cumplo con las fechas indicadas de mis actividades.				
6. Ayudo a mis compañeros a estudiar y comprender los contenidos.				
7. Pongo atención en clases.				
8. Respeto a mi profesor o profesora.				
9. Me esfuerzo por comprender los contenidos.				
10. Soy puntual para llegar a mi escuela.				

Escribe tu compromiso para el próximo trimestre: ____
____
____
____

Comentario de los padres de familia: ____
____
____
____

Comentario del docente: ____
____
____
____

Autoevaluación del segundo trimestre

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Siempre	Casi siempre	Casi nunca	Nunca
1. Tengo un horario diario para hacer mis tareas y estudiar.				
2. Expreso mis dudas a mi profesor, familiares, compañeros o conocidos.				
3. Me esfuerzo en cada tarea que me asignan en la escuela.				
4. La matemática, así como todas las materias, es importante para mi desarrollo integral como ciudadano.				
5. Cumplo con las fechas indicadas de mis actividades.				
6. Ayudo a mis compañeros a estudiar y comprender los contenidos.				
7. Pongo atención en clases.				
8. Respeto a mi profesor o profesora.				
9. Me esfuerzo por comprender los contenidos.				
10. Soy puntual para llegar a mi escuela.				

Escribe tu compromiso para el próximo trimestre: ____
____
____
____

Comentario de los padres de familia: ____
____
____
____

Comentario del docente: ____
____
____
____

Autoevaluación del tercer trimestre

Resuelve y marca con una "×" la casilla que consideres adecuada de acuerdo a lo que aprendiste. Sé consciente con lo que respondas.

Ítem	Siempre	Casi siempre	Casi nunca	Nunca
1. Tengo un horario diario para hacer mis tareas y estudiar.				
2. Expreso mis dudas a mi profesor, familiares, compañeros o conocidos.				
3. Me esfuerzo en cada tarea que me asignan en la escuela.				
4. La matemática, así como todas las materias, es importante para mi desarrollo integral como ciudadano.				
5. Cumplo con las fechas indicadas de mis actividades.				
6. Ayudo a mis compañeros a estudiar y comprender los contenidos.				
7. Pongo atención en clases.				
8. Respeto a mi profesor o profesora.				
9. Me esfuerzo por comprender los contenidos.				
10. Soy puntual para llegar a mi escuela.				

Escribe tu compromiso para el próximo grado: ____
____
____
____

Comentario de los padres de familia: ____
____
____
____

Comentario del docente: ____
____
____
____

Solucionario

En la siguiente sección se presentan las soluciones de todos los ítems, separados por unidad, número de página y número de clase, en algunos casos se detallan solo las respuestas y en otros se escribe también un procedimiento posible para llegar a ella. Además, se utilizan los siguientes símbolos:

Se plantea la solución de los ítems que corresponden a una o dos clases anteriores.

Se plantea la solución de los ítems correspondientes a la clase del día.

Unidad 1

Página 2, Clase 1.1

1. Números negativos:
   –7, –1.3, $-\frac{4}{7}$, –6, –5, –1.5
   Números positivos: $+\frac{1}{10}$, +3.75
   Números naturales: +2, +6, +12
2. Roma: Máxima +11°
   Mínima +2°
   Viena: Máxima +6°
   Mínima –3°
   Ciudad con temperatura más baja: Oslo
   Ciudad con temperatura más alta: Lisboa
3. a) +1° C b) –6° C c) +35.7° C
   d) –7.3° C e) –9° C f) +12.3° C

Página 3, Clase 1.2

a) +12° b) –4° c) 0° d) +5°

1. a) +3 km
   b) –2 km
   c) Dirección oeste a 7.5 km
2. a) +50 años
   b) –25 años
   c) –123 años
3. a) +4 m
   b) Carlos: –1.5 m
   María: –1 m
   c) –2.5 m

Página 4, Clase 1.3

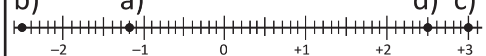
1. a) +15° C b) –3° C c) +15.6° C
   d) –9.4° C e) –1° C f) +12.25° C
2. a) +12 km
   b) –6 km
   c) Dirección sur, a 3.6 km

1. a) +8 lb b) –3 kg
   c) +10 cm d) +5 km/h
2. Diferencia con la meta:
   –1, +1, 0, +5
3. Diferencia con la meta:
   –1, +2, –2, –3, 0

Página 5, Clase 1.4

1. a) +5 b) –3 c) –6 d) –2
2. +5, –10, –5, +10, –2

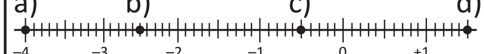
1.
b) a) d) c)



2. a) –3 b) –2.5 c) –1.5
   d) +1 e) +2.5
3.

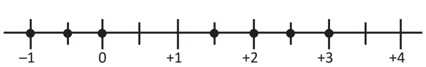
Página 6, Clase 2.1

1. julio: –75 agosto: –50
   septiembre: +10 octubre: 0
   noviembre: –15 diciembre: +25
2.
a) b) c) d)



3. a) –2.5 b) –1 c) 0
   d) +1.2 e) +2.2

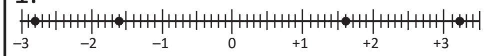
1.



2. a) +12° d) +3° f) +2°
   e) 0° b) –6° c) –10°
3. a) –5 > –8 b) +5 < +8
   c) –4 < 0 < +5 d) $-\frac{1}{2} > \frac{-3}{2}$
4. a) –1 b) $-\frac{1}{4}$
   c) Son iguales.

Página 7, Clase 2.2

1.



2. a) –7 < –3 b) +6 > –2
   c) –3 < 0 < +2 d) $-\frac{1}{3} < -\frac{1}{5}$

1. a) |–4| = 4 b) |+3| = 3
   c) |–3| = 3 d) |–4.5| = 4.5
   Números opuestos: +3 y –3
2. a) |–12| = 12 b) |+3| = 3
   c) $|+\frac{3}{5}| = \frac{3}{5}$ d) $|-\frac{1}{5}| = \frac{1}{5}$
3. Parejas de opuestos:
   a) –1, +1 b) –4.5, +4.5 c) –3, +3
4. Parejas de opuestos:
   $-\frac{3}{4}, +\frac{3}{4}$; –0.3, +0.3
5. a) V b) V c) F
   d) V e) V f) F

Página 8, Clase 2.3

1. a) +2 > –3 b) –2 > –3
   c) 0 > –1 > –4 d) –1.5 > –2.5
2. a) |–4| = 4 b) |+3| = 3
   c) |–3| = 3 d) |–4.5| = 4.5
3. a) F b) F c) V
   d) V e) F f) F

1. a) |–6| = 6 |–4| = 4
   6 > 4. Por lo tanto –6 < –4
   b) –1 > –3
   c) –0.5 > –1.5
   d) $-\frac{1}{2} > -\frac{3}{2}$
2. a) |–4| = 4, |–2| = 2, |–5| = 5
   4 > 2. Por lo tanto –4 < –2
   5 > 4. Por lo tanto –5 < –4
   Entonces: –5 < –4 < –2
   b) $-6 < -2 < -\frac{1}{3}$
   c) –0.2 < –0.02 < –0.002

Unidad 2

Página 9, Clase 2.4

1. a) $|-9| = 9$ b) $|-18| = 18$
   c) $|+\frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$ d) $|-0.75| = 0.75$
2. a) $|-6| = 6$, $|-4| = 4$
   $6 > 4$. Por lo tanto $-6 < -4$.
   b) $-1 > -6$
   c) $-0.2 > -0.4$
   d) $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{3}$

1. -4
2. $+3$
3. a) 7 unidades
   b) 2 unidades
   c) 2 unidades
4. a) 13 unidades
   b) 13 unidades

Página 12, Clase 1.1

a) $(+2) + (+3) = +(2 + 3)$
$= +5$

b) -6 c) -9 d) -7 e) $+11$
f) -13 g) -13 h) -13 i) $+28$
j) -30 k) $+40$ l) -36

Página 13, Clase 1.2

a) $+5$ b) -7 c) -9 d) -15

a) $(+6) + (-2) = +(6 - 2)$
$= +4$

b) -4 c) -2 d) $+2$ e) $+2$
f) -2 g) -4 h) $+4$ i) $+3$
j) -6 k) 0 l) 0

Página 14, Clase 1.3

a) -9 b) -6 c) $+8$ d) -11
e) -3 f) $+3$ g) $+3$ h) -4
i) $+8$ j) -2 k) -8 l) 0

a) $+4$ b) -5 c) $+6$ d) -3
e) $+18$ f) -20 g) $+25$ h) -27

Página 15, Clase 1.4

a) $(+4) + (-2) = +(4 - 2)$
$= +2$

b) -2 c) $+6$ d) -3 e) $+9$
f) -9 g) -3 h) -10

a) $(+0.1) + (-0.2) = -(0.2 - 0.1)$
$= -0.1$

b) $+0.1$ c) -0.8 d) -0.7 e) $+\frac{3}{5}$
f) $+\frac{1}{3}$ g) $-\frac{5}{7}$ h) $-\frac{1}{5}$ i) $+3.2$
j) -2.3 k) $+\frac{5}{7}$ l) $-\frac{2}{3}$

Página 16, Clase 1.5

a) -3 b) -8 c) -0.7 d) $+0.1$
e) -0.6 f) $-\frac{5}{7}$ g) $-\frac{2}{3}$ h) $-\frac{3}{7}$

a) $(+7) + (+1) + (-4) + (-3)$
$= [(+7) + (+1)] + [(-4) + (-3)]$
$= (+8) + (-7)$
$= +1$

b) $+1$ c) -2 d) $+5$ e) -0.2
f) $-\frac{4}{9}$

Página 18, Clase 2.1

1. a) $(-0.8) + (-0.1) = -(0.8 + 0.1)$
   $= -0.9$
   b) $-\frac{1}{5}$ c) -0.4 d) $-\frac{3}{8}$
2. a) $(+2) + (+3) + (-4) + (-5)$
   $= (+5) + (-9)$
   $= -4$
   b) $+0.2$ c) $-\frac{2}{7}$

a) $+1$ b) $+8$ c) -6 d) -2
e) $+3$ f) $+9$ g) $+2$ h) -4
i) -0.1 j) $+0.7$ k) $+\frac{1}{5}$ l) $-\frac{3}{7}$

Página 19, Clase 2.2

R

1. a) $(+1) + (+7) + (-4) + (-3)$
$= [(+1) + (+7)] + [(-4) + (-3)]$
$= (+8) + (-7)$
$= +1$
b) 0 c) +2 d) –2 e) 0 f) $-\frac{6}{5}$
2. a) +5 b) –4 c) –6 d) +24
e) –5 f) –0.3 g) $-\frac{4}{5}$ h) $-\frac{2}{7}$

a) +5 b) –10 c) –5 d) +2
e) +0.5 f) –0.8 g) $-\frac{1}{3}$ h) $+\frac{2}{3}$

Página 20, Clase 3.1

R

a) –7 b) +5 c) +8 d) –6
e) +0.6 f) $+\frac{1}{5}$ g) –80 h) $+\frac{17}{25}$

1. a) $-3 + 2 - 7$
Términos: –3, +2, –7
b) $-8 + 6 + 5 - 1$
Términos: –8, +6, +5, –1

2. a) $(+5) + (-2) + (-3)$
Términos: +5, –2, –3
b) $(-4) + (-5) + (+3)$
Términos: –4, –5, +3

Página 21, Clase 3.2

R

1. a) +56 b) –1.8 c) $-\frac{3}{4}$ d) $+\frac{2}{3}$
2. a) $-3 + 8 - 4 + 6$
Términos: –3, +8, –4, +6
b) $-10 - 32 + 8 - 15$
Términos: –10, –32, +8, –15
3. a) $(+2) + (-1) + (-4) + (-5)$
Términos: +2, –1, –4, –5
b) $(-3) + (+4) + (-2) + (+6)$
Términos: –3, +4, –2, +6

a. $-3 + 2 - 4 = 2 - 3 - 4$
$= 2 - 7$
$= -5$
b) 2 c) 5 d) 1 e) –4
f) –2 g) –0.1 h) $-\frac{2}{7}$

Página 22, Clase 3.3

R

1. a) $5 + 2 - 8 - 4$
Términos: +5, +2, –8, –4
b) $-3 + 2 + 1 - 5 - 7$
Términos: –3, +2, +1, –5, –7
2. a) $(+7) + (+1) + (-4) + (+2)$
Términos: +7, +1, –4, +2
b) $(-2) + (-3) + (+5) + (+4)$
Términos: –2, –3, +5, +4
3. a) $3 - 2 + 4 - 6 = 3 + 4 - 2 - 6$
$= 7 - 8$
$= -1$
b) 0 c) 0 d) $-\frac{4}{9}$

a) $3 + (-5) - (-2) = 3 - 5 + 2$
$= 3 + 2 - 5$
$= 5 - 5$
$= 0$
b) 0 c) 1 d) 5 e) 5
f) –5 g) 0.6 h) 0

Página 26, Clase 1.1

a) $(+2) \times (-3) = -(2 \times 3)$
$= -6$
b) –6 c) –12 d) –15 e) –12
f) –15 g) –42 h) –48 i) –6
j) –51 k) –25 l) –64 m) –0.6
n) –0.9 ñ) –0.12 o) –1.6 p) $-\frac{8}{15}$
q) $-\frac{15}{14}$ r) $-\frac{9}{2}$ s) $-\frac{1}{4}$

Página 27, Clase 1.2

R

a) $(+3) \times (-5) = -(3 \times 5)$
$= -15$
b) –24 c) –12 d) –15 e) –0.8
f) –0.21 g) $-\frac{9}{35}$ h) $-\frac{12}{5}$

a) $(+5) \times (+2) = +(5 \times 2)$
$= +10$
b) +8 c) +12 d) +12 e) +40
f) +42 g) +0.18 h) $+\frac{5}{18}$

Página 28, Clase 1.3

R

a) $7 \times (-9) = -(7 \times 9)$
$= -63$
b) –30 c) 24 d) 24 e) –0.15
f) –0.06 g) –0.24 h) –0.14
i) $-\frac{9}{2}$ j) –2 k) $\frac{20}{3}$ l) 4

a) –9 b) –3 c) 4 d) 2
e) 0 f) 0 g) –12 h) –3

Página 29, Clase 1.4

a) $(-2) \times (-6) = +(2 \times 6)$
$= 12$

b) 20 c) 14 d) 9 e) 1.2
f) −0.08 g) $\frac{6}{35}$ h) $\frac{21}{20}$ i) −10
j) −4 k) 0 l) −4

a) $5 \times 3 \times (-2) = 5 \times (-2) \times 3$
$= [5 \times (-2)] \times 3$
$= (-10) \times 3$
$= -(10 \times 3)$
$= -30$

b) −350 c) −300 d) −180
e) 3 f) $\frac{12}{5}$

Página 30, Clase 1.5

1. a) −13 b) $\frac{11}{15}$ c) 0 d) 0
e) −0.3 f) $-\frac{2}{5}$

2. a) $20 \times (-15) \times 5 = 20 \times 5 \times (-15)$
$= (20 \times 5) \times (-15)$
$= 100 \times (-15)$
$= -(100 \times 15)$
$= -1\,500$

b) −130 c) 120 d) $-\frac{88}{3}$

a) −24 b) −12 c) 600
d) 300 e) −180 f) 10

Página 31, Clase 1.6

1. a) $(-5) \times 9 \times 2 = (-5) \times 2 \times 9$
$= [(-5) \times 2] \times 9$
$= (-10) \times 9$
$= -(10 \times 9)$
$= -90$

b) −140 c) 45 d) $-\frac{21}{2}$

2. a) 120 b) −840 c) 1

1. a) 6^2 b) 6^3 c) $(-2)^3$
d) -2^2 e) $\left(-\frac{1}{7}\right)^2$ f) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$
g) $(-0.9)^2$ h) -0.6^2

2. a) $(-7)^2 = (-7) \times (-7)$
$= 49$

b) −49 c) −8 d) −27 e) −1
f) 0.16 g) $-\frac{1}{8}$ h) 36 i) 1 000

Página 32, Clase 1.7

1. a) 42 b) 300 c) −48
2. a) $(-2)^2$ b) $(-2)^3$
c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$ d) −30
3. a) 100 b) −100 c) 400
d) 216 e) $\frac{49}{81}$ f) $-\frac{8}{27}$

a) $2^3 \times 4 = 8 \times 4$
$= 32$

b) 20 c) −24 d) −24
e) 100 f) 72 g) 72 h) −4

Página 33, Clase 1.8

1. a) $(-7)^2$ b) -5^2
c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$ d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$
2. a) 36 b) −36 c) 64
d) 1 000 e) $\frac{81}{100}$ f) $-\frac{27}{125}$
3. a) 20 b) −24 c) 36 d) −8

a) $27 \div (-3) = -(27 \div 3)$
$= -9$

b) −3 c) −4 d) 7 e) 0 f) −3

Página 34, Clase 1.9

1. a) $2^3 \times (-6) = 8 \times (-6)$
$= -48$

b) 36 c) −200 d) 27 000

2. a) $9 \div (-3) = -(9 \div 3)$
$= -3$

b) −6 c) −8 d) 2 e) 3

1. a) $-\frac{7}{13}$ b) $-\frac{5}{9}$ c) $-\frac{12}{11}$
2. a) $-\frac{2}{3}$ b) $-\frac{1}{4}$
3. a) $\boxed{-4} \div 5 = 4 \div \boxed{-5} = -(4 \div 5)$
b) $\boxed{-7} \div 8 = 7 \div \boxed{-8} = -(7 \div 8)$
c) $\boxed{-9} \div 11 = 9 \div \boxed{-11} = -(9 \div 11)$
d) $\boxed{-14} \div 13 = 14 \div \boxed{-13} = -(14 \div 13)$

Página 35, Clase 1.10

1. a) 5 b) −9 c) −4
d) 10 e) 0
2. a) $-\frac{4}{5}$ b) $-\frac{16}{21}$ c) $-\frac{19}{27}$
3. a) $-\frac{5}{8}$ b) $-\frac{16}{7}$
4.
a) $\boxed{-8} \div 9 = 8 \div \boxed{-9} = -(8 \div 9)$
b) $\boxed{-13} \div 19 = 13 \div \boxed{-19} = -(13 \div 19)$
c) $\boxed{-22} \div 23 = 22 \div \boxed{-23} = -(22 \div 23)$
d) $\boxed{-7} \div 29 = 7 \div \boxed{-29} = -(7 \div 29)$

a) $\frac{3}{5}$ b) $-\frac{8}{13}$ c) −5 d) $\frac{1}{3}$
e) $-\frac{1}{8}$ f) 5 g) −2 h) −4

Página 36, Clase 1.11

R

1. a) $-\frac{5}{2}$ b) $-\frac{7}{3}$ c) $-\frac{8}{3}$
2. a) $-\frac{11}{9}$ b) $-\frac{23}{30}$
3. a) $\boxed{-5} \div 14 = 5 \div \boxed{-14} = -(5 \div 14)$
   b) $\boxed{-18} \div 13 = 18 \div \boxed{-13} = -(18 \div 13)$
4. a) $\frac{8}{3}$ b) $-\frac{15}{13}$ c) -11 d) $\frac{1}{10}$
   e) $-\frac{1}{12}$ f) $\frac{10}{3}$ g) $-\frac{5}{2}$

a) $(-20) \div 5 = -(20 \times \frac{1}{5})$
$= -4$
b) $-\frac{10}{21}$ c) $-\frac{4}{3}$ d) $\frac{1}{15}$
e) 15 f) -20

Página 38, Clase 2.1

R

1. a) $\frac{7}{5}$ b) $-\frac{3}{2}$ c) -5 d) $\frac{1}{7}$
   e) $-\frac{1}{8}$ f) $\frac{10}{3}$ g) -5
2. a) $(-27) \div 9 = -(27 \times \frac{1}{9})$
   $= -3$
   b) $-\frac{16}{45}$ c) -10

a) $(-15) \div 5 \times 6 = -(15 \times \frac{1}{5} \times 6)$
$= -18$
b) $-\frac{5}{3}$ c) $-\frac{24}{5}$ d) -2
e) $\frac{6}{5}$ f) $\frac{9}{7}$

Página 39, Clase 2.2

R

1. a) $\frac{2}{3} \div \left(-\frac{4}{15}\right) = -\left(\frac{2}{3} \times \frac{15}{4}\right)$
   $= -\frac{5}{2}$
   b) $\frac{3}{4}$ c) -20
2. a) $\frac{18}{7} \times \frac{9}{8} \div \left(-\frac{3}{4}\right) = -\left(\frac{18}{7} \times \frac{9}{8} \times \frac{4}{3}\right)$
   $= -\frac{27}{7}$
   b) -11 c) -4 d) 10

a) $4 + 3 \times 2 = 4 + 6$
$= 10$
b) -7 c) -7 d) 4 e) -1
f) -1 g) 5 h) -14 i) -12
j) -21 k) -4 l) 7

Página 40, Clase 2.3

R

1. a) $\frac{7}{2} \div \left(-\frac{35}{26}\right) \times \left(-\frac{10}{9}\right) = +\left(\frac{7}{2} \times \frac{26}{35} \times \frac{10}{9}\right)$
   $= -\frac{26}{9}$
   b) $-\frac{9}{40}$ c) 16 d) -10
2. a) $-8 - (-6) \times (-2) = -8 - 12$
   $= -20$
   b) 12 c) 72 d) 2

a) $8(+5) \times (-2)^2 = 8 - 5 \times 4$
$= 8 - 20$
$= -12$
b) 70 c) -10 d) 70 e) 97 f) 1

Página 41, Clase 2.4

R

a)
$-80 \div (-8) + (-10) \times (-2) = 10 + 20$
$= 30$
b) 120 c) -5 d) 10
e) 7 000 f) 100

a) $(4 + 25) \times 2 = 4 \times 2 + 25 \times 2$
$= 8 + 50$
$= 58$
b) -168 c) 22
d) -22 e) 60
f) -120 g) -244 h) 468

Página 42, Clase 2.5

R

1. a) $-75 + 4 \times (-5)^2 = -75 + 4 \times 25$
   $= -75 + 100$
   $= 25$
   b) 15 c) -1
2.
a) $[30 + (-1)] \times 7 = 30 \times 7 + (-1) \times 7$
$= 210 + (-7)$
$= 203$
b) 3 c) -120 d) -340
e) -176 f) 35

a) $15 + 4$
1) Naturales
2) Enteros
3) Números que se pueden expresar como fracción

b) $9 - 19$
2) Enteros
3) Números que se pueden expresar como fracción

c) 0.9×2
3) Números que se pueden expresar como fracción

d) $11 \div (-13)$
3) Números que se pueden expresar como fracción

e) $16 \div 4$
1) Naturales
2) Enteros
3) Números que se pueden expresar como fracción

f) $-13 + 13$
2) Enteros
3) Números que se pueden expresar como fracción

Página 44, Clase 3.1

R

1. a) $-4 \times 13 - 6 \times 13$
   $= -4 \times 13 + (-6) \times 13$
   $= (-4 - 6) \times 13$
   $= -10 \times 13$
   $= -130$
   b) 476 c) 3
2. a) $12 + (-4)$
   1) Naturales
   2) Enteros
   3) Números que se pueden expresar como fracción

   b) $(-0.36) \times 0.1$
   3) Números que se pueden expresar como fracción

c) 7 × 3
1) Naturales
2) Enteros
3) Números que se pueden expresar como fracción

d) 0.5 + 2.0
3) Números que se pueden expresar como fracción

e) –42 ÷ (–6)
1) Naturales
2) Enteros
3) Números que se pueden expresar como fracción

f) 12 – 4
1) Naturales
2) Enteros
3) Números que se pueden expresar como fracción

1. a) mcm = 12 b) mcm = 18
c) mcm = 10 d) mcm = 20
e) mcm = 12 f) mcm = 24
g) mcm = 24 h) mcm = 30
2. a) MCD = 4 b) MCD = 3
c) MCD = 7 d) MCD = 16
e) MCD = 3 f) MCD = 5
g) MCD = 6 h) MCD = 2

Página 45, Clase 3.2

1. a) –25 – 5
2) Enteros
3) Números que se pueden expresar como fracción

b) 24 ÷ 8
1) Naturales
2) Enteros
3) Números que se pueden expresar como fracción

c) 2 ÷ 3
3) Números que se pueden expresar como fracción

d) 22 – 2
1) Naturales
2) Enteros
3) Números que se pueden expresar como fracción

e) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$
3) Números que se pueden expresar como fracción

f) –25 ÷ 5
2) Enteros
3) Números que se pueden expresar como fracción

2. a) mcm = 14 b) mcm = 30
c) mcm = 20
3. a) MCD = 12 b) MCD = 7
c) MCD = 6

1. Múltiplo
2. Divisor
3. 1
4. 1
5. 13 × 1 = 13, por tanto, 13 es múltiplo de 13.
6. 6 es múltiplo de 6 (6 × 1 = 6), entonces 6 es divisor de 6.
7.

a)

mcm		MCD
12	= 6 ×	2

b)

mcm		MCD
18	= 3 ×	6

c)

mcm		MCD
10	= 5 ×	2

d)

mcm		MCD
20	=20×	1

e)

mcm		MCD
12	=12×	1

f)

mcm		MCD
24	=12×	2

g)

mcm		MCD
24	= 6 ×	4

h)

mcm		MCD
30	=30×	1

Página 46, Clase 3.3

1. a) mcm = 42 b) mcm = 52
c) mcm = 70
2. a) MCD = 7 b) MCD = 4
c) MCD = 8
3. a) mcm = 90 b) mcm = 100
MCD = 15 MCD = 5

mcm		MCD
90	= 6 ×	15

mcm		MCD
100	=20×	5

c) mcm = 72 d) mcm = 120
MCD = 6 MCD = 10

mcm		MCD
72	=12×	6

mcm		MCD
120	=12×	10

Primos: 7, 29, 43, 61, 67, 73, 89.
Compuestos: 10, 25, 32, 35, 40, 48, 52, 58.

Página 47, Clase 3.4

1. a) mcm = 126 b) mcm = 196
MCD = 21 MCD = 7

mcm		MCD
126	= 6 ×	21

mcm		MCD
196	=28×	7

c) mcm = 180 d) mcm = 80
MCD = 15 MCD = 2

mcm		MCD
180	=12×	15

mcm		MCD
80	=40×	2

2. Primos: 3, 5, 13.
Compuestos: 9, 34, 38, 44, 56, 64, 75, 87, 90, 93, 99.

a) $45 = 3^2 \times 5$ b) $27 = 3^3$
c) $63 = 3^2 \times 7$ d) $105 = 3 \times 5 \times 7$
e) $77 = 7 \times 11$ f) $102 = 2 \times 3 \times 17$

Página 48, Clase 3.5

1. Primos: 11, 17, 19, 37, 53.
Compuestos: 12, 22, 28, 42, 50, 51, 63, 70, 100.
2. a) $52 = 2^2 \times 13$ b) $63 = 3^2 \times 7$
c) $75 = 3 \times 5^2$ d) $90 = 2 \times 3^2 \times 5$

Primos: 7, 29, 43, 61, 67, 73, 89.
a) $20 = 2^2 \times 5$ $15 = 3 \times 5$
MCD = 5
b) MCD = 4 c) MCD = 3
d) MCD = 5 e) MCD = 9
f) MCD = 2 g) MCD = 6
h) MCD = 2 i) MCD = 15
j) MCD = 5

Página 49, Clase 3.6

1. a) $48 = 2^4 \times 3$ b) $66 = 2 \times 3 \times 11$
   c) $72 = 2^3 \times 3^2$ d) $98 = 2 \times 7^2$
2. a) $13 = 13$ $26 = 2 \times 13$
   MCD = 13
   b) MCD = 6 c) MCD = 7
   d) MCD = 14

a) $20 = 2^2 \times 5$ $50 = 2 \times 5^2$
mcm = $2^2 \times 5^2$
mcm = 100
b) mcm = 8 c) mcm = 135
d) mcm = 80 e) mcm = 84
f) mcm = 70 g) mcm = 21
h) mcm = 40 i) mcm = 35
j) mcm = 100

Página 50, Clase 3.7

1. a) $6 = 2 \times 3$ $21 = 3 \times 7$
   MCD = 3
   b) MCD = 2 c) MCD = 5
   d) MCD = 22
2. a) $30 = 2 \times 3 \times 5$ $50 = 2 \times 5^2$
   mcm = $2 \times 3 \times 5^2 = 150$
   b) mcm = 20 c) mcm = 40
   d) mcm = 36 e) mcm = 77

1. 49 grupos con 1 bálsamo y 6 maquilishuat cada uno.
2. 40 unidades, 5 paquetes de galletas y 4 de jugos.
3. 15 grupos, 3 estudiantes de la escuela A, 7 de la escuela B y 5 de la escuela C en cada grupo.
4. 420 libros, 35 paquetes de álgebra, 42 de geometría y 30 de estadística.
5. 126 días.

Página 56, Clase 1.1

1. $5 \times 2 + 2 = 12$
   R/ 12 tachuelas
2. $5 \times 7 = 35$
   R/ 35 triángulos

Página 57, Clase 1.2

1. $10 \times 3 + 1 = 31$
   R/ 31 tachuelas
2. $10 + 1 = 11$
   R/ 11 ganchitos

1. $2 \times \square + 1$
2. a) \$ $4 \times \square$
   b) \$ $50 - 4 \times \square$

Página 58, Clase 1.3

1. a) $3 \times 2 + 3 = 9$
   b) 30
   c) 36
   2.3 × $\square$ libras de azúcar.

1. a) \$$n \times 12$
   b) $t \times 7$ pollitos
   c) $72 - 6$ kilómetros
2. $\pi \times r \times r$
3. $x \div 5$ árboles

Página 59, Clase 1.4

1. $10 \times \square$ ladrillos
2. $n \div 5$ panes

1. $0.35 \times x + 0.45 \times y$ dólares
2. $60 \times a + 80 \times b$
3. $0.12 \times m + 0.2 \times n$

Página 60, Clase 1.5

1. $x - (x \times \frac{1}{3})$
2. $260 - (a \times 3 + b \times 7)$ GB

1. a) $6x$ b) $8y$ c) st
   d) yz e) $-4a$ f) $-an$
   g) $\frac{3}{4}x$ o $\frac{3x}{4}$ h) $-\frac{2}{5}m$ o $-\frac{2m}{5}$

Nota: En adelante se usará solo una forma para presentar la respuesta.
   i) $9yz$ j) $5ab$ k) $-6mn$
   l) $-7pq$ m) $4(7 + a)$
   n) $-4(x + 5)$ ñ) $-7(4 - t)$
2. a) $5 \times n$ b) $-8 \times b$
   c) $\frac{4}{7} \times s \times t$ d) $-9 \times x \times y$
   e) $-\frac{5}{6} \times (m + n)$
   f) $-10 \times (t - 5)$

Página 61, Clase 1.6

1. $10 - (1 \times m + 2 \times n)$
2. a) $4n$ b) $-ty$ c) $-\frac{3}{7}a$
   d) $9st$ e) $-4(x - y)$

1. a) t b) n c) $-x$
   d) $-a$ e) mn f) yz
   g) ab h) $-st$ i) $-xz$
   j) $-ab$ k) $-nt$ l) $-ax$
   m) $q + 1$ n) $a + b$ ñ) $-(z - 7)$
2. a) $1 \times a$ b) $-1 \times x$
   c) $1 \times (n + m)$ d) $-1 \times (4 - b)$

Página 62, Clase 1.7

1. a) $2a$ b) xy c) $-\frac{5}{6}b$
   d) $-2rz$ e) $-5(2-t)$
2. a) s b) $-n$ c) tu
   d) $-ab$ e) $y+x$

1. a) b^2 b) a^3 c) st^2
   d) mn^2 e) x^2y^2 f) t^3z^3
   g) t^2 h) $3x^2$ i) $8n^2$
   j) $-4y^2$ k) $-z^2$ l) $-q^2$
   m) $-4ab^2$ n) $-3p^2q$ ñ) $-4x^2y$
   o) $-4x^2z^2$ p) $-s^2t^2$

2. a) $7 \times c \times c$
   b) $-5 \times x \times x \times x$
   c) $7 \times s \times s \times t \times t$
   d) $-9 \times a \times a \times b$
   e) $3 \times m \times m \times m \times n$
   f) $-2 \times p \times p \times p \times q \times q$
   g) $a \times a \times a \times b \times b \times b$
   h) $-1 \times s \times s \times s \times t \times t$

Página 63, Clase 1.8

1. a) t b) $-n$ c) ab
   d) $-st$ e) $x+y$
2. a) t^2 b) xy^2 c) $-a^2$
   d) $-4mn^2$ e) $-p^2q^2$

1. a) $\frac{n}{5}$ b) $-\frac{a}{6}$ c) $\frac{y-x}{6}$
   d) $-\frac{t+s}{7}$ e) $\frac{a}{b}$ f) $\frac{9}{z}$
   g) $-\frac{2}{m}$ h) $-\frac{5}{n-m}$
2. a) $y \div 7$ b) $x \div (-3)$
   c) $t \div (-9)$ d) $z \div 12$
   e) $w \div (-4)$ f) $(n-m) \div 6$

Página 64, Clase 1.9

1. a) x^2 b) a^2b c) $-n^2$
   d) $-8st^2$ e) $-y^2z^2$
2. a) $\frac{b}{2}$ b) $-\frac{a-b}{5}$ c) $\frac{n}{m}$
   d) $-\frac{9}{t}$ e) $-\frac{2}{n+t}$

1. a) $3a-5b$ b) $-3n+\frac{m}{t}$
   c) $\frac{x-y}{7}-\frac{a+b}{4}$ d) $\frac{3t}{4}-\frac{m+n}{7}$
   e) $-\frac{2}{n+m}-b^3$ f) $6z^2-x^2$
   g) $10y^2+a+b$ h) $-6nt+p-q$
2. a) $80-10 \times x$
   b) $3 \times (a-y) \div 5 - 7 \times n$ o
   $\frac{3}{5} \times (a-y) - 7 \times n$
   c) $n \times n - m \times m \times m$
   d) $(a+b) \div 5 + c \div 4$
   e) $-6 \times (4-z) + t \times t \times s \times s \times s$
   f) $(y-9) \div (-6) + (a-z)$
   g) $a \times b \div c$
   h) $m \times n \div p$
   i) $z \div (x \times y)$

Página 65, Clase 1.10

1. a) $\frac{z}{7}$ b) $-\frac{x+y}{6}$ c) $\frac{a}{b}$
   d) $-\frac{5}{s}$ e) $-\frac{4}{m+n}$
2. a) $6p-q$ b) $-8y+\frac{x}{z}$
   c) $\frac{n-m}{7}-\frac{t-s}{6}$ d) $-\frac{3}{4(a+b)}-t^3$
3. a) $a \times (b-3) \div c$
   b) $p \div [m \times (3+n)]$

a) $n-15$ b) $3x$
c) $\frac{5}{y}$ d) $6m+3n$

Página 66, Clase 1.11

1. a) $-2t-5s$ b) $-a-\frac{b}{t}$
   c) $\frac{n+a}{3}-\frac{b+m}{7}$ d) $-\frac{3}{8(n+m)}-\frac{x^2}{t}$
2. $5-(10a+10b)$

a) $\frac{x}{10}$ m/min
b) $\frac{a}{60}$ min
c) $55t$ km

Página 67, Clase 1.12

a) $3m+6n$
b) $6x+4y$

1. a) $\frac{7b}{10}$ Km²
   b) $\frac{3b}{10}$ Km²
2. $x-\frac{x}{10}$ o $\frac{9x}{10}$ dólares
3. $x-\frac{x}{4}+y-\frac{3y}{20}$ dólares
   o $\frac{3x}{4}+\frac{17y}{20}$ dólares

Página 68, Clase 1.13

a) $\frac{3\,000}{t}$ m/min
b) $z-\frac{z}{20}$ dólares o $\frac{19}{20}z$ dólares

a) El costo de comprar un cuaderno y un lapicero.
b) El precio de 3 cuadernos y 5 lapiceros.
c) El vuelto de comprar 3 cuadernos con un billete de $10.
d) El vuelto de pagar 6 cuadernos y 2 lapiceros con un billete de $10.

Página 69, Clase 1.14

1. $x - \frac{2x}{5} + y - \frac{y}{2}$ dólares
   o $\frac{3}{5}x + \frac{1}{2}y$ dólares
2. a) La cantidad de tela usada para hacer 18 camisas talla S y 35 de talla L.
   b) La diferencia entre la tela usada para hacer una camisa talla L y una talla S.

1. a) $p + 3 = 4 + 3$
   $= 7$
   b) 12 c) 18 d) 24
2. a) $6z - 2 = 6 \times 3 - 2$
   $= 16$
   b) 28 c) 10 d) –2
3. a) $7 - 2t = 7 - 2 \times 2$
   $= 3$
   b) 1 c) –1 d) –7

Página 70, Clase 1.15

1. Las calorías que proveen 3 panes y 400 gramos de carne.
2. a) $-2y - 5 = -2 \times 1 - 5$
   $= -7$
   b) –13 c) –19 d) –5

1. a) $2 - 4q = 2 - 4 \times (-2)$
   $= 10$
   b) 1 c) 4 d) $\frac{2}{3}$
2. a) $-t = -(-3)$
   $= 3$
   b) 1 c) 0 d) $-\frac{2}{3}$ e) $\frac{3}{5}$
3. a) $\frac{x}{6} = \frac{2}{6}$
   $= \frac{1}{3}$
   b) $-\frac{1}{12}$ c) $\frac{1}{10}$

Página 71, Clase 1.16

1. a) $-1 - 3n = -1 - 3 \times 3$
   $= -10$
   b) –16 c) –25
2. a) $-\frac{x}{12} = -\frac{24}{12}$
   $= -2$
   b) $\frac{1}{4}$ c) $-\frac{1}{24}$ d) 0

a) $-\frac{3}{y} = -\frac{3}{6}$ y $-\frac{3}{y} = -\frac{3}{-5}$
   $= -\frac{1}{2}$ $= \frac{3}{5}$
b) 18 y –3
c) 4 y 4
d) –16
e) 49
f) $\frac{1}{9}$ y $\frac{4}{25}$

Página 72, Clase 1.17

1. a) $-\frac{m}{15} = -\frac{30}{15}$
   $= -2$
   b) $\frac{1}{3}$ c) $-\frac{1}{45}$ d) 0
2. a) $-\frac{7}{r} = -7 \div \frac{1}{2}$ $-\frac{7}{r} = -7 \div \left(-\frac{1}{2}\right)$
   $= -14$ $= 14$
   b) –36 c) 64

1. a) $3a + 2b = 3 \times 5 + 2 \times 2$
   $= 19$
   b) –2 c) –7
2. a) $-n - 2m = -(-7) - 2 \times 3$
   $= 1$
   b) –2 c) 2
3. a) $6x - 4y = 6 \times 5 - 4 \times 6$
   $= 6$
   b) 0 c) $-\frac{7}{3}$ d) $-\frac{6}{7}$

Página 74, Clase 2.1

1. a) Términos: $4z$, 8
   b) Términos: $5a$, $7b$
   c) Términos: $-2x$, –2
   d) Términos: n, $8m$, –3
   e) Términos: $-9t$, $-2s$, –1
   f) Términos: $\frac{2}{3}x$, $-\frac{3}{5}y$, 6
   g) Términos: $\frac{4}{7}y$, $-\frac{1}{8}z$, –4
   h) Términos: $\frac{a}{3}$, $-\frac{b}{5}$
2. a) 7 b) –5 c) –1
   d) 1 e) $\frac{1}{2}$ f) $-\frac{5}{6}$
   g) $\frac{1}{5}$ h) $-\frac{3}{7}$

Página 75, Clase 2.2

a) Términos: $6x$, $2y$
   Coeficientes: 6, 2
b) Términos: $-3t$, $-5s$, –9
   Coeficientes: –3, –5
c) Términos: $\frac{6}{7}n$, $-\frac{1}{8}m$, 3
   Coeficientes: $\frac{6}{7}$, $-\frac{1}{8}$
d) Términos: $\frac{a}{4}$, $-\frac{2b}{3}$
   Coeficientes: $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{8}$

a) $20a$ b) $-12x$ c) $-28y$
d) $24t$ e) $5z$ f) $-9b$
g) $-h$ h) $-\frac{1}{6}x$

Página 76, Clase 2.3

1. a) Términos: a, $-3b$
   Coeficientes: 1, –3
   b) Términos: $2x$, $7y$, –5
   Coeficientes: 2, 7
   c) Términos: $\frac{2}{3}h$, $-\frac{5}{6}p$, $\frac{2}{7}$
   Coeficientes: $\frac{2}{3}$, $-\frac{5}{6}$
   d) Términos: $\frac{2n}{7}$, $-\frac{4m}{9}$
   Coeficientes: $\frac{2}{7}$, $-\frac{4}{9}$
2. a) $14n$ b) $-25y$ c) $-10z$ d) $\frac{3}{14}a$

a) $8x$ b) $-5t$ c) $3n$
d) $-4a$ e) $8m$ f) $-5b$
g) $\frac{7}{2}s$ h) $\frac{11}{2}x$

Página 77, Clase 2.4

1. a) $27t$ b) $-7y$ c) $-6a$ d) $\frac{1}{3}n$
2. a) $14y$ b) $5t$ c) $-21n$ d) $7x$

a) $20x + 24$ b) $15n + 35$
c) $8h - 4$ d) $15n + 35$
e) $-5t - 1$ f) $5a + 8$
g) $10m + 5$ h) $-12b - 75$
i) $\frac{2}{5}z - 4$

Página 78, Clase 2.5

1. a) $7x$ b) $2x$ c) $-12x$ d) $10x$
2. a) $-8x + 2$ b) $9m - 6$
c) $-7t + 6$ d) $2r - 30$
e) $-4r - 6$

a) $(5x + 15) \div 5 = (5x + 15) \times \frac{1}{5}$
$= (x + 3)$
b) $-8t + 2$ c) $-4n - 2$
d) $-6z + 4$ e) $3x - 7$
f) $9x + 15$ g) $6x - 14$
h) $-5y - 35$

Página 79, Clase 2.6

1. a) $20t + 16$ b) $2n + 9$
c) $-6x + 10$ d) $4z - 6$
2. a) $5x + 1$ b) $-5n - 3$
c) $3x + 5$ d) $-3y - 15$

a) $\frac{4n+3}{2} \times 4 = \frac{4n+3}{1} \times 2$
$= (4n + 3) \times 2$
$= 8n + 6$
b) $-6a + 12$ c) $28t - 20$
d) $-10z - 16$ e) $-5t - 25$
f) $36h + 63$ g) $-24y + 30$
h) $30x + 20$

Página 80, Clase 2.7

1. a) $(42y + 7) \div 7 = (42y + 7) \times \frac{1}{7}$
$= (6y + 1)$
b) $-7t - 2$ c) $10n + 9$
d) $-40y - 10$
2. a) $\frac{5t+9}{4} \times 12 = \frac{5t+9}{1} \times 3$
$= (5t + 9) \times 3$
$= 15t + 27$
b) $12y + 20$ c) $-3z - 9$
d) $-6a - 15$

a) $7t + 5t = (7 + 5)t$
$= 12t$
b) $8n$ c) $4a$ d) $-4z$
e) $-4x$ f) $-2y$ g) 0
h) $-3.8h$ i) $\frac{2}{7}z$ j) $-\frac{4}{5}y$

Página 81, Clase 2.8

1. a) $15x + 20$ b) $8t + 32$
c) $-9a - 15$ d) $-15a - 12$
2. a) $4a + 2a = (4 + 2)a$
$= 6a$
b) $-2t$ c) $-x$ d) $-8y$
e) $0.4b$ f) $-\frac{2}{3}z$

a) $5t + 6 + 6t + 9 = 5t + 6t + 6 + 9$
$= (5 + 6)t + (6 + 9)$
$= 11t + 15$

b) $-2n + 2$ c) $3y - 3$
d) $-2a + 2$ e) $3x - 11$
f) $-4z$ g) $-6h + 2$
h) $-3m + 3$

Página 82, Clase 2.9

1. a) $2x + 6x = (2 + 6)$
$= 8x$
b) $-3a$ c) $3y$ d) $-8h$
e) $1.2b$ f) x
2. a) $4n + 5 - 7n + 4 = 4n - 7n + 5 + 4$
$= (4 - 7)n + (5 + 4)$
$= -3n + 9$
b) $4x - 3$ c) $a - 2$ d) $-4y - 2$

a) $4y$ con $6y + 7 = 4y + (6y + 7)$
$= 4y + 6y + 7$
$= 10y + 7$
b) $4n + 5$ c) $-3a + 5$
d) $-t - 8$ e) $-6x - 12$
f) $-2z + 5$ g) $10b$
h) 12

Página 83, Clase 2.10

1. a) $7x + 6 - 9x + 9 = 7x - 9x + 6 + 9$
$= (7 - 9)x + (6 + 9)$
$= -2x + 15$
b) $9t + 4$ c) 1 d) $-14h - 4$
2. a) $9a$ con $2a - 5 = 9a + (2a - 5)$
$= 9a + 2a - 5$
$= 11a - 5$
b) $6t + 10$ c) $2x - 14$ d) $-3y + 6$

a) $5a + 9 - (2a + 7)$
$= 5a + 9 + (-2a - 7)$
$= 5a + 9 - 2a - 7$
$= 3a + 2$
b) $-5z + 2$ c) $h + 10$ d) -3
e) $4b + 6$ f) $5m$

Página 84, Clase 2.11

1. a) $6x$ con $9x - 7 = 6x + (9x - 7)$
$= 6x + 9x - 7$
$= 15x - 7$
b) $3n + 5$ c) $-4y - 13$
d) $-a + 11$
2. a) $4b - 16 - (9b + 8)$
$4b - 16 + (-9b - 8)$
$4b - 16 - 9b - 8$
$-5b - 24$
b) $-2t + 3$ c) $10x - 1$

a) $12(x + 1) + 3(2x + 3)$
$= 12x + 12 + 6x + 9$
$= 18x + 21$
b) $3y - 38$ c) $5x - 18$
d) $-9n - 23$ e) $-3a - 2$
f) $-11t - 26$ g) $3h - 12$
h) $-6z + 18$ i) $-\frac{20}{3}h + \frac{35}{3}$

Página 86, Clase 3.1

1. a) $x = y + 4$ b) $2x = y$
c) $b - a = 4$ d) $\frac{27}{n} - \frac{27}{m} = 1$
2. a) $\underbrace{3 \times 6}_{\text{miembro izquierdo}} = \underbrace{18}_{\text{miembro derecho}}$
b) $\underbrace{7 + 5}_{\text{miembro izquierdo}} = \underbrace{3 + 9}_{\text{miembro derecho}}$
c) $\underbrace{7a}_{\text{miembro izquierdo}} = \underbrace{4b}_{\text{miembro derecho}}$
d) $\underbrace{7 - 5n}_{\text{miembro izquierdo}} = \underbrace{m + 5}_{\text{miembro derecho}}$

Página 87, Clase 3.2

$y = 4x$

1. a) $6 \leq t$ b) $x \geq 8$
c) $106 < n < 122$
2. a) El costo por los servicios fue $25 o menos.
b) El costo por los servicios fue de al menos $10.

Página 90, Clase 1.1

1. a) $5 = 5$ b) $9 = 2 + 4 + 3$
c) $4 + 6 = 7 + 3$ d) $2 + 2 + 1 = 2 + 3$
2. a) 8 b) 8 c) 7 d) 4
e) 10 f) 10 g) 7 h) 10
3. a) $\boxed{25}$ b) $\boxed{-5}$
c) $\boxed{22}$ d) $\boxed{5}$
e) $\boxed{18}$ f) $\boxed{10}$
g) $\boxed{15}$ h) $\boxed{24}$

Página 91, Clase 1.2

1. a) $5 + 1 + 3 = 7 + 2$
b) $1 + 3 + 3 = 2 + 4 + 1$
2. a) 27
b) 18
c) 50

a) $x + 12 = 20$ b) $8y + 1 = 5$
c) $8 + 4x = 13 + 7$ d) $7x + 8 = 2 + 3$
e) $3y + 6 = 10 + y$
f) $9x + 6 = 13x + 27$

Página 92, Clase 2.1

1. a) 8 b) 5 c) 3
d) 3 e) 5 f) 5
2. a) $\boxed{2}$ b) $\boxed{3}$
c) $\boxed{63}$ d) $\boxed{-2}$
3. a) $x + 10 = 2 + 3$ b) $3x + 4 = 12$

1. a) $2x + 4 = 10$
$2(3) + 4 = 10$
$6 + 4 = 10$
$10 = 10$
3 es solución
b) $2 = 2$ 3 es solución c) $29 = 21$ 3 no es solución d) $4 = 4$ 3 es solución

2. a) $x - 5 = -9$

$-4 - 5 = -9$

$-9 = -9$

-4 es solución

b) $-5 = 5$ — -4 no es solución

c) $-6 = -6$ — -4 es solución

d) $0 = 2$ — -4 no es solución

3. a) $2x - 3 = -1$

$2 \times 0.5 - 3 = -1$

$-2 = -1$

0.5 no es solución

b) $3 = 3$ — 0.5 es solución

c) $-2 = 2.6$ — 0.5 no es solución

d) $3 = 3$ — 0.5 es solución

Página 93, Clase 2.2

1. a) $2x + 3 = 13$ b) $4x + 1 = 7$

2. a) $3x + 3 = 27$

$3 \times 7 + 3 = 27$

$24 = 27$

7 no es solución

b) $13 = 10$

7 no es solución

c) $44 = 44$

7 es solución

a) Propiedad 2
Propiedad 4

b) Propiedad 1
Propiedad 3

Página 94, Clase 2.3

1. a) $2x + 3 = 5$

$2 \times (-4) = -5$

$-5 = -5$

-4 es solución

b) $-20 = 1$ — -4 no es solución

c) $-35 = -35$ — -4 es solución

d) $-24 = 0$ — -4 no es solución

2. a) Propiedad 1
Propiedad 3

b) Propiedad 2
Propiedad 4

1. a) $x - 5 + \boxed{5} = 12 + \boxed{5}$

b) $-3 + x \boxed{+} 3 = 10 \boxed{+} 3$

2. a) $x - 4 = 6$

$x - 4 + 4 = 6 + 4$

$x = 10$

b) $x = 16$

c) $x = 4$

Página 95, Clase 2.4

1. a) Propiedad 1
Propiedad 4

b) Propiedad 1
Propiedad 3

2. a) $x - 10 = 4$

$x - 10 + 10 = 4 + 10$

$x = 14$

b) $x = 16$

c) $x = 5$

d) $x = -10$

1. b) $3 + x \boxed{-} 3 = 7 \boxed{-} 3$

2. a) $x + 4 = 12$

$x + 4 - 4 = 12 - 4$

$x = 8$

b) $x = 7$

c) $x = 3$

Página 96, Clase 2.5

1. a) $x - 15 + \boxed{15} = 30 + \boxed{15}$

b) $-10 + x \boxed{+} 10 = 2 \boxed{+} 10$

2. a) $x - 3 = -2$

$x - 3 + 3 = -2 + 3$

$x = 1$

b) $x = -2$

3. a) $x + 3 - \boxed{3} = 7 - \boxed{3}$

b) $5 + x \boxed{-} 5 = 8 \boxed{-} 5$

4. a) $x + 3 = 1$

$x + 3 - 3 = 1 - 3$

$x = -2$

b) $x = -9$

a) $x = \boxed{3} + \boxed{7}$

$x = \boxed{10}$

b) $x = 4$

c) $x = 3 + \boxed{3}$

$x = \boxed{6}$

d) $x = 7$

Página 97, Clase 2.6

1. a) $x + 20 - \boxed{20} = 75 - \boxed{20}$

b) $11 + x \boxed{-} 11 = 22 \boxed{-} 11$

2. a) $x + 3 = 1$

$x + 3 - 3 = 1 - 3$

$x = -2$

b) $x = -6$

3. a) $x = 5 + \boxed{10}$

$x = 15$

b) $x = 12$

c) $x = 4 + \boxed{9}$

$x = 13$

b) $x = 11$

1. a) $\frac{1}{4}x \times \boxed{4} = 3 \times 4$

b) $\frac{1}{7}x \boxed{\times} 7 = 3 \boxed{\times} 4$

2. a) $\frac{x}{8} = 3$

$\frac{x}{8} \times 3 = 3 \times 8$

$x = 24$

b) $x = -40$

c) $x = -24$

Página 98, Clase 2.7

1. a) $x = 8 - \boxed{5}$

$x = 3$

b) $x = 6$

c) $x = -7 - \boxed{3}$

$x = -10$

d) $x = 4$

2. a) $\frac{1}{4}x \times \boxed{8} = 5 \times \boxed{8}$

b) $-\frac{1}{7}x \boxed{\times} (-2) = 3 \boxed{\times} (-2)$

3. a) $x = -12$ b) $x = 18$

1. a) $3x \div \boxed{3} = 9 \div \boxed{3}$

b) $2x \div \boxed{2} = 10 \div \boxed{2}$

2. a) $x = -4$ b) $x = -6$

Página 99, Clase 2.8

R

1. a) $x = -9 \times 5$
   $x = -45$
   b) $x = 18$ c) $x = 60$
2. a) $x = -2$ b) $x = -3$

a) $2x = 9 - 5$
$2x = 4$
$x = 2$
b) $x = 21$
c) $x = -20$ d) $x = -2$

Página 100, Clase 2.9

R

1. a) $x = \frac{9}{3}$
   $x = 3$
   b) $x = -4$
   c) $x = -5$ d) $x = 2$
2. a) $2x = 5 + 3$
   $2x = 8$
   $x = 4$
   b) $x = -5$
   c) $x = 6$ d) $x = -14$

a) $3x + 5x = -16$
$8x = -16$
$x = -2$
b) $x = 5$ c) $x = -4$ d) $x = 1$

Página 102, Clase 2.11

R

1. a) $-2x = 9 - 5$
   $-2x = 4$
   $x = -2$
   b) $x = 2$
   c) $x = -12$ d) $x = 18$
2. a) $3x + 2x = -6 - 4$
   $5x = -10$
   $x = -2$
   b) $x = -2$ c) $x = -4$

a) $4x + 12 + 5 = 25$
$4x + 17 = 25$
$4x = 25 - 17$
$4x = 8$
$x = 2$
b) $x = -4$ c) $x = -8$ d) $x = 3$

Página 103, Clase 2.12

R

1. a) $-12x + 7x = -20 - 10$
   $-5x = -30$
   $x = 6$
   b) $x = 2$ c) $x = -3$
2. a) $2x - 6 + 4 = 6$
   $2x - 2 = 6$
   $2x = 6 + 2$
   $2x = 8$
   $x = 4$
   b) $x = -20$ c) $x = 2$

a) $x = \frac{2}{3}$
b) $x = \frac{1}{2}$ o $x = 0.5$
c) $x = \frac{1}{2}$ o $x = 0.5$
d) $x = \frac{2}{5}$ o $x = 0.4$
e) $x = \frac{9}{10}$ o $x = 0.9$
f) $x = \frac{3}{4}$ o $x = 0.75$

Página 104, Clase 2.13

R

1. a) $-2x - 4 + 6 = -2$
   $-2x + 2 = -2$
   $-2x = -2 - 2$
   $-2x = -4$
   $x = 2$
   b) $x = -1$ c) $x = 3$
2. a) $x = -\frac{3}{2}$ o $x = -1.5$
   b) $x = -\frac{3}{5}$ o $x = -0.6$
   c) $x = \frac{2}{3}$

a) $3x = 12$
$x = 4$
b) $x = -3$
c) $x = -3$ d) $x = -3$

Página 105, Clase 2.14

R

1. a) $3x + 2x = 7 - 2$
   $5x = 5$
   $x = 1$
   b) $x = -3$ c) $x = 0$
2. a) $6x - 8 = 16$
   $6x = 16 + 8$
   $6x = 24$
   $x = 4$
   b) $x = -3$ c) $x = -3$ d) $x = 2$

a) $\frac{1}{2}x - 4 = \frac{3}{2}$
$2(\frac{1}{2}x - 4) = 2 \times \frac{3}{2}$
$x - 8 = 3$
$x = 3 + 8$
$x = 11$
b) $x = -6$ c) $x = -8$

Página 107, Clase 3.1

R

1. a) $12x + 10 = 4x + 42$
   $12x - 4x = 42 - 10$
   $8x = 32$
   $x = 4$
   b) $x = -1$ c) $x = -3$ d) $x = 4$

2. a) $4(\frac{x}{4} + 3) = 4(\frac{5}{2}x)$

$$x + 12 = 10x$$
$$x - 10x = -12$$
$$-9x = -12$$
$$x = \frac{4}{3}$$

b) $x = 6$

c) $x = -\frac{8}{3}$

d) $x = 3$

1. Sea x los metros que recorrió nadando:

$$11\,000 + 7\,500 + x = 22\,000$$
$$18\,500 + x = 22\,000$$
$$x = 22\,000 - 18\,500$$
$$x = 3\,500$$

R/ Recorrió 3 500 metros nadando.

2. $x = -24$

Página 108, Clase 3.2

1. a) $-4\,(\frac{x-3}{2}) = 4(\frac{5}{2})$

$$-2x + 6 = 5$$
$$-2x = 5 - 6$$
$$-2x = -1$$
$$x = \frac{1}{2} \text{ o } x = 0.5$$

b) $x = -\frac{11}{4}$ o $x = -2.75$

c) $x = \frac{34}{3}$

2. R/ Perdió 6 dólares.

1. Sea x cm su altura, entonces $2x$ cm es la base.

$$x + x + 2x + 2x = 150$$
$$6x = 150$$
$$x = 25$$

Base:

$$2x = 2(25)$$
$$= 50$$

R/ Su altura es de 25 centímetros y su base de 50 centímetros.

2. R/ El número es 5.

Página 109, Clase 3.3

1. Sea x el quinto número:

$$-2 + 13 - 7 + 14 + x = -27$$
$$18 + x = -27$$
$$x = -27 - 18$$
$$x = -45$$

R/ El quinto número sumado es -45.

2. R/ Mide 5 metros de ancho y 15 metros de largo.

Sea x gramos el peso del paquete blanco:

$x + 5$ el peso del verde y

$x + 10$ el peso del amarillo

$$x + (x + 5) + (x + 10) = 32$$
$$3x + 15 = 32$$
$$3x = 32 - 15$$
$$3x = 17$$
$$x = 5.67$$

Paquete verde:

$$x + 5 = 5.67 + 5$$
$$= 10.67$$

Paquete amarillo:

$$x + 10 = 5.67 + 10$$
$$= 15.67$$

Página 110, Clase 3.4

1. Sea x la cantidad de engrapadoras entonces $9 - x$ es la cantidad de cuadernos:

$$4x + 2(9 - x) = 26$$
$$4x + 18 - 2x = 26$$
$$4x - 2x = 26 - 18$$
$$2x = 8$$
$$x = 4$$

Cantidad de cuadernos:

$$9 - x = 9 - 4$$
$$= 5$$

R/ Se compraron 4 engrapadoras y 5 cuadernos.

2. R/ Los números son 33, 34, 35 y 36.

Sea x los años que deben pasar:

$$2(10 + x) = 35 + x$$
$$20 + 2x = 35 + x$$
$$2x - x = 35 - 20$$
$$x = 15$$

R/ Deben pasar 15 años.

Página 111, Clase 3.5

1. Sea x cm la altura, entonces $(x + 4)$ cm es la base:

$$x + x + x + 4 + x + 4 = 60$$
$$4x + 8 = 60$$
$$4x = 60 - 8$$
$$4x = 52$$
$$x = 13$$

Base:

$$x + 4 = 13 + 4$$
$$= 17$$

R/ Su altura es de 13 centímetros y su base de 17 centímetros.

2. R/ Tiene 100 dólares.

Sea x los minutos que salió antes:

$$25(10 + x) = 100 \times 10$$
$$250 + 25x = 1\,000$$
$$25x = 1\,000 - 250$$
$$25x = 750$$
$$x = 30$$

R/ Salió 30 minutos antes.

Página 112, Clase 3.6

1. Sea x dólares el precio del pantalón:

$$55 - x = 2\,(43 - x)$$
$$55 - x = 86 - 2x$$
$$-x + 2x = 86 - 55$$
$$-x + 2x = 86 - 55$$
$$x = 31$$

R/ El pantalón cuesta 31 dólares.

2. R/ Está a 562.5 metros.

Sea $\$x$ la cantidad de dinero ahorrado de Marta:

$$2:7 = 60:x$$
$$2x = 60 \times 7$$
$$2x = 420$$
$$x = 210$$

Página 113, Clase 3.7

R

1. Sea x horas el tiempo que tardó en el recorrido:

$$12x = 24(3 - x)$$
$$12x = 72 - 24x$$
$$12x + 24x = 72$$
$$36x = 72$$
$$x = 2$$

R/ La distancia es 24 kilómetros.

2. R/ Se necesitan 24 libras.

Sea x cm la medida del ancho:

$$9:16 = x:96$$
$$16x = 96 \times 9$$
$$16x = 864$$
$$x = 54$$

R/ El ancho mide 54 centímetros

Página 114, Clase 3.8

R

Sea x cm la medida del ancho:

1. $6:9 = 4:x$

$$6x = 9 \times 4$$
$$6x = 36$$
$$x = 6$$

R/ La medida de ancho será 6 cm.

2. a) $6:2x = 24:32$

$$2x \times 24 = 6 \times 32$$
$$x = 4$$

b) $x = 3$ c) $x = 2$ d) $x = 28$

Sea x la cantidad de gallinas, entonces $120 - x$ es la cantidad de cabras:

$$2:6 = (120 - x):x$$
$$2x = 6(120 - x)$$
$$2x = 720 - 6x$$
$$2x + 6x = 720$$
$$8x = 720$$
$$x = 90$$

Cantidad de cabras:

$$120 - x = 120 - 90$$
$$= 30$$

R/ Hay 90 gallinas y 30 cabras.

Unidad 6

Página 118, Clase 1.1

R

a)

Peso (libras)	1	2	3	4	5	...
Precio	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**...**

b)

La altura (cm)	1	2	3	4	5	...
Área (cm^2)	**3**	**6**	**9**	**12**	**15**	...

c)

La altura (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Base (cm)	24	12	**8**	**6**	4.8	**4**	...

1. a b c d e f
2. a) Altura
   b) Páginas leídas
   c) Tiempo

Página 119, Clase 1.2

R

1. a)

x (minutos)	1	2	3	4	5	...
y (copias)	**25**	50	**75**	**100**	**125**	...

b)

Altura (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Área base (cm^2)	48	**24**	**16**	**12**	9.6	**8**	...

2. a b c

a)

x (minutos)	1	2	3	4	5	6	...
y (metros)	50	100	**150**	**200**	**250**	**300**	...

$a = \frac{y}{x}$ $\quad a = \frac{50}{1}$ $\quad a = \frac{100}{2}$

$a = 50$ $\quad a = 50$

Constante de proporcionalidad:

$$a = 50$$
$$y = 50x$$

b)

x (minutos)	1	2	3	4	5	6	...
y (metros)	**3**	**6**	**9**	**12**	**15**	**18**	...

Constante de proporcionalidad:

$$a = 3$$
$$y = 3x$$

Página 120, Clase 1.3

R

1. ⓐ ⓑ ⓒ

2. a)

x	1	2	3	4	5	6	...
y	3	6	9	12	15	18	...

$a = \frac{y}{x}$ $\quad a = \frac{3}{1}$ $\quad a = \frac{6}{2}$

$a = 3$ $\quad a = 3$

Constante de proporcionalidad:

$a = 3$

$y = 3x$

b)

x	0	1	...	5	...	12	...
y	0	**2.5**	...	12.5	...	30	...

Constante de proporcionalidad:

$a = 2.5$

$y = 2.5x$

1. a)

x (libras)	0	1	2	3	4	...	15
y (dólares)	0	3	6	9	12	...	45

Se vende desde 0 a un máximo de 15 libras.

$0 \le x \le 15$

Cada libra cuesta 3 dólares, por lo que el máximo es:

$15 \times 3 = 45$

$0 \le y \le 45$

b)

x (minutos)	0	1	2	3	4	...	**10**
y (galones)	0	3	6	9	12	...	**30**

$0 \le x \le 10$

$0 \le y \le 30$

2. a) $x > 5$ b) $x \ge 5$ c) $x \le 3$
d) $2 < x < 8$ e) $-8 < x < -2$
f) $x \le -5$

Página 121, Clase 1.4

R

1. $a = \frac{y}{x}$ $\quad a = \frac{3}{1}$ $\quad a = \frac{6}{2}$ $\quad a = \frac{18}{6}$

$a = 3$ $\quad a = 3$ $\quad a = 3$

Constante de proporcionalidad:

$a = 3$

$y = 3x$

2.

x (minutos)	0	1	2	3	4	...	**20**
y (galones)	0	2	4	6	8	...	**40**

$0 \le x \le 20$

$0 \le y \le 40$

a)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	**–16**	**–12**	**–8**	**–4**	0	4	**8**	**12**	**16**

$a = \frac{y}{x}$ $\quad a = \frac{4}{1}$

$a = 4$

$y = 4x$

b)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	**–12**	**–9**	**–6**	**–3**	0	3	**6**	**9**	**12**

$y = 3x$

c)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	**–10**	**–7.5**	–5	**–2.5**	0	2.5	**5**	**7.5**	**10**

$y = 2.5x$

Página 122, Clase 1.5

R

1.

x (minutos)	0	1	2	3	4	...	12
y (galones)	0	1.5	3	4.5	6	...	**18**

$a = \frac{y}{x}$ $\quad a = \frac{3}{2}$

$a = 1.5$

$y = 1.5x$

$0 \le x \le 12$

$0 \le y \le 18$

2. a)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	**–20**	**–15**	**–10**	**–5**	0	5	**10**	**15**	**20**

$y = 5x$

b)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	**–14**	**–10.5**	**–7**	**–3.5**	0	3.5	**7**	**10.5**	**14**

$y = 3.5x$

a)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	12	9	6	3	0	–3	**–6**	**–9**	**–12**

$a = \frac{y}{x}$ $\quad a = \frac{-9}{3}$

$a = -3$

$y = -3x$

b)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	**20**	**15**	**10**	**5**	0	–5	**–10**	**–15**	**–20**

$y = -5x$

c)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	$\frac{8}{3}$	2	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	–2	$-\frac{8}{3}$

$y = -\frac{2}{3}x$

Página 123, Clase 1.6

R

a)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	**–28**	**–21**	**–14**	**–7**	0	7	**14**	**21**	**28**

$a = \frac{y}{x}$ $\quad a = \frac{7}{1}$

$a = 7$

$y = 7x$

b)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	**16**	**12**	**8**	**4**	0	–4	**–8**	**–12**	**–16**

$y = -4x$

c)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{4}{3}$

$y = -\frac{1}{7}x$

1. a) $a = \frac{y}{x}$ $\quad a = \frac{15}{3}$

$a = 5$

b) $a = 4$ c) $a = 3$
d) $a = -3$ e) $a = 3$
f) $a = 3$ g) $a = -3$
h) $a = 2.5$ i) $a = -2.5$

2. a) $0 \le x \le 10$

$-60 \le y \le 0$

b) $y = -6x$

y representa cuánto disminuye la temperatura, no la temperatura en sí.

Página 125, Clase 1.8

1. a)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	**12**	**9**	6	**3**	0	**–3**	**–6**	**–9**	**–12**

$a = \frac{y}{x}$ $\qquad a = \frac{6}{-2}$

$a = -3$

$y = -3x$

b)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	**2.0**	**1.5**	**1**	**0.5**	0	**–0.5**	–1	**–1.5**	**–2.0**

$y = -0.5x$

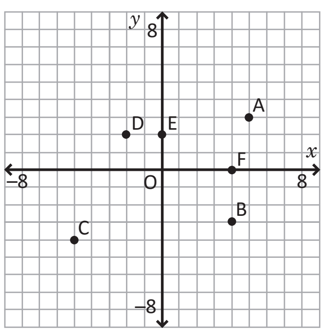
2. a) $a = \frac{y}{x}$ $\qquad a = \frac{-10}{-2}$

$a = 5$

b) $a = -2$ $\qquad$ c) $a = -4$

d) $a = -7.5$

a)



b) H (–2, 5) I (3, 3) J (5, 2)
K (–1, –4) L (–3, 0) M (6, –3)
N (0, 6)

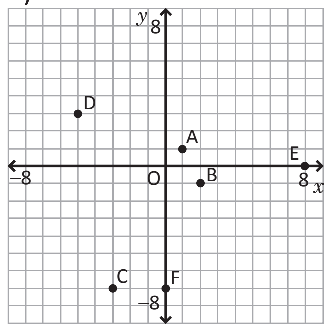
Página 126-127, Clase 1.9

1. a) $a = \frac{y}{x}$ $\qquad a = \frac{20}{-4}$

$a = -5$

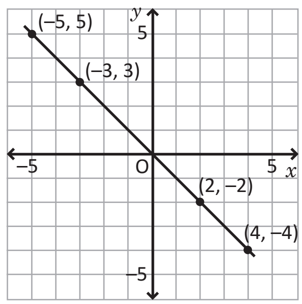
b) $a = -3$ $\qquad$ c) $a = -0.6$

2. a)

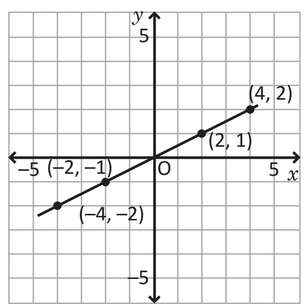


b) H (5, 4) I (–3, 0) J (0, –5)
K (–8, –7) L (6, –5) M (–7, 8)

a)

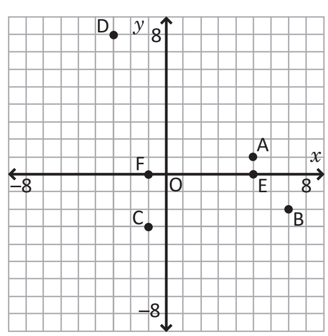


b)



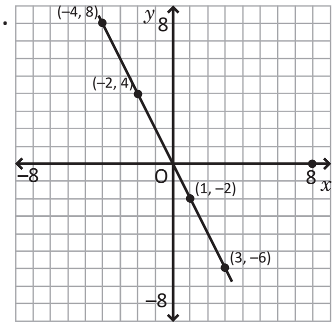
Página 128, Clase 1.10

1. a)



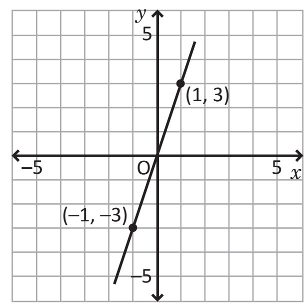
b) H (3, –5) I (–7, –8) J (–8, 6)
K (–1, –3) L (7, 6) M (–1, 5)
N (–5, 0)

2.

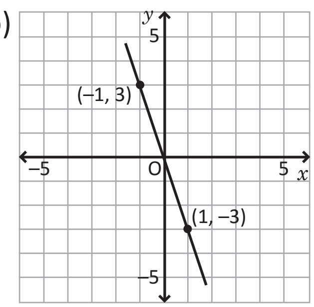


a)

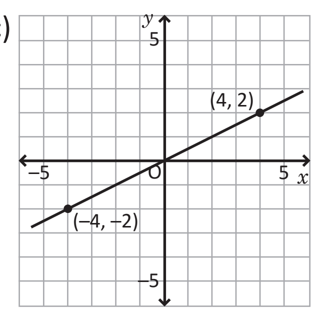
x	–1	0	1
y	–3	0	3



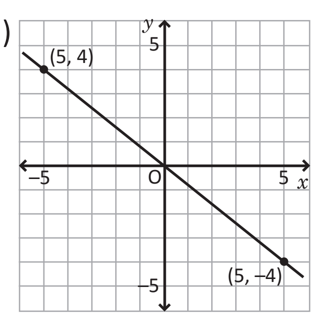
b)



c)

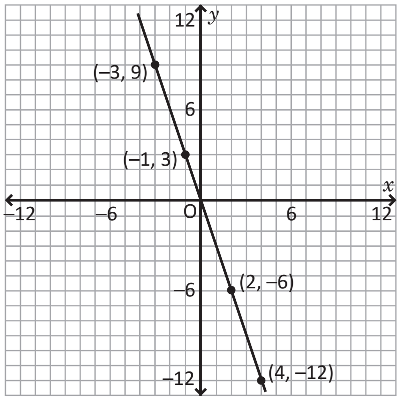


d)

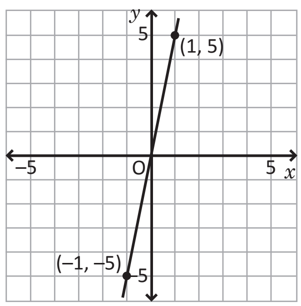


Página 129, Clase 1.11

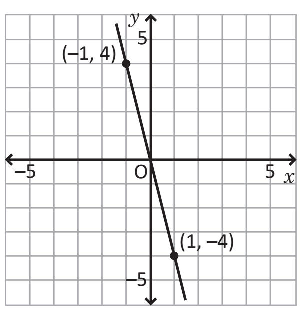
1.



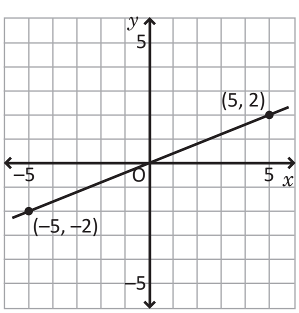
2. a)



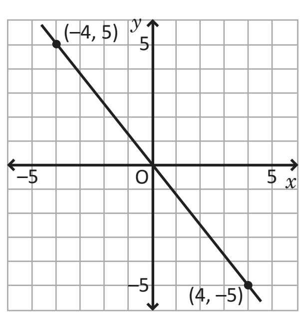
b)



c)



d)



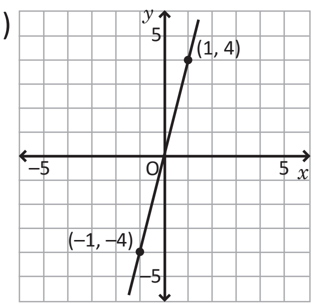
a) $y = 3x$

b) $y = -2x$

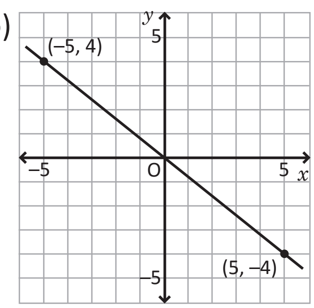
c) $y = \frac{1}{2}x$

Página 130, Clase 1.12

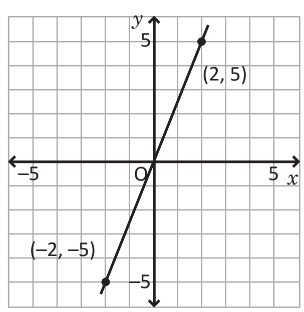
1. a)



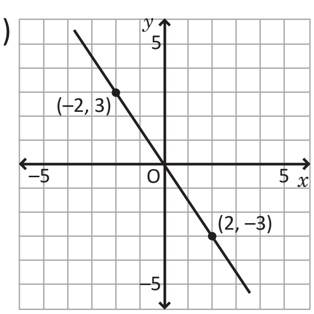
b)



c)



d)



2. a) $y = -6x$

b) $y = \frac{3}{4}x$

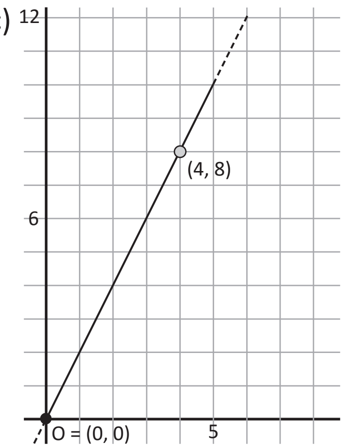
c) $y = -\frac{2}{5}x$

1. a) $y = 2x$

b) $0 \leq x \leq 5$

$0 \leq y \leq 10$

c)

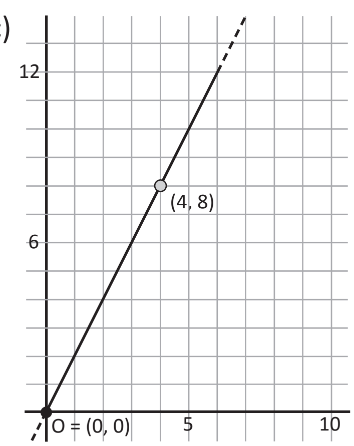


2. a) $y = 2x$

b) $0 \leq x \leq 6$

$0 \leq y \leq 12$

c)



Página 132, Clase 2.1

1. a) $y = \frac{4}{5}x$

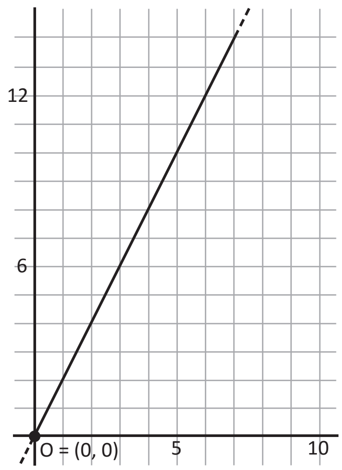
b) $y = -\frac{4}{5}x$

c) $y = -\frac{1}{7}x$

2. a) $y = 2x$ b) $0 \le x \le 7$

$0 \le y \le 14$

c)



a)

x (ejemplares)	1	2	3	4	5	6	...
y (precio)	40	20	13.33	10	8	6.67	

$a = xy$

$a = 1 \times 40$ $\quad y = \dfrac{40}{x}$

$a = 40$

b)

x (base)	1	2	3	4	5	6	...
y (altura)	12	6	4	3	2.4	2	

$a = 12$ $\quad y = \dfrac{12}{x}$

c) No inversa

d)

x (barras de chocolate)	1	2	3	4	5	6	...
y (kilocarías)	1 650	825	550	412.5	330	275	...

$a = 1\,650$ $\quad y = \dfrac{1\,650}{x}$

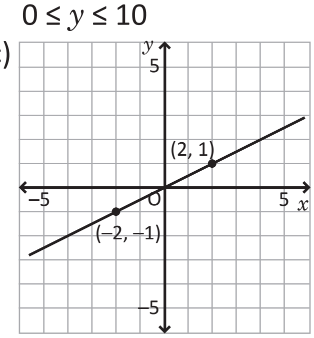
Página 133, Clase 2.2

1. a) $y = \frac{1}{2}x$

b) $0 \le x \le 20$

$0 \le y \le 10$

c)



2. a) No es inversa

b) No es inversa

c)

x (estudiantes)	1	2	3	4	5	6	...
y (pago de cada uno)	40	20	13.33	10	8	6.67	...

$a = 40$ $\quad y = \dfrac{40}{x}$

a)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	**−6**	**−8**	**−12**	−24		24	**12**	**8**	**6**

$a = xy$

$a = 24 \times 1$ $\quad y = \dfrac{24}{x}$

$a = 24$

b)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	**−1**	$-\frac{4}{3}$	**−2**	−4		4	**2**	$\frac{4}{3}$	**1**

$a = 4$ $\quad y = \dfrac{4}{x}$

c)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	**9**	**12**	18	**36**		**−36**	**−18**	**−12**	**−9**

$a = -36$ $\quad y = -\dfrac{36}{x}$

d)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	2	$\frac{8}{3}$	**4**	**8**		**−8**	**−2**	$-\frac{8}{3}$	−2

$a = -8$ $\quad y = -\dfrac{8}{x}$

Página 134, Clase 2.3

1. a)

x (m/min)	1	2	3	4	5	6	...
y (minutos)	650	325	216.7	162.5	130	108.3	...

$a = xy$

$a = 1 \times 650$ $\quad y = \dfrac{650}{x}$

$a = 650$

b) No es inversa

c)

x (base, cm)	1	2	3	4	5	6	...
y (altura, cm)	8	4	2.67	2	1.6	1.33	...

$a = 8$ $\quad y = \dfrac{8}{x}$

2. a)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−4.5	−6	−9	−18		18	9	6	4.5

$a = xy$

$a = 18 \times 1$ $\quad y = \dfrac{18}{x}$

$a = 18$

b)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−5	−6.67	−10	−20		20	10	6.67	5

$a = 20$ $\quad y = \dfrac{20}{x}$

c)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	1.5	2	3	6		−6	−3	−2	−1.5

$a = -6$ $\quad y = -\dfrac{6}{x}$

d)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	2	2.67	4	8		−8	−4	−2.67	−2

$a = -8$ $\quad y = -\dfrac{8}{x}$

a) $a = xy$

$a = 2 \times 7$ $\quad y = \dfrac{14}{x}$

$a = 14$

b) $y = \dfrac{18}{x}$ c) $y = -\dfrac{15}{x}$ d) $y = -\dfrac{8}{x}$

e) $y = \dfrac{2}{x}$ f) $y = \dfrac{3}{x}$ g) $y = -\dfrac{9}{x}$

Página 135-136, Clase 2.4

1.

a)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−2.5	−3.3...	−5	−10		10	5	3.3...	2.5

$a = xy$

$a = 2 \times 5$ $\quad y = \dfrac{10}{x}$

$a = 10$

b)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	3	4	6	12		−12	−6	−4	−3

$a = -12$ $\quad y = -\dfrac{12}{x}$

2.

a) $a = xy$

$a = 3 \times 2$ $\quad y = \dfrac{6}{x}$

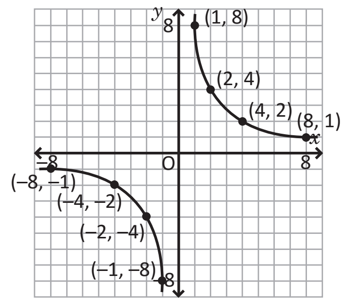
$a = 6$

b) $y = \dfrac{50}{x}$ c) $y = -\dfrac{21}{x}$ d) $y = -\dfrac{16}{x}$

e) $y = \dfrac{2}{x}$ f) $y = \dfrac{6}{x}$ g) $y = -\dfrac{8}{x}$

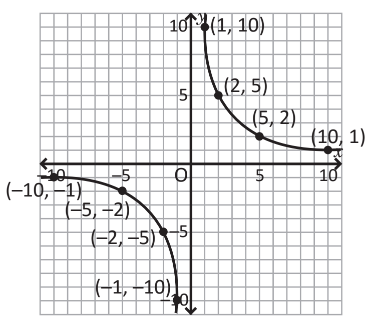
a)

x	–8	…	–4	…	–2	–1	0	1	2	…	4	…	8
y	–1	…	–2	…	–4	–8		8	4	…	2	…	1



b)

x	–10	…	–5	…	–2	–1	0	1	2	…	5	…	10
y	–1	…	–2	…	–5	–10		10	5	…	2	…	1



Página 137-138, Clase 2.5

1. a) $a = xy$

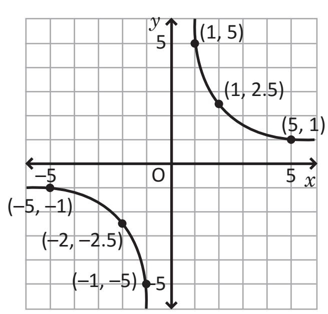
$a = 10 \times -5$ $\qquad y = -\dfrac{50}{x}$

$a = -50$

b) $y = \dfrac{4}{x}$ $\qquad$ c) $y = \dfrac{8}{x}$ $\qquad$ d) $y = -\dfrac{15}{x}$

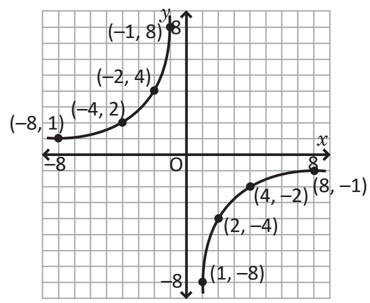
2.

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y	–1	…	–1.6…	–2.5	–5		5	2.5	…	1.25	1



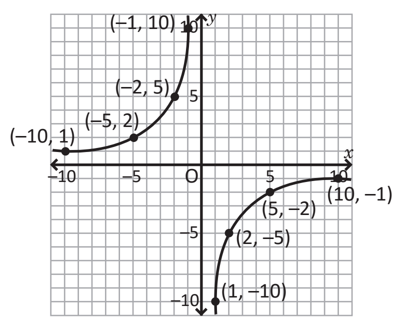
a)

x	–8	…	–4	…	–2	–1	0	1	2	…	4	…	8
y	1	…	2	…	4	8		–8	–4	…	–2	…	–1



b)

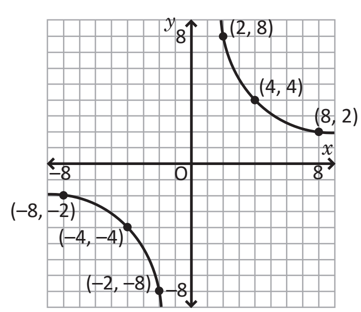
x	–10	…	–5	…	–2	–1	0	1	2	…	5	…	10
y	1	…	2	…	5	10		–10	–5	…	–2	…	–1



Página 139, Clase 3.1

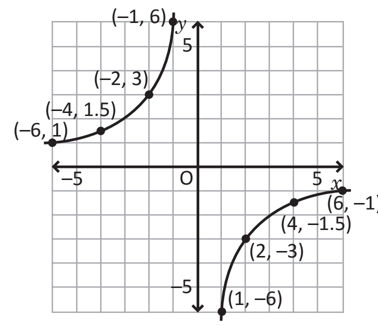
1.

x	–8	…	–4	…	–2	–1	0	1	2	…	4	…	8
y	–2	…	–4	…	–8	–16		16	8	…	4	…	2



2.

x	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6
y	1	…	1.5	…	3	6		–6	–3	…	–1.5	…	–1



$a:20 = 7:35$

$35a = 20 \times 7$

$35a = 140$

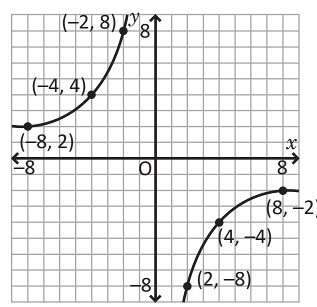
$a = 4$

$b = 40$ $\qquad c = 22$ $\qquad d = 125$

Página 140, Clase 3.2

1.

x	…	–8	…	–4	…	–2	–1	0	1	2	…	4	…	8	…
y	…	2	…	4	…	8	16		–16	–8	…	–4	…	–2	…



2. $m:40 = 8:64$

$64m = 40 \times 8$

$64m = 320$

$m = 5$

$n = 72$ $\qquad o = 12$ $\qquad p = 208$

1.

Porcentaje	30	100
Padres	b	200

$30:b = 100:200$
$100b = 30 \times 200$
$100b = 6\,000$
$b = 60$

Los padres de familia que apoyan el proyecto son 60.

2. La capacidad total de los tanques es:
   a) 6 000 litros
   b) 10 000 litros

Página 141, Clase 3.3

R

1. $q:45 = 5:75$
   $75q = 45 \times 5$
   $75q = 225$
   $q = 3$
   $r = 90$ $s = 18$ $t = 345$
2.
a)

Porcentaje	13	100
Precio	b	200

$13:b = 100:200$
$100b = 13 \times 200$
$100b = 2{,}600$
$b = 26$

El costo del IVA debe ser 26 dólares.

b) El costo con impuesto es de 339 dólares.

1. a) $1:1\,000 = d:12\,000$
   $1:1\,000 = d:12\,000$
   $1\,000d = 1 \times 12\,000$
   $d = 12$
   b) $c = 2.5$
   c) $d = 96$
2. a) Equivale a 54 kilómetros por hora.
   b) Equivale a 666.666... metros por minuto.

Página 143, Clase 3.5

R

1. El descuento es de 30%, por lo que el costo queda en: 100 – 30 = 70%

Porcentaje	70	100
Precio	b	20

$70:b = 100:20$
$100b = 70 \times 20$
$100b = 1\,400$
$b = 14$

Porcentaje	70	100
Precio	b	40

$70:b = 100:40$
$100b = 70 \times 40$
$100b = 2\,800$
$b = 28$

El costo al ir dos veces a la tienda es: 14 + 28 = 42.
El descuento es de 50%, por lo que el costo queda en: 100 – 50 = 50%

Porcentaje	50	100
Precio	b	60

$50:b = 100:60$
$100b = 50 \times 60$
$100b = 3\,000$
$b = 30$

El costo al hacer una sola compra es de 30 dólares.
Por lo tanto, es mejor hacer una sola compra.

2. $2:1.68 = d:4.20$
   $1.68d = 2 \times 4.20$
   $1.68d = 8.4$
   $d = 5$

1. a) $100a = 3 \times 500$
   $100a = 1\,500$
   $a = 15$
   Deben aportar 15 familias.
   b) $b = 30$
   Deben aportar 30 familias.
   Cada familia debe pagar 50 dólares.
2.

Grifos	2	4
Horas	36	d

$4d = 2 \times 36$
$4d = 72$
$d = 18$

Tardará 18 horas en llenarse.

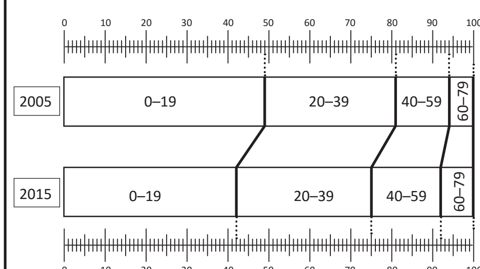
Página 148-149, Clase 1.1

1. a) Naranja: 25% Toronja: 15%
   Fresa: 10% Uva: 7%
   Otros: 43%
   b) Naranja: Toronja: 45
   $300 \times \frac{25}{100} = 75$
   Fresa: 30 Uva: 21
   Otros: 129
2. a) Manufacturera, 81%
   b) Manufacturera:
   $4{,}000 \times \frac{81}{100} = 3{,}726$ millones
   Agropecuario: 460 millones
   Construcción: 322 millones
   Otros: 92 millones
3. a) 2014: $\boxed{\text{Central}}$
   2015: $\boxed{\text{Metropolitana}}$
   b) 2014: $\boxed{\text{Oriental}}$
   2014: $\boxed{\text{Oriental}}$
   c) No, debido a que el porcentaje puede ser mayor y aún así, representar una menor cantidad.
   d) 3 493 de las incorporaciones corresponden a la zona metropolitana.
   e) Familias beneficiadas en la zona occidental:
   2014: $\boxed{3\,900}$
   2015: $\boxed{3\,652}$
   Hubo más familias beneficiadas en 2014.

Página 150-151, Clase 1.2

1. Región 1: 27% Región 2: 23%
   Región 3: 13% Región 4: 37%
2. a)
   2013:
   Bienes intermedios: 43%
   Bienes de consumo: 36%
   Bienes de capital: 14%
   Maquila: 7%
   2015:
   Bienes intermedios: 41%
   Bienes de consumo: 37%
   Bienes de capital: 16%
   Maquila: 6%
   b)
   Importación de bienes de capital:
   2013: $\boxed{1{,}648.08}$
   2015: $\boxed{1{,}666.56}$
   Hubo mayor cantidad de dólares en 2015.

Año	2005		2015	
Edad	N° de personas	%	N° de personas	%
0 - 19	155,382	49	145,535	42
20 - 39	99,610	32	113,850	33
40 - 59	40,672	13	60,797	17
60 - 79	20,036	6	27,819	8
Total	315,700	100	348,001	100

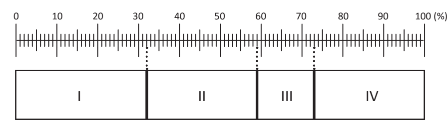


Hay un incremento en las categorías que superan los 39 años, mientras que hay una disminución en las categorías hasta 19 años; es decir, hay un envejecimiento de la población.

Página 153-154, Clase 2.1

1.
   2014:
   Metropolitana: 54%
   Central: 20%
   Occidental: 18%
   Oriental: 8%
   2015:
   Metropolitana: 57%
   Central: 18%
   Occidental: 17%
   Oriental: 8%
2.

Región	Quintales (QQ)	%
1	5 636 292	32
2	4 745 411	27
3	2 571 737	14
4	4 857 679	27
Total	17 811 119	100



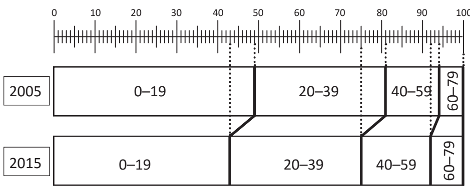
1. a) 2012: $\boxed{55\%}$
   2014: $\boxed{38\%}$
   b) 2012: $\boxed{34\%}$
   2014: $\boxed{43\%}$
   c) 2012: $\boxed{11\%}$
   2014: $\boxed{19\%}$
2. 2012:
   Libros digitales: 1 375
   Libros impresos: 850
   No tienen preferencia: 275
   2011:
   Libros digitales: 950
   Libros impresos: 1 075
   No tienen preferencia: 475

Los libros impresos resultan más cómodos de consultar, los libros digitales han perdido la novedad.

Página 155-157, Clase 2.2

1.

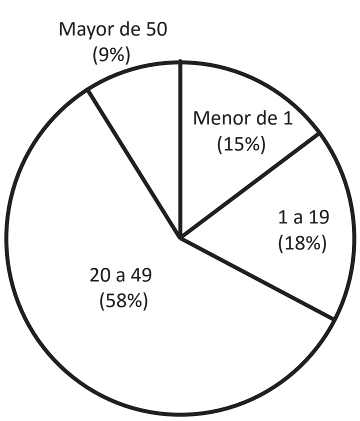
Año	2005		2015	
Edad	N° de personas	%	N° de personas	%
0 - 19	173 261	49	151 600	43
20 - 39	110 706	32	112 474	32
40 - 59	47 185	13	58 998	17
60 - 79	20 840	6	27 696	8
Total	351 992	100	350 768	100



2. a) Dr. Miguel Félix Charlaix: $\boxed{31\%}$
Constitución 1950: $\boxed{29\%}$
Dr. Humberto Romero: $\boxed{25\%}$
Dr. Mario Zamora Rivas: $\boxed{15\%}$
b) Dr. Miguel Félix Charlaix que tuvo 4 151.

1.

Grupos de edad (años)	N° de casos	%	Grados
Menor de 1	13	**15**	**54**
1 a 19	16	**18**	**65**
20 a 49	52	**58**	**209**
Mayor de 50	8	**9**	**32**
Total	89	**100**	**360**

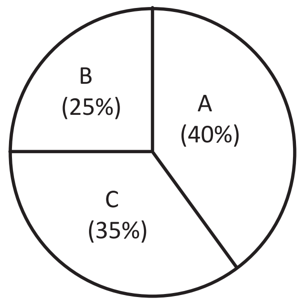


a) De 20 a 49 años, con 58%
b) Mayor de 50 años, con 9%

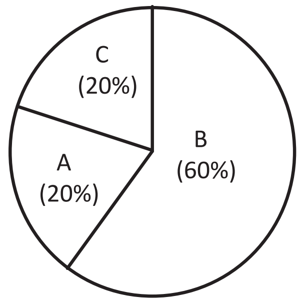
2. a)

	Producción (unidades)		Costo (dólares)		Horas de trabajo	
	%	Grados	%	Grados	%	Grados
A	**40**	**144**	**20**	**72**	**30**	**108**
B	**25**	**90**	**60**	**216**	**40**	**144**
C	**35**	**126**	**20**	**72**	**30**	**108**
Total	100	360	100	360	100	360

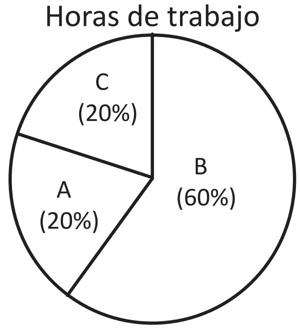
b) Producción



Costo



Horas de trabajo

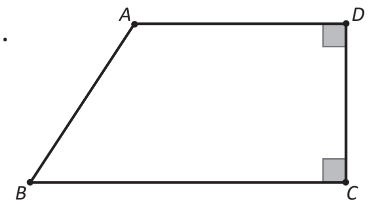


El empleado B es el que produce menos, cuando tiene un mayor costo para la empresa y número de horas de trabajo. Se podrían tomar muchas decisiones, pero dos ejemplos son:

- Aumentar las horas de trabajo para los empleados A y C así como su paga para que sean iguales a las de B.
- Disminuir las horas de trabajo y paga a B para que sus condiciones sean iguales a las de A y C.

Página 162, Clase 1.1

1.



Segmentos paralelos:
$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
Segmentos perpendiculares:
$\overline{AD} \perp \overline{DC}$ y $\overline{BC} \perp \overline{CD}$

2. a) Verdadera b) Falsa
c) Verdadera d) Falsa
e) Verdadera f) Falsa

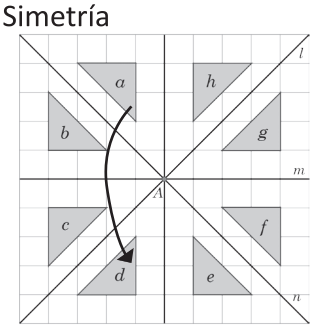
3. a) $\overline{JI}$, $\overline{KL}$ b) $\overline{EH}$ c) $\overline{JK}$, $\overline{IL}$

4. a) $\overline{LK}$, $\overline{JI}$, $\overline{HG}$ y $\overline{EF}$
b) $\overline{AM}$, $\overline{LK}$, $\overline{JI}$, $\overline{HG}$ y $\overline{EF}$

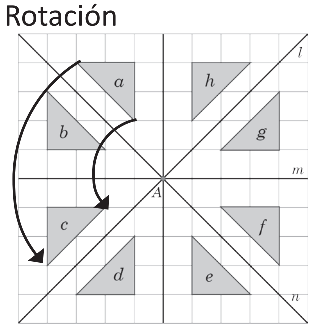
Página 163, Clase 1.2

Segmentos paralelos:
$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$
Segmentos perpendiculares:
$\overline{AC} \perp \overline{DB}$

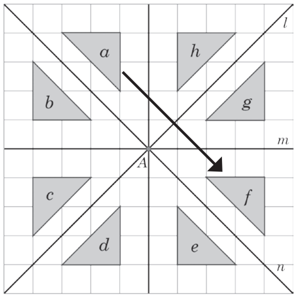
1. a) Simetría



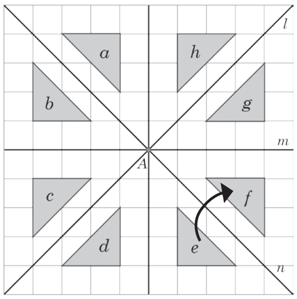
b) Rotación



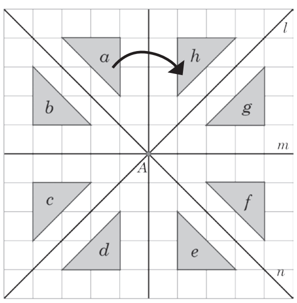
c) Traslación o simetría



d) Simetría



e) Simetría



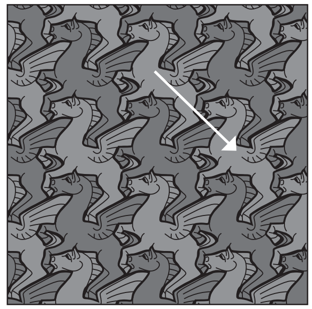
2. a) Rotación b) Rotación
 c) Traslación
3. a) La figura m b) Por la recta m

Página 164, Clase 1.3

1.

Simetría o rotación

2.

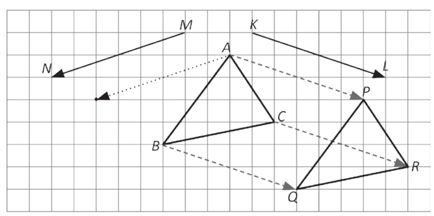


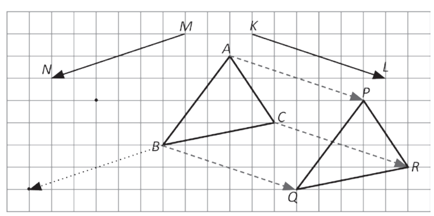
Traslación

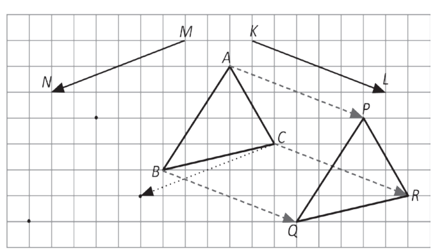
3.

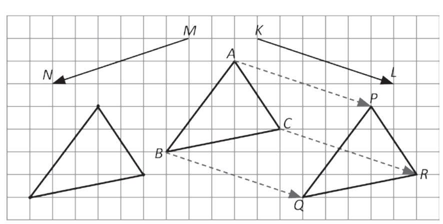
Rotación

1.

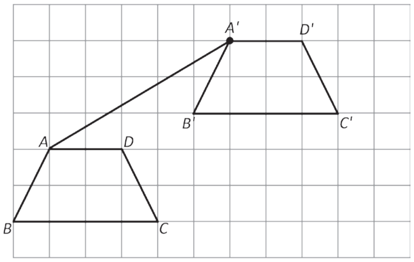




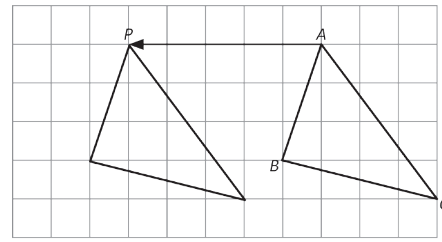




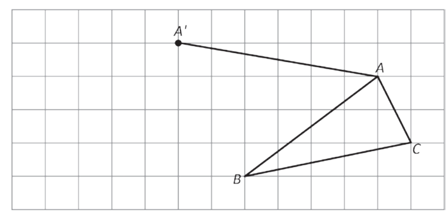
2.

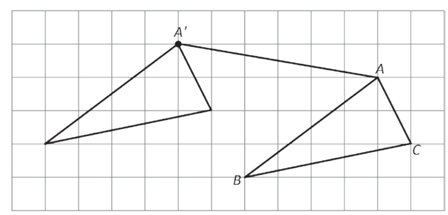


3.

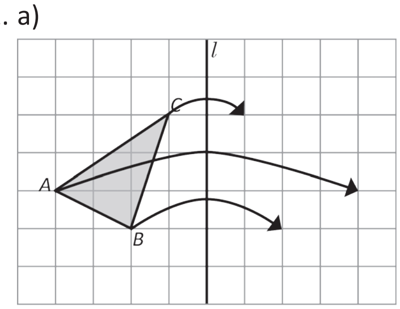


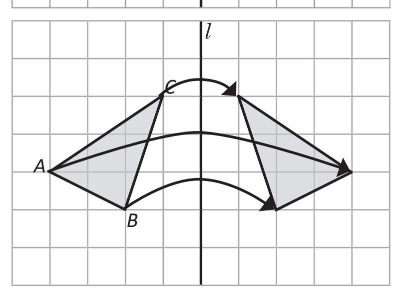
Página 165, Clase 1.4

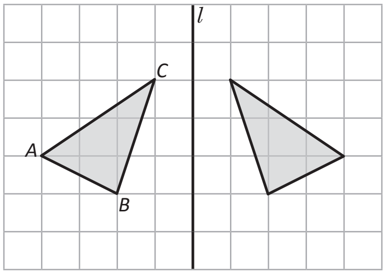




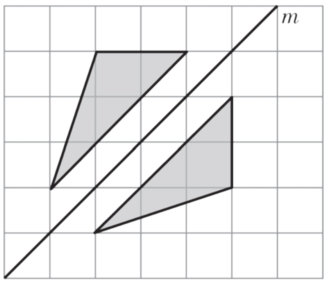
1. a)



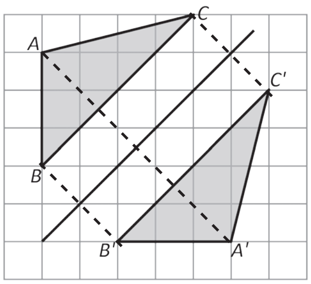




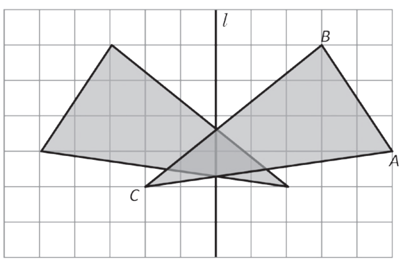
b)



2.

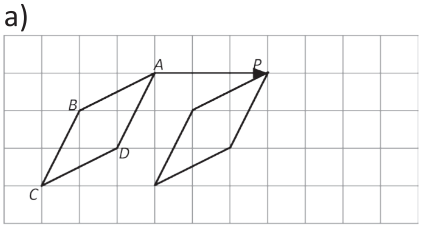


3.

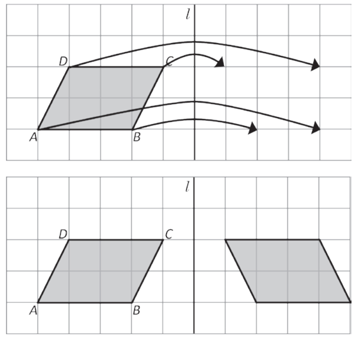


Página 166, Clase 1.5

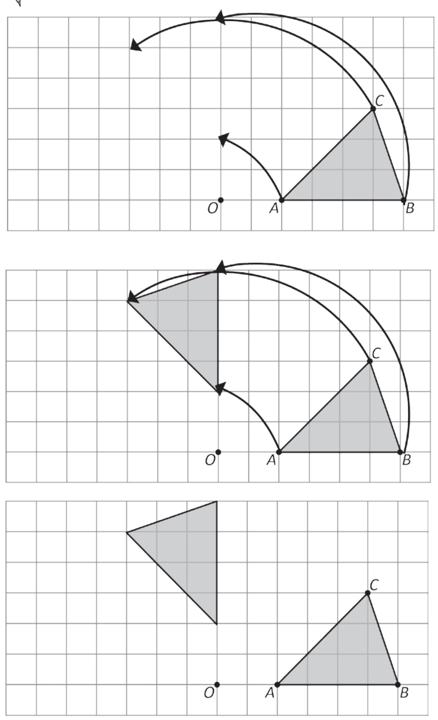
1. a)



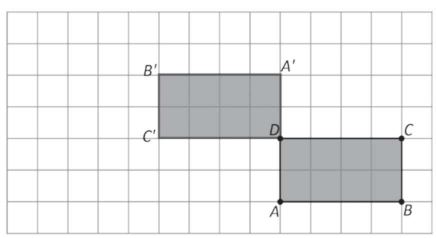
b)



1.



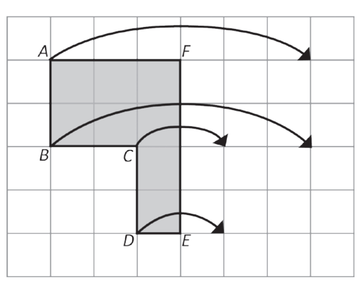
2.

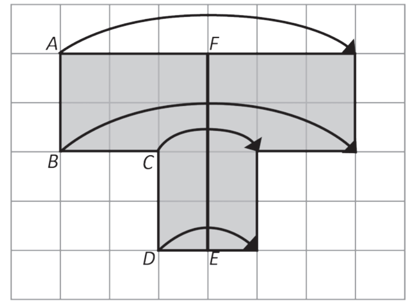


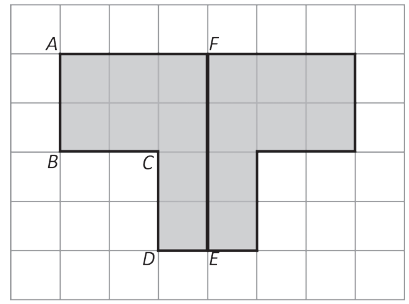
3. Una rotación de 270°

Página 167, Clase 1.6

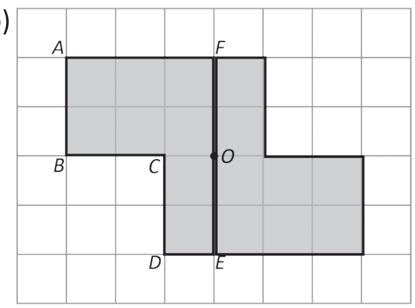
a)



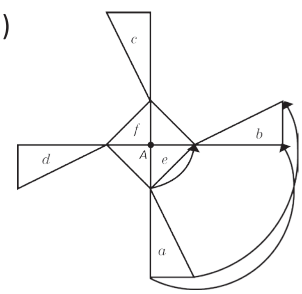




b)

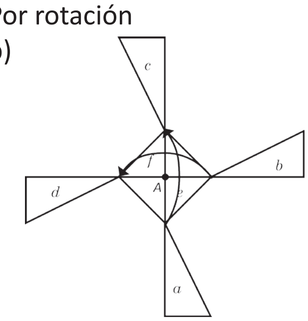


1. a)



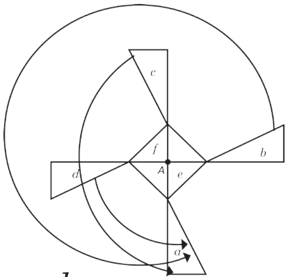
Por rotación

b)



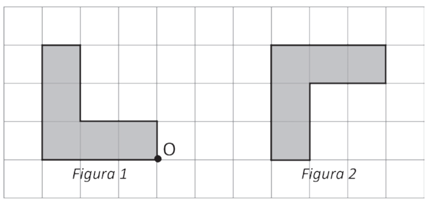
Por rotación o simetría

c)



b, c y d.

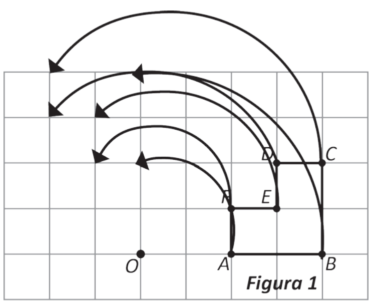
2. 1er movimiento:
   Rotar la figura 270° respecto al punto O que se señala.

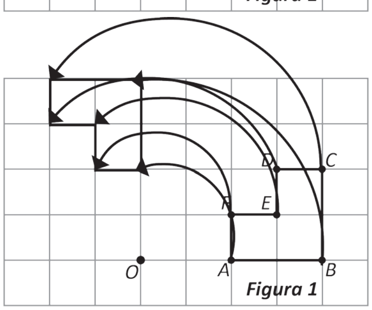


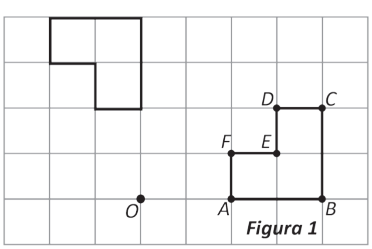
2do movimiento:
Trasladar la figura.
Se puede intercambiar el orden de los movimientos.

Página 168, Clase 2.1

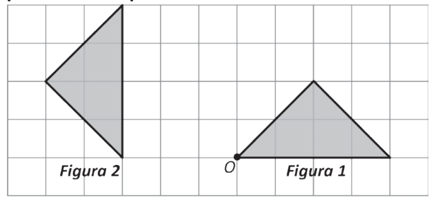
1.





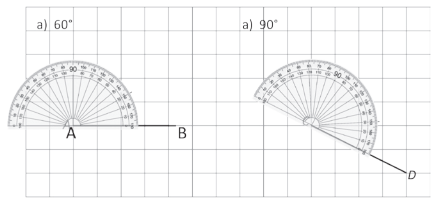


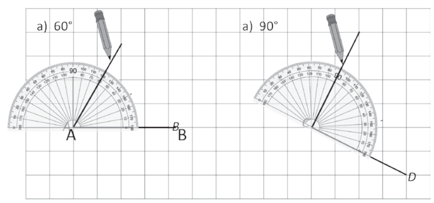
2. 1er movimiento:
   Rotar la figura 90° respecto al punto O que se señala.

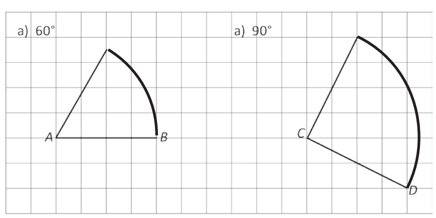


2do movimiento:
Trasladar la figura.
Se puede intercambiar el orden de los movimientos.

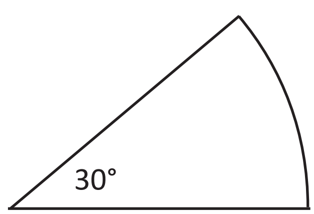
1.



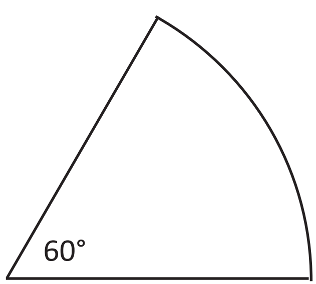




2. a)

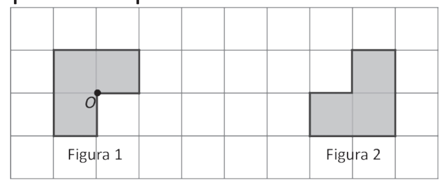


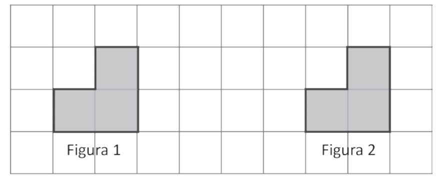
b)



Página 169, Clase 2.2

1. 1er movimiento:
   Rotar la figura 90° respecto al punto O que se señala.

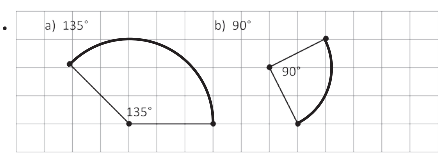




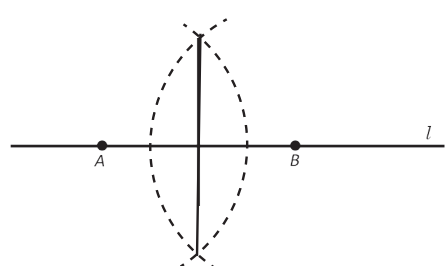
2do movimiento:
Trasladar la figura.

Se puede intercambiar el orden de los movimientos.

2.

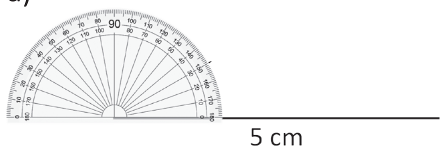


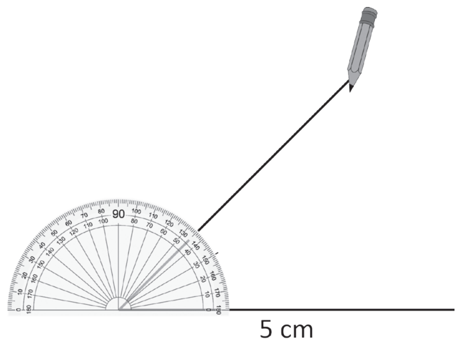
1. a) $\overline{AQ}$
   b) $\overline{AB} \perp \overline{PQ}$
   c) ∡APQ por simetría de la figura
   d) ∡ABQ por simetría de la figura
2. Un ejemplo de solución es:

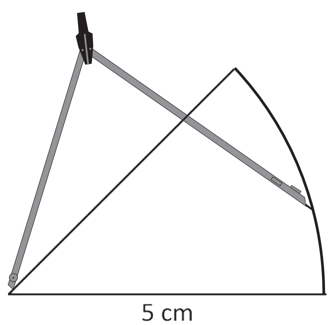


Página 170, Clase 2.3

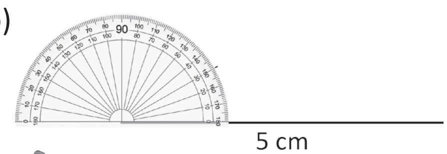
1. a)

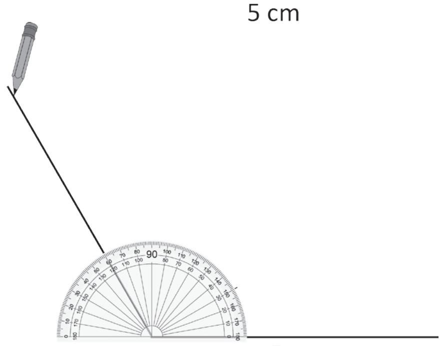


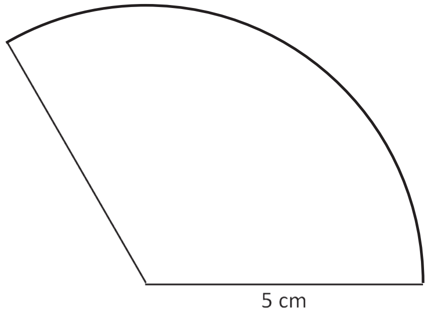




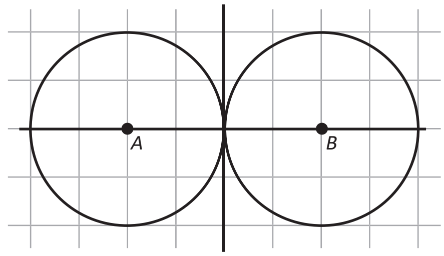
b)



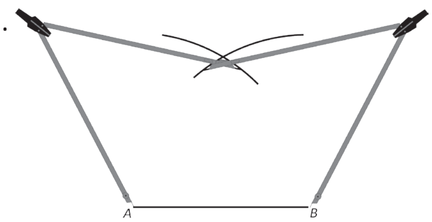


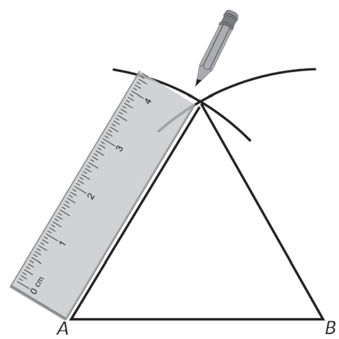


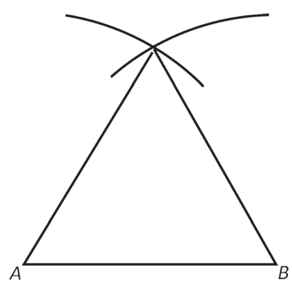
2.

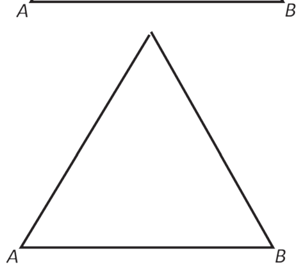


1 .

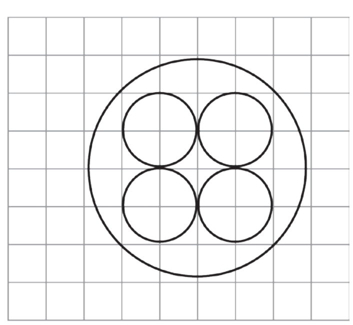






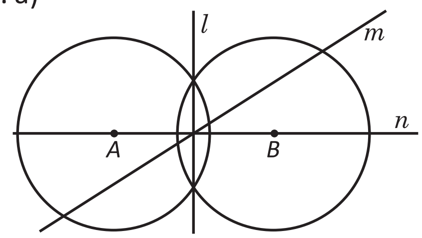


2.

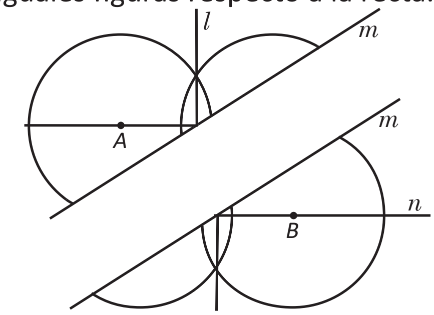


Página 171, Clase 2.4

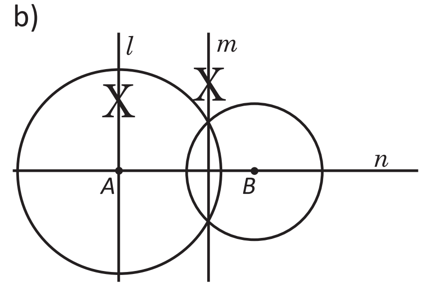
1. a)



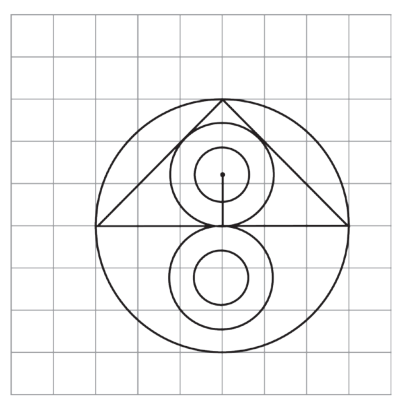
La recta m porque no se obtienen iguales figuras respecto a la recta.



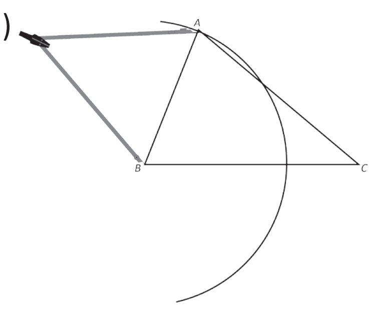
b)

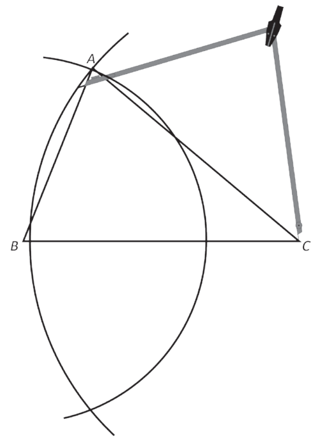


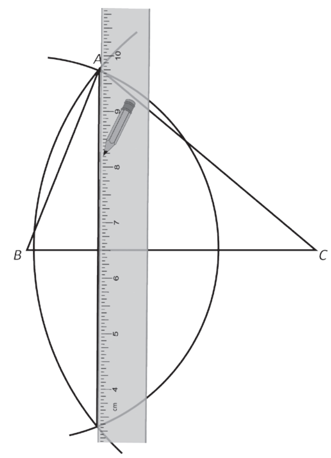
2.

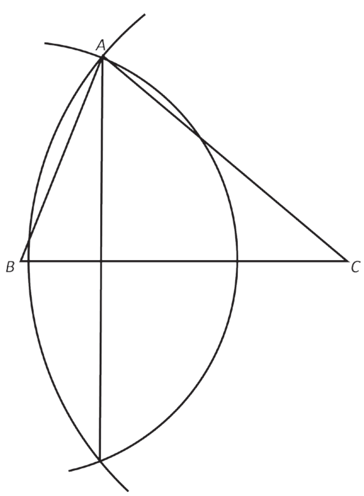


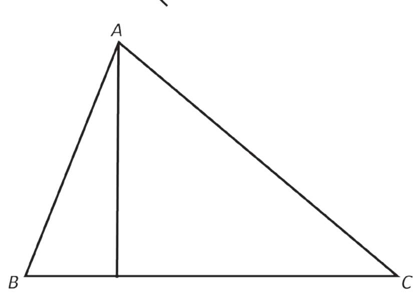
a)





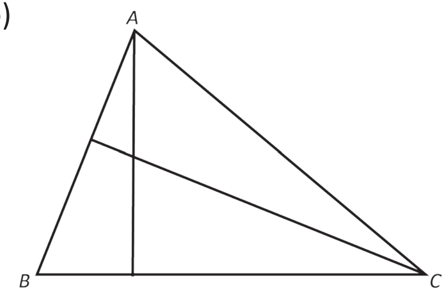






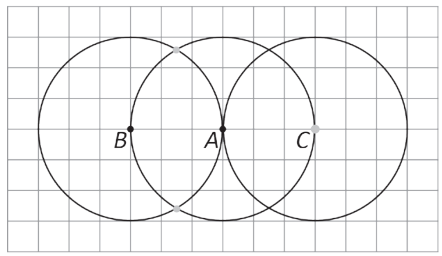
Con el mismo proceso anterior se traza la perpendicular de C a $\overline{BA}$.

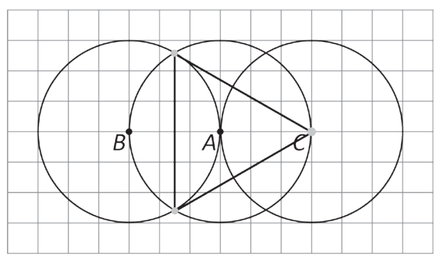
b)



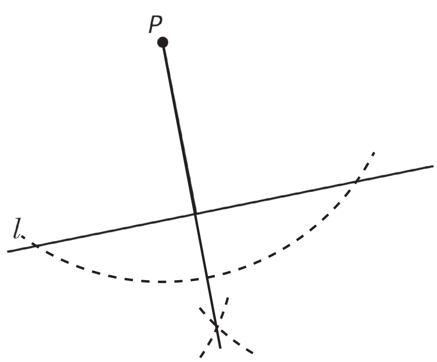
Página 172, Clase 2.5

1.

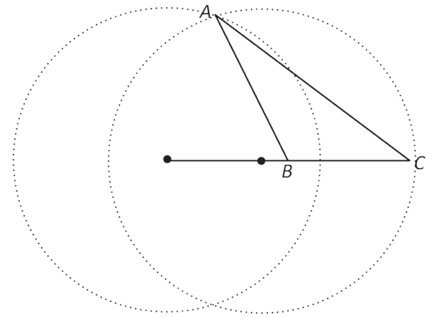


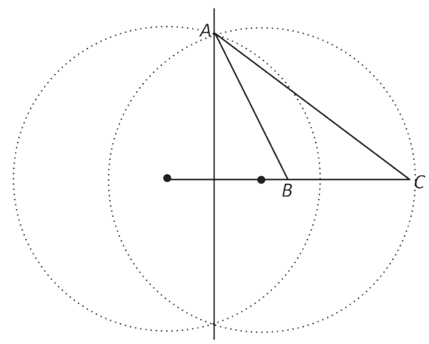


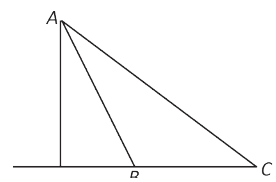
2.



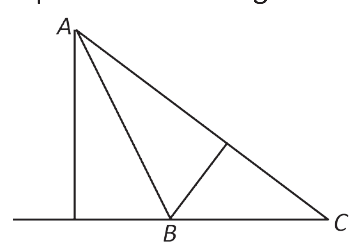
1. a)
   (1) Se trazan dos círculos cuyos centros estén sobre el lado BC o su prolongación y que pasen por A.
   (2) Se traza la recta que pasa por las intersecciones de las dos circunferencias.
   (3) Se extrae de la recta el segmento que va desde A hasta la prolongación del lado BC.



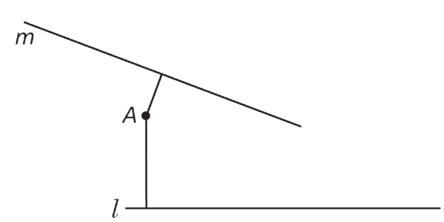




b) El proceso es análogo al de a).



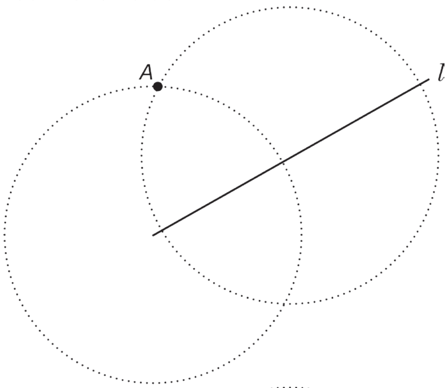
2. a)

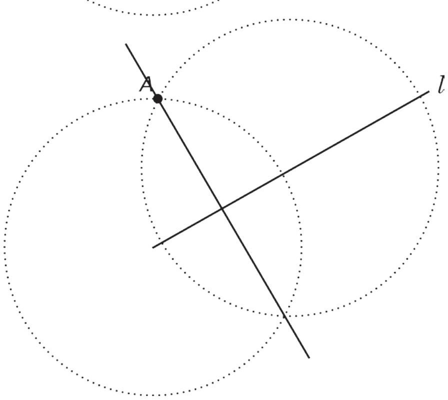


b) La recta m.

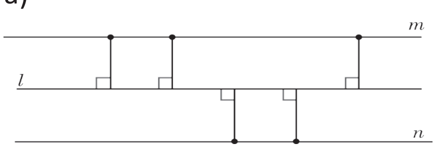
Página 173, Clase 2.6

1. (1) Se trazan dos círculos cuyos centros estén sobre la recta l y que pasen por A.
   (2) Se traza la recta que pasa por las intersecciones de las dos circunferencias.



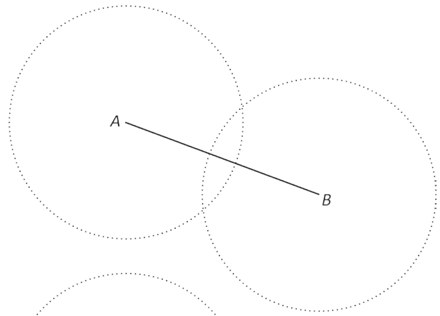


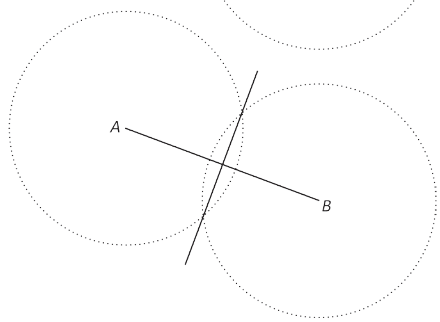
2. a)



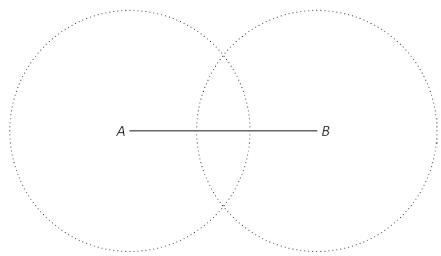
b) $m \parallel n$

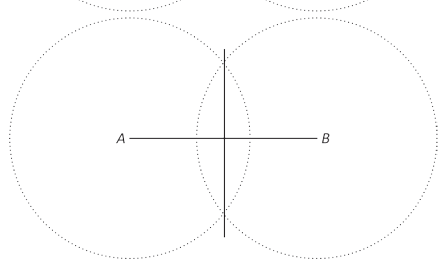
1. (1) Se trazan dos círculos de igual radio cuyos centros sean los extremos del segmento respectivamente.
   (2) Se traza la recta que pasa por las intersecciones de las dos circunferencias.

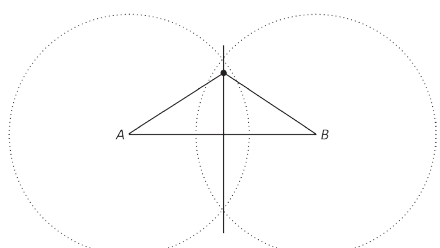


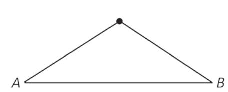


2.





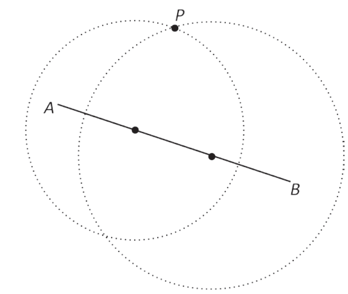


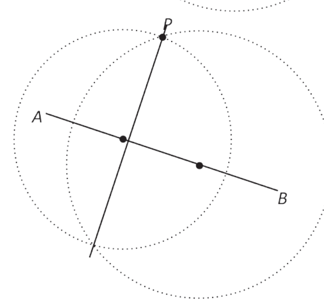


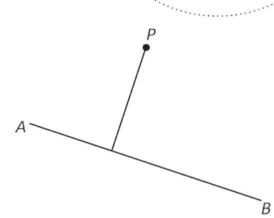
El triángulo es isósceles porque todo punto sobre la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del segmento.

Página 174, Clase 2.7

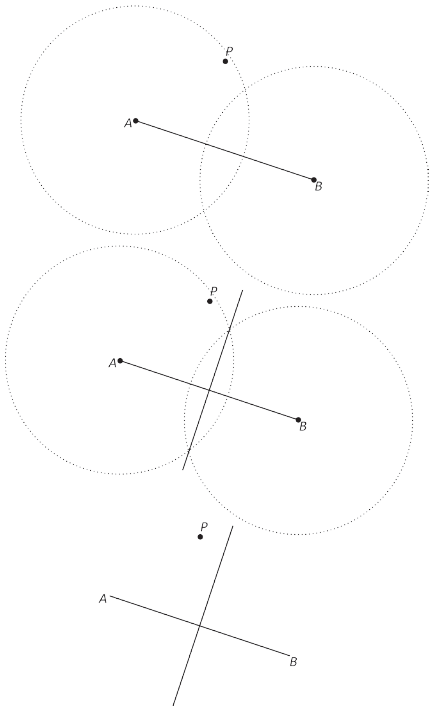
a) (1) Se trazan dos círculos cuyos centros estén sobre el $\overline{AB}$ y que pasen por P.
   (2) Se traza la recta que pasa por las intersecciones de las dos circunferencias.
   (3) Se extrae de la recta el segmento que va desde P hasta $\overline{AB}$.





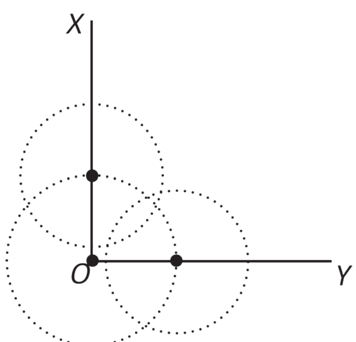


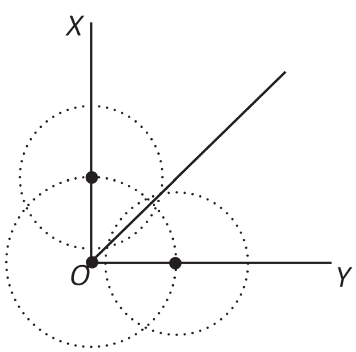
b) (1) Se trazan dos círculos de igual radio cuyos centros sean los extremos del segmento respectivamente y que pasen por A.
   (2) Se traza la recta que pasa por las intersecciones de las dos circunferencias.

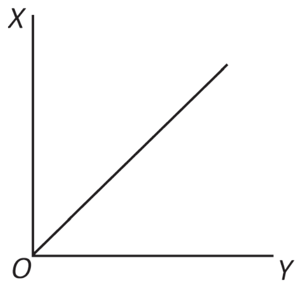


La mediatriz no necesariamente tiene que pasar por P.

1. a)

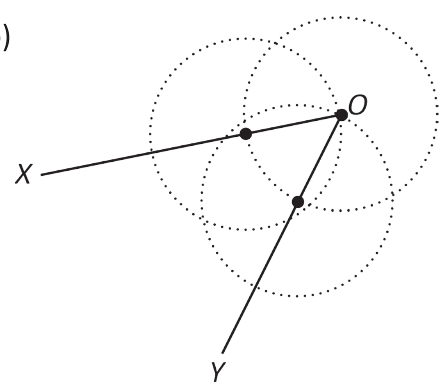


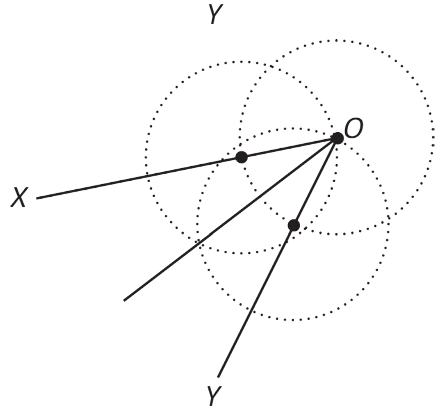


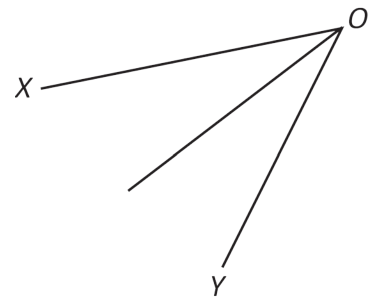


(1) Se traza un círculo con centro en O.
(2) Se trazan dos círculos de igual radio con centros en las intersecciones de la circunferencia de (1) con los lados del ángulo.
(3) Se traza la semirrecta desde O y que pase por las intersecciones de las dos circunferencias trazadas en (2). Esta semirrecta es la bisectriz.
b)
(1) Se trazan dos círculos cuyos centros estén sobre el lado BC o su prolongación y que pasen por A.
(2) Se traza la recta que pasa por las intersecciones de las dos circunferencias.

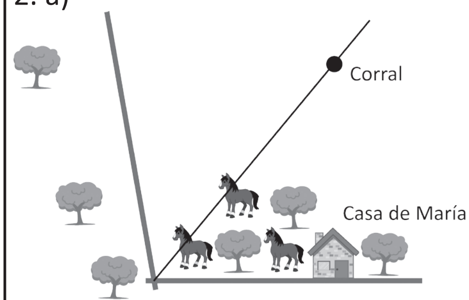
b)







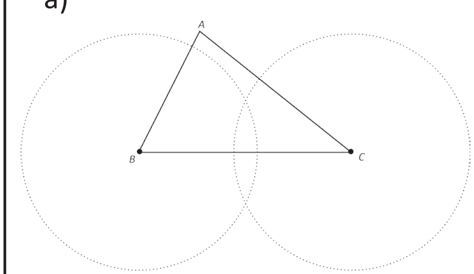
2. a)

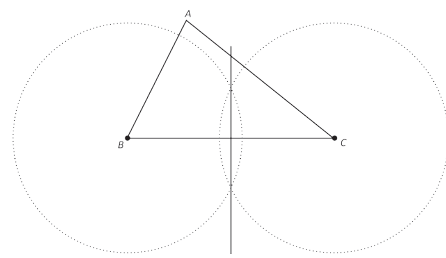


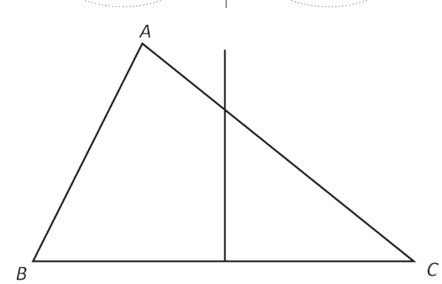
b)
Todo punto ubicado sobre la bisectriz está a igual distancia de los lados del ángulo. En este caso el corral está a igual distancia de las calles.

Página 175, Clase 2.8

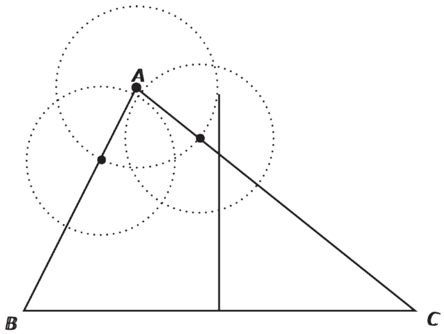
a)

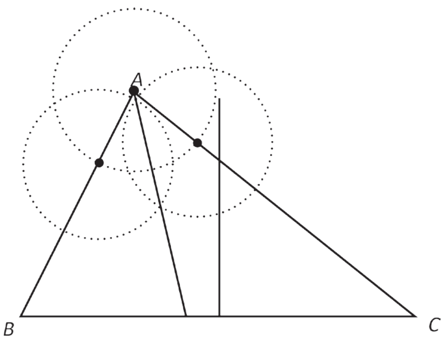


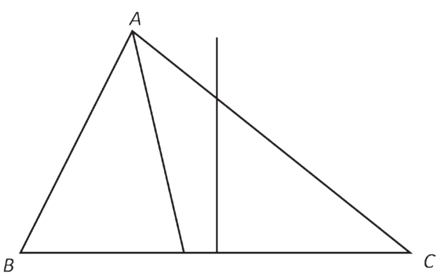




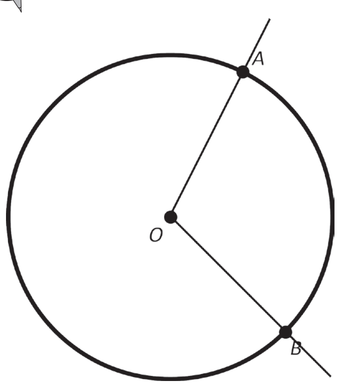
b)

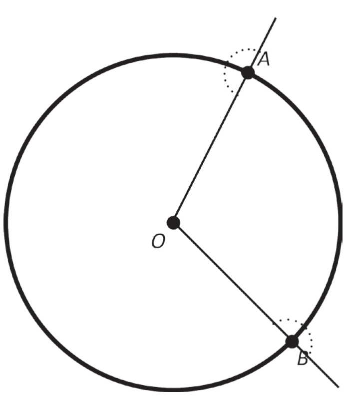


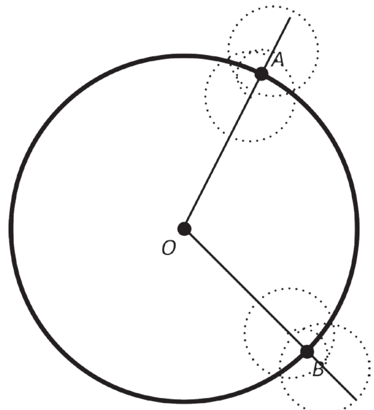


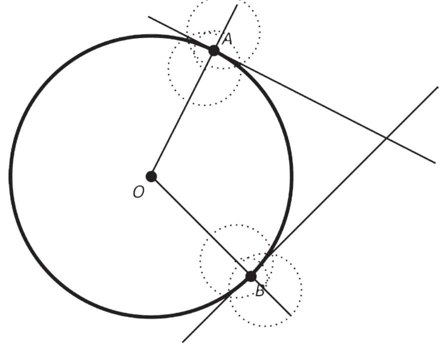


a)









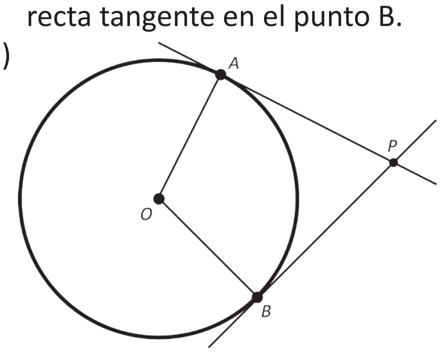
(1) Se traza la semirrecta de O y que pasa por A. Luego se traza la semirrecta de O y que pasa por B.

(2) Se trazan dos círculos cuyos centros sean los puntos de tangencia respectivamente.

(3) Para la circunferencia cuyo centro es A, se trazan dos circunferencias cuyos centros son las intersecciones de la circunferencia trazada en (2) y la semirrecta. El mismo proceso se realiza para la circunferencia cuyo centro es B.

(4) Trazar la recta tangente a la circunferencia en el punto A, trazando la recta que pasa por las intersecciones de las dos circunferencias hechas en (3). El mismo proceso se realiza para trazar la recta tangente en el punto B.

b)



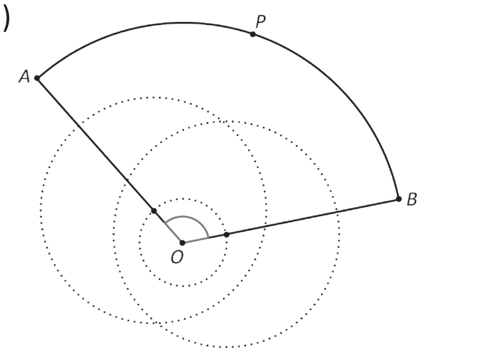
c) $\overline{PA} = \overline{PB}$, $\overline{OA} = \overline{OB}$

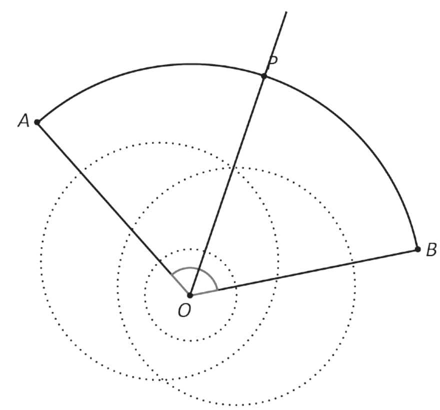
Se concluye $\overline{OA} = \overline{OB}$ porque son radios. Se concluye que $\overline{PA} = \overline{PB}$ midiendo con la regla o considerando que $\overline{OP}$ es un eje de simetría del cuadrilátero OAPB.

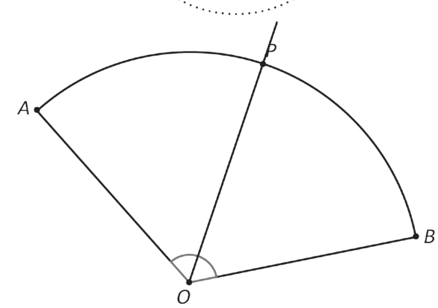
Página 176, Clase 2.9

R

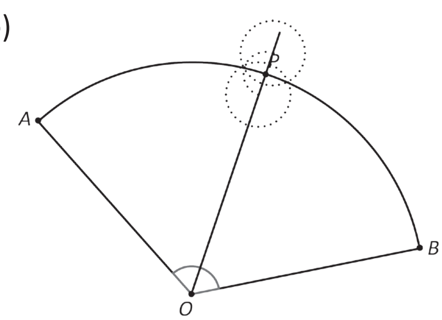
a)

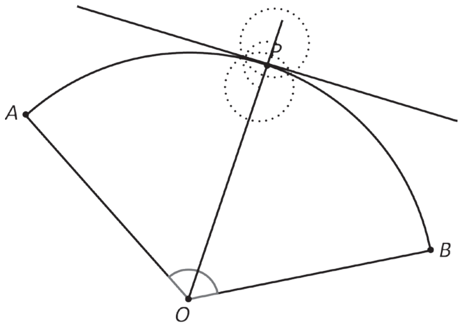


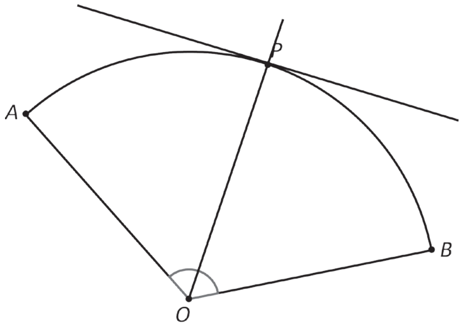




b)







c) Un ángulo recto. Esto se puede concluir utilizando el transportador.

1. Datos del problema: $a = 120°$ y $r = 3$ cm. La longitud del arco del sector circular es:
$$\begin{aligned} l &= 2\pi \times 3 \times \tfrac{120}{360} \\ &= 2\pi \times \cancel{3}^{1} \times \tfrac{1}{\cancel{3}_{1}} \\ &= 2\pi \times 1 \times 1 \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

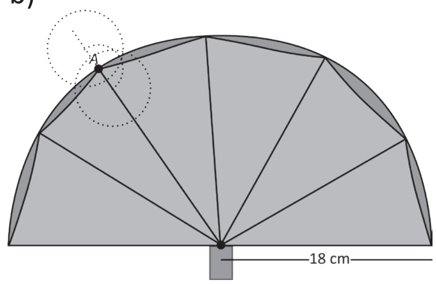
2. Datos del problema: $a = 60°$ y $r = 9$ cm. La longitud del arco del sector circular es:
$$\begin{aligned} l_1 &= 2\pi \times 9 \times \tfrac{60}{360} \\ &= 2\pi \times \cancel{9}^{3} \times \tfrac{1}{\cancel{6}_{2}} \\ &= 3\pi \text{ cm} \end{aligned}$$
Datos del problema: $a = 30°$ y $r = 6$ cm. El área del sector circular es:
$$\begin{aligned} l_2 &= 2\pi \times 6 \times \tfrac{30}{360} \\ &= 2\pi \times \cancel{6}^{1} \times \tfrac{1}{\cancel{12}_{2}} \\ &= \pi \text{ cm} \end{aligned}$$
Longitud total recorrida por el péndulo: $3\pi + \pi = 4\pi$ cm.

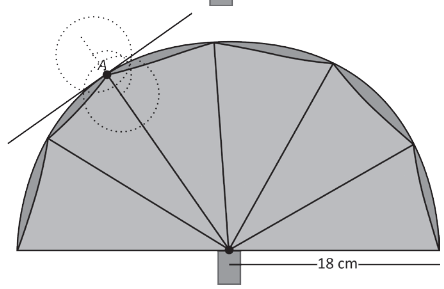
Página 177, Clase 2.10

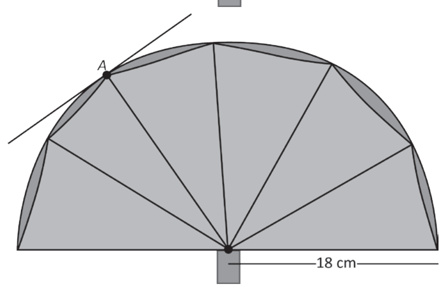
R

a)
$$\begin{aligned} l &= 2\pi \times 18 \times \tfrac{180}{360} \\ &= \cancel{2}^{1}\pi \times 18 \times \tfrac{1}{\cancel{2}_{1}} \\ &= \pi \times 18 \times 1 \\ &= 18\pi \text{ cm} \end{aligned}$$

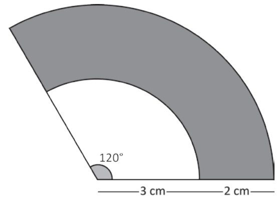
b)







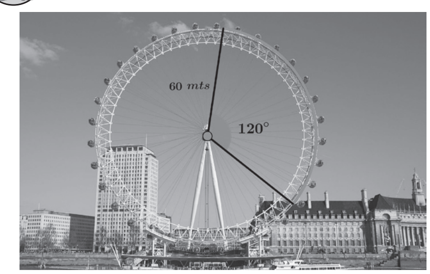
1. Datos del problema: $a = 60°$ y $r = 6$ cm. El área del sector circular es:
$$\begin{aligned} S &= \pi \times 6^2 \times \tfrac{60}{360} \\ &= \pi \times 6^2 \times \tfrac{1}{6} \\ &= 6\pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$
2. Para realizar este problema se debe calcular el área del sector circular de mayor radio y luego restar el área del sector con menor radio.



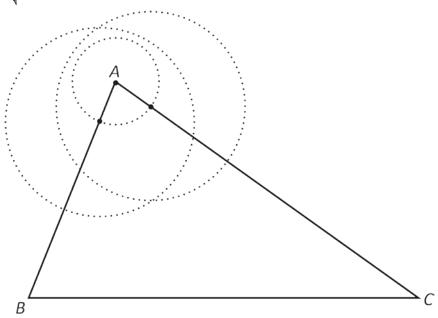
Área del sector circular más grande.
Datos: $a = 120°$ y $r = 3 + 2 = 5$
El área del sector circular es:
$$\begin{aligned} S &= \pi \times 5^2 \times \tfrac{120}{360} \\ &= \pi \times 5^2 \times \tfrac{1}{3} \\ &= \tfrac{25}{3}\pi \end{aligned}$$
Área del sector circular más pequeño.
Datos: $a = 120°$ y $r = 3$
El área del sector circular es:
$$\begin{aligned} S &= \pi \times 3^2 \times \tfrac{120}{360} \\ &= \pi \times 3^2 \times \tfrac{1}{3} \\ &= 3\pi \end{aligned}$$
El área sombreada es:
$$\tfrac{25}{3}\pi - 3\pi = \tfrac{16}{3}\pi \text{ cm}^2$$

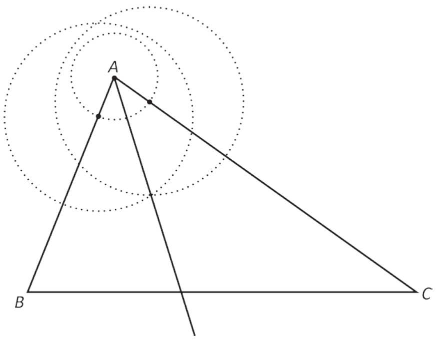
Página 178, Clase 2.11

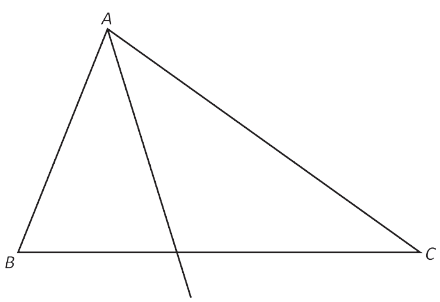
R

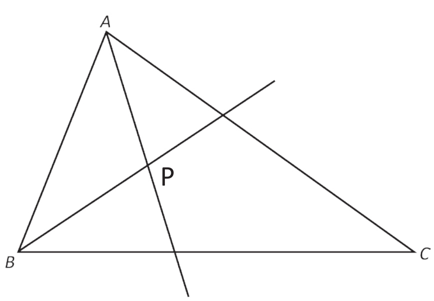


a) Longitud de arco del sector.
Datos del problema:
$a = 120°$ y $r = 60$ mts.
El área del sector circular es:
$$\begin{aligned} l &= 2\pi \times 60 \times \tfrac{120}{360} \\ &= 2\pi \times \cancel{60}^{20} \times \tfrac{1}{\cancel{3}} \\ &= 2\pi \times 20 \times 1 \\ &= 40\pi \text{ metros} \end{aligned}$$
b) Área del sector
Datos del problema:
$a = 120°$ y $r = 60$ mts.
El área del sector circular es:
$$\begin{aligned} l &= \pi \times 60^2 \times \tfrac{120}{360} \\ &= \pi \times 60^2 \times \tfrac{1}{3} \\ &= \pi \times 1\,200 \\ &= 1\,200\pi \text{ m}^2 \end{aligned}$$



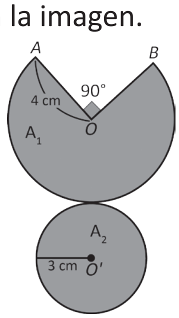






Página 179, Clase 3.1

1. Si se define A_1 y A_2 como se presenta en la imagen.



El área buscada es:

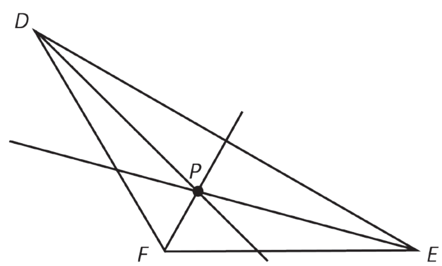
$$A_1 + A_2$$

$$A_1 = \pi \times 4^2 \times \frac{270}{360}$$
$$= \pi \times 4^2 \times \frac{3}{4}$$
$$= 12\pi \text{ cm}^2$$

$$A_2 = \pi \times 3^2$$
$$= \pi \times 9$$
$$= 9\pi \text{ cm}^2$$

$$A_1 + A_2 = 12\pi + 9\pi$$
$$= 21\pi \text{ cm}^2$$

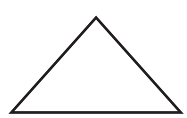
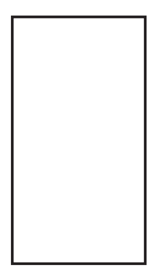
2.



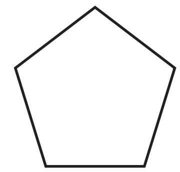
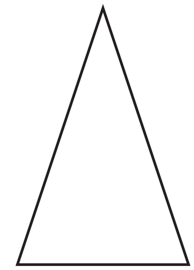
1.

Poliedros	Cuerpos redondos
c) e) f)	a) b) d)

2. a)

Base	Cara lateral
	

b)

Base	Cara lateral
	

3. a) y b)

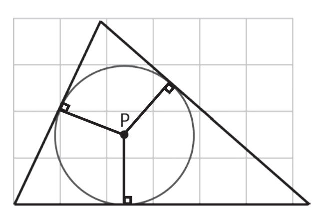
Similitudes	Diferencias
Ambos tienen cúspide.	a) es un poliedro y b) es un cuerpo redondo. La base de a) es un polígono. La de b) es un círculo.

c) y d)

Similitudes	Diferencias
Ambos tienen dos bases.	a) es un poliedro y b) es un cuerpo redondo. La base de a) es un polígono. La de b) es un círculo.

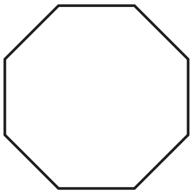
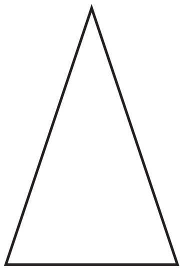
Página 181, Clase 3.2

1.



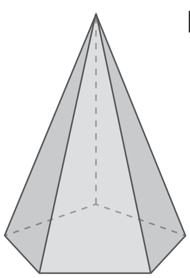
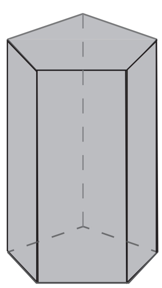
El incentro del triángulo representa el centro de una circunferencia circunscrita al triángulo, es decir, tangente a los lados del triángulo.

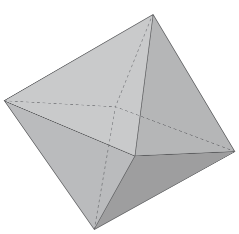
2.

Base	Cara lateral
	

Literal	①Número de caras	②Forma de las caras	③Nombre del poliedro regular
e)	12	Pentágono regular	Dodecaedro
d)	4	Triángulo equilátero	Tetraedro
b)	20	Triángulo equilátero	Icosaedro
a)	6	Cuadrado	Cubo
c)	8	Triángulo equilátero	Octaedro

Página 182-183, Clase 3.3

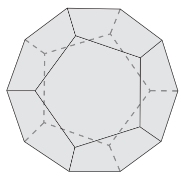
1. a)  b) 

2. 

1. l, m, o y p, porque cada carretera está a un nivel de altura diferente a las otras y tienen diferente dirección.

2. a) $\overline{HF}$
   b) $\overline{EF}$, $\overline{DC}$, y $\overline{HG}$
   c) $\overline{BF}$, $\overline{DH}$, $\overline{DC}$, $\overline{EF}$, $\overline{BC}$, $\overline{EH}$ y $\overline{HF}$
   d) $\overline{AE}$, $\overline{DH}$, $\overline{AG}$, $\overline{EG}$, $\overline{HF}$, $\overline{EF}$ y $\overline{HG}$
3. a) $p \| o$, $m \| n$
   b) m y q, p y n, m y o, m y q, m y l

Página 184, Clase 3.4

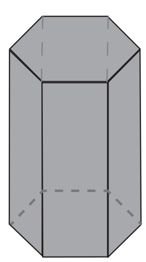
1.  Dodecaedro.

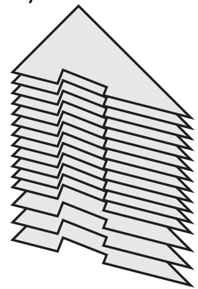
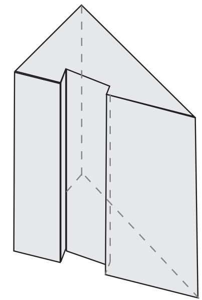
2. a) $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{ED}$, $\overline{BC}$, $\overline{EB}$ y $\overline{DC}$
   b) $\overline{ED}$
   c) $\overline{AE}$ y $\overline{AD}$

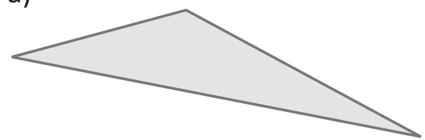
a) $\overline{IJ}$
b) $\overline{FH}$, y $\overline{IJ}$
c) $\overline{EG}$, $\overline{FG}$ y $\overline{FE}$
d) $\overline{IJ}$ porque es un segmento que une el vértice (o cúspide)y la base y es perpendicular a la base.
e) 5 cm, porque $\overline{BF}$ tiene la misma medida que la altura de la pirámide y prisma rectangular.

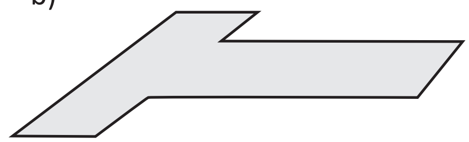
Página 185, Clase 3.5

1. a) $\overline{AE}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{BE}$ y $\overline{AD}$
   b) $\overline{ED}$
   c) $\overline{AE}$ y $\overline{AD}$
2. La altura del estante.

1. a)  

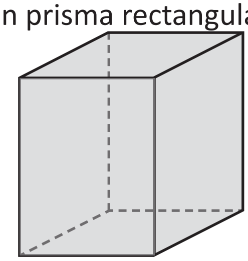
b)  

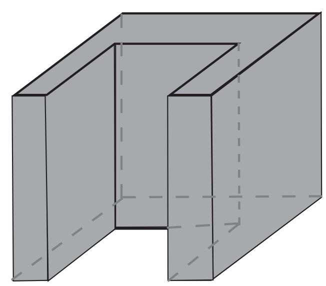
2. a) 

b) 

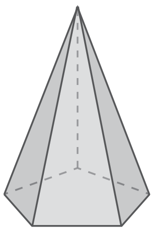
Página 186, Clase 3.6

1. a) Hexágono regular
   b) Altura
2. a) Un prisma rectangular

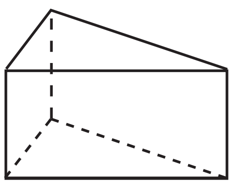


b) 

a)
Observando las imágenes, la perspectiva lateral y frontal son triángulos isósceles. Además, la perspectiva sobre el piso es un pentágono regular. Las líneas punteadas unen los vértices que coinciden. Por tanto, la figura es una pirámide.

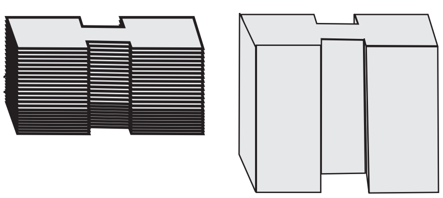


b)

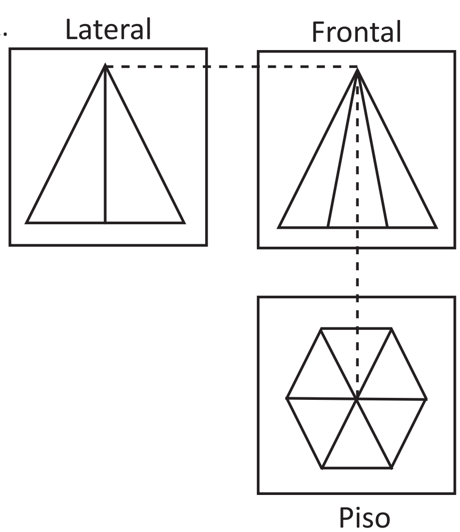


Página 187-188, Clase 3.7

1.

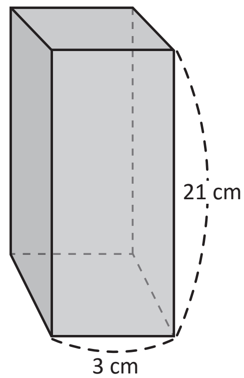


2.



1. $\mathbf{A_T = A_l + A_b}$
$\mathbf{A_l} = 10 \times 5 + 10 \times 13 + 10 \times 12$
$= 50 + 130 + 120$
$= 300$
$\mathbf{A_b} = (12 \times 5) \div 2 \times 2$
$= 30$
$\mathbf{A_T} = 300 + 30 = 330$ cm^2

2.
$\mathbf{A_T = A_l + A_b}$
$\mathbf{A_l} = 3 \times 21 \times 4$
$= 252$
$\mathbf{A_b} = 3 \times 3 \times 2$
$= 18$

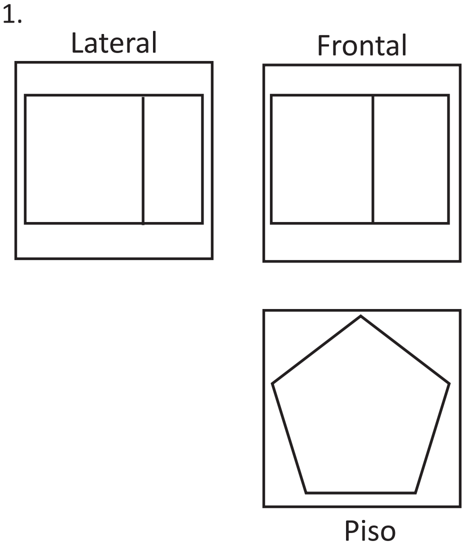


$\mathbf{A_T} = 252 + 18 = 270$ cm^2

3. b)

Página 189-190, Clase 3.8

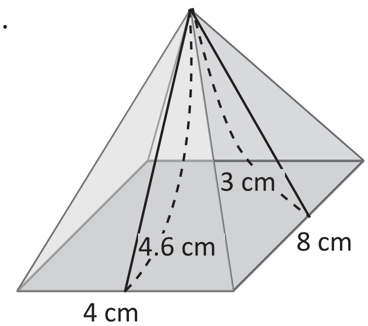
1.



2. $\mathbf{A_T} = 140 + 50 = 190$ cm^2

1. Área de un triángulo:
$6 \times 8 \div 2 = 48 \div 2 = 24$ cm^2
Área lateral:
$A_l = 24 \times 4 = 96$ cm^2
Área de la base:
$A_b = 6 \times 6 = 36$ cm^2
Área total:
$A_T = A_l + A_b = 96 + 36 = 132$ cm^2

2.



Área lateral:
$A_l = 42.4$ cm^2
Área de la base:
$A_b = 32$ cm^2
Área total:
$A_T = A_l + A_b = 74.4$ cm^2

3. d)

Página 191, Clase 3.9

1. $\mathbf{A_T = A_l + A_b}$
$\mathbf{A_l} = 3 \times 3 \times 2 + 9 \times 3 \times 2$
$= 18 + 54$
$= 72$
$\mathbf{A_b} = 3 \times 9 \times 2$
$= 54$
$\mathbf{A_T} = \mathbf{A_l} + \mathbf{A_b} = 72 + 54 = 126$

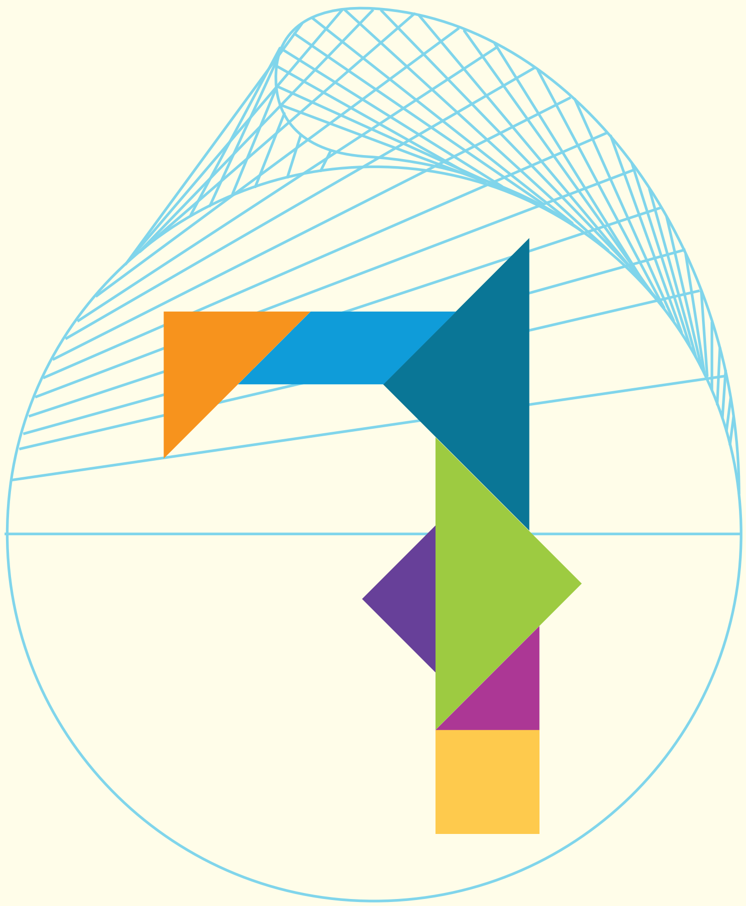
2. $\mathbf{A_T} = \mathbf{A_l} + \mathbf{A_b} = 64 + 16 = 80$

1. Área de las bases:
$A_b = \pi \times 3^2 \times 2$
$= 18\pi\ cm^2$
El perímetro de la base:
$2\pi \times 3 = 6\pi$ cm
$A_l = 6\pi \times 6$
$= 36\pi\ cm^2$
Área total:
$A_T = 18\pi + 36\pi$
$= 54\pi\ cm^2$
2. La estrategia de solución básicamente consiste en:
(1) Determinar el área total de cilindro completo.
(2) Dividir entre 2.
(3) Sumar el área del rectángulo que se forma por el corte.
(1)
Área de las bases d:
$A_b = \pi \times 4^2 \times 2$
$= 32\pi\ cm^2$
El perímetro de la base:
$2\pi \times 4 = 8\pi$ cm
$A_l = 8\pi \times 7$
$= 56\pi\ cm^2$
Área total:
$A_T = 32\pi + 56\pi$
$= 88\pi\ cm^2$
(2)
$88\pi \div 2 = 44\pi$
(3)
$44\pi + 8 \times 7 = 44\pi + 56$

Por tanto, el área total del cilindro cortado es: $44\pi + 56\ cm^2$.

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

GOBIERNO
DE EL SALVADOR



EL SALVADOR
Grande como su gente

JICA